KITopen (2017), 4 pp.
DOI: 10.5445/IR/1000067068

Charakterisierung des Betrages reellwertiger additiver Funktionen auf Gruppen

Peter Volkmann

Es sei G eine Gruppe und $a : G \to \mathbb{R}$ *additiv*, d.h.

$$a(xy) = a(x) + a(y) \quad (x, y \in G). \tag{1}$$

Dann ergeben sich für

$$f(x) = |a(x)| \quad (x \in G) \tag{2}$$

die Formeln

$$\max\{f(xy), f(xy^{-1})\} = f(x) + f(y) \quad (x, y \in G), \tag{3}$$
$$f(xyz) = f(yxz) \quad (x, y, z \in G). \tag{4}$$

Nun soll umgekehrt für Funktionen $f : G \to \mathbb{R}$ aus (3), (4) das Bestehen von (2) mit einer additiven Funktion $a : G \to \mathbb{R}$ gefolgert werden.

Für kommutative Gruppen G gelingt das nach einer gemeinsamen Arbeit [2] mit Alice Simon; dabei braucht (4) offenbar nicht gefordert zu werden.

Die bereits bei Pl. Kannappan [1] auftretende Bedingung (4) wird hier wie folgt eingesetzt: Es sei e das Einselement der Gruppe G. Mit $z = e$ folgt aus (4)

$$f(xy) = f(yx) \quad (x, y \in G).$$

Hieraus und aus (4) lässt sich ohne große Mühe die Invarianz von

$$f(x_1 x_2 \dots x_n)$$

gegenüber beliebigen Permutationen der Elemente $x_1, x_2, \dots, x_n$ aus G herleiten. Mit Hilfe dieser Tatsache wird der Beweis des nachstehenden Satzes ähnlich wie bei kommutativen Gruppen G in [2] geführt. Der dritte Beweisschritt wird noch vereinfacht.

Satz. Es sei G eine Gruppe und $f : G \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den Eigenschaften (3), (4). Dann gilt (2) mit einer additiven Funktion $a : G \to \mathbb{R}$.

Typoskript: Marion Ewald

Beweis. 1) $x = y = e$ in (3) liefert

$$f(e) = 0.$$

Mit $x = y$ in (3) folgt dann $\max\{f(x^2), 0\} = 2f(x)$, also gilt

$$f(x) \geq 0 \quad (x \in G) \tag{5}$$

und

$$f(x^2) = 2f(x) \quad (x \in G). \tag{6}$$

Mit $x = e$ in (3) ergibt sich noch

$$f(y^{-1}) = f(y) \quad (y \in G). \tag{7}$$

2) Aus (3) folgt (für $x, y \in G$)

$$f(xy) = f(x) + f(y) \text{ oder } f(xy^{-1}) = f(x) + f(y). \tag{8}$$

Wir zeigen:

$$\begin{align} f(xy) &= f(x) + f(y) \Longrightarrow f(xy^{-1}) = |f(x) - f(y)|, \tag{9}\\ f(xy^{-1}) &= f(x) + f(y) \Longrightarrow f(xy) = |f(x) - f(y)|, \tag{10}\\ f(xy) &= f(xy^{-1}) \Longrightarrow f(x)f(y) = 0. \tag{11} \end{align}$$

Mit Hilfe von (4) wird nämlich

$$\begin{aligned} f(x^2) &= f(xxyy^{-1}) = f((xy)(xy^{-1})),\\ f(y^2) &= f(yyxx^{-1}) = f((xy)(xy^{-1})^{-1}), \end{aligned}$$

und dann ergibt sich mit (3)

$$\max\{f(x^2), f(y^2)\} = f(xy) + f(xy^{-1}).$$

Im Falle $f(xy) = f(x) + f(y)$ folgt so (mit (6))

$$f(xy^{-1}) = 2\max\{f(x), f(y)\} - f(x) - f(y) = |f(x) - f(y)|,$$

also gilt (9). Wegen (7) folgt (10) aus (9) mit y ersetzt durch y^{-1}. Gilt $f(xy) = f(xy^{-1})$, so folgt mit (8), (9)

$$f(x) + f(y) = |f(x) - f(y)|,$$

also ist $f(x) = 0$ oder $f(y) = 0$. Damit ist auch (11) bewiesen.

3) Für $p, z \in G$ zeigen wir

$$f(zp^2) = f(z) + 2f(p) \Longrightarrow f(zp) = f(z) + f(p). \tag{12}$$

In der Tat, (3) mit $x = zp,\ y = p$ liefert zunächst

$$\max\{f(zp^2), f(z)\} = f(zp) + f(p).$$

Im Falle $f(zp^2) = f(z) + 2f(p)$ folgt dann (man beachte $f(p) \geq 0$ wegen (5))

$$f(z) + 2f(p) = f(zp) + f(p),$$

also ist $f(zp) = f(z) + f(p)$.

4) Nun bestimmen wir eine additive Funktion $a : G \to \mathbb{R}$, so dass (2) gilt. Ist $f(x) \equiv 0$, so nehmen wir $a(x) \equiv 0$. Anderenfalls wählen wir $p \in G$ mit

$$f(p) > 0, \tag{13}$$

und wir setzen (für alle $x \in G$)

$$a(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(xp) = f(x) + f(p) \\ -f(x), & \text{falls } f(xp^{-1}) = f(x) + f(p). \end{cases} \tag{14}$$

Auf Grund des Vorangehenden ist $a : G \to \mathbb{R}$ wohldefiniert, und es gilt (2). Es ist nicht sehr schwer,

$$a(x^{-1}) = -a(x) \quad (x \in G)$$

nachzuweisen, und damit genügt es, beim abschließenden Beweise von (1) den Fall

$$a(x), a(y) \geq 0$$

zu betrachten. Dementsprechend sei also

$$\begin{aligned} a(x) &= f(x), \qquad & f(xp) &= f(x) + f(p), \\ a(y) &= f(y), \qquad & f(yp) &= f(y) + f(p). \end{aligned}$$

Bedingung (3) mit x, y ersetzt durch xp bzw. yp liefert dann

$$\max\{f(xpyp), f(xy^{-1})\} = f(x) + f(y) + 2f(p).$$

Wegen (3) ist $f(xy^{-1}) \leq f(x)+f(y)$, wegen (13) folgt somit (unter Benutzung von (4))

$$f(xyp^2) = f(xpyp) = f(x) + f(y) + 2f(p).$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} f(xy) + 2f(p) \leq f(x) + f(y) + 2f(p) = f(xyp^2) &\leq f(xy) + f(p^2) \\ &= f(xy) + 2f(p). \end{aligned}$$

Es besteht Gleichheit, also ist

$$f(xy) = f(x) + f(y) \tag{15}$$

und

$$f(xyp^2) = f(xy) + 2f(p). \tag{16}$$

Aus (16) folgt mit (12)

$$f(xyp) = f(xy) + f(p).$$

Somit ist also $a(xy) = f(xy)$, und mit (15) wird schließlich

$$a(xy) = f(x) + f(y) = a(x) + a(y).$$

Literatur

1. Pl. Kannappan: *The functional equation $f(xy)+f(xy^{-1}) = 2f(x)f(y)$ for groups.* Proc. Amer. Math. Soc. **19**, 69-74 (1968).

2. Alice Simon (Chaljub-Simon), Peter Volkmann: *Caractérisation du module d'une fonction additive à l'aide d'une équation fonctionnelle.* Aequationes Math. **47**, 60-68 (1994).

Adresse des Autors: Institut für Analysis, KIT, 76128 Karlsruhe, Deutschland