

# Mesoskopischer Ansatz zur Festigkeitsberechnung von Brems Scheiben

Zur Erlangung des akademischen Grades  
**Doktor der Ingenieurwissenschaften**  
der Fakultät für Maschinenbau  
Karlsruhe Institut für Technologie (KIT)

genehmigte  
**Dissertation**  
von

**Dipl.-Ing. (FH) Stefan Schmid**

Tag der mündlichen Prüfung:	30. Mai 2016
Erstgutachter:	Prof. Dr. rer. nat. Britta Nestler
Zweitgutachter:	Prof. Dr.-Ing. Rainer Schwab



# Kurzfassung

In dieser Arbeit wird der in Abbildung 1 dargestellte Multiskalenansatz zur Berechnung der thermischen und mechanischen Belastung von Bremscheiben umgesetzt. Zur Simulation einer Bremscheibe sind zunächst eine Vielzahl an physikalischen und mechanischen Materialeigenschaften zu bestimmen. Diese werden klassischer Weise über experimentelle Versuche, wie beispielsweise Zug- und Druckversuche, bestimmt. In dieser Arbeit wird gezeigt, wie diese alternativ durch Simulationen eines Materialgefüges bestimmt werden können. Hierzu wird zunächst eine genaue Analyse der Struktur des Materials über Schlifffbilder durchgeführt. Die Analyse wird mittels eines dafür entwickelten Analysetools durchgeführt und mit den gewonnenen Informationen ein virtuelles Gefüge erstellt. Dieses Gefüge wird durch einen speziell entwickelten Algorithmus erstellt. Qualitative und quantitative Vergleiche mit realen Gefügen führen zu sehr guten Ergebnissen.

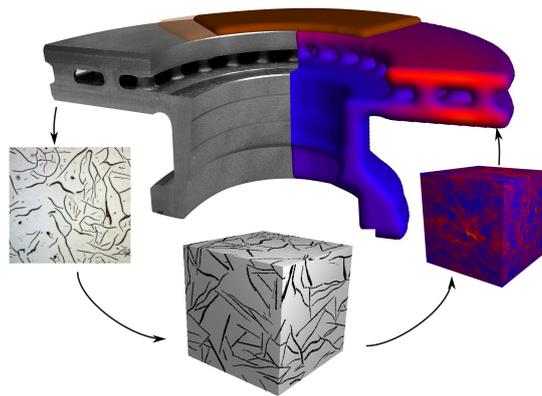


Abbildung 1: Darstellung der Idee hinter der Multiskalensimulation. Informationen des Gefüges der Bremscheibe werden als Eingabeparameter für die Simulationen auf der mesoskopischen Größenskala verwendet. Über diese Simulationen werden die Eigenschaften des Materials bestimmt, welche als Eingabeparameter für die makroskopische Simulation dienen.

Durch die Modellierung der charakteristischen Eigenschaften der einzelnen Gefügebestandteile und der Zuweisung von Materialparametern werden virtuelle Versuche an dem Gefüge durchgeführt. Es zeigt sich dabei, dass vor allem das belastungsabhängige Verhalten des Graphits einen starken Einfluss auf die Eigenschaften des Materials hat. So ergibt sich für das Gusseisen eine Zug-Druck-Abhängigkeit. Mittels einer Homogenisierung wird mit diesen Ergebnissen ein makroskopisches Materialmodell implementiert, welches zur Bestimmung der Belastung der Bremscheibe während eines Bremsvorgangs verwendet wird. Mit diesem Modell

wird das Verformungsverhalten, die Temperatur- und Spannungsverteilung der Bremsscheibe analysiert. Die Simulationen verdeutlichen dabei den Einfluss der Zug-Druck-Abhängigkeit des Materials auf die Spannungsentwicklung und damit die Notwendigkeit einer Einbeziehung dieses Materialverhaltens.

# Danksagung

Zunächst möchte ich mich bei Frau Prof. Dr. rer. nat. Britta Nestler dafür bedanken, dass sie mir die Möglichkeit gegeben hat diese Arbeit an ihrem Institut durchzuführen und mich dabei immer bestens betreut hat und hilfreiche Ratschläge geben hat. Herrn Prof. Dr.-Ing. Rainer Schwab möchte ich für die Übernahme der Zweitkorrektur sowie für die Zurverfügungstellung seiner Laboreinrichtung und Expertise danken.

Ein weiterer Dank gilt der Daimler AG für die Förderung dieser Arbeit. Ganz besonders möchte ich mich dabei bei Herrn Dr. Niethammer, Herrn Reiner sowie Herrn Wilke für die hilfreichen Diskussionen im Zuge der Arbeitsgespräche und die sehr gute Zusammenarbeit bedanken.

Meinen Kollegen sowie den von mir betreuten Studenten danke ich für die sehr angenehme Zeit am Institut und für die hilfreichen und interessanten Gespräche und Diskussionen.

Ein großer Dank gilt zudem meinen Freunden, die mich über den Zeitraum dieser Arbeit begleitet haben und mir dadurch eine große Stütze waren.

Zu guter Letzt möchte ich meiner Familie danken, die in der nicht immer einfachen Zeit stets für mich da waren. Für diese großartige Unterstützung meiner Mutter, meines Vaters und meiner beiden Brüder möchte ich mich daher besonders bedanken.



# Inhaltsverzeichnis

<b>Verzeichnis der Symbole</b>	<b>xi</b>
<b>1 Motivation</b>	<b>1</b>
<b>2 Übersicht über das Bauteil Bremsscheibe</b>	<b>3</b>
2.1 Geschichtliche Entwicklung der Bremse . . . . .	3
2.2 Aufbau der Bremsscheibe . . . . .	5
2.3 Belastung der Bremsscheibe . . . . .	7
2.4 Schirmung der Bremsscheibe . . . . .	9
2.5 Hotspots . . . . .	11
2.5.1 Asperity Hotspots . . . . .	12
2.5.2 Focal Hotspots . . . . .	12
2.5.3 Distortional Hotspots . . . . .	13
2.5.4 Regional Hotspots . . . . .	13
2.6 Rissbildung auf der Reibfläche . . . . .	13
2.7 Bremsscheibenmaterial . . . . .	14
<b>3 Übersicht der Eigenschaften des Werkstoffs Gusseisen</b>	<b>17</b>
3.1 Erstarrung und Mikrostruktur . . . . .	17
3.2 Mechanische und thermische Eigenschaften von Gusseisen . . . . .	22
3.2.1 Graphit . . . . .	22
3.2.2 Perlitische Matrix . . . . .	25
3.2.3 Elastizitätsmodul von Gusseisen mit Lamellengraphit . . . . .	30
3.2.4 Festigkeitseigenschaften und Rissbildung von Gusseisen mit Lamellen- graphit . . . . .	32
3.2.5 Physikalische Eigenschaften von Gusseisen mit Lamellengraphit . . . . .	34
<b>4 Metallographische Mikrostrukturanalyse und experimentell ermittelte Eigenschaften</b>	<b>37</b>
4.1 Schliffbilder . . . . .	37
4.2 Automatisierte Analyse der Gefüge von Gusseisen mit Lamellengraphit . . . . .	40
4.2.1 Vorbereitung des Schliffbildes . . . . .	40
4.2.2 Skelettierung/Verdünnung . . . . .	41
4.2.3 Längster Weg . . . . .	41
4.2.4 Graphitanteil und Lamellendicke . . . . .	43
4.2.5 Amplitude und Frequenz . . . . .	43
4.3 Zug- und Druckversuche . . . . .	43
4.4 Rissbilder . . . . .	45
4.5 Innere Oxidation . . . . .	47

<b>5</b>	<b>Übersicht der Simulationsmethoden</b>	<b>51</b>
5.1	Makroskopische Bremsscheibensimulation . . . . .	51
5.2	Mikrostruktursimulation von Gusseisenmaterialien . . . . .	53
5.3	Multiskalensimulation . . . . .	54
5.4	Verwendete Simulationssoftware . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Kontinuumsmechanik</b>	<b>57</b>
6.1	Verschiebung und Dehnung . . . . .	57
6.2	Cauchy's Spannungstensor . . . . .	58
6.3	Hooke'sches Gesetz . . . . .	59
<b>7</b>	<b>Plastizität</b>	<b>61</b>
7.1	Fließfunktion . . . . .	61
7.1.1	Von-Mises-Fließkriterium . . . . .	62
7.1.2	Mises-Schleicher-Fließfunktion . . . . .	62
7.1.3	Fließfunktion für graues Gusseisen . . . . .	63
7.2	Fließregel . . . . .	63
<b>8</b>	<b>Schädigung</b>	<b>65</b>
8.1	Physikalische Interpretation der Schädigung und Definition der Schädigungsvariable . . . . .	65
8.1.1	Skalare Schädigungsvariable . . . . .	66
8.1.2	Mehrere skalare Schädigungsvariablen . . . . .	66
8.2	Konzept der effektiven Spannung und das Dehnungsäquivalenzprinzip . . . . .	67
8.3	Lokalisierung . . . . .	69
8.4	Thermodynamik der Schädigung und Schädigungsevolution . . . . .	69
8.4.1	Duktile Schädigung (Porenwachstum) . . . . .	70
8.4.2	Quasispröde Schädigung . . . . .	71
<b>9</b>	<b>Modellierung des belastungsabhängigen mechanischen Materialverhaltens</b>	<b>73</b>
9.1	Modell nach Ambartsumyan . . . . .	73
9.2	Modell der gewichteten Nachgiebigkeit . . . . .	74
9.3	Risschließung . . . . .	75
9.4	Übergang zwischen Zug- und Druckbereich . . . . .	75
<b>10</b>	<b>Wärmeübertragung</b>	<b>77</b>
10.1	Wärmeleitung . . . . .	77
10.2	Konvektiver Wärmeübergang . . . . .	78
10.3	Wärmestrahlung . . . . .	79
<b>11</b>	<b>Implementierung</b>	<b>81</b>
11.1	Finite Differenzen . . . . .	82
11.2	Diskretisierung . . . . .	83
11.3	Anwendung des RSG auf den Phasenfeldlöser . . . . .	86
11.3.1	Berechnung der Dehnung im RSG . . . . .	87
11.3.2	Berechnung der Verschiebung im RSG . . . . .	88
11.4	Zeitschrittweite . . . . .	89
11.5	Quasistatische Berechnung . . . . .	91

---

<b>12 Implementierung der Plastizität</b>	<b>95</b>
12.1 Plastischer Korrekturschritt . . . . .	95
12.2 Von-Mises-Fließfunktion . . . . .	97
12.3 Fließfunktion nach Hjelm . . . . .	98
<b>13 Implementierung der Schädigung</b>	<b>103</b>
13.1 Duktile Schädigung der Matrix . . . . .	103
13.2 Risschließung des Graphits . . . . .	105
<b>14 Randbedingungen</b>	<b>109</b>
14.1 Mesoskopische Randbedingungen . . . . .	109
14.1.1 Verschiebungsrandbedingung, KUBC . . . . .	109
14.1.2 Spannungsrandbedingung, SUBC . . . . .	111
14.1.3 Periodische Randbedingung . . . . .	112
14.2 Implementierung . . . . .	113
14.3 Abbildung der Rotation des Rades . . . . .	113
14.4 Makroskopische Randbedingungen der Bremsscheibe . . . . .	115
14.4.1 Gewichtungsfunktion . . . . .	118
14.4.2 Reibkoeffizient . . . . .	119
14.4.3 Thermische Randbedingung an der Kontaktfläche Belag-Scheibe . . . . .	120
14.4.4 Thermische Randbedingung außerhalb der Kontaktfläche Belag-Scheibe . . . . .	121
<b>15 Effektive Materialeigenschaften</b>	<b>125</b>
15.1 Effektive Eigenschaften . . . . .	126
15.2 Homogenisierungsverfahren . . . . .	128
15.3 Simulationsgebiete . . . . .	129
15.3.1 Einheitszelle (unit cell) . . . . .	129
15.3.2 Eingebettete Struktur und Selbstkonsistenzmethode . . . . .	129
15.3.3 Repräsentatives Volumenelement (RVE) . . . . .	130
15.3.4 Statistisches Volumenelement (SVE) . . . . .	131
15.4 Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit . . . . .	131
<b>16 Erstellung der Gussstrukturen</b>	<b>135</b>
16.1 Nachbilden der Graphitlamellen . . . . .	136
16.2 Füllalgorithmus . . . . .	137
16.3 Vergleich zwischen generierten und experimentellen Strukturen . . . . .	140
<b>17 Simulationsergebnisse</b>	<b>143</b>
17.1 Mesoskopische Gefügesimulation . . . . .	143
17.1.1 Einfluss der Form und Orientierung der Inhomogenitäten auf die mechanischen Eigenschaften . . . . .	143
17.1.2 Schädigungsentwicklung innerhalb der Gussstruktur . . . . .	149
17.1.3 Definition des RVE . . . . .	152
17.1.4 Materialparameter . . . . .	155
17.1.5 Simulation der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie für den Zug- und Druckbereich . . . . .	156
17.1.6 Bestimmung der Fließfläche . . . . .	157

17.1.7	Spannungs-Dehnungs-Kennlinie bei erhöhten Temperaturen . . . . .	161
17.1.8	Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit . . . . .	164
17.2	Makroskopische Brems Scheibensimulation . . . . .	165
17.2.1	Simulationsaufbau . . . . .	165
17.2.2	Schirmungsverhalten der Brems Scheibe . . . . .	168
17.2.3	Temperaturverteilung auf der Reibfläche der Brems Scheibe . . . . .	170
17.2.4	Analyse des Spannungszustands der Scheibe . . . . .	176
<b>18</b>	<b>Diskussion der Ergebnisse und Ausblick</b>	<b>181</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>185</b>

# Verzeichnis der Symbole

## Bremsscheibe

$\mu$	Reibkoeffizient
$\rho_L$	Dichte der Luft
$a$	Beschleunigung
$A_s$	Stirnfläche der LkW
$A_{\text{pad}}$	Fläche Bremsbelag
$c_w$	Widerstandsbeiwert
$dA_{\text{pad}}$	infinitesimaler Ausschnitt des Bremsbelags
$E_{\text{diss}}$	dissipierte Energie
$E_{\text{kin}}$	kinetische Energie
$F_B$	Bremskraft
$F_L$	Luftwiderstand
$F_N$	Normalkraft
$F_R$	Reibkraft
$m$	Masse Fahrzeug
$M_B$	Bremsmoment
$p_b$	Bremsdruck
$r_p$	Radius Mitte des Bremsbelags
$r_R$	Reifenradius
$s$	zurückgelegter Weg
$T$	Temperatur
$t$	Zeit
$t_B$	Bremszeit
$u$	Geschwindigkeit
$v_t$	Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t$
$W_L$	Widerstandsarbeit der Luft
$W_R$	Reibarbeit

## Schädigung

$\tilde{\Phi}$	effektive Fließfunktion
$\tilde{\sigma}$	effektiver Spannungstensor
$\tilde{C}$	effektive Steifigkeitskonstanten

$\tilde{\sigma}$	effektive Spannung
$\tilde{E}$	effektiver Elastizitätsmodul
$A_D$	geschädigte Fläche
$A_{\text{eff}}$	effektive Fläche
$D$	Schädigungsvariable
$D_{\parallel}$	Schädigung parallel zur Basalebene
$D_{\perp}$	Schädigung orthogonal zur Basalebene
$D_c$	kritischer Schädigungswert
$D_s$	Schubschädigung
$E_c$	Elastizitätsmodul bei Druckbelastung
$E_t$	Elastizitätsmodul bei Zugbelastung
$F$	Dissipationspotential
$Y$	Energiefreisetzungsrate

## Gusseisen

$\alpha$	thermischer Ausdehnungskoeffizient
$\alpha_{\parallel}$	thermischer Ausdehnungskoeffizient parallel zur Basalebene des Graphit
$\alpha_{\perp}$	thermischer Ausdehnungskoeffizient orthogonal zur Basalebene des Graphit
$\lambda_{\parallel}$	Wärmeleitkoeffizient parallel zur Basalebene des Graphit
$\lambda_{\perp}$	Wärmeleitkoeffizient orthogonal zur Basalebene des Graphit
$\mu_G$	Koeffizient Wachstum Graphit
$\nu_G$	Querkontraktion Graphit
$\lambda$	tensorieller Wärmeleitkoeffizient
$\mathbf{C}$	Steifigkeitstensor
$\sigma_y$	Streckgrenze
$A_{\text{frac}}$	prozentualer Flächenanteil
$A_{\text{ges}}$	Gesamtfläche
$A_L$	Fläche Graphitlamelle
$c_{v,G}$	spezifische Wärmekapazität des Graphit
$D_L$	Dicke Graphitlamelle
$E_0$	Elastizitätsmodul im Ursprung
$E_G$	Elastizitätsmodul Graphit
$H_V$	Vickershärte
$K_{\text{ic}}$	Festigkeit gegenüber Spaltbruch
$L_L$	Länge Graphitlamelle
$r_a$	Außenradius
$r_i$	Innenradius
$S$	interlamellarer Abstand des Perlits

## Kontinuumsmechanik

$\epsilon^o$	hydrostatische Dehnung
$\epsilon$	Dehnungstensor
$\epsilon'$	deviatorischer Teil des Dehnungstensors
$\epsilon^o$	hydrostatischer Teil des Dehnungstensors
$\epsilon_{el}$	elastischer Dehnungsanteil
$\mathcal{C}$	Nachgiebigkeitstensor
$\sigma$	Spannungstensor
$\sigma'$	deviatorischer Teil des Spannungstensor
$\sigma^o$	hydrostatischer Teil des Spannungstensor
$H$	Gradient der Verschiebung
$t$	Spannungsvektor
$u$	Verschiebung
$\rho$	Dichte
$F$	Kraft

## Plastizität

$\kappa$	Verfestigungsparameter
$\lambda$	plastischer Multiplikator
$\Phi$	Fließfunktion
$\Phi_{MS}$	Mises-Schleicher-Fließfunktion
$\Phi_M$	Von-Mises-Fließfunktion
$\epsilon_{pl}$	plastischer Dehnungsanteil
$\sigma_{vgl}$	Vergleichsspannung
$\sigma_{y,c}$	Streckgrenze unter Drucklast
$\sigma_{y,t}$	Streckgrenze unter Zuglast

## Temperaturberechnung

$\alpha$	Wärmeübergangszahl
$\delta$	Grenzschichtdicke
$\dot{Q}$	Wärmestrom
$\dot{q}$	Wärmestromdichte
$R$	Rotationsmatrix
$\Theta$	Absolute Temperatur
$\Theta_F$	Absolute Temperatur Festkörper
$\Theta_\infty$	Absolute Temperatur umgebendes Medium



# 1 Motivation

Daten des statistischen Bundesamtes [63] zeigen, dass Güter in Deutschland zum größten Teil über den Straßenverkehr befördert werden. Lastkraftwagen (Lkw) erreichen hierbei im Jahre 2011 einen Anteil von circa 72 Prozent, was einem Transportvolumen von 3406 Millionen Tonnen an Gütern entspricht. Das Transportvolumen hat sich damit seit 1999 um 37 Prozent erhöht. Lastkraftwagen werden dabei hauptsächlich für kurze Distanzen von im Schnitt 138 km verwendet.

Da logistische Abläufe eng aufeinander abgestimmt sind, führen Ausfälle aufgrund von Schäden am Lkw zu hohen Kosten. Daher wird vom Kunden ein hohes Maß an Zuverlässigkeit und Sicherheit an die im Einsatz befindlichen Fahrzeuge verlangt. Gesetzesänderungen wie die Einführung der Abgasnorm Euro 6, welche seit dem Jahr 2014 für alle Neuzulassungen von Lastkraftwagen in Deutschland bindend ist, sowie der Wettbewerb unter den Herstellern, führt dazu, dass Bauteile stetig weiterentwickelt beziehungsweise angepasst werden.

Das Bremssystem des Lkws und somit auch das in dieser Arbeit behandelte Bauteil Brems-scheibe, ist bezüglich der Sicherheit eines der wichtigsten Komponenten des Fahrzeugs. Ein jederzeit funktionsfähiges System ist Voraussetzung. Durch die jahrelange Entwicklung ist eine hohe Zuverlässigkeit des Bremssystems gewährleistet. Die oben erwähnten Gründe sowie Änderungen des Bauraums führen jedoch dazu, dass von Zeit zu Zeit Änderungen am vorhandenen System durchgeführt werden müssen. Maßnahmen hierzu beinhalten neben der den Anforderungen entsprechenden Konstruktion, vor allem die Simulation sowie den Versuch.

Die Arbeiten von Versuch und Simulation ergänzen sich in ihren Aufgabenbereichen und überschneiden sich dabei in vielen Belangen. So bilden beide die Belastung des Bauteils während des Einsatzes im Fahrzeug ab, um dadurch eine ausreichende Dimensionierung zu ermöglichen. Die Simulation stellt dabei, unter Verwendung von Vereinfachungen und Idealisierungen, eine virtuelle Abbildung des Versuches dar. Sind in der Simulation jegliche Einflussgrößen auf die Belastung der Scheibe ausreichend gut abgebildet, so stimmen die Ergebnisse im Idealfall mit denen des Versuchs nahezu überein oder liegen in einem Bereich, der für die Auslegung des Bauteils ausreichend ist. Für eine schnelle und zuverlässige Entwicklung dieser Komponenten ist der Einsatz von Programmen des CAE (Computer Aided Engineering) in allen Bereichen des Entwicklungsprozesses heutzutage unerlässlich.

Ein großer Vorteil der computergestützten Simulation liegt in der Möglichkeit, Spannungs- und Temperaturwerte sowie Verformungen an jeder beliebigen Stelle des Bauteils und zu jedem Zeitpunkt genau zu analysieren. Bei der experimentellen Analyse ist das nur begrenzt möglich und teilweise mit hohem Aufwand verbunden. Abgesehen von beispielsweise Temperaturmessungen an der Oberfläche können nur Bereiche betrachtet werden, die vorher mit entsprechenden Sensoren ausgestattet wurden. Zusätzlich sind umfangreiche experimentelle Untersuchungen meist sehr kosten- und zeitintensiv. Dies führt dazu, dass versucht wird, die Anzahl an Experimenten zu reduzieren und durch computergestützte Berechnungen zu ersetzen.

In der industriellen Anwendung ist immer noch ein enges Zusammenspiel der beiden Bereiche

gegeben. Dies liegt im Falle der Bremsscheibe hauptsächlich daran, dass sehr komplexe Belastungszustände vorliegen, deren Berechnung eine hohe Rechenleistung in Anspruch nimmt. Neben der rein mechanischen und thermischen Belastung muss zusätzlich eine Simulation der Fluidodynamik zur Bestimmung der Wärmeübergangparameter zur Kühlung der Scheibe, durchgeführt werden. Die getrennte Abbildung der einzelnen Belastungen stellt hierbei weniger die Schwierigkeit dar, als ein gekoppeltes Simulationsmodell bei dem sich die jeweiligen Parameter, wie in der Realität gegeben, gegenseitig beeinflussen. Dies führt zu sehr komplexen Simulationsmodellen. Während Simulationen über einen "kurzen" physikalischen Zeitraum (wenige Sekunden, Bruchteile von Sekunden bei Crashsimulationen) gut durchführbar sind, stellen größere Zeitbereiche eine Herausforderung dar. Grund hierfür ist die Dauer der Simulation, bei der eine simulierte physikalische Sekunde je nach Komplexität des Modells mehrere Stunden Rechenzeit in Anspruch nehmen kann. Vor allem der Einsatz von Hochleistungsrechnern und hocheffizienter, parallelisierter Software, wie dem in dieser Arbeit verwendeten Phasenfeldlöser Pace3D, hat in diesem Punkt in den vergangenen Jahren deutliche Fortschritte bewirkt.

Um eine aussagekräftige Bauteilsimulation durchzuführen, sind neben der Kenntnis der Randbedingungen, welche die Belastung abbilden, die exakten Materialeigenschaften notwendig. Für die Simulation der Bremsscheibe werden mechanische und thermische Materialparameter benötigt. Für häufig verwendete Materialien sind Datenbanken mit den entsprechenden Parametern vorhanden. Handelt es sich um ein komplett neues Material, einen neuen Zulieferer oder wurde die Zusammensetzung des Materials geändert, müssen diese durch eine Reihe von Versuchen bestimmt werden. Besonders aufwendig und kostenintensiv sind hier Versuche bei sehr hohen Temperaturen ( $> 600\text{ °C}$ ).

Dies führt dazu, dass auch in diesem Bereich Simulationen vermehrt Einsatz finden. Durch die bereits genannten steigenden Rechenkapazitäten und spezialisierte Software wird die simulative Bestimmung der Eigenschaften eines Materials durch Kenntnis seiner Mikrostruktur ermöglicht. Diese Methode bietet außerdem die Möglichkeit, den Einfluss einzelner Bestandteile auf die effektiven Eigenschaften zu quantifizieren. Hierzu zählen nicht nur die Menge eines Gefügebestandteils, sondern vor allem auch dessen Morphologie. Durch die Möglichkeit der genauen Betrachtung des Materials auf der mesoskopischen bis hin zur atomaren Skala können Simulationen zum Verständnis der Vorgänge im Material und dessen Eigenschaften beitragen, welche bei der Entwicklung von Materialien förderlich sind. Im Folgenden wird gezeigt, wie sich durch simulative Methoden auf der mesoskopischen Größenskala makroskopische Materialmodelle ableiten lassen und wie diese mittels eines Multiskalenansatzes in die makroskopische Bremsscheibensimulation eingebunden werden. Für einen sinnvollen Aufbau der Simulationen ist ein Verständnis für die auftretenden Belastungen während des Bremsvorgangs sowie der Einflussparameter auf die Eigenschaften des Gusseisens mit Lamellengraphit notwendig. Daher werden in den ersten beiden Kapiteln zunächst diese beiden Bereiche behandelt, bevor eine Modellentscheidung getroffen wird.

## 2 Übersicht über das Bauteil Bremsscheibe

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die geschichtliche Entwicklung des Bremssystems, die Lkw-Bremsscheibe und deren Belastung sowie die im Bereich der Bremsscheibe eingesetzten Materialien.

### 2.1 Geschichtliche Entwicklung der Bremse

Die Bremse hat sich im Laufe der Jahrhunderte entsprechend den Anforderungen an Bremsleistung und Komfort entwickelt. Einige Entwicklungsschritte sind in Abbildung 2.1, entsprechend [89], aufgeführt. So ist die erste bekannte Bremskonstruktion das blockierte Rad (Abbildung 2.1, a), wo mit Hilfe eines Holzstabes die Rotation des ebenfalls hölzernen Rades unterbunden wurde. Es ist ersichtlich, dass dieses System nur für sehr geringe Geschwindigkeiten Verwendung finden kann. Zudem kann nur zwischen den beiden Zuständen, blockiertes und nicht blockiertes Rad, unterschieden werden. In der weiteren Entwicklung, wird daher von den Römern eine Kette verwendet, welche auf einer Seite mit dem Streitwagen verbunden ist und auf der anderen Seite über die Radnabe geführt wird (Abbildung 2.1, b). Über die Höhe der Zugkraft des Fahrers, wird die Reibung zwischen Kette und Radnabe eingestellt und die Höhe der Bremskraft variiert. Dieses System stellt die erste Ausführung einer *Reibungsbremse* dar, bei der die Bremsung durch die Reibung zweier am Fahrzeug befestigter Bauteile resultiert. In der folgenden Entwicklung wird das System der Reibungsbremse weiter verbessert und die Reibung durch einen Bremsklotz, der auf die Lauffläche des Rades presst, aufgebaut (Abbildung 2.1, c). Über einen Bremshebel kann auch hier die Stärke der Bremsung angepasst werden. Die Daimler Motorkutsche und der Benz-Motorwagen verfügten 1886 als erste Personenkraftwagen, genau wie 1896 der erste Lastkraftwagen, über eine solche Klotzbremse [117]. Heutzutage ist sie noch bei alten Fahrrädern sowie Kutschen und Schienenfahrzeugen zu finden. Mit der Verbreitung gummierter und luftbefüllter Reifen wird das Konzept der Klotzbremse durch an der Radnabe befestigte Trommelbremsen abgelöst [89, 117]. Hierbei wird ab dem Jahre 1902 hauptsächlich die von Wilhelm Maybach erfundene Außenbandbremse (Abbildung 2.1, d) verwendet, bevor diese 1924 zunehmend von der Innenbackenbremse (Louis Renault, Abbildung 2.1, e) verdrängt wird [19]. Das Konzept der Außenbandbremse hat den Nachteil, dass sich aufgrund des freiliegenden Bremsbandes Schmutz ablagert und dadurch die Bremswirkung beeinflusst wird. Die Innenbackenbremse wird häufig auch Trommelbremse und die hydraulisch betätigte Variante, aufgrund der einfachen und robusten Bauart, Simplexbremse [19] genannt. Wegen des hohen Wartungsaufwands und der ungleichmäßigen Bremswirkung der Außenbandbremse werden ab dem Jahre 1919 die von der Firma Lockheed entwickelten hydraulischen Bremssysteme verwendet, welche 1954 auch in der Variante mit Bremskraftverstärker im Silberpfeil Rennwagen von Mercedes Benz zum Einsatz kommen [117]. Die zunächst aus einem Bremskreislauf bestehenden Systeme wurden bald aus Gründen der Sicherheit

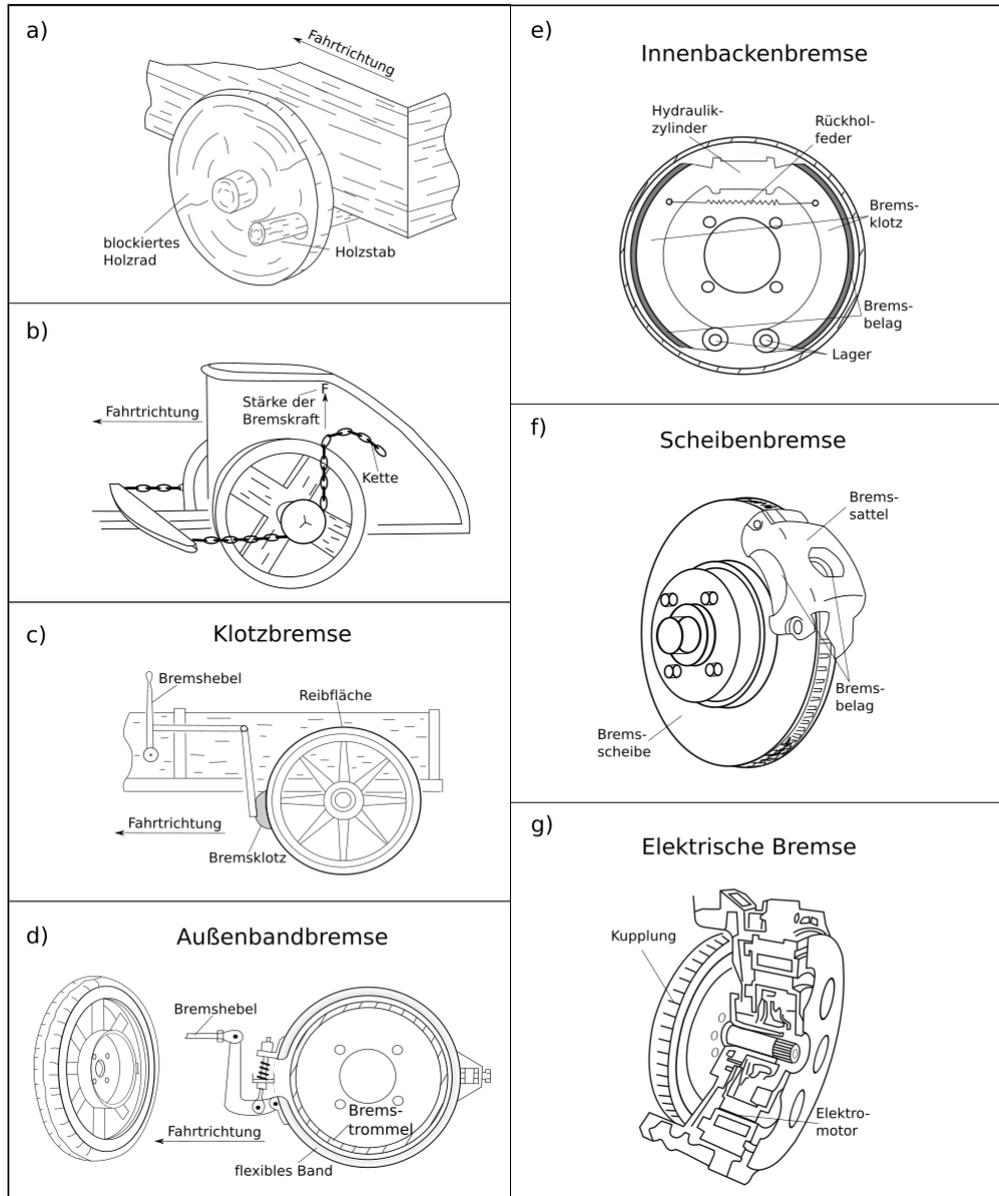


Abbildung 2.1: Entwicklung der Bremse nach [89]. a) blockiertes Rad, b) Anfänge der Reibungsbremse, c) Klotzbremse, d) Außenbandbremse. Die auf der rechten Seite dargestellten Bremsenausführungen werden in den aktuellen Fahrzeugen eingesetzt. e) Innenbackenbremse, f) Scheibenbremse, g) elektrische Bremse.

durch Mehrkreis-Bremsanlagen ersetzt. In aktuellen Personen- und Lastkraftwagen werden größtenteils Scheibenbremsen (Abbildung 2.1, f) verwendet, teilweise auch in Verbindung mit Trommelbremsen an der Hinterachse. Gründe für den Umstieg auf die Scheibenbremse sind die Schwächen der Trommelbremse, welche sich unter Anderem aus Temperaturproblemen, schlechter Dosierbarkeit und Reibwertschwankungen zusammensetzten [19]. Bei der Scheibenbremse wird zwischen der Vollbelag-Scheibenbremse und der Teilscheibenbremse unterschieden. Die Vollscheibenbremse wird oftmals in Baumaschinen und Ackerschleppern verwendet [74] und hier nicht näher betrachtet. Bei der Teilscheibenbremse, im Weiteren der Einfachheit halber Scheibenbremse genannt, wird zwischen Fest-, Schwimmrahmen- und Faustsätteln unterschieden und damit in der Lagerung der Bremsscheibe und der Bremsbeläge (siehe hierzu beispielsweise [19]). In Nutzfahrzeugen werden größtenteils druckluftbetätigte Scheibenbremsen verwendet. Als letztes sei noch der elektrische Verminderer (Abbildung 2.1, g) erwähnt, welcher keine Bremse im eigentlichen Sinne darstellt, da er nicht zur Bremsung bis zum Stillstand verwendet wird und auch bei starker Bremsung sowie beim Einsatz von unterstützenden elektronischen Systemen wie beispielsweise ABS (Antiblockiersystem) von den konventionellen Bremssystemen unterstützt wird. Dieses System findet in Fahrzeugen mit rein elektrischem Antrieb oder auch Hybridfahrzeugen Einsatz, um einen Teil der Bremsenergie in elektrische Energie umzuwandeln.

Während auch die Nachfrage an Komfort mit dem Fortschritt des Automobils stieg, so ist die Entwicklung der unterschiedlichen Bremssysteme hauptsächlich durch die erhöhten mechanischen und thermischen Anforderungen an das System sowie dessen Zuverlässigkeit getrieben. Vor allem die hohen Geschwindigkeiten und das gestiegene Fahrzeuggewicht haben hierbei großen Einfluss auf die Belastung der Bremse was im Folgenden für die Scheibenbremse dargestellt wird.

## 2.2 Aufbau der Bremsscheibe

Die Bremsscheibe bildet das zentrale Bauteil der Scheibenbremse. Sie wird während eines Bremsvorgangs durch die Reibung der Bremsbeläge starken thermischen und mechanischen Belastungen ausgesetzt. Eine ausreichende Dimensionierung dieses Bauteils wird über analytische Berechnungen, experimentelle Prüfstandsversuche und die computergestützte Simulation gewährleistet. Während des Bremsvorgangs wird die Ausgangsgeschwindigkeit  $v_{t_0}$  des Fahrzeugs verringert ( $v_{t_1} < v_{t_0}$ ) beziehungsweise bei einer Bergabfahrt die Beschleunigung reduziert ( $v_{t_1} > v_{t_0}$ ) oder die Geschwindigkeit konstant gehalten ( $v_{t_1} = v_{t_0}$ ). Die Stärke der Bremsung hängt von dem über den Pedalweg gesteuerten Bremsdruck ab. Im Folgenden wird das Bremssystem wie in Abbildung 2.2 dargestellt, auf die Komponenten Bremsscheibe und Bremsbelag reduziert und lediglich der Bremsdruck als Ausgabeparameter des als Blackbox dargestellten Teils des Bremssystems verwendet. In Abbildung 2.3, b) ist der Aufbau der in dieser Arbeit behandelten Bremsscheibe im Querschnitt dargestellt. Die Reibfläche bildet den Kontaktbereich zwischen Bremsbelag und Bremsscheibe. Über die Reibfläche wird auch die thermische und mechanische Beanspruchung auf die Scheibe aufgebracht, welche über den Reibring, oder auch Rotor, in die weiteren Bereiche der Scheibe übertragen wird. Je nach Ausführung des Reibrings wird wie in Abbildung 2.3, a) illustriert, zwischen der Vollscheibe, der innenbelüfteten oder der gelochten Scheibe unterschieden. Heutzutage werden meist innenbelüftete Bremsscheiben verwendet, bei denen der äußere und innere Teil des Reibrings über Stege, wie in Abbildung 2.3,

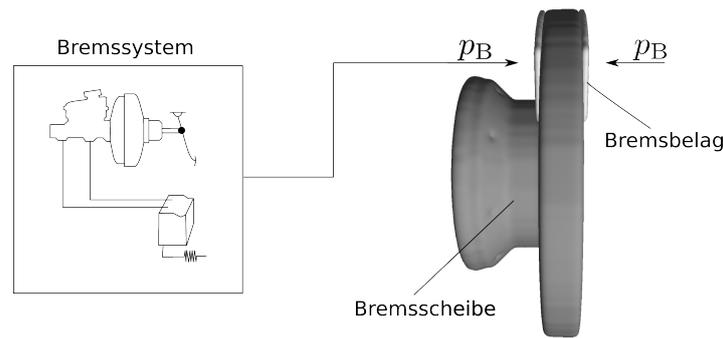


Abbildung 2.2: Auf die Scheibe und den Bremsbelag reduziertes Bremssystem. Die restlichen Bestandteile werden als Blackbox betrachtet und über den Ausgabeparameter  $p_B$  des Bremsdruck definiert.

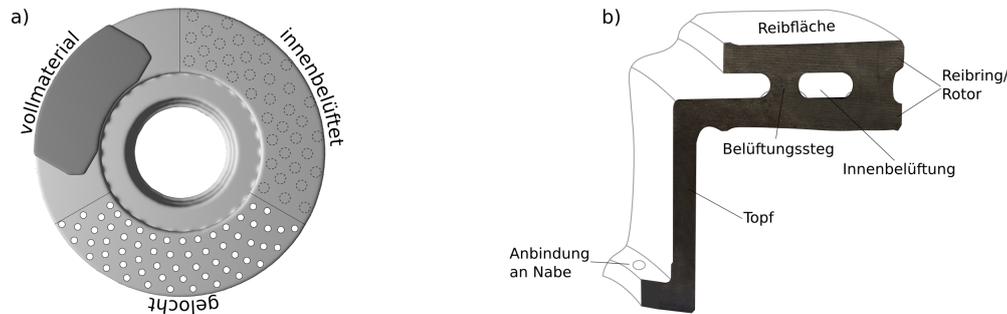


Abbildung 2.3: a) Die drei gebräuchlichsten Typen von Bremsscheiben. Scheibe aus Vollmaterial, innenbelüftete Scheibe und die gelochte Scheibe. b) Aufbau der in dieser Arbeit behandelten Lkw-Bremsscheibe.

b), verbunden ist [75]. Die durch die Belastung aufgenommenen Wärme wird größtenteils durch Konvektion (siehe Kapitel 10, Wärmeübertragung) an die vorbei- und durchströmende Luft abgegeben. Durch die Innenbelüftung wird die Oberfläche erhöht und zusätzlich die Luftzirkulation verbessert [156, 75], was einen schnelleren Abtransport der Wärme gewährleistet [75]. Ein ähnliches Verhalten ergibt sich bei gelochten Scheiben. Nachteilig kann sich bei diesen Scheibenformen die Lochung beziehungsweise Innenbelüftung auf die Spannungsverteilung auswirken. So können Spannungsspitzen um die Bohrungen bei der gelochten Scheibe zu einer Rissinitiierung führen [156]. Bei der in Abbildung 2.3 dargestellten Scheibe handelt es sich um eine innenbelüftete Scheibe mit runden Belüftungsstegen. Weitere Stegformen, mit für deren Einsatz optimiertem Strömungsverhalten, sind beispielsweise in [12, 93] zu finden. Der Bremsstopp bildet letztlich die Verbindung des Reibrings mit der Anbindung der Scheibe zur Nabe.

Masse des Fahrzeugs $m$	10500 kg
Anfangsgeschwindigkeit $v_{t_0}$	80 km/h
Endgeschwindigkeit $v_{t_1}$	0 km/h
Bremszeit $t_B$	3.4 s

Tabelle 2.1: Parameter der Bremsung

## 2.3 Belastung der Bremsscheibe

Die Belastung der Bremsscheibe wird im Wesentlichen durch die Fahrzeugmasse  $m$  und die Fahrzeuggeschwindigkeit  $v$  definiert. So ist die kinetische Energie  $E_{\text{kin},t_0}$  eines mit der Geschwindigkeit  $v_{t_0}$  fahrenden Fahrzeugs zum Zeitpunkt  $t_0$  über die Beziehung

$$E_{\text{kin},t_0} = \frac{1}{2}mv_{t_0}^2. \quad (2.1)$$

gegeben. Für eine Bremsung in der Ebene errechnet sich die dissipierte Energie aus der Differenz der kinetischen Energie zum Zeitpunkt  $t_0$  und dem Zeitpunkt  $t_1$

$$E_{\text{diss}} = \frac{1}{2}mv_{t_0}^2 - \frac{1}{2}mv_{t_1}^2 = \frac{1}{2}m(v_{t_0}^2 - v_{t_1}^2).$$

Der Großteil dieser Energie wird in thermische Energie umgewandelt und führt zu einer Erwärmung der Komponenten des Bremssystems. Daten der Daimler AG sowie aus [19] beziffern den Anteil der alleine von der Bremsscheibe aufgenommen wird, mit einem Wert von 90 - 95 %. Neben der kinetischen Energie des Fahrzeugs, wird die Belastung der Bremsscheibe durch die Dauer des Bremsvorgangs beeinflusst. Die Parameter, welche die Bremsung definieren, sind in Tabelle 2.1 aufgelistet. Die kinetische Energie wird zusätzlich durch den Luftwiderstand sowie Reibungsverluste beeinflusst. In [119] wird der Anteil des Luftwiderstands an den Fahrtwiderständen mit 40 % angegeben. 45 % entfallen auf den Rollwiderstand, 8 % auf die Nebenaggregate und 7 % auf Verluste im Antriebsstrang [119]. Für eine Stoppbremsung eines Lkw aus der Geschwindigkeit von  $v_{t_0} = 80 \text{ km/h} = 22.2 \text{ m/s}$ , wie sie in dieser Arbeit betrachtet wird, lässt sich die Widerstandsarbeit  $W_L = \int F_L ds = \int F_L v dt$  überschlägig bestimmen, um den Einfluss des Luftwiderstands abzuschätzen. Der Luftwiderstand  $F_L$  ergibt sich zu

$$F_L = \frac{1}{2}c_w \rho_L v^2 A_S \quad [56].$$

Mit dem Widerstandsbeiwert  $c_w$ , der Dichte der Luft  $\rho_L$  und der Stirnfläche des Lkw  $A_S$ . Mit der Annahme einer linearen Geschwindigkeitsabnahme und einer Abbremszeit von  $t_B = 3,4 \text{ s}$  ergibt sich für die Widerstandsarbeit mit  $\rho_L = 1,1885 \text{ kg/m}^3$  [147],  $c_w = 0,85$  als Maximalwert des in [119] angegebenen Bereichs von  $c_w = 0,5 - 0,85$  und einer Stirnfläche von  $7,5 \text{ m}^2$  ein Wert von  $W_L = 3,5228 \text{ kJ}$ . Bei einem Gewicht des Lkws von  $m = 10500 \text{ kg}$  und der sich daraus ergebenden kinematischen Gesamtenergie von  $W = \frac{1}{2}mv_0^2 = 2587,41 \text{ kJ}$  entspricht der Anteil der Widerstandsarbeit der Luft 1,36 %. Aufgrund des geringen Beitrags und des undefinierten Anströmverhaltens wird dieser Beitrag, wie auch die des Rollwiderstands, der Nebenaggregate und der Verluste im Antriebsstrang, vernachlässigt. Neben der beschriebenen Stoppbremsung wird zusätzlich die Schleppbremsung, bei der die Geschwindigkeit konstant

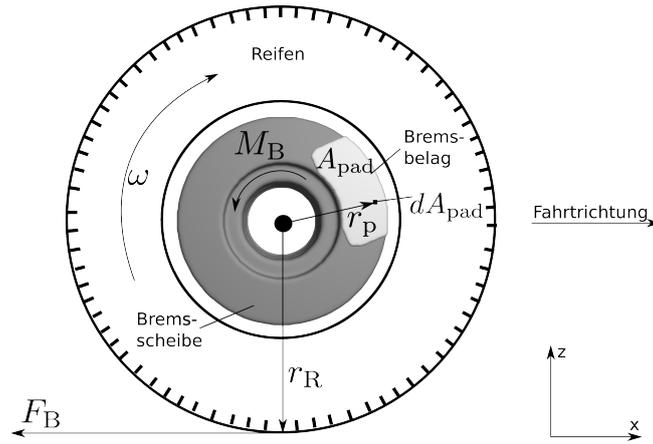


Abbildung 2.4: Freischnitt des Rades mit der angreifenden Bremskraft  $F_B$ , dem daraus resultierenden Bremsmoment  $M_B$ , dem Reifenradius  $r_R$  und dem mittleren Radius des Bremsbelags  $r_p$ . Die Fläche des Bremsbelags wird über  $A_{\text{pad}}$  definiert und der infinitesimale Ausschnitt über  $dA_{\text{pad}}$ .

gehalten und die Scheibe gleichzeitig mit einem konstanten Bremsmoment belastet wird, betrachtet. Letztere Belastung tritt beispielsweise bei einer Bergabfahrt auf. Nach dem ersten Newton'schen Gesetz muss auf einen Körper eine Kraft wirken, um ihn aus dem Zustand der Ruhelage oder einer gleichförmigen translatorischen Bewegung zu bringen. Die sich daraus ergebende Beschleunigung ist nach dem zweiten Newton'schen Gesetz proportional zur auf den Körper wirkenden Kraft. Unter Vernachlässigung der oben genannten Verluste ist die an den Rädern angreifende und in Abbildung 2.4 eingezeichnete Bremskraft  $F_B$  ausschlaggebend für die negative Beschleunigung des Fahrzeugs. Die Bremskraft  $F_B$  am Kontakt Reifen-Fahrbahn ergibt sich entsprechend des durch die Betätigung des Bremspedals aufgebauten Bremsdrucks  $p_B$ , welcher die Bremsbeläge beidseitig gegen die Bremsscheibe presst. Der Bremsdruck übt über die im Bremssattel befindlichen Kolben, entsprechend der Fläche  $A_{\text{pad}}$  des Bremsbelags, die Normalkraft

$$F_N = p_B A_{\text{pad}}$$

auf die Scheibe aus. Da der Bremsdruck an dem Kontakt zwischen Bremsbelag und Bremsscheibe aufgrund von Unebenheiten nicht gleichmäßig verteilt ist, muss mit dem lokalen Bremsdruck  $p_B(\mathbf{x})$  an der Stelle  $\mathbf{x}$ , dem infinitesimalen Flächenelement  $dA_{\text{pad}}$  und der lokalen Normalkraft

$$F_N(\mathbf{x}) = p_B(\mathbf{x}) dA_{\text{pad}}$$

gerechnet werden. Über die proportional zum Reibkoeffizienten  $\mu_R(\mathbf{x})$  entstehende Reibkraft

$$F_R(\mathbf{x}) = F_N(\mathbf{x}) \mu_R(\mathbf{x})$$

ergibt sich das Bremsmoment  $M_B$  für ein Rad durch das Integral über die Fläche des Bremsbelags zu

$$M_B = 2 \int_{A_p} F_r(\mathbf{x}) r_p(\mathbf{x}) dA_{\text{pad}}. \quad (2.2)$$

$r_P(\mathbf{x})$  stellt den Abstand des Flächenelements  $dA_{\text{pad}}$  und der Rotationsachse dar und der Faktor 2 tritt aufgrund der zwei Bremsbeläge auf. Über den Reifenradius  $r_R$  und die Anzahl der abgebremsten Räder (4) lässt sich die gesamte Bremskraft  $F_B$  über

$$F_B = \frac{4M_B}{r_R} \quad (2.3)$$

bestimmen und die Beschleunigung des Lkws

$$a = \frac{F_B}{m} \quad (2.4)$$

ermitteln. Hiermit wird ausgehend von einem bekannten Bremsdruck die Beschleunigung des Fahrzeugs in der Ebene bestimmt. Über den umgekehrtem Ansatz kann für eine gewünschte Beschleunigung der benötigte Bremsdruck ermittelt werden. Die thermische Energie lässt sich neben dem Ansatzes der kinetischen Energie auch über die Reibarbeit

$$W_R = \int_s F_R(\mathbf{x}) ds \quad (2.5)$$

ermitteln.  $s$  ist hierbei der zurückgelegte Weg welcher sich aus der Winkelgeschwindigkeit  $\omega(t)$  und dem Radius  $r(\mathbf{x})$  über

$$s(\mathbf{x}, t) = \int_t v(\mathbf{x}) dt = \int_t r(\mathbf{x}) \omega(t) dt$$

errechnet. Die von der Scheibe aufgenommene Wärme wird über konduktiven Wärmetransport in der Scheibe verteilt und über Konvektion und Wärmestrahlung an die Umgebung abgegeben (siehe Kapitel 10, Wärmeübertragung). Die starke und teilweise ungleichmäßige Erwärmung sorgt für eine Verformung der Scheibe. Ein hierbei charakteristisches Verformungsverhalten bildet die Schirmung der Bremsscheibe, welche im Folgenden genauer beschrieben wird.

## 2.4 Schirmung der Bremsscheibe

Unter der Schirmung wird die Verformung der Bremsscheibe aufgrund der thermischen Belastung während des Bremsvorgangs verstanden. Die Reibflächen der Scheibe gehen dabei von Plan- in Kegelflächen über. In Abbildung 2.5 ist das Schirmungsverhalten im Verlauf der Belastung nach [19] aufgezeigt. Die ursprüngliche Form der Bremsscheibe ist für den Zeitpunkt  $t = 0$  s dargestellt. Die durch die Reibung in die Bremsscheibe eingebrachte Wärme konzentriert sich zunächst auf die Reibfläche und die angrenzenden Bereiche im Inneren der Scheibe. Die Verteilung der Temperatur beeinflusst über die thermische Dehnung die Verformung des Bauteils. Nahe der Reibfläche dehnt sich das Material aus, während die Bereiche im Inneren der Scheibe, mit deutlich niedrigeren Temperaturen, nur eine geringe Ausdehnung erfahren. Die Folge ist die zum Zeitpunkt  $t = 3$  s dargestellte charakteristisch gewölbte Deformation der Scheibe. Auch eine leichte Schirmung der Scheibe ist bereits zu diesem Zeitpunkt zu erkennen. Deutlicher kommt die Schirmung zum Tragen sobald sich weite Teile des Reibrings erwärmen, sich zur Topfanbindung jedoch ein starkes Temperaturgefälle einstellt ( $t = 7$  s). Der erwärmte Reibring dehnt sich aus, was in Abbildung 2.6 dargestellt ist. Durch das Temperaturgefälle im Bereich der Topfanbindung wird der Reibring in diesem Bereich an der Ausdehnung gehindert,

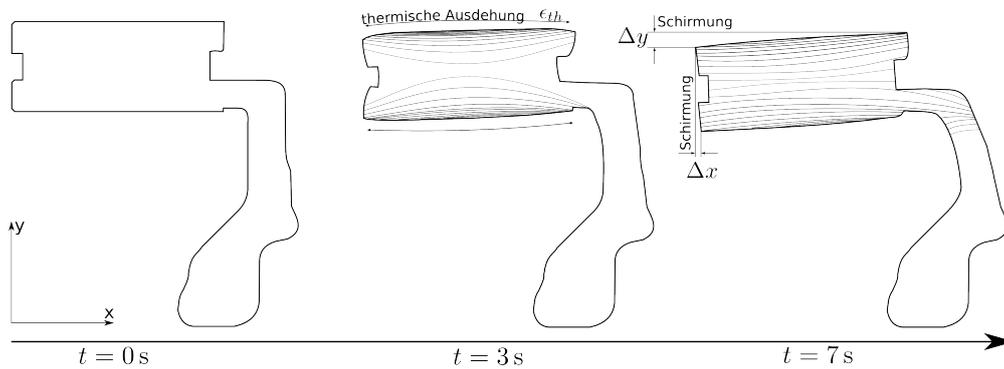


Abbildung 2.5: Verlauf des Schirmungsverhaltens einer Bremsscheibe aufgrund der thermischen Belastung beim Bremsvorgang nach [19]. Bei  $t = 0\text{ s}$  ist am zweidimensionalen Schnitt der Bremsscheibe dessen unverformte Geometrie zu sehen. Zum Zeitpunkt  $t = 3\text{ s}$  dehnen sich die Bereiche nahe der Reibfläche aufgrund der dort vorliegenden Temperaturerhöhung, die durch die Reibung zwischen Scheibe und Belag entsteht, aus. Bei  $t = 7\text{ s}$  ist die Temperatur gleichmäßiger im kompletten Reibring verteilt und es tritt eine deutliche Schirmung der Scheibe auf.

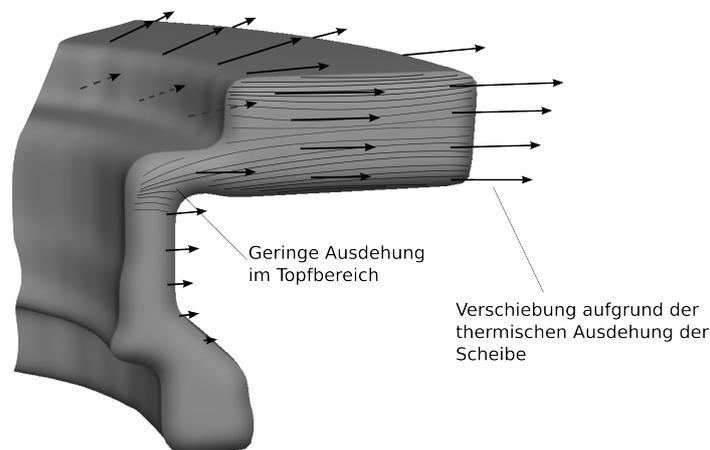


Abbildung 2.6: Ausdehnung der Bremsscheibe aufgrund der Erwärmung. Der Bremstopf hat eine geringere Temperaturerhöhung erfahren als der Reibring, was zu einer geringeren Ausdehnung des Bremstopfs führt und damit die Ausdehnung des unteren Teils des Reibrings behindert. Dadurch ergibt sich die Schirmung der Bremsscheibe.

Typ	Breite in mm	Temperatur in °C	Dauer
Asperity	<1	bis 1200 max	< $t = 1$ ms (für Gusseisen)
Focal	5-20	750 - 1200 max	0,5 - 20 s
Distortional	20-100	100 - 700 $\Delta T$	> $t = 10$ s
Regional	50-200	10 - 100 $\Delta T$	> $t = 10$ s

Tabelle 2.2: Hotspottypen und deren Klassifizierung nach [5]

was in einem kegelförmigen Reibring resultiert. Die Schirmung wird über die in Abbildung 2.5 definierte Verschiebung  $\Delta y$  quantifiziert. Die Neigung des Reibrings führt zu einem ungleichmäßigen Kontaktdruck und dadurch zu einer ungleichmäßigen Abnutzung der Scheibe und des Belags, was zu unerwünschten Geräuschemissionen führen kann [19]. Entsprechend der Anbindung des Reibrings an den Bremsstopf können unterschiedliche Schirmungsverhalten auftreten. Es ist durch solche konstruktive Maßnahmen möglich, ein neutrales Schirmungsverhalten zu erreichen. Neutrales Schirmungsverhalten führt jedoch zu einer Wellung der Scheibe und somit zu Vibrationen während des Bremsvorgangs [19]. Eine Wellung oder Unebenheiten der Reiboberfläche können zu lokal erhöhten Temperaturen führen, welche auch als *Hotspots* bezeichnet werden.

## 2.5 Hotspots

Besonders bei Bremsungen aus hohen Geschwindigkeiten kann auf der Reibfläche eine inhomogene Temperaturverteilung in Form von Hotspots auftreten. Die Hotspots und die damit einhergehende Verformung der Scheibe können Bremsenrubbeln hervorrufen. Das Bremsenrubbeln wird vom Fahrer als ein unerwünschtes akustisches oder haptisches Phänomen wahrgenommen [19]. Die genauen Gründe für das Auftreten von Hotspots sind trotz einer Vielzahl von Arbeiten auf diesem Gebiet noch nicht ausreichend geklärt [33]. In der Arbeit von Sarda [124], der experimentelle Untersuchungen zur Hotspotentstehung durchgeführt hat, wird jedoch gezeigt, dass ein Hotspot in Verbindung mit einer vorhergehenden Verformung der Reibfläche entsteht. Die hierdurch entstehende ungleichmäßige Druckverteilung zwischen Scheibe und Belag führt dazu, dass an einigen Stellen ein deutlich höherer Druck und somit eine stärkere thermische Belastung entsteht. Zudem zeigt Sarda [124], dass Hotspots alternierend auf den gegenüberliegenden Seiten der Bremsscheibe auftreten, was ihn zu der Schlussfolgerung bewegt, dass die Wellung der Scheibe für die Hotspotbildung verantwortlich ist. Von Lee [85] wird die dafür verantwortliche thermoelastische Instabilität beziehungsweise im Fall der Bremsscheibe die reibungsinduzierte thermoelastische Instabilität untersucht. Sie resultiert aus der durch Reibung generierten Wärme, der daraus folgenden Verformung und dem Kontakt Scheibe-Belag [85]. Durch Störungen auf der Kontaktfläche wird lokal eine höhere Flächenpressung erreicht, welche in einem höheren Wärmeeintrag resultiert. Die thermische Ausdehnung dieses Bereichs begünstigt diesen Vorgang, führt allerdings gleichzeitig zu einem stärkeren Verschleiß, welcher dem Prozess entgegenwirkt. Abhängig davon, welcher Beitrag überwiegt, kann es zu einem instabilen Wachstum der Bereiche kommen [124]. Anderson [5] unterteilt die Hotspots entsprechend ihrer Erscheinungsform in vier unterschiedliche Hotspot-Typen. Asperity, focal, distortional und regional Hotspots welche nach ihrer Größe, Temperatur und Dauer in Tabelle 2.2 klassifiziert und in Abbildung 2.7 dargestellt sind. Deren Charakteristika

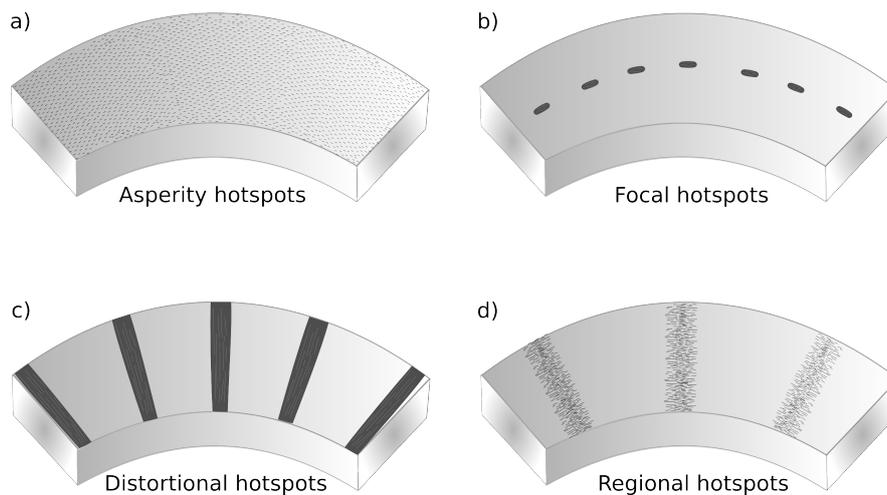


Abbildung 2.7: Darstellung der unterschiedlichen Hotspotformen nach [5]. a) Asperity hotspots, b) Focal hotspots, c) Distortional hotspots und d) Regional hotspots.

lassen sich nach [5] wie folgt beschreiben.

### 2.5.1 Asperity Hotspots

Asperity Hotspots (Abbildung 2.7, a)) sind sehr kleine ( $< 1$  mm) Hochtemperaturspots, die die gesamte Reibfläche übersäen. Bei stabilem Reibungs- und Verschleißverhalten tritt nur diese Form von Hotspots auf. Lokale Temperaturen von  $1200$  °C können für eine Dauer von weniger als einer Millisekunde auftreten. Nach dieser Definition der Asperity Hotspots, entsprechend [5], lässt sich zurückschließen, dass diese Art der Hotspots aufgrund der Kürze und der Größe auf Rauigkeiten und minimale Unebenheiten beim Reibkontakt Scheibe-Belag zurückzuführen ist. Eine Simulation dieser Hotspots auf makroskopischer Skala ist daher nicht sinnvoll.

### 2.5.2 Focal Hotspots

Focal Hotspots (Abbildung 2.7, b)) besitzen eine Größe von  $5 - 20$  mm und treten in regelmäßigen Abständen entlang der Reibrichtung auf. Sie entstehen aufgrund thermoelastischer Instabilität. Focal Hotspots sind vermehrt zu beobachten, wenn die Länge des Reibkontakts (Größe des Bremsbelags) erhöht wird. Daher tritt diese Form bei Bremsungen aus hohen Geschwindigkeiten an Lkw-Bremsscheiben auf, während sie bei Pkw meist nicht zu beobachten sind. Anderson [5] unterscheidet zudem zwischen *kritischen* und *unkritischen* Focal Hotspots. Bei kritischen Hotspots bildet sich Martensit. Hierfür muss das Material lokal über eine Temperatur von  $750$  °C erhitzt werden, bei der sich Perlit (kubisch raumzentriert, bcc) zu Austenit (kubisch flächenzentriert, fcc) umwandelt. Findet die darauffolgende Abkühlung auf  $549$  °C innerhalb einer Sekunde statt wird die Perlitbildung verhindert und es entsteht ein martensitisches Gefüge. Bei den unkritischen Hotspots wird die Umwandlungstemperatur nicht überschritten. Diese sind im allgemeinen größer ( $25$  mm) als kritische Hotspots [5].

### 2.5.3 Distortional Hotspots

Distortional Hotspots (Abbildung 2.7, c)) treten durch den thermischen Verzug der Bremsscheibe infolge der Belastung der Scheibe während der Bremsung auf. Das Ausbeulen der Scheibe ist ebenfalls eine Form der thermoelastischen Instabilität. Distortional Hotspots haben eine Breite von 20 - 100 mm und erreichen eine Temperaturdifferenz von bis zu 700 K gegenüber den anderen Bereichen der Reibfläche.

### 2.5.4 Regional Hotspots

Regional Hotspots (Abbildung 2.7, d)) bilden sich ohne thermoelastische Instabilität und werden daher nicht immer als Hotspots bezeichnet. Diese Hotspots bilden sich aufgrund ungleichmäßigen Anpressdrucks oder ungleichmäßiger Reibkoeffizienten. Auch das Kühlverhalten und die Lüftungskanäle verursachen diese Art der Hotspots. Die relativ geringen Temperaturunterschiede gegenüber den restlichen Bereichen der Scheibe sowie deren Größe sind charakteristisch für Regional Hotspots.

Alle Arten von Hotspots führen zu einer inhomogenen Temperaturverteilung mit lokal teilweise extremen Temperaturen auf der Reibfläche der Scheibe. Die daraus entstehenden starken Belastungen spiegeln sich auch in der Rissbildung auf der Bremsscheibe wider, wie im nächsten Abschnitt beschrieben wird.

## 2.6 Rissbildung auf der Reibfläche

Untersuchungen zur Rissbildung an der Bremsscheibe zeigen, dass sichtbare Risse meist auf der hochbelasteten Reibfläche der Scheibe entstehen. Die charakteristische Anordnung der Risse wird unter anderem in den Arbeiten [10, 95] beschrieben. So bilden sich die makroskopischen Risse, wie in Abbildung 2.8 dargestellt, radial auf der Reibfläche der Scheibe aus. Der Mechanismus der Rissinitiierung und Rissausbreitung ist nach [10] in der thermischen Ermüdung des Materials zu finden. Im Bremsenhandbuch [19] wird die Rissentstehung mit dem Auftreten von Hotspots und der daraus resultierenden ungleichmäßigen Temperaturverteilung in Verbindung gebracht. Durch die lokale Temperaturerhöhung dehnt sich das Material sehr stark aus, was zu einer plastischen Verformung des Materials führt. Bei der Abkühlung des Materials entstehen an diesen Stellen Wärmerisse [19]. Auch der Temperaturgradient hat einen Einfluss auf die Rissbildung im Bauteil. In der Arbeit von [43] wird diesbezüglich gezeigt, dass die Rissbildung in Verbindung mit der am Reibring anliegenden Maximaltemperatur zu setzen ist. In diesem Zusammenhang hat Lampic [82] gezeigt, dass eine Rissbildung meist dann stattfindet, wenn die Perlit-Austenit-Umwandlungstemperatur überschritten wird. Grund dafür ist die unterschiedliche atomare Anordnung. Austenit hat eine kubisch raumzentrierte Anordnung (fcc), was 4 Atomen pro Einheitszelle und einer Packungsdichte von 74 Prozent entspricht. Perlit hingegen hat eine flächenzentrierte Anordnung (bcc) mit 2 Atomen und eine Packungsdichte von 68 Prozent. Die plötzliche Volumenänderung bei der Gefügeumwandlung führt dabei zu Spannungen und zur Rissbildung an den Phasengrenzen.

Die Rissbildung wird neben der Belastung und der Konstruktion der Bremsscheibe entscheidend durch das für die Bremsscheibe verwendete Material beeinflusst. Auf der Suche nach einem

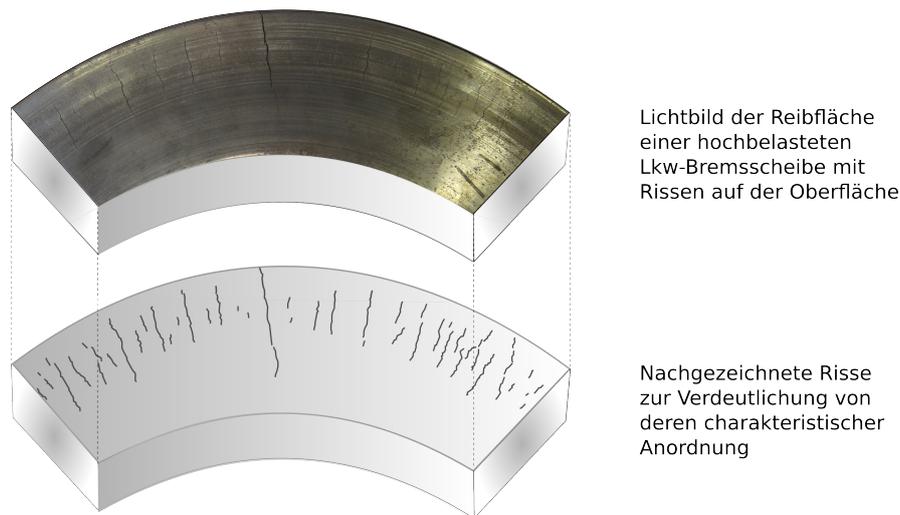


Abbildung 2.8: Darstellung der charakteristischen Anordnung der Risse auf der Reibfläche einer Lkw-Bremsscheibe. Die sichtbaren Risse verlaufen in radialer Richtung und sind bei dieser Abbildung im äußeren Bereich der Scheibe zu beobachten.

passenden Material für die gegebenen Anforderungen wurden eine Vielzahl an Bremsscheibenmaterialien entwickelt. Während sich einige lediglich geringfügig in ihrer Zusammensetzung unterscheiden, sind andere aus einer komplett unterschiedlichen Materialklasse aufgebaut. Dies spiegelt sich teilweise deutlich in der Leistungsfähigkeit und den Kosten wider. Der nächste Abschnitt gibt einen Überblick über die aktuell verwendeten Bremsscheibenmaterialien und deren Eigenschaften.

## 2.7 Bremsscheibenmaterial

Wie in den vorhergehenden Abschnitten beschrieben, ist die Bremsscheibe einer thermomechanischen Ermüdungsbelastung ausgesetzt [93]. Bei der Materialauswahl wird daher ein Werkstoff mit den für die Belastung entsprechenden Eigenschaften gewählt. Die Bremsscheibe sollte nach [96] zudem möglichst die folgenden Eigenschaften besitzen:

- hohe thermische Leitfähigkeit
- Korrosionsbeständigkeit
- geringes Gewicht
- geringe Geräusentwicklung
- geringer Verschleiß
- konstantes Reibverhalten
- lange Haltbarkeit
- gutes Preis-Leistungs-Verhältnis.

Größe	Einheit	Grauguss	Stahl	Al-MMC	CFC	C/SiC
Dichte	kg/dm <sup>3</sup>	7.25	7.8	2.85	1.8	2.45
Masse Scheibe	kg	11.16	12.00	4.39	2.77	3.77
Wärmespeichervermögen der Scheibe	kJ	5.08	5.08	1.68	5.32	4.37
spez. Wärmekapazität	kJ/dm <sup>3</sup>	3.30	3.30	1.09	3.46	2.84
Lebensdauer	km	60000	-	250000	20000	300000
Reibwert		0.45	-	0.4	0.5	0.55
Wärmedehnung	10 <sup>-6</sup> K <sup>-1</sup>	12	-	20	6	3.5
max. $\Delta T$ bis Rissbildung	K	125	-	185	2285	640
max. Einsatztemperatur	°C	700	730	450	1200	800

Tabelle 2.3: Vergleich verschiedener Bremsscheibenwerkstoffe nach [51].

Um diese Eigenschaften bestmöglich zu erzielen, sind im Laufe der Zeit eine Vielzahl von Materialzusammensetzungen entwickelt worden. Diese können entsprechend den Spezifikationen und benötigten Anforderungen in den einzelnen Bereichen höhere/niedrigere Eigenschaften besitzen. Dies führt dazu, dass heutzutage mehr als 2000 unterschiedliche Materialien [96] im kommerziellen Einsatz von Bremsscheiben vorhanden sind. Bereits im Jahre 1870 wurde Gusseisen und Stahl für die Verwendung im Schienenverkehr eingesetzt [107]. Gusseisen mit Lamellengraphit ist bis heute der dominierende Werkstoff für Bremsscheiben in Personen- und Lastkraftwagen geblieben. Gründe hierfür sind hauptsächlich die geringen Kosten bei gleichzeitig geeigneten mechanischen und thermischen Eigenschaften. Insbesondere zählt hierzu dessen gute thermische Leitfähigkeit, welche durch das Geflecht der eingebetteten Graphitlamellen begünstigt wird. Dies garantiert eine schnelle Verteilung der Wärme in der Bremsscheibe und verringert damit die thermischen Spannungen die durch hohe Temperaturgradienten entstehen würden. Zusätzlich besitzt dieser Werkstoff ein gutes Dämpfungsverhalten, was ebenfalls auf die Graphitkristalle zurückzuführen ist. Eine genaue Beschreibung der Eigenschaften dieses Werkstoffs wird in Kapitel 3, Übersicht der Eigenschaften des Werkstoffs Gusseisen gegeben. Bremsscheiben aus Gusseisen werden meist bei ‘standardmäßiger’ Belastung wie im Stadt und Regionalverkehr üblichen Geschwindigkeiten von bis zu 200 km/h eingesetzt. Vor allem bei Sportwagen, aber auch Oberklassefahrzeugen hat sich aufgrund der höheren Geschwindigkeiten und des steigenden Gewichts die kinetische Energie, die bei der Bremsung umgewandelt werden muss, seit 1950 mehr als verdoppelt [51]. Dies führt dazu, dass für diesen Einsatzbereich auch andere Werkstoffe zum Einsatz kommen. So sind bei Straßensportwagen teilweise Keramikbremsscheiben und faserverstärkte Keramikbremsscheiben im Einsatz. Im Rennsport und für den Einsatz in Flugzeugen werden Bremsscheiben aus kohlefaserverstärktem Kohlenstoff verwendet [51]. Die hohen Kosten für die Herstellung dieser Scheiben verhindert jedoch einen großflächigen Einsatz im Pkw/Lkw. Auch sind einige Eigenschaften für den alltäglichen Einsatz nicht von Vorteil. So müssen Bremsscheiben im Rennsport beispielsweise auf geeigneter Temperatur gehalten werden, um ihr Potential auszuschöpfen. In Tabelle 2.3 sind einige wichtige Parameter verschiedener Bremsscheibenmaterialien nach [51] aufgelistet. Keramik und faserverstärkte Scheiben zeichnen sich hierbei durch ihr deutlich geringeres Gewicht, bei gleichzeitig sehr guten Eigenschaften, aus. Der Werkstoff Gusseisen und dessen Eigenschaften werden im Folgenden genauer betrachtet.

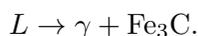


## 3 Übersicht der Eigenschaften des Werkstoffs Gusseisen

Gusseisen ist ein weitverbreitetes Material und wird in einer Vielzahl von industriellen Anwendungen und wie oben beschrieben auch als Bremsscheibenwerkstoff eingesetzt. Gründe hierfür liegen vor allem in der guten Bearbeitbarkeit, Gießbarkeit und der großen Spanne an Eigenschaften, die man bei vergleichsweise niedrigen Kosten erreichen kann. Die Kosten liegen hierbei circa 20-40 Prozent unter denen von Stahl [31]. Gusseisen besitzt ein perlitisches, ferritisches oder ferritisch-perlitisches Grundgefüge. Charakteristisch für das Material sind die im Grundgefüge eingelagerten Graphitkristalle. Eine Klassifizierung des Gusseisens kann anhand der Form, Größe und Anordnung des Graphits entsprechend der Norm DIN 945 [2] vorgenommen werden. Für die Form des Graphits wird zwischen sechs Kategorien unterschieden: von Form I welche eine reine lamellenartige Graphitausbildung beschreibt, über vermikularen Graphit der Form III bis hin zu Kugelgraphit der Form VI. Die Graphitformen werden zusätzlich anhand ihrer Größe klassifiziert und die Graphitform I wird entsprechend ihrer Anordnung in fünf weitere Klassen (A-D) unterschieden. In dem vorliegenden Kapitel wird ein Überblick über das Material Gusseisen gegeben. Hauptaugenmerk gilt dem in der Bremsscheibe vorhandenen Gusseisen mit Lamellengraphit (GJL, DIN EN 1561), in welchem lamellarer Graphit der Form I vorliegt. Der Fokus liegt auf den Bereichen, die für die Anwendung in der Bremsscheibe und die Durchführung dieser Arbeit relevant sind. Da der Erstarrungsprozess die Mikrostruktur des Gusseisens beeinflusst, wird dieser zuerst betrachtet. Mit Bezug auf die Mikrostruktur werden die mechanischen und thermischen Eigenschaften definiert. Zusätzlich werden Änderungen der Mikrostruktur, wie beispielsweise Oxidationsprozesse, welche im Zuge der thermischen und mechanischen Belastung der Bremsscheibe auftreten, beschrieben.

### 3.1 Erstarrung und Mikrostruktur

Gusseisen ist eine Eisen-Kohlenstoff-Legierung mit einem Kohlenstoffanteil von über 2 % [148]. Das FeC-Zustandsdiagramm (Eisen-Kohlenstoff-Diagramm) in Abbildung 3.1 zeigt in Abhängigkeit des Kohlenstoffanteils und der Temperatur die sich im Gleichgewicht befindlichen Phasen. Innerhalb des Diagramms wird zwischen dem stabilen (blau gestrichelt) und dem metastabilen (schwarze Linien) System unterschieden. Die beiden Systeme unterscheiden sich dahingehend, dass bei der Erstarrung nach dem metastabilen System anstelle der Graphitkristalle, Eisencarbid  $\text{Fe}_3\text{C}$  in der Mikrostruktur vorhanden ist [58]. Aus der Schmelze  $L$  bildet sich  $\gamma$ -Eisen und Eisencarbid  $\text{Fe}_3\text{C}$



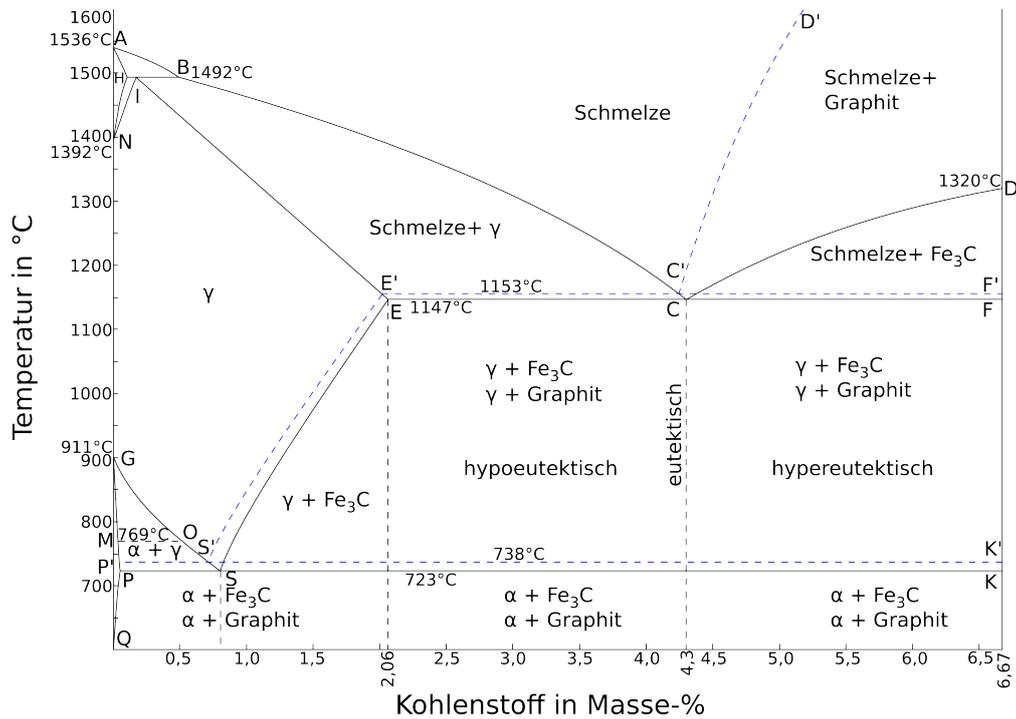


Abbildung 3.1: Eisen-Kohlenstoff-Zustandsdiagramm entsprechend [58]. Die blau gestrichelte Linie beschreibt dabei das stabile System und die schwarze durchgezogene Linie das metastabile System.

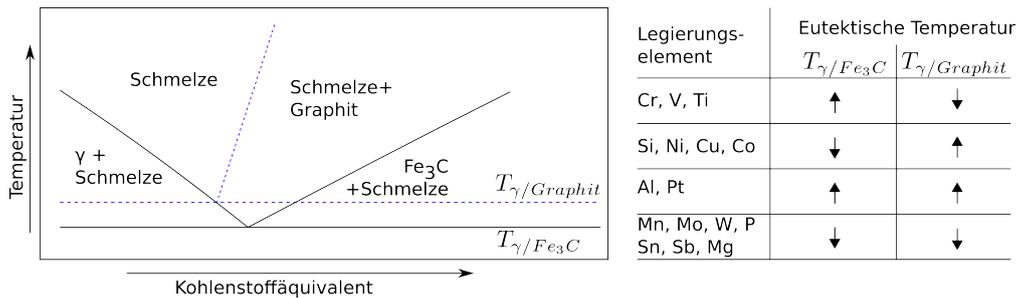
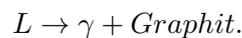


Abbildung 3.2: Einfluss der Legierungselemente auf die eutektische Temperatur  $T_{\gamma/Graphit}$  für das stabile und  $T_{\gamma/Fe_3C}$  des metastabilen Systems nach [136].

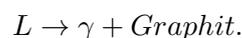
Graphitkristalle findet man demnach nur bei der stabilen Erstarrung



Entsprechend der Kohlenstoffkonzentration wird zwischen *hypoeutektischem*, *eutektischem* und *hypereutektischem* Gusseisen unterschieden. Die eutektische Zusammensetzung liegt für das metastabile System bei 4,3 Masse-% Kohlenstoff vor. Auch die eutektischen Temperaturen unterscheiden sich für die beiden Systeme geringfügig (1153 °C stabil, 1147 °C metastabil), wobei diese, wie aus Abbildung 3.2 zu entnehmen, von den Legierungselementen beeinflusst wird [136]. Im FeC-Zustandsdiagramm sind drei Untersysteme zu erkennen. Das *eutektische*, das *eutektoide* und das *peritektische* System. Für die Erstarrung von Gusseisen sind lediglich die beiden erstgenannten von Bedeutung [58]. Sie unterscheiden sich dadurch, dass das eutektische System den Erstarrungsprozess von der flüssigen Phase zur Festphase beschreibt während das eutektoide System eine Festphasentransformation beschreibt. Beginnend von der Schmelze, bildet die Nukleation den Anfang des Erstarrungsprozesses, bei der sich eine Phase aus der Schmelze bildet. Für die Nukleation wird zwischen der homogenen und der heterogenen Nukleation unterschieden. Bei kommerziellen Gießprozessen ist die Nukleation für die verschiedenen Gusseisentypen generell heterogen [103]. Hierbei bildet sich an der vorhandenen Oberfläche der Schmelze die neue Phase. Die homogene Nukleation kann in sehr reinen Schmelzen der Entstehungsmechanismus von Graphit sein, wo durch den Zusammenschluss von Atomen ein Nukleus entsteht [103]. An jedem Nukleus bildet sich eine eutektische Zelle, beziehungsweise, für den Fall des duktilen Gusseisens, eine Graphitkugel [45]. Das Verständnis für den genauen Nukleationsprozess war und ist Bestandteil ausgiebiger Studien [141].

Der Erstarrungsprozess von Gusseisen wird in zwei Umwandlungsbereiche unterteilt. Der erste Bereich ist definiert durch den Beginn der Erstarrung und dem Erreichen der eutektischen Temperatur. Innerhalb dieses Bereiches wird festgelegt, ob der Guss grau oder weiß erstarrt [58]. Die Ausbildung des Graphits wird zum größten Teil in diesem ersten Bereich definiert und ändert sich nur noch geringfügig im weiteren Erstarrungsprozess [6]. Der zweite Bereich, von der eutektischen Temperatur bis zur Raumtemperatur, definiert, ob sich die Matrix ferritisch, perlitisch oder ferritisch-perlitisch ausbildet [58].

Am Punkt C', der eutektischen Temperatur, bildet sich für Gusseisen mit Lamellengraphit das  $\gamma$ -Graphiteutektikum (siehe Abbildung 3.3)



Die Anzahl der eutektischen Zellen hängt stark von der Unterkühlung der Schmelze ab. Eine



Abbildung 3.3: Erstelltes Modell einer eutektischen Graphitzelle nach Minkoff [103].

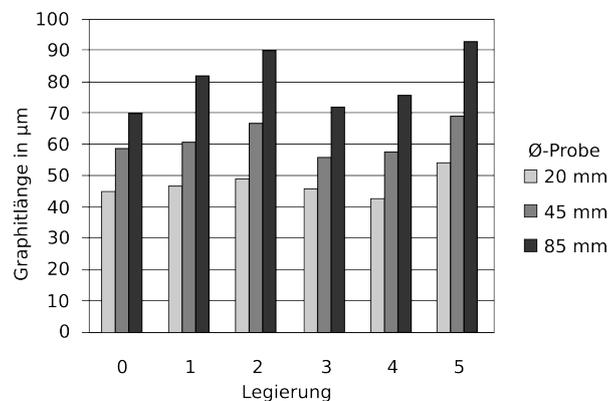
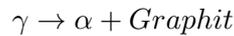


Abbildung 3.4: Einfluss der Abkühlgeschwindigkeit auf die Lamellenlänge fünf verschiedener Gusseisenlegierungen nach Svensson [143]. Die Erstarrungszeit wird über die Zylinderdurchmesser (20 mm, 45 mm, 85 mm) variiert. Die Graphitlamellenlänge variiert dabei zwischen 40 µm und 100 µm.

größere Menge an eutektischen Zellen kann beobachtet werden, wenn die Unterkühlung aufgrund einer höheren Abkühlgeschwindigkeit vergrößert wird. Dadurch verringert sich auch die Länge der im Gefüge vorhandenen Graphitlamellen. In Abbildung 3.4 sind Untersuchungen von Svensson und Sjögren [143, 133] zur Graphitlamellenlänge in Abhängigkeit der Materialdicke und somit der Abkühlgeschwindigkeit für unterschiedliche Gusseisenlegierungen dargestellt. Hierzu wurden Zylinderproben unterschiedlichen Durchmessers hergestellt, wodurch die Abkühlgeschwindigkeit variiert wurde und somit die Länge der Graphitlamellen. In den Zylinderproben mit großem Durchmesser ist somit aufgrund der geringeren Abkühlgeschwindigkeit ein Gefüge bestehend aus längeren Graphitlamellen vorhanden. Die Wachstumsgeschwindigkeit für die Erstarrung des eutektischen Graphits wird in [46] in Abhängigkeit des Grads der Unterkühlung  $\Delta T$  und des Koeffizienten  $\mu_G$  über  $u = \mu \Delta T^2$  angegeben. Der Koeffizient  $\mu$  hängt über  $\mu_G = 10^{-6}(9,2 - 6,3\text{Si}^{0,25})(\text{cm}/^\circ\text{C}^2\text{s})$  vom Siliziumanteil ab. Ist die Abkühlgeschwindigkeit maximal, sodass die Temperatur unter die des metastabilen Systems fällt, bildet sich Eisencarbid ( $\text{Fe}_3\text{C}$ ). Dieser Vorgang wird Weißerstarung genannt [136]. Die Anordnung der eutektischen Struktur des Graphits, hängt ebenfalls vom Grad der Unterkühlung ab. Während

Typ-A-Graphit bei niedriger Unterkühlung auftritt, tritt Typ D bei starker Unterkühlung auf [45]. Graphit vom Typ D hat aufgrund kristallographischer Fehler eine hohe Anzahl an Verzweigungen [45]. Im weiteren Abkühlvorgang verarmt das  $\gamma$ -Eisen an Kohlenstoff und Sekundärgraphit wird ausgeschieden. Bei Erreichen der eutektoiden Temperatur wandelt sich Austenit in  $\alpha$ -Eisen und eutektoiden Graphit



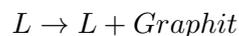
um. Der eutektoide Graphit lagert sich an den bereits im Gefüge vorhandenen Graphit an [6]. Die Mikrostruktur des Gusseisen bei Raumtemperatur besteht aus dem Graphiteutektikum und eutektoidem  $\alpha$ -Eisen.

Bei der Erstarrung von *hypoeutektischem* Gusseisen, nach dem stabilen System, bilden sich nach Überschreitung der B-C' Linie, Kristalle des primär  $\gamma$ -Eisens



Da das  $\gamma$ -Eisen einen geringen Kohlenstoffanteil besitzt, wird die verbleibende Schmelze mit Kohlenstoff angereichert, bis sie am eutektischen Punkt C' erstarrt. Der weitere Erstarrungsvorgang entspricht wieder dem der eutektischen Erstarrung.

*Hypereutektisches* Gusseisen verhält sich wie hypoeutektisches Gusseisen, mit dem Unterschied, dass beim Erreichen der Linie C'-D' Primärgraphit



entsteht, was zu einer Verarmung der Schmelze an Kohlenstoff führt. Am Punkt C' bildet sich wiederum das Eutektikum und die weitere Erstarrung erfolgt analog zur eutektischen Erstarrung.

Neben dem Kohlenstoffanteil beeinflussen vor allem die Legierungselemente Silizium und Phosphor die Erstarrung des Gusseisens. Für den Silizium- und Phosphorgehalt wird ein Kohlenstoffäquivalent (carbon equivalent, *CE*) definiert [54]:

$$CE = \text{KohlenstoffMasse} - \% + \frac{\text{SiliziumMasse} - \% + \text{PhosphorMasse} - \%}{3} \quad (3.1)$$

Für kommerzielle Gusseisen wird dieser Wert anstelle des eigentlichen Kohlenstoffanteils verwendet. Generell gilt, je niedriger der CE-Wert, desto höher ist die Tendenz des Gusseisens weiß zu erstarren [6].

In Abhängigkeit der Abkühlgeschwindigkeit kann die Matrix aus Ferrit, Perlit oder Martensit bestehen. Wie erwähnt, bildet sich bei der stabilen Erstarrung Graphit anstelle des Eisencarbids. Aus der Tatsache, dass Gusseisen mit Lamellengraphit meist eine perlitische Matrix aufweist, lässt sich schließen, dass eine kombinierte Erstarrung nach dem stabilen und dem metastabilen System stattfindet [58].

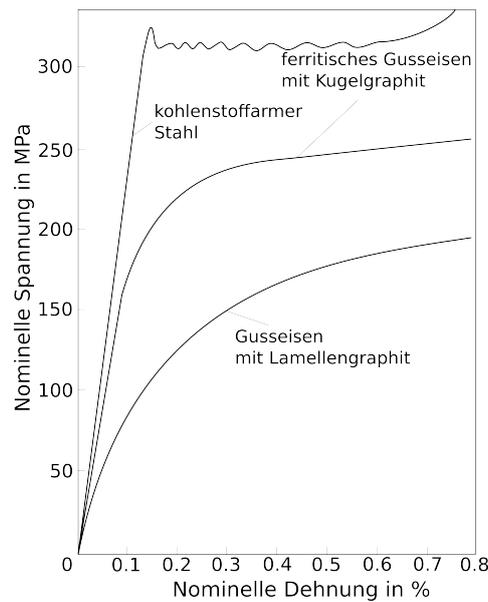


Abbildung 3.5: Vergleich der Spannungs-Dehnungs-Diagramme von Stahl, GJS und GJL entsprechend [6]. Während Gusseisen mit Kugelgraphit einen deutlichen linear elastischen Bereich aufweist, ist der Verlauf der Kennlinie des Gusseisens mit Lamellengraphit bereits vom Ursprung aus nichtlinear.

## 3.2 Mechanische und thermische Eigenschaften von Gusseisen

Die Eigenschaften von Gusseisen hängen ganz wesentlich von der Struktur des Materials ab. Ein Vergleich der Spannungs-Dehnungs-Diagramme im Zugversuch der Gusseisensorten GJL (lamellarer Graphit) und GJS (Kugelgraphit) in Abbildung 3.5 zeigt den deutlichen Einfluss der Graphitbildung auf die mechanischen Eigenschaften des Materials. Es wird deutlich, dass Gusseisen mit Lamellengraphit für den Elastizitätsmodul, die Zugfestigkeit sowie die Bruchdehnung, merklich geringere Werte aufweist als GJS. Die Eigenschaften von GJV mit Vermikulargraphit liegen zwischen denen des GJL und GJS. Allerdings ist auch innerhalb der Gusseisenklassen eine große Variation der Eigenschaften möglich. Um den Einfluss der Mikrostruktur, respektive der Inhomogenitäten, auf die Eigenschaften des heterogenen Materials zu verstehen, sind zunächst die Eigenschaften der Gefügebestandteile zu bestimmen. Im Folgenden wird hierbei vor allem auf die beiden Bestandteile Graphit und perlitische Matrix eingegangen, da diese die Haupteinflussfaktoren darstellen.

### 3.2.1 Graphit

Die mechanischen wie auch thermischen Eigenschaften des Gusseisens werden sehr stark durch die Graphitkristalle und somit der Struktur des Graphits beeinflusst. Aus diesem Grund wird zunächst dessen Aufbau behandelt.

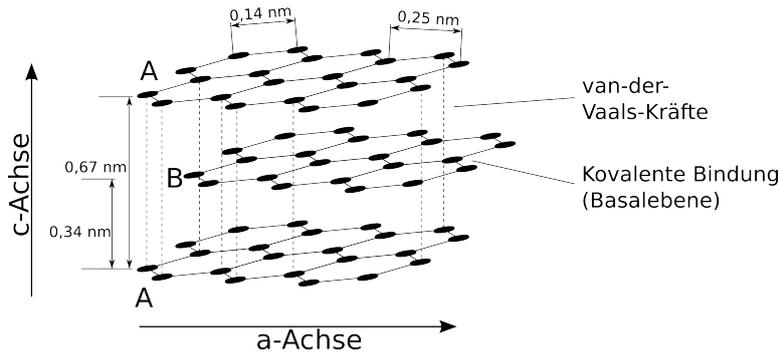


Abbildung 3.6: Aufbau eines hexagonalen Graphitkristalls mit einer ABAB... Anordnung der Kohlenstoffschichten in Richtung der c-Achse. Starke kovalente Bindungen innerhalb der Basalebene und schwache Van-der-Waals-Bindungen zwischen den Basalebene.

### Struktur

Hexagonaler Graphit besteht wie in Abbildung 3.6 dargestellt aus einem schichtweisen Aufbau mit einer ABABA-Schichtanordnung. Die hexagonale Anordnung ist für den Temperaturbereich von  $T < 2000^\circ\text{C}$  und einen Druckbereich von  $P < 1,3 \cdot 10^{10}$  Pa die thermodynamisch stabile Anordnung [79]. Graphit besitzt innerhalb der Basalebene (Abbildung 3.6) starke kovalente Bindungen der Kohlenstoffatome. Die Bindungsenergie innerhalb dieser Ebene beträgt nach [66] circa 150-170 kcal/[g-Atom]. Die Basalebene sind wiederum über deutlich schwächere van-der-Waals-Kräfte (in [120] werden auch metallische Bindungen anstelle der Van-der-Waals-Bindungen beschrieben) verbunden. Deren Bindungsenergie ist mit 1,3-4 kcal/[g-Atom] [66] deutlich geringer als innerhalb der Basalebene. Die heterodesmische Struktur des Graphits resultiert in großen Unterschieden der elastischen Eigenschaften und der Versagensmechanismen in den verschiedenen Richtungen [73].

### Mechanische Eigenschaften

Aufgrund des schichtweisen Aufbaus sind die elastischen Eigenschaften transversal isotrop. Die Basalebene bildet dabei die transversal isotrope Ebene. Der Steifigkeitstensor in der Voigt-Notation wird über fünf unabhängige elastische Konstanten definiert:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{44} & 0 \\ \text{sym.} & & & & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

In Tabelle 3.1 sind Werte der unabhängigen Konstanten für einen perfekten Graphitkristall aus [73] und [110] aufgelistet. Weitere Literatur berücksichtigt die transversale Isotropie meist nicht, und reduziert die elastischen Eigenschaften auf den Elastizitätsmodul und die Querkontraktion zur Parametrisierung des Graphits. In diesen Fällen ist nicht von einem einzelnen Graphitkristall auszugehen. In [112] wird eine Querkontraktion von 0,126 angegeben und für den Elastizitätsmodul wird zwischen den zwei Graphitmorphologien, Lamelle

	Kelly et al. [73]	Pascal et al. [110]	Einheit
$C_{11}$	$106 \pm 2$	$112,6 \pm 22$	$10^4$ MPa
$C_{12}$	$18 \pm 2$	$200 \pm 20$	$10^4$ MPa
$C_{13}$	$1,5 \pm 0,5$	$39,5 \pm 40$	$10^4$ MPa
$C_{33}$	$3,65 \pm 0,1$	$40,7 \pm 1,1$	$10^4$ MPa
$C_{44}$	0.45	$4,51 \pm 0,5$ or $0,18 - 0,45$	$10^4$ MPa

Tabelle 3.1: Werte des Steifigkeitstensors nach [73] und [110].

und Kugel, unterschieden. Für Lamellengraphit wird ein E-Modul von 50000 MPa und für Kugelgraphit 28000 MPa gemessen. In der Arbeit von Schmauder [127] zur Simulation von Gusseisenmikrostrukturen werden die Graphitkristalle als linearelastische Größe betrachtet. Die angegebenen elastischen Parameter variieren für den E-Modul zwischen  $E_G = 1340 - 25000$  MPa und die Querkontraktion zwischen  $\nu_G = 0,14 - 0,29$ . In [132] wird der Elastizitätsmodul des Graphits als Funktion der Nodularität mit

$$E_G = 0,173 \text{ Nodularität} + 18,9$$

angegeben. Für Lamellengraphit wird die Nodularität mit -100 % angenommen, was in einem Elastizitätsmodul von 1,6 GPa resultiert. Für Kugelgraphit mit einer Nodularität von 100 % ergibt sich ein Wert von 36,2 GPa. Generell kann zusammengefasst werden, dass es einen breiten Satz an Daten für die elastischen Eigenschaften von Graphit gibt. Es zeigt sich jedoch auch, dass die angegebenen Werte teilweise stark voneinander abweichen.

Aufgrund der schwachen Bindung in c-Richtung (siehe Abbildung 3.6) findet bei Belastung in diese Richtung eine Spaltung des Graphits entlang der Basalebene statt [79]. Werte für die Festigkeit gegenüber eines Spaltbruchs werden in [130] zusammengefasst. Der theoretisch berechnete Wert von Gilman's liegt demnach bei circa  $K_{IC} = 0,03 \text{ MPa m}^{1/2}$  während Sakai et al. Werte von circa  $K_{IC} = 0,53 \text{ MPa m}^{1/2}$  experimentell bestimmt haben [79]. Die große Differenz wird auf die unterschiedlichen Randbedingungen zurückgeführt. Während die theoretischen Berechnungen von einem quasi-statischen Gleichgewichtsmodell ausgehen, werden die Messungen von Sakai et al. an einem dynamischen Prozess durchgeführt. Trotz der starken Abweichung lässt sich zusammenfassen, dass der Wert von  $K_{IC}$  geringer als  $1 \text{ MPa m}^{1/2}$  ist. Die Spaltung der schichtweisen Struktur des Graphits ist somit ein einfacher Prozess [130].

Die schwache Bindung orthogonal zur Basalebene und die dadurch einfache Spaltbarkeit des Graphits resultiert darin, dass durch den Graphit kaum Zugbelastungen aufgenommen werden können. Ein genauer Wert für die Zugfestigkeit von spröden Materialien wie Graphit lässt sich experimentell nur schwer bestimmen, da diese sehr sensitiv auf kleinste Fehlstellen innerhalb des Materials reagieren. Experimentelle Daten für die Zugfestigkeit eines einzelnen Graphitkristalls orthogonal zur Basalebene sind in der gesichteten Literatur nicht angegeben. Für polykristallinen Graphit sind in [66] Werte für die Zugfestigkeit von 13,8 MPa bis 68,9 MPa angegeben und von Kelly [73] Werte von 10 MPa bis 30 MPa. Für das selbe Material ist die Druckfestigkeit unter ähnlichen Bedingungen um den Faktor 3-4 höher [73].

### Thermische Eigenschaften

Neben den mechanischen Eigenschaften werden auch die thermischen Eigenschaften durch

den charakteristischen Aufbau des Graphits beeinflusst. Die thermische Leitfähigkeit genau wie die thermische Ausdehnung des Materials unterscheiden sich innerhalb der Basalebene (a-Richtung) und orthogonal zur Basalebene (c-Richtung) deutlich.

Für die thermische Ausdehnung in c-Richtung  $\alpha_{\perp}$  wird in [73] folgende Beziehung angegeben:

$$\alpha_{\perp} = 27 * 10^{-6} \text{K}^{-1} + 3,05 * 10^{-9} (\Theta - 273 \text{K}) \text{K}^{-2}. \quad (3.3)$$

Innerhalb der Basalebene wird der Ausdehnungskoeffizient  $\alpha_{\parallel}$  in drei Temperaturintervalle aufgeteilt. Bis zu einer Temperatur von circa 400 °C kontrahiert der Graphit leicht, wo er dann in eine neutrale Ausdehnung übergeht. Ab 400 °C beginnt der Graphit sich innerhalb der Basalebene auszudehnen. Zusammengefasst ergeben sich für  $\alpha_{\parallel}$  folgende Eigenschaften.

$$\alpha_{\parallel} = \begin{cases} -1,5 * 10^{-6} / \text{K} & 0^{\circ}\text{C} \leq T \leq 150^{\circ}\text{C} \\ 0 & T = 400^{\circ}\text{C} \\ 0,9 * 10^{-6} / \text{K} & 600^{\circ}\text{C} \leq T \leq 800^{\circ}\text{C} \end{cases}$$

Genau wie der Elastizitätsmodul ist auch die thermische Leitfähigkeit des Graphits innerhalb der Basalebene deutlich höher als in c-Richtung und somit transversal isotrop. Zur Definition des tensoriellen Wärmeleitkoeffizienten  $\lambda$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\perp} \end{pmatrix}$$

sind die beiden Parameter  $\lambda_{\perp}$  und  $\lambda_{\parallel}$  notwendig. Diese ergeben sich aus den Kennlinien in [73] zu  $\lambda_{\perp} \approx 4,2 \text{ W/mK}$  und  $\lambda_{\parallel} \approx 196 \text{ W/mK}$  bzw. nach [135] zu  $\lambda_{\parallel} = 140$  bis  $500 \text{ W/mK}$  und  $\lambda_{\perp} = 3$  bis  $10 \text{ W/mK}$ . Die spezifische Wärmekapazität kann ebenfalls aus [73, 135] entnommen werden und ergibt sich bei Raumtemperatur zu  $c_{v,G} = 846$  bis  $857 \text{ J/kgK}$ .

Der größte Teil des Gusseisens besteht aus der Matrix in der die Graphitkristalle eingebettet sind. Aus diesem Grund werden die Eigenschaften stark von diesem Gefügebestandteil beeinflusst. Im Folgenden werden die Eigenschaften des Perlits, welche für die Durchführung diese Arbeit notwendig sind, beschrieben.

### 3.2.2 Perlitische Matrix

Für das perlitische Grundgefüge des Gusseisens wird wie auch für den Graphit zunächst dessen Struktur berücksichtigt, bevor die daraus resultierenden Eigenschaften behandelt werden.

#### Struktur

Perlit bildet das Grundgefüge, die sogenannte *Matrix*, des in dieser Arbeit behandelten grauen Gusseisens und entsteht bei der eutektoiden Umwandlung des Austenits, Abbildung 3.7, a). Ein plattenförmiger  $\text{Fe}_3\text{C}$ -Kristall, der sich an der Austenit-Korngrenze bildet, dient als Keim für die Umwandlung [58]. Der homogene Austenit besitzt bei der Umwandlung einen Kohlenstoffanteil von 0,8 Masse-% C.  $\text{Fe}_3\text{C}$  hat mit 6,67 Masse-% C einen hohen Kohlenstoffanteil, was zur Verarmung des angrenzenden Austenitbereichs führt, wo sich  $\alpha$ -Eisen mit einem C-Gehalt

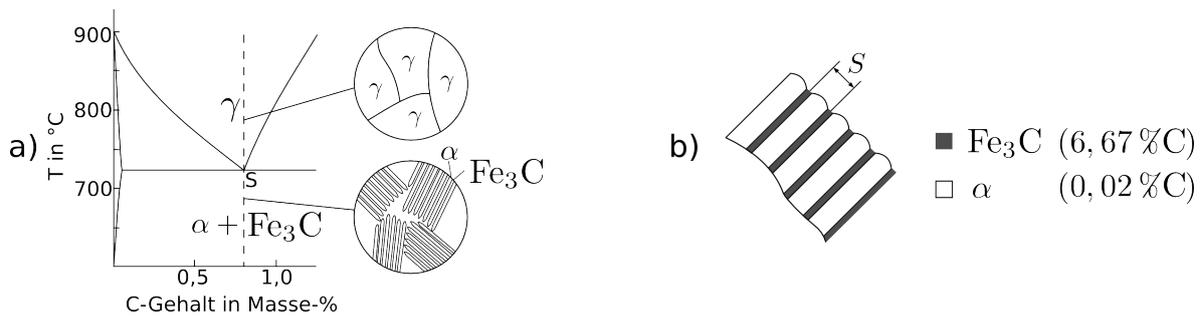


Abbildung 3.7: a) Entstehung des lamellaren perlitischen Gefüges bei der eutektoiden Umwandlung des Austenits und b), Darstellung des interlamellaren Abstands  $S$  zwischen den Austenit und Zementit Lamellen.

von 0,02 Masse-% C bildet. Die daraus resultierende Anreicherung an Kohlenstoff begünstigt wiederum die Bildung von Zementit, was zu dem lamellaren Aufbau des Perlits führt [48]. Während das Verhältnis von Zementit zu Ferrit über die Kohlenstoffanteile zu 88,3 %  $\text{Fe}_3\text{C}$  und 11,7% Ferrit definiert ist, variiert der interlamellare Abstand  $S$  aus Abbildung 3.7, b) des Perlits je nach Wärmebehandlung und Korngröße des austenitischen Gefüges.

Für geringe interlamellare Abstände wird von feinstreifigem (50 nm - 200 nm [21]) und sehr feinstreifigem Perlit gesprochen. Der interlamellare Abstand bestimmt auch zu großen Teilen die Eigenschaften des Perlits.

### Mechanische Eigenschaften

Während die elastischen Eigenschaften der beiden Bestandteile, Ferrit und Zementit, nahezu identisch sind, unterscheiden sie sich deutlich in den plastischen und bruchmechanischen Kenngrößen [111]. Dies führt dazu, dass bei Betrachtung einer einzelnen Perlitkolonie eine Anisotropie zu beobachten ist [111, 151]. Aus makroskopischer Sicht kommt die Anisotropie aufgrund der Vielzahl an Perlitkolinien innerhalb des Gefüges und deren unterschiedlichen Orientierungen [83] nicht zum Tragen. Das perlitische Grundgefüge kann daher aus makroskopischer Sicht als isotropes homogenes Gefüge betrachtet werden, bei dem nur der Einfluss des interlamellaren Abstands  $S$  sowie die Korngröße als Einflussfaktoren auf die Eigenschaften berücksichtigt werden. Die mechanischen Eigenschaften des Perlits sind im Vergleich zu denen des Graphits duktil, was sich durch eine ausgeprägte plastische Deformation vor dem Versagen widerspiegelt. Der Elastizitätsmodul beträgt unabhängig von der Mikrostruktur die für Stahl üblichen  $E \approx 210000$  MPa. Streckgrenze, Zugfestigkeit sowie die Bruchdehnung sind jedoch stark von der Struktur, genauer dem interlamellaren Abstand  $S$  des Perlits sowie der Korngröße abhängig. Nach Sjoergen [132] hängt die Festigkeit zu 41 % vom interlamellaren Abstand, zu 15 % von der Perlitkoloniegröße und zu 44 % von Legierungselementen ab. Modi et al. [104] hat diese Eigenschaften für unterschiedliche Abstände  $S$  untersucht. Die Ergebnisse sind für interlamellare Abstände von  $542 \mu\text{m} \leq S \leq 785 \mu\text{m}$  angegeben und im Diagramm 3.8 über die Inverse der quadratischen Wurzel des interlamellaren Abstands  $S^{-1/2}$  dargestellt. Für die Streckgrenze  $\sigma_y$  und die Vickershärte  $H_V$  von Perlit ergibt sich ein linearer Zusammenhang zu  $S^{-1/2}$  welche über die Hall-Petch-Beziehungen

$$H_V = H_{V,0} + K_h S^{-1/2} = 100 + 4,01 \text{mm}^{1/2} S^{-1/2}$$

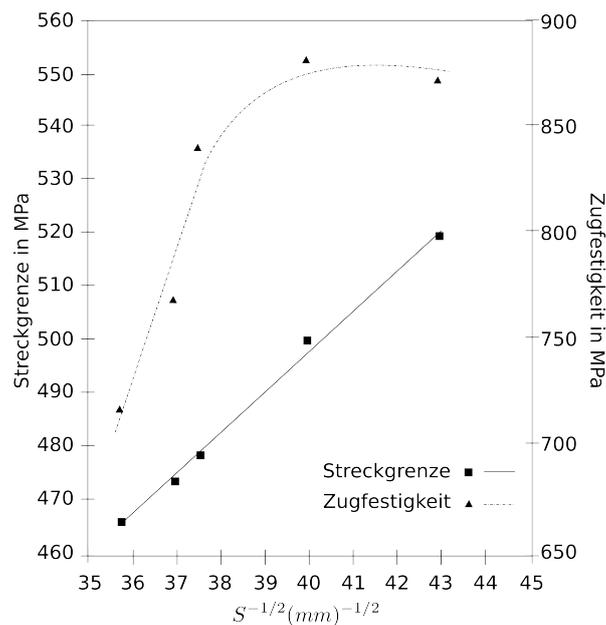


Abbildung 3.8: Abhängigkeit der Streckgrenze und Zugfestigkeit von Perlit vom interlamellaren Abstand  $S$  nach Modi et al. [104].

und

$$\sigma_y = \sigma_{y,0} + K_y S^{-1/2} = 197,5 + 7,5 \text{mm}^{1/2} S^{-1/2}$$

beschrieben werden [104].

### Mechanische Eigenschaften bei erhöhten Temperaturen

Wie beschrieben, sind die Materialeigenschaften der Matrix stark abhängig von der Perlitkolloniegroße und dem interlamellaren Abstand. Aus diesem Grund ist es nahezu unmöglich, genaue Werte für das verwendete Matrixmaterial bei erhöhten Temperaturen zu finden. Es ist daher zweckmäßig, auf verallgemeinerte Verhältnismäßigkeiten zurückzugreifen. In der Literatur lassen sich für Baustähle sogenannte Abminderungsfaktoren für den Elastizitätsmodul und die Streckgrenze finden, welche hauptsächlich für die Anwendung im Brandschutz ermittelt werden. Als Quelle für die Abminderungsfaktoren dienen das europäische Regelwerk für Vermessung im Bauwesen - *Eurocode 3* [3], die amerikanische Norm für Bauingenieurwissenschaften *ASCE Manual* [125] (american society of civil engineering) sowie die Daten von Chen et al. [29]. Der Abminderungsfaktor gibt das Verhältnis  $\frac{E(T)}{E(20^\circ\text{C})}$  bzw.  $\frac{\sigma_y(T)}{\sigma_y(20^\circ\text{C})}$  an. In Tabelle 3.2 sind die Abminderungsfaktoren entsprechend den angegebenen Quellen bis zu einer Temperatur von  $540^\circ\text{C}$  aufgelistet.

### Thermische Eigenschaften

Für die thermischen Eigenschaften ergeben sich nach [6] für die perlitische Matrix die Wärmeleitfähigkeit

$$\lambda = 44 \frac{\text{W}}{\text{mK}}$$

T in °C	Eurocode3 [3]		ASCE Manual [125]		Chen et al. [29]	
	$\frac{E(T)}{E(20^\circ\text{C})}$	$\frac{\sigma_f(T)}{\sigma_f 20^\circ\text{C}}$	$\frac{E(T)}{E(20^\circ\text{C})}$	$\frac{\sigma_f(T)}{\sigma_f 20^\circ\text{C}}$	$\frac{E(T)}{E(20^\circ\text{C})}$	$\frac{\sigma_y(T)}{\sigma_y 20^\circ\text{C}}$
20	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
240	0,98	0,89	0,86	1,0	0,92	0,86
440	0,94	0,80	0,66	0,91	0,75	0,64
540	0,87	0,75	0,48	0,65	0,62	0,48

Tabelle 3.2: Abminderungsfaktoren des Elastizitätsmoduls und der Streckgrenze für den Temperaturbereich 20 °C - 540 °C nach [3, 125, 29]

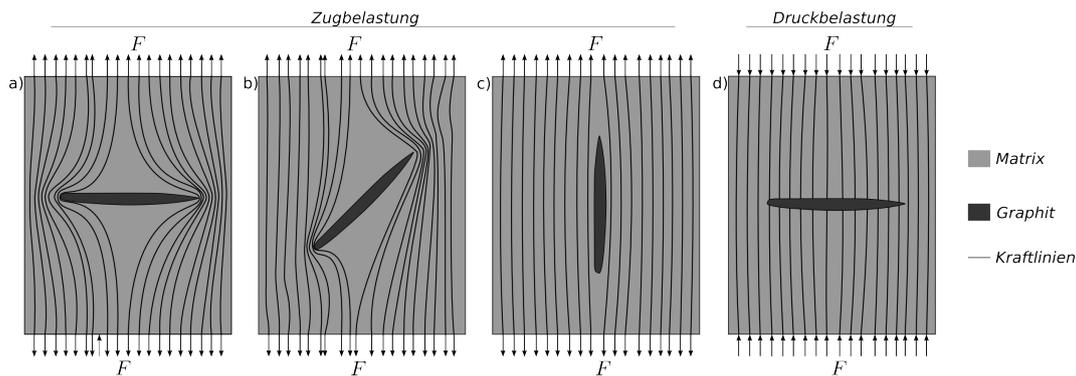


Abbildung 3.9: Verlauf der Kraftlinien durch das Gusseisen entsprechend der Orientierung der Graphitlamelle bei Zugbelastung nach [92] (a-c) und idealisierte Darstellung der Kraftlinien bei Druckbelastung (d). Entsprechend der Orientierung wird der Kraftfluss durch das Gefüge mehr (a) oder weniger (c) behindert.

und die spezifische Wärmekapazität

$$c_v = 548 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}.$$

Mit dem Wissen über die mechanischen und thermischen Eigenschaften der beiden Gefügebestandteile, Perlit und Graphit, wird das charakteristische Verhalten von Gusseisen mit Lamellengraphit und dessen Unterschiede zu den anderen Gusseisensorten erklärt. Inhomogenitäten mit stark abweichenden elastischen Eigenschaften im Vergleich zum Matrixwerkstoff führen bei Belastung zu einer ungleichmäßigen Spannungsverteilung innerhalb des Materials. Graphit kann orthogonal zur Basalebene nur sehr geringen Belastungen standhalten, was zu einer inneren Kerbwirkung führt wodurch kein homogener Kraftfluss durch den Querschnitt des Materials, gegeben ist. Die Kerbwirkung wird für den Übergang von einer Kugelform hin zur Lamellenform stärker, woraus sich die Abminderung der mechanischen Eigenschaften wie sie in Abbildung 3.5 dargestellt sind, erklärt. Die Kerbwirkung ist je nach Orientierung der Graphitlamelle und der Belastungsrichtung unterschiedlich, was durch den Verlauf der Kraftlinien in Abbildung 3.9 verdeutlicht wird. Die für diese Belastung ungünstig orientierte Lamelle auf der linken Seite (a) reduziert den effektiv belastbaren Querschnitt des Materials und führt zu einer Konzentration der Kraftlinien an den Enden der Lamelle. An diesen Stellen ergeben sich Spannungsüberhöhungen. Im Vergleich dazu ist der Einfluss auf den Kraftfluss der rechten Lamelle (c) zu vernachlässigen. Auch ergibt sich durch diese Anordnung keine

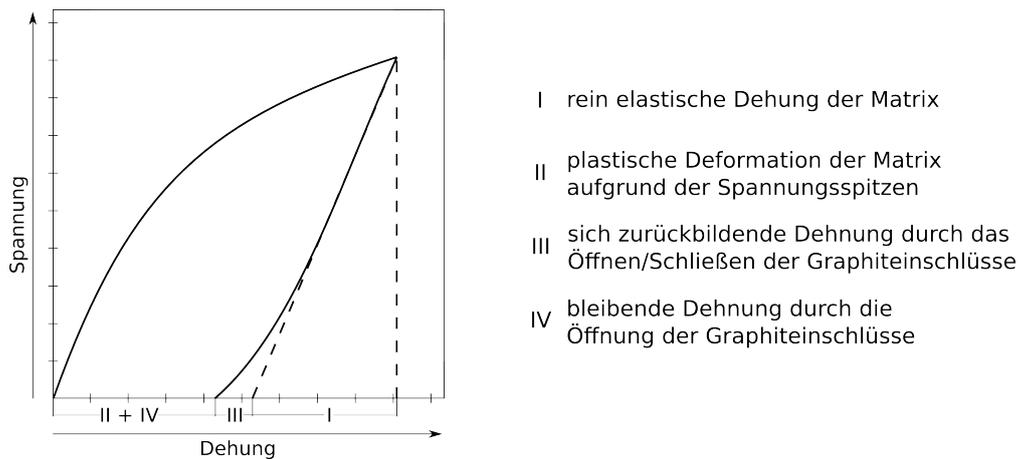


Abbildung 3.10: Dehnungskomponenten bei Be- und Entlastung eines Gusseisens mit Lamellengraphit mit den vier unterschiedlichen Dehnungsanteilen nach [6].

verstärkende Wirkung des Graphits, welche aus den hohen mechanischen Eigenschaften eines idealen Graphitkristalls hervorgehen könnte. Im realen Gefüge sind Fehlstellen und Einschlüsse vorhanden, die dessen Eigenschaften mindern. Zudem kann es zu Ablöseerscheinungen an der Grenzfläche zwischen Graphit und Matrix kommen, wodurch keine Zugkräfte mehr übertragen werden. Für die Spannung, die zu einer Grenzflächenablösung führt, wird in [158] ein Wert von 80 MPa angegeben. Durch die stark unterschiedlichen Ausdehnungskoeffizienten der beiden Gefügebestandteile Graphit/Matrix kann davon ausgegangen werden, dass bereits aufgrund der Eigendehnung beim Abkühlvorgang hohe Spannungen an der Grenzfläche Graphit-Matrix entstehen [17]. Zusätzlich entstehen durch die Volumenänderung bei der eutektoiden Umwandlung des Austenits Spannungen [53]. Daraus lässt sich schließen, dass der Graphit lediglich bei Druckbelastung orthogonal zur Basalebene Kräfte aufnimmt. Der Effekt des Graphits beschränkt sich daher auf die starke Kerbwirkung, die sich aus dem Aufklaffen der Graphitlamellen orthogonal zur Basalebene bei Zugbelastung ergibt. Durch die Kerbwirkung entstehen an den Enden der Graphitlamellen hohe Spannungen in der perlitischen Matrix, welche zu einer lokalen plastischen Verformung führen. Die lokalen plastischen Dehnungen und das Aufklaffen der Graphitlamellen tragen beide zu dem charakteristischen Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie des grauen Gusseisens bei. So setzt sich die Kennlinie nach Angus [6] aus den vier Dehnungskomponenten

- elastische Dehnung der Matrix (I)
- plastische Deformation der Matrix aufgrund der Spannungsspitzen (II)
- zurückbildende Dehnung durch das Öffnen/Schließen der Graphiteinschlüsse (III)
- bleibende Dehnung durch aufklaffende Graphiteinschlüsse (IV)

zusammen, die in Abbildung 3.10 dargestellt sind. Die Beiträge durch das Öffnen und Schließen der Graphitlamellen bilden hierbei eine Besonderheit für Gusseisen mit Lamellengraphit. Das teilweise Schließen der Graphitkavitäten bei Lastabnahme und das komplette Schließen bei Lastumkehr wenn die Basalebenen der Graphitlamellen gegeneinander gepresst werden, führt außerdem dazu, dass sich das Verhalten von Gusseisen mit Lamellengraphit beim einachsigen

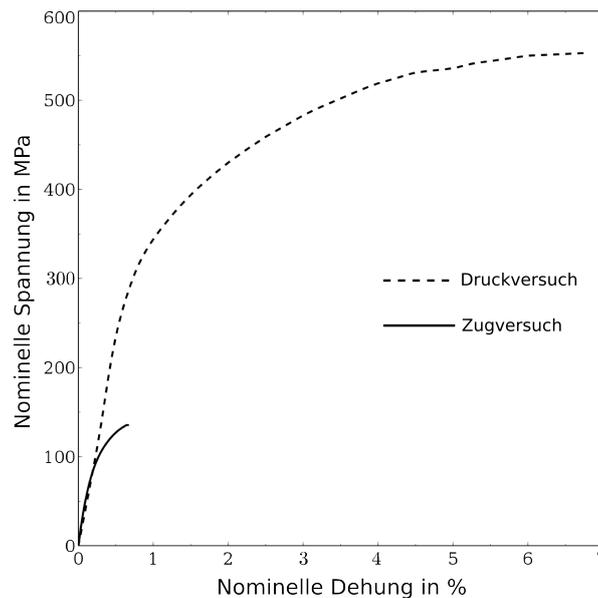


Abbildung 3.11: Experimentelle Zug- und Druckversuche eines Gusseisens mit Lamellengraphit der Daimler AG. Der Druckversuch wird zur Verdeutlichung des Unterschieds zwischen Zug- und Druckkennlinie in den Zugbereich projiziert. Der Zugversuch weist ein sprödes Materialverhalten auf, während für den Druckbereich eine ausgeprägte plastische Verformung zu beobachten ist.

Zug- und Druckversuch deutlich unterscheidet. Der bei Druck ermöglichte Kraftfluss, welcher in Abbildung 3.9, d idealisiert dargestellt wird, hat die Folge, dass im Druckbereich deutlich höhere Belastungen aufgenommen werden können. Abbildung 3.11 mit den beiden Kennlinien verdeutlicht dies. Während bei Zug eine Festigkeit von circa 135 MPa erreicht wird, sind es bei Druck Werte von circa 500 MPa. Zudem weist Gusseisen mit Lamellengraphit bei Druckbelastung ein duktileres Verformungsverhalten auf und eine deutlich höhere Bruchdehnung. Das Verhalten unter Zug ist mit einer Bruchdehnung unter einem Prozent und einer geringen plastischen Verformung als spröde anzusehen. Für einen einzelnen lamellaren Graphiteinschluss ist aus Abbildung 3.9 ersichtlich, dass sich aufgrund des Kraftflusses ein anisotropes Verhalten des Materials einstellen wird. Diese Anisotropie spiegelt sich jedoch nicht in den makroskopischen Eigenschaften des Gusseisens wieder. Die Vielzahl an Lamellen mit ihren zufälligen Orientierungen innerhalb des Gusseisens führt dazu, dass es nahezu isotropes mechanisches Verhalten aufweist.

### 3.2.3 Elastizitätsmodul von Gusseisen mit Lamellengraphit

Der Elastizitätsmodul  $E$  beschreibt standardmäßig im eindimensionalen Hook'schen Gesetz  $\sigma = E\epsilon$ , das lineare Verhältnis von Spannung  $\sigma$  zu Dehnung  $\epsilon$  (siehe Kapitel 6, Kontinuumsmechanik). Betrachtet man wiederum die Kennlinien von Stahl, duktilem Gusseisen und Gusseisen mit Lamellengraphit in Abbildung 3.5 so wird der Einfluss der Mikrostruktur auf den elastischen Bereich der Spannungs-Dehnungs-Kennlinien deutlich. Für Stahl und duktilem Gusseisen ist der anfängliche lineare Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie deutlich

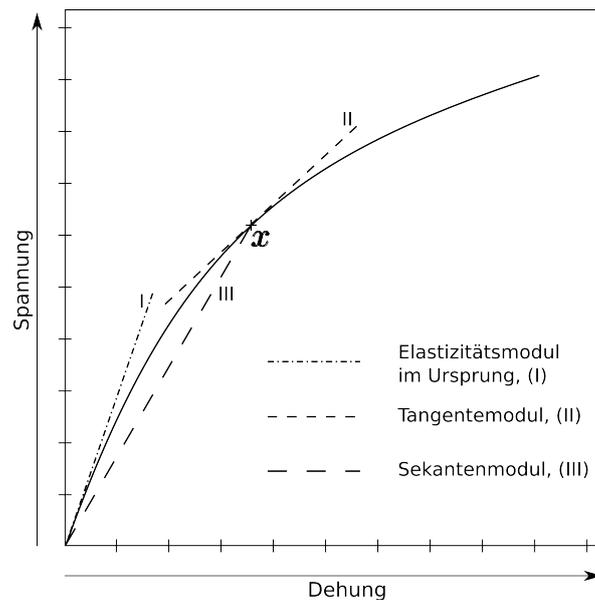


Abbildung 3.12: Darstellung des Elastizitätsmoduls im Ursprung (I), des Tangentenmoduls (II) und des Sekantenmoduls (III).

zu erkennen. Aus dem Spannungs-Dehnungs-Verhältnis des Gusseisens mit Lamellengraphit wird ersichtlich, dass sich die Steigung kontinuierlich ändert und somit kein linearelastisches Verhalten beobachtet werden kann. Es kann in diesem Fall nicht von einem E-Modul im eigentlichen Sinn gesprochen werden [105], weshalb in [42] die in Abbildung 3.12 dargestellten alternativen Kennwerte beschrieben werden.

- **Elastizitätsmodul  $E_0$  im Ursprung, I in Abbildung 3.12**

Wie bei der generellen Definition des Elastizitätsmoduls wird die Steigung im Ursprung der Kennlinie als Elastizitätsmodul verwendet. Im Unterschied zu duktilem Gusseisen liegt diese Steigung bei Gusseisen mit Lamellengraphit jedoch tatsächlich nur in einem sehr kleinen Bereich vor.

- **Tangentenmodul, II in Abbildung 3.12**

Der Tangentenmodul ist gegeben über die Steigung der Tangente an einem bestimmten Punkt  $x$  der  $\sigma$ - $\epsilon$ -Kurve.

- **Sekantenmodul, III in Abbildung 3.12**

Eine weitere Möglichkeit zur Definition eines E-Modul ähnlichen Materialparameters bildet der Sekantenmodul. Es wird über die Steigung der Geraden aus dem Ursprung zu einem bestimmten Wert  $x$  der Kennlinie definiert. Während der Elastizitätsmodul im Ursprung und der Tangentenmodul das Verhältnis von Spannung zu Dehnung in einem bestimmten Punkt wiedergeben, sollte der Sekantenmodul nach Nechtelberger [105] eher als Verformungsmodul bezeichnet werden.

Eine alternative Darstellung des Elastizitätsmoduls ist die des hyperbolischen Elastizitätsmoduls. Hierbei wird die Inverse des E-Moduls des einachsigen Zugversuchs  $\epsilon/\sigma = 1/E$  über die Dehnung  $\epsilon$  geplottet. Diese Darstellung wird auch in [132] verwendet, wo der Tangentenmodul

über die Spannung aufgetragen ist. Für einen linearen Bereich ergibt sich in dieser Darstellung ein Plateau, was allerdings aufgrund des nicht vorhandenen linearen Bereichs nicht zu beobachten ist.

Werte für den Elastizitätsmodul  $E_0$  im Ursprung von Gusseisen mit Lamellengraphit werden in [13] mit 70000 - 140000 MPa angegeben. Für die Temperaturabhängigkeit von Gusseisen mit Lamellengraphit ergibt sich für den  $E_0$ -Modul ein nahezu linearer Abfall mit steigender Temperatur [105]. Eine Zusammenfassung für die Abfallrate in MPa je K von verschiedenen Autoren ist in [105] angegeben. Die Werte liegen in einem Bereich von 25.8 MPa/K bis 52 MPa/K. Für den Druckbereich gibt [67] einen Abfall für  $E_0$  von 80.4 MPa/K an. Diese liegen in dem Bereich der durch den Eurocode3 [3] definierten Abminderungsfaktoren. Es zeigt sich, dass der Elastizitätsmodul, speziell wenn er aus einem Zugversuch ermittelt wird, kein geeignetes Maß für Gusseisen mit Lamellengraphit ist. Nichtsdestotrotz wird es auch für diese Klasse von Materialien standardmäßig verwendet.

### 3.2.4 Festigkeitseigenschaften und Rissbildung von Gusseisen mit Lamellengraphit

Auch die Festigkeit des Gusseisens wird stark von den Graphitkristallen beeinflusst. Durch die Kerbwirkung entstehen in der Matrix bereits bei geringer äußerer Zugbelastung Bereiche sehr hoher Spannung, welche mit einer lokalen plastischen Dehnung einhergehen. Diese Bereiche befinden sich vorzugsweise an den Enden ungünstig orientierter Graphitlamellen. Wird die Last erhöht, kommt es zu lokalem Versagen der Matrix, wodurch sich die Kerbwirkung weiter verstärkt. Durch die Vielzahl an Inhomogenitäten innerhalb des Materials treten sehr viele dieser Bereiche auf. Angrenzende geschädigte Bereiche werden durch den Rissfortschritt verbunden. Die Bruchfläche ergibt sich somit als die Verbindung einzelner Graphitlamellen, was zu der für GJL typischen grauen Bruchoberfläche führt. Durch die Konzentration der Spannungen und Dehnungen auf die Bereiche zwischen den Graphitlamellen tritt die Rissbildung bereits bei geringer äußerer Belastung auf, was zu einem spröden Versagen führt. Bei Druckbelastung ist die Kerbwirkung durch den Graphit nicht gegeben, sodass das Material nicht die selben spröden Charakteristika aufweist wie bei Zugbelastung. Vielmehr ist hier ein ausgeprägtes plastisches Verhalten zu beobachten, bevor es zum Versagen des Materials kommt. Da das plastische Verhalten durch die Matrix geprägt ist, sind hier wiederum die Korngröße sowie der interlamellare Abstand von Bedeutung. Für die Zugfestigkeit ergibt sich die in Abbildung 3.13 dargestellte Abhängigkeit von der Wanddicke. Dies ist auf die durch die unterschiedliche Abkühlgeschwindigkeit vorhandene Ausbildung der Mikrostruktur zurückzuführen. Mit zunehmender Wanddicke nimmt die Abkühlgeschwindigkeit ab, und führt damit zu einer Verlängerung der Graphitlamellen (siehe Abbildung 3.4) und einer Erhöhung des interlamellaren Abstands des Perlit. Dies hat zur Folge, dass die Zugfestigkeit abnimmt.

Die mechanischen Eigenschaften der Gusseisensorten EN-GJL-150 bis EN-GJL-300 sind in Tabelle 3.3 zusammengefasst.

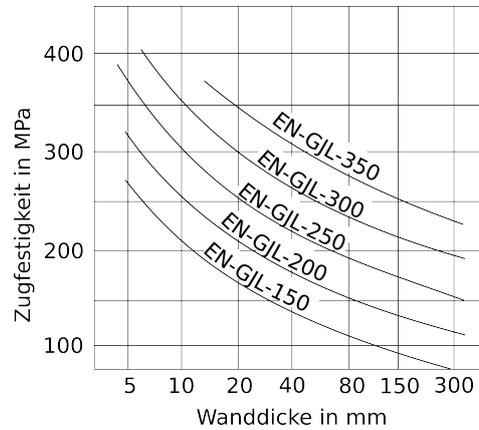


Abbildung 3.13: Abhängigkeit der Zugfestigkeit von der Wanddicke des Gussstücks nach [53]. Mit zunehmender Wanddicke nimmt die Zugfestigkeit der Materialien ab, was auf die geringere Abkühlgeschwindigkeit und somit die Graphitlamellenlänge entsprechend Abbildung 3.4 zurückzuführen ist.

Werkstoff EN-	GJL-150	GJL-200	GJL-250	GJL-300
Grundgefüge	ferritisch-perlitisch	perlitisch		
Graphitform	lamellar			
Zugfestigkeit $R_m$ in MPa	150-250	200-300	250-350	300-400
0,1 % Streckgrenze $Rp_{0.1}$ in MPa	98-165	130-195	165-228	195-260
Bruchdehnung A in %	0.3-0.8			
Brinellhärte HB 30	125-205	150-230	180-250	200-275
Elastizitätsmodul in GPa	78-103	88-113	103-118	108-137
Druckfestigkeit in MPa	600	720	840	960
Poissonsche Zahl	0.26			
Zug-Druck-Wechselverfestigung in MPa	40	50	60	75

Tabelle 3.3: Anhaltswerte der mechanische Eigenschaften der Gusseisensorten EN-GJL-150 bis EN-GJL-300 nach DIN EN 1561

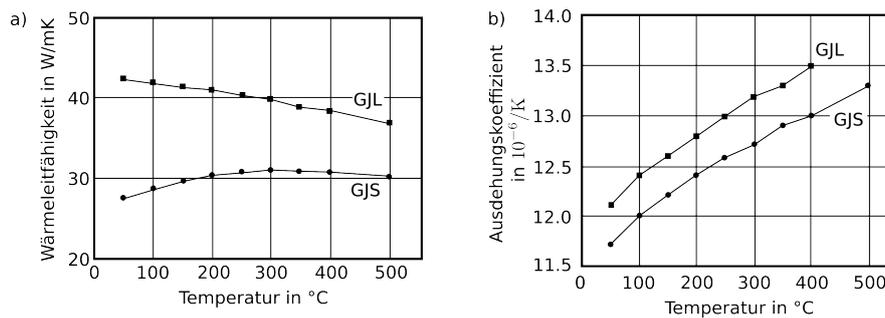


Abbildung 3.14: a) Vergleiche der Wärmeleitfähigkeiten von GJL und GJS für den Temperaturbereich  $0 < T < 500$  und b) Vergleiche der thermischen Längenausdehnung von GJL und GJS für den selben Temperaturbereich nach [34].

### 3.2.5 Physikalische Eigenschaften von Gusseisen mit Lamellengraphit

Auch die thermischen Eigenschaften werden stark durch das Vorhandensein der Graphitkristalle beeinflusst. Während die Graphitlamellen in mechanischer Hinsicht hauptsächlich eine abschwächende Wirkung haben, so führt die hohe Wärmeleitfähigkeit des Graphits zu einer verbesserten Wärmeleitfähigkeit des Matrix-Graphit-Verbunds. Die Wärmeleitung erfolgt innerhalb des Gefüges vorwiegend über die Graphitlamellen [34]. Dadurch erklärt sich der in Abbildung 15.4, a) dargestellte Unterschied der Wärmeleitfähigkeiten von GJL und GJS. Während die Graphitkugeln verbindungslos im Gefüge eingebettet sind, wird durch die stark miteinander vernetzten Graphitlamellen der Wärmefluss deutlich besser durch das Material geleitet. Die Abnahme der Graphitlamellenlänge führt zu einer Verringerung der Wärmeleitfähigkeit, was aus Tabelle 3.4 hervorgeht. Entgegen der Wärmeleitfähigkeit ist die Wärmekapazität nicht von der Graphitform und Anordnung abhängig, sondern wird vielmehr vom Kohlenstoff- und Siliziumgehalt beeinflusst. Die Wärmeausdehnung, Abbildung 15.4, b), verzeichnet einen nahezu linearen Anstieg mit der Temperatur für GJL und GJS, wobei die Wärmeausdehnung von GJL geringfügig höher ist.

Allgemein zeigt sich, dass die Eigenschaften des Gusseisens extrem von der Struktur des Materials abhängig sind. Bereits kleinste Änderungen in der chemischen Zusammensetzung oder des Erstarrungsvorgangs [31] können Unterschiede in den effektiven Eigenschaften des Materials hervorrufen. Dies kann dazu führen, dass auch innerhalb eines Bauteils (beispielsweise der Bremsscheibe) Bereiche mit unterschiedlichen Gefügestrukturen vorliegen und dadurch unterschiedliche Eigenschaften aufweisen. Eine Spezifizierung des Materials alleine anhand seiner chemischen Zusammensetzung ist daher nicht möglich. Vielmehr müssen Anforderungen an das Material durch Liefervorschriften genau spezifiziert werden und durch ausreichende Qualitätskontrollen gewährleistet werden.

Zur Klassifizierung des in der Bremsscheibe vorliegenden Materials wird im nächsten Abschnitt eine metallographische Mikrostrukturanalyse durchgeführt.

Werkstoff EN-	GJL-150	GJL-200	GJL-250	GJL-300
Dichte in $\text{g/cm}^3$	7,1	7,15	7,2	7,25
Ausdehnungskoeffizient in $\mu\text{m/mK}$ zwischen $-100\text{ }^\circ\text{C}$ und $20\text{ }^\circ\text{C}$	10,0			
zwischen $20\text{ }^\circ\text{C}$ und $200\text{ }^\circ\text{C}$	11,5			
zwischen $20\text{ }^\circ\text{C}$ und $400\text{ }^\circ\text{C}$	13,0			
Wärmeleitfähigkeit $\lambda$ in $\text{W/mK}$ bei $100\text{ }^\circ\text{C}$	52,5	50,8	48,8	47,4
bei $200\text{ }^\circ\text{C}$	51,5	49,8	47,8	46,4
bei $300\text{ }^\circ\text{C}$	50,5	48,8	46,8	45,4
bei $400\text{ }^\circ\text{C}$	49,5	47,8	45,8	44,4
bei $500\text{ }^\circ\text{C}$	48,5	46,8	44,8	43,4
Spezifische Wärmekapazität $\lambda$ in $\text{J/kgK}$ zwischen $20\text{ }^\circ\text{C}$ und $200\text{ }^\circ\text{C}$	460			
zwischen $20\text{ }^\circ\text{C}$ und $600\text{ }^\circ\text{C}$	535			

Tabelle 3.4: Anhaltswerte der physikalischen Eigenschaften der Gusseisensorten EN-GJL-150 bis EN-GJL-300 nach [34]



## 4 Metallographische Mikrostrukturanalyse und experimentell ermittelte Eigenschaften

Zur Verifikation der Simulationen, werden von der Daimler AG experimentell ermittelte Daten in Form von Zug- und Druckversuchen zur Verfügung gestellt. Weiter wird an Materialausschnitten zweier Bremscheiben mittels Schliffbildern die Mikrostruktur des Materials klassifiziert. Bei den beiden Bremscheiben handelt es sich um eine fabrikneue Scheibe und eine hochbelastete, mit Rissen versehene Scheibe. Die genaue Belastungsgeschichte der Scheibe ist dabei nicht bekannt.

Die mechanischen Eigenschaften und die Struktur des Materials sind über die Liefervorschriften aus Tabelle 4.1 definiert. Entsprechend der Liefervorschriften und der Norm DIN 945 [2] besteht das Material aus Graphit der Form I mit der Größe 2-5 und der Anordnung A sowie maximal 25 % Graphit der Anordnung B. Was einer Mikrostruktur von zufällig verteilten Graphitlamellen und teilweise rosettenartigem Graphit mit den Längen 500  $\mu\text{m}$ -1000  $\mu\text{m}$  (Größe 2) bis 60  $\mu\text{m}$  - 120  $\mu\text{m}$  (Größe 5) entspricht.

### 4.1 Schliffbilder

Zur Analyse des Gefüges innerhalb der Scheibe werden an den in Abbildung 4.1 dargestellten Stellen Materialproben entnommen und für die Abbildung unter dem Lichtmikroskop vorbereitet. Probe A befindet sich direkt an der Reibfläche der Scheibe, Probe B im Bereich der Innenbelüftungsstege und Probe C am unteren Bereich des Bremsstopfs. Die Schliffbilder in Abbildung 4.2 zeigen das Gefüge der Proben A, B sowie zwei unterschiedliche Bereiche der Probe C. Proben A und B weisen eine qualitativ ähnliche Gefügestruktur auf. Entsprechend der Liefervorschriften größtenteils bestehend aus Graphit der Form I und Anordnung A. Probe C hingegen besteht in Aufnahme C1 teilweise aus Graphit der Form II mit den spinnenartigen Graphitkristallen. In Aufnahme C2 ist Graphit der Form I mit der Anordnung A/B vorhanden, jedoch mit meist deutlich kürzeren Lamellen als in den Proben A und B. Es ist deutlich zu erkennen, dass das Gefüge innerhalb des Bauteils unterschiedliche Strukturen aufweist und diese auch innerhalb eines kleinen Bereichs wie der der Probe C auftreten. Die Hauptbestandteile des untersuchten Gusseisengefüges sind entsprechend der Vorschriften das perlitische Grundgefüge mit den eingebetteten Graphitlamellen sowie vereinzelte Niobkarbide.

Bei genauem Betrachten der in Abbildung 4.3 dargestellten Graphitlamelle lässt sich ein schwarzer Streifen in der Mitte der Lamelle entlang der Längsrichtung beobachten. Dieses Phänomen ist bei einer Vielzahl an Lamellen zu beobachten und könnte auf eine Rissbildung innerhalb des Graphitkristalls hinweisen. Aus den Schliffbildern kann jedoch nicht bestimmt werden, ob diese eventuellen Risse bereits im Gefüge, beispielsweise durch den Abkühlvorgang, vorhanden waren oder etwa durch die Herstellung und Bearbeitung der Proben entstanden

Bezeichnung	GG-15 Cr Cu Nb HC
<b>Chemische Zusammensetzung in Masse.-%</b>	
Kohlenstoff	3,70 bis 3,90
Mangan	0,75 bis 0,95
Silizium	max. 0,085
Phosphor	max. 0,1
Schwefel	0,20 bis 0,30
Chrom	0,30 bis 0,45
Molybdän	–
Niob	0,35 bis 0,45
<b>Mechanische Eigenschaften</b>	
Brinellhärte HB 5/750	180 ± 20
Zugfestigkeit R <sub>M</sub> in MPa	mind. 150
<b>Mikrogefüge</b>	
Grundgefüge	Gleichmäßiger, feiner, dichtstreifiger Perlit mit eingelagerten NB-Karbidern; frei von Ledeburit, Ferritgehalt max. 5 %
Graphit	Groblameller, I A: 2 ... 5 und max. 25 % I B: 2...5

Tabelle 4.1: Liefervorschriften für das Material GG-15 Cr Cu Nb HC.

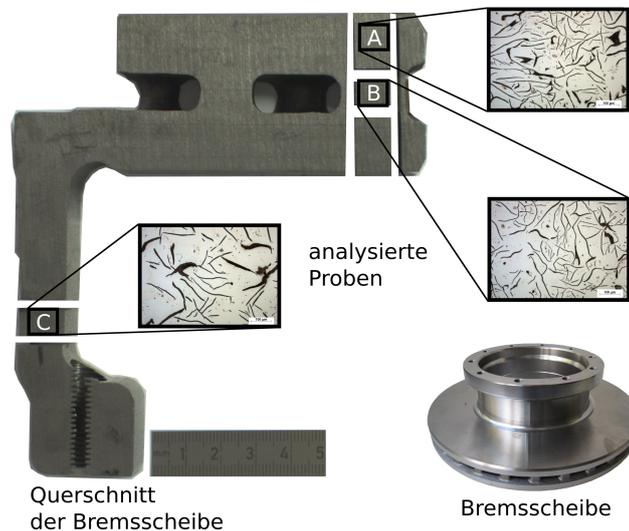


Abbildung 4.1: Querschnitt der Bremsscheibe mit der Position der analysierten Proben A, B und C der fabrikneuen Scheibe mit den entsprechenden Schliiffbildern sowie der Darstellung der kompletten Bremsscheibe.

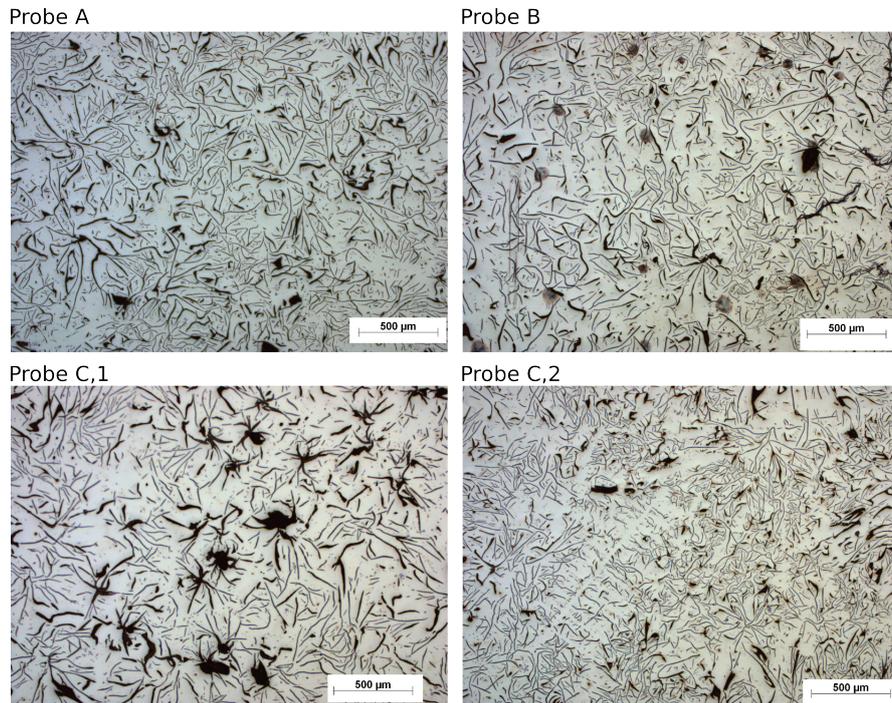


Abbildung 4.2: Schliffbilder vor dem Ätzen der Proben zur Darstellung der Graphitanordnung im Gefüge an den Positionen A, B, C1 und C2.

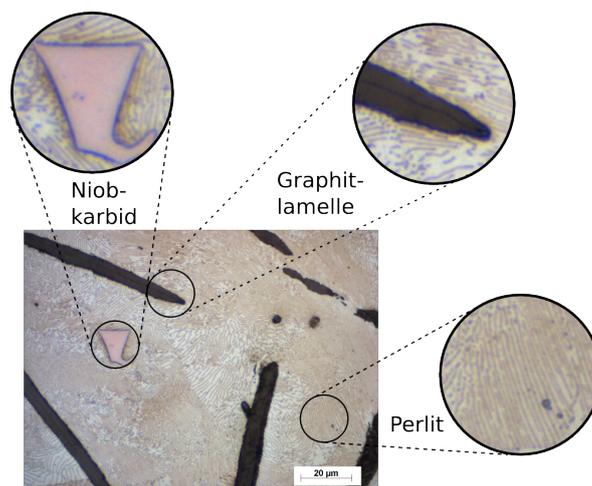


Abbildung 4.3: Gefügebestandteile des untersuchten Gusseisens. Perlitische Matrix, Graphitlamellen und Niobkarbide.

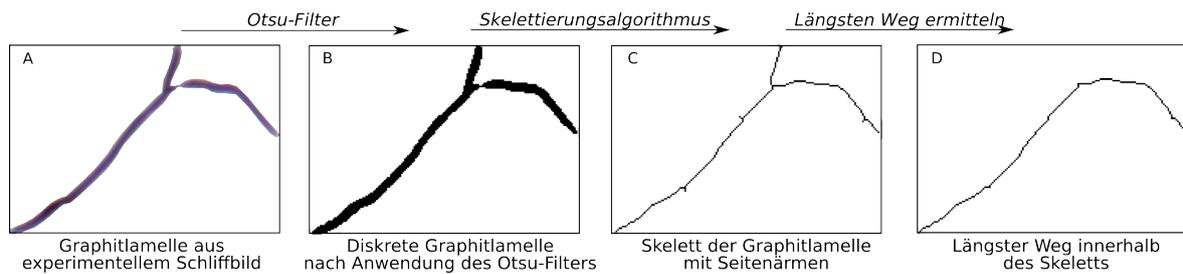


Abbildung 4.4: Darstellung der Konvertierung des experimentellen Schlibfbilds in ein Binärbild mit der anschließenden Skelettierung der Lamelle und der Bestimmung des längsten Wegs entsprechend [128]. A, ursprüngliches Schlibfbild der Graphitlamelle. A-B, mittels eines Otsu-Filters wird das Bild in ein Binärbild umgewandelt welches über den Skelettierungsalgorithmus B-C die Lamelle auf eine ein Zellen breite Struktur reduziert. Innerhalb dieser Struktur wird der längste Weg ermittelt (C-D).

sind.

Wie in Kapitel 5 beschrieben wird das Gefüge zur Verwendung in der mesoskopischen Simulation über den Algorithmus aus Kapitel 16, Erstellung der Gussstrukturen erstellt werden. Zur Abbildung realer Gefügestrukturen sind hierzu Informationen aus den experimentellen Schlibfbildern zu extrahieren. Eine händische Analyse eines Schlibfbildes ist aufgrund der Vielzahl an Lamellen nicht zweckmäßig, weshalb ein Algorithmus zur automatischen Analyse der benötigten Parameter entwickelt wird.

## 4.2 Automatisierte Analyse der Gefüge von Gusseisen mit Lamellengraphit

Die Analyse ermöglicht die Bestimmung der Länge, Dicke, Orientierung, Amplitude sowie des Volumens der im Gefüge vorhandenen Lamellen. Diese Parameter werden als Eingabeparameter des Algorithmus zur Gebietserstellung entsprechend Kapitel 16 benötigt. Ähnliche Ansätze zur Analyse von Gusseisenschlibfbildern werden in [102, 137, 118] angewandt.

### 4.2.1 Vorbereitung des Schlibfbildes

Das Ausgangsschlibfbild besteht aus Pixeln verschiedener Graustufen. Um eine Differenzierung zwischen Matrix und Graphitlamellen zu ermöglichen, ist das Bild mit seinen Graustufen in ein Binärbild (schwarz/weiß) beispielsweise mittels eines *Otsu*-Filter (z. B. [88]) umzuwandeln. Aufgrund des Kontrasts zwischen Graphit (dunkel) und Matrix (hell) werden die einzelnen Lamellen durch den Filter detektiert (Abbildung 4.4, A-B).

Da sich einzelne Lamellen berühren, können diese nicht als eigenständige Phasen identifiziert werden. Aus diesem Grund ist hier ein manuelles 'Auftrennen' der Lamellen durch eine weiße Linie notwendig. Dieser Schritt stellt zugleich die einzige manuelle Bearbeitung für die Auswertung des Schlibfbildes dar. Um den einzelnen Lamellen unterschiedliche Phasenwerte

$p_3$	$p_2$	$p_1$
$p_4$	$p$	$p_0$
$p_5$	$p_6$	$p_7$

Abbildung 4.5: Aktuelle Zelle  $p$  und benachbarte Zellen  $p_0$ - $p_7$ .

zuzuweisen, wird ein Segmentierungsalgorithmus verwendet. Hierzu wird das Bild mit Hilfe eines *Watershed*-Filters (siehe z. B. [11]) überarbeitet und anschließend das Bild in ein für das Analysetool lesbares Datenformat umgewandelt.

### 4.2.2 Skelettierung/Verdünnung

Für die Ermittlung der Längen der Graphitlamellen wird jede Lamelle zunächst auf eine ein Pixel breite verbundene Linie reduziert (Abbildung 4.4, B-C). Dieser Vorgang nennt sich Skelettierung oder auch Verdünnung. Bei der Skelettierung werden sukzessiv Randschichten einer Struktur entfernt, bis nur noch ein Skelett der Struktur zurückbleibt [81]. Es wird hierbei zwischen parallelen und sequenzielle Algorithmen unterschieden [81, 68]. Im Folgenden wird ein sequenzieller Algorithmus verwendet, bei dem eine feste Abfolge von Operationen während eines Iterationsschritts durchgeführt wird. Die Operationen stellen den Vergleich des in Abbildung 4.5 dargestellten Bildausschnitts mit vorgegebenen Masken dar. Die Zelle  $p$  ist die aktuell befindliche Zelle und die Zellen  $p_0$  bis  $p_7$  die Nachbarzellen. Die Masken definieren nun, ob die Zelle  $p$  gelöscht werden kann. Die Ergebnisse der Skelettierung variieren hierbei entsprechend der verwendeten Masken (siehe z. B. [81, 60]). Im Folgenden werden die in Abbildung 4.6 dargestellten Masken nach [40] verwendet. Es wurde darauf geachtet, einen Algorithmus zu verwenden, der die maximale Länge einer Lamelle nicht beeinflusst. Nachteilig stellt sich bei solchen Algorithmen die Astbildung, *spurs* genannt, dar. Dies sind Verzweigungen entlang des Skeletts, welche aufgrund von Kanten in der diskreten Struktur entstehen. Diese Astbildung kann durch zusätzliche Algorithmen zwar unterdrückt werden, führt aber teilweise zu einer Verkürzung der Länge der Lamelle. Das Ergebnis des Skelettierungsalgorithmus ist in Abbildung 4.4 dargestellt. Es ist zu sehen, dass die maximale Länge der Graphitlamelle nicht beeinflusst wird, dafür jedoch eine gewisse Astbildung zu beobachten ist.

### 4.2.3 Längster Weg

Durch die Astbildung ist für einen Graphitkristall kein eindeutiger Weg vorhanden, welcher die Länge der Lamelle definiert. Vielmehr liegt eine Baumstruktur mit einer Vielzahl an Verästelungen vor. Es wird definiert, dass der längste Weg innerhalb der Struktur die Länge der Lamelle darstellt. Für eine Baumstruktur errechnet sich der längste Weg, wie in [20] nachgewiesen, mit Hilfe des von W. Dijkstra entwickelten Algorithmus [145]. Hierbei wird eine beliebige Zelle  $U$  der Baumstruktur ausgewählt und die Zelle  $X$  mit dem längsten Weg von  $U$  bestimmt [20] (Abbildung 4.7, b). Diese wird über einen Floodfill-Algorithmus realisiert, welcher jede Zelle der Lamellen abläuft und die Strecke errechnet. Beim Abläufen der Struktur werden

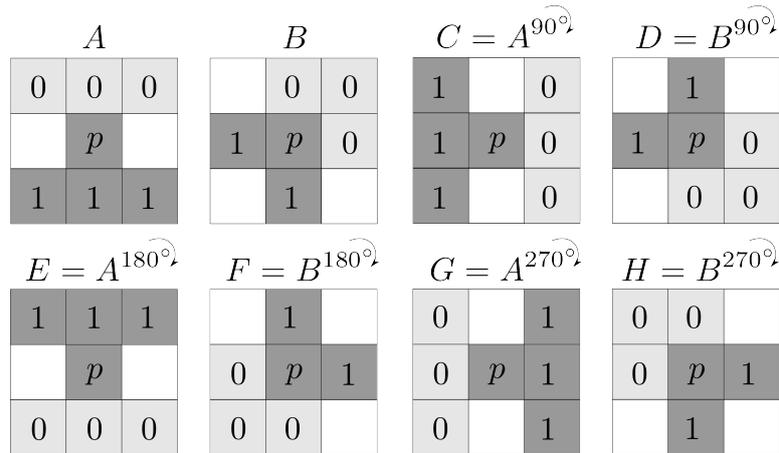


Abbildung 4.6: Masken A-H zur Überprüfung der umliegenden Zellen nach [40]. Die Masken C-H sind jeweils rotierte Anordnungen der Masken A und B. Die dunkelgrauen Zellen die mit einer 1 belegt sind, haben die gleiche Phase wie die Zelle p, die hellgrauen Zellen die mit einer 0 belegt sind, haben eine Phase ungleich der Zelle p. Die restlichen Zellen werden nicht betrachtet.

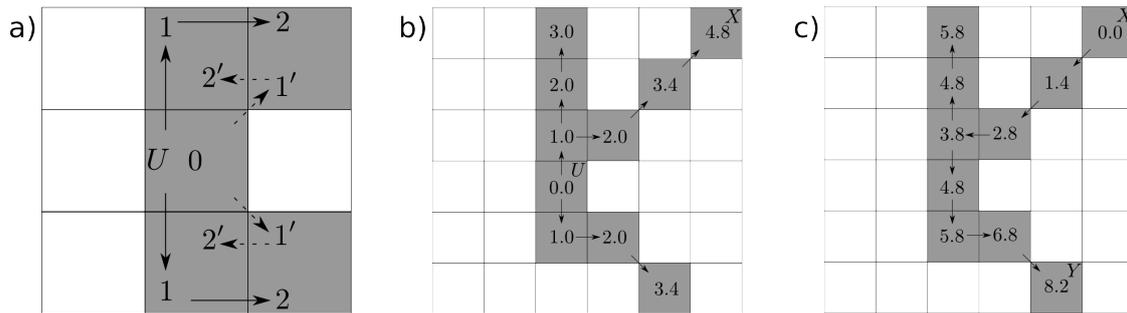


Abbildung 4.7: Algorithmus zur Bestimmung des längsten Pfades innerhalb der verästelten Struktur.

zunächst die Nachbarzellen geprüft, welche auf der horizontalen und vertikalen Achse liegen. Dadurch wird gewährleistet, dass bei einer Mehrfachangrenzung von Zellen der gewünschte Weg 0-1-2 abgelaufen wird und nicht 0-1'-2'. Weg 0-1'-2' würde zu einer fehlerhaften Messung des Weges führen (Abbildung 4.7, a). Für eine diagonale Verbindung zweier Zellen wird die Länge mit dem Faktor  $\sqrt{2,0}$  multipliziert. Gerade Verbindungen haben eine Länge von 1,0. Ist die Zelle X bestimmt (Abbildung 4.7, b), so wird diese als Startwert festgelegt und abermals die Zelle Y mit dem längsten Weg, ausgehend von X, ermittelt. Der Weg zwischen X und Y stellt dann den längsten Weg innerhalb der Struktur dar (Abbildung 4.7,c). Sind die Punkte X und Y bestimmt, werden die Verästelungen entfernt. Ausgehend von Punkt Y wird jeweils die angrenze Zelle behalten, welche einen Längenwert kleiner der aktuellen Zelle besitzt. Ist der Punkt X erreicht, bleibt der Teil des Skeletts übrig, welcher den längsten Weg definiert.

#### 4.2.4 Graphitanteil und Lamellendicke

Die Dicke der realen Graphitlamelle variiert über deren Länge, wodurch sich die Bestimmung der Dicke als schwierig darstellt. Aus diesem Grund wird für die Lamelle eine konstante mittlere Dicke angenommen. Die Fläche der Lamellen wird während des Algorithmus, welcher die ursprüngliche Lamelle ablauft, durch Aufsummieren der Zellen ermittelt. Die Dicke  $D_{L,i}$  lässt sich dann aus dem Verhältnis der Fläche  $A_{L,i}$  der Lamelle zu dessen Länge  $L_{L,i}$  über

$$D_{L,i} = \frac{A_{L,i}}{L_{L,i}}$$

bestimmen.  $i$  ist hier die Nummer der Graphitlamelle. Im selben Zuge wird über die Summe der einzelnen Flächen und die Gesamtfläche  $A_{\text{ges}}$  der prozentuale Flächenanteil  $A_{\text{frac}}$

$$A_{\text{frac}} = \frac{100 \sum_{i=0}^n A_{L,i}}{A_{\text{ges}}} \%$$

der Lamellen im Gebiet bestimmt.

#### 4.2.5 Amplitude und Frequenz

Für die Abbildung der Wellung der Graphitlamellen bei der Erstellung des Simulationsgebiets wird eine Sinusfunktion verwendet. Zur Bestimmung der Amplitude und Frequenz für die Parametrisierung des Algorithmus werden die einzelnen Graphitlamellen des Schliffbilds entsprechend der Wellung ausgewertet. Erwartungsgemäß folgt diese für die realen Graphitlamellen keiner idealen Sinusform. Daher wird im Zuge der Berechnung diejenige Sinusfunktion mittels eines Brute-Force-Ansatzes ermittelt, deren Funktion die Wellung der Graphitlamelle am besten annähert.

Mit der dargestellten Methode werden mehrere Schliffbilder zur Ermittlung der Eingabeparameter der Simulationsgebiete analysiert. In Abbildung 4.8 ist das Vorgehen am Beispiel der Probe A aus Abbildung 4.2 skizziert. Das experimentelle Schliffbild wird zunächst in das Datenformat des Analysetools konvertiert. Kleinste Inhomogenitäten, die nicht als Graphitlamellen angesehen werden, können über einen benutzerdefinierten Grenzwert für das minimale Volumen der Inhomogenitäten entfernt werden. Dieser Schritt ist bei dem dargestellten konvertierten Schliffbild bereits angewandt. Im unteren Bereich der Abbildung 4.8 sind ein Ausschnitt des Gefüges und die längsten Pfade innerhalb der einzelnen Lamellen gezeigt sowie die durch die Analyse ermittelten Parameter. Die wichtigsten Kenngrößen sind dabei der Volumenanteil des Graphits am Gesamtgefüge sowie die Längen- und Dickenverteilung der Lamellen. Diese Parameter haben den größten Einfluss auf die Eigenschaften des Materials (siehe Kapitel 3, Übersicht der Eigenschaften des Werkstoffs Gusseisen).

### 4.3 Zug- und Druckversuche

Die Daimler AG stellt zum Abgleich mit den Simulationsergebnissen experimentelle Zugversuche im Temperaturbereich von 20 °C - 1000 °C, sowie Druckversuche bei Raumtemperatur

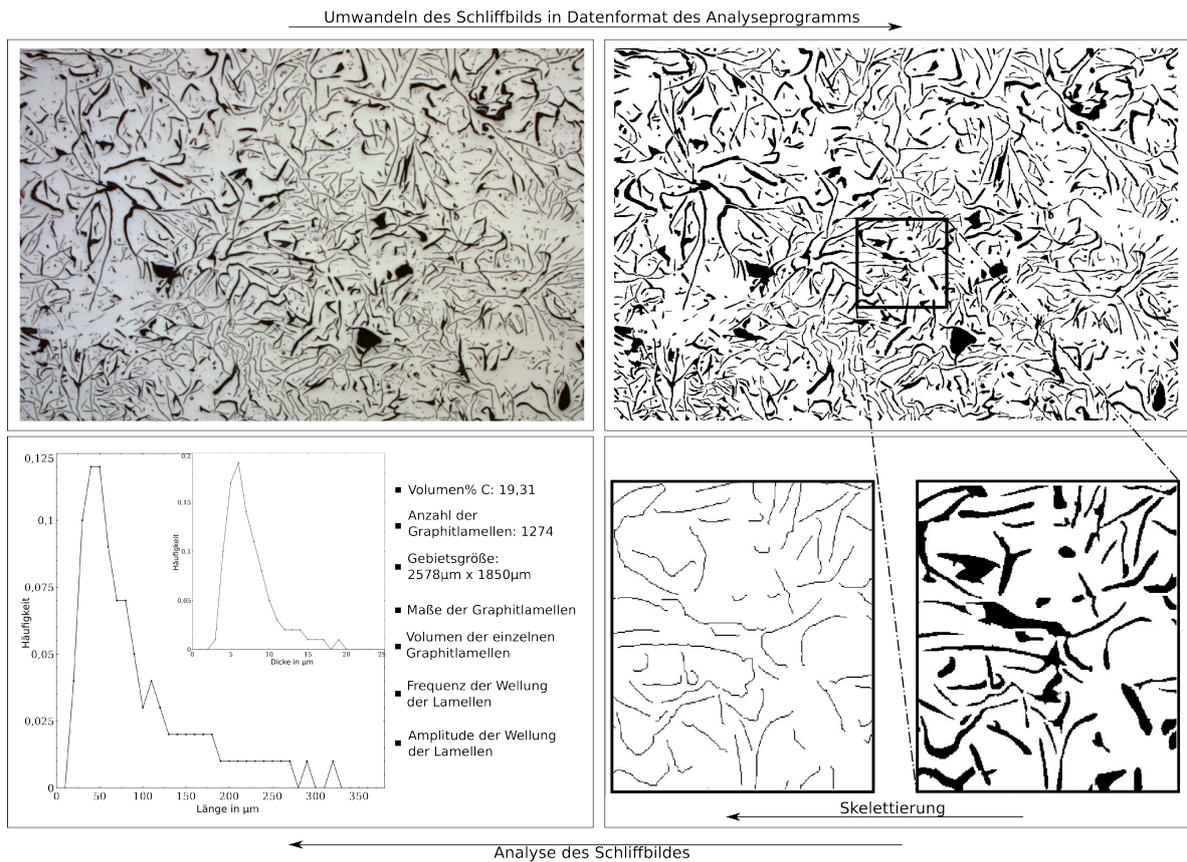


Abbildung 4.8: Übersicht zur Analyse der experimentellen Mikrostruktur des Gusseisens mit der Umwandlung des Schlibbilds in das Datenformat des Analysetools. Zur besseren Darstellung ist im unteren Bereich ein Ausschnitt des Gefüges mit den zugehörigen Pfaden des längsten Weges dargestellt. Als Ausgabewerte liefert die Analyse Informationen zu den einzelnen Graphitlamellen sowie allgemeine Gebietsinformationen.

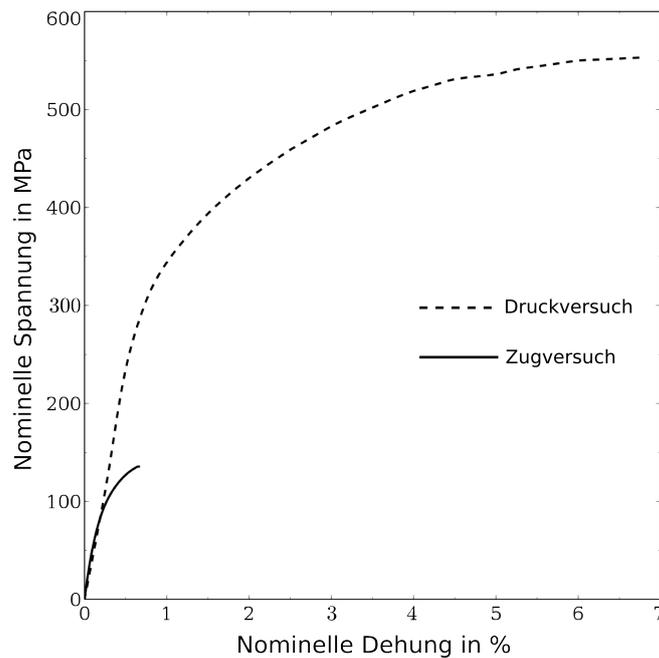


Abbildung 4.9: Experimentelle Spannungs-Dehnungs-Kennlinie der Daimler AG für das untersuchte Gusseisen GG-15 Cr Cu Nb HC. Zur Verdeutlichung der Unterschiede im Zug- und Druckbereich wird für die Druckkennlinie der Betrag der Spannung  $|\sigma_d|$  über den Betrag der Dehnung  $|\epsilon_d|$  geplottet.

zur Verfügung. In Abbildung 4.9 ist das bereits in Kapitel 3, Übersicht der Eigenschaften des Werkstoffs Gusseisen gezeigte Verhältnis von Spannung zu Dehnung für das Gusseisen GG-15 Cr Cu Nb HC bei Raumtemperatur dargestellt. Der Elastizitätsmodul  $E_0$  beträgt für beide Kennlinien  $\approx 50000$  MPa, welcher damit im unteren Bereich der für GJL üblichen Elastizitätsmoduli liegt. Die Festigkeit bei Zug beträgt circa 135 MPa und für Druck circa 500 MPa. Mit zunehmender Temperatur fallen die Festigkeitswerte deutlich ab, Abbildung 4.10, a) während sich die Bruchdehnung von  $\approx 0,6\%$  bei  $20^\circ\text{C}$  auf über  $3\%$  bei  $620^\circ\text{C}$  erhöht. In Diagramm 4.10, b) ist der Abfall der Zugfestigkeit über der Temperatur dargestellt. Es lassen sich daraus 3 Bereiche mit nahezu linearer Abfallrate erkennen. Von  $20^\circ\text{C}$  bis  $500^\circ\text{C}$  mit einer Abfallrate von  $0,046$  MPa/K, von  $500^\circ\text{C}$  bis  $760^\circ\text{C}$  mit  $0,327$  MPa/K und von  $760^\circ\text{C}$  bis  $1000^\circ\text{C}$  mit  $0,067$  MPa/K.

## 4.4 Rissbilder

Die Rissbilder auf der hochbelasteten Scheibe lassen Rückschlüsse auf die Belastung der Scheibe zu. Für diese Scheibe wird daher eine qualitative Analyse der makroskopisch sichtbaren Rissbilder durchgeführt. Wie in Kapitel 2 beschrieben, ist die Rissbildung auf der Reibfläche der Brems Scheibe charakteristisch für dieses Bauteil und auch bei der untersuchten Scheibe wie in Abbildung 4.11 für die innere wie auch äußere Reibfläche vorhanden. Zu beobachten ist, dass die innere Reibfläche deutlich längere Risse aufweist, welche sich teilweise von der Reibfläche bis zum Bereich der Innenbelüftung durchziehen. Zudem sind die Risse zumeist

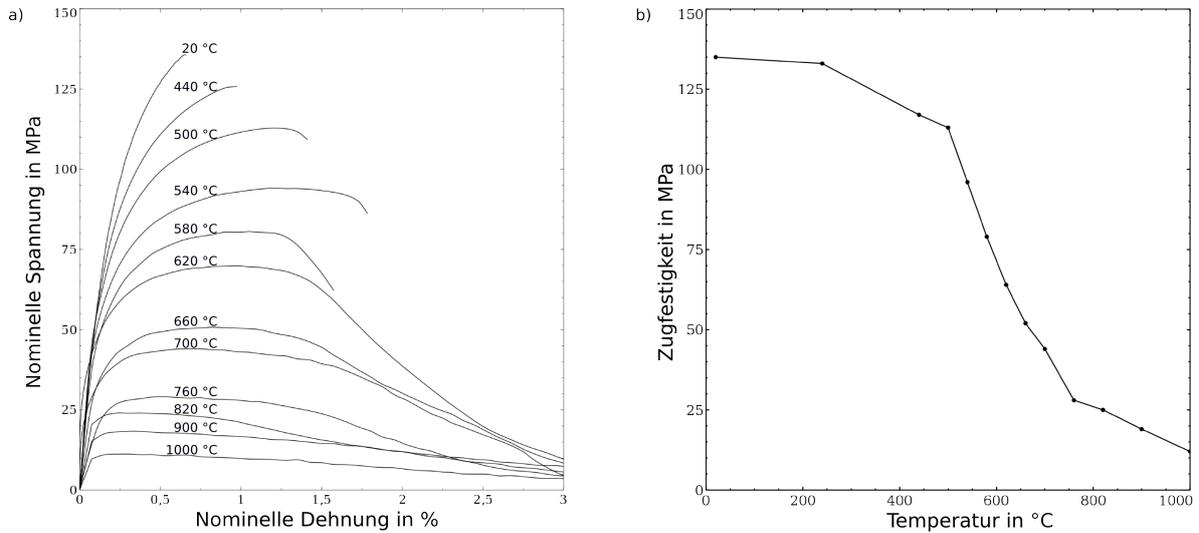


Abbildung 4.10: a) Spannungs-Dehnungs-Diagramme des Gusseisens für den Temperaturbereich  $20\text{ °C} \leq T \leq 1000\text{ °C}$ . Mit steigender Temperatur ist ein Abfall der Kennlinie zu beobachten bei einer Erhöhung der Bruchdehnung. b), Abhängigkeit der Zugfestigkeit von der Temperatur für den Bereich  $20\text{ °C} \leq T \leq 1000\text{ °C}$ . Die Zugfestigkeit nimmt mit zunehmender Temperatur ab. Spezielle im Bereich zwischen  $500\text{ °C}$  und  $760\text{ °C}$  ist ein starker Abfall zu beobachten.

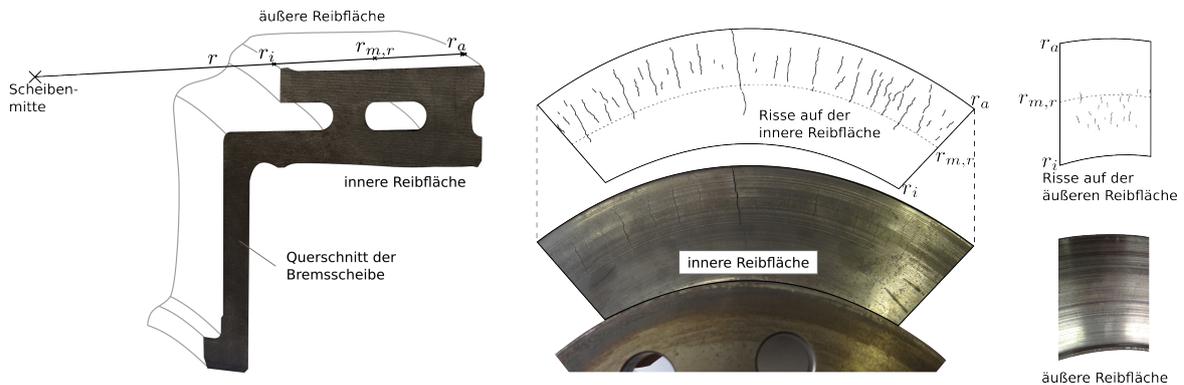


Abbildung 4.11: Rissbilder auf der belasteten Scheibe. Auf der inneren Reibfläche sind die Risse im Bereich zwischen mittlerem Reibringradius  $r_{m,r}$  und Außenradius  $r_a$  in radialer Richtung angeordnet. Die Risse sind dabei deutlich sichtbare makroskopische Risse. Auf der äußeren Reibfläche treten die Risse im Bereich zwischen mittlerem Reibringradius  $r_{m,r}$  und Innenradius  $r_i$  auf. Die Risse auf der äußeren Reibfläche sind deutlich kleiner als auf der inneren Reibfläche.

im Bereich zwischen  $r_{m,r}$  (Mitte der Reibfläche) und  $r_a$  (Außendurchmesser der Reibfläche) vorhanden. Die äußere Reibfläche weist dementsgegen deutlich kürzere Risse auf, wie ebenfalls in der Abbildung dargestellt. Die Risse sind hier zwischen  $r_{m,r}$  und  $r_i$  (Innendurchmesser der Reibfläche) zu finden. Aufgrund der Rissbilder der inneren und äußeren Reibfläche ist davon auszugehen, dass die innere Reibfläche während des Bremsvorgangs höheren Belastungen ausgesetzt ist. Dies kann unter anderem an der in Kapitel 2 beschriebenen Schirmung liegen, was auch der Grund für die Anordnung der Risse sein kann.

## 4.5 Innere Oxidation

Die Schlibbilder der hochbelasteten Bremsscheibe zeigen, dass sich die Mikrostruktur der Scheibe durch die Belastung verändert. Die Veränderungen des Materials sind auf der Reibfläche, sowie in unmittelbarer Nähe der Reibfläche am deutlichsten zu beobachten. Dies kann an der hohen thermischen Belastung dieser Bereiche liegen. Zusätzlich ist die Reibfläche in direktem Kontakt mit umgebenden Medien wie Luft und Wasser. In Abbildung 4.12 ist im Bereich nahe der Oberfläche neben der Matrix und den Graphitlamellen eine weitere Phase zu sehen, welche sich um die Graphitlamellen herum gebildet hat. Diese Phase findet sich auf allen Schlibbildern, welche von Bereichen nahe der Reibfläche genommen wurden. Zusätzlich ist diese Phase entlang der Risse zu finden, die sich tiefer in das Scheibeninnere ziehen. In Abbildung 4.12 wird verdeutlicht, dass sich mit zunehmendem Abstand zur Reibfläche das Auftreten dieser Phase reduziert und ab einer Tiefe von  $\approx 500 \mu\text{m}$  nicht mehr zu beobachten ist. Zur Klassifizierung dieser Phase sind die in den SEM-Aufnahmen (scanning electron microscope) aus Abbildung 4.13 markierten Bereiche mittels einer EDX-Analyse (energy dispersive X-ray spectroscopy) untersucht worden. Bei der EDX-Untersuchung wird das von der Probe emittierte Röntgenspektrum zur chemischen Analyse des Materials verwendet [152, 28]. Die EDX-Analyse dieser Bereiche zeigt, dass dort, wo sich die neue Phase gebildet hat, ein sehr hoher Sauerstoffanteil zu beobachten ist, während die Vergleichsmessung in der perlitischen Matrix einen sehr geringen Sauerstoffanteil aufweist. Im Bereich in Abbildung 4.13, a), beträgt der Sauerstoffanteil 41,93 Gew-% beziehungsweise 70,73 Atom-%. Ein ähnliches Bild ergibt sich für den Bereich 2 in Abbildung 4.13, b), mit 32,49 Gew-% beziehungsweise 62,42 Atom-%. Im Vergleich dazu wird im Bereich 1 der selben Aufnahme ein Sauerstoffanteil von 2,38 Gew-% beziehungsweise 7,59 Atom-% gemessen. Die Ergebnisse lassen darauf schließen, dass in diesen Bereichen eine innere Oxidation stattgefunden hat, welche bei Temperaturen über  $500^\circ\text{C}$  entsteht [13]. Bei der Oxidation reagiert das im Gusseisen vorhandene Eisen mit Sauerstoff aus der Umgebung und bildet Eisenoxid. Durch das Netzwerk an Graphitlamellen, welches die perlitische Matrix durchdringt, findet Oxidation nicht nur an der Oberfläche des Gusseisenbauteils statt. Vielmehr kann Sauerstoff entlang der mikroskopischen Risse in das Material diffundieren. Im Temperaturbereich unter  $700^\circ\text{C}$  bildet sich dadurch ein Oxidsaum entlang der Graphitlamellen [54]. Die Graphitlamellen werden im Folgenden nur noch durch das Eisenoxid zusammengehalten, was dazu führt, dass das Material noch bis zu einem gewissen Grad Last aufnehmen kann [94]. Bei Temperaturen über  $700^\circ\text{C}$  verbrennt meist der im Gefüge vorhanden Graphit [54].

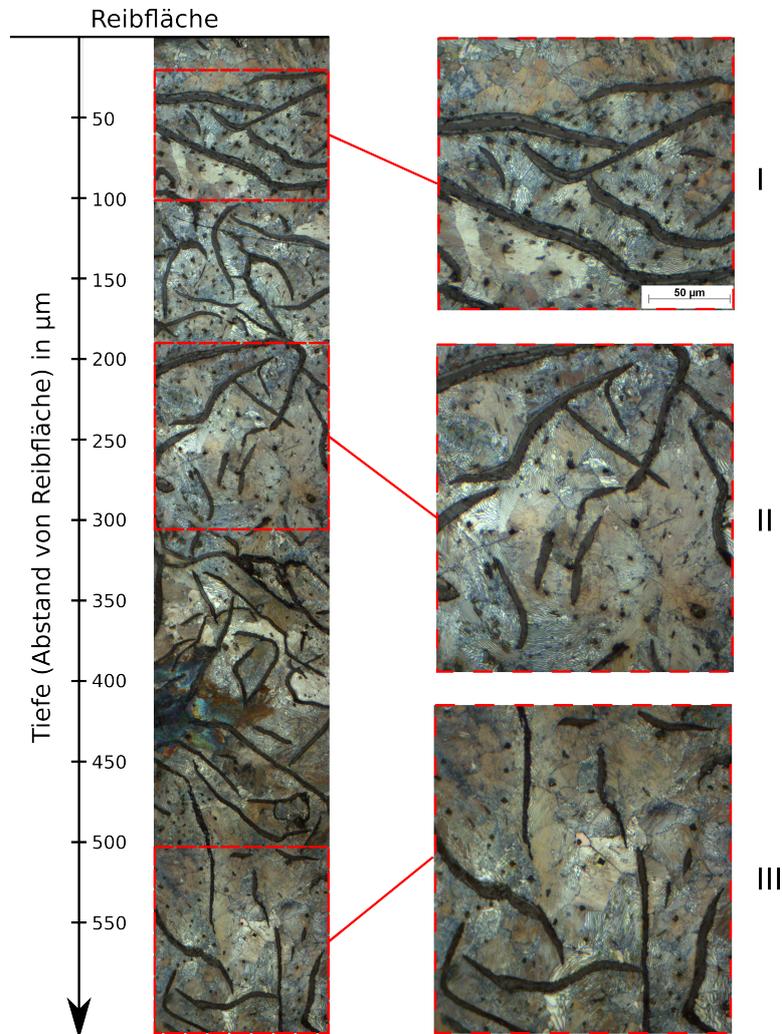


Abbildung 4.12: Analyse der inneren Oxidation in Abhängigkeit vom Abstand zur Reibfläche. Nahe der Reibfläche (I) bis zu einer Tiefe von 100 µm ist an den Graphitlamellen deutlich der Einfluss der inneren Oxidation zu sehen. Für eine Tiefe von 200 µm - 300 µm ist eine Abnahme der Oxidation zu beobachten (II). Ab einer Tiefe von über 500 µm ist nahezu keine innere Oxidation mehr vorhanden (III).

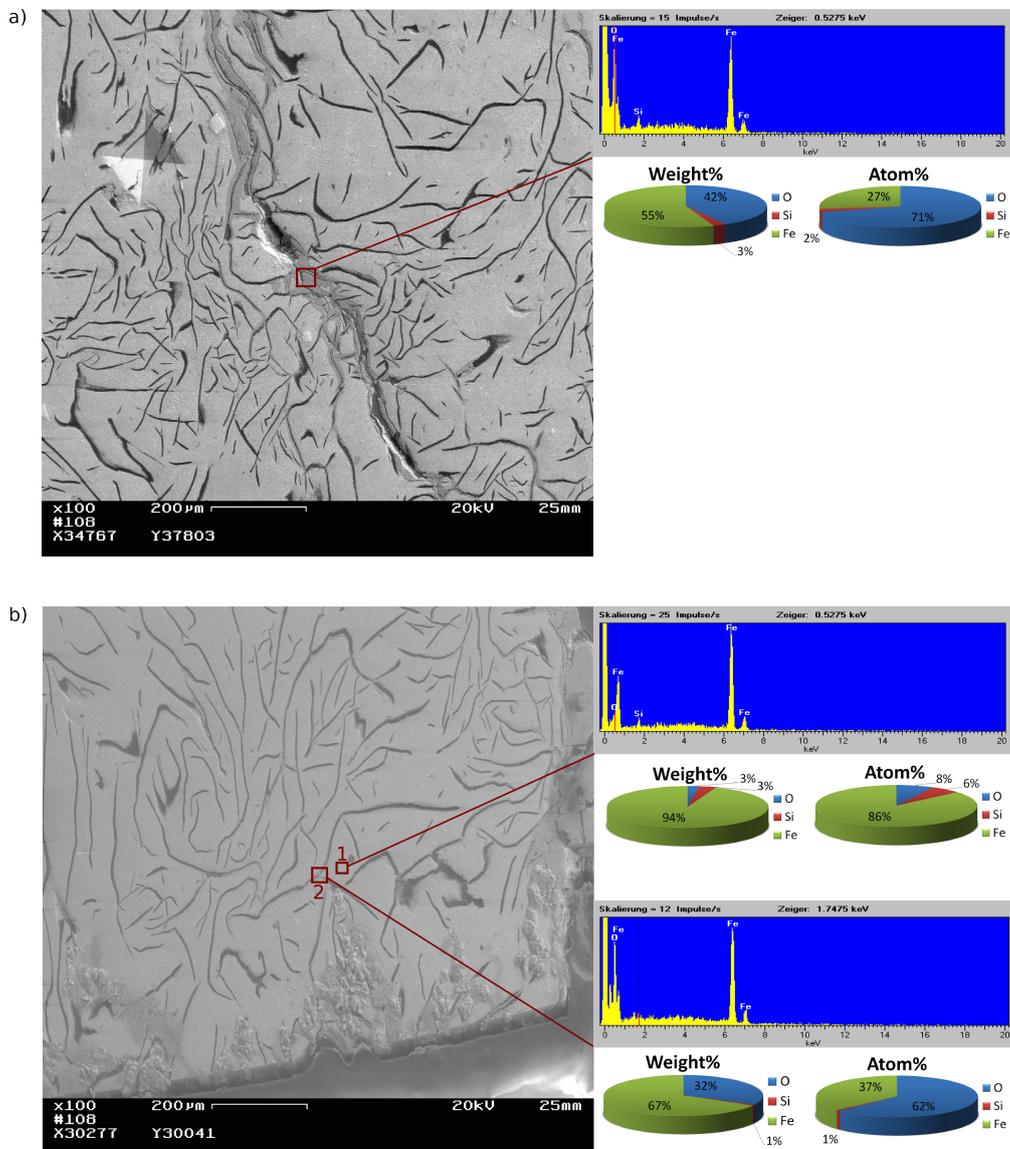


Abbildung 4.13: REM-Aufnahmen mit den Ergebnissen der EDX-Analyse an den markierten Bereichen. a), in einem Bereich in dem sich die Mikrostruktur deutlich verändert hat. Hier ist ein hoher Sauerstoffanteil von über 70 Atom% zu beobachten. b) an Stelle 1 ist ein geringer Sauerstoffanteil im perlitischen Grundgefüge zu beobachten (<10 Atom%) und an Stelle 2 ein hoher Sauerstoffanteil im Bereich der neu gebildeten Phase.



## 5 Übersicht der Simulationsmethoden

Wie in den vorangegangenen Kapiteln beschrieben ist die Bremsscheibe während ihres Einsatzes im Fahrzeug hohen Belastungen ausgesetzt. Um die Bremsscheibe entsprechend dieser Belastung auszulegen, werden unterschiedliche Simulationen durchgeführt, die das reale Verhalten abbilden sollen. Auch zur Bestimmung der Eigenschaften des Bremsscheibenmaterials werden vermehrt Simulationen verwendet. Der Entwicklungsstand der beiden Bereiche ist dabei stark unterschiedlich ausgeprägt, zumindest was den Einsatz in der Industrie angeht. Während die Simulation von Bremsscheiben heute in der Industrie zum Stand der Technik gehören, sind die Simulationen auf der mesoskopischen Längenskala des Materialgefüges noch weitestgehend im Forschungsbereich anzusiedeln. Das folgende Kapitel gibt einen Überblick über die simulativen Arbeiten in diesem Bereich, die daraus folgende Modellentscheidung für die Durchführung der Arbeit sowie eine Beschreibung der Simulationssoftware.

### 5.1 Makroskopische Bremsscheibensimulation

In der Industrie wird vor allem auf eine effektive, ausreichend genaue und schnelle Berechnung Wert gelegt. Hierzu wird die Simulation der Bremsscheibe teilweise in eine rein thermische und eine rein mechanische Berechnung aufgeteilt. Während für den mechanischen Belastungsfall die komplette dreidimensionale Geometrie oder ein Kreischnitt betrachtet wird, dient eine Reduzierung der Geometrie auf einen zweidimensionalen Schnitt durch die Scheibe für die thermische Berechnung. Dies ermöglicht die Simulation von realen Belastungsprofilen, welche experimentellen Versuchsfahrten entnommen werden. Die Belastungsprofile entsprechen Fahrzyklen, welche aufgrund ihrer Dauer nur mit hohem Rechenaufwand komplett dreidimensional simuliert werden können. Für rotationssymmetrische Bauteile wie die Bremsscheibe kann solch eine Reduzierung der Geometrie durchaus sinnvoll sein. Es muss allerdings im Vorhinein genau spezifiziert werden, welcher Zweck mit der Simulation verfolgt wird. Daraus ergibt sich, ob eine Reduzierung zulässig ist oder die Simulation der kompletten Scheibe notwendig ist. Im Folgenden wird ein Auszug aus Arbeiten auf diesem Gebiet der Bremsscheibenberechnung gegeben.

In [75] wird zur thermischen Spannungsanalyse der Bremsscheibe ein Segment der Scheibe ( $15,65^\circ$ ) herausgeschnitten und an diesem Simulationen durchgeführt. Die thermische Analyse dient dabei zur Ermittlung der Temperaturverteilung in der Scheibe, welche dann als Eingabeparameter der mechanischen Analyse dient. Es wird gezeigt, dass eine rein elastische Materialbeschreibung nicht ausreicht, da die vorkommenden Spannungen, die der Streckgrenze überschreiten. Allerdings wird darauf hingewiesen dass für eine Analyse des Verformungsverhaltens der Scheibe, beispielsweise der Schirmung, ein solcher Ansatz vertretbar ist. Durch die Verwendung eines modifizierten Gusseisenmodells, welches Plastizität einbezieht, zeigt [75], dass an der Reibfläche der Scheibe stellenweise hohe plastische Dehnungen auftreten. Diese

plastischen Dehnung sind zug- als auch drucklastig. Zudem wird in der Arbeit darauf hingewiesen, dass in Zukunft mit einem kompletten dreidimensionalen Modell der Scheibe gerechnet werden sollte.

Ein solches dreidimensionales Modell wird von [64] mit einer rotierende Wärmequelle verwendet, welche den Bremsbelag abbildet. Entsprechend der Lage des Belags wird ein Wärmefluss in die Scheibe generiert. Durch die Rotation des Belags entsteht eine ungleichmäßige Temperaturverteilung in Umfangsrichtung auf der Reibfläche. Mit diesem Simulationsaufbau wird die thermische Spannungsentwicklung bei einer Serie von Bremsvorgängen (100 km/h auf 50 km/h in 2,36 s und einer zwischenzeitlichen Abkühlphase von 9,44 s) simuliert. Es wird gezeigt, dass das Schirmungsverhalten sich mit der Temperatur ändert.

Jung [71] untersucht mit einer 3D-Simulation die thermoelastische Instabilität von Bremscheiben. Hierzu wird eine thermisch-mechanisch gekoppelte Berechnung aufgesetzt, welche nach einem versetzten Ansatz (staggered approach) arbeitet. Dabei werden beide Probleme, thermisch und mechanisch, abwechselnd getrennt voneinander gelöst und jeweils die letzten Ergebnisse als Eingabeparameter für die darauffolgende Berechnung verwendet. Für die Simulation wird eine rotierende Bremscheibe (1400 rpm), ein konstanter Reibkoeffizient ( $\mu_R = 0,4 = \text{const.}$ ) und ein Belagdruck von 2,5 MPa verwendet. Die lokale Verformung der Scheibe wird in dieser Arbeit ebenfalls berücksichtigt, was zu lokalen Druck- und Temperaturerhöhungen führt.

Betrachtet man die Arbeiten, die im Bereich der Bremscheibensimulation abgehandelt werden, so wird deutlich, dass die Relativbewegung zwischen Scheibe und Belag einbezogen werden muss, um eine realistische Temperaturverteilung zu erzielen. Dies gilt speziell für Simulationen der thermoelastischen Instabilität und Hotspotbildung. Dies kann durch die Rotation der Scheibe, oder aber durch die Verwendung einer rotierenden Randbedingung welche den Bremsbelag abbildet, umgesetzt werden. Da sich die Scheibe im Laufe der Belastung in einem Maße verformt, dass dadurch der Reibkontakt Scheibe-Belag beeinflusst wird, muss dies bei der Randbedingung berücksichtigt werden. Aus den Simulationsergebnissen der Arbeiten (siehe z. B. [115, 71]), welche mit einer kompletten dreidimensionalen Scheibe rechnen, wird deutlich, dass weder für die thermischen noch die mechanischen Ergebnisse eine Symmetrie zu beobachten ist. Es ist daher wichtig, mit einem kompletten Modell der Scheibe zu arbeiten. Weiter wird aus den Arbeiten deutlich, dass der thermische Spannungsanteil dem der rein mechanischen Belastung überwiegt.

In den Arbeiten werden unterschiedliche mechanische Materialmodelle für das Gusseisenmaterial der Bremscheibe verwendet. Das einfachste Modell ist die Annahme eines rein elastischen Verhaltens (z. B. [156, 64]). Diese Annahme ist nur für sehr geringe Belastungen zulässig, beziehungsweise für Analysen des Verformungsverhaltens [75]. Durch die Verwendung eines von-Mises-Plastizitätsmodells (z. B. [115, 116]) wird dieser Problematik teilweise Rechnung getragen, während der Einsatz geeigneter Gusseisenmaterialmodelle (z. B. [75]) die beste Lösung darstellt. Zur Erstellung realistischer Materialmodelle werden, wie im folgenden Abschnitt beschrieben, Simulationen auf der mesoskopischen Längenskala durchgeführt, um die Belastung von Materialien und deren effektive Eigenschaften zu beschreiben.

## 5.2 Mikrostruktursimulation von Gusseisenmaterialien

Für die Simulation der effektiven Eigenschaften von Gussmaterialien sind grundsätzlich folgende Punkte zu bearbeiten:

- Gebietserstellung
- Materialmodelle der vorhandenen Phasen
- Randbedingungen definieren
- Homogenisierung

Wie aus den experimentellen Ergebnissen aus Kapitel 3 hervorgeht, haben die vorhandenen Phasen (mit ihren Eigenschaften), deren Volumenanteil sowie die Formfaktoren und Anordnung starken Einfluss auf die mechanischen und thermischen Eigenschaften. Um den Einfluss der Struktur einzubeziehen, muss ein Simulationsgebiet, welches die Struktur bestmöglich abbildet, erstellt werden. In der Literatur sind verschiedene Arbeiten über die Mikrostruktursimulation von Gusseisen zu finden. Ein Großteil der Arbeiten beschäftigt sich mit der Simulation von duktilem Gusseisen. Die Simulation von Gusseisen mit Kugelgraphit stellt sich vor allem im Bereich der Gebietserstellung einfacher dar. So verwendet [17] ein 2D-achsensymmetrisches Einheitszellenmodell (siehe hierzu auch Kapitel 15) für die Simulation von duktilem Gusseisen mit den beiden Phasen Graphit und Ferrit. Das Material wird hierbei als eine sich periodisch wiederholende Anordnung von Graphitkugeln betrachtet. Für die Simulation von GJL ist eine solche Vereinfachung auf eine einzelne Lamelle aufgrund der vielen Verzweigungen der Graphitlamellen nicht möglich. Allein durch eine Abstraktion der Graphitform wie in [108], ist ein solches Gebiet möglich.

Für die Abbildung realer Strukturen sind in der Regel jedoch deutlich größere Simulationsgebiete notwendig und dadurch rechenintensiver. Durch die steigenden Rechen- und Speicherkapazitäten in den letzten Jahren werden auch solche Simulationen besser durchführbar. So wird in [14] eine Studie an verschiedenen Simulationsgebieten durchgeführt. Zwar wird in dieser Arbeit ebenfalls duktiler Gusseisen behandelt, jedoch sind die zweidimensionalen Gebiete hierbei komplexer und direkt aus experimentellen Schlibfbildern übernommen. In [100] wird ein ähnlicher Ansatz für Gusseisen mit Lamellengraphit gewählt, wobei hier eine Folge von Schlibfbildern, ein Tiefenschlibf, als Grundlage für ein dreidimensionales Simulationsgebiet dient.

Die heterogene Mikrostruktur wird meist auf ein zweiphasiges Material reduziert (siehe beispielsweise [14, 100, 49]) eine perlitische beziehungsweise ferritische Matrix mit den eingebetteten Graphitkristallen. Das Grundgefüge wird als homogene Phase angenommen und die einzelnen Körner sowie die Perlitlamellen nicht aufgelöst. Je nach Analyse wird ein elastisches oder elasto-plastisches Materialmodell angewendet. Für das elasto-plastische Modell wird meist wie in [100] ein von-Mises-Plastizitätsmodell verwendet. [17] verwendet für die Matrix, wie auch den Graphit Schädigungsmodelle. Der spröde Graphit wird mittels einer Weibull-Versagenswahrscheinlichkeit abgebildet, während für die Matrix ein Kontinuumsschädigungsmodell verwendet wird. Um die Zug-Druck-Asymmetrie des Gusseisens abzubilden, verwendet [100] eine Dehnungsabhängigkeit für den Elastizitätsmodul des Graphits. Während für den Druckbereich der Elastizitätsmodul 7000 MPa beträgt, sinkt er bei Zugbelastung auf 350 MPa. Zwischen Zug- und Druck wird mittels der hydrostatischen Dehnung

( $\epsilon_h = 1/3(\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33})$ ) unterschieden. In anderen Arbeiten wird die Zug-Druck-Asymmetrie nicht berücksichtigt.

In dieser Arbeit werden beide Bereiche, die makroskopische Bremsscheibensimulation sowie die mesoskopische Gefügesimulation, behandelt und über einen Multiskalenansatz umgesetzt. Die Modellentscheidung wird anhand der aus der Literatur gewonnenen Informationen getroffen und im Folgenden dargestellt.

### 5.3 Multiskalensimulation

Die Verknüpfung der Simulationsergebnisse der in Abbildung 5.1 dargestellten mesoskopische und makroskopische Größenskala führt zu einem sogenannten Multiskalenansatz. So werden wie in Abbildung 5.1, VIII die Ergebnisse der mesoskopische Simulation mittels eines daraus entwickelten Materialmodells mit der makroskopischen Simulation verknüpft. In entgegengesetzte Richtung können Belastungszustände eines ausgewählten Bereiches der Bremsscheibe auf ein Materialgefüge der mesoskopischen Ebene aufgebracht werden, um dort wiederum den Spannungszustand und die Rissbildung im Gefüge genauer zu untersuchen. Anhand der gesichteten Literatur zu den experimentellen wie numerischen Arbeiten auf den Gebieten der Bremsscheibe und des Gusseisens mit Lamellengraphit, wird die Modellentscheidung für die makroskopische sowie mesoskopische Simulation, wie in Abbildung 5.1 dargestellt, getroffen. Die Belastung der Bremsscheibe setzt sich aus einer thermischen wie mechanischen Belastung zusammen. Da sich die beiden Bereiche beeinflussen, wird die Simulation als eine thermisch-mechanisch gekoppelte Simulation realisiert (Abbildung 5.1, I). Die Kopplung wird durch die thermische Dehnung und deren Einfluss auf das Spannungsfeld realisiert. Die Temperatur wird wiederum durch die Verformung der Scheibe beeinflusst, welche sich aufgrund der auftretenden Spannung einstellt. Damit wird eine beidseitige Kopplung der Temperatur und Spannungsberechnung gewährleistet, wodurch ein realistisches Abbild der auf der Scheibe entstehenden Belastung ermöglicht werden soll. Da für die Ergebnisse der Temperatur- und Spannungsverteilung entsprechend der Literatur kein symmetrisches Verhalten auftritt, wird die Simulation an einer kompletten dreidimensionalen Bremsscheibengeometrie durchgeführt. Die Belastung der Scheibe ergibt sich durch den Kontakt zwischen Bremsscheibe und Bremsbelag. Zur genauen Abbildung des Kontakts wird eine Randbedingung gewählt, welche die Rotation der Scheibe während des Bremsvorgangs berücksichtigt. Zusätzlich wird der Einfluss der Verformung der Scheibe einbezogen, was zu einem ungleichmäßigen Kontaktdruck zwischen Scheibe und Belag (Abbildung 5.1, II) führt. Das für die Bremsscheibe benötigte mechanische Materialmodell (Abbildung 5.1, III) soll dabei aus den Ergebnissen der mesoskopische Simulation ermittelt werden und mit experimentellen Ergebnissen der Zug- und Druckversuche der Daimler AG gespeist werden.

Für die mesoskopische Simulation muss aufgrund der stark von der Mikrostruktur abhängigen Eigenschaften zunächst eine genaue experimentelle Analyse des Gefüges durchgeführt werden (Abbildung 5.1, IV) um daraus ein geeignetes Simulationsgebiet zu erstellen. Dabei liegt der Fokus vor allem auf der Ausbildung der Graphitlamellen, da diese entsprechend der Literaturrecherche den größten Einflussfaktor darstellen. Da Gusseisen mit Lamellengraphit eine starke Zug-Druck-Asymmetrie aufweist, muss sich diese bei der Simulation durch die geeignete Modellierung der Gefügebestandteile einstellen (Abbildung 5.1, V). Das belastungsabhängige Materialverhalten wird mittels des Materialmodells des Graphits modelliert.

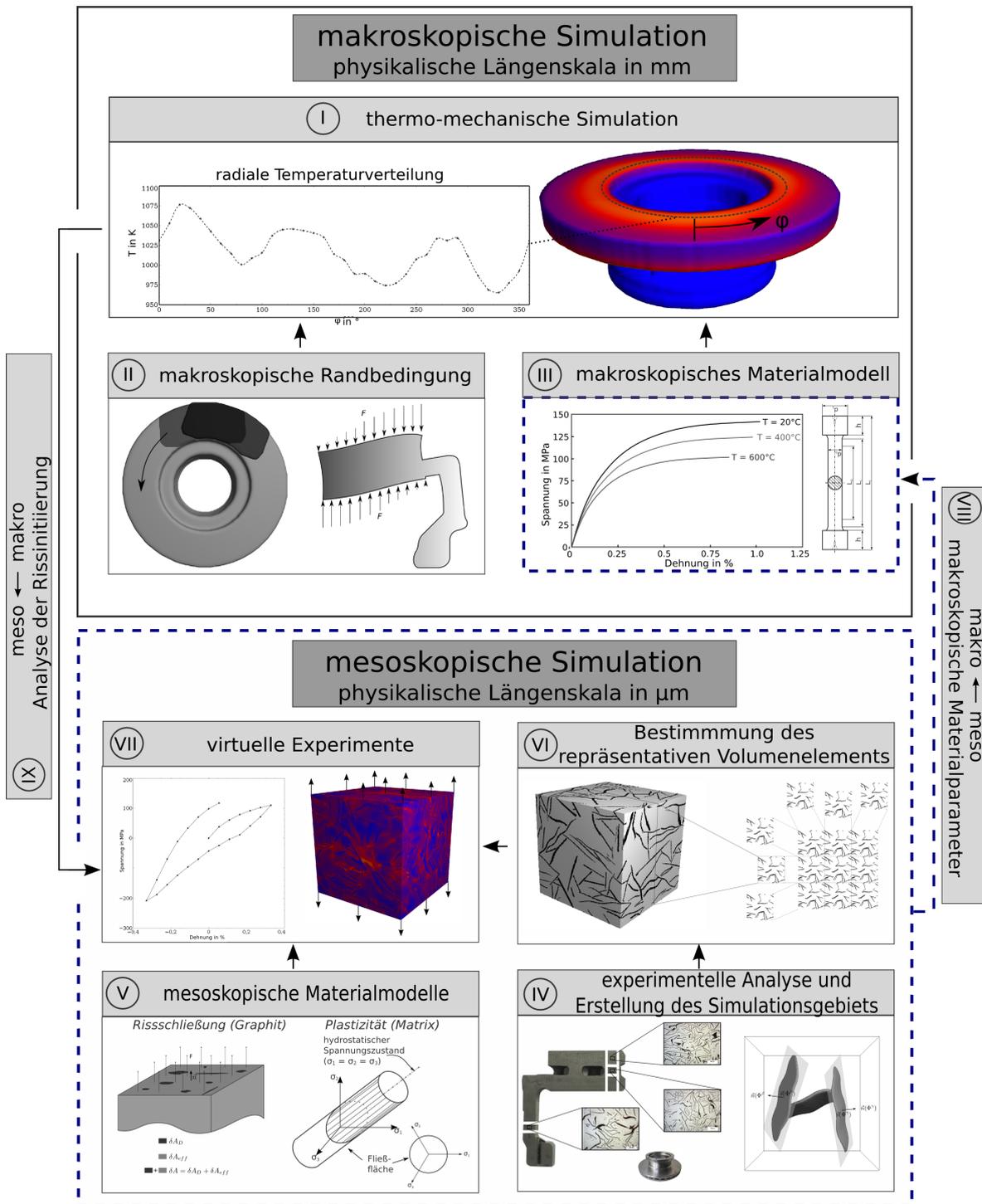


Abbildung 5.1: Übersicht der Multiskalensimulation mit der makroskopischen und mesoskopischen Simulation sowie deren Kopplung entsprechend [128].

Da sich im Matrixmaterial sehr hohe Spannungen einstellen können, welche mit hohen plastischen Dehnungen einhergehen, wird neben einem Plastizitätsmodell auch die lokale Schädigung der Matrix im Modell berücksichtigt.

Da das Verhalten heterogener Materialien stark von der Interaktion der Inhomogenitäten beeinflusst wird, wird zur Simulation des Gusseisen mit Lamellengraphit aufgrund der starken Verästelung der Graphitkristalle der Ansatz eines repräsentativen Volumenelements gewählt (Abbildung 5.1, VI). Durch die Simulation auf der Basis eines repräsentativen Volumenelements wird die Bestimmung der effektiven Eigenschaften des Gusseisens mit Lamellengraphit ermöglicht. Damit können virtuelle Zug- und Druckversuche durchgeführt werden, welche experimentellen Versuchen entsprechen, und deren Kennlinien als Eingabeparameter in die makroskopische Simulation einfließen (Abbildung 5.1, VII).

Zur Durchführung der makroskopischen wie mesoskopischen Simulation wird eine geeignete Software benötigt, mit der sich die dargestellte Multiskalensimulation effektiv durchführen lässt. Zudem sollte die Software auch für zukünftige Arbeiten auf dem Gebiet verwendbar sein und die Implementierung neuer Materialmodelle zulassen.

## 5.4 Verwendete Simulationssoftware

Das Ziel für die Zukunft der Simulationen auf der mesoskopischen Skala ist, einen Großteil der in der Literatur dargestellten Phänomene abbilden zu können. Dazu gehören neben der reinen Spannungs- und Temperaturberechnung beim Einsatz in der Bremsscheibe vor allem auch Phasenumwandlungen. Dies sind zum einen Phasenumwandlungen beim Erreichen der Umwandlungstemperaturen, aber auch Gefügeveränderungen durch Oxidation und ähnliche Vorgänge. Der Phasenfeldlöser Pace3D ist spezialisiert auf die Simulation der Mikrostruktur von Materialien. Es werden hierbei eine Vielzahl von Bereichen, beispielsweise die Spannungsentwicklung innerhalb heterogener Strukturen [129], abgedeckt. Vor allem aber für die zukünftigen Arbeiten auf diesem Gebiet, welche die Phasenumwandlungen berücksichtigen, ist dieser Löser spezialisiert. Zur Durchführung der in Abbildung 5.1 dargestellten Simulationen wird daher der Phasenfeldlöser Pace3D verwendet, welcher in Kapitel 11 beschrieben wird.

## 6 Kontinuumsmechanik

Das Kapitel definiert die zum grundlegenden Verständnis benötigten Größen welche zur mechanischen Berechnung verwendet werden. Die Kontinuumsmechanik untersucht die Wirkung von äußeren Kräften, Verzerrungen und Erwärmung auf einen Körper welcher als Kontinuum angesehen wird [146]. Das Kontinuum wird als zusammenhängende Menge materieller Punkte angesehen, denen physikalische Größen wie Spannungen, Verschiebungen oder Temperatur zugewiesen werden [146]. Die Kontinuumsmechanik wird für Festkörper, Flüssigkeiten sowie gasförmige Stoffe verwendet. Die Ausführungen in diesem Kapitel beziehen sich größtenteils auf die Werke [25, 146, 24, 26].

### 6.1 Verschiebung und Dehnung

Die Verschiebung  $\mathbf{u}$  wird anhand der ursprünglichen und der aktuellen räumlichen Position eines materiellen Punktes ausgedrückt durch

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad [26]. \quad (6.1)$$

Hierbei ist  $\mathbf{X}$  die ursprüngliche Lage und  $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t)$  die aktuelle Position des Punktes als eine Funktion der Zeit  $t$  und der Ausgangslage  $\mathbf{X}$ . Durch die Ableitung

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (6.2)$$

ist der Gradient  $\mathbf{H}$  der Verschiebung definiert. In der Komponentendarstellung kann  $\mathbf{H}$  in

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \approx \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (6.3)$$

umgeschrieben werden [26]. Für den Fall der kleinen Deformationen kann eine geometrische Linearisierung durchgeführt werden. Die rechte Seite von Gleichung (6.3) gilt demnach nur für kleine Deformationen. Die Linearisierung ist zulässig, wenn der Gradient der Verschiebung der Bedingung

$$\|\mathbf{H}\| = \sqrt{\text{sp}(\mathbf{H}\mathbf{H}^T)} \ll 1 \quad (6.4)$$

entspricht [25, 26]. In diesem Fall ist der Dehnungstensor durch die Beziehung

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T)$$

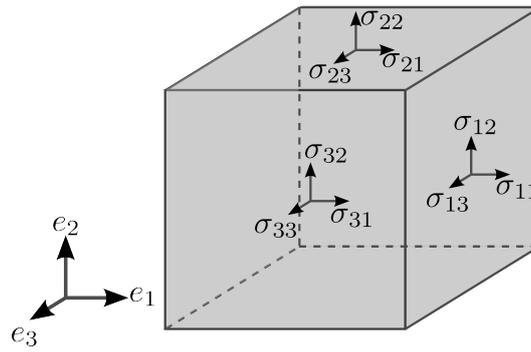


Abbildung 6.1: Infinitesimales Volumenelement mit Cauchy'schen Spannungskomponenten.

definiert [25]. Bei Auftreten von großen Deformationen und einhergehenden geometrischen Nichtlinearitäten müssen alternative Dehnungsmaße eingeführt werden.

Im Falle eines orthonormalen Systems wird der Dehnungstensor wie in Gleichung (6.5) in die Dehnungsmatrix überführt [26].

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j := \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

Der Dehnungstensor kann weiter in einen deviatorischen  $\boldsymbol{\epsilon}'$  und hydrostatischen  $\boldsymbol{\epsilon}^o$  Anteil zerlegt werden.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}^o &= \frac{\text{sp}(\boldsymbol{\epsilon})}{3} \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\epsilon}' &= \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}^o \end{aligned}$$

## 6.2 Cauchy's Spannungstensor

Auf einen elastischen Körper kann eine Kraft  $\mathbf{F}$  aufgrund einer äußeren Last wirken. Über den Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  wird die Intensität der Last an einem Flächenelement  $\Delta A$  durch

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta A} = \frac{d\mathbf{F}}{dA}$$

ausgedrückt [52]. Die drei Spannungsvektoren  $\mathbf{t}_1$ ,  $\mathbf{t}_2$  und  $\mathbf{t}_3$  normal zu den drei Raumrichtungen  $x_1$ ,  $x_2$  und  $x_3$  lassen sich über die Beziehung

$$\mathbf{t}_j = \sigma_{ji} \mathbf{e}_i \quad (6.6)$$

darstellen [52], wobei die Indizes  $i, j$  von 1-3 laufen. Der dreidimensionale Lastzustand des Materials kann hiermit über den symmetrischen Cauchy Spannungstensor zweiter Ordnung

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad [26].$$

beschrieben werden. Die Diagonalkomponenten beschreiben die Normalspannungen und die Einträge auf den Nebendiagonalen die Schubspannungen. Der Spannungstensor beschreibt hiermit den Spannungszustand in einem Punkt  $\mathbf{x}$  vollständig [16]. Seine Komponenten sind in Abbildung 6.1 anhand eines infinitesimalen Volumenelements dargestellt. Wie der Dehnungstensor kann auch der Spannungstensor in einen hydrostatischen  $\boldsymbol{\sigma}^o$  und einen deviatorischen Anteil  $\boldsymbol{\sigma}'$  aufgeteilt werden.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^o &= \frac{\text{sp}(\boldsymbol{\sigma})}{3} \mathbf{I} \\ \boldsymbol{\sigma}' &= \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^o\end{aligned}$$

Über den Cauchy Spannungstensor kann das Momentengleichgewicht über die Gleichung

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{b} \quad (6.7)$$

berechnet werden, wobei der Term  $\mathbf{b}$  die Volumenkraftdichte darstellt [138]. Unter Vernachlässigung von  $\mathbf{b}$  wird über die Lösung von Gleichung (6.7) die Ausbreitung der elastischen Welle innerhalb des Materials beschrieben. Für  $\nabla \boldsymbol{\sigma} = 0$  und damit  $\ddot{\mathbf{u}} = 0$  ist der Gleichgewichtszustand erreicht.

### 6.3 Hooke'sches Gesetz

Wird bei einer einachsigen weggesteuerten Belastung die benötigte Kraft gemessen, so zeigt sich, dass das Verhältnis von Spannung zu Dehnung bei einer rein elastischen Belastung konstant ist. Im eindimensionalen Fall ist der Proportionalitätsfaktor der Elastizitätsmodul  $E$ . Dieses Verhalten wird durch das 1-D *Hook'sche Gesetz*

$$\sigma = E \epsilon$$

beschrieben. Für den allgemeinen dreidimensionalen Fall ergibt sich das Hook'sche Gesetz der linearen Elastizitätstheorie zu

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{C}[\boldsymbol{\epsilon}].$$

$\mathcal{C}$  ist der Steifigkeitstensor vierter Ordnung. Durch die Invertierung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung wird das Hook'sche Gesetz über den Nachgiebigkeitstensor vierter Ordnung  $\mathcal{S} = \mathcal{C}^{-1}$  zu

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathcal{S}[\boldsymbol{\sigma}].$$

In den meisten Fällen ist der Übergang zur Matrix-Vektor Schreibweise des Hook'schen Gesetzes sinnvoll. Weit verbreitet ist hier die Voigt-Notation. Aufgrund der Symmetrie der Spannungs- und Dehnungstensoren können diese auf sechs unabhängige Komponenten reduziert werden. Für die Steifigkeit sind unterschiedliche Symmetrieklassen definiert. Für ein isotropes Material reduziert sich die Steifigkeit auf zwei unabhängige Konstanten, den Elastizitätsmodul  $E$  und die Querkontraktion  $\nu$ , und für eine trikline Symmetrie auf 21 unabhängige Konstanten.

In dieser Arbeit werden isotrope und transversal isotrope Materialien behandelt. Die Voigt Notation für ein isotropes Material ergibt sich nach [26] zu

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{1111} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{1111} - C_{1122} & 0 & 0 \\ & & & & C_{1111} - C_{1122} & 0 \\ \text{sym.} & & & & & C_{1111} - C_{1122} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix}$$

und für ein transversal isotropes Material zu

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{2323} & 0 & 0 \\ & & & & C_{2323} & 0 \\ \text{sym.} & & & & & C_{1111} - C_{1122} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ 2\epsilon_{23} \\ 2\epsilon_{13} \\ 2\epsilon_{12} \end{bmatrix}.$$

# 7 Plastizität

Die Grundannahme für die verwendeten Plastizitätsmodelle ist die der kleinen Deformationen. Für kleine Deformationen kann die Gesamtdehnung additiv in einen elastischen  $\epsilon_{el}$  und einen plastischen  $\epsilon_{pl}$  Teil zerlegt werden und ergibt sich zu

$$\epsilon = \epsilon_{el} + \epsilon_{pl}.$$

Die plastische Dehnung beschreibt hierbei eine irreversible Änderung der kristallinen Struktur [50], welche in einer bleibenden Dehnung bei Entfernen der Last resultiert. Die Zerlegung der Gesamtdehnung verdeutlicht, dass  $\epsilon_{el}$  nicht vom plastischen Fließen beeinflusst wird. Das Hook'sche Gesetz folgt hiermit zu

$$\sigma = \mathcal{C}[\epsilon_{el}] = \mathcal{C}[(\epsilon - \epsilon_{pl})]$$

bzw. in Ratenschreibweise zu

$$\dot{\sigma} = \mathcal{C}[(\dot{\epsilon} - \dot{\epsilon}_{pl})].$$

Für einen einachsigen Zugversuch lassen sich die elastische und plastische Dehnung wie in Abbildung 7.1 dargestellt bestimmen. Nach der rein elastischen Belastung  $a - b$  beginnt das Material in Punkt  $b$  sich plastisch zu verformen. Der Verlauf  $b - c$  beschreibt ideal plastisches Verhalten und der Verlauf  $b - d$  verfestigendes Verhalten. Zur Bestimmung, ob das Material sich im elastischen oder plastischen Bereich befindet, wird die *Fließfunktion* ausgewertet.

## 7.1 Fließfunktion

Die Fließfunktion  $\Phi(\sigma)$  und die damit definierte Fließfläche gibt den zulässigen Bereich der Spannung an. Über die Fließfunktion wird ein durch Experimente bestimmter skalarer Spannungsgrenzwert  $\sigma_y$  mit einer skalaren Vergleichsspannung  $\sigma_{vgl}$  ausgewertet

$$\Phi(\sigma) := \sigma_{vgl} - \sigma_y.$$

Der zulässige Bereich ist für  $\Phi(\sigma) \leq 0$  gegeben,  $\Phi(\sigma) > 0$  ist bei ratenunabhängiger Plastizität nicht zulässig [97]. Für  $\Phi(\sigma) < 0$  ist elastisches Materialverhalten definiert und für  $\Phi(\sigma) = 0$  verformt sich das Material plastisch. Im Fall der idealen Plastizität ist die Fließfunktion  $\Phi(\sigma)$  nur abhängig von der Spannung. Tritt ein verfestigendes plastisches Verhalten auf, so ist die Fließfunktion  $\Phi(\sigma, \kappa)$  zusätzlich von dem Verfestigungsparameter  $\kappa$  abhängig. Die Fließfunktion wird entsprechend des jeweiligen Materialverhaltens gewählt. Aufgrund der Unterschiede in der Mikrostruktur und den Bindungen haben sich für verschiedene Werkstoffe unterschiedliche Fließfunktionen bewährt. Für metallische Werkstoffe wird oftmals die *von-Mises*-Fließfunktion verwendet.

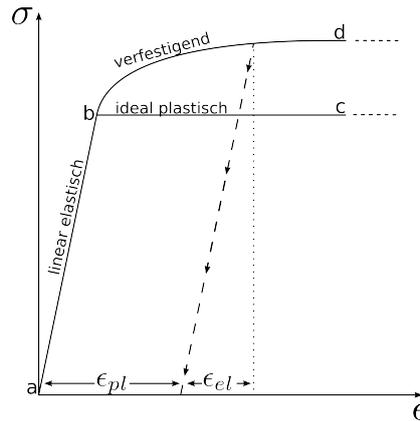


Abbildung 7.1: Definition der elastischen und plastischen Dehnung anhand des einachsigen Zugversuchs. Mit a-b linear elastischem, b-c ideal plastischem und b-d verfestigendem Materialverhalten.  $\epsilon_{pl}$  beschreibt die plastischen Dehnung und  $\epsilon_{el}$  die elastische Dehnung.

### 7.1.1 Von-Mises-Fließkriterium

Das von-Mises-Fließkriterium basiert auf der Annahme, dass der deviatorische Anteil der spezifischen Verzerrungsenergie  $\psi$ , die Gestaltänderungsenergie  $\psi'_{el} = \frac{1}{2G} \boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}'$ , für das Auftreten der plastischen Verformung verantwortlich ist [138]. Für den allgemeinen Spannungsfall ergibt sich die von-Mises-Fließfunktion  $\Phi_M(\boldsymbol{\sigma})$  zu

$$\Phi_M(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}' - \frac{1}{3} \sigma_y^2 \quad [62] \quad (7.1)$$

allein durch den deviatorischen Anteil  $\boldsymbol{\sigma}'$  der Spannung. Die von-Mises-Fließbedingung bildet den Beginn der plastischen Verformung für duktile metallische Werkstoffe gut ab. Wie aus Gleichung (7.1) und aus der Definition der Mises-Fließbedingung hervorgeht, ist das Kriterium allein vom deviatorischen Anteil der Spannung abhängig. Für eine Beschreibung von spröden Materialien wie beispielsweise Beton oder Stein, aber auch grauem Gusseisen, ist eine Abhängigkeit des hydrostatischen Drucks zu beobachten. Dies führt dazu, dass diese Materialien unterschiedliches Verhalten im Zug- und Druckbereich aufweisen. Um diesen Verhalten gerecht zu werden, kann die von-Mises-Fließbedingung um einen zusätzlichen Anteil erweitert werden. Daraus ergibt sich die Mises-Schleicher-Fließbedingung.

### 7.1.2 Mises-Schleicher-Fließfunktion

Die Mises-Schleicher-Fließfunktion

$$\Phi_{MS}(\boldsymbol{\sigma}) := \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \frac{1}{3} \sigma^o (\sigma_{y,c} - \sigma_{y,t}) - \frac{1}{3} \sigma_{y,c} \sigma_{y,t}$$

stellt eine Erweiterung der von-Mises-Fließfunktion dar [84] mit  $\sigma_h = 1/3(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$ . Die parabolische Fließfunktion  $\Phi_{MS}$  wird auch Burzynski Fließfunktion genannt. Für diese Fließfunktion wird neben der Streckgrenze für eindimensionale Zugbelastung  $\sigma_{y,t}$  eine weitere

Streckgrenze  $\sigma_{y,c}$  für die eindimensionale Belastung unter Druck definiert. Die Abhängigkeit ergibt sich hierbei über den hydrostatischen Spannungszustand  $\sigma^o$ . Durch die Wahl identischer Streckgrenzen für Zug- und Druckbelastung ergibt sich wieder die bekannte von-Mises-Fließfläche. Reicht eine Fließfläche zur Beschreibung des Materialverhaltens nicht aus, so kann ein Multiflächenansatz (*multisurface plasticity*), wie beispielsweise von Hjelm [62], gewählt werden.

### 7.1.3 Fließfunktion für graues Gusseisen

Die Fließfunktion nach Hjelm [62] setzt sich aus der von-Mises-Fließfläche,  $\Phi_M = \Phi_2$ , und der Fließfläche des modifizierten, druckabhängigen Mises-Schleicher-Modells,  $\Phi_{MS} = \Phi_1$ , zusammen. Für solch eine Mehrflächenfließfunktion muss entsprechend

$$\Phi_i(\boldsymbol{\sigma}, \kappa) = 0 \quad , \forall i$$

gelten. Die Fließfunktion ergibt sich zu

$$\Phi_{\text{Hjelm}}(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{cases} \Phi_1 = \Phi_{\text{MS}} := \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \frac{1}{3} \sigma^o (\sigma_{y,c} - \sigma_{y,t}) - \frac{1}{3} \sigma_{y,c} \sigma_{y,t}, & \sigma^o > -\sigma_{y,c} \\ \Phi_2 = \Phi_M = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}' - \frac{1}{3} \sigma_{y,c}^2, & \sigma^o \leq -\sigma_{y,c}. \end{cases}$$

$\sigma_{y,c}$  und  $\sigma_{y,t}$  sind wie oben die uniaxialen Streckgrenzen unter Druck- bzw. Zugbelastung.

## 7.2 Fließregel

Über die Fließregel wird die Evolution der plastischen Dehnung  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{pl}}$  beschrieben. Bei der Evolution der plastischen Dehnung kann generell zwischen verfestigendem und ideal plastischem Verhalten unterschieden werden (vgl. Abbildung 7.1). Die Fließregel, und damit die Änderung der plastischen Dehnung, ergibt sich zu

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{pl}} = \dot{\lambda} \boldsymbol{p} \quad [77]. \quad (7.2)$$

Der Richtungsvektor  $\boldsymbol{p}$  definiert hierbei die Richtung des plastischen Fließens, während die skalare Funktion  $\lambda$  den Betrag bildet. Wird davon ausgegangen, dass das Prinzip des Maximums der plastischen Arbeit gilt, so kann die spezielle Form von (7.2),

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{pl}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \quad (7.3)$$

geschrieben werden [77]. Für den Belastungszustand  $\boldsymbol{\sigma}$  stimmen dann die Richtung von  $\boldsymbol{\epsilon}_{\text{pl}}$  und der Normalen der Fließfläche überein [77]. Dadurch wird die *Normalenregel* beschrieben. Besitzt die Fließfläche, wie bei der Fließfläche nach Hjelm, eine Singularität, so liegt der plastische Dehnratenvektor innerhalb der durch die Normalenvektoren aufgespannten Fläche. Die Berechnung des Vektors ergibt sich dann nach Koiter [76] zu

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{pl}} = \dot{\lambda}_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \dot{\lambda}_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

und für den allgemeinen Fall zu

$$\dot{\epsilon}_{\text{pl}} = \sum_m \dot{\lambda}_m \frac{\partial \Phi_m}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (7.4)$$

In der bisher verwendeten Form der Fließregel handelt es sich um die *assoziierte* Fließregel, da die Fließfunktion zur Bestimmung der Fließrichtung verwendet wird. Bildet die assoziierte Fließregel das Materialverhalten nicht ausreichend wieder, so wird eine *nicht assoziierte* Fließregel verwendet. In diesem Fall wird eine zur Fließfunktion  $\Phi$  unterschiedliche Funktion verwendet. Bei der nicht assoziierten Fließregel ist die plastische Dehnung generell nicht normal zur Fließfläche [138]. Während die Richtung des plastischen Fließens durch die Ableitung der Fließfunktion beziehungsweise des plastischen Potentials gegeben ist, ist der plastische Multiplikator unbekannt. Der plastische Multiplikator, oder inelastischer Konsistenzparameter, lässt sich über die Konsistenzbedingung  $\dot{\lambda}\dot{\Phi} = 0$  bestimmen [138]. Für den Fall der idealen Plastizität und einer Änderung des Konsistenzparameters ( $\dot{\lambda} > 0$ ) muss

$$\dot{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

gelten. Setzt man für  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$  die Beziehung

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathcal{C}[(\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{pl}})]$$

ein, so folgt

$$\dot{\Phi}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathcal{C}[(\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_{\text{pl}})] = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathcal{C}[(\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \dot{\lambda} \boldsymbol{p})].$$

Durch Auflösen der Gleichung ergibt sich der plastische Multiplikator zu

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathcal{C}[\dot{\boldsymbol{\epsilon}}]}{\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathcal{C}[\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}]} \quad [138].$$

Neben der Plastizität spielt für das in dieser Arbeit behandelte Gusseisen mit Lamellengraphit die Schädigung der Graphitlamellen aber auch des Matrixmaterials Perlit eine entscheidende Rolle, um das effektive Materialverhalten abzubilden. Im Folgenden werden daher die Grundlagen der Schädigungstheorie nach [86] beschrieben.

## 8 Schädigung

Die perlitische Matrix von Gusseisen mit Lamellengraphit unterliegt bei Zugbelastung bereits bei minimaler makroskopischer Dehnung einer lokalen plastischen Verformung. Wie ausführlich in Kapitel 3 diskutiert, liegt dies daran, dass die Graphitlamellen keine Zugbelastung übertragen und sich somit die Spannung an deren Enden konzentriert. Bei zunehmender äußerer Last wird die plastische Verformung der Matrix von einer Schwächung des Materials begleitet. Diese Schwächung tritt aufgrund sich bildender mikroskopischer Kavitäten, Risse und Poren auf [52]. Ähnliches Verhalten tritt an der Grenzfläche Graphit-Perlit auf. Die mikroskopischen Kavitäten, Risse und Poren können als *Schädigung* zusammengefasst werden. Auch das Verhalten des Graphits kann über diese Schädigung beschrieben werden. Hier jedoch, aufgrund des spröden Charakters des Graphits, ohne eine vorgelagerte bzw. begleitende plastische Verformung. Entsprechend der Materialcharakteristika wird daher zwischen der duktilen Schädigung und der spröden Schädigung unterschieden, sowie der Kriech- und Ermüdungsschädigung [52]. Aufgrund der Schädigung ist das Material nicht mehr homogen. Vielmehr kann es als ein mit Rissen und Poren durchzogenes Material betrachtet werden. Es ist augenscheinlich, dass hierdurch die Eigenschaften beeinflusst werden. Dies sind nach Lemaitre [86]:

- Verringerung des Elastizitätsmoduls
- Verringerung der Streckgrenze
- Verringerung der Härte
- Vergrößerung der Dehnrates beim Kriechen
- Verringerung der Dichte
- Verringerung der thermischen Leitfähigkeit

Die Beschreibung der Schädigung und der Schädigungsevolution ist Teil dieses Kapitels, welches sich hauptsächlich auf die ausführlichen Arbeiten von Lemaitre [86] und Desmorat [35, 36] bezieht.

### 8.1 Physikalische Interpretation der Schädigung und Definition der Schädigungsvariable

Wird die in Abbildung 8.1 dargestellte Schnittebene eines homogenen Werkstoffes über eine externe Kraft  $F$  beansprucht, so verteilt sich die Last gleichmäßig über die Fläche  $\delta A$  des Querschnitts (Abbildung 8.1). Bilden sich im Material mikroskopische Risse oder Poren, beziehungsweise sind diese schon von vornherein vorhanden, tragen die Flächenbereiche  $\delta A_D$

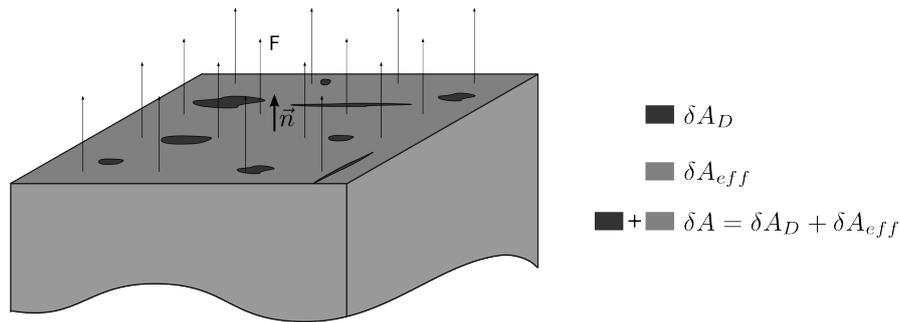


Abbildung 8.1: Definition der Größen zur Berechnung des Schädigungsparameters.  $\delta A$  beschreibt die Gesamtfläche des Querschnitts bestehend aus den ungeschädigten Flächenbereichen  $\delta A_{eff}$  und den Flächenbereichen der Risse und Poren  $\delta A_D$ .

der Risse und Poren nicht weiter zur Übertragung der Kraft bei. Die *effektive* Fläche des Materials reduziert sich zu

$$\delta A_{eff} = \delta A - \delta A_D.$$

Durch die Reduzierung der Querschnittsfläche werden die übrigen Flächenbereiche  $\delta A_{eff}$  stärker belastet. Über den Flächenbereich  $\delta A_D$  und die ursprüngliche Fläche lassen sich wie folgt die Schädigungsvariablen beschreiben.

### 8.1.1 Skalare Schädigungsvariable

Die skalare Schädigungsvariable  $D$  wird über das Verhältnis von geschädigter zu ursprünglicher Fläche

$$D = \frac{\delta A_D}{\delta A}$$

definiert [86]. Diese isotrope Schädigung kann für eindimensionale Probleme verwendet werden. Weiter kann sie als Approximation für dreidimensionale Lastfälle verwendet werden [86]. Aus der Definition von  $D$  geht hervor, dass diese nur Werte zwischen null und eins annehmen kann ( $0 \leq D \leq 1$ ). Wo  $D = 0$  beziehungsweise  $\delta A_D = 0$  einem ungeschädigten Material entspricht und  $D = 1$  respektive  $\delta A_D = \delta A$  einem komplett geschädigten Material. In der Realität tritt der Verlust der Tragfähigkeit von Materialien jedoch bereits bei Werten von  $D \approx 0,2 - 0,5$  ein [52] welcher auch als kritischer Schädigungswert  $D_c$  bezeichnet wird [86]. Findet die Schädigung im Material richtungsabhängig statt oder sind unterschiedliche Schädigungsmechanismen vorhanden, so ist die Beschreibung über eine einzelne Schädigungsvariable  $D$  nicht ausreichend und es müssen weitere Variablen  $D_i$  beziehungsweise eine tensorielle Schädigungsgröße eingeführt werden.

### 8.1.2 Mehrere skalare Schädigungsvariablen

Für transversalisotrope Materialien wie Graphit, die einen schichtweisen Aufbau besitzen, ist zur Beschreibung des Schädigungszustandes somit die Verwendung mehrerer Schädigungsvariablen

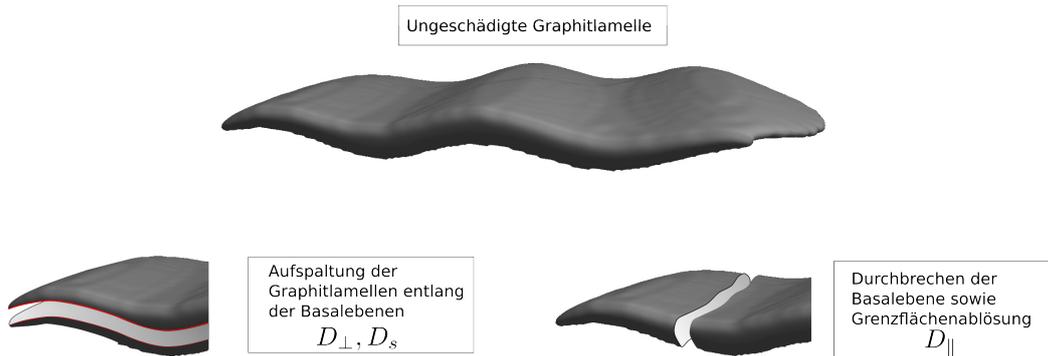


Abbildung 8.2: Schädigungsvariablen zur Beschreibung der Schädigung des Graphits.  $D_{\parallel}$  beschreibt die Schädigung innerhalb der Basalebene,  $D_S$  die Schubschädigung zwischen den Basalebenebenen und  $D_{\perp}$  das Ablösen einzelner Basalebenebenen.

notwendig. In die einzelnen Richtungen treten unterschiedliche Schädigungsmechanismen auf, welche über separate Schädigungsvariablen abgebildet werden. Für Graphit bietet sich die in Abbildung 8.2 graphisch dargestellte Wahl der Schädigungsparameter an, die in ähnlicher Weise in [86] für ein Faser-Matrix-Verbundwerkstoff Verwendung findet:

- Schädigung innerhalb der Basalebenebenen und Grenzflächenablösung  $D_{\parallel}$
- Schubschädigung zwischen den Basalebenebenen  $D_S$
- Ablösen der einzelnen Basalebenebenen  $D_{\perp}$

Für den allgemeinen Fall der anisotropen Schädigung kann nach Lemaitre [86] der Schädigungstensor zweiter Stufe  $D_{ij}$  definiert werden.

Die im Material vorherrschende Spannung verändert sich in Abhängigkeit der Schädigungsvariablen und kann über diese beschrieben werden.

## 8.2 Konzept der effektiven Spannung und das Dehnungsäquivalenzprinzip

Die oben definierte effektive Fläche  $\delta A_{\text{eff}}$  ist die zur Lastaufnahme verbleibende Fläche. Die effektive Fläche ist kleiner als die ursprüngliche Fläche  $\delta A$  des ungeschädigten Materials, wodurch sich bei gleichbleibender äußerer Belastung die Spannung auf die verbleibenden Flächenelemente erhöht. Die Spannung, die auf den Materialquerschnitt wirkt, wird als *effektive Spannung*  $\tilde{\sigma}$  bezeichnet. Für den eindimensionalen Fall wird die effektive Spannung durch Verwendung der effektiven Fläche  $\delta A_{\text{eff}}$  über

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\delta A_{\text{eff}}} = \frac{F}{\delta A - \delta A_D} = \frac{F}{\delta A(1 - \frac{\delta A_D}{\delta A})} = \frac{F}{\delta A(1 - D)} = \frac{\sigma}{1 - D}$$

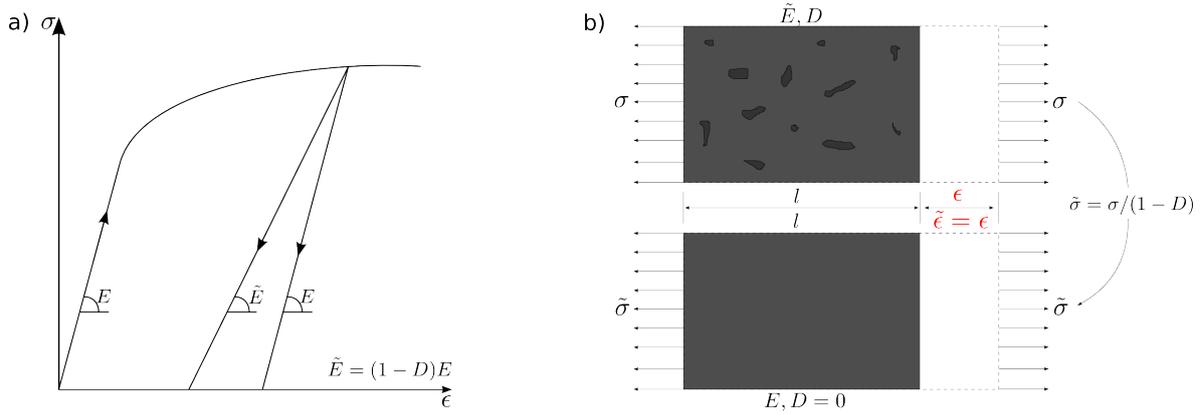


Abbildung 8.3: a) Verlauf der Entlastung, bei geschädigtem und ungeschädigtem Material nach [35].  $E$  beschreibt den ursprünglichen Elastizitätsmodul und  $\tilde{E} = (1 - D)E$  den effektiven Elastizitätsmodul. b) Visualisierung des Dehnungsäquivalenzprinzips welches besagt, dass die Dehnung des abgebildeten geschädigten Materials unter der Spannung  $\sigma$  gleich der Dehnung des ungeschädigten Materials unter der Spannung  $\tilde{\sigma}$  ist.

berechnet. Mit diesem Ansatz ergibt sich die multiachsiale effektive Spannung für den isotropen Fall zu

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - D}.$$

Über das Dehnungsäquivalenzprinzip (Abbildung 8.3, b), welches durch Skrzypek [134] wie folgt definiert wird,

*“The strain associated with a damage state under the applied stress  $\sigma$  is equivalent to the strain associated with the undamaged state under the effective stress  $\tilde{\sigma}$ ”,*

lässt sich ein effektiver Elastizitätsmodul ableiten. Demnach ist die Dehnung eines geschädigten Materials unter der Last  $\sigma$  gleich der Dehnung der eines ungeschädigten Materials unter der Last  $\tilde{\sigma}$ . Damit ergibt sich das Spannungs-Dehnungs Verhältnis für den eindimensionalen Fall zu

$$\epsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{(1 - D)E}.$$

Der Term  $(1 - D)E$  kann dann als effektiver Elastizitätsmodul  $\tilde{E} = (1 - D)E$  geschrieben werden und das Hook'sche Gesetz für ein geschädigtes Material ergibt sich zu

$$\epsilon = \frac{\sigma}{\tilde{E}}.$$

Die Änderung des Elastizitätsmoduls aufgrund der Schädigung kann in Abbildung 8.3, a) beobachtet werden. Während das ungeschädigte Material bei Entlastung der Steigung des ursprünglichen Elastizitätsmoduls folgt ( $\sigma = E\epsilon$ ) gilt für das geschädigte Material die Steigung des verringerten Elastizitätsmoduls  $\tilde{E}$ . Für den isotropen Schädigungsfall und der skalaren Schädigungsvariablen  $D$  folgt damit für den effektiven Steifigkeitstensor  $\tilde{\mathcal{C}}$  des Materials

$$\tilde{\mathcal{C}} = (1 - D)\mathcal{C}. \quad (8.1)$$

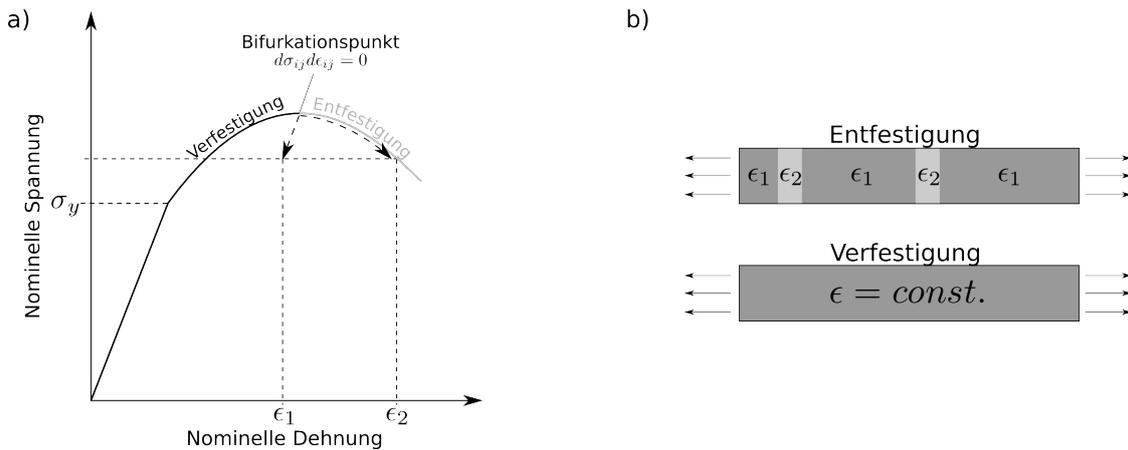


Abbildung 8.4: Dehnungslokalisierung bei entfestigendem Materialverhalten. a) Nach Erreichen des Bifurkationspunktes beginnt das Material in einigen Bereichen zu entfestigen. Dies führt zu dem in Abbildung b) dargestellten inhomogenen Dehnungszustand mit den Bereichen der Dehnung  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$ . Die Bereiche  $\epsilon_2$  sind dabei die entfestigenden Materialabschnitte. Für die Verfestigung liegt, wie dargestellt, ein homogener Dehnungszustand vor.

### 8.3 Lokalisierung

Mit fortschreitender Schädigung wird die Fähigkeit des Materials, Last aufzunehmen, reduziert. Entgegen der klassischen Plastizitätstheorie bei der lediglich Verfestigendes sowie idealplastisches Verhalten auftritt und somit dem Stabilitätspostulat  $d\sigma_{ij}/d\epsilon_{ij} > 0$  nach Drucker genügt, wird durch die Einbindung der Schädigung auch ein entfestigendes Verhalten ermöglicht. Unter Entfestigung versteht man die Spannungsabnahme trotz zunehmender Deformation [52]. In Abbildung 8.4, a) kommt es dadurch am Bifurkationspunkt  $d\sigma_{ij}/d\epsilon_{ij} = 0$  zu einer materiellen Instabilität [140]. Während sich wie Abbildung 8.4, b), dargestellt, einige Materialbereiche plastisch entfestigen ( $\epsilon_2$ ), entlasten andere Bereiche elastisch ( $\epsilon_1$ ). Die Dehnung im Stab ist im Gegensatz zu Verfestigung nicht mehr konstant und aufgrund fehlender Eindeutigkeit nicht bestimmbar [140]. Die Dehnung konzentriert sich damit auf einige wenige Bereiche. Der Vorgang wird daher auch Dehnungslokalisierung genannt.

Spröde oder quasispröde Materialien wie beispielsweise die im Gusseisen enthaltenen Graphitkristalle können über quasi-elastische Materialschädigungsgesetze modelliert werden.

### 8.4 Thermodynamik der Schädigung und Schädigungsevolution

Aufbauend auf dem Konzept der effektiven Spannungen und dem Dehnungsäquivalenzprinzip werden die Zustandsgleichungen der Elastoplastizitätstheorie und der Schädigungstheorie gekoppelt. Neben der beobachtbaren Zustandsvariable der elastischen Dehnung  $\epsilon_{el}$  ist die Schädigungsvariable wie auch die plastische Dehnung eine interne Zustandsvariable. Die Helmholtz-Energie bildet das Zustandspotential des Materials und ist eine Funktion der Zustandsvariablen  $\psi(\epsilon_{el}, D, h)$  [86]. Das Potential wird im Folgenden als Gibbs-Potential

ausgedrückt, welches sich aus der Helmholtz Energie über eine Legendre-Transformation berechnen lässt [86]. Unter der Annahme, dass der elastische geschädigte Anteil von der plastischen Verfestigung entkoppelt ist, lässt sich die Freie Energie zu

$$\psi = \psi_{el}(\boldsymbol{\epsilon}_{el}, D) + \psi_{pl}(h) \quad (8.2)$$

zusammenfassen [138].  $\psi_{el}$  ist der elastisch-geschädigte und  $\psi_{pl}$  der plastische Beitrag. Das elastische Schädigungspotential ergibt sich nach der Theorie von Lemaitre [86] zu

$$\rho\psi_{el}(\boldsymbol{\epsilon}_{el}, D) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}_{el}(1-D) \cdot \mathbf{C}[\boldsymbol{\epsilon}_{el}] \quad (8.3)$$

und die Energiefreisetzungsrate zu

$$Y := \rho \frac{\partial \psi}{\partial D} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon}_{el} \cdot \mathbf{C}[\boldsymbol{\epsilon}_{el}]$$

beziehungsweise durch die Verwendung der Inversen Spannungs-Dehnungs-Beziehung zu

$$\begin{aligned} Y &= \frac{-1}{2(1-D)^2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{C}^{-1}[\boldsymbol{\sigma}] \\ &= \frac{-1}{2E(1-D)^2} [(1+\nu)\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \nu(\sigma^o)^2] \\ &= \frac{-\sigma_M}{2E(1-D)^2} \left[ \frac{2}{3}(1+\nu) + 3(1-2\nu) \left( \frac{\sigma^o}{\sigma_M} \right) \right] \\ &= \frac{-\sigma_M^2}{6G(1-D)^2} - \frac{(\sigma^o)^2}{2K(1-D)^2} [138]. \end{aligned}$$

$\sigma_M$  ist dabei die von-Mises-Spannung und  $\sigma^o$  die hydrostatischen Spannung. Die Evolution der isotropen skalaren Schädigungsvariable  $D$  wird aus dem Dissipationspotential  $F$  abgeleitet und ergibt sich entsprechend der verallgemeinerten Normalenregel zu

$$\dot{D} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F_D}{\partial(-Y)} = \dot{\lambda} \frac{\partial F_D}{\partial Y}, \quad (8.4)$$

wobei  $\lambda$  den plastischen Konsistenzparameter aus Kapitel 7, Plastizität darstellt. Für die Beschreibung der Evolution des Schädigungsparameters muss ein Schädigungsmodell aufgestellt werden, welches die Vorgänge innerhalb des Materials und dessen Abschwächung abbildet. In der Literatur sind für unterschiedliche Materialien Modelle zu finden. Um die Schädigungsevolution der im Gusseisen vorhandenen Phasen, perlitische Matrix und Graphitkristalle, korrekt abzubilden wird zwischen den *duktilen* und *spröden* Schädigungsmechanismen unterschieden.

#### 8.4.1 Duktile Schädigung (Porenwachstum)

Die duktile Schädigung wird durch die Entstehung, Vergrößerung und den Zusammenschluss von Poren und Kavitäten dominiert [52]. Diese Inhomogenitäten entstehen als Folge von großen lokalen Deformationen innerhalb des Materials und in Gusseisen mit Lamellengraphit daher meist in der direkten Umgebung der Graphiteinschlüsse. Die duktile Schädigung geht dabei einher mit der dort entstehenden plastischen Verformung des Materials, was durch den

plastischen Multiplikator in Gleichung 8.4 ausgedrückt wird. Das Dissipationspotential  $F$  für die mit der Plastizität gekoppelte Schädigung ergibt sich zu

$$F = \tilde{\Phi} + F_D \quad [86].$$

Die Funktion  $\tilde{\Phi}$  stellt die bekannte Fließfunktion nach von Mises in der alternativen Form

$$\tilde{\Phi}_M = \frac{\sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}'}}{1 - D} - \sigma_y$$

mit dem Einfluss der Schädigung dar. Aus Experimenten geht hervor, dass  $F_D$  eine nichtlineare Funktion in Abhängigkeit der Energiefreisetzungsrate  $Y$  handeln muss [86].  $F_D$  ergibt sich daraus nach [86] zu

$$F_D = \frac{S}{(s+1)(1-D)} \left( \frac{Y}{S} \right)^{s+1}$$

und durch Ableiten nach  $Y$  und Formel (8.4) ergibt sich die Schädigungsevolution zu

$$\dot{D} = \frac{\dot{\lambda}}{1-D} \left( \frac{Y}{S} \right)^s. \quad (8.5)$$

Die Parameter  $s$  und  $S$  sind hierbei temperaturabhängige Materialkonstanten. Die Evolution der plastischen Dehnung folgt durch die Ableitung des Potentials  $F$  nach dem deviatorischen Anteil des Spannungstensors zu

$$\dot{\epsilon}_{\text{pl}} = \dot{\lambda} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\dot{\lambda}}{1-D} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\|\boldsymbol{\sigma}'\|}.$$

#### 8.4.2 Quasispröde Schädigung

Bei diesen Materialgesetzen wird die Plastizität vernachlässigt, weil sie entweder in nur sehr geringem Maße (quasi-spröde) oder überhaupt nicht (spröde) auftritt. Die Rissausbreitung verläuft in diesem Falle sehr schnell und instabil. Der Mechanismus dahinter ist eine atomare Ablösung [86]. Da der plastische Anteil im Falle quasi-spröder bzw. spröder Schädigung vernachlässigt werden kann folgt, dass sich das Gesamtpotential aus Gleichung (8.2) auf den elastischen Teil aus Gleichung (8.3) reduziert. Spröde Materialien weisen meist eine sehr geringe Bruchdehnung auf. So beträgt sie bei Zugbelastung des Gusseisens wie in Kapitel 3 beschrieben lediglich 0,5 - 1,5 %. Die Schwierigkeit in der Verwendung von Materialien, welche spröde versagen, liegt darin, dass sich das Versagen nicht durch eine vorgelagerte plastische Verformung ankündigt. Ein Punkt, der daraus folgt, ist der zufällige Charakter der spröden Schädigung, da sie stark durch kleinste Fehlstellen innerhalb des Materials beeinflusst wird [86]. Für die gegebene Fragestellung, der Simulation des Materialverhaltens von Gusseisen aufgrund äußerer mechanischer Belastung, stellt sich die Frage, inwiefern der zufällige Prozess der Evolution der spröden Schädigung nachgebildet werden muss. Betrachtet man die Ausdehnungskoeffizienten der perlischen Matrix und die des Graphits, wird deutlich, dass diese sich stark unterscheiden. Geht man davon aus, dass sich das Gefüge nach der Austenit-Perlit-Umwandlung bei 723 °C vollständig ausgebildet hat, so entstehen im weiterführenden Abkühlprozess auf Raumtemperatur hohe Eigenspannungen innerhalb des Materials [17]. Orthogonal zur Basalebene des

Graphits beträgt die thermische Ausdehnung  $\alpha_{\perp} = 2,73 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$  [73] und die des Perlits lediglich  $\alpha = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ . Im Umkehrschluss zieht sich der Graphit bei der Abkühlung um die Temperaturdifferenz  $\Delta T = 700 \text{ K}$  stärker zusammen. Die Spannungen durch die unterschiedliche thermische Ausdehnung werden zusätzlich überlagert von Spannungen, die während der eutektoiden Umwandlung entstehen [53]. Die entstehenden Zugspannungen innerhalb des Graphits und dessen geringe Festigkeit legen die Vermutung nahe, dass eine Schädigung innerhalb des Graphits bereits während des Abkühlvorgangs auftritt und eine Betrachtung der genauen Schädigungsevolution nicht notwendig scheint. Vielmehr ist eine Beschreibung des Wiederherstellens der Tragfähigkeit des Graphits bei Druckbelastung notwendig, um das belastungsabhängige Materialverhalten abzubilden. Hierfür wird das Konzept der Risschließung herangezogen, welches im folgenden Kapitel 9, Modellierung des belastungsabhängigen mechanischen Materialverhaltens behandelt wird.

# 9 Modellierung des belastungsabhängigen mechanischen Materialverhaltens

Graphit verhält sich, wie in Kapitel 3 beschrieben, unter Zugbelastung anders als unter Druckbelastung. Dieses Materialverhalten wird auch als bimodular bezeichnet, da es über zwei unterschiedliche Steigungen im Zug- und Druckbereich und somit über zwei E-Moduli,  $E_t$  und  $E_c$  beschrieben werden kann. Dies ist in Abbildung 9.1, a) am Beispiel des Graphits dargestellt. Aufgrund der Bimodularität des Graphits ist auch das mechanische Verhalten Gusseisen wie in Abbildung 9.1, b) dargestellt, belastungsabhängig. Um dieses Materialverhalten abzubilden, sind unterschiedliche Modelle in der Literatur zu finden welche, im Folgenden jeweils kurz beschrieben werden.

## 9.1 Modell nach Ambartsumyan

Ambartsumyan [4] führt zur Beschreibung der Steifigkeit eines isotropen Materials die vier Materialkonstanten  $E_t, \nu_t, E_c, \nu_c$  ein, welche entsprechend des Vorzeichens der drei Hauptspannungen  $\sigma_{1,2,3}$  gewählt werden. Für den Fall, dass alle drei Hauptspannungen positiv ( $\sigma_{1,2,3} > 0$ ) sind, reduziert sich die Konstruktion der Steifigkeit des isotropen Materials auf die beiden Konstanten  $E_t, \nu_t$  und entsprechend  $E_c, \nu_c$  für den Fall  $\sigma_{1,2,3} < 0$ . Liegt ein gemischter Hauptspannungszustand vor, so setzt sich die Nachgiebigkeitsmatrix, wie aus Gleichung (9.1) hervorgeht aus allen vier Komponenten zusammen.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_t} & -\frac{\nu_c}{E_c} & -\frac{\nu_t}{E_t} \\ -\frac{\nu_t}{E_t} & \frac{1}{E_c} & -\frac{\nu_t}{E_t} \\ -\frac{\nu_c}{E_t} & -\frac{\nu_c}{E_c} & \frac{1}{E_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 > 0 \\ \sigma_2 < 0 \\ \sigma_3 > 0 \end{bmatrix} \quad (9.1)$$

Um die Symmetrie zu gewährleisten, muss für das Material demnach

$$\frac{\nu_c}{E_c} = \frac{\nu_t}{E_t} \quad (9.2)$$

gelten [4, 142]. Zusätzlich geht aus Gleichung (9.1) hervor, dass die Isotropie des Ausgangsmaterials verloren geht und es in ein orthotropes Material übergeht. Die Symmetrie dieses Modells ist nur für isotrope Ausgangsmaterialien gegeben [70]. Eine Erweiterung des Modells nach Ambartsumyan stellt das Modell der gewichteten Nachgiebigkeit von Jones [70] dar, welches auch für orthotrope Materialien verwendet werden kann.

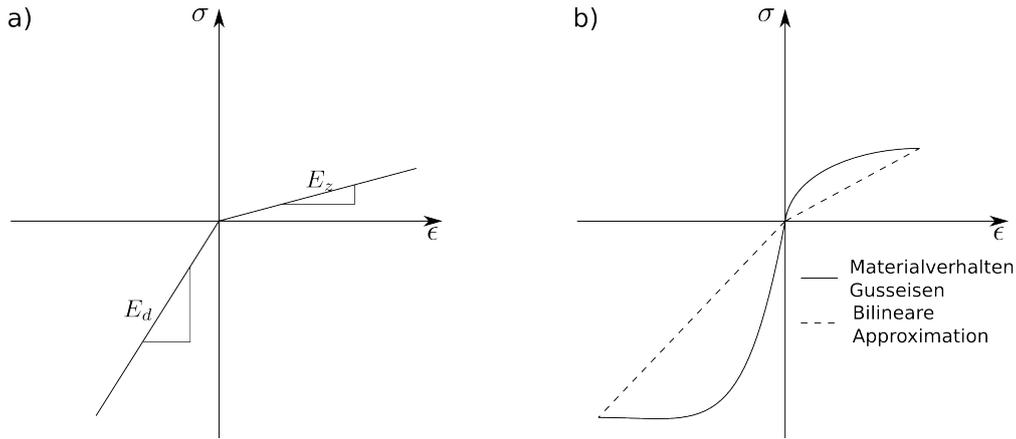


Abbildung 9.1: a) Bimodulares Materialverhalten am Beispiel des Graphits mit  $E_t > E_c$ .  $E_t$  stellt den Elastizitätsmodul im Zugbereich dar und  $E_c$  im Druckbereich. b) bilineare Approximation des Verhaltens von grauem Gusseisen.

## 9.2 Modell der gewichteten Nachgiebigkeit

Dieses Modell verhält sich für die Spur der Nachgiebigkeit in der Hauptspannungsdarstellung wie das Modell nach Ambartsumyan, jedoch verlangt es nicht nach der Symmetriebedingung (9.2). Die Symmetrie ergibt sich bei diesem Modell durch die Gewichtung

$$k_{ij} = \frac{|\sigma_i|}{|\sigma_i| + |\sigma_j|}$$

$$k_{ji} = \frac{|\sigma_j|}{|\sigma_i| + |\sigma_j|}$$

der Einträge über die jeweiligen Spannungsbeträge. Als Beispiel ergeben sich daraus die Einträge  $S_{12}, S_{21}$  der Nachgiebigkeit für  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0$  zu

$$S_{12} = -k_{12} \frac{\nu_t}{E_t} - k_{21} \frac{\nu_c}{E_c} S_{22} = -k_{21} \frac{\nu_c}{E_t} - k_{12} \frac{\nu_t}{E_t}$$

womit die Symmetrie durch  $S_{12} = S_{21}$  gewährleistet ist. Die beiden Modelle definieren die elastischen Materialeigenschaften des bimodularen Materials jeweils anhand der Hauptspannungswerte. In Ye et al. [155] werden hierzu die Einträge der Hauptdehnungen verwendet. Dies kann bei der Implementierung in eine FEM-Software von Vorteil sein, da der Spannungszustand a priori nicht bekannt ist und die Belastung zunächst über die Dehnung definiert ist. Allgemein können für den dreidimensionalen Belastungszustand die positiven und negativen Teile eines symmetrischen Tensors  $\mathbf{s}$  nach [86] wie folgt definiert werden:

$$\langle \mathbf{s} \rangle_{ij}^+ = \sum_{K=1}^3 \langle s_K \rangle q_i^K q_j^K \quad \text{und} \quad \langle \mathbf{s} \rangle_{ij}^- = s_{ij} - \langle \mathbf{s} \rangle_{ij}^+$$

wobei  $s_K$  die Eigenwerte,  $\mathbf{q}^K$  die zugehörigen Eigenvektoren des Tensors  $\mathbf{s}$  sind und  $\langle \cdot \rangle$  die Macaulay-Klammern. Die Macaulay-Klammern sind definiert durch  $\langle x \rangle = x$  wenn  $x \geq 0$  und  $\langle x \rangle = 0$  wenn  $x < 0$ , wobei  $\mathbf{s}$  den Spannungs- oder Dehnungstensor darstellt. In Bezug auf die in Kapitel 8, Schädigung, eingeführte Schädigungsvariable  $D$ , lässt sich zum Abbilden der Bimodularität die Risschließung heranziehen.

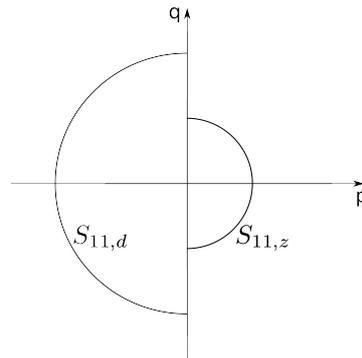


Abbildung 9.2: Unstetiger Übergang zwischen Zug- und Druckbelastung für den Eintrag  $S_{11}$  der Nachgiebigkeit der beschriebenen Modelle nach [70].

### 9.3 Risschließung

Lemaitre [86] führt hierzu die Risschließungsvariable  $h$  ein, mit der die Wiederherstellung der Tragfähigkeit durch die Vergrößerung der effektiven Fläche  $A_{eff}$  abgebildet wird. Die effektive Spannung unter Druckbelastung ergibt sich damit zu

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{1 - hD}$$

mit

$$\sigma = \mathcal{C}[\epsilon].$$

Der Wertebereich der Risschließungsvariable ist mit  $0 \leq h \leq 1$  gegeben. Für  $h = 0$  wird die Tragfähigkeit des geschädigten Materials vollständig wiederhergestellt während für  $h = 1$  keine Risschließung stattfindet. Im Zwischenbereich findet eine teilweise Schließung der Risse statt. Das Öffnen und Schließen der Risse innerhalb der Graphitlamellen wird über die sogenannte quasi-unilaterale Mikrodefektschließung umgesetzt [86]. Risse, die sich bei Zugbelastung öffnen, erhalten bei Druckbelastung wieder ihre Tragfähigkeit. Entsprechend der Schädigung können auch für die Risschließung mehrere Variablen verwendet werden. Für den Graphit beispielsweise  $h_{\parallel}$  und  $h_{\perp}$ . Was alle Modelle zunächst gemeinsam haben, ist neben der Eigenschaft, dass sie die Materialparameter auf ihre Weise entsprechend der Belastung beeinflussen, auch die Tatsache, dass bei dem Übergang zwischen Zug- und Druckbelastung die Eigenschaften des Materials nicht stetig sind. So ist der in Abbildung 9.2 dargestellte Verlauf von  $S_{11}$  durch einen Sprung gekennzeichnet. Dieser Sprung führt dazu, dass auf diese Art implementierte Materialmodelle schlecht oder gar nicht konvergieren [80, 142]. Zur Verbesserung der Konvergenz sollte daher ein stetiger Übergang zwischen Zug- und Druckzustand verwendet werden.

### 9.4 Übergang zwischen Zug- und Druckbereich

Die einfachste Funktion ist ein linearer Übergang von Zug- zu Druckbereich und ergibt somit eine stückweise stetige Funktion. Dadurch wird der Sprung, der gerade bei starken

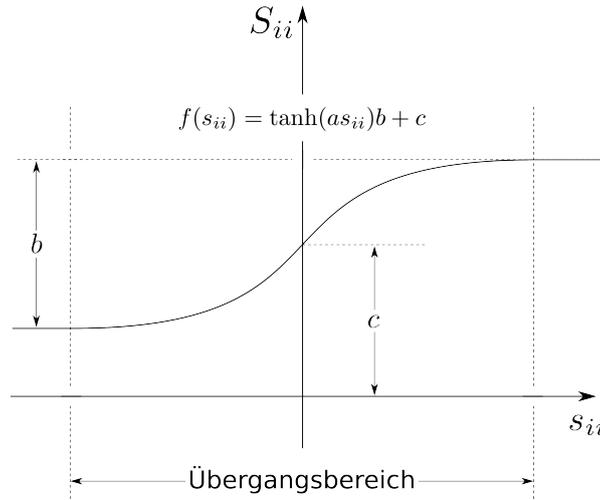


Abbildung 9.3: Übergangsfunktion für die Nachgiebigkeit mit Hilfe des Tangens Hyperbolicus konstruierten Funktion  $f(s_{ii}) = \tanh(as_{ii})b + c$ . Der Parameter  $b = \frac{S_{11,d} - S_{11,z}}{2}$  gibt das Verhältnis zwischen Zug und Druck wieder und der Parameter  $c$  die Verschiebung der Funktion.

Unterschieden der E-Moduli, beziehungsweise bei starker Schädigung zu Problemen in der Stabilität führt, verhindert und ein kontinuierlicher Übergang hergestellt. Optimalerweise sollte die Übergangsfunktion jedoch den folgenden Anforderungen genügen [80]:

- Der Grenzwert von  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  muss existieren, d. h. die Funktion muss differenzierbar sein.
- Es muss gelten:  $\lim_{x \rightarrow \mp\infty} f'(x) = 0$ . Auf diese Weise hat die Funktion eine obere und eine untere Schranke.
- Damit die Funktion sich zusätzlich nur innerhalb dieser Schranken bewegt, wird zusätzlich gefordert  $f'(x) \geq 0$ .

Diese Bedingungen werden durch die Tangens-Hyperbolicus-Funktion

$$f(s_{ii}) = \tanh(as_{ii})b + c$$

aus Abbildung 9.3 erfüllt. Über den Faktor  $a$  lässt dabei sich die Steigung der Tangens-Hyperbolicus-Funktion ändern und somit die Breite des Übergangsbereichs. Über die Parameter  $b$  und  $c$  wird die Differenz der beiden Nachgiebigkeiten  $\frac{S_{11,d} - S_{11,z}}{2}$  respektive die Verschiebung der Funktion auf der  $S_{ii}$ -Achse zur Einstellung des Wertes der Steifigkeit ( $\frac{S_{ii,z} + S_{ii,d}}{2}$ ) eingestellt. Während die Parameter  $b$  und  $c$  durch die Materialeigenschaften im Zug- und Druckbereich definiert sind, ist die Wahl des Parameters  $a$  nicht definiert. Vielmehr ist es ein Einstellungsparameter, der die Breite des Übergangsbereichs bestimmt und somit die Konvergenz der Lösung beeinflusst. Wird der Übergangsbereich zu breit gewählt, so wird der Einfluss der Belastungsabhängigkeit nicht in vollem Umfang zum Tragen kommen, da der Übergangsbereich nicht verlassen wird. Wird der Bereich zu eng gewählt, und nähert sich somit wieder einem Sprung an, so wird die Konvergenz negativ beeinflusst.

# 10 Wärmeübertragung

Die Wärmeübertragung beschreibt die Gesetzmäßigkeiten für den Austausch von Wärme zweier Systeme unterschiedlicher Temperatur [23]. Es wird zwischen folgenden Arten der Wärmeübertragung unterschieden:

- Wärmeleitung
- Konvektion
- Wärmestrahlung

Für die Simulation der Bremsscheibe sind alle Formen der Wärmeübertragung von Bedeutung und deren Grundlagen werden im Folgenden beschrieben. Die Übertragung von Wärme wird über den Wärmestrom  $\dot{Q}$  in J/s, beziehungsweise die Wärmestromdichte  $\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A}$  in J/m<sup>2</sup>s definiert.

## 10.1 Wärmeleitung

Bei der Wärmeleitung ergibt sich der Wärmestrom durch die Kopplung der Schwingung benachbarter Teilchen im Kristallgitter eines Festkörpers. Damit wird der Transport der Wärme innerhalb der Materials oder Bauteils beschrieben. Die Wärmestromdichte wird mit Hilfe des Fourier'schen Gesetz

$$\dot{q} = -\lambda \nabla \theta = -\lambda \left( \frac{d\theta}{dx} + \frac{d\theta}{dy} + \frac{d\theta}{dz} \right) \quad (10.1)$$

beschrieben und damit der Wärmestrom durch die Querschnittsfläche des Körpers zu

$$\dot{Q} = \int_A \dot{q} dA.$$

[23]. Der Proportionalitätsfaktor des Gradienten der Temperatur und der Wärmestromdichte ist die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  in W/mK, die im Allgemeinen ein Tensor zweiter Stufe ist und abhängig vom Material und der Temperatur. Graphit besitzt wie in Kapitel 3 ausführlich beschrieben eine stark ausgeprägte Anisotropie, die bei der Simulation auf der mesoskopischen Größenskala zu berücksichtigen ist. So ist dessen Wärmeleitfähigkeit im Graphitkristallsystem  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  über die Diagonalmatrix

$$\tilde{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_{\tilde{x}} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\tilde{y}} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\tilde{z}} \end{pmatrix}$$

gegeben und wird über die Rotationsmatrizen  $\mathbf{R}_{\text{rot}}$  und  $\mathbf{R}_{\text{rot}}^T$  mit

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{R}_{\text{rot}} \tilde{\boldsymbol{\lambda}} \mathbf{R}_{\text{rot}}^T = \begin{pmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{pmatrix}$$

im körperfesten Koordinatensystem  $(x, y, z)$  des Simulationsgebiet dargestellt. Eingesetzt in Gleichung (10.1) wird die Wärmestromdichte zu

$$\dot{\mathbf{q}} = -\boldsymbol{\lambda} \nabla \theta = \begin{pmatrix} \lambda_{xx} \frac{\partial \theta}{\partial x} & \lambda_{xy} \frac{\partial \theta}{\partial y} & \lambda_{xz} \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \lambda_{yx} \frac{\partial \theta}{\partial x} & \lambda_{yy} \frac{\partial \theta}{\partial y} & \lambda_{yz} \frac{\partial \theta}{\partial z} \\ \lambda_{zx} \frac{\partial \theta}{\partial x} & \lambda_{zy} \frac{\partial \theta}{\partial y} & \lambda_{zz} \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Die zu-/abgeführte Wärmemenge  $Q$ , beziehungsweise die Änderung der inneren Energie, ergibt sich über  $\int_{\partial V} \dot{\mathbf{q}}$  und mit dem Satz von Gauss  $\int_{\partial V} \dot{\mathbf{q}} \vec{n} da = \int_V \nabla(\dot{\mathbf{q}}) dV$  zu

$$Q = -\nabla(-\boldsymbol{\lambda} \nabla \theta) \quad [59].$$

Für die Berechnung der Wärmeleitung innerhalb der Bremsscheibe reduziert sich die Wärmeleitfähigkeit aufgrund der Isotropie des Materials auf die skalare Größe  $\lambda$ .

## 10.2 Konvektiver Wärmeübergang

An der Grenzfläche des Scheibenmaterials zur umströmenden Luft findet ein konvektiver Wärmeübergang statt. Die thermische Konvektion beschreibt den Wärmeübergang zwischen Fluiden und Festkörpern. Für die Konvektion wird zwischen freier und erzwungener Konvektion unterschieden. Die freie Konvektion, auch Eigenkonvektion, wird über Dichteunterschiede des umströmenden Mediums hervorgerufen [23, 18]. Bei der Bremsscheibe liegt eine erzwungene Konvektion durch die umströmende Luft vor. Die Wärmestromdichte ergibt sich für die Konvektion aus der Temperaturdifferenz des Festkörpers zu dem umströmenden Medium zu

$$\dot{\mathbf{q}} = \alpha(\theta_F - \theta_\infty).$$

$\theta_F$  und  $\theta_\infty$  sind die Temperatur des Festkörpers beziehungsweise des umströmenden Mediums und  $\alpha$  die Wärmeübergangszahl. Die Temperatur  $\theta_\infty$  wird hierbei als konstant angenommen da das Medium kontinuierlich über die Oberfläche strömt. Am Übergang zwischen Festkörper und Fluid bildet sich eine Grenzschicht aus, innerhalb derer sich ein kontinuierlicher Temperaturverlauf von  $\theta_F$  zu  $\theta_\infty$  ausbildet, mit deren Dicke sich  $\alpha$  über

$$\alpha = \frac{\lambda}{\delta}$$

berechnen lässt [23]. Die Wärmeübergangszahl wird direkt von  $\delta$  und somit der vorherrschenden Strömung beeinflusst.

## 10.3 Wärmestrahlung

Bei der Wärmestrahlung wird die Wärme über elektromagnetische Wellen mit einer Wellenlänge von  $0,8\ \mu\text{m}$  bis  $400\ \mu\text{m}$  von einem Körper abgestrahlt [23]. Entgegen der Wärmeleitung wird hierzu keine Materie benötigt und erfolgt auch im Vakuum [23]. Trifft die Wärmestrahlung auf einen Körper, so wird diese absorbiert, reflektiert oder hindurch gelassen [18]. Für die Simulation der Bremsscheibe wird sich auf die Strahlungsemission beschränkt, da keine äußeren Wärmequellen vorhanden sind. Die Stärke der Strahlung wird über den Emissionskoeffizienten  $\epsilon$  abgebildet. "Schwarze Körper" besitzen das maximale Absorptions- und Emissionsvermögen [18] ( $\epsilon = 1$ ), "weiße Strahler" emittieren keine Strahlung ( $\epsilon = 0$ ). Für eine diffus-grauen Strahler ergibt sich der Wärmestrom über das Stefan-Boltzmann-Gesetz zu:

$$\dot{Q} = \epsilon A \sigma_{\text{sb}} \theta^4.$$

Die Stefan-Boltzmann-Konstante hat den Wert  $\sigma_{\text{sb}} \approx 5.67\ \text{W}/\text{m}^2\text{K}^4$ . Aufgrund von Reflektionen der emittierten Wärmestrahlen, wird nicht die komplett mögliche Wärme der Bremsscheibe emittiert. Geht man davon aus, dass der Absorptionskoeffizient gleich dem Emissionskoeffizienten ist, so ergibt sich der Wärmestrom über die Beziehung

$$\dot{Q} = \epsilon A \sigma_{\text{sb}} (\theta_F^4 - \theta_\infty^4) [23].$$



# 11 Implementierung

In diesem Kapitel wird eine genaue Beschreibung der in diese Arbeit verwendeten Numerik sowie der implementierten Modelle gegeben.

Die thermische wie mechanische Berechnung wird mit Hilfe der Finite-Differenzen-Methode durchgeführt. Das Simulationsgebiet besteht hierzu aus würfelförmigen Berechnungszellen. Für jede Zelle werden bestimmte Berechnungsschritte durchgeführt um die Werte für den nachfolgenden Zeitpunkt  $n+1$  zu berechnen. Der mechanische Zustand wird über die Verschiebungen und Spannungen im Gebiet definiert. Folgende Berechnungsschritte eines Zeitschrittes sind notwendig, um die neuen Verschiebungen  $\mathbf{u}^{n+1}$  zu berechnen.

- Berechnung der Dehnung aus den Verschiebungen des vorhergehenden Zeitschrittes:  

$$\boldsymbol{\epsilon}^{n+1} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^n}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^n}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$
- Spannungsberechnung aus der elastischen Dehnung und der Steifigkeit:  $\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \mathcal{C}[\boldsymbol{\epsilon}_{\text{el}}^{n+1}]$
- Berechnung der zweiten Ableitung der Verschiebung (Beschleunigung) aus der Spannungsberechnung mittels Gleichung (6.7) der Momentenbilanz:  $\ddot{\mathbf{u}} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^{n+1}}{\partial \mathbf{x}}$
- Update der Verschiebung für den Zeitpunkt  $n+1$

Parallel dazu wird bei der makroskopischen Simulation die Temperaturleitung innerhalb des Materials sowie die Abstrahlung und der konvektive Wärmeübergang berechnet, welche über die thermische Dehnung über  $\boldsymbol{\epsilon}_{\text{el}} = \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_{\text{pl}} - \boldsymbol{\epsilon}_{\text{th}}$  in die mechanische Berechnung einfließt.

Die Berechnung wird wie beschrieben mit dem Phasenfeldlöser Pace3D durchgeführt. Hierzu wird das in [106] beschriebene Multiphasenfeldmodell welches in [139] mit der elastischen Energie gekoppelt wurde, um den Anteil der Plastizität erweitert [129]. Das Phasenfeldmodell beschreibt die Mikrostruktur eines N-phasigen Materials mittels der Ordnungsparameter  $\phi_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$  welche Teil des N-komponentigen Phasenfeldvektors  $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_N)$  sind, der den jeweiligen Volumenanteil der Phase definiert [129]. Mit dem elastischen Teil der mechanischen inneren Energie  $f_{\text{el}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\epsilon}_{\text{el}})$  [139] und dem plastischen Anteil  $f_{\text{pl}}(\boldsymbol{\phi}, \bar{\epsilon}_{\text{pl}})$  wird das Energiefunktional

$$F(\boldsymbol{\phi}, \nabla \boldsymbol{\phi}, \mathbf{u}) = \int_V f(\boldsymbol{\phi}, \nabla \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\epsilon}_{\text{el}}, \bar{\epsilon}_{\text{pl}}) dV \quad (11.1)$$

$$= \int_V \left[ \varepsilon \alpha(\boldsymbol{\phi}, \nabla \boldsymbol{\phi}) + \frac{1}{\varepsilon} \omega_{\text{ob}}(\boldsymbol{\phi}) + f_{\text{el}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\epsilon}_{\text{el}}(\mathbf{u})) + f_{\text{pl}}(\boldsymbol{\phi}, \bar{\epsilon}_{\text{pl}}) \right] dV \quad (11.2)$$

formuliert [129].  $\bar{\epsilon}_{\text{pl}}$  definiert dabei die akkumulierte plastische Dehnung und  $\mathbf{u}$  das Verschiebungsfeld. Über den Gradientenvektor  $\mathbf{q}_{\alpha\beta} = \phi_\alpha \nabla \phi_\beta - \phi_\beta \nabla \phi_\alpha$ , welcher den Normalenvektor zur  $\alpha$ - $\beta$ -Phasengrenze bildet, wird zwischen den Eigenschaften der Phasen und der Phasengrenzen unterschieden [129]. Die Gradientenenergiedichte in Gleichung (11.2) ergibt sich

damit nach [106] zu  $a(\boldsymbol{\phi}, \nabla\boldsymbol{\phi}) = \sum_{\alpha<\beta} \gamma_{\alpha\beta} |\mathbf{q}_{\alpha\beta}|^2$ .  $\gamma_{\alpha\beta}$  beschreibt dabei die Oberflächenenergie zwischen den beiden Phasen  $\alpha$  und  $\beta$ . Das freie Energiepotential  $\omega_{\text{ob}}(\boldsymbol{\phi}) = \frac{16}{\pi^2} \sum_{\alpha<\beta} \gamma_{\alpha\beta} \phi_\alpha \phi_\beta$  wird mittels eines Obstacle-Potentials beschrieben [129]. Der elastische Teil der inneren Energie ist über  $f_{\text{el}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\epsilon}_{\text{el}}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}_{\text{el}} \mathbf{C}(\boldsymbol{\phi}) [\boldsymbol{\epsilon}_{\text{el}}]$  definiert. Der lokale symmetrische elastische Dehnungstensor  $\boldsymbol{\epsilon}_{\text{el}} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T) - \boldsymbol{\epsilon}_{\text{pl}} = \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_{\text{pl}}$  hängt dabei vom Verschiebungsfeld und der lokalen plastischen Dehnung ab und der Verschiebungsgradient ist über  $\nabla\mathbf{u} = \partial u_i / \partial x_j$  definiert. Der Steifigkeitstensor  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\phi})$  wird lokal zwischen den Phasen  $\phi_1, \dots, \phi_N$  homogenisiert. Durch die Variationsableitung des Energiefunktionals aus Gleichung (11.2) in Bezug auf die Verschiebung wird die elastodynamische Wellengleichung

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = - \left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} \right) = \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} - \nabla \frac{\partial f}{\partial \nabla \mathbf{u}} \right) = \nabla \boldsymbol{\sigma}$$

aufgestellt [129]. Dabei ist  $\rho$  die Dichte,  $(\nabla \boldsymbol{\sigma})_i = \partial \sigma_{ij} / \partial x_j$  die Divergenz der Spannung und  $\ddot{\mathbf{u}} = d^2 \mathbf{u} / dt^2$  die zweite Ableitung der Verschiebung. Für die freien Energien  $f^\alpha$  wird wie in [106] eine lineare Interpolation angenommen. Die elastische Energie ergibt sich dadurch zu

$$f_{\text{el}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\epsilon}_{\text{el}}) = \sum_{\alpha} f_{\text{el}}^{\alpha}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\epsilon}_{\text{el}}) h(\phi_{\alpha}).$$

$h(\phi_{\alpha})$  beschreibt dabei eine Interpolationsfunktion, beispielsweise der Form  $h(\phi_{\alpha}) = \phi_{\alpha}^2 (3 - 2\phi_{\alpha})$  [129]. Für die Annahme einer homogenen Dehnung im Übergangsbereich der Phasen, beispielsweise  $\boldsymbol{\epsilon}^{\alpha} = \boldsymbol{\epsilon}^{\beta}$ , kann das elastische Potential entsprechend einer Voigt-Homogenisierung [150] als

$$f_{\text{el}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\epsilon}_{\text{el}}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (\boldsymbol{\epsilon}_{\text{el}} \mathbf{C}^{\alpha} [\boldsymbol{\epsilon}_{\text{el}}]) h(\phi_{\alpha})$$

ausgedrückt werden [129]. Dabei ist  $\mathbf{C}^{\alpha}$  der Steifigkeitstensor der Phase  $\phi^{\alpha}$ . Daraus lässt sich die Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$  durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\text{el}}(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\epsilon}_{\text{el}})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} &= \left( \sum_{\alpha} \mathbf{C}^{\alpha} h(\phi_{\alpha}) \right) [\boldsymbol{\epsilon}_{\text{el}}] \\ &= \sum_{\alpha} \boldsymbol{\sigma}^{\alpha} h(\phi_{\alpha}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\phi}) [\boldsymbol{\epsilon}_{\text{el}}] = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\phi}) \end{aligned}$$

ableiten [129]. Für einen Großteil der Simulationen ist es zur Reduzierung des Rechenaufwands sinnvoll, im Grenzfall des scharfen Übergangs zwischen zwei Phasen zu rechnen da in diesem Stadium der Simulationen noch keine Phasenumwandlung berücksichtigt wird. Für die Berechnung der Differentialgleichungen wird das explizite finite Differenzenverfahren angewandt.

## 11.1 Finite Differenzen

Beim Finite Differenzen Verfahren werden die Differentiale durch entsprechende Differenzdrücke ersetzt. Der Taylor-Reihenansatz dient als Basis der Finite-Differenz-Methode [98], mit

dem sich eine Funktion in der Nähe eines Punktes annähern lässt. Für einen Punkt  $u(x_0 + \Delta x)$  lässt sich die Taylorreihe schreiben als:

$$u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) + u'(x_0)(x - x_0) + u''(x_0)(x - x_0)^2 + u'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots$$

Über die Taylorreihe lässt sich die numerische Differentiation durchführen. Bricht man die Taylorreihe nach den ersten beiden Gliedern ab, und löst nach der partiellen Ableitung  $\partial u / \partial x$  auf, so erhält man die Gleichung der Vorwärts-Differenz [22]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx D^+ u(x) = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}.$$

Mit analogem Ansatz, ergibt sich über  $u(x - h)$  die Gleichung der Rückwärts-Differenz:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx D^- u(x) = \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta x},$$

und für die Zentrale-Differenz:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx D^c u(x) = \frac{u(x + \Delta x) - u(x - \Delta x)}{2\Delta x}.$$

Über die Vorwärts- und Rückwärtsdifferenz ergibt sich die zweite Ableitung zu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx D^2 u(x) = \frac{1}{\Delta h} \left( \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} - \frac{u(x) - u(x - \Delta x)}{\Delta h} \right) \quad (11.3)$$

$$= \frac{u(x + \Delta x) - 2u(x) + u(x - \Delta x)}{\Delta x^2} \quad (11.4)$$

Für die Ableitung im Raum wird das Simulationsgebiet diskretisiert. Es besteht aus würfelförmigen Zellen. Die Anordnung der Größen der Verschiebung  $\mathbf{u}$  und der Spannung  $\boldsymbol{\sigma}$  beeinflusst hierbei die Stabilität der Berechnung.

## 11.2 Diskretisierung

Für eine stabile Berechnung der elastischen Wellenausbreitung  $\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla \boldsymbol{\sigma}$  mit der FD-Methode, werden die Spannungen und Verschiebungen an unterschiedlichen Positionen berechnet. Hierzu wird ein sogenanntes *versetztes Gitter* (staggered grid) verwendet. Bei versetzten Gittern wird die Berechnung der Spannungs- und Verschiebungskomponenten auf unterschiedlichen Gittern durchgeführt. Die Gitter sind, wie bereits aus der Namensgebung hervorgeht, zueinander versetzt. In der Literatur sind verschiedene Varianten dieser Gitter zu finden. Die ursprüngliche Implementierung für den verwendeten Löser ist die des standard versetzten Gitters (SSG, standard staggered grid) mit einer Anordnung der zu berechnenden Komponenten ähnlich wie sie von Virieux [149] beschrieben wird. Die Gitter unterscheiden sich nur darin, dass die Dichte beim Virieux Gitter auf den Kanten der Zelle gespeichert wird. Im SSG des Pace3D-Lösers ist diese in der Zellmitte zu finden. Die Anordnung der Spannungs- und Verschiebungskomponenten sowie der Materialparameter  $\rho$  und  $\mathbf{C}$ , des SSG ist in Abbildung 11.1, a) zu sehen. Die Verschiebungswerte  $u_x$ ,  $u_y$  und  $u_z$  sind jeweils auf den Seiten der Berechnungszelle angeordnet. Die Normalspannungskomponenten  $\sigma_{ii}$  sind in der Zellmitte gespeichert, während die Schubspannungen auf den Kanten der Zelle zu finden sind.

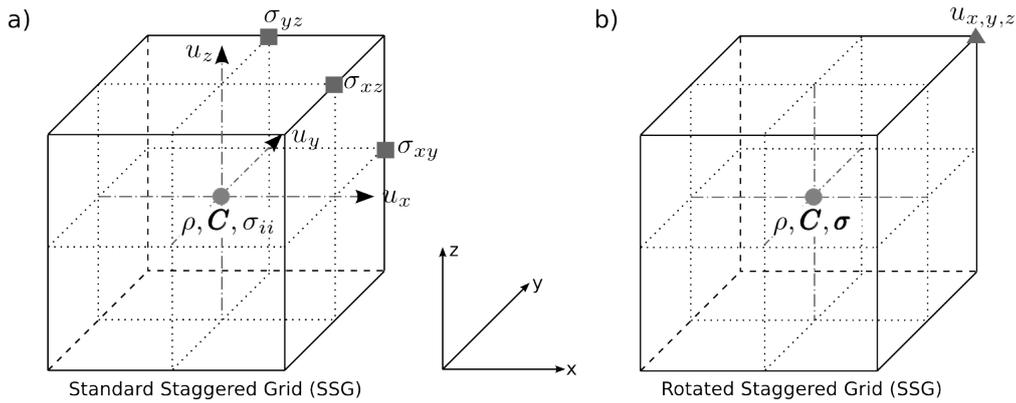


Abbildung 11.1: a) Standard Staggered Grid (SSG) mit der Anordnung der Verschiebungen auf den Würfelseiten und der Anordnung der Schubspannung auf den Kanten. Die Dichte, Steifigkeit sowie die Normalspannungen sind in der Würfelmitte zu finden. b) Rotated Staggered Grid (RSG) mit der Anordnung der Verschiebungen auf den Würfelcken und der Dichte, Steifigkeit sowie die Spannungen in der Würfelmitte.

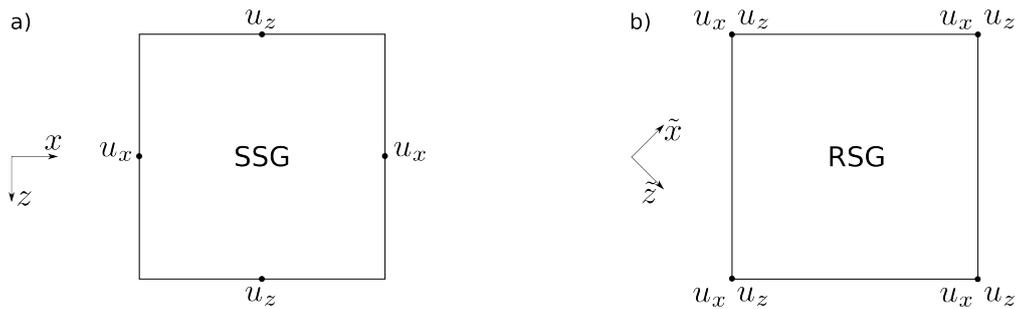


Abbildung 11.2: Vergleich der Berechnungstempel für das SSG mit den Verschiebungen auf den Seiten a) und das RSG mit den Verschiebungen auf den Ecken b) nach [121].

Ein anderer Ansatz eines versetzten Gitters ist das von Saenger [123] entwickelte *rotated staggered grid* (RSG). Dieser Gittertyp findet heutzutage eine große Anwendung in der Berechnung der elastischen Wellenausbreitung anisotroper Materialien [91]. Das RSG unterscheidet sich vom SSG in der Anordnung der Verschiebungs- und Spannungskomponenten. So werden, wie in Abbildung 11.1, b) dargestellt, die gesamten Spannungseinträge in der Zellmitte der Gitterzelle berechnet, während die Verschiebungen auf der Ecke der Zelle gespeichert werden. Der grundlegende Gedanke hinter dem Ansatz des RSG ist ein Rotation des Koordinatensystems. Eine Approximation der Ableitungen wird in Richtung von Referenzkoordinaten berechnet und im Weiteren mit Hilfe von Linearkombinationen in den ursprünglichen Koordinaten ausgedrückt [91]. In Saenger [122] wird am Beispiel der Berechnung elastischer Eigenschaften von Gesteinsmaterialien gezeigt, dass der Ansatz des RSG robust ist und eine hohe Genauigkeit erreicht wird. Die Ergebnisse werden hierzu mit bekannten Lösungen für einen einzelnen Riss verglichen. Entsprechend [121] ergibt sich die Berechnung für das RSG wie folgt. Zur einfacheren Veranschaulichung wird hier die Darstellung in 2D gewählt. Für den 2D-Stempel

des RSG mit den Kantenlängen  $\Delta x$  und  $\Delta z$ , wie er in Abbildung 11.2 zu sehen ist, ergeben sich die Richtungen der Ableitungen  $\tilde{x}$  und  $\tilde{z}$  zu

$$\tilde{x} = \frac{\Delta x}{\Delta r}x - \frac{\Delta z}{\Delta r}z$$

und

$$\tilde{z} = \frac{\Delta x}{\Delta r}x + \frac{\Delta z}{\Delta r}z$$

mit  $\Delta r = \sqrt{\Delta z^2 + \Delta x^2}$ . Die Ableitungen in den ursprünglichen Koordinaten  $x, z$  werden mit Hilfe von Linearkombinationen der Ableitungen der Referenzkoordinaten  $\tilde{x}, \tilde{z}$  zu

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\Delta r}{2\Delta x} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\Delta r}{2\Delta z} \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} - \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \right).$$

Die Differentialoperatoren  $D_x$  und  $D_z$  werden über

$$D_x u(x, z, t) = \frac{1}{\Delta x} \left[ u \left( x + \frac{\Delta x}{2}, z, t \right) - u \left( x - \frac{\Delta x}{2}, z, t \right) \right]$$

und

$$D_z u(x, z, t) = \frac{1}{\Delta z} \left[ u \left( x, z + \frac{\Delta z}{2}, t \right) - u \left( x, z - \frac{\Delta z}{2}, t \right) \right]$$

berechnet. Für die Richtungen  $\tilde{x}$  und  $\tilde{z}$  ergeben sie sich zu

$$D_{\tilde{x}} u(x, z, t) = \frac{1}{\Delta r} \left[ u \left( x + \frac{\Delta x}{2}, z - \frac{\Delta z}{2}, t \right) - u \left( x - \frac{\Delta x}{2}, z + \frac{\Delta z}{2}, t \right) \right]$$

und

$$D_{\tilde{z}} u(x, z, t) = \frac{1}{\Delta r} \left[ u \left( x + \frac{\Delta x}{2}, z + \frac{\Delta z}{2}, t \right) - u \left( x - \frac{\Delta x}{2}, z - \frac{\Delta z}{2}, t \right) \right].$$

Die Differentialoperatoren werden für die Berechnung der Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, z, t) \approx (D_{\tilde{z}} u(x, z, t) + D_{\tilde{x}} u(x, z, t))$$

und

$$\frac{\partial}{\partial z} u(x, z, t) \approx (D_{\tilde{z}} u(x, z, t) - D_{\tilde{x}} u(x, z, t))$$

in die x- und z- Richtung verwendet. Im dreidimensionalen Fall sind die Ableitungen, die Verbindungen der acht Ecken der Gitterzelle. Sie ergeben sich dann zu

$$\tilde{d}_1 = \frac{\Delta x}{\Delta l}x + \frac{\Delta y}{\Delta l}y + \frac{\Delta z}{\Delta l}z,$$

$$\tilde{d}_2 = \frac{\Delta x}{\Delta l}x + \frac{\Delta y}{\Delta l}y - \frac{\Delta z}{\Delta l}z,$$

$$\tilde{d}_3 = \frac{\Delta x}{\Delta l}x - \frac{\Delta y}{\Delta l}y + \frac{\Delta z}{\Delta l}z$$

und

$$\tilde{d}_4 = \frac{\Delta x}{\Delta l}x - \frac{\Delta y}{\Delta l}y - \frac{\Delta z}{\Delta l}z$$

mit  $\Delta l = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ . Die Ableitungen ergeben sich zu:

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x, y, z, t) = \frac{\Delta l}{4\Delta x}x(D_{\tilde{d}_1} + D_{\tilde{d}_2} + D_{\tilde{d}_3} + D_{\tilde{d}_4})u(x, y, z, t),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x, y, z, t) = \frac{\Delta l}{4\Delta y}x(D_{\tilde{d}_1} + D_{\tilde{d}_2} - D_{\tilde{d}_3} - D_{\tilde{d}_4})u(x, y, z, t)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial z}u(x, y, z, t) = \frac{\Delta l}{4\Delta y}x(D_{\tilde{d}_1} - D_{\tilde{d}_2} + D_{\tilde{d}_3} - D_{\tilde{d}_4})u(x, y, z, t).$$

In dieser Arbeit wird das vorhandene SSG durch den soeben beschriebenen Ansatz des RSG ersetzt. Der Gründe dafür liegen hauptsächlich in der Robustheit des Gitters für heterogene Materialien mit stark unterschiedlichen Materialeigenschaften der Bestandteile [121]. Zusätzlich ergeben sich in Bezug auf die benötigten Berechnungsschritte Vorteile durch die Verwendung des RSG wie die Implementierung des Gitters zeigt.

### 11.3 Anwendung des RSG auf den Phasenfeldlöser

Die Vereinfachung bei der Verwendung des RSGs ergibt sich hauptsächlich aus der Reduzierung der gemittelten Terme, wie sie an den Phasengrenzen von mehrphasigen Systemen auftreten. Die Vereinfachung ergibt sich sowohl bei der Berechnung eines Phasenübergangs mit Übergangsbereich des Phasenfeldes als auch für den Grenzfall eines scharfen Übergangs. Für ein mehrphasiges Material muss entsprechend Gleichungen 11.5 und 11.6 zur Bestimmung der Spannung an der Stelle  $\mathbf{x}$  eine gemittelte Steifigkeit  $\mathcal{C}(\mathbf{x})$  des Materials entsprechend der dort vorliegenden Phasenanteile  $\phi_i(\mathbf{x})$  bestimmt werden. Für das arithmetische Mittel ergibt sich

$$\mathcal{C} = \sum_{\alpha} \mathcal{C}^{\alpha} * h(\phi_{\alpha}) \quad (11.5)$$

bzw. für das harmonische Mittel

$$\mathbf{c}^{-1} = \sum_{\alpha} \frac{1}{\mathbf{c}^{\alpha} * h(\phi_{\alpha})}. \quad (11.6)$$

Besonders die Invertierung  $\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}$  bei der Verwendung des harmonischen Mittels ist hierbei rechenintensiv. Aufgrund der unterschiedlichen Positionen der Schubspannungen (Würfelkanten) und der Normalspannungen (Würfelmitte) wird die Steifigkeit im SSG an vier unterschiedlichen Stellen berechnet. Für das RSG, ist diese Berechnung nur einmal in der Würfelmitte notwendig. Im Folgenden werden die zur Berechnung der auftretenden Belastung benötigten Größen der Dehnung, Spannung und Verschiebung im RSG geschrieben. Zunächst werden wie zu Beginn des Kapitels beschrieben, die Berechnung der Dehnungen durchgeführt.

### 11.3.1 Berechnung der Dehnung im RSG

Die Berechnung der Normaldehnung in diesem Gitter ergibt sich entsprechend Abbildung 11.3, a) aus den 8 umliegenden Verschiebungen auf den Würfecken zu:

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{4\Delta x} \left[ \begin{aligned} & [u_x^{x,y,z} + u_x^{x,y,z-1} + u_x^{x,y-1,z} + u_x^{x,y-1,z-1}] \\ & - [u_x^{x-1,y,z} + u_x^{x-1,y,z-1} + u_x^{x-1,y-1,z} + u_x^{x-1,y-1,z-1}] \end{aligned} \right],$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{1}{4\Delta y} \left[ \begin{aligned} & [u_y^{x,y,z} + u_y^{x,y,z-1} + u_y^{x-1,y,z} + u_y^{x-1,y,z-1}] \\ & - [u_y^{x,y-1,z} + u_y^{x,y-1,z-1} + u_y^{x-1,y-1,z} + u_y^{x-1,y-1,z-1}] \end{aligned} \right]$$

und

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{4\Delta z} \left[ \begin{aligned} & [u_z^{x,y,z} + u_z^{x-1,y,z} + u_z^{x,y-1,z} + u_z^{x-1,y-1,z}] \\ & - [u_z^{x,y,z-1} + u_z^{x-1,y,z-1} + u_z^{x,y-1,z-1} + u_z^{x-1,y-1,z-1}] \end{aligned} \right].$$

Für die Schubdehnungen ergibt sich:

$$2\epsilon_{xy} = \frac{1}{4} \left[ \begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} ([u_y^{x,y,z} + u_y^{x,y,z-1} + u_y^{x,y-1,z} + u_y^{x,y-1,z-1}] \\ & - [u_y^{x-1,y,z} + u_y^{x-1,y,z-1} + u_y^{x-1,y-1,z} + u_y^{x-1,y-1,z-1}]) \\ & + \frac{1}{\Delta y} ([u_x^{x,y,z} + u_x^{x,y,z-1} + u_x^{x-1,y,z} + u_x^{x-1,y,z-1}] \\ & - [u_x^{x,y-1,z} + u_x^{x,y-1,z-1} + u_x^{x-1,y-1,z} + u_x^{x-1,y-1,z-1}]) \end{aligned} \right],$$

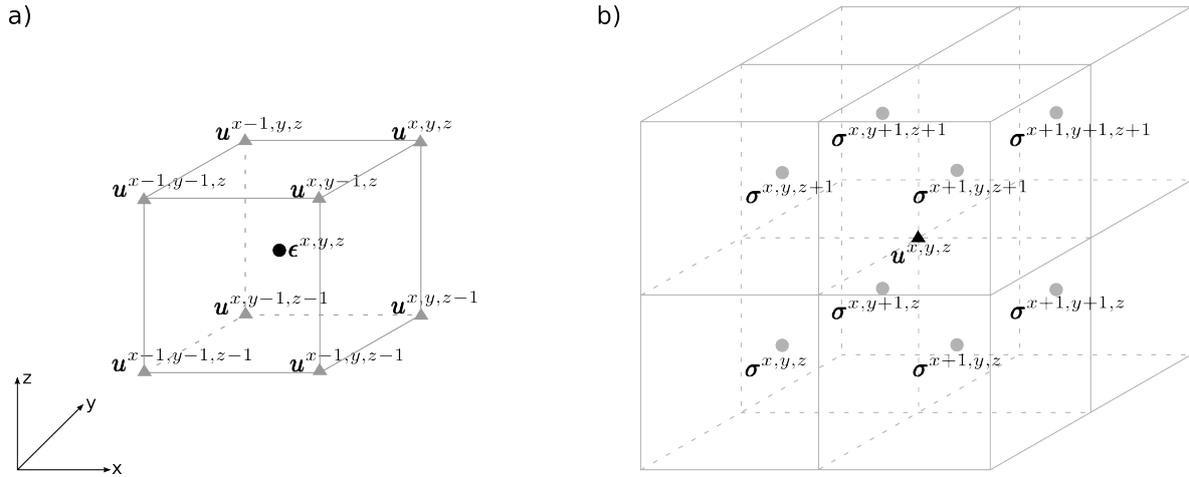


Abbildung 11.3: a) Benötigte Zellen zur Berechnung der Spannungswerte  $\sigma$  an der Stelle  $(x,y,z)$  über die Verschiebungen auf den Würfecken und b) benötigte Spannungswerte zur Berechnung der Verschiebungen an der Stelle  $(x,y,z)$ . Die Dreiecke stellen die Würfecken dar und die Kreise die Würfelmitte.

$$2\epsilon_{xz} = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\Delta x} \left( [u_z^{x,y,z} + u_z^{x,y,z-1} + u_z^{x,y-1,z} + u_z^{x,y-1,z-1}] \right. \right. \\ \left. \left. - [u_z^{x-1,y,z} + u_z^{x-1,y,z-1} + u_z^{x-1,y-1,z} + u_z^{x-1,y-1,z-1}] \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{\Delta z} \left( [u_x^{x,y,z} + u_x^{x-1,y,z} + u_x^{x,y-1,z} + u_x^{x-1,y-1,z}] \right. \right. \\ \left. \left. - [u_x^{x,y,z-1} + u_x^{x-1,y,z-1} + u_x^{x,y-1,z-1} + u_x^{x-1,y-1,z-1}] \right) \right]$$

und

$$2\epsilon_{yz} = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\Delta y} \left( [u_z^{x,y,z} + u_z^{x,y,z-1} + u_z^{x-1,y,z} + u_z^{x-1,y,z-1}] \right. \right. \\ \left. \left. - [u_z^{x,y-1,z} + u_z^{x,y-1,z-1} + u_z^{x-1,y-1,z} + u_z^{x-1,y-1,z-1}] \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{\Delta z} \left( [u_y^{x,y,z} + u_y^{x-1,y,z} + u_y^{x,y-1,z} + u_y^{x-1,y-1,z}] \right. \right. \\ \left. \left. - [u_y^{x,y,z-1} + u_y^{x-1,y,z-1} + u_y^{x,y-1,z-1} + u_y^{x-1,y-1,z-1}] \right) \right].$$

### 11.3.2 Berechnung der Verschiebung im RSG

Die Berechnung der Verschiebung zum Zeitpunkt  $n+1$  ergibt sich aus der elastischen Wellengleichung

$$\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \nabla \sigma$$

und Gleichung 11.4 für die zweite Ableitung der Verschiebung in der Zeit

$$\ddot{u}_i^{n+1} = \frac{u_i(t + \Delta t) - 2u_i(t) + u_i(t - \Delta t)}{\Delta t^2} = RHS$$

und Auflösen nach  $u_i(t + \Delta t)$  zu

$$u_i(t + \Delta t) = 2u_i(t) - u_i(t - \Delta t) + \frac{\Delta t^2}{\rho} \nabla \sigma.$$

Für die Divergenz des Spannungstensors gilt [99]

$$\nabla \sigma = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \end{bmatrix}.$$

Somit ergibt sich das Update der Verschiebungswerte zu

$$\begin{aligned} u_x(t + \Delta t) &= 2u_x(t) - u_x(t - \Delta t) + \frac{\Delta t^2}{\rho} \left[ \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial z} \right] \\ u_y(t + \Delta t) &= 2u_y(t) - u_y(t - \Delta t) + \frac{\Delta t^2}{\rho} \left[ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial z} \right] \\ u_z(t + \Delta t) &= 2u_z(t) - u_z(t - \Delta t) + \frac{\Delta t^2}{\rho} \left[ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial z} \right] \end{aligned}$$

mit den Ableitungen der Spannungen in die Richtungen  $x, y, z$  für die Diskretisierung des RSGs aus Abbildung 11.3, b):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x} &= \frac{1}{4\Delta x} \left[ \begin{aligned} &[\sigma_{ij}^{x+1,y,z} + \sigma_{ij}^{x+1,y+1,z} + \sigma_{ij}^{x+1,y,z+1} + \sigma_{ij}^{x+1,y+1,z+1}] \\ &- [\sigma_{ij}^{x,y,z} + \sigma_{ij}^{x,y+1,z} + \sigma_{ij}^{x,y,z+1} + \sigma_{ij}^{x,y+1,z+1}] \end{aligned} \right] \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial y} &= \frac{1}{4\Delta y} \left[ \begin{aligned} &[\sigma_{ij}^{x,y+1,z} + \sigma_{ij}^{x+1,y+1,z} + \sigma_{ij}^{x,y+1,z+1} + \sigma_{ij}^{x+1,y+1,z+1}] \\ &- [\sigma_{ij}^{x,y,z} + \sigma_{ij}^{x+1,y,z} + \sigma_{ij}^{x,y,z+1} + \sigma_{ij}^{x+1,y,z+1}] \end{aligned} \right] \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial z} &= \frac{1}{4\Delta z} \left[ \begin{aligned} &[\sigma_{ij}^{x,y,z+1} + \sigma_{ij}^{x+1,y,z+1} + \sigma_{ij}^{x,y+1,z+1} + \sigma_{ij}^{x+1,y+1,z+1}] \\ &- [\sigma_{ij}^{x,y,z} + \sigma_{ij}^{x,y+1,z} + \sigma_{ij}^{x+1,y,z} + \sigma_{ij}^{x+1,y+1,z}] \end{aligned} \right]. \end{aligned}$$

## 11.4 Zeitschrittweite

Für die *stabile* Berechnung der elastischen Wellenausbreitung sowie der Temperaturleitung innerhalb des Materials mit Hilfe des expliziten Euler-Verfahrens wird die Zeitschrittweite  $\Delta t$

Ordnung	h (Taylor)	h (Holberg)
2er	1.0	1.0
4er	7/6	1.184614
6er	149/120	1.283482
8er	2161/1680	1.345927
10er	53089/40320	1.387660
12er	1187803/887040	1.417065

Tabelle 11.1: Holberg- und Taylorkoeffizienten entsprechend [15].

entsprechend den vorliegenden Materialeigenschaften eingestellt. Eine Simulation wird als *instabil* bezeichnet, wenn sich die Amplitude der im Gebiet ausbreitenden Welle in jedem Zeitschritt exponentiell erhöht [123]. Für jede Simulation sollte stets die größtmögliche Zeitschrittweite ermittelt und verwendet werden, um die Rechenzeit so gering wie möglich zu halten. Zur Ermittlung der maximalen Zeitschrittweite wird das **Courant-Friedrichs-Lewy-Kriterium** verwendet. Es ist definiert durch

$$c_\infty = \frac{v\Delta t}{\Delta h} \leq 1 \quad [57]. \quad (11.7)$$

Hierbei ist  $c_\infty$  die Courant-Zahl,  $v$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit und  $\Delta h = \min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  der minimale im Gebiet vorhandene Gitterabstand. Für die Zeitschrittweite lässt sich generell sagen, dass die physikalische Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v_{\text{phys}}$  die der Informationsausbreitung  $v_{\text{info}}$  nicht überschreiten darf. Nur für  $v_{\text{phys}} \leq v_{\text{info}}$  ist das numerische Integrationsverfahren stabil. In der Arbeit von Saenger et al. [123] wird das Stabilitätskriterium für das RSG mit Hilfe der Neumann'schen Stabilitätsanalyse bestimmt. Für eine stabile Berechnung muss

$$\frac{\Delta t v}{\Delta h} \leq 1 / \left( \sum_{k=1}^n |c_k| \right) \quad (11.8)$$

gelten. Für das SSG ergibt sich nach Virieux [149]

$$\frac{\Delta t v}{\Delta h} \leq 1 / \left( \sqrt{n} \sum_{k=1}^n |c_k| \right). \quad (11.9)$$

$c_k$  ist hier der finite-Differenzen-Operator (beispielsweise Taylor oder Holberg) und  $n$  die Dimension der Berechnung (1-D, 2-D, 3-D). Werte für die Holberg- und Taylorkoeffizienten sind entsprechend den Angaben von [15] in Tabelle 11.1 aufgelistet. Für eine Berechnung zweiter Ordnung hat der Koeffizient jedoch keinen Einfluss auf die Zeitschrittweite.

Die Geschwindigkeit  $v$  entspricht bei der mechanischen Wellenausbreitung der Schallgeschwindigkeit innerhalb des Materials. Für die Schallwellen wird wiederum zwischen Longitudinalwellen und Transversalwellen unterschieden. Die Geschwindigkeit der Longitudinalwelle  $v_l$

$$v_l = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}$$

und die Geschwindigkeit der Transversalwelle  $v_t$

$$v_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \quad [154]$$

ergibt sich aus der Dichte  $\rho$  und den elastischen Konstanten  $E$  und  $\nu$ . Durch die Division von beiden Geschwindigkeiten

$$\frac{v_l}{v_t} = \frac{2-2\nu}{1-2\nu} > 1.0$$

kann gezeigt werden, dass für  $0 < \nu < 0.5$  die Longitudinalwelle stets eine höhere Geschwindigkeit besitzt als die Transversalwelle. Für das Stabilitätskriterium wird daher die Longitudinalwelle in Betracht gezogen. Eingesetzt in Gleichung 11.8 ergibt sich für das RSG somit die maximale Zeitschrittweite zu

$$\Delta t_{M,RSG} \leq \Delta h \sqrt{\frac{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}}.$$

Verwendet man anstatt des E-Moduls und der Poissonzahl die Lamé-Konstanten  $\lambda_L = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  und  $\mu_L = \frac{E}{2(1+\nu)}$  vereinfacht sich die Formel zu

$$\Delta t_{M,RSG} \leq \Delta h \sqrt{\frac{\rho}{\lambda_L + 2\mu_L}}.$$

$\Delta t_{M,RSG}$  gilt hierbei für das RSG. Für das SSG ändert sich die Zeitschrittweite entsprechend Gleichung 11.9 zu

$$\Delta t_{M,SSG} \leq \frac{\Delta h}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\rho}{\lambda_L + 2\mu_L}}.$$

für den dreidimensionalen Fall. Die Zeitschrittweite für die thermische Berechnung ergibt sich nach [37] zu

$$\Delta t_T = \frac{\Delta h}{2 \max\left(\frac{k_a}{c v_a}\right) n}.$$

In Abhängigkeit der zu simulierenden Prozesse, mechanische Belastung oder thermische Belastung, wird die jeweilige Zeitschrittweite ermittelt und für die Simulation verwendet. Wird eine gekoppelte Simulation durchgeführt, so ist die geringere Zeitschrittweite zu verwenden  $\Delta t = \min(\Delta t_M, \Delta t_T)$ . Bei deutlich unterschiedlichen Zeitschrittweiten ist es jedoch sinnvoll, die jeweilige Berechnung nur zu den Zeitpunkten durchzuführen, welche für die Stabilität notwendig sind. Dadurch kann ein Großteil der Rechenzeit eingespart werden.

## 11.5 Quasistatische Berechnung

Da der zeitliche Verlauf der Wellenausbreitung für die Simulation der Zug- und Druckversuche nicht von Interesse ist, kann durch eine ‘Anpassung’ der Dichte eine höhere Zeitschrittweite erzielt werden. Auf die Ergebnisse im Gleichgewichtszustand ( $\nabla \sigma = 0$ ) hat die Dichte hingegen

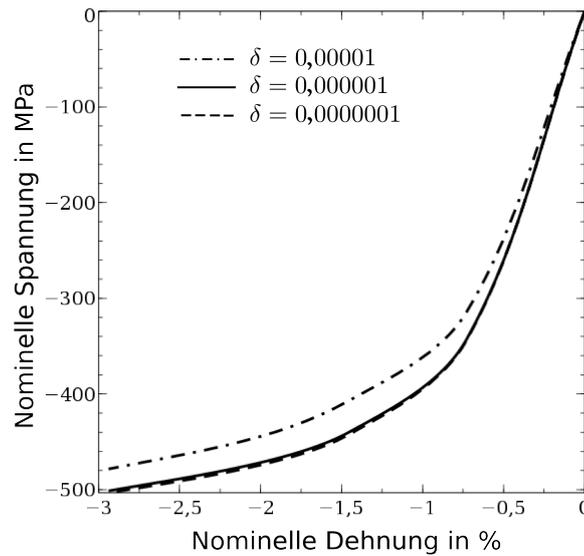


Abbildung 11.4: Konvergenz der Ergebnisse des Druckversuchs für unterschiedliche  $\delta$ . Für  $\delta = 10^{-5}$  ist demnach kein ausreichender Gleichgewichtszustand erreicht, während die Simulationen mit  $\delta = 10^{-6}$  und  $\delta = 10^{-7}$  nahezu identische Ergebnisse liefern.

keinen Einfluss. Wie aus Gleichung 11.8 hervorgeht, wird die Dichte hierfür erhöht. Um den Gleichgewichtszustand zu gewährleisten, werden die zu Beginn des Kapitels aufgelisteten Berechnungen in einer Schleife ausgeführt, bis ein vorgegebener Grenzwert  $\delta$  unterschritten ist oder die maximale Anzahl an Durchläufen erreicht ist. In den Berechnungen der virtuellen Zug- und Druckversuche wird hierzu die Veränderung der auszuwertenden Größe, die mittlere Spannung in Zugrichtung, als Abbruchkriterium gewählt

$$\delta_\sigma > \left| \frac{\bar{\sigma}_z^{n-50}}{\bar{\sigma}_z^n} - 1 \right|$$

$\bar{\sigma}_z^n$  ist die aktuelle effektive Spannung in Zugrichtung und  $\bar{\sigma}_z^{n-50}$  die effektive Spannung 50 Zeitschritte zuvor, da die Überprüfung nicht für jede Iteration durchgeführt wird. Aus Abbildung 11.4 geht hervor, dass bei einem Grenzwert von  $\delta_\sigma = 10^{-6}$  die Ergebnisse ein ausreichendes Gleichgewicht erreicht haben und sich im Vergleich zu den Werten für  $\delta_\sigma = 10^{-7}$  nur geringfügig ändern. Deutlich wird auch, dass für  $\delta_\sigma = 10^{-5}$  der Spannungszustand nicht ausreichend im Gleichgewicht ist. Durch die Verwendung der quasistatischen Berechnung bei den mesoskopischen Zugversuchen können im Folgenden neben einer kontinuierlichen Belastung des Materials durch die Randbedingung auch einzelne Belastungszustände angefahren werden. Für die verwendete Verschiebungsrandbedingung ist das in Abbildung 11.5, a) dargestellt. In Abbildung 11.5, b) ist der dazugehörige Zugversuch skizziert. Aufgrund der linearen Verschiebungsrandbedingung wird auch die effektive Dehnung jeweils äquidistant erhöht. Während sich für kleine quasistatische Schritte nur eine geringe Verkürzung der Rechenzeit einstellen wird, ist das Potential bei den skizzierten quasistatischen Schritten deutlich höher. Die Konvergenz hängt hierbei von der Mikrostruktur und den Materialeigenschaften ab. Der Verlauf der Kennlinie der effektiven Spannung ist hierbei unabhängig von der Schrittweite

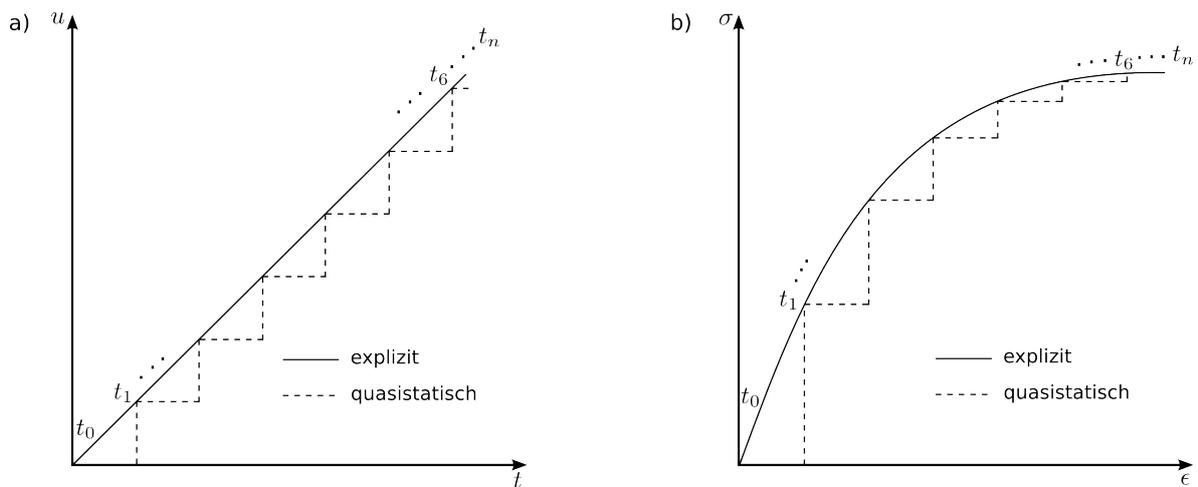


Abbildung 11.5: a) Werte der Verschiebungsrandbedingung für die explizite Berechnung und für die quasistatische Berechnung. b) Skizze eines Zugversuchs für explizite und quasistatische Berechnung.  $t_0 \dots t_n$  stellen dabei die unterschiedlichen Zeitpunkte der Berechnung mit der dazugehörigen Verschiebung dar.

der quasistatisch aufgebrachten Belastung. Die Gesamtdehnung von 2% in Abbildung 11.6 ist bei Simulation 1 in 21 Schritten aufgebracht worden und in Simulation 2 in lediglich 7 Schritten. Die Werte für die effektive Spannung der beiden Simulationen an den sieben übereinstimmenden Dehnungszuständen sind nahezu identisch. Für das Simulationsgebiet wurde eine ellipsoidförmige Inhomogenität in die Matrix eingebettet. Für eine rein elastische sowie eine elasto-plastische Belastung ohne Entfestigung ist dieses Verhalten immer gegeben. Bei der Einbindung von entfestigendem Materialverhalten und Schädigung ist dies bis zum Eintreten einer Lokalisierung gegeben.

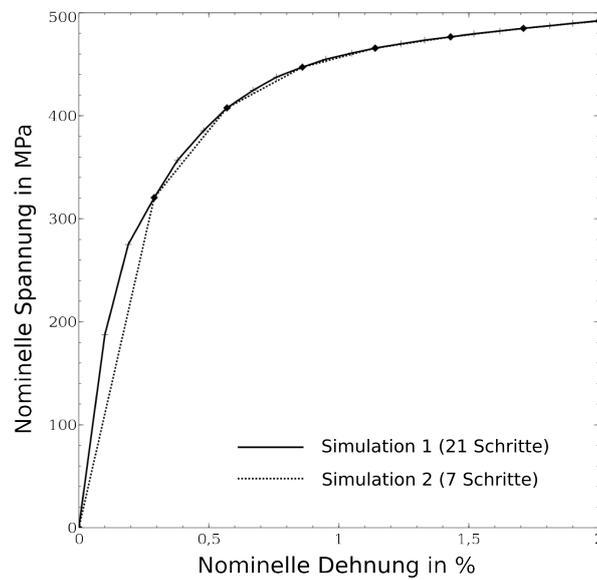


Abbildung 11.6: Simulierte Kennlinien mit unterschiedlicher Schrittweite. Bei Simulation 1 wird die Dehnung von 2% in 21 Schritten aufgebracht und bei Simulation 2 in 7 Schritten. Die Ergebnisse der ausgewerteten Spannung für Simulation 1 und 2 sind an den 7 Punkten identisch.

## 12 Implementierung der Plastizität

In diesem Abschnitt wird die Implementierung der in Kapitel 7 beschriebenen Plastizität dargestellt. Die Berechnung der Plastizität wird dabei über zwei Teilschritte durchgeführt, den elastischen Teilschritt und den plastischen Korrekturschritt. Mit der aus den Verschiebungen zum Zeitpunkt  $n + 1$  berechneten Gesamtdehnung  $\boldsymbol{\epsilon}^{n+1}$  ergibt sich die Berechnung der Spannung  $\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon}^{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_{\text{pl}}^{n+1})$ . Die plastische Dehnung  $\boldsymbol{\epsilon}_{\text{pl}}^{n+1}$  ist hierbei im Vorhinein nicht bekannt, da sie vom Spannungszustand  $\boldsymbol{\sigma}^{n+1}$  abhängt. Daher wird die plastische Versuchsdehnung  $\boldsymbol{\epsilon}_{\text{pl,test}}^{n+1}$  über

$$\boldsymbol{\epsilon}_{\text{pl,test}}^{n+1} = \boldsymbol{\epsilon}_{\text{pl}}^n$$

definiert. Die plastische Versuchsdehnung ist damit die plastische Dehnung des Zeitpunkts  $n$  über die die Versuchsspannung

$$\boldsymbol{\sigma}_{\text{test}}^{n+1} = \mathbf{C}(\boldsymbol{\epsilon}^{n+1} - \boldsymbol{\epsilon}_{\text{pl,test}}^{n+1})$$

des elastischen Teilschritts berechnet wird. Die Fließfunktion des Materials wird über

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{\text{vgl}} - \sigma_{\text{y}}(\bar{\epsilon}_{\text{pl}}) \leq 0$$

ausgewertet.  $\sigma_{\text{vgl}}$  ist hierbei entsprechend Kapitel 7, Plastizität die Vergleichsspannung und  $\sigma_{\text{y}}(\bar{\epsilon}_{\text{pl}})$  die von der akkumulierten plastischen Dehnung  $\bar{\epsilon}_{\text{pl}} := \int_0^t |\dot{\lambda}| dt$  abhängige Streckgrenze. Ist die Fließfunktion erfüllt ( $\Phi(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0$ ), so liegt ein rein elastischer Teilschritt vor und es gilt  $\boldsymbol{\epsilon}_{\text{pl}}^{n+1} = \boldsymbol{\epsilon}_{\text{pl}}^n$  und  $\boldsymbol{\sigma}^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{\text{test}}^{n+1}$ . Ist die Fließfunktion verletzt ( $\Phi(\boldsymbol{\sigma}) > 0$ ), so folgt der plastische Korrekturschritt.

### 12.1 Plastischer Korrekturschritt

Für die von-Mises-Plastizität lässt sich über das Prandl-Reuss-Modell [131] die plastische Dehnung  $\boldsymbol{\epsilon}_{\text{pl}}$  für idealplastisches Verhalten und für lineare Verfestigung explizit bestimmen. In dieser Arbeit wird eine nichtlineare Verfestigungsfunktion

$$\sigma_{\text{y}}(\bar{\epsilon}_{\text{pl}}) = \sigma_0 + \Theta_{\infty} \bar{\epsilon}_{\text{pl}} + (\sigma_{\infty} - \sigma_0) \left( 1 - \exp\left(-\frac{\Theta_0 - \Theta_{\infty}}{\sigma_{\infty} - \sigma_0} \bar{\epsilon}_{\text{pl}}\right) \right), \quad (12.1)$$

nach [26] verwendet, die in Abbildung 12.1 dargestellt ist.  $\bar{\epsilon}_{\text{pl}}$  beschreibt dabei die akkumulierte plastische Dehnung und die Parameter  $\Theta_0$ ,  $\Theta_{\infty}$ ,  $\sigma_0$  und  $\sigma_{\infty}$  werden entsprechend der Abbildung 12.1 gewählt, um das gewünschte Materialverhalten abzubilden. Der plastische Korrekturschritt wird über den in Abbildung 12.2 für die von-Mises-Fließfläche dargestellten Return-Mapping-Algorithmus durchgeführt. Der Korrekturschritt ist demnach nötig, sobald

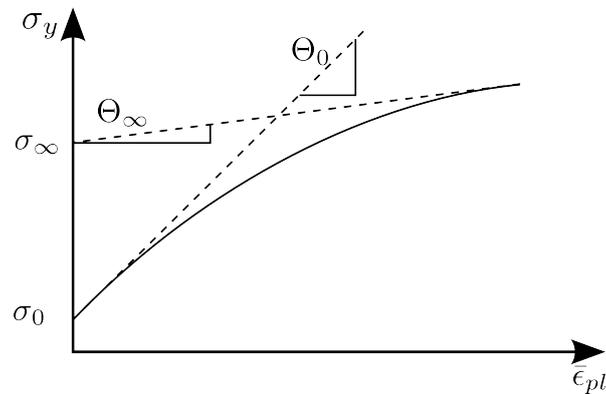


Abbildung 12.1: Verfestigungsfunktion nach [26] mit der Fließspannung  $\sigma_y$  über der akkumulierten plastischen Dehnung  $\bar{\epsilon}_{pl}$  entsprechend [128].  $\sigma_0$  ist die Spannung, die zum erstmaligen plastischen Fließen führt und  $\Theta_0$  die zugehörige Steigung. Für  $\bar{\epsilon}_{pl} \rightarrow \infty$  geht die Funktion in die bleibende Steigung  $\Theta_\infty$  über.

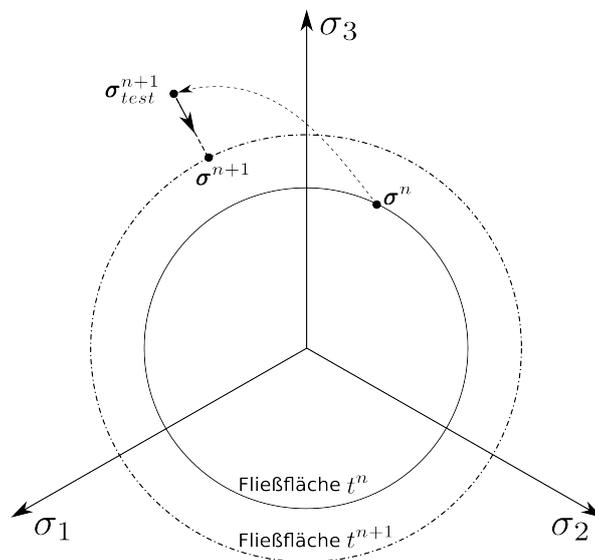


Abbildung 12.2: Darstellung des Return-Mapping-Algorithmus. Spannungszustände  $\sigma_{test}^{n+1}$ , die außerhalb der durch die durchgezogene Linie dargestellten Fließfläche liegen, werden mit diesem Verfahren auf die Fließfläche des aktuellen Berechnungsschrittes (gestrichelte Linie) projiziert. Liegt kein verfestigendes Materialverhalten vor, liegen die Fließflächen von Zeitpunkt  $n$  und  $n+1$  übereinander.

die als Kreis dargestellt Fließfläche überschritten wird. Dies ist der Fall, sobald die Versuchsspannung  $\sigma_{\text{test}}^{n+1}$  außerhalb der Kreisfläche liegt. Zur Erfüllung der Fließfläche wird die Spannung zurück auf die Fließfläche projiziert. Die Gesamtdehnung wird bei diesem Vorgang nicht verändert, sondern das Verhältnis von elastischer zu plastischer Dehnung angepasst [65]. Entsprechend der Normalenregel (siehe Gleichung (7.3)) wird hierzu die Richtung  $\mathbf{p} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$  und der Betrag  $\lambda$  des plastischen Fließens benötigt. Für die Berechnung des Konsistenzparameters  $\lambda$ , wird aufgrund der Verwendung der nichtlineare Funktion aus Gleichung (12.1) einen Newton-Raphson-Algorithmus

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

mit  $f'(x_n) = \frac{df(x_n)}{dx}$  verwendet.

## 12.2 Von-Mises-Fließfunktion

Die Richtung des plastischen Fließens  $\mathbf{p}$  der von-Mises-Fließfunktion ergibt sich mit

$$\begin{aligned} \Phi_M(\bar{\epsilon}_{\text{pl}}, \boldsymbol{\sigma}) &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' - \frac{1}{3} \sigma_y^2(\bar{\epsilon}_{\text{pl}}) \\ &= (\sigma_{11})^2 + (\sigma_{22})^2 + (\sigma_{33})^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33} \\ &\quad + 3((\sigma_{12})^2 + (\sigma_{13})^2 + (\sigma_{23})^2) - \sigma_{y,c}^2(\bar{\epsilon}_{\text{pl}}) \end{aligned}$$

zu

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \Phi_M(\boldsymbol{\sigma}_{\text{test}})}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\text{test}}} = \begin{pmatrix} 2\sigma_{11,\text{test}} - \sigma_{22,\text{test}} - \sigma_{33,\text{test}} \\ 2\sigma_{22,\text{test}} - \sigma_{11,\text{test}} - \sigma_{33,\text{test}} \\ 2\sigma_{33,\text{test}} - \sigma_{11,\text{test}} - \sigma_{22,\text{test}} \\ 2\sigma_{23,\text{test}} \\ 2\sigma_{13,\text{test}} \\ 2\sigma_{12,\text{test}} \end{pmatrix}.$$

Die Berechnung des plastischen Multiplikators der von-Mises-Fließfunktion ergibt sich damit wie in Abbildung 12.3 beschrieben über den Newton-Raphson-Algorithmus mit der Ableitung

$$\frac{d\sigma_y^2(\bar{\epsilon}_{\text{pl}})}{d\bar{\epsilon}_{\text{pl}}} = \Theta_\infty + (\Theta_0 - \Theta_\infty) * \exp(-(\Theta_0 - \Theta_\infty)/(\sigma_\infty - \sigma_0)\bar{\epsilon}_{\text{pl}}) + 2\sigma_y(\bar{\epsilon}_{\text{pl}}).$$

Die plastischen Dehnungen zum Zeitpunkt  $n+1$  ergeben sich damit über  $\boldsymbol{\epsilon}_{\text{pl}}^{n+1} = \boldsymbol{\epsilon}_{\text{pl}}^n + \dot{\lambda}^{n+1} \mathbf{p}$  zu

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{pl,11} \\ \epsilon_{pl,22} \\ \epsilon_{pl,33} \\ \epsilon_{pl,23} \\ \epsilon_{pl,13} \\ \epsilon_{pl,12} \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} \epsilon_{pl,11} \\ \epsilon_{pl,22} \\ \epsilon_{pl,33} \\ \epsilon_{pl,23} \\ \epsilon_{pl,13} \\ \epsilon_{pl,12} \end{bmatrix}^n + \dot{\lambda}^{n+1} \begin{bmatrix} 2\sigma_{11,\text{test}} - \sigma_{22,\text{test}} - \sigma_{33,\text{test}} \\ 2\sigma_{22,\text{test}} - \sigma_{11,\text{test}} - \sigma_{33,\text{test}} \\ 2\sigma_{33,\text{test}} - \sigma_{11,\text{test}} - \sigma_{22,\text{test}} \\ 6\sigma_{23,\text{test}} \\ 6\sigma_{13,\text{test}} \\ 6\sigma_{12,\text{test}} \end{bmatrix}$$

Die Fließfunktion nach Hjelm [62] ist wie in Kapitel 7, Plastizität beschrieben, eine Fließfläche die sich aus der von Mises ( $\Phi_1$ ) und der Mises-Schleicher ( $\Phi_2$ ) Fließfläche zusammensetzt.

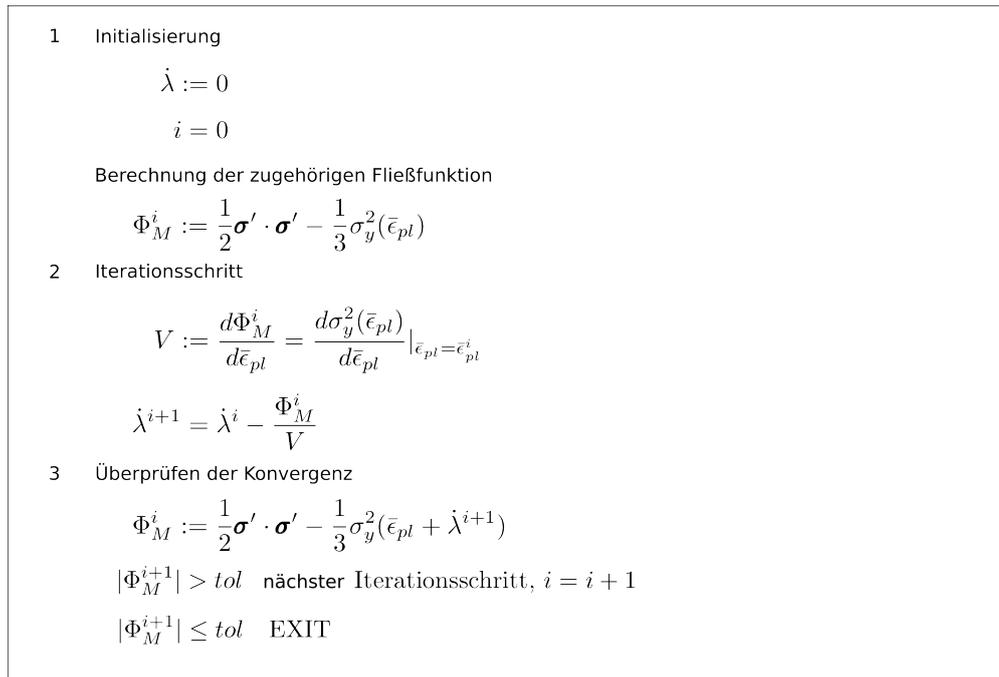


Abbildung 12.3: Berechnungsablauf für die von-Mises-Plastizität.

## 12.3 Fließfunktion nach Hjelm

Entsprechend der Abbildung 12.4 können verschiedene Bereiche definiert werden. Der Bereich innerhalb der beiden Fließflächen, mit  $\Phi_1, \Phi_2 \leq 0$ , definiert eine rein elastische Belastung. Die Bereiche I,  $\Phi_1 > 0, \Phi_2 \leq 0$  sowie I',  $\Phi_1 > 0, \Phi_2 > 0$  werden durch die Normale zur von-Mises-Fließfläche im Schnittpunkt der beiden Fließflächen und die von-Mises-Fließfläche, definiert. Für Spannungszustände in diesem Bereich wird durch Erfüllung der von-Mises-Fließbedingung ein zulässiger Spannungszustand erreicht. Gleiches gilt für die Bereiche III,  $\Phi_1 > 0, \Phi_2 > 0$  und III',  $\Phi_1 \leq 0, \Phi_2 > 0$ . Hier wird ein zulässiger Spannungszustand durch die Erfüllung der Mises-Schleicher-Fließbedingung erreicht. Eine spezielle Behandlung ist für den grau markierten Bereich zwischen den beiden Normalen notwendig. In diesem Bereich müssen beide Fließbedingungen in Betracht gezogen werden und die plastische Dehnung errechnet sich demnach über Gleichung 7.4. Entsprechend der Anzahl an Fließbedingungen müssen die beiden Konsistenzparameter  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  bestimmt werden. Die Spannung ergibt sich hiermit zu:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma}^{n+1}(\lambda_1, \lambda_2) &= \boldsymbol{\sigma}_{\text{test}}^{n+1} - \mathbf{C} \dot{\epsilon}^{pl} \\
 &= \boldsymbol{\sigma}_{\text{test}}^{n+1} - \mathbf{C} \left( \dot{\lambda}_1 \frac{\partial \Phi_M}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \dot{\lambda}_2 \frac{\partial \Phi_{MS}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \\
 &= \boldsymbol{\sigma}_{\text{test}}^{n+1} - \mathbf{C} \dot{\lambda}_1 \frac{\partial \Phi_M}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{C} \dot{\lambda}_2 \frac{\partial \Phi_{MS}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}
 \end{aligned}$$

Eingesetzt in die beiden Funktionen  $\Phi_M$  und  $\Phi_{MS}$  ergeben sich die beiden Bedingungen

$$\begin{aligned}
 \Phi_{M,n+1}(\lambda_1, \lambda_2) &= 0 \\
 \Phi_{MS,n+1}(\lambda_1, \lambda_2) &= 0.
 \end{aligned}$$

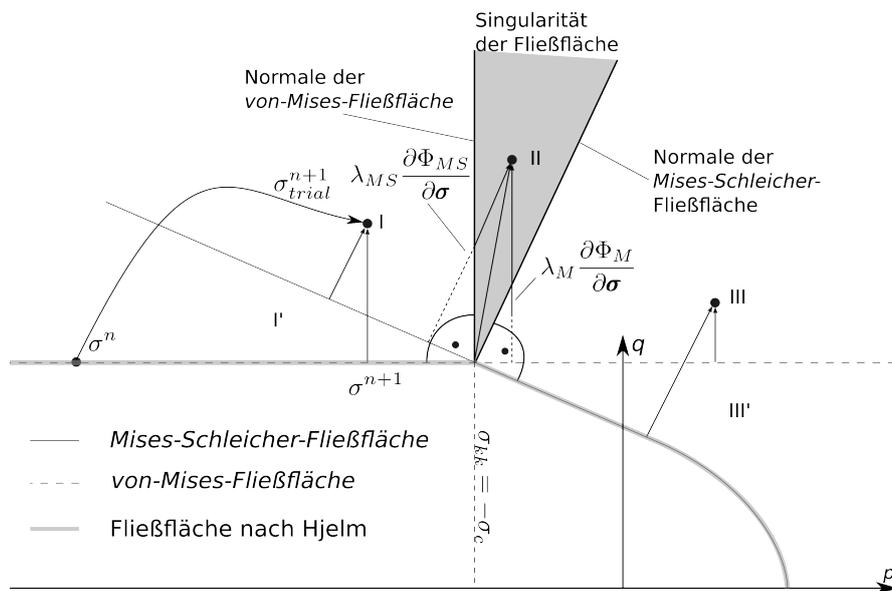


Abbildung 12.4: Mehrflächenfließfläche nach Hjelm [62] mit den unterschiedlichen Bereichen I, I', II, III, III', die bei der Berechnung der Konsistenzparameters berücksichtigt werden müssen, entsprechend [128]. Für die Bereiche I und I' wird ein zulässiger Spannungszustand erreicht, sobald die von-Mises-Fließbedingung erfüllt ist. Für die Bereiche III und III' gilt das, sobald die Mises-Schleicher-Fließbedingung erfüllt ist. Für den grauen Bereich II müssen beide Fließflächen in Betracht gezogen werden.

Die Konsistenzparameter ergeben sich nach [113] durch die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{Bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{Bmatrix}^{i+1} = \begin{Bmatrix} \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \end{Bmatrix}^i - J^{i,-1} \begin{Bmatrix} \Phi_M \\ \Phi_{MS} \end{Bmatrix}^i$$

welches iterativ gelöst wird.  $i$  ist dabei der aktuelle Iterationsschritt. Die Jakobi-Matrix  $J^i$  wird über die partiellen Ableitungen

$$J^i = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_M(\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2)}{\partial \dot{\lambda}_1} & \frac{\partial \Phi_M(\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2)}{\partial \dot{\lambda}_2} \\ \frac{\partial \Phi_{MS}(\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2)}{\partial \dot{\lambda}_1} & \frac{\partial \Phi_{MS}(\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2)}{\partial \dot{\lambda}_2} \end{bmatrix}^i$$

gebildet. Dabei sind

$$\begin{aligned} \Phi_M(\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2) &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' - \frac{1}{3} \sigma_{y,c}^2(\bar{\epsilon}_{pl}) \\ &= (\sigma_{11})^2 + (\sigma_{22})^2 + (\sigma_{33})^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33} \\ &\quad + 3((\sigma_{12})^2 + (\sigma_{13})^2 + (\sigma_{23})^2) - \sigma_{y,c}^2(\bar{\epsilon}_{pl}). \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Phi_{MS}(\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2) &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' + \sigma^o(\sigma_{y,c}(\bar{\epsilon}_{pl}) - \sigma_{y,t}(\bar{\epsilon}_{pl})) - \frac{1}{3} \sigma_{y,c}(\bar{\epsilon}_{pl}) \sigma_{y,t}(\bar{\epsilon}_{pl}) \\ &= (\sigma_{11})^2 + (\sigma_{22})^2 + (\sigma_{33})^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{11}\sigma_{33} - \sigma_{22}\sigma_{33} \\ &\quad + 3((\sigma_{12})^2 + (\sigma_{13})^2 + (\sigma_{23})^2) \\ &\quad + (\sigma_{y,c}(\bar{\epsilon}_{pl}) - \sigma_{y,t}(\bar{\epsilon}_{pl}))(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) - \sigma_{y,c}(\bar{\epsilon}_{pl}) \sigma_{y,t}(\bar{\epsilon}_{pl}). \end{aligned}$$

Hierbei wird jeweils die Spannung

$$\sigma_{ij}^i = \sigma_{ij,\text{test}} - \dot{\lambda}_1 K_{ij} - \dot{\lambda}_2 L_{ij}$$

des entsprechenden Iterationsschritts  $i$  eingesetzt. Die Faktoren  $K_{ij}$  und  $L_{ij}$  ergeben sich zu

$$K_{ij} = \mathbf{C} \frac{\partial \Phi_M(\boldsymbol{\sigma}_{\text{test}})}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\text{test}}} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & & \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & & 0 & & \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & & & & \\ & & & C_{44} & & & \\ & & & & C_{55} & & \\ & & & & & C_{66} & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2\sigma_{11,\text{test}} - \sigma_{22,\text{test}} - \sigma_{33,\text{test}} \\ 2\sigma_{22,\text{test}} - \sigma_{11,\text{test}} - \sigma_{33,\text{test}} \\ 2\sigma_{33,\text{test}} - \sigma_{11,\text{test}} - \sigma_{22,\text{test}} \\ 2\sigma_{23,\text{test}} \\ 2\sigma_{13,\text{test}} \\ 2\sigma_{12,\text{test}} \end{Bmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} L_{ij} &= \mathbf{C} \frac{\partial \Phi_{MS}(\boldsymbol{\sigma}_{\text{test}})}{\partial \boldsymbol{\sigma}_{\text{test}}} \\ &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & & \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & & 0 & & \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & & & & \\ & & & C_{44} & & & \\ & & & & C_{55} & & \\ & & & & & C_{66} & \\ & & & & & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (2\sigma_{11,\text{test}} - \sigma_{22,\text{test}} - \sigma_{33,\text{test}}) + (\sigma_{y,c}(\bar{\epsilon}_{pl}) - \sigma_{y,t}(\bar{\epsilon}_{pl})) \\ (2\sigma_{22,\text{test}} - \sigma_{11,\text{test}} - \sigma_{33,\text{test}}) + (\sigma_{y,c}(\bar{\epsilon}_{pl}) - \sigma_{y,t}(\bar{\epsilon}_{pl})) \\ (2\sigma_{33,\text{test}} - \sigma_{11,\text{test}} - \sigma_{22,\text{test}}) + (\sigma_{y,c}(\bar{\epsilon}_{pl}) - \sigma_{y,t}(\bar{\epsilon}_{pl})) \\ 6\sigma_{23,\text{test}} \\ 6\sigma_{13,\text{test}} \\ 6\sigma_{12,\text{test}} \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

<p>1 Bestimmung der Fließspannung für Zug- und Druckbelastung</p> $\sigma_{y,z}(\bar{\epsilon}_{pl}, T) = \sigma_{0,z}(T) + \Theta_{\infty,z}(T)\bar{\epsilon}_{pl} + (\sigma_{\infty,z}(T) - \sigma_{0,z}(T)) \left(1 - \exp\left(-\frac{\Theta_{0,z}(T) - \Theta_{\infty,z}(T)}{\sigma_{\infty,z}(T) - \sigma_{0,z}(T)}\bar{\epsilon}_{pl}\right)\right)$ $\sigma_{y,d}(\bar{\epsilon}_{pl}, T) = \sigma_{0,d}(T) + \Theta_{\infty,d}(T)\bar{\epsilon}_{pl} + (\sigma_{\infty,d}(T) - \sigma_{0,d}(T)) \left(1 - \exp\left(-\frac{\Theta_{0,d}(T) - \Theta_{\infty,d}(T)}{\sigma_{\infty,d}(T) - \sigma_{0,d}(T)}\bar{\epsilon}_{pl}\right)\right)$ <p>Berechnung der Versuchsspannung</p> $\sigma_{test}^{n+1} = \mathbf{C}(\epsilon^{n+1} - \epsilon_{pl,test}^{n+1})$ <p>2 Überprüfung der Fließfunktionen nach von-Mises und Mises-Schleicher</p> $\Phi_M := \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}' - \frac{1}{3}\sigma_{y,c}^2 \leq 0$ $\Phi_{MS} := \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}' - \sigma^o(\sigma_{y,c} - \sigma_{y,t}) - \frac{1}{3}\sigma_{y,c}^2 \leq 0$ <p>3 Berechnung des Konsistenzparameters für die von-Mises-Plastizität Newton-Raphson-Verfahren zur Lösung der von-Mises-Fließfunktion</p> $\sigma^i = \sigma_{test}^{n+1} - \mathbf{C}\lambda_1^i \frac{\partial \Phi_M}{\partial \sigma_{test}^{n+1}}$ $\dot{\lambda}^{i+1} = \dot{\lambda} - \frac{\Phi_M^i}{\Phi_M^{\prime i}}$ <p>wenn damit die Mises-Schleicher-Fließfunktion ebenfalls erfüllt ist, gehe zu 6</p>
--

Abbildung 12.5: Teil 1 des Berechnungsablauf für die Mehrflächenplastizität.

Hieraus können die partiellen Ableitungen der Fließfunktionen nach den Konsistenzparametern  $\dot{\lambda}_1$  und  $\dot{\lambda}_2$  gebildet werden. Die partielle Ableitung der von-Mises-Fließfunktion  $\lambda_1$  ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_M(\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2)}{\partial \lambda_1} &= \sigma_{11}^i(-2K_{11} + K_{22} + K_{33}) + \sigma_{22}^i(K_{11} - 2K_{22} + K_{33}) + \sigma_{33}^i(K_{11} + K_{22} - 2K_{33}) \\ &\quad - 6(\sigma_{12}^i K_{12} - \sigma_{13}^i K_{13} - \sigma_{23}^i K_{23}) \end{aligned}$$

und die partielle Ableitung der Mises-Schleicher-Funktion entsprechend zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{MS}(\dot{\lambda}_1, \dot{\lambda}_2)}{\partial \lambda_1} &= \sigma_{11}^i(-2K_{11} + K_{22} + K_{33}) + \sigma_{22}^i(K_{11} - 2K_{22} + K_{33}) + \sigma_{33}^i(K_{11} + K_{22} - 2K_{33}) \\ &\quad - 6(\sigma_{12}^i K_{12} - \sigma_{13}^i K_{13} - \sigma_{23}^i K_{23}) + (\sigma_{y,c}(\bar{\epsilon}_{pl}) - \sigma_{y,t}(\bar{\epsilon}_{pl}))(-K_{11} - K_{22} - K_{33}). \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen nach  $\dot{\lambda}_2$  ergeben sich entsprechend, da es sich um additive Terme handelt. Der Berechnungsablauf der beschriebenen Mehrflächenplastizität ist entsprechend der Implementierung in Abbildung 12.5 und Abbildung 12.6 dargestellt. Die Berechnung der für die in der mesoskopischen Simulation verwendeten Schädigung im Material wird im folgenden Abschnitt beschrieben.

4 Berechnung des Konsistenzparameters für die Mises-Schleicher-Plastizität  
Newton-Raphson-Verfahren zur Lösung der Mises-Schleicher-Fließfunktion

$$\sigma^i = \sigma_{test}^{n+1} - C \dot{\lambda}_2^i \frac{\partial \Phi_{MS}}{\partial \sigma_{test}^{n+1}}$$

$$\dot{\lambda}^{i+1} = \dot{\lambda} - \frac{\Phi_{MS}^i}{\Phi_{MS}^i}$$

wenn damit die von-Mises-Fließfunktion ebenfalls erfüllt ist, gehe zu 6

5 Berechnung des Konsistenzparameters für die Mehrflächen-Plastizität

$$\sigma^i = \sigma_{test}^{n+1} - C \dot{\lambda}_1^i \frac{\partial \Phi_M}{\partial \sigma_{test}^{n+1}} - C \dot{\lambda}_2^i \frac{\partial \Phi_{MS}}{\partial \sigma_{test}^{n+1}}$$

$$\dot{\lambda}_1^{i+1} = \dot{\lambda}_1^i - (J_{11}^{-1,i} \Phi_M + J_{12}^{-1,i} \Phi_{MS})$$

$$\dot{\lambda}_2^{i+1} = \dot{\lambda}_2^i - (J_{21}^{-1,i} \Phi_M + J_{22}^{-1,i} \Phi_{MS})$$

6 Update der plastischen Dehnung und der Spannung

$$\dot{\lambda}_1^{n+1} = \dot{\lambda}_1^{i+1}$$

$$\dot{\lambda}_2^{n+1} = \dot{\lambda}_2^{i+1}$$

$$\epsilon_{pl}^{n+1} = \epsilon_{pl}^n + (\dot{\lambda}_1^{n+1} \frac{\partial \Phi_M}{\partial \sigma} + \dot{\lambda}_2^{n+1} \frac{\partial \Phi_{MS}}{\partial \sigma})$$

$$\epsilon_{pl}^{n+1} = \epsilon_{pl}^n + \dot{\lambda}_1^{n+1} + \dot{\lambda}_2^{n+1}$$

$$\sigma^{n+1} = C(\epsilon^{n+1} - \epsilon_{pl}^{n+1})$$

Abbildung 12.6: Teil 2 des Berechnungsablauf für die Mehrflächenplastizität.

## 13 Implementierung der Schädigung

Die Implementierung der in den Abschnitten 8, Schädigung und 9, Modellierung des belastungsabhängigen mechanischen Materialverhaltens beschriebenen Modelle der Schädigung sowie der lastabhängigen Materialeigenschaften, werden im Folgenden für die duktile Schädigung der Matrix sowie die Rissschließung des Graphits beschrieben.

### 13.1 Duktile Schädigung der Matrix

Die isotrope Schädigungsevolution der Matrix wird durch das vereinfachte Schädigungsmodell von Lemaitre, welches die kinematische Verfestigung vernachlässigt, entsprechend [138] umgesetzt und dessen Implementierung im Folgenden dargestellt. Der Berechnungsablauf entspricht grundsätzlich dem der Plastizität mit dem elastischen Versuchsschritt und dem plastischen Korrekturschritt. Über den Algorithmus werden die Zustandsvariablen  $\sigma^{n+1}$ ,  $\epsilon_{\text{pl}}^{n+1}$  und  $D^{n+1}$  berechnet. Der elastische Versuchsschritt des Schädigungsmodells unterscheidet sich zur Berechnung der Plastizität darin, dass dieser bezüglich der effektiven Spannung

$$\tilde{\sigma}_{\text{test}}^{n+1} = \frac{\sigma_{\text{test}}^{n+1}}{1 - D^{n+1}}$$

ausgewertet wird, welche sich durch den Einfluss der Schädigung  $D^{n+1}$  ergibt. Wird die von-Mises-Fließbedingung  $\Phi_{\text{M}}(\tilde{\sigma})$  verletzt, so erfolgt der plastische Korrekturschritt, welcher die Evolution der isotropen Schädigungsvariable  $D$  beinhaltet. Die zu bestimmende Spannung  $\sigma^{n+1}$  hängt für den Fall der duktilen Schädigung von der Schädigungsvariablen

$$D^{n+1} = D^n + \frac{\dot{\lambda}}{1 - D^{n+1}} \left( \frac{-Y^{n+1}}{r} \right)^s \quad (13.1)$$

und der plastischen Dehnung

$$\epsilon_{\text{pl}}^{n+1} = \epsilon_{\text{pl}}^n + \dot{\lambda} \mathbf{p}$$

ab. Bei Verwendung der von-Mises-Plastizität wird angenommen, dass plastische Dehnungen volumenerhaltend sind, wodurch sich für elastische Dehnung

$$\epsilon_{\text{h,el}}^{n+1} = \epsilon_{\text{h,el,test}}^{n+1}$$

und

$$\epsilon_{\text{el}}^{m+1} = \epsilon_{\text{el,test}}^{m+1} - \dot{\lambda} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sigma'}{(1 - D^{n+1}) \|\sigma'\|}$$

gilt. Für den deviatorischen Anteil der Spannung folgt daraus

$$\boldsymbol{\sigma}^{m+1} = (1 - D^{n+1})2G\boldsymbol{\epsilon}_{el}^{m+1} = (1 - D^{n+1})2G\boldsymbol{\epsilon}_{el, \text{test}}^{m+1} - 2G\dot{\lambda}\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\|\boldsymbol{\sigma}'\|}$$

und damit

$$\boldsymbol{\sigma}^{m+1} = (1 - D^{n+1})\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{test}}^{m+1} - 2G\dot{\lambda}\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\|\boldsymbol{\sigma}'\|}. \quad (13.2)$$

Die Richtung des plastischen Fließens bleibt konstant wodurch sich aufgrund der Kolinearität der Zusammenhang

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\|\boldsymbol{\sigma}'\|} = \frac{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'_{\text{test}}}{\|\tilde{\boldsymbol{\sigma}}'_{\text{test}}\|} \quad (13.3)$$

ergibt. Mit Gleichung (13.3) und der effektiven von-Mises-Spannung

$$\tilde{\sigma}_{M, \text{test}}^{n+1} = \frac{\sigma_{M, \text{test}}}{1 - D^n} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\|\boldsymbol{\sigma}_{\text{test}}^{m+1}\|}{1 - D^{n+1}}$$

kann Formel (13.2) in

$$\boldsymbol{\sigma}^{m+1} = \left(1 - D^{n+1} - \frac{3G\dot{\lambda}}{\tilde{\sigma}_{M, \text{test}}}\right)\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\text{test}}^{m+1}$$

umgeformt werden. Weiteres Umformen führt zu

$$\frac{\boldsymbol{\sigma}^{m+1}}{\boldsymbol{\sigma}_{\text{test}}^{m+1}}\sqrt{\frac{3}{2}}\|\boldsymbol{\sigma}_{\text{test}}^{m+1}\|\frac{1}{1 - D^{n+1}} = (1 - D^{n+1})\tilde{\sigma}_{M, \text{test}} - 3G\dot{\lambda}$$

und unter Verwendung von Gleichung (13.3) zu

$$\sigma_M^{n+1} = (1 - D^{n+1})\tilde{\sigma}_{M, \text{test}}^{n+1} - 3G\dot{\lambda}. \quad (13.4)$$

Mit Gleichung (13.4) kann die Konsistenzbedingung in der Form

$$\tilde{\Phi}(\dot{\lambda}, D^{n+1}) := \tilde{\sigma}_{M, \text{test}}^{n+1} - \frac{3G\dot{\lambda}}{1 - D^{n+1}} - \sigma_y(\bar{\epsilon}_{\text{pl}} + \dot{\lambda}) = 0$$

geschrieben werden, welche damit von der Schädigung  $D^{n+1}$  und dem Konsistenzparameter  $\dot{\lambda}$  abhängig ist. Wird dieser Zusammenhang in die Energiefreisetzungsrate aus Kapitel 8, Schädigung eingesetzt, so ist diese alleine vom Konsistenzparameter abhängig

$$-Y(\dot{\lambda}) := \frac{[\sigma_y(\bar{\epsilon}_{\text{pl}} + \dot{\lambda})]^2}{6G} + \frac{(\sigma_h^{n+1})^2}{2K}. \quad (13.5)$$

Zur Vereinfachung wird die Variable  $\omega := 1 - D$  eingeführt, mit der sich über Gleichung (13.4)

$$\omega^{n+1} := 1 - D^{n+1} = \omega(\dot{\lambda}) := \frac{3G\dot{\lambda}}{\tilde{\sigma}_{M, \text{test}} - \sigma_y(\bar{\epsilon}_{\text{pl}} + \dot{\lambda})}$$

definierten lässt. Mit dieser Definition sowie der Gleichung (8.5) aus Kapitel 8, Schädigung für die Evolution der Schädigung

$$D^{n+1} - D^n - \frac{\dot{\lambda}}{1 - D^{n+1}} \left( \frac{-Y^{n+1}(\dot{\lambda})}{r} \right)^s = 0$$

und Gleichung (13.5) kann die folgende Funktion für den Return-Mapping-Algorithmus

$$F(\dot{\lambda}) = \omega(\dot{\lambda}) - \omega_n + \frac{\dot{\lambda}}{\omega(\dot{\lambda})} \left( \frac{-Y(\dot{\lambda})}{r} \right)^s = 0 \quad (13.6)$$

aufstellen [138]. aufgestellt werden. Die Gleichung (13.6) wird wiederum mittels des Newton-Raphson-Algorithmus gelöst, dessen Berechnung in Abbildung 13.1 dargestellt ist.

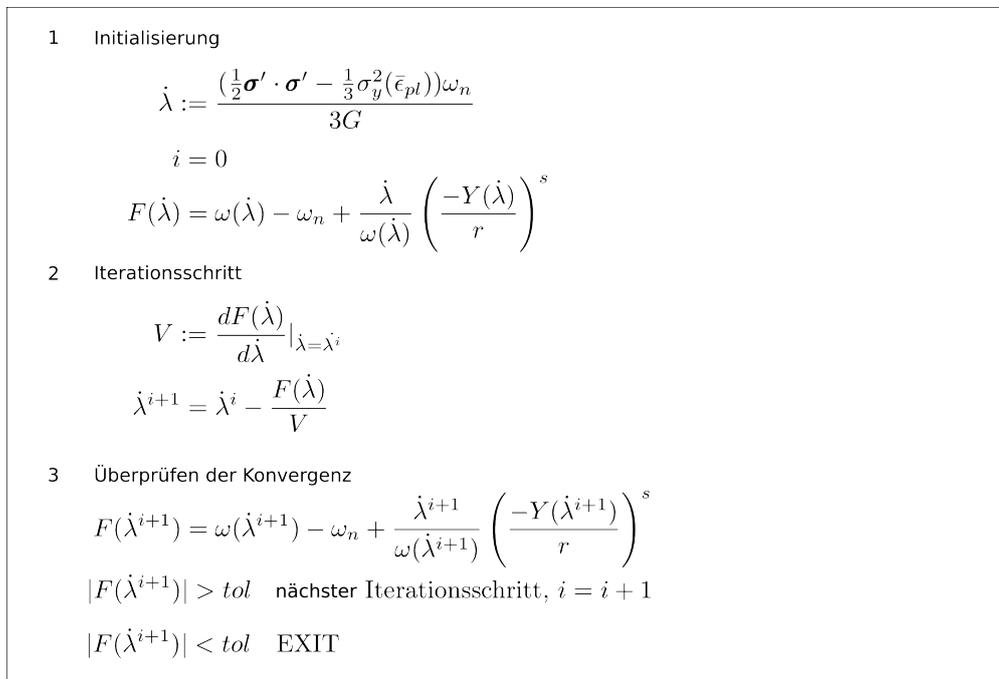


Abbildung 13.1: Berechnungsablauf zur Bestimmung des Konsistenzparameters nach [39].

## 13.2 Rissschließung des Graphits

Für den Graphit wird die in Kapitel 9 beschriebene Rissschließung implementiert. Entsprechend Abbildung 13.2 werden für den Graphit die 3 Schädigungsparameter  $D_{\perp}$ ,  $D_s$  und  $D_{\parallel}$  verwendet.  $D_{\perp}$  und  $D_s$  beschreiben dabei die Spaltung der Basalebene und den damit verbundenen Verlust der Lastaufnahmefähigkeit unter Zugbelastung orthogonal der Basalebene sowie der Aufnahme von Schubbelastungen.  $D_{\parallel}$  bildet das Ablösen des Graphits von der Matrix in Richtung der Basalebene ab. Für diesen Parameter wird keine Rissschließung angenommen. Für die beiden

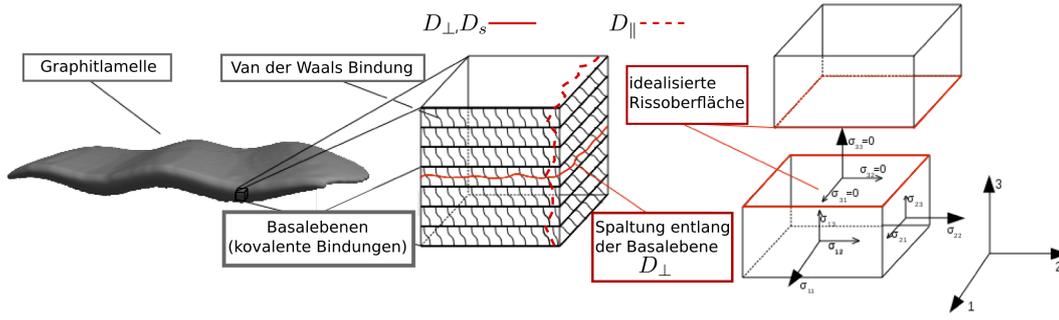


Abbildung 13.2: Struktur des Graphits und Beschreibung der Schädigung über die Schädigungsvariablen  $D_{\perp}$ ,  $D_s$  und  $D_{\parallel}$ .  $D_{\perp}$  und  $D_s$  beschreiben die Schädigung, die aufgrund der Spaltung entlang der Basalebene auftritt entsprechend [128]. Über  $D_s$  wird die Schädigung, welche die Aufnahme von Schubbelastungen beeinflusst, definiert und durch  $D_{\perp}$  die Schädigung die die Aufnahme von Belastungen orthogonal zur Basalebene beeinflusst. Die Schädigungsvariable  $D_{\parallel}$  dient zur Beschreibung der Ablösung des Graphits von der Matrix in Richtung der Basalebene.

Parameter  $D_{\perp}$  und  $D_s$  wird die in Abbildung 13.3 dargestellt Risssschließungsfunktion der Form

$$h(\epsilon_n) = h_0 + \frac{1}{2}(1 - h_0)(1 + \tanh(4\epsilon_n/\epsilon_{\text{clos}}))$$

verwendet.  $h(\epsilon_n)$  ist dabei die in Kapitel 9, Modellierung des belastungsabhängigen mechanischen Materialverhaltens definierte Risssschließungsvariable, welche von der Dehnung  $\epsilon_n$  orthogonal zur Basalebene des Graphits abhängt. Ein weiterer möglicher Ansatz wäre in diesem Zusammenhang, die Risssschließung mit der Spannung orthogonal zur Basalebene in Abhängigkeit zu bringen. Die Dehnung eignet sich jedoch daher, da die Spannung von der Schädigung abhängt und somit im Vorhinein nicht bekannt ist. Zudem bildet der Ansatz über die Dehnung anschaulich den Kontakt zwischen den Basalebene ab. Über den Parameter  $h_0$  kann eine bleibende Schädigung ( $0.0 < h_0 < 1.0$ ) des Materials trotz Risssschließung realisiert werden. Die Breite des Übergangsbereichs, wird über die Dehnung  $\epsilon_{\text{clos}}$  definiert. Über die Breite wird die Sensitivität der Risssschließung sowie das Konvergenzverhalten der Simulation beeinflusst. Aufgrund des besseren Konvergenzverhaltens wird die Schädigung innerhalb einer Graphitlamelle gemittelt und nicht mit der lokal in jeder Zelle vorliegenden Schädigung gerechnet. Für die  $n_L$  Zellen einer Lamelle ergibt sich damit die Schädigungsvariable  $D_{\perp} = \frac{1}{n_L} \sum_{i=1}^{n_L} D_{\perp,i}$ . Gleiches wird für die Variable  $D_s$  durchgeführt. Die Nachgiebigkeitsmatrix  $\mathbf{S} = [\mathbf{C}]^{-1}$ .  $h_{0\perp}$  für eine Graphitlamelle ergibt sich damit zu

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{S_{11}}{1-D_{\parallel}} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & \frac{S_{11}}{1-D_{\parallel}} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{13} & \frac{S_{33}}{1-h_{0\perp}D_{\perp}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{S_{13}}{1-h_{0s}D_s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{S_{13}}{1-h_{0s}D_s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{S_{12}}{1-D_{\parallel}} \end{bmatrix}, \quad (13.7)$$

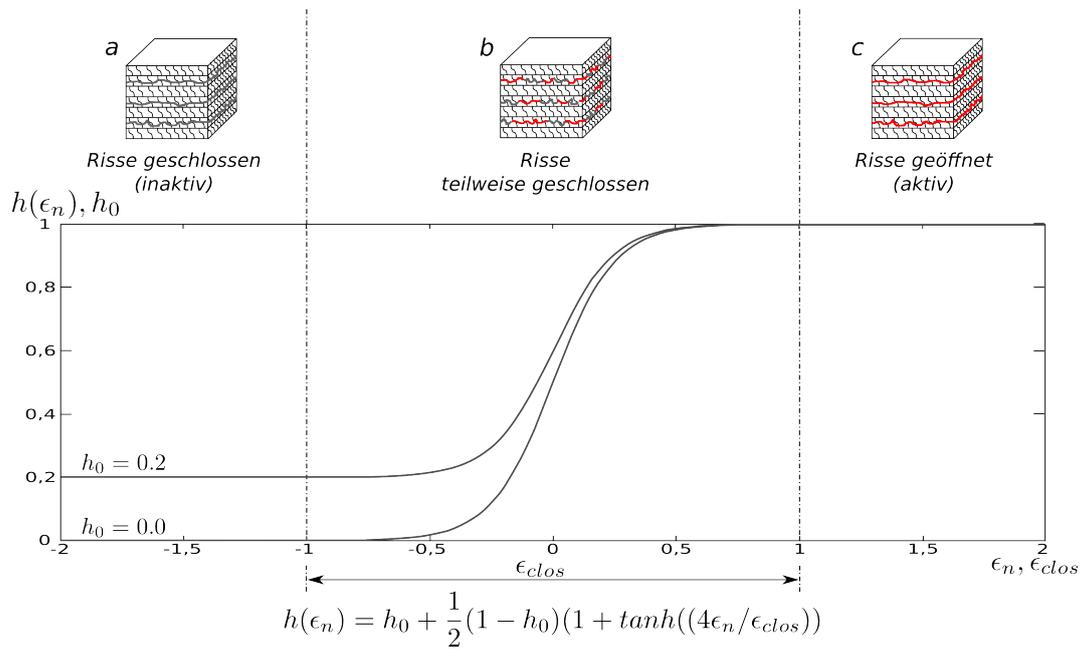


Abbildung 13.3: Übergangsfunktion für die Rissschließung des Graphits entsprechend [128]. Außerhalb des Übergangsbereichs  $\epsilon_{clos}$  sind die Risse geschlossen/inaktiv (a) beziehungsweise geöffnet/aktiv (c). Über  $h_0$  wird mit  $h_0 D$  die Stärke der Rissschließung beeinflusst. Innerhalb des Übergangsbereichs wird die Schädigung mittels der Funktion  $h(\epsilon_n)$  und über die Beziehung  $h(\epsilon_n) D$  kontinuierlich vergrößert beziehungsweise verringert.

mit den Rissschließungsfaktoren  $h_{0_s}$  und  $h_{0_\perp}$  für die zugehörigen Schädigungsparameter aus Abbildung 13.2. Der Wert der Schädigungsparameter  $D_\perp$ ,  $D_s$  und  $D_\parallel$  wird im Simulationssetup vom Benutzer definiert.



# 14 Randbedingungen

Neben den Materialeigenschaften und dem geometrischen Modell sind die Randbedingungen ausschlaggebend, um den realen Belastungsfall abzubilden und entsprechende Simulationsergebnisse zu erzielen. Die Randbedingungen müssen hierbei die realen Belastungszustände möglichst genau abbilden. Es wird im Folgenden zwischen den Randbedingungen für die makroskopische Simulation der Bremsscheibe und denen der mesoskopischen Simulationen unterschieden.

## 14.1 Mesoskopische Randbedingungen

An den Rändern  $\partial V$  des RVE werden Randbedingungen angebracht, um die gewünschte Belastung aufzubringen (siehe Abbildung 14.1). Die Belastungsrichtung ist in diesem Beispiel die x-Richtung mit dem Rand  $\partial V_x^+$  in positiver x-Richtung und dem Rand  $\partial V_x^-$  in negativer x-Richtung. Es ist üblich zwischen folgenden drei Arten von Randbedingungen zu unterscheiden [72, 47]:

- Verschiebungsrandbedingung (kinematic uniform boundary condition, KUBC)
- Spannungsrandbedingung (static uniform boundary conditions, SUBC)
- periodische Verschiebungs-/Spannungsrandbedingungen

Je nach Anwendungsfall wird eine Randbedingungsart oder eine Kombination dieser Randbedingungen verwendet.

### 14.1.1 Verschiebungsrandbedingung, KUBC

Um eine makroskopische Dehnung für das RVE vorzugeben, werden KU-Randbedingungen verwendet. Die Verschiebungen  $u_x^{+/-}$  auf den Rändern  $\partial V_x^{+/-}$  ergeben sich zu

$$u_x^+ = \frac{1}{2} \bar{\epsilon}_{11} L \quad \forall \mathbf{x} \in \partial V_x^+$$

und

$$u_x^- = -\frac{1}{2} \bar{\epsilon}_{11} L \quad \forall \mathbf{x} \in \partial V_x^-$$

$\mathbf{x}$  ist hierbei ein Punkt auf dem Rand des RVE,  $\bar{\epsilon}$  die makroskopische Dehnung ( $\bar{\epsilon} = 1/V \int \epsilon dV$ ) für das RVE und L die physikalische Länge des RVEs in Belastungsrichtung. Die Verschiebungsrandbedingung wird verwendet, um die Belastung in Zugrichtung eines weggesteuerten Zugversuchs abzubilden. Die Verschiebungswerte sind bei dieser Randbedingung über den

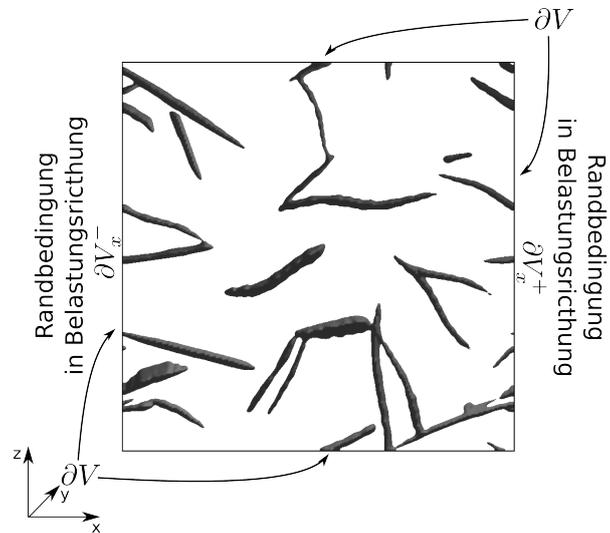


Abbildung 14.1: Unbelasteter Materialausschnitt mit den Rändern  $\partial V$  und den Randbedingungen in Belastungsrichtung  $\partial V_x^+$  und  $\partial V_x^-$ .

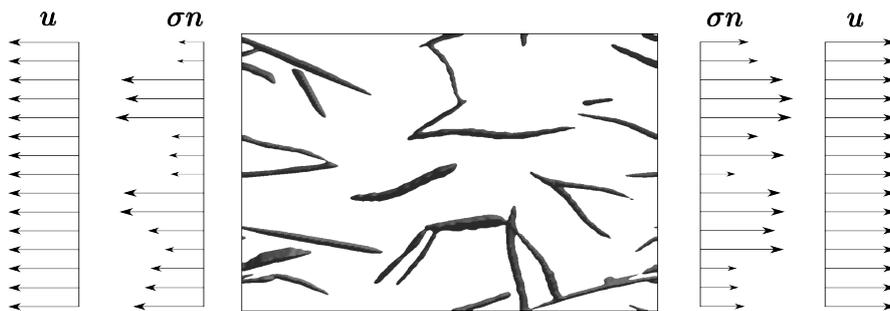


Abbildung 14.2: Darstellung der KU-Randbedingung für das Ausgangsmaterial aus Abbildung 14.1 mit den gleichmäßigen Verschiebungswerten auf den Rändern  $\partial V^+/\partial V^-$  und den für ein heterogenes Material ungleichmäßigen Spannungswerten im Randbereich.



Abbildung 14.3: Darstellung der SU-Randbedingung für das Ausgangsmaterial aus Abbildung 14.1 mit den gleichmäßigen Spannungswerten auf den Rändern  $\partial V$  und den für ein heterogenes Material ungleichmäßigen Verschiebungswerten im Randbereich.

jeweiligen Rand des RVEs, wie in Abbildung 14.2 dargestellt, konstant. Aufgrund der heterogenen Mikrostruktur sind die Spannungswerte über den Randbereich inhomogen.

Im entsprechenden experimentellen Versuch wird hierbei die Probe über eine Verschiebung belastet. Durch das Aufzeichnen der dazu benötigten Kraft und mittels des Querschnitts der Probe kann hiermit das Verhalten des Materials über das Spannungs-Dehnungs-Diagramm dargestellt werden. Ist der dreidimensionale Verzerrungszustand der Probe bekannt, kann die Verschiebung für jeden Rand explizit vorgegeben werden. Für den einachsigen Zugversuch ist dies bei einem heterogenen Werkstoff jedoch nicht der Fall. Vielmehr ist bekannt, dass die Ränder außerhalb der Zugrichtung aus makroskopischer Betrachtung spannungsfrei sind. Daher muss für diese Ränder eine Spannungsrandbedingung zugewiesen werden welche diese Ränder frei verformen lässt.

### 14.1.2 Spannungsrandbedingung, SUBC

Um einen spannungsfreien Rand zu definieren oder einen spezifischen makroskopischen Spannungszustand innerhalb des Simulationsgebiets herzustellen, wird am Rand des RVE's der Kraftvektor  $\mathbf{f}$

$$\mathbf{f} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} \quad \forall x \in \partial V \quad (14.1)$$

vorgegeben.  $\mathbf{n}$  ist der Normalenvektor des jeweiligen Randes und  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  die makroskopische Spannung ( $\bar{\boldsymbol{\sigma}} = 1/V \int \boldsymbol{\sigma} dV$ ), welche im Gebiet vorherrschen soll. Neben der Möglichkeit die spannungsfreien Ränder bei einem weggesteuerten Zugversuch zu definieren, kann über diese Randbedingung ein kraftgesteuerter Zugversuch abgebildet werden. Die Randbedingung für den kraftgesteuerten Zugversuch in x-Richtung ergeben mit

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

zu [32]:

$$\begin{aligned}
\partial V^{x+} &= \bar{\sigma} \mathbf{n}_x^+ = \bar{\sigma}_{11} \\
\partial V^{x-} &= \bar{\sigma} \mathbf{n}_x^- = \bar{\sigma}_{11} \\
\partial V^{y+} &= \bar{\sigma} \mathbf{n}_y^+ = 0 \\
\partial V^{y-} &= \bar{\sigma} \mathbf{n}_y^- = 0 \\
\partial V^{z+} &= \bar{\sigma} \mathbf{n}_z^+ = 0 \\
\partial V^{z-} &= \bar{\sigma} \mathbf{n}_z^- = 0,
\end{aligned}$$

und für den weggesteuerten Zugversuch mit

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

zu

$$\begin{aligned}
\partial V^{x+} &= \mathbf{u}_x^+ = \bar{\epsilon}_{11} L \\
\partial V^{x-} &= \mathbf{u}_x^- = \bar{\epsilon}_{11} L \\
\partial V^{y+} &= \bar{\sigma} \mathbf{n}_y^+ = 0 \\
\partial V^{y-} &= \bar{\sigma} \mathbf{n}_y^- = 0 \\
\partial V^{z+} &= \bar{\sigma} \mathbf{n}_z^+ = 0 \\
\partial V^{z-} &= \bar{\sigma} \mathbf{n}_z^- = 0.
\end{aligned}$$

Für die beide Typen von Randbedingungen, KUBC und SUBC, ergibt sich nach Definition auf den Rändern ein konstanter Verschiebungs- beziehungsweise Spannungszustand. Die Größe, die nicht vorgegeben wird, unterliegt Fluktuationen entsprechend des Aufbaus des Materials. Kann das repräsentative Volumenelement als eine sich periodisch fortsetzende Mikrostruktur angesehen werden, so ist die Verwendung von periodische Randbedingungen zu empfehlen. Hierdurch kann, je nach Mikrostruktur, ein deutlich kleineres Simulationsgebiet berechnet werden.

### 14.1.3 Periodische Randbedingung

Die periodische Randbedingung ist somit die dritte Randbedingung, welche bei der Simulation von repräsentativen Volumenelementen Verwendung findet. Für eine sinnvolle Anwendung wird vorausgesetzt, dass das RVE eine periodische Mikrostruktur, wie die in Abbildung 14.1, darstellt. Die Spannungswerte bzw. Verschiebungswerte der gegenüberliegende Ränder  $\partial V^{x+}$  und  $\partial V^{x-}$  ergeben sich hiermit zu

$$\sigma_{ij}^{x+} + \sigma_{ij}^{x-} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \partial V.$$

und

$$u_i^{x+} + u_i^{x-} = \epsilon \mathbf{n} \quad \forall \mathbf{x} \in \partial V.$$

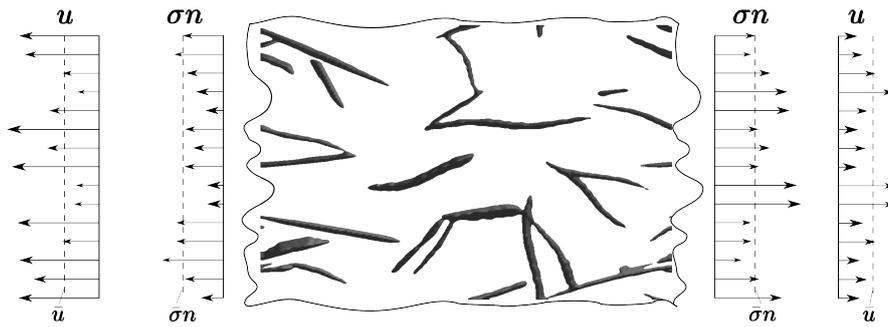


Abbildung 14.4: Darstellung der periodischen Spannungs-/Verschiebungsrandbedingung für das Ausgangsmaterial aus Abbildung 14.1. Die Beträge der Spannungs-/Verschiebungswerte auf den sich gegenüberliegenden Rändern  $\partial V$  sind identisch. Die Fluktuationen ergeben sich entsprechend der Mikrostruktur.

## 14.2 Implementierung

Für die Implementierung der Randbedingungen, makroskopisch wie mesoskopisch, ist es von Vorteil, sich die Berechnung der Spannung und Verschiebung anhand einer Gitterzelle nochmals aufzuzeichnen. Wie aus Abbildung 11.3 zu entnehmen ist, und in Abschnitt 11.1, Finite Differenzen beschrieben, benötigt man jeweils die umliegenden acht Zellen für die Berechnung. Speziell bei der Randbetrachtung ist hierbei auf die Indizierung zu achten. Während für die Spannungen die niederwertigen Zellen benötigt werden ( $x^{-1}, y^{-1}, z^{-1}$ ) werden für die Berechnung der Verschiebungen die höherwertigen Zellen verwendet ( $x^{+1}, y^{+1}, z^{+1}$ ). Die Verschiebungen liegen auf der rechten oberen Ecke einer Gitterzelle, dadurch ergibt sich, dass für die drei niederwertigen Ränder die Spannungs- und Verschiebungsrandbedingung in der selben Zelle gesetzt wird. Für die gegenüberliegenden Ränder sind sie eine Zelle versetzt angeordnet, was in Abbildung 14.5 illustriert ist. Die Verbindungslinie zwischen Verschiebung und Spannung gibt hierbei an, dass diese Werte zur selben Gitterzelle ( $x,y,z$ ) gehören. Die periodische Randbedingung bildet den Spannungszustand der ersten Schicht des Simulationsgebiets einer Seite, als Randbedingung auf der gegenüberliegenden Seite ab. In Abbildung 14.6, a), ist dies für ein dreidimensionales RVE abgebildet. Durch die heterogene Struktur des Materials ergibt sich ein heterogener Spannungs- und Verschiebungszustand. In Abbildung 14.6, b) ist die Implementierung für die x- und y-Ränder dargestellt.

## 14.3 Abbildung der Rotation des Rades

Während des Bremsvorgangs befindet sich das Fahrzeug in Bewegung. Die Rotation des Rades und der daran befestigten Bremsscheibe wird ebenfalls über die Randbedingung abgebildet. Die Rotation eines Punktes um die Rotationsachse des Scheibenmittelpunkts der Scheibe  $\mathbf{b}_M$  kann über die Gleichung

$$\mathbf{p}_{rot} = Q_y \mathbf{p} \quad (14.2)$$

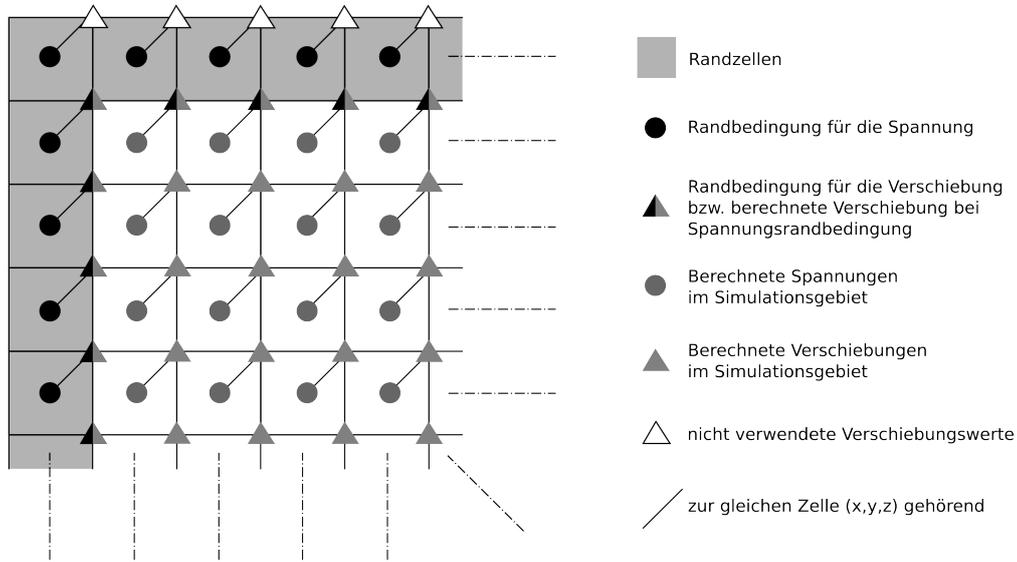


Abbildung 14.5: Ausschnitt der Randzellen und Berechnungszellen des implementierten RSG mit den Positionen der Spannungs- und Verschiebungsrandbedingung sowie der berechneten Spannungs- und Verschiebungswerte. Am linken Rand liegen die Werte der Spannungs- und Verschiebungsrandbedingung in der selben Zelle, während sie für den oberen Rand um eine Zelle versetzt angeordnet sind.

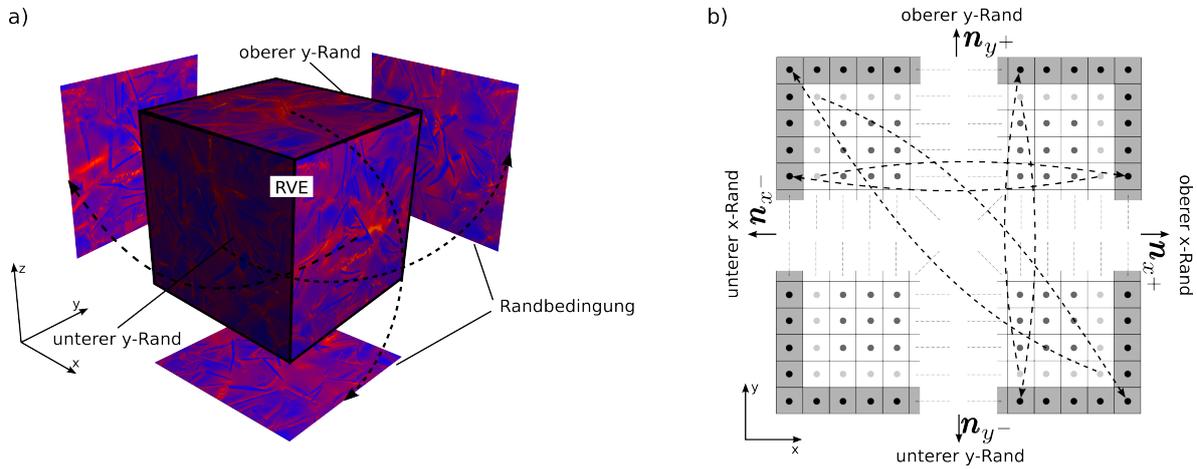


Abbildung 14.6: Periodische Randbedingung. a) Dreidimensionale Darstellung mit den Rändern die auf die gegenüberliegende Seite kopiert werden und b), zweidimensionale Darstellung der x-y-Ebene mit der Position der kopierten Spannungs-/Verschiebungswerte.

durchgeführt werden mittels der passiven Rotationsmatrix  $Q_y$  um die  $y$ -Achse

$$Q_y = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & 0.0 & \sin(\alpha) \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ -\sin(-\alpha) & 0.0 & \cos(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Vernachlässigt man etwaige Schwingungen, die durch die Rotation entstehen könnten, kann die Drehung der Bremsscheibe durch eine entgegengesetzte Rotation des Bremsbelags abgebildet werden. Diese Annahme wird in dieser Arbeit verwendet und die Rotation des Rades über eine Bewegung des Bremsbelags abgebildet. Der Bremsbelag wird in dieser Arbeit für die Platzierung der thermischen und mechanischen Randbedingung angewandt und idealisiert als ebene Fläche angenommen, in der keine Spannungs- und Temperaturberechnung durchgeführt wird. Wird die Rotation auf den Bremsbelag mit den beschriebenen Annahmen angewandt, muss für die Rotation das Spannungs- und Verschiebungsfeld nicht beachtet werden. Zusätzlich ergibt sich durch die um eine Vielzahl geringere Anzahl an Zellen eine vom Rechenaufwand günstigere Operation. Während die Bremsscheibe somit an ihrer festen Position verbleibt, dreht sich der Bremsbelag um den Scheibenmittelpunkt  $\mathbf{b}_M$  über den Winkel  $\alpha$ , der sich aus der Winkelgeschwindigkeit  $\omega(t) = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{v_t}{r_R}$  beziehungsweise deren Änderung mit der Zeit  $\dot{\omega}(t)$  ergibt. Die Änderung des Winkels  $\Delta\alpha$  pro Zeitschritt ergibt sich über die Geschwindigkeit des Fahrzeugs  $v_t$  und dem Reifenradius  $r_R$  zu

$$\Delta\alpha = \frac{v_t}{r_R} \Delta t$$

und der Winkel  $\alpha$  über die Summe

$$\alpha = \sum_{t=0}^t \Delta\alpha.$$

Die Rotation des Bremsbelags wird dann entsprechend der Abbildung 14.7 durchgeführt. Als Referenz zur Positionierung des Belags dient immer die separat gespeicherte Form des Belags, welche auf die Ausgangsposition ( $t = 0$ ) projiziert wird. Anstelle einer Rotation der Belagszellen wird eine Rücktransformation jedes Punktes/Zelle  $\mathbf{p}$  der Kontaktfläche zur Scheibe mittels Gleichung (14.2) durchgeführt und überprüft, ob der resultierende Punkt  $\mathbf{p}_{\text{rot}}$  auf dem ursprünglichen Bremsbelag zum Zeitpunkt  $t = 0$  liegt. Durch diese Verfahren wird gewährleistet, dass sich keine Lücken durch Rundungsfehler bei der Berechnung über  $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{\text{rot}} Q_y^T$  auf dem rotierten Belag bilden. Zudem wird die Form des Bremsbelags nicht beeinflusst, da diese in einem separaten Datenfeld abgelegt ist, auf welches bei Bedarf zurückgegriffen wird. Durch die Zeitschrittweite, die für die Stabilität der Simulation sehr gering gehalten wird, wird gewährleistet, dass der Bremsbelag keinen großen ‘Positionsprüngen’ unterliegt.

## 14.4 Makroskopische Randbedingungen der Bremsscheibe

Die makroskopische Randbedingung der Bremsscheibe muss die aufgrund der Bremsung des Fahrzeugs entstehende mechanische und thermische Belastung sowie die Relativbewegung zwischen Scheibe und Belag abbilden. Die mechanische Belastung tritt aufgrund des Anpressdrucks des Bremsbelags auf die Bremsscheibe auf. Dies führt neben der reinen Druckbelastung,

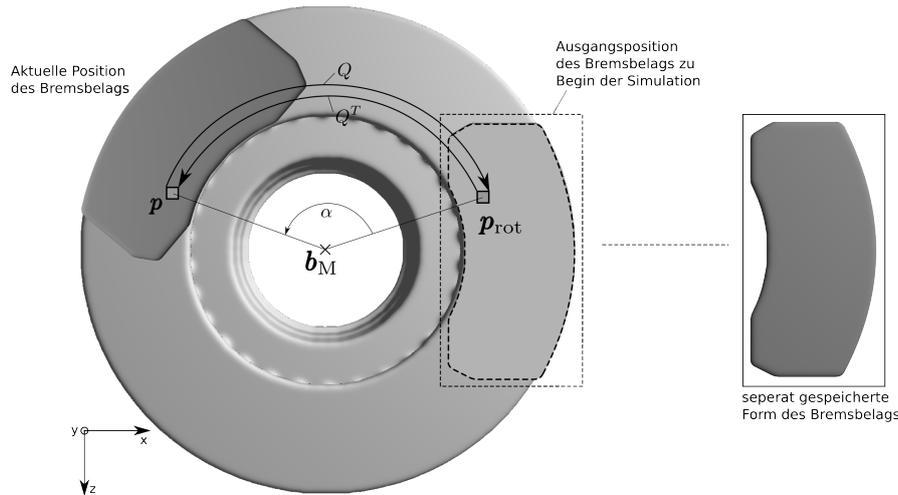


Abbildung 14.7: Darstellung zur Implementierung der Rotation des Bremsbelags. Die Rotation wird um den Scheibenmittelpunkt  $\mathbf{b}_M$  mittels der Rotationsmatrix  $Q$ . Hierbei wird überprüft, ob der Punkt  $\mathbf{p}$  nach der Rücktransformation auf dem rechts dargestellten, separat gespeicherten, Belag liegt. Ist dies der Fall, so wird am Punkt  $\mathbf{p}$  die Belagsrandbedingung ausgeführt.

durch die Relativbewegung zwischen Scheibe und Belag, zusätzlich zu einem Moment. Daneben, führt die Reibung des Belags auf der Scheibe zu einer Erwärmung. Es wird im Folgenden zwischen der mechanischen und thermischen Belastung unterschieden. Beide Belastungen werden an der Position des Bremsbelags, wie in Abbildung 14.8 dargestellt, aufgebracht.

Bei der betrachteten Stoppbremsung wird das Fahrzeug von einer Ausgangsgeschwindigkeit  $v_0$  auf eine Geschwindigkeit  $v_1 < v_0$  abgebremst. Die Belastung ergibt sich aus der Änderung der kinetischen Energie  $\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m(v_0 - v_1)^2$ . Für die mechanische Belastung der Bremsscheibe werden die im mesoskopischen Teil erläuterten Spannungsrandbedingung verwendet, mit dem Unterschied, dass die Randbedingung an der Bremsscheibenoberfläche im Kontaktbereich zum Bremsbelag angesetzt wird.

Für die Simulation der Belastung wird die auf die Scheibe wirkende Normalkraft  $F_N$  benötigt, über die sich die weiteren Größen ermitteln lassen. Der Abbremsvorgang wird über ein Geschwindigkeitsfeld vorgegeben. Dadurch können beliebige Bremszyklen abgebildet werden. Die am Kontakt Reifen-Fahrbahnbelag wirkenden Bremskraft  $F_B$  kann somit über das Newton'schen Gesetz

$$F_B = ma$$

ermittelt werden. Die Beschleunigung  $a$  ergibt sich aus dem vorgegebenen Geschwindigkeitsfeld durch

$$a = \frac{v_{t^n} - v_{t^{n-1}}}{\Delta t},$$

und  $m$  entspricht der Fahrzeugmasse.  $F_B$  wird entsprechend der Bremskraftverteilung  $c_{v/h}$  auf die Vorder- und Hinterachse verteilt. Für die mittlere Reibkraft  $\bar{F}_R$  eines Belags ergibt sich

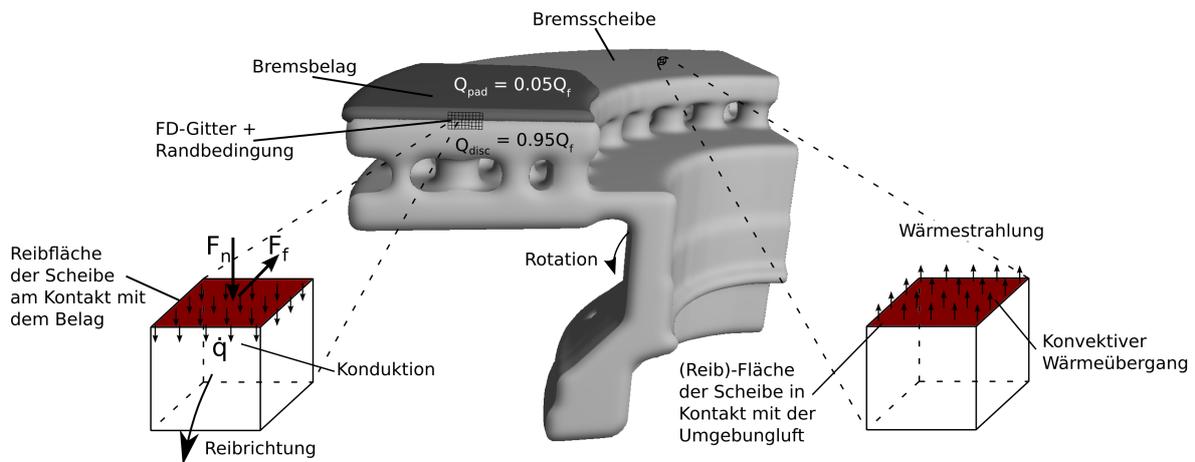


Abbildung 14.8: Randbedingung am Kontaktbereich Bremsscheibe-Bremsbelag entsprechend [128]. Die auf der linken Seite dargestellte Zelle der Bremsscheibe befindet sich im Kontaktbereich mit dem Bremsbelag. Auf diese wirkt daher die Normal- und Reibkraft, zusätzlich wird die durch die Reibung entstehende Wärme aufgebracht. Die Wärmemenge  $Q_{\text{pad}}$  beträgt 95 % der durch die Reibung entstehenden Wärme  $Q_f$ . Die Wärme wird mittels konduktivem Wärmetransport an die Nachbarzellen übertragen. Die Zelle der Bremsscheibe auf der rechten Seite ist in Kontakt mit dem Umgebungsmedium Luft. In dieser Zelle wird die Wärmestrahlung sowie der konvektive Wärmeübergang berechnet. Die rot markierten Flächen beschreiben die Reibfläche der Bremsscheibe.

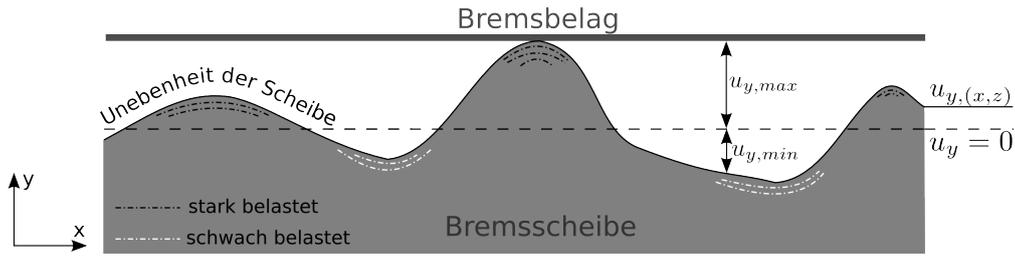


Abbildung 14.9: Unebenheit der Scheibe aufgrund der thermischen und mechanischen Belastung und Darstellung der für die Gewichtungsfunktion benötigten Größen  $u_{y,\min}$ ,  $u_{y,\max}$  und  $u_y^{x,y,z}$ .

damit

$$\bar{F}_R = c_v/h \frac{1}{4} m a \frac{r_R}{r_m}$$

$\frac{r_R}{r_m}$  stellt hierbei das Verhältnis des Reifenradius zum mittleren Belagradius dar und der Faktor  $\frac{1}{4}$  die Aufteilung auf die insgesamt 4 Bremsbeläge der Achse.

#### 14.4.1 Gewichtungsfunktion

Aufgrund der mechanischen und thermischen Belastung und der einhergehenden Verformung der Scheibe tritt kein gleichmäßiger Kontakt zwischen Scheibe und Belag auf. Vielmehr ist mit einer Wellung der Scheibe, wie in Abbildung 14.9 dargestellt, im Laufe des Bremsvorgangs zu rechnen. An den markierten Wellenbergen der Scheibe wirkt dadurch ein deutlich höherer Druck auf die Scheibe, während die Täler nur geringfügig belastet sind. Dieses Verhalten wird mittels einer Gewichtungsfunktion, ähnlich eines Federmodells, angenähert. Entscheidend für die Gewichtung ist die orthogonal zur  $x$ - $y$ -Ebene auftretende Verschiebung  $u_y$  der Simulationszellen. Die minimale  $u_{y,\min}$  und maximale  $u_{y,\max}$  Verschiebung der Scheibe an der oberen und unteren Kontaktfläche dienen dabei als Referenz für die Gewichtung, mit der sich die Auslenkung der einzelnen Zellen

$$\tilde{u}_y^{x,y,z} = \frac{u_y^{x,y,z} - u_{y,\min}}{u_{y,\max} - u_{y,\min}}$$

bestimmen lässt. Die dimensionslose Gewichtungsfunktion ergibt sich damit zu

$$p^{x,y,z} = \frac{(\tilde{u}_y^{x,y,z})^m}{\sum_{j=1}^{n_{pad}} (\tilde{u}_y^{x,y,z})^m},$$

mit der Anzahl der Zellen im Kontaktbereich  $n_{pad}$ . Über den Parameter  $m = 1$  ergibt sich für  $p^{x,y,z}$  eine lineare und mit  $m = 2$  eine quadratische Gewichtung der Verschiebungen. Durch die Diskretisierung kann es an Kanten zu numerisch bedingten minimalen Schwankungen der Verschiebung kommen, welche bei der Gewichtung zu Problemen führen. Um diese bei der Gewichtung nicht zu berücksichtigen, tritt diese erst ab einen benutzerdefinierten Schwellwert für die Verschiebung  $u_{y,\max} - u_{y,\min}$  ein.

Mit der Gewichtungsfunktion wird die lokal wirkende Reibkraft  $f_R^{x,y,z}$  über die Reibkraft  $\bar{F}_R$  und die Gewichtung  $p^{x,y,z}$  zu

$$f_R^{x,y,z} = \bar{F}_R p^{x,y,z}$$

und damit die lokale Normalkraft  $f_N^{x,y,z}$  zu

$$f_N^{x,y,z} = \frac{f_R^{x,y,z}}{\mu^{x,y,z}(\theta, v)}$$

$\mu^{x,y,z}(\theta, v)$  ist dabei der Reibkoeffizient, der eine Funktion der Temperatur und der Geschwindigkeit ist.

### 14.4.2 Reibkoeffizient

Die Temperaturabhängigkeit des Reibkoeffizienten ist ein entscheidender Faktor zur Verminderung der Bremsleistung bei hohen Temperaturen an der Reibfläche. Neben der Temperatur sind die Reibgeschwindigkeit, Oberflächenbeschaffenheit und Materialeigenschaften Einflussfaktoren auf den Reibkoeffizient [153, 90]. In [153] wird ein Modell für den Reibungskoeffizienten

$$\mu(\theta) = 0,75k_A k_V k_M (0,877 - 0,00039\theta) \quad (14.3)$$

gegeben, welches die oben genannten Einflussfaktoren berücksichtigt.  $k_A$  ist dabei ein oberflächenbezogener Koeffizient, welcher für das verwendete Wirkflächenpaar  $k_A = 1$  beträgt [90]. Über den Faktor  $k_V$  wird die Geschwindigkeitsabhängigkeit realisiert, welche für Geschwindigkeiten  $v > 2$  m/s über

$$k_V = 0,4 + 0,6 \exp(-0,2(v - 2))$$

definiert ist [90]. Für Geschwindigkeiten unter 2 m/s wird mit dem Wert von  $v = 2$  m/s gerechnet. Der Einfluss ist gerade für langsame Geschwindigkeiten, wie sie beim Bremsvorgang auftreten, nicht zu vernachlässigen. Bei höheren Geschwindigkeiten bleibt der Parameter, aufgrund der exponentiellen Abnahme konstant bei  $k_V = 0,4$ . Der verbleibenden Parameter  $k_M$  ist ein Materialparameter, welcher für Eisenlegierungen  $k_M = 1,1$  ist [90]. Einsetzen der Parameter in Gleichung (14.3) führt zu

$$\mu(\theta, v) = 0,825(0,4 + \exp(-0,2v + 0,4))(0,877 - 0,00039\theta)$$

wie er in dieser Arbeit Verwendung findet.

Die Reibfläche der Bremscheibe befindet sich bei den durchgeführten Simulationen auf der x-z-Ebene. Die Normalkraft wirkt daher in positive (untere Reibfläche) bzw. negative (obere Reibfläche) y-Richtung und entsprechend der Randbedingung aus Gleichung (14.1) sind damit die Komponenten  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{xy}$  und  $\sigma_{yz}$  zu definieren. Die Normalspannung für die obere Reibfläche an der Position  $x, y^+, z$  ergibt sich damit zu

$$\sigma_{yy}^{x,y^+,z} = -\frac{f_N^{x,y,z}}{A_Z}$$

und an der unteren Reibfläche zu

$$\sigma_{yy}^{x,y^-,z} = \frac{f_{\text{R}}^{x,y,z}}{A_Z}$$

für den Druck der Beläge auf die Scheibe mit  $A_Z = \Delta x \Delta z$  der Fläche der Berechnungszelle. Für die Komponenten  $\sigma_{xy}$  und  $\sigma_{yz}$ , die die Torsion der Scheibe bewirken und zur Abbremsung führen, muss die Reibkraft  $f_{\text{R}}^{x,y,z}$  in die x- und z-Richtung aufgeteilt werden, sodass diese senkrecht auf dem Vektor  $\mathbf{r}(x, z)$  des Radius an der Stelle  $x, y, z$  steht. Dazu wird der Richtungsvektor  $\mathbf{b}$  über das Kreuzprodukt mit dem Normalenvektor  $\mathbf{n}^T = (0, 1, 0)$  gebildet

$$\mathbf{b} = \mathbf{n} \times \mathbf{r}(x, z) = \begin{pmatrix} n_3 r_3 \\ 0 \\ -n_2 r_1 \end{pmatrix}.$$

Für die Projektion der Spannung muss der Vektor  $\mathbf{b}$  normiert werden:

$$\mathbf{b}_n = \begin{pmatrix} \frac{n_3 r_3}{\sqrt{(n_3 r_3)^2 + (n_2 r_1)^2}} \\ 0 \\ \frac{-n_2 r_1}{\sqrt{(n_3 r_3)^2 + (n_2 r_1)^2}} \end{pmatrix}.$$

Der Spannungsvektor ergibt sich damit zu

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \sigma_{yy} \\ \frac{f_{\text{R}}^{x,y,z}}{A_Z} b_{n,2} \\ \frac{f_{\text{R}}^{x,y,z}}{A_Z} b_{n,3} \end{pmatrix}.$$

Durch die Reibung zwischen Belag und Scheibe wird die kinetische Energie in Wärme umgewandelt, welche zu einem großen Teil von der Scheibe aufgenommen wird. Dies wird über die thermische Randbedingung berücksichtigt.

#### 14.4.3 Thermische Randbedingung an der Kontaktfläche Belag-Scheibe

Die der Scheibe zugeführte Energie pro Zelle  $W_{\text{R}}$  und Zeitschritt ergibt sich nach Gleichung (2.5) für die obere und untere Reibfläche bei Kontakt mit dem Bremsbelag zu

$$W_{\text{R}} = f_{\text{R}} v \frac{r}{r_{\text{R}}} \Delta t$$

mit der oben beschriebenen Reibkraft  $f_{\text{R}}$ , der Fahrzeuggeschwindigkeit  $v$  und dem Verhältnis  $\frac{r}{r_{\text{R}}}$  des lokalen Radius zum Reifenradius. Die Geschwindigkeit  $v$  wird für einen Zeitschritt aufgrund der geringen Zeitschrittweite als konstant angenommen. Die zugeführte Wärmemenge  $Q$  ergibt sich über den in Kapitel 2 gegebenen Wert von 0.95 zu

$$Q = 0,95 W_{\text{R}}.$$

Der thermische Energieeintrag ist proportional zur inneren Energie  $\Delta U \approx \Delta q$  der Zelle. Die Änderung der inneren Energie lässt sich über

$$\Delta U = m \int_n^{n+1} c_v(\theta, v) d\theta$$

darstellen. Aufgrund der geringen Zeitschrittweite wird für den Zeitraum  $\Delta t$  als Näherung mit einer über die Zeit konstanten spezifischen Wärmekapazität gerechnet. Aus

$$Q = \Delta U = m c_v (\theta^{n+1} - \theta^n)$$

lässt sich die Temperatur für den Zeitschritt  $n+1$

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \frac{Q}{c_v m}$$

der Randzelle der Scheibe am Kontakt Belag-Scheibe berechnen.

#### 14.4.4 Thermische Randbedingung außerhalb der Kontaktfläche Belag-Scheibe

Für die übrigen Randzellen der Scheibe entsteht ein thermischer Übergang zum Umgebungsmedium Luft, welches die Bremsscheibe umströmt. Betrachtet werden, entsprechend Kapitel 10, Wärmeübertragung der konvektive Wärmeübergang

$$\dot{Q}_{\text{konv}} = -\alpha A (\theta - \theta_u)$$

sowie die Wärmestrahlung

$$\dot{Q}_{\text{rad}} = \epsilon A \sigma (\theta_F^4 - \theta_\infty^4).$$

Die durch Strahlung abgeführte Wärme ergibt sich demnach, durch Integration über die Zeit  $\Delta t$ , zu

$$Q_{\text{rad}} = \epsilon A \sigma (\theta_F^4 - \theta_\infty^4) \Delta t$$

und für den konvektiven Wärmeübergang zu

$$Q_{\text{konv}} = \epsilon A \sigma (\theta_F^4 - \theta_\infty^4) \Delta t.$$

Die Fläche  $A$  setzt sich aus der mit der Umgebungsluft in Kontakt befindlichen Fläche zusammen. Der Wärmeübertragungskoeffizient wie auch der Emmissionskoeffizient werden von der Umströmung der Bremsscheibe beeinflusst. Weshalb von der Daimler AG über Strömungssimulationen verschiedene Bereiche dieser Parameter für die Grenzfläche Luft-Bremsscheibe definiert wurden. So wird entsprechend Abbildung 14.10 zwischen sechs Bereichen unterschieden, welche mitunter stark voneinander abweichen. So ergibt sich für das Verhältnis der Wärmeübertragungskoeffizienten der inneren und äußeren Reibfläche, nach Tabelle 17.9, ein Faktor von  $\approx 2.4$ . Für den Wärmeübertragungskoeffizienten  $\alpha$  ergibt sich zudem eine Geschwindigkeitsabhängigkeit welche sich über die Formel

$$\alpha = \left( \frac{v}{v_0} \right)^{0.8} \alpha_0$$

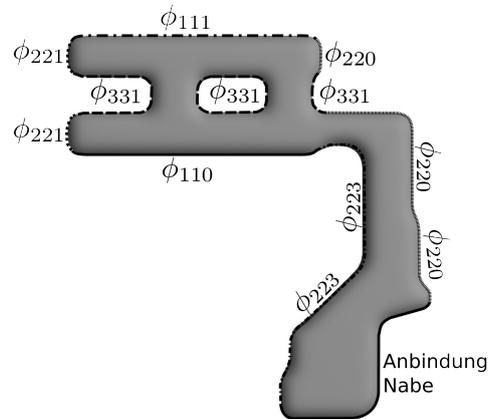


Abbildung 14.10: Definition der Randbereiche für die Verwendung ortsabhängiger Wärmeübertragungs- und Emissionskoeffizienten. Die Werte für die Bereiche  $\phi_i$  sind in Tabelle 17.9 gegeben.

Bereich	Wärmeübertragungs- koeffizient $\alpha_0$ [1/K]	Emissionskoeffizient $\epsilon$
$\phi_{111}$	17.2	0.5
$\phi_{110}$	7.1	0.5
$\phi_{220}$	4.6	0.8
$\phi_{221}$	12.3	0.8
$\phi_{223}$	5.1	0.8
$\phi_{331}$	15.0	0.8

Tabelle 14.1: Wärmeübertragungs- und Emissionskoeffizienten der unterschiedlichen Bereiche der Bremsscheibe entsprechend den Angaben der Daimler AG.

bemessen lässt.  $v_0$  ist eine Referenzgeschwindigkeit von 35 km/h,  $v$  die aktuelle Geschwindigkeit des Lkws und  $\alpha_0$  kann Tabelle 17.9 entnommen werden. Für alle temperaturabhängigen Parameter werden die Funktionswerte zwischen den Stützstellen mit Hilfe der linearen Interpolation

$$a(\theta) = \frac{a(\theta_p) - a(\theta_{p-1})}{\theta_p - \theta_{p-1}} \Delta\theta + a(\theta_{p-1})$$

ermittelt, für  $\theta_{p-1} < \theta < \theta_p$ .  $p$  ist dabei die Anzahl der Stützstellen.



# 15 Effektive Materialeigenschaften

Ein Material kann aus makroskopischer Sicht wie in Abbildung 15.1 als homogen angesehen werden. Wird das selbe Material auf der mikroskopischen Längenskala betrachtet, so kann seine heterogene Struktur bestehend aus unterschiedlichen Körnern und Bestandteilen beobachtet werden. Um die Eigenschaften der heterogenen Struktur zu ermitteln werden Simulationen eingesetzt. Mikrostruktursimulationen mit dem Ziel, die effektiven Eigenschaften eines Materials zu bestimmen, müssen an einem geeigneten Ausschnitt des Materials durchgeführt werden. Generell besteht der Aufbau einer Mikrostruktur eines Materials aus zufällig verteilten Körnern oder Einschlüssen beziehungsweise Inhomogenitäten. Für ein zufälliges heterogenes Medium ist jeder Ausschnitt des Materials die Realisierung eines stochastischen Prozesses [87]. Der *Ensemblemittelwert*  $\langle \zeta \rangle(x)$  ist über das harmonische Mittel gegeben durch

$$\langle \zeta \rangle(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \zeta(x, \omega_i) \quad (15.1)$$

$$\approx \frac{1}{N^*} \sum_{i=1}^{N^*} \zeta(x, \omega_i) \quad [26]. \quad (15.2)$$

$N^*$  muss hierbei ausreichend groß sein und  $\omega_i$  beschreibt die Realisierung eines stochastischen Prozesses. Für ein mehrphasiges Material, bestehend aus zwei oder mehr Phasen wird die *Indikatorfunktion*  $I^\alpha$  nach [26] wie folgt definiert

$$I^\alpha(x) := \begin{cases} 1 & \text{wenn Phase } \alpha \text{ an Stelle } \mathbf{x} \text{ vorhanden} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für ein diskretes Material ist die Indikatorfunktion  $I(x)$  für eine spezifische Phase wahr, wenn an der Stelle  $\mathbf{x}$  diese Phase vorliegt. Mit der Indikatorfunktion wird die *N-Punkt-Korrelationsfunktion* definiert als

$$S_n^i(x_1, \dots, x_n) = \langle I^i(x_1) I^i(x_2) \dots I^i(x_n) \rangle \quad [26].$$

Sie gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die Phase  $i$  an den Punkten  $x_1, \dots, x_n$  vorliegt.  $\langle \cdot \rangle$  ist hier der in Gleichung (15.2) definierte Ensemblemittelwert. Die Verwendung der N-Punkt-Korrelationsfunktion als Ensemblemittelwert findet seine Anwendung in der theoretischen und statistischen Beschreibung. Für eine quantitative Beschreibung der effektiven Eigenschaften eines Materials sind hierfür jedoch eine große Anzahl an Realisierungen nötig. Aus diesem Grund ist es praktikabel, das Volumenmittel anstelle des Ensemblemittels zu verwenden:

$$\tilde{S}_n^i(\Delta x_{21}, \dots, \Delta x_{nn-1}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V I^i(x_i, \omega_0) I^i(x + \Delta x, \omega_0) \dots dV \quad [26]. \quad (15.3)$$

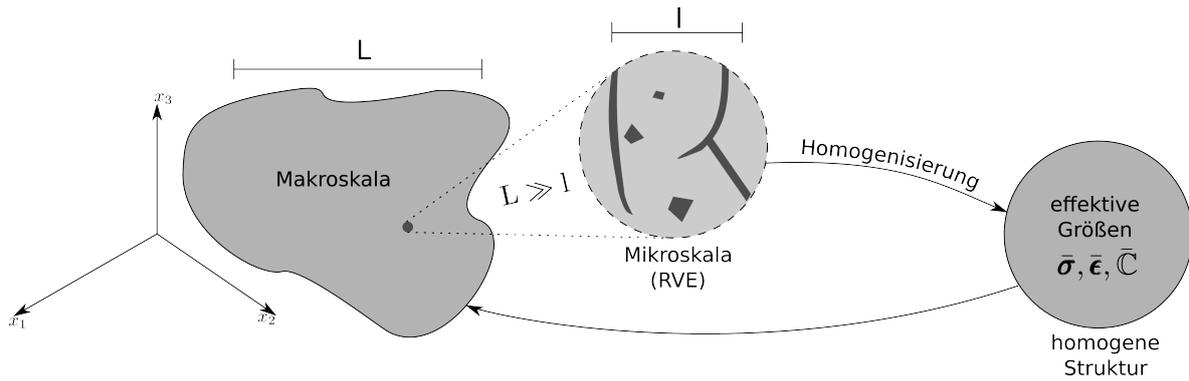


Abbildung 15.1: Darstellung des Übergangs von makroskopischen Kontinuum zur heterogenen Mikrostruktur mit den Gefügebestandteilen und der Bestimmung der effektiven Größen  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\epsilon}$  und  $\bar{C}$ .

Gleichung (15.3) beschreibt das *Ergodizitätsprinzip*. Es besagt, dass für ein sehr großes Volumen ( $V \rightarrow \infty$ ) der Ensemblemittelwert dem Volumenmittel entspricht. Materialien, für die die Ergodizitätshypothese gilt, werden *ergodisch* bezeichnet. Für ein ergodisches Material können alle stochastischen Informationen aus einer einzigen Realisierung ermittelt werden.

## 15.1 Effektive Eigenschaften

Für ein ergodisches Material können, wie oben beschrieben, die effektiven Größen durch das Volumenmittel berechnet werden. Da aufgrund von Inhomogenitäten der Spannungs- und Dehnungszustand lokal von dem der effektiven Zustände  $\langle \sigma \rangle = \bar{\sigma} = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int \sigma dV$  und  $\langle \epsilon \rangle = \bar{\epsilon} = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int \epsilon dV$  abweicht, werden entsprechend [31] in Gleichung (15.4) und (15.5) die Spannungs- und Dehnungsfuktuationen  $\hat{\sigma}$ ,  $\hat{\epsilon}$  definiert.

$$\sigma(\mathbf{x}) = \hat{\sigma}(\mathbf{x}) + \langle \sigma \rangle \quad (15.4)$$

$$\epsilon(\mathbf{x}) = \hat{\epsilon}(\mathbf{x}) + \langle \epsilon \rangle \quad (15.5)$$

Mit Ihnen lässt sich der lokal vorliegende Spannungs-/Dehnungszustand  $\sigma(\mathbf{x})$ ,  $\epsilon(\mathbf{x})$  an einer Stelle  $\mathbf{x}$  im Material beschreiben.

Die Hill-Bedingung definiert die Kompatibilität zwischen den energetischen und mechanischen effektiven Eigenschaften für heterogene elastische Materialien [55]. Nach Hill [61] muss ein repräsentatives Volumenelement (RVE) die Hill-Bedingung erfüllen:

$$\langle \sigma : \epsilon \rangle = \langle \sigma \rangle : \langle \epsilon \rangle \quad (15.6)$$

Dabei ist  $\langle \cdot \rangle$  das Volumenmittel. Mit Hilfe der Hill-Bedingung kann gezeigt werden, dass die Spannungs- und Dehnungsfuktuationen für das Volumenmittel senkrecht zueinander sind und verschwinden.

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\sigma} : \hat{\epsilon} \rangle &= \langle (\sigma - \langle \sigma \rangle) : (\epsilon - \langle \epsilon \rangle) \rangle \\
&= \langle \sigma : \epsilon \rangle - \langle \sigma \rangle : \langle \epsilon \rangle - \langle \sigma \rangle : \langle \epsilon \rangle + \langle \sigma \rangle : \langle \epsilon \rangle \\
&= \langle \sigma : \epsilon \rangle - \langle \sigma \rangle : \langle \epsilon \rangle = 0
\end{aligned}$$

Der lokale Spannungs- und Dehnungszustand auf der mikroskopischen Skala lässt sich aus den effektiven Größen mittels der Lokalisierungstensoren vierter Stufe  $\mathcal{A}(x)$  und  $\mathcal{B}(x)$  durch

$$\begin{aligned}
\epsilon(x) &= \mathcal{A}[\bar{\epsilon}] \\
\sigma(x) &= \mathcal{B}[\bar{\sigma}]
\end{aligned}$$

ausdrücken [30]. Aus

$$\begin{aligned}
\langle \epsilon \rangle &= \langle \mathcal{A}[\bar{\epsilon}] \rangle = \langle \mathcal{A} \rangle [\bar{\epsilon}] \\
\langle \sigma \rangle &= \langle \mathcal{B}[\bar{\sigma}] \rangle = \langle \mathcal{B} \rangle [\bar{\sigma}]
\end{aligned}$$

folgt für das Volumenmittel der Lokalisierungstensoren der Einheitstensor  $\mathbb{1}$ . Für ein heterogenes Material, wie das Gusseisen, ist für die makroskopische Simulation die Kenntnis der effektive Steifigkeit von Interesse. Diese ergibt sich in Abhängigkeit der Lokalisierungstensoren durch

$$\bar{\mathcal{C}}[\bar{\epsilon}] = \langle \mathcal{C}[\epsilon] \rangle = \langle \mathcal{C}\mathcal{A} \rangle [\bar{\epsilon}]$$

zu

$$\bar{\mathcal{C}} = \langle \mathcal{C}\mathcal{A} \rangle.$$

Für die Nachgiebigkeit gilt analog

$$\bar{\mathcal{S}} = \langle \mathcal{S}\mathcal{B} \rangle.$$

Nach [24] ergeben sich für ein mehrphasiges Material mit stückweise konstanten Phaseneigenschaften die Phasenmittelwerte der einzelnen Phasen zu

$$\bar{\epsilon}_\alpha = \frac{1}{V_\alpha} \int_{V_\alpha} \epsilon_\alpha dV$$

und das gesamte Phasenmittel aus der Summe der Phasenanteile

$$\bar{\epsilon} = \sum_i c_i \bar{\epsilon}_i.$$

$c_i$  definiert den Volumenanteil  $\frac{V_i}{V}$  der jeweiligen Phase  $i$ . Für die Spannung  $\sigma$  gilt analog  $\bar{\sigma} = \sum_i c_i \bar{\sigma}_i$ . Die effektiven Steifigkeits- und Nachgiebigkeitstensoren ergeben sich in Abhängigkeit der Lokalisierungstensoren und der Volumenanteile zu

$$\bar{\mathcal{C}} = \langle \mathcal{C}\mathcal{A} \rangle = \sum_\alpha c_\alpha \mathcal{C}_\alpha \mathcal{A}_\alpha \quad (15.7)$$

und

$$\bar{\mathcal{S}} = \langle \mathcal{S}\mathcal{B} \rangle = \sum_\alpha c_\alpha \mathcal{S}_\alpha \mathcal{B}_\alpha.$$

Für eine analytische Abschätzung der effektiven Steifigkeit ist damit die Kenntnis der Lokalisierungstensoren, beziehungsweise eine Abschätzung dieser, notwendig. Hierzu können unterschiedliche Homogenisierungsverfahren angewendet werden.

## 15.2 Homogenisierungsverfahren

Die einfachsten Ansätze für die Bestimmung des effektiven Steifigkeitstensors, welche gleichzeitig die obere und untere Schranke der Eigenschaften bilden, sind die Homogenisierungen nach Voigt und Reuss. Die Modelle nach Voigt und Reuss gehen von konstanten Feldern innerhalb des Materials aus. So gilt für das Voigt-Modell, dass die Verzerrungen  $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x})$  innerhalb des heterogenen Materials konstant sind

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = \text{konst.} = \bar{\boldsymbol{\epsilon}}.$$

Für eine konstante Verzerrung ergibt sich, dass auch der Lokalisierungstensor der Verzerrung konstant ist und somit  $\mathbf{A} = \mathbb{1}$  gilt. Mit Gleichung (15.7) folgt für die effektive Steifigkeit des Voigt-Modells:

$$\bar{\mathbf{C}}_{\text{Voigt}} = \langle \mathbf{C}\mathbf{A} \rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \mathbf{C}_{\alpha}. \quad (15.8)$$

Die effektive Steifigkeit des Voigt-Modells berechnet sich damit aus den mit den Volumenanteilen gewichteten Steifigkeiten der im heterogenen Gefüge vorhandenen Phasen. Es bildet die obere Schranke des heterogenen Materials.

Für das Reuss-Modell wird der Ansatz einer konstanten Spannung  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  innerhalb des Gebiets gewählt:

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \text{konst.} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}.$$

Somit ergibt sich mit  $\mathbf{B} = \mathbb{1}$  für die Nachgiebigkeit

$$\bar{\mathbf{S}}_{\text{Reuss}} = \langle \mathbf{S}\mathbf{B} \rangle = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \mathbf{S}_{\alpha} \quad (15.9)$$

und für die Steifigkeit

$$(\bar{\mathbf{C}}_{\text{Reuss}})^{-1} = \sum_{\alpha} c_{\alpha} \mathbf{C}_{\alpha}^{-1}.$$

Das Reuss-Modell bildet die untere Schranke der effektiven Steifigkeit eines heterogenen Materials, womit folgt:

$$\mathbf{C}_{\text{Reuss}} \leq \mathbf{C} \leq \mathbf{C}_{\text{Voigt}}.$$

Die beiden Modelle können dementsprechend als Reihen- (Reuss) - und Parallelschaltung (Voigt) angesehen werden. Neben den sehr einfachen Verfahren des Voigt- und Reussmodells gibt es eine Vielzahl weiterer Homogenisierungsverfahren (siehe z.B. [24, 26]). Diese analytischen Homogenisierungsverfahren bieten eine gute Möglichkeit, die effektiven Eigenschaften eines Materials abzuschätzen. Mit steigender Komplexität des Gefügebauunterliegt auch die analytische Bestimmung einer steigenden Komplexität, weshalb in diesem Bereich auf Simulationen zurückgegriffen wird. Auch hier gibt es unterschiedliche Ansätze mit denen das Materialverhalten ermittelt wird. Um das Verhalten ausreichend genau abzubilden, muss die Struktur des Materials möglichst genau nachgebildet werden, um die geometrischen Einflüsse der heterogenen Struktur zu berücksichtigen.

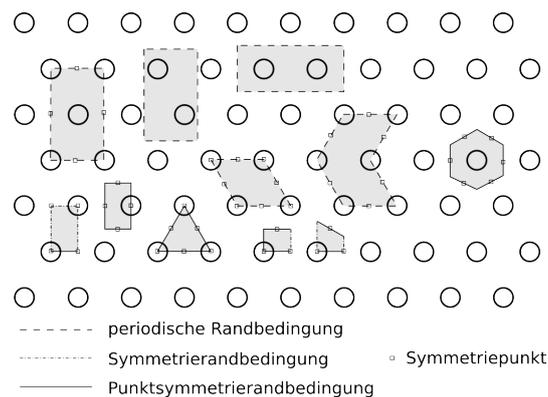


Abbildung 15.2: Unterschiedliche Realisierungen von Einheitszellen für eine ideale periodische Gefügestruktur nach [27].

## 15.3 Simulationsgebiete

Je nach Gefügestruktur lassen sich unterschiedliche Ansätze für das Simulationsgebiet wählen. Die Gefügestruktur und dessen Komplexität ist ein Faktor, der die Wahl des Gebiets beeinflusst. So bietet sich für einfache periodische Strukturen ein Einheitszellenmodell an.

### 15.3.1 Einheitszelle (unit cell)

Die Einheitszelle bildet das kleinst mögliche Simulationsgebiet, welches durch die Wahl geeigneter Randbedingungen eine periodische Struktur abbilden kann. Die Struktur ist dadurch jedoch meist stark idealisiert im Vergleich zur realen Mikrostruktur [27]. Inhomogenitäten, die sich für ein Einheitszellenmodell eignen, sind beispielsweise Kugeln oder unidirektional angeordnete Fasern. Die in Abbildung 15.2 dargestellten Einheitszellen repräsentieren durch die Verwendung von periodischen Randbedingungen und Symmetrierandbedingungen jeweils die dargestellte zweidimensionale Struktur. Der Vorteil des Einheitszellenmodells ist, dass es durch seine recht einfache Geometrie einen geringen Rechenaufwand benötigt. Dies ermöglicht die Verwendung komplizierter Materialmodelle und einer genauen Modellierung der Grenzflächen zwischen den Phasen [27].

### 15.3.2 Eingebettete Struktur und Selbstkonsistenzmethode

Eine Reduzierung der gesamten Struktur auf einen Teilbereich verfolgt auch die Methode der eingebetteten Struktur, wodurch sich der Rechenaufwand gegenüber der kompletten Struktur verringern lässt. Hierbei wird wie in Abbildung 15.3 lediglich ein innerer Kern fein aufgelöst, während die umliegende Struktur grob aufgelöst oder als homogen angesehen wird. Je nach Ausführung wird für dieses Simulationsgebiet zwischen den drei folgenden Typen unterschieden [30, 27]:

- Einbettung des inneren, fein aufgelösten Kerns in eine grob aufgelöste heterogene Struktur. Durch die geringere Auflösung im äußeren Bereich reduziert sich der Rechenaufwand

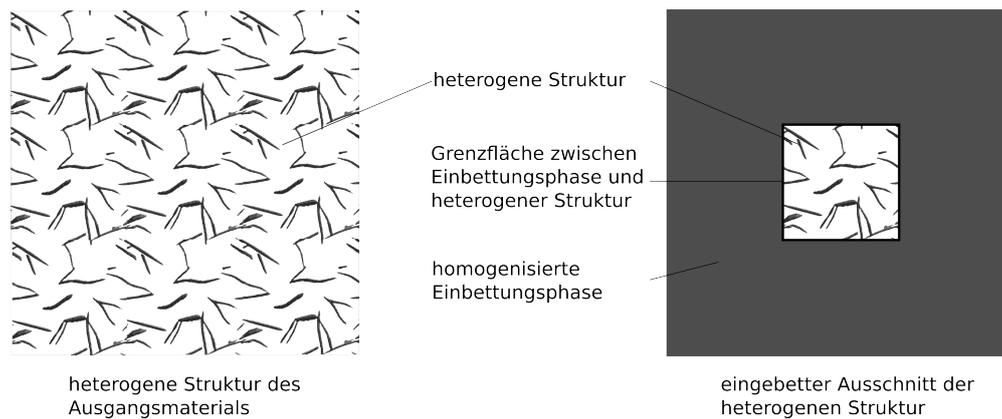


Abbildung 15.3: Ansatz der eingebetteten Zelle beziehungsweise Selbstkonsistenzmethode. Auf der linken Seite mit der ursprüngliche heterogenen Struktur und auf der rechten Seite der eingebetteten Struktur mit der homogenisierten Phase und der Grenzfläche.

und damit jedoch auch die Genauigkeit. Der genaue Belastungszustand wird lediglich im inneren Kern abgebildet. Bei dieser Methode entfällt der Grenzflächenbereich, da ein kontinuierlicher Übergang der Inhomogenitäten zwischen Kern und umliegender Einbettungsphase vorliegt.

- Vorherige Definition der Eigenschaften der Einbettungsphase über makroskopische Materialmodelle. Das Materialmodell muss hierbei idealerweise den Eigenschaften des Kerns entsprechen. Diese Methode eignet sich damit nicht zu Bestimmung der effektiven Eigenschaften sondern vielmehr zur Analyse genauer Belastungszustände im Kernbereich.
- Die Selbstkonsistenzmethode verwendet die homogenisierten Ergebnisse des Kerns zur Parametrisierung der Einbettungsphase und nähert sich somit an das effektive Materialverhalten der Gefügestruktur an. Diese Methode wird daher meist zur Charakterisierung der Materialeigenschaften verwendet [27].

### 15.3.3 Repräsentatives Volumenelement (RVE)

Der in dieser Arbeit verfolgte Ansatz ist der des repräsentativen Volumenelements. Das repräsentative Volumenelement spielt eine zentrale Rolle bei der Bestimmung der effektiven Eigenschaften von heterogenen Strukturen [101]. Das repräsentative Volumenelement ist dabei ein Volumenausschnitt des Materials, der so gewählt wird, dass die ermittelten Eigenschaften statistisch repräsentativ sind [72]. Die Länge  $L$  des Materialausschnitts muss hierbei ausreichend groß sein, um den Einfluss der Mikrostruktur abzubilden und somit deutlich größer als die Länge der Inhomogenitäten  $l$ . Im Falle des Gusseisens mit Lamellengraphit fließt damit die Morphologie der Graphitinhomogenitäten und deren Interaktion durch die Spannungsüberhöhungen ein. Auf der anderen Seite muss das Gebiet klein genug sein, um als Element der Kontinuumsmechanik angesehen zu werden [72]. Für das Verhältnis  $\delta = L/l$  sind keine Werte festgelegt, welche ein RVE definieren. Vielmehr hängt dieser Werte von der Morphologie der Inhomogenitäten sowie den Eigenschaften der Phasen des heterogenen Werkstoffs ab. Trias

et al. [144] geben Werte für  $\delta$  zwischen 4 und 100 an. Dies zeigt den starken Einfluss des Materials auf die RVE-Größe. Es muss somit für jede Mikrostruktur eine eigene Analyse der RVE-Größe durchgeführt werden. Das Gebiet muss zusätzlich eine repräsentative Anzahl an Einschlüssen haben und der Einfluss der Randbedingung auf die effektiven Eigenschaften muss vernachlässigbar sein [72]. Eine exakte Definition des RVEs ergibt sich aus den oben genannten Punkten nicht, weshalb Drugan et al. in [38] eine pragmatische Definition des repräsentativen Volumenelements gibt. Ein RVE ist demnach: *“the smallest material volume element of the composite for which the usual spatially constant ‘overall modulus’ macroscopic constitutive representation is a sufficiently accurate model to represent mean constitutive response.”* und somit der kleinste Materialausschnitt für welchen die effektiven Eigenschaften des Materials ausreichend gut abgebildet werden. Bei einer Erhöhung des Volumens des RVEs ergeben sich daher keine Änderungen der effektiven Eigenschaften. Zudem muss das RVE der oben definierten Hill-Bedingung (Gleichung (15.6)) genügen. Im Allgemeinen lässt sich im Vorhinein keine verlässliche Aussage über die Größe des RVEs geben. Diese muss über eine Reihe von Simulationen für die behandelte Materialstruktur ermittelt werden.

### 15.3.4 Statistisches Volumenelement (SVE)

Sind Simulationen auf der Größe eines repräsentativen Volumenelements nicht möglich oder ergibt sich ein Rechenzeitvorteil durch die Simulation mehrerer kleinerer Simulationsgebiete, welche nicht der Definition des RVE genügen, werden sogenannte statistische Volumenelemente verwendet. Wie sich aus dem Namen ergibt, wird hier die effektive Größe aus einer Vielzahl von Simulationen ermittelt. Während die Größe der Gebiete meist gleich bleibt, wird jedes Mal eine neue Struktur (neuer Ausschnitt des Materials) simuliert. Für eine ausreichende Anzahl an Simulationen konvergieren die Ergebnisse zu der zu ermittelnden effektive Größe. Es ist zu beachten, dass die Größe des SVEs hierbei nicht beliebig klein gewählt werden kann, da sonst die Inhomogenitäten und deren Einfluss nicht mehr korrekt wiedergegeben werden [109].

Über die dargestellten Simulationsgebiete lassen sich die effektiven Eigenschaften von Materialien bestimmen. Wie beschrieben ergeben sich beispielsweise die effektiven Dehnungen und Spannungen eines RVE über das Volumenmittel. Eine weitere Größe, die in dieser Arbeit mittels Simulationen bestimmt werden soll, ist die der Wärmeleitung. Hierfür ergibt sich die Bestimmung etwas umfangreicher als das einfache Volumenmittel und wird im folgenden Abschnitt beschrieben.

## 15.4 Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit

Zur Ermittlung der Wärmeleitfähigkeit wird ein konstanter Wärmestrom durch das Simulationsgebiet über einen Temperaturgradienten hergestellt. Dafür wird an zwei gegenüberliegenden Rändern des Gebiets eine jeweils konstante Temperatur,  $T_o$  und  $T_u$ , aufgebracht, welche sich um den Wert  $\Delta T_{o-u}$  unterscheiden. Die effektive Wärmeleitfähigkeit wird entsprechend ähnlicher Ansätze von [157, 78] umgesetzt und wird so auch für die Berechnung offenporiger Schaumstrukturen in der Arbeit von August et al. [9] verwendet. Betrachtet man ein homogenes Material, so lässt sich die Wärmestromdichte über die Beziehung

$$\dot{q} = -\lambda_{\text{hom}} \nabla T \quad (15.10)$$

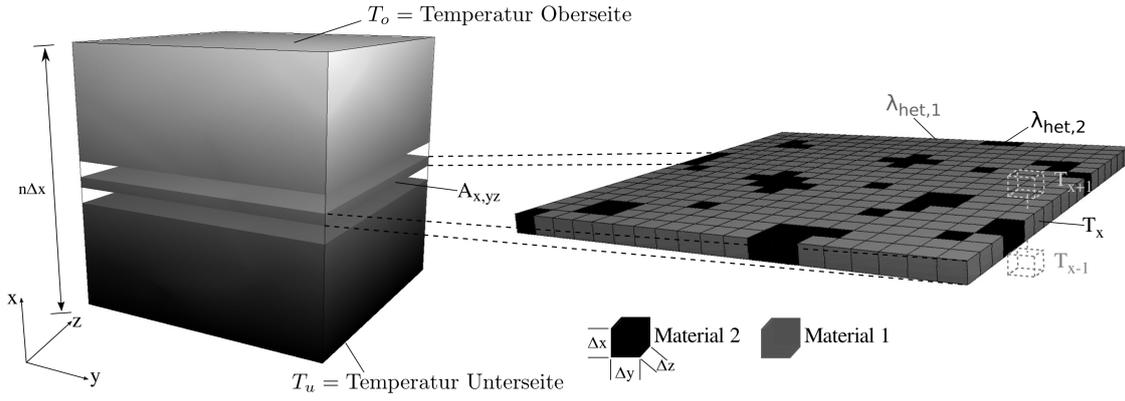


Abbildung 15.4: Berechnung der effektiven Wärmeleitfähigkeit für ein heterogenes Material bestehend aus 2 Phasen mit den Wärmeleitfähigkeiten  $\lambda_{\text{het},1}$  und  $\lambda_{\text{het},2}$  entsprechend [9]. Für die Berechnung wird ein konstanter Temperaturgradient in x-Richtung über die Temperatur  $T_o$  an der Oberseite und der Temperatur  $T_u$  an der Unterseite des Gebiets aufgebracht.

ausdrücken, mit der homogenen Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_{\text{hom}}$  und dem Temperaturgradienten  $\nabla T$ . Für die Simulation wird, wie in Abbildung 15.4 dargestellt, der Temperaturgradient in x-Richtung angenommen, während die anderen Ränder als adiabatisch isoliert angenommen werden. Dadurch reduziert sich Gleichung (15.10) zu

$$\dot{q} = -\lambda_{\text{hom}} \frac{T_o - T_u}{n\Delta x}.$$

Dabei ist  $T_o$  die Temperatur an der Oberseite des Gebiets und  $T_u$  an der Unterseite,  $n$  der Anzahl der Zellen in x-Richtung und  $\Delta x$  der Zellenlänge in x-Richtung. Der Wärmestrom ergibt sich daraus durch die Multiplikation mit der Querschnittsfläche  $A_{x,yz}$ . Für den stationären Zustand ist der Wärmestrom durch die einzelnen Schichten des Material

$$A_0 \dot{q}_{\text{hom}}(x) = -A_0 \lambda_{\text{hom}}(x) \frac{T_o - T_u}{n\Delta x}$$

gleich dem Wärmestrom über das gesamte Gebiet

$$A_0 \dot{q}_{\text{hom}}(x) = - \int_{A_{x,yz}} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} dy dz$$

bzw. für den Fall des anisotropen Graphits

$$\begin{aligned} A_0 \dot{q}_{\text{hom}}(x) &= - \int_{A_{x,yz}} \lambda_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} \\ &\quad + \lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} dy dz \\ &= - \int_{A_{x,yz}} \dot{q}_{\text{het,aniso}} dy dz. \end{aligned}$$

$A_0$  bezeichnet hier die Fläche der Schicht und  $\lambda_{\text{hom}}(x)$  die effektive Wärmeleitfähigkeit der Schicht an der Stelle  $x$ .  $\lambda_{\text{hom}}$  lässt sich dann, mit dem Wissen der lokalen Wärmeleitfähigkeiten, schreiben als

$$\lambda_{\text{hom}}(x) = \frac{n\Delta x}{(T_o - T_u)A_0} \int_{A_{x,y,z}} \dot{q}_{\text{het,aniso}} dydz$$

und für die Diskretisierung im Finite-Differenzen-Schema

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{hom}}(x) = \frac{n\Delta x}{(T_o - T_u)A_0} \sum_{i,j} (\Delta y \Delta z) & \left( \lambda_{xx}^{x,y_i,z_j} \frac{T^{x+1,y,z} - T^{x-1,y,z}}{2\Delta x} dydz \right. \\ & + \lambda_{xy}^{x,y_i,z_j} \frac{T^{x+1,y,z} - T^{x-1,y,z}}{2\Delta y} dydz \\ & \left. + \lambda_{xz}^{x,y_i,z_j} \frac{T^{x+1,y,z} - T^{x-1,y,z}}{2\Delta z} dydz \right). \end{aligned}$$

Die berechnete homogenisierte Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_{\text{hom}}(x)$  einer Schicht entspricht der Parallelschaltung der einzelnen Wärmeleitfähigkeiten in dieser Schicht. Für die effektive Wärmeleitfähigkeit des gesamten Gebiets werden diese über eine Reihenschaltung

$$\lambda_{\text{hom}}^{\text{eff}} = \frac{1}{n\Delta x \int_0^1 \frac{1}{\lambda_{\text{hom}}(x)} dx}$$

verknüpft.



## 16 Erstellung der Gussstrukturen

Für die Berechnung auf der mesoskopischen Ebene wird ein Simulationsgebiet benötigt, welches der realen Mikrostruktur des Gusseisens entspricht. Zur Erstellung des Gebiets gibt es zwei grundlegende Ansätze [14]. Dies ist zum einen die Verwendung einer real vorhandenen Mikrostruktur eines Materialausschnitts. Hierzu wird ein 3-D Abbild der Mikrostruktur durch eine Konvertierung der experimentellen dreidimensionalen Daten in ein für den Solver lesbares Format erstellt. Ein weiterer Ansatz ist die Erstellung einer synthetischen Gusseisenstruktur, welche eine Annäherung an die reale Struktur des Materials darstellt. Der Vorteil des realen Gefüges liegt hierbei vor allem in der exakten Abbildung der mikrostrukturellen Eigenschaften, die aus dem Aufbau des Materials hervorgehen, da die Struktur eins zu eins nachgebildet wird. Dem gegenüber stehen jedoch folgende Gründe die zu der Wahl eines synthetischen Gefüges in dieser Arbeit führen:

- Für die Rekonstruktion eines realen Gefüges sind zeitintensive experimentelle Arbeiten nötig. Für ein dreidimensionales Simulationsgebiet wird eine Serie von Tiefenschliffen benötigt beziehungsweise zur Ermittlung der Kornorientierung andere 3D Analyseverfahren wie beispielsweise eine EBSD-Analyse (electron-backscatter-diffraction).
- Das Gefüge innerhalb eines Bauteils unterliegt aufgrund des Gießprozesses und der vorhandenen unterschiedlichen Wanddicken Schwankungen (siehe Kapitel 3, Übersicht der Eigenschaften des Werkstoffs Gusseisen). Aus diesem Grund reicht die Analyse eines einzelnen Bereichs der Bremsscheibe nicht aus, was den experimentellen Aufwand erhöht.
- Die Orientierung der Lamellen muss von den experimentellen Untersuchungen bereitgestellt werden, da die Eigenschaften des Graphits stark anisotrop sind. Diese Orientierungen müssen wiederum den Lamellen im Gebiet zugeordnet werden.
- Die Gebietsgröße des repräsentativen Volumenelements ist im Vorhinein nicht bekannt und wird erst durch Simulationen ermittelt. Ein einzelnes zu kleines experimentelles Gefüge kann nicht verwendet werden, um die effektiven Eigenschaften des Materials zu ermitteln (siehe Kapitel 15, Effektive Materialeigenschaften).
- Eine Studie zum Einfluss einzelner geometrischer Parameter (z.B. Längen-Dicken-Verhältnis der Graphitlamellen, Volumengehalt des Graphits) auf die effektiven Eigenschaften des Materials ist aufgrund der starren Gebietsvorgabe nicht möglich.
- Die Liefervorschriften für den behandelten Gusseisenwerkstoff besitzt große Toleranzen für die Form und Größe des im Material eingelagerten Graphits. Ein Gefüge mit genau diesen maximalen/minimalen Graphitausbildungen ist sehr aufwendig herzustellen. Für eine Abschätzung der oberen und unteren Schranken der Materialeigenschaften und somit einer ausreichenden Dimensionierung des Bauteils sind diese Informationen jedoch notwendig.

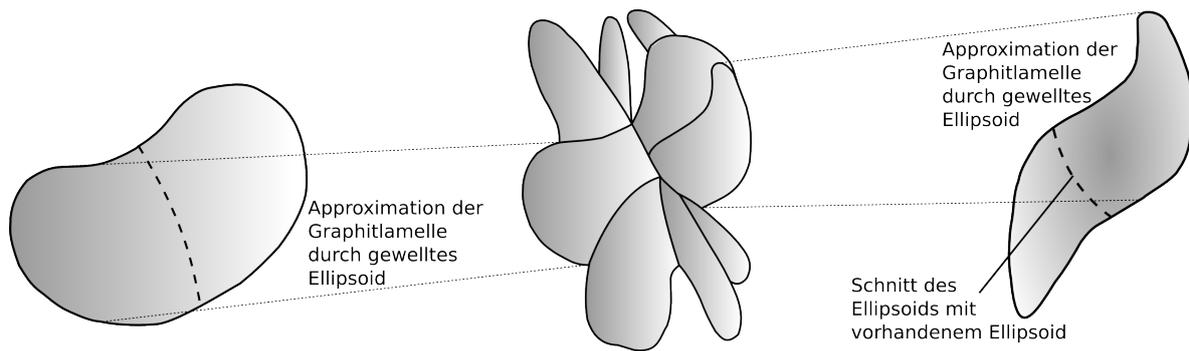


Abbildung 16.1: Modell der Graphitlamellen nach [7] (Mitte) und die Approximation der Lamellen durch gewellte Ellipsoide entsprechend [128].

Durch die Verwendung eines synthetischen Gefüges wird den genannten Punkten Rechnung getragen. Durch die schnelle Generierung der synthetischen Gefüge ist die Anfertigung einer großen Anzahl von Gebieten gut umsetzbar. Das Studium einzelner Parameter und deren Einfluss auf die effektiven Eigenschaften ist allein durch die Verwendung synthetischer Gefüge gegeben, da die Gefüge reproduzierbar sind und jeweils einzelne Größen variiert werden können. Als Schwierigkeit ergibt sich, eine exakte Abbildung der Graphitlamellen zu erstellen sowie deren Einlagerung in die Matrix zu definieren, damit sich ein realitätsnahes Gefüge ergibt. Im Folgenden wird dieser Prozess beschrieben.

## 16.1 Nachbilden der Graphitlamellen

Es wird die genaue, im realen Gusseisen vorliegende Form der Graphitlamellen benötigt, um diese bestmöglich nachzubilden. Mit Hilfe einer Tiefenätzung an Gusseisen mit Lamellengraphit können die einzelnen Graphitlamellen nahe der Oberfläche freigelegt werden (siehe z.B. [48, 114, 44]). Zu sehen ist, dass das perlitische Grundgefüge durchzogen von Graphitinhomogenitäten ist. Dies geht auch aus zweidimensionalen Schlibfbildern hervor. Die Graphitlamellen können als plättchenförmige gewellte Objekte identifiziert werden, welche in der Wellung sowie den Formfaktoren wie Länge und Dicke variieren. In [45] sowie [7] wird je ein Modell der Graphitlamellen dargestellt, welches in Abbildung 16.1 in der Ausführung nach [7] nachgebildet ist. Die Graphitinhomogenitäten ergeben sich hiernach durch eine Vielzahl sich berührender und schneidender Graphitplättchen. Wie in Abbildung 16.1 dargestellt, kann der Graphit durch gewellte flache Inhomogenitäten approximiert werden, die an der Schnittfläche mit einer bereits vorhandenen Lamelle abgeschnitten werden. Die Parameter, die das Ellipsoid definieren, sind hierbei die Abmessungen des Ellipsoids in die drei Raumrichtungen, welche über die Gleichung

$$\frac{x^2}{r_x^2} + \frac{y^2}{r_y^2} + \frac{z^2}{r_z^2} - 1 = 0 \quad (16.1)$$

beschrieben werden. Die Länge des Ellipsoids ergibt sich über  $2r_x$ , die Breite über  $2r_y$  und Dicke über  $2r_z$ . Für eine bessere Anpassung des künstlich erstellten Gefüges an die Schlibfbilder

Gebietsgröße	Größe Ellipsoid	Volumenanteil Graphit
$[X, Y, Z]$	$[x, y, z]$	$V_G$
Varianz der Ellipsoidgröße	Min. Volumen einer Lamelle	Frequenz
$[\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}]$	$V_L$	$[f_x, f_y, f_z]$
Varianz der Frequenz	Amplitude	
$[\hat{f}_x, \hat{f}_y, \hat{f}_z]$	$[a_x, a_y, a_z]$	

Tabelle 16.1: Parameter für die Gebietserstellung. Werte in schwarzer Schrift sind notwendig, in grauer Schrift optional.

können die Ellipsoide über das Einstellen einer Frequenz und einer Amplitude gewellt werden. Hierfür wird das ursprüngliche Ellipsoid in der x-y-Ebene mit einer Sinusfunktion

$$\frac{x^2}{r_x^2} + \frac{y^2}{r_y^2} + \frac{(z + (a_x + \hat{a}_x)\sin(f_x + \hat{f}_x) + (a_y + \hat{a}_y)\sin(f_y + \hat{f}_y))^2}{r_z^2} - 1 = 0 \quad (16.2)$$

überlagert. Hierbei sind  $a_{x/y}$  und  $f_{x/y}$  die Amplitude sowie die Frequenz und  $\hat{a}_{x/y}$  bzw.  $\hat{f}_{x/y}$  der Bereich, in dem die Amplitude/Frequenz für die einzelnen Lamellen variieren kann. Um die in Abbildung 16.1 dargestellte Struktur der Graphitlamellen zu erstellen, wird ein Füllalgorithmus entwickelt. Dieser gewährleistet, dass sich die Lamellen berühren können, sich dabei aber nicht schneiden. Dieser wird im Folgenden beschrieben.

## 16.2 Füllalgorithmus

Das Simulationsgebiet, das über den Füllalgorithmus erstellt wird, ist anhand der Parameter in Tabelle 16.1 definiert. Die Einheit der Längenangabe für die Gebietserstellung ist jeweils in Zellen anzugeben und wird erst durch die Parametrisierung der Simulation einer physikalischen Länge zugewiesen. Neben den grundlegenden Parametern für die Gebietsgröße  $[X, Y, Z]$  und die Größe der Lamellen  $[x, y, z]$ , ist vor allem der Volumengehalt  $V_G$  des Graphits entscheidend. Diese drei Parameter sind für die initiale Gebietserstellung notwendig. Die optionalen Parameter werden dazu verwendet, das synthetische Gefüge genauer an die vorhandenen Schlibbilder anzupassen. Die Gebietserstellung wird entsprechend des Diagramms in Abbildung 16.2 durchgeführt und im Folgenden näher erläutert. Für den Füllalgorithmus werden zwei Gebiete identischer Größe erstellt, das eigentliche Simulationsgebiet und ein Testgebiet. Die Ellipsoide werden entsprechend der oben genannten Einstellungen und einer zufälligen Orientierung sowie Position erstellt. Um eine Überschneidung der Ellipsoide zu verhindern, wird jeder Ellipsoid zunächst in das Testgebiet gefüllt, um seine Lage bezüglich der bereits gefüllten Lamellen auszuwerten. Das Testgebiet beinhaltet jeweils nur das neu zu füllenden Ellipsoid. Für jedes Ellipsoid wird eine Ebene definiert, die als Schnittebene verwendet wird. Es wird dazu die Ebene, welche durch die Längen- und Breitenachsen definiert ist, verwendet. Diese liegt entsprechend der Orientierung und Position des Ellipsoids im Raum und ist in den globalen Koordinaten des Simulationsgebiets definiert. Diese Ebene wird für jede Lamelle, die im Simulationsgebiet gefüllt ist, über den dazugehörigen Normalenvektor  $\mathbf{n}(\phi_\alpha)$  sowie Stützvektor  $\mathbf{s}(\phi_\alpha)$  gespeichert.  $\alpha$  ist hierbei die jeweilige Phase. Jede Zelle des im Testgebiet befindlichen Ellipsoids wird im Folgenden mit Hilfe eines Floodfill-Algorithmus auf seine

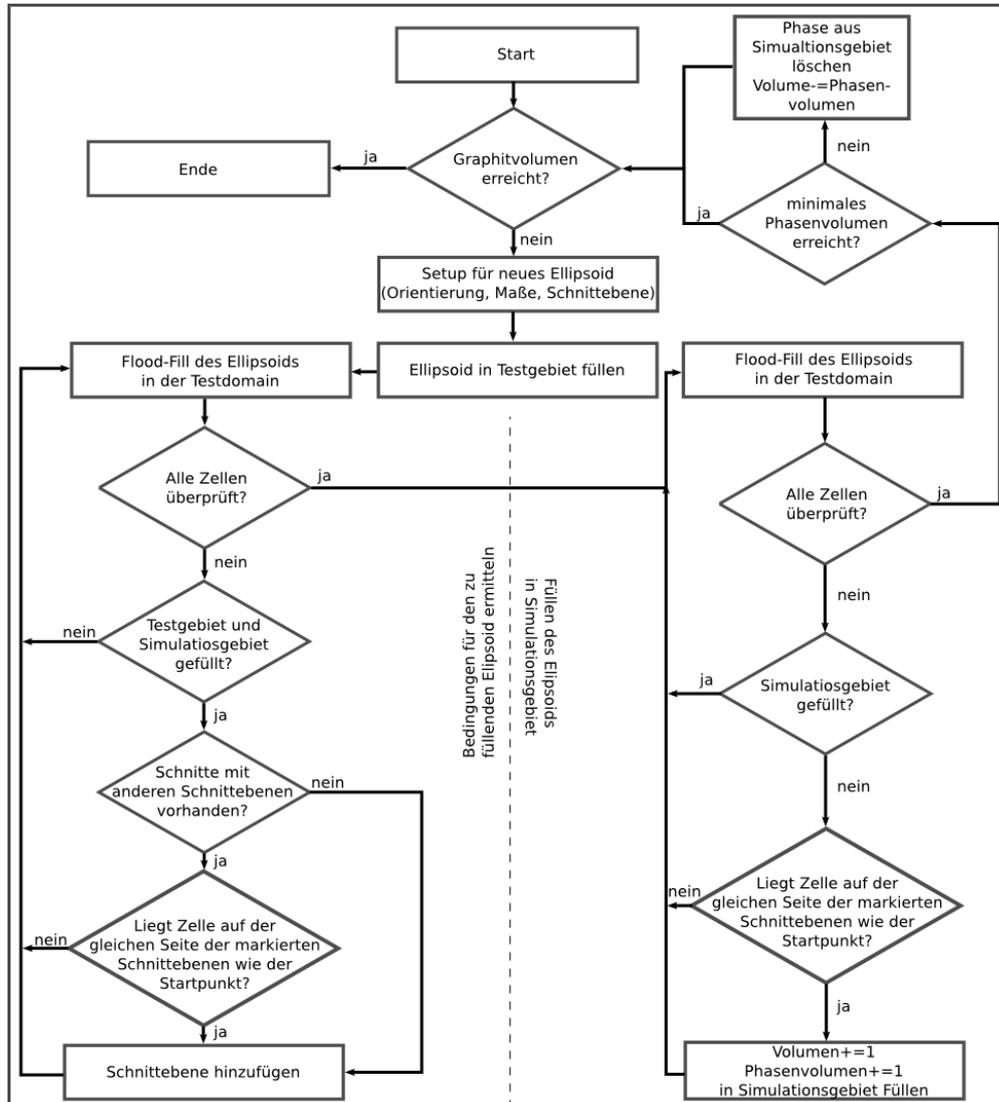


Abbildung 16.2: Flussdiagramm des Füllalgorithmus.

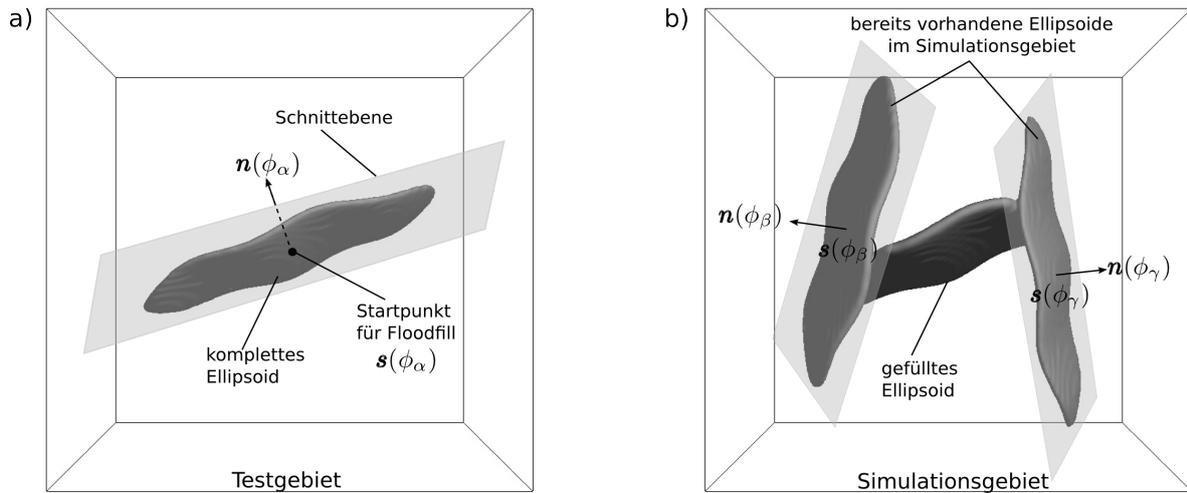


Abbildung 16.3: Darstellung der für den Gebietserstellungsalgorithmus verwendeten Ebene. In a) ist das Testgebiet dargestellt mit der kompletten Lamelle, ihrem Startpunkt  $\mathbf{s}(\phi_\alpha)$  und dem Normalenvektor  $\mathbf{n}(\phi_\alpha)$  und in b) das Simulationsgebiet mit den bereits gefüllten Ellipsoiden der Phasen  $\phi_\beta$  und  $\phi_\gamma$  mit deren Startpunkten und Normalenvektoren sowie der verbleibende Teil der Lamelle der Phase  $\phi_\alpha$  aufgrund der Schnitte mit den vorhandenen Lamellen.

Gültigkeit überprüft (linke Seite in Diagramm 16.2). Der Floodfill-Algorithmus läuft dabei jede Zelle des Ellipsoids im Testgebiet ab, wodurch alle zu betrachtenden Schnitte mit anderen Lamellen bestimmt werden. Der Startpunkt ist wie in Abbildung 16.3 dargestellt, die Mitte des Ellipsoids mit den Koordinaten  $c(\phi_{\alpha,ref}) = [0, 0, 0]$  im Referenzsystem des Ellipsoids beziehungsweise der Stützvektor  $\mathbf{s}(\phi_\alpha) = [x_g, y_g, z_g]$  in globalen Koordinaten. Schnitte mit Ebenen bereits gefüllter Ellipsoide müssen nur dann berücksichtigt werden, wenn an der entsprechenden Zelle im Simulationsgebiet bereits eine Phase vorhanden ist ( $\phi_{matrix}^{x,y,z} \neq 1$ ). Ist dies der Fall, so wird die Position von  $c(\phi_\alpha)$  bezüglich der Ebene  $\mathbf{n}(\phi_\beta)$  der dort vorliegenden Phase  $\beta$  ausgewertet.

$$\mathbf{n}(\phi^\beta)[c(\phi_\alpha) - \mathbf{s}(\phi_\beta)] = \begin{cases} > 0.0 & \text{Punkt liegt über der Ebene} \\ = 0.0 & \text{Punkt liegt auf der Ebene} \\ < 0.0 & \text{Punkt liegt unter der Ebene} \end{cases}$$

Die Ebene  $\mathbf{n}(\phi_\beta)$  wird als Referenz für die eigentliche Gebietsfüllung markiert. Dieser Vorgang wird für jede Zelle durchgeführt und alle zu beachtenden Ebenen markiert. Im Folgenden wird der Floodfill-Algorithmus wiederholt. Hierbei wird die Zelle bezüglich ihrer Position zu den markierten Ebenen ausgewertet. Ist die Position für alle Ebenen auf der selben Seite wie der Startpunkt und im Simulationsgebiet gilt  $\phi_{matrix}^{x,y,z} \neq 1$ , so wird an dieser Stelle die neue Phase gefüllt. Dies ist in Abbildung 16.3 für den Füllvorgang der auf der linken Seite im Testgebiet dargestellten Lamelle in das Simulationsgebiet (rechts) dargestellt. Die Anzahl der gefüllten Zellen wird aufsummiert und zur Bestimmung des Graphitvolumens verwendet. Zusätzlich wird die Anzahl der Zellen der neu gefüllten Lamellen ermittelt. Ist der optionale Parameter  $V_L$ , welcher ein minimales Volumen der Phase vorgibt, angegeben und das Volumen der Lamelle geringer, so wird diese Lamelle wieder entfernt. Die für die Simulationen benötigte

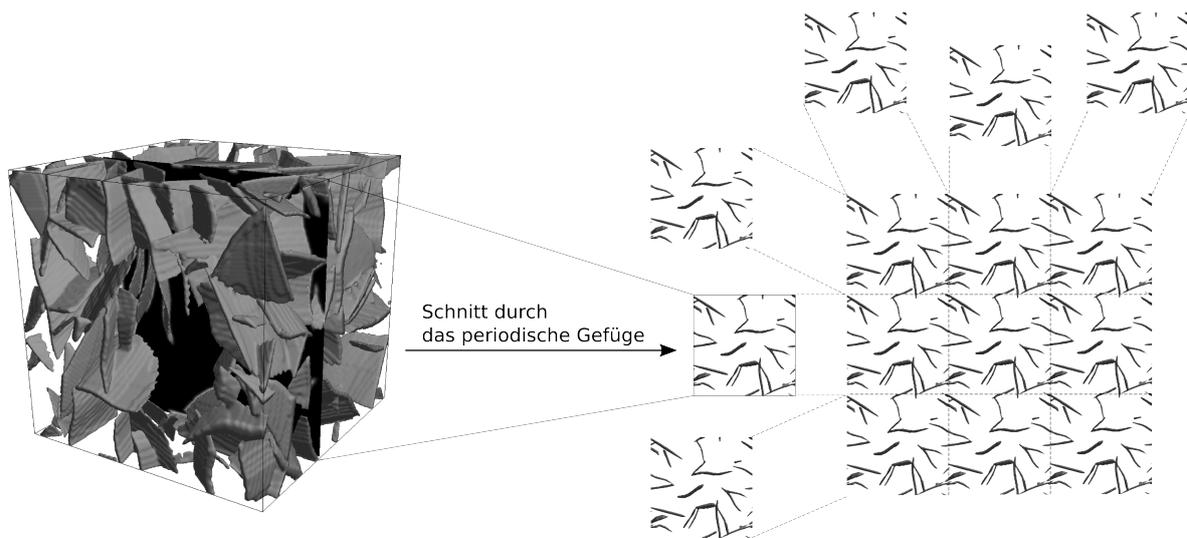


Abbildung 16.4: Dreidimensionales periodisches Gebiet, welches mit dem beschriebenen Algorithmus erstellt wurde, mit einem 2D-Schnitt durch das Gefüge. Durch die mehrfache Aneinanderreihung des Schnittes wird die Periodizität des Gebiets deutlich.

Eingabedatei mit Gebietsinformationen wie beispielsweise der Gebietsgröße, Phasenanzahl und Orientierung wird im Zuge des Gebietserstellungsprozesses automatisch generiert. Dies führt zu einer optimalen Einbindung der Gebietserstellung in den Simulationsablauf. Zur Verwendung periodischer Randbedingungen ist es notwendig, dass auch das Simulationsgebiet eine periodische Struktur aufweist. Um dem gerecht zu werden, ist der Gebietserstellungsalgorithmus auch für ein periodisches Simulationsgebiet ausgelegt. Das Ergebnis eines periodischen Gebiets ist in Abbildung 16.4 dargestellt. Das erstellte RVE lässt sich, wie gezeigt, in alle drei Raumrichtungen periodisch fortführen.

### 16.3 Vergleich zwischen generierten und experimentellen Strukturen

Im Folgenden wird ein qualitativer und quantitativer Vergleich experimenteller Schliffbilder mit einem Simulationsgebiet, welches mit dem oben dargestellten Algorithmus erstellt wurde, durchgeführt. Dazu ist in Abbildung 16.5 abermals der Gebietserstellungsprozess dargestellt. Aus dem experimentellen Schliffbild werden die Strukturinformationen des Materials extrahiert, welche über die Definition der Graphitlamellen zu dem dargestellten dreidimensionalen Simulationsgebiet führen. Der qualitative Vergleich eines beliebigen zweidimensionalen Schnittes durch das Simulationsgebiet mit dem experimentellen Schliffbild zeigt in Abbildung 16.5, dass die Mikrostruktur durch den Algorithmus sehr gut nachgebildet wird.

Über das in Kapitel 4 beschriebene Analysetool wird ein quantitativer Vergleich zwischen den Schliffbildern und dem Simulationsgebiet ermöglicht. Die Häufigkeit der Längen und Dicken der Graphitlamellen sind dazu in Abbildung 16.6 dargestellt. Wie zu erwarten nimmt die

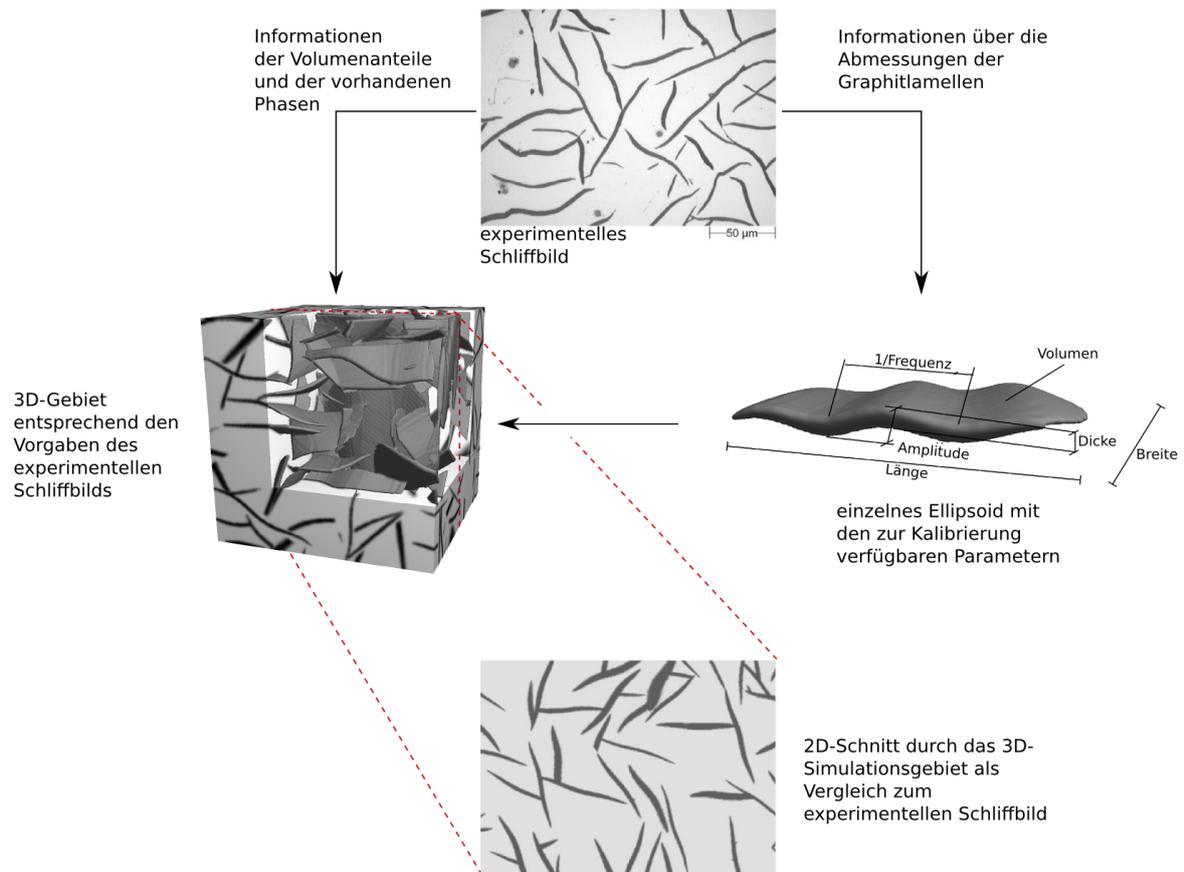


Abbildung 16.5: Darstellung des Füllalgorithmus und Vergleich mit experimentellen Schliffbildern entsprechend [128]. Aus dem 2D-Schliffbild werden die zur Definition der Ellipsoide benötigten Informationen gewonnen, mit denen das 3D-Simulationsgebiet erstellt werden kann. Ein Schnitt durch das Gebiet dient als qualitativer Abgleich der erstellten Struktur mit dem experimentellen Schliffbild.

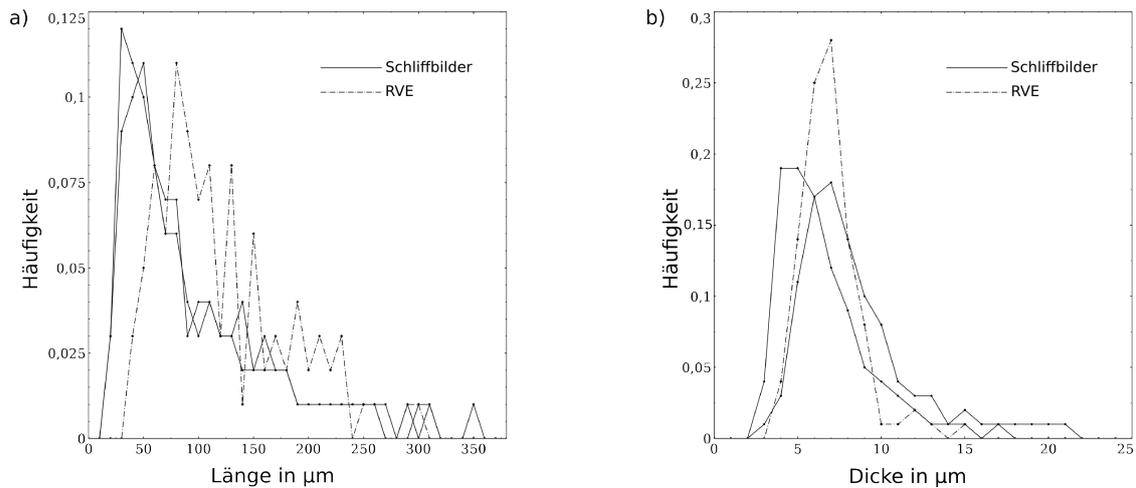


Abbildung 16.6: a) Vergleich der Häufigkeit der im RVE vorkommenden Längen und b) der Dicken mit denen der experimentellen Schlifffbilder. Für die Längen und Dicken überwiegt jeweils der Anteil der kürzeren/schmäleren Lamellen. Diese Merkmale weist auch das erstellte Gefüge auf.

Häufigkeit für kleinere Lamellen zu. Aufgrund der zunehmenden Anzahl an Lamellen innerhalb des Simulationsgebiets im Laufe des Füllprozesses sinkt die Wahrscheinlichkeit ein komplettes Ellipsoid zu platzieren. Auch für die experimentellen Schlifffbilder überwiegt im Gebiet die Anzahl kurzer Lamellen, welche durch die Schnitte mit vorhandenen Lamellen entstehen. Für das RVE kommen Lamellen mit Längen zwischen 70-80  $\mu\text{m}$  am häufigsten vor und für die Schlifffbilder Längen von 40-50  $\mu\text{m}$ . Dieser Unterschied lässt sich dadurch erklären, dass beim Gebietserstellungsalgorithmus ein minimales Volumen  $V_L$  für die Lamellen vorgegeben wird, welches das Erstellen sehr kleiner Lamellen unterdrückt. Abhängig vom Graphitvolumen kann es bei einem zu hohen Wert von  $V_L$  zu einer parallelen Anordnung der Ellipsoide kommen, da dies die einzige mögliche Orientierung darstellt.

Mit den über den Algorithmus erstellten Simulationsgebieten werden im Folgenden die Simulationen auf der mesoskopischen Ebene durchgeführt.

# 17 Simulationsergebnisse

In diesem Kapitel werden die mit den oben beschriebenen Methoden erzielten Simulationsergebnisse dargestellt. Zunächst werden hierbei die Ergebnisse auf der mesoskopischen Längenskala beschrieben. Ausgehend von diesen Simulationsergebnissen wird gezeigt, wie ein Materialmodell für die makroskopische Simulation entwickelt wird und Materialeigenschaften des Gusseisens bestimmt werden. Die Simulationen auf der makroskopischen Skala betrachten die Belastung der Bremsscheibe, welche während des Bremsvorgangs entsteht. Bei der aus den Simulationen ausgewerteten Spannung handelt es sich jeweils um die nominelle Spannung welche direkt mit den experimentellen Versuchen verglichen werden können. Für die Simulationen unter Verwendung der Schädigung ergeben sich die ausgewerteten Spannungen zu  $\sigma = \bar{\sigma}(1 - D)$  unter Einbeziehung des Verlusts der Tragfähigkeit. Die Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der mesoskopischen Simulationen werden über die in Kapitel 15 definierten Volumenmittel der Spannungen  $\bar{\sigma} = \frac{1}{V} \int \sigma dV$  und Dehnung  $\bar{\epsilon} = \frac{1}{V} \int \epsilon dV$  aufgetragen.

## 17.1 Mesoskopische Gefügesimulation

Zunächst wird sich auf den Einfluss einzelner Inhomogenitäten, deren Orientierung und Form auf die Eigenschaften von heterogenen Werkstoffen konzentriert. Danach wird der Einfluss der Schädigung und der Risschließung auf die effektiven Eigenschaften eines Materials bei Zug- und Druckbelastung dargestellt. Zuletzt werden Simulationen auf der Größe eines repräsentativen Volumenelements durchgeführt, welche mit den experimentellen Versuchsergebnissen der Zug- und Druckversuche verglichen werden.

### 17.1.1 Einfluss der Form und Orientierung der Inhomogenitäten auf die mechanischen Eigenschaften

Wie in Kapitel 3 beschrieben, sind die Inhomogenitäten aufgrund ihrer geringen Lastaufnahme für das frühe plastische Fließen des Matrixmaterials verantwortlich. Um den Einfluss der Anordnung und der Form der Inhomogenitäten auf das mechanische Verhalten des Materials zu untersuchen, werden für die [129] die vier unterschiedliche Simulationsgebiete aus Abbildung 17.1 simuliert. Die Matrix ist über die halbtransparente graue Phase definiert und die Graphitinhomogenitäten über die dunkelgraue Phase. Die Inhomogenitäten sind kugelförmig (a) beziehungsweise ellipsoid (b, c, d). Die Position der Schwerpunkte der einzelnen Inhomogenitäten ist für jedes der vier Simulationsgebiete gleich, wie auch der Volumengehalt des Graphits mit 6,1 % konstant gehalten wird. Damit wird gewährleistet, dass die Änderung der Eigenschaften allein auf die Form und Orientierung zurückzuführen ist. Die ellipsoiden Graphitpartikel sind zufällig orientiert (b), sowie parallel (c) und orthogonal (d) zur Belastungsrichtung angeordnet. Das Verhalten der Matrix wird über ein linear-elastisches/linear-plastisches Modell aus

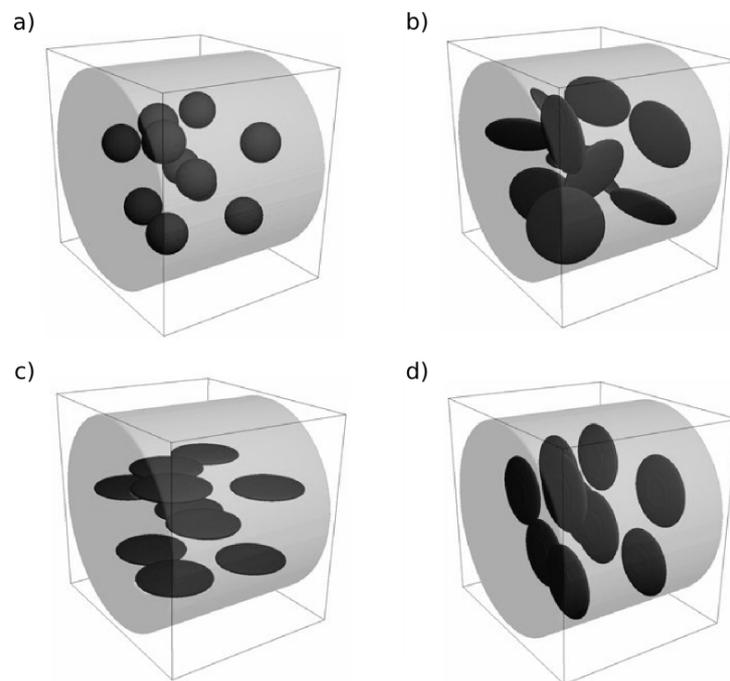


Abbildung 17.1: Darstellung der vier Simulationsgebiete entsprechend [129]. a) Kugelförmige Graphitinhomogenitäten, b) zufällig orientierte ellipsoide Graphitinhomogenitäten, c) parallel  $\parallel$  zur Belastungsrichtung orientierte Graphitinhomogenitäten und d) orthogonal  $\perp$  zur Belastungsrichtung orientierte Graphitinhomogenitäten.

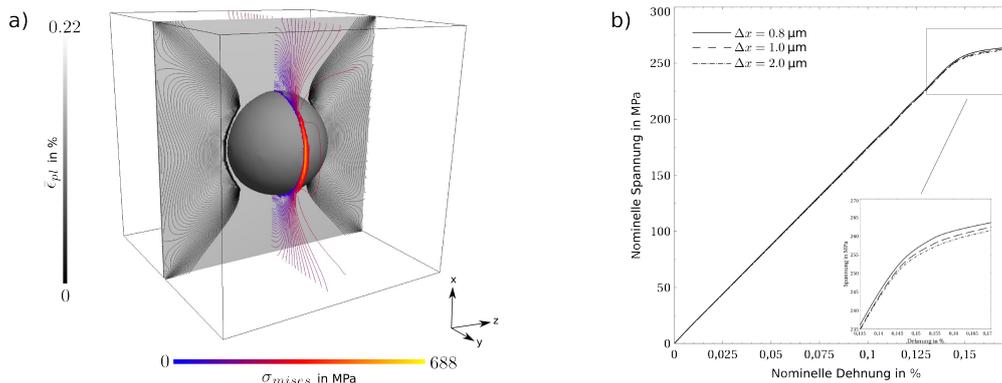


Abbildung 17.2: a) Zugversuch in z- Richtung an einer würfelförmigen Probe mit einer einzelnen kugelförmigen Graphitinhomogenität (Radius  $33 \mu\text{m}$ ) und der Darstellung der von-Mises-Vergleichsspannung sowie der akkumulierten plastischen Dehnung. b) Einfluss der Auflösung  $\delta x = 0,8 \mu\text{m}$ ,  $\delta x = 1,0 \mu\text{m}$  und  $\delta x = 2,0 \mu\text{m}$  sowie der Interfacebreite auf die Simulationsergebnisse entsprechend [129].

Kapitel 13 abgebildet mit einem Elastizitätsmodul von  $E_m = 210 \text{ GPa}$ , der Querkontraktion  $\nu_m = 0,288$  und einer Mises-Fließspannung von  $\sigma_{y_m} = 275 \text{ MPa}$  mit der Verfestigung  $H_m = 0,1 \text{ MPa}$ . Für den Graphit wird ein rein elastisches Verhalten mit den Parametern  $E_i = 10 \text{ GPa}$  und  $\nu_i = 0,288$  angenommen. Die Last wird über eine Verschiebungsrampe mit sehr geringer Steigung aufgebracht wodurch, ein mechanisches Gleichgewicht für die Belastungsschritte angenommen werden kann [129]. Um den Einfluss der Gebietsauflösung auf das Ergebnis abzuschätzen und dadurch mit einer ausreichend genauen Auflösung zu rechnen, werden zunächst an einer einzelnen kugelförmigen Graphitinhomogenität mit dem physikalischen Durchmesser von  $33 \mu\text{m}$  Simulationen durchgeführt (Abbildung 17.2, a)). Die Materialeigenschaften sind die oben beschriebenen und die physikalische Gebietsgröße beträgt hierbei  $160 \mu\text{m}$ . Simuliert wird mit drei unterschiedlichen Gitterauflösungen welche einer Zellenlänge von  $0,8 \mu\text{m}$ ,  $1,0 \mu\text{m}$  und  $2,0 \mu\text{m}$  entsprechen. Die Anzahl der Zellen im Übergangsbereich der beiden Phasen ist mit  $12,5$  Zellen konstant, was einer Variation der physikalischen Breite von  $6,25$ - $15,6 \mu\text{m}$  entspricht. Wie aus den Spannungs-Dehnungs-Diagramm in Abbildung 17.2, b) hervorgeht, ist der Einfluss der drei Gebietsauflösungen sehr klein (ca.  $0,8\%$ ). Für die Simulationen der vier Gebiete in Abbildung 17.1 wird daher eine Auflösung von  $\Delta x, y, z = 1 \mu\text{m}$  gewählt. Die Spannungs-Dehnungs-Verhältnisse aus Abbildung 17.3, a) verdeutlichen, dass die effektiven elastischen wie plastischen Eigenschaften des heterogenen Materials durch die Anordnung und Form des Graphits beeinflusst werden. So beträgt der effektive Elastizitätsmodul  $E_{\text{eff}}$  der Anordnung b) mit den Ellipsoiden parallel zur Belastungsrichtung  $E_{\text{eff,b}} = 196 \text{ GPa}$  was nahezu der Schranke von Voigt mit  $E_{\text{Voigt}} = 199 \text{ GPa}$  entspricht. Es zeigt sich damit deutlich, dass durch diese Anordnung der Kraftfluss durch das Material nur geringfügig gestört wird. Demgegenüber weist das Gebiet der orthogonal angeordneten Graphitinhomogenitäten mit einem E-Modul von  $E_{\text{eff,c}} = 154 \text{ GPa}$  erwartungsgemäß den geringsten Wert auf und damit einen Abfall um mehr als  $20\%$ . Der Kraftfluss wird durch diese Anordnung am stärksten beeinflusst. Die Anordnungen a) und d), Kugeln und zufällig orientierte Ellipsoide, liegen mit ihren elastischen Eigenschaften von  $E_{\text{eff,a}} = 186 \text{ GPa}$  und  $E_{\text{eff,d}} = 174 \text{ GPa}$  dazwischen. Anordnung a) ordnet sich dabei im oberen Bereich und Anordnung d) im unteren Bereich

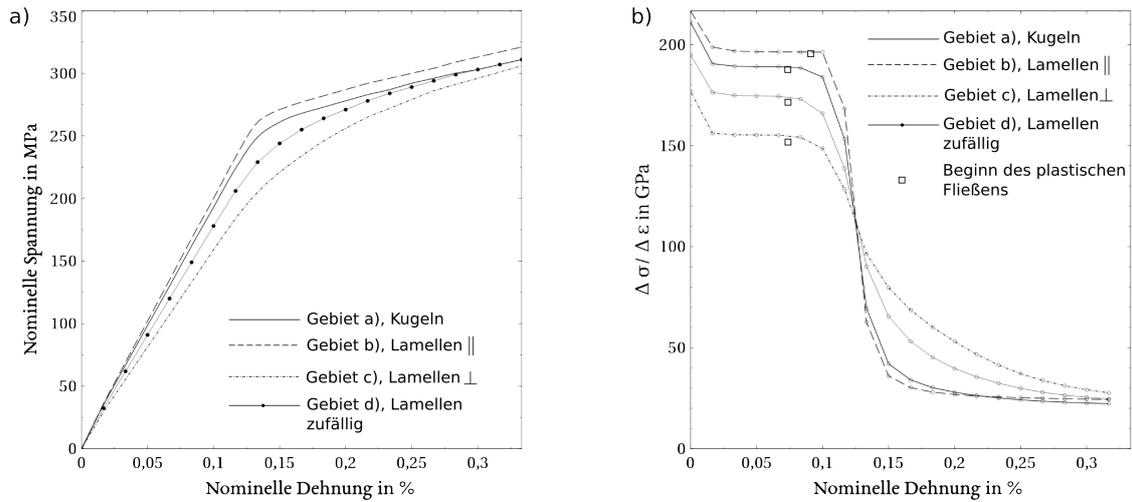


Abbildung 17.3: a) Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der vier Simulationsgebiete und b) Darstellung der Änderung der Spannung  $\Delta\sigma/\Delta\epsilon$  über die Dehnung zur Ermittlung der Streckgrenze. Das Plateau stellt den linearelastischen Bereich dar, und der Abfall der Kennlinie den Beginn des Fließens.

Gebiet	a)	b)	c)	d)
$E_{\text{eff}}$ in GPa	186	196	154	174
$\sigma_y$ in MPa	224	233	184	206
$E_{\text{eff}}/E_{\text{eff,max}}$	0,949	1	0,786	0,887
$\sigma_y/\sigma_{y,\text{max}}$	0,961	1	0,789	0,884

Tabelle 17.1: Werte der simulierten E-Moduli und Streckgrenze sowie das Verhältnis des maximalen E-Moduls und der maximalen Streckgrenze zu diesen Werten.

ein. Der Übergang vom linearelastischen zum plastischen Bereich ist für die Kennlinien der Materialien a) und b) durch einen recht deutlichen “Knick” in der Kennlinie gekennzeichnet. Dieser “Knick” stellt sich für die Materialien c) und d) als ein flacher Übergangsbereich dar, bei dem die Streckgrenze nicht eindeutig zu entnehmen ist. Aus diesem Grund wird in Abbildung 17.3, b) die Änderung der Spannung über die Dehnung  $\Delta\sigma/\Delta\epsilon$  geplottet. In Abbildung 17.3, b) definiert das senkrechte Plateau den linearelastischen Bereich und damit den Elastizitätsmodul, fällt die Kurve ab, beginnt das Material zu fließen. Die mit einem Quadrat markierten Punkte werden demnach als Beginn des plastischen Fließens ermittelt. Für die Streckgrenze ergibt sich der Zusammenhang zum Elastizitätsmodul dahingehend, dass mit sinkendem  $E_{\text{eff}}$  auch die Streckgrenze  $\sigma_y$  sinkt. In Tabelle 17.1 sind die E-Moduli, die Streckgrenzen und die prozentuale Reduzierung der Elastizitätsmoduli sowie der Streckgrenzen gegenübergestellt. Die Mikrostruktur beeinflusst in diesem Fall den Elastizitätsmodul und die Streckgrenze in selbem Maße.

Mit einer ähnlichen Simulationskonfiguration, jedoch einer würfelförmigen Probe und einem Graphitvolumengehalt von 5,9%, werden in [126] Untersuchungen des Materials bezüglich des Bauschinger-Effekts durchgeführt. Die Materialparameter ändern sich zu  $E_m = 205$  GPa,  $\nu_m = 0,288$ ,  $\sigma_{ym} = 275$  MPa und  $H_m = 0,15$  MPa. Die Werte für den Graphit sind mit  $E_i = 10$  GPa

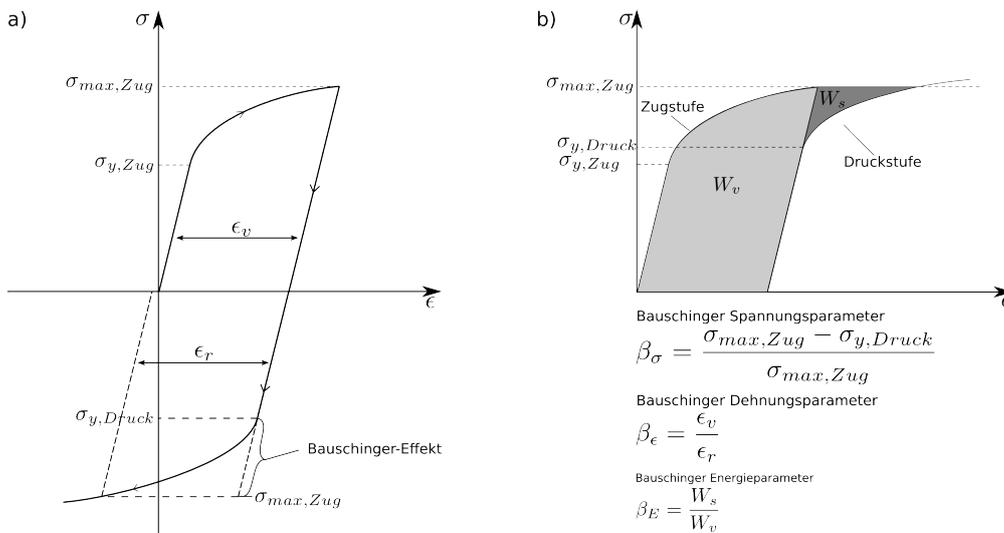


Abbildung 17.4: a) Darstellung des Bauschinger-Effekt bei Belastung und anschließender Lastumkehr.  $\sigma_{y,Zug}$  stellt den Beginn des plastischen Fließens unter Zugbelastung dar und  $\sigma_{y,Druck}$  bei darauffolgender Druckbelastung. Die Spannung  $\sigma_{max,Zug}$  ist die während der Zugbelastung maximal erreichte Spannung, die ohne den Bauschinger-Effekt der erwartete Beginn des Fließens unter Druckbelastung wäre.  $\epsilon_v$  und  $\epsilon_r$  stellen die Dehnungen zum Erreichen der Spannung  $\sigma_{max,Zug}$  bzw.  $-\sigma_{max,Zug}$  dar. b) Definition der drei unterschiedlichen Bauschinger-Parameter nach der Spannung, Dehnung und der Energie.

und  $\nu_i = 0,288$  identisch mit denen der vorhergehenden Simulation. Der Bauschinger-Effekt beschreibt ein Materialverhalten, welches bei der Verformung von metallischen Werkstoffen beobachtet werden kann. Wird ein Werkstoff im einachsigen Zugversuch über die Streckgrenze  $\sigma_{y,Zug}$  (Skizze 17.4, a)) hinaus bis zur Spannung  $\sigma_{max,Zug}$  belastet und damit plastisch deformiert, so wird zunächst erwartet dass aufgrund der Verfestigung bei Lastumkehr das Fließen des Werkstoffes bei Erreichen der Spannung  $-\sigma_{max,Zug}$  auftritt. Experimentelle Untersuchungen zeigen jedoch, dass ein Fließen des Materials bereits bei betragsmäßig geringeren Spannungen  $|\sigma_{y,Druck}| < |\sigma_{max,Zug}|$  zu beobachten ist. Dieses Verhalten wird als Bauschinger-Effekt bezeichnet. Es wird entsprechend [126] zwischen den drei in Abbildung 17.4, b) dargestellten Bauschinger-Parametern unterschieden. Der Bauschinger-Spannungsparameter ist definiert durch die maximale Zugbelastung  $\sigma_{max,Zug}$  und den darauffolgenden Beginn des plastischen Fließens bei Druckbelastung  $\sigma_{y,Druck}$ . Für den Dehnungsparameter wird das Verhältnis der Dehnungen  $\epsilon_v$  und  $\epsilon_r$ , welche zum Erreichen der Spannung  $\sigma_{max,Zug} / -\sigma_{max,Zug}$  benötigt wird, ausgewertet. Die dritte Möglichkeit den Bauschinger-Effekt zu quantifizieren ist, die erforderliche Arbeit  $W_v$  bei der Verformung auf  $\sigma_{max,Zug}$  ins Verhältnis zur "eingesparten" Arbeit bei der Rückverformung zu setzen. Im Folgenden wird jeweils der Bauschinger-Spannungsparameter ausgewertet. Das beschriebene würfelförmige Simulationsgebiet wird mittels einer Verschiebungsrandbedingung zunächst auf Zug und danach auf Druck belastet. Die übrigen Ränder werden als spannungsfrei definiert. Die Ergebnisse des Zug-Druck-Zyklus sind in Abbildung 17.5 a) - d) dargestellt. Das kleine Bild zeigt den kompletten Zyklus und die großen Kennlinien die betragsmäßige effektive Spannung für den Zug- und Druckbereich. Es geht aus den Kennlinien hervor, dass auch der Bauschinger-Effekt von der Orientierung und Form der

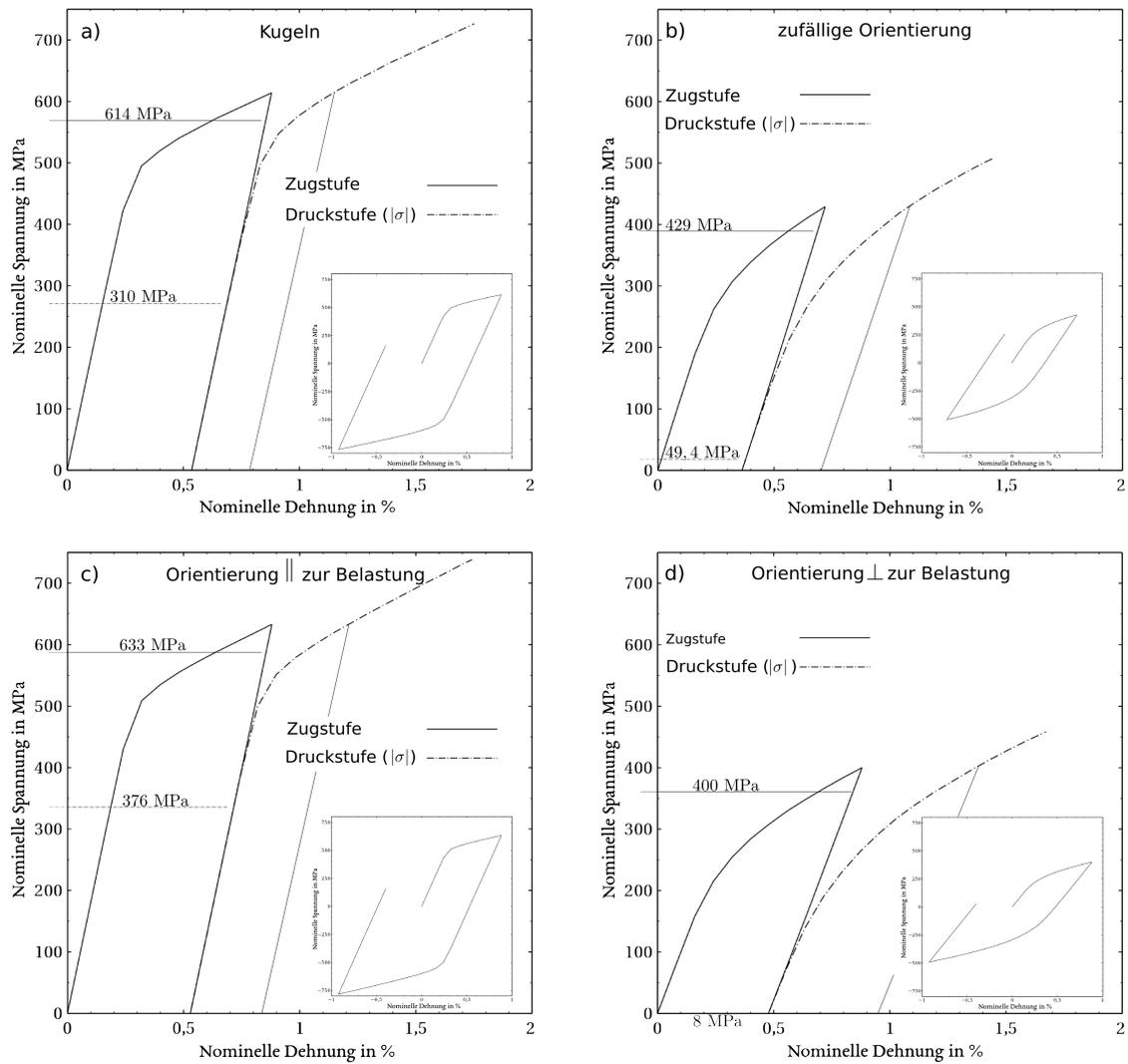


Abbildung 17.5: Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der Zug-Druck-Zyklen zur Bestimmung des Bauschinger-Spannungsparameters für die vier Gebiete aus Abbildung 17.1 mit der Auswertung des Bauschinger-Spannungsparameters in Tabelle 17.2.

Inhomogenitäten abhängt. Am deutlichsten tritt der Effekt für die orthogonal zur Zugrichtung angeordneten Lamellen auf. Hier beginnt das Material nach einer Zugbelastung von  $\sigma_{\max, \text{Zug}} = 400 \text{ MPa}$  bereits bei  $|\sigma_{y, \text{Druck}}| = 8 \text{ MPa}$  wieder plastisch zu fließen, was einem Bauschinger-Spannungsparameter von 0,98 entspricht. Die parallel zur Zugrichtung orientierten Lamellen weisen dagegen einen Bauschinger-Parameter von 0,4 auf und damit den geringsten Wert. Die Bauschinger-Spannungsparameter sind in Tabelle 17.2 zusammengefasst. Die Simulationen

	zufällig	$\perp$	$\parallel$	Kugeln
Bauschinger $\sigma$	0,88	0,98	0,40	0,49

Tabelle 17.2: Bauschinger-Spannungsparameter

zeigen, dass ein starker Einfluss von Form und Anordnung der Graphitinhomogenitäten auf die effektiven Eigenschaften des Materials vorhanden ist. Durch den deutlich geringeren Elastizitätsmodul der Inhomogenitäten wird der Kraftfluss durch das Material beeinflusst und es entstehen Spannungsüberhöhungen. Aus den Ergebnissen der Simulationen geht hervor, dass je stärker der Kraftfluss durch den Querschnitt des Materials gehindert wird, desto geringer sind der Elastizitätsmodul und die Streckgrenze. Gleichzeitig ist eine Erhöhung des Bauschinger-Spannungsparameters zu beobachten.

### 17.1.2 Schädigungsentwicklung innerhalb der Gusstruktur

In Kapitel 3 wird beschrieben, dass Gusseisen mit Lamellengraphits seinen Namen aufgrund der grauen Bruchfläche trägt. Diese ergibt sich aufgrund der Rissfläche entlang der im Matrixmaterial verflochtenen Struktur an Graphitlamellen. Sind die Graphitlamellen nicht direkt miteinander verbunden, so entstehen Spannungsspitzen im Matrixmaterial, welche zu einer lokalen Schädigung des Matrixmaterials führen. Zur Simulation dieses Phänomens wird der in Abbildung 17.6, a) dargestellte  $225 \mu\text{m}^3$  große Ausschnitt einer Gusseisenstruktur erstellt und über eine Verschiebungsrandbedingung belastet. Das Simulationsgebiet ist periodisch, weshalb eine periodische Spannungsrandbedingung für die übrigen Ränder verwendet wird, welche einen makroskopisch eindimensionalen Spannungszustand in Zugrichtung herstellt. Zur besseren Darstellung der Spannungsverteilung innerhalb des Gefüges wird eine 2D-Schnittebene des Gebiets verwendet. Die Materialparameter der Matrix und des Graphits sind in Tabelle 17.3 zusammengefasst. Die Eigenschaften des Matrixmaterials werden über das duktile Schädigungsmodell (vgl. Kapitel 8) abgebildet, während für den Graphit eine konstante Schädigung

Matrix							
E	$\nu$	$\Theta_0$	$\Theta_\infty$	$\sigma_0$	$\sigma_\infty$	$s$	$r$
210 MPa	0,288	150 GPa	900 MPa	185 MPa	587 MPa	1	3,5

Graphit									
$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{33}$	$C_{44}$	$h_{0\perp}$	$h_{0s}$	$D_{\parallel}$	$D_{\perp}$	$D_s$
1126 MPa	200 MPa	3,95 MPa	4,07 MPa	0,45 MPa	0,0	0,0	1,0	1,0	1,0

Tabelle 17.3: Simulationsparameter für die duktile Matrix und die Graphitinhomogenitäten.

gungsmodell (vgl. Kapitel 8) abgebildet, während für den Graphit eine konstante Schädigung

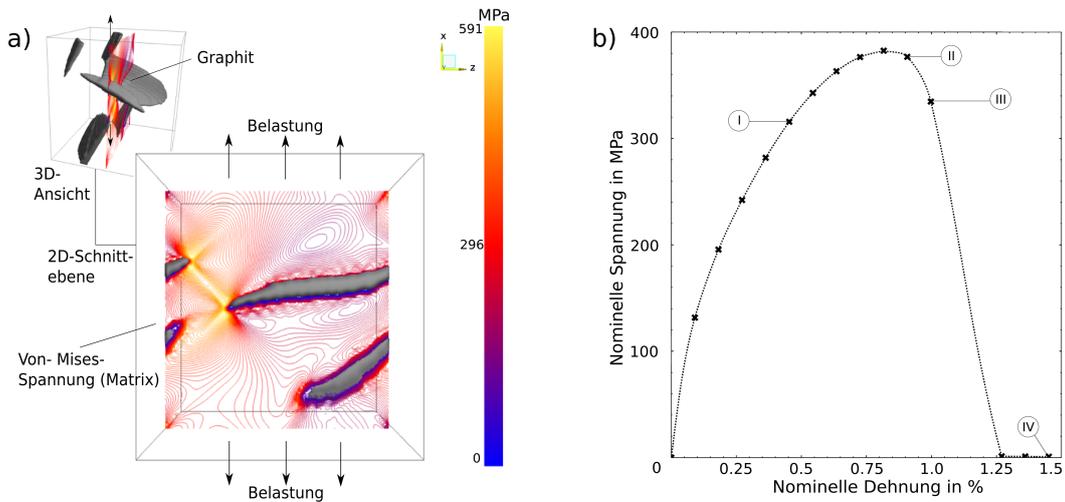


Abbildung 17.6: a) Abbildung der 3D-Gefügestruktur mit den grau dargestellten Graphitlamellen und der 2D Schnittebene mit den Spannungsspitzen an den Enden der Graphitlamellen unter einachsiger Zugbelastung. b) Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der Gusseisenstruktur unter Verwendung des duktilen Schädigungsmodells, welches zu dem deutlichen Abfall der Spannung ab einer Dehnung von  $\approx 0,8\%$ . Die Punkte I-IV entsprechen denen aus den Abbildungen 17.7 und 17.8.

( $D_{\perp} = D_{\parallel} = D_s = 1,0$ ) bei kompletter Risschließung für Druckbelastung ( $h_{0\perp} = h_{0s} = 0,0$ ) angenommen wird. Wird das Material belastet, bilden sich entsprechend Abbildung 17.6, a) an den Enden der Graphitlamellen Spannungsspitzen im umgebenden Matrixmaterial aus. Dadurch entstehen bereits bei geringer Belastung plastische Zonen, welche mit einer Schädigung einhergehen. In Abbildung 17.6, b) ist die Kennlinie der effektiven Spannung in Belastungsrichtung über der Dehnung aufgetragen. Die markierten Punkte I, II, III und IV entsprechen denen zur Darstellung der Schädigungsentwicklung in Abbildungen 17.7 und 17.8. Aus dem Ursprung bis Punkt I ist der charakteristische nichtlineare Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie von Gusseisen, welcher auf die plastische Dehnung mit der gekoppelten Schädigung innerhalb des Gefüges zurückzuführen ist, deutlich erkennbar. An Punkt I, Abbildung 17.7, ist die maximale im Gebiet vorkommende Schädigung mit  $D = 0,0151$  noch sehr gering. Nach Überschreiten von Punkt I flacht die Kennlinie ab bis sie in Punkt II in ein entfestigendes Verhalten übergeht. An diesem Punkt entstehen lokal im Material erste Risse nahe den Graphitlamellen, wie an Punkt II der Abbildung 17.7 zu sehen ist. Sie entstehen nach Überschreiten der kritischen Matrixschädigung  $D_c = 0,65$  und durch Ersetzen der Matrixphase mit der Rissphase ( $E_R = 0$ ,  $\nu_R = 0$ ), welche keine Spannungen überträgt. Die Schädigung konzentriert sich zu diesem Zeitpunkt im Bereich zwischen den beiden Graphitlamellen und der entstandenen Rissphase. Durch die weitere Schädigungsentwicklung im Material fällt die Kennlinie deutlich ab (Punkt II zu Punkt III). Am Punkt III verbinden sich die an den Enden der Lamellen gebildeten Risse, bis an Punkt IV der komplette Querschnitt versagt und keine Last aufgenommen wird. Die geringe Bruchdehnung von  $\approx 1,25\%$  spiegelt dabei deutlich den spröden Charakter des Materials wieder. Wird das gleiche Material auf Druck belastet, zeigt sich dessen belastungsabhängiges Verhalten. Durch das Risschließungsmodell übertragen

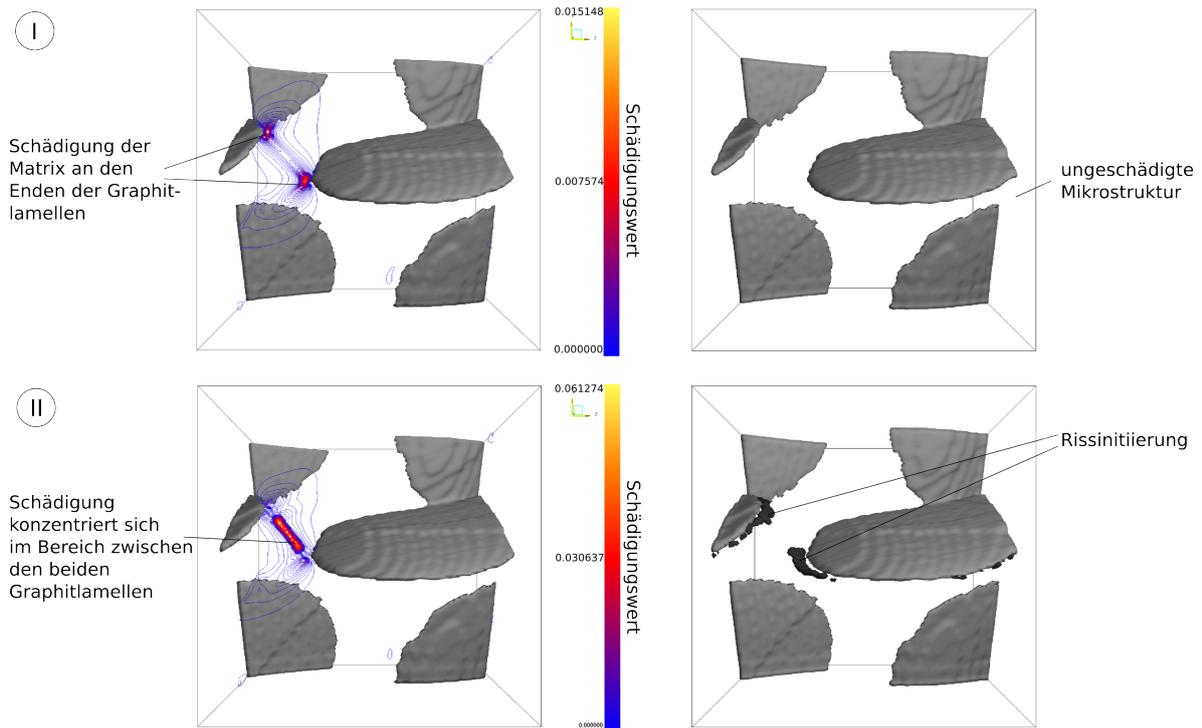


Abbildung 17.7: Schädigungsentwicklung innerhalb des Gussgefüges unter einachsigen Zugbelastung. Die Punkte I und II entsprechen denen aus Abbildung 17.6.

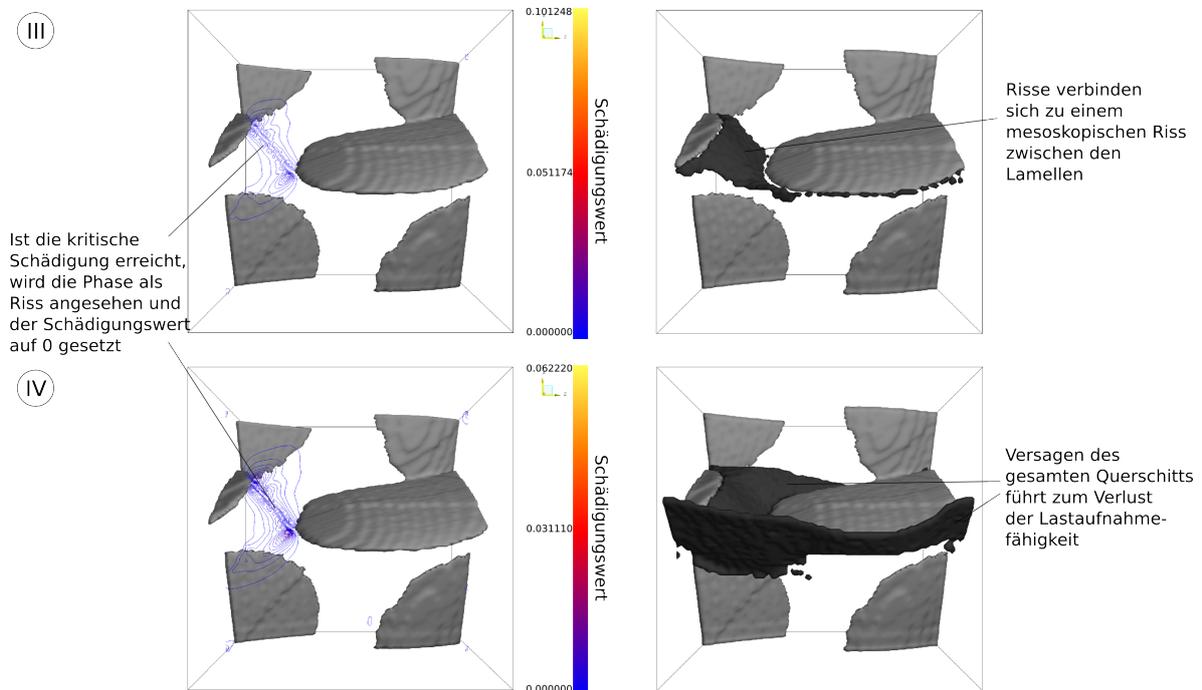


Abbildung 17.8: Schädigungsentwicklung innerhalb des Gussgefüges unter einachsiger Zugbelastung. Die Punkte III und IV entsprechen denen aus Abbildung 17.6.

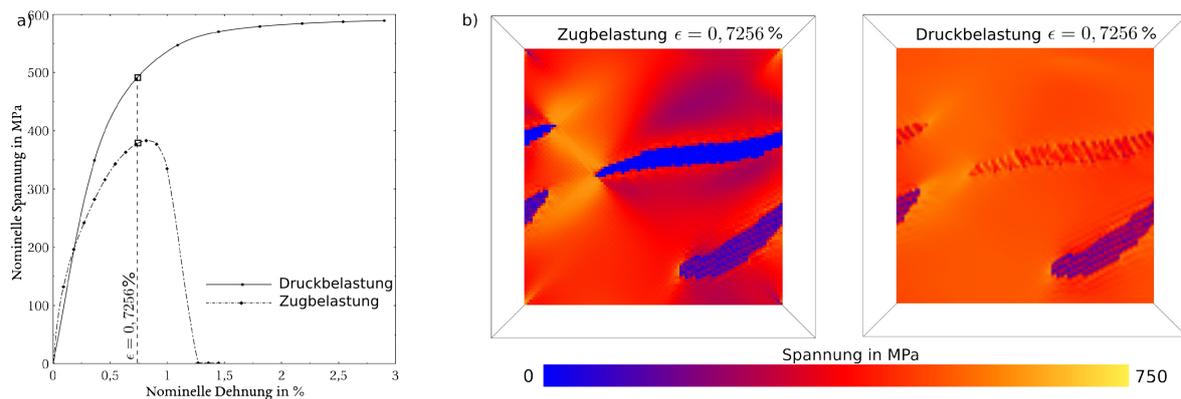


Abbildung 17.9: a) Vergleich der Spannungs-Dehnungs-Kennlinien unter Zug- und Druckbelastung. Während das Material unter Druck einer Belastung von nahezu 600 MPa und einer Dehnung von über 3 % erreicht, überwiegt bei Zugbelastung die Schädigung, was bei einer Spannung von unter 400 MPa und einer Dehnung von unter 1 % zum Verlust der Tragfähigkeit führt. b) Darstellung der Spannungsverteilung innerhalb des Gefüges bei einer betragsmäßigen Dehnung von 0,7256 %. Für die Zugbelastung sind starke Spannungsüberhöhungen zu beobachten, während unter Druck ein deutlich homogener Spannungszustand vorliegt.

die Graphitinhomogenitäten unter Druck die Last und vergrößern damit im Vergleich zur Zugbelastung die effektiv tragfähige Fläche. Verdeutlicht wird dies durch den Verlauf der Zug- und Druckkennlinien in Abbildung 17.9, a). Die Druckkennlinie besitzt im Vergleich zu der Zugbelastung bis zur Streckgrenze der Matrix einen nahezu linearen Verlauf und weist auch bei Dehnungen von über 2,5 % kein entfestigendes Verhalten auf. Die durch die Graphitlamellen gegebene Tragfähigkeit unter Druckbelastung zeigt sich in Abbildung 17.9, b) durch die Spannungsverteilung über den Querschnitt bei einer betragsmäßigen Dehnung von 0,7256 % für die Zug- und Druckbelastung. Während bei Zugbelastung die Spannungsspitzen zu einer inhomogenen Spannungsverteilung führen, ist für die Druckbelastung eine deutlich homogenere Verteilung der Spannung über den Querschnitt gegeben. Durch die Konzentration der Dehnung auf wenige Bereiche des Materials sind diese bei Zugbelastung hochbelastet, was das spröde Verhalten erklärt. Unter Druck hingegen wird durch die homogene Spannungsverteilung die Last gleichmäßig verteilt, weshalb das Material größtenteils duktilen Verhalten der Matrix aufweist. Die durchgeführten Simulationen zeigen, dass die verwendeten Modelle die charakteristischen Eigenschaften des Gusseisens qualitativ abbilden. Zur Durchführung quantitativer Rechnungen und dem Vergleich mit experimentellen Versuchsdaten müssen die Simulationen entsprechend Kapitel 15, Effektive Materialeigenschaften an einem geeigneten Simulationsgebiet, dem repräsentativen Volumenelement, durchgeführt werden. Im Folgenden wird deshalb ein Simulationsgebiet, welches diesem RVE entspricht, ermittelt.

### 17.1.3 Definition des RVE

Die Gebiete zur Ermittlung des RVE sollen möglichst genau denen einer tatsächlichen Mikrostruktur entsprechen. Aus diesem Grund wird mit den Parametern der Mikrostrukturanalyse

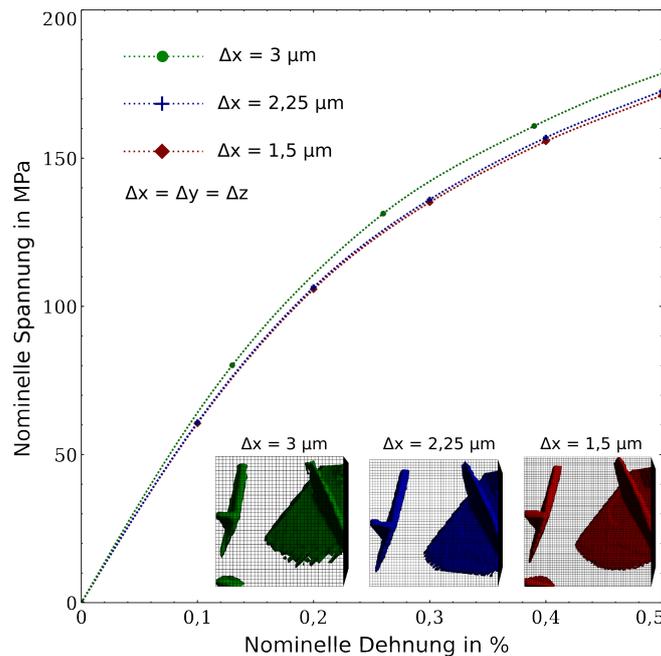


Abbildung 17.10: Bestimmung des Einflusses der Gebietsauflösung auf die effektiven Eigenschaften der Gusseisenstruktur mit den Auflösungen  $\delta x = 3 \mu\text{m}$ ,  $\delta x = 2,25 \mu\text{m}$  und  $\delta x = 1,5 \mu\text{m}$  [128].

aus Kapitel 4 durch Verwendung des in Kapitel 16 dargestellten Gebietserstellungsalgorithmus Simulationsgebiete mit unterschiedlicher Gebietsauflösung erstellt. Die Größe des Simulationsgebiets beträgt  $450 \mu\text{m}^3$ . Die Graphitlamellen haben eine maximale physikalische Länge von  $270 \mu\text{m}$  und eine Dicke von  $4,5 \mu\text{m}$  bei einem Graphitvolumenanteil von 12 Vol.%. Sie sind mit einer Sinusfunktion der Amplitude  $4,5 \mu\text{m}$  und der Frequenz von  $0,1 \text{ s}^{-1}$  überlagert. Über diese Parameter wird das in Abbildung 17.10 dargestellte Simulationsgebiet mit 3 unterschiedlichen Gitterauflösungen erstellt. Die physikalischen Längen der Gitterzelle sind  $\Delta x = 3,0 \mu\text{m}$ ,  $\Delta x = 2,25 \mu\text{m}$  und  $\Delta x = 1,5 \mu\text{m}$ . Die Auflösungen  $\Delta x = 2,25 \mu\text{m}$  und  $\Delta x = 1,5 \mu\text{m}$  erzielen nahezu identische Ergebnisse während für die Auflösung  $\Delta x = 3,0 \mu\text{m}$  eine größere Abweichung zu beobachten ist. Sie beträgt gegenüber  $\Delta x = 1,5 \mu\text{m}$  über 3% während die Abweichung von  $\Delta x = 1,5 \mu\text{m}$  zu  $\Delta x = 2,25 \mu\text{m}$  unter 1% liegt. Zur Minimierung der Rechenzeit wird als Resultat der Simulationsreihe eine Auflösung von  $\Delta x = 2,25 \mu\text{m}$  gewählt. Entsprechend der Definition des repräsentativen Volumenelements aus Kapitel 15, ist das RVE das kleinste Volumenelement, welches die effektiven Eigenschaften des Materials abbildet. Daher wird vorausgesetzt, dass die effektiven Eigenschaften nicht weiter von der Gebietsgröße abhängen. Zur Bestimmung der Größe des RVEs werden Gebiete mit unterschiedlicher physikalischer Gebietsgröße erstellt. Für jedes Gebiet wird die Mikrostruktur über identische Gebietserstellungsparameter definiert und damit die effektive Spannungs-Dehnungs-Kennlinie aus Abbildung 17.11 simuliert. Die Diagramme beinhalten die 3D-Darstellung der verwendeten Mikrostruktur sowie die Kennlinie mit den Abweichungen bezüglich weiterer Simulationen der selben Gebietsgröße und Einstellungen. Für die Gebietsgröße von  $250 \mu\text{m}^3$  weichen die Kennlinien der einzelnen Simulationen mit Zunahme der plastischen Dehnung stärker voneinander ab. Ähnliches Verhalten weist die Kennlinie des Gebiets mit  $450 \mu\text{m}^3$  auf. Im Gegensatz dazu, zeigt sich bei

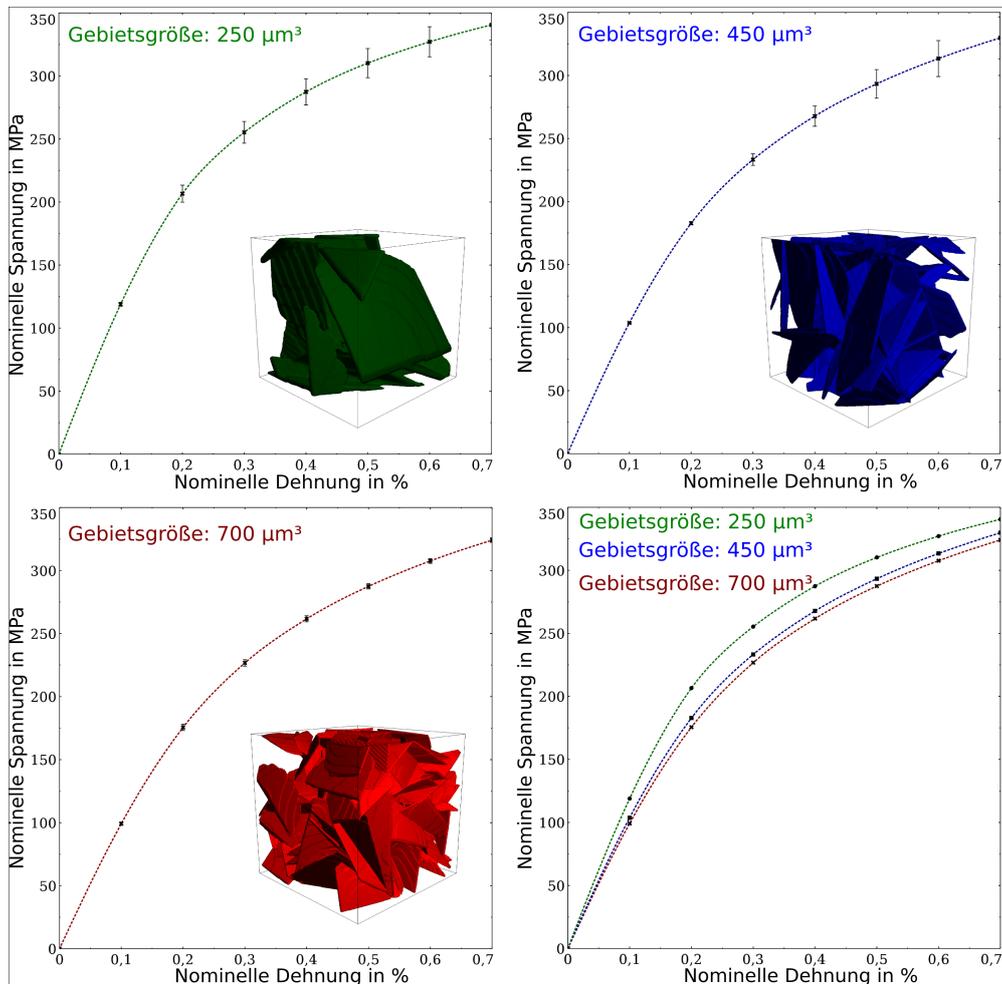


Abbildung 17.11: Bestimmung der physikalischen Größe des RVE durch die Simulation der Gebiete mit den Größen 250  $\mu\text{m}$ , 450  $\mu\text{m}$  und 700  $\mu\text{m}$  unter Verwendung sonst identischer Gebietsparameter entsprechend [128]. Während die Gebiete beiden größeren Gebiete nahezu identische Ergebnisse liefern, weichen die der Simulation des Gebiets mit der Größe 250  $\mu\text{m}$  stärker ab.

einer Gebietsgröße von  $700 \mu\text{m}^3$ , dass die Abweichung zwischen den einzelnen Simulationen der selben Gebietsgröße vernachlässigbar klein ist. Das Diagramm mit den Kennlinien aller drei Gebietsgrößen zeigt, dass die effektiven Eigenschaften mit steigendem RVE-Volumen konvergieren. Entsprechend der Simulationsergebnisse empfiehlt es sich eine Gebietsgröße im Bereich  $450 \mu\text{m}^3$ - $700 \mu\text{m}^3$  zu wählen. Auch wenn die Gebietsgröße von  $450 \mu\text{m}^3$  streng genommen nicht exakt den Anforderungen eines RVEs entsprechen und teilweise Eigenschaften eines statistischen Volumenelements aufweisen, sind die Abweichungen zu den Simulationen des  $700 \mu\text{m}^3$  Gebiets vertretbar. Als Kompromiss zwischen effektiver Berechnung bei gleichzeitig geringem Fehler wird das RVE zur Ermittlung der effektiven Eigenschaften des Gusseisens auf eine Gebietsgröße von  $540 \mu\text{m}^3$  festgelegt.

Der Abgleich des ermittelten RVE mit den experimentellen Schlibbildern, wurde bereits in Kapitel 16 in Abbildung 16.6 über die Häufigkeiten der Längen (a) und Dicken (b) dargestellt.

### 17.1.4 Materialparameter

Die finalen Materialparameter der Simulation des Gusseisens auf Größe des RVEs sind in Tabelle 17.4 aufgelistet. Die Matrix-Parameter werden so gewählt, dass sie dem charakte-

Matrix							
E	$\nu$	$\Theta_0$	$\Theta_\infty$	$\sigma_0$	$\sigma_\infty$	$s$	$r$
210 MPa	0,3	200 MPa	20 MPa	300 MPa	525 MPa	1	1,075

Graphit									
$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{33}$	$C_{44}$	$h_{0\perp}$	$h_{0s}$	$D_{\parallel}$	$D_{\perp}$	$D_s$
1060 MPa	18 MPa	1,5 MPa	3,65 MPa	0,45 MPa	0,0	0,0	1,0	1,0	1,0

Tabelle 17.4: Simulationsparameter für die Matrix und die Graphitinhomogenitäten der mesoskopischen Gefügesimulation mit Schädigung.

ristischen Verlauf eines perlitischen Stahls (siehe beispielsweise [8, 69]) entsprechen. Wie in Kapitel 3 für den Perlit beschrieben, sind die Eigenschaften stark von dem interlamellaren  $\text{Fe}_3\text{C} - \text{Fe}$ -Abstand abhängig. Dieser ist für das behandelte Gusseisen nicht genauer klassifiziert, weshalb eine Feinanpassung entsprechend der vorhandenen Druckkurven des Gusseisens durchgeführt wird. Die resultierende Kennlinie ist in Abbildung 17.12 dargestellt mit einem Vergleich der experimentellen Kennlinien eines groblamellaren perlitischen Stahls aus [69]. Für das Simulationssetup wird eine Rundprobe mit dem Längen-Dicken-Verhältnis  $L_0/d_0 = 5$  entsprechend DIN50125 [1] verwendet. Die Kennwerte der Streckgrenze und der Zugfestigkeit liegen mit den gewählten Parametern im Bereich des groblamellaren perlitischen Stahl aus [69]. Für den Graphit ergeben sich die Schädigungsparameter entsprechend der vorhergegangenen Simulationen nach der Annahme, dass der Graphit keine Zugbelastung aufnimmt ( $D_{\perp} = 1,0$ ,  $D_s = 1,0$ ), während er bei Druckbelastung durch die Risschließung Belastungen orthogonal zur Basalebene aufnimmt ( $h_{0\perp} = 0,0$ ,  $h_{0s} = 0,0$ ). Mit den gegebenen Materialparametern werden durch Simulationen die effektiven Spannungs-Dehnungs-Kennlinien des Gusseisens mit Lamellengraphit ermittelt und mit den Ergebnissen der experimentell vorhandenen Daten abgeglichen.

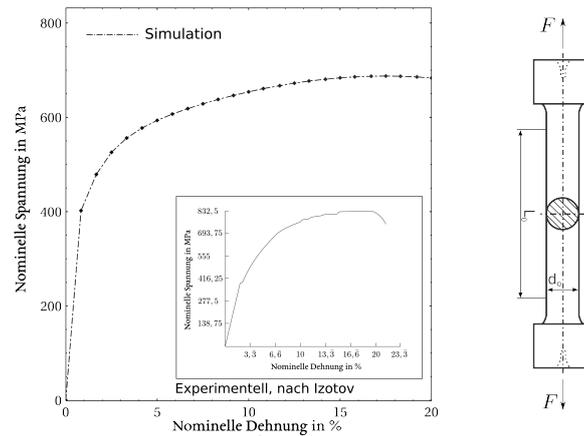


Abbildung 17.12: Simulation eines Zugversuchs mit einem Längen-Dicken Verhältnis von  $L_0/d_0 = 5$  des Matrixmaterials mit den in Tabelle 17.4 angegebenen Parametern und Darstellung der experimentellen Ergebnisse nach [69].

### 17.1.5 Simulation der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie für den Zug- und Druckbereich

Die Simulationen unter Zug- und Druckbelastung werden an einem würfelförmigen Materialausschnitt durchgeführt. Die Materialparameter werden für beide Simulationen gleich gewählt, sodass sich die Unterschiede der Zug- und Druckkennlinien alleine durch die Verwendung der Riss-schließung des Graphits ergeben. Über die Randbedingungen wird eine Belastung, die einem weggesteuerten experimentellen Versuchsaufbau entspricht, aufgebracht. Die Belastung wird dazu an den Rändern  $\partial V^{x+}$  und  $\partial V^{x-}$  über eine Verschiebung in x-Richtung angebracht. Für die übrigen Ränder wird eine periodische Spannungsrandbedingung verwendet, die über  $\bar{\sigma}_{22} = \bar{\sigma}_{33} = \bar{\sigma}_{21} = \bar{\sigma}_{23} = \bar{\sigma}_{31} = 0$  den einachsigen Zugversuch definiert. Abbildung 17.13, a) zeigt den Verlauf der experimentellen Kennlinie des Zugversuchs mit den Ergebnissen der Simulation des repräsentativen Volumenelements. Wie bereits bei den Simulationen zur Schädigung des Gusseisens zu beobachten, ergibt sich für die Kennlinie der für GJL typische nichtlineare Verlauf. Dieser Verlauf ergibt sich aus der Überlagerung von Bereichen, in denen die Matrix elastisch belastet wird und Bereichen, in denen die Matrix aufgrund der lokalen Spannungsüberhöhung zu fließen beginnt. Die bei Zugbelastung als innere Kerben wirkenden Graphitlamellen führen bereits bei einer makroskopischen Spannung  $\bar{\sigma}$  weit unter der Streckgrenze der Matrix zu lokaler Plastizität. Die einhergehende Schädigung des Materials führt bei einer Dehnung von circa  $\bar{\epsilon} = 1\%$  zu einer Entfestigung des Materials, was in guter Übereinstimmung mit der experimentell bestimmten Bruchdehnung steht. Bei Druckbelastung, Abbildung 17.13 b), ist die Steigung zunächst identisch zu der des Zugversuchs. Auch bei Druckbelastung beginnt das Material früh plastisch zu fließen, allerdings in weitaus geringerem Maße, da ein Großteil der Lamellen durch die Druckbelastung eine Kraftübertragung ermöglichen. Die Kennlinie des Gusseisens folgt aus diesem Grund deutlich stärker der des Matrixwerkstoffs. Im Vergleich zur Zugbelastung, die durch lokale Spannungsspitzen und Plastizität geprägt ist, ergibt sich für die Druckbelastung eine homogene über den Querschnitt der Probe verteilte plastische Dehnung. Für das Materialverhalten resultiert dies in einem duktilen Verhalten unter Druckbelastung und einem spröden Verhalten unter Zuglast. Der Vergleich der Zug- und Druckkennlinien in

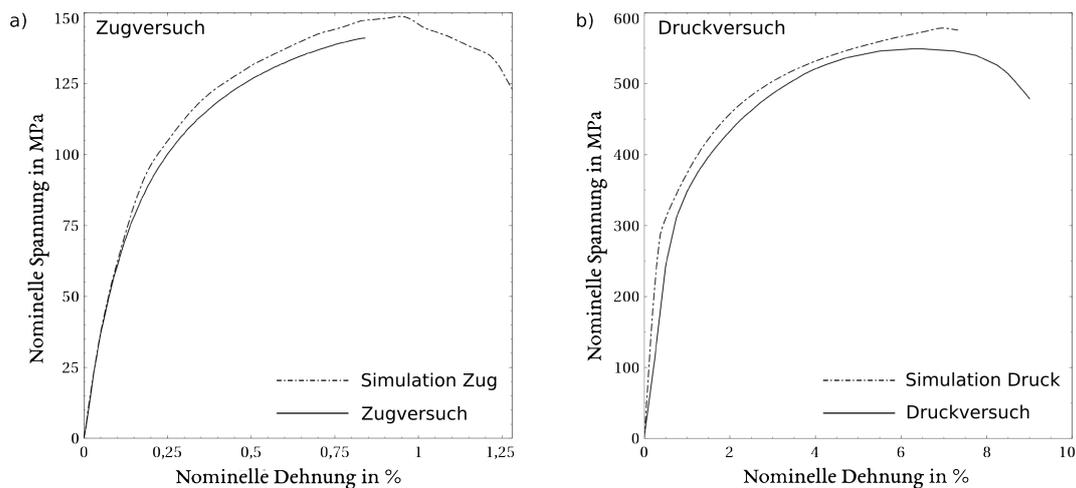


Abbildung 17.13: a) Experimentelle und simulierte Kennlinie des Zugversuchs und b) Kennlinien des Druckversuchs.

Abbildung 17.14 verdeutlicht dies anschaulich. Für den Übergang von Zug zu Druck ergibt sich bei einer zyklischen Belastung des Materials ein gewellter Verlauf der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie (schraffierter Bereich B in Abbildung 17.15). Dieses Verhalten, das auch bei den experimentell bestimmten Kennlinien nach [159] (Abbildung 17.15, b)) zu beobachten ist, wird über die Simulation eines Zug-Druck-Zyklus abgebildet. Das Material wird hierbei wieder über eine weggesteuerte Randbedingung belastet. Bei Erreichen der Maximaldehnung von 0,32 % und der damit verbundenen Spannung von 114,62 MPa sind die in Abbildung 17.15, c), A dargestellten orthogonal zur Belastungsrichtung liegenden Risse im Gefüge aktiv. Risse parallel zur Belastungsrichtung schließen sich aufgrund der Querdehnung teilweise. Wird das Material entlastet, so stellt sich zu Beginn des schraffierten Bereichs zunächst der oben behandelte Bauschinger Effekt ein, welcher dann durch die kontinuierliche Risschließung überlagert wird (Abbildung 17.15, c), B). Die damit einhergehende Erhöhung der Steifigkeit führt zu der Wellung der Kennlinie in diesem Bereich. Mit Zunahme der Druckbelastung, schließen sich die Risse weiter wodurch der Bauschinger Effekt komplett unterdrückt wird. An Punkt C in Abbildung 17.15, c) sind die Risse bis auf den Risschließungsfaktor dieser Simulation von  $h = 0,35$  geschlossen und das Material beginnt im Druckbereich zu fließen. Mit dem verwendeten Modell lassen sich damit über Zug- und Drucksimulationen quantitative Materialparameter ermitteln. Weiter zeigt der Verlauf bei einer zyklischen Belastung, dass dieser qualitativ dem experimenteller Versuche entspricht.

### 17.1.6 Bestimmung der Fließfläche

Zur Verwendung der ermittelten plastischen Kennwerte aus den Zug- und Drucksimulationen in einem makroskopischen Materialmodell wird die Fließfläche des Materials benötigt. Diese definiert den Beginn des plastischen Fließens. Hierfür wird das repräsentative Volumenelement über einen biaxialen Spannungszustand belastet. Beginnt das Material plastisch zu fließen, so wird dieser Spannungszustand als Stützstelle für die Fließfläche gespeichert. Da der Beginn des plastischen Fließens aus dem Spannungs-Dehnungs-Verlauf nicht eindeutig abgelesen werden

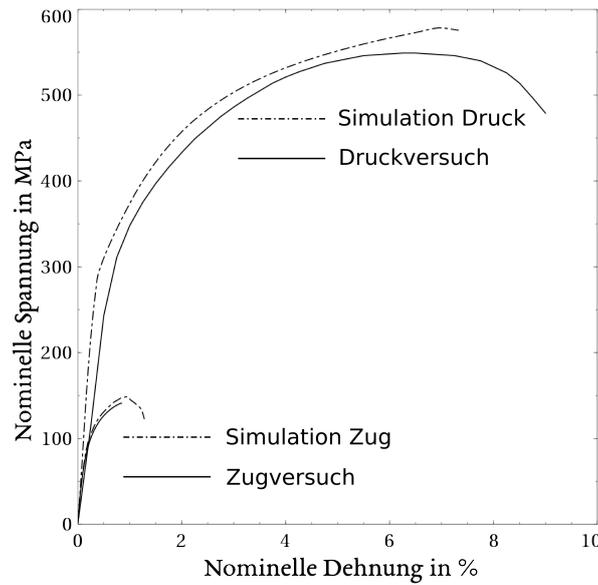


Abbildung 17.14: Kennlinien der Zug- und Druckversuche in einem Diagramm zur Verdeutlichung der Unterschiede der Zug- und Druckkennlinien.

kann, wird für die folgenden Simulationen die akkumulierte plastische Dehnung ausgewertet. Der Beginn des plastischen Fließens wird über das Volumenmittel der akkumulierten plastischen Dehnung

$$\bar{\epsilon}_{\text{pl}} = \frac{1}{V} \int_V \epsilon_{\text{pl}} dv > 0.05 \%$$

definiert. Dadurch wird sichergestellt, dass ein definierter Schwellwert zur Bestimmung der Fließfläche verwendet wird und somit nicht durch Fehler beim Ablesen beeinflusst wird. Es muss jedoch beachtet werden, dass der bestimmte Spannungszustand sehr wohl vom Wert des Abbruchparameters abhängt. Entsprechend Abbildung 17.16 werden die 12 biaxialen Spannungszustände aus Tabelle 17.5 simuliert und ausgewertet. Die Spannungszustände

Simulation	1)	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)	10)	11)	12)
$\sigma_1$ in MPa	800	0	800	800	-800	-400	-800	800	464	0	-800	-800
$\sigma_k$ in MPa	0	-800	800	-800	-800	-800	-400	464	800	800	0	800

Tabelle 17.5: Werte der Spannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_k$  zur Bestimmung der makroskopischen Fließfläche.

werden dabei über eine flache Rampe angefahren und die Simulation abgebrochen, sobald der Schwellwert der akkumulierten plastischen Dehnung erreicht ist. Für die daraus ermittelte Fließfläche ergibt sich die in Abbildung 17.17, a) dargestellte Form. Wie zu erwarten, beginnt das Material unter Zugbelastung deutlich früher zu fließen als unter Druckbelastung. Dies ist zum einen für die eindimensionalen Spannungszustände aus den Simulationen 1, 2, 10 und 11 ersichtlich und geht bereits aus den zuvor simulierten Zug- und Druckversuchen hervor. Noch deutlicher tritt der Effekt bei zweiachsiger Zug- bzw. Druckbelastung der

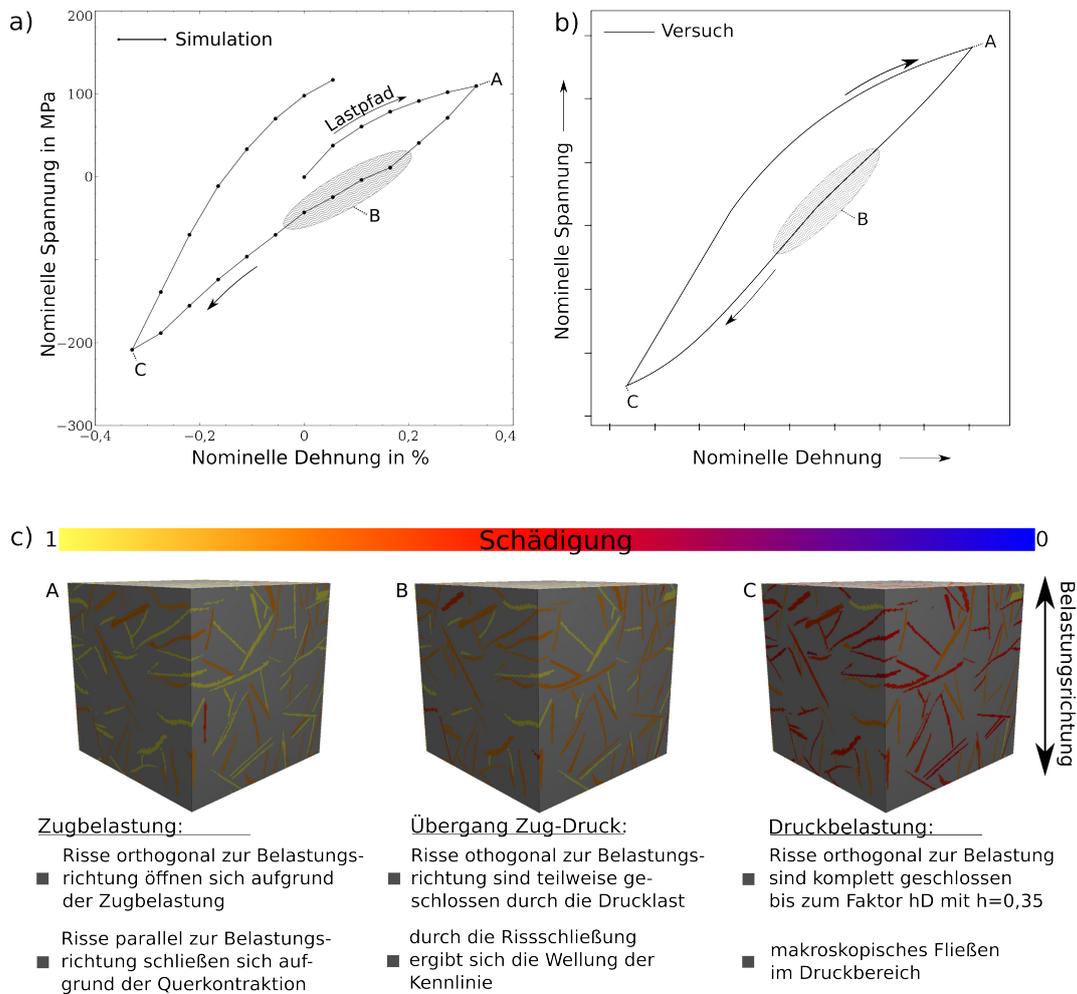


Abbildung 17.15: a) Simulation eines Zug-Druck-Zyklus des Gusseisens und b) die nachgezeichnete Kennlinie eines experimentellen Versuchs nach [159] mit dem markierten gewellten Übergang beim Lastwechsel zwischen Zug- und Druckbelastung [128]. In c) ist die dazugehörige Schädigung der Graphitlamellen an den Punkten A, B und C der Kennlinie dargestellt [128].

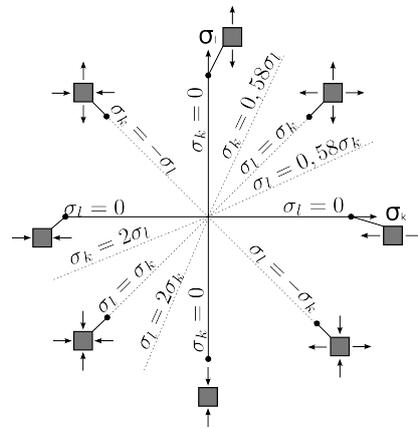


Abbildung 17.16: Darstellung der 12 Spannungszustände zur Ermittlung der makroskopischen Fließfläche des Gusseisens entsprechend [128], deren Werte in Tabelle 17.16 zusammengefasst sind.

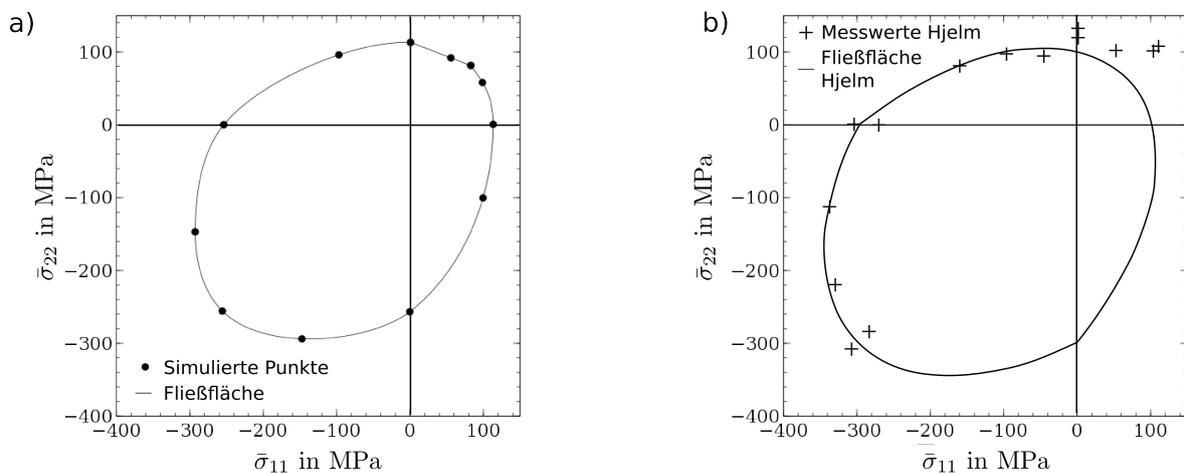


Abbildung 17.17: Qualitativer und quantitativer Vergleich der über die RVE-Simulationen ermittelten Fließfläche links und der experimentell bestimmten Fließfläche von Hjelm [62] entsprechend [128]. Die simulierte Fließfläche weist entsprechend der Annahmen von Hjelm einen deutlichen Zug-Druck-Unterschied auf, was zu der charakteristischen Ei-Form führt.

T in °C	Eurocode3 [3]		ASCE Manual [125]		Chen et al. [29]	
	$\frac{E(T)}{E(20^\circ\text{C})}$	$\frac{\sigma_f(T)}{\sigma_f 20^\circ\text{C}}$	$\frac{E(T)}{E(20^\circ\text{C})}$	$\frac{\sigma_f(T)}{\sigma_f 20^\circ\text{C}}$	$\frac{E(T)}{E(20^\circ\text{C})}$	$\frac{\sigma_f(T)}{\sigma_f 20^\circ\text{C}}$
20	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
240	0,98	0,89	0,86	1,0	0,92	0,86
440	0,94	0,80	0,66	0,91	0,75	0,64
540	0,87	0,75	0,48	0,65	0,62	0,48

Tabelle 17.6: Abminderungsfaktoren des Elastizitätsmoduls und der Streckgrenze für den Temperaturbereich 20 °C - 540 °C nach [3, 125, 29]

Simulationen 3 bzw. 5 auf. Die für diese Ebene ursprünglich ellipsoide von-Mises-Fließfläche des Matrixmaterials geht demnach für das Gusseisen in eine Eiförmige Fließfläche über, deren Ursprung in den Druckbereich verschoben ist. Die in Abbildung 17.17, b) dargestellte Fließfläche geht auf die experimentellen Untersuchungen von Hjelm [62] zurück. In dieser Arbeit wird die Fließfläche über einen ähnlichen Ansatz durch experimentelle Versuche (Messpunkte in Abbildung 17.17, b)) ermittelt. Zusätzlich schlägt Hjelm die über die durchgezogene Linie dargestellte Mehrflächen-Fließfläche bestehend aus einer Mises-Fließfläche und einer Mises-Schleicher-Fließfläche durch den Zusammenhang

$$\Phi_{\text{Hjelm}}(\boldsymbol{\sigma}) = \begin{cases} \Phi_1 = \Phi_{\text{MS}} := \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}' + \frac{1}{3}\sigma^o(\sigma_{y,c} - \sigma_{y,t}) - \frac{1}{3}\sigma_{y,c}\sigma_{y,t}, & \sigma^o > -\sigma_{y,c} \\ \Phi_2 = \Phi_{\text{M}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}' - \frac{1}{3}\sigma_{y,c}^2, & \sigma^o \leq -\sigma_{y,c}. \end{cases}$$

als Fließfläche für GJL vor. Die über die Simulationen des RVEs und die experimentelle Fließfläche von Hjelm zeigen hierbei eine sehr gute Übereinstimmung.

### 17.1.7 Spannungs-Dehnungs-Kennlinie bei erhöhten Temperaturen

Für die Anwendung in den Bremsscheibensimulationen sind aufgrund der hohen thermischen Belastung Materialkennwerte bis hin zu einem Temperaturbereich von 1000 °C notwendig. Wie in Abschnitt 4 dargestellt, werden diese Daten bei der Daimler AG mittels experimenteller Zug- und Druckversuche bestimmt. Die Durchführung experimenteller Zug- und Druckversuche wird für steigende Temperaturen deutlich aufwendiger und damit kostenintensiver. Aus diesem Grund werden in einer Simulationsstudie die Materialkennwerte des Gusseisens für die Temperaturen 240 °C, 440 °C und 540 °C ermittelt und mit den Versuchsergebnissen der Daimler AG verglichen. Die Materialparameter der Matrix werden entsprechend der Abminderungsfaktoren aus Kapitel 3 für Baustähle festgelegt. Über diese Parameter wird der Abfall des Elastizitätsmoduls und der Streckgrenze beschrieben. Für das verwendete Verfestigungsgesetz werden über die Abminderungsfaktoren der Streckgrenze die beiden Parameter  $\sigma_0$  und  $\sigma_\infty$  beeinflusst. Die Steigungen  $\Theta_0$  und  $\Theta_\infty$  werden als konstant angenommen. Die Abminderungsfaktoren aus Kapitel 3 sind für die drei Temperaturen in Tabelle 17.6 nochmals zusammengefasst. Die Werte der Abminderungsfaktoren der drei Quellen aus Tabelle 17.6 weichen teilweise sehr stark voneinander ab. Um den Einfluss der Abweichung auf die effektive Spannungs-Dehnungs-Kennlinie zu ermitteln, wird in [59] in einer ersten Simulationsreihe je eine Simulation pro Parameterpaar der drei unterschiedlichen Quellen durchgeführt. Die ermittelten Kennlinien werden mit den Ergebnissen der experimentellen Zugversuche der

Daimler AG verglichen. Das Simulationsgebiet ist das oben bestimmte RVE. Der Elastizitätsmodul sowie die Streckgrenze  $\sigma_0$  und der Parameter  $\sigma_\infty$  der Matrix sind in Tabelle 17.7 aufgelistet. Die Querkontraktionszahl  $\nu = 0,288$ , genau wie die Plastizitätsparameter  $\Theta_0 = 150$  MPa und  $\Theta_\infty = 0,6$  MPa sind für die unterschiedlichen Temperaturen konstant. Die Eigenschaften unterscheiden sich von der vorhergehenden Simulation dahingehend, dass die Matrix ohne Schädigung simuliert wird. Daraus ergibt sich der Unterschied in den plastischen Materialparametern. Der Einfluss des Graphits beschränkt sich größtenteils auf den Parameter

T	Eurocode3 [3] in MPa			ASCE Manual [125] in MPa			Chen [29] in MPa		
	E	$\sigma_0$	$\sigma_\infty$	E	$\sigma_0$	$\sigma_\infty$	E	$\sigma_0$	$\sigma_\infty$
20 °C	210	185	475	210	185	475	210	185	475
240 °C	180,6	185	475	193,2	159,1	408,5	205,8	164,65	422,75
440 °C	138,6	168,35	432,25	157,5	118,4	304	197,4	148	380
540 °C	100,8	120,25	308,75	130,2	88,8	228	182,7	138,75	356,25

Tabelle 17.7: Elastizitätsmodul, Streckgrenze  $\sigma_0$  und  $\sigma_\infty$  der Matrix in MPa für die Temperaturen von 20 °C, 240 °C, 440 °C und 540 °C entsprechend den Abminderungsfaktoren nach [3, 125, 29].

$C_{33}$ , welcher die Steifigkeit orthogonal zur Basalebene beschreibt. In [73] wird der Einfluss der Temperatur auf diesen Parameter als vernachlässigbar klein beschrieben, weshalb die Eigenschaften des Graphits als konstant angenommen werden. In Abbildung 17.18 sind die Kennlinien der Simulation und der experimentellen Versuche für Raumtemperatur (a), 240 °C (b), 440 °C (c) und 540 °C (d) dargestellt. Wie bei Betrachtung der Abminderungsfaktoren zu erwarten, unterscheiden sich die Verläufe der simulierten Kennlinien teilweise deutlich. Mit steigender Temperatur nimmt die Abweichung zu, wobei auch die experimentellen Zugversuche teilweise eine große Abweichung aufweisen. Es zeigt sich aber deutlich, dass die über die Abminderungsfaktoren simulierten Kennlinien sich im Bereich der experimentellen Versuchsergebnisse bewegen und somit die getroffenen Annahmen als sinnvoll zu erachten sind. Dadurch, dass auch die experimentellen Kennlinien stark voneinander abweichen, kann keine Wertung der einzelnen Abminderungsfaktoren getroffen werden. Für die im Folgenden durchgeführte Simulation unter Einbeziehung der Schädigung wird daher mit einem aus den drei Quellen gemittelten Abminderungsfaktor gerechnet. Die Materialparameter ergeben sich danach entsprechend Tabelle 17.8. Die Plastizitätskennwerte  $\Theta_0 = 200$  MPa und  $\Theta_\infty = 20$  MPa

T	E	$\sigma_0$	$\sigma_\infty$	$\frac{E(T)}{E(20^\circ\text{C})}$	$\frac{\sigma_f(T)}{\sigma_f 20^\circ\text{C}}$
20 °C	210	300	525	1	1
240 °C	193,2	247,8	480,9	0,92	0,91
440 °C	163,8	234,9	411,075	0,78	0,78
540 °C	136,5	187,8	328,65	0,65	0,62

Tabelle 17.8: Elastizitätsmodul, Streckgrenze  $\sigma_0$  und  $\sigma_\infty$  der Matrix in MPa für die Temperaturen von 20 °C, 240 °C, 440 °C und 540 °C mit den gemittelten Abminderungsfaktoren nach [3, 125, 29].

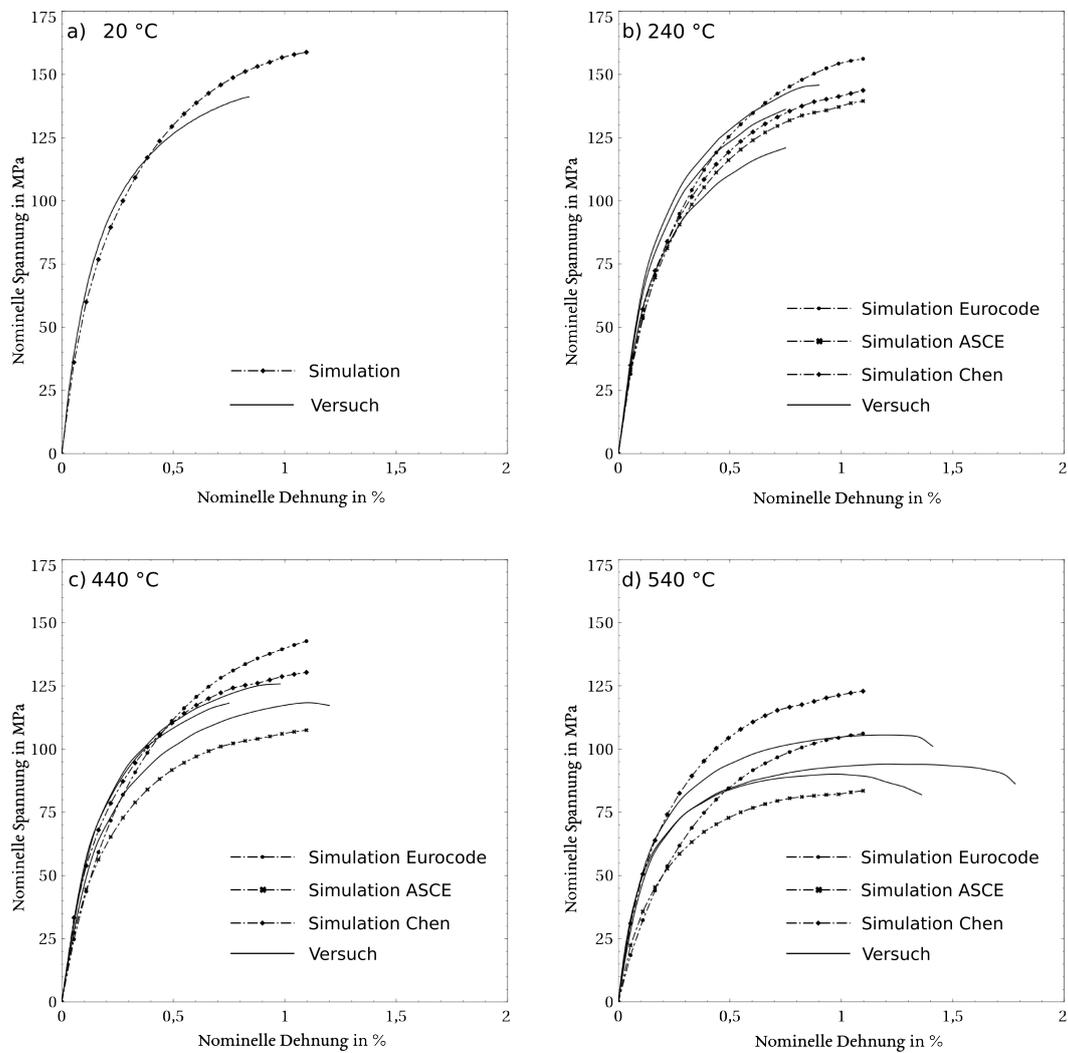


Abbildung 17.18: Simulationen der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie mit den drei unterschiedlichen Abminderungsfaktoren entsprechend [3, 125, 29] für die Temperaturen 20°C (a), 240°C (b), 440°C (c) und 540°C (d) im Vergleich mit experimentellen Ergebnissen.

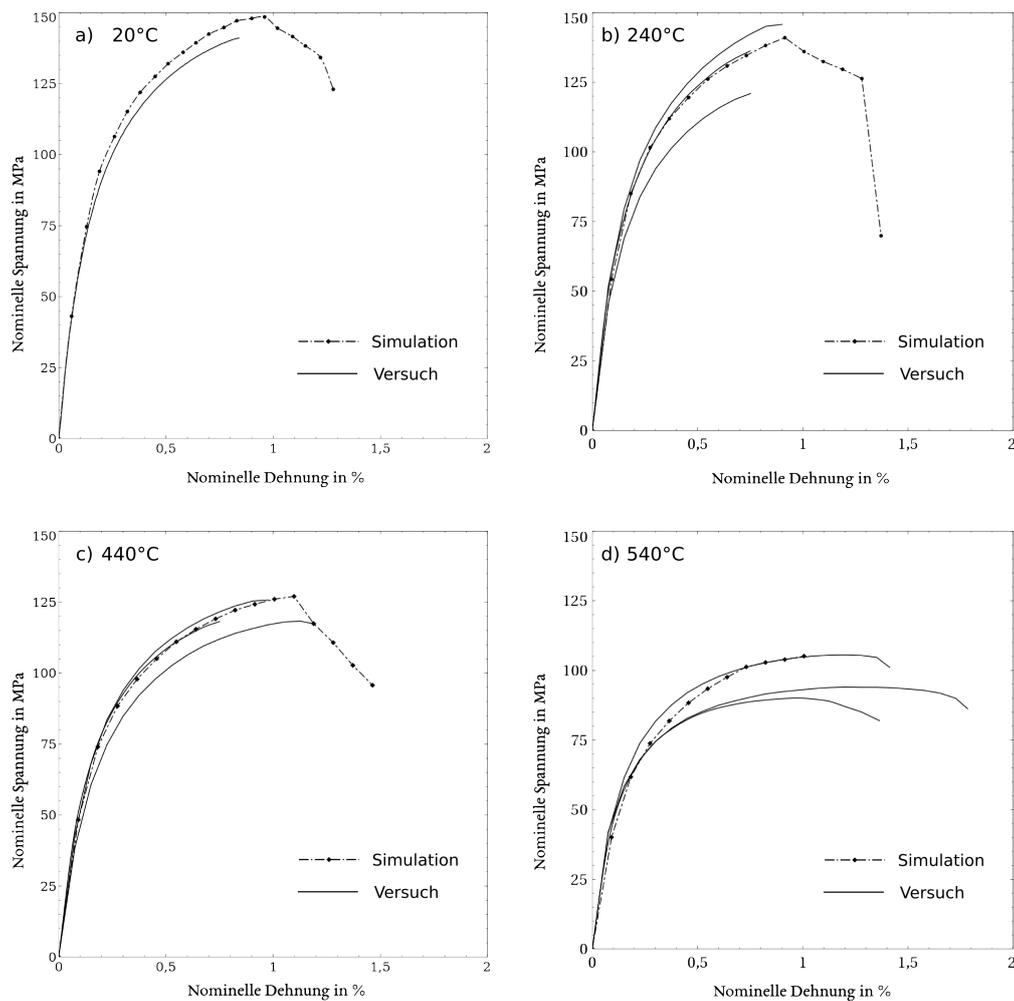


Abbildung 17.19: Simulationen mit dem Mittelwert der Abminderungsfaktoren und unter Einbeziehung der Schädigung der Matrix für die Temperaturen 20 °C (a), 240 °C (b), 440 °C (c) und 540 °C (d) im Vergleich mit experimentellen Ergebnissen.

werden wieder als konstant angenommen, genau wie die Schädigungsparameter  $s = 1$  und  $r = 1,075$ . Abbildung 17.19 zeigt, dass die simulierten Kennlinien für den Temperaturbereich  $240^{\circ}\text{C} \leq T \leq 540^{\circ}\text{C}$  jeweils im oberen Teil des durch die experimentellen Kennlinien gegebenen Bereichs liegen. Für Temperaturen bis  $440^{\circ}\text{C}$  ist eine gute Übereinstimmung der Bruchdehnung von Simulation zu Experiment gegeben. Ab einer Temperatur von  $540^{\circ}\text{C}$  nimmt diese deutlich zu, was über die Simulation nicht abgebildet wird. Hierzu müsste zunächst die Temperaturabhängigkeit des Schädigungsparameters  $r$  ermittelt werden.

### 17.1.8 Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit

Wie in Abschnitt 3 und 2 erläutert, ist einer der Hauptgründe des Einsatzes von GJL als Bremsplattenmaterial seine gute Wärmeleitfähigkeit. Diese ergibt sich durch das enge

Geflecht der Graphitlamellen, welches die Matrix durchzieht. Auch dieser Parameter wird durch den Ansatz der Simulation eines repräsentativen Volumenelements ermittelt. Für die Matrix ergibt sich entsprechend der mechanischen Eigenschaften auch für das thermische Verhalten die Isotropie und wird allein über den Wärmeleitkoeffizient  $\lambda_m = 44 \text{ W/mK}$  und die spezifische Wärmekapazität  $c_{v,m} = 548 \text{ J/kgK}$  beschrieben [6]. Für den Graphit wird aufgrund der Anisotropie die allgemeine Formulierung der Wärmeleitung mit dem tensoriellen Wärmeleitkoeffizienten verwendet, der sich zu

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_{\parallel} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\parallel} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{\perp} \end{pmatrix}$$

ergibt. Die Werte ergeben sich nach [73] zu  $\lambda_{\parallel} = 196 \text{ W/mK}$ ,  $\lambda_{\perp} = 4,2 \text{ W/mK}$  und für die Wärmekapazität  $c_{v,g} = 875 \text{ J/kgK}$ . Über die in Abschnitt 15.4, Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit beschriebene Methode zur Bestimmung der effektiven Wärmeleitfähigkeit von heterogenen Materialien wird für das simulierte Gusseisen ein Wert von  $52,6 \text{ W/mK}$  bestimmt. Der Wert ist in sehr guter Übereinstimmung mit dem in der Literatur für diese Art von Gusseisen mit Lamellengraphit (GJL-150) beschriebenen Wärmeleitfähigkeit von  $52,5 \text{ W/mK}$  (siehe Kapitel 3).

## 17.2 Makroskopische Brems Scheibensimulation

Die makroskopische Simulation der Brems Scheibe dient dazu, die Belastung während des Bremsvorgangs abzubilden und die auftretenden Spannungen im Bauteil sowie dessen Verformungsverhalten zu analysieren. Durch die Auswertung der Spannungen und Dehnungen wird in erster Linie ermittelt, ob das Bauteil für die auftretende Belastung ausreichend dimensioniert ist. Die Verformung gibt Aufschlüsse über das Schirmungsverhalten der Scheibe und über das Auftreten von Unebenheiten. Im Vordergrund dieser Arbeit steht dabei, die Schirmung, Temperaturverteilung und dem Einfluss des Materialmodells auf die Belastung zu analysieren. Die Dimensionierung und konstruktive Maßnahmen zur Bauteiloptimierung werden daher nicht behandelt.

### 17.2.1 Simulationsaufbau

Die Simulation wird an der in Abbildung 17.20 dargestellten Lkw-Brems Scheibe durchgeführt. Der Außenradius der Reibfläche beträgt  $r_a = 18,4 \text{ cm}$  und der Innenradius  $r_i = 16,6 \text{ cm}$  bei einer Dicke des Scheibenrotors von  $d_R = 3,4 \text{ cm}$ . Die über die Stege der Innenbelüftung verbundene obere und untere Reibfläche hat jeweils eine Dicke von  $d_r = 1,2 \text{ cm}$ . Einige Simulationen werden an einer Scheibe ohne Innenbelüftung durchgeführt. Deren Maße sind mit denen der innenbelüfteten Scheibe identisch, wobei der Parameter  $d_r$  entfällt. Die Beanspruchung ergibt sich aus dem Abbremsvorgang eines Lkw der Masse  $m = 10250 \text{ kg}$ . Die Ausgangsgeschwindigkeit von  $v_0 = 80 \text{ km/h}$  wird innerhalb von  $t_b = 3,5 \text{ s}$  linear bis zum Stillstand des Lkw ( $v_{3,5} = 0 \text{ km/h}$ ) reduziert. Über die Lastverteilung von 60-40 werden 60 % der Last von der simulierten Achse aufgenommen. Der Reifenradius beträgt  $52,2 \text{ cm}$ . Die Temperatur der Scheibe zum Zeitpunkt  $t = 0 \text{ s}$  wird entsprechend den Simulationen der Daimler AG mit  $50 \text{ °C}$  angenommen

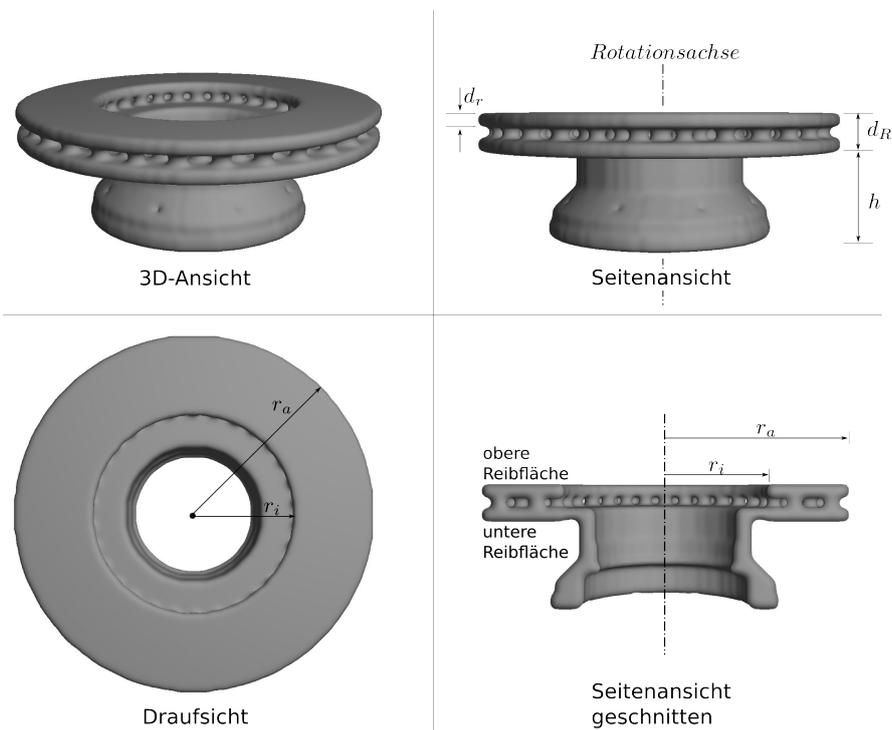


Abbildung 17.20: 3D-Ansicht der Bremsscheibe sowie Seitenansicht und Draufsicht mit den Bauteilabmessungen Innenradius der Reibfläche  $r_i = 9,2$  cm, Außenradius der Reibfläche  $r_a = 16,6$  cm, Dicke Rotor  $d_R = 3,4$  cm, Dicke der Reibfläche  $d_r = 1,2$  cm sowie die Höhe  $h = 8$  cm.

Temperatur in °C	spez. Wärme- kapazität $c_v$ in J/kgK	thermische Leitfähigkeit $k$ in W/m <sup>2</sup> K
bis 20	473	56.92
20 - 100	547	56.07
100 - 200	582	51.36
200 - 300	618	47.27
300 - 400	649	43.33
400 - 500	704	40.61
500 - 600	818	39.70
600 - 700	948	35.65
700 - 800	798	37.93
800 - 900	802	38.53
900 - 1000	815	39.15

Tabelle 17.9: Wärmeübertragungs- und Emissionskoeffizienten der unterschiedlichen Bereiche der Bremsscheibe entsprechend den Angaben der Daimler AG.

und die Umgebungstemperatur beträgt 20 °C. Das Simulationsgebiet wird mit einer Auflösung von  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 2$  mm diskretisiert. Die Parameter für die thermische Leitfähigkeit des Materials sowie die Wärmekapazität sind in Tabelle 17.9 für den Temperaturbereich  $20\text{ °C} \leq T \leq 1000\text{ °C}$  aufgelistet. Die Wärmeübergangs- und Abstrahlwerte ergeben sich entsprechend Abbildung 14.10 und Tabelle 17.9 aus Kapitel 14, Randbedingungen. Die Dichte des Werkstoffs beträgt  $7250\text{ kg/m}^3$ . Die mechanischen Eigenschaften für das aus den mesoskopischen Materialsimulationen abgeleitete Materialmodell zur Unterscheidung zwischen Zug- und Druckbereich des Gusseisens mit Lamellengraphit werden entsprechend den experimentell ermittelten Werten der Daimler AG bis zu einer Temperatur von 1000 °C angepasst. Die Kennlinien für die gewählten Simulationsparameter gehen bei hoher plastischer Dehnung, wie in Abbildung 17.21 dargestellt, in ein idealplastisches Materialverhalten über. Dies ist über den Parameter  $\Theta_{\infty,z} = 0$  in Tabelle 17.10 für alle Temperaturen gegeben. Die Parameter für den Elastizitätsmodul  $E$  sowie die plastischen Parameter  $\Theta_{0,z}$ ,  $\Theta_{\infty,z}$ ,  $\sigma_{y,0,z}$  und  $\sigma_{y,\infty,z}$  sind für den Temperaturbereich  $20\text{ °C} \leq T \leq 1000\text{ °C}$  in Tabelle 17.10 aufgelistet. Für den Druckbereich sind lediglich experimentelle Daten bei Raumtemperatur vorhanden. Die Parameter bei erhöhten Temperaturen bis 1000 °C werden daher aus dem Verhältnis

$$p_{\Theta,d} = \frac{p_{20\text{ °C},d}}{a}$$

mit

$$a = \frac{p_{20\text{ °C},z}}{p_{\Theta,z}}$$

berechnet und somit in gleichem Maße reduziert wie die Eigenschaften unter Zugbelastung. Die Parameter sind in Tabelle 17.11 zusammengefasst. Mit diesem Simulationsaufbau wird zunächst das Schirmungsverhalten der Scheibe aufgrund der Belastung des Bremsvorgangs analysiert.

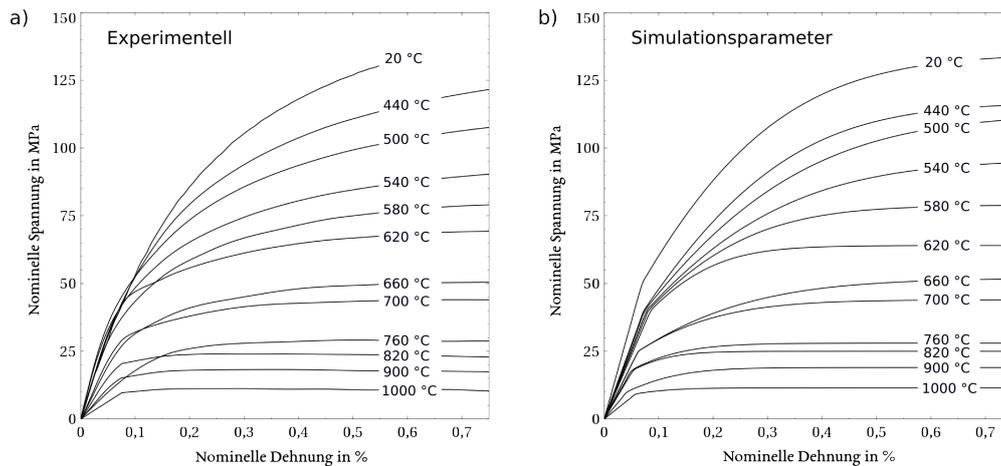


Abbildung 17.21: a) Vergleich der experimentellen Kennlinien und b) den über die Simulationsparameter aus Tabelle 17.10 erzielten simulierten Kennlinien des eindimensionalen Zugversuchs.

	20 °C	440 °C	500 °C	540 °C	580 °C	620 °C
$E$ in GPa	72,1	72,1	55	54	51,5	49,5
$\Theta_{0,z}$ in MPa	30	30	22,5	18,5	18,5	18,5
$\Theta_{\infty,z}$ in MPa	0	0	0	0	0	0
$\sigma_{y,0,z}$ in MPa	50	40	40	40	40	40
$\sigma_{y,\infty,z}$ in MPa	135	117	113	96	79	64
	660 °C	700 °C	760 °C	820 °C	900 °C	1000 °C
$E$ in GPa	47	40	40	36	34	24
$\Theta_{0,z}$ in MPa	10	10	8,5	8,5	8,5	2,5
$\Theta_{\infty,z}$ in MPa	0	0	0	0	0	0
$\sigma_{y,0,z}$ in MPa	25	25	18	18	10	9,25
$\sigma_{y,\infty,z}$ in MPa	52	44	28	25	19	12

Tabelle 17.10: Simulationsparameter des Plastizitätsmodells unter Zugbelastung.

### 17.2.2 Schirmungsverhalten der Brems Scheibe

Am Kontaktbereich zwischen Bremsbelag und Brems Scheibe ergibt sich durch die Reibung eine Temperaturerhöhung, welche über die in Kapitel 14 beschriebene makroskopische Randbedingung aufgebracht wird. Die damit verbundene thermische Ausdehnung führt bei der simulierten Scheibe zu dem in Kapitel 2 beschriebenen Phänomen der Bremsenschirmung bei der die Reibflächen der Scheibe von Planflächen in Kegelflächen übergehen. Abbildung 17.22 zeigt den Verlauf der Schirmung für die Zeitpunkte  $t = 0,6\text{ s}$ ,  $t = 1,2\text{ s}$ ,  $t = 2,4\text{ s}$  und  $t = 3,6\text{ s}$  bei einer 15-fach vergrößerten Darstellung der Verschiebung. Zum Zeitpunkt  $t = 0,6\text{ s}$  dehnt sich das Material aufgrund des Wärmeeintrags auf der Reibfläche der Scheibe in diesem Bereich aus, während der restliche Teil der Scheibe nahezu die Ausgangstemperatur von  $50\text{ °C}$  besitzt. Dies

	20 °C	440 °C	500 °C	540 °C	580 °C	620 °C
$E$ in GPa	72,1	72,1	55	54	51,5	49,5
$\Theta_{0,d}$ in MPa	57,5	57,5	43,1	35,4	35,4	35,4
$\Theta_{\infty,d}$ in MPa	0	0	0	0	0	0
$\sigma_{y,0,d}$ in MPa	250	200	200	200	200	200
$\sigma_{y,\infty,d}$ in MPa	550	476	460	391	321	260
	660 °C	700 °C	760 °C	820 °C	900 °C	1000 °C
$E$ in GPa	47	40	40	36	34	24
$\Theta_{0,d}$ in MPa	19,1	19,1	16,2	16,2	16,2	4,79
$\Theta_{\infty,d}$ in MPa	0	0	0	0	0	0
$\sigma_{y,0,d}$ in MPa	125	125	90	90	50	46,25
$\sigma_{y,\infty,d}$ in MPa	211,8	179	114	101	77	47

Tabelle 17.11: Simulationsparameter des Plastizitätsmodells unter Druckbelastung.

Nr.	Bremsscheiben Geometrie	Gewichtung der Verschiebung	Materialmodell	Belaggröße in %	Schirmung $\Delta y$ in mm
1	Innenbelüftet	keine	plastisch	100	0,0010683
2	Innenbelüftet	linear	plastisch	100	0,0010844
3	Innenbelüftet	quadratisch	plastisch	100	0,0014180
4	Vollscheibe	quadratisch	elastisch	100	0,0011465
5	Vollscheibe	quadratisch	plastisch	100	0,0012232
6	Innenbelüftet	quadratisch	plastisch	62,5	0,0014775
7	Innenbelüftet	quadratisch	plastisch	31,25	0,0013010

Tabelle 17.12: Auswertung der Schirmung für unterschiedliche Brems Scheibengeometrien (Vollscheibe, innenbelüftete Scheibe), Gewichtungsfunktionen, Materialmodelle sowie Belaggrößen zum Zeitpunkt  $t = 3, 6$  s.

führt zu der in Abbildung 17.22 dargestellte Verformung der Scheibe mit den entstehenden "Spitzen" am äußeren Radius der Scheibe. Bei  $t = 1,2$  s verstärkt sich dieses Verhalten durch die weitere Erwärmung der Scheibe und die Ausbreitung der Temperatur in die der Reibfläche angrenzenden Bereiche. Eine leichte Schirmung der Scheibe ist bereits zu diesem Zeitpunkt zu beobachten. Diese wird zum Zeitpunkt  $t = 2,4$  s deutlicher erkennbar, während sich die Spitzen aufgrund der nun gleichmäßiger verteilten Temperatur zurückbilden. Zum Zeitpunkt  $t = 3,6$  s sind die "Spitzen" nahezu komplett zurückgebildet und es überwiegt die Schirmung der Scheibe. Das Verhalten der Brems Scheibenverformung mit zunehmender Belastungsdauer entspricht damit sehr gut dem in [19] beschriebenen Verhalten, welches in Kapitel 2, in Abbildung 2.5 beschrieben wird. Auch die Richtung der Verformung, hier in negative y-Richtung, entspricht der für diese Konstruktion von Brems Scheiben üblichen Verformung [19] in Richtung der am Brems stopf angebundenen Reibfläche. Die Schirmung für diese Simulation beträgt nach 3,6 s  $\Delta y = 0,010683$  mm. Die Schirmungswerte für weitere Simulationen sind mit dem zugehörigen Simulationssetup in Tabelle 17.12 aufgelistet. Es wird deutlich, dass die Schirmung unter Verwendung der in Kapitel 14 vorgestellten Gewichtungsfunktion zunimmt und speziell für die

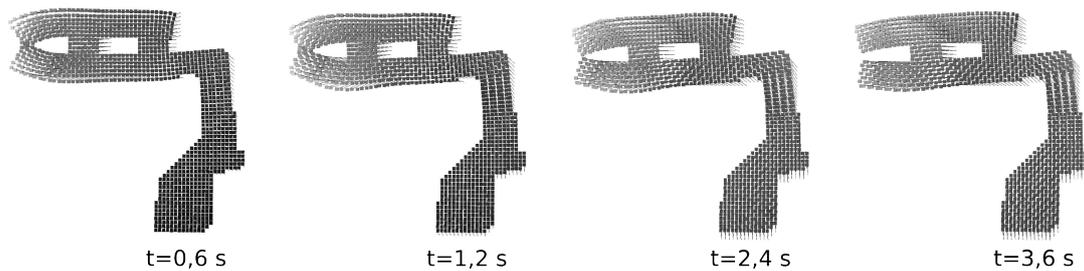


Abbildung 17.22: Schirmungsverhalten der Bremsscheibe über den Zeitraum von 3,6 s des Bremsvorgangs an einem Schnitt durch die Bremsscheibe. Zu Beginn ( $t = 0,6\text{ s} - 1,2\text{ s}$ ) der Bremsung ist eine Ausdehnung der Bereiche nahe der Reibfläche durch die hohen Temperaturen vorhanden, was zu den Spitzen am äußeren Radius der Reibflächen führt. Mit zunehmender Bremsdauer verteilt sich die Temperatur im Reibring, was zu der Schirmung der Scheibe führt.

quadratische Gewichtung am größten wird. Dies wird beim Vergleich von Simulation Nr.2 und Nr.3 deutlich. Weiter zeigt sich, dass die Schirmung für die innenbelüftete Scheibe größer ist als bei der vergleichbaren Simulation der Vollscheibe. Der Einfluss der Belaggröße lässt sich nicht eindeutig aus den durchgeführten Simulationen bestimmen. Zunächst ist ein Anstieg der Schirmung von  $\Delta y = 0,0014180\text{ mm}$  auf  $\Delta y = 0,0014774\text{ mm}$  für die Reduzierung des Belags auf 62,5% zu beobachten. Bei einer Belaggröße von 31,25% ausgehend von der ursprünglichen Größe, nimmt die Schirmung jedoch ab und beträgt lediglich  $\Delta y = 0,0013010\text{ mm}$ . Die Gewichtungsfunktion hat in Anbetracht der Schirmungswerte damit den größten Einfluss auf die Schirmung. In umgekehrter Weise beeinflusst die Schirmung über die Gewichtungsfunktion auch direkt die Temperaturverteilung auf der Reibfläche der Scheibe wie in folgendem Abschnitt beschrieben wird.

### 17.2.3 Temperaturverteilung auf der Reibfläche der Bremsscheibe

Um den Einfluss der Schirmung und der Verformung der Scheibe auf die Temperaturverteilung auf der Reibfläche der Scheibe zu verstehen, wird zunächst eine Simulation durchgeführt, bei der der Kontakt zwischen Bremsscheibe und Bremsbelag als ideal angenommen wird. Das heißt, dass die Last gleichmäßig über die gesamte Fläche des Bremsbelags auf die Scheibe aufgebracht wird und somit die Verformung der Scheibe und der damit verbundene ungleichmäßige Anpressdruck nicht berücksichtigt wird. Für eine Messung der Temperatur über einen beliebigen Umfang auf der Reibfläche wird entsprechend Abbildung 17.23 für den Radius  $r_T$  für den Winkel  $\varphi$  die Temperatur entnommen. Die Temperaturverteilung über den Umfang der Scheibe für die obere und untere Reibfläche für den Radius  $r_T = 16\text{ cm}$  ist wie in Abbildung 17.24 dargestellt, nahezu gleichmäßig. Die Verteilung der Temperatur wird lediglich durch die Position des Bremsbelags und somit der Wärmequelle beeinflusst. Das in Abbildung 17.24 dargestellte Temperaturprofil bleibt qualitativ über den Zeitraum der Simulation erhalten. Das gezeigte Schirmungsverhalten der Scheibe hat bei der Simulation des idealisierten Kontakts zwischen Bremsscheibe und Bremsbelag aufgrund des Modells keinen Einfluss auf die Temperatur- und Spannungsrandbedingung und somit keinen Einfluss auf das

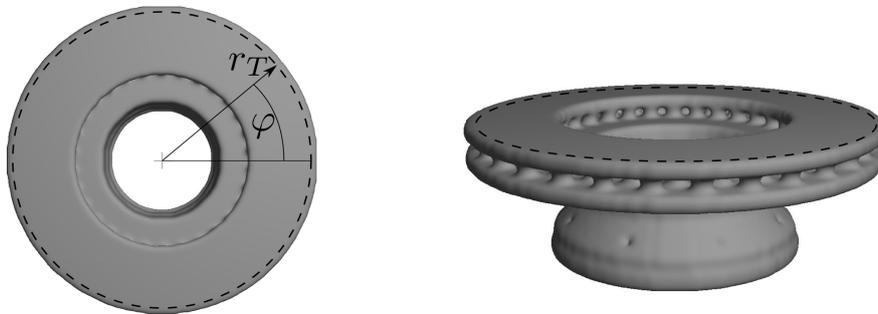


Abbildung 17.23: Darstellung der Auswertung der Temperatur und der Verschiebung der Scheibe auf der Reibfläche.

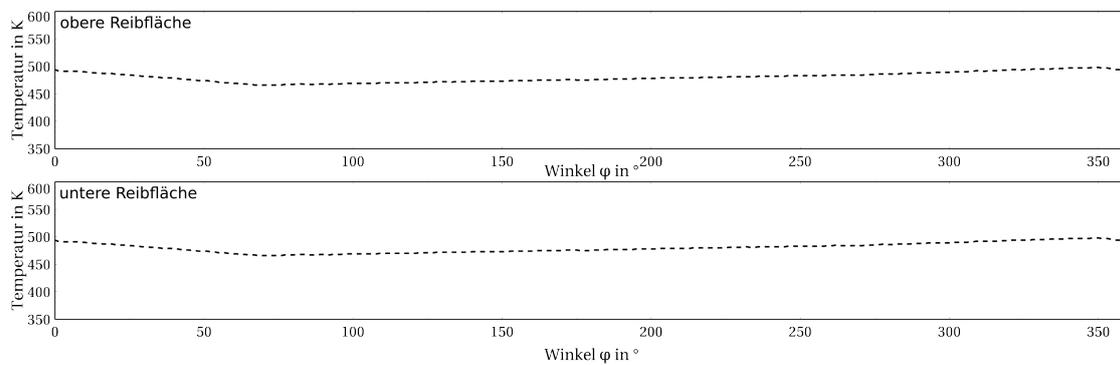


Abbildung 17.24: Temperaturverteilung auf der oberen und unteren Reibfläche über den Umfang für den Radius  $r_T = 16$  cm der Simulation ohne Gewichtung der Verschiebung. Die Temperaturverteilung ist dabei über den Umfang nahezu konstant, einzig der Einfluss der Belagsposition ist vorhanden.

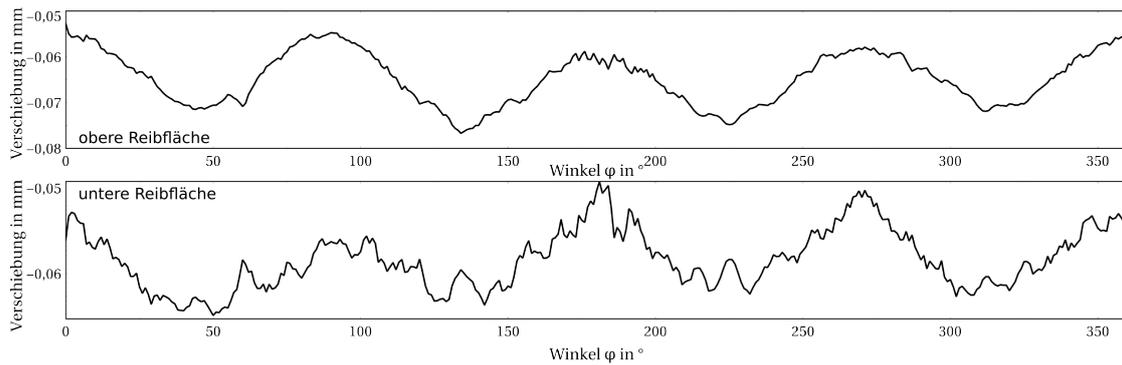


Abbildung 17.25: Verformung der Scheibe über den Umfang für den Radius  $r_T = 16$  cm für die Simulation ohne Gewichtung der Verschiebung. Für die Verschiebungen auf den beiden Reibflächen ist ein Wellung aufgrund der thermischen Ausdehnung zu beobachten.

Simulationsergebnis. Wertet man für diese Simulation die Verschiebungen der Scheibe auf der Reibfläche aus, so zeigt sich, wie in Abbildung 17.25 zu sehen, dass sich die Scheibe aufgrund der thermischen Ausdehnung beginnt zu verformen. Die Verformung entspricht dabei einer Wellung der Scheibe mit 4 Wellenbergen und -tälern.

Im realen System kann davon ausgegangen werden, dass sich aufgrund der Deformation ein ungleichmäßiger Kontaktdruck zwischen den Reibpaaren bildet. In Kapitel 2 wird beschrieben, dass sich eine ungleichmäßige Verteilung der Temperatur auf der Reibfläche der Bremscheibe, beispielsweise in Form von Hotspots, aufgrund einer vorhergehenden Verformung der Scheibe bildet. Um dieses Verhalten abzubilden, wird für die folgenden Simulationen die in Kapitel 14 beschriebene Gewichtungsfunktion verwendet. Diese ermöglicht, den Einfluss der Verformung auf die Temperatur- und Spannungsverteilung zu untersuchen. Es werden zu diesem Zweck die für die Schirmung ausgewerteten Simulationen betrachtet. Abbildung 17.26 zeigt einen Vergleich der Temperaturverteilung auf der oberen und unteren Reibfläche der Scheibe bei Beendigung des Bremsvorgangs ( $t = 3,6$  s) für die Simulation ohne Gewichtung, mit linearer Gewichtung und quadratischer Gewichtung. Die Simulation ohne Gewichtung zeigt das bereits beschriebene Verhalten einer gleichmäßigen Temperaturverteilung über den Umfang der Scheibe und der aufgrund der Reibgeschwindigkeit größer werdenden Temperatur mit zunehmendem Radius. Der Einfluss der Schirmung wird erst bei der Simulation mit linearer Gewichtungsfunktion deutlich. Aufgrund der Verformung der Scheibe ergibt sich im äußeren Bereich der unteren Reibfläche eine höhere Temperatur als bei der Simulation ohne Gewichtung. Auf der oberen Reibfläche ist die Temperatur hingegen nahezu gleichmäßig über die Fläche verteilt. Im Vergleich zur Simulation ohne Gewichtung ist demnach aufgrund der Gewichtung auf der unteren Reibfläche im äußeren Bereich der Scheibe ein höherer Wärmeeintrag vorhanden und für die obere Reibfläche im inneren Bereich. Dies ist in guter Übereinstimmung mit dem aufgrund der Schirmung erwarteten Verhalten, da diese Bereiche über den Modellansatz einen stärkeren Wärmeeintrag besitzen. Noch deutlicher ist dieses Verhalten bei Verwendung der quadratischen Gewichtung zu beobachten. Durch den ungleichmäßigen und lokal erhöhten Wärmeeintrag durch die Verformung der Bremscheibe ergeben sich für die Simulation mit quadratischer Gewichtung die höchsten Temperaturen. Diese entstehen entsprechend der Wellung der Scheibe aus Abbildung 17.25. Es zeigt sich zudem, dass die Maximaltemperaturen

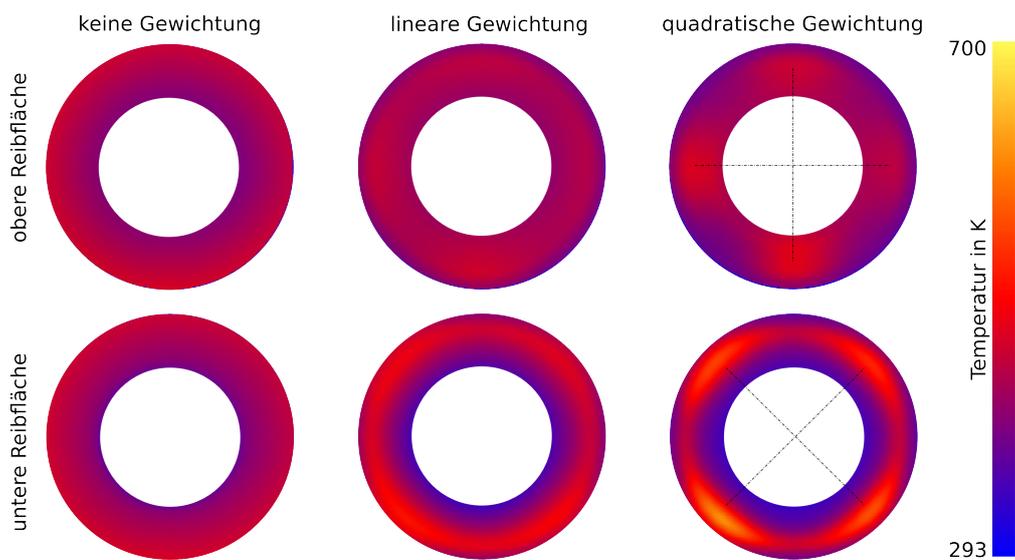


Abbildung 17.26: Temperaturverteilung auf der oberen und unteren Reibfläche für die Simulation ohne Gewichtungsfunktion, mit linearer Gewichtung und quadratischer Gewichtung. Während für die Simulation ohne Gewichtung eine über den Umfang konstantes Temperaturprofil vorhanden ist, wird für die Simulationen mit Gewichtung der Einfluss der Verformung der Scheibe sichtbar. Für die lineare Gewichtung treten auf der unteren Reibfläche die höchsten Temperaturen im äußeren Bereich der Reibfläche auf, was auf die Schirmung der Scheibe zurückzuführen ist. Für die quadratische Gewichtung wird zusätzlich der Einfluss der Wellung der Scheibe sichtbar.

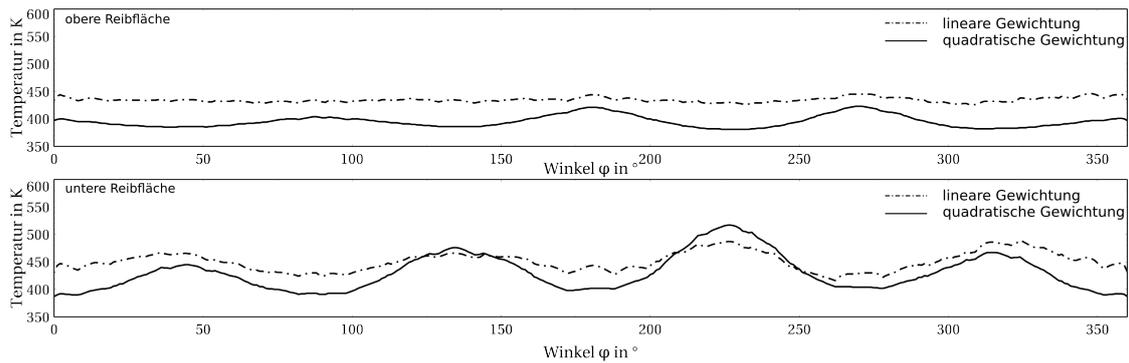


Abbildung 17.27: Temperaturverteilung über den Umfang für die lineare Gewichtung und die quadratische Gewichtung der Verschiebung. Für beide Simulationen kann der Einfluss der Verformung der Scheibe abgelesen werden.

auf der oberen und unteren Reibfläche um 45 Grad verschoben sind, was über die gestrichelten Linien dargestellt ist und noch deutlicher aus der Temperaturverteilung über dem Umfang in Abbildung 17.27 zu entnehmen ist. Dies geht auf die Wellenberge und Wellentäler zurück. Der Temperaturverlauf in Umfangsrichtung für den bereits oben gewählten Radius  $r = 16$  cm auf der oberen Reibfläche zeigt für die quadratische Gewichtung abermals die vier Bereiche erhöhter Temperatur. Die Temperatur erreicht bei der quadratischen Gewichtung Werte von bis zu 700 K auf der unteren Reibfläche. In Bezug auf die in Kapitel 2, Übersicht über das Bauteil Bremsscheibe beschriebenen Arten von Hotspots lässt sich die in den Simulationen auftretende ungleichmäßige Temperaturverteilung am ehesten im Bereich der Distortional Hotspots die durch den Verzug der Scheibe entstehen und die Regional Hotspots aufgrund eines ungleichmäßigen Anpressdrucks einordnen. Das in Abbildung 17.28 dargestellte Temperaturprofil über den Radius zeigt für die untere Reibfläche einen deutlichen Temperaturanstieg mit zunehmendem Radius. Dieses Temperaturprofil ist in guter Übereinstimmung mit dem in der Arbeit von Eltoukhy [41] als “typische” für einen Bremsvorgang auftretende Temperaturverteilung und tritt aufgrund der Schirmung der Scheibe auf. Es entsteht dadurch an der ausgewerteten Position ein Temperaturunterschied vom Innenradius der Scheibe von circa 350 K bis zur Maximaltemperatur von circa 500 K. Auf der Oberseite ergibt sich ein gleichmäßigeres Temperaturprofil, welches nahezu die ursprüngliche Steigung aufgrund der Reibgeschwindigkeit beibehält und im Vergleich lediglich eine Temperaturdifferenz von circa 50 K aufweist.

Der hohe Wärmeeintrag auf der Reibfläche wird durch konduktiven Wärmetransport in das Innere der Scheibe verteilt. Trotz der guten thermischen Leitfähigkeit von Gusseisen mit Lamellengraphit entsteht dabei ein starkes Temperaturgefälle, da die Wärme nicht schnell genug abtransportiert werden kann. Der Temperaturverlauf von der oberen Reibfläche zur unteren Reibfläche in Abbildung 17.29 verdeutlicht das. Aufgrund der ungleichmäßigen thermischen Ausdehnung des Materials kommt es dabei zu mechanischen Spannungen im Bauteil, welche im Folgenden genauer betrachtet werden.

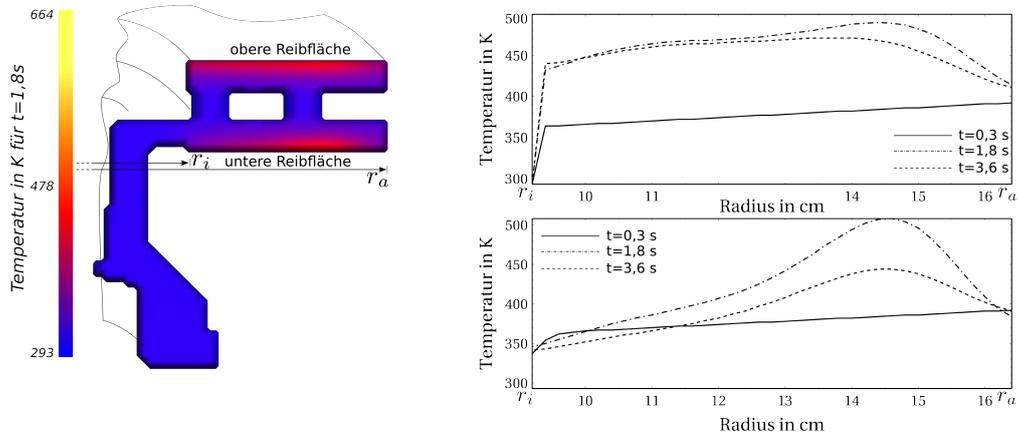


Abbildung 17.28: Temperaturverteilung über den Radius der Scheibe auf der oberen und unteren Reibfläche. Die Temperaturverteilung zeigt deutlich den Einfluss der Schirmung mit der Temperaturzunahme mit zunehmendem Radius auf der unteren Reibfläche. Dieser Effekt wird mit zunehmender Bremszeit (Zunahme der Schirmung) größer. Auf der oberen Reibfläche ist die Temperatur über den Radius nahezu konstant.

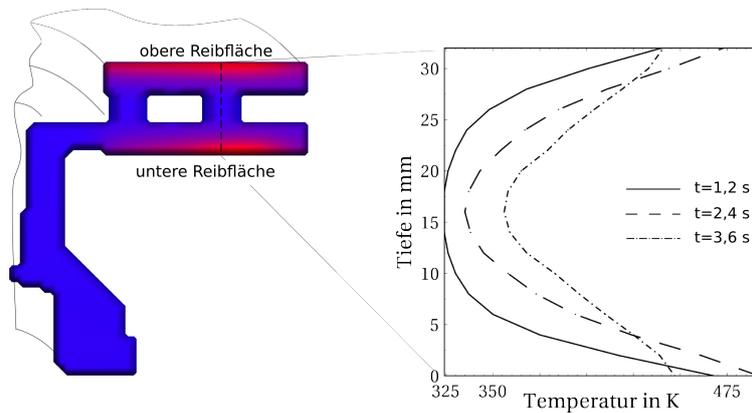


Abbildung 17.29: Temperaturverlauf innerhalb der Bremscheibe von der oberen Reibfläche zur unteren Reibfläche. Aufgrund der über die Reibflächen eingebrachte Wärme ist ein deutlicher Temperaturgradient zum Inneren des Reibrings vorhanden.

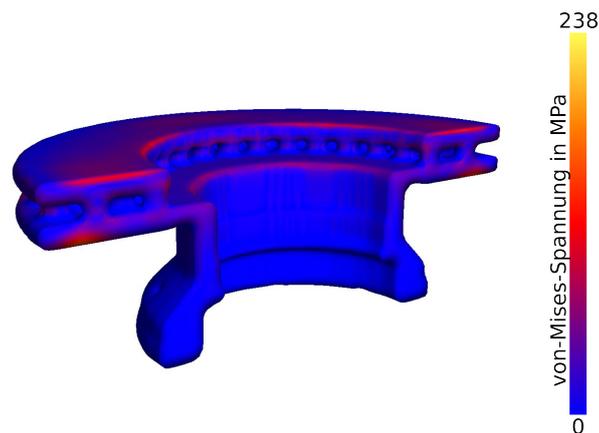


Abbildung 17.30: Darstellung der von-Mises-Spannung innerhalb der Scheibe aufgrund der mechanischen Belastung während des Bremsvorgangs. Durch die hohe thermische Belastung an den Reibflächen tritt dort die höchste Belastung der Scheibe auf.

#### 17.2.4 Analyse des Spannungszustands der Scheibe

Der in Abbildung 17.30 dargestellte von-Mises-Spannungszustand zeigt, dass aufgrund der an der Reibfläche vorliegenden hohen thermischen Belastung auch die Spannungen in diesem Bereich am größten sind. Am stärksten ist die untere Reibfläche belastet, da dort aufgrund der Schirmung und dem damit verbundenen ungleichmäßigen Wärmeeintag die höchsten Temperaturen vorliegen. Durch die ungleichmäßige Temperaturverteilung mit den Maximalwerten der Temperatur an den Reibflächen wird die thermische Ausdehnung auf und nahe der Reibfläche durch die geringere Ausdehnung der angrenzenden Bereiche aufgrund des vorliegenden Temperaturgradienten (siehe Abbildung 17.29) behindert. Wird die für das Plastizitätsmodell wichtige Größe der hydrostatischen Spannung  $\sigma^o$  über den Zeitraum des Bremsvorganges betrachtet, ergibt sich, wie in Abbildung 17.31 dargestellt, auf und nahe der Reibfläche eine Druckbelastung ( $\sigma^o < 0$ ). In umgekehrter Weise ergibt sich für Bereiche im Scheibeninneren eine Zugbelastung ( $\sigma^o > 0$ ). Am stärksten ist dieses Verhalten für den Beginn und den Zeitraum der Bremsung zu beobachten. Nimmt die äußere Belastung aufgrund der Reibung zwischen Bremsbelag und Bremsscheibe ab, kann sich die Wärme gleichmäßiger in der Scheibe verteilen und damit den Temperaturgradienten abbauen. Zur Verdeutlichung dieses Vorgangs sind in Abbildung 17.32 die hydrostatischen Spannungen  $\sigma^o$  entlang der in Abbildung 17.31 eingezeichneten Linie dargestellt. Es ist zu beobachten, dass für den Zeitraum des Bremsvorganges der Bereich der Reibfläche bis circa 3-7 mm ins Scheibeninnere unter Druckbelastung stehen. Die weiter innen liegenden Bereiche hingegen unter Zugbelastung. Dieses Verhalten bleibt bis zum Ende der Bremsung (3,6s) erhalten. Die Spannungsunterschiede in der hydrostatischen Spannung  $\sigma^o$  nehmen allerdings bereits während des Bremsvorgangs deutlich ab. Zu Beginn sind auf der Reibfläche Werte von weniger als -100 MPa zu verzeichnen und im Inneren der Scheibe Werte von circa 20 MPa. Zum Zeitpunkt  $t = 3,6$ s reduzieren sich die Werte auf -40 MPa beziehungsweise 15 MPa. Nach 5,1s ist dieser Spannungszustand zwischen äußerem und innerem Bereich nahezu ausgeglichen. Für den weiteren Abkühlprozess ist dann eine Umkehr des Vorzeichens der Spannung zu beobachten. So ergibt sich für die

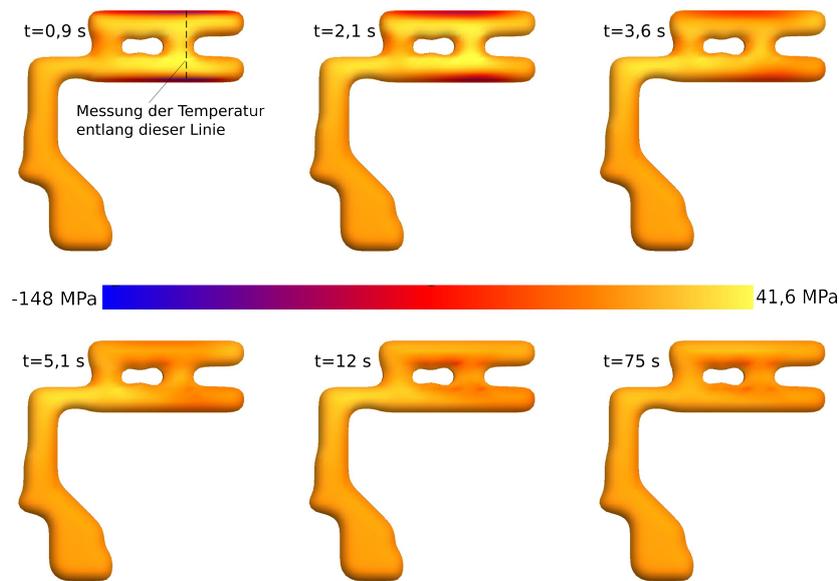


Abbildung 17.31: Darstellung der hydrostatischen Spannung  $\sigma^o$  über den Querschnitt der Bremsscheibe für die Zeitpunkte  $t = 0,9\text{ s}$ ,  $t = 2,1\text{ s}$  und  $t = 3,6\text{ s}$  während des Bremsvorgangs und die Zeitpunkte  $t = 5,1\text{ s}$ ,  $t = 12\text{ s}$  und  $t = 75\text{ s}$  des Abkühlvorgangs. Während der Bremsung (bis  $t = 3,6\text{ s}$ ) ist auf der Reibfläche eine Druckbelastung durch das sich dort Ausdehnende Material vorhanden während im Scheibeninneren eine Zugbelastung vorhanden ist. Im Laufe des Abkühlvorgangs tritt eine Umkehr der Belastungen auf.

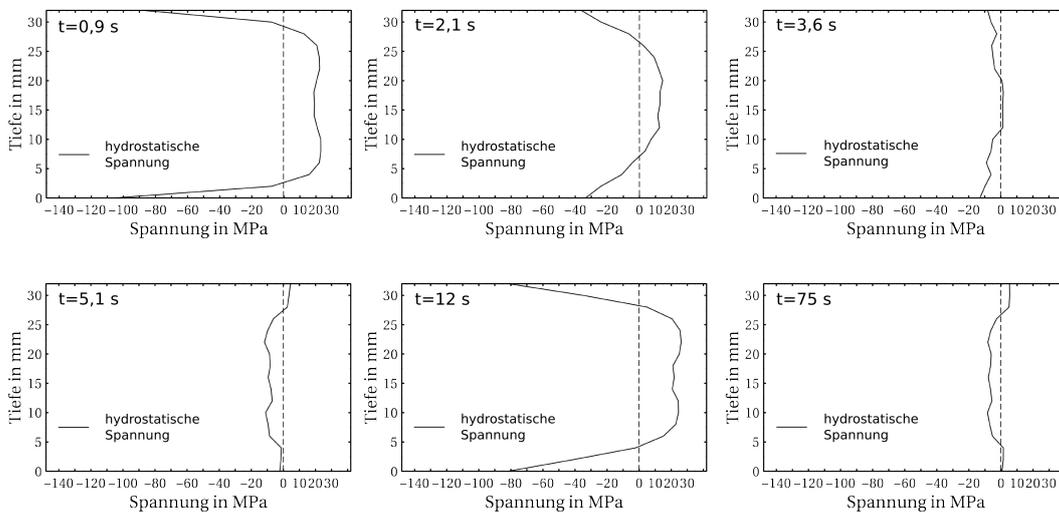


Abbildung 17.32: Darstellung der hydrostatischen Spannung  $\sigma^o$  entlang der in Abbildung 17.31 dargestellten Linie für die Zeitpunkte  $t = 0,9\text{ s}$ ,  $t = 2,1\text{ s}$  und  $t = 3,6\text{ s}$  während des Bremsvorgangs und die Zeitpunkte  $t = 5,1\text{ s}$ ,  $t = 12\text{ s}$  und  $t = 75\text{ s}$  des Abkühlvorgangs. Während der Bremsung (bis  $t = 3,6\text{ s}$ ) ist auf der Reibfläche eine Druckbelastung durch das sich dort ausdehnende Material vorhanden, während im Scheibeninneren eine Zugbelastung vorhanden ist. Im Laufe des Abkühlvorgangs tritt eine Umkehr der Belastungen auf.

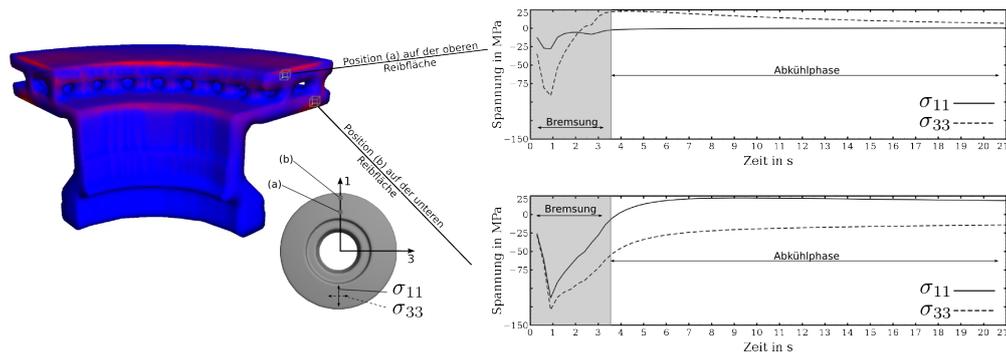


Abbildung 17.33: Darstellung der Spannungen in Richtung 11 und 33 über den Zeitraum der Bremsung und der darauffolgenden Abkühlphase.

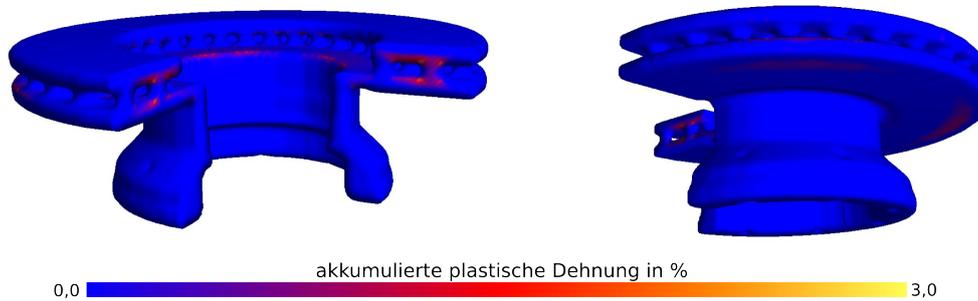


Abbildung 17.34: Darstellung der akkumulierten plastischen Dehnung innerhalb der Scheibe aufgrund der mechanischen Belastung während des Bremsvorgangs. Aufgrund der Zugbelastung im Scheibeninneren tritt dort die höchste plastische Verformung auf welche gegenüber der hochbelasteten Reibfläche deutlich überwiegt.

äußeren Bereiche ein Zugbelastung und die inneren Bereiche des Reibrings werden auf Druck belastet. Gleiches ergibt sich bei Betrachtung der Spannungen in der Ebene der Reibfläche, wie sie in Abbildung 17.33 dargestellt sind. So durchläuft die Spannung  $\sigma_{11}$  auf der oberen Reibfläche nahe des Innenradius eine Spannungsumkehr, und auf der unteren Reibfläche nahe des Außenradius, die Spannung  $\sigma_{33}$ . Damit ergibt sich für das Material an der Reibfläche der Scheibe eine Druck-Zug-Wechselbelastung im Laufe eines Abbremsvorgangs. Ein Blick auf die in den Tabellen 17.10 und 17.11 aufgelisteten Streckgrenzen  $\sigma_{y,0,z}$  und  $\sigma_{y,0,d}$  verdeutlicht den sehr großen Unterschied der Zug- und Druckparameter. Dies hat zur Folge, dass trotz der nominell höheren Belastung auf der Reibfläche, dass Material zunächst im Innern der Scheibe aufgrund der Zugbelastung zu fließen beginnt (siehe Abbildung 17.34). Entgegen der Annahme, dass aufgrund der hohen thermischen Belastung auf der Reibfläche der Scheibe das Material in diesem Bereich beginnt sich plastisch zu verformen, geschieht dies im Inneren der Scheibe aufgrund der dort vorliegenden Zugbelastung. Die durch die Druckbelastung auf der Reibfläche höhere Streckgrenze führt dazu, dass in diesem Bereich elastisches Materialverhalten vorliegt. Dieses Verhalten kann nur mit einem belastungsabhängigen Materialmodell simuliert werden. Einfluss auf dieses Verhalten hat dann das Verhältnis der Streckgrenzen bei Zug- und Druckbelastung. Für das vorliegende Material ist ein extremer Abfall der Streckgrenze unter

Zugbelastung im Vergleich zur Druckbelastung zu beobachten.



## 18 Diskussion der Ergebnisse und Ausblick

Gusseisen mit Lamellengraphit ist ein häufig verwendeter Werkstoff für Bremscheiben in Last- und Personenkraftwagen. In der Literatur lässt sich eine Vielzahl an experimentellen Untersuchungen finden, die die mechanischen und thermischen Eigenschaften des Materials allgemein klassifizieren. Es zeigt sich jedoch auch, dass diese Eigenschaften entsprechend der chemischen Zusammensetzung und des Erstarrungsprozesses deutlich variieren, was mit der Änderung der Struktur des Materials zusammenhängt. Die Bestimmung der Eigenschaften wird größtenteils über experimentelle Versuche erreicht. Die effektiven Eigenschaften durch Simulationen zu bestimmen ist hierbei noch in den Anfängen. Zwar existieren eine Reihe von Arbeiten auf diesem Gebiet, welche sich aber meist auf andere Materialien, beispielsweise Gusseisen mit Kugelgraphit, beziehen. Gusseisen mit Lamellengraphit wird aufgrund seiner komplexen Struktur und dem damit verbundenen hohen Rechenaufwand selten berücksichtigt. Für die Simulation der thermischen und mechanischen Belastung von Bremscheiben sind eine Vielzahl von Eingabeparameter, die die Eigenschaften des Materials definieren, nötig. Diese beinhalten:

- a) mechanisches Materialmodell
- b) Spannungs-Dehnungs-Diagramm unter Zugbelastung
- c) Spannungs-Dehnungs-Diagramm unter Druckbelastung
- d) Bestimmung der Fließfläche
- e) Thermische Leitfähigkeit
- f) Wärmekapazität
- g) Reibkoeffizient.

Die Parameter werden hierbei jeweils für einen Temperaturbereich von  $20\text{ °C} < T < 1000\text{ °C}$  benötigt. Zur Ermittlung dieser Parameter ist ein beträchtlicher experimenteller Aufwand notwendig. Aus diesem Grund wurden Untersuchungen bezüglich der Bestimmung der Materialeigenschaften von Gusseisen mit Lamellengraphit mittels eines simulativen Ansatzes auf der mesoskopischen Größenskala durchgeführt. Es wurde gezeigt, dass damit die Punkte a) - e) bereits für einen gewissen Temperaturbereich ermittelt werden können. Lediglich die Bestimmung der Wärmekapazität und des Reibkoeffizienten wurde in dieser Arbeit nicht behandelt. Um die Eigenschaften von Gusseisen mit Lamellengraphit durch Simulationen abzubilden, war hierzu zunächst eine möglichst genaue Nachbildung des Gussgefüges notwendig. Zur Klassifizierung der Struktur des vorliegenden Gusseisens dienten 2-D Schliffbilder, welche mittels eines automatisierten Prozesses analysiert wurden. Das dazu entwickelte Analyseprogramm bestimmt hierbei alle zur Gebietserstellung benötigten Parameter. Über diese Parameter wurden mittels des Gebietserstellungsalgorithmus Gusseisengefüge erstellt. Die Ergebnisse aus Abschnitt 17.1 zeigen, dass die generierten Gefüge in sehr guter qualitativer

wie auch quantitativer Übereinstimmung mit den experimentellen Gefügen stehen. So weisen die Dicken- und Längenverteilung der beiden Gefüge ein identisches Verhalten auf. Bevor die Schliffbilder mittels des Analyseprogramms klassifiziert werden können, sind noch einige manuelle Bearbeitungsschritte, wie beispielsweise das Auftrennen der Graphitlamellen oder Auswertung der Schliffbildgröße, notwendig. Diese Schritte sollten bei der Weiterführung dieser Arbeit ebenfalls automatisiert werden, um den Gesamtprozess der Gebietserstellung weiter zu beschleunigen. Erstrebenswert wäre bei der Analyse des Gefüge, dieses, neben den zur Gebietserstellung benötigten Parametern, mittels der in der Norm DIN945 [2] gegebenen Parameter Form, Anordnung und Größe zu analysieren. Daraus ergäbe sich die Möglichkeit, das Material der Bremsscheibe mit denen in der Liefervorschrift definierten Gefügevorgaben abzugleichen. Da bei der Analyse des Gussgefüges vereinzelt Graphit der Form II zu beobachten ist, sollte zudem der Algorithmus der Gebietserstellung, welcher auf Graphit der Form I ausgelegt ist, um die Form II erweitert werden. Dadurch könnten die experimentellen Gefüge noch genauer nachgebildet werden. Der große Vorteil des entwickelten Prozesses zur Erstellung von Simulationsgebieten mittels 2-D-Schliffbilder und der Verwendung eines Gebietserstellungsalgorithmus besteht in der hohen Flexibilität, dem geringen experimentellen Aufwand und der Geschwindigkeit. So lässt sich eine Vielzahl an Gefügen erstellen, um somit die Einflüsse einzelner Parameter zu untersuchen oder aber ein repräsentatives Volumenelement bestimmen. Mit dem ermittelten repräsentativen Volumenelement wurden Simulationen zur Bestimmung der mechanischen und thermischen Eigenschaften des Materials durchgeführt. Bei den Simulationen wurde deutlich, wie groß der Einfluss des Graphits auf die Eigenschaften des Materials ist. Speziell die über die Rissschließung umgesetzt Lastabhängigkeit des Graphits spielt hierbei eine entscheidende Rolle, um das Verhalten des Gusseisens mit Lamellengraphit abzubilden. So lässt sich alleine durch dieses Verhalten des Graphits die starke Lastabhängigkeit des Gesamtgefüges abbilden. Die Ausbildung des Perlits (Koloniegröße, interlamellarer Abstand) beeinflusst hingegen hauptsächlich das plastische Verhalten des Gusseisens mit Lamellengraphit unter Druckbelastung, da sich hier der Einfluss des Graphits durch die Lastaufnahme mittels der Rissschließung deutlich verringert. Die sehr gute Übereinstimmung der Simulationsergebnisse mit den experimentellen Kennlinien zeigt dabei, wie groß das Potential zur Bestimmung der effektiven Eigenschaften von Materialien mittels dieses Ansatzes der mesoskopischen Gefügesimulation ist. So lässt sich neben den Zug- und Druckkennlinien die Fließfläche des Materials bestimmen, aus der sich wiederum ein makroskopisches Modell der Plastizität ableiten lässt. Die größte Schwierigkeit, welche mit dem höchsten Zeitaufwand verbunden war, bestand in der Entwicklung der Materialmodelle der beiden Gefügebestandteile Graphit und Perlit sowie der Ermittlung derer Materialparameter. Dieser Prozess muss nur bei Erweiterung des Gefüge um eine zusätzliche Komponente erneut durchgeführt werden. In Zukunft lässt sich damit eine Datenbank mit Materialien, deren Materialmodellen und Eigenschaften aufbauen. Dadurch kann die Simulation von Gefügen mit bereits vorhandenen Komponenten deutlich schneller umgesetzt werden.

Wie wichtig eine genaue Beschreibung des Materialverhaltens ist, zeigen die Simulationen der Bremsscheibe auf der makroskopischen Skala. So stellen diese deutlich den Einfluss des Materialmodells und der Randbedingung auf die Simulationsergebnisse dar. Die Simulation ohne Gewichtungsfunktion verdeutlichen, dass ohne den Einfluss der Verformung auf die Temperatur- und Spannungsrandbedingung das reale System nicht ausreichend abgebildet wird. Die für eine Bremsscheibe charakteristische Temperaturverteilung wird erst durch die Einflussnahme der Schirmung auf die Temperatur- und Spannungswerte erzielt. Aufgrund des großen Einflusses auf die Simulationsergebnisse sollte darüber nachgedacht werden, das

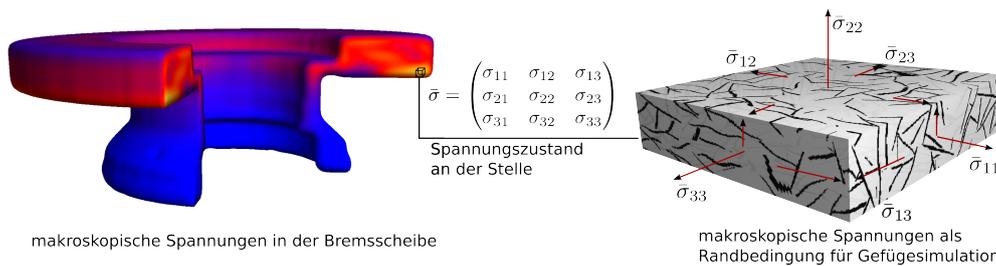


Abbildung 18.1: Mögliche Einbindung der makroskopischen Ergebnisse als Randbedingung auf ein mesoskopisches Gefüge über eine in der Bremsscheibe makroskopischen Spannungszustand der über eine Randbedingung auf ein repräsentatives Volumenelement aufgebracht wird.

Modell der Gewichtungsfunktion durch ein detailliertes Modell des Reibkontakts zwischen Bremsscheibe und Bremsbelag zu ersetzen um die real vorliegenden Bedingungen genauer abbilden zu können. Während die Verformung der Scheibe durch das Materialmodell nur geringfügig beeinflusst wird, führt die Wahl eines vereinfachten Materialmodells ohne Berücksichtigung des belastungsabhängigen Plastizität hier zu einer fehlerhaften Interpretation des Belastungszustands und der auftretenden plastischen Dehnung im Bauteil. Für eine einfache von-Mises-Plastizität würde das Material zunächst auf der Reibfläche beginnen zu fließen, während bei der Verwendung des aus den mesoskopischen Simulationen abgeleiteten Modells aufgrund der geringen Streckgrenze unter Zugbelastung das Material zunächst im Inneren des Bremsenrotors beginnt zu fließen. Das implementierte Materialmodell beschränkt sich hierbei auf die Beschreibung des plastischen Verhaltens ohne die Berücksichtigung einer etwaigen Schädigung des Materials. Durch eine Erweiterung des Plastizitätsmodells mit einem Schädigungsmodell ließe sich möglicherweise die Rissbildung in der Scheibe aufgrund der Belastung des Bremsvorgangs ermitteln. Eine zusätzliche sinnvolle Erweiterung würde die Einbeziehung ortsabhängiger Materialparameter innerhalb der Scheibe darstellen. Aufgrund unterschiedlicher Abkühlgeschwindigkeiten innerhalb des Bauteils können sich unterschiedliche Gefüge ausbilden, welche zu einer Veränderung der Eigenschaften führt. Dazu könnte die Simulation mit Ergebnissen von Simulationen des Gießprozesses und der daraus erwarteten Gefügeausbildung gekoppelt werden. Für die beiden Größenskalen lassen sich weitere Möglichkeiten der Kopplung finden. So wäre es denkbar, zur Analyse der Rissbildung, wie in Abbildung 18.1 dargestellt, den dreidimensionalen Spannungszustand zu einem bestimmten Zeitpunkt einer makroskopischen Simulation auf ein repräsentatives Volumenelement aufzugeben, um dort die im Gefüge auftretenden Belastungen und etwaige Schädigung zu analysieren. Auch eine komplette Kopplung, bei der dieses Vorgehen bei jedem Zeitschritt der makroskopischen Simulation durchgeführt wird, wäre denkbar, was jedoch mit einem sehr hohen Rechenaufwand verbunden wäre.

Aufgrund der starken thermischen Belastung und der hohen Temperaturen kommt es, wie in Abschnitt 4 beschrieben, nahe der Reibfläche zu einer inneren Oxidation des Materials. Auch Phasenumwandlungen bei Überschreiten der eutektoiden Umwandlungstemperatur führen zu einer Veränderung des Materials. Der Einfluss dieser Vorgänge im Material auf dessen Eigenschaften wurde in dieser Arbeit nicht weiter quantifiziert. In diesem Zusammenhang sollten weitere Untersuchungen durchgeführt werden, wozu sich speziell der verwendete Phasenfölder

optimal eignet.

Generell wurde in dieser Arbeit gezeigt, dass sich mittels Simulationen auf der mesoskopischen Größenskala eine Vielzahl der für die Simulation einer Bremsscheibe benötigten Parameter bestimmen lassen. Zur Zeit ist dies nur im Abgleich mit experimentellen Arbeiten möglich. Durch weitere Arbeiten auf diesem Gebiet lassen sich die Materialparameter weiter verifizieren und somit die Unabhängigkeit von experimentellen Ergebnissen erreichen. Dadurch könnte der experimentelle Aufwand bei der Ermittlung von Materialeigenschaften erheblich reduziert werden.

# Literaturverzeichnis

- [1] DIN 50125 Prüfung metallischer Werkstoffe-Zugproben. (2009)
- [2] DIN EN ISO 945-1. (2009)
- [3] 1-2, C. E.: eurocode 3: design of steel structures, part 1.2: general rules—structural fire design. In: *London: British Standards Institution* (2005)
- [4] AMBARTSUMYAN, S. : The Axisymmetric Problem of a Circular Cylindric Shell Made of Material with Different Strength in Tension and Compression. In: *Defense Technical Information Center* 4 (1967), S. 77–85
- [5] ANDERSON, A. E. ; KNAPP, R. A.: Hot Spotting In Automotive Friction Systems. In: *Wear* 135 (1990), S. 319–337
- [6] ANGUS, H. : *Cast Iron: physical and engineering properties*. Butterworth&Co, 1976. – ISBN 0408706880
- [7] ASKELAND, D. R.: *Materialwissenschaften*. Spektrum Akademischer Verlag GmbH, 1996
- [8] ATIENZA, J. ; RUIZ-HERVIAS, J. ; MARTINEZ-PEREZ, M. ; MOMPEAN, F. ; GARCIA-HERNANDEZ, M. ; ELICES, M. : Residual stresses in cold drawn pearlitic rods. In: *Scripta Materialia* 52 (2005), S. 1223–1228
- [9] AUGUST, A. ; ETTRICH, J. ; RÖLLE, M. ; SCHMID, S. ; BERGHOFF, M. ; SELZER, M. ; NESTLER, B. : Prediction of heat conduction in open-cell foams via the diffuse interface representation of the phase-field method. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 84 (2015), S. 800–808
- [10] BAGNOLI, F. ; DOLCE, F. ; BERNABELI, M. : Thermal fatigue cracks of fire fighting vehicles gray iron brake discs. In: *Engineering Failure Analysis* 16 (2009), S. 152–163
- [11] BALAID, L. J. ; MOUROU, W. : Image segmentation: a watershed transformation algorithm. In: *Image Anal Stereol* 28 (2009), S. 93–102
- [12] BELHOCINE, A. ; BOUCHETARA, M. : Thermo-mechanical Analysis of a Disc Braking System. In: *Transaction on Control and Mechanical Systems* 2 (2013), S. 302–309
- [13] BERNS, H. ; THEISEN, W. : *Eisenwerkstoffe: Stahl und Gusseisen*. Springer, 2008
- [14] BOCCARDO, A. D. ; CARAZO, F. D. ; GIUSTI, S. M.: A comparison of effective properties of nodular cast-iron considering different shapes of the representative volume element. In: *Mecánica Computacional* 31 (2012), S. 1799–1819
- [15] BOHLEN, T. ; NIL, D. D. ; KÖHN, D. ; JETSCHNY, S. : *-SOFI3D- seismic modeling with finite differences 3D - acoustic and viscoelastic version (Handbuch)*. Karlsruher Institute of Technology, 2012

- [16] BÖHRNSEN, J.-U. : *Lecture Notes on Solid Mechanics*. TU Braunschweig, 2012
- [17] BONORA, N. ; RUGGIERO, A. : Micromechanical modeling of ductile cast iron incorporating damage. Part I: ferritic ductile cast iron. In: *International Journal of Solids and Structures* 42 (2005), S. 1401–1424
- [18] BREHM, A. : *Skript zur Vorlesung: Praktikum der Technischen Chemie*. Universität Oldenburg
- [19] BREUER, B. (Hrsg.) ; BILL, K. H. (Hrsg.): *Bremsenhandbuch*. vieweg, 2006
- [20] BULTERMAN, R. ; SOMMEN, F. van d. ; ZWAAN, G. ; VERHOEFF, T. ; GASTEREN, A. van ; FEIJEN, W. : On computing a longest path in a tree. In: *Information Processing Letters* 81 (2002), S. 93–96
- [21] BUONO, V. T. L. ; GONZALES, B. M. ; LIMA, T. M. ; ANDRADE, M. S.: Measurement of fine pearlite interlamellar spacing by atomic force microscopy. In: *Journal of Materials Science* 32 (1997), S. 1005–1008
- [22] BURGER, M. : *Skript zur Vorlesung: Numerik Partieller Differentialgleichungen*. Westfälische Wilhelms Universität Münster, 2006
- [23] BÖCKH, P. von: *Wärmeübertragung*. Springer, 2006
- [24] BÖHLKE, T. : *Skript zur Vorlesung: Mathematische Methoden der Strukturmechanik*. Karlsruher Institut für Technologie, 2010
- [25] BÖHLKE, T. : *Skript zur Vorlesung: Mathematische Methoden der Festigkeitslehre*. Karlsruher Institut für Technologie, 2012
- [26] BÖHLKE, T. : *Arbeitsmaterial: Mathematische Methoden der Strukturmechanik*. Karlsruher Institut für Technologie, 2013
- [27] BÖHM, H. : *Mechanics of Microstructured Materials*. Springer Verlag, 2004
- [28] CENTRAL FACILITY FOR ADVANCED MICROSCOPY AND MICROANALYSIS (ELEKTRONISCH): Introduction to Energy Dispersive X-ray Spectrometry (EDS). In: <http://cfamm.ucr.edu/documents/eds-intro.pdf>
- [29] CHEN, J. ; YOUNG, B. ; UY, B. : Behavior of high strength structural steel at elevated temperatures. In: *Journal of Structural Engineering* 132 (2006), S. 1984–1954
- [30] COLLINI, L. : *Micromechanical modeling of the elasto-plastic behavior of heterogeneous nodular cast iron*, Università degli studi di Parma, Diss., 2004
- [31] COLLINI, L. ; NICOLETTO, G. ; KONECNA, R. : Microstructure and mechanical properties of pearlitic gray cast iron. In: *Materials Science and Engineering A* 488 (2008), S. 529–539
- [32] CUGNONI, J. ; GALLI, M. : Representative Volume Element Size of Elastoplastic and Elastoviscoplastic Particle-Reinforced Composites with Random Microstructure. In: *Computer Modeling in Engineering and Sciences* 66 (2010), S. 165–186
- [33] DEGENSTEIN, T. : *Kraftmessung in Scheibenbremsen*, Technische Universität Darmstadt, Diss., April 2007

- [34] DEIKE, R. ; ENGELS, A. ; HAUPTVOGEL, F. ; P.HANKE ; RÖHRIG, K. ; SIEFER, W. ; WERNING, H. ; WOLTERS, D. : Gusseisen mit Lamellengraphit. In: *Bundesverband der Deutschen Gießerei-Industrie(BDG)*
- [35] DESMORAT, R. : *Unterlagen zur Vorlesung: Damage models for cyclic and/or dynamic loading*. LMT Cachan, 2009
- [36] DESMORAT, R. : *Unterlagen zur Vorlesung: Continuum approach in damage mechanics*. Summer School IBZ TU Dortmund, 2012
- [37] DOCUMENTATION, A. compiled: *PACE3D Parallel Algorithms for Crystal Evolution in 3D, A solver for phase-field models (Handbuch)*. 2015
- [38] DRUGAN, W. ; WILLIS, J. : A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites. In: *J.Mech.Phys.Solids* 44 (1996), S. 497–524
- [39] DÖRR, D. : *Modellierung und Simulation der Schädigung von Gusseisenstrukturen mit lamellarem Graphit (Bachelorarbeit)*. Karlsruher Institut für Technologie, 2012
- [40] (ELEKTRONISCH), H. : Thinning. In: <http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/thin.htm>
- [41] ELTOUKHY, M. ; ASFOUR, S. : Braking Process in Automobiles: Investigation of the Thermoelastic Instability Phenomenon. In: *Modelling and Simulation*. InTech, 2008, S. 1–16
- [42] FANG, L.-Y. ; METZLOFF, K. E. ; VOIGT, R. C.: Der Elastizitätsmodul von graphitischen Gußeisen. In: *Konstruieren und Gießen* 23 (1998), S. 1–18
- [43] FERDANI, P. ; HOLME, J. ; EMMETT, R. : Some Factors Influencing Rotor and Friction Material Design for Commercial Vehicle Disc Brakes (Kongress). In: *Autotech, IMechE* (1995)
- [44] FRAS, E. ; GORNY, M. : Eutectic cell and nodule count as the quality factors of cast iron. In: *Archives of foundry engineering* 8 (2008), S. 53–58
- [45] FRAS, E. ; GORNY, M. : An inoculation phenomenon in cast iron. In: *Archives of metallurgy and materials* 57 (2012), S. 767–777
- [46] FRAS, E. ; GORNY, M. ; LOPEZ, H. : The Transition from Gray to White Cast Iron during Solidification: Part I. Theoretical Background. In: *Metallurgical and Materials Transactions A* 36 (2005), S. 3075–3082
- [47] FRITZEN, F. ; BÖHLKE, T. : Influence of the type of boundary conditions on the numerical properties of unit cell problems. In: *Technische Mechanik* 30 (2010)
- [48] FUOCO, R. ; CABEZAS, C. : Einfluß der Grenzfläche Graphit-Austenit auf die Bildung von Ferrit oder Perlit in Gußeisen. In: *Giesserei-Praxis* 6 (2005), S. 217–228
- [49] GAUDIG, W. ; MELLER, R. ; WEBER, U. ; SCHMAUDER, S. : Self-consistent one-particle 3D unit cell model for simulation of the effect of graphite aspect ratio on Young's modulus of cast iron. In: *Computational Materials Science* 28 (2003), S. 654–662
- [50] GLADWELL, G. ; IBRAHIMBEGOVIC, A. : *Nonlinear Solid mechanics. Solid Mechanics and its Application*. Springer, 2009

- [51] GMBH, S. B.: *Carbon-Keramik-Bremsscheibe*
- [52] GROSS, D. ; SEELIG, T. : *Bruchmechanik*. Springer, 2011
- [53] H. KÖCHLING, K. P. J. S. D. W. O. Liesenberg L. O. Liesenberg: *Stahlguß- und Gußeisenlegierungen*. Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1992
- [54] HASSE, S. : *Giesserei Lexikon*. Schiele und Schön, 2008
- [55] HAZANOV, S. : Hill Condition and overall properties of composites. In: *Archive of Applied Mechanics* 68 (1998), S. 385–394
- [56] HEISSLING, B. (Hrsg.) ; ERSOY, M. (Hrsg.) ; GIES, S. (Hrsg.): *Fahrwerkhandbuch*. Vieweg+Teubner Verlag, 2011
- [57] HELMIG, R. : *Skript zur Vorlesung: Modellierung von Hydrosystemen*. Universität Stuttgart, Institut für Wasserbau
- [58] HERFURTH, K. : Gusseisen-kleine Werkstoffkunde eines viel genutzten Eisenwerkstoffs. In: *Konstruieren und Gießen* 32 (2007), S. 2–12
- [59] HERRMANN, C. : *Untersuchung von thermischen und mechanischen Eigenschaften in Gusseisen mit Lamellengraphit (Masterthesis)*. Karlsruher Institut für Technologie, 2014
- [60] HILDITCH, C. J.: Comparison of thinning algorithms on a parallel processor. In: *Image and Vision Computing* 1 (1983), S. 115–132
- [61] HILL, R. : Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles. In: *J. Mech.Phys.Solids* 11 (1963), S. 357–372
- [62] HJELM, H. : Yield surface for grey cast iron under biaxial stress. In: *Journal of Engineering Materials and Technology-transactions of the Asme* 116 (1994), S. 148–154
- [63] HÜTTER, A. : *Verkehr auf einen Blick*, 2013
- [64] HWANG, P. ; WU, X. ; JEON, Y. B.: Thermal-mechanical coupled simulation of a solid brake disc in repeated braking cycles. In: *Proc. IMechE* 223 (2009), S. 1041–1048
- [65] HÖHN, J.-C. : *Implementierung eines elastoplastischen Stoffgesetzes im Rahmen der Phasenfeldmodellierung (Diplomarbeit)*. Karlsruher Institut für Technologie, 2011
- [66] INC., E. : Properties and characteristics of graphite. In: *Speciality Materials* 1 (2013), S. 1–42
- [67] IRMLER, C. : Wärmespannungen in Zylinderköpfen von Viertakt-Dieselmotoren. In: *VDI-Forschungsheft* 495 (1963), Nr. 495, S. 1–40
- [68] IYENGAR, S. S. ; BRENER, N. E.: A fast parallel thinning algorithm for the binary image skeletonization. In: *International Journal of High Performance Computing Application* 14 (2011), S. 65–81
- [69] IZOTOV, V. I. ; POZDNYAKOV, V. A. ; LUK'YANENKO, E. V. ; USANOVA, O. Y. ; FILIPPOV, G. A.: Influence of the Pearlite Fineness on the Mechanical Properties, Deformation Behavior, and Fracture Characteristics of Carbon Steel. In: *Strength and Plasticity* 103 (2006), S. 519–529

- [70] JONES, R. M.: *Deformation Theorie of Plasticity*. Bull Ridge Publishing, 2009
- [71] JUNG, S. P. ; SONG, H. S. ; PARK, T. W. ; CHUNG, W. S.: Numeric Analysis of Thermoelastic Instability in Disc Brake System. In: *Applied Mechanics and Materials* 110 (2012), S. 2780–2785
- [72] KANIT, T. ; FOREST, S. ; GALLIET, I. ; MOUNOURY, V. ; JEULIN, D. : Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach. In: *International Journal of Solids and Structures* 40 (2003), S. 3647–3679
- [73] KELLY, B. : *Physics of graphite*. Applied Science Publishers LTD, 1981. – ISBN 0–85334–960–6
- [74] KLUG, H.-P. : *Nutzfahrzeug-Bremsanlagen*. Vogel Fachbuch, 1993
- [75] KOETNIYOM, S. : *Thermal Stress Analysis of Automotive Disc Brakes*, University of Leeds, Diss., 2000
- [76] KOITER, W. T.: Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface. In: *Appl. Math.* 11 (1953), S. 350–354
- [77] KREISSIG, R. ; SCHINDLER, J. : Zur Verifikation der Normalenregel in der Plastizitätstheorie. In: *Technische Mechanik* 2 (1988), S. 132–134
- [78] KUMLUTAS, D. ; TAVMAN, L. : A Numerical and Experimental Study on Thermal Conductivity of Particle Filled Polymer Composites. In: *Journal of Thermoplastic Composite Materials* 19 (2006), S. 441–455
- [79] KWIECINSKA, B. ; PETERSEN, H. : Graphite, semi-graphite, natural coke, and natural char classification - ICCP system. In: *International Journal of Coal Geology* 57 (2004), S. 99–116
- [80] KÖNIG, G. : *Implementierung bimodularer Stoffgesetze (Studienarbeit)*. Karlsruher Institut für Technologie, 2012
- [81] LAM, L. ; LEE, S.-W. : Thinning Methodologies - A Comprehensive Survey. In: *IEEE Transactions on pattern and machine intelligence* 14 (1992), S. 869–885
- [82] LAMPIC, M. : *Forschung und Praxis eines neuen Werkstoffkonzepts für langlebige Bremsscheiben (Konferenzbeitrag)*, 2002
- [83] LARIJANI, N. : *On the modeling of anisotropy in pearlitic steel subjected to rolling contact fatigue (Masterthesis)*. Chalmers University of Technology, Sweden, 2012
- [84] LEE, J. H.: Accuracies of numerical solution methods for the pressure-modified von mises model. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 26 (1988), S. 453–465
- [85] LEE, K. ; BARBER, J. : Frictionally Excited Thermoelastic Instability in Automotive Disk Brakes. In: *Journal of Tribology* 115 (1993), S. 607–614
- [86] LEMAITRE, J. ; DESMORAT, R. : *Engineering Damage Mechanics*. Springer, 2005

- [87] LI, S. ; WANG, G. : *Introduction to Micromechanics and Nanomechanics*. World Scientific Publishing Company, 2008
- [88] LIAO, P.-S. ; CHEN, T.-S. ; CHUNG, P.-C. : A fast algorithm for multilevel thresholding. In: *Journal of Information Science and Engineering* 17 (2001), S. 713–727
- [89] LIMBERG, J. : *Introduction to Foundation Brake Design*
- [90] LINGENHÖHL, J. : *Simulation der thermo-mechanischen Beanspruchung von Bremsscheiben (Bachelorthesis)*. Karlsruher Institut für Technologie, 2013
- [91] LISITSA, V. ; VISHNEVSKIY, D. : Lebedev scheme for the numerical simulation of wave propagation in 3D anisotropic elasticity. In: *Geophysical Prospecting* 58 (2010), S. 619–635
- [92] LÖHE, D. : *Verformungsverhalten von ferritischem Gusseisen mit unterschiedlicher Graphitbildung*, Universität Karlsruhe, Diss., 1980
- [93] MACKING, T. : Thermal cracking in disc brakes. In: *Engineering Failure Analysis* 9 (2002), S. 63–76
- [94] MAKAR, J. ; DESNOYERS, R. ; McDONALD, S. : *Failure modes and mechanisms in gray cast iron pipe*, 2001
- [95] MALUF, O. : Thermomechanical and Isothermal Fatigue Behaviour of Gray Cast Iron for Automotive Brake Discs. In: *New Trends and Developments in Automotive System Engineering*. In Tech, 2011, S. 147–166
- [96] MALUF, O. ; ANGELONI, M. ; MILAN, M. T. ; S., D. ; FILHO, W. W. B.: Development of materials for automotive disc brakes. In: *Minerva* 4 (2007), S. 149–158
- [97] MANG, H. ; HOFSTETTER, G. : *Festigkeitslehre*. Springer, 2008
- [98] MARTIN, H. : *Numerische Strömungssimulation in der Hydrodynamik - Grundlagen und Methoden*. Gabler Wissenschaftsverlage, 2011
- [99] MATHIAK, F. U.: *Skript zur Vorlesung: Ebene Flächentragwerke II*. Hochschule Neubrandenburg, 2008
- [100] METZGER, M. ; SEIFERT, T. : Computational assessment of the microstructure-dependent plasticity of lamellar gray cast iron-Part I: Methods and microstructure-based model. In: *International Journal of Solids and Structures* 66 (2015), S. 184–193
- [101] MIEDZINSKA, D. ; NIEZGODA, T. : Numerical calculations of RVE dimensions for two-phase material. In: *Journal of KONES Powertrain and Transport* 18 (2011), S. 303–310
- [102] MING-DONG, C. ; GUO-XIONG, S. : Quantitative inspection on graphite length of grey iron. In: *China Foundry* 4 (2007), S. 103–107
- [103] MINKOFF, I. : *The physical metallurgy of cast iron*. Wiley&Sons, 1983. – ISBN 0471900060

- [104] MODI, O. ; DESHMUKH, N. ; MONDAL, D. ; JHA, A. ; YEGNESWARAN, A. ; KHAIRA, H. : Effect of interlamellar spacing on the mechanical properties of 0.65In: *Materials Characterization* 46 (2001), S. 347–352
- [105] NECHTELBERGER, E. : *Gusseisenwerkstoffe : Eigenschaften unlegierter und niedriglegierter Gusseisen mit Lamellengraphit, Kugelgraphit, Vermiculargraphit im Temperaturbereich bis 500°C*. Fachverlag Schiele und Schön, 1977
- [106] NESTLER, B. ; GARCKE, H. ; STINNER, B. : Multicomponent alloy solidification: phase-field modeling and simulations. In: *Physical Review* 71 (2005), S. 041609–1–041609–5
- [107] NICHOLSON, G. : *Facts about friction*. Gedoran, 1995
- [108] OORD, G. van d.: *Microstructural Modeling of Cast Iron Mechanical Properties*, Eindhoven University of Technology, Diplomarbeit, 2009
- [109] OSTOJA-STARZEWSKI, M. : Material spatial randomness: From statistical to representative volume element. In: *Probabilistic Engineering Mechanics* 21 (2006), S. 112–132
- [110] PASCAL, T. A. ; KARASAWA, N. ; GODDARD, W. A.: Quantum mechanics based force field for carbon (QMFF-Cx) validated to reproduce the mechanical and thermodynamics properties of graphite. In: *The Journal of Chemical Physics* 133 (2010), S. 134114–1 – 134114–17
- [111] PENG, X. ; FAN, J. ; ZENG, J. : Microstructure-based description for the mechanical behavior of single pearlitic colony. In: *International Journal of Solids and Structures* 39 (2002), S. 435–448
- [112] PRADHAN, S. ; NAYAK, B. ; SAHAY, S. ; MISHRA, B. : Mechanical properties of graphite flakes and spherulites measured by nanoindentation. In: *Carbon* 47 (2009), S. 2290–2292
- [113] PRAMONO, E. ; WILLIAM, K. : Implicit integration of composite yield surfaces with corners. In: *Engineering Computations* 6 (1989), S. 186–199
- [114] RADZIKOWSKA, J. M.: Metallography and microstructure of cast iron. In: *ASM International* 9 (2007), S. 565–587
- [115] RASHID, A. : *Simulation of Thermal Stresses in a Brake Disc*, Linköping University, Diss., 2013
- [116] REIBENSCHUH, M. ; ODER, G. ; POTRC, I. ; LERHER, T. ; SAMEC, B. ; SRAML, M. : Stress analysis of a brake disc considering centrifugal and thermal load. In: *Advanced Engineering* 12 (2009), S. 99–102
- [117] REIF, K. : *Bremsen und Bremsregelsysteme*. Springer, 2010
- [118] RICHARDT, J. ; SONNTAG, U. : Neue Analysemethoden bei der normgerechten Bestimmung der geforderten Nenngrößen in Gusseisen-Werkstoffen. In: *Giesserei-Rundschau* 58 (2011), S. 112–115
- [119] ROSENBERGER, T. : Quadratisch, praktisch, nicht gut. In: *Cash and Eco spezial* 1 (2009), S. 10–11
- [120] ROZPLOCH, F. ; PATYK, J. ; STANKOWSKI, J. : Graphenes Bonding Forces in Graphite. In: *Acta Physica Polonia A* 112 (2007), S. 557–563

- [121] SAENGER, E. H.: *Wave Propagation in Fractured Media: Theory and Application of the Rotated Staggered Finite-Difference Grid*, Universität Karlsruhe (TH), Diss., 2000
- [122] SAENGER, E. H. ; CIZ, R. ; KRÜGER, O. S. ; SCHMALHOLZ, S. M. ; GUREVICH, B. ; SHAPIRO, S. A.: Finite-difference modeling of wave propagation on microscale: A snapshot of work in progress. In: *Geophysics* 72 (2007), S. 293–300
- [123] SAENGER, E. H. ; GOLD, N. ; SHAPIRO, S. A.: Modeling the propagation of elastic waves using a modified finite-difference grid. In: *Wave Motion* 31 (2000), S. 77–92
- [124] SARDA, A. H.: *Wirkungskette der Entstehung von Hotspots und Heißrubbeln in Pkw-Scheibenbremsen*, Technische Universität Darmstadt, Diss., 2009
- [125] SCHAFFER, E. : *Structural fire protection*. American Society of Civil Engineers, 1992
- [126] SCHLARP, M. : *Einfluss der Gefügestruktur auf den Bauschinger-Effekt in metallischen Werkstoffen (Bachelorthesis)*. Karlsruher Institut für Technologie, 2013
- [127] SCHMAUDER, S. : *Mikromechanisches Verständnis des Verformungsverhaltens von ferritischen Gusseisen mit unterschiedlicher Graphitmorphologie*, 2004
- [128] SCHMID, S. ; SCHNEIDER, D. ; HERRMANN, C. ; SELZER, M. ; NESTLER, B. : A Multiscale approach for thermo-mechanical simulations of loading courses in cast iron brake discs. In: *International Journal for Multiscale Computational Engineering* 14 (2016), S. 25–43
- [129] SCHNEIDER, D. ; SCHMID, S. ; SELZER, M. ; BÖHLKE, T. ; NESTLER, B. : Small strain elasto-plastic multiphase-field model. In: *Computational Mechanics* 55 (2014), S. 27–35
- [130] SCHULZ, R. A. ; JENSEN, M. C. ; BRANDT, R. C.: Single crystal cleavage of brittle materials. In: *International Journal of Fracture* 65 (1994), S. 291–312
- [131] SIMO, J. ; HUGHES, T. : *Computational Inelasticity*. Springer, 1998
- [132] SJÖGREN, T. : *Influences of the graphite phase on elastic and plastic deformation behaviour of cast irons*, School of engineering, Jönköping University, Diss., 2007
- [133] SJÖGREN, T. ; SVENSSON, H. : Study of the Eutectoid Transformation in Grey Cast Iron and Its Effect on Mechanical Properties. In: *Key Engineering Materials* 457 (2011), S. 157–162
- [134] SKRZYPEK, J. ; GANCZARSKI, A. : *Modeling of Material Damage and Failure of Structures*. Springer, 1999
- [135] SMALC, M. ; SHIVES, G. ; CHEN, G. ; GUGGARI, S. ; NORLEY, J. ; III, R. A. R.: *Thermal performance of natural graphite heat spreaders (Konferenzbeitrag)*, 2005
- [136] SOMMERFELD, A. : *Untersuchungen zur Graphitkeimbildung in GJL-Schmelzen*, Technische Universität Clausthal, Diss., 2009
- [137] SONNTAG, U. : Neue Analysemöglichkeiten bei der Bestimmung wichtiger mikrostruktureller Kenngrößen in Gusseisen-Werkstoffen. In: *Giesserei-Rundschau* 58 (2011), S. 112–115
- [138] SOUZA NETO, E. de ; PERIC, D. ; OWEN, D. : *Computational methods for plasticity*. John Wiley & Sons Ltd, 2008

- [139] SPATSHECK, R. ; MÜLLER-GUGENBERGER, C. ; BRENNER, E. ; NESTLER, B. : Phase field modeling of fracture and stress-induced phase transitions. In: *Physical Review* 75 (2005), S. 066111–1 – 066111–14
- [140] SPRINGMANN, M. : *Identifikation von Materialparametern schädigungsmechanischer Gesetz unter Einbeziehung der Dehnungslokalisierung*, Technische Universität Bergakademie Freiberg, Diss., 2005
- [141] STEFANESCU, D. M.: Solidification and modeling of cast iron - A short history of the defining moments. In: *Materials Science and Engineering A* 413-414 (2005), S. 322–333
- [142] SUN, J. y. ; ZHU, H. q. ; QIN, S. h. ; YANG, D. l. ; HE, X. t.: A review on the research of mechanical problems with different moduli in tension and compression. In: *Journal of Mechanical Science and Technology* 24 (2010), S. 1845–1852
- [143] SVENSSON, H. ; SJÖGREN, T. : The Effect of Cooling Rate, Section Size and Alloying on Matrix Structure Formation in Pearlitic Grey Cast Iron. In: *Key Engineering Materials* 457 (2011), S. 169–174
- [144] TRIAS, D. ; COSTA, J. ; TURON, A. ; HURTADO, J. : Determination of the critical size of a statistical representative volume element (SRVE) for carbon reinforced polymers. In: *Acta Materialia* 54 (2006), S. 3471–3484
- [145] UEHARA, R. ; UNO, Y. : *Efficient Algorithms for the Longest Path Problem*, 2004
- [146] ULBRICHT, V. : *Skript zur Vorlesung: Kontinuumsmechanik*. TU Dresden, 2013
- [147] VDI: *VDI Wärmeatlas*. Springer, 2006
- [148] VELICHKO, A. : *Quantitative 3D Characterization of Graphite Morphologies in Cast Iron using FIB Microstructure Tomography* , Universität des Saarlandes, Diss., 2008
- [149] VIRIEUX, J. : SH-wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method. In: *Geophysics* 49 (1984), S. 1933–1957
- [150] VOIGT, W. : Über die Beziehung zwischen den beiden Elastizitätskonstanten isotroper Körper. In: *Annalen der Physik* 274 38 (1889), S. 573–587
- [151] WATANABE, I. ; SETOYAMA, D. ; NAGASAKO, N. ; IWATA, N. ; NAKANISHI, K. : Multiscale prediction of mechanical behavior of ferrite-pearlite steel with numerical material testing. In: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 89 (2011), S. 829–845
- [152] WILLIS, R. D. ; BLANCHARD, F. T. ; CONNER, T. L.: *Guideline for the Application of SEM/EDX Analytical Techniques to Particular Matter Samples*, 2002
- [153] WOYDT, M. : *Reibung und Verschleiß von Werkstoffen und Dünnschichte, Bauteilen und Konstruktionen: Ursachen-Analyse-Optimierung*. Expert Verlag, 2010
- [154] XU, Y. : *Analysis of P-wave seismic response for fracture detection: modelling and case studies*, University of Edinburgh, Diss., 2011
- [155] YE, Z. ; YU, H. ; YAO, W. : *A new elasticity and finite element formulation for different Young's modulus when tension and compression loading*, 2001

- 
- [156] YILDIZ, Y. ; DUZGUN, M. : Stress analysis of ventilated brake discs using the finite element method. In: *International Journal of Automotive Technology* 11 (2010), S. 133–138
- [157] ZAMEL, N. ; LI, X. ; SHEN, J. ; BECKER, J. ; WIEGMANN, A. : Estimating effective thermal conductivity in carbon paper diffusion media. In: *Chemical Engineering Science* 65 (2010), S. 3994–4006
- [158] ZHU, J. ; P.K.LIAW ; CORUM, J. ; HANSEN, J. ; CORNIE, J. : Damage Mechanisms in a Cast Ductile Iron and a Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>p/Al Composite. In: *Metallurgical and Materials Transactions A* 29 (1998), S. 2855–2862
- [159] ZIEHER, F. ; LANGMAYR, F. ; JELATANCEV, A. ; WIESER, K. : *Thermal and mechanical fatigue simulation of cast iron cylinder heads*. SAE2005 World Congress, 2005

# Abbildungsverzeichnis

1	Darstellung der Idee hinter der Multiskalensimulation. Informationen des Gefüges der Bremsscheibe werden als Eingabeparameter für die Simulationen auf der mesoskopische Größenskala verwendet. Über diese Simulationen werden die Eigenschaften des Materials bestimmt, welche als Eingabeparameter für die makroskopische Simulation dienen. . . . .	iii
2.1	Entwicklung der Bremse nach [89]. a) blockiertes Rad, b) Anfänge der Reibungsbremse, c) Klotzbremse, d) Außenbandbremse. Die auf der rechten Seite dargestellten Bremsenausführungen werden in den aktuellen Fahrzeugen eingesetzt. e) Innenbackenbremse, f) Scheibenbremse, g) elektrische Bremse. . . . .	4
2.2	Auf die Scheibe und den Bremsbelag reduziertes Bremssystem. Die restlichen Bestandteile werden als Blackbox betrachtet und über den Ausgabeparameter $p_B$ des Bremsdruck definiert. . . . .	6
2.3	a) Die drei gebräuchlichsten Typen von Bremsscheiben. Scheibe aus Vollmaterial, innenbelüftete Scheibe und die gelochte Scheibe. b) Aufbau der in dieser Arbeit behandelten Lkw-Bremsscheibe. . . . .	6
2.4	Freischnitt des Rades mit der angreifenden Bremskraft $F_B$ , dem daraus resultierenden Bremsmoment $M_B$ , dem Reifenradius $r_R$ und dem mittleren Radius des Bremsbelags $r_p$ . Die Fläche des Bremsbelags wird über $A_{pad}$ definiert und der infinitesimale Ausschnitt über $dA_{pad}$ . . . . .	8
2.5	Verlauf des Schirmungsverhaltens einer Bremsscheibe aufgrund der thermischen Belastung beim Bremsvorgang nach [19]. Bei $t = 0$ s ist am zweidimensionalen Schnitt der Bremsscheibe dessen unverformte Geometrie zu sehen. Zum Zeitpunkt $t = 3$ s dehnen sich die Bereiche nahe der Reibfläche aufgrund der dort vorliegenden Temperaturerhöhung, die durch die Reibung zwischen Scheibe und Belag entsteht, aus. Bei $t = 7$ s ist die Temperatur gleichmäßiger im kompletten Reibring verteilt und es tritt eine deutliche Schirmung der Scheibe auf. . . . .	10
2.6	Ausdehnung der Bremsscheibe aufgrund der Erwärmung. Der Bremsstopf hat eine geringer Temperaturerhöhung erfahren als der Reibring, was zu einer geringeren Ausdehnung des Bremsstopfs führt und damit die Ausdehnung des unteren Teils des Reibrings behindert. Dadurch ergibt sich die Schirmung der Bremsscheibe. . . . .	10
2.7	Darstellung der unterschiedlichen Hotspotformen nach [5]. a) Asperity hotspots, b) Focal hotspots, c) Distortional hotspots und d) Regional hotspots. . . . .	12
2.8	Darstellung der charakteristischen Anordnung der Risse auf der Reibfläche einer Lkw-Bremsscheibe. Die sichtbaren Risse verlaufen in radialer Richtung und sind bei dieser Abbildung im äußeren Bereich der Scheibe zu beobachten. . . . .	14

3.1	Eisen-Kohlenstoff-Zustandsdiagramm entsprechend [58]. Die blau gestrichelte Linie beschreibt dabei das stabile System und die schwarze durchgezogene Linie das metastabile System. . . . .	18
3.2	Einfluss der Legierungselemente auf die eutektische Temperatur $T_{\gamma/Graphit}$ für das stabile und $T_{\gamma/Fe_3C}$ des metastabilen Systems nach [136]. . . . .	19
3.3	Erstelltes Modell einer eutektischen Graphitzelle nach Minkoff [103]. . . . .	20
3.4	Einfluss der Abkühlgeschwindigkeit auf die Lamellenlänge fünf verschiedener Gusseisenlegierungen nach Svensson [143]. Die Erstarrungszeit wird über die Zylinderdurchmesser (20 mm, 45 mm, 85 mm) variiert. Die Graphitlamellenlänge variiert dabei zwischen 40 $\mu\text{m}$ und 100 $\mu\text{m}$ . . . . .	20
3.5	Vergleich der Spannungs-Dehnungs-Diagramme von Stahl, GJS und GJL entsprechend [6]. Während Gusseisen mit Kugelgraphit einen deutlichen linear elastischen Bereich aufweist, ist der Verlauf der Kennlinie des Gusseisens mit Lamellengraphit bereits vom Ursprung aus nichtlinear. . . . .	22
3.6	Aufbau eines hexagonalen Graphitkristalls mit einer ABAB... Anordnung der Kohlenstoffschichten in Richtung der $c$ -Achse. Starke kovalente Bindungen innerhalb der Basalebene und schwache Van-der-Waals-Bindungen zwischen den Basalebene. . . . .	23
3.7	a) Entstehung des lamellaren perlitischen Gefüges bei der eutektoiden Umwandlung des Austenits und b), Darstellung des interlamellaren Abstands $S$ zwischen den Austenit und Zementit Lamellen. . . . .	26
3.8	Abhängigkeit der Streckgrenze und Zugfestigkeit von Perlit vom interlamellaren Abstand $S$ nach Modi et al. [104]. . . . .	27
3.9	Verlauf der Kraftlinien durch das Gusseisen entsprechend der Orientierung der Graphitlamelle bei Zugbelastung nach [92] (a-c) und idealisierte Darstellung der Kraftlinien bei Druckbelastung (d). Entsprechend der Orientierung wird der Kraftfluss durch das Gefüge mehr (a) oder weniger (c) behindert. . . . .	28
3.10	Dehnungskomponenten bei Be- und Entlastung eines Gusseisens mit Lamellengraphit mit den vier unterschiedlichen Dehnungsanteilen nach [6]. . . . .	29
3.11	Experimentelle Zug- und Druckversuche eines Gusseisens mit Lamellengraphit der Daimler AG. Der Druckversuch wird zur Verdeutlichung des Unterschieds zwischen Zug- und Druckkennlinie in den Zugbereich projiziert. Der Zugversuch weist ein sprödes Materialverhalten auf, während für den Druckbereich eine ausgeprägte plastische Verformung zu beobachten ist. . . . .	30
3.12	Darstellung des Elastizitätsmoduls im Ursprung (I), des Tangentemoduls (II) und des Sekantenmoduls (III). . . . .	31
3.13	Abhängigkeit der Zugfestigkeit von der Wanddicke des Gussstücks nach [53]. Mit zunehmender Wanddicke nimmt die Zugfestigkeit der Materialien ab, was auf die geringer Abkühlgeschwindigkeit und somit die Graphitlamellenlänge entsprechend Abbildung 3.4 zurückzuführen ist. . . . .	33
3.14	a) Vergleiche der Wärmeleitfähigkeiten von GJL und GJS für den Temperaturbereich $0 < T < 500$ und b) Vergleiche der thermischen Längenausdehnung von GJL und GJS für den selben Temperaturbereich nach [34]. . . . .	34
4.1	Querschnitt der Bremsscheibe mit der Position der analysierten Proben A, B und C der fabrikneuen Scheibe mit den entsprechenden Schlibfbildern sowie der Darstellung der kompletten Bremsscheibe. . . . .	38

4.2	Schliffbilder vor dem Ätzen der Proben zur Darstellung der Graphitanordnung im Gefüge an den Positionen A, B, C1 und C2. . . . .	39
4.3	Gefügebestandteile des untersuchten Gusseisens. Perlitische Matrix, Graphitlamellen und Niobkarbide. . . . .	39
4.4	Darstellung der Konvertierung des experimentellen Schliffbilds in ein Binärbild mit der anschließenden Skelettierung der Lamelle und der Bestimmung des längsten Wegs entsprechend [128]. A, ursprüngliches Schliffbild der Graphitlamelle. A-B, mittleres eines Otsu-Filter wird das Bild in ein Bionärbild umgewandelt welches über den Skelettierungsalgorithmus B-C die Lamelle auf eine ein Zellen breite Struktur reduziert. Innerhalb dieser Struktur wird der längste Weg ermittelt (C-D). . . . .	40
4.5	Aktuelle Zelle $p$ und benachbarte Zellen $p_0$ - $p_7$ . . . . .	41
4.6	Masken $A$ - $H$ zur Überprüfung der umliegenden Zellen nach [40]. Die Masken $C$ - $H$ sind jeweils rotierte Anordnungen der Masken $A$ und $B$ . Die dunkelgrauen Zellen die mit einer 1 belegt sind, haben die gleiche Phase wie die Zelle $p$ , die hellgrauen Zellen die mit einer 0 belegt sind, haben eine Phase ungleich der Zelle $p$ . Die restlichen Zellen werden nicht betrachtet. . . . .	42
4.7	Algorithmus zur Bestimmung des längsten Pfades innerhalb der verästelten Struktur. . . . .	42
4.8	Übersicht zur Analyse der experimentellen Mikrostruktur des Gusseisens mit der Umwandlung des Schliffbilds in das Datenformat des Analysetools. Zur besseren Darstellung ist im unteren Bereich ein Ausschnitt des Gefüges mit den zugehörigen Pfaden des längsten Weges dargestellt. Als Ausgabewerte liefert die Analyse Informationen zu den einzelnen Graphitlamellen sowie allgemeine Gebietsinformationen. . . . .	44
4.9	Experimentelle Spannungs-Dehnungs-Kennlinie der Daimler AG für das untersuchte Gusseisen GG-15 Cr Cu Nb HC. Zur Verdeutlichung der Unterschiede im Zug- und Druckbereich wird für die Druckkennlinie der Betrag der Spannung $ \sigma_d $ über den Betrag der Dehnung $ \epsilon_d $ geplottet. . . . .	45
4.10	a) Spannungs-Dehnungs-Diagramme des Gusseisens für den Temperaturbereich $20^\circ\text{C} \leq T \leq 1000^\circ\text{C}$ . Mit steigender Temperatur ist ein Abfall der Kennlinie zu beobachten bei einer Erhöhung der Bruchdehnung. b), Abhängigkeit der Zugfestigkeit von der Temperatur für den Bereich $20^\circ\text{C} \leq T \leq 1000^\circ\text{C}$ . Die Zugfestigkeit nimmt mit zunehmender Temperatur ab. Spezielle im Bereich zwischen $500^\circ\text{C}$ und $760^\circ\text{C}$ ist ein starker Abfall zu beobachten. . . . .	46
4.11	Rissbilder auf der belasteten Scheibe. Auf der inneren Reibfläche sind die Risse im Bereich zwischen mittlerem Reibringradius $r_{m,r}$ und Außenradius $r_a$ in radialer Richtung angeordnet. Die Risse sind dabei deutlich sichtbare makroskopische Risse. Auf der äußeren Reibfläche treten die Risse im Bereich zwischen mittlerem Reibringradius $r_{m,r}$ und Innenradius $r_i$ auf. Die Risse auf der äußeren Reibfläche sind deutlich kleiner als auf der inneren Reibfläche. . .	46
4.12	Analyse der inneren Oxidation in Abhängigkeit vom Abstand zur Reibfläche. Nahe der Reibfläche (I) bis zu einer Tiefe von $100\ \mu\text{m}$ ist an den Graphitlamellen deutlich der Einfluss der inneren Oxidation zu sehen. Für eine Tiefe von $200\ \mu\text{m}$ - $300\ \mu\text{m}$ ist eine Abnahme der Oxidation zu beobachten (II). Ab einer Tiefe von über $500\ \mu\text{m}$ ist nahezu keine innere Oxidation mehr vorhanden (III). . .	48

4.13	REM-Aufnahmen mit den Ergebnissen der EDX-Analyse an den markierten Bereichen. a), in einem Bereich in dem sich die Mikrostruktur deutlich verändert hat. Hier ist ein hoher Sauerstoffanteil von über 70 Atom% zu beobachten. b) an Stelle 1 ist ein geringer Sauerstoffanteil im perlitischen Grundgefüge zu beobachten (<10 Atom%) und an Stelle 2 ein hoher Sauerstoffanteil im Bereich der neu gebildeten Phase. . . . .	49
5.1	Übersicht der Multiskalensimulation mit der makroskopischen und mesoskopischen Simulation sowie deren Kopplung entsprechend [128]. . . . .	55
6.1	Infinitesimales Volumenelement mit Cauchy'schen Spannungskomponenten. . . . .	58
7.1	Definition der elastischen und plastischen Dehnung anhand des einachsigen Zugversuchs. Mit a-b linear elastischem, b-c ideal plastischem und b-d verfestigendem Materialverhalten. $\epsilon_{pl}$ beschreibt die plastischen Dehnung und $\epsilon_{el}$ die elastische Dehnung. . . . .	62
8.1	Definition der Größen zur Berechnung des Schädigungsparameters. $\delta A$ beschreibt die Gesamtfläche des Querschnitts bestehend aus den ungeschädigten Flächenbereichen $\delta A_{eff}$ und den Flächenbereichen der Risse und Poren $\delta A_D$ . . . . .	66
8.2	Schädigungsvariablen zur Beschreibung der Schädigung des Graphits. $D_{  }$ beschreibt die Schädigung innerhalb der Basalebene, $D_S$ die Schubschädigung zwischen den Basalebene und $D_{\perp}$ das Ablösen einzelner Basalebene. . . . .	67
8.3	a) Verlauf der Entlastung, bei geschädigtem und ungeschädigtem Material nach [35]. $E$ beschreibt den ursprünglichen Elastizitätsmodul und $\tilde{E} = (1 - D)E$ den effektiven Elastizitätsmodul. b) Visualisierung des Dehnungsäquivalenzprinzips welches besagt, dass die Dehnung des abgebildeten geschädigten Materials unter der Spannung $\sigma$ gleich der Dehnung des ungeschädigten Materials unter der Spannung $\tilde{\sigma}$ ist. . . . .	68
8.4	Dehnungslokalisierung bei entfestigendem Materialverhalten. a) Nach Erreichen des Bifurkationspunktes beginnt das Material in einigen Bereichen zu entfestigen. Dies führt zu dem in Abbildung b) dargestellten inhomogenen Dehnungszustand mit den Bereichen der Dehnung $\epsilon_1$ und $\epsilon_2$ . Die Bereiche $\epsilon_2$ sind dabei die entfestigenden Materialabschnitte. Für die Verfestigung liegt, wie dargestellt, ein homogener Dehnungszustand vor. . . . .	69
9.1	a) Bimodulares Materialverhalten am Beispiel des Graphits mit $E_t > E_c$ . $E_t$ stellt den Elastizitätsmodul im Zugbereich dar und $E_c$ im Druckbereich. b) bilineare Approximation des Verhaltens von grauem Gusseisen. . . . .	74
9.2	Unstetiger Übergang zwischen Zug- und Druckbelastung für den Eintrag $S_{11}$ der Nachgiebigkeit der beschriebenen Modelle nach [70]. . . . .	75
9.3	Übergangsfunktion für die Nachgiebigkeit mit Hilfe des Tangens Hyperbolicus konstruierten Funktion $f(s_{ii}) = \tanh(as_{ii})b + c$ . Der Parameter $b = \frac{S_{11,d} - S_{11,z}}{2}$ gibt das Verhältnis zwischen Zug und Druck wieder und der Parameter $c$ die Verschiebung der Funktion. . . . .	76

11.1	a) Standard Staggared Grid (SSG) mit der Anordnung der Verschiebungen auf den Würfelseiten und der Anordnung der Schubspannung auf den Kanten. Die Dichte, Steifigkeit sowie die Normalspannungen sind in der Würfelmitte zu finden. b) Rotated Staggered Grid (RSG) mit der Anordnung der Verschiebungen auf den Würfecken und der Dichte, Steifigkeit sowie die Spannungen in der Würfelmitte. . . . .	84
11.2	Vergleich der Berechnungstempel für das SSG mit den Verschiebungen auf den Seiten a) und das RSG mit den Verschiebungen auf den Ecken b) nach [121].	84
11.3	a) Benötigte Zellen zur Berechnung der Spannungswerte $\sigma$ an der Stelle $(x,y,z)$ über die Verschiebungen auf den Würfecken und b) benötigte Spannungswerte zur Berechnung der Verschiebungen an der Stelle $(x,y,z)$ . Die Dreiecke Stellen die Würfecken dar und die Kreise die Würfelmitte. . . . .	88
11.4	Konvergenz der Ergebnisse des Druckversuchs für unterschiedliche $\delta$ . Für $\delta = 10^{-5}$ ist demnach kein ausreichender Gleichgewichtszustand erreicht, während die Simulationen mit $\delta = 10^{-6}$ und $\delta = 10^{-7}$ nahezu identische Ergebnisse liefern.	92
11.5	a) Werte der Verschiebungsrandbedingung für die explizite Berechnung und für die quasistatische Berechnung. b) Skizze eines Zugversuchs für explizite und quasistatische Berechnung. $t_{0...n}$ stellen dabei die unterschiedlichen Zeitpunkte der Berechnung mit der dazugehörigen Verschiebung dar. . . . .	93
11.6	Simulierte Kennlinien mit unterschiedlicher Schrittweite. Bei Simulation 1 wird die Dehnung von 2% in 21 Schritten aufgebracht und bei Simulation 2 in 7 Schritten. Die Ergebnisse der ausgewerteten Spannung für Simulation 1 und 2 sind an den 7 Punkten identisch. . . . .	94
12.1	Verfestigungsfunktion nach [26] mit der Fließspannung $\sigma_y$ über der akkumulierten plastischen Dehnung $\bar{\epsilon}_{pl}$ entsprechend [128]. $\sigma_0$ ist die Spannung, die zum erstmaligen plastischen Fließen führt und $\Theta_0$ die zugehörige Steigung. Für $\bar{\epsilon}_{pl} \rightarrow \infty$ geht die Funktion in die bleibende Steigung $\Theta_\infty$ über. . . . .	96
12.2	Darstellung des Return-Mapping-Algorithmus. Spannungszustände $\sigma_{test}^{n+1}$ , die außerhalb der durch die durchgezogenen Linie dargestellten Fließfläche liegen, werden mit diesem Verfahren auf die Fließfläche des aktuellen Berechnungsschrittes (gestrichelte Linie) projiziert. Liegt kein verfestigendes Materialverhalten vor, liegen die Fließflächen von Zeitpunkt $n$ und $n+1$ übereinander. . . . .	96
12.3	Berechnungsablauf für die von-Mises-Plastizität. . . . .	98
12.4	Mehrflächenfließfläche nach Hjelm [62] mit den unterschiedlichen Bereichen I, I', II, III, III', die bei der Berechnung der Konsistenzparameters berücksichtigt werden müssen, entsprechend [128]. Für die Bereiche I und I' wird ein zulässiger Spannungszustand erreicht, sobald die von-Mises-Fließbedingung erfüllt ist. Für die Bereiche III und III' gilt das, sobald die Mises-Schleicher-Fließbedingung erfüllt ist. Für den grauen Bereich II müssen beide Fließflächen in Betracht gezogen werden. . . . .	99
12.5	Teil 1 des Berechnungsablauf für die Mehrflächenplastizität. . . . .	101
12.6	Teil 2 des Berechnungsablauf für die Mehrflächenplastizität. . . . .	102
13.1	Berechnungsablauf zur Bestimmung des Konsistenzparameters nach [39]. . . . .	105

13.2	Struktur des Graphits und Beschreibung der Schädigung über die Schädigungsvariablen $D_{\perp}$ , $D_s$ und $D_{\parallel}$ . $D_{\perp}$ und $D_s$ beschreiben die Schädigung, die aufgrund der Spaltung entlang der Basalebene auftritt entsprechend [128]. Über $D_s$ wird die Schädigung, welche die Aufnahme von Schubbelastungen beeinflusst, definiert und durch $D_{\perp}$ die Schädigung die die Aufnahme von Belastungen orthogonal zur Basalebene beeinflusst. Die Schädigungsvariable $D_{\parallel}$ dient zur Beschreibung der Ablösung des Graphits von der Matrix in Richtung der Basalebene. . . . .	106
13.3	Übergangsfunktion für die Risschließung des Graphits entsprechend [128]. Außerhalb des Übergangsbereichs $\epsilon_{\text{clos}}$ sind die Risse geschlossen/inaktiv (a) beziehungsweise geöffnet/aktiv (c). Über $h_0$ wird mit $h_0 D$ die Stärke der Risschließung beeinflusst. Innerhalb des Übergangsbereichs wird die Schädigung mittels der Funktion $h(\epsilon_n)$ und über die Beziehung $h(\epsilon_n)D$ kontinuierlich vergrößert beziehungsweise verringert. . . . .	107
14.1	Unbelasteter Materialausschnitt mit den Rändern $\partial V$ und den Randbedingungen in Belastungsrichtung $\partial V_x^+$ und $\partial V_x^-$ . . . . .	110
14.2	Darstellung der KU-Randbedingung für das Ausgangsmaterial aus Abbildung 14.1 mit den gleichmäßigen Verschiebungswerten auf den Rändern $\partial V^+/\partial V^-$ und den für ein heterogenes Material ungleichmäßigen Spannungswerten im Randbereich. . . . .	110
14.3	Darstellung der SU-Randbedingung für das Ausgangsmaterial aus Abbildung 14.1 mit den gleichmäßigen Spannungswerten auf den Rändern $\partial V$ und den für ein heterogenes Material ungleichmäßigen Verschiebungswerten im Randbereich. . . . .	111
14.4	Darstellung der periodischen Spannungs-/Verschiebungsrandbedingung für das Ausgangsmaterial aus Abbildung 14.1. Die Beträge der Spannungs-/Verschiebungswerte auf den sich gegenüberliegenden Rändern $\partial V$ sind identisch. Die Fluktuationen ergeben sich entsprechend der Mikrostruktur. . . . .	113
14.5	Ausschnitt der Randzellen und Berechnungszellen des implementierten RSGs mit den Positionen der Spannungs- und Verschiebungsrandbedingung sowie der berechneten Spannungs- und Verschiebungswerte. Am linken Rand liegen die Werte der Spannungs- und Verschiebungsrandbedingung in der selben Zelle, während sie für den oberen Rand um eine Zelle versetzt angeordnet sind. . . . .	114
14.6	Periodische Randbedingung. a) Dreidimensionale Darstellung mit den Rändern die auf die gegenüberliegende Seite kopiert werden und b), zweidimensionale Darstellung der x-y-Ebene mit der Position der kopierten Spannungs-/Verschiebungswerte. . . . .	114
14.7	Darstellung zur Implementierung der Rotation des Bremsbelags. Die Rotation wird um den Scheibenmittelpunkt $\mathbf{b}_M$ mittels der Rotationsmatrix $Q$ . Hierbei wird überprüft, ob der Punkt $\mathbf{p}$ nach der Rücktransformation auf dem rechts dargestellten, separat gespeicherten, Belag liegt. Ist dies der Fall, so wird am Punkt $\mathbf{p}$ die Belagsrandbedingung ausgeführt. . . . .	116

14.8	Randbedingung am Kontaktbereich Bremsscheibe-Bremsbelag entsprechend [128]. Die auf der linken Seite dargestellte Zelle der Bremsscheibe befindet sich im Kontaktbereich mit dem Bremsbelag. Auf diese wirkt daher die Normal- und Reibkraft, zusätzlich wird die durch die Reibung entstehende Wärme aufgebracht. Die Wärmemenge $Q_{\text{pad}}$ beträgt 95 % der durch die Reibung entstehenden Wärme $Q_f$ . Die Wärme wird mittels konduktivem Wärmetransport an die Nachbarzellen übertragen. Die Zelle der Bremsscheibe auf der rechten Seite ist in Kontakt mit dem Umgebungsmedium Luft. In dieser Zelle wird die Wärmestrahlung sowie der konvektive Wärmeübergang berechnet. Die rot markierten Flächen beschreiben die Reibfläche der Bremsscheibe. . . . .	117
14.9	Unebenheit der Scheibe aufgrund der thermischen und mechanischen Belastung und Darstellung der für die Gewichtungsfunktion benötigten Größen $u_{y,\text{min}}$ , $u_{y,\text{max}}$ und $u_y^{x,y,z}$ . . . . .	118
14.10	Definition der Randbereiche für die Verwendung ortsabhängiger Wärmeübertragungs- und Emissionskoeffizienten. Die Werte für die Bereiche $\phi_i$ sind in Tabelle 17.9 gegeben. . . . .	122
15.1	Darstellung des Übergangs von makroskopischen Kontinuum zur heterogenen Mikrostruktur mit den Gefügebestandteilen und der Bestimmung der effektiven Größen $\bar{\sigma}$ , $\bar{\epsilon}$ und $\bar{\mathcal{C}}$ . . . . .	126
15.2	Unterschiedliche Realisierungen von Einheitszellen für eine ideale periodische Gefügestruktur nach [27]. . . . .	129
15.3	Ansatz der eingebetteten Zelle beziehungsweise Selbstkonsistenzmethode. Auf der linken Seite mit der ursprüngliche heterogenen Struktur und auf der rechten Seite der eingebetteten Struktur mit der homogenisierten Phase und der Grenzfläche. . . . .	130
15.4	Berechnung der effektiven Wärmeleitfähigkeit für ein heterogenes Material bestehend aus 2 Phasen mit den Wärmeleitfähigkeiten $\lambda_{\text{het},1}$ und $\lambda_{\text{het},2}$ entsprechend [9]. Für die Berechnung wird ein konstanter Temperaturgradient in x-Richtung über die Temperatur $T_o$ an der Oberseite und der Temperatur $T_u$ an der Unterseite des Gebiets aufgebracht. . . . .	132
16.1	Modell der Graphitlamellen nach [7] (Mitte) und die Approximation der Lamellen durch gewellte Ellipsoide entsprechend [128]. . . . .	136
16.2	Flussdiagramm des Füllalgorithmus. . . . .	138
16.3	Darstellung der für den Gebietserstellungsalgorithmus verwendeten Ebene. In a) ist das Testgebiet dargestellt mit der kompletten Lamelle, ihrem Startpunkt $\mathbf{s}(\phi_\alpha)$ und dem Normalenvektor $\mathbf{n}(\phi_\alpha)$ und in b) das Simulationsgebiet mit den bereits gefüllten Ellipsoiden der Phasen $\phi_\beta$ und $\phi_\gamma$ mit deren Startpunkten und Normalenvektoren sowie der verbleibende Teil der Lamelle der Phase $\phi_\alpha$ aufgrund der Schnitte mit den vorhandenen Lamellen. . . . .	139
16.4	Dreidimensionales periodisches Gebiet, welches mit dem beschriebenen Algorithmus erstellt wurde, mit einem 2D-Schnitt durch das Gefüge. Durch die mehrfache Aneinanderreihung des Schnittes wird die Periodizität des Gebiets deutlich. . . . .	140

16.5	Darstellung des Füllalgorithmus und Vergleich mit experimentellen Schliiffbildern entsprechend [128]. Aus dem 2D-Schliiffbild werden die zur Definition der Ellipsoide benötigten Informationen gewonnen, mit denen das 3D-Simulationsgebiet erstellt werden kann. Ein Schnitt durch das Gebiet dient als qualitativer Abgleich der erstellten Struktur mit dem experimentellen Schliiffbild. . . . .	141
16.6	a) Vergleich der Häufigkeit der im RVE vorkommenden Längen und b) der Dicken mit denen der experimentellen Schliiffbilder. Für die Längen und Dicken überwiegt jeweils der Anteil der kürzeren/schmäleren Lamellen. Diese Merkmale weist auch das erstellte Gefüge auf. . . . .	142
17.1	Darstellung der vier Simulationsgebiete entsprechend [129]. a) Kugelförmige Graphitinhomogenitäten, b) zufällig orientierte ellipsoide Graphitinhomogenitäten, c) parallel $\parallel$ zur Belastungsrichtung orientierte Graphitinhomogenitäten und d) orthogonal $\perp$ zur Belastungsrichtung orientierte Graphitinhomogenitäten.	144
17.2	a) Zugversuch in z- Richtung an einer würfelförmigen Probe mit einer einzelnen kugelförmigen Graphitinhomogenität (Radius $33\ \mu\text{m}$ ) und der Darstellung der von-Mises-Vergleichsspannung sowie der akkumulierten plastischen Dehnung. b) Einfluss der Auflösung $\delta x = 0,8\ \mu\text{m}$ , $\delta x = 1,0\ \mu\text{m}$ und $\delta x = 2,0\ \mu\text{m}$ sowie der Interfacebreite auf die Simulationsergebnisse entsprechend [129]. . . . .	145
17.3	a) Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der vier Simulationsgebiete und b) Darstellung der Änderung der Spannung $\Delta\sigma/\Delta\epsilon$ über die Dehnung zur Ermittlung der Streckgrenze. Das Plateau stellt den linearelastischen Bereich dar, und der Abfall der Kennlinie den Beginn des Fließens. . . . .	146
17.4	a) Darstellung des Bauschinger-Effekt bei Belastung und anschließender Lastumkehr. $\sigma_{y,Zug}$ stellt den Beginn des plastischen Fließens unter Zugbelastung dar und $\sigma_{y,Druck}$ bei darauffolgender Druckbelastung. Die Spannung $\sigma_{max,Zug}$ ist die während der Zugbelastung maximal erreichte Spannung, die ohne den Bauschinger-Effekt der erwartete Beginn des Fließens unter Druckbelastung wäre. $\epsilon_v$ und $\epsilon_r$ stellen die Dehnungen zum Erreichen der Spannung $\sigma_{max,Zug}$ bzw. $-\sigma_{max,Zug}$ dar. b) Definition der drei unterschiedlichen Bauschinger-Parameter nach der Spannung, Dehnung und der Energie. . . . .	147
17.5	Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der Zug-Druck-Zyklen zur Bestimmung des Bauschinger-Spannungsparameters für die vier Gebiete aus Abbildung 17.1 mit der Auswertung des Bauschinger-Spannungsparameters in Tabelle 17.2. . . . .	148
17.6	a) Abbildung der 3D-Gefügestruktur mit den grau dargestellten Graphitlamellen und der 2D Schnittebene mit den Spannungsspitzen an den Enden der Graphitlamellen unter einachsiger Zugbelastung. b) Spannungs-Dehnungs-Kennlinien der Gusseisenstruktur unter Verwendung des duktilen Schädigungsmodells, welches zu dem deutlichen Abfall der Spannung ab einer Dehnung von $\approx 0,8\%$ . Die Punkte I-IV entsprechen denen aus den Abbildungen 17.7 und 17.8. . . .	150
17.7	Schädigungsentwicklung innerhalb des Gussgefüges unter einachsigen Zugbelastung. Die Punkte I und II entsprechen denen aus Abbildung 17.6. . . . .	151
17.8	Schädigungsentwicklung innerhalb des Gussgefüges unter einachsiger Zugbelastung. Die Punkte III und IV entsprechen denen aus Abbildung 17.6. . . . .	151

17.9 a) Vergleich der Spannungs-Dehnungs-Kennlinien unter Zug- und Druckbelastung. Während das Material unter Druck einer Belastung von nahezu 600 MPa und eine Dehnung von über 3 % erreicht, überwiegt bei Zugbelastung die Schädigung was bei einer Spannung von unter 400 MPa und einer Dehnung von unter 1 % zum Verlust der Tragfähigkeit führt. b) Darstellung der Spannungsverteilung innerhalb des Gefüges bei einer betragsmäßigen Dehnung von 0,7256 %. Für die Zugbelastung sind starke Spannungsüberhöhungen zu beobachten, während unter Druck ein deutlich homogener Spannungszustand vorliegt. . . . .	152
17.10 Bestimmung des Einflusses der Gebietsauflösung auf die effektiven Eigenschaften der Gusseisenstruktur mit den Auflösungen $\delta x = 3 \mu\text{m}$ , $\delta x = 2,25 \mu\text{m}$ und $\delta x = 1,5 \mu\text{m}$ [128]. . . . .	153
17.11 Bestimmung der physikalischen Größe des RVE durch die Simulation der Gebiete mit den Größen 250 $\mu\text{m}$ , 450 $\mu\text{m}$ und 700 $\mu\text{m}$ unter Verwendung sonst identischer Gebietsparameter entsprechend [128]. Während die Gebiete beiden größeren Gebiete nahezu identische Ergebnisse liefern, weichen die der Simulation des Gebiets mit der Größe 250 $\mu\text{m}$ stärker ab. . . . .	154
17.12 Simulation eines Zugversuchs mit einem Längen-Dicken Verhältnis von $L_0/d_0 = 5$ des Matrixmaterials mit den in Tabelle 17.4 angegebenen Parametern und Darstellung der experimentellen Ergebnisse nach [69]. . . . .	156
17.13a) Experimentelle und simulierte Kennlinie des Zugversuchs und b) Kennlinien des Druckversuchs. . . . .	157
17.14 Kennlinien der Zug- und Druckversuche in einem Diagramm zur Verdeutlichung der Unterschiede der Zug- und Druckkennlinien. . . . .	158
17.15a) Simulation eines Zug-Druck-Zyklus des Gusseisens und b) die nachgezeichnete Kennlinie eines experimentellen Versuchs nach [159] mit dem markierten gewellten Übergang beim Lastwechsel zwischen Zug- und Druckbelastung [128]. In c) ist die dazugehörige Schädigung der Graphitlamellen an den Punkten A, B und C der Kennlinie dargestellt [128]. . . . .	159
17.16 Darstellung der 12 Spannungszustände zur Ermittlung der makroskopischen Fließfläche des Gusseisens entsprechend [128], deren Werte in Tabelle 17.16 zusammengefasst sind. . . . .	160
17.17 Qualitativer und quantitativer Vergleich der über die RVE-Simulationen ermittelten Fließfläche links und der experimentell bestimmten Fließfläche von Hjelm [62] entsprechend [128]. Die simulierte Fließfläche weist entsprechend der Annahmen von Hjelm einen deutlichen Zug-Druck-Unterschied auf, was zu der charakteristischen Ei-Form führt. . . . .	160
17.18 Simulationen der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie mit den drei unterschiedlichen Abminderungsfaktoren entsprechend [3, 125, 29] für die Temperaturen 20°C (a), 240°C (b), 440°C (c) und 540°C (d) im Vergleich mit experimentellen Ergebnissen. . . . .	163
17.19 Simulationen mit dem Mittelwert der Abminderungsfaktoren und unter Einbeziehung der Schädigung der Matrix für die Temperaturen 20 °C (a), 240 °C (b), 440 °C (c) und 540 °C (d) im Vergleich mit experimentellen Ergebnissen. . . . .	164
17.20 3D-Ansicht der Bremsscheibe sowie Seitenansicht und Draufsicht mit den Bauteilabmessungen Innenradius der Reibfläche $r_i = 9,2 \text{ cm}$ , Außenradius der Reibfläche $r_a = 16,6 \text{ cm}$ , Dicke Rotor $d_R = 3,4 \text{ cm}$ , Dicke der Reibfläche $d_r = 1,2 \text{ cm}$ sowie die Höhe $h = 8 \text{ cm}$ . . . . .	166

17.21a)Vergleich der experimentellen Kennlinien und b) den über die Simulationsparameter aus Tabelle 17.10 erzielten simulierten Kennlinien des eindimensionalen Zugversuchs. . . . .	168
17.22Schirmungsverhalten der Bremsscheibe über den Zeitraum von 3,6 s des Bremsvorgangs an einem Schnitt durch die Bremsscheibe. Zu Beginn ( $t = 0,6 \text{ s} - 1,2 \text{ s}$ ) der Bremsung ist eine Ausdehnung der Bereiche nahe der Reibfläche durch die hohen Temperaturen vorhanden was, zu den Spitzen am äußeren Radius der Reibflächen führt. Mit zunehmender Bremsdauer verteilt sich die Temperatur im Reibring, was zu der Schirmung der Scheibe führt. . . . .	170
17.23Darstellung der Auswertung der Temperatur und der Verschiebung der Scheibe auf der Reibfläche. . . . .	171
17.24Temperaturverteilung auf der oberen und unteren Reibfläche über den Umfang für den Radius $r_T = 16 \text{ cm}$ der Simulation ohne Gewichtung der Verschiebung. Die Temperaturverteilung ist dabei über den Umfang nahezu konstant, einzig der Einfluss der Belagsposition ist vorhanden. . . . .	171
17.25Verformung der Scheibe über den Umfang für den Radius $r_T = 16 \text{ cm}$ für die Simulation ohne Gewichtung der Verschiebung. Für die Verschiebungen auf den beiden Reibflächen ist ein Wellung aufgrund der thermischen Ausdehnung zu beobachten. . . . .	172
17.26Temperaturverteilung auf der oberen und unteren Reibfläche für die Simulation ohne Gewichtungsfunktion, mit linearer Gewichtung und quadratischer Gewichtung. Während für die Simulation ohne Gewichtung eine über den Umfang konstantes Temperaturprofil vorhanden ist, wird für die Simulationen mit Gewichtung der Einfluss der Verformung der Scheibe sichtbar. Für die lineare Gewichtung treten auf der unteren Reibfläche die höchsten Temperaturen im äußeren Bereich der Reibfläche auf, was auf die Schirmung der Scheibe zurückzuführen ist. Für die quadratische Gewichtung wird zusätzlich der Einfluss der Wellung der Scheibe sichtbar. . . . .	173
17.27Temperaturverteilung über den Umfang für die lineare Gewichtung und die quadratische Gewichtung der Verschiebung. Für beide Simulationen kann der Einfluss der Verformung der Scheibe abgelesen werden. . . . .	174
17.28Temperaturverteilung über den Radius der Scheibe auf der oberen und unteren Reibfläche. Die Temperaturverteilung zeigt deutlich den Einfluss der Schirmung mit der Temperaturzunahme mit zunehmendem Radius auf der unteren Reibfläche. Dieser Effekt wird mit zunehmender Bremszeit (Zunahme der Schirmung) größer. Auf der oberen Reibfläche ist die Temperatur über den Radius nahezu konstant. . . . .	175
17.29Temperaturverlauf innerhalb der Bremsscheibe von der oberen Reibfläche zur unteren Reibfläche. Aufgrund der über die Reibflächen eingebrachte Wärme ist ein deutlicher Temperaturgradient zum Inneren des Reibrings vorhanden. . .	175
17.30Darstellung der von-Mises-Spannung innerhalb der Scheibe aufgrund der mechanischen Belastung während des Bremsvorgangs. Durch die hohe thermische Belastung an den Reibflächen tritt dort die höchste Belastung der Scheibe auf.	176

- 17.31 Darstellung der hydrostatischen Spannung  $\sigma^o$  über den Querschnitt der Brems-  
scheibe für die Zeitpunkte  $t = 0,9\text{ s}$ ,  $t = 2,1\text{ s}$  und  $t = 3,6\text{ s}$  während des  
Bremsvorgangs und die Zeitpunkte  $t = 5,1\text{ s}$ ,  $t = 12\text{ s}$  und  $t = 75\text{ s}$  des Ab-  
kühlvorgangs. Während der Bremsung (bis  $t = 3,6\text{ s}$ ) ist auf der Reibfläche  
eine Druckbelastung durch das sich dort Ausdehnende Material vorhanden  
während im Scheibeninneren eine Zugbelastung vorhanden ist. Im Laufe des  
Abkühlvorgangs tritt eine Umkehr der Belastungen auf. . . . . 177
- 17.32 Darstellung der hydrostatischen Spannung  $\sigma^o$  entlang der in Abbildung 17.31  
dargestellten Linie für die Zeitpunkte  $t = 0,9\text{ s}$ ,  $t = 2,1\text{ s}$  und  $t = 3,6\text{ s}$  während  
des Bremsvorgangs und die Zeitpunkte  $t = 5,1\text{ s}$ ,  $t = 12\text{ s}$  und  $t = 75\text{ s}$  des  
Abkühlvorgangs. Während der Bremsung (bis  $t = 3,6\text{ s}$ ) ist auf der Reibfläche  
eine Druckbelastung durch das sich dort ausdehnende Material vorhanden,  
während im Scheibeninneren eine Zugbelastung vorhanden ist. Im Laufe des  
Abkühlvorgangs tritt eine Umkehr der Belastungen auf. . . . . 177
- 17.33 Darstellung der Spannungen in Richtung  $_{11}$  und  $_{33}$  über den Zeitraum der  
Bremsung und der darauffolgenden Abkühlphase. . . . . 178
- 17.34 Darstellung der akkumulierten plastischen Dehnung innerhalb der Scheibe auf-  
grund der mechanischen Belastung während des Bremsvorgangs. Aufgrund der  
Zugbelastung im Scheibeninneren tritt dort die höchste plastische Verformung  
auf welche gegenüber der hochbelasteten Reibfläche deutlich überwiegt. . . . 178
- 18.1 Mögliche Einbindung der makroskopischen Ergebnisse als Randbedingung auf  
ein mesoskopisches Gefüge über eine in der Bremscheibe makroskopischen  
Spannungszustand der über eine Randbedingung auf ein repräsentatives Volu-  
menelement aufgebracht wird. . . . . 183