

# Turnpike-Aussagen in der Portfolio-Optimierung

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

(Dr. rer. nat.)

an der Fakultät für Mathematik  
des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)  
genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Math. Stefanie Ulrike Grether  
aus Karlsruhe

Tag der mündlichen Prüfung: 21. Dezember 2016

Referentin: Prof. Dr. Nicole Bäuerle  
Korreferent: Prof. Dr. Norbert Henze

*Für meine Eltern.*

## Danksagung

Im besonderen Maße möchte ich mich bei Frau Prof. Dr. Nicole Bäuerle für die Möglichkeit bedanken, diese Arbeit schreiben zu können. Insbesondere danke ich Ihr für die großartige Unterstützung in den letzten Jahren. Ich möchte mich bei Ihr für die vielen produktiven Gespräche und wertvollen Hinweise sowie für die spannende Zeit am Institut für Stochastik bedanken. Ganz besonders danke ich Ihr für Ihre Hilfsbereitschaft und Geduld und dafür, dass Sie in den letzten Jahren immer ein offenes Ohr für mich hatte.

Herrn Prof. Dr. Norbert Henze möchte ich ganz herzlich für die Übernahme des Korreferats dieser Arbeit danken.

Ich bin dankbar, dass ich ein Jahr als Mitarbeiter am Institut für Stochastik arbeiten konnte. Die Kombination aus Forschung und Lehre war eine spannende Herausforderung, bei der ich viel gelernt habe und an die ich sehr gerne zurückdenke. Ich möchte mich bei meinen ehemaligen Kollegen für die zahlreichen unvergesslichen Momente bedanken.

Ich danke meiner Familie und meinen Freunden für die Unterstützung in den letzten Jahren. Von ganzem Herzen danke ich meinen Eltern Gabriele Grether und Dr. Dieter Grether und meinem Bruder Nicolai Grether für ihre Unterstützung und ihre Liebe. Ich danke Dr. Anton Popp, der zur richtigen Zeit immer die richtigen Worte gefunden hat.

Karlsruhe, 6. Januar 2017

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Der Begriff ‚Turnpike‘ . . . . .	1
1.2	Überblick über den Aufbau dieser Arbeit . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Einführung</b>	<b>7</b>
2.1	Einführung in den dieser Arbeit zu Grunde liegenden Finanzmarkt . . . . .	7
2.1.1	Das partiell beobachtbare Finanzmarktmodell . . . . .	7
2.2	Einführung in die klassische Erwartungswert-Nutzentheorie . . . . .	10
2.2.1	Das Optimierungsproblem im partiell beobachtbaren Finanzmarktmodell . . . . .	10
2.3	Einführung in die Choquet-Maximierungstheorie . . . . .	14
2.3.1	Das Choquet-Maximierungsproblem . . . . .	14
2.3.2	Anmerkungen zur Wahrscheinlichkeitstransformation . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Aus dem partiell beobachtbaren Finanzmarkt ableitbare Finanzmärkte und zugehörige klassische Optimierungsprobleme</b>	<b>21</b>
3.1	Das vollständig beobachtbare Finanzmarktmodell . . . . .	21
3.1.1	Das Optimierungsproblem im vollständig beobachtbaren Finanzmarktmodell . . . . .	22
3.1.2	Das CEV-Modell als Beispiel eines vollständig beobachtbaren Finanzmarktmodells . . . . .	23
3.1.3	Die Rückführung des partiell beobachtbaren Finanzmarktmodells auf das vollständig beobachtbare Finanzmarktmodell . . . . .	24
3.2	Der allgemeine Black-Scholes-Finanzmarkt . . . . .	26
3.2.1	Das Optimierungsproblem im allgemeinen Black-Scholes-Modell . . . . .	28
3.2.2	Der klassische Black-Scholes-Finanzmarkt . . . . .	29
3.2.3	Das Optimierungsproblem im klassischen Black-Scholes-Modell . . . . .	29
3.3	Abschließende Bemerkungen zu den Finanzmärkten . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Die Turnpike-Theorie früher und heute</b>	<b>30</b>
4.1	Die Geschichte der Turnpike-Theorie . . . . .	30
4.2	Ausgangspunkt und Ziele dieser Arbeit . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Resultate zu Turnpike-Aussagen in diversen stetigen Kontexten für zeitunabhängige Nutzenfunktionen mit Definitionsbereich <math>\mathbb{R}_+</math> im partiell beobachtbaren Finanzmarktmodell</b>	<b>34</b>
5.1	Turnpike-Aussagen im partiell beobachtbaren Finanzmarkt unter Betrachtung des klassischen Erwartungswert-Nutzen-Kontexts . . . . .	36

5.2	Turnpike-Aussagen im Kontext der Choquet-Maximierung für den Fall ähnlicher Nutzenfunktionen und gleicher Wahrscheinlichkeitstransformationen . . . . .	39
5.3	Turnpike-Aussagen im Kontext der Choquet-Maximierung für den Fall verschiedener Wahrscheinlichkeitstransformationen . . . . .	50
5.3.1	Beispiel für $\tilde{\delta}$ -nahe beieinanderliegenden Wahrscheinlichkeitstransformationen . . . . .	57
5.4	Beispiele zur Veranschaulichung von Turnpike-Aussagen in diversen stetigen Kontexten für Nutzenfunktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{R}_+$ . . . . .	59
5.4.1	Beispiel zu Turnpike-Aussagen im klassischen Black-Scholes-Modell im klassischen Erwartungswert-Nutzen-Kontext . . . . .	59
5.4.2	Beispiel zu Turnpike-Aussagen im klassischen Black-Scholes-Modell im Rahmen der Choquet-Optimierungstheorie . . . . .	64
5.4.3	Beispiel zu Turnpike-Aussagen im klassischen Black-Scholes-Modell für $\delta$ -nahe beieinanderliegende Wahrscheinlichkeitstransformationen . . . . .	67
5.4.4	Beispiel zu Turnpike-Aussagen im allgemeinen Black-Scholes-Modell im Kontext der Choquet-Optimierung . . . . .	73
5.4.5	Beispiel zu Turnpike-Aussagen im CEV-Modell im klassischen Kontext . . . . .	74
<b>6</b>	<b>Resultate zu Turnpike-Aussagen in diversen stetigen Kontexten für zeitabhängige Nutzenfunktionen mit Definitionsbereich <math>\mathbb{R}_+</math> im klassischen Black-Scholes-Modell</b>	<b>77</b>
6.1	Turnpike-Aussagen im klassischen Kontext für den Fall zeitabhängiger Nutzenfunktionen . . . . .	77
6.2	Zusammenhang zu den bisherigen Aussagen über Turnpike-Aussagen im Kontext der klassischen Choquet-Maximierung . . . . .	84
<b>7</b>	<b>Resultate zu Turnpike-Aussagen im klassischen Kontext für zeitunabhängige Nutzenfunktionen mit Definitionsbereich <math>\mathbb{R}</math> im partiell beobachtbaren Marktmodell</b>	<b>86</b>
7.1	Herleitung der allgemeinen Theorie . . . . .	86
7.2	Beispiel zu Nutzenfunktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ . . . . .	94
7.3	Beispiel zu SAHARA-Nutzenfunktionen . . . . .	97
<b>8</b>	<b>Aussagen über die Konvergenzgeschwindigkeit bei Turnpike-Aussagen für zeitunabhängige Nutzenfunktionen mit Definitionsbereich <math>\mathbb{R}_+</math></b>	<b>103</b>
8.1	Aussagen zur Konvergenzgeschwindigkeit in diversen stetigen Kontexten für Nutzenfunktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{R}_+$ im partiell beobachtbaren Finanzmarktmodell für zeitunabhängige Nutzenfunktionen . . . . .	103
8.1.1	Beispiel zur Konvergenzgeschwindigkeit . . . . .	108
<b>9</b>	<b>Konvergenzaussagen über das optimale Portfolio im Bayes-Marktmodell</b>	<b>115</b>
9.1	Das Bayes-Marktmodell . . . . .	115

9.2	Das Optimierungsproblem im Bayes-Marktmodell . . . . .	116
9.2.1	Optimales Portfolio im Bayes-Marktmodell . . . . .	117
9.3	Zusammenhang zwischen der vollständigen und der partiell beobachtbaren Marktsituation im Bayes-Marktmodell . . . . .	119
<b>10</b>	<b>Resultate zu Turnpike-Aussagen in zeitdiskreten Kontexten für zeitunabhän- gige Nutzenfunktionen mit Definitionsbereich <math>\mathbb{R}_+</math></b>	<b>134</b>
10.1	Turnpike-Aussagen im Rahmen des CRR-Modells . . . . .	134
10.1.1	Modellannahmen . . . . .	134
10.1.2	Turnpike-Aussage im CRR-Modells . . . . .	136
10.2	Beispiel zu Turnpike-Aussagen im CRR-Modell . . . . .	144

# 1 Einleitung

## 1.1 Der Begriff ‚Turnpike‘

Der sogenannte Florida Turnpike ist eine etwa 500 Kilometer lange gebührenpflichtige Autobahn in Florida, welche die Metropolregionen Miami und Orlando verbindet. Die anfallenden Kosten variieren dabei je nach Länge des genutzten Streckenabschnitts. Die Frage, weshalb Autofahrer eine kostenpflichtige Strecke einer anderen Route gegenüber bevorzugen, welche möglicherweise sogar kürzer wäre, ist nicht schwer zu beantworten. Die Hoffnung auf eine verkürzte Reisezeit und eine problemlose Fahrt dürften im Vordergrund stehen.

Diese Arbeit handelt von Turnpike-Aussagen in der Portfolio-Optimierung. Die Portfolio-Optimierung ist ein zentrales Gebiet der Finanzmathematik. Ziel hierbei ist es, sogenannte Portfolio-Optimierungsprobleme zu lösen, in denen es darum geht, in einem vorgegebenen Finanzmarktmodell für einen Investor mit einem gewissen Startkapital und zu einem vorgegebenen Zeithorizont  $T$  eine optimale Investitionsstrategie zu finden, sodass der erwartete Nutzen des sich durch diese Strategie ergebenden Endvermögens maximal wird. Ziel ist es dann, Aussagen über die Existenz einer solchen Strategie zu treffen und diese gegebenenfalls zu konstruieren. Um den Nutzen ‚messbar‘ zu machen, werden sogenannte Nutzenfunktionen eingeführt. Mit deren Hilfe kann dieser beurteilt werden.

Man unterscheidet die klassische Portfolio-Optimierung, bei der sogenannte klassische Nutzenfunktionen zur Beurteilung des Nutzens herangezogen werden, von anderen Ansätzen. Ein weiterer und in dieser Arbeit bedeutsamer Ansatz ist die sogenannte Choquet-Optimierungstheorie. Im Gegensatz zur klassischen Portfolio-Optimierung ist es bei diesem Ansatz möglich, gewisse psychologische Phänomene zu berücksichtigen, welche das menschliche Handeln beeinflussen. Dabei wird der Nutzen nicht nur mit Hilfe einer klassischen Nutzenfunktion, sondern zudem unter Berücksichtigung einer sogenannten Wahrscheinlichkeits-transformation bewertet. Man spricht dann vom verallgemeinerten Nutzen. Die klassische Portfolio-Optimierung ergibt sich zudem als Spezialfall der Choquet-Optimierungstheorie, sofern man für die Wahrscheinlichkeitstransformation gerade die Identität wählt.

In der Portfolio-Optimierung erhält man jedoch nur selten explizite Lösungsformeln für optimale Handelsstrategien, welche zu einem Endvermögen führen, das den maximalen Nutzen unter einer gewählten Nutzenfunktion (klassische Erwartungswert-Nutzen-Theorie) oder einem gewählten verallgemeinerten Nutzen (Choquet-Maximierungstheorie) liefert. Dies wird umso schwieriger, je komplizierter die Gestalt der gewählten Nutzenfunktion ist. Auch wenn man stochastische Marktparameter oder gar unvollständige Märkte zulässt, können explizite Lösungsformeln nur in seltenen Fällen angegeben werden.

Beim Modellieren des ‚maximalen Nutzens‘ ergibt sich oftmals ein Dilemma: Entweder man erhält lediglich eine Aussage über die Existenz einer optimalen Handelsstrategie, ohne deren genaue Gestalt zu kennen, oder aber man muss die Nutzenfunktion und den betrachteten Finanzmarkt möglichst einfach modellieren und bildet die Realität dabei möglicherweise nur sehr schemenhaft ab. Letztendlich bleiben ohne eine vereinfachte Modellierung bisher oft nur numerische Lösungen zur Approximation der optimalen Handelsstrategie. Diesem Dilemma kann mit Hilfe sogenannter Turnpike-Aussagen begegnet werden. Die zentrale Idee dabei ist es, in einem speziellen Finanzmarkt das Verhalten zweier Investoren, deren Nutzenfunktionen (klassische Erwartungswert-Nutzen-Theorie) bzw. Nutzenfunktionen und Wahrscheinlichkeitstransformationen (Choquet-Maximierungstheorie) in einem gewissen Sinne ‚zueinander ähnlich‘ sind, miteinander zu vergleichen. Dabei wird das Verhalten des einen Investors mit sehr einfachen Funktionen beschrieben, wohingegen das Verhalten des zweiten Investors beliebig kompliziert modelliert werden darf. Sofern nun der Endzeithorizont  $T$  beliebig groß gewählt werden kann, kann jeder Investor mit einem positiven Anfangsvermögen beispielsweise in den risikolosen Bond investieren und sein Vermögen mit zunehmender Zeit beliebig mehren. Daher ist es bei zunehmendem Endzeitpunkt  $T$  für die Bewertung des Endvermögens entscheidend, wie sich die klassische Nutzenfunktionen bzw. die Nutzenfunktion und Wahrscheinlichkeitstransformationen im Bereich sehr großer Vermögenswerte verhalten. Sofern sie sich in diesem Bereich in einem gewissen Sinne ‚zueinander ähnlich‘ verhalten, sind auch die optimalen Handelsstrategien der beiden Investoren in einem gewissen Sinne ‚zueinander ähnlich‘. Der Vorteil besteht also darin, dass Investoren mit ‚komplizierten Nutzenfunktionen‘ bzw. ‚kompliziert modellierte Finanzmärkte‘ durch einfachere Modelle approximiert werden können.

Der Begriff ‚Turnpike‘ kommt aus der Wachstumstheorie und kann tatsächlich in Analogie zu den zu Beginn erwähnten Mautstraßen gesehen werden, welche ebenfalls als Turnpikes bezeichnet werden. Die Analogie dabei besteht darin, dass es bei langen Wegstrecken oftmals ökonomischer ist, den Hin- und Rückweg zu einem Turnpike in Kauf zu nehmen, um dann einen Großteil der Strecke angenehm und ohne Hindernisse zurücklegen zu können. Je länger dabei der Weg ist, umso lohnenswerter ist es, den Weg über den Turnpike zu wählen. Ähnlich verhält es sich bei Turnpike-Aussagen mit den optimalen Handelsstrategien: Umso größer der vorgegebene Zeithorizont des betrachteten Finanzmarktes gewählt ist, desto lohnenswerter ist es, eine Handelsstrategie anzuwenden, welche zu einer vereinfachten Situation gehört und in einer bestimmten Art und Weise ähnlich zu der eigenen ist.

Nachfolgend wird ein kurzer Überblick über den Aufbau dieser Arbeit vorgestellt:

## **1.2 Überblick über den Aufbau dieser Arbeit**

Diese Arbeit ist in 10 Kapitel unterteilt. In Kapitel 2 und 3 werden die für das Verständnis dieser Arbeit wesentlichen Grundlagen und Rahmenbedingungen vorgestellt. Insbesondere werden in diesen Kapiteln verschiedene Finanzmarktmodelle eingeführt, die in den nachfol-

genden Kapiteln eine zentrale Rolle spielen. In Kapitel 4 wird die historische Entwicklung der Turnpike-Theorie aufgezeigt. In den Kapiteln 5, 6 und 7 werden Ergebnisse im Rahmen der Turnpike-Theorie unter Betrachtung von stetigen Finanzmärkten in verschiedenen Kontexten vorgestellt. Bezogen auf die Kapitel 5, 6 und 7 werden im Kapitel 8 Ergebnisse zu Konvergenzgeschwindigkeiten bei Turnpike-Aussagen diskutiert. In Kapitel 9 werden das sogenannte Bayes-Finanzmarktmodell eingeführt und weitere Konvergenzbetrachtungen durchgeführt. Dabei kann ein wichtiger Zusammenhang zwischen den vorgestellten Finanzmarktmodellen aufgezeigt werden. Abschließend werden in Kapitel 10 weitere Ergebnisse über die Gültigkeit von Turnpike-Aussagen in zeitdiskreten Finanzmärkten vorgestellt.

Zur Übersicht über die Inhalte der Kapitel dieser Arbeit wird nachfolgend eine kurze Beschreibung der einzelnen Kapitel gegeben:

## **Kapitel 2**

In Kapitel 2 wird das dieser Arbeit zu Grunde liegende stetige Finanzmarktmodell eingeführt werden. Hierbei handelt es sich um den sogenannten partiell beobachtbaren Finanzmarkt. Dieser ist dadurch gekennzeichnet, dass Investoren lediglich die Aktienpreisentwicklung beobachten können, jedoch keinen Zugang zu der vollständigen Informationsstruktur des Marktes besitzen (vgl. [Lakner, 1995]). Beispielsweise lassen sich die Drifteile der Aktien nicht direkt beobachten. Zudem wird in diesem Kapitel die klassische Erwartungswert-Nutzentheorie eingeführt, die in der gesamten Arbeit von zentraler Bedeutung sein wird. Hierbei geht es darum, dass Investoren mit einem gewissen Startvermögen auf einem Markt gemäß der Anlagemöglichkeiten investieren und versuchen, den Nutzen ihres Endvermögens zu maximieren sowie geeignete Handelsstrategien zu finden, die zu einem optimalen Endvermögen führen. Auf mathematischer Ebene wird diese Nutzenbewertung mit Hilfe einer sogenannten klassischen Nutzenfunktion  $u$  modelliert und letztendlich ein Optimierungsproblem mit gewissen Nebenbedingungen aufgestellt. Es wird aufgezeigt werden, welche genaue Struktur das optimale Endvermögen im Kontext der klassischen Erwartungswert-Nutzentheorie im partiell beobachtbaren Finanzmarkt besitzt (vgl. [Björk/Davis/Landén, 2010]). Abschließend wird die sogenannte Choquet-Optimierungstheorie eingeführt. Ähnlich wie in der klassischen Erwartungswerttheorie geht es auch hier darum, den Nutzen eines Endvermögens zu maximieren und geeignete Handelsstrategien zu finden. Auf mathematischer Ebene wird also auch hier ein Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen betrachtet, das es zu lösen gilt. Jedoch wird der Nutzen dabei allgemeiner modelliert. Der Grund liegt darin, dass es im Kontext der klassischen Erwartungswert-Nutzentheorie nicht möglich ist, gewisse psychologische Phänomene abzubilden, die das menschliche Handeln jedoch maßgeblich beeinflussen. Beispielsweise konnte M. Allais zeigen, dass Menschen dazu neigen, sichere Auszahlungen auch dann zu bevorzugen, wenn der erwartete Gewinn geringer ist als in einer risikobehafteten Situation. Dieses Phänomen bezeichnet er als das sogenannte ‚Sicherheitsparadoxon‘ (vgl. [Allais, 1953]). Neben der zur Bewertung des Nutzens verwendeten Nutzenfunktion wird deshalb eine weitere Funktion, die sogenannten Wahrscheinlichkeitstransformation  $w$ , verwendet. Mit Hilfe dieser Funktion können die realen Wahrscheinlichkeiten transformiert

werden und die genannten psychologischen Phänomene besser abgebildet werden (vgl. [Jin/Zhou, 2008]). Die im Rahmen der Portfolio-Optimierungstheorie betrachteten Kontexte der klassischen Erwartungswert-Nutzentheorie und der Choquet-Optimierungstheorie stellen die zentralen Rahmenbedingungen dar, von denen ausgehend später Turnpike-Aussagen formuliert werden.

### **Kapitel 3**

In Kapitel 3 werden Finanzmarktmodelle vorgestellt, die sich direkt aus dem partiell beobachtbaren Finanzmarktmodell ableiten lassen. Diese Spezialfälle des partiell beobachtbaren Finanzmarktes sind wichtig, da sie sehr prominente Finanzmarktmodelle wie beispielsweise das Black-Scholes-Modell beinhalten. Als bedeutsamer Spezialfall wird der vollständig beobachtbare Finanzmarkt vorgestellt, in welchem wir davon ausgehen, dass der Investor alle dem Finanzmarkt zu Grunde liegenden Informationen beobachten kann. Als wichtige Spezialfälle eines solchen Finanzmarktmodells werden das ‚Constant-Elasticity-Of-Variance‘-Modell bzw. kurz um das CEV-Modell (vgl. [Cox/Ross, 1976]) sowie der allgemeine und der klassische Black-Scholes-Finanzmarkt eingeführt. In dieser Arbeit werden die in diesem Kapitel vorgestellten Finanzmärkte in vielen Aussagen und Beispielen eine wichtige Rolle einnehmen.

### **Kapitel 4**

In diesem Kapitel wird der Leser in die Turnpike-Theorie eingeführt werden, die neben der Portfolio-Optimierung die zweite wichtige Säule dieser Arbeit darstellt. Es wird dazu ein geschichtlicher Überblick über die Entwicklung der Turnpike-Theorie ausgehend von dem ersten Paper von J. Mossin aus dem Jahr 1968 bis heute gegeben (vgl. [Mossin, 1968]). Abschließend werden in diesem Kapitel die Ausgangspunkte und Ziele dieser Arbeit noch einmal klar hervorgehoben.

### **Kapitel 5**

In Kapitel 5 werden Ergebnisse vorgestellt, die im Rahmen dieser Arbeit entstanden sind. Dabei werden Resultate zu Turnpike-Aussagen im Kontext der klassischen Erwartungswert-Nutzentheorie bzw. der Choquet-Optimierungstheorie vorgestellt, wobei in diesem Kapitel lediglich zeitunabhängige Nutzenfunktionen mit Definitionsbereich  $\mathbb{R}_+$  betrachtet werden. Es wird dabei gezeigt, unter welchen Voraussetzungen eine bereits bekannte Turnpike-Aussage von P. Dybvig, L. Rogers und K. Back, die im allgemeinen Black-Scholes-Finanzmarkt formuliert wurde, auf den partiell beobachtbaren Finanzmarkt erweitert werden kann (vgl. [Dybvig/Rogers/Back, 1999]). Weiter kann gezeigt werden, dass es ebenfalls möglich ist, Turnpike-Aussagen im Kontext der Choquet-Optimierungstheorie zu formulieren. Dabei werden die Fälle unterschieden, dass zwei Investoren die gleiche bzw. verschiedene Wahrscheinlichkeitstransformation wählen. Abschließend werden in diesem Kapitel eine Reihe expliziter Beispiele für Turnpike-Aussagen aufgeführt. In der gängigen Literatur konnten bisher trotz intensiver Suche keine konkreten Beispiele für

Turnpike-Aussagen gefunden werden. Die Besonderheit dieser Beispiele liegt somit darin, dass tatsächlich konkrete Funktionen gefunden werden konnten, die alle geforderten Voraussetzungen erfüllen und trotzdem soweit handhabbar sind, dass die Gültigkeit der Turnpike-Aussagen veranschaulicht werden kann.

## Kapitel 6

In diesem Kapitel werden die Aussagen, welche in Kapitel 5 für Portfolio-Optimierungsprobleme mit zeitunabhängigen Nutzenfunktionen getroffen werden konnten, auf eine größere Klasse von zulässigen Nutzenfunktionen erweitert. Es werden dabei zeitabhängige Nutzenfunktionen zugelassen. Diese Zeitabhängigkeit zuzulassen kann durchaus sinnvoll sein, da sich der Nutzen eines Endvermögens für einen Investor ja durchaus mit der Zeit ändern kann. Weiter kann in diesem Kapitel ein Zusammenhang zwischen den Turnpike-Aussagen in Kapitel 5 und den Turnpike-Aussagen unter Betrachtung zeitabhängiger Nutzenfunktionen aufgezeigt werden. Insbesondere lässt sich zeigen, dass es möglich ist, Turnpike-Aussagen in einigen nicht-klassischen Kontexten auf solche mit zeitabhängigen Nutzenfunktionen in klassischen Kontexten zurückzuführen. Die Idee, nicht-klassische auf klassische Optimierungsprobleme zurückzuführen, ist dabei nicht ganz neu. Beispielsweise konnten Bernard, Chen und Vanduffel 2014 zeigen, dass unter gewissen Voraussetzungen zu nicht-klassischen Choquet-Maximierungsproblemen äquivalente klassische Optimierungsprobleme gefunden werden können (vgl. [Bernard/Chen/Vanduffel, 2013]).

## Kapitel 7

In Kapitel 7 werden erstmals Turnpike-Aussagen für zeitunabhängige Nutzenfunktionen mit Definitionsbereich  $\mathbb{R}$  formuliert. Bisher wurden auch in der Literatur hauptsächlich Turnpike-Aussagen bewiesen, welche lediglich den Definitionsbereich  $\mathbb{R}_+$  zulassen. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird gezeigt, unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen Turnpike-Aussagen auch für Nutzenfunktionen mit Definitionsbereich  $\mathbb{R}$  gültig sind. Dies ermöglicht die Formulierung von Turnpike-Aussagen für viele weitere bekannte Nutzenfunktionen, wie beispielsweise der exponentiellen Nutzenfunktion

$$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto -e^{-\gamma x} \text{ für } \gamma > 0.$$

Weiter wird in diesem Kontext ebenfalls ein explizites Beispiel aufgeführt. Abschließend wird anhand eines Beispiels gezeigt, dass die in diesem Kapitel geforderten Zusatzannahmen definitiv erforderlich sind für die Gültigkeit der Turnpike-Aussagen. Dabei werden sogenannte SAHARA-Nutzenfunktionen betrachtet (vgl. [Chen/Pelsser/Vellekoop, 2011]).

## Kapitel 8

In diesem Kapitel werden Konvergenzgeschwindigkeiten bei Turnpike-Aussagen untersucht. In der Literatur konnten dazu lediglich qualitative Aussagen bzw. Aussagen, welche durch Simulationen begründet wurden, gefunden werden. Natürlich wäre es aber interessant, zu

jeder möglichen Schranke  $C > 0$  einen Endzeithorizont  $T_C$  konkret angeben zu können, sodass die erwartete absolute Differenz der Endvermögen zweier Investoren zum Endzeitpunkt  $T_C$  durch die Schranke  $C$  begrenzt wird. Insbesondere wäre eine quantitative Beschreibung des Endzeitpunktes  $T_C$  wünschenswert. In diesem Kapitel wird ein analytischer Weg vorgestellt, der eine solche Beschreibung zulässt. In einer Arbeit von P. Dybvig, L. Rogers und K. Back wird kritisiert, dass Turnpike-Aussagen angeblich mit sehr langen Konvergenzraten einhergehen (vgl. [Dybvig/Rogers/Back, 1999]). In diesem Kapitel soll daher auch diskutiert werden, unter welchen Voraussetzungen sich bessere Konvergenzraten erzielen lassen. Abschließend wird auch in diesem Abschnitt ein konkretes Beispiel zum Thema Konvergenzgeschwindigkeiten bei Turnpike-Aussagen vorgestellt.

## Kapitel 9

In Kapitel 9 wird ein Spezialfall eines partiell beobachtbaren Finanzmarktmodells vorgestellt. Dabei handelt es sich um den sogenannten Bayes-Finanzmarkt. Dieser zeichnet sich dadurch aus, dass der Driftteil der in diesem Markt beobachteten Aktie durch eine Zufallsvariable beschrieben wird. Diese kann zwar endlich viele Werte annehmen, bleibt aber über die Zeit betrachtet konstant. Die Anfangsverteilung jedoch ist den Investoren unbekannt und der Finanzmarkt somit lediglich partiell beobachtbar. Nach den Aussagen von Kapitel 5 gelten somit die in dieser Arbeit vorgestellten Turnpike-Aussagen für den Bayes-Finanzmarkt. Es wird im weiteren untersucht, wie sich der Bayes-Finanzmarkt verhält, wenn der betrachtete Endzeitpunkt  $T$  zunehmend größer wird. Es kann im Grenzfalle gezeigt werden, dass die optimale Handelsstrategie im partiell beobachtbaren Bayes-Markt bei der Wahl geeigneter Parameter gegen eine solche Handelsstrategie konvergiert, welche man als optimale Handelsstrategie im entsprechenden beobachtbaren Finanzmarktmodell erwarten würde. In diesem Sinne kann man also sagen, dass der partiell beobachtbare Bayes-Finanzmarkt im Grenzfalle gegen den zugehörigen vollständig beobachtbaren Finanzmarkt konvergiert.

## Kapitel 10

Im letzten Kapitel wird untersucht, inwiefern sich die Turnpike-Aussagen, welche in den hier betrachteten stetigen Finanzmärkten gültig sind, auf zeitdiskrete Finanzmärkte übertragen lassen. Dabei wird als typisches Beispiel für einen zeitdiskreten Finanzmarkt das Cox-Ross-Rubinstein-Modell bzw. kurz CRR-Modell vorgestellt. Es wird gezeigt, unter welchen Voraussetzungen die in dieser Arbeit getroffenen Aussagen auch im CRR-Modell und anderen zeitdiskreten Finanzmarktmodellen ihre Gültigkeit bewahren. Insbesondere konnten in diesen Finanzmarktmodellen im Vergleich zu den stetigen Modellen stärkere Aussagen bewiesen werden.

## 2 Einführung

### 2.1 Einführung in den dieser Arbeit zu Grunde liegenden Finanzmarkt

Nachfolgend wird der dieser Arbeit zu Grunde liegende Finanzmarkt vorgestellt. Es handelt sich dabei um das sogenannte partiell beobachtbare Finanzmarktmodell, welches im Jahr 2010 von T. Björk, M. H. A. Davis und C. Landén beschrieben wurde (vgl. [Björk/Davis/Landén, 2010], Kapitel 4). Dieses Modell lässt sich ursprünglich insbesondere auf zwei Arbeiten von P. Lakner aus den Jahren 1995 und 1998 (vgl. [Lakner, 1995], [Lakner, 1998]) zurückführen. Dieses Finanzmarktmodell ist zudem eine Verallgemeinerung des gut untersuchten und allgemein bedeutsamen Black-Scholes-Finanzmarktmodells. Die Verallgemeinerung ergibt sich dadurch, dass dem partiell beobachtbaren Finanzmarkt eine andere Filtration zu Grunde gelegt wird, welche deutlich mehr Informationen beinhalten darf, als dies im Black-Scholes-Modell zulässig war. Diese Struktur hat zur Folge, dass es Informationen gibt, welche von Investoren nicht mehr vollständig beobachtet werden können. Aus dieser Tatsache ergibt sich auch der Name dieses Finanzmarktes, welcher im Folgenden betrachtet wird:

#### 2.1.1 Das partiell beobachtbare Finanzmarktmodell

Wir betrachten einen gefilterten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ . Dabei erfülle die Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  die üblichen Bedingungen. Der Parameter  $T$  bezeichne den Endzeitpunkt. Im Weiteren sei durch  $(W_t)_{t \geq 0} = ((W_t^1, \dots, W_t^n)^\top)_{t \geq 0}$  eine  $n$ -dimensionale Brownsche Bewegung beschrieben. Die zugehörige augmentierte Filtration bezeichnen wir künftig mit  $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$ .

Auf dem Markt können  $n$  voneinander unabhängige Aktien zeitstetig gehandelt werden. Die zugehörigen Preisprozesse werden für den Preis der  $i$ -ten Anlagemöglichkeit mit  $(S_t^i)_{t \geq 0}$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$  bezeichnet. Wir definieren den Vektorprozess

$$(S_t)_{t \geq 0} := ((S_t^1, \dots, S_t^n)^\top)_{t \geq 0}.$$

Durch  $(\mathcal{F}_t^S)_{t \geq 0}$  sei die von  $(S_t)_{t \geq 0}$  erzeugte und bezüglich des Maßes  $\mathbb{P}$  augmentierte Filtration gegeben. Diese beinhaltet somit alle Informationen, welche sich durch das Beobachten der Aktie erhalten lassen. Weiter sind die Dynamiken der Preisprozesse der  $n$  Aktien durch

$$dS_t^i = \mu_t^i S_t^i dt + S_t^i \sigma_t^i dW_t, \quad i \in \{1, \dots, n\} \quad (2.1)$$

beschrieben, wobei die Prozesse  $(\mu_t^1)_{t \geq 0}, \dots, (\mu_t^n)_{t \geq 0}$  skalarwertig und bezüglich der Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adaptiert seien. Die Prozesse  $(\sigma_t^1)_{t \geq 0}, \dots, (\sigma_t^n)_{t \geq 0}$  seien  $n$ -dimensionale und bezüglich der Filtration  $(\mathcal{F}_t^S)_{t \geq 0}$  adaptierte Prozesse.

Wenn man weiter  $(\mu_t)_{t \geq 0} := ((\mu_t^1, \dots, \mu_t^n)^\top)_{t \geq 0}$  und  $(\sigma_t)_{t \geq 0} := ((\sigma_t^1, \dots, \sigma_t^n)^\top)_{t \geq 0}$  sowie  $(S_t)_{t \geq 0} := ((S_t^1, \dots, S_t^n)^\top)_{t \geq 0}$  und

$$(D(S_t))_{t \geq 0} := (\text{diag}(S_t^1, \dots, S_t^n))_{t \geq 0} \quad (2.2)$$

setzt, so lassen sich die Gleichungen aus (2.1) wie folgt darstellen:

$$dS_t = D(S_t)\mu_t dt + D(S_t)\sigma_t dW_t. \quad (2.3)$$

Diese Darstellung wird für uns an späterer Stelle von Vorteil sein.

Wir fordern im Rahmen des partiell beobachtbaren Finanzmarktes die zentrale Annahme

$$\mathcal{F}_t^S \subset \mathcal{F}_t \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Durch diese Forderung wird gewährleistet, dass das betrachtete Finanzmarktmodell nicht vollständig beobachtbar ist. Investoren können lediglich die Entwicklung des Preis-Prozesses beobachten. Dies soll an folgendem Beispiel klarer werden:

### Beispiel 2.1

Sei  $n = 1$ . Eine zulässige Wahl für den Drift-Teil der Aktie im partiell beobachtbaren Finanzmarktmodell ist beispielsweise gegeben durch

$$\mu_t := \mu_t(Y_t), \quad (2.4)$$

wobei der Prozess  $(Y_t)_{t \geq 0}$  als ein nicht beobachtbarer Markov-Prozess gewählt werden kann. Entsprechende Marktsituationen lassen sich weder mit dem Black-Scholes-Modell noch mit dem im nächsten Abschnitt beschriebenen vollständig beobachtbaren Finanzmarktmodell (vgl. Abschnitt 3.1) erfassen, (vgl. [Björk/Davis/Landén, 2010], Kapitel 2).

Die Dynamik des Bondprozesses im partiell beobachtbaren Finanzmarktmodell sei durch

$$dB_t = r_t B_t dt$$

gegeben, wobei die Zinsrate  $(r_t)_{t \geq 0}$  ein beschränkter und bezüglich der Filtration  $(\mathcal{F}_t^S)_{t \geq 0}$ -adaptierter stochastischer Prozess sei.

Wir bezeichnen künftig einen  $\mathbb{R}^{n+1}$ -wertigen, bezüglich der Filtration  $(\mathcal{F}_t^S)_{t \geq 0}$  progressiv-messbaren stochastischen Prozess  $(\varphi_t)_{t \geq 0} = (\varphi_t^0, \dots, \varphi_t^n)_{t \geq 0}$  als Handelsstrategie, falls gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^T |\varphi_t^0| dt &< \infty & \mathbb{P} - \text{f.s.}, \\ \sum_{i=1}^n \int_0^T (\varphi_t^i S_t^i)^2 dt &< \infty & \mathbb{P} - \text{f.s.} \end{aligned}$$

$\varphi_t^i$  bezeichnet dabei die Stückzahl der betrachteten Aktie  $i$ , die zur Zeit  $t$  gehalten wird. Den stochastischen Prozess  $(X_t^\varphi)_{t \geq 0}$  mit

$$X_t^\varphi := \varphi_t S_t + \varphi_t^0 B_t \quad \text{für alle } t \geq 0$$

bezeichnet man als den zur Handelsstrategie  $(\varphi_t)_{t \geq 0}$  zugehörigen Wert- bzw. Vermögensprozess. Das Anfangsvermögen sei gegeben durch  $x_0 := X_0^\varphi$ . Falls klar ist, welche Handelsstrategie gemeint ist, schreiben wir für den Vermögensprozess gelegentlich auch nur  $(X_t)_{t \geq 0}$ . Zudem wird mit

$$\left(\tilde{X}_t^\varphi\right)_{t \geq 0} = \left(\frac{X_t^\varphi}{B_t}\right)_{t \geq 0}$$

der diskontierte Vermögensprozess bezeichnet.

### Definition 2.2

Wir bezeichnen den stochastischen Prozess  $(\pi_t)_{t \geq 0} = (\pi_t^0, \dots, \pi_t^n)_{t \geq 0}$  mit  $\pi_t^0 := B_t \varphi_t^0$  und  $\pi_t^i := S_t^i \varphi_t^i$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$  als Portfolio-Prozess bzw. als Portfolio.  $\pi_t^i$  gibt hierbei für  $i \in \{0, 1\}$  den absoluten Marktwert der Anlage  $i$  an, die zur Zeit  $t$  gehalten wird.

Weiter fordern wir die Gültigkeit der folgenden Annahme:

### Annahme 2.3

Es gelte:

- (i) Für alle  $t \geq 0$  sei die Volatilitätsmatrix  $\sigma_t$  mit  $\sigma_t := (\sigma_t^1, \dots, \sigma_t^n)$   $(\lambda \times \mathbb{P})$ -f.s. regulär, wobei  $\lambda$  das Lebesgue-Maß darstellt.
- (ii) Für den Prozess

$$(\gamma_t)_{t \geq 0} := (\sigma_t^{-1} (r_t \mathbf{1}_n - \mu_t))_{t \geq 0}$$

mit  $\mu_t := (\mu_t^1, \dots, \mu_t^n)$  gelte

- (1)  $\mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^T \frac{1}{2} \|\bar{\gamma}_s\|_2^2 ds - \int_0^T \bar{\gamma}_s d\bar{W}_s \right) \right] = 1,$
- (2)  $\int_0^T \|\gamma_s\|^2 ds < \infty$   $\mathbb{P}$ -f.s.,
- (3) für alle Zeitpunkte  $t \geq 0$

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^t \|\gamma_s\|^2 ds \right) \right] < \infty.$$

Dabei sei  $\|\cdot\|$  die euklidische Norm.

Unter Annahme 2.3 ist der betrachtete Finanzmarkt arbitragefrei und vollständig.

## 2.2 Einführung in die klassische Erwartungswert-Nutzentheorie

In diesem Abschnitt soll die klassische Erwartungswert-Nutzentheorie vorgestellt werden. Ziel es ist, sogenannte Portfolio-Optimierungsprobleme zu lösen. In diesen geht es darum, in einem vorgegebenen Finanzmarkt für einen Investor mit einem gegebenen Startkapital  $x_0$  bei einem vorgegebenen Zeithorizont eine optimale Investitionsstrategie zu finden, sodass der erwartete Nutzen des sich durch diese Strategie ergebenden Endvermögens maximal wird. Dieser wird mit Hilfe sogenannter Nutzenfunktionen ermittelt. Nachfolgend wird definiert, wie in dieser Arbeit der Begriff Nutzenfunktion verstanden wird:

### Definition 2.4

Unter einer Nutzenfunktion  $u : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  versteht man eine Funktion, welche die nachfolgenden drei Eigenschaften erfüllt:

- (i)  $u$  ist strikt monoton wachsend,
- (ii)  $u$  ist strikt konkav,
- (iii)  $u$  ist stetig differenzierbar, und es gelten die sogenannten INADA-Bedingungen:

$$\lim_{x \rightarrow 0} u'(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u'(x) = 0.$$

Der erwartete Nutzen eines Endvermögens, welcher sich für einen Investor mit dem Startkapital  $x_0$  und der Nutzenfunktion  $u$  durch die Wahl der Investitionsstrategie  $\varphi$  ergibt, ist gleich  $\mathbb{E}[u(X_T^\varphi)]$ .

Ziel ist es, diesen erwarteten Nutzen unter gewissen Nebenbedingungen zu maximieren. Im nachfolgenden Abschnitt wird ein für diese Arbeit zentrales klassisches Optimierungsproblem im partiell beobachtbaren Finanzmarkt vorgestellt.

### 2.2.1 Das Optimierungsproblem im partiell beobachtbaren Finanzmarktmodell

Nachfolgend wird im partiell beobachtbaren Finanzmarkt gemäß Thomas Björk, Mark H. A. Davis und Camilla Landén in [Björk/Davis/Landén, 2010], Kapitel 4, das klassische Optimierungsproblem mit Zeithorizont  $T$  betrachtet:

$$(\bar{P}_{\text{partiell}}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sup_{\varphi} \mathbb{E}[u(\bar{X}_T^\varphi)], \\ \bar{X}_0^\varphi = x_0, \\ (\varphi_t)_{t \in [0, T]} \text{ ist selbstfinanzierend und } (\mathcal{F}_t^S)_{t \in [0, T]} \text{-adaptiert.} \end{array} \right.$$

Die Prozesse sind dabei teilweise mit einem ‚Querstrich‘ versehen. Der Ursprung dieser Notation wird im nachfolgenden Kapitel geklärt werden.

Das Optimierungsproblem kann mit Hilfe der sogenannten Martingalmethode gelöst werden. Diese ist in der weiteren Arbeit von Bedeutung und wird nachfolgend vorgestellt.

### Die Martingalmethode

Um Optimierungsprobleme der Gestalt  $(\bar{P}_{\text{partiell}})$  zu lösen, wird in der Literatur oftmals die Martingalmethode verwendet (vgl. [Korn, 1997]). Dabei zerlegt man das ursprüngliche Problem in zwei Teilprobleme. Dazu definieren wir:

#### Definition 2.5

Es sei

$$\bar{\xi}_T := \exp \left( - \int_0^T \left( r_s + \frac{1}{2} \|\bar{\gamma}_s\|_2^2 \right) ds - \int_0^T \bar{\gamma}_s d\bar{W}_s \right) = \beta_T \bar{\rho}_T,$$

wobei

$$\beta_T := \exp \left( - \int_0^T r_s ds \right),$$

$$\bar{\rho}_T := \exp \left( - \int_0^T \frac{1}{2} \|\bar{\gamma}_s\|_2^2 ds - \int_0^T \bar{\gamma}_s d\bar{W}_s \right).$$

Im Folgenden bezeichne  $F_{\xi_t}$  die zur Zufallsvariablen  $\xi_t$  gehörige Verteilungsfunktion.

Weiter sei  $\mathbb{Q}$  das sogenannte äquivalente Martingalmaß. Dieses ist nach Gültigkeit von Annahme 2.3 eindeutig (vgl. [Korn, 1997]) und besitzt die Eigenschaft

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = B_T \xi_T.$$

Das erste Teilproblem besitzt die nachfolgende Gestalt:

$$(P_{\text{partiell}}) \quad \begin{cases} \sup_{\bar{X}_T} \mathbb{E} [u(\bar{X}_T)], \\ \bar{X}_T \text{ ist } \mathcal{F}_T^S\text{-messbar, } \mathbb{E} [\bar{\xi}_T \bar{X}_T] = x_0. \end{cases}$$

Es wird als statisches Optimierungsproblem bezeichnet, da die Lösung nicht mehr durch einen stochastischen Prozess, sondern lediglich durch eine Zufallsvariable  $\bar{X}_T$  gegeben ist. Diese Zufallsvariable gibt das optimale Endvermögen an. Ein Kandidat für das optimale

Endvermögen kann dann weiter mittels des Lagrange-Ansatzes ermittelt werden.

Im zweiten Teilproblem geht es darum, eine optimale Strategie  $(\varphi_t^*)_{t \in [0, T]}$  zu finden, die ausgehend vom Anfangsvermögen  $x_0$  zum optimalen Endvermögen führt. Es soll gelten:

$$(\bar{X}_t^T)_{t \in [0, T]} := (\bar{X}_t^{\varphi^*})_{t \in [0, T]}.$$

Dieses Problem bezeichnet man auch als Repräsentationsproblem. Da wir von einem vollständigen Finanzmarktmodell ausgehen, ist die Existenz einer optimalen Handelsstrategie  $(\varphi_t^*)_{t \in [0, T]}$  bei Kenntnis des optimalen Endvermögens immer gegeben. Diese optimale Strategie löst dann das Problem  $(\bar{P}_{\text{partiell}})$ . Der Vorteil der Zerlegung des ursprünglichen Problems besteht also darin, dass sich zwei besser handhabbare Teilprobleme ergeben.

In dieser Arbeit ist es an vielen Stellen bedeutsam, eine Lösung des statischen Teilproblems zu erhalten. Deshalb werden diese Lösungen in den Abschnitten 2.3.1, 3.1 und 3.2.1 konkret angegeben. Es ist weiter schwierig, die konkrete Gestalt der optimalen Strategie  $(\varphi_t^*)_{t \in [0, T]}$  anzugeben. Wir werden im weiteren Verlauf dieser Arbeit sehen, dass diese Schwierigkeit gerade der Grund für die Bedeutsamkeit von Turnpike-Aussagen ist.

### Die Lösung des Optimierungsproblems $(P_{\text{partiell}})$

Es ist Thomas Björk, Mark H. A. Davis und Camilla Landén gelungen, explizite Lösungsformeln für den Kandidaten des optimalen Endvermögens zu Problem  $(P_{\text{partiell}})$  herzuleiten. Dazu wurde die partiell beobachtbare Finanzmarktsituation auf eine äquivalente, aber vollständig beobachtbare Finanzmarktsituation zurückgeführt, welche im nachfolgenden Abschnitt vorgestellt wird (zum genaueren Vorgehen vgl. auch Abschnitt 3.1.3). Wesentlich für diese Herangehensweise ist die Tatsache, dass im Problem  $(P_{\text{partiell}})$  nur über alle  $(\mathcal{F}_t^S)_{t \in [0, T]}$ -adaptierten Handelsstrategien optimiert wird. Der zentrale Schritt ist es, alle  $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ -adaptierten Prozesse  $(Y_t)_{t \in [0, T]}$  durch ihre zugehörigen sogenannten gefilterten Prozesse

$$\left(\widehat{Y}_t\right)_{t \in [0, T]} := \left(\mathbb{E} [Y_t | \mathcal{F}_t^S]\right)_{t \in [0, T]}$$

zu ersetzen. Mit Hilfe verallgemeinerter Martingaldarstellungssätze lässt sich dann beispielsweise für die Dynamik des Preisprozesses eine andere Darstellung finden, welche nur mit Hilfe  $(\mathcal{F}_t^S)_{t \in [0, T]}$ -adaptierter Größen dargestellt werden kann. Letztendlich gelingt es so, zu einem vollständig beobachtbaren Finanzmarktmodell zurückzukehren und die dort geltenden Aussagen für den partiell beobachtbaren Finanzmarkt zu übernehmen. Die konkrete Herangehensweise ist in Abschnitt 3.1.3 ausführlich dargestellt.

Die gefilterten Prozesse werden künftig analog zu [Björk/Davis/Landén, 2010], Kapitel 4 mit einem ‚Dach‘ versehen. Die anderen Objekte des partiell beobachtbaren Marktes, die mit Hilfe der gefilterten Prozesse erhalten werden, werden mit einem ‚Querstrich‘ versehen.

Man erhält somit die für unsere Zwecke relevanten Prozesse

$$(\tilde{\gamma}_t)_{t \in [0, T]} := (\sigma_t^{-1} (\hat{\mu}_t - r_t \mathbf{1}_n))_{t \in [0, T]}$$

und

$$(\bar{\rho}_t)_{t \in [0, T]} := \left( \exp \left( - \int_0^t \tilde{\gamma}_s^T d\bar{W}_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\tilde{\gamma}_s\|^2 ds \right) \right)_{t \in [0, T]},$$

wobei durch den sogenannten Innovations-Prozess

$$(\bar{W}_t)_{t \in [0, T]} := (\sigma_t^{-1} \mu_t dt + dW_t - \sigma_t^{-1} \hat{\mu}_t dt)_{t \in [0, T]}$$

nach [Liptser/Shiryayev, 2004] wieder eine bezüglich der Filtration  $(\mathcal{F}_t^S)_{t \in [0, T]}$ -adaptierte Brownsche Bewegung erzeugt wird (vgl. dazu auch [Björk/Davis/Landén, 2010]).

Es sei weiterhin Annahme 2.3 gültig.

Mit Hilfe der Martingalmethode lässt sich dann ein Kandidat für das optimale Endvermögen zu Problem  $(P_{\text{partiell}})$  herleiten. Es ergibt sich:

**Satz 2.6**

Für Problem  $(P_{\text{partiell}})$  ergibt sich der nachfolgend aufgeführte Kandidat für das optimale Endvermögen:

$$\bar{X}_T := I (\bar{\lambda}_T \bar{\xi}_T).$$

Dabei sei  $I := (u')^{-1}$  und  $\bar{\lambda}_T \in \mathbb{R}_+$  der Lagrange-Parameter bei Endzeitpunkt  $T$ , welcher die Gültigkeit der Nebenbedingung

$$\mathbb{E} [\xi_T I (\bar{\lambda}_T \bar{\xi}_T)] = x_0$$

bezüglich des Anfangsvermögens gewährleistet.

*Beweis.* Der zugehörige Beweis findet sich in [Björk/Davis/Landén, 2010], Kapitel 4.  $\square$

Wie auch in [Björk/Davis/Landén, 2010] angemerkt wurde, handelt es sich bei dem hier angegebenen Endvermögen  $\bar{X}_T$  vorerst nur um einen Kandidaten für das optimale Endvermögen. Um den Kandidaten als das tatsächlich optimale Endvermögen abschließend zu verifizieren, muss das Verifikationstheorem 3.2 aus Kapitel 3 geprüft werden. Da es uns gelungen ist, den partiell beobachtbaren Finanzmarkt auf den vollständig beobachtbaren Finanzmarkt zurückzuführen, und da wir nur bezüglich der  $(\mathcal{F}_t^S)_{t \in [0, T]}$ -adaptierten Handelsstrategien optimieren (vgl. Abschnitt 3.1.3), kann das für den vollständig beobachtbaren Finanzmarkt ausgelegte Verifikationstheorem direkt angewendet werden.

## 2.3 Einführung in die Choquet-Maximierungstheorie

Im Nachfolgenden wird die Choquet-Maximierungstheorie eingeführt. Dabei handelt es sich um eine Erweiterung der bereits vorgestellten klassischen Erwartungswert-Nutzentheorie. Diese Erweiterung ist für die Arbeit zentral, da gezeigt werden kann, dass viele der in der klassischen Erwartungswert-Nutzentheorie getroffenen Aussagen auch in dieser allgemeinen Situation gültig bleiben. Die Erweiterung im Vergleich zur klassischen Erwartungswert-Nutzentheorie ergibt sich aus der Tatsache, dass im Fall der Choquet-Maximierungstheorie neben den auch im klassischen Kontext betrachteten Nutzenfunktionen sogenannte Wahrscheinlichkeitstransformationen bei der Bewertung des Nutzens eines optimalen Endvermögens eine Rolle spielen. Mit diesen kann beispielsweise abgebildet werden, dass sich Investoren bei ihren Entscheidungen nicht völlig rational verhalten, sondern gewisse Wahrnehmungsverzerrungen und andere psychologisch begründbare Effekte das Entscheidungsverhalten maßgeblich beeinflussen (vgl. dazu Abschnitt 2.3.2).

Die Gestalt der in diesem Zusammenhang betrachteten Optimierungsprobleme wird sich von den bisher betrachteten klassischen Optimierungsproblemen unterscheiden. Wir werden klären, welche Lösungskandidaten es für Choquet-Optimierungsprobleme gibt und unter welchen Bedingungen diese als echte Lösungen verifiziert werden können.

### 2.3.1 Das Choquet-Maximierungsproblem

In der Choquet-Optimierungstheorie wird ähnlich wie in der klassischen Erwartungswert-Nutzentheorie der erwartete Nutzen eines Endvermögens  $X_T^\varphi$  (bei Endzeitpunkt  $T \geq 0$ ) bewertet. Allerdings wird der Nutzen nicht nur unter einer Nutzenfunktion  $u$  (vgl. Abschnitt 2.2), sondern zusätzlich unter Berücksichtigung einer weiteren Funktion  $w$  (vgl. Abschnitt 2.3.2) bewertet, mit deren Hilfe die Wahrscheinlichkeitsverzerrung modelliert werden kann. Nachfolgend wird definiert, was man sich aus mathematischer Sicht unter einer Wahrscheinlichkeitstransformation vorstellen kann.

#### Definition 2.7

Eine Funktion  $w$ , welche die nachfolgenden Eigenschaften erfüllt, bezeichnen wir als Wahrscheinlichkeitstransformation:

- (i)  $w : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,
- (ii)  $w$  ist strikt wachsend,
- (iii)  $w$  ist differenzierbar,
- (iv) Es gilt  $w(0) = 0$  und  $w(1) = 1$ .

Man betrachtet im Kontext der Choquet-Maximierung sogenannte nichtklassische Optimierungsprobleme mit Endzeithorizont  $T$  und Anfangsvermögen  $x_0 \in \mathbb{R}_+^0$ . Diese besitzen

die nachfolgende Gestalt (vgl. [Jin/Zhou, 2008], Appendix C):

$$(P_{\text{Choquet}}) \quad \begin{cases} \sup_{X_T \geq 0} V(X_T) \\ \mathbb{E}[\xi_T X_T] = x_0, \\ X_T \text{ ist eine } \mathcal{F}_T^W \text{ - messbare Zufallsvariable,} \end{cases} \quad (2.5)$$

wobei

$$V(X) := \int_0^\infty w(\mathbb{P}(u(X) > x)) dx.$$

Falls  $x_0 = 0$  gilt, ist die einzige für das obige Problem zulässige Lösung durch  $X_T \equiv 0$  gegeben. Diese ist dann natürlich auch optimal. Daher nehmen wir im Weiteren stets  $x_0 > 0$  an.

Der nachfolgende Satz zeigt, dass das klassische Erwartungswert-Nutzenproblem als Spezialfall eines Choquet-Optimierungsproblems aufgefasst werden kann, indem man für die Wahrscheinlichkeitstransformation  $w$  die Identität wählt, also gerade dann, falls man keine Verzerrung der realen Wahrscheinlichkeiten modellieren möchte.

### Satz 2.8

Sei  $w(x) = x$ . Dann gilt

$$V(X_T) = \mathbb{E}[u(X_T)].$$

*Beweis.* Da  $u(X_T) \geq 0$  gilt und da in der folgenden Rechnung Riemann- und Lebesgue-Integral übereinstimmen, folgt mit dem Satz von Tonelli:

$$\begin{aligned} V(X_T) &= \int_0^\infty w(\mathbb{P}(u(X_T) > z)) dz \\ &= \int_0^\infty \mathbb{P}(u(X_T) > z) dz \\ &= \int_0^\infty \left( \int_\Omega \mathbf{1}\{u(X_T) > z\} d\mathbb{P} \right) dz \\ &\stackrel{\text{Ton.}}{=} \int_\Omega \left( \int_0^\infty \mathbf{1}\{u(X_T) > z\} dz \right) d\mathbb{P} \\ &= \int_\Omega u(X_T) d\mathbb{P} \\ &= \mathbb{E}[u(X_T)]. \end{aligned}$$

□

Die Besonderheit des Choquet-Optimierungsproblems ( $P_{\text{Choquet}}$ ) ergibt sich daraus, dass ein nicht-konvexes Zielfunktional in einem Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen betrachtet wird. Dieses lässt sich nicht mit den gängigen Methoden wie beispielsweise dem Lagrange-Ansatz lösen. Insbesondere ist generell zu prüfen, ob das betrachtete Optimierungsproblem wohlgestellt ist.

**Definition 2.9**

Sei  $x_0 \in \mathbb{R}_+$ . Das Problem ( $P_{\text{Choquet}}$ ) heißt wohlgestellt, falls

$$\sup_{X_T \in \mathcal{L}} V(X_T) < \infty$$

gilt, wobei

$$\mathcal{L} := \{X_T \geq 0 \mid \mathbb{E}[\xi_T X_T] = x_0, X_T \text{ ist eine } \mathcal{F}_T^W \text{- messbare Zufallsvariable}\}.$$

H. Jin und X. Y. Zhou konnten zeigen, dass das Problem ( $P_{\text{Choquet}}$ ) nach einigen geeigneten Transformationen äquivalent zu einem Optimierungsproblem mit konvexem Zielfunktional ist. Dieses besitzt die nachfolgende Gestalt (vgl. [Jin/Zhou, 2008], Appendix C):

$$(\tilde{P}_{\text{Choquet}}) \quad \begin{cases} \sup_{g \in \Gamma} \bar{v}(g) := \mathbb{E}[u(g(1 - F_{\xi_T}(\xi_T)))w'(F_{\xi_T}(\xi_T))] \\ \mathbb{E}[\xi_T g(1 - F_{\xi_T}(\xi_T))] = x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}_+, \\ \Gamma := \{g : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ nichtfallend, linksseitig stetig mit } g(0) = 0\}. \end{cases}$$

Der Vorteil dieser Darstellung ist, dass das Zielfunktional in  $g$  konkav ist und somit Aussagen zur Wohlgestelltheit und zur genaueren Struktur des optimalen Endvermögens mit Hilfe des Lagrange-Ansatzes möglich sind. Insbesondere konnte gezeigt werden, unter welchen Voraussetzungen das obige Problem ( $\tilde{P}_{\text{Choquet}}$ ) und somit auch das ursprüngliche Problem ( $P_{\text{Choquet}}$ ) wohlgestellt sind. Aufgrund der Relevanz dieser Ergebnisse für das Vorgehen in der weiteren Arbeit werden einige der zentralen Resultate vorgestellt (vgl. [Jin/Zhou, 2008]):

### Satz 2.10

Unter Annahme der Gültigkeit der Bedingungen

- (W1) Die Nutzenfunktion  $u$  sei zweifach differenzierbar und es gelte  $u(0) = 0$ ,
- (W2) Die Abbildung  $x \mapsto \frac{F_T^{-1}}{w'}(x)$  sei nichtfallend auf dem Intervall  $(0,1]$ .  $F_T$  stellt hierbei die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen  $\xi_T$  dar,
- (W3)  $\liminf_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{xu''(x)}{u'(x)} \right) > 0$ ,
- (W4)  $\mathbb{E} \left[ u \left( (u')^{-1} \left( \frac{\xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) \right) w'(F_T(\xi_T)) \right] < \infty$

ist das obige Problem ( $\tilde{P}_{\text{Choquet}}$ ) und somit Problem ( $P_{\text{Choquet}}$ ) wohlgestellt.

*Beweis.* Der Beweis findet sich in [Jin/Zhou, 2008], Appendix C, Satz C.2.  $\square$

Falls das Problem ( $P_{\text{Choquet}}$ ) wohlgestellt ist, kann zudem eine explizite Lösung für das optimale Endvermögen angegeben werden:

### Satz 2.11

Unter Annahme der Gültigkeit der Bedingungen (W1) - (W4) aus Satz 2.10 ist das optimale Endvermögen gegeben durch

$$X_T := (u')^{-1} \left( \frac{\lambda_T \xi_T}{w'(F_{\xi_T}(\xi_T))} \right).$$

Dabei stellt  $\lambda_T \in \mathbb{R}_+$  den Lagrange-Parameter bei Endzeitpunkt  $T \geq 0$  dar, der durch die Nebenbedingung

$$\mathbb{E} [\xi_T X_T] = \mathbb{E} \left[ \xi_T (u')^{-1} \left( \frac{\lambda_T \xi_T}{w'(F_{\xi_T}(\xi_T))} \right) \right] = x_0$$

festgelegt ist.

*Beweis.* Der Beweis findet sich in [Jin/Zhou, 2008], Appendix C, Satz C.2.  $\square$

### 2.3.2 Anmerkungen zur Wahrscheinlichkeitstransformation

Maurice Allais konnte mit der Durchführung einiger spieltheoretischer Experimente zeigen (vgl. [Allais, 1953]), dass sich Menschen bei Entscheidungen in risikobehafteten Situationen anders verhalten, als dies durch die klassische Erwartungswert-Nutzentheorie modelliert wird. Generell neigen Menschen dazu, sichere Auszahlungen zu bevorzugen. Dies ist

auch dann der Fall, wenn sie mit einem geringeren Gewinn einhergehen als eine zur Wahl stehende risikobehaftete Option. Zudem werden hohe Wahrscheinlichkeiten systematisch unterschätzt, geringe Wahrscheinlichkeiten hingegen systematisch überschätzt. Dieses Phänomen findet sich in der Literatur als der sogenannte ‚Sicherheitseffekt‘ (vgl. [Allais, 1953]). Um diese menschlichen Einschätzungsfehler in der Bewertung eines Nutzens in mathematischen Modellen zu berücksichtigen, eignet sich die in diesem Abschnitt vorgestellte Wahrscheinlichkeitstransformation  $w$ . Wenn beispielsweise gefordert wird, dass  $w(p) > p$  für  $p$  nahe 0 und  $w(p) < p$  für  $p$  nahe 1 gilt, so wird die von Allais beschriebene systematische Über- und Unterschätzung hoher und geringer Wahrscheinlichkeiten in der Bewertung eines Nutzens erfasst. Die oben aufgeführten Eigenschaften führen zu einer invers S-förmigen Gestalt der Wahrscheinlichkeitstransformation. Das Standardbeispiel einer Wahrscheinlichkeitstransformation in der Literatur ist gegeben durch die Funktion  $w$  der nachfolgenden Gestalt (vgl. auch [Kahneman/Tversky, 1992], S.309):

$$w(p) := \frac{p^k}{(p^k + (1-p)^k)^{\frac{1}{k}}}, \quad k \in (0, 1).$$

In Abbildung 2.1 ist diese für verschiedene Werte des Parameters  $k$  dargestellt. Ergänzt wurde dieses Beispiel später um den Hinweis (vgl. [Rieger/Wang, 2006], S.3), dass die Ungleichung  $k > 0,278$  gefordert werden muss, da es sonst Bereiche gibt, in denen die Funktion nicht monoton wachsend ist.

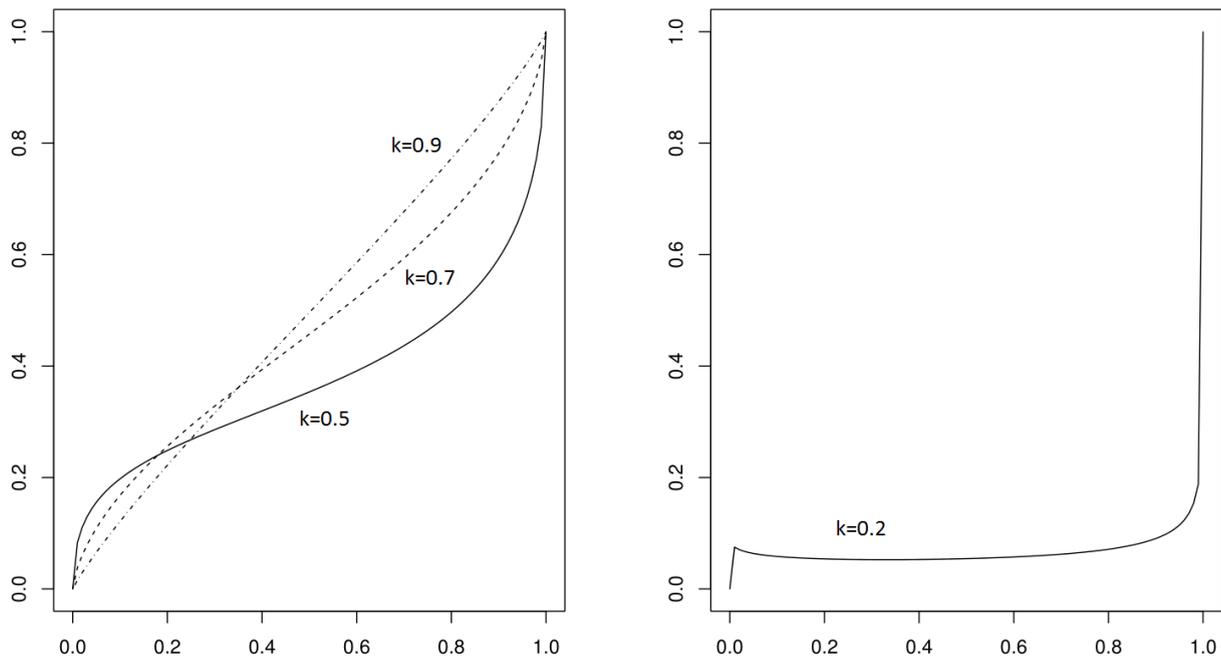


Abbildung 2.1: Wahrscheinlichkeitstransformationen nach Kahneman und Tversky für verschiedene Parameter  $k$ .

Zu erwähnen bleibt an dieser Stelle, dass es nicht trivial ist, Transformationen  $w$  zu konstruieren, die alle in diesem Kapitel geforderten Eigenschaften, insbesondere die für die Wohlgestellttheit des Optimierungsproblems erforderlichen Eigenschaften (W2) und (W4) aus Satz 2.10, erfüllen. Beispielsweise lässt sich zeigen, dass die in der obigen Grafik dargestellten Transformationen die Eigenschaft (W2) nicht erfüllen.

An späterer Stelle wird eine Möglichkeit vorgestellt, Transformationen mit den gewünschten Eigenschaften zu konstruieren (vgl. Abschnitt 5.4.2). Auch in der Literatur gibt es Ansätze, um entsprechende Transformationen zu bestimmen. Beispielsweise wurde in [Jin/Zhou, 2008] eine Klasse von Transformationen konstruiert, deren zugehörige Funktionen die Eigenschaft (W2) erfüllen. Diese Funktionenklasse kann wie folgt angegeben werden:

Es gelte  $c_0 > 0$ ,  $a < 0$  und  $b > 0$ . Dann sind die Funktionen der oben erwähnten Funktionenklasse gegeben durch

$$w(p) = \begin{cases} ke^{a\mu+a^2\sigma^2/2}\Phi(\Phi^{-1}(p)-a\sigma), & 0 < p \leq F_{\xi_T}(c_0), \\ ke^{a\mu+a^2\sigma^2/2}\Phi(\Phi^{-1}(F_{\xi_T}(c_0))-a\sigma) \\ \quad + \tilde{k}e^{b\mu+b^2\sigma^2/2}(\Phi(\Phi^{-1}(p)-b\sigma) - \Phi(\Phi^{-1}(F_{\xi_T}(c_0))-b\sigma)), & F_{\xi_T}(c_0) < p \leq 1, \end{cases}$$

wobei

$$k := \left( e^{a\mu+a^2\sigma^2/2}\Phi\left(\frac{\ln c_0 - (\mu + a\sigma^2)}{\sigma}\right) + c_0^{a-b}e^{b\mu+b^2\sigma^2/2}\left(1 - \Phi\left(\frac{\ln c_0 - (\mu + b\sigma^2)}{\sigma}\right)\right) \right)^{-1}$$

und  $\tilde{k} := c_0^{a-b}k$  gesetzt wird und  $\Phi$  die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung darstellt.

In der folgenden Grafik ist im ersten Bild beispielhaft für  $\mu = -0.3$  und  $\sigma = \sqrt{0.48}$  die Wahrscheinlichkeitstransformation  $p \mapsto w(p)$  für die Parameter  $c_0 = 0.606$ ,  $a = -0.8$  und  $b = 0.5$  im Vergleich zur ersten Winkelhalbierenden (gestrichelt) abgebildet. Im zweiten Bild ist die in Bedingung (W2) auftretende Funktion  $x \mapsto F_T^{-1}(x)/w'(x)$  abgebildet. Wie zu erkennen ist, ist diese Funktion nichtfallend und Bedingung (W2) somit erfüllt.

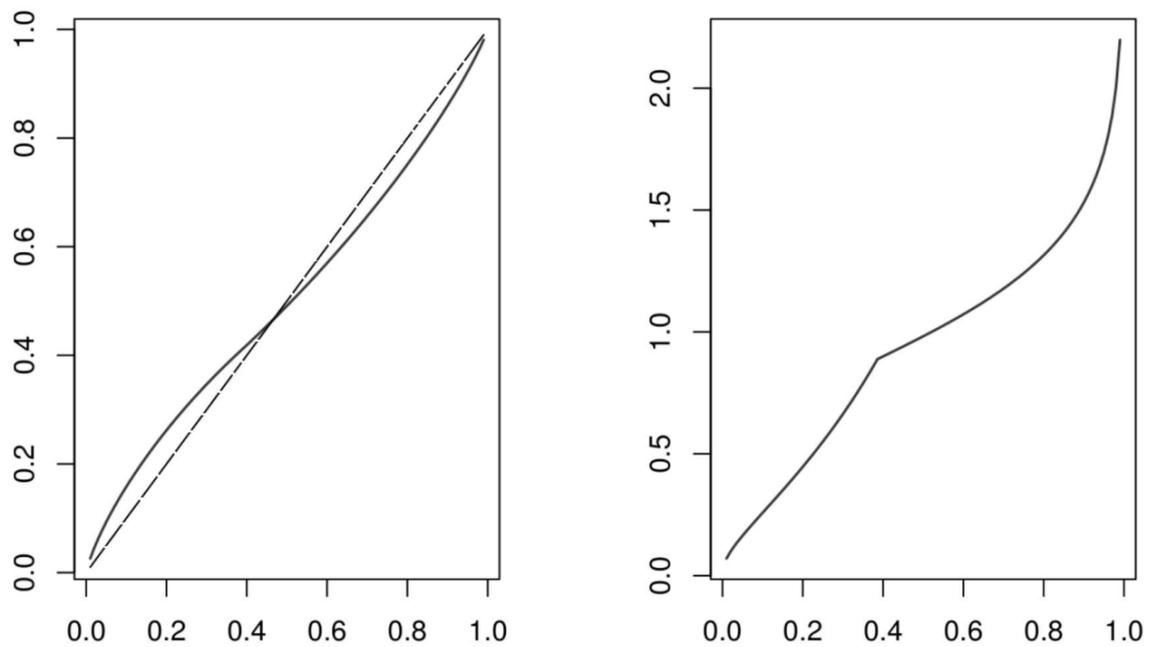


Abbildung 2.2: Die Funktionen  $p \mapsto w(p)$  (links) und  $x \mapsto \frac{F_T^{-1}}{w'}(x)$  (rechts).

In Abschnitt 5.4.2 werden wir Wahrscheinlichkeitstransformationen von deutlich einfacherer Gestalt angeben können, die ebenfalls die Eigenschaften (W2) und (W4) erfüllen.

### 3 Aus dem partiell beobachtbaren Finanzmarkt ableitbare Finanzmärkte und zugehörige klassische Optimierungsprobleme

In diesem Kapitel werden Finanzmarktmodelle vorgestellt, die sich aus dem partiell beobachtbaren Finanzmarkt ableiten lassen und die für diese Arbeit bedeutsam sind. Einige Aussagen in dieser Arbeit werden nur in diesen Spezialfällen des partiell beobachtbaren Finanzmarktes gültig sein. Zudem werden aufgrund der numerischen Handhabbarkeit einige Beispiele in diesen spezielleren Märkten formuliert. Im Nachfolgenden werden die vollständig beobachtbare Marktsituation, das allgemeine Black-Scholes-Modell, sowie das klassische Black-Scholes-Modell vorgestellt:

#### 3.1 Das vollständig beobachtbare Finanzmarktmodell

In diesem Abschnitt wird der vollständig beobachtbare Finanzmarkt vorgestellt. Der zentrale Unterschied zu dem in Unterabschnitt 2.1.1 vorgestellten partiell beobachtbaren Finanzmarkt besteht in der Wahl der dem Markt zu Grunde liegenden Filtration: Im diesem Abschnitt werden wir die Filtration so wählen, dass das Modell nach wie vor allgemeiner als das Black-Scholes-Modell bleibt, die Investoren allerdings durch das Beobachten der Aktie Zugang zu allen dem Finanzmarkt zu Grunde liegenden Informationen haben. Ein Beispiel für ein solches Modell wird mit dem sogenannten ‚Constant-Elasticity-Of-Variance‘-Modell (CEV-Modell) nachfolgend angegeben. Das CEV-Finanzmarktmodell wurde 2010 von Thomas Björk, Mark H. A. Davis und Camilla Landén in [Björk/Davis/Landén, 2010] Kapitel 2 und Kapitel 3 beschrieben. Es lässt sich ursprünglich auch auf die zwei im vorangegangenen Abschnitt erwähnten Arbeiten von Peter Lakner zurückführen.

Der Markt besteht aus  $n$  voneinander unabhängigen Anlagemöglichkeiten die zeitstetig auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^S)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  gehandelt werden können. Dabei stelle  $(\mathcal{F}_t^S)_{t \geq 0}$  die von dem Vektorprozess  $(S_t)_{t \geq 0} := ((S_t^1, \dots, S_t^n)^\top)_{t \geq 0}$  erzeugte und bzgl. des Maßes  $\mathbb{P}$  augmentierte Filtration dar, wobei  $(S_t^i)_{t \geq 0}$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$  den Preis der  $i$ -ten Anlagemöglichkeit im betrachteten Finanzmarkt bezeichne. Weiter sei durch  $(W_t)_{t \geq 0} = ((W_t^1, \dots, W_t^n)^\top)_{t \geq 0}$  eine  $n$ -dimensionale Brownsche Bewegung gegeben. Es sei an dieser Stelle daran erinnert, dass wir die von dieser Brownschen Bewegung generierte Filtration  $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$  nennen.

Die Dynamiken der  $n$  Anlagemöglichkeiten seien durch

$$dS_t^i = \mu_t^i S_t^i dt + S_t^i \sigma_t^i dW_t, \quad i \in \{1, \dots, n\}$$

gegeben. Dabei seien  $(\mu_t^1)_{t \geq 0}, \dots, (\mu_t^n)_{t \geq 0}$  skalarwertige und  $(\mathcal{F}_t^S)_{t \geq 0}$ -adaptierte stochastische

Prozesse sowie  $(\sigma_t^1)_{t \geq 0}, \dots, (\sigma_t^n)_{t \geq 0}$   $n$ -dimensionale und bezüglich der Filtration  $(\mathcal{F}_t^S)_{t \geq 0}$  adaptierte stochastische Prozesse. Weiter ist die Dynamik des Bondprozesses durch

$$dB_t = r_t B_t dt$$

gegeben, wobei die Zinsrate  $(r_t)_{t \geq 0}$  erneut ein beschränkter und bezüglich der Filtration  $(\mathcal{F}_t^S)_{t \geq 0}$ -adaptierter stochastischer Prozess sei.

In diesem Abschnitt sei weiterhin Annahme 2.3 aus Abschnitt 2.1.1 gültig. Dabei sind die gefilterten Prozesse  $(\hat{\mu}_t)_{t \geq 0}$  und  $(\hat{\gamma}_t)_{t \geq 0}$  hier durch  $(\mu_t)_{t \geq 0}$  und  $(\gamma_t)_{t \geq 0}$  zu ersetzen. Es ist in diesem Finanzmarktmodell nicht notwendig, auf die zugehörigen gefilterten Prozesse zurückzugreifen, da diese sich nicht von den ungefilterten Größen unterscheiden.

Die Beobachtbarkeit des Finanzmarktes beruht auf der Annahme, dass dem Finanzmarkt die Filtration  $(\mathcal{F}_t^S)_{t \geq 0}$  zu Grunde liegt und die Investoren somit durch das Beobachten der Aktie Zugang zu allen dem Finanzmarkt zu Grunde liegenden Informationen besitzen. Es gilt für alle  $t \geq 0$  die Gleichheit  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^S$ . Dabei ist zu erwähnen, dass dennoch für alle  $t \geq 0$  die Inklusion  $\mathcal{F}_t^W \subset \mathcal{F}_t^S$  zulässig ist.

### 3.1.1 Das Optimierungsproblem im vollständig beobachtbaren Finanzmarktmodell

Im vollständig beobachtbaren Finanzmarktmodell soll, wie von Thomas Björk, Mark H. A. Davis und Camilla Landén in [Björk/Davis/Landén, 2010] beschrieben, das nachfolgende Optimierungsproblem mit Endzeithorizont  $T$  gelöst werden:

$$(P_{\text{vollst.}}) \quad \begin{cases} \sup_{\varphi} \mathbb{E} [u(X_T^{\varphi})], \\ X_0^{\varphi} = x_0, \\ (\varphi_t)_{t \in [0, T]} \text{ ist selbstfinanzierend und } (\mathcal{F}_t^S)_{t \in [0, T]} \text{-adaptiert.} \end{cases}$$

In [Björk/Davis/Landén, 2010], Kapitel 3 wurde dieses Problem nach der Martingalmethode in ein statisches Optimierungsproblem und in ein Repräsentationsproblem zerlegt und in diesen Schritten gelöst (vgl. dazu auch Abschnitt 2.1.1). Diese Strategie geht zurück auf Pliska (vgl. [Pliska, 1986]). Als statisches Optimierungsproblem ergibt sich

$$(P_{\text{vollst.,statisch}}) \quad \begin{cases} \sup_{X_T} \mathbb{E} [u(X_T)], \\ X_T \text{ ist } \mathcal{F}_T^S \text{-messbar,} \\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \frac{X_T}{B_T} \right] = x_0. \end{cases}$$

### Satz 3.1

Als Lösung des statischen Optimierungsproblems ergibt sich der Lösungskandidat (vgl. auch Abschnitt 3.1)

$$X_T := I(\lambda_T \xi_T).$$

Dabei ist  $I := (u')^{-1}$  und  $\lambda_T \in \mathbb{R}_+$  der Lagrange-Parameter bei dem Markt zu Grunde liegendem Endzeitpunkt  $T$ , welcher die Gültigkeit der Nebenbedingung

$$\mathbb{E}[\xi_T I(\lambda_T \xi_T)] = x_0$$

bezüglich des Anfangsvermögens gewährleistet.

*Beweis.* Der zugehörige Beweis findet sich in [Björk/Davis/Landén, 2010], Kapitel 3.  $\square$

Letztendlich muss dieser Kandidat für das optimale Endvermögen, wie auch in Kapitel 3, [Björk/Davis/Landén, 2010] erwähnt wurde, noch als tatsächliche Lösung verifiziert werden. Dabei lässt sich das Verifikationstheorem aus [Korn, 1997], Kapitel 3, Theorem 16 anwenden. Der einzige Unterschied liegt darin, dass in unserer Situation über die Menge aller  $(\mathcal{F}_t^S)_{t \in [0, T]}$ -messbaren Zufallsvariablen optimiert wird:

### Theorem 3.2

Falls  $\mathbb{E}[\xi_T I(\lambda \xi_T)] < \infty$  für alle  $\lambda > 0$  und  $\mathbb{E}[I(\lambda \xi_T)] < \infty$  gilt, so ist das optimale Endvermögen durch  $X_T := I(\lambda_T \xi_T)$  gegeben. Insbesondere existiert eine dieses Endvermögen replizierende optimale Handelsstrategie  $(\varphi_t^*)_{t \in [0, T]}$ , welche das zugehörige Optimierungsproblem ( $P_{\text{vollst.}}$ ) löst und  $X_T^{\varphi^*} = X_T$  erfüllt.

*Beweis.* Ein Beweis dieser Aussage findet sich in [Korn/Korn, 1999], Kapitel V, Satz 5. Dort wurde zwar der Black-Scholes-Finanzmarkt zu Grunde gelegt. Die Beweisschritte können allerdings für das vollständig beobachtbare Finanzmarktmodell übernommen werden. Zu berücksichtigen ist, dass an den entsprechenden Stellen die Filtration  $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$  durch die Filtration  $(\mathcal{F}_t^S)_{t \geq 0}$  ersetzt werden muss.  $\square$

### 3.1.2 Das CEV-Modell als Beispiel eines vollständig beobachtbaren Finanzmarktmodells

In diesem Abschnitt wird ein Beispiel eines vollständig beobachtbaren Marktmodells formuliert. Es handelt sich dabei um das sogenannte ‚Constant-Elasticity-Of-Variance‘-Modell bzw. kurz um das CEV-Modell. Dieses wurde 1975 von John Cox entwickelt (vgl. [Cox/Ross, 1976]). Das CEV-Modell ist insbesondere allgemeiner als der mittlerweile gut

untersuchte Black-Scholes-Finanzmarkt:

Es gelten alle Voraussetzungen aus dem letzten Abschnitt. Weiter sei  $n = 1$ , und es gelte für die Dynamiken der Aktienpreisprozesse:

$$dS_t = \mu S_t dt + (S_t)^\gamma \sigma dW_t,$$

wobei  $\mu$  und  $\sigma$  konstant gewählt werden und  $\sigma \in \mathbb{R}$  sowie  $\gamma \in \mathbb{R}$  gelten (vgl. dazu auch [Davis, 2004]). Sofern man im vollständigen Marktmodell den Volatilitätsprozess

$$(\sigma_t)_{t \geq 0} := \left( S_t^{(\gamma-1)} \sigma \right)_{t \geq 0}$$

wählt, ergibt sich daraus genau das CEV-Modell. Das Black-Scholes-Modell entsteht weiter als Spezialfall aus dem CEV-Modell, sofern man  $\gamma = 1$  wählt. Das CEV-Modell ist damit allgemeiner als das Black-Scholes-Modell.

### Bemerkung 3.3

- (i) In der Literatur wird der Parameter  $\gamma$  häufig so gewählt, dass  $\gamma < 1$  gilt. In diesem Fall wird modelliert, dass die Volatilität einer betrachteten Aktie zunimmt, sofern der zugehörige Aktienpreis sinkt. Dabei spricht man auch von dem sogenannten ‚leverage‘-Effekt. Einige empirische Studien haben ergeben, dass diese Relation auf den Finanzmärkten bestätigt werden kann (vgl. [Campbell/Hentschel, 1992] oder auch [Poterba/Summers, 1986]).
- (ii) Wenn der Parameter  $\gamma = 0$  gewählt wird, ergibt sich

$$(\sigma_t)_{t \geq 0} := \left( \frac{\sigma}{S_t} \right)_{t \geq 0} .$$

Dabei handelt es sich um einen Spezialfall des CEV-Modells, der im Jahr 1976 von J. C. Cox und S. A. Ross als das sogenannte ‚absolute diffusion model‘ beschrieben wurde (vgl. auch [Cox/Ross, 1976]).

### 3.1.3 Die Rückführung des partiell beobachtbaren Finanzmarktmodells auf das vollständig beobachtbare Finanzmarktmodell

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie das partiell beobachtbare Finanzmarktmodell (vgl. Abschnitt 2.1.1) auf das in diesem Abschnitt vorgestellte vollständig beobachtbare Finanzmarktmodell zurückgeführt werden kann. Dadurch lässt sich insbesondere zeigen, wie der in Satz 2.6 angegebene Lösungskandidat zu Problem  $(P_{\text{partiell}})$  aus dem vollständigen Finanzmarktmodell abgeleitet werden kann.

Die Grundidee besteht darin, das im partiell beobachteten Finanzmarkt betrachtete Problem ( $P_{\text{partiell}}$ ) auf ein äquivalentes Optimierungsproblem zurückzuführen, welches sich final in einer dem vollständig beobachtbaren Finanzmarktmodell entsprechenden Darstellungsform angeben lässt (vgl. auch [Björk/Davis/Landén, 2010], Kapitel 4). Wir gehen dabei vom partiell beobachtbaren Marktmodell, wie in Abschnitt 2.1.1 beschrieben, aus. Weiter definieren wir (vgl. zur Definition von  $D(S_t)$  Gleichung (2.2))

$$dZ_t := \sigma_t^{-1} D(S_t)^{-1} dS_t. \quad (3.1)$$

Gemäß dieser Definition und unter Verwendung von Gleichung (2.1) gilt

$$dZ_t = \sigma_t^{-1} \mu_t dt + dW_t.$$

Im Folgenden ersetzen wir jeden bezüglich der Filtration  $(\mathcal{F}_t^S)_{t \geq 0}$ -adaptierten Prozess  $(Y_t)_{t \geq 0}$  durch den entsprechenden zugehörigen gefilterten Prozess  $(\widehat{Y}_t)_{t \geq 0}$ , der wie folgt definiert ist (vgl. Seite 16):

$$(\widehat{Y}_t)_{t \geq 0} := (\mathbb{E}[Y_t | \mathcal{F}_t^S])_{t \geq 0}$$

Weiter sei

$$d\bar{W}_t = dZ_t - \widehat{\sigma_t^{-1} \mu_t} dt, \quad (3.2)$$

wobei dieser Ausdruck aufgrund der Tatsache, dass der Prozess  $(\sigma_t)_{t \geq 0}$  bezüglich der Filtration  $(\mathcal{F}_t^S)_{t \geq 0}$ -adaptiert ist, auch gemäß  $d\bar{W}_t = dZ_t - \sigma_t^{-1} \widehat{\mu}_t dt$  dargestellt werden kann: Nach Gleichung (3.1) ist der Prozess  $(Z_t)_{t \geq 0}$   $(\mathcal{F}_t^S)_{t \geq 0}$ -adaptiert. R. Liptser und A. Shiryaev konnten zeigen, dass durch den Prozess  $(\bar{W}_t)_{t \geq 0}$  wieder eine  $(\mathcal{F}_t^S)_{t \geq 0}$ -adaptierte Brownsche Bewegung gegeben ist (vgl. [Liptser/Shiryaev, 2004]). Durch Umstellen von Gleichung (3.2) lässt sich nun die Semimartingal-Darstellung des Prozesses  $(Z_t)_{t \geq 0}$  bezüglich der Filtration  $(\mathcal{F}_t^S)_{t \geq 0}$  angeben:

$$dZ_t = \sigma_t^{-1} \widehat{\mu}_t dt + d\bar{W}_t. \quad (3.3)$$

Durch Gleichsetzen der Gleichungen (3.1) und (3.3) ergibt sich

$$dS_t = D(S_t) \widehat{\mu}_t dt + D(S_t) \sigma_t d\bar{W}_t. \quad (3.4)$$

Bisher wurde für die Dynamik des Preisprozesses die folgende Darstellung hergeleitet (vgl. Gleichung (2.3))

$$dS_t = D(S_t) \mu_t dt + D(S_t) \sigma_t dW_t.$$

Durch die Darstellung in Gleichung (3.4) ist dazu eine alternative Darstellungsform mittels  $(\mathcal{F}_t^S)_{t \geq 0}$ -adaptierter Größen gegeben. Diese stellt gerade die Semimartingal-Darstellung des Prozesses  $(S_t)_{t \geq 0}$  bezüglich der Filtration  $(\mathcal{F}_t^S)_{t \geq 0}$  dar, wohingegen die ursprüngliche Gleichung die Semimartingal-Darstellung des Prozesses  $(S_t)_{t \geq 0}$  bezüglich der Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  darstellte. Da es sich hierbei nur um verschiedene Darstellungsformen handelt, müssen sie jedoch fast sicher übereinstimmen. Aus diesem Grund ist es möglich, im partiell beobachtbaren Finanzmarktmodell nur mit  $(\mathcal{F}_t^S)_{t \geq 0}$ -adaptierten Größen zu arbeiten. Das betrachtete Optimierungsproblem ist dann äquivalent zu dem in Abschnitt 3.1 betrachteten

Optimierungsproblem. Die Struktur der Lösungskandidaten sowie die Aussagen, die im partiell beobachtbaren Finanzmarkt getroffen wurden, können somit direkt aus der Struktur der Lösungskandidaten im vollständig beobachtbaren Finanzmarkt übernommen werden. Dies gilt auch für die Verifikationaussagen.

### 3.2 Der allgemeine Black-Scholes-Finanzmarkt

Der allgemeinen Black-Scholes-Finanzmarkt ergibt sich als Spezialfall der oben beschriebenen Finanzmärkte, sofern für alle  $t \geq 0$  die Gleichheit  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^S = \mathcal{F}_t^{W, \mathcal{N}}$  gefordert wird. Dabei sei durch  $(\mathcal{F}_t^{W, \mathcal{N}})_{t \geq 0}$  die augmentierte Brownsche Filtration beschrieben, d.h.  $\mathcal{F}_t^{W, \mathcal{N}} = \sigma(\mathcal{F}_t^W \cup \mathcal{N})$ , wobei  $\mathcal{F}_t^W := \sigma(\{W_s : 0 \leq s \leq t\})$  und

$$\mathcal{N} := \{F \subset \Omega \mid \exists G \in \mathcal{F} \text{ mit } F \subseteq G \text{ und } \mathbb{P}(G) = 0\}$$

gilt. Zudem werden weitere Forderungen an die Gestalt der Prozesse  $(\mu_t)_{t \geq 0}$ ,  $(r_t)_{t \geq 0}$  und  $(\sigma_t)_{t \geq 0}$  gestellt. In diesem Abschnitt wird aufgrund der Relevanz für die weitere Arbeit das allgemeine Black-Scholes-Modell vorgestellt:

Der Markt besteht aus  $n + 1$  Anlagemöglichkeiten auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^{W, \mathcal{N}})_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  mit einem Zeithorizont  $[0, T]$ , wobei  $T$  den Endzeitpunkt darstellt. Es gibt  $n + 1$  Anlagemöglichkeiten, welche zeitstetig gehandelt werden. Im Weiteren sei durch  $(W_t)_{t \geq 0} = ((W_t^1, \dots, W_t^n)^\top)_{t \geq 0}$  eine  $n$ -dimensionale Brownsche Bewegung gegeben. Die Anlagemöglichkeiten setzen sich zusammen aus:

- (i) Einem Bondprozess  $(B_t)_{t \geq 0}$  mit der Dynamik

$$dB_t = r_t B_t dt. \quad (3.5)$$

Dabei ist Zinsrate  $(r_t)_{t \geq 0}$  ein  $(\mathcal{F}_t^{W, \mathcal{N}})_{t \geq 0}$ -progressiv-messbarer, skalarwertiger Prozess mit der Eigenschaft

$$\int_0^T |r_s| ds < \infty \quad \mathbb{P} - f.s. \text{ für alle } T \geq 0.$$

- (ii)  $n$  Aktien, deren jeweilige Preisprozesse die folgende stochastische Differentialgleichung erfüllen:

$$dS_t^i = S_t^i \left( \mu_t^i dt + \sum_{j=1}^n \sigma_t^{ij} dW_t^j \right), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.6)$$

$$S_0^i = s_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Hierbei sind  $(\mu_t^i)_{t \geq 0}$  und  $(\sigma_t^{ij})_{t \geq 0}$  skalarwertige,  $(\mathcal{F}_t^{W, \mathcal{N}})_{t \geq 0}$ -progressiv-messbare stochastische Prozesse mit den Eigenschaften

$$\mathbb{E} \left[ \int_0^t \sum_{i,j=1}^n (\sigma_s^{ij})^2 ds \right] < \infty \text{ für alle } t \geq 0,$$

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^t \|\sigma_s\|^2 ds \right) \right] < \infty \text{ für alle } t \geq 0$$

und

$$\int_0^t \left( \sum_{i=1}^n |\mu_s^i| \right) ds < \infty \quad \mathbb{P} - f.s. \text{ für alle } t \geq 0. \quad (3.7)$$

Weiter fordern wir die Gültigkeit der folgenden drei Annahmen:

#### Annahme 3.4

Es existiert eine Zahl  $c \in \mathbb{R}$ , sodass gilt:

$$\int_0^t r_s ds \geq c \quad \mathbb{P} - f.s. \text{ für alle } t \geq 0. \quad (3.8)$$

Es sei weiterhin Annahme 2.3 aus Abschnitt 2.1.1 gültig. Weiter gelte:

#### Annahme 3.5

Für  $(\mu_t)_{t \geq 0} := ((\mu_t^1, \dots, \mu_t^n)^\top)_{t \geq 0}$  und  $(\sigma_t)_{t \geq 0} := ((\sigma_t^{ij})_{1 \leq i, j \leq n})_{t \geq 0}$  existiert ein eindeutiger  $\mathbb{R}^n$ -wertiger und  $(\mathcal{F}_t^{W, \mathcal{N}})_{t \geq 0}$ -progressiv-messbarer Prozess  $(\gamma_t)_{t \geq 0}$  mit den folgenden Eigenschaften:

$$(i) \quad \int_0^t \|\gamma_s\|_2^2 ds < \infty \quad \mathbb{P} - f.s. \text{ für alle } t \geq 0, \quad (3.9)$$

$$(ii) \quad \sigma_t \gamma_t = \mu_t - r_t \mathbf{1}_n, \quad (3.10)$$

$$(iii) \quad \rho_t := \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^t \gamma_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\gamma_s\|_2^2 ds \right) \right] = 1 \text{ für alle } t \geq 0. \quad (3.11)$$

Da nach Annahme 2.3 die Novikov-Eigenschaft

$$\mathbb{E} \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^t \|\lambda_s\|_2^2 ds \right) \right] < \infty$$

erfüllt ist, existiert ein eindeutiges, äquivalentes, risikoneutrales Martingalmaß  $\mathbb{Q}$  mit

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \Big|_{\mathcal{F}_T} = \exp \left( \int_0^T r_s ds \right) \xi_T,$$

wobei wir für  $T \geq 0$

$$\xi_T := \exp \left( - \int_0^T \left( r_s + \frac{1}{2} \|\gamma_s\|_2^2 \right) ds - \int_0^T \gamma_s dW_s \right) \quad (3.12)$$

setzen.

### 3.2.1 Das Optimierungsproblem im allgemeinen Black-Scholes-Modell

Im allgemeinen Black-Scholes-Modell betrachten wir in dieser Arbeit klassische Optimierungsprobleme mit Endzeitpunkt  $T$  der Gestalt

$$(P_{BS}) \quad \begin{cases} \sup_{\varphi} \mathbb{E} [u(X_T^\varphi)], \\ X_0^\varphi = x_0, \\ (\varphi_t)_{t \in [0, T]} \text{ ist selbstfinanzierend und } (\mathcal{F}_t^{W, \mathcal{N}})_{t \in [0, T]} \text{-adaptiert.} \end{cases}$$

Auch dieses Problem kann mittels der Martingalmethode in ein statisches Optimierungsproblem und in ein Repräsentationsproblem aufgeteilt und in diesen Schritten gelöst werden (vgl. Abschnitt 2.1.1). Als statisches Optimierungsproblem ergibt sich dann

$$(P_{BS, \text{statisch}}) \quad \begin{cases} \sup_{X_T} \mathbb{E} [u(X_T)], \\ X_T \text{ ist } \mathcal{F}_T^{W, \mathcal{N}} \text{-messbar,} \\ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \frac{X_T}{B_T} \right] = x_0. \end{cases}$$

Es gilt dabei:

#### Satz 3.6

Als Lösungskandidat des statischen Optimierungsproblems  $(P_{BS})$  ergibt sich

$$X_T^* := I(\xi_T \lambda_T).$$

Dabei stellt  $\lambda_T \in \mathbb{R}_+$  den Lagrange-Parameter bei Endzeitpunkt  $T$  dar, welcher durch die Nebenbedingung

$$\mathbb{E} [\xi_T I(\xi_T \lambda_T)] = x_0$$

festgelegt wird.

*Beweis.* Ein Beweis dieser Aussage findet sich in [Korn/Korn, 1999], Kapitel V.  $\square$

### **Bemerkung 3.7**

Insbesondere gilt im allgemeinen Black-Scholes-Modell das bereits in Abschnitt 3.1 aufgeführte Verifikationstheorem.

### **3.2.2 Der klassische Black-Scholes-Finanzmarkt**

Der klassische Black-Scholes-Finanzmarkt lässt sich aus dem allgemeinen Black-Scholes-Finanzmarkt ableiten. Dabei wählt man  $(\mu_t)_{t \geq 0} \equiv \mu$ ,  $(r_t)_{t \geq 0} \equiv r$  und  $(\sigma_t)_{t \geq 0} \equiv \sigma$  als konstante Parameter. Insbesondere ist das klassische Black-Scholes-Modell genau dann arbitragefrei, wenn eine Lösung  $\gamma \in \mathbb{R}^n$  des linearen Gleichungssystems  $\mu - r\mathbb{1}_n = \sigma\gamma$  existiert. Das klassische Black-Scholes-Modell wird uns in dieser Arbeit immer wieder der Form von Beispielen zu allgemeineren Aussagen begegnen. Wir werden dann immer implizit die Annahme treffen, dass  $n = 1$  gilt.

### **3.2.3 Das Optimierungsproblem im klassischen Black-Scholes-Modell**

Da der klassische Black-Scholes-Finanzmarkt ein Spezialfall des allgemeinen Black-Scholes-Modells ist, wird ebenfalls das Optimierungsproblem  $(P_{BS})$  mit Endzeithorizont  $T$  betrachtet (vgl. Abschnitt 3.2.1).

## **3.3 Abschließende Bemerkungen zu den Finanzmärkten**

Es gibt weitere Finanzmärkte, die nicht direkt als Spezialfälle aus dem partiell beobachtbaren Finanzmarktmodell abgeleitet werden können, in denen jedoch die in dieser Arbeit getroffenen Aussagen ebenfalls gültig sind. Ein solches Modell findet sich beispielsweise in [Dana/Jeanblanc, 2007]. In dem dort aufgeführten Modell kann unter anderem auf die Beschränktheit der Zinsrate  $(r_t)_{t \geq 0}$  verzichtet werden. Es sind dann weitere Annahmen an die Prozesse und auch an die dort betrachteten Nutzenfunktionen notwendig, um in diesem Fall ebenfalls die Gültigkeit der Verifikationsaussagen zu gewährleisten (vgl. [Dana/Jeanblanc, 2007]).

## 4 Die Turnpike-Theorie früher und heute

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden in den vorgestellten Finanzmärkten und Erwartungswert-Nutzen-Kontexten sogenannte ‚Turnpike-Aussagen‘ formuliert und bewiesen. In der Einleitung wurde bereits umrissen, was sich hinter dem Begriff ‚Turnpike‘ verbirgt (vgl. Abschnitt 1.1). In diesem Kapitel soll die historische Entwicklung dieses Forschungsfeldes kurz dargestellt werden. Dabei wird ein kurzer Überblick über die wichtigsten Etappen der Entwicklung der Turnpike-Theorie aufgezeigt, an welche sich diese Arbeit anschließt. Abschließend werden die Ausgangspunkte und Ziele dieser Arbeit dargestellt.

### 4.1 Die Geschichte der Turnpike-Theorie

In diesem Abschnitt sollen einige Arbeiten in aller Kürze aufgezeigt werden, welche in der Entwicklung der Turnpike-Theorie als wichtige Meilensteine angesehen werden können. Die ersten Resultate über Turnpike-Aussagen gehen auf eine Arbeit von J. Mossin zurück. Seine Ergebnisse beschränken sich auf diskrete Finanzmärkte und HARA-Nutzenfunktionen. Eine Nutzenfunktion  $u \in C^2(\mathbb{R}_+)$  heißt dabei HARA-Nutzenfunktion (‚hyperbolic absolute risk aversion‘), falls es Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  gibt und gilt:

$$\frac{-u''(x)}{u'(x)} = \frac{1}{\alpha x + \beta} > 0.$$

Mossin selbst stellte im Jahr 1968 fest: „[...] this is a promising area for future research“ (vgl. [Mossin, 1968]). Im Jahr 1972 wurden J. Mossins Aussagen von H. Leland verallgemeinert, welcher Turnpike-Aussagen für Nutzenfunktionen  $u_1$  mit der Eigenschaft

$$-\frac{u_1'(x)}{u_1''(x)} = ax + f(x)$$

für gleichmäßig beschränkte Funktionen  $f$  bewiesen und den Ausdruck ‚Portfolio Turnpike‘ ins Leben gerufen hat (vgl. [Leland, 1972]). Die Funktion  $u_1$  gehört dabei zu einem Investor 1, welcher den Nutzen eines Endvermögens mit dieser Nutzenfunktion bewertet. Weiter werden das optimale Endvermögen und die optimale Handelsstrategie, die sich für Investor 1 ergeben, mit den entsprechenden Größen eines weiteren Investors 0 verglichen. Dieser bewertet den Nutzen mit Hilfe einer Nutzenfunktion  $u_0$ . Es werden dabei nur Bedingungen an eine Nutzenfunktion  $u_1$  gestellt, da in der genannten Arbeit bereits eine konkrete Vergleichsnutzenfunktion  $u_0$  festgelegt wurde. Dieses Prinzip findet sich in vielen weiteren Arbeiten über Turnpike-Aussagen. Oftmals werden als Nutzenfunktion  $u_0$  der Power- oder der Exponentialnutzen gewählt.

Ebenfalls Aussagen in diskreten Finanzmärkten wurden von N. Hakansson im Jahr 1974 bzw. von G. Hubermann und S. Ross im Jahr 1983 getroffen. N. Hakansson betrachtete

dabei erneut eine größere Klasse von zulässigen Nutzenfunktionen  $u_1$ , die sich durch die Eigenschaft

$$\frac{(x-a)^\gamma}{\gamma} < u_1(x) < \frac{(x+a)^\gamma}{\gamma}, \quad x \geq a \geq 0, \quad \gamma < 1$$

auszeichnen und erweiterte die bisherigen Resultate auf diese Funktionsklasse (vgl. [Hakansson, 1974]). G. Hubermann und S. Ross betrachteten Nutzenfunktionen, die die Grenzwerteigenschaft

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u_1'(xy)}{u_1'(x)} = y^{\gamma-1} \text{ mit } y \in (a, b)$$

für Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$  erfüllen und auch als ‚regularly varying functions‘ bezeichnet werden. Letztendlich konnten sie zeigen, dass Turnpike-Aussagen gelten, sofern die Nutzenfunktionen von unten beschränkt sind und zudem für die sogenannte relative Risikoaversion RRA die Eigenschaft

$$\lim_{x \rightarrow \infty} RRA_{u_1}(x) := \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{xu_1''(x)}{u_1'(x)} \in (0, 1) \quad (4.1)$$

gilt [Hubermann/Ross, 1983].

In allen diesen Arbeiten wurden diskrete Finanzmärkte zu Grunde gelegt und die Annahme getroffen, dass die Renditen unabhängig voneinander sind. Außerdem wurde in allen Arbeiten das Prinzip der dynamischen Programmierung genutzt.

Die erste Arbeit über Turnpike-Aussagen in stetigen Finanzmärkten wurde von J. Cox und C. Huang im Jahr 1992 veröffentlicht. Sie konnten ihre Turnpike-Aussagen für Nutzenfunktionen  $u_1$  zeigen, für die

$$|(u_1')^{-1}(y) - A_1 y^{-\frac{1}{b}}| \leq A_2 y^{-a}, \quad \forall y \leq y^*, \quad a \in \left[0, \frac{1}{b}\right)$$

gilt, wobei  $A_1 > 0$ ,  $A_2 > 0$ ,  $b > 0$  und  $y^* > 0$ . Insbesondere fallen auch Nutzenfunktionen in diese Klasse, die nicht von unten beschränkt sind und welche auch nicht die Bedingung (4.1) erfüllen müssen. Cox und Huang gelang es, klare Aussagen über die Wirtschaftlichkeit der betrachteten Probleme zu treffen: Sofern die Zinsrate strikt positiv gewählt wird, wird der Wert jedes nach oben beschränkten Zahlungsanspruches beliebig klein, sofern der betrachtete Zeithorizont beliebig groß wird. Daher wird ein Investor in einem solchen Finanzmarkt zu Beginn sein Vermögen in Zahlungsansprüche investieren, deren Auszahlungen nach oben unbegrenzt sind. Die sich aus diesem Verhalten ergebende und für viele weitere Arbeiten zentrale Erkenntnis war, dass die optimale Handelsstrategie in einem Markt mit beliebig großem Endhorizont nur vom asymptotischen Verhalten der Nutzenfunktion abhängt (vgl. [Cox/Huang, 1992]).

Als weitere wichtige Arbeiten im Bereich der Turnpike-Theorie in stetigen Finanzmärkten können die Arbeiten von X. Jin, C.-F. Huang und T. Zariphopoulou und P. Dybvig mit L. Rogers und K. Back genannt werden. Während X. Jin neben den optimalen Handelsstrategien auch optimale Konsumstrategien betrachtete (vgl. [Jin, 1998]), konnten C.-F.

Huang und T. Zariphopoulou Turnpike-Resultate im Stetigen mit dem ursprünglichen Prinzipien der dynamischen Programmierung und unter Nutzung der Theorie von Viskositätslösungen zeigen (vgl. [Huang/Zariphopoulou, 1999]). In einer Arbeit von Dybvig, Rogers und Back wurde zum ersten Mal komplett auf die Annahme von voneinander unabhängigen Renditen verzichtet und der vollständige Black-Scholes-Finanzmarkt betrachtet (vgl. [Dybvig/Rogers/Back, 1999]). In dieser Arbeit werden zwei Investoren miteinander verglichen, welche den Nutzen eines Endvermögens bzw. einer Handelsstrategie mit den Nutzenfunktionen  $u_0$  und  $u_1$  bewerten. Dabei darf im Vergleich zu den vorherigen Arbeiten auch die Nutzenfunktion  $u_0$  freier gewählt werden. Es müssen jedoch die folgenden beiden Voraussetzungen gelten:

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u_1'(x)}{u_0'(x)} = 1 \quad (\text{,similar at infinity' }),$$

(ii) Für alle Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$  gilt für  $i \in \{0, 1\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_i(a_n)}{u_i(b_n)} = 1 \quad (\text{,uniform continuity property' }).$$

Auch bei diesen Annahmen handelt es sich um solche, die sich auf das asymptotische Verhalten der gewählten Nutzenfunktionen beziehen. Insbesondere wurde in dieser Arbeit gezeigt, dass die erwartete absolute Differenz der Endvermögen der beiden Investoren bezüglich  $L^1$ -Konvergenz gegen den Wert Null konvergiert, sofern der Zeithorizont gegen Unendlich konvergiert (vgl. [Dybvig/Rogers/Back, 1999]).

Eine weitere wichtige Arbeit auf dem Gebiet der Turnpike-Aussagen stammt von P. Guasoni, C. Kardaras, S. Robertson und H. Xing. In dieser Arbeit ist es gelungen, Turnpike-Aussagen in allgemeineren Marktsituationen und insbesondere in unvollständigen Finanzmärkten zu beweisen. Dabei wurden allgemeine Semimartingalmodelle und Diffusionsmodelle betrachtet. Auch in dieser Arbeit werden zwei Investoren mit in gewisser Weise ähnlichen Nutzenfunktionen verglichen. Für die Nutzenfunktion  $u_0$  wurde allerdings die Einschränkung getroffen, dass es sich um die Power-Nutzenfunktion bzw. die logarithmische Nutzenfunktion handelt. An die Nutzenfunktion  $u_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  wurden weiter die Bedingungen gestellt, dass sie stetig differenzierbar, strikt wachsend sowie strikt konkav ist, die INADA-Bedingungen sowie die Eigenschaft

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u_1'(x)}{x^{p-1}} = 1.$$

Dabei ist es gelungen, Aussagen über die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit des Quotienten der Endvermögen der beiden Investoren zu treffen, sofern der Zeithorizont beliebig wächst. Zudem konnten ebenfalls Konvergenzeigenschaften für die zugehörigen Handelsstrategien gezeigt werden. Je nachdem, in welchem Setting man sich hierbei befindet, müssen aber spezielle Wahrscheinlichkeitsmaße betrachtet werden, sodass die Konvergenz gelingt (vgl. [Guasoni/Kardaras/Robertson/Xing, 2014]).

## 4.2 Ausgangspunkt und Ziele dieser Arbeit

Ausgehend von den Ergebnissen von Dybvig, Rogers und Back werden in dieser Arbeit in verschiedenen Kontexten Turnpike-Aussagen formuliert. Dabei wurden die folgenden Ziele verfolgt:

- Erweiterung der bisherigen Turnpike-Aussagen auf partiell beobachtbare Finanzmärkte (vgl. Abschnitt 5.1).
- Erweiterung der Turnpike-Theorie für den Fall der Choquet-Optimierungstheorie (vgl. Abschnitt 5.2).
- Die Formulierung konkreter und in der Literatur bisher spärlich zu findender Beispiele über das Gelingen und Nicht-Gelingen von Turnpike-Aussagen (vgl. Abschnitt 5.4 sowie Abschnitt 7.2).
- Formulierung von Turnpike-Aussagen, die auch zeitabhängige Nutzenfunktionen zulassen (vgl. Abschnitt 6.1).
- Formulierung von Turnpike-Aussagen, welche auch Nutzenfunktionen mit Definitionsbereich  $\mathbb{R}$  zulassen (vgl. Abschnitt 7).
- Betrachtung der Konvergenzgeschwindigkeiten bei Turnpike-Aussagen (vgl. Abschnitt 8).
- Untersuchung von Konvergenzaussagen über das optimale Portfolio im Bayes-Marktmodell (vgl. Abschnitt 9).
- Formulierung von Turnpike-Aussagen im CRR-Modell (vgl. Abschnitt 10.1.2).

## 5 Resultate zu Turnpike-Aussagen in diversen stetigen Kontexten für zeitunabhängige Nutzenfunktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{R}_+$ im partiell beobachtbaren Finanzmarktmodell

In diesem Kapitel wird es gelingen, eine für den allgemeinen Black-Scholes-Finanzmarkt gültige Turnpike-Aussage auf den partiell beobachtbaren Finanzmarkt zu übertragen. Weiter wird am Beispiel der Choquet-Optimierungstheorie gezeigt, dass Turnpike-Aussagen auch in nichtklassischen Erwartungswert-Nutzen-Kontexten formuliert werden können. Dabei werden die beiden Fälle unterschieden, dass der verallgemeinerte Nutzen der Investoren über gleiche bzw. unterschiedliche Wahrscheinlichkeitstransformationen modelliert wird. Wir werden insbesondere zeigen, dass die absolute Differenz der erwarteten Endvermögen bei einem beliebig wachsenden Endzeitpunkt  $T$  gegen den Wert Null konvergiert, falls beide Investoren ihren Nutzen mit den gleichen Wahrscheinlichkeitstransformationen und in gewisser Weise ‚ähnlichen‘ Nutzenfunktionen bewerten. Außerdem kann gefolgert werden, dass sich auch die optimalen Handelsstrategien der beiden Investoren in einem gewissen (später genauer beschriebenen) Sinne annähern.

Im Folgenden legen wir das in Abschnitt 2.1 betrachtete partiell beobachtbare Finanzmarktmodell zu Grunde. In diesem Finanzmarktmodell gilt die sogenannte ‚market growth condition‘:

### Satz 5.1

Es gilt die ‚market growth condition‘:

$$\mathbb{E}[\bar{\xi}_T] \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (5.1)$$

*Beweis.* Aufgrund der geforderten Novikov-Bedingung (vgl. Gleichung (2.3)) ist der Prozess  $(\bar{\rho}_t)_{t \geq 0}$  ein Martingal, und es gilt daher  $\mathbb{E}[\bar{\rho}_0] = \mathbb{E}[\bar{\rho}_T] = 1$ . Somit folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\bar{\xi}_T] &= \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_0^T \left( r_s + \frac{1}{2} \|\hat{\gamma}_s\|_2^2 \right) ds - \int_0^T \hat{\gamma}_s d\bar{W}_s \right) \right] \\ &\leq \exp(-cT) \mathbb{E}[\bar{\rho}_T] = \exp(-cT) \rightarrow 0 \text{ für } T \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

□

Die ‚market growth condition‘ lässt sich wie folgt interpretieren:

**Bemerkung 5.2**

Durch die ‚market growth condition‘ wird garantiert, dass der risikolose Diskontierungsfaktor gegen den Wert Null konvergiert, wenn der Endzeitpunkt  $T$  beliebig groß wird. Dies kann so interpretiert werden, dass der heutige Wert einer Geldeinheit zum Endzeitpunkt  $T$  zunehmend geringer wird, je größer der Endzeitpunkt gewählt wird. Diese Forderung ist sinnvoll, da jeder Investor mit einem positiven Anfangsvermögen in den risikolosen Bond investieren und sein Vermögen somit mit zunehmender Zeit beliebig mehrern könnte. Im Grenzfall eines beliebig großen Zeithorizontes würde jeder Investor beliebig viel Geld besitzen und daher würde eine Geldeinheit in diesem Grenzfall aus heutiger Sicht keinen Wert besitzen.

## 5.1 Turnpike-Aussagen im partiell beobachtbaren Finanzmarkt unter Betrachtung des klassischen Erwartungswert-Nutzen-Kontexts

In diesem Abschnitt wird eine Turnpike-Aussage im partiell beobachtbaren Finanzmarkt formuliert, wobei in diesem Abschnitt die klassische Erwartungswert-Nutzentheorie zu Grunde gelegt wird. Im Jahr 1999 konnte bereits von O. H. Dybig, L. C. G. Rogers und K. Back eine entsprechende Aussage für den allgemeinen Black-Scholes-Finanzmarkt bewiesen werden, sofern an bestimmte Prozesse konkretere Forderungen gestellt werden. Dabei wird die Zinsrate  $(r_t)_{t \geq 0}$  als beschränkter Prozess gewählt und der sogenannte Marktpreisprozess wie folgt definiert:

$$(\gamma_t)_{t \geq 0} := (\sigma_t^{-1}(\mu_t - r_t \mathbb{1}_n))_{t \geq 0}.$$

Zudem wird gefordert, dass für alle Zeitpunkte  $t > 0$  alle positiven wie negativen Momente der Zufallsvariablen  $\xi_t$  existieren, also  $\mathbb{E}[\xi_t^m] < \infty$  für alle  $m \in \mathbb{R}$  und für alle  $t > 0$  gilt. Unter diesen Annahmen wurden zwei Investoren 0 und 1 betrachtet, welche den Nutzen eines Endvermögens mit Hilfe der klassischen Nutzenfunktionen  $u_0$  und  $u_1$  bewerten und das gleiche Anfangsvermögen  $x_0 > 0$  besitzen. Jeder Investor versucht dabei gemäß des folgenden Optimierungsproblems (vgl. Abschnitt 3.2.1)

$$(P_{BS}) \quad \begin{cases} \sup_{\varphi} \mathbb{E} [u_i(X_{i,T}^{\varphi})], \\ X_0^{\varphi} = x_0, \\ (\varphi_t)_{t \in [0,T]} \text{ ist selbstfinanzierend und } (\mathcal{F}_t^{W,\mathcal{N}})_{t \in [0,T]} \text{-adaptiert} \end{cases}$$

für  $i \in \{0, 1\}$  optimal zu handeln. Den optimalen Vermögensprozess des Investors 0 bei Endzeithorizont  $T$  bezeichnen wir dabei künftig mit  $(X_{0,t}^T)_{t \in [0,T]}$ , denjenigen des Investors 1 mit  $(X_{1,t}^T)_{t \in [0,T]}$ .

### Bemerkung 5.3

- (i) Da eine Handelsstrategie  $(\varphi_t)_{t \in [0,T]}$  zu einem eindeutigen Portfolio-Prozess  $(\pi_t)_{t \in [0,T]}$  gehört und umgekehrt, werden diese im weiteren Verlauf dieser Arbeit in diesem Sinne als gleichwertig angesehen.
- (ii) Den zur optimalen Handelsstrategie  $(\varphi_t^*)_{t \in [0,T]}$  bzw. zum gleichwertigen optimalen Portfolio-Prozess  $(\pi_t^*)_{t \in [0,T]}$  zugehörigen optimalen Vermögensprozess bei Endzeitpunkt  $T$  bezeichnen wir künftig mit  $(X_t^T)_{t \in [0,T]} := \left( X_t^{\varphi^*} \right)_{t \in [0,T]} = \left( X_t^{\pi^*} \right)_{t \in [0,T]}$ .
- (iii) Der Portfolio-Prozess des  $i$ -ten Investors ist gegeben durch (vgl. dazu auch Definition 2.2)

$$\pi_{i,t}^T := \left( \pi_{i,t}^{0,T}, \dots, \pi_{i,t}^{n,T} \right)^{\top}.$$

- (iv) Den Lagrange-Parameter, der sich beim Lösen des statischen Optimierungsproblems bei Betrachten des Investors 0 und einem Endzeithorizont  $T$  ergibt, bezeichnen

wir künftig mit  $\lambda_{0,T}$ . Entsprechend bezeichnet  $\lambda_{1,T}$  den zu Investor 1 gehörigen Lagrange-Parameter.

Unter diesen Annahmen konnte die Gültigkeit des nachfolgenden Theorems gezeigt werden (vgl. [Dybvig/Rogers/Back, 1999]):

**Theorem 5.4** ([Dybvig/Rogers/Back, 1999], Theorem 1)

Betrachtet werden zwei Investoren 0 und 1 mit Anfangsvermögen  $x_0 \in \mathbb{R}_+$  und den Nutzenfunktionen  $u_0$  und  $u_1$  im allgemeinen Black-Scholes-Modell. Die betrachteten Nutzenfunktionen  $u_i$  erfüllen für  $i \in \{0, 1\}$  die nachfolgenden Eigenschaften:

(V1)  $u_i : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$  sei strikt monoton wachsend, strikt konkav, zweifach differenzierbar, erfülle die INADA-Bedingungen, und es gelte  $u_i(0) = 0$ ,

(V2) Es gelte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u_1'(x)}{u_0'(x)} = 1 \quad (\text{,similar at infinity'}),$$

(V3) Für alle Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$  gelte für  $i \in \{0, 1\}$  (,uniform continuity property'):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_i(a_n)}{u_i(b_n)} = 1.$$

Dann folgt

$$(B1) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \xi_T \left| X_0^T - X_1^T \right| \right] = 0,$$

und es gilt für alle  $t > 0$ :

$$(B2) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \left| \frac{X_{0,t}^T}{B_t} - \frac{X_{1,t}^T}{B_t} \right| \right] = 0,$$

$$(B3) \quad \int_0^t (\pi_{1,s}^T - \pi_{0,s}^T)^\top \Sigma_s (\pi_{1,s}^T - \pi_{0,s}^T) ds \xrightarrow{P} 0 \text{ für } T \rightarrow \infty,$$

$$(B4) \quad \sup_{s \leq t} |X_{1,s}^T - X_{0,s}^T| \xrightarrow{P} 0 \text{ für } T \rightarrow \infty,$$

wobei  $(\Sigma_t)_{t \in [0, T]} := (\sigma_t \sigma_t^\top)_{t \in [0, T]}$  den Kovarianzprozess darstellt mit  $\sigma_t := (\sigma_t^1, \dots, \sigma_t^n)$ .

Dieses Theorem lässt sich auf die partiell beobachtbare Marktsituation übertragen. Dabei ist jedoch sicherzustellen, dass die bereits im Beweis von Satz 2.6 angesprochenen Verifikationsaussagen gelten. Wir machen daher in diesem Abschnitt folgende Annahme:

### Annahme 5.5

Für  $i \in \{0, 1\}$  und für alle Endzeitpunkte  $T > 0$  gelte  $\mathbb{E}[I_i(\overline{\lambda_{i,T}}\bar{\xi}_T)] < \infty$  und  $\mathbb{E}[\bar{\xi}_T I_i(c\bar{\xi}_T)] < \infty$  für alle  $c > 0$ .

Damit gilt:

### Theorem 5.6

Betrachtet werden zwei Investoren 0 und 1 mit dem Anfangsvermögen  $x_0 > 0$  und den Nutzenfunktionen  $u_0$  und  $u_1$  im partiell beobachtbaren Finanzmarkt. Es gelte:

- (i)  $u_i(0) = 0$  für  $i \in \{0, 1\}$ ,
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u'_i(x)}{u'_0(x)} = 1$  („similar at infinity“),
- (iii) Für alle Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$  gelte für  $i \in \{0, 1\}$  („uniform continuity property“):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_i(a_n)}{u_i(b_n)} = 1.$$

- (iv) Es gelte Annahme 5.5.

Dann folgt

$$(B1) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \xi_T \left| \bar{X}_0^T - \bar{X}_1^T \right| \right] = 0,$$

und es gilt für alle  $t > 0$ :

$$(B2) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \left| \frac{\bar{X}_{0,t}^T}{B_t} - \frac{\bar{X}_{1,t}^T}{B_t} \right| \right] = 0,$$

$$(B3) \quad \int_0^t (\bar{\pi}_{1,s}^T - \bar{\pi}_{0,s}^T)^\top \Sigma_s (\bar{\pi}_{1,s}^T - \bar{\pi}_{0,s}^T) ds \xrightarrow{P} 0 \text{ für } T \rightarrow \infty,$$

$$(B4) \quad \sup_{s \leq t} |\bar{X}_{1,s}^T - \bar{X}_{0,s}^T| \xrightarrow{P} 0 \text{ für } T \rightarrow \infty.$$

Dabei stellt  $(\Sigma_t)_{t \in [0, T]} := (\sigma_t \sigma_t^\top)_{t \in [0, T]}$  mit  $\sigma_t := (\sigma_t^1, \dots, \sigma_t^n)$  den Kovarianzprozess dar und  $(\bar{\pi}_{i,t}^T)_{t \in [0, T]}$  und  $(\bar{X}_{i,t}^T)_{t \in [0, T]}$  für  $i \in \{0, 1\}$  bezeichnen die gefilterten Prozesse.

*Beweis.* Der Beweis verläuft analog zu [Dybvig/Rogers/Back, 1999], Theorem 1. Dabei muss die Filtration  $(\mathcal{F}_t^W)_{t \geq 0}$  durch die Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  ersetzt werden. Der Unterschied liegt also darin, dass die betrachteten Prozesse bezüglich einer anderen Filtration adaptiert sind und dass zudem die gefilterten Größen betrachtet werden. Weiter müssen die dort getroffenen Aussagen zur Verifikation des Lösungskandidaten als tatsächliche Lösung durch die in Annahme 5.5 formulierten Voraussetzungen ersetzt werden (vgl. dazu auch den Beweis von Satz 2.6).  $\square$

## 5.2 Turnpike-Aussagen im Kontext der Choquet-Maximierung für den Fall ähnlicher Nutzenfunktionen und gleicher Wahrscheinlichkeitstransformationen

Im diesem Abschnitt werden wir Optimierungsprobleme im Kontext der Choquet-Maximierung betrachten. Als Finanzmarktmodell sei in diesem Abschnitt das klassische Black-Scholes-Modell aus 3.2.2 zu Grunde gelegt. Das betrachtete Optimierungsproblem unterscheidet sich jedoch von dem in 3.2.3 vorgestellten Optimierungsproblem, da wir im Folgenden den klassischen Kontext erweitern und Choquet-Maximierungsprobleme betrachten (vgl. Abschnitt 2.3). Ein Investor bewertet den Nutzen eines Endvermögens im Rahmen der Choquet-Maximierung nicht nur gemäß einer Nutzenfunktion  $u$ , sondern ermittelt den sogenannten verallgemeinerten Nutzen  $V'$  mit Hilfe einer weiteren Funktion, der sogenannten Wahrscheinlichkeitstransformation  $w$ . Diese Wahrscheinlichkeitstransformation erfasst dabei die sogenannte Wahrscheinlichkeitsverzerrung, welche in klassischen Theorien nicht erfasst wird (vgl. 2.3.2).

Die Choquet-Optimierungsprobleme, die wir in diesem Abschnitt betrachten, besitzen die folgende Gestalt (vgl. auch Abschnitt 2.3):

$$(P_{\text{Choquet}}) \left\{ \begin{array}{l} \sup_{X_T} V(X_T) := \sup_{X_T} \int_0^\infty w(\mathbb{P}(u(X_T) > z)) dz \\ \mathbb{E}[\xi_T X_T] = x_0 \in \mathbb{R}_+, \\ X_T \text{ ist eine } \mathcal{F}_T^W\text{-messbare Zufallsvariable,} \\ X_T \geq 0. \end{array} \right.$$

Wir fordern in diesem Abschnitt die Gültigkeit der nachfolgenden Annahme:

### Annahme 5.7

Es gelte:

- (1)  $u : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$  sei strikt monoton wachsend, strikt konkav, zweifach differenzierbar, erfülle die INADA-Bedingungen, und es gelte  $u(0) = 0$ .
- (2)  $w : [0, 1] \mapsto [0, 1]$  sei strikt monoton wachsend und differenzierbar.
- (3) Die Abbildung  $x \mapsto \frac{F_T^{-1}}{w'}(x)$  sei nichtfallend auf dem Intervall  $(0, 1]$ .  $F_T$  stellt hierbei die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen  $\xi_T$  dar.
- (4)  $\liminf_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{xu''(x)}{u'(x)} \right) > 0$ .
- (5)  $\mathbb{E} \left[ u \left( (u')^{-1} \left( \frac{\xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) \right) w'(F_T(\xi_T)) \right] < \infty$ .

Unter Gültigkeit der in Annahme 5.7 geforderten Eigenschaften kann die Wohlgestelltheit des Problems ( $P_{\text{Choquet}}$ ) sichergestellt werden (vgl. auch Abschnitt 2.3.1, Satz 2.10).

Im Folgenden werden wir zwei Investoren 0 und 1 mit gleichen Wahrscheinlichkeitstransformationen betrachten:

### Theorem 5.8

Gegeben seien zwei Investoren 0 und 1, welche das gleiche Anfangsvermögen  $x_0 > 0$  besitzen und den verallgemeinerten Nutzen eines Endvermögens mittels der Nutzenfunktionen  $u_0$  und  $u_1$  sowie der Wahrscheinlichkeitstransformation  $w := w_0 = w_1$  ermitteln. Die Funktionen  $u_i$  für  $i \in \{0, 1\}$  erfüllen weiter die folgenden Annahmen:

- ( $\widetilde{V}1$ ) Die in Annahme 5.7 aufgeführten Eigenschaften (1), (2) und (4),
- ( $\widetilde{V}2$ ) Die in Theorem 5.4 geforderten Voraussetzungen (V2) und (V3),
- ( $\widetilde{V}3$ ) Es existiere ein Zeitpunkt  $\widetilde{T} > 0$ , sodass für alle Zeitpunkte  $T \geq \widetilde{T}$  und für beide

Investoren die Eigenschaften (3) und (5) aus Annahme 5.7 erfüllt sind.

Dann folgt

$$(C1) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \xi_T \left| X_0^T - X_1^T \right| \right] = 0,$$

und es gilt für alle  $t > 0$ :

$$(C2) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \left| \frac{X_{0,t}^T}{B_t} - \frac{X_{1,t}^T}{B_t} \right| \right] = 0,$$

$$(C3) \quad \int_0^t \|\pi_{1,s}^T - \pi_{0,s}^T\|^2 ds \xrightarrow{P} 0 \text{ für } T \rightarrow \infty,$$

$$(C4) \quad \sup_{s \leq t} |X_{1,s}^T - X_{0,s}^T| \xrightarrow{P} 0 \text{ für } T \rightarrow \infty.$$

Im nachfolgenden Satz sind zwei Hilfsaussagen aufgeführt, die wir für den Beweis von Theorem 5.8 benötigen. Dieser wird im Anschluss folgen.

### Theorem 5.9

Für

$$I_0 = (u'_0)^{-1} \quad \text{und} \quad I_1 = (u'_1)^{-1}$$

gelten unter den in Theorem 5.4 getroffenen Annahmen (V2) und (V3) die folgenden beiden Hilfsaussagen:

(H1) Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{I_1(x)}{I_0(x)} = 1.$$

(H2) Für alle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  gilt für  $i \in \{0, 1\}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_i(x_n)}{I_i(y_n)} = 1.$$

*Beweis.* Der Beweis der beiden Aussagen findet sich in [Dybvig/Rogers/Back, 1999], Beweis zu Theorem 1.  $\square$

### Anmerkung 5.10

Analog kann bei Gültigkeit der Aussagen (H1) und (H2) auf die Gültigkeit der in Theorem 5.4 aufgeführten Eigenschaften (V2) und (V3) geschlossen werden.

Nachfolgend werden wir Theorem 5.8 beweisen:

*Beweis.* Die Beweisschritte (C3) und (C4) folgen analog zu [Dybvig/Rogers/Back, 1999], Theorem 1, Schritt 6. Daher werden im Folgenden nur die Beweisschritte (C1) und (C2) gezeigt. Diese lehnen sich ebenfalls an die Beweisführung in [Dybvig/Rogers/Back, 1999], Theorem 1 an, unterscheiden sich jedoch in einigen technischen Aspekten. Die Voraussetzungen (V1) und (V3) garantieren dabei die Wohlgestelltheit der zu den Investoren 0 und 1 gehörigen Optimierungsprobleme:

Nach Satz 2.11 gilt wegen der Gültigkeit von Annahme 5.7, Eigenschaft (4), dass die zu den beiden Investoren zugehörigen Optimierungsprobleme jeweils wohlgestellt sind und zum Endzeitpunkt  $T$  die Lösungen

$$X_0^T = (u'_0)^{-1} \left( \frac{\lambda_{0,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right), \quad X_1^T = (u'_1)^{-1} \left( \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right)$$

besitzen. Dabei sind  $\lambda_{0,T}$  und  $\lambda_{1,T}$  die zugehörigen Lagrange-Parameter, die für  $i \in \{0, 1\}$  eindeutig durch die Nebenbedingung

$$\mathbb{E} [\xi_T X_{i,T}^T] = \mathbb{E} \left[ \xi_T (u'_i)^{-1} \left( \frac{\lambda_{i,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) \right] = x_0$$

festgelegt sind, die sich aus dem Lagrange-Ansatz ergibt.

Unter Verwendung der Hilfsaussagen (H1) und (H2) aus Satz 5.9 werden die Aussagen (C1) und (C2) des Theorems in den folgenden drei Schritten beweisen:

(S1): Wir zeigen Behauptung (C1):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{1,T}}{\lambda_{0,T}} = 1.$$

(S2): Wir zeigen

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \xi_T \left| I_0 \left( \frac{\lambda_{0,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) - I_1 \left( \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) \right| \right] = 0.$$

(S3): Wir zeigen Behauptung (C2):

$$\text{Für alle } t \geq 0 \text{ gilt } \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \left| \frac{X_{0,t}^T}{B_t} - \frac{X_{1,t}^T}{B_t} \right| \right] = 0.$$

**Zu (S1):**

Aufgrund von Symmetrieüberlegungen reicht es zu zeigen, dass

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{0,T}}{\lambda_{1,T}} \geq 1 \quad (5.2)$$

gilt. Der Beweis der Aussage erfolgt durch Widerspruch:

Angenommen, es gälte

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{0,T}}{\lambda_{1,T}} < 1.$$

Somit existieren eine Zahl  $\delta < 1$  und eine unbeschränkte Menge  $\mathcal{T}$  von Endzeitpunkten, sodass für alle  $T \in \mathcal{T}$  gilt:

$$\frac{\lambda_{0,T}}{\lambda_{1,T}} \leq \delta.$$

Weiter gewährleistet Hilfsaussage (H2), dass es Zahlen  $k > 1$  und  $\epsilon > 0$  gibt, sodass für alle  $x \in (0, \epsilon)$  gilt:

$$\frac{I_0(\delta x)}{I_0(x)} \geq k. \quad (5.3)$$

Denn angenommen, dies wäre nicht der Fall, so müssten eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  und eine Folge  $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} k_n = 1$  existieren, sodass

$$1 \leq \frac{I_0(\delta x_n)}{I_0(x_n)} \leq k_n \downarrow 1, \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

gilt. Dies wäre allerdings ein Widerspruch zur Hilfsaussage (H2).

Falls die Zahl  $\epsilon$  klein genug gewählt wird, garantiert uns Hilfsaussage (H1), dass zudem

$$\frac{I_0(x)}{I_1(x)} \geq \frac{1}{\sqrt{k}}$$

gilt. Somit existieren Zahlen  $k > 1$  und  $\epsilon > 0$ , sodass für alle  $x \in (0, \epsilon)$  gilt:

$$\frac{I_0(\delta x)}{I_1(x)} \geq \sqrt{k} > 1. \quad (5.4)$$

Mithilfe dieser Tatsache kann nun der gewünschte Widerspruch gezeigt werden:

Nach Obigem gilt für alle Zeitpunkte  $T \in \mathcal{T}$  aufgrund der Monotonie der Funktion  $I_0$

$$\begin{aligned}
x_0 &= \mathbb{E} \left[ \xi_T I_0 \left( \frac{\lambda_{0,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) \right] \\
&\geq \mathbb{E} \left[ \xi_T I_0 \left( \frac{\delta \lambda_{1,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) \right] \\
&\geq \mathbb{E} \left[ \xi_T I_0 \left( \frac{\delta \lambda_{1,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) \mathbf{1} \left\{ \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} < \epsilon \right\} \right] \\
&\stackrel{(5.4)}{\geq} \sqrt{k} \mathbb{E} \left[ \xi_T I_1 \left( \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) \mathbf{1} \left\{ \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} < \epsilon \right\} \right] \\
&= \sqrt{k} \left( \mathbb{E} \left[ \xi_T I_1 \left( \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) \right] - \mathbb{E} \left[ \xi_T I_1 \left( \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) \mathbf{1} \left\{ \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \geq \epsilon \right\} \right] \right) \\
&= \sqrt{k} x_0 - \sqrt{k} \mathbb{E} \left[ \xi_T I_1 \left( \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) \mathbf{1} \left\{ \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \geq \epsilon \right\} \right] \\
&\geq \sqrt{k} x_0 - \sqrt{k} I_1(\epsilon) \mathbb{E}[\xi_T].
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt hierbei ebenfalls aufgrund der Monotonie der Funktion  $I_1$ . Da die Menge  $\mathcal{T}$  unbeschränkt ist, können wir  $T \in \mathcal{T}$  eine gegen unendlich konvergierende Folge durchlaufen lassen und erhalten

$$\sqrt{k} x_0 - \sqrt{k} I_1(\epsilon) \mathbb{E}[\xi_T] \rightarrow \sqrt{k} x_0, \quad T \rightarrow \infty.$$

Da  $k > 1$  und  $x_0 > 0$  gilt, ist dies ein Widerspruch und somit folgt die Gültigkeit von (S1):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{1,T}}{\lambda_{0,T}} = 1.$$

**Zu (S2):**

Sei  $\gamma > 0$  beliebig. Nach Hilfsbemerkung (H2) folgt, dass es Zahlen  $\delta < 1$  und  $\epsilon > 0$  gibt, sodass für alle  $x \in (0, \epsilon)$  gilt:

$$\left| \frac{I_0(\delta^{-1}x)}{I_0(x)} - 1 \right| \leq \gamma \quad \text{und} \quad \left| \frac{I_0(\delta x)}{I_0(x)} - 1 \right| \leq \gamma. \quad (5.5)$$

Denn angenommen, dies wäre nicht der Fall, so müssten eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  und eine Folge  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 1$  existieren, sodass entweder

$$\left| \frac{I_0(\delta_n^{-1}x_n)}{I_0(x_n)} - 1 \right| > \gamma \quad \text{oder} \quad \left| \frac{I_0(\delta_n x_n)}{I_0(x_n)} - 1 \right| > \gamma$$

gilt. Dies wäre allerdings ein Widerspruch zur Hilfsaussage (H2).

Falls die Zahl  $\epsilon$  klein genug gewählt wird, garantiert uns Hilfsaussage (H1), dass zudem

$$\left| \frac{I_0(x)}{I_1(x)} - 1 \right| \leq \gamma$$

und damit

$$-\gamma + 1 \leq \frac{I_0(x)}{I_1(x)} \leq \gamma + 1$$

gilt. Es folgt daher  $I_0(x) \leq (\gamma + 1)I_1(x)$  sowie  $I_0(x) \geq (-\gamma + 1)I_1(x)$ .

Zusammen mit der Ungleichung (5.5) folgt somit

$$\gamma \geq \frac{I_0(\delta x)}{I_0(x)} - 1 \geq \frac{I_0(\delta x)}{(\gamma + 1)I_1(x)} - 1$$

sowie

$$-\gamma \leq \frac{I_0(\delta^{-1}x)}{I_0(x)} - 1 \leq \frac{I_0(\delta^{-1}x)}{(-\gamma + 1)I_1(x)} - 1.$$

Somit existieren zu jedem  $\gamma > 0$  Zahlen  $\delta_\gamma < 1$  und  $\epsilon_\gamma > 0$ , sodass für alle  $x \in (0, \epsilon_\gamma)$  gilt:

$$\frac{I_0(\delta_\gamma^{-1}x)}{I_1(x)} \geq (1 - \gamma)^2 \quad \text{und} \quad \frac{I_0(\delta_\gamma x)}{I_1(x)} \leq (1 + \gamma)^2. \quad (5.6)$$

Weiter existiert nach Schritt (S1) ein Endzeitpunkt  $T^* \geq 0$ , sodass für alle  $T \geq T^*$  gilt:

$$\delta_\gamma \leq \frac{\lambda_{0,T}}{\lambda_{1,T}} \leq \frac{1}{\delta_\gamma}.$$

Auf der Menge  $\left\{ \frac{\lambda_{1,T}\xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \geq \epsilon_\gamma \right\}$  gelten dann für alle Zeitpunkte  $T \geq T^*$  aufgrund der Monotonie der Funktionen  $I_0$  und  $I_1$  zusammen mit  $\lambda_{0,T} \geq \delta_\gamma \lambda_{1,T}$  die Ungleichungen

$$0 \leq I_1 \left( \frac{\lambda_{1,T}\xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) \leq I_1(\epsilon_\gamma), \quad 0 \leq I_0 \left( \frac{\lambda_{0,T}\xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) \leq I_0(\delta_\gamma \epsilon_\gamma).$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \xi_T \left| I_1 \left( \frac{\lambda_{1,T}\xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) - I_0 \left( \frac{\lambda_{0,T}\xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) \right| \mathbf{1} \left\{ \frac{\lambda_{1,T}\xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \geq \epsilon_\gamma \right\} \right] \\ & \leq (I_1(\epsilon_\gamma) + I_0(\delta_\gamma \epsilon_\gamma)) \mathbb{E}[\xi_T] \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Mit der Notation  $x := \frac{\lambda_{1,T}\xi_T}{w'(F_T(\xi_T))}$  folgen dann auf der Menge  $\{\frac{\lambda_{1,T}\xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} < \epsilon_\gamma\}$  für  $T \geq T^*$  nach den Ungleichungen (5.6) aufgrund von

$$\lambda_{0,T} \leq \frac{1}{\delta_\gamma} \lambda_{1,T}$$

die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \frac{I_0\left(\frac{\lambda_{0,T}\xi_T}{w'(F_T(\xi_T))}\right)}{I_1(x)} &\geq \frac{I_0(\delta_\gamma^{-1}x)}{I_1(x)} \geq (1-\gamma)^2 \quad \text{und} \\ \frac{I_0\left(\frac{\lambda_{0,T}\xi_T}{w'(F_T(\xi_T))}\right)}{I_1(x)} &\leq \frac{I_0(\delta_\gamma x)}{I_1(x)} \leq (1+\gamma)^2. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$(1-\gamma)^2 \leq \frac{I_0\left(\frac{\lambda_{0,T}\xi_T}{w'(F_T(\xi_T))}\right)}{I_1(x)} \leq (1+\gamma)^2.$$

Daher gilt ebenfalls

$$(1-\gamma)^2 - 1 \leq \frac{I_0\left(\frac{\lambda_{0,T}\xi_T}{w'(F_T(\xi_T))}\right)}{I_1(x)} - 1 \leq (1+\gamma)^2 - 1,$$

und es folgt

$$\left| \frac{I_0\left(\frac{\lambda_{0,T}\xi_T}{w'(F_T(\xi_T))}\right)}{I_1\left(\frac{\lambda_{1,T}\xi_T}{w'(F_T(\xi_T))}\right)} - 1 \right| \leq (1+\gamma)^2 - 1 = \gamma^2 + 2\gamma. \quad (5.7)$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[ \xi_T \left| I_1\left(\frac{\lambda_{1,T}\xi_T}{w'(F_T(\xi_T))}\right) - I_0\left(\frac{\lambda_{0,T}\xi_T}{w'(F_T(\xi_T))}\right) \right| \mathbf{1}_{\left\{\frac{\lambda_{1,T}\xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} < \epsilon_\gamma\right\}} \right] \\ &\stackrel{(5.7)}{\leq} (\gamma^2 + 2\gamma) \mathbb{E} \left[ \xi_T I_1\left(\frac{\lambda_{1,T}\xi_T}{w'(F_T(\xi_T))}\right) \mathbf{1}_{\left\{\frac{\lambda_{1,T}\xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} < \epsilon_\gamma\right\}} \right] \\ &\leq (\gamma^2 + 2\gamma)x_0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Da  $\gamma > 0$  beliebig gewählt werden kann, folgt die Behauptung (C1).

**Zu (S3):**

Die Behauptung folgt mit der bedingten Version der Jensen-Ungleichung:

Da für  $i \in \{0, 1\}$

$$X_{i,t}^T = \xi_t^{-1} \mathbb{E} \left[ \xi_T I_i \left( \frac{\lambda_{i,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) \middle| \mathcal{F}_t^W \right]$$

gilt, ergibt sich zusammen mit Definition 2.5 und  $\beta_t := B_t^{-1}$  für  $t > 0$ :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \left| \frac{X_{0,t}^T}{B_t} - \frac{X_{1,t}^T}{B_t} \right| \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \beta_t \left| \frac{1}{\beta_t \rho_t} \mathbb{E} \left[ \xi_T \left( I_0 \left( \frac{\lambda_{0,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) - I_1 \left( \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) \right) \middle| \mathcal{F}_t^W \right] \right| \right] \\ &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \frac{1}{\rho_t} \mathbb{E} \left[ \xi_T \left| I_0 \left( \frac{\lambda_{0,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) - I_1 \left( \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) \right| \middle| \mathcal{F}_t^W \right] \right] \\ &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \frac{1}{\rho_t} \mathbb{E} \left[ \rho_T \beta_T \left| I_0 \left( \frac{\lambda_{0,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) - I_1 \left( \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) \right| \middle| \mathcal{F}_t^W \right] \right]. \end{aligned}$$

Nach der Bayes-Regel gilt weiter

$$\begin{aligned} &\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \frac{1}{\rho_t} \mathbb{E} \left[ \rho_T \beta_T \left| I_0 \left( \frac{\lambda_{0,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) - I_1 \left( \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) \right| \middle| \mathcal{F}_t^W \right] \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \beta_T \left| I_0 \left( \frac{\lambda_{0,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) - I_1 \left( \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) \right| \middle| \mathcal{F}_t^W \right] \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \beta_T \left| I_0 \left( \frac{\lambda_{0,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) - I_1 \left( \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) \right| \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \rho_T \beta_T \left| I_0 \left( \frac{\lambda_{0,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) - I_1 \left( \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) \right| \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \xi_T \left| I_0 \left( \frac{\lambda_{0,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) - I_1 \left( \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) \right| \right] \stackrel{(S2)}{=} 0. \end{aligned}$$

Hierbei wurde die Turm-Eigenschaft verwendet. Die Behauptung folgt dann unter Verwendung der Aussage aus Schritt (2). Somit gilt die Behauptung (C2).  $\square$

### Anmerkung 5.11

Generell ist es schwierig, Wahrscheinlichkeitstransformationen anzugeben, welche die Eigenschaften aus Theorem 5.8 erfüllen. Besonders die in Anmerkung 5.7 geforderte Eigenschaft (3) ist oftmals nicht erfüllt.

Eine Wahrscheinlichkeitstransformation  $w$ , welche die in Annahme 5.7 geforderte Eigenschaft (3) für genügend großes  $T$  erfüllt, ist durch

$$w : x \mapsto \frac{1}{2 \tan\left(\frac{1}{2}\right)} \tan\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

gegeben. Um dies einzusehen, betrachten wir die erste Ableitung der Funktion

$$M_T : z \mapsto \frac{F_T^{-1}}{w'}(z),$$

wobei  $z \in (0, 1]$ . Um zu zeigen, dass diese ab einem Zeitpunkt  $T$  für alle darauffolgenden Zeitpunkte positiv ist und bleibt, betrachten wir für  $z := F_T(x)$  mit  $x > 0$  die folgende Darstellung der Funktion  $M_T$ :

$$M_T : x \mapsto \frac{x}{w'(F_T(x))}$$

Da  $F_T$  im Black-Scholes-Modell gerade die Verteilungsfunktion einer logarithmisch normalverteilten Zufallsvariablen mit den Parametern

$$(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}^2) := \left( - \left( r + \frac{1}{2} \gamma^2 \right) T, \gamma^2 T \right)$$

ist, folgt

$$(F_T(x))' = \varphi_T(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}}} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - \tilde{\mu})^2}{2\tilde{\sigma}^2}\right) \mathbf{1}\{x > 0\},$$

wobei  $\varphi_T$  die Dichtefunktion der logarithmischen Normalverteilung darstellt.

Aufgrund der Positivität des Nenners gilt

$$M_T'(x) = \frac{w'(F_T(x)) - xw''(F_T(x))(F_T(x))'}{(w'(F_T(x)))^2} \geq 0,$$

falls

$$w'(F_T(x)) - xw''(F_T(x))(F_T(x))' \geq 0.$$

Es ist leicht nachzurechnen, dass dies genau dann der Fall ist, wenn

$$1 \geq \tan\left(F_T(x) - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}}} \exp\left(-\frac{(\ln(x) - \tilde{\mu})^2}{2\tilde{\sigma}^2}\right)$$

gilt. Aufgrund der Ungleichungen

$$\exp\left(-\frac{(\ln(x) - \tilde{\mu})^2}{2\tilde{\sigma}^2}\right) < 1$$

und

$$\tan\left(F_T(x) - \frac{1}{2}\right) \leq \tan\left(\frac{1}{2}\right)$$

ist dies in jedem Fall erfüllt, falls

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\tilde{\sigma}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma^2 T}} \leq 1$$

vorausgesetzt wird. Somit gilt Eigenschaft (3) für genügend großes  $T$ . Die Eigenschaften (2) und (4) lassen sich hierbei leicht nachrechnen. Eigenschaft (5) kann nur bei Kenntnis der genauen Gestalt der Nutzenfunktionen überprüft werden. Im Folgenden ist eine Grafik der Funktion  $w$  abgebildet:

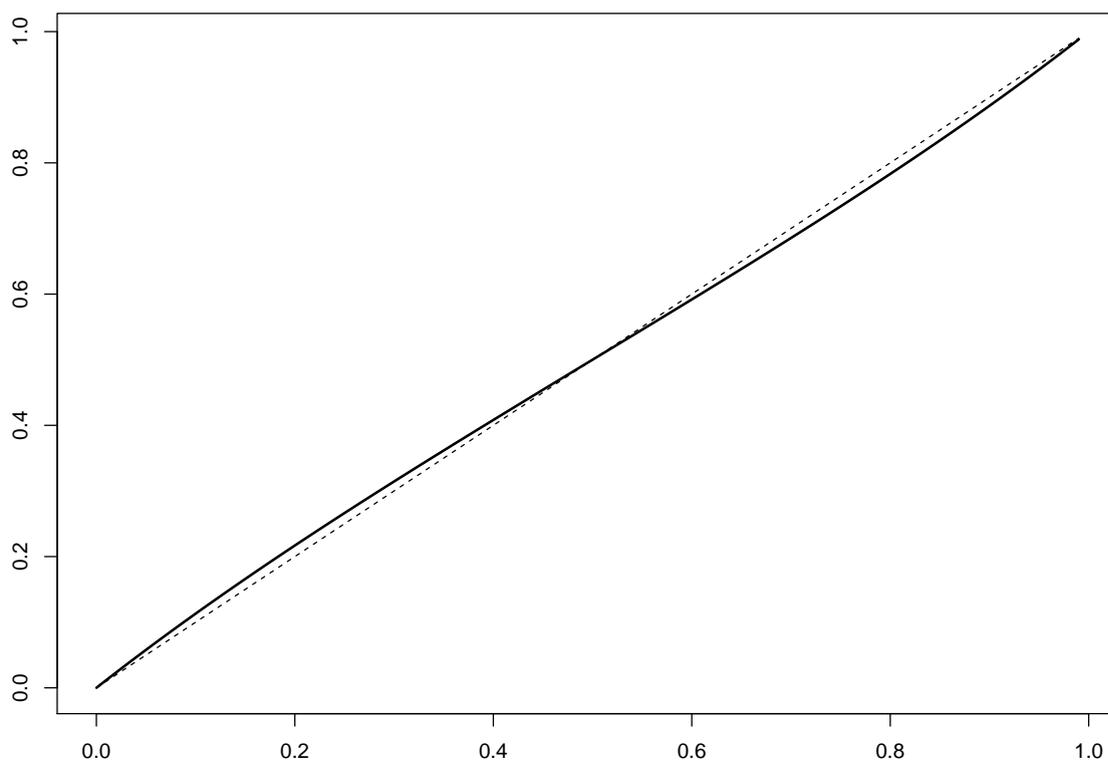


Abbildung 5.1: Die Funktion  $w$  (schwarz) im Vergleich zur ersten Winkelhalbierenden (gestrichelt).

### 5.3 Turnpike-Aussagen im Kontext der Choquet-Maximierung für den Fall verschiedener Wahrscheinlichkeitstransformationen

Im vorangegangenen Abschnitt 5.2 haben wir bereits gesehen, dass es auch in nicht-klassischen Kontexten wie der Choquet-Maximierung möglich ist, Turnpike-Aussagen zu formulieren. In den bisher gezeigten Turnpike-Aussagen wurde jedoch stets angenommen, dass beide Investoren die gleiche Wahrscheinlichkeitstransformation  $w$  verwenden, um den verallgemeinerten Nutzen eines Endvermögens zu bewerten. Interessant ist auch die Fragestellung, ob Turnpike-Aussagen weiterhin gelten, sofern man unterschiedliche Wahrscheinlichkeitstransformationen  $w_0$  und  $w_1$  für die Investoren 0 und 1 zulässt.

In diesem Abschnitt werden wir zwei Investoren im Rahmen der Choquet-Maximierung betrachten, deren Wahrscheinlichkeitstransformation zwar nicht gleich, aber in gewisser Weise ‚nahe beieinander‘ liegen und zeigen, dass ein Endzeitpunkt  $T^*$  gefunden werden kann, sodass für alle Zeitpunkte  $T \geq T^* > 0$  die erwartete absolute Differenz der Endvermögen durch eine feste Schranke begrenzt ist. Wir werden an späterer Stelle zudem sehen, dass es unter gewissen Voraussetzungen auch möglich ist, solche Zeitpunkte relativ genau zu quantifizieren (vgl. Kapitel 8). Dabei sei die in Abschnitt 5.2 getroffene Annahme 5.7 auch in diesem Abschnitt für die Wahrscheinlichkeitstransformationen  $w_0$  und  $w_1$  gültig. Zusätzlich halten wir die folgende Annahme fest:

#### Annahme 5.12

Es existiert ein  $\tilde{\delta} \in (0, 1)$ , sodass für alle  $x \in [0, 1]$  gilt:

$$\tilde{\delta} \leq \frac{w'_0(x)}{w'_1(x)} \leq \frac{1}{\tilde{\delta}}. \quad (5.9)$$

Da die in Gleichung (5.9) aufgeführte Eigenschaft für diesen Abschnitt zentral ist, halten wir die folgende Definition fest:

#### Definition 5.13

Wir sagen, dass zwei Wahrscheinlichkeitstransformationen  $w_0$  und  $w_1$   $\tilde{\delta}$ -nahe beieinander sind, falls sie die Ungleichungen (5.9) aus Annahme 5.12 erfüllen.

Es lässt sich unter den getroffenen Annahmen das folgende Lemma zeigen:

**Lemma 5.14**

Es gelte Annahme 5.12. Für alle  $\epsilon > 0$  mit  $\delta_\epsilon := \tilde{\delta} - \epsilon \in (0, 1)$  existiert ein Zeitpunkt  $T_\epsilon^* \geq 0$ , sodass für alle Zeitpunkte  $T \geq T_\epsilon^*$  gilt:

$$\delta_\epsilon \leq \frac{\lambda_{0,T}}{\lambda_{1,T}} \leq \frac{1}{\delta_\epsilon}.$$

*Beweis.* Wir werden die Aussage durch einen Widerspruchsbeweis zeigen: Angenommen die Aussage des Lemmas gilt nicht. Dann existiert ein  $\epsilon > 0$  mit  $\delta_\epsilon \in (0, 1)$ , sodass für alle Zeitpunkte  $T^* \geq 0$  ein Zeitpunkt  $T \geq T^*$  existiert und entweder

$$(1) \quad \frac{\lambda_{0,T}}{\lambda_{1,T}} < \delta_\epsilon$$

oder

$$(2) \quad \frac{\lambda_{0,T}}{\lambda_{1,T}} > \frac{1}{\delta_\epsilon}$$

gilt. Somit existieren  $\delta_\epsilon \in (0, 1)$  und eine unbeschränkte Menge von Zeitpunkten  $\mathcal{T}$ , sodass für alle Zeitpunkte  $T \in \mathcal{T}$  entweder Eigenschaft (1) oder (2) gilt. Damit folgt:

Entweder gilt ab einem Zeitpunkt genügend großen  $T$  nur die Eigenschaft (1) oder nur die Eigenschaft (2), oder man findet eine weitere unbeschränkte Menge von Zeitpunkten  $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}$ , sodass für alle  $T \in \mathcal{T}_1$  nur die Eigenschaft (1) oder nur die Eigenschaft (2) gilt.

**Fall 1:** Angenommen für alle  $T \in \mathcal{T}_1$  gilt nur die Eigenschaft (1):

Für  $T \in \mathcal{T}_1$  gilt dann aufgrund der Monotonie der Funktion  $I_0$ :

$$\begin{aligned} x_0 = \mathbb{E} \left[ \xi_T I_0 \left( \frac{\lambda_{0,T} \xi_T}{w'_0(F_T(\xi_T))} \right) \right] &> \mathbb{E} \left[ \xi_T I_0 \left( \frac{\delta_\epsilon \lambda_{1,T} \xi_T}{w'_0(F_T(\xi_T))} \right) \right] \\ &\stackrel{(5.9)}{\geq} \mathbb{E} \left[ \xi_T I_0 \left( \frac{\delta_\epsilon \lambda_{1,T} \xi_T}{\tilde{\delta} w'_1(F_T(\xi_T))} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Der letzte Schritt gilt hierbei nach Annahme 5.12 und ebenfalls aufgrund der Monotonie der Funktion  $I_0$ . Weiter gilt

$$\frac{\delta_\epsilon}{\tilde{\delta}} = \frac{\tilde{\delta} - \epsilon}{\tilde{\delta}} < 1.$$

Wir setzen

$$\delta := \frac{\delta_\epsilon}{\tilde{\delta}}.$$

Analog zu Abschnitt 5.2, Gleichung (5.4) folgt dann, dass es eine Zahl  $k_\delta > 1$  und ein  $\epsilon_\delta > 0$  gibt, sodass für alle  $x \in (0, \epsilon_\delta)$  gilt:

$$\frac{I_0(\delta x)}{I_1(x)} \geq \sqrt{k_\delta} > 1.$$

Der Widerspruch kann nun auf gleiche Art und Weise wie in Abschnitt 5.2, Theorem 5.8, Schritt (1) erzeugt werden. Es gilt

$$\begin{aligned} x_0 &\stackrel{(5.10)}{>} \mathbb{E} \left[ \xi_T I_0 \left( \frac{\delta_\epsilon \lambda_{1,T} \xi_T}{\tilde{\delta} w'_1(F_T(\xi_T))} \right) \right] \\ &\geq \mathbb{E} \left[ \xi_T I_0 \left( \frac{\delta_\epsilon \lambda_{1,T} \xi_T}{\tilde{\delta} w'_1(F_T(\xi_T))} \right) \mathbf{1} \left\{ \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))} < \epsilon \right\} \right] \\ &\geq \sqrt{k_\delta} \mathbb{E} \left[ \xi_T I_1 \left( \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))} \right) \mathbf{1} \left\{ \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))} < \epsilon \right\} \right] \\ &= \sqrt{k_\delta} x_0 - \sqrt{k_\delta} \mathbb{E} \left[ \xi_T I_1 \left( \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))} \right) \mathbf{1} \left\{ \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))} \geq \epsilon \right\} \right] \\ &\geq \sqrt{k_\delta} x_0 - \sqrt{k_\delta} I_1(\epsilon) \mathbb{E}[\xi_T] \\ &\rightarrow \sqrt{k_\delta} x_0, \quad T \rightarrow \infty \text{ mit } T \in \mathcal{T}_1. \end{aligned}$$

**Fall 2:** Angenommen für alle  $T \in \mathcal{T}_1$  gilt Eigenschaft (2):

Dieser Fall kann mit gleichen Argumenten aufgrund der Symmetrie der Aussage zum Widerspruch geführt werden, sodass die Behauptung folgt.  $\square$

Wie im Beweis zu Theorem 5.8 (vgl. auch [Dybvig/Rogers/Back, 1999], Schritt 5) begründet wurde, existieren zu jedem  $\gamma > 0$  Zahlen  $\delta_\gamma < 1$  und  $\epsilon_\gamma > 0$ , sodass für alle  $x \in (0, \epsilon_\gamma)$  gilt:

$$\left| \frac{I_0(\delta_\gamma^{-1} x)}{I_0(x)} - 1 \right| \leq \gamma \quad \text{und} \quad \left| \frac{I_0(\delta_\gamma x)}{I_0(x)} - 1 \right| \leq \gamma. \quad (5.11)$$

Damit und mithilfe von Lemma 5.14 lässt sich nun der folgende Satz zeigen:

**Satz 5.15**

Es gelte Annahme 5.12. Sei  $\gamma > 0$  beliebig und  $\delta_\gamma \in (0, 1)$  wie in Gleichung (5.11) gewählt. Weiter gelten die Voraussetzungen  $(\widetilde{V}1)$ ,  $(\widetilde{V}2)$  und  $(\widetilde{V}3)$  aus Theorem 5.8 und somit  $(H1)$  und  $(H2)$  aus Abschnitt 5.2 (vgl. Beweis von Theorem 5.8). Dann gilt:

Wenn eine Zahl  $\widetilde{\delta} \in (0, 1)$  existiert, sodass die Eigenschaft

$$(K1) \quad \widetilde{\delta} - \frac{\delta_\gamma}{\widetilde{\delta}} > 0$$

erfüllt ist, dann existiert ein Zeitpunkt  $T^* \geq 0$ , sodass für alle  $T \geq T^*$  und  $t \leq T$  gilt:

$$(\widehat{C}1) \quad \mathbb{E} \left[ \xi_T \left| X_0^T - X_1^T \right| \right] \leq (\gamma^2 + 2\gamma) x_0,$$

$$(\widehat{C}2) \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \left| \frac{X_{0,t}^T}{B_t} - \frac{X_{1,t}^T}{B_t} \right| \right] \leq (\gamma^2 + 2\gamma) x_0.$$

*Beweis.* Bevor wir zum Beweis des obigen Satzes kommen, wird eine Vorbemerkung getroffen:

**Vorbemerkung:** Wir definieren die Funktion

$$f(\epsilon) := \mathbb{E} \left[ \xi_T I_1 \left( \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))} \right) \mathbf{1} \left\{ \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))} < \epsilon \right\} \right].$$

Die Funktion  $f$  ist stetig, und nach dem Satz der monotonen Konvergenz gilt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(\epsilon) = 0. \quad (5.12)$$

Im Folgenden wird mithilfe dieser Vorbemerkung die Aussage des Satzes bewiesen:

Nach den Begründungen zu (5.11) wissen wir bereits, dass zu jeder Zahl  $\gamma > 0$  Zahlen  $\delta_\gamma \in (0, 1)$  und  $\epsilon_\gamma^1 > 0$  existieren, sodass die Ungleichungen in (5.11) erfüllt sind. Zudem wissen wir wegen Eigenschaft  $(H1)$  bereits, dass es auch eine Zahl  $\epsilon_\gamma^2 > 0$  geben muss, sodass für alle  $x \in (0, \epsilon_\gamma^2)$

$$\left| \frac{I_1(x)}{I_0(x)} - 1 \right| \leq \gamma$$

gilt. Weiter wählen wir ein  $\epsilon_\gamma^3 > 0$ , sodass für alle  $\epsilon \leq \epsilon_\gamma^3$

$$\mathbb{E} \left[ \xi_T I_1 \left( \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))} \right) \mathbf{1} \left\{ \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))} < \epsilon \right\} \right] \leq \frac{1}{2} x_0 \quad (5.13)$$

gilt. Dies ist aufgrund von Aussage (5.12) möglich.

Insgesamt folgt: Für jedes  $\gamma > 0$  existieren ein  $\delta_\gamma \in (0, 1)$  und ein

$$\epsilon_\gamma := \min\{\epsilon_\gamma^1, \epsilon_\gamma^2, \epsilon_\gamma^3\} > 0,$$

sodass für alle  $x \in (0, \epsilon_\gamma)$  gilt (vgl. auch den Beweis von Theorem 5.8, Gleichung (5.6):

$$\frac{I_0(\delta_\gamma^{-1}x)}{I_1(x)} \geq (1 - \gamma)^2, \quad \frac{I_0(\delta_\gamma x)}{I_1(x)} \leq (1 + \gamma)^2. \quad (5.14)$$

Mit Hilfe dieser Überlegungen zeigen wir nun die Behauptung  $(\widehat{C1})$ , also dass es zu jedem  $\gamma > 0$  einen Endzeitpunkt  $T^* \geq 0$  gibt, sodass für alle Zeitpunkte  $T \geq T^*$  die Ungleichung

$$\mathbb{E} \left[ \xi_T \left| I_0 \left( \frac{\lambda_{0,T}\xi_T}{w'_0(F_T(\xi_T))} \right) - I_1 \left( \frac{\lambda_{1,T}\xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))} \right) \right| \right] \leq (\gamma^2 + 2\gamma)x_0$$

erfüllt ist. Sei dazu wie in Lemma 5.14 eine Zahl  $\epsilon > 0$  beliebig, aber so gewählt, dass die Eigenschaft (K1) gilt:

$$\delta_\epsilon := \tilde{\delta} - \epsilon \in (0, 1), \quad \tilde{\delta} - \frac{\delta_\gamma}{\tilde{\delta}} > \epsilon > 0. \quad (5.15)$$

Nach Lemma 5.14 folgt dann die Existenz eines Zeitpunktes  $T_\epsilon^* \geq 0$ , sodass für alle Zeitpunkte  $T \geq T_\epsilon^*$

$$\delta_\epsilon \leq \frac{\lambda_{0,T}}{\lambda_{1,T}} \leq \frac{1}{\delta_\epsilon}$$

gültig ist. Dann folgt für alle  $T \geq T_\epsilon^*$  zusammen mit Annahme 5.12:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{0,T}\xi_T}{w'_0(F_T(\xi_T))} &\leq \frac{1}{\tilde{\delta}\delta_\epsilon} \frac{\lambda_{1,T}\xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))}, \\ \frac{\lambda_{0,T}\xi_T}{w'_0(F_T(\xi_T))} &\geq \tilde{\delta}\delta_\epsilon \frac{\lambda_{1,T}\xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Damit ergibt sich auf der Menge  $\left\{ \frac{\lambda_{1,T}\xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))} \geq \epsilon_\gamma \right\}$  aufgrund der Monotonie der Funktionen  $I_0$  und  $I_1$ :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[ \xi_T \left| I_1 \left( \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))} \right) - I_0 \left( \frac{\lambda_{0,T} \xi_T}{w'_0(F_T(\xi_T))} \right) \right| \mathbf{1} \left\{ \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))} \geq \epsilon_\gamma \right\} \right] \\
& \leq \mathbb{E} \left[ \xi_T \left( \left| I_1 \left( \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))} \right) \right| + \left| I_0 \left( \frac{\lambda_{0,T} \xi_T}{w'_0(F_T(\xi_T))} \right) \right| \right) \mathbf{1} \left\{ \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))} \geq \epsilon_\gamma \right\} \right] \\
& \leq \mathbb{E} \left[ \xi_T \left( I_1 \left( \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))} \right) + I_0 \left( \frac{\lambda_{0,T} \xi_T}{w'_0(F_T(\xi_T))} \right) \right) \mathbf{1} \left\{ \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))} \geq \epsilon_\gamma \right\} \right] \\
& \leq \left( I_1(\epsilon_\gamma) + I_0(\tilde{\delta} \delta_\epsilon \epsilon_\gamma) \right) \mathbb{E} [\xi_T] \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Insbesondere existiert daher ein Zeitpunkt  $T_1 \geq T_\epsilon^*$ , sodass für alle  $T \geq T_1$  gilt:

$$\mathbb{E} \left[ \xi_T \left| I_1 \left( \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))} \right) - I_0 \left( \frac{\lambda_{0,T} \xi_T}{w'_0(F_T(\xi_T))} \right) \right| \mathbf{1} \left\{ \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))} \geq \epsilon_\gamma \right\} \right] \leq \frac{1}{2}(\gamma^2 + 2\gamma)x_0.$$

Nach der Wahl der Zahl  $\epsilon$  in (5.15) gilt

$$\tilde{\delta} - \frac{\delta_\gamma}{\tilde{\delta}} > \epsilon > 0 \quad \text{und} \quad \delta_\epsilon = \tilde{\delta} - \epsilon > 0.$$

Damit folgt

$$\tilde{\delta} - \epsilon > \frac{\delta_\gamma}{\tilde{\delta}} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\delta} \delta_\epsilon > \delta_\gamma. \tag{5.17}$$

Diese Abschätzung werden wir an späterer Stelle nutzen.

Wir verwenden künftig die Kurzschreibweise

$$\tilde{x} := \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))}.$$

Auf der Menge  $\left\{ \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))} < \epsilon_\gamma \right\}$  folgt zusammen mit den Abschätzungen (5.16) nach Gleichung (5.14) für alle  $\tilde{x} \in (0, \epsilon_\gamma)$  und für alle Zeitpunkte  $T \geq T_\epsilon^*$ :

$$\frac{I_0 \left( \frac{\lambda_{0,T} \xi_T}{w'_0(F_T(\xi_T))} \right)}{I_1(\tilde{x})} \stackrel{(5.16)}{\geq} \frac{I_0 \left( \left( \tilde{\delta} \delta_\epsilon \right)^{-1} \tilde{x} \right)}{I_1(\tilde{x})} \stackrel{(5.17)}{\geq} \frac{I_0 \left( \frac{1}{\delta_\gamma} \tilde{x} \right)}{I_1(\tilde{x})} \stackrel{(5.14)}{\geq} (1 - \gamma)^2$$

und analog

$$\frac{I_0\left(\frac{\lambda_{0,T}\xi_T}{w'_0(F_T(\xi_T))}\right)}{I_1(\tilde{x})} \stackrel{(5.16)}{\leq} \frac{I_0(\tilde{\delta}\delta_\epsilon\tilde{x})}{I_1(\tilde{x})} \stackrel{(5.17)}{\leq} \frac{I_0(\delta_\gamma\tilde{x})}{I_1(\tilde{x})} \stackrel{(5.14)}{\leq} (1+\gamma)^2.$$

Somit gilt für alle  $\tilde{x} \in (0, \epsilon_\gamma)$  und für alle Zeitpunkte  $T \geq T_\epsilon^*$

$$\left| \frac{I_0\left(\frac{\lambda_{0,T}\xi_T}{w'_0(F_T(\xi_T))}\right)}{I_1\left(\frac{\lambda_{1,T}\xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))}\right)} - 1 \right| \leq (1+\gamma)^2 - 1 = \gamma^2 + 2\gamma. \quad (5.18)$$

Damit ergibt sich für alle Zeitpunkte  $T \geq T_\epsilon^*$ :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \xi_T \left| I_1\left(\frac{\lambda_{1,T}\xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))}\right) - I_0\left(\frac{\lambda_{0,T}\xi_T}{w'_0(F_T(\xi_T))}\right) \right| \mathbf{1}\left\{\frac{\lambda_{1,T}\xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))} < \epsilon_\gamma\right\} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \xi_T \left| 1 - \frac{I_0\left(\frac{\lambda_{0,T}\xi_T}{w'_0(F_T(\xi_T))}\right)}{I_1\left(\frac{\lambda_{1,T}\xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))}\right)} \right| I_1\left(\frac{\lambda_{1,T}\xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))}\right) \mathbf{1}\left\{\frac{\lambda_{1,T}\xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))} < \epsilon_\gamma\right\} \right] \\ &\stackrel{(5.18)}{\leq} (\gamma^2 + 2\gamma) \mathbb{E} \left[ \xi_T I_1\left(\frac{\lambda_{1,T}\xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))}\right) \mathbf{1}\left\{\frac{\lambda_{1,T}\xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))} < \epsilon_\gamma\right\} \right] \\ &\stackrel{(5.13)}{\leq} \frac{1}{2}(\gamma^2 + 2\gamma)x_0. \end{aligned}$$

Dabei folgt die letzte Ungleichung aufgrund der Definition von  $\epsilon_\gamma^3$  und da  $\epsilon_\gamma \leq \epsilon_\gamma^3$  gilt. Somit folgt für alle  $T \geq T^* = T_1 \geq T_\epsilon^* \geq 0$  nach obiger Argumentation die Gültigkeit von Behauptung  $(\widehat{C1})$ . Behauptung  $(\widehat{C2})$  ergibt sich dann mit der bedingten Version der Jensen-Ungleichung und nach der Bayes-Regel für  $t \leq T$  (zur Argumentation vgl. auch den Beweis von Theorem 5.8, Schritt 3):

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbb{E}_Q \left[ \left| \frac{X_{0,t}^T}{B_t} - \frac{X_{1,t}^T}{B_t} \right| \right] \\ &= \mathbb{E}_Q \left[ \beta_t \left| \frac{1}{\beta_t \rho_t} \mathbb{E} \left[ \xi_T \left( I_0\left(\frac{\lambda_{0,T}\xi_T}{w'_0(F_T(\xi_T))}\right) - I_1\left(\frac{\lambda_{1,T}\xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))}\right) \right) \middle| \mathcal{F}_t^W \right] \right| \right] \\ &\leq \mathbb{E}_Q \left[ \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\rho_t} \xi_T \left| I_0\left(\frac{\lambda_{0,T}\xi_T}{w'_0(F_T(\xi_T))}\right) - I_1\left(\frac{\lambda_{1,T}\xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))}\right) \right| \middle| \mathcal{F}_t^W \right] \right] \\ &\leq \mathbb{E}_Q \left[ \frac{1}{\rho_t} \mathbb{E} \left[ \rho_T \beta_T \left| I_0\left(\frac{\lambda_{0,T}\xi_T}{w'_0(F_T(\xi_T))}\right) - I_1\left(\frac{\lambda_{1,T}\xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))}\right) \right| \middle| \mathcal{F}_t^W \right] \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \beta_T \left| I_0 \left( \frac{\lambda_{0,T} \xi_T}{w'_0(F_T(\xi_T))} \right) - I_1 \left( \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))} \right) \right| \middle| \mathcal{F}_t^W \right] \right] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \beta_T \left| I_0 \left( \frac{\lambda_{0,T} \xi_T}{w'_0(F_T(\xi_T))} \right) - I_1 \left( \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))} \right) \right| \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \rho_T \beta_T \left| I_0 \left( \frac{\lambda_{0,T} \xi_T}{w'_0(F_T(\xi_T))} \right) - I_1 \left( \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))} \right) \right| \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \xi_T \left| I_0 \left( \frac{\lambda_{0,T} \xi_T}{w'_0(F_T(\xi_T))} \right) - I_1 \left( \frac{\lambda_{1,T} \xi_T}{w'_1(F_T(\xi_T))} \right) \right| \right] \\
&\stackrel{(\widehat{C1})}{\leq} (\gamma^2 + 2\gamma)x_0.
\end{aligned}$$

□

### Bemerkung 5.16

Satz 5.15 besagt, dass man zu bestimmten Parametern  $\gamma > 0$  einen endlichen Endzeitpunkt  $T$  finden kann, sodass auch bei Verschiedenheit der Wahrscheinlichkeitstransformationen der beiden Investoren die erwartete absolute Differenz der diskontierten optimalen Endvermögen für alle größeren Endzeitpunkte unterhalb der Schranke  $(\gamma^2 + 2\gamma)x_0$  liegt. Es wird jedoch keine Konvergenz wie beispielsweise in Theorem 5.8 gezeigt. Eine analoge Konvergenzaussage konnte hier nicht bewiesen werden, da in Satz 5.15 nur solche Parameter  $\gamma > 0$  zulässig sind, für die der zugehörige Parameter  $\delta_\gamma$  die Bedingung (K1) sowie die Ungleichungen (5.11) erfüllt. Diese Bedingung muss aber keinesfalls für beliebige Parameter  $\gamma > 0$  und zugehörige Parameter  $\delta_\gamma$  gelten.

Wir werden in Abschnitt 5.4.3 ein konkretes Beispiel für den in diesem Abschnitt gezeigten Satz sehen. Zuvor soll die Nützlichkeit des obigen Resultats an einem einfachen Beispiel veranschaulicht werden:

#### 5.3.1 Beispiel für $\tilde{\delta}$ -nahe beieinanderliegenden Wahrscheinlichkeitstransformationen

In diesem Abschnitt wird ein einfaches Beispiel zu Satz 5.15 gezeigt. Wir betrachten dazu erneut zwei Investoren 0 und 1. Für Investor 0 wählen wir die Nutzenfunktion

$$u_0(x) = \sqrt{x}.$$

Die Nutzenfunktion  $u_1$  des anderen Investors darf beliebig gewählt werden. Es muss nur sichergestellt werden, dass die in Satz 5.15 geforderten Voraussetzungen an die beiden Nutzenfunktionen gelten. In Abschnitt 5.4 werden diese explizit für die hier gewählten Funktionen gezeigt.

Auch die Wahrscheinlichkeitstransformationen  $w_0$  und  $w_1$  dürfen zunächst beliebig gewählt werden. Wir fordern lediglich, dass sie ‚ $\tilde{\delta}$ -nahe beieinanderliegen‘ und die Eigenschaften (1) bis (5) aus Annahme 5.7 gelten. Nach Definition 5.13 existiert dann eine Konstante  $\tilde{\delta} > 0$  nahe dem Wert 1 und es gilt:

$$\tilde{\delta} \leq \frac{w'_0(x)}{w'_1(x)} \leq \frac{1}{\tilde{\delta}} \text{ für alle } x \in [0, 1].$$

Im Weiteren werden wir die folgende Fragestellung betrachten:

Wie ‚ $\tilde{\delta}$ -nahe‘ müssen die Ableitungen der Wahrscheinlichkeitstransformationen  $w'_0$  und  $w'_1$  beieinander liegen, um die Existenz eines Zeitpunktes  $T^* \geq 0$  zu gewährleisten, sodass für  $T \geq T^*$  und  $t > 0$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \left| \frac{X_{0,t}^T}{B_t} - \frac{X_{1,t}^T}{B_t} \right| \right] \leq \frac{9}{16} x_0$$

gilt?

Da

$$\frac{9}{16} x_0 = \left( 2 \cdot \frac{1}{4} + \left( \frac{1}{4} \right)^2 \right) x_0$$

gilt, wählen wir  $\gamma := \frac{2}{7}$ . Weiter gilt

$$u'_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad I_0(x) = \frac{1}{4x^2}.$$

Ziel ist es nun, Parameter  $\tilde{\delta}$  und  $\delta_\gamma = \delta_{\frac{1}{4}}$  zu finden, sodass die Voraussetzungen aus Satz 5.15 erfüllt sind. Falls wir ein solches  $\delta_\gamma$  finden, dann gibt dieses auch gleichzeitig an, wie ‚ $\tilde{\delta}$ -nahe‘ die Ableitungen der Wahrscheinlichkeitstransformationen beieinander liegen müssen, um die Ausgangsfrage zu beantworten.

Nach Satz 5.15 und Gleichung (5.11) müssen also ein  $\tilde{\delta} \in (0, 1)$  und ein  $\delta_{\frac{1}{4}} \in (0, 1)$  gefunden werden, sodass die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

- (i)  $\tilde{\delta} - \frac{\delta_{\frac{1}{4}}}{\tilde{\delta}} > 0,$
- (ii)  $\left| \frac{I_0(\delta_{\frac{1}{4}}^{-1}x)}{I_0(x)} - 1 \right| \leq \frac{1}{4},$
- (iii)  $\left| \frac{I_0(\delta_{\frac{1}{4}}x)}{I_0(x)} - 1 \right| \leq \frac{1}{4}.$

Es ist leicht nachzuprüfen, dass diese Eigenschaften erfüllt sind, falls  $\delta_{\frac{1}{4}} \in \left( \sqrt{\frac{4}{5}}, \tilde{\delta}^2 \right)$  und  $\tilde{\delta}^2 > \sqrt{\frac{4}{5}}$  gilt. Falls also die Wahrscheinlichkeitstransformationen  $w_0$  und  $w_1$  so gewählt

werden, dass für ein  $\tilde{\delta}^2 > \sqrt{\frac{4}{5}}$  die Eigenschaft

$$\tilde{\delta} \leq \frac{w'_0(x)}{w'_1(x)} \leq \frac{1}{\tilde{\delta}}$$

gilt, dann kann man nach Satz 5.15 garantieren, dass es einen Endzeitpunkt  $T^* \geq 0$  gibt, sodass für alle  $T \geq T^*$  und  $t > 0$  gilt:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \left| \frac{X_{0,t}^T}{B_t} - \frac{X_{1,t}^T}{B_t} \right| \right] \leq \frac{9}{16} x_0.$$

### Anmerkung 5.17

- (i) Der Vorteil, der mit Satz 5.15 einhergeht, ist, dass man nun statt einer möglicherweise komplizierten Wahrscheinlichkeitstransformation auch eine mit einfacherer Gestalt wählen kann und es dadurch möglich wird, das optimale erwartete Endvermögen (je nach Genauigkeit der Beschränkung) relativ gut anzunähern. Dies ist hilfreich, da es durch komplizierte Wahrscheinlichkeitstransformationen, wie diese bisher in der Literatur zu finden sind (vgl. [Kahneman/Tversky, 1979]) oftmals schwierig ist, optimale Handelsstrategien anzugeben. Sofern man bereit ist, einen gewissen Fehler in Kauf zu nehmen, kann man ein Endvermögen einfacherer Gestalt replizieren. Gegebenenfalls lässt sich die Wahrscheinlichkeitstransformation sogar durch die Identität ersetzen.
- (ii) Die Gültigkeit der in Annahme 5.7 geforderten Eigenschaften (3) und (5) muss nach wie vor für die Funktion  $w_1$  geprüft werden. Eigenschaft (5) kann bei Kenntnis der Gestalt der Funktion  $w_0$  auf die Funktion  $w_1$  mit Hilfe von Definition 5.13 übertragen werden.

Im kommenden Abschnitt werden einige Beispiele zur Veranschaulichung von Turnpike-Aussagen in verschiedenen Kontexten vorgestellt.

## 5.4 Beispiele zur Veranschaulichung von Turnpike-Aussagen in diversen stetigen Kontexten für Nutzenfunktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{R}_+$

In diesem Abschnitt werden einige Beispiele zur Veranschaulichung von Turnpike-Aussagen vorgestellt. Das erste Beispiel wird sich auf Turnpike-Aussagen im klassischen Kontext beziehen (vgl. [Dybvig/Rogers/Back, 1999]) und eine Grundlage für die darauffolgenden Beispiele darstellen.

### 5.4.1 Beispiel zu Turnpike-Aussagen im klassischen Black-Scholes-Modell im klassischen Erwartungswert-Nutzen-Kontext

In diesem Abschnitt werden wir ein Beispiel zu Turnpike-Aussagen in der klassischen Erwartungswert-Nutzentheorie kennenlernen (vgl. [Dybvig/Rogers/Back, 1999]). Dabei

ist zu erwähnen, dass in der bisherigen Literatur zwar viele theoretische Resultate über Turnpike-Aussagen zu finden sind, allerdings gerade bezüglich den stetigen Finanzmärkten so gut wie keine Beispiele aufgeführt werden. Dies liegt sicherlich auch daran, dass es nicht ganz trivial ist, geeignete Beispiele zu finden. Die passenden Funktionen müssen viele Eigenschaften erfüllen, welche schnell an die Grenzen der analytischen Lösbarkeit führen. Im Folgenden wird ein Beispiel zu Theorem 5.4 vorgestellt. In diesem Fall kann die Verifikation ohne weitere Forderungen gewährleistet werden (vgl. [Dybvig/Rogers/Back, 1999], Beweis zu Theorem 1):

Um Theorem 5.4 sinnvoll anzuwenden, sollte man eine möglichst ‚einfache‘ klassische Nutzenfunktion  $u_0$  und eine kompliziertere klassische Nutzenfunktion  $u_1$  finden, welche die obigen Eigenschaften erfüllen. Nach dem Theorem wäre es dann möglich, statt nach der komplizierteren Nutzenfunktion gemäß der einfacheren Nutzenfunktion zu handeln (sofern der Zeithorizont  $T$  beliebig groß werden dürfte). Wir wählen dazu:

$$u_0(x) = \sqrt{x},$$

$$u_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} \left( \frac{2(6+\sqrt{4+\frac{1}{x}})}{\sqrt{-2+\sqrt{4+\frac{1}{x}}}(2+\sqrt{4+\frac{1}{x}})} + \arctan \left( \frac{1}{2} \sqrt{-2 + \sqrt{4 + \frac{1}{x}}} \right) - \frac{\pi}{16} \right), & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Somit gilt für  $x > 0$ :

$$u'_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad u'_1(x) = \sqrt{\sqrt{4 + \frac{1}{x}} - 2},$$

sowie

$$I_0(x) = \frac{1}{4x^2}, \quad I_1(x) = \frac{1}{4x^2 + x^4}.$$

In der nachfolgenden Grafik sind die Funktionen  $u_0$  und  $u_1$  sowie  $I_0$  und  $I_1$  dargestellt:

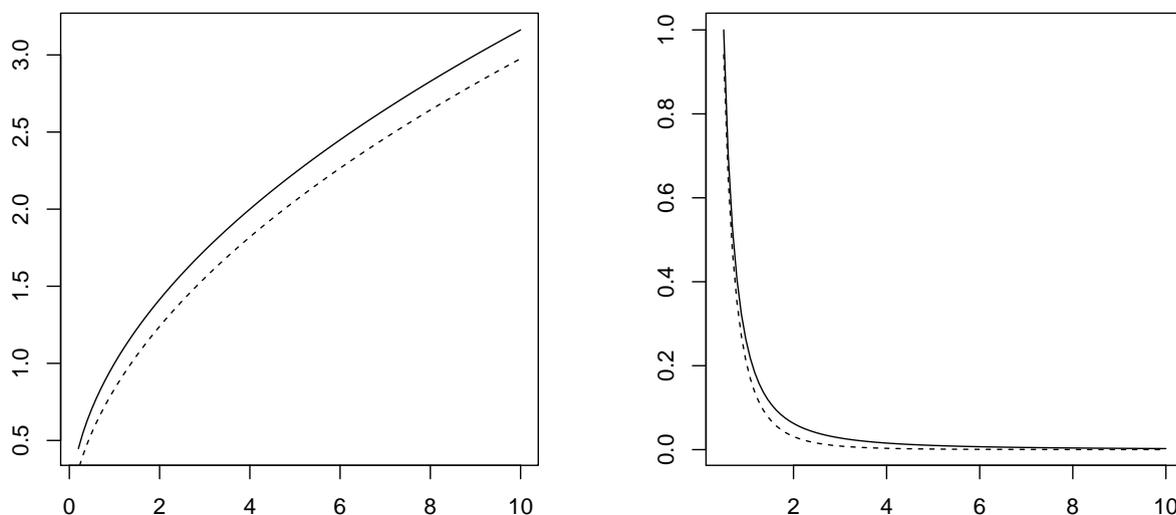


Abbildung 5.2: Abgebildet sind auf der ersten Grafik die Funktionen  $u_0$  (schwarz) und  $u_1$  (gestrichelt) und auf der zweiten Grafik die Funktionen  $I_0$  (schwarz) und  $I_1$  (gestrichelt).

Es ist leicht nachzuprüfen, dass die Funktionen  $u_0$  und  $u_1$  die INADA-Bedingungen erfüllen, also dass für  $i \in \{0, 1\}$  gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u'_i(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} u'_i(x) = \infty.$$

Insbesondere folgt somit auch

$$\lim_{x \rightarrow \infty} I_i(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} I_i(x) = \infty.$$

Weiter ist klar, dass die Funktion  $u_0$  konkav, streng monoton wachsend und zweifach stetig differenzierbar ist. Diese Eigenschaften müssen nun auch für die Funktion  $u_1$  geprüft werden. Anschließend werden wir zeigen, dass diese Funktionen auch in dem Sinne ähnlich sind, dass sie die Voraussetzungen (V2) und (V3) aus Theorem 5.4 erfüllen. Durch Nachrechnen lässt sich zeigen:

$$u''_1(x) = -\frac{1}{4\sqrt{\sqrt{4 + \frac{1}{x}} - 2\sqrt{4 + \frac{1}{x}}x^2}}.$$

Somit ergibt sich direkt aus der Gestalt von  $u'_1$  und  $u''_1$ , dass  $u'_1$  strikt positiv und streng monoton fallend ist. Daher ist die Funktion  $u_1$  konkav und streng monoton wachsend. Da die Funktion  $u''_1$  stetig ist, folgt weiter, dass die Funktion  $u_1$  zweifach stetig differenzierbar

ist. Die Funktionen  $u_0$  und  $u_1$  sind somit klassische Nutzenfunktionen. Zu beachten ist auch, dass die Funktion  $u_1$  stetig im Punkt Null fortgesetzt werden kann. Dies kann man mit Hilfe der Regel von L'Hôpital zeigen. Es ergibt sich dann

$$\lim_{x \rightarrow 0} u_1(x) = 0.$$

Im Folgenden werden wir zeigen, dass die Voraussetzung ‚similar at infinity‘ (vgl. Theorem 5.4, Voraussetzung (V2)) sowie die ‚uniform continuity property‘ (vgl. Theorem 5.4, Voraussetzung (V3)) erfüllt sind. Da es nach [Dybvig/Rogers/Back, 1999], Beweis zu Theorem 1 gleichwertig ist, ob man die Eigenschaften für die Funktionen  $u'_0$  und  $u'_1$  nachrechnet oder ob man die dazu äquivalenten Eigenschaften (H1) oder (H2) für die Funktionen  $I_0$  und  $I_1$  prüft, werden wir an dieser Stelle Letzteres zeigen (vgl. Anmerkung 5.10):

Wegen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{I_1(x)}{I_0(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4x^2+x^4}}{\frac{1}{4x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{4x^2+x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{x^2(4+x^2)} = 1$$

ist offenbar Eigenschaft (H1) erfüllt.

Bleibt im Folgenden Eigenschaft (H2) für die Funktionen  $I_i$  mit  $i \in \{0, 1\}$  zu prüfen. Sei dazu  $i = 0$  und seien  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Nullfolgen. Angenommen es gilt

$$\frac{x_n}{y_n} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty,$$

dann folgt direkt:

$$\frac{I_0(x_n)}{I_0(y_n)} = \left( \frac{y_n}{x_n} \right)^2 \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

Für die Rückrichtung nehmen wir an, dass

$$\frac{I_0(x_n)}{I_0(y_n)} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$$

gilt. Es folgt dann direkt:

$$\frac{x_n}{y_n} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

Damit erfüllt die Funktion  $I_0$  Eigenschaft (H2).

Bleibt Eigenschaft (H2) für den Fall  $i = 1$  zu zeigen:

Dazu seien  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  erneut Nullfolgen. Angenommen es gilt

$$\frac{x_n}{y_n} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

Mittels Partialbruchzerlegung ergibt sich:

$$\frac{I_1(x_n)}{I_1(y_n)} = \frac{4y_n^2 + y_n^4}{4x_n^2 + x_n^4} = \frac{4y_n^2}{4x_n^2 + x_n^4} + \frac{y_n^4}{4x_n^2 + x_n^4} = \frac{y_n^2}{x_n^2} + \frac{-y_n^2}{4 + x_n^2} + \frac{\frac{1}{4}y_n^4}{x_n^2} + \frac{-\frac{1}{4}y_n^4}{4 + x_n^2} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

Für die Rückrichtung nehmen wir erneut an, dass gilt:

$$\frac{I_1(x_n)}{I_1(y_n)} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

Es muss daher

$$\frac{y_n^2}{x_n^2} + \frac{-y_n^2}{4 + x_n^2} + \frac{\frac{1}{4}y_n^4}{x_n^2} + \frac{-\frac{1}{4}y_n^4}{4 + x_n^2} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty,$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{y_n}{x_n} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{y_n}{x_n} \right)^2 y_n^2 \right) = 1$$

gelten. Nach Obigen muss

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{y_n}{x_n} \right)^2 \left( 1 + \frac{y_n^2}{4} \right) = 1$$

gelten. Da  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge ist, also auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{y_n}{x_n} \right)^2 = 1$$

und damit

$$\frac{x_n}{y_n} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

Es folgt, dass auch die Funktion  $I_1$  die Eigenschaft (H2) erfüllt.

Somit sind alle in Theorem 5.4 geforderten Eigenschaften erfüllt und wir wissen nach der Aussage und nach dem Beweis dieses Theorems, dass die folgenden Aussagen gelten:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{0,T}}{\lambda_{1,T}} = 1,$$

sowie

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\xi_T | X_0^T - X_1^T] = 0$$

und für  $t \geq 0$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \left| \frac{X_{0,t}^T}{B_t} - \frac{X_{1,t}^T}{B_t} \right| \right] = 0.$$

Dies wird in Grafik 5.3 veranschaulicht. Die Marktparameter sind dabei gemäß  $\mu = 0.08, r = 0.035, \sigma = 0.15$  und  $x_0 = 1$  gewählt.

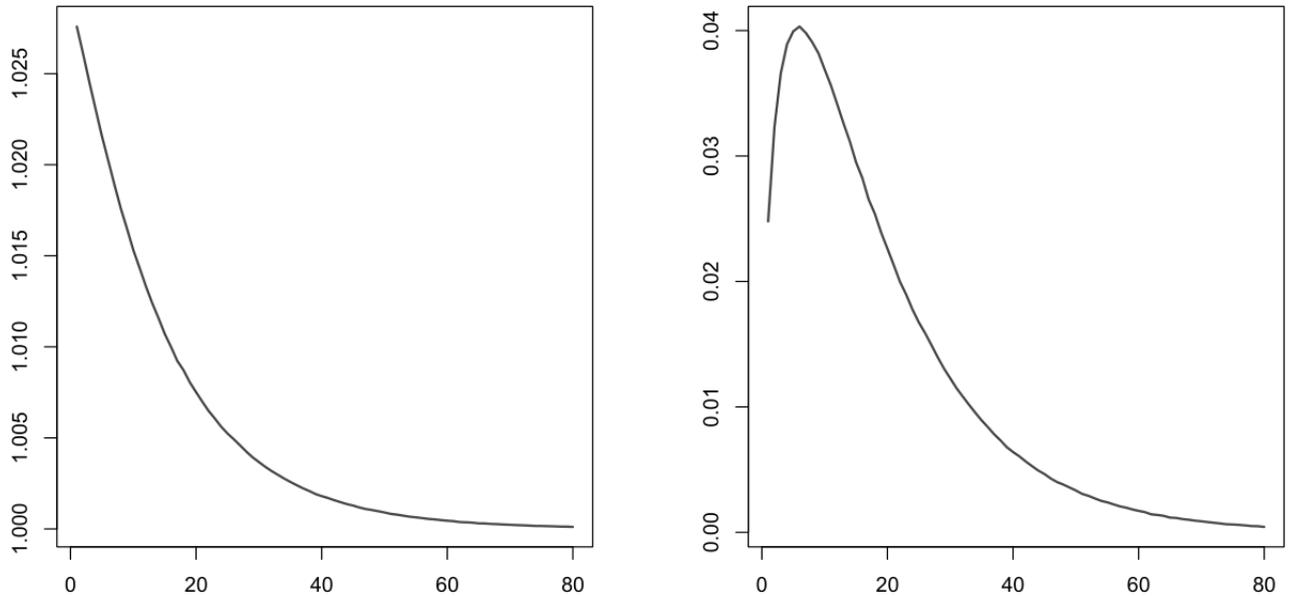


Abbildung 5.3: Die Funktionen  $T \mapsto \frac{\lambda_{0,T}}{\lambda_{1,T}}$  und  $T \mapsto \mathbb{E} [\xi_T | X_0^T - X_1^T]$ .

Das erste Bild in der obigen Grafik zeigt dabei das Verhalten der Funktion  $T \mapsto \lambda_{0,T}/\lambda_{1,T}$ . Dabei konnte der Lagrange-Parameter  $\lambda_{0,T}$  aufgrund der einfachen Gestalt der Funktion  $I_0$  direkt berechnet werden. Er ergibt sich

$$\lambda_{0,T} = \sqrt{\frac{1}{4x_0} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\xi_T} \right]} = \sqrt{\frac{1}{4x_0} e^{rT + \gamma^2 T}}.$$

Die Berechnung von  $\lambda_{1,T}$  erfolgte hierbei mit Hilfe des Newton-Verfahrens. Als geeigneter Startwert hat sich der Wert  $\lambda_{0,T}$  herausgestellt.

Das zweite Bild in der obigen Grafik zeigt das Verhalten von  $T \mapsto \mathbb{E} [\xi_T | X_0^T - X_1^T]$ . Wie zu erkennen ist, konvergiert die erwartete absolute Differenz der Endvermögen bei wachsendem Endzeitpunkt  $T$  gegen den Wert Null.

#### 5.4.2 Beispiel zu Turnpike-Aussagen im klassischen Black-Scholes-Modell im Rahmen der Choquet-Optimierungstheorie

In diesem Abschnitt soll aufbauend auf Abschnitt 5.4.1 ein Beispiel zu Theorem 5.8 vorgestellt werden. Dabei wählen wir

$$w_0(x) = w_1(x) =: w(x) = \frac{1}{2 \tan\left(\frac{1}{2}\right)} \tan\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}.$$

Als Nutzenfunktionen  $u_0$  und  $u_1$  wählen wir die klassischen Nutzenfunktionen aus dem vorangegangenen Abschnitt 5.4.1.

Analog zum Beispiel im klassischen Fall (vgl. Abschnitt 5.4.1) wird das Verhalten der beiden Funktionen  $T \mapsto \frac{\lambda_{0,T}}{\lambda_{1,T}}$  und  $T \mapsto \mathbb{E} [\xi_T | X_0^T - X_1^T |]$  untersucht. Zur Sicherstellung der Gültigkeit des Theorems 5.8 müssen weitere Voraussetzungen geprüft werden. Da es nicht ganz trivial ist, diese Voraussetzungen zu prüfen, wird dies im Nachfolgenden ausführlich begründet:

Wie im vorangegangenen Abschnitt gezeigt wurde, gilt die in Theorem 5.8 geforderte Eigenschaft (V2). Leicht nachzuprüfen ist ebenfalls die Gültigkeit der Eigenschaften (1) und (2) aus Annahme 5.7. Die Gültigkeit von Eigenschaft (3) für große Endzeitpunkte  $T$  wurde in Anmerkung 5.11 begründet. Es müssen also noch die Eigenschaften (4) und (5) geprüft werden. Zu Eigenschaft (4):

Es gelten

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} -\frac{xu_0''(x)}{u_0'(x)} = \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-3/2}x}{4} \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{4} > 0$$

sowie

$$\begin{aligned} \liminf_{x \rightarrow \infty} -\frac{xu_1''(x)}{u_1'(x)} &= \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4x \sqrt{\sqrt{\frac{1}{x} + 4} - 2} \sqrt{\sqrt{\frac{1}{x} + 4} - 2}} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\frac{1}{x} + 4} - 2}} \\ &= \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4x} \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1}{x} + 4} - 2\right) \sqrt{\frac{1}{x} + 4}}. \end{aligned}$$

Da die Regel von L'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 4x \left( \sqrt{\frac{1}{x} + 4} - 2 \right) = 1,$$

liefert, ergibt sich

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} -\frac{xu_1''(x)}{u_1'(x)} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} > 0.$$

Damit gilt Eigenschaft (4).

Bleibt Eigenschaft (5) zu zeigen. Für  $i \in \{0, 1\}$  soll für  $T$  groß genug gelten:

$$\mathbb{E} \left[ u_i \left( (u_i')^{-1} \left( \frac{\xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) \right) w'(F_T(\xi_T)) \right] < \infty.$$

Dies lässt sich mit Hilfe der Jensen-Ungleichung zeigen. Dazu benötigen wir einige Vorbemerkungen:

**(VB1):** Es gilt

$$w'(x) = \frac{1}{2 \tan\left(\frac{1}{2}\right)} \left(1 + \tan^2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right).$$

Es ist leicht zu zeigen, dass  $w'(x) \in [0.9; 1.2]$  für  $x \in (0, 1)$  liegt. Wir definieren  $c := 0.9$  und  $C := 1.2$ .

**(VB2):** Da die Zufallsvariable  $\xi_T$  logarithmisch normalverteilt mit den Parametern

$$\xi_T \sim \mathcal{LN}\left(-rT - \frac{1}{2}\gamma^2 T, \gamma^2 T\right)$$

ist, folgt  $\mathbb{E}[\xi_T] = \exp(-rT) < \infty$ . Ähnlich kann man

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\xi_T}\right)\right] = e^{rT + \gamma^2 T} < \infty$$

und genauso

$$\mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\xi_T^2}\right)\right] < \infty \quad \text{und} \quad \mathbb{E}\left[\left(\frac{1}{\xi_T^4}\right)\right] < \infty$$

zeigen. Damit lässt sich nun für die Funktion  $I_0$  für Zeitpunkte  $T > 0$  Eigenschaft (6) mit Hilfe der Jensen-Ungleichung beweisen:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[u_0\left(I_0\left(\frac{\xi_T}{w'(F_T(\xi_T))}\right)\right) w'(F_T(\xi_T))\right] &\stackrel{(VB1)}{\leq} C \mathbb{E}\left[u_0\left(I_0\left(\frac{\xi_T}{w'(F_T(\xi_T))}\right)\right)\right] \\ &\stackrel{(VB1)}{\leq} C \mathbb{E}\left[u_0\left(I_0\left(\frac{\xi_T}{C}\right)\right)\right] \\ &\leq C u_0\left(\mathbb{E}\left[I_0\left(\frac{\xi_T}{C}\right)\right]\right) \\ &= C u_0\left(\mathbb{E}\left[\frac{C^2}{4\xi_T^2}\right]\right) \\ &= C u_0\left(\frac{C^2}{4} \mathbb{E}\left[\frac{1}{\xi_T}\right]\right) \\ &\stackrel{(VB2)}{<} \infty. \end{aligned}$$

Dabei wurde insbesondere Nutzen davon gemacht, dass die Funktion  $u_0$  konkav ist und die Funktion  $I_0$  monoton fällt.

Bleibt zu zeigen, dass auch die Funktion  $I_1$  die Eigenschaft (5) erfüllt. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ u_1 \left( I_1 \left( \frac{\xi_T}{w'(F_T(\xi_T))} \right) \right) w'(F_T(\xi_T)) \right] &\stackrel{(VB1)}{\leq} C \mathbb{E} \left[ u_1 \left( I_1 \left( \frac{\xi_T}{C} \right) \right) \right] \\
&= C u_1 \left( \mathbb{E} \left[ \frac{C^4}{4C^2 \xi_T^2 + \xi_T^4} \right] \right) \\
&\leq C u_1 \left( \underbrace{\frac{C^4}{\min\{4C^2, 1\}}}_{=: \tilde{C}} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\xi_T^2 + \xi_T^4} \right] \right) \\
&\leq C u_1 \left( \tilde{C} \left( \mathbb{E} \left[ \frac{1}{2\xi_T^4} \right] + \mathbb{E} \left[ \frac{1}{2\xi_T^2} \right] \right) \right) \\
&\leq C u_1 \left( \frac{\tilde{C}}{4} \left( \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\xi_T^4} \right] + \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\xi_T^2} \right] \right) \right) \\
&\stackrel{(VB2)}{<} \infty.
\end{aligned}$$

Somit gilt Eigenschaft (5) sowohl für die Funktion  $I_0$  als auch für die Funktion  $I_1$ . In der nachfolgenden Abbildung sind die beiden Funktionen

$$T \mapsto \frac{\lambda_{0,T}}{\lambda_{1,T}} \quad \text{und} \quad T \mapsto \mathbb{E} [\xi_T | X_0^T - X_1^T]$$

dargestellt. Die Marktparameter sind dabei wie folgt gewählt:

$$\mu = 0.08, \quad r = 0.049, \quad \sigma = 0.15 \quad \text{und} \quad x_0 = 1.$$

### 5.4.3 Beispiel zu Turnpike-Aussagen im klassischen Black-Scholes-Modell für $\tilde{\delta}$ -nahe beieinanderliegende Wahrscheinlichkeitstransformationen

In diesem Beispiel nehmen wir Bezug auf Satz 5.15. Wir wählen dabei für die Investoren 0 und 1 die gleichen Nutzenfunktionen  $u_0$  und  $u_1$  wie in den beiden vorangegangenen Abschnitten. Weiter wählen wir für Investor 0 die Wahrscheinlichkeitstransformation

$$w_0(x) = \frac{1}{2 \tan\left(\frac{1}{2}\right)} \tan\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

und das Anfangsvermögen  $x_0 = \frac{1}{30}$ .

Die Idee ist nun, eine möglichst einfache Funktion  $w_1$  anzugeben, sodass die Funktionen  $w_0$  und  $w_1$   $\tilde{\delta}$ -nahe beieinander' liegen (vgl. dazu Definition 5.13).

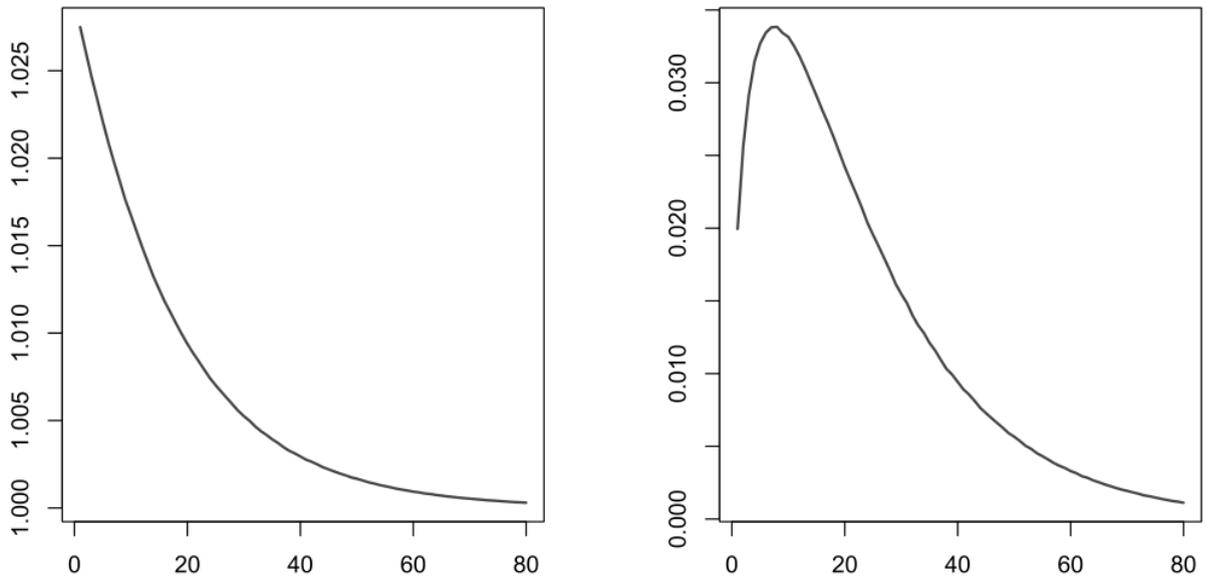


Abbildung 5.4: Die Funktionen  $T \mapsto \frac{\lambda_{0,T}}{\lambda_{1,T}}$  und  $T \mapsto \mathbb{E} [\xi_T | X_0^T - X_1^T]$ .

Die bisher typischen in der Literatur anzutreffenden Wahrscheinlichkeitstransformationen zeichnen sich oftmals dadurch aus, dass sie relativ kompliziert sind und unter Umständen auch nicht die Monotoniebedingung (3) aus Annahme 5.7 erfüllen. Beispiele finden sich in [Kahneman/Tversky, 1979] bzw. in Abschnitt 2.3.2. Um eine geeignete Wahrscheinlichkeitstransformation  $w_1$  zu erhalten, hat sich das nachfolgend vorgestellte Vorgehen als äußerst hilfreich herausgestellt. Dazu betrachten wir die Ableitungsfunktion  $w'_0$  genauer:

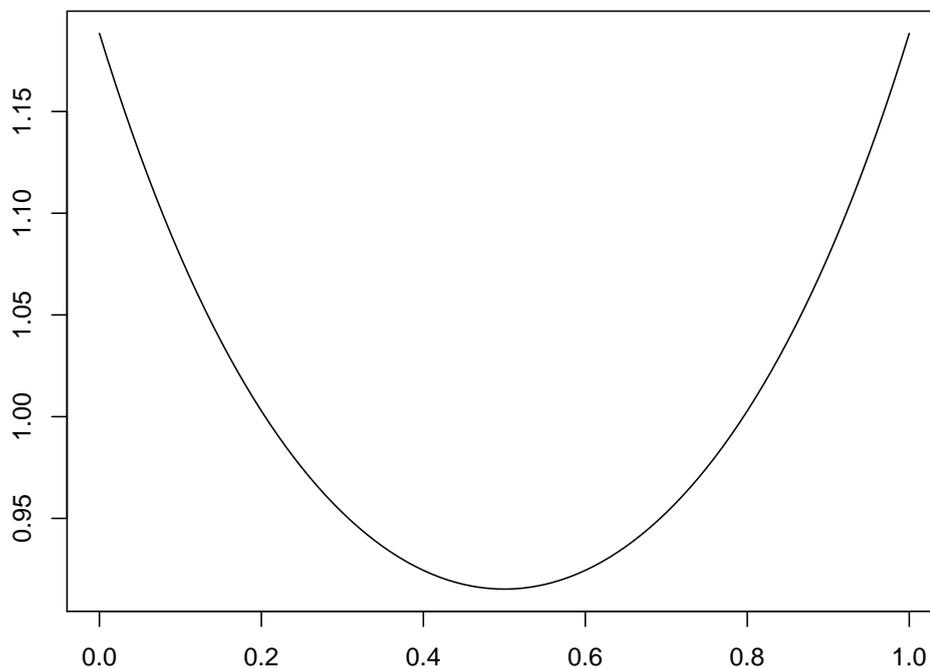


Abbildung 5.5: Die Funktion  $x \mapsto w'_0(x)$ .

Diese Ableitungsfunktion erinnert stark an eine Funktion polynomieller Gestalt. Tatsächlich lässt sich eine einfachere quadratische Funktion finden, deren Funktionswerte sich relativ nahe an denen der Funktion  $w'_0$  befinden. Diese ist gegeben durch

$$w'_1(x) = \frac{201}{500}x^2 - \frac{134}{100}x^1 + \frac{367}{300}.$$

Damit lässt sich die Funktion  $w_1$  beispielsweise gemäß

$$w_1(x) = \frac{67}{500}x^3 - \frac{67}{100}x^2 + \frac{367}{300}x$$

wählen. Die Wahrscheinlichkeitstransformation  $w_1$  erfüllt die in Theorem 6.1 geforderten Eigenschaften. Insbesondere erfüllt sie auch die Monotoniebedingung (3) aus Annahme 5.7. Nachfolgend sind zum Vergleich die beiden Ableitungsfunktionen  $w'_0$  und  $w'_1$ , sowie die Funktion  $w_1$  dargestellt:

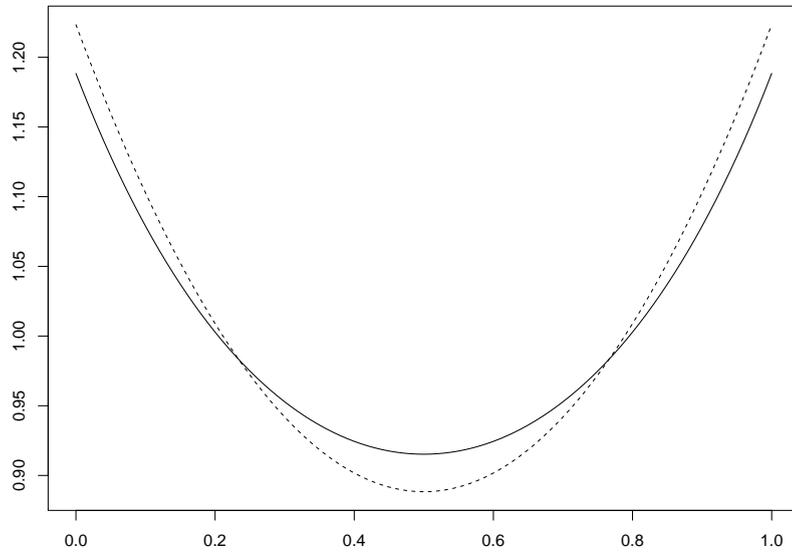


Abbildung 5.6: Die Funktionen  $x \mapsto w'_0(x)$  (schwarz) und  $x \mapsto w'_1(x)$  (rot).

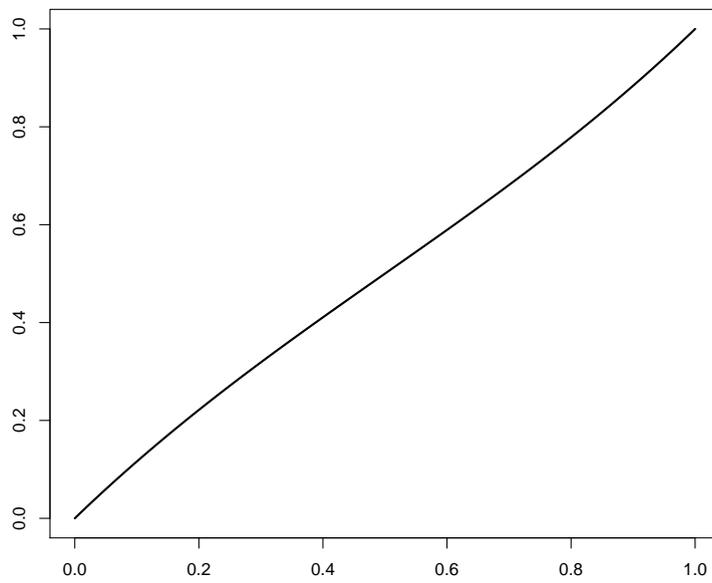


Abbildung 5.7: Die Funktionen  $x \mapsto w_1(x)$ .

Wir werden jetzt den Parameter  $\tilde{\delta}$  bestimmen, sodass

$$\tilde{\delta} \leq \frac{w'_1(x)}{w'_0(x)} \leq \frac{1}{\tilde{\delta}}$$

gilt. Dazu betrachten wir die Hilfsfunktion

$$h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{w'_1(x)}{w'_0(x)}.$$

Wie auf der nachfolgenden Grafik zu erkennen ist, gilt

$$0.97 \leq \left| \frac{w'_1(x)}{w'_0(x)} \right| \leq 1.031.$$

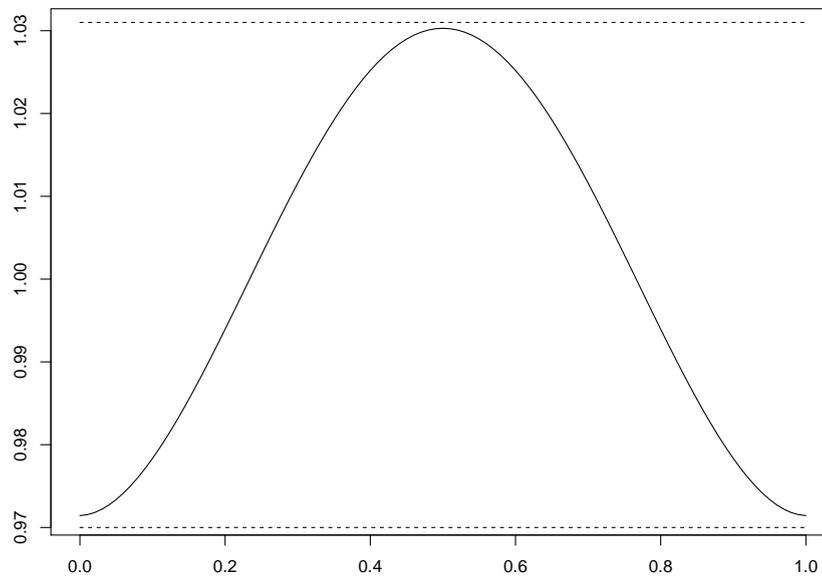


Abbildung 5.8: Die Funktionen  $x \mapsto h(x)$  (schwarz) sowie die oben angegebenen Schranken (gestrichelt).

Der Parameter  $\tilde{\delta}$  kann somit beispielsweise wie folgt gewählt werden:

$$\tilde{\delta} = \min \left\{ 0.97, \frac{1}{1.031} \right\} = \frac{1000}{1031}.$$

Wir werden nun mit Hilfe von Satz 5.15 zeigen, dass es einen Endzeitpunkt  $T^* \geq 0$  gibt, sodass für alle Zeitpunkte  $T \geq T^*$  und für alle  $t \geq 0$  gilt:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \left| \frac{X_{0,t}^T}{B_t} - \frac{X_{1,t}^T}{B_t} \right| \right] \leq (2 \cdot 0.132 + 0.132^2) \frac{1}{30} \approx 0.00939.$$

Dazu wählen wir  $\gamma = 0.132$ . Für  $\delta_\gamma = 0.94$  gilt dann

$$\left| \frac{I_0(\delta_\gamma x)}{I_0(x)} - 1 \right| = \left| \frac{1}{(0.94)^2} - 1 \right| \leq 0.132, \quad \left| \frac{I_0(\delta_\gamma^{-1} x)}{I_0(x)} - 1 \right| = \left| (0.94)^2 - 1 \right| \leq 0.132.$$

Nach Satz 5.15 gilt die Behauptung somit für  $\tilde{\delta} = \frac{1000}{1031}$ . Man kann leicht die beiden dort geforderten Eigenschaften nachprüfen.

Abschließend sei auch in diesem Beispiel der Plot der Funktionen  $T \mapsto \lambda_{0,T}/\lambda_{1,T}$  und  $T \mapsto \mathbb{E}[\xi_T | X_0^T - X_1^T]$  für die Marktparameter  $\mu = 0.08, r = 0.035, \sigma = 0.15$  und  $x_0 = \frac{1}{30}$  dargestellt:

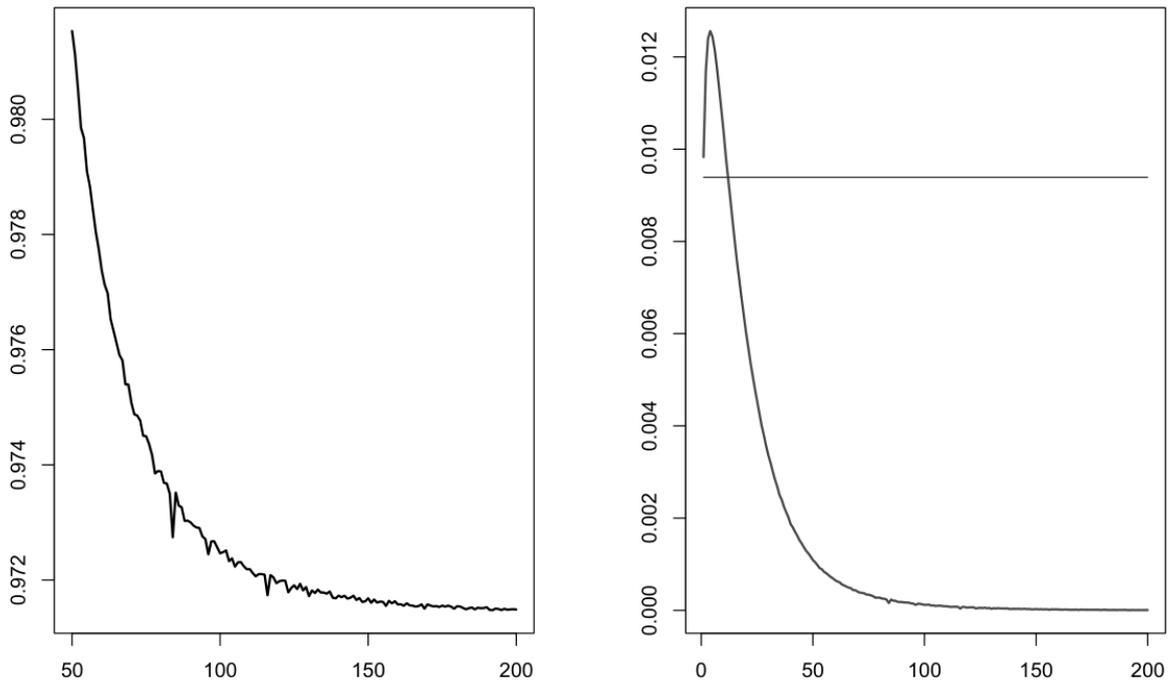


Abbildung 5.9: Die Funktionen  $T \mapsto \frac{\lambda_{0,T}}{\lambda_{1,T}}$  (links) und  $T \mapsto \mathbb{E}[\xi_T | X_0^T - X_1^T]$  (rechts).

Es ist zu erkennen, dass für den Quotienten der Lagrange-Parameter wie in Lemma 5.14 bewiesen wurde, ab einem bestimmten Endzeitpunktes  $T$

$$0.969 \approx \frac{1000}{1031} \leq \frac{\lambda_{0,T}}{\lambda_{1,T}} \leq \frac{1031}{1000} = 1.031$$

gilt. Außerdem sieht man, dass es einen Zeitpunkt  $T^* \geq 0$  gibt, sodass für alle Zeitpunkte  $T \geq T^*$  gilt (vgl. die in Abbildung 5.9 rot eingezeichnete Schranke):

$$\mathbb{E} [\xi_T | X_0^T - X_1^T] \leq 0.00939.$$

Wie man aus dem obigen Schaubild erkennen kann, ist dies ungefähr bei  $T^* = 25$  der Fall.

#### 5.4.4 Beispiel zu Turnpike-Aussagen im allgemeinen Black-Scholes-Modell im Kontext der Choquet-Optimierung

In diesem Abschnitt wird ein Beispiel zu Turnpike-Aussagen im Choquet-Kontext unter Betrachtung des allgemeinen Black-Scholes-Modells formuliert und damit Beispiel 5.4.2 erweitert. Zu Beginn halten wir das nachfolgende Lemma fest:

##### Lemma 5.18

Sei  $(W_t)_{t \geq 0}$  eine Brownsche Bewegung und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist

$$(f \bullet W)_t = \int_0^t f(s) dW_s$$

für jedes feste  $t \geq 0$  normalverteilt, und es gilt

$$(f \bullet W)_t \sim \mathcal{N} \left( 0, \int_0^t f^2(s) ds \right). \quad (5.19)$$

*Beweis.* Ein Beweis dieser Aussage findet sich in [Bauer, 2002], 4.A., Lemma 48.2.  $\square$

Zu beachten ist, dass für die Wohlgestelltheit der Optimierungsprobleme im Choquet-Kontext ebenfalls die Bedingungen (3) und (5) aus Annahme 5.7 zu prüfen sind. Insbesondere wird der allgemeine Black-Scholes-Finanzmarkt zu Grunde gelegt. Dazu wählen wir die Marktparameter wie folgt:

$$\begin{aligned} \mu_t &:= 0.08 + 0.01 \cdot \sin(t), \\ r_t &:= 0.035 + 0.025 \cdot \sin(t), \\ \sigma_t &:= 0.15. \end{aligned}$$

Die geforderten Bedingungen können dabei einfach nachgeprüft werden (vgl. auch Beispiel 5.4.2). Die ‚market growth condition‘ lässt sich mithilfe von

$$\xi_T \sim \mathcal{LN} \left( - \int_0^T r_s ds - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_s^2 ds, \int_0^T \gamma_s^2 ds \right)$$

(vgl. Lemma 5.18), ebenfalls leicht überprüfen. Somit sind in diesem Beispiel die erforderlichen Voraussetzungen erfüllt, und die bisher getroffenen Aussagen gelten auch in

diesem Choquet-Kontext. Das Verhalten des Quotienten der Lagrange-Parameter sowie der erwarteten absoluten Differenz der Endvermögen bei wachsendem Endzeitpunkt  $T$  sind in der nachfolgenden Grafik dargestellt:

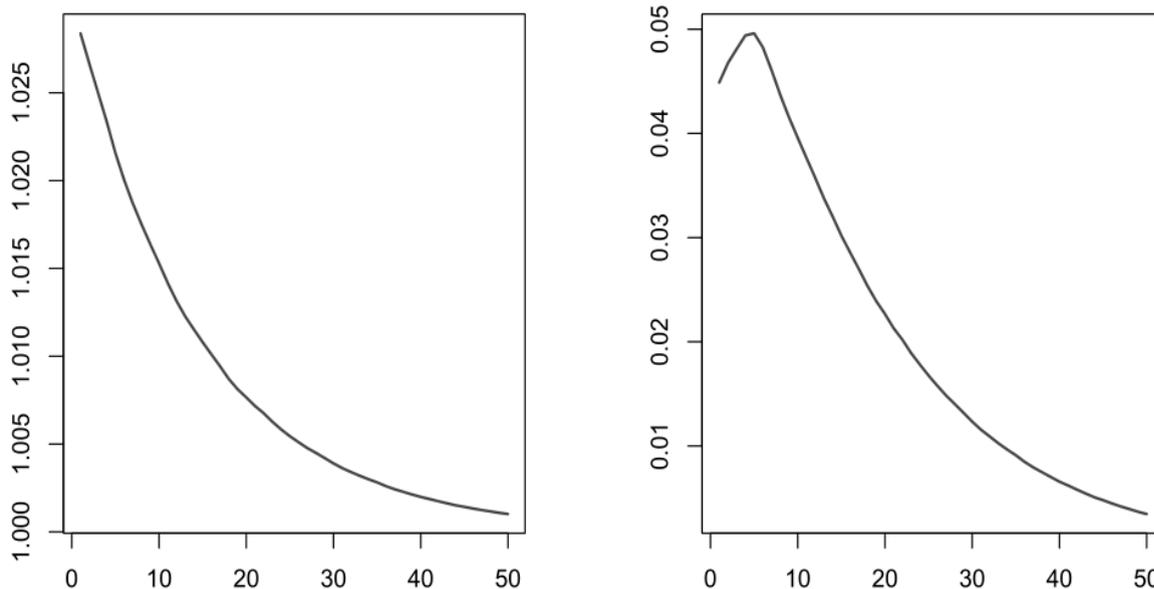


Abbildung 5.10: Die Funktionen  $T \mapsto \frac{\lambda_{0,T}}{\lambda_{1,T}}$  (links) und  $T \mapsto \mathbb{E} [\xi_T | X_0^T - X_1^T |]$  (rechts).

#### 5.4.5 Beispiel zu Turnpike-Aussagen im CEV-Modell im klassischen Kontext

In diesem Abschnitt wird ein Beispiel zu Turnpike-Aussagen im CEV-Modell (vgl. dazu Abschnitt 3.1.2) im klassischen Erwartungswert-Nutzen-Kontext formuliert. Dabei gelte in diesem Abschnitt  $n = 1$ . Wir wählen die gleichen Nutzenfunktionen wie in Abschnitt 5.4.1. Weiter wählen wir für die Parameter des CEV-Modells (vgl. Abschnitt 3.1.2)  $\mu := 0.08$ ,  $r := 0.065$  und  $\sigma := 0.15$ . Für den Parameter  $\gamma$  gelte  $\gamma = 0$ . Dies führt zu einem Spezialfall des CEV-Modells, dem sogenannten ‚absolute diffusion model‘ (vgl. dazu auch Bemerkung 3.3).

Die Schwierigkeit bei der Implementierung dieses Beispiels ergibt sich aus der Tatsache, dass die Verteilung der Zufallsvariablen  $\xi_T$  nicht weiter als bekannt vorausgesetzt werden kann. Es ist daher notwendig, diese über stochastische Integrale anzunähern. Das grobe Vorgehen soll im Folgenden kurz skizziert werden.

Da die Größe  $\mathbb{E} [\xi_T | X_0^T - X_1^T |]$  für verschiedene Zeitpunkte  $T \geq 0$  betrachtet werden soll, ist die Kenntnis der Verteilung der Zufallsvariablen  $\xi_T$  erforderlich. Da unter den

Annahmen dieses Modells

$$\xi_T := \exp \left( -rT - \int_0^T \gamma_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma_s^2 ds \right) \quad (5.20)$$

gilt, ist somit die Kenntnis der genauen Struktur des Prozesses  $(\gamma_t)_{t \geq 0}$  vonnöten. Dieser wiederum ist durch

$$(\gamma_t)_{t \geq 0} := \left( S_t \frac{(\mu - r)}{\sigma} \right)_{t \geq 0}$$

gegeben. Den Aktienpreisprozess kann man aus dessen Dynamik herleiten (vgl. [ShreveII, 2004]). Als Lösungsformel ergibt sich dann

$$(S_t)_{t \geq 0} := \left( \exp(\mu t) \left( S_0 + \int_0^t \sigma \exp(-\mu_s) dW_s \right) \right)_{t \geq 0},$$

wobei  $S_0 := 1$  gewählt wird. Ausgehend davon können die Integrale aus Gleichung (5.20) approximativ implementiert werden.

Nachfolgend wird die Aussage von Theorem 5.6 für den Spezialfall des CEV-Modells verbildlicht. Auch hier sind die Funktionen  $T \mapsto \lambda_{0,T}/\lambda_{1,T}$  und  $T \mapsto \mathbb{E} [\xi_T | X_0^T - X_1^T]$  dargestellt:

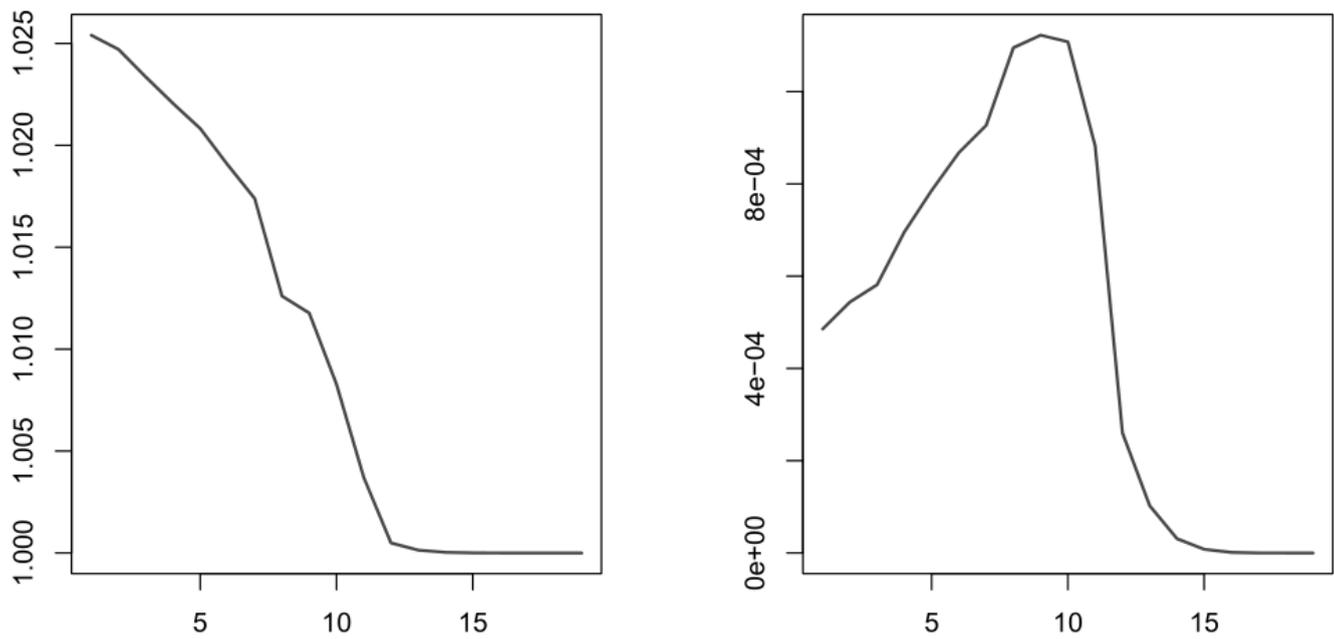


Abbildung 5.11: Die Funktionen  $T \mapsto \frac{\lambda_{0,T}}{\lambda_{1,T}}$  (links) und  $T \mapsto \mathbb{E} [\xi_T | X_0^T - X_1^T |]$  (rechts).

Die in der Grafik abgebildeten Kurven verlaufen dabei nicht glatt, da die betrachteten Funktionen beim Implementieren aufgrund der Rechengeschwindigkeit nur in einigen ganzzahligen Zeitpunkten ausgewertet wurden.

## 6 Resultate zu Turnpike-Aussagen in diversen stetigen Kontexten für zeitabhängige Nutzenfunktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{R}_+$ im klassischen Black-Scholes-Modell

In diesem Abschnitt werden wir Nutzenfunktionen betrachten, die vom Endzeitpunkt  $T$  abhängen. Unter Umständen kann es für die Nutzenbewertung eines Endvermögens entscheidend sein, zu welchem Zeitpunkt eine Option ausgeübt wird. Wir werden am Ende dieses Kapitels zeigen, dass mit Hilfe des Betrachtens klassischer zeitabhängiger Nutzenfunktionen auch das Betrachten von Turnpike-Aussagen im Rahmen der Choquet-Maximierung für Investoren mit verschiedenen Wahrscheinlichkeitstransformationen gelingt. Als Finanzmarktmodell wird in diesem Abschnitt das klassische Black-Scholes-Modell zugrunde gelegt.

### 6.1 Turnpike-Aussagen im klassischen Kontext für den Fall zeitabhängiger Nutzenfunktionen

Wir zuvor betrachten wir zwei Investoren 0 und 1 mit zugehörigen Nutzenfunktionen  $u_{i,T}$  für  $i \in \{0, 1\}$  bei einem Endzeithorizont  $T > 0$ . Dabei gelte  $u_{i,T} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , wobei die Funktionen  $u_{i,T}$  für  $i \in \{0, 1\}$  strikt konkav, strikt wachsend und stetig differenzierbar sein sollen. Insbesondere gelte die Notation

$$(u'_{i,T})^{-1} =: I_i^T \text{ für } i \in \{0, 1\}.$$

Dann gilt:

#### Theorem 6.1

Es mögen folgende Eigenschaften erfüllt sein:

(V1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I_1^T(x)}{I_0^T(x)} = 1,$$

(V2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I_i^T(x_n)}{I_i^T(y_n)} = 1,$$

für alle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow 0} x_n = 0, \lim_{n \rightarrow 0} y_n = 0$  und  $i \in \{0, 1\}$ .

(V3) Für jedes  $\epsilon > 0$  existiere eine Konstante  $c_\epsilon^i > 0$ , sodass

$$\left| \sup_{T \geq 0} I_i^T(\epsilon) \right| < c_\epsilon^i, \quad i \in \{0, 1\},$$

(V4) für alle  $T \geq 0$  gelte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} I_i^T(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} I_i^T(x) = \infty, \quad i \in \{0, 1\},$$

(V5) für jedes  $a > 0$  und  $x > 0$  existiere der Grenzwert

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I_0^T(ax)}{I_0^T(x)}.$$

Falls zudem Annahme 5.5 gültig ist, so folgt für alle  $t > 0$ :

$$(D1) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \xi_T \left| X_0^T - X_1^T \right| \right] = 0,$$

$$(D2) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \left| \frac{X_{0,t}^T}{B_t} - \frac{X_{1,t}^T}{B_t} \right| \right] = 0.$$

*Beweis.* Der Beweis des Theorems verläuft ähnlich zu demjenigen von Theorem 5.8 in den folgenden drei Schritten:

$$(1) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{1,T}}{\lambda_{0,T}} = 1,$$

(2) Wir zeigen Behauptung (D1):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \xi_T \left| I_0^T(\lambda_{0,T} \xi_T) - I_1^T(\lambda_{1,T} \xi_T) \right| \right] = 0,$$

(3) Wir zeigen Behauptung (D2):

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \left| \frac{X_{0,t}^T}{B_t} - \frac{X_{1,t}^T}{B_t} \right| \right] = 0.$$

Dazu sind einige Vorüberlegungen nötig:

Wegen Voraussetzung (V2) muss gelten:

Für alle  $\delta \in (0, 1)$  existieren Zahlen  $k_\delta > 1$  und  $\epsilon_1 > 0$ , sodass für alle  $x \in (0, \epsilon_1)$  gilt:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I_0^T(\delta x)}{I_0^T(x)} > k_\delta. \quad (6.1)$$

Dies kann wie folgt (ähnlich wie bei Gleichung (5.4)) begründet werden:

Angenommen es existiert keine solche Zahl  $k_\delta$ . Dann existiert ein  $\delta \in (0, 1)$ , sodass für alle  $k_\delta > 1$  und für alle  $\epsilon > 0$  ein  $x \in (0, \epsilon)$  existiert, sodass

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I_0^T(\delta x)}{I_0^T(x)} \leq k_\delta.$$

Da die Funktion  $I_0$  zudem monoton fällt, würden dann eine Zahl  $\delta \in (0, 1)$  und eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  sowie eine Folge  $(\kappa_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_n = 1$  existieren, sodass

$$1 \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I_0^T(\delta x_n)}{I_0^T(x_n)} \leq \kappa_n \downarrow 1,$$

also

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I_0^T(\delta x_n)}{I_0^T(x_n)} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$$

und somit nach Voraussetzung (V2)

$$\frac{\delta x_n}{x_n} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

Dies ist allerdings ein Widerspruch. Somit ist Aussage (6.1) gültig.

Weiter folgt nach Voraussetzung (V1), dass für alle Zahlen  $k_\delta > 1$  ein  $\epsilon_2 > 0$  existiert, sodass für alle  $x \in (0, \epsilon_2)$  gilt:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I_0^T(x)}{I_1^T(x)} \geq \frac{1}{\sqrt{k_\delta}}. \quad (6.2)$$

Somit folgt nach den Aussagen (6.1) und (6.2), dass für alle  $x \in (0, \epsilon_\delta)$  mit  $\epsilon_\delta := \min\{\epsilon^1, \epsilon^2\}$  gilt:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{I_0^T(\delta x)}{I_1^T(x)} \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{I_0^T(\delta x)}{I_0^T(x)} \frac{I_0^T(x)}{I_1^T(x)} \right) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{I_0^T(\delta x)}{I_0^T(x)} \right) \lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{I_0^T(x)}{I_1^T(x)} \right) \geq \sqrt{k_\delta}.$$

Die Grenzwerte existieren dabei nach Voraussetzung. Also gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I_0^T(\delta x)}{I_1^T(x)} \geq \sqrt{k_\delta} > 1.$$

Somit gibt es insbesondere zu jedem  $\delta \in (0, 1)$  Zahlen  $k_\delta > 1$  und  $\epsilon_\delta > 0$ , sodass für alle  $x \in (0, \epsilon_\delta)$  ein Zeitpunkt  $T^* \geq 0$  und eine Folge  $(\Delta_T)_{T \in \mathbb{N}}$  mit  $\Delta_T > 0$  und  $\lim_{T \rightarrow \infty} \Delta_T = 0$  existiert und für alle Zeitpunkte  $T \geq T^*$  gilt:

$$\frac{I_0^T(\delta x)}{I_1^T(x)} \geq \sqrt{k_\delta} - \Delta_T > 1.$$

Somit folgt

$$I_0^T(\delta x) \geq \left(\sqrt{k_\delta} - \Delta_T\right) I_1^T(x). \quad (6.3)$$

Dabei wurde insbesondere die Positivität der Funktionen  $I_0$  und  $I_1$  genutzt. Mit Hilfe dieser Vorbemerkungen lässt sich nun die Behauptung in den drei oben genannten Schritten zeigen:

**Zu Schritt (1):**

Wegen der Symmetrie dieser Fragestellung ist es ausreichend,

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{0,T}}{\lambda_{1,T}} \geq 1$$

nachzuweisen. Dies zeigen wir durch Widerspruch:

Angenommen die obige Aussage gilt nicht. Dann existieren eine Zahl  $\delta < 1$  und eine unbeschränkte Menge  $\mathcal{T}$  von Endzeitpunkten, sodass für alle  $T \in \mathcal{T}$  gilt:

$$\frac{\lambda_{0,T}}{\lambda_{1,T}} < \delta \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{0,T} < \delta \lambda_{1,T}.$$

Da die Menge  $\mathcal{T}$  unbeschränkt ist, existieren zu jedem  $\delta \in (0, 1)$  Zahlen  $k_\delta > 1$  und  $\epsilon_\delta > 0$ , sodass für alle  $x \in (0, \epsilon_\delta)$  ein Zeitpunkt  $T^* \geq 0$  und eine Folge  $(\Delta_T)_{T \in \mathbb{N}}$  existieren, sodass Ungleichung (6.3) für alle  $T \geq T^*$  mit  $T \in \mathcal{T}$  gilt.

Da die Funktion  $I_0$  monoton fällt, gilt für  $T \geq T^*$  mit  $T \in \mathcal{T}$ :

$$\begin{aligned} x_0 &= \mathbb{E} [\xi_T I_0^T(\lambda_{0,T} \xi_T)] \\ &> \mathbb{E} [\xi_T I_0^T(\delta \lambda_{1,T} \xi_T)] \\ &\geq \mathbb{E} [\xi_T I_0^T(\delta \lambda_{1,T} \xi_T) \mathbf{1}\{\lambda_{1,T} \xi_T < \epsilon_\delta\}] \\ &\stackrel{(6.3)}{\geq} \left(\sqrt{k_\delta} - \Delta_T\right) \mathbb{E} [\xi_T I_1^T(\lambda_{1,T} \xi_T) \mathbf{1}\{\lambda_{1,T} \xi_T < \epsilon_\delta\}] \\ &= \left(\sqrt{k_\delta} - \Delta_T\right) x_0 - \left(\sqrt{k_\delta} - \Delta_T\right) \mathbb{E} [\xi_T I_1^T(\lambda_{1,T} \xi_T) \mathbf{1}\{\lambda_{1,T} \xi_T \geq \epsilon_\delta\}] \\ &\geq \left(\sqrt{k_\delta} - \Delta_T\right) x_0 - \left(\sqrt{k_\delta} - \Delta_T\right) I_1^T(\epsilon_\delta) \mathbb{E}[\xi_T] \\ &\geq \left(\sqrt{k_\delta} - \Delta_T\right) x_0 - \left(\sqrt{k_\delta} - \Delta_T\right) c_{\epsilon_\delta}^1 \mathbb{E}[\xi_T] \rightarrow \sqrt{k_\delta} x_0, \quad T \rightarrow \infty \text{ mit } T \in \mathcal{T}. \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung gilt dabei aufgrund der Voraussetzung (V3) des Theorems. Da  $k_\delta > 1$  gilt, ergibt sich ein Widerspruch. Somit folgt

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{0,T}}{\lambda_{1,T}} \geq 1$$

und damit die Gültigkeit des ersten Schritts.

**Zu Schritt (2):**

Um den zweiten Schritt zu zeigen, benötigen wir erneut einige Vorbemerkungen:

**(VB1):** Nach Voraussetzung (V2) gibt es zu jedem  $\gamma > 0$  ein  $\delta_\gamma < 1$  sowie ein  $\epsilon_\gamma > 0$ , sodass für alle  $x \in (0, \epsilon_\gamma)$  gilt:

$$\left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I_0^T(\delta_\gamma^{-1}x)}{I_0^T(x)} - 1 \right| \leq \gamma \quad \text{und} \quad \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I_0^T(\delta_\gamma x)}{I_0^T(x)} - 1 \right| \leq \gamma.$$

Angenommen die obige Aussage wäre falsch. Dann würden ein  $\gamma > 0$  und eine Folge  $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\delta_n \nearrow 1, n \rightarrow \infty$  sowie eine Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \searrow 0$  existieren, sodass

$$\left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I_0^T(\delta_n^{-1}x_n)}{I_0^T(x_n)} - 1 \right| > \gamma \quad \text{oder} \quad \left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I_0^T(\delta_n x_n)}{I_0^T(x_n)} - 1 \right| > \gamma.$$

Dies widerspricht allerdings Voraussetzung (V2), da

$$\frac{\delta_n^{-1}x_n}{x_n} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

Insbesondere gilt somit

$$1 - \gamma \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I_0^T(\delta_\gamma^{-1}x)}{I_0^T(x)} \leq 1 + \gamma \quad \text{und} \quad 1 - \gamma \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I_0^T(\delta_\gamma x)}{I_0^T(x)} \leq 1 + \gamma. \quad (6.4)$$

**(VB2):** Nach Voraussetzung (V1) gilt

$$\left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I_0^T(x)}{I_1^T(x)} - 1 \right| \rightarrow 0, \quad x \rightarrow 0.$$

Somit existiert zu jedem  $\gamma > 0$  ein  $\epsilon_\gamma > 0$ , sodass für alle  $x \in (0, \epsilon_\gamma)$  gilt:

$$\left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I_0^T(x)}{I_1^T(x)} - 1 \right| \leq \gamma.$$

**(VB3):** Mit Vorbemerkung (VB1) und (VB2) ergibt sich, dass es zu jedem  $\gamma > 0$  ein  $\delta_\gamma \in (0, 1)$  und ein  $\epsilon_\gamma > 0$  gibt, sodass für alle  $x \in (0, \epsilon_\gamma)$  gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I_0^T(\delta_\gamma^{-1}x)}{I_1^T(x)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I_0^T(\delta_\gamma^{-1}x)}{I_0^T(x)} \frac{I_0^T(x)}{I_1^T(x)} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I_0^T(\delta_\gamma^{-1}x)}{I_0^T(x)} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I_0^T(x)}{I_1^T(x)} \\ &\stackrel{\text{(VB1)}}{\geq} (1 - \gamma)^2. \\ &\stackrel{\text{(VB2)}}{} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Die einzelnen Grenzwerte existieren hierbei nach Voraussetzung.

Analog zeigt man

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{I_0^T(\delta_\gamma x)}{I_1^T(x)} \leq (1 + \gamma)^2. \quad (6.6)$$

Für  $\delta > 0$  sei  $T_\gamma \geq 0$  so groß gewählt, dass für alle  $T \geq T_\gamma$  gilt:

$$\delta_\gamma \leq \frac{\lambda_{0,T}}{\lambda_{1,T}} \leq \frac{1}{\delta_\gamma}. \quad (6.7)$$

Dies ist wegen des bereits gezeigten ersten Schrittes möglich. Nach Obigem gilt somit:

Zu jedem  $\gamma > 0$  existieren ein  $\delta_\gamma \in (0, 1)$  und ein  $\epsilon_\gamma > 0$  sowie ein Zeitpunkt  $T_\gamma \geq 0$  und eine Folge  $(\Delta_T)_{T \in \mathbb{N}}$  mit  $\Delta_T \geq 0$  und  $\Delta_T \rightarrow 0, T \rightarrow \infty$ , sodass für alle  $T \geq T^* := \max\{T_\gamma, T_\delta\}$  und für  $x := \lambda_{1,T}\xi_T$  gilt:

$$\gamma^2 - 2\gamma - \Delta_T \stackrel{(6.5)}{\leq} \frac{I_0^T(\delta_\gamma^{-1}x)}{I_1^T(x)} - 1 \stackrel{(6.7)}{\leq} \frac{I_0^T(\lambda_{0,T}\xi_T)}{I_1^T(x)} - 1 \stackrel{(6.7)}{\leq} \frac{I_0^T(\delta_\gamma x)}{I_1^T(x)} - 1 \stackrel{(6.6)}{\leq} \gamma^2 + 2\gamma + \Delta_T.$$

Somit gibt es zu jedem  $\gamma > 0$  ein Endzeitpunkt  $T^* \geq 0$  mit

$$\left| \frac{I_0^T(\lambda_{0,T}\xi_T)}{I_1^T(\lambda_{1,T}\xi_T)} - 1 \right| \leq \gamma^2 + 2\gamma + \Delta_T, \quad T \geq T^*. \quad (6.8)$$

Mit Hilfe dieser Vorbemerkungen lässt sich nun Schritt (2) zeigen:

Sei  $T \geq T^*$ . Dann gilt für  $\gamma > 0$  beliebig mit zugehörigem  $\epsilon_\gamma > 0$  und  $\delta_\gamma \in (0, 1)$ :

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[ \xi_T \left| I_1^T(\lambda_{1,T}\xi_T) - I_0^T(\lambda_{0,T}\xi_T) \right| \mathbf{1}\{\lambda_{1,T}\xi_T \leq \epsilon_\gamma\} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \xi_T \left| 1 - \frac{I_0^T(\lambda_{0,T}\xi_T)}{I_1^T(\lambda_{0,T}\xi_T)} \right| I_1^T(\lambda_{1,T}\xi_T) \mathbf{1}\{\lambda_{1,T}\xi_T \leq \epsilon_\gamma\} \right] \\
&\stackrel{(6.8)}{\leq} (\gamma^2 + 2\gamma + \Delta_T) \mathbb{E} \left[ \xi_T I_1^T(\lambda_{1,T}\xi_T) \mathbf{1}\{\lambda_{1,T}\xi_T \leq \epsilon_\gamma\} \right] \\
&\leq (\gamma^2 + 2\gamma + \Delta_T) x_0 \\
&\rightarrow (\gamma^2 + 2\gamma) x_0, \quad T \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Da  $\gamma \geq 0$  beliebig ist, gilt Schritt (2) auf der Menge  $\{\lambda_{1,T}\xi_T \leq \epsilon_\gamma\}$ . Weiter gilt auf der Menge  $\{\lambda_{1,T}\xi_T > \epsilon_\gamma\}$ :

$$0 \leq I_1^T(\lambda_{1,T}\xi_T) \leq I_1^T(\epsilon_\gamma), \quad 0 \leq I_0^T(\lambda_{0,T}\xi_T) \leq I_0^T(\delta\epsilon_\gamma).$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[ \xi_T \left| I_1^T(\lambda_{1,T}\xi_T) - I_0^T(\lambda_{0,T}\xi_T) \right| \mathbf{1}\{\lambda_{1,T}\xi_T > \epsilon_\gamma\} \right] \\
&\leq \mathbb{E} \left[ \xi_T (I_1^T(\lambda_{1,T}\xi_T) + I_0^T(\lambda_{0,T}\xi_T)) \mathbf{1}\{\lambda_{1,T}\xi_T > \epsilon_\gamma\} \right] \\
&\leq (I_1^T(\epsilon_\gamma) + I_0^T(\delta\epsilon_\gamma)) \mathbb{E}[\xi_T] \\
&\stackrel{(VB3)}{\leq} (c_{\epsilon_\gamma}^1 + c_{\delta\epsilon_\gamma}^0) \mathbb{E}[\xi_T] \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Die zweite Abschätzung ergibt sich hierbei aufgrund der Monotonie der Funktionen  $I_0$  und  $I_1$ . Somit gilt insgesamt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \xi_T \left| I_0^T(\lambda_{0,T}\xi_T) - I_1^T(\lambda_{1,T}\xi_T) \right| \right] = 0. \quad (6.9)$$

**Zu Schritt (3):**

Der letzte Schritt kann analog zum dritten Schritt des Beweises von Theorem 5.8 mit Hilfe der Bayes-Regel und der Turm-Eigenschaft gezeigt werden. Für  $t > 0$  ergibt sich

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \left| \frac{X_{0,t}^T}{B_t} - \frac{X_{1,t}^T}{B_t} \right| \right] \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \beta_t \left| \frac{1}{\beta_t \rho_t} \mathbb{E} \left[ \xi_T (I_0(\lambda_{0,T}\xi_T) - I_1(\lambda_{1,T}\xi_T)) \mid \mathcal{F}_t^W \right] \right| \right] \\
&\leq \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \xi_T \left| I_0^T(\lambda_{0,T}\xi_T) - I_1^T(\lambda_{1,T}\xi_T) \right| \right] \stackrel{(6.9)}{=} 0.
\end{aligned}$$

Dabei kann die Gestalt von  $\beta_t$  in Definition (2.5) nachgelesen werden. Somit gilt die Behauptung.  $\square$

## 6.2 Zusammenhang zu den bisherigen Aussagen über Turnpike-Aussagen im Kontext der klassischen Choquet-Maximierung

In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass Turnpike-Aussagen in einigen nicht-klassischen Kontexten auf solche mit zeitabhängigen Nutzenfunktionen in klassischen Kontexten zurückgeführt werden können. Die Idee, nicht-klassische auf klassische Optimierungsprobleme zurückzuführen ist dabei nicht ganz neu. Beispielsweise konnten Bernard, Chen und Vanduffel im Jahr 2014 zeigen, dass unter gewissen Voraussetzungen zu nicht-klassischen Choquet-Optimierungsproblemen äquivalente klassische Probleme gefunden werden können (vgl. [Bernard/Chen/Vanduffel, 2013]).

Wir betrachten zwei Investoren 0 und 1 im Rahmen der Choquet-Maximierung. Diese bewerten den verallgemeinerten Nutzen eines Vermögens wie in Abschnitt 5.2 beschrieben mittels der Nutzenfunktionen  $u_0$  und  $u_1$  sowie der Wahrscheinlichkeitstransformationen  $w_0$  und  $w_1$ . Insbesondere lassen wir in diesem Abschnitt zu, dass  $w_0 \neq w_1$  gewählt wird. Weiter fordern wir, dass diese Funktionen die in Annahme 5.7 geforderten Eigenschaften erfüllen. Bekannt ist, dass die Lösung des Choquet-Optimierungsproblems für Investor  $i$  dann durch

$$X_i^T := I_i \left( \frac{\lambda_{i,T} \xi_T}{w'_i(F_T(\xi_T))} \right), \quad i \in \{0, 1\},$$

gegeben ist (vgl. Satz 2.11). Wir definieren die Funktion

$$I_i^T(x) := I_i \left( \frac{\lambda_{i,T} x}{w'_i(F_T(x))} \right), \quad i \in \{0, 1\}.$$

Die Idee ist nun, die Aussagen der Turnpike-Theorie für zeitabhängige Nutzenfunktionen auf die Funktionen  $I_i^T$  für  $i \in \{0, 1\}$  anzuwenden.

Es ist zu beachten, dass

$$I_i^T(\xi_T) = I_i^T(\lambda_{\text{klassisch}}^T \xi_T) = X_i^T$$

gilt, d.h. der Lagrange-Parameter  $\lambda_{\text{klassisch}}^T$  im klassischen Kontext nimmt für jeden Endzeitpunkt  $T$  gerade den Wert 1 an und darf nicht mit den Lagrange-Parametern  $\lambda_{0,T}$  und  $\lambda_{1,T}$  verwechselt werden, die sich aus dem Choquet-Optimierungsproblem ergeben.

Es ist leicht zu zeigen, dass die Funktionen  $I_0^T$  und  $I_1^T$  monoton fallend, strikt positiv und stetig sind und zudem für  $i \in \{0, 1\}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} I_i^T(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} I_i^T(x) = \infty$$

gelten. Diese Eigenschaften übertragen sich letztlich direkt von den Eigenschaften der Funktionen  $I_0$  und  $I_1$ . Somit existieren Funktionen  $u'_{0,T}$  und  $u'_{1,T}$ , die streng monoton

fallend, strikt positiv sowie stetig sind und für die

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u'_{i,T}(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow 0} u'_{i,T}(x) = \infty, \quad i \in \{0, 1\}$$

gelten. Damit existieren aber insbesondere auch klassische zeitabhängige Nutzenfunktionen

$$u_{i,T} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+,$$

sodass  $u_{i,T}$  für  $i \in \{0, 1\}$  strikt konkav, strikt wachsend sowie stetig differenzierbar ist und die INADA-Bedingungen erfüllt.

### **Bemerkung 6.2**

Wenn die Wert- und Wahrscheinlichkeitstransformationen  $u_0, u_1, w_0$  und  $w_1$  in der Art und Weise gewählt werden, dass die Voraussetzungen (V1) - (V3) aus Theorem 6.1 erfüllt sind, so kann die Aussage aus Theorem 6.1 auch im nicht-klassischen Fall für Investoren im Rahmen der Choquet-Maximierungstheorie angewendet werden. Ein Vorteil ist, dass es keiner direkten Kenntnis über die genaue Gestalt der Funktionen  $u_{0,T}$  und  $u_{1,T}$  bedarf und dass zudem im Gegensatz zu Theorem 5.8 auch Investoren mit verschiedenen Wahrscheinlichkeitstransformationen betrachtet werden können. Insbesondere erhält man im Gegensatz zu Satz 5.15 auch im Fall unterschiedlich gewählter Wahrscheinlichkeitstransformationen eine Konvergenzaussage.

## 7 Resultate zu Turnpike-Aussagen im klassischen Kontext für zeitunabhängige Nutzenfunktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ im partiell beobachtbaren Marktmodell

### 7.1 Herleitung der allgemeinen Theorie

In diesem Abschnitt werden wir Turnpike-Aussagen im klassischen Erwartungswert-Nutzen-Kontext für Nutzenfunktionen  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  im partiell beobachtbaren Finanzmarkt betrachten. Dies ermöglicht die Formulierung von Turnpike-Aussagen für viele weitere bekannte Nutzenfunktionen, wie beispielsweise den Exponentialnutzen

$$u(x) = -e^{-\gamma x} \text{ für } \gamma > 0.$$

Bisher wurden in der Literatur überwiegend Nutzenfunktionen der Gestalt  $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  betrachtet. Wir werden sehen, dass für die Betrachtung von Nutzenfunktionen mit Definitionsbereich  $\mathbb{R}$  weitere Annahmen getroffen werden müssen, um die Gültigkeit von Turnpike-Aussagen zu ermöglichen.

Wir betrachten in diesem Kapitel zwei Investoren 0 und 1 mit den zugehörigen Nutzenfunktionen  $u_0$  und  $u_1$ , wobei

$$u_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{für } i \in \{0, 1\}$$

gelte. Weiter nehmen wir an, dass für  $i \in \{0, 1\}$  gilt:

- Die Funktion  $u_i$  ist streng konkav,
- Die Funktion  $u_i$  ist streng monoton wachsend,
- Die Funktion  $u_i$  ist stetig differenzierbar,
- Die INADA-Bedingungen sind erfüllt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u'_i(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} u'_i(x) = \infty.$$

Unter diesen Voraussetzungen existieren die Funktionen  $I_0 := (u'_0)^{-1}$  und  $I_1 := (u'_1)^{-1}$  und es gilt für  $i \in \{0, 1\}$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} I_i(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} I_i(x) = -\infty.$$

Wir nehmen in diesem Kapitel an, dass beide Investoren das gleiche Startvermögen  $x_0 > 0$  besitzen und auch hier die ‚market growth condition‘ gilt (vgl. Annahme 5.1).

Wir bezeichnen mit  $X_+ := \max(0, X)$  den sogenannten Positivteil und mit  $X_- := \max(0, -X)$  den sogenannten Negativteil einer Zufallsvariablen  $X$ .

Es sollen im Weiteren die folgenden drei Annahmen erfüllt sein:

**Annahme 7.1**

(i) Für alle Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$  und  $b_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$  gelte:

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \frac{u'_i(a_n)}{u'_i(b_n)} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty, \quad i \in \{0, 1\}.$$

(ii) Es gelte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u'_0(x)}{u'_1(x)} = 1.$$

**Annahme 7.2**

Es existieren Zahlen  $\hat{\delta} \in (0, 1)$  und  $\hat{c} > 0$ , sodass für alle  $x \geq \hat{c}$  gilt:

$$\left( I_0(\hat{\delta}x) \right)_- \geq \left( I_1(x) \right)_-.$$

**Annahme 7.3**

Es gelte

$$\mathbb{E} [\xi_T(X_{0,T})_-] = \mathbb{E} [\xi_T(I_0(\lambda_{0,T}\xi_T))_-] \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty. \quad (7.1)$$

**Bemerkung 7.4**

(i) Es wird davon ausgegangen, dass das Endvermögen  $X_{0,T}$  bereits hinreichend genau bekannt ist, sodass Annahme 7.3 garantiert werden kann. Da wir im Allgemeinen von einer ‚einfacheren‘ Gestalt der Funktion  $I_0$  ausgehen, ist dies keine zu schwerwiegende Forderung.

(ii) Da die Funktion  $I_0$  streng monoton fallend ist, gilt nach Annahme 7.2:

$$\left( I_0(y) \right)_- \geq \left( I_1(x) \right)_- \quad \text{für alle } y \geq \hat{\delta}x.$$

### Lemma 7.5

Wenn die Eigenschaften (i) und (ii) aus Annahme 7.1 gelten, dann folgt:

(i): Für alle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$  und  $y_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$  gilt:

$$\frac{x_n}{y_n} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty \quad \Leftrightarrow \quad \frac{I_i(x_n)}{I_i(y_n)} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty, i \in \{0, 1\}.$$

(ii): Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{I_0(x)}{I_1(x)} = 1.$$

*Beweis.* Wir zeigen zuerst Eigenschaft (i). Der Beweis erfolgt hier mit ähnlicher Technik zu demjenigen für Nutzenfunktionen mit Definitionsbereich  $\mathbb{R}_+$  (vgl. Satz 5.9). Eigenschaft (ii) kann analog zum Vorgehen für Nutzenfunktionen mit Definitionsbereich  $\mathbb{R}_+$  bewiesen werden (vgl. [Dybvig/Rogers/Back, 1999], Beweis zu Theorem 1).

„ $\Rightarrow$ “: Seien  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Nullfolgen mit

$$\frac{x_n}{y_n} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

Dann gilt aufgrund der Eigenschaften der Funktionen  $I_0$  und  $I_1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_i(x_n) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} I_i(y_n) = \infty, i \in \{0, 1\}.$$

Da nach Voraussetzung

$$\frac{u'_i(I_i(x_n))}{u'_i(I_i(y_n))} = \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$$

gilt, folgt nach Annahme 7.1 (i):

$$\frac{I_i(x_n)}{I_i(y_n)} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

„ $\Leftarrow$ “: Seien  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Nullfolgen mit

$$\frac{I_i(x_n)}{I_i(y_n)} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

Nach Annahme 7.1 (i) folgt mit  $a_n := I_i(x_n)$  und  $b_n := I_i(y_n)$  die Konvergenz

$$\frac{u'_i(I_i(x_n))}{u'_i(I_i(y_n))} = \frac{x_n}{y_n} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

Also gilt Eigenschaft (i). □

Im Folgenden wird eine Turnpike-Aussage in diesem Kontext vorgestellt:

### Theorem 7.6

Betrachtet werden zwei Investoren 0 und 1 mit Anfangsvermögen  $x_0 \in \mathbb{R}_+$  und den Nutzenfunktionen  $u_0$  und  $u_1$  im partiell beobachtbaren Finanzmarktmodell. Die betrachteten Nutzenfunktionen  $u_i$  erfüllen für  $i \in \{0, 1\}$  die nachfolgenden Eigenschaften:

(V1)  $u_i : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  sei strikt monoton wachsend, strikt konkav, zweifach differenzierbar, erfülle die INADA-Bedingungen, und es gelte  $u_i(0) = 0$ .

(V2) Es gelten die Annahmen 5.5, 7.1, 7.2 und 7.3.

Dann folgt

$$(E1) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \xi_T \left| X_0^T - X_1^T \right| \right] = 0,$$

und es gilt für alle  $t > 0$ :

$$(E2) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \left| \frac{X_{0,t}^T}{B_t} - \frac{X_{1,t}^T}{B_t} \right| \right] = 0,$$

$$(E3) \quad \int_0^t (\pi_{1,s}^T - \pi_{0,s}^T)^\top \Sigma_s (\pi_{1,s}^T - \pi_{0,s}^T) ds \xrightarrow{P} 0 \text{ für } T \rightarrow \infty,$$

$$(E4) \quad \sup_{s \leq t} |X_{1,s}^T - X_{0,s}^T| \xrightarrow{P} 0 \text{ für } T \rightarrow \infty.$$

Dabei stellt  $(\Sigma_t)_{t \in [0, T]} := (\sigma_t \sigma_t^\top)_{t \in [0, T]}$ ,  $\sigma_t := (\sigma_t^1, \dots, \sigma_t^n)$  den Kovarianzprozess dar.

*Beweis.* Die Aussagen (E3) und (E4) können analog zu [Dybvig/Rogers/Back, 1999], Theorem 1 gezeigt werden. Um die Aussagen (E1) und (E2) zu beweisen, gehen wir erneut in den folgenden drei Schritten vor:

$$(1) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{1,T}}{\lambda_{0,T}} = 1,$$

(2) Wir weisen Behauptung (E1) nach:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \xi_T \left| I_0(\lambda_{0,T} \xi_T) - I_1(\lambda_{1,T} \xi_T) \right| \right] = 0,$$

(3) Wir weisen Behauptung (E2) nach:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \xi_T \left| X_{0,t}^T - X_{1,t}^T \right| \right] = 0.$$

**Zu Schritt 1:**

Wegen der Symmetrie ist es ausreichend zu zeigen, dass

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{0,T}}{\lambda_{1,T}} \geq 1$$

gilt. Dies zeigen wir mit Hilfe eines Widerspruchsbeweises:

Angenommen obige Aussage gilt nicht. Dann existieren eine Zahl  $\delta < 1$  und eine unbeschränkte Menge  $\mathcal{T}$  von Endzeitpunkten, sodass für alle Zeitpunkte  $T \in \mathcal{T}$  gilt:

$$\lambda_{0,T} < \delta \lambda_{1,T}.$$

Zudem lässt sich wegen der Gültigkeit von Lemma 7.5 (i) zeigen, dass Konstanten  $k > 1$  und  $\epsilon > 0$  existieren, sodass für alle  $x \in (0, \epsilon)$  gilt (vgl. dazu Gleichung (5.3)):

$$\frac{I_0(\delta x)}{I_0(x)} \geq k.$$

Zentral ist, dass man dabei im Beweis die Konstante  $\epsilon > 0$  so klein wählt, dass für  $i \in \{0, 1\}$  sowohl  $I_i(\delta x) \geq 0$  als auch  $I_i(x) \geq 0$  gelten. Dies ist wegen der Bedingung

$$\lim_{x \rightarrow 0} I_i(x) = \infty$$

problemlos möglich. Weiter garantiert Lemma 7.5 (ii), dass die Konstante  $\epsilon > 0$  zudem so klein gewählt werden kann, dass für alle  $x \in (0, \epsilon)$

$$\frac{I_0(x)}{I_1(x)} \geq \frac{1}{\sqrt{k}}$$

gilt, also mit Gleichung (5.3) für alle  $x \in (0, \epsilon)$  gilt:

$$\frac{I_0(\delta x)}{I_1(x)} \geq \sqrt{k} > 1. \tag{7.2}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\xi_T (I_0(\lambda_{0,T}\xi_T))_+] &\geq \mathbb{E} [\xi_T (I_0(\lambda_{0,T}\xi_T))_+ \mathbf{1}\{\lambda_{1,T}\xi_T < \epsilon\}] \\ &> \mathbb{E} [\xi_T (I_0(\delta\lambda_{1,T}\xi_T))_+ \mathbf{1}\{\lambda_{1,T}\xi_T < \epsilon\}] \\ &\stackrel{(7.2)}{\geq} \sqrt{k} \mathbb{E} [\xi_T (I_1(\lambda_{1,T}\xi_T))_+ \mathbf{1}\{\lambda_{1,T}\xi_T < \epsilon\}] \\ &= \sqrt{k} \mathbb{E} [\xi_T (I_1(\lambda_{1,T}\xi_T))_+] - \sqrt{k} \mathbb{E} [\xi_T (I_1(\lambda_{1,T}\xi_T))_+ \mathbf{1}\{\lambda_{1,T}\xi_T \geq \epsilon\}] \\ &\geq \sqrt{k} \mathbb{E} [\xi_T (I_1(\lambda_{1,T}\xi_T))_+] - \sqrt{k} (I_1(\epsilon))_+ \mathbb{E}[\xi_T]. \end{aligned}$$

Zusammen mit Annahme 7.3 folgt

$$\begin{aligned}
x_0 &= \mathbb{E} [\xi_T I_0(\lambda_{0,T} \xi_T)] \\
&= \mathbb{E} [\xi_T (I_0(\lambda_{0,T} \xi_T))_+] - \mathbb{E} [\xi_T (I_0(\lambda_{0,T} \xi_T))_-] \\
&> \sqrt{k} \mathbb{E} [\xi_T (I_1(\lambda_{1,T} \xi_T))_+] - \sqrt{k} (I_1(\epsilon))_+ \underbrace{\mathbb{E}[\xi_T]}_{\xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0} - \underbrace{\mathbb{E} [\xi_T (I_0(\lambda_{0,T} \xi_T))_-]}_{\xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0} \\
&\rightarrow \sqrt{k} \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\xi_T (I_1(\lambda_{1,T} \xi_T))_+], \quad T \rightarrow \infty \text{ mit } T \in \mathcal{T}.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Da aber  $x_0 = \mathbb{E} [\xi_T I_1(\lambda_{1,T} \xi_T)]$  gilt, muss  $\mathbb{E} [\xi_T (I_1(\lambda_{1,T} \xi_T))_+] \geq x_0$  gelten. Daher müsste nach (7.3) gelten:

$$x_0 > \sqrt{k} \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\xi_T (I_1(\lambda_{1,T} \xi_T))_+] \geq \sqrt{k} x_0.$$

Wegen  $k > 1$  ergibt sich somit nach Obigem ein Widerspruch und es folgt die Gültigkeit von Schritt 1, also

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{1,T}}{\lambda_{0,T}} = 1.$$

### Zu Schritt 2:

Wir wählen den Zeitpunkt  $T \geq 0$  so groß, dass gilt:

- 1)  $\delta_\gamma \leq \frac{\lambda_{1,T}}{\lambda_{0,T}} \leq \frac{1}{\delta_\gamma}$ ,
- 2)  $\mathbb{E} [\xi_T (I_0(\lambda_{0,T} \xi_T))_+] \leq x_0 + \frac{1}{10} x_0 = \frac{11}{10} x_0$ .

Dies ist wegen Schritt 1 und Annahme 7.3 möglich. Der Faktor  $\frac{1}{10}$  wurde hierbei konkret gewählt, um einen weiteren Parameter der Übersicht wegen zu vermeiden.

Mit den Argumenten wie im Beweis von Theorem 1 [Dybvig/Rogers/Back, 1999] kann auch für diesen Fall gezeigt werden, dass zu jeder Zahl  $\gamma > 0$  Konstanten  $\delta_\gamma > 0$  und  $\epsilon_\gamma > 0$  existieren, sodass für alle  $x \in (0, \epsilon_\gamma)$  gilt:

$$\frac{I_1(\delta_\gamma^{-1} x)}{I_0(x)} \geq (1 - \gamma)^2, \quad \frac{I_1(\delta_\gamma x)}{I_0(x)} \leq (1 + \gamma)^2.$$

Für  $\tilde{x} := \lambda_{0,T} \xi_T < \epsilon_\gamma$  ergibt sich dann

$$\frac{I_1(\lambda_{1,T} \xi_T)}{I_0(\tilde{x})} \geq \frac{I_1(\delta_\gamma^{-1} \tilde{x})}{I_0(\tilde{x})} \geq (1 - \gamma)^2, \quad \frac{I_1(\lambda_{1,T} \xi_T)}{I_0(\tilde{x})} \leq \frac{I_1(\delta_\gamma \tilde{x})}{I_0(\tilde{x})} \leq (1 + \gamma)^2.$$

Somit folgt

$$\left| \frac{I_1(\lambda_{1,T} \xi_T)}{I_0(\lambda_{0,T} \xi_T)} - 1 \right| \leq (1 + \gamma)^2 - 1 = \gamma^2 + 2\gamma. \tag{7.4}$$

Weiter wählen wir eine Zahl  $\tilde{\epsilon}$ , sodass  $\tilde{\epsilon} < \epsilon_\gamma$  und für alle  $x \in (0, \tilde{\epsilon})$  gilt:

$$I_0(x) \geq 0. \quad (7.5)$$

Dies ist aufgrund der Eigenschaften der Funktion  $I_0$  möglich. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} [\xi_T | I_0(\lambda_{0,T}\xi_T) - I_1(\lambda_{1,T}\xi_T) | \mathbf{1}\{\lambda_{0,T}\xi_T < \tilde{\epsilon}\}] \\ & \stackrel{(7.4)}{\leq} (\gamma^2 + 2\gamma) \mathbb{E} [\xi_T | I_0(\lambda_{0,T}\xi_T) | \mathbf{1}\{\lambda_{0,T}\xi_T < \tilde{\epsilon}\}] \\ & \stackrel{(7.5)}{=} (\gamma^2 + 2\gamma) \mathbb{E} [\xi_T (I_0(\lambda_{0,T}\xi_T))_+ | \mathbf{1}\{\lambda_{0,T}\xi_T < \tilde{\epsilon}\}] \\ & \leq (\gamma^2 + 2\gamma) \left( x_0 + \frac{x_0}{10} \right). \end{aligned}$$

Da  $\gamma > 0$  beliebig gewählt werden konnte, ist der zweite Schritt auf der Menge  $\{\lambda_{0,T}\xi_T < \tilde{\epsilon}\}$  gültig. Bleibt zu zeigen, dass dieser ebenfalls auf der Menge  $\{\lambda_{0,T}\xi_T \geq \tilde{\epsilon}\}$  gilt. Um dies zu zeigen, betrachten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\xi_T | I_0(\lambda_{0,T}\xi_T) - I_1(\lambda_{1,T}\xi_T) | \mathbf{1}\{\lambda_{0,T}\xi_T \geq \tilde{\epsilon}\}] & \leq \mathbb{E} [\xi_T (I_0(\lambda_{0,T}\xi_T))_+ | \mathbf{1}\{\lambda_{0,T}\xi_T \geq \tilde{\epsilon}\}] \\ & \quad + \mathbb{E} [\xi_T (I_0(\lambda_{0,T}\xi_T))_- | \mathbf{1}\{\lambda_{0,T}\xi_T \geq \tilde{\epsilon}\}] \\ & \quad + \mathbb{E} [\xi_T (I_1(\lambda_{1,T}\xi_T))_+ | \mathbf{1}\{\lambda_{0,T}\xi_T \geq \tilde{\epsilon}\}] \\ & \quad + \mathbb{E} [\xi_T (I_1(\lambda_{1,T}\xi_T))_- | \mathbf{1}\{\lambda_{0,T}\xi_T \geq \tilde{\epsilon}\}]. \end{aligned}$$

Im Weiteren werden wir zeigen, dass jeder der vier oben aufgeführten Terme gegen Null konvergiert:

Aufgrund der Monotonie der Funktionen  $I_0$  und  $I_1$  folgt zusammen mit der ‚market growth condition‘ (vgl. Satz 5.1):

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\xi_T (I_0(\lambda_{0,T}\xi_T))_+ | \mathbf{1}\{\lambda_{0,T}\xi_T \geq \tilde{\epsilon}\}] & \leq \mathbb{E} [\xi_T (I_0(\tilde{\epsilon}))_+] \\ & = (I_0(\tilde{\epsilon}))_+ \mathbb{E} [\xi_T] \longrightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\xi_T (I_1(\lambda_{1,T}\xi_T))_+ | \mathbf{1}\{\lambda_{0,T}\xi_T \geq \tilde{\epsilon}\}] & \leq \mathbb{E} [\xi_T (I_1(\delta\tilde{\epsilon}))_+] \\ & = (I_1(\delta\tilde{\epsilon}))_+ \mathbb{E} [\xi_T] \longrightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Weiter folgt nach Annahme 7.3:

$$\mathbb{E} [\xi_T (I_0(\lambda_{0,T}\xi_T))_- | \mathbf{1}\{\lambda_{0,T}\xi_T \geq \tilde{\epsilon}\}] \leq \mathbb{E} [\xi_T (I_0(\lambda_{0,T}\xi_T))_-] \longrightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

Für die Abschätzung des verbleibenden vierten Terms benötigen wir einige Vorüberlegungen:

Wir wählen den Zeitpunkt  $T$  so groß, dass für  $\widehat{\delta} \in (0, 1)$  mit zugehörigem  $\widehat{c} > 0$  aus Annahme 7.2 gilt:

$$\widehat{\delta} \leq \frac{\lambda_{1,T}}{\lambda_{0,T}} \leq \frac{1}{\widehat{\delta}}. \quad (7.6)$$

Damit ergibt sich

$$\widehat{\delta} \lambda_{0,T} \xi_T \leq \lambda_{1,T} \xi_T \leq \frac{1}{\widehat{\delta}} \lambda_{0,T} \xi_T \quad (7.7)$$

sowie

$$\widehat{\delta} \lambda_{1,T} \xi_T \leq \lambda_{0,T} \xi_T \leq \frac{1}{\widehat{\delta}} \lambda_{1,T} \xi_T.$$

Auf der Menge  $\{\widehat{\delta} \lambda_{0,T} \xi_T \geq \widehat{c}\}$  ergeben sich zusammen mit  $\widehat{\delta} < 1$  und nach den Ungleichungen in (7.6) die Abschätzungen  $\lambda_{0,T} \xi_T \geq \widehat{c}$  und  $\lambda_{1,T} \xi_T \geq \widehat{c}$ .

Nach Annahme 7.2 und damit nach Bemerkung 7.4 (ii) folgt mit  $y := \lambda_{0,T} \xi_T$ :

$$(I_0(\lambda_{0,T} \xi_T))_- \geq (I_1(\lambda_{1,T} \xi_T))_-.$$

Es ergibt sich als Abschätzung des vierten Terms

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \xi_T (I_1(\lambda_{1,T} \xi_T))_- \mathbf{1}\{\lambda_{0,T} \xi_T \geq \widetilde{\epsilon}\} \right] \\ &= \underbrace{\mathbb{E} \left[ \xi_T (I_1(\lambda_{1,T} \xi_T))_- \mathbf{1}\{\lambda_{0,T} \xi_T \geq \frac{\widehat{c}}{\widehat{\delta}}\} \right]}_{(5)} + \underbrace{\mathbb{E} \left[ \xi_T (I_1(\lambda_{1,T} \xi_T))_- \mathbf{1}\{\widetilde{\epsilon} \leq \lambda_{0,T} \xi_T \leq \frac{\widehat{c}}{\widehat{\delta}}\} \right]}_{(6)}, \end{aligned}$$

wobei dann nach Annahme 7.3 für Term (5)

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \xi_T (I_1(\lambda_{1,T} \xi_T))_- \mathbf{1}\{\lambda_{0,T} \xi_T \geq \frac{\widehat{c}}{\widehat{\delta}}\} \right] &\leq \mathbb{E} \left[ \xi_T (I_0(\lambda_{0,T} \xi_T))_- \mathbf{1}\{\lambda_{0,T} \xi_T \geq \frac{\widehat{c}}{\widehat{\delta}}\} \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[ \xi_T (I_0(\lambda_{0,T} \xi_T))_- \right] \rightarrow 0, T \rightarrow \infty \end{aligned}$$

gilt. Um zu zeigen, dass ebenfalls der Term (6) für beliebig große Endzeitpunkte gegen den Wert Null konvergiert, halten wir fest, dass auf der Menge  $\{\widetilde{\epsilon} \leq \lambda_{0,T} \xi_T \leq \frac{\widehat{c}}{\widehat{\delta}}\}$  die Ungleichungen

$$\lambda_{1,T} \xi_T \leq \frac{1}{\widehat{\delta}} \lambda_{0,T} \xi_T \leq \frac{1}{\widehat{\delta}^2} \widehat{c} \quad \text{und} \quad \lambda_{1,T} \xi_T \geq \widehat{\delta} \lambda_{0,T} \xi_T \geq \widehat{\delta} \widetilde{\epsilon}$$

gültig sind und somit

$$\mathbb{E} \left[ \xi_T (I_1(\lambda_{1,T}\xi_T))_- \mathbf{1}\{\tilde{\epsilon} \leq \lambda_{0,T}\xi_T \leq \frac{\hat{c}}{\delta}\} \right] \leq \sup_{y \in [\frac{\hat{c}}{\delta}, \frac{1}{\delta^2}\hat{c}]} (I_1(y))_- \mathbb{E} [\xi_T] \rightarrow 0, T \rightarrow \infty$$

gilt. Dabei ist der Supremumswert endlich, da  $I_1$  eine stetige Funktion ist und das Supremum über eine kompakte Menge gebildet wird. Insbesondere ist zu erwähnen, dass dieser Supremumswert nicht vom Endzeitpunkt  $T$  abhängt. Damit folgt die Behauptung.  $\square$

## 7.2 Beispiel zu Nutzenfunktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$

In diesem Abschnitt wird ein Beispiel zu Theorem 7.6 für Nutzenfunktionen mit Definitionsbereich  $\mathbb{R}$  vorgestellt. Dazu betrachten wir die beiden Funktionen

$$I_0(x) = -\frac{1}{\gamma} \log\left(\frac{x}{\gamma}\right), \quad I_1(x) = -\frac{1}{\gamma} \log\left(\frac{x}{\gamma}\right) + \arctan(x).$$

Diese sind in der nachfolgenden Grafik abgebildet:

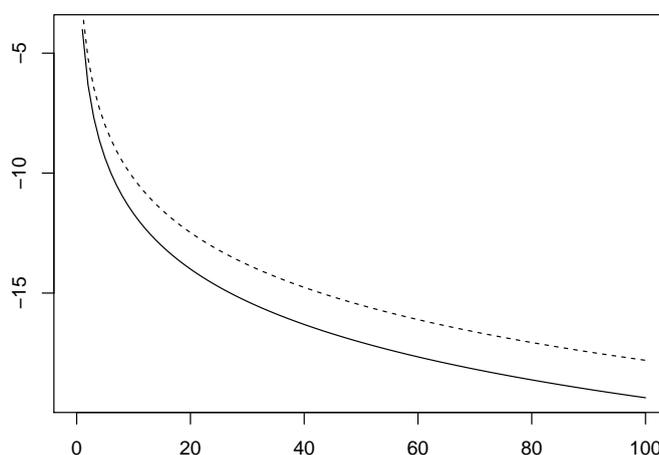


Abbildung 7.1: Die Funktionen  $I_0$  (schwarz) und  $I_1$  (gestrichelt).

Da die Funktionen  $I_0$  und  $I_1$  stetig und monoton fallend sind und insbesondere die geforderten Konvergenzbedingungen

$$\lim_{x \rightarrow 0} I_i(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} I_i(x) = -\infty \quad \text{für } i \in \{0, 1\}$$

erfüllen, existieren zugehörige klassische Nutzenfunktionen  $u_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Weiter müssen wir noch die Gültigkeit von Annahme 7.1 sowie von den Annahmen 7.2 und 7.3 prüfen:

Wir beginnen mit Annahme 7.1. Die Aussage von Anmerkung 5.10 bleibt auch für Nutzenfunktionen mit Definitionsbereich  $\mathbb{R}$  gültig. Somit reicht es, die Eigenschaften (i) und (ii) aus Lemma 7.5 zu prüfen.

Wir beginnen mit Eigenschaft (i) für den Fall  $i = 0$ :

„ $\Rightarrow$ “: Seien  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Nullfolgen mit

$$\frac{x_n}{y_n} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

Dann gilt nach der Regel von L'Hôpital:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_0(x_n)}{I_0(y_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(x_n) - \log(\gamma)}{\log(y_n) - \log(\gamma)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{x_n}{\gamma}\right)}{\log\left(\frac{y_n}{\gamma}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma y_n}{x_n \gamma} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = 1.$$

„ $\Leftarrow$ “: Seien  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Nullfolgen mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_0(x_n)}{I_0(y_n)} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

Dann gilt nach Voraussetzung und nach der Regel von L'Hôpital:

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{x_n}{\gamma}\right)}{\log\left(\frac{y_n}{\gamma}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma y_n}{x_n \gamma} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n}.$$

Somit gilt Eigenschaft (i) für den Fall  $i = 0$ . Im Folgenden werden wir sie für den Fall  $i = 1$  prüfen:

„ $\Rightarrow$ “: Seien  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Nullfolgen mit

$$\frac{x_n}{y_n} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

Dann gilt nach der Regel von L'Hôpital:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_1(x_n)}{I_1(y_n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{\gamma} \log\left(\frac{x_n}{\gamma}\right) + \arctan(x_n)}{-\frac{1}{\gamma} \log\left(\frac{y_n}{\gamma}\right) + \arctan(y_n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x_n} + \frac{1}{1+x_n^2}}{-\frac{1}{y_n} + \frac{1}{1+y_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x_n}}{-\frac{1}{y_n} + \frac{1}{1+y_n^2}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x_n^2}}{-\frac{1}{y_n} + \frac{1}{1+y_n^2}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

„ $\Leftarrow$ “: Seien  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Nullfolgen mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_1(x_n)}{I_1(y_n)} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

Dann gilt nach Voraussetzung und nach der Regel von L'Hôpital:

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_1(x_n)}{I_1(y_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\frac{1}{x_n}}{-\frac{1}{y_n} + \frac{1}{1+y_n^2}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{1+x_n^2}}{-\frac{1}{y_n} + \frac{1}{1+y_n^2}} = \frac{-\frac{1}{x_n}}{-\frac{1}{y_n(1+y_n^2)}}$$

Somit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$$

und daher Eigenschaft (i) auch für den Fall  $i = 1$ .

Die Gültigkeit von Eigenschaft (ii) kann analog zu [Dybvig/Rogers/Back, 1999], Beweis zu Theorem 1 gezeigt werden. Im Weiteren werden wir anhand von Simulationen die Gültigkeit der Annahmen 7.2 und 7.3 veranschaulichen. Um Annahme 7.2 plausibel zu machen, wählen wir  $\hat{\delta} = 0.99$ . In der nachfolgenden Grafik ist die Funktion  $x \mapsto |I_0(\hat{\delta}x)| - |I_1(x)|$  abgebildet:

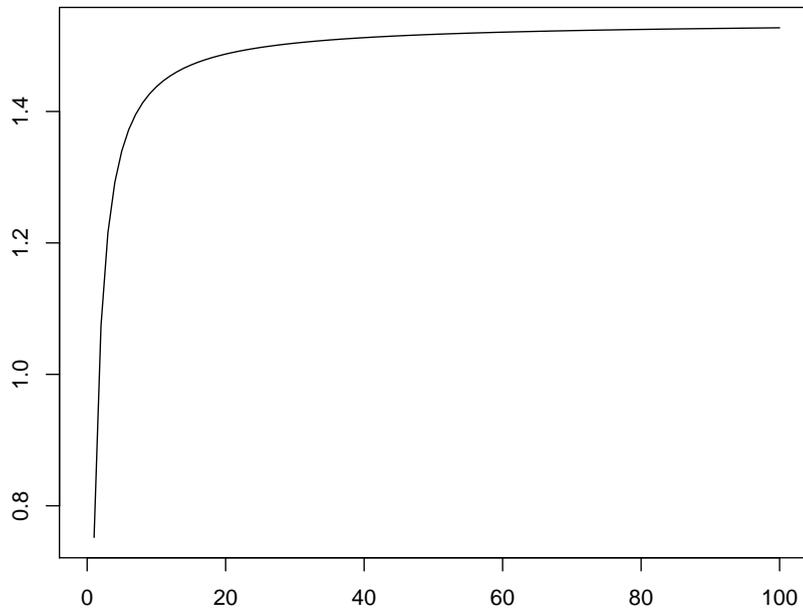


Abbildung 7.2: Die Funktion  $x \mapsto |I_0(\hat{\delta}x)| - |I_1(x)|$ .

Da die abgebildete Funktion nur positive Funktionswerte annimmt, existiert eine Zahl  $\hat{c}$ , sodass für alle  $x \geq \hat{c}$  gilt:

$$\left(I_0(\hat{\delta}x)\right)_- \geq (I_1(x))_-.$$

Somit ist Annahme 7.2 gültig. Zu prüfen bleibt Annahme 7.3. Dazu betrachten wir die folgende Grafik, in der die Funktion  $T \mapsto \mathbb{E}[\xi_T(I_0(\lambda_{0,T}\xi_T))_-]$  abgebildet ist:

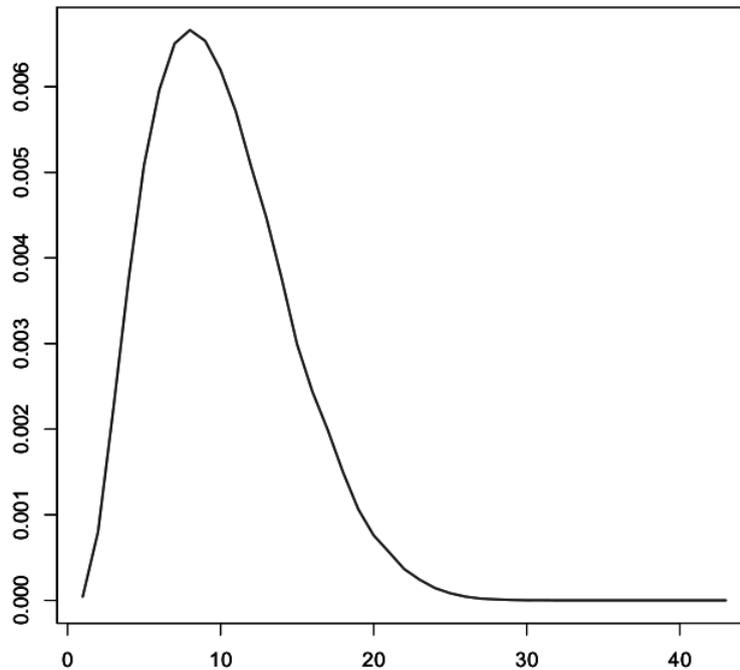


Abbildung 7.3: Die Funktion  $T \mapsto \mathbb{E}[\xi_T(I_0(\lambda_{0,T}\xi_T))_-]$ .

Es ist zu erkennen, dass Annahme 7.3 in diesem Beispiel gilt.

Abschließend sind der Quotient der Lagrange-Parameter sowie die erwartete absolute Differenz der beiden Endvermögen gegen den Endzeitpunkt aufgetragen. Es ist zu erkennen, dass der Quotient der Lagrange-Parameter mit wachsendem Endzeitpunkt  $T$  wie erwartet gegen den Wert 1 konvergiert, sowie dass die erwartete absolute Differenz der beiden Endvermögen gegen den Wert 0 konvergiert. Die Marktparameter sind dabei gemäß  $\mu = 0.08, r = 0.065, \sigma = 0.15$  und  $x_0 = 1$  gewählt.

### 7.3 Beispiel zu SAHARA-Nutzenfunktionen

Wie im letzten Abschnitt gezeigt wurde, ist es unter der Gültigkeit gewisser Zusatzannahmen möglich, die Gültigkeit von Turnpike-Aussagen auch für Nutzenfunktionen mit Definitionsbereich  $\mathbb{R}$  zu zeigen. In diesem Abschnitt soll die Notwendigkeit der geforderten Zusatzannahmen an einem weiteren Beispiel verdeutlicht werden. Insbesondere ist es für

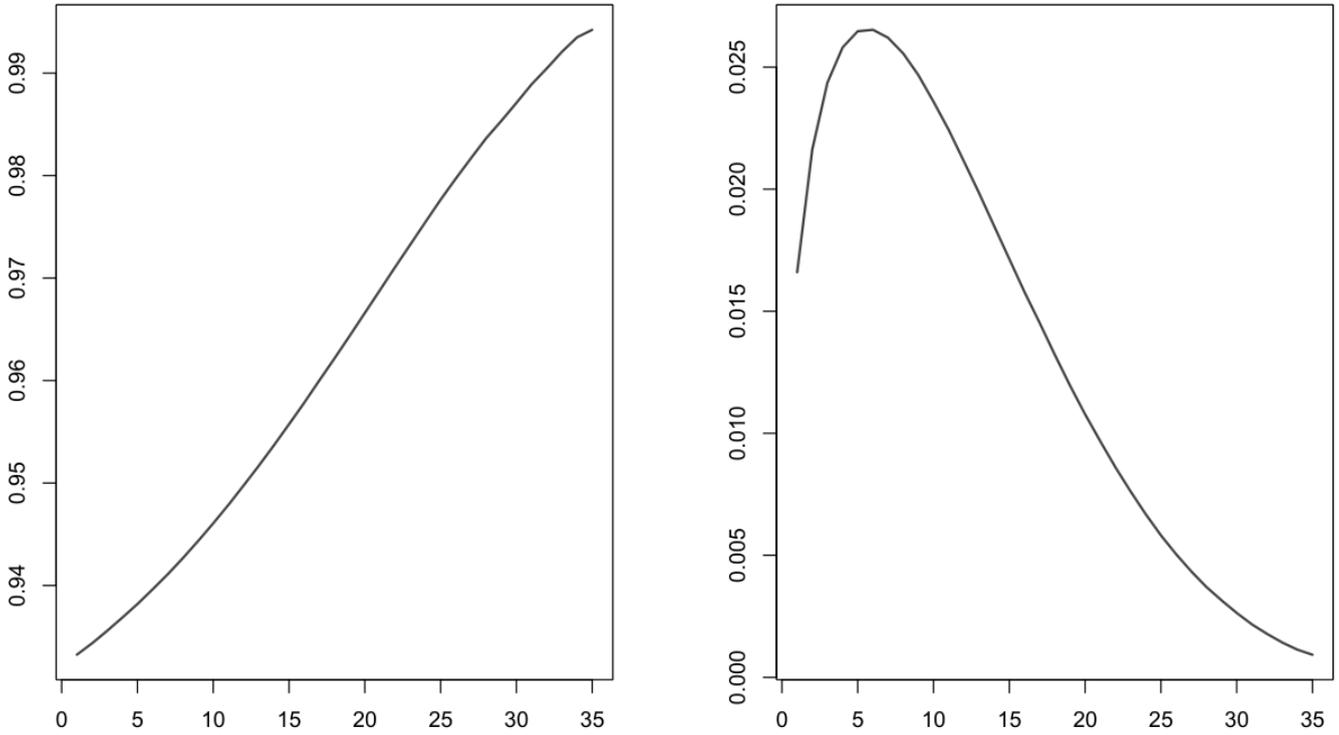


Abbildung 7.4: Die Funktionen  $T \mapsto \frac{\lambda_{0,T}}{\lambda_{1,T}}$  (links) und  $T \mapsto \mathbb{E} [|\xi_T| |X_0^T - X_1^T|]$  (rechts).

die Gültigkeit der Turnpike-Aussage im Fall von Nutzenfunktionen mit Definitionsbereich  $\mathbb{R}$  nicht ausreichend, nur die Bedingungen

$$(H1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{I_1(x)}{I_0(x)} = 1$$

und

(H2) Für alle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  gilt für  $i \in \{0, 1\}$  :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_i(x_n)}{I_i(y_n)} = 1$$

wie im Fall von Nutzenfunktionen mit Definitionsbereich  $\mathbb{R}_+$  zu prüfen (vgl. Satz 5.9). Wesentliche Voraussetzung für die Gültigkeit des Theorems sind die Annahmen 7.2 und 7.3. Sind diese verletzt, verliert die Turnpike-Aussage im Allgemeinen ihre Gültigkeit. Dies werden wir an einem geeigneten Beispiel zeigen. Dazu seien die Funktionen  $I_0$  und  $I_1$

$$I_0(x) := \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} - x \right), \quad I_1(x) := \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} - \sqrt{x} \right),$$

gewählt (siehe nachfolgende Grafik).

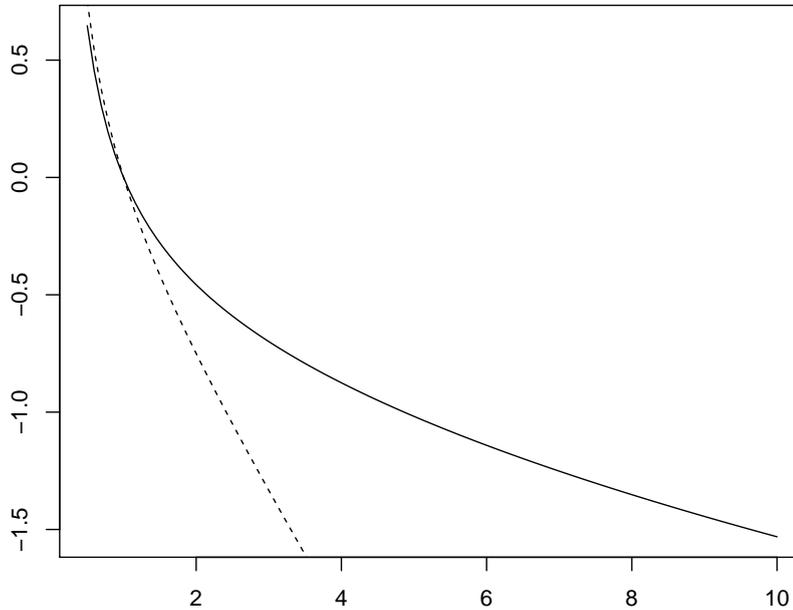


Abbildung 7.5: Die Funktionen  $I_0$  (schwarz) und  $I_1$  (gestrichelt).

Die Funktion  $I_0$  ist hierbei die Umkehrfunktion der Ableitungsfunktion einer sogenannten SAHARA-Nutzenfunktion. Die Klasse der SAHARA-Nutzenfunktionen zeichnet sich insbesondere dadurch aus, dass mit Hilfe der Umkehrfunktionen ihrer Ableitungsfunktionen auch solche Endvermögen beschrieben werden können, welche mit positiver Wahrscheinlichkeit negative Werte annehmen (vgl. [Chen/Pelsser/Vellekoop, 2011]). Daher liegt die Vermutung nahe, dass diese Endvermögen nicht mit Annahme 7.3 kompatibel sind. Genau dies werden wir hier anhand von Simulationen plausibel machen. Um die Relevanz der Annahmen 7.2 und 7.3 zu zeigen, prüfen wir zuvor die Gültigkeit der restlichen in Kapitel 7.2 geforderten Voraussetzungen:

Es ist leicht einzusehen, dass die Funktionen  $I_0$  und  $I_1$  stetig und streng monoton fallend sind sowie für  $i \in \{0, 1\}$

$$I_i : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} I_i(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} I_i(x) = -\infty$$

gelten. Somit existieren stetige, positive und monoton fallende Umkehrfunktionen  $u'_0 := I_0^{-1}$  und  $u'_1 := I_1^{-1}$  mit

$$u'_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u'_i(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} u'_i(x) = \infty.$$

Daher gibt es zugehörige klassische Nutzenfunktionen  $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  und  $u_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  mit den gewünschten Eigenschaften.

Bleiben die Eigenschaften (H1) und (H2) zu zeigen:

Wir beginnen mit Eigenschaft (H1):

Dies folgt mit der Regel von L'Hôpital aus

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{I_0(x)}{I_1(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-1} - x}{x^{-1} - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1x^{-2} - 1}{-1x^{-2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 - x^2}{-1 - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2}} = 1.$$

Die Eigenschaft (H2) zeigen wir im Folgenden nur für den Fall  $i = 0$ . Der Fall  $i = 1$  kann mit analoger Argumentation gezeigt werden:

„ $\Rightarrow$ “: Seien  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Nullfolgen mit  $\frac{x_n}{y_n} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$ . Dann folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_0(x_n)}{I_0(y_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^{-1} - x_n}{y_n^{-1} - y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^{-2}(1 - x_n^2)}{y_n^{-2}(1 - y_n^2)} = 1.$$

„ $\Leftarrow$ “: Seien  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Nullfolgen mit

$$\frac{I_i(x_n)}{I_i(y_n)} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

Dann gilt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^{-1} - x_n}{y_n^{-1} - y_n} = 1.$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^{-1}}{y_n^{-1} - y_n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n^{-1} - y_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^{-1}}{y_n^{-1} - y_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^{-1}}{y_n^{-1}} \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - y_n^2}}_{=0} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Also gilt  $(x_n/y_n)^{-1} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$  und damit  $(x_n/y_n) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$ .

Somit gilt Eigenschaft (H2) für  $i = 0$ . Die Existenz der in der obigen Rechnung auftretenden Grenzwerte ist dabei im Nachhinein gerechtfertigt.

In der nachfolgenden Grafik sind die beiden Funktionen

$$T \mapsto \mathbb{E} [\xi_T(X_{0,T})_-], \quad T \mapsto \mathbb{E} [\xi_T | X_0^T - X_1^T |]$$

abgebildet. Als Marktparameter haben wir  $\mu = 0.08, r = 0.03, \sigma = 0.15$  und  $x_0 = 1$  gewählt.

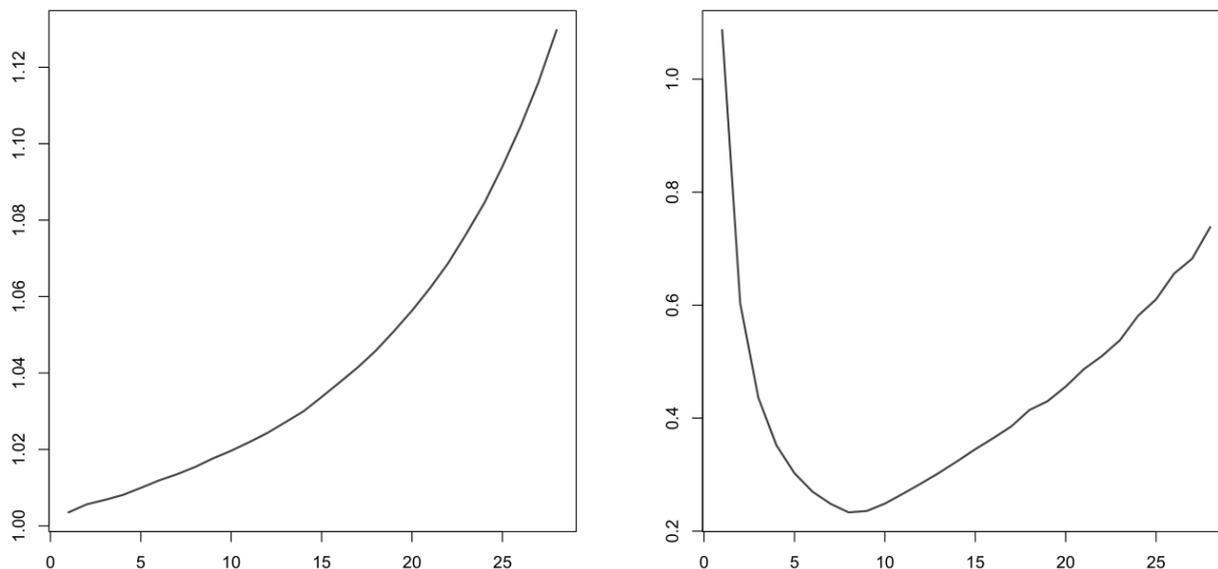


Abbildung 7.6: Die Funktionen  $T \mapsto \mathbb{E} [\xi_T(X_{0,T})_-]$  (links) und  $T \mapsto \mathbb{E} [\xi_T | X_0^T - X_1^T |]$  (rechts).

Wie man erkennen kann, gilt  $\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\xi_T(X_{0,T})_-] \neq 0$ . Somit ist Annahme 7.3 verletzt. Es ist zu erkennen, dass dann auch Aussage (E1) aus Theorem 7.6 nicht gilt, da

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\xi_T | X_0^T - X_1^T |] \neq 0$$

gilt. Dies zeigt, dass die Annahme 7.3 für die Gültigkeit des Theorems notwendig ist.

### Bemerkung 7.7

- (i) Wegen der Symmetrie der Situation ist es gleichwertig, welche der beiden Funktionen  $I_0$  bzw.  $I_1$  Annahme 7.3 erfüllt. Sofern die Funktion  $I_1$  Annahme 7.3 erfüllt, so müssen für die Gültigkeit der Turnpike-Aussagen auch die Rollen der Funktionen  $I_0$  und  $I_1$  in Annahme 7.2 getauscht werden.
- (ii) Falls  $x_0 < 0$  gilt, kann Annahme 7.3 nicht gelten, da sonst

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E} [\xi_T (X_{0,T}^*)_+] = x_0 < 0$$

gelten müsste. Dies ist aber nicht möglich, da für alle  $T \geq 0$

$$\mathbb{E} \left[ \xi_T (X_{0,T}^*)_+ \right] \geq 0$$

gilt. Ein positives Anfangsvermögen ist somit für die Gültigkeit der in diesem Abschnitt bewiesenen Aussagen ebenfalls notwendig.

- (iii) Theorem 7.6 kann im Kontext der Choquet-Optimierungstheorie unter Betrachtung des partiell beobachtbaren Finanzmarktmodells analog formuliert werden.

Im nachfolgenden Kapitel werden Konvergenzgeschwindigkeiten von Turnpike-Aussagen genauer untersucht und quantifiziert werden.

## 8 Aussagen über die Konvergenzgeschwindigkeit bei Turnpike-Aussagen für zeitunabhängige Nutzenfunktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{R}_+$

### 8.1 Aussagen zur Konvergenzgeschwindigkeit in diversen stetigen Kontexten für Nutzenfunktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{R}_+$ im partiell beobachtbaren Finanzmarktmodell für zeitunabhängige Nutzenfunktionen

In [Dybvig/Rogers/Back, 1999] wird kritisiert, dass Turnpike-Aussagen angeblich wenig nützlich in der Praxis seien. Dies würde an den Konvergenzraten liegen, die für brauchbare Approximationen bis zu mehrere hundert Jahre betragen und nicht wirklich quantitativ erfasst werden könnten. Außerdem wird kritisiert, dass eine schnelle Konvergenzrate mit einem hohen Wert der Zinsrate  $r$  einhergehen müsste und dies nicht wirklich realistisch sei. Wir werden in diesem Kapitel zeigen, dass die absolute erwartete Differenz der Endvermögen durchaus bereits nach ungefähr 40 Jahren relativ klein ist und dass eine hohe Zinsrate  $r$  nicht unbedingt zu einer Verbesserung führen muss, da es einen Gegeneffekt gibt. In diesem Kapitel wird gezeigt, wie man den Endzeitpunkt  $T$ , ab dem die erwartete Differenz der Endvermögen unter eine gewisse Schranke fällt, quantitativ ermitteln kann. Weiter wird aufgezeigt werden, unter welchen Umständen bessere Abschätzungen für die Konvergenzraten erzielt werden können. Entsprechende Aussagen ließen sich trotz gründlicher Recherche in der gängigen Literatur nicht finden. Die Kenntnis, wie schnell diese erwartete Differenz unterhalb einer gewissen Schranke liegt, ist für die tatsächliche Praxis allerdings von großer Bedeutung. Am Ende dieses Abschnittes wird zudem ein konkretes Anwendungsbeispiel vorgestellt.

#### Theorem 8.1

Gegeben sei der klassische Black-Scholes-Finanzmarkt mit  $n = 1$ . Betrachtet werden zwei Investoren 0 und 1 mit den zu den jeweiligen Optimierungsproblemen zugehörigen Lagrange-Parametern  $\lambda_{0,T}$  sowie  $\lambda_{1,T}$ . Angenommen, es existieren stetige Funktionen  $g_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g_{1*} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g_1^* : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass gilt:

$$(V1) \quad \lambda_{0,T} = g_0(T),$$

$$(V2) \quad g_{1*}(T) \leq \lambda_{1,T} \leq g_1^*(T),$$

$$(V3) \quad \frac{g_0(T)}{g_{1*}(T)} \searrow 1, \quad T \rightarrow \infty,$$

$$(V4) \quad \frac{g_0(T)}{g_1^*(T)} \nearrow 1, \quad T \rightarrow \infty.$$

Dann findet man zu jeder Schranke  $C$  einen quantitativ erfassbaren Zeitpunkt  $T_C > 0$ , sodass für alle Zeitpunkte  $T \geq T_C$  gilt:

$$(F) \quad \mathbb{E} [\xi_T | X_1^T - X_0^T |] \leq C.$$

### Bemerkung 8.2

Mit Voraussetzung (V1) fordern wir bereits, dass die Gestalt der Funktion  $I_0$  in der Art ‚einfach‘ ist, dass  $\lambda_{0,T} = g_0(T)$  direkt angegeben werden kann. Da wir im Allgemeinen eine Nutzenfunktionen  $u_1$  einer ‚komplizierteren Gestalt‘ durch eine Nutzenfunktion  $u_0$  einer ‚einfacheren Gestalt‘ annähern möchten, ist dies allerdings keine zu starke Forderung.

Ein Beispiel ist die Nutzenfunktion  $u_0(x) = \sqrt{x}$ . In diesem Fall ergibt sich aus

$$x_0 \stackrel{!}{=} \mathbb{E} [\xi_T I_0(\lambda_{0,T} \xi_T)]$$

direkt

$$\lambda_{0,T} = g_0(T) := \sqrt{\frac{1}{4x_0} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\xi_T} \right]} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} e^{rT + \gamma^2 T}.$$

*Beweis von Theorem 8.1.* Wir suchen zu einer Schranke  $C > 0$  den zugehörigen Zeitpunkt  $T_C \geq 0$ , sodass die Behauptung (F) gilt. Dazu wählen wir

$$\gamma_C := \frac{-2x_0 + \sqrt{4x_0^2 + 4x_0 \frac{C}{2}}}{2x_0}.$$

Dadurch besitzt die Zahl  $C$  die Darstellung  $C = 2x_0(\gamma_C^2 + 2\gamma_C) : C_\gamma$ . Aus den bisherigen Rechnungen (vgl. auch Gleichung (5.5)) ist bereits bekannt:

Zu jedem  $\gamma_C > 0$  existieren  $\delta_C \in (0, 1)$  und  $\epsilon_C > 0$ , sodass für alle  $x \in (0, \epsilon_C)$  gilt:

$$\left| \frac{I_0(\delta_C^{-1}x)}{I_0(x)} - 1 \right| \leq \gamma_C, \quad \left| \frac{I_0(\delta_C x)}{I_0(x)} - 1 \right| \leq \gamma_C \quad (8.1)$$

und

$$\left| \frac{I_1(x)}{I_0(x)} - 1 \right| \leq \gamma_C. \quad (8.2)$$

Aufgrund der Voraussetzungen (V3) und (V4) können wir einen Zeitpunkt  $T_1 \geq 0$  wählen, sodass für jedes  $T \geq T_1$

$$\min \left\{ \frac{g_0(T)}{g_1^*(T)}, \frac{g_{1*}(T)}{g_0(T)} \right\} \geq \delta_C$$

gilt. Somit ergibt sich zusammen mit Voraussetzung (V2) für jedes  $T \geq T_1$ :

$$\delta_C \leq \frac{g_{1*}(T)}{g_0(T)} \leq \frac{\lambda_{1,T}}{\lambda_{0,T}} \leq \frac{g_1^*(T)}{g_0(T)} \leq \frac{1}{\delta_C}.$$

Daher gilt

$$\delta_C \leq \frac{\lambda_{1,T}}{\lambda_{0,T}} \leq \frac{1}{\delta_C}.$$

Damit ergibt sich für alle  $T \geq T_1$  analog zum Beweis von Theorem 5.8, Gleichung (5.8):

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \xi_T \left| I_1(\lambda_{1,T}\xi_T) - I_0(\lambda_{0,T}\xi_T) \right| \mathbf{1} \left\{ \lambda_{1,T}\xi_T < \epsilon_C \right\} \right] \\ & \leq (\gamma_C^2 + 2\gamma_C) \mathbb{E} \left[ \xi_T I_1(\lambda_{1,T}\xi_T) \mathbf{1} \left\{ \lambda_{1,T}\xi_T < \epsilon_C \right\} \right] \\ & \leq (\gamma_C^2 + 2\gamma_C) x_0 \end{aligned}$$

und damit

$$\mathbb{E} \left[ \xi_T \left| I_1(\lambda_{1,T}\xi_T) - I_0(\lambda_{0,T}\xi_T) \right| \mathbf{1} \left\{ \lambda_{1,T}\xi_T < \epsilon_C \right\} \right] \leq \frac{C}{2}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \xi_T \left| I_1(\lambda_{1,T}\xi_T) - I_0(\lambda_{0,T}\xi_T) \right| \mathbf{1} \left\{ \lambda_{1,T}\xi_T \geq \epsilon_C \right\} \right] \\ & \leq (I_1(\epsilon_C) - I_0(\delta_C \epsilon_C)) \mathbb{E} [\xi_T] \\ & \leq (I_1(\epsilon_C) - I_0(\delta_C \epsilon_C)) \exp(-rT). \end{aligned} \tag{8.3}$$

Wenn der Zeitpunkt  $T$  nun so gewählt wird, dass

$$T \geq T_2 := \frac{1}{r} \log \left( \frac{1}{C} (I_1(\epsilon_C) + I_0(\delta_C \epsilon_C)) \right)$$

gilt, so kann man die Gültigkeit der Ungleichungen

$$\mathbb{E} \left[ \xi_T \left| I_1(\lambda_{1,T}\xi_T) - I_0(\lambda_{0,T}\xi_T) \right| \mathbf{1} \left\{ \lambda_{1,T}\xi_T \geq \epsilon_C \right\} \right] \leq \frac{C}{2}$$

garantieren. Der gesuchte Zeitpunkt  $T_C$  ist gegeben durch

$$T_C := \max\{T_1, T_2\}$$

und kann ohne die Kenntnis der expliziten Gestalt des Lagrange-Parameters  $\lambda_{1,T}$  quantitativ ermittelt werden, sofern man geeignete Funktionen  $g_1^*$  und  $g_{1*}$  bestimmen kann (vgl. dazu auch Beispiel 8.1.1). Somit folgt die Behauptung. □

**Bemerkung 8.3**

- (i) Es mag verwundern, dass der Zeitpunkt  $T_2$  von der Zinsrate  $r$  abhängt. Auf den ersten Blick ist nur erkennbar, dass  $T_2$  mit wachsender Zinsrate  $r$  abnimmt. Allerdings muss der folgende Gegeneffekt betrachtet werden: Je größer die Zinsrate  $r$  gewählt wird, umso kleiner ist die erwartete absolute Differenz der Endvermögen generell. Daher muss die Schranke  $C$  ebenfalls kleiner gewählt werden, um eine sinnvolle Aussage zu erhalten. Je kleiner allerdings  $C$  gewählt wird, umso größer ist auch wieder  $T_2$ .
- (ii) Die Voraussetzungen (V3) und (V4) in Theorem 8.1 können durch die folgenden schwächeren Voraussetzungen  $(\widetilde{V3})$  und  $(\widetilde{V4})$  ersetzt werden:

$(\widetilde{V3})$  Es gelte

$$\frac{g_0(T)}{g_1^*(T)} \rightarrow 1, \quad T \rightarrow \infty, \quad \frac{g_0(T)}{g_1^*(T)} \rightarrow 1, \quad T \rightarrow \infty.$$

$(\widetilde{V4})$  Zu jedem  $\delta \in (0, 1)$  existiert ein Zeitpunkt  $T_\delta^* \geq 0$ , sodass für alle  $T \geq T_\delta^*$  gilt:

$$\min \left\{ \frac{g_0(T)}{g_{1*}(T)}, \frac{g_{1*}(T)}{g_0(T)} \right\} \geq \delta.$$

- (iii) Die Aussage von Theorem 8.1 lässt sich im Fall der Choquet-Optimierungstheorie ähnlich zeigen. Allerdings sind die Beweise etwas technischer, da in den Darstellungen der optimalen Endvermögen die Ableitungen der Wahrscheinlichkeitstransformationen auftreten. Diese müssen dann erst durch ihre oberen und unteren Schranken abgeschätzt werden, um die Funktionen  $g_0$ ,  $g_1^*$  und  $g_{1*}$  sinnvoll wählen zu können.

Betrachtet man die Genauigkeit der im Beweis durchgeführten Abschätzungen, so kann man festhalten, dass die erste Abschätzung in (8.3) relativ grob ist. Daher erhält man relativ große Zeitpunkte  $T_C$ . Eine Verbesserung dieser Schranke kann durch eine präzisere Abschätzung erreicht werden. Diese kann vor allem dann gefunden werden, wenn die konkreten Funktionen bekannt sind.

Der nachfolgende Satz liefert eine weitere Möglichkeit, die Abschätzung in (8.3) vorzunehmen. Wie wir in Beispiel 8.1.1 sehen werden, führt diese Abschätzung im betrachteten Beispiel zu einer höheren Genauigkeit:

**Satz 8.4**

Seien  $T_1$ ,  $C$ ,  $\epsilon_C$  und  $\delta_C$  wie im Beweis von Theorem 8.1 sowie

$$T_2 := \frac{1}{r} \log \left( \frac{C_{\delta_C}^*}{C} \right) \quad (8.4)$$

mit

$$C_{\delta_C}^* := \max \left\{ \sup_{y \geq \epsilon_C} \{I_0(\delta_C y) - I_1(y)\}, \sup_{y \geq \epsilon_C} \{I_1(y) - I_0(\delta_C^{-1} y)\} \right\}.$$

Dann folgt für

$$T \geq \max\{T_1, T_2\} \quad (8.5)$$

unter den Zusatzbedingungen

$$(Z1) \sup_{y \geq \epsilon_C} \{I_0(\delta_C y) - I_1(y)\} < \infty,$$

$$(Z2) \sup_{y \geq \epsilon_C} \{I_1(y) - I_0(\frac{1}{\delta_C} y)\} < \infty,$$

die Abschätzung

$$\mathbb{E} [\xi_T | I_1(\lambda_{1,T}\xi_T) - I_0(\lambda_{0,T}\xi_T)] \leq C.$$

*Beweis.* Für  $T \geq T_1$  (für die Definition von  $T_1$  vgl. Beweis von Theorem 8.1) gilt auf der Menge  $\{\lambda_{1,T}\xi_T \geq \epsilon_C\}$  die Ungleichungskette  $\delta_C \lambda_{1,T}\xi_T \leq \lambda_{0,T}\xi_T \leq \delta_C^{-1} \lambda_{1,T}\xi_T$  und daher aufgrund der Monotonie der Funktion  $I_0$ :

$$I_0(\delta_C \lambda_{1,T}\xi_T) \geq I_0(\lambda_{0,T}\xi_T) \geq I_0\left(\frac{1}{\delta_C} \lambda_{1,T}\xi_T\right).$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} \left| I_0(\lambda_{0,T}\xi_T) - I_1(\lambda_{1,T}\xi_T) \right| &\leq \begin{cases} I_0(\delta_C \lambda_{1,T}\xi_T) - I_1(\lambda_{1,T}\xi_T), & \text{falls } I_0(\lambda_{0,T}\xi_T) \geq I_1(\lambda_{1,T}\xi_T) \\ I_1(\lambda_{1,T}\xi_T) - I_0\left(\frac{1}{\delta_C} \lambda_{1,T}\xi_T\right), & \text{falls } I_0(\lambda_{0,T}\xi_T) \leq I_1(\lambda_{1,T}\xi_T) \end{cases} \\ &\leq \max \left\{ \sup_{y \geq \epsilon_C} \{I_0(\delta_C y) - I_1(y)\}, \sup_{y \geq \epsilon_C} \{I_1(y) - I_0(\frac{1}{\delta_C} y)\} \right\} \\ &=: C_{\delta_C}^*. \end{aligned}$$

Nach den Voraussetzungen des Satzes gilt für  $T \geq T_2$  die Ungleichung  $C_{\delta_C}^* < \infty$ . Somit ergibt sich (vgl. auch Beweis zu Theorem 8.1)

$$\mathbb{E} \left[ \xi_T | I_1(\lambda_{1,T}\xi_T) - I_0(\lambda_{0,T}\xi_T) | \mathbf{1}_{\{\lambda_{1,T}\xi_T \geq \epsilon_C\}} \right] \leq C_{\delta_C}^* e^{-rT} \stackrel{(8.5)}{\leq} C \quad (8.6)$$

und damit die Behauptung. □

### Bemerkung 8.5

- (i) Im nachfolgenden Beispiel werden wir sehen, dass diese Abschätzung zu genaueren Zeitpunkten  $T_C$  führt.
- (ii) Die Werte für  $T_C$  liegen also umso näher an den ‚echten‘ Werten, je genauer die Abschätzung (8.3) gelingt. Dies hängt auch von der genauen Gestalt der Funktionen  $I_0$  und  $I_1$  ab und kann in jedem Einzelfall anders aussehen. Allgemein gilt: Je ähnlicher die Funktionen  $g_{1,*}$  und  $g_1^*$  gewählt werden können, umso kleiner ist der Fehler, der bei der Bestimmung von  $T_C$  auftritt.

Im folgenden Abschnitt werden wir die obige Theorie an einem Beispiel veranschaulichen. Insbesondere werden wir  $T_C$  sowohl mit der Abschätzung aus (8.3) als auch mit der aus (8.6) bestimmen. Wir werden sehen, dass es dabei deutliche Unterschiede gibt.

#### 8.1.1 Beispiel zur Konvergenzgeschwindigkeit

Wir erweitern in diesem Abschnitt Beispiel 5.4.1. Dort wurden die Funktionen

$$I_0(x) = \frac{1}{4x^2} \quad \text{und} \quad I_1(x) = \frac{1}{4x^2 + x^4}$$

betrachtet. Es ist leicht nachzuprüfen, dass in diesem Fall die Voraussetzungen des Satzes 8.4 erfüllt sind. Aus der Bedingung

$$x_0 \stackrel{!}{=} \mathbb{E} [\xi_T I_0(\lambda_{0,T} \xi_T)]$$

und der logarithmischen Normalverteilung der Zufallsvariablen  $\xi_T$  ergibt sich

$$\lambda_{0,T} = g_0(T) := \sqrt{\frac{1}{4x_0} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\xi_T} \right]} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} e^{rT + \gamma^2 T}.$$

Weiter können wir  $g_1^*(T) := g_0(T)$  und

$$g_{1,*}(T) := \sqrt{\frac{\mathbb{E} \left[ \frac{1}{\xi_T} \right]}{4x_0 + \frac{1}{4} \mathbb{E} [\xi_T]}} = \left( \frac{\exp(rT + \gamma^2 T)}{4x_0 + \frac{1}{4} \exp(-rT)} \right)^2$$

wählen. Im Folgenden werden wir begründen, weshalb diese Funktionen die in Theorem 8.1 geforderten Bedingungen (V1)–(V4) erfüllen. Zunächst liefert eine Partialbruchzerlegung

$$I_1(x) = \frac{1}{4x^2 + x^4} = \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{4(4 + x^2)}.$$

Wir betrachten die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\text{(I)} \quad x_0 &= \frac{1}{4\lambda_{1,T}^2} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\xi_T} \right] - \frac{1}{4} \mathbb{E} \left[ \xi_T \frac{1}{4 + \lambda_{1,T}^2 \xi_T^2} \right], \\
\text{(II)} \quad x_0 &= \frac{1}{4\tilde{\lambda}_{1,T}^2} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\xi_T} \right], \\
\text{(III)} \quad x_0 &= \frac{1}{4\hat{\lambda}_{1,T}^2} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\xi_T} \right] - \frac{1}{4} \mathbb{E} \left[ \frac{\xi_T}{4} \right],
\end{aligned}$$

deren entsprechende Lösungen mit  $\lambda_{1,T}$ ,  $\tilde{\lambda}_{1,T}$  und  $\hat{\lambda}_{1,T}$  bezeichnet seien. Wir zeigen die Gültigkeit der Ungleichungskette  $\tilde{\lambda}_{1,T} \geq \lambda_{1,T} \geq \hat{\lambda}_{1,T}$ .

**(I)=(II):** Wir setzen dafür zuerst die Gleichungen (I) und (II) gleich:

$$\frac{1}{4\tilde{\lambda}_{1,T}^2} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\xi_T} \right] = \frac{1}{4\lambda_{1,T}^2} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\xi_T} \right] - \underbrace{\frac{1}{4} \mathbb{E} \left[ \xi_T \frac{1}{4 + \lambda_{1,T}^2 \xi_T^2} \right]}_{\geq 0} \leq \frac{1}{4\lambda_{1,T}^2} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\xi_T} \right].$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\frac{1}{\tilde{\lambda}_{1,T}^2} \leq \frac{1}{\lambda_{1,T}^2}$$

gilt. Somit folgt  $\tilde{\lambda}_{1,T} \geq \lambda_{1,T}$ .

**(I)=(III):** Wir setzen nun die Gleichungen (I) und (III) gleich:

$$\frac{1}{4\lambda_{1,T}^2} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\xi_T} \right] - \frac{1}{4} \mathbb{E} \left[ \xi_T \frac{1}{4 + \lambda_{1,T}^2 \xi_T^2} \right] = \frac{1}{4\hat{\lambda}_{1,T}^2} \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\xi_T} \right] - \frac{1}{4} \mathbb{E} \left[ \frac{\xi_T}{4} \right].$$

Damit ergibt sich

$$\mathbb{E} \left[ \frac{1}{\xi_T} \right] \left( \frac{1}{\lambda_{1,T}^2} - \frac{1}{\hat{\lambda}_{1,T}^2} \right) = \mathbb{E} \left[ \xi_T \frac{1}{\underbrace{4 + \lambda_{1,T}^2 \xi_T^2}_{\leq 1/4}} \right] - \mathbb{E} \left[ \frac{1}{4} \xi_T \right] \leq 0$$

und folglich  $\lambda_{1,T} \geq \widehat{\lambda}_{1,T}$ . Damit ergibt sich  $\widetilde{\lambda}_{1,T} \geq \lambda_{1,T} \geq \widehat{\lambda}_{1,T}$  und daher gelten  $g_{1*}(T) \leq \lambda_{1,T} \leq g^*(T)$  sowie  $g_1^*(T) = g_0(T) = \lambda_{0,T}$ . Somit gilt auch

$$1 = \frac{g_0(T)}{g_1^*(T)} \leq \frac{\lambda_{0,T}}{\lambda_{1,T}} \leq \frac{g_0(T)}{g_{1*}(T)}.$$

Insbesondere folgt

$$(i) \quad T \mapsto \frac{g_0(T)}{g_1^*(T)} \equiv 1 \nearrow 1, \quad T \rightarrow \infty, \text{ monoton wachsend,}$$

$$(ii) \quad T \mapsto \frac{g_0(T)}{g_{1*}(T)} = \sqrt{\frac{4x_0 + \frac{1}{4} \exp(-rT)}{4x_0}} \searrow 1, \quad T \rightarrow \infty, \text{ monoton fallend.}$$

Somit sind in diesem Beispiel Funktionen  $g_0$ ,  $g_{1*}$  und  $g_1^*$  gefunden. Diese sind in der Grafik 8.1 abgebildet:

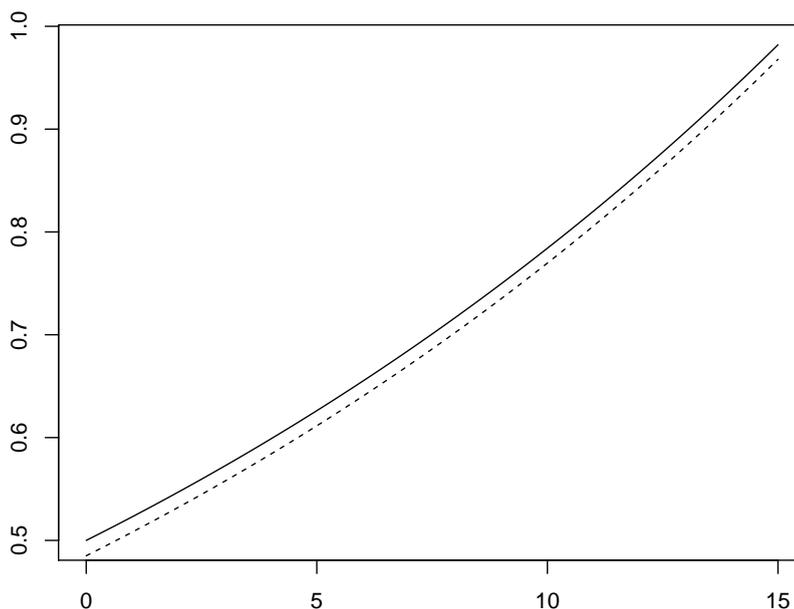


Abbildung 8.1: Die Funktionen  $g_0$  ( $= g_1^*$ ) (schwarz) und  $g_{1*}$  (gestrichelt).

Für ein konkretes Zahlenbeispiel wählen wir das Anfangsvermögen  $x_0 = 1$ . Gesucht sei der Zeitpunkt  $T_C \geq 0$ , sodass für alle Zeitpunkte  $T \geq T_C$  gilt:

$$\mathbb{E} [\xi_T | X_1^T - X_0^T |] \leq C = 0.025.$$

Nach (8.1) und (8.2) müssen also Zahlen  $\delta_C \in (0, 1)$  und  $\epsilon_C > 0$  gefunden werden, sodass für alle  $x \in (0, \epsilon_C)$  gilt:

$$\left| \frac{I_0(\delta_C^{-1}x)}{I_0(x)} - 1 \right| = \left| \frac{1}{\delta_C^2} - 1 \right| \leq \gamma_C, \quad \left| \frac{I_0(\delta_C x)}{I_0(x)} - 1 \right| = |\delta_C^2 - 1| \leq \gamma_C.$$

Da

$$(\gamma_C^2 + 2\gamma_C)x_0 \stackrel{!}{=} \frac{C}{2}$$

gelten soll und  $\gamma_C$  strikt positiv ist, lassen sich geeignete  $\gamma_C$ ,  $\delta_C$  und  $\epsilon_C$  wählen. Dabei sei:

$$\begin{aligned} \gamma_C &:= \frac{-2x_0 + \sqrt{4x_0^2 + 4x_0 \frac{C}{2}}}{2x_0}, \\ \delta_C &:= \max\{\sqrt{(1 + \gamma_C)^{-1}}, \sqrt{1 - \gamma_C}\}, \\ \epsilon_C &:= \sqrt{\frac{4\gamma_C}{1 - \gamma_C}}. \end{aligned}$$

Die entsprechenden Größen und die Zeitpunkte  $T_1$ ,  $T_2$  und  $T_C$  wurden mit Hilfe des Programmes R für einen Markt mit den Parametern  $\mu = 0.08$ ,  $r = 0.05$ ,  $\sigma = 0.15$  festgelegt.

Um  $T_C$  zu ermitteln, werden die folgenden drei Schritte durchgeführt:

- (i) Den Zeitpunkt  $T_1$  erhält man mittels der Funktionen  $g_0$ ,  $g_{1*}$  und  $g_1^*$ .
- (ii)  $T_2$  ergibt sich mithilfe der Abschätzung (8.6).
- (iii) Der Zeitpunkt  $T_C$  wird zu  $T_C := \max\{T_1, T_2\}$  gesetzt.

### Bestimmen von $T_1$ :

Der Zeitpunkt  $T_1 \geq 0$  muss so gewählt werden, dass

$$\min \left\{ \frac{g_0(T)}{g_1^*(T)}, \frac{g_{1*}(T)}{g_0(T)} \right\} \geq \frac{g_{1*}(T)}{g_0(T)} \geq \delta_C$$

gilt. Wegen der Monotonie der Funktion  $T \mapsto \frac{g_{1*}(T)}{g_0(T)}$  gilt dies dann für alle  $T \geq T_1$ . Mit Hilfe des Programms R ergibt sich der gerundete Wert:  $T_1 \approx 47$ .

### Bestimmen von $T_2$ :

Die in Abschätzung (8.6) angegebene Schranke  $C_\delta^*$  kann ebenfalls mit Hilfe eines geeigneten R-Algorithmus ermittelt werden. Es ergibt sich  $C_\delta^* \approx 0.123$ . Damit lässt sich der Zeitpunkt  $T_2$  zu  $T_2 := \frac{1}{r} \left( \frac{C_\delta^*}{C} \right) \approx 33$  bestimmen.

### Bestimmen von $T_C$ :

Insgesamt ergibt sich  $T_C := \max\{T_1, T_2\} = 47$ . Somit gilt für alle  $T \geq 47$ :

$$\mathbb{E} [\xi_T | X_1^T - X_0^T |] \leq C = 0.025.$$

In der Grafik 8.2 ist die Funktion  $T \mapsto \mathbb{E} [\xi_T | X_1^T - X_0^T |]$  abgebildet.

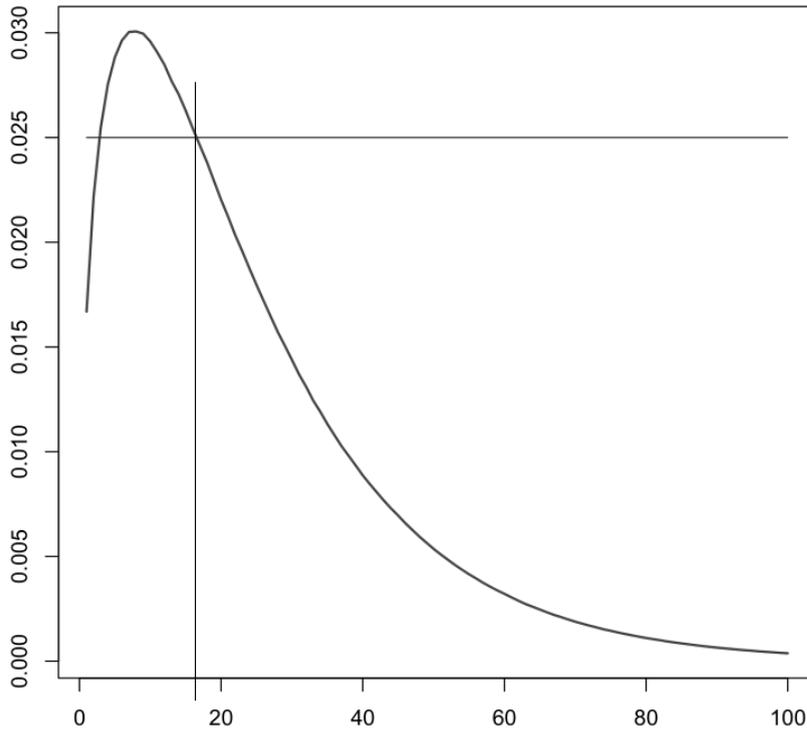


Abbildung 8.2: Die Funktion  $T \mapsto \mathbb{E} [\xi_T | X_0^T - X_1^T |]$  sowie die Schranke  $C = 0.025$ .

Dabei ist ebenfalls die Schranke  $C = 0.025$  eingezeichnet. Es kann an der Grafik abgelesen werden, dass  $T_{C,\text{simuliert}} \approx 17$  gilt. Somit wird in unserer Abschätzung nach wie vor ein Fehler gemacht, der sich aus der Ungenauigkeit der Abschätzung (8.6) ergibt. Auch die Wahl der Funktionen  $g_0, g_{1*}$  und  $g_1^*$  beeinflusst die Genauigkeit der Abschätzung.

Weiter wurde mittels des R-Algorithmus der Zeitpunkt  $T_C$  für die verringerte Schranke  $C = 0.0025$  berechnet. Dabei ergab sich  $T_{C,\text{berechnet}} = 133$ . An Grafik 8.3 kann abgelesen werden, dass in diesem Fall  $T_{C,\text{simuliert}} \approx 64$  gilt.

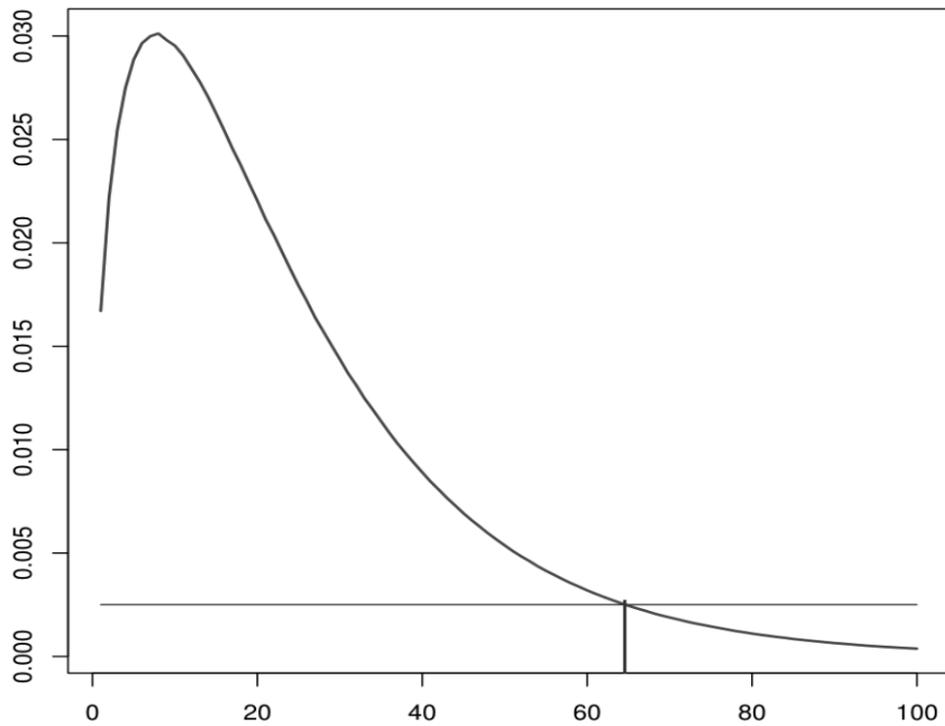


Abbildung 8.3: Die Funktion  $T \mapsto \mathbb{E} [\xi_T | X_0^T - X_1^T |]$  sowie die Schranke  $C = 0.0025$ .

Wenn man anstelle der Schranke in (8.6) diejenige aus (8.3) nutzt, würde sich nach dem R-Algorithmus für  $C = 0.025$  ein berechneter Wert  $T_{C,\text{berechnet}} = 135$  ergeben. Diese Wahl der Schranke würde also zu deutlich ungenaueren Werten von  $T_{C,\text{berechnet}}$  führen. Um dies zu verdeutlichen sind in der nachfolgenden Grafik die Funktionen  $C \mapsto T_C$  für die Abschätzungen (8.6) und (8.3) abgebildet (bei gleichbleibenden Funktionen  $g_0, g_{1,*}$  und  $g_1^*$ ):

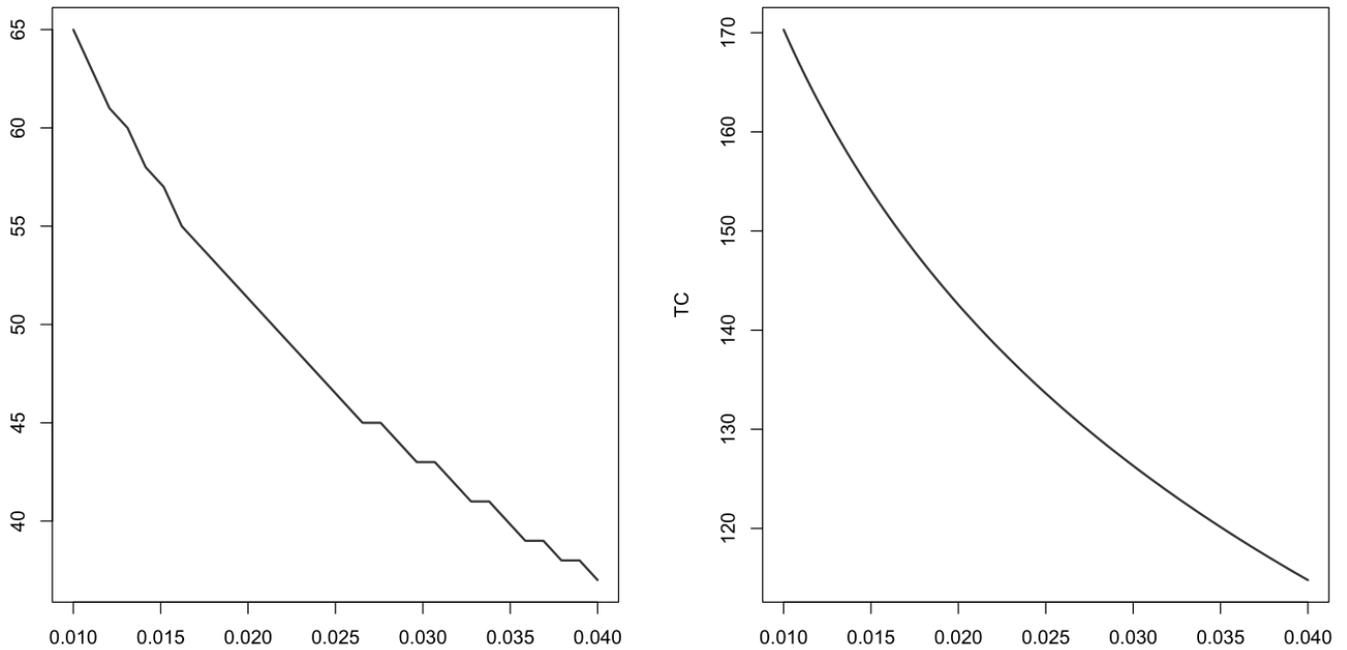


Abbildung 8.4: Die Funktion  $C \mapsto T_C$  für die Abschätzungen (8.6) (links) und (8.3) (rechts).

Abschließend lässt sich festhalten, dass es durchaus möglich ist, Endzeitpunkte quantitativ anzugeben, sodass die erwartete absolute Differenz der Endvermögen gewisse Schranken nicht übersteigt. Weiter ist es unter Umständen auch nicht nötig, einen Zeithorizont von mehreren hundert Jahren vorzugeben. Wie in diesem Beispiel verdeutlicht wurde, können kürzere Zeithorizonte bereits ausreichend sein, um eine gute Approximation zu erzielen. Nach wie vor liegen die berechneten Zeithorizonte aber eher hoch. In jedem Einzelfall kann jedoch versucht werden, möglichst geeignete Funktionen  $g_0, g_{1,*}$  und  $g_1^*$  und eine möglichst geeignete Abschätzung in (8.3) zu finden. Durch das Berücksichtigen der für die Situation spezifischen Strukturen können in konkreten Beispielen kleinere Zeithorizonte gefunden werden.

## 9 Konvergenzaussagen über das optimale Portfolio im Bayes-Marktmodell

Im Folgenden wird ein stetiges Finanzmarktmodell vorgestellt, das im weiteren Verlauf der Arbeit als Bayes-Marktmodell bezeichnet wird und einen Spezialfall eines partiell beobachtbaren Finanzmarktmodells darstellt. Im Verlauf dieses Abschnitts wird insbesondere das Optimierungsproblem vorgestellt, welches im Bayes-Marktmodell betrachtet wird, sowie das zu diesem Optimierungsproblem zugehörige optimale Portfolio erläutert. Es wird weiter die Frage untersucht, inwiefern sich dieses optimale Portfolio ändert, sofern der Endzeithorizont beliebig groß wird.

### 9.1 Das Bayes-Marktmodell

Wir betrachten den gefilterten Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  mit der Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ . Der Parameter  $T$  bezeichne den Endzeitpunkt. Im Weiteren sei durch  $(W_t)_{t \geq 0}$  eine Brownsche Bewegung beschrieben. Auf dem Markt können eine Aktie sowie ein Bond zeitstetig gehandelt werden. Die Dynamik des Bondprozesses  $(B_t)_{t \geq 0}$  ist dabei durch

$$dB_t = rB_t dt \quad (9.1)$$

mit strikt positiver Zinsrate  $r$  gegeben. Die Dynamik des Aktienpreisprozesses  $(S_t)_{t \geq 0}$  ist gegeben durch

$$dS_t = S_t (\mu_t dt + \sigma dW_t)$$

für  $\sigma > 0$ . Die Besonderheit des Bayes-Marktmodells liegt in der Gestalt des Drift-Prozesses  $(\mu_t)_{t \geq 0}$ . Es wird angenommen, dass  $\mu_t \equiv \theta$  gilt, wobei  $\theta$  eine nicht beobachtbare Zufallsvariable darstellt. Es gelte dabei  $\theta \in \{\mu_1, \dots, \mu_d\}$  für  $\mu_i \in \mathbb{R}$  und  $i \in \{1, \dots, d\}$ .

Weiter nehmen wir an, dass die Investoren im Bayes-Marktmodell die Anfangsverteilung dieser Zufallsvariablen kennen und dass  $\theta$  und der Prozess  $(W_t)_{t \geq 0}$  voneinander unabhängig sind. Wenn  $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_d$  die möglichen Werte beschreiben, welche von  $\theta$  angenommen werden können, so setzen wir für  $k \in \{1, \dots, d\}$

$$\mathbb{P}(\theta = \mu_k) =: p_k.$$

Dieses Marktmodell stellt somit einen Spezialfall eines partiell beobachtbaren Marktmodells dar. Der Investor kann lediglich die Aktienpreisentwicklung beobachten. Er kennt zwar die Anfangsverteilung der Zufallsvariablen  $\theta$ , jedoch nicht deren tatsächliche Realisierung. Dem Investor sind somit nach wie vor nur diejenigen Informationen zugänglich, welche die durch den Aktienpreisprozess  $(S_t)_{t \geq 0}$  erzeugte Filtration  $(\mathcal{F}_t^S)_{t \geq 0}$  beinhaltet (vgl. dazu

Abschnitt 2.1.1).

Weiter erinnern wir an die Notation, dass  $\pi_t \in \mathbb{R}$  den Anteil der Gesamtvermögens beschreibt, der zur Zeit  $t$  in die Aktie investiert wurde. Da es neben der Aktie nur den Bond als weitere Investitionsmöglichkeit gibt, bezeichnet  $1 - \pi_t$  hier den Anteil des Vermögens, welcher in den Bond investiert wird. Der Fall  $\pi_t < 0$  kann dabei als Leerverkauf interpretiert werden, der Fall  $\pi_t > 1$  entspricht einer Kreditaufnahme. Den Prozess  $(\pi_t)_{t \geq 0}$  bezeichnen wir weiterhin als Portfolio-Strategie.

### Anmerkung 9.1

- (i) Das in diesem Abschnitt vorgestellte Marktmodell kann als Spezialfall eines sogenannten ‚Hidden Markov Model‘ aufgefasst werden. In einem solchen Modell wird der Driftprozess mit Hilfe einer zeitstetigen Markov-Kette  $(Y_t)_{t \geq 0}$  mit Generator  $Q$  durch  $(\mu)_{t \geq 0} = (\mu^\top Y_t)_{t \geq 0}$  erzeugt, wobei  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbb{R}^d$  gilt. Diese Möglichkeit, einen partiell beobachtbaren Finanzmarkt zu erzeugen wurde bereits vorgestellt (vgl. dazu auch Gleichung (2.4)). Der hier betrachtete Fall des Bayes-Marktmodells entspricht dann dem Fall, dass für den Generator  $Q \equiv 0$  gewählt wird. Eine detaillierte Darstellung dieses Sachverhalts würde an dieser Stelle zu weit führen, kann jedoch in [Rieder/Bäuerle, 2005] nachgelesen werden.
- (ii) Wählt man  $\mu_1 = \dots = \mu_d$ , so ergibt sich ein vollständig beobachtbares Finanzmarktmodell (vgl. dazu auch Abschnitt 3.1).

## 9.2 Das Optimierungsproblem im Bayes-Marktmodell

Der zu einem Portfolio  $(\pi_t)_{t \geq 0}$  zugehörige Vermögensprozess  $(X_t^\pi)_{t \geq 0}$  kann bei Startvermögen  $x_0 > 0$  als Lösung der nachfolgenden stochastischen Differentialgleichung erhalten werden (vgl. [Rieder/Bäuerle, 2005]):

$$\begin{aligned} dX_t^\pi &= X_t^\pi ((r + (\mu_t - r)\pi_t) dt + \sigma \pi_t dW_t), \\ X_0^\pi &= x_0. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Das in diesem Kontext betrachtete Optimierungsproblem mit Endzeithorizont  $T$  ist gegeben durch (vgl. [Rieder/Bäuerle, 2005])

$$(P_{\text{Bayes}}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sup_{\pi} \mathbb{E}[u(X_T^\pi)], \\ X_0^\pi = x_0, \\ (\pi_t)_{t \in [0, T]} \in \Pi[0, T] \end{array} \right.$$

mit

$$\Pi[0, T] := \left\{ (\pi_t)_{t \in [0, T]} \mid (\pi_t)_{t \in [0, T]} \text{ ist } (\mathcal{F}_t^S)_{t \in [0, T]} \text{-adaptiert,} \right. \\ \left. \pi_t \in \mathbb{R}, (9.2) \text{ hat eine eindeutige Lösung, } \int_0^T (\pi_s X_s^\pi)^2 ds < \infty \text{ f.s.} \right\}.$$

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels wählen wir als konkrete Nutzenfunktion  $u(x) = \frac{1}{\alpha} x^\alpha$  mit  $\alpha < 1$  und  $\alpha \neq 0$ . Zudem bezeichnen wir das für dieses Problem mit einem Endzeitpunkt  $T$  optimale Portfolio mit  $(\pi_t^*)_{t \in [0, T]}$ . Nachfolgend werden einige Notationen eingeführt, die im weiteren Verlauf dieses Kapitels benötigt werden.

Für  $k \in \{1, \dots, d\}$  gelte

$$\gamma_k := \frac{\mu_k - r}{\sigma}.$$

Für  $t \in [0, T]$ ,  $y \in \mathbb{R}$  und  $k \in \{1, \dots, d\}$  setzen wir

$$L_t(\mu_k, y) := \begin{cases} \exp(\gamma_k y - \frac{1}{2} \gamma_k^2 t), & t > 0, \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Weiter setzen wir für  $t \in [0, T]$ ,  $y \in \mathbb{R}$  und  $k \in \{1, \dots, d\}$ :

$$F(t, y) := \sum_{k=1}^d L_t(\mu_k, y) p_k.$$

Zudem definieren wir den Prozess  $(Y_t)_{t \in [0, T]}$  mit

$$Y_t := W_t + \frac{\theta - r}{\sigma} t.$$

Der Prozess  $(L_t^{-1}(\theta, Y_t))_{t \in [0, T]}$  ist ein Martingal bezüglich der Filtration  $\mathcal{F}^{\theta, W}$ , die von der Zufallsvariable  $\theta$  und dem Prozess  $(W_t)_{t \geq 0}$  erzeugt wird (vgl. [Rieder/Bäuerle, 2005], Kapitel 7). Es gilt daher  $\mathbb{E}[L_t^{-1}(\theta, Y_t)] = 1$  für alle  $t \in [0, T]$ . Somit lässt sich mit Hilfe dieses Prozesses ein neues Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mathbb{Q}$  mit

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = L_T^{-1}(\theta, Y_T)$$

definieren.

### 9.2.1 Optimales Portfolio im Bayes-Marktmodell

In diesem Abschnitt werden bereits bekannte Aussagen über das optimale Portfolio im Bayes-Marktmodell vorgestellt, welche für das weitere Vorgehen von Bedeutung sind.

In [Rieder/Bäuerle, 2005], Abschnitt 7, konnte gezeigt werden, dass das für Problem  $(P_{\text{Bayes}})$  optimale Portfolio  $(\pi_t^*)_{t \in [0, T]}$  durch

$$(\pi_t^*)_{t \in [0, T]} := (\pi_T^*(t, y, \alpha))_{t \in [0, T]}$$

gegeben ist, wobei

$$\pi_T^*(t, y, \alpha) = \frac{1}{1 - \alpha} \frac{\mu(t, y) - r}{\sigma^2} + \frac{g_y^T(t, y)}{\sigma g^{\mathbb{Q}, T}(t, y)} = \frac{g_y^{\mathbb{Q}, T}(t, y)}{\sigma g^{\mathbb{Q}, T}(t, y)}. \quad (9.3)$$

Dabei stellt  $g_y^T$  die partielle Ableitung nach der zweiten Komponente bei Endzeithorizont  $T$  dar, und es gilt für  $y \in \mathbb{R}$  die Notation

$$\begin{aligned} \mu(t, y) &:= \frac{\sum_{k=1}^d \mu_k L_t(\mu_k, y) p_k}{\sum_{k=1}^d L_t(\mu_k, y) p_k}, \\ g^T(t, y) &:= \mathbb{E} \left[ \left( \frac{F(T, Y_T) B_T}{F(t, Y_t) B_t} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \middle| Y_t = y \right]. \end{aligned}$$

Der Parameter  $y$  tritt dabei an dieser Stelle auf, da das partiell beobachtbare Finanzmarktmodell durch die Hinzunahme einer weiteren Dimension auf ein vollständiges Finanzmarktmodell zurückgeführt werden kann. Das genaue Vorgehen kann in [Rieder/Bäuerle, 2005], Abschnitt 3 nachgelesen werden. Weiter besitzt das optimale Portfolio im betrachteten Bayes-Finanzmarkt nach [Rieder/Bäuerle, 2005] auch die Darstellung

$$\pi_T^*(t, y, \alpha) = \frac{g_y^{\mathbb{Q}, T}(t, y)}{\sigma g^{\mathbb{Q}, T}(t, y)}, \quad (9.4)$$

wobei

$$g^{\mathbb{Q}, T}(t, y) := \exp \left( r(T - t) \frac{\alpha}{1 - \alpha} \right) \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ F(T, Y_T)^{\frac{1}{1-\alpha}} \middle| Y_t = y \right].$$

### Anmerkung 9.2

Sei  $\mu_1 = \dots = \mu_d$  und somit ein vollständig beobachtbares Finanzmarktmodell gegeben. Dann ist das optimale Portfolio durch  $(\pi_t^*)_{t \in [0, T]}$  mit

$$\pi_t^* \equiv \frac{1}{1 - \alpha} \frac{\mu - r}{\sigma^2} \quad (9.5)$$

(vgl. [Merton, 1971/1973]) gegeben. Es ist in diesem Fall somit optimal, einen konstanten Anteil des Vermögens in die Aktie zu investieren.

Eine interessante Frage ist, wie sich das optimale Portfolio verändert, wenn der Endzeithorizont  $T$  beliebig groß wird. Diese Frage wird im folgenden Abschnitt untersucht werden.

### 9.3 Zusammenhang zwischen der vollständigen und der partiell beobachtbaren Marktsituation im Bayes-Marktmodell

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir gesehen, welche Struktur das optimale Portfolio im Bayes-Marktmodell besitzt. Im Folgenden wird untersucht, wie sich dieses Portfolio, welches ebenfalls vom Endzeitpunkt  $T$  abhängt, verändert, sofern der Endzeitpunkt beliebig groß wird. Wir werden zeigen, dass das optimale Portfolio im partiell beobachtbaren Bayes-Markt bei der Wahl geeigneter Parameter gegen ein solches Portfolio konvergiert, welches man als optimales Portfolio im entsprechenden beobachtbaren Marktmodell erwarten würde. Dies zeigen wir zuerst für den Spezialfall  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Dieser Spezialfall wird in den Sätzen 9.5 und 9.7 erweitert. Für die Vorentlastung des relativ technischen Beweises ist es jedoch zielführend, diesen Spezialfall gesondert zu betrachten.

#### Satz 9.3

Seien  $t \geq 0$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}$  und  $\mu_k > r$  für alle  $k \in \{1, \dots, d\}$ . Dann gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \pi_T^*(t, y, \alpha) = \frac{1}{\sigma(1-\alpha)} \frac{\mu_d - r}{\sigma} = \frac{1}{\sigma(1-\alpha)} \gamma_d.$$

*Beweis.* In [Rieder/Bäuerle, 2005], Abschnitt 7 konnte gezeigt werden, dass für

$$\gamma_T^*(t, y, \alpha) := (1 - \alpha) \frac{g_y^{\mathbb{Q}, T}(t, y)}{g^{\mathbb{Q}, T}(t, y)}$$

die Darstellung

$$\gamma_T^*(t, y, \alpha) = \frac{\Gamma_T^D(t, y, \alpha)}{\Gamma_T^N(t, y, \alpha)} \quad (9.6)$$

gilt, wobei

$$\begin{aligned} \Gamma_T^N(t, y, \alpha) &:= \mathbb{E} \left[ (F(T, y + W_{T-t}))^{\frac{1}{1-\alpha}} \right], \\ \Gamma_T^D(t, y, \alpha) &:= \mathbb{E} \left[ (F(T, y + W_{T-t}))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left( \sum_{k=1}^d p_k \cdot \gamma_k L_T(\mu_k, y + W_{T-t}) \right) \right]. \end{aligned}$$

Für  $\alpha = \frac{1}{2}$  gilt somit

$$\gamma_T^* \left( t, y, \frac{1}{2} \right) = \frac{\Gamma_T^D(t, y, \frac{1}{2})}{\Gamma_T^N(t, y, \frac{1}{2})} \quad (9.7)$$

mit

$$\begin{aligned} \Gamma_T^N \left( t, y, \frac{1}{2} \right) &:= \mathbb{E} [F(T, y + W_{T-t})^2], \\ \Gamma_T^D \left( t, y, \frac{1}{2} \right) &:= \mathbb{E} \left[ F(T, y + W_{T-t}) \left( \sum_{k=1}^d p_k \cdot \gamma_k L_T(\mu_k, y + W_{T-t}) \right) \right]. \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned}
\pi_T^*(t, y, \alpha) &= \frac{1}{1-\alpha} \frac{\mu(t, y) - r}{\sigma^2} + \frac{g_y^T(t, y)}{\sigma g^T(t, y)} \\
&= \frac{g_y^{\mathbb{Q}, T}(t, y, \alpha)}{\sigma g^{\mathbb{Q}, T}(t, y, \alpha)} \\
&= \frac{1}{\sigma(1-\alpha)} \gamma_T^*(t, y, \alpha)
\end{aligned}$$

gilt (vgl. Gleichung (9.3)), genügt es,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \gamma_T^* \left( t, y, \frac{1}{2} \right) = \gamma_d \tag{9.8}$$

zu zeigen. Damit folgt dann aufgrund der oben aufgeführten Definitionen und der Gleichung  $\gamma_d = \frac{\mu_d - r}{\sigma}$  direkt die Behauptung.

Um dies zu zeigen betrachten wir die Terme  $\Gamma_T^N \left( t, y, \frac{1}{2} \right)$  und  $\Gamma_T^D \left( t, y, \frac{1}{2} \right)$  einzeln. Dabei wählen wir o.B.d.A.  $y = 0$ . Der Beweis kann aber völlig analog für jedes  $y \in \mathbb{R}$  geführt werden. Es gilt

$$\begin{aligned}
\Gamma_T^N \left( t, 0, \frac{1}{2} \right) &= \mathbb{E} \left[ (F(T, W_{T-t}))^2 \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k=1}^d \exp \left( \gamma_k W_{T-t} - \frac{1}{2} \gamma_k^2 T \right) p_k \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
&\left( \sum_{k=1}^d \exp \left( \gamma_k W_{T-t} - \frac{1}{2} \gamma_k^2 T \right) p_k \right)^2 \\
&= \sum_{k,j=1}^d p_k p_j \exp \left( (\gamma_k + \gamma_j) W_{T-t} - \frac{1}{2} (\gamma_k^2 + \gamma_j^2) T \right) \\
&= \sum_{k,j=1}^d \exp \left( (\gamma_k + \gamma_j) W_{T-t} - \frac{1}{2} (\gamma_k^2 + \gamma_j^2) T + \ln(p_k) + \ln(p_j) \right) \\
&=: \sum_{k,j=1}^d \exp \left( \alpha_{k,j} W_{T-t} + \beta_{k,j}^T \right)
\end{aligned}$$

folgt zusammen mit  $W_{T-t} \sim \mathcal{N}(0, T-t)$  die Verteilungsaussage

$$\exp(\alpha_{k,j} W_{T-t} + \beta_{k,j}^T) \sim \mathcal{LN}(\beta_{k,j}^T, (\alpha_{k,j})^2(T-t)).$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k=1}^d \exp \left( \gamma_k W_{T-t} - \frac{1}{2} \gamma_k^2 T \right) p_k \right)^2 \right] \\ &= \sum_{k,j=1}^d \exp \left( \beta_{k,j}^T + \frac{(\alpha_{k,j})^2(T-t)}{2} \right) \\ &= \sum_{k,j=1}^d \exp \left( -\frac{1}{2}(\gamma_k^2 + \gamma_j^2)T + \ln(p_k) + \ln(p_j) + \frac{(\gamma_k + \gamma_j)^2}{2}(T-t) \right) \\ &= \sum_{k,j=1}^d \exp \left( (\gamma_k \cdot \gamma_j)T + \ln(p_k) + \ln(p_j) - \frac{(\gamma_k + \gamma_j)^2}{2}t \right). \end{aligned}$$

Wir können somit die Identität

$$\Gamma_T^N \left( t, 0, \frac{1}{2} \right) = \sum_{k,j=1}^d \exp \left( (\gamma_k \cdot \gamma_j)T + \ln(p_k) + \ln(p_j) - \frac{(\gamma_k + \gamma_j)^2}{2}t \right)$$

festhalten. Mit analogen Argumenten lässt sich die Gleichungskette

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ F(T, W_{T-t}) \left( \sum_{k=1}^d p_k \cdot \gamma_k L_T(\mu_k, W_{T-t}) \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k=1}^d p_k \exp \left( \gamma_k W_{T-t} - \frac{1}{2} \gamma_k^2 T \right) \right) \left( \sum_{k=1}^d p_k \cdot \gamma_k \exp \left( \gamma_k W_{T-t} - \frac{1}{2} \gamma_k^2 T \right) \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{j=1}^d \sum_{k=1}^d p_k \cdot p_j \cdot \gamma_j \exp \left( \gamma_k W_{T-t} - \frac{1}{2} \gamma_k^2 T + \gamma_j W_{T-t} - \frac{1}{2} \gamma_j^2 T \right) \right] \\ &= \sum_{k,j=1}^d \exp(m(k, j, T) + \ln(p_k) + \ln(p_j) + \ln(\gamma_j)) \end{aligned}$$

mit

$$m(k, j, T) := (\gamma_k \cdot \gamma_j)T - \frac{(\gamma_k + \gamma_j)^2}{2}t$$

zeigen. Also ergibt sich

$$\Gamma_T^D \left( t, 0, \frac{1}{2} \right) = \sum_{k,j=1}^d \exp(m(k, j, T) + \ln(p_k) + \ln(p_j) + \ln(\gamma_j)).$$

Die Gültigkeit von Aussage (9.8) ist somit gegeben, falls gilt:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Gamma_T^D(t, 0, \frac{1}{2})}{\Gamma_T^N(t, 0, \frac{1}{2})} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^d p_j \cdot \gamma_j \sum_{k=1}^d p_k \exp(m(k, j, T))}{\sum_{l=1}^d p_l \sum_{k=1}^d p_k \exp(m(k, l, T))} = \gamma_d.$$

Im Folgenden werden wir die Gültigkeit dieser Aussage zeigen. Dazu halten wir die folgende Vorbemerkung fest:

**(V1):** Da  $\gamma_1 < \dots < \gamma_d$  gilt, folgt für jedes  $c > 0$ :

$$\frac{\exp(c\gamma_j T)}{\exp(c\gamma_l T)} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \begin{cases} \infty, & j > l, \\ 1, & j = l, \\ 0, & j < l. \end{cases}$$

Mit Hilfe der Vorbemerkung (V1) folgt

$$\frac{p_l \sum_{k=1}^d p_k \exp\left((\gamma_k \cdot \gamma_l)T - \frac{(\gamma_k + \gamma_l)^2}{2}t\right)}{p_j \sum_{k=1}^d p_k \exp\left((\gamma_k \cdot \gamma_j)T - \frac{(\gamma_k + \gamma_j)^2}{2}t\right)} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & l < j, \\ \frac{p_l}{p_j} = 1, & l = j, \\ \infty, & l > j. \end{cases}$$

Somit ergibt sich weiter

$$\sum_{l=1}^d \frac{p_l \sum_{k=1}^d p_k \exp\left((\gamma_k \cdot \gamma_l)T - \frac{(\gamma_k + \gamma_l)^2}{2}t\right)}{p_j \sum_{k=1}^d p_k \exp\left((\gamma_k \cdot \gamma_j)T - \frac{(\gamma_k + \gamma_j)^2}{2}t\right)} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \begin{cases} \infty, & j < d, \\ 1, & j = d, \end{cases}$$

also

$$\frac{p_j \sum_{k=1}^d p_k \exp\left((\gamma_k \cdot \gamma_j)T - \frac{(\gamma_k + \gamma_j)^2}{2}t\right)}{\sum_{l=1}^d p_l \sum_{k=1}^d p_k \exp\left((\gamma_k \cdot \gamma_l)T - \frac{(\gamma_k + \gamma_l)^2}{2}t\right)} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & j < d, \\ 1, & j = d. \end{cases}$$

Insgesamt folgt damit die Gültigkeit der Aussage (9.8) und somit die Gültigkeit des zu beweisenden Satzes:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^d \gamma_j \frac{p_j \sum_{k=1}^d p_k \exp\left(\left(\gamma_k \cdot \gamma_j\right)T - \frac{(\gamma_k + \gamma_j)^2}{2}t\right)}{\sum_{l=1}^d p_l \sum_{k=1}^d p_k \exp\left(\left(\gamma_k \cdot \gamma_l\right)T - \frac{(\gamma_k + \gamma_l)^2}{2}t\right)} \\
&= \frac{\sum_{j=1}^d \gamma_j \cdot p_j \sum_{k=1}^d p_k \exp\left(\left(\gamma_k \cdot \gamma_j\right)T - \frac{(\gamma_k + \gamma_j)^2}{2}t\right)}{\sum_{l=1}^d p_l \sum_{k=1}^d p_k \exp\left(\left(\gamma_k \cdot \gamma_l\right)T - \frac{(\gamma_k + \gamma_l)^2}{2}t\right)} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \gamma_d.
\end{aligned}$$

□

#### Bemerkung 9.4

Satz 9.3 ist ebenfalls gültig, falls statt  $\mu_k > r$  auch  $\mu_k \geq r$  zugelassen wird. Nach Definition gilt  $\gamma_k = 0$ , falls  $\mu_k = r$ . In diesem Fall tragen die  $k$ -ten Summanden nicht zu den entsprechenden Summen im Beweis bei. Falls  $\mu_k = r$  für alle  $k \in \{1, \dots, d\}$  gefordert wird, gilt  $\mu_1 = \dots = \mu_d$ . Hier würde man sich wieder im vollständig beobachtbaren Marktmodell befinden. In diesem gilt für alle  $T > 0$  dann bereits nach Konstruktion

$$\gamma_T^* \left( t, 0, \frac{1}{2} \right) = \gamma_1 = \dots = \gamma_d.$$

Im Folgenden werden wir die Gültigkeit des Satzes 9.3 für eine größere Klasse zulässiger Parameter  $\alpha$  zeigen:

#### Satz 9.5

Seien  $t \geq 0$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha_n := \frac{n-1}{n}$  für  $n \in \mathbb{N}$  und  $\mu_k > r$  für alle  $k \in \{1, \dots, d\}$ . Dann gilt:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \pi_T^*(t, y, \alpha_n) = \frac{1}{\sigma(1 - \alpha_n)} \frac{\mu_d - r}{\sigma} = \frac{1}{\sigma(1 - \alpha_n)} \gamma_d.$$

*Beweis.* Sei  $\alpha_n := \frac{n-1}{n}$ . Dann gilt insbesondere

$$\frac{1}{1 - \alpha_n} = n \quad \text{und} \quad \frac{\alpha_n}{1 - \alpha_n} = n - 1.$$

Wie aus (9.3), (9.6) und (9.8) hervorgeht, lässt sich das optimale Portfolio als

$$\begin{aligned}\pi_T^*(t, y, \alpha_n) &= \frac{1}{1 - \alpha_n} \frac{\mu(t, y) - r}{\sigma^2} + \frac{g_y^T(t, y)}{\sigma g^T(t, y)} \\ &= \frac{g_y^{\mathbb{Q}, T}(t, y)}{\sigma g^{\mathbb{Q}, T}(t, y)} = \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1 - \alpha_n} \gamma_T^*(t, y, \alpha) \\ &= \frac{1}{\sigma} \frac{1}{1 - \alpha_n} \frac{\Gamma_T^D(t, y, \alpha_n)}{\Gamma_T^N(t, y, \alpha_n)}\end{aligned}$$

darstellen. Um die Gültigkeit der Aussage zu zeigen, werden wir (vgl. Beweis von Satz 9.3) zeigen, dass

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Gamma_T^D(t, y, \alpha_n)}{\Gamma_T^N(t, y, \alpha_n)} = \gamma_d$$

gilt, wobei

$$\begin{aligned}\Gamma_T^N(t, y, \alpha_n) &= \mathbb{E} \left[ (F(T, y + W_{T-t}))^{\frac{1}{1-\alpha_n}} \right], \\ \Gamma_T^D(t, y, \alpha_n) &= \mathbb{E} \left[ (F(T, y + W_{T-t}))^{\frac{\alpha_n}{1-\alpha_n}} \left( \sum_{k=1}^d p_k \cdot \gamma_k L_T(\mu_k, y + W_{T-t}) \right) \right].\end{aligned}$$

Den Beweis des Satzes führen wir erneut o.B.d.A. für den Fall  $y = 0$  durch. Der Beweis kann aber völlig analog für jedes  $y \in \mathbb{R}$  erfolgen. Es gilt

$$\begin{aligned}\Gamma_T^N(t, 0, \alpha_n) &= \mathbb{E} \left[ (F(T, W_{T-t}))^{\frac{1}{1-\alpha_n}} \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{k=1}^d \exp \left( \gamma_k W_{T-t} - \frac{1}{2} \gamma_k^2 T \right) p_k \right)^n \right]\end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}& \left( \sum_{k=1}^d \exp \left( \gamma_k W_{T-t} - \frac{1}{2} \gamma_k^2 T \right) p_k \right)^n \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^d p_{k_1} \cdot \dots \cdot p_{k_n} \exp \left( (\gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_n}) W_{T-t} - \frac{1}{2} (\gamma_{k_1}^2 + \dots + \gamma_{k_n}^2) T \right) \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^d \exp \left( (\gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_n}) W_{T-t} - \frac{1}{2} (\gamma_{k_1}^2 + \dots + \gamma_{k_n}^2) T + \ln(p_{k_1}) + \dots + \ln(p_{k_n}) \right) \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^d \exp \left( \alpha_{k_1, \dots, k_n} W_{T-t} + \beta_{k_1, \dots, k_n}^T \right),\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}\alpha_{k_1, \dots, k_n} &:= \gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_n} \\ \beta_{k_1, \dots, k_n}^T &:= -\frac{1}{2}(\gamma_{k_1}^2 + \dots + \gamma_{k_n}^2)T + \ln(p_{k_1}) + \dots + \ln(p_{k_n}).\end{aligned}$$

Zusammen mit der Tatsache, dass

$$\exp(\alpha_{k_1, \dots, k_n} W_{T-t} + \beta_{k_1, \dots, k_n}^T) \sim \mathcal{LN}(\beta_{k_1, \dots, k_n}^T, \alpha_{k_1, \dots, k_n}^2 (T-t))$$

gilt, folgt somit

$$\begin{aligned}\mathbb{E} &\left[ \left( \sum_{k=1}^d \exp\left(\gamma_k W_{T-t} - \frac{1}{2}\gamma_k^2 T\right) p_k \right)^n \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^d \exp\left((\gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_n})W_{T-t} - \frac{1}{2}(\gamma_{k_1}^2 + \dots + \gamma_{k_n}^2)T + \ln(p_{k_1}) + \dots + \ln(p_{k_n})\right) \right] \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^d \exp\left(\beta_{k_1, \dots, k_n}^T + \frac{\alpha_{k_1, \dots, k_n}^2}{2}(T-t)\right) \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^d \exp\left(-\frac{1}{2}(\gamma_{k_1}^2 + \dots + \gamma_{k_n}^2)T + \frac{(\gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_n})^2}{2}(T-t) + \ln(p_{k_1}) + \dots + \ln(p_{k_n})\right).\end{aligned}$$

Wegen

$$(\gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_n})^2 - (\gamma_{k_1}^2 + \dots + \gamma_{k_n}^2) = 2 \sum_{i < j} \gamma_{k_i} \cdot \gamma_{k_j}$$

folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{E} &\left[ \left( \sum_{k=1}^d \exp\left(\gamma_k W_{T-t} - \frac{1}{2}\gamma_k^2 T\right) p_k \right)^n \right] \\ &= \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^d \exp\left(T \sum_{i < j} \gamma_{k_i} \cdot \gamma_{k_j} + \ln(p_{k_1}) + \dots + \ln(p_{k_n}) - \frac{(\gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_n})^2}{2}t\right).\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\Gamma_T^N(t, 0, \alpha_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^d \exp \left( T \sum_{i < j}^n \gamma_{k_i} \cdot \gamma_{k_j} + \ln(p_{k_1}) + \dots + \ln(p_{k_n}) - \frac{(\gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_n})^2}{2} t \right). \quad (9.9)$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \Gamma_T^D(t, 0, \alpha_n) &= \mathbb{E} \left[ (F(T, W_{T-t}))^{1-\alpha_n} \left( \sum_{k=1}^d p_k \cdot \gamma_k L_T(\mu_k, W_{T-t}) \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ F(T, W_{T-t})^{n-1} \left( \sum_{k=1}^d p_k \cdot \gamma_k L_T(\mu_k, W_{T-t}) \right) \right]. \end{aligned}$$

Da

$$\begin{aligned} &F(T, W_{T-t})^{n-1} \left( \sum_{k=1}^d p_k \cdot \gamma_k L_T(\mu_k, W_{T-t}) \right) \\ &= \left( \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}=1}^d p_{k_1} \cdot \dots \cdot p_{k_{n-1}} \exp \left( (\gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_{n-1}}) W_{T-t} - \frac{1}{2} (\gamma_{k_1}^2 + \dots + \gamma_{k_{n-1}}^2) T \right) \right) \\ &\quad \left( \sum_{k_n=1}^d p_{k_n} \cdot \gamma_{k_n} \exp \left( \gamma_{k_n} W_{T-t} - \frac{1}{2} \gamma_{k_n}^2 T \right) \right) \\ &= \left( \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^d p_{k_1} \cdot \dots \cdot p_{k_n} \cdot \gamma_{k_n} \exp \left( (\gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_n}) W_{T-t} - \frac{1}{2} (\gamma_{k_1}^2 + \dots + \gamma_{k_n}^2) T \right) \right) \\ &= \left( \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^d \exp \left( (\gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_n}) W_{T-t} - \frac{1}{2} (\gamma_{k_1}^2 + \dots + \gamma_{k_n}^2) T \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \ln(p_{k_1}) + \dots + \ln(p_{k_n}) + \ln(\gamma_{k_n}) \right) \right) \end{aligned}$$

gilt, ergibt sich mit analoger Argumentation wie bei Gleichung (9.9)

$$\begin{aligned}
\Gamma_T^D(t, 0, \alpha_n) &= \mathbb{E} \left[ \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^d \exp \left( (\gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_n}) W_{T-t} - \frac{1}{2} (\gamma_{k_1}^2 + \dots + \gamma_{k_n}^2) T \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \ln(p_{k_1}) + \dots + \ln(p_{k_n}) + \ln(\gamma_{k_n}) \right) \right] \\
&= \sum_{k_1, \dots, k_n=1}^d \exp \left( T \sum_{i < j}^n \gamma_{k_i} \cdot \gamma_{k_j} + \ln(p_{k_1}) + \dots + \ln(p_{k_n}) + \ln(\gamma_{k_n}) - \frac{(\gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_n})^2}{2} t \right).
\end{aligned}$$

Im Folgenden werden wir die Beziehung

$$\begin{aligned}
&\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Gamma_T^D(t, 0, \alpha_n)}{\Gamma_T^N(t, 0, \alpha_n)} \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k_1, \dots, k_n=1}^d \exp \left( T \sum_{i < j}^n \gamma_{k_i} \cdot \gamma_{k_j} + \ln(p_{k_1}) + \dots + \ln(p_{k_n}) + \ln(\gamma_{k_n}) - \frac{(\gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_n})^2}{2} t \right)}{\sum_{k_1, \dots, k_n=1}^d \exp \left( T \sum_{i < j}^n \gamma_{k_i} \cdot \gamma_{k_j} + \ln(p_{k_1}) + \dots + \ln(p_{k_n}) - \frac{(\gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_n})^2}{2} t \right)} \\
&= \gamma_d
\end{aligned}$$

zeigen. Dazu benötigen wir die folgenden beiden Vorbemerkungen:

(VB1) Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i < m}^n \gamma_{k_i} \cdot \gamma_{k_m} &= \sum_{i=1}^n \sum_{m=i+1}^n \gamma_{k_i} \cdot \gamma_{k_m} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{m=i+1}^n \gamma_{k_i} \cdot \gamma_{k_m} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left( \sum_{m=i+1}^{n-1} \gamma_{k_i} \cdot \gamma_{k_m} + \gamma_{k_i} \cdot \gamma_{k_n} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{m=i+1}^{n-1} \gamma_{k_i} \cdot \gamma_{k_m} + \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_{k_i} \cdot \gamma_{k_n} \\
&=: \tilde{c}_{k_1, \dots, k_{n-1}} + c_{k_1, \dots, k_{n-1}} \cdot \gamma_{k_n}.
\end{aligned}$$

(VB2) Für Zahlen  $c, \tilde{c} > 0$  gilt aufgrund der Ordnung  $\gamma_1 < \dots < \gamma_d$ :

$$\frac{\exp(\tilde{c} + c\gamma_j)}{\exp(\tilde{c} + c\gamma_l)} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \begin{cases} \infty, & j > l, \\ 1, & j = l, \\ 0, & j < l. \end{cases}$$

Unter Berücksichtigung dieser beiden Vorbemerkungen ergibt sich

$$\begin{aligned} & \frac{p_l \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}=1}^d p_{k_1} \cdot \dots \cdot p_{k_{n-1}} \exp\left(T \sum_{i < m}^n \gamma_{k_i} \cdot \gamma_{k_m} - \frac{(\gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_{n-1}} + \gamma_l)^2}{2} t\right)}{p_j \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}=1}^d p_{k_1} \cdot \dots \cdot p_{k_{n-1}} \exp\left(T \sum_{i < m}^n \gamma_{k_i} \cdot \gamma_{k_m} - \frac{(\gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_{n-1}} + \gamma_j)^2}{2} t\right)} \\ & \stackrel{(VB1)}{=} \frac{p_l \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}=1}^d p_{k_1} \cdot \dots \cdot p_{k_{n-1}} \exp\left(T(\tilde{c}_{k_1, \dots, k_{n-1}} + c_{k_1, \dots, k_{n-1}} \gamma_l) - \frac{(\gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_{n-1}} + \gamma_l)^2}{2} t\right)}{p_j \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}=1}^d p_{k_1} \cdot \dots \cdot p_{k_{n-1}} \exp\left(T(\tilde{c}_{k_1, \dots, k_{n-1}} + c_{k_1, \dots, k_{n-1}} \gamma_j) - \frac{(\gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_{n-1}} + \gamma_j)^2}{2} t\right)} \\ & \stackrel{(VB2), T \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0, & l < j, \\ 1, & l = j, \\ \infty, & l > j. \end{cases} \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^d \frac{p_l \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}=1}^d p_{k_1} \cdot \dots \cdot p_{k_{n-1}} \exp\left(T(\tilde{c}_{k_1, \dots, k_{n-1}} + c_{k_1, \dots, k_{n-1}} \gamma_l) - \frac{(\gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_{n-1}} + \gamma_l)^2}{2} t\right)}{p_j \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}=1}^d p_{k_1} \cdot \dots \cdot p_{k_{n-1}} \exp\left(T(\tilde{c}_{k_1, \dots, k_{n-1}} + c_{k_1, \dots, k_{n-1}} \gamma_j) - \frac{(\gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_{n-1}} + \gamma_j)^2}{2} t\right)} \\ & \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \begin{cases} \infty, & j < d, \\ 1, & j = d. \end{cases} \end{aligned}$$

Also gilt

$$\frac{p_j \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}=1}^d p_{k_1} \cdot \dots \cdot p_{k_{n-1}} \exp\left(T(\tilde{c}_{k_1, \dots, k_{n-1}} + c_{k_1, \dots, k_{n-1}} \gamma_j) - \frac{(\gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_{n-1}} + \gamma_j)^2}{2} t\right)}{\sum_{l=1}^d p_l \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}=1}^d p_{k_1} \cdot \dots \cdot p_{k_{n-1}} \exp\left(T(\tilde{c}_{k_1, \dots, k_{n-1}} + c_{k_1, \dots, k_{n-1}} \gamma_l) - \frac{(\gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_{n-1}} + \gamma_l)^2}{2} t\right)}$$

$$\xrightarrow{T \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & j < d, \\ 1, & j = d. \end{cases}$$

Insgesamt ergibt sich somit die Behauptung:

$$\sum_{j=1}^d \gamma_j \frac{p_j \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}=1}^d p_{k_1} \cdot \dots \cdot p_{k_{n-1}} \exp\left(T(\tilde{c}_{k_1, \dots, k_{n-1}} + c_{k_1, \dots, k_{n-1}} \gamma_j) - \frac{(\gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_{n-1}} + \gamma_j)^2}{2} t\right)}{\sum_{l=1}^d p_l \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}=1}^d p_{k_1} \cdot \dots \cdot p_{k_{n-1}} \exp\left(T(\tilde{c}_{k_1, \dots, k_{n-1}} + c_{k_1, \dots, k_{n-1}} \gamma_l) - \frac{(\gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_{n-1}} + \gamma_l)^2}{2} t\right)}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^d \gamma_j \cdot p_j \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}=1}^d p_{k_1} \cdot \dots \cdot p_{k_{n-1}} \exp\left(T(\tilde{c}_{k_1, \dots, k_{n-1}} + c_{k_1, \dots, k_{n-1}} \gamma_j) - \frac{(\gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_{n-1}} + \gamma_j)^2}{2} t\right)}{\sum_{l=1}^d p_l \sum_{k_1, \dots, k_{n-1}=1}^d p_{k_1} \cdot \dots \cdot p_{k_{n-1}} \exp\left(T(\tilde{c}_{k_1, \dots, k_{n-1}} + c_{k_1, \dots, k_{n-1}} \gamma_l) - \frac{(\gamma_{k_1} + \dots + \gamma_{k_{n-1}} + \gamma_l)^2}{2} t\right)}$$

$$\xrightarrow{T \rightarrow \infty} \gamma_d.$$

□

Abschließend lässt sich mit Hilfe des Satzes 9.5 dessen Gültigkeit für eine noch größere Klasse zulässiger Parameter  $\alpha$  zeigen. Zuvor benötigen wir die nachfolgende Hilfsaussage:

### Lemma 9.6

Sei  $y \in \mathbb{R}$ . Die Funktion

$$f : \alpha \mapsto \frac{\int_{\mathbb{R}} F(T, y + x)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left( \sum_{k=1}^d p_k \gamma_k L_T(\mu_k, y + x) \right) \varphi_{T-t}(x) dx}{\int_{\mathbb{R}} F(T, y + x)^{\frac{1}{1-\alpha}} \varphi_{T-t}(x) dx}$$

ist monoton wachsend, wobei  $\varphi_{T-t}$  die Dichte der Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Varianz  $T - t$  darstellt.

*Beweis.* Wir definieren

$$w(T, y, \alpha) := \int_{\mathbb{R}} F(T, y + x)^{\frac{1}{1-\alpha}} \varphi_{T-t}(x) dx.$$

Mit obiger Definition ergibt sich

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\int_{\mathbb{R}} F(T, y+x)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left( \sum_{k=1}^d p_k \gamma_k L_T(\mu_k, y+x) \right) \varphi_{T-t}(x) dx}{\int_{\mathbb{R}} F(T, y+x)^{\frac{1}{1-\alpha}} \varphi_{T-t}(x) dx} \\ &= \int_{\mathbb{R}} F(T, y+x)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \varphi_{T-t}(x) \frac{1}{w(T, y, \alpha)} \left( \sum_{k=1}^d p_k \gamma_k L_T(\mu_k, y+x) \right) dx. \end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha} - 1$$

erhält man

$$f(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} F(T, y+x)^{\frac{1}{1-\alpha}} \varphi_{T-t}(x) \frac{1}{w(T, y, \alpha)} (F(T, y+x))^{-1} \left( \sum_{k=1}^d p_k \gamma_k L_T(\mu_k, y+x) \right) dx.$$

Wir setzen

$$\begin{aligned} q(t, y, x, \alpha) &:= F(T, y+x)^{\frac{1}{1-\alpha}} \varphi_{T-t}(x) \frac{1}{w(T, y, \alpha)}, \\ \widehat{\Theta}(T, y+x) &:= (F(T, y+x))^{-1} \left( \sum_{k=1}^d p_k \gamma_k L_T(\mu_k, y+x) \right). \end{aligned}$$

Der Vorteil dieser Darstellung ist dadurch gegeben, dass aufgrund der Definition von  $w(T, y, \alpha)$  durch den Ausdruck  $q(t, y, x, \alpha)$  eine Dichte beschrieben wird und die Behauptung daher mit Hilfe von Sätzen über die stochastische Dominanz erster Ordnung bewiesen werden kann. Der Beweis verläuft weitgehend analog zum Beweis von Theorem 2 in [Longo/Mainini, 2016]) und soll der Vollständigkeit wegen nachfolgend skizziert werden:

Da  $\gamma_k > 0$  für alle  $k \in \{1, \dots, d\}$  gilt, folgt aufgrund der Definition für alle  $T > 0$  sowie für  $x, y \in \mathbb{R}$ :

$$\widehat{\Theta}(T, y+x) > 0.$$

Sei  $\alpha_1 < \alpha_2 < 1$ . Dann gilt

$$\frac{q(t, y, x, \alpha_2)}{q(t, y, x, \alpha_1)} = C(t, y, \alpha_1, \alpha_2) F(T, y+x)^k,$$

wobei

$$C(t, y, \alpha_1, \alpha_2) := \frac{\int_{\mathbb{R}} F(T, y + x)^{\frac{1}{1-\alpha_1}} \varphi_{T-t}(x) dx}{\int_{\mathbb{R}} F(T, y + x)^{\frac{1}{1-\alpha_2}} \varphi_{T-t}(x) dx} > 0,$$

$$k := \frac{1}{1-\alpha_2} - \frac{1}{1-\alpha_1} > 0.$$

Da  $\gamma_k > 0$  für  $k \in \{1, \dots, d\}$  gilt, folgt nach Definition, dass die Funktion  $x \mapsto F(T, y + x)$  monoton wachsend ist. Somit gilt für alle  $x_1 \leq x_2$ :

$$\frac{q(t, y, x_1, \alpha_2)}{q(t, y, x_1, \alpha_1)} \leq \frac{q(t, y, x_2, \alpha_2)}{q(t, y, x_2, \alpha_1)}.$$

Nach Definition B.3.5 in [Bäuerle/Rieder, 2011] gilt somit, dass eine Zufallsvariable mit der Dichte  $q(t, y, \cdot, \alpha_2)$  eine Zufallsvariable mit der Dichte  $q(t, y, \cdot, \alpha_1)$  bezüglich der sogenannten ‚Likelihood Ratio Order‘ dominiert. Nach [Bäuerle/Rieder, 2011], Theorem B.3.6 folgt daraus auch die stochastische Dominanz erster Ordnung dieser beiden Zufallsvariablen.

Angenommen die Abbildung  $x \mapsto \widehat{\Theta}(T, y + x)$  wäre ebenfalls wachsend, dann würde sich die Behauptung wegen

$$f(t, y, \alpha_1) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\Theta}(T, y + x) q(t, y, x, \alpha_1) dx \leq \int_{\mathbb{R}} \widehat{\Theta}(T, y + x) q(t, y, x, \alpha_2) dx = f(t, y, \alpha_2)$$

aufgrund der Dominanz erster Ordnung mit [Bäuerle/Rieder, 2011], Theorem B.3.3 ergeben. Es bleibt somit die Monotonie der Abbildung  $x \mapsto \widehat{\Theta}(T, y + x)$  zu zeigen. Dazu definieren wir für  $t \in (0, T]$

$$p(t, y, \mu_k) := \frac{\exp(\gamma_k y - \frac{1}{2} \gamma_k^2 t)}{F(t, y)} = \frac{\exp(\gamma_k y - \frac{1}{2} \gamma_k^2 t)}{\sum_{j=1}^d \exp(\gamma_j y - \frac{1}{2} \gamma_j^2 t) p_j}.$$

Dabei sei an den Zusammenhang  $\gamma_k = (\mu_k - r)/\sigma$  erinnert.

Für  $t \in (0, T]$  und  $y_1 < y_2$  ist die Funktion

$$\mu_k \mapsto \frac{p(t, y_2, \mu_k)}{p(t, y_1, \mu_k)} = \exp(\gamma_k (y_2 - y_1)) \frac{F(t, y_1)}{F(t, y_2)}$$

wegen  $F(t, y_1)/F(t, y_2) > 0$  wachsend in  $\mu_k$ . Da durch den Ausdruck  $p(t, y, \mu_k)$  erneut eine Dichte beschrieben wird, lässt sich mit analoger Argumentation wie oben für  $t \in (0, T]$  die stochastische Dominanz erster Ordnung und somit die gewünschte Aussage folgern:

$$\begin{aligned}
\widehat{\Theta}(t, y_1) &= (F(t, y_1))^{-1} \left( \sum_{k=1}^d p_k \gamma_k L_t(\mu_k, y_1) \right) \\
&= \sum_{k=1}^d \gamma_k p(t, y_1, \mu_k) p_k \\
&\leq \sum_{k=1}^d \gamma_k p(t, y_2, \mu_k) p_k \\
&= (F(t, y_2))^{-1} \left( \sum_{k=1}^d p_k \gamma_k L_t(\mu_k, y_2) \right) \\
&= \widehat{\Theta}(t, y_2).
\end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung. □

Mit Hilfe des oben gezeigten Lemmas lässt sich der folgende Satz beweisen:

**Satz 9.7**

Seien  $t \geq 0$ ,  $y \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$  und  $\mu_k > r$  für alle  $k \in \{1, \dots, d\}$ . Dann gilt:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \pi_T^*(t, y, \alpha) = \frac{1}{\sigma(1-\alpha)} \frac{\mu_d - r}{\sigma} = \frac{1}{\sigma(1-\alpha)} \gamma_d.$$

*Beweis.* Nach [Rieder/Bäuerle, 2005], Beweis zu Theorem 9, besitzen die Ausdrücke  $\Gamma_T^N(t, y, \alpha)$  und  $\Gamma_T^D(t, y, \alpha)$  auch die Darstellung

$$\begin{aligned}
\Gamma_T^N(t, y, \alpha) &= \int_{\mathbb{R}} F(T, y+x)^{\frac{1}{1-\alpha}} \varphi_{T-t}(x) dx, \\
\Gamma_T^D(t, y, \alpha) &= \int_{\mathbb{R}} F(T, y+x)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \left( \sum_{k=1}^d p_k \gamma_k L_T(\mu_k, y+x) \right) \varphi_{T-t}(x) dx.
\end{aligned}$$

Sei  $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$ . Dann existieren natürliche Zahlen  $n_1, n_2$  mit

$$\alpha_{n_1} = \frac{n_1 - 1}{n_1} \leq \alpha \leq \frac{n_2 - 1}{n_2} = \alpha_{n_2}.$$

Aufgrund der in Lemma 9.7 bewiesenen Monotonie und da nach Gleichung (9.8) der Zusammenhang

$$\gamma_T^*(t, y, \alpha) = \frac{\Gamma_T^D(t, y, \alpha)}{\Gamma_T^N(t, y, \alpha)}$$

gilt, ergibt sich somit für alle Endzeitpunkte  $T > 0$  die Ungleichheitskette

$$\gamma_T^*(t, y, \alpha_{n_1}) \leq \gamma_T^*(t, y, \alpha) \leq \gamma_T^*(t, y, \alpha_{n_2}).$$

Durch Grenzwertbildung folgt zusammen mit Satz 9.5

$$\gamma_d = \lim_{T \rightarrow \infty} \gamma_T^*(t, y, \alpha_{n_1}) \leq \liminf_{T \rightarrow \infty} \gamma_T^*(t, y, \alpha) \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \gamma_T^*(t, y, \alpha) \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \gamma_T^*(t, y, \alpha_{n_2}) = \gamma_d$$

und somit die Behauptung:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \gamma_T^*(t, y, \alpha) = \gamma_d.$$

□

### Bemerkung 9.8

- (i) Wir konnten zeigen, dass das optimale Portfolio im partiell beobachtbaren Bayes-Marktmodell bei der Wahl geeigneter Parameter gegen ein Portfolio konvergiert, das strukturell an das optimale Portfolio im beobachtbaren Bayes-Marktmodell erinnert. In diesem Sinne kann man also sagen, dass der partiell beobachtbare Bayes-Finanzmarkt im Grenzfall eines beliebig wachsenden Endzeithorizonts gegen den zugehörigen vollständig beobachtbaren Finanzmarkt konvergiert. Dies bedeutet auch, dass ein Investor in einem solchen unvollständigen Modell so handeln kann, als wäre es ein vollständig beobachtbares Marktmodell, sofern er bereit ist, einen gewissen Fehler in Kauf zu nehmen und einen großen Endzeitpunkt  $T$  zuzulassen. Je größer der Endzeitpunkt gewählt wird, umso kleiner wird dieser Fehler ausfallen.
- (ii) Bemerkung 9.4 bleibt auch in der Situation von Satz 9.5 gültig.

Im Folgenden Kapitel wird gezeigt werden, unter welchen Bedingungen sich die in dieser Arbeit erfolgten Aussagen und Beweisstrukturen auf diverse zeitdiskrete Finanzmärkte übertragen lassen.

# 10 Resultate zu Turnpike-Aussagen in zeitdiskreten Kontexten für zeitunabhängige Nutzenfunktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{R}_+$

In diesem Kapitel werden wir zeigen, dass sich die Beweisstrukturen der Turnpike-Aussagen aus den zeitstetigen Kontexten auch auf zeitdiskrete Kontexte übertragen lassen. Die Vorgehensweise ist dabei ähnlich zum Vorgehen in den zeitstetigen Finanzmarktmodellen, es müssen jedoch einige technische Feinheiten beachtet werden. In Abschnitt 10.1.2 wird exemplarisch der zeitdiskrete CRR-Finanzmarkt zu Grunde gelegt. Im Folgenden wird an dieses Finanzmarktmodell erinnert.

## 10.1 Turnpike-Aussagen im Rahmen des CRR-Modells

### 10.1.1 Modellannahmen

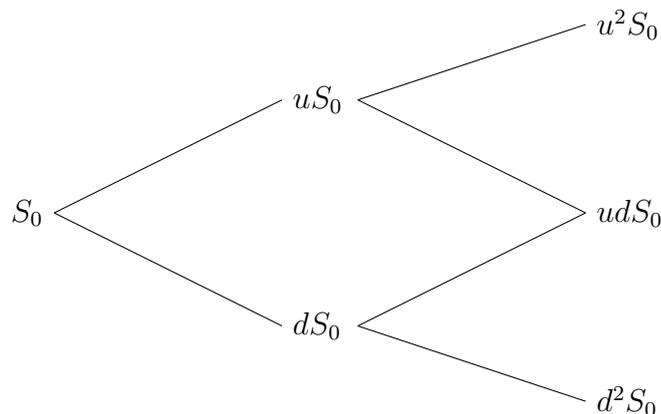
Wir betrachten das  $T$ -Perioden-CRR-Modell mit einer Aktie und einem Bond (vgl. für dieses Kapitel auch [ShreveI, 2004] bzw. [Williams, 2006]). Der Parameter  $T$  stellt den Endzeitpunkt dar. Der Bondkurs  $(B_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$  sei für  $r > 0$  und  $B_0 = 1$  gegeben durch

$$B_{t+1} = (1 + r)^{t+1},$$

wobei  $t \in \{0, \dots, T\}$  die diskreten Handelszeitpunkte darstellt. Für den Aktienpreisprozess  $(S_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$  gelte dabei

$$S_{t+1} = \begin{cases} uS_t, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } p, \\ dS_t, & \text{mit Wahrscheinlichkeit } 1 - p, \end{cases}$$

wobei  $0 < d < u$ ,  $p \in (0, 1)$  und  $S_0 > 0$  gefordert wird. Nachfolgend ist die Preisentwicklung der Aktie für  $T = 3$  dargestellt:



Weiter definieren wir

$$(Y_t)_{t \in \{0, \dots, T\}} := \left( \frac{S_t}{S_{t-1}} \right)_{t \in \{0, \dots, T\}}$$

auf dem Produktraum  $(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P}) = \left( \tilde{\Omega}_1 \times \dots \times \tilde{\Omega}_T, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P} \right)$ . Dabei sei der Wahrscheinlichkeitsraum für die  $t$ -te Periode gegeben durch

$$\tilde{\Omega}_t := \{u, d\}, \quad \tilde{\mathcal{F}}_t := \mathcal{P}(\tilde{\Omega}_t), \quad \tilde{\mathbb{P}}_t := \tilde{\mathbb{P}}, \quad \text{wobei} \quad \tilde{\mathbb{P}}(\{u\}) := p, \quad \tilde{\mathbb{P}}(\{d\}) := 1 - p.$$

Für  $\omega = (y_1, \dots, y_T)$  mit  $y_t \in \{u, d\}$  für  $t \in \{0, \dots, T\}$  setzen wir:

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) := \tilde{\mathbb{P}}_1(\{y_1\}) \cdot \dots \cdot \tilde{\mathbb{P}}_T(\{y_T\}).$$

Für den Aktienkurs ergibt sich dann

$$S_t = S_0 \prod_{n=1}^t Y_n, \quad t \in \{0, \dots, T\}.$$

Die dem Raum zugrunde liegende Filtration  $(\mathcal{F}_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$  ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &:= \{\emptyset, \Omega\}, \\ \mathcal{F}_t &:= \sigma(Y_1, \dots, Y_t), \quad t \in \{0, \dots, T\}, \end{aligned}$$

wobei  $\mathcal{F}_T := \mathcal{P}(\Omega)$ .

### Annahme 10.1

Im betrachteten CRR-Modell gelte  $d < 1 + r < u$ .

Unter Gültigkeit der oben getroffenen Annahme ist das CRR-Finanzmarktmodell vollständig und arbitragefrei (vgl. [Föllmer/Schied, 2002]). Wie aus der Literatur bekannt ist, ist das risikoneutrale Maß  $\mathbb{Q}$  gegeben durch

$$\mathbb{Q}(\{\omega\}) := \mathbb{Q}_1(\{y_1\}) \cdot \dots \cdot \mathbb{Q}_T(\{y_T\}),$$

wobei

$$\mathbb{Q}_t(\{y_t\}) := \begin{cases} q, & y_t = u, \\ 1 - q, & y_t = d \end{cases}$$

mit

$$q = \frac{1 + r - d}{u - d}.$$

Wir definieren die Maßwechseldichte

$$Z_T := \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$$

sowie

$$L_T := \frac{Z_T}{B_T}.$$

### Satz 10.2

Unter den in diesem Kapitel getroffenen Annahmen gilt die ‚market growth condition‘ (vgl. Satz 5.1):

$$\mathbb{E}[L_T] \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

*Beweis.* Es gilt

$$\mathbb{E}[L_T] = \mathbb{E}\left[\frac{Z_T}{B_T}\right] = \frac{1}{B_T} \mathbb{E}[Z_T] = \left(\frac{1}{1+r}\right)^T \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

Somit folgt die Behauptung. □

### 10.1.2 Turnpike-Aussage im CRR-Modells

Wir betrachten erneut zwei Investoren 0 und 1 mit den zugehörigen klassischen Nutzenfunktionen  $u_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  und  $u_1 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  und dem Anfangsvermögen  $x_0 > 0$ .

Das in diesem Abschnitt betrachtete Portfolio-Problem (angewandt auf die jeweilige Nutzenfunktion  $u_i$  für  $i \in \{0, 1\}$ ) ist gegeben durch

$$(P_{\text{CRR}}) \quad \begin{cases} \sup_{\varphi} \mathbb{E}[u_i(X_T^{\varphi})], \\ X_0^{\varphi} = x_0, \\ (\varphi_t)_{t \in \{0, \dots, T\}} \text{ ist selbstfinanzierend und } (\mathcal{F}_t)_{t \in \{0, \dots, T\}} \text{-adaptiert.} \end{cases}$$

Das zugehörige statische Optimierungsproblem lautet (vgl. Abschnitt 2.2.1)

$$(P_{\text{CRR, statisch}}) \quad \begin{cases} \sup_{X_T} \mathbb{E}[u_i(X_T)], \\ \mathbb{E}[L_T X_T] = x_0 \in \mathbb{R}_+, \\ X_T \text{ ist } \mathcal{F}_T \text{-adaptiert.} \end{cases}$$

Im Weiteren bezeichne  $X_i^T$  das optimale Endvermögen bei Endzeithorizont  $T$  des Investors  $i$ .

Für die betrachteten Handelsstrategien gelten die Notationen

$$\begin{aligned} (\varphi_{0,t}^T)_{t \in \{0, \dots, T\}} &:= ((\alpha_{0,t}^T, \beta_{0,t}^T))_{t \in \{0, \dots, T\}}^{\top}, \\ (\varphi_{1,t}^T)_{t \in \{0, \dots, T\}} &:= ((\alpha_{1,t}^T, \beta_{1,t}^T))_{t \in \{0, \dots, T\}}^{\top}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $\alpha_{i,t}^T$  die Stückzahl der Aktie zum Zeitpunkt  $t$  bei einem Endhorizont  $T$ , die von Investor  $i$  gehalten wird. Mit  $\beta_{i,t}^T$  wird die entsprechende Stückzahl bezeichnet, die in den Bond investiert wird. Weiter halten wir die folgende Definition fest:

**Definition 10.3**

Eine Handelsstrategie  $(\varphi_t)_{t \in \{0, \dots, T\}} := (\alpha_t, \beta_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$  heißt selbstfinanzierend, falls für  $t \in \{1, \dots, T-1\}$  gilt:

$$\varphi_{t-1}^\top \begin{pmatrix} S_t \\ B_t \end{pmatrix} = \varphi_t^\top \begin{pmatrix} S_t \\ B_t \end{pmatrix}.$$

Unter den hier getroffenen Annahmen lässt sich eine Turnpike-Aussage im CRR-Modell zeigen:

**Theorem 10.4**

Es gelten die in diesem Abschnitt getroffenen Annahmen. Weiter gelte für die betrachteten Nutzenfunktionen:

(V1)  $u_i : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$  sei strikt monoton wachsend, strikt konkav, zweifach differenzierbar und erfülle die INADA-Bedingungen und es gelte  $u_i(0) = 0$ .

(V2) Es gelte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u_1'(x)}{u_0'(x)} = 1 \quad (\text{,similar at infinity'}).$$

(V3) Für alle Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$  gelte für  $i \in \{0, 1\}$  (,uniform continuity property'):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_i(a_n)}{u_i(b_n)} = 1.$$

Dann folgt für jede Folge  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$

$$(G1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ L_{T_n} \left| X_0^{T_n} - X_1^{T_n} \right| \right] = 0$$

und es gilt für alle  $t \in \mathbb{N}$ :

$$(G2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \left| \frac{X_{0,t}^{T_n}}{B_t} - \frac{X_{1,t}^{T_n}}{B_t} \right| \right] = 0,$$

$$(G3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{X_{0,t}^{T_n}}{B_t} - \frac{X_{1,t}^{T_n}}{B_t} \right| = 0,$$

$$(G4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_{0,t}^{T_n} - \varphi_{1,t}^{T_n}\|^2 = 0.$$

*Beweis. Zu (G1) und (G2):* Um diese Turnpike-Aussage zu beweisen wird der zeitstetige Beweis von Theorem 5.4 modifiziert werden und für Folgen  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$  angepasst. Allerdings gibt es bei dieser Beweismodifikation einige technische Feinheiten, die aufgrund der veränderten Struktur des betrachteten diskreten Finanzmarktmodells beachtet werden müssen. Wir halten dazu im Vorfeld fest, dass das optimale Endvermögen zum Zeitpunkt  $T$  aufgrund der Gestalt der hier betrachteten Nutzenfunktionen eindeutig bestimmt werden kann und durch  $X_{0,T} = I_0(L_T \lambda_{0,T})$  bzw.  $X_{1,T} = I_1(L_T \lambda_{1,T})$  gegeben ist. Weiter ist bekannt, dass die Lagrange-Multiplikatoren  $\lambda_{0,T} > 0$  und  $\lambda_{1,T} > 0$  eindeutig durch die Nebenbedingung

$$\mathbb{E}[L_T X_{i,T}] = x_0, \quad i \in \{0, 1\} \quad (10.1)$$

bestimmt sind.

Der Beweis der Behauptungen (G1) und (G2) erfolgt, indem wir in den folgenden drei Schritten die nachfolgenden drei Behauptungen zeigen:

(1) Für jede Folge  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{0,T_n}}{\lambda_{1,T_n}} = 1.$$

(2) Für jede Folge  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$  gilt die Behauptung (G1):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[L_{T_n} |I_1(L_{T_n} \lambda_{1,T_n}) - I_0(L_{T_n} \lambda_{0,T_n})|] = 0.$$

(3) Für jede Folge  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$  gilt die Behauptung (G2):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \left| \frac{X_{0,t}^{T_n}}{B_t} - \frac{X_{1,t}^{T_n}}{B_t} \right| \right] = 0.$$

Nach Satz 5.9 wissen wir bereits, dass die folgenden beiden Eigenschaften gelten:

$$(H1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{I_1(x)}{I_0(x)} = 1,$$

(H2) Für alle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  gilt für  $i \in \{0, 1\}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_i(x_n)}{I_i(y_n)} = 1.$$

### Schritt 1:

Wir zeigen zuerst: Für jede Folge  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{0,T_n}}{\lambda_{1,T_n}} = 1.$$

Sei dazu  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine beliebige Folge mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$ .

Wegen der Symmetrie dieser Fragestellung ist es ausreichend zu zeigen, dass

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{0, T_n}}{\lambda_{1, T_n}} \geq 1 \quad (10.2)$$

gilt. Dies zeigen wir durch Widerspruch:

Angenommen die Aussage in (10.2) gilt nicht. Dann existieren eine Zahl  $\delta < 1$  und eine unbeschränkte Menge  $\mathcal{T} \subset \mathbb{N}$  von Endzeitpunkten, sodass für alle  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}$  gilt:

$$\frac{\lambda_{0, T_n}}{\lambda_{1, T_n}} \leq \delta \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{0, T_n} \leq \delta \lambda_{1, T_n}. \quad (10.3)$$

Für den weiteren Beweis benötigen wir die folgenden beiden Vorbemerkungen:

**Vorbemerkung (VB1):** Zu jedem  $\epsilon > 0$  existiert eine Folge  $(T_n^\epsilon)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n^\epsilon = \infty$ , sodass für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\mathbb{P}(L_{T_n^\epsilon} \lambda_{1, T_n^\epsilon} \geq \epsilon) < 1.$$

**Beweis von Vorbemerkung (VB1):**

Angenommen die Behauptung gelte nicht. Dann existiert ein  $\epsilon > 0$ , sodass es für alle Folgen  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$  eine Zahl  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$\mathbb{P}(L_{T_{n_0}} \lambda_{1, T_{n_0}} \geq \epsilon) = 1$$

gibt. Wir betrachten dann die Folge  $(\tilde{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\tilde{T}_n := T_{n+n_0}$  und erhalten

$$(\tilde{T}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T} \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{T}_n = \infty.$$

Somit muss es nach Obigem wiederum eine Zahl  $n_1 > n_0$  mit

$$\mathbb{P}(L_{\tilde{T}_{n_1}} \lambda_{1, \tilde{T}_{n_1}} \geq \epsilon) = 1$$

geben. Auf diese Weise lässt sich eine Folge  $(T_{n_k})_k \subset \mathcal{T}$  konstruieren, für die

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_{n_k} = \infty \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(L_{T_{n_k}} \lambda_{1, T_{n_k}} \geq \epsilon) = 1 \quad (10.4)$$

gilt. Mit dieser Folge ergibt sich dann ein Widerspruch zur Voraussetzung  $x_0 > 0$ :

$$\begin{aligned}
x_0 &= \mathbb{E} \left[ L_{T_{n_k}} I_1 \left( L_{T_{n_k}} \lambda_{1, T_{n_k}} \right) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ L_{T_{n_k}} I_1 \left( L_{T_{n_k}} \lambda_{1, T_{n_k}} \right) \mathbf{1} \{ L_{T_{n_k}} \lambda_{1, T_{n_k}} \geq \epsilon \} \right] \\
&\leq I_1(\epsilon) \mathbb{E} \left[ L_{T_{n_k}} \right] \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Die erste Gleichheit in der obigen Gleichungs-Ungleichungskette ergibt sich dabei aus den Nebenbedingungen des Optimierungsproblems, die zweite Gleichheit aufgrund von Gleichung (10.4). Abschließend wurde Satz 10.2 verwendet. Somit ist die Gültigkeit von Vorbemerkung (VB1) bewiesen.

**Vorbemerkung (VB2):**

Aus den Vorüberlegungen in den stetigen Kontexten wissen wir bereits (vgl. Beweis zu Theorem 5.8), dass es Zahlen  $k > 1$  und  $\epsilon > 0$  gibt, sodass für alle  $x \in (0, \epsilon)$  gilt:

$$\frac{I_0(\delta x)}{I_1(x)} \geq \sqrt{k} > 1.$$

Mit Hilfe der beiden Vorbemerkungen lässt sich nun der erste Schritt zeigen:

Wir wählen  $\epsilon > 0$  aus der Vorbemerkung (VB2) und die zugehörige Folge  $(T_n^\epsilon)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T}$  aus Vorbemerkung (VB1). Unter Annahme der Gültigkeit von Gleichung (10.3) folgt dann der erwünschte Widerspruch:

$$\begin{aligned}
x_0 &= \mathbb{E} \left[ L_{T_n^\epsilon} I_0 \left( L_{T_n^\epsilon} \lambda_{0, T_n^\epsilon} \right) \right] \\
&\geq \mathbb{E} \left[ L_{T_n^\epsilon} I_0 \left( L_{T_n^\epsilon} \delta \lambda_{1, T_n^\epsilon} \right) \mathbf{1} \{ L_{T_n^\epsilon} \lambda_{1, T_n^\epsilon} < \epsilon \} \right] \\
&\stackrel{\text{(VB2)}}{\geq} \sqrt{k} \mathbb{E} \left[ L_{T_n^\epsilon} I_1 \left( L_{T_n^\epsilon} \lambda_{1, T_n^\epsilon} \right) \mathbf{1} \{ L_{T_n^\epsilon} \lambda_{1, T_n^\epsilon} < \epsilon \} \right] \\
&= \sqrt{k} x_0 - \sqrt{k} \mathbb{E} \left[ L_{T_n^\epsilon} I_1 \left( L_{T_n^\epsilon} \lambda_{1, T_n^\epsilon} \right) \mathbf{1} \{ L_{T_n^\epsilon} \lambda_{1, T_n^\epsilon} \geq \epsilon \} \right] \\
&\geq \sqrt{k} x_0 - \sqrt{k} I_1(\epsilon) \mathbb{E} \left[ L_{T_n^\epsilon} \right] \rightarrow \sqrt{k} x_0, n \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{10.5}$$

Abschließend wurde Satz 10.2 verwendet. Da  $k > 1$  gilt, ist dies ein Widerspruch. Damit folgt die Gültigkeit von (10.2) und somit Schritt 1.

**Schritt 2:**

Aus Vorherigem (vgl. (5.6)) wissen wir bereits, dass es zu allen Zahlen  $\gamma > 0$  zugehörige Zahlen  $\delta_\gamma < 1$  und  $\epsilon_\gamma > 0$  gibt, sodass für alle  $x \in (0, \epsilon_\gamma)$  gilt:

$$\begin{cases} \frac{I_0(\delta_\gamma^{-1} x)}{I_1(x)} & \geq (1 - \gamma)^2, \\ \frac{I_0(\delta_\gamma x)}{I_1(x)} & \leq (1 + \gamma)^2. \end{cases}$$

Wir zeigen, dass für alle Folgen  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} := (T_n^{\epsilon_\gamma})_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty$  gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [L_{T_n} | I_1(L_{T_n} \lambda_{1,T_n}) - I_0(L_{T_n} \lambda_{0,T_n})] = 0.$$

Dazu betrachten wir eine entsprechende Folge  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und wählen  $n \geq N_0 \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $n \geq N_0$  gilt:

$$\delta \leq \frac{\lambda_{0,T_n}}{\lambda_{1,T_n}} \leq \frac{1}{\delta}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} [L_{T_n} | I_1(L_{T_n} \lambda_{1,T_n}) - I_0(L_{T_n} \lambda_{0,T_n}) | \mathbf{1}\{L_{T_n} \lambda_{1,T_n} \geq \epsilon_\gamma\}] \\ & \leq (I_1(\epsilon_\gamma) + I_0(\delta_\gamma \epsilon_\gamma)) \mathbb{E} [L_{T_n}] \rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Außerdem gilt (vgl. Beweis von (5.8))

$$\mathbb{E} [L_{T_n} | I_1(L_{T_n} \lambda_{1,T_n}) - I_0(L_{T_n} \lambda_{0,T_n}) | \mathbf{1}\{L_{T_n} \lambda_{1,T_n} < \epsilon_\gamma\}] \leq (\gamma^2 + 2\gamma) x_0.$$

Da  $\gamma$  beliebig ist, folgt die Behauptung. Somit gilt Schritt 2 und damit die Behauptung (G1).

### Schritt 3:

Schritt 3 und damit Behauptung (G2) kann analog zu Theorem 5.8, Schritt 3 gezeigt werden.

**Zu (G3):** Im zu Grunde liegenden CRR-Modell können bis zum Zeitpunkt  $t$  genau  $2^t$  Zustände angenommen werden. Diese seien durch die Menge  $\{\omega_1, \dots, \omega_{2^t}\}$  gegeben. Nach Behauptung (G1) muss gelten:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[ \left| \frac{X_{0,t}^{T_n}}{B_t} - \frac{X_{1,t}^{T_n}}{B_t} \right| \right] = \frac{1}{B_t} \sum_{k=1}^{2^t} \left| X_{0,t}^{T_n} \{\omega_k\} - X_{1,t}^{T_n} \{\omega_k\} \right| \mathbb{Q}(\{\omega_k\}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (10.6)$$

Da zudem für alle  $k$  und  $n$

$$|X_{0,t} \{\omega_k\}^{T_n} - X_{1,t} \{\omega_k\}^{T_n}| \geq 0$$

sowie  $\mathbb{Q}(\{\omega_k\}) > 0$  gelten, folgt nach (10.6):

$$|X_{0,t} \{\omega_k\}^{T_n} - X_{1,t} \{\omega_k\}^{T_n}| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Somit ist die Gültigkeit von Schritt 3 und Behauptung (G3) bewiesen.

**Zu (G4):** Es sei an dieser Stelle an die Notationen

$$\begin{aligned}
(\varphi_{0,t}^{T_n})_{t \in \{0, \dots, T_n\}} &:= ((\alpha_{0,t}^{T_n}, \beta_{0,t}^{T_n}))_{t \in \{0, \dots, T_n\}}, \\
(\varphi_{1,t}^{T_n})_{t \in \{0, \dots, T_n\}} &:= ((\alpha_{1,t}^{T_n}, \beta_{1,t}^{T_n}))_{t \in \{0, \dots, T_n\}},
\end{aligned}$$

erinnert. Dabei bezeichnet  $\alpha_{i,t}^{T_n}$  die Stückzahl der Aktie zum Zeitpunkt  $t$  bei einem Endhorizont  $T_n$ , welche vom Investor  $i$  gehalten wird. Mit  $\beta_{i,t}^{T_n}$  wird die entsprechende Stückzahl bezüglich des Bonds bezeichnet.

Im CRR-Modell gilt dabei (vgl. [ShreveI, 2004] bzw. [Williams, 2006])

$$\alpha_{i,t}^{T_n} := \frac{X_{i,t+1}^{T_n}((y_1, \dots, y_t, u)) - X_{i,t+1}^{T_n}((y_1, \dots, y_t, d))}{(u-d)S_t}$$

und

$$\beta_{i,t}^{T_n} := \frac{uX_{i,t+1}^{T_n}((y_1, \dots, y_t, u)) - dX_{i,t+1}^{T_n}((y_1, \dots, y_t, d))}{(u-d)B_{t+1}}.$$

Somit ergibt sich nach (G3)

$$\begin{aligned}
|\alpha_{0,t}^{T_n} - \alpha_{1,t}^{T_n}| &\leq \frac{1}{(u-d)S_t} (|X_{0,t+1}^{T_n}((y_1, \dots, y_t, u)) - X_{1,t+1}^{T_n}((y_1, \dots, y_t, u))| + \\
&\quad |X_{0,t+1}^{T_n}((y_1, \dots, y_t, d)) - X_{1,t+1}^{T_n}((y_1, \dots, y_t, d))|) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_{0,t}^{T_n} - \alpha_{1,t}^{T_n}| = 0.$$

Aufgrund der Selbstfinanziertheitseigenschaft folgt dann ebenfalls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\beta_{0,t}^{T_n} - \beta_{1,t}^{T_n}| = 0.$$

Somit ergibt sich insgesamt die Behauptung (G4):

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_{0,t}^{T_n} - \varphi_{1,t}^{T_n}\|^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (\alpha_{0,t}^{T_n} - \alpha_{1,t}^{T_n})^2 + (\beta_{0,t}^{T_n} - \beta_{1,t}^{T_n})^2 \right) = \\
&= \left( \lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_{0,t}^{T_n} - \alpha_{1,t}^{T_n}| \right)^2 + \left( \lim_{n \rightarrow \infty} |\beta_{0,t}^{T_n} - \beta_{1,t}^{T_n}| \right)^2 = 0.
\end{aligned}$$

□

### Anmerkung 10.5

Die Gültigkeit der Vorbemerkung (VB1) aus dem Beweis von Theorem 10.4 ist für den Fall, dass man einen diskreten Finanzmarkt betrachtet, zentral. Ansonsten würde in (10.5) der Widerspruch nicht gelingen.

**Bemerkung 10.6**

(i) Nach Theorem 10.4 gilt ebenfalls

$$(G2^*) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{s \leq t, s \in \mathbb{N}} \left| \frac{X_{0,s}^{T_n}}{B_t} - \frac{X_{1,s}^{T_n}}{B_t} \right| = 0, \quad \text{für alle } t \in \mathbb{N},$$

$$(G3^*) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{s \leq t, s \in \mathbb{N}} \|\varphi_{0,s}^{T_n} - \varphi_{1,s}^{T_n}\|^2 = 0, \quad \text{für alle } t \in \mathbb{N}.$$

Der Vorteil der obigen Darstellung besteht darin, dass es sich um das Äquivalent zur Formulierung der entsprechenden Turnpike-Aussage im stetigen Fall handelt und die beiden Theoreme somit besser verglichen werden können (vgl. Theorem 5.4). Im diskreten CRR-Finanzmarktmodell kann sogar die punktweise Konvergenz der optimalen Endvermögen der beiden Investoren gezeigt werden, wohingegen sich im stetigen Fall lediglich eine Aussage über die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit treffen lässt. Die Behauptungen  $(G2^*)$  und  $(G3^*)$  ergeben sich direkt aus den Behauptungen  $(G2)$  und  $(G3)$ , sofern man die endliche Summe mithilfe der Dreiecksungleichung abschätzt.

(ii) Die Behauptung  $(G1)$  aus Theorem 10.4 kann unter Annahme der Gültigkeit der in diesem Theorem geforderten Voraussetzungen in jedem endlichen, arbitragefreien und vollständigen Finanzmarkt gezeigt werden. Die Beweisführung bleibt dabei identisch.

## 10.2 Beispiel zu Turnpike-Aussagen im CRR-Modell

Abbildung 10.1 zeigt die Funktionen  $T \mapsto \lambda_{0,T}/\lambda_{1,T}$  und  $T \mapsto \mathbb{E}[L_T|X_0^T - X_1^T|]$  für die Parameter  $u = 1.2, d = 0.9, r = 0.1, x_0 = 1$  und  $p = 0.6$  im CRR-Modell. Es ist dabei zu erkennen, dass entsprechend der Aussage von Theorem 10.4 der Quotient der Lagrange-Parameter gegen den Wert Eins konvergiert. Weiter konvergiert die erwartete absolute Differenz der Endvermögen gegen den Wert Null.

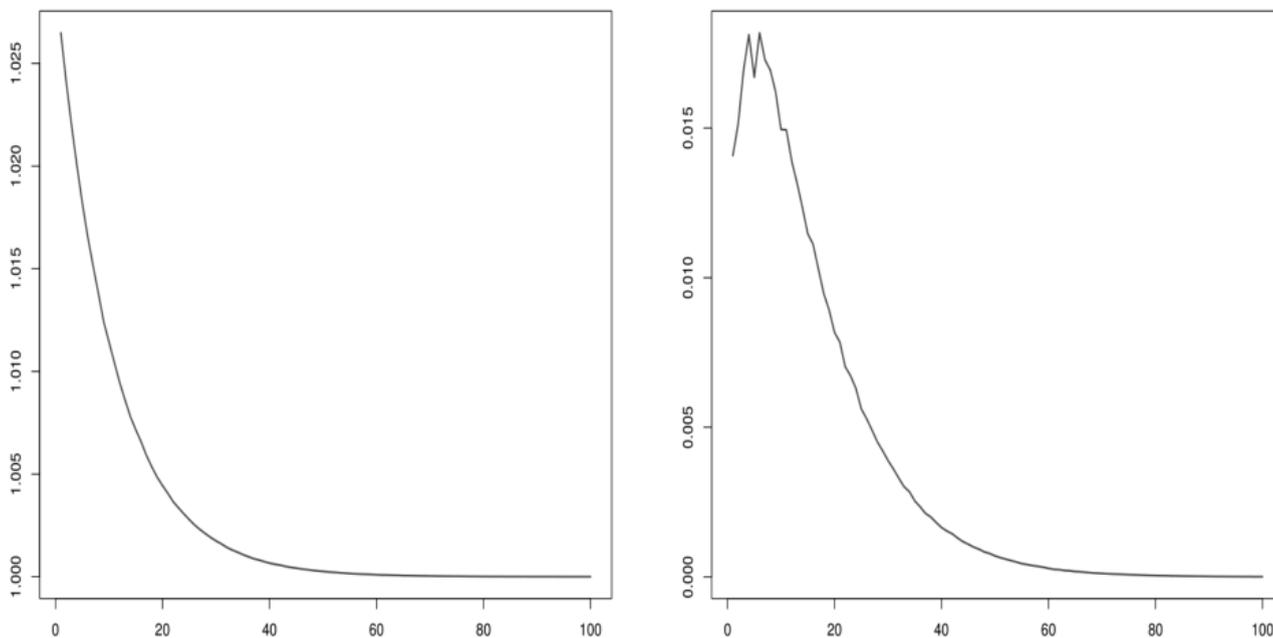


Abbildung 10.1: Die Funktionen  $T \mapsto \frac{\lambda_{0,T}}{\lambda_{1,T}}$  (links) und  $T \mapsto \mathbb{E}[L_T|X_0^T - X_1^T|]$  (rechts).

## Literaturverzeichnis

[Allais, 1953]

M. Allais: *Le comportement de l'homme rational devant le risque, critique des postulats et axiomes de l'école Américaine*, *Econometrica*, S.503-546 (1953)

[Bauer, 2002]

H. Bauer: *Wahrscheinlichkeitstheorie*, de Gruyter, Auflage: 5 (2002)

[Bäuerle/Rieder, 2011]

N. Bäuerle, U. Rieder: *Markov Decision Processes with Applications to Finance*, Springer (2011)

[Bernard/Chen/Vanduffel, 2013]

C. Bernard, J. S. Chen, S. Vanduffel : *Rationalizing Investors Choice*, arXiv preprint arXiv:1302.4679 (2013)

[Björk/Davis/Landén, 2010]

T. Björk, M. Davis, C. Landén: *Optimal investment unter partial information*, *Mathematical Methods in Operations Research*, Vol. 71, No. 2, S. 371-399 (2010)

[Campbell/Hentschel, 1992]

J.Y. Campbell, L. Hentschel: *No news is good news: An asymmetric model of changing volatility in stock returns*, *Journal of Financial Economics* 31 (1992)

[Chen/Pelsser/Vellekoop, 2011]

A. Chen, A. Pelsser, M. Vellekoop : *Modeling Non-Monotone Risk Aversion Using SAHARA Utility Functions*, *Journal of Economic Theory*, Vol. 146 (2011)

[Cox/Huang, 1992]

J. C. Cox, C. Huang: *A continuous time portfolio turnpike theorem*, *Journal of Economic Dynamics and Control* 16 (1992)

[Cox/Ross, 1976]

J. C. Cox, S. A. Ross: *The Valuation of options for alternative stochastic processes*, *Journal of Financial Economics* 3 (1976)

- [Dana/Jeanblanc, 2007]  
R.-A. Dana, M Jeanblanc: *Financial Markets in Continuous Time*, Springer (2007)
- [Davis, 2004]  
M. H. A. Davis: *Complete-market Models of Stochastic Volatility*, Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Finance, Vol. 460, No. 2041 (2004)
- [Dybvig/Rogers/Back, 1999]  
P. Dybvig, L. Rogers, K. Back: *Portfolio Turnpikes*, Review of Financial Studies, Vol. 12, No. 1, S. 165-195 (1999)
- [Guasoni/Kardaras/Robertson/Xing, 2014]  
P. Guasoni, C. Kardaras, S. Robertson, H. Xing: *Abstract, classic, and explicit turnpikes*, Finance and Stochastics (2014)
- [Föllmer/Schied, 2002]  
H. Föllmer, A. Schied: *Stochastic Finance - An Introduction in Discrete Time*, de Gruyter (2002)
- [Hakansson, 1974]  
N. H. Hakansson: *Convergence to isoelastic utility and policy in multiperiod portfolio choice*, Journal of Financial Economics (1974)
- [Huang/Zariphopoulou, 1999]  
C.-F. Huang, T. Zariphopoulou: *Turnpike behavior of long-term investments*, Finance Stochast. 3 (1999)
- [Hubermann/Ross, 1983]  
G. Hubermann, S. Ross: *Portfolio turnpike theorems, risk aversion, and regularly varying utility functions*, Econometrica 51 (1983)
- [Korn, 1997]  
R. Korn, *Optimal Portfolios - Stochastic Models for Optimal Investment and Risk Management in Continuous Time*, World Scientific (1997)
- [Korn/Korn, 1999]  
R. u. E. Korn, *Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung*, Vieweg, 2. Auflage (1999)
- [Lakner, 1995]  
P. Lakner, *Utility maximation with partial information*, Stochastic Processes and their Applications 56, S. 247 - 249 (1995)

- [Lakner, 1998] P. Lakner *Optimal trading strategy for an investor: the case of partial information*, Stochastic Processes and their Applications 76, S. 77 - 97 (1998)
- [Leland, 1972] H. Leland: *On turnpike portfolios*, Mathematical Methods in Investment and Finance, Amsterdam (1972)
- [Liptser/Shiryayev, 2004] R. Liptser, A. Shiryayev: *Statistics of Random Processes*, 2. Auflage, Springer Verlag (2004)
- [Longo/Mainini, 2016] M. Longo, A. Mainini: *Learning and Portfolio Decisions for CRRA Investors*, International Journal of Theoretical and Applied Finance (2016)
- [Jin, 1998] X. Jin: *Consumption and portfolio turnpike theorems in a continuous-time finance model*, Journal of Economic Dynamics and Control 22 (1998)
- [Jin/Zhou, 2008] H. Jin, X. Y. Zhou: *Behavioral portfolio selection in continuous time*, Mathematical Finance, Vol. 18, No. 3, S. 385-426 (2008)
- [Kahneman/Tversky, 1979] D. Kahneman, A. Tversky: *Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk*, Econometrica, Vol. 47, No. 2, S. 263-292 (1979)
- [Kahneman/Tversky, 1992] D. Kahneman, A. Tversky: *Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty*, Journal of Risk and Uncertainty 5, S. 297-323 (1992)
- [Merton, 1971/1973] R. C. Merton : *Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model*, Journal of Economic Theory, Vol. 3, pp. 373-413; erratum (1973), Journal of Economic Theory, Vol. 6, pp. 213-214. (1971/1973)
- [Mossin, 1968] J. Mossin: *Optimal multiperiod portfolio policies*, The Journal of Business 41 (1968)

[Pliska, 1986]

S. R. Pliska: *A stochastic calculus model of continuous trading: Optimal portfolio*, Mathematics of Operations Research, Vol. 11, No. 2 (1986)

[Poterba/Summers, 1986]

J. M. Poterba, L. H. Summers: *The persistence of volatility and stock market fluctuations*, American Economic Review 76 (1986)

[Rieder/Bäuerle, 2005]

U. Rieder, N. Bäuerle: *Portfolio optimization with unobservable Markov-modulated drift process*, Journal of Applied Probability 42, 362-278 (2005)

[Rieger/Wang, 2006]

M. O. Rieger, M. Wang: *Cumulative Prospect Theory and the St. Petersburg Paradox*, Mannheim, Sonder-Forschungs-Bereich 504, No. 04-28 (2006)

[ShreveI, 2004]

S. Shreve: *Stochastic Calculus for Finance I*, Springer (2004)

[ShreveII, 2004]

S. Shreve: *Stochastic Calculus for Finance II*, Springer (2004)

[Williams, 2006]

R. Williams: *Introduction to the Mathematics of Finance*, American Mathematical Society (2006)