

# **Experimentelle Untersuchungen von magnetisch induzierten Instabilitäten in MHD Kanalströmungen**

Zur Erlangung des akademischen Grades

**Doktor der Ingenieurwissenschaften**

der Fakultät für Maschinenbau  
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

genehmigte  
**Dissertation**

von

Dipl.-Ing. Victor Chowdhury

Tag der mündlichen Prüfung: 06.10.2016

Hauptreferent: apl. Prof. Dr.-Ing. Leo Bühler

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Robert Stieglitz



This document is licensed under the Creative Commons Attribution –  
Non Commercial – No Derivatives 3.0 DE License  
(CC BY-NC-ND 3.0 DE): <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/3.0/de/>

# Experimental investigation of the onset of magnetically induced instabilities in MHD duct flows

## Abstract

In liquid metal blankets in fusion reactors heat and mass transport phenomena are strictly related to velocity profiles near the walls. It is known that the thin boundary layers, which form along walls parallel to an imposed magnetic field, can lose their stability due to the presence of high velocity jets with inflection points. This can lead to the formation of complex vortical structures whose size and features depend on mean flow rate, magnetic field strength and electric conductivity of duct walls.

With the aim of investigating experimentally magnetically induced instabilities in magnetohydrodynamic duct flows a double loop has been manufactured and fully instrumented, in which Indium Gallium Tin is used as model fluid. The circuit is inserted in a large dipole magnet that is strong enough to reach high Hartmann numbers in magnetohydrodynamic duct flows. During the experiments electric potential distributions are recorded on the surface of the test section, which consists of a long square duct, and in the liquid metal by means of a traversable 4-pole potential probe. Detection of time-dependent signals allows identifying critical Reynolds numbers for the onset of instabilities and their spatial extension.

# Experimentelle Untersuchungen von magnetisch induzierten Instabilitäten in MHD-Kanalströmungen

## Zusammenfassung

In Fusionsblankets, in denen Flüssigmetalle eine tragende Rolle spielen, ist der Wärme- und Stofftransport stark von Geschwindigkeitsprofilen in wandnahen Bereichen abhängig.

Dünne wandnahe Strömungsbereiche, die sich entlang von Magnetfeldern ausbilden, können aufgrund der Wendepunkte in den Geschwindigkeitsprofilen instabil werden. Dies führt zur Ausbildung von komplexen, wirbelartigen Strukturen, deren Größe und Stärke vom mittleren Volumenstrom, von der magnetischer Feldstärke und der elektrischen Leitfähigkeit abhängen.

Mit dem Ziel diese magnetisch induzierten Instabilitäten in magnetohydrodynamischen Kanalströmungen zu untersuchen, wurde ein Experiment aufgebaut, in dem eine eutektische Legierung aus Gallium Indium und Zinn als Modellfluid zum Einsatz kommt. Der gesamte Kreislauf wurde in einem großen Dipolmagneten platziert, in dem Strömungszustände mit sehr großen Hartmann - Zahlen erreicht werden können. Während der Experimente wurden elektrische Potentialmessungen auf den Wänden der Teststrecke und innerhalb des Flüssigmetalls mit einer verfahrbaren Potentialsonde vorgenommen. Durch die Auswertung von zeitabhängigen Signalen konnten kritische Reynolds-Zahlen ermittelt werden, die den Einsatz der instabilen Strömung angeben. Ferner wurde die räumliche Ausdehnung und das zeitliche Verhalten der entstehenden instabilen Strukturen untersucht werden.



## Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Kern- und Energietechnik von 2012 bis 2016. In dieser Zeit wurde ich von meinem Hauptreferenten apl. Prof. Dr.-Ing. Leo Bühler hervorragend betreut. Besonders schätze ich, dass ich zu jeder Zeit anklopfen, wir über anstehende Themen offen diskutieren konnten und ich neue Denkanstöße erhalten habe.

Für die Übernahme des Hauptvorsitzes möchte ich Prof. Dr.-Ing. Bettina Frohnapfel danken. Für die Übernahme des Korreferats mit den vielen Anregungen zur Verbesserung des Manuskripts danke ich Prof. Dr.-Ing. Robert Stieglitz.

Ich danke ebenfalls Hans-Jörg Brinkmann. Er hat mit unermüdlichem Einsatz mit mir zusammen gearbeitet und die erfolgreiche Durchführung des Experiments überhaupt erst möglich gemacht. Ich möchte weiterhin Sandor Horanyi danken, der zur richtigen Zeit den richtigen Impuls gesetzt hat. Auch an Dr.-Ing. Chiara Mistrangelo und Christina Köhly meinen herzlichen Dank für die Unterstützung.

Einen großen Dank schulde ich den Doktoranden, die ich während dieser Zeit kennen lernen durfte und schwere Zeiten erträglich gemacht haben. Insbesondere Dr.-Ing. Sebastian Ehrhard, der mir anfangs geholfen hat, den Weg in die MHD zu finden, Thomas Arlt, der mit kritischem Augenmerk das Manuskript gelesen hat, sowie Dr.-Ing. Stephan Gabriel, der für Probleme aller Art stets ein offenes Ohr hatte.

Ich danke meiner Familie für die Unterstützung. Dabei allen voran meiner Frau Agnes, die mit vollem Einsatz neben mir stand und steht.

Danke!

*Für F und V, mein Herz  
und A, mein Leben.*



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1	Grundgleichungen . . . . .	3
2.1.1	Randbedingungen . . . . .	4
2.2	Magnetohydrodynamische Kanalströmungen . . . . .	5
2.2.1	Hartmann- und Hunt-Strömung . . . . .	5
2.2.2	Stabilitätsanalysen . . . . .	12
2.2.3	Ausbildung anisotroper, instabiler Strukturen . . . . .	13
2.3	Ziele der Arbeit . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Experiment</b>	<b>16</b>
3.1	Mekka-Labor . . . . .	16
3.2	Experimenteller Aufbau des Kreislaufs . . . . .	17
3.3	Teststrecke . . . . .	18
3.4	Messtechnik . . . . .	21
3.4.1	Potentialmessungen . . . . .	21
3.4.2	Genauigkeit und Auflösungsvermögen . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Experimentelle Ergebnisse und Diskussion</b>	<b>29</b>
4.1	Kontaktwiderstand . . . . .	29
4.1.1	Analytische Lösung und Ergebnisse für $\kappa > 0$ . . . . .	29
4.1.2	Experimentelle Ergebnisse für $\kappa > 0$ . . . . .	33
4.1.3	Einfluss des Kontaktwiderstandes auf die Stabilität der Strömung . . . . .	33
4.2	Messungen zeitlicher Mittelwerte . . . . .	34
4.2.1	Übergang von laminarer zu instabiler Strömung . . . . .	39
4.3	Instationäre Messungen . . . . .	47
4.3.1	Bestimmung von Stabilitätsgrenzen . . . . .	47
4.3.2	Charakterisierung der instabilen Regime . . . . .	52
4.3.3	Transportgeschwindigkeit der Instabilität . . . . .	77
4.3.4	Zusammenfassung der instationären Ergebnisse . . . . .	81
4.4	Teststrecke mit $d=1/3$ . . . . .	84
4.4.1	Zeitgemittelte Ergebnisse . . . . .	84
4.4.2	Instationäre Ergebnisse . . . . .	89
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung &amp; Ausblick</b>	<b>91</b>
<b>A</b>	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>93</b>
<b>B</b>	<b>Statistische Größen zur Beschreibung zufälliger Größen</b>	<b>95</b>
<b>C</b>	<b>Potentialverteilungen</b>	<b>96</b>

<b>D</b>	<b>Diagramme Varianz-Analysen</b>	<b>99</b>
D.1	Entdimensionierte Varianz Analysen für einen Kanal mit $d = 1$ . . . . .	99
D.2	Entdimensionierte Varianz Analysen für einen Kanal mit $d = 1/3$ . . . . .	102
<b>E</b>	<b>Messstellen auf den Kanalwänden für einen Kanal mit <math>d = 1</math></b>	<b>103</b>
E.1	Messstellenposition auf der Hartmann-Wand . . . . .	103
E.2	Messstellenposition auf den Seitenwänden . . . . .	104
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>106</b>



# 1 Einleitung

Flüssigmetalle bieten aufgrund ihrer hohen Wärmeleitfähigkeit und geringen Viskosität eine ideale Möglichkeit für den konvektiv - diffusiven Wärmetransport. Eine Anwendung von Flüssigmetallströmungen findet sich in Fusionsreaktoren. Abb. 1 zeigt den ITER - Fusionsreaktor in einer Schnittdarstellung. Zu sehen ist unter anderem im Inneren der Plasmaraum, in dem die Fusionsreaktion mit den Wasserstoffisotopen Deuterium und Tritium stattfindet. Hierbei werden Neutronen sowie große Mengen an Energie frei, sodass sich innerhalb des Plasmas eine Temperatur von ca.  $10^8$  K ergibt. Aufgrund der hohen Temperaturen ist es notwendig, das Plasma mit einem Magnetfeld so zu positionieren, dass ein direkter Kontakt mit festen Wänden vermieden wird. Hierzu befinden sich um den Plasmaraum angeordnete Magnetfeldspulen.

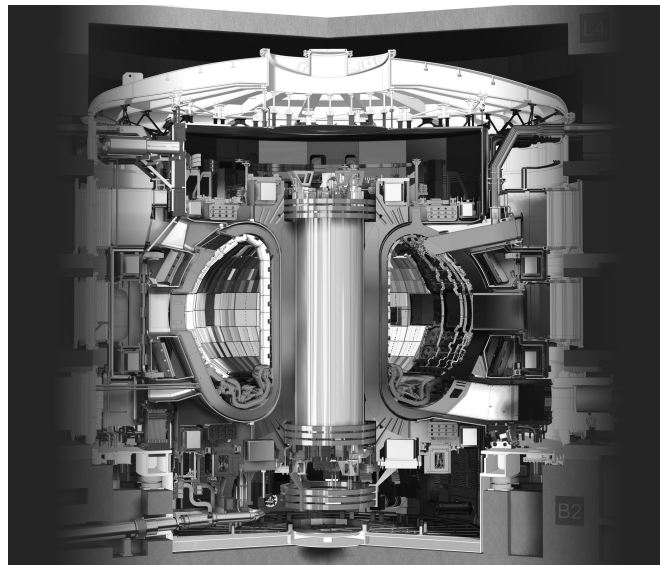


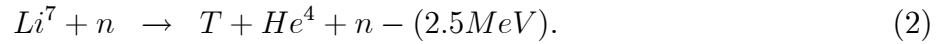
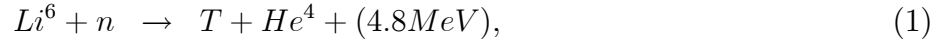
Abbildung 1: Schnittdarstellung des Fusionsreaktors ITER (Quelle: <http://www.iter.org/mach>)

Zwischen Plasmaraum und Magnetfeldspulen befinden sich die Blanketeinheiten (Blankets), in denen der Brennstoff Tritium erbrütet und ein Großteil der Fusionsenergie als Wärme freigesetzt wird. Die Blankets haben mehrere Aufgaben:

- Erbrüten und Transport von Tritium;
- Umwandlung der Fusionsenergie in nutzbare thermische Energie und sichere Abfuhr der erzeugten Wärme;
- Kühlung der ersten Wand, die dem Plasma zugewandt ist;
- Abschirmung der Magnetfeldspulen vor Neutronenbestrahlung.

Momentan werden verschiedene Blanketkonzepte für Anwendungen in Fusionsreaktoren untersucht. Ein Konzept, das Flüssigmetalle als Brutmaterial verwendet, ist das *Helium Cooled Lead Lithium*-Blanket (HCLL). Unter Verwendung von Lithium-haltigen Legierungen wie z.B.

der eutektischen Blei-Lithium-Legierung (PbLi) ist es möglich, Tritium zu erbrüten. Für die Brutreaktionen gelten folgende Gleichungen



Zur effizienten Kühlung der ersten Wand, die direkt dem Plasma zugewandt ist, sowie zur Kühlung der Blanketstruktur wird Helium unter starkem Druck und hohen Geschwindigkeiten in kleinen Kühlkanälen durch die Wände des Blankets geleitet. Die im flüssigen Blei-Lithium erzeugte Wärme wird durch Konvektion mit der Strömung der Legierung abgeführt.

Aufgrund der elektrischen Leitfähigkeit der Flüssigmetalle ergeben sich im Zusammenspiel mit den starken magnetischen Feldern magnetohydrodynamische (MHD) Effekte. Beispielsweise ist der Druckverlust bei MHD-Strömungen deutlich größer als bei hydrodynamischen Strömungen. Außerdem verändert sich das Geschwindigkeitsprofil durch die induzierte Lorentz - Kraft deutlich, insbesondere auch in Abhängigkeit der Wandleitfähigkeit und der Geometrie des Blankets. Dabei können in dünnen Schichten lokal sehr hohe Geschwindigkeiten auftreten, die zu Instabilitäten der Kanalströmung führen, die schließlich den Druckverlust und die Wärme- und Stoffübertragung maßgeblich beeinflussen können.

In dieser Arbeit wird ein Grundlagenexperiment vorgestellt, mit dessen Hilfe MHD-Strömungen in Kanälen mit elektrisch leitenden und isolierenden Wänden untersucht werden. Durch die Analyse von elektrischen Potentialsignalen auf Wänden oder aus Sondersignalen ist es möglich, Geschwindigkeitsprofile und Stabilitätsgrenzen der Strömung in Abhängigkeit der Strömungsgeschwindigkeit und der Magnetfeldstärke zu ermitteln. Ferner werden Druckgradienten der Kanalströmungen ermittelt.



## 2 Grundlagen

### 2.1 Grundgleichungen

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein inkompressibles, elektrisch-leitfähiges Fluid betrachtet. Seine Dynamik wird durch die Massenbilanz

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3)$$

und durch die Impulserhaltung

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \rho \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (4)$$

beschrieben. Dabei entsprechen  $\mathbf{v} = (u, v, w)$  der Geschwindigkeit,  $p$  dem Druck,  $\mathbf{f}$  den volumetrischen Kräften, die nicht-elektromagnetischen Ursprungs sind,  $\mathbf{j}$  der elektrischen Stromdichte,  $\mathbf{B}$  der Magnetfeldstärke,  $\rho$  der Dichte und  $\nu$  der kinematischen Viskosität. Der Term  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  wird als Lorentz - Kraft bezeichnet und entspricht ebenfalls einer volumetrischen Kraft. Eine Zusammenfassung der magnetohydrodynamischen (MHD) Gleichungen findet sich beispielsweise in Moreau (1990).

Die Stromdichte  $\mathbf{j}$  folgt für Medien mit der spezifischen elektrischen Leitfähigkeit  $\sigma$  aus dem Ohm'schen Gesetz

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (5)$$

wobei  $\mathbf{E}$  das elektrische Feld bezeichnet und  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  das durch die Strömung im Magnetfeld induzierte elektrische Feld beschreibt. Glg. (5) gilt unter den Annahmen:

- Die Geschwindigkeit von Ladungsträgern wie Elektronen oder Ionen ist kleiner als die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  des Leiters;
- es gibt keine thermoelektrischen Spannungsquellen.

Die Einführung von Skalen mit

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= u_0 \mathbf{v}', & \mathbf{B} &= B_0 \mathbf{B}', \\ \mathbf{j} &= \sigma u_0 B_0 \mathbf{j}', & \mathbf{E} &= u_0 B_0 \mathbf{E}', \\ \mathbf{f} &= \rho u_0^2 / L \mathbf{f}', & p &= \rho u_0^2 p' \end{aligned}$$

ermöglicht die Entdimensionierung mit charakteristischen Werten für die Geschwindigkeit  $u_0$ , die Magnetfeldstärke  $B_0$  und die Länge  $L$ , sodass für die Impulserhaltung

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f} + N (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \quad (6)$$

gilt. Hierbei wird zur Erleichterung der Lesbarkeit auf die  $(\cdot)'$ -Notation verzichtet.

Durch die Entdimensionierung ergeben sich die Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{u_0 L}{\nu} \cong \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Reibungskraft}}, \quad (7)$$

der Interaktionsparameter

$$N = \frac{\sigma L B_0^2}{\rho u_0} \cong \frac{\text{elektromagnetische Kraft}}{\text{Trägheitskraft}} \quad (8)$$

und mit  $N \cdot Re = Ha^2$  die Hartmann-Zahl

$$Ha = L B_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}} \cong \sqrt{\frac{\text{elektromagnetische Kraft}}{\text{Reibungskraft}}}. \quad (9)$$

Der Zusammenhang aus  $\mathbf{j}$  und  $\mathbf{B}$  ist durch das Ampère'sche Gesetz in dimensionsloser Form

$$\nabla \times \mathbf{B} = R_m \mathbf{j}, \quad (10)$$

mit der magnetischen Reynolds-Zahl

$$R_m = \mu \sigma u_0 L = \frac{u_0 L}{\frac{1}{\mu \sigma}} \cong \frac{\text{Konvektion des Magnetfeldes}}{\text{Diffusion des Magnetfeldes}} \quad (11)$$

gegeben, wobei  $\mu$  der magnetischen Permeabilität entspricht. Aus Glg. (10) folgt die Ladungserhaltung

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (12)$$

Zur Vervollständigung des Gleichungssatzes wird das Faraday'sche Gesetz benötigt

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}. \quad (13)$$

Aus dem Faraday'schen, dem Ohm'schen und dem Ampere'schen Gesetz lässt sich eine Transportgleichung für die magnetischen Induktion ableiten

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \frac{1}{R_m} \nabla^2 \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} \quad (14)$$

mit

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (15)$$

Für stationäre Magnetfelder kann das elektrische Feld  $\mathbf{E}$  durch den Gradienten des skalaren elektrischen Potentials  $\phi$  als

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (16)$$

ausgedrückt werden, wodurch Glg. (13) identisch erfüllt ist.

### 2.1.1 Randbedingungen

Die Randbedingungen am Übergang  $\Gamma$  zwischen Fluid und Wand entsprechen

- für die Geschwindigkeit der Haftbedingung

$$\mathbf{v} = 0 \quad (17)$$

- und für das induzierte Magnetfeld  $b$  der sogenannten *Dünne-Wand-Approximation* (s. Shercliff (1965))

$$-c \frac{\partial b}{\partial n} + b = 0 \quad (18)$$

mit der wandnormalen Koordinate  $n$  und dem Wandleitparameter

$$c = \frac{\sigma_w t_w}{\sigma L}. \quad (19)$$

Der Index  $w$  bezeichnet Größen der Wand und  $t_w$  repräsentiert die Wanddicke. Für den isolierten Fall mit  $c = 0$  gilt  $b = 0$  und für den Fall mit perfekt leitenden Wänden  $c \rightarrow \infty$  gilt  $\frac{\partial b}{\partial n} = 0$ .

Die Randbedingung wird erweitert, sofern ein Kontaktwiderstand mitbetrachtet werden muss, etwa durch eine Oxidationsschicht zwischen Flüssigmetall und Wand (Samad (1985)). Es ergibt sich dann

$$-c \frac{\partial b}{\partial n} + b = +c\kappa \frac{\partial^2 b}{\partial t_K^2}, \quad (20)$$

wobei  $\kappa = \frac{\sigma}{L} \left( \frac{\delta_l}{\sigma_l} \right)$  dem dimensionslosen Kontaktwiderstandsparameter mit der Dicke der Oxidschicht  $\delta_l$  sowie deren Leitfähigkeit  $\sigma_l$  und  $t_K$  der tangentialen Koordinate entspricht.

## 2.2 Magneto hydrodynamische Kanalströmungen

Im folgenden Abschnitt werden grundlegende MHD-Strömungen vorgestellt, die in dieser Arbeit betrachtet werden. Ferner werden einige wichtige Ergebnisse von Untersuchungen über instabile MHD-Strömungen betrachtet, sodass mit diesem Wissen die Ziele dieser Arbeit definiert werden können.

### 2.2.1 Hartmann- und Hunt-Strömung

Erste Untersuchungen von magneto hydrodynamischen Strömungen finden sich in Hartmann (1937) und Hartmann und Lazarus (1937). In diesen theoretischen und experimentellen Arbeiten wird eine Plattenkanalströmung untersucht, deren Platten senkrecht zum von außen angelegten Magnetfeld ausgerichtet sind und die mittlerweile als *Hartmann-Strömung* bezeichnet wird. Die Lösung des Geschwindigkeitsfeldes mit

$$u(y) = \hat{u} \left( 1 - \frac{\cosh(Ha y)}{\cosh(Ha)} \right) \quad (21)$$

und

$$\hat{u} = \frac{1}{Ha} \frac{c_H + 1}{c_H \cdot Ha + \tanh(Ha)} \quad (22)$$

geht auf Chang und Lundgren (1961) zurück. Aus dieser Lösung kann der Einfluss der Leitfähigkeit der Kanalwände, bestimmt durch den Wandleitparameter  $c_H$ , und der Hartmann-Zahl betrachtet werden:

- für  $Ha = 0$  entspricht die Strömung der hydrodynamischen *Poiseuille-Strömung*;

- für  $c_H = \text{const.}$  nimmt die Geschwindigkeit mit steigender Hartmann-Zahl ab und das Geschwindigkeitsprofil wird flacher;
- für  $Ha \gg 1$  bilden sich in wandnähe sogenannte Hartmann-Schichten aus, deren Dicke mit  $\delta_{Ha} \propto \frac{1}{Ha}$  skaliert;
- für  $Ha = \text{const.}$  wird der Volumenstrom für  $c_H = 0$  maximal und für  $c_H \rightarrow \infty$  minimal.

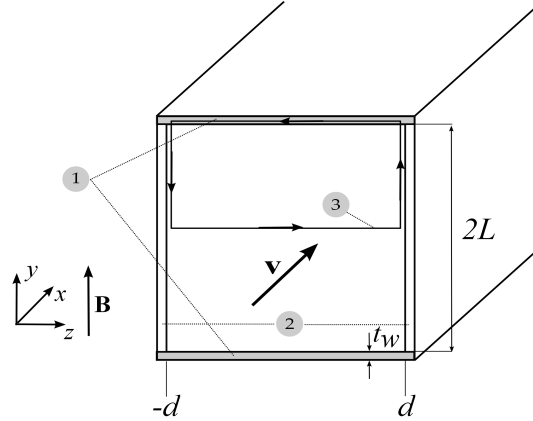


Abbildung 2: Geometrie eines Kanals mit leitfähigen Hartmann-Wänden (1), elektrisch isolierten Seitenwänden (2) und ein beispielhafter Pfad des induzierten elektrischen Stromes (3)

Zur Untersuchung von Strömungen in Rechteckkanälen mit endlicher Breite wird das Problem um zwei Seitenwände mit Leitfähigkeitsparameter  $c_S$  erweitert. In Hunt (1965) wird unter anderem eine Lösung mit  $c_H \neq 0$ ,  $c_S = 0$  beschrieben. Hierzu ist in Abb. 2 die Geometrie eines Kanals dargestellt. Dieser besitzt zwei senkrecht zum Magnetfeld ausgerichtete leitfähige Hartmann-Wände im Abstand  $2L$ , wobei  $L$  der Hartmann-Länge entspricht, und zwei isolierte Seitenwände, die parallel zum Magnetfeld ausgerichtet sind. Entsprechend des Ohm'schen Gesetzes (5) ist hierin beispielhaft ein Pfad des induzierten elektrischen Stromes  $\mathbf{j}$  gezeigt. Der elektrische Strom fließt im Kernbereich der Strömung senkrecht zur Ebene, die durch die Vektoren  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{B}$  aufgespannt wird, fließt in den Seitenschichten parallel zum Magnetfeld und tritt dann in die leitfähige Hartmann-Wand ein. In der Wand tritt der Strom bei  $z = d$  wieder aus, um den elektrischen Stromkreis über die zweite Seitenschicht zu schließen. Unter der Bedingung  $Ha^{-1} \ll c_H$  fließt der Strom hauptsächlich in der Hartmann-Wand, da der elektrische Widerstand in der Hartmann-Schicht viel größer ist als in der Hartmann-Wand. Dadurch wird der induzierte elektrische Strom  $\mathbf{j}$  stark erhöht, sodass die Lorentzkraft im Fluid ansteigt und die Geschwindigkeit im Kern reduziert ist.

Die Stromdichte  $\mathbf{j}$  hängt somit von der Größenordnung von  $c_H$  und dem Widerstand in den Hartmann-Schichten ab. Für große Hartmann-Zahlen und schwach leitende Wände, also für

$$Ha \gg 1, c_H \ll 1,$$

gilt

$$\mathbf{j} = O(c_H, Ha^{-1}), \quad (23)$$

sodass  $\mathbf{j}$  im Ohm'schen Gesetz (5) für diesen Fall vernachlässigt werden kann.

Unter der Annahme einer vollentwickelten MHD-Strömung, die von einem über den Querschnitt hinweg gleichförmigen axialen Druckgradienten  $\nabla p = -\hat{\mathbf{x}}/Re$  angetrieben wird, in einem von außen angelegten Magnetfeld  $\mathbf{B} = \hat{\mathbf{y}}$ , besitzen die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  und das durch die Strömung induzierte Magnetfeld  $\mathbf{b}$  lediglich Komponenten in Strömungsrichtung  $x$ , die von den Querschnittskordinaten  $y$  und  $z$  abhängig sind:

$$\mathbf{v} = u(y, z)\hat{\mathbf{x}}, \quad (24)$$

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{y}} + \frac{R_m}{Ha}b(y, z)\hat{\mathbf{x}}. \quad (25)$$

Aus der Impulsgleichung (6) und der Induktionsgleichung (14) lassen sich zwei partielle Differentialgleichungen herleiten, die zur Ermittlung von stationären Potential- und Geschwindigkeitsprofilen herangezogen werden. Für die  $x$ -Komponenten der Glg. (6) und (14) gilt dann (s. Müller und Bühler (2001))

$$\nabla^2 u + Ha \frac{\partial b}{\partial y} = -1, \quad (26)$$

$$\nabla^2 b + Ha \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (27)$$

**Analytische Lösung** Für den Fall der in dieser Arbeit betrachteten Hunt-Strömung mit elektrisch leitfähigen Hartmann-Wänden und elektrisch isolierten Seitenwänden wird eine Lösung für stationäre Strömungen hergeleitet. Die Lösung basiert auf den Darstellungen in Müller und Bühler (2001). Zusätzlich erfolgt hier eine Erweiterung der bekannten Lösung, indem zusätzlich zu dem aus der Literatur bekannten Lösungen für  $u$  und  $b$  erstmals die Verteilung des elektrischen Potentials analytisch bestimmt wird. Hierzu werden die Differentialgleichungen (26) und (27) zunächst mit den sogenannten Elsasser-Variablen entkoppelt. Es gilt

$$A^+ = u + b, \quad A^- = u - b. \quad (28)$$

Dadurch ergibt sich

$$\frac{\partial^2 A^\pm}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A^\pm}{\partial z^2} \pm Ha \frac{\partial A^\pm}{\partial y} = -1. \quad (29)$$

An den Wänden gilt die Haftbedingung  $u = 0$ . Das induzierte Magnetfeld verschwindet an den isolierten Seitenwänden mit  $b = 0$ . Für die Randbedingungen der Elsasser-Variablen zeigt sich somit

$$A^+ = A^- = 0 \quad \text{bei } z = \pm d. \quad (30)$$

Aufgrund der Symmetrie mit

$$A^-(y) = A^+(-y) \quad (31)$$

ist es ausreichend, die Lösung für eine Elsasser Variable auszuwerten, im folgenden für  $A^+$ .

Zur Lösung wird  $A^+$  in eine Fourier-Reihe überführt mit

$$A^+(y, z) = \sum_{i=1,3,5}^{\infty} a_i(y) \cos(\lambda_i z), \quad (32)$$

wobei die Randbedingungen bei  $z = \pm d$  mit

$$\lambda_i = \frac{i\pi}{2d} \quad (33)$$

erfüllt werden. Durch Einsetzen des Ansatzes in Glg. (29) und unter Ausnutzung der Orthogonalität von trigonometrischen Funktionen, ergibt sich

$$\frac{d^2 a_i}{dy^2} - \lambda_i^2 a_i + Ha \frac{da_i}{dy} = -2 \frac{\sin(\lambda_i d)}{\lambda_i d} \doteq -k_i. \quad (34)$$

Für die Lösung der Koeffizienten  $a_i(y)$  gilt mit

$$p_{i1,2} = \frac{1}{2} \left( Ha \mp \sqrt{Ha^2 + 4\lambda_i^2} \right) \quad (35)$$

$$a_i(y) = \frac{k_i}{\lambda_i^2} + C_{i1} \exp(-p_{i1}y) + C_{i2} \exp(-p_{i2}y). \quad (36)$$

Für die Geschwindigkeit und das induzierte Magnetfeld aus den Glg. (26) und (27) gilt entsprechend Glg. (32)

$$u = \sum_{i=1,3,5}^{\infty} u_i(y) \cos(\lambda_i z), \quad b = \sum_{i=1,3,5}^{\infty} b_i(y) \cos(\lambda_i z). \quad (37)$$

Mit dem Ansatz (28) folgt somit für Geschwindigkeit und induziertes Magnetfeld

$$u_i = \frac{a_i(y) + a_i(-y)}{2} = \frac{k_i}{\lambda_i^2} + C_{i1} \frac{\cosh(p_{i1}y)}{\cosh p_{i1}} + C_{i2} \frac{\cosh(p_{i2}y)}{\cosh p_{i2}}, \quad (38)$$

$$b_i = \frac{a_i(y) - a_i(-y)}{2} = -C_{i1} \frac{\sinh(p_{i1}y)}{\cosh p_{i1}} - C_{i2} \frac{\sinh(p_{i2}y)}{\cosh p_{i2}}. \quad (39)$$

Mit der Haftbedingung an der Hartmann-Wand  $u_i(y=1) = 0$  und unter Verwendung der *Dünne-Wand-Approximation* (18)

$$c \frac{db_i}{dy} + b_i = 0 \quad \text{bei } y = 1 \quad (40)$$

lassen sich die Koeffizienten  $C_{i1}$  und  $C_{i2}$  bestimmen.

Schließlich ergibt sich

$$u_i(y) = \frac{k_i}{\lambda_i^2} \left[ 1 - \frac{f_i(y)}{f_i(1)} \right], \quad (41)$$

$$b_i(y) = \frac{k_i}{\lambda_i^2} \left[ \frac{g_i(y)}{f_i(1)} \right], \quad (42)$$

mit

$$f_i(y) = \frac{\cosh(p_{i1}y)}{\alpha_{i1} \cosh p_{i1}} - \frac{\cosh(p_{i2}y)}{\alpha_{i2} \cosh p_{i2}}, \quad (43)$$

$$g_i(y) = \frac{\sinh(p_{i1}y)}{\alpha_{i1} \cosh p_{i1}} - \frac{\sinh(p_{i2}y)}{\alpha_{i2} \cosh p_{i2}}, \quad (44)$$

$$\alpha_{i_1,2} = c p_{i_1,2} + \tanh p_{i_1,2}. \quad (45)$$

Die Integration des Geschwindigkeitsprofils über den Querschnitt mit

$$F_i(1) = \int_0^1 f_i(y) dy = \frac{\tanh(p_{i_1})}{p_{i_1} \alpha_{i_1}} - \frac{\tanh(p_{i_2})}{p_{i_2} \alpha_{i_2}} \quad (46)$$

führt zum Volumenstrom

$$Q = 2d \sum_{i=1,3,5}^{\infty} \frac{k_i^2}{\lambda_i^2} \left[ 1 - \frac{F_i(1)}{f_i(1)} \right]. \quad (47)$$

Mit dem Volumenstrom und der durchströmten Querschnittsfläche  $A$  kann die dimensionslose mittlere Geschwindigkeit

$$\bar{u} = \frac{Q}{A} = \frac{\bar{u}^*}{u_0} \quad (48)$$

bestimmt werden. Sie entspricht der dimensionsbehafteten mittleren Geschwindigkeit  $\bar{u}^*$  skaliert mit einer charakteristischen Geschwindigkeit  $u_0 = \left(-\frac{\partial p^*}{\partial x^*}\right) \frac{L^2}{\rho\nu}$ , die mit dem dimensionsbehafteten Druckgradienten  $\frac{\partial p^*}{\partial x^*}$  gebildet wird.

Daraus ergibt sich der dimensionslose Druckgradient in einer viskosen Skalierung

$$K \doteq \frac{1}{\bar{u}} = \left(-\frac{\partial p^*}{\partial x^*}\right) \frac{L^2}{\rho\nu\bar{u}^*}. \quad (49)$$

Dabei zeigt sich für

$$K = \frac{1}{\bar{u}} = \left(-\frac{\partial p^*/\rho\bar{u}^{*2}}{\partial x^*/L}\right) \frac{L^2}{\rho\nu\bar{u}^*} \frac{\rho\bar{u}^{*2}}{L} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right) Re. \quad (50)$$

Damit ist erkennbar, dass für den dimensionslosen Druckgradient

$$\left(-\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{K}{Re} \quad (51)$$

gilt.

Die Größe  $K$  ist stark von  $Ha$  und der Leitfähigkeit  $c_H$  abhängig, wie in Abb. 3 zu sehen ist. Der Verlauf von  $K$  ist für eine isolierte Hartmann-Wand mit  $c_H = 0$  proportional zu  $Ha^1$ , während für eine endliche Leitfähigkeit  $c_H = 0.03$   $K$  etwa proportional zu  $Ha^{3/2}$  verläuft. Der Wert  $c_H = 0.03$  der endlichen Leitfähigkeit entspricht dem Leitfähigkeitsparameter der Hartmann-Wände, der im hier vorgestellten Experiment verwendet wird.

Für die Verteilung des elektrischen Potentials gilt mit dem Ampère'schen (s. Glg. (10)), dem Ohm'schen Gesetz (s. Glg. (5)) und Glg. (37)

$$\phi(y, z) = \sum_{i=1,3,5}^{\infty} \frac{\sin(\lambda_i z)}{\lambda_i} \left( \frac{1}{Ha} \frac{db_i(y)}{dy} + u_i(y) \right) \frac{4d}{Q}. \quad (52)$$

Glg. (52), die in dieser Form in der Literatur nicht zu finden ist, wird im Rahmen dieser Arbeit dazu verwendet, das elektrische Potential  $\phi(y, z)$  der laminaren, stationären Strömung zu berechnen, um es anschließend mit experimentellen Daten vergleichen zu können.

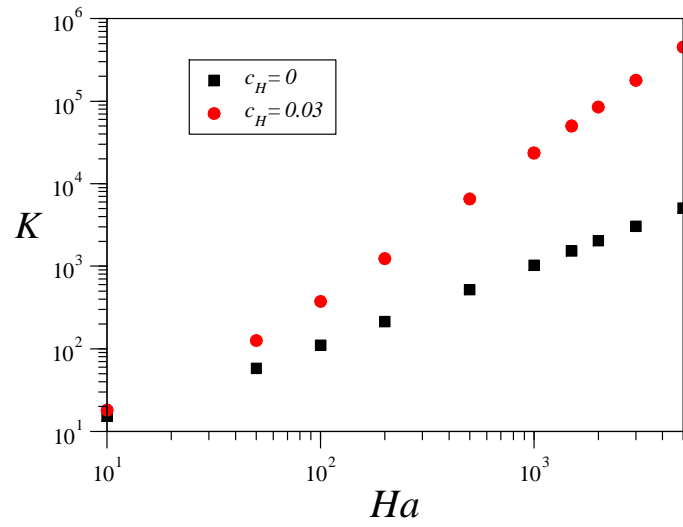


Abbildung 3: Druckverluste  $K$  für verschiedene  $Ha$  und  $c_H$

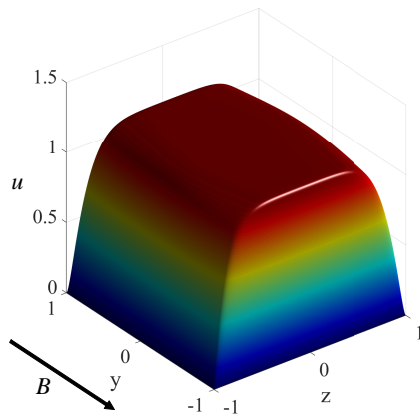


Abbildung 4: Geschwindigkeitsprofil für isolierte Hartmann-Wände ( $Ha = 50$ ,  $c_H = 0$ )



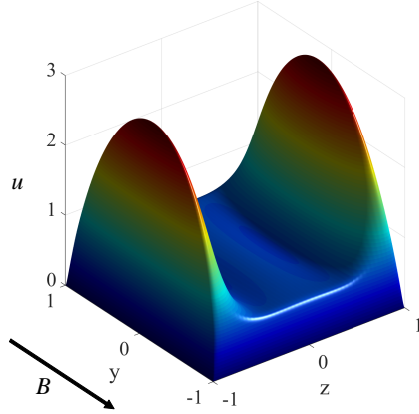


Abbildung 5: Geschwindigkeitsprofil für leitfähige Hartmann-Wände ( $Ha = 50$ ,  $c_H = 0.5$ )

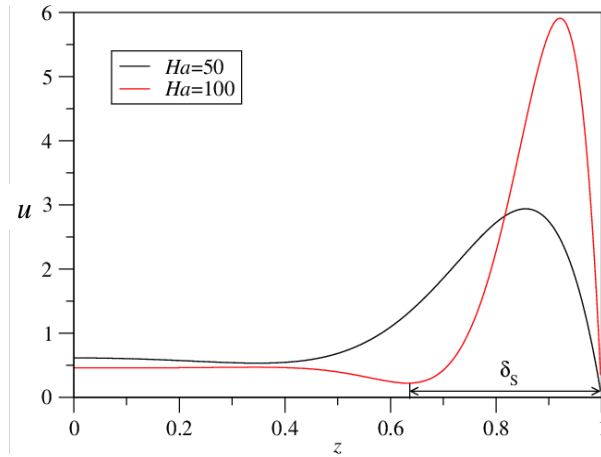


Abbildung 6: Geschwindigkeitsprofile für  $y = 0$ ,  $c_H = 0.5$

Aus der Lösung von Glg. (26) und (27), unter Verwendung der entsprechenden Randbedingungen aus Glg. (17) und (18) ergeben sich die Geschwindigkeitsprofile in Abb. 4 und 5. Erkennbar ist hier, dass für  $c_H = 0$  das Geschwindigkeitsprofil nahezu über den gesamten Querschnitt eine konstante Geschwindigkeit hat. In Anwesenheit von leitfähigen Hartmann Wänden ( $c_H > 0$ , s. Abb. 2) entstehen Geschwindigkeitsüberhöhungen, sogenannte *Jets* in der Nähe der isolierten Seitenwände, da in diesen Bereichen die induzierten Lorentz-Kräfte verschwinden. Im Kernbereich findet sich wiederum eine nahezu konstante Geschwindigkeit. In diesem Bereich kann eine reibungsfreie Strömung angenommen werden, in der die induzierten Lorentz-Kräfte mit den Druckkräften im Gleichgewicht stehen.

In Abb. 6 ist ferner der Einfluss von verschiedenen Hartmann-Zahlen zu sehen. Je höher die Hartmann-Zahl ist, desto höher ist die maximale Geschwindigkeit. Die Seitenschicht wird dabei dünner. Es kann gezeigt werden, dass für die Dicke der Seitenschicht  $\delta_S \propto Ha^{-1/2}$  (Branover (1978)) gilt. Für ausreichend hohe Hartmann-Zahlen gibt es im Übergangsbereich zwischen Seitenschicht und Kernströmung ein lokales Minimum, das im Folgenden als *Untergeschwindigkeit*

bezeichnet wird. Das Profil weist zwei Wendepunkte auf, sodass die Strömung nach dem Wendepunktkriterium (Schlichting und Gersten (2006)) zur Ausbildung von Instabilitäten neigt.

### 2.2.2 Stabilitätsanalysen

Ein Magnetfeld beeinflusst die Stabilität einer Strömung unter zwei Gesichtspunkten. Zum einen wird das Geschwindigkeitsprofil geändert, sodass es, wie in der Hunt-Strömung, zu starken Geschwindigkeitsüberhöhungen in den Seitenschichten kommen kann, die zur Ausbildung instabiler Strömungen neigen. Zum anderen dämpft ein Magnetfeld mit der Joule'schen Dissipation Störungen und instabile Strukturen der Strömung.

Erste experimentelle Untersuchungen hinsichtlich des Einflusses eines Magnetfeldes sind in Hartmann und Lazarus (1937) dargestellt. Hier wird mit zunehmendem Magnetfeld ein laminarisierender Einfluss auf die Strömung festgestellt. Eine lineare Stabilitätsanalyse der Hartmann-Strömung wird in Lock (1955) durchgeführt. Ein wichtiges Ergebnis ist hierin die Abschätzung der kritischen Reynolds-Zahl mit

$$Re_{krit} = 50000Ha.$$

Neuere lineare Stabilitätsanalysen von Lingwood und Alboussière (1999) zeigen ein ähnliches Ergebnis mit

$$Re_{krit} = 48311.016Ha$$

für hohe Hartmann-Zahlen.

Experimentelle Untersuchungen von Brouillette und Lykoudis (1967) bestätigen zwar die lineare Abhängigkeit, weisen hingegen einen deutlich niedrigeren Koeffizienten mit

$$Re_{krit} = 225Ha$$

auf.

In Ting, Walker, Moon, Reed und Picologlou (1991) wird für eine Kanalströmung mit  $c_H = c_S = 0.07$  eine lineare Stabilitätsanalyse durchgeführt. Hierbei ergibt sich für hohe Hartmann-Zahlen ein konstanter Wert der kritischen Reynolds-Zahl mit

$$Re_{krit} = 313.$$

Das Ergebnis zeigt, dass die mit den zusätzlichen Seitenwänden entstehenden Seitenschichten eher instabil sind als Hartmann-Schichten, wobei dies auch den Unterschied zwischen linearer Stabilitätsanalyse und Experiment im Falle der Hartmann-Strömung erklärt. Denn im Experiment ist es nicht möglich eine reine Plattenkanalströmung zu untersuchen, sodass auch hier Seitenschichten zu finden sind.

Experimentelle Ergebnisse zu den Analysen von Ting et al. (1991) finden sich in Reed und Picologlou (1989) mit  $c_H = c_S = 0.07$  und einem Seitenverhältnis  $d = \frac{\text{Breite}}{\text{Höhe}} = 1$ . Es zeigt sich für  $2700 < Ha < 5400$  eine kritische Reynolds-Zahl im Bereich von  $2650 < Re_{krit} < 5100$ . Auch hierbei liegt ein Unterschied zwischen linearer Stabilitätsanalyse und Experiment vor. Mögliche Gründe sind hierbei, dass die verwendete Sonde im Experiment entweder den Bereich der Seitenschicht nicht erreicht, in dem sich die Störung als erstes ausbildet, oder die Störung zunächst zu klein ist, um von der Messtechnik erfasst zu werden.

In Burr (1998) und Burr, Barleon, Müller und Tsinober (2000) werden Ergebnisse eines ähnlichen Experimentes für  $600 < Ha < 4800$  beschrieben. Hierin gilt für die Leitfähigkeitsparameter

$c_H = 0.0119$  und  $c_S = 0.0714$ , sowie für das Seitenverhältnis  $d = 1/2$ . Es zeigt sich zum einen eine Abhängigkeit der kritischen Reynolds-Zahl von der Hartmann-Zahl gemäß  $Re_{krit} \propto Ha^{-1/4}$ . Zum anderen wird die Ausbildung zweier unterschiedlicher Instabilitäten beschrieben, deren Ursprung im Jet entweder eher auf der Seite der Kernströmung oder auf der Seite zur Seitenwand hin zu finden ist.

Für die von Burr beschriebene Geometrie wird in Mück (2000) eine numerische Untersuchung angestellt. Darin zeigen sich für  $Re > Re_{krit}$  Wirbel, die bevorzugt entlang des Magnetfeldes ausgebildet sind und weit in den Kernbereich der Strömung ausgedehnt sind.

Weitere experimentelle Untersuchungen (Bühler und Horanyi (2009)) einer Kanalströmung mit  $c_H = c_S = 0.112$  und  $d = 4$  zeigen zwei instabile Strömungsregime, die einerseits anhand ihrer RMS<sup>1</sup>-Werte unterschieden werden, da es beim Übergang vom ersten zum zweiten Strömungsregime zu einem Anstieg der RMS-Werte um mehrere Größenordnungen kommt. Andererseits weichen die instabilen Strukturen der zwei Bereiche in ihrer Ausdehnung im Kanal voneinander ab. Es zeigt sich hierbei für  $Re_{krit,1} < Re < Re_{krit,2}$ , dass die instabilen Strukturen vorwiegend im Jet-Bereich zu finden sind, während für  $Re > Re_{krit,2}$  die instabilen Strukturen bereits bis in den Kernbereich ausgedehnt sind. Desweiteren ergibt sich ein nahezu konstanter Wert für  $Re_{krit,1}$ , wohingegen  $Re_{krit,2}$  stark mit  $Ha$  ansteigt.

Zwei instabile Strömungsregime sind ebenfalls das Ergebnis in einer numerischen Untersuchung (Kinet, Knaepen und Molokov (2009)) mit  $c_H = c_S = 0.5$  und  $d = 1$ . Ähnlich wie in den vorhergehenden Studien zeigen sich für das erste instabile Regime periodische Wirbel in den Seitenschichten und für das zweite instabile Regime größere Strukturen, die bis in die Kernströmung reichen. Weiterhin zeigt sich hierin, dass mit zunehmender Reynolds-Zahl die maximalen Werte der zeitlich gemittelten Geschwindigkeiten der Jets abnehmen und die Jet-Breite zunimmt, sodass auch die vorhandenen Untergeschwindigkeiten im Übergangsbereich verschwinden.

Besonders stark werden die Jets für  $c_H \rightarrow \infty$  und  $c_S = 0$  ausgebildet. In Priede, Aleksandrova und Molokov (2010) wird diese Konfiguration der Leitfähigkeiten in einer Kanalströmung mit  $d = 1$  mit Hilfe einer linearen Stabilitätsanalyse betrachtet. Für  $Ha \gg 1$  ergibt sich in der Skalierung, die in dieser Arbeit verwendet wird,

$$Re_{krit} = 112.$$

In Anlehnung an das M-förmige Geschwindigkeitsprofil der Hunt-Strömung werden in Smolentsev, Vetcha und Moreau (2012) numerische Untersuchungen vorgenommen. Darin wird in einem definierten Bereich, der dem Kernströmungsbereich entspricht, eine Kraft aufgeprägt, die entgegen der Hauptströmungsrichtung gerichtet ist. Daraus ergeben sich Geschwindigkeitsüberhöhungen in den Seitenwandbereichen. Es zeigt sich, dass zum einen wiederum zwei Arten von instabilen Strukturen entstehen, die sich bei Erhöhung von  $Re$  vermischen. Zum anderen folgt aus den Untersuchungen, dass bei Einsetzen einer instabilen Strömung die kinetische Energie stark ansteigt. Erste zugehörige experimentelle Ergebnisse finden sich in Young, Smolentsev und Abdou (2014).

### 2.2.3 Ausbildung anisotroper, instabiler Strukturen

Geschwindigkeitsfluktuationen werden in Strömungen mit starken magnetischen Feldern  $\mathbf{B}$  senkrecht zu den Feldlinien stärker gedämpft als Komponenten, die parallel zu  $\mathbf{B}$  ausgerichtet sind.

---

<sup>1</sup>Root mean square

Durch diese Anisotropie entstehen Strukturen, die entlang von Magnetfeldlinien ausgedehnt sind, unter den Voraussetzungen, dass  $\mathbf{B}$  stark genug ist und die Trägheitskräfte die Strömung nicht weiter destabilisieren. Die entstehende Strömung kann dann als *quasi zweidimensional* (Q2D) angesehen werden.

Die Entstehung dieser Wirbelstrukturen in MHD-Strömungen wird in Davidson (1995) für  $Re \gg 1$  und  $R_m < 1$  beschrieben. Hierin wird beispielhaft an einer isolierten achsensymmetrischen Wirbelstruktur aufgezeigt, dass der Drehimpuls entlang des Magnetfeldes erhalten bleibt, wobei Komponenten, die nicht entlang des Magnetfeldes ausgerichtet sind, verschwinden. Die Lorentz-Kraft dehnt hierbei die Wirbelstrukturen entlang der Feldlinien so aus, dass die Joule'sche Dissipation kontinuierlich minimiert wird.

Sofern die charakteristische Zeit der Joule'schen Dissipation  $\tau_{JD} = \frac{\rho}{\sigma B^2}$  mit der charakteristischen Zeit für die Umdrehung eines Wirbels (*engl. turnover time*)  $\tau_{TO} = \frac{l}{u_0}$  skaliert wird, ergibt sich die entdimensionierte charakteristische Zeit

$$\tau_{JD}^* = \frac{1}{N_l}, \quad (53)$$

wobei  $N_l$  der Interaktionsparameter ist, der mit dem Wirbelradius  $l$  einer turbulenten Struktur als charakteristische Länge gebildet wird. Für  $N_l \gg 1$  verschwinden Störungen demnach nach einer kurzen Zeit. Kleine Wirbelstrukturen werden durch die Viskosität auf der charakteristischen Zeitskala  $\tau_\nu = \frac{l^2}{\nu}$  gedämpft.

Hierbei ergibt

$$\frac{\tau_\nu}{\tau_{TO}} = Re_l. \quad (54)$$

Für  $Re_l \gg 1$  und  $N_l > 1$  kann eine isolierte Wirbelstruktur als nicht-viskos angenommen werden.

Für große Interaktionsparameter beschreiben Sommeria und Moreau (1982) die Ausdehnung turbulenter Strukturen entlang von Magnetfeldlinien durch einen diffusiven Prozess zwischen zwei Schichten mit einem Abstand  $l_d$ , die senkrecht zum Magnetfeld angeordnet sind. Es wird ein Diffusionsparameter eingeführt mit

$$\alpha_D = \frac{\sigma B_0^2 l_d^2}{\rho}. \quad (55)$$

Dieser Parameter beschreibt den Unterschied der Geschwindigkeit in zwei zum Magnetfeld senkrechten Ebenen mit einem Abstand  $l_d$ , deren Ausgleich nach einer charakteristischen Zeit  $\tau_D \approx (\rho/\sigma B_0^2)(l_d^2/l^2)$  stattfindet. Nach hinreichend langen Zeiten verschwinden die Geschwindigkeitsunterschiede. Der Ausgleich wird dabei durch Lorentz-Kräfte bestimmt, da die Dissipation für große Reynolds-Zahlen auf einer längeren Zeitskala stattfindet.

In Kanalströmungen gilt an den Wänden stets die Haftbedingung. Es zeigt sich hierbei ein Q2D-Zustand der experimentell von Platnieks und Freiberg. (1972), Kolesnikov (1972) untersucht worden ist. Bei Kanalströmungen im Q2D-Zustand schließen sich die induzierten Ströme in den entstehenden Hartmann-Schichten bzw. leitfähigen Hartmann-Wänden. Die Dissipation der kinetischen Energie in der Kernströmung erfolgt durch Joule'sche Dissipation in der Hartmann-Wand bzw. Joule'sche und viskose Dissipation in den Hartmann-Schichten. Dieser Effekt wird auch als *Hartmann-Braking* bezeichnet. Bühler (1996) erweiterte die Theorie des *Hartmann-Braking* (s. Sommeria und Moreau (1982)) für dünne leitende Hartmann-Wände mit der Leitfähigkeit  $c_H$ . Es ergibt sich eine charakteristische Zeit

$$\tau_H = \left( \frac{N_l}{Ha} + \frac{c_H N_l}{1 + c_H} \right)^{-1}. \quad (56)$$

## 2.3 Ziele der Arbeit

Es soll ein Experiment durchgeführt werden, bei dem eine laminare Kanalströmung mit einem elektrisch-leitfähigen Fluid für große Hartmann-Zahlen instabil wird. Dabei sollen die Übergänge von laminar zu instabil bestimmt werden und mit kritischen Reynolds-Zahlen quantifiziert werden. Ferner soll der Übergang von dreidimensionalen, instabilen Strömungen zu Strömungen im Q2D-Zustand untersucht werden.

Als Beispiel wird hierfür die Hunt-Strömung mit leitfähigen Hartmann-Wänden und isolierten Seitenwänden betrachtet, da es hierbei zur Ausbildung von Jets in den Seitenschichten kommt. Lineare Stabilitätsanalysen weisen darauf hin, dass die Seitenschichten bereits für sehr kleine Reynolds-Zahlen instabil werden und somit Übergänge zwischen laminaren und instabilen Strömungen bereits bei relativ niedrigen Reynolds-Zahlen untersucht werden können.

Der dimensionslose Wandleitparameter  $c_H$  soll dabei möglichst klein gewählt werden, sodass zur Bestimmung der Geschwindigkeitskomponenten mithilfe des Ohm'schen Gesetzes (5) die Stromdichte  $\mathbf{j}$  als vernachlässigbar angenommen werden kann. Weiterhin soll die Dicke  $t_w$  der Hartmann-Wand klein gewählt werden. Dadurch können die experimentellen Ergebnisse mit der analytischen Lösung verglichen werden, in der die Dünne-Wand-Approximation (18) verwendet wird.

Die Abmessungen des Experiments sollen so angepasst werden, dass das gesamte Experiment einem homogenen Magnetfeld ausgesetzt ist. Dadurch sollen Störungen vermieden werden, die durch Veränderungen des Magnetfeldes ausgelöst werden. Weiterhin soll das Experiment so aufgebaut werden, dass Teststrecken mit unterschiedlichen Aspektverhältnissen  $d$  verwendet werden können, sodass geometrische Einflüsse auf die Ausbildung von instabilen Strömungen beleuchtet werden können.

Die Ergebnisse sollen zur Validierung zukünftiger numerischer Untersuchungen instabiler MHD-Kanalströmungen dienen.

## 3 Experiment

### 3.1 Mekka-Labor

Die Versuche werden im MEKKA<sup>2</sup>-Labor des Instituts für Kern- und Energietechnik (IKET) durchgeführt. Eine detaillierte Beschreibung der Anlage findet sich in Barleon, Mack und Stieglitz (1996). Im Labor steht ein wassergekühlter Dipolmagnet zur Verfügung, in dem ein Magnetfeld bis zu 2.1 T erzeugt werden kann. Die elektrische Leistung beträgt etwa 450 kW. Der Magnet hat eine rechteckige Spaltöffnung mit einer Größe von  $y_{\max} \times z_{\max} = 168 \text{ mm} \times 480 \text{ mm}$ . In einer Messung, deren Ergebnisse in Abb. 7 dargestellt sind, zeigt sich, dass über eine Länge von etwa 850 mm das Magnetfeld mit Abweichungen weniger als 1% konstant ist (s. hierzu auch Thomauske, Barleon, Höschele, Jedlitschka, Krebs, Mack, Neitzel und Rapp (1988)).

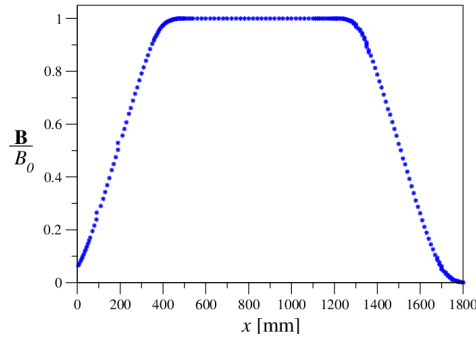


Abbildung 7: Veränderung des Magnetfeldes in  $x$ -Richtung

Im Labor steht das Flüssigmetall  $Ga^{67}In^{20}Sn^{13}$  zur Verfügung, das im Rahmen dieser Arbeit im Experiment verwendet wird. Im Gegensatz zu anderen Flüssigmetallen, wie beispielsweise  $Na^{22}K^{78}$ , das ebenfalls im Labor zu finden ist, sind weniger sicherheitstechnische Aspekte zu beachten.  $Ga^{67}In^{20}Sn^{13}$  ist sehr korrosiv, insbesondere in Kontakt mit Aluminium und bei höheren Temperaturen in Kontakt mit Kupfer. Ein Vorteil ist, dass es aufgrund seines niedrigen Schmelzpunktes von etwa  $11^\circ\text{C}$  bei Raumtemperatur flüssig ist.

Die Stoffwerte sind durch den Hersteller<sup>3</sup> lediglich für  $T = 20^\circ\text{C}$  angegeben. Um die Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte zu berücksichtigen, werden Korrelationen aus Müller und Bühler (2001) verwendet. Dabei wird die Temperatur  $T$  in  $^\circ\text{C}$  angegeben und es ergeben sich für die Dichte

$$\rho = (6372 - 0.44 \cdot T) \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad (57)$$

die Leitfähigkeit

$$\sigma = 10^6 \cdot (3.4882 - 0.00932 \cdot T + 1.3933 \cdot 10^{-5} \cdot T^2) \frac{1}{\Omega\text{m}}, \quad (58)$$

sowie für die dynamischen Viskosität

$$\nu = 10^{-6} \cdot (0.3853 - 0.001926 \cdot T + 3.2686 \cdot 10^{-6} \cdot T^2) \frac{\text{m}^2}{\text{s}}. \quad (59)$$

<sup>2</sup>Magnetohydrodynamische Experimente in Natrium Kalium Karlsruhe

<sup>3</sup>5Nplus

Im Vergleich dieser Korrelationen mit Ergebnissen in Plevachuk, Sklyarchuk, Eckert, Gerbeth und Novakovic (2014) zeigen sich im betriebsrelevanten Temperaturbereich von etwa  $T = 20^\circ\text{C}$  bis  $T = 30^\circ\text{C}$  relative Abweichungen der Dichte kleiner als 1%, der elektrischen Leitfähigkeit von etwa 7% und der dynamischen Viskosität kleiner als 2%. Für die Ermittlung der Kennzahlen der Hartmann- und Reynolds-Zahl, in die die physikalischen Größen eingehen, zeigen sich relative Abweichung zwischen Müller und Bühler (2001) und Plevachuk et al. (2014) von etwa 5% bzw. kleiner 2%.

### 3.2 Experimenteller Aufbau des Kreislaufs

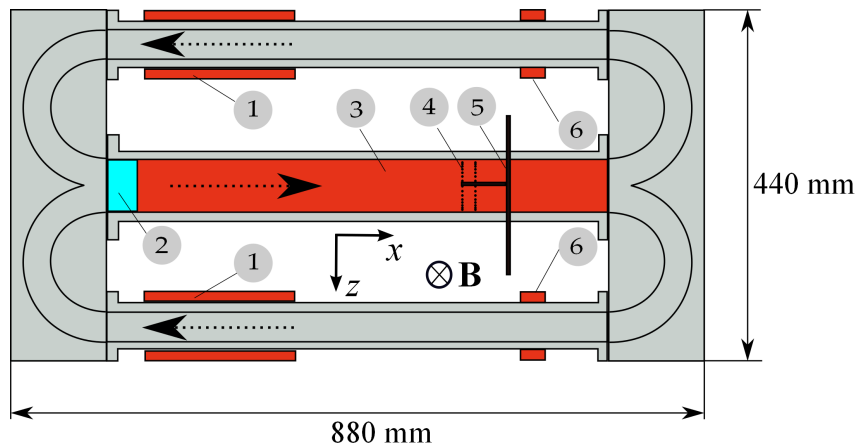


Abbildung 8: Kreislauf mit den elektromagnetischen Pumpen (1) in den äußeren Kanälen, dem Strömungsgleichrichter (2), der Teststrecke mit den elektrisch leitfähigen Hartmann Wänden (3), den Potentialsonden auf der Hartmann Wand (4), der traversierbaren Sonde (5) und den Durchflussmessern (6); die maximale Höhe in Magnetfeld-Richtung beträgt 147 mm.

Die Abmessungen des Experiments in Abb. 8, das im Wesentlichen aus elektrisch isolierendem glasfaserverstärktem Kunststoff (GFK) und Polyvinylchlorid (PVC) besteht, sind so angepasst, dass dieses vollständig in den Magneten passt und das gesamte Experiment einem homogenen Magnetfeld ausgesetzt ist. Ferner ist die Höhe in Magnetfeld-Richtung so ausgewählt, dass im Experiment möglichst große Hartmann-Zahlen betrachtet werden können.

Im Gegensatz zu ähnlichen vorhergehenden Experimenten (s. Debray (1997)), in denen ebenfalls instabile Kanalströmungen untersucht worden sind, besteht die jetzige Konfiguration aus zwei äußeren und einem inneren Kanal, der Teststrecke. Diese Anordnung wurde gewählt, um eine möglichst symmetrische Anströmung zu erzielen. Denn wie in Bühler, Mistrangelo und Koehly (2012) gezeigt wird, vermindert ein großes Verhältnis  $r_i/l$  (s. Abb. 9 und 10) des Zustromkanals Störungen des Geschwindigkeitsprofils. Darum wird die Breite des Zustromkanals halbiert. Um den Volumenstrom bei Änderung der Geometrie konstant zu halten wird ein zusätzlicher Zustromkanal verwendet.

Das Experiment ist modular aufgebaut, sodass verschiedene Teststrecken verwendet werden können. So kann beispielsweise der Einfluss unterschiedlicher Aspektverhältnisse  $d$  auf die Ausbildung von Instabilitäten untersucht werden.

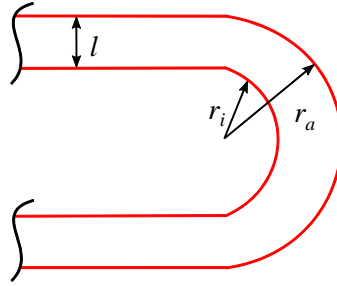


Abbildung 9: Skizze eines experimentellen Aufbaus mit einem zuführenden Kanal

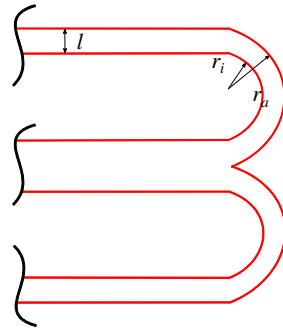


Abbildung 10: Skizze eines experimentellen Aufbaus mit zwei zuführenden Kanälen

Eine erste numerische Untersuchung zur Auslegung des Doppelkreislaufes deren Ergebnisse ebenfalls in Bühler et al. (2012) dargestellt werden, zeigt, dass es in der Nähe der elektromagnetischen Pumpen der äußeren Kanäle in Abb. 8 zu lokalen dreidimensionalen Störungen kommen kann. Jedoch verbleiben diese in den Seitenkanälen und treten nicht in die Teststrecke ein.

Die elektromagnetischen Pumpen bestehen aus Kupferplattenpaaren und sind so miteinander verbunden, dass sie, wie in Abb. 11 dargestellt, elektrisch in Reihe geschaltet sind. Dadurch fließt der selbe elektrische Strom durch beide Pumpen. Die induzierten Lorentz-Kräfte sind in beiden Pumpen identisch und erzeugen exakt gleiche Druckdifferenzen. Die Verbindung der Pumpenelektroden besteht aus Kupferschienen. Um den Kontakt zwischen Kupferschienen und Elektroden der Pumpen zu verbessern, wird eine Kupferkontaktmasse aufgetragen.

Bei einem maximalen Strom von etwa 2000 A, kann eine Geschwindigkeit von etwa  $u_0 \approx 0.6 \frac{m}{s}$  erreicht werden.

GaInSn wird in die Elektroden der Pumpe und die Hartmann-Wand eingerieben (Morley, Burris, Cadwallader und Nornberg (2008)), sodass ein guter elektrischer Kontakt sichergestellt werden kann.

Die eingebrachte elektrische Leistung in den Pumpen durch viskose und Joule'sche Dissipation wird durch die massiven Kupferschienen durch Wärmeleitung an die Umgebung abgegeben.

### 3.3 Teststrecke

Das Flüssigmetall fließt vor Eintritt in die Teststrecke (s. Abb. 12) durch einen Strömungsgleichrichter mit einer Länge in  $x$  - Richtung von 40 mm. Dieser ist, wie in Abb. 13 dargestellt,



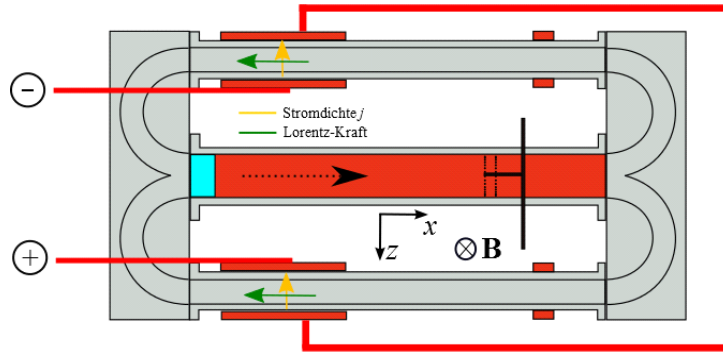


Abbildung 11: Prinzipskizze der Mechanismen in elektromagnetischen Pumpen

entsprechend einer Honigwabenstruktur aufgebaut und dient zur Unterdrückung von Störungen. Der Abstand zwischen Strömungsgleichrichter und Ebene A, in der Messungen der Potentialverteilung an den Wänden und der Sonde vorgenommen werden, beträgt etwa  $12 L$ . Dies entspricht der vorgeschlagenen Einlaufänge in Gelfgat, Dorofeev und Shcherbinin (1971). Ferner wird in Bühler et al. (2012) durch numerische Simulationen gezeigt, dass die Strömung bereits kurz nach dem Eintritt in die Teststrecke eingelaufen ist.

Abb. 13 zeigt weiterhin, dass sich an der unteren Wand, die der Hartmann-Wand entspricht, eine Kupferoberfläche befindet. Hierzu wird auf die Hartmann-Wände eine Kupferfolie aufgeklebt, die eine Dicke von  $t_w = 50 \mu\text{m}$  hat, sowie eine Leitfähigkeit von  $\sigma_w = 58 \cdot 10^6 \frac{1}{\Omega\text{m}}$  aufweist. Es ergibt sich ein Wandleitfähigkeitsparameter von  $c_H = 0.03$ . Die Dicke  $t_w$  der Hartmann-Wand ist so klein gewählt, dass die experimentellen Ergebnisse mit der analytischen Lösung verglichen werden können. Denn in der analytischen Lösung wird die Dünne-Wand-Approximation (18) verwendet. Somit ergeben sich die Randbedingungen für eine Hunt-Strömung mit leitfähigen Hartmann-Wänden und isolierten Seitenwänden, bei der in den Seitenschichten der Strömung Jets ausgebildet werden.

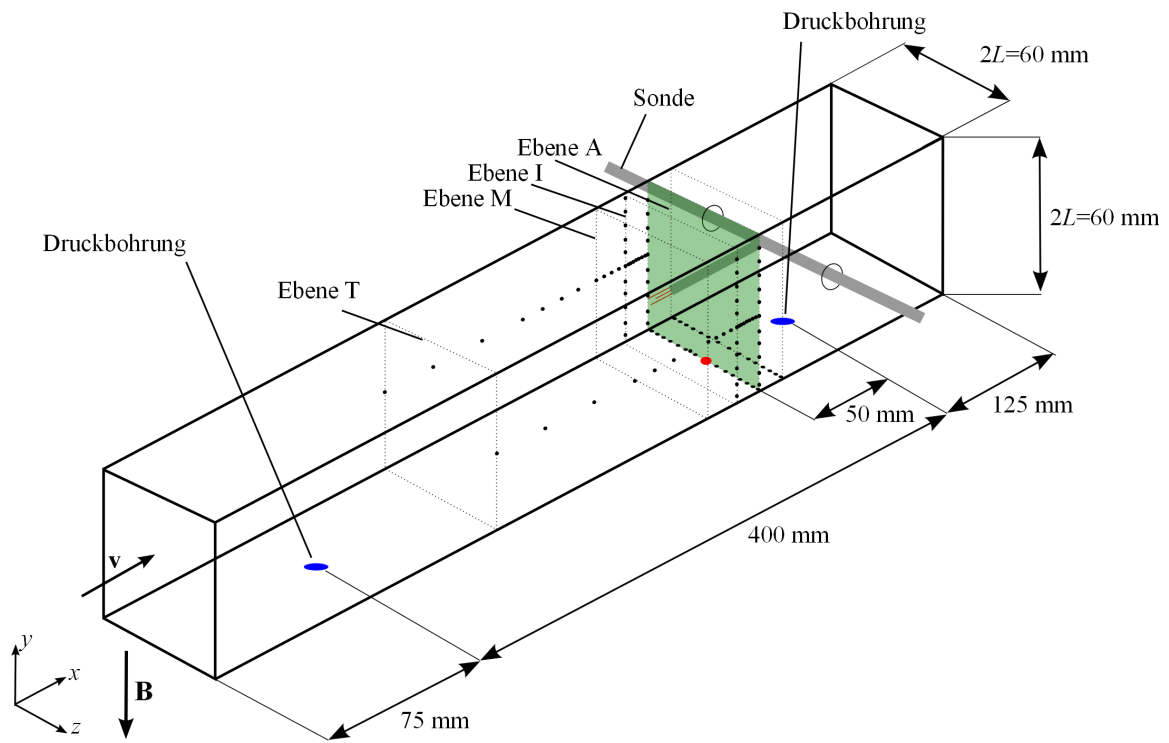


Abbildung 12: Messstellen an den Wänden einer Teststrecke mit  $d = 1$ : Referenzmessstelle für Potentialmessung in der Mitte der Hartmann-Wand ( $\perp B$ ) in rot; statische Druckdifferenzen werden zwischen den Bohrungen (blau) gemessen

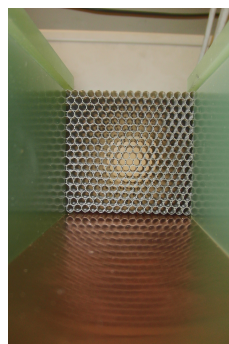


Abbildung 13: Strömungsgleichrichter im Eintrittsbereich der Teststrecke; die obere Hartmann-Wand ist noch nicht montiert

## 3.4 Messtechnik

In der Teststrecke in Abb. 12 werden Potentialverteilungen an der Wand und lokale Potentialdifferenzen im Fluid mit einer verfahrbaren Sonde gemessen. Diese Messungen des Potentials können mit analytischen Lösungen oder numerischen Simulationen verglichen werden. Die Ergebnisse von Messungen mit der verfahrbaren Sonde zeigen Profile des Potentialgradienten. Aus diesen Daten können Geschwindigkeitsprofile ermittelt werden, sodass der Einfluss einer instabilen Strömung auf das Geschwindigkeitsprofil betrachtet werden kann.

In den zwei äußeren Kanälen befinden sich jeweils Durchflussmesser, die mittels Kupferelektroden die Potentialdifferenz über den Querschnitt hinweg in  $z$  - Richtung messen, um die mittlere Geschwindigkeit des Fluids zu ermitteln.

Weiterhin werden in den äußeren Kanälen die Temperatur des Fluids gemessen, um Stoffwerte wie Dichte, elektrische Leitfähigkeit und Viskosität zur Bestimmung der Hartmann- und Reynolds-Zahl anzupassen.

### 3.4.1 Potentialmessungen

Für die Potentialmessung wird die Spannung zwischen zwei Positionen gemessen, sodass eine Potentialdifferenz  $\Delta\phi$  gemessen wird. Dabei gilt im Idealfall

$$\Delta\phi(t) = \overline{\Delta\phi} + \Delta\phi^{*'}(t), \quad (60)$$

mit dem zeitlich gemittelten Anteil  $\overline{\Delta\phi}$  und dem Schwankungsanteil  $\Delta\phi^{*'}(t)$ , der zeitabhängige Informationen über instabile Strömungen enthält. In der Realität kommt noch der Rauschanteil  $R$  hinzu, der durch die Messkette, Kabel, Verstärker, Elektrogeräte, usw. hinzukommt. Daraus ergibt sich für den Messwert

$$\Delta\phi(t) = \overline{\Delta\phi} + \Delta\phi^{*'}(t) + R. \quad (61)$$

Sofern der zeitlich gemittelte Wert  $\overline{\Delta\phi}$  gesucht wird, kann das Rauschen vernachlässigt werden, da  $\overline{R} = 0$  gilt.

Wenn Informationen über die instabile Strömung gesucht werden, müssen Maßnahmen getroffen werden, dass  $R$  minimal wird. Für das hier beschriebene Experiment waren das:

- Einsatz paarig verdrehter und abgeschirmter Kabel an der Teststrecke: Dabei wurde das eine Kabel des verdrehten Kabelpaares an die jeweilige Messstelle und das andere Kabel an einem Referenzpunkt angeschlossen. Durch die Verdrehung heben sich Störungen in den Kabelpaaren auf, die durch elektromagnetische Störfelder induziert werden;
- Verwendung batteriebetriebener Verstärker bei instationären Messungen, sodass das Stromnetz keine Störungen induzieren kann;
- Vermeidung von Luftbewegung in den Bereichen der Messstellen der Teststrecke und der Messverstärker, da es ansonsten zu Thermospannungen kommt, die Störungen induzieren;
- Abschalten nichtverwendeter Elektrogeräte in der Nähe des Experimentes wie beispielsweise das Netzteil des Motors der Sonden-Verfahreinheit. Dieses induziert starke Störungen, sodass es für die instationären Messungen ausgeschaltet werden muss.

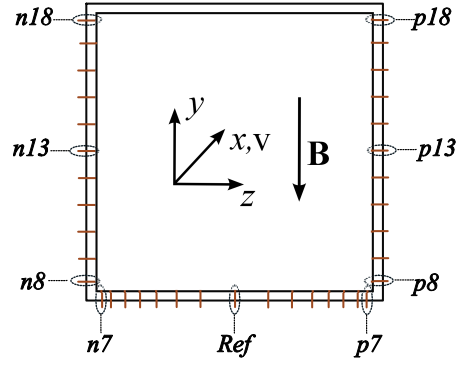


Abbildung 14: Sonden auf den Seitenwänden von n8 bis n18 und p8 bis p18, auf der unteren Hartmann-Wand von n7 bis p7 (s. Anhang E.1, E.2)

**Potentialmessungen an den Wänden** In der Teststrecke befinden sich an den Seitenwänden parallel zum Magnetfeld und an den Hartmann-Wänden senkrecht zum Magnetfeld Messingstifte, die in Abb. 12 als Punkte dargestellt sind. Zwischen den Messingstiftpaaren werden Potentialdifferenzen  $\Delta\phi$  gemessen. Für die zeitlich gemittelten Werte wird ein Referenzstift in der Mitte der Hartmann-Wand definiert, der in Abb. 12 als roter Punkt dargestellt ist. Wie in Abb. 14 für einen Querschnitt detaillierter dargestellt, sind die Messstellen auf der Seitenwand äquidistant und auf der unteren Hartmann-Wand nicht-äquidistant verteilt.

Weiterhin befinden sich nicht-äquidistant verteilte Messstellen in  $x$ -Richtung an den Seitenwänden wie in Abb. 12 zu sehen ist. Die axialen Positionen sind mit den Buchstaben  $A$  bis  $T$  bezeichnet (s. Anhang E.2).

**Potentialmessungen im Fluid** Zur Messung des lokalen Potentialgradienten im Fluid wird eine verfahrbare Sonde verwendet. Die Sonde besteht, wie in Abb. 15 und 16 dargestellt, aus einem Edelstahlröhrchen mit einem Durchmesser von 4 mm, einem Keramikröhrchen mit einem Durchmesser von 1.2 mm und vier dünnen Federstahldrähten bezeichnet als  $a - d$  mit je einem Durchmesser von 0.2 mm. Damit lediglich an der Spitze der Drähte ein elektrischer Kontakt mit dem Flüssigmetall vorliegt und somit keine weiteren elektrischen Ströme in den Draht eintreten können, werden die Drähte mit einem Lack beschichtet und am Ende an der Spitze des Drahtes angeschliffen. Die Sonde kann senkrecht zum externen Magnetfeld und zur Hauptströmungsrichtung in der Teststrecke verfahren werden. Die angefahrte Position der Sonde entspricht der Sondenmitte. Mit den Abmaßen für die Teststrecke mit quadratischem Querschnitt ergeben sich die minimale und maximale Position zu  $z_{\min/\max} = \mp 29.1$  mm, sodass sich ein möglicher Gesamtfahrweg von 58.2 mm ergibt.

Für die Teststrecke mit  $d = 1/3$  (s. Abb. 17) ergibt sich die minimale und maximale Position zu  $z_{\min/\max} = \mp 9.3$  mm. Für Messungen im schmalen Kanal wurde eine zweite Sonde gebaut, deren Abmessungen im Vergleich zur ersten Sonde weiter reduziert werden konnten. Diese Sonde besteht aus zwei lackierten Kupferdrähten, die einen Abstand von 1.2 mm zueinander haben und senkrecht zum Magnetfeld ähnlich zu den Drähten  $a$  und  $c$  in Abb. 16 angeordnet sind.

Die Stromdichte  $\mathbf{j}$  im Ohm'schen Gesetz hängt von der Größenordnung von  $c_H$  und dem Widerstand in den Hartmann-Schichten, der proportional zu  $Ha^{-1}$  ist, ab. Für große Hartmann-Zahlen

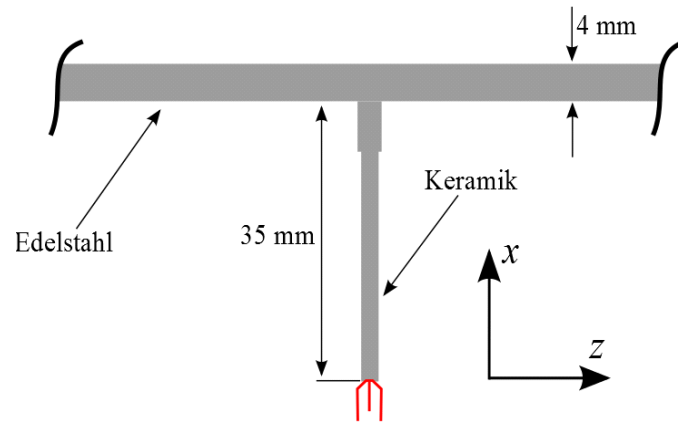


Abbildung 15: Aufbau der traversierbaren Sonde

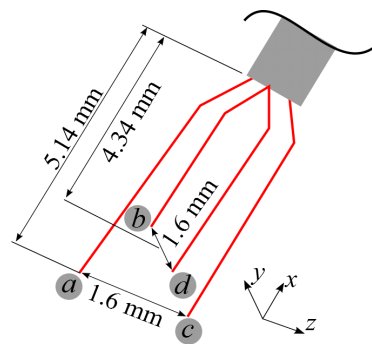


Abbildung 16: Sondenkopf der traversierbaren Sonde



Abbildung 17: Geometrie des schmalen Kanals ( $d = 1/3$ ) in Draufsicht

und schwach leitende Wände, also für

$$Ha \gg 1, c_H \ll 1,$$

gilt

$$\mathbf{j} = O(c_H, Ha^{-1}) \ll \nabla\phi \text{ und } \mathbf{j} = O(c_H, Ha^{-1}) \ll \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (62)$$

Damit ist  $\mathbf{j}$  gegenüber  $\nabla\phi$ , sowie  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  vernachlässigbar und es folgt

$$\nabla\phi \approx \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (63)$$

Für die Geschwindigkeitskomponenten gilt dann mit  $\Delta\phi_{ac} = \phi_a - \phi_c$  ( $\Delta\phi_{cd}$ ,  $\Delta\phi_{bd}$  entsprechend)

$$u = -\frac{1}{B_0} \frac{\partial\phi}{\partial z} \approx -\frac{1}{B_0} \frac{\Delta\phi_{ac}}{\Delta z} \quad (64)$$

und

$$w = \frac{1}{B_0} \frac{\partial\phi}{\partial x} \approx \frac{1}{B_0} \frac{\Delta\phi}{\Delta x} \approx \frac{1}{B_0} \frac{1}{\Delta x} (\Delta\phi_{cd} + 0.5\Delta\phi_{ac} - 0.5\Delta\phi_{bd}). \quad (65)$$

Die Potentialgradienten werden zwischen den Federstahldrähten ermittelt, wie sie in Abb. 16 dargestellt sind. Die Geschwindigkeitskomponente  $v$  in  $y$ -Richtung ist mit dieser Methode nicht zu bestimmen.

Für  $Ha \gg 1$  bilden sich an der Sonde interne Schichten aus, in denen die Strömung stark gestört ist. Diese Störungen können sich stromaufwärts auswirken, bis sie sogar den Sondenkopf erreichen. Zu erkennen ist dieser Zusammenhang in Tab. 1. Hierbei werden die relativen Abweichungen zwischen dem Sonden-signal und dem ermittelten Gradienten auf der Hartmann-Wand für einige Hartmann- und Reynolds-Zahlen dargestellt. Dabei zeigt sich, dass sich die relative Abweichung mit steigender Reynolds-Zahl vermindert, außer im Falle von  $Ha = 500$ ,  $Re = 1000$ , und weiterhin, dass eine Korrektur insbesondere für hohe Hartmann-Zahlen notwendig ist.

Der Einfluss der Störung auf die Messergebnisse kann zumindest im Kernbereich durch eine Kalibrierung korrigiert werden, indem der Gradient der Potentialverteilung auf der Hartmann-Wand als Referenz für den Potentialgradienten der Sonde verwendet wird. Dies ist zulässig, da sich die zeitlich gemittelte Potentialverteilung im Kernbereich entlang von Magnetfeldlinien nicht ändert und somit an der Sondenposition gültig ist. Der Referenzwert für den Potentialgradienten berechnet sich für den quadratischen Kanal aus einer Mittelung über  $i = n4, n3, n2, n1, p1, p2, p3, p4$  zu

$$\left( \frac{\Delta\phi}{\Delta z} \right)_{Ref} = \frac{1}{8} \sum_{i=n4}^{p4} \frac{\Delta\phi_i}{z_i}. \quad (66)$$

$Ha$	$Re$	rel. Abweichung [%]
500	1000	3.24
	3000	8.8
	15000	8.57
1000	1000	9.94
	3000	9.69
	15000	8.46
2000	1000	35.6
	3000	12.1
	15000	9.32

Tabelle 1: Relative Abweichung zwischen Sondensignal und ermittelten Gradienten auf der Hartmann-Wand

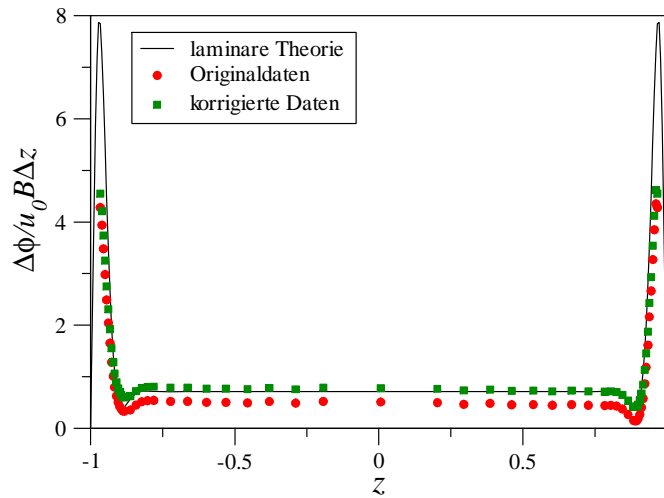


Abbildung 18: Vergleich eines Geschwindigkeitsprofils ( $Ha = 2000$ ,  $Re = 1000$ ) mit Originaldaten und Ergebnisse nach der Korrektur

Die Methode ist ähnlich zu einer Kalibrierung, die in Mistrangelo und Bühler (2008) dargestellt wird. Jedoch werden in Mistrangelo und Bühler (2008) sowohl die Potentialgradienten als auch die Potentialverteilung mit einer verfahrbaren Sonde gemessen, sodass dort die gemessene Potentialverteilung als Referenz verwendet werden kann.

In Abb. 18 wird die analytische Lösung des Geschwindigkeitsprofils mit den gemessenen und korrigierten Daten verglichen. Dabei wird im Kernbereich ein großer Unterschied deutlich, der durch die zuvor beschriebene Kalibrierung behoben werden kann, sodass die experimentellen Ergebnisse im Kernbereich sehr gut mit dem analytischen Verlauf übereinstimmen.

Die Auflösungsgrenze der Potentialmessung ist vornehmlich durch den Abstand der Drähte  $\Delta s$  bestimmt. Dieser beträgt für den quadratischen Kanal sowohl in Richtung senkrecht zum Magnetfeld als auch parallel dazu  $\Delta s = 1.6$  mm. Entsprechend des Nyquistkriteriums kann eine Wirbelstruktur dann ermittelt werden, wenn ihre Abmessung doppelt so groß ist wie  $\Delta s$ . Die Grenzfrequenz der Auflösung von zeitperiodischen Signalen ergibt sich zu

$$f < f_G = \frac{u_s}{2\Delta s}, \quad (67)$$

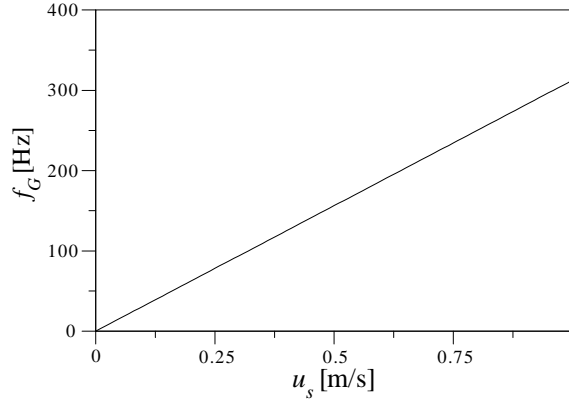


Abbildung 19: Auflösende Grenzfrequenz

wobei  $u_s$  der Transportgeschwindigkeit einer instabilen Struktur entspricht. In Abb. 19 ist die auflösende Grenzfrequenz  $f_G$  in Abhängigkeit von  $u_s$  aufgetragen.

**Durchflussmesser** In den Seitenkanälen befinden sich im Abstand  $l_e = 30$  mm zwei Elektrodenpaare aus Kupfer an denen jeweils eine induzierte Spannung

$$U_{ind} = u_0 B_0 l_e \quad (68)$$

gemessen wird. Damit wird die charakteristische Geschwindigkeit  $u_0$  ermittelt, die für die Entdimensionierung verwendet wird. Da die Seitenkanäle elektrisch isolierte Wände haben, liegt hierin eine Kolbenströmung vor wie sie in Abb. 4 dargestellt ist. Wie im Falle der Kupferfolie auf den Hartmann-Wänden und den elektromagnetischen Pumpen wurde das Flüssigmetall vor der Befüllung des Kreislaufes in die Oberfläche der Elektroden eingerieben, um einen guten elektrischen Kontakt sicherzustellen.

### 3.4.2 Genauigkeit und Auflösungsvermögen

Für die Bestimmung der zeitlich gemittelten Potentialverteilung auf der Wand, der Temperaturen und der Durchflüsse in den Seitenkanälen werden Analog-Digital-Wandler (AD-Wandler, Beckhoff KL3312) eingesetzt. Diese AD-Wandler haben eine Messunsicherheit von  $\pm 0.5\%$ , wobei dieser Wert stets auf den Endwert des jeweiligen Messbereichs bezogen ist und hier  $\pm 30$  mV beträgt.

Für die Potentialmessungen an Seitenwänden und Hartmann-Wand können diese AD-Wandler verwendet werden, da zwischen den Messstellen an der Wand im Gegensatz zu den Abmessungen der Sonde große Abstände vorliegen. Entsprechend groß sind auch die zeitlich gemittelten Potentialsignale an den Wänden. Ein Vorteil ist, dass bei diesen AD-Wandlern die Signale gleichzeitig gemessen werden können.

Vor den Messungen werden stets sogenannte Offset-Messungen durchgeführt, um systematische Fehler zu bestimmen und damit die Genauigkeit wesentlich zu verbessern.

Für die Sondensignale aus dem Fluid wird ein Multifunktionsmeter (Prema 8017) verwendet. Der eingestellte Messbereich entspricht  $\pm 300$  mV. Bei einer Integrationszeit von 1 s wird der



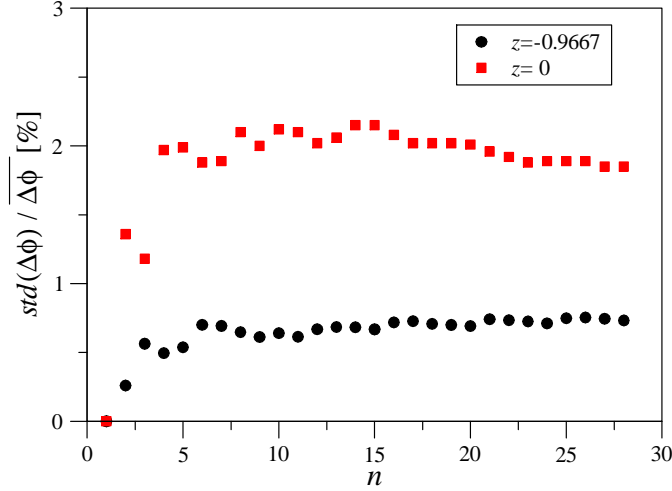


Abbildung 20: Variationskoeffizient ( $Ha = 1000$ ,  $Re = 3000$ ) für  $n$  Messungen

Messwert in 100 nV- Schritten aufgelöst, sodass eine hochgenaue Messung vorgenommen werden kann.

Es werden 59 Positionen für  $d = 1$  bzw. 34 Positionen für  $d = 1/3$  mit der Sonde angefahren. An jeder Position werden  $n$  Messungen mit je einer Integrationszeit von 1 s durchgeführt. In Abb. 20 wird der Variationskoeffizient aus Standardabweichung  $std(\Delta\phi)$  und Mittelwert  $\overline{\Delta\phi}$  für  $n$  Messungen in Wandnähe ( $z = 0.9667$ ) und im Kern der Strömung ( $z = 0$ ) ermittelt. Dabei zeigt sich, dass sich ein nahezu konstanter Wert des Variationskoeffizienten nach etwa zehn Messungen einstellt, sodass die gewählte Anzahl von 30 Messungen ausreichend ist. Ferner ist die Standardabweichung im Kern der Strömung größer als im wandnahen Bereich. Dies hängt mit den starken Geschwindigkeitsüberhöhungen in den Seitenschichten zusammen, die einen höheren Mittelwert bewirken, sodass bei ähnlichen Werten der Standardabweichung das Verhältnis von Standardabweichung zu Mittelwert kleiner wird.

Für instationäre Messungen werden Potentialdifferenzen zwischen zwei Messstellen erfasst, mit einem Vorverstärker verstärkt und mit einer Messkarte (NI PCI-6289) digitalisiert, deren Genauigkeit im eingestellten Messbereich von  $\pm 100$  mV  $28 \mu\text{V}$  beträgt.

Die Vorverstärker, die einer institutseigenen Entwicklung und Herstellung entstammen, wurden im Rahmen dieser Arbeit weiterentwickelt. Diese bestehen aus zwei Verstärker-Einheiten, um eine möglichst hohe Verstärkung erzielen zu können. Zunächst wird das Signal mit einem Faktor 10 verstärkt, sodass gewährleistet ist, dass das Gesamtsignal groß genug ist, um anschließend den Gleichanteil des Signals mithilfe eines analogen Hochpassfilters mit einer Grenzfrequenz von 2.1 Hz entfernen zu können. Daraufhin wird das gefilterte Signal mit einem Faktor von 500 weiter verstärkt, wodurch auch kleinste zeitliche Änderungen, die durch instationäre Strömungen hervorgerufen werden, detektiert werden können. Dies ist besonders wichtig zur Bestimmung der Stabilitätsgrenzen der laminaren Kanalströmung und zur Ermittlung der kritischen Reynolds-Zahlen für das Einsetzen zeitabhängiger Strömungsformen. Für die Weiterverarbeitung der zeitabhängigen Daten werden im Auswerteprogramm in MATLAB digitale Filter gesetzt. Zum einen ein Band-Stopp-Filter mit  $45 \text{ Hz} < f < 55 \text{ Hz}$ , um Störungen aus dem Stromnetz mit einer Frequenz von  $f_{\text{Netz}} = 50 \text{ Hz}$  zu unterdrücken und zum anderen ein Tiefpass-Filter mit  $f < 95 \text{ Hz}$ , um Vielfache von  $f_{\text{Netz}}$  zu unterdrücken.

PT <sub>1</sub>	PT <sub>2</sub>	PT <sub>3</sub>	PT <sub>4</sub>
0 bis 2mbar	0 bis 60mbar	0 bis 370mbar	0 bis 1000mbar

Tabelle 2: Druckmessumformer mit zugehörigen Messbereichen

Zur Bestimmung der statischen Druckdifferenz gibt es in der Teststrecke zwei Bohrungen in der Hartmann-Wand mit einem Abstand von 400 mm (s. Abb. 12). Hierfür werden Druckmessumformer (Rosemount 1151) verwendet, die die Druckdifferenz bestimmen und in ein elektrisches Signal umwandeln. Um verschiedene Messbereiche zu betrachten, werden vier Druckmessumformer, deren Messbereiche in Tab. 2 dargestellt sind, verwendet. Die Messergebnisse haben laut Hersteller Messunsicherheiten von  $\pm 0.075\%$  des jeweils eingestellten Endwertes. Für die Auswertung wird der arithmetische Mittelwert der verschiedenen Druckmessumformer ermittelt, wobei lediglich die Werte betrachtet werden, die unterhalb des jeweiligen Grenzbereiches liegen.

Die Temperaturen des Fluids werden mit NiCrNi - Thermoelementen mit einer Messunsicherheit von  $\pm 1.5$  K gemessen. Zum einen kann mit den Thermoelementen der Betriebszustand der Anlage überwacht werden. Zum anderen beeinflusst die Flüssigmetalltemperatur die Werte der physikalischen Stoffeigenschaften. Diese werden bei der Auswertung temperaturabhängig berücksichtigt. Um thermische Stationarität sicherzustellen, wird das Experiment solange betrieben, bis sich eine annähernd konstante Temperatur einstellt.

## 4 Experimentelle Ergebnisse und Diskussion

In Abschnitt 4.1 wird zunächst der Einfluss eines Kontaktwiderstandes zwischen Fluid und Hartmann-Wand auf die Messergebnisse beleuchtet. In einer ersten Ausführung der Teststrecke mit einem Seitenverhältnis von  $d = \frac{\text{Breite}}{\text{Länge}} = 1$  zeigten sich experimentelle Ergebnisse, die von der analytischen Lösung abweichen. Die Abweichung kann mit der Existenz eines Kontaktwiderstandes auf der Oberfläche der Hartmann-Wände beschrieben werden.

In Abschnitt 4.2 wird die Strömung in einer zweiten Teststrecke mit  $d = 1$  untersucht bei der ein wesentlich besserer elektrischer Kontakt zwischen Fluid und Wand realisiert werden konnte als mit der ersten Teststrecke. Darin zeigen sich in den zeitlichgemittelten Ergebnissen von Potential- und Geschwindigkeitsverteilungen erste Hinweise auf instabile Strömungen. Abschnitt 4.3 widmet sich dann der Untersuchung der instabilen Strömungen mit der Bestimmung von Stabilitätsgrenzen und der Charakterisierung entstehender instabiler Strukturen.

Abschließend folgen zeitgemittelte Ergebnisse der Geschwindigkeitsverteilungen und der Druckgradienten, sowie eine Untersuchung der zeitabhängigen Signale einer Teststrecke mit  $d = 1/3$ .

### 4.1 Kontaktwiderstand

Nach der Befüllung des Kreislaufes und während der Inbetriebnahme der Anlage war es nötig, den Kreislauf noch einmal zu öffnen und somit das Flüssigmetall abzulassen. Dadurch kam es zu einem Sauerstoffeintrag und einer Oxidation der benetzten Oberfläche auf den Hartmann-Wänden. Vor dem erneuten Zusammenbau wurden alle benetzten Oberflächen sorgfältig gereinigt. Es wurde der Versuch unternommen, Oxide mit verdünnter Salzsäure zu entfernen und eine Benetzung wie zuvor beschrieben (s. Morley et al. (2008)) wurden durchgeführt.

Nach der erneuten Inbetriebnahme zeigten sich bei Messungen der Potentialverteilungen auf den Hartmann-Wänden reproduzierbare Abweichungen zur analytischen Lösung. Auf der Suche nach einer Erklärung für diese Abweichungen wurde ein zusätzlicher Kontaktwiderstand auf der Hartmann-Wand zunehmend plausibel. Daraus folgte die Idee, die analytische Lösung aus 2.2.1 um den Einfluss eines Kontaktwiderstandes zu erweitern und mit den experimentellen Ergebnissen zu vergleichen (s. hierzu auch Chowdhury, Bühler und Mistrangelo (2014)). Hierdurch konnte der quantitative Kontaktwiderstand abgeschätzt werden.

#### 4.1.1 Analytische Lösung und Ergebnisse für $\kappa > 0$

Die analytische Lösung aus Abschnitt 2.2.1 kann für den Fall von Kontaktwiderständen mit  $\kappa > 0$  durch anpassen der *Dünne-Wand-Approximation* erweitert werden. Aus Glg. (20) folgt dann

$$c \frac{db_i}{dy} + b_i = -c\kappa\lambda_i^2 b_i \quad \text{bei } y = 1. \quad (69)$$

Nach dem Umformen der Gleichung ergibt sich ein ähnliches Aussehen zur ursprünglichen Form der *Dünne-Wand-Approximation* mit

$$\frac{c}{1 + c\kappa\lambda_i^2} \frac{db_i}{dy} + b_i = 0 \quad \text{bei } y = 1, \quad (70)$$

sodass die Bestimmung der Koeffizienten  $\alpha_{i,2}$  eine allgemeine Form annimmt,

$$\alpha_{i,2} = \frac{c}{1 + c\kappa\lambda_i^2} p_{i,2} + \tanh p_{i,2} \quad (71)$$

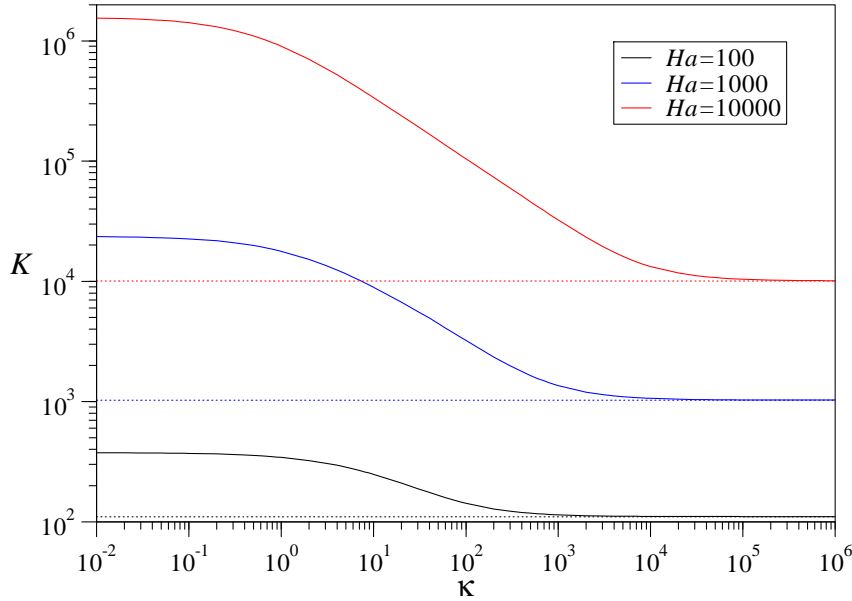


Abbildung 21: Analytisch bestimmter Druckgradient  $K$  für  $Ha = 100, 1000, 10000$ ,  $c = 0.0295$  in Abhängigkeit von Kontaktwiderstand  $\kappa$ : gestrichelte Linien entsprechen dem Fall von elektrisch isolierten Wänden

in die der dimensionslose Kontaktwiderstandsparameter  $\kappa$  eingeht. In Glg. (71) erkennt man unmittelbar die beiden Grenzfälle. Für  $\kappa = 0$  (perfekter elektrischer Kontakt) geht die Gleichung in Glg. (45) für dünne leitende Wände über.

Für  $\kappa \rightarrow \infty$  (perfekte Isolationsschicht auf leitender Wand) findet sich trotz leitenden Wänden mit  $c > 0$  eine Darstellung für die  $\alpha_{i_{1,2}}$  derjenigen für isolierte Wände entspricht.

In Abb. 21 wird der dimensionslose Druckgradient  $K$  aus Glg. (49), für verschiedene Hartmann-Zahlen in Abhängigkeit des Kontaktwiderstandes dargestellt. Als Wandleitparameter wurde ein Wert von  $c = 0.0295$  gewählt, der im Experiment für die  $50 \mu\text{m}$  dicken Kupferschichten vorhanden ist. Hierbei zeigt sich zum einen, dass für höhere Hartmann-Zahlen höhere Druckgradienten erreicht werden. Zum anderen wird deutlich, dass für  $\kappa \gg Ha$  der Druckverlust wie im Falle von elektrisch isolierten Wänden mit  $K \sim Ha$  (gestrichelte Linien) skaliert (s. hierzu Bühler und Molokov (1994)). Für kleinere Werte von  $\kappa$  steigt der Druckverlust stark an und erreicht ein Maximum für  $\kappa = 0$ , wenn perfekter Kontakt zwischen Flüssigmetall und Hartmann-Wand vorliegt.

Abb. 22 zeigt Geschwindigkeitsprofile bei  $y = 0$  für  $Ha = 1000$ ,  $c = 0.0295$  für verschiedene Werte von  $\kappa$ . Für  $\kappa = 0$  entspricht das Geschwindigkeitsprofil dem der Hunt-Strömung (s. Abb. 5). Durch Erhöhung von  $\kappa$  wird die Seitenschicht dicker und die Kerngeschwindigkeit nimmt ab. Für  $\kappa \lesssim 10$  ist sogar ein Anstieg der maximalen Geschwindigkeit in der Seitenschicht erkennbar. Für  $\kappa \gtrsim 10$  zeigt sich eine Seitenschicht, die deutlich dicker ist als die ursprüngliche, sodass auch die Geschwindigkeit im Kern immer mehr absinkt. Für  $\kappa \gg Ha$  findet sich wieder ein kolbenförmiges Geschwindigkeitsprofil wie im Fall von MHD-Kanalströmungen mit isolierten Wänden.

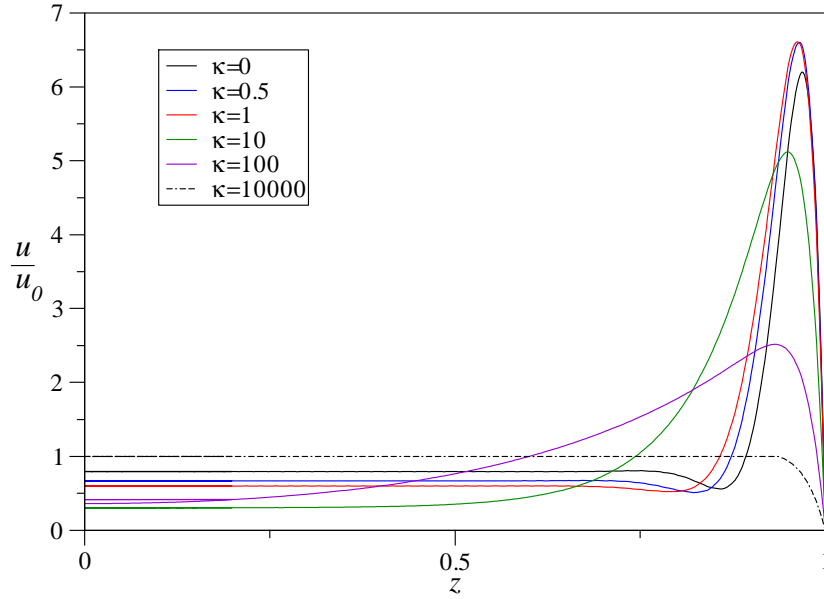


Abbildung 22: Analytische Lösungen der Geschwindigkeit  $u/u_0$  bei  $y = 0$  für  $Ha = 1000$ ,  $c = 0.0295$  und verschiedenen Werten von  $\kappa$

#### 4.1.2 Experimentelle Ergebnisse für $\kappa > 0$

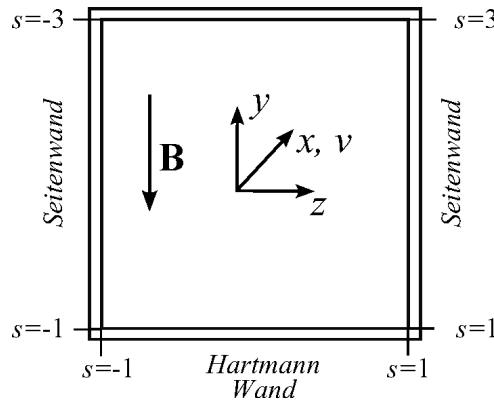


Abbildung 23: Kanalgeometrie mit Umfangskoordinate  $s$

In den Abb. 24, 25 und 26 werden Potentialverteilungen auf der Hartmann-Wand als Funktion der Koordinate  $s$  (s. Abb. 23) dargestellt. Die Symbole entsprechen hierbei den experimentellen Ergebnissen und die Linien analytischen Lösungen für verschiedene Werte des Kontaktwiderstandes  $\kappa$ . Im Vergleich zwischen Experiment und analytischen Lösungen wird deutlich, dass für  $-0.8 \lesssim s \lesssim 0.8$  eine lineare Veränderung des Potentials vorliegt. Dabei vermindert sich die Steigung der Potentialverteilung mit zunehmenden Kontaktwiderstand, da das induzierte elektrische Feld reduziert ist. Die Potentialverteilungen weichen vom linearen Verhalten in der Nähe der Seitenwände aufgrund der Veränderung der Seitenschicht ab.

Beim Vergleich der Potentialverteilungen der Abb. 24, 25 und 26 zeigt sich, dass für einen kon-

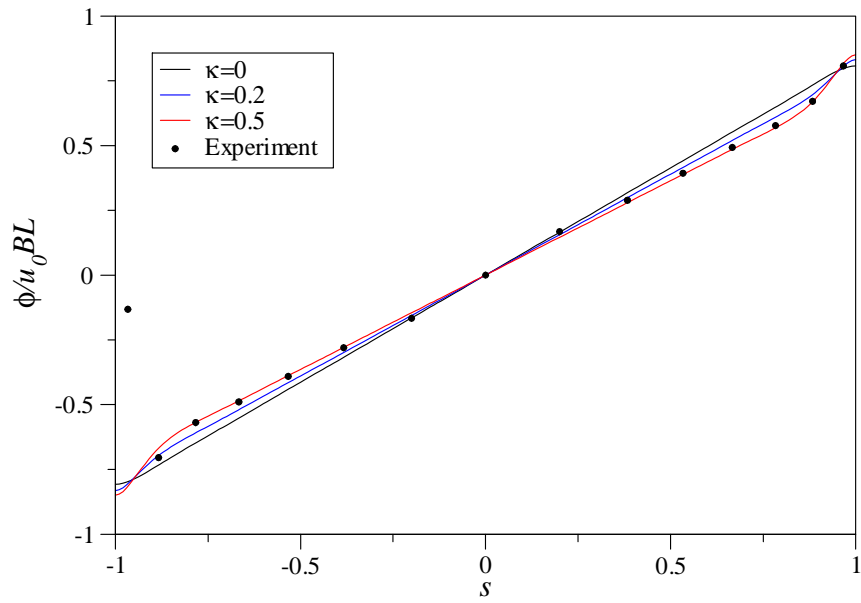


Abbildung 24: Potentialverteilung auf der Hartmann-Wand für  $Ha = 518$ ,  $Re = 610$

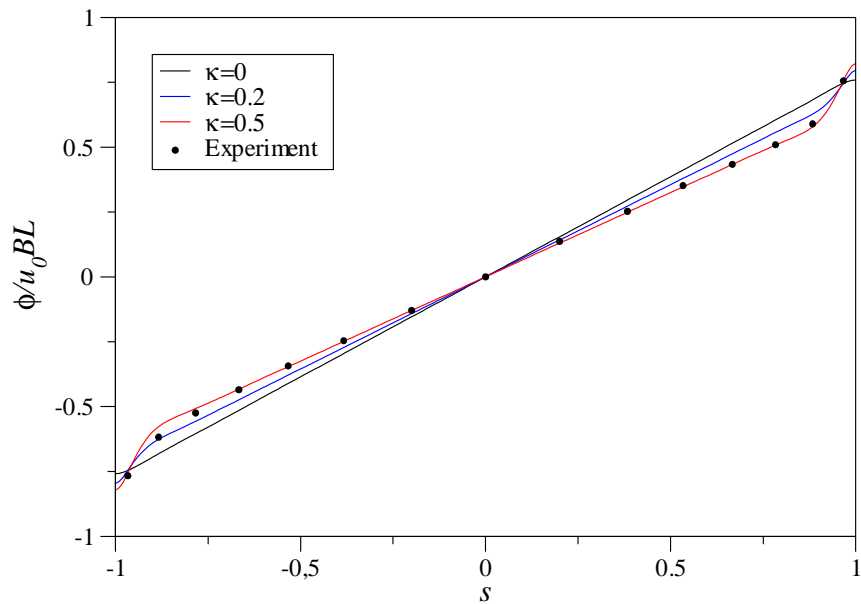


Abbildung 25: Potentialverteilung auf der Hartmann-Wand für  $Ha = 1010$ ,  $Re = 1041$

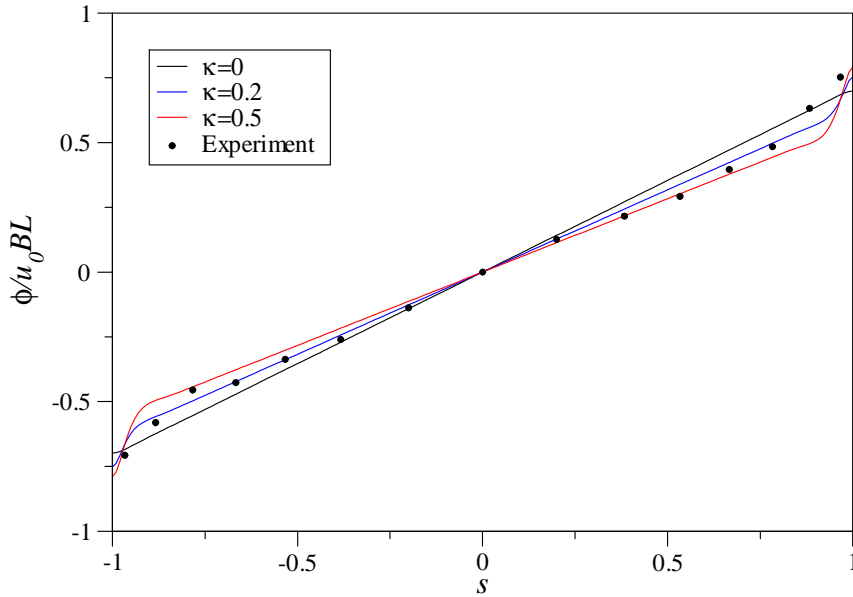


Abbildung 26: Potentialverteilung auf der Hartmann-Wand für  $Ha = 2020$ ,  $Re = 470$

stanten Wert des Kontaktwiderstandes und steigender Hartmann-Zahl, die Steigung reduziert ist und der Einfluss des Kontaktwiderstandes stärker ausgeprägt ist. Die experimentellen Ergebnisse machen deutlich, dass der Kontaktwiderstand im Experiment im Bereich von  $0.2 < \kappa < 0.5$  liegt.

#### 4.1.3 Einfluss des Kontaktwiderstandes auf die Stabilität der Strömung

In Bezug auf die Stabilität der Strömung kann festgestellt werden, dass für sehr große Werte von  $\kappa$  ein kolbenförmiges Geschwindigkeitsprofil vorliegt und eine instabile Strömung erst bei sehr hohen Reynolds-Zahlen einsetzt. Für  $\kappa \lesssim 10$  nimmt die Strömungsgeschwindigkeit in den Jets sogar noch zu, sodass die kritischen Reynolds-Zahlen vermutlich abgesenkt werden.

Der Kontaktwiderstand im Experiment auf den Hartmann-Wänden ist nicht homogen. Dadurch kommt es zu Störungen der Stromdichteverteilung, die den Auslöser für instabile Strömungen bilden. Dadurch könnten kritische Reynolds-Zahlen vermindert werden. Eine experimentelle Untersuchungen inhomogener Wandleitfähigkeiten findet sich in Debray (1997).

## 4.2 Messungen zeitlicher Mittelwerte

Für die Ergebnisse der folgenden Abschnitte wurde ein neuer Kanal verwendet, in dem kein Kontaktwiderstand festgestellt worden ist.

Zunächst werden Potential- und Geschwindigkeitsverteilungen für verschiedene  $Ha$  mit zugehörigen Standardabweichungen dargestellt. Als Reynolds-Zahl wurde jeweils ein Wert von  $Re = 1000$  gewählt. Experimentelle Daten werden mit analytischen Ergebnissen (s. Glg. (52)) verglichen. Im Anschluss folgen Potential- und Geschwindigkeitsverteilungen für verschiedene  $Ha$ , bei denen auch Ergebnisse für höhere Reynolds-Zahlen betrachtet werden, in denen sich Änderungen der Verteilungen zeigen.

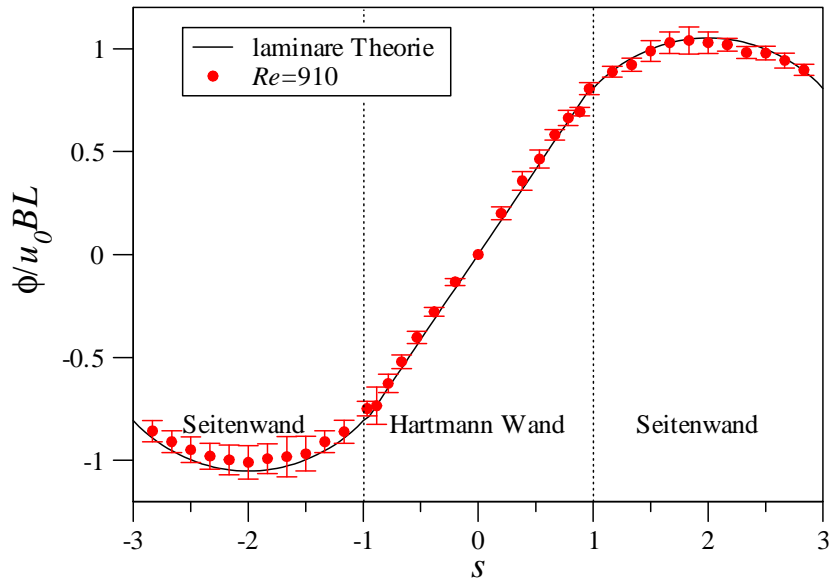


Abbildung 27: Potentialverteilung für  $Ha = 500$

In Abb. 27, 28, 29 und 30 sind zeitlich gemittelte Potentialverteilungen für verschiedene Hartmann-Zahlen und  $Re \approx 1000$  dimensionslos im jeweiligen Vergleich zu einer analytischen Lösung über die Umfangskoordinate  $s$  (s. Abb. 23) dargestellt. Hierbei zeigen sich gute Übereinstimmungen zwischen experimentellen Werten und analytischen Ergebnissen. Auf der Hartmann-Wand für  $-1 < s < 1$  findet sich eine lineare und auf den Seitenwänden für  $s \leq \mp 1$  zeigt sich eine parabolische Verteilung. Dabei gilt, dass die Steigung auf der Hartmann-Wand mit zunehmender Hartmann-Zahl abnimmt und sich die parabolische Verteilung auf der Seitenwand stärker ausbildet, da die Seitenschicht  $\delta_S$  dünner wird. Dadurch erhöhen sich der elektrische Widerstand und die elektrische Potentialdifferenz zwischen  $s = \mp 1$  und  $s = \mp 2$  bzw.  $s = \mp 3$  und  $s = \mp 2$ . Gleichzeitig nimmt die Kerngeschwindigkeit ab, der Volumenstrom in den Jets nimmt zu was ebenfalls die beobachtete Tendenz bestätigt.

Neben den zeitlich gemittelten Werten werden die Standardabweichungen  $std$  dargestellt. Diese



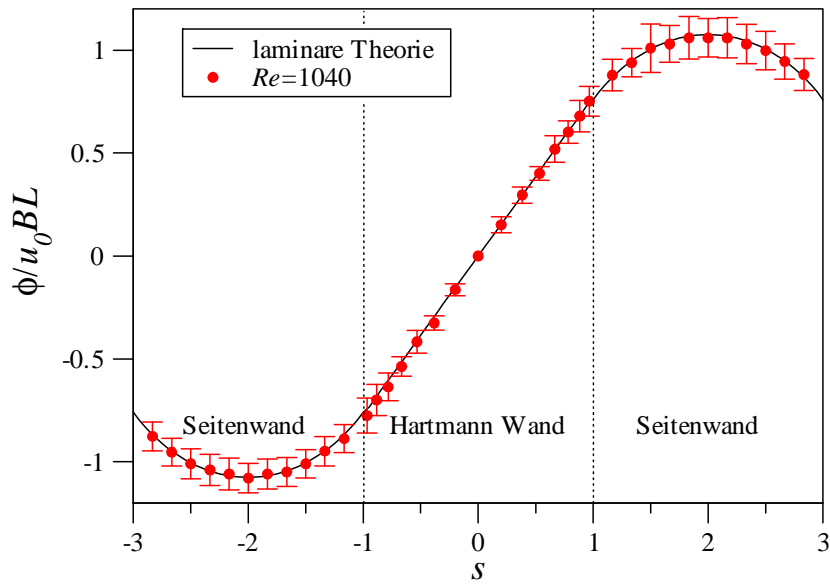


Abbildung 28: Potentialverteilung für  $Ha = 1000$

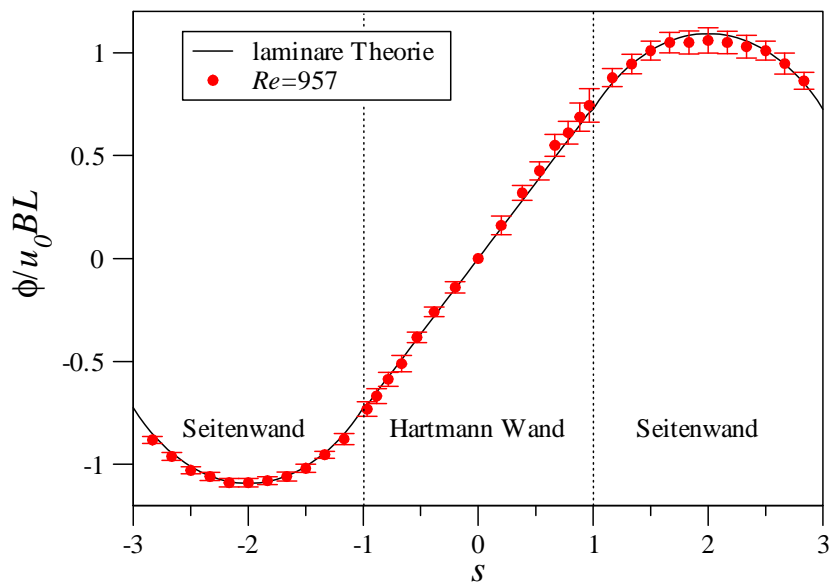


Abbildung 29: Potentialverteilung für  $Ha = 1500$

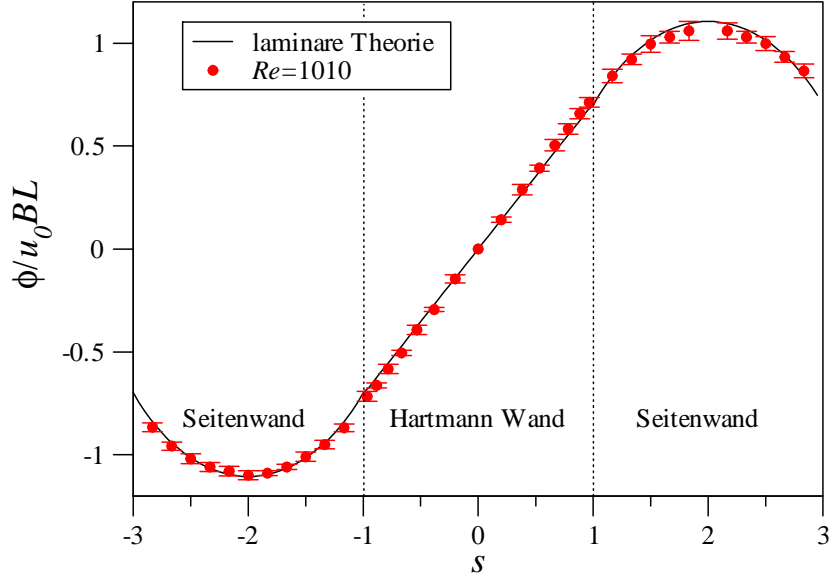


Abbildung 30: Potentialverteilung für  $Ha = 2000$

werden entsprechend Taylor (1997) für die dimensionslose Potentialverteilung  $\Delta\phi^* = \frac{\Delta\phi}{u_0 B \Delta z}$

$$std(\Delta\phi^*) = \left| \frac{\partial \Delta\phi^*}{\partial \Delta\phi} \right| std(\Delta\phi) + \left| \frac{\partial \Delta\phi^*}{\partial u_0} \right| std(u_0) + \left| \frac{\partial \Delta\phi^*}{\partial B} \right| std(B) \quad (72)$$

ermittelt, wobei  $\Delta\phi$  einer Potentialdifferenz,  $u_0$  einer charakteristischen Geschwindigkeit,  $B$  der magnetischen Feldstärke und  $\Delta z$  einer charakteristischen Länge entspricht.

Die Standardabweichungen sind in Abb. 27 und 28 an den Seitenwänden größer als an den Hartmann-Wänden. In Abb. 29 gilt dies lediglich für die positive Seitenwand mit  $s > 1$  und in Abb. 30 sind die Standardabweichungen abermals kleiner.

In Abb. 31, 32, 33 und 34 sind mit der Sonde gemessene, zeitlich gemittelte Potentialgradientenverteilungen  $\frac{\Delta\phi}{\Delta z}$  dargestellt (s. Abschnitt 3.4.1). Da im Experiment nur eine Approximation des Potentialgradienten gemessen werden kann ( $\frac{\partial\phi}{\partial z} \approx \frac{\Delta\phi}{\Delta z}$ ), wird auch für den Vergleich mit der exakten analytischen Lösung des Potentials  $\phi(z)$  der entsprechende Wert berechnet. Somit gilt

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} \approx \frac{\Delta\phi}{\Delta z} = \frac{\phi(z + \Delta z/2) - \phi(z - \Delta z/2)}{\Delta z}. \quad (73)$$

Die so berechnete Größe  $\frac{\Delta\phi}{\Delta z}$  wird im Folgenden mit experimentellen Daten verglichen. Es finden sich sehr gute Übereinstimmungen von experimentellen und analytischen Ergebnissen. Die Verteilung des Potentialgradienten stellt gemäß dem Ohm'schen Gesetz eine sehr gute Approximation für das Geschwindigkeitsprofil dar. Deshalb werden zur Vereinfachung im fortlaufenden Text die Potentialgradientenverteilungen aus Sondenmessungen als Geschwindigkeitsverläufe bezeichnet.

Die Geschwindigkeitsverläufe zeigen die typischen Merkmale einer Hunt-Strömung mit konstanten Kernströmungsgeschwindigkeiten und Jets in den Seitenschichten auf. Während die Kernströmungsgeschwindigkeit für verschiedene  $Ha$  in einem ähnlichen Verhältnis zu  $u_0$  steht, wächst die maximale Geschwindigkeit in den Jets stark an.

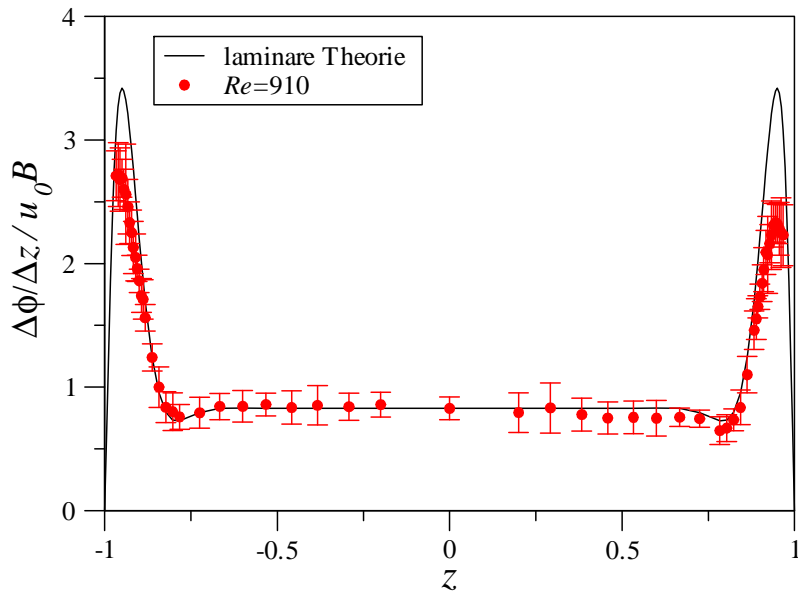


Abbildung 31: Geschwindigkeitsverlauf für  $Ha = 500$

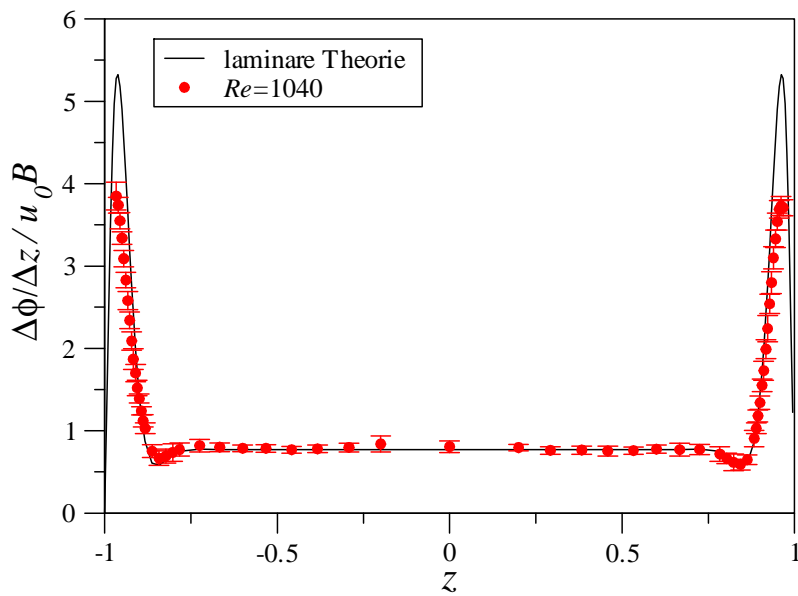


Abbildung 32: Geschwindigkeitsverlauf für  $Ha = 1000$

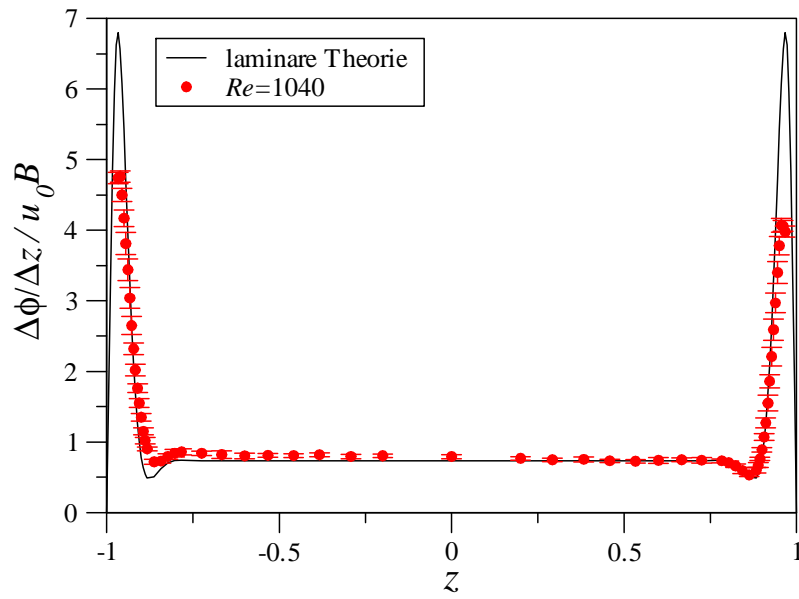


Abbildung 33: Geschwindigkeitsverlauf für  $Ha = 1500$

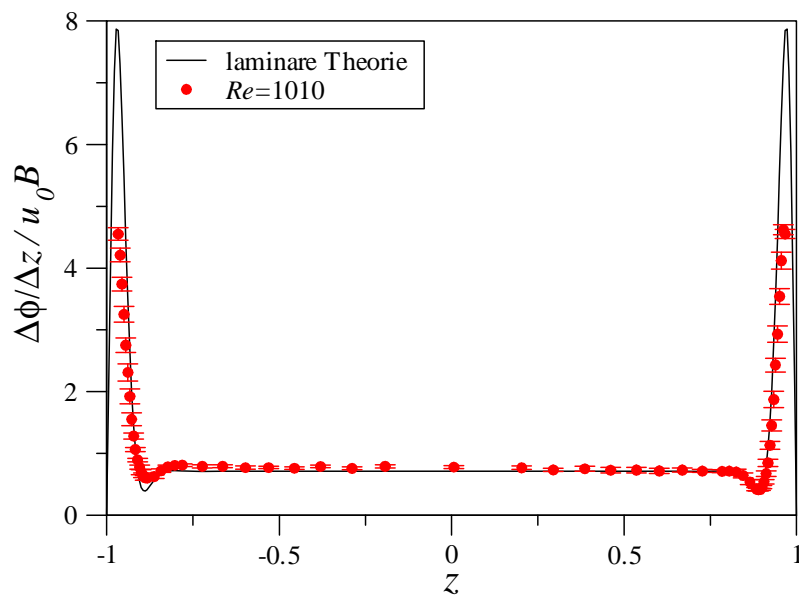


Abbildung 34: Geschwindigkeitsverlauf für  $Ha = 2000$

Die analytische Lösung zeigt lokale Minima im Übergangsbereich der Kernströmung und den Jets, die von den experimentellen Ergebnissen hervorragend wiedergegeben werden.

In Abb. 31, 32, 33 und 34 werden auch Standardabweichungen gezeigt, die entsprechend Glg. (72) ermittelt werden. Hierbei zeigt sich, dass in Abb. 31 die Standardabweichungen deutlich größer sind als in den Abb. 32 bis 34. Mit steigendem Magnetfeld nimmt der Wert des strömungsinduzierten Potentials zu und wird deshalb genauer messbar. Ähnlich zu den Potentialverteilungen auf der Wand, sind die Standardabweichungen in den Bereichen der Jets höher als im Kernbereich.

Im Vergleich der experimentellen Daten mit den analytischen Lösungen zeigen sich sehr gute Übereinstimmungen im Kernbereich. Jedoch gibt es deutliche Differenzen zwischen den maximalen Geschwindigkeiten der Jets, wobei die Differenz mit steigender Hartmann-Zahl anwächst. Zwei mögliche Erklärungen sind:

- Die Seitenschichten sind bereits instabil, sodass die Wirbel bereits den Impulsaustausch von der Seitenschicht in die Kernströmung erhöhen. Die Hinweise darauf sind zum einen die Unterschiede der Jet-Geschwindigkeiten und zum anderen die Erhöhung der Standardabweichung sowohl im Jet-Bereich des Geschwindigkeitsverlaufs als auch auf den Seitenwänden der Potentialverteilungen.
- Wenn sich die Sonde in der Seitenschicht befindet, in der der induzierte elektrische Strom parallel zum Magnetfeld fließt, könnte die Sonde die Strömung und zusätzlich auch die Fließrichtung des elektrischen Stromes verändern. Dies könnte wiederum die Potentialverteilung um die Sonde lokal modifizieren.

Demgegenüber steht, dass die durch die Sonde ausgelöste Störung bei höheren Geschwindigkeiten eine kleinere Rolle spielt, sodass in den Seitenschichten mit den starken Geschwindigkeitsüberhöhungen die Strömung um die Sonde herum weniger stark beeinflusst sein sollte.

#### 4.2.1 Übergang von laminarer zu instabiler Strömung

In Abb. 35 bis 42 werden Potentialverteilungen auf den Wänden sowie Geschwindigkeitsverläufe für verschiedene Hartmann- und Reynolds-Zahlen dargestellt. Während die Potentialverteilungen in Abb. 35 für höhere Reynolds-Zahlen nahezu keine Änderung zeigen, sind in den Abb. 37, 39 und 41 Veränderungen der Potentialverteilungen in den Seitenschichtbereichen für  $Re = 15637$  bzw.  $Re = 20648$  gegenüber kleinen Reynolds-Zahlen zu erkennen.

Im Gegensatz dazu stehen die Geschwindigkeitsverläufe. Aus Abb. 36, 38 und 40 geht eine deutliche Änderung für höhere Reynolds-Zahlen hervor. Zum einen sind die maximalen Geschwindigkeiten in den Jets vermindert. Zum anderen sind die Seitenschichten dicker und die lokalen Minima bei etwa  $z \approx \pm 0.8$  sind nicht mehr vorhanden. Diese zwei Gesichtspunkte sind Hinweise für Wirbel oder Instabilitäten, die zu einer Erhöhung des Impulsaustausches zwischen Seitenschicht und Kernströmung führen.

Mit einer Erhöhung der Seitenschichtdicke  $\delta_S$  vermindert sich der elektrische Widerstand der Seitenschicht, sodass die Stromdichte anwachsen kann. Dadurch verändert sich die Potentialverteilung entlang des Kanals. Die Stromdichte hängt jedoch im Wesentlichen von  $Ha$  und  $Re$  ab, sodass der Einfluss auf die zeitlich gemittelte Potentialverteilung sehr klein ist und instabile Strukturen durch die Potentialverteilung auf der Seitenwand nur schwer zu identifizieren sind.

In Abb. 42 zeigt sich für  $Re = 3060$  ein Unterschied zwischen der negativen und positiven Seite des Kanals. Während auf der negativen Seite die Strömung deutlich instabil ist, zeigen sich auf der positiven Seite keinerlei Veränderungen gegenüber laminaren Strömungen. Für  $Re = 15100$  entspricht der Geschwindigkeitsverlauf wieder eher dem für  $Re = 1010$ , wobei dennoch eine leichte Nicht-Symmetrie zu sehen ist. Auch die lokalen Minima sind für  $Re = 15100$  nicht mehr erkennbar und die maximale Geschwindigkeit ist reduziert, was darauf hindeutet, dass die Strömung ebenfalls instabile Seitenschichten aufweist.

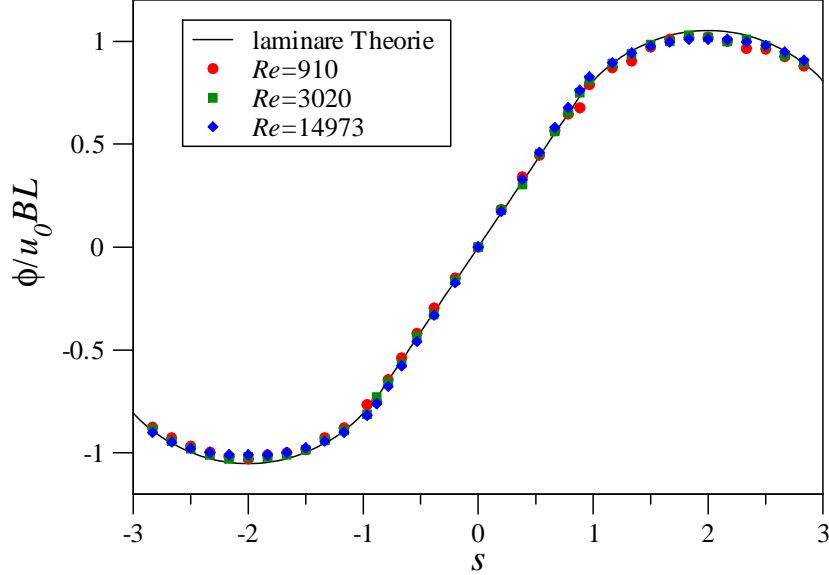


Abbildung 35: Potentialverteilung für  $Ha = 500$

Mithilfe der Potentialverteilung kann der Volumenstrom  $Q$  abgeschätzt werden. Dabei gilt mit dem Ohm'schen Gesetz (s. Glg. (5)) unter Annahme einer vernachlässigbaren Stromdichte  $\mathbf{j}$  (s. hierzu Abschnitt 3.4.1) für die halbe Kanalbreite

$$Q = \int_0^1 \int_{-1}^1 u dy dz = \int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \phi}{\partial z} dy dz = \int_{-1}^1 [\phi]_0^1 dy = \int_{-1}^1 \phi(z = 1) dy. \quad (74)$$

Zur Bestimmung des Volumenstroms in den Seitenschichten  $Q_S$  wird von Glg. (74) der Volumenstrom der Kernströmung

$$Q_c = \int_0^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial \phi_c}{\partial z} dy dz = \int_{-1}^1 \phi_c(z = 1) dy \quad (75)$$

subtrahiert. Da sich im Strömungskern das Potential entlang von  $y$  nicht ändert, kann  $Q_c(z = 1)$  aus den Potentialwerten der Ecken  $\phi_c(z = 1) = \phi_c(z = 1, y = \pm 1)$  bestimmt werden. Daraus folgt der Volumenstrom der Seitenschicht

$$Q_S = \int_{-1}^1 \phi(y, z = 1) - \phi_c(z = 1) dy. \quad (76)$$

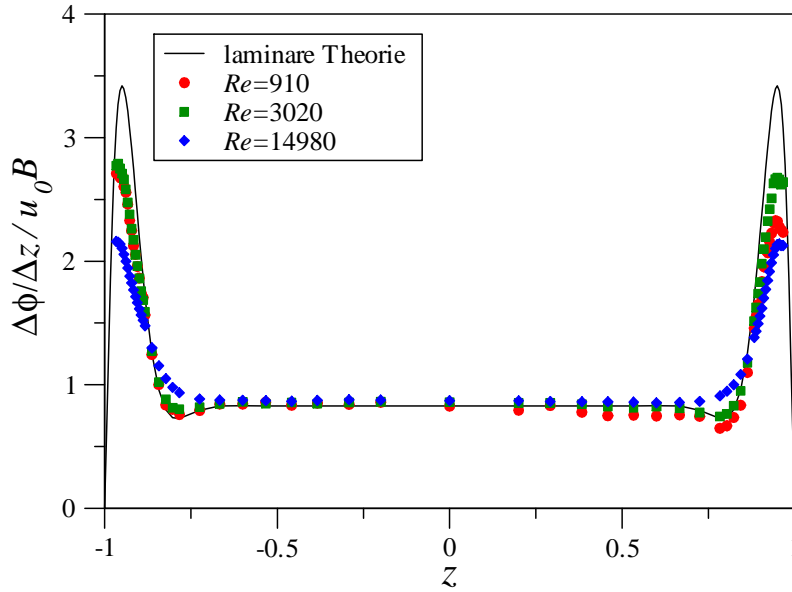


Abbildung 36: Geschwindigkeitsverlauf für  $Ha = 500$

Der Wert von  $\phi_c(z = 1)$  kann im Experiment nicht gemessen werden, weshalb der Wert durch eine lineare Interpolation mit den Werten zwischen  $\phi(s = \pm 0.9667)$  und  $\phi(s = \pm 1.1667)$  approximiert wird. Die Integration erfolgt unter Verwendung der Trapezregel mit

$$\int \phi dy \approx \sum \left( \frac{\phi(s) + \phi(s + \Delta s)}{2} \Delta s \right). \quad (77)$$

In Abb. 43 wird das Verhältnis der Volumenströme in den Seitenschichten  $Q_S$  auf der negativen und positiven Seite zum Gesamtvolumenstrom  $Q$  für verschiedene  $Ha$  und  $Re$  dargestellt. Im Vergleich dazu werden analytische Ergebnisse einer laminaren Strömung gezeigt (horizontale Linien). Dabei zeigt sich, dass mit steigender Hartmann-Zahl  $Q_S$  anwächst, da die maximalen Jet-Geschwindigkeiten mit steigender Hartmann-Zahl ebenfalls anwachsen. Weiterhin ist zu erkennen, dass wie bei den Geschwindigkeitsprofilen der Volumenstrom in den Seitenschichten mit zunehmender Reynolds-Zahl abnimmt. Ferner wird deutlich, dass die Ergebnisse auf der positiven Seite nahezu immer kleiner sind, als auf der negativen Seite, was auch aus den Geschwindigkeitsprofilen hervorgeht.

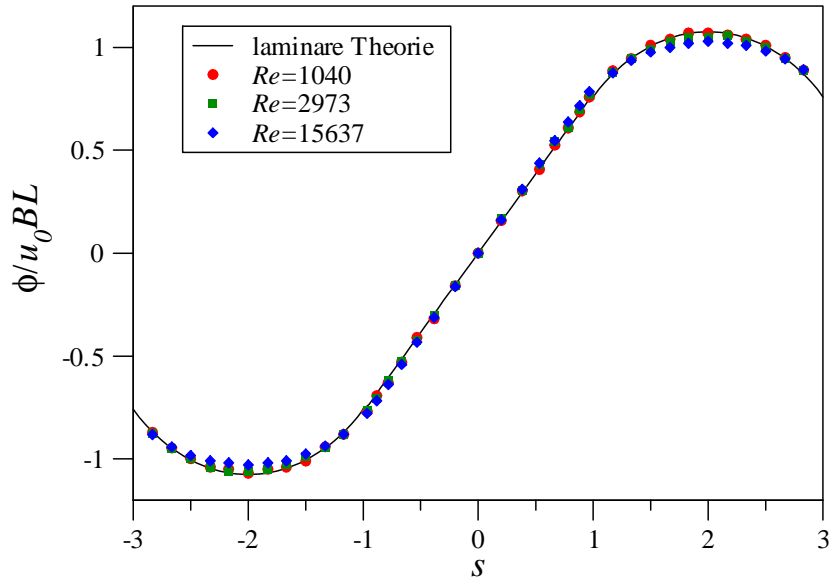


Abbildung 37: Potentialverteilung für  $Ha = 1000$

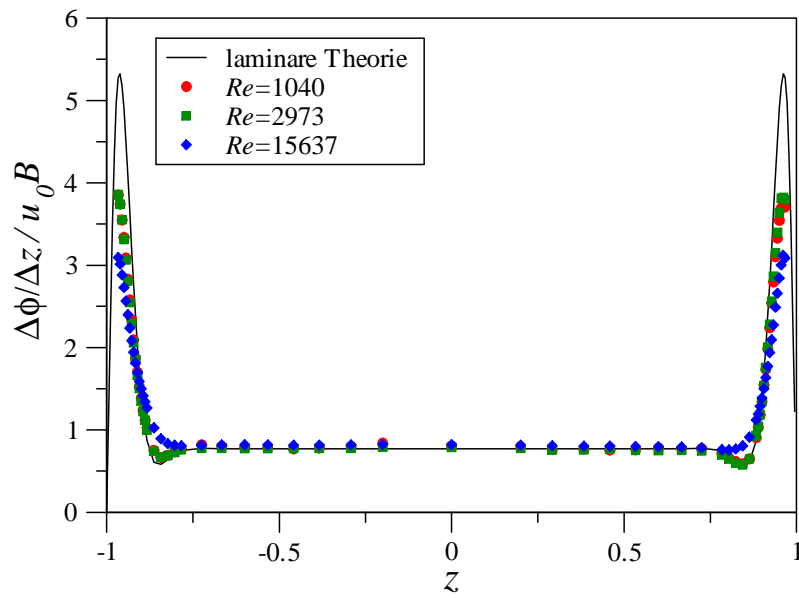


Abbildung 38: Geschwindigkeitsverlauf für  $Ha = 1000$



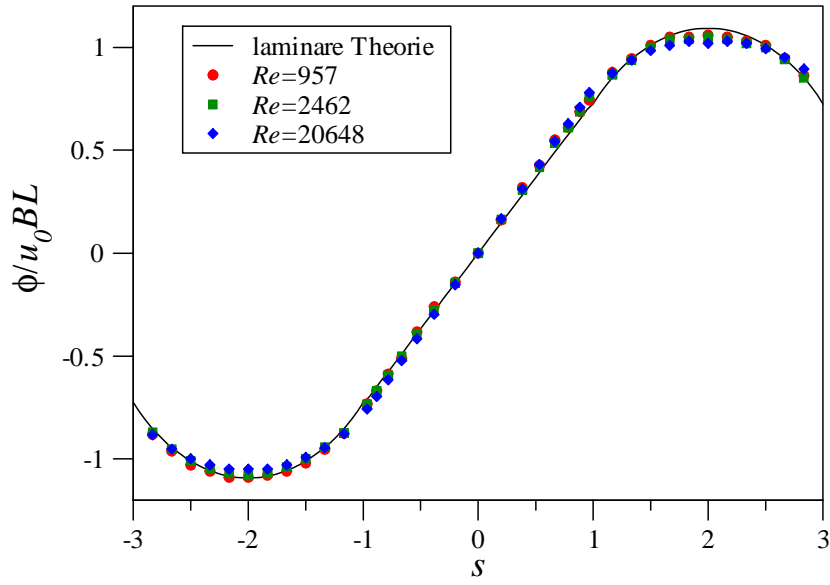


Abbildung 39: Potentialverteilung für  $Ha = 1500$

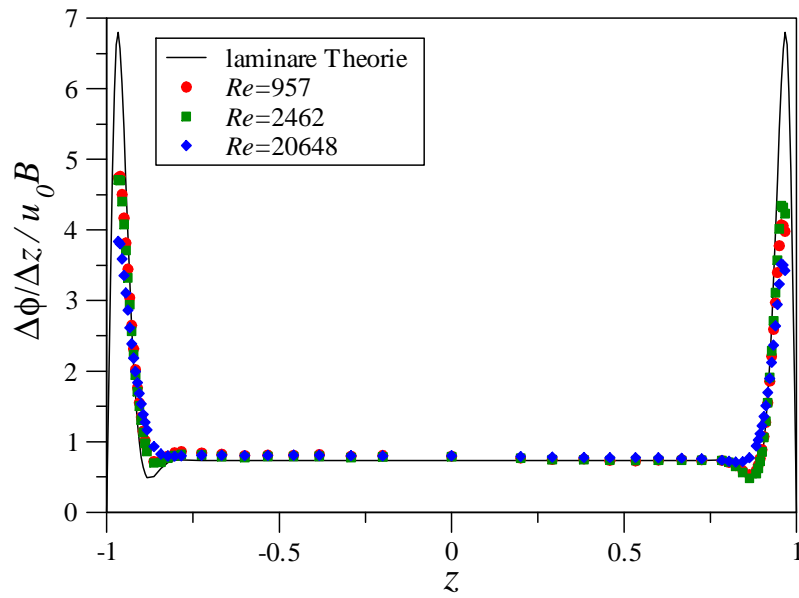


Abbildung 40: Geschwindigkeitsverlauf für  $Ha = 1500$

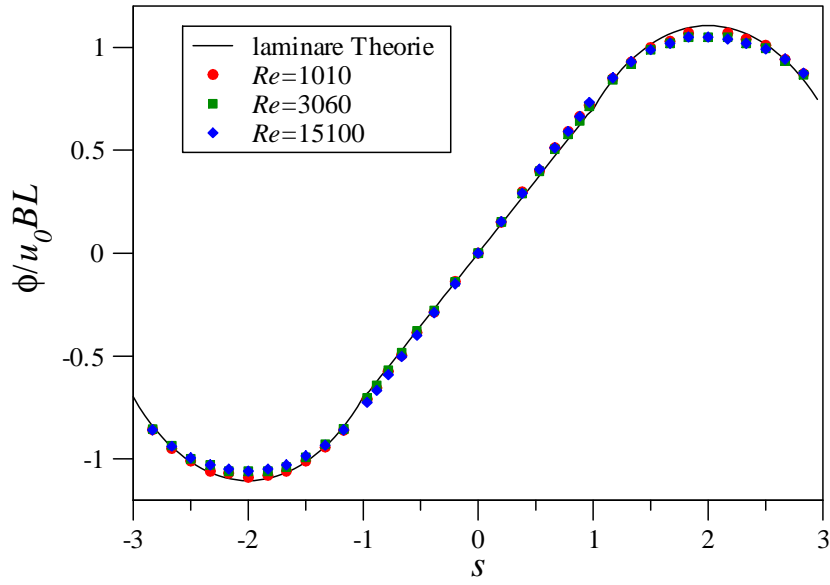


Abbildung 41: Potentialverteilung für  $Ha = 2000$

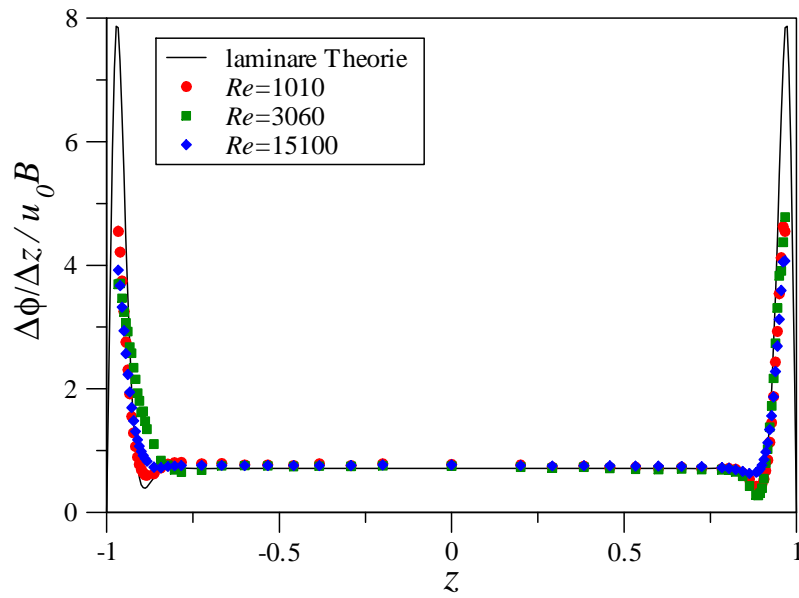


Abbildung 42: Geschwindigkeitsverlauf für  $Ha = 2000$

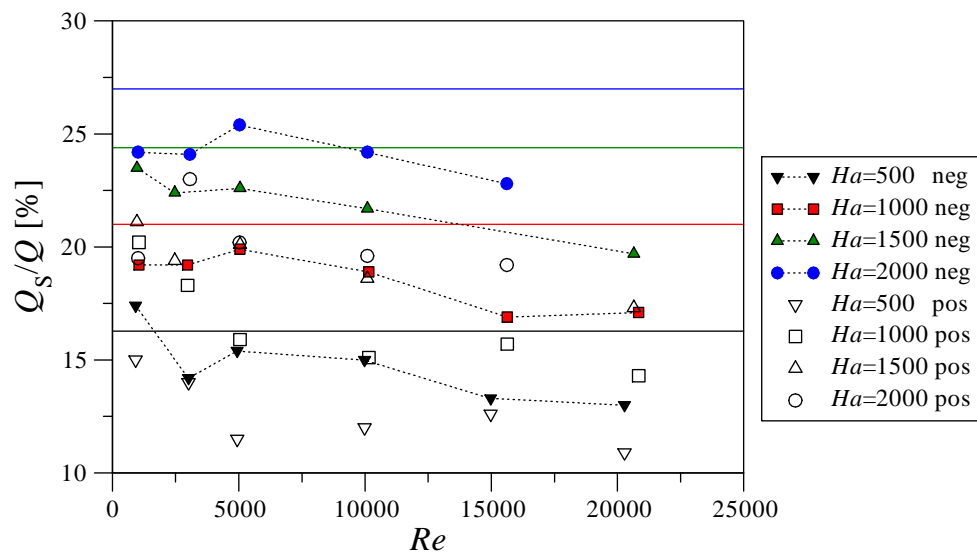


Abbildung 43: Relativer Volumenstrom in der negativen (neg) und positiven (pos) Seitenschichten  $Q_S$

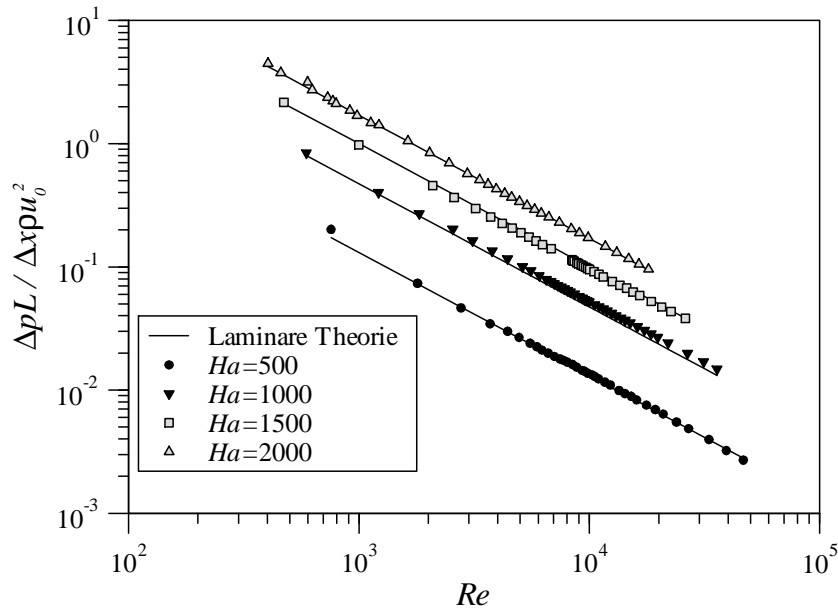


Abbildung 44: Dimensionsloser Druckgradient für verschiedene  $Ha$  und  $Re$  des Experiments (Symbole) im Vergleich mit dazugehörigen analytischen Ergebnissen (Linien) für laminare Strömungen

In Abb. 44 sind dimensionslose Druckgradienten für verschiedene  $Ha$  und  $Re$  im Vergleich mit analytischen Lösungen für laminare Strömungen dargestellt. Dabei nehmen die dimensionslosen Druckgradienten  $\frac{\Delta p}{\Delta x} / \rho u_0^2$  mit steigender Reynolds-Zahl ab und mit steigender Hartmann-Zahl zu. Theoretische Vorhersagen für laminare Strömungen stimmen mit experimentellen Daten sehr gut überein, selbst wenn die Strömung nachweislich instabil oder turbulent ist. Im Gegensatz zu hydrodynamischen Fragestellungen, finden sich im Verlauf der Druckgradienten in Abhängigkeit der Reynolds-Zahl keine Anzeichen auf instabile bzw. turbulente Strömungen, da die Druckgradienten durch Lorentz-Kräfte im Kern der Strömung bestimmt werden. Das bedeutet, dass instabile Strukturen keinen zusätzlichen Beitrag zum induzierten elektrischen Strom im Kanal-Querschnitt leisten. Dadurch wird die Verteilung der Lorentz-Kräfte im Kern der Strömung kaum durch eine instabile Strömung beeinflusst, weshalb sich auch die mittlere Kerngeschwindigkeit kaum ändert. Die hier gefundenen Ergebnisse für eine Hunt-Strömung verhalten sich ähnlich wie Ergebnisse aus der Literatur für Strömungen mit vier elektrisch leitenden Wänden Burr (1998).

### 4.3 Instationäre Messungen

Es folgt die Betrachtung der zeitabhängigen Daten, die Aufschluss über Stabilitätsgrenzen, charakteristische Frequenzen oder Frequenzbereiche und räumliche Ausbreitung der Strömungsstrukturen bieten. Dabei werden an verschiedenen Positionen im Kanal mit der verfahrenbaren Sonde und an Messstellen entlang des Kanals Signale mit einer Abtastfrequenz von 1 kHz aufgenommen. Die Abtastung erfolgt über eine Dauer  $\Delta t = 60$  s. Diese Zeit ist lange genug für eine zuverlässige statistische Auswertung.

#### 4.3.1 Bestimmung von Stabilitätsgrenzen

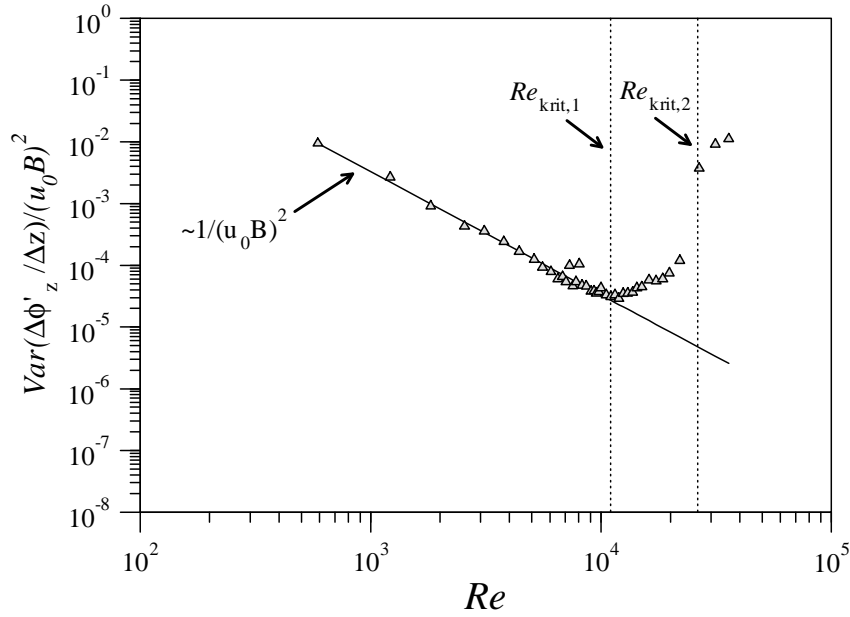


Abbildung 45: Entdimensionierte Varianz des Potentialgradienten  $\Delta\phi'_z$  der Sonde ( $z = 0.967$ ) für  $Ha = 1000$  und verschiedenen Reynoldszahlen. Es finden sich zwei kritischen Reynoldszahlen  $Re_{krit,1} = 11020$  und  $Re_{krit,2} = 26860$ .

Für die gemessene Potentialdifferenz  $\Delta\phi$  gilt (s. Abschnitt 3.4)

$$\Delta\phi(t) = \overline{\Delta\phi} + \Delta\phi^{*'}(t) + R \quad (78)$$

mit dem zeitlich gemittelten Anteil  $\overline{\Delta\phi}$ , dem fluktuierenden Anteil  $\Delta\phi^{*'}(t)$ , der Aufschluss über instabile Strömungen gibt, und dem Rauschen  $R$ . Für die Untersuchung der instabilen Strömung wird idealerweise lediglich der Anteil  $\Delta\phi^{*'}(t)$  betrachtet. In der Realität muss jedoch noch das unvermeidliche Rauschen  $R$  mitbetrachtet werden.

Für die Analyse wird beispielsweise in Abb. 45 die Varianz von  $\Delta\phi' = \Delta\phi^{*'} + R$  mit  $1/(u_0 B \Delta z)^2$  skaliert. Da  $R$  statistisch gleichverteilt ist und somit  $Var(R) = const.$  ist, fallen die entdimensionierten Werte aufgrund der gewählten Skalierung zunächst gemäß  $1/Re^2$  ab, solange  $|\Delta\phi^{*'}| < |R|$  gilt. Die in diesem Bereich dargestellten Ergebnisse haben keine physikalische Bedeutung, da eventuelle Messwerte im Rauschen untergehen.

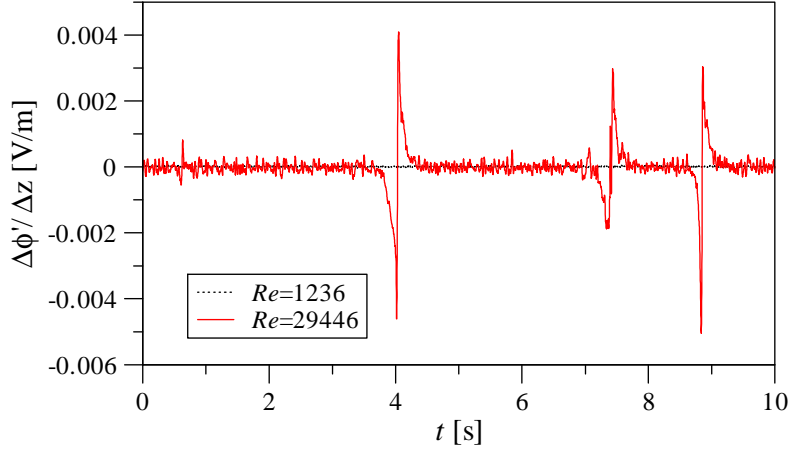


Abbildung 46: Sondensignal  $\Delta\phi'_z$  bei  $Ha = 1000$ ,  $z = 0.967$

Erst wenn  $|\Delta\phi^{*'}| > |R|$  ist, gibt es signifikante Abweichungen von dem Abfall der Varianz gemäß  $Re^{-2}$ . Die Reynolds-Zahl, ab der diese Abweichungen deutlich werden, wird als kritische Reynolds-Zahl  $Re_{krit,1}$  bezeichnet.

In Abb. 45 nimmt die Varianz von  $\Delta\phi'$  zunächst proportional zu  $Re^{-2}$  ab bis  $Re_{krit,1} = 11020$ . Für  $Re > Re_{krit,1}$  nimmt die Varianz von  $\Delta\phi'$  zu.

Ab  $Re = 26680$  wächst die Varianz sogar noch deutlich stärker, da sich dann großräumige instabile Strukturen ausbilden. Dadurch kann eine zweite kritische Reynolds-Zahl  $Re_{krit,2}$  bestimmt werden. Die Ermittlung von  $Re_{krit,2}$  ist jedoch nicht eindeutig anhand der Analyse der Varianzen durchzuführen. Zum einen zeigen sich für kleinere Hartmann-Zahlen lediglich geringe Änderungen in den Varianzen, sodass der Unterschied weniger ersichtlich ist. Darum werden die Zeitsignale für die in Frage kommenden Reynolds-Zahl-Bereiche betrachtet, nach mindestens zwei kurzzeitigen deutlichen Änderungen der Signalamplitude gesucht, wie sie beispielsweise in Abb. 46 dargestellt ist, und die zugehörige Reynolds-Zahl als  $Re_{krit,2}$  bestimmt.

In diesem Zusammenhang wurde eine weitere Untersuchung der Stabilitätsgrenzen durchgeführt, deren Ergebnis in Abb. 47 dargestellt ist. Hierbei wurde in einer Messung die Reynolds-Zahl zunächst schrittweise bis zu einer maximalen Reynolds-Zahl variiert und direkt im Anschluss wieder schrittweise zurückgefahren. Hierbei zeigen sich kritische Reynolds-Zahlen, die nur unwesentlich voneinander und auch von den bisherigen Ergebnissen lediglich in geringem Maße abweichen. Das unterstreicht die Gültigkeit der hier bestimmten kritischen Reynolds-Zahlen.

In Abb. 48 werden die Varianzen von entdimensionierten Potentialgradienten für verschiedene  $Ha$  und  $Re$  dargestellt, mit denen kritische Reynolds-Zahlen bestimmt werden. Es werden Signale der Sonde in Wandnähe betrachtet, die den Geschwindigkeitsfluktuationen  $u' \approx -\frac{\Delta\phi'_z}{\Delta z B}$  in  $x$ -Richtung ( $\Delta\phi'_z/\Delta z$ ),  $w' \approx \frac{\Delta\phi'_x}{\Delta x B}$  in  $z$ -Richtung ( $\Delta\phi'_x/\Delta x$ ), sowie der Fluktuation der Stromdichte  $j'_y = -\frac{\Delta\phi'_y}{\Delta y}$  in  $y$ -Richtung ( $\Delta\phi'_y/\Delta y$ ) entsprechen. Im Idealfall ist der Verlauf der induzierten elektrischen Stromdichte  $\mathbf{j}$  im Kanalquerschnitt entlang von  $y$  symmetrisch, sodass das Signal  $\Delta\phi'_y$  an der Sondenposition nur aus Rauschen besteht. Sofern die Varianz von  $\Delta\phi'_y/\Delta y$  nun ebenfalls ab einer gewissen Reynolds-Zahl anwächst, ist das ein Hinweis darauf, dass die Verteilung von  $\mathbf{j}$  nicht mehr Spiegelsymmetrisch zu  $y = 0$  ist. Weiterhin wird ein Signal an der

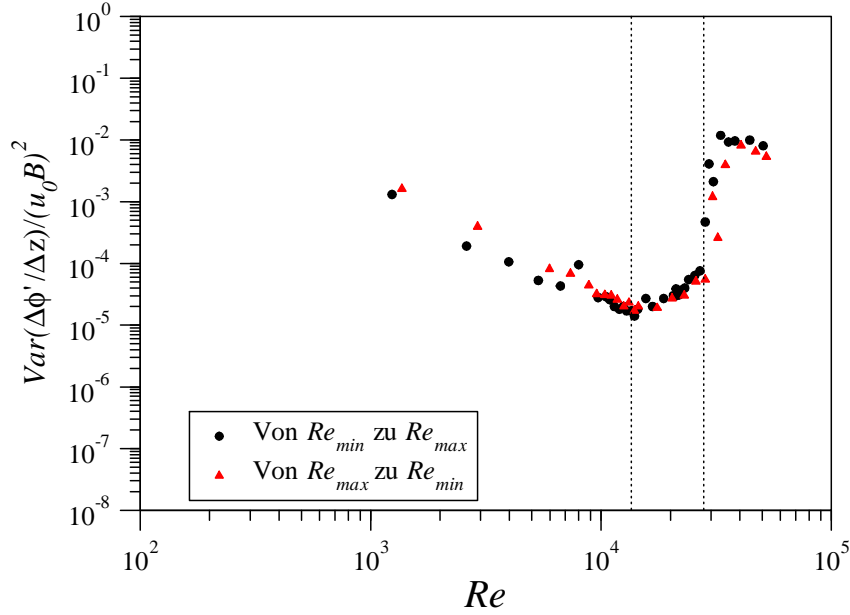


Abbildung 47: Entdimensionierte Varianz des Potentialgradienten des Sondensignals  $\Delta\phi'_z$  ( $z = 0.9667$ ,  $Ha = 1000$ ) zur Untersuchung der Stabilitätsgrenzen in zwei Fällen: a) beginnend bei der niedrigsten zur höchsten Reynoldszahl ( $Re_{krit,1} = 12009$ ,  $Re_{krit,2} = 28306$ ) und b) beginnend bei der höchsten zurück zur niedrigsten Reynoldszahl ( $Re_{krit,1} = 12551$ ,  $Re_{krit,2} = 30503$ )

Seitenwand  $\Delta\phi'_{y,W}$  zwischen den Messstellen  $p13$  und  $p18$  in  $y$ -Richtung betrachtet. Die vier Signale haben für fast alle dargestellten Hartmann-Zahlen ähnliche Verläufe, sodass festgestellt werden kann, dass die kritischen Reynolds-Zahlen für verschiedene Signale etwa übereinstimmen. Die kritischen Reynolds-Zahlen für die Varianz von  $\Delta\phi'_z/\Delta z$  sind mit gestrichelten, senkrechten Linien markiert.

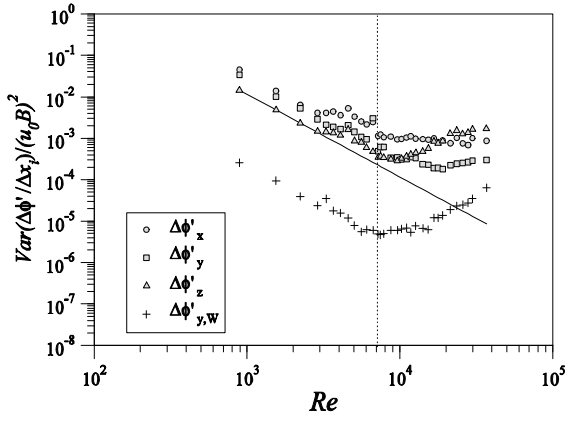
Für  $Ha = 200$  in Abb. 48 a) zeigt sich bereits für  $Re = 2894$  eine Veränderung der Varianzen. Jedoch ist ein stärkeres Anwachsen von  $var(\Delta\phi'_z)$  erst für  $Re > 7203$  zu sehen, sodass dieser Wert hier als  $Re_{krit,1}$  definiert wird. Auch für sehr hohe Reynolds-Zahlen können keine signifikanten Änderungen in den Signalamplituden von  $\Delta\phi'_z$  festgestellt werden, sodass ein Wert für  $Re_{krit,2}$  nicht bestimmt werden kann.

Veränderungen in den Varianzen zeigen sich für  $Ha = 500$  in Abb. 48 b) von  $\Delta\phi'_x/\Delta x$  und  $\Delta\phi'_y/\Delta y$  für  $Re \approx 4000$ , sowie für  $Ha = 1000$  in Abb. 48 d) in den Varianzen von  $\Delta\phi'_x/\Delta x$  und  $\Delta\phi'_y/\Delta y$  für bereits für  $Re \approx 6000$ . Jedoch ist auch hier ein stärkeres Anwachsen von  $var(\Delta\phi'_z)$  erst für  $Re > 10000$  erkennbar.

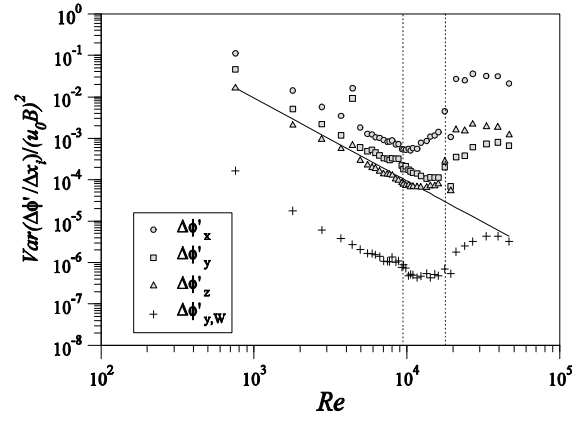
In den Abb. 48 b) für  $Ha = 500$ , c) für  $Ha = 700$  und d) für  $Ha = 1000$  sind für höhere Reynolds-Zahlen starke Veränderungen der Varianzen mit Sprüngen von ein bis zwei Größenordnungen erkennbar, sodass hier  $Re_{krit,2}$  eindeutig bestimmt werden kann.

Abb. 48 f) zeigt für  $Ha = 2000$  eine deutliche Veränderungen der Varianzen für eine relativ niedrige Reynolds-Zahl von  $Re \approx 1000$ . Die Varianz nimmt für  $Re \approx 12000$  wieder einen Wert an, der unter dem Rauschniveau liegt und auf eine stabile Strömung hindeutet.

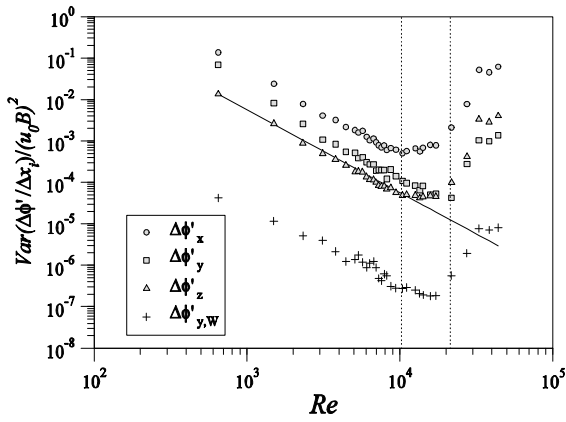
In Abb. 49 werden die Stabilitätsgrenzen für  $u' \approx -\Delta\phi'_z/\Delta z$  dargestellt (s. hierzu auch Chowdhury, Bühler, Mistrangelo und Brinkmann (2015)). Die Strömung kann hierbei in vier Bereiche



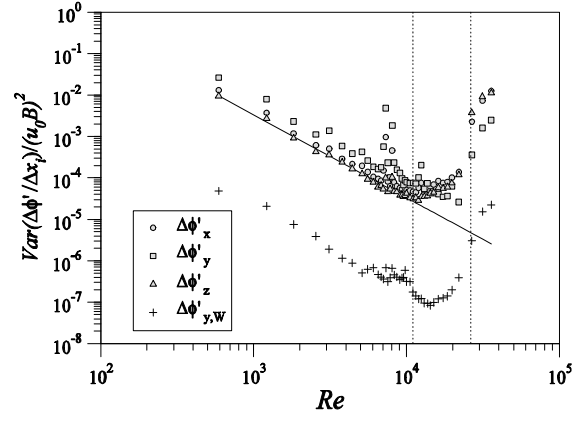
a)  $Ha=200$



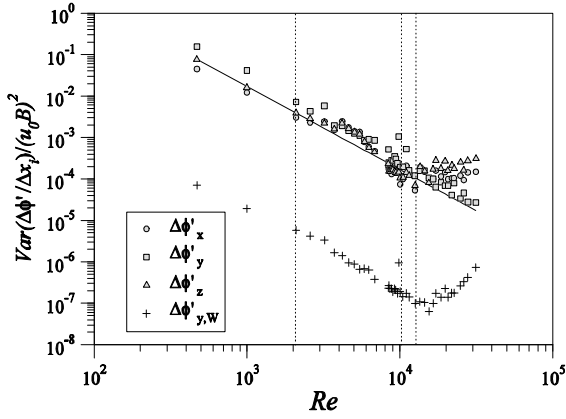
b)  $Ha=500$



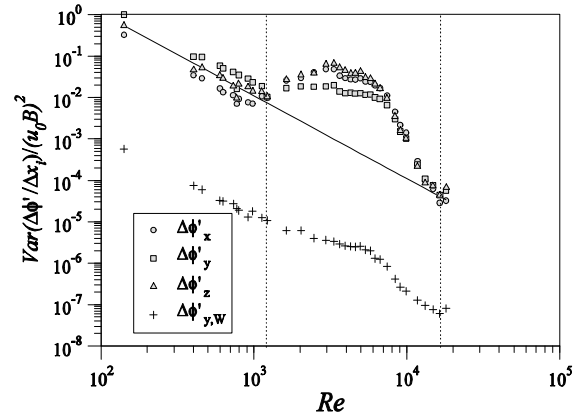
c)  $Ha=700$



d)  $Ha=1000$



e)  $Ha=1500$



f)  $Ha=2000$

Abbildung 48: Entdimensionierte Varianz der Potentialgradienten der Sonde ( $z = 0.967$ )  $\Delta\phi'_z/\Delta x_1$ ,  $\Delta\phi'_x/\Delta x_2$ ,  $\Delta\phi'_y/\Delta x_3$  und des Potentialgradienten an der Seitenwand (p13-p18)  $\Delta\phi'_{y,W}/\Delta x_4$  ( $\Delta x_1 = \Delta x = 0.0016$ ,  $\Delta x_2 = \Delta y = 0.0008$ ,  $\Delta x_3 = \Delta z = 0.0016$ ,  $\Delta x_4 = y_{18} - y_{13} = 0.025$ ) für verschiedene  $Ha$



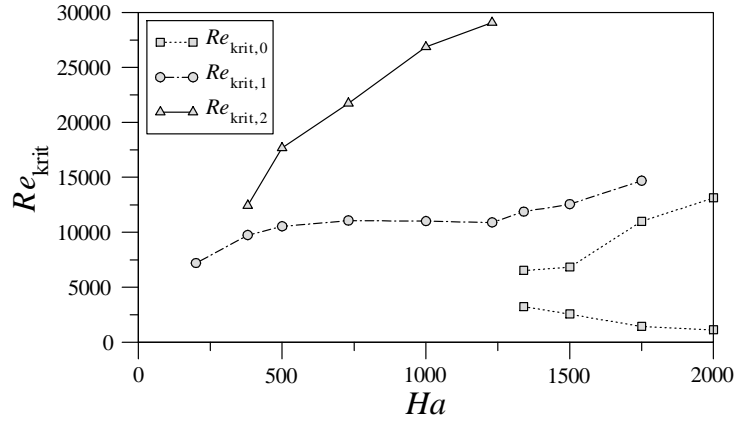


Abbildung 49: Stabilitätsgrenzen für Sondensignal  $\Delta\phi'/\Delta z$  ( $z = 0.967$ )

eingeteilt werden. In Abhängigkeit von  $Re$  und  $Ha$  zeigen sich eine anscheinend laminare, stationäre Strömung oder drei instabile Regime:

- Regime I: für  $Re > Re_{krit,1}$  gilt  $\Delta\phi'_z > R$  und die Werte der Varianzen von  $\Delta\phi'_z/\Delta z$  wachsen an;
- Regime II: für  $Re > Re_{krit,2}$  gibt es deutliche Anstiege der Varianzen von  $\Delta\phi'_z/\Delta z$  mit Veränderungen um ein bis zwei Größenordnungen; in diesem Bereich kommt es auch zu Änderung der Varianz von  $\Delta\phi'_y$ ;
- Regime 0: für  $Re_{krit,0,unten} < Re < Re_{krit,0,oben}$  kommt es in relativ niedrigen Bereichen von  $Re$  zu erhöhten Varianzen, die sich mit zunehmender Reynolds-Zahl wieder verringern.

Für  $500 \leq Ha \leq 1340$  findet sich ein nahezu konstanter Wert von  $Re_{krit,1}$ , während für  $Ha > 1340$  ein leichter Anstieg erkennbar ist.  $Re_{krit,2}$  steigt stark mit  $Ha$  an. Für  $Ha > 1340$  kann kein Wert für  $Re_{krit,2}$  bestimmt werden, da für diese Messreihe mit den elektromagnetischen Pumpen nicht genügend hohe Reynolds-Zahlen erreicht werden konnten. In Abb. 49 sind  $Re_{krit,0,unten}$  und  $Re_{krit,0,oben}$  des Regimes 0 für die jeweilige Hartmann-Zahl dargestellt. Deutlich wird hierbei, dass sich der Bereich mit zunehmenden Werten von  $Ha$  ausweitet.

Ähnliche Zusammenhänge werden in Bühler und Horanyi (2009) dargestellt. Darin werden in Kanalströmungen mit vier leitfähigen Wänden instabile Strömungen experimentell untersucht. Ein Ergebnis dieser Untersuchungen ist ein Stabilitätsdiagramm. Hierin zeigen sich zwei instabile Regime, die ebenfalls anhand der starken Unterschiede der Signalamplituden differenziert werden. Dabei zeigt sich für die erste kritische Reynolds-Zahl ein nahezu konstantes Verhalten in Abhängigkeit von  $Ha$ , während die zweite kritische Reynolds-Zahl stark mit  $Ha$  anwächst. Ein weiteres instabiles Regime entsprechend Regime 0 wird in Bühler und Horanyi (2009) nicht gefunden.

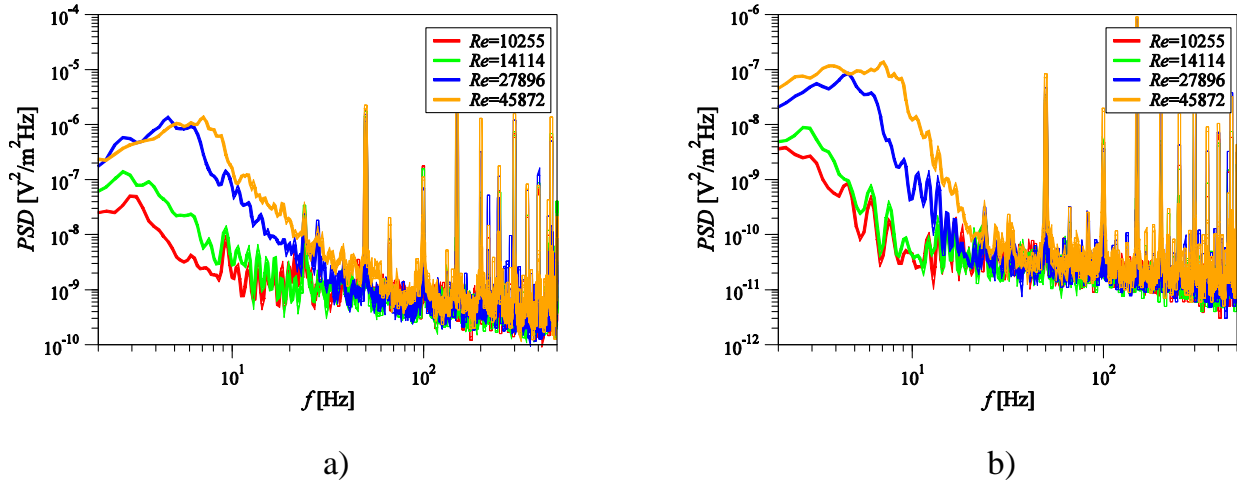


Abbildung 50: Spektrale Leistungsdichten von  $\Delta\phi'_z/\Delta z$  der Sonde ( $z = 0.967$ ) in a) und  $\Delta\phi'_{p13-p18}/(y_{13} - y_{18})$  an der Seitenwand in b) für  $Ha = 200$

### 4.3.2 Charakterisierung der instabilen Regime

Entsprechend Abschnitt 4.3.1 können drei instabile Regime im Experiment identifiziert werden. Diese werden im folgenden Abschnitt hinsichtlich zweier Merkmale analysiert. Als erstes Merkmal werden die Signale der verschiedenen Regime auf charakteristische Frequenzbereiche untersucht. Dazu werden die spektralen Leistungsdichten (PSD<sup>4</sup>) ermittelt.

Das zweite Merkmal bezieht sich auf die räumliche Ausdehnung von instabilen Strukturen. Dabei wird einerseits die Ausdehnung in Magnetfeldrichtung betrachtet, da es unter Verwendung eines Magnetfeldes zu einer quasi-zweidimensionalen (Q2D) Strömung kommen kann, wie sie in Abschnitt 2.2.3 beschrieben wird. Andererseits wird die Ausdehnung betrachtet, die normal zu den Seitenwänden ausgerichtet ist und Aufschluss über Transporteigenschaften von Seitenschichtbereichen in die Kernströmung liefert.

**Untersuchung der spektralen Leistungsdichte von Sonden- und Hartmann-Wand-Signalen** Im Folgenden werden Analysen der PSD für verschiedene  $Ha$  und  $Re$  des Sonden-signals  $\Delta\phi'_z$  in Wandnähe ( $z = 0.967$ ) und des Wandsignals in  $y$ -Richtung dargestellt. Hierfür werden  $2 \cdot 10^4$  Werte in acht Teilen mit einer Überlappung von 75% mit einem Hanning-Fenster in MATLAB analysiert. Es werden ungefilterte Daten des Sonden-signals  $\Delta\phi'_z$  und des Wandsignals  $\Delta\phi'_{p13-p18}$  in Magnetfeldrichtung verwendet, sodass auch Störsignale mit einer charakteristischen Frequenz von 50 Hz und dessen Vielfache zu sehen sind.

In Abb. 50 zeigt sich für  $Ha = 200$ , dass die Signalstärke von Frequenzanteilen für  $f < 10$  Hz mit steigender Reynolds-Zahl anwächst, da die Strömung zunehmend instabile Strukturen ausbildet.

In Abb. 51 ist für  $Ha = 1000$  ein charakteristischer Frequenzbereich von etwa 10 Hz bis etwa 35 Hz für  $Re = 14502, 17309, 21982$  erkennbar, wobei hier die Ergebnisse der PSD mit steigender Reynolds-Zahl anwachsen. Ferner zeigen sich charakteristische Frequenzen bei  $f = 3$  Hz

<sup>4</sup> engl. Power Spectral Density

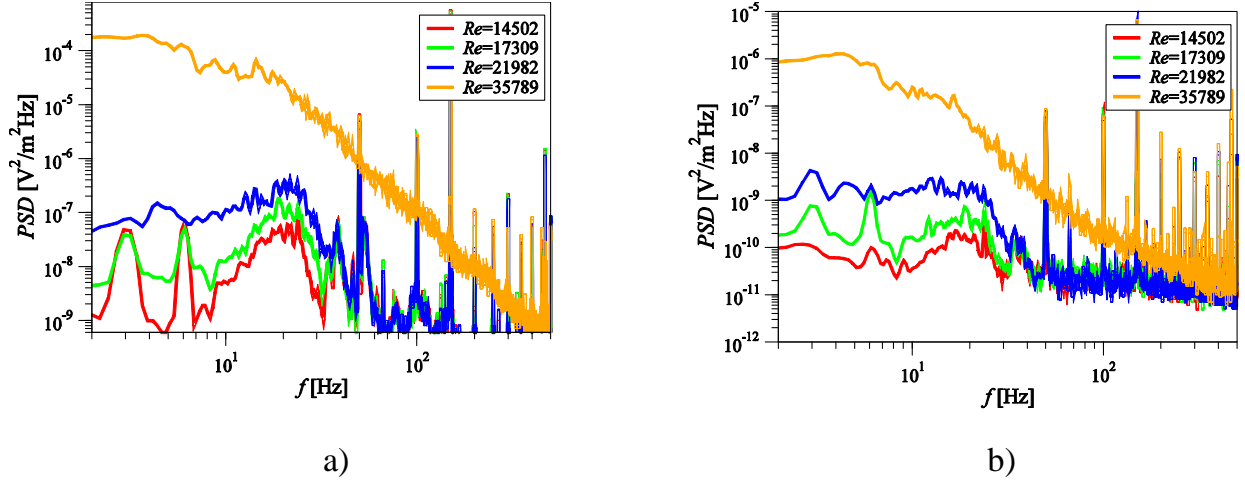


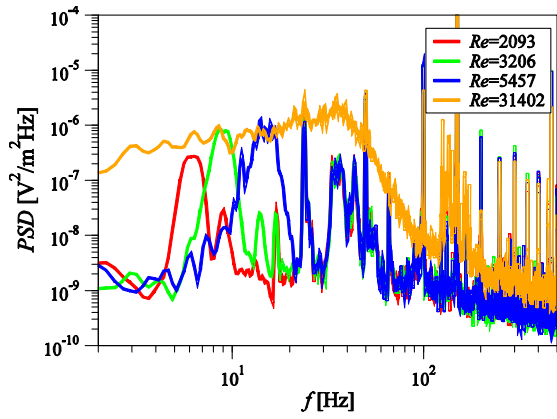
Abbildung 51: Spektrale Leistungsdichten von  $\Delta\phi'_z/\Delta z$  der Sonde ( $z = 0.967$ ) in a) und  $\Delta\phi'_{p13-p18}/(y_{13} - y_{18})$  an der Seitenwand in b) für  $Ha = 1000$

und 6 Hz für  $Re = 14502, 17309$ , die jedoch für  $Re = 21982$  durch ein gesamtes Frequenzband für  $f < 35$  Hz überdeckt werden. Die charakteristischen Frequenzbereiche werden sowohl in den Ergebnissen der Sonde als auch der Wand deutlich. Ferner zeigt sich für  $Re = 35789$ , dass der Hauptanteil der Gesamtsignalstärke in einem niedrigen Frequenzbereich bis etwa 30 Hz liegt und darüber hinaus ein Abfall proportional zu  $f^{-3}$  erkennbar ist. Dies ist in Übereinstimmung mit Ergebnissen in einer Arbeit von Alemany, Moreau, Sulem und Frisch (1979), in der der Einfluss eines externen Magnetfeldes auf turbulente Strömungen experimentell untersucht wird. Darin zeigt sich unter anderem, dass für turbulente Strömungen ohne den Einfluss eines externen Magnetfeldes ein Abfall der Energiespektren proportional zu  $f^{-5/3}$  zu beobachten ist, während für Interaktionsparameter  $N > 3$  ein Abfall proportional zu  $f^{-3}$  erkennbar ist.

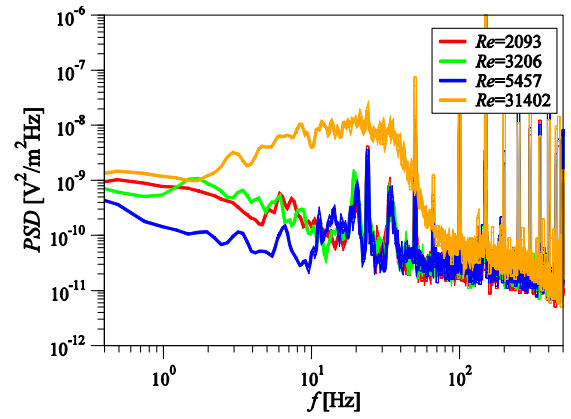
Für  $Ha = 1500$  in Abb. 52 fallen die Energiespektren für  $Re = 31402$  sogar gemäß  $f^{-6}$  ab, wobei dieser Abfall auch schon für  $Ha = 200$  in Abb. 50 b) an der Wand erkennbar ist. Diese Abweichungen des Abfalls von  $f^{-3}$  werden bereits in Eckert (1998) dargestellt, wobei hierin der Abfall der Energiespektren mit zunehmenden Interaktionsparameter  $N$  kontinuierlich steiler wird und für  $N \approx 120$  ein Grenzwert erreicht ist, der mit etwa  $f^{-4}$  angegeben ist.

Weiterhin zeigen sich für  $Ha = 1500$  in Abb. 52 bereits bei  $Re = 2093, Re = 3206$  und  $Re = 5457$  ausgeprägte Frequenzbereiche, die sich mit steigender Reynolds-Zahl zu höheren Frequenzen verschieben. Diese Verschiebung tritt bereits bei niedrigen Reynolds-Zahlen auf.

Auf der Wand in Abb. 52 b) für  $Ha = 1500$  sind diese Frequenzverschiebungen andeutungsweise erkennbar, während sie für  $Ha = 2000$  in Abb. 53 b) deutlich zu sehen sind. Für  $Re = 18022$  zeigt sich dann wieder ein ausgeprägter Frequenzbereich von etwa  $f \approx 30$  Hz bis  $f \approx 50$  Hz.

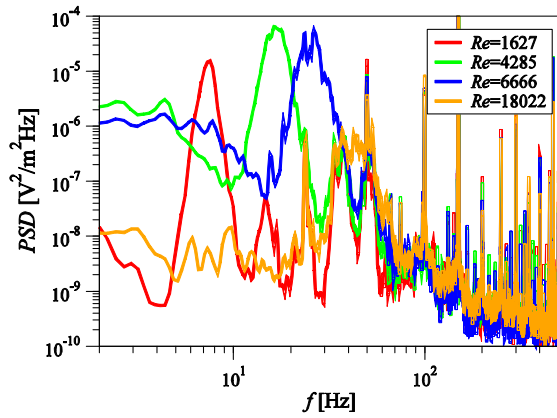


a)

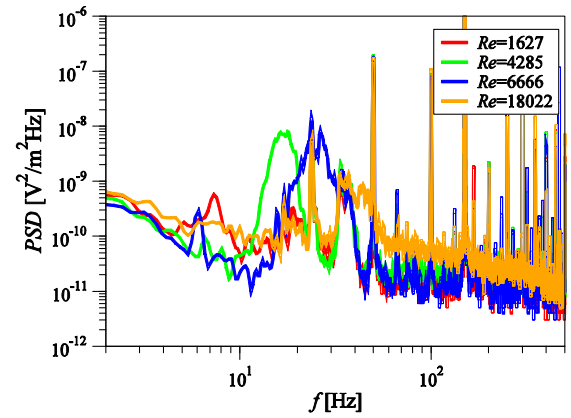


b)

Abbildung 52: Spektrale Leistungsdichten von  $\Delta\phi'_z/\Delta z$  der Sonde ( $z = 0.967$ ) in a) und  $\Delta\phi'_{p13-p18}/(y_{13} - y_{18})$  an der Seitenwand in b) für  $Ha = 1500$



a)



b)

Abbildung 53: Spektrale Leistungsdichten von  $\Delta\phi'_z/\Delta z$  der Sonde ( $z = 0.967$ ) in a) und  $\Delta\phi'_{p13-p18}/(y_{13} - y_{18})$  an der Seitenwand in b) für  $Ha = 2000$

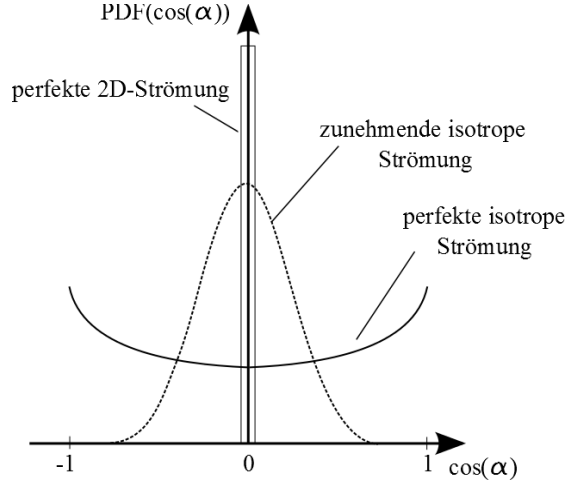


Abbildung 54: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen für verschiedene Strömungsformen

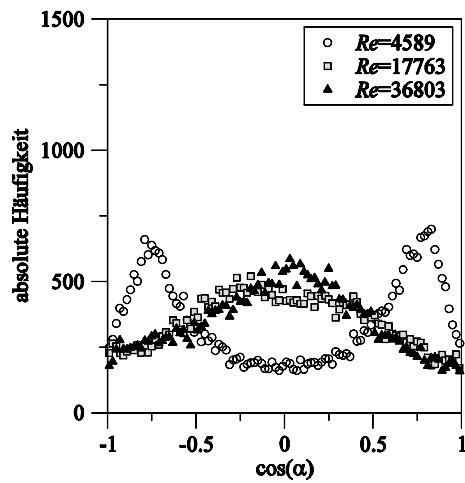
**Untersuchung von Sondensignalen zur Bestimmung der Anisotropie entlang magnetischer Feldlinien** Mithilfe der Potentialsignale der Sonde  $\Delta\phi'_x$ ,  $\Delta\phi'_y$  und  $\Delta\phi'_z$  kann, wie in Burr (1998) bereits durchgeführt, die Anisotropie der Strömung bewertet werden. Dazu wird  $\cos(\alpha)$  mit dem Winkel  $\alpha = \angle(\mathbf{B}, \nabla\phi')$  zwischen der Richtung des Magnetfeldes und den Fluktuationen des Potentialgradienten ermittelt. Unter Verwendung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF, siehe Anhang B) lässt sich ein Kriterium für eine anisotrope Strömung ableiten.

Die zu erwartenden PDF sind in Abb. 54 dargestellt. In einer perfekt zweidimensional ausgerichteten Strömung sind die Fluktuationen senkrecht zum Magnetfeld orientiert. Bei  $\mathbf{B} = (0, -B_0, 0)$  gilt also  $\partial\phi'/\partial x \neq 0$ ,  $\partial\phi'/\partial y = 0$  und  $\partial\phi'/\partial z \neq 0$  und die PDF entspricht einer Delta-Distribution. Sofern dieser zweidimensionale Zustand der Strömung abnimmt, gibt es zunehmend Anteile, für die  $\partial\phi'/\partial y \neq 0$  gilt und die PDF ähnelt einer Normalverteilung. Für eine isotrope Strömung, bei der die Potentialschwankungen  $\partial\phi'/\partial x$ ,  $\partial\phi'/\partial y$  und  $\partial\phi'/\partial z$  zeitlich gleichverteilt sind, ergibt sich eine U-Verteilung (Pesch (2003)).

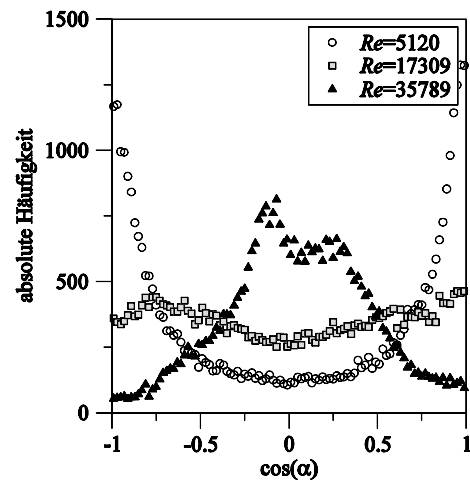
In Abb. 55 sind Häufigkeitsverteilungen für Werte von  $\cos(\angle(\nabla\phi, \mathbf{B}))$  als Abschätzung der Wahrscheinlichkeitsdichte  $P$  dargestellt. Hierfür werden jeweils  $2 \cdot 10^4$  Werte betrachtet, die in 100 Klassen unterteilt sind. Dabei zeigt die wachsende Häufigkeit der Werte um  $\cos(\alpha) = 0$ , dass eine anisotrope Ausprägung der Strömung mit zunehmender Reynolds-Zahl zunimmt.

In Abb. 55 a) sind die Häufigkeitsverteilungen für  $Ha = 200$  und drei Reynolds-Zahlen dargestellt. Für  $Re = 4589$  zeigen sich zwei Maxima bei  $\cos(\alpha) \approx \pm 0.7$ . Diese zeigen, dass die drei Signale  $\Delta\phi'_x$ ,  $\Delta\phi'_y$  und  $\Delta\phi'_z$  der Sonde etwa von gleicher Größenordnung sind. Da die Strömung für diese Reynolds-Zahl entsprechend dem Stabilitätsdiagramm aus Abb. 49 noch stabil sein sollte, handelt es sich hierbei um Rauschen. Bei Überschreiten der kritischen Reynolds-Zahl ändert sich der Strömungszustand erheblich. Dies spiegelt sich in der geänderten Häufigkeitsverteilung wider, die jetzt ein Maximum bei  $\cos(\alpha) = 0$  aufzeigt, das auf eine eher zweidimensionale Strömung hinweist.

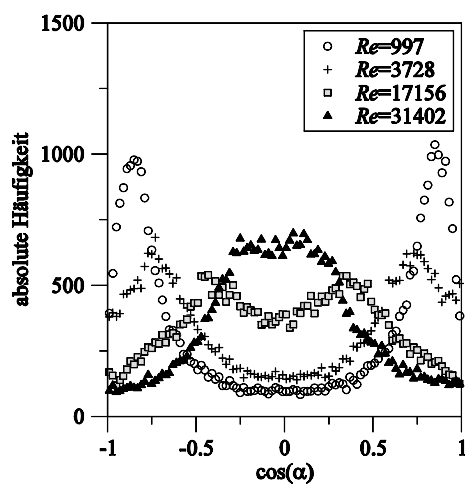
Es zeigt sich, dass unter Beachtung der kritischen Reynolds-Zahlen aus Abb. 49 für  $Ha = 1000$  in Abb. 55 b) ein deutlicher Unterschied zwischen  $Re_{krit,1} < Re = 17309 < Re_{krit,2}$  und  $Re_{krit,2} < Re = 35789$  besteht. Während die Häufigkeitsverteilung für  $Re = 17309$  etwa kon-



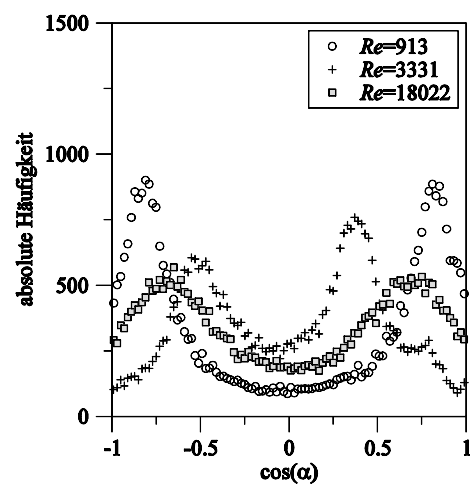
a)  $Ha=200$



b)  $Ha=1000$



c)  $Ha=1500$



d)  $Ha=2000$

Abbildung 55: Häufigkeitsverteilung von  $\cos(\angle(\mathbf{B}, \nabla\phi'))$  : Auswertung von Sondensignalen bei  $z = 0.967$  für verschiedene  $Ha$

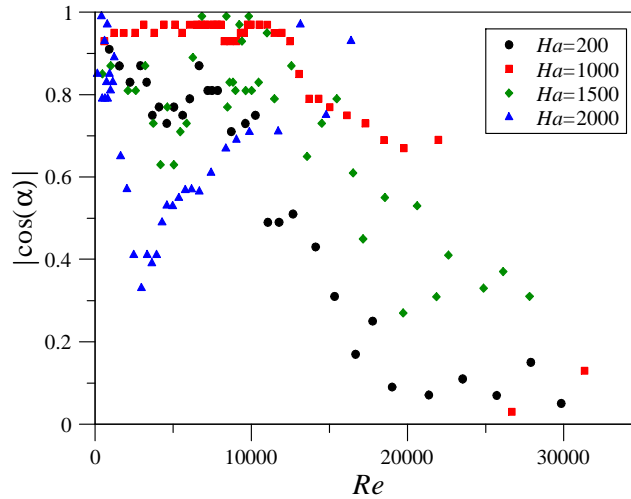


Abbildung 56: Bestimmung von  $|\cos(\alpha)|$  bei jeweiliger maximaler Häufigkeit für verschiedene  $Re$  und  $Ha$  für eine Sondenposition bei  $z = 0.967$

stant ist, zeichnet sich ein Maximum für  $Re = 35789$  bei  $\cos(\alpha) \approx 0$  ab. Dies weist darauf hin, dass für  $Re > Re_{krit,2}$  ein zunehmend zwei-dimensionaler Strömungszustand vorliegt. Ein ähnliches Verhalten ist auch in Abb. 55 c) für  $Ha = 1500$  im Vergleich zwischen  $Re = 17156$  und  $Re = 31402$  erkennbar. Für  $Ha = 2000$  in Abb. 55 d) sind für  $Re = 3331$  die größten Häufigkeiten bei  $\cos(\alpha) \approx \pm 0.5$  zu erkennen.

Im Folgenden werden die maximalen Häufigkeiten für verschiedene  $Re$  identifiziert und in Abb. 56 der zugehörige Wert von  $|\cos(\alpha)|$  dargestellt. Dabei zeigt sich, dass für kleine  $Re$   $|\cos(\alpha)| \approx 1$  gilt und für große  $Re$   $|\cos(\alpha)| \approx 0$  erreicht wird. Dazwischen liegt ein Übergangsbereich, in dem die Komponente  $\Delta\phi'_y$  an Einfluss verliert und die Anteile senkrecht zum Magnetfeld dominanter werden und ein zunehmend zwei-dimensionaler Strömungszustand vorliegt. Es kommt hierbei für  $Ha = 200$  zu einem Übergang zwischen  $|\cos(\alpha)| \approx 1$  und  $|\cos(\alpha)| \approx 0$  über einen großen Reynolds-Zahlen Bereich, während für  $Ha = 1000$  der Übergang kürzer ist und der Wert von  $|\cos(\alpha)| \approx 0$  scheinbar plötzlich erreicht wird. Erkennbar ist für  $Ha = 2000$  die Ausbildung des Regimes 0, wobei auch die anderen kritischen Reynolds-Zahlen für  $Ha = 200$ ,  $Ha = 1000$ , und  $Ha = 1500$  entsprechend des Stabilitätsdiagramms in Abb. 49 erkennbar sind.

**Vergleiche zwischen Sondensignalen und Signalen an den Hartmann-Wänden** Vergleiche zwischen Sondensignalen und Signalen an den Hartmann-Wänden werden in den Abb. 57 bis 62 dargestellt, um weiterhin die Anisotropie der instabilen Strömung zu beleuchten. In den Abbildungen ist stets ein Vergleich zwischen negativer und positiver  $z$ -Position angestellt. Sowohl das Signal der Sonde für  $z = \pm 0.833$ , als auch das der Hartmann-Wand zeigen für  $Ha = 200$ ,  $Re = 30000$  in Abb. 57 deutliche Amplitudenschwankungen, da entsprechend Abb. 49 eine instabile Strömung vorliegt, was auch mit den Ergebnissen aus Abb. 55 a) übereinstimmt.

Abb. 58 zeigt für  $Ha = 1000$  und  $Re = 20000$ , dass die Amplitude des Sondensignals deutlich höher ist als die der Hartmann-Wand. Denn durch den höheren Abstand der Messstellen auf

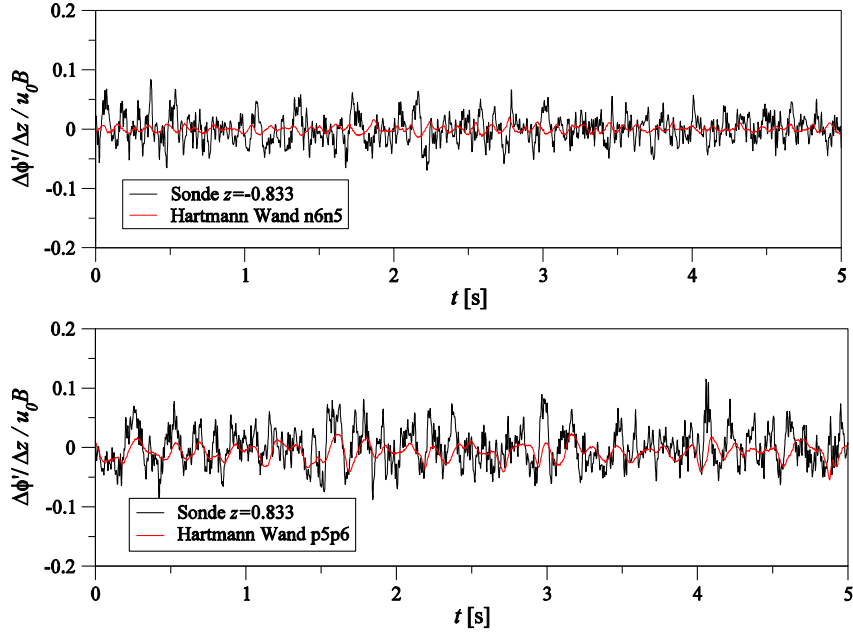


Abbildung 57: Vergleich von Sonden- und Hartmann-Wand-Signalen für  $Ha = 200$ ,  $Re = 30000$  bei  $z = -0.833$  (oben) und  $z = 0.833$  (unten)

der Hartmann-Wand ist die Grenzfrequenz kleiner als im Falle der Sonde, sodass hochfrequente Anteile, die hier vorhanden sind, weniger gut erfasst werden können (s. hierzu Abb. 19).

In Abb. 59 bei  $z = 0.833$  sind für  $Ha = 1000$ ,  $Re = 35000$  im Sonden- und Hartmann-Wand-Signal starke Störungen erkennbar. Ähnliche Zusammenhänge finden sich auch für  $Ha = 1500$ ,  $Re = 40000$  in Abb. 61. Dies zeigt, dass sich die Störungen für  $z = \pm 0.833$  und  $Re_{krit,1} < Re < Re_{krit,2}$  vorwiegend im Bereich um etwa  $y = 0$  befinden und zur Hartmann-Wand abklingen. Für  $Re > Re_{krit,2}$  sind diese Störungen zusätzlich auf der Hartmann-Wand zu sehen, was darauf hinweist, dass sich die Störungen entlang des Magnetfeldes ausbilden und somit eine Q2D-Strömung vorliegt.

Abb. 62 zeigt den Vergleich für  $Ha = 2000$  und  $Re = 2500$ , wobei keine Ähnlichkeit der Signale der Sonde und der Hartmann-Wand erkennbar ist. Im Gegensatz zu vorherigen Ergebnissen sind die Schwankungen aufgrund der nicht-symmetrischen Geschwindigkeitsverteilung (s. hierzu Abb. 42) auf der negativen Seite ( $z = -0.833$ ) stärker ausgeprägt als auf der positiven Seite ( $z = 0.833$ ).



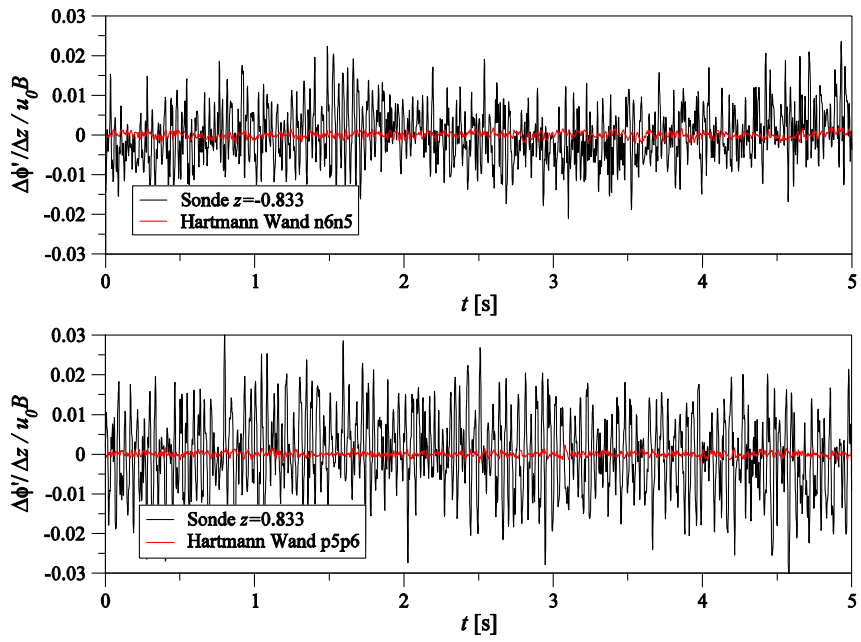


Abbildung 58: Vergleich von Sonden- und Hartmann-Wand-Signalen für  $Ha = 1000$ ,  $Re = 20000$  bei  $z = -0.833$  (oben) und  $z = 0.833$  (unten)

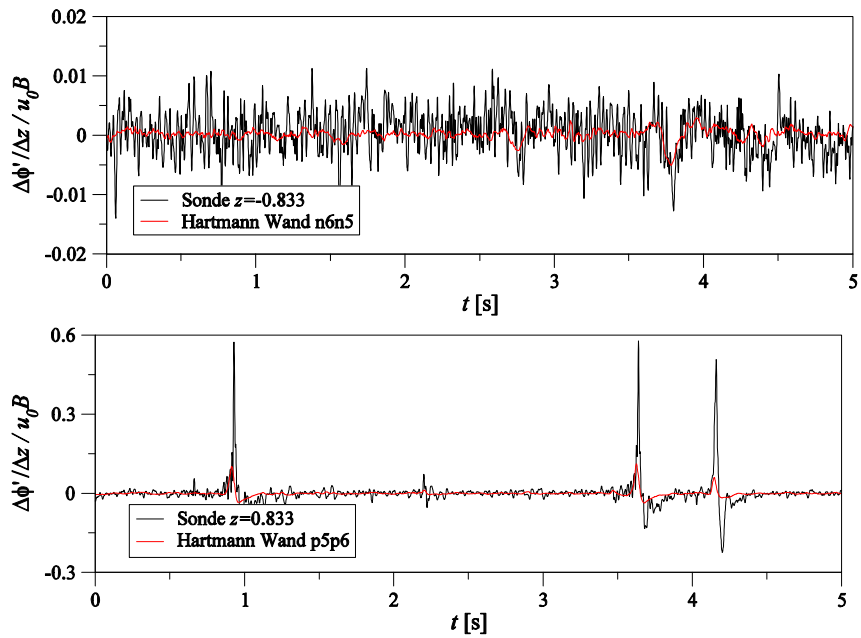


Abbildung 59: Vergleich von Sonden- und Hartmann-Wand-Signalen für  $Ha = 1000$ ,  $Re = 35000$  bei  $z = -0.833$  (oben) und  $z = 0.833$  (unten)

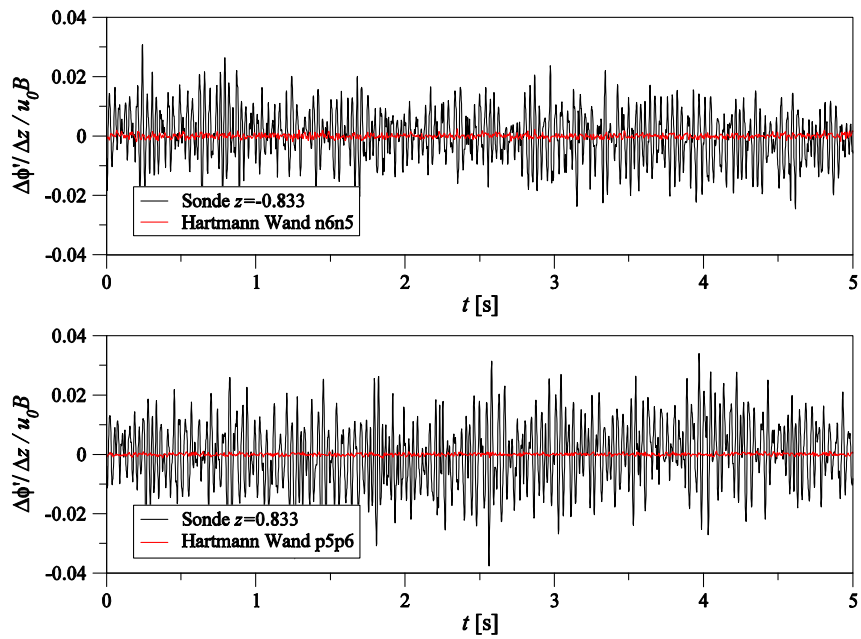


Abbildung 60: Vergleich von Sonden- und Hartmann-Wand-Signalen für  $Ha = 1500$ ,  $Re = 20000$  bei  $z = -0.833$  (oben) und  $z = 0.833$  (unten)

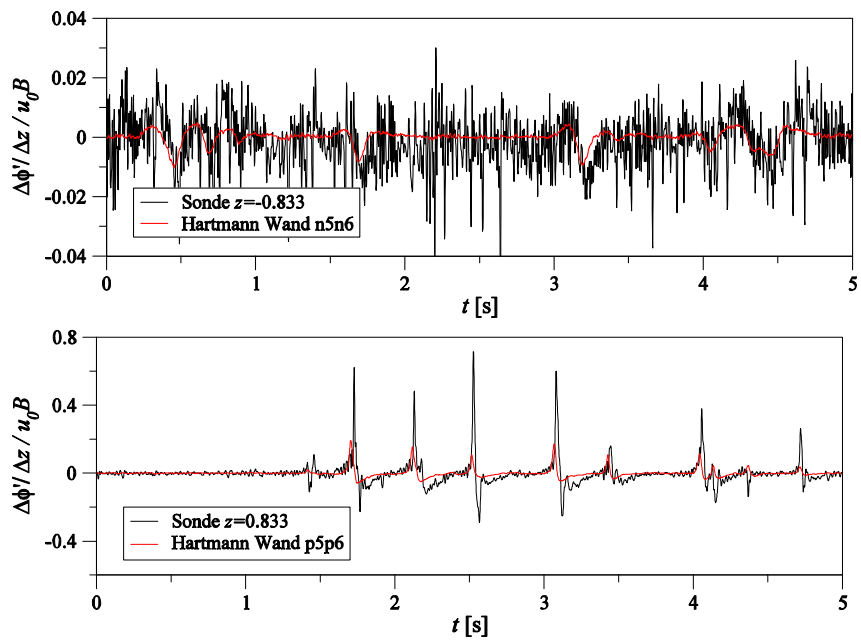


Abbildung 61: Vergleich von Sonden- und Hartmann-Wand-Signalen für  $Ha = 1500$ ,  $Re = 40000$  bei  $z = -0.833$  (oben) und  $z = 0.833$  (unten)

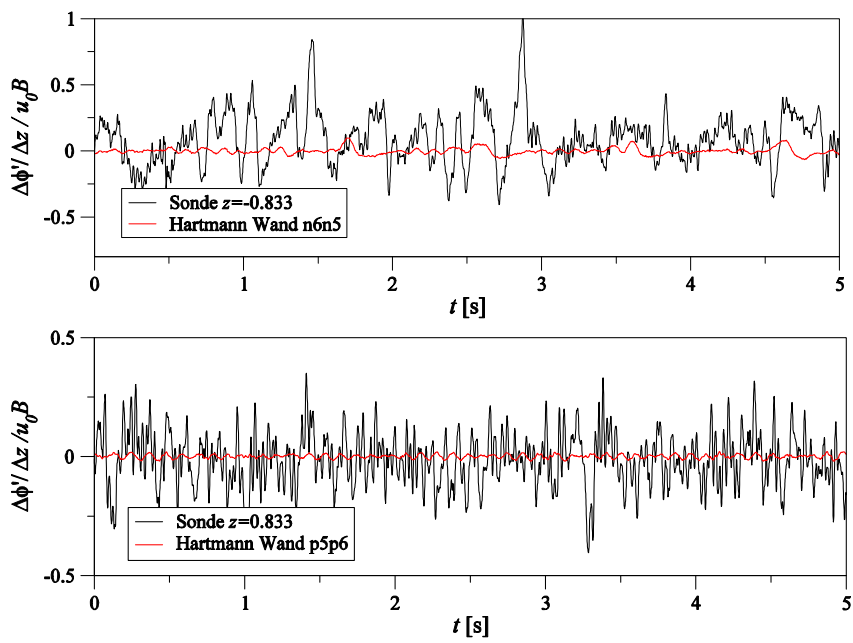


Abbildung 62: Vergleich von Sonden- und Hartmann-Wand-Signalen für  $Ha = 2000$ ,  $Re = 2500$  bei  $z = -0.833$  (oben) und  $z = 0.833$  (unten)

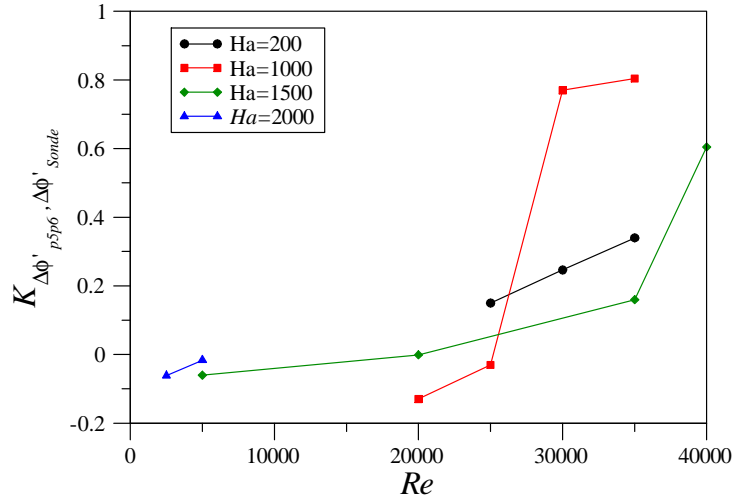


Abbildung 63: Korrelationskoeffizient für verschiedene  $Ha$  zwischen Potentialdifferenz an Hartmann-Wand  $p5p6$  und Sondensignal ( $z = 0.833$ )

Neben der Bewertung der Anisotropie mit Sondensignalen, können auch Korrelationen zwischen Sondensignalen und zugehörigen Signalen auf der Wand betrachtet werden. Dabei zeigt sich wie stark die Anisotropie den Gesamtkanalquerschnitt betrifft und wie weit ein Q2D-Zustand erreicht wird.

Es werden Korrelationskoeffizienten mit

$$K_{\Delta\phi'_{p5p6}, \Delta\phi'_{Sonde}} = \frac{\overline{\Delta\phi'_{p5p6} \Delta\phi'_{Sonde}}}{\sqrt{\overline{\Delta\phi'^2_{p5p6}}} \sqrt{\overline{\Delta\phi'^2_{Sonde}}}}$$

berechnet und in Abb. 63 für verschiedene  $Ha$  und  $Re$  dargestellt.

Für  $Ha = 200$  zeigt sich auch für die höchste Reynolds-Zahl ( $Re = 35000$ ) eine schwache Korrelation mit  $K_{\Delta\phi'_{p5p6}, \Delta\phi'_{Sonde}} \approx 0.3$ , sodass ein Q2D-Zustand nur wenig ausgebildet wird.

Es zeigen sich starke Korrelationen mit  $K_{\Delta\phi'_{p5p6}, \Delta\phi'_{Sonde}} > 0.5$  für  $Ha = 1000$ ,  $Re > 25000$  bzw.  $Ha = 1500$ ,  $Re > 35000$ , sodass hier der Q2D-Zustand ausgebildet wird. Daraus lässt sich schließen, dass in Regime  $II$  für  $Re \geq Re_{krit,2}$  ein Q2D-Zustand der Strömung vorliegt.

Für  $Ha = 2000$  zeigt sich für die betrachteten Reynolds-Zahlen, die entsprechend Abb. 49 in Regime 0 liegen, Werte von  $-0.1 < K_{\Delta\phi'_{p5p6}, \Delta\phi'_{Sonde}} < 0$ , sodass keine Ähnlichkeit der Sonden- und Hartmann-Wand-Signale vorliegt. Dies zeigt, dass in Regime 0 kein Q2D-Zustand ausgebildet wird bzw. dieser zumindest die Hartmann-Wand nicht erreicht.

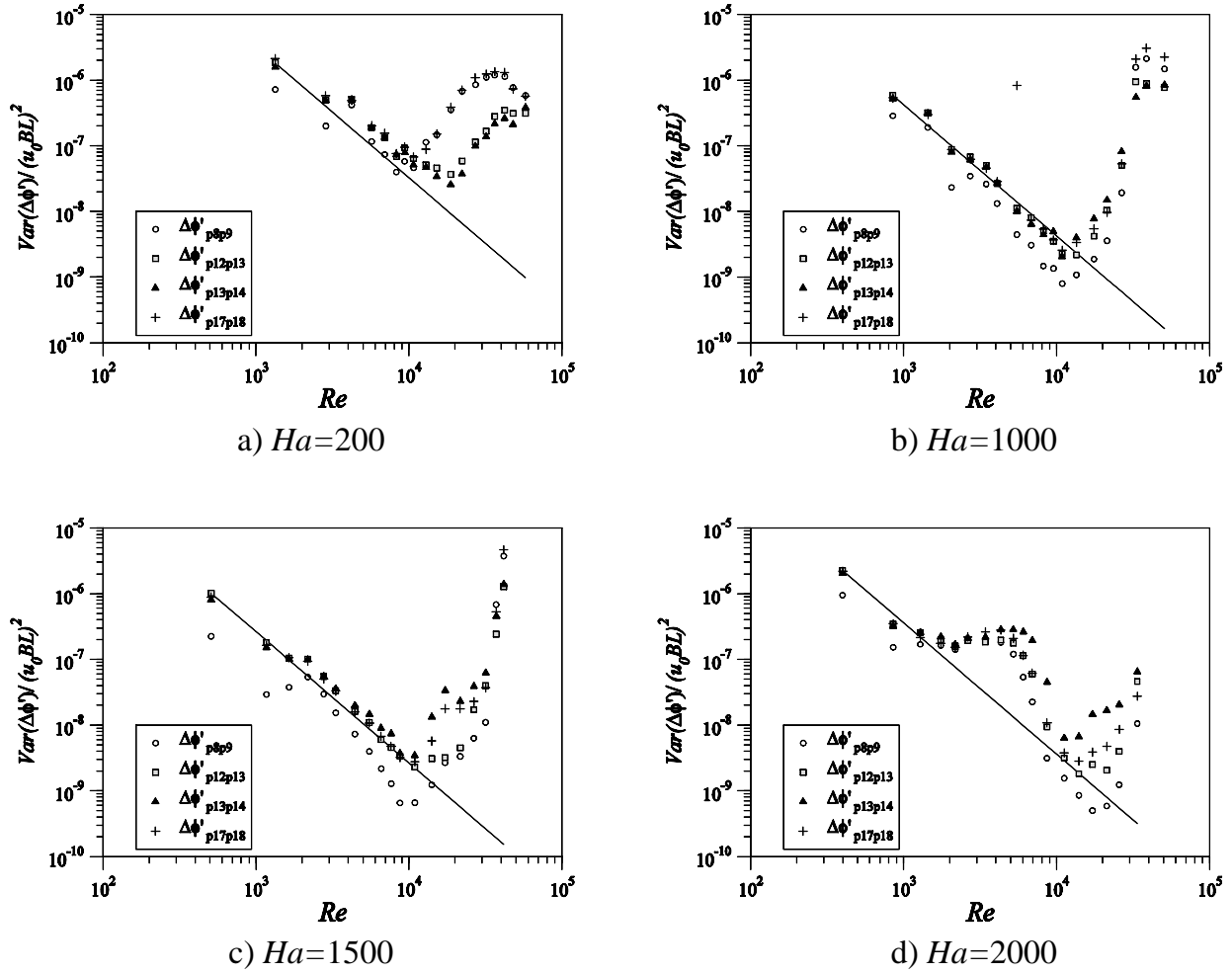
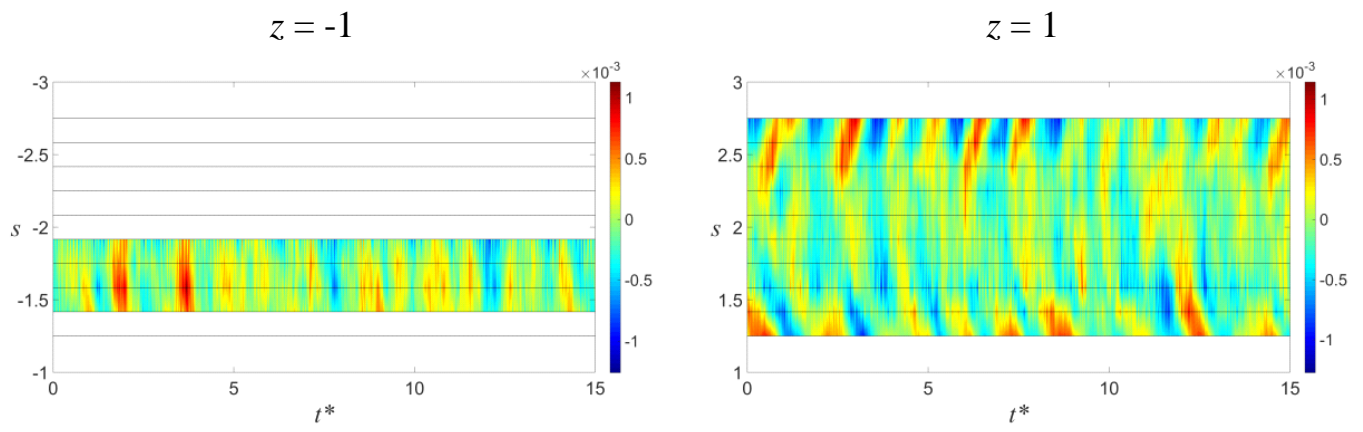


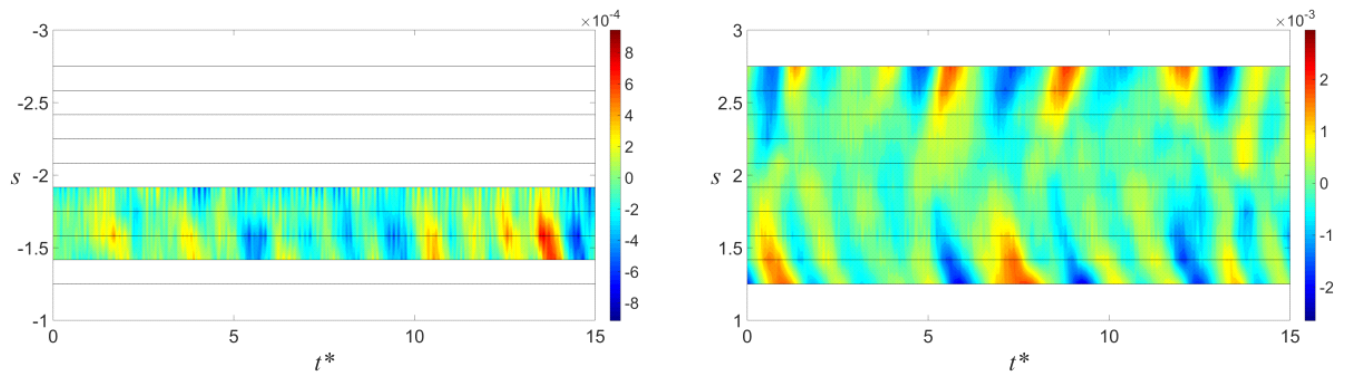
Abbildung 64: Varianzanalyse von Seitenwandsignalen  $p8p9$ ,  $p12p13$ ,  $p13p14$ ,  $p17p18$

**Untersuchung von Seitenwandsignalen in  $y$ -Richtung** In Abb. 64 werden entdimensionierte Varianzanalysen der Seitenwandsignale  $\Delta\phi'_{p8p9}$ ,  $\Delta\phi'_{p12p13}$ ,  $\Delta\phi'_{p13p14}$  und  $\Delta\phi'_{p17p18}$  dargestellt (s. hierzu Abb. 14). Dabei zeigen sich für Abb. 64 b), 64 c) und 64 d) ähnliche kritische Reynolds-Zahlen zum einen im Vergleich mit dem Stabilitätsdiagramm in Abb. 49 und zum anderen im Vergleich der Signale untereinander. Jedoch gibt es Abweichungen für die Varianzanalyse von  $\Delta\phi'_{p8p9}$ , da hier die Varianz bereits bei niedrigen Reynolds-Zahlen den Abfall gemäß  $Re^{-2}$  verlässt. Dabei ist nochmals eine Unterscheidung zu treffen, da für  $Ha = 200$  in Abb. 64 a) der Wert der Varianz ab  $Re \approx 9000$  ansteigt, während für  $Ha = 1000, 1500, 2000$  in Abb. 64 b), c) und d) die Varianz ähnlich wie in Regime 0 ansteigt und wieder abfällt.

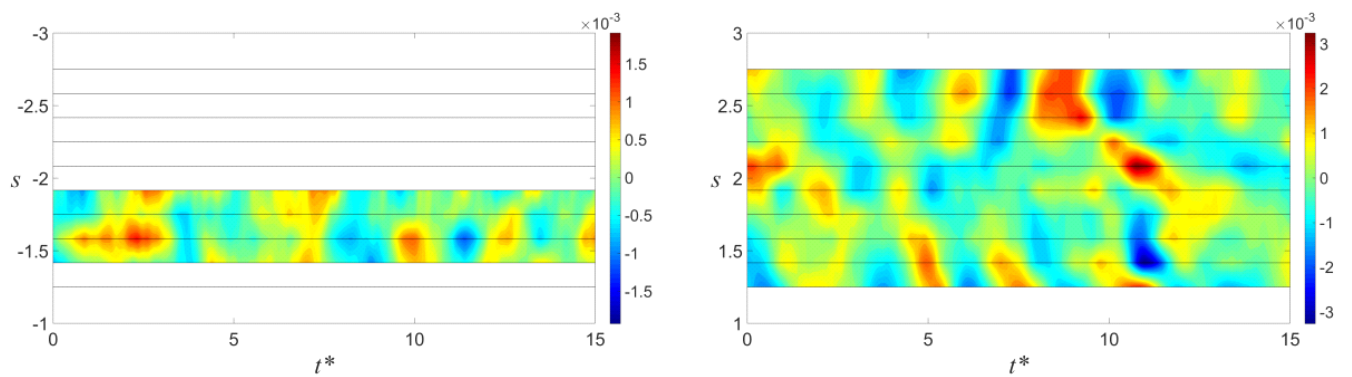
In Abb. 65, 66, 67 und 68 werden Isolinien von  $(\Delta\phi'_y/\Delta y)/u_0B$  bei den jeweiligen Reynolds- und Hartmann-Zahlen der positiven ( $z = 1$ ) und ausschnittsweise negativen ( $z = -1$ ) Seitenwand über eine dimensionslose Zeit  $t^* = t\frac{u_0}{L}$  dargestellt (s. hierzu auch Bühler, Chowdhury und Mistrangelo (2016)). Die eingezeichneten horizontalen Linien entsprechen der Position in der Mitte zwischen zwei Messstellen, zwischen denen  $\Delta\phi'_y$  gemessen wird. In nahezu allen Abbil-



a)  $Re=15176$



b)  $Re=27125$



c)  $Re=57700$

Abbildung 65: Isolinien von  $\frac{\Delta\phi'_y}{\Delta y}/u_0B$  für  $Ha = 200$  entlang der Seitenwand

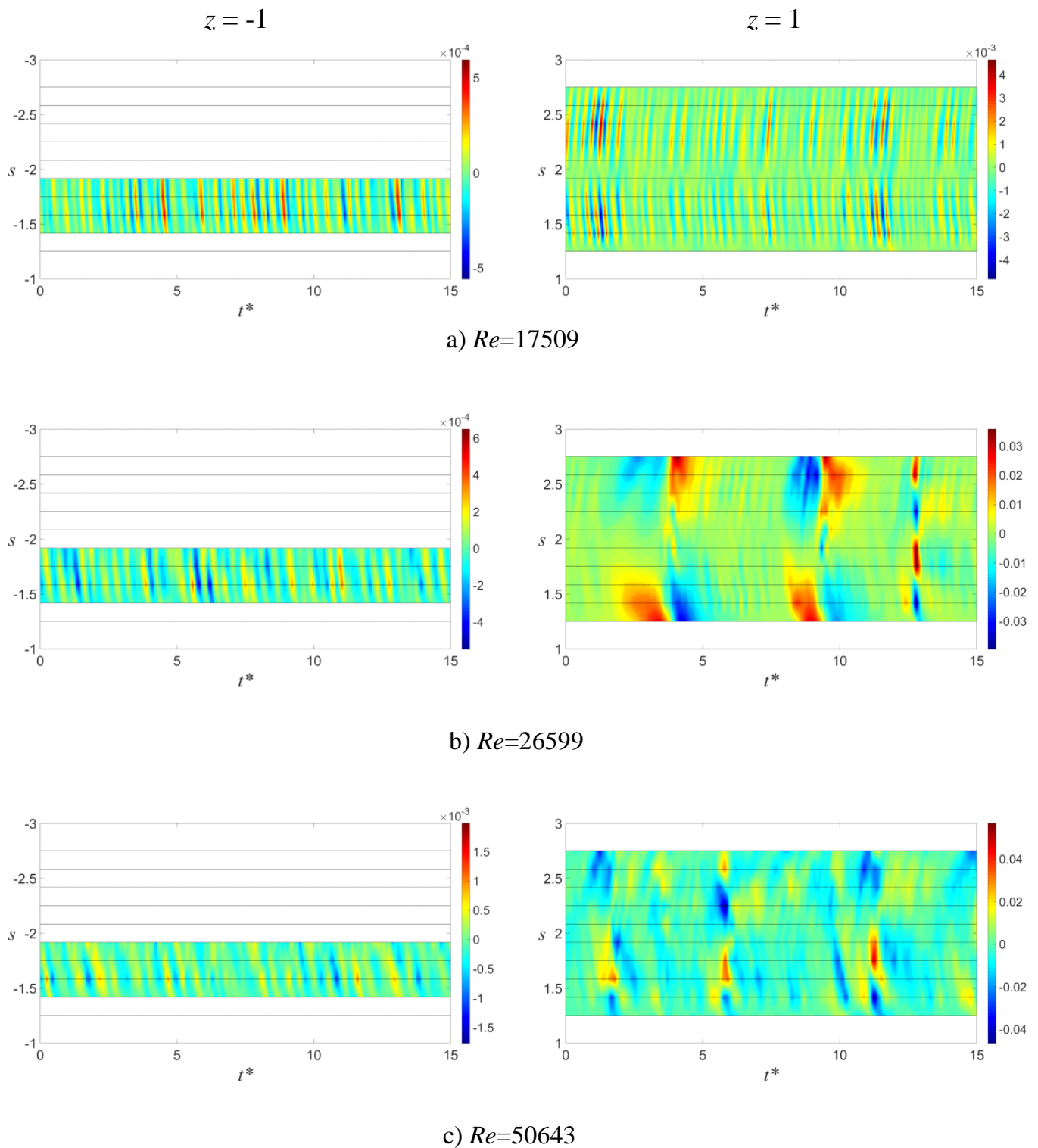
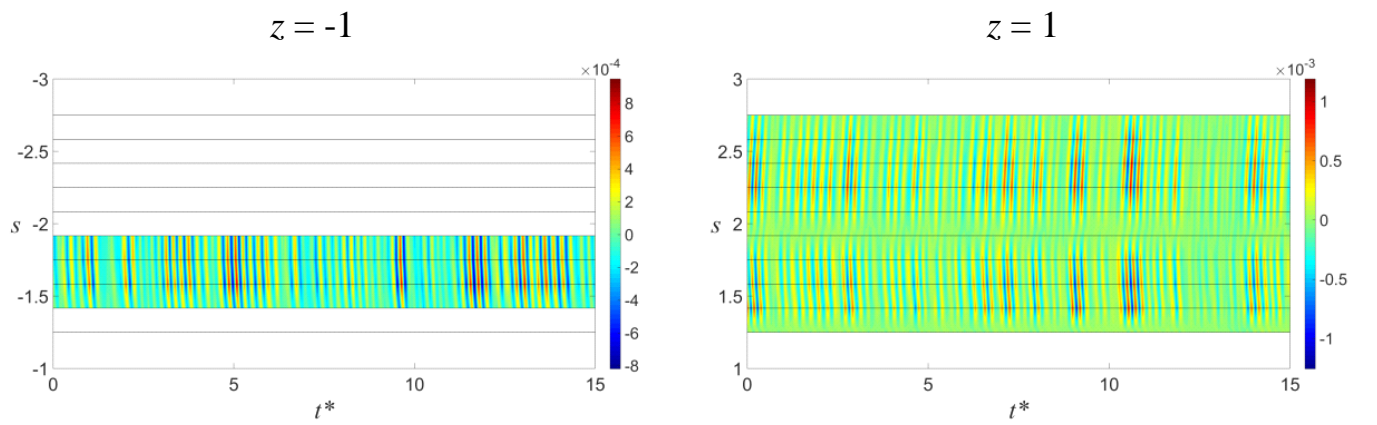
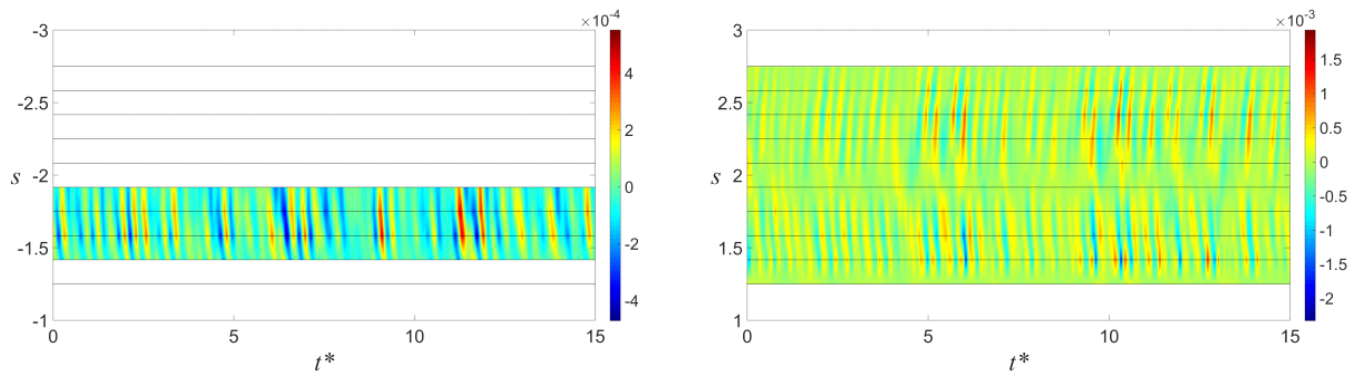


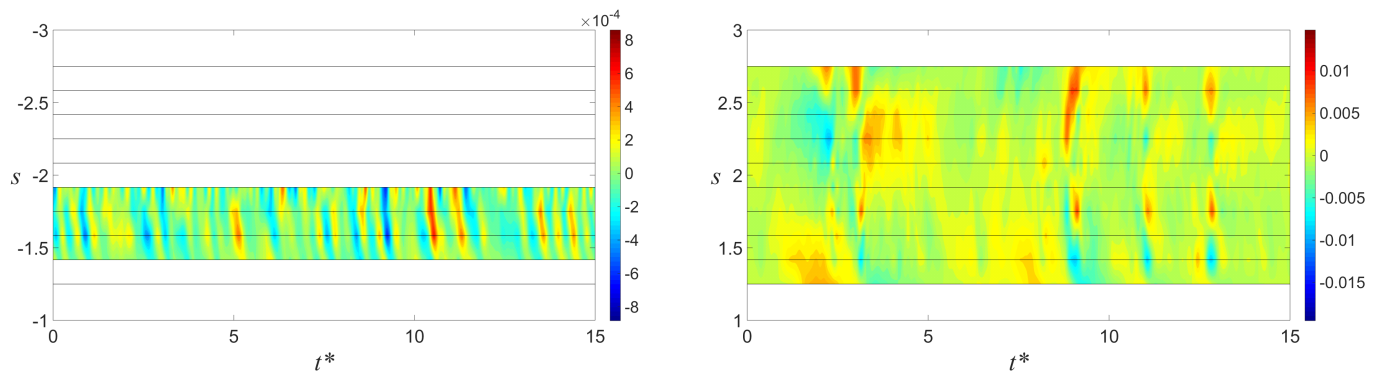
Abbildung 66: Isolinien von  $\frac{\Delta\phi'_y}{\Delta y}/u_0 B$  für  $Ha = 1000$  entlang der Seitenwand



a)  $Re=17203$



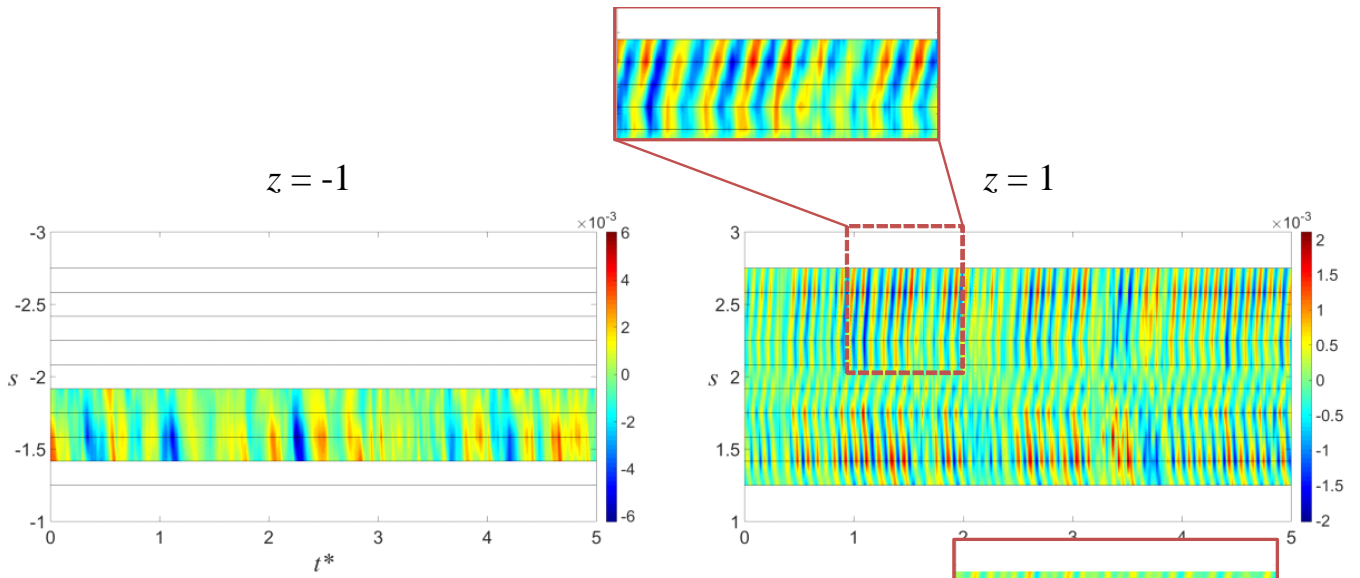
b)  $Re=26518$



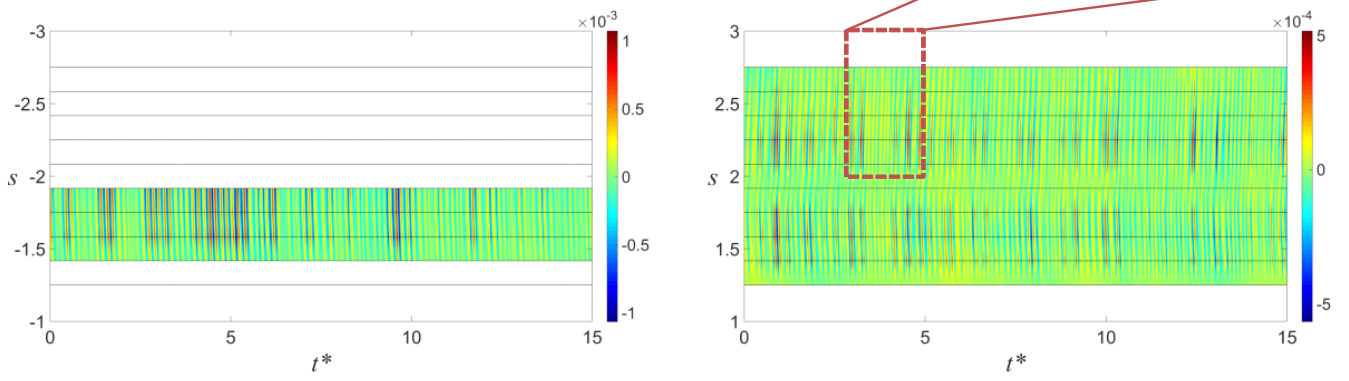
c)  $Re=41534$

Abbildung 67: Isolinien von  $\frac{\Delta\phi'_y}{\Delta y}/u_0B$  für  $Ha = 1500$  entlang der Seitenwand

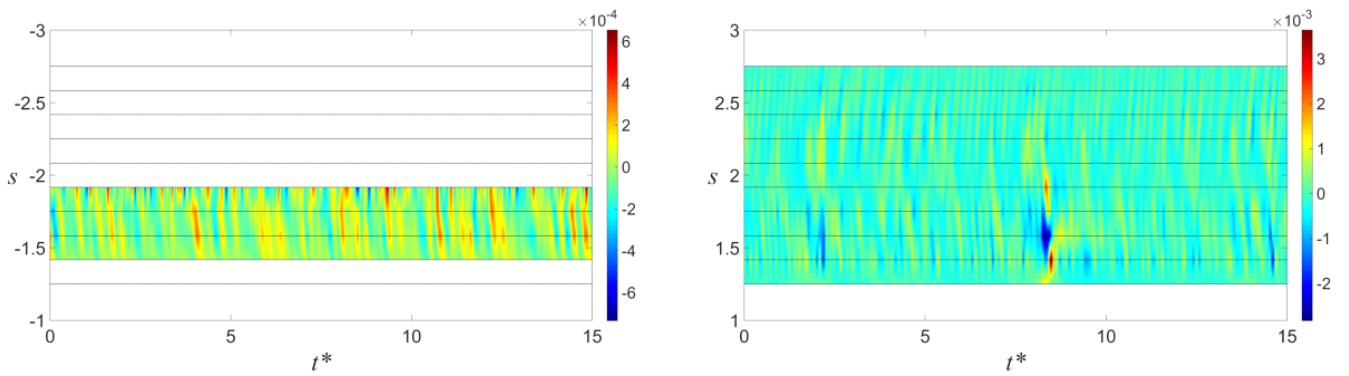




a)  $Re=3421$



b)  $Re=17131$



c)  $Re=33628$

Abbildung 68: Isolinien von  $\frac{\Delta\phi_y'}{\Delta y}/u_0B$  für  $Ha = 2000$  entlang der Seitenwand

dungen ist für die jeweils niedrigsten Reynolds-Zahlen eine Antisymmetrie an der Ebene  $s = \pm 2$  zu erkennen, mit alternierenden Werten von  $\Delta\phi'_y/u_0B$ . Diese antisymmetrische Verteilung des Potentialgradienten entsteht durch eine instabile Struktur, die sich entlang des Magnetfeldes ausbildet und somit dem Q2D-Zustand entspricht bei dem die Verteilung von  $\phi'(y)$  symmetrisch zu  $y = 0$  bzw.  $s = \pm 2$  ist.

Für höhere Reynolds-Zahlen wird diese antisymmetrische Anordnung verlassen und es lassen sich vereinzelte Strukturen wie zum Beispiel in Abb. 68 c)  $z = 1$  bei  $t^* \approx 8$  für  $Ha = 2000$ ,  $Re = 33628$  erkennen.

Für  $Re \geq Re_{krit,2}$  zeigen sich neben den Strukturen, die für eine Q2D-Struktur sprechen, kleinere ebenfalls antisymmetrische Anordnungen, wie beispielsweise in Abb. 66 b)  $z = 1$  und 67 c)  $z = 1$  erkennbar ist. Diese weisen darauf hin, dass hierbei Strukturen höherer Moden entstehen. Bei  $z = -1$  lassen sich im Vergleich mit  $z = 1$  für  $Re < Re_{krit,2}$  stets ähnliche Strukturen vermuten, sodass in beiden Seitenschichten die Q2D-Strukturen ausgebildet werden. Jedoch passiert dies nicht zeitgleich, sodass die Signale bei  $z = 1$  und  $z = -1$  unabhängig voneinander sind. Sofern  $Re > Re_{krit,2}$ , finden sich für  $Ha = 1000$  auf der positiven Seitenwand großräumige Störungen, die mindestens eine Größenordnung stärker sind als auf der negativen Seitenwand (s. bspw. 67 c)). Für  $Ha = 2000$  kehrt sich der Trend um. In Abb. 68 a) wird im Vergleich zwischen  $z = 1$  und  $z = -1$  deutlich, dass bei  $z = 1$  die instabilen Strukturen eine höhere Frequenz aufweisen, während sie bei  $z = -1$  niedrigere Frequenzen vorliegen.

Im Unterschied zu den vorangegangenen Ergebnissen in denen Vergleiche zwischen Sonde- und Hartmann-Wand-Signalen angestellt werden, zeigt sich für die Untersuchung der Seitenwand-Signale, dass bereits in Regime *I* in den Seitenschichten instabile Strukturen zu finden sind, die entlang des Magnetfeldes ausgedehnt sind. Diese Strömungsmuster klingen vor Erreichen der Hartmann-Wände bei  $y = \pm 1$  ab.

**Untersuchung von Seitenwandsignalen in  $x$ -Richtung** In Abb. 69 werden Verläufe aus Varianzanalysen axialer Potentialgradienten auf der negativen und positiven Seitenwand dargestellt. Dabei werden Messstellen betrachtet, die etwa  $8L$  ( $\Delta\phi'_{RS}$ ) bzw.  $11L$  ( $\Delta\phi'_{CE}$ ) vom Strömungsgleichrichter entfernt sind.

Aus Abb. 69 a) lassen sich kritische Reynolds-Zahlen für  $Ha = 200$  ableiten, die zwischen  $4000 < Re_{krit} < 6000$  liegen. Im Gegensatz dazu zeigen die Werte der kritischen Reynolds-Zahlen für  $Ha = 1000$  in Abb. 69 b) bei  $\Delta\phi'_{CE+} Re_{krit} = 11232$ ,  $\Delta\phi'_{RS+} Re_{krit} = 14003$ ,  $\Delta\phi'_{CE-} Re_{krit} = 27296$  und  $\Delta\phi'_{RS-} Re_{krit} = 7139$  Unterschiede auf. Während  $\Delta\phi'_{CE+}$  und  $\Delta\phi'_{RS+}$  mit den Stabilitätsgrenzen aus Abb. 49 etwa übereinstimmen, sind für die Signale auf der negativen Seite Abweichungen erkennbar.  $\Delta\phi'_{CE-}$  weist erst in einem Reynolds-Zahlenbereich deutlich erhöhte Signale auf, der etwa  $Re_{krit,2}$  entspricht.

Ein ähnlicher Zusammenhang wie in Abb. 69 a) wird auch in Abb. 69 c) für  $Ha = 1500$  gezeigt, sodass die kritischen Reynolds-Zahlen der vier Signale in einem sehr ähnlichen Bereich ( $Re_{krit} \approx 10000$ ) liegen.

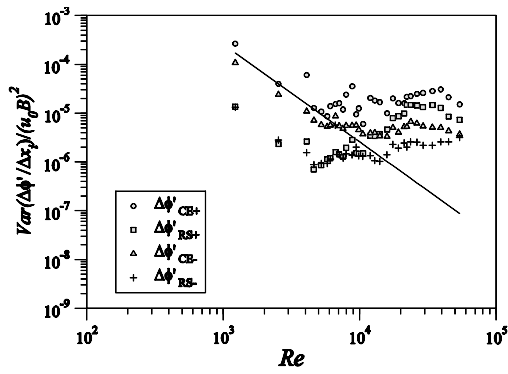
Aus den Signalen  $\Delta\phi'_{CE+}$ ,  $\Delta\phi'_{CE-}$  und  $\Delta\phi'_{RS-}$  in Abb. 69 d) für  $Ha = 2000$  lassen sich abermals die kritischen Reynolds-Zahlen von Regime 0 ableiten. Jedoch ist in  $\Delta\phi'_{RS\pm}$  kein Anzeichen dieses Regimes zu erkennen. Dies lässt denn Schluss zu, dass instabile Strukturen kleinere Ausdehnung haben als der Abstand zwischen den Messstellen mit  $\Delta x_{RS} = 16$  mm und somit schlechter erfasst werden können.

**Reynolds-Spannungen  $\overline{u'u'}$ ,  $\overline{w'w'}$  und  $\overline{u'w'}$**  In den Abb. 70 bis 73 werden Reynolds-Spannungen  $\overline{u'u'}$ ,  $\overline{w'w'}$  und  $\overline{u'w'}$  dargestellt. Für diese Messreihe wurden nur wenige Positionen mit der Sonde im Kanal angefahren, um die thermische Stationarität auch für hohe Reynolds-Zahlen und somit für hohe elektrische Ströme zu gewährleisten.

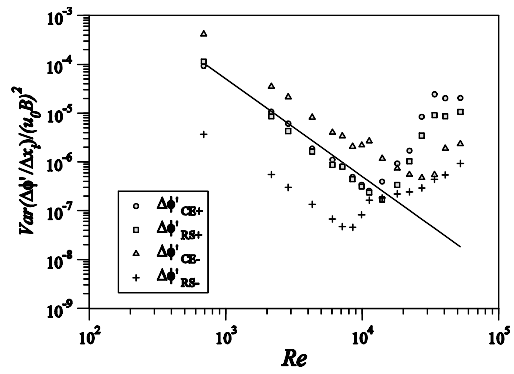
In Abb. 70 a), 70 b) und 70 c) für  $Ha = 200$  zeigen sich ansteigende Werte mit zunehmendem Wandabstand. Für  $Re = 35000$  zeigt sich eine deutliche Erhöhung bei  $z = 0.83$ , was auf eine größere Struktur hinweist. Für  $Ha = 1000$  in Abb. 71 a) sind für  $Re_{krit,1} < Re < Re_{krit,2}$  Erhöhungen in der Nähe der Seitenschichten erkennbar. In Abb. 71 b) und 71 c) sind die Werte für  $z > 0$  deutlich größer als die für  $z < 0$ .

Ein ähnliches Bild zeigt sich für  $Ha = 1500$  in Abb. 72 a) und 72 b). Insbesondere in Abb. 72 b) wird ebenfalls die starke Erhöhung auf der positiven Seite deutlich.

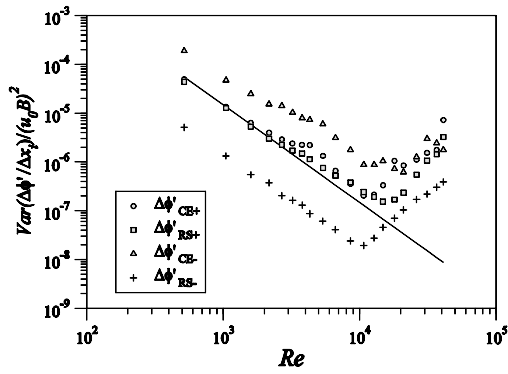
Für  $Ha = 2000$ ,  $Re = 5000$  in Abb. 73 nehmen die dimensionslosen Reynolds-Spannungen stark zu. Weiterhin sind für diese Parameterkombination die Reynolds-Spannungen auf der negativen Seiten stärker als auf der positiven Seite. Die Ausdehnung im Kanalquerschnitt geht bis etwa  $-1 < z < -0.6$  bzw.  $0.83 < z < 1$ .



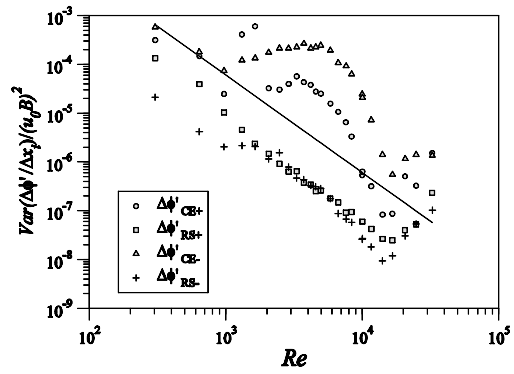
a)  $Ha=200$



b)  $Ha=1000$

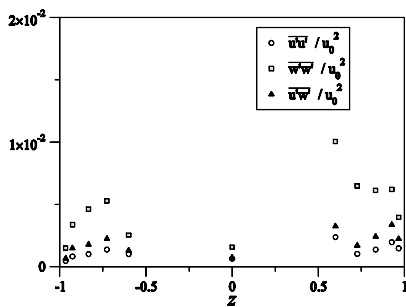


c)  $Ha=1500$

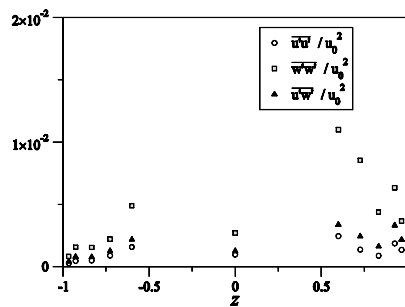


d)  $Ha=2000$

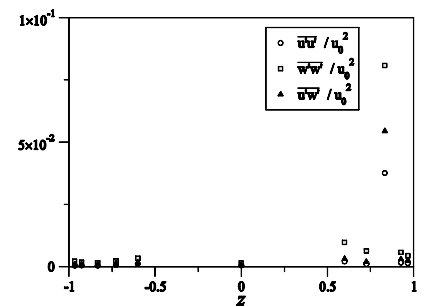
Abbildung 69: Entdimensionierte Varianz der Potentialgradienten an den Seitenwänden ( $z < 0$  : -,  $z > 0$  : +) in  $x$ -Richtung  $\Delta\phi'_x/\Delta x_i$  ( $\Delta x_1 = \Delta x_{CE+}=0.004$ ,  $\Delta x_2 = \Delta x_{RS+}=0.016$ ,  $\Delta x_3 = \Delta x_{CE-}=0.004$ ,  $\Delta x_4 = \Delta x_{RS-}=0.016$ )



a)  $Re=25000$



b)  $Re=30000$



c)  $Re=35000$

Abbildung 70: Korrelationen für  $Ha = 200$  des Sondensignals für verschiedene Positionen  $z$

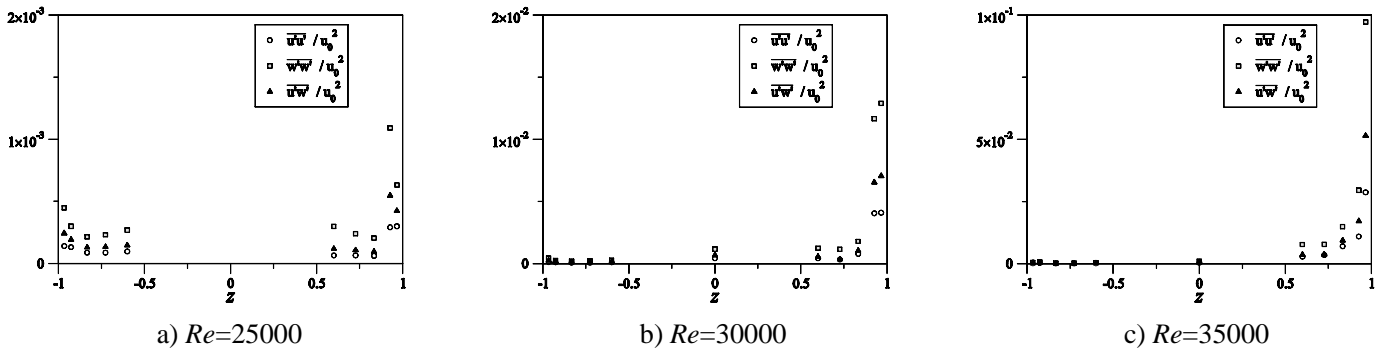


Abbildung 71: Korrelationen für  $Ha = 1000$  des Sondensignals für verschiedene Positionen  $z$

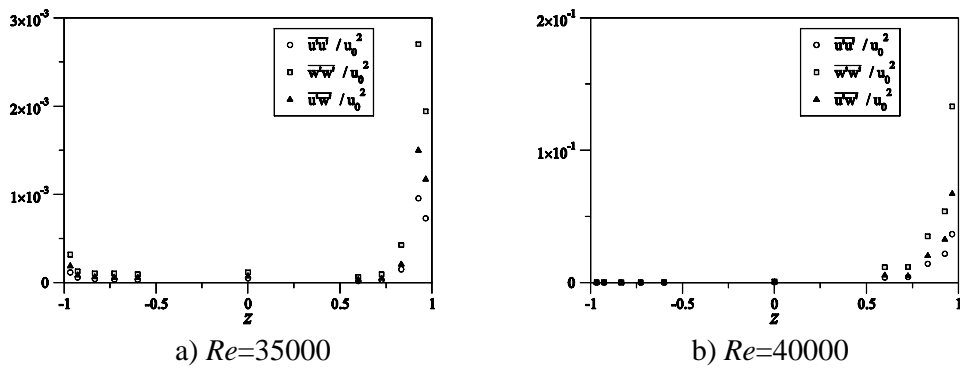


Abbildung 72: Korrelationen für  $Ha = 1500$  des Sondensignals für verschiedene Positionen  $z$

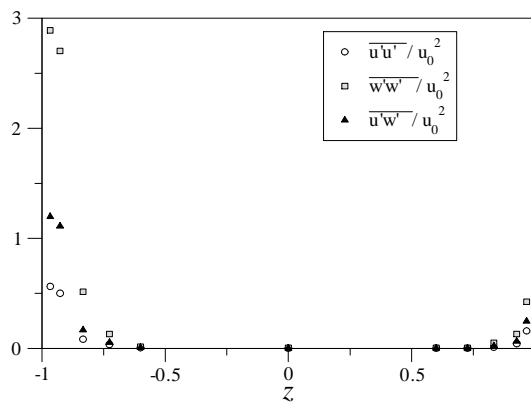


Abbildung 73: Korrelationen für  $Ha = 2000$ ,  $Re = 5000$  des Sondensignals für verschiedene Positionen  $z$

**Ermittlung von  $u'$  und  $w'$  an der Hartmann-Wand** In den Abb. 74 bis 85 werden Isolinien der Schwankungen der Geschwindigkeitskomponenten  $u'$  und  $w'$  dargestellt, die mit der charakteristischen Geschwindigkeit  $u_0$  entdimensioniert werden und Wirbelstrukturen anzeigen. Hierfür werden Potentialdifferenzen  $\Delta\phi'$  auf der Hartmann-Wand gemessen, aus denen die Geschwindigkeiten

$$u' \approx -\frac{\Delta\phi'_z}{\Delta z B} \quad (79)$$

und

$$w' \approx \frac{\Delta\phi'_x}{\Delta x B} \quad (80)$$

ermittelt werden.  $u'$  zeigt hierbei in Hauptströmungsrichtung  $x$  und  $w'$  zeigt (normal zur Seitenwand) in  $z$ -Richtung. Die eingezeichneten horizontalen Linien entsprechen der Position in der Mitte zwischen zwei Messstellen, zwischen denen  $\Delta\phi'$  gemessen wird. Weiterhin wird eine entdimensionierte Zeit mit

$$t^* = t \frac{u_0}{L} \quad (81)$$

für die Darstellung verwendet. Bei den Abbildungen gilt zu beachten, dass die Messungen von  $u'$  und  $w'$  nicht gleichzeitig vorgenommen werden konnten, da nur eine limitierte Anzahl von Messverstärkern zu Verfügung stand.

Erkennbar sind für  $Ha = 200$  in Abb. 74 entlang der horizontalen Linie bei  $s = 0.292$  Geschwindigkeitsgebiete mit abwechselnd unterschiedlichen Vorzeichen, die auf Wirbelstrukturen schließen lassen. Auch im Vergleich mit Geschwindigkeiten, die auf etwa  $s = 0.725$  und  $s = -0.292$  liegen, wird ein alternierendes Verhalten deutlich. Jedoch nimmt die Schwankungsamplitude für  $s < 0$  ab und die Störungen liegen näher an der Seitenwand, sodass auch hier eine ungleichmäßige Verteilung erkennbar ist. Dies wird in Abb. 75 deutlich. Hier haben Schwankungen  $w'/u_0$  auf der positiven Seite eine so große Amplitude, dass diejenigen auf der negativen Seite in dem gewählten Maßstab kaum noch zu sehen sind. Für eine höhere Reynolds-Zahl zeigt sich in Abb. 76, dass die ungleichmäßige Verteilung zugenommen hat und nur noch vereinzelt Strukturen für  $s < 0$  erkennbar sind. In Abb. 77 zeigen sich ebenfalls Strukturen mit wechselndem Vorzeichen, wobei hier für eine höhere Reynolds-Zahl ( $Re = 58330$ ) und  $s < 0$  wiederum kleinere Strukturen mit geringeren Schwankungsamplituden erkennbar sind.

Im Gegensatz zur vorhergehenden Abbildung sind für  $Ha = 1000$  in Abb. 78 zum einen nur noch wenige Strukturen erkennbar, die zudem höhere maximale Werte für  $u'/u_0$  aufzeigen. Zum anderen sind diese Wirbelstrukturen hauptsächlich für  $s > 0$  erkennbar. Dabei liegen die Maximalwerte von  $u'$  bei  $s = 0.833$ , die Minimalwerte bei  $s \approx 0.458$ , lokalisiert zu nahezu gleichen Zeiten  $t^*$ . Jedes Paar kann als Wirbel interpretiert werden, der sich in Seitenschichtnähe in Hauptströmungsrichtung bewegt. Sie werden gefolgt von schwächer ausgeprägten Wirbeln mit umgekehrter Drehrichtung. In Abb. 79 und 81 zeigen sich ebenfalls die vereinzelt Wirbel lediglich auf der positiven Seite  $s > 0$ . Ähnliche Ergebnisse sind in Abb. 82 und 83 für  $Ha = 1500$  erkennbar. Daraus folgt, dass für  $Re > Re_{krit,2}$  vereinzelt Wirbelstrukturen entstehen, die lediglich auf der positiven Seite auftreten.

Im Gegensatz dazu steht Abb. 84 und 85 in der für  $Ha = 2000$  deutlich wird, dass die Geschwindigkeitsfluktuationen erstens vorwiegend auf der negativen Seite bei etwa  $s = -0.833$  vorherrschen und zweitens bis etwa  $s < -0.5$  ausgedehnt sind.

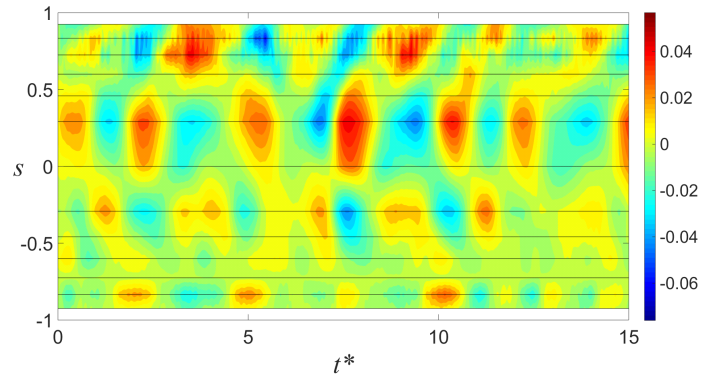


Abbildung 74: Isolinien der Schwankungen der Geschwindigkeitskomponente  $u'/u_0$  für  $Ha = 200$ ,  $Re = 30001$

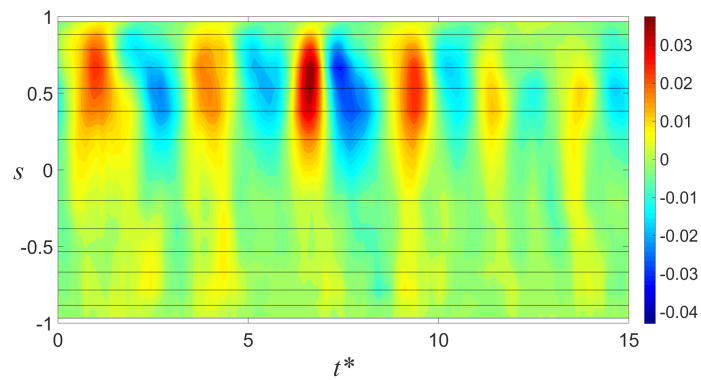


Abbildung 75: Isolinien der Schwankungen der Geschwindigkeitskomponente  $w'/u_0$  für  $Ha = 200$ ,  $Re = 32619$

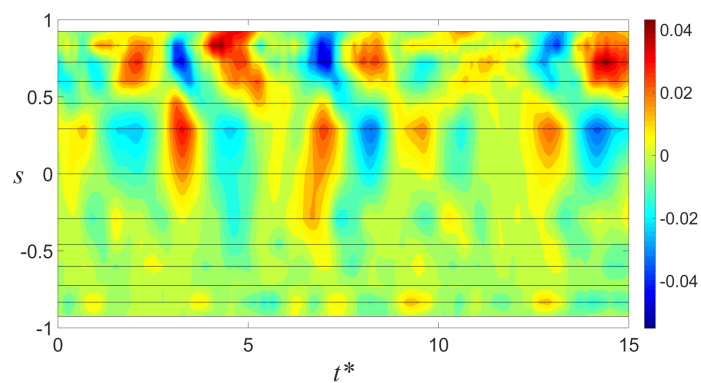


Abbildung 76: Isolinien der Schwankungen der Geschwindigkeitskomponente  $u'/u_0$  für  $Ha = 200$ ,  $Re = 56471$

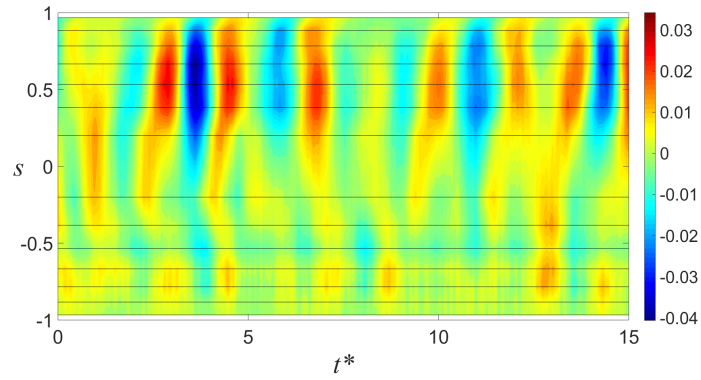


Abbildung 77: Isolinien der Schwankungen der Geschwindigkeitskomponente  $w'/u_0$  für  $Ha = 200$ ,  $Re = 58330$

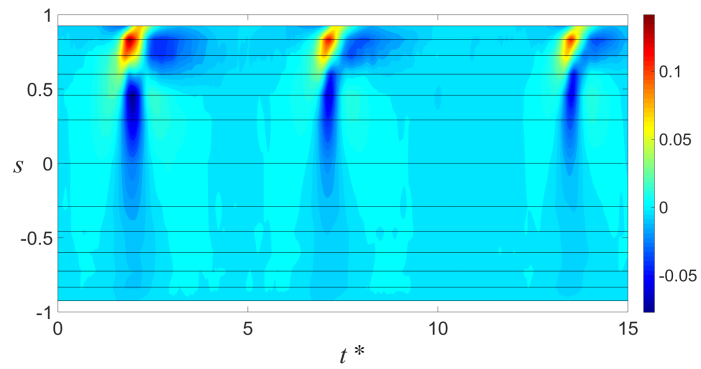


Abbildung 78: Isolinien der Schwankungen der Geschwindigkeitskomponente  $u'/u_0$  für  $Ha = 1000$ ,  $Re = 31359$

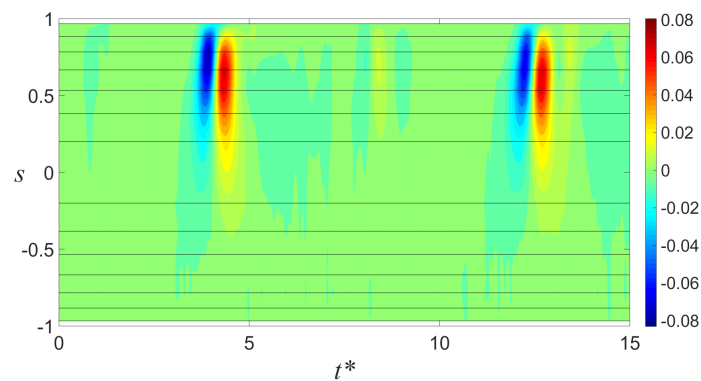


Abbildung 79: Isolinien der Schwankungen der Geschwindigkeitskomponente  $w'/u_0$  für  $Ha = 1000$ ,  $Re = 33442$



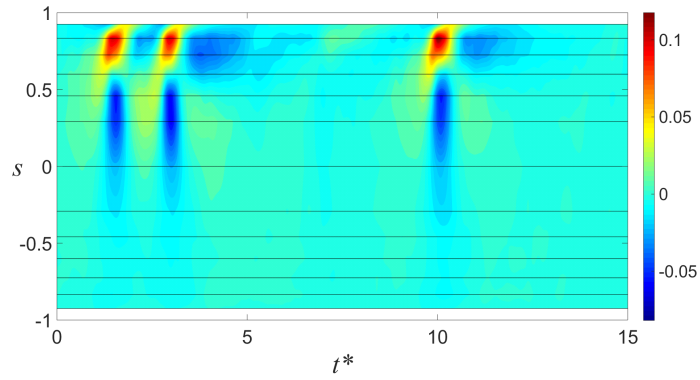


Abbildung 80: Isolinien der Schwankungen der Geschwindigkeitskomponente  $u'/u_0$  für  $Ha = 1000$ ,  $Re = 50740$

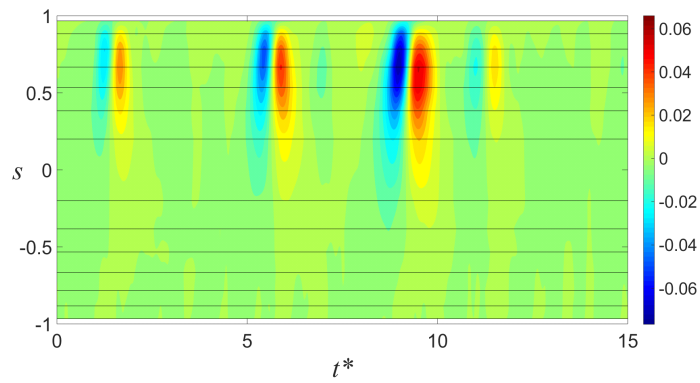


Abbildung 81: Isolinien der Schwankungen der Geschwindigkeitskomponente  $w'/u_0$  für  $Ha = 1000$ ,  $Re = 51852$

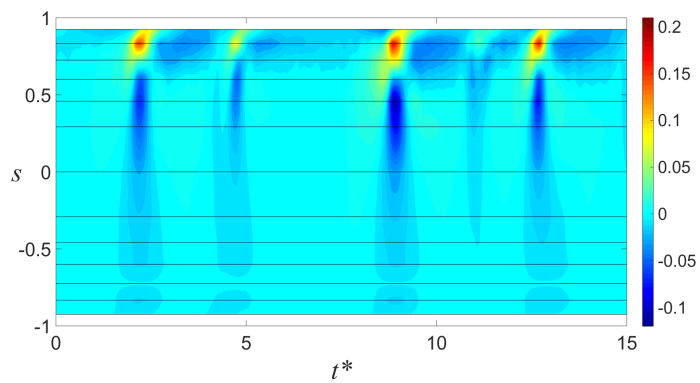


Abbildung 82: Isolinien der Schwankungen der Geschwindigkeitskomponente  $u'/u_0$  für  $Ha = 1500$ ,  $Re = 41498$

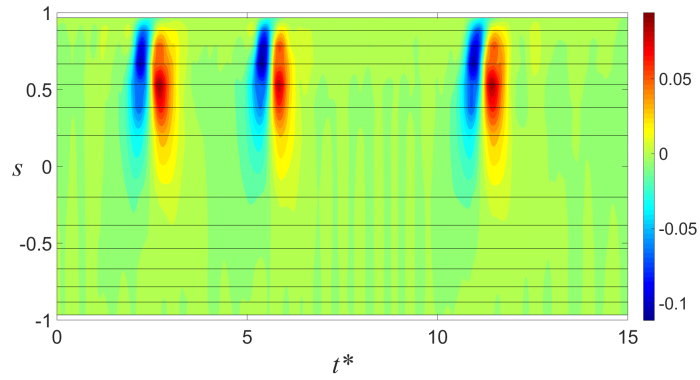


Abbildung 83: Isolinien der Schwankungen der Geschwindigkeitskomponente  $w'/u_0$  für  $Ha = 1500$ ,  $Re = 42971$

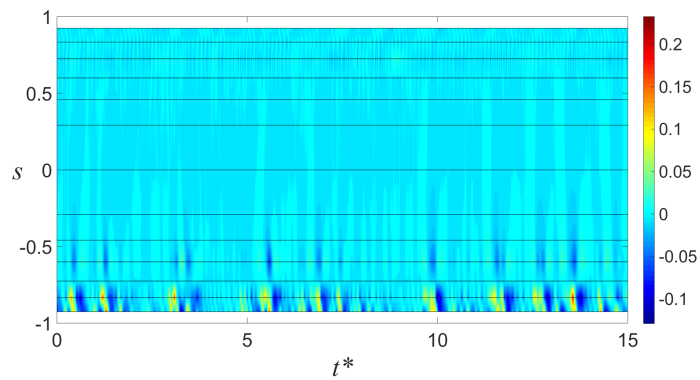


Abbildung 84: Isolinien der Schwankungen der Geschwindigkeitskomponente  $u'/u_0$  für  $Ha = 2000$ ,  $Re = 4325$

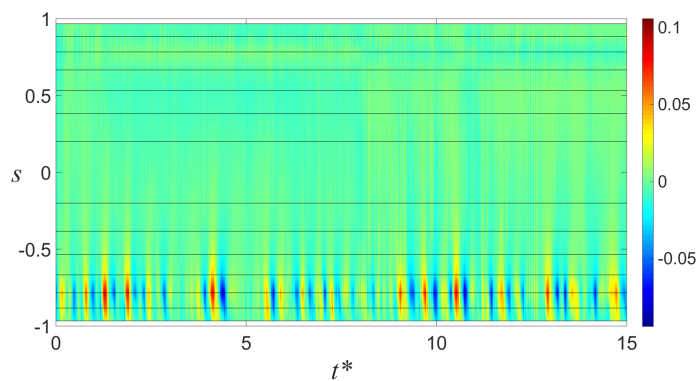


Abbildung 85: Isolinien der Schwankungen der Geschwindigkeitskomponente  $w'/u_0$  für  $Ha = 2000$ ,  $Re = 4448$

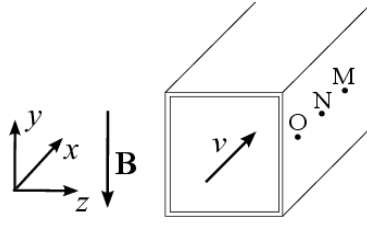


Abbildung 86: Messstellen  $MN$  und  $NO$

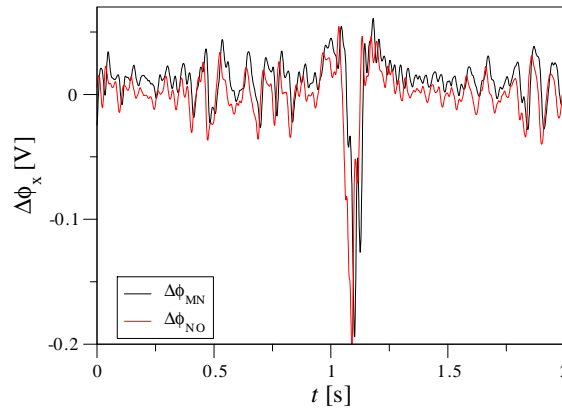


Abbildung 87: Potentialgradienten an zwei dichtbeieinanderliegenden Messstellen  $MN$  und  $NO$  für  $Ha = 1000$ ,  $Re = 27296$

### 4.3.3 Transportgeschwindigkeit der Instabilität

Wenn eine instabile Strömung anhand der Messtechnik detektiert werden kann, beinhalten die Potentialdifferenzensignale  $\Delta\phi$  neben dem unkorrelierten Rauschen signifikante Anteile, die instabilen Strukturen zugeordnet werden können. In Abb. 86 werden in  $x$ -Richtung versetzte Messstellen  $O$ ,  $N$  und  $M$  an der positiven Seitenwand dargestellt. Die gezeigten Beispielsignale der benannten Messstellen in Abb. 87 ähneln sich sehr stark. Jedoch ist ein Zeitversatz  $\Delta t$  festzustellen, der mithilfe einer Kreuzkorrelation ermittelt werden kann. Die Ergebnisse der Kreuzkorrelation sind in Abb. 88 dargestellt. Es wird deutlich, dass für hohe Reynolds-Zahlen eine sehr gute Korrelation erreicht wird. Für  $Ha = 2000$  ergibt sich sogar schon für etwa  $1000 < Re < 10000$  eine sehr gute Korrelation, die mit der Ausbildung von Instabilitäten in Regime 0 zusammenhängt. Der Zeitversatz oder *Timelag* der Signale wird in Abb. 89 dargestellt. Darin zeigt sich, dass der Zeitversatz für kleine Reynolds-Zahlen Bereich etwa *null* entspricht. Das bedeutet, dass Störungen der Signale an den Messstellen nahezu gleichzeitig auftreten, so dass daraus geschlossen wird, dass es sich um äußere Störungen etwa durch das Magnetfeld handelt, was somit dem Messrauschen entspricht. Ab einer kritischen Reynolds-Zahl steigen die Werte des Zeitversatzes stark an und fallen mit anwachsender Reynolds-Zahl ab. Diese so ermittelten kritischen Reynolds-Zahlen stimmen sehr gut mit denen aus Abb. 48 überein. Mit Hilfe des Zeitversatzes  $\Delta t$  und dem Abstand  $\Delta x = 8\text{mm}$  zwischen den Messstellenpaaren, lässt sich eine Geschwindigkeit

$$u_S = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{82}$$

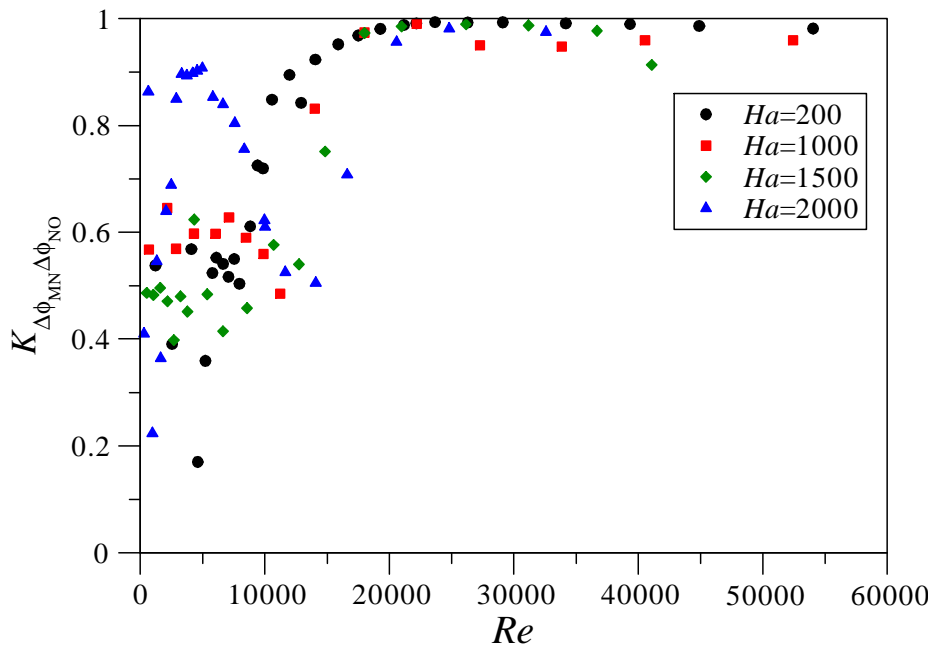


Abbildung 88: Korrelationskoeffizient für Signale zwischen den Messstellen MN und NO

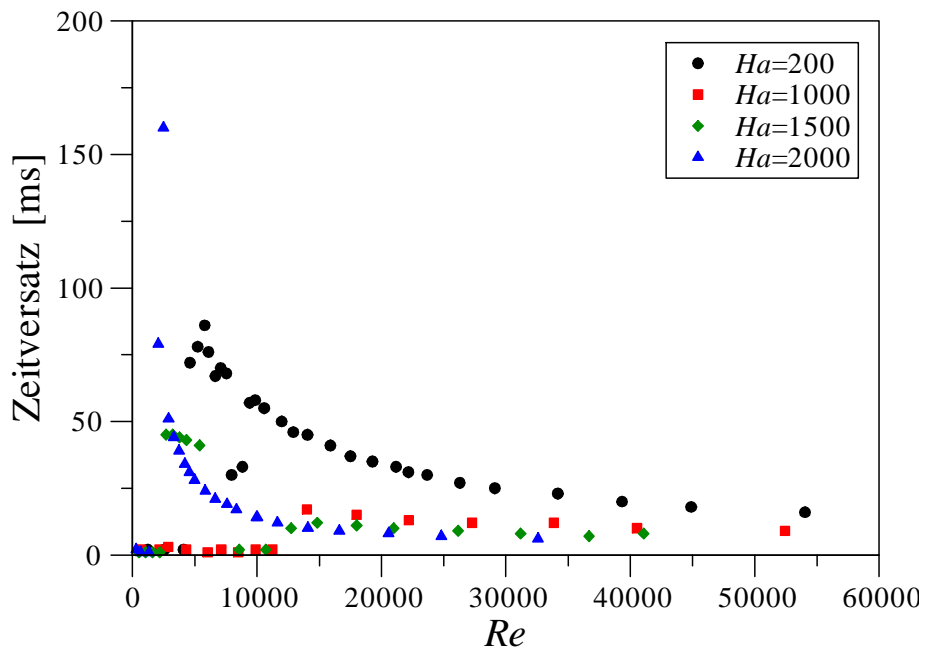


Abbildung 89: Durch Kreuzkorrelation ermittelter Zeitversatz (*Timelag*) der Signale zwischen MN und NO

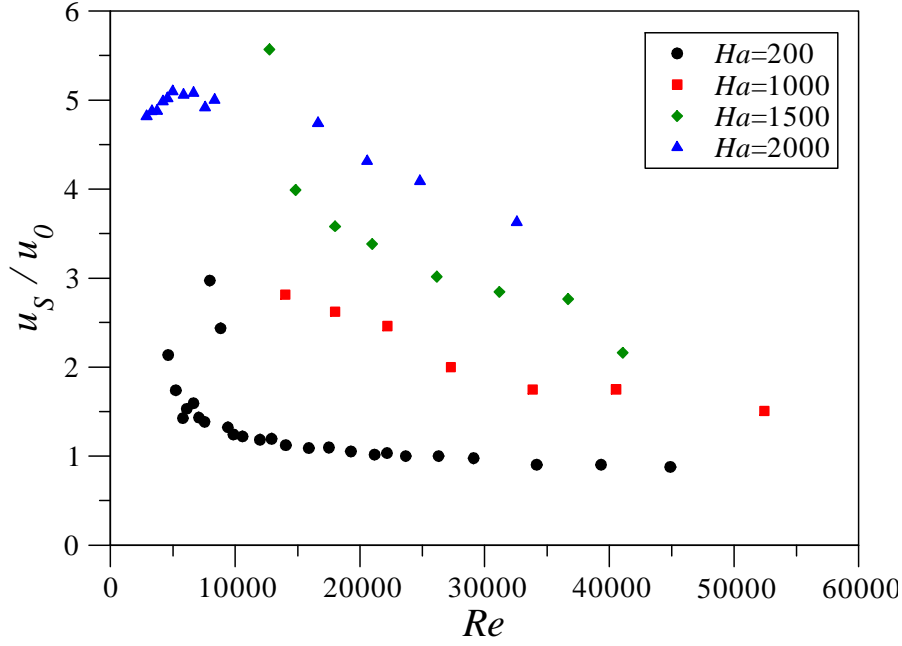


Abbildung 90: Ermittlung der Transportgeschwindigkeit instabiler Strukturen in Seitenwandnähe

berechnen, die ein Maß für die Transportgeschwindigkeit von instabilen Strukturen ist. Dabei zeigt sich, dass für große Hartmann-Zahlen (z.B.  $Ha = 2000$ ) die instabilen Strukturen sich nahezu mit der maximalen Jetgeschwindigkeit bewegen, während für niedrigere Hartmann-Zahlen die Störungen etwas langsamer transportiert werden. Hier liegt  $u_s$  eher in der Nähe der Wendepunktgeschwindigkeit der zeitgemittelten Daten. Bei der Berechnung werden die Werte betrachtet bei denen eine starke Korrelation zu finden ist mit  $K_{\Delta\phi_{MN}\Delta\phi_{NO}} > 0.7$ , da für die anderen Werte der Rauschanteil in den Signalen zu hoch ist und dadurch eine womöglich falsche Berechnung der Geschwindigkeit erfolgen könnte.

Die Geschwindigkeit wird dimensionslos in Abb. 90 dargestellt. Es fällt auf, dass  $u_S/u_0$  mit ansteigender Reynolds-Zahl abfällt, da durch das Einsetzen der Instabilität die Jets breiter werden und die maximale Geschwindigkeit vermindert wird, sodass auch instabile Strukturen langsamer transportiert werden (s. hierzu auch Abb. 43). Für  $Ha = 200$  gilt für hohe Reynolds-Zahlen  $\frac{u_S}{u_0} \approx 1$ . Ferner zeigt sich für  $Ha = 2000$  das Verhalten in Regime 0, in dem die Geschwindigkeit  $u_S$  nahezu konstant bleibt. Dies hängt mit den nicht-symmetrischen Geschwindigkeitsprofilen zusammen, die in diesem Regime zu finden sind. Ab  $Re = 16632$  fällt die Geschwindigkeit ab wie für die anderen Hartmann-Zahlen, da sich hier Strukturen ausbilden wie in Regime 1.

In Abb. 91 werden Signale auf der positiven und negativen Seitenwand mithilfe einer Kreuzkorrelation miteinander verglichen. Für hohe Reynolds-Zahlen bei denen für die verschiedenen Hartmann-Zahlen eine instabile Strömung vorliegt, zeigt sich keine Ähnlichkeit der Signale mit einem niedrigen Korrelationskoeffizienten von  $K_{\Delta\phi_{MN}\Delta\phi_{NO}} < 0.2$ . Die relativ hohen Werte von  $K_{\Delta\phi_{MN}\Delta\phi_{NO}}$  für  $Ha = 1000$ ,  $Ha = 1500$  und  $Re < 15000$  können abermals mit einem großen Rauschanteil bedingt durch das Magnetfeld erklärt werden. Für  $Ha = 200$  ist dieser Einfluss entsprechend weniger stark ausgebildet und für  $Ha = 2000$  zeigt sich die nicht-symmetrische Ausbildung der Instabilität, sodass es bereits bei niedrigen Reynolds-Zahlen zu einem niedrigen

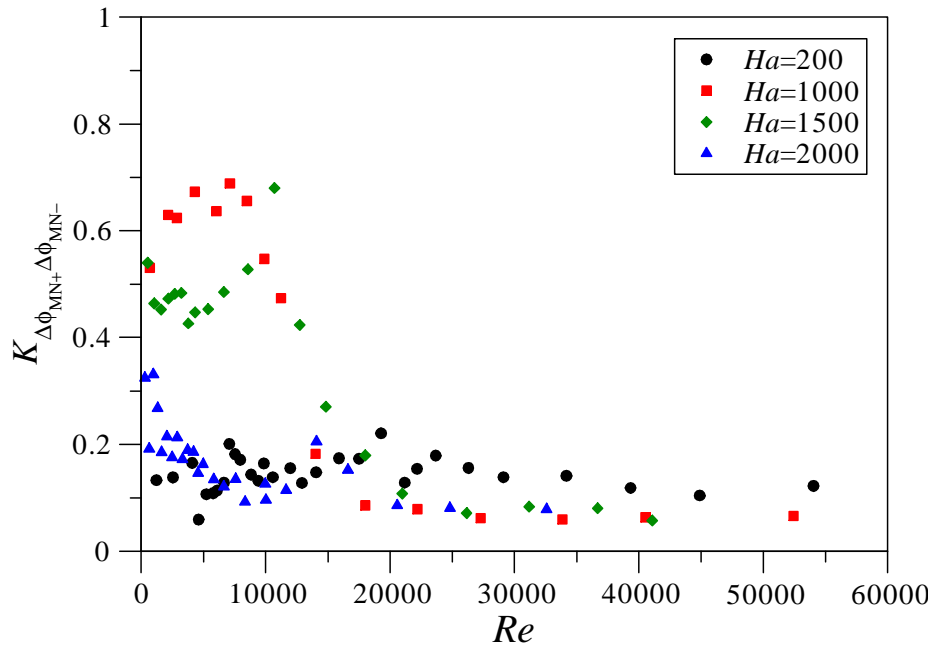


Abbildung 91: Korrelationskoeffizient zwischen den Messstellen MN auf der positiven und negativen Seite

Wert von  $K_{\Delta\phi_{MN}\Delta\phi_{NO}}$  kommt.

#### 4.3.4 Zusammenfassung der instationären Ergebnisse

Für Regime 0 gilt entsprechend der vorangegangenen Ergebnisse, dass die instabilen Strukturen im Kanalquerschnitt ungleichmäßig verteilt sind und auf der negativen Seite eine stärkere Ausbildung vorherrscht als auf der positiven Seite. Ferner reichen die instabilen Strukturen auf der negativen Seite weiter in die Kernströmung herein als auf der positiven, wie in Abb. 84, 85 und 73 erkennbar ist. Die Ungleichmäßigkeit schlägt sich auch in den zeitlich gemittelten Ergebnissen nieder (s. Abb. 42). Die Ausdehnung der instabilen Strukturen in  $x$ -Richtung auf der positiven Seite sind so klein, dass diese von Messstellen mit größeren Abständen zueinander nur noch schwer erfasst werden können (s. Abb. 69 d)).

In Regime *I* verändern die instabilen Seitenschichten ebenfalls zeitlich gemittelte Geschwindigkeitsprofile wie beispielsweise in Abb. 38. In diesem Regime kann eine zunehmende Tendenz hin zu einem anisotropen Strömungszustand beobachtet werden (s. Abb. 55 b), 55 c)). Mit zunehmender Reynolds-Zahl bilden sich die instabilen Strukturen stärker aus (s. Abb. 51, 52). Die Untersuchung der Fluktuation der Stromdichte  $j'_y = \frac{\Delta\phi'}{\Delta y}$  an der Seitenwand weist auf eine Ausbildung von Q2D-Strukturen in den seitenwandnahen Bereichen sowohl auf der positiven als auch auf der negativen Seite hin (s. bspw. Abb. 67 b)).

In Regime *II* entstehen auf der positiven Seite große Strukturen, die sich entlang des Magnetfeldes anordnen (s. Abb. 63) und sich ein Q2D-Strömungszustand ausbildet (s. Abb. 55 b), 55 c)). Die Energie der Strukturen liegt hierbei im Wesentlichen in den unteren Frequenzen (s. Abb. 51, 52). Dabei fällt eine stark ungleichmäßige Verteilung auf, sodass die instabilen Strukturen von der positiven Seite bis über  $z < 0$  (s. Abb. 71 b), 72 b)) bzw.  $s < 0$  (s. Abb. 78, 82) reichen. Die großen instabilen Strukturen werden von kleineren gefolgt, die eine gegenläufige Drehbewegung aufweisen. Die Untersuchungen auf den Seitenwänden deuten auf die Ausbildung von Q2D-Strukturen höherer Moden hin (s. Abb. 66 c)).

Für  $Ha = 200$  kann keine Zuordnung zu Regime *I* oder *II* vorgenommen werden. Obwohl Hinweise für einen Q2D-Strömungszustand in Abb. 55 a) und 56 dargestellt werden, liegt selbst für hohe Reynolds-Zahlen eine schwache Korrelation zwischen dem Signal der Sonde und der Hartmann-Wand vor (s. Abb. 63). Weiterhin zeigt sich, dass die instabilen Strukturen über den gesamten Querschnitt verteilt (s. Abb. 70 a), 74) und nicht auf die Seitenschichten beschränkt sind.

Die instabilen Strukturen werden in Regime 0 und *II* nicht-symmetrisch ausgebildet. So zeigt sich in Regime *II* die Instabilität insbesondere auf der positiven Seite, in Regime 0 ist die Instabilität wiederum stärker auf der negativen Seite ausgeprägt. Die Tatsache der Ausbildung der Instabilität in verschiedenen Regimen jeweils auf der einen und auf der anderen Seite zeigt, dass es sich um einen physikalischen Effekt handeln muss und nicht um einen Fehler der Messtechnik.

Ferner ist die Ausprägung der Instabilität unabhängig von der Position der Sonde. Hierzu sind in den Abb. 92 und 93 die Varianzen von Potentialsignalen auf der Hartmann-Wand auf der negativen als auch auf der positiven Seite dargestellt. Deutlich wird, dass die Varianzen einen überwiegend konstanten Verlauf für verschiedene Positionen der Sonde haben. Somit kann definitiv ausgeschlossen werden, dass die Position der Sonde einen messbaren Einfluss auf die Entstehung der beobachteten Instabilitäten hat.

In Abb. 94 finden sich vereinfachte Illustrationen der drei Regime, in denen die nicht-symmetrische Verteilung und die Ausdehnung der instabilen Strukturen deutlich wird. Die Seitenschichten bilden unabhängig voneinander instabile Strukturen aus, wie im Vergleich der

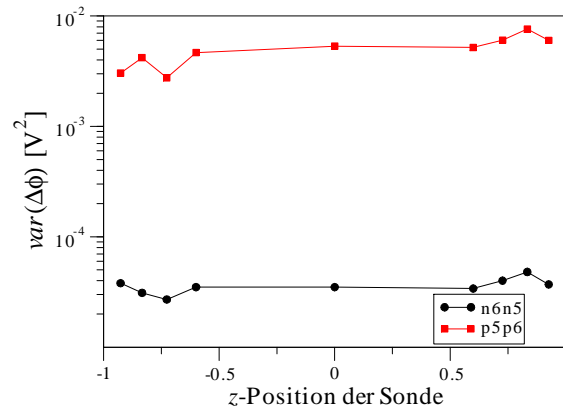


Abbildung 92: Varianz von  $\Delta\phi'$  auf der Hartmann-Wand in Abhängigkeit der Sondenposition  $z$  für  $Ha = 1000$ ,  $Re = 35000$

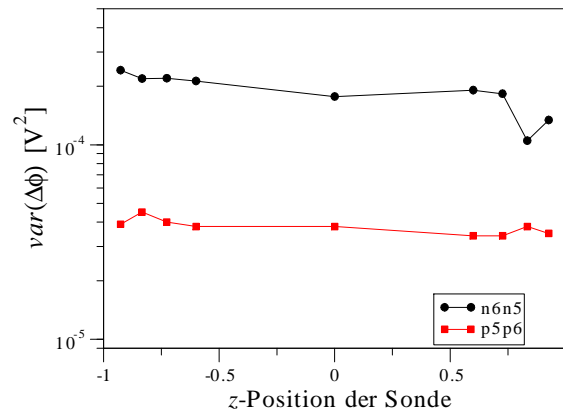


Abbildung 93: Varianz von  $\Delta\phi'$  auf der Hartmann-Wand in Abhängigkeit der Sondenposition  $z$  für  $Ha = 2000$ ,  $Re = 2500$



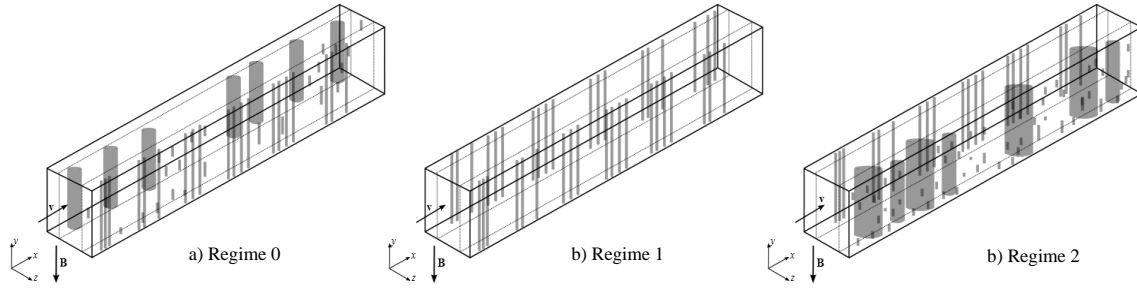


Abbildung 94: Vereinfachte Illustration der drei Regime mit Wirbelstrukturen (grau) verschiedener Ausdehnungen entlang des Magnetfeldes

Signale auf der positiven und negativen Seitenwand in den Abb. 66 und 67 erkennbar ist. Jedoch gilt hierbei zu beachten, dass in Regime 0 die großen Strukturen auf der negativen Seite wie eine Versperrung wirken, sodass die Strömung auf die positive Seite ausweicht (s. Abb. 42). Somit ist die lokale Reynolds-Zahl in der Seitenschicht auf der positiven Seite deutlich erhöht, sodass  $Re > Re_{krit,1}$  gilt und ebenfalls instabile Strukturen ähnlich zu Regime 1 ausgebildet werden (s. Abb. 68 a)). Für Regime 0 sind entsprechend der Ergebnisse in Abb. 48 f) für  $\Delta\phi'_y$  kleinere Strukturen auf der positiven Seite eingezeichnet, die jedoch noch nicht so groß sind, dass sie die Hartmann-Wand erreichen (s. Abb. 55 d), 62). Zudem wird für Regime 2 gezeigt, dass neben den großen Strukturen auch noch kleinere Strukturen unterschiedlicher Größe vorliegen (s. Abb. 66 c)).

## 4.4 Teststrecke mit $d=1/3$

### 4.4.1 Zeitgemittelte Ergebnisse

In den Abb. 95 bis 98 werden zeitgemittelte Geschwindigkeitsverläufe bei verschiedenen Hartmann- und Reynolds-Zahlen dargestellt, die mit einer weiteren Teststrecke ermittelt worden sind, deren Verhältnis  $d = \frac{\text{Breite}}{\text{Höhe}} = 1/3$  entspricht.

Für kleine Reynolds-Zahlen ist eine sehr gute Übereinstimmung der Geschwindigkeitsverläufe im Vergleich zu den laminaren, theoretischen Ergebnissen erkennbar. Ähnlich wie im Falle von  $d = 1$  zeigt sich, dass mit zunehmender Reynolds-Zahl die maximalen Geschwindigkeiten in den Jets abnehmen und die Seitenschichten aufdicken. Weiterhin wird eine nicht-symmetrische Ausbildung der Instabilität im Falle von  $Ha = 2000$  in Abb. 98 deutlich. Während die Seitenschicht auf der negativen Seite für die untersuchten Reynolds-Zahlen stabil zu bleiben scheint, bildet sich eine instabile Seitenschicht auf der positiven Seite bereits bei kleineren Reynolds-Zahlen aus. Dabei ist erkennbar, dass für  $Re = 5054$  die Seitenschicht weiter ausgedehnt ist, als für  $Re = 25782$ , sodass die Strömung ihre nicht-symmetrische Ausprägung zunehmend wieder verliert. Im Geschwindigkeitsprofil für  $Re = 25782$  sind die Untergeschwindigkeiten bei  $z \approx \pm 0.2$  nicht ausgeprägt, was auf instabile Seitenschichten hinweist.

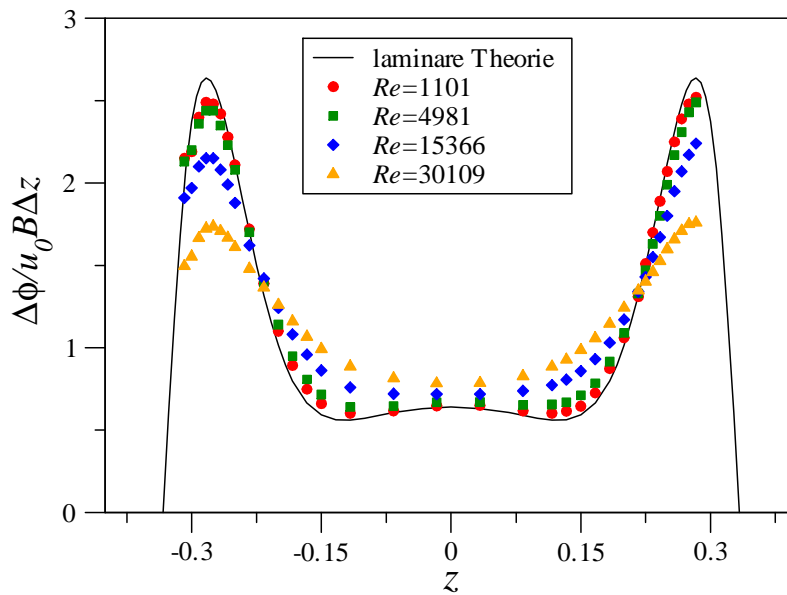


Abbildung 95: Geschwindigkeitsverlauf für  $Ha = 500$

Zu dieser nicht-symmetrischen Ausbildung kommt es auch dann, wenn zunächst ein symmetrischer Strömungszustand bei einer kleinen Hartmann-Zahl betrachtet wird und anschließend die Hartmann-Zahl erhöht wird. Hierzu wurde eine Untersuchung angestellt (s. Abb. 99), bei der zunächst eine Messung durchgeführt wurde für  $Ha = 1500$ ,  $Re = 14875$ . Anschließend wurde das Magnetfeld gesteigert, sodass  $Ha = 2000$  erreicht wurde. Zusätzlich wurde die Stromzufuhr

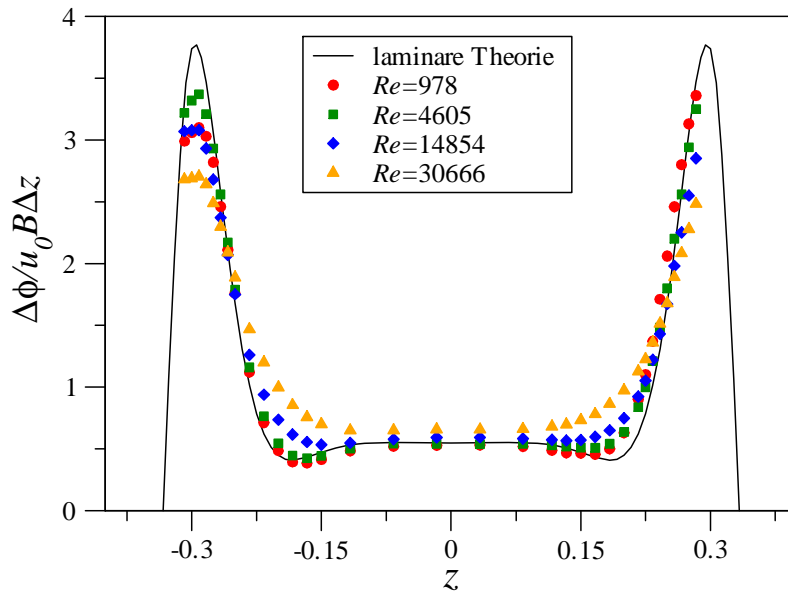


Abbildung 96: Geschwindigkeitsverlauf für  $Ha = 1000$

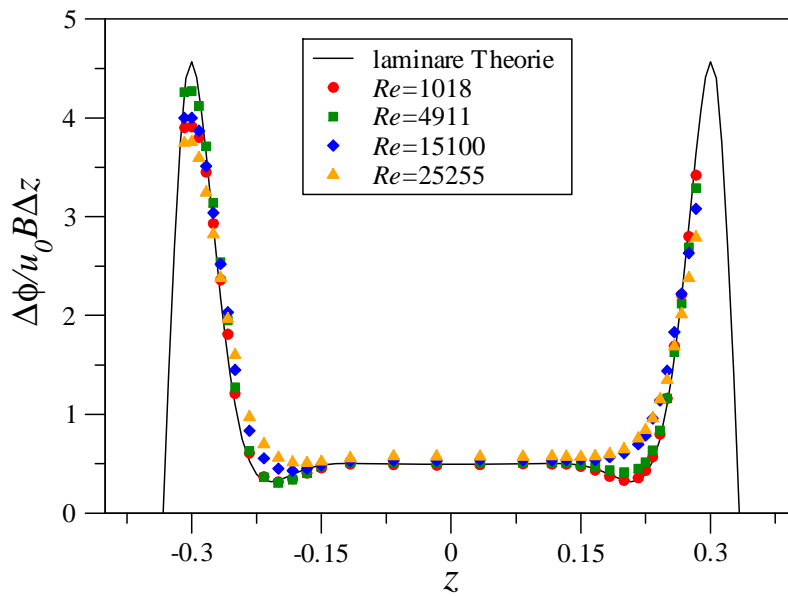


Abbildung 97: Geschwindigkeitsverlauf für  $Ha = 1500$

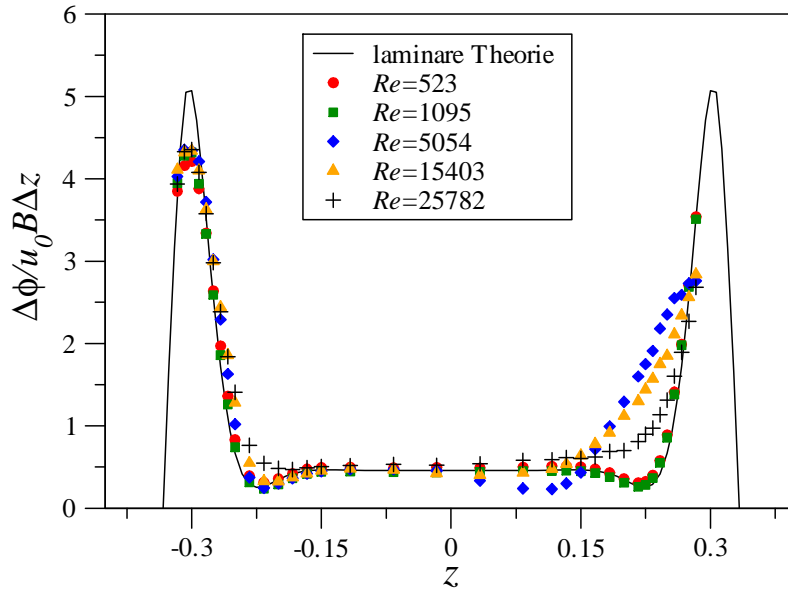


Abbildung 98: Geschwindigkeitsverlauf für  $Ha = 2000$

für die elektromagnetischen Pumpen langsam erhöht, um die Reynolds-Zahl annähernd gleich zu halten. In Abb. 99 sind die experimentellen Ergebnisse für  $Ha = 1500$ ,  $Re = 14875$  und  $Ha = 2000$ ,  $Re = 14626$ , sowie die analytischen Lösungen für  $Ha = 1500$ ,  $2000$  dargestellt und das Ergebnis für  $Ha = 2000$ ,  $Re = 15403$ , das auch in Abb. 98 gezeigt wird. Dabei ist nahezu kein Unterschied zwischen dem Ergebnis für  $Ha = 2000$ ,  $Re = 14626$  und  $Ha = 2000$ ,  $Re = 15403$  erkennbar.

Auch der umgekehrte Fall wird betrachtet (s. Abb. 100). Es wird zunächst von einem Geschwindigkeitsverlauf mit einer nicht-symmetrischen Ausbildung der Instabilität für  $Ha = 2000$ ,  $Re = 15466$  ausgegangen. Dabei werden Magnetfeldstärke und Stromzufuhr so angepasst, dass ein Geschwindigkeitsverlauf für  $Ha = 1500$ ,  $Re = 15004$  untersucht werden konnte. Die Ergebnisse stehen wieder im Vergleich zu einer weiteren Messung mit ähnlicher Parameterkonfiguration ( $Ha = 1500$ ,  $Re = 15100$ ). Auch für diesen Fall liegt keine Veränderung des Geschwindigkeitsverlauf hin zu einer nicht-symmetrischen Ausbildung der Instabilität vor.

In Abb. 101 werden dimensionslose Druckgradienten dargestellt. Dabei zeigt sich ein linearer Verlauf, der auch für große Reynolds-Zahlen beibehalten wird. Auch für Reynolds-Zahlen bei denen die laminare Strömung instabil ist oder eventuell sogar turbulent, verhalten sich die Druckgradienten entsprechend den laminaren Vorhersagen. Im Vergleich zu den Druckgradienten in einer Teststrecke mit  $d = 1$  aus Abb. 44 wird klar, dass die Druckgradienten in einem Kanal mit  $d = 1/3$  geringer sind. Denn da das Verhältnis aus Kernströmungs- und Seitenschichtenbereich kleiner ist, fließt ein größerer Anteil des Volumenstroms durch die Seitenschichten, in denen  $\mathbf{j}$  eher parallel zu  $\mathbf{B}$  verläuft und somit die bremsenden Lorentzkräfte kleiner sind.

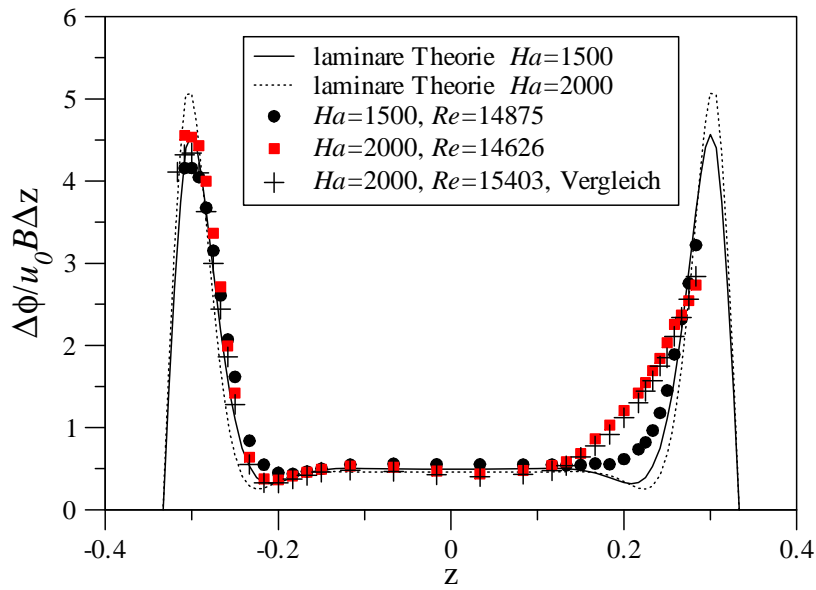


Abbildung 99: Untersuchung zum Übergang einer symmetrischen Strömung ( $Ha = 1500, Re = 14875$ ) in eine nicht-symmetrische Strömung ( $Ha = 2000, Re = 14626$ )

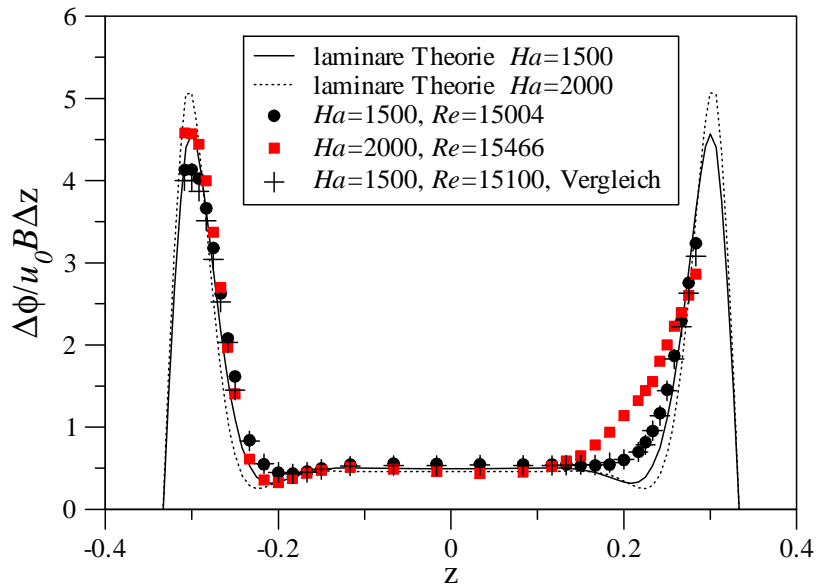


Abbildung 100: Untersuchung zum Übergang einer nicht-symmetrischen Strömung ( $Ha = 2000, Re = 15466$ ) in eine symmetrische Strömung ( $Ha = 1500, Re = 15004$ )

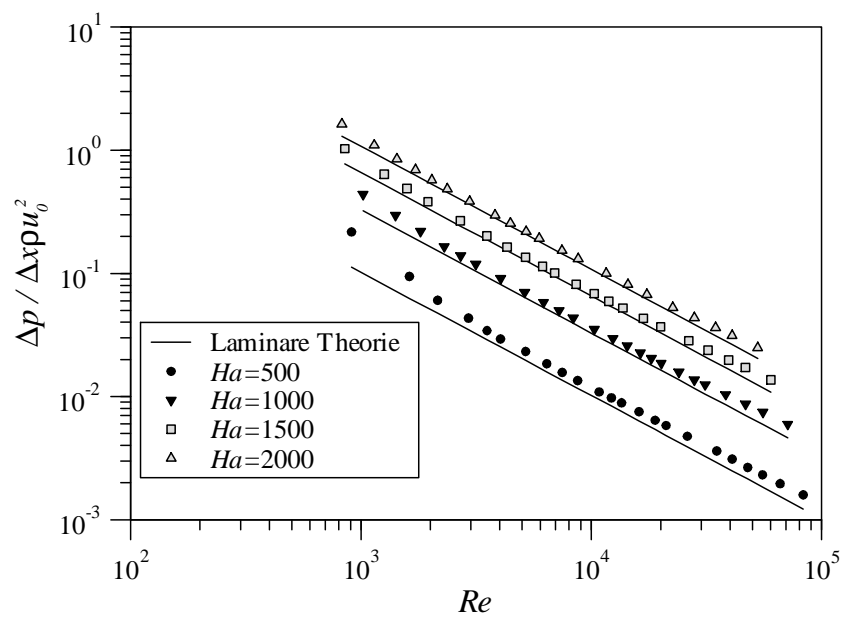


Abbildung 101: Dimensionslose Druckgradienten für verschiedene  $Ha$  und  $Re$  des Experiments (Symbole) im Vergleich mit dazugehörigen analytischen Ergebnissen (Linien) für laminare Strömungen

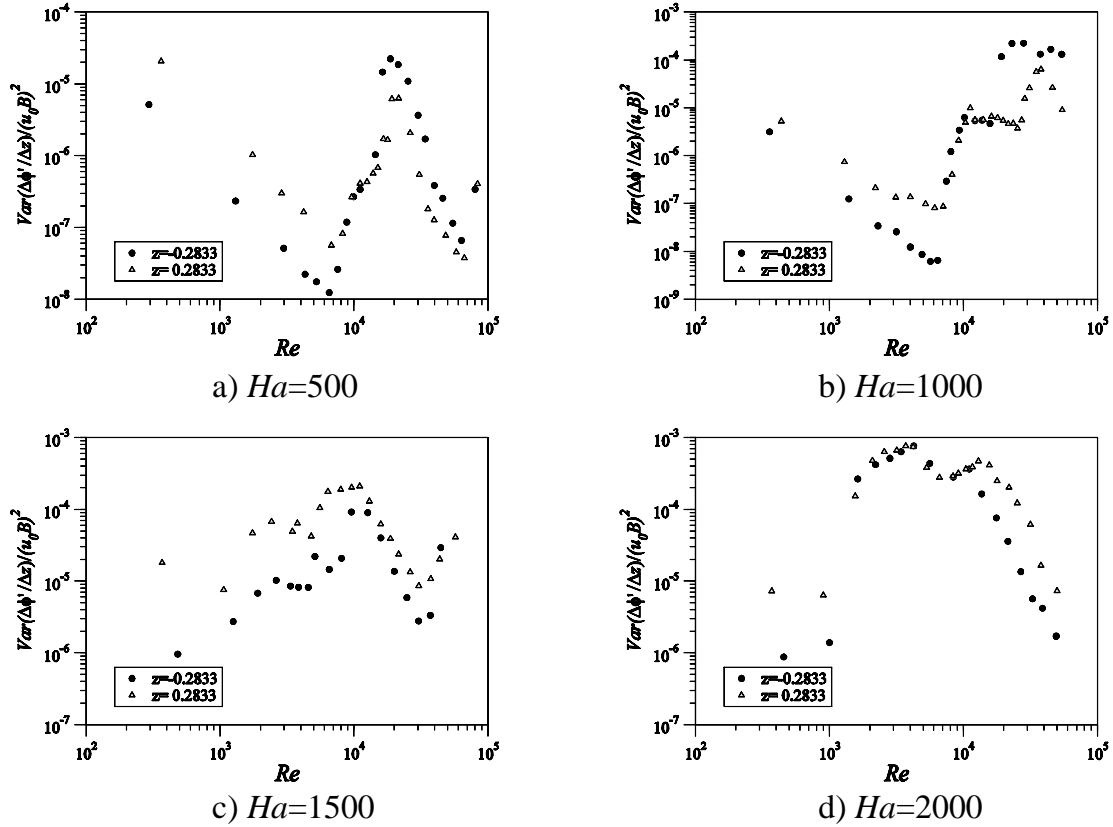


Abbildung 102: Entdimensionierte Varianz der Potentialgradienten der Sonde ( $z = \pm 0.283$ )  $\Delta\phi'/\Delta z$  für verschiedene  $Ha$

#### 4.4.2 Instationäre Ergebnisse

Es werden Stabilitätsgrenzen für Sondensignale bei  $z = 0.283$  und  $z = -0.283$  aus den Varianz Diagrammen ermittelt. In Abb. 102 sind hierzu einige Beispiele gezeigt (s. auch Abb. 112). Die kritischen Reynolds-Zahlen werden analog zum Vorgehen aus Abschnitt 4.3.1 ermittelt. Der Verlauf der entdimensionierten Varianzen in Abb. 112 ist für  $z = -0.283$  und  $z = 0.283$  sehr ähnlich. Dies gilt auch für den Fall einer nicht-symmetrischen Ausbildung der Instabilität (s. Abb. 98) wie in Abb. 102 d) für  $Ha = 2000$  zu sehen ist. Ferner zeigt sich, dass wie für  $Ha = 2000$  im quadratischen Kanal mit  $d = 1$  in Abb. 48 f) die Strömung für  $Ha = 1500$  und  $Ha = 2000$  (Abb. 102 c), d) bereits bei sehr niedrigen Reynolds-Zahlen instabil wird.

In Abb. 103 werden die kritischen Reynolds-Zahlen für verschiedene Hartmann-Zahlen und Sondenpositionen dargestellt. Dabei zeigen sich sehr gute Übereinstimmungen der kritischen Reynolds-Zahlen für die verschiedenen Sondenpositionen.

Es ist ersichtlich, dass  $Re_{krit,1}$  zunächst annähernd konstant ist. Für  $Ha > 500$  nimmt  $Re_{krit,1}$  mit steigender Hartmann-Zahl ab und für hohe Hartmann-Zahlen finden sich so geringe Werte von  $Re_{krit,1}$ , dass die Strömung bereits ab der kleinsten messbaren Reynolds-Zahl instabil wird.  $Re_{krit,2}$  zeigt nahezu gleiche Werte wie in den Ergebnissen für den quadratischen Kanal mit  $d = 1$  in Abb. 49. Weiterhin sind im Vergleich der kritischen Reynolds-Zahlen für den quadratischen Kanal mit  $d = 1$  ähnliche Werte von  $Re_{krit,1}$  für  $Ha \leq 500$  erkennbar. Ferner zeigen sich sehr

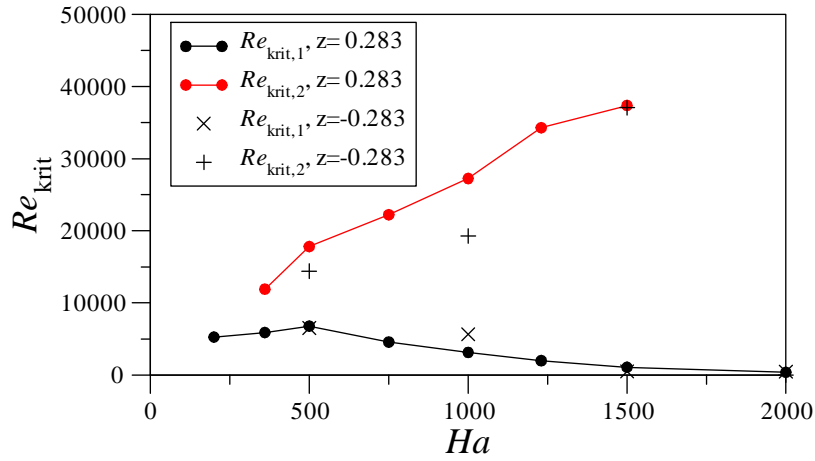


Abbildung 103: Stabilitätsgrenzen für Sondensignal  $\Delta\phi'/\Delta z$

gute Übereinstimmungen für  $Ha > 1340$  zwischen den Werten von  $Re_{krit,1}$  für  $d = 1/3$  und  $Re_{krit,0}$  für  $d = 1$ . Die Ergebnisse zeigen für  $d = 1/3$  kein Regime 0 wie in Abb. 49 für  $d = 1$ . Vielmehr deuten die Ergebnisse für  $Ha = 2000$  aus den Geschwindigkeitsprofilen in Abb. 98 und den Varianzen in Abb. 102 d) darauf hin, dass sich die instabile Strömung zunächst auf der positiven Seite entwickelt und die Strömung zunehmend destabilisiert.



## 5 Zusammenfassung & Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wird ein Experiment vorgestellt, in dem instabile magnetohydrodynamische Strömungen in Rechteckkanälen untersucht werden. Hierzu wurde ein Experiment in einer sogenannten Double Loop Konfiguration aufgebaut, um eine möglichst symmetrische Anströmung zu erreichen. Aus den Messdaten von elektrischen Potentialsignalen können Stabilitätsgrenzen, räumliche Ausdehnungen und Frequenzspektren ermittelt werden. Die wichtigsten Parameter im Experiment sind die Reynolds-Zahl als dimensionsloses Maß für die mittlere Strömungsgeschwindigkeit und die Hartmann-Zahl als Maß für die Stärke des Magnetfeldes.

Neben den instationären Daten werden ferner zeitlich gemittelte Potentialverteilungen entlang der Wände und innerhalb der Strömung mit einer verfahrbaren Sonde gemessen. Mit den Daten der Sonde können Geschwindigkeitsprofile gewonnen werden, die typische Geschwindigkeitsüberhöhungen sogenannte *Jets* in den Seitenschichtbereichen aufzeigen.

Die wesentlichen Ergebnisse der Untersuchung sind:

- Die Betrachtung der zeitlich gemittelten Geschwindigkeitsprofile zeigt, dass bei Erhöhung der Reynolds-Zahl die maximalen Geschwindigkeiten der *Jets* abnehmen und gleichzeitig die *Jet*dicke zunimmt. Dies lässt den Schluss zu, dass die Seitenschichten instabil sind und ein erhöhter Impulsaustausch von den Seitenschichten in den Kernbereich vorherrscht. Diese Änderung ist auch in der Potentialverteilung entlang der Wände erkennbar, sodass gezeigt werden kann, dass der Volumenstrom in den Seitenschichten aufgrund der Instabilitäten mit zunehmender Reynolds-Zahl kleiner wird und mehr Volumenstrom im Kernbereich transportiert wird.  
Weiterhin zeigen die Geschwindigkeitsprofile, dass es zu einer nicht-symmetrischen Ausbildung der *Jets* kommen kann.
- Die Messung der Druckgradienten in der Teststrecke als Funktion der Reynolds-Zahl folgt dem vorhergesagten laminaren Verlauf. Trotz eindeutiger Ausbildung von instabilen Strömungen, gibt es im Verlauf der Druckgradienten keine Anzeichen darauf. Dies steht im Gegensatz zu Beobachtungen aus hydrodynamischen Fragestellungen, in denen der Übergang zu einer instationären Strömung deutlich in den Verläufen der Druckgradienten erkennbar ist.
- Es können drei instabile Strömungsregime (0, *I*, *II*) in Abhängigkeit der Reynolds-Zahl für einen quadratischen Kanal mit  $d = \frac{\text{Breite}}{\text{Höhe}} = 1$  identifiziert werden. Oberhalb der zweiten kritischen Reynolds-Zahl zeigen sich großräumige Strukturen, die sich bevorzugt entlang von Magnetfeldlinien ausdehnen und somit auch auf den Hartmann-Wänden des Kanals messbar sind. Diese großräumigen Strukturen zeigen sich jedoch bevorzugt auf einer Seite, sodass es zu einer nicht-symmetrischen Ausbildung der Instabilitäten kommen kann. Die instabilen Bereiche können hinsichtlich ihres Frequenzspektrums unterschieden werden. Während in Regime *I* ein charakteristischer Frequenzbereich zwischen 10 und 30 Hz ausgebildet ist, zeigt sich in Regime *II*, dass der größte Anteil der Energie in den unteren Frequenzen zu finden ist. In Regime 0 zeigen sich wie in Regime *I* charakteristische Frequenzbereiche, jedoch vergrößert sich der Frequenzbereich mit zunehmender Reynolds-Zahl.

- Für eine Teststrecke mit  $d = 1/3$  zeigen sich deutlich niedrigere Druckgradienten als für eine Teststrecke mit  $d = 1$ . Für hohe Hartmann-Zahlen sind nicht-symmetrische Geschwindigkeitsprofile erkennbar. Weiterhin werden für  $d = 1/3$  zwei instabile Regime mit den Grenzen  $Re_{krit,1}$  und  $Re_{krit,2}$  deutlich. Dabei sind im Vergleich der kritischen Reynoldszahlen zwischen  $d = 1/3$  und  $d = 1$  Übereinstimmungen erkennbar.

In einer zukünftigen Arbeit sollte untersucht werden, wie es zu dem Unterschied zwischen experimentellen Daten und analytischer Lösung bei der Bestimmung von Geschwindigkeitsprofilen in den Seitenschichten kommt. Dabei muss der Frage nachgegangen werden, ob bereits Instabilitäten zur Absenkung der Geschwindigkeit führen oder vielmehr die Sondengeometrie selbst. Denkbar ist hier zunächst eine numerische Simulation, in der auch dreidimensionale Effekte berücksichtigt werden und ferner Experimente mit unterschiedlichen Sondengeometrien. Weiterhin könnten Experimente mit Teststrecken unterschiedlicher Leitfähigkeiten und anderen Geometrien durchgeführt werden.

# A Symbolverzeichnis

## Lateinische Buchstaben

Symbol	Bedeutung	Einheit
$a$	Fourierkoeffizienten	
$A^+, A^-$	Elsasser Variable	
$B$	externes Magnetfeld	T
$c$	dimensionsloser Wandleitparameter	
$d$	Aspektverhältnis	
$f$	Frequenz	Hz
$\mathbf{f}$	volumetrische Kräfte	
$f_G$	Grenzfrequenz	Hz
$Ha$	Hartmann-Zahl	
$j$	elektrische Stromdichte	A/m <sup>2</sup>
$K$	dimensionsloser Druckverlust	
$K_{p,q}$	Korrelationskoeffizient zweier Größen $p$ und $q$	
$l$	Länge	m
$L$	charakteristische Länge	m
$\mathbf{n}$	Normalenvektor	
$N$	Interaktionsparameter	
$P$	Druck	N/m <sup>2</sup>
$Q$	dimensionsloser Volumenstrom	
$r$	Radius	m
$R$	Rauschen	
$Re$	Reynolds-Zahl	
$Re_{krit}$	kritische Reynolds-Zahl	
$t$	Zeit	s
$t_k$	dimensionslose tangentielle Koordinate	
$t_w$	Wanddicke	m
$T$	Temperatur	°C
$u$	Geschwindigkeit in $x$ -Richtung	m/s
$u_0$	Referenzgeschwindigkeit in $x$ -Richtung	m/s
$u_S$	Geschwindigkeit einer Struktur in $x$ -Richtung	m/s
$v$	Geschwindigkeit in $y$ -Richtung	m/s
$\mathbf{v}$	Geschwindigkeitsvektor	m/s
$w$	Geschwindigkeit in $z$ -Richtung	m/s
$x, y, z$	kartesische Koordinaten	

## Griechische Buchstaben

Symbol	Bedeutung	Einheit
$\alpha$	Winkel	
$\alpha_D$	Diffusionsparameter	
$\Gamma$	Randbereich	
$\delta_{Ha}$	Dicke der Hartmann-Schicht	m
$\delta_l$	Dicke der Oxidschicht	m
$\delta_S$	Dicke der Seitenschicht	m
$\kappa$	Kontaktwiderstandsparameter	
$\lambda$	dimensionslose Wellenzahl	
$\mu$	magnetische Permeabilität	Vs/Am
$\nu$	kinematische Viskosität	m <sup>2</sup> /s
$\rho$	Dichte	kg/m <sup>3</sup>
$\sigma$	spezifische elektrische Leitfähigkeit	1/ $\Omega$ m
$\sigma_l$	spezifische elektrische Leitfähigkeit der Oxidschicht	1/ $\Omega$ m
$\tau$	Zeitintervall	s
$\tau_H$	charakteristische Zeit für Hartmann-Braking	s
$\tau_{JD}$	charakteristische Zeit für Joulsche Dissipation	s
$\tau_{To}$	charakteristische Zeit für die Umdrehung eines Wirbels	s
$\tau_\nu$	charakteristische Zeit für die Dämpfung durch Viskosität	s
$\phi$	elektrisches Potential	V
$\Psi$	beliebige Größe	
$\omega$	Wirbelstärke	1/s

## B Statistische Größen zur Beschreibung zufälliger Größen

Für eine beliebige Strömungsgröße gilt

$$\Psi(x, y, z, t) = \bar{\Psi}(x, y, z) + \Psi'(x, y, z, t). \quad (83)$$

Der zeitliche Mittelwert ist definiert durch

$$\bar{\Psi}(x, y, z) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \Psi(x, y, z, t) dt, \quad (84)$$

wobei  $\tau$  dem betrachteten Zeitintervall entspricht. Durch diese Definition ist der Mittelwert des Schwankungsanteils

$$\bar{\Psi}' = 0. \quad (85)$$

Der Schwankungsanteil kann in der Stochastik über Momente charakterisiert werden. Dabei gilt beispielsweise für das zweite Moment, nämlich die Varianz

$$\overline{\Psi'^2} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \Psi'^2 dt, \quad (86)$$

deren Quadratwurzel der Standardabweichung entspricht.

Der zeitliche Mittelwert von Produkten zweier Schwankungsgrößen

$$\overline{\Psi'_1 \Psi'_2} = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \Psi'_1 \Psi'_2 dt \quad (87)$$

wird als Kovarianz bezeichnet. Es kann ein Korrelationskoeffizient mit

$$K_{\Psi'_1 \Psi'_2} = \frac{\overline{\Psi'_1 \Psi'_2}}{\sqrt{\overline{\Psi'^2_1}} \sqrt{\overline{\Psi'^2_2}}} \quad (88)$$

definiert werden, der ein Maß für die Ähnlichkeit zweier Größen  $\Psi'_1$  und  $\Psi'_2$  ist. Dabei wird ein Wert von  $K_{\Psi'_1 \Psi'_2} = 1$  bei identischen Signalen,  $K_{\Psi'_1 \Psi'_2} = -1$  bei identischen, jedoch beispielsweise gegenphasig schwingenden Signalen und  $K_{\Psi'_1 \Psi'_2} = 0$  bei unähnlichen Signalen angenommen.

Mit Hilfe einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF<sup>5</sup>) kann angegeben werden, wie häufig eine Funktion  $\Psi$  einen bestimmten Wert annimmt. Dabei wird die PDF so normiert, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} PDF(\Psi) d\Psi = 1 \quad (89)$$

gilt. Häufig kann diese durch eine Normalverteilung mit

$$PDF(\Psi) = \frac{1}{\sqrt{\overline{\Psi'^2}} \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-(\Psi - \bar{\Psi})^2}{2\overline{\Psi'^2}}\right) \quad (90)$$

beschrieben werden.

Zur Abschätzung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion können Histogramme oder Häufigkeitsverteilungen verwendet werden. Hierfür werden sogenannte Klassen für bestimmte Wertebereiche definiert. Dadurch können die jeweiligen Werte den Klassen zugeordnet werden.

---

<sup>5</sup> engl. Probability density function

## C Potentialverteilungen

In diesem Abschnitt sind die Daten zur Verteilung des Wandpotentials für verschiedene Hartmann-Zahlen dargestellt, die für die Ermittlung des Volumenstroms in den Seitenschichten in Abb. 43 verwendet worden ist.

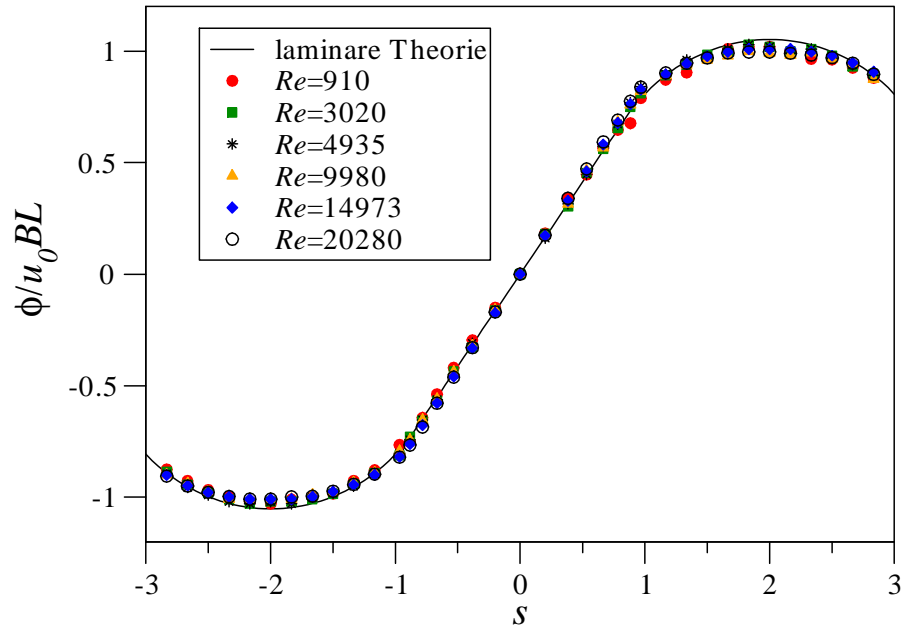


Abbildung 104: Verteilung des Wandpotentials für  $Ha = 500$

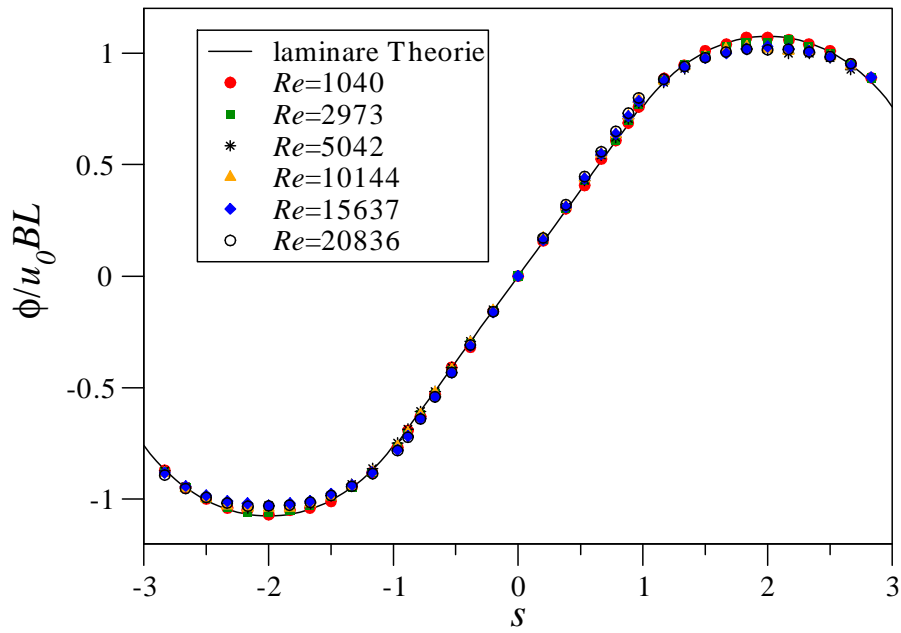


Abbildung 105: Verteilung des Wandpotentials für  $Ha = 1000$

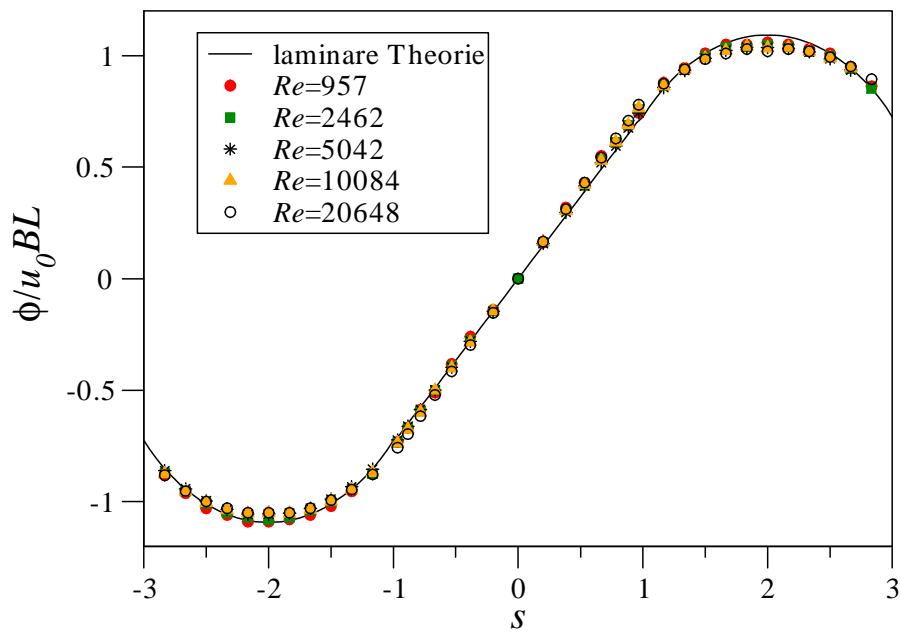


Abbildung 106: Verteilung des Wandpotentials für  $Ha = 1500$

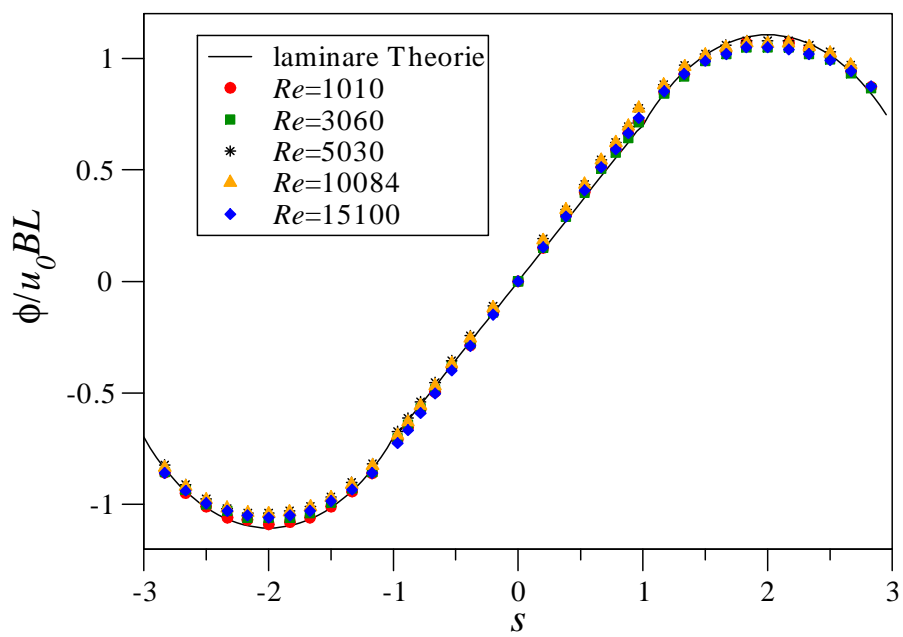


Abbildung 107: Verteilung des Wandpotentials für  $Ha = 2000$



## D Diagramme Varianz-Analysen

### D.1 Entdimensionierte Varianz Analysen für einen Kanal mit $d = 1$

In diesem Abschnitt werden Analysen entdimensionierter Varianzen zur Erstellung des Stabilitätsdiagramms in Abb. 49 verwendet wurden.

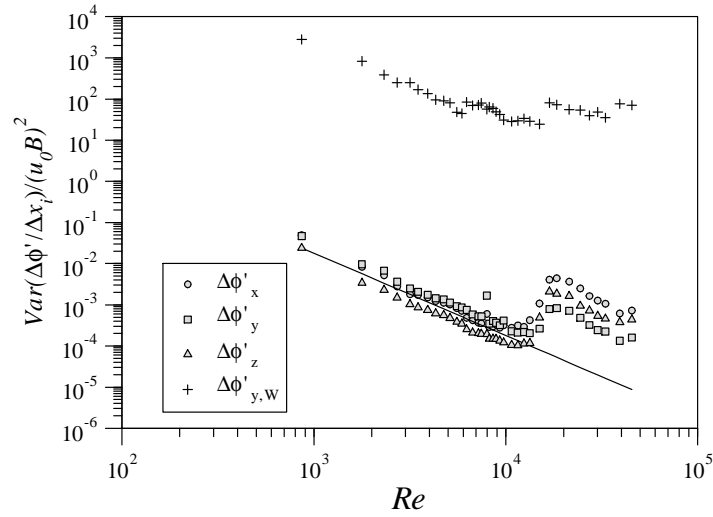


Abbildung 108: Entdimensionierte Varianz der Potentialgradienten der Sonde ( $z = 0.967$ )  $\Delta\phi'_z/\Delta z$ ,  $\Delta\phi'_x/\Delta x$ ,  $\Delta\phi'_y/\Delta y$  und des Potentialgradienten an der Seitenwand (p13-p18)  $\Delta\phi'_{y,W}/\Delta y_w$  ( $\Delta z = 0.0016$ ,  $\Delta x = 0.0008$ ,  $\Delta y = 0.0016$ ,  $\Delta y_w = 0.025$ ) für  $Ha = 380$

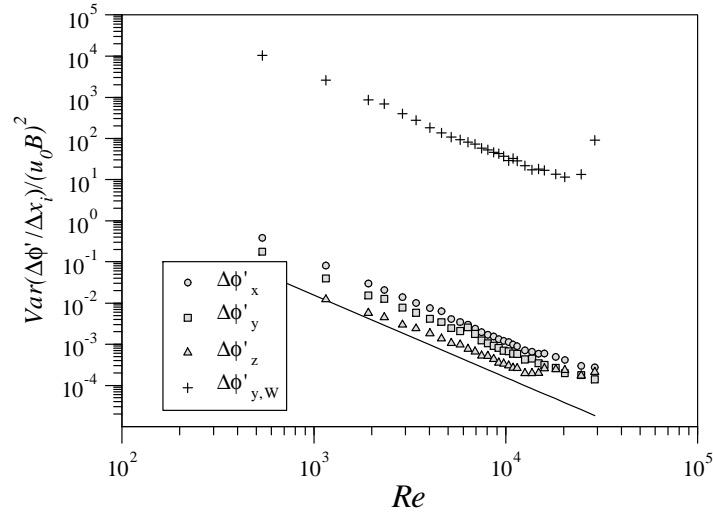


Abbildung 109: Entdimensionierte Varianz der Potentialgradienten der Sonde ( $z = 0.967$ )  $\Delta\phi'_z/\Delta z$ ,  $\Delta\phi'_x/\Delta x$ ,  $\Delta\phi'_y/\Delta y$  und des Potentialgradienten an der Seitenwand (p13-p18)  $\Delta\phi'_{y,W}/\Delta y_w$  ( $\Delta z = 0.0016$ ,  $\Delta x = 0.0008$ ,  $\Delta y = 0.0016$ ,  $\Delta y_w = 0.025$ ) für  $Ha = 1230$

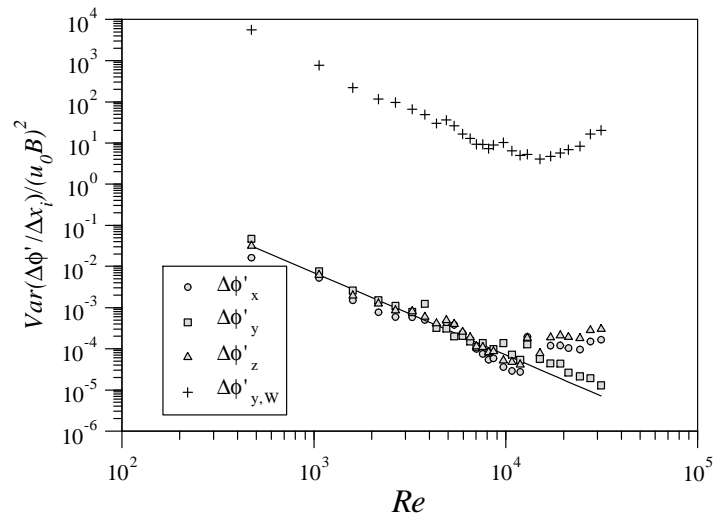


Abbildung 110: Entdimensionierte Varianz der Potentialgradienten der Sonde ( $z = 0.967$ )  $\Delta\phi'_z/\Delta z$ ,  $\Delta\phi'_x/\Delta x$ ,  $\Delta\phi'_y/\Delta y$  und des Potentialgradienten an der Seitenwand (p13-p18)  $\Delta\phi'_{y,W}/\Delta y_w$  ( $\Delta z = 0.0016$ ,  $\Delta x = 0.0008$ ,  $\Delta y = 0.0016$ ,  $\Delta y_w = 0.025$ ) für  $Ha = 1350$

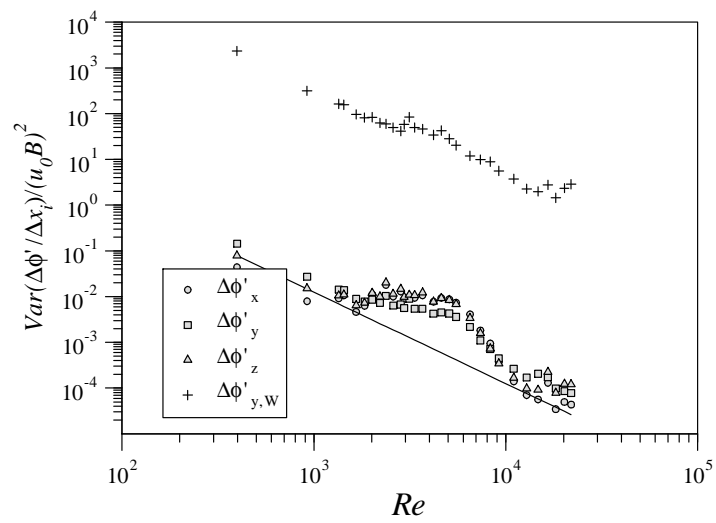


Abbildung 111: Entdimensionierte Varianz der Potentialgradienten der Sonde ( $z = 0.967$ )  $\Delta\phi'_z/\Delta z$ ,  $\Delta\phi'_x/\Delta x$ ,  $\Delta\phi'_y/\Delta y$  und des Potentialgradienten an der Seitenwand (p13-p18)  $\Delta\phi'_{y,W}/\Delta y_w$  ( $\Delta z = 0.0016$ ,  $\Delta x = 0.0008$ ,  $\Delta y = 0.0016$ ,  $\Delta y_w = 0.025$ ) für  $Ha = 1750$

## D.2 Entdimensionierte Varianz Analysen für einen Kanal mit $d = 1/3$

In diesem Abschnitt werden Analysen entdimensionierter Varianzen zur Erstellung des Stabilitätsdiagramms in Abb. 103 verwendet wurden.

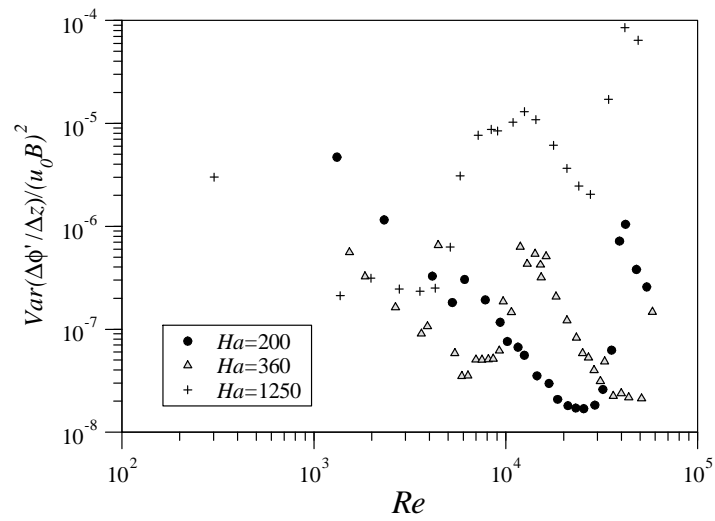


Abbildung 112: Entdimensionierte Varianz der Potentialgradienten der Sonde ( $z = 0.283$ )  $\Delta\phi'_z/\Delta z$  für verschiedene  $Ha$

## E Messstellen auf den Kanalwänden für einen Kanal mit $d = 1$

### E.1 Messstellenposition auf der Hartmann-Wand

Bezeichnung	$x$ in mm	$z$ in mm
n7	175	-29
n6	175	-26.5
n5	175	-23.5
n4	175	-20
n3	175	-16
n2	175	-11.5
n1	175	-6
Ref	175	0
p1	175	6
p2	175	11.5
p3	175	16
p4	175	20
p5	175	23.5
p6	175	26.5
p7	175	29

## E.2 Messstellenposition auf den Seitenwänden

Bezeichnung	$x$ in mm	$y$ in mm
n8, p8	175	9
n9, p9	175	14
n10, p10	175	19
n11, p11	175	24
n12, p12	175	29
n13, p13	175	34
n14, p14	175	39
n15, p15	175	44
n16, p16	175	49
n17, p17	175	54
n18, p18	175	59
n19, p19	191	9
n20, p20	191	14
n21, p21	191	19
n22, p22	191	24
n23, p23	191	29
n24, p24	191	34
n25, p25	191	39
n26, p26	191	44
n27, p27	191	49
n28, p28	191	54
n29, p29	191	59

Bezeichnung	$x$ in mm	$y$ in mm
A, p13	175	34
B	177	34
C	179	34
D	181	34
E	183	34
F	185	34
G	187	34
H	189	34
I, p24	191	34
J	195	34
K	199	34
L	203	34
M	207	34
N	215	34
O	223	34
P	231	34
Q	239	34
R	255	34
S	271	34
T	287	34
U	303	34
V	187	34
W	187	34
X	335	34
Y	367	34
Z	399	34

## Literatur

- Aleman, A., Moreau, R., Sulem, P. L. und Frisch, U.: 1979, Influence of an external magnetic field on homogeneous MHD turbulence, *Journal de Mécanique* **18**(2), 277–313.
- Barleon, L., Mack, K.-J. und Stieglitz, R.: 1996, The MEKKA-facility a flexible tool to investigate MHD-flow phenomena, *Technical Report FZKA 5821*, Forschungszentrum Karlsruhe.
- Branover, H.: 1978, *Magnetohydrodynamic flow in ducts*, John Wiley & Sons, New York, Toronto.
- Brouillette, E. C. und Lykoudis, P. S.: 1967, Magneto-fluid-mechanic channel flow. I. Experiment, *The Physics of Fluids* **10**(4), 995–1001.
- Bühler, L.: 1996, Instabilities in quasi-two-dimensional magnetohydrodynamic flows, *Journal of Fluid Mechanics* **326**, 125–150.
- Bühler, L., Mistrangelo, C. und Koehly, C.: 2012, Layout of an experimental liquid metal circuit based on MHD considerations, *IEEE Transactions on Plasma Science* **40**(3), 590 – 595.
- Bühler, L. und Horanyi, S.: 2009, Measurements of time-dependent liquid metal magnetohydrodynamic flows in a flat rectangular duct, *Fusion Engineering and Design* **84**, 518–521.
- Bühler, L. und Molokov, S.: 1994, Magnetohydrodynamic flows in ducts with insulating coatings, *Magnetohydrodynamics* **30**(4), 439–447.
- Burr, U.: 1998, *Turbulente Transportvorgänge in magnetohydrodynamischen Kanalströmungen*, Dissertation, Universität Karlsruhe. Tech. Rep. FZKA 6038, Forschungszentrum Karlsruhe.
- Burr, U., Barleon, L., Müller, U. und Tsinober, A. B.: 2000, Turbulent transport of momentum and heat in magnetohydrodynamic rectangular duct flow with strong side wall jets, *Journal of Fluid Mechanics* **406**, 247–279.
- Bühler, L., Chowdhury, V. und Mistrangelo, C.: 2016, Experimental investigation of instabilities in Hunt-type flows, *10th PAMIR International Conference - Fundamental and Applied MHD*.
- Chang, C. und Lundgren, S.: 1961, Duct flow in magnetohydrodynamics, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* **XII**, 100–114.
- Chowdhury, V., Bühler, L., Mistrangelo, C. und Brinkmann, H.-J.: 2015, Experimental study of instabilities in magnetohydrodynamic boundary layers, *Fusion Engineering and Design* **98-99**, 1751–1754.
- Chowdhury, V., Bühler, L. und Mistrangelo, C.: 2014, Influence of surface oxidation on electric potential measurements in mhd liquid metal flows, *Fusion Engineering and Design* **89**(7-8), 1299–1303.
- Davidson, P. A.: 1995, Magnetic damping of jets and vortices, *Journal of Fluid Mechanics* **299**, 153–186.



- Debray, F.: 1997, Measurement of the onset of MHD-turbulence caused by a step in the electrical conductivity in the channel walls of GALINKA II and comparison with theoretical models, *Technical Report FZKA 5972*, Forschungszentrum Karlsruhe.
- Eckert, S.: 1998, *Experimentelle Untersuchung turbulenter Flüssigmetall- und Flüssigmetall-Gas-Strömungen in einem äußeren Magnetfeld*, Dissertation, Forschungszentrum Rossendorf.
- Gelfgat, Y. M., Dorofeev, V. S. und Shcherbinin, E. V.: 1971, Experimental investigation on the velocity structure of an MHD flow in a rectangular channel with two conducting walls, *Magnetohydrodynamics* **7**(1), 26–29.
- Hartmann, J.: 1937, Hg-Dynamics I, Theory of the laminar flow of an electrically conductive liquid in a homogeneous magnetic field, *Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Matematisk-fysiske Meddelelser*. **XV**(6), 1–27.
- Hartmann, J. und Lazarus, F.: 1937, Hg-Dynamics II, Experimental investigations on the flow of mercury in a homogeneous magnetic field, *Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Matematisk-fysiske Meddelelser*. **XV**(7), 1–45.
- Hunt, J. C. R.: 1965, Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts, *Journal of Fluid Mechanics* **21**, 577–590.
- Kinet, M., Knaepen, B. und Molokov, S.: 2009, Instabilities and transition in magnetohydrodynamic flows in ducts with electrically conducting walls, *Physical Review Letters* **103**, 154501.
- Kolesnikov, Y. B.: 1972, Two-dimensional turbulent flow in a channel with inhomogeneous electrical conductivity, *Magnetohydrodynamics* **8**(3), 308–312.
- Lingwood, R. J. und Alboussière, T.: 1999, On the stability of the Hartmann layer, *Physics of Fluids* **11**(8), 2058–2068.
- Lock, R. C.: 1955, The stability of the flow of an electrically conducting fluid between parallel planes under a transverse magnetic field, *Proceedings of the Royal Society of London* **233**, 105–125.
- Mistrangelo, C. und Bühler, L.: 2008, Perturbations of MHD flows caused by the presence of an electric potential probe, *Proceedings of the 7th Pamir International Conference, Presqu'île de Giens, France September 8-12*, Vol. 2, pp. 575–580.
- Moreau, R.: 1990, *Magnetohydrodynamics*, Kluwer Academic Publisher.
- Morley, N. B., Burris, J., Cadwallader, L. C. und Nornberg, M. D.: 2008, GaInSn usage in the research laboratory, *Review of Scientific Instruments* **79**(5).
- Mück, B.: 2000, Three dimensional simulation of MHD side-layer instabilities, *Fourth International PAMIR Conference on Magnetohydrodynamic at Dawn of Third Millennium*, Vol. 1, PAMIR, Giens, France, pp. 297–302.
- Müller, U. und Bühler, L.: 2001, *Magnetofluidynamics in Channels and Containers*, Springer, Wien, New York. ISBN 3-540-41253-0.

- Pesch, B.: 2003, *Bestimmung der Messunsicherheit nach GUM*, Grundlagen der Metrologie, Books on Demand, Norderstedt.
- Platnieks, I. A. und Freiberg., Y. Z.: 1972, Turbulence and some problems in the stability of flows with M-shaped velocity profiles, *Magnetohydrodynamics* **8**(2), 164–168.
- Plevachuk, Y., Sklyarchuk, V., Eckert, S., Gerbeth, G. und Novakovic, R.: 2014, Thermophysical properties of the liquid Ga-In-Sn eutectic alloy, *Journal of Chemical and Engineering Data* **59**(3), 757–763.
- Priede, J., Aleksandrova, S. und Molokov, S.: 2010, Linear stability of Hunt’s flow, *Journal of Fluid Mechanics* **649**, 115–134.
- Reed, C. B. und Picologlou, B. F.: 1989, Side wall flow instabilities in liquid metal MHD flow under blanket relevant conditions, *Fusion Technology* **15**, 705–715.
- Samad, S. A.: 1985, Effect of contact resistance on steady MHD flows through circular pipes having constant conductivity and finite wall thickness, *International Journal of Engineering Science* **23**(9), 969–974.
- Schlichting, H. und Gersten, K.: 2006, *Grenzschichttheorie*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- Shercliff, J. A.: 1965, *A Textbook of Magnetohydrodynamics*, Pergamon Press, Oxford.
- Smolentsev, S., Vetcha, N. und Moreau, R.: 2012, Study of instabilities and transitions for a family of quasi-two-dimensional magnetohydrodynamic flows based on a parametrical model, *Physics of Fluids* **24**, 024101.
- Sommeria, J. und Moreau, R.: 1982, Why, how, and when MHD turbulence becomes two-dimensional, *Journal of Fluid Mechanics* **118**, 507–518.
- Taylor, J.: 1997, *An introduction to error analysis : the study of uncertainties in physical measurements*, 2. edn, University Science, Sausalito, Calif.
- Thomauske, K., Barleon, L., Höschele, E., Jedlitschka, B., Krebs, L., Mack, K. J., Neitzel, H. J. und Rapp, W.: 1988, Messung der räumlichen Verteilung des Magnetfeldes im MA-Magneten, *Technical Report Primärbericht, IRB-Nr. 541/1988*, Forschungszentrum Karlsruhe.
- Ting, A. L., Walker, J. S., Moon, T. J., Reed, C. B. und Picologlou, B. F.: 1991, Linear stability analysis for high-velocity boundary layers in liquid-metal magnetohydrodynamic flows, *Int. J. Engng. Sci.* **29**(8), 939–948.
- Young, J., Smolentsev, S. und Abdou, M.: 2014, Study of instabilities in a quasi-2d MHD duct flow with an inflectional velocity profile, *Fusion Engineering and Design* **89**(7-8), 1163–1167.