Karlsruher Institut für Technologie

Computerbeweise und ihr Einfluss auf die Philosophie der Mathematik

Zur Erlangung von Titel und Würden
einer Doktorin der Philosophie (Dr. phil.)
von der Fakultät für Geistes- und Sozialwissenschaft
des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)
genehmigte Dissertation
von

Ulla Britta Ebert

Gutachter: Prof. Dr. Hans-Peter Schütt
Zweitgutachter: Prof. Dr. Gregor Betz

Datum der mündlichen Prüfung: 19. Dezember 2016

Inhaltsverzeichnis

Dialog with Computer in the Proof of the Four-Color Theorem

You've searched all the cases, sage Machine.
List the largest set you've seen.
Yellow, red, blue, green.

O Computer, is it true?
Four Magic Markers will make do,
Green, yellow, red, blue?

My terminal output sits there spread;
I'll say once more what I just said:
Blue, green, yellow, red.

So work you wetware till it's Jell-O,
Four's still enough; it's finished, Fellow:
Red, green, blue, yellow.

[Memory 2001, S. 313]

1. Einleitung

Lange Zeit wurde der Mathematik durch die Philosophie eine Sonderstellung unter den Wissenschaften zugeschrieben. Dies wird vor allem durch die formelle Natur und das deduktive Vorgehen begründet, das der Mathematik eigen ist. Schon Platon [2005] beschrieb mathematische Erkenntnisse als Ideen, die von der Erfahrung unabhängig sind. Anders als beispielsweise in der Physik dienen Experimente nicht als Grundlage zur Bildung neuer Theorien.

In der Mathematik wird ein Beweis klassischer Weise mit Stift und Papier geführt. Aus Axiomen werden mit wahrheitsbewahrenden Schlussregeln schrittweise Ergebnisse abgeleitet. Geht man davon aus, dass die Axiome wahr sind, so erhält man also eine wahre Folgerung, die nicht mehr auf Kongruenz mit der physikalischen Wirklichkeit überprüft werden muss.

Im Jahr 1977 veröffentlichten Appel und Haken erstmals einen Beweis, der mit Hilfe eines Computers geführt wurde [Appel & Haken 1977], man bezeichnete ihn als *»computer-assisted proof«* bzw. als Computerbeweis. Dieser erste Computerbeweis zeigte den Vier-Farben-Satz, der besagt, dass vier Farben ausreichen, um Gebiete einer beliebig großen Landkarte so einzufärben, dass keine zwei Gebiete gleicher Farbe aneinandergrenzen. Der Beweis benötigte damals 1200 Stunden Berechnungszeit. Heute dauert es auf einem durchschnittlichen PC ca. 3 Minuten, um den Beweis durchzuführen, aber es ist nicht möglich, ihn per Hand nachzuvollziehen. Weiterhin gibt es bis heute keinen alternativen Beweis, der ohne Nutzung des Computers auskommt.

Die Veröffentlichung dieses Beweises löste eine Kontroverse unter Mathematikern aus. In mathematischen Fachzeitschriften debattierte man darüber, ob man diesen Beweis anerkennen solle. Hauptkritikpunkt war, dass eine vollständige manuelle Überprüfung unmöglich war und somit dem Computer »geglaubt« werden musste. Es gab Vorschläge, Computerbeweisen einen neuen Status zwischen unbewiesener Vermutung und Beweis zuzuweisen und somit die klassische Mathematik um eine neue Kategorie zu erweitern. Eine andere Idee war, Computerbeweise als Experimente zu betrachten. Dies impliziert ein induktives

Vorgehen, etwas, das bis dato jedoch in der Mathematik unüblich war. Es entwickelte sich eine grundsätzliche Diskussion über den Einsatz empirischer Methoden in der Mathematik.

Vermehrt kamen Forderungen von Mathematikern nach einer neuen Philosophie der Mathematik auf, die sich an die aktuelle Praxis anpasst. Die Diskussion erreichte ein solches Ausmaß, dass der Mathematiker und Philosoph Gregory Chaitin 2002 sogar scherzte, der Computer sei (nur) erfunden worden, um philosophische Fragen über die Grundlagen der Mathematik zu klären: *»the computer was invented in order to help to clarify a philosophical question about the foundations of mathematics«* [Chaitin 2002, S. 164].

Wir wollen in dieser Arbeit zunächst den Verlauf der eben skizzierten Diskussion über Computerbeweise detailliert untersuchen und die unterschiedlichen Standpunkte herausarbeiten. Insbesondere interessiert uns, wie und warum sich die Diskussion von den speziellen Problemen, die ein Computerbeweis mit sich bringt, auf die allgemeinen philosophischen Grundlagen der Mathematik ausweitete. Es steht zu vermuten, dass eine Angleichung der Philosophie an die mathematische Praxis überfällig war und der erste Computerbeweis den Stein des Anstosses lieferte. Dies würde bedeuten, dass bereits zuvor eine Diskrepanz zwischen der Philosophie der Mathematik und der »Philosophie der Mathematiker« bestand. Diese These sowie Umfang und Inhalt der Diskrepanz erscheint uns untersuchenswert.

Schließlich gilt es herauszufinden, welchen Stellenwert Computerbeweise heute unter Mathematikern einnehmen und wie das Hilfsmittel »Computer« die Praxis der Mathematik verändert hat. Außerdem möchten wir klären, ob seitens der Philosophie der Mathematik der Versuch unternommen wurde, das Phänomen Computerbeweis einzugliedern und ob Mathematiker die Philosophie der Mathematik heute als ihre Philosophie anerkennen. Im Rahmen dieses Themenkreises gehen wir auch der Frage nach, ob der Computer eventuell sogar einen Paradigmenwechsel nach Kuhn [2014] eingeläutet hat.

2. Beweise und Platonismus

In diesem einführenden Kapitel stellen wir einige Begriffe und Dinge vor, die wir im weiteren Verlauf der Arbeit benötigen werden. Es gliedert sich in zwei Teile. Der erste Teil handelt von mathematischen Beweisen. Im zweiten Teil stellen wir die platonistische Auffassung der Mathematik vor.

2.1. Mathematische Beweise

In diesem Abschnitt widmen wir uns dem mathematischen Beweis. Zunächst geben wir mögliche Definitionen und erklären, was Mathematiker unter einem Beweis verstehen. Im Folgenden klären wir, warum der Beweis in der Mathematik eine zentrale Rolle spielt und welche speziellen Anforderungen an ihn gestellt werden. In diesem Zusammenhang erläutern wir die Begriffe Strenge, Sicherheit und Apriorität. Anschließend widmen wir uns der Frage, wie ein Beweis überprüft wird bzw. was einen Beweis glaubwürdig macht. Wir schildern das Gutachterverfahren, ein Verfahren, welches sich in der Mathematik etabliert hat, um Beweise zu überprüfen und welches zur Akzeptanz eines Beweises innerhalb der mathematischen Gemeinschaft führt. Anhand eines Beispiels illustrieren wir außerdem, wie sich ein Beweis formalisieren und in eine Form bringen lässt, die man einer computergestützten Prüfung mittels eines automatischen Beweisers unterziehen kann. Zu guter Letzt führen wir den Begriff des Computerbeweises ein.

2.1.1. Was ist ein Beweis?

2.1.1.1. Der Beweis – in der Theorie

Am Anfang einer mathematischen Entdeckung steht eine **Vermutung**. Diese entsteht wie in anderen Wissenschaften meist durch die Beobachtung eines Sachverhaltes (z. B. der Entdeckung gewisser Regelmässigkeiten) und entsprechenden Plausibilitätsüberlegungen. Während man in den Naturwissenschaften Vermutungen mit Hilfe von Experimenten überprüft, benötigt man in der Mathematik einen **Beweis**, um die Vermutung zu bestätigen. Ein Beweis leitet die Aussage der Vermutung aus Prämissen mit Hilfe von gültigen

Schlussregeln deduktiv her. Prämissen sind Grundannahmen (sogenannte **Axiome**[1]) oder bereits bewiesene Aussagen. Vergleiche hierzu die Definition von Griffins:

> *A mathematical proof is a formal and logical line of reasoning that begins with a set of axioms and moves through logical steps to a conclusion.*
> [Griffiths 2000, S. 2]

Sowie die formale Definition von Devlin[2]:

> *Der Beweis einer mathematischen Annahme Φ besteht aus einer endlichen Folge ϕ_1,ϕ_2,..., ϕ_n, so dass $\phi_n = \Phi$ und für alle $i = 1, \ldots, n-1$ gilt: Φ_{i+1} ist entweder ein Axiom oder folgt aus $\Phi_1,\ldots,\Phi_i$ aus einer logischen Regel.*
> [Devlin 1996]

Eine durch einen Beweis bestätigte Vermutung nennt man **Satz**. Ist ein Satz einmal bewiesen worden, ist er für immer wahr. Dies lässt sich auf die besondere Sicherheit des Validierungsverfahrens zurückführen. Die deduktive Schlussweise des Beweises garantiert, dass jeder Schritt eines Beweises logisch zwingend ist. Der durch einen Beweis bewiesene Satz kann ohne Bezugnahme auf Erfahrungs-/Sinneswahrnehmung, also **apriori**, gewusst werden - diese Besonderheit wird in der Definition eines Beweises bereits durch Kitcher herausgestellt:

> *We can now define a proof as a sequence of statements such that every member of the sequence is either a basic a priori statement or a statement which follows from previous members of the sequence in accordance with some apriority-preserving rule of interference.*
> [Kitcher 1984, S. 38]

Wir werden gleich bei der Darstellung der Eigenschaften eines Beweises darauf zurückkommen.

Bei einem Beweis handelt es sich also um die deduktive Herleitung der Wahrheit[3] einer Aussage aus einer Menge von Axiomen und bereits bewiesenen Aussagen. Mathematische Beweise dieser Form lassen sich auf Euklid zurückführen, welcher als Begründer der axiomatischen Theorie gilt. Er veröffentlichte ca. 350 v. Chr. seine »Elemente«, in denen er sich an einer systematischen Herleitung damals bekannter mathematischer Aussagen aus einigen Grundannahmen versuchte. Mit diesem axiomatischem Zugang lieferte er einen Standard für die logische mathematische Argumentation, der auch heute noch anerkannt wird [vgl. Stewart 1990; Beutelspacher 2011].

[1] Anhänger einer inhaltlichen Axiomatik halten diese Axiome für wahr und rechtfertigen dies über ihre Evidenz. So sagt Hilbert in seinen *Grundlagen der Mathematik*, dass »[...] *die inhaltliche Axiomatik ihre Grundbegriffe durch den Hinweis auf bekannte Erlebnisse einführt und ihre Grundsätze entweder als evidente Tatsachen hinstellt, die man sich klarmachen kann, oder sie als Extrakt von Erfahrungskomplexen formuliert*« [Hilbert & Bernays 1968, S.2]. Im Gegensatz dazu spricht er sich jedoch für eine formale Axiomatik aus. Auf inhaltliche Betrachtung und Untersuchung des Wahrheitswertes eines Axioms könne man verzichten, da es für die weiteren Schlussfolgen keine Rolle spielt, ob das Axiom wahr oder unwahr ist. Lediglich auf Vollständigkeit, Unabhängigkeit und Widerspruchsfreiheit der Axiome muss geprüft werden.

[2] Es wird implizit vorausgesetzt, dass ϕ_1 ein Axiom ist.

[3] Wie wir in Abschnitt 2.2.5 sehen werden, ist die Definition von Wahrheit in Bezug auf Beweise nicht ganz unproblematisch.

2.1.1.2. Der Beweis – ein Beispiel

Mathematische Beweise lassen sich anhand der verschiedenen Vorgehensweisen unterscheiden. Im Folgenden stellen wir zunächst vier verschiedene Beweisarten vor und führen danach einen konkreten Beweis exemplarisch.

Beweisarten

Beim **direkten Beweis** folgert man die gewünschte Aussage direkt aus den Axiomen. Wenn wir bspw. wissen, dass es heute regnet und Strassen bei Regen nass werden, dann folgern wir durch Kombination dieser beiden Aussage direkt, dass heute die Strassen nass sind.

Ein **indirekter Beweis** erzeugt aus der Annahme, die zu beweisende Behauptung sei falsch, einen Widerspruch. Man nimmt an, die Behauptung sei falsch und wendet dann die gleichen Methoden wie beim direkten Beweis an. Im obigen Beispiel nehmen wir also an, die Strassen sind heute nicht nass. Dann folgt direkt per Umkehrschluss, dass es heute nicht geregnet hat. Dies ist ein Widerspruch zum Wissen, dass es heute regnet.

Der **Beweis durch vollständige Induktion** ist ein Verfahren zum Beweis von Sätzen der Form »Für jede natürliche Zahl n gilt ... «. Man zeigt zuerst, dass die Aussage für $n = 1$ wahr ist. Danach setzt man die Aussage für ein beliebiges n als wahr voraus und zeigt, dass sie dann auch für $n+1$ gilt. Kombiniert man diese beiden Erkenntnisse, erhält man aus der Korrektheit für $n = 1$ die Wahrheit der Aussage für $n = 2$. Aus der Wahrheit der Aussage für $n = 2$ folgt dann die Wahrheit der Aussage für $n = 3$. Dieses Argumentation lässt sich beliebig fortführen und wir erhalten somit die gewünschte Aussage für alle natürlichen Zahlen.

Bei **v**ollständiger Fallunterscheidung werden alle möglichen Fälle identifiziert und danach einzeln betrachtet und bewiesen[4].

Diese Aufzählung ist weder vollständig noch disjunkt. In komplizierteren Beweisen werden die obigen Verfahren häufig kombiniert oder auch gänzlich andere Konzepte verwendet. Für eine weitere Übersicht über die verschiedenen Beweisarten siehe z.B. Wilder [1994].

Wurzel 2 ist irrational

In diesem Abschnitt wollen wir den Beweis der Irrationalität von Wurzel 2 aus Euklids Elementen vorstellen. Es handelt sich um einen der ältesten bekannten Widerspruchsbeweise. Dieses Beispiel werden wir im Laufe dieses Kapitels mehrfach wieder aufnehmen, um die verschiedenen Formen, die ein Beweis haben kann, zu illustrieren.

Die hier vorgestellte Version des Beweises findet sich in ähnlicher Form in vielen Standardlehrbüchern [z. B. Heuser 2009, S. 27f]. Der Originalbeweis von Euklid findet sich im Anhang B.1.

[4] Diese Methode wird auch von Appel und Haken zum Beweis des Vierfarbensatzes angewendet und wird uns im weiteren Verlauf der Arbeit wiederholt begegnen (das Identifizieren unter dem Begriff »discharging« und das Untersuchen der Einzelfälle unter dem Begriff »reducibility« in unserer Beweisskizze des Vierfarbensatzes in Abschnitt 3.1.2).

Die Aussage, die wir beweisen wollen, ist: Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational. Hierzu benötigen wir folgende Definition: Eine Zahl heißt **irrational**, wenn sie sich nicht als Bruch $\frac{a}{b}$ zweier ganzer Zahlen $a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0$ schreiben lässt. Wir führen den Beweis indirekt, indem wir zunächst annehmen, dass die Zahl $\sqrt{2}$ nicht irrational (d. h. rational) ist und dies auf einen Widerspruch führen.

Annahme: Die Zahl $\sqrt{2}$ ist rational. Wenn $\sqrt{2}$ rational ist, lässt sie sich nach Definition als Bruch zweier ganzer Zahlen a und $b \neq 0$ schreiben. Also gilt

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}. \tag{1}$$

Dabei sei der Bruch bereits gekürzt, d.h. a und b sind teilerfremd[5]. Durch Quadrieren von (1) ergibt sich

$$2 = \frac{a^2}{b^2}. \tag{2}$$

Dies lässt sich umformen zu

$$a^2 = 2 \cdot b^2. \tag{3}$$

Hieraus ergibt sich, dass a^2 und damit auch a durch zwei teilbar ist. Man kann a daher auch als $2 \cdot c$ (wobei $c \in \mathbb{Z}$) schreiben. Setzt man dies in (3) ein, erhält man:

$$(2c)^2 = 2 \cdot b^2. \tag{4}$$

Umgeformt ist dies äquivalent zu

$$2 \cdot c^2 = b^2. \tag{5}$$

Also ist – dank eindeutiger Primzahlzerlegung[6] – auch b durch zwei teilbar. Damit besitzen a und b den gemeinsamen Teiler 2 und sind nicht wie vorausgesetzt teilerfremd. Es ergibt sich ein **Widerspruch** zwischen unserer Annahme und unserer Folgerung. Da die Folgerung korrekt deduktiv durchgeführt wurde, muss somit die Annahme falsch sein: $\sqrt{2}$ kann nicht rational sein, sondern ist irrational. Damit ist unserer Behauptung nachgewiesen und der Beweis erbracht.

2.1.2. Die zentrale Rolle des Beweises in der Mathematik

Der mathematische Beweis spielt in der Mathematik eine zentrale Rolle, wenn nicht sogar die Hauptrolle. Beweise werden vielfach als wichtigste, sogar definierende Eigenschaft von Mathematik angesehen:

> *Deductive proof is almost the defining feature of mathematics. Mathematics without proof would not be mathematics.*
> [Auslander 2008, S. 62]

Im Laufe des 19. Jahrhunderts (mit zunehmender Reflexion mathematischer Begriffe und aufkommender Forderung nach Strenge/Rigorosität) etablierte sich der Beweis zur aus-

[5] Zwei Zahlen sind teilerfremd, wenn nur die Zahl eins beide Zahlen ganzzahlig ohne Rest teilt; also sind z.B. fünf und acht teilerfremd, während vier und acht die gemeinsamen Teiler zwei und vier besitzen.

[6] $\mathbb{Z}$ ist bezüglich Addition und Multiplikation ein euklidischer Ring. Daher existiert die Division mit Rest und die Primfaktorzerlegung kann mit dem euklidischen Algorithmus geschehen.

schließlichen Validierungsinstanz der Mathematik [vgl. Heintz 2010]. Rav [1999] bezeichnet den Beweis als »Träger des mathematischen Wissens«[7], Davis & Hersh [1994] als »Siegel der Autorität« [S. 154], Nelson [2000] gar als »Essenz der Mathematik« [S. 5]. Anhand dieser Beschreibungen erkennen wir, wie hoch der Stellenwert des Beweises ist. Dies liegt vor allem daran, dass durch einen Beweis mathematisches Wissen etabliert wird, mathematisches Wissen ist »bewiesenes Wissen« [Löwe et al. 2007, S. 8]. Dadurch, dass Wissen in der Mathematik nur durch einen Beweis legitimiert wird, unterscheidet es sich von dem Wissen anderer Wissenschaften. So wird beispielsweise naturwissenschaftliches Wissen, welches durch Experimente etabliert wird, als unsicherer wahrgenommen als mathematisches Wissen.

> *There is a sense of ›certainty‹ applicable to the conclusion of a mathematical proof which is not applicable to the conclusion of an inductive generalization.*
> [Casullo 1988, S. 59]

Ein Beweis hingegen garantiert, dass das durch ihn etablierte Wissen sicher ist. Diese durch Beweise gewährleistete Sonderstellung mathematischen Wissens ist der Grund dafür, dass Beweise oftmals auch als Distinktionsmerkmal gegenüber anderen Wissenschaften herangezogen werden, wie beispielsweise von Franklin [1993]: *»Proof is what makes mathematics different from other sciences«* [S. 25] oder in Hempels Worten:

> *The most distincitve character which differentiates mathematics from the various branches of empirical science* [...] *is no doubt the peculiar certainty and necessity of it results* [...] *a mathematical theorem, once proved is established once and for all.*

Im nächsten Abschnitt wollen wir untersuchen, welche besonderen Eigenschaften eines Beweises dafür sorgen, dass eine bewiesene Aussage für immer und ewig wahr ist.

2.1.3. Besondere Eigenschaften eines Beweises

Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, werden mathematische Beweise oftmals als Begründung dafür angeführt, dass Mathematik unter den Wissenschaften eine Sonderstellung einnimmt. Dies liegt vor allem daran, dass mathematische Beweise bestimmte, notwendige Eigenschaften haben. Sie führen dazu, dass die durch sie bewiesenen Aussagen als besonders sicher und vertrauenswürdig angesehen werden, Hasse charakterisiert sie als objektiv und für alle Zeiten gültig:

> *Es ist der in uns Menschen tief eingewurzelte Trieb zur Erkenntnis der Wahrheit, der in der Mathematik deshalb seine reinste Erfüllung findet, weil es hier nicht bei dem rein subjektiven Erkennen oder Erschauen der Wahrheit bleibt, sondern weil diese Wahrheit durch* ***objektive, für alle Zeiten Gültigkeit behaltende Beweise*** *erhärtet wird. Das letztere ist das eigentlich Entscheidende. Es ist in der Tat in keiner von der Mathematik verschiedenen Wissenschaft der Fall.*
> [Hasse 1959, S. 9, Hervorhebung wie im Original]

[7] Im Gegensatz dazu spielten die Sätze nur eine untergeordnete Rolle: *»Theorems are in a sense just tags, labels for proofs, summaries of information, headlines of news, editorial devices«* [Rav 1999, S. 20].

Ein Grund für die besondere Sicherheit mathematischen Wissens liegt in der **Erfahrungsunabhängigkeit** von Beweisen.

> *Unstreitig gibt es keine Wissenschaft, deren Resultate sicherer wären als die der Mathematik. Ermöglicht wird dies durch die schon erwähnte zweite Ausgrenzung, nämlich die allen Erfahrungsgegebenen, mithin durch den Rückzug in den Bereich des Denkens allein.*
> [Poser 1988, S. 292]

Ein mathematischer Beweis validiert eine Aussage ausschließlich mittels logischer Deduktion. Er nimmt im Unterschied zu einem Experiment, der Validierungsinstanz der Naturwissenschaften, keinen Bezug auf Sinnes- oder Erfahrungswahrnehmungen.

> *Mathematical propositions are proved by logically compelling arguments, independently of empirical evidence and therefore free of the interpretational ambiguities that make empirical scientific knowledge essentially uncertain.*
> [Glas 2005, S. 289]

Einen von empirischen Tatsachen unabhängigen Beweis nennt man seit Kant auch »apriori«, wir nennen die Eigenschaft der Erfahrungsunabhängigkeit daher im Folgenden auch **Apriorität**. Während Erfahrungsabhängigkeit immer auch eine gewisse Subjektivität mit sich bringt, wird umgekehrt Apriorität oft als Garant für objektive Wahrheiten angesehen.

Im 19. Jahrhundert kam vermehrt die Forderung nach **Strenge und Rigorosität** eines Beweises auf.

> *Mathematics is special among the other sciences due to the role of proof and insofar as mathematical proof offers the highest possible rigor.*
> [Nickel 2010, S. 281]

Hiermit ist im Wesentlichen das gemeint, was wir in Abschnitt 2.1.1 bereits als axiomatische Methode kennengelernt haben. Rigoros/Streng ist diese in dem Sinne, dass in einem Beweis nur Axiome, bewiesene Aussagen und deduktive Schlussweisen verwendet werden, man kann daher auch von **deduktiver Geschlossenheit** eines Beweises sprechen. Außerdem versteht man unter Strenge eine weitgehende Formalisierung, die Verwendung exakter Notation und expliziter Begriffe und Definitionen. Dadurch gibt es bei einem Beweis keinen Interpretationsspielraum.

> *In a mathematical proof you have a line of reasoning consisting of many, many steps, that are almost self-evident. If the proof we write down is really rigorous, then nobody can ever prove it wrong.*
> [Wiles interviewt von Nova 2000]

Als letztes wollen wir die **Infallibilität** von Beweisen erwähnen. Gemeint ist hiermit die **Fehlerfreiheit** von Beweisen. Das durch einen Beweis etablierte Wissen ist auch deshalb so sicher, weil ein Beweis infallibel ist. Diese Eigenschaft ist im Grunde redundant, da man eine deduktive Schlußfolgerung eben nur dann Beweis nennt, wenn sie fehlerfrei ist.

> *The expression ›correct proof‹ is redundant. Mathematical proof does not admit degrees. A sequence of steps in an argument is either a proof, or else it is*

> *gibberish*[8].
> [Rota 1997, S. 183]

Wie wir spätestens hier merken, sind alle drei erwähnten Beweiseigenschaften nicht nur charakteristisch für Beweise, sondern definierend. Eine strenge, deduktive Schlussfolgerung, die fehlerfrei und apriori ist, ist ein Beweis. Dies bedeutet allerdings andersherum auch, dass wir, sobald wir innerhalb einer als Beweis präsentierten Argumentationskette den Bezug auf empirische Tatsachen, Fehler oder Lücken in der Deduktion vermuten, daran zweifeln müssen, ob es sich überhaupt um einen Beweis handelt.

2.1.4. Überprüfung von Beweisen

Bei unserem Beispielbeweis (Abschnitt 2.1.1.2) fiel es leicht, einzusehen, dass die Beweisführung korrekt ist und der durch sie etablierte Satz somit für alle Zeiten gültig und wahr sein muss. Dank Kürze und Einfachheit der Argumentation stellt dies kein Problem dar. Klar ist aber auch, dass sich bei anderen Beweisen, die deutlich mehr als zehn Zeilen beanspruchen und sich mit sehr speziellen mathematischen Teilgebieten beschäftigen, bei der Überprüfung sofort ein Problem von praktischer Relevanz ergibt. Selbst für erfahrene Mathematiker ist die Korrektheit dann oft alles andere als offensichtlich. Hierfür hat sich in der mathematischen Fachwelt das Gutachterverfahren etabliert, welches wir im Folgenden vorstellen. Außerdem sprechen wir über die Formaliserung von Beweisen. Formale Beweise lassen sich nach Meinung einiger Mathematiker besser überprüfen. Schließlich widmen wir uns der Möglichkeit, Beweise mittels Computer zu überprüfen.

2.1.4.1. Gutachter-Verfahren

Bevor ein Beweis mittels Gutachterverfahren geprüft wird, ist zunächst der Autor des Beweises selbst gefordert. Er vergewissert sich, dass sein Beweis seiner Ansicht nach fehlerfrei ist. Oftmals wird er Kollegen zu Rate ziehen und die Beweisidee mit ihnen diskutieren. Hat der Beweis diese erste Prüfung bestanden, bringt der Autor den Beweis in die für eine Veröffentlichung notwendige Form[9]. Nachdem der Beweis eingereicht wurde und bevor er veröffentlicht wird, kontrolliert das Fachmagazin den Beweis inhaltlich und strukturell. Hierfür beschäftigt jedes Fachmagazin einen gewissen Zirkel von Mathematikern, die diese Aufgabe übernehmen. Die Mitglieder sind zumeist Professoren, die dieser Tätigkeit neben ihrer eigenen mathematischen Forschung nebenberuflich aus persönlichem Interesse nachgehen, da sie meist selbst auf dem betreffenden Gebiet arbeiten. Diese Prüfzirkel bestehen also aus Spezialisten des betreffenden Fachgebiets, die ein eigenes Interesse am vorliegenden Beweis besitzen. Sie prüfen den Beweis nun also alleine oder in der Gruppe auf Korrektheit und Nachvollziehbarkeit. Grundsätzlich gilt: Je wichtiger und komplizierter ein mathematischer Satz ist, desto mehr Mathematiker sind an der Prüfung des Beweises beteiligt und desto mehr Zeit darf der Prozess auch in Anspruch nehmen. Stößt dieses

[8] »*gibberish*« übersetzt sich als Kauderwelsch oder Kokolores

[9] Natürlich sollte diese Form es dem Leser möglich machen, den Beweis möglichst gut nachvollziehen zu können. Es gibt aber auch gewisse standardisierte Formen, die je nach Fachmagazin variieren können, siehe hierzu bspsw. [Annals of Statistics 2015, Preparation of Manuscripts].

Expertengremium auf Fehler oder Ungenauigkeiten, informieren sie den Autor und bitten, diese zu beseitigen. Einen guten Einblick in den Gutachterprozess findet man auf der Homepage der Zeitschrift Annals of Statistics [2015, Guidelines for Referees]. Nachdem dieser Überprüfungsprozess abgeschlossen ist, gilt der Beweis grundsätzlich als anerkannt. Es kommt zwar in seltenen Fällen vor, dass Fehler sowohl vom Autor als auch von den Prüfern unentdeckt bleiben, weswegen ein veröffentlichter Beweis nicht zwingend fehlerfrei ist. Zunächst gelten in Fachzeitschriften erschienene Beweise aber als richtig und werden von der Gemeinschaft der Mathematiker akzeptiert. Das Ansehen der Fachzeitschrift und des Autors können bei der Akzeptanz eine Rolle spielen. Dadurch, dass andere Mathematiker den Satz zitieren und auf den Artikel Bezug nehmen, steigt die Akzeptanz ebenfalls. Insofern könnte man sagen, dass Mathematiker bezüglich der Wahrheit eines Satzes eine Art Konsenstheorie vertreten [Heintz 2000; Manin 1981]. Wie wir am Ende diese Kapitels sehen werden, ist das allerdings nicht der einzig verwendete Wahrheitsbegriff, sondern noch häufiger (oftmals auch gleichzeitig) glauben Mathematiker an eine objektive Wahrheit, die es zu entdecken gilt.

2.1.4.2. Formalisierung

Wie wir an unserem Beispielbeweis in Abschnitt 2.1.1.2 gesehen haben, handelt es sich bei Beweisen typischerweise um natürlichsprachliche Texte, die in Teilen Gleichungen, Definitionen oder Zwischenergebnisse enthalten. Grundsätzlich kann ein Beweis aber auch ausschließlich mit mathematischer Symbolik geführt werden.

Formalisiert man den obigen Beweis für die Irrationalität von $\sqrt{2}$ in Prädikatenlogik, sieht dies wie folgt aus[10]:

$$
\begin{array}{rcl}
b \neq 0 \;\wedge\; \sqrt{2} = \dfrac{a}{b} & \vdash & a^2 = 2b^2 \\
b \in \mathbb{Z} \;\wedge\; a^2 = 2b^2 & \vdash & 2 \mid a^2 \\
a \in \mathbb{Z} \;\wedge\; 2 \mid a^2 & \vdash & 2 \mid a \\
a^2 = 2b^2 \;\wedge\; a = 2c & \vdash & 4c^2 = 2b^2 \\
4c^2 = 2b^2 & \vdash & 2c^2 = b^2 \\
b \in \mathbb{Z} \;\wedge\; c \in \mathbb{Z} \;\wedge\; 2c^2 = b^2 & \vdash & 2 \mid b \\
(a,b) = 1 \;\wedge\; 2 \mid a \;\wedge\; 2 \mid b & \vdash & \bot
\end{array}
$$

Diese formalisierte Version ist sehr exakt. Es gibt keine Ausdrücke, die überflüssig sind und keine, die man unterschiedlich interpretieren könnte. Insofern gewinnt der Beweis an Präzision. Genau diese Präzision wollte Frege [1964] erreichen, als er in seiner *Begriffsschrift* eine Notation einführte, um mathematische Argumentationen mit ihrer Hilfe zu formalisieren. Bei der in obigem Beispiel verwendeten Prädikatenlogik handelt es sich im Grunde um diese Notation. Er bezeichnete sie als *»Formelsprache des reinen Denkens«*, welche im Vergleich zur *»unzulänglichen«* natürlichen Sprache eindeutig sei und daher die *»Lückenlosigkeit der Schlusskette«* garantieren könne [Frege 1964, Vorwort, S. x]. Durch

[10] vergleiche [Wiedijk 2004].

die überschaubare Menge an Ausdrucksmitteln ist nicht nur leichter zu erkennen, ob die Argumentation lückenlos ist, sondern auch die Definition eines Ableitungkalküls wird vereinfacht.

Als zum Ende des 19ten Jahrhunderts in der Mathematik neue algebraische Teilgebiete entstanden, die Entwicklung nichteuklidischen Geometrien entwickelt wurden und damit einhergehend Bedarf nach einer neuen Grundlegung der Analysis herrschte, wurde der Begriff des **formalen Systems** geprägt. Außer Frege sind in diesem Zusammenhang noch Russell & Whitehead [1968] erwähnenswert, die in ihrer Principia Mathematica *»das definitive formale System des frühen 20ten Jahrhunderts«* [Stillwell 2014, S. 77] präsentierten, sowie Hilbert, der mit Hilfe seiner »Formelsprache« die Widerspruchsfreiheit der Arithmetik innerhalb der Arithmetik selbst beweisen wollte. Diese geschichtlichen Hintergründe wollen wir im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht weiter vertiefen; auch eine Beschreibung von Logizismus, Formalismus und der Grundlagenkrise der Mathematik sparen wir uns – sie finden sich vielfältig und ausführlich an anderer Stelle[11].

Wir stellen jedoch fest, dass eine Zeit lang nur formale Beweise als »richtige« Beweise angesehen wurden. Informelle Beweise spielten nur als Gegenpart ein Rolle, der zwar einfacher zu lesen und zu verstehen, aber deutlich unsicherer ist [siehe Azzouni 2004; Resnik 1997]. Daher wird der Wunsch nach Formalisierung oft als traditionelle/übliche Sichtweise angesehen [bspsw. bei Berts 2012; Rav 2007], die auch heute noch weitverbreitet ist:

> *A mathematical theory begins with definitions and derives its results from dearly agreed upon rules of inference. Every fact of mathematics must be ensconed in an axiomatic theory and formally proved if it is to be accepted as true.*
> [Rota 2005, S. 220]

Allerdings hat die vollständige Formaliserung auch gewisse Nachteile. So ist ein Beweis in seiner formalisierten Form oftmals um ein Vielfaches länger. Szpiro [2009] schätzt, dass die Übertragung einer gedruckten Seite in eine formale, maschinenlesbare Form etwa eine Woche Arbeit bereitet und der Symboltext dann ca. viermal so lang ist wie der ursprüngliche normalsprachliche Text. Dazu kommt, dass durch die Verwendung fachgebietsspezifischer Symbolik der Beweis für Nicht-Experten schwer und für mathematische Laien gar unlesbar wird. Insbesondere mit zunehmender Länge verliert er durch die Abstraktion an Anschaulichkeit und eventuell damit auch an Verständlichkeit. In der Praxis findet man daher nur wenig vollständig formalisierte Beweise, wie Berts [2012] bemerkt[12]: *»formal proofs are a rare species«* [S. 90]. Nickel [2010] stimmt dem zu: *»*[A] *closer look on the ›real existing‹ mathematics exhibits a much less formal picture«* [S. 281]. Trotz der überwiegenden Verwendung und Akzeptanz informeller Beweise glaubt man, dass prinzipiell jeder mathematische Beweis formalisierbar sei. Wird die Korrektheit eines Beweises angezweifelt,

[11] siehe für eine gute Übersicht [Bedürftig & Murawski 2012; Benacerraf & Putnam 1983], für eine genauere Betrachtung der einzelnen Strömungen nach der Grundlagenkrise [Lindström et al. 2008].

[12] *»The development in this* [twentieth] *century bearing on the foundations of mathematics are best summarized in a story. On the banks of the Rhine, a beautiful castle has been standing for centuries. In the cellar of the castle, an intricate network of webbing had been constructed by industrious spiders who lived there. One day a strong wind sprang up and destroyed the web. Frantically the spiders worked to repair the damage. They thought it was their webbing that was holding the castle«* [Morris Kline zitiert in van Kerkhoeve 2006, S. 8].

versucht man Zweifel meistens dadurch auszuräumen, dass man den Beweis »formaler« formuliert.

2.1.4.3. Automatische Beweissysteme

Wir haben in Abschnitt 2.1.4.2 gesehen, wie ein in natürlicher Sprache formulierter Beweis formalisiert werden kann, so dass er nur noch aus Symbolen besteht und ohne verbindenden Text auskommt. Damit ist er prinzipiell auch für sogenannte Beweisassistenten bzw. automatische Beweiser lesbar. Hierbei handelt es sich um Computerprogramme, die aus bereits gespeicherten Axiomen und eingegebenen Voraussetzungen maschinell die gewünschte Folgerung ableiten bzw. den Beweisgang des Menschens überprüfen können.

Die oben angegebene formalisierte Form unseres Euklid-Beweises ist für Computer zwar noch nicht ohne Weiteres lesbar bzw. nachprüfbar. Sie kann jedoch leicht in maschinenlesbaren Code übertragen werden. Im Beweissystem Coq sieht der Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ so aus[13]:

```
Theorem sqrt2_not_rational :
forall p q : nat, q <> 0 -> p * p = 2 * (q * q) -> False.
intros p q; generalize p; clear p; elim q using (well_founded_ind lt_wf).
clear q; intros q Hrec p Hneq; generalize (neq_O_lt _ (sym_not_equal
Hneq)); intros Hlt_O_q Heq.
apply (Hrec (3 * q - 2 * p) (comparison4 _ _ Hlt_O_q Heq) (3 * p - 4 *
q)).
apply sym_not_equal; apply lt_neq; apply plus_lt_reg_l with (2 * p);
rewrite <- plus_n_O; rewrite <- le_plus_minus; auto with *.
apply new_equality; auto.
Qed.
```

Bei den türkis markierten Ausdrücken handelt es sich um bereits bewiesene Sätze, die benutzt werden. Würde man diese Sätze ebenfalls ausschreiben, ist der Beweis deutlich länger [siehe Théry et al. 2006]. Im Vergleich zu den Formalisierungen des Beweises in anderen Beweissystemen schneidet er trotzdem gut ab – er gehört zu den drei kürzesten [Wiedijk 2003, S. 196]. Trotz der relativen Kürze lässt sich die obenstehende maschinenlesbare Beweis-Variante in Coq nur schwer ohne Computer durch einen Menschen verstehen und überprüfen.

2.1.5. Computerbeweise

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden wir häufig von Computerbeweisen sprechen. Unserem Verständnis nach sind dies Beweise, die ein Mathematiker unter Zuhilfenahme des Computers erbracht hat. De Mol [2009] definiert *»CaP's«* (*»computer-assisted-proofs«*) wie folgt:

> *A CaP is a proof that proves a theorem that practically could not have been (or, thus far, has not been) proven, re- proven or verified by human mathematical*

[13] Der Code ist einem Beitrag über binäre rationale Zahlen der Online Bibliothek von Coq-Beweisen entnommen [Niqui & Bertot 2003]. Andere Beweissysteme nutzen andere Sprachen.

> *reasoning alone. I.e., (certain parts of) both the process that results in the proof as well as the proof itself must be humanly impractical.*
> [. . .] *Furthermore, the proof is also machine impractical in that, besides the programming, certain parts of the proof could not have been done by the computer.*
> [de Mol 2009, S. 63]

So ist ein Computerbeweis immer ein Beweis, der zu einem Teil von einem Menschen geführt wird, der Beweisschritte erbringt, die über eine reine Formalisierung der Ausgangslage hinausgehen. Zum Anderen ist aber auch immer ein Computer zur Unterstützung vonnöten, um Teile des Beweises nachzurechnen, zu denen der Mensch praktisch nicht fähig ist.

Tabelle 2.1 zeigt die wichtigsten Computerbeweise der letzten Jahre, bzw. die durch Computerbeweise bewiesenen Sätze. Wie man erkennen kann, liefen alle hier aufgelisteten Computerbeweise darauf hinaus, dass eine endliche (aber sehr große) Menge von Fällen vom Computer auf gewisse Eigenschaften hin überprüft wurde oder dass ein Ergebnis mit Hilfe von aufwendigen numerischen Näherungen eingegrenzt wurde. Durch den Menschen wurde also vorher eine Systematisierung durchgeführt und ein Algorithmus implementiert, welcher schrittweise den Beweis erbringen konnte.

Jahr	Bewiesener Satz	Methode	Veröffentlichung
1976	Vierfarbensatz	Überprüfung endlicher Fallunterscheidung	Appel & Haken [1977]; Appel et al. [1977]
1982	Beweis der Feigenbaum Vermutung	numerische Näherung (Abschätzungen durch obere/untere Schranken)	Lanford [1982]
1988	»Vier gewinnt« ist ein Spiel mit perfekter Information	Überprüfung aller möglicher Kombinationen	Allis [1988]; Allen [1988]
1989	Nichtexistenz einer endlichen projektiven Ebene der Ordnung 10	Überprüfung endlicher Fallunterscheidung	Lam et al. [1989]
1998	Beweis der Kepler'schen Vermutung[14]	Überprüfung endlicher Fallunterscheidung	Hales [2005b]
2002	Der Lorenzattraktor ist ein seltsamer Attraktor[15]	numerische Näherungen, Abschätzungen	Tucker [1999]
2006	17-Punkte-Version des »Happy Ending«-Problems	Überprüfung endlicher Fallunterscheidung	Szekeres & Peters [2006]
2008	Miniumum-Weight-Triangulation ist NP-schwer	Überprüfung endlicher Fallunterscheidung	Mulzer & Rote [2008]
2010	Die Gotteszahl eines Zauberwürfels ist maximal 20[16]	Überprüfung aller möglicher Kombinationen	Rokicki et al. [2010a, b]

Tabelle 2.1.: Computerbeweise

[14]Eine genauere Darstellung dieses Beweises und seiner Rezeption findet sich im Anhang A.

[15]Bei der Existenz des Lorenzattraktors handelt es sich um eines der 18 Probleme, die Smale [1998] als interessante, ungelöste mathematische Probleme auflistete. Er erstellte die Liste auf Anfrage von V. Arnold, dem Vorsitzenden der International Mathematical Union, in Anlehnung auf die von Hilbert [1902] erstellte Liste zu Beginn des 20. Jahrhunderts.

[16]Den kürzesten Weg, mit dem man einen Zauberwürfel aus einer beliebigen, verdrehten Stellung heraus zurück in seine geordnete Form bringen kann, nennt man »Gottes-Algorithmus«. In Anlehnung daran bezeichnet man diejenige Anzahl Züge, die man höchstens zur Lösung des Zauberwürfels aus irgendeiner Stellung heraus benötigt, als »Gotteszahl«. Der bewiesene Satz besagt also, dass man nie mehr als 20 Drehungen braucht, um einen Zauberwürfel in die Ausgangsposition zu bringen. Um die 43.252.003.274.489.856.000 möglichen Kombinationen durchzuprobieren, würde ein normaler Computer Stand 2010 ca. 35 Jahre Rechenzeit benötigen [vgl. Rokicki et al. 2010b], deshalb wurden mehrere Computer einige Wochen parallel genutzt. Der Spiegel berichtete über die Lösung des Problems [Hengstenberg 2010].

2.2. Platonistische Auffassung der Mathematik

In der Mathematikphilosophie gibt es verschiedene Positionen, die sich immer weiter verästeln und unterteilen. Wir wollen in diesem Kapitel unser Hauptaugenmerk auf den Platonismus und die aprioristische Auffassung der Mathematik richten. Bei der hier geschilderten platonistischen Auffassung handelt es sich um eine Erweiterung des mathematischen Platonismus um den Aspekt der Apriorität. Der Begriff Platonismus geht auf Platon zurück, welcher der Mathematik und im Besonderen der Geometrie eine große Bedeutung zumass[17]. Er verglich mathematische Objekte mit Ideen und sprach ihnen eine vom Menschen unabhängige, objektive Existenz zu. D.h. ein Mathematiker erfindet Begriffe und mathematische Zusammenhänge nicht, sondern er *»steht vor einer ihm gegebenen Welt, die ewig, unabhängig und unveränderlich ist, vor der Welt der mathematischen Objekte«* [Bedürftig & Murawski 2012, S. 35]. 1934 hielt Bernays eine Rede, in der er den Begriff Platonismus vermutlich als erster benutzte[18]:

> [. . .] *die Tendenz* [in der Mathematik geht dahin,] *die Gegenstände als losgelöst von aller Bindung an das denkende Subjekt zu betrachten. Da diese Tendenz vor allem in der Philosophie Platons zur Geltung gekommen ist, sei es mir gestattet, sie als ›Platonismus‹ zu bezeichnen.*
> [Bernays 1978, S. 65]

Im weiteren Verlauf der Rede gibt er seiner Meinung Ausdruck, der Platonismus herrsche heutzutage in der Philosophie der Mathematik vor. Auch wir glauben mit vielen anderen[19], dass diese Auffassung unter Mathematikern vielfach vertreten wird. Daher und weil sie in der später untersuchten Debatte einigen Argumenten zugrunde liegt, greifen wir sie hier explizit heraus[20].

Die Hauptpositionen der Mathematikphilosophie lassen sich unter anderem durch ihren Umgang mit mathematischen Objekten kennzeichnen. Der Intuitionismus sieht sie als geistige Konstruktionen, der Nominalismus als sprachliche Konventionen, nur der Platonismus schreibt ihnen eine vom Menschen unabhängige Existenz zu [vgl. Heintz 2000, S. 38].

Mathematische Objekte sind daher ein guter Ausgangspunkt, um die Grundannahmen des Platonismus zu beschreiben, wie wir es in folgendem Abschnitt tun werden. Hierbei differenzieren wir zwischen mathematischen Objekten als solchen und mathematischen Aussagen, also Aussagen über die mathematischen Objekte.

[17] Über die Geometrie lässt er Sokrates sagen: »[. . .] *tatsächlich aber ist der eigentliche Zweck dieser ganzen Wissenschaft nichts als reine Erkenntnis* [. . .] *diese Erkenntnis* [geht] *auf das ewig Seiende* [. . .], *nicht aber auf dasjenige, was bald entsteht und wieder vergeht«* [Platon 2005, Siebentes Buch, S. 527]. Durch sie werde der Verstand geschult und sie sei damit eine unerlässliche Voraussetzung für den Erwerb von Wissen.

[18] [vgl. Bouveresse 2005; Schneider 2013]

[19] Rießinger [2010] bezeichnet den Platonismus als »implizite Arbeitshypothese« vieler Mathematiker. Davis & Hersh [1994] bemerken *»die weite Verbreitung des Platonismus als informelle und stillschweigend geduldete Arbeitsphilsophie«* [S. 345]. Van Bendegem [2000] glaubt, dass sowohl Mathematiker als auch Philosophen stolz auf den Platonismus sind: *»Philosophers of mathematics on the one hand and mathematicians themselves on the other are extremely fond of some kind of platonism«* [S. 19].

[20] Dass es zwischen den von Platon vertretenen Ansichten und der als Platonismus bezeichneten Auffassung, wie sie heute vertreten wird und wir sie im Folgenden schildern wollen, einige leichte Diskrepanzen gibt, lassen wir hierbei außer Acht, dies kann bei Bedarf bei Maddy [1992]; Schneider [2013] nachgelesen werden.

Wie wir im vorherigen Abschnitt gesehen haben, nutzt man Beweise zur Validierung mathematischer Aussagen. Sie spielen daher eine besondere, zentrale Rolle bei der Gewinnung von mathematischem Wissen. Die besonderen Eigenschaften eines Beweises sorgen für Sicherheit und Ewigkeit des mathematischen Wissens.

Die Menge der durch Beweise geprüften mathematischen Aussagen verstehen wir als den Korpus mathematischen Wissens. Wir versuchen zu zeigen, wie sich Aussagen über mathematisches Wissen teilweise aus den Grundannahmen über mathematische Objekte ergeben. Durch das Differenzieren in Annahmen über mathematische Objekte, Aussagen und Beweise versuchen wir ein möglichst detailliertes Bild der platonistischen Auffassung zu zeichnen. Einen besonderen Augenmerk richten wir außerdem auf die Apriorität mathematischen Wissens.

2.2.1. Mathematische Objekte

Unter mathematischen Objekten verstehen wir Entitäten wie Zahlen, Mengen etc. Wie in der Einleitung zu diesem Abschnitt bereits erwähnt, wird diesen Objekten von Mathematikern gern eine unabhängige, objektive Existenz zugesprochen. Davis & Hersh [1994] sagen über den »normalen«[21] Mathematiker:

> *Er und seine Kollegen zweifeln keinen Moment daran, dass die Nicht-Riemannschen Hyperquadrate wirklich existieren, und zwar ebenso sicher und objektiv wie der Felsen von Gibraltar oder der Halleysche Komet.*
> [Davis & Hersh 1994, S. 31]

Diese Ansicht ist zentral für den Platonismus. Auch aus folgendem Zitat von Hardy [1940] lässt sich ein guter Eindruck davon gewinnen, wie ein Platonist über mathematische Objekte denkt.

> *It seems that mathematical ideas are arranged somehow in strata, the ideas in each stratum being linked by a complex of relations both among themselves and with those above and below* [...]
> [...We] *believe that mathematical reality lies outside us, that our function is to discover or observe it, and that the theorems which we prove, and which we describe grandiloquently as our ›creations‹, are simply our notes of observations.*
> [...] *Pure mathematics* [...] *seems to me a rock on which all idealism founders: 317 is a prime, not because we think so, or because our minds shaped in one way rather than another, but because it is, because mathematical reality is built that way.*
> [Hardy 1940, S. 27, 35, 38f.]

Folgende Annahmen lassen sich erkennen:

- **Existenz**: Die Existenz mathematischer Objekte ist eine objektive Tatsache.

[21] Normal meint hier durchschnittlich.

- **Unabhängigkeit**: Mathematische Objekte existieren unabhängig von Mensch und menschlichem Bewußtsein.
- **Abstraktheit**: Die Objekte sind nicht körperlich oder stofflich, sie existieren unabhängig von Raum und Zeit unveränderlich, unveränderbar.

Diese drei Grundannahmen über mathematische Objekte finden sich in vielerlei Beschreibungen des mathematischen Platonismus wieder [bspsw. bei Linnebo 2011, Stanford Encyclopedia of Philsophy].

Aus ihnen ergibt sich sofort eine Frage: Können wir mathematische Objekte erkennen? Wäre dies nicht möglich, wäre es auch nicht möglich, Aussagen über mathematische Objekte zu treffen, Mathematik wäre also nicht möglich. Daher halten wir es für sinnvoll, die folgende Annahme hinzuzunehmen:

- **Erkennbarkeit**: Mathematische Objekte können durch den Menschen erkannt werden.

Sie findet sich auch bei Heintz [2000] in ihrer Darstellung des Platonismus.[22]

Eine weitere Frage drängt sich auf – Wenn mathematische Objekte doch unabhängig vom Menschen und seinem Bewußtsein sind und außerdem weder körperlich noch stofflich – Wie können wir mathematische Objekte dann erkennnen? Hierzu gibt es verschiedene Ansätze. Bei Platon ist Erkenntnis ein Wiedererinnern der Seele an bereits bekannte Ideen (*»anamnesis«*) [Haller 2010, Platon, Menon, 81a–82a]. Gödel hingegen glaubt, dass sich mathematische Objekte nur mittels des menschlichen Verstandes wahrnehmen lassen.

> [Platonism is] *the view that mathematics describes a non-sensual reality, which exists independently both of the acts and* [of] *the dispositions of the human mind and is only perceived, and probably perceived very incompletely, by the human mind.*
> [Gödel zitiert von Parsons 1995]

Thom spricht von Intuition:

> *Yet, at any given moment, mathematicians have only an imcomplete and fragmentary vision of the world of ideas. As a result, each proof is, above all, the revelation of a new structure whose elements lie disconnected in man's intuition until reason joins them together.*
> [Thom zitiert in Tymoczko 1986b, S. 72]

[22] Insgesamt gibt sie folgende 5 Punkte zur Charakterisierung des Platonismus an:

> *1. Die Objekte der Mathematik existieren unabhängig von uns und unserem Bewußtsein.*
> *2. Die Objekte der Mathematik sind nicht physikalischer Natur. Sie existieren außerhalb von Raum und Zeit und sind uns über unsere Sinne nicht zugänglich.*
> *3. Mathematische Aussagen sind entweder wahr oder falsch, und zwar unabhängig von unserer Kenntnis des jeweiligen Wahrheitswerts.*
> *4. Der Wahrheitswert einer mathematischen Aussage ergibt sich aus der Beschaffenheit der mathematischen Objekte, auf die sie sich bezieht.*
> *5. Es ist uns möglich, mathematische Objekte zu erkennen.*
> [Heintz 2000]

Das Erkennen mathematischer Objekte geschieht also mittels »Wiedererinnerung«, »reinem Denken« oder »Intuition«. In einer Sache ist man sich einig:

- Man kann mathematische Objekte nicht mittels Sinneswahrnehmung erkennen.

Definiert man »apriori« als unabhängig von jeglicher Erfahrungswahrnehmung, so ist dies äquivalent zu:

- **Apriori-Erkennbarkeit**: Man kann mathematische Objekte nur apriori erkennen.

Wie wir an obenstehenden Zitaten erkennen können, ist der Platonismus oftmals mit dieser aprioristischen Auffassung bezüglich des Erkennens mathematischer Objekte verknüpft.

2.2.2. Mathematische Aussagen

Mathematische Aussagen sind Sätze über mathematische Objekte und ihr Verhältnis zueinander. Ein Platonist denkt über mathematische Aussagen wie folgt:

- Der Wahrheitswert einer mathematischen Aussage ergibt sich aus der Beschaffenheit der mathematischen Objekte, auf die sie sich bezieht.
- **Unterscheidbarkeit**: Mathematische Aussagen sind entweder wahr oder falsch.

Diese zwei Annahmen über mathematische Aussagen haben wir im vorherigen Abschnitt bereits als Punkt 3 und 4 von Heintz' Charakterisierung des Platonismus gesehen (siehe Fußnote 22)[23].

Auch Davis & Hersh [1994] äußern sich ähnlich: *»Jede sinnvolle Frage über ein mathematisches Objekt hat eine präzise Antwort, unabhängig davon, ob wir sie ermitteln können oder nicht«* [S. 334].

Unserer Meinung nach ergeben sich diese Annahmen bereits aus den Grundannahmen über die mathematischen Objekte. Da diesen eine objektive Realität zugeschrieben wird, können Aussagen über sie, ihre Beschaffenheit und ihr Verhältnis zueinander nur wahr oder falsch sein. So kann man auch folgendes Zitat von Hardy interpretieren:

> *Mathematical Theorems are true or false; their truth or falsity is absolute and independent of our knowledge of them. In some sense, mathematical truth is part of objective reality.*
> [Hardy 1929, S. 4]

[23] Vergleiche auch Davis Kennzeichnung der platonischen Mathematik durch folgende vier Punkte:

> *1. Glaube an die Existenz sicherer, idealer mathematischer Objekte.*
> *2. Glaube an sichere Methode der Deduktion.*
> *3. Glaube daran, dass sinnvolle mathematische Aussagen unterscheidbar wahr oder falsch sind.*
> *4. Glaube daran, dass Mathematik unabhängig vom Menschen existiert (»Pi is in the sky«).*
> [Davis 1972, S. 165]

2.2.3. Mathematische Beweise

Mathematische Aussagen über mathematische Objekte können also wahr oder falsch sein. Dies lässt sich dank der Objektivität der Objekte auch entscheiden. Die Methode, mit deren Hilfe entschieden werden kann, ob eine mathematische Aussage wahr oder falsch ist, ist der mathematische Beweis. Mittels Deduktion wird aus Axiomen und Prämissen wie bereits oben beschrieben eindeutig ein Ergebnis abgeleitet.

- **Entscheidbarkeit**: Mit Hilfe eines mathematischen Beweises lässt sich eindeutig bestimmen, ob eine mathematische Aussage wahr ist.

Da sich ein mathematischer Beweis ausschließlich deduktiver Schlussregeln bedient, gilt außerdem:

- Die Methode »mathematischer Beweis« leitet aus apriori Wahrheiten apriori Wahrheiten ab.

2.2.4. Mathematisches Wissen

Mathematische Aussagen über mathematische Objekte, deren Wahrheit durch einen mathematischen Beweis bewiesen wurde, bilden den Korpus mathematischen Wissens. Aus den speziellen Eigenschaften von mathematischen Objekten, Aussagen und Beweisen ergibt sich für sie:

- Mathematisches Wissen besteht aus wahren mathematischen Aussagen über mathematische Objekte.
- **Unveränderbarkeit**: Mathematisches Wissen ist ewig wahr.
- **Objektivität**: Mathematisches Wissen ist objektiv wahr.
- **Sicherheit**: Mathematisches Wissen ist sicher wahr.

Außerdem:

- **Apriorität**: Mathematisches Wissen kann nur apriori gewusst werden.

Es ergibt sich nun ein vollständiges Bild der platonistischen Auffassung der Mathematik, mit besonderer Berücksichtigung des Aspektes der Apriorität (siehe hierzu Abb. 2.1[24]).

2.2.5. Beweise und Wahrheit

Am Schluß dieser einführenden Abschnitte wollen wir noch kurz auf das Thema Wahrheit und Beweis eingehen. Wie wir gesehen haben, werden mathematische Aussagen als wahr angesehen, wenn sie bewiesen sind. Genauso glaubt man aber auch an eine Art Konsenstheorie der Wahrheit: Wenn hinreichend viele Mathematiker glauben, dass ein Beweis wahr ist – wenn er also mittels Gutachterverfahren (siehe Abschnitt) geprüft wurde, glauben auch andere an seine Wahrheit. Die Verwendung dieser zwei Wahrheitsbegriffe ist insofern

[24]Diese und weitere Abbildungen wurden mit der Software *»Argunet«* von Betz [2015] erstellt.

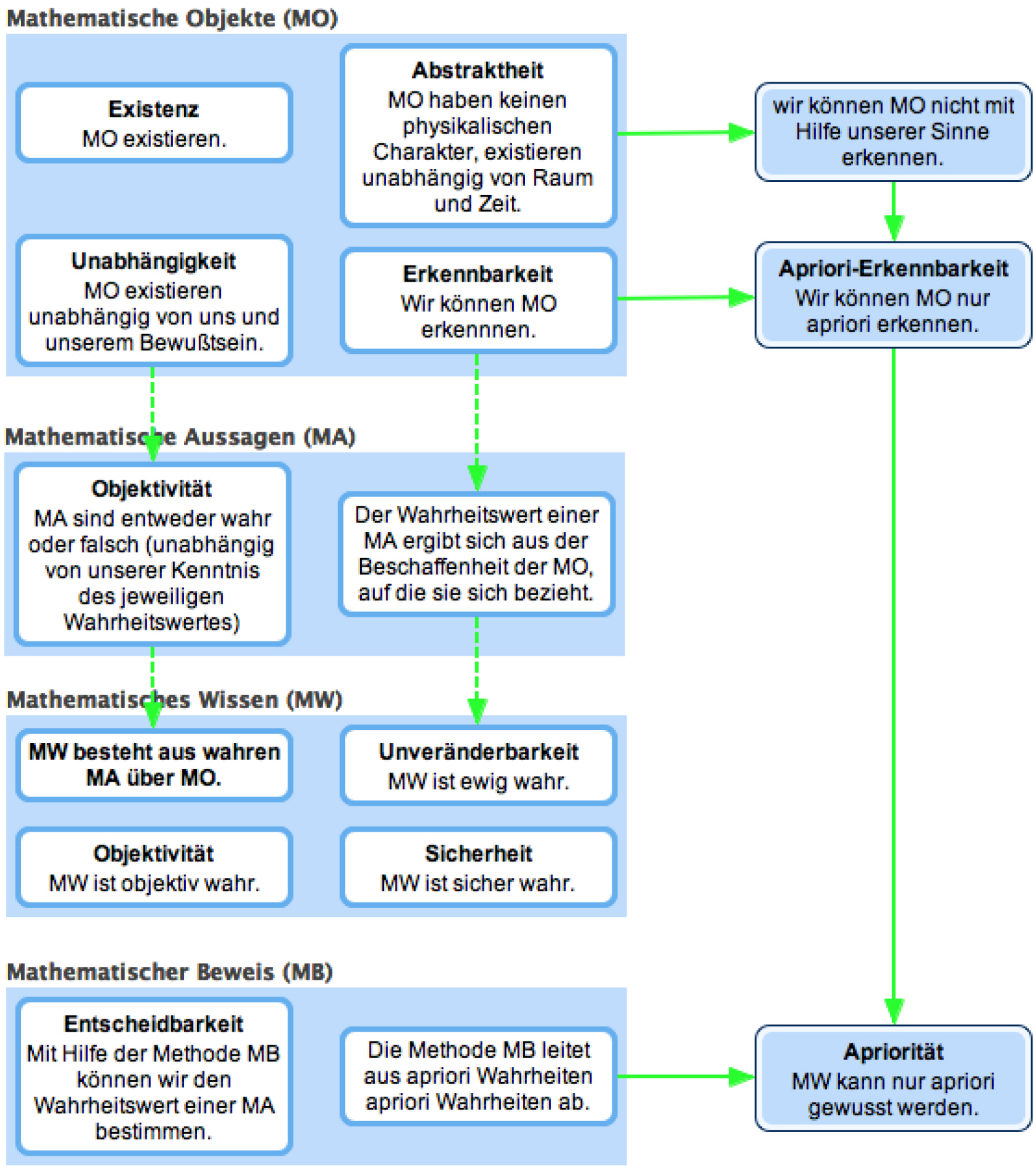

Abb. 2.1.: Übersicht: Platonismus in der Mathematik

unproblematisch, als dass wahr in Bezug auf einen Beweis wohl eher »korrekt« oder »richtig« bedeutet. Gelangt man zu einem Konsens darüber, ob ein Beweis korrekt durchgeführt wurde, glaubt man, dass der Beweis richtig/wahr ist und damit auch der durch ihn bewiesene Satz. Es gibt allerdings noch ein ernstzunehmenderes Problem mit zwei unterschiedlichen Wahrheitsdefinitionen, das im Zusammenhang mit dem Platonismus auftaucht. Tait bezeichnete es als *»proof/truth«*-Problem und beschreibt es folgendermaßen:

> *An arithmetical proposition A, for example, is about a certain structure, the system of natural numbers.*
> [...] *If it is true, it is so in virtue of a certain fact about this structure. On the other hand* [...] *we are justified in asserting A* [...] *precisely when we have a proof of it.*
> [...] *Thus, we seem to have two criteria for the truth of A: it is true if (indeed, if an only if) it holds in the system of numbers, and it is true if we can proof it.*
> [Tait 1986, S. 341]

Wahrheit kann im Platonismus also zwei Bedeutungen haben:

1. Eine Aussage ist wahr, wenn sie bewiesen wurde.
2. Eine Aussage ist wahr, wenn sie mathematische Objekte so beschreibt, wie sie objektiv beschaffen sind.

Resnik [1992] formuliert das Dilemma wie folgt: *»How can a proof establish a truth about mathematics?«* [S. 15]. Er glaubt, das Problem ziele auf die Eigenschaft mathematischer Objekte ab, die wir oben in unserer systematischen Übersicht »Erkennbarkeit« genannt haben. Wie dort schon andiskutiert, ist man sich zwar einig, dass sich mathematische Objekte trotz ihrer vom Menschen unabhängigen Existenz durch den Menschen erkennen lassen – nur wie das funktioniert, darüber ist man sich uneins. Da ungeklärt ist, wie der Kontakt zu mathematischen Objekten aussieht, ist auch unklar, wie sich sicherstellen lässt, dass ein Beweis die Wahrheit über mathematische Objekte im Einklang mit einer objektiven mathematischen Welt ausdrückt.

> *When mathematicians prove mathematical statements they construct diagrams, write formulas, and produce arguments. On the face of it, none of these spatio-temporal or mental transactions could provide them with information about the abstract world of mathematical objects. Thus how can proving a mathematical statement show that it is true? For that matter, how can anything mathematicians do produce information about mathematical objects?*
> [Resnik 1992, S. 2]

Dieses Problem wird häufig von Kritikern des Platonismus angesprochen [siehe z. B. Benacerraf 1983]. Sowohl Tait als auch Resnik bezeichnen sich jedoch als überzeugte Platonisten und versuchen, im Zuge einer Verteidigung des Platonismus' das *»truth/proof«*-Problem entsprechend zu lösen. Resnik glaubt, dass der Kontakt zu mathematischen Objekten über *»templates for mathematical patterns«* stattfindet. Durch das Anwenden (Projizieren) dieser »Struktur-Schablonen« auf verschiedene Situationen lerne man mehr über mathematische Objekte [Resnik 1992, S. 14]. Dass es sich hierbei nur um einen indirekten Zugang zu den mathematischen Objekten handelt, sei insofern unproblematisch, als dass auch andere Wissenschaften keinen direkten Zugang zu ihrer jeweiligen Objektwelt hätten.

> *Since for me mathematical entities are theoretical objects, I see no need for our contact with mathematical objects to be more direct than it is with most other scientific entities. With naked eyes we no more observe atoms, cells small crystals, genes, or even the details of the planets than we observe abstract mathematical patterns.*
> [Resnik 1992, S. 14]

Tait weist daraufhin, dass der Zugang zu Objekten in jeder Wissenschaft immer auch mittels Sprache und Modellen funktioniert. Beide sind sich also einig, dass empirische Wahrnehmung nicht unproblematischer ist als die mathematische Wahrnehmung. Auch dort muss man sich fragen, ob das Wahrgenommene richtig erkannt wurde. Tait glaubt, indem man eine wissenschaftliche Welt beschreibt, konstruiert man sie immer auch gleichzeitig. Dies heißt jedoch nicht, dass die Konstruktion nicht mit der Wahrheit übereinstimmt.

> *Why is proof the ultimate warrant for truth? The answer is, of course, that the only way to show that there is an object of type A is to present one. (To prove that there is an object of type A will mean nothing more than to prove A, and that means to exhibit an object of type A.)*
> [Tait 1986, S. 357]

Ob es sich bei diesen zwei Ansätzen um echte »Lösungen« des *»proof/truth«*-Problems handelt, bleibt anzuzweifeln.

Wir haben in diesem Kapitel aufgezeigt, was ein mathematischer Beweis ist, wie er dargestellt und vollbracht werden kann und wie zentral seine Rolle im Selbstverständnis der Mathematik ist. Damit ist das Fundament gelegt, um die philosophische Diskussion rund um den Beweis des Vierfarben-Satzes darzustellen und zu kommentieren.

3. Der Beweis des Vierfarbensatzes und die durch ihn ausgelöste Diskussion

In diesem Kapitel wird der Vierfarbensatz sowie die durch ihn ausgelöste Diskussion beschrieben. Als Appel und Haken den Vierfarbensatz im Jahre 1979 mit Hilfe eines Computers bewiesen, fand der Beweis als erster größerer Computerbeweis der Mathematikgeschichte sowohl unter Philosophen als auch unter Mathematikern entsprechende Beachtung.

Wie wir sehen werden, fielen erste Reaktionen auf den Beweis teilweise sehr emotional aus. Der Beweis wurde von vielen Mathematikern nicht als »richtiger« Beweis angesehen, da er sich vor allem durch die Nutzung des Computers von traditonellen Beweisen signifikant unterscheidet. Eine Diskussion darüber, was einen »richtigen« Beweis überhaupt ausmacht, entspann sich. Bei einer genaueren Analyse der Diskussion kristallisieren sich zentrale Themenkomplexe heraus.

Wir versuchen zu klären, welcher Teil des durch den Vierfarbenbeweis ausgelösten Unbehagens sich auf den Einsatz des Computers zurückführen lässt. Schließlich scheint es, als ob nicht die Computernutzung dafür verantwortlich ist, dass der Vierfarbensatz so unbeliebt ist, sondern eher die Länge und Komplexität des Beweises selbst. Einige der am Vierfarbenbeweis vorgebrachten Kritikpunkte lassen sich genauso bei traditionellen Beweisen vorbringen, die ohne Nutzung des Computers auskommen. Dies zeigt der Vergleich mit einigen sehr langen und komplizierten traditionellen Beweisen.

3.1. Der Vierfarbensatz

Im Folgenden geben wir zunächst einen Überblick über die Geschichte des Beweises. Wir schildern, wie Appel und Haken den Beweis mit Hilfe eines Computers lösten und wie der Beweis aufgenommen wurde. Danach skizzieren wir die Beweisidee und machen klar, für welchen Teil des Beweises der Computer eingesetzt wurde. Im Anschluß betrachten wir einzelne Kritikpunkte genauer.

3.1.1. Geschichte des Vierfarbensatzes

Beim sogenannten »Vierfarben-Problem« handelt es sich um ein Problem, welches in der Mathematik schon lange vor dem Beweis bekannt und präsent war. In dem Buch *»The mathematical century: The 30 greatest problems of the last 100 years«* führt Odifreddi [2000] es sogar gleichberechtigt neben Einsteins Relativitätstheorie auf. Das Problem ist insofern reizvoll, als dass es sich selbst sehr einfach formulieren und verstehen lässt. Trotzdem widerstand es lange Zeit den Lösungsversuchen vieler namhafter Mathematiker.

Ursprünglich geht das Vierfarbenproblem auf den Mathematikstudenten Guthrie zurück. Dieser versuchte um 1852, eine Landkarte von England so einzufärben, dass Länder mit gemeinsamer Grenzlinie verschieden gefärbt werden. Er vermutete, dass vier Farben dafür ausreichen und kommunizierte dies seinem Bruder [Guthrie 1880]. Dieser besprach sich mit seinem Lehrer, dem bekannten Logiker de Morgan, welcher sich so fasziniert zeigte, dass er das Problem in einem Brief Sir Hamilton schilderte [de Morgan 1952]. 1877 fragte Cayley bei einer mathematischen Fachzeitschrift an, ob das Problem bereits gelöst wurde [London Mathematical Society 1878]; da dem nicht so war, veröffentlichte er ein Jahr später selbst eine mathematische Analyse des Problems, ohne jedoch eine Lösung vorzulegen [Cayley 1879]. Seitdem ist das Problem der mathematischen Öffentlichkeit bekannt.

Im Jahr 1879 veröffentlichte der Jurist Kempe einen »Beweis« für den Vierfarbensatz [Kempe 1879a]. Er nutzte die nach ihm benannten »Kempe-Ketten« zur Färbung der Länder. Über 11 Jahre lang galt sein Lösungsversuch als korrekt, bis Heawood [1890] einen Trugschluß in der Argumentation aufzeigen konnte. Heawood gelang in dieser Veröffentlichung außerdem der Beweis des Fünffarbensatzes, d.h. er wies nach, dass fünf Farben zur Färbung einer Landkarte ausreichen.

1912 arbeitete der junge Mathematiker Birkhoff in Princeton an dem Problem. Er führte neue Begriffe ein und bewies einige Teilergebnisse [Birkhoff 1913].

Ende der 60er Jahre kam Heesch auf dem Weg zur Lösung des Problems entscheidend voran, er systematisierte bisherige Ergebnisse und führte eine Konvention für die Darstellung bestimmter Konfigurationen von Ländern ein, die sogenannten *»geschälten Bilder«* [Heesch 1969]. Diese halfen später erheblich bei der Katalogisierung und Systematisierung verschiedener Landkartenteile. Außerdem versuchte Heesch als Erster, das Problem mit Hilfe des Computers zu analysieren. 1965 führte er zusammen mit Karl Dürre erste Vorarbeiten durch, um ein Computerprogramm zu erarbeiten. Mit diesem von ihnen entwickeltem Programm konnten Heesch und Dürre weitere Teilergebnisse nachweisen. Aufgrund beschränkter technischer Möglichkeiten, besonders im Bezug auf Speicherkapazitäten, sowie fehlender Forschungsgelder brachten sie das Projekt jedoch nicht zu Ende.

Auf Anregung von Heesch begann der amerikanische Mathematiker Haken damit, sich mit dem Vierfarbenproblem zu beschäftigen. Zusammen mit seinem Kollegen Appel baute er auf Heeschs Ideen auf. 1979 gelang ihnen schließlich der Beweis mit Hilfe eines Computers. Die Veröffentlichung des Beweises [Appel & Haken 1977] & [Appel et al. 1977] bestand aus 50 Seiten Text, weiteren 85 Seiten mit ca. 2500 Diagrammen und Zeichnungen sowie außerdem 400 Seiten Mikrofiche, die zusätzliche Diagramme und Tausende Verfikationen

Abb. 3.1.: Poststempel »Four colors suffice«

kleinerer Zwischenbehauptungen enthalten. Der Algorithmus benötigte damals ca. 1200 Stunden Rechenzeit.

In der allgemeinen wissenschaftlichen Presse sorgte die Veröffentlichung des Beweises durch Appel und Haken für weitestgehend positive Schlagzeilen. Wie diese zeigen, hatte man keine Zweifel daran, dass das Vierfarben-Problem nun gelöst war:

> *Four-Color conjecture verified – resolved by an intricate proof based on a unique symbiosis of mathematician and machine*
> [...] *Even in mathematics there was a major newsworthy event, a solution to the four-color conjecture that had tantalized mathematicians for a century*
> [...] *In mathematics, the four-color conjecture, a problem resisting solution for a century, was finally solved.*
> [Science News 1976, S. 71, 387, 406]

Die mathematische Fakultät der Universität von Illinois, an der Appel und Haken damals arbeiteten, zeigte sich stolz darüber, dass die Lösung des Problems bei ihnen gefunden wurde. Sie stempelte ihre Post eine Zeit lang mit dem triumphalen Vermerk »Four Colors Suffice« (siehe Abb. 3.1).

Der bekannte Graphentheoretiker Tutte schrieb ein kleines Gedicht für die erste Ausgabe des *»Journal of Graph Theory«*, welches 1977 erstmals veröffentlicht wurde und von dem erfolgreichen Beweis berichtete. Das Gedicht trägt den Titel *»Some Recent Progress in Combinatorics«*.

> *Wolfgang Haken*
> *Smote the Kraken*
> *One! Two! Three! Four!*
> *Quoth he: »The monster is no more«*
> [Tutte zitiert von Chartrand & Zhang 2009, S. 24]

Als Appel und Haken den Beweis einer ausgesuchten Gruppppe von Mathematikern vorstellten, soll es jedoch nur verhaltenen Applaus gegeben haben:

> *The elegant and old lecture hall was jammed with mathematicians anxious to hear Professor Haken give the proof. It seemed like the perfect setting to announce a great mathematical result. He proceeded to outline clearly the computer-assisted proof, that he and his colleagues had devised. At the conclusion of his remarks, I had expected the audience to erupt with great ovation. Instead, they responded with polite applause! I was puzzled by their cool reception and sought explanations from those who had heard his presentation. Mathematician after*

> *mathematician expressed uneasiness with a proof in which a computer played a major role.*
> [Albers 1981, S. 82]

Calude berichtet über die weiteren Reaktionen:

> *By 1977, details of the proof appeared in articles and the controversy began. The mathematical community watches in semi-desperation and semi-ecstasy at this tiny problem, which an average child has the capacity to understand, puts the very core of what mathematics stands for – the ultimate, unquestionable truth – on shaky ground. Can we and should we accept this kind of proof?*
> [Calude 2001, S. 3]

Tatsächlich bezweifelten einige, dass es sich bei der vorgestellten Lösung um einen »echten « Beweis handelte. So zum Beispiel der Mathematiker und Logiker Spencer-Brown, welcher sich selbst erfolglos an einer Lösung des Vierfarbenproblems versuchte:

> *Nowhere in their long and often irrelevant account do they provide the evidence that would enable the reader to check what they say. It may, or may not, be ›possible‹ to prove the theorem the way they claim. What is now certain is that they did not do so* [. . .] *not only is no proof to be found in what they published, but there is not anything that even begins to look like a proof. It is the most ridiculous case of ›The King's New Clothes‹ that has ever disgraced the history of mathematics.*
> [Spencer-Brown zitiert von Wilson 2002, S. 222]

Auch andere Mathematiker äußerten sich kritisch. Zum Beispiel sieht der renommierte britisch-kanadische Geometer Coxeter[25] den Beweis nicht als »normalen« Beweis an:

> *It always seemed to me a different kind of theorem from other kinds of theorems. When the computer proof has been checked by quite a number of people, and they're all satisfied with it, well then we'll have to accept it. But I think it's very unlikely that anyone can break that proof down into something that one would regard as an ordinary proof. So it's rather in a different category than all other theorems.*
> [Coxeter zitiert von Wilson 2002, S. 221]

Ebenso berichtet Jones[26] von seinem Unbehagen gegenüber dem Beweis:

> [. . .] *this four colour theorem proof leaves me very unhappy. It is conceivable that the computer actually made a mistake, and would repeat it no matter how many times we ran that program. Maybe there is an electrical fault, or something. One cannot really believe it, and one does not really understand it.*
> [Jones zitiert in Connes et al. 1991, S. 91f]

[25] Präsident der Canadian Mathematical Society.
[26] Träger der Fields-Medaille (neben dem Abel-Preis die wichtigste mathematische Auszeichnung).

Vielfach wird die Nutzung des Computers kritisiert. So bezeichnet z.B. Cohen [1991][27] den Beweis von Appel und Haken als *»computer shenanigans«* [S. 328], also als Computer-Spielerei bzw. Computer-Schwindelei. Solche Spielerei zu akzeptieren, würde intellektuell nicht befriedigen:

> *In the analysis of each case the program only announced whether or not the procedure terminated successfully. The entire output from the machine was a sequence of yeses. This must be distinguished from a program which produces a quantity as output which can subsequently be verified by humans as being the orrect answer* [...] *The real thrill of mathematics is to show that as a feat of pure reasoning it can be understood why four colors suffice. Admitting the computer shenanigans of Appel und Haken to the ranks of mathematics would only leave us intellectually unfulfilled.*
> [Cohen 1991, S. 328]

Paul Halmos[28] vergleicht bei seiner Besprechung des Vierfarbenbeweises die Glaubwürdigkeit eines Computers mit der eines Wahrsagers und streicht heraus, dass die Menschheit durch diesen Beweis seines Erachtens nach nichts dazulernt:

> *I want to ask: what did we learn from the proof? What do we know now that we didn't know before? I do not find this an easy question to answer. To be sure: I am not going to spend my time looking for a counterexample to the four-color assertion. The printout had at least that practical effect: it discouraged attempts to prove it wrong. Except for that, I feel that we, humanity, learned mighty little from the proof; I am almost tempted to say that as mathematicians we learned nothing at all. Oracles are not helpful mathematical tools.*
> [Halmos 1990, S. 577]

Schmidt [1982] überprüfte Teile des Vierfarbenbeweises (ca. 40% des ersten Teils des Beweises[29]) in seiner 1982 veröffentlichten Diplomarbeit. Er fand insgesamt 14 kleinere und einen größeren Fehler. Obwohl Appel und Haken in der Lage waren, diese Fehler zeitnah zu flicken, hielten sich hartnäckig Gerüchte, dass der Beweis weiterhin fehlerhaft sei. Das Magazin *»The Mathematical Intelligencer«* wand sich an Appel und Haken mit der Bitte, auf Gerüchte und Zweifel zu reagieren. Dies taten die beiden gute 10 Jahre nach Beweisveröffentlichung mit dem 10-seitigem Artikel *»The Four Color Proof Suffices«*. Sie zeigen Verständnis für die Bedenken gegenüber ihrem Beweis:

> *The papers are somewhat intimidating due to their style and length and few mathematicians have read them in any detail.*
> [...] *When faced with such a proof even the fairest minded mathematician can be forgiven for wishing that it would just go away rather than being forced to think that an ›elegant‹ proof may never appear and thus our Eden is defiled.*
> [Appel & Haken 1986, S. 12]

[27] Professor für Mathematik und Computer Science in New York.
[28] Professor in Chicago, Träger des Steele-Preises der American Mathematical Society.
[29] Dass er nur 40% überprüfte, lag an der zeitlichen Limitation der Diplomarbeit auf zwei Jahre, mehr war in diesem Zeitraum nicht zu schaffen.

In dieser Veröffentlichung schildern sie außerdem erneut die Grundideen des Beweises und erklären, warum sie den Beweis nach wie vor für korrekt halten. Auch wenn er nicht zwingend fehlerfrei sei, so wäre er insgesamt doch robust, d.h. sollten Fehler gefunden werden, könne man diese jederzeit schnell mittels einer eigens entwickelten *»error correction routine«* beheben. Im Jahr 1989 veröffentlichten sie eine neue Version des Beweises, in der sie alle Fehler korrigierten, die ihnen bis dahin bekannt waren.

Über die Jahre legte sich die Aufregung um den Beweis. Spätere Beweise halfen dabei, die Zweifel zu zerstreuen. Der erste Alternativbeweis wurde von Allaire [1977] veröffentlicht. Er konnte einige Teile des Beweises vereinfachen; der mit dem Computer geführte Teil des Beweises benötigte weniger Zeit. Eine erhebliche Vereinfachung gelang durch Robertson et al. [1996].

2004 gelang Benjamin Werner und Georges Gonthier eine komplette Formalisierung des Beweises und eine anschließende Überprüfung mit Hilfe des Beweisassistentens *»Coq«*. Der Beweis besteht aus ca. 60.000 Zeilen Code. Um ihn zu verifizieren, ist es aber nicht nötig, die Schritte von einer zur anderen Zeile nachzuvollziehen, sondern es genügt, die Dokumente mit den Definitionen und dem Ergebnis zu untersuchen und dem Beweisassistenten zu vertrauen. Gonthier [2005] selbst sagt über seinen Beweis: »[it] *can be seen as an ultimate step in this clarification effort«* [S. 2]. Dies wurde auch von anderen so gesehen, so berichtet z.B. Stanford Mathematiker Devlin auf der Homepage der *»Mathematical Association of America«* unter der Überschrift *»Last doubts removed about the proof of the Four Color Theorem«* über den Beweis von Gonthier [Devlin 2005].

Der Beweis des Vierfarbensatzes animierte Mathematiker, auch andere Sätze mit Hilfe des Computers zu beweisen. 1989 bewiesen Lam et. al die Nichtexistenz einer endlichen projektiven Ebene der Ordnung 10 mit Hilfe des Computers [Lam et al. 1989]. Das prominenteste aktuelle Beispiel ist Hales' Beweis der Kepler'schen Vermutung (siehe Anhang A.3), die eine Aussage über die maximale Packungsdichte von Kugeln macht [Hales 1998].

Insofern behielt der Graphentheoretiker Tutte Recht, als er 1978 den Vierfarbensatz als Vorboten weiterer Computerbeweise bezeichnete:

> *For the Four Colour Problem is just one member, one special case, of a great association. It was singled out for mathematical attack because it seemed likely to be the easiest member. But now the time has come to confront the other members of the family... The Four Colour Theorem is the tip of the iceberg, the thin end of the wedge and the first cuckoo of Spring.*
> [Tutte 1978, S. 75]

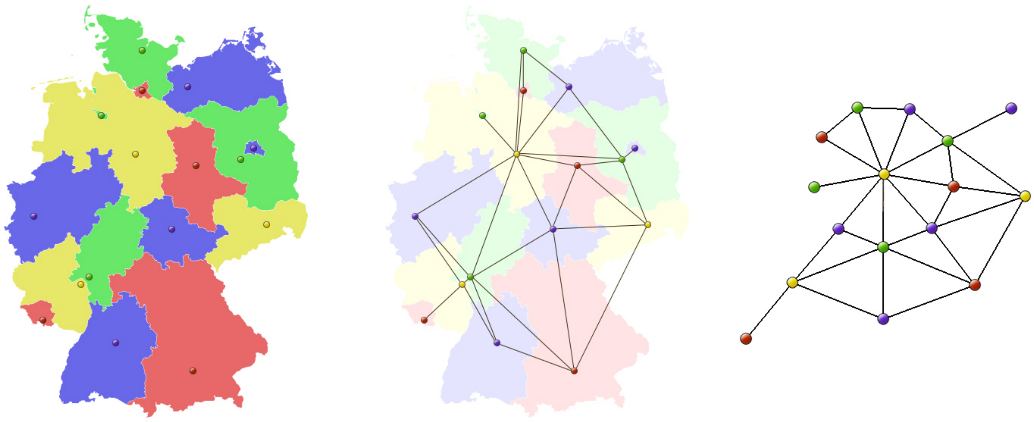

Abb. 3.2.: Dualisierung am Beispiel der Deutschlandkarte

3.1.2. Beweisidee und -führung des Vierfarbensatzes

Um die Reaktionen auf den Vierfarbenbeweis sowie die sich daraus entsponnene Diskussion besser verstehen zu können, wollen wir nun Beweisidee und -führung von Appel und Haken genauer betrachten. Insbesondere machen wir klar, warum und für welchen Teil des Beweises der Computer eingesetzt wurde.

Zunächst formulieren wir das Problem exakt. Wir gehen von einer ebenen Landkarte mit endlich vielen Ländern aus. Länder können dabei immer nur aus einer einzigen Fläche bestehen. Länder, die aus mehreren Teilen bestehen, gibt es nicht, d.h. Inseln werden als eigenständige Länder betrachtet. Zwei Länder heißen benachbart, wenn sie eine gemeinsame Grenzlinie besitzen. Länder, die sich in nur einem einzigen Punkt berühren, gelten nicht als benachbart. Die Länder der Karte werden so eingefärbt, dass je zwei benachbarte Länder immer unterschiedliche Farben erhalten. Man vermutet, das hierfür vier verschiedene Farben ausreichen und formuliert daher den Vierfarbensatz wie folgt: **Jede Landkarte lässt sich mit vier Farben so einfärben, dass keine zwei benachbarten Länder die gleiche Farbe haben.**

Um den Satz zu beweisen, wird das Problem zunächst in ein dazu analoges Problem übertragen. Man wählt hierzu in jedem Land einen Punkt (anschaulich z.B. die Hauptstadt) und verbindet dann jeweils die Punkte benachbarter Länder miteinander (z.B. durch Eisenbahnlinien). Man erhält einen Graphen (bzw. ein Streckennetz). Die Punkte nennt man auch Knoten, die Verbindungslinien zwischen ihnen bezeichnet man als Kanten des Graphen. Nun ordnet man den Knoten Farben zu, sodass zwei miteinander verbundene Punkte nicht die gleiche Farbe erhalten. Ein Beispiel für eine solche sogenannte »Dualisierung« findet sich in Abb. 3.2.

Der Vierfarbensatz in dieser Darstellung lautet dann: **In jedem ebenen Graphen kann man jedem Knoten genau eine von vier Farben so zuordnen, dass je zwei durch eine Kante verbundene Knoten verschiedene Farben haben** [vgl. Mitchem 1981].

Dass diese Fragestellung analog zu der ersten ist, lässt sich leicht mit Hilfe von Dualitätsaussagen beweisen. Da für das Färben einer Landkarte die Form der Länder unwichtig ist

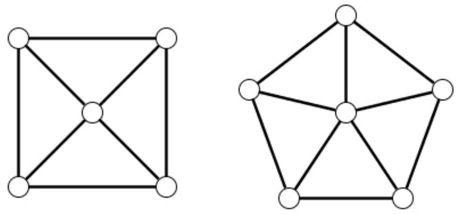

Abb. 3.3.: 4-Stern und 5-Stern

und nur ihre relative Lage zueinander interessiert, ist es sinnvoll, mit dieser analogen Problemstellung zu arbeiten. Sie abstrahiert von einem geometrisch-topologischen zu einem rein kombinatorischen Problem und ermöglicht eine übersichtlichere Darstellung.

Beim Vierfarbenbeweis von Appel und Haken handelt es sich um einen Widerspruchsbeweis. Bei dieser Art von Beweis zeigt man die Wahrheit einer Aussage, indem man ihr Gegenteil widerlegt (siehe Abschnitt 2.1.1). In diesem Fall nehmen wir an, dass es einen Graphen gibt, welcher sich nicht mit 4 Farben färben lässt. Wenn es einen solchen gibt, dann muss es auch einen kleinsten Graphen (d.h einen Graphen mit der geringsten Summe aus Kanten und Knoten) geben, der nicht 4-färbbar ist. Sobald man aus diesem sogenannten »kleinsten Verbrecher« eine Kante oder einen Knoten entfernt, erhält man einen 4-färbbaren Graphen (ansonsten wäre ja der resultierende Graph ein **kleinerer** Verbrecher). Im Folgenden begeben wir uns auf die Suche nach diesem kleinsten Verbrecher.

Es ist relativ schnell möglich zu zeigen, dass der kleinste Verbrecher mindestens 13 Knoten enthalten muss. Des Weiteren muss jeder Knoten mindestens vom Knotengrad 3 sein, d.h. er muss mit mindestens 3 anderen Knoten verbunden sein.

Mithilfe der Euler'schen Polyederformel, die einen Zusammenhang zwischen den Knoten und Kanten eines Graphens herstellt, lässt sich außerdem zeigen, dass der kleinste Verbrecher mindestens einen 4- oder 5-Stern enthalten muss, d.h. einen Knoten, der mit 4. bzw. 5 anderen Knoten verbunden ist (siehe Abb. 3.3). Für eine detaillierte Beweisskizze siehe Anhang B.2.

Für den 4-Stern kann man zeigen, dass er – egal wie er als Teil in einen Graphen eingebettet ist – immer mit 4 Farben färbbar ist. Außerdem kann man zeigen, dass der gesamte Graph dann ebenfalls mit 4 Farben färbbar ist [Ein anschaulicher Beweis findet sich bei Dupree et al. 2012]. Das heißt aber auch, dass der **kleinste** Verbrecher keinen 4-Stern enthalten kann. Denn sonst könnte man den 4-Stern entfernen und hätte einen noch kleineren Verbrecher.

Könnte man nun noch für den 5-Stern zeigen, dass er ebenfalls – egal, wie er als Teil eines Graphens eingebettet ist – mit vier Farben färbbar ist, hätte man den Vierfarbensatz bereits bewiesen. Es ergäbe sich dann nämlich ein Widerspruch, der kleinste Verbrecher müsste entweder einen 4- oder einen 5-Stern enthalten, kann aber als **kleinster** Verbrecher keinen 4- oder 5-Stern enthalten.

Allerdings lässt sich für den 5-Stern zeigen, dass er in bestimmten Einbettungen nicht 4-färbbar ist [siehe erneut Dupree et al. 2012].

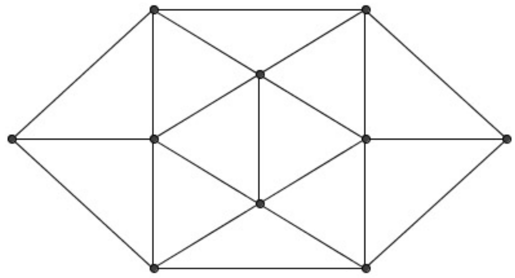

Abb. 3.4.: Der Birkhoff Diamant

Die Grundidee des Beweises lässt sich hier aber bereits erahnen. Wenn man eine Menge aus Teilgraphen findet, von denen in jedem beliebigen Graph mindestens einer auftaucht und man außerdem zeigen kann, dass sie unabhängig von ihrer Einbettung 4-färbbar sind, so hat man gezeigt, dass es keinen kleinsten Verbrecher geben kann. Wie an dieser Beweisskizze schon zu erkennen, zerfällt der Beweis somit natürlicherweise in zwei Teile.

Der erste Teil des Beweises wurde von Appel und Haken mit »discharging« (deutsch: entladen) benannt. Für sich genommen, handelt es sich bei diesem Teil um einen klassischen »Stift-Papier-Beweis«. In ihm versuchen Appel und Haken eine beschränkte Menge aus Teilgraphen bzw. Konfigurationen zu finden, so dass sich in jedem beliebigen Graphen, insbesondere auch im kleinsten Verbrecher, mindestens eine Konfiguration dieser Menge findet. Sie nannten die Menge entsprechend »unvermeidbare Menge«. Die Konstruktion gelingt ihnen mithilfe von sogenannten Entladungsprozeduren, bei denen sie auch die Eulersche Polyeder-Formel nutzen. Sie erhalten eine unvermeidbare Menge aus 1834 Konfigurationen [Appel & Haken 1977]. Insbesondere muss daher der »kleinste Verbrecher«, als Teilgraph einen Graphen der unvermeidbaren Menge enthalten. Abb. 3.4 zeigt eine der 1834 Konfigurationen, den sogenannten »Birkhoff-Diamanten«.

Bei dieser Konfiguration handelt es sich um eine Konfiguration mit kleiner Ringgröße. Die Ringgröße gibt an, wieviele Knoten sich auf dem äußeren Rand eines Teilgraphens befinden. Der Birkkhoff-Diamant hat also die Ringgröße 6. Eine wesentliche Errungenschaft von Appel und Haken besteht darin, dass sie die unvermeidbare Menge aus Konfigurationen mit einer maximalen Ringgröße von 14 bilden konnten. Tabelle 3.1 zeigt die Zusammensetzung ihrer unvermeidbaren Menge geordnet nach Ringgröße der Konfigurationen.

Ringgröße	≤ 8	9	10	11	12	13	14
Anzahl	7	8	35	89	334	701	660

Tabelle 3.1.: Verteilung der Ringgrößen der Konfigurationen

Der zweite Teil des Beweises, von Appel, Haken und Koch unter der Überschrift »reducibility« (deutsch: Reduzibilität) veröffentlicht, beschäftigt sich mit der Eigenschaft Reduzibilität [Appel et al. 1977]. Große Teile des zweiten Teils beruhen auf dem Einsatz des Computers. Ein Teilgraph bzw. eine Konfiguration heißt reduzibel, wenn man jeden Graphen, der sie enthält, wie im Vierfarbensatz gefordert mit vier Farben einfärben kann.

Ringgröße	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Färbungen	31	91	274	820	2461	7381	22.144	66.430	199.291

Tabelle 3.2.: Färbemöglichkeiten des Randes nach Ringgröße der Konfiguration

Das heißt für jede mögliche Einbettung des Teilgraphen lässt sich eine 4-Färbung des gesamten Graphens zeigen. Dass es sich beim oben erwähnten Birkhoff-Diamanten um eine reduzible Konfiguration handelt, bewies Birkhoff ohne Computer bereits im Jahre 1913 [Birkhoff 1913]. Der Beweis erstreckt sich über ca. 2 Seiten. Allerdings handelt es sich beim Birkhoff-Diamanten wie bereits erwähnt um eine relativ kleine Konfiguration mit Ringgröße 6. Je größer jedoch die Ringgröße einer Konfiguration ist, umso mehr Möglichkeiten gibt es, sie als Teilgraph in einen anderen Graphen einzubetten und desto umfangreicher und komplizierter ist es, ihre Reduzibilität zu beweisen.

Während beim Birkhoff-Diamanten lediglich 31 verschiedene Färbungen für den Rand möglich sind [vgl. Dupree et al. 2012], steigt die Zahl der Möglichkeiten exponentiell mit der Ringgröße. In Tabelle 3.2 ist die Anzahl der Färbemöglichkeiten in Abhängigkeit von der Ringgröße dargestellt.

Hier erkennt man schnell, dass es ohne Computer kaum möglich ist, die Konfigurationen auf Reduzibilität zu testen. So muss man, um eine Konfiguration auf Reduzibilität zu prüfen, die einen Ring der Größe 14 enthält, fast 200.000 verschiedene Färbungen für den äußeren Ring von Knoten ausprobieren. Das Testen einer einzelnen Konfiguration auf Reduzibilität kann so bis zu 500.000 logische Operationen benötigen. Da diese Prozedur für alle 660 Konfigurationen mit Ringgröße 14 in der unvermeidbaren Menge durchgeführt werden muss, ist der Rechenaufwand enorm.

Daher benutzten Appel und Haken für den zweiten Teil ihres Beweises den Computer. Sie entwickelten einen Algorithmus, welcher mit Hilfe von kombinatorischen Routinen prüfte, ob die jeweilige Konfiguration als Teil eines größeren Graphens mit vier Farben färbbar ist. Für jede Konfiguration werden alle möglichen Färbungen getestet, bis eine zulässige Färbung gefunden wurde. Er wurde von Koch auf einem IBM 370-168 programmiert. Insgesamt benötigte der Computer ca. 1200 Stunden Berechnungszeit, bis schließlich nachgewiesen war, dass alle 1834 Konfigurationen der von Appel und Haken definierten, unvermeidbaren Menge reduzibel sind.

Damit endet die Suche nach dem kleinsten Verbrecher erfolglos und der Beweis ist vollständig. Jeder beliebige Graph, insbesondere also auch der kleinste Verbrecher, enthält eine Konfiguration aus der unvermeidbaren Menge. Da alle Teilgraphen der unvermeidbaren Menge reduzibel sind, ist er mit vier Farben färbbar. Es ergibt sich ein Widerspruch; die ursprüngliche Annahme, dass es einen Graphen gibt, welcher nicht 4-färbbar ist, ist widerlegt. Somit muss jeder Graph 4-färbbar sein.

Robertson et al. [1996] fanden einen Beweis, bei welchem die unvermeidbare Menge nur aus 633 Konfigurationen besteht. Während Appel und Haken den ersten Teil des Beweises (die Konstruktion der unvermeidbaren Menge) noch per Hand ausführten, benutzten Robertson et al. auch hierfür den Computer. Der gesamte Beweis (inklusive Computerprogramm und zugehöriger Dokumentation) kann online unter [Robertson et al. 1995] eingesehen werden[30]. Inzwischen wurde der Beweis von Gonthier [2005] komplett formalisiert und mit Hilfe eines Beweisassistenten geprüft.

3.2. Die Diskussion

Die erste viel rezipierte und diskutierte Reaktion stammt von Thomas Tymoczko, einem Philosophen, der sich auf Logik und Philosophie der Mathematik spezialisiert hat. Tymoczko ist der Meinung, dass es sich beim Beweis des Vierfarbensatzes nicht um einen »richtigen« Beweis handelt. So widerspräche der Beweis insofern dem traditionellen Beweiskonzept, als er sich zu Teilen auf empirische Evidenz stütze und daher kein reines apriori Wissen mehr etablieren könne. Die Nutzung des Computers im Verlauf des Beweises erinnere mehr an ein Experiment als an einen Beweis. Insbesondere eine für Tymoczko essentielle Eigenschaft von Beweisen, die Überschaubarkeit, gehe durch die Nutzung des Computers verloren. Da einige der Beweischritte »im Computer verschwinden«, ließen sie sich nicht mehr nachvollziehen. Außerdem seien Computerbeweise im Gegensatz zu traditionellen Beweisen fallibel. Er plädiert daher dafür, das Konzept eines Beweises zu überdenken.

Viele Mathematiker und Philosophen reagieren auf Tymoczko. Besonders über die Eigenschaft der Überschaubarkeit wird diskutiert. Einige stimmen zu, dass der Vierfarbenbeweis von gewissen empirischen Elementen Gebrauch macht, halten dies jedoch nicht für ein neues Phänomen. Der Vergleich mit anderen, traditionellen Beweisen, die besonders lang und kompliziert sind, zeigt, dass man ihnen ebenso fehlende Überschaubarkeit anlasten kann.

In der weiteren Diskussion werden auch Aspekte jenseits des traditionellen Konzeptes erwähnt. Es wird kritisiert, dass der Vierfarbenbeweis es nicht möglich macht, durch das schrittweise Nachvollziehen des Beweises einen tieferen Einblick in die Materie zu bekommen. Der Beweis ermöglicht also kein zusätzliches Verständnis. Außerdem wird er nicht als elegant und ästhetisch wahrgenommen.

Man sieht, dass es Aspekte gibt, die bei der Bewertung eines Beweises eine Rolle spielen und sich nicht in der klassischen Auffassung von einem Beweis finden. Hierzu gehören insbesondere auch soziale und ästhetische Aspekte, die bei Verifikation und Akzeptanz eines Beweises eine Rolle spielen.

Im Folgenden untersuchen wir die Debatte genauer auf diese Hauptkritikpunkte und betrachten die jeweiligen Argumente. Eine genauere Untersuchung wird zeigen, dass sich die Kritik am Vierfarbenbeweis nicht nur auf die Nutzung des Computers gründen lässt. Auch an traditionellen Beweisen ließe sich ähnliche Kritik anbringen.

3.2.1. Tymoczko

In seiner Arbeit *»The Four-Color Theorem and its Philosophical Significance«* beschreibt Tymoczko den Einfluss, den der Beweis des Vierfarbensatzes von Appel und Haken seiner

[30] Ein elektronisches Verzeichnis aller 633 Konfigurationen der unvermeidbaren Menge von Robertson et. al. findet sich auf http://www.4ct.biz.

Meinung nach auf die Philosophie der Mathematik hat. Seine These: Aus der Lösung des Vierfarben-Problems ergibt sich für die Philosophie ein neues Problem, dies nennt er *»the new four-color theorem«* [Tymoczko 1979, S. 52]. Dieses neue Vierfarben-Problem besteht darin, dass es sich beim Vierfarbenbeweis nach klassischem Verständnis nicht um einen Beweis handelt. Möchte man ihn als Beweis anerkennen, so muss man die Philsophie der Mathematik ändern. Entweder ändert man sie durch entsprechende Anpassung des Konzeptes eines Beweises, so dass es den Vierfarbenbeweis miteinschließt oder durch Schaffung einer neuen Kategorie für den Vierfarbenbeweis. Im Folgenden geben wir einen Überblick über die Argumentation. Soweit nicht anders erwähnt, beziehen sich alle Seitenangaben dieses Abschnitts auf die Arbeit [Tymoczko 1979].

Die Anerkennung des Vierfarbenbeweis als Beweis macht es seiner Meinung nach nötig, sich von vier allgemein anerkannten Ansichten über die Mathematik, welche er selbst auch teilt, zu verabschieden. Diese *»commonly held beliefs about mathematics«* sind:

> *1. All mathematical theorems are known a priori.*
> *2. Mathematics, as opposed to natural science, has no empirical content.*
> *3. Mathematics, as opposed to natural science, relies only on proofs, whereas natural science makes use of experiments.*
> *4. Mathematical theorems are certain to a degree that no theorem of natural science can match.*
> [S. 63]

In diesen Sätzen lässt sich die von uns in Kapitel 2 geschilderte Auffassung von der Mathematik wiederfinden. Beweise spielen in ihr eine zentrale Rolle, da es sich bei ihnen um die einzig zulässige Methode handelt, mathematisches Wissen zu gewinnen. Zeigt sich die Gemeinschaft der Mathematiker von einem Beweis überzeugt, so wird der Satz, der durch den Beweis bewiesen wurde, dem Korpus mathematischen Wissens hinzugefügt. Die speziellen Eigenschaften eines Beweises garantieren hierbei, dass das durch ihn etablierte Wissen sicher ist, d.h. ein Satz, welcher einmal bewiesen wurde, ist absolut und unumstößlich (und für alle Zeiten) wahr. Insbesondere im Vergleich zu der in den Naturwissenschaften verwendeteten Methode »Experiment«, welche Bezug auf empirische Evidenz nimmt und daher fehleranfällig ist, garantiert die in der Mathematik verwendete Methode »Beweis« größtmögliche Sicherheit. Als Garant für Sicherheit sorgt sie letztendlich dafür, dass der Mathematik unter anderen Wissenschaften oftmals eine Sonderstellung zugeschrieben wird. Sie dient somit also auch als Distinktionsmerkmal gegenüber anderen Wissenschaften.

Damit ein Beweis sicheres, fehlerfreies, apriori Wissen etablieren kann, muss es sich bei ihm um eine fehlerfreie apriori Deduktion aus Axiomen handeln. Im Rahmen einer aprioristischen Auffassung der Mathematik werden die grundlegenden Beweiseigenschaften Apriorizität, deduktive Geschlossenheit und Infallibilität angenommen (vgl. 2.1.3).

Auch bei Tymoczko werden diese strukturellen Grundeigenschaften implizit angenommen, so spricht er von einem Beweis als »a priori deduction of a statement from premises« [S. 58] und bezeichnet einen Beweis genau dann als apriori, wenn er unabhängig von jeglicher

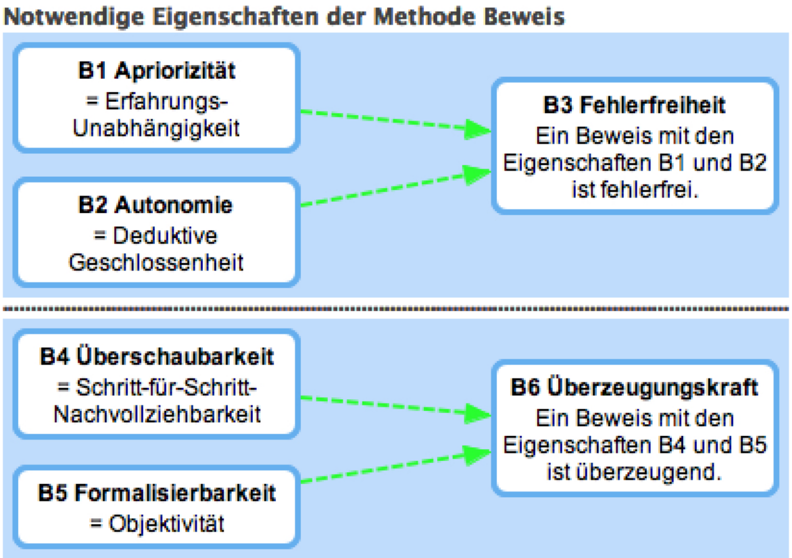

Abb. 3.5.: Beweiseigenschaften nach Tymoczko

Erfahrung ist und sich nur auf reines Denken stützt: *»independently of any experience beyond pure thought«* [S. 77]. Deduktiv geschlossen ist ein Beweis für ihn, wenn er die gewünschte Aussage aus Axiomen mit Hilfe deduktiver Schlußregeln herleitet und außerdem nichts »außerhalb seiner selbst« benötigt, um von seiner Richtigkeit zu überzeugen: *»needs nothing outside itself to convince«* [S. 59]. Die Eigenschaften der Apriorität und der deduktiven Geschlossenheit sind es, die einen Beweis bzw. das durch ihn etablierte Wissen besonders sicher machen. Das Verfahren ist nicht anfällig für Fehler, da es nur Gebrauch von wahren Prämissen und wahrheitsbewahrenden Schlußregeln macht. Fehleranfällig ist eine Methode erst dann, wenn sie sich zu irgendeiner Zeit auf empirische Evidenz bezieht oder nur probabilistische Aussagen trifft [S. 80].

In seiner Arbeit benennt Tymoczko darüber hinaus drei weitere, für ihn grundlegende Charakteristika eines klassischen Beweises:

B4 Überschaubarkeit: *»Proofs are surveyable«* (epistemologische Dimension)

B4 Formalisierbarkeit: *»Proofs are formalizable«* (logische Dimension)

B6 Überzeugungskraft: *»Proofs are convincing«* (anthropologische Dimension)

Die letzte Eigenschaft erachtet er als Folge der anderen zwei Eigenschaften. Ist ein Beweis überschaubar und formalisierbar, so überzeugt er.

Die Eigenschaften B4 und B5 verhalten sich laut Tymoczko zueinander wie die zwei Seiten einer Münze: *»Surveyability and formalizability can be seen as two sides of the same coin«* [S. 61], da Formalisierbarkeit Überschaubarkeit gewissermassen »idealisiere«, indem sie den Beweis in die logischen Einzelschritte zergliedere.

Letztendlich handele es sich bei der Überschaubarkeit jedoch um die essentielle Eigenschaft eines Beweises. Sie sei es, die mathematische Beweise und damit mathematisches Wissen sicherer mache und der Mathematik damit unter den Wissenschaften eine Sonderstellung ermögliche:

> *Because of surveyability, mathematical theorems are credited by some philosophers with a kind of certainty unobtainable in the other sciences.*
> [S. 60]

Durch das Überschauen eines Beweises lasse sich sicherstellen, dass es sich bei jedem Beweisschritt entweder um eine Prämisse oder eine gültige Schlussfolgerung handelt und dass es außerhalb dieser geschlossenen Beweiskette keinerlei andere Argumente gäbe, die berücksichtigt werden müssten, um die Wahrheit der Behauptung zu etablieren. Die Überschaubarkeit ermögliche es, zu überprüfen, ob die strukturellen Eigenschaften der Apriorizität und der deduktiven Geschlossenheit erfüllt sind. Tymoczko versteht entsprechend unter Überschaubarkeit eine Art von Überprüfbarkeit: Ein Beweis ist genau dann überschaubar, wenn jeder einzelne Schritt per Hand von einem Mathematiker geprüft werden kann, wie folgende Zitate verdeutlichen:

> [...] *a proof must be perspicuous, or capable of being checked by hand.*
> [...] *So it is with all mathematical proofs; to say that they can be surveyed is to say that they can be definitively checked by members of the mathematical community.*
> [...] *checked by mathematicians, step by step, as all other proofs have been checked.*
> [S. 59, 60, 70]

Dies beinhaltet für Tymoczko nicht nur, dass ein Beweis theoretisch auf jeden einzelnen Schritt hin überprüft werden kann, sondern es muss auch praktisch durchführbar sein, d.h. der Beweis darf nicht zu lang sein. Mit »zu lang« meint er *»can't be read over by a mathematician in a human lifetime«* [S. 62].

Da eine solche Überprüfung bei der Länge des Beweises des Vierfarbensatzes nicht möglich ist, sieht Tymoczko einen Keil zwischen die zwei Seiten der Beweismedaille – Formalisierbarkeit und Überschaubarkeit – getrieben:

> [...] *the current proof of the 4CT does drive a wedge between the criteria of surveyability and formalizability. In fact, there is no surveyable proof, no proof in the traditional sense, of the 4CT, nor is there likely to be one.*
> [S. 62]

Der Beweis des Vierfarbensatzes sei zwar vermutlich formalisierbar, aber keinesfalls überschaubar. Er lasse sich nicht von einem Mathematiker innerhalb seiner Lebenszeit überprüfen. Trotzdem, obwohl der Beweis also nicht überschaubar ist, erscheine er zumindest vielen Mathematikern überzeugend: *»Is the proof of the 4CT convincing? Yes, most mathematicians have accepted the 4CT«* [S. 69].

Damit erfüllt der Vierfarbenbeweis laut Tymoczko maximal zwei der oben erwähnten sechs Beweiseigenschaften, die er, um als traditioneller Beweis akzeptiert zu werden, erfüllen müsste (siehe Abb. 3.6).

Betrachtet man die Argumentation für die einzelnen Punkte genauer, so stellt man fest, dass Tymoczko jeweils unter anderem auch die Nutzung des Computers dafür verantwort-

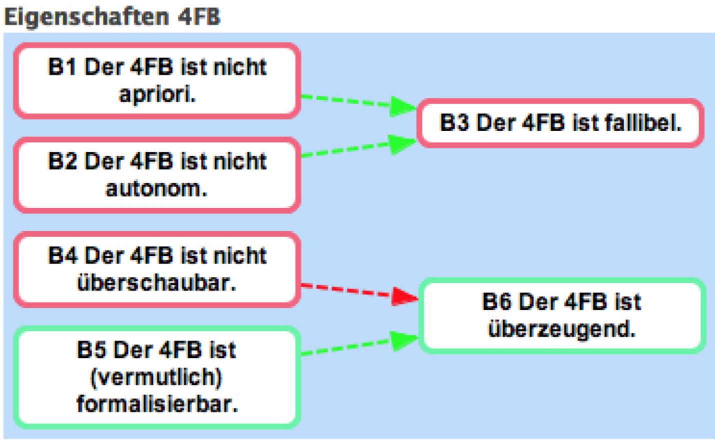

Abb. 3.6.: Der Vierfarbenbeweis erfüllt nur zwei der sechs Beweiseigenschaften

lich macht, dass der Beweis a posteriori, nicht autonom, fallibel und unüberschaubar ist (siehe Abb. 3.7).

Aber auch für die Tatsache, dass der Beweis formalisierbar und überzeugend ist, zieht er die Computernutzung zur Begründung heran, vgl. erneut Abb. 3.7. Um überzeugend zu sein, benötige ein Beweis normalerweise nichts außerhalb seiner selbst. Durch die schrittweise Überprüfung des Beweises werde man schließlich von seiner Richtigkeit überzeugt:

> *It needs nothing outside itself to be convincing. The mathematician surveys the proof in its entirety and thereby comes to know the conclusion.*
> [S. 59]

Beim Vierfarbensatz lasse man sich aber allerdings durch etwas außerhalb des Beweises überzeugen, durch den Computer (bzw. auf die Richtigkeit der durch ihn ausgegebenen Ergebnisse). Tymoczko spricht in diesem Zusammenhang von einem *»appeal to the authority of the computer«*, also von einer Berufung auf die Autorität des Computers:

> [The use of the computer in the 4CT is] *simply an appeal to authority and not a demonstration*
> [...] *computers are, in the context of mathematical proofs, another kind of authority.*
> [S. 72]

So gäbe es zwar durchaus Gründe, auf die Autorität des Computers zu vertrauen, aber diese sind empirischer Natur. Nur aufgrund empirischer Evidenz könne man wissen, dass die grundlegende Struktur richtig implementiert wurde sowie Soft- und Hardware keine Fehler enthalten.

Die Nutzung des Computers stellt also eine neue Methode dar, um mathematisches Wissen zu etablieren: *»a new technique has been developed for establishing mathematical truths«* [S. 75].

Da der Computer nur einen Bericht über die erfolgreiche Durchführung der Beweiskette liefere, handele es sich bei der Computernutzung nicht um eine a-priori-Deduktion, sondern

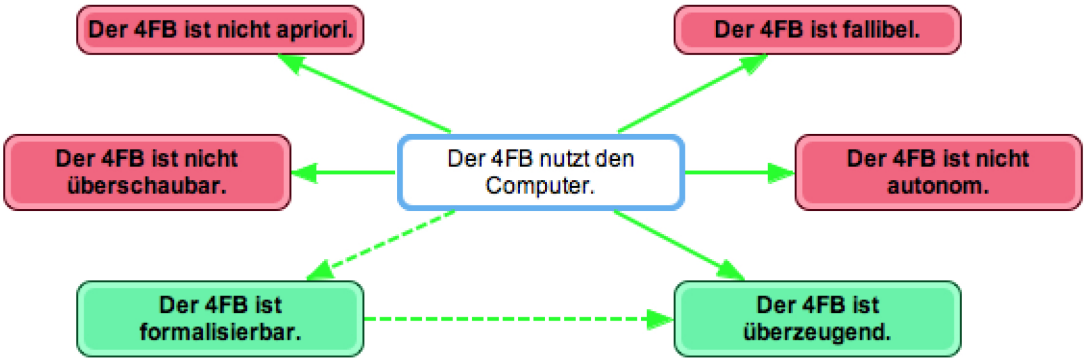

Abb. 3.7.: Die Computernutzung führt dazu, dass der Vierfarbenbeweis nur zwei der sechs Beweiseigenschaften erfüllt

eher um ein Experiment, das ausgegebene Ergebnis ist *»ultimately a report on a successful experiment«* [S. 63].

Das Berufen auf die Autorität des Computers unterscheide sich wesentlich von dem Berufen auf die Autorität anderer Mathematiker bzw. auf deren bereits veröffentlichte Ergebnisse in Journalen und Zeitschriften: *»it would be a grave mistake to classify the appeal to computers as a theoretically dispensable convenience, like the appeal to published journal articles«* [S. 71].

Um zu erklären, um was für eine Art der Berufung es sich beim *»appeal to computer«* handelt, erzählt Tymoczko eine Parabel von Marsmenschen, die sich bei der Etablierung mathematischen Wissens auf eine Autorität namens Simon verlassen. Zu Beginn seiner Ankunft auf dem Mars benutzt der Genius Simon noch traditionelle Methoden, um neue Resultate zu beweisen und etabliert sich so als glaubwürdige mathematische Autorität. Im Laufe der Zeit verwendet er jedoch auch andere Methoden bzw. kommuniziert nicht mehr genau, wie er zu Ergebnissen kommt. Trotzdem reicht es aus, wenn er behauptet, zu einem Ergebnis gelangt zu sein, um dieses zu legitimieren. Die neue Beweismethode »Simon says« hat sich eingebürgert. Die Berufung auf die Autorität Simon unterscheidet sich für Tymoczko kaum von der Berufung auf die Autorität Computer: *»the logic of the appeals ›Simon says‹ and ›by computer‹ are remarkably similar«* [S. 72]. So mag zwar die Glaubwürdigkeit der einen Autorität aus verschiedenen Gründen höher erscheinen als die der anderen – aber der Bezug auf sie kann einen traditionellen, überschaubaren Beweis keineswegs ersetzen: *»whatever the evidence is, it cannot take the form of a traditional, surveyable proof«* [S. 72].

Das Problem bei der Berufung auf die Autorität Computer ist, dass seine Arbeit selbst nicht überschaubar ist: *»The work of the computer is itself not surveyable«* [S. 73]. Man gibt dem Computer eine Handlungsanweisung, doch letztendlich muss man darauf vertrauen, dass diese korrekt umgesetzt wird und das von ihm ausgegebene Ergebnis richtig ist. Die Wahrheit des Ergebnisses kann also nur garantiert werden, wenn Soft- und Hardware richtig funktionieren. Dafür, dass Soft- und Hardware so funktionieren, wie sie sollen, gibt es nur empirische Evidenz: Daher gerate mathematisches Wissen in eine gewisse Abhängigkeit von empirischen Faktoren:

> *It* [the computer] *helps establish the 4CT* [...] *on grounds that are in part empirical.*
> [S. 63]

Damit werden außerdem einige weitverbreitete Vorstellungen über die Natur mathematischen Wissens verletzt, wie der Glaube daran, dass mathematische Beweise apriori gewusst werden und Mathematik keinen empirischen Gehalt hat: *»The 4CT is a substancial piece of pure mathematics which can by known my mathematicians only a posteriori«* [S. 77]. Die Grenzen zu den empirischen Wissenschaften verschwimmen, mathematisches Wissen ist nicht mehr so sicher, da die verwendeten mathematischen Methoden nicht mehr so sicher sind. Die Mathematik verliert eventuell ihre Sonderstellung innerhalb der Wissenschaften.

Schließlich bleiben Mathematikern und Philosophen nun mehrere Möglichkeiten. Klar ist laut Tymoczko, dass es sich bei dem Vierfarbenbeweis nicht um einen »normalen« Beweis handelt. Man muss sich überlegen, ob man die Computernutzung als Beweismethode zulässt oder sie als eine Art Experiment behandelt.

Akzeptiert man den Vierfarbenbeweis von Appel und Haken als Beweis, muss das Konzept eines Beweises modifiziert werden, um ihn einzuschließen: *»Accepting the 4CT forces us to modify our concept of proof«* [S. 78]. Ein computer-assistierter Beweis wie der Vierfarbenbeweis garantiert kein sicheres Wissen mehr. Beim Vierfarbenbeweis würde es sich dann laut Tymoczko um ein *»bona fide theorem«* handeln – um einen Beweis auf Treu und Glauben.

Alternativ könne man eine neue Kategorie mathematischen Wissens schaffen, die durch Computerexperimente etabliert wird und unter die der Vierfarbensatz dann fallen würde.

Tymoczko selbst spricht sich dafür aus, Computerbeweise als Beweise zu akzeptieren und das Konzept eines Beweises entsprechend zu erweitern: *»The mathematical world was ready to recognize the Appel-Haken methodology as legitimate mathematics«* [S. 82]. Er gibt zu bedenken, dass man dann allerdings auch darüber nachdenken müsste, probabilistische Beweise ebenfalls als Beweise zu akzeptieren. Schließlich können auch sie absolute Sicherheit nicht garantieren, sondern geben nur Auskunft darüber, dass etwas mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit der Fall ist.

Er sieht den Appel-Haken-Beweis als gute Gelegenheit, das Beweiskonzept zu überdenken, geht sogar soweit zu sagen, dass er sich vorstellen kann, ein Paradigmenwechsel würde dadurch eingeleitet: *»It is natural to wonder whether the methodology leading to the 4CT can serve as a paradigm in mathematics«* [S. 81]. Das versteht er als die *»philosophical significance«* des Vierfarbensatzes.

Zusammenfassend glaubt Tymoczko also, dass es sich beim Vierfarbenbeweis nicht um einen klassischen Beweis handelt. Er ist in dem Sinne nicht überschaubar, als er nicht überprüfbar ist. Er ist für Fehler anfällig und kann kein sicheres Wissen mehr garantieren. Seine Unüberschaubarkeit und Fallibilität lassen sich auf die Nutzung des Computers zurückführen. Es ist nicht mehr möglich, das durch ihn etablierte Wissen apriori zu wissen. Nur durch das Verlassen auf die Autorität Computer und damit auf empirische Evidenz kann man mit ihm Wissen etablieren. Damit wird eine empirische Methode in die Mathematik eingeführt. Dadurch besteht die Gefahr, dass die Mathematik ihre Sonderstellung unter den Wissenschaften einbüßt, da sich diese auf die besondere Sicherheit des mathematischen Wissens gründet.

Im Folgenden wollen wir die Hauptkritikpunkte Tymoczkos am Vierfarbenbeweis – die Unüberschaubarkeit, die Fallibilität und die Empirie – genauer untersuchen und uns anschauen, wie andere Philosophen und Mathematiker auf diese Vorwürfe reagierten. Ist der Vierfarbensatz unüberschaubar und fehleranfällig? Führt er empirische Aspekte in die Mathematik ein? Und – falls ja – Inwieweit lässt sich dafür der Computer verantwortlich machen?

3.2.2. Unüberschaubarkeit

> *Surveyability is best illustrated by the »falling tree« conundrum:*
> *Has a tree fallen if no one can hear it?*
> *Has a theorem been proved if no one can read its proof?*
> [Calude 2001, S. 4]

Dieses Zitat von Calude aus ihrer Betrachtung des *»Journey of the Four Color Theorem through time«* gibt einen ersten Eindruck, warum man sich für die Überschaubarkeit eines Beweises interessieren sollte. Damit man sicher sein kann, dass durch einen Beweis eine Wahrheit zweifelsfrei mittels apriori Deduktion etabliert wurde, muss man gewährleisten, dass es sich bei jedem Schritt der Argumentationskette um eine apriori Wahrheit oder um einen gültigen Schluß handelt. Dies kann man nur wissen, wenn man jeden einzelnen Schritt auch daraufhin überprüft hat. Um eine solche schrittweise Überprüfung durchführen zu können, muss der Beweis jedoch derart beschaffen sein, dass jeder einzelne Schritt einsehbar ist und alle Schritte nachvollzogen werden können. Diese Eigenschaft eines Beweises, sich Schritt für Schritt überprüfen zu lassen, nennt Tymoczko »Überschaubarkeit«. Dass es zu jedem Satz einen Beweis geben muss, welcher nicht nur überprüft werden kann, sondern tatsächlich überprüft wird, bezeichnet Swinnerton-Dyer [2005] gar als *»uncompromising ethos of pure mathematics«* [S. 2437].

In diesem Kapitel schildern wir, was Mathematiker und Philosophen unter Überschaubarkeit verstehen und gehen der Frage nach, ob bzw. inwieweit der Vierfarbenbeweis überschaubar ist. Darüber hinaus untersuchen wir, ob andere (klassische) Beweise der Forderung nach Überschaubarkeit immer nachkommen können.

Hierzu gehen wir zunächst auf die historischen Aspekte dieses Begriffs ein. Danach fassen wir Tymoczkos Position zur Überschaubarkeit zusammen und stellen anschließend die unterschiedlichen Reaktionen auf diese dar. Wir beginnen dabei mit Kritik, die sich direkt auf sein Verständnis von Überschaubarkeit bezieht. Im Anschluss daran stellen wir Positionen vor, die das Konzept der Überschaubarkeit grundsätzlich anders interpretieren oder es prinzipiell nicht als Teil mathematischer Beweise betrachten. Das Kapitel endet mit einer Zusammenfassung und Einschätzung der wesentlichen Positionen.

3.2.2.1. Überschaubarkeit historisch

Wie wir in Kap. 2.1 bereits gesehen haben, findet sich Überschaubarkeit nicht unter den »klassischen« Anforderungen an einen Beweis im Rahmen der traditionellen Philosophie der Mathematik. Allerdings gibt es mit Descartes und Wittgenstein zwei prominente Beispiele, die Überschaubarkeit als wesentliche Eigenschaft von Beweisen ansehen und in ihren Schriften erwähnen.

Descartes [1996] spricht nicht wörtlich von Überschaubarkeit, sondern benutzt den Begriff der »Durchmusterbarkeit« im Sinne von Überblickbarkeit. Das »Durchmustern« einer Deduktion (lat. Original: *»perlustrare«*) hat für ihn »Stück für Stück in zusammenhängender und nirgends unterbrochener Bewegung des Denkens« zu geschehen, damit es anschließend in einer »hinreichenden und geordneten Aufzählung« zusammengefasst werden kann. So hat man die grobe Struktur vor Augen, d.h. man überblickt, welche Objekte aufgrund welcher Eigenschaften wie zusammenhängen.

Dies ist nach der Intuition, die für Descartes die beste Art darstellt, um zu Erkenntnissen zu gelangen, *»das Vorgehen, das die Wahrheit zuverlässiger erschließt, als jede andere Beweisart«* [Descartes 1996]. Durch das wiederholte, bewusste Nachvollziehen eines Beweises kommen die so gewonnenenen demonstrativen Erkenntnisse möglichst dicht an intuitive Erkenntnisse heran. Er betont, dass es wichtig ist, keinen Schritt der Deduktion auszulassen, denn damit würde die Erkenntniskette sofort durchbrochen.

Wittgenstein fordert in den *»Bemerkungen zu den Grundlagen einer Mathematik«* Übersichtlichkeit bzw. Übersehbarkeit von Beweisen, welche es ermöglicht, sie zu reproduzieren:

> *Ein mathematischer Beweis muss übersichtlich sein. Beweis nennen wir nur eine Struktur, deren Reproduktion eine leicht lösbare Aufgabe ist.*
> [Wittgenstein 1984, Teil III, §1, S. 143]

Erst durch die Organisation in eine überschaubare Ordnung werden Beweise zu Beweisen. Es genügt nicht, die Einzelschritte zu verstehen und das Ergebnis als kausale Folge aus Ihnen zu begreifen, sondern jeder einzelne Schritt und das Resultat müssen sich reproduzieren lassen[31]. Das Ergebnis eines Beweises unterscheidet sich insofern von dem Ausgang eines Experimentes, als es sich zwingend ergibt.

> *›Der Beweis muss übersehbar sein‹, heißt eigentlich nichts anderes als: der Beweis ist kein Experiment. Was sich in ihm ergibt, nehmen wir nicht deshalb an, weil es sich einmal ergibt, oder weil es sich oft ergibt. Sondern wir sehen im Beweis den Grund dafür zu sagen, daß es sich ergeben muss.*
> [Wittgenstein 1984, S. 170, Teil III, §39]

Mühlhölzer [2012] vermutet, dass Wittgenstein diese Anschauung der Überschaubarkeit entwickelt hat, nachdem er Hilbert studiert hat. Hilbert schreibt in seiner *»Neubegründung der Mathematik«*:

> *Soll das logische Schließen sicher sein, so müssen sich diese Objekte vollkommen in allen Teilen überblicken lassen und ihre Aufweisung, ihre Unterscheidung, ihr Aufeinanderfolgen ist mit den Objekten zugleich unmittelbar anschaulich für uns da als etwas, das sich nicht noch auf etwas anderes reduzieren läßt.*
> [Hilbert 1935, S. 162f.]

Wittgensteins Auffassung von Überblickbarkeit beinhaltet ein starkes visuelles Element, wie Marion [2011] betont. Es geht ihm vor allem auch darum, dass man auf einen Blick erkennt, was gemeint ist- beispielsweise dass das Zahlzeichen ||||||||||||||||| die Zahl 17 und nicht 18 repräsentiert. Ist ein Beweis also überblickbar im Sinne von Wittgenstein, ist seine

[31] vgl. für diese Interpretation Kap. 5 über Beweise in Severns Studie über Wittgensteins Philosophie der Mathematik [Severn 1990].

Darstellung so klar, dass es keine unterschiedlichen Interpretationsmöglichkeiten für das Geschriebene gibt und die Schlußfolgerung zwingend folgen muss[32].

Im Gegensatz dazu gewährleistet Descartes' Durchmusterbarkeit, dass die Schlußfolgerung der Argumentationskette möglichst »intuitiv« erfasst werden kann. Mehrere Durchmusterungen helfen dabei, das Gedächtnis zu stützen und den Beweis zu verinnerlichen.

Diese beiden Auffassungen unterscheiden sich etwas von Tymockos Verständnis von Überschaubarkeit, wie es in Abschnitt 3.2.1 bereits skizziert wurde. Inwiefern es sich unterscheidet, wollen wir nun im nächsten Abschnitt untersuchen.

3.2.2.2. Tymoczko: Unüberschaubarkeit bei Computerbeweisen

Für Tymoczko ist Überschaubarkeit eine essentielle Beweiseigenschaft. Sie erst macht es möglich, einen Beweis zu überprüfen. Bei einer Überprüfung wird festgestellt, dass es sich bei jedem Schritt entweder um eine Prämisse oder um einen gültigen Schluß handelt.

> *A proof is a construction that can be looked over, reviewed, verified by a rational agent. We often say that a proof must be perspicuous, or capable of being checked by hand.*
> [Tymoczko 1979, S. 59]

Ist ein Beweis Schritt für Schritt von einem Mathematiker überprüft worden, handelt es sich um eine korrekte apriori Deduktion und das durch ihn etablierte Wissen ist damit sicher.

> *The proof relates the mathematical known to the mathematical knower, and the surveyability of the proof enables it to be comprehended by the pure power of intellect- surveyed by the mind's eye as it were. Because of surveyability, mathematical theorems are credited by some philosophers with a kind of certainty unobtainable in the other sciences. Mathematical theorems are known a priori.*
> [Tymoczko 1979, S. 60]

Das, was Tymoczko als Überschaubarkeit von einem Beweis fordert, kann man also auch als Überprüfbarkeit oder Verifizierbarkeit bezeichnen. Nicht die Art der Darstellung oder die Verinnerlichung der Beweisstruktur interessieren ihn, sondern es geht um eine faktische Überprüfung der einzelnen, logischen Schritte. Überschaubar ist ein Beweis für Tymoczko nur, wenn er sich tatsächlich, Schritt für Schritt von einem Mathematiker innerhalb einer begrenzten Zeitspanne (seiner Lebenszeit) überprüfen lässt (vgl. Abschnitt 3.2.1). Ist eine solche Überschaubarkeit im Sinne einer faktischen, menschlichen Überprüfbarkeit nicht gegeben, handelt es sich laut Tymoczko bei der nicht überschaubaren Argumentation auch nicht um einen »richtigen«, konventionellen Beweis.

Die Frage, ob es sich beim Vierfarbenbeweis um einen überschaubaren Beweis handelt, wird von Tymoczko eindeutig beantwortet:

[32] Insbesondere hegte Wittgenstein Bedenken, dass sich ein Satz und der zugehörige Beweis durch die Archivierung verändern könnte bzw. dass ihre Darstellungen nach längerer Archivierung für spätere Leser unmissverständlich bleibt [Marion 2011].

> *Has the 4CT a surveyable proof? Here the answer is no. No mathematician has surveyed the proof in its entirety.*
> [. . .] *It has not been checked by mathematicians, step by step, as all other proofs have been checked.*
> [Tymoczko 1979, S. 70]

Insbesondere der Nachweis der Reduzibilität, welcher mittels Computer geführt wurde, sei zu lang und kompliziert, als er von einem Menschen durchgeführt oder geprüft werden könne; man sei auf den Computer angewiesen:

> [. . .] *no computer has printed out the complete proof of the reducibility lemma, nor would such a printout be of much use to human mathematicians. Over 1200 hours of computer time were required for the proof. Because of the complexity and time required, any proof of the reducibility lemma along its present line must include an appeal to computer analysis.*
> [Tymoczko 1979, S. 68]

Aufgrund seiner Länge und Kompliziertheit lasse sich dieser Teil des Beweises innerhalb einer beschränkten Zeit nicht von einem Mathematiker nachvollziehen und ist damit nicht überschaubar: *»The proof of this lemma* [reducibility lemma] *cannot be surveyed in detail«* [Tymoczko 1979, S. 68]. Diese Unüberschaubarkeit betrifft allerdings nur den Teil des Beweises, welcher mit dem Computer geführt wurde. Der andere Teil des Beweises, in dem die unvermeidbare Menge konstruiert wird, ist für Tymoczko hingegen unbedenklich: *»one can give a surveyable proof that this set U is unavoidable«* [Tymoczko 1979, S. 67].

Nicht nur, dass die schiere Länge ein Überschauen des Computerteils unmöglich mache, auch die mit dem Computer durchgeführten Schritte seien einer schrittweisen Überprüfung nicht mehr zugänglich, sie »verschwinden« quasi im Computer:

> *Mathematicians cannot work out the missing steps for themselves, not even in a lifetime of work; and its nowhere recorded in the archives. What is recorded is the evidence that a computer once worked out the missing steps.*
> [Tymoczko 1979, S. 71]

Die Arbeitsschritte des Computers lassen sich also nicht überschauen: *»the work of the computer itself is not surveyable«* [Tymoczko 1979, S. 72]; stattdessen muss man sich darauf verlassen, dass der Computer die Beweisschritte korrekt ausgeführt hat.

So ist der Vierfarbenbeweis aus zwei Gründen nicht überschaubar. Einmal aufgrund der Länge und Komplexität des Reduzibilitätsteils, die das Kontrollieren der einzelnen Schritte für einen Mathematiker unmöglich macht, zum anderen dadurch, dass die einzelnen Arbeitschritte des Computers einer menschlichen Überprüfung nicht mehr vollständig zugänglich sind. Unterstützung erhält Tymoczko in diesem Punkt von Van Kerkhoeve, der dies ähnlich sieht:

> *Both length and digitalization of proof raise the important issue of human surveyability.*
> [van Kerkhoeve 2006, S. 12]

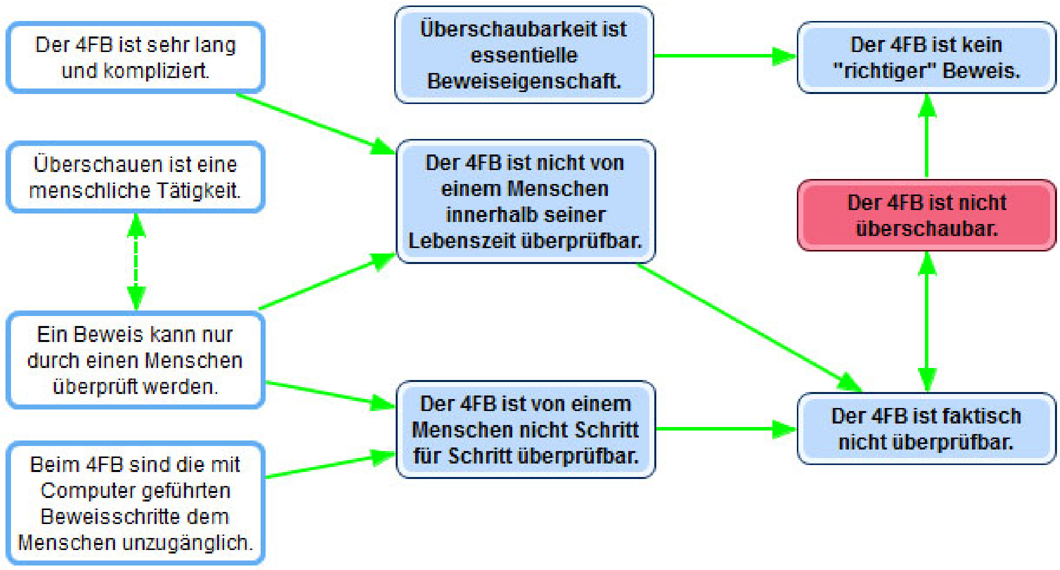

Abb. 3.8.: Tymoczko: Der Vierfarbenbeweis ist nicht überschaubar

Herausgestellt sei hier aber nochmals, dass Tymoczko nur den mit Computer geführten Teil des Vierfarbenbeweises für unüberschaubar hält, obwohl auch der andere »per Hand« geführte Teil bereits von erheblicher Länge ist.

Tymoczko erscheint es unwahrscheinlich, dass es jemals einen Beweis des Vierfarbensatzes geben wird, welcher ohne Nutzung des Computers auskommt. Dass es irgendwann einen überschaubaren Vierfarbenbeweis geben wird, hält er daher für zweifelhaft, wie er an mehreren Stellen seiner Arbeit betont [Tymoczko 1979, S. 58, 62, 74, 77].

3.2.2.3. Überprüfung durch den Menschen

Überprüfung durch *einen* Menschen

An Tymoczko's Definition von Überschaubarkeit gab es vielfältige Kritik. Selbst wenn man davon ausgeht, dass es sich beim Überschauen um eine essentiell menschliche Tätigkeit handelt, bleibt fraglich, warum die Überschaubarkeit durch einen einzelnen Menschen gegeben sein muss. Die Fähigkeiten, einen Beweis zu überschauen bzw. zu überprüfen, können von Person zu Person stark variieren, wie unter anderem Teller [1980] anmerkt. Sehr begabte Mathematiker sind in der Lage, Beweise innerhalb kurzer Zeit zu überprüfen, die von anderen garnicht überprüft werden können. So sagt man z. B. über den Beweis des letzten Satzes von Fermat, er könne weltweit nur von einer Handvoll Personen verstanden und geprüft werden, da er viele komplexe Argumentationsstränge aus verschiedensten Bereichen der Mathematik zusammenführt (siehe Anhang A.2).

Im Falle des Vierfarbenbeweises wäre zumindest denkbar, dass durch plötzliche Steigerung der menschlichen Lebenserwartung und geistigen Möglichkeiten ein Überblicken des gesamten Beweises auch für eine Person möglich wird [vgl. u. a. van Denover 2012]. Oder wie Krakowski es ausdrückt:

> [...] *mankind need merely learn to live longer to deal with the longer proofs.* [...] *There is no principled reason why, when longevity reaches astronomical proportions, a bright young mathematician could not spend a few millenia going through the entire proof.*
> [Krakowski 1980, S. 91f]

Knüpft man die Definition dessen, was Überschaubarkeit ist (und damit auch dessen, was ein Beweis ist) an eine variable Fähigkeit, gerät man schnell an Probleme. Wie van Denover [2012] bemerkt, würde der Status eines Beweises dann anhand eines rein empirischen Faktes gemessen werden, der nichts mit dem Argument an sich zu tun hat. Ab wann ist dann ein Beweis unüberschaubar und kein richtiger Beweis mehr? Ab 100 Seiten Text? Wenn weltweit mindestens 20 Leute ihn verstehen und prüfen können? Jedes Limit wäre ad hoc, wie Arkoudas und Bringsjord festellen.

> *Only* ***some*** *proofs can actually be surveyed, just as only some natural numbers can actually be written down and manipulated* [...] *But just as we do not let empirical limitations constrain our* ***concept*** *of natural numbers* [...] *or pretty much any other mathematical concept, so it is with proofs: we do not let the limitations of our brains and the physical universe in general dictate what constitutes a proof.*
> [Arkoudas & Bringsjord 2007, S. 187, Hervorhebung wie im Original]

Die Definition dessen, was einen Beweis ausmacht, an etwas zu knüpfen, was über die Zeit und die handelnden Personen so stark variiert, widerstrebt auch Teller:

> [...] *surveyability comes in degrees and varies in nature in all sort of things.* [...] *On Tymoczko's view what counts as a proof either comes in degrees or has to change* [...] *with every change in the powers of the best in the community of mathematicians.*
> [Teller 1980, S. 798]

Diese Unschärfe in der Definition würde Tymoczko [1979] vermutlich jedoch kaum beeindrucken, er selbst spricht von Überschaubarkeit als subjektiver Eigenschaft: *»surveyability is an important subjective feature of mathematical proofs which relates the proof to the mathematicians, the subjects of mathematical investigations«* [S. 60]. Aber auch aus anderen Gründen scheint es fraglich, die Überschaubarkeit eines Beweises an den Fähigkeiten eines einzelnen Mathematikers zum Überschauen festzumachen, da an mathematischen Beweisen und ihrer Überprüfung häufig mehr als nur ein einzelner Mathematiker beteiligt ist.

Überprüfung durch *mehrere* Menschen

Man kann Tymoczko gegenüber einwenden, dass, selbst wenn die Überprüfbarkeit durch einen einzelnen Mathematiker nicht gegeben ist, es aber doch möglich ist, eine Überprüfung des Beweises durch mehrere Personen vorzunehmen. So könnte man beim Vierfarbenbeweis beispielsweise die 1834 Konfigurationen auf 1834 verschiedene Mathematiker aufteilen, so das jeder »nur« die Reduzibilität einer Konfiguration überprüft. Oder wie Levin [1981] überspitzt vorschlägt, die gesamte Bevölkerung Chinas für eine manuelle Prüfung des Beweises heranziehen (ihrer Schätzung nach würde diese ca. 2 Jahre benötigen). Zumindest theoretisch ist es also möglich, jeden Beweisschritt einer menschlichen Prüfung zu unterziehen.

Dieses Vorgehen entspräche zudem eher der mathematischen Praxis, denn normalerweise werden Beweise in der Mathematik nicht durch eine einmalige, definitive Verifikation durch einen einzelnen Mathematiker anerkannt. Dies beschreibt bereits Hume:

> *There is no Algebraist nor Mathematician so expert in his science as to place entire confidence in any truth immediately on his discovery of it, or regard it as any thing, but a mere probability. Every time he runs over his proofs his confidence encreases; but still more by the approbation of his friends; and is rais'd to its utmost perfection by the universal assent and applauses of the learn'd world.*
> [Hume 2012, S. 129]

Heute ist es gängige Praxis, dass ein Beweis im ersten Schritt, bevor er in einem Fachmagazin veröffentlicht wird, von einem Komitee aus Gutachtern geprüft wird. Diese sind meist ausgewiesene Experten des jeweiligen Fachgebietes. Die Anzahl der Personen des Komitees bestimmt sich anhand der Länge, Komplexität und Wichtigkeit des Beweises. Finden diese keine Lücke in der Argumentationskette, wird der Beweis veröffentlicht (vgl. hierzu auch Abschnitt 2.1.4.1).

Beim bereits erwähnten Beweis von Fermats letzten Satz überprüften 12 Experten den Beweis, bevor er veröffentlicht wurde. Aufgrund der Komplexität mussten sie die Überprüfung unter sich aufteilen:

> *The mathematical ›experts‹, however, mostly form a relatively small group (e.g., in the case of FLT: a dozen at most) of highly specialized scholars, who furthermore, in view of the extensiveness of the proofs involved, do not survey proofs independently, but have to divide this refereeing task among themselves.*
> [van Kerkhoeve 2006, S. 13]

In Fällen wie diesem fand also keine Überprüfung durch einen einzelnen Mathematiker statt.

Auch bei der Erstellung von sehr langen Beweisen gab es bereits Kooperationen vieler Mathematiker. So waren am Beweis des Klassifikationssatzes einfacher endlicher Gruppen über 100 Mathematiker beteiligt und die Veröffentlichung des Beweises erstreckt sich über ca. 15.000 Seiten (vgl. Anhang A.1). Auch hier ist das Überschauen für einen einzelnen Mathematiker in begrenzter Zeit unmöglich. Nichtsdestoweniger ist auch dieser Beweis unter Mathematikern gemeinhin anerkannt.

In der Praxis der Mathematik wird die Überprüfung eines Beweises also nur in seltenen Fällen durch einen einzelnen Mathematiker vorgenommen. Eine Alternative zu Tymoczkos Überschaubarkeit könnte in diesem Zusammenhang die von Azzouni geforderte *»warrantability«* sein. Er sieht Überschaubarkeit bei Computerbeweisen sowie auch bei traditionellen Beweisen nicht gegeben:

> [. . .] *if surveyability is to be seen as an epistemic virtue, it's one that ordinary mathematical proofs don't really have: Such are ›surveyable‹ only because our peculiar psychological packaging makes them convincing to us in the form we write them; it isn't because all the steps involved in the proof really are – in some sense – surveyable.*
> [Azzouni 2005, S. 40]

Stattdessen schlägt er *»warrantability«*[33] als wichtige Beweiseigenschaft vor. Sie ist für ihn dann gegeben, wenn ein Beweis durch die Gemeinschaft aller Mathematiker geprüft werden kann (*»checked by the mathematical community as a whole«*). Berechtigt ist für ihn der kollektive Glaube an einen Beweis dann, wenn eine apriori-Begründung vorliegt oder man sich auf eine mathematische Autorität stützt. Computer sind für ihn allerdings keine mathematische Autorität, insofern kann der Vierfarbenbeweis von Appel und Haken seiner Meinung nach auch der Forderung nach *»warrantability«* nicht nachkommen.

Während Azzouni und Tymoczko dem Computer bereits im Zuge der Beweisführung kritisch gegenüber stehen, sehen andere ihn gar als beste Möglichkeit an, um einen Beweis zu überprüfen.

3.2.2.4. Überprüfung durch Computer

Tymoczko sieht das Überschauen bwz. Überprüfen eines Beweises wie selbstverständlich als zwingend menschliche Tätigkeit an. Er glaubt nicht daran, dass die Überprüfung eines Beweises durch einen Computer vorgenommen werden kann. Diese Ansicht teilen unter anderem der Philosoph S. Shanker (er sieht Computerbeweise nicht als Beweise an, da sie nicht durch den Menschen überprüft werden können), sowie der amerikanische Mathematiker Graham[34]; er fragt:

> *If no human being can ever hope to check a proof is it really a proof?*
> [Graham zitiert in Browne 1988]

Aber auch in diesem Punkt existieren andere Meinungen. So könnte ein Computer einen Beweis genauso überschauen wie ein Mensch, wie u.a. Krakowski argumentiert. Im Falle des Vierfarbenbeweises sei der Beweis laut ihm auch bereits durch einen Computer überschaut worden:

> [. . .] *the computer has, in a step by step fashion, surveyed and proved this lemma. To suggest otherwise is chauvinism.*
> [Krakowski 1980, S. 92]

Die wichtigste Überprüfung – ob ein Schritt auf den anderen folgt – habe der Computer zweifelsfrei durchgeführt:

> *What is essentially required is that it be checked that each step follows from the previous one; and this the computer certainly has done.*
> [Krakowski 1980, S. 93]

[33] Ins Deutsche übersetzt am ehesten als Glaubwürdigkeit zu verstehen.
[34] Träger des Steele Prize.

Auch Swart [1980] und Detlefsen & Luker [1980] sind der Meinung, dass der Vierfarbenbeweis durch andere Computer überschaut (im Sinne von überprüft) wurde: *»The computation of the IBM 370-160A in the proof of the 4CT can be (and has been) verified by other computers«* [S. 812][35].

Appel und Haken selbst machten die Erfahrung, dass vor allem ältere Mathematiker der Prüfung eines Beweises durch andere Computer skeptisch gegenüberstehen:

> *Most mathematicians who were educated prior to the development of fast computers tend not to think of the computer as the routine tool to be used in conjunction with older and more theoretical tools in advancing mathematical knowledge. Thus they intuitively feel that if an argument contains parts that are not verifiable by hand calculations is on rather insecure ground. There is a tendancy to feel that verification of computer results by independent computer programs is not as certain to be correct as independent hand checking the proof of theorems proved in the standard way.*
> [Appel & Haken 1984, S. 172]

Vielleicht ist es also nur eine Sache der Gewöhnung und somit eine Frage der Zeit, bis der Computer allgemein als legitime Möglichkeit angesehen wird, um Beweise zu überprüfen. Bailey und Borwein erscheint ein durch verschiedene Computer geprüfter Beweis schon heute glaubwürdiger als ein durch Menschen geprüfter. Sie fragen provokativ:

> *What would you rather trust, a mathematical theorem that is the final result of a long, difficult paper, fully understood only by a handful of people worldwide, or a computational result that has been confirmed by multiple independent exacting validity checks?*
> [Bailey & Borwein 2005, S. 7]

Computer als andere Methode der Beweis-Überprüfung

Festzuhalten bleibt, dass sich der Vierfarbenbeweis sehr wohl überschauen lässt, wenn man daran glaubt, dass Überschauen nicht zwingend eine menschliche Tätigkeit ist, sondern auch der Computer eine Überprüfung durchführen kann. Man ist also nicht gezwungen, das Konzept eines Beweises zu ändern, damit es den Vierfarbenbeweis einschließt. Was man allerdings ändern müsste, ist das Konzept des Beweis-Überprüfens, damit dieses eine Überprüfung durch den Computer erlaubt. Darauf macht erneut Teller aufmerksam. Für ihn handelt es sich bei Überschaubarkeit zwar um eine wünschenswerte Eigenschaft, aber

[35] Ebenso erhöhten Alternativbeweise das Vertrauen in den ursprünglichen Beweis. So gibt Swart [1980] an, dass für ihn der Vierfarbenbeweis durch Allaires Beweis indirekt überschaut wurde und Robertson et al. [1996] berichten, dass sie an einer Überprüfung des ursprünglichen Beweises von Appel und Haken scheiterten und sich daher an einen Alternativbeweis machten, welcher sie von der Wahrheit des Vierfarbenbeweises überzeugte: *»So in 1993, mainly for our own peace of mind, we resolved to convince ourselves somehow that the 4CT really was true. We began by trying to read the A&H proof, but very soon gave this up. To check that the members of their 'unavoidable set' were all reducible would require a considerable amount of programming, and also would require us to input by hand into the computer descriptions of 178 graphs; and this was not even the part of their proof that was most controversial. We decided it would be easier, and more fun, to make up our own proof, using the same general approach as A&H«* [Robertson et al. 1996, S. 18]. Man beachte, dass sie nach eigenen Angaben bereits am Überschauen des konventionellen Teils des Vierfarbenbeweises scheiterten, welcher ohne Computer auskommt.

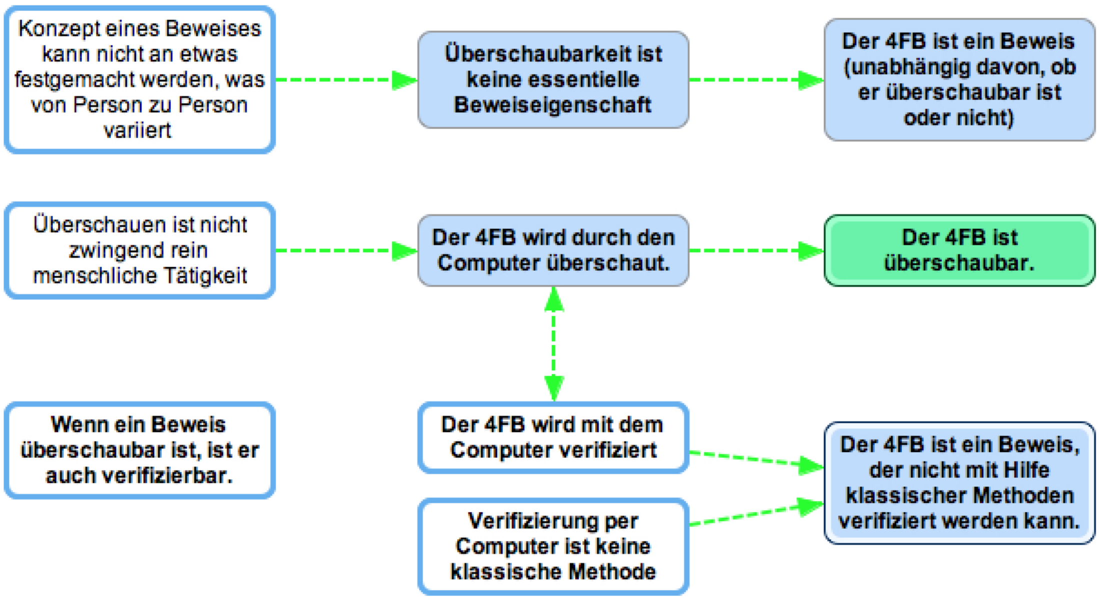

Abb. 3.9.: Teller: Der Vierfarbenbeweis ist überschaubar

nicht deshalb, weil sie einen Beweis konstituiert, sondern weil sie eine Überprüfung möglich macht.

> *Surveyability is needed, not because without it a proof is in any sense not a proof (or only a proof in some new sense), but because without surveyability we seem not to be able to verify that a proof is correct.*
> [Teller 1980, S. 798]

Je nachdem in welchem Maße Überschaubarkeit gegeben sei, müssten die Methoden der Überprüfung entsprechend angepasst werden, um sicherzustellen, dass es sich um einen korrekten Beweis handelt.

> [...] *surveyability comes in degrees and varies in nature in all sorts of ways.* [...] *But all such variations are without significance to the nature of proof – only to the nature of proof checking.*
> [Teller 1980, S. 798]

Da der Vierfarbenbeweis nicht mit traditionellen Methoden überprüfbar sei, bedeutet dies, dass eine Änderung am Konzept des Beweis-Überprüfens vorgenommen werden müsse, nicht am Konzept »Beweis« selbst.

> [...] *a shift in the means of surveying actually used means only a shift in the methods of checking proofs, not a shift in our conception of the things checked.* [...] *the use of the computer in the 4CT is an extension of our means of surveying, not in our concept of proof.*
> [Teller 1980, S. 798f]

Erkennt man den Computer als legitimes Hilfsmittel an, um einen Beweis zu überprüfen, ist es laut Teller also nicht nötig, ein neues Konzept für Beweise zu schaffen und das mathematische Wissen bleibt nach wie vor sicher[36].

Prüfung des formalisierten Beweises

Eine andere Art, um einen Beweis mit Hilfe des Computers zu überprüfen, besteht darin, ihn zu formalisieren und ihn dann mit Hilfe eines Beweisassistenten zu prüfen. Einige Mathematiker sehen diese Methode der Überprüfung als besonders sicher an (vgl. Abschnitt 2.1.4.2). So empfindet beispielsweise Swart [1980] den Beweis des Vierfarbenbeweises in seiner informellen Form als unüberschaubar, glaubt aber, dass durch seine komplette Formalisierung Überschaubarkeit erreicht werden könnte, da durch sie eine Überprüfung durch den Computer erleichtert würde. Mit dieser Ansicht steht er nicht allein da.

In seiner Arbeit *»How to Believe a Machine-Checked Proof«* behauptet Pollack [1997], man könne einem maschinen-geprüften formalen Beweis genauso vertrauen, wie einem konventionellen. Den Vierfarbenbeweis in seiner jetzigen Form könne man zwar nicht als konventionellen Beweis akzeptieren: »[The 4CT] *can never be accepted as conventional proof«* [S. 5]; gelänge jedoch die Transformation in einen formalen Beweis, könne man diesem sehr wohl trauen, insbesondere dann, wenn er von mehreren Computern unabhängig geprüft würde: *»belief in correctness of a formal proof comes from engaging our own understanding to check it (and recheck it if necessary)«* [S. 11][37].

Für Krakowski [1980] reduziert sich die Frage nach Überschaubarkeit sogar komplett auf die Frage nach (endlicher) Formalisierbarkeit. Sobald ein Beweis endlich formalisierbar ist, ist er dank seines deduktiven Aufbaus auch automatisch überschau- und überprüfbar: *»any finite formal proof is surveyable«*. Liegt der Beweis in formalisierter Form vor, muss der Computer »nur« jeden Schritt darauf überprüfen, dass es sich bei ihm um eine Prämisse oder um einen gültigen Schluß handelt. Lässt sich ein Beweis also formalisieren, ist für Krakowski eine tatsächliche, praktische Überprüfung der Einzelschritte auch nicht mehr vonnöten, um nachzuweisen, dass es sich um einen Beweis handelt.

In diesem Zusammenhang lässt sich eventuell auch erklären, warum niemand auf Tymoczkos Vorwurf, der Vierfarbenbeweis treibe einen Keil zwischen Formalisierbarkeit und Überschaubarkeit (vgl. Abschnitt 3.2.1) reagiert. Dies könnte man darauf zurückführen, dass viele Mathematiker heutzutage mathematische Beweise mit formalisierbaren Beweise identifizieren (vgl. Abschnitt 2.1.4.2) und damit auch endliche Formalisierbarkeit mit prinzipieller Überprüfbarkeit.

Diese Vermutung äußert auch Bassler:

[36] Für Tymoczko [1979] würde sich hier allerdings ein Widerspruch ergeben – er besteht darauf, dass ein Beweis nichts außerhalb seiner selbst benötigt, um zu überzeugen: *»it needs nothing outside itself to convince«* [S. 59]. Da aber gerade die erfolgreiche Überprüfung eines Beweises uns überzeugt, muss der Prozess des Überschauens zum Beweis dazugehören. Ändern sich – wie von Teller gefordert – die Methoden, mit denen die Überprüfung erfolgt, ändert sich auch das Konzept des Beweises.

[37] Viele Beweise gewinnen erst durch andauernde Reexamination an Glaubwürdigkeit. Finden über einen gewissen Zeitraum mehrere Überprüfungen durch verschiedene Personen statt, steigt das Vertrauen in den Beweis.

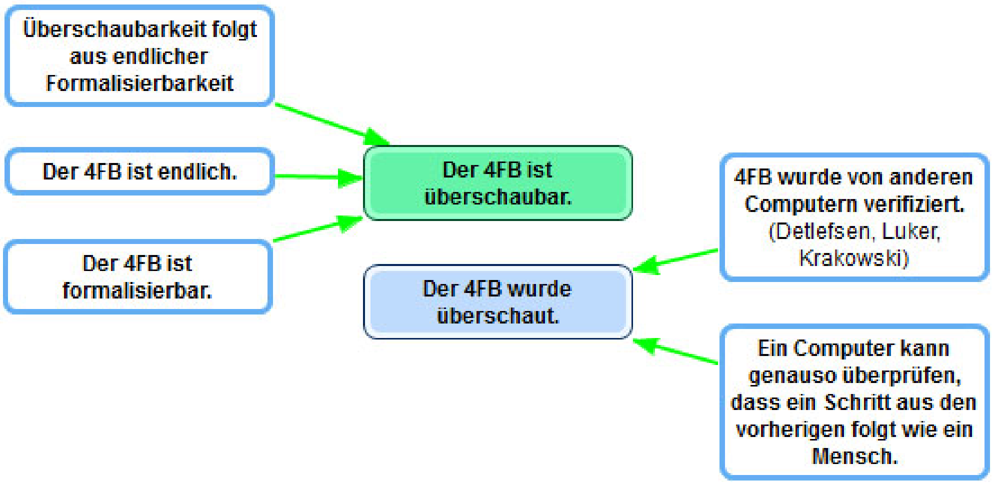

Abb. 3.10.: Krakowski: Der Vierfarbenbeweis ist überschaubar

> [...] *the discomfort associated with a potential wedge between surveyability and formalizability was met by a refusal to acknowledge any tension between surveyability and formaliziability in the nature of mathematical proof.*
> [...] *This uniformity, I take it, is a strong indication of just how overwhelming the identification of mathematical proofs as formal proofs indeed has come to be.*
> [Bassler 2006, S. 117]

Im Beispiel des Vierfarbensatzes stellt sich allerdings die Frage, wie eine Übertragung des Beweises in seine formalisierte Form von statten gehen soll – im ersten Kapitel haben wir bereits gesehen, dass ein formalisierter Beweis um ein Vielfaches länger ist als ein informeller. Da es sich bei der Übertragung um eine langwierige Prozedur handelt, ist sie fehleranfällig; weitere Überprüfungen werden notwendig.

3.2.2.5. Konventionelle Beweise sind unüberschaubar

Wie wir gesehen haben, gibt es einige Punkte, die sich an Tymoczkos Auffassung von Überschaubarkeit kritisieren lassen. Am gravierendsten scheint jedoch, dass man, wenn man seinem Verständnis von Überschaubarkeit folgt, sofort auch andere unter Mathematikern anerkannte Beweise, die ohne Nutzung des Computers auskommen, in Frage stellen muss. Wie man am Beispiel der Beweise des letzten Satzes von Fermat und des Klassifikationssatzes sieht, ist auch hier aufgrund ihrer Länge oder ihrer Komplexität eine Überschaubarkeit im Sinne einer faktischen Überprüfbarkeit nicht gegeben. Ihre Richtigkeit wird allerdings nicht angezweifelt. Verwunderlich ist jedoch, dass Tymoczko das Problem der Unüberschaubarkeit beim Vierfarbenbeweis nur im Computerteil sieht, obwohl auch der »Papier«-Teil bereits von erheblicher Länge und Komplexität ist. In der Tat äußern auch einige Mathematiker entsprechende Bedenken, dass auch der nicht mit dem Computer geführte Teil des Vierfarbenbeweis ebenso unüberschaubar sei.

Fritsch sieht das Problem fehlender Überschaubarkeit in dem »per Hand« geführten Teil des Beweises:

> *Daß sich Reduzibilität mit Hilfe eines Computers nachweisen läßt, das unterliegt keinem Zweifel; auch der Korrektheit solcher Ergebnisse, wenn sie von erfahrenen Mathematikern erzielt wurden, kann man vertrauen. Der Haken liegt eigentlich woanders. Die Buchführung der Figuren, der Nachweis, daß die erhaltene Menge von 1825 reduziblen Figuren unvermeidbar ist, das ist im wesentlichen Handarbeit. Daß hierbei Schreibfehler und Rechenfehler auftreten, ist selbstverständlich.* [... Und auch wenn sich solche Fehler ausmerzen lassen,] *ein Unbehagen bleibt, da es eben keine apriori-Begründung dafür gibt, daß eine endliche unvermeidbare Menge existiert. Appel und Haken argumentieren hierfür wahrscheinlichkeitstheoretisch, sehr plausibel, aber überzeugend?*
> [Fritsch 1990, S. 87]

In eine ähnliche Richtung geht die Äußerung von Seymour (er ist einer der Mathematiker, die 1995 einen stark vereinfachten Alternativbeweis für den Vierfarbenbeweis lieferten):

> *The real difficulty lies in the* ***conventional*** *part of the A&H proof, not in the computer part. The noncomputer part of the proof requires such an enormous amount of time and patience that, as far as I am aware no one has made an independent check of all the details. No major errors have been found in the proof, and the consensus of opinion is that it is probably correct; but, still, it is disturbing that it has not been properly checked.*
> [Seymour 1994, S. 184]

Der von ihm und anderen veröffentlichte Beweis [Robertson et al. 1995] lässt sich seinen Angaben nach im Gegensatz zum Beweis von Appel und Haken überprüfen:

> [...] *the new proof turned out to be more simpler and more easily checked than the old one. In particular, the necessary data is available in electronic form, and the part analogous to the difficult noncomputer part of the A&H proof has been written in a formal language so that it can be checked by a computer in a few minutes, or by hand (by a very patient reader) in a few months.*
> [Seymour 1994, S. 184]

Sein Co-Author R. Thomas betont dies ebenso, gibt jedoch auch zu, dass weder er noch seine Kollegen die Geduld für eine Überprüfung per Hand mitbringen würden:

> [...] *the entire argument occupies about 13,000 lines, an each line takes some thought to verify. Therefore, verifying all of this without a computer would require an amount of persistence and determination my coauthors and I do not possess.*
> [Thomas 1998, S. 13]

Akzeptiert man, dass die Unüberschaubarkeit von Beweisen keineswegs ein Phänomen ist, welches nur im Zusammenhang mit Computerbeweisen auftritt, bleibt die Frage, wie man mit ihr umgeht.

Hersh [2005] berichtet davon, wie immer mehr wichtige Beweise nicht mehr mit traditionellen Methoden verifiziert werden können (*»more and more important proofs approach* *and go beyond the limits of conventional verification«* [S. ix]) und fragt, wie man mit einem Beweis, der die Grenze der Verifizierbarkeit überschreitet, verfahren solle. Welchen Status soll ein solcher Beweis erhalten? Darf er publiziert werden? Welche Forschung kann man auf ihm aufbauen?

Ähnliche Fragen stellt sich Hales[38] in Bezug auf den Beweis des Almgrenschen Regularitätssatzes:

> *The preprint is 1728 pages long. Each line is a chore. He spent over a decade writing in the 1970s and early 1980s. It was not published until 2000. Yet the theorem is fundamental.* [...] *How am I to develop enough confidence in the proof that I am willing to cite it in my own research? Do the stellar reputations of the author and editors suffice, or should I try to understand the details of the proof? I would consider myself very fortunate if I could work through the proof in a year.*
> [Hales 2008, S. 1370f]

Offensichtlich stellt fehlende Überschaubarkeit also nicht nur in Bezug auf Computerbeweise ein Problem dar, welches für Unbehagen sorgt.

3.2.2.6. Umgang mit Unüberschaubarkeit

Wie wir gesehen haben, gibt es verschiedene Arten von Überschaubarkeit. Es gibt die Durchmusterbarkeit im Sinne Descartes', die Übersehbarkeit von Wittgenstein, die *»warrantability«* von Azzouni und die Überschaubarkeit im Sinne einer faktischen Überprüfbarkeit (durch einen Menschen), wie Tymoczko sie fordert. Nach jeder dieser Auffassungen von Überschaubarkeit ist der Vierfarbenbeweis unüberschaubar. Dies gilt aber nicht nur für ihn und andere Computerbeweise, sondern auch für sehr lange und komplizierte nicht-computergestützte Beweise [vgl. Coleman 2008]. Eine Lösung dieses Problems könnte in der Ausdifferenzierung des Begriffes der Überschaubarkeit bestehen. Arkoudas und Bringsjord schlagen vor, dass man sich, anstatt auf tatsächliche, faktische Überschaubarkeit (*»in practice-surveyability«*) zu pochen, mit theoretischer Überschaubarkeit (*»in principle-surveyability«*) zufrieden geben sollte.

> *Tymoczko wrote that ›proofs are surveyable‹, but that is ambiguous, as it could be taken to mean that all proofs can be surveyed by humans, which is plainly false. If the concept of proof was limited only to proofs that could actually be surveyed, mathematics would cease to exist as we know it* [...] *What he should have said instead is that proofs are surveyable **in principle**, but not necessarily **in practice**.*
> [Arkoudas & Bringsjord 2007, S. 187]

Begnügt man sich also mit prinzipieller Überschaubarkeit (in dem Sinne, dass sich zumindest theoretisch aufgrund des deduktiven Aufbaus des Beweises jeder Einzelschritt überprüfen lässt), sind sowohl der Vierfarbenbeweis als auch andere lange und komplizierte Beweise überschaubar.

[38] Er bewies 1998 die Keplersche Vermutung mit Hilfe eines Computers. Siehe Anhang A.3.

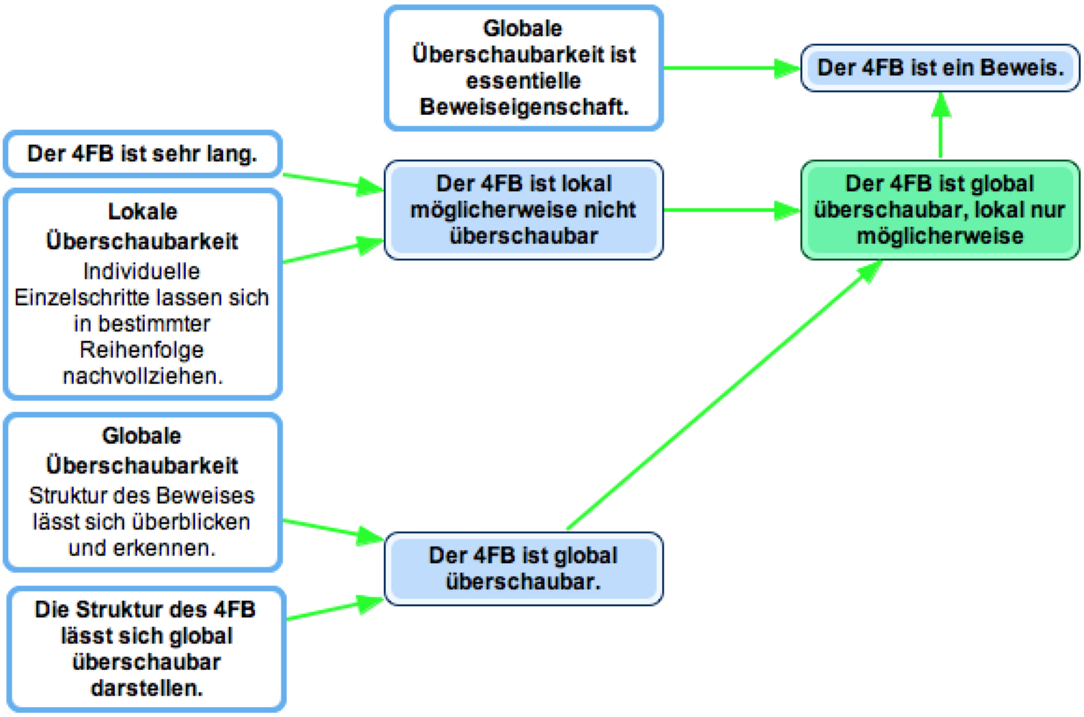

Abb. 3.11.: Bassler: Der Vierfarbenbeweis ist global überschaubar

Auch Bassler [2006] glaubt, das Problem der Debatte um den Vierfarbenbeweis läge darin, dass nicht zwischen verschiedenen Arten der Überschaubarkeit unterschieden wird. Er macht den Vorschlag, in lokale und globale Überschaubarkeit zu unterscheiden. Lokale Überschaubarkeit bedeutet, dass jeder individuelle Schritt einer Beweisführung für sich (in einer bestimmten Reihenfolge) nachprüfbar ist. Unter globaler Überschaubarkeit versteht er, dass das große Ganze des Beweises, also die grobe Struktur des Beweises, überblickt werden kann. Er glaubt, dass im 20. Jahrhundert zunehmend Beweise mit ihrer formalisierten Darstellung identifiziert wurden und beobachtet in diesem Zuge *»a tendency to reduce questions of global surveyability to questions of local surveyability«* [Bassler 2006, S. 100].

Lokale Überschaubarkeit erscheint ihm für jede Art von Beweis wünschenswert: *»local surveyability is a criterion we should want to be able to apply to any garden-variety proof we happen to meet«* [Bassler 2006, S. 101]. Bei lokaler Überprüfbarkeit ist jedoch zumindest die Kenntnis der Reihenfolge der Einzelschritte vonnöten; außerdem ist bei längeren Beweisen eine Art von Buchführung angebracht, um den Überblick über bereits geprüfte Teilschritte zu behalten. Lokal überprüfbar ist ein Beweis auch dann, wenn er nicht tatsächlich überprüft wurde: *»to say that a proof is locally surveyable does not necessarily imply that it has been (or could be) directly surveyed in any practical sense«* [Bassler 2006, S. 101].

Wurde ein Beweis komplett lokal überprüft, heißt dies noch nicht automatisch, dass er auch global überprüfbar ist. Die Erkenntnis, dass sämtliche Einzelschritte zusammengenommen schließlich auch tatsächlich das geforderte Ergebnis zeigen, fehlt dann noch: *»Such a con-*

ceptual acknowledgement, that the proof steps fit together in such a way that they estblish the claim, is a minimal requirement for global surveyability« [Bassler 2006, S. 102].

Globale Überschaubarkeit ist seiner Ansicht nach essentiell für einen Beweis:

> [...] *if the notation becomes (practically, globally) unsurveyable, we have only a ›proof pattern‹ and not a proof.*
> [Bassler 2006, S. 114]

Und auch wenn der Vierfarbenbeweis lokal möglicherweise unüberschaubar ist, so ist er global überschaubar:

> [...] *we may express the dilemma posed by the 4CT in terms of the possibility of its being globally surveyable without being locally surveyable.*
> [Bassler 2006, S. 123]

Dass der Vierfarbenbeweis global überschaubar ist, wird klar, wenn man z.B. die Beweisskizze von Appel & Haken [1984] ansieht, in der sie übersichtlich die Argumentation skizzieren. Nachdem man diese gelesen hat, ist man sich über Art und Reihenfolge der Beweisschritte im Klaren und sieht ein, dass aus erfolgreicher Durchführung aller Schritte das gewünschte Ergebnis folgt:

> [...] *we see what tasks are required in a global sense and why these tasks will collectively provide a proof of the 4CT.*
> [Bassler 2006, S. 125]

Basslers Meinung nach genügt diese globale Überschaubarkeit auch, um den Vierfarbenbeweis als Beweis anzuerkennen:

> [...] *we should recognize it as a significant fact of mathematical practice worth conceptual investigation that global surveyability, in any of its non-trivial manifestations (of which Appel, Haken and Koch's proof of the 4CT* ***would be one*** *does* ***not****, and in fact* ***cannot****, require exhaustive local surveyability.)*
> [Bassler 2006, S. 126, Hervorhebung wie im Original]

Wünschenswert wäre eine Art Kanon dessen, was einen Beweis überschaubar macht: *»here we would desire something like regulative ideals of what makes a proof* ***fully perspicuous****«*, [Bassler 2006, S. 103, Hervorhebung wie im Original]. Hätte man einen solchen Kanon, gäbe es die Möglichkeit, einen Beweis noch verständlicher, noch besser global überschaubar zu machen: *»improving proofs to make them more comprehensible and, hence, more globally surveyable«* [Bassler 2006, S. 104].

Allerdings gibt Bassler insgesamt auch zu Bedenken, dass man sich von der Idee verabschieden müsse, dass Beweise jemals komplett lokal und global überschaubar sein können.

> *»we need to abandon the notion that there is* ***any*** *unproblematic sense in which any but perhaps the very simplest proofs are entirely, i.e., simultaneously globally* ***and*** *locally, surveyable.«*
> [Bassler 2006, S. 126, Hervorhebung wie im Original]

Coleman [2008] schlägt vor, sich auf die ursprüngliche Bedeutung des Begriffes »überschauen« zurückzubesinnen. Das Überblicken einer Sache bedeutet immer auch, dass man sich einen Überblick verschafft – einen Überblick kann man aber auch von etwas haben, ohne jedes kleinste Detail zu kennen: *»an overview generally neglects some detail, there is no reason why a survey must include a view of every included point«* [S. 15]; wichtig ist, dass man einen groben Eindruck des Ganzen hat (*»general impression«*). Schließlich ergeben sich damit zwei Anforderungen für Überschaubarkeit: Die einzelnen Teile des Beweises lassen sich zum einen benennen und bemessen. Zum anderen lassen sich dann die benannten und bemessenen Teile geordnet auf einer (Übersichts-)Karte darstellen.

> [...] *there are two requirements of technical surveyability: [S1] surveyability of P requires that P can be effectively labelled and measured in sufficient detail, and [S2] surveyability of P requires that the labels and measurements of P can be recorded and made into a map.*
> [Coleman 2008, S. 17]

Diese so erstellte (Übersichts-) Karte bietet eine übersichtliche Darstellung des Beweises, welche genügt, damit ein Beweis überschaubar ist: *»To show that a proof is surveyable it suffices to give a perspicuous representation«* [Coleman 2008, S. 17].

Genauer:

> *Surveyability is the requirement that the proof be capable of supporting the construction of a perspicuous representation of the proof-idea.*
> [Coleman 2008, S. 19]

Die Beweis-Idee lässt sich mit Hilfe unterschiedlichster Mappen darstellen. Der Beweis-Text hingegen muss verifiziert werden. Überschaubarkeit und Verifizierbarkeit sind zwei verschiedene, voneinander unabhängige Eigenschaften.

> *But although a good proof must be both verifiable and surveyable, these are* ***independent*** *requirements. The Appel-Haken proof is not very good because it is hard to verify and cannot be ›hand-checked‹ by humans. But that does not make it uncheckable* ***or*** *unsurveyable – its survey is easy. It is surveyable but not humanly checkable. But it is checkable.*
> [Coleman 2008, S. 19, Hervorhebung wie im Original]

Es stellt sich also die Frage: Muss ein Beweis überprüfbar sein, damit er ein Beweis ist? Durch das Überprüfen wissen wir, ob es sich um einen korrekt durchgeführten Beweis handelt – aber können wir vorher nicht schon wissen, ob es überhaupt ein Beweis ist? Auch Womach & Farach [2003] geben zu bedenken, dass man zwischen dem, was Beweise sind und dem, was es braucht, um zu erkennen, dass es Beweise sind (Verifikation), unterscheiden müsse und fordern eine explizite Unterscheidung in Verifikation und Überschaubarkeit.

Quinn [2011] schlägt vor, Beweise zu kennzeichnen – entweder als potentiellen Beweis (*»potential proof«*) oder als tatsächlichen Beweis (*»actual proof«*). Ein potentieller Beweis ist ein Argument, welches anerkannte Methoden verwendet und in einer Form vorliegt, die ein Überprüfen ermöglicht. Ein tatsächlicher Beweis ist ein potentieller Beweis, der gecheckt und für fehlerfrei befunden wurde.

3.2.2.7. Zusammenfassung Überschaubarkeit

Wie wir gesehen haben, wurde über die für Tymoczko so wichtige Beweiseigenschaft der Überschaubarkeit viel diskutiert. Für Kritik sorgte vor allem die sehr enge Definition, die Tymoczko für Überschaubarkeit gibt. Versteht man wie er Überschaubarkeit als faktische Überprüfbarkeit durch einen einzelnen Menschen in begrenzter Zeit, lässt sich nur schwer argumentieren, dass Unüberschaubarkeit ein neues Phänomen ist, welches nur bei Computerbeweisen auftaucht. Die von ihm geforderte Art und Weise der Überschaubarkeit können auch viele konventionelle Beweise nicht vorweisen. Auch scheint das »Schritt-für-Schritt«-Überschauen eines Beweises durch einen einzelnen Mathematiker nicht der aktuellen mathematischen Praxis in Bezug auf die Überprüfung eines Beweise zu entsprechen.

Sieht man ein, dass dann auch viele konventionelle Beweise, welche ohne Nutzung des Computers auskommen, unüberschaubar sind, muss man sich überlegen, welchen Stellenwert man Überschaubarkeit zuweist. Erkennt man sie als essentielle Beweiseigenschaft an, muss man vielen Beweisen ihren Status als Beweis aberkennen. Daher stellt sich die Frage, ob es sich bei Überschaubarkeit überhaupt um eine wichtige Beweiseigenschaft handelt, wenn sie doch viele akzeptierte Beweise nicht besitzen. Dies wird von einigen Kritikern verneint, wie u.a. von Arkoudas & Bringsjord [2007] (*»surveyability is not an essential epistemological property of proof«* [S. 192]), sowie von Detlefsen & Luker [1980]. Unabhängig davon, ob Überschaubarkeit jedoch als essentielle Beweiseigenschaft angesehen wird, sorgt die Unüberschaubarkeit auch traditioneller Beweise teilweise für Unbehagen. Insofern scheint Bedarf, die Frage des Umgangs mit Unüberschaubarkeit zu klären. Viele Vorschläge laufen darauf hinaus, den Begriff der Überschaubarkeit auszudifferenzieren und sich auf wichtige Teilaspekte zu beschränken. Statt lokaler bzw. faktischer Überschaubarkeit sollte globale bzw. prinzipielle Überschaubarkeit genügen. Das Verstehen bzw. Überblicken der Beweis-Idee scheint wichtiger als die tatsächliche Verifikation der Einzelschritte.

Gemeinhin scheint der Tenor so zu lauten, dass Überschaubarkeit zwar eine durchaus wünschenswerte, aber keine den Beweis konstituierende Eigenschaft darstellt [u.a. Teller 1980; Levin 1981]. Für Krakowski [1980] wird Überschaubarkeit durch endliche Formalisierbarkeit impliziert und ist daher nicht als eigenständige Eigenschaft zu betrachten.

Die Diskussion zeigt auch, dass man unter dem Begriff der »Überschaubarkeit« viele unterschiedliche Dinge versammeln kann. So kann mit der Überschaubarkeit eines Beweises Nachvollziehbarkeit, Übersichtlichkeit, Überblickbarkeit, Formalisierbarkeit, Verifizierbarkeit, Überprüfbarkeit bis hin zu Glaubwürdigkeit und Verständlichkeit gemeint sein.

Die vielfältigen Reaktionen deuten jedenfalls darauf hin, dass es bezüglich der Überschaubarkeit von Beweisen Disskussionsbedarf gab.

3.2.3. Fallibilität

Eine Besonderheit des Vierfarbenbeweises ist, dass er Gebrauch von einem technischen Artefakt macht. Sie sorgt laut Tymoczko auch dafür, dass der Beweis fallibel ist. Sind Soft- und Hardware des Computers fehlerhaft, können sich im Beweis Fehler einschleichen.

In diesem Abschnitt wollen wir das Thema der Fallibilität mathematischer Beweise untersuchen. Insbesondere widmen wir uns detailliert Tymoczkos Argumentation dafür, dass der Vierfarbenbeweis im Gegensatz zu konventionellen Beweisen fallibel ist. Im Anschluß schildern wir die Reaktionen darauf und untersuchen, inwiefern auch konventionelle Beweise fallibel sind. Schließlich betrachten wir, wie man mit der Fallibilität von Computerbeweisen und konventionellen Beweisen umgehen kann.

3.2.3.1. Fallibilität historisch

Wie wir in Kapitel 2.1.3 gesehen haben, gründet sich die absolute Sicherheit mathematischen Wissens vor allem auf die Rigorisität strenger Beweise und damit auf die angenommene Fehlerfreiheit der Methode der Deduktion. Es ist daher verständlich, dass eine erhöhte Fehlerwahrscheinlichkeit für Unbehagen sorgen kann. Dieses Unbehagen erkennen wir unter anderem in folgender Aussage.

> *In the case of replication of a computer argument we cannot determine easiliy what hidden assumptions or errors lie in the shared bits of coding or hardware. At some point of the proof, a result is true because the computer ›said so‹.*
> [Auslander 2008, S. 70]

Der bekannteste Einwand gegen dieses Sichtweise stammt von Imre Lakatos. In seinem Buch *»Beweise und Widerlegungen – Die Logik mathematischer Entdeckungen«* attackiert er das Euklidische Programm, welches alles sicher und infallibel machen möchte.

> *Beim deduktivistischen Stil sind alle Aussagen wahr und sämtliche Schlüsse gültig. Die Mathematik wird als dauernd wachsende Menge ewiger, unveränderlicher Wahrheiten dargestellt.*
> [...] *Der deduktivistische Stil verbirgt den Kampf, verbirgt das Abenteuer. Die gesamte Handlung verschwindet, die aufeinanderfolgenden tastenden Formulierungen des Satzes im Verlauf des Beweisverfahrens sind der Vergessenheit anheim gegeben, während dem Endergebnis die hohen Weihen der Unfehlbarkeit verliehen werden.*
> [Lakatos 1979, S. 134f]

Seiner Ansicht nach gibt es zwei Gründe dafür, dass mathematisches Wissen fallibel ist:

- Jeder Versuch, mathematisches Wissen auf eine perfekte, sichere Basis zu stellen, führt zu einem unendlichen Regress.
- Mathematik kann nicht in eine finale, komplett rigorose Form überführt werden.

Er sieht mathematische Aktivität immer auch als menschliche Aktivität. Als solche ist sie nicht nur anfällig für Fehler, sondern ihr Fortschritt generiert sich zu großen Teilen aus dem Machen, Finden und Korrigieren von Fehlern[39].

3.2.3.2. Tymoczko: Fallibilität bei Computerbeweisen

Wie angekündigt stellen wir nun Tymoczkos Argumentation dafür vor, dass Computerbeweise fallibel sind. Dass Beweise, die mit dem Computer geführt werden, immer auch fallibel sind, führt Tymoczko darauf zurück, dass der Computer als physikalisches Objekt auf vielerlei Weise für Fehler anfällig ist.

> [...] *present computers are just physical structures. Mathematician's reliance on computers brings with it, in principle, the fallibility inherent in any physical science. In practice, it brings with it the special fallibility of computer science* [...] *Thus, if for no other reason, fallibility is present in mathematics when mathematicians rely on computers.*
> [Tymoczko 1980, S. 138]

Sowohl die Soft- als auch die Hardware eines Computers können Fehler enthalten. Im Falle des Vierfarbenbeweises kann man nur dann wissen, dass die Konfigurationen der unvermeidbaren Menge tatsächlich reduzibel sind, wenn man sich absolut sicher ist, dass der Computer richtig gebaut, programmiert und verstanden wird.

> *The grounds for this lemma* [reducibility lemma] *are that suitably programmed computers delivered certain output when given certain input. However, such grounds are inherently fallible. The output could have been misread, the computers might have malfunctioned, the computers might have been misprogrammed, the programs might not have captured the mathematical intention.*
> [Tymoczko 1980, S. 133]

Sobald man jedoch die Fehlerfreiheit von Soft- oder Hardware anzweifelt, muss man auch die Fehlerfreiheit des Beweises und damit die Aussage des durch ihn etablierten Satzes anzweifeln.

> *If any of these possibilities obtained, then, for all we know, the Four-Color Theorem might be false. Therefore, the Four-Color Proof does not eliminate all possibility that the Four-Color Theorem is false.*
> [Tymoczko 1980, S. 133]

Und auch wenn die Fehlerwahrscheinlichkeit noch so klein sein mag, dadurch dass sie überhaupt vorhanden ist, kann man nicht mehr von einem rigorosen Beweis sprechen, wie Tymoczko betont.

> *To be sure, the possibility of error is rather small. It does not preclude mathematicians from knowing the Four-Color Theorem any more than the possibility of error prevents scientists from knowing facts about the universe. But that small possibility of error does preclude mathematicians from knowing the Four-Color*

[39] Hier überträgt er den von Popper vertretenen Falsifikationismus auf die Mathematik.

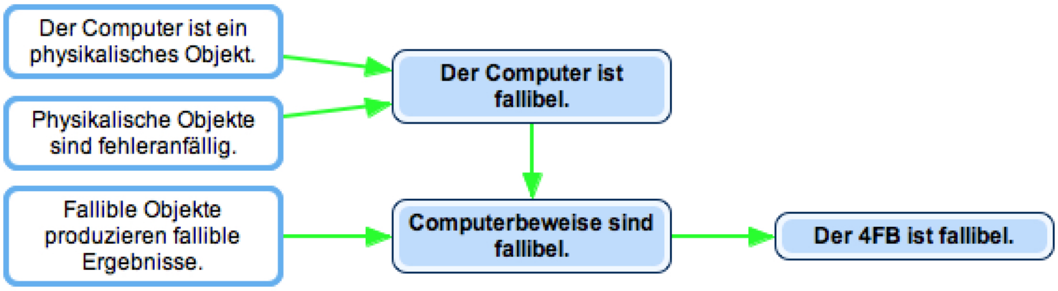

Abb. 3.12.: Tymoczko: Computerbeweise sind fallibel

> *Theorem with absolute certainty. The proof is not rigorous.*
> [Tymoczko 1980, S. 133]

Stattdessen sieht er die absolute Sicherheit mathematischen Wissens in Frage gestellt, da ein Beweis den ultimativen Garant für die Wahrheit eines Satzes bildet.

> [...] *the* ***mere existence*** *of a proof of a theorem* ***guarantees*** *the truth of the theorem* [...] *There aren't any ›gaps‹ in the (real) proof; it is rigorous, indeed the standard of ›rigor‹.*
> [Tymoczko 1980, S. 132, Hervorhebung wie im Original]

3.2.3.3. Fallibilität des Computers

Im Folgenden schildern wir, wie andere auf das von Tymoczko vorgebrachte Thema der Fallibilität reagierten. Zunächst stellt sich die Frage, ob Computer tatsächlich so fallibel sind, wie Tymoczko es andeutet. Laut Hales [2008] macht ein Programmierer beim Schreiben eines Programms 1,5 Fehler pro Zeile. Bei den meisten Fehlern handele es sich um Tippfehler, welche sogleich wieder korrigiert werden. Nach Kontrolle und mehrmaligem Testlauf bliebe jedoch immer noch ca. 1 Fehler pro 100 Zeilen Code unbemerkt. In dem Buch *»Code Complete«* von McConnell [1993] findet sich ebenfalls ein Abschnitt über Fehlerabschätzungen. Die Spannbreite geht von industriellen Durchschnittsprogrammen (15–50 Fehler pro 1000 Zeilen Code), über nach strengem Testen veröffentlichte Microsoft-Programme (0.5 Fehler pro 1000 Zeilen) bis zu einer mittels der neuen Technik »cleanroom development« von Harlan Mills entwickelten Programmen (0.1 Fehler pro 100 Zeilen Code). Festzuhalten bleibt, dass auch sorgfältigst geprüfter Computercode Fehler enthalten kann.

Robertson et. al., welche einen vereinfachten Beweis des Vierfarbenbeweises veröffentlichten, sehen insbesondere Compiler und Hardware als mögliche Fehlerquellen in ihrem Beweis an:

> *However, an argument can be made that our ›proof‹ is not a proof in the traditional sense, because it contains steps that can never be verified by humans. In particular, we have not proved the correctness of the compiler we compiled our program on, nor have we proved the infallibility of the hardware we ran our programs on. These have to be taken on faith, and are conceivably a source of*

> *error.*
> [Robertson et al. 1996, S. 24]

Brown unterstützt dies und betont, dass es bei der Nutzung von Computern nicht um herkömmliche Rechenfehler gehe, wie sie bei Berechnungen vorkommen, sondern eher um Fehler im Sinne falscher Hypothesen. Die Hypothese, der Computer funktioniere so, wie er solle, könne falsch sein. Auch wenn mehrere Durchläufe und Tests das Vertrauen in den Computer erhöhten, bliebe seine Glaubwürdigkeit jedoch letztendlich *»a well-confirmed scientific theory«* [Brown 2008, S. 161].

In den Naturwissenschaften kennt man dieses Problem, das immer dann auftritt, wenn man auf die Funktionstätigkeit eines technischen Gerätes angewiesen ist. Unter dem Begriff *»experimenter's regress«* wurde es von Collins [1985] ausführlich beschrieben und behandelt. Wissenschaftler arbeiten unter der Hypothese, dass ein korrektes Ergebnis deshalb korrekt ist, weil es mit einer korrekt funktionierenden Apparatur erzielt wurde. Gleichzeitig ist eine korrekt funktionierende Apparatur aber eine Apparatur, die korrekte Ergebnisse erzielt. Zwischen den Methoden zur Ergebnisgewinnung und den durch sie gewonnenen Ergebnissen gibt es also Rückkopplungen. Insbesondere ist Collins der Ansicht, dass auch die Kalibrierung einer Apparatur durch ein Surrogat im Vorfeld des eigentlichen Experiments keine Rechtfertigung dafür liefert, dass die Apparatur korrekt funktioniert. Aus Collins' Sicht wird diese Rückkopplung in der Praxis durch Diskussion der Ergebnisse in der wissenschaftlichen Community gelöst. Hier spielen aber Faktoren wie das Ansehen der Wissenschaftler und die Nützlichkeit der gewonnenen Resultate die wesentlichen Rollen. Epistemologische Kriterien bleiben vollkommen auf der Strecke. Streng genommen muss somit immer ein Rest an Unsicherheit akzeptiert werden.

Auch Lam et al. [1989] kommen zu dem Ergebnis, dass man Computerbeweise als »unsichere« Beweise akzeptieren muss: *»As physicists have learned to live with uncertainty, so we* [mathematicians] *should learn to live with an ›uncertain‹ proof« [S. 12].* In ihrer Veröffentlichung über die Nicht-Existenz endlicher projektiver Flächen der Ordnung 10 beschrieben sie mehrere Arten von Fehlern, die in ihrem Beweis vorkommen könnten. Die erste Fehlerquelle sehen sie bei der Eingabe der Daten in den Computer, die zweite in der Software. Zum Dritten sehen sie mögliche Fehler in der Hardware als Problem an. Sie benutzten einen Cray-Supercomputer für ihren Beweis, welcher im Schnitt in Tausend Rechenstunden nur einen Fehler macht. Lam et. al multiplizierten die Fehlerwahrscheinlichkeit mit der benötigten Rechenzeit und kommen zu dem Ergebnis, die Gesamtfehlerwahrscheinlichkeit sei »infinitesemal«. Trotzdem zögern sie, ihr Ergebnis als Beweis zu bezeichnen und sprechen lieber von einem *»computed result«*:

> *I try to avoid using the word ›proof‹ and prefer to use the phrase ›computed result‹ instead.* [...] *Notice that the assertion of correctness is not* ***absolute****, but only* ***nearly certain****, which is a special characteristic of a computer-based result.*
> [Lam 1990, S. 9, Hervorhebung wie im Original]

Die Unüberschaubarkeit des mit dem Computer geführten Teils macht die Fehlerwahrscheinlichkeit noch gravierender. Dadurch, dass sich nicht jeder einzelne Schritt prüfen lässt, fällt es schwer, mögliche Fehler aufzudecken. Die Fehlersuche gestaltet sich bei Computerbeweisen schwieriger:

> *Bestimmte Fehler im Computercode lassen sich herausfiltern und eliminieren, was jedoch fehlt, ist die Intuition, die gute Mathematiker bei Beweisen mit Stift und Papier entwickelt haben.*
> [Ruelle 2007, S. 136]

Wie man sieht, trifft Tymoczkos These, Computer seien fehleranfällig, auf breite Zustimmung. Allerdings bleibt die Frage, ob sie tatsächlich fehleranfälliger sind als Menschen.

3.2.3.4. Fallibilität des Menschens

Schreibt man die Fallibilität des Computers seinem Charakter als physikalischem Objekt zu, muss man sich allerdings fragen, warum der Mensch als ebenso physikalisches Objekt in der Lage sein sollte, fehlerfreie Beweise zu produzieren. Dies merkt u.a. Levin an:

> *For surely **human beings** and their workings are also physical objects, just as subject to physical laws as computers. If error is possible in computer results because of the (highly confirmed but) unproven theories that describe them and their programs, then the same possibility presents itself whenever human mathematicians work out proofs by themselves.*
> [Levin 1981, S. 82, Hervorhebung wie im Original]

In anderen Wissenschaften machen Menschen Fehler, warum sollte also ausgerechnet die Mathematik davon ausgenommen sein? Rav [2007] sieht mathematisches Wissen als genauso fallibel an wie jedes andere menschliche Wissen: *»Like all human knowledge, mathematical knowledge is fallible, both in the long and in the short run, in view of flaws and errors in the proofs«* [S. 317]. Ähnlich äußert sich Bonsall:

> *Mathematics is an activity of human beings* [...] *and subject to the usual human limitations and defects* [...] *All human beings are fallible, and so errors inevitably occur.*
> [Bonsall 1982, S. 9]

Umstände wie Müdigkeit, Langeweile, Unkonzentriertheit können bei einer menschlichen Beweisführung in Fehlern resultieren. Siehe hierzu Swart:

> *Human beings get tired, and their attention wanders, and they are all too prone to slips of various kinds; a hand-checked proof may justifiably be said to involve »a complex set of empirical factors«. Computers do not get tired and almost never introduce errors into a valid implementation of a logically impeccable algorithm.*
> [Swart 1980, S. 700]

Auch beim Menschen könnte man von Soft- und Hardware sprechen. Die Software entspräche dann den erlernten Routinen, die Hardware dem Gehirn; sie könnten zumindest theoretisch logische Defekte aufweisen. Ähnlich wie beim Computer glaubt man jedoch auch hier aufgrund empirischer Evidenz an die korrekte Funktionsweise des eigenen Verstandes.

> *In a certain sense our ordinary formal arguments for mathematical results ›presuppose‹ the reliability of our brain processes. If our brains were relevantly defective, a faulty proof could seem to be sound. We can know that our brains are reliable only by empirical means. This hardly shows that our brains are reliable only by empirical means. This hardly shows that all our formal arguments in mathematics are empirical. Although we depend on the reliability of our brains, the assumption of their reliability need not be a part of the warrent for our mathematical result. The question is how our reliance on a computer's reliability is different from our brains' reliability. I believe that the reliance is different. But do the differences force the warrant for relying on a computer to be empirical?*
> [Burge 1998, S. 6]

Genauso, wie man sich auf das korrekte Funktionieren des Computers verlassen muss, muss man sich also auf das korrekte Funktionieren des menschlichen Verstandes verlassen.

Nicht nur, dass Menschen genauso viele Fehler machen können wie Computer, einige Mathematiker sind sogar der Ansicht, dass der Computer im Schnitt weniger Fehler macht als der Mensch. Aus dieser Überzeugung heraus verteidigt Appel seinen Vierfarbenbeweis:

> *As opposed to the methodical and precise computer, the human authors made mistakes* [. . .] *Whether we like it or not a new method of assisted human effort has arisen that does the job more accurately and efficiently than the human can and actually increases human understanding what has really been done.*
> [Appel 1984, S. 38f]

Außerdem sind er und Haken der Meinung, dass sich ein Computer auch leichter auf die korrekte Vorgehensweise hin untersuchen lässt als ein Mensch.

> *When proofs are long and highly computational, it may be argued that even when hand checking is possible the probability of human error is considerably higher than that of machine error; moreover, if the computations are sufficiently routine, the validity of programs themselves is easier to verify than the correctness of hand computations.*
> [Appel & Haken 1984, S. 172]

Auch Krämer [2010] glaubt, die Algorithmen, die bei Computerbeweisen verwendet werden, seien relativ einfach und wohl bekannt. Das Vertrauen, das man in sie setzen kann, ist daher deutlich höher als das in die Fehlerfreiheit menschlichen Denkens (»infallibility of human reasoning«). Der Mathematiker Sturmfels äußert sich im Interview ebenso zugunsten von Computerbeweisen:

> *I don't trust humans a lot. You know, people think that a written proof is the gold standard. I think many mathematical papers and arguments contain errors*

> *and gaps and the only reason we don't find them is because they don't get read. On the whole, the building of mathematics is sound, but if a mathematical statement works out on a computer test, then I believe it a lot more.*
> [Sturmfels interviewt von Gallian & Peterson 2008, S. 5]

Wie man sieht, gibt es zahlreiche Stimmen, die die Fehleranfälligkeit des Menschens als mindestens genauso hoch bewerten wie die eines Computers.

3.2.3.5. Computer als Werkzeug

Bei der Lektüre Tymoczkos kann man stellenweise den Eindruck gewinnen, Computer führten ein vom Menschen abgekoppeltes Eigenleben[40]. Letztlich sind sie jedoch von Menschen gemacht und programmiert und können daher als Werkzeuge betrachtet werden. Außer durch Komplexität unterscheidet sich der Computer nicht wesentlich von einem Zirkel, einem Lineal oder einem Taschenrechner. Dies sieht zumindest Levin so:

> *The use of a computer as a mathematical shortcut to **bypass** human computation does not differ significantly – that is, from an epistemological point of view – from the use of tables of logarithms, square roots, trigonometric values, or random numbers. Each such table is a convenience that saves us the many man-hours originally spent computing the values.*
> [Levin 1981, S. 84, Hervorhebung wie im Original]

Daher wird Mathematik durch den Computer ihrer Meinung auch nicht qualitativ verändert, sondern höchstens quantitativ in dem Sinne, dass sich die Rechenleistung erhöht.

> *The improvement or advantage introduced by the use of computers in proofs is, so to speak, quantitative, not qualitative: more computations can be done more quickly, but no new sort of computation that is beyond human beings has appeared.*
> [Levin 1981, S. 85]

Während Swart den Computer als Weiterentwicklung von Papier und Stift betrachtet: *»Computers are really just a highly sophisticated and highly efficient form of automated pencil and paper«*, vergleicht Steen [1988] Computer mit Mikroskopen und Teleskopen: *»computers change not so much the nature of the discipline as its scale: computers are to mathematics what telescopes and microscopes are to science«* [S. 616]. Auch Rufener [2011] sieht es so, dass der Mensch durch den Computer lediglich um ein kognitives Werkzeug bereichert wird. Oftmals unterscheidet sich das Vorgehen des Computers nicht von dem Vorgehen, was ein Mathematiker anwenden würde. Eventuelle Software-Fehler etc. lassen sich ursächlich wieder auf menschliche Fehler zurückführen.

[40] Dies wird vom Mathematiker Zeilberger auf die Spitze getrieben. Er erzählt im Interview, dass einige Kollegen es missbilligen, das er den Computer einsetzt. Sie empfänden dies als Schummeln. Daher wäre er auf die Idee gekommen, seinen Computer zu »vermenschlichen«. Darauf angesprochen sagt er: *»we can always change the rules of the game«* [Zeilberger interviewt von Gallian & Pearson 2007, S. 15]. Seither listet er seinen Computer in seinen Veröffentlichungen als Co-Autor namens »Shalosh B. Ekhad« auf [siehe bspw. Andrews et al. 1993].

Laut Calude [2001] kann man damit rechnen, dass sich kommende Generationen an den Computereinsatz gewöhnen und ihn lediglich als Werkzeug betrachten werden. Selbst bei Beweisen, die per Hand möglich seien, stelle sich die Frage: *»Why should you walk to work, when you can drive in?«* [Calude 2001, S. 8].

Martin [2010] sagt, dass man dem Vierfarbenbeweis immerhin verdanken könne, dass er den Computer als wichtiges und mächtiges Werkzeug in die Mathematik eingeführt habe und dass es besser sei, überhaupt einen Beweis zu haben, statt keinen [S. 1450]. Dadurch, dass zeitaufwendige (stumpfe) Tätigkeiten an den Computer delegiert werden könnten, blieben dem Mathematiker mehr Stunden, um andere (sinnvollere) Dinge zu tun: *»We should portray ourselves not as purists who disdain the use of nontraditional tools but as scientists who are willing to open to new methods«* [Martin 2010, S. 1450].

Abschließend bleibt festzuhalten, dass es zunehmend Mathematiker gibt, die den Computer als Werkzeug schätzen, anstatt ihn als zusätzliche Fehlerquelle anzusehen.

3.2.3.6. Konventionelle Beweise sind fallibel

Nachdem wir soeben festgestellt haben, dass viele Autoren die Fallibilität des Computers vor allem auf die Fallibilität des Menschens zurückführen, liegt der Schluss nahe, dass auch konventionelle, von Menschen erbrachte Beweise ebenso fehleranfällig sind wie Computerbeweise.

Birkhoff[41] vergleicht den Vierfarbenbeweis und den Beweis des Klassifikationssatzes einfacher endlicher Gruppen, zu dem sich weiterführende Erläuterungen in Anhang A.1 finden, bezüglich ihrer Fehlerwahrscheinlichkeit miteinander:

> *Both human beings and computers are fallible, even if extremely accurate in some ways. So I think the two proofs should have the same status in the public mind. They are both very elaborated constructs, arising in a civilization with very high technology.*
> [Birkhoff zitiert in Albers & Alexanderson 1985, S. 13]

Gorenstein sagt über den Klassifikationsbeweis:

> *This is an appropriate moment to add a cautionary word about the meaning of ›proof‹ in the present context: for it seems beyond human capacity to present a closely-reasoned, several-hundred-page argument with absolute accuracy. I am not speaking of the inevitable typographical errors, or the overall conceptual basis of the proof, but of ›local‹ arguments that are not quite right – a misstatement, a gap, what have you. They can almost always be patched up to the spot, but the existence of such ›temporary‹ errors is disconcerting to say the least. Indeed, they raise the following basic question: If the arguments are often ad hoc to begin with, how can one guarantee that the ›sieve‹ has not let slip a configuration which leads to yet another simple group? Unfortunately, there*

[41] Hierbei handelt es sich nicht um George David Birkhoff, welcher uns im Kapitel zur Beweisführung des Vierfarbenbeweises als Entwickler des Birkhoff-Diamantens (vgl. Abb. 3.4) begegnet ist, sondern um seinen Sohn.

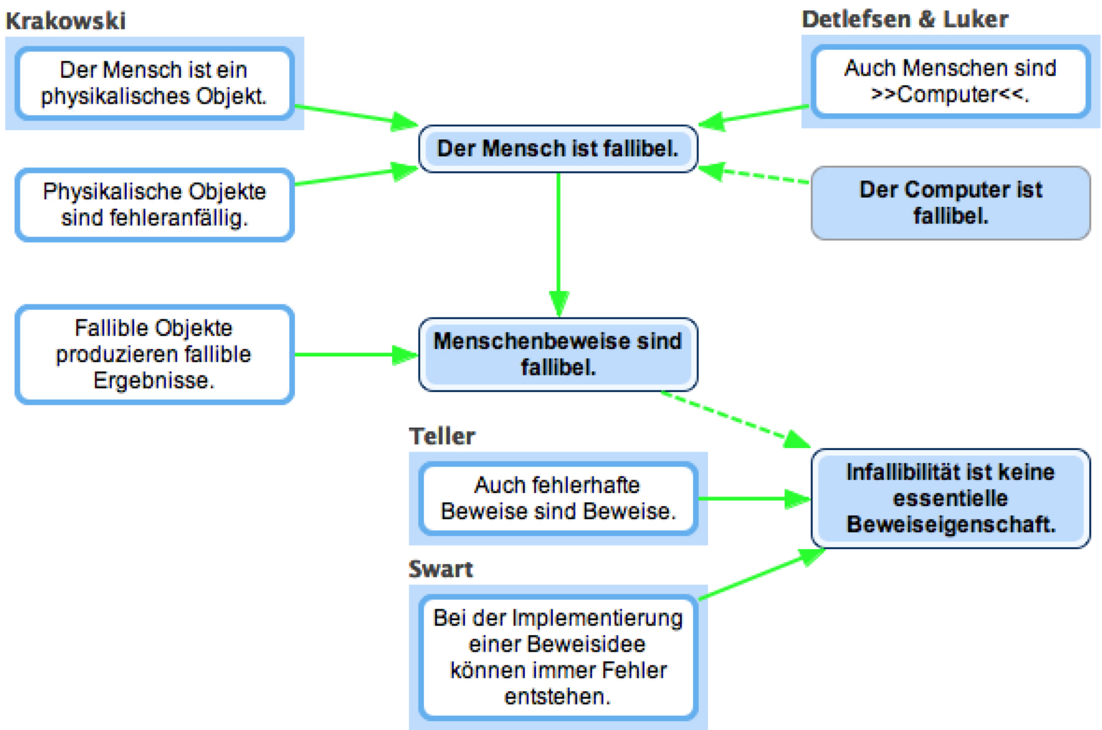

Abb. 3.13.: Auch konventionelle Beweise sind fallibel

> *are no guarantees – one must live with this reality.*
> [Gorenstein 1979, S. 52]

Kleiner ist ebenfalls der Meinung, dass man gegen andere Beweise wie z.B. gegen den Beweis des Klassifikationssatzes ähnliche Argumente vorbringen könnte wie gegen den Vierfarbenbeweis. Er sieht beide als Teil einer Entwicklung.

> *Largely as a result of these developments, a novel philosophy of mathematical proof seems to be emerging. It goes under various names – public proof, quasi-empiricist proof, proof as a social process. Its essence, according to its advocates, is that proofs are not infallible. Thus mathematical theorems cannot be guaranteed absolute certainty.*
> [Kleiner 1991, S. 310]

Auch Tymoczko selbst äußert in einer späteren Veröffentlichung die Ansicht, dass Fallibilität nicht nur Computerbeweise betrifft.

> *The Four-Color Proof provides a positive argument for the inclusion of fallibility in the philosophy of mathematics* [...] *Of course once we admit error into mathematics, it seems silly to recognize it only for computers.*
> [Tymoczko 1980, S. 136]

3.2.3.7. Umgang mit Fallibilität

Wie wir gesehen haben, stellt Fallibilität bei vielen komplizierten mathematischen Prozeduren (unabhängig ob diese von Mensch oder Maschine durchgeführt wurden) ein allgegenwärtiges Problem dar. Wir wollen nun untersuchen, wie die mathematische Gemeinschaft damit umgeht.

Am besten scheint es, die Fehlerwahrscheinlichkeit auf ein Minimum zu reduzieren. Dies kann auch bei Computerbeweisen bis zu einem gewissen Grad durch eine genaue Überprüfung durch mehrere Personen geschehen, ähnlich wie bei konventionellen Beweisen mithilfe des Gutachterverfahrens (vgl. Abschnitt 2.1.4). Damit könnte nach Ansicht einiger weiterhin gewährleistet sein, dass Fehler (des Einzelnen) durch die Gemeinschaft zuverlässig über die Zeit ausgemerzt werden [Rav 2007]. Hierzu müsste allerdings auch der zu den Beweisen gehörige Computercode einer Überprüfung zugänglich gemacht werden. So fordert beispielsweise Billey [2011], dass Computerbeweise »vernünftig« aufgeschrieben werden müssen, damit sie an Akzeptanz gewinnen:

> *We must explore the roads toward a good computer proof because it will lead to new mathematics. We must set standards for publication of computer assisted proofs when the journal cannot include all of the code.*
> [Homepage von Billey 2011]

Dazu sollte ihrer Meinung nach der Algorithmus genau beschrieben werden, verschiedene Implementierungen sollten in verschiedenen Systemen vorgenommen und ausgeführt werden, der Code selbst sollte per Internet zugänglich gemacht werden und ebenfalls genau beschrieben sowie vorsichtig geprüft werden. Ein Beispiel für einen solchen gut gemachten und dokumentierten Beweis ist für sie der neue Beweis des Vierfarbensatzes von Robertson et al. Jene glauben ebenso daran, dass das Prüfen der Ergebnisse eines Computerbeweises durch andere Computer und mit Hilfe von unterschiedlichen Programmen die Fehlerwahrscheinlichkeit erheblich reduzieren kann.

> *However, from a practical point of view, the chance of a computer error that appears consistently in exactly the same way on all of our runs of our programs on all the compilers under all the operating systems that our programs run on is infinitesimally small compared to the chance of a human error during the same amount of case-checking.*
> [Robertson et al. 1996, S. 24]

Swinnerton-Dyer [2005] schlägt außerdem vor, Gleichungen mit Fehlerschätzungen an kritische Computerrechnungen anzufügen. In der numerischen Mathematik gehört ein solches Vorgehen bei aufwändigen Algorithmen schon seit langem zum Standard.

Computerbeweise wie auch traditionelle Beweise lassen sich zudem mittels automatischer Beweisprüfer bestätigen. Je schlanker hierbei das Beweisprogrammm, umso größer die Kontrolle über die Beweisprozedur[42]. Ist der »logical kernel«, also der Computercode, mit dem ein Programm geschrieben ist, nicht lang, kann er gut vom Menschen geprüft werden, wie u.a. McEvoy [2011] betont. Im Beispiel des Vierfarbenbeweises gab es durch Gonthier eine Überprüfung mit Hilfe des automatischen Beweisprogramms Coq[43].

[42] siehe Flyspeck-Beschreibung, dort betont Hales, um klarzumachen, wie vertrauenswürdig das Ergebnis seines Beweises sei: *»the system is built on a small kernel«*

[43] [Hales 2008] spricht von *»one of the most meticulously verified proofs in history«* [S. 1372]. Für viele räumte dieser formalisierte Beweis die letzten Zweifel am Vierfarbenbeweis aus.

Um für automatische Beweisprüfer zugänglich zu sein, müssen die Beweise formalisiert werden. Wie wir in Abschnitt 2.1.4 gesehen haben, erhöht dies für viele per se die Sicherheit eines Beweises. Auch bei Computerbeweisen scheint dies der Fall zu sein. So sagt Gonthier über seinen formalen Beweis:

> *Our work can be seen as an ultimate step in this clarification effort* [that the 4CT is true], *completely removing the two weakest links of the proof: the manual verification of combinatorial arguments, and the manual verification that custom computer programs correctly fill in parts of those arguments.*
> [Gonthier 2005, S. 2]

Ihm erschienen also alle »per Hand« durchgeführten Schritte gar als schwächster Punkt des Vierfarbenbeweises, hier findet sich also erneut ein starker Glaube daran, dass der Computer wesentlich weniger fallibel ist als der Mensch.

Auch bei konventionellen Beweisen ist eine genauere Überprüfung angesagt. Gorenstein [1983] meint, dass ein Beweis wie der Klassifikationsbeweis deutlich aufzeigt, dass eine andauernde Untersuchung bereits bestehender Beweise vonnöten ist (*»clearly indicates the strong need for continual reexamination of the existing ›proofs‹«* [S. 53]). Da Fehler unvermeidlich scheinen, ist ein Satz nur noch mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit wahr, wie Kleiner [1991] betont. Doch auch seiner Ansicht nach lässt sich die Wahrscheinlichkeit, dass ein Satz wahr ist, mit größerer Rezeption steigern. Je mehr ein Satz gelesen, diskutiert und verwendet werde, desto eher sei er wahr. Damit sei der Prozess, welcher zur Akzeptanz eines Beweises führt, allerdings mehr als sozialer Prozess anzusehen.

> *In the final analysis, the acceptance of a theorem (i.e., the acceptance of the validity of its proof) is a social process and is based on the confidence of the mathematical community in the social systems that it has established for purposes of validation.*
> [Kleiner 1991, S. 311]

Hat man schon akzeptiert, dass Sätze nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit als wahr bezeichnet werden können, bieten sich darüber hinaus zur Überprüfung probabilistische Methoden an, insbesondere dann, wenn die Länge des Problems (und damit die Zeit, die für seine Verifikation aufgebracht werden muss) außerordentlich lang ist. Sogenannte *»randomized algorithms«* können Sicherheit bis zum gewünschten Grad liefern und benötigen weniger Zeit als eine komplette Überprüfung. Sie testen stichprobenartig verschiedene, zufällig ausgewählte Teile des Beweises auf Korrektheit. Womach & Farach [2003] sprechen sich zugunsten solcher *»randomized algorithms«* aus:

> *The certainty conveyed by classical proof trades on the rigor of formal proof, abstracting away from human capabilities of comprehending it. Probabilistic procedures have built-in ways of taking into account the effects our physical and cognitive limitations impose on us, and provide formal structure for adjusting the tension between rigor and the length of procedure. What is important to note here is that, if certainty is a function of proof length, cognitive limitations, and accuracy of the methods used, then there is no obvious reason to weigh more*

> *heavily ›in-principle‹ accuracy than ›in-practice‹ accuracy.*
> [Womach & Farach 2003, S. 79]

Die Äußerungen zu Fallibilität sind also recht vielfältig – insbesondere sind manche Mathematiker der Ansicht, dass durch den Computereinsatz weniger Fehler in der Mathematik entstehen.

3.2.3.8. Zusammenfassung Fallibilität

Anhand der vorangegangenen Ausführungen haben wir gesehen, dass niemand bestreitet, dass Computerbeweise fallibel sind. Allerdings wird vielfach angemerkt, dass Fallibiliät eigentlich kein neues Thema ist, sondern auch konventionelle Beweise betrifft. Brown fasst dies wie folgt zusammen:

> *For one thing, Tymoczko's conclusion seems perfectly correct. That is, empirical, fallible and probabilistic elements are part of mathematics. But it is not quite so new as Tymoczko claims.*
> [Brown 2008, S. 162]

Und auch wenn vor Computerbeweisen das Thema Fallibilität in der Philosophie der Mathematik keine große Rolle spielte, ist es doch so, dass sich wie u.a. Swinnerton-Dyer [2005] anmerkt, auch vorher schon *»that straightjacket«* [S. 2437] in Form des Standards eines rigorosen Beweises nur selten eingehalten wurde.

Ruelle merkt in seinem Buch *»Wie Mathematiker ticken«* an, dass die aktuelle Mathematik insgesamt »schwieriger« als die traditionelle scheint. Dies lässt sich einerseits auf einen geradezu inflationären Zuwachs an Fachliteratur zurückführen. Einzelne Teilgebiete fächern sich immer weiter in noch kleinere Spezialgruppen auf. So wird dem einzelnen veröffentlichten Beweis weniger Aufmerksamkeit und Kontrolle zuteil. Insofern kann man dafür argumentieren, dass die Themen Fallibilität und Fehlerminimierung nicht nur im Zusammenhang mit Computerbeweisen, sondern auch mit sehr langen und komplizierten Beweisen an Bedeutung gewonnen haben. Es zeigt sich, dass es keine einheitliche Linie gibt, wie mit Fallibilität in Computerbeweisen im Speziellen und in der Mathematik im Allgemeinen umzugehen ist.

Die üblichen Kontrollmechanismen greifen insbesondere bei sehr langen und komplizierten Beweisen nicht mehr, so dass man nicht mehr davon ausgehen kann, dass Beweise stets fehlerfrei sind.

> *Kurz gesagt: Die alten Ideale absoluter Rigorosität sind nicht aufgegeben worden. Dennoch sind Kräfte am Werk, die den Stil der Mathematik verändern, da höchst wünschenswerte Theoreme sehr lange oder aber computergestützte Beweise erfordern.*
> [Ruelle 2007, S. 137]

Die absolute Sicherheit mathematischen Wissens gerät ins Wanken, wenn man Fallibilität zulässt. Welche gravierenden Auswirkungen dies seiner Meinung nach auf die Mathematik hat, beschreibt Kline [1980] in seinem Buch *»Mathematics: The Loss of Certainty«*:

> *The loss of truth, the constantly increasing complexity of mathematics and science, and the uncertainty about which approach to mathematics is secure have cause most mathematicians to abandon science.* [...] *they have retreated to specialties in areas of mathematics where the methods of proof seem to be safe.* [...] *The hope of finding objective, infallible laws and standards has faded. The Age of Reason is gone.*
> [Kline 1980]

Auch wenn dies etwas dramatisierend dargestellt zu sein scheint, lässt sich doch immerhin damit schließen, dass mit der Fallibilität durch den Diskurs um die Rolle des Vierfarbenbeweises ein weiteres sehr aktuelles Thema für die Mathematik von heute ins Spiel gebracht wurde.

3.2.4. Empirie

Nachdem wir über Unüberschaubarkeit und Fallibilität bei (Computer-)Beweisen nun ausführlich diskutiert haben, wenden wir uns dem nächsten Punkt der Kritik zu, die Tymoczko am Vierfarbenbeweis übt. Laut Tymoczko handelt es sich beim Vierfarbenbeweis unter anderem deshalb nicht um einen klassischen Beweis, weil durch ihn empirische Elemente in die Mathematik eingeführt werden. Daher beschäftigen wir uns in diesem Abschnitt mit Empirie in Bezug auf mathematische Beweise. Wir beginnen mit einer historischen Einordung des Begriffes der Empirie. Grundsätzlich wird in der Mathematik das Bild einer rein deduktiven Wissenschaft gezeichnet (vgl. Abschnitt 2.1.2). Im Gegensatz zu den Naturwissenschaften, in denen Erkenntnisse durch Experimente oder Auswertungen großer Datensätze gestützt werden, spielt Empirie (im Sinne von Bezugnahme auf Erfahrungstatsachen) in der Mathematik gemeinhin kein Rolle[44].

Danach wenden wir uns Tymoczkos Argumentation zu. Wir arbeiten heraus, was er unter den neuartigen, durch den Vierfarbenbeweis in die Mathematik eingeführten »empirischen Elementen« versteht. Wie sich zeigt, sieht er verschiedene Aspekte des Beweises als Auslöser für Empirie. Allen gemein ist, dass sie durch die Computernutzung im Verlauf des Beweises auftreten.

Im Anschluß stellen wir die Reaktionen auf den Vorwurf, der Vierfarbenbeweis führe empirische Elemente in die Mathematik ein, dar. Wir versuchen zu ergründen, was genau dafür sorgt, dass der Vierfarbenbeweis als »empirischer« wahrgenommen wird als konventionelle Beweise. Insbesondere ist (wie schon bei Unüberschaubarkeit und Fallibilität) zu prüfen, ob es sich bei den geschilderten empirischen Aspekten des Beweises tatsächlich um ein neues Phänomen handelt, welches lediglich Computerbeweise betrifft.

3.2.4.1. Empirie historisch

In den Naturwissenschaften spielt Empirie eine zentrale Rolle. Wissen wird aus systematischer Berücksichtigung von Erfahrungen gewonnen. Humphry Davy, ein renommierter Chemiker des 17. und 18. Jahrhunderts, beginnt sein Buch *»Elements of Chemical Philosophy«* folgendermassen:

> *The foundations of chemical philosophy, are observation, experiment, and analogy. By observation, facts are distinctly and minutely impressed on the mind. By analogy, similar facts are discovered; and, in the progression of knowledge, observation, guided by analogy, leads to experiment, and analogy, confirmed by experiment, becomes scientific truth.*
> [Davy 1812, S. 2]

Am Beispiel von Wasserpflanzen beschreibt er, wie sich Wissen induktiv etablieren lässt, d.h. wie aus einer ersten Naturbeobachtung schrittweise durch Experimente und Analogienbildung Wissen entsteht. Mit Hilfe geeigneter Versuchsaufbauten werden Beobachtungen gewonnen: Seit Francis Bacon (1561-1626) gilt das Experiment als wichtigste Tatsachengrundlage der Naturwissenschaften [Carrier 2006].

[44] Erwähnenswert ist an dieser Stelle allerdings Lakatos, welcher als seltene Ausnahme bereits in den 80ern von empirischen Elementen in der Mathematik berichtete.

> *Indeed the canonical pattern of justification in science is a posteriori and inductive. What makes empirical science empirical is the crucial role played by observation, and – in particular – by experiment.*
> [Baker 2015, 3.1 Experimental Mathematics]

Auf der Grundlage allgemeiner Einsichten kann es so geplant werden, dass neue Erkenntnisse aus der Erfahrung gewonnen werden[45].

Dieser Ansatz wird jedoch nicht von allen geteilt. So plädierte Justus von Liebig[46] im 19. Jahrhundert darauf, dass alle Forschung deduktiv ist:

> *Eine empirische Naturforschung in dem gewöhnlichen Sinne existiert gar nicht. Ein Experiment, dem nicht eine Theorie, d.h. eine Idee, vorhergeht, verhält sich zur Naturforschung, wie das Rasseln mit einer Kinderklappe zur Musik.*
> [von Liebig 1863]

Für ihn ist alle Forschung deduktiv bzw. apriorisch; das Experiment ist lediglich ein Hilfsmittel, um den Denkprozess zu unterstützen. Mit dieser Ansicht liegt er sehr nahe beim klassischen Verständnis von Wissensgewinn in der Mathematik.

Dieses wird von Casullo [1988] in den folgenden drei Grundannahmen, die dagegen sprechen, dass Mathematik empirisch ist, zusammengefasst:

1. Mathematische Vermutungen lassen sich nicht empirisch widerlegen.
2. Mathematische Tatsachen werden mit Sicherheit gewusst.
3. Mathematische Wahrheiten sind notwendige Wahrheiten.

Kitcher [1981] nennt dieses traditionelle Bild von Mathematik *»deductivism«*, es beruht auf zwei Annahmen:

(i) Alles mathematische Wissen kann durch Deduktion aus ersten Prinzipien gewonnen werden.

(ii) Deduktion aus ersten Prinzipien ist der optimale Weg zu mathematischer Erkenntnis, es produziert Wissen, das weniger anfällig ist für empirische Herausforderungen.

3.2.4.2. Tymoczko: Empirie bei Computerbeweisen

In Abschnitt 3.2.1 haben wir bereits grob skizziert, dass Tymoczko das ursprünglich sichere mathematische Wissen durch empirische Aspekte, wie sie im Verlauf des Vierfarbenbeweis auftauchen, gefährdet sieht. An dieser Stelle wollen wir seine Argumentation zum Thema Empirie nochmals genauer untersuchen. Eine Wahrheit ist für Tymoczko genau dann apriori, wenn sie ohne Bezug auf (Sinnes-)Erfahrung etabliert wurde.

> *Traditionally, a priori truths are those truths which can be known independently of any experience and a posteriori truths are those which can be known only*

[45] Bemwerkenswerter Weise besitzen die Ausdrücke *»Experiment«* und *»Empirie«* etymologisch den gleichen Ursprung im griechischen Wort *»peira«*: Versuch/Probe [Schummer 1994, S. 27].

[46] Pionier der organischen Chemie.

> *on the basis of particular experiences. An a priori truth might be immediately evident, stipulated by convention, or most common,* ***known by reason independently of any experience beyond pure thought.***
> [Tymoczko 1979, S. 77, eigene Hervorhebung]

Mathematik besteht seiner Ansicht nach ausschließlich aus apriori Wahrheiten. Daher ist es für ihn essentiell, dass man sich bei der Etablierung mathematischen Wissens durch Beweise zu keiner Zeit auf empirische Evidenz stützt. Stattdessen müssen alle Schritte auf »reinem Denken« beruhen. Da im Verlauf des Vierfarbenbeweises jedoch der Computer genutzt wird, ist es laut Tymoczko nicht möglich, den Vierfarbensatz apriori zu wissen. Stattdessen handelt es sich beim Vierfarbensatz um einen Satz, welcher nur aposteriori gewusst werden kann.

> *However, it is not plausible to maintain that the 4CT is known by reason alone.* [. . .] *The only route to the 4CT that we can ever take appears to lead through computer experiments. Thus* ***the 4CT is an a posteriori truth and not an a priori one; mathematicians, I suggest, will never know the 4CT by a priori means.***
> [Tymoczko 1979, S. 77, eigene Hervorhebung]

Der Vierfarbensatz kann laut Tymoczko [1979] nur a posteriori gewusst werden, da seine Glaubwürdigkeit auf dem Zusammenspiel mehrerer *»empirischer Faktoren«* beruht: *»The reliability of the 4CT* [. . .] *rests on the assessment of a complex set of empirical factors«* [S. 74]. Wie sich zeigt, identifiziert Tymoczko unter diesen empirischen Faktoren vor allem drei Ursachen, welche dafür verantwortlich gemacht werden können, dass der Vierfarbenbeweis »empirischer« ist, als es sich für einen »normalen« mathematischen Beweis geziehmt. Dies sind die Unüberschaubarkeit des Beweises, die Fehleranfälligkeit des Computers und die Bezugnahme auf die Autorität des Computers. Sie alle sorgen dafür, dass man sich im Verlauf der Beweisführung auf empirische Evidenz stützen muss. Darüberhinaus vergleicht Tymoczko die Nutzung des Computers mit einem Experiment, einer per se empirischen Methode, wie sie sonst nur in den Naturwissenschaften durchgeführt wird. Wie man jedoch bereits erahnen kann, hängen diese möglichen Ursachen für Empirie eng zusammen und sind teilweise miteinander verwoben. Eine trennscharfe Abgrenzung der einzelnen Punkte voneinander ist somit nicht immer möglich. Nichtsdestoweniger versuchen wir im Folgenden, ein ausführliches Bild der Kritik zu zeichnen.

Zum einen ist der Vierfarbenbeweis für Tymoczko unüberschaubar in dem Sinne, dass er sich nicht Schritt für Schritt überprüfen lässt, wie wir bereits in Abschnitt 3.2.2 gesehen haben. Das heißt, aufgrund der Unüberschaubarkeit kann nicht gewährleistet werden, dass es sich um eine korrekte apriori Deduktion handelt, sondern im Laufe der Beweiskette könnten auch Argumente auftauchen, die lediglich empirisch gerechtfertigt sind.

> [. . .] *the surveyability of a proof enables it to be comprehended by the pure power of the intellect– surveyed by the mind's eye as it were. Because of surveyability, mathematical theorems are credited by some philosophers with a kind of certainty unobtainable in the other sciences. Mathematical theorems are known*

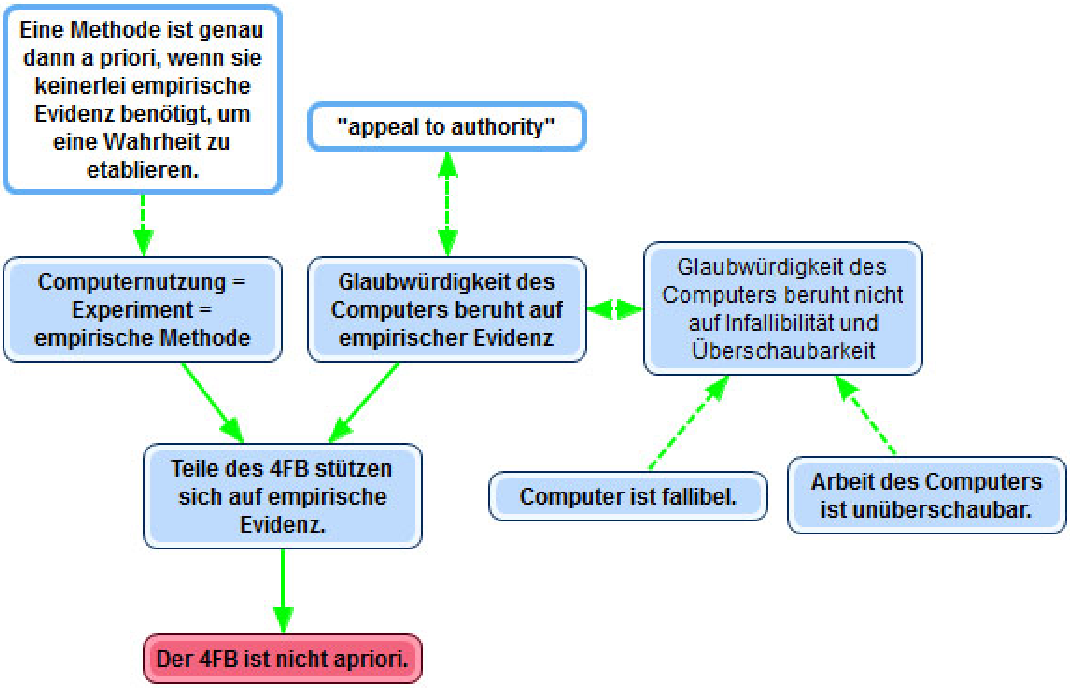

Abb. 3.14.: Tymoczko: Der Vierfarbenbeweis ist nicht apriori

apriori.
[Tymoczko 1979, S. 60]

Die Überschauberkeit eines Beweises trägt also entscheidend dazu bei, dass der bewiesene Satz apriori gewusst werden kann. Ist sie nicht gegeben, ist der durch den Beweis etablierte Satz womöglich a posteriori. Die im Verlauf des Vierfarbenbeweises auftretende Unüberschaubarkeit lässt sich so als eine Ursache für Empirie deuten.

Wie wir im Abschnitt 3.2.3 gesehen haben, glaubt Tymoczko, dass Computerbeweise aufgrund des Computereinsatzes fallibel sind. Dies führt er auf die Möglichkeit von Fehlern in der Soft- und der Hardware des Computers zurück, da diese das Ergebnis der vom Computer durchgeführten Rechenschritte verfälschen können. Dass der Computer im Beweis des Vierfarbensatzes genau das macht, was er soll, ist laut Tymoczko [1979] *»an empirical truth and not subject to traditional proof«* [S. 73f]. Nur empirische Evidenz in Form von mehreren Testläufen kann zeigen, dass das Programm fehlerfrei ist. Insofern lässt sich die Fehleranfälligkeit des Computers als eine weitere mögliche Ursache für Empirie ansehen.

Unüberschaubarkeit und Fehleranfälligkeit führen dazu, dass die Computernutzung im Verlauf des Vierfarbenbeweises kritisch hinterfragt werden muss. Eine Methode, welche dazu führt, dass sich ein Beweis nicht überschauen lässt und welche Fehlerfreiheit nicht garantieren kann, scheint unglaubwürdig. Gleichwohl verlässt man sich laut Tymoczko notgedrungen (da sich der 4FB nicht klassisch beweisen lässt) auf diese Methode und appelliert an die Autorität des Computers. Dieser *»appeal to computer«* ist notwendig, um den 4FS mathematisch zu rechtfertigen. Um die Art und Weise zu verdeutlichen, in der man sich auf die Autorität des Computers stützt und um zu zeigen, warum sich dies von dem Bezug auf Ergebnisse von Kollegen unterscheidet, erzählt Tymoczko eine Parabel von Marsmenschen, welche sich auf die Autorität »Simon« stützen (vgl. Kap. 3.2.1).

> *Simon proved many new results by more or less traditional methods, but after a while began justifiying new results with such phrases as ›Proof is too long to include it here, but I have verified it myself.‹*
> [...] *Oftentimes other Martian mathematicians could reconstruct Simon's results, in the sense of finding satisfactory proofs; but sometimes they could not. So great was the prestige of Simon, however, that the Martian mathematics accepted his results* [...]
> [Tymoczko 1979, S. 71]

Sagt Simon, dass er einen Satz bewiesen hat, so glaubt man ihm und fügt den bewiesenen Satz dem Korpus mathematischen Wissens hinzu. Die Methode *»Simon says«*, auf welche sich die Marsmenschen verlassen, ist genauso unüberschaubar wie der *»appeal to computer«*, da der Weg, auf dem sie jeweils zu ihrem Ergebnis kommen, nicht durch den (Mars-)Menschen einsehbar ist und daher nicht Schritt für Schritt überprüft werden kann. Anstelle von Überprüfbarkeit tritt Glaubwürdigkeit. Tymoczkos Fazit aus der *»Simon says«*-Parabel lautet:

> *The point of the Simon parable is this: that the logic of the appeals »Simon says« and »by computer« are remarkably similar. There is no great formal difference between these claims: computers are, in the context of mathematical proofs, another kind of authority.*

Simon und der Computer sind Autoritäten, man stützt sich auf sie, da man sie für glaubwürdig hält. Dafür, dass sie aber tatsächlich vertrauenswürdig sind, gibt es nur empirische Belege.

> *There is a very clear idea of what the computer is supposed to be doing* [...] *Moreover, there is a great deal of accumulated evidence for the reliability of computers in such operations, and the work of the original computer was checked by other computers. The reliability of the 4CT, however, is not of the same degree as that guaranteed by traditional proofs, for this reliability rests on the assessment of a complex set of empirical factors.*
> [Tymoczko 1979, S. 74]

Insofern führt das Stützen auf die Autorität Computer im Verlauf des Vierfarbenbeweises dazu, dass der Vierfarbensatz nicht apriori gewusst wird. In Tymoczkos Worten:

> [...] *what is presented in their published work, is like a mathematical proof where a key lemma is justified by an appeal to the results of certain computer runs or, as we might say »by computer«. This appeal to computer* [...] *helps establish the 4CT* [...] *on grounds that are in part empirical.*
> [Tymoczko 1979, S. 63]

Wie wir obigem Zitat entnehmen können, vergleicht Tymoczko die Nutzung des Computers im Zuge des Vierfarbenbeweises mit einem Experiment, wie es sonst in den Naturwissenschaften durchgeführt wird. Experimente gelten gemeinhin nicht als gültige Methode zur

Wissensetablierung in der Mathematik (vgl. Abschnitt 2.1.2). Wenn es sich bei der Nutzung des Computers im Verlauf des Vierfarbenbeweises um ein Experiment handelt, so ist dies eine neue Methode. Da es sich bei einem Experiment um eine empirische Methode handelt, kann dann auch das durch den Beweis etablierte Wissen nicht mehr apriori sein.

> [...] *such use of computers in mathematics, as in the 4CT, introduces empirical experiments into mathematics* [...] *we must admit that the current proof is no traditional proof, no a priori deduction of a statement from premises. It is a traditional proof with a lacuna, or gap, which is filled by the results of a well-thought-out experiment. This makes the 4CT the first mathematical proposition to be known a posteriori* [...]
> [Tymoczko 1979, S. 58]

Die »empirischen Faktoren«, die laut Tymoczko durch den Vierfarbenbeweis neu in die vormals nicht-empirische Mathematik eingeführt werden, lassen sich also in verschiedenen Aspekten wiederfinden. Einerseits entstehen sie durch die Unüberschaubarkeit, welche es ermöglicht, dass Schlußfolgerungen, die nicht apriori gültig sind, unentdeckt bleiben. Andererseits macht es die Fallibilität des Computers möglich, dass unentdeckte Fehler das Ergebnis verfälschen. Diese zwei Faktoren führen dazu, dass die Berufung auf die Autorität Computer nur aufgrund empirischer Evidenz glaubwürdig erscheint. Schließlich gleicht der Computereinsatz selbst einem Experiment, welches per se als empirische Methode gilt. Diese möglichen Ursachen für Empirie sind eng miteinander verwoben. Nichtsdestoweniger wollen wir uns nun der Reihe nach den möglichen Empirie-Quellen zuwenden und untersuchen, ob die Unüberschaubarkeit des Beweises, die Fallibilität des Computers oder der Bezug auf den Computer tatsächlich dafür sorgen, dass empirische Elemente in die Mathematik eingeführt werden.

3.2.4.3. Empirie durch Unüberschaubarkeit des Beweises

Eine mögliche Argumentation dafür, dass die Unüberschaubarkeit eines Beweises dafür sorgt, dass der bewiesene Satz nicht apriori gewusst werden kann, sieht wie folgt aus. Das Überschauen eines Beweises ist der notwendige erste Schritt, um ihn komplett nachvollziehen und verstehen zu können sowie um sicherzustellen, dass die einzelnen Schlüsse des Beweises gültig sind. Auf diese Art und Weise erhält man apriori Wissen über die Schlußfolgerung. Somit können Beweise, die nicht überschaubar sind, auch nicht apriori sein.

Ähnliche Zweifel, dass ein langer, unüberschaubarer Beweis noch apriori gewusst werden kann, äußert auch Kitcher[47]:

> *There are true standard mathematical statements S such that the shortest proof of S would require even the most talented human mathematicians to spend*

[47] Allerdings handelt es sich im Gegensatz für Tymoczko für ihn explizit nicht um ein Problem, welches ausschließlich bei Computerbeweisen auftaucht, sondern für ihn sind alle langen, unüberschaubaren Beweise betroffen und das Problem insofern kein neues: *»There are many theorems of traditional mathematics whose proofs are so long that they cannot lead us to a priori knowledge. Computer-assisted proofs are merely a new variation on an old theme«* [Kitcher 1984, S. 46].

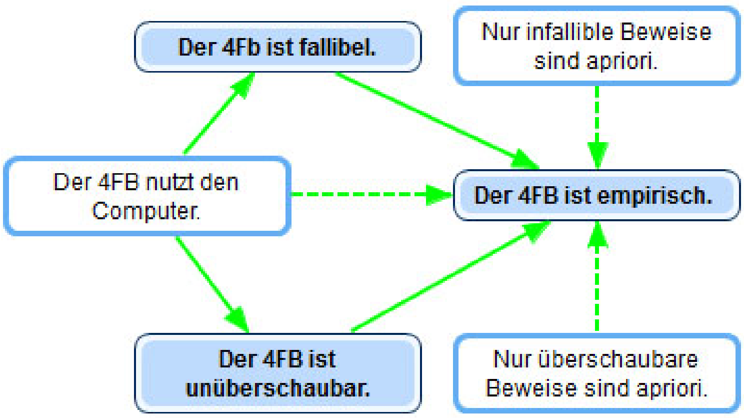

Abb. 3.15.: Tymoczko: Empirie durch Unübeschaubarkeit und Fallibilität

> *months in concentrated effort to follow it. Can we really suppose that S is knowable a priori?*
> [Kitcher 1984, S. 40]

An dieser Stelle verteidigen Aprioristen mit dem Argument, dass selbst sehr lange, unüberschaubare Beweise aufgrund ihres deduktiven Aufbaus doch immerhin prinzipiell überschaubar und ebenso prinzipiell apriori sind. Die empirische Wahrnehmung sei lediglich für das Aufstellen mathematischer Behauptungen kausal, aber sobald es um Begründung geht, nicht mehr vonnöten [Casullo 1988].

D.h. man unterscheidet zwischen der Berechtigung, die ein Beweis seiner Schlußfolgerung verleiht und dem Wissen um die Berechtigung. Ein Beweis ist somit genau dann (und nur dann) apriori, wenn die Schlußfolgerung deduktiv aus den Prämissen folgt, ohne empirische Begründung – unabhängig davon, ob der Mensch Apriori-Wissen von der Begründung selbst hat. Vgl. hierzu beispielsweise van Denover [2012]: *»we need not know a priori that the proof's warrant is a priori«* [S. 197]. Nicht alle akzeptieren jedoch, dass es ausreicht, wenn ein Satz »prinzipiell« apriori ist – sie haken konkret nach: Wie ist »prinzipiell« zu verstehen? So fragt beispielsweise Kripke [1972]: *»And possible for whom? For God? For the Martians? Or for people with minds like ours?«* [S. 34f]. Er schlägt vor, aufgrund dieser Unklarheit lieber zu untersuchen, ob sich der Glaube an etwas auf apriori Evidenz stützt, anstatt an dem Terminus »apriori Wahrheit« festzuhalten.

Auch Resnik [1997] fordert, statt über »prinzipielle« ideale Wesen und deren prinzipielles apriori Wissen nachzudenken, sollte man sich auf uns, die tatsächlichen Menschen konzentrieren, denen es nicht möglich ist, apriori Wissen von unüberschaubaren Beweisen zu besitzen. Sowohl Resnik als auch Kripke [1972] sehen Unüberschaubarkeit durchaus als Auslöser für Empirie.

Während viele Kritiken sich also um unterschiedliche begriffliche Ausdifferenzierungen des Begriffes »apriori« drehen, sehen Detlefsen & Luker [1980] grundsätzliche Probleme in der Argumentation von Tymoczko. Ihrer Meinung nach ergibt sich ein Widerspruch aus der Forderung, dass Beweise nur durch sich selbst überzeugen sollen. Gehört nämlich alles, was überzeugt, zum Beweis selbst hinzu, gehört auch das Überschauen hinzu[48]. Die Tätigkeit des Überschauens selbst ist ihrer Meinung nach empirischer Natur. Gehört das Überschauen also zum Beweis dazu, kommt der Beweis in Abhängigkeit von empirischer Evidenz. Gehört es nicht dazu, besteht der Beweis nicht aus allem, was von ihm überzeugt. Sie sagen: *»We think that Tymoczko's demand that proofs be free-standing units of reasoning that are independently convincing is incompatible with the spirit of his demand for surveyability«* [Detlefsen & Luker 1980, S. 817]. Insgesamt sind sie außerdem der Meinung, dass die Unüberschaubarkeit eines Beweises nichts damit zu tun hat, ob der zugehörige Satz apriori ist oder nicht[49].

> [...] *it seems to us that the question of »surveyability« of a proof is largely irrelevant to the question of whether it utilizes empirical considerations* [...] *it is not »unsurveyability« which is the crucial factor in determining the empirical character of the proof of the 4CT.*
> [Detlefsen & Luker 1980, S. 804]

Aus Unüberschaubarkeit folgt Empirie?

Knüpft man Empirie an Unüberschaubarkeit, hat man erneut das Problem der schwankenden Definition, wie es uns bereits in Abschnitt 3.2.2 bei der Knüpfung des Beweisbegriffes an die Eigenschaft der Überschaubarkeit begegnet ist. So wäre es beim Vierfarbenbeweis möglich, dass durch plötzliche Steigerung der menschlichen Lebenserwartung und geistigen Möglichkeiten ein Überblicken des gesamten Beweises auch für eine Person möglich wird. Dann müsste man den Beweis-Status entsprechend ändern und das aufgrund eines rein empirischen Faktes, der nichts mit dem Argument an sich zu tun hat.

Dies illustriert Swart, indem er zunächst Beweise, die wie der Vierfarbenbeweis auf der Überprüfung endlich vieler Fälle beruhen, in vier Kategorien einteilt.

> *(i) Those theorems in which the case testing can be done in our heads.*
> *(ii) Those theorems in which the case testing is impossible to carry out without the help of pencil and paper.*
> *(iii) Those theorems in which the testing can be carried out with immense effort by means of pencil and paper – requiring, say, several thousand man hours of effort.*
> *(iv) Those theorems which are entirely beyond the reach of hand calculation and for which the case testing* ***has*** *to be carried out by computer.*
> [Swart 1980, S. 699]

[48] Dies läuft erneut auf die Frage hinaus: Trennt man die Überprüfung eines Beweises vom Beweis selbst? Wenn ein Beweis nur dann ein Beweis ist, wenn er fehlerfrei und apriori ist, dann muss sichergestellt werden, dass er fehlerfrei und apriori ist. Lässt sich nicht entscheiden, ob die Eigenschaften gegeben sind, lässt sich auch nicht entscheiden, ob es sich um einen Beweis handelt oder nicht.

[49] Dies begründen sie u.a. damit, dass es ja auch andersherum nicht funktioniert – ein überschaubarer Beweis muss nicht zwingend apriori sein: *»the surveyability of a proof does not guarantee that it will not be based on empirical considerations* [...] *It does not seem possible to account for the supposed a priority and unusual certainty of mathematical theorems by appealing to the surveyability of their proofs«* [Detlefsen & Luker 1980, S. 815f].

Welcher der Kategorien lässt sich nun das Attribut »apriori« zuweisen? Und was passiert, wenn der zu einem Satz gehörige Beweis soweit vereinfacht werden kann, dass ein Satz von Kategorie (iv) in Kategorie (ii) umsortiert werden muss?

> *It seems rather farfetched to classify theorems as a priori or a posteriori on the basis of their present categorization. Are we to assume the 4CT, as of now, an a posteriori theorem but that it may in time become an a priori one? This is surely a most odd use of the term a priori.*
> [Swart 1980, S. 700]

Ein konkretes Beispiel für dieses grundsätzliche Problem, das die Verknüpfung von Empirie und Unüberschaubarkeit aufwirft, gibt McEvoy [2008] mit Kauffmans Neuformulierung des Robbins Beweises [Kauffman 2001]. Ursprünglich handelt es sich um einen relativ komplizierten computer-assistierten[50] Beweis, welcher von McCune [1997] in Boolescher Logik formuliert wurde. Kauffman übersetzte ihn in Peirce'sche Graphenlogik. In seiner Version ist der Beweis einfacher und kommt ohne Nutzung des Computers aus. Kauffman selbst sagt darüber: »[it] *makes a mathematical domain accessible to human beings that has heretofore been only accessible to computers*« [Kauffman 2001, S. 727]. In der ersten Notation ist der Beweis unüberschaubar und würde sich somit in Swart Kategorie (iii) oder (iv) befinden, in der zweiten ist er überschaubar und wäre daher in Kategorie (ii) einzuordnen. Handelt es sich nun bei der Robbins-Vermutung um Apriori-Wissen oder nicht? Wenn Überschaubarkeit die Vorraussetzung dafür ist, dann ist nur die zweite Version des Beweises ein apriori Beweis. Dies erscheint wenig plausibel, da sich am eigentlichen Beweis durch die unterschiedliche Darstellung inhaltlich nichts ändert. McEvoy schließt hieraus, dass Unüberschaubarkeit nicht zwingend für Empirie sorgt. Das, was einen Beweis apriori mache, seien nur die gültigen apriori Schlussregeln.

> *What the possibility of reformulation shows is that what makes a proof a priori is not the contingent fact that it can be surveyed and understood by beings like ourselves. Rather, what makes a proof a priori is the fact that the inferential relation obtaining between premises and conclusions are established using only a priori rules of inference. Thus, the unsurveyability of an unsurveyable CAP shows that we cannot have a priori knowledge of that proof expressed in that notation. It has no tendency whatsoever it show that the proof itself is not a priori.*
> [McEvoy 2008, S. 379]

Wir halten daher fest, dass Unüberschaubarkeit einem Beweis nicht grundsätzlich aposteriori macht. Möchte man entscheiden, ob ein unüberschaubarer Beweis apriori ist oder nicht, sieht man sich allerdings zwangsläufig mit empirischen Fragestellungen konfrontiert.

[50] Tatsächlich handelt es sich nicht nur um einen computer-assisitierten Beweis, sondern um einen Beweis, der von einem Computer entdeckt wurde. In das Programm EQP wurden Axiome und Gleichungen eingegeben, es fand einen Beweis, der ca. 8900 Schritte lang ist: einige der Schritte sind in [McCune 1997] dargestellt. Auch wenn der Beweis also ursprünglich von einem Computer geführt wurde, lässt er sich theoretisch in entsprechend vielen Seiten konventionell formulieren, bleibt dann aber aufgrund der schieren Länge unüberschaubar. Einen Versuch, den Beweis bzw. die Beweisstruktur übersichtlicher darzustellen (mit Hilfe des Programms Mathematica), findet man in [Fitelson & Wos 1998].

3.2.4.4. Empirie durch Fallibilität

Akzeptiert man, dass Unüberschaubarkeit nicht zwingend dazu führt, dass ein Beweis a posteriori ist, lässt sich dennoch einwenden, dass aufgrund fehlender Überschaubarkeit auch die Richtigkeit des Beweises nicht mehr gewährleistet werden kann. Die Möglichkeit unentdeckter Fehler in der Hard- oder Software des verwendeten Computers können dazu führen, dass die einzelnen Beweisschritte zwar apriori scheinen, in Wirklichkeit jedoch auf eine Fehlfunktion des Computers zurückzuführen sind.

Wie wir bereits gesehen haben, gilt Fehlerfreiheit auch deshalb als Merkmal eines traditionellen Beweises, da durch sie gesichert ist, dass die Deduktionskette nur aus gültigen apriori Schlüssen besteht. Über die Fehlerwahrscheinlichkeit kommt dann insofern das a posteriori ins Spiel, als dass man das Ergebnis der Beweiskette nicht mehr mit Sicherheit wissen kann, sondern es anhand von empirischer Evidenz auf seine Richtigkeit hin überprüfen muss. Kripke gibt das Beispiel eines Computers, der prüft, ob es sich bei einer gegebenen Zahl um eine Primzahl handelt:

> *No one has calculated or proved that the number is prime; but the machine has given the answer: this number is prime. We, then, if we believe that the number is prime, believe it on the basis of our knowledge of the laws of physics, the construction of the machine, and so on. We believe it (if anything is a posteriori at all) on the basis of a posteriori evidence.*
> [Kripke 1972, S.35]

Dafür, dass eben keine Fehler vorhanden sind, gibt es nur empirische Evidenz. Vergleiche hierzu Dive [2003], welcher ebenfalls durch den Computer ein neues Element der Fallibilität in der Mathematik sieht und daraus folgert: *»all mathematical knowledge is impacted by empirical belief«* [S. 194]. Insbesondere steigt mit der Unüberschaubarkeit die Wahrscheinlichkeit unentdeckter Fehler. Diese Verknüpfung von Unüberschaubarkeit und Fallibilität schildert Poser [1988]. Auf die Frage *»Ist ein durchaus finites Vorgehen, das kein Mensch im Laufe seines Lebens zum Ende bringen könnte und deshalb einem Rechner übertragen wird ein mathematischer Beweis?«* [S. 308] sieht er zwei Antwortmöglichkeiten:

Ja: Dann wird allerdings mathematisches Denken durch eine empirische Gegebenheit begrenzt, nämlich durch das faktische Vermögen, einen Beweis tatsächlich im einzelnen nachzuvollziehen.

Nein: Dann vertraut man allerdings auf ein Artefakt und lässt damit zu, dass empirische Einwände und mögliche Fehler den Beweis erschüttern.

Ähnlich wie in Bezug auf die Unüberschaubarkeit lässt sich auch beim Thema Fallibilität einwenden, dass das menschliche Unvermögen, zu erkennen, ob es sich um eine fehlerfreie Deduktion handelt, nichts daran ändert, dass ein Beweis prinzipiell apriori ist. So argumentiert McEvoy auch hier, dass der apriori Charakter eines Beweises sich ausschließlich daraus ergibt, dass eine apriori Deduktion vorliegt.

> *The objection fails, however; at best it points out a limitation in **our ability to tell** whether a proof is error-free, and is thus an **a priori** proof. If the CAP*

> *is in fact error free, and proceeds entirely by means of a priori steps, then it is an a priori proof – regardless of whether our epistemic limitations prevent us from discovering this.*
> [McEvoy 2008, S. 381, Hervorhebung wie im Original]

Die menschliche Fähigkeit, zu erkennen, ob eine Argumentation fehlerfrei ist, sei nicht maßgebend für den Charakter eines Beweises: *»Tymoczko, Detlefsen and Luker err in locating the probabilistic element in proof itself, rather than in our ability to recognize whether a given complex sequence is in fact a genuine proof«* [McEvoy 2011, S. 10].

3.2.4.5. Empirie durch Bezugnahme auf die Autorität des Computers

Die Bezugnahme auf den Computer bezeichnet Tymoczko als *»appeal to authority«*. Mit Hilfe seiner »Simon says«- Parabel versucht er aufzuzeigen, warum dieser Bezug auf die Autorität des Computers, so legitim er auch scheinen mag, entarten kann. Diese Analogie zwischen dem Orakel Simon und der Rolle des Computers im Beweis des Vierfarbensatzes wurde vielfach kritisiert. Levin [1981] glaubt, die Analogie hinke insofern, als dass der Computer ein menschengemachtes, nach Menschenlogik konstruiertes Werkzeug sei (vgl. Abschnitt 3.2.3.5):

> *The inner workings of computers are not a mystery to us, as are the workings of conscious beings like Simon or alien artifacts. Computers are designed, built and programmed by* ***us****, according to* ***our*** *mathematics.*
> [Levin 1981, S. 83, Hervorhebung wie im Original]

Wong [2007] führt in diesem Kontext bereits bekannte Argumente ins Feld: Prinzipiell könne von jedem Teil des Programms der Code ausgedruckt und per Hand geprüft werden. Die Arbeitsweise des Computers sei bekannt, auch Soft- und Hardware ließe sich bis ins letzte Detail prüfen. Damit sei die Verlässlichkeit des Computers deutlich höher als die eines Orakels/Simon, über dessen Arbeitsweise wir nichts wissen [Wong 2007].

Detlefsen & Luker [1980] weisen darauf hin, dass sich die Analogie auch auf Überprüfungen ausdehnen lässt, die per Hand durchgeführt werden.

> *If there is a notable resemblance between the logic of the appeals ›Simon says‹ and ›by computer‹, there is also a striking similarity between the logic of the appeals ›Simon says‹ and ›by first-hand survey‹* [...]
> *The reliability of first-hand survey is just as incapable of proof as the reliability of a given computer.*
> [Detlefsen & Luker 1980, S. 816]

Insofern werden im Zusammenhang mit der *»Simon says«*-Parabel keine grundsätzlich neuen Argumente mehr vorgebracht.

Das von Tymoczko mit der Parabel zu Ausdruck gebrachte Gefühl, einem Orakel gegenüberzustehen, dessen Wort man auf Gedeih und Verderb ausgeliefert ist, lässt sich jedoch auch in den folgenden Aussagen bekannter Mathematiker wiederfinden.

> *In the case of replication of a computer argument we cannot determine easily what hidden assumptions or errors lie in the shared bits of coding or hardware. At some point of the proof, a result is true because the computer ›said so‹.*
> [Auslander 2008, S. 70]

> [The 4CT] *has truly upset the mathematical community* [...] *philosophically, this was not satisfying, for it condemned us to put confidence in non-human authority, instead of being able to rely directly on our own insight.*
> [van Kerkhoeve 2006, S. 12]

Wie man diesen Aussagen auch entnehmen kann, geht es also beim *»appeal to computer«* vor allem auch um Vertrauen. Es scheint leichter, in traditionelle Beweise Vertrauen zu entwickeln als in Computerbeweise. Hierfür könnte man erneut die Unüberschaubarkeit verantwortlich machen. Dadurch, dass sich nicht jeder Schritt einzeln nachvollziehen lässt, ist es auch nicht möglich, langsam Vertrauen in den Beweis zu entwickeln.

> *They* [computer verifications] *cannot acquire credibility gradually, as a mathematical theorem does; one either believes them blindly, as a pure act of faith, or not at all.*
> [Millo et al. 1979, S. 275]

Insbesondere das »blinde Vertrauen«, also der fehlende Einblick in die Zusammenhänge, welche zu dem Ergebnis führen, scheint hier als unangenehm wahrgenommen zu werden[51].

Es gibt allerdings auch Gegenstimmen, die jegliches Unbehagen vermissen lassen und zum Ausdruck bringen, der Computer könne durchaus apriori Wissen etablieren.

So glaubt beispielsweise Burge, dass apriori[52] Wissen durch rationale Agenten als apriori Wissen weitergegeben kann. Da es sich beim Computer um eine rationale, glaubwürdige Quelle handelt, kann eine Schlussfolgerung, die von ihm präsentiert wird, auch als apriori Ergebnis akzeptiert werden. Er nennt dieses Prinzip *»Acceptance Principle«*.

> [...] *one can have a priori knowledge of a proposition one has received from another source, even though one cannot oneself provide a justification sufficient in itself to make one's belief knowledge. One relies on there being justificational resources in one's chain of sources.*
> [Burge 1998, S. 463]

Er sieht sich als Vertreter des Rationalismus und glaubt, man müsse sowohl anderen Menschen als auch dem Computer rationale Fähigkeiten zuschreiben. Um die Rationalität der anderen anzuerkennen, muss man sich zwar auf Sinneserfahrung stützen, diese spielen dann

[51] Hierin steckt bereits implizit ein weiterer Kritikpunkt, der am Vierfarbensatz geübt wurde. Der Vierfarbenbeweis liefert keinen Einblick in die Zusammenhänge, er ermöglicht kein Verständnis – man versteht nicht, warum der Satz wahr ist, sondern bekommt nur die schlichte Bestätigung, dass der Satz wahr ist. Diesem Aspekt werden wir uns später genauer widmen.

[52] Burges Definition von apriori: *»A warrant (either a justification or an entitlement), is apriori if neither sense experiences nor sense-perceptional beliefs are referred to or relied upon to contribute to the justificational force particular to that warrant. A person's knowledge is a priori if the knowledge is supported by an a priori warrant, that needs no further warrant for the knowledge to be knowledge»* [Burge 1998, S. 459].

allerdings für die Begründung des Wissens keine Rolle mehr *»perception only appears to be playing an enabling, not a justificatory role«*. Diese Unterscheidung in zwei Arten empirischer Evidenz, in die *»enabling role«*, welche es uns ermöglicht, zu Wissen zu gelangen und in die *»justificatory role«*, welche für die Begründung des Wissens essentiell ist, findet sich auch bei Wong [2009].

Auch Arkoudas & Bringsjord [2007] glauben, dass Wissen, welches mit Hilfe eines Computers gewonnen wurde, durchaus apriori ist. Sie sprechen von *»computational a priori knowledge«*; durch apriori gewusste Algorithmen gewonnenes Wissen sei wieder apriori. D.h. solange der Algorithmus, welcher den Computerschritten zugrunde liegt, apriori gewusst wird, wird ihrer Ansicht nach auch das Ergebnis apriori gewusst.

Vergleich der Computernutzung mit einem Experiment

Laut Tymoczko handelt es sich bei dem *»appeal to authority«* letztendlich um einen Bericht über ein erfolgreich durchgeführtes Experiment. Die Nutzung des Computers zur Führung des Beweises gleiche also einem Experiment. Experimente sind empirische Methoden, das durch sie etablierte Wissen ist empirisch.

Cerutti & Davis [1969] erwähnen bemerkenswerter Weise schon einige Jahre vor dem Erscheinen des Vierfarbenbeweises[53] Einwände, die man gegen den Einsatz eines Computers zum Beweisen haben kann[54] und vergleichen Computerbeweise mit Experimenten:

> *These considerations lead us to a position – which is rarely discussed in works on the philosophy of mathematics and which is very unpopular – that a mathematical proof has much in common with a physical experiment; that its validity is not absolute, but rests upon the same foundation of repeated experimentation.*
> [Cerutti & Davis 1969, S. 904]

Die Computernutzung lässt sich insofern als Experiment interpretieren, als dass sie zu gewissen Teilen auf physikalischen Gesetzen beruht und Fehlern zugänglich ist.

> [...] *we are at loss, it seems, to offer any difference in principle between computations and physical experiments. In both cases the results are determined ahead of time, not by us but by the nature of reality. In both cases it is possible to obtain erroneous results by blundering, and therefore, if the results are important, we only rely on them after they have been checked by others.*
> [Goodman 1988, S. 122]

[53] Tatsächlich handelt es sich bei dem von ihnen veröffentlichten Beweis des Satzes von Pappus um einen der ersten Computerbeweise. Für diesen gab es allerdings bereits vorher einen klassischen, analytischen Beweis. Vermutlich wird der Computerbeweis von Cerutti und Davis daher oftmals vergessen und stattdessen der Vierfarbenbeweis als erster Computerbeweis angesehen, da letzterer etwas bewies, was auf konventionellem Wege nicht zu beweisen war. Interessant ist aber, dass Cerutti & Davis einige Aspekte der Diskussion um den Vierfarbensatz damals in der Dokumentation ihres Computerbeweises »vorhersahen«.

[54] Sie stellen aber auch fest, dass diese Einwände ebenso für konventionelle Beweise gelten: *»Human processing is subject to such things as fatigue, limited knowledge or memory, and the psychological desire to fore a particular result to ›come out‹«* [Cerutti & Davis 1969, S. 903].

Insofern lasse sich laut Nickel [2010] allerdings auch die Überprüfung per Hand als Experiment bezeichnen: *»the checks and double checks of a proof can always be called ›experiments‹, independently on the question, whether it is a machine or a human mathematician who performs it«* [S. 288].

McEvoy hält den Vergleich für unzureichend, da man im Zusammenhang mit mathematischen Objekten weder von Ursache noch von Wirkung sprechen könne.

> *Whether mathematics is ultimately about abstract objects, ideal mental constructions, or fictional objects, mathematical objects neither are nor have causes and effects.*
> [McEvoy 2008, S. 386]

Außerdem sei die Art der Beobachtung eine andere. So sei bei naturwissenschaftlichen Experimenten die Beobachtung letztendlich die entscheidende Methode, mit Hilfe derer eine Hypothese verifiziert oder falsifiziert werden könne. Beim »Computerexperiment« lasse sich hingegen lediglich beobachten, was herauskommt, es ist keine Interpretation des Gesehenen mehr nötig:

> *That output is the computer's report that it has established a certain truth about mathematical reality. That is, it is a report on a* ***concluded investigation****. But this is not the primary role of observation in the physical sciences. There, observation is not merely observation of a report that a truth has or has not been established via some* ***other*** *method,* ***it is itself the method*** *of establishing truth or falsity.*
> [McEvoy 2008, S. 386]

3.2.4.6. Empirie bei konventionellen Beweisen

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, ob man auch bei konventionellen Beweisen von empirischen Elementen sprechen kann. Am Beispiel des Beweises für die Gauss'sche Summenformel wollen wir zunächst aufzeigen, dass auch ein so einfacher traditioneller Beweis mit Tymoczkos Argumenten als a posteriori bezeichnet werden könnte. Da wir in den vorherigen Abschnitten bereits festgestellt haben, dass auch traditionelle Beweise unüberschaubar und fallibel sein können, müssen diese auch emprisch sein – zumindest, wenn man Tymoczkos Argumentation folgt. Dies tun Detlefsen & Luker [1980]. Sie glauben, dass Beweise immer dann als empirisch zu bezeichen sind, wenn sie Berechnungen enthalten, wie wir im folgenden sehen werden.

Gauss-Beispiel

Als ein Beispiel für einen traditionellen, überschaubaren apriori Beweis zieht Tymoczko Gauss' Beweis der Gauss'schen Summenformel (für die Zahlen 1 bis 100) heran. Diese besagt:

$$1 + 2 + ... + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}.$$

Anschaulich zeigen lässt sie sich mittels Vorwärts-und Rückwärtssummation. Hierzu schreibt man alle Zahlen aufsteigend und absteigend untereinander und summiert sie spaltenweise auf. Bei jeder der Spalten ergibt sich als Summe $n + 1$. Summieren wir die Ergebnisse der einzelnen Spalten auf, erhalten wir $n \cdot (n + 1)$. Dieses Ergebnis teilt man nun noch durch 2, da man alle Zahlen doppelt aufgeschrieben hat. Für die ersten 100 Zahlen sieht die tabellarische Darstellung wie folgt aus:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \dots & 99 & 100 \\ 100 & 99 & \dots & 2 & 1 \\ \hline 101 & 101 & \dots & 101 & 101 \end{array}$$

Die Summe der Zahlen 1 bis 100 ergibt sich also zu $\frac{100^2+100}{2} = 5050$. Tymoczko präsentiert in seinem Paper genau diese Darstellung und sagt nun:

> *We have surveyed the proof in its entirety and become convinced.*
> [...] *The construction that we surveyed leaves no room for doubt.*
> [Tymoczko 1979, S. 59f]

Tatsächlich könnte man nun aber argumentieren, dass es sich hierbei strenggenommen noch nicht um einen Beweis handelt, lediglich um eine Veranschaulichung dafür, wie man zu der Hypothese kommt. Außerdem könnte man sagen, dass gewisse Teilschritte der Argumentation »verschwinden«, so werden nur die ersten und letzten Zahlen der Reihe explizit aufgeschrieben, die Zwischenschritte ergänzen wir in Gedanken. Natürlich könnte man bei diesem Beispiel die gesamte Zahlenfolge ausschreiben (solange man sich auf die Zahlen von 1 bis 100 beschränkt) und somit jeden Schritt nachvollziehen, Überschaubarkeit ist also gegeben. Auch wenn man sich nicht nur auf die Summe der ersten 100 Zahlen beschränkt, lässt sich ein relativ kurzer, formalisierbarer Beweis geben, welcher überschaubar ist (siehe Anhang B.3). Allerdings wäre es bei der anschaulichen Darstellung, die Tymoczko wählt, beispielsweise denkbar, dass die Summe der Zahlen in der fünften, nicht mehr ausgeschriebenen Spalte 102 beträgt – sicher kann man sich erst sein, wenn man dies überprüft hat. Auch wäre es denkbar, dass uns unsere Wahrnehmung oder unser Gedächtnis einen Streich spielt: Die tatsächlich errechneten Ergebnisse könnten anders von uns notiert worden sein, als ursprünglich vorgesehen. Oder – wenn sie korrekt notiert worden sind – könnten sie nochmals anders von uns wahrgenommen werden.

All diese Einwände erscheinen an diesem Beispiel zugegeben etwas lächerlich, aber sie zeigen, dass die sehr starken Argumente von Tymoczko bereits im Falle eines so einfachen traditionellen Beweises greifen würden. Unsere Wahrnehmung, unser Gedächtnis sowie Stift und Papier erscheinen uns aufgrund unserer Erfahrung (also aufgrund empirischer Evidenz) glaubwürdig. Im Verlauf unseres Leben haben wir schon viele Berechnungen ausgeführt und wissen daher um die Verlässlichkeit unseres Gedächtnisses, unseres Verstandes und unseres Wahrnehmungsapparates.

Nimmt man also Tymoczkos Definition von apriori an, kommt man zu dem Ergebnis, dass auch schon bei diesem einfachen, konventionellen Beweis empirische Überlegungen Teil des Beweises sind.

Aus diesem Grunde kommt unter anderem Swart [1980] zu dem Schluss, dass Tymoczko seinen Überlegungen die »falsche« Definition von apriori zugrundelegt. Er stellt zwei mögliche Definitionen von apriori vor:

> *(i) a truth that possesses universal and necessary validity; that is to say, a truth that is true in all possible worlds,* ***or***
> *(ii) a truth whose validity can be established without recourse to sense experience of the physical world.*
> [Swart 1980, S. 700]

Tymoczko unterstellt er die zweite Auslegung. Das Problem an Definition (ii) bestehe darin, dass viele apriori Wahrheiten auch durch Sinneserfahrungen verifiziert werden können, wie auch im Beispiel des Gauss-Beweises.

> [...] *there are many a priori truths that can be verified by recourse to our senses.* [...] *In this case* [Gauss' proof] *the use of actual pencil and paper and the use of sight to verify the truth in question is not essential, since it can be verified using the Gaussian approach in our heads, but* [...] *there are many mathematical truths that cannot be verified »in our heads« and can only be accessed by recourse to our physical senses*
> [Swart 1980, S. 698]

Damit wäre aber fast jeder mathematische Beweis nicht apriori.

Gemeinhin akzeptiert ist erstere Definition, wobei sich auch bei dieser die Frage stellt, welche Hilfsmittel dann gültig sind, um Kenntnis von der Wahrheit eines mathematischen Satzes zu erlangen.

> *If we accept the fact that mathematical theorems* ***are*** *a priori truths, then in terms of definition (i) they are certainly true* ***prior*** *to and* ***independently of*** *the uncovering of an actual proof by an actual human being – but it says nothing about the manner in which we uncover their truth, it is necessary to use pencil and paper or a calculator or even a computer, this can make no difference to the nature of their truth.*
> [Swart 1980, S. 701]

Swart schlägt stattdessen eine Modifikation der zweiten Definition wie folgt vor: *»(ii)' a truth whose validity can in principle be established without recourse to sense experience of the physical world«* [Swart 1980, S. 701][55].

Empirie durch Unüberschaubarkeit und Fallibilität bei konventionellen Beweisen

Wie wir in den Abschnitten 3.2.2.5 und 3.2.3.4 gesehen haben, argumentieren u.a. Levin [1981] und Swart [1980] dafür, dass traditionelle Beweise genauso unüberschaubar und fallibel sind wie Computerbeweise. Daher müssten sie auch genauso a posteriori sein, wenn

[55] In Abgrenzung dazu definiert er aposteriori folgendermaßen: *»An a posteriori truth is one whose truth is contingent upon the nature of the universe to which it applies and cannot in principle be known without carrying out at least some experiments«* [Swart 1980, S. 706]. Damit ist für ihn zumindest klar, dass der Vierfarbensatz also nicht aposteriori ist – allerdings zögert er ebenso, den Vierfarbensatz nach Definition (ii)' als apriori zu bezeichnen.

man Tymoczkos Argumentation folgt. Kitcher [1984] stimmt dem zu und sieht die Fallibilität des Menschens als Anstoss, um auch die Apriorität traditioneller Beweise in Frage zu stellen.

> *We know ourselves to be fallible. We know that our attention may lapse and we sometimes misstate what we previously proved. Hence we are* ***reasonably*** *concerned, as we arrive at the end of a long proof, that an error may have crept in.*
> [...] *it does indicate that our knowledge is not a priori.*
> [Kitcher 1984, S. 43, Hervorhebung wie im Original]

Auch Hersh [1997] spricht sich dafür aus, im Hinblick auf Tymoczkos Argumentation den apriori-Status traditioneller Beweise anzuzweifeln.

> *The operation of computers depends on properties of copper and silicon, on electrodynamics and quantum mechanics. Confidence in computers comes from confidence in physical facts and theories. These are not a priori.* [...But] *old-fashioned person-made proofs are also a posteriori. They also depend on credence in the world of experience, the material world* [...] *This demolishes the dream of a priori knowledge in mathematics, and in general.*
> [Hersh 1997, S. 157]

Chisholm definiert »apriori« so[56], dass es alle komplexen Beweise ausschließt.

> *What if S derives a proposition from a set of axioms, not by means of one or two simple steps, but as a result of a complex proof, involving a series of interrelated steps? If the proof is formally valid, then shouldn't we say that S knows the proposition a priori? I think that the answer is no.*
> [...] *Complex proofs or demonstrationsm as John Locke pointed out, have a certain limitation. They take time. The result is that the ›evidence lustre‹ of the early step may be lost by the time we reach the conclusion* [...] *if, in the course of a demonstration, we must rely upon memory at various stages, thus using as premises contingent propositions about what we happen to remember, then, although we might be said to have demonstrative knowledge of our conclusion,* [...] *we cannot be said to have an a priori demonstration of the conclusion.*
> [Chisholm 1989, S. 29f]

Dieser *»appeal to memory«*, also das Verlassen auf das eigene Gedächtnis wird von ihm ähnlich kritisch gesehen, wie der *»appeal to computer«* von Tymoczko.

Bezug auf Autoritäten bei konventionellen Beweisen

Nicht nur, dass man sich im Verlauf eines Beweises auf das eigene Gedächtnis verlässt, sondern natürlich verlässt man sich auch auf den eigenen Verstand als Ganzes. Wong [2007] spricht von einem *»appeal to brain«*, man appelliert also an die korrekte Funktionsweise des eigenen Verstandes und vergleicht diesen mit dem »appeal to computer«. Sein Vergleich

[56] Seine Definition lautet: *»h is known a priori by S* [...if] *there is an e such that (i) e is axiomatic for S, (ii) the proposition, e implies p, is axiomatic for S, and (iii) S accepts h«* [Chisholm 1989, S. 29].

ergibt keinen signifikanten Unterschied, daher sieht er die Mathematik durch keine der beiden Bezugnahmen von empirischen Einflüssen gefährdet.

> *I take it that to see the computer as an extension of memory, paper and pencil, and archives qua a means of checking it to see it precisely as a way to extend our capacity to survey proofs and deductions. If one accepts this account, one should be able to see that the ›essential dependance of experience‹ in the appeal to computers pertains* [...] *only to the enabling role played by experience, that is, to this role in enabling our access to the a priori warrant provided by the proof.*
> [Wong 2007, S. 19]

Wie Wong außerdem anmerkt, bezieht man sich im Verlauf einer mathematischen Arbeit außerdem häufig auf die archivierten Arbeiten anderer Mathematiker. Wong [2007] nennt diese Beweise daher *»archive assisted proofs«*. Ebenso wie Computerbeweise bauen sie auf geprüfte Autorität. Auch Levin [1981] merkt an, dass Mathematik als Ganzes auf verschiedenen Einzelbeiträgen baut (*»We base our belief in the whole* [...] *on the reliability of each member of the chain«* [S. 84]) und glaubt daher nicht, dass die Bezugnahme auf eine Autorität für Empirie sorgen kann[57].

Zwar ist eine Überprüfung aller verwendeten Ergebnisse möglich, wenn man die Ergebnisse anderer Arbeiten verwendet und wird auch gefordert, wie hier von Bonsall:

> *The scientific method for mathematics involves the publication of results in the axioms-theorem-proof form.*
> [...] *Pursued in this way, mathematics can remain permanently healthy, significant error being eliminated automatically. Everything in a publication must be based on the individual understanding of the author, nothing being accepted on authority.*
> [Bonsall 1982, S. 9]

Doch in der Realität wird kaum eines der archivierten Ergebnisse, auf die man sich im Verlauf eines Beweises stützt, im Detail nochmals nachgeprüft. Je bekannter und renommierter ein Mathematiker, um so sicherer scheinen seine Ergebnisse. Zusätzlich muss man daran glauben, dass diese archivierten Ergebnisse korrekt archiviert wurden und sich nicht während der Archivierung verändern. Dieser Glaube beruht ebenso auf entsprechender Erfahrung.

Empirie durch Berechnungen

Detlefsen & Luker [1980] stimmen Tymoczko zu; sie glauben ebenfalls, dass man sich im Verlauf eines Beweise auf empirische Überlegungen stützt. Dies treffe jedoch ebenso auch auf konventionelle Beweise zu.

[57] Diesen Einwand hat Tymoczko »vorhergesehen«. Er zeigt sich von diesem aber unbeeindruckt und besteht darauf, dass die archiv-assisitierten Beweise im Gegensatz zu Computerbeweisen letztendlich doch immer einen überschaubaren Rückhalt besitzen: *»But it is just this surveyable backing that is lacking in the 4CT«* [Tymoczko 1979, S. 70f].

> *We do not disagree with Tymoczko's claim that evidence of an empirical sort is utilized in the proof of the 4CT. What we find unacceptable is the claim that this is in any sense novel.*
> [Detlefsen & Luker 1980, S. 804]

Sie sind der Meinung, dass jeder Beweis, der Berechnungen enthält (ob per Computer oder per Mensch geführt[58]), zwangsläufig auch empirische Elemente enthält. Sowohl der Glaube daran, dass das Programm richtig ausgeführt wurde, als auch daran, dass das erhaltene Ergebnis tatsächlich erzielt wurde, werde durch empirische Evidenz dafür erzeugt.

Der Glaube in das Ergebnis einer Berechnung beruhe auf vier Annahmen:

> *(a) that the underlying algorithm to be used is mathematically sound;*
> *(b) that the particular program to be used is a correct implementation of this algorithm* [...]
> *(c) that the computing agent correctly executes the program;*
> *(d) that the reported result was actually obtained.*
> [Detlefsen & Luker 1980, S. 808]

Während (a) & (b) deduktiven Beweisen vorbehalten seien, stützten sich (c) & (d) auf empirische Überlegungen.

Im Beispiel des Gauss-Beweises (siehe oben) verlasse man sich auf (c),(d). Wenn man wie Tymoczko davon ausgeht, dass alles, was einen von einem Beweis überzeugt, auch Teil des Beweises ist, sei damit auch die Berechnung Teil des Beweises:

> [...] *in going from Gauss's ›observation‹ that the sum of each column is 101 to Gauss's ›conclusion‹ that the sum of the first 100 positive numbers is 5050, on typically enters into a considerable phase of calculation or computation. And, typically, this episode of calculation is what allows us to make the transition from the ›observation‹ to the ›conclusion‹* ***with confidence or conviction****.*
> [Detlefsen & Luker 1980, S. 810, Hervorhebung wie im Original]

Insofern seien auch empirische Überlegungen Teil des Gauss-Beweises.

> *But even for proofs as simple as that described above for the theorem of Gauss, if proof is made to be a unit of reasoning that requires nothing outside of itself to be convincing, then empirical considerations will have to be admitted as constituents of the proof.*
> [Detlefsen & Luker 1980, S. 812]

Da viele konventionelle Beweise Berechnungen enthalten, schließen sie mit dem Fazit, dass empirische Beweise weitverbreitet sind: *»empirical proof is a relatively widespread phenomenon«* [Detlefsen & Luker 1980, S. 809].

3.2.4.7. Umgang mit Empirie

Swart [1980] schlägt vor, eine neue Entität zwischen Beweis und Vermutung einzuführen. Die Bezeichnung *»agnogram«* könnte Wissen kennzeichnen, welches weder in die Kategorie

[58] Sie beziehen sich auf die wortwörtliche Bedeutung von »Computer«: »Berechner«. Ein »Berechner« in Form eines Agenten, welcher eine Berechnung durchführt, kann genausogut menschlich sein.

›apriori‹ noch ›aposteriori‹ einzuordnen sei, aber trotzdem eine große Glaubwürdigkeit besitze.

> [...] *meaning thereby theoremlike statements that we have verified as best we can but whose truth is not known with the kind of assurance we attach to theorems and about which we must thus remain, to some extent, agnostic.*
> [...] *It should thus be clear that agnograms are neither a priori truths nor a posteriori truths, but conjectures to which we can attach a high degree of credence.«*
> [Swart 1980, S. 705f]

Goodman glaubt, dass es keine unproblematischen apriori Wahrheiten gibt.

> *The results of mathematics are no more certain or everlasting than the results of any other science, even though, for sociological reasons, our histories of mathematics tend to disguise that fact.*
> [...] *There is no such thing as a non-trivial a priori truth, and mathematics is our richest and deepest science of nature.*
> [Goodman 1988, S. 125]

Dies müsse man akzeptieren und damit empirische Aspekte in der Mathematik anerkennen: *»We must recognize the strong empirical component in our mathematical knowledge«* [Goodman 1988, S. 119].

Diese Anerkennung von Empirie wird allerdings nicht von allen geteilt. Shanker behauptet, Appel und Haken hätten keinen Beweis geliefert. Überdies sieht er keinerlei Notwendigkeit, sich mit den Implikationen ihrer Arbeit auseinanderzusetzen:

> [T]*he Appel-Haken solution of the four-color problem is empirical rather than mathematical, and hence* [...] *it makes no sense to speak of Appel and Haken ›proving‹ the ›four-color-theorem‹, let alone of their solution forcing us to modify our understanding of the concepts of proof and theorem.*
> [Shanker 1987, S. 157]

Wie wir gesehen haben, sind die Reaktionen auf Tymoczkos These, Computerbeweise seien empirische Methoden, vielfältig. Einige halten mathematisches Wissen nach wie vor für apriori, andere drängen darauf, empirische Aspekte der Mathematik endlich anzuerkennen. Einige wenige sind der Meinung, dass Computerbeweise »empirischer« sind als andere, traditionelle Beweise.

3.2.4.8. Zusammenfassung Empirie

Tymoczko [1988] gibt in einer späteren Veröffentlichung an, dass ihn Computerbeweise erst auf empirische Aspekte der Mathematik gestoßen haben *»I was led to the empirical aspects of mathematics by reflecting on mathematicians acceptance of computer proofs«* [Tymoczko 1988, S. 202], auch wenn sie sicher nicht die ersten und einzigen Beweise sind, welche dafür sorgten: *»computer proofs are not the first instance of a posteriori or quasi-empirical methods in mathematics«* [S. 203].

Auch andere sehen es als seinen Verdienst an, die Diskussion über Empirie in der Mathematik angestossen zu haben. Dive [2003] glaubt, dass Fallibilität und Beruhen auf empirischer Evidenz keine neue Phänomene in der Mathematik sind. Ihr Vorhandensein sei lediglich durch Computerbeweise klar herausgestellt worden.

Denn auch wenn man festhalten kann, dass Computerbeweise nicht »apriorististischer« sind als normale Beweise [vgl. Nickel 2010], scheint Empirie im Zusammenhang mit langen, komplizierten und computergestützten Beweisen in der Mathematik durchaus eine Rolle zu spielen. Allein schon durch die zunehmende Bedeutung von Computer-Beispielen und -Experimenten, welche der »Plausibilisierung« von Ergebnissen dienen, gerät mathematisches Wissen zusehends in gewisse Abhängigkeit von Erfahrungswissen.

3.3. Weitergehende Funktionen und Eigenschaften eines Beweises

In den vorangehenden Abschnitten haben wir gesehen, dass es verschiedene Anforderungen an Beweise gibt. Zu diesen gehören Überschaubarkeit, Fehlerfreiheit und Apriorität. Diese Eigenschaften sind insofern wichtig, als dass sie, wenn sie erfüllt sind, dafür sorgen, dass ein Beweis seine Hauptfunktion erfüllen kann - die Validierung eines Satzes. All diese Eigenschaften kann man dem Vierfarbenbeweis kaum absprechen: Er ist überschaubar, fehlerfrei und apriori. Der Vierfarbenbeweis wird durch ihn validiert, so dass es sich bei diesem zweifelsohne um einen »richtigen« Beweis im Sinne des klassischen Beweiskonzeptes handelt.

Gleichwohl haben wir einiges an Unbehagen und Kritik gegenüber dem Beweis festgestellt. Wir vermuten, dass dies darauf zurückzuführen ist, dass der Beweis andere, nur implizit gestellte Forderungen nicht erfüllt. Die Hauptfunktion eines Beweises besteht zwar in der Etablierung mathematischen Wissens – aber darüberhinaus kann ein Beweis auch noch andere Funktionen haben. Einige mögliche weitere Funktionen wollen wir in diesem Kapitel untersuchen. Um sie erfüllen zu können, brauchen Beweise wiederum andere Eigenschaften, als die im traditionellen Beweiskonzept erwähnten.

Insbesondere wollen wir in diesem Zusammenhang die Beziehung von Schönheit und Mathematik im Hinblick auf mathematische Beweise untersuchen. Wir vermuten, dass ein Beweis, der bestimmte Eigenschaften aufweist und vielfältigen Funktionen gerecht wird, als schön angesehen wird. Diese ästhetische Bewertung von mathematischen Beweisen und Sätzen wollen wir einer genaueren Analyse unterziehen, indem wir die Kriterien für die Schönheit eines Beweises identifizieren und untersuchen, ob die Kriterien jeweils auf den Vierfarbenbeweis und die anderen in Anhang Teil A vorgestellten Beweise zutreffen.

Dass eine solche ästhetische Bewertung durchaus stattfindet, konnten wir bereits den vielfältigen Kommentaren zu den verschiedenen Sätzen entnehmen, die uns im Verlauf dieser Arbeit begegnet sind. Zur Beurteilung von Schönheit in der Mathematik werden verschiedene Aspekte herangezogen, wie unter anderem Larvor [2008] feststellt: *»Mathematicians judge mathematical work for depth, importance, interest, elegance etc«* [S. 393]. Das Thema Ästhetik in der Mathematik ist kein neues, der Begriff der Schönheit wurde schon von vielen Mathematikern mit Mathematik in Verbindung gebracht. Vielfach wurde Mathematik als Kunst beschrieben, es gibt Vergleiche zur Malerei[59] oder auch zur Musik [siehe bspsw. Dieudonné 2011]. Zu einer umfassenden Untersuchung der Beziehung zwischen Kunst und Mathematik siehe [Spies 2013].

Nicht nur bei der nachträglichen Bewertung von Mathematik spielt Schönheit eine Rolle. Sie kann auch bereits im Entstehungspozess ein Mittel darstellen, um die Glaubwürdigkeit von Hypothesen zu überprüfen. Schönheit dient als informelles Wahrheitskriterium. Es

[59] Wie in folgendem Zitat, in dem Hardy fordert, dass Mathematik schön sein muss: *»The mathematician's patterns, like the painter's or the poet's must be beautiful; the ideas like the colours of the words must fit together in a harmonious way. Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics«* [Hardy 1940, S. 85].

gibt eine gewisse Wechselwirkung – Wahrheit wird als schön wahrgenommen, Schönheit als wahr.

Da Beweise eine zentrale Rolle in der Mathematik spielen, verwundert es wenig, dass sie ein besonderes Ziel von Schönheitszuschreibungen und Ästhetikbetrachtungen sind. Stout [1999] sagt *»Proof in mathematics* [. . .] *is the canvas for part of the aesthetic of mathematics«* [S. 1]. Die Schönheit eines Beweises oder eines Satzes wird gern als Grund dafür herangezogen, diesen aus der von Tag zu Tag zunehmenden Masse mathematischer Veröffentlichungen zu selektieren. Es gibt diverse Sammlungen, die besonders »schöne« Beweise versammeln, zwei aktuelle Beispiele dafür sind *»Das BUCH der Beweise«* von Aigner & Ziegler [2014] und *»Bezaubernde Beweise«* von Alsina & Nelsen [2013][60]. Die Autoren des ersten Buches zeigten sich überrascht über die große, positive Resonanz auf ihre Veröffentlichung. Sie führten sie auf die Eleganz der darin enthaltenen Beweise zurück: *»Das BUCH hatte offenbar eine Saite zum Schwingen gebracht, die jedem mathematischen Instrument zu Eigen ist – mit Eleganz als gemeinsamer Grundstimmung«* [Aigner 2008, S. 12].

Insbesondere wenn es zu einem Satz mehrere Beweise gibt, findet in Mathematikerkreisen häufig intensiver Austausch darüber statt, welcher Beweis der »schönste« ist. Die Tatsache, dass es überhaupt mehrere Beweise für einen Satz gibt, ist auffällig. Nachdem ein Satz einmal bewiesen (oder widerlegt) wurde, könnte man es dabei belassen. Seine Wahrheit (oder Falschheit) ist für alle Zeiten etabliert. Stattdessen werden Sätze immer wieder neu auf unterschiedliche Arten bewiesen[61]. Gauss [1901] veröffentlichte im Laufe seines Lebens sechs verschiedene Beweise für das quadratische Reziprozitätsgesetz[62]. Heute gibt es mehr als 200 Beweise für diesen Satz [Lemmermeyer 2010]. Die Antwort auf die Frage *»Why do we reprove theorems?«*, die Rav in seinem Artikel stellte, gibt einen guten Anhaltspunkt für die nähere Untersuchung der Schönheit von Beweisen.

> *It is in proofs, qua methodological highways, rather than in theorems, so I maintained, that mathematicians look for mathematical knowledge: proofs – in deploying mathematical methods and strategies for solving problems and establishing connections among different areas of mathematics – are the main repository of mathematical knowledge, theorems being mainly tags for finding one's way within it. Proofs are the locus of mathematical ideas and display the interconnections among them, and this is why frequently mathematicians re-prove*

[60] Beide beziehen sich in der Einleitung auf den Mathematiker Paul Erdős, welcher der Überzeugung war, es gebe ein Buch, in dem Gott die schönsten Beweise mathematischer Sätze aufbewahren würde. Wenn er einen Beweis als schön empfand, dann sagte er über ihn: *»It's straight from the book«* [vgl. Hoffman 1987b, S. 66].

[61] Millo et al. [1979] gehen sogar so weit, dass die Wahrheit eines Satzes erst über die Zeit durch mehrere verschiedene Beweise etabliert wird, nicht durch eine einmalige Verifikation: *»After enough internalization, enough transformation, enough generalization, enough use, and enough connection, the mathematical community eventually decides that the central concepts in the original theorem, now perhaps greatly changed, have an ultimate stability. If the various proofs feel right and the results are examined from enough angles, then the truth of the theorem is eventually considered to be established. The theorem is thought to be true in the classical sense – that is, in the sense that could be demonstrated by formal, deductive logic, although for almost all theorems no such deduction ever took place or ever will«* [S. 274].

[62] Er nannte es »aureum theorema« (goldener Satz). In seinem Nachlass fanden sich darüber hinaus noch zwei weitere Beweise.

> *the same statement of a theorem by different methods.*
> [Rav 2007, S. 294]

Mit dem erneuten Beweisen eines Satzes finden Re-Evaluationen statt, wie Heintz [2000] sie nennt. Die Beweise werden einfacher, kürzer und klarer. Auch können die unterschiedlichen Beweise aus verschiedenen Gebieten der Mathematik kommen, verschiedene Beweismethoden nutzen und unterschiedliche Vorteile haben. Im eben erwähnten *»Buch der Beweise«* finden sich allein 6 verschiedene Beweise für die Unendlichkeit der Primzahlen. Über den sechsten Beweis von Paul Erdős sagen die Autoren Aigner & Ziegler [2014], er sei von *»makelloser Schönheit«*.

Doch was genau macht nun einen Beweis schön bzw. schöner als andere? Betrachten wir die Beschreibung von von Neumann [1976]:

> *One expects from a mathematical theorem or from a mathematical theory not only to describe and to classify in a simple and elegant way numerous and a priori special cases. One also expects ›elegance‹ in its ›architectural‹ structural makeup. Ease in stating the problem, great difficulty in getting hold of it and in all attempts at approaching it, then again some very surprising twist by which the approach becomes easy* [...]
> *Also, if the deductions are lengthy or complicated, there should be some simple general principle involved which ›explains‹ the complications and detours, reduces the apparent arbitrariness to a few simple guiding motivations, etc.*
> [von Neumann 1976, S.9]

Er spricht von Eleganz, ein Wort, das wir in diesem Zusammenhang nun schon öfter gehört haben. Neben Einfachheit der Aussage, Schwierigkeit des Problems und einer »überraschenden Wendung« sei vor allem wichtig, dass ein Beweis »erklärt« und auf einfache allgemeine Prinzipien zurückführe.

Aigner [2008], einer der Autoren des eben erwähnten Buches der Beweise spricht vom *»Dreiklang eines eleganten Beweises«* gebildet aus Transparenz, Stringenz und Leichtigkeit [S. 12]. Spies [2013] unterscheidet in Tragweite, Relevanz, Ökonomie und epistemische Transparenz. Müller-Hill & Spies [2011] kommen nach empirischer Untersuchung zu dem Ergebnis:

> *Ein schönes Theorem oder ein schöner Beweis, mit besonderem Blick auf die Kernideen und das einbettende mathematische Setting, zeichnet sich durch inhaltliche sowie strukturelle Ökonomie, die Tragweite der grundlegenden Ideen und Strukturen, eine mittelbare aufklärende Wirksamkeit sowie eine unmittelbare emotionale Wirksamkeit aus.*
> [Müller-Hill & Spies 2011, S. 279]

Stout [1999] nennt 5 Kriterien für schöne Beweise:

> *1. A beautiful proof should make the result it proves immediately apparent.*
> *2. It should explain (at least one aspect of) why the result not only* ***is*** *true but* ***should be*** *true.*

> *3. It should be economical, using no more than is necessary for the result.*
> *4. A beautiful proof often makes unexpected connections between seemingly disparate parts of mathematics.*
> *5. A proof which suggests further development in the subject will be more pleasing than one which closes off the subject.*
> [S. 10 Stout 1999, Hervorhebung wie im Original]

In folgendem Zitat finden wir die Begriffe Klarheit, Einfachheit, Länge, Kürze, Struktur, Kraft, Intelligenz und Überraschung als Eigenschaften, die zu einer postiven ästhetischen Wertung eines Beweises führen.

> *The path on which a mathematical argument leads from the givens to the result determines the aesthetic rating of the solution. Several properties of the path enter into play: Its level of prerequisite knowledge, its clarity, its simplicity, its length, its conciseness, its structure, its power, its cleverness, and whether it contains elements of surprise.*
> [Dreyfus & Eisenberg 1986, S. 3]

Zusammenfassend zielt der Wunsch, ein Beweis möge »schön« sein, immer auf gewisse Vorstellungen einer mathematischen Ästhetik. Wir haben verschiedene Aspekte gesehen, die dafür sorgen können, dass ein Beweis als elegant oder schön wahrgenommen wird. Neben Kürze und Einfachheit (Effizienz) zählen Verständnislieferung und Signifikanz bzw. Fruchtbarkeit dazu.

Unserer Ansicht nach lassen sich die Eigenschaften, die einen Beweis als schön erscheinen lassen, in fünf nicht unbedingt disjunkte Kategorien teilen:

1. **Erklärungskraft**: Der Beweis ist »klar« (evident, aufschlussreich, lehrreich).
2. **Ökonomie**: Der Beweis ist »rein« (einfach, kurz, effektiv).
3. **Relevanz**: Der Beweis ist »wichtig« (signifikant, potent).
4. **Fruchtbarkeit**: Der Beweise ist »tief« (kompatibel, weitreichend, anwendbar).
5. **Emotionale Wirksamkeit**: Der Beweis ist »überraschend« (subjektiv zugänglich, neuartig).

Erfüllt ein Beweis mehrere dieser Eigenschaften, so wird er vermutlich als »schön« wahrgenommen. Erfüllt er viele dieser Eigenschaften nicht, dann wird er – wie der Vierfarbenbeweis – hingegen als »unschön« wahrgenommen. All diese Anforderungen finden sich allerdings nicht im traditionellen Beweiskonzept wieder. Dies ist sicherlich ein Grund, warum das Unbehagen gegenüber dem Vierfarbenbeweis als diffus und nicht als rational begründet wahrgenommen wird – die Forderungen, die implizit an einen Beweis gestellt werden, bleiben unausgesprochen. Versucht man, sein Unbehagen nur auf Grundlage des traditionellen Konzeptes zu äußern, erscheint es nicht schlüssig.

Im Folgenden werden wir die einzelnen Eigenschaften der Reihe nach betrachten.

3.3.1. Erklärungskraft

Baker [2009] bezeichnet den Vierfabenbeweis als *»mathematical accident«*, dem es an Erklärungskraft (*»explanatory power«*) fehlt. Damit ist er nicht der Einzige; viel der am Vierfarbenbeweis geübten Kritik zielt auf diesen Punkt ab. Der Beweis produziere kein Verständnis, kein »Aha-Effekt« stelle sich ein, Zusammenhänge ließen sich nicht erkennen, er sei unbefriedigend und enttäusche daher [Davis & Hersh 1994, vgl. u.a.]. So sagt einer der im Rahmen der von Fisher [1973] veranstalteten Umfrage befragten Mathematiker:

> *I think the four-color problem is an example where solution wouldn't prove much. You would know the answer and nothing else.*
> [Fisher 1973, S. 1104].

Aigner [2008] glaubt, dies sei ein Problem, das alle Computerbeweise betreffe[63]:

> *Ein Computer-Beweis ist weder transparent noch von Leichtigkeit beseelt, aber vor allem lehrt er uns nichts. Er zerhackt das Problem in endlich viele Einzelfälle und schließt dann einen Fall nach dem anderen aus, kurz: Er erschlägt den Satz, statt ihn zu erklären.*
> [Aigner 2008, S. 12f]

Laut Lehning [1990] ist der entscheidende Vorteil eines analytischen Beweises, dass er mehr Verständnis produziere als ein Computerbeweis.

Thurston kommt zu dem Schluß, dass sich in der Diskussion um den Vierfarbensatz das Verlangen nach dem Verstehen eines Beweises widerspiegelt.

> *I interpret the controversy* [about the Four-Color-Theorem] *as having little to do with doubt people had as to the veracity of the theorem or the correctness of the proof. Rather, it reflected a continued desire for human understanding of a proof, in addition to knowledge that the theorem is true.*
> [Thurston 1995, S. 29]

Die ästhetische Wahrnehmung eines Beweises hat also einen konkreten Bezug zu seiner Erklärungskraft oder Explanativität. Ein Beweis ist dann besonders explanativ, wenn sich durch ihn tiefere mathematische Zusammenhänge und grundlegende mathematische Ideen offenbaren. Durch das Nachvollziehen des Beweises versteht man den mathematischen Kontext und die verwendeten mathematischen Objekte und Strukturen besser. Er ist insofern aufschlussreich, als er Aufschluss darüber gibt, **warum** die Aussage wahr ist und nicht nur dass sie wahr ist. Liefert der Beweis eine Erklärung für die Richtigkeit einer Aussage, wird der Beweis von Mathematikern als qualitativ hochwertiger empfunden [van Bendegem 1988, S. 252]. Das Resultat wird dann als schön empfunden.

[63] Halmos geht noch einen Schritt weiter, er glaubt, dass Computerlösungen allgemein kein Verständnis produzieren können. *»Maybe they* [mathematicians compared with computers] *weren't as efficient, but mathematics isn't in a hurry. Efficiency is meaningless. Understanding is what counts. So is the computer important to math? My answer is no«* [Halmos interviewt von Albers 1991, S. 19]. Dadurch, dass Computerunterstützung aber beispielsweise auch bei der Visualisierung eines mathematischen Sachverhalts helfen kann, scheint diese Sichtweise etwas eindimensional.

> *The mathematician's ›aesthetic buzz‹ comes not from simply contemplating a beautiful piece of mathematics, but additionally, from achieving insight.*
> [Borwein 2006, S. 25]

Mit Erklärungskraft ist also auch eine bestimmte Form von Evidenz gemeint. Nachdem ein Beweis nachvollzogen wurde, scheint die bewiesene Aussage nicht nur logisch korrekt deduziert, sondern evident.

> *Indeed every mathematician knows that a proof has not been ›understood‹ if one has done nothing more than verify step by step the correctness of the deductions of which it is composed and has not tried to gain a clear insight into the ideas which have led to the construction of this particular chain of deductions in preference to every other one.*
> [Bourbaki 1950, S. 223]

Das durch einen Beweis ermöglichte Verständnis des »Warums« führt letztendlich zu einem Gefühl der Unausweichlichkeit.

Bezüglich seiner fehlenden Erklärungskraft wurde auch der Vierfarbenbeweis kritisiert. Er konnte kein Verständnis für die Zusammenhänge, für das »Warum« liefern.

> *This act of understanding cannot be performed for me by anyone else, still less by a computer, and I have only one lifetime to work.*
> [. . .] *Thus to perform its health-giving function a proof must be understandable by a real live mathematician in a reasonable short time.*
> [Bonsall 1982, S. 10]

Diese Kritik »versteckte« sich, wie wir in vorangegangen Abschnitten gesehen haben, jedoch häufig hinter dem Vorwurf der Unüberschaubarkeit, welche wohl teilweise eher eine Art »Unverstehbarkeit« meinte. Dass diese Beweiseigenschaften eng miteinander verknüpft sind, verwundert wenig. Durch Beweise lernt man etwas über das jeweilige Teilgebiet – allerdings natürlich nur, wenn man den Beweis auch nachvollziehen, überschauen und verstehen kann. Unüberschaubare Beweise sind nicht explanativ.

> [. . .] *in mathematics our ultimate purpose is to prove our propositions. The aim of a mathematical argument is not merely to produce assent, but to compel it.* [. . .] *And a proof which is not completely perspicuous and compelling is not really a proof. When you have proved something you know not only that it is true, but why it must be true.*
> [Mayberry 1994, S. 16f]

Müller-Hill [2011] weist darauf hin, dass ein Perspektivwechsel (in Form der in der Einführung zu diesem Kapitel bereits erwähnten Re-Evaluationen und Refomulierungen eines Beweises) häufig deshalb vorgenommen wird, um mehr Verständnis zu erlangen: *»Beweise, die dem mathematischen Verständnis förderlich sein sollen, müssen so formuliert sein, dass spezifische Beweismethoden sichtbar, abstrahierbar und auf andere mathematische Fragestellungen übertragbar werden«* [S. 175]. Auch Moreno & Sriraman [2005] glauben, dass ein Beweis den Verständnislevel des Mathematikers reflektiert, entsprechend werfen verschiedene Beweise unterschiedliches Licht auf die dahinterstehende Idee.

Insbesondere in der mathematischen Ausbildung spielen Beweise eben deshalb eine große Rolle, weil sie Schülern einen tiefergehenden Einblick liefern, wie Hanna [1995] betont: *»the main function of proof in the classroom reflects one of its key functions in mathematics itself: The promotion of understanding«* [S. 42]. Ist ein Beweis explanativ, kann er seiner didaktischen Funktion besser nachkommen.

Aus den Reihen der Didaktik kommt auch vermehrt die Forderung auf, das durch einen Beweis geförderte Verständnis in den Mittelpunkt des Interesses zu stellen[64].

> [. . .] *through a closer examination of mathematical practice, I came to the further conclusion that even in the eyes of a practising mathematician rigorous proof, however it is defined, is secondary in importance to understanding. It became clear to me that a proof, valid as it might be in terms of formal derivation, actually becomes both convincing and legitimate to a mathematician only when it leads to real mathematical understanding.*
> [Hanna 1995, S. 42]

Kitcher [1981] teilt diese Ansicht. Er weist darauf hin, dass man allerdings klar zwischen dem Wunsch nach Erklärung und Verständnis einerseits und dem nach Rigorosität und Sicherheit andererseits unterscheiden müsse.

> *Demands for rigor are not simply identifiable with demands for explanation. To see this, we need only remark that there are cases in which we have a rigorous argument from known premises, but in which we do not understand why the conclusion is true. ›Brute force‹ computations provide one kind of case, and, perhaps, the four-color theorem is another. Failure of understanding is not ipso facto a sign of lack of rigor.*
> [. . .] *I therefore propose to view demands for rigorous proofs of known truth as signaling a particular kind of failure of understanding.*
> [Kitcher 1981, S. 474]

Auch wenn oftmals ein Wunsch mit dem anderen identifiziert worden wäre, so seien sie teilweise nicht miteinander vereinbar.

> *Their* [authors who accept deductivism] *demands for rigor* [. . .] *were often couched in terms of self-evidence and certainty, as well as in terms of explanation and understanding* [. . .] *Responding to genuine failures of understanding, they are led to misdiagnose the problem as a deficiency in the certainty (self-evidence, etc.) of their knowledge.*
> [Kitcher 1981, S. 479]

[64] In diesem Zusammenhang gibt es auch den Wunsch, sogenannte »picture proofs« anzuerkennen. Sieht man das Ziel mathematischer Analyse nicht in Wahrheit, sondern im Verständnis, ist ein Beweis per Bild deutlich »besser« als ein Induktionsbeweis (wenn er mehr Einsicht/ Verständnis in den Sachverhalt liefert): *»From the perspective of the broad goal of understanding, rather that the far narrow one of establishing truth, there is a clear advantage of a transparent explanatory proof* [. . .] *over a technical complex but less illuminating argument«* [Devlin 1996, S. 155].

Eine ähnliche Meinung findet sich bei [Aschbacher 2005]:

> *However in practice, mathematicians seem only to take this idealized notion of a proof as a model towards which to strive. The real standard would appear to be an argument which deals carefully with all fundamental difficulties, and which organizes and does due to the small details, so that there are few gaps or minor errors, and those that exist can be filled in or repaired without much difficulty by the reader. I suspect most mathematicians feel that, after some (high) minimal standard of rigor has been met, it is more important that the proof convey understanding than that all formal details appear without error.*
> [Aschbacher 2005, S. 2402]

Der Wunsch nach Explanativität ist groß, wird aber teilweise hinter anderen, klassischen Forderungen »versteckt«. Macht man dies explizit, wird klar, dass es sich bei einem Beweis keineswegs nur um ein schlichtes Validierungswerkzeug handelt. Vielmehr scheint ein Beweis noch einige andere Funktionen darüberhinaus zu erfüllen, bzw. idealerweise sollte er sie erfüllen – unter anderem hat er die Aufgabe, Erklärungen zu liefern und Verständnis zu produzieren. Folglich spielt er vor allem in der Lehre eine wichtige didaktische Rolle.

3.3.2. Ökonomie

In einer Umfrage von Wells [1990] war relative Einfachheit das am häufigsten assozierte Kriterium für schöne Mathematik. Ein Beweis sollte also möglichst kurz und möglichst einfach sein. Wie Seiden [2001] es formuliert: *»Certainly, an elegant proof is usually a short clever one, one that directly explains and exploits the structure of the problem at hand«* [S. 112]. Man beachte hier das »direkt«: Der Beweis macht keine Umwege, es wird nur das benutzt, was unbedingt notwendig ist. Dieses Freisein von Unnötigem wird auch oft als Reinheit bezeichnet.

Über den *»Klassiker der Mathematikästhetik«*[65], den im ersten Kapitel gezeigten Beweis der Irrationalität von Wurzel 2, sagt Hardy:

> *They are ›simple‹ theorems, simple both in idea and execution, but there is no doubt at all about their being theorems of the highest class. Each is as fresh and significant as when it was discovered – two thousand years have not written a wrinkle on either of them.*
> [Hardy 1940, S. 92]

Schattschneider [2006] nennt diese Eigenschaft Sparsamkeit, Spies [2013] nennt es Minimalität, King *»minimal completeness«*:

> *A mathematical notion N satisfies the principle of minimal completeness provided that N contains within itself all properties necessary to fulfil its mathematical mission, but N contains no extraneous properties.*
> [King 2006, S. 181]

[65] [Spies 2013].

Die Vokabel Einfachheit oder Schlichheit vermeiden sie. Dies geschieht vermutlich, um klar zu machen, dass ein Beweis eben nicht »einfach« sein soll (Komplexität wird natürlich geschätzt), sondern eben »möglichst einfach«. Wir wollen sie daher im Folgenden als Ökonomie bezeichnen.

Nicht nur, dass man immer eine möglichst einfache und kurze Lösung erhofft, man geht implizit auch oft davon aus, dass einfache Sätze auch einfache Beweise haben. Einsteins Dogma *»Gott würfelt nicht«* in die Mathematik übertragen, würde laut Spencer [1983] bedeuten:

(a) Kurze, interessante Statements sind entscheidbar[66].

(b) Kurze, interessante Sätze haben kurze Beweise.

Die erste Aussage (a) kann man durch Gödel als widerlegt ansehen[67]. Die zweite Aussage (b) wird durch den Vierfarbensatz und den Klassifikationssatz in Frage gestellt:

> *In both cases shorter proofs are being sought and may eventually be found. Or perhaps not. The possible falsity of (b) is only now seeping into our mathematical consciousness.*
> [Spencer 1983, S. 366]

Da die Aussage des Vierfarbensatzes sehr einfach erscheint, weckte sie entsprechende Hoffnungen auf eine einfache Lösung. Glaubt man an die Existenz einer einfacheren, prägnanteren Möglichkeit der Beweisführung, so wird man den Vierfarbenbeweis vermutlich nicht als schön empfinden.

Bei dem außerordentlich langen Klassifikationsbeweis glaubt man immerhin, dass eine weitere Vereinfachung nicht mehr möglich ist.

> [...] *the classification of the finite simple groups is no mere brute force verification. The arguments leading to the complete list, long and inaccessible as they are, have the merit of ›explaining‹ in a conceptually satisfactory way the reason why the only existing finite simple groups are what they are. The overall argument is convincing, even if impossible to follow, and it is conceivable that no further simplification might be forthcoming.*
> [Rota 1997, S. 194]

Auch bei Fermats letztem Satz hatte man stets die Hoffnung, einen sehr kurzen Beweis zu finden. Fermat behauptete in einer Randnotiz, einen Beweis gefunden zu haben, der leider nicht ganz auf besagten Seitenrand passe [Singh 1997]. Die anfängliche Enttäuschung darüber, dass Wiles »nur« einen sehr langen Beweis vorlegen konnte, wurde durch seine außerordentliche Fruchtbarkeit kompensiert. Hierauf gehen wir später gesondert ein.

[66] Nicht nur bei Beweisen wird Kürze und Einfachheit als schön wahrgenommen. Dies gilt auch für Sätze. Sind sie kurz und einfach, erscheinen sie interessanter und es wird eher versucht, sie zu beweisen: *»Simple, attractive theorems are the ones most likely to be heard, read, internalized and used. Mathematicians use simplicity as the first test for a proof«* [Millo et al. 1979, S. 278].

[67] Gödels erster Unvollständigkeitssatz zeigt, dass jedes konsistente formale System, welches genug Aussagen über natürliche Zahlen enthält, unvollständig ist. Es gibt wahre Aussagen, die sich in seiner Sprache ausdrücken lassen, die aber nicht beweisbar sind. Damit wird der Mathematik eine prinzipielle Grenze aufgezeigt. Nicht alle mathematischen Sätze können aus den Axiomen eines Teilsystems bewiesen (formal deduktiv hergeleitet) oder widerlegt werden.

3.3.3. Relevanz

Eine weitere interessante Eigenschaft, die schönen Beweisen zugesprochen wird, haben wir in der Diskussion um den Vierfarbensatz ebenfalls bereits gestreift. Beweise können sich als relevant für die Mathematik erweisen. In der Diskussion tauchte dies insofern auf, als dem Vierfarbenbeweis diese Eigenschaft abgesprochen wurde. Der Vierfarbenbeweis beweist eine an sich nicht sonderlich interessante Aussage, da sich aus ihr selbst keine weiteren signifikanten Aussagen herleiten lassen. Innerhalb seines mathematischen Teilgebietes lässt er sich als relativ unbedeutend bezeichnen.

Hat ein Beweis hingegen in seinem Teilgebiet eine Schlüsselrolle inne, wie beispielsweise der Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ aus Abschnitt 2.1.1.2, wird er entsprechend gewürdigt.

> [The irrationalty of $\sqrt{2}$] *is a deep result of great generality, in that it opens up a whole new region of mathematics, namely the real numbers, and eventually the calculus and classical analysis.*
> [Gardiner 1983, S. 80]

Ohne diesen Beweis gebe es einen ganzen Teilbereich der Mathematik, die reellen Zahlen und die zugehörige Analysis, nicht. Hardy bezeichnet einen solchen Beweis als *»serious«*.

> *Thus a serious mathematical theorem, a theorem which connects significant ideas, is likely to lead to important advances in mathematics itself and even in other sciences.*
> [Hardy 1940, S. 89]

Ein Beweis ist also »ernstzunehmen« bzw. relevant, falls er eine wichtige/fundamentale Aussage eines spezifischen Teilgebietes validiert[68]. Bei der Beurteilung dessen, ob ein Beweis als schön gilt, besitzt das mathematische Umfeld des Beweises Einfluss. Diese Idee findet sich ebenfalls im Rahmen der bereits erwähnten Umfrage im Journal *»The Mathematical Intelligencer«* durch Wells wieder. Thema der Umfrage war die Schönheit von Beweisen; Wells bot einige ausgewählte Beweise zur Bewertung an. In ihren Antworten brachten die Teilnehmer oft auch den Kontext der durch die Beweise belegten Sätze als Argumente ein, um ihre Entscheidung zu begründen [Wells 1990]. Müller-Hill & Spies [2011] stimmen zu, sie glauben ebenfalls, dass Beweisidee und Einbettung des Beweises in den mathematischen Kontext bei der ästhetischen Bewertung eine große Rolle spielen.

Als weiteres Beispiel lässt sich erneut der Klassifikationssatz heranziehen (siehe Anhang A.1); er stellt eine für das Teilgebiet enorm wichtige Aussage dar. Auch wenn der Beweis diversen konventionellen Forderungen nicht nachkommen kann (er ist nicht kurz, nicht elegant, nicht einfach, nicht fehlerfrei und er nutzt zur Beweisführung keine innovativen oder fachübergreifenden Methodiken), so ist er immerhin nützlich, da der Klassifikationssatz viele Anwendungen z.B. in der endlichen Gruppentheorie und in anderen Zweigen der Mathematik hat. Dies betont unter anderem Aschbacher [2005]. Seiner Meinung nach wurde der Beweis deshalb über so lange Zeit entsprechend verfolgt und soviele Mathematiker

[68] Meistens ist eine Aussage dann fundamental, wenn sich weitere Aussagen auf sie stützen; d.h. andere Beweise sich mit ihrer Hilfe herleiten lassen.

beteiligten sich an ihm. Prinzipiell könnte man auch die Nützlichkeit über die Mathematik hinaus betrachten, also die Anwendbarkeit in anderen Gebieten. Natürlich könnte ein Beweis auch insofern relevant sein, als sich durch ihn Anwendungen außerhalb der Mathematik ergeben. Hierfür Beispiele aus der Historie zu finden, fällt allerdings schwer.

Zu der Wahrnehmung eines Beweises als relevant kann außerdem noch eine historische Komponente beitragen. Ist die grundsätzliche Aussage schon lange Zeit unbewiesen, erscheint der Beweis oft noch relevanter, da er vielen Lösungsversuchen widerstanden hat. Existieren andere Sätze oder Beweise, die ausschließlich Lücken enthalten, die mit dem Beweis der grundsätzlichen Aussage geschlossen werden können, sind mit dem Beweis eines fundamentalen Resultats gleichsam viele weitere Aussagen bewiesen[69].

3.3.4. Fruchtbarkeit

In seiner Arbeit *»Über die Schönheit von Problemlösungen«* schreibt der deutsche Mathematiker Frey[70]:

> *Tatsächlich aber unterscheiden sich mathematische Aussagen und Schlüsse für Mathematiker ganz gewaltig: Sie haben (oder haben nicht) Eleganz und Tiefe, das heißt, sie haben Verflechtungen mit anderen Aussagen. Sie geben (oder geben nicht) strukturelle Einsichten, das heißt, sie gewähren Ausblicke auf weite erforschte oder unerforschte Gebiete.*
> [. . .] *Pathetisch könnte man sagen: Man ringt um Form und Inhalt. Probleme und Theorien, die diesen stetigen kreativen Prozess fördern, sind ›schön‹ und ›tief‹. Dabei ist ›tief‹ nicht mit kompliziert zu verwechseln; je einfacher ein Beweis wird, desto besser hat man den Sinn des Satzes verstanden.*
> [Frey 1997, S. 79]

In dieser Beschreibung finden wir einige bisher erwähnte Aspekte wieder, wie die Verständnislieferung und die Einfachheit. Darüberhinaus spricht er von der Tiefe eines Beweises, charakterisiert durch die Fähigkeit, einen stetigen kreativen Prozess zu fördern, sowie Ausblicke auf andere Gebiete zu gewähren. Wir wollen diese Eigenschaft eines Beweises, Querverbindungen zwischen verschiedenen Teilgebieten herzustellen, als Fruchtbarkeit bezeichnen. Sie wird an einigen Stellen als Zeichen von Schönheit eines Beweises herausgestrichen.

> *A beautiful proof often makes unexpected connections between seemingly disparate parts of mathematics. A proof which suggests further development in the subject will be more pleasing than one which closes off the subject.*
> [Stout 1999, S. 10]

Diese Eigenschaft der Fruchtbarkeit wurde dem Vierfarbenbeweis und anderen Computerbeweisen eher abgesprochen. So sagt beispielsweise Kanamori [2010] über Hales' Beweis

[69] Ein Beispiel hierfür ist die Riemannsche Vermutung, auf die wir in Abschnitt 5.1.3 genauer eingehen.
[70] Bekannt wurde Frey durch die 1986 aufgestellte Vermutung, dass ein Gegenbeispiel für den großen Fermatschen Satz eine elliptische Kurve liefern würde, die der Taniyama-Shimura-Vermutung widerspräche [Frey 1986]. Damit leistete er einen wichtigen Beitrag zum Beweis des Fermat'schen Satzes, für den er mehrfach ausgezeichnet wurde.

der Keplerschen Vermutung (siehe Anhang A.3): *»it is one without potentiality, even more than the solutions to the Four Color Conjecture, and this perhaps is its most telling feature for epistemology: Nothing larger is learned from the argument, and it does not open up new possibilities for mathematics«* [S. 10].

Stattdessen wird oftmals der Beweis von Fermats letztem Satz (siehe Anhang Abschnitt A) als Beispiel für einen besonders tiefen, fruchtbaren Beweis herangezogen.

> *Every mathematician knows that the computer verification of the four color conjecture is of considerably lesser value than Wiles' proof, because it fails to open up any significant mathematical possibilities.*
> [Rota 1997, S. 191]

In beiden vorangehenden Zitaten finden wir den Wunsch nach der Eröffnung neuer mathematischer Möglichkeiten durch einen Beweis. Diesen Wunsch erfüllt der Beweis von Wiles insofern, als er Methoden aus unterschiedlichen Fachbereichen benutzt und neu kombiniert sowie Querverbindungen zwischen diesen Teilgebieten herstellt (und damit einen Ausblick auf mögliche weitere Beweise und Sätze gibt).

> *Proofs often contain ›subresults‹, as well as explicit or implicit lemmas, which are of interest in themselves.*
> [...] *Moreover, often a proof yields more than is explicitly stated, and it may point the way to new theorems.*
> [Auslander 2008, S. 62]

Wiles selbst empfand den Beweis eben aus diesem Grund als schön, wie er in einem Interview [Nova 2000] herausstellte: *»The definition of a good mathematical problem is the mathematics it generates rather than the problem itself«*.

Dass ein Beweis neue Mathematik generieren kann, liegt neben der Schaffung unerwarteter Querverbindungen auch an der Universalität der verwendeten Methoden. Lassen sich die Methoden eines Beweises auch in anderem Kontext anwenden, so ist er heuristisch wertvoll und in diesem Sinne fruchtbar für weitere mathematische Forschung. Dies betont auch Bressoud [1999]: *»The value of a proof* [...] *should be judged, not by* [...] *its explanatory power, but by the extent to which it enlarges our toolbox«* [S. 190].

Auch Frey [1997] betont in seiner Betrachtung schöner Beweise die Wichtigkeit der Methoden in den Arbeiten von Faltings[71] und Wiles: *»Die Methoden die zu ihrer Beantwortung entwickelt wurden, sind wichtiger als die Fragen und vermitteln* ***strukturelle Einsichten***, [Frey 1997, S. 79, Hervorhebung wie im Original].

King definiert in diesem Zusammenhang eine Beweiseigenschaft namens *»maximal applicability«*:

> *A mathematical notion N satisfies the principle of maximal applicability provided that N contains properties which are widely applicable to mathematical*

[71] Gerd Faltings ist ein deutscher Mathematiker, der die sogenannte Mordell-Vermutung bewiesen hat. 1986 bekam er dafür die Fields-Medaille, die wichtigste mathematische Auszeichnung weltweit neben dem Abel Preis.

> *notion other than N.*
> [King 2006, S. 181]

Fruchtbar ist ein Beweis also dann, wenn er einerseits Verbindungen zwischen Teilgebieten schafft und andererseits eine Heuristik bietet, die in anderen Teilgebieten Anwendung findet. Diese Unterteilung in *»connections«* und *»paradigms«* findet sich auch bei Schattschneider [2006].

Die Fruchtbarkeit eines Beweises lässt sich insofern nicht abschließend beurteilen, da Querverbindungen und weitere Anwendung verwendeter Methoden nicht immer offensichtlich sein müssen, sondern sich beispielsweise erst im Laufe der Zeit herausstellen können. Weitet man das Verständnis von Fruchtbarkeit bezüglich der verwendeten Methode etwas aus, kann man den Vierfarbenbeweis insofern als fruchtbar ansehen, als er eine neue Methode »salonfähig« gemacht hat, nämlich die der Computernutzung. Zum Zeitpunkt der Veröffentlichung wurde dies zwar nicht anerkannt, aber möglich ist, dass über die Zeit zunehmende Akzeptanz der Methode »Computerbeweis« dazu führt, dass auch der Vierfarbenbeweis als fruchtbarer und damit schöner wahrgenommen wird. Dass eine solche »ästhetische Induktion« stattfindet, glaubt Mc Allister:

> *On the basis of the reception of computer-assisted proofs, I conjecture that the evolution of aesthetic criteria applied to mathematical proof is also governed by the aesthetic induction. This suggests that mathematicians' aesthetic preferences evolve in response to the perceived practical utility of mathematical constructs* [...]
> [McAllister 2005, S. 29]

Dafür spricht, dass der Vierfarbenbeweis bei der bereits erwähnten Umfrage von Wells [1990] nach den schönsten Beweisen auf dem neunten Platz landete (zwei Plätze hinter dem Beweis der Irrationalität von Wurzel 2). Frey zeigte sich zwar vom Vierfarbenbeweis enttäuscht, räumt aber ein, dass er immerhin *»methodisch und historisch interessant«* sei [Frey 1997, S. 79].

3.3.5. Emotionale Wirksamkeit

Diese Eigenschaft ist die wohl subjektivste von allen hier vorgestellten. Burton & Sinclair [2004] stellten in ihrer Interviewstudie fest, dass viele Mathematiker bei Fragen zur Ästhetik emotional reagieren und über die Gefühle berichten, die sie bei der Rezeption bestimmter mathematischer Werke hatten [S. 63f]. Vergleiche an dieser Stelle auch folgende emotionale Schilderung mathematischer Arbeit von Hasse:

> *Ich habe vielmehr genauestens in mir selbst nach den seelischen Erlebnissen gesucht, die mir die Beschäftigung mit der Mathematik gebracht hat; und da habe ich neben dem Erlebnis der Begeisterung für die objektive, ewige Wahrheit und dem Erlebnis der Freude an der kristallklaren oder berauschenden Schönheit noch ein Drittes gefunden, nämlich das Erlebnis des Vollgefühls der eigenen Kraft, wenn es mir gelungen war, eine allgemeine Methode zu schaffen, nach der man ein offenes Problem lösen und alle weiteren in Zukunft etwa*

> *auftauchenden speziellen Fragen über den behandelten Gegenstand beantworten kann.*
> [Hasse 1959, S. 20]

Schönheitsempfinden hat immer eine starke subjektive Komponente. Ein Beweis kann von verschiedenen Lesern unterschiedlich aufgenommen werden. Er kann den einen überraschen oder dem anderen neuartige Verbindungen offenlegen, da jedoch jeder andere Voraussetzungen mitbringt, erlebt nicht jeder Leser beim Studium eines Beweises die gleichen »Aha«-Erlebnisse. Passieren im Verlauf eines Beweises Dinge, mit denen der Leser nicht gerechnet hat, kann er diesen Beweis als schöner empfinden.

> *Die ›neue unerwartete Anwendung‹ einer bekannten Heuristik sorgt demnach dafür, diese subjektiv schöner zu bewerten obgleich sich an dem Gegenstand – der Beweismethode an sich – nichts geändert hat, sie in einem objektiven Sinne also auch nicht schöner geworden sein kann.*
> [. . .] *Dies gilt sowohl auf der Ebene der Vorkenntnisse als auch neuer Erfahrungen, die eine bekannte Methode ›in einem anderen Licht‹ erscheinen lassen.*
> [Spies 2013, S. 32]

Oftmals wird ein Beweis als schöner empfunden, wenn er eine »unerwartete Wendung« bereithält und ein Rezipient von ihm überrascht wird [siehe bspw. Weth 2007]. Auf die Frage, wann ein Beweis seiner Meinung nach schön ist, antwortet Chaitin [2000]:

> [. . .] *if it is surprising – It has to be surprising because it is not interesting if you already know it, there has to be a surprise, but it has to then seem inevitable. After the initial surprise it has to seem inevitable. You have to say, of course, how come I didn't see this!*
> [Chaitin 2000, S. 61]

An dieser Stelle begegnet uns eine Emotion wieder, von der oft im Zusammenhang mit schöner Mathematik die Rede ist – das Gefühl von Unausweichlichkeit. Wir haben sie bereits im Zusammenhang mit der Explanativität eines Beweises (Abschnitt 3.3.1) gestreift. Dieses Gefühl stellt sich insbesondere auch am Ende des mathematischen Schaffens- und Entdeckungsprozesses ein, wenn man die Lösung für ein lang gesuchtes mathematisches Problem findet. Überhaupt spielen Emotionen eine große Rolle im mathematischen Entdeckungsprozess.

> *In research there's a moment of ecstasy, of euphoria. Most of the time doing research is really very unpleasant, you're struggling and everything is ugly, nothing works, the ideas smash into each other, and you feel that you're getting nowhere, that you're wasting your life. But then all of a sudden you see the light, you discover the right way to think about the problem, and everything falls into place. It's like the time when I was going up a mile-high mountain in northern New York State, near Canada. My friends and I were in the rain inside a cloud, covered with mud, unable to see anything. And all of a sudden we made summit, the summit was just above the cloud layer, in blinding sunshine, and*

> *beneath the bright blue sky in the distance we could see the other peaks poking through a perfect white plane of clouds! That's just what it feels like when you've been struggling with your lack of understanding, and all of a sudden you discover the correct approach, and you get the exhilarating sensation that your mind is sharper and that you can see farther than you've ever done before. It's a wonderful moment, it's the payoff, it's how God rewards you for all that suffering... if you're very lucky.*
> [Chaitin 2000, S. 111f]

Dies trifft umso mehr zu, wenn man Schönheit bereits im Vorhinein als Kriterium für Wahrheit ansieht – die Lösung die man findet, findet man eben deshalb, weil sie sich harmonisch einfügt.

> *In der Mathematik ist diese Idee* [der prästabilisierten Harmonie] *in sehr vielen Fällen der Führer zur Wahrheit. Man hat ein ungelöstes Problem vor sich und sieht zunächst garnicht, wie die Lösung lauten, noch weniger, wie man sie finden könnte. Da kommt man auf den Gedanken, sich einmal auszumalen, wie die gesuchte Wahrheit lauten müßte, wenn sie schön wäre. Und siehe da, zunächst zeigen Beispiele, daß sie wirklich so zu lauten scheint, und dann gelingt es, die Richtigkeit des Erschauten durch einen allgemeinen Beweis zu erhärten.*
> [Hasse 1959, S.12]

Findet man schließlich einen solchen Beweis, der Ideen »schön« zusammenfügt, nimmt man ihn auch deshalb als schön wahr, da man ihn sich erarbeitet hat und sich um eine schöne Form bemüht hat.

> *You see, mathematical ideas have to fit together beautifully. The field that I created, I like to call it algorithmic information theory, it went through several different versions. And the early versions of my theory were good work, they were pioneering work, but they were too ugly, I felt something was wrong. So I changed the field, and I changed the definitions, the concepts weren't quite right. And when I changed things, all of a sudden they fit together better. So that's an aesthetic criterion, that's like a painting... When you create a new field of mathematics you have a certain freedom in how you can do it. You can change the rules of the game. And if the ideas don't fit together beautifully, something is wrong, you see. So the early pioneering work tends to be a bit ugly, because pioneering work is hard, but the only permanent mathematics is beautiful mathematics.*
> [Chaitin 2000, S. 149]

Viele der Kriterien, die ein Beweis erfüllen sollte, um als schön wahrgenommen zu werden, besitzen eine subjektive Komponente. Die einzelnen Eigenschaften sind miteinander verknüpft. Ist ein Beweis kurz und fruchtbar, so kann dies in Überraschung und Erstaunen resultieren. Besitzt er große Erklärungskraft, stellt sich beim Rezipienten ein Gefühl der

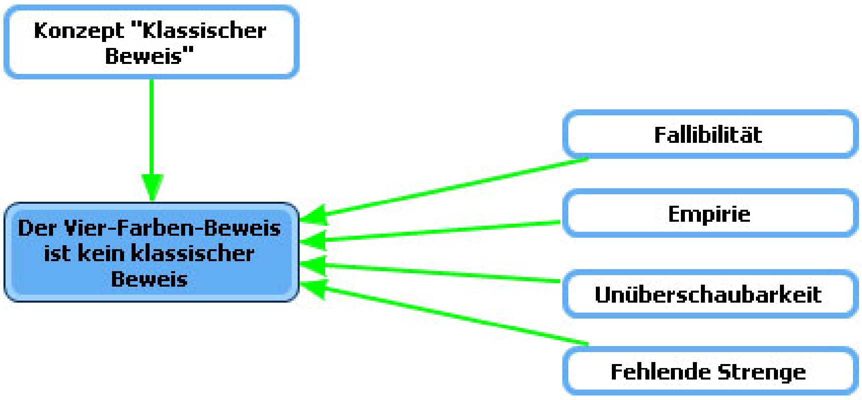

Abb. 3.16.: Der Vier-Farben-Beweis passt nicht in das Konzept »Klassischer Beweis«

Unausweichlichkeit ein. Insbesondere wird die Wichtigkeit der einzelnen Kriterien unterschiedlich wahrgenommen und bewertet. Da kaum ein Beweis allen Kriterien für Schönheit genügt und die subjektive Wahrnehmung eine große Rolle spielt, lässt sich kein einheitliches Verständnis zur Mathematikästhetik präsentieren. Darüberhinaus bleibt anzumerken, dass sich die Philosophie der Mathematik bisher vor allem mit Ontologie und Epistemologie beschäftigt hat, also der Natur mathematischer Realität und dem Status mathematischer Wahrheit. Obwohl Schönheit im Zusammenhang mit Mathematik oft genannt wird, gab es wenig genauere Untersuchung, der Begriff bleibt oftmals vage und subjektiv.

Nichtsdestotrotz lässt sich festhalten, dass die in diesem Kapitel beschriebenen Eigenschaften durchaus als Indikatoren für die Schönheit von Beweisen dienen können und dass die Schönheit eines Beweises ein wichtiges Kriterium für seine Akzeptanz ist. Dass ein Beweis die traditionellen Anforderungen erfüllt ist Pflicht, dass er darüberhinaus noch schön und elegant ist, die Kür[72]. Im Zuge dieser Betrachtung verwundert es auch nicht mehr, dass der Vierfarbenbeweis Auslöser einer größeren Kontroverse war. Wie wir feststellen konnten, besitzt der Vierfarbenbeweis kaum eine der vorgestellten Eigenschaften schöner Beweise. So handelt es sich bei dem Vierfarbensatz zwar sicher um einen Beweis, der auch traditionellen Anforderungen genügt, aber eben nicht um einen schönen Beweis.

Wie wir in den vorangegangen Betrachtungen sehen konnten, ist die Schönheit eines Beweises oft ein informelles Kriterium für seine Wahrheit. So wurde an dem Vierfarbenbeweis als nicht-schöner Beweis vermutlich auch deshalb gezweifelt und die Hoffnung auf einen »schöneren« Beweis bleibt bestehen.

> [...] *almost every mathematician knows the ›feeling‹ (really no other term for it) that a specific proof of some statement is not the ›right‹ proof. It is, e. g., too clumsy, too long-winded, or somehow arbitrary. Perhaps this idea is no more*

[72] Einige Stimmen gehen sogar soweit, die Schönheit eines Beweises noch vor seine Korrektheit zu stellen: *»We prefer a beautiful proof with a serious gap over a boring correct one. If the idea is beautiful, we feel it will attain valid mathematical expression«* [Hersh 1997, S. 155].

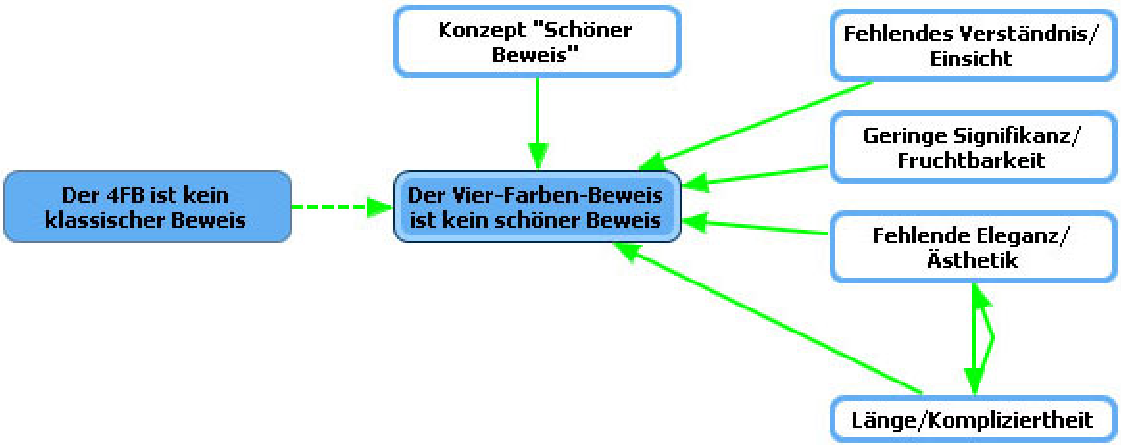

Abb. 3.17.: Der Vier-Farben-Beweis passt nicht in das Konzept »Schöner Beweis«

> *than a particular state of mind of the mathematician, but, at the same time, it does feed the idea that the proof is ›out there‹ somewhere to be ›discovered‹.* [François & van Bendegem 2010, S. 118]

Offen bleibt die Frage, wie man mit solchen nicht-schönen mathematischen Lösungen in Zukunft umgeht. Aschbacher [2005] prognostiziert für die Zukunft das vermehrte Auftauchen solcher Beweise:

> *My guess is that we will begin to encounter many more such problems, theorems and proofs in the near future. As a result we will need to re-examine what constitutes a proof, and what constitutes a good proof. Elegance and simplicity should remain important criteria in judging mathematics, but the applicability and consequences of a result are also important, and sometimes these criteria conflict. I believe that some fundamental theorems do not admit simple elegant treatments, and the proofs of such theorems may of necessity be long and complicated. Our standards of rigor and beauty must be sufficiently broad and realistic to allow us to accept and appreciate such results and their proofs. As mathematicians we will inevitably use such theorems when it is necessary in the practice of our trade; our philosophy and aesthetics should reflect this reality.* [Aschbacher 2005, S. 2404]

Er fordert die explizite Einordnung der Schönheitskonzeption in die Philosophie der Mathematik. In unserer Betrachtung der ästhetischen Wertzuschreibungen ließ sich feststellen, dass Beweise, die die in diesem Kapitel geschilderten Eigenschaften besitzen, auch vielfältige Funktionen erfüllen können und sollen. Nicht nur, dass sie die Wahrheit eines Satzes zeigen, sondern insbesondere befördern sie Einsicht und Verständnis; sie können also einer didaktischen Funktion nachkommen. Welche Funktionen ein Beweis darüber hinaus noch haben kann, wollen wir im nächsten Abschnitt untersuchen.

3.3.6. Beweise als Kommunikationsmittel

Die unterschiedlichen Eigenschaften, die ein Beweis haben kann und die wir bereits im letzten Abschnitt beleuchtet haben, deuten bereits darauf hin, dass Beweise zu weit mehr als nur zur Wissensetablierung genutzt werden. Tatsächlich lässt sich wohl eine Schwierigkeit bei der Definition des Begriffes »Beweis« darauf zurückführen, dass Beweise viele unterschiedliche Rollen spielen können und verschiedenste Funktionen haben. Diese verschiedenen Funktionen werden u.a. von de Villiers [1990] beschrieben. Über Verifikation hinaus gibt er Entdeckung, Systematisierung, Erklärung, intellektuelle Herausforderung und Kommunikation an (*»verification, explanation, systematization, discovery, intellectual challenge, and communication«*). In dieser Aufzählung finden wir eine wichtige Funktion wieder, die wir bisher nur gestreift haben – die der Nutzung eines Beweises als Kommunikationsmittel. Für viele Arten der Kommunikation und Diskussion dienen Beweise als Grundlage. Wir finden in diesem Zusammenhang auch den Nutzen des Beweises in der Lehre, als pädagogisches Mittel der Kommunikation, wieder. Viele der in den vorangehenden Kapiteln beschriebenen Eigenschaften tragen dazu bei, dass ein Beweis besser zu kommunizieren ist[73].

Aberdein [2005b] versucht Beweise als Argumente zu interpretieren und untersucht sie im Hinblick auf ihre Argumentstruktur. Der Vierfarbenbeweis wurde bereits von Alcoleas als mathematisches Argument wiefolgt rekonstruiert.

> ***claim (C)*** *Four colours suffice to colour any planar map.*
> ***supporting data***
> ***(D1)*** *Any planar map can be coloured with five colours.*
> ***(D2)*** *There are some maps for which three colours are insufficient.*
> ***(D3)*** *A computer has analysed every type of map and verfied that each of them is 4-colorable.*
> ***warrant (W)*** *The computer has been properly programmed and its hardware has no defects.*
> ***backing (B)*** *Technology and computer programming are sufficiently reliable.*

Der Vorteil dieser Rekonstruktion sei, dass sie die Abhängigkeit des Beweises von nichtmathematischen Methoden herausstelle: *»The dependence on apparently extra-mathematical methods is made explicit«* [Aberdein 2005b, S. 295]. Demgegenüber stellt er seine eigene Rekonstruktion des Vierfarbenbeweises:

> ***data (D)*** *The elements of the set U are reducible*
> ***modal qualifier (Q)*** *almost certainly*
> ***claim (C)*** *four colours suffice to colour any planar map*
> ***warrant (W)*** *U is an unaivoidable set (on account of* ***backing (B)*** *conventional mathematical reasoning) unless* ***rebuttal (R)*** *there has been an error in either*

[73] Um im Kontext von Untersuchung und Überzeugung als Kommunikationsmittel zu dienen, helfen zum Beispiel die im vorigen Abschnitt beschriebenen Eigenschaften der Überschaubarkeit und Erklärungskraft.

> ***(i)*** *our mathematical reasoning*
> *or* ***(ii)*** *the hardware or firmware of all the computers on which the algorithm establishing D has been run*

Aberdein findet seine Rekonstruktion besser, da sie sowohl Menschen- als auch Computerfehler beinhaltet[74].

Auch Inglis [2007] betrachtet Beweise als Argumente, die aufgestellt werden, um ein bestimmtes Publikum zu überzeugen: *»a mathematical proof is, fundamentally an argument: when someone writes down a proof they are, at a minimum, attempting to convince a (possibly imaginery) audience of a claim«* [S. 1]. In verschiedenen Studien mit Co-Autoren untersucht er empirisch die mathematische Argumentationspraxis. Sie kommen u.a. zu dem Ergebnis, dass Autorität für die Glaubwürdigkeit und Überzeugungskraft eines Beweises nur dann eine Rolle spielt, wenn der mathematische Status des Arguments noch nicht geklärt ist [Inglis & Mejia-Ramos 2009].

Pedemonte [2007] sieht Beweise als Spezialfall von Argumentationen an. Er nutzt das Toulmin-Modell, um Beweise als kognitive Einheit (*»cognitive unit«*) aus der Produktion einer Vermutung und ihres Beweises darzustellen. Nach einem ähnlichen Ansatz versuchen Pease et al. [2008] Argumentationstheorie von Toulmin und Philosophie der Mathematik von Lakatos zu verknüpfen.

In einer späteren Veröffentlichung geht Aberdein [2005a] über die Betrachtung von Beweisen als Argumente hinaus. Er stellt fest, dass mit Hilfe der Dialektik Licht auf die Debatte um den Status und Funktion von Beweisen geworfen werden kann und beschreibt verschiedene *»Beweis-Dialoge«*. Er glaubt, dass Beweise bzw. mehr oder weniger detaillierte Beweisskizzen die mathematische Diskussion aus verschiedensten Gründen befeuern. Mit einem Beweis tritt der Beweiser in einen Dialog mit dem Rezipienten. Je nachdem welche Ziele Verfasser und Leser des Beweises verfolgen, entstehen unterschiedliche Arten von Beweis-Dialogen. In Tabelle 3.3 sind die von Aberdein [2005a] identifizierten Dialogtypen schematisch dargestellt.

Der Dialogtyp *»Beweis als Überzeugung«* wird von einigen Autoren beschrieben. So auch von Hersh [1993]: *»Proving is convincing and explaining«*. Ein Beweis werde eben nicht nur einmal aufgeschrieben und gelte damit sofort für alle Zeit – stattdessen handele es sich um einen Prozess. Durch weitere Anwendung und Reformulierungen gewinne er an Glaubwürdigkeit und Akzeptanz hinzu; ob es sich bei einer Argumentation letztendlich tatsächlich um einen Beweis handele, hänge dann davon ab, ob sich genug andere, qualifizierte Mathematiker überzeugen lassen: *»The test of whether something is a proof is whether it convinces qualified judges«* [Hersh 1993, S. 389]. Auch CadwalladerOlsker [2011] unterstreicht die Wichtigkeit der Überzeugungsfunktion von Beweisen und überlegt, einen Beweis genau dann als gültig anzusehen, wenn er von anderen Mathematikern anerkannt wird. Damit würde man der Tatsache Rechnung tragen, dass Mathematik ein menschliches

[74] Da die Wahrscheinlichkeit von Menschenfehlern höher sei, könne man einem Computerbeweis jedoch genauso vertrauen wie einem klassischen *»Menschenbeweis«*.

Dialogtyp	Ausgangs-situation	Hauptziel	Ziel des Beweisers	Ziel des Gesprächspartners
Beweis als Untersuchung	Aufgeschlossenheit	Vermutung beweisen oder widerlegen	zum Ergebnis beitragen	Wissen gewinnen
Beweis als Überzeugung	Meinungsverschiedenheit	sichere Beilegung der Differenzen	Gesprächspartner überzeugen	Beweiser überzeugen
Beweis als Informationssuche (pädagogisch)	Dem Gesprächspartner fehlt es an Information	Wissenstransfer	Verbreitung von Wissen	Wissen gewinnen
»Beweis« als Informationssuche (Tymoczko)	Dem Beweiser fehlt es an Information	Wissenstransfer	Information gewinnen	vermutlich unergründbar
»Beweis« als Befreiung (Swart)	Aufgeschlossenheit	provisorische Erkenntnisse erlangen	zum Ergebnis beitragen	gewünschten Glauben erhalten
»Beweis« als Verhandlung (Zeilberger)	Meinungsverschiedenheit	Austausch über provisorische Ergebnisse	zum Ergebnis beitragen	maximale Information aus dem Austausch erhalten
»Beweis« als Debatte	Unüberbrückbare Meinungsverschiedenheit	Tiefere Konflikte ausmachen	Standpunkt herausstellen	Standpunkt herausstellen

Tabelle 3.3.: Beweisklassifikationen von [Aberdein 2005a]

Unterfangen sei (*»human endeavor«*) und den teilweise subjektiven Prozess der Akzeptanz expliziter machen.

In Nickel [2010] findet man Hinweise auf den Dialogtyp *»Beweise als Untersuchung«*. Nickel stellt die einem Beweis zugrundeliegenden Kommunikationsprozesse in den Vordergrund und beschreibt Beweise als spezielle Formen der Kommunikation zwischen verschiedenen Menschen oder sogar innerhalb eines Menschens[75]: *»proof as a quite special communication process beween two or more people or inside one person«* [S. 282]. Für ihn stellt der Beweis eine ideale Kommunikation dar, die klaren Regeln unterworfen ist und keine Toleranz für abweichende Positionen aufweist (keine Interpretationsfreiheit, keine Kontextabhängigkeit verwendeter Terme innerhalb eines Beweises).

Asperti [2012] beschreibt den Dialogtyp *»Beweise als Informationssuche (pädagogisch)«*: Ein Beweis fungiert einerseits als Nachricht (*»Message«*: Informationsvermittlung über einen mathematischen Sachverhalt), andererseits als Zertifikat (*»Certificate«*: Nachweis für die Wahrheit eines Satzes)[76].

[75] Dass es sich nicht zwingend immer um eine Kommunikation mehrerer Personen handeln muss, sondern auch der innere Dialog einer Person mit sich selbst gemeint sein kann, macht auch der Pädagoge Bell [1976] klar. Er beschreibt einen Beweis als *»essentially public activity which followed the reaching of conviction, though it may be conducted internally against an imaginary doubter«* [S. 24].

[76] Um letztere Funktion zu erfüllen, wäre ein rein mechanisches Nachvollziehen ohne Verstehen der Bedeutung möglich. Dies ist der Grund warum er glaubt, Computerbeweise würden einen Bruch (*»divorce«*) zwischen den beiden Bedeutungen von Nachricht und Zertifikat herbeiführen.

Damit ein Beweis innerhalb der mathematischen Gemeinschaft als Beweis akzeptiert ist, müssen laut Aberdein [2005a] verschiedenene, zum Beweis gehörige *»Dialoge«* erfolgreich geführt werden, der der Untersuchung sowie der der Überzeugung: *»on the conventional understanding of mathematical rigor, success with both inquiry and persuasion proof dialogues is necessary for an argument to count as a proof«* [S. 68].

4. Die philosophische Signifikanz des Vierfarbensatzes

Die in dieser Arbeit viel zitierte und kritisierte Arbeit Tymoczkos trug den Namen *»The Four-Colour Theorem and its Philosophical Significance«*. Auch wenn wir in vielen Punkten, die Tymoczko beschrieb, andere Ansichten haben, so bleibt doch festzuhalten, dass auch wir daran glauben, dass der Beweis des Vierfarbensatzes durchaus Bedeutung für die Philosophie der Mathematik besitzt – durch ihn wurde eine umfangreiche Diskussion über Beweise und ihre Eigenschaften angestossen. Eine solche Diskussion schien längst überfällig und man kann unserer Ansicht nach sagen, der Vierfarbenbeweis brachte nur den Stein ins Rollen. Die Zeit schien reif, das althergebrachte traditionelle Beweiskonzept zu überprüfen. Warum die Diskussion sich genau am Vierfarbenbeweis entzündete und nicht an einem anderen, ebenfalls nicht klassischen Beweis wie bspw. dem zur Klassifizierung endlicher Gruppen, der auch nicht ins traditionelle Beweiskonzept passte, haben wir implizit bereits im letzten Kapitel diskutiert. Die dort geschilderten Beweisanforderungen (Verständnislieferung, Eleganz, Ästhetik, Signifikanz und Fruchtbarkeit) spielen bei der Bewertung und Anerkennung eines Beweises eine größere Rolle, als ihnen bis dato zuerkannt wurde. Darüberhinaus wurden nun auch die Funktionen genauer betrachtet, die ein Beweis erfüllen soll. Über die reine Validierung von Sätzen dient er auch der Verständnislieferung und Kommunikation. Dies sind zwei wesentliche Erkenntnisse, die sich aus der Betrachtung des Diskurses um den Vierfarbenbeweis ziehen lassen.

Aber nicht nur, dass durch den Vierfarbenbeweis eine längst überfällige Diskussion über den Status von Beweisen angestossen wurde – wir glauben, dass darüber hinaus wichtige Impulse für die weitere Entwicklung der Philosophie der Mathematik gegeben wurden. Viele Mathematiker empfanden die Philsophie der Mathematik seit der Diskussion um die Grundlagen der Mathematik als stagnierend.

> *It is often suggested, usually by mathematicians, that the philosophy of mathematics has all but stagnated since the passing of the three great schools (Logi-*

> *cism, Formalism, and Intuitionism).*
> [Maddy 1991, S. 155]

Del Palacio [2005] sagt über die Jahre nach der Grundlagenkrise: *»philosophy kept silent for a while«*. MacLane [1981] bezeichnet die Philosophie der Mathematik als *»subject dormant since about 1931«* [S. 246], Hersh [2005] als *»mostly foundationalist ping-pong«* [S. vii][77]. Insbesondere die (zu) starke Fokussierung auf die Grundlagen der Mathematik wird beklagt, wie bspw. von Long [1986]: *»Preoccupation with foundational questions has forced the other issues out of view and has led to the trivialization of the philosophy of mathematics which is effective in the attitudes of most working mathematicians«* [S. 613]. Davis [1982] schiebt dies darauf, dass Philosophen der Mathematik selbst oftmals keine Mathematiker sind und daher nur *»limited personal experience«* vorweisen können [S. 4]. Fremdzuschreibungen von außen wurden als zu einseitig erkannt.

Neue Strömungen in der Philosophie der Mathematik werden entsprechend willkommen geheißen, man nimmt sie als *»revival in the philosophical discussion«* wahr [Hersh 2005, S. 247]. Während die traditionelle Philosophie der Mathematik Theorien mathematischer Wahrheit und Ontologie mathematischer Objekte in das Zentrum stellte, ändert sich nun die Betrachtungsweise.

> *Und so sieht unsere Schlußfolgerung aus: Die Mathematik soll nicht auf die Maße einer Philosophie zurechtgestutzt werden, die zu klein ist, als dass sie hineinpasste. Vielmehr muß darauf hingewirkt werden, dass man die philosophischen Kategorien erweitert, damit sie der Realität unserer mathematischen Erfahrung gerecht werden können.*
> [Davis & Hersh 1994, S. 434]

Man wendet sich den Subjekten der Mathematik zu und versucht, Mathematik aus Sicht eines praktizierenden Mathematikers zu beschreiben. Eine möglichst genaue Beobachtung und Beschreibung dessen, was der reale Mathematiker tut, soll Aufschluss über das Wesen der Mathematik geben.

> *What I'm recommending is a hands-on sort of philosophy of mathematics, a sort relevant to actual practice, a sort sensitive to the problems, procedures, and concerns of mathematicians themselves* [. . . leading to a] *revival of the philosophy of mathematics as a functioning cog in the practice of mathematics itself.*
> [Maddy 1991, S. 159ff]

Van Kerkhoeve [2006] nennt diese Entwicklung *»rise of mathematical practice«* [S. 6].

Anstatt Mathematik als ewig, infallibel und unveränderbar zu betrachten, betrachtet man sie als soziales oder kulturelles Phänomen. Sie wird in den historischen Kontext gestellt. Man versucht, sie aus der Praxis, aus Sicht des praktizierenden Mathematikers zu verstehen und zu beschreiben.

[77] Die einzige Ausnahme, die mehrfach genannt wird, ist Lakatos.

Viele Impulse der Wissenschaftstheorie, die bisher nur auf andere Wissenschaften bezogen wurden, finden sich plötzlich auch in der Beschreibung der Mathematik wieder. Auch die zentrale Rolle des Beweises wird dadurch in Frage gestellt.

> [...] *the traditional central role of proof in mathematics is arguably and perhaps appropriately under siege* [...] *excessive focus on rigour has driven us away from our wellsprings. Many good ideas are wrong. Not all truths are provable, and not all provable truths are worth proving* [...] *Moreover, Near certainty is often as good as it gets – intellectual context (community) matters. Complex human proofs are often very long, extraordinary subtle and fraught with error.* [Borwein 2005, S. 3]

Einige Mathematiker und Philsophen glauben, dass sich auch das Konzept der Paradigmenwechsel von Kuhn auf die Mathematik übertragen lasse [u.a. Bueno 2007; Chaitin 2004]. An anderer Stelle (Abschnitt 5.2) untersuchen wir, ob Computerbeweise im Speziellen oder die Nutzung von Computern in der Mathematik im Allgemeinen einen solchen Paradigmenwechsel herbeiführen können.

Heintz [2000] spricht von einer »quasi-empiristischen Wende« in der Philosophie der Mathematik. Sie sieht sie durch folgende Merkmale gekennzeichnet:

1. Fallibilismus
2. Historisierung
3. Konsenstheorie der Wahrheit
4. Mathematische Gemeinschaft
5. Gemeinsamkeiten zwischen Mathematik und empirischen Wissenschaften
6. Kulturalismus
7. Naturalismus

In all diesen Merkmalen findet sich eine deutliche Opposition zur traditionellen Philosophie der Mathematik: Fallibilismus statt Unfehlbarkeit, Historisierung statt Invarianz, Gemeinschaft statt Isolation, Konsens statt Korrespondenz, Kulturalismus statt Platonismus. Greiffenhagen & Sharrock [2011] sprechen gar von einer systematischen Demystifizierung des alten Euklid-Mythos.

Wir wollen im Folgenden einige dieser Aspekte näher beleuchten und feststellen, inwieweit die jeweiligen Themenkomplexe bereits in der Diskussion um den Vierfarbensatz auftauchten.

4.1. Fokussierung auf »Die mathematische Praxis«

In den neueren Strömungen der Mathematikphilosophie besteht weniger Interesse an einer Grundlegung der Mathematik oder an der Diskussion über die Existenz mathematischer Objekte. Stattdessen wurden vermehrt Stimmen laut, die eine angebrachte Philosophie der Mathematik in der tatsächlichen mathematischen Praxis begründet sehen wollen [siehe bspw. Gowers 2005]. Im Zentrum der Betrachtung soll der praktizierende Mathematiker stehen, dieser selbst soll Auskunft über sein Fach und seine Methoden geben.

> *I am writing as a working mathematician, not as a philosopher.*
> [...] *Therefore I will focus on what mathematicians actually do.*
> [Auslander 2008, S. 62]

Man wendet sich der tatsächlichen mathematischen Praxis zu – in der Hoffnung, durch genaue Beobachtung und Untersuchung der täglichen Praxis des Mathematiktreibens eine bessere, »realistischere« und damit passendere Philosophie der Mathematik zu finden.

> *Without the myth of foundations to distract it, philosophy can quite naturally turn to a reexamination of mathematical practice. It is the practice of mathematics that gives rises to any philosophical perplexities we might have about mathematics and practice that holds the key to any solution we might obtain.*
> [Tymoczko 1986b, S. 125]

Tymoczko gibt einen ersten Ausblick, was eine solche Ausrichtung für Konsequenzen birgt.

> [...] *attention to mathematical practice would introduce all sorts of quasi-empirical elements to the philosophy of mathematics, elements such as informal proofs, fallible mathematicians, socio-historical contexts, and even sophisticated technology.*
> [Tymoczko 1986b, S. 126]

Davis und Hersh sind ähnlicher Ansicht und erwarten dies sogar explizit von einer neuen, adäquaten Philosophie der Mathematik.

> [Die Philosophie der Mathematik soll] *versuchen, das mathematische Wissen so darzustellen, wie es wirklich ist – fehlbar, korrigierbar, vorläufig und in Entwicklung begriffen, wie jede andere Art der menschlichen Erkenntnis. Anstatt vergeblich nach Grundlagen zu graben oder wegen dieses Grundlagen-Notstandes ein Gefühl der Richtungslosigkeit und Illegimität mit uns herumzuschleppen, wollen wir sehen, was Mathematik wirklich ist und wie sie in den Rahmen der menschlichen Erkenntnis allgemein passt.*
> [Davis & Hersh 1994, S. 431]

Rav begrüßt die Entwicklung in Richtung einer genauen Analyse der mathematischen Praxis.

> *This is most refreshing, for it is high time that the philosophy of mathematics liberates itself from ever enacting the worn-out tetralogy of platonism, logicism, intuitionism and formalism.*
> [...] *it is an intellectual scandal that some philosophers of mathematics can still discuss whether whole numbers exist or not.*
> [...] *philosophy too has its paradigms, and a fertile philosophy of mathematics, like any other ›philosophy of‹, must be solidly oriented towards the practice of its particular discipline and keep contact with actual currents in the philosophy*

> *of science.*
> [Rav 2005, S. 72]

Tappendem [2008] sieht die Beschäftigung mit der mathematischen Praxis als Grundvoraussetzung für Bewertungen in der Philosophie der Mathematik: *»the rich analysis of mathematical practice is a sine qua non for judgements in the philosophy of mathematics«* [S. 254].

Die auf diese Appelle tatsächlich erfolgte Hinwendung zur mathematischen Praxis ist vielseitig und interdisziplinär. Es finden sich nicht nur Aufsätze von Philosophen, Mathematikern, Informatikern und Logikern, sondern auch von Soziologen, Pädagogen und Psychologen. Der arbeitende Mathematiker wird aus allen Blickwinkeln in seinem sozialen, kulturellen und historischen Kontext beobachtet. Hierbei fokussiert man sich auf die informelle Mathematik.

> *Our philosophical point of departure is the claim that what counts before all else, is mathematics as it is actually practiced, not as it should – or indeed must – be.*
> [...] *the traditional, limited focus on (the well-foundedness of) the formal end-products of mathematics should be broadened, making room as well for unhibited empirical inquiry into various non-formal aspects attached to doing mathematics.*
> [van Kerkhoeve & van Bendegem 2008, S. 421]

Informelle Beweise werden als Präsentationsstandard (*»standard of presentation of mathematics«*) wahrgenommen, gerade auch weil sie Produkt eines sozialen Fortschritts sind (*»product of a social progress«*) [Carette et al. 1998, S. 128].

Man will dem Entdeckungs- und Entstehungsprozesses Beachtung schenken und nicht mehr nur fertigen Ergebnissen: *»philosophers must look at mathematics in the making, that is, at mathematical practice«* [Larvor 2008, S. 393]. Hersh [2005] spricht von einer Vorder- und einer Rückseite der Mathematik (*»front and back«*). Nach außen hin sieht man nur das Ergebnis eines langen Prozesses – den fertigen, meist formalen, veröffentlichten Beweis – aber die Rückseite, der Entdeckungsprozess, wird selten thematisiert und gesehen[78]:

> *The ›back‹ would be mathematics as it appears among working mathematicians, in informal settings, told to one another in an office behind closed doors.*
> [Hersh 1991, S. 128]

Betrachtet man jedoch diese Vorderseite, also Mathematik, während sie entwickelt wird – als Praxis und damit als rationale, menschliche Aktivität, *»mathematics as a subject done by real people«* [Jaffe 1997, S. 134], bringt dies die Konsequenz mit sich, dass Mathematik nicht mehr als unveränderbar, ewig und fehlerfrei angesehen werden kann.

[78] Seiner Meinung nach ist diese Darstellung vor allem deshalb irreführend, da die Dinge, die auf der Rückseite passieren, lange vor der Vorderseite passieren und den Ergebnissen daher zugrunde liegen: *»So my general approach to a philosophical question in mathematics is to ask myself how a typical mathematician would react to it and why.* [...] *If you look at actual mathematical practice, and in particular at how mathematical beliefs are formed, you find that mathematicians have opinions long before they have formal proofs«* [Hersh 2005, S. 184, 194].

4.2. Historisierung statt Invarianz

Insbesondere wurde im Zuge der Hinwendung zur mathematischen Praxis versucht, Mathematikgeschichte und -philosophie zu verknüpfen. Hiermit wurde der Forderung von Lakatos genüge getan, der bemängelte, dass diese zwei Disziplinen von einander getrennt agieren:

> [...] *the history of mathematics, lacking the guidance of philosophy, has become blind, while the philosophy of mathematics, turning its back on the most intruiging phenomena in the history of mathematics has become empty.*
> [Lakatos 1976, S. XI]

Mathematisches Wissen wird nicht mehr als zeitlos und objektiv angesehen, sondern als veränderbar. Insbesondere der Stellenwert mathematischer Strenge und die Rolle eines Beweises ändern sich.

Rigorositätsstandards können von Zeit zu Zeit variieren.

> *Standards of rigor have changed in mathematics, and not always from less rigor to more* [...]
> *Rigorous mathematics* [...] *was consciously practiced for around 200 years in ancient Greece and again for about the same time beginning in the nineteenth century.*
> [Kleiner 2012, S. 218]

Er spricht sich daher dafür aus, das Konzept Beweis aus historischer Sicht zu betrachten. Dann stelle man nämlich fest, dass es nie allgemein eingeführte Kriterien gab, wie ein Beweis auszusehen hat, um akzeptiert zu werden. Stattdessen variere die Wahrnehmung von Beweisen über die Zeit und mit der jeweiligen mathematischen Praxis: »*The validity of a proof is a reflection of the overall mathematical climate at any given time*« [Kleiner 2012, S. 153].

Ähnlich sieht dies Rav.

> [...] *because of the historical and methodological wealth of mathematical proof practices (plural) any attempt to encapsulate such multifarious practices in a unique and uniform one-block perspective is bound to be defective.*
> [Rav 2007, S. 299]

Corfield [2003] glaubt, dass man »echte« Mathematik nur dann verstehen kann, wenn man den historischen Kontext mitbetrachtet.

Auch Davis und Hersh halten eine Einbettung mathematischer Resultate in die Geschichte für unerlässlich, um ihre Wichtigkeit zu erkennen:

> *Jeder Versuch, die Mathematik außerhalb von Zeit und menschlicher Gesellschaft anzusiedeln, zerstört eine Schicht von Bedeutung und führt einen ausgedörrten Kern zutage. Eine entzeitliche Mathematik kann uns nicht sagen, was Mathematik ist, warum die Mathematik wahr und schön ist, wie sie entsteht*

> *oder warum jedermann sich um sie kümmern sollte. Situiert man aber die Mathematik sorgfältig in menschlicher Zeit und Erfahrung, so wird sie zu einer reichen Quelle für mögliche Bedeutungen und Handlungen.*
> [Davis & Hersh 1988, S. 266]

Ganz dezidiert weist Wilder [1994] darauf hin, dass ein Mathematiker durch die Konventionen seiner Zeit in seinen Möglichkeiten, Mathematik zu betreiben, limitiert ist: *»der einzelne Mathematiker ist vom jeweils gegenwärtigen Stand der Mathematik, von ihrem Begriffssystem und ihrer Sprache abhängig und durch sie begrenzt«* [S. 314]. Es ist also schwer vorstellbar, dass zwei Mathematiker unterschiedlicher Generationen oder gar Epochen unter mathematischem Arbeiten dasselbe verstehen. Auch das, was überhaupt als Beweis anerkannt wird, kann sich mit der Zeit ändern.

> *Arguments accepted as proof by one generation of mathematicians no longer retain their validity for another. Standards in mathematics change, and later generations may regard as pedantic and unnecessary those subtleties in arguments carried out by earlier generations with painstaking care.*
> [Jaffe 1997, S. 133].

So veränderte sich beispielsweise mit der Veröffentlichung erster Fachaufsätze in Zeitschriften[79] die mathematische Praxis erheblich. Veröffentlichte Ergebnisse waren dem Fachpublikum besser zugänglich, was eine Diskussion und Überprüfung deutlich vereinfachte und zu der Etablierung von Standards führte (vgl. Kap. 2.1.4). Aktuell beeinflussen vor allem die interdisziplinäre Binnendifferenzierung und die stärker werdende Vernetzung unter Wissenschaftlern die Entwicklung der Mathematik. Die eine sorgt für immer größeres Spezialistentum, die andere ermöglicht internationale Zusammenarbeit in Form von Forschungsgruppen und -projekten. Dies werde insbesondere durch die neuen Möglichkeiten der elektronischen Kommunikation und Veröffentlichung via Internet und Email einen erheblichen Effekt auf die mathematische Praxis haben, wie u. a. Jaffe [1997] glaubt. Jedes veröffentlichte Resultat ist augenblicklich sehr vielen Interessierten zugänglich. Man sollte meinen, dadurch steige zumindest potentiell auch die Sicherheit der veröffentlichten Beweise (je mehr Menschen eine Arbeit lesen, desto eher werden mögliche Fehler gefunden), allerdings gibt es auch Möglichkeiten, zu veröffentlichen, ohne den Weg über etablierte Magazine zu gehen und damit das Gutachterverfahren zu umgehen.

4.3. Fallibilismus statt Unfehlbarkeit

Ein zentrales Thema, welches mit der Fokussierung auf die mathematische Praxis aufkommt, ist die Fallibilität mathematischer Aussagen. Auch der Fallibilismus als wissenschaftliche Methode wird nun in Zusammenhang mit Mathematik gebracht. Damit werden Ideen von Lakatos [1976] wieder aufgegriffen, welcher Poppers Theorie des Fallibilismus auf die Mathematik übertrug. Kein Satz oder Beweis ist mehr infallibel, unkorrigierbar oder ewig- sondern alle sind ewig für Revision offen.

[79] 1826 wurde die erste deutsche Fachzeitschrift für Mathematik gegründet.

Lakatos [1976] sieht den Fallibilismus als Teil des von ihm vertretenen Quasi-Empirismus. In der Mathematik stehen Probleme und mögliche Lösungen am Anfang; davon ausgehend führen Tests, Spekulationen, Kontroversen und Kritiken zur Weiterentwicklung der Theorie. Im Unterschied zum Falsifikationismus, welcher laut Popper in anderen Wissenschaften praktiziert werde, sei das Ziel in der Mathematik allerdings nicht die Widerlegung einer These, sondern »Wachstum und permanente Revolution«. Mathematisches Wissen ist kumultativ[80], Falsifizierer führen nicht zu Widerlegung, sondern zu *»problem shifts«* und damit zu Wissensvermehrung[81]. Stagnation beim Wachstum quasi-empirischer Theorien tritt in Perioden auf, wenn gerade keine *»daring speculations«* und *»dramatic refutations«* stattfinden.

Generell funktioniert nach Lakatos [1976] eine Unterscheidung in apriori/ aposteriori oder analytisch/ synthetisch nicht mehr, stattdessen einen Mix aus Komposition, Konvention und Intuition. Lakatos' Fazit ist daher: Philosophen müssen sich noch viel mehr auf empirische Aspekte der Mathematik einstellen; Inspiration soll nicht aus den Grundlagen, sondern aus dem Wachstum mathematischen Wissens gezogen werden.

Viele beziehen sich auf Lakatos und behaupten, er würde als erster ein realistischeres Bild der Mathematik zeichnen als die Platonisten und Formalisten zuvor.

> *Das Werk von Lakatos und Popper zeigt, dass in der modernen Philosophie Raum ist für die Wahrheit der Erfahrung Mathematik. Das heißt, daß wir die Legitimität der Mathematik, wie sie ist, akzeptieren: fehlbar, korrigierbar und sinnvoll.*
> [Davis & Hersh 1994, S. 436]

Hersh [1995] sieht seine Arbeit als Re-Evaluation von Lakatos. Er hält mathematisches Wissen für fehlbar, glaubt aber, dass die Mathematik wie auch andere Wissenschaften aus Fehlern lernen kann. Auch Putnam [1986] betont, dass er mathematisches Wissen nicht für absolut, sondern für korrigierbar hält.

Dass es Fehler immer geben wird, ist klar, wenn man den Mathematiker als menschliches Mathematik-produzierendes Wesen betrachtet und in das Zentrum seiner Untersuchungen stellt: *»any alternative to a perfectibilist picture of mathematics, must bring in man, i.e. an encultured, fallible creature«* [van Kerkhoeve 2006, S. 11].

Wie wir in dieser Arbeit gesehen haben, machen die steigende Komplexität und Länge von Beweisen Fallibilität zu einem wichtigen Thema, da Beweise fehleranfälliger sind und Fehler schwerer bemerkt werden können.

> [...] *we recognize that proofs can be mistaken, and often express degrees of faith depending on the nature of the theorem, the complexity of proof, the methods that have been used to prove it, and the reliability of the author or the authorities that are cited.*

[80] siehe hierzu auch Heintz [2000]: »Bereits vorhandenes Wissen wird nicht ausgewechselt, sondern gerät in Vergessenheit oder wird in seinem Gültigkeitsbereich eingeschränkt« [S. 342].

[81] Sollte es Kämpfe zwischen rivalisierenden mathematischen Theorien geben, so werden sie meistens durch die relative erklärende Kraft entschieden [vgl. Lakatos 1976, S. 218].

> [...] *we can make sense of mathematics, more broadly, as an activity carried out by agents with bounded resources.*
> [Avigad 2008, S. 307]

Fehlerfreiheit lässt sich nicht mehr garantieren. Diese Realität muss man anerkennen und sich über den Umgang mit Fehlern verständigen.

Ernest [1999] sieht eine wichtige Konsequenz der Fallibilität in der erneuten Untersuchung von Rolle und Funktion eines Beweises in der Mathematik, da mit diesem nun keine absolute Wahrheit mehr etabliert wird. Auch Kitcher [1977] zieht aus der Arbeit von Lakatos unter anderem das Fazit, dass man Beweise nicht als Mittel zur Validierung betrachten sollte, sondern als Mittel zu Entdeckung und Weiterentwicklung mathematischer Konzepte und Vermutungen.

4.4. Gemeinsamkeiten von Mathematik und empirischen Wissenschaften

Die mögliche Unsicherheit der Validierungsmethode Beweis führt dazu, dass der Sonderstatus der Mathematik unter den Wissenschaften ins Wanken gerät. Neben Beweisen sollte *»mathematical confirmation«* erlaubt sein (durch Nutzung quasi-empirischer Methoden), bzw. eigentlich wird eine solche längst »inoffiziell« praktiziert: *»the fact is that we have been using quasi-empirical and even empirical methods in mathematics all along«* [Putnam 1986, S. 53]. Man sucht nach Gemeinsamkeiten zwischen der Praxis der Mathematik und der anderer Wissenschaften und findet teilweise ähnliche Vorgehensweisen:

> [...] *producing conjectural mathematical knowledge by means of speculation, heuristic arguments, examples and experiments, which then be confirmed as theorems by producing proofs in accordance with a community standard of rigour, which may be read by the community in a variety of ways.*
> [Martin 1997, S. 6]

Empirische Evidenz, numerische Experimente und probabilistische Beweise helfen bei der Entscheidung, an was man in der Mathematik glauben kann[82]. Polya [1986a] glaubt diesbezüglich an eine fundamentale Ähnlichkeit zwischen mathematischer und wissenschaftlicher Praxis: *»We secure our mathematical knowledge by demonstrative reasoning (proofs), but we support our conjectures by plausible reasoning (inductive, documentary, circumstancial evidence)«* [S. 99].

[82] Putnam entwirft ein Szenario, in dem Menschen auf Marsmenschen treffen, die im Wesentlichen ähnliche Mathematik haben, aber zusätzlich noch quasi-empirische Evidenz zur Etablierung mathematischen Wissens zulassen. Befragt man die Marsmenschen zu dem, was die Menschen als »Beweis« verstehen, so legt er ihnen folgende Antwort in den Mund: *»What you call ›proof‹ is simply deduction from principles that are (more or less) self evident. We recognize proof, and we value proof as highly as you do – when we can get it. What we don't understand is why you restrict yourself to **p**roof – why you refuse to accept **c**onfirmation After all, there are true mathematical statements that are neither immediately nor demonstratively necessary – epistemological mathematical truths. Not recognizing confirmation as well as proof debars you from ever discovering those truths.«* [Putnam 1986, S. 52]. Schließlich kommt Putnam zu dem Schluß, dass in Wirklichkeit wir diese Marsmenschen sind, da wir bereits empirische und quasi-empirische Methoden in der Mathematik anwenden.

Insbesondere im Entdeckungszusammenhang spielen quasi-empirische Methoden wie *»generalization, specialization, analogy«* eine Rolle als *»great sources of discovery«* [Polya 1986b]. Generell gibt es Forderungen, den Entdeckungs- und Entwicklungsprozess von Mathematik im Zuge der Hinwendung zur mathematischen Praxis mehr zu würdigen:

> *The idea that the main problem in the philosophy of mathematics is the justification of mathematics has made the philosophy of mathematics an increasingly less attractive subject* [...]
> *No wonder, then, that there is widespread disregard and misunderstanding, and often outright antagonism, between philosophers of mathematics and mathematicians. The problem of the justification of mathematics seems unpalatable to the vast majority of mathematicians, who consider it irrelevant to their work. Moreover, the idea that solving the problem of justification of mathematics consists of clarifying the foundations of mathematics contradicts mathematical experience, which shows that mathematics is by no means a static structure, based on a foundation given once and for all, but is a dynamic process, multifarious and articulated, whose ways of justification are also multifarious and articulated.*
> [Celluci 2005, S. 19]

Ebenso wie in anderen Wissenschaften lassen sich die Konzepte der Mathematik auf Beobachtung und Erfahrung gründen: *»pure mathematics draws its concepts from experience, observation, scientific theories and even economics«* [Celluci 2005, S. 18].

Parallelen zu anderen Wissenschaften werden daher auch insofern gezogen, als man die Mathematikphilosophie mit der Wissenschaftsphilosophie der 1930er/ 40er vergleicht – dominiert von logischen Positivisten; die Praxis werde in der Theorie nicht widergespiegelt: *»Philosophy of mathematics is overdue for its Popper, Kuhn, Lakatos and Feyerabend. It's overdue for analysis of what mathematicians actually do, and the philosophical issues therein«* [Hersh 1995, S. 590].

Sowohl bei Beobachtung als auch Erfahrung spielen auch Sinneseindrücke eine Rolle.

> *The spinning power of a head with structural memories and dispositions determines the power to experiment mentally and the abibilty to do mathematics. When one says that mathematics is an activity of the pure intellect, it cannot be to deny that sense perceptions and memory form an integral part of it.*
> [Wang 1986, S. 133]

Hier finden wir also das Thema der Empirie bzw. der Erfahrungsabhängigkeit mathematischer Beweise wieder.

> [...] *old-fashioned person-made proofs are also a posteriori. They also depend on credence in the world of experience, the material world.* [...] *This demolishes the dream of a priori knowledge in mathematics, and in general.*
> [Hersh 1997, S. 157]

Lässt man auch empirische Methoden zu, ist der Beweis nicht mehr die einzige Validierungsinstanz: *»empirical mathematics frees the person of the burden of proof and thereby* *liberates other, previously uninteresting or unrecognized ways of mathematical thought and activity«* [Rotman 2005, S. 1682]. Die Erkenntnis, dass Empirie Bestandteil von Mathematik ist und Mathematik somit anderen Wissenschaften ähnlicher als klassischerweise gedacht, scheint also mittlerweile akzeptiert – sowohl in der Gemeinschaft der Mathematiker als auch unter Philosophen der Mathematik.

Überhaupt stellt sich die Frage, ob zwischen Mathematik und anderen Wissenschaften trennscharf unterschieden werden sollte oder ob man sich den epistemologischen Holismus Quines zu eigen macht und Wissenschaft als ein großes ganzes Netz vieler verschiedenener untereinander verknüpfter Aussagen betrachtet. Ein solches *»Web of Belief«*, beschreibt Quine in einer frühen Arbeit wie folgt:

> *The totality of our so-called knowledge or beliefs, from the most casual matters of geography and history to the profoundest laws of atomic physics or even of pure mathematics and logic, is a man-made fabric which impinges on experience only along the edges. Or to change the figure, total science is like a field of force whose boundary conditions are experience.*
> [Quine 1961, S. 42]

Dies bedeutet, dass kein Satz für sich genommen durch einzelne Beobachtungen oder Experimente verifiziert oder falsifiziert werden kann: überprüft werden kann nur die gesamte Theorie, d.h. das gesamte System aus unterschiedlichsten Hypothesen, welche ein kohärentes Ganzes bilden[83].

Lediglich die Konjunktion aller Sätze des *»Web of Belief«* kann sich (konfrontiert mit Erfahrung) als falsch oder richtig erweisen.

> [...] *the falsity of the observation categorical does not conclusively refute the hypothesis. What it refutes is the conjection of sentences that was needed to imply the observation categorical. In order to retract that conjunction we do not have to retract the hypothesis in question; we could retract some other sentence of the conjuntion instead. This is the important insight called* holism*.*
> [Quine 1990, S. 14]

Scheint die Konjunktion aller Sätze falsch, so müsste man folglich alle Sätze des Gedankengebäudes überprüfen (die sich allerdings wiederum nicht singulär bzw. »losgelöst« betrachten lassen).

> *Strictly speaking, it is systems of hypotheses or beliefs rather than individual claims to which the usual, deductively characterized notions of empirical content, confirmation, and falsification should be applied.*
> [Resnik 2005, S. 414]

Eine Kategorisierung und Unterscheidung in empirische und apriori Wahrheiten ist nicht mehr möglich[84], da zumindest an der Peripherie unseres Glaubenskomplexes immer irgendein Teil auf Erfahrung beruht:

[83] Dies meint in letzter Konsequenz sogar die Wissenschaft als Ganzes.

[84] Einhergehend damit die Unterscheidung in synthetische und analytische Sätze, siehe für eine Rekonstruktion der Argumente Quines [Nimtz 2004].

> [...] *it becomes folly to seek a boundary between synthetic statements, which hold continually upon experience, and analytic statements, which hold come what may. Any statement can be held true come what may, if we make drastic enough adjustments elsewhere in the system. Even a statement very close to the periphery can be held true in the face of recalcitrant experience by pleading hallucination or by amending certain statements of the kind called logical laws. Conversely, by the same token, no statement is immune to revision.*
> [Quine 1961, S. 43]

Hiermit stellt sich eine sehr pragmatische Wahrnehmung der Mathematik ein: Wie wir zu dem Wissen über mathematische Objekte kommen ist nicht entscheidend, eine Kategorisierung nicht mehr vonnöten[85], sondern was wichtig ist, ist, wie sich das mathematische Wissen in unser übriges Wissen einfügt und wo es Anwendung findet[86].

> *We all know how important numbers are to natural science, and how important mathematical functions are, and other abstract mathematical objects; the scientific system of the world would collapse without them. But mathematicians have established in the past hundred years that classes, or sets, are enough for these for all these purposes: they can be made to do the work of numbers, functions, and the rest. This, then, is why I recognize sets: to meet the mathematical needs of our system of the natural world. Assuming sets, or classes, is on an equal footing with assuming molecules, atoms, electrons, neutrons, and the rest; all these are objects, concrete and abstract that are assumed by the network of hypotheses by which we predict and explain our observations of nature. I see natural science as continuous with the mathematics that it uses, just as I see all this as continuous with philosophy. It all goes to make up our inclusive system of the world.*
> [Quine interviewt von Magee 1987, S. 148]

4.5. Mathematische Gemeinschaft statt einzelnem Mathematiker

Stellt man die mathematische Praxis in den Fokus einer neuen Philosophie der Mathematik, so muss man auch den Glauben Mathematik als universelles, einheitliches, objektives Gedankengebäude in Frage stellen – Mathematik lässt sich nicht mehr von dem sie schaffenden Mathematiker trennen, sie ist ein soziales Konstrukt: *»Out of the interviews with*

[85] An dieser Stelle verschwindet auch das Problem der Apriori-Erkennbarkeit von mathematischen Objekten, welche sich außerhalb von Zeit und Raum befinden (vgl. Abschnitt 2.2.1)

[86] Auch wenn alle Sätze nun zur selben Kategorie gehören und prinzipiell revidiert werden können, um Widersprüche zwischen Theorie und Erfahrung aufzulösen, so gibt es allerdings graduelle Unterschiede: Mathematische Sätze werden vielfach nicht angegriffen, da sie in vielen Teilen der Wissenschaft verwendet werden: sie sind von zentraler Bedeutung für unser übriges Wissen: *»In partiular the maxim contrains us, on our choice of what sentences of S* [some set of purported truths] *to rescind, to safeguard any purely mathematical truths; for mathematics infiltrates all branches of our system of the world, and its disruption would reverberate intolerably. If asked why he spares mathematics, the scientist will perhaps say that its laws are necessarily true; but I thin we have here an explanation, rather, of mathematical necessity itself«* [Quine 1990, S. 15].

the research mathematicians, I have a clear image of how impossible it is to speak about mathematics as if it is one thing, mathematical practices as if they are uniform and mathematicians as if they are discrete from both of these« [Burton 1999, S. 141].

Bei dem Mathematik-treibenden Subjekt handelt es sich um einen Menschen. Dies hat einerseits die eben diskutierte Konsequenz, dass damit Mathematik selbst fehleranfällig und abhängig von menschlicher Erfahrung ist. Andererseits muss man, da der Mensch nicht allein und isoliert handelt, auch den Menschen als soziales Wesen in seine Überlegungen miteinbeziehen.

> *Ideas about mathematics as a subject,* [...] *cannot be based solely on the logical foundations of mathematics. There is also the existence of the mathematical community as a social system which has to be taken into consideration.*
> [Neubrand 1989, S. 2]

Daraus folgt die Einsicht, dass der soziale Kontext und die beruflichen Gemeinschaften von Mathematikern eine zentrale Rolle bei Kreation und Begründung mathematischen Wissens spielen: *»mathematics is a social, informal, intuitive, organic, human process, a community project«* [Millo et al. 1979, S. 272].

Ein Fazit von Burton [1999] aus ihrer Umfrage mit Einzelstatements von Mathematikern: Das kulturelle Klima, in dem geforscht wird, hat sich verändert – vom individualistischen zu einem hauptsächlich kooperativen. Steigende Vernetzung und die wachsende Komplexität haben offenbar dazu geführt, dass die Kooperation innerhalb der mathematischen Forschung ausgeprägter und internationaler denn je ist. Dies stellt auch Stanway [2005] im Zuge seiner Untersuchung von Sprache, Methoden und Treffpunkten der mathematischen Gemeinschaft fest. Tymoczko [1986a] fordert in seinem Artikel *»Making room for mathematicians in the Philosophy of Mathematics«* die mathematische Gemeinschaft in das Zentrum philosophischer Überlegungen zu stellen: *»a new way of looking at and characterizing mathematics, one that better coheres with the experience of mathematicians«*. Da Beweisen eine *»essentially public activity«* ist, sollte das Ergebnis (der Beweis) nicht unabhängig von seiner Entstehung in der Gemeinschaft betrachtet werden.

> *Roughly speaking, a proof is what convinces mathematicians. In the framework of public epistemology, it is not so unnatural to view proofs in organic terms, as Lakatos proposes. They grow over time from a philosophical perspective, it is important to stress that this process can go on forever. Proof can just continue to develop.*
> [Tymoczko 1986a, S. 49]

Wie wir bereits festgestellt haben, ist auch die Akzeptanz eines Beweises und damit seine Wahrheit an die Rezeption der mathematischen Gemeinschaft geknüpft.

> *The progress of acceptance of a proof by the community of mathematicians is initiated by the proposal of a convincing argument by an accepted member of the mathematical community, and by a careful check of the argumentation by experts in the field. But then the existence of some combination of the*

> *understanding-, significance-, compability-, reputation-, and language factors is necessary to ensure the final acceptance of the proof.*
> [Neubrand 1989, S. 9]

Betrachtet man also die aktuelle mathematische Praxis, stellt man fest, dass die Gemeinschaft der Mathematiker eine wichtige Rolle spielt. Mathematik entsteht vor allem auch durch soziale Interaktion, das alte Bild des allein in Isolation arbeitenden Mathematiker, wie es Davis & Hersh [1994] in ihrer Beschreibung des »idealen Mathematikers« karikieren, wirkt überholt[87]:

- Er arbeitet allein mit Stift und Papier.
- Er wird nur innerhalb seiner Spezialistengruppe verstanden ($<$ 100 Personen).
- Er hat ein platonistisches Bild von der Mathematik.
- Er vertraut auf strenge Beweise, aber ist *»nicht in der Lage, für jedermann verständlich zu erklären, was unter ›Strenge‹ zu verstehen ist oder was es zu einem strengen Beweis braucht«* [Davis & Hersh 1994, S. 30].
- *»Er und seine Kollegen zweifeln keinen Moment daran, dass die Nicht-Riemannschen Hyperquadrate wirklich existieren, und zwar ebenso sicher und objektiv wie der Felsen von Gibraltar oder der Halleysche Komet«* [Davis & Hersh 1994, S. 31].
- Für ihn ist π kein natürliches Objekt, trotzdem glaubt er, dass es entdeckt und nicht erfunden wurde.
- Er ist der festen Überzeugung, dass er über eine zuverlässige Methode zur Entdeckung objektiver Wahrheiten verfügt.

4.5.1. Wahrheit durch Konsens statt Korrespondenz

Wie eben bereits angemerkt, spielt die mathematische Gemeinschaft auch bei der Anerkennung und Sicherung von mathematischen Wissens eine große Rolle. Die Einstellungen zu mathematischer Wahrheit können sich allerdings mit der Zeit verändern: *»Perhaps mathematical truth is eternal, but our knowledge of it is not«* [Grabiner 1974, S. 364].

Betrachtet man die soziale und historische Dimension der mathematischen Praxis, verändert sich auch der Wahrheitsbegriff.

> *Obviously we don't possess, and probably will never possess, any standard of proof that is independent of time, the thing to be proved, or the person or school of thought using it. And under these consitions, the sensible thing to do seems to be to admit that there is no such thing, generally, as absolute truth in mathematics, whatever the public may think.*
> [Wilder 1994, S. 319]

Mathematik besteht nicht aus absoluten, objektiven Wahrheiten.

[87] Diese Beschreibung des »idealen« Mathematikers scheint (absichtlich) leicht überzeichnet. Gleichwohl geben Davis und Hersh im Anschluss an diese Beschreibung zu, dass einzelne Punkte durchaus auch auf sie selbst so zutreffen.

> [...] *as with other science, mathematics does not consist of truths but only of plausible statements* [...]
> *For centuries mathematics was considered a body of absolutely certain truths, but now this is increasingly perceived as an illusion.*
> [Celluci 2005, S. 30f]

Stattdessen ist Wahrheit eine Konvention, ein soziales Produkt.

> *Mathematical truth, unlike a mathematical construction, is not something I can hope to find by introspection. It does not exist in my mind. A mathematical theory, like any other scientific theory, is a social product.*
> [Goodman 1986, S. 86]

Als Vertreter eines solchen »Konventionalismus« versteht man auch Gesetze der Naturwissenschaften nicht als direkte unmittelbare Beschreibungen der Realität, sondern als Konventionen; d.h. es existieren immer auch mehrere gleichberechtigte Beschreibungen.

Wahr ist dann nicht mehr, was objektiv mit der platonischen Welt übereinstimmt, sondern worauf sich die Gemeinschaft verständigt und was in Zeitschriften veröffentlicht wird: *»Mathematical truth is just what the editors of the Transactions say it is«* [Davis & Hersh 1994, S. 364].

Die Gemeinschaft fungiert als normative Instanz und Wahrheit ergibt sich durch die Übereinstimmung zwischen einzelnen Wissenschaftlern, durch einen *»Konsens der Qualifizierten«* [Davis & Hersh 1994].

> *Mathematik ist ein sozialer Prozeß. Wahrheiten werden durch Konsens akzeptiert oder – wenn es keinen Konsens gibt – durch die Billigung der Mehrheit, oder, falls nicht einmal das gewährleistet ist, durch die Zustimmung einiger weniger qualifizierter Spezialisten.*
> [Szpiro 2011, S. 229]

Wahrheit ist damit *»kein Sachverhalt, keine Eigenschaft von Sätzen, sondern ein Symbol, das indiziert, dass die Kommunikation unter bestimmten, das heißt wissenschaftlich akzeptablen Bedingungen zu Stande kam«* [Heintz 2000, S. 346].

Was bedeutet dies für Beweise? Auch sie finden im sozialen Kontext statt, wie u.a. Thurston [1995] betont.

> [...] *a proof becomes a proof by human beings reading, understanding, and accepting the proof*
> [...] *acceptance of a proof is also based on mutual trust: If trustworthy colleagues accept a proof, we also tend to accept it – a very reasonable point of view.*
> [Rump 2005, S. 198]

Was als Beweis akzeptiert wird und was nicht, ist somit eine soziale Konvention der mathematischen Gemeinschaft: *»what mathematicians at large sanction and accept* ***is*** *correct mathematics. Their work is the touchstone of mathematical proof not vice versa«* [Hersh 1997, S. 154]. Kein formaler Prozess, sondern ein soziales Ritual der Akzeptanz führt zur Anerkennung eines Beweises als glaubwürdig [vgl. Calude 2001; Buldt et al. 2008].

Insbesondere in den Fällen, in denen ein Beweis zu lang und kompliziert ist, als ihn eine breite Masse noch verstehen könnte, glaubt man der Expertenmeinung. *»Today a new result is certified as part of mathematics after experts read it and pronounce it good. We monitor our product«* [Hersh 1995, S. 592].

Der Beweis ist damit lediglich ein standardisiertes Verfahren zur Wahrheitsanerkennung, nicht mehr zwingend das einzige. Auch Manin [1981] stellt fest: *»A proof only becomes a proof after the social act of ›accepting it as a proof‹* [...] *The evolution of commonly accepted criteria for an argument's beeing a proof is an almost untouched theme in the history of science«* [S. 104]. Die Gemeinschaft der Mathematiker könnte andere Verfahren genauso zulassen und anerkennen, die ihr Vertrauen in die Wahrheit eines Satzes stützt.

> *In mathematics, the aim is to increase one's confidence in the correctness of a theorem, and it's true that one of the devices mathematicians could use in theory to achieve this goal is a long chain of formal logic. But in fact they don't. What they use is a proof, a very different animal. Nor does the proof settle the matter; contrary to what its name suggests, a proof is only a step in the direction of confidence. We believe that, in the end, it is a social process that determines whether mathematicians feel confident about a theorem.*
> [Millo et al. 1979, S. 271]

4.5.2. Kulturalismus statt Platonismus

Stellt man den praktizierenden Mathematiker in den Mittelpunkt seiner Mathematikphilosophie, wird seinem Handeln mehr Gewicht zugemessen als seinen Überzeugungen. Auch seine Meinung zur Existenz mathematischer Objekte tritt in den Hintergrund.

> *But the point remains that if A is a mathematician who believes that mathematical objects exist in a Platonic sense, his outward behaviour will be no different from that of his collegue B who believes that they are fictious entities and hers in turn will not just like that of C who believes that the very question of whether they exist is meaningless.*
> [Hersh 2005, S. 198]

Insbesondere wenn man mathematische Wahrheit als Konvention ansieht, wie in obigem Abschnitt beschrieben, wird der mathematische Platonismus obsolet.

> *A public (mathematical) statement is regarded as true when the mathematical community can be convinced that is has been properly deduced from what is already explicit in the public mathematics. Note that the truth of a public statement does not depend upon any correspondence of it with a state of affairs in a mathematical ›realm‹. Semi-Platonism is irrelevant; even if all the many things that mathematicians have from time to time invented were located (even metaphorically) anywhere, it would make no difference to mathematical practice.*
> [Thomas 1990, S. 80]

Glaubt man, dass es sich bei Mathematik um eine menschliche Kreation handelt, so muss man zu ihrer Erklärung soziale, kulturelle genauso wie biologische Faktoren bemühen [Rav 2005]. Wenn Mathematik menschlich ist und einen Teil der menschlichen Kultur darstellt, existieren mathematische Objekte nicht mehr unabhängig vom menschlichen Geist in einer platonischen Welt der Ideen.

> *To deny the cogency of the Platonic notion of truth in mathematics in no way deprives mathematics of meaning. In mathematics, meaning is not found in a cold abstract, static world of Platonic ideas but in the human, historical, collegial world of mathematicians and their work.*
> [Nelson 2000, S. 4]

Stattdessen lassen sich mathematische Objekte als Produkte unserer Kultur betrachten, als Konstrukte des menschlichen Geistes[88].

> [...] *mathematical objects do exist – really!*
> *But, contrary to Platonism, their existence is not transcendental, or independent of humanity.*
> *It is created by human activity, and is part of human culture.*
> [Hersh 2005, S. viii]

Sie sind sozial-historisch-kulturelle Objekte: *»theorems are interpretable cultural objects«* [Krieger 1991, S. 135] bzw. geteilte Ideen *»shared ideas«*, wie Moby Dick in der Literatur oder die Unsterblichkeit der Seele in der Religion [vgl. Hersh 1995]. Damit kann auch die Kontingenz des mathematischen Wissens und der mathematischen Methoden gut erklärt werden. So glaubt unter anderem Ruelle [2007], dass die Struktur der menschlichen Wissenschaft weitgehend vom besonderen Aufbau und Wesen des menschlichen Gehirns abhängt. Mathematische Konzepte im Speziellen und menschliche Abstraktion im Allgemeinen sind beide *»embodied in nature«*, dh. Mathematik ist eine Art menschliche Veranlagung: *»Mathematics doesn't exist outside of human cognition«* [Núñez 2005, S. 179][89].

Auch White [2005] behauptet, Mathematik sei die organische Antwort auf mathematische Kultur. Dies bedeutet nicht zwingend, dass man den Status der Objektivität aufgeben muss[90]. Die Objektivität der Mathematik ist allerdings von anderer Art als die der physikalischen Welt. Sie ist kulturell über die Zeit entstanden wie z. B. Verhaltensregeln, Straßenverkehrsregeln und Grammatik, welche ebenfalls eine kulturelle Realität darstellen. So

[88] Diese Ansicht, dass alle mathematischen Objekte vom Subjekt konstruiert werden, nennt man auch »Konstruktivismus«. Sie beinhaltet auch den Glauben daran, dass mathematische Erkenntnis unabhängig vom Subjekt unmöglich ist.

[89] Lakoff & Núnez [2000] glauben, Mathematik ist insofern *»embodied in nature«*, als dass vieles bereits in Körper, Sprache und Wahrnehmung angelegt ist. Formale Beschreibungen reichen nicht aus, sondern ergeben erst durch unterstützende Gesten oder implizite, unterschwellige Konzepte und Ideen Sinn. So finden sich in Anschauung und Erklärung von Mathematik oftmals Bewegungsverben (Werte oszillieren, nähern sich an, bewegen sich auf etwas zu etc.) während die Formalisierung nachher statisch ist.

[90] Glas [2007] unternimmt den Versuch einer Rettung der Objektivität mathematischen Wissens. Zwar versteht er Mathematik ebenfalls als soziale Praxis, die entsprechend kulturell geprägt wird: *»Mathematics is a social practice, shaped by the ways in which its practitioniers view the problems that face their community«* [S. 302], aber seiner Ansicht nach ist sie trotzdem objektiv. Dies verdankt sie der objektiven Sprache, in der sie formuliert ist – diese macht sie unabhängig von einzelnem oder kollektivem Glauben. Sie ist also teilweise unabhängig von der Praxis, durch die sie produziert wurde – seiner Meinung nach eine Evolution des menschlichen Intellekts.

sind mathematische Konzepte zwar unabhängig vom individuellen Geist des Einzelnen, liegen aber im Gedächtnis der gesamten Spezies, also der Kultur verankert.

Zusammenfassend kann man also feststellen, dass viele Aspekte neuerer Mathematikphilosophie bereits in der Diskussion um den Vierfarbenbeweis anklangen. Der eigentliche Stein des Anstosses, die Nutzung des Computers bzw. die Verwendung von Computerbeweisen zur Etablierung mathematischer Wahrheiten spielte hier jedoch höchstens implizit eine Rolle. Die philosophischen Probleme mit dem alten Beweiskonzept waren grundsätzlicher Natur. Und auch das aufkeimende Bedürfnis nach einer neuen, »passenderen«, an die tatsächliche mathematische Praxis angelehnten Philosophie streift das Thema nur am Rande. Allerdings ist der Computer inzwischen sicherlich ein akzeptiertes Werkzeug in der Mathematik und damit Teil der alltäglichen mathematischen Praxis. Im folgenden Kapitel wollen wir uns daher genauer anschauen, welche Möglichkeiten der Computer für die Mathematik bietet (insbesondere über die Validierung mittels Computerbeweisen hinaus). Außerdem widmen wir uns der Frage, ob der Einsatz von Computern eine so umwälzende Veränderung für die Mathematik bedeutet, dass man von einem Paradigmenwechsel sprechen kann.

5. Die Rolle des Computers in der Mathematik

Welchen Beitrag der Computer im Zusammenhang mit Beweisen leisten kann, haben wir in den vorhergehenden Kapiteln bereits gesehen. Darüber hinaus bieten sich in der Mathematik jedoch noch weitere Anwendungsmöglichkeiten, denen wir uns in diesem Kapitel widmen wollen. In vielen Bereichen der Mathematik hat der Computer Stift und Papier längst abgelöst. Über große Rechenkapazität hinaus bietet er zusätzliche Möglichkeiten der Bildgebung, Simulation und Kommunikation, die für Heuristik und Forschung überaus nützlich sind. So können Computer bei Entdeckung und Visualisierung mathematischer Sachverhalte helfen sowie Annahmen und Thesen plausibilisieren.

Durch die aktive und vielfältige Nutzung dieses Potentials von Computern hat sich die Praxis der Mathematik geändert. Dies wird von vielen Autoren klar herausgestellt[91].

> *Computers are changing the way we are doing mathematics. They are changing ›mathematical practice‹.*
> [de Mol 2009, S. 84]

Rotman [2005] unterscheidet in globale Effekte, die direkten Einfluß auf die Ideen- und Theoriebildung haben und lokale Effekte, wie bspsw. die Änderung von Syntax und Symbolen, um große Mengen an Daten und Informationen zu verarbeiten. Es besteht kaum ein Zweifel – die Entwicklung in Richtung computerunterstützter Mathematik ist unaufhaltsam und lässt sich nicht mehr umkehren. Ohne den Computer gelangt der Mensch an (s)eine physikalische Grenze. Dass die weitere mathematische Forschung sich dadurch begrenzen lässt, ist unwahrscheinlich, zu groß ist die Angst, mathematisches Wissen könne eventuell stagnieren. Die zusätzlichen Möglichkeiten, neues mathematisches Wissen zu generieren, wollen viele nicht außer Acht lassen, wie wir im weiteren Verlauf dieses Kapitels sehen werden. Mit Anerkennung der Tatsache, dass die verstärkte Computernutzung ei-

[91] Siehe bspsw. Borwein [2008]: *»The power of modern computers matched with that of modern mathematical software and the sophistication of current mathematics is changing the way we do mathematics«* [S. 34].

ne umgreifende Veränderung für die Mathematik bedeuten könnte, kommt die Forderung nach einer systematischen Untersuchung und Einordnung auf.

> *There is no question that computers are having a profound impact on mathematical practice.*
> [...] *Mathematicians will use them if they find them necessary, or even convenient, and it's necessary to come to terms with this phenomenon.*
> [Auslander 2008, S. 69]

Es bleibt die Frage, wie stark sich die mathematische Praxis durch Computer verändern kann und wird. Werden sich über Methoden hinaus auch Inhalte der Mathematik über die Zeit deutlich verändern? Auch die Frage, inwieweit man bei zunehmender Akzeptanz und Verwendung von Computern in der Mathematik von einem Paradigmenwechsel im Sinne von Kuhn sprechen kann, versuchen wir zu beantworten.

Nicht nur in Hinsicht auf mögliche Revolutionen und Paradigmen sucht man Parallelen zu den Naturwissenschaften, in denen der vielfältige Einsatz von Computer und vor allem Rechenkapazität für deutliche Veränderungen sorgte[92]. Wir begegnen erneut dem Vorwurf, dass der Computer eine Art neue »empirische Dimension« mit sich bringt: *»The result is the opening up of mathematics by a powerful new agent in the direction of an empirical science«* oder zumindest der deutlichen Herausstellung, dass der Computer den Status von Mathematik als theoretische und rein deduktive Wissenschaft in Frage stellt: *»But, leaving visualization aside, the style and character of a simulation-inflected mathematical science – pragmatic, material, experimental – breaks with mathematicians traditional understanding of mathematics as a purely theoretical and deductive science«* [Rotman 2005, S. 1682].

Im Folgenden wollen wir zunächst die Einsatzmöglichkeiten des Computers (über Computerbeweise hinaus) sowie die möglichen Auswirkungen auf die (Meta-)Mathematik beschreiben. Verschiedenste Autoren habe bereits versucht, diese zu kategorisieren.

Eine Aufzählung von Themenfeldern findet sich beispielsweise in der *»Philosophie der Mathematik«* von Bedürftig & Murawski [2010].

1. In numerischen Rechnungen
2. In näherungsweisen Lösungen algebraischer Gleichungen bzw. Differentialgleichungen
3. In automatischen Beweisen von Sätzen
4. Zur Verifikation der Richtigkeit mathematischer Beweise
5. Als Hilfsmittel in Beweisen: Computerunterstützte Beweise
6. Zum Experimentieren mit mathematischen Objekten

[92] Einige Autoren ziehen an dieser Stelle auch Parallelen zum Aufkommen des Mikroskops in der Biologie oder des Teleskops in der Astronomie: *»The computer is a machine for investigating mathematical reality; it is reconfiguring the mathematical imaging and 'reasoning' in relation to repetition as radically as the microscope/ telescope reconfigured vision and ›seeing‹ in relation to scale; in its wake, mathematical thought will never be the same«* [Rotman 2005, S. 1688].

Für die ersten beiden Punkte nutzt man den Computer in seiner Eigenschaft als »Rechner«. Die Punkte 3. und 4. nutzen die Eigenschaft des »Automatisierens«. Bei den ersten fünf Themenbereichen, die wir in dieser Arbeit alle bereits gestreift haben, dient der Computer als Mittel zur Validierung. Punkt 6 nimmt hingegen einen neuen Aspekt auf. Es klingt an, dass der Computer auch über die reine Validierung hinaus einsetzbar ist und Teil des kreativen Schaffungsprozesses von Mathematik wird.

Vergleichen wir mit folgender Aufzählung von Cipra [1989]:

- **Große Fallunterscheidungen und -prüfungen** (*»case crunching«*): In dieser Disziplin kam der Computer unter anderem beim Vierfarbenbeweis zum Einsatz. Die Prüfung aller möglichen Fälle ist für den Menschen nicht zu leisten.
- **Komplexe numerische Berechnung** (*»number crunching«*): Als Beispiel hierfür kann der Beweis der Feigenbaumvermutung genannt werden. In seinem Zusammenhang wurde der Computer genutzt, um Abschätzugen für komplizierte mathematische Terme zu finden.
- **Experimentieren mit exakten arithmetischen und analytischen Ausdrücken** (*»symbol crunching«*): Experimente wie das Durchführen erster Beispielrechnungen zu einem Theorem oder der Visualisierung mathematischer Zusammenhänge mit Software wie Mathematica oder Maple.

In dieser Auflistung finden wir die oben unter Punkt 1.-5. genannten Aspekte wieder. Unter dem Begriff *»symbol crunching«* wird erneut der Computer im experimentellen Zusammenhang genannt.

Bailey & Borwein [2005], die sich selbst als Mitbegründer der sogenannten »Experimentellen Mathematik« ansehen, nennen folgende drei Zusammenhänge, bei denen der Computer über die reine Validierung hinaus in der Mathematik eingesetzt werden kann:

1. **Entdeckung**
2. **Visualisierung**
3. **Überzeugung**

Nach einer kurzen Beschreibung der »experimentellen Mathematik« wollen wir uns diese drei Möglichkeiten der »experimentellen« Computernutzung in den folgenden Abschnitten genauer ansehen.

Vorher sei noch eine weitere wichtige Einsatzmöglichkeit erwähnt, die sich durch den Computer bietet, sich aber in den vorangehenden Aufzählungen nicht wiederfindet. Es ist die bessere Organisation des mathematische Wissens – durch steigende Vernetzung der Gemeinschaft der Mathematiker, vereinfachten Literaturzugang und zentral angelegte, standardisierte Beweisdatenbanken. Dies zielt auf kommunikative und strukturelle Möglichkeiten ab, die vor allem das Internet in Form von zentraler Bereitstellung von Daten sowie erleichterten Kommunikations- und Veröffentlichungmöglichkeiten bietet[93]. Da dies aller-

[93] Einen Einblick in die vielfältigen Anwendungen, die bereits im Internet zu diesen Zwecken zur Verfügung stehen, bietet Borwein et al. [2002], Implikationen auf die mathematische Praxis werden u. a. von Borba & Villarreal [2006] abgeschätzt und beschrieben.

dings mehr auf das Medium Internet und weniger auf das Gerät Computer als solches abzielt sowie kein spezielles Phänomen der Mathematik ist, wollen wir diesen Themenkomplex im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigen.

5.1. Experimentelle Mathematik

Offenbar kann der Computer die mathematische Praxis bzw. die Art und Weise, wie Mathematik betrieben wird, entscheidend verändern, indem er neue Dimensionen der mathematischen Wissenfindung und -verifikation erschließt.

Im Zentrum der experimentellen Mathematik steht der Computer als experimentelles Werkzeug.

> *I saw the computer as an experimental tool that would reveal new mathematical worlds* [. . .]
> *It is clear that experimentation with examples is an important part of the mathematician's toolbox. And the computer allows us experiments far beyond the range of hand calculation.*
> [Shallit 2005, S. 863]

Das Experimentieren mit Beispielen war schon immer Teil des Prozesses der mathematischen Wissensfindung. Neu ist jedoch, dass man sich nicht mehr auf einfache, von Hand auswertbare Beispiele beschränken muss.

Werden mathematische Sachverhalte nur durch genügend komplizierte Experimente bzw. Beispiele unterfüttert, ist man geneigt, die dargestellten Sätze auch ohne klassischen Beweis zu glauben: *»More and more mathematicians appear to be going beyond the bounds of deductive proof, however, using the computer to confirm mathematical properties experimentally«* [Hanna 1995, S. 43]. Befürworter einer experimentellen Mathematik denken diesen Ansatz konsequent weiter und fordern eine damit einhergehende Liberalisierung mathematischer Rechtfertigungsverfahren. Auf der Internetseite des 1992 ins Leben gerufenen Journals *»Experimental Mathematics«* läßt sich diese Grundidee bereits herauslesen:

> *Experimental Mathematics publishes original papers featuring formal results inspired by experimentation, conjectures suggested by experiments, and data supporting significant hypotheses. Experiment has always been, and increasingly is, an important method of mathematical discovery. (Gauss declared that his way of arriving at mathematical truths was ›through systematic experimentation‹.) Yet this tends to be concealed by the tradition of presenting only elegant, fully developed, and rigorous results.*
> [Taylor and Francis Online 2015, Aim and Scope]

Bei der Zeitschrift soll es sich also unter anderem um ein Forum handeln, um Ideen auszutauschen und Anhaltspunkte zu liefern, sowie um unbewiesenen Vermutungen habhaft zu werden bzw. einen Weg zu deren Beweis aufzuzeigen. Diese Entwicklung, nicht nur fertige Resultate zu präsentieren, sondern auch experimentell fundierte Lösungsskizzen anzubieten, sehen auch Bailey & Borwein [2004]. Sie definieren **»experimental math«**

als *»utilization of advanced computing technology in mathematical research«*. Als Aufgaben und Möglichkeiten der experimentellen Mathematik[94] nennen sie:

- Erkenntnis- und Intuitionsgewinn
- Entdeckung neuer Muster und Beziehungen
- Verwendung graphischer Visualisierungshilfen
- Austesten und Falsifizieren von Vermutungen
- Entdeckung möglicher weiterer Vermutungen
- Ansätze für formale Beweise finden
- Ersetzung langwieriger Berechnungen
- Bestätigung analytisch gewonnener Resultate

Ihrer Meinung nach können Computerexperimente ähnlich überzeugend sein wie klassische, formale Beweise: *»we feel that in many cases computations constitute very strong evidence, evidence that is at least as compelling as some of the more complex formal proofs in the literature«* [Bailey & Borwein 2004, S. 7]. Dass es sich trotzdem nur um Evidenz handelt und nicht um Beweise im strengen Sinne, stellen die Anhänger der experimentellen Mathematik jedoch deutlich heraus:

> *While we value the theorem-proof method of expostition and while we do not depart from the established view that a result can only become part of mathematical knowledge once it is supported by a logical proof, we consider it anamalous that an important component of the process of mathematical creation is hidden from the public discussion.*
> [Epstein et al. 1992, S. 2]

Vielmehr sehen sie sich als Wegbereiter zu den formalen Beweisen. Neue mathematische Wege sollen lediglich aufzeigt werden, damit sie im Nachhinein »nachbewiesen« werden können.

> *We certainly do not claim that computations utilized in an experimental approach to mathematics by themselves constitute rigorous proof of the claimed results. Rather, we see the computer primarily as an exploratory tool to discover mathematical truths, and suggest avenues for formal proof.*
> [Bailey & Borwein 2004, S. 7]

Diese Sichtweise wird jedoch nicht konsequent vertreten, an anderer Stelle bezeichnet sich Borwein [2005] als *»computer-assisted fallibilist«* und spricht sich explizit dafür aus, quasi-empirische Methoden auch im Begründungszusammenhang zuzulassen: *»Today, while I appreciate fine proofs and aim to produce them when possible, I no longer view proof as the royal road to secure mathematical knowledge«* [S. 35].

[94] Hierin sehen sie eine Übertragung von Experimenten, wie sie in anderen Wissenschaften üblich sind, auf die Mathematik: *»Note, that the above activities are, for the most part, quite similar to the role of laboratory experimentation in the physical and biological sciences«* [Bailey & Borwein 2004, S. 3].

Ein Hauptziel experimenteller Mathematik besteht in der Erweiterung des mathematischen Wissens.

> *All of the versions of experimental mathematics that we have dealt with so far have the characteristics: their main interest is in expanding our mathematical knowledge as rapidly as possible and none of them stray too far from mainstream. In many cases this urgency leads to a temporary relaxiation of rigor, a relaxation that is well documented and hopefully can be cleaned up afterwards.*
> [Epstein et al. 1992, S. 2]

5.1.1. Entdeckung

Wie Hadamard bereits 1945 ausführte, geht einer mathematischen Entdeckung oftmals eine längere Suche voran, während derer viele mögliche Kombinationen gebildet und ausprobiert werden.

> *Indeed, it is obvious that invention or discovery, be it in mathematics or anywhere else, takes place by combining ideas. Now, there is an extremely great number of such combinations, most of which are devoid of interest, while, on the contrary, very few of them can be fruitful. Which ones does our mind – I mean our conscious mind – perceive? Only the fruitful ones, or exceptionally, some which could be fruitful. However, to find these, it has been necessary to construct the very numerous possible combinations, among which the useful ones are to be found.*
> [Hadamard 1945, S. 29]

Hierbei kann der Computer extrem hilfreich sein: durch das mechanische, systematische Ausprobieren vieler möglicher Kombinationen kann er bisher unentdeckte Zusammenhänge aufspüren und dabei helfen, diese als Vermutungen zu formulieren und zu beweisen. Ein Beispiel dafür ist das Computerprogramm *»Grafitti«*; es wurde von Siemion Fajtlowicz entwickelt, um Vermutungen in der Graphentheorie zu »entdecken«. Graffiti besteht zur einen Hälfte aus einer Routine, die anhand von Beispielen Zusammenhänge sucht und zur anderen Hälfte aus einem Unterprogramm, welches die gefundenen Zusammenhänge auf »Interessantheit« prüft und eine Selektion vornimmt[95]. Grafitti läuft seit 1985 – Fajtlowicz führt seitdem eine Liste *»Written on the Wall«* mit allen von Graffitti gefundenen Vermutungen, welche früher nur unter interessierten Forschern verteilt wurde, sich nun aber auch im Internet findet und veröffentlichte eine ganze Serie *»On conjectures of Graffiti«* in mathematischen Fachzeitschriften [Fajtlowicz 1988]. Viele der Vermutungen inspirierten zu weiterer Forschung, mehr als 80 Veröffentlichungen lassen sich auf sie zurückführen [Schätzung von DeLaViña 2005][96], unter ihnen einige von führenden Graphentheoretikern wie bspw. Paul Erdõs, Joel Spencer und Paul Seymour: *»Graffiti has proved to be a genuine contributor to the advance of mathematics«* [Larson 2005].

[95] Für detaillierte Betrachtungen der automatisierten, kreativen Suche nach interessanten mathematischen Konzepten, in denen auch das Programm Graffiti Beachtung findet, siehe Stoyan & Müller [1999] oder Colton [2000].

[96] Auf ihrer Internetseite listet DeLaViña [2013] viele dieser Veröffentlichungen auf und gibt weitere Informationen zu Graffiti.

Viele der von Graffiti gemachten Vermutungen konnten inzwischen per Hand bewiesen oder widerlegt werden. Der nächste Schritt könnte sein, Grafitti mit einem automatischen Beweiser zu paaren: *»The future of Graffiti may lie with machines rather than humans«* [Cipra 1989, S. 244]. Damit hätte man ein Computerprogramm erstellt, das selbstständig den Korpus mathematischen Wissens erweiteren kann. Es würde Vermutungen generieren, sie auf Interessantheit prüfen, Beweise führen und damit gültige mathematische Sätze produzieren.

Eine solche Kombination, die fortlaufend Sätze produziert, existiert mittlerweile an der University of Edinburgh. Dort kann jedermann einen mathematischen Satz für 15 Pfund »bestellen«.

> *TheoryMine is a company dedicated to automated theory exploration: we develop artificial intelligence techniques to discover new mathematical concepts and automate proof. By providing some fun applications of theorem proving (e.g. naming new theorems!), we sponsor more serious applications of automated reasoning technology. In particular, we are working on verification tools to make software more reliable and safe to use, as well as tools to ease the exploration of new mathematical concepts. Our software builds on decades of research by the international community in automated reasoning, notably the work in interactive theorem proving as well as automated deduction.*
> [TheoryMine 2015, About Us]

Allerdings sind die produzierten Sätze nicht sonderlich weitreichend und würden im Normalfall vermutlich nur wenige der in Kapitel 3.3 genannten ästhetischen Ansprüche erfüllen.

Auch der amerikanische Informatiker und Logiker McCune [1997] benutzte ein sogenanntes »automated reasoning«-Programm mit dem Namen *»EQP«*[97], um die Robbins Vermutung zu beweisen[98]. Für die seit ca. dreißig Jahren ungelöste Vermutung lieferte das Programm in acht Tagen einen Beweis[99]. Nach Rückübersetzung in Menschensprache war der Computerbeweis einfach nachzuvollziehen und zu verifizieren. Es herrschte Einstimmigkeit darüber, dass kein Mensch von selbst darauf gekommen wäre und man zeigte sich begeistert: *»Wos and MacCune envision offering mathematicians the option of using a computer to free them from the drudgery of finding proofs, allowing them to spend more time on harder, more interesting proofs«* [Peterson 1997].

Zusätzlich entwickelte McCune das Beweisprogramm *»OTTER«*, welches ebenfalls hohe Wertschätzung erhielt. Es bewährt sich insbesondere beim Aufsuchen kürzerer Beweise. Fitelson & Wos [2001], die Autoren eines Artikels über das Auffinden fehlender Beweise, zeigen sich begeistert von dem Programm: *»OTTER has proved invaluable in finding shorter proofs«* [Fitelson & Wos 2001, S. 329]. Sie nennen einige Beispiele für den bereits erfolgreichen Einsatz und geben Hinweise auf weitere mögliche Einsatzfelder. Ansonsten

[97] *»equational prover«*.
[98] Die bewiesen Vermutung besagt, dass jede Robbins Algebra eine Boolesche Algebra ist.
[99] Auf der Internetseite von McCune [2006] findet sich eine kurze Übersicht über die Historie, der Beweis selbst und der Programmcode von EQP.

findet sich in dem Artikel eine Bedienungsanleitung für die Software, das Programm selbst lag dem Artikel auf CD-Rom bei. Selbst den »axiomatischsten« Mathematiker sollte dieses Programm ihrer Meinung nach gefallen:

> *Hilbert (whom some label as Mr. Axiom) might find our proofs (which we have found through the use of automated reasoning) most satisfying, for they are axiomatic in the strictest sense, with no steps left to the imagination. Also satisfying is that the proofs rely solely on the inference rule condenses detachment, with no recourse to instantiation or equality-oriented reasoning. In the given senses, the proofs are indeed pure, nicely in the strict spirit of the logic calculi of concern.*
> [Fitelson & Wos 2001, S. 383]

Eine weitere, durch den Computer entstandene Entdeckungsmöglichkeit ist der sogenannte PSLQ-Algorithmus, welcher ganzzahlige Relationen zwischen numerischen Konstanten errechet. PSLQ-Ergebnisse sind zwischen sicher-beweisbaren Sätzen und experimentell erhaltenen Vermutungen anzusiedeln. Der Entwickler des Algorithmus ist sich sicher, das der Computer mit seiner Hilfe *»a new experimental flavour«* in die Mathematik einbringen könne [Sørensen 2008, S. 2]. Tatsächlich wurde mit Hilfe des PSLQ-Algorithmus' eine neue Berechnungsmöglichkeit für π gefunden [Bailey et al. 1996]. Die gemachten Entdeckungen bieten allerdings keine 100% Sicherheit, wie das Beispiel folgender Identitäten für die Riemannsche Zeta-Funktion zeigt.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot tan(h\pi)}{10^n} \approx \frac{1}{81}$$

Es stimmt bis zur 267 Nachkommastelle exakt, danach nicht mehr.

An dieser Stelle kommen wir auf die bereits in der Einleitung zu diesem Kapitel erwähnte »Experimentelle Mathematik« zurück, die sich zu großen Teilen mit den Einsatzmöglichkeiten des Computer im Entdeckungszusammenhang beschäftigt.

5.1.2. Visualisierung

Vor der Entwicklung von Computern bestanden die Visualisierungsmöglichkeiten in der Mathematik im Wesentlichen aus dem Anfertigen von Skizzen mit Stift und Papier. In sehr wenigen Zusammenhängen ließen sich auch dreidimensionale Modelle »basteln«. Diese Art der Veranschaulichung mathematischer Sachverhalte überall dort, wo eine Anschauung möglich ist, hat eine lange Tradition. Schon in den Elementen des Euklid finden sich solche Skizzen.

Dank des technologischen Fortschritts der letzten Jahre sind die Möglichkeiten zur Visualisierung von Sachverhalten massiv ausgeweitet worden. Graphiken und Simulationen fast aller mathematischen Sachverhalte, die eine Anschauung besitzen, sind möglich.

> *Mathematicians have always used their ›mind's eye‹ to visualize the abstract objects and processes that arise in all branches of mathematical research. But it is only in recent years that remarkable improvements in computer technology*

> *have made it easy to externalize these vague and subjective pictures that we ›see‹ in our heads, replacing them with precise and objective visualizations that can be shared with others.*
> [Palais 1999, S. 647]

Solche Visualisierungen können sowohl bei der Entdeckung als auch bei der Plausibilisierung mathematischer Sachverhalte helfen. Insbesondere in der Didaktik der Mathematik werden Bildern und Simulationen zur Erklärung und Veranschaulichung intensiv genutzt.

> *In spite of disclaimers and for better or worse pictures – even if only internalized ones – often play a crucial role in logical demonstration. But as tools for understanding they are indispensable.*
> [Casselmann 2000, S. 1257]

Welchen Beitrag sie zur Veranschaulichung mathematischer Beweise zu leisten vermögen, ist Gegenstand mehrerer Veröffentlichungen [siehe bspw. Davis 1993; Giaquinto 1993]. Wenngleich Skizzen und andere Visualisierungen zur Veranschaulichung dort einen hohen Stellenwert haben, so handelt es sich jedoch immer »nur« um didaktische Hilfsmittel, wie explizit betont wird [vgl. hierzu Hanna & Sidoli 2007][100]. Zwar lassen sich einige Beweise in Form von »picture proofs« darstellen, so dass man ganz ohne Sprache und Schrift mathematische Zusammenhänge erkennen kann[101], diese werden allerdings kaum als »richtige« Beweise im klassischen Sinne anerkannt[102].

In jedem Fall aber können Graphiken und Simulationen mathematischer Sachverhalte heuristisch wertvoll sein, wie das folgende Beispiel aus Abb. 5.1 zeigt[103]. Es handelt sich um ein Bild aller Nullstellen der komplexen Polynome bis zum Grad 18 mit Koeffizienten ± 1[104]. Jede Nullstelle ist durch einen kleinen Punkt markiert.

Das sich ergebende Muster ist beeindruckend[105]. Über die fraktale Struktur hinaus lassen sich mehrere kleine Löcher erkennen. Sie befinden sich an den Stellen der Einheitswurzel. Diese Entdeckung, die man wohl kaum auf andere Weise als mit Hilfe eines solchen Bildes hätte machen können, ist inzwischen auch streng mathematisch in Sätze und Beweise gefasst worden [Bailey & Borwein 2001, S. 4]. Der Algorithmus, der dieses Bild erzeugt hat, ist nur wenige Zeilen lang und hat in dem Programm Mathematica eine Laufzeit von 34 Sekunden [Nylander 2008].

[100] Darüberhinaus bieten Hanna & Sidoli [2007] einen guten Überblick über Veröffentlichungen rund um das Thema »Mathematik und Visualisierung«.

[101] Das *Mathematics Magazine* enthält regelmäßig Beiträge unter der Überschrift *»Proofs without Words«* [Kawasaki 2005, wie z. B.].

[102] Es gibt nur vereinzelte Forderungen, sie als valide Beweismittel anzuerkennen [siehe bspsw. Brown 2008].

[103] Es handelt sich um eine schwarz-weiße Version einer Abbildung von [Nylander 2008].

[104] Es geht also um alle Werte $z \in \mathbf{C}$, für die ein Polynom $p(z) = a_0 + a_1 \cdot z + a_2 \cdot z^2 + \cdots + a_n \cdot z^(n-1), a \in \{-1, 1\}, n \in \{0; 18\}$, gleich 0 ist.

[105] Siehe [Jörgenson 2015] für farbige und [Baez 2011] für hochauflösende Bilder, sowie weitere Erläuterungen zur Thematik.

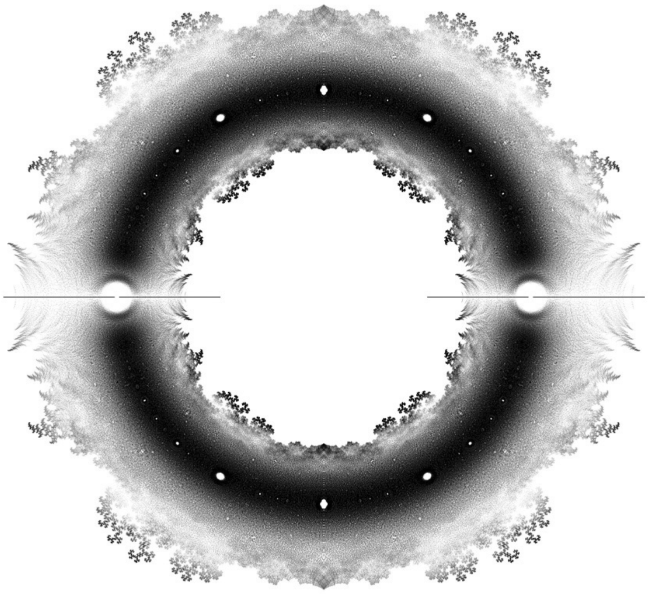

Abb. 5.1.: Nullstellen aller Polynome bis Grad 18 mit den Koeffizienten 1 oder -1

Ein weiteres, deutlich früheres Beispiel für eine Computergrafik, die entscheidende Einsichten lieferte, ist die Entdeckung einer neuen Minimalfläche von David Hoffman und William Meeks III. im Jahre 1983[106], welche in Abb. 5.2 dargestellt ist[107].

Hoffmann beschreibt das Projekt wiefolgt:

> [...] *we were able to create pictures of the surface. They were imperfect* [...] *however, Jim Hoffmann and I could see after one long night of staring at orthogonal projections of the surface from a variety of viewpoints that it was free of self-intersections. Also, it was highly symmetric. This turned out to be the key to getting a proof of embeddedness. Within a week, the way to prove embeddedness was worked out. During that time we used computer graphics as guide to ›verify‹ certain conjectures about the geometry of the surface. We were able to go back and forth between the equations and the images. The pictures were extremely useful as a guide to the analysis.*
> [Hoffman 1987a, S. 11f]

Das Modell war hier integraler Bestandteil der Beweisfindung: *»part of the process of doing mathematics«* [Hoffman 1987a, S. 20].

Wir wir sehen, bieten Computer verschiedene Möglichkeiten, mathematische Objekte und Prozesse zu modellieren und zu visualisieren. Palais [1999] gibt einen Überblick über verschiedene Software zur mathematischen Visualisierung[108] und zählt die vielen Vorteile auf, die jene für die mathematische Forschung haben können. Er betont, dass durch die Betrachtung mathematischer Objekte aus verschiedensten Blickwinkeln bisher unbekannte

[106] Eine Minimalfläche ist eine Fläche im Raum, die lokal minimalen Flächeninhalt hat. Man kann es sich als das mathematisches Analogon zu einer beim Seifenblasen im Blasring aufgespannten Seifenhaut vorstellen (wobei die Seifenhaut allerdings ohne Ränder, also unendlich groß sein müsste). Bis zu ihrer Entdeckung waren nur drei solche Minimalflächen bekannt.
[107] Das Bild ist dem virtuellen Mathematikmuseum von Palais [2006] entnommen.
[108] inklusive der von ihm selbst entwickelten Software *»3D-XplorMath«*.

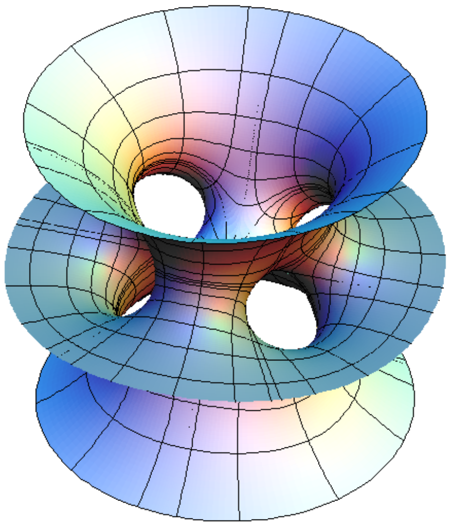

Abb. 5.2.: Costa-Meeks-Hoffman Minimalfläche

Eigenschaften zum Vorschein gebracht werden können, wie in oben aufgeführten Beispielen. Die Möglichkeit der Interaktion des Forschers mit den mathematischen Objekten wie z. B. durch Rotation und Verzerrung spielt hierbei eine große Rolle[109]. Darüberhinaus lassen sich große und komplexe Strukturen, die auf großen Datenmengen beruhen, bildlich oft einfacher und besser erfassen. Sein Fazit ist, dass die Visualisierung mathematischer Sachverhalte viele neue, signifikante Erkenntnisse hervorbringen kann, indem es sie »zum Leben erweckt«. Wir bemerken an dieser Stelle, wie die Grenzen zu den anderen beiden Kategorien insbesondere in diesem Punkt fließend sind – durch die Möglichkeit der Visualisierung kann der Computer sowohl bei der Entdeckung mathematischer Sachverhalte als auch bei der Überzeugung für ihre Richtigkeit hilfreich sein.

5.1.3. Überzeugung

Computer können nicht nur bei Beweisen und dem Auffinden von neuen Vermutungen helfen, sie können auch Überzeugungsarbeit leisten: Durch die Sammlung von Evidenz und Indikation lassen sich wichtige, noch unbewiesene Thesen stärken.

Vermutungen in der Mathematik stützen sich meist auf Intuition und grobe Skizzen möglicher Beweisideen. Nutzt man die Berechnungsmöglichkeiten des Computers, lassen sich Indizien sammeln,um den Grad der Überzeugung für die Richtigkeit einiger Vermutungen zu steigern.

Nehmen wir beispielsweise die Riemannsche Vermutung, die als eine der prominentesten ungelösten mathematischen Problemstellungen gilt. Sehr viele mathematische Sätze bauen auf dieser Vermutung auf und beginnen mit: *»Angenommen, die Riemannsche Vermutung ist korrekt, dann. . . «*[110]. Sabbagh [2003] bezeichnet sie daher gar als *»The greatest unsolved problem in Mathematics«*. Sie steht sowohl auf der von Hilbert [1902] veröffentlichten

[109] Er unterscheidet zwischen mathematischen Objekten und Prozessen, welche sich beide mittels geeigneter Software verbildlichen lassen.

[110] Wolf [2014] glaubt, die Anzahl der Sätze, die auf der Richtigkeit der Riemann Hypothese aufbauen, gehe in die Tausende.

Liste mathematischer Probleme als auch auf der aktuellen vom Clay Mathematics Institute [2015] herausgegebenen Liste von Millenium-Problemen der Mathematik[111]. Aufgrund dieser herausragenden Stellung ist jede Plausibilisierung und jedes Indiz, welches zur Bestätigung oder Widerlegung führen könnte, willkommen.

Die Riemannsche Vermutung besagt, dass alle nichttrivialen Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion auf der Geraden $\{z \in \mathbf{C}; Re(z) = \frac{1}{2}\}$ liegen. Für die ersten 10 Billionen nichtreellen Nullstellen bestätigte Gourdon [2004] die Hypothese mit Hilfe eines Computers. Diesem vorläufigen Höhepunkt waren bereits Berechnungen anderer Mathematiker vorausgegangen[112].

Es gibt mehrere heuristische, probabilistische Argumente dafür, dass die Riemannsche Vermutung mit sehr großer Wahrscheinlichkeit richtig ist [siehe bspw. Good & Churchhouse 1968; Agélas 2014]. Ein Beweis steht zwar bis heute immer noch aus, aber die Anzeichen dafür, dass die Vermutung wahr ist, scheinen überwältigend[113]. Davis & Hersh [1994] fassen die Lage wie folgt zusammen: *»Wir haben gesehen, dass es in der Zahlentheorie heute heuristisches Beweismaterial gibt, das so kraftvoll ist, dass es auch ohne strengen Beweis überzeugt* [...]*«* und fordern von der Philosphie der Mathematik gebührende Aufmerksamkeit für dieses Phänomen ein: *»*[...] *Dies ist ein Stück mathematischer Erfahrung, nach dem sich die Philosophie zu richten hat«* [S. 389].

Detlefsen & Luker [1980] sehen in probabilistischen Methoden, wie sie auch zur Plausibilisierung der Riemannschen Vermutung genutzt werden, großes Potential, um die klassische Mathematik und das klassische Beweiskonzept zu ändern. Sie schätzen es deutlich höher ein als das von Computerbeweisen.

5.1.4. Probabilistische Beweise

Generell werden im Zusammenhang mit nicht-deduktiven Methoden gern probabilistische Beweise erwähnt. Anders als konventionelle, deduktive Beweis erheben probabilistische Beweise nicht den Anspruch, absolute, für immer wahre Aussagen zu etablieren. Vielmehr sind die getroffenen Aussagen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit, die sich teilweise sogar explizit angeben lässt, wahr.

Ein Beispiel für einen probabilistischen Beweis ist der sogenannten Miller-Rabin-Test. Mit seiner Hilfe lässt sich testen bzw. »beweisen«, ob es sich bei einer Zahl um eine Primzahl handelt. Er gründet auf dem kleinen Satz von Fermat und nutzt aus, dass zu jeder Primzahl n eine Basis a gefunden werden kann, so dass $a^{n-1} \equiv 1 \ (mod\ n)$ gilt. Mit Hilfe dieses Resultates schätzt der Miller-Rabin Test in jeder Durchführung unter Verwendung eines zufällig ausgewähltem a, ob die vorliegende Zahl n eine Primzahl ist. Diese Prüfung ist

[111] Auf dieser befinden sich sieben verschiedene mathematische Probleme, deren Lösung jeweils mit einer Million US-Dollar dotiert ist.

[112] Für einen Überblick darüber, zu welchem Zeitpunkt wieviele Nullstellen durch wen bestätigt wurden siehe [Gourdon 2004, S. 2].

[113] Interessanterweise bringt jedoch nur ein klassischer Beweis das Preisgeld ein, probabilistische »Beweise« sind nicht zugelassen. Auch in dem unwahrscheinlichen Falle, dass sich doch noch ein Gegenbeispiel findet, gäbe es keine Belohnung dafür [siehe Clay Mathematics Institute 2015, Rules for the Millenium Prize].

einer gewissen Fehleranfälligkeit unterworfen. Die Wahrscheinlichkeit nach m Prüfungen eine Zahl fälschlicherweise für eine Primzahl zu halten, kann nach oben abgeschätzt werden und ist höchstens $\frac{1}{4^m}$. Nach 10 Iterationen des Tests ist sie somit kleiner als 0.00001. Je mehr Durchläufe man macht, umso geringer wird die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei der getesten Zahl nicht um eine Primzahl handelt. Es lässt sich zu jedem Zeitpunkt exakt angeben, wie hoch diese Wahrscheinlichkeit noch ist [vgl. bspw. Brent 2006]. Dank der durch Computer bereitgestellten Rechenkapazitäten lässt sich die Wahrscheinlichkeit beliebig reduzieren – allerdings natürlich nicht ganz auf Null.

Ein weiteres Beispiel für einen probabilistischen Beweis ist das Auffinden eines Algorithmus zur Lösung des *»Travelling Salesman Problems«* (TSP). Dem Problem liegt als Anschauung ein Handelsreisender zugrunde, welcher eine bestimmte Anzahl an Städten besuchen muss und auf der Suche nach dem kürzestmöglichen Weg ist, welcher ihn durch alle Städte und wieder nach Hause führt[114].

Zur Lösung sucht man einen Algorithmus, welcher in endlicher Zeit den kürzesten Weg durch einen gegebenen Graphen angibt. Schon ab moderater Größe des zugrundeliegenden Graphen ist das naive Vorgehen, alle Wege durchzuprobieren, aufgrund der schieren Anzahl nicht mehr in endlicher Zeit zu bewerkstelligen[115].

Für bestimmte, fixe Städtekonfigurationen gibt es exakte Lösungen. Eine der größten exakten Lösungen zeigt den kürzesten Weg durch alle 24.978 Städte Schwedens (siehe Abb. 5.3).

Dass es sich bei dem ca. 72.500 km bzw. 855.597 TSPLIB-Einheiten[116] langen Weg um die kürzeste und damit optimale Lösung handelt, wurde 2004 bewiesen. 2001 wurde bereits ein Weg gefunden, welcher 855.610 TSPLIB-Einheiten lang war[117]. Die Rechenzeit des Algorithmus lag bei ca. 30 Minuten. Kurz danach konnte mit Hilfe von *»Concorde«*[118] eine untere Schranke von 855.331 etabliert werden. Damit war klar, dass die gefundene Lösung um höchstens $0,033\%$ länger sein konnte als die optimale Lösung. Als 2003 die optimale Lösung entdeckt wurde, dauerte es noch über ein Jahr, bis gezeigt werden konnte, dass sie

[114] Das Problem ist insofern von besonderem Interesse, als es viele praktische Anwendungen hat, die über den tatsächlich reisenden Vertreter hinaus gehen. So findet es bspw. in der Industrie bei der Herstellung von Platinen, in die Löcher gelasert werden sollen, Anwendung. Bewegt sich hierbei der Laser optimal, d.h. legt er die kürzestmögliche Strecke zurück, lässt sich Produktionszeit sparen. Überhaupt erfreut sich das Problem großer Beliebtheit, es finden Wettbewerbe statt, bei denen auf Zeit TSP-Probleme gelöst werden, es gibt eine Online-Bibliothek, die gelöste und noch zu lösende TSP-Probleme mit ihren Lösungen katalogisiert. Die Popularität geht vermutlich (über die Anwendbarkeit hinaus) auch auf die Kombination aus Anschaulichkeit (der Fragestellung) und Komplexität (der Lösung) zurück (ähnlich wie beim Vierfarbensatz und Fermats letztem Satz).

[115] Bei 7 Städten sind es $(7-1)! = 6 \cdot 5 \cdots 1 = 720$ mögliche Wege; bei 100 Städten schon ca. 10^{200}.

[116] Die Maßeinheit TSPLIB wurde durch die gleichnamige Internetseite von Reinelt [2015] festgelegt. Auf ihr findet sich eine große Bibliothek mit vielen bekannten Travelling-Salesman-Problemen und Lösungen.

[117] Die Zahlen und Daten für diese und die folgenden Angaben zur Suche nach der optimalen Lösung für den Weg durch Schweden sind [Cook 2015, Sweden Computation Log] entnommen, ebenso die Grafiken auf denen Abb. 5.3 beruht.

[118] Dies ist ein ca. 130.000 Zeilen langer Computercode, welcher sich bei der Lösung größerer TS-Probleme bewährt hat. Das Forschungsteam Applegate et al. [2007], welches das eben erwähnte Schweden-TSP löste, versteht ihn als Kameraden (*»companion«*) bei der Lösung von Travelling Salesman Problemen [S. 1]. Der Code wurde nicht nur im Internet kostenlos zur Verfügung gestellt, sondern inzwischen gibt es auch eine kostenlose Concorde-App auf i-Tunes [Cook 2015, Concorde TSP Solver for iOS].

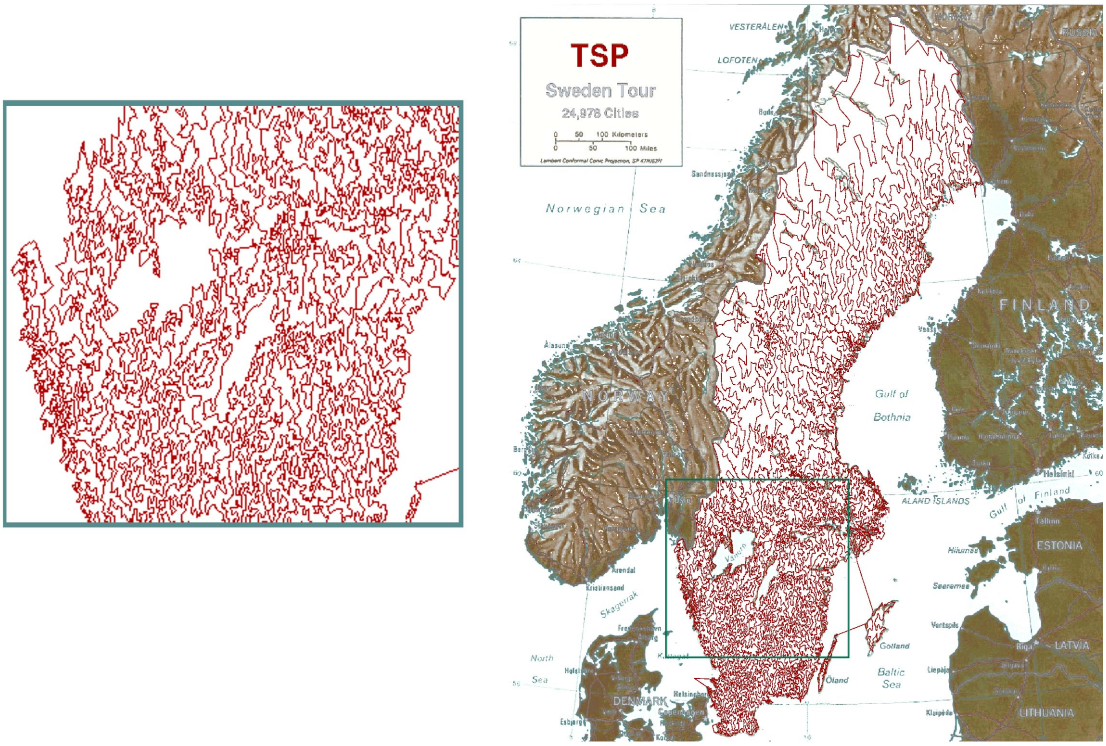

Abb. 5.3.: Kürzester Weg durch alle Städte Schwedens

optimal ist. Die größte bekannte untere Schranke unterhalb der optimalen Lösung[119] lag 2003 bei 855.528, damit war der Weg maximal um $0,009\%$ zu lang. Sie wurde (ebenfalls durch Concorde) in einer Rechenzeit von ca. 4,4 Jahren auf mehreren 2,4 GHz Xeon Linux Arbeitsstationen etabliert. Die untere Schranke in Höhe der optimalen Lösung benötigte umgerechnet hingegen ca. 85 Jahre Rechenzeit, d.h. um 2004 die letzte Unsicherheit in Höhe von $0,009\%$ auszuräumen, musste fast 20mal soviel Rechenzeit aufgewendet werden.

Das Beispiel des Travelling-Salesman-Problems wird besonders häufig im Zusammenhang mit probabilistischen Beweisen genannt. Hierbei meint man aber häufig nicht die eben beschriebenen Lösungen, sondern die noch deutliche speziellere Art der Lösung kleinerer TSP-Probleme mittels DNA-Computing. Dabei handelt es sich um einen Versuchsaufbau bei dem die Codierung aus vier Basen innerhalb eines DNA-Moleküls genutzt wird. Durchgeführt wurde sie 1994 von Adleman für eine einfache Variante des Problems des Handlungsreisenden. Er benutzte hierfür 100 Mikroliter DNA und erstellte für jede zu besuchende Stadt der Aufgabenstellung einen Typ DNA-Fragment, welcher zur Bindung an andere Fragmente fähig ist. Beim Zusammenmixen der Fragmente im Reagenzglas entstanden in Sekunden durch Bindung größere DNA-Fragmente, die verschiedene Reiserouten repräsentierten. Durch eine weitere chemische Reaktion (die deutlich zeitaufwendiger war) eliminierte er im Anschluß die DNA-Fragmente, die längere Reiserouten repräsentierten. Übrig blieb die Lösung des Problems. In diesem Falle lässt sich die Fehlerwahrscheinlichkeit, bzw. die Wahrscheinlichkeit, dass der Weg, der bisher der kürzeste gefundene Weg ist, auch tatsächlich die optimale Lösung darstellt, nicht genau beziffern oder abschätzen. Au-

[119]Sobald die untere Schranke gleich der gefundenen Lösung ist, ist auch bewiesen, dass jene die kleinstmögliche und damit optimale Lösung sein muss.

ßerdem lässt sich das Verfahren nicht mehr nachvollziehen, da tatsächlich im Verlaufe der Lösung Material verbraucht wird und ein zweiter Versuch anders verlaufen könnte. Hierbei handelt es sich also um ein sehr spezielles Verfahren, das sich von anderen probabilistischen Beweisen wie dem oben beschriebenen Primzahltest deutlich unterscheidet.

Generell beruhen probablistische Methoden auf einer Vielzahl deduktiver Beweisschritte. In obigem Primzahlbeispiel enthält die Berechnung der Fehlerwahrscheinlichkeit beispielsweise keinerlei probabilistische Argumente und wird rein deduktiv hergeleitet. Der Satz *»Die Zahl x ist mit* $99,99\%$*iger Wahrscheinlichkeit eine Primzahl«* ist also eine wahre mathematische Aussage, zu der es einen strengen Beweis gibt. Der Satz *»Die Zahl x ist eine Primzahl«* ist hingegen eine sehr wahrscheinliche mathematische Aussage, zu der es einen probabilistischen Beweis gibt[120].

Zumeist sind mathematische Aussagen, insbesondere die interessanten, eher allgemeinerer Natur, d.h. die erste Aussage und auch der Beweis für sie werden gemeinhin nicht als schön wahrgenommen. An einer Aussage wie der letzteren wäre man eher interessiert, aber hier scheint der Konsens in der mathematischen Gemeinschaft, einen probabilistsichen Beweis nicht als Ersatz für einen traditionellen Beweise anzuerkennen. Auch Womach & Farach [2003] sehen keinen Grund, probabilistische Beweise abzulehnen, weil sie nicht den Standards mathematischer Strenge genügen: *»the reason to reject RA's cannot be simply for reasons of lack of rigor«* [S. 83], sondern weil sie oftmals wenig *»explanatory power«* mitbringen: *»That is what makes them less acceptable, not the fact that they are probabilistic«* [S. 73]. Easwaran [2009] bemängelt, dass zum Nachvollziehen eines probabilistischen Beweises noch zusätzlich Wissen benötigt wird, das nicht im Beweis inkludiert ist (wie wurde der Beweis erzeugt, sind die vermeintlich zufälligen Schritte auch wirklich zufällig). Daher und weil ihnen die sogenannte *»transferability«*[121] fehle, hält er probabilistische Beweise nicht für richtige Beweise. Fallis [1997] ist der Ansicht, dass diese ablehnende Haltung unvernünftig ist. Seiner Ansicht nach finde sich zu jeder der Eigenschaften, die bei probabilistischen Beweisen als problematisch angesehen werden, mindestens ein traditioneller Beweis, der ebenfalls diese problematische Eigenschaft besitzt, aber innerhalb der mathematischen Gemeinschaft trotzdem anerkannt ist. Hier finden wir in der gesamten Argumentation deutliche Ähnlichkeiten, wenn nicht gar Parallelen zu der Diskussion um die Anerkennung von Computerbeweisen. Auch das Argument, probabilistische Beweise seien den Naturwissenschaften zuzuordnen und aposteriori findet sich wieder[122]. Dagegen argumentiert McEvoy [2011]: Insbesondere, wenn man sich im Zusammenhang mit Wahrscheinlichkeiten auf ideale statt physikalische Objekte beziehe[123] und die probabilistischen Überlegungen nicht unbedingt auf Sinneswahrnehmung basieren, sind sie seiner Meinung nach nicht per se a posteriori.

[120] Auf diese Tatsache weist auch McEvoy [2011] explizit hin.

[121] Hiermit meint er, dass sich ein Experte von der Wahrheit eines Beweises überzeugen lässt, wenn er nur alle Schritte des Beweises nachvollzieht. Wir fühlen uns stark an Tymoczkos Kriterium der Überschaubarkeit erinnert.

[122] z.B. bei Barendregt & Wiedijk [2005].

[123] Zum Beispiel beim Würfelwurf: ein tatsächlicher physischer Würfel kann Defekte haben (in dem Sinne, dass er uneben ist und eine Zahl öfter fällt), während bei einem idealen Würfel die Wahrscheinlichkeit für jede Zahl gleich ist.

> *The moral to take from this is that probabilistic reasoning can be a priori once we are not reasoning about empirical objects, or using premises that are themselves empirically warranted.*
> [McEvoy 2011, S. 7]

Woher kommt diese Ähnlichkeit in der Reaktion auf Computerbeweise und probabilistische Beweise? Sowohl probabilistische als auch Computer-Beweise enthalten ein starkes algorithmisches Element, oftmals sind viele Rechenschritte und Iterationen vonnöten und die Lösung selbst bietet keinen Einblick in die Zusammenhänge. Eben wegen dieser Ähnlichkeit findet Fallis [1997], dass die mathematische Gemeinschaft konsequenterweise auch probabilistische Beweise akzeptieren muss, wenn sie Computerbeweise akzeptiert[124].

Easwaran [2009] widerspricht – seiner Ansicht nach gibt es einen deutlichen Unterschied zwischen Computerbeweisen und probabilistischen Beweisen. Er besteht in einer Beweiseigenschaft, die er *»transferability«* nennt und die Computerbeweise im Gegensatz zu probabilistischen Beweisen erfüllen.

> *A proof is transferable just in case the sequence of propositions itself constitutes the proof – nothing about the method by which the propositions were generated is essential.*[125]
> [Easwaran 2009, S. 354]

So lasse sich bei einem Beweis, der nicht *»transferable«* ist z.B. nicht mehr erkennen, ob Zahlenfolgen zufällig erzeugt wurden oder doch nach einem bestimmten vom Autor verfolgten Muster. Bei Computerbeweisen könne man (immerhin) Programme mitveröffentlichen. Diese könnte man erneut laufen lassen und die *»transferability«* wäre gesichert. Im Gegensatz dazu könnte das DNA-Computing nicht wiederholt werden. Natürlich gibt es auch hierauf eine Reaktion: Jackson [2009] erklärt, warum er randomisierte Algorithmen durchaus für *»transferable»* hält und daher keinen Grund sieht, probabilistische Beweise zurückzuweisen.

Unabhängig von der Diskussion darum, ob es sich bei probabilistischen Beweisen um richtige Beweise handelt, stellen sie ein interessantes Hilfsmittel dar. Man kann mit ihnen Evidenz für die Richtigkeit mathematischer Zusammenhänge sammeln. Wenn auch die Erklärungskraft nicht groß ist, so besitzen sie doch große Überzeugungskraft. In einigen Fällen, wenn eine Erklärung der Zusammenhänge nicht gewünscht ist, sondern nur eine Bestätigung, ob die untersuchte These wahr oder falsch ist, können sie helfen:

> *On the other hand, there may be cases where the bare truth or falsity of a claim is important even in the absence of accompanying explanation. For example, one could imagine a situation in which an important and interesting conjecture – say the Riemann Hypothesis – is being considered, and a probabilistic method is used to show that some number is very likely a counterexample to it. It is*

[124] Er schließt hier explizit auch das DNA Computing ein. Untermauert sieht er seine Sichtweise dadurch, dass auch Beweisskizzen gemeinhin akzeptiert werden, auch wenn dadurch mögliche Lücken und Fehler in der Argumentationskette in Kauf genommen würden.
[125] Die Beschreibung erinnert stark an den von Tymoczko beschriebenen »appeal to authority«.

> *interesting to speculate what the reaction of the mathematical community might be to this situation. Would work on trying to prove RH cease? Would it continue until a rigorous deductive proof of the counterexample is constructed?*
> [Baker 2015, Abschnitt 3.4]

Probabilistische Überprüfungsmethoden können Sicherheit bis zum gewünschten Grad liefern und benötigen dafür weniger Zeit als eine komplette Überprüfung.

Womach & Farach [2003] sprechen sich aus eben diesem Grund für probabilistische Beweise aus. Sie sehen einen Beweis erst mit seiner Formalisierung als korrekt an: *»the epistemic weight of proof is bourne by the correctness of the formal translation«* [S. 80]. Dadurch, dass es keine Möglichkeit gibt, informelle Beweise mechanisch in formale zu übersetzen, ist eine Übersetzung fehleranfällig und muss genau geprüft werden: *»These procedures themselves are long, subject to various confidence worries, and result in extremely long proofs«* [S. 80]. Der so entstehende lange, formalisierte Beweis besäße dann auch nicht mehr Erklärungskraft als ein probabilistischer Beweis und wäre zudem noch deutlich länger und zeitaufwendiger. Daher sollte man in solchen Fällen probabilistischen Beweisen als zulässiger Methode des mathematischen Erkenntnisgewinns den Vorzug geben: *»allowing a bounded probability of error makes the system much more powerful and useful than the traditional (errorless) counterpart«* [Goldreich 1999, S. IV].

An dieser Stelle äußert sich im Zusammenhang mit probabilistischen Beweisen der deutliche Wunsch, auch nicht-deduktive oder zumindest nicht-streng-deduktive Methoden in der Mathematik zu legitimieren. Generell werden nicht-deduktive Aspekte in Forschung und Heuristik wenig kommuniziert und vor allem selten verschriftlicht. Sobald ein Beweis gefunden wurde, interessieren die heuristischen Argumente, die zu ihm geführt haben, nicht mehr und bleiben auf der Strecke, anstatt ihren Weg in die jeweiligen Veröffentlichungen zu finden.

> [...] *it is usual to cover up the processes leading to the construction of a proof, when publishing it – naturally enough, since once a result is proved, any non-conclusive evidence that existed before the proof is no longer of interest.*
> [Franklin 1987, S. 4]

Eine Ausnahme hiervon ist der Klassifikationssatz, er ist ein interessanter Sonderfall, da aufgrund der Menge beteiligter Personen verschiedenster Nationalität schon vorab Plausibilisierungen, Ideen, Lösungsansätze und Teilergebnisse publiziert werden mussten. Bemerkenswert findet Franklin [1987] hierbei nicht nur, dass sich alle beteiligten Forscher schon lange vor Ende sicher waren, dass die Aussagen, die sie beweisen wollten, stimmten – außerdem wurde im Zuge der Beweisführung oftmals von »Entdeckungen« gesprochen: *»these ›discoveries‹ had in many cases a strong non-deductive aspect«* [Franklin 1987, S. 10].

5.2. Paradigmenwechsel durch Computer

Generell haben wir die Einbeziehung des historischen Kontextes in die Untersuchung mathematischer Konzepte und Methoden bereits im Abschnitt 4.2 als einen Aspekt der Hinwendung zur mathematischen Praxis gesehen. Mathematik wird nicht mehr als unveränderbar und statisch wahrgenommen, sondern als ein dynamischer Prozess: *»The history of mathematics shows that mathematics is a dynamic process, which often develops through tortous and tormented paths not determined a priori, and proceeds through false starts and standstills, routine periods and sudden turnings* [Celluci 2005, S. 21]. In diesem Zusammenhang sind wir vermehrt auf die Idee gestossen, Computer im Allgemeinen und die Akzeptanz von Computerbeweisen im Speziellen würden einen Paradigmenwechsel einleiten. In diesem Abschnitt wollen wir diese Idee etwas genauer untersuchen.

Der Ausdruck Paradigmenwechsel wurde von Kuhn [2014] geprägt. Er glaubt, dass Wissenschaft nicht kumulativ wächst; statt immer auf bereits existierenden Theorien aufzubauen, durchlaufe Wissenschaft verschiedene Phasen. Das Voranschreiten jeder Wissenschaft lässt sich in die Phasen Normalwissenschaft, Revolution und Paradigmenwechsel aufteilen.

Ein Paradigma ist hierbei ein *»festumrissener Forschungskonsensus«* [Kuhn 2014, S. 30], welcher seinen Status erlangt, weil er sich als hilfreich bei der Lösung spezieller Probleme erwiesen hat. *»Normalwissenschaft»* findet innerhalb der festgelegten Spielregeln im Kosmos des Paradigmas statt. Das Paradigma geht als Leitinstanz konkreten Regeln voraus[126], auf seiner Basis bildet sich für den Wissenschaftler ein *»starkes Netz von Verpflichtungen – begrifflicher, theoretischer, instrumenteller und methodologischer Art«* [Kuhn 2014, S. 68]. Innerhalb der Normalwissenschaft widmet er sich daher hauptsächlich folgenden Problemen:

- Bestimmung bedeutsamer Tatsachen
- Wechselseitige Anpassung von Theorie und Praxis
- Artikulierung der Theorie

Einzelne wissenschaftliche Theorien und Hypothesen lassen sich innerhalb eines Paradigmas hinsichtlich ihrer Erklärungskraft überprüfen und vergleichen; über verschiedene Paradigmata hinweg ist dies nicht möglich, da theoretische Begriffe, methodische Voraussetzungen etc. stark vom jeweiligen Paradigma abhängen. Dieses Phänomen nennt Kuhn *»Inkommensurabilität«*. Eine neue Entdeckung in der Phase der Normalwissenschaft, die nicht ins Schema passt und sich nicht ohne weiteres im Sinne des Paradigmas erklären lässt, bezeichnet Kuhn als *»Anomalie«*.

> *In der Wissenschaft tritt das Neue, [...] nur mit einer sich durch Widerstand manifestierenden Schwierigkeit zutage, und zwar vor einem durch Erwartung gebildeten Hintergrund.*
> [Kuhn 2014, S. 76]

Eine Anomalie wird vorerst nicht unbedingt als Gegenbeispiel oder Falsifizierer gesehen, sondern führt zumeist zu einer neuen Ausdeutung und zu Flickversuchen auf Basis des

[126] Oft wird besonders in der End- oder Vorphase eines Paradigmas häufiger über Regeln diskutiert: *»Vor allem die einem Paradigma vorausgehende Periode ist regelmäßig durch häufige und tiefgehende Diskussionen über gültige Methoden, Probleme und Lösungsgrundsätze gekennzeichnet«* [Kuhn 2014, S. 62].

vorherrschenden Paradigmas. Häufen sich aber Anomalien[127] und scheitern die Versuche, die neuen Phänomene im bisherigen Kosmos zu erklären, führt das die Wissenschaft in eine *»Krise«*[128].

Die Suche nach einem neuen Paradigma, welches die Anomalien erklären kann, beginnt. Die Wissenschaft befindet sich nun im Stadium der *»Revolution«* und *»außerordentlichen Forschung«*.

> *Das Wuchern konkurrierender Artikulationen, die Bereitschaft, alles zu versuchen, der Ausdruck einer offenen Unzufriedenheit, das Zufluchtsuchen bei der Philosophie*[129] *und die Grundlagendiskussionen, all das sind Symptome für einen Übergang von normaler zu außerordentlicher Forschung.*
> [Kuhn 2014, S. 103]

Ist ein neues, vielversprechendes Paradigma gefunden[130], vollzieht sich ein Paradigmenwechsel. Veränderungen der Standards und Probleme gehen mit einer konzeptionellen Veränderung einher[131]. Hiermit verschiebt sich auch die Sichtweise, *»wenn der Übergang abgeschlossen ist, hat die Fachwissenschaft ihre Anschauungen über das Gebiet, ihre Methoden und ihre Ziele geändert«* [Kuhn 2014, S. 98][132]. Das vorangegangene Paradigma ist mit dem alten nicht mehr vergleichbar, sie sind sind unvereinbar, inkommensurabel. Das entscheidend Neue an Kuhns Theorie ist also die Idee, dass wissenschaftlicher Fortschritt nicht durch fortwährende, kumulative Annäherung an eine (die) Wahrheit entsteht, sondern eher durch eine Darwin'sche Evolution ohne Sicht auf ein fixes Ziel.

Die Reaktionen auf diese Theorie der Paradigmenwechsel sind vielfältig. Crowe [1975] glaubt nicht an Revolutionen **in** der Mathematik. Er zählt Metamathematik nicht zur Mathematik hinzu. Revolutionen können seiner Ansicht nur auf der Metaebene geschehen. Dunmore [1992] und Dauben [1995] glauben hingegen an eine feste Einheit aus Mathematik (bestehend aus Objekten wie Sätzen, Defintionen etc.) und Metamathematik (Sichtweisen und Methoden). Smee [2012] hält vieles in der Diskussion um Paradigmenwechsel in der

[127] Es könnte prinzipiell auch eine Anomalie ausreichen, um die Wissenschaft in eine Krise zu stürzen. Sie müsste dann allerdings besonders starke Implikationen für das Paradigma haben. So müsste sie bspw. eine ausdrückliche und grundlegende Verallgemeinerung eines Paradigmas deutlich in Frage stellen oder Anwendungen verhindern, die für die Praxis besonders wichtig sind [vgl. Kuhn 2014, S. 95].

[128] Die Krise zeichne sich allerdings schon bei den ersten Regeländerungen ab, die durchgeführt werden, um eine Anomalie in das Paradigma einzugliedern: *»Alle Krisen beginnen mit der Aufweichung eines Paradigmas und der sich daraus ergebenden Lockerung der Regeln für die normale Forschung«* [Kuhn 2014, S. 97].

[129] *»Ich glaube, dass besonders in Perioden anerkannter Krisen die Wissenschaftler sich der philosophischen Analyse als Mittel zur Lösung von Rätseln auf ihrem Gebiet zuzuwenden pflegen«* [Kuhn 2014, S. 101].

[130] Laut Kuhn [2014, S. 181] muss der Anwärter folgende Bedingungen erfüllen: Er muss einige hervorragende und allgemein anerkannte Probleme lösen (die sich sonst auf keine andere Weise bewältigen lassen) und er muss die Erhaltung eines relativ großen Teils der Problemlösungsfähigkeit versprechen, die sich in der Wissenschaft von ihren Vorgängern angesammelt hat.

[131] In Kuhns Worten: *»Der Übergang von einem krisenhaften Paradigma zu einem neuen, aus dem eine neue Tradition der normalen Wissenschaft hervorgehen kann, ist weit von dem kumulativen Prozess entfernt, wie ich eine Artikulation oder Erweiterung des alten Paradigmas darstellen würde. Es ist vielmehr ein Neuaufbau des Gebietes auf neuen Grundlagen, ein Neuaufbau, der einige der elementarsten theoretischen Verallgemeinerungen des Gebietes wie auch viele seiner Paradigmamethoden und –anwendungen verändert* [Kuhn 2014, S. 98].

[132] Unter anderem aus diesem Grunde wählt Kuhn das Wort *»Revolution«*: Sämtliche vorherige Werte werden in Frage gestellt und umgeworfen.

Mathematik für Definitionssache, betont jedoch, dass es nicht-kumulative Veränderungen in der Mathematik durchaus gibt: *»there can be, and have been non-cumulative changes in mathematics«*[S. 4]. Allerdings seien sie jedoch seltener als in anderen Wissenschaften.

> *This may be because it is easier for mathematicians to reinterpret existing theories in terms of their new views of mathematics than to discard the older theories entirely.*
> [Smee 2012, S. 4]

Grabiner [1974], die allgemein an Paradigmenwechsel in der Mathematik glaubt, betont dies ebenso. Im Gegensatz zu anderen Wissenschaften werden nach einer Revolution vorherige mathematische Ergebnisse zumeist wieder eingegliedert (es findet lediglich eine Änderung ihrer Wertigkeit statt).

> *Mathematics is not the unique science without revolutions. Rather, mathematics is that area of human activity which has at once the least destructive and still the most fundamental revolutions.*
> [Grabiner 1974, S. 364]

Trotz stattfindenden Paradigmenwechseln ist Mathematik ihrer Meinung nach daher kumultativ. Eine ähnliche Sichtweise findet sich auch bei Heintz [2000], statt von Kuhnscher Revolution spricht sie von *»Re-Evalution«* in der Mathematik.

Nach dieser generellen Betrachtung der Möglichkeit von Revolutionen und Paradigmenwechsel nehmen wir nun einmal an, Mathematik würde sich verhalten wie andere Wissenschaften und Kuhns Theorien wären auf sie übertragbar. Könnten Computerbeweise dann Auslöser eines Paradigmenwechsels sein?

Davis & Hersh [1988] vergleichen das Umwälzungspotential von Computerbeweisen mit dem von euklidischen Geometrien und würden sich daher wohl dafür aussprechen.

Wie wir in den vorangehenden Kapiteln gesehen haben, wurden einige Flickversuche unternommen, um Computerbeweise konzeptionell in die bestehende Theorie einzugliedern. Computerbeweise scheinen also durchaus eine Anomalie darzustellen. Aber sind sie eine so gravierende Anomalie, dass letzlich sämtliche Flickversuche scheitern und wichtige, grundlegende Verallgemeinerungen des Paradigmas in Frage gestellt werden oder gar wichtige Anwendungen für die Praxis verhindert werden[133]? Das scheint uns doch eher unwahrscheinlich. Nichtsdestoweniger ließen sich auch die ersten Merkmale einer Krise beobachten – Unzufriedenheit wurde offen zum Ausdruck gebracht und man wendete sich zunächst zur Philosophie bzw. zu den Grundlagen hin.

Eventuell könnten durch den allgemein ansteigenden Computereinsatz in der Mathematik noch weitere Anomalien hervorgerufen werden. Wenn sich diese deutlich häufen, könnten sie letztendlich eine Krise herbeiführen und somit den Computereinsatz in der Mathematik zum Auslöser einer Revolution machen. Ein neues Paradigma müsste dann gefunden

[133] Letzterer Grund, aus dem eine Anomalie besonders gravierende Wirkung haben könnte, scheint sowieso nur schwer auf die Mathematik zu übertragbar.

werden, um mit dem Computereinsatz in der Mathematik umzugehen. Ein solches würde sicherlich eine etwas andere Beweiskonzeption enthalten und Computerbeweise umfassen.

Tatsächlich sieht u.a. Rotman [2005] Computer allgemein als mögliche Auslöser für einen Paradigmenwechsel. Die Frage, ob der Computer die klassische Mathematik nachhaltig verändern wird, bejaht er ausdrücklich.

> [...] *the effect of the computer on mathematics (pure and applied) will be correspondingly far-reaching and radical,* [...] *the computer will ultimately reconfigure the mathematical matrix from its sprang, and it will do this not only by affecting changes in content and method over a wide mathematical terrain, but more importantly by altering the practice, the overall nature, and perhaps the very conception we have of mathematics.*
> [Rotman 2005, S. 1671]

Sollte durch den Computer in der Tat die Konzeption dessen, was man unter Mathematik versteht, grundlegend verändert werden, so wäre dies ein deutlicher Paradigmenwechsel.

Bailey und Borwein prognostizieren, dass der Computer die Praxis des Mathematikers erheblich ändern wird. Die durch stetige Weiterentwicklung der Technik steigenden Möglichkeiten könne man nicht ignorieren: Die Rechenpower wird steigen, die Kosten dafür sinken, der heutige Rechner könnte in 10 Jahren einem Taschenrechner entsprechen [Bailey & Borwein 2001]. Borwein [2008] nennt sich selbst *»computer-assisted fallibilist«* [S. 35] und glaubt, dass der Einsatz von Computern einen nachhaltigen Einfluss auf die Mathematik haben wird: *»The power of modern computers matched with that of modern mathematical software and the sophistication of current mathematics is changing the way we do mathematics«* [Borwein 2008, S. 34]. Um diesem Wandel adäquat begegnen zu können, müsse man quasi-empirische Methoden zulassen.

> *Today, while I appreciate fine proofs and aim to produce them when possible, I no longer view proof as the royal road to secure mathematical knowledge.*
> [Borwein 2008, S. 35]

Auch wenn sich dann Methoden und Kriterien der Mathematik ändern würden, so bliebe doch immerhin die Verlässlichkeit mathematischen Wissens erhalten.

Ob sich Computer irgendwann als Auslöser für einen Paradigmenwechsel in der Mathematik verantwortlich zeichen oder nicht – wir sehen an dieser Stelle erneut, worauf wir im Verlaufe dieser bereits Arbeit mehrfach gestossen sind: Durch den Computereinsatz sind viele Themen der Philosophie der Mathematik (wieder) akut geworden: Sicherheit der Resultate, Rolle von Berechnungen, Natur des mathematischen Verständnisses. Andere hingegen haben an Interesse verloren oder wurden gar verworfen. Man könnte also sagen, dass auf Meta-Ebene, in der Philosophie der Mathematik, zumindest ein kleiner Paradigmenwechsel stattgefunden hat.

6. Anhang

A. Außergewöhnliche Beweise

In diesem Kapitel geben wir einen kurzen Überblick über drei außergewöhnliche Beweise der letzten Jahre. Der Reihe nach stellen wir den Beweis des Klassifikationssatzes einfacher endlicher Gruppen, Wiles' Beweis des Fermat'schen Satzes und Hales' Beweis des Kepler'schen Packungsproblems vor und schildern die jeweiligen Reaktionen der Gemeinschaft der Mathematiker auf diese. Dies ermöglicht einen Vergleich im Hinblick auf verschiedene Beweiseigenschaften zwischen ihnen und dem Vierfarbensatz. Ausgewählt haben wir diese drei Beispiele, da sie als besondere Errungenschaften der aktuellen Mathematik angesehen werden können sowie darüberhinaus oftmals in einem Zuge mit dem Vierfarbenbeweis genannt und mit ihm verglichen werden[134].

A.1. Der Klassifikationssatz einfacher endlicher Gruppen

Beim Klassifikationssatz für einfache endliche Gruppen handelte es sich um ein Großprojekt. Über mehr als 60 Jahre waren mehr als 100 Mathematiker aus verschiedenen Ländern an der Klassifikation der einfachen endlichen Gruppen beteiligt. Der Beweis umfasst ca. 15.000 Seiten in ca. 500 Fachartikeln (vergleiche Einleitung von Gorenstein [1983]). Diesem sehr langen Beweis verdankt der Klassifikationssatz auch seinen Beinamen *»The enormous theorem«* [Gorenstein 1985]. Der Satz besagt, dass sich alle einfachen endlichen Gruppen in eine von vier Kategorien einteilen lassen[135]. Die größte einfache endliche Gruppe wurde

[134] Odifreddi [2000] beschreibt in seinem Buch die 30 größten mathematischen Probleme, die innerhalb der letzten 100 Jahre gelöst wurden. Neben dem Vierfarbenproblem gibt er auch den Klassifikationssatz einfacher endlicher Gruppen, den Fermat'schen Satz sowie das Kepler'sche Packungsproblem an. Mathematikprofessor Griffiths [2000] schätzt die Beweise von Fermats letztem Satz, dem Keplerschen Packungsproblem und dem Vierfarbensatz als die drei größten mathematischen Errungenschaften des 20ten Jahrhunderts ein.

[135] Einfache endliche Gruppen lassen sich mit Primzahlen vergleichen. So sind Primzahlen nur durch sich selbst und 1 teilbar und jede natürliche Zahl, die keine Primzahl ist, lässt sich in ihre Primfaktoren zerlegen. Einfache endliche Gruppen bestehen nur aus sich selbst und der Einheitsgruppe und jede endliche Gruppe lässt sich in einfache endliche Gruppen zerlegen. Es handelt sich also um die »Bausteine«, aus denen sich alle möglichen endlichen Gruppen konstruieren lassen.

1980 von R. Griess entdeckt, man nennt sie aufgrund ihrer Größe das »Monster«, sie hat $8 \cdot 10^{53} = 808.017.424.794.512.875.886.459.904.961.710.757.005.754.368.000.000.000$ Elemente [Borcherds 2002].

Auf die Ankündigung Gorensteins[136] im Jahr 1981, der Klassifikationssatz sei bewiesen, reagierte Griess mit gemischten Gefühlen, wie er später berichtet:

> *The completeness claim created a serious dilemma for me personally. On one hand, I had great respect for the top finite group theorists and the impressive classification machinery. However, such a huge claim seemed rushed to me. If the classification were indeed complete, it would be not only the longest proof in history but also an* ***induction proof****. The expected list of finite groups does not yet correspond exactly to anything else in mathematics, and we were aware that past technical mistakes had incorrectly ruled out groups later found to exist.* [...] *The wait for resolution is justified, given the extreme length and difficulty of the material (thousand of journal pages) and the importance of knowing the finite simple groups.*
> [Griess 2007, S. 236, Hervorhebung wie im Original]

Die schiere Menge des gesammelten Materials und die große Anzahl beteiligter Mathematiker führte zu gewissem Argwohn unter Mathematikern. Außerdem fanden sich einige kleinere Fehler sowie ein größerer Fehler im Bereich der »quasithin groups«. Aschbacher & Smith [2004] füllten diese größere Lücke im Beweis, die entsprechende Arbeit war ca. 1300 Seiten stark. Aschbacher schrieb nach dieser Veröffentlichung:

> [...] *to my knowledge the main theorem* [of our paper] *closes the last gap in the original proof, so (for the moment) the classification theorem can be regarded as a theorem.*
> [Aschbacher 2004, S. 739]

Allerdings schätzt er die Wahrscheinlichkeit, dass in dem Beweis noch Fehler enthalten sind, auf eins, also auf 100% [Aschbacher 2005]. Aufgrund dieser Fehlerwahrscheinlichkeit zweifeln einige Mathematiker, ob man den Klassifikationssatz tatsächlich als bewiesen ansehen kann [Auslander 2008].

Der Mathematiker Serre äußert sich in einem Interview jedoch optimistisch zu dem Beweis:

> *It is a beautiful theorem. It has many surprising applications. I don't think that using it raises a real problem for mathematicians in other fields: they just have to make clear what part of their proof depends on it.*
> [Serre interviewt von Raussen & Skau 2004, S. 213]

Solomon [2001], selbst am Beweis beteiligt, glaubt, dass sich der Beweis auf ca. 5000 gedruckte Seiten vereinfachen lässt. Trotzdem bleibt auch für ihn die Frage nach (und somit wohl auch die Hoffnung auf) einen einfacheren, wesentlich kürzeren Beweis:

[136] Er koordinierte das Großprojekt über mehrere Jahre hinweg und galt als die einzige Person, die einen Überblick über sämtliche Teile hatte.

Is there a completely new and revolutionary approach to the classification waiting to be discovered? [. . .]
We are still waiting and wondering.
[Solomon 2001, S. 345]

Wie man an obigem Zitat von Serre erkennt, ist der Satz selbst von größerer Tragweite (*»it has many surprising applications«*). Daher besitzt dieser lange und unhandliche Beweis trotzdem in Mathematikerkreisen einen hohen Stellenwert. Mit seiner Hilfe ist es möglich, viele weitere Resultate zu beweisen. Dies gilt insbesondere für die endliche Gruppentheorie, wie auch Aschbacher [2005] betont. So kann mit Hilfe des Klassifikationssatzes beispielsweise die Schreiersche Vermutung bewiesen werden. Detaillierte Erläuterungen hierzu und weitere Anwendungen finden sich in [Kimmerle 2008].

A.2. Wiles' Beweis von Fermats letztem Satz

1995 wurde die 358 Jahre alte Fermatsche Vermutung durch Wiles [1995] bewiesen. Sie lautet:

Es existieren keine ganzen Zahlen $a, b, c > 0$ und $n > 2$, so dass die Gleichung

$$a^n + b^n = c^n$$

erfüllt werden kann[137].

Ähnlich wie beim Vierfarbensatz handelt es sich um eine einfache Aussage, die aber viele Jahre als unlösbar galt. Der Beweis erstreckt sich über 98 Seiten ohne Anhänge, Literaturverzeichnis etc. und macht keinen Gebrauch von einem Computer. Insofern handelt es sich um einen »normalen«, konventionellen Beweis. Außergewöhnlich ist er allerdings in der Hinsicht, dass nur eine Handvoll Mathematiker auf der Welt in der Lage sind, den Beweis nachzuvollziehen, da er außergewöhnlich kompliziert ist und darüberhinaus sehr großes Fachwissen voraussetzt.

Über die erste Vorstellung des Beweises von Wiles auf einer Konferenz in Cambridge berichtet sein Kollege:

There was a very charged atmosphere and people were very excited. We certainly had the sense that we were participating in a historic moment.
[Ribet zitiert in Kleiner 2000, S. 33]

Auch danach fielen die Reaktionen sehr euphorisch aus. So spricht der Mathematiker Rota von einem grenzenüberschreitendem Triumph, wie ihn nur die Mathematik für sich verbuchen kann.

The proof of Fermat's last theorem is a triumph of collaboration across frontiers and centuries. No domain of intellectual endeavor other than mathematics can

[137] Für $n = 1$ findet man natürlich sofort unendlich viele mögliche Kombinationen. Und auch für $n = 2$ findet selbst ein mathematischer Laie mit $3^2 + 4^2 = 5^2$ schnell eine mögliche Lösung. Ein Teil der Faszination dieses Satzes liegt somit sicherlich darin, dass ein innerhalb kürzester Zeit lösbares Problem durch eine scheinbar kleine Änderung unlösbar wird bzw. jahrelangem Suchen nach einem Gegenbeispiel stand hält.

> *claim such triumph.*
> [Rota 1997, S. 188]

Auch Wiles' früherer Doktorvater Coates schwärmt von Charme und Schönheit des Beweises.

> *In mathematical terms, the final proof is the equivalent of splitting the atom or finding the structure of DNA. A proof of Fermat is great intellectual triumph, and one shouldn't lose sight of the fact that it has revolutionized number theory in one fell swoop. For me, the charm and beauty of Andrew's work has been a tremendous step for number theory.*
> [Coates zitiert in Kleiner 2000, S. 35]

Außerdem schaffte es die Veröffentlichung des Beweises von Wiles auf die Titelseite der New York Times [Kolata 1993]. Viele weitere Zeitungen und Zeitschriften berichteten u.a. Newsweek und die Frankfurter Allgemeine [Begley & Ramo 1993; von Rauchhaupt 2008]. Die BBC [1996] verfasste einen Sonderbeitrag über Wiles; das People Magazine [1993] listete Wiles unter den *»25 most intriguing people of the year 1993«*. 2000 wurde Wiles für seine Verdienste für die Wissenschaft zum Ritter geschlagen.

Interessant ist die Art und Weise, wie der Beweis zustande kam. So hielt Wiles die Arbeit an Fermats letztem Satz auch vor seinen Kollegen geheim. Es handelt sich im Gegensatz zu vielen aktuellen Beweisen nicht um ein Gemeinschaftsprojekt, sondern um ein *»example of the old fashioned style in mathematics«* [Jaffe 1997, S. 141]. Horgan [1993] fragt: »[Was] *the proof of Fermat's last theorem the last gasp of a dying culture?«* [S. 93].

Das Resultat des Beweises selbst ist nicht sonderlich interessant, da keinerlei nennenswerte Forschung auf ihm aufbaut. Aber im Verlauf des Beweises werden Argumentationen und Begriffe aus verschiedensten mathematischen Theorien (z.B. Theorie der elliptischen Funktionen, algebraische Geometrie) verwendet und zusammengeführt, viele fruchtbare Lemmata und Teilbeweise werden gezeigt.

> *Any of several lemmas in Wiles' proof can be taken as triumph of equal magnitude to Fermat's conjecture.*
> [...] *the point of the proof of Fermat's last theorem is to open up new possibilities for mathematics.*
> [...] *The value of Wiles' proof lies not in what it proves, but in what it opens up, in what it makes possible.*
> [Rota 1997, S. 190f]

Insbesondere der Beweis der Taniyama-Shimura-Weil-Vermutung [Breuil et al. 2001], auch bekannt als Modularitätssatz, verwendet Methoden und Teilergebnisse des Beweises von Wiles. Er stellte eine Verbindung zwischen Topologie und Zahlentheorie her und gilt daher selbst als wichtiges Resultat [Cornell et al. 2013].

> *Fermat's Last Theorem deserves a special place in the history of civilization. By its simplicity it has tantalized amateurs and professionals alike, and with remarkable fecundity led to the development of many areas of mathematics such*

as algebraic geometry, and more recently the theory of elliptic curves and representation theory. It is truly fitting that the proof crowns an edifice composed of the greatest insights of modern mathematics.
[Murty 1993, S. 20]

A.3. Hales' Beweis der Kepler'schen Vermutung

1998 wurde die 400 Jahre alte Keplersche Vermutung von Hales mithilfe eines Computesrs bewiesen. Bis zur Veröffentlichung des Beweises vergingen allerdings mehr als vier Jahre. Robert Mac Pherson, einer der sechs Redakteure der äußerst renommierten Zeitschrift *»Annals of Mathematics«* hatte Hales' Beweis für die Zeitschrift vorgeschlagen. Es wurden zwölf Mathematiker beauftragt, den Beweis zu prüfen. Die Gutachter arbeiten vier Jahre lang an einer Prüfung, gaben dann aber auf. Eine Prüfung des Computercodes schien von vornherein illusorisch, man hatte sich auf die Überprüfung des Gedankengangs und der schriftlichen Schritte und Folgerungen beschränkt. Es wurden diverse Seminare abgehalten, in denen versucht wurde, die einzelnen Teile des Beweises genauer zu prüfen. Fejes Tóth[138] war Teil der Gutachtergruppe. In einem Brief an MacPherson berichtet er, dass er von der Richtigkeit des Beweises nun nach vier Jahren Prüfung zwar zu 99 Prozent überzeugt sei, er die Richtigkeit aber nicht mit letzter Sicherheit zertifizieren könne. In seinem abschließenden Bericht notierte MacPherson:

The news from the referees is bad, from my perspective. They have not been able to certify the correctness of the proof, and will not be able to certify it in the future, because they run out of energy to devote to the problem.
[...] *Fejes Tóth thinks that this situation will occur more an more often in mathematics. He says it is similar to the situation in experimental science–other scientists acting as referees can't certify the correctness if an experiment, they can only subject the paper to consistency checks. He thinks that the mathematical community will have to get used to this state of affairs.*
[zitiert in Davis 2006]

Der Beweis wurde dann trotzdem mit entsprechendem Vermerk in den Annals publiziert und ist damit der erste computergestütze Beweis, der in einem so angesehenen Blatt veröffentlicht wurde.

Die überarbeite, schriftliche Zusammenfassung des Beweises, die in den »Annals« veröffentlicht wurde, erstreckt sich über ca. 120 Seiten [Hales 2005b]. Der zugehörige Computercode ist ca. 50.000 Zeilen lang [Hales 2005a].

Als Hales den Beweis auf einer Konferenz vorstellte, soll es donnernden Applaus gegeben haben, obwohl man sich einig gewesen wäre, dass der Beweis häßlich sei [vgl. Szpiro 2011, S. 219]. Der englische Mathematiker Stewart verglich Wiles' Beweis mit Tolstois »Krieg und Frieden«, Hales' Beweis dagegen mit einem Telefonbuch [vgl. erneut Szpiro 2011, S. 227]. Kanamori drückte ebenfalls Missfallen aus:

[138] Sohn des ungarischen Mathematikprofessors, der seinerzeit ebenfalls an der Keplerschen Vermutung gearbeitet hatte und 1965 eine Lösung mithilfe eines Computers bereits prognostiziert hatte.

> [The solution suggested by Hales] *is one without potentiality, even more than the solutions to the Four Color Conjecture, and this perhaps is its most telling feature for epistemology: Nothing larger is learned from the argument, and it does not open up new possibilites for mathematics.*
> [Kanamori 2010, S. 10]

Den Beweis der Fermatschen Vermutung von Wiles hingegen lobt er sehr [Kanamori 2010].

Um Zweifel an der Korrektheit seines Beweises aus dem Weg zu räumen und aus der Überzeugung heraus, dass sein Beweis nicht auf die übliche Art und Weise geprüft werden kann, rief Hales 2003 online das Programm *»flyspeck«*[139] ins Leben [Hales 2014]. Es handelte sich um einen Zusammenschluß Freiwilliger, die die computerbasierten Argumente überprüften, indem sie diese zunächst formalisierten und anschließend jeden einzelnen Schritt der Argumentation mit Hilfe eines Computers erneut verifizierten. Sie stellten hierfür ihre eigene Zeit und Rechnerleistung zu Verfügung. Hales selbst vermutete ursprünglich, dass das Projekt noch ca. 20 Jahre in Anspruch nehmen könnte. Dank großer Beteiligung konnte das Projekt jedoch bereits am 10. August 2014 erfolgreich beendet werden [Hales 2014, The Announcement of the Completion of the Project].

B. Ausgewählte Beweise im Ganzen

B.1. Euklid : Wurzel 2 ist irrational

In diesem Abschnitt geben wir den originalen Beweis von Euklid dafür wieder, dass Wurzel 2 irrational ist. Den Begriff der Irrationalität gab es bei Euklid noch nicht, er verwendet die Termini kommensurabel/inkommensurabel. In seiner Formulierung lautete der Satz:

> *Stehen vier Größen in Proportion und sind die erste und die zweite kommensurabel, dann sind es auch die dritte und vierte und sind die erste und zweite Größe inkommensurabel, dann sind es auch die dritte und vierte.*
> [siehe Haller 2010, Buch X, 1.Teil, Satz 10]

Der zugehörige Beweis lautet wiefolgt:

Wenn die Größen A, B, C, D in Proportion stehen, sich also A zu B verhält wie C zu D, und A und B kommensurabel sind, dann, sage ich, sind auch C und D kommensurabel.

Denn da A und B kommensurabel sind, verhält sich A zu B wie eine Zahl zu einer anderen. Da sich A zu B verhält wie C zu D, verhält sich auch C zu D wie eine Zahl zu einer anderen. Also sind C und D kommensurabel.

Sind A und B inkommensurabel, dann, sage ich, sind auch C und D inkommensurabel.

Denn da A und B inkommensurabel sind, verhält sich A zu B nicht wie eine Zahl zu einer anderen. Da sich A zu B verhält wie C zu D, verhält sich auch C zu D nicht wie eine Zahl zu einer anderen. Also sind C und D inkommensurabel.

Deshalb sind die dritte und vierte Größe von vier Größen in Proportion dann kommensurabel, wenn die erste und zweite kommensurabel sind, und wenn die erste und zweite inkommensurabel sind, dann auch die dritte und vierte, was zu zeigen war.

[139] Der Name leitet sich aus »Formal Proof of Kepler« ab.

B.2. Der kleinste Verbrecher enthält einen 4- oder 5-Stern

Wir erläutern in diesem Abschnitt, warum der kleinste Verbrecher einen 4- oder 5-Stern enthalten muss. Wir können annehmen, dass es ausreicht, den kleinsten Verbrecher in den sogenannten Dreiecksgraphen zu suchen, d.h. in der Menge der Graphen, bei denen jedes Gebiet von genau drei Knoten und Kanten umrandet ist. Diese Annahme basiert im Wesentlichen auf einem Isomorphiesatz von Wagner [Wagner 1970, S. 108][140].

Für Dreiecksgraphen gilt der folgende Satz von Kempe [1879b]: In jedem Dreiecksgraphen gibt es Ecken vom Grad 2, 3, 4 oder 5.

Zusätzlich verwenden wir gleich noch die Eulersche Polyederformel. Sie lautet für ebene Graphen

$$e - k + f = 2,$$

wobei e die Anzahl der Ecken, k die Anzahl der Kanten und f die Anzahl der Flächen eines Graphen bezeichnet [Tittmann 2003, S. 43].

Der eigentliche Beweis zum kleinsten Verbrecher geht dann folgendermaßen weiter. Da jedes Dreieck aus 3 Kanten besteht und jede Kante zu 2 Dreiecken gehört, gilt für Dreiecksgraphen

$$3 \cdot f = 2 \cdot k.$$

Bezeichnet man mit $v_i (i = 2, 3, \dots)$ die Zahl der Ecken vom Grad i, so beobachten wir darüberhinaus folgende 2 Zusammenhänge

$$\sum_{i=2}^{\infty} v_i = e$$

sowie

$$\sum_{i=2}^{\infty} i \cdot v_i = k.$$

Setzen wir diese drei Formeln in die Eulersche Polyederformel ein, so erhalten wir

$$\sum_{i=2}^{\infty} (6 - i) \cdot v_i = 12.$$

Da auf der rechten Seite dieser Gleichung eine positive Zahl steht, muss es aber mindestens einen positiven Summanden auf der linken Seite der Gleichung geben. Dies ist aber nur für $i = 2, \dots, 5$ möglich, woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Um zu zeigen, dass der kleinste Verbrecher einen Knoten vom Grad 4 oder 5 enthält, müssen wir jetzt nur noch zeigen, dass er keinen Knoten vom Grad 2 oder 3 enthalten kann. Angenommen, der kleinste Verbrecher enthielte einen Knoten vom Grad 2 oder 3, dann kann dieser Knoten entfernt werden und der resultierende Graph wäre immer noch nicht 4-färbbar. Dies ist aber ein Widerspruch zur der Eigenschaft der kleinste Verbrecher zu sein. Der kleinste Verbrecher kann also keine Knoten vom Grad kleiner 4 enthalten.

[140] Die weitere Argumentation findet sich in [Fritsch 1990, S. 11].

B.3. Die Summenformel von Gauss

Sei n eine natürliche Zahl. Dann ist die Summe der ersten n Zahlen gleich $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$.

Beweis durch vollständige Induktion:

Sei $n = 1$.

Dann ist

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1.$$

In diesem Fall stimmt die Behauptung.

Angenommen, die Aussage ist für n wahr. Dann gilt für die Zahl $n+1$ unter Verwendung des Summenzeichens

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1).$$

Nun ersetzen wir die Summe auf der rechten Seite mit Hilfe der Annahme und erhalten

$$\sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1).$$

Nachrechnen ergibt jetzt direkt die Behauptung

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Falls die Formel also für eine Zahl gilt, so gilt sie auch für deren Nachfolger. Zusammen mit dem Wissen, dass sie für die Zahl 1 gilt, erhält man die Aussage somit für alle natürlichen Zahlen.

Abbildungsverzeichnis

Literaturverzeichnis

Aberdein, A. (2005a): *The Informal Logic of Mathematical Proof.* In: Hersh [2005] Kap. 4, 56–71.

Aberdein, A. (2005b): *The Uses of Argument in Mathematics.* Argumentation **19**(3), 287–301.

Aberdein, A. (2012): *The parallel structure of mathematical reasoning.* AISB/IACAP World Congress 2012.

Agélas, L. (2014): *Evidence for the Riemann Hypothesis.* http://leoagelas.free.fr/Work/Articles/Riemann.pdf.

Aigner, M. (2008): *Die pure Eleganz der Mathematik.* In: Behrends, E., Gritzmann, P. & Ziegler, G. M. [Hrsg.]: *Pi und Co.: Kaleidoskop der Mathematik.* Springer, Heidelberg.

Aigner, M. & Ziegler, G. M. (2014): *Das BUCH der Beweise.* Springer, Berlin, Heidelberg.

Albers, D. J. (1981): *Polite Applause for a Proof of one of the Great Comjectures of Mathematics: What is a proof today?* The Two-Year College Mathematics Journal **12**(2), 82.

Albers, D. J. (1991): *Paul Halmos by Parts: Interviews by Don Albers.* In: *Paul Halmos. Celebrating 50 Years of Mathematics.* Springer, New York.

Albers, D. J. & Alexanderson, G. L. (1985): *Mathematical people: Profiles and interviews.* Birkhäuser, Boston.

Allaire, F. (1977): *Another proof of the four colour theorem – Part I.* Proceedings, 7th Manitoba Conference on Numerical Mathematics and Computing, Congr. Numer. 20 3–72.

Allen, J. D. (1988): *Expert Play in Connect-Four.* http://tromp.github.io/c4.html.

Allis, V. (1988): *A Knowledge-based Approach of Connect-Four.* Department of Mathematics and Computer Science, Vrije Universiteit. http://www.rainer-rosenberger.de/x_spiele/download/connect4_victor_allis.pdf.

Alsina, C. & Nelsen, R. B. (2013): *Bezaubende Beweise.* Springer, Berlin, Heidelberg.

ANDREWS, G. E., EKHAD, S. B. & ZEILBERGER, D. (1993): *A short proof of Jacobi's Formula for the number of represantations of an integer as a sum of four squares.* The American Mathematical Monthly **100**, 273–276. http://arxiv.org/pdf/math/9206203.

ANGLIN, W. S. (1991): *Mathematics and Value.* Philosophica Mathematica **2**(2), 145–173.

ANNALS OF STATISTICS (2015): http://www.imstat.org/aos/.

APPEL, K. (1984): *The Use of Computer in the Proof of the Four Color Theorem.* Proceedings of the American Philosophical Society **128**(1), 35–39.

APPEL, K. & HAKEN, W. (1977): *Every planar map is four colorable. Part I: Discharging.* Illinois Journal of Mathematics **21**, 429–490.

APPEL, K. & HAKEN, W. (1984): *The four-color problem.* In: CAMPBELL, D. M. & HIGGENS, J. C. [Hrsg.]: *Mathematics: People, problems, results.* Vol. 2, 154–173. Wadsworth International, Belmont.

APPEL, K. & HAKEN, W. (1986): *The Four Color Proof Suffices.* The Mathematical Intelligencer **8**(1), 10–20.

APPEL, K., HAKEN, W. & KOCH, J. (1977): *Every planar map is four colorable. Part II: Reducibility.* Illinois Journal of Mathematics **21**, 491–567.

APPLEGATE, D. L., BIXBY, R. E., CHVÁTAL, V. & COOK, W. J. (2007): *The Traveling Salesman Problem.* Princeton University Press.

ARKOUDAS, K. & BRINGSJORD, S. (2007): *Computers, Justification, and Mathematical Knowledge.* Minds & Machines **17**, 185–202.

ASCHBACHER, M. (2004): *The Status of the Classification of the Finite Simple Groups.* Notices of the American Mathematical Society **52**(7), 736–740.

ASCHBACHER, M. (2005): *Highly complex proofs and implications of such proofs.* Philosophical Transactions of the Royal Society A **363**, 2401–2406.

ASCHBACHER, M. & SMITH, S. D. (2004): *The Classification of Quasithin Groups: I. Structure of Strongly Quasitin **K**-groups.* In: SOCIETY, A. M. [Hrsg.]: *Mathematical Surveys and Monographs Vol. 111.* Providence, R.I.

ASPERTI, A. (2012): *Proof, message and certificate.* In: *Intelligent Computer Mathematics.* 2401–2406. Springer, Heidelberg. http://www.cs.unibo.it/~asperti/PAPERS/proofs.pdf.

ASPERTI, A., GEUVERS, H. & NATARAJAN, R. (2009): *Social Processes, Program Verification and All That.* Camebridge University. http://www.cs.unibo.it/~asperti/PAPERS/social.pdf.

ATIYAH, M. ET AL. (1994): *Responses to ›Theoretical Mathematics: Toward a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics‹ by A. Jaffe and F. Quinn.* Bulletin of the American Mathematical Society **30**(2), 178–207.

Auslander, J. (2008): *On the Roles of Proof in Mathematics.* In: Gold, B. & Simmons, R. A. [Hrsg.]: *Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy.* The Mathematical Association of America.

Avigad, J. (2008): *Computers in Mathematical Inquiry.* Carnegie Mellon University, Department of Philosophy Paper 28. http://repository.cmu.edu/philosophy/28.

Azzouni, J. (2004): *The derivation-indicator view of mathematical practice.* Philosophica Mathematica **12**(2), 81–106.

Azzouni, J. (2005): *Is there still a sense in which mathematics can have foundations?* In: *Essays on the foundations of mathematics and logic.* 9–47. Giandomenico Sica. http://ase.tufts.edu/philosophy/documents/Azzouni/StillASense.pdf.

Baez, J. (2011): *The Beauty of Roots.* http://math.ucr.edu/home/baez/roots/.

Bailey, D. H. & Borwein, J. M. . (2005): *Future Prospects for Computer-Assisted Mathematics.* Notes of the Canadian Mathematical Society **37**(8), 2–6.

Bailey, D. H. & Borwein, J. M. (2001): *Experimental Mathematics: Recent Developments and Future Outlook.* In: Engquist, B. & Schmid, W. [Hrsg.]: *World Mathematical Year Mathematics Unlimited– 2001 and Beyond.* 51–66. Springer.

Bailey, D. H. & Borwein, J. M. (2004): *Mathematics by Experiment– Plausible Reasoning in the 21st Century.* A. K. Peters, Natick, Massachusetts.

Bailey, D. H., Borwein, J. M., Borwein, P. B. & Plouffe, S. (1996): *The Quest for Pi.* The Mathematical Intelligencer **19**(1), 50–56. http://docserver.carma.newcastle.edu.au/164/2/96_070-Bailey-Borwein-Borwein-Plouffe.pdf.

Bailey, D. H., Borwein, J. M., Kapoor, V. & Weisstein, E. W. (2006): *Ten Problems in Experimental Mathematics.* American Mathematical Monthly **113**(6), 481–509.

Baker, A. (2007): *Is there a problem of induction for mathematics?* In: Leng et al. [2007] 59–73.

Baker, A. (2009): *Mathematical Accidents and the End of Explanation.* In: Bueno, O. & Linnebo, Ø. [Hrsg.]: *New Waves in the Philosophy of Mathematics.* 137–159. Palgrave Macmillan. http://www.swarthmore.edu/Documents/academics/philosophy/Baker%20mathematical%20accidents.pdf.

Baker, A. (2015): *Non-Deductive Methods in Mathematics.* In: Zalta, E. N. [Hrsg.]: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2015 Edition).* http://plato.stanford.edu/archives/fall2015/entries/mathematics-nondeductive/.

Banegas, J. A. (2003): *Argumentation in Mathematics.* Universität de Valenciá. http://my.fit.edu/~aberdein/Alcolea.pdf.

Barendregt, H. & Wiedijk, F. (2005): *The challenge of computer mathematics.* Philosophical Transactions of the Royal Society A **363**, 2351–2375.

Barton, B. (1999): *Ethnomathematics and Philosophy.* Zentralblatt für Didaktik der Mathematik **3**, 54–58.

Bassler, O. B. (2006): *The Surveyability of Mathematical Proof: A Historical Perspective.* Synthese **148**(1), 99–133.

BBC (1996): *Horizon 1995-1996, Fermat's Last Theorem.* http://www.bbc.co.uk/iplayer/episode/b0074rxx/horizon-19951996-fermats-last-theorem.

Bedürftig, T. & Murawski, R. (2010): *Philosophie der Mathematik.* De Gruyter, Berlin/New York.

Bedürftig, T. & Murawski, R. (2012): *Philosophie der Mathematik.* Walter de Gruyter, Berlin, Boston.

Begley, S. & Ramo, J. C. (1993): *New answer for an old question.* Newsweek 5. Juli, 52–53. http://www.newsweek.com/new-answer-old-question-194594.

Bell, A. W. (1976): *A study of pupils' proof explanations in mathematical situations.* Educational Studies in Mathematics **7**(1), 23–40.

Benacerraf, P. (1983): *Mathematical truth.* In: Benacerraf & Putnam [1983].

Benacerraf, P. & Putnam, H. (1983): *Philosophy of Mathematics. Selected readings.* Cambridge University Press.

Bernays, P. (1978): *Über den Platonismus in der Mathematik (1935).* In: Stegmüller, W. [Hrsg.]: *Das Universalien-Problem.* 64–83. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt.

Berts, K. E. (2012): *The Concept of Proof.* https://www.abo.fi/media/6840/berts20120305.pdf.

Betz, G. (2015): *Argunet.* http://www.argunet.org.

Beutelspacher, A. (2011): *Albrecht Beutelspachers kleines Mathematikum: Die 101 wichtigsten Fragen und Antworten zur Mathematik.* Goldmann, München.

Billey, S. (2011): *What is the value of computer assisted proofs?* Billeys Homepage, mathematische Fakultät der Universität Washington. http://www.math.washington.edu/~billey/computer.proofs.html.

Birkhoff, G. D. (1913): *The reducibility of maps.* American Journal of Mathematics **35**(2), 115–128.

Bolzano, B. (1972): *Theory of Science. Teilweise Übersetzung von R. Georg der ›Wissenschaftslehre‹.* University of California Press.

Bonsall, F. F. (1982): *A Down-to-Earth View of Mathematics.* The American Mathematical Monthly **89**(1), 8–15.

Borba, M. C. & Villarreal, M. E. (2006): *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation. Vol. 39.* Springer Science & Business Media.

Borcherds, R. E. (2002): *What is The Monster?* Notices of the American Mathematical Society **49**(9), 1076f.

Borwein, J. (2008): *Implications of Experimental Mathematics for the Philosophy of Mathematics.* In: Gold, B. & Simmons, R. A. [Hrsg.]: *Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy.* The Mathematical Association of America.

Borwein, J., Morales, M. H., Polthier, K. & Rodrigues, J. F. (2002): *Multimedia Tools for Communicating Mathematics.* Springer, Berlin, Heidelberg, New York.

Borwein, J. M. (2005): *Implications of experimental mathematics for the philosophy of mathematics.* University of Newcastle. http://docserver.carma.newcastle.edu.au/280/1/implications.pdf.

Borwein, J. M. (2006): *Aesthetics for the Working Mathematician.* In: Sinclair et al. [2006] 21–40.

Borwein, J. M. & Farmer, W. M. (2006): *Mathematical Knowledge Management.* Springer, Berlin, Heidelberg.

Bourbaki, N. (1950): *The Architecture of Mathematics.* The American Mathematical Monthly **57**(4), 221–232. mduchin.math.tufts.edu/UCD/111/readings/architecture.pdf.

Bouveresse, J. (2005): *On the meaning of the word ›Platonism‹ in the Expression ›Mathematical Platonism‹.* Proceedings of the Aristotelian Society **105**, 55–79.

Brent, R. P. (2006): *Uncertainty can be Better than Certainty: Some Algorithms for Primality.* http://maths-people.anu.edu.au/~brent/pd/primality4.pdf.

Bressoud, D. M. (1999): *Proofs and confirmation: The story of the alternating sign matrix conjecture.* Cambridge University Press, Cambridge.

Breuil, C., Conrad, B., Diamond, F. & Taylor, R. (2001): *On the modularity of elliptic curves over Q: Wild 3-adic exercises.* Journal of the American Mathematical Society **14**(4), 843–939.

Brown, J. R. (2008): *Philosophy of Mathematics. A Contemporary Introduction to the World of Proofs and Pictures.* Routledge, New York.

Browne, M. W. (1988): *Is a Math Proof a Proof If No One Can Check It?* New York Times 20.12.1988. http://www.nytimes.com/1988/12/20/science/is-a-math-proof-a-proof-if-no-one-can-check-it.html.

Bueno, O. (2007): *Incommensurability in Mathematics.* In: van Kerkhoeve, B. & van Bendegem, J. P. [Hrsg.]: *Perspectives on Mathematical Practices.* 83–105. Springer.

Buldt, B., Löwe, B. & Müller, T. (2008): *Towards a new epistemology of mathematics.* Erkenntnis **68**(3), 309–329.

Bundy, A., Mateja, J. & Fugard, A. (2005): *What is a proof?* Philosophical Transaction of the Royal Society A **363**, 2377–2391.

Burge, T. (1993): *Content Preservation.* The Philosophical Review **102**(4), 457–488.

Burge, T. (1998): *Computer Proof, Apriori Knowledge, and other Minds.* Philosophical Perspectives **12**, 1–37.

Burton, L. (1999): *The practices of mathematicians: What do they tell us about coming to know mathematics?* Educational Studies in Mathematics **37**, 121–143.

Burton, L. & Sinclair, N. (2004): *Mathematicians as enquirers. Learning about Learning Mathematics.* Springer, New York.

Büttemeyer, W. (2003): *Philosophie der Mathematik.* Verlag Karl Alber, Freiburg/München.

CadwalladerOlsker, T. (2011): *What Do We Mean by Mathematical Proof?* Journal of Humanistic Mathematics **1**(1), 33–60.

Calude, A. S. (2001): *The Journey of the Four-Color-Theorem Through Time.* New Zealand Mathematics Magazin **38**(3), 27–35.

Calude, C. S. & Calude, E. (2009): *The Complexitiy of the Four Color Theorem.* CDMTCS Research Report Series **368**.

Calude, C. S., Calude, E. & Marcus, S. (2002): *Passages of Proof.* CDMTCS Research Report Series **180**.

Calude, C. S. & Marcus, S. (2004): *Mathematical Proofs at a Crossroad?* CDMTCS Research Report Series **236**.

Carette, J., Dixon, L., Sacerdoti, C. C. & Watt, S. M. [Hrsg.] (1998): *Intelligent Computer Mathematics.* Springer, Berlin, Heidelberg.

Carrier, M. (2006): *Wissenschaftstheorie zur Einfürung.*

Casselmann, B. (2000): *Pictures and Proofs.* Notices of the AMS **47**, 1257–1266.

Casti, J. L. (2001): *Mathematical mountaintops: The five most famous problems of all time.* Oxford University Press.

Casullo, A. (1988): *Necessity, Certainty and the A Priori.* Canadian Journal of Philosophy **18**(1), 43–66.

Cayley, A. (1879): *On the coloring of Maps.* Proceedings of the Royal Geographical Society **1**, 259–261.

Celluci, C. (2005): *›Introduction‹ to* ***Filosofia e matematica***. In: Hersh [2005] Kap. 2, 17–36.

Celluci, C. (2008): *Why Proof? What is a Proof?* In: Corsi, G. & Lupacchini, R. [Hrsg.]: *Deduction, Computation, Experiment. Exploring the Effectiveness of Proof.* 1–27. Springer, Mailand.

Cerutti, E. & Davis, P. J. (1969): *Formac meets Pappus: Some Observations on Elemantary Analytic Geometry by computer.* The American Mathematical Monthly **76**(8), 895–905.

Chaitin, G. (2000): *Conversations with a Mathematician. Math, Art, Science and The Limits of Reason.* Springer, London. https://www.cs.auckland.ac.nz/~chaitin/conversations.html.

Chaitin, G. (2002): *Computers, Paradoxes and the Foundations of Mathematics.* American Scientist **90**, 164–171.

Chaitin, G. (2004): *Meta Math! The Quest for Omega.* Arxiv Preprint. http://arxiv.org/pdf/math.HO/0404335.pdf.

Chang, K. (2004): *In Math, Computers Don't Lie. Or Do They?* The New York Times 06.04.2004.

Chartrand, G. & Zhang, P. (2009): *Chromatic Graph Theory.* CRC Press.

Chisholm, R. M. (1989): *Theory of Knowledge. 3rd Edition.* Prentice-Hall, New Jersey.

Cigler, J. (2012): *Mathematische Randbemerkungen– Gibt es mathematische Objekte?* Ciglers Homepage, Fakultät für Mathematik, Universität Wien. http://homepage.univie.ac.at/johann.cigler/preprints/randbemerkungen3.pdf.

Cipra, B. A. (1989): *Do mathematicians still do math?* Science, New Series **244**(4906), 769–770.

Clay Mathematics Institute (2015): *Millenium Problems.* http://www.claymath.org/millennium-problems.

Cohen, A. M. (1996): *Computers: (Ac)counting for Mathematical Proofs.* Images of SMC Research. oai.cwi.nl/oai/asset/13543/13543A.pdf.

Cohen, D. I. A. (1991): *The Superfluous Paradigm.* In: Johnson, J. H. & Loomes, M. J. [Hrsg.]: *The Mathematical Revolution Inspired by Computing.* Clarendon, Oxford.

Coleman, E. C. (2008): *The surveyability of long proofs.* Homepage von Aberdein ,veröffentlicht am 30. Okt. 2008. http://my.fit.edu/~aberdein/argmath/110Coleman.pdf (gefunden am 07.01.2013).

Collins, H. (1985): *Changing Order: Replication and Induction in Scientific Practice.* Sage Publications, London.

Colton, S. (2000): *On the notion of interestingness in automated mathematical discovery.* International Journal of Human Computer Studies **53**, 351–375.

Connes, A. et al. (1991): *Round-Table Discussion (From the Symposium on the Current State and Prospects of Mathematics).* Mathematical Research Today and Tomorrow, Lecture Notes in Mathematics **1525**, 87–108.

Cook, W. (2015): *The Travelling Salesman Problem.* http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/index.html.

Corfield, D. (2003): *Towards a philosophy of real mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge.

Cornell, G., Silverman, J. H. & Stevens, G. [Hrsg.] (2013): *Modular forms and Fermat's last theorem.* Springer, New York.

Corsi, G. & Lupacchini, R. [Hrsg.] (2009): *Deduction, Computation, Experiment- Exploring the Effectiveness of Proof.* Springer, Mailand.

Courant, R. (1928): *Über die allgemeine Bedeutung des mathematischen Denkens.* Die Naturwissenschaften **16**(6), 89–94.

Crowe, M. J. (1975): *Ten ›Laws‹ concerning patterns of change in the history of mathematics.* Historia Mathematics **2**, 161–166.

Crowe, M. J. (1988): *Ten misconceptions about mathematics and its history.* History and philosophy of modern mathematics, Minnesota studies in philosophical science XI, University of Minnesota Press. http://www.f.waseda.jp/sidoli/Crowe_10_Misconceptions.pdf.

Dauben, J. (1995): *Paradigms and Proofs: How Revolutions Transfor Mathematics.* In: Ausejo, E. & Hormigon, M. [Hrsg.]: *Paradigms and Mathematics.* 117–148. Españ Editores, Madrid: Siglo XXI.

Davies, E. B. (2005): *Whither Mathematics?* Notices of the American Mathematical Society **52**(11), 1–14. citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.129.3296&rep=rep1&type=pdf.

Davis, P. J. (1972): *Fidelity in Mathematical Discourse: Is One and One really Two?* The American Mathematical Monthly **79**(3), 252–263.

Davis, P. J. (1982): *Toward a Philosophy of Computation.* For the Learning of Mathematics **3**(1), 2–5.

Davis, P. J. (1993): *Visual Theorems.* Educational Studies in Mathematics **24**, 333–344.

Davis, P. J. (2006): *Mathematics & Common Sense: A Case of Creative Tension.* CRC Press.

Davis, P. J. & Hersh, R. (1988): *Descartes' Traum.* Fischer Verlag, Frankfurt a. M.

Davis, P. J. & Hersh, R. (1994): *Erfahrung Mathematik.* Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Stuttgart.

Davy, H. (1812): *Elements of Chemical Philosophy: Part 1.* Bradford and Inskeep, Philadelphia.

de Mol, L. (2009): *Looking for Busy Beavers. A socio-philosophical study of a computer-assisted proof.* In: François, K., Löwe, B., Müller, T. & van Kerkhoeve, B. [Hrsg.]: *Foundations of the formal sciences VII.* 61–90. logica.ugent.be/centrum/preprints/FOTFS_FinalVersion.pdf.

de Morgan, A. (1952): *Brief an W. R. Hamilton vom 23. Oktober.* Aufbewahrt im Trinity College als Archivstück ›*Hamilton mss. letter 668*‹. Auszugsweise abgedruckt in May, K. O. (1965): *The Origin of the Four-Color Conjecture*, Isis **56**(3), 346–348.

de Villiers, M. (1990): *The role and function of proof in mathematics.* Pythagoras **24**, 17–24.

de Villiers, M. (1999): *Rethinking Proof With the Geometer's Sketchpad.* Key Curriculum Press. academic.sun.ac.za/education/mathematics/MALATI/Files/proof.pdf.

de Villiers, M. (2004): *The Role and Function of Quasi-empirical Methods in Mathematics.* Canadian Journal of Science **4**(3), 387–418.

del Palacio, Á. C. A. (2005): *What Is Philosophy of Mathematics Looking for?* In: Hersh [2005] 236–249.

DeLaViña, E. (2005): *Some history of the development of Graffiti.* DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science **69**, 81–118.

DeLaViña, E. (2013): *Bibliography on Conjectures, Methods and Applications of Graffiti.* http://cms.dt.uh.edu/faculty/delavinae/research/wowref.htm.

Descartes, R. (1996): *Philosophische Schriften in einem Band.* Meiner, Hamburg.

Detlefsen, M. & Luker, M. (1980): *The four-color theorem and mathematical proof.* The Journal of Philosophy **77**(12), 803–820.

Detlefson, M. (1992): *Proof and Knowledge in Mathematics.* Routledge, New York.

Devlin, K. (1996): *Mathematical Proofs in the Computer Age.* The Mathematical Gazette **80**(487), 149–162.

Devlin, K. (1997): *The Logical Structure of Computer-Aided Mathematical Reasoning.* The American Mathematical Monthly **104**(7), 632–646.

Devlin, K. (2001): *Das Mathe-Gen oder wie sich das mathematische Denken entwickelt.* Klett-Cotta, Stuttgart.

Devlin, K. (2005): *Last doubts removed about the proof of the Four Color Theorem.* Homepage der Mathematical Association of America. http://www.maa.org/devlin/devlin_01_05.html.

Dick, S. (2011): *AfterMath– The Work of Proof in the Age of Human-Machine Collaboration.* Isis **102**(3), 494–505.

Dieudonné, J. (2011): *Mathematics– The Music of Reason.* Springer, Berlin, Heidelberg.

Dive, L. L. (2003): *An Epistemic structuralist account of mathematical knowledge.* Department of Philosophy, Faculty of Arts, University of Sydney.

Dowling, D. (1999): *Experimenting on Theories.* Science in Context **12**(2), 261–273.

Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1986): *On the Aesthetics of Mathematical Thought.* For the Learning of Mathematics **6**(1), 2–10.

Dunmore, C. (1992): *Meta-level revolutions in mathematics.* In: Gillies [1992] 209–225.

Dupree, I., Zeidan, E. & Auciello, S. (2012): *Some four color proofs and failures!* http://www.idupree.com/four-color/.

Easwaran, K. (2009): *Probabilistic Proofs and Transferability.* Philosophica Mathematics (III) **17**, 341–362.

Edwards, H. M. (1974): *Riemann's Zeta Function.* Dover.

Epstein, D. & Levy., S. (1995): *Experimentation and proof in mathematics.* Notices of the American Mathematical Society **42**(6), 670–674.

Epstein, D., Levy, S. & de la Llave, R. (1992): *About this Journal.* Experimental Mathematics. **1**(1), 1–3.

Ernest, P. (1999): *Forms of Knowledge in Mathematics and Mathematics Education: Philosophical and Rhetorical Perspectives.* Educational Studies in Mathematics **38**(1/3), 67–83.

Ernest, P. (3): *The Legacy of Lakatos: Reconceptualising the Philosophy of Mathematics.* Philosophica Mathematics **5**, 116–134.

Fajtlowicz, S. (1988): *On Conjectures of Graffiti.* Discrete Mathematics **72**, 113–118.

Fallis, D. (1997): *The Epistemic Status of Probabilistic Proof.* The Journal of Philosophy **94**(4), 165–186.

Fallis, D. (2003): *Intentional gaps in mathematical proofs.* Synthese **134**, 45–69.

Fisher, C. S. (1973): *Some Social Characteristics of Mathematicians and Their Work.* American Journal of Sociology **78**(5), 1094–1118.

Fitelson, B. & Wos, L. (1998): *Using Mathematica to understand the computer proof of the Robbins Conjecture.* Mathematica in Education and Research **7**, 17–26.

Fitelson, B. & Wos, L. (2001): *Finding missing proofs with automated reasoning.* Studia Logica **68**(3), 329–356.

François, K. & van Bendegem, J. P. (2010): *Revolutions in mathematics. More than thirty years after Crowe's ›Ten Laws‹. A new interpretation.* In: Löwe, B. & Müller, T. [Hrsg.]: *PhiMSAMP. Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practice.* 107–120. College Publications.

Franklin, J. (1987): *Non-Deductive Logic in Mathematics.* British Journal for the Philosophy of Science **38**, 1–18.

Franklin, J. (1988): *Mathematics, the computer revolution and the real world.* Philosophica **42**, 79–92. http://logica.ugent.be/philosophica/fulltexts/42-5.pdf.

Franklin, J. (1993): *Proof in Mathematics.* Reflections **18**(3), 25–27.

Frege, G. (1964): *Begriffschrift und andere Aufsätze.* Georg Olms, Hildesheim, New York, Zürich.

Frege, G. (1969): *Nachgelassene Schriften.* F. Meiner, Hamburg. Herausgegeben von H. Hermes, F. Kambartel & F. Kaulbach.

Frey, G. (1986): *Links between stable elliptic curves and certain diophantine equations.* Annales Universitatis Saraviensis. Series Mathematicae **1**, 1–40.

Frey, G. (1997): *Über die Schönheit von Problemlösungen. Mathematik als Kultur-und Bildungsgut.* Essener Unikate **9**, 74–81.

Fritsch, R. (1990): *Wie wird der Vierfarbensatz bewiesen?* Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht **43**(2), 80–87.

Fritsch, R. & Fritsch, G. (1994): *Der Vierfarbensatz– Geschichte, topologische Grundlagen und Beweisidee.* BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich.

Gallian, J. & Pearson, M. (2007): *An Interview with Doron Zeilberger.* MAA Focus **27**(5), 14–17.

Gallian, J. & Peterson, I. (2008): *›Mathematicians Have a Different Perspective‹ An Interview with Bernd Sturmfels.* MAA Focus **28**(1), 4–7.

Gardiner, C. (1983): *Beauty in Mathematics.* Mathematical Spectrum **16**(3), 78–84.

Gauss, C. F. (1901): *Sechs Beweise des Fundamentaltheorems über quadratische Reste.* W. Engelmann, Leipzig. https://archive.org/details/sechsbeweisedes01gausgoog.

Giaquinto, M. (1993): *Diagrams: Socrates and Meno's slave.* International Journal of Philosophical Studies **1**, 81–97.

Gillies, D. (1992): *Revolutions in Mathematics.* Oxford University Press, New York.

Glas, E. (2005): *Matheamtics as Objective Knowledge and as Human Practice.* In: Hersh [2005] Kap. 16, 289–303.

Glas, E. (2007): *Mathematics as objective knowledge and as human practice.* In: van Kerkhoeve, B. & van Bendegem, J. P. [Hrsg.]: *Perspectives on Mathematical Practices* 25–41. Springer.

Gleason, A. (1984): *How Did It Get to Where It Is Today?* Bulletin of the American Academy of Arts and Sciences **38**(1), 8–24.

Gold, B. & Simons, R. A. [Hrsg.] (2008): *Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy.* The Mathematical Association of America.

Goldreich, O. (1999): *Modern cryptography, probabilistic proofs and pseudorandomness.* Vol. 17. Springer Science & Business Media.

Goldsmith, J. (2007): *Towards a new empiricism.* Recherches linguistiques de Vincennes **36**, 9–35.

Gonthier, G. (2005): *A computer-checked proof of the Four Colour Theorem.* http://research.microsoft.com/en-us/people/gonthier/4colproof.pdf.

Good, I. J. & Churchhouse, R. F. (1968): *The Riemann Hypothesis and Pseidorandom Features of the Möbius Sequence.* Mathematics of Computation **22**(104), 857–861.

Goodman, N. D. (1986): *Mathematics as an Objective Science.* In: Tymoczko [1986b] 79–94.

Goodman, N. D. (1988): *Modernizing the Philosophy of Mathematics.* Synthese **88**(2), 119–126.

Goodman, N. D. (1990): *Mathematics as Natural Science.* The Journal of Symbolic Logic **55**(1), 182–193.

Gorenstein, D. (1979): *The Classification of Finite Simple Groups.* Bulletin of the American Mathematical Society **1**(1), 43–199. http://www.ams.org/bull/1979-01-01/S0273-0979-1979-14551-8/S0273-0979-1979-14551-8.pdf.

Gorenstein, D. (1983): *The Classification of Finite Simple Groups, Volume 1: Groups of Noncharacteristic 2 Type.* Plenum Press, New York and London.

Gorenstein, D. (1985): *The enormous theorem.* Scientific American **253**, 104–115.

Gourdon, X. (2004): *The* 10^3 *first zeros of the Riemann Zeta function and zeros computation at very large height.* http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetazeros1e13-1e24.pdf.

Gowers, W. T. (2005): *Does Mathematics Need a Philosophy?* In: Hersh [2005] Kap. 10, 182–200.

Grabiner, J. (1974): *Is Mathematical Proof Time-Dependant?* The American Mathematical Monthly **81**(4), 354–365.

Gramelsberger, G. (2010): *Computerexperimente– Zum Wandel der Wissenschaft im Zeitalter des Computers.* Transcript Verlag, Bielefeld.

Greiffenhagen, C. & Sharrock, W. (2011): *Does mathematics look certain in the front, but fallible in the back?* Social studies of Science **41**(6), 839–866.

Griess, R. (2007): *Commentary– Symmetry and the Monster: One of the Greatest Quests of Mathematics– A Book Review.* Notices of the American Mathematical Society **54**(2), 234–239.

Griffiths, P. A. (2000): *Mathematics at the turn of the Millenium.* The American Mathematical Monthly **107**(1), 1–14.

Guthrie, F. (1880): *Note on the Coloring of Maps.* Proceedings of the Royal Society of Edinburgh **10**, 727–728.

Hadamard, J. (1945): *The mathematician's mind: The psychology of invention in the mathematical field.* Princeton University Press.

Hahn, H. (1988): *Empirismus, Logik, Mathematik.* Suhrkamp, Frankfurt a. M.

Hales, T. (2014): *The Flyspeck Project.* https://code.google.com/p/flyspeck/.

Hales, T. C. (1994): *The Status of the Kepler Conjecture.* The Mathematical Intelligencer **16**(3), 47–58.

Hales, T. C. (1998): *The Kepler Conjecture.* Arxiv Preprint. http://arxiv.org/pdf/math.MG/9811078.pdf.

Hales, T. C. (2005a): *Computer resources for the Kepler conjecture.* http://annals.math.princeton.edu/supplemental/2005/162-3/p01/.

Hales, T. C. (2005b): *A proof of the Kepler conjecture.* Annals of Mathematics **162**, 1065–1185. annals.math.princeton.edu/wp-content/uploads/annals-v162-n3-p01.pdf.

Hales, T. C. (2008): *Formal Proof.* Notices of the American Mathematical Society **55**(11), 1370–1380.

Haller, R. (2010): *Opera-Platonis.* http://www.opera-platonis.de.

Halmos, P. R. (1990): *Has Progress in Mathematics Slowed Down?* The American Mathematical Monthly **97**(7), 561–588.

Hamming, R. W. (1998): *Mathematics on a Distant Planet.* The American Mathematical Monthly **105**(7), 640–650.

Hanna, G. (1993): *Proof and Application.* Educational Studies in Mathematics **24**(4), 421–438.

Hanna, G. (1995): *Challenges to the Importance of Proof.* For the Learning of Mathematics **15**(3), 42–49.

Hanna, G. (2000): *Proof, Explanation and Exploration: An Overview.* Educational Studies in Mathematics **44**(1/2), Proof in Dynamic Geometry Environments, 5–23.

Hanna, G. & Sidoli, N. (2007): *Visualisation and proof: A brief survey of philosophical perspectives.* ZDM Mathematics Education **39**, 73–78.

Hardy, G. H. (1929): *Mathematical Proof.* Mind, New Series **38**(149), 1–25.

Hardy, G. H. (1940): *A Mathematician's Apology.* University of Alberta Mathematical Sciences Society. http://web.njit.edu/~akansu/PAPERS/GHHardy-AMathematiciansApology.pdf.

Harris, M. (2003): *›Why mathematics?‹ you might ask.* Liberation. http://www.math.jussieu.fr/~harris/PCM.pdf.

Harrison, J. (2008): *Formal Proof– Theory and Practice.* Notices of the American Mathematical Society **55**(11), 1395–1406.

Hasse, H. (1959): *Mathematik als Wissenschaft, Kunst und Macht.* Universitätsbibliothek Heidelberg. www.ub.uni-heidelberg.de/helios/fachinfo/www/math/htmg/Hasse/Mathe5.pdf.

Heawood, P. J. (1890): *Map-colour theorem.* The Quaterly Journal of Mathematics **24**, 332–338.

Heesch, H. (1969): *Untersuchungen zum Vierfarbenproblem.* Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich.

Heintz, B. (2000): *Die Innenwelt der Mathematik. Zu Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin.* Springer, Wien, New York.

Heintz, B. (2003): *Review: When is a Proof a Proof.* Social Studies of Science **33**(6), 929–943.

Heintz, B. (2010): *In der Mathematik is ein Streit mit Sicherheit zu entscheiden.* Zeitschrift für Soziologie **29**(5), 339–360.

Hengstenberg, M. (2010): *Des Würfels letztes Rätsel.* Der Spiegel 23/2010. http://www.spiegel.de/spiegel/print/d-70833853.html.

Henle, J. & Tymoczko, T. (2000): *Sweet reason– A field guide to modern logic.* Springer, New York.

Herczeg, T. (2009): *The Effect of Computers on Pure Mathematics.* Roskilde University Digital Archive. http://hdl.handle.net/1800/4916.

Hersh, R. (1991): *Mathematics has a front and a back.* Synthese **88**(2), 127–133.

Hersh, R. (1993): *Proving is Convincing and Explaining.* Educational Studies in Mathematics **24**(4), Aspects of Proof, 389–399.

Hersh, R. (1995): *Fresh Breezes in the Philosophy of Mathematics.* The American Mathematical Monthly **102**(7), 589–594.

Hersh, R. (1997): *Prove– Once More and Again.* Philosophia Mathematica **5**(2), 153–165.

Hersh, R. (2005): *18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics.* Springer, New York.

Heuser, H. (2009): *Lehrbuch der Analysis. Teil 1.* Vieweg + Teubner, Wiesbaden.

Hilbert, D. (1902): *Mathematical Problems.* Bulletin of the American Mathematical Society **8**(10), 437–479.

Hilbert, D. (1935): *Gesammelte Abhandlungen. Dritter Band.* Springer, Berlin. http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN237834022.

Hilbert, D. & Bernays, P. (1968): *Das Problem der Widerspruchsfreiheit in der Axiomatik als logisches Entscheidungsproblem.* In: Hilbert, D. [Hrsg.]: *Grundlagen der Mathematik I.* 1–19. Springer, Berlin Heidelberg.

Hoffman, D. (1987a): *The computer-aided discovery of new embedded minimal surfaces.* The Mathematical Intelligencer **9**(3), 8–21.

Hoffman, P. (1987b): *The man who loves only numbers.* Atlantic Monthly **260**(5), 60–74.

Horgan, J. (1993): *The Death of Proof.* Scientific American **269**, 74–103.

Hume, D. (2012): *A Treatise of Human Nature. Dover Philosophical Classics.* Courier Corporation, Dover.

Inglis, M. (2007): *Paradigms for Proofs.* http://www.tpp.umassd.edu/proofcolloquium07/summaries/inglis_summary.pdf.

Inglis, M. & Mejia-Ramos, J. P. (2009): *The effect of authority on the persuasiveness of mathematical arguments.* Cognition and Instruction **27**(1), 25–50.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., Weber, K. & Alcock, L. (2013): *On mathematicians' different standards when evaluating elementary proofs.* Topics in Cognitive Science. http://homepages.lboro.ac.uk/~mamji/files/TopiCS_PfReading.pdf.

Jackson, J. C. (2009): *Randomized Arguments are Transferable.* Philosophia Mathematica **17**(3), 363–368.

Jaffe, A. (1997): *Proof and the Evolution of Mathematics.* Synthese **111**(2), Proof and Progress in Mathematics, 133–146.

Jaffe, A. & Quinn, F. (1993): *›Theoretical Mathematics‹: Towards a cultural synthesis of mathematics and theoretical physics.* Bulletin of the American Mathematical Society **29**(1), 1–13.

Jörgenson, L. (2015): *Zeros of Polynomialy with Constrained Roots.* http://www.cecm.sfu.ca/~loki/Projects/Roots/.

Joswig, M. & Polthier, K. (2000): *Digital Models and computer Assisted Proofs.* EMS Newsletter December 2000.

Kanamori, A. (2010): *Mathematical Knowledge: Motley and Complexity of Proof.* http://kurt.scitec.kobe-u.ac.jp/~fuchino/xpapers/japanproof.pdf.

Kauers, M., Koutschan, C. & Zeilberger, D. (2009): *Proof of the Ira Gessel's lattics path conjecture.* Proceedings of the National Academy of Sciences **106**(28), 11502–11505.

Kauffman, L. H. (2001): *The Robbins problem: Computer proofs and human proofs.* Kybernetes **30**(5/6), 726–752. math.uic.edu/~kauffman/RobbinsPaper.pdf.

Kawasaki, K.-I. (2005): *Proof without words: Viviani's theorem.* Mathematics Magazine (3), 213.

Kempe, A. B. (1879a): *How to colour a map with four colours.* Nature **21**, 399–400.

Kempe, A. B. (1879b): *On the geographical problem of the four colors.* American Journal of Mathematics **2**, 193–200.

Kerber, M. (2010): *Proofs, Proofs, Proofs, and Proofs.* Lecture Notes in Computer Science **6167**, 345–354.

Kimmerle, W. (2008): *Zur Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen.* Mathematik-Online: Beiträge zu berühmten, gelösten und ungelösten Problemen **4**, 1–10.

King, J. P. (2006): *The Art of Mathematics.* Dover Publications, New York.

Kitcher, P. (1977): *On the Uses of Rigorous Proof.* Science **196**(4291), 782–783.

Kitcher, P. (1981): *Mathematical Rigor- Who needs it?* Noûs **15**(4), 469–493.

Kitcher, P. (1984): *The Nature of Mathematical Knowledge.* Oxford University Press, New York/Oxford.

Kleiner, I. (1991): *Rigor and Proof in Mathematics: A Historical Perspective.* Mathematics Magazine **64**(5), 291–314.

Kleiner, I. (2000): *From Fermat to Wiles: Fermat's Last Theorem Becomes a Theorem.* Elemente der Mathematik **22**, 19–37.

Kleiner, I. (2012): *Excursions in the History of Mathematics.* Springer.

Kline, M. (1980): *Mathematics: The Loss of Certainty.* Oxford University Press, New York.

Knorr-Cetina, K. (1984): *Die Fabrikation von Erkenntnis– Zur Anthropologie der Naturwissenschaften.* Suhrkamp, Frankfurt a. M.

Koch, H., Schenkel, A. & Wittwer, P. (1996): *Computer-assisted Proofs in Analysis and Programming in Logic.* Siam Review **38**(4), 565–604.

Kolata, G. (1991): *Math Problem, Long Baffling, Slowly Yields.* New York Times 12.03.1991. http://www.nytimes.com/1991/03/12/science/math-problem-long-baffling-slowly-yields.html.

Kolata, G. (1993): *At Last, Shout of ›Eureka!‹ In Age-Old Math Mystery.* New York Times 24.05.1993. http://www.nytimes.com/1993/06/24/us/at-last-shout-of-eureka-in-age-old-math-mystery.html?pagewanted=all&src=pm.

Kolata, G. B. (1976): *The Four-Color Conjecture: A Computer-Aided Proof.* Science, New Series **193**(4253), 564–565.

Körner, S. (1970): *Erfahrung und Theorie.* Suhrkamp, Frankfurt a. M.

Krakowski, I. (1980): *The Four-Color-Problem Reconsidered.* Philosophical Studies **38**(1), 91–96.

Kramer, J. (1998): *Über den Beweis der Fermat-Vermutung II.* Elemente der Mathematik **53**, 45–60.

Krämer, W. (2010): *Computer-assisted proofs and symbolic computations.* Serdica J. Computing **4**, 73–84.

Krantz, S. G. (2011): *The Proof is in the Pudding.* Springer, New York, Heidelberg.

Krieger, M. H. (1991): *Theorems as Meaningful Cultural Artifacts: Making the World Additive.* Synthese **88**(2), 135–154.

Kripke, S. (1972): *Naming and Necessity.* Harvard University Press, Camebridge.

Kuhn, T. S. (2014): *Die Struktur wissenschaftlicher Revolutionen.* Suhrkamp, Frankfurt a. M.

Lakatos, I. (1976): *A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics.* British Journal for the Philosophy of Science **27**, 201–223.

Lakatos, I. (1979): *Beweise und Widerlegungen – Die Logik mathematischer Entdeckungen.* Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig.

Lakoff, G. & Núnez, R. E. (2000): *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being.* Basic Books, New York.

Lam, C. W. H. (1990): *How Reliable Is a Computer-Based Proof?* The Mathematical Intelligencer **12**(1), 8–12.

LAM, C. W. H., THIEL, L. & SWIERCZ, S. (1989): *The non-existence of finite projective planes of order 10.* Canadian Journal of Mathematics **41**(6), 1117–1123.

LANFORD, O. E. (1982): *A computer assisted proof of the Feigenbaum Conjectures.* Bulletin of the AMS **6**(3), 427–434. http://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.bams/1183548786.

LARSON, C. E. (2005): *A survey of research in automated mathematical conjecture-making.* DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science **69**, 297–318.

LARVOR, B. (2008): *What can the philosophy of mathematics learn from the history of mathematics?* Erkenntnis **68**(3), 393–407.

LARVOR, B. (2012): *How to think about formal proofs.* Synthese **187**(2), 715–730.

LEHNING, H. (1990): *Computer-Aided or Analytic Proof?* The College Mathematics Journal **21**(3), 228–239.

LEMMERMEYER, F. (2010): *Reciprocity Laws: From Euler To Eisenstein.* Springer, Berlin, Heidelberg.

LENG, M., POTTER, M. & PASEAU, A. (2007): *Mathematical Knowledge.* Oxford University Press.

LEVIN, M. R. (1981): *On Tymoczko's Argument for Mathematical Empirism.* Philosophical Studies **39**(1), 79–86.

LEYS, J. (2015): *The Lorenz attractor.* http://imaginary.org/gallery/the-lorenz-attractor.

LI, P. & MAGNANI, L. (2007): *Model-Based Reasoning in Science, Technology and Medicine.* Springer, Berlin, Heidelberg.

LINDSTRÖM, S., PALMGREN, E., SEGERBERG, K. & STOLTENBERG-HANSEN, V. (2008): *Logicism, intuitionism, and formalism: What has become of them?* Bd. Synthese Library. Springer.

LINNEBO, Ø. (2011): *Platonism in the Philosophy of Mathematics.* The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2011 Edition), hrsg. von E. N. Zalta. http://plato.stanford.edu/archives/fall2011/entries/platonism-mathematics/.

LIVINGSTON, E. (1999): *Cultures of Proving.* Social Studies of Science **29**(6), 867–888.

LONDON MATHEMATICAL SOCIETY (1878): *Report of the meeting of June 13.* Nature **18**, 294.

LONG, R. L. (1986): *Remarks on the History and Philosphy of Mathematics.* The American Mathematical Monthly **93**(8), 609–619.

Löwe, B., Müller, B. & Wilhelmus, E. (2007): *Mathematical knowledge: a case study in empirical philosophy of mathematics.* http://dare.uva.nl/document/54037.

Macintyre, A. (2005): *The mathematical significance of proof theory.* Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **363**(1835), The Nature of Mathematical Proof, 2419–2435.

MacKenzie, D. (1999): *Slaying the Kraken: The Sociohistory of a Mathematical Proof.* Social Studies of Science **29**(1), 7–60.

MacKenzie, D. (2001): *Mechanizing proof: computing, risk, and trust.* MIT Press.

MacKenzie, D. (2005): *Computing and the cultures of proving.* Philosophical Transactions of the Royal Society A **363**, 2335–2350.

Mackenzie, D. (2005): *What in the Name of Euclid Is Going On Here?* Science **307**(5714), 1402–1403.

MacLane, S. (1981): *Mathematical Models: A Sketch for the Philosophy of Mathematics.* The American Mathematical Monthly **88**(7), 462–472.

MacLane, S. (1984): *Proof is eternal.* Proceedings of the American Philosophical Society **128**(1), 44–47.

MacLane, S. (1997): *Despite Physicists, Proof is Essential in Mathematics.* Synthese **111**, 147–154.

Maddy, P. (1991): *Philosophy of Mathematics: Prospects for the 1990s.* Synthese **88**, 155–164.

Maddy, P. (1992): *Realism in Mathematics.* Clarendon Press, Oxford.

Magee, B. (1987): *Talking Philosophy: Dialogues with fifteen leading philosophers.* Oxford University Press.

Manin, Y. I. (1981): *A Digression on Proof.* The Two-Year College Mathematics Journal **12**(2), 104–107.

Marion, M. (2011): *Wittgenstein on surveyability of proofs.* In: Kuusela, O. & McGinn, M. [Hrsg.]: *The Oxford Handbook of Wittgenstein.* Oxford University Press.

Martin, J. L. (2010): *Book Review: Euler's Gem.* Notices of the American Mathematical Society **57**(11), 1448–1450.

Martin, U. (1997): *Computers, reasoning and mathematical practice.* In: Berger, U. & Schwichtenberg, H. [Hrsg.]: *Computational Logic, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Computational Logic.* http://www.eecs.qmul.ac.uk/~uhmm/papers/MartinMarkto.pdf.

May, K. O. (1965): *The Origin of the Four-Color Conjecture.* Isis **56**(3), 346–348.

Mayberry, J. (1994): *What is Required of a Foundation for Mathematics?* Philosophica Mathematics **3**(2), 15–35.

Mazur, B. (2008): *Mathematical Platonism and its Opposites.* http://www.math.harvard.edu/~mazur/papers/plato4.pdf.

McAllister, J. W. (2005): *Mathematical beauty and the evolution of the standards of mathematical proof.* The visual mind **II**(2), 15–35.

McConnell, S. (1993): *Code Complete.* Microsoft Press, Redmond, Wash.

McCune, W. (1997): *Solutions of the Robbins Problem.* Journal of Automated Reasoning **19**(3), 263–276. info.mcs.anl.gov/pub/tech_reports/reports/P642.pdf.

McCune, W. (2006): *Robbins Algebras Are Boolean.* http://www.cs.unm.edu/~mccune/papers/robbins/.

McEvoy, M. (2008): *The Epistemological Status of Computer-Assisted Proofs.* Philosophia Mathematica (III) **16**(3), Oxford University Press, 374–387.

McEvoy, M. (2011): *Experimental mathematics, computers and the a priori.* Synthese 1–16.

Mehrtens, H. (1992): *T.S. Kuhn's theories and mathematics: a discussion paper on the ›new‹ histiography of mathematics.* In: Gillies [1992] 21–41.

Memory, J. D. (2001): *Dialog with Computer in the Proof of the Four-Color Theorem.* Mathematics Magazine **74**(4), 313.

Millo, R. A. D., Lipton, R. J. & Perlis, A. J. (1979): *Social Processes and Proofs of Theorems and Programs.* Communications of the ACM **22**(5), 271–280.

Mitchem, J. (1981): *On the History and Solution of the Four-Color Map Problem.* The Two-Year College Mathematics Journal **12**(2), 108–116.

Moreno, L. & Sriraman, B. (2005): *Structural stability and dynamic geometry: Some ideas on situated proofs.* ZDM– The International Journal on Mathematics Education **37**(3), 130–139.

Morgan, F. (2005): *Book Review: Kepler's Conjecture and Hales' Proof.* Notices of the American Mathematical Society **52**(1), 44–47.

Mühlhölzer, F. (2012): *Braucht die Mathematik eine Grundlegung? Ein Kommentar des Teils III von Wittgensteins Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik.* Vittorio Klostermann, Frankfurt a. M.

Müller-Hill, E. (2011): *Die epistemische Rolle formalisierbarer mathematischer Beweise.* Doktorarbeit Uni Bonn. http://hss.ulb.uni-bonn.de/2011/2526/2526.pdf.

Müller-Hill, E. & Spies, S. (2011): *Der Begriff mathematischer Schönheit in einer empirisch informierten Ästhetik der Mathematik.* Mathematik Verstehen 261–281.

Mulzer, W. & Rote, G. (2008): *Minimum weight triangulation is NP-hard.* Journal of the ACM **55**(2), 1–10.

Murty, R. (1993): *A long-standing mathematical problem is solved: Fermat's Last Theorem.* Canadian Mathematical Society Notes **25**(Sept.), 16–20.

Naas, J. & Tutschke, W. (1997): *Große Sätze und schöne Beweise der Mathematik–Identität des Schönen, Allgemeinen, Anwendbaren.* Verlag Harri Deutsch Thun, Frankfurt a. M.

Nathanson, M. B. (2008): *Desperately seeking mathematical truth.* Notices of the American Mathematical Society **55**(7), 773.

Nelson, E. (2000): *Mathematics and Faith.* https://web.math.princeton.edu/~nelson/papers/faith.pdf.

Neubrand, M. (1989): *Remarks on the acceptance of proofs: The case of some recently tackled major theorems.* For the Learning of Mathematics **9**(3), 2–6.

Neumaier, A. (2002): *Grand Challenges and Scientific Standards in Interval Analysis.* Reliable Computing **8**, 313–320.

Neumaier, A. (2007): *Computer assisted proofs.* In: Luther, W. & Otten, W. [Hrsg.]: *Proc. 12th GAMM/MACS Symp. Sci. Comp.* IEEE Computer society.

Nickel, G. (2010): *Proof: Some notes on a phenomenon between freedom and enforcement.* In: Löwe, B. & Müller, T. [Hrsg.]: *PhiMSAMP. Philosophy of Mathematics: Sociological Aspects and Mathematical Practics.* 281–291. College Publications.

Nimtz, C. (2004): *Willard. V. O. Quine: Die Unterscheidung zwischen analytischen und synthetischen SÃ¤tzen.* In: Beckerman, A. & Perler, D. [Hrsg.]: *Reclams Klassiker der Philosophie heute.* Stuttgart.

Niqui, M. & Bertot, Y. (2003): *Contribution QArithSternBrocot. Binary Rational Numbers.* The Coq Proof Assistent. http://coq.inria.fr/V8.2pl1/contribs/QArithSternBrocot.html.

Norwood, F. H. (1982): *Long Proofs.* The American Mathematical Monthly **89**(2), 110–112.

Nova (2000): *Andrew Wiles on Solving Fermat.* http://www.pbs.org/wgbh/nova/physics/andrew-wiles-fermat.html.

Núñez, R. (2005): *Do Real Numbers Really Move? Language, Thought, and Gesture: The Embodied Cognitive Foundations of Mathematics.* In: Hersh [2005] Kap. 9, 160–181.

Nylander, P. (2008): *Polynomial roots.* https://nylander.wordpress.com/2008/12/29/polynomial-roots/.

Odifreddi, P. (2000): *The mathematical century: The 30 greatest problems of the last 100 years.* Princeton University Press.

Otte, M. (1994): *Mathematical Knowledge and the Problem of Proof.* Educational Studies in Mathematics **26**(4), 299–312.

Palais, R. S. (1999): *The visualization of mathematics: Toward a mathematical exploratorium.* Notices of the American Mathematical Society **46**(6), 647–658.

Palais, R. S. (2006): *Costa-Hoffman-Meeks Surface.* http://virtualmathmuseum.org/Surface/costa-h-m/costa-h-m.html.

Parsons, C. (1995): *Platonism and mathematical intuition in Kurt Gödel's thought.* The Bulletin of Symbolic Logic **1**(1), 44–74.

Paseau, A. (2007): *Scientific Platonism.* In: Leng et al. [2007] 123–149.

Pease, A., Smaill, A., Colton, S. & Lee, J. (2008): *Bridging the gap between argumenation theory and the philosophy of mathematics.* Kluwer, Holland.

Pedemonte, B. (2007): *How can the relationship between argumentation and proof be analysed?* Educational Studies of Mathematics **66**, 23–41.

People Magazine (1993): *The 25 most intriguing people of 1993.* http://www.people.com/people/article/0,,20107073,00.html.

Peterson, I. (1997): *Computers and Proofs.* Science News **15**(12), 176–177.

Platon (2005): *Der Staat.* Voltmedia, Paderborn.

Pollack, R. (1997): *How to believe a machine-checked proof.* In: Sambin, G. & Smith, J. [Hrsg.]: *Twenty Five Years of constructive Type Theory.* Oxford University Press.

Polya, G. (1954): *Mathematics and Plausible Reasoning.* Princeton University Press.

Polya, G. (1986a): *From the Preface of Induction and Analogy.* In: Tymoczko [1986b] 99–102.

Polya, G. (1986b): *Generalization, Specialization, Analogy.* In: Tymoczko [1986b] 103–124.

Popley, S. (1988): *Mathematical Proof and Computer Science.* http://home.uchicago.edu/~sepopley/downloads/study_sep.pdf.

Pöppe, C. (2009): *Der Computer als Formelentdecker.* Spektrum der Wissenschaft Jan. 2009, 76–78.

Poser, H. (1988): *Mathematische Weltbilder. Begründungen mathematischer Realität.* In: Hoyningen-Huene, P. & Hirsch, G. [Hrsg.]: *Wozu Wissenschaftphilosophie?* 289–309. de Gruyter.

Putnam, H. (1986): *What is Mathematical Truth?* In: Tymoczko [1986b] 50–66.

Quine, W. V. O. (1961): *Two Dogmas of Empricism.* In: Quine, W. V. O. [Hrsg.]: *From a Logical Point of View: 9 Logico-philosophical Essays.* Harvard University Press, Cambridge.

Quine, W. V. O. (1985): *Theorien und Dinge.* Suhrkamp, Frankfurt a. M.

Quine, W. V. O. (1990): *The Pursuit of Truth.* Harvard University Press, Cambridge.

Quinn, F. (2011): *Contributions to a science of contemporary mathematics.* Draft Version 0.92 März 2011. https://www.math.vt.edu/people/quinn/history_nature/nature0.pdf.

Raussen, M. & Skau, C. (2004): *Interview with Jean-Pierre Serre.* Notices of the American Mathematical Society **51**(2).

Rav, Y. (1999): *Why Do We Prove Theorems?* Philosophia Mathematica **3**(7), 5–41.

Rav, Y. (2005): *Philosophical Problems of Mathematics in the Light of Evolutionary Epistemology.* In: Hersh [2005] Kap. 5, 71–96.

Rav, Y. (2007): *A Critique of a Formalist-Mechanic Version of the Justification of Arguments in Mathematician's Proof Practices.* Philosophia Mathematica (III) **15**(3), 291–320.

Reinelt, G. (2015): *TSPLIB.* http://comopt.ifi.uni-heidelberg.de/software/TSPLIB95/.

Renz, P. (1981): *Mathematical Proof: What It Is and What It Ought to Be.* The Two-Year College Mathematics Journal **12**(2), 83–103.

Resnik, M. (1992): *Proof as a Source of Truth.* In: Detlefson [1992] 1–18.

Resnik, M. (1997): *Mathematics as a Science of Patterns.* Oxford University Press, New York.

Resnik, M. D. (2005): *Quine and the Web of Belief.* In: Shapiro [2005] 412–436.

Richeson, D. S. (2008): *Euler's Gem.* Princeton University Press.

Riessinger, T. (2010): *Wahrheit oder Spiel– Philosophische Probleme der Mathematik.* Aufklärung und Kritik **2**, 42–66. http://www.gkpn.de/Riessinger_Mathematik.pdf.

Robertson, N., Sanders, D., Seymour, P. & Thomas, R. (1995): *The Four Color Theorem.* http://people.math.gatech.edu/~thomas/FC/.

Robertson, N., Sanders, D., Seymour, P. & Thomas, R. (1996): *A new proof of the four-colour theorem.* Electronic Research Announcements of the American Mathematical Society **2**(1), 17–25.

Robinson, J. A. (1997): *Informal Rigor and Mathematical Understanding.* Lecture Notes in computer Science **1289**, 54–64.

Rokicki, T., Kociemba, H., Davidson, M. & Dethridge, J. (2010a): *The Diameter of the Rubik's Cube Group Is Twenty.* SIAM Journal of Discrete Mathematics **27**(2), 1082–1105. http://dx.doi.org/10.1137/120867366.

Rokicki, T., Kociemba, H., Davidson, M. & Dethridge, J. (2010b): *God's Number is 20.* http://www.cube20.org/.

Rota, G. C. (1997): *The phenomenology of mathematical proof.* Synthese **111**(2), 183–196.

Rota, G. C. (2005): *The Pernicious Influence of Mathematics upon Philosophy.* In: Hersh [2005] Kap. 13, 220–230.

Rotman, B. (2005): *Will the digital computer transform classical mathematics?* Philosophical Transactions: Mathematical, Physical and Engineering Sciences **361**(1809), 1675–1690.

Ruelle, D. (2007): *Wie Mathematiker ticken.* Princeton University Press.

Rufener, C. M. (2011): *The Four-Color Theorem Solved, Again: Extending the Extended Mind to the Philosophy of Mathematics.* Res Cogitans **2**, 215–228.

Rump, S. M. (2005): *Computer-assisted Proofs and Self-validating Methods.* In: Einarsson, B. [Hrsg.]: *Accuracy and Reliability in Scientific Computing.* 195–240. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Russell, B. & Whitehead, A. N. (1968): *Principia mathematica.* Cambridge University Press.

Sabbagh, K. (2003): *The Riemann Hypothesis: The Greatest Unsolved Problem in Mathematics.* Farrar, Strauss and Giroux.

Schattschneider, D. (2006): *Beauty and Truth in Mathematics.* In: Sinclair et al. [2006] 11–57.

Scheibe, E. (2006): *Die Philosophie der Physiker.* Verlag C. H. Beck, München.

Schmidt, U. (1982): *Überprüfung des Beweises für den Vierfarbensatz.* Diplomarbeit. Technische Hochschule Aachen.

Schneider, G. (2013): *Mathematischer Platonismus.* http://serv3.ub.uni-heidelberg.de/volltextserver/14288/1/Dissertation%20Gregor%20Schneider.pdf.

Schummer, J. (1994): *Die Rolle des Experiments in der Chemie.* In: Janich, P. [Hrsg.]: *Philosophische Perspektiven der Chemie.* Mannheim: Bibliographisches Institut.

Science News (1976): *Four-Color Conjecture Verified.* Science News **110**(5), 31.07.1976.

Seiden, S. (2001): *Can a Computer Proof Be Elegant?* ACM SIGACT News **32**(1), 111–114.

Seiden, S. (2002): *A manifesto for the computational method.* Theoretical Computer Science **282**, 381–395.

Severn, P. M. (1990): *The Motley of Mathematics: A study of Wittgenstein's Philosophy of Mathematics.* Durham theses, Durham University. http://etheses.dur.ac.uk/6225/.

Seymour, P. (1994): *Progress on the four-color theorem.* Proceedings of the Internationla Congress of Mathematicians 183–195.

Shallit, J. (2005): *Book Review: Mathematics by Experiment and Experimentation in Mathematics.* Notices of the American Mathematical Society **56**, 863–865.

Shanker, S. (1987): *Wittgenstein and the Turning-Point in the Philosophy of Mathematics.* SUNY Press, New York.

Shapiro, S. (1983): *Mathematics and Reality.* Philosophy of Science **50**, 523–548.

Shapiro, S. (2005): *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics ans Logic.*

Simpson, C. (2004): *Computer theorem proving in math.* http://arxiv.org/abs/math/0311260v2.

Simpson, S. (1988): *Partial realizations of Hilbert's Program.* Journal of Symbolic Logic **53**, 349–363.

Sinclair, N., Pimm, D. & Higginson, W. (2006): *Mathematics and the Aesthetics. New Approaches to an Ancient Affinity.* Springer, New York.

Singh, S. (1997): *Fermat's Last Theorem.* Forth Estate, London.

Smale, S. (1998): *Mathematical Problems for the Next Century.* Mathematical Intelligencer **20**(2), 7–15. http://dx.doi.org/10.1007%2Fbf03025291.

Smee, S. A. (2012): *Applying Kuhn's Theories to the development of mathematics.* Oregan State University.

Solomon, R. (2001): *A Brief History of the Classification of the Finite Simple Groups.* Bulletin of the American Mathematical Society **38**(3), 315–352.

Sørensen, H. K. (2008): *What's experimental about experimental mathematics?* Preprint. http://www.experimentalmath.info/papers/sorenson-expm.pdf.

Spencer, J. (1983): *Short Theorems with Long Proofs.* The American Mathematical Monthly **90**(6), 365–366.

Spies, S. (2013): *Ästhetische Erfahrung Mathematik: Über das Phänomen schöner Beweise und den Mathematiker als Künstler.* In: Krömer, R. & Nickel, G. [Hrsg.]: *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik, Jahrgang 1, Band 2.* Universitätsverlag Siegen.

Stanway, T. (2005): *From G.H.H. and Littlewood to XML and Maple: Changing Needs and Expectations in Mathematical Knowledge Management.* In: Hersh [2005] Kap. 8, 147–159.

Steen, L. A. (1988): *The Science of Patterns.* Science, New Series **240**(4852), 611–616.

Steinberger, J. (2010): *An unavoidable set of D-reducible configurations.* Transactions of the American Mathematical Society **362**(12), 6633–6661.

Stewart, I. (1990): *Mathematik.* Birkhäuser.

Stillwell, J. (2014): *Wahrheit, Beweis, Unendlichkeit.* Springer, Berlin, Heidelberg.

Stout, L. N. (1999): *Aesthetic Analysis of Proof of the Binomial Theorem.* http://www.iwu.edu/~lstout/aesthetics.pdf.

Stoyan, H. & Müller, M. (1999): *Zur kreativen wissensbasierten Entdeckung interessanter mathematischer Konzepte mit Methoden der künstlichen Intelligenz.* Berichtsband zum Symposium ›Kreatives Denken und Innovationen in mathematischen Wissenschaften‹, Universität Jena, Fakultät für Mathematik und Informatik, Abteilung Didaktik.

Sundholm, B. G. (1993): *Questions of Proof.* Manuscrito (Campinas) **16**, 47–70.

Swart, E. R. (1980): *The philosophical implications of the four-colour theorem.* The American Mathematical Monthly **87**(9), 697–707.

Swinnerton-Dyer, P. (2005): *The justification of mathematical statements.* Philosophical Transactions of the Royal Society **363**, 2437–2447.

Szekeres, G. & Peters, L. (2006): *Computer solution to the 17-point Erdõs-Szekeres Problem.* The ANZIAM Journal **46**, 151–164. http://www.austms.org.au/Publ/ANZIAM/V48P2/pdf/2409.pdf.

Szpiro, G. G. (2009): *Computer– die rigoroseren Mathematiker?* Neue Züricher Zeitung 11. März. http://www.nzz.ch/aktuell/startseite/computer--die-rigoroseren-mathematiker-1.2179311#.

Szpiro, G. G. (2011): *Die Kepler'sche Vermutung.* Springer, Heidelberg.

Tait, W. W. (1986): *Truth and proof: The Platonism of mathematics.* Synthese **69**(3), 341–370.

Tall, D. (1991): *The psychology of advanced mathematical thinking.* In: Tall, D. [Hrsg.]: *Advanced mathematical thinking.* 3–21. Kluwer.

Tao, T. (2007): *What is good mathematics?* http://arxiv.org/pdf/math/0702396v1.pdf.

Tappendem, J. (2008): *Mathematical Concepts and Definitions.* In: Mancuso, P. [Hrsg.]: *The Philosophy of Mathematical Practice.* 256–275. Oxford University Press. http://dx.doi.org/10.1093/acprof:oso/9780199296453.003.0010.

Taylor and Francis Online (2015): *Experimental Mathematics.* www.tandfonline.com/toc/uexm20/home.

Teller, P. (1980): *Computer Proof.* The Journal of Philosophy **77**(12), 797–803.

TheoryMine (2015): *Personalized mathematical theorems.* theorymine.co.uk.

Théry, L., Letouzey, P. & Gonthier, G. (2006): *Coq.* In: *The Seventeen Provers of the World* 28–35. http://dx.doi.org/10.1007/11542384_6.

Thiel, C. (1995): *Philosophie und Mathematik– Eine Einführung in ihre Wechselwirkungen und in die Philosophie der Mathematik.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt.

Thomas, R. (1998): *An Update on the Four-Color Theorem.* Notices of the American Mathematical Society **45**(7), 848–859.

Thomas, R. S. D. (1990): *Inquiry into meaning and truth.* Philosophia Mathematica **II**(5), 73–87.

Thurston, W. P. (1995): *On Proof and Progress in Mathematics.* For the Learning of Mathematics **15**(1), 29–37.

Tittmann, P. (2003): *Graphentheorie.* Hanser Fachbuchverlag.

Tucker, W. (1999): *The Lorenz attractor exists.* Les Comptes Rendus de l'Académie des sciences **1**, 1197–1202. http://www2.math.uu.se/~warwick/main/papers/comptes.pdf.

Tutte, W. T. (1978): *Colouring Problems.* The Mathematical Intelligencer **1**(2), 72–75.

Tymoczko, T. (1979): *The Four-Color Theorem and Its Philosophical Significance.* The Journal of Philosophy **76**(2), 57–83.

Tymoczko, T. (1980): *Computers, Proofs and Mathematicians: A Philosophical Investigation of the Four-Color Proof.* Mathematics Magazine **53**(3), 131–138.

Tymoczko, T. (1981): *Computer Use to Computer Proof: A Rational Reconstruction.* The Two-Year College Mathematical Journal **12**(2), 120–125.

Tymoczko, T. (1984): *Gödel, Wittgenstein and the Nature of Mathematical Knowledge.* Proceedings of the Biennal Meeting of the Philosophy of Science Association **1984**(2), 449–468.

Tymoczko, T. (1986a): *Making Room for Mathematicians in the Philosophy of Mathematics.* The Mathematical Intelligencer **8**(3), 44–50.

Tymoczko, T. (1986b): *New directions in the philosophy of mathematics: an anthology.* Birkhäuser, Boston.

Tymoczko, T. (1988): *Mathematics, Science and Ontology.* Synthese **88**(2), 201–228.

Ullmann, D. H. (1999): *Book Review: Proofs from THE BOOK.* Notices of the American Mathematical Society **46**(7), 789–791.

van Bendegem, J. P. (1988): *Non-Formal Properties of Real Mathematical Proofs.* PSA: Proceedings of the Biennal Meeting of the Philosophy of Science Association **1988**(1), Contributed Papers, 249–254.

van Bendegem, J. P. (2000): *Alternative Mathematics: The Vague Way.* Synthese **125**, 19–31.

van Bendegem, J. P. (2005): *Proofs and Arguments: The Special Case of Mathematics.* http://www-didactique.imag.fr/preuve/CERME3papers/Bendegem-paper.pdf.

van Denover, D. (2012): *Epistemic Justification and the Possibility of Computer Proof.* Macalester Journal of Philosophy **20**(1), 183–198.

van Kerkhoeve, B. (2006): *Mathematical Naturalism: Origins, Guises and Prospects.* Foundations of Science **11**, 5–39.

van Kerkhoeve, B. & van Bendegem, J. P. (2008): *Pi on Earth, or Mathematics in the Real World.* Erkenntnis **68**, 421–435.

Verloren Van Themaat, W. T. (1989): *The Own Character of Mathematics Discussed with Consideration of the Proof of the Four-Color-Theorem.* Journal for General Philosophy of Science **20**(2), 340–350.

von Liebig, J. (1863): *Über Francis Bacon von Verulam und die Methode der Naturforschung.* Cotta, München.

von Neumann, J. (1948): *Electronic Methods of Computation.* Bulletin of the American Academy of Arts and Sciences **1**(3), 2–4.

von Neumann, J. (1976): *The Mathematician.* In: Taub, A. H. [Hrsg.]: *John von Neumann: Collected Work.* Bd. 1 1–9. Pergamon Press, Oxford.

von Rauchhaupt, U. (2008): *Lauter, Kinder, Papa muss arbeiten.* Frankfurter Allgemeine Zeitung 09.07.2008. http://www.faz.net/aktuell/wissen/physik-chemie/mathematik-lauter-kinder-papa-muss-arbeiten-1665085.html.

Wagner, K. (1970): *Graphentheorie.* B.I.- Hochschultaschenbücher 248/248*, Mannheim, Wien, Zürich.

Wang, H. (1986): *Theory and Practice in Mathematics.* In: Tymoczko [1986b] 130–152.

Wells, D. (1990): *Are these the most beautiful?* The Mathematical Intelligencer **12**(3), 37–41.

Weth, T. (2007): *Die Schönheit der Mathematik.* In: Lauter, M. [Hrsg.]: *Ausgerechnet... Mathematik und Konkrete Kunst* 68–72. Spurbuchverlag, Würzburg.

White, L. A. (2005): *The locus of Mathematical Reality: An Anthropological Footnote.* In: Hersh [2005] Kap. 17, 304–319.

Wiedijk, F. (2003): *Comparing mathematical provers.* In: Asperti, A., Buchberger, B. & Davenport, J. H. [Hrsg.]: *Mathematical Knowledge Management.* 188–202. Springer, Berlin Heidelberg. http://cs.ru.nl/~freek/comparison/diffs.pdf.

Wiedijk, F. (2004): *Formal proof sketches.* In: *Types for Proofs and Programs.* 378–393. Springer, Berlin, Heidelberg. www.cs.ru.nl/F.Wiedijk/notes/sketches.pdf.

Wilder, R. L. (1994): *The Nature of Mathematical Proof.* The American Mathematical Monthly **51**(6), 309–323.

Wiles, A. (1995): *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem.* Annals of Mathematics **142**, 443–551.

Wilhelmus, E. (2007): *Wissenszuschreibungen in der mathematischen Praxis.* http://www.phimsamp.uni-bonn.de/ipf/kolloquium_bonn_slides.pdf.

Wilson, R. J. (2002): *Four Colors Suffice.* Princeton University Press.

Wittgenstein, L. (1984): *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik.* Suhrkamp, Frankfurt a. M.

Wolf, M. (2014): *Will a physicists prove the Riemann Hypothesis?* http://arxiv.org/pdf/1410.1214.

Womach, C. & Farach, M. (2003): *Randomization, Persuasivemess and Rigor in Proofs.* Synthese **134**, 71–84.

Wong, K.-Y. (2007): *Computers, Mathematical Proof and A Priori Knowledge.* http://phil.arts.cuhk.edu.hk/~phidept/papers/kywong/body_cognition.pdf.

Wong, K.-Y. (2009): *Taking the Word of a Machine.* http://phil.arts.cuhk.edu.hk/~phidept/papers/kywong/wordofmachine.pdf.

Zeilberger, D. (1994): *Theorems for a price: Tomorrow's Semi-Rigorous Mathematical Culture.* The Mathematical Intelligencer **16**(4), 11–14.

Zeilberger, D. (2001): *›Real‹ Analysis is a degenerate case of discrete analysis.* Vortragstranskript. http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/mamarim/mamarimPDF/real.pdf.