
Auf metrischen und differentialgeometrischen
Konzepten basierende neue mathematische Algorithmen
zur Sensordatenfusion mit Anwendungen in der
Faser-Bragg-Gitter-Formsensorik

Zur Erlangung des akademischen Grades einer
Doktorin der Ingenieurwissenschaften

der Fakultät für Informatik
des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

genehmigte
DISSERTATION

von

Hendrikje Pauer
aus Hamburg

Datum der mündlichen Prüfung: 08. Februar 2017
Referent: Prof. Dr.-Ing. Heinz Wörn
Korreferent: Prof. Dr. rer. nat. Wilderich Tuschmann

Kurzfassung

Der Bedarf an Sensoren zur zeitkontinuierlichen Erfassung der Form flexibler Strukturen ist in verschiedenen Anwendungsfeldern vorhanden. Besonders in der Medizintechnik findet sich eine Vielzahl an Einsatzmöglichkeiten. Beispielsweise stellen die Vermessung von flexiblen Endoskopen, Biopsienadeln oder Kathetern Anwendungen für die Formerkennung dar. Um schwer erreichbare Operationsstrukturen zugänglich zu machen, geht ein aktueller Trend in der robotergestützten Chirurgie hin zu flexiblen, sehr filigranen Robotern. Beispielsweise sind hier Kontinuumsroboter zu nennen. Diese bestehen nicht aus einzelnen Gelenken und starren Verbindungen, sondern bilden eine flexible Struktur, die sich sehr frei im Raum verformen kann. Herkömmliche kinematische Modelle können bei diesen Robotern nicht angewendet werden, um die Position des Endeffektors zu erfassen und basierend darauf die Ansteuerung des Roboters zu regeln. Auch die Ansteuerung solcher Roboter bedarf demnach einer dynamischen Formerkennung des jeweils aktuellen Deformationszustandes.

Faser-Bragg-Gitter(FBG)-Formsensorik stellt eine vielversprechende Lösung zur Formerkennung flexibler Objekte dar. FBG-Formsensoren bestehen aus einem flexiblen Sensorträgerkörper in Schlangenform, in den FBG-Glasfasern eingegossen sind. In die FBG-Glasfasern sind an mehreren Stellen Strukturen eingeschrieben, die sogenannten Faser-Bragg-Gitter (FBGs). Die physikalischen Eigenschaften dieser FBGs ändern sich bei Dehnung des Gitters, somit kann die Faser als Dehnungsmessstreifen auf optischer Basis eingesetzt werden. An diskreten Stellen des Sensorträgerkörpers wird mittels der FBG-Glasfasern die durch Sensorverformung hervorgerufene Materialdehnung gemessen. Über Datenfusionsalgorithmen kann aus diesen Dehnungsinformationen die Sensorform geschätzt werden. Wird ein Formsensoren innerhalb eines flexiblen schlangenförmigen Objektes integriert, so wird die Verformung des Objektes und insbesondere die Position und Ausrichtung der Objektspitze über den Sensor messbar. Die eingesetzten FBG-Glasfasern eignen sich durch den geringen Durchmesser im Mikrometerbereich insbesondere zur Integration in kleine, filigrane Manipulatoren. Weitere Eigenschaften der FBG-Glasfasern, wie elektromagnetische Verträglichkeit, Sterilisierbarkeit oder Biokompatibilität sind vorteilhaft für den Einsatz in der Medizin. Obwohl die Thematik der FBG-Sensorik seit Anfang des 21. Jahrhunderts von Forschungsgruppen weltweit untersucht und vorangebracht wird, hat sich bisher noch kein Konzept auf dem Markt durchsetzen können. Dies liegt nach Ermessen der Autorin an einer bisher nicht ausreichenden Sensorgenauigkeit, hervorgerufen durch Schwierigkeiten in der praktischen Realisierung der Sensorik.

In dieser Arbeit wird eine alternative Herangehensweise in der FBG-Formsensorik erforscht. Das neue Konzept wird als *innovative FBG-Formsensorik* bezeichnet. Ziel der innovativen FBG-Formsensorik ist die Lösung der bisher bestehenden Schwierigkeiten in der praktischen Realisierung der betrachteten Sensorik.

Aus den Grundlagen der FBG-Formsensorik und dem aktuellen Stand der Technik wird der Bedarf an einer neuen Lösung in der FBG-Formsensorik herausgestellt. Darauf aufbauend wird das Konzept der innovativen FBG-Formsensorik hergeleitet. Bisher wurden FBG-Formsensoren unter der Einhaltung von bestimmten Restriktionen hergestellt. Die Anordnung der in den Trägerkörper integrierten FBGs ist dabei vorgegeben. Dabei müssen jeweils mindestens drei FBGs auf einem Querschnitt des Sensors liegen, um dreidimensionale Verformungen unter Anwendung der bisher bekannten Datenfusionsalgorithmen berechnen zu können. Eine parallele Faserführung ist üblicherweise vorgenommen. Die Einhaltung dieser Restriktionen ist in der Praxis schwer exakt realisierbar. Zudem ist die Deformationsflexibilität des Sensors wegen der parallelen Faserführung eingeschränkt. In der innovativen FBG-Formsensorik soll nun eine freie FBG-Verteilung ermöglicht werden. Eine helikale Faserführung um die Sensorachse ist dabei eine Realisierungsmöglichkeit. Durch die helikale Wicklung der Fasern ist deren Belastung bei Sensordeformation reduziert. Folglich ist eine höhere Deformationsflexibilität gegeben. Die uneingeschränkte FBG-Verteilung erleichtert die Sensorherstellung und führt zu einem kontrollierteren Faserverhalten bei Sensordeformation. Bessere Ergebnisse in der Formschätzung sind zu erwarten. Herkömmliche FBG-Formsensoren messen die Form der Sensorachse. Aus dieser können die Position und Ausrichtung der Sensorspitze berechnet werden. Diese Information ist besonders wichtig; sind die zu vermessenden Objekte an der Objektspitze mit Werkzeugen ausgestattet, so ist insbesondere die Lage dieser Werkzeuge zu beobachten. Die innovative FBG-Formsensorik ermöglicht zusätzlich zu der freien FBG-Verteilung eine Erweiterung der erfassbaren Form. Neben der Sensorachse soll auch die Sensoroberfläche erfasst werden. Damit ist eine Art taktile Sensorhaut vorhanden.

Die Konzeptumsetzung der innovativen FBG-Formsensorik erfordert neue Algorithmen zur Fusion der Messdaten und zur Rekonstruktion von Deformationen. Die theoretische Erarbeitung dieser Algorithmen ist der Hauptteil dieser Arbeit. Die mathematische Problemformulierung der innovativen FBG-Formsensorik wird als verallgemeinernde Erweiterung der konventionellen Problemformulierung aufgestellt. Die Problemformulierung unter Verwendung von Tensoren und Mannigfaltigkeiten erlaubt das Anwenden von bekannten Methoden aus der Mathematik. Metrische und differentialgeometrische Konzepte werden zur Formberechnung herangezogen. Insbesondere die Approximation der Sensoroberfläche über einen geometrischen Ansatz von Charles Fefferman et al. (vorgestellt in dem Artikel *'Reconstruction and interpolation of manifolds I: The geometric Whitney problem'* [Fef15]) ermöglicht die Nutzung bekannter topologischer Eigenschaften der zu erfassenden Objekte. Das Resultat des theoretischen Teils dieser Arbeit ist ein Algorithmus in verschiedenen Varianten, der anwendungsabhängig in unterschiedlicher Ausführung eingesetzt werden kann.

Die freie FBG-Verteilung führt auf Grund der helikalen Faserführung zu einer Reduktion der Faserbelastung. Dies ist ein Vorteil, der eine höhere Deformationsflexibilität der Fasern mit sich bringt. Allerdings ist zu evaluieren, ob die bei Dehnung des Trägerkörpers produzierten Materialdehnungen bei der helikalen Faserwicklung noch messbar sind. Ein modellkonformes Verhalten muss in den Messdaten erkennbar sein. Dies wird in einem praktischen Teil der Arbeit experimentell nachgewiesen werden. Bei den Tests geht es

hauptsächlich um die grundlegende Analyse der Messdaten und um den Nachweis, dass gemessene Dehnungen zu dem vorher theoretisch hergeleiteten Deformationsverhalten passen. In einem zweiten Testteil wird abschließend eine erste prototypische Formsensormechanik nach dem innovativen Konzept demonstriert. Grundformen, wie C- und S-Formen sind über den Sensor erfassbar.

Die theoretischen und praktischen Ergebnisse dieser Arbeit bilden die Basis der innovativen FBG-Formsensoren. Die erzielten Resultate versprechen eine grundlegende Verbesserung der FBG-Formsensoren. Es sind allerdings noch eine Vielzahl an Aspekten in Zukunft zu erarbeiten, um zu einem Formsensormechanik nach innovativem Konzept mit einer hohen Genauigkeit zu gelangen. Insbesondere auf der praktischen Seite sind neue Forschungsthemen aufgedeckt, die zukünftig zu betrachten sind. Im Ausblick dieser Arbeit sind die zukünftigen, auf dieser Dissertation aufbauenden Themen abschließend aufgezeigt.

Vorwort

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftliche Mitarbeiterin am Karlsruher Institut für Technologie (KIT) am Institut für Anthropomatik und Robotik (IAR) - Intelligente Prozessautomation und Robotik (IPR). Sie wurde im Rahmen des Graduiertenkollegs 1194 von der Deutschen Forschungsgemeinschaft gefördert.

Mein erster Dank geht an meinen Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. Heinz Wörn. Durch sein Vertrauen in meine Arbeit, seine Unterstützung bei der Umsetzung meiner Vorhaben in vielerlei Hinsicht und durch die fachliche Beratung, vor allem zu den ingenieurtechnischen Forschungsfragen, war mein Weg der Promotion hervorragend angeleitet. Die dabei gleichzeitig gegebenen Freiheiten bei der Verwirklichung meiner Ideen und die geteilte Begeisterung an der gemeinsam erforschten innovativen FBG-Formsensorik waren einzigartig.

Ebenfalls möchte ich mich ganz besonders bei Herrn Prof. Dr. Wilderich Tuschmann für die Übernahme des Koreferats bedanken. Von Beginn an unterstützte er mich mit bereichernden fachlichen Gesprächen und gab mir Anregungen zu den mathematischen Aspekten meiner Arbeit. Darüber hinaus bot er mir die Gelegenheit, mich auch im Kreise von Mathematikern durch die aktive Teilnahme an hochrangigen Workshops einbringen zu können. Sein stetes Interesse an meinem Fortschritt bei der Arbeit an der Dissertation hat mir sehr viel bedeutet.

Ein weiterer Dank geht an alle meine Kollegen am IPR. Für die interessante und vielseitige wissenschaftliche Zusammenarbeit an der FBG-Formsensorik möchte ich mich vor allem bei Herrn Dr. Christoph Ledermann bedanken. Für viele Gespräche und Hinweise habe ich Frau Luzie Schreiter und Herrn Dr. Jörg Raczkowsky sehr zu danken; fachlich und persönlich konnte ich von Euch viel lernen. Eine spannende Erweiterung meiner Forschungstätigkeit brachte mir die Zusammenarbeit mit Herrn Manuel Rosenberger und Herrn Maiko Girschikofsky von der Hochschule Aschaffenburg sowie mit Herrn Dr. Saiied Aminossadati und Herrn Mohammad Amanzadeh von der University of Queensland. Schließlich möchte ich meinen Studentinnen und Studenten und hilfswissenschaftlichen Mitarbeiterinnen danken. Die Zusammenarbeit mit Frau Anke Fischer ist hier besonders zu erwähnen und hat mir immer große Freude bereitet.

Der herzlichste Dank gilt meiner Familie. Meinem Vater, Herrn Dr. Alfred Pauer, danke ich dafür, dass er mir schon mein Leben lang alles zutraut und bei allen meinen Entscheidungen und Taten immer hinter mir steht. Durch Dich habe ich mich immer beschützt gefühlt, einen besseren Vater kann es nicht geben. Meiner Mutter, Frau Dr. Hanne Urban-Pauer, danke ich zuerst dafür, dass sie meine Dissertation mit viel Mühe und Sorgfalt Korrektur gelesen hat. Ich danke ihr zudem noch viel mehr dafür, dass sie mich bei allen Vorhaben motiviert; sie

ist mir immer ein Vorbild gewesen und ich bin sehr stolz und glücklich, eine solche Mutter zu haben. Ich bedanke mich bei meinen Geschwistern Meike, Imke, Charlotte, Swantje und Ole; ihr seid für mich das Allerwichtigste. Danke, dass ihr immer für mich da seid! Weiter möchte ich mich herzlich bei Matthias Freudenreich bedanken; durch Dich hatte ich in der Endphase der Promotion den denkbar liebsten Ausgleich. Zuletzt möchte ich meinen engsten Freunden Miriam Thielmann, Christiane Faulhaber, Luzie Schreiter und Raphael Pfeffer danken. Es ist schön, dass ich auf Euch zählen kann.

Karlsruhe im März 2017,

Hendrikje Pauer

Theoretisch ist es leicht, selbst den größten Baum zu fällen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Problemstellung und Ziel der Arbeit	2
1.2	Gliederung der Arbeit	4
1.3	Begriffserklärung	6
2	Grundlagen	9
2.1	Faser-Bragg-Gitter-Formsensorik	9
2.1.1	Formsensorkomponenten	10
2.2	Anwendung der Faser-Bragg-Gitter-Formsensorik in der Medizintechnik . . .	18
3	Stand der Technik	21
3.1	Verschiedene Technologien zur Formerkennung flexibler, schlangenförmiger Objekte	22
3.2	Stand der Forschung in der Faser-Bragg-Gitter-Formsensorik	24
3.3	Vorarbeiten zum Thema Faser-Bragg-Gitter-Formsensorik am IAR-IPR	30
3.4	Grenzen der aktuellen Faser-Bragg-Gitter-Formsensorik und Abgrenzung dieser Arbeit zum Stand der Technik	32
4	Innovative Faser-Bragg-Gitter-Formsensorik	33
4.1	Kozeptionierung der innovativen Faser-Bragg-Gitter-Formsensorik	34
4.1.1	Grenzen der konventionellen Faser-Bragg-Gitter-Formsensorik	34
4.1.2	Konzept der innovativen Faser-Bragg-Gitter-Formsensorik	35
4.2	Datenfusion - Erweiterung des Deformationsmodells und Notwendigkeit neuer Formrekonstruktionsalgorithmen	37
5	Sensordatenfusionsalgorithmen	39
	Differentialgeometrische Methoden	39
5.1	Innovative Faser-Bragg-Gitter-Formsensorik - Mathematische Problemstellung	40
5.2	Algorithmus zur konventionellen Faser-Bragg-Gitter-Formsensorik	44
5.2.1	Erwartete Laufzeitkomplexität des konventionellen Algorithmus	47
5.3	Mathematische Grundlagen und Herleitung der verwendeten Konzepte . . .	49
5.3.1	Mathematische Problemformulierung über Mannigfaltigkeiten, Ten- soren und Tensorfelder	49
5.3.2	Interpolation und Approximation diskreter Tensorfelder	60
5.3.3	Rekursives Erzeugen diskreter metrischer Räume	65
5.3.4	Approximation der Objektstruktur aus diskreten metrischen Räumen	69
5.4	Herleitung des innovativen Datenfusionsalgorithmus zur Formrekonstruktion	78
5.4.1	Herleitung der Berechnungsschritte	79

5.4.2	Bewertung des innovativen Algorithmus und Abschätzung der zu erwartenden Laufzeitkomplexität	89
5.5	Implementierung in MATLAB	92
6	Prototypische Realisierung und experimentelle Evaluation	97
6.1	Konzept für die prototypische Realisierung	98
6.2	Prototypische Realisierung	102
6.2.1	Materialien	102
6.2.2	Fertigungsprozess	104
6.2.3	Material-, Zeit- und Kostenaufwand	104
6.2.4	Fertigung der Prototypen	107
6.2.5	Bewertung der Ergebnisse der prototypischen Sensorherstellung . . .	113
6.3	Praktische Sensorevaluation - Messdatenanalyse	115
6.3.1	Testteil 1: Grundlegende Messdatenanalyse bei helikaler Faserführung	116
6.3.2	Testteil 2: Erste Anwendung des innovativen Algorithmus auf einen FBG-Formsensor mit umgesetzter freier Messstellenverteilung	133
6.3.3	Zusammenfassung der Ergebnisse der Messdatenanalyse zur Sensorevaluation	138
7	Zusammenfassung und Ausblick	141
7.1	Zusammenfassung und Diskussion	141
7.2	Ausblick	143
	Literaturverzeichnis	149
	Abbildungsverzeichnis	157
	Tabellenverzeichnis	161
	Anhang	
	A Nomenklatur	I

1 Einleitung

Sensoren zur zeitkontinuierlichen Formerfassung flexibler Strukturen finden in verschiedenen Einsatzfeldern Verwendung. Besonders in der Medizintechnik ist eine Vielzahl an Anwendungsmöglichkeiten vorhanden. Das Messen der Form von flexiblen Endoskopen, Biopsienadeln oder Kathetern ist hier beispielhaft zu nennen. Vor allem in der minimal-invasiven Chirurgie sind Formsensoren gefragt. Endoskope und Instrumente werden durch möglichst kleine Hautschnitte zum Operationsgebiet geführt. Im Gegensatz zu offenen Operationen ist die Sicht auf die Instrumente nicht vollständig gegeben. Da an der Spitze der Instrumente die operativen Aufgaben, wie Schnitte, Verödungen oder ähnliche Eingriffe, durchgeführt werden, ist es wichtig, die Lage der Instrumentenspitze zu kennen. Die Position und Ausrichtung der Instrumentenspitze kann über die Erfassung der Instrumentenform ermittelt werden. Eine weitere Anwendung finden Formsensoren in der Medizinrobotik. Ein aktueller Trend in der robotergestützten Chirurgie geht hin zu flexiblen, sehr filigranen Robotern. Das Erreichen von schwer zugänglichen Operationsstrukturen soll so ermöglicht werden. Ein Beispiel für solche Roboter sind sogenannte Kontinuumsroboter. Diese bestehen nicht aus einzelnen Gelenken und starren Verbindungen, sondern aus verformbaren Teilstücken. Diese flexible Roboterstruktur ist sehr frei im Raum verformbar und kann sich durch enge Kanäle schlängeln. Sehr komplexe Bahnen können mit dem Roboter abgefahren werden. Herkömmliche kinematische Modelle können bei diesen Robotern allerdings nicht angewendet werden, um die Position des Endeffektors zu erfassen und basierend darauf die Ansteuerung des Roboters zu regeln. Eine alternative Formerfassung der Roboterstruktur wird hier benötigt.

Die Faser-Bragg-Gitter(FBG)-Formsensorik stellt eine vielversprechende Möglichkeit zur Formerkennung flexibler schlangenförmiger Objekte dar. Ein FBG-Formsensor besteht aus einem verformbaren, länglichen Sensorträgerkörper aus flexiblem Material, wie beispielsweise Silikon. In diesen Formsensorträgerkörper sind Glasfasern mit an diskreten Stellen eingeschriebenen Strukturen, den sogenannten Faser-Bragg-Gittern (FBGs), eingegossen. Um Objektformen zu messen, wird der Formsensor entlang dieser Objekte geführt, sodass der Sensor sich analog zu der zu vermessenden Struktur verformt. Durch die Deformation des Formsensors entstehen Dehnungen und Stauchungen im flexiblen Material des Sensorträgerkörpers. Diese werden auf die FBG-Strukturen übertragen. Die FBG-Strukturen verändern ihre physikalischen Eigenschaften bei Dehnung oder Stauchung der Faser und können somit als Dehnungsmessstreifen auf optischer Basis eingesetzt werden. Zu einem FBG-Formsensorsystem gehört neben dem Formsensor, bestehend aus dem Sensorträgerkörper und den FBG-Fasern, ein Datenlesegerät sowie Datenfusionsalgorithmen. Über das Datenlesegerät, den Interrogator, wird breitbandiges Licht in die Glasfasern gesendet und das reflektierte Lichtspektrum gemessen. Aus dem Spektrum kann der Dehnungszustand der FBGs ermittelt werden. Aus den an diskreten Stellen im Trägerkörpermaterial gemessene

nen Dehnungswerten wird mittels der Datenfusionsalgorithmen die Form des Trägerkörpers geschätzt. Die Abweichung der Formschätzung von der tatsächlichen Form hängt zum einen von der Messgenauigkeit bei der Dehnungsmessung über die FBG-Fasern ab. Zum anderen haben die verwendeten Algorithmen zur Formrekonstruktion einen großen Einfluss auf das Formergebnis. Die Sensorgenauigkeit hängt maßgeblich von den bei der Datenfusion verwendeten Modellen zur Beschreibung der Deformation des Trägerkörpers ab. Die Datenfusion ist somit ein wichtiger Teil des Formsensorsystems.

Die FBG-Formsensorik bietet gegenüber anderen Technologien zur Formerfassung flexibler Strukturen viele Vorteile. Als alternative Verfahren sind beispielsweise bildgebende Verfahren oder elektromagnetisches Tracking zu nennen. Besonders für den Einsatz in der Medizin bringen folgende Eigenschaften der FBG-Formsensorik einen erheblichen Vorteil mit sich. Der geringe Durchmesser der Fasern im Mikrometerbereich erlaubt eine Sensorintegration in sehr kleine, filigrane Instrumente. Die Fasern sind elektromagnetisch verträglich und können in der Umgebung von anderen technischen Geräten bei auftretender elektromagnetischer Strahlung problemlos eingesetzt werden. Eine Erfassung der Form in Echtzeit ist auf Grund der hohen Auslesefrequenz der FBG-Signale mit 500 Hz möglich. Schließlich sind die Biokompatibilität und die Sterilisierbarkeit der Fasern vorteilhaft für den Einsatz bei einer Operation.

Die Thematik der FBG-Formsensorik wird seit über zwanzig Jahren vermehrt von verschiedenen Forschungsgruppen weltweit erforscht. Prototypische Ergebnisse in der FBG-Formsensorik sind mittlerweile von verschiedenen Arbeitsgruppen vorgestellt. Heutzutage werden die Sensoren bereits zu Forschungszwecken in Testumgebungen eingesetzt, um die Regelung der Ansteuerung von flexiblen Robotern zu ermöglichen. Dennoch hat sich bisher noch kein System auf dem Markt durchsetzen können. Zwar ist die Detektion der Form von Objekten mit geringem Deformationsspielraum, wie beispielsweise von Biopsienadeln, inzwischen zufriedenstellend realisierbar. Allerdings ist die Erfassung von komplexeren Deformationen bei flexibleren Instrumenten, wie beispielsweise flexiblen Endoskopen, mit Schwierigkeiten verbunden. Die in dem Fall über die Formsensoren erreichbare Genauigkeit ist für den Einsatz in der Medizin nicht ausreichend gut.

1.1 Problemstellung und Ziel der Arbeit

Die noch unzulängliche Genauigkeit in der Formerfassung über FBG-Formsensoren ist durch Schwierigkeiten in der Sensorfertigung zu begründen. Die Herstellung von FBG-Formsensoren ist problematisch, da die Positionierung und Ausrichtung der FBGs in dem Formsensorträgerkörper unter Einhaltung strikter Restriktionen vorgenommen werden muss. Nur bei Beachtung dieser Bedingungen können die bisher bekannten Rekonstruktionsalgorithmen zur Datenfusion angewendet werden. Die praktische Realisierung der vorgeschriebenen FBG-Positionierung ist mit hohem Aufwand verbunden und schwer exakt umsetzbar. Bei der Herstellung entstehende Fertigungsungenauigkeiten führen zu einer hohen Messunsicherheit. Ein weiteres Problem in der FBG-Formsensorik stellt die geforderte parallele Faserführung entlang der Sensorachse dar. Diese führt zu einer maximalen Faser-

belastung bei Sensorverformung. Eine Einschränkung der Sensordeformationsflexibilität ist die direkte Folge.

Ziel dieser Dissertation ist die Erforschung eines neuen Konzeptes der FBG-Formsensorik. Die nach dieser neuen Herangehensweise vorgenommene Formsensorrealisierung wird als *innovative FBG-Formsensorik* bezeichnet. Über grundlegende Änderungen der Sensorausrichtung in der innovativen FBG-Formsensorik sollen die Probleme in der Sensorfertigung eliminiert und somit eine bessere Sensorgenauigkeit erzielt werden.

Das Konzept der innovativen FBG-Formsensorik sieht eine freie FBG-Verteilung über den Sensorträgerkörper vor. Die Positionierung der FBGs kann vorerst beliebig vorgenommen werden. Eine Ermittlung der Positionsparameter ist nach der Fertigung vorzunehmen. Die Herstellung der Formsensoren ist somit vereinfacht, zudem kann von einer parallelen Faserführung abgesehen werden. Eine Realisierungsmöglichkeit der freien FBG-Verteilung ist die helikale Faserführung. Da die Faserbelastung dadurch stark reduziert wird, können die Fasern mit größerem Abstand zur Sensorachse verlaufen. Sensoren mit größerem Durchmesser können gefertigt werden und auch hohle Sensorausführungen sind möglich. Solche hohlen Sensoren können dann über zu beobachtende Objekte gestülpt werden.

Die innovative Herangehensweise in der FBG-Formsensorik erfordert neue Algorithmen zur Datenfusion. Der Fokus dieser Arbeit liegt in der Vorstellung solcher Rekonstruktionsalgorithmen. Dabei wird auf metrische und differentialgeometrische Konzepte zurückgegriffen. Die mathematische Problemformulierung wird über Tensoren und Mannigfaltigkeiten vorgenommen. Damit ist eine übersichtliche Problemdarstellung gegeben und die Verwendung bekannter mathematischer Theorien aus der Differentialgeometrie zur Problemlösung ist erlaubt. Die neuen Algorithmen ermöglichen nicht nur eine freie FBG-Verteilung. Zusätzlich ist eine erweiterte Forminformation erfassbar. So kann neben der sonst gemessenen eindimensionalen Sensorachse auch die zweidimensionale Sensoroberfläche rekonstruiert werden.

Neben der theoretischen Forschung ist die Evaluierung der praktischen Realisierbarkeit der innovativen FBG-Formsensorik Ziel dieser Arbeit. Über Experimente soll die grundlegende Funktionalität gezeigt und die Formerkennung beispielhaft demonstriert werden. Die grundlegende Funktionalität soll über das Messen von Dehnungen im Material und einen Vergleich dieser Dehnungen mit anhand von Modellen berechneten Dehnungswerten vorgenommen werden. Im Gegensatz zur konventionellen FBG-Formsensorik mit paralleler Faserführung liegt bei einer helikalen Faserführung eine deutlich geringere Dehnungsbelastung der Fasern durch eine Sensordeformation vor. Ob die geringen Dehnungen messbar sind, ist experimentell nachzuweisen. Die Demonstration einer ersten prototypischen Realisierung der innovativen FBG-Formsensorik soll über die Messbarkeit von einfachen Grundformen geschehen. Das Erzielen einer hohen Sensorgenauigkeit ist mit hohem Aufwand für die Ermittlung der exakten Positionen aller FBGs auf dem Sensorträgerkörper verbunden. Die Optimierung und Evaluierung der Sensorgenauigkeit werden in dieser Arbeit nicht behandelt und sind Themen zukünftiger Forschung.

1.2 Gliederung der Arbeit

In dieser Dissertation wird die innovative FBG-Formsensorik erforscht. Die Grundlagen und der Stand der Technik der FBG-Formsensorik werden zunächst aufgeführt. Das innovative Konzept wird anschließend beschrieben; der Bedarf dieser alternativen Lösungen leitet sich dabei aus den Grundlagen und dem Stand der Technik ab. Die mathematischen Konzepte und die darauf basierenden neuen Algorithmen bilden den Hauptteil der Arbeit. In einem darauf folgenden praktischen Teil wird die theoretisch erforschte innovative FBG-Formsensorik experimentell evaluiert. Eine ausführliche Beschreibung neuer Forschungsthemen auf der Grundlage der entwickelten innovativen FBG-Formsensorik schließt die Arbeit ab. Die Inhalte der einzelnen Kapitel sind im Folgenden zusammengefasst.

In **Kapitel 2** ist eine Einführung in die Grundlagen der FBG-Sensorik gegeben. Im ersten Teil des Kapitels wird das Grundprinzip der Sensorik erläutert sowie die Teilkomponenten des Sensorsystems beschrieben. In einem zweiten Teil wird auf die Anwendung von FBG-Formensensoren in der Medizinrobotik eingegangen.

Der Stand der Technik im Bereich der FBG-basierten Formsensorik ist in **Kapitel 3** aufgeführt. Die Entstehung und Entwicklung der Technologie von Beginn an bis hin zu aktuellen Arbeiten wird vorgestellt. Die bekannten Arbeiten und Ergebnisse werden dabei insbesondere im Hinblick auf die verwendeten Algorithmen zur Datenfusion und die damit verbundenen Restriktionen bezüglich der Sensorausstattung mit FBG-Sensoren untersucht.

Kapitel 4 beinhaltet die Herleitung und Beschreibung des innovativen Sensorkonzeptes. Aus den bestehenden Problemen in der herkömmlichen Art der Sensorumsetzung ergibt sich die alternative Herangehensweise. Damit verbunden ist die Notwendigkeit der Entwicklung neuer Datenfusionsalgorithmen zur Formschatzung.

Diese neuen Algorithmen werden in **Kapitel 5** vorgestellt. Dieses Kapitel stellt den Hauptteil dieser Arbeit dar. Die mathematische Problemstellung wird formuliert und das herkömmliche Berechnungsvorgehen ist im Vergleich dargestellt. Die zum Verständnis benötigten theoretischen Grundlagen sind ausführlich beschrieben. Ein Algorithmus ist basierend auf der formulierten Problemstellung unter Verwendung der beschriebenen Theorie hergeleitet. Schließlich ist eine erste Implementierung in MATLAB skizziert.

Die praktische Umsetzbarkeit der innovativen FBG-Formsensorik wird in **Kapitel 6** untersucht. Prototypen werden konstruiert, gebaut und experimentell getestet. Dabei liegt der Fokus nicht auf dem Test der Genauigkeit in der Formerkennung selbst. Vielmehr soll die grundlegende Funktionalität betrachtet werden. Es wird nicht das Ergebnis der Datenfusion betrachtet, sondern die Konformität der gemessenen Dehnungen zu den aufgestellten Deformationsmodellen, welche den Datenfusionsalgorithmen zugrunde liegen. Die Formerkennung unter Anwendung der Datenfusionsalgorithmen wird schließlich über das Erfassen ausgewählter Deformationen demonstriert.

Die Arbeit schließt in **Kapitel 7** mit einer Zusammenfassung der Ergebnisse und einem umfangreichen Ausblick auf zukünftige Forschungsarbeiten ab. Durch die innovative FBG-Formsensorik ist eine Vielzahl an neuen Forschungsfragen aufgedeckt, die es in der Zukunft zu beantworten gilt.

Im **Anhang** dieser Arbeit ist in Anhang A eine Nomenklatur beigefügt. Diese soll bei der hohen Anzahl an in dieser Arbeit vorkommenden verschiedenen Parametern zur besseren Übersicht dienen. Zum tieferen Verständnis einer wichtigen, bei der Formrekonstruktion verwendeten Theorie aus der Differentialgeometrie, kann ein Artikel von Fefferman et al. ([Fef15]) herangezogen werden.

1.3 Begriffserklärung

Einige wichtige Begriffe sind in dieser Arbeit fortlaufend verwendet. Die genaue Definition und Erklärung soll nun im Folgenden gegeben werden, um das Lesen der Arbeit zu erleichtern. Die der Arbeit angehängte Nomenklatur ist darüber hinaus eine weitere Hilfe zum Verständnis der Zusammenhänge.

Innovative FBG-Formsensorik - Konventionelle FBG-Formsensorik

Die FBG-Formsensoren, die nach herkömmlicher Herangehensweise hergestellt werden, sind in dieser Arbeit als *konventionelle FBG-Formsensoren* bezeichnet. Alle bisher bekannten Arbeiten nach aktuellem Stand der Technik befassen sich mit dieser Art von Formsensorik. Das in der Arbeit vorgestellte alternative Konzept wird hingegen mit *innovativer FBG-Formsensorik* betitelt.

Formsensor - Formsensorsystem

Ein *Formsensor* besteht aus den FBG-Glasfasern und einem flexiblen, schlangenförmigen Trägerkörper. Das *Sensorsystem* besteht aus diesem Formsensor und zusätzlich aus einem Datenlesegerät, dem sogenannten Interrogator, sowie den Datenfusionsalgorithmen.

Faser-Bragg-Gitter - FBG - Gitter - Messstelle

Die Basistechnologie in der FBG-Formsensorik sind mit Faser-Bragg-Gittern versehene Glasfasern. Der Begriff *Faser-Bragg-Gitter* wird im Laufe der Arbeit zumeist mit *FBG* und in der Mehrzahl mit *FBGs* bezeichnet. Ein weiterer verwendeter Begriff ist *Gitter*. Sofern die praktischen Aspekte der Sensorik besprochen werden, fließt die Beschreibung der Faser-Bragg-Gitter in diesen Formen in die Texte mit ein. In den theoretischen Teilen der Arbeit, insbesondere in Kapitel 5, wird oft der verallgemeinernde Begriff *Messstelle* verwendet; hier kommt es nicht auf die verwendete Sensortechnologie an, sondern auf die Art der gemessenen Information.

Sensorkonfigurationsparameter

In der innovativen FBG-Formsensorik ist eine freie Verteilung der FBGs über den Sensorträgerkörper erlaubt. Die Position und Ausrichtung der FBGs auf dem Formsensorträgerkörper wird mittels mehrerer Parameter für jedes FBG separat angegeben. Diese hier verwendeten Parameter werden als *Sensorkonfigurationsparameter* bezeichnet. Neben den Angaben zu der FBG-Positionierung gehört auch die Angabe zu der Sensorlänge und dem Sensordurchmesser zu den Sensorkonfigurationsparametern.

Deformationsflexibilität

Das Ausmaß der Verformung eines flexiblen Objektes wird in dieser Arbeit mit dem Begriff *Deformationsflexibilität* bezeichnet.

Deformationsmodelle

Die Algorithmen zur Formapproximation basieren auf Modellen, welche die Dehnungen im Trägerkörpermaterial mit der Verformung des Trägerkörpers in Verbindung bringen. Diese Modelle werden im Folgenden als *Deformationsmodelle* bezeichnet.

Flexible Strukturen, -Gelenke, -Instrumente, -Endoskope und -Flexoskope

Formsensoren werden eingesetzt, um die Verformung flexibler, schlangenförmiger Objekte zu messen. Die Benennung solcher Objekte wird über eine Vielzahl an Umschreibungen vorgenommen. Die Gemeinsamkeit all dieser Objekte ist die Schlangenform und die Flexibilität. Teilweise werden die Begriffe synonym verwendet. Die genaue Bedeutung der Anwendung ist für die erarbeiteten Aspekte nicht relevant, sodass auf eine genaue Unterscheidung verzichtet werden kann.

2 Grundlagen

In diesem Kapitel werden die Grundlagen zur Faser-Bragg-Gitter (FBG)-basierten Formsensoren erläutert. Zunächst wird das Grundprinzip der Sensorik erklärt. Auf die zugehörigen Sensorkomponenten wird anschließend im Einzelnen detailliert eingegangen. Schließlich werden die Anwendungsgebiete der FBG-Formsensoren beschrieben. Dabei liegt der Fokus auf der Anwendung in der Medizintechnik.

2.1 Faser-Bragg-Gitter-Formsensoren

FBG-Formsensoren messen die Deformation flexibler, schlangenförmiger Objekte. Ein Formsensorsystem besteht aus vier Hauptkomponenten. Dazu gehören ein Sensorträgerkörper und mit Faser-Bragg-Gittern beschriebene Glasfasern. Diese beiden Komponenten bilden den Formsensor. Der Trägerkörper ist wie die zu beobachtenden Objekte flexibel und schlangenförmig. Bei Verformung des Körpers treten im Material Dehnungen und Stauchungen auf. Diese Dehnungen werden auf die in den Trägerkörper integrierten Glasfasern übertragen. Über die dritte Sensorsystemkomponente, den Interrogator, lassen sich die Dehnungsänderungen indirekt in Form von Wellenlängen zeitkontinuierlich messen. Die aktuelle Form des Trägerkörpers lässt sich dann aus diesen Dehnungsänderungen über Datenfusionsalgorithmen schätzen. Die Datenfusionsalgorithmen stellen die letzte Hauptkomponente des Sensorsystems dar. Wird ein Formsensor in flexible Objekte integriert, so übernimmt er die Verformungen des Objektes. Über das Messen der Sensorform ist somit die Form und insbesondere die Position und Ausrichtung der Objektspitze erfassbar. Das Sensorsystem ist mit den vier Hauptkomponenten in Abbildung 2.1 abgebildet.

Am Institut für Anthropomatik und Robotik (IAR) - Intelligente Prozessautomation und Robotik (IPR) wurden FBG-Formsensoren prototypisch nach dem heutigen Stand der Technik hergestellt. In Abbildung 2.2 ist ein Prototyp abgebildet. Die am IAR-IPR entwickelten Formsensoren wurden über Kalibrierverfahren weiter optimiert und können *C*- und *S*-Formen erkennen. Eine umfangreiche Evaluation der Genauigkeit über verschiedene Testverfahren ist in [Led16] nachzulesen. Bei Experimentreihen, basierend auf Simulationen, ist für kreisförmige, ebene Verformungen ein durchschnittlicher Fehler von unter 1 mm bezüglich der Spitzenposition nachgewiesen. Die durchschnittliche Abweichung in der berechneten Orientierung an der Sensorspitze beträgt weniger als 5°. Bei den Berechnungen wurde eine Sensorlänge von 150 mm angenommen. Experimentell ergab eine Fehlerbetrachtung bei einfachen Deformationen einen maximalen Fehler der Spitzenposition von 0,67 mm und eine maximale Abweichung der Orientierung an der Spitze von 2,20°. Die Testmethodik sowie die Resultate sind vergleichbar mit anderen Arbeiten aus dem aktuellen Stand der Technik.

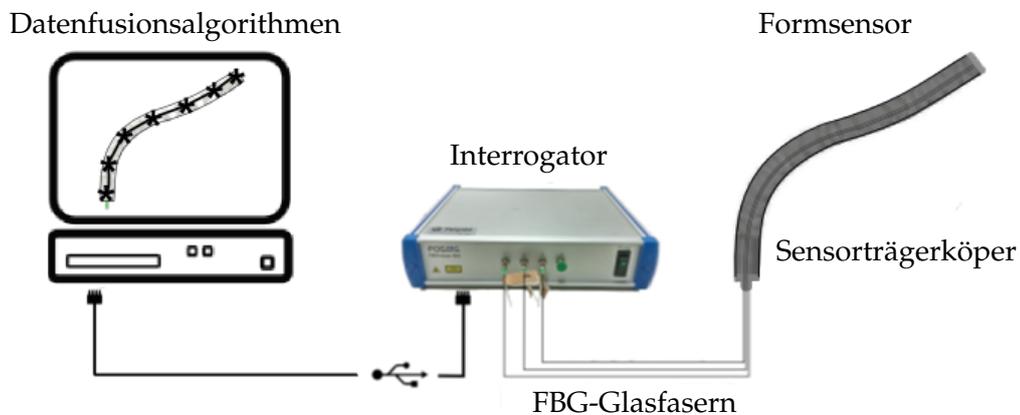


Abbildung 2.1: Formsensorysystem, bestehend aus vier Hauptkomponenten: Formsensor aus Sensorträgerkörper und FBG-Glasfasern, Interrogator und Datenfusionsalgorithmen.

Die herkömmliche Art der Sensorumsetzung wird in dieser Arbeit als *konventionelle FBG-Formsensorik* bezeichnet. Die im Folgenden in dieser Arbeit entwickelte *innovative FBG-Formsensorik* unterscheidet sich in grundlegenden Aspekten von der herkömmlichen Umsetzung. Das Konzept und die Vorteile der innovativen FBG-Formsensorik werden in Kapitel 4 hergeleitet und beschrieben.

2.1.1 Formsensorkomponenten

Genauer zu den Sensorkomponenten und zu der jeweiligen Funktion im Sensorysystem wird in den folgenden Abschnitten beschrieben. Dabei wird die konventionelle Umsetzungsform betrachtet.

Faser-Bragg-Gitter-Glasfasern

Die im Folgenden beschriebenen technischen Grundlagen zu FBG-Glasfasern sind auf die für das Verständnis der Arbeit notwendigen Informationen reduziert. Die Informationen beruhen auf dem Buch *'Fiber Bragg Gratings'* [Kas10], genaueres zu der Technologie kann dort nachgelesen werden.

Die FBG-Glasfasern stellen die Basistechnologie der FBG-Formsensorik dar. Die Bragg-Gitter sind Strukturen, die in den Kern einer Glasfaser eingeschrieben sind. Der Bereich eines Gitters hat üblicherweise eine Länge von 1 – 10 *mm*. In diesen Bereichen ist der Brechungsindex periodisch variiert. Wird breitbandiges Licht in die Faser gesendet, wird Licht einer bestimmten Wellenlänge an der Gitterstruktur reflektiert. Der restliche Teil des Lichtes wird transmittiert. Dieses Verhalten ist durch eine konstruktive Überlagerung

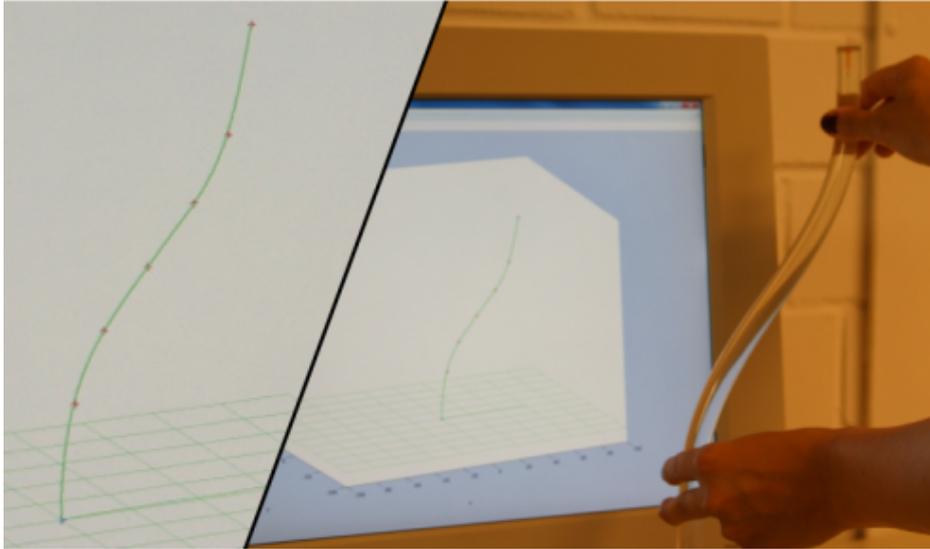


Abbildung 2.2: Prototyp des FBG-Formsensors am IAR-IPR [Pau14c].

des Lichtes der reflektierten Wellenlänge bei Spiegelung an der Gitterstruktur begründet. Die reflektierte Wellenlänge hängt von der Struktur des Gitters ab und wird als Bragg-Wellenlänge des FBGs bezeichnet. Der genaue Zusammenhang einer Gitterstruktur und einer Bragg-Wellenlänge λ , ist über die sogenannte Bragg-Gleichung 2.1 beschrieben:

$$\lambda = n_{eff}2\Lambda. \quad (2.1)$$

Dabei ist Λ die Gitterperiode, die von der Struktur des Gitters abhängt und n_{eff} der effektive Brechungsindex, der die Faserstruktur charakterisiert.

Durch äußere Einflüsse, wie einer Dehnung des Gitters, einer Schwankung der Temperatur oder der Luftfeuchtigkeit, ändert sich die Gitterperiode und somit die Reflektionscharakteristik des FBGs. Diese Veränderung hat eine Verschiebung der Bragg-Wellenlänge zur Folge. Sei nun stets λ_i die über das Gitter FBG_i gemessene Bragg-Wellenlänge. Die Bragg-Wellenlänge eines FBGs, die bei nicht belastetem Gitter gemessen wird, wird als Basiswellenlänge λ_i^0 bezeichnet. Die Basiswellenlänge eines FBGs ist vom Hersteller angegeben oder kann über Kalibrierung des Sensors ermittelt werden. Zur Kalibrierung wird eine Messwertabnahme bei unbelasteter Faser durchgeführt. Sei $\Delta\lambda_i$ die Differenz zwischen der verschobenen Bragg-Wellenlänge λ_i und der Basiswellenlänge λ_i^0 und es gilt:

$$\Delta\lambda_i = \lambda_i - \lambda_i^0. \quad (2.2)$$

Die Veränderung der Bragg-Wellenlänge, abhängig von Dehnungs- und Temperaturveränderungen, kann wie folgt beschrieben werden:

$$\frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i^0} = k \varepsilon_i + a_i \Delta T. \quad (2.3)$$

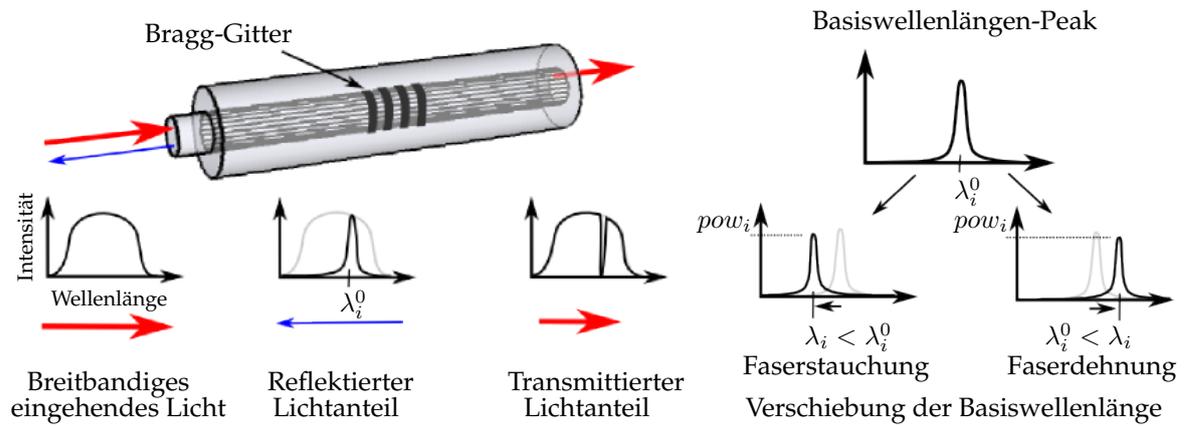


Abbildung 2.3: Messprinzip der Faser-Bragg-Gitter.

Dabei sei ε_i die Dehnung des Gitters und k der sogenannte photoelastische Koeffizient. Der photoelastische Koeffizient hat einen konstanten Wert von 0,78. Die Veränderung der Temperatur wird durch ΔT in der Gleichung abgebildet. Der Wert a_i gibt den linearen Zusammenhang zwischen ΔT und der Wellenlängenänderung an. Im Folgenden dieser Arbeit wird die Temperatur stets als konstant angenommen. Die Wellenlängenverschiebung wird ausschließlich auf den Dehnungseinfluss zurückgeführt. Die Kompensation der Temperatureinflüsse wird ebenfalls am IAR-IPR untersucht, ist aber nicht Teil dieser Arbeit. Bei konstanter Temperatur entfällt der letzte Term der Gleichung 2.3. Die Abhängigkeit der Dehnung von einer Wellenlängenänderung ist dann über die reduzierte Gleichung 2.4 wie folgt gegeben:

$$\frac{\Delta \lambda_i}{\lambda_i^0} = k \varepsilon_i . \quad (2.4)$$

Die FBG-Glasfasern können somit als Dehnungsmessstreifen auf optischer Basis eingesetzt werden. Wird die Faser an der Stelle eines FBGs gedehnt oder gestaucht, so verschiebt sich die Bragg-Wellenlänge. Das Messprinzip ist in Abbildung 2.3 dargestellt. Neben der Bragg-Wellenlänge λ_i ist auch die Intensität pow_i , mit der die Wellenlänge reflektiert wird, eine zusätzliche Information, die zur Formschätzung herangezogen werden kann. Bei gestörten Signalen durch Überbelastung der Faser oder bei zu großer Faserkrümmung ist das Signal schlecht. Der Einfluss dieser Störungen auf die Bragg-Wellenlängenverschiebung und die Intensität korrelieren. Somit kann über die Intensität eine Aussage bezüglich der Qualität des Messsignals getroffen werden.

Bemerkung: Die ermittelten Dehnungswerte beziehen sich auf den Bereich, den das zugehörige FBG abdeckt. Zur Formrekonstruktion werden Dehnungen nicht über Bereiche sondern an diskreten Punkten betrachtet. Neben dem Dehnungswert ist auch die Richtung der Dehnung wichtig. Es wird im Folgenden stets angenommen, dass der Dehnungswert im Mittelpunkt des Gitters der gemessenen Dehnung entspricht. Die Ausrichtung des Gitters wird als Dehnungsrichtung übernommen.

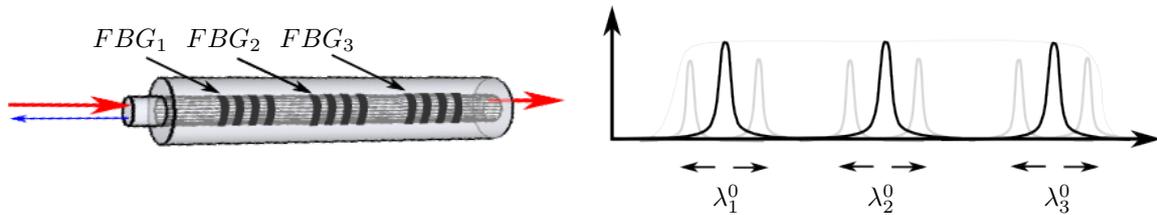


Abbildung 2.4: Multiplexing: Mehrere FBGs sind in eine Faser eingeschrieben.

Ein großer Vorteil der FBG-Glasfasern ist die Möglichkeit, mehrere FBGs in eine Faser einschreiben zu können, sodass über eine Faser mehrere Dehnungen an diskreten Stellen gemessen werden können. Die Basiswellenlängen der FBGs müssen dabei verschieden sein. Die Bragg-Wellenlängen verschieben sich bei Faserbelastung in einem Bereich um die Basiswellenlänge. Ist der Abstand zwischen diesen Basiswellenlängen ausreichend groß, überlappen sich diese Bereiche nicht und eine eindeutige Zuordnung der Messsignale zu den FBGs ist möglich. Das Prinzip des sogenannten *Multiplexing* ist Abbildung 2.4 verdeutlicht.

Neben dem Multiplexing haben die FBG-Fasern gegenüber anderen Dehnungsmessstreifen weitere Vorteile. So ist zum Beispiel der geringe Durchmesser der Fasern von nur $125\ \mu\text{m}$, besonders im Hinblick auf eine Anwendung in der Medizin, günstig. Weiter ist die elektromagnetische Verträglichkeit und die Biokompatibilität der Fasern vorteilhaft.

Formsensorträgerkörper

Der Formsensorträgerkörper besteht aus flexiblem Material. Hier können beispielsweise Silikone oder ORMOCER[®] verwendet werden. Er hat eine längliche Form und wird typischerweise entlang der zu vermessenden Objekte geführt. Dadurch nimmt der Trägerkörper die Verformung des Objektes an. In den Formsensorträgerkörper sind die FBG-Glasfasern eingegossen. Dabei sind die Fasern parallel innerhalb des Trägerkörpers geführt und konzentrisch um die Sensorachse angeordnet. Über den Sensorträgerkörper sollen bei Verformung des zu beobachtenden Objektes Materialdehnungen erzeugt werden, die auf die FBG-Fasern übertragen werden. Die FBGs messen diese Dehnung an diskreten Stellen entlang des Trägerkörpers. Die Dehnungsinformationen können dann zur Datenfusion verwendet werden.

Der Formsensor, bestehend aus Trägerkörper und FBG-Glasfasern, kann in Kanälen geführt werden, die im zu beobachtenden Objekt verlaufenden. Eine Alternative zu solchen eigenständigen Formsensoren bietet eine direkte Integration der Fasern in diese Objekte. Hat das Objekt beispielsweise einen flexiblen Mantel, so können die Fasern bei Herstellung der Objekte direkt in diesen Mantel integriert werden. In dem Fall stellt das Objekt selbst den Trägerkörper dar. Schließlich kann über das Zusammenkleben von Fasern oder mittels Fasern mit mehreren parallelen Faserkernen, sogenannten Multikern-Fasern, die Faserzusammenstellung selbst den Trägerkörper ergeben.

Unabhängig von der Art des Trägerkörpers, muss sich dieser vorhersehbar verformen, damit die Messdaten zur Formschätzung verwendbar sind. Einfach gehaltene geometrische Deformationsmodelle werden angewendet, um einen Zusammenhang zwischen Verformung des Trägerkörpers und Materialdehnung an diskreten Stellen im Material herzustellen. Ein Deformationsmodell ist im Folgenden im Zusammenhang mit der Sensorkomponente *Datenfusion* beschrieben.

Interrogator

Als Messgerät werden in der FBG-Sensorik sogenannte Interrogatoren eingesetzt. Mittels dieser Datenlesegeräte wird breitbandiges Licht in die Glasfasern gesendet und reflektiertes Licht detektiert. Über meist mehrere Eingänge können gleichzeitig verschiedene Fasern angeschlossen und die in den Fasern eingeschriebenen FBGs automatisiert ausgelesen werden. Für jede Faser wird pro Messzyklus ein Lichtspektrum mit lokalen Hochpunkten, den sogenannten Peaks, an den Stellen der Bragg-Wellenlängen der FBGs gemessen. In Abbildung 2.5 ist ein solches Spektrum abgebildet. Zu dem Interrogator wird üblicherweise eine Software mitgeliefert, die verschiedene Funktionen zur Verfügung stellt. So können aus dem Spektrum die Wellenlängen an den Stellen der Peaks berechnet und separat ausgelesen werden. Neben den Wellenlängen wird die zugehörige Intensität, mit der die Bragg-Wellenlängen reflektiert werden, gemessen. Die Bestimmung der Wellenlängen und Intensitäten kann auch über eigene Algorithmen vorgenommen werden, die auf das ausgelesene Spektrum direkt angewendet werden. Dabei sind verschiedene Verfahren zur Bestimmung der Peaks aus den Spektren möglich. Einfache Methoden, wie beispielsweise das Festlegen der Bragg-Wellenlängen als Maximalwerte im Bereich um die Basiswellenlänge sind möglich. Diese stehen erweiterten Methoden, wie der Bestimmung einer Ausgleichsfunktion durch Gaus-Funktionen und Festlegung der Bragg-Wellenlängen als Extrempunkte dieser Gaus-Kurven, gegenüber. Die Bragg-Wellenlängenwerte werden über die Datenfusionsalgorithmen zur Formschätzung ausgewertet.

Verschiedene Interrogatoren werden seit einigen Jahren kommerziell vertrieben. Die Modelle unterscheiden sich unter anderem in der Auslesefrequenz sowie in der Anzahl der Faserausgänge. Renommiertere Vertreiber sind die Firmen *FBGS Technologies GmbH* aus Belgien/Deutschland sowie *Micron Optics, Inc.*, mit Hauptsitz in Atlanta, USA und *Hottinger Baldwin Messtechnik GmbH (HBM)*, mit Hauptsitz in Darmstadt, Deutschland. Der Interrogator stellt die teuerste Komponente des Sensorsystems dar. Mit der Weiterentwicklung der Technologie ist der Kaufpreis stets über die Zeit gesunken und weitere Preissenkungen sind auch in den nächsten Jahren zu erwarten.

Der am IAR-IPR eingesetzte Interrogator vom Typ *FBG-scan 804D*, bezogen von der Firma *FBGS Technologies GmbH*, wurde 2011 zu einem Kaufpreis von etwa 20 000 € erworben. Mittlerweile sind entsprechende Geräte für die Hälfte des Preises erhältlich. Der Interrogator ist mit vier Faserausgängen ausgestattet und kann mit einer vergleichsweise hohen Auslesefrequenz von 500 Hz Lichtspektren aussenden und lesen.

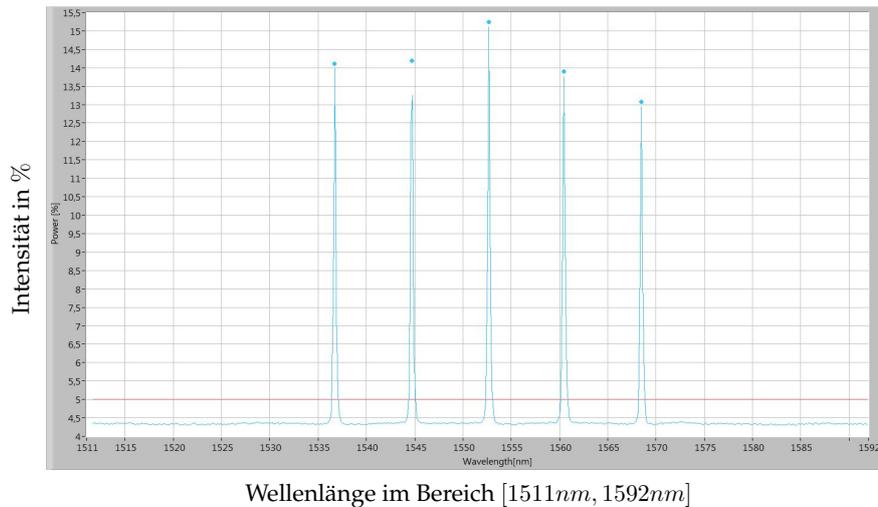


Abbildung 2.5: Ausgelesenes Spektrum einer an den Interrogator angeschlossenen Faser mit fünf eingeschriebenen FBGs.

Datenfusion - Formrekonstruktionsalgorithmen und dafür benötigtes Deformationsmodell

Über die Datenfusion wird aus den gemessenen Daten der Formverlauf der Formsensorachse geschätzt. Von besonderem Interesse ist stets die Position und Ausrichtung der Sensorspitze. Diese kann direkt aus dem Formverlauf des Sensors abgeleitet werden. In die Datenfusion einbezogen werden die gemessenen Bragg-Wellenlängen λ_i sowie die zugehörigen, als bekannt vorausgesetzten Basis-Wellenlängen λ_i^0 . Dabei sind λ_i und λ_i^0 gegeben für alle Gitter FBG_i , mit $i = 1, \dots, I$ und I als Gesamtanzahl aller im Sensor integrierten FBGs. Außerdem fließen die Sensorkonfigurationsparameter mit in die Berechnung ein. Dazu gehören die Sensorlänge und der Durchmesser sowie die Parameter, die die Positionierung der FBGs entlang des Trägerkörpers angeben. Weiter sind Startwerte in Form von Position und Ausrichtung des Sensors am Sensoranfang als gegeben vorausgesetzt.

Die Berechnung der Form verläuft in mehreren Schritten. Zuerst wird aus den gemessenen Wellenlängen und Basiswellenlängen die Dehnung berechnet. Dazu wird die Gleichung 2.4 herangezogen.

Im nächsten Schritt wird aus den diskreten Dehnungswerten die Form geschätzt. Den Berechnungen liegt das in Abbildung 2.6 dargestellte Deformationsmodell zugrunde. Dieses Modell beschreibt die Dehnungsverteilung im Material bei Verbiegung des Sensorkörpers. Es wird eine maximale Stauchung in Krümmungsrichtung und eine maximale Dehnung in entgegengesetzter Richtung angenommen. Theoretisch wird die Sensorachse bei Sensorbiegung nur gekrümmt, nicht aber gedehnt oder gestaucht. Entsprechend ist die Dehnungsverteilung über das Material verteilt. Auf der neutralen Krümmungsebene, orthogonal zur Sensor-Querschnittsebene und tangential zur Sensorachse, ist keine Materialdeformation angenommen. Die FBGs sind bei konventioneller Realisierung des Formsensors parallel

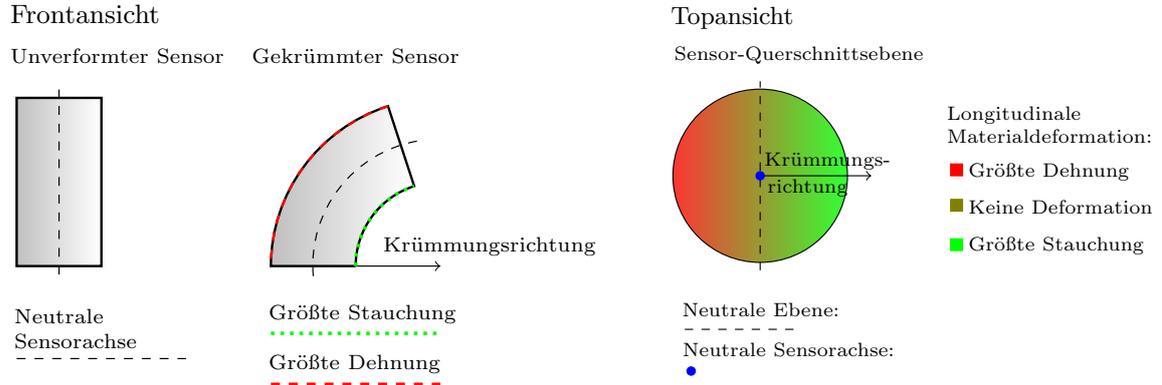


Abbildung 2.6: Angenommene Deformationsverteilung über den Sensorträgerkörper.

entlang der Sensorachse geführt. Die Materialdehnung längs der Sensorachse wird hier als *longitudinale* Dehnung bezeichnet. Die Dehnung ε ist definiert als relative Längenänderung eines Körpers und kann wie folgt in Gleichung 2.5 angegeben werden ([Hen28]):

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} . \quad (2.5)$$

Dabei ist l_0 die ursprüngliche Länge und Δl die Längenänderung durch Dehnung. Übertragen auf das in Abbildung 2.6 abgebildete Modell gilt für die Dehnung ε_i eines Gitters FBG_i :

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta l_{FBG_i}}{l_{0,FBG_i}} = \frac{2\pi(R + \tilde{r}_i)l_{FBG_i} - 2\pi R l_{FBG_i}}{2\pi R l_{FBG_i}} = \frac{\tilde{r}_i}{R} . \quad (2.6)$$

Dabei beschreibt Δl_{FBG_i} die Längenänderung des Gitters und l_{0,FBG_i} die ungedehnte Gitterlänge. Die relative Längenänderung bezogen auf den Kreisumfang bei einem Radius von R ist mit l_{FBG_i} bezeichnet. Der Wert R entspricht dem Krümmungsradius der Sensorachse. Der Krümmungsradius an der Stelle des Gitters FBG_i ist durch $R + \tilde{r}_i$ gegeben. Der Betrag vom Wert \tilde{r}_i ist gleichzeitig der Abstand des Gitters FBG_i zu der neutralen Krümmungsebene und kann durch folgende Gleichung berechnet werden:

$$\tilde{r}_i = r_i \sin\left(\alpha_i - \frac{\pi}{2} - \vec{\kappa}\right) . \quad (2.7)$$

Dabei ist r_i der Abstand vom Gitter FBG_i zur Sensorachse und α_i die Richtung, in der das Gitter bezüglich einer Referenzrichtung \vec{Ref} liegt. Die Krümmungsrichtung $\vec{\kappa}$ ist ebenfalls relativ zu dieser Referenzrichtung angegeben. Schließlich ist die Krümmung κ definiert als:

$$\kappa = \frac{1}{R} . \quad (2.8)$$

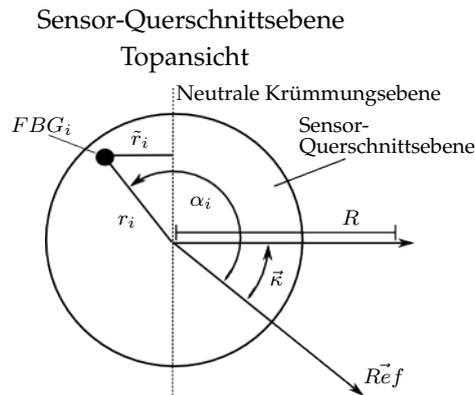


Abbildung 2.7: Parameter im angenommenen Deformationsmodell.

Aus den Gleichungen 2.5, 2.6, 2.7 und 2.8 ergibt sich der Zusammenhang von Dehnung und Sensordeformation wie folgt:

$$\varepsilon_i = \kappa r_i \sin\left(\alpha_i - \frac{\pi}{2} - \vec{\kappa}\right). \quad (2.9)$$

Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 2.7 verdeutlicht.

Die Berechnung der Form kann basierend auf dem Deformationsmodell über verschiedene Berechnungsvorschriften gelöst werden. Um die bisher bekannten, herkömmlichen Algorithmen anwenden zu können, ist stets eine spezielle Verteilung der FBGs auf dem Trägerkörper gefordert. In den meisten Fällen müssen die Fasern parallel entlang der Sensorachse verlaufen. In allen Fällen werden auf diskreten Querschnittsebenen entlang des Sensors Messeinheiten aus mehreren FBGs gebildet. So müssen zur Erfassung von dreidimensionalen Formen mit vorkommender Änderung der Krümmungsrichtung über den Formsensorverlauf mindestens drei FBGs auf einem Querschnitt möglichst gleichmäßig um die Sensorachse verteilt angeordnet sein. Aus den Messinformationen einer Messeinheit kann dann die diskrete Krümmung und lokale Krümmungsrichtung der Sensorachse an der Stelle der entsprechenden Querschnittsebene berechnet werden. Die bekannten Algorithmen sind vom Prinzip her ähnlich und unterscheiden sich oft nur durch die Verwendung unterschiedlicher Methoden zum Lösen von Teilschritten. Ein oft verwendeter Algorithmus ist exemplarisch in Abschnitt 5.2 konkret aufgeführt.

Zu der Datenfusion in der FBG-Formsensorik zählen nicht nur die Algorithmen zur Formschatzung. Auch die vorher notwendigen Kalibrierverfahren oder Filteralgorithmen zur Verbesserung des Messergebnisses sind in dieser Sensorkomponente mit einbegriffen. Die Algorithmik ist ein wichtiger Teil des Sensorsystems. Die Sensorgenauigkeit kann maßgeblich durch gezielten und effizienten Einsatz dieser Algorithmen verbessert werden.

2.2 Anwendung der Faser-Bragg-Gitter-Formsensorik in der Medizintechnik

Formsensoren finden überall Anwendung, wo flexible Teilgelenke anstelle von starren Gelenkstücken eingesetzt werden. Solche flexiblen Strukturen müssen kontrolliert bewegt werden. Die Erfassung der Form dieser Strukturen liefert die Basis für deren automatisierte Steuerung und Regelung. Ein Einsatzbeispiel sind flexible Endoskope. Diese werden sowohl in industrieller Umgebung, als auch im medizinischen Bereich eingesetzt. In der Medizin werden minimal-invasive Eingriffe über Endoskope durchgeführt. Der Einsatz von flexiblen Endoskopen ermöglicht den Zugang zu mit starren Endoskopen schwer erreichbaren Räumen. Im Gegensatz zu starren Endoskopen, kann mit flexiblen Endoskopen ein Hindernis umgangen und die Blickrichtung über in die Endoskopspitze integrierte Kameras variiert werden. Ein erweiterter Arbeitsraum ist somit gegeben. Neben der Form von Endoskopen sind auch Deformationen anderer flexibler Strukturen messbar. Besonders in der Medizintechnik ist eine große Spannbreite an Einsatzmöglichkeiten gegeben. Es besteht ein großer Bedarf an Formsensoren. Eine Anwendung der Formsensorik ist beispielsweise die Beobachtung der Form von Biopsienadeln. Auch die Forminformation von Kathetern liefert einen Mehrwert zu den entsprechenden operativen Einsätzen. Außerdem werden aktuell neue Technologien entwickelt, die mit der beschriebenen Sensorik ausgestattet werden können. Der Trend der Entwicklung in der Medizinrobotik geht immer mehr hin zu kleinen, flexiblen Manipulatoren. Die hierfür entwickelten Roboter werden als Kontinuumsroboter bezeichnet. Auch die Entwicklung neuer Instrumente, mit abwinkelbaren Manipulatoren an der Instrumentenspitze und enthaltenen flexiblen Teilstrukturen, wird zurzeit von verschiedenen Firmen vorangebracht. Wegen der oft filigranen Arbeitsschritte bei Operationen am Menschen, müssen die Instrumente sehr präzise geführt werden. Die Anforderungen an die Sensorgenauigkeit sind daher hoch.

Die unterschiedlichen Ausprägungen verschiedener Einsatzmöglichkeiten bringen jeweils unterschiedliche Anforderungen an die Ausrichtung der Sensorik mit sich. Die Sensorperformance kann durch individuelle Anpassung an das Einsatzinstrument gesteigert werden. Am IAR-IPR wird hinsichtlich mehrerer Einsatzmöglichkeiten gezielt geforscht. Zwei Möglichkeiten werden nun beispielhaft beschrieben. Die Konstruktion und Herstellung des in dieser Arbeit im praktischen Teil in Kapitel 6 vorgestellten Sensorprototypen orientiert sich am zweiten vorgestellten Beispiel.

Faser-Bragg-Gitter-Formsensorik in der Gastroskopie und Integration in OP:Sense

Ein Endoskop für den Einsatz einer Magenspiegelung wird Gastroskop genannt. Bei einer Magenspiegelung wird das Instrument durch die Speiseröhre in den Magen geführt. Das Gastroskop hat einen Arbeitskanal, durch den Instrumente wie beispielsweise Zangen oder Clips ein- und ausgeführt werden können. Außerdem sind ein Spülkanal und ein Lichtleitkanal sowie eine Optik in dem Arbeitskanal integriert. Der Einsatz ist in Abbildung 2.8 links dargestellt. Gastroskope sind vergleichsweise große Endoskope. Ein Gastroskop der Firma *KARL STORZ GmbH* ist in Abbildung 2.8 in der Mitte zu sehen. Es hat eine Arbeitslänge von 110 cm und einen Außendurchmesser von 9,1 cm. Der Arbeitskanal hat einen



Abbildung 2.8: Endoskopischer Einsatz in der Gastroskopie (links), ein flexibles Gastroskop (mittig) und ein chirurgisches Robotersystem (rechts) (Gastroskop der Firma *KARL STORZ GmbH*, Leichtbauroboter der Firma *KUKA Roboter GmbH*, integriert in die Entwicklungsplattform *OP:Sense* am *IAR-IPR*).

Durchmesser von $2,2\text{ mm}$. Durch den Arbeitskanal kann ein Formsensoren geführt werden, der die aktuelle Lage des Instruments erfasst. Die Sensorkonfiguration wird bestimmt durch den jeweiligen geplanten Sensoreinsatz. Für den Formsensoreinsatz in der Gastroskopie ist demnach eine Sensorlänge von mindestens 110 cm erforderlich. Um den Sensor durch den Arbeitskanal führen zu können, ist außerdem ein maximaler Durchmesser von weniger als $2,2\text{ mm}$ notwendig. Die Verformung des Endoskopes im Bereich der Speiseröhre ist nicht stark ausgeprägt. Zudem verändert sich die Form in diesem Bereich während der Operation wenig. Hingegen ist die Verformung an der Spitze des Endoskopes, welche sich im Magen des Patienten befindet, sehr komplex und demnach interessanter. Entsprechend kann die Sensorik mit wenig Messstellen am Anfang und einer dichten Messstellenverteilung am Ende des Sensors ausgestattet werden.

In der computer- und robotergestützten Chirurgie werden bereits über Telemanipulation Roboter angesteuert und mit montierten starren Endoskopen eingesetzt. Das *Da-Vinci* Operationssystem der Firma *Intuitive Surgical* ist ein kommerziell vertriebenes und vielfältig eingesetztes System. Auch am *IAR-IPR* wird über die Plattform *OP:Sense* an der Entwicklung von neuartigen Techniken bei robotergestützten Operationen geforscht [Bih15]. In Abbildung 2.8 rechts ist das Laborsetup *OP:Sense* abgebildet. Als Roboter werden Leichtbauroboter der Firma *KUKA Roboter GmbH* eingesetzt. In der Abbildung sind an die Roboterarme starre Endoskope montiert. Das Ersetzen dieser durch flexible Endoskope mit integrierter Formsensoren und die automatisierte Ansteuerung ist ein möglicher Themenpunkt zukünftiger Arbeiten. Ein beispielhaftes flexibles Endoskop, als möglicher Ersatz der starren Endoskope, ist in Abbildung 2.8 mittig zu sehen.

Faser-Bragg-Gitter-Formsensorik in der Urologie

Ureterorenoskope sind in der Urologie eingesetzte Endoskope. Diese werden über kleine Einschnitte in der Haut und in den darunter liegenden Gewebeschichten zum Organ geführt. Auch über natürliche Körperöffnungen kann das Endoskop eingeführt werden. Bei Eingriffen zur Behandlung an der Niere kann das Instrument durch die Harnröhre geführt werden.



Abbildung 2.9: Starres und flexibles Ureterorenoskop der Firma *Richard Wolf GmbH* [KAR16b] zum Einsatz minimal-invasiver, urologischer Operationen (links und mittig) und prototypische Sensorintegration am echten Instrument (rechts) [Pau16b].

Auch eine Harnleiterspiegelung wird mittels Ureterorenoskop durchgeführt. Es gibt sowohl starre als auch flexible Ureterorenoskope, wie in Abbildung 2.9 links und mittig zu sehen ist.

Ureterorenoskope sind kleiner als Gastroskope. So beträgt die Nutzlänge eines flexiblen Ureterorenoskopes nur 700 mm und ein wesentlich geringerer Durchmesser des Instrumentes von $2,83\text{ mm}$ ist gegeben. Der Arbeitskanal hat einen Durchmesser von $1,2\text{ mm}$ [KAR16a]. Bei Formsensoreinsatz im Ureterorenoskop ist folglich eine andere Sensorkonfiguration als bei großen Endoskopen notwendig. In dieser Arbeit wird im praktischen Teil in Kapitel 6 ein Formsensorprototyp vorgestellt, der eingesetzt wird, um die prinzipielle Umsetzbarkeit der in den folgenden Kapiteln hergeleiteten *innovativen FBG-Formsensorik* zu evaluieren. Dieser Prototyp ist vorerst nicht zum Einsatz in medizinischen Testumgebungen gedacht, dennoch orientieren sich die Sensormaße an später möglichen Einsatzszenarien. Dabei ist die Konfiguration des in dieser Arbeit vorgestellten Formsensorprototyps an die Anwendung am flexiblen Ureterorenoskop angepasst.

Die innovative FBG-Formsensorik ist insbesondere dann vorteilhaft, wenn sehr flexible Instrumente vermessen werden sollen. Bei starren Endoskopen mit nur wenig Verformungsspielraum ist ein Formsensor hergestellt nach herkömmlicher Herangehensweise ausreichend. Eine erste prototypische Formsensorealisation am echten Instrument ist in Abbildung 2.9 rechts abgebildet. Messergebnisse bezüglich der grundlegenden Umsetzbarkeit von Formsensoren an diesem Instrument wurden am IAR-IPR durchgeführt und sind in [Pau16b] beschrieben.

3 Stand der Technik

In diesem Kapitel wird der Stand der Technik zum Thema Formsensorik beleuchtet. Wichtige Forschungsarbeiten werden aufgeführt und die entscheidenden Aspekte der Arbeiten dargestellt. Dabei werden Forschungsergebnisse mit Anwendung in verschiedenen Bereichen betrachtet. Die meisten vorgestellten Arbeiten beziehen sich auf die Anwendung in der Medizintechnik; hier sind die Anforderungen an eine gute Sensorperformance besonders hoch.

Zu Beginn in Abschnitt 3.1 wird ein allgemeiner Überblick über bestehende alternative Methoden zur Formerkennung gegeben. Die genannten Technologien unterscheiden sich grundsätzlich von der Faser-Bragg-Gitter(FBG)-Formsensorik und sind als Ersatz der in dieser Arbeit betrachteten FBG-Formsensoren nicht geeignet. Dennoch ist eine Aufführung der Alternativen sinnvoll, da über solche Methoden Referenzwerte der Form von schlängelförmigen Objekten erhoben werden können. Diese können zur Bewertung der FBG-Formsensorgenauigkeit herangezogen werden.

Im nächsten Abschnitt 3.2 wird die bisher bekannte Forschung bezüglich der FBG-basierten Formsensorik besprochen. Seit über zwanzig Jahren beschäftigen sich verschiedene Forschungsgruppen weltweit mit dieser Technologie. Die verschiedenen Ansätze der bedeutenden Forschungsgruppen auf dem Forschungsgebiet werden chronologisch von Beginn an bis zum aktuellen Stand der Forschung vorgestellt und verglichen. Im Hinblick auf diese Dissertation werden dabei insbesondere die verwendeten Algorithmen sowie die Art der Messstellenverteilung über den Sensor betrachtet.

Der Abschnitt 3.3 beinhaltet die Forschung im Bereich der FBG-Formsensoren am Institut für Anthropomatik und Robotik (IAR) - Intelligente Prozessautomation und Robotik (IPR). Seit 2010 wird an diesem Institut an verschiedenen Aspekten der Sensorik gearbeitet. Insbesondere wird an der Erforschung neuer Herangehensweisen in der FBG-Formsensorik geforscht. Angestrebt ist die Anwendung der Sensorik in der Medizintechnik. Das Ziel ist die Überwachung von flexiblen Instrumenten und Endoskopen bei minimal-invasiven chirurgischen Eingriffen.

Abschließend werden in Abschnitt 3.4 der Stand der Technik bewertet und die aktuellen Grenzen der Technologie beschrieben. Dies stellt die Abgrenzung zu den in dieser Arbeit erforschten Themen dar.

3.1 Verschiedene Technologien zur Formerkennung flexibler, schlangenförmiger Objekte

Zusätzlich zu der FBG-basierten Formsensorik gibt es verschiedene Möglichkeiten, die Form flexibler Objekte in Schlangenform zu messen. Oft Angewendet werden verschiedene bildgebende Verfahren. Bei offener Sicht auf die zu vermessenden Objekte können Kameras eingesetzt werden. Statische, sowie bewegte Bilder können aufgenommen und über Methoden der Bildverarbeitung analysiert werden. Bei der Aufnahme aus mehreren Perspektiven können dreidimensionale Formen erkannt werden. Markerbasiertes Tracking ist ebenfalls eine vielversprechende Methode. Ist keine offene Sicht auf die beobachteten Objekte gegeben, so können Verfahren wie Ultraschall, Magnetresonanztomographie (MRT) oder auf Röntgenstrahlung basierende Technologien wie Computertomographie (CT) eingesetzt werden. Diese Methoden sind insbesondere aus der Medizintechnik bekannt. Das Beobachten von flexiblen Objekten über bildgebende Verfahren ist keine Alternative zu der in dieser Arbeit vorgestellten Formsensorik. Grund dafür sind, abhängig vom gewählten Verfahren, der hohe Aufwand durch die Bildaufnahme und Bildverarbeitung, teilweise hohe Strahlenbelastung oder Ungenauigkeit, die durch lange Aufnahmezeiten bei mehreren Perspektiven entstehen.

Auch elektromagnetisches Tracking ist eine Methode zur Formerkennung. Insbesondere lässt sich die Spitze von flexiblen Objekten so beobachten. Hier ist beispielsweise in [Kha02] eine Methode zur Erfassung der Position und Orientierung eines Objektes beschrieben. Solche Methoden sind in der Medizin nicht immer anwendbar. Da bei Operationen viele technische Geräte eingesetzt werden, ist der Einsatz elektromagnetisch verträglicher Sensoren sinnvoll.

Neben bildgebenden Verfahren oder elektromagnetischem Tracking sind auch Verfahren mit größerer Ähnlichkeit zu FBG-Formsensoren zu nennen. Im Folgenden sind zwei Alternativen aufgeführt.

Verwendung anderer Basistechnologien zur Formsensorik

Bevor FBG-Sensoren zur Formsensorik eingesetzt wurden, wurde bereits eine Arbeit von Gu et al. in In [Gu,03] vorgestellt. Hier werden herkömmliche Dehnungsmessstreifen verwendet. Es werden mehrere leicht biegbare Gelenke miteinander verbunden. Dieses System stellt eine Roboter-Trajektorie dar. Die Verbiegung der Gelenke wird über die Formsensorik erfasst und mit in die Vorwärtskinematik eingerechnet. Die Ansprüche an die Berechnung der Verformung der Gelenke sind wegen der nur leichten Verbiegbarkeit der Gelenke nicht sehr hoch. Die Algorithmen zur Berechnung der Gelenkform und der Kinematik sind in der Publikation allerdings sehr genau beschrieben.

Ein weiterer, den FBG-Formsensoren sehr ähnlicher Sensor, wird von dem Unternehmen *Teichert Systemtechnik GmbH* vertrieben [Tei16]. Der Formsensor basiert nicht auf Dehnungs-, sondern auf Abstandsmessungen. Entlang des Sensors ist eine Folie gewickelt, die Abstände von Punkten entlang der Sensoroberfläche misst. Diese Abstände ändern sich bei Sensorde-

3.1 Verschiedene Technologien zur Formerkennung flexibler, schlangenförmiger Objekte

formation und können zu einer Form verrechnet werden. Bedingt durch die verwendete Basistechnologie ist der Sensor vergleichsweise groß: Ein Außendurchmesser von 96 mm ist von der Firma als Standard angegeben. Hinzu kommt ein Schutzmantel, der zu einem noch größeren Außendurchmesser führt. Der große Durchmesser bringt eine eingeschränkte Deformationsflexibilität mit sich und ein minimaler Biegeradius von 100 mm ist von der Firma angegeben. Das System ist somit für die Detektion von Verformungen größerer Objekte, wie beispielsweise von Schläuchen, die in industrieller Anwendung eingesetzt werden, geeignet.

3.2 Stand der Forschung in der Faser-Bragg-Gitter-Formsensorik

Seit über zwanzig Jahren wird die FBG-Technologie in Verbindung mit der Messung von Deformationen flexibler Materialien eingesetzt. Die Geschichte der FBG-basierten Formsensorik ist von Beginn an bis zum aktuellen Stand der Technik in diesem Abschnitt zusammengefasst. Dabei liegt der Fokus der Betrachtung jeweils auf den angewendeten Algorithmen zur Messdatenfusion und Formschätzung. Weiterhin wird besonders auf die Art und Weise der Formsensorrealisierung und die Restriktionen, welche die Verteilung der Messstellen über den Sensorkörper vorgeben, geachtet. Mit eingeschlossen in den hier aufgeführten Technologien sind nur die auf Faser-Bragg-Gittern basierenden Formsensoren. Darunter fallen üblicherweise Monomodefasern mit einem oder auch mehreren Kernen, den sogenannten Multikern-Fasern.

Faser-Bragg-Gitter - Entstehung der Technologie

Grundlage für die FBG-Technologie ist die 1912 entdeckte Bragg-Gleichung. Diese beschreibt das Grundprinzip, auf dem die in der FBG-Formsensorik angewendete Messung von Dehnungen der in Glasfasern eingeschriebenen Bragg-Strukturen beruht. Genaueres zur Theorie ist in Kapitel 2 beschrieben. Die Entdeckung der Gleichung geht auf die beiden Physiker William Lawrence Bragg und seinen Vater William Henry Bragg zurück, die 1915 für die Entwicklung der Bragg-Theorie den Nobelpreis der Physik verliehen bekamen [Bra13, Ger04].

Das Einbringen von Bragg-Gitter-Strukturen in Glasfasern wurde deutlich später bekannt. Erst 1978 wurden die Faser-Bragg-Gitter von dem Physiker Kenneth Hill et al. vorgestellt [Kas10]. Seither werden FBG-Glasfasern zur Messung von Dehnungen und Temperaturveränderungen verwendet. Auch das Messen anderer physikalischer Phänomene, wie beispielsweise das Detektieren von Gasen [Zho14], wird mittels FBG-Fasern in Betracht gezogen. Sowohl die Forschung hinsichtlich der Optimierung und Erweiterung der FBG-Fasern selbst, als auch der Verwendung der Sensoren in verschiedenen Anwendungsbereichen wird stetig weiter betrieben; die FBG-Formsensorik stellt eine wichtige Anwendung von FBG-Glasfasern dar.

Erste Anwendung der FBG-Glasfasern zur Krümmungsmessung

Die erste Verwendung der FBG-Glasfasern zur Bestimmung von Formveränderungen in Materialien wurde von Forschern des *Optoelectronics Research Centre, Southampton* vorgestellt [Xu,94]. Dabei wurden über FBG-Fasern Dehnungen beidseitig an einem Kragträger gemessen und daraus die Krümmung berechnet. Die Temperaturabhängigkeit der FBG-Strukturen wurde hier bereits mit berücksichtigt. In den nächsten Jahren wurden ähnliche Forschungen von unterschiedlichen Forschungsgruppen weitergeführt. So wird in [Ara02] eine Methode zur Krümmungsmessung mit beliebiger Krümmungsrichtung beschrieben. In [Gan00] und [Flo03] werden zur Messung anstelle von Fasern mit einem Kern Multikern-Fasern

eingesetzt. Die Form der Objekte wurde aus den gemessenen Krümmungen noch nicht hergeleitet.

Entwicklung der FBG-Formsensorik

Die Formberechnung flexibler, länglicher Objekte mittels Verwendung von FBG-Fasern wird seit Anfang des 21. Jahrhunderts betrachtet. Mehrere Forschungsgruppen haben Ergebnisse vorgestellt. Die relevanten Arbeiten der bekannten Gruppen sind im Folgenden zusammengefasst.

Eine der ersten Arbeiten wurde von Forschern der *School of Mechatronics and Automation, Shanghai University* vorgestellt. Die hier angestrebte Anwendung von Formsensoren liegt im medizintechnischen Bereich; vermessen werden Koloskope. In [Lun04] werden zwei Fasern mit jeweils fünf FBGs entlang eines solchen Instrumentes um 90° versetzt entlanggeführt. Zwei FBGs liegen dabei jeweils auf einem gleichen Querschnitt des Instruments und bilden eine Messeinheit. Berechnet werden dann ebene Formen über die Berechnung der diskreten Krümmung der Instrumentenachse an den Messeinheiten. Aus den Krümmungswerten wird der Gradient des Instrumentenachsenverlaufs hergeleitet. In [Zha05] wird das Arrangement um zwei weitere Fasern mit jeweils 90° Versetzung zueinander erweitert. Die hinzukommenden Fasern sind durch Längsversetzung so angeordnet, dass wieder jeweils zwei FBGs auf einem Querschnitt liegen; somit wird eine doppelte Anzahl an Messeinheiten erreicht. Hier werden auch experimentelle Tests durchgeführt. Es wird bei einer konstanten, ebenen Krümmung mit Krümmungsradius von 300 mm ein absoluter Fehler von $57,3\text{ mm}$ bei einer Instrumentenlänge von 900 mm an der Instrumentenspitze nachgewiesen.

In [Yi,07a] wird die Betrachtung nicht-ebener Deformationen hinzugenommen. Dazu wird wohl erstmals in der FBG-Formsensorik die sogenannte Frenet-Theorie zur Berechnung der Form aus diskreten Krümmungs- und Torsionswerten der Sensorachse angewendet. Eine Auswertung wird weiterhin nur anhand von ebenen Verformungen vorgenommen; ein minimaler Fehler von $4,1\text{ mm}$ ist als Genauigkeit angegeben. In [Yi,07b] wird eine Sensorerweiterung in Form eines Handgriffes am Koloskop vorgestellt; Ergebnisse bezüglich Weiterentwicklungen der Sensorik selbst sind ab dann von dieser Arbeitsgruppe allerdings nicht mehr bekannt. Später publiziert der in den Arbeiten [Yi,07a] und [Yi,07b] beteiligte X. Yi, zu der Zeit mittlerweile tätig an der *School of Mechanical Engineering, Ningbo University of Technology, China*, in [Yi,10] eine Methode der Evaluation der Sensorgenauigkeit über optisches Tracking. Dabei werden die Ergebnisse von [Yi,07b] erneut aufgegriffen, aber in Hinblick auf die FBG-Formsensorik nicht erweitert.

Durch R. Duncan wurde 2005 die Verwendung von Multikern-Fasern in der FBG-Formsensorik bekannt. In Zusammenarbeit mit der Firma *Luna Innovations Inc., Virginia* wurden in [Dun05], [Dun06] und [Dun07] verschiedene Fortschritte vorgestellt. Die Multikern-Fasern sind so hergestellt, dass in einer Glasfaser mehrere Kerne integriert sind. In diesen Kernen sind jeweils FBGs eingeschrieben. Diese sind wiederum so angeordnet, dass mindestens drei FBGs auf gleichen Querschnitten liegen und eine Messeinheit bilden. Somit kann nach herkömmlicher Weise, wie bei Verwendung mehrerer Fasern mit je einem Kern, die diskrete

Krümmung an den Messeinheiten hergeleitet werden. Die Verwendung von Multikern-Fasern bringt eine sehr hohe Dichte an Messeinheiten mit sich. So sind in den von R. Duncan vorgestellten Sensoren Messeinheiten in Abständen von weniger als $40 \mu\text{m}$ beschrieben. Diese hohe Dichte an Messstellen trägt zu einer entsprechend hohen Genauigkeit der Sensorik bei. Ein schließlich erreichter maximaler Fehler von $1,4 \text{ mm}$ bei verschiedenen dreidimensionalen Deformationen eines $1,36 \text{ m}$ langen Sensors wird von R. Duncan nachgewiesen.

Die Verwendung von Multikern-Fasern wird von Forschern des *Naval Research Laboratory, Washington, DC* weitergeführt und um die Erfassbarkeit von zusätzlicher Torsion durch einen Twist erweitert. Dazu wird ein Faserkern direkt auf der Faserachse eingeschrieben [Ask08]. Weitere Kerne, die um die Achse wie gewöhnlich gleichmäßig verteilt angeordnet verlaufen, erfahren durch Twist gleiche, hinzukommende Belastung. Der Kern in der Mitte ist immun gegenüber diesem Twist. Somit kann die hinzukommende Torsion herausgerechnet werden. Die äußeren Kerne sind hierbei schon bei neutraler Faserausrichtung leicht vertwistet, damit rechnerisch ein eindeutiges Ergebnis gewährleistet ist. Diese Anordnung erinnert an eine helikale Faserwicklung, ist aber nicht zur Entlastung der Fasern vorgenommen.

Weitere Arbeiten zur FBG-Formsensorik mit Anwendung in der Medizintechnik zur Vermessung von Biopsienadeln sind von einer Forschungsgruppe des *Department of Biomechanical Engineering, Delft University of Technology* bekannt. Die zu messenden Verformungen von Biopsienadeln sind durch die hohe Biegesteifigkeit der Nadel weniger komplex. Somit stellt die Anwendung angesichts der benötigten Algorithmen zur Formschatzung keine besonders große Herausforderung dar. Allerdings sind die Nadeln sehr dünn und es müssen miniaturisierte Sensorsysteme umgesetzt werden. K. Henken stellt in [Hen12] eine Sensorintegration vor, bei der die Fasern entlang in die Nadel eingebrachter Nuten geführt werden. Bei nur geringer Deformation wird eine Genauigkeit von $1,32 \text{ mm}$ nachgewiesen. Eine weitere Formsensormodifizierung wird in [Van12] präsentiert; hier werden drei Fasern direkt unter Verwendung von Polymer-Klebstoff aneinander geklebt. Die erreichbare Genauigkeit bei dieser Realisierung ist nicht experimentell nachgewiesen, sondern wird nur theoretisch hergeleitet und liegt im Mikrometerbereich. Die Anordnung der Fasern ist in beiden Fällen gleich: die Fasern sind in 120° versetzt konzentrisch zueinander angeordnet. Die FBGs der verschiedenen Fasern sind dabei jeweils auf gleichen Querschnitten angeordnet, sodass das herkömmliche Berechnungsprinzip angewendet werden kann. In [Hen14] wird von der Arbeitsgruppe eine Optimierung der Sensorparameter über eine Simulationsumgebung vorgestellt. Weitere Arbeiten sind bisher nicht bekannt.

Auch das *Langley Research Center, Hampton, Virginia* der NASA hat Ergebnisse zur FBG-Formsensorik publiziert. So stellen J. Moore et al. 2012 in [Moo12] explizit einen Algorithmus zur Formschatzung von dreidimensionalen Formen vor. Dabei wird die schon 2007 in [Yi,07a] erwähnte Frenet-Theorie verwendet. J. Moore gibt durch seine konkreten Formelaufstellungen allerdings erstmals eine vollständige Beschreibung des Rekonstruktionsalgorithmus an. Die Sensorherstellung wird mittels Multikern-Fasern realisiert. Dabei wird die übliche Anordnung der FBGs in Messeinheiten auf gleichen Querschnittsebenen vorausgesetzt. Durch praktische Tests weist J. Moore eine Genauigkeit von $1,6\%$, bezogen auf die Sensorlänge, nach.

Einen weiteren FBG-Formsensor stellen R. Roesthuis et al. des *MIRA-Institute for Biomedical Technology and Technical Medicine, University of Twente, Netherlands* vor. In [Roe14] wird in Zusammenarbeit mit Forschern des *Department of Biomechanical Engineering, Delft University of Technology*, auch beteiligt an den Publikationen [Hen12] und [Van12], ein Formsensor zur Deformationsbeobachtung von Biopsienadeln beschrieben. Zur Berechnung der Form wird eine neue Methode vorgestellt, die sich durch Anwendung der Balkentheorie auszeichnet. Dieser Ansatz kann nur zur Erfassung von Objekten mit ähnlichen Verformungseigenschaften wie Biopsienadeln eingesetzt werden. Die Anordnung der FBGs auf Querschnittsebenen ist auch hier vorgegeben; wieder wird pro Messeinheit die diskrete Krümmungsinformation der Objektachse berechnet. Die über Tests herausgestellte Genauigkeit ist vergleichsweise gut. So wird bei einer einfachen ebenen Biegung und Auslenkung der Nadelspitze um $\pm 25 \text{ mm}$ ein maximaler Fehler von 2 mm angegeben. Bei komplexeren Deformationen in der Ebene oder dreidimensionalen Verformungen sind größere Fehler vermerkt. Nach 2014 sind von R. Roesthuis et al. keine neuen Ergebnisse bezüglich Formsensorik bekannt. Allerdings wird der in [Roe14] beschriebene Sensor aktuell zur Regelung der automatisierten Steuerung von Biopsienadeln verwendet und ist erneut in [Roe16] vorgestellt.

Eine erst 2016 publizierte Arbeit von R. Xu et al. des *Department of Electrical and Computer Engineering, Western University, Canada* in [Xu,16] beschreibt einen FBG-Formsensor zur Vermessung von flexiblen Robotern, auch bekannt als Kontinuumsroboter. Dieser besteht aus kleinen, ineinander gesteckten Röhrchen und kann sich sehr komplex verformen. In der Formsensorrealisierung werden die Fasern nicht parallel entlang der Objektachse, sondern helikal um das Objekt geführt. So soll Torsion, analog wie in [Ask08] beschrieben, erkannt werden können. Die helikale Wicklung ist nicht zum Zweck der Faserentlastung gedacht. Die Anordnung von mehreren FBGs pro verschiedener Querschnitte zu Messeinheiten und das Berechnungsprinzip sind wie herkömmlich vorgenommen. Zur Berechnung werden die von Moore in [Moo12] vorgestellten Algorithmen angewendet.

Forschungsarbeiten im Bereich der Herstellung von FBG-Fasern

Neben Arbeiten mit Fokus auf der Weiterentwicklung von FBG-Formsensoren, wird auch an der Herstellung der FBG-Fasern selbst geforscht. Besonders die Multikern-Fasern stellen eine vielversprechende Technologie dar. Hier sind einige Forschungsgruppen zu nennen, die wichtige Ergebnisse mit Bezug zur Formsensorik vorgestellt haben. Dazu ist zu bemerken, dass die Formsensorik zwar als Anwendung propagiert wird, die Formsensorrealisierung selbst aber nach bekannten Prinzipien vorgenommen wird. So bilden stets mehrere FBGs auf bestimmten Querschnitten eine Messeinheit und es werden die bekannten Algorithmen zur Formschatzung angewendet.

Die Firma *OFS Fitel LLC (United States)* entwickelt verschiedene Technologien basierend auf optischen Fasern. Im Jahr 2014 präsentieren P. Westbrook et al. in [Wes14] eine Formsensoranwendung, basierend auf Multikern-Fasern. Dabei stellt eine Faser mit sechs Kernen den Sensor selbst dar. Die Dehnung wird nahezu kontinuierlich über die gesamte Länge des Sensors von über einem Meter gemessen. Die Datenfusion zur Formschatzung geschieht

nach von J. Moore in [Moo12] vorgestelltem Algorithmus. Neben der theoretischen Beschreibung der FBG-Formsensorik werden weitere technische Aspekte genauer beschrieben, Tests zur Evaluation der Sensorperformance sind nicht gegeben. In Verbindung mit der Firma *OFS Fitel LLC* sind bis heute viele weitere Publikationen im Bereich FBG-Sensorik bekannt, es werden allerdings keine weiteren Bezüge zur Formsensorik mehr explizit angesprochen.

Das Einschreiben von mehreren Kernen in eine Faser mit einem Femto-Sekunden-Laser wird von Forschern der *University Toronto, Canada* in [Lee13] vorgestellt. In diesem Artikel geht es hauptsächlich um die Herstellung der Fasern. Die FBG-Formsensorik wird nach üblichem Prinzip umgesetzt. Dabei wird experimentell eine Genauigkeit von 1,1% festgestellt. Betrachtet werden bei der Evaluation nur einfache ebene Verformungen.

Auch Forscher des *Fraunhofer Institute, Goslar* und der *Technischen Universität Clausthal* beschäftigen sich mit dem Einschreiben von FBGs in Glasfasern unter Verwendung eines Femto-Sekunden-Lasers. In [Wal15] wird ein FBG-Formsensor bestehend aus einer Faser beschrieben. Die Art der Anordnung der FBGs auf gleichen Querschnitten sowie die angewendeten Algorithmen sind aus früheren Arbeiten bekannt. Nach 2015 sind aus Goslar keine weiteren Arbeiten bezüglich weiterführender Ergebnisse in der Formsensorik bekannt.

Forschungsarbeiten mit Anwendung von Faser-Bragg-Gitter-Formsensoren

Unterschiedliche Realisierungen der FBG-Formsensorik werden über die bereits vorgestellten herausgehobenen Arbeiten hinaus von vielen anderen Forschungsgruppen vorgestellt und evaluiert. Diese hohe Zahl an Veröffentlichungen zum Thema FBG-Formsensorik im Hinblick auf unterschiedliche Anwendungen lässt auf großen Bedarf an entsprechenden Sensorlösungen schließen. Weitere Veröffentlichungen sind im Folgenden erwähnt. Bei den betrachteten Publikationen werden keine besonderen Neuerungen beschrieben, welche die FBG-Sensorik voranbringen. Es geht eher um anwendungsorientierte Sensorrealisierungen und die Evaluation der Sensorik durch praktische Tests.

Eine interessante Anwendung der FBG-Formsensorik an Biopsienadeln wird von Y. Park in [Par10] schon 2010 vorgestellt. Die Sensorrealisierung wird nach [Zha05] vorgenommen. Dabei wird die Balkentheorie als grundlegendes geometrisches Deformationsmodell angenommen. Drei Jahre später ist in [Sei13] von R. Seifabadi et al. eine ähnliche Formsensorrealisierung an Biopsienadeln beschrieben. Eine weitere Arbeit aus diesem Jahr ist mit [Aba13] von M. Abayazid et al. der *University of Twente, The Netherlands* bekannt; dies ist wohl eine Vorarbeit der oben erwähnten Arbeit [Roe14] der gleichen Arbeitsgruppe. Es wird hinsichtlich der Formsensorik unter anderem auf die in [Hen12] vorgestellte Theorie zurückgegriffen.

Von S. Ryu et al. des *Department of Cardiovascular Surgery, Boston Children's Hospital, Harvard* wird 2014 in [Ryu14] eine Realisierung der Sensorik an Kontinuumsrobotern beschrieben. Dabei werden bezüglich der Sensorik unter anderem Ergebnisse von [Moo12] und [Aba13] verwendet. Fokus der Arbeit liegt auf der Betrachtung der praktischen Aspekte und der Sensorfertigung; dabei ist diese Realisierung speziell für die ausschließliche Anwendung an

Kontinuumsrobotern entwickelt.

Auch aktuell wird die FBG-Formsensorik weiter vorangebracht. So stellen Forscher des *Laboratory for Computational Sensing and Robotics (LCSR), Johns Hopkins University, Baltimore, Maryland, USA* in [Far16] 2016 eine weitere Realisierung vor. Diese ist wieder in einen Kontinuumsroboter integriert. Zur Formrekonstruktion werden die Theorien, beschrieben in [Par10] und [Roe14], verwendet.

Eine andere Anwendung wird in diesem Jahr von M. Li et al. der *School of Mechatronical Engineering, Beijing Institute of Technology, China* in [Li,16] vorgestellt. Dabei werden die herkömmlichen Prinzipien aus bekannten Quellen zur Sensorrealisierung herangezogen. Der Fokus der Arbeit liegt hier in der Regelung der Ansteuerung von Biopsienadeln unter Einsatz eines FBG-Formsensors.

3.3 Vorarbeiten zum Thema Faser-Bragg-Gitter-Formsensorik am IAR-IPR

Am Institut für Anthropomatik und Robotik (IAR) - Intelligente Prozessautomation und Robotik (IPR) wird seit 2010 an FBG-basierten Formsensoren geforscht. Die Beobachtung flexibler Instrumente bei robotergestützten chirurgischen Eingriffen steht als Ziel im Fokus der Arbeiten. Zu Beginn wurden bekannte Konzepte umgesetzt und getestet [Pau12, Led12]. Aus diesen Arbeiten ergaben sich weitere Forschungsfragen, die im Laufe der Jahre untersucht wurden.

Die praktische Realisierung stellt eine große Herausforderung dar. Die Sensorperformance hängt maßgeblich von dem Ergebnis der Herstellung ab. Materialien für den Sensor sowie ein passender Herstellungsprozess für die prototypische Sensorproduktion und dazu notwendige Aufbauten wurden laufend optimiert [Pau13, Led14b]. Arbeiten zur Optimierung des Herstellungsprozesses im Hinblick auf eine möglichst kostengünstige Lösung wurden Anfang 2015 in Brisbane in Zusammenarbeit mit der *School of Mechanical and Mining Engineering, The University of Queensland* weitergeführt. Dabei wurde die Anwendung im Bergbau betrachtet; im Vergleich zur Anwendung in der Medizin steht hier ein geringerer Anspruch an die Genauigkeit des Sensors einer geforderten Senkung von anfallenden Sensorkosten gegenüber.

Bei der Sensorherstellung entstehende Produktionsungenauigkeiten sind schwer vollständig zu vermeiden. Die Algorithmen zur Messdatenfusion können allerdings über Kalibrierverfahren an die Ungenauigkeiten angepasst werden. Verschiedene am IAR-IPR umgesetzte Methoden wurden implementiert und konnten zur Verbesserung der Sensorik beitragen. Üblicherweise wird die Basiswellenlänge der FBGs über das gerade Ausrichten des Sensors kalibriert. In [Pau14d] wurde ein erweiterter Ansatz vorgestellt, der auch Fehler der Positionierung jedes einzelnen FBGs separat ausgleichen soll. Dieser Ansatz stellt eine Vorarbeit zu der Ermöglichung der freien FBG Verteilung über neue Algorithmen dar.

Um neue Algorithmen testen zu können, wurden Simulationsumgebungen implementiert und getestet [Led13, Pau15d, Pau15c]. Über die entwickelten Tools können künstlich Messwerte erzeugt werden, wobei die freie Verteilung und Ausrichtung der FBGs über den Sensor schon ermöglicht ist. Es ist weiter vorgesehen, über diese Simulationstools zukünftig die Optimierungen der Sensorparameter automatisiert durchführen zu können.

Die konkrete Anwendung der Sensorik in der Medizinrobotik wird im Laufe der Forschung immer mit berücksichtigt. So wird in [Pau14b] eine Analyse der besonderen Anforderungen an die Sensorik über eine Ärztebefragung vorgestellt. In [Pau16b] wird eine prototypische Sensorrealisierung an einem Instrument für den Einsatz in der Urologie beschrieben; diese Arbeit entstand in Zusammenarbeit mit der *Urologischen Klinik, Universitätsklinikum Heidelberg*.

Die Integration der Sensorik in flexible Instrumente für minimal-invasive chirurgische Ein-

griffe ist ein weiteres Thema, an dem am IAR-IPR geforscht wird. In [Led14a, Led15b] wird das Konzept der Sensoranwendung für entsprechenden Einsatz beschrieben. In [Led15a] wird die Regelung eines am IAR-IPR entwickelten flexiblen Instrumentes über den FBG-Formsensor vorgestellt. In der Dissertation [Led16] werden die Ergebnisse hinsichtlich der Sensorintegration in erweiterter Form präsentiert.

Die Probleme bei der exakten Realisierung der durch die konventionellen Algorithmen vorgegebenen FBG-Positionierung veranlasst grundlegend neue Herangehensweisen in der Formsensorik. So wird am IAR-IPR an der *innovativen FBG-Formsensorik* geforscht; hier soll eine freie Positionierung und Ausrichtung der FBGs möglich sein. Das Konzept wird in [Pau14c, Pau15b] vorgestellt. In [Pau14a, Pau14c] wird näher auf die dazu notwendigen Algorithmen eingegangen. Die Idee wurde im Juni 2015 als Erfindungsmeldung beim Deutschen Patentamt eingereicht [Pau15a]. In dieser Dissertation wird im Folgenden erstmals der vollständige Algorithmus hergeleitet und eine prototypische Realisierung präsentiert.

Die über neue Algorithmen mögliche Freiheit in der Sensorrealisierung wird in alternativen Sensorkonzepten genutzt. In [Pau16a, Ros16] wird zurzeit in Zusammenarbeit mit dem Institut *Angewandte Lasertechnik und Photonik, Hochschule Aschaffenburg* an einer neuen Technologie geforscht. Hier sollen Lichtwellenleiter und FBGs in andere Medien wie ORMOCER[®] eingeschrieben werden. So werden der deformierbare Trägerkörper und die Messstellen in einer Komponente zusammengefasst; auf die Verwendung von Glasfasern kann verzichtet werden und die Probleme der genauen Positionierung der Messstellen über Faserwicklung um einen Trägerkörper entfallen. Die neue Art der FBG-Formsensorik wird als *1-Komponentenformsensor* betitelt.

3.4 Grenzen der aktuellen Faser-Bragg-Gitter-Formsensorik und Abgrenzung dieser Arbeit zum Stand der Technik

Der in diesem Kapitel gegebene Überblick über den Stand der Technik stellt eine Vielzahl an Formsensoren vor. Dabei sind die zu Anfang in Abschnitt 3.1 aufgezählten Methoden keine Alternative zu den FBG-basierten Formsensoren, da die FBG-Technologie durch die dünne Struktur der Fasern und die damit verbundene Miniaturisierbarkeit, die elektromagnetische Verträglichkeit und die hohe Sensitivität, mit der Dehnungen gemessen werden können, große Vorteile mit sich bringt. Die bisher bekannten FBG-Formsensoren sind in 3.2 aufgeführt. Viele interessante Realisierungsmöglichkeiten für unterschiedliche Anwendungen sind bereits erfolgreich umgesetzt. Weltweit wird stets weiter an der Entwicklung geforscht. Zur Abgrenzung der in dieser Dissertation erforschten Aspekte wurden die gegebenen Arbeiten insbesondere auf die im Folgenden aufgeführten Themenpunkte untersucht.

Es ist zuerst festzustellen, dass bei allen bekannten FBG-Formsensoren eine bestimmte Art der Verteilung der FBGs entlang des Sensors vorgegeben ist. Genauer ist stets eine Anordnung mehrerer FBGs auf gleichen Sensorquerschnitten gefordert. Diese FBGs bilden dann eine Messeinheit. Die bekannten Algorithmen bestimmen aus den Dehnungsmesswerten einer Messeinheit die Krümmungsinformation der Sensorachse an der Stelle der FBGs. Eine beliebige Verteilung der FBGs ist nach bestem Wissen der Autorin weder angesprochen noch in irgendeiner Form umgesetzt. Dazu notwendige Algorithmen sind ebenfalls nicht bekannt.

Weiter ist die parallele Faserführung bei FBG-Formsensoren üblich. In wenige Ausnahmen ist eine helikale Faserwicklung umgesetzt. Diese ist aber nicht aus Gründen der Faserentlastung angedacht, sondern soll zur Kompensation von Twisteffekten dienen. Auch bei den vorgestellten Sensoren mit helikaler Faserführung ist die Anordnung mehrerer FBGs in Messeinheiten vorausgesetzt und umgesetzt.

Schließlich ist zu bemerken, dass bei allen bekannten Arbeiten jeweils lediglich die Deformation der Sensorachse rekonstruiert wird. Dies ist eine eindimensionale Struktur und kann als Raumkurve beschrieben werden. Aus der Achsenform kann dann die Position und Ausrichtung der Objektspitze direkt bestimmt werden. In keinem Fall ist die Deformation der zweidimensionalen Sensoroberfläche zusätzlich mit in Betracht gezogen. Eindellungen an der verformbaren Oberfläche sind nicht über FBG-Formsensoren nach heutigem Stand der Technik erfassbar.

Aus den hier zusammengefassten Grenzen der bisher bekannten FBG-Formsensoren leitet sich das in dieser Arbeit erforschte innovative Konzept der FBG-Formsensoren ab. Dieses unterscheidet sich in den genannten Punkten von den herkömmlichen FBG-Formsensoren. Im folgenden Kapitel ist das Konzept der innovativen FBG-Formsensorik beschrieben.

4 Innovative Faser-Bragg-Gitter-Formsensorik

In den letzten Kapiteln wurde die FBG-Formsensorik beschrieben und der aktuelle Stand der Technik aufgeführt. Bei der Betrachtung vom Stand der Technik fällt auf, dass die Realisierung der verschiedenen vorgestellten FBG-Formsensoren ähnlich umgesetzt wird. Es wird stets eine bestimmte Anordnung der FBG-Fasern auf dem Sensorträgerkörper vorgenommen. Zu Beginn der Forschung an FBG-Formsensoren wurde dieses Konzept vorgestellt, welches von mehreren Forschungsgruppen aufgenommen und verfeinert wurde. Besonders in den letzten Jahren sind bezüglich der grundlegenden Aspekte der Sensorik keine großen Fortschritte mehr zu verzeichnen. Vielmehr liegt der Fokus inzwischen auf der Sensorintegration; zu Forschungszwecken werden die Sensoren in Testumgebungen eingesetzt, um eine Regelung der Ansteuerung flexibler Objekte zu ermöglichen. Obwohl mittlerweile viele Prototypen vorgestellt wurden, hat sich noch kein System auf dem Markt durchsetzen können. Das ist durch eine nicht ausreichende Sensorgenauigkeit sowie Schwierigkeiten in der praktischen Realisierung der FBG-Formsensoren zu erklären.

In dieser Arbeit wird der Grund für die bestehenden Schwierigkeiten in der FBG-Formsensorik in dem grundlegenden Prinzip des bisher angewendeten Konzeptes zur Sensorrealisierung gesehen. Die nach dem herkömmlichen Konzept umgesetzten Formsensoren werden in dieser Arbeit als *konventionelle FBG-Formsensoren* bezeichnet. Im folgenden Abschnitt werden die Schwachstellen der konventionellen FBG-Formsensorik aufgezeigt. Ein neues Konzept wird dann mit der *innovativen FBG-Formsensorik* vorgestellt, über welches diese bestehenden Schwachstellen der konventionellen FBG-Formsensorik umgangen werden sollen. Für die Realisierbarkeit der innovativen FBG-Formsensorik werden insbesondere neue Algorithmen zur Formrekonstruktion benötigt. Diese Notwendigkeit wird abschließend in diesem Kapitel begründet. Zudem wird eine für die innovative FBG-Formsensorik benötigte Erweiterung des in Abschnitt 2.1 vorgestellten Deformationsmodells hergeleitet.

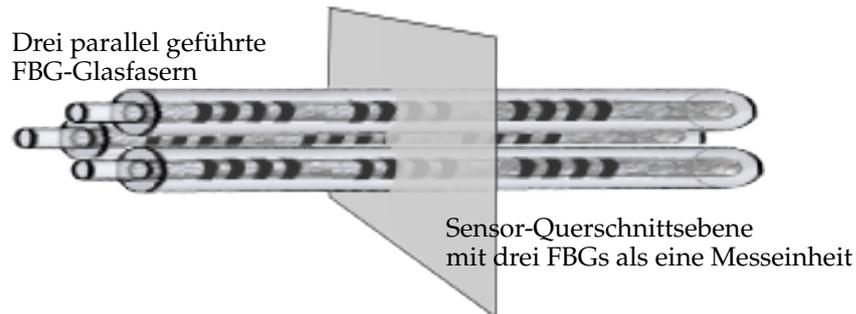


Abbildung 4.1: Restriktionen bezüglich der FBG-Verteilung über den Sensorträgerkörper.

4.1 Kozeptionierung der innovativen Faser-Bragg-Gitter-Formsensorik

Über die innovative FBG-Formsensorik sollen bestehende Grenzen der konventionellen FBG-Formsensorik umgangen werden. Im Folgenden werden diese Grenzen der konventionellen FBG-Formsensorik herausgestellt. Darauf basierend wird das Konzept der innovativen FBG-Formsensorik vorgestellt und die dadurch erlangten Vorteile benannt.

4.1.1 Grenzen der konventionellen Faser-Bragg-Gitter-Formsensorik

Bei der konventionellen FBG-Formsensorik sind strikte Restriktionen bezüglich der Art der Sensorrealisierung vorgegeben. Grund für diese Einschränkungen sind die Algorithmen zur Formschatzung. Diese können nur dann angewendet werden, wenn die Verteilung der FBGs über den Sensorträgerkörper nach einer bestimmten Vorschrift vorgenommen wurde. Gefordert ist, dass jeweils eine Mindestanzahl an FBGs auf bestimmten Querschnittsebenen platziert werden. Eine konzentrische Verteilung der FBGs ist nicht notwendig aber sinnvoll, um Rundungsfehler bei der späteren Formberechnung zu vermeiden. Die FBGs auf einer Querschnittsebene bilden eine Messeinheit. Über den Sensorverlauf sind mehrere solcher Messeinheiten an diskreten Stellen positioniert. Je nach Komplexität der zu erwartenden Verformung des Sensors, ist eine Mindestanzahl an FBGs, welche eine Messeinheit bilden, notwendig, damit ein Formergebnis über die Algorithmen berechnet werden kann. Bei einer dreidimensionalen Verformung mit einer Änderung der Krümmungsrichtung über den Formverlauf sind drei FBGs pro Querschnitt erforderlich. Die Begründung ist später in Abschnitt 5.2 auf Seite 46 in Zusammenhang mit der Beschreibung des konventionellen Datenfusionsalgorithmus gegeben. Die Verteilungsvorschrift bei der konventionellen FBG-Formsensorik ist in Abbildung 4.1 dargestellt.

Die Realisierung der FBG-Positionierung in Messeinheiten wird üblicherweise über eine parallele Faserführung vorgenommen. Dabei werden mindestens drei FBG-Fasern verwendet, bei denen die FBGs in gleichen Abständen über die Faser verteilt liegen. Bei gleicher Justierung der Fasern entstehen automatisch die Messeinheiten aus FBGs. Eine helikale

Wicklung der Fasern um den Sensor ist möglich aber unüblich. Bei einer helikalen Faserführung ist eine Anpassung des in Abschnitt 2.1 vorgestellten Deformationsmodells notwendig. Eine Positionierung der FBGs auf bestimmten Querschnitten ist in jedem Fall gefordert und bei nicht-paralleler Faserführung schwieriger praktisch umsetzbar.

Es ergeben sich aus den Restriktionen bezüglich der FBG-Positionierung über den Sensorträgerkörper nun zwei hauptsächliche Nachteile in der konventionellen FBG-Formsensorik. Zum einen ist die Einhaltung der vorgegebenen Restriktionen in der Praxis schwer exakt realisierbar. Der Fertigungsprozess zur akkuraten Anordnung der Fasern nach den gegebenen Restriktionen ist aufwendig und große Fertigungsungenauigkeiten sind in der Regel zu erwarten. Zum anderen ist die parallele Faserführung nachteilig. Die Materialdehnung des Sensorträgerkörpers ist bei Formsensorkrümmung in longitudinale Richtung am größten. Somit liegt eine maximale Faserbelastung bei parallel geführten Fasern vor. Eine zu hohe Belastung hat schlechte Messsignale zur Folge oder kann sogar zu irreparablen materiellen Faserschäden führen. Der Sensor darf demnach nicht zu stark verformt werden. Eine Einschränkung der Deformationsflexibilität des Sensors ist somit gegeben. Da die Materialdehnung bei Formsensorkrümmung mit dem Abstand zur Sensorachse zunimmt, ist bei paralleler Faserführung zudem eine Faserpositionierung nah an der Sensorachse notwendig, um die Fasern nicht zu stark zu belasten. Hohle Sensoren mit einem großen Sensordurchmesser sind somit nicht möglich. Eine weitere Grenze der konventionellen FBG-Formsensorik ergibt sich nicht direkt aus der festgelegten FBG-Verteilung über den Sensorträgerkörper, sondern aus der Art der Formberechnung. Es werden jeweils die Messwerte von drei FBGs einer Messeinheit verwendet, um die lokale Krümmung der Sensorachse an der Stelle der Messeinheit zu berechnen. Somit ist ein direkter Bezug zu der eindimensionalen Sensorachsenform hergestellt. Der Bezug zu der zweidimensionalen Sensoroberfläche oder gar dem dreidimensionalen Sensorkörper geht damit verloren.

4.1.2 Konzept der innovativen Faser-Bragg-Gitter-Formsensorik

Die bestehenden Schwierigkeiten in der konventionellen FBG-Formsensorik sollen über Minderung der Restriktionen bezüglich der Art der FBG-Messstellenanordnung auf dem Sensorträgerkörper gelöst werden. In der innovativen FBG-Formsensorik ist eine freie FBG-Verteilung über den Formsensorträgerkörper vorgesehen. Die Messstellen müssen nicht mehr in Messeinheiten zusammengefasst auf bestimmten Sensor-Querschnittsebenen angeordnet werden. Jede Messstelle wird separat betrachtet und kann sowohl beliebig positioniert, als auch frei ausgerichtet werden. Die Fasern müssen somit nicht mehr parallel entlang der Sensorachse geführt werden. Die Idee ist in Abbildung 4.2 dargestellt. Zu dem Verfahren der freien FBG-Verteilung in der FBG-Formsensorik wurde im Juni 2015 von der Autorin beim Deutschen Patentamt eine Erfindungsmeldung eingereicht.

Eine Möglichkeit der praktischen Realisierung einer freien FBG-Verteilung ist eine helikale Faserwicklung um einen länglichen, flexiblen Sensorträgerkörper-Kern, der wiederum von einer flexiblen Masse, wie beispielsweise Silikon, überzogen wird. Es können eine beliebige Anzahl an Fasern mit beliebiger FBG-Bestückung eingesetzt werden.

Zur effizienteren Auswertung der Messdaten sollen keine Messeinheiten aus FBGs gebil-

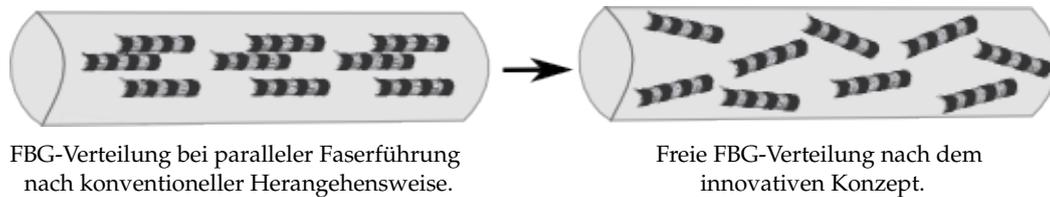


Abbildung 4.2: Restriktionen bezüglich der FBG-Verteilung über den Sensorträgerkörper.

det, sondern jede FBG-Messstelle separat betrachtet werden. Der Bezug der Messstellen zu der mehrdimensionalen Sensorkörperstruktur soll mit in die Formberechnung einbezogen werden. Es soll nicht nur die Sensorachsenform, sondern auch die Deformation der Sensoroberfläche erfasst werden können.

Über die innovative FBG-Formsensorik ergeben sich zusammengefasst folgende Vorteile, die zur Beseitigung der Schwierigkeiten in der konventionellen FBG-Formsensorik beitragen:

Vorteile durch die freie FBG-Verteilung:

- Erleichterte Sensorfertigung.
- Fertigungsungenauigkeiten können über Parametereinstellungen im Algorithmus kompensiert werden.

Vorteile durch die helikale Faserwicklung:

- Größere Deformationsflexibilität.
- Hohle Sensoren sind möglich.

Vorteile durch die separate Betrachtung der einzelnen Messstellen:

- Mehrdimensionale Strukturen, wie beispielsweise die Sensoroberfläche, sind erfassbar.
- Effizientere Auswertung der Messdaten durch separate Betrachtung der einzelnen FBG-Messstellen.

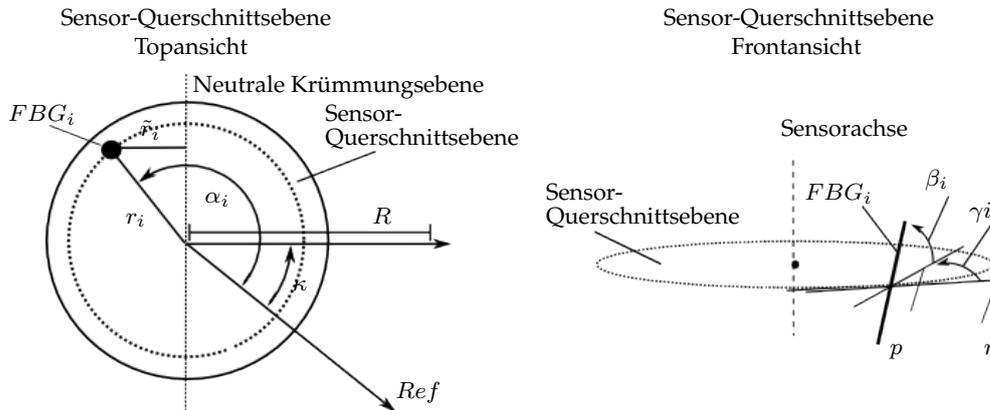


Abbildung 4.3: Parameter im angenommenen Deformationsmodell.

4.2 Datenfusion - Erweiterung des Deformationsmodells und Notwendigkeit neuer Formrekonstruktionsalgorithmen

Für die innovative FBG-Formsensorik nach dem im letzten Abschnitt beschriebenen Konzept sind neue Algorithmen zur Datenfusion erforderlich. Zu der Datenfusion gehören alle Berechnungen die vorgenommen werden, um auf Basis der gegebenen Messdaten eine Schätzung der Form zu ermöglichen. Im Folgenden werden die notwendigen Algorithmen zur Datenfusion in der innovativen FBG-Formsensorik aufgeführt.

Zur Ermöglichung der innovativen FBG-Formsensorik muss unter anderem das in Abschnitt 2.1 beschriebene Deformationsmodell erweitert werden. Es wird hierbei das gleiche Deformationsverhalten, wie in Abbildung 2.6 auf Seite 16 dargestellt, angenommen. In der konventionellen FBG-Formsensorik ist ein Zusammenhang zwischen Dehnung der FBGs und Krümmung des Sensorträgerkörpers wie in Gleichung 2.9 auf Seite 17 definiert. Hier fließen die Parameter r_i und α_i mit in die Gleichung ein. Die Parameter r_i und α_i geben die Positionierung des Gitters FBG_i auf dem Sensorträgerkörper an. Der Wert r_i entspricht dabei dem Abstand vom Gitter FBG_i zur Sensorachse. Die Richtung, in der das Gitter bezüglich einer Referenzrichtung Ref liegt, wird durch α_i angegeben. Die Referenzrichtung Ref ist dabei für alle Gitter gleich gewählt. Die Positionsangabe bezieht sich jeweils auf den Mittelpunkt des betrachteten Gitters. In der innovativen FBG-Formsensorik ist wegen der nicht zwangsläufig parallelen Faserführung neben der Angabe der Position ebenfalls eine beliebige Ausrichtung der Gitter zu beachten. Bei gekrümmter Faser ist die Ausrichtung eines Gitters als Richtung der Tangente an der Faser im Mittelpunkt des Gitters definiert. Die Verkipfung des Gitters ist über β_i und γ_i angegeben. Der Wert β_i gibt den Winkel zwischen Messstellenausrichtung und einem Vektor \vec{p} an. Der Winkel γ_i entspricht der Verkipfung in Richtung der Sensorachse. Der Wert ist als Winkel zwischen der Gitterausrichtung und einem Vektor \vec{n} definiert. Der Vektor \vec{p} ist dabei definiert als die Projektion der Gitterausrichtung auf die Sensor-Querschnittsebene. Der Vektor \vec{n} liegt auf der Sensor-Querschnittsebene und ist orthogonal zu einer weiteren Ebene, welche durch die Sensorachse und den Gitter-

mittelpunkt aufgespannt wird. Im Allgemeinen liegen die Werte für β_i und γ_i im Bereich $[0, \frac{1}{2}\pi]$. In Abbildung 4.3 ist die Parameterbedeutung verdeutlicht. Es kann angenommen werden, dass bei paralleler Faserführung die Belastung der Faser am größten ist. Die Werte für β_i und γ_i sind in dem Fall $\beta_i = 90^\circ$ und $\gamma_i = 0^\circ$. Es liegt eine klassische FBG-Ausrichtung vor und das konventionelle Deformationsmodell sowie die Gleichung 2.9 sind weiterhin gültig. Bei einer Gitterausrichtung parallel zur Querschnittsebene mit $\beta_i = 0^\circ$ oder $\gamma_i = 90^\circ$ wird keine Faserbelastung angenommen. Die Gleichung 2.9 lässt sich unter Einhaltung dieser Annahmen wie folgt modifizieren:

$$\varepsilon_i = \kappa r_i \sin(\alpha_i - \frac{\pi}{2} - \vec{\kappa}) \sin(\beta_i) \cos(\gamma_i). \quad (4.1)$$

In den meisten Fällen und insbesondere bei der in dieser Arbeit vorgeschlagenen helikalen Faserwicklung wird aus praktischen Gründen bei der Sensorherstellung keine Faserverkipung nach innen umgesetzt. Daher ist für γ_i im Folgenden stets $\gamma_i = 0$ angenommen. Somit kann die folgende vereinfachte Gleichung 4.2 für die Datenfusion verwendet werden:

$$\varepsilon_i = \kappa r_i \sin(\alpha_i - \frac{\pi}{2} - \vec{\kappa}) \sin(\beta_i). \quad (4.2)$$

Neben dem Deformationsmodell müssen alternative Algorithmen zur Formrekonstruktion aus den über das Deformationsmodell berechneten Dehnungswerten bestimmt werden. Die Einhaltung der Restriktionen, die bei den konventionell angewendeten Algorithmen gefordert wird, ist bei freier Faserverteilung im Allgemeinen nicht gegeben. Somit können solche Algorithmen in der innovativen FBG-Formsensorik nicht mehr verwendet werden. Zudem ist eine Erfassung der zweidimensionalen Sensoroberfläche bisher in Zusammenhang mit Formsensoren nicht bekannt und muss ebenfalls neu entwickelt werden. Im folgenden Kapitel 5 werden die innovativen Algorithmen detailliert vorgestellt.

Für die Datenfusion ebenfalls wichtig sind Algorithmen zur weiteren Verbesserung der Sensorik. So können beispielsweise die Sensorkonfigurationsparameter automatisiert optimal eingestellt werden. Zur Einstellung der Parameter eignen sich unter anderem maschinelle Lernverfahren. Weiter werden Kalibrierverfahren benötigt. Die Aspekte dieser und anderer hinzukommender Algorithmen werden in dieser Arbeit nicht weiter behandelt und sind Themen zukünftiger Forschung.

5 Sensordatenfusionsalgorithmen Differentialgeometrische Methoden

Die in der konventionellen FBG-Formsensorik bestehenden Probleme werden über eine neue Realisierungsform der Sensoren gelöst. Die bisher bestehenden Restriktionen bezüglich der Anordnung der Messstellen auf dem Sensorträgerkörper sind dabei nicht mehr gefordert und eine freie Messstellenverteilung ist möglich. In Kapitel 4 wird das Konzept der innovativen FBG-Formsensorik vorgestellt und die erzielten Vorteile beschrieben. In dem Zusammenhang wird auch herausgestellt, dass die bekannten Methoden zur Fusion der Messdaten bei beliebiger Verteilung der Messstellen nicht mehr angewendet werden können. Neue Rekonstruktionsalgorithmen zur Schätzung der Sensordeformation werden benötigt. Diese Algorithmen werden in diesem Kapitel beschrieben. Zur effizienten Datenfusion werden für den innovativen Algorithmus metrische und differentialgeometrische Konzepte herangezogen. Um die entsprechenden mathematischen Verfahren anwenden zu können, muss das Problem vorab vollständig und in mathematisch korrekter Form dargestellt werden. Hier eignet sich die Darstellung über Tensoren, Mannigfaltigkeiten und Tensorfelder. Über diese innovativen Algorithmen wird neben der Möglichkeit der freien Messstellenverteilung die Erfassung höherdimensionaler Informationen erreicht; zusätzlich zu der Berechnung der Form der eindimensionalen Sensorachse kann auch die Verformung der zweidimensionalen Oberfläche des Sensors approximiert werden. Die Erfassung der Sensoroberfläche wird in dieser Arbeit über einen in der Differentialgeometrie neuen mathematischen Ansatz von Fefferman et al. vorgenommen.

In diesem Kapitel wird in Abschnitt 5.1 zuerst die mathematische Problemstellung der innovativen FBG-Formsensorik formuliert. In Abschnitt 5.2 sind die Problemstellung und das Berechnungsprinzip des konventionellen Algorithmus zusammengefasst. Die für die Herleitung des innovativen Algorithmus notwendigen mathematischen Grundlagen und die Erarbeitung der verwendeten Konzepte werden in Abschnitt 5.3 beschrieben. Basierend darauf wird der innovative Algorithmus in Abschnitt 5.4 hergeleitet. Eine erste Implementierung des Algorithmus in MATLAB wird abschließend in Abschnitt 5.5 vorgestellt.

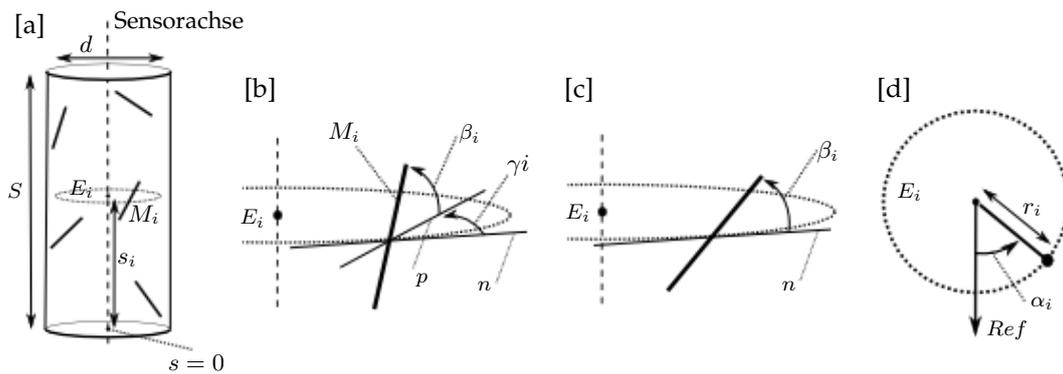


Abbildung 5.1: Sensorkonfiguration: Parameter S und d zur Bemaßung des Sensorträgerkörpers und Parameter $s_i, r_i, \alpha_i, \beta_i$ und γ_i zur Angabe der Messstellenpositionierung aller $i = 1, \dots, I$ Messstellen M_i auf dem Trägerkörper.

5.1 Innovative Faser-Bragg-Gitter-Formsensorik - Mathematische Problemstellung

In der FBG-Formsensorik soll die Sensorform aus den gegebenen Informationen bezüglich der Sensorbemaßung sowie aus den Messwerten berechnet werden. Zur mathematischen Problemformulierung bedarf es vorab einer Definition von Parametern zur Beschreibung der Sensorbemaßung. Diese Parameter werden als Sensorkonfigurationsparameter bezeichnet. Zudem müssen die Messwerte klassifiziert und die Anforderungen an die gegebenen Sensorparameter aufgeführt werden. Schließlich müssen bestimmte Anfangswertbedingungen angegeben werden. Darauf basierend kann eine konkrete Problemformulierung angegeben werden.

Der Sensor besteht aus einem schlangenförmigen, flexiblen Trägerkörper mit integrierten Messstellen. Die Sensorkonfiguration beinhaltet die Bemaßung des Sensorträgerkörpers in geradem Zustand sowie die Anhand zur Positionierung und Ausrichtung aller im Sensor integrierten Messstellen auf dem Sensorträgerkörper. Weiteres zur Sensorkonfiguration in der innovativen FBG-Formsensorik ist in Kapitel 4 beschrieben. In Abbildung 5.1 ist die Sensorkonfiguration mit allen für die Problemformulierung notwendigen Parametern schematisch dargestellt. Der unverformte Sensor kann durch die Geometrie eines berandeten Zylinders dargestellt werden. Dabei ist die totale Sensorlänge S die Länge des Zylinders. Der Zylinderdurchmesser ist durch den Sensordurchmesser d festgelegt (siehe Abbildung 5.1a). Die Messstelle ist in der FBG-Formsensorik, wie in Kapitel 4 beschrieben, eine in eine Glasfaser eingebrachte Struktur. Die Länge einer solchen Struktur beträgt üblicherweise $5 - 10 \text{ mm}$, der Durchmesser einer Faser beträgt $125 \mu\text{m} \pm 1 \mu\text{m}$. Die Position einer Messstelle wird nicht als der Bereich, den die Struktur über dem Sensorkörper abdeckt, beschrieben, sondern ist als die Position des Mittelpunktes einer solchen Struktur festgelegt. Die über die Messstellen gemessenen Daten werden entsprechend keinem Bereich sondern eben dieser diskreten Position zugeordnet. Die Ausrichtung einer Messstelle wird definiert als der Tangentialvektor an der Position der Messstelle in Längsrichtung der Faser. Sei nun I die Anzahl der

gegebenen Messstellen M_i mit $i = 1, \dots, I$. Sei weiter E_i die Querschnittsebene des unverformten Sensors, auf der die Messstelle M_i positioniert ist. Der Wert s parametrisiert die Sensorachse und gibt den Abstand von Punkten auf der Achse zum Sensorachsenanfang bei s_0 an. Mit einer Sensorlänge von S liegt der Wert s also im Bereich $[0, S]$. Für jede Messstelle ist die Position und Ausrichtung über ein Parametertupel P_i aus fünf Parametern $s_i, r_i, \alpha_i, \beta_i$ und γ_i festgelegt. Die Angaben der Position sind stets bezüglich des Sensors in geradem Zustand definiert. Die Parameter s_i, r_i und α_i geben die Position von M_i an. Dabei ist s_i der Punkt auf der Sensorachse, den die Ebene E_i schneidet. Der Wert r_i gibt den Abstand zur Sensorachse an. Der Wert α_i gibt die lokale Richtung an, in der M_i bezüglich der Sensorachse liegt. Die Richtung ist relativ zu einer Referenzrichtung \vec{Ref} angegeben (siehe Abbildung 5.1d). Die Referenzrichtung ist für alle Messstellen bei unverformtem Sensor gleich. Der Winkel α_i liegt im Bereich $[0, 2\pi]$ und ist der Winkel, der von \vec{Ref} ausgehend im mathematisch positiven Sinn gezählt wird. Der Winkel α_i wird von \vec{Ref} und dem Halbstrahl, der von s_i ausgeht und zur Messstelle hingerrichtet ist, eingeschlossen. Die Ausrichtung der Messstelle wird über die Parameter β_i und γ_i angegeben. Wie in Abbildung 5.1b und 5.1c dargestellt, ist β_i der Winkel zwischen Messstellenausrichtung und dem Vektor \vec{p} . Der Winkel γ_i gibt die Verkipfung in Richtung der Sensorachse an. Dieser Wert ist als Winkel zwischen der Messstellenausrichtung und dem Vektor \vec{n} definiert. Dabei entspricht der Vektor \vec{p} der Projektion der Messstellenausrichtung auf die Ebene E_i . Der Vektor \vec{n} liegt auf der Ebene E_i und ist orthogonal zu einer weiteren Ebene, welche durch die Sensorachse und M_i aufgespannt wird. Im Allgemeinen liegen die Werte für β_i und γ_i im Bereich $[0, \frac{1}{2}\pi]$. Aus praktischen Gründen bei der Sensorherstellung wird allerdings üblicherweise keine Verkipfung umgesetzt und es gilt für eine entsprechend vereinfachte Problemformulierung $\gamma_i = 0$, wie in Abbildung 5.1b skizziert. Die vereinfachte Problemformulierung wird bei der Herleitung der Algorithmen in Abschnitt 5.4 ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachtet und ist auch in der Problemformulierung entsprechend eingebracht.

Die Messwerte lassen sich wie folgt klassifizieren. Pro Messstelle M_i wird jeweils ein Wellenlängenwert λ_i mit einer bestimmten Intensität pow_i gemessen. Als bekannt vorausgesetzt sind außerdem Basiswellenlängenwerte λ_i^0 , welche den zu erwartenden Wellenlängenwerten, gemessen bei nicht belasteten Messstellen, entsprechen. Diese Werte sind entweder vom Hersteller gegeben oder können über Abnahme der Messwerte bei unverformtem Sensor ermittelt werden.

Um den Algorithmus anwenden zu können, sind bestimmte Anforderungen an die Sensorconfiguration gegeben. Bei der innovativen FBG-Formsensorik sind diese Restriktionen, verglichen mit der herkömmlichen Sensorik, stark abgeschwächt. Es ist keine parallele Faserführung und keine Positionierung von Messstellen auf bestimmten Sensor-Querschnittsebenen mehr gefordert. Der Algorithmus kann bei freier Messstellenverteilung über den Sensorkörper angewendet werden. Allerdings ist die Genauigkeit des erzielten Formergebnisses abhängig von der Anzahl und Verteilung der Messstellen. Eine den Anforderungen an die Sensorgenauigkeit angemessen ausreichend hohe Anzahl an gleichmäßig über den Sensorkörper verteilten Messstellen ist vorteilhaft für ein gutes Rekonstruktionsergebnis. Eine der Anwendung entsprechend genügende Sensorconfiguration wird in dieser Arbeit als

ausreichend gute Abdeckung bezeichnet und fasst alle Einflussfaktoren zusammen. Neben der Anzahl und Verteilung der Messstellen ist auch die Messstellenausrichtung zu beachten. Diese ist im Grunde beliebig, darf aber nicht orthogonal zur Sensorachse sein. Im Falle einer orthogonalen Ausrichtung wird nach den angenommenen geometrischen Modellen bei Krümmung des Sensors keine Dehnung auf die Messstelle übertragen; somit ist keine gewinnbringende Information über solche Messstellen erhebbar.

Zur Formrekonstruktion sind Anfangswertbedingungen notwendig, um die Sensorform im Raum bezüglich eines globalen Bezugssystems anzuordnen. Gegeben ist die Position s_0 und Ausrichtung T_0 des Sensors im Sensoranfang. Zudem ist die oben beschriebene lokale Referenzrichtung hinsichtlich des gleichen globalen Bezugssystems am Sensoranfang mit \vec{Ref}_0 festgelegt.

Die verformte eindimensionale Sensorachsenform ist beschrieben durch die Raumkurve $C(s) \subset \mathbb{R}^3$ mit $s \in [0, S]$. Die Raumkoordinaten der Sensorspitzenposition sind über $C(S)$ angegeben. Weiter entspricht die Ausrichtung des Sensors an der Sensorspitze dem Tangentialvektor $T(S)$ der Raumkurve $C(s)$ im Punkt $s = S$. Die verformte zweidimensionale Sensoroberfläche ist im Folgenden durch $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Mathematische Problemformulierung

Seien alle Parameter, Variablen und Notationen wie oben beschrieben festgelegt. Gesucht ist ein Algorithmus, der aus den gegebenen Informationen 'Inputdaten' unter den Randbedingungen 'Restriktionen' die Informationen 'Outputdaten' berechnet:

Problemformulierung: Innovative FBG-Formsensorik

Inputdaten

Sensorkonfiguration:

S und d .

$P_i(s_i, r_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ für alle M_i mit $i = 1, \dots, I$,

dabei gilt: $s \in [0, S]$, $r \in (0, \frac{d}{2}]$, $\alpha_i \in [0, 2\pi]$, $\beta_i \in (0, \frac{\pi}{2}]$ und $\gamma_i = 0$, $\forall i = 1, \dots, I$.

Anfangswertbedingungen:

Position im Anfangspunkt s_0 .

Ausrichtung T_0 und Referenzrichtung \vec{Ref}_0 im Anfangspunkt.

Messdaten:

Einmalig:

Basiswellenlängenwerte $\lambda_i^0, \forall i = 1, \dots, I$.

In jedem Messzyklus:

Wellenlängenwerte λ_i und zugehörige Intensitätswerte $pow_i, \forall i = 1, \dots, I$.

Restriktionen

Ausreichend gute Messstellenabdeckung:

Messstellenanzahl I :

Beliebig (angemessen ausreichend viele).

Messstellenverteilung:

Frei (möglichst gleichmäßig verteilt über den Sensorträgerkörper).

Messstellenausrichtung:

Beliebig, aber nicht orthogonal zur Sensorachse ($\beta_i \neq 0$).

Outputdaten

Im üblichen Fall:

$C(s)$ mit $s \in [0, S]$ und insbesondere separat $C(S)$ sowie $T(S)$.

Im besonderen Fall zusätzlich:

$S \in \mathbb{R}^3$.

Die Problemstellung ist im folgenden Abschnitt analog für den konventionellen Algorithmus skizziert. Es sind mehrere Unterschiede in den verschiedenen Problemdarstellungen festzustellen. Neben der in der innovativen FBG-Formsensorik hinzukommenden Mitbetrachtung des gemessenen Wertes pow_i für alle Messstellen M_i , unterscheidet sich die Problemstellung bei innovativer Herangehensweise von der konventionellen insbesondere durch die wegfallenden Restriktionen bezüglich der Messstellenanzahl, -verteilung und -ausrichtung. Zudem ist die zusätzliche Möglichkeit der Berechnung der zweidimensionalen Sensoroberfläche in der innovativen Herangehensweise gegeben.

5.2 Algorithmus zur konventionellen Faser-Bragg-Gitter-Formsensorik

Für die Formrekonstruktion nach konventioneller Herangehensweise sind verschiedene Berechnungsmethoden zur Datenfusion bekannt. Die bekannten Algorithmen unterscheiden sich nur in wenigen Punkten. Ein Unterschied liegt in der verschiedenen Komplexität der Form, die rekonstruiert werden kann. Es gibt Lösungsverfahren, über die nur ebene Verformungen, also Formen, die in einer zweidimensionalen affinen Ebene im \mathbb{R}^3 liegen, erfasst werden können [Par10]. Andere machen das Erkennen dreidimensionale Formen, die bei Änderung der Krümmungsrichtung über den Sensorverlauf in Form einer Torsion entstehen, möglich [Lun04, Moo12]. Weiter unterscheiden sich die Lösungen in der Verwendung unterschiedlicher Verfahren bei der Berechnung von Teillösungen. Zum Beispiel wird unterschiedlich interpoliert oder Differentialgleichungssysteme werden auf verschiedene Weise gelöst. Eine Gemeinsamkeit aller Algorithmen sind die Restriktionen bezüglich der Anordnung der Messstellen über dem Sensorträgerkörper. Zum einen ist eine parallele Faserführung entlang der Sensorachse üblich. Weiter müssen auf verschiedenen Sensor-Querschnittsebenen mehrere Messstellen angeordnet sein. Diese sollen möglichst gleichmäßig um die Achse auf dem Querschnitt verteilt liegen. Wenn dreidimensionale Verformungen mit Änderung der lokalen Krümmungsrichtung, also mit Torsion, berechnet werden sollen, dann ist eine Mindestanzahl von drei Messstellen pro Querschnitt notwendig. In Einzelfällen ist auch die helikale Faserwicklung umgesetzt [Fro14]. Die Anforderungen bezüglich der Anordnung mehrerer Messstellen auf bestimmten Querschnittsebenen ist hier weiterhin gefordert. Der Lösungsweg der bekannten Algorithmen beinhaltet stets die Berechnung von Krümmung und lokaler Krümmungsrichtung an der Sensorachse bei den Messstellen-Querschnittsebenen. Diese diskreten Informationen werden entlang der Sensorachse interpoliert. Weiter wird über die sogenannte Frenet-Gleichung der sensorachsenbegleitende Tangentenvektor berechnet. Über Integration wird daraus die Form der Sensorachse ermittelt. Aus dieser Form wird zudem separat die Position und Ausrichtung der Sensorspitze bestimmt.

Beispielhaft ist ein Algorithmus im Folgenden aufgeführt [Moo12]. Der Algorithmus setzt sich aus fünf Hauptschritten zusammen. In Abbildung 5.2 ist der Ablauf dargestellt. Die Problemstellung ist analog zu Abschnitt 5.1 mit entsprechender Notation und gleicher Parameterbenennung formuliert.

Problemformulierung: Konventionelle FBG-Formsensorik

Inputdaten

Sensorkonfiguration:

S und d .

$P_i(s_i, r_i, \alpha_i)$ für alle M_i mit $i = 1, \dots, I$,

dabei gilt: $s \in [0, S]$, $r \in (0, \frac{d}{2}]$ und $\alpha_i \in [0, 2\pi]$. $\forall i = 1, \dots, I$.

Messdaten:

Einmalig:

Basiswellenlängenwerte $\lambda_i^0, \forall i = 1, \dots, I$.

In jedem Messzyklus:

Wellenlängenwerte $\lambda_i, \forall i = 1, \dots, I$.

Anfangswertbedingungen:

Position im Anfangspunkt s_0 .

Ausrichtung T_0 und Referenzrichtung \vec{Ref}_0 im Anfangspunkt.

Restriktionen

Messstellenanzahl I :

N -Faches von 3 (angemessen ausreichend großes N mit $N \in \mathbb{N}_+$).

Messstellenverteilung:

Auf N Querschnitten des Sensors müssen jeweils 3 Messstellen möglichst gleichmäßig um die Sensorachse verteilt angeordnet sein (bei möglichst gleichmäßig verteilten Querschnittsebenen über den Sensorträgerkörper).

Messstellenausrichtung:

Parallel zur Sensorachse ($\beta_i = \frac{1}{2}\pi, \gamma_i = 0$).

Outputdaten

$C(s)$ mit $s \in [0, S]$ und insbesondere separat $C(S)$ sowie $T(S)$.

Die gemessenen Daten sind über die Wellenlängenwerte λ_i und die zugehörigen Basiswellenlängenwerte λ_i^0 gegeben. Vorbereitend wird in *Schritt 1* aus diesen Werten die Dehnung für jede Messstelle berechnet. Dazu wird die in Abschnitt 2.1 beschriebene Gleichung 2.4 verwendet und es gilt:

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta \lambda_i}{k \lambda_i^0}, \quad (5.1)$$

mit $k = 0,78$ als photoelastischem Koeffizienten.

Aus den so berechneten Daten wird in *Schritt 2*, unter Berücksichtigung der Messstellenpositionen $P_i(s_i, r_i, \alpha_i)$, die Krümmung und lokale Krümmungsrichtung der verformten Sensorachse an den diskreten Stellen der N Querschnittsebenen bestimmt. Dazu wird das in Abschnitt 2.1 beschriebene Deformationsmodell herangezogen. Sei κ_s die Krümmung der Achse an der Stelle s und $\vec{\kappa}_s$ die entsprechende lokale Krümmungsrichtung. Die lokale Krümmungsrichtung ist bezüglich der Referenzrichtung \vec{Ref} angegeben. Nach der in Ab-

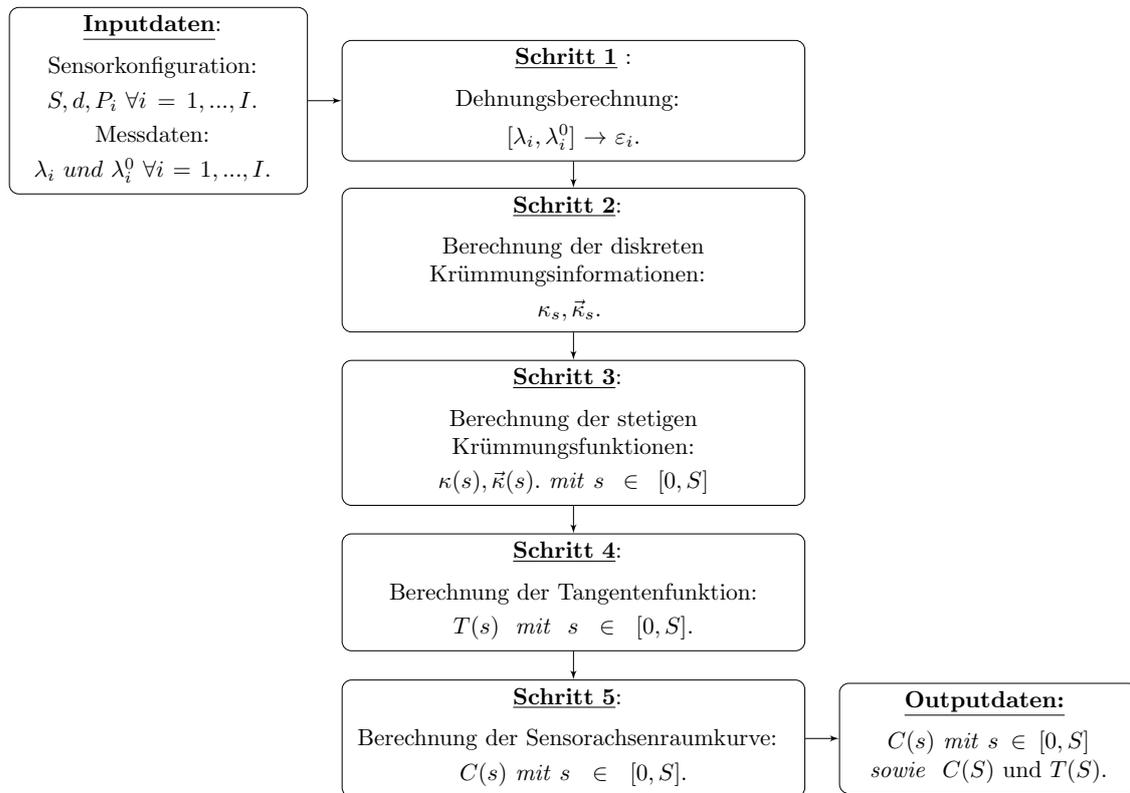


Abbildung 5.2: Berechnungsschema des konventionellen Formrekonstruktionsalgorithmus.

schnitt 2.1 hergeleiteten Gleichung 2.9 gilt für alle Messstellen M_i auf der Querschnittsebene welche die Sensorachse in s schneidet:

$$\epsilon_i = \kappa_s r_i \sin\left(\alpha_i - \frac{\pi}{2} - \vec{\kappa}_s\right). \quad (5.2)$$

Bei drei Messstellen auf einem Querschnitt lässt sich so für alle κ_s und $\vec{\kappa}_s$ ein überbestimmtes Gleichungssystem aus drei Gleichungen aufstellen; die Lösung der Ausgleichsrechnung ergibt die Werte κ_s und $\vec{\kappa}_s$. Zwei Messstellen pro Querschnitt reichen im Allgemeinen nicht. In dem Fall, dass die Krümmungsrichtung κ_s genau zwischen zwei Messstellen ausgerichtet ist, sind die zwei zu diesen Messstellen gehörenden Gleichungen 5.2 linear voneinander abhängig und eine weitere Gleichung wird zur Bestimmung der Werte κ_s und $\vec{\kappa}_s$ benötigt.

In *Schritt 3* werden die diskreten Werte κ_s und $\vec{\kappa}_s$ über die Sensorachse interpoliert. Dazu eignen sich kubische Splines. Ergebnis sind die Funktionen $\kappa(s)$ und $\vec{\kappa}(s)$ mit $s \in [0, S]$.

In *Schritt 4* wird die sogenannte Frenet-Gleichung gelöst. Diese ist ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit drei Gleichungen und den drei Unbekannten $T(s)$, $N(s)$ und $B(s)$. $T(s)$ ist für $s \in [0, S]$ der die Sensorachsenkurve begleitende Tangentenvektor, $N(s)$ der Normalenvektor und $B(s)$ der zu diesen Vektoren orthogonale

Binormalenvektor. Die Frenet-Gleichung hat folgende Form:

$$\begin{aligned} T'(s) &= \kappa(s)N(s) \\ N'(s) &= -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \quad . \\ B'(s) &= -\tau(s)N(s) \end{aligned} \quad (5.3)$$

Dabei ist $\tau(s)$ die Funktion, welche die Torsion der Sensorachsenkurve beschreibt. Diese Funktion lässt sich aus der Änderung der Krümmungsrichtungen $\vec{\kappa}(s)$ berechnen. Es gilt:

$$\tau(s) = \vec{\kappa}(s)' \quad (5.4)$$

In *Schritt 5* wird aus der Funktion $T(s)$ über Integration die Raumkurve $C(s)$ berechnet, welche die Sensorachsenform beschreibt. Es gilt:

$$C(s) = \int_0^s T(x)dx + C(0) \quad (5.5)$$

Separat werden schließlich noch die Raumkoordinaten der Position $C(S)$ und die Ausrichtung $T(S)$ an der Sensorspitze berechnet.

5.2.1 Erwartete Laufzeitkomplexität des konventionellen Algorithmus

Die Laufzeitkomplexität des konventionellen Algorithmus hängt von der Wahl der Verfahren für die Lösung der einzelnen Berechnungsschritte ab. Die Eingabelänge ist dabei in den ersten Schritten abhängig von der Anzahl I der vorhandenen Messstellen. In einem Sensor sind üblicherweise zwischen 15 und 21 Messstellen integriert. Die Eingabelänge ist somit relativ gering. In *Schritt 4* und *Schritt 5* hängt die Eingabelänge von einer in den Berechnungsschritten zu wählenden Schrittweite ξ ab und entspricht dem Wert $\frac{S}{\xi}$, mit S als Sensorlänge. Die Schrittweite bestimmt die Glätte der über den Algorithmus berechneten Raumkurve, welche die Sensorachse beschreibt. Ein gutes Formergebnis ist bei einer Schrittweite von etwa 1 mm zu erreichen. Beispielsweise ergibt sich demnach bei einer Sensorlänge von 400 mm und einer Schrittweite von $\xi = 1$ mm für die Eingabelänge ein Wert von $\frac{S}{\xi} = 400$. Damit ist die Eingabelänge in den letzten Berechnungsschritten deutlich größer als in den ersten Schritten. In Tabelle 5.1 sind die Komplexitätsklassen bezüglich beispielhafter Lösungsverfahren für jeden Berechnungsschritt abgeschätzt. Zur Angabe der Klasse wird die O-Notation verwendet. Weiteres zur O-Notation und der Komplexität von Algorithmen ist in [Hel12] (Teil II, Kapitel 8.4) zu finden.

Schritt	Problemstellung	Mögliches Verfahren	Komplexitätsklasse
1	Berechnung I linearer Gleichungen.	Multiplikationen	$\mathcal{O}(I)$
2	Lösung von $\frac{I}{3}$ nicht linearen überbestimmten Gleichungssystemen mit jeweils 3 Gleichungen und 2 Unbekannten.	Gauß-Newton-Verfahren	$\mathcal{O}(I)$
3	Zwei kubische Spline-Interpolationen mit jeweils $\frac{I}{3}$ Stützstellen.	Kubische Spline-Interpolationen	$\mathcal{O}(I)$
4	Lösung eines linearen Differentialgleichungssystems erster Ordnung mit 3 Unbekannten und Auswertung an $\frac{S}{\xi}$ Stellen.	Explizites Euler-Verfahren	$\mathcal{O}(\frac{S}{\xi})$
5	Integration über $\frac{S}{\xi}$ Stützstellen.	Gauß-Quadratur	$\mathcal{O}(\frac{S}{\xi})$

Tabelle 5.1: Abschätzung der Komplexitätsklassen für die einzelnen Berechnungsschritte des konventionellen Algorithmus.

Jeder Schritt ist über ein Verfahren in der Klasse $\mathcal{O}(n)$, mit n als Eingabelänge, lösbar. Die Eingabelänge variiert über die Berechnungsschritte. Der Schritt mit der längsten Eingabe bestimmt die Komplexität des gesamten Algorithmus. Somit ergibt sich die Komplexitätsklasse $\mathcal{O}(n)$ mit $n = \max\{I, \frac{S}{\xi}\}$. Es ist damit zu rechnen, dass der Wert für $\frac{S}{\xi}$ größer ist, als die Anzahl der Messwerte I . Demnach ist der Algorithmus im Allgemeinen in die Klasse $\mathcal{O}(\frac{S}{\xi})$ einzuordnen. Die asymptotische Laufzeit ist linear. Die in der Praxis auftretenden Laufzeitkonstanten sind so geartet, dass sich die Berechnungen für die vorgestellte Formsensoren bei der gegebenen Anzahl von 15 bis 21 Messstellen mit gängiger Hardware in Echtzeit lösen lassen.

5.3 Mathematische Grundlagen und Herleitung der verwendeten Konzepte

Zur Lösung der in Abschnitt 5.1 aufgestellten Problemstellung werden verschiedene mathematische Konzepte angewendet. Die zugrundeliegenden metrischen und differentialgeometrischen Theorien und grundlegende Definitionen werden in diesem Abschnitt beschrieben. Ziel ist die Fusion von über den FBG-Formsensor gemessenen Daten zur Schätzung der Sensorform. Zuerst muss die Problemformulierung korrekt vorgenommen werden. Die Messdaten werden anhand von Tensoren kompakt dargestellt. Diese Tensoren sind räumlich jeweils einem Punkt im Sensorkörper zugeordnet. Der Sensorkörper kann als Mannigfaltigkeit aufgefasst werden. Die Zuordnung der Gesamtinformation der Messdaten über diese Mannigfaltigkeit entspricht einem diskreten Tensorfeld. In Abschnitt 5.3.1 werden die notwendigen Grundlagen bezüglich der Arbeit mit Tensorfeldern und Mannigfaltigkeiten beschrieben. Die Dichte der Informationen über dem Tensorfeld muss über Interpolation erhöht werden. In Abschnitt 5.3.2 werden passende Interpolationsverfahren vorgestellt. Weiter wird die rekursive Generierung eines metrischen Raumes aus den gegebenen diskreten Tensorfeldern in Abschnitt 5.3.3 besprochen. Schließlich werden verschiedene Möglichkeiten der Approximation von Mannigfaltigkeiten aus diskreten metrischen Räumen in Abschnitt 5.3.4 vorgestellt. Diese Mannigfaltigkeiten beschreiben die Sensorform. Damit ist die Theorie bezüglich aller notwendigen Berechnungsschritte zur Formschatzung unter den Bedingungen der innovativen FBG-Formsensorik abgedeckt.

5.3.1 Mathematische Problemformulierung über Mannigfaltigkeiten, Tensoren und Tensorfelder

Zur vollständigen und übersichtlichen Beschreibung der Messwerte und der mathematischen Fragestellung sowie der Formulierung der entwickelten Datenfusionsalgorithmen, muss eine passende Darstellungsform bestimmt werden. Dies soll ein effizientes Rechnen mit den Messgrößen unter Verwendung bestehender mathematischer Methoden ermöglichen. Eine passende Möglichkeit bieten Konzepte aus der Differentialgeometrie und im Speziellen der Tensoranalysis und Tensoralgebra. Die Differentialgeometrie ermöglicht die unmittelbare Erfassung physikalischer Größen und Zusammenhänge und erlaubt die geometrische Interpretation vieler Sachverhalte. Eine saubere Verwendung der Theorie ist notwendig, um die Richtigkeit der späteren Rechnungen sicherzustellen. Die möglichst allgemeine Herangehensweise bei der Herleitung der Algorithmen ohne Einschränkung auf einen speziellen Anwendungsfall erlaubt eine zukünftige Erweiterung der Algorithmen, unter Beibehaltung der grundlegenden Definitionen und Teilschritte.

In diesem Abschnitt sollen nur die wichtigsten Definitionen aufgeführt werden, die für die spätere Herleitung der Algorithmen benötigt werden. Neben einer vorerst sehr allgemeinen Einführung der Begriffe sollen jeweils an die FBG-Formsensorik angelehnte anwendungsnahe Beispiele aufgeführt werden. Als grundlegendes mathematisches Konstrukt soll zuerst die Mannigfaltigkeit eingeführt werden. In entsprechender Form soll der Sensorkörper beschrieben werden. Der deformierte Sensorkörper entspricht somit mathematisch gesehen einer zu approximierenden Mannigfaltigkeit. Auf dem Raum der Mannigfaltigkeit werden

an diskreten Stellen Dehnungen gemessen. Diese Messinformationen sollen in Form von Tensoren abgespeichert werden. Grundlegendes zur Tensorrechnung wird im Weiteren in diesem Abschnitt aufgeführt. Schließlich werden die Messinformationen miteinander in Bezug gesetzt und räumlich Elementen der Mannigfaltigkeit zugeordnet. Dies entspricht einer Verknüpfung von Mannigfaltigkeit und Tensoren und kann über Tensorfelder umgesetzt werden. Tensorfelder werden in diesem Abschnitt abschließend aufgegriffen.

Um auf grundlegende Sachverhalte oder zu ausführliche Beschreibungen verzichten zu können, wird oft konkret auf das Buch *Moderne mathematische Methoden der Physik: Band 1* [Gol09] verwiesen. Näheres ist insbesondere in Kapitel 1-3 des Buches zu finden.

Mannigfaltigkeiten

Gesucht ist eine mathematische räumliche Struktur, die zur Beschreibung geometrischer Objekte genutzt werden kann, um den Sensorkörper und dessen Deformationszustand darzustellen. Die Struktur soll so definiert sein, dass Zusammenhänge wie Abstände und Winkel auf ihr gegeben sind und mit diesen Werten gerechnet werden kann. Eine entsprechende Struktur ist durch eine Mannigfaltigkeit gegeben. Die Mannigfaltigkeit ist ein grundlegender Begriff in der Differentialgeometrie. Mathematische Räume bestehen aus einer Menge an Punkten. Interessant ist die jeweilige Nachbarschaftsbeziehung der Punkte. Eine Mannigfaltigkeit besteht nun aus einer Punktmenge sowie zusätzlich aus zugehörigen Nachbarschaftsbeziehungen zwischen den Punkten. Ist diese Nachbarschaftsbeziehung n -dimensional, so ist n die Dimension der Mannigfaltigkeit selbst. Dabei gleicht eine Mannigfaltigkeit lokal dem euklidischen Raum der gleichen Dimension. Diese Tatsache erlaubt das Übertragen mathematischer Grundoperatoren und Konzepte, welche für den euklidischen Raum bewiesen sind, auf den betrachteten Punkterraum der Mannigfaltigkeit [Lee03]. Eine überschaubare und dennoch vollständige Definition ist wie folgt in Definition 1 gegeben [Bis12, Boo86].

Definition 1. Sei \mathcal{M} ein topologischer Raum. Ist für die Umgebung $\mathcal{U}(P_0) \subset \mathcal{M}$ eines Punktes P_0 und für einen reellen Vektorraum V der Dimension $\dim V = m$ eine Abbildung $k : \mathcal{U}(P_0) \rightarrow V$, $P \mapsto x$ gegeben, wobei k umkehrbar eindeutig und stetig und $x := \{x^i | i = 1, \dots, m\}$ ein m -Tupel von reellen Zahlen, also ein Element aus V ist. Dann ist k ein **Koordinatensystem** oder eine **Karte** in P_0 und das m -Tupel x die Menge der **Koordinaten** von P in P_0 .

Liegt ein Punkt P auf verschiedenen Karten und ist entsprechend über verschiedene Abbildungen definiert, so ist durch zwei solche Abbildungen $k : P \mapsto x$ und $\tilde{k} : P \mapsto \tilde{x}$ eine umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung (**Koordinatentransformation**) zwischen den Karten induziert, die für alle $P \in \mathcal{U}(P_0)$ die Koordinaten $x(P)$ auf $\tilde{x}(P)$ abbildet. Kann ganz \mathcal{M} durch ein endliches System an Karten überdeckt werden, so nennt man \mathcal{M} eine **Mannigfaltigkeit** und das System an Karten einen **Atlas**. Die Definition ist in Abbildung 5.3 anhand eines Torus als Mannigfaltigkeit veranschaulicht.

Alle Karten der Mannigfaltigkeit haben die gleiche Dimension m , die der Dimension der Mannigfaltigkeit selbst entspricht. \mathcal{M} ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, wenn alle Koordinatentransformationen differenzierbar sind. Der Atlas einer Mannigfaltigkeit ist eindeutig, das heißt, wird über eine Verkettung an Koordinatentransformationen ein

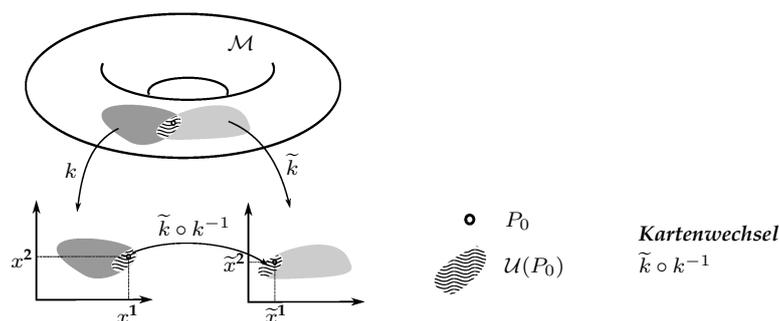


Abbildung 5.3: Ein Torus als Mannigfaltigkeit \mathcal{M} und Koordinatensysteme k und \tilde{k} in euklidischen Vektorräumen V und \tilde{V} über \mathbb{R} mit $\dim V = \dim \tilde{V} = \dim \mathcal{M} = 2$.

Element auf die ursprüngliche Karte abgebildet, so entspricht die Verkettung der Identität. Eine ausführlichere Definition von Mannigfaltigkeiten ist [Gol09] (Abschnitt 1-B) zu finden.

Ein wichtiger Begriff im Zusammenhang mit Mannigfaltigkeiten ist der für jedes Element $x \in \mathcal{M}$ gegebene Tangentialraum $T_x \mathcal{M}$, der \mathcal{M} lokal in x linear approximiert (Definition 2) [Jae13]:

Definition 2. Sei \mathcal{M} eine Mannigfaltigkeit der Dimension m in \mathbb{R}^n und x ein Element $x \in \mathcal{M}$. Weiter sei $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}$ mit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ eine differenzierbare Kurve mit $\alpha(0) = x$. Dann heißt das Differential $\alpha'(0) dx$ in \mathbb{R}^n **Tangentenvektor** an \mathcal{M} in x . Die Menge aller Tangentenvektoren in einem Punkt $x \in \mathcal{M}$ heißt **Tangentenraum** $T_x \mathcal{M}$ an \mathcal{M} in x und bildet einen Raum der Dimension m .

Spezielle Mannigfaltigkeiten sind die **riemannschen Mannigfaltigkeiten**. Dies sind differenzierbare Mannigfaltigkeiten, auf denen in jedem Punkt x eine **riemannsche Metrik** gegeben ist. Eine solche Metrik g_x ist dabei wie in Definition 3 definiert [Zei12].

Definition 3. Die **riemannsche Metrik** g_x ist eine symmetrische und nicht entartete Abbildung, die für Elemente $x \in \mathcal{M}$ auf der zugehörigen Mannigfaltigkeit \mathcal{M} definiert ist. g_x ist positiv definit und symmetrisch und bildet zwei Elemente des Tangentialraums $T_x \mathcal{M}$ von x auf eine reelle Zahl ab:

$$g_x : T_x \mathcal{M} \times T_x \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{M}. \quad (5.6)$$

Die oben angegebene Definition ist eine unvollständige Beschreibung der riemannschen Mannigfaltigkeit, die für diese Arbeit aber als ausreichend angesehen wird. Eine allgemeine, vollständige und außerdem übersichtliche Definition riemannscher Mannigfaltigkeiten, unter Verwendung des in dieser Arbeit erst später definierten Begriffes *Tensor*, ist in [Gol09] (Abschnitt 3-C) zu finden. Genauer entspricht eine Metrik g_x einem solchen Tensor und wird auch *metrischer Tensor* genannt. Die Menge aller metrischen Tensoren über eine Mannigfaltigkeit ist ein Tensorfeld. Eine weitere von dem Begriff Tensor unabhängige Definition ist in [Bur01] (Abschnitt 5.1.3, Definition 5.1.6) gegeben.

Die riemannsche Metrik ist nicht zu verwechseln mit der oft als Abstand bezeichneten Metrik metrischer Räume. Hier besteht allerdings ein direkter Zusammenhang. Der Abstand

auf einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} lässt sich über die riemannsche Metrik gewinnen. Ein Abstand zweier Punkte entspricht dabei dem kürzesten Weg über alle Kurven auf \mathcal{M} , die diese Punkte verbinden. Die kürzeste Kurve wird dabei als *Geodäte* bezeichnet [Pet06]. Somit lassen sich über eine riemannsche Metrik grundlegende geometrische Eigenschaften der Mannigfaltigkeit beschreiben. Im Allgemeinen hängt dabei die Metrik von dem Ort der betrachteten Punkte ab [Do 92].

In der Praxis stellen die zu beschreibende Objekte oft keine vollständige Mannigfaltigkeit dar, sondern nur Ausschnitte dieser. Eine für die praktische Anwendung sinnvolle Erweiterung der Mannigfaltigkeit ist also die *Mannigfaltigkeit mit Rand* $\overset{\mathbb{R}}{\mathcal{M}}$. Diese stellt einen Halbraum einer Mannigfaltigkeit dar. Hat $\overset{\mathbb{R}}{\mathcal{M}}$ die Dimension m , dann ist der Rand von $\overset{\mathbb{R}}{\mathcal{M}}$ eine Mannigfaltigkeit von der Dimension $m - 1$. Genaue Definitionen von Halbräumen und berandeten Mannigfaltigkeiten sind in [Jae13] und [Gol09] zu finden. Auf eine explizite Definition soll hier verzichtet werden. Es reicht zu wissen, dass Begrifflichkeiten wie Karten, Koordinaten und Tangentialebene bezüglich einer Mannigfaltigkeit direkt auf eine Mannigfaltigkeit mit Rand übertragen werden können und somit auch zur Beschreibung von begrenzten Objekten herangezogen werden können.

Um die Theorie zu veranschaulichen, sollen nun noch einige Beispiele vorgestellt werden, die teilweise auch bei der späteren Formsensoranwendung verwendet werden [Pet06].

Beispiel 1. Der euklidische Raum:

Der euklidische Raum \mathbb{R}^n mit dem euklidischen Skalarprodukt als riemannsche Metrik auf \mathbb{R}^n ist eine riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $m = n$.

Beispiel 2. Die Sphäre:

Die Sphäre S^2 ist ein beliebtes Beispiel für eine Mannigfaltigkeit. Sie beschreibt beispielsweise den Erdball. Karten einer solchen Mannigfaltigkeit können mit Landkarten assoziiert werden und ein Atlas im mathematischen Sinne entspricht dem Atlas im geographischen Sinne, als der Menge aller Landkarten. Sei $\|\cdot\|$ die im \mathbb{R}^3 induzierte euklidische Norm, dann ist S^2 gegeben durch:

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = r\}, \quad r \in \mathbb{R}_+. \quad (5.7)$$

Beispiel 3. Der Torus:

Der Torus \mathcal{T}^2 ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^3 , welche die Grundgeometrie eines 'Donut' beschreibt. Der Torus kann bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems mit Koordinaten x^1, x^2, x^3 über folgende Gleichung beschrieben werden:

$$r^2 = (\sqrt{x^1{}^2 + x^2{}^2})^2 + x^3{}^2, \quad r \in \mathbb{R}_+. \quad (5.8)$$

Alle Punkte des Torus haben von einer Kreislinie um den Ursprung des Koordinatensystems mit Radius R den festen Abstand r , dabei gilt $R > r$.

Beispiel 4. Der Zylinder:

Die zweidimensionale Mannigfaltigkeit Zylinder Z^2 im \mathbb{R}^3 beschreibt die in dieser Arbeit betrachtete Sensoroberfläche im rektifizierten, nicht verformten Zustand. Der Zylinder kann bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems mit Koordinaten x^1, x^2, x^3 durch die folgende Gleichung angegeben werden:

$$r = \sqrt{x^1^2 + x^2^2}, \quad r \in \mathbb{R}_+. \quad (5.9)$$

In diesem Fall entspricht der Zylinderschlauch einem in x^3 -Richtung unendlich langen Rohr mit dem Durchmesser $2r$ um die x^3 -Achse. Im Anwendungsfall hat der Sensorschlauch eine begrenzte Länge. Diese Begrenzung kann über eine Mannigfaltigkeit mit Rand Z^2 mitberücksichtigt werden. In dem Fall würden die x^1x^2 -Ebene und eine nicht identische Ebene parallel zu dieser Ebene die Mannigfaltigkeit begrenzen. Die Ränder der Mannigfaltigkeit entsprechen Kreisen, die wiederum eindimensionale Mannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^3 sind.

Tensoren

Der Sensorkörper soll über eine Mannigfaltigkeit beschrieben werden. Solche gleichen im Allgemeinen nur lokal dem euklidischen Raum. Die Karten und dazugehörenden Koordinatensysteme ändern sich über die Mannigfaltigkeit. Werden also Informationen bezüglich eines Ortes dargestellt, so muss bei einem Ortswechsel eine Koordinatentransformation der Informationsdarstellung durchgeführt werden. Eine Darstellungsform der Messinformationen, die invariant bezüglich solcher Koordinatentransformation ist, oder bei der die Transformation nach bestimmten Vorschriften kontrolliert abläuft, ist somit notwendig [Gol09].

Eine Möglichkeit bietet die Informationsdarstellung über Tensoren. Tensoren sind invariant gegenüber Koordinatentransformationen in andere Bezugssysteme. Sie können bezüglich verschiedener Basen dargestellt werden. Dabei ist die Darstellung so gewählt, dass bei einem Basiswechsel ein bestimmtes Transformationsverhalten vorliegt. Insbesondere sind auch relative Beziehungen zwischen zwei Tensoren wieder als Tensor darstellbar und somit ebenfalls invariant bezüglich eines Wechsels des Bezugssystems. Beispielsweise kann eine Information, die eine Richtung im \mathbb{R}^2 und einen skalaren Wert in \mathbb{R} beinhaltet, als (2×1) -Vektor in einer Karte auf einer Mannigfaltigkeit dargestellt werden. Sei die Dimension der Mannigfaltigkeit $m = 2$, so wie es auch in der später beschriebenen Sensoranwendung gegeben ist. Die entsprechenden Kartenkoordinaten x mit $x = \{x^i | i = 1, 2\}$ können als Basis verwendet werden. Bei einem Basiswechsel ist die Richtung sowie die Länge des Vektors als skalarer Wert gleichbleibend. Die Vektorkomponenten sind dabei nur ein Mittel zur Darstellung von Tensoren und deren relativen Beziehungen. Rechenregeln mit Vektoren im euklidischen Raum sind bekannt und können angewendet werden, sofern das Bezugssystem einem euklidischen Raum entspricht. Die Vektorkomponenten selbst sind nicht invariant bezüglich Basiswechseln und unterscheiden sich in ihrer Darstellung hinsichtlich unterschiedlicher Bezugssysteme [Mic03, Hac12, Jae13, Zei12].

Bei einer entsprechenden Tensorarstellung der Messwerte in der FBG-Formsensorik, können bekannte Rechenkonzepte aus der Tensoralgebra angewendet werden und in den Formrekonstruktionsalgorithmus einfließen. Transformationen können standardmäßig durchgeführt werden, wobei die relevanten Messinformationen nicht verändert werden. Beispielsweise kann die Interpolation der nur in diskreter Form gegebenen Messinformationen somit sehr einfach, übersichtlich und numerisch effizient durchgeführt werden. Auch die Visualisierung der Daten über die Mannigfaltigkeit ist gut umsetzbar. Da Tensoren in verschiedenen Stufen definiert sind, kann eine unbegrenzte Menge an Informationen über Tensoren dargestellt werden. Bei der Erweiterung der Sensorinformationen kann die Darstellung über erweiterte Tensoren vorgenommen werden. Das allgemeine Prinzip der Rechnung bleibt gleich. Somit bleibt die Grundstruktur des Algorithmus zur Formrekonstruktion bestehen. Die Darstellung der Messdaten in Tensoren ist also auch im Hinblick auf zukünftige Erweiterungen der FBG-Formsensorik auf komplexere und höherdimensionale Objekte sinnvoll.

Die Vorstellung der wichtigsten Definitionen und Inhalte der Tensorrechnung, Darstellungsformen, verschiedene Tensorarten sowie besondere Eigenschaften von Tensoren, sollen nun aufgeführt und dann an Beispielen verdeutlicht werden. Die hier gegebenen Inhalte decken nur einige ausgewählte Aspekte der Tensortheorie ab, die für die spätere Anwendung als unmittelbar relevant erscheinen. Weitere umfangreiche, für Vektorräume auf beliebigen Körpern verallgemeinerte Definitionen von Tensoren sind in [Gol09] (Abschnitt 2) zu finden.

Im Folgenden seien V_r und W_s stets reelle Vektorräume mit endlicher Dimension und $v_r \in V_r$ und $w_s \in W_s$ Elemente aus diesen Räumen.

Definition 4. Seien T und \tilde{T} **Multilinearformen** der Ordnung p , das heißt, T (bzw. \tilde{T}) ist eine Abbildung $T : V_1 \times \dots \times V_p \rightarrow \mathbb{R}$, die in jedem Argument linear ist. Weiter sei der reelle Vektorraum $Mult(V_1, \dots, V_p)$ der Raum der Multilinearformen der Ordnung p und es gilt:

$$(\lambda T + \mu \tilde{T})(v_1, \dots, v_p) := \lambda T(v_1, \dots, v_p) + \mu \tilde{T}(v_1, \dots, v_p), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (5.10)$$

Dann sind die Elemente $T \in Mult(V_1, \dots, V_p)$ **Tensoren** und p wird **Ordnung, Rang oder Stufe** des Tensors genannt.

Seien nun $T \in Mult(V_1, \dots, V_p)$ und $\tilde{T} \in Mult(W_1, \dots, W_q)$ Tensoren aus Mengen von Multilinearformen über verschiedene Vektorräume der gleichen Dimension. Dann ist das **Tensorprodukt** \otimes definiert als:

$$(T \otimes \tilde{T})(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q) = T(v_1, \dots, v_p) \tilde{T}(w_1, \dots, w_q) \quad (5.11)$$

und $T \otimes \tilde{T} \in Mult(V_1, \dots, V_p, W_1, \dots, W_q)$ ist wieder ein Tensor der Stufe $p + q$ [Mod15].

Ein Tensor ist also eine Abbildung einer Vektormenge auf eine reelle Zahl. Dieses vorerst abstrakte Konstrukt kann dabei bezüglich bestimmter Basen über eine Menge an Komponenten repräsentiert werden. In Bezug auf ein festes Koordinatensystem ist ein Tensor etwa als Skalar (Tensor der Stufe 0), Vektor (Tensor der Stufe 1) oder Matrix (Tensor der Stufe 2) darstellbar. Jeder Tensor kann auch bezüglich der dualen Basis dargestellt werden. Es besteht sogar ein bestimmter Zusammenhang zwischen einem Tensor und den Dualräumen

V_1^*, \dots, V_p^* der Vektormenge V_1, \dots, V_p , welche die Definitionsmenge des Tensors bildet; es gilt [Mod15]:

$$V_1^* \otimes \dots \otimes V_p^* = \text{Mult}(V_1, \dots, V_p). \quad (5.12)$$

Sei nun jeweils $m_i = \dim V_i$ die Dimension des Vektorraums V_i und $\{e_{i_1}, \dots, e_{i_{m_i}}\}$ eine Basis von V_i . Dann können die Elemente v_i ($i = 1, \dots, p$) aus der Definitionsmenge (V_1, \dots, V_p) bezüglich der Basen wie folgt mittels den basisabhängigen Komponenten $v_i^1, \dots, v_i^{m_i}$ dargestellt werden:

$$v_i = \sum_{j=1}^{m_i} v_i^j e_{i_j}. \quad (5.13)$$

Der Tensor $T \in \text{Mult}(V_1, \dots, V_p)$ bildet dann die Elemente v_i bezüglich dieser Basen wie folgt ab:

$$T(v_1, \dots, v_p) = \sum_{j_i=1}^{m_i} (i=1, \dots, p) v_1^{j_1} \dots v_p^{j_p} T(e_{1_{j_1}}, \dots, e_{p_{j_p}}). \quad (5.14)$$

Der Tensor ist also vollständig durch die Tensorabbildung der Basis $T(e_{1_{j_1}}, \dots, e_{p_{j_p}})$ bestimmt. Zu jeder Basis von V_i sei zum Dualraum V_i^* die duale Basis bezeichnet durch $\{e^{i_1}, \dots, e^{i_{m_i}}\}$, für die gilt:

$$e^{i_k} e_{i_l} = \delta_l^k, \quad 1 < k, l < m_i. \quad (5.15)$$

δ_l^k ist das Kronecker-Delta und es gilt:

$$\delta_l^k = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = l \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}. \quad (5.16)$$

Dann kann derselbe Tensor T auch bezüglich dieser dualen Basis wie folgt dargestellt werden. Sei dabei v^i ($i = 1, \dots, p$) aus der Menge (V_1^*, \dots, V_p^*) mit den Komponenten $v_1^i, \dots, v_{m_i}^i$ bezüglich der dualen Basis dargestellt als:

$$v^i = \sum_{j=1}^{m_i} v_j^i e^{i_j}. \quad (5.17)$$

Dann gilt für T

$$T(v_1, \dots, v_p) = \sum_{j_i=1}^{m_i} (i=1, \dots, p) v_1^{j_1} \dots v_p^{j_p} T(e^{1_{j_1}}, \dots, e^{p_{j_p}}) \quad (5.18)$$

Wieder ist T eindeutig über die Abbildung der dualen Basis festgelegt. Die Tensorabbildung T kann bezüglich bestimmter Koordinatensysteme nun über eine Menge an Tensor-komponenten explizit angegeben werden. Offensichtlich entsprechen sich die Komponenten der Abbildung bezüglich der verschiedenen Basen im Allgemeinen nicht. Es bestehen aber bestimmte Zusammenhänge zwischen den Tensorabbildungen in den Dualräumen. Diese können in [Gol09] genauer nachgelesen werden.

Im Folgenden sollen zur Veranschaulichung einfache übersichtlichere Beispiele der expliziten Tensorarstellung vorgestellt werden. Dazu wird die Betrachtung beschränkt auf Tensoren zweiter Stufe und identische Vektorräume V_1 und V_2 als Definitionsmenge mit

$V := V_1 = V_2$ der Dimension m . Es wird also ein Tensor $T : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ mit $T \in \text{Mult}^2(V)$ betrachtet. Alle Sachverhalte lassen sich entsprechend auf allgemeinere Fälle für Tensoren der anderen Stufen übertragen.

Analog zu der allgemeinen Definition von Tensoren lässt sich T bezüglich einer Basis $e = \{e_1, \dots, e_m\}$ von V sowie entsprechend bezüglich der dualen Basis $e^* = \{e^1, \dots, e^m\}$ von V^* und bezüglich zweier Elemente $v_1 = (v_1^1, \dots, v_1^m)$ und $v_2 = (v_2^1, \dots, v_2^m)$ aus V sowie mit entsprechender Darstellung bezüglich der dualen Basis $v^1 = (v_1^1, \dots, v_1^m)$ und $v^2 = (v_2^1, \dots, v_2^m)$ darstellen:

$$T(v_1, v_2) = \sum_{j_1, j_2=1}^m v_1^{j_1} v_2^{j_2} T(e^{j_1, j_2}) \quad \text{und} \quad T(v^1, v^2) = \sum_{j_1, j_2=1}^m v_1^{j_1} v_2^{j_2} T(e^{j_1, j_2}). \quad (5.19)$$

Der Tensor kann also über eine $m \times m$ Matrix bezüglich den verschiedenen Basen dargestellt werden. Man schreibt $T(e) = T^{ij}_{i,j=1,\dots,m}$ und $T(e^*) = T_{ij}_{i,j=1,\dots,m}$ für die jeweiligen Tensorkomponenten, die die entsprechende Basis abbilden.

Es ist nun interessant zu betrachten, wie sich die Tensordarstellung unter einer Basistransformation verhält. Seien $\tilde{e} = \{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m\}$ und $\tilde{e}^* = \{\tilde{e}^1, \dots, \tilde{e}^m\}$ weitere duale Basen von V und V^* und sei $A = \{a_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,m}$ die Transformationsmatrix für die gilt:

$$\tilde{e} = Ae \quad \text{und} \quad \tilde{e}^* = A^T e^*. \quad (5.20)$$

Dann transformiert sich der Tensor T , dargestellt bezüglich der Basen e und e^* , wie folgt:

$$T(\tilde{e}) = A^T T \quad \text{bzw.} \quad T(\tilde{e}^*) = AT. \quad (5.21)$$

Die Tensordarstellung $T(e)$ transformiert sich demnach bei einem Basiswechsel kontravariant zur Basis e . Die Darstellung $T(e^*)$ im Dualraum transformiert sich hingegen kovariant zu der Basis e . Bezüglich des Vektorraumes V und einer Basis e nennt man die Tensorkomponenten $t^{ij}_{i,j=1,\dots,m}$ kontravariante Tensordarstellung bezüglich dieser Basis und die Komponenten $t_{ij}_{i,j=1,\dots,m}$ kovariante Tensordarstellung. Dieses Transformationsverhalten ist charakteristisch für Tensoren im Allgemeinen und gilt auch für solche der anderen Stufen [Gol09, Mic03].

Neben der expliziten Tensordarstellung bezüglich bestimmter Basen von Vektorräumen, können Tensoren auch in der **Indexnotation** $T^{j_1, \dots, j_p}_{i_1, \dots, i_q}$ abstrakt angegeben werden. Diese Darstellungsform ist koordinatenunabhängig und enthält die Aussage über den Typ des Tensors. $T^{j_1, \dots, j_p}_{i_1, \dots, i_q}$ ist eine Abbildung aus dem Raum $\text{Mult}(V_1, \dots, V_q, W_1, \dots, W_p)$ und wird **Tensor vom Typ (p, q)** genannt. Dabei geben die oben notierten Indizes $1, \dots, p$ der Indexnotation an, dass der Tensor für Elemente aus den entsprechenden Vektorräumen V_1, \dots, V_p eine kontravariante Abbildung darstellt. Die unten notierten Indizes verweisen auf eine kovariante Abbildung. Im Gegensatz zu rein ko- oder rein kontravarianten Tensoren werden solche vom Typ (p, q) , mit $p > 0$ und $q > 0$ **gemischte Tensoren** genannt. Über die Indexschreibweise können Zusammenhänge wie die Verjüngung oder Kontraktion von Tensoren koordinatenfrei dargestellt werden [Pen84, Spi84].

Die Darstellung und Beschreibung von physikalischen und geometrischen Zusammenhängen über Tensoren erlaubt es nun, bestimmte Eigenschaften und Rechenregeln der Tensortheorie zu verwenden. Schon beschrieben wurde das Transformationsverhalten von Tensoren als charakteristische Eigenschaft. Weiter gilt für das Tensorprodukt das Distributiv- und Assoziativgesetz, nicht aber das Kommutativgesetz. Interessant ist immer die Betrachtung der bezüglich Basistransformationen invarianten Größen. Bei einem Tensor sind das die Spur, sowie die Symmetrieeigenschaften. Auch das Skalarprodukt ist eine invariante Größe und stellt selbst einen Tensor dar. Einige veranschaulichende Beispiele sollen nun gegeben werden [Mod15].

Beispiel 5. Schiefe Koordinaten in der euklidischen Ebene:

Sei ein Tensor T der Stufe 1 eine Abbildung $T : V \rightarrow \mathbb{R}$ von einem zweidimensionalen euklidischen Vektorraum V mit $\dim V = 2$ in die Reellen Zahlen. Bezüglich einer nicht notwendig kartesischen euklidischen Basis $e = \{e_1, e_2\}$ kann der Tensor über die kontravarianten Komponenten $T^1 = \{t^1, t^2\}$ dargestellt werden und es gilt: $T^1 = \sum_{i=1}^2 t^i e_i$. Für einen weiteren Tensor $\tilde{T}^1 = \{\tilde{t}^1, \tilde{t}^2\}$ gilt entsprechend: $\tilde{T}^1 = \sum_{i=1}^2 \tilde{t}^i e_i$. Um den Winkel zwischen den als Vektor dargestellten Tensoren berechnen zu können, kann nicht das kartesische Skalarprodukt $T^1 \cdot \tilde{T}^1 := \sum_{i=1}^2 t^i \tilde{t}^i$ verwendet werden. Es gilt hier für nicht kartesische Koordinatensysteme verallgemeinert: $T^1 \cdot \tilde{T}^1 := \sum_{i=1}^2 t^i \tilde{t}_i^*$ mit $\tilde{T}_1^* = \{\tilde{t}_1^*, \tilde{t}_2^*\}$ als kovariante Darstellung des Tensors \tilde{T}^1 . Das Skalarprodukt entspricht einem Tensor vom Typ $(0, 2)$ und ergibt ein Skalar, also einen Tensor der Stufe 0. Somit entspricht das Skalarprodukt einer Kontraktion von zwei Tensoren der Stufe 2 [Kue13, Bae06].

Beispiel 6. Konfigurationsdarstellung von Körpern im \mathbb{R}^3 :

Die Beschreibung der Konfiguration eines Objektes im Raum beinhaltet die Positionsangabe sowie die Information bezüglich der Objektausrichtung. Im dreidimensionalen euklidischen Raum ist die Position bezüglich eines Koordinatensystems über einen Ortsvektor darstellbar und kann also über drei Komponenten p^1, p^2 und p^3 eindeutig definiert werden. Die Orientierung kann über drei weitere Komponenten α, β und γ , beispielsweise die Eulerwinkel, angegeben werden. Die Informationen bezüglich der Konfiguration kann über einen Tensor in einem mathematischen Konstrukt vereint werden. Eine Tensordarstellung T^2 der Stufe 2 ist gegeben durch:

$$T^2 = \left[\begin{array}{cc} R_{3 \times 3}(\alpha, \beta, \gamma) & P_{3 \times 1}(p^1, p^2, p^3) \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{array} \right] \int \tag{5.22}$$

Dabei entspricht $R_{3 \times 3}(\alpha, \beta, \gamma)$ einer (3×3) Matrix, abhängig von den drei Komponenten α, β und γ , die einer Rotationsmatrix entspricht. $P_{3 \times 1}(p^1, p^2, p^3)$ ist ein Ortsvektor, abhängig von den Komponenten p^1, p^2 und p^3 . Mit dieser Zusammensetzung der sechs Parameter, unter Berücksichtigung der jeweiligen physikalischen räumlichen Bedeutung, ist T ein Tensor und kann entsprechend verwendet werden [Hus97].

Beispiel 7. Gegenbeispiel:

Jeder Tensor kann über eine Komponentenmenge bezüglich bestimmter Basen dargestellt werden. Allerdings ist nicht jede Matrix ein Tensor. Zumindest nicht, wenn man die Matrixeinträge als Komponenten mit physikalischer oder räumlicher Bedeutung versteht. Ein Konstrukt der drei in einem Vektor zusammengefassten, richtungsunabhängigen Informationen 'Temperatur', 'Gewicht' und

'Länge', ist beispielsweise kein Tensor. Bei einem Basiswechsel verhalten sich die Vektorkomponenten nicht nach dem charakteristischen Transformationsverhalten eines Tensors, sondern bleiben konstant. Ein Vektor mit denselben Komponenten als Repräsentation einer Geschwindigkeit ist allerdings wiederum ein Tensor.

Es gibt viele Tensorzusammensetzungen, die sich in der Physik und in den Ingenieurwissenschaften etabliert haben. Darunter fallen beispielsweise der Spannungstensor, der Verzerrungstensor und der Elastizitätstensor. Diese Tensoren beschreiben das orts- und richtungsabhängige Materialverhalten von Objekten. Viele algebraische Verknüpfungen sind ebenfalls sehr allgemein als Tensor definiert. Neben dem Skalarprodukt und dem Vektorprodukt ist auch die Determinante ein Tensor.

Tensorfelder

Um ortsbezogene Phänomene auf Mannigfaltigkeiten analysieren zu können, werden Tensorfelder definiert. Über Tensoren beschriebene Informationen bezüglich bestimmter Elemente $x \in \mathcal{M}$ werden stetig über die Mannigfaltigkeit miteinander verknüpft. Das Tensorfeld vereint also die Begriffe Tensor und Mannigfaltigkeit. Im Folgenden ist eine Definition der wichtigsten Sachverhalte bezüglich Tensorfeldern aufgeführt.

Definition 5. Das *Tangentialbündel* $T\mathcal{M}$ der Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ist definiert als die Vereinigung aller *Tangentialräume* $T_x\mathcal{M}$ aller Elemente $x \in \mathcal{M}$:

$$T\mathcal{M} = \bigcup_{x \in \mathcal{M}} T_x\mathcal{M}. \quad (5.23)$$

Analog gilt für das Tangentialbündel $T^*\mathcal{M}$ des Kotangentialraumes $T_x^*\mathcal{M}$ von $T_x\mathcal{M}$:

$$T^*\mathcal{M} = \bigcup_{x \in \mathcal{M}} T_x^*\mathcal{M}. \quad (5.24)$$

Ein **Vektorfeld** $VF\mathcal{M}$ ist ein **Schnitt** in $T\mathcal{M}$, also eine Abbildung $VF\mathcal{M}: T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, die jedem Punkt $x \in \mathcal{M}$ einen Tangentialvektor $v(x) \in T_x\mathcal{M}$ zuordnet. Die Menge aller differenzierbaren Vektorfelder wird mit $\Gamma T\mathcal{M}$ bezeichnet.

Schließlich ist ein **r -fach kontravariantes Tensorfeld** $TF\mathcal{M}^r$ ein Schnitt eines r -fachen Tensorproduktes von Elementen aus dem Tangentialbündel $T\mathcal{M}$ und ein **s -fach kovariantes Tensorfeld** $TF\mathcal{M}_s$ ein Schnitt eines s -fachen Tensorproduktes von Elementen aus dem Tangentialbündel $T^*\mathcal{M}$. Ein gemischtes, r -fach kontra- und s -fach kovariantes Tensorfeld ist ein Schnitt aus einem Tensorprodukt von r Elementen aus $T\mathcal{M}$ und s Elementen aus $T^*\mathcal{M}$. [Gol09]

Diese Definition ist eine Zusammenfassung der in [Gol09] (Abschnitt 3) gegebenen Beschreibung von Tensorfeldern. Genauer kann dort nachgelesen werden. Insbesondere wichtig sind hier die Definition von einem *Schnitt* (Definition 3.2 in [Gol09]) sowie die Definition von *Stetigkeit* (bzw. C^r -Differenzierbarkeit) von Tensorfeldern (Definition 3.3, 3.5 und 3.6 in [Gol09]) über die Stetigkeit von sogenannten Komponentenfunktionen (die Definition von Komponentenfunktionen ist wiederum in [Gol09] auf Seite 55 beschrieben).

Es werden nun zwei relevante Beispiele von Tensorfeldern vorgestellt.

Beispiel 8. Das Vektorfeld:

Ein Vektorfeld $VF \mathcal{M}$ ist ein einfach kontravariantes Tensorfeld. $VF \mathcal{M}$ ordnet also jedem Element $x \in \mathcal{M}$ einen Vektor zu. Beispiele für bekannte Vektorfelder sind das Gradientenfeld, das Gravitationsfeld und die magnetische Feldstärke [Gol09].

Beispiel 9. Die riemansche Metrik:

Die in Definition 3 definierte Metrik $g_x : T_x \mathcal{M} \times T_x \mathcal{M}$ mit $x \in \mathcal{M}$ ist ein differenzierbares, zweifach kovariantes Tensorfeld auf einer riemannschen Mannigfaltigkeit.

Ein drittes sehr interessantes Beispiel für Tensorfelder ist durch die sogenannten Differentialformen gegeben. Eine Differentialform beschreibt die Orientierung auf einer Mannigfaltigkeit. Weiteres zu solchen Tensorfeldern kann in [Gol09] (Abschnitt 3-B) nachgelesen werden.

5.3.2 Interpolation und Approximation diskreter Tensorfelder

Die Messinformationen sollen in Form von Tensoren dargestellt werden. Die Tensoren sind jeweils bezogen auf einen bestimmten Ort auf der Mannigfaltigkeit, die den Sensorkörper darstellt. Die Abbildung der Tensoren auf die Mannigfaltigkeit entspricht dem Tensorfeld. Da die Messinformationen nur in diskreter Form vorhanden sind, liegt ein dünn besetztes diskretes Tensorfeld vor. Ziel ist die Interpolation oder Approximation eines dichten oder stetigen Tensorfeldes. Durch die Notation der Messwerte als Tensoren, kann auf bekannte Algorithmen zur Tensorfeldinterpolation zurückgegriffen werden. Da das Tensorfeld auf einer Mannigfaltigkeit definiert ist, können Interpolationsverfahren für den euklidischen Raum im Allgemeinen nicht direkt angewendet werden. Die Idee der Verfahren kann aber auf die Mannigfaltigkeiten übertragen werden. In den folgenden Absätzen soll ein Überblick über die verschiedenen Möglichkeiten gegeben werden. Im Hinblick auf die später vorgestellte Herleitung der Algorithmen soll die Interpolation von Vektorfeldern ausführlicher besprochen werden. In diesem Zuge wird auch auf die Skalarfeldinterpolation eingegangen.

Es gibt verschiedene Interpolations- und Approximationsverfahren zur Generierung eines dichteren Informationsfeldes. In Abhängigkeit von der betrachteten Anwendung muss ein passendes Verfahren gewählt werden. Bei der Auswahl sind bestimmte Kriterien zu beachten. Grundsätzlich sollen die Verfahren auf der einen Seite numerisch möglichst einfach implementiert und mit wenig Rechenaufwand schnell durchlaufen werden können. Auf der anderen Seite soll das Ergebnis eine möglichst gute Repräsentation der Wirklichkeit darstellen. Ein gutes Mittel muss hier getroffen werden. Die Wahl des Verfahrens hängt mitunter von der Dichte des vorhandenen Tensorfeldes ab. Je dichter die Informationsmenge, desto einfacher kann das Verfahren gewählt werden. Oft wird zugunsten der Vereinfachung eine lineare Interpolation gewählt. Schließlich ist die Gestalt der Tensorfelder entscheidend für die Auswahl des Verfahrens. Liegt ein Tensorfeld der Stufe zwei oder höher vor, müssen sehr allgemeine Verfahren angewendet werden. Bei einem Tensorfeld der Stufe null oder eins reicht eine Skalarfeld- oder Vektorfeldinterpolation.

Bei den Verfahren unterscheidet man hauptsächlich zwischen Interpolations- und Approximationsverfahren. Ziel ist die Bestimmung einer Funktion, die das Vektorfeld beschreibt. Dabei entspricht das Interpolationsproblem einem unterbestimmten oder eindeutig lösbareren Gleichungssystem. Bei der Approximation ist das aufgestellte Gleichungssystem überbestimmt und muss als Minimierungsproblem umformuliert werden. In beiden Fällen kann ein lineares Gleichungssystem bezüglich eines Basisvektors aufgestellt werden. Dieser Basisvektor wird Polynombasis genannt. Die Basis wird abhängig von dem Modell gewählt, welches die Verformungseigenschaften des zu betrachteten Objektes beschreibt. Bekannte Basen sind die Momomiale-Basis, die Lagrange-Basis oder die Newton-Basis [Toe13, Hae13, Fre07, Sch13]. Neben der Wahl der Basis, kann das Ergebnis der Interpolation oder Approximation durch die unterschiedliche Gewichtung der Stützstellen oder sogar durch eine richtungsabhängige Gewichtung in Form einer Kovarianzmatrix moduliert werden. Ergebnis der Interpolation oder Approximation ist dann ein Polynom, das die gegebenen Stützstellen möglichst gut annähert. Dabei ist der Grad M des Polynoms und damit die Dimension des Vektorraums der Basis entscheidend für die Gestalt der Ergebnisfunktion.

Je höher der Grad, desto exakter approximiert die Funktion die gegebenen Werte. Allerdings kann ein zu hoher Grad zu unnatürlichen, um die Stützstellen stark oszillierenden Polynomen führen. Näheres zur allgemeinen Interpolation kann in [Toe13] nachgelesen werden.

Bei der allgemeinen Interpolation oder Approximation von Tensorfeldern können die Tensoreigenschaften zur Vereinfachung der Rechnung genutzt werden. In [Hot10] ist ein Verfahren für symmetrische Tensoren vorgestellt, bei dem die Invarianz der Eigenwerte und Eigenvektoren ausgenutzt wird. Tensorfelder können durch die Komponentenweise Interpolation approximiert werden. Meist wird hier auf lineare Verfahren zurückgegriffen [Zhu02, Kin00], es sind aber auch nicht-lineare Verfahren bekannt [Wei06, Moa06, Ald]. Es kann anstelle der Tensorkomponenten auch eine Interpolation der eigentlich interessanten invarianten Größen vorgenommen werden. Damit reduziert sich das Interpolationsproblem möglicherweise auf ein Vektorfeld oder sogar auf skalare Größen, die interpoliert werden müssen.

Konkreter soll nun auf die Interpolation von Vektorfeldern eingegangen werden. Gesucht ist eine Abbildung $v : x \mapsto V_x$, die Elementen $x \in \mathcal{M}$ einer Mannigfaltigkeit \mathcal{M} einen Vektor V_x zuordnet. Dabei ist \mathcal{M} als Raum über den interpoliert wird mit $m = \dim \mathcal{M}$ und $m > 0$ im Allgemeinen mehrdimensional. Weiter ist die Dimension $n = \dim V$ des Vektorraumes der Wertemenge von v im Allgemeinen beliebig. Gegeben sind eine diskrete Menge an Wertepaaren (x_i, V_{x_i}) mit $i = 1, \dots, N$ und N als Anzahl der Stützstellen. Außerdem bekannt sind gegebenenfalls Randwerte. Sei D als eine Teilmenge von \mathcal{M} der Definitionsbereich über den v gesucht ist. Dann sind die Randwerte weitere Wertepaare $(x_{0_j}, V_{x_{0_j}})$, die das Verhalten am Rand von D beschreiben.

Indirekte Vektorfeldinterpolation über Interpolation skalarer Vektorkomponenten

Es gibt verschiedene Verfahren zur Abschätzung einer Zielfunktion v . Eine Möglichkeit ist die Aufteilung des Problems in mehrere Interpolationsprobleme von Skalarfeldern. Dazu werden die Elemente V_x in ihre n skalaren Komponenten zerlegt und es sind die Abbildungen $v_k : x \mapsto V_x^k$ für $k = 1, \dots, n$ gesucht. Die Vektoren können auch in andere skalare Größen zerlegt werden, die den Vektor eindeutig beschreiben. Es bieten sich hier die Vektorlänge und Vektorausrichtung im Raum als invariante Größen an. Die Vektorausrichtung kann beispielsweise über die Eulerwinkel bezüglich einer Basis angegeben werden.

Skalarfelder können über Polynome beschrieben werden (vgl. [Lau06]). Abhängig von der Anwendung wird eine Polynombasis aus Funktionen gewählt. Die \mathbf{M} Basisfunktionen b_m^k mit $m = 1, \dots, \mathbf{M}$ bilden die Elemente x jeweils auf einen skalaren Wert ab. Die Anzahl \mathbf{M} der dabei verwendeten Basisfunktionen entspricht dem Grad der Abbildung. Die gesuchte Funktion v_k setzt sich dann aus den Basisfunktionen und einem unbekanntem Komponentenvektor $\vec{a}_k = a_k^1, \dots, a_k^{\mathbf{M}}$ wie folgt zusammen:

$$v_k(x, \vec{a}_k) = \sum_{m=1}^{\mathbf{M}} a_k^m b_m^k(x). \quad (5.25)$$

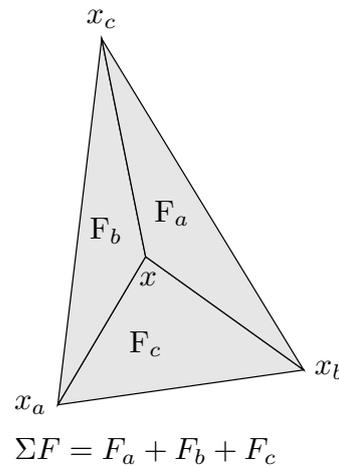


Abbildung 5.4: Interpolationsverfahren über Flächengewichtung.

Gesucht ist ein Komponentenvektor \vec{a}_k , der mit $v_k(x, \vec{a}_k)$ für die gegebenen Stützstellen $(x_i, V_{x_i}^k)$ dem Ort x_i die Vektorkomponente $V_{x_i}^k$ zuordnet. Ist die Anzahl N der Stützstellen größer als der Grad M des Basispolynoms, dann ist das so aufgestellte Gleichungssystem im Allgemeinen überbestimmt. Das Problem wird dann in folgendes Minimierungsproblem umgeformt:

$$\sum_{i=1}^N e_k^i(x_i, V_{x_i}^k, \vec{a}_k) \rightarrow \min, \quad (5.26)$$

mit $e_k^i(x_i, V_{x_i}^k, \vec{a}_k)$ als Fehler der Approximation und:

$$e_k^i(x_i, V_{x_i}^k, \vec{a}_k) := \sum_{m=1}^M a_k^m b_m^k(x_i) - v_k(x_i, \vec{a}_k) = \sum_{m=1}^M a_k^m b_m^k(x_i) - V_{x_i}^k. \quad (5.27)$$

Die gesuchten Funktionen v_k sind für alle $x \in D$ über die gesamte Definitionsmenge $D \subseteq \mathcal{M}$ definiert. Das ist zumeist nicht sinnvoll, da die Funktion bei zu niedrigem Grad M einen zu hohen Fehler $e_k^i(x_i, V_{x_i}^k, \vec{a}_k)$ mit sich bringt und führt somit zu einem schlechten Approximationsergebnis. Bei zu hohem Grad oszilliert die Funktion stark und bildet die betrachtete Geometrie nicht realitätsnah ab. Daher ist eine Spline-Interpolation ratsam. Bei einer Spline-Interpolation betrachtet man die Bereiche zwischen den Stützstellen und sucht Abbildungsfunktionen, die nur für diese Bereiche gültig sind. Diese Funktionen können linear sein und Ebenen zwischen den Stützstellen aufspannen. Bei Spline-Abbildungen höheren Grades kann ein stetig differenzierbarer Übergang zwischen den Abbildungen der unterschiedlichen Bereiche gefordert werden.

Ein alternatives Verfahren für die Approximation von zweidimensionalen Oberflächen, also für $\dim \mathcal{M} = 2$, ist die Approximation über Flächeninhalte. Dazu betrachtet man die drei zu $x \in \mathcal{M}$ am nächsten liegenden Punkte x_a, x_b und x_c aus $\{x_i\}_{i=1, \dots, N}$. Die Oberfläche wird um das Element x in drei Bereiche unterteilt. Diese Bereiche bestimmen sich durch die Eckpunkte x und jeweils zwei der drei nächsten Punkte x_a, x_b und x_c . Der Funktionswert V_x^k für x ergibt sich dann aus der Summe der über die jeweils gegenüberliegende Fläche

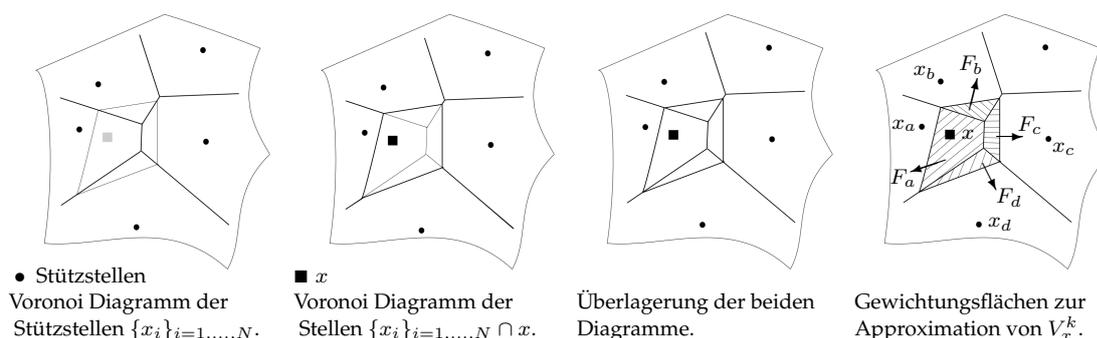


Abbildung 5.5: Interpolation über Voronoi-Flächen Gewichtung.

gewichteten Funktionswerte $V_{x_a}^k$, $V_{x_b}^k$ und $V_{x_c}^k$. Diese Methode ist in Abbildung 5.4 dargestellt. Für F_j als gegenüberliegende Fläche von x_j und $\Sigma F = F_a + F_b + F_c$ gilt:

$$V_x^k(x_a, x_b, x_c) = \frac{F_a}{\Sigma F} V_{x_a}^k + \frac{F_b}{\Sigma F} V_{x_b}^k + \frac{F_c}{\Sigma F} V_{x_c}^k. \quad (5.28)$$

Ein ähnlicher Interpolationsansatz, die sogenannte 'Interpolation durch natürliche Nachbarn', kann unter Verwendung von Voronoi-Diagrammen vorgenommen werden (vgl. [Sib81]). Zur Berechnung des Wertes $x \in \mathcal{M}$ wird die Oberfläche in ein Voronoi-Diagramm bezüglich der Menge der Stützstellen $\{x_i\}_{i=1,\dots,N}$ sowie in ein Diagramm bezüglich der Menge $\{x_i\}_{i=1,\dots,N} \cap x$ zerlegt. Der Funktionswert für x ergibt sich dann aus der über die Schnittflächen der beiden Diagramme gewichteten Werte der benachbarten Punkte von x aus der Menge $\{x_i\}_{i=1,\dots,N}$. Diese Methode ist in Abbildung 5.5 dargestellt. Für die Nachbarpunkte x_a, x_b, x_c und x_d von x und die Schnittflächen F_a, F_b, F_c und F_d mit $\Sigma F = F_a + F_b + F_c + F_d$ gilt dann:

$$V_x^k(x_a, x_b, x_c, x_d) = \frac{F_a}{\Sigma F} V_{x_a}^k + \frac{F_b}{\Sigma F} V_{x_b}^k + \frac{F_c}{\Sigma F} V_{x_c}^k + \frac{F_d}{\Sigma F} V_{x_d}^k. \quad (5.29)$$

Die Dekomposition in einzelne skalare Vektorkomponenten und separate Interpolation dieser Komponenten hat neben der großen Auswahl an Interpolationsverfahren für Skalarfelder weitere Vorteile. Haben die einzelnen Vektorkomponenten unterschiedliche physikalische Bedeutungen, so können bei der separaten Interpolation verschiedene Interpolationsverfahren angewandt werden. Damit kann auf die einzelnen Größen individuell eingegangen und ein besseres Interpolationsergebnis erzielt werden.

Direkte Vektorfeldinterpolation

Die diskreten Vektorfelder können auch direkt interpoliert werden, ohne vorab in die einzelnen Komponenten zerlegt zu werden. Die direkte Interpolation kann mit weniger Aufwand einheitlich implementiert werden. Die Berechnungen sind über parallele Programmierung dann in kürzerer Zeit ausführbar. Eine Interpolationsmöglichkeit bietet die Polynominterpolation (vgl. [Lau06]). Seien (x_i, V_{x_i}) mit $i = 1, \dots, N$ die N gegebenen Wertepaare. Gesucht ist

eine Vektorfunktion v mit $v(x_i) = V_{x_i}$ für alle $i = 1, \dots, N$ mit $x_i \in \mathcal{M}$ und V_{x_i} als Vektor der Dimension n . Die Polynombasis besteht nun aus \mathbf{M} Vektorfunktionen b_m mit $m = 1, \dots, \mathbf{M}$, welche die Elemente x jeweils auf einen Vektor der Dimension n abbilden. Der Grad der gesuchten Funktion v entspricht der Anzahl der Basisvektorfunktionen \mathbf{M} . Die Funktion v setzt sich dann aus den Basisvektorfunktionen und einem unbekanntem Komponentenvektor $\vec{a} = a^1, \dots, a^{\mathbf{M}}$ wie in folgender Gleichung beschrieben zusammen:

$$v(x, \vec{a}) = \sum_{m=1}^{\mathbf{M}} a^m b_m(x) . \quad (5.30)$$

Bei N Stützstellen und $\dim \vec{a} = \mathbf{M}$ mit $N > \mathbf{M}$ ist das Gleichungssystem überbestimmt und es lässt sich wie bei der Polynominterpolation von Skalarfeldern analog zu Gleichung 5.26 ein Minimierungsproblem aufstellen.

Aus den nun beschriebenen Verfahren zur Interpolation kann eine passende Methode für die in dieser Arbeit betrachtete FBG-Formsensorik gewählt werden. Im Folgenden werden beispielhaft zwei mögliche Verfahren beschrieben. In beiden Fällen ist eine Vektorfeldinterpolationen durchzuführen.

Beispiel 10. Vektorfeldinterpolation über den \mathbb{R}^3 :

In diesem Beispiel wird ein FBG-Formsensor mit im Formsensorträgerkörper frei verteilten Messstellen betrachtet. Die Interpolation basiert auf dem in Kapitel 2 vorgestellten Deformationsmodell (vgl. Abbildung 2.6 auf Seite 16). Dieses Modell besagt, dass bei Sensorkrümmung keine Materialdeformation an der Sensorachse vorhanden ist. Die Verteilung der Materialbelastung ist um die Sensorachse im \mathbb{R}^3 linear. Die Dehnung und die Dehnungsrichtung können also über diesen Raum linear interpoliert werden. Interpoliert werden soll über die bekannten Stützstellen, die als Wertepaare (x_i, V_{x_i}) mit $i = 1, \dots, N$ gegeben sind. Da bekannt ist, dass auf der Sensorachse keine Deformation vorliegt, gilt außerdem:

$$v(x_A, \vec{a}) = V_{x_A} . \quad (5.31)$$

Dabei ist v die gesuchte Abbildungsvorschrift mit $v : x \mapsto V_x$ und x_A ein Element auf der Sensorachse. V_{x_A} ist definiert als Vektor, der eine Deformation von Null beschreibt.

Beispiel 11. Lineare Interpolation über ein dichtes diskretes Vektorfeld:

In diesem Beispiel wird ein FBG-Formsensor betrachtet, bei dem alle Messstellen den gleichen Abstand r zur Sensorachse haben. Hier liegen die Messwerte also auf einer zylindrischen Oberfläche. Seien weiter alle Messstellen gleich ausgerichtet. Bei Aufrollen der zylindrischen Oberfläche kann die Dehnungsverteilung auf der Oberfläche über trigonometrische Funktionen beschrieben werden. Die Erkenntnisse sind wie im letzten Beispiel aus dem in Kapitel 2 vorgestellte Deformationsmodell abgeleitet. Bei sehr vielen Startwerten und sehr dichtem diskreten Vektorfeld über die Sensoroberfläche kann auch aus Gründen der Vereinfachung linear über die Oberfläche des Sensors interpoliert werden.

5.3.3 Rekursives Erzeugen diskreter metrischer Räume

Aus einem gegebenen diskreten Tensorfeld $TF\mathcal{M}$, mit Informationen über lokale richtungsabhängige Deformationen, soll ein metrischer Raum (X, d) im \mathbb{R}^3 , mit d als euklidischer Metrik, erzeugt werden. Im Beispiel der FBG-Formsensorik ist das diskrete Tensorfeld $TF\mathcal{S}^0$ über eine Mannigfaltigkeit \mathcal{S}^0 (mit Rand) gegeben, die einen massiven Zylinder als unverformten Sensor darstellt. Die in $TF\mathcal{S}^0$ enthaltenen Dehnungsinformationen beziehen sich auf einen deformierten Sensorzustand. Der zu generierende Raum (X, d) entspricht einer Punktwolke, in der die zu rekonstruierende Kontur dieses deformierten Sensors liegt. Die Kontur entspricht genauer der verformten Sensoroberfläche. Die verformte Sensoroberfläche wird im Folgenden mit \mathcal{S} bezeichnet. Zur Generierung der Punktwolke sind neben dem Tensorfeld auch Anfangswerte in (X, d) notwendig. Diese Anfangswerte entsprechen Raumpunkten $X^0 = \{x_1^0, \dots, x_{p^0}^0\}$ mit $X^0 \subset X$, welche die Sensoroberfläche am Sensoranfang bezüglich eines globalen Bezugssystems beschreiben. Dabei liegen die Punkte in X^0 auf einer Ebene, die als $E^0 \subset \mathbb{R}^3$ definiert ist. Um eine Punktwolke erzeugen zu können, welche die deformierte Sensorkontur \mathcal{S} annähert, bestehen, abhängig von der Komplexität der erwarteten Deformation, unterschiedliche Anforderungen an das gegebene Tensorfeld und die Anfangswerte. Je nach Deformationskomplexität kann die Mannigfaltigkeit, die den verformten Sensor beschreibt lokal, über ein Stück eines Torus, oder bei zusätzlichen Eindellungen an der Oberfläche, durch einen modifizierten Torus mit nicht runder Rotationsfläche beschrieben werden. Basierend auf diesen geometrischen Modellen wird die Punktwolke, beginnend mit den Startwerten am Sensoranfang, rekursiv im Raum aufgebaut.

Es werden insgesamt T Iterationsschritte durchgeführt. In jedem Iterationsschritt t sind Startwerte als eine Menge an Punkten $X^t = \{x_1^t, \dots, x_{p^t}^t\}$ gegeben, die auf einer Querschnittsebene E^t des deformierten Sensors liegen. Die Startwerte haben jeweils den Abstand r zu der Zylinderachse, wobei r dem Radius des Zylinders und somit auch dem Radius des FBG-Formsensors entspricht. Einen Sonderfall stellt ein Sensor mit Eindellungen an der Oberfläche dar. Dieser Fall wird als *Fall 3* im Folgenden separat aufgegriffen. Im ersten Iterationsschritt entsprechen die Startwerte den gegebenen Anfangswerten X^0 . Es wird weiter ein ausreichend kleiner Wert ζ^t als Iterationsschrittweite mit $\zeta^t > 0$ gewählt. In jeder Iteration wird eine weitere Punktmenge \tilde{X}^{t+1} generiert. Zur Erzeugung dieser Menge werden die Elemente $T(x_1^t), \dots, T(x_{p^t}^t)$ des Tensorfeldes $TF\mathcal{S}^0$ herangezogen, die bezüglich der Elemente in X^t gegeben sind. Die Menge \tilde{X}^{t+1} liegt wieder auf einer Ebene E^{t+1} . Dabei stellen die Ebenen E^t und E^{t+1} Sensor-Querschnittsebenen dar, die in nicht deformiertem Sensorzustand eine Entfernung von $d(E^t, E^{t+1}) = \zeta^t$ voneinander haben. Auf der Ebene E^{t+1} werden dann im letzte Schritt einer Iteration die neuen Startwerte X^{t+1} berechnet. Die Wahl der Menge X^{t+1} hängt dabei von $TF\mathcal{S}^0$ ab. Es muss gelten, dass für alle Elemente x_i^{t+1} mit $i = 1, \dots, p^{t+1}$ aus X^{t+1} ein entsprechendes Element $T(x_i^{t+1})$ in $TF\mathcal{S}^0$ existiert. Zudem ist bei der Wahl der Startwerte gefordert, dass jeder dieser Werte im Abstand r von der Sensorachse entfernt liegt.

Die speziellen Anforderungen an die Startwerte und die Rechenschritte einer Iteration,

abhängig von der Deformationskomplexität, werden im Folgenden für drei Fälle mit steigendem Komplexitätsgrad skizziert.

Fall 1: Sensordeformation ohne Torsion und ohne Eindellungen an der Sensoroberfläche

Fall 1 beschreibt die einfachste Deformationskomplexität des Sensors. Es ist angenommen, dass keine Änderung der Krümmungsrichtung über den Sensorverlauf vorkommt. Eine Torsion ist somit ausgeschlossen. Lokal kann der verformte Sensor als Torus dargestellt werden. Ein Iterationsschritt der hier möglichen rekursiven Erzeugung einer Punktwolke ist in Abbildung 5.6 dargestellt und nun beschrieben.

Anforderungen an die Startwerte X^t einer Iteration t :

Es müssen mindestens drei Startwerte $X^t = \{x_1^t, \dots, x_{p^t}^t\}$ mit $p^t \geq 3$ gegeben sein, die möglichst gleichmäßig um die Sensorachse verteilt liegen. Da keine Eindellungen an der Sensoroberfläche vorliegen, haben alle Punkte in X^t einen konstanten Abstand r zu der Sensorachse.

Anforderungen an das gegebene Tensorfeld $TF\mathcal{S}^0$ im Iterationsschritt t :

Zu allen gegebenen Startwerten x_i^t mit $i = 1, \dots, p^t$ muss ein Element $T(x_i^t)$ in $TF\mathcal{S}^0$ existieren. Das Tensorfeld muss richtungsabhängige Dehnungsinformationen im Material und die zugehörigen lokalen Richtungen der Dehnungen an den Stellen x_i^t enthalten.

Berechnung der Menge \tilde{X}^{t+1} und der Ebene E^{t+1} :

Ist die Schrittweite ζ^t klein genug gewählt, so kann die Krümmung an der Oberfläche bei Deformation vernachlässigt und linear approximiert werden. Dazu werden zuerst Vektoren bestimmt, die die Dehnungsrichtungen der gegebenen Tensoren $T(x_i^t)$ global im Raum repräsentieren. $T(x_i^t)$ enthält die lokale koordinatenunabhängige Dehnungsrichtung bezüglich der Sensorachse und der Sensorquerschnittenebene an der Stelle x_i^t . Zur Bestimmung der globalen Richtung müssen also E^t als Ebene durch die Punkte in X^t und a^t als der

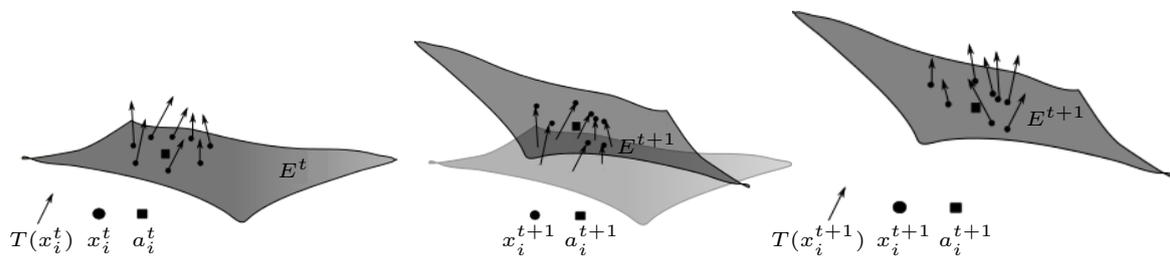


Abbildung 5.6: Iterationsschritt t zur rekursiven Erzeugung einer Punktwolke X^{t+1} aus einer Menge X^t und den Elementen $T(x_i^t)_{i=1, \dots, p^t} \in TF\mathcal{S}^0$.

Schnittpunkt der Sensorachse mit dieser Ebene berechnet werden. Der Schnittpunkt a^t der Sensorachse mit der Ebene ergibt sich als Mittelpunkt des Umkreises der Elemente aus X^t . Sei \vec{v}_i^t nun der bezüglich E^t und a^t berechnete normierte Vektor in Richtung der gegebenen Deformation und $\varepsilon_{x_i^t}$ der in $T(x_i^t)$ enthaltene Dehnungswert. Dann bestimmt sich der Wert $\tilde{x}_i^{t+1} \in \tilde{X}^{t+1}$ wie folgt:

$$\tilde{x}_i^{t+1} = x_i^t + \varepsilon_{x_i^t} \zeta^t \vec{v}_i^t. \quad (5.32)$$

Weiter entspricht E^{t+1} der Ebene durch die erzeugten Punkte in \tilde{X}^{t+1} .

Berechnung der Startwerte X^{t+1} für die Iteration $t + 1$:

Da für die Elemente der Startwertemenge X^{t+1} der Folgeiteration $t + 1$ jeweils zugehörige Elemente in $TF\mathcal{S}_i^0$ existieren müssen, können die Werte \tilde{X}^{t+1} im Allgemeinen nicht einfach als Startwerte verwendet werden. Zur Bestimmung einer passenden Menge X^{t+1} werden mindestens drei gut verteilte Punkte auf E^{t+1} ausgewählt, für welche ein Tensor in $TF\mathcal{S}_i^0$ gegeben ist. Zudem muss für die Werte in X^{t+1} gelten, dass der Abstand zur Sensorachse dem Wert r entspricht.

Fall 2: Sensordeformation mit Torsion und ohne Eindellungen an der Sensoroberfläche

Bei einer wie in *Fall 1* beschriebenen Sensorkrümmung ohne Torsion hängt die Dehnung der Messstellen allein mit dem in einem Tensor aus $TF\mathcal{S}_i^0$ gegebenen Dehnungswert zusammen. Der aus dem Tensor gegebene Richtungswert bleibt durch eine Sensorverformung unverändert und kann daher direkt in eine globale Richtung umgerechnet werden. Bei einer zusätzlichen Torsion τ^t an den Stellen der Punkte X^t ändert sich die Ausrichtung der Messstellen bei Sensordeformation. Daher muss das Erzeugen der Menge X^{t+1} modifiziert werden.

Modifizierte Anforderungen an das gegebene Tensorfeld $TF\mathcal{S}_i^0$ im Iterationsschritt t :

Zusätzlich zu den Anforderungen in *Fall 1* muss für die Tensoren $T(x_i^t)$ gelten, dass die in den Tensoren hinterlegte lokale Orientierung der Dehnung für alle Tensoren gleich ist.

Modifizierte Berechnung der Menge \tilde{X}^{t+1} und der Ebene E^{t+1} :

Durch die Torsion τ^t ändert sich die lokale Ausrichtung der Messstellen. Die in den Tensoren angegebenen lokalen Dehnungsrichtungsinformationen, dargestellt über die Vektoren \vec{v}_i^t , können nicht direkt wie in *Fall 1* zur Berechnung der lokalen Dehnungsrichtungen verwendet werden. Da die Orientierung aller Tensoren $T(x_i^t)$ aber gleich ist, ist auch die unbekannte Richtungsänderung ω_τ^t der Dehnung durch Torsion für alle $T(x_i^t)$ gleich. Berechnet man dann die Vektoren v_i^t wie in *Fall 1*, kann die Richtungsänderung durch Drehen der Vektoren

um ω_τ^t mitberücksichtigt werden. Sei $\tilde{v}_i^t(\omega_\tau^t, v_i^t)$ der gedrehte Vektor v_i^t . Dann gilt folgende Gleichung:

$$\tilde{x}_i^{t+1} = x_i^t + \varepsilon_{x_i^t} \zeta^t \tilde{v}_i^t(\omega_\tau^t, v_i^t). \quad (5.33)$$

Es ist nun der Wert ω_τ^t gesucht, für den bei Berechnung von einer Ebene E^{t+1} und einem Punkt a^{t+1} analog zu der Berechnung in *Fall 1* unter Verwendung der modifizierten Vektoren $\tilde{v}_i^t(\omega_\tau^t, v_i^t)$ und unter Anwendung der Gleichung 5.33 gilt:

$$d(a^t, a^{t+1}) = \zeta^t. \quad (5.34)$$

Dieses Problem kann numerisch gelöst werden.

Fall 3: Sensordeformation mit Torsion und mit Eindellungen an der Sensoroberfläche

Bei Eindellungen an der Sensoroberfläche ändert sich die lokale Ausrichtung der Messstellen an dieser Stelle in Richtung der Sensorachse. Der Vektor, der die Dehnungsrichtung global beschreibt, beinhaltet eine Verkippung in Richtung Sensorachse.

Modifizierte Anforderungen an das gegebene Tensorfeld $TF S_i^0$ im Iterationsschritt t :

Das diskrete Tensorfeld muss dicht genug sein, sodass alle zu erwartenden Dellen abgetastet werden können. Die optimale zu wählende Dichte muss individuell für jede Anwendung und die zu erwartenden Deformationen speziell evaluiert werden.

Modifizierte Berechnung der Menge \tilde{X}^{t+1} und der Ebene E^{t+1} :

Sei v_i^t wie in *Fall 1* berechnet und $\tilde{v}_i^t(\omega_i^t, \vartheta_i^t, v_i^t)$ ein modifizierter Vektor, der sich durch Drehen von v_i^t um zwei unbekannte Winkel ω_i^t und ϑ_i^t berechnet. Sei folgende Gleichung gegeben:

$$\tilde{x}_i^{t+1} = x_i^t + \varepsilon_{x_i^t} \zeta^t \tilde{v}_i^t(\omega_i^t, \vartheta_i^t, v_i^t). \quad (5.35)$$

Dann sind alle Winkel ω_i^t und ϑ_i^t so zu wählen, dass bei Berechnung von E^{t+1} und einem Punkt a^{t+1} analog zu der Berechnung in *Fall 1* unter Anwendung der modifizierten Gleichung 5.35 gilt:

$$d(a^t, a^{t+1}) = \zeta^t. \quad (5.36)$$

Dieses Optimierungsproblem hat $2p^t$ Unbekannte und ist numerisch zu lösen.

5.3.4 Approximation der Objektstruktur aus diskreten metrischen Räumen

Gegeben ist ein diskreter metrischer Raum (X, d) aus Punkten im \mathbb{R}^3 . Aus der Punktwolke soll die Informationen bezüglich der Form eines schlangenförmigen Objektes rekonstruiert werden, um welches sich die Punkte streuen. Eine wichtige Information bezüglich der Objektform ist die Lage, also die Position und Ausrichtung der Objektspitze. Um die Lage zu berechnen, ist die Rekonstruktion der eindimensionalen Objektachsenform ausreichend. Um zusätzlich Deformationen an der Objektoberfläche zu rekonstruieren, muss die zweidimensionale Oberflächenstruktur um die Objektachse approximiert werden. Die Oberflächenrekonstruktion ist sowohl aufwendig zu implementieren, als auch mit höherem Rechenaufwand verbunden. Daher werden nun zwei verschiedene Approximationsmethoden vorgestellt. Zuerst wird die Methode zur Erfassung der Objektachsenstruktur besprochen. Die Oberflächenrekonstruktion wird dann ausführlich vorgestellt. Aus der Oberflächendeformation kann die Achsenform und die Lage der Objektspitze berechnet werden. Die zweite vorgestellte Methode ist also keine Ergänzung zur ersten, sondern eine weiterführende Alternative.

5.3.4.1 Erzeugung orientierter Ebenen zur Rekonstruktion der eindimensionalen Objektachse

Die Rekonstruktion der Objektachse und der Lage der Objektspitze entspricht dem angestrebten Ergebnis der konventionellen FBG-Formsensorik. Obwohl bei Verwendung des hier vorgestellten innovativen Algorithmus keine zusätzlichen Informationen gewonnen werden, hat diese Methode den Vorteil der möglichen freien Messstellenverteilung über das Objekt. Die Objektachse und die Lage der Objektspitze kann direkt aus den Informationen entnommen werden, die bei der Erzeugung des diskreten metrischen Raumes (X, d) berechnet wurden (vgl. Abschnitt 5.3.3). Die Punkte auf der Objektachse entsprechen hier den Punkten a^t . Um eine Raumkurve $a(s)$, abhängig von der Sensorachsenlänge s und mit $s \in [0, S]$ bei einer totalen Sensorlänge S zu erhalten, muss der Wert t auf die entsprechende Achsenlänge s^t abgebildet werden. Ist ζ^t die Schrittweite der Iteration t , so kann die Achsenlänge bei ausreichend kleinen ζ^t wie folgt angenähert werden:

$$s^t = \sum_{i=1}^t \zeta^i. \quad (5.37)$$

Sei T die Anzahl der durchgeführten Iterationen. Die Menge an Punkten auf der Sensorachse, abhängig von der Achsenlänge, ist dann gegeben als $\{a(s^t)\}_{t=1, \dots, T}$. Die Position der Objektspitze ist damit gegeben als $a(s^T)$. Die Ausrichtung entspricht dem Normalenvektor auf der Ebene E^T . Um eine stetige Raumkurve für die Sensorachse zu erhalten, können die Punkte $\{a(s^t)\}_{t=1, \dots, T}$ beispielsweise über kubische Splines interpoliert werden. Neben den über die Erzeugung des Raumes (X, d) berechneten Achsenpunkten a^t sind auch Querschnittsebenen E^t an diesen Punkten bekannt. Die Normalen der Ebenen E^t entsprechen Tangenten an der Raumkurve $C(s)$ in den Punkten $a(s^t)$. Insbesondere bei der Interpolation dieser Punkte über Splines können die Tangenten als Randbedingungen genutzt werden.

5.3.4.2 Approximation von Mannigfaltigkeiten zur Erfassung mehrdimensionaler Objektstrukturen

Um aus einem gegebenen diskreten metrischen Raum (X, d) eine im Allgemeinen mehrdimensionale Mannigfaltigkeit zu berechnen, die den Raum approximiert, können verschiedenen Methoden angewendet werden. In dieser Arbeit wird ein Ansatz aufgeführt, der von Charles Fefferman et al. in dem Artikel 'Reconstruction and interpolation of manifolds I: The geometric Whitney problem' [Fef15] vorgestellt wird. Die vorgestellte Methode ist ein neuer Ansatz in der Differentialgeometrie und wurde von Fefferman et al. als Vorabversion erstmals im April 2015 über das Portal *arXiv* zur Verfügung gestellt. Das Approximationsproblem wird hier als *geometrisches Whitney-Fortsetzungsproblem* formuliert und als solches gelöst. Es wird eine Lösung vorgestellt, die für die Approximation von Mannigfaltigkeiten in beliebiger Dimension angewendet werden kann. So kann beispielsweise die zweidimensionale Oberfläche eines Objektes geschätzt werden. Denkbar ist aber auch eine erweiterte Betrachtung eines dreidimensionalen Volumenkörpers.

Im Folgenden wird die Idee des Algorithmus beschrieben sowie die verwendeten Inhalte des Papers herausgearbeitet und an die Anwendung angepasst. Es werden vorbereitend einige Definitionen und Notationen aufgeführt. Im Anschluss wird der Algorithmus vorgestellt. Weiter wird ein Anwendungsbeispiel in Anlehnung an die Verwendung in der FBG-Formsensorik beschrieben. Schließlich wird der vorgestellte Algorithmus mit alternativen Methoden verglichen, die Vorteile werden herausgestellt und eine Erweiterungsmöglichkeit beispielhaft aufgezeigt.

Idee der Approximation von Mannigfaltigkeiten

Über den Algorithmus soll eine Struktur gefunden werden, die einen diskreten metrischen Raum $(X, d) \in \mathbb{R}^n$ aus einer gegebenen finiten Menge an Punkten beschreibt. Diese Struktur kann eine glatte m -dimensionale Oberfläche $S \subset \mathbb{R}^n$ oder, mit zusätzlicher Metrik g , eine riemannsche Mannigfaltigkeit (\mathcal{M}, g) sein.

Das Problem kann als geometrische Version des *Whitney-Fortsetzungsproblems* formuliert werden. Das Whitney-Fortsetzungsproblem befasst sich mit der Frage, ob eine gegebene Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ mit $K \subset \mathbb{R}^n$ erweiterbar ist und eine Fortsetzung $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$ mit $m \geq 1$ existiert [Tha13]. Die Problemlösung liefert ein Verfahren zur Interpolation bei gegebenen diskreten Datentupeln $\{(x, f(x)) : x \in K\}$. Das Verfahren wird in [Fef09] ebenfalls von C. Fefferman besprochen. Die Problemstellung entspricht der Suche nach einem Graphen $\Gamma(F) = \{(x, F(x)) : x \in \mathbb{R}^n\}$ mit $F \in C^m(\mathbb{R}^n)$, der die gegebenen Punkte $\{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}^n\}$ bestmöglich approximiert. Die geometrische Problemformulierung ist unabhängig von einer konkreten Koordinatendarstellungen. Anstelle eines Graphen, entspricht die geometrische Problemstellung der Suche nach einer glatten Oberfläche oder einer riemannschen Mannigfaltigkeit zur Approximation der diskreten Daten. In [Fef15] werden zwei als geometrische Whitney Probleme formulierte Fragestellungen **F1** und **F2** besprochen. Zu den Fragestellungen sind konstruktive Lösungen in Form von konkreten Algorithmen-Skizzen gegeben.

F1: Wann und wie lässt sich eine glatte m -dimensionale Oberfläche $S \subset \mathbb{R}^n$ bestimmen, die eine gegebene diskrete Menge $X \subset \mathbb{R}^n$ *ausreichend gut* approximiert.

F1: Wann und wie lässt sich eine riemannsche Mannigfaltigkeit $(M, g) \subset \mathbb{R}^n$ bestimmen, die einen gegebene diskrete metrischen Raum $(X, d) \subset \mathbb{R}^n$ *ausreichend gut* approximiert.

Genauere Spezifikationen bezüglich der Bedeutung einer *ausreichend guten* Approximation werden später näher erläutert. Für die Anwendung in der FBG-Formsensorik genügt die Betrachtung der Fragestellung **F1**. Diese wird daher im Folgenden ausschließlich weiter verfolgt.

Vorbereitende Definitionen, Notationen und Anmerkungen

Vorbereitend zur Vorstellung des Algorithmus werden nun einige wichtige Definitionen, Notationen und Anmerkungen gegeben. Diese richten sich hauptsächlich nach den verwendeten Formulierungen von Fefferman et al. und sind durch einige Bemerkungen und Ergänzungen an diese Arbeit angepasst.

Anmerkung 1. In [Fef15] wird die Approximation allgemein für Mengen in separablen Hilberträumen hergeleitet. In dieser Arbeit wird der Spezialfall der Räume \mathbb{R}^n betrachtet, was für die Anwendung in der FBG-Formsensorik ausreichend ist. Die Räume \mathbb{R}^n sind separable Hilberträume mit dem reellen Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Weiter ist in dieser Arbeit im Bezug auf den \mathbb{R}^n mit $|\cdot|$ stets die Standardnorm gemeint [Wer06].

Definition 6. Der Hausdorff-Abstand d_H :

Der Hausdorff-Abstand $d_H(A, B)$ ist eine Abstandsbeschreibung zweier nichtleerer Teilmengen $A, B \subset X$ eines metrischen Raumes (X, d) . Es gilt:

$$d_H(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subset U_r(B) \wedge B \subset U_r(A)\}. \quad (5.38)$$

Der Hausdorff-Abstand bezeichnet also den maximal vorkommenden kürzesten Weg von einem Element der einen Menge zu einem nächstliegenden Element der anderen Menge [Voi02, Fef15].

Notation 1. Punktumgebungen $B_r(x)$ und Mengenumgebungen $U_r(X)$:

Offene und abgeschlossene Umgebungen um ein Element $x \in X$ einer Menge X , aus Elementen von X mit einem maximalen Abstand r zu x , werden in dieser Arbeit mit $B_r(x)$ bezeichnet. Umgebungen $B_1(x) := B_r(x)$ mit $r = 1$ werden **Einheitsumgebungen** genannt. Offene und abgeschlossene Umgebungen um eine Menge $A \subset X$, aus Elementen von X mit einem maximalen Abstand r zu einem nächsten Element aus A , werden in dieser Arbeit mit $U_r(A)$ bezeichnet.

Definition 7. ε -Netz:

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ und A ein Unterraum von X . Für den **Überdeckungsradius** r von A in X gilt:

$$r = \inf\{r \in \mathbb{R}^+ : U_r(A) = X\}. \quad (5.39)$$

Der Überdeckungsradius ist also der kleinstmögliche maximale Abstand von Elementen in X zu einem Element in A . Eine Menge A ist ein ε -Netz in X , wenn der Überdeckungsradius den

Wert ε annimmt. Ein ε -Netz ist also eine gut verteilte Menge in X , wobei das ε angibt, wie gut die Verteilung ist. Je kleiner der Wert ε ist, desto gleichmäßiger und besser verteilt ist die Menge A in X [Sut75, Fef15].

Anmerkung 2. In der Literatur wird das hier in Definition 7 definierte ε -Netz auch als ε -**Überdeckung** bezeichnet. Der Begriff ε -Netz ist dann stärker eingeschränkt und beschreibt eine Menge, für die noch zusätzliche Bedingungen an die Verteilung im Raum gelten müssen [Cla06]. In dieser Arbeit wird der Begriff wie in [Fef15] und in Definition 7 beschrieben verwendet.

Rekonstruktionsalgorithmus

Die Anforderungen an die gegebene Menge $X \subset \mathbb{R}^n$, um den Algorithmus anwenden zu können, sind in [Fef15] in Theorem 2 und ergänzend in Corollary 1.10 beschrieben und hier in Theorem 1 wie folgt zusammengefasst:

Theorem 1. Anforderungen an $X \subset \mathbb{R}^n$:

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ ein Unterraum aus einer finiten Menge an Punkten von \mathbb{R}^n . Unter der Annahme, dass für alle $x \in X$ ein m -dimensionaler affiner Unterraum $A_x \subset \mathbb{R}^n$ existiert, sodass gilt $d_H(X \cap B_r(x), \varepsilon\text{-Netz}(A_x \cap B_r(x))) < \delta$, existiert eine geschlossene m -dimensionale Oberfläche $S \subset \mathbb{R}^n$, sodass gilt $d_H(X, \varepsilon\text{-Netz}(S)) < C\delta$. Dabei ist C eine Konstante und es gilt: $0 < \varepsilon < \frac{r}{10}$ und $0 < \delta < \sigma_0(m)r$. $\sigma_0(m)$ hängt von der Dimension $\dim S = m$ ab und ist für jedes $m \in \mathbb{N}$ existent und echt positiv.

Nach Theorem 1 ist vorausgesetzt, dass ein Tangentialraum existiert. Ist das Theorem erfüllt, kann eine Lösung gefunden werden. Die Qualität der Approximation S von X ist dabei durch den Wert δ begrenzt. Die Lösung ist damit bis auf diesen maximalen Fehler von δ eindeutig. Je kleiner δ , desto besser ist die Approximation. Der Wert δ bestimmt sich aus dem Hausdorff-Abstand $d_H(X \cap B_r(x), \varepsilon\text{-Netz}(A_x \cap B_r(x)))$ und hängt somit direkt von der Wahl des Parameters r ab. Kleine Parameterwerte r setzen die Schranke für den Wert δ herunter und führen zu möglicherweise besseren Approximationen von X , allerdings ergibt sich als konstruierte Oberfläche S dann eine komplexere Struktur mit geringeren Injektivitätsradien. Für S können bei in Theorem 1 aufgestellten Bedingungen weitere Aussagen über die zweite Fundamentalform sowie den Injektivitätsradius und die Projektionen der Umgebungen $U_r(S)$ auf S gemacht werden. Weiteres über die genauen Zusammenhänge kann in [Fef15] (Seite 10-11, Theorem 2 und Corollar 1.10) nachgelesen werden. Der Beweis zu Theorem 1 wird in [Fef15] (Abschnitt 2, Seite 20 ff.) gegeben. Aus dem Beweis lässt sich ein konkreter Algorithmus zur Erzeugung von S als Approximation von X wie folgt herleiten.

Algorithmus 1. Konstruktion einer Oberfläche S_δ zur Approximation einer finiten Menge X :
 Gegeben sei die Dimension $\dim S_\delta = m$ von S , sowie eine finite Menge $X \in \mathbb{R}^n$ und ein Parameter r , sodass X den Anforderungen aus Theorem 1 genügt. Ziel ist die Konstruktion einer m -dimensionalen Oberfläche $S_\delta \in \mathbb{R}^n$, die X möglichst gut approximiert. S_δ kann über Schritt (1)-(7) konstruiert werden.

- (1) Skalieren X mit dem Faktor $\frac{1}{r}$.
- (2) Wähle eine Menge $X_0 \subset X$ mit J Elementen $\{q_i\}_{i=1, \dots, J}$, sodass die Menge X_0 ein ε -Netz in X mit $\varepsilon \leq \frac{1}{100}$ ist.
- (3) Berechne für alle $i = 1, \dots, J$ die m -dimensionalen affinen Unterräume A_i mit $q_i \in A_i$, sodass gilt: $d_H(A_i \cap B_1(q_i), X \cap B_1(q_i)) < C\delta$.

A_i wird durch eine Basis B_{A_i} der Dimension m in $(X \cap B_1(q_i))$ mit Ursprung in q_i aufgespannt. Die Basis $B_{A_i} = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m\}$ kann wie folgt berechnet werden:

- (a) Bestimme den Startwert x_1 mit:

$$x_1 := \{x \in X \cap B_1(q_i) : \min_{x \in X \cap B_1(q_i)} |1 - |q_i - x||\}.$$

- (b) Für gegebene x_1, \dots, x_{k-1} und $k \leq m$ bestimme x_k mit:

$$x_k := \{x \in X \cap B_1(q_i) : \min_{x \in X \cap B_1(q_i)} \max(|1 - |q_i - x||, \langle \frac{x_1}{|x_1|}, x \rangle, \dots, \langle \frac{x_{k-1}}{|x_{k-1}|}, x \rangle)\}.$$

- (c) Die Basis B_{A_i} besteht dann aus den normierten Ortsvektoren $\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m\}$ bezüglich q_i als Ursprung.

- (4) Konstruiere für alle $i = 1, \dots, J$ die orthogonale Projektion $P_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf A_i .
- (5) Konstruiere für alle $i = 1, \dots, J$ eine glatte Funktion $\varphi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\varphi_i(x) = \mu_i(x)P_i(x) + (1 - \mu_i(x))x$$

und

$$\mu_i : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1], \mu_i(x) = \mu(|x - q_i|)$$

und

$$\mu : \mathbb{R}_+^0 \rightarrow [0, 1], \mu(t) = \begin{cases} 1 & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ \varphi & t \geq \frac{1}{2} \\ \text{beliebige glatte Funktion} & \text{sonst} \end{cases}.$$

- (6) Konstruiere f als Iteration der Funktionen φ_i wie folgt:

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, f = \varphi_J \circ \varphi_{J-1} \circ \dots \circ \varphi_1.$$

- (7) Konstruiere die Oberfläche S_δ mit $S_\delta = f(U_\delta(X))$.

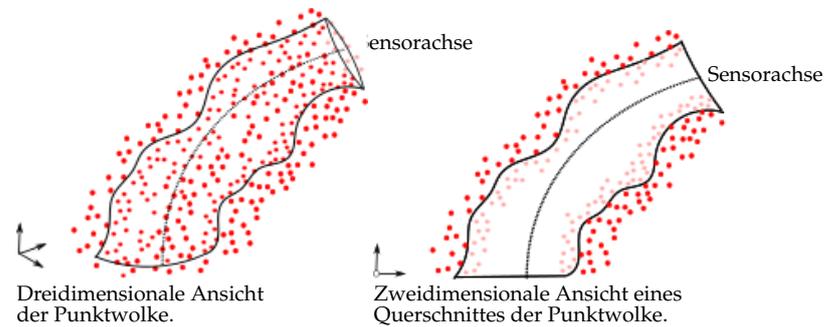


Abbildung 5.7: Problemstellung: Gesucht ist eine Oberfläche S_i (schwarz angedeutete Linien) in Schlauchform zur Approximation von X (rote Punkte).

Zu Beginn des Algorithmus wird der Raum X zur Vereinfachung skaliert, sodass immer mit Einheitsumgebungen $B_1(x)$ gerechnet werden kann. Es wird dann eine Menge X_0 an Punkten bestimmt, die räumlich gut in X verteilt sind. Dabei müssen alle Elemente aus X in maximalem Abstand $\frac{1}{100}$ zu einem Element der Menge X_0 liegen. Da der Raum X vorher durch $\frac{1}{r}$ skaliert wurde, hängt die Auswahl direkt mit dem Wert r zusammen. Je größer dieser Wert r gewählt wird, desto weniger Elemente muss die Menge X_0 aus X umfassen. Laut der Bedingung an X darf der Wert r andererseits nicht zu groß sein, damit eine gute Lösung der Approximation, bemessen durch den Wert δ gewährleistet ist. Nach der Auswahl der Menge X_0 werden die affinen Unterräume durch die Elemente dieser Menge berechnet, die X in der Einheitsumgebung der Elemente am besten approximieren. Die durch δ begrenzte Umgebung $U_\delta(X)$ wird dann über die Hintereinanderausführungen der Funktionen φ_i iterativ abgebildet. Die Abbildungen φ_i sind konvexe Funktionen und eine Kombination aus Projektionen auf die affinen Räume A_i und aus der Identität. Das Bild der Hintereinanderausführungen von φ_i konvergiert dann gegen eine glatte m -dimensionale Oberfläche S . In [Fef15] (Seite 22, Abbildung 1) wird der Algorithmus schematisch dargestellt. Es wird eine eindimensionale Oberfläche S_i im zweidimensionalen Raum zur Approximation von Elementen im \mathbb{R}^2 gezeigt. Im Folgenden ist in dieser Arbeit in Beispiel 12 eine weitere Umsetzung in Anlehnung an die Anwendung in der FBG-Formsensorik beschrieben. Dabei wird durch eine zweidimensionale Oberfläche S_i eine Punktwolke im \mathbb{R}^3 approximiert.

Beispiel 12. Berechnung einer deformierten zweidimensionalen Schlauchoberfläche aus einer Punktwolke:

Angelehnt an die Anwendung in der FBG-Formsensorik soll aus einer gegebenen Punktmenge $X \subset \mathbb{R}^3$ eine glatte zweidimensionale Oberfläche S_i rekonstruiert werden, die einen deformierten Schlauchmantel beschreibt. Der Schlauch ist dabei sowohl gekrümmt als auch an der Oberfläche eingedellt. Das Problem ist in Abbildung 5.7 skizziert.

Anforderungen an die Menge X :

Um eine Approximation mit maximaler Abweichung δ von Elementen aus X zu der rekonstruierten Oberfläche S_i zu erreichen, muss die Menge X den Anforderungen aus Theorem 1 genügen. Es

muss also zu jedem Element $x \in X$ eine affine zweidimensionale Ebene A_x existieren, sodass der Hausdorff-Abstand der Kugelumgebungen mit einem Radius r um x geschnitten mit der Ebene sowie geschnitten mit dem Raum X kleiner als δ ist. Der Radius r muss also klein genug gewählt werden. Ein Beispiel für eine nicht erfüllte Bedingung ist in Abbildung 5.8 dargestellt.

Rekonstruktion von S :

Zuerst muss der Raum X durch Multiplikation mit dem Wert $\frac{1}{r}$ skaliert werden. Dann wird eine Auswahl X_0 an J Elementen aus X nach Schritt (2) des Algorithmus 1 getroffen. Für alle Elemente q_i in X_0 wird dann eine Ebene A_i nach Schritt (3) aufgespannt. Dazu wird eine Orthonormalbasis angenähert. Schließlich werden die Funktionen φ_i wie in Schritt (5) definiert. Die Abbildung der Umgebung $U_\delta(X)$ durch Hintereinanderausführung von drei Funktionen φ_i wird exemplarisch in Abbildung 5.9 gezeigt. Die Hintereinanderausführung unendlich vieler solcher Abbildungen konvergiert gegen eine glatte Oberfläche.

Alternative Lösungen - Vergleich und Vorteile der vorgestellten Methode

Das vorgestellte Konzept zur Rekonstruktion einer Oberfläche aus einer gegebenen diskreten Punktwolke ist eine Möglichkeit unter vielen weiteren bekannten alternativen Lösungen des Approximationsproblems. Besonders in der Bildverarbeitung findet die Oberflächenrekonstruktion von Punktwolken häufige Anwendung. Meist werden hier Oberflächen über polygonale Flächen angenähert. Eine Herangehensweise ist das Generieren von Netzen durch initiale Punktverbindungen und anschließender Reduktion dieser Netze zu einer Oberflächenrepräsentation. Die Oberflächenstruktur setzt sich aus Dreiecken oder auch anderen Polygonflächen zusammen, die an den Kanten im Allgemeinen nicht stetig ineinander übergehen [Bru13]. Andere Methoden zur Oberflächenabschätzung basieren auf Abstandsinformation von Punkten einer Umgebung zu Ebenen, die die Punktwolke in dieser Umgebung bestmöglich approximiert [Hop92]. Zur Bestimmung dieser Ebenen kann beispielsweise die Hauptkomponentenanalyse durchgeführt werden [Jol02]. Weitere bekannte flächengenerierende Methoden sind beispielsweise der 'Marching Cubes'- und der 'Power Crust'-Algorithmus [Lor87, Ame01]. Die Annäherung der Oberflächen durch Flächenstücke ist oft vergleichsweise mit wenig Rechenaufwand verbunden und gibt bei einer großen

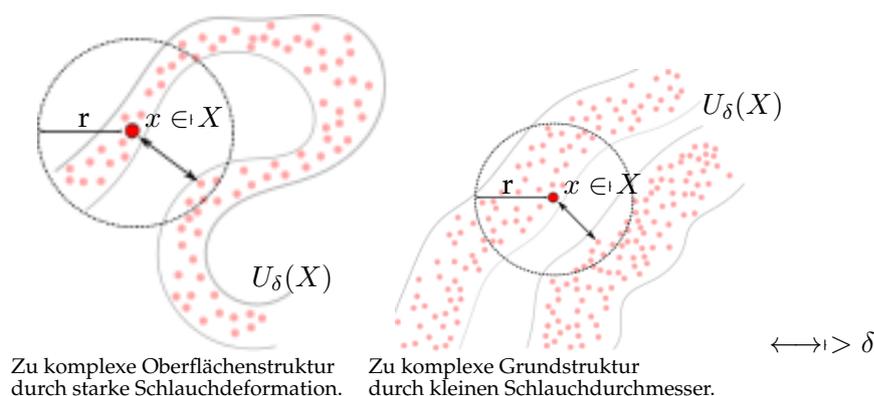


Abbildung 5.8: Anforderungen an X mit Radius r und Fehlertoleranz δ nicht erfüllt.

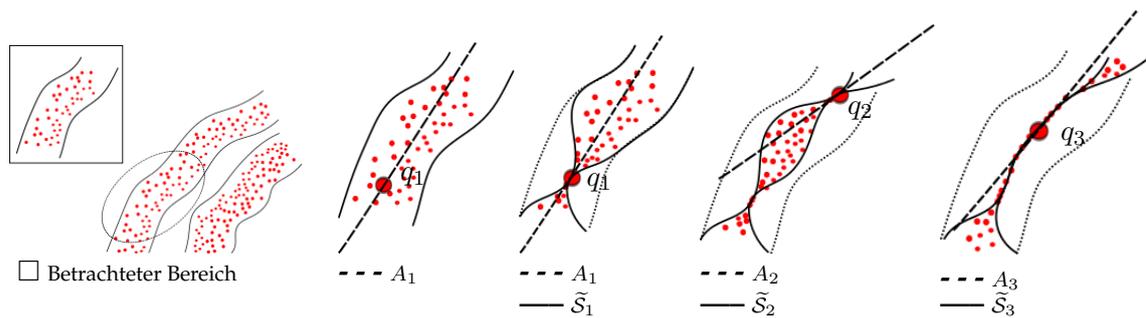


Abbildung 5.9: Rekonstruktion von S : Schrittweise Hintereinanderausführungen von drei Funktionen φ_i mit Zwischenergebnissen \tilde{S}_i .

Anzahl an gegebenen Punkten eine ausreichend gute Lösung. Allerdings sind keine Informationen über die Krümmung der Oberfläche gegeben. Um gekrümmte Oberflächen zu erhalten, können Splines, beispielsweise 'nicht-uniforme rationale B-Splines' (NURBS), herangezogen werden [Pie12]. Die nicht-lineare Interpolation oder Approximation der gegebenen Punkte ergibt somit zwar eine gekrümmte stetige Oberfläche, allerdings hängt die Krümmung nicht direkt von der gegebenen Punktmenge, sondern vor allem von der Wahl der eingesetzten Spline-Funktionen ab. Bessere Krümmungsschätzungen, unter direkter Betrachtung der gegebenen Punkte, sind durch das Schätzen von Normalen auf der Punktwolke [Mit03] oder durch das Schätzen von Hauptkrümmung und Injektivitätsradius in den jeweiligen Punkten gegeben [Do 76]. Ein Approximationsverfahren über das Abschätzen von Krümmungslinien und das anschließende Flächengenerieren aus diesen geschätzten Krümmungsinformationen, mit einem glatten, stetigen Flächenergebnis ist in [Kal09] vorgestellt.

Der in dieser Arbeit vorgestellte Ansatz zu Oberflächenapproximation von Fefferman et al. ist ein neuer Ansatz in der Differentialgeometrie und bringt hinsichtlich der Anwendung in der FBG-Formsensorik einige Vorteile gegenüber alternativen Methoden mit sich. Die rekonstruierte Oberfläche ist glatt und gekrümmt. Dabei ist die Krümmung direkt abhängig von den gegebenen Punkten in der jeweiligen Umgebung der Oberfläche. Eine vorab durchgeführte Schätzung der Krümmung über Normalenvektoren oder Krümmungslinien ist nicht notwendig. Eine möglichst realistische Erfassung der Krümmung ist in der FBG-Formsensorik besonders relevant, insbesondere, wenn komplexe Deformationen mit beispielsweise Eindellungen an der Sensoroberfläche erkannt werden sollen. Die Lösung von Fefferman entspricht einem geometrischen Ansatz. Die bekannten Eigenschaften der Objektgeometrie können in die Berechnungen mit einfließen. Durch die Verwendung von differentialgeometrischen und topologischen Konzepten kann die Rekonstruktion optimiert werden. Ein Beispiel einer solchen möglichen Erweiterung des Algorithmus wird im Folgenden beschrieben.

Erweiterungsmöglichkeit des Algorithmus von Fefferman et al.

Vor der Anwendung des Formrekonstruktionsalgorithmus kann eine Voranalyse auf Basis von Konzepten aus der Topologie durchgeführt werden, um das Ergebnis zu verbessern. Bei der Anwendung des Algorithmus von Fefferman et al. muss zu Anfang ein Skalierungsparameter r gewählt werden. Ist der Parameter zu groß oder zu klein, so wird die Grundgeometrie nicht erkannt, das Theorem 1 ist nicht erfüllt und der Algorithmus kann nicht angewendet werden. Um den Bereich für einen gültigen Parameter r zu klassifizieren, kann die Topologie des zu erfassenden Objektes betrachtet werden. Die Grundgeometrie und insbesondere die Homologiekategorie der betrachteten Objekte können in der FBG-Formsensorik als bekannt vorausgesetzt werden. Unter Anwendung des in [Car09] vorgestellten topologischen Klassifizierungsansatzes von Punktmengen, kann die Homologiekategorie des betrachteten Objektes genutzt werden um einen passenden Bereich $[r^-, r^+]$ zu bestimmen, sodass für alle $r \in [r^-, r^+]$ die r -Umgebung des gegebenen diskreten metrischen Raumes X homöomorph zu der Grundgeometrie des zu approximierenden Objektes ist.

form gegeben ist. Schließlich werden im Gegensatz zur konventionellen FBG-Formsensorik in der innovativen Methode die für jede Messstelle gegebenen Werte pow_i , als Intensität mit der die Wellenlänge λ_i gemessen wird, mitberücksichtigt. In diesem Abschnitt werden die in den Kapiteln 2 und 4 sowie in den Abschnitten 5.1 und 5.3 dieses Kapitels definierten Bezeichnungen verwendet. Die vorkommenden Bezeichnungen können auch in Anhang A in der Nomenklatur nachgeschlagen werden.

5.4.1 Herleitung der Berechnungsschritte

In Abbildung 5.10 ist ein Ablaufdiagramm des innovativen Algorithmus abgebildet. Die Rekonstruktion der Sensordeformation kann in mehrere Teilschritte gegliedert werden. Es sind dabei verschiedene Berechnungswege bestehend aus unterschiedlichen Schrittfolgen zur Problemlösung gegeben. Eine Möglichkeit ist die Formberechnung in vier Schritten. Hier bauen die einzelnen Berechnungsschritte direkt auf der in Abschnitt 5.3 beschriebenen Theorie auf. Im vierten Berechnungsschritt wird die Sensorform berechnet. Hier sind zwei Lösungen vorgestellt. Über *Schritt 4 I* kann nur die Sensorachsenform berechnet werden. Der Rechenaufwand ist allerdings deutlich geringer als in *Schritt 4 II*; ist also nur die Information der Sensorachsenform gefragt, kann auf die erweiterte Rekonstruktion verzichtet werden. In *Schritt 4 II* wird neben der Sensorachse auch die Sensoroberfläche erfasst. Eine reduzierte Variante ist mit dem nach *Schritt 2* anwendbaren *Schritt 3** gegeben. Die dabei vorgenommenen Berechnungen entsprechen einer Anwendung des konventionellen Algorithmus. Die Sensoroberfläche lässt sich so nicht erfassen. Die Berechnung über *Schritt 4 II* und *Schritt 3** führt demnach zu der gleichen Art der Forminformation. Abhängig von den jeweils vorliegenden Ausgangsbedingungen bei einer Formsensorenanwendung ist eine entsprechende Variante zu wählen.

'Ausreichend gute'-Abdeckung als notwendige Bedingung an die Messstellenverteilung über den Sensorträgerkörper

Der im Folgenden hergeleitete Algorithmus kann bei einer im Allgemeinen beliebigen Positionierung und Ausrichtung der Messstellen über den Trägerkörper angewendet werden. Abhängig von der vorliegenden Messstellenverteilung sind allerdings unterschiedlich gute Ergebnisse in der Formrekonstruktion zu erwarten. Abhängig von der geforderten Genauigkeit und der zu erwartende Komplexität der Verformung des Trägerkörpers, bestimmen sich Mindestanforderungen an die Anzahl der Messstellen sowie dessen Ausrichtung und Verteilung über den Sensorträgerkörper. Grundlegend stehen eine hohe geforderte Genauigkeit und eine hohe Deformationskomplexität für eine hohe notwendige Anzahl an möglichst gleichmäßig über den Sensorträgerkörper verteilten Messstellen. Prinzipiell kann die Anzahl der Messstellen demnach beliebig klein gewählt werden, dadurch wird sich die Genauigkeit insbesondere bei starker Sensorverformung jedoch verschlechtern. Eine Mindestanzahl an Messstellen ist darüber hinaus durch das gewählte Interpolationsverfahren in *Schritt 2* des Algorithmus gefordert. Auch das in *Schritt 3* des Algorithmus vorgenommene Generieren eines metrischen Raumes bringt je nach zu erwartender Deformationskomplexität gewisse Anforderungen an die Ausrichtung und Anzahl der Messstellen mit sich (vgl. Ab-

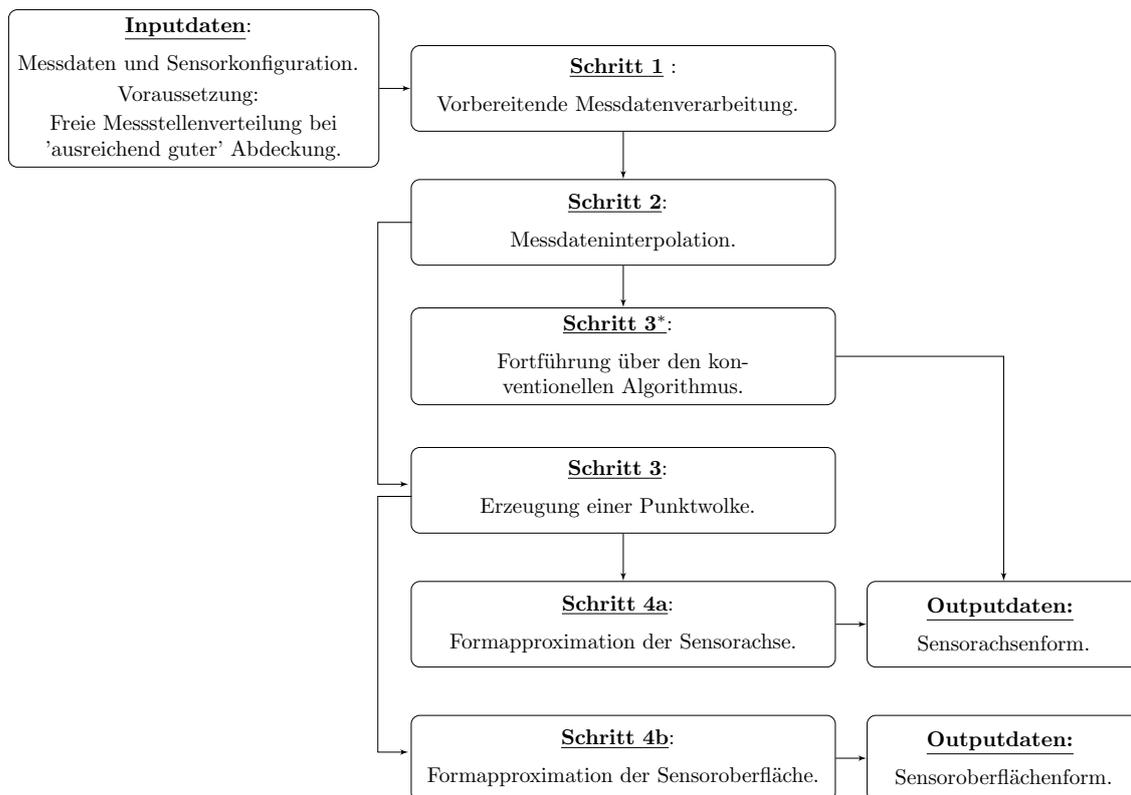


Abbildung 5.10: Berechnungsschema des innovativen Formrekonstruktionsalgorithmus.

schnitt 5.3.3). Eine letzte Anforderung an die Sensorkonfiguration betrifft die Ausrichtung der Messstellen. Eine orthogonale Ausrichtung der Messstellen zur Sensorachse ist nicht erlaubt. Sind die Messstellen orthogonal ausgerichtet, bewirkt eine Sensorverformung laut der den Algorithmen zugrunde liegenden Deformationsmodelle (abgesehen von Twisteffekten) keine Messstellendehnung (vgl. Kapitel 4). Diese Messstellen würden somit keinen Mehrwert für die Formberechnung liefern. Sind alle Mindestanforderungen eingehalten, wird in dieser Arbeit von einer 'ausreichend guten' Messstellenabdeckung gesprochen. Näheres zur optimalen Messstellenverteilung und der Prüfung einer ausreichend guten Messstellenabdeckung ist nicht Teil dieser Arbeit sondern wird in Kapitel 7 als zukünftiger Forschungsaspekt aufgezeigt.

Schritt 1 - Vorbereitende Messdatenverarbeitung

In *Schritt 1* sollen die Messdaten aufbereitet werden. Dazu gehört die Berechnung der für den weiteren Algorithmus wichtigen Informationen aus den Messdaten. Gemessen werden Wellenlängen bezüglich einer gegebenen Basiswellenlänge. Zur weiteren Rechnung werden Dehnungswerte benötigt. Die Umrechnung wird in *Schritt 1A* vorgenommen. In *Schritt 1B* werden die Messdaten sowie alle weiteren gegebenen Informationen bezüglich der Sensorkonfiguration übersichtlich und vollständig in Form von Tensoren und einer

Mannigfaltigkeit dargestellt. Weiter können in *Schritt 1* zusätzliche Datenvorverarbeitungen vorgenommen werden. Beispielsweise können Filteralgorithmen angewendet werden, um Rauschen in den Daten zu verringern. Auch die Kalibrierung der Sensorparameter zum Ausgleich von Produktionsungenauigkeiten wäre vorbereitend vorzunehmen. Diese zusätzliche Datenvorverarbeitung ist optional und wird in dieser Arbeit nicht weiter behandelt. Die Berechnung von Dehnungswerten aus gegebener Wellenlängendifferenz ist mit *Schritt 1A* wie folgt gegeben (vgl. technische Grundlagen, Abschnitt 2.1).

Schritt 1A - Dehnungsberechnung:

Input:

- Messwerte $\lambda_i, \forall i = 1, \dots, I$.
- Basiswellenlängen $\lambda_i^0, \forall i = 1, \dots, I$.
- Photoelastischer Koeffizient k mit $k = 0,78$.

Output:

- Dehnungswert $\varepsilon_i, \forall i = 1, \dots, I$.

Berechnungsvorschrift:

$$\frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i^0} = k \varepsilon_i .$$

Ende Schritt 1A

Die Theorie zur Darstellung der Messdaten sowie der bekannten Informationen bezüglich der Sensorkonfiguration ist in Abschnitt 5.3.1 vorgestellt. Die Verwendung von Tensoren, Mannigfaltigkeiten und Tensorfeldern ermöglicht eine übersichtliche Darstellung der Daten. Bekannt sind als Sensorkonfigurationsparameter die Sensorlänge S und der Durchmesser d . Weiter sind die Positionen und Ausrichtungen der I Messstellen auf der Sensoroberfläche über $P_i(s_i, r_i, \alpha_i, \beta_i)$ mit $i = 1, \dots, I$ gegeben. Die für jede Messstelle vorhandenen Messdaten sind die aus den Wellenlängen berechneten Dehnungswerte ε_i und die jeweils zugehörigen Intensitätswerte pow_i . Eine hier vorgeschlagene Möglichkeit der Messdatendarstellung ist die Beschreibung der Dehnungen über zweidimensionale einstufige Tensoren $T(\varepsilon_i, \beta_i)$. In diesen Tensoren wird neben der Dehnung auch die Ausrichtung der Messstelle über den Wert β_i abgespeichert. Die Tensoren $T(\varepsilon_i, \beta_i)$ lassen sich bezüglich einer Basis eines zweidimensionalen Vektorraums als Vektor darstellen. Dabei ist die Vektorlänge durch den Dehnungswert ε_i bestimmt. Die Vektorrichtung entspricht der Ausrichtung β_i der entsprechenden Messstelle. Die Intensitätswerte können über Tensoren $T(pow_i)$ nullter Stufe, also als Skalare, beschrieben werden. Eine gemeinsame Darstellung der Dehnungen und Intensitäten über zweistufige Tensoren ist ebenfalls möglich. Der Sensorträgerkörper in unverformtem Zustand stellt einen massiven Zylinder dar und kann über die Parameter S und d definiert werden. Eine Darstellungsmöglichkeit des Sensorkörpers, in dem die Messstellen positioniert sind, ist eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand $\overset{\circ}{S}$ im \mathbb{R}^3 . Die

Sensoroberfläche in Form einer zweidimensionalen zylinderförmigen Mannigfaltigkeit vom Durchmesser d begrenzt dabei die Mannigfaltigkeit nach außen. Zwei Ebenen orthogonal zur Zylinderachse die einen gegenseitigen Abstand S voneinander haben (ebenfalls zweidimensionale Mannigfaltigkeiten) geben eine Begrenzung in Längsrichtung. Bei konstantem Abstand $r_i = r$ zur Sensorachse für alle I Messstellen ist die Darstellung von $\overset{\circ}{S}$ über eine Zylinderoberfläche ausreichend. Dies entspricht einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^3 mit Rand, wobei zwei Kreise (eindimensionale Mannigfaltigkeiten) die Mannigfaltigkeit beranden. Die Kreise liegen auf zwei zur Sensorachse orthogonalen Ebenen, die den Abstand S voneinander haben. Die Positionen der Messstellen auf dem Sensorträgerkörper kann mittels diskreter Vektorfelder bzw. Skalarfelder der gegebenen Tensoren $T(\varepsilon_i, \beta_i)$ und $T(pow_i)$ auf der Mannigfaltigkeit $\overset{\circ}{S}$ über eine entsprechend initiierte Zuordnung beschrieben werden. Die Messdatendarstellung ist wie folgt in *Schritt 1B* umzusetzen.

Schritt 1B - Messdatendarstellung:

Input:

Sensorkonfiguration:

Sensorklänge S .

Sensordurchmesser d .

Position der Messstellen $P_i(s_i, r_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$, $\forall i = 1, \dots, I$,

dabei gilt: $s \in [0, S]$, $r \in (0, \frac{d}{2}]$, $\alpha_i \in [0, 2\pi]$, $\beta_i \in (0, \frac{\pi}{2}]$ und $\gamma_i = 0$, $\forall i = 1, \dots, I$.

Messdaten:

Dehnung ε_i , $\forall i = 1, \dots, I$.

Intensität pro gemessener Wellenlänge pow_i , $\forall i = 1, \dots, I$.

Output:

Dehnung und Messstellenausrichtung als Tensor erster Stufe $T(\varepsilon_i, \beta_i)$, $\forall i = 1, \dots, I$.

Intensitätswert als Tensor nullter Stufe $T(pow_i)$, $\forall i = 1, \dots, I$.

Unverformte Sensorkörper als berandete Mannigfaltigkeit $\overset{\circ}{S}$ mit $\dim \overset{\circ}{S} = 3$.

Diskretes Tensorfeld $TF \overset{\circ}{S}_{T(\varepsilon_i, \beta_i)}$ als Zuordnung der Tensoren $T(\varepsilon_i, \beta_i)$ über $\overset{\circ}{S}$.

Diskretes Tensorfeld $TF \overset{\circ}{S}_{pow_i}$ als Zuordnung der Tensoren $T(pow_i)$ über $\overset{\circ}{S}$.

Berechnungsvorschrift:

Komponentendarstellung von $T(\varepsilon_i, \beta_i)$ bezüglich einer Basis $e = \{e_1, e_2\}$:

Sei B definiert als ein *Bezugstensor* erster Stufe für alle $T(\lambda_i, \beta_i)$ mit $i = 1, \dots, I$. Seien b^1 und b^2 die Komponenten der Vektordarstellung \vec{B} von B bezüglich einer Basis e und es gilt: $B = b^1 e_1 + b^2 e_2$. Dann sei der Vektor $\vec{T}_i = \begin{pmatrix} t_i^1 \\ t_i^2 \end{pmatrix}$ als Komponentendarstellung von

$T(\lambda_i, \beta_i)$ bezüglich e mit $T_i = t_i^1 e_1 + t_i^2 e_2$ so gewählt, dass gilt:

$$\varepsilon_i = \mathcal{L}(\vec{T}_i)$$

und

$$\beta_i = \angle(\vec{T}_i, \vec{B}),$$

mit $\mathcal{L}(T_i)$ als Länge des Vektors T_i und $\angle(\vec{T}_i, \vec{B})$ als Winkel zwischen den Vektoren \vec{T}_i und dem Bezugsvektor \vec{B} . Ist e eine kartesische Basis eines euklidischen Vektorraums, so können zur Berechnung der Länge und der Winkel die Standardnorm $|\cdot|$ und das Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ verwendet werden und es gilt:

$$\varepsilon_i = |\vec{T}_i|$$

und

$$\beta_i = \cos^{-1}\left(\frac{\langle \vec{T}_i, \vec{B} \rangle}{|\vec{T}_i| |\vec{B}|}\right).$$

Darstellung von $T(pow_i)$:

Die Intensitätswerte werden als Tensor nullter Stufe $T(pow_i)$ dargestellt und entsprechen skalaren Werten.

Darstellung von $\overset{\circ}{S}_i$ - Allgemeiner Fall:

Die dreidimensionale berandete Mannigfaltigkeit $\overset{\circ}{S}_i$ im \mathbb{R}^3 stellt einen begrenzten massiven Zylinder mit Radius $\frac{d}{2}$ und Länge S dar. Bezüglich einer kartesischen Basis $e = \{e_1, e_2, e_3\}$ im \mathbb{R}^3 kann $\overset{\circ}{S}_i$ wie folgt beschrieben werden:

$$\overset{\circ}{S} := \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \frac{d}{2} \leq \sqrt{x^1^2 + x^2^2}, x^3 \in [0, S] \right\}.$$

Darstellung von $\overset{\circ}{S}_i$ - Sonderfall mit $r_i = r, \forall i = 1, \dots, I$:

Bei konstantem Abstand $r_i = r$ zur Sensorachse für alle I Messstellen ist eine zweidimensionale berandete Mannigfaltigkeit $\overset{\circ}{S}_i$ im \mathbb{R}^3 ausreichend. Die Mannigfaltigkeit stellt eine begrenzte Zylinderoberfläche mit Radius $\frac{d}{2}$ und Länge S dar. $\overset{\circ}{S}_i$ und kann bezüglich einer kartesischen Basis wie folgt beschrieben werden:

$$\overset{\circ}{S} := \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \frac{d}{2} = \sqrt{x^1^2 + x^2^2}, x^3 \in [0, S] \right\}.$$

Definition der Tensorfelder $TF \overset{\circ}{\mathcal{S}}_{T(\varepsilon_i, \beta_i)}$ und $TF \overset{\circ}{\mathcal{S}}_{T(pow_i)}$:

$TF \overset{\circ}{\mathcal{S}}_{T(\varepsilon_i, \beta_i)}$ ist ein diskretes Tensorfeld über $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$ mit:

$$TF \overset{\circ}{\mathcal{S}}_{T(\varepsilon_i, \beta_i)}(P_i) = T(\varepsilon_i, \beta_i), \quad \text{für alle } i = 1, \dots, I.$$

$TF \overset{\circ}{\mathcal{S}}_{pow_i}$ ist ein diskretes Tensorfeld über $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$ mit:

$$TF \overset{\circ}{\mathcal{S}}_{T(pow_i)}(P_i) = T(\varepsilon_i, \beta_i), \quad \text{für alle } i = 1, \dots, I.$$

Ende Schritt 1B

Schritt 2 - Informationserweiterung über Interpolation der Messdaten

Im zweiten Schritt des Algorithmus wird die Dehnung zwischen den Messstellen geschätzt. Die Dehnungen sind als diskretes Tensorfeld über dem Trägerkörper zusammengefasst. Eine Schätzung stetiger Dehnungsinformationen über dem Trägerkörper entspricht somit einer Tensorfeldinterpolation, wobei die gegebenen Tensoren die Stützstellen der Interpolation darstellen. Das Interpolationsverfahren ist dabei beliebig und soll hier nicht vorgegeben werden. In Abschnitt 5.3.2 sind verschiedene Konzepte im Hinblick auf die Anwendung in der FBG-Formsensorik beschrieben. Bei der Wahl des Interpolationsverfahrens muss das in Kapitel 4 angenommene Deformationsmodell berücksichtigt werden. Eine mögliche über das Verfahren gegebene Mindestanzahl an Messstellen ist zu beachten; es ergeben sich daraus Bedingungen an die ausreichend gute Messstellenverteilung als Voraussetzung an die Anwendbarkeit des Algorithmus. Die mit dem diskreten Tensorfeld $TF \overset{\circ}{\mathcal{S}}_{pow_i}$ gegebenen Werte geben die Intensität an, mit der an der jeweiligen Messstelle eine Dehnung gemessen wurde. Eine hohe Intensität spricht für ein zuverlässiges Signal. $TF \overset{\circ}{\mathcal{S}}_{pow_i}$ kann also zur Gewichtung der Stützstellen in der Interpolation verwendet werden. Die Gewichtung kann über Gewichtungsfaktoren oder eine Kovarianzmatrix vorgenommen werden. Das Vorgehen in *Schritt 2* ist im Folgenden zusammengefasst:

Schritt 2 - Messdateninterpolation:

Input:

Dehnungen und Messstellenausrichtungen als Tensoren erster Stufe

$$T(\varepsilon_i, \beta_i), \forall i = 1, \dots, I.$$

Intensitätswerte als Tensoren nullter Stufe $T(pow_i), \forall i = 1, \dots, I.$

Unverformter Sensorträgerkörper als Mannigfaltigkeit $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$.

Diskretes Tensorfeld $TF \overset{\circ}{\mathcal{S}}_{T(\varepsilon_i, \beta_i)}$ als Zuordnung der Werte in $T(\varepsilon_i, \beta_i)$ über $\overset{\circ}{\mathcal{S}}$.

Diskretes Tensorfeld $TF \overset{\circ}{S}_{pow_i}$ als Zuordnung der Werte in $T(pow_i)$ über $\overset{\circ}{S}$.

Output:

Stetiges oder dichtes Tensorfeld $TF \overset{\circ}{S}_{T(\varepsilon_i, \beta_i)}$ mit geschätzten Werten $T(\varepsilon_i, \beta_i)$ über $\overset{\circ}{S}$.

Berechnungsvorschrift:

Beliebiges Verfahren zur Tensorfeldinterpolation. Die Wahl ist abhängig von:

- dem zugrunde liegenden Deformationsmodell des Trägerkörpers.
- der Dichte des diskreten Tensorfeldes $TF \overset{\circ}{S}_{T(\varepsilon_i, \beta_i)}$.

Eine Gewichtung der gegebenen diskreten Tensoren als Stützstellen der Interpolation kann über aus $TF \overset{\circ}{S}_{pow_i}$ gewonnenen Gewichtungsfaktoren oder einer Kovarianzmatrix vorgenommen werden.

Bemerkung: Das gewählte Interpolationsverfahren beeinflusst die Anforderungen an eine ausreichend gute Messstellenverteilung.

Ende Schritt 2

Schritt 3 - Erzeugen einer die Sensoroberfläche umgebenden Punktwolke

Aus den erweiterten Dehnungsinformationen über den Sensorträgerkörper wird in *Schritt 3* ein diskreter metrischen Raum $(X, d) \in \mathbb{R}^3$ aus Punkten generiert. Diese Punktwolke beschreibt geschätzte Punkte auf der Sensoroberfläche. Der Raum wird rekursiv über mehrere Iterationsschritte aufgebaut, beginnend mit dem Sensoranfang. In Abschnitt 5.3.3 ist die Methodik ausführlich vorgestellt. Dabei sind verschiedene Varianten gegeben, die anwendungsabhängig einzusetzen sind. Die Wahl der Variante hängt von der Komplexität der möglichen Verformung des Sensorträgerkörpers ab. So kann ein einfacheres Vorgehen verwendet werden, wenn keine Änderung der Krümmungsrichtung über den Sensorverlauf vorliegt und somit nur ebene Verformungen auftreten. Kompliziertere Varianten sind notwendig, wenn Torsion oder sogar Twist zu erwarten ist. Die Wahl der Variante beeinflusst ebenfalls die Bedingungen an eine ausreichend gute Messstellenverteilung, als Voraussetzung an die Anwendbarkeit des Algorithmus (vgl. Fallbeschreibungen in Abschnitt 5.3.3). Bei der Generierung des Metrischen Raumes werden zusätzlich in jeden Iterationsschritt t eine Sensor-Querschnittsebene E^t und ein geschätzter Punkt auf der Sensorachse a^t berechnet. Das Berechnungsschema ist folgendermaßen gegeben:

Schritt 3 - Erzeugung eines metrischen Raumes $(X, d) \in \mathbb{R}^3$:

Input:

Stetiges oder dichtes Tensorfeld $TF \overset{\circ}{S}_{T(\varepsilon_i, \beta_i)}$ mit geschätzten Werten $T(\varepsilon_i, \beta_i)$ über $\overset{\circ}{S}$.

Anfangswertbedingungen:

Position im Anfangspunkt s_0 .

Ausrichtung T_0 und Referenzrichtung \vec{Ref}_0 im Anfangspunkt.

Output:

Diskreter metrischer Raum (X, d) in Form von Punkten, die um die verformte Sensoroberfläche liegen.

Sensor-Querschnittsebene E^t und Sensorachsenpunkt a^t für jeden Iterationsschritt t .

Berechnungsvorschrift:

Rekursives Erzeugen der Punkte in mehreren Iterationsschritten, nach einer in Abschnitt 5.3.3 beschriebenen Variante.

Die Wahl der Variante ist abhängig von:

- der zu erwartenden Deformationskomplexität des Sensorträgerkörpers.

Bemerkung: Das gewählte Interpolationsverfahren beeinflusst die Anforderungen an eine ausreichend gute Messstellenverteilung.

Ende Schritt 3

Schritt 4 - Formapproximation

Im letzten Schritt des Algorithmus wird aus der berechneten Punktwolke (X, d) die Sensorform geschätzt. Dabei ist zum einen die Sensorachsenform interessant. Aus dieser lässt sich die Sensorspitzenposition und Ausrichtung ableiten, was für die Sensoranwendung den größten Mehrwert liefert. Neben der Sensorachsenform lässt sich die Sensoroberflächenform schätzen. Da diese Oberflächenapproximation einen vergleichsweise großen Implementierungs- und Rechenaufwand mit sich bringt, werden im Folgenden zwei Möglichkeiten vorgestellt. In einer ersten Möglichkeit in *Schritt 4 I* wird die eindimensionale Form der Sensorachse berechnet. In Abschnitt 5.3.4.1 ist eine Möglichkeit zur Sensorachsenapproximation beschrieben. Dabei werden die in *Schritt 3* berechneten Ebenen E^t und geschätzten Punkte auf der Sensorachse a^t herangezogen. Die Interpolation der Punkte a^t ergibt eine Raumkurve $C(s)$, welche die Sensorachse beschreibt. Die Normalen der Ebenen E^t entsprechen Tangenten an der Raumkurve $C(s)$ und können bei der Interpolation als

Randbedingungen eingesetzt werden. Dies ist insbesondere bei einer Interpolation über Splines sinnvoll. Eine weitere Möglichkeit ist über *Schritt 4 II* beschrieben. Hier wird die Form der Sensoroberfläche approximiert. Dazu wird der in Abschnitt 5.3.4.2 detailliert vorgestellte Algorithmus von Fefferman et al. herangezogen. Im Folgenden sind die Schemata der beiden Varianten aufgeführt:

Schritt 4 I - Formapproximation der Sensorachse:

Input:

Sensor-Querschnittsebene E^t und Sensorachsenpunkte a^t für jeden Iterationsschritt t .

Output:

$C(s)$ mit $s \in [0, S]$ und insbesondere separat $C(S)$ sowie $T(S)$.

Berechnungsvorschrift:

Interpolation der diskreten Sensorachsenpunkte a^t .

Bemerkung: Zusätzliche Randwertbedingungen ergeben sich aus den Ebenen E^t .

Ende Schritt 4 I

Schritt 4 II - Formapproximation der Sensoroberfläche:

Input:

Diskreter metrischer Raum (X, d) aus Punkten, die um die verformte Sensoroberfläche liegen.

Output:

$S_i \in \mathbb{R}^3$.

$C(s)$ mit $s \in [0, S]$ und insbesondere separat $C(S)$ sowie $T(S)$.

Berechnungsvorschrift:

Die Berechnung der Sensoroberfläche S_i erfolgt nach dem in Abschnitt 5.3.4 beschriebenen Algorithmus von Fefferman et al..

Aus der Oberfläche lässt sich die Sensorachsenform $C(s)$ als Mittellinie der schlauchförmigen Oberfläche berechnen. Daraus ergeben sich die Position $C(S)$ und Ausrichtung $T(S)$ an der Sensorspitze.

Ende Schritt 4 II

Schritt 3* - Alternative Anwendung des konventionellen Algorithmus

Alternativ zur Berechnung der Sensorachsenform über *Schritt 3* und *Schritt 4 I* kann auch der konventionelle Algorithmus auf die in *Schritt 2* berechneten Informationen angewendet werden. Dazu müssen aus dem gegebenen Tensorfeld $TF \overset{\circ}{S}_{T(\varepsilon_i, \beta_i)}$ die für den konventionellen Algorithmus notwendigen Informationen extrahiert werden. In $TF \overset{\circ}{S}_{T(\varepsilon_i, \beta_i)}$ sind Dehnungswerte über den gesamten Trägerkörper gegeben. Für weitere Berechnungen nach Schritt 3* werden nur auf mehreren Sensor-Querschnittebenen jeweils drei Dehnungswerte benötigt. Die Anzahl der zu wählenden Querschnittebenen bestimmt sich aus der Komplexität der Form; bei einfachen Formen reicht eine geringe Anzahl. Die über das Tensorfeld $TF \overset{\circ}{S}_{T(\varepsilon_i, \beta_i)}$ gegebenen Dehnungen sind im Allgemeinen bezüglich nicht parallel zur Sensorachse ausgerichteten Messstellen gegeben. Zur Anwendung des konventionellen Algorithmus ist jedoch eine Dehnung in longitudinaler Richtung notwendig. Die Umrechnung kann über das in Abschnitt 4.2 beschriebene erweiterte Deformationsmodell mittels der Gleichung 4.2 auf Seite 38 vorgenommen werden. Im Folgenden ist der Ablauf von Schritt 3* aufgeführt:

Schritt 3* - Anwendung des konventionellen Algorithmus:

Input:

Stetiges oder dichtes Tensorfeld $TF \overset{\circ}{S}_{T(\varepsilon_i, \beta_i)}$ mit geschätzten Werten $T(\varepsilon_i, \beta_i)$ über $\overset{\circ}{S}_i$.

Output:

$C(s)$ mit $s \in [0, S]$ und insbesondere separat $C(S)$ sowie $T(S)$

Berechnungsvorschrift:

Wahl von diskreten Informationen aus $TF \overset{\circ}{S}_{T(\varepsilon_i, \beta_i)}$, die zur Anwendung des konventionellen Algorithmus notwendig sind. Kriterien sind hier:

- Drei Dehnungswerte pro Querschnitt bilden eine Messeinheit.
- Eine ausreichende Anzahl an Messeinheiten entlang der Sensorachse muss gegeben sein.

Durchführung von *Schritt 2* - *Schritt 5* des konventionellen Algorithmus (vgl. Abschnitt 5.2).

Ende Schritt 3*

5.4.2 Bewertung des innovativen Algorithmus und Abschätzung der zu erwartenden Laufzeitkomplexität

Der in diesem Abschnitt beschriebene Algorithmus ist eine bewusst allgemein gehaltene Lösung zur Formrekonstruktion. Eine individuelle Anpassung des Algorithmus an den jeweils vorhandenen FBG-Formsensor ist notwendig. Die Verfahren zur Lösung der einzelnen Teilschritte können frei ausgewählt werden. Die eingesetzten Verfahren beeinflussen dabei möglicherweise die Anforderungen an eine ausreichend gute Abdeckung an Messstellen über den Sensorträgerkörper (vgl. Beschreibung der 'ausreichend guten' Abdeckung auf Seite 79). Ist ein Algorithmus für einen Formsensor mit einer festen Anzahl an Messstellen bei einer bestimmten vorliegenden Verteilung zu implementieren, dann ist bei der Wahl der Berechnungsverfahren darauf zu achten, dass die gegebenen Umstände hinsichtlich der ausgewählten Verfahren einer ausreichend guten Abdeckung entsprechen, sodass der Algorithmus auf den gegebenen Sensor angewendet werden kann. Abhängig von den Anforderungen der Anwendung können unterschiedliche Varianten des Algorithmus umgesetzt werden. Ist nur die Erfassung der Sensorachsenform gefragt, so kann auf *Schritt 4 II* verzichtet werden und somit über die alternative Anwendung von *Schritt 4 I* an Aufwand eingespart werden. Auch die Verwendung des konventionellen Algorithmus über *Schritt 3** ist nach *Schritt 2* möglich. Welcher der beiden Berechnungswege *Schritt 4 I* oder *Schritt 3** zur Erfassung der Sensorachsenform besser geeignet ist, ist anwendungsabhängig zu entscheiden.

Um einen Eindruck von dem zu erwartenden Rechenaufwand zu vermitteln, ist eine Abschätzung der Laufzeitkomplexität im Folgenden aufgeführt. Die Laufzeitkomplexität des innovativen Algorithmus ergibt sich abhängig von der Wahl der Verfahren, die für das Lösen der einzelnen Berechnungsschritte eingesetzt werden. In Tabelle 5.2 ist eine Abschätzung der Komplexitätsklassen in O-Notation angegeben. Näheres zur O-Notation und der Komplexität von Algorithmen ist in [Hel12] (Teil II, Kapitel 8.4) nachzulesen. Bei der Betrachtung der Laufzeitkomplexität werden jeweils beispielhaft mögliche Verfahren zur Lösung der Teilschritte betrachtet. Die Eingabelänge ist teilweise gegeben durch die Anzahl I der vorhandenen Messstellen. In den letzten Berechnungsschritten ist mit einer höheren Eingabelänge zu rechnen. Die Abhängigkeit der Eingabelänge ist jeweils in der Tabelle mit angegeben. Je nach angewendeter Variante des Algorithmus gibt die höchste vorkommende Klasse einer zur Lösung führenden Schrittfolge die Komplexität des gesamten jeweiligen Algorithmus an.

Die Komplexitätsklassen zu den Berechnungsverfahren von *Schritt 1*, *Schritt 2* und *Schritt 4 I* sind bekannt. Die Komplexität von *Schritt 3** wurde in Abschnitt 5.2 hergeleitet. Die Eingabelänge $\frac{S}{\xi}$ ergibt sich aus der Sensorlänge S und einer frei zu wählenden Schrittweite ξ (vgl. Tabelle 5.1 auf Seite 48). Begründungen für die Komplexitätsklassen von *Schritt 3* und *Schritt 4 II* sind im Folgenden gegeben.

Begründung für die Komplexitätsklasse von Schritt 3:

Die Berechnungen in *Schritt 3* sind in Abschnitt 5.3.3 theoretisch hergeleitet. Aus einem Tensorfeld wird iterativ eine Punktwolke generiert. In jedem Iterationsschritt werden mehrere Vektoradditionen durchgeführt sowie eine Ebene über eine lineare Ausgleichsrechnung

Schritt	Problemstellung und mögliches Verfahren	Komplexitätsklasse
1	Berechnung I linearer Gleichungen über Multiplikationen.	$\mathcal{O}(I)$
2	Skalarfeldinterpolationen bei I Stützstellen, zu lösen über multivariate lineare Interpolationen.	$\mathcal{O}(I)$
3*	Durchführung des konventionellen Algorithmus (S gibt die Sensorlänge an und ξ entspricht einer frei zu wählenden Schrittweite).	$\mathcal{O}\left(\frac{S}{\xi}\right)$
3	Generierung einer Punktwolke in T Iterationsschritten (Erklärung siehe separate Begründung).	$\mathcal{O}(T)$
4 I	Interpolation mit $\frac{S}{\zeta}$ Stützpunkten, wobei S die Sensorlänge angibt und ζ einer frei zu wählenden Schrittweite der Interpolation entspricht. Die Interpolation ist über kubische Spline-Interpolation zu lösen.	$\mathcal{O}\left(\frac{S}{\zeta}\right)$
4 II	Oberflächenapproximation über eine Punktwolke X , nach dem Algorithmus von Fefferman et al. (Erklärung siehe separate Begründung).	$\mathcal{O}(pT^2)$

Tabelle 5.2: Abschätzung der Komplexitätsklassen für die einzelnen Berechnungsschritte des innovativen Algorithmus.

ermittelt. Das Lösen der linearen Ausgleichsrechnung kann bei der Betrachtung der asymptotischen Laufzeit vernachlässigt werden, da die Zahl der jeweils gegebenen Stützstellen gering ist; in der Regel werden weniger als 10 Stützstellen betrachtet. Die Berechnungsschritte einer Iteration sind unabhängig von der Anzahl der Iterationen T und fließen als Konstante in die Berechnung der Laufzeitkomplexität mit ein. Es werden T Iterationen durchgeführt. Die Laufzeitkomplexität ist somit in die Klasse $\mathcal{O}(T)$ einzuteilen. Die Anzahl der Iterationen bestimmt die Glätte der über den Algorithmus berechneten Form. Ein gutes Ergebnis wird bei $T = \frac{S}{1 \text{ mm}}$ erwartet, wobei S die Länge des Sensors angibt. Bei einer Sensorlänge von $S = 400 \text{ mm}$ ergibt sich für die Eingabelänge demnach der Wert $n = 400$.

Begründung für die Komplexitätsklasse von Schritt 4 II:

Die in *Schritt 4 II* vorgenommenen Berechnungen sind in Abschnitt 5.3.4 theoretisch hergeleitet. Auf Seite 73 ist die Berechnung als Algorithmus in sieben Schritten zusammengefasst. Es wird aus einer Punktmenge X eine glatte Oberfläche approximiert. Die Menge X besteht aus $|X|$ Elementen. Dabei bestimmt sich die Anzahl dieser Elemente aus dem vorherigen Berechnungsschritt *Schritt 3*. Zum einen ist $|X|$ von der vorgenommenen Anzahl an Iterationen T abhängig, zum anderen hängt $|X|$ von der Anzahl der in den vorgenommenen Ausgleichs-

rechnungen vorhandenen Stützstellen ab. Sei p die Anzahl der vorhandenen Stützstellen. Dann ergibt sich: $|X| = pT$. Typischerweise ist somit beispielsweise bei angenommenen 10 Stützstellen und einer Sensorlänge von 400 mm mit 4000 Elementen in X zu rechnen.

In *Schritt 1* wird für jedes der $|X|$ Elemente der Menge X eine Multiplikation durchgeführt. Die Komplexität der Berechnung in diesem Schritt ist demnach in die Klasse $\mathcal{O}(|X|)$ einzuordnen.

In *Schritt 2* werden Elemente aus der Menge X nach bestimmten Kriterien bestimmt. Die ausgewählten Elemente bilden eine neue Menge X_0 . Die Anzahl $|X|$ der Elemente in X entspricht der Eingabelänge für die Berechnung in *Schritt 2*. Die Anzahl J der Elemente der neuen Menge X_0 entspricht wiederum der Eingabelänge für die nächsten Berechnungsschritte des Algorithmus. Je aufwendiger das Verfahren zur Auswahl der Menge X_0 gewählt wird, desto weniger Elemente beinhaltet die Menge X_0 und desto geringer ist die Eingabelänge J für die Folgerechnungen. Die einfachste Bestimmung der Menge X_0 entspricht einer Übernahme aller Elemente aus X . Damit wäre die Berechnung von X_0 unabhängig von der Eingabelänge $|X|$ und in konstanter Laufzeit durchführbar. Allerdings ist J als Eingabelänge für die folgenden Berechnungsschritte in dem Fall maximal. Das Bestimmen einer minimalen Menge X_0 ist über einen gegenseitigen Vergleich aller Elemente in X möglich. Diese Berechnung wäre von einer Komplexität der Klasse $\mathcal{O}(|X|^2)$.

In *Schritt 3* wird für jedes Element in X_0 eine Basis bestimmt. Die Eingabelänge ist damit durch J als die Anzahl der Elemente in X_0 gegeben. Der Aufwand der Bestimmung einer Basis hängt von der Dimension m der Basis und von der Dimension n des Raumes, in dem die Basis gesucht wird, ab. Da die Werte für m und n in der betrachteten Formsensoranwendung, mit $m = 2$ und $n = 3$, jeweils sehr klein sind, kann die Berechnung der Basen in der Betrachtung der Komplexität von *Schritt 3* vernachlässigt werden. Die Berechnung der Basis wird J Mal für jedes der Elemente aus X_0 durchgeführt und ist selbst unabhängig von der Eingabelänge. Somit ergibt sich die Komplexitätsklasse $\mathcal{O}(J)$, wobei stets gilt: $J \leq |X|$.

In *Schritt 4-6* wird wie in *Schritt 3* jeweils für alle J Elemente in X_0 eine Berechnung durchgeführt, die selbst unabhängig von der Anzahl der Elemente X_0 vorgenommen wird. Demnach sind auch hier die Berechnungen in einer Laufzeit der Komplexität $\mathcal{O}(J)$ durchführbar.

In *Schritt 7* wird eine Funktion auf Elemente einer Umgebung $U_\delta(X)$ von X angewendet. Sei die Anzahl der hier betrachteten Elemente durch $|U_\delta(X)|$ bezeichnet. Im Allgemeinen gilt $|U_\delta(X)| > |X|$, wobei die Menge an betrachteten Elementen aus $U_\delta(X)$ frei wählbar ist. Die Berechnung in diesem Schritt ist in einer Laufzeit der Komplexität $\mathcal{O}(|U_\delta(X)|)$ durchführbar.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die Komplexität der Berechnung in *Schritt 4II* durch den *Schritt 2* des hier angewendeten Algorithmus bestimmt wird. Abhängig von der Wahl des hier verwendeten Verfahrens ergibt sich für die Berechnung von *Schritt 4 II* im schlechtesten Fall die Komplexitätsklasse $\mathcal{O}(pT^2)$, mit $|X| = pT$.

5.5 Implementierung in MATLAB

In diesem Abschnitt der Arbeit wird eine Implementierung des innovativen Algorithmus in MATLAB skizziert. Der Algorithmus wird zur Formrekonstruktion im Rahmen der im nächsten Kapitel 6 vorgestellten experimentellen Tests eingesetzt. Hier wird in Abschnitt 6.3 im zweiten Testteil die erste Formrekonstruktion bei freier Messstellenverteilung demonstriert. Die Problemstellung sowie die Sensorkonfigurationsparameter und die verwendete Variante des Algorithmus sind dementsprechend an den Formsensorenprototyp angepasst. Dabei wurde für die erste Anwendung ein möglichst einfacher Fall betrachtet. Die Implementierung hat nicht den Anspruch einer vollständigen Darstellung der vorgestellten Theorien, sondern soll zu Demonstrationszwecken der grundlegenden Sensorfunktionalität bei der freien Messstellenverteilung dienen. Als Variante des Algorithmus wurde folgende Schrittfolge gewählt (vgl. Abschnitt 5.4):



Diese Variante ermöglicht keine Erfassung der Sensoroberfläche. In *Schritt 3** wird der konventionelle Algorithmus herangezogen. Für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Tests ist diese Form der Implementierung ausreichend. Die angepasste Problemstellung mit gegebenen Sensorkonfigurationsparametern ist im Folgenden beschrieben (vgl. Abschnitt 5.1). Die Bezeichnungen sind analog zu den vorherigen Kapiteln und Abschnitten vorgenommen und zusätzlich in der Nomenklatur im Anhang A aufgeführt.

Angepasste Problemstellung für den Formsensorenprototyp

Inputdaten

Sensorkonfiguration:

$$S = 400 \text{ mm und } d = 6 \text{ mm}$$

$$P_i(s_i, r_i, \alpha_i, \beta_i), \forall i = 1, \dots, 24:$$

$$r_i = 1, \forall i = 1, \dots, 24.$$

$$\beta_i = 60^\circ, \forall i = 1, \dots, 24.$$

s_i und α_i wie in folgender Tabelle zusammengefasst:

FBG_i	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$
s_i	102 mm	126 mm	148 mm	171 mm	193 mm	214 mm
α_i	149,91°	130,82°	162,34°	190,98°	47,74°	207,21°
FBG_i	$i = 7$	$i = 8$	$i = 9$	$i = 10$	$i = 11$	$i = 12$
s_i	238 mm	126 mm	146 mm	168 mm	191 mm	212 mm
α_i	302,70°	76,39°	57,29°	350,45°	171,89°	76,39°

FBG_i	$i = 13$	$i = 14$	$i = 15$	$i = 16$	$i = 17$	$i = 18$
s_i	229 mm	247 mm	107,5 mm	171 mm	214 mm	255 mm
α_i	38,19°	283,60°	66,84°	95,49°	162,33°	188,11°
FBG_i	$i = 19$	$i = 20$	$i = 21$	$i = 22$	$i = 23$	$i = 24$
s_i	301 mm	126,5 mm	176 mm	220 mm	265 mm	304 mm
α_i	171,89°	226,31°	95,49°	105,04°	188,11°	312,25°

Anfangswertbedingungen:

$$s_0 = (0, 0, 0) \quad T_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \beta \end{pmatrix} \int \quad Ref = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix} \int$$

Messdaten:

Einmalig: $\lambda_i^0, \forall i = 1, \dots, 24$.

→ muss vor Sensoranwendung bei gerade ausgerichtetem Sensor gemessen werden.

In jedem Messzyklus: $\lambda_i, \forall i = 1, \dots, 24$.

Restriktionen

Freie FBG-Verteilung über den Sensorträgerkörper bei *ausreichend guter* Messstellenabdeckung.

Outputdaten

$C(s)$ mit $s \in [0, S]$ und separat $C(S)$ sowie $T(S)$, angegeben bezüglich der Anfangswertbedingungen.

Die Implementierung in MATLAB ist im Folgenden skizziert. Der Ablauf ist schrittweise über Ausschnitte des Quellcodes dargestellt.



MATLAB-Quellcode:

```
%% Input
2 %% Sensorconfiguration
  S=400; %Sensorlaenge
4 d=1; %Sensordurchmesser

6 I=24; %Anzahl der Messstellen

8 [r_i]=ones(24,1)*1; %Abstand zur Sensorachse
  [beta_i]=ones(24,1)*60; %Messstellenausrichtung
10 [s_i]=[ 120 ; 126 ; 148; ...

        220; 265; 304 ] %Messstellenpositionierungsparameter
16 [alpha_i]=[ 149.91 ; 130.82 ; 162.34...

        105.04; 188.11; 312.25 ] %Messstellenpositionierungsparameter
22 P=[r_i, [s_i], [alpha_i], [beta_i]]; %Messstellenpositionierung - ...
                                     Zusammenfassung
24 %% Anfangswertbedingungen
26 AWB=[s_0],[T_0],[Ref_0]; %Anfangswertbedingungen ...
                                     (Position und Ausrichtung am Sensoranfang)

28 %% Messdaten
  L_0=['Basiswellenlaengen.txt']; %Abrufen gespeicherter Werte fuer die ...
                                     Basiswellenlaengen
```



MATLAB-Quellcode:

```
getSensorData=getSensorData(); %Messdaten in jedem Messzyklus abrufen
34 Lambda=getSensorData('Wellenlaengenpeaks') %Wellenlaengen abspeichern
  Pow=getSensorData('Intensitaetswerte') %Zugehoerige Intensitaeten abspeichern
36 Innovativer_Algorithmus(S,d,P,AWB,L_0) %Schritt 1 bis Schritt 3*
```



MATLAB-Quellcode:

```

%% Innovativer_Algorithmus()
2 %% Schritt 1A
  k=0.78; %Definition des photoelastischen Koeffizienten
4 Strain=(Lambda-L_0)./(L_0.*k); %Berechnung der Messstellendehnung

6 %% Schritt 1B
  Tensor_Lambda=[P(4) ; Lambda ]; %Einstufige Tensoren definieren - ...
                                P(4) entspricht [beta_i]
8
  Diskretes_Tensorfeld=[Tensor_Lambda];[P(1),P(2),P(3)];
10 %Diskretes Tensorfeld definieren - [P(1),P(2),P(3)] entspricht ...
    [[r_i], [s_i], [alpha_i]]
  
```



MATLAB-Quellcode:

```

%% Schritt 2
14 Dichtes_Tensorfeld=Lineare_Extrapolation(Tensorfeld);
  %Dichtes Tensorfeld generieren ueber trilineare Extrapolation
  
```



MATLAB-Quellcode:

```

%% Schritt 3*
18 Daten_Konventionell=Daten_Vorbereiten(Dichtes_Tensorfeld)
  %Vorbereiten der Daten fuer die Anwendung des konventionellen Algorithmus
20
  Sensorachsenform=Konventioneller_Algorithmus(Daten_Konventionell);
22 %Anwendung des konventionellen Algorithmus zur Formschaetzung
  
```



MATLAB-Quellcode:

```
24 %% Output
    Plot_Sensorachsenform=get_Plot_Sensorachsenform(Sensorachsenform);
26 plot3(Plot_Sensorachsenform); %Plot der Sensorachsenform
    [Pos_TCP,T_TCP]=get_TCP_Sensorachsenform(Plot_Sensorachsenform);
28 Endeffektorkoordinaten=Pos_TCP; %Ausgabe der Koordinaten von C(S)
    Endeffektorausrichtung=T_TCP; %Ausgabe der Ausrichtung T(S) an der Sensorspitze
```

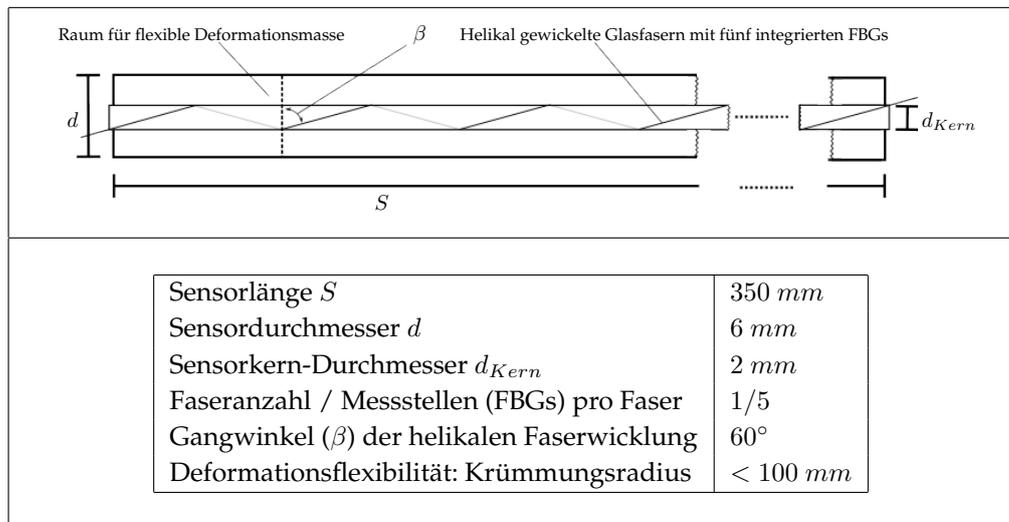
6 Prototypische Realisierung und experimentelle Evaluation

Die praktische Funktionalität des in dieser Arbeit theoretisch hergeleiteten innovativen Formsensorkonzeptes soll in diesem Kapitel über ausgewählte praktische Realisierungen getestet werden. Durch diese Tests wird das grundlegende Potential der innovativen FBG-Formsensorik herausgestellt. Die Evaluation der über die Sensorik erreichbaren räumlichen Genauigkeit von zu rekonstruierenden Formen wird dabei nicht getestet. Um eine bestmögliche Formbestimmung mittels innovativer FBG-Formsensorik über die Testsensoren zu erreichen, ist eine exakte Bestimmung der Sensorkonfigurationsparameter durch eine umfangreiche Kalibrierung vorzunehmen. Außerdem ist ein aufwendigeres Verfahren zur Bestimmung von Referenzformen notwendig, mit denen die berechneten Formen verglichen werden können. Die in den folgenden Tests verwendeten Formplatten eignen sich nur für die Auswertung des in dieser Arbeit betrachteten tendenziellen Sensorverhaltens. Diese und weitere Schritte zur Weiterentwicklung der innovativen FBG-Formsensorik sind in Kapitel 7 als zukünftige Arbeiten aufgeführt.

Im ersten Abschnitt 6.1 dieses Kapitels wird ein Realisierungskonzept der innovativen FBG-Formsensorik unter Ausnutzung der freien Messstellenverteilung vorgestellt. Die freie Verteilung der Messstellen wird über eine helikale Wicklung der FBG-Glasfasern um einen Sensorkern realisiert. Es werden drei Testsensoren entworfen. Die Konzeptionierung der Sensoren orientiert sich dabei an einer später angedachten Anwendung in der Medizintechnik. Die prototypische Fertigung der Sensoren wird in Abschnitt 6.2 beschrieben. In Abschnitt 6.3 werden mit den Prototypen verschiedene Experimente durchgeführt. Die Experimente sind in zwei Testteile unterteilt. Im ersten Testteil soll das grundlegende Verhalten der FBG-Messstellen bei Sensordeformation analysiert werden. Die Belastung der Fasern wird bei der hier vorgenommenen helikalen Faserführung im Vergleich zu der sonst umgesetzten parallelen Faserführung stark reduziert. Damit ist die Deformationsflexibilität des Sensors erhöht. Jedoch ist zu zeigen, dass auch bei der geringeren zu messenden Dehnung signifikantes und modellkonformes Verhalten in den Messdaten auftritt. Sind die gemessenen Dehnungen bei Verformung des Sensors über die in den vorherigen Kapiteln aufgestellten Deformationsmodelle beschreibbar, so ist die grundsätzliche Funktionalität der innovativen FBG-Formsensorik nachgewiesen. Diese Experimente des ersten Testteils sind unabhängig von der Sensordatenfusion zur Formrekonstruktion. In einem zweiten Testteil wird die Formrekonstruktion in Form einer ersten Realisierung der Sensorik beispielhaft demonstriert. Eine Implementierung des Algorithmus nach dem in dieser Arbeit vorgestellten Konzept wird auf die Messdaten angewendet. Gezeigt wird, dass der Sensor prinzipiell grundlegende Deformationen eindeutig erkennt.

6.1 Konzept für die prototypische Realisierung

Für die experimentelle Auswertung der entwickelten innovativen FBG-Formsensorik werden drei verschiedene Testsensoren herangezogen. Im Folgenden wird die Konzipierung dieser Sensoren vorgestellt. Für den ersten Testteil werden zwei Testsensoren *Testsensor 1* und *Testsensor 2* konzipiert. Hier ist keine Datenfusion zur Formschatzung vorgesehen. Das Verhalten einzelner Messstellen soll separat analysiert werden. Daher ist eine Ausstattung der Testsensoren für diesen Testteil mit wenigen Messstellen ausreichend. Da die FBG-Fasern die mit Abstand teuersten Komponenten des Formsensors darstellen, kann durch die Reduktion der Messstellen an Materialkosten gespart werden. Die Ausrichtung beider Testsensoren orientiert sich an einer später angedachten Formsensoranwendung in der Urologie. Ein Ureterorenoskop wird hier als Beispielinstrument herangezogen. *Testsensor 1* entspricht dabei einer Standardrealisierung der Sensorik. *Testsensor 2* soll einen Extremfall einer Umsetzung darstellen. Mit einem hohlen Sensorkanal, durch den das Instrument geführt werden kann, hat der Sensor einen besonders großen Durchmesser, sodass ein sehr geringer Gangwinkel bei der helikalen Faserwicklung vorgenommen werden muss. Im zweiten Testteil soll die Messdatenfusion über einen ersten innovativen Rekonstruktionsalgorithmus betrachtet werden. Dafür ist der für diesen Testteil konstruierte *Formsensorprototyp* mit einer entsprechend hohen Anzahl an Messstellen ausgestattet. Der prinzipielle Aufbau wird von *Testsensor 1* übernommen.

Tabelle 6.1: *Testsensor 1*: Konfigurationsparameter.

Konzeptionierung Testsensor 1

Der *Testsensor 1* soll in der Länge, im Durchmesser sowie in der Deformationsflexibilität den später angedachten Anwendungen angepasst sein. Als beispielhafte Anwendung wird ein flexibles Ureterorenoskop der Firma *KARL STORZ* herangezogen. Dieses flexible Endoskop wird bei minimal-invasiven Operationen in der Urologie eingesetzt. Genauer zu dieser Sensoranwendung ist in Abschnitt 2.2 beschrieben, ein Bild des flexiblen Ureterorenoskopes ist in Abbildung 2.9 (mittig) auf Seite 20 zu sehen. Die Nutzlänge eines solchen Instrumentes beträgt 700 mm. Es hat einen Außendurchmesser von 2,83 mm und einen Arbeitskanal vom Durchmesser von 1,2 mm [KAR16a]. Eine Deformationsflexibilität ist in der bekannten Quelle nicht angegeben. Eine mögliche Krümmung des Arbeitskanals mit Krümmungsradien um die 80 mm sind hier als Richtwert angenommen. Die Maße des Testensors sind an diesen Werten orientiert. Aus Gründen einer besseren Handhabung bei der Durchführung der Experimente wurde der Sensor mit einer etwas dickeren zusätzlichen Schutzhülle überzogen. Für den *Testsensor 1* soll eine Faser mit 5 FBGs helikal mit einer Steigung von 60 Grad um einen Sensorkern geführt werden. Der Sensorkern hat einen Durchmesser von 2 mm und eine Länge von 350 mm. Zwischen Sensorkern mit Faserumwicklung und Schutzhülle soll eine flexible Masse eingebracht werden, die bei Sensordeformation eine Materialdehnung auf die Faser überträgt. Als Material eignet sich hier beispielsweise Silikon. Die genauen Sensormaße sind in Tabelle 6.1 zusammengefasst.

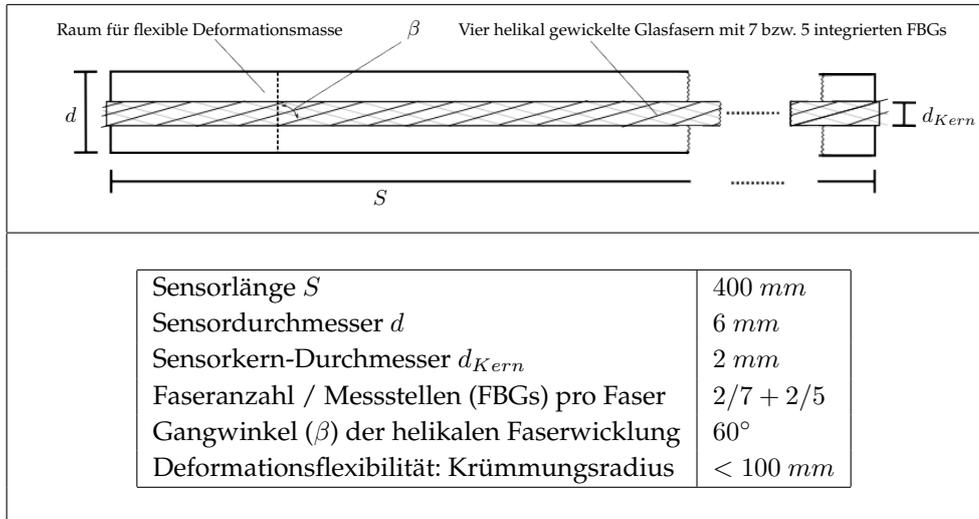


Tabelle 6.3: *Formsensorprototyp*: Konfigurationsparameter.

Konzeptionierung Formsensorprototyp

Der *Formsensorprototyp* soll zur Rekonstruktion der Form über Anwendung der Algorithmen verwendet werden. Der Sensor soll von den Maßen, den Materialien und der Realisierungsform dem *Testsensor 1* entsprechen. Anforderungen an die Verteilung und Anzahl der Sensorfasern bzw. eingeschriebenen FBGs sind in der innovativen FBG-Formsensorik nicht gegeben. Für ein gutes Formergebnis der Rekonstruktion ist eine hohe Anzahl an Messstellen und eine gleichmäßige Verteilung dieser über den Trägerkörper vorteilhaft. Eine über den Interrogator maximal gleichzeitig auslesbare Anzahl an vier Fasern wird eingebaut. Die Anzahl der FBGs pro Faser soll möglichst hoch sein. Neu ist, dass sich die Anzahl der FBGs der einzelnen Fasern nicht entsprechen muss; es sollen zwei Fasern mit je fünf FBGs und zwei Fasern mit je sieben FBGs verwendet werden. Für die Anwendung der Algorithmen müssen die in Abschnitt 5.1 definierten Sensorkonfigurationsparameter bekannt sein. Neben der Sensorkernlänge und dem Sensordurchmesser muss die Position und Ausrichtung der FBGs auf dem Sensor angegeben werden. Diese Angabe wird über die fünf Parameter s_i , r_i , α_i , β_i , und γ_i (vgl. Abbildung 5.1 auf Seite 40) vorgenommen. Die Positionen der FBGs auf den Fasern sind vom Hersteller angegeben und bekannt. Nach Sensorfertigung werden die Sensorkonfigurationsparameter über diese Informationen bezüglich der Fasern und über das händische Vermessen des Sensors berechnet und abgemessen. Die dabei entstehende Ungenauigkeit in den Parameterwerten wird für die anstehenden Tests hingenommen. In Zukunft können die Werte über verschiedene Kalibrier- und Lernalgorithmen optimiert werden. Die genauen Spezifikationen zu dem *Formsensorprototyp* sind in Tabelle 6.3 gegeben.

6.2 Prototypische Realisierung

In diesem Abschnitt der Arbeit werden die für die prototypische Herstellung verwendeten Materialien und das Herstellungsverfahren beschrieben. Die Zusammenstellung der verwendeten Materialien besteht sowohl aus den Bestandteilen der Sensoren, als auch aus den für die Herstellung benötigten Hilfsmaterialien und Hilfsmitteln. Über das Herstellen einer Testreihe von Sensormodellen unter Verwendung von kostengünstigen Glasfasern ohne eingeschriebene FBG-Strukturen, wurde die Auswahl der Materialien zuvor auf die Tauglichkeit zur Verwendung in der Formsensoren getestet und das entwickelte Herstellungsverfahren optimiert. Der Zeit- und Kostenaufwand, der bei der Sensorherstellung anfällt, ist im Anschluss an die Beschreibung der Materialien und der Herstellungsmethodik aufgeführt. Anschließend wird die Fertigung von drei Prototypen, umgesetzt nach den in Abschnitt 6.1 gegebenen Sensorkonzepten, beschrieben. Eine abschließende Bewertung der Prototypen und ein Vergleich mit nach herkömmlicher Art gebauten Formsensoren sind schließlich gegeben.

6.2.1 Materialien

Die in Kapitel 2 beschriebenen FBG-Glasfasern stellen die Hauptkomponente des FBG-Formsensors dar. In einer Faser sind standardmäßig bis zu sieben FBG-Strukturen eingeschrieben. Das zur Verfügung stehende Datenlesegerät, der Interrogator, hat vier Eingangskanäle, womit die maximale Anzahl der in einen Formsensoren integrierbaren Fasern auf diese Stückzahl begrenzt ist. Die für die Testsensoren verwendeten Fasern sind bezogen von der Firma *FBGS Technologies GmbH*. Es werden mit *Draw Tower Gratings* beschriebene *Low Bend Loss single mode* Fasern, optimiert für einen Wellenlängenbereich von $1550\text{ nm} \pm 50\text{ nm}$ (DTG[®]-LBL-1550-125) und mit einem Überzug aus ORMOCER[®], eingesetzt. Die Fasern haben einschließlich des Überzugs einen Durchmesser von $125\text{ }\mu\text{m}$. Der Formsensorträgerkörper besteht aus einem verbiegbaren Sensorkern, um den die Fasern helikal gewickelt werden. Die Fasern werden dabei an diskreten Stellen, in Bereichen zwischen den eingeschriebenen Strukturen, über dünne Schrumpfschläuche fixiert. Der Sensorkern besteht entweder aus einem dünnen, transparenten Acrylstab oder, bei der hohlen Sensorausführung, aus einem weichen, farblosen PVC-Rundschlauch. Auch als Schutzhülle wird jeweils ein solcher PVC-Rundschlauch mit größerem Durchmesser verwendet. Zwischen die Plastikschauchhülle und den Sensorkern mit Faserumwicklung wird Silikon gegossen. Das verwendete Silikon *ELASTOSIL[®] VARIO 40* ist ein Zweikomponenten-Silikon der Shore A Härte 40, hergestellt von der Firma *Wacker Chemie AG*. Zum Schutz der Fasern an den Sensorenden, an denen die Faser aus dem Trägerkörper austritt, werden Schrumpfschläuche und Kabelbündelschläuche eingesetzt.

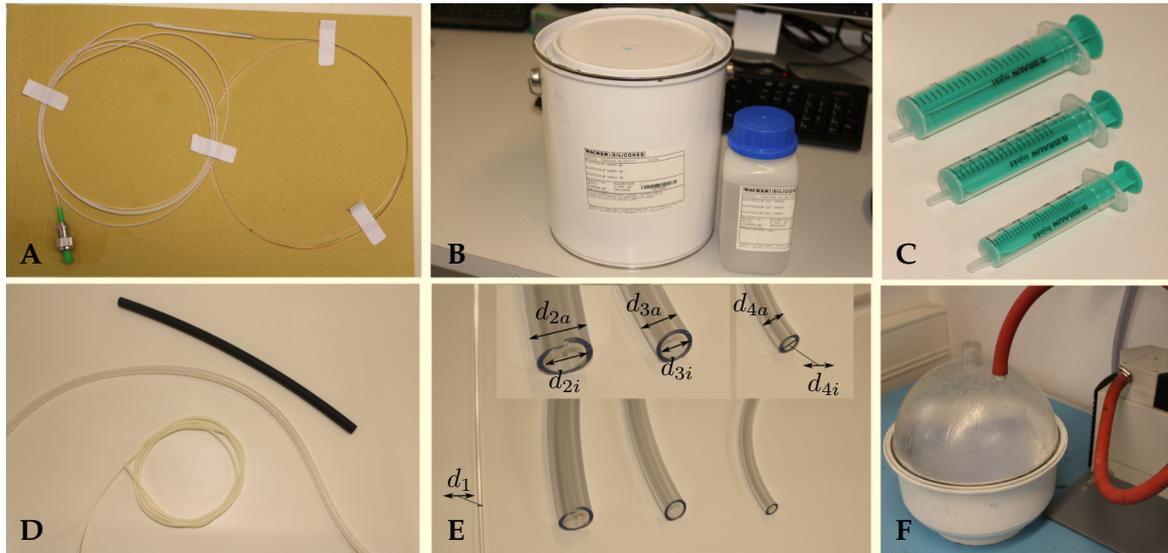


Abbildung 6.1: Verwendete Materialien und benötigtes Equipment für die Sensorprototypen: A - FBG-Glasfaser, B - Zweikomponentensilikon *ELASTOSIL*[®] *VARIO 40*, C - Spritzen, D - Schrumpfschläuche und Kabelbündelschläuche, E - Plastikstab mit Durchmesser $d_1 = 2 \text{ mm}$ und PVC-Rundschläuche mit Durchmesser innen $d_{2i} = 12 \text{ mm}$, $d_{3i} = 8 \text{ mm}$ und $d_{4i} = 4 \text{ mm}$ und Durchmesser außen von $d_{2a} = 15 \text{ mm}$, $d_{3a} = 10 \text{ mm}$ und $d_{4a} = 6 \text{ mm}$, F - Vakuumlöcke.

Um die Sensoren herzustellen, wird für den Aufbau bestimmtes Equipment genutzt. Zum Einbringen der Silikonmasse zwischen Sensorkern und Schutzhülle werden Standard-Injektionspritzen vom Hersteller *B. Braun Melsungen AG* verwendet. Bei dem Mischvorgang der Zweikomponenten-Silikone wird eine Vakuumlöcke eingesetzt, um Luftbläschen aus dem Silikon zu ziehen. Um die Fasern vorab an den Stellen der FBGs durch Einfärbung zu kennzeichnen, werden wasserfeste Marker benötigt. In Abbildung 6.1 sind die verwendeten Materialien und das Equipment abgebildet.

6.2.2 Fertigungsprozess

Die Sensorfertigung beinhaltet drei Herstellungsschritte. Im ersten Schritt werden die verwendeten Glasfasern um den Sensorkern gewickelt. Um eine gleichmäßige Wicklung zu realisieren, wird die Faser an einigen Stellen, an denen sich keine FBGs befinden, über Schrumpfschläuche am Faserkern fixiert. Im zweiten Schritt wird die Sensorschutzhülle um den Kern gestülpt. Zwischen Hülle und Kern wird angemischtes Silikon eingespritzt. Das Anmischen des Silikons beinhaltet das gründliche Verrühren der zwei Silikonkomponenten im richtigen Mischungsverhältnis und ein anschließendes Entfernen der durch das Rühren entstandenen Luftbläschen im Silikon, über den Einsatz einer Vakuumglocke. Das Aushärten des Silikons dauert je nach Sensordicke bis zu 24 Stunden. Im letzten Herstellungsschritt wird der Sensor durch Applikationen am Sensoranfang und am Sensorende über Schrumpfschläuche und Kabelbündelschläuche geschützt. Dieser Schutz verhindert das Abbrechen der Fasern an den Kanten des Sensorausgangs beim Sensoreinsatz während der Experimente.

6.2.3 Material-, Zeit- und Kostenaufwand

Bei der Aufführung des Material- und Kostenaufwandes sind sowohl die FBG-Fasern als auch die Materialien für den Sensorträgerkörper, sowie die Materialien für den Sensorschutz miteinzubeziehen. Hinzu kommt das für die Herstellung benötigte Equipment. Hierzu gehören unter anderem Spritzen, Mischbehälter, Rührstäbe und Markierfarben. Weiter wird eine Standard-Laboraausstattung mit Werkzeugen sowie beispielsweise einer Industriewaage, einer Vakuumglocke und Schutzausrüstung benötigt. Hier nicht aufgeführt, aber bei Betrachtung des gesamten Sensorsystems dazugehörend, sind der Interrogator (verwendetes Datenlesegerät von *FBGS Technologies GmbH* etwa 20 000 € (Kaufpreis 2011)) und die verwendete Software (hier fallen die gängigen Lizenzgebühren für MATLAB an). In Tabelle 6.4 ist der Aufwand an Material und Equipment zusammengefasst. Die Kosten für die Sensormaterialien sind in Tabelle 6.5 separat aufgelistet. Der Zeitaufwand für die prototypische Herstellung setzt sich aus den tatsächlichen Arbeitsstunden und den Wartezeiten für das Aushärten des Silikons zusammen. In Tabelle 6.6 ist der zeitliche Aufwand aufgeschlüsselt.

Insgesamt ist die prototypische Herstellung sowohl in relativ kurzer Zeit sowie mit geringen anfallenden Kosten und leicht beziehbarem Standardequipment umsetzbar. Die teuerste Komponente stellen die FBG-Glasfasern selbst dar. Über die vorgestellte Fertigungsmethode lassen sich für grundlegende Sensortests zufriedenstellende Prototypen herstellen. Das Verfahren ist dementsprechend geeignet für den Zweck dieser Arbeit.

Materialaufwand

FBG-Glasfasern (FBG-Strukturen)	1 – 4 Stk./Sensor
Silikon	3 – 7 ml
Silikonfarbe	0,5 ml
Rundstäbe aus Acrylglas	330 mm
PVC-Rundschläuche	330 – 400 mm
Kabelbündelschläuche	50 – 100 mm
Schrumpfschläuche	ca. 10 cm

Equipment

Spritzen	1 – 4 Stk./Sensor
Heißkleber (zum Abdichten)	nach Bedarf
Mischbehälter/Rührstäbe	je 1 Stk./Sensor
Klebeband (zum Fixieren)	nach Bedarf
Stifte (wasserfester Marker)	2 Farben

Weitere Laborausstattung

Werkzeuge (Skalpell, Seitenschneider, Schere, Maßstab)
Vakuumglocke
Heißluftpistole
Industriewaage
Schutzmittel (Handschuhe, Schutzbrille, Atemmaske)

Tabelle 6.4: Materialaufwand beim Sensorprototyping.

Materialkosten

FBG-Glasfasern	€ 70 – 130 / <i>Stk.</i>
Silikon	€ 37,11 / 1000 <i>ml</i>
Silikonfarbe	€ 6 / 1 <i>ml</i>
Rundstäbe Acrylglas	€ 1,70 / 100 <i>cm</i>
PVC-Rundschläuche	€ 1,80 / 100 <i>cm</i>
Kabelbündelschläuche	€ 0,60 / 100 <i>cm</i>
Schrumpfschläuche	€ 1,33 / 120 <i>cm</i>

Tabelle 6.5: Kostenaufwand für einen Sensorprototypen.

Zeitaufwand

Vorbereitung: Fasern markieren	10 <i>Min.</i> / <i>Faser</i>
Präparation: Fixieren der Fasern um den Sensorkern	<i>Eine Faser: 20 Min.</i> <i>Vier Fasern: 90 Min.</i>
Silikon anmischen und einfärben	10 <i>Min.</i>
Eingießen mit Silikon	2 <i>Min.</i>
Aushärtezeit (Wartezeit)	24 <i>Std.</i>
Schutzvorrichtung montieren	10 <i>Min.</i>

Tabelle 6.6: Zeitaufwand für die Herstellung eines Sensorprototypen.

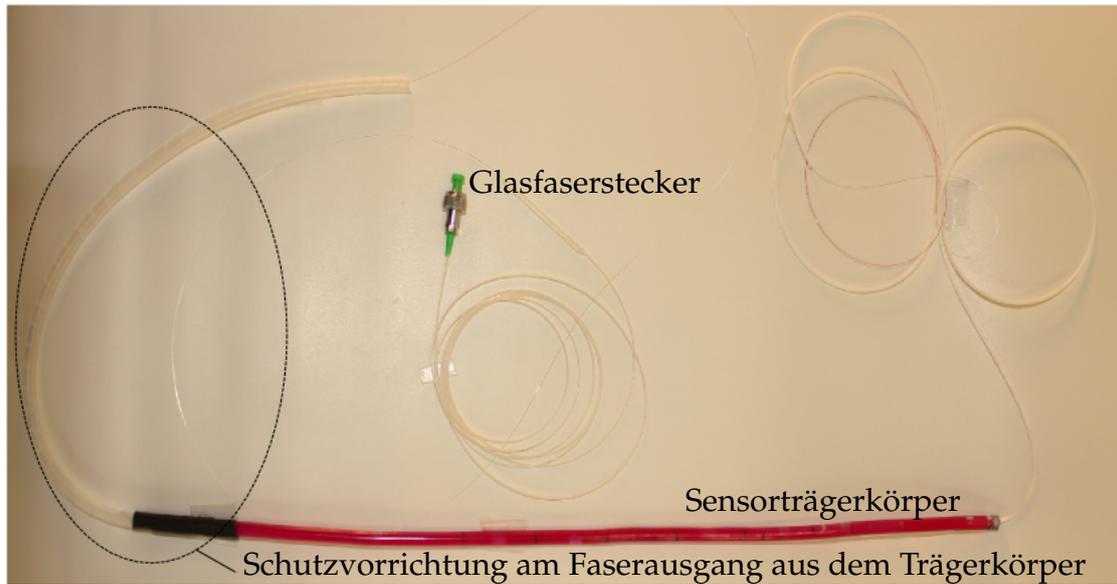


Abbildung 6.2: Testsensor 1.

6.2.4 Fertigung der Prototypen

Die in diesem Kapitel in den letzten Abschnitten konzipierten Sensoren wurden nach der vorgestellten Fertigungsmethode hergestellt. Die Ergebnisse sind im Folgenden beschrieben. Die Sensormäße wurden dabei aus den Tabellen 6.1, 6.2 und 6.3 übernommen.

Vorstellung Testsensor 1

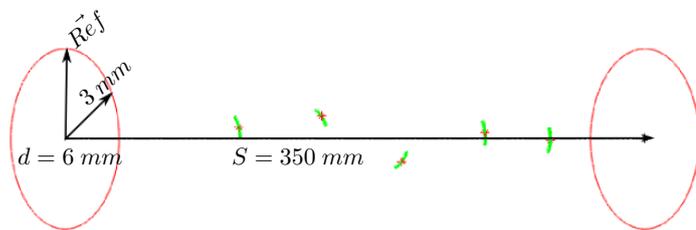
Für den *Testsensor 1* wurde als Sensorkern ein 350 mm langer Acrylstab mit einem Durchmesser von 2 mm verwendet. Die Schutzhülle aus einem PVC-Rundschlauch gleicher Länge hat einen Innendurchmesser von 4 mm und einen Außendurchmesser von 6 mm. Die Faser ist helikal mit einem Gangwinkel von 60° um den Kern gewickelt. Bevor die Faser um den Kern gewickelt und fixiert wird, wird die Faser an den Stellen der FBGs farblich markiert. Um die dunklen Fasermarkierungen besser erkennen zu können, wurde das Silikon vor dem Einspritzen zwischen Sensorkern und Hülle eingefärbt. Für *Testsensor 1* wird die Farbe Rot verwendet. Eine (DTG[®]-LBL-1550-125)-Faser mit fünf FBG-Strukturen ist in den Sensor integriert. Die FBGs haben eine Länge von 8 mm und sind mit einem Abstand von jeweils 50 mm zwischen den FBG-Mittelpunkten auf der Faser verteilt. Die Basiswellenlängen liegen gleichmäßig verteilt im Bereich 1510 – 1590 nm. In Abbildung 6.2 ist der Testsensor abgebildet. Die nach der Sensorherstellung händisch ermittelten Sensorparameter sind in Tabelle 6.7 gegeben (Bezeichnungen vgl. Abschnitt 5.1 und Abbildung 5.1 auf Seite 40).

Sensorparameter - Testsensor 1

Sensorenlänge $S = 350 \text{ mm}$ und Sensordurchmesser $d = 6 \text{ mm}$.
 $i = 1, \dots, I$ mit $I = 5$, als Gesamtanzahl der integrierten FBGs.
 $\forall i = 1, \dots, I$ gilt:
 $r_i = \frac{d_{\text{Kern}}}{2} = 1 \text{ mm}$, als konstanter Abstand der FBGs zur Sensorachse.
 $\beta_i = 60^\circ$, entspricht dem Gangwinkel der helikalen Faserwicklung.
 $\gamma_i = 0^\circ$; es ist keine Verkippung in Richtung Sensorachse angenommen.
 $s_i \in [0, S]$, mit $S = 350 \text{ mm}$ als Sensorenlänge.
 $\alpha_i \in [0, 360]$, angegeben in Grad, bzgl. einer Referenzrichtung \vec{Ref} .

Faser 1

FBG_i	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
s_i	95 mm	148,5 mm	196 mm	243 mm	282,5 mm
α_i	72,57°	99,3°	0°	61,11°	45,84°



Skizze der FBG-Verteilung über den Sensor.

Tabelle 6.7: Testsensor 1: Händisch ermittelte Sensorparameter.

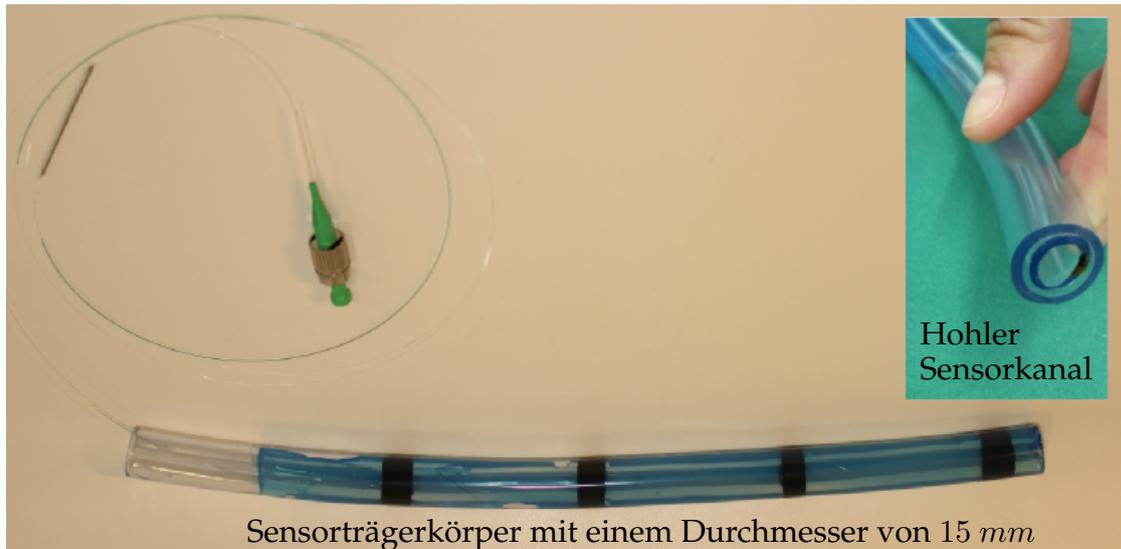


Abbildung 6.3: Testsensor 2.

Vorstellung Testsensor 2

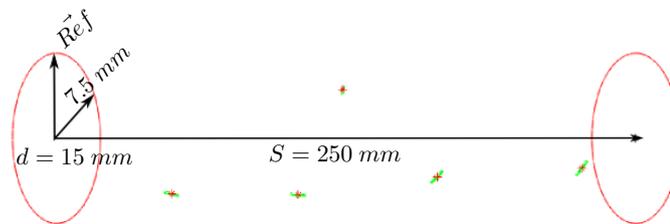
Die Möglichkeit der praktischen Umsetzung hohler Sensoren ist über *Testsensor 2* realisiert. Hier wurde als Sensorkern ein PVC-Rundschlauch mit Innendurchmesser von 8 mm und Außendurchmesser von 10 mm verwendet. Der als Schutzhülle verwendete PVC-Rundschlauch hat einen Innendurchmesser von 12 mm und einen Außendurchmesser von 15 mm . Die Faser ist helikal mit einem Gangwinkel von 30° um den Kern gewickelt. Der Sensor wurde blau eingefärbt. Eine (DTG[®]-LBL-1550-125)-Faser mit fünf FBG-Strukturen ist in den Sensor integriert. Die FBGs haben eine Länge von 5 mm und sind mit einem Abstand von jeweils 34 mm zwischen den FBG-Mittelpunkten auf der Faser verteilt. Die Basiswellenlängen liegen gleichmäßig verteilt im Bereich $1510 - 1590\text{ nm}$. In Abbildung 6.3 ist der Testsensor abgebildet. Die nach der Sensorherstellung händisch ermittelten Sensorparameter sind in Tabelle 6.8 gegeben (Bezeichnungen vgl. Abschnitt 5.1 und Abbildung 5.1 auf Seite 40).

Sensorparameter - Testsensor 2

Sensordlänge $S = 250 \text{ mm}$ und Sensordurchmesser $d = 15 \text{ mm}$.
 $i = 1, \dots, I$ mit $I = 5$, als Gesamtanzahl der integrierten FBGs.
 $\forall i = 1, \dots, I$ gilt:
 $r_i = \frac{d_{\text{Kern}}}{2} = 7,5 \text{ mm}$, als konstanter Abstand der FBGs zur Sensorachse.
 $\beta_i = 30^\circ$, entspricht dem Gangwinkel der helikalen Faserwicklung.
 $\gamma_i = 0^\circ$; es ist keine Verkippung in Richtung Sensorachse angenommen.
 $s_i \in [0, S]$, mit $S = 250 \text{ mm}$ als Sensordlänge.
 $\alpha_i \in [0, 360]$, angegeben in Grad, bzgl. einer Referenzrichtung \vec{Ref} .

Faser 1

FBG_i	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
s_i	52 mm	105,5 mm	130 mm	155,5 mm	216 mm
α_i	321, 80°	329, 44°	183, 34°	19, 10°	30, 55°



Skizze der FBG-Verteilung über den Sensor.

Tabelle 6.8: Testsensor 2: Händisch ermittelte Sensorparameter.

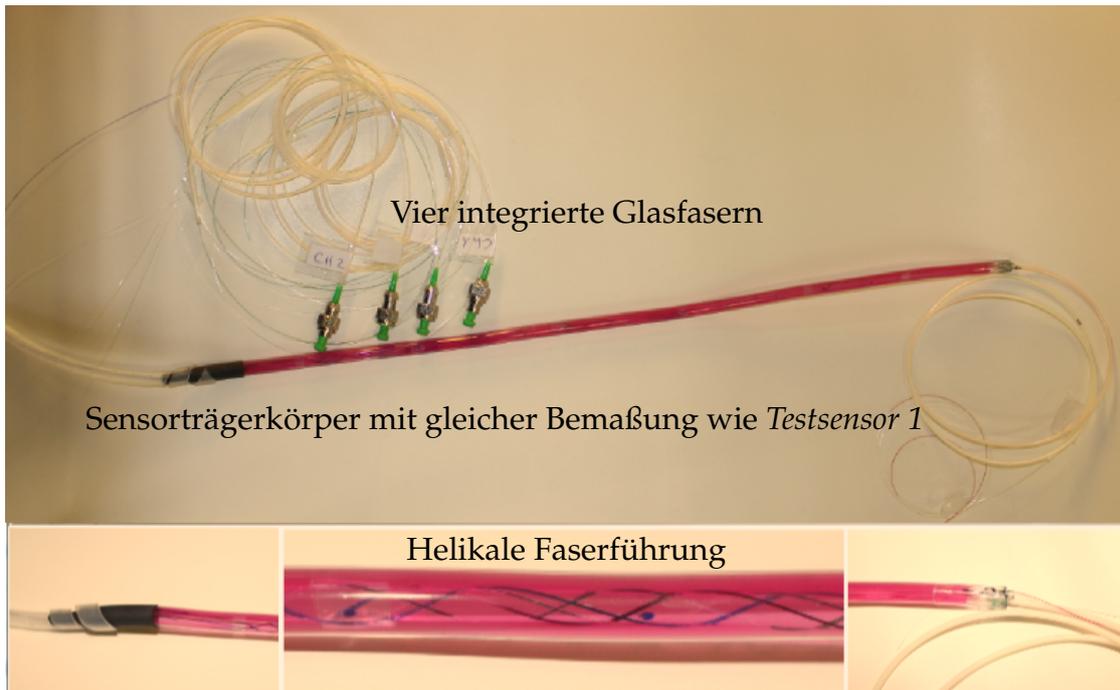


Abbildung 6.4: Formsensorenprototyp.

Vorstellung Formsensorenprototyp

Für eine erste Realisierung eines Formsensors mit einer ausreichend hohen Anzahl an Messstellen, um eine Formrekonstruktion zu ermöglichen, ist eine Realisierungsform analog zum *Testsensor 1* gewählt. Eine entsprechende Herstellung mit gleichen Materialien für den Trägerkörper wird kombiniert mit insgesamt vier (DTG[®]-LBL-1550-125)-Fasern. Zwei Fasern sind dabei mit je sieben FBG-Strukturen ausgestattet, wobei die Länge der FBGs 5 mm beträgt und die Strukturen mit einem Abstand von jeweils 84 mm zwischen den FBG-Mittelpunkten auf der Faser verteilt liegen. In die zwei weiteren Fasern sind je fünf FBGs mit einer Länge von 5 mm integriert, die mit einem Abstand von jeweils 50 mm zwischen den FBG-Mittelpunkten auf der Faser verteilt sind. Die Basiswellenlängen liegen bei allen Fasern gleichmäßig verteilt im Bereich $1510 - 1590\text{ nm}$. Der Gangwinkel der helikalen Wicklung der Fasern wird mit 60° umgesetzt. Der Sensor wurde wie *Testsensor 1* rot eingefärbt. Die in Tabelle 6.3 geplanten Sensorparameter wurden bei der Sensorfertigung umgesetzt. Die Parameter zur Angabe der Messstellenpositionen auf dem Sensor sind wie bei den Testsensoren nach der Sensorherstellung händisch abgemessen und in Tabelle 6.9 gegeben (Bezeichnungen vgl. Abschnitt 5.1 und Abbildung 5.1 auf Seite 40).

Sensorparameter - Formsensorprototyp

Sensordlänge $S = 400 \text{ mm}$ und Sensordurchmesser $d = 6 \text{ mm}$.
 $i = 1, \dots, I$ mit $I = 24$, als Gesamtanzahl der integrierten FBGs.
 $\forall i = 1, \dots, I$ gilt:
 $r_i = \frac{d_{\text{Kern}}}{2} = 1 \text{ mm}$, als konstanter Abstand der FBGs zur Sensorachse.
 $\beta_i = 60^\circ$, entspricht dem Gangwinkel der helikalen Faserwicklung.
 $\gamma_i = 0^\circ$; es ist keine Verkippung in Richtung Sensorachse angenommen.
 $s_i \in [0, S]$, mit $S = 400 \text{ mm}$ als Sensordlänge.
 $\alpha_i \in [0, 360]$, angegeben in Grad, bzgl. einer Referenzrichtung \vec{Ref} .

Faser 1

FBG_i	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$
s_i	102 mm	126 mm	148 mm	171 mm	193 mm	214 mm	238 mm
α_i	149, 91°	130, 82°	162, 34°	190, 98°	47, 74°	207, 21°	302, 70°

Faser 2

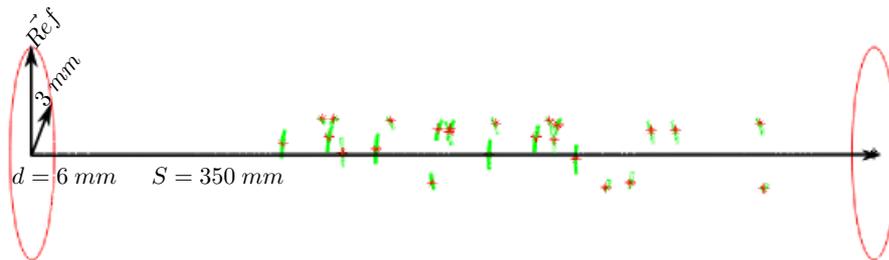
FBG_i	$i = 8$	$i = 9$	$i = 10$	$i = 11$	$i = 12$	$i = 13$	$i = 14$
s_i	126 mm	146 mm	168 mm	191 mm	212 mm	229 mm	247 mm
α_i	76, 39°	57, 29°	350, 45°	171, 89°	76, 39°	38, 19°	283, 60°

Faser 3

FBG_i	$i = 15$	$i = 16$	$i = 17$	$i = 18$	$i = 19$
s_i	107, 5 mm	171 mm	214 mm	255 mm	301 mm
α_i	66, 84°	95, 49°	162, 33°	188, 11°	171, 89°

Faser 4

FBG_i	$i = 20$	$i = 21$	$i = 22$	$i = 23$	$i = 24$
s_i	126, 5 mm	176 mm	220 mm	265 mm	304 mm
α_i	226, 31°	95, 49°	105, 04°	188, 11°	312, 25°



Skizze der FBG-Verteilung über den Sensor.

Tabelle 6.9: Formsensorprototyp: Händisch ermittelte Sensorparameter.

6.2.5 Bewertung der Ergebnisse der prototypischen Sensorherstellung

Drei Sensorprototypen mit helikaler Wicklung wurden hergestellt und können für Experimente eingesetzt werden. Schon vor den experimentellen Tests können nach der Sensorfertigung Vorteile in der innovativen Art der Formsensorealisierung festgestellt werden. In Abbildung 6.5 ist das Verhalten von zwei Modellen bei gleicher Verformung demonstriert. Abgebildet ist ein Modell mit herkömmlicher parallel geführter Faser (links) und eines mit einer helikal gewickelten Faser (rechts). Es fällt auf, dass die parallele Faser sich bei Sensorbiegung stark wellt. Die helikal gewickelte Faser scheint sich kontrolliert und bestimmt durch die Deformation des Trägerkörpers zu verhalten. Ein weiterer Vorteil der innovativen FBG-Formsensorik ergibt sich aus dem Fertigungsprozess. Der innovative Ansatz macht es erstmals möglich, den Formsensor mit einer beliebigen Anzahl an frei über den Sensorträgerkörper verteilten Messstellen zu bestücken. Die Sensorherstellung ist dadurch deutlich einfacher, da die Fasern beliebig um den Sensorkern gewickelt werden können und nur auf eine möglichst gleichmäßige Verteilung geachtet werden sollte. Der Algorithmus kann auf jede sich aus der Herstellung ergebende Kombination an Sensorkonfigurationsparametern eingestellt werden. Durch die beliebige Anzahl an FBGs ist es auch nicht mehr notwendig, Fasern mit gleicher Anzahl an FBGs und gleichen Abständen dieser auf den Fasern zu verwenden. Die unterschiedlichen Ergebnisse der verschiedenen Realisierungsformen ist in Abbildung 6.6 skizziert. Das obere Bild zeigt die Messstellenverteilung bei dem in diesem Abschnitt vorgestellten *Formsensorprototyp* mit vier Fasern und insgesamt 24 FBGs. Das untere Bild entspricht einer Realisierung bei paralleler Faserführung von drei Fasern mit je fünf FBGs und Positionierung von je drei FBGs auf gleichen Sensor-Querschnittsebenen. Die untere Realisierung ist offensichtlich schwer praktisch exakt umsetzbar.

Die für die spätere Formrekonstruktion benötigten Sensorkonfigurationsparameter sind im Nachhinein händisch bestimmt und beinhalten entsprechend hohe Fehler, die als Fertigungsungenauigkeiten klassifiziert werden können. Diese Fertigungsungenauigkeiten können zukünftig über Kalibrierverfahren eliminiert werden. Es handelt sich hierbei um einen systematischen Fehler, der gut zu ermitteln ist. In dieser Arbeit ist die Kalibrierung der

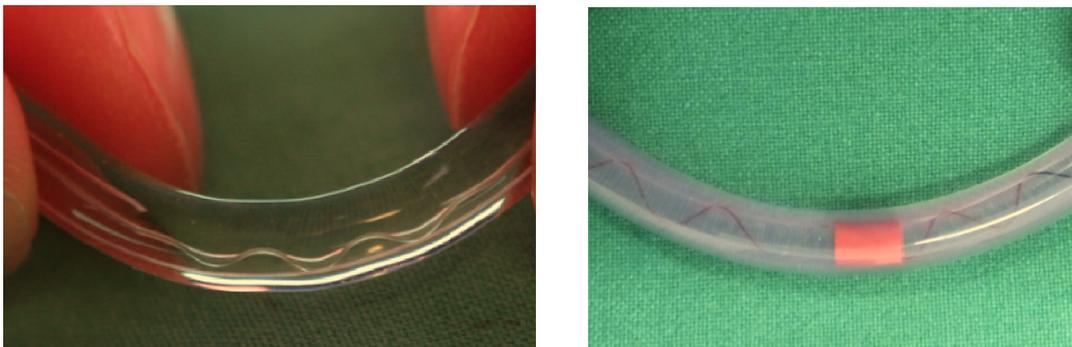


Abbildung 6.5: Vergleich der konventionellen Sensorik mit paralleler Faserführung [Pau13] (links) und der innovativen Sensorrealisierung (rechts): Unterschiedliches Faserverhalten bei gleicher Sensordeformation.

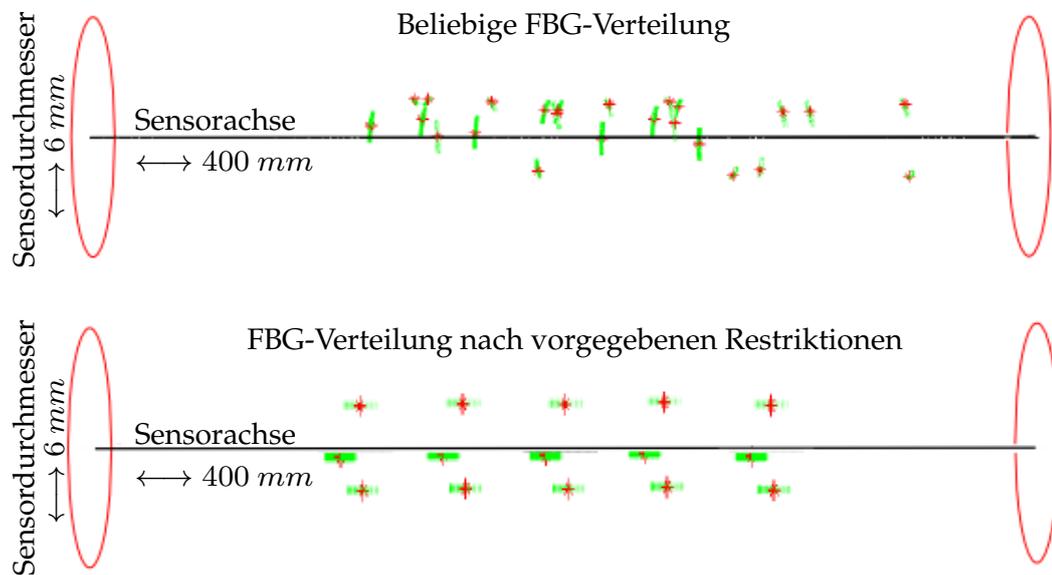


Abbildung 6.6: Darstellung der freien FBG-Verteilung bei innovativer FBG-Formsensorik (oben) und FBG-Verteilung unter vorgegebenen Restriktionen bei konventioneller FBG-Formsensorik (unten).

Sensorik nicht thematisiert und die Formberechnungen werden mit den händisch ermittelten Werten durchgeführt. Zum Zweck der Evaluation der grundsätzlichen Sensorfunktionalität, ohne Anspruch an hohe räumliche Genauigkeit bei der Formerkennung, ist das Verwenden dieser grob ermittelten Werte als ausreichend angesehen.

6.3 Praktische Sensorevaluation - Messdatenanalyse

In den hier beschriebenen Testreihen wird die grundlegende praktische Realisierbarkeit der Sensoren evaluiert. Die Vorteile der helikalen Wicklung und der Möglichkeit freier Messstellenverteilung sind in Kapitel 4 beschrieben und wurden bereits bei der Herstellung der Prototypen ersichtlich (vgl. Abschnitt 6.2.5). Die für die neue Umsetzung benötigten Algorithmen zur Datenfusion sind in Kapitel 5 hergeleitet und somit gegeben. Fraglich ist nun, ob die mit helikaler Faserwicklung hergestellten Prototypen brauchbare Messdaten für eine Formrekonstruktionen liefern; die Belastung der Fasern ist stark reduziert und es muss gezeigt werden, dass die Materialdehnung modellkonform auf die Fasern übertragen wird und die Messausschläge signifikant und nicht zu stark von Rauschen überlagert werden. In einem ersten Testteil wird eine grundlegende Messdatenanalyse durchgeführt, um das Faserverhalten zu untersuchen. Diese Tests sind unabhängig von der Datenfusion zur Formrekonstruktion und werden anhand von den Testsensoren *Testsensor 1* und *Testsensor 2* durchgeführt. Im zweiten Testteil wird die Formsensormaterialisierung unter Anwendung des neuen Rekonstruktionsalgorithmus betrachtet. Dazu wird der hergestellte *Sensorprototyp* verwendet. Unter Anwendung einer ersten Implementierung des innovativen Algorithmus werden die Messdaten fusioniert und die Form wird geschätzt. Es soll hierbei nur die grundlegende Sensorfunktionalität demonstriert und das Erfassen von Grundformen gezeigt werden. Ein Wert für die vorliegende Genauigkeit wird darüber hinaus ermittelt. Die hier erreichte Genauigkeit wird der innovativen FBG-Formsensorik jedoch nicht gerecht. Da alle Messstellen frei verteilt über den Sensorträgerkörper liegen, ist die Ermittlung der genauen Sensorkonfigurationsparameter vor Sensoreinsatz besonders wichtig. Für die in dieser Arbeit vorgestellten Tests wurden die Parameter grob vermessen und per Hand eingestellt. Deutlich bessere Ergebnisse sind zu erwarten, wenn diese Einstellung automatisiert über aufwendigere Kalibrierverfahren vorgenommen wird. Darauf wird in dieser Arbeit verzichtet, die entsprechenden Arbeitsschritte sind in Kapitel 7 als zukünftige Arbeiten aufgeführt. Bei der Darstellung und Auswertung der Messdaten werden die in Abschnitt 6.2 eingeführten Bezeichnungen und Indizierungen der Messstellen verwendet.

Bemerkung: Die FBG-Strukturen werden sowohl von einer Dehnung der Faser, als auch von Temperaturänderungen beeinflusst. Dieser Sachverhalt wurde bereits in den Grundlagen dieser Arbeit in Abschnitt 2.1 erwähnt. Zur Vereinfachung wird die Temperatur in den folgenden Testreihen als konstant angenommen. Leichte Temperaturschwankungen durch äußere Umstände werden vernachlässigt. Die Temperaturkompensation ist ein bekanntes Thema in der FBG-Formsensorik. Kompensationsmethoden sind bekannt und können zukünftig bei Messungen mit zu erwartenden Temperaturschwankungen implementiert werden.

6.3.1 Testteil 1: Grundlegende Messdatenanalyse bei helikaler Faserführung

Im ersten Testteil wird untersucht, ob die innovative Sensorrealisierung grundsätzlich brauchbare Messdaten liefert. Somit wird allgemein das Potential der innovativen FBG-Formsensorik nachgewiesen. Über Messungen zu zeigen ist ein bestimmtes Verhalten der Messwerte, vorgegeben durch ein einfach gehaltenes Modell, welches die Verformung im Material vorhersagt. Dieses angenommene Dehnungsverhalten im Material, hervorgerufen durch die Deformation des Sensors, ist in den Grundlagen in Abschnitt 2.1 beschrieben und in Abbildung 2.6 dargestellt. Das auf diesen Annahmen basierende Deformationsmodell ist eine Erweiterung des verwendeten Modells für die konventionelle FBG-Formsensorik, sodass eine freie Faserausrichtung mit berücksichtigt werden kann. Das Modell ist in Abschnitt 4.2 vorgestellt. Aus dem Modell lassen sich bezüglich des angenommenen Verhaltens der Testsensoren die Hypothesen *Hypothese 1* und *Hypothese 2* wie folgt ableiten:

Hypothese 1:

Wird der Sensor bei konstantem Krümmungsradius in unterschiedliche Richtungen gekrümmt, dann beschreiben die Messwerte eine trigonometrische Funktion (einen modifizierten Sinus oder Kosinus), wobei auf der Abszisse die Richtungsänderung und auf der Ordinate die Wellenlängenänderungen aufgetragen sind.

Hypothese 2:

Bei konstanter Krümmungsrichtung steigen die Werte der Wellenlängenänderung monoton mit kleiner werdendem Krümmungsradius. Dabei ist angenommen, dass sich die Wellenlängenänderung reziprok proportional zur relativen Änderung des Krümmungsradius verhält. Das entspricht bei gegebenem Zusammenhang von Krümmungsradius R und Krümmung κ mit $\kappa = \frac{1}{R}$ einer Proportionalität der Wellenlängenänderung zur Änderung der Krümmung.

Die in *Hypothese 1* und *Hypothese 2* beschriebenen Annahmen, geben den Zusammenhang von Deformation und Wellenlängenänderung an. Es wird hier keine quantitative Aussage gemacht. Der theoretische Zusammenhang von Deformation und orientierter Dehnung kann über die in Abschnitt 4.2 auf Seite 38 hergeleitete Gleichung 4.2 beschrieben werden. Demnach gilt für die Dehnung ε_i eines Gitters FBG_i :

$$\varepsilon_i = \kappa r_i \sin(\alpha_i - \frac{\pi}{2} - \vec{k}) \sin(\beta_i) . \quad (6.1)$$

Dabei ist κ die Krümmung und \vec{k} die lokale Krümmungsrichtung bezüglich einer Referenzrichtung Ref . Die Parameter r_i , α_i und β_i sind Angaben zu der Position von FBG_i auf dem Trägerkörper. Die Parameter sind analog eingesetzt zu den in dieser Arbeit fortlaufend verwendeten Bezeichnungen (vgl Abschnitt 5.1 und Abbildung 5.1 auf Seite 40). Der Winkel α_i ist dabei bezüglich der gleichen Referenzrichtung Ref angegeben wie die Krümmungsrichtung \vec{k} . Es gilt zudem für den Zusammenhang von Dehnung ε_i und Wellenlängenänderung $\Delta\lambda_i$ die in Abschnitt 2.1 auf Seite 12 hergeleitete Gleichung 2.4 :

$$\frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i^0} = k \varepsilon_i . \quad (6.2)$$

Dabei ist λ_i^0 die Basiswellenlänge und k der faserspezifische photoelastische Koeffizient, bekannt als $k = 0,78$. Ein quantitativer Zusammenhang von Krümmungsradius R und Wellenlängenänderung $\Delta\lambda_i$ ist damit unter Ausnutzung des Zusammenhangs von Krümmung κ und Krümmungsradius R , gegeben durch $\kappa = \frac{1}{R}$, und unter Verwendung der Gleichungen 6.1 und 6.2, gegeben durch:

$$\Delta\lambda_i = \frac{1}{R} \lambda_i^0 r_i k \sin(\beta_i) \sin\left(\alpha_i - \frac{\pi}{2} - \kappa\right). \quad (6.3)$$

Über diese Gleichungen lassen sich die Aussagen der Hypothesen nun quantifizieren. Sei beispielhaft ein Krümmungsradius R mit $R = 300 \text{ mm}$ gegeben. Weiter seien die Konfigurationsparameter, wie bei *Testsensor 1* umgesetzt, mit $\beta_i = 60^\circ$ und $r_i = 1$ betrachtet. Für das Gitter FBG_1 ist laut Hersteller eine Basiswellenlänge von $\lambda_1^0 = 1536,90 \text{ nm}$ gegeben. Nach dem Modell ist ein sinusförmiger Verlauf der Messwerte über die Veränderung der Krümmungsrichtung zu erwarten. Dabei ergibt sich für die zu erwartende Amplitude der über die Gleichung 6.3 dargestellten Sinuskurve der Wert $3,46 \text{ nm}$. Aus Gleichung 6.3 wird auch die in *Hypothese 2* getroffene Annahme *Hypothese 2* ersichtlich. Eine reziproke Proportionalität der Wellenlängenänderung $\Delta\lambda_i$ zu dem Wert des Krümmungsradius R liegt vor.

In den Hypothesenaufstellungen wird bewusst auf diese direkte Quantifizierung verzichtet. Es soll in dieser Arbeit vorerst nur herausgestellt werden, ob ein tendenziell modellkonformes Sensorverhalten vorliegt, um die prinzipielle Umsetzbarkeit der innovativen FBG-Formsensorik sicherzustellen. Diese Aussage ist über die Hypothesen ausgedrückt. Eine zusätzliche Betrachtung der Amplitudenwerte gibt einen ersten Eindruck über mögliche systematische Fehler. So ist ein Abweichen von dem Amplitudenwert durch abgeschwächte Dehnungsübertragung zu erklären. Sofern ein Messverlauf in Sinusform vorliegt, kann eine solche Abweichung über einen konstanten Faktor an das Modell angeglichen werden.

Das in den Hypothesen beschriebene Verhalten wird in *Testreihe 1* nachgewiesen. Dabei werden die Messungenauigkeit und systematische Abweichungen vom Modell bestimmt. Zudem wird im Voraus eine Normalverteilung der Messdaten nachgewiesen, sodass Konfidenzintervalle aus den Stichproben berechnet werden können. Im Folgenden ist dabei immer ein Konfidenzniveau von 95% betrachtet. Neben dem modellkonformen Verhalten der Messdaten wird in *Testreihe 2* die Präzision genauer betrachtet. Die Messungen in *Testreihe 1* und *Testreihe 2* werden anhand von *Testsensor 1* durchgeführt, da dieser einer Standardrealisierung entspricht; auch der *Sensorprototyp* ist in gleicher Bemaßung umgesetzt. Exemplarisch werden in *Testreihe 3* auch Messungen mit *Testsensor 2* durchgeführt und analysiert; dieser Sensor stellt mit dem großen Durchmesser und dem sehr kleinen Gangwinkel bei der helikalen Faserwicklung von nur 30° einen Extremfall einer Sensorrealisierung dar.

Testumgebung

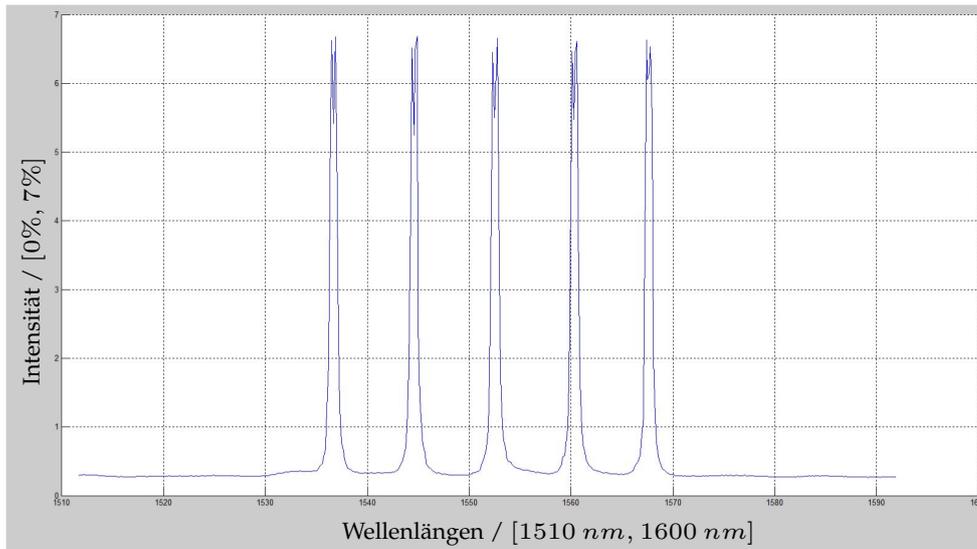
Die Sensoren sollen kontrolliert und reproduzierbar verformt werden. Dazu werden sogenannte Formplatten verwendet. Die Formplatten sind aus Aluminium bzw. Polyvinylchlorid gefertigt. In die Platten sind Vertiefungen in Bogenform mit definierten Krümmungsradien eingebracht. Die genauen Maße sind in Abbildung 6.7 links angegeben. Um den Sensor



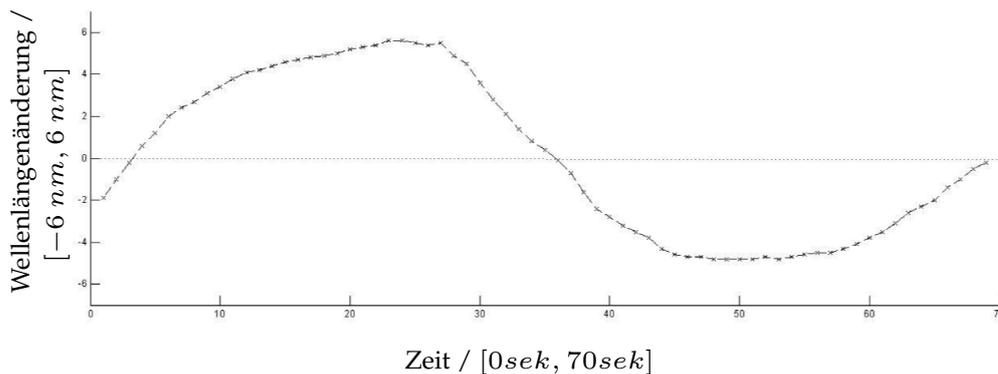
Abbildung 6.7: Formplatten zur kontrollierten Sensordeformation: Plattenbemaßung (links), Aluminiumformplatte mit eingelegetem Sensor (mittig) und Markierung am Sensorende(rechts).

entsprechen richtig ausgerichtet in die Formplatten einzulegen, ist eine Markierung an den Sensorenden angebracht. Über die Markierung werden acht gleichmäßig verteilte Richtungen in 45° Schritten gekennzeichnet. In Abbildung 6.7 mittig und rechts sind eine Aluminiumplatte mit eingelegetem Sensor sowie die Markierung am Sensorende abgebildet. Der Sensor wird für die Messungen in einer bestimmten Ausrichtung in die Formplatte eingeleget. Damit ist eine vorgegebene Krümmung und ein vorgegebene Krümmungsrichtung umgesetzt. Die händische Durchführung der Messung bringt zusätzliche Messunsicherheiten mit sich. Besonders die Ausrichtung des Sensors und die damit verbundene Einhaltung der vorgegebenen Krümmungsrichtung sind schwer exakt durchführbar. Für die Durchführung der in dieser Arbeit betrachteten Experimente und zur Evaluation der hier zu evaluierenden Untersuchungsaspekte wird die beschriebene Methodik allerdings als ausreichend genau angesehen.

Die Messdaten werden über ein in MATLAB geschriebenes Programm ausgelesen. Es wird für jede Faser jeweils ein Spektrum pro Messzyklus gemessen. Der Interrogator sendet breitbandiges Licht in die Fasern. Das Spektrum bildet das vom Interrogator gemessene reflektierte Licht ab. Dabei werden bestimmte Wellenlängen, abhängig von den FBG-Strukturen, mit besonders hoher Intensität reflektiert. Es sind demnach lokale Extremstellen, sogenannte Peaks, in der Anzahl der FBGs einer Faser im entsprechenden Spektrum zu sehen. Das genaue Funktionsprinzip der FBG-Technologie ist in Kapitel 2 beschrieben. In Abbildung 6.8a ist beispielhaft ein Spektrum einer Faser mit fünf FBGs abgebildet. Eine Messreihe besteht aus mehreren Messzyklen, die über eine vorab festgelegte Zeitspanne mit einer Frequenz von 8 Hz durchlaufen werden. Das Ausleseprogramm berechnet für jeden Messzyklus die Wellenlänge bei den Peaks. Ein Messreihen-Beispiel ist in Abbildung 6.8b gegeben. Hier ist die Wellenlängenänderung eines Peaks für ein FBG über die Zeit einer Messreihendurchführung bei zeitkontinuierlicher Veränderung der Form dargestellt. Für die FBG-Formsensorik ist die Information der Wellenlängenänderung der Peaks über die Formveränderung interessant. Dies sind indirekte Messdaten, aus denen die Dehnung im Material geschätzt werden kann.



(a) Beispielspektrum: Abgebildet ist das Spektrum einer Faser mit fünf eingeschriebenen FBGs.



(b) Beispiel einer Messreihe: Abgebildet sind die Wellenlängenänderungen der Peaks über die Zeit bei Veränderung der Form.

Abbildung 6.8: Art der vorliegenden Messdaten.

Testreihe 1 - Modellkonformes Sensorverhalten

Untersuchungsaspekte:

In *Testreihe 1* werden *Hypothese 1* und *Hypothese 2* untersucht. Es wird evaluiert, ob die Daten normalverteilt um die über das Modell geschätzten Werte liegen. Der systematische Fehler und die Messunsicherheit werden dabei quantifiziert.

Messreihe:

Die *Testreihe 1* wird mit dem *Testsensor 1* durchgeführt. Hier ist eine Faser mit fünf FBGs integriert. Zur definierten Verformung wird eine Formplatte verwendet. Pro Messung wird ein Spektrum mit fünf Wellenlängenpeaks gemessen. Die Messspektren werden bei verschiedenen

Def_n		Krümmungsrichtung							
		0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°
Krümmungsradius	500 mm	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8
	400 mm	n=9	n=10	n=11	n=12	n=13	n=14	n=15	n=16
	300 mm	n=17	n=18	n=19	n=20	n=21	n=22	n=23	n=24
	200 mm	n=25	n=26	n=27	n=28	n=29	n=30	n=31	n=32
Def_0		Gerader Sensor							

Tabelle 6.10: Durchgeführte Deformationen bei *Testreihe 1*.

starker Krümmung des Sensors in jeweils verschiedene Krümmungsrichtungen gemessen. Jede Deformation wird wiederholt durchgeführt. Zwischen den Messungen wird der Sensor aus der Formplatte genommen und somit entlastet. Insgesamt wird pro Deformation eine Stichprobe mit einem Umfang von 25 Messwerten erhoben. Zusätzlich wird vorab das Messspektrum bei geradem Sensor gemessen. Die unterschiedlichen Deformationen werden mit Def_n bezeichnet, dabei gibt n die Nummer der zugehörigen Deformation an. Die Messung bei geradem Sensor wird mit Def_0 bezeichnet. In Tabelle 6.10 sind die durchgeführten Deformationen mit entsprechender Benennung aufgelistet. Die Krümmungsrichtung wird in Grad bezüglich einer lokalen Referenzrichtung angegeben. Dabei wird die gleiche Referenzrichtung Ref verwendet, die auch bei der Angabe der FBG-Positionierung herangezogen wurde (vgl. Abschnitt 6.2, Tabelle 6.7).

Messdaten:

Wie in Tabelle 6.10 ersichtlich sind bei vier Krümmungsradien und jeweils acht Ausrichtungen 32 verschiedene Deformationen umgesetzt. Der Stichprobenumfang umfasst 25 Messungen pro Deformation. Zusätzlich ist einmalig das Spektrum bei unverformtem Sensor gemessen. Dazu wird der Sensor in die Formplatte mit entsprechend gerader Vertiefung gelegt. Somit sind 801 Messspektren insgesamt vorhanden. Jedes Spektrum weist fünf Peaks auf. Die Peakwellenlängen $\lambda_{i,m}^{Def_n}$ werden für jedes Spektrum berechnet. Dabei gibt i mit $i = 1, \dots, 5$ die Zuordnung zu der entsprechenden Messstelle FBG_i an. Die Zuordnung zu der Messung bei Deformation n ist durch Def_n angegeben. Der Wert m mit $m = 1, \dots, 25$ indiziert die Messung innerhalb der Stichprobe. Die bei geradem Sensor gemessenen Wellenlängenpeaks λ_i^0 werden als Basiswellenlängen der fünf FBGs verwendet. Der Zusammenhang zwischen einer Formveränderung, bezeichnet durch Def_n , und den Differenzwerten $\Delta\lambda_{i,m}^{Def_n} = \lambda_{i,m}^{Def_n} - \lambda_i^{Def_0}$, als Veränderung der Peakwellenlängen bezüglich der Basiswellenlängenwerte, wird bei der Datenanalyse im Folgenden betrachtet.

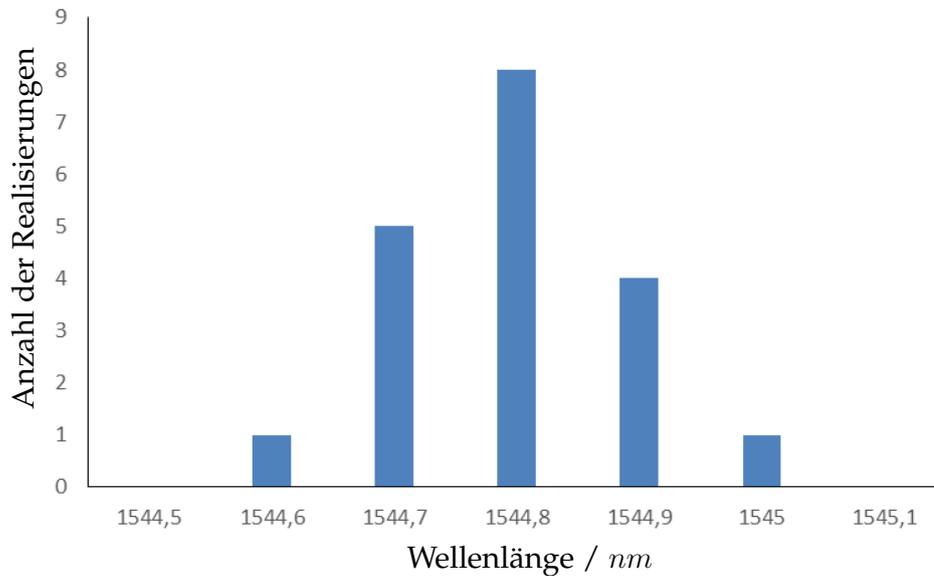


Abbildung 6.9: Histogramm für ein Gitter, aufgestellt über alle 25 Messwerte der Stichprobe bei der Deformation Def_{18} .

Datenanalyse und Auswertung:

Die gemessenen Daten werden zur Betrachtung unterschiedlicher Aspekte herangezogen. Es handelt sich bei den Daten um eine Stichprobe. Um dennoch Aussagen über die Messunsicherheit sowie mögliche vorhandene systematische Fehler machen zu können, wird eine Normalverteilung der Messwerte angenommen. Zur Bestätigung dieser Annahme wurde die Verteilung der gemessenen Werte für jede Messstelle und jede Deformationen betrachtet. Dazu wurden Histogramme verwendet; bei 32 Deformationen und fünf Messstellen sind demnach 160 Histogramme über die jeweils 25 Messwerte der Stichprobe aufgestellt. Die Betrachtung der Histogramme lässt auf eine Normalverteilung der Messwerte schließen. Zur weiteren Messdatenanalyse wird diese Verteilung angenommen. In Abbildung 6.9 ist beispielhaft das Histogramm für ein Gitter bei der Deformation Def_{18} abgebildet.

Zur Überprüfung von *Hypothese 1* werden für verschiedene konstante Krümmungsradien die Wellenlängenänderungen der einzelnen Gitter FBG_i über die Änderung der Krümmungsrichtung betrachtet. Die Wellenlängenänderungen $\lambda_{i,m}^{Def_n}$ mit $m = 1, \dots, 25$ werden über n aufgetragen. Dabei sind $Def_{n=1,\dots,8}$, $Def_{n=9,\dots,16}$, $Def_{n=17,\dots,24}$ und $Def_{n=25,\dots,32}$ die separat betrachteten, zu den Krümmungsradien gehörenden Deformationen. In Abbildung 6.10 ist dieser Aspekt für den Krümmungsradius von 200 mm und alle Messstellen FBG_i mit $i = 1, \dots, 5$ abgebildet. Der Mittelwert und die Konfidenzintervalle der Werte $\lambda_{i,m}^{Def_{n=25,\dots,32}}$ sind für alle $m = 1, \dots, 25$ auf der Ordinate über alle $n = 24, \dots, 32$ auf der Abszisse aufgetragen. Wie in der Hypothese angenommen, ist ein Sinusverlauf zu erkennen.

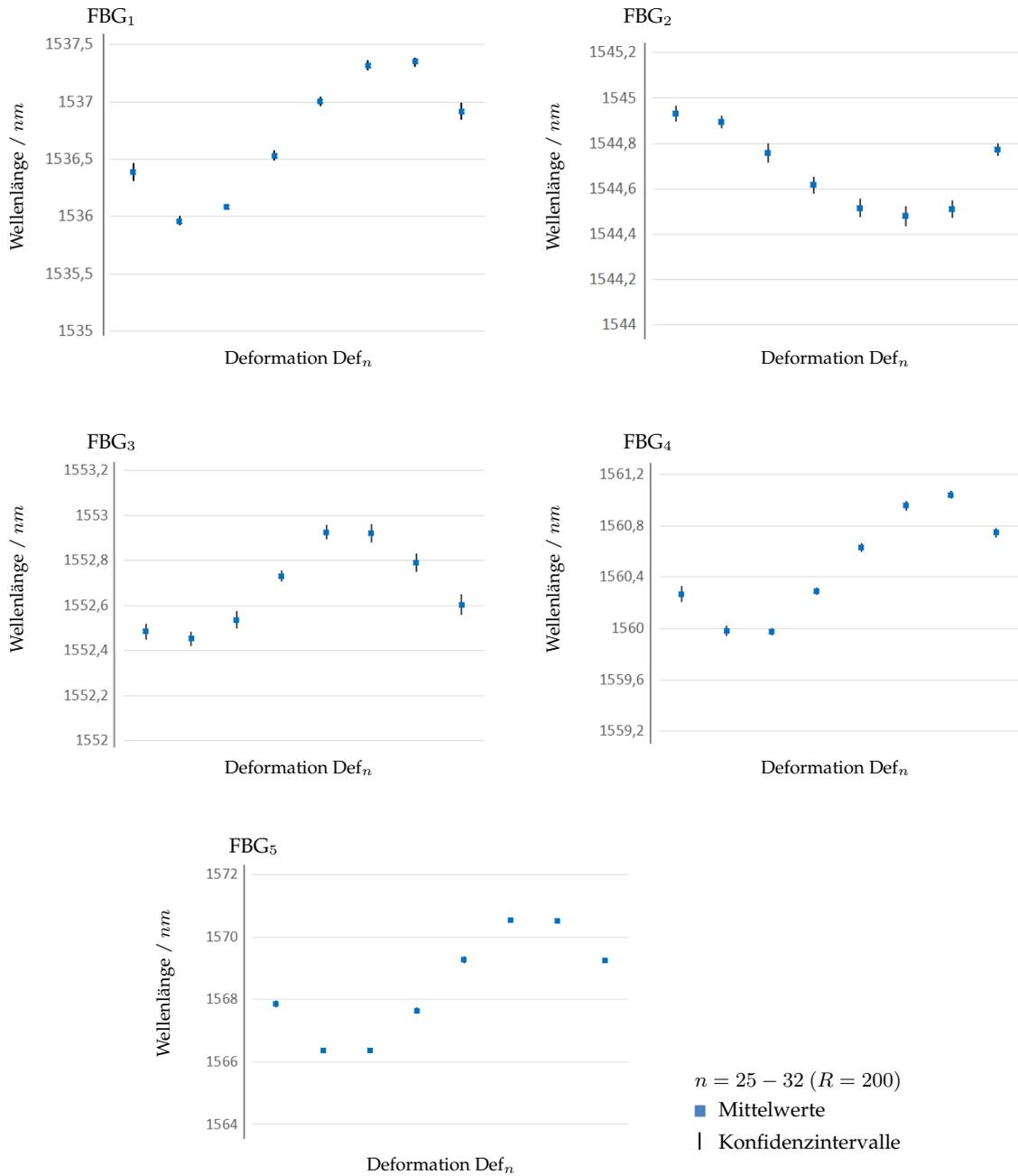


Abbildung 6.10: Konfidenzintervalle der Messwerte bei konstantem Krümmungsradius und sich ändernder Krümmungsrichtung: Ein Sinusverlauf ist deutlich zu erkennen.

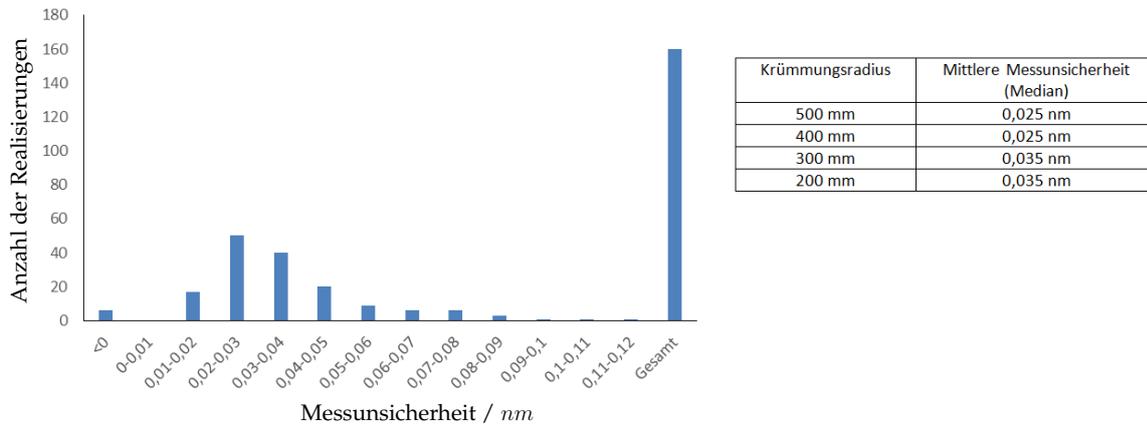


Abbildung 6.11: Verteilung der Messunsicherheit über die Stichproben aller gemessenen Deformationen $Def_{n=1,\dots,32}$ der Testreihe 1 (links) und mittlere Messunsicherheit bei separater Betrachtung der einzelnen Krümmungsradien (rechts).

In Abbildung 6.11 ist die Verteilung der Messunsicherheit aller aufgenommenen Messdaten dargestellt. Es liegt eine mittlere Unsicherheit von $0,025\text{ nm}$ vor. Bei der Betrachtung der mittleren Abweichung bezüglich der einzelnen Krümmungsradien ist dabei eine steigende Tendenz der Messunsicherheit bei steigender Krümmung zu beobachten. Diese Messunsicherheit ist verglichen mit den gemessenen Wellenlängenänderungen von bis zu einem Nanometer bei Sensorverformung mit den betrachteten Krümmungsradien von 200 mm – 500 mm als ausreichend gut anzusehen. Die bei einer solchen Messunsicherheit zu erwartende Genauigkeit in der FBG-Formsensorik unter Anwendung der Datenfusionsalgorithmen auf die Messdaten lässt sich nicht pauschal angeben. Die Genauigkeit hängt sowohl von der Anzahl der vorhandenen Messstellen, als auch von der Stärke der vorgenommenen Verformung ab. Eine einfache exemplarische Fehlerhochrechnung der Genauigkeit bei der ermittelten Messunsicherheit ist in einem folgenden Beispiel aufgeführt.

Beispiel 13. Fehlerhochrechnung einer Formschätzung bei angenommener Messunsicherheit von $\pm 0,025\text{ nm}$:

Seien die Sensormaße wie beim Sensorprototyp gegeben. Die Sensorlänge entspricht somit $S = 400\text{ mm}$ und der Wert α_i sei mit $\alpha_i = 180^\circ$ für ein Gitter FBG_i gegeben. Über die am Anfang dieses Abschnittes 6.3 hergeleitete Gleichung 6.3 ist mit:

$$\Delta\lambda_i = \frac{1}{R} \lambda_i^0 r_i k \sin(\beta_i) \sin(\alpha_i - \frac{\pi}{2} - \vec{\kappa})$$

der Zusammenhang von der Wellenlängenänderung $\Delta\lambda_i$ des Gitters FBG_i und dem Krümmungsradius R , sowie der Krümmungsrichtung $\vec{\kappa}$ gegeben. Außerdem mit in der Gleichung berücksichtigt werden die Sensorkonfigurationsparameter α , β_i und r_i . Die Basiswellenlänge λ_i^0 und der Faktor k seien vom Hersteller der Fasern gegeben. Bis auf den Krümmungsradius R , die Krümmungsrichtung $\vec{\kappa}$ sowie die bei entsprechender Sensordeformation gemessene Wellenlängenänderung $\Delta\lambda_i$ sind alle Parameter der Gleichung konstant. Eine Unsicherheit in der gemessenen Wellenlänge beeinflusst also direkt die Schätzung der Werte R und $\vec{\kappa}$. Sei $\vec{\kappa}$ bekannt als $\vec{\kappa} = 0^\circ$ für den gesamten Sensorver-

lauf. Der Einfluss der Messunsicherheit sei nur für den Krümmungsradius betrachtet. Das Gitter FBG_i liegt mit $\alpha_i = 180^\circ$ entgegengesetzt zur Krümmungsrichtung. Eine Messunsicherheit von $0,025 \text{ nm}$ geht damit in einen fehlerhaften geschätzten Krümmungsradius von $R \pm 0,025$ über. Sei eine konstante Krümmung über den Sensorverlauf angenommen. Die Spitzenposition des Sensors berechnet sich dann für das einfache Verformungsbeispiel mit der Formel:

$$x = R \cos\left(\frac{360S}{2\pi R}\right) + R$$

$$y = R \sin\left(\frac{360S}{2\pi R}\right)$$

$$z = 0$$

Dabei entspricht die Abszissenachse der Krümmungsrichtung und die Ordinate der Sensorausrichtung am Sensoranfang. Die Spitzenpositionen bei einer exakten Krümmungsschätzung mit $R = 300 \text{ mm}$, sowie bei einer Schätzung mit maximaler negativer Abweichung $R = 300 - 0,025$ und maximaler positiver $R = 300 + 0,025$ Abweichung sind in Tabelle 6.11 zusammengefasst. In der Tabelle ist auch der räumliche Fehler der berechneten Spitzenpositionen aufgeführt; der Fehler ist dabei als Abstand in Millimeter sowie prozentual bezüglich der Sensorlänge angegeben.

Krümmungsradius	Spitzenposition			Fehler
	x	y	z	Absolut in mm und relativ in %
R				
300	211,07	286,52	0	–
$300 + 0,025$	211,06	286,53	0	0,02 mm , 0,005%
$300 - 0,025$	211,08	286,50	0	0,02 mm , 0,005%

Tabelle 6.11: Fehlerhochrechnung einer Formschätzung bei angenommener Messunsicherheit von $\pm 0,025 \text{ nm}$.

Für eine quantifizierte Aussage bezüglich der in *Hypothese 1* aufgestellten Annahme wurden Ausgleichsfunktionen über die Messwerte gelegt. Passend zu dem Messdatenverlauf wurden hier Sinusfunktionen als Ausgleichskurven gewählt. Eine solche Ausgleichskurve ist beispielhaft für ein Gitter FBG_i bei gleichem Krümmungsradius für die Werte der Deformationen $Def_{n=25,\dots,32}$ in Abbildung 6.12 dargestellt. Der Amplitudenwert liegt bei $0,7 \text{ nm}$. Für das Gitter ist dem vom Hersteller mitgelieferten Datenblatt der Faser ein Basiswellenlängenwert von $\lambda_i^0 = 1536,9$ zu entnehmen. Bei der Deformation Def_0 wurde ein entsprechender Werte gemessen. Ein Vergleich der Ausgleichskurve mit der über das Modell hergeleiteten Gleichung 6.3 gibt Auskunft über die Modellkonformität der Messdaten. Laut dem angenommenen Deformationsmodell ist nach dieser Gleichung 6.3 bei dem Krümmungsradius von $R = 200$ und dem Gangwinkel der Faser von 60° und dementsprechendem Wert $\beta = 60^\circ$ sowie einem Abstand des betrachteten Gitters von der Sensorachse $r_i = 1$ ein Amplitudenwert von $5,19 \text{ nm}$ zu erwarten. Der angenommene Wert für die Amplitude ist demnach mehr als siebenmal so groß wie der über Messungen nachgewiesene Wert. Dieser große Unterschied zwischen dem angenommenen Wert und dem gemessenen

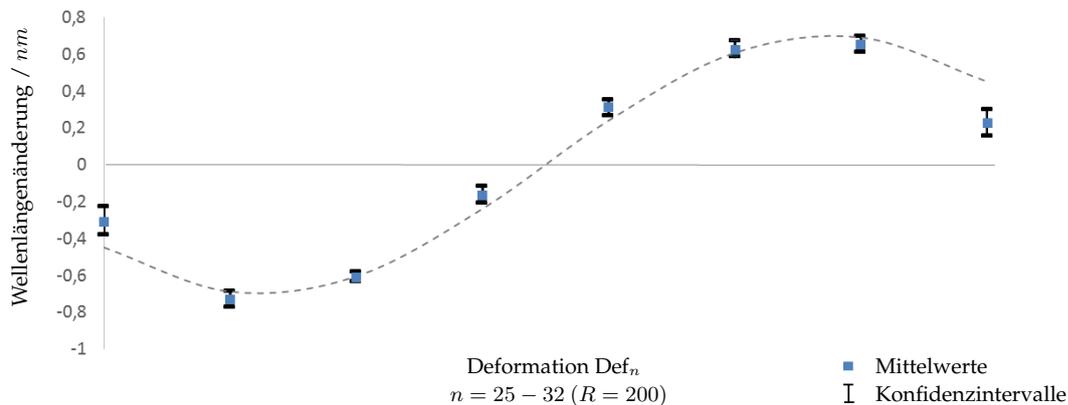


Abbildung 6.12: Sinuskurve als Ausgleichsfunktion durch die Mittelwerte der Stichprobenmesswerte für ein Gitter bei konstantem Krümmungsradius von $R = 200$ über veränderte Krümmungsrichtung.

Wert spricht für eine stark abgeschwächte Übertragung der Dehnung auf die Fasern. Die Abweichung kann als systematischer Fehler klassifiziert werden und über einen Faktor e mit $e = \frac{5,19}{0,7}$ ausgeglichen werden. Die angepasste Gleichung zur Berechnung der Dehnung aus den gemessenen Wellenlängenwerten ist dann gegeben mit:

$$\Delta\lambda_i = e \frac{1}{R} \lambda_i^0 r_i k \sin(\beta_i) \sin\left(\alpha_i - \frac{\pi}{2} - \vec{k}\right). \quad (6.4)$$

In *Hypothese 2* wird angenommen, dass sich die Wellenlängenänderung reziprok proportional zur relativen Änderung des Krümmungsradius verhält. Um diese Hypothese zu evaluieren, werden Amplitudenwerte der Messverläufe bei verschiedenen Krümmungsradien verglichen. In Abbildung 6.13 sind beispielhaft die vier Messreihen der Deformationen $Def_{n=1,\dots,8}$, $Def_{n=9,\dots,16}$, $Def_{n=17,\dots,24}$ und $Def_{n=25,\dots,32}$ für ein Gitter übereinander aufgetragen. Die jeweiligen Konfidenzintervalle sind in dem Diagramm mit abgebildet. Die Sinuskurven wurden als Ausgleichsfunktionen durch die Mittelwerte der Messreihen berechnet. Im Diagramm in Abbildung 6.14 sind die Amplitudenwerte der Ausgleichsfunktionen über die Krümmungsradien aufgetragen. Weiter ist eine Ausgleichskurve berechnet. Die Ausgleichskurve gleicht einer Hyperbel, womit die in *Hypothese 2* angenommene Tendenz bestätigt wird.

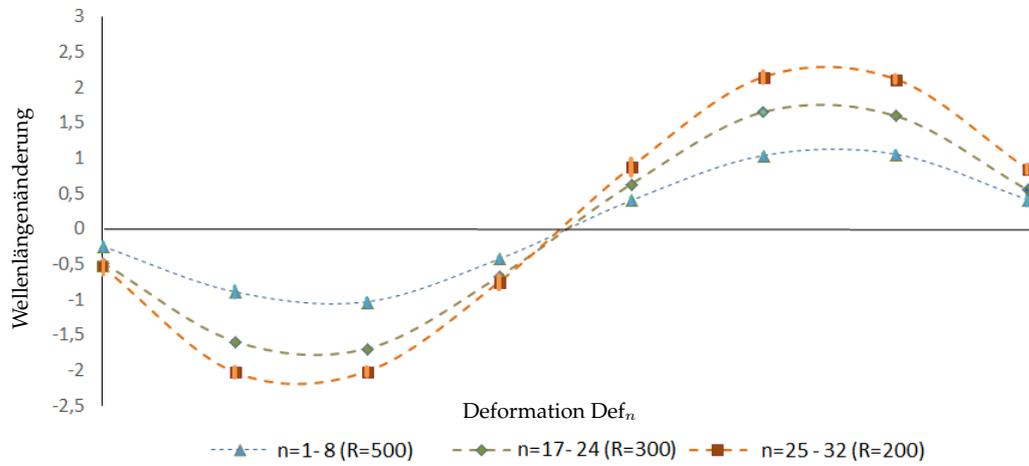


Abbildung 6.13: Messreihenverhalten bei zunehmender Krümmung.

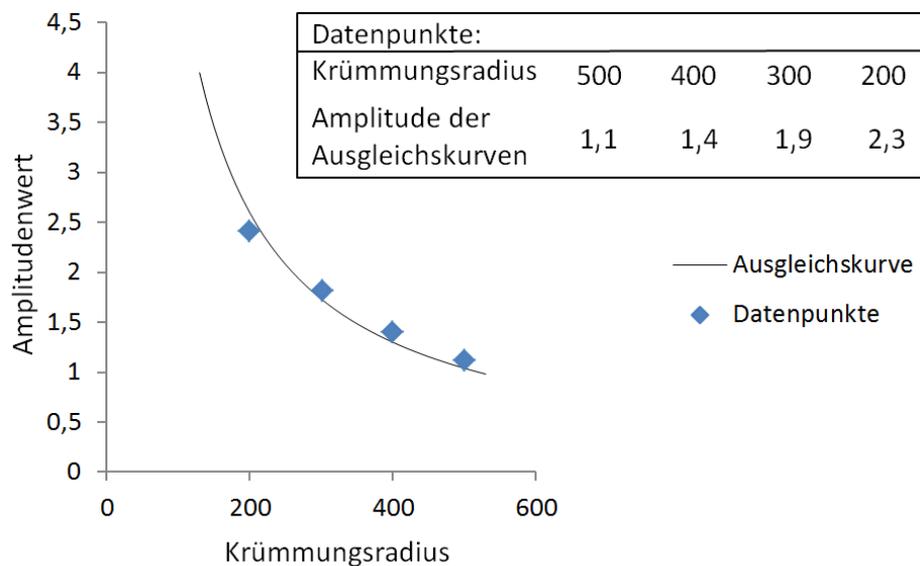


Abbildung 6.14: Vergleich der Änderung des Krümmungsradius und der Amplitude der zugehörigen sinusförmigen Messreihen; eine reziproke Proportionalität ist ersichtlich.

Def_n	Krümmungsrichtung			
	0°	90°	180°	270°
Krümmungsradius 200 mm	n=1	n=2	n=3	n=4
Def_0	Gerader Sensor			

Tabelle 6.12: Durchgeführte Deformationen bei *Testreihe 2*.

Testreihe 2 - Präzision

Untersuchungsaspekte:

In der Testreihe wird die Präzision mit der die Dehnungen gemessen werden genauer betrachtet. Die Präzision ist nach *DIN 55350-13:1987-07* bedeutungsgleich zu dem bekannteren aber veralteten Begriff 'Wiederholgenauigkeit'. Sie ist definiert als die bei Messwiederholung unter gleichen Bedingungen auftretende Streuung der Messwerte [DNQ87].

Messreihe und Messdaten:

Wie bei *Testreihe 1* wird die *Testreihe 2* mit dem *Testsensor 1* durchgeführt. Es werden zur Sensorverformung die gleichen Messplatten eingesetzt. Der Sensor wird bei konstanter Ausrichtung abwechselnd gekrümmt und wieder in gerade Form gebracht. Es werden 20 Wiederholungen vorgenommen. Dabei ist ein Krümmungsradius von $R = 200 \text{ mm}$ gewählt. Die Messreihe wird für vier verschiedene Ausrichtungen durchgeführt. Somit sind pro Messreihe 40 Spektren gemessen und insgesamt 160 Messspektren vorhanden. In Tabelle 6.12 sind die Deformationen aufgelistet und bezeichnet.

Datenanalyse und Auswertung:

Zur Auswertung der Präzision wird für die vier Messreihen jeweils die Streuung der Messwerte bei wiederholter gleicher Verformung betrachtet. Dazu ist für jedes Gitter die maximale Streuung und die Standardabweichung der Messwerte bei Sensorkrümmung von $R = 200 \text{ mm}$ berechnet. In Abbildung 6.15 sind die Ergebnisse der Messreihe exemplarisch für ein Gitter abgebildet. Die durchschnittliche Standardabweichung beträgt $\pm 0,048 \text{ nm}$. Für eine Sensorkrümmung mit $R = 200 \text{ mm}$ wurde eine Wellenlängenänderung von bis zu $\pm 2,3 \text{ nm}$ nachgewiesen (vgl. Abbildung 6.13 und 6.14 auf Seite 126). Die vorliegende Präzision ist demnach als sehr gut zu bewerten. Für zukünftige Fehlereinschätzungen von zu erwartenden Formsensorgenauigkeiten in der Formrekonstruktion kann dieser Präzisionswert herangezogen werden.

Testreihe 3 - Exemplarische Tests am hohlen *Testsensor 2*

Untersuchungsaspekte:

Die in *Testteil 1* mit dem *Testsensor 1* durchgeführten Messreihen wurden auch für *Testsensor 2* exemplarisch durchgeführt. Bei diesem Sensor handelt es sich um eine Sensorausführung mit besonders großem Durchmesser und besonders kleinem Gangwinkel bei der helikalen Faserwicklung. Dadurch werden die Faserbelastungen durch Sensorverformung sehr

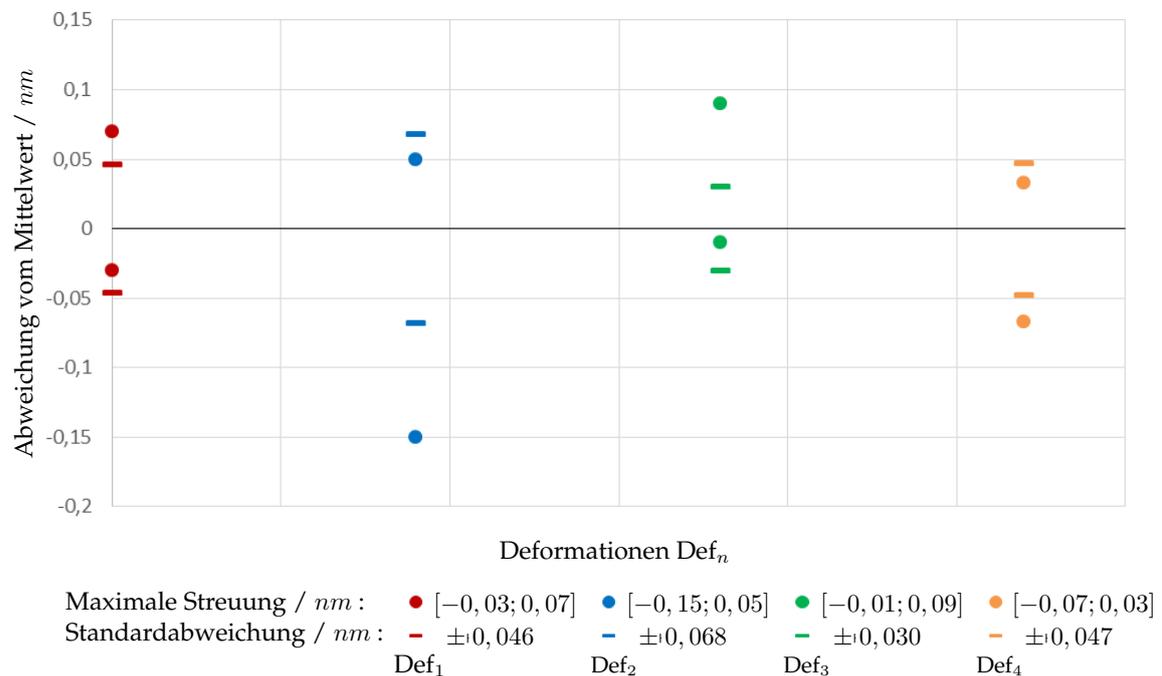


Abbildung 6.15: Präzision, exemplarisch für ein FBG.

stark reduziert. Es handelt sich hier um einen Extremfall einer Sensorrealisierung nach dem innovativen Prinzip. In *Testteil 2* soll untersucht werden, ob auch hier noch modellkonformes Sensorverhalten vorliegt. Damit wäre die prinzipielle Umsetzbarkeit der innovativen Sensorik auch unter extremen Umständen belegt.

Messreihe und Messdaten:

Die Messreihe wird analog zu *Testteil 1* vorgenommen. Es werden wieder verschieden starke Krümmungen in verschiedene Krümmungsrichtungen vorgenommen und mit 25 Wiederholungen gemessen. Die in dieser Testreihe durchgeführten Deformationen sind in Tabelle 6.13 zusammengefasst. Insgesamt sind 48 Deformationen und zusätzlich eine gerade Sensorausrichtung umgesetzt. Damit stehen 1201 Spektren zur Datenanalyse zur Verfügung. Wegen des größeren Sensordurchmessers werden bei der Durchführung der Experimente größere Formplatten benötigt. Die Krümmungsradien der Vertiefungen in den Platten sind dabei bei den verschiedenen Formplatten gleich gewählt.

Datenanalyse und Auswertung:

Um die Modellkonformität des Sensors zu zeigen, wurden die Annahmen der Hypothesen *Hypothese 1* und *Hypothese 2* betrachtet. Die Annahmen wurde anhand der Messdaten analog zu *Testteil 1* überprüft.

Der Verlauf der Messdaten bei konstantem Krümmungsradius und sich verändernder Krümmungsrichtung ist in Abbildung 6.16 für ein Gitter beispielhaft dargestellt. In dieser

Def_n		Krümmungsrichtung											
		0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°
Krümmungsradius	500 mm	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9	n=10	n=11	n=12
	400 mm	n=13	n=14	n=15	n=16	n=17	n=18	n=19	n=20	n=21	n=22	n=23	n=24
	300 mm	n=25	n=26	n=27	n=28	n=29	n=30	n=31	n=32	n=33	n=34	n=35	n=36
	200 mm	n=37	n=38	n=39	n=40	n=41	n=42	n=43	n=44	n=45	n=46	n=47	n=48
Def_0		Gerader Sensor											

Tabelle 6.13: Durchgeführte Deformationen bei *Testreihe 3*.

Messreihe war ein Krümmungsradius von $R = 200$ umgesetzt. Betrachtet werden die Wellenlängenänderung bei Sensordeformation. Abgebildet sind jeweils die Mittelwerte und Konfidenzintervalle aller Wellenlängenänderungen pro Deformation bei einer Stichprobe mit einem Umfang von 25 Messwerten. Ein in *Hypothese 1* angenommener sinusförmiger Verlauf in den Messdaten ist klar zu erkennen. Die Konfidenzintervalle sind allerdings deutlich größer als die bei *Testsensor 1*. Die Verteilung der vorkommenden Unsicherheit für alle aufgenommenen Messdaten der *Testreihe 3* ist in Abbildung 6.17 gegeben. Eine mittlere Unsicherheit von $0,15 \text{ nm}$ liegt vor. Bei der Betrachtung der mittleren Abweichung bezüglich der einzelnen Krümmungsradien ist wie bei *Testsensor 1* eine steigende Tendenz der Messunsicherheit bei steigender Krümmung zu beobachten. Verglichen mit der in *Testreihe 1* nachgewiesenen mittleren Unsicherheit ist der hier ermittelte Wert etwa fünfmal so groß.

Die Aussage der *Hypothese 2* wird über das Gegenüberstellen der Messverläufe bei größer werdender Krümmung evaluiert. In Abbildung 6.18 ist der Verlauf der Messdaten beispielhaft für zwei Gitter (Diagramm oben und unten) bei verschiedenen Krümmungsradien dargestellt. Dabei wurden jeweils die Mittelwerte aller Messwiederholungen pro Deformation berechnet und abgebildet. In der Abbildung sind die zu gleichen Krümmungsradien gehörenden Mittelwerte verbunden. Es zeigt sich, dass keine eindeutigen Unterschiede in der Ausprägung der Messreihen bei unterschiedlicher Krümmungsstärke auszumachen sind. Die *Hypothese 2* ist in diesem Fall nicht zu belegen.

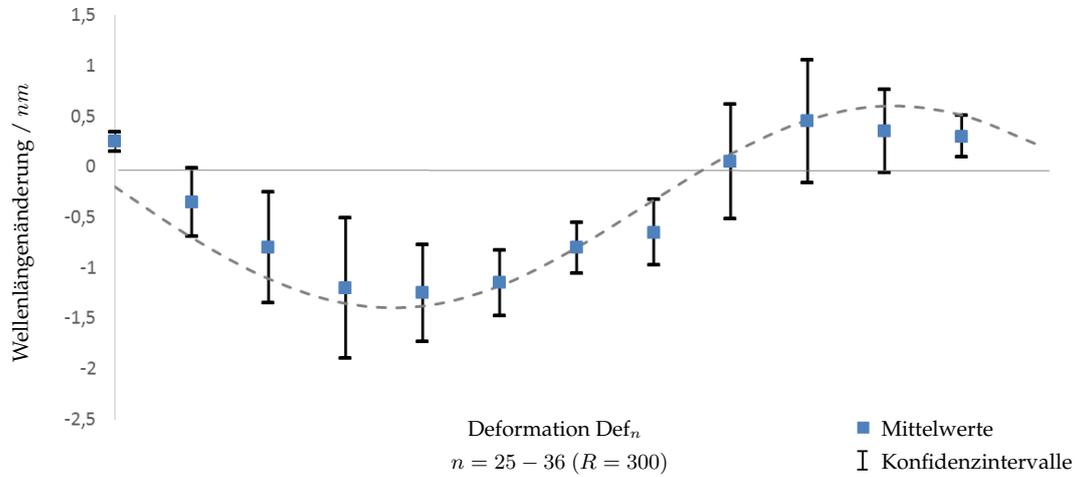


Abbildung 6.16: Sinuskurve als Ausgleichsfunktion durch die Mittelwerte der Stichprobenmesswerte für ein Gitter bei konstantem Krümmungsradius von $R = 300$ über veränderte Krümmungsrichtung.

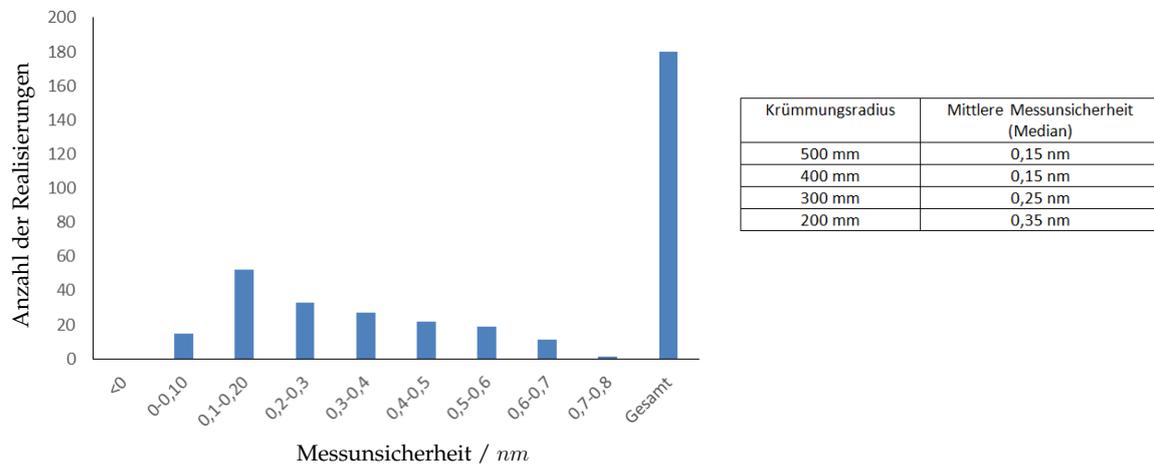


Abbildung 6.17: Verteilung der Messunsicherheit über die Stichproben aller gemessenen Deformationen $Def_{n=1,\dots,32}$ der Testreihe 3 (links) und mittlere Messunsicherheit bei separater Betrachtung der einzelnen Krümmungsradien (rechts).

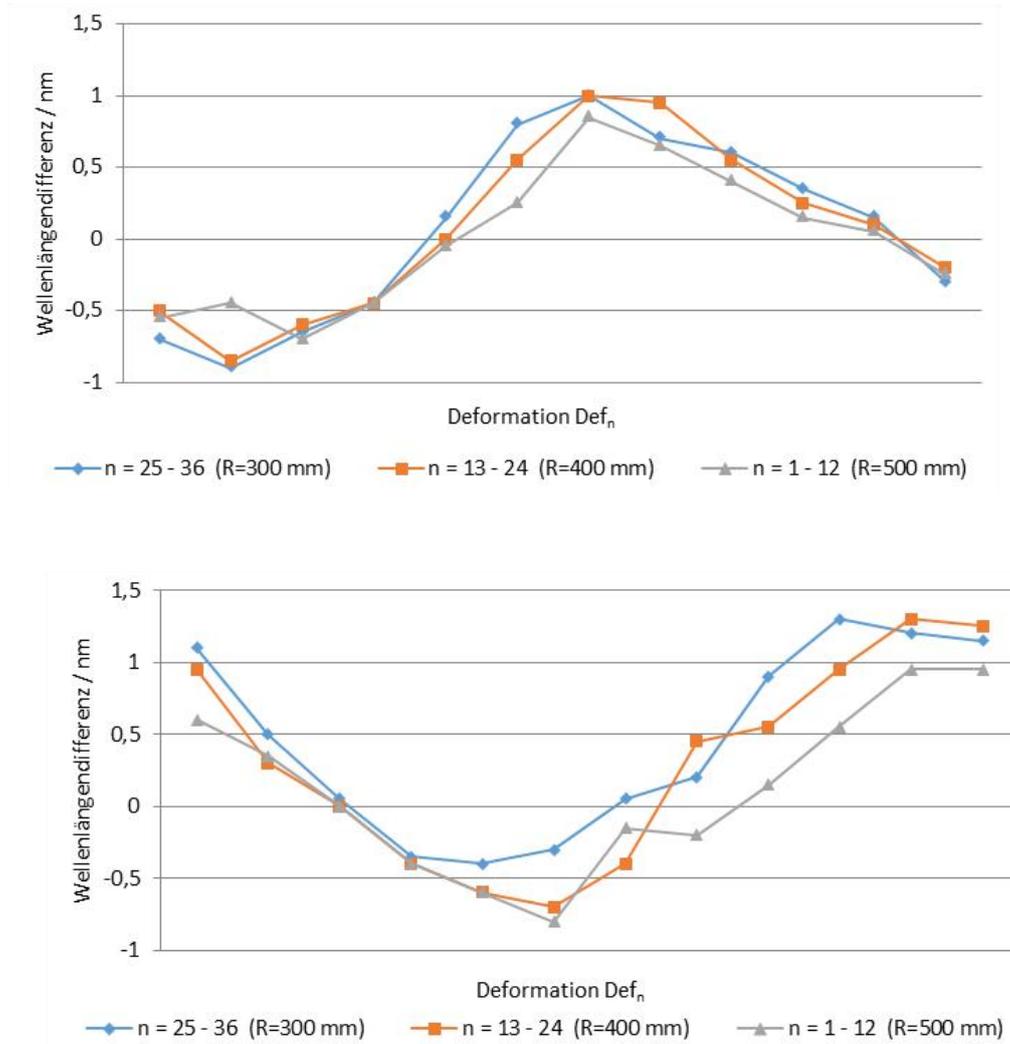


Abbildung 6.18: Messverlauf für verschiedene Krümmungsradien ($R = 300$ $R = 400$ und $R = 500$) für zwei Gitter (Diagramm oben und unten).

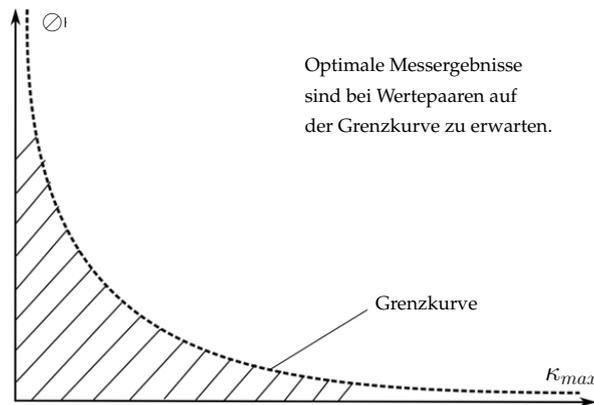


Abbildung 6.19: Grenzkurve für den maximalen Gangwinkel der helikalen Faserführung. Abhängig von dem Sensordurchmesser \varnothing_i und der maximalen zu erwartenden Krümmung κ_{max} des Sensors.

Zusammenfassend lässt sich für *Testsensor 2* sagen, dass ein tendenziell modellkonformes Verhalten vorliegt. Die Umsetzbarkeit der innovativen FBG-Formsensorik unter extremen Bedingungen ist damit prinzipiell möglich. Die Sensitivität des Sensors ist allerdings niedrig und das Erkennen von kleinen Dehnungsunterschieden ist dadurch nicht möglich. Das liegt mitunter an dem niedrigen Gangwinkel der helikalen Wicklung. Diese führt zu einer sehr geringen Faserbelastung bei Sensordeformation. Bei einer Sensorrealisierung mit großem Sensordurchmesser ist demnach eine möglichst steile Faserwicklung sinnvoll. Es besteht ein Zusammenhang zwischen einem maximal möglichen Gangwinkel, dem Sensordurchmesser \varnothing_i und einer maximal zu erwartenden Sensorkrümmung κ_{max} . In Abbildung 6.19 ist dieser Zusammenhang qualitativ dargestellt. Zu sehen ist eine Grenzkurve an Wertepaaren von Durchmessern und maximalen Krümmungen, die für einen Gangwinkel einer helikalen Faserwicklung möglich sind, sodass die Faserdehnung einen gewissen Grenzwert nicht überschreitet. Von Herstellern wird ein Wert von 5% für eine maximal mögliche Faserdehnung angegeben. Gute Signale sind bei weniger als 5% Dehnung gewährleistet. Die Bestimmung einer konkreten Funktion der Grenzkurve für eine quantitative Aussage ist anwendungsabhängig bezüglich einer maximal erlaubten Dehnung zu definieren. Der Kurvenverlauf lässt sich gut über eine Hyperbel beschreiben. Bei allen Wertepaaren unter der Grenzkurve im gestrichelten Bereich ist die Dehnungsgrenze eingehalten. Da sich in dieser *Testreihe 3* herausgestellt hat, dass eine möglichst steile Faserführung bessere Messwerte liefert, ist ein Wertepaar auf der Grenzlinie sinnvoll.

Ein weiterer Grund für die Unzuverlässigkeit in den Messdaten wird in einer zu ungenauen prototypischen Herstellung und nicht optimal ausgewählten Materialien für den Sensorträgerkörper vermutet. Für eine Sensorrealisierung mit zuverlässigen Ergebnissen in der Formerkennung trotz extremer Sensorbemaßung, ist eine deutliche Verbesserung des Sensorfertigungsprozesses notwendig.

6.3.2 Testteil 2: Erste Anwendung des innovativen Algorithmus auf einen FBG-Formsensor mit umgesetzter freier Messstellenverteilung

Ziel der Untersuchungen im zweiten Testteil ist die Demonstration einer ersten Implementierung des innovativen Algorithmus. Es soll gezeigt werden, dass die Formerfassung bei freier FBG-Verteilung prinzipiell möglich ist. Beispielhaft soll dafür das Erkennen von Grundformen wie *C*- und *S*-Formen getestet werden. Die *C*-Formen sollen dabei genauer untersucht werden. Hier werden Verformungen mit unterschiedlich starker Krümmung und in unterschiedliche Krümmungsrichtungen betrachtet. Es wird ein Vergleich der rekonstruierten Form mit der Zielform vorgenommen. Dabei wird eine Genauigkeit festgestellt. Es besteht bei der Auswertung der Messergebnisse kein Anspruch an den Nachweis einer hohen Genauigkeit in der erreichten Formerfassung. Die Genauigkeit hängt stark von der Testumgebung und von der Kalibrierung der Sensorkonfigurationsparameter ab. Zu den Sensorkonfigurationsparametern gehören die Angaben zur Position und Ausrichtung der Messstellen über den Trägerkörper. Bei der innovativen FBG-Formsensorik müssen diese Parameter durch die gewonnene Freiheit in der Positionierung der Messstellen separat für jedes FBG in den Algorithmus eingegeben werden. Die Werte wurden bisher händisch eingestellt. Die Fehler in der Angabe der Parameter werden demnach als hoch eingeschätzt und haben einen großen negativen Einfluss auf das Formergebnis. Ein Erreichen höherer Genauigkeiten ist bei automatisierter Kalibrierung der Sensorkonfigurationsparameter zu erwarten. Für die Experimente wird der in den ersten beiden Abschnitten dieses Kapitels vorgestellte *Formsensorprototyp* eingesetzt. Zur Formschätzung wird der in Abschnitt 5.5 vorgestellte Algorithmus auf die Messdaten angewendet.

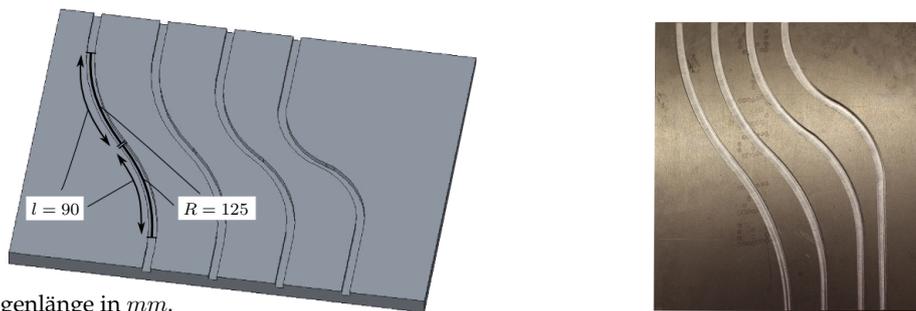
Testumgebung

Zur kontrollierten Sensorverformung wurden wie im ersten Testteil Formplatten eingesetzt. Zusätzlich zu den Formplatten mit konstanten Krümmungsradien (vgl. Abbildung 6.7 auf Seite 118) wurde eine Platte mit eingebrachten *S*-Formen hinzugenommen. Die Formplatte ist in Abbildung 6.20 abgebildet. Über diese Platte lässt sich ein Bereich von 180 mm des Formsensors in Sensormitte *S*-förmig verbiegen. Der für die Messungen eingesetzte *Formsensorprototyp* ist mit vier Fasern und insgesamt 24 Messstellen ausgestattet. Die genaue Sensorkonfiguration ist der Tabelle 6.9 aus Abschnitt 6.2 (Seite 112) zu entnehmen. Der in Abschnitt 5.5 beschriebene eingesetzte Algorithmus wurde angepasst für diesen Sensor implementiert; die Sensorkonfigurationsparameter wurden entsprechend übernommen.

Testreihe

Untersuchungsaspekte:

In dieser Testreihe soll gezeigt werden, dass *C*-Formen mit dem vorliegenden *Formsensorprototyp* bei der Anwendung des beschriebenen innovativen Algorithmus erkannt werden. Die Genauigkeit soll dabei herausgestellt werden. Es soll zudem das Erkennen einer *S*-Form an einem ausgewählten Beispiel demonstriert werden.



l : Bogenlänge in mm .

R : Krümmungsradius in mm .

Abbildung 6.20: Aluminium-Formplatte mit S -förmigen Rillen und eingezeichneter Bemessung der für die Tests verwendeten Vertiefung.

Messreihe:

Der Sensor wird analog zu den Tests in *Testreihe 1* mittels der Formplatten in verschiedene C - und S -Formen gebracht. Dabei werden die in folgender Tabelle 6.14 zusammengefassten Deformationen umgesetzt. Jede Deformation wird dabei exemplarisch einmalig durchgeführt.

C -Formen:	Form	Krümmungsradius	Krümmungsrichtung*
	1	Gerade	-
	2+3	400 mm	0° und 180°
	4+5	300 mm	0° und 180°
	6+7	200 mm	0° und 180°
* Die Krümmungsrichtung ist relativ zu der in den vorigen Abschnitten der Arbeit definierten Referenzrichtung \vec{R}_{ref} angegeben (vgl. Tabelle 6.9).			
S -Form:	Als ausgewähltes Beispiel wurde eine S -Form umgesetzt. Dazu wurde ein Bereich von 180 mm in Formsensormitte, wie in Abbildung 6.20 dargestellt, in eine S -Form gebracht.		

Tabelle 6.14: Durchgeführte Deformationen bei den in *Testteil 2* vorgenommenen Testreihen.

Messdaten:

Bei jeder vorgenommenen Deformation werden die Messdaten aller vorhandenen FBGs über den Formrekonstruktionsalgorithmus fusioniert. Die dabei geschätzten Informationen bezüglich der Sensorform werden für die Analyse der Testreihe verwendet. Die berechnete Information besteht aus der Form der Sensorachsenkurve und separat aus den Koordinaten der Sensorspitze.

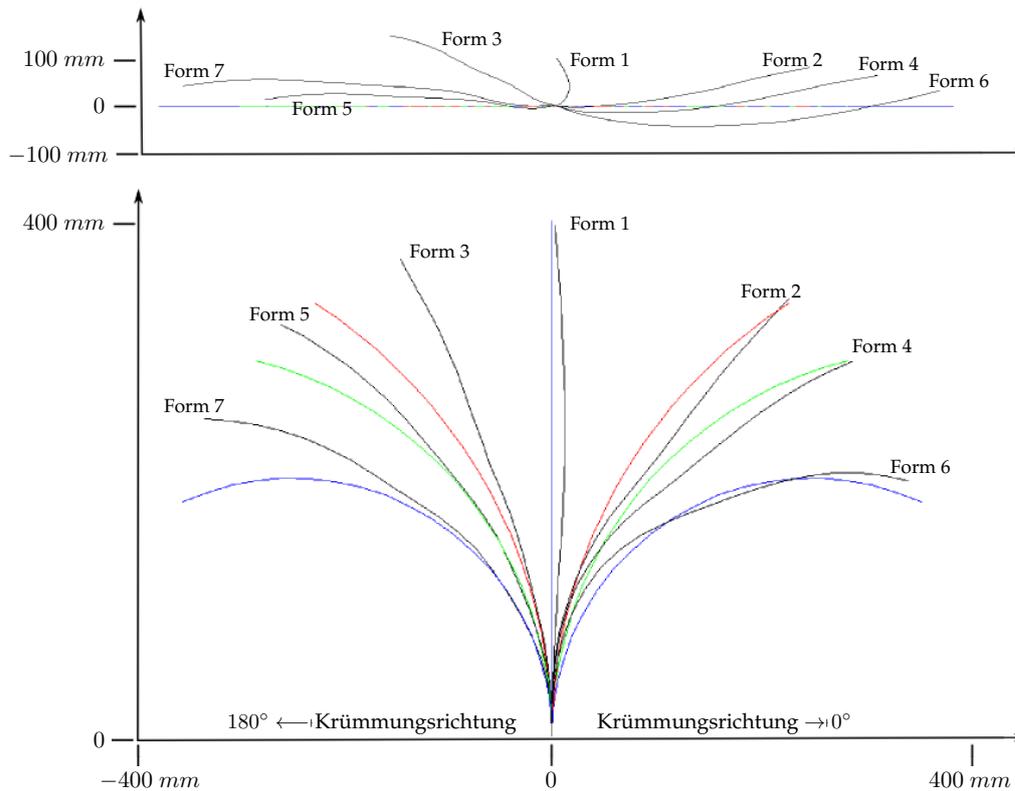


Abbildung 6.21: Ergebnis der Formrekonstruktion bei C -förmiger Deformation (oben: Topansicht, unten: Frontansicht).

Datenanalyse und Auswertung:

Zur Demonstration der prinzipiellen Funktionalität der FBG-Formsensorik nach innovativem Konzept wurde der Sensor in verschiedene C -Formen gebracht. Das über den Algorithmus berechnete Ergebnis ist in Abbildung 6.21 dargestellt. Die rekonstruierten Formen sind schwarz dargestellt. Zum Vergleich sind zudem die über die Formplatten gegebenen Referenzwerte verschiedenfarbig abgebildet. Aus den Bildern ist ersichtlich, dass sowohl Unterschiede in der Stärke der Krümmung, als auch in der Krümmungsrichtung erfasst werden; C -Formen sind klar erkennbar.

Ein zusätzlicher Vergleich von Positionskordinaten der geschätzten Form mit den zugehörigen Positionen der Referenzformen liefert eine Aussage hinsichtlich der bei der Formschätzung erreichten Genauigkeit. Für den Vergleich werden die Koordinaten von mehreren Punkten auf der rekonstruierten Sensorachse betrachtet. Insgesamt sind für jede Deformation 21 Punkte mit einem jeweiligen Abstand von 20 mm auf der Sensorachse berechnet. Diese Daten werden mit den entsprechenden Punkten auf der Referenzform verglichen. In Abbildung 6.22 sind die Abweichungen der Positionen über die verschiedenen Punkte auf der Sensorachse abgebildet. Dabei ist eine Fehlerkurve für jede der durchgeführten Deformationen zu sehen. Die Abweichung ist in Prozent bezogen auf die Sensorlänge von 400 mm

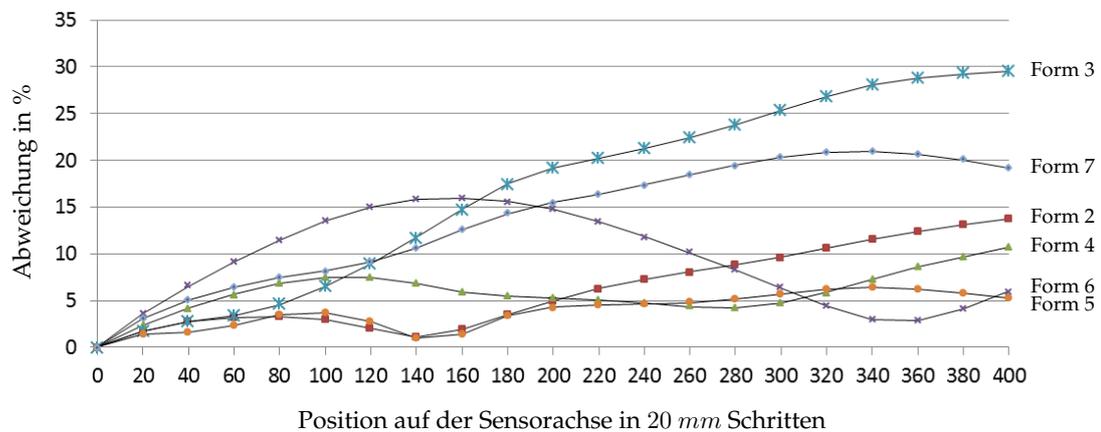


Abbildung 6.22: Vergleich der rekonstruierten Form mit den gegebenen Referenzformen: Eine maximale Abweichung an der Sensorspitze von fast 30% und ein minimaler Fehler von unter 5% ist festzustellen.

angegeben. Ein maximaler Fehler von fast 30% an der Sensorspitze ist für die Deformation *Form 3* festzustellen. Es sind aber auch Formen mit einer Genauigkeit der Sensorspitzenposition von etwa 5% erkennbar (*Form 5* und *Form 6*). Unter den gegebenen Testbedingungen und hinsichtlich der händischen Einstellung der Sensorkonfigurationsparameter ist diese Genauigkeit als zufriedenstellend zu bewerten.

Abschließend wird in der *Testreihe 2* das Erkennen einer *S*-Form demonstriert. Es zeigt sich, dass *S*-Formen deutlich erkennbar sind. In Abbildung 6.23 ist beispielhaft eine berechnete Form zu sehen. In Farbe ist zudem die zugehörige Referenzform im mittleren Bereich des Sensors abgebildet. Weiterführende Untersuchungen wurden bezüglich dieser Verformungen nicht vorgenommen.

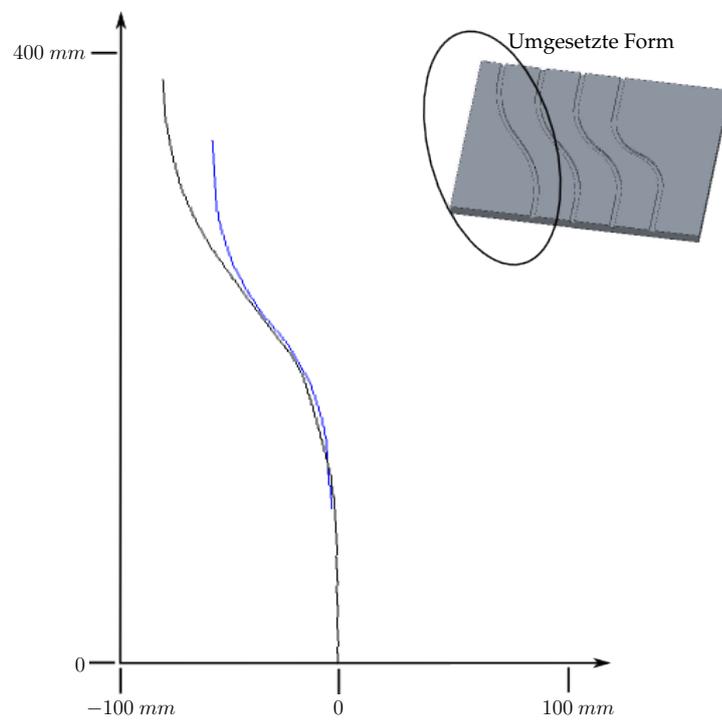


Abbildung 6.23: Beispielhaftes Ergebnis der Formrekonstruktion bei *S*-förmiger Deformation (die Referenzform ist als blau eingefärbte Linie mit abgebildet).

6.3.3 Zusammenfassung der Ergebnisse der Messdatenanalyse zur Sensorevaluation

Ziel der in diesem Abschnitt der Arbeit vorgestellten Experimente ist die Evaluation der praktischen Realisierbarkeit innovativer FBG-Formsensoren. In der prototypischen Herstellung sind bereits die Vorteile der freien FBG-Verteilung zur Geltung gekommen. Zu zeigen ist nun insbesondere, dass das Verhalten der Messwerte über die aufgestellten Deformationsmodelle beschreibbar ist. Dies ist die Voraussetzung der Umsetzbarkeit der innovativen FBG-Formsensorik.

In *Testteil 1* wurde das modellkonforme Sensorverhalten überprüft. Als beispielhafte Realisierung der innovativen Sensorik wurde eine helikale Faserwicklung gewählt. Mehrere Experimente wurden über die Durchführung verschiedener Messreihen vorgenommen. Die darüber erfassten Daten wurden auf verschiedene Aspekte hin analysiert. Über die Verifikation von zwei im Voraus aufgestellten Hypothesen wurde ein tendenziell modellkonformes Verhalten der Messdaten belegt. Zusammen mit den in Kapitel 5 hergeleiteten Algorithmen ist somit die Grundlage für die innovative FBG-Formsensorik gelegt.

Neben der qualitativen Belegung der Hypothesen wurden auch quantitative Ergebnisse erzielt. Die Resultate können zukünftig zur Einschätzung der Genauigkeit der Formrekonstruktion herangezogen werden. Dabei ist zu beachten, dass die Testbedingungen wegen der händischen Durchführung für quantitative Aussagen nur bedingt geeignet sind. Bessere Ergebnisse sind bei automatisierter Testdurchführung unter Verwendung von aufwendigeren Aufbauten zur kontrollierten Sensorverformung zu erwarten. Die Genauigkeit der Formrekonstruktion bestimmt sich aus der Anzahl der vorhandenen Messstellen, sowie aus der Komplexität der Verformung des Sensors. Die Genauigkeit ist also nicht pauschal für alle Formsensoren abschätzbar. Beispielhaft wurde eine Hochrechnung der Genauigkeit unter Berücksichtigung der in der Testreihe bestimmten Messunsicherheit $\pm 0,025 \text{ nm}$ vorgenommen. Dabei wurde ein Fehler von 0,005% für ein Sensorkrümmung von $\frac{1}{300}$ berechnet. Es wurden für diese Rechnung stark vereinfachende Annahmen gemacht und die Fehlereinwirkung von nur einem Gitter betrachtet.

In *Testreihe 3* des ersten Messteils wurde eine Sensorrealisierung mit extremer Bemaßung untersucht. Hier hat sich herausgestellt, dass ein zu geringer Gangwinkel bei der helikalen Faserwicklung problematisch ist und zu hohen Messunsicherheiten führt. Ein maximaler Gangwinkel abhängig von dem Sensordurchmesser und der maximalen zu erwartenden Krümmung ist hier für ein gutes Messergebnis notwendig.

In *Testteil 2* wurde die Formrekonstruktion unter Anwendung einer ersten Implementierung des innovativen Algorithmus betrachtet. Die Experimente wurden mit einem Formsensor durchgeführt, der mit vier helikal gewickelten Fasern und insgesamt 24 frei über den Sensorträgerkörper verteilten FBGs ausgestattet ist. An ausgewählten Beispielen sollte gezeigt werden, dass Grundformen erkannt werden können. Die Messungen haben ergeben, dass *C*- und *S*-Formen erfolgreich gemessen werden können. Die Resultate der berechneten *C*-Formen wurden ausführlicher analysiert. Es wurde ein Vergleich der Form-

abweichung von Referenzwerten vorgenommen. Dabei wurde ein Fehler von 5% im besten Fall und ein Fehler von fast 30% im schlechtesten Fall berechnet. Beide Fehler sind in Bezug auf die Sensorlänge angegeben. Der berechnete Fehler erscheint im Vergleich zum Stand der Technik als relativ hoch. Es sind Arbeiten bekannt, in denen eine Genauigkeit etwa 1% nachgewiesen wird. Diese über den Formsensorprototyp erreichte Genauigkeit ist dennoch als zufriedenstellend zu bewerten. Die Einstellung der Sensorkonfigurationsparameter zur Angabe der Messstellenpositionierung wurde per Hand eingestellt. Eine Ermittlung der Parameter über aufwendigere Kalibrierverfahren ist bei freier FBG-Verteilung aber besonders wichtig. Deutlich bessere Ergebnisse sind bei ordentlicher Sensorkalibrierung und automatisierten Testverfahren zu erwarten. Diese Aspekte sprengen den Rahmen dieser Arbeit und sind in Zukunft zu behandeln.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Das Thema dieser Arbeit ist die Faser-Bragg-Gitter basierte Formsensorik. Formsensoren messen die Form flexibler, schlangenförmiger Objekte und können zur Beobachtung von verformbaren Instrumenten wie beispielsweise von flexiblen Endoskopen eingesetzt werden. Seit über zwanzig Jahren wird weltweit an dieser Technologie geforscht. Verschiedene Methoden der Sensorrealisierung sind bekannt, es hat sich jedoch bisher kein Konzept erfolgreich als Produkt auf dem Markt durchsetzen können. Ein Grund dafür sind bestehende Einschränkungen in der Art des Sensoraufbaus. Der Formsensor besteht aus einem flexiblen Sensorträgerkörper in welchem FBG-Fasern eingegossen sind. Gefordert ist dabei eine bestimmte Anordnung der FBG-Messstellen in dem Trägerkörper. Diese Restriktionen bezüglich der Messstellenverteilung führen zu Schwierigkeiten in der Sensorherstellung sowie zu einer eingeschränkten Deformationsflexibilität des Sensors. Das wiederum führt zu Fertigungsungenauigkeiten und einer daraus resultierenden ungenügenden Sensorgenauigkeit. Ziel dieser Arbeit ist die Erforschung einer neuen Herangehensweise in der FBG-basierten Formsensorik, welche als *innovative FBG-Formsensorik* bezeichnet wird. Die bisherigen Probleme in der praktischen Sensorrealisierung sollen durch die neue Herangehensweise gelöst werden. Zudem soll die über den Sensor gewonnene Information erweitert werden. Bisher wird bei der FBG-Formsensorik der Verlauf der Sensorachse gemessen. Zusätzlich soll in dieser Arbeit die Form der Sensoroberfläche betrachtet werden. Die innovative FBG-Formsensorik erfordert insbesondere neue Algorithmen zur Fusion der Messdaten und zur Rekonstruktion der zu messenden Verformung. Die theoretische Erarbeitung dieser Algorithmen stellt den Hauptteil dieser Dissertation dar.

Die Resultate dieser Arbeit sind im Folgenden in Abschnitt 7.1 zusammengefasst. Im Zuge der elementaren Änderungen in der Sensorrealisierung nach dem innovativen Konzept sind neue Forschungsfragen im Rahmen der FBG-Formsensorik aufgedeckt. Die damit verbundenen zukünftigen Arbeiten sind in Abschnitt 7.2 vorgestellt.

7.1 Zusammenfassung und Diskussion

Nach der Beschreibung der Grundlagen der FBG-Formsensorik in Kapitel 2 wird der Stand der Technik in Kapitel 3 aufgeführt. Hier wird deutlich, dass bei bisher bekannten Konzepten in der FBG-Formsensorik nach bestimmtem Muster vorgegangen wird; notwendig ist stets eine Einhaltung strenger Restriktionen bezüglich der FBG-Verteilung über den Sensorträgerkörper. Es fällt auf, dass besonders in den letzten Jahren keine Forschungsergebnisse hinsichtlich neuer Sensorentwicklungen bekannt sind. Der Fokus derzeitiger Forschungsarbeiten liegt heutzutage bereits auf der Sensorintegration und der Sensorverwendung zur Regelung von Robotersystemen mit flexiblen Teilstrukturen. Obwohl mittlerweile viele

Prototypen von verschiedenen Forschungsgruppen weltweit vorgestellt wurden, wird noch kein Sensorsystem erfolgreich kommerziell vertrieben.

In Anbetracht der Erkenntnisse aus dem Stand der Technik wird der Bedarf an grundlegenden Änderungen in der FBG-Formsensorik festgestellt. Das Konzept der *innovativen FBG-Formsensorik* ist in Kapitel 4 vorgestellt. Hierbei werden zum einen die Probleme der herkömmlichen, in dieser Arbeit als *konventionell* bezeichneten FBG-Formsensorik, detailliert hervorgehoben. Durch die Restriktionen bezüglich der FBG-Verteilung und damit verbundener paralleler Faserführung entlang des Sensorträgerkörpers, ist die Deformationsflexibilität des Sensors eingeschränkt. Darüber hinaus ist die exakte Umsetzung der vorgegebenen FBG-Positionierung in der Praxis schwer realisierbar. Bei einer nicht exakten Herstellung durch Fertigungsungenauigkeiten ist mit einer verschlechterten Sensorgenauigkeit zu rechnen. Eine Lösung zur Eliminierung dieser Probleme wird in einer freien FBG-Verteilung über den Trägerkörper gesehen. Dadurch kann auf Fertigungsungenauigkeiten besser eingegangen werden. Die Fehler werden direkt über Anpassung der Parameter im Datenfusionsalgorithmus ausgeglichen und sind besser kontrollierbar. Auf eine parallele Faserführung kann außerdem verzichtet werden. Eine höhere Deformationsflexibilität ist die Folge. Über die genannten Vorteile hinaus ist bei der innovativen FBG-Formsensorik das Erfassen der zweidimensionalen Sensoroberfläche, zusätzlich zu der eindimensionalen Form der Sensorachse, möglich.

Für die innovative FBG-Formsensorik sind neue Algorithmen zur Datenfusion notwendig. Diese Algorithmen sind in Kapitel 5 erarbeitet. Die Algorithmen stellen den Hauptteil dieser Arbeit dar. Es werden die notwendigen Grundlagen für die Formschatzung gegeben und daraus abgeleitet ein Algorithmus zur Datenfusion bei freier FBG-Verteilung über den Trägerkörper vorgestellt. Bezüglich der Idee der freien FBG-Verteilung wurde eine Erfindungsmeldung beim Deutschen Patentamt eingereicht [Pau15a]. Die Problemformulierung wird unter der Verwendung von Tensoren und Mannigfaltigkeiten vorgenommen. Dies führt zu einer klaren Problemdarstellung und bietet die Möglichkeit der Verwendung bekannter mathematischer Konzepte zur Problemlösung. Der Algorithmus besteht aus vier Teilschritten. Verschiedene Ansätze zur Lösung der Teilschritte sind gegeben. Die Verfahren zur Lösung der einzelnen Teilschritte sind jeweils erweiterbar und können zukünftig an den jeweiligen Anwendungsfall angepasst werden. Das Besondere an diesem Algorithmus ist die Verwendung metrischer und differentialgeometrischer Konzepte. Die Berechnung der Oberfläche des Sensors beruht auf einem neuen Konzept der Differentialgeometrie von Fefferman et al.. Über die Betrachtung des Problems aus geometrischer Sicht, lassen sich bekannte topologische Eigenschaften der betrachteten Objekte effizient nutzen. Im Anschluss an die Herleitung des Algorithmus sind eine Bewertung der theoretischen Resultate und eine Abschätzung der zu erwartenden Laufzeitkomplexität gegeben. Es wird außerdem eine Implementierung in MATLAB skizziert, die für die später in der Arbeit vorgestellte Evaluation herangezogen wird.

Zu der in dieser Arbeit fokussierten theoretischen Betrachtung der innovativen FBG-Formsensorik ist in Kapitel 6 eine prototypische Realisierung vorgestellt und anschließend evaluiert. Dabei ist das Ziel, die prinzipielle praktische Realisierbarkeit zu zeigen und eine

erste prototypische Sensorumsetzung zu demonstrieren. Zu Testzwecken wurden Sensorprototypen mit helikaler Faserwicklung konstruiert und gebaut. Durch die freie Faserverteilung stellt sich die prototypische Fertigung als deutlich einfacher heraus, als die Sensorfertigung bei paralleler Faserführung, unter den dann gegebenen Voraussetzungen der Positionierung mehrerer FBGs auf gleichen Sensor-Querschnittsebenen. Über Experimente wird die Messbarkeit von Materialdehnungen bei helikaler Faserwicklung getestet und die Konformität zu den aufgestellten Deformationsmodellen bewertet. Systematische Fehler werden eliminiert. Ergebnis ist die Erkenntnis, dass Dehnungen signifikant und über die aufgestellten Modelle vorhersehbar gemessen werden können. Die prinzipielle Funktionalität der innovativen FBG-Formsensorik ist damit gezeigt. Die Realisierung der Formsensorik selbst wird in dieser Arbeit nur beispielhaft demonstriert. Über einen Testsensor mit vier helikal gewickelten Fasern und insgesamt 24 FBGs wird gezeigt, dass *S*- und *C*-Formen erkennbar sind. Ein Vergleich der Sensorspitzenposition wird zur Angabe der Genauigkeit herangezogen. Eine Abweichung von 5% im besten Fall und von 30% im schlechtesten Fall wurde ermittelt. Die Fehler sind dabei relativ zu der Sensorlänge angegeben. Die hier erreichte Genauigkeit wird dem eigentlichen Potential der innovativen FBG-Formsensorik nicht gerecht. Die in den Algorithmus einfließenden Sensorkonfigurationsparameter wurden nach der Sensorherstellung händisch abgemessen und eingestellt. Eine deutlich bessere Sensorperformance ist bei einer ordentlichen Sensorkalibrierung zu erwarten. Die Sensorkalibrierung sowie ein konsistentes Verfahren zur Evaluation der Sensorgenauigkeit sind nicht Teil dieser Arbeit. Die dafür notwendigen Kalibrierverfahren und das Erfassen von Referenzformen zum Vergleich der rekonstruierten Sensorformen sind Themen zukünftiger Forschung mit einem stärkeren Bezug zur Hardwareseite der Sensorik.

Zusammenfassend ist mit dem innovativen Sensorkonzept eine alternative und vielseitige Methode vorgestellt, über welche bestehende Probleme in der FBG-Formsensorik gelöst werden können. Die dafür notwendigen Algorithmen sind in dieser Arbeit vorgestellt und diskutiert. Über erste experimentelle Tests konnte sich das Konzept auch in praktischer Sicht als erfolversprechend herausstellen.

7.2 Ausblick

Die innovative FBG-Formsensorik wirft neue Forschungsfragen auf. In verschiedene Richtungen kann weiter an der Sensoroptimierung auf Grundlage des neuen Konzeptes gearbeitet werden. Dabei sind sowohl auf Software- als auch auf Hardwareseite Themen zu nennen.

Zukünftige Forschungsthemen auf Softwareseite

Die Weiterentwicklung der Algorithmen stellt einen interessanten Themenpunkt dar. Die einzelnen Teilschritte der Formrekonstruktionen können separat optimiert werden. Insbesondere die Erweiterung der Formerfassung auf die Rekonstruktion der zweidimensionalen Sensoroberfläche ist noch genauer zu betrachten. Die bei der Rekonstruktion verwendeten Konzepte erlauben das Heranziehen von topologischen Eigenschaften zur verbesserten Startwertbestimmung bestimmter Parameter. Ein Ansatz ist am Ende von Abschnitt 5.3.4,

mit Bezug auf eine Arbeit von G. Carlsson in [Car09], gegeben. Die Betrachtung der Homologiegruppe des zu vermessenden Objektes kann genutzt werden, um Startwerte für die Rekonstruktion der Oberfläche aus einem vorher generierten diskreten, metrischen Raum zu optimieren.

Der verwendete Algorithmus von Fefferman et al. ist eine vielversprechende Methode zur Rekonstruktion der Oberfläche. Die Anwendung der Methodik kann über die Beantwortung verschiedener Fragestellungen effizienter gestaltet werden. So kann eine Betrachtung der Anforderungen an die Ausgangssituation genauer erforscht werden. Aus einer diskreten Menge X an Punkten im \mathbb{R}^3 wird eine Oberflächenapproximation vorgenommen. Die Anforderung an die Menge der in X enthaltenden Elementen hängt von einem Parameter δ ab, der den Fehler der Approximation begrenzt. Die Reduktion der geforderten Anzahl an Punkten in X ohne den Verlust an Genauigkeit der Rekonstruktion durch einen größer werdenden Wert δ , ist ein weiterer Aspekt zukünftiger Forschung.

Über die FBGs werden Wellenlängenänderungen gemessen. Neben den Wellenlängenwerten wird stets eine Intensität erfasst, mit der die Wellenlängen reflektiert werden. Eine hohe Intensität spricht dabei für ein zuverlässiges Signal. Eine in diesem Zusammenhang stehende Möglichkeit der Erweiterung des Algorithmus von Fefferman et al. ist die Gewichtung der Elemente in X über die zugehörige Intensität.

Auf Softwareseite ist schließlich noch zu erarbeiten, wie die Sensorkonfigurationsparameter zu wählen sind. Die Anzahl und Verteilung der FBGs über den Trägerkörper sind anwendungsabhängig zu optimieren. Hierfür sind Optimierungsverfahren beispielsweise basierend auf Simulationen möglich.

Zukünftige Forschungsthemen auf Hardwareseite

Neben der Theorie sind viele praktische Themen zu erforschen. Wichtig ist die Betrachtung des in dieser Arbeit vorerst nicht mit berücksichtigten Temperatureinflusses. Die Charakterisierung der Effekte von Temperaturschwankungen und die Entwicklung passender Kompensationsverfahren sind notwendig.

Um eine ausreichende Sensorgenauigkeit zu erreichen, müssen die Parameter des Algorithmus über Kalibrierverfahren optimal eingestellt werden. Die Position der FBGs auf dem Sensorträgerkörper ist jeweils über sechs Parameter definiert. Die Einstellung dieser Parameter kann entweder über passende Kalibrierungsmethoden vorgenommen oder über maschinelle Lernverfahren bestimmt werden.

Die prototypische Fertigung der Sensoren bedarf weiterer Prozessoptimierung. Das Bestimmen passender Materialien für die Sensorik und eine Verbesserung des Vorgehens in der Sensorfertigung ist vorzunehmen. Die Nutzung von 3D-Druckern kann hier eine individuelle Ausrichtung der Sensoren fördern.

Ein wichtiger Aspekt in der FBG-Formsensorik ist ein Verfahren zur Bestimmung der Sensorgenauigkeit. Hier sind messtechnische Aspekte einzubringen. Eine Methode zur kontrollierten Sensordeformation und zur Generierung von dazugehörigen Referenzwerten zum Vergleich wird benötigt. Die Definition eines Qualitätsmaßes zur konsistenten Angabe der Sensorperformance ist für die Bewertung der Sensorik hilfreich.

Schließlich ist die Sensorintegration ein weiteres Forschungsthema. Am IAR-IPR wird die Medizintechnik als Anwendungsfeld betrachtet. Das Einbinden der FBG-Formsensorik in die hier bestehende Forschungsplattform *OP:Sense* bietet eine Verknüpfungsmöglichkeit der Forschung an der FBG-Formsensorik und der Forschung an anderen medizintechnischen Themen am IAR-IPR. Die Zusammenarbeit mit Wissenschaftlern aus dem medizinischen Bereich stellt eine weitere Herausforderung dar. Die Sensorintegration in chirurgischen Instrumenten bei Versuchen am Tier würde einen Beitrag zur Sensorevaluation unter realen Bedingungen liefern.

Zuletzt ist die abgewandelte FBG-Formsensorik mittels neuer Technologien unter Ausnutzung der nun möglichen freien FBG-Verteilung zu bemerken. Am IAR-IPR wird gemeinsam mit der Hochschule Aschaffenburg an glasfaserlosen FBG-Sensoren geforscht. Hier wird der Lichtwellenleiter mit FBGs direkt in einen verformbaren Trägerkörper, bestehend aus ORMOCER[®]en, eingeschrieben. Das Positionieren der Messstellen ist somit genauer umsetzbar. Die neue Art der Sensorik ist mit *1-Komponenten FBG-Formsensor* betitelt.

Man braucht ihn bloß zu quadrieren. Damit verschwindet die Wurzel.

(o.A.)

Literaturverzeichnis

- [Aba13] Abayazid, M., Kemp, M. and Misra, S. '3d flexible needle steering in soft-tissue phantoms using fiber bragg grating sensors'. In *Proceedings of Robotics and Automation (ICRA), 2013 IEEE International Conference*, 2013.
- [Ald] Aldroubi, A. and Basser, P. 'Reconstruction of vector and tensor fields from sampled discrete data'. In *Contemporary Mathematics*, volume 247, pages 1–16. Providence, RI: American Mathematical Society.
- [Ame01] Amenta, N., Choi, S. and Kolluri, R. 'The power crust'. In *Proceedings of the sixth ACM symposium on Solid modeling and applications*, pages 249–266, 2001.
- [Ara02] Araujo, F., Ferreira, L. and Santos, J. 'Simultaneous determination of curvature, plane of curvature, and temperature by use of a miniaturized sensing head based on fiber Bragg gratings'. In *Applied optics*, volume 41, pages 2401–2407. Optical Society of America, 2002.
- [Ask08] Askins, C., Miller, G. and Friebele, E. 'Bend and twist sensing in a multiple-core optical fiber'. In *Proceedings Optical Fiber Communication Conference*. Optical Society of America, 2008.
- [Bae06] Baerwolff, G. and Seifert, G. 'Hoehere Mathematik fuer Naturwissenschaftler und Ingenieure'. In *Elsevier-Spektrum*. Akademischer Verlag, 2006.
- [Bih15] Bihlmaier, A., Beyl, T., Nicolai, P., Kunze, M., Mintenbeck, J., Schreiter, L., Brennecke, T., Hutzl, J., Raczkowski, J. and Woern, H. 'ROS-based Cognitive Surgical Robotics'. In *Robot Operating System (ROS) - The Complete Reference*. Springer, 2015.
- [Bis12] Bishop, R. and Goldberg, S. 'Tensor analysis on manifolds'. Courier Corporation, 2012.
- [Boo86] Boothby, W. 'An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry'. Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1986.
- [Bra13] Bragg, W.H. and Bragg, W. L. 'The reflection of X-rays by crystals'. In *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, JSTOR*, volume 88, pages 428–438, 1913.
- [Bru13] Bruederlin, B. and Meier, A. 'Computergrafik und geometrisches Modellieren'. Springer-Verlag, 2013.

- [Bur01] Burago, D., Burago, Y. and Ivanov, S. 'A course in metric geometry'. Volume 33. Providence, RI: American Mathematical Society, 2001.
- [Car09] Carlsson, G. 'Topology and data'. Volume 46, number 2, pages 255-308. Bulletin of the American Mathematical Society, 2009.
- [Cla06] Clarkson, K. 'Building Triangulations Using epsilon-nets'. In *Proceedings of the Thirty-eighth Annual ACM Symposium on Theory of Computing, STOC '06*, pages 326–335, 2006.
- [DNQ87] Statistik und Zertifizierungsgrundlagen (NQSZ) DIN-Normenausschuss Qualitätsmanagement. 'DIN 55350-13:1987-07 - Concepts in quality and statistics; concepts relating to the accuracy of methods of determination and of results of determination'. DIN, Deutsches Institut für Normen e.V., 1987.
- [Do 76] Do Carmo, M. 'Differential geometry of curves and surfaces'. Volume 2. Prentice-hall Englewood Cliffs, 1976.
- [Do 92] Do Carmo M. 'Riemannian geometry'. Birkhaeuser, 1992.
- [Dun05] Duncan, R. 'Sensing Shape: Fiber-Bragg-grating sensor arrays monitor shape at a high resolution'. In *Spie's OE Magazine*, pages 18–21, 2005.
- [Dun06] Duncan, R. and Raum, M. 'Characterization of a fiber-optic shape and position sensor'. In *Smart Structures and Materials*. International Society for Optics and Photonics, 2006.
- [Dun07] Duncan, R., Froggatt, M., Kreger, S., Seeley, R., Gifford, D., Sang, A. and Wolfe, M. 'High-accuracy fiber-optic shape sensing'. In *Proceedings of the 14th International Symposium on: Smart Structures and Materials and Nondestructive Evaluation and Health Monitoring*. International Society for Optics and Photonics, 2007.
- [Far16] Farvardin, A., Murphy, R., Grupp, R., Iordachita, I. and Armand, M. 'Towards real-time shape sensing of continuum manipulators utilizing fiber Bragg grating sensors'. In *Proceedings of Biomedical Robotics and Biomechatronics (BioRob), 2016 6th IEEE International Conference*, 2016.
- [Fef09] Fefferman, C. 'Whitney's extension problems and interpolation of data'. In *Bulletin of the American Mathematical Society*, volume 46, pages 207–220, 2009.
- [Fef15] Fefferman, C., Ivanov, S., Kurylev, Y., Lassas, M. and Narayanan, H. 'Reconstruction and interpolation of manifolds I: The geometric Whitney problem'. arXiv preprint arXiv:1508.00674, 2015.
- [Flo03] Flockhart, G., MacPherson, W., Barton, J., Jones, J., Zhang, L. and Bennion, I. 'Two-axis bend measurement with Bragg gratings in multicore optical fiber'. In *Optics letters, Optical Society of America*, volume 28, pages 387–389, 2003.
- [Fre07] Freund, R. and Hoppe, R. 'Stoer/Bulirsch: Numerische Mathematik 1'. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.

- [Fro14] Froggatt, M., Klein, J., Gifford, D. and Kreger, S. 'Optical position and/or shape sensing'. In *Google Patents, US Patent 8,773,650*, 2014.
- [Gan00] Gander, M., MacPherson, W., McBride, R., Jones, J., Zhang, L., Bennion, I., Blanchard, P., Burnett, J. and Greenaway, A. 'Bend measurement using Bragg gratings in multicore fibre'. In *Electronics Letters, The Institution of Engineering and Technology*, volume 36, 2000.
- [Ger04] Gerthsen, C. and Meschede, D. 'Gerthsen Physik. 22. Auflage'. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2004.
- [Gol09] Goldhorn, K., Heinz, H. and Kraus, M. 'Moderne mathematische Methoden der Physik: Band 1'. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.
- [Gu,03] Gu, M. and Piedboeuf, J. 'A flexible-arm as manipulator position and force detection unit'. In *Control engineering practice*, volume 11. Elsevier, 2003.
- [Hac12] Hackbusch, W. 'Tensor Spaces and Numerical Tensor Calculus'. In *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2012.
- [Hae13] Haemmerlin, G. and Hoffmann, K. 'Numerische Mathematik'. Volume 7. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2013.
- [Hel12] Helmut, H., Lurz, B. and Wohlrab, J. 'Grundlagen der Informatik'. Volume 2. Pearson Studium, 2012.
- [Hen28] H. Hencky. 'Ueber die Form des Elastizitaetsgesetzes bei ideal elastischen Stoffen'. In *Zeitschrift fuer Technische Physik*, volume 9, pages 215–220, 1928.
- [Hen12] Henken, K., Van Gerwen, D., Dankelman, J. and Van Den Dobbelsteen, J. 'Accuracy of needle position measurements using fiber Bragg gratings'. In *Minimally Invasive Therapy and Allied Technologies, Taylor and Francis*, volume 21, pages 408–414, 2012.
- [Hen14] Henken, K., Dankelman, J., van den Dobbelsteen, J., Cheng, L. and van der Heiden, M. 'Error analysis of FBG-based shape sensors for medical needle tracking'. In *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, volume 19, pages 1523–1531, 2014.
- [Hop92] Hoppe, H., DeRose, T., Duchamp, T., McDonald, J. and Stuetzle, W. 'Surface reconstruction from unorganized points'. In *ACM SIGGRAPH Computer Graphics*, volume 26, 1992.
- [Hot10] Hotz, I., Sreevalsan-Nair, J., Hagen, H. and Hamann, B. 'Tensor field reconstruction based on eigenvector and eigenvalue interpolation'. In *Dagstuhl Follow-Ups*, volume 1. Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum fuer Informatik, 2010.
- [Hus97] Husty, M., Karger, A., Sachs, H., Steinhilper, W., Husty, M., Karger, A. and Steinhilper, Waldemar. 'Robotik'. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1997.

- [Jae13] Jaenich, K. 'Mathematik 2: Geschrieben fuer Physiker'. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2013.
- [Jol02] Jolliffe, I. 'Principal component analysis'. Wiley Online Library, 2002.
- [Kal09] Kalogerakis, E., Nowrouzezahrai, D., Simari, P. and Singh, K. 'Extracting lines of curvature from noisy point clouds'. In *Computer-Aided Design, Elsevier*, volume 41, pages 282–292, 2009.
- [KAR16a] KARL STORZ GmbH und Co KG . 'Die neue Bilddimension, Flexibles Video-Uretero-Renoskop mit erweiterten Bildoptionen'. In *EndoWorld, URO 46 3.1 10-2016-D*, 2016.
- [KAR16b] KARL STORZ GmbH und Co KG . 'Highlights 2016 Urologie'. In *Highlights Urologie*. Ausgabe 4. Quartal, 2016.
- [Kas10] Kashyap, R. 'Fiber Bragg Gratings (Second Edition)'. Academic Press, Boston, Second Edition, ISBN 978-0-12-372579-0, 2010.
- [Kha02] Khalfin, I., Jones, J. and Herbert, S. 'Electromagnetic position and orientation tracking system with distortion compensation employing wireless sensors'. In *Google Patents, US Patent 6,369,564*, 2002.
- [Kin00] Kindlmann, G., Weinstein, D. and Hart, D. 'Strategies for direct volume rendering of diffusion tensor fields'. In *Proceedings of IEEE transactions on Visualization and Computer Graphics*, volume 6, pages 124–138, 2000.
- [Kue13] Kuehnel, W. 'Differentialgeometrie: Kurven–Flaechen–Mannigfaltigkeiten. Aufbaukurs Mathematik'. Springer Spektrum Wiesbaden, 2013.
- [Lau06] Lau, D. 'Algebra und Diskrete Mathematik 2: Lineare Optimierung, Graphen und Algorithmen, Algebraische Strukturen und Allgemeine Algebra mit Anwendungen'. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- [Led12] Ledermann, C., Hergenhan, J., Weede, O. and Woern, H. 'Combining shape sensor and haptic sensors for highly flexible single port system using Fiber Bragg sensor technology'. In *In Proceedings 8th IEEE/ASME International Conference on Mechatronic and Embedded Systems and Applications (MESA12)*, volume 9, pages 196–201, 2012.
- [Led13] Ledermann C., Pauer, H., Weede, O. and Woern H. 'Simulation Tool for 3D Shape Sensors Based on Fiber Bragg Gratings and Optimization of Measurement Points'. In *Proceedings of 2013 6th IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics (RAM)*, 2013.
- [Led14a] Ledermann, C., Pauer, H. and Woern, H. 'Fiber Optical Sensor System for Shape and Haptics for Flexible Instruments in Minimally Invasive Surgery: Overview and Status Quo'. In *Proceedings of 23rd International Conference on Optical Fibre Sensors (OFS)*, 2014.

- [Led14b] Ledermann, C., Seyfried, M., Pauer, H., Domann G., Wolter, H. and Woern, H. 'Using ORMOCER®s as Casting Material for a 3D Shape Sensor based on Fiber Bragg Gratings'. In *Proceedings of the 2014 IEEE Ninth International Conference on Intelligent Sensors, Sensor Networks and Information Processing (ISSNIP)*, 2014.
- [Led15a] Ledermann, C., Mintenbeck, J., Ding, Y., Pauer, H. and Woern, H. 'Closed-loop control of a Flexible Instrument using an integrated FBG-based Shape Sensor'. In *Proceedings of the International Conference on Technology and Sciences (ICAT'15)*, 2015.
- [Led15b] Ledermann, C., Pauer, H. and Woern, H. 'Fiber Optical Sensor System for Shape and Haptics for flexible Instruments in Minimally Invasive Surgery - Status Quo'. In *Proceedings of Innovation Messtechnik 2015, Shaker Verlag - ISBN: 978-3-8440-3560-5*, 2015.
- [Led16] Ledermann, C. 'Formerfassung eines flexiblen Instruments für die minimal invasive Chirurgie'. In *PhD, Karlsruher Institut für Technologie*, 2016.
- [Lee03] Lee, J. 'Introduction to Smooth Manifolds'. In *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2003.
- [Lee13] Lee, K., Mariampillai, A., Haque, M., Standish, B., Yang, V. and Herman, P. 'Temperature-compensated fiber-optic 3D shape sensor based on femtosecond laser direct-written Bragg grating waveguides'. In *Optics express, Optical Society of America*, volume 21, 2013.
- [Li,16] Li, M., Li, G., Gonenc, B., Duan, X. and Iordachita, I. 'Towards human-controlled, real-time shape sensing based flexible needle steering for MRI-guided percutaneous therapies'. In *The International Journal of Medical Robotics and Computer Assisted Surgery, Wiley Online Library*, 2016.
- [Lor87] Lorensen, W. and Cline, H. 'Marching cubes: A high resolution 3D surface construction algorithm'. In *ACM siggraph computer graphics*, volume 21, pages 163–169, 1987.
- [Lun04] Lunwei, Z., Jinwu, Q., Linyong, S. and Yanan, Z. 'FBG sensor devices for spatial shape detection of intelligent colonoscope'. In *Proceedings of Robotics and Automation, ICRA-2004 IEEE, International Conference*, volume 1, pages 834–840, 2004.
- [Mic03] Michler, G. and Kowalsky, H. 'Lineare Algebra'. Walter de Gruyter, Academic publishing, 2003.
- [Mit03] Mitra, N. and Nguyen, A. 'Estimating surface normals in noisy point cloud data'. In *Proceedings of the nineteenth annual symposium on Computational geometry*, pages 322–328, 2003.
- [Moa06] Moakher, M. and Batchelor, P. 'Symmetric positive-definite matrices: From geometry to applications and visualization'. In *Visualization and Processing of Tensor Fields*, pages 285–298. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.

- [Mod15] Modler, F. and Kreh, M. 'Tensoren und Tensorprodukt'. In *Tutorium Analysis 2 und Lineare Algebra 2*, pages 371–386. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2015.
- [Moo12] Moore, J. and Rogge, M. 'Shape sensing using multi-core fiber optic cable and parametric curve solutions'. In *Optics express, Optical Society of America*, volume 20, 2012.
- [Par10] Park, Y., Elayaperumal, S., Daniel, B., Ryu, S., Shin, M., Savall, J., Black, R., Moslehi, B. and Cutkosky, M. 'Real-time estimation of 3-D needle shape and deflection for MRI-guided interventions'. In *Proceedings of IEEE/ASME Transactions On Mechatronics*, volume 15, pages 906–915, 2010.
- [Pau12] Pauer, H. 'Mathematische Formrekonstruktion flexibler, schlauchförmiger Instrumente in der Medizintechnik'. In *Diplomarbeit, Karlsruher Institut für Technologie*, 2012.
- [Pau13] Pauer, H., Ledermann, C., Weede, O. and Woern, H. 'Towards Building a Miniaturized Shape Sensor - Building Process of a Shape Sensor for Use in Single Port Surgery'. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Sensing Technology(ICST2013)*, 2013.
- [Pau14a] Pauer, H. 'Shape Reconstruction of Flexible Objects via the Evaluation of Tensor Fields'. In *Proceedings of the 8th Joint Workshop of the German Research Training Groups in Computer Science*, page 11, 2014.
- [Pau14b] Pauer, H., Kenngott, H., Ledermann, C., Tuschmann, W. and Woern, H. 'Analyse der Anforderungen an Formsensoren zur Verwendung in der minimal-invasiven Chirurgie'. In *Tagungsband der 13. Jahrestagung der Deutschen Gesellschaft fuer Computer- und Roboterassistierte Chirurgie (CURAC 2014)*, pages 109–112, 2014.
- [Pau14c] Pauer, H., Ledermann, C. and Woern, H. 'Motivation of a New Approach for Shape Reconstruction Based on FBG-Optical Fibers: Considering of the Bragg-Gratings Composition as a Sensor Network'. In *Proceedings of the 2014 IEEE Ninth International Conference on Intelligent Sensors, Sensor Networks and Information Processing (ISSNIP)*, 2014.
- [Pau14d] Pauer, H., Ledermann, C., Tuschmann, W. and Woern, H. 'Non-Linear Compensation of Production Inaccuracies and Material Drift by Adjusting the Sensor Data Fusion Algorithms for Shape Sensing Based on FBG-Optical Fibers'. In *Proceedings of the 2014 IEEE Ninth International Conference on Multisensor Fusion and Information Integration(MFI)*, 2014.
- [Pau15a] Pauer, H. and Ledermann, C. 'Vorrichtung und Verfahren zur Bestimmung einer Deformation einer dreidimensionalen flexiblen Struktur'. In *Deutsches Patentamt. Status: Eingereicht. Anmeldedatum 16.06.2015*, 2015.

- [Pau15b] Pauer, H., Ledermann, C., Raczkowski, J., Tuschmann, W. and Woern, H. 'Shape Sensing Based on FBG-Technology - Extension of the Application Possibilities Due to Innovative Sensor-Configurations'. In *Proceedings of Navigation and Actuation of Flexible Instruments in Medical Applications (NAFIMA) Workshop - IROS2015*, pages 14–15. IEEE/RSJ IROS, 2015.
- [Pau15c] Pauer, H., Ledermann, C., Tuschmann, W. and Woern, H. 'Pseudo-Data Generation Software for FBG-Optical Fiber Based Shape Sensing'. In *Proceedings of SENSOR 2015 (AMA Conferences)*, pages 525–530. ISBN 978-3-9813484-8-4, 2015.
- [Pau15d] Pauer, H., Vojkovic, L., Ledermann, C., Tuschmann, W. and Woern, H. 'Validation of a Pseudo-Data-Generation-Software for FBG-Optical Fiber Based Shape Sensing'. In *Proceedings of Innovation Messtechnik 2015*, pages 64–69. ISBN: 978-3-8440-3560-5. Shaker Verlag, 2015.
- [Pau16a] Pauer, H., Rosenberger, M., Girschikofsky, M., Hellmann, R., Tuschmann, W. and Woern, H. 'Towards 1-Component Bragg-Grating Based Shape Sensing'. In *Proceedings of 19th International Conference on Information Fusion Heidelberg, Germany - July 5-8, 2016*.
- [Pau16b] Pauer, H., Teber, D., Tuschmann, W. and Woern, H. 'Fiber-Bragg Gitter basierte Formsensoren in der Ureterorenoskopie - Konstruktion und Test eines Ausfuehrungskonzeptes'. In *Tagungsband der 15. Jahrestagung der Deutschen Gesellschaft fuer Computer- und Roboterassistierte Chirurgie (CURAC 2016)*, pages 105–110, 2016.
- [Pen84] Penrose, R. and Rindler, W. 'Spinors and Space-time: Two Spinor Calculus and Relativistic Fields'. In *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*, volume 1. Cambridge University Press, 1984.
- [Pet06] Petersen, P. 'Riemannian geometry'. Volume 171. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- [Pie12] Piegl, L. and Tiller, W. 'The NURBS book'. Springer Science and Business Media, 2012.
- [Roe14] Roesthuis, R., Kemp, M., van den Dobbelen, J. and Misra, S. 'Three-dimensional needle shape reconstruction using an array of fiber bragg grating sensors'. In *IEEE/ASME transactions on mechatronics*, volume 19. IEEE, 2014.
- [Roe16] Roesthuis, R. and Misra, S. 'Steering of Multisegment Continuum Manipulators Using Rigid-Link Modeling and FBG-Based Shape Sensing'. In *IEEE Transactions on Robotics*, volume 32, pages 372–382, 2016.
- [Ros16] Rosenberger, M., Pauer, H., Girschikofsky, M., Woern, H., Schmauss, B. and Hellmann, R. 'Flexible polymer shape sensor based on planar waveguide Bragg gratings'. In *IEEE Photonics Technology Letters*, pages 1898–1901, 2016.
- [Ryu14] Ryu, S. and Dupont, P. 'FBG-based shape sensing tubes for continuum robots'. In *Proceedings of 2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 3531–3537, 2014.

- [Sch13] Schwarz, H. and Koeckler, N. 'Numerische Mathematik'. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2013.
- [Sei13] Seifabadi, R., Gomez, E., Aalamifar, F., Fichtinger, G. and Iordachita, I. . 'Real-time tracking of a bevel-tip needle with varying insertion depth: Toward teleoperated MRI-guided needle steering'. In *Proceedings of 2013 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 469–476, 2013.
- [Sib81] Sibson, R. and others. 'A brief description of natural neighbour interpolation'. In *Interpreting multivariate data*, volume 21, pages 21–36, 1981.
- [Spi84] Spiegel, M. 'Vektoranalysis'. McGraw-Hill, Schaums Outline, Hamburg, New York, 1984.
- [Sut75] Sutherland, W. 'Introduction to metric and topological spaces'. Oxford University Press, 1975.
- [Tei16] Teichert Systemtechnik GmbH . <http://www.tst-inno.de/index.html>, besucht am: 10.12.2016.
- [Tha13] Thamrongthanyalak, A. 'Whitney's Extension Theorem in o-minimal structures'. In *MODNET Preprint*, volume 626, 2013.
- [Toe13] Toernig, W. and Spellucci, P. 'Numerische Mathematik fuer Ingenieure und Physiker: Band 2: Numerische Methoden der Analysis'. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2013.
- [Van12] Van der Heiden, M., Henken, K., Chen, L., van den Bosch, B., van den Braber, R., Dankelman, J. and van den Dobbelsteen, J. 'Accurate and efficient fiber optical shape sensor for MRI compatible minimally invasive instruments'. In *Proceedings of SPIE Optical Systems Design, International Society for Optics and Photonics*, 2012.
- [Voi02] Voitsekhovskii, M. 'Hausdorff metric'. In *Encyclopaedia of Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2002.
- [Wal15] Waltermann, C., Doering, A., Koehring, M., Angelmahr, M. and Schade, W. 'Cladding waveguide gratings in standard single-mode fiber for 3D shape sensing'. In *Optics Letters, Optical Society of America*, volume 40, 2015.
- [Wei06] Weickert, J. and Welk, M. 'Tensor field interpolation with PDEs'. In *Visualization and processing of tensor fields*, pages 315–325. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- [Wer06] Werner, D. 'Funktionalanalysis'. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- [Wes14] Westbrook, P., Feder, K., Kremp, T., Taunay, T., Monberg, E., Kelliher, J., Ortiz, R., Bradley, K., Abedin, K., Au, D. and others. 'Integrated optical fiber shape sensor modules based on twisted multicore fiber grating arrays'. In *Proceedings of SPIE BiOS, International Society for Optics and Photonics*, 2014.

- [Xu,94] Xu, M., Archambault, J., Reekie, L. and Dakin, J. . 'Thermally-compensated bending gauge using surface-mounted fibre gratings'. In *International Journal of Optoelectronics*, volume 9, pages 281–284, 1994.
- [Xu,16] Xu, R., Yurkewich, A. and Patel, R. 'Shape sensing for torsionally compliant concentric-tube robots'. In *Proceedings of SPIE BiOS, International Society for Optics and Photonics*, 2016.
- [Yi,07a] Yi, X., Qian, J., Shen, L., Zhang, Y. and Zhang, Z. 'An innovative 3D colonoscope shape sensing sensor based on FBG sensor array'. In *Proceedings of 2007 International Conference on Information Acquisition, IEEE*, pages 227–232, 2007.
- [Yi,07b] Yi, X., Qian, J., Zhang, Y., Zhang, Z. and Shen, L. '3-D Shape Display of Intelligent Colonoscope Based on FBG Sensor Array and Binocular Vision'. In *Proceedings of Complex Medical Engineering, IEEE/CME 2007*, pages 14–19. IEEE/ICME International Conference, 2007.
- [Yi,10] Yi, X. Niu, F., He, J. and Fan, H. 'The 3D shape analysis of elastic rod in shape sensing medical robot system'. In *Proceedings of Robotics and Biomimetics (ROBIO), 2010 IEEE International Conference, IEEE*, pages 1014–1018, 2010.
- [Zei12] Zeidler, E. 'Springer-Handbuch der Mathematik IV: Begrundet von IN Bronstein und KA Semendjaew Weitergefuehrt von G. Grosche, V. Ziegler und D. Ziegler Herausgegeben von E. Zeidler'. volume 4. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2012.
- [Zha05] Zhang, L., Qian, J., Zhang, Y. and Shen, L. 'On SDM/WDM FBG sensor net for shape detection of endoscope'. In *Proceedings of IEEE International Conference Mechatronics and Automation*, volume 4, pages 1986–1991, 2005.
- [Zho14] Zhou, H., Wen, J., Zhang, X., Wang, W., Feng, D., Wang, Q. and Jia, F. 'Study on Fiber-optic Hydrogen Sulfide Gas Sensor'. In *Physics Procedia*, volume 56, pages 1102–1106. Elsevier, 2014.
- [Zhu02] Zhukov, L. and Barr, A. . 'Oriented tensor reconstruction: Tracing neural pathways from diffusion tensor MRI'. In *Proceedings of Visualization, IEEE/VIS 2002*, pages 387–394. IEEE, 2002.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Formsensorsystem, bestehend aus vier Hauptkomponenten: Formsensor aus Sensorträgerkörper und FBG-Glasfasern, Interrogator und Datenfusionsalgorithmen.	10
2.2	Prototyp des FBG-Formsensors am IAR-IPR [Pau14c].	11
2.3	Messprinzip der Faser-Bragg-Gitter.	12
2.4	Multiplexing: Mehrere FBGs sind in eine Faser eingeschrieben.	13
2.5	Ausgelesenes Spektrum einer an den Interrogator angeschlossenen Faser mit fünf eingeschrieben FBGs.	15
2.6	Angenommene Deformationsverteilung über den Sensorträgerkörper.	16
2.7	Parameter im angenommenen Deformationsmodell.	17
2.8	Endoskopischer Einsatz in der Gastroskopie (links), ein flexibles Gastroskop (mittig) und ein chirurgisches Robotersystem (rechts) (Gastroskop der Firma <i>KARL STORZ GmbH</i> , Leichtbauroboter der Firma <i>KUKA Roboter GmbH</i> , integriert in die Entwicklungsplattform <i>OP:Sense</i> am IAR-IPR).	19
2.9	Starres und flexibles Ureterorenoskop der Firma <i>Richard Wolf GmbH</i> [KAR16b] zum Einsatz minimal-invasiver, urologischer Operationen (links und mittig) und prototypische Sensorintegration am echten Instrument (rechts) [Pau16b].	20
4.1	Restriktionen bezüglich der FBG-Verteilung über den Sensorträgerkörper. . .	34
4.2	Restriktionen bezüglich der FBG-Verteilung über den Sensorträgerkörper. . .	36
4.3	Parameter im angenommenen Deformationsmodell.	37
5.1	Sensorkonfiguration: Parameter S und d zur Bemaßung des Sensorträgerkörpers und Parameter $s_i, r_i, \alpha_i, \beta_i$ und γ_i zur Angabe der Messstellenpositionierung aller $i = 1, \dots, I$ Messstellen M_i auf dem Trägerkörper.	40
5.2	Berechnungsschema des konventionellen Formrekonstruktionsalgorithmus. . .	46
5.3	Ein Torus als Mannigfaltigkeit \mathcal{M}_1 und Koordinatensysteme k und \tilde{k} in euklidischen Vektorräumen V und \tilde{V} über \mathbb{R} mit $\dim V = \dim \tilde{V} = \dim \mathcal{M}_1 = 2$	51
5.4	Interpolationsverfahren über Flächengewichtung.	62
5.5	Interpolation über Voronoi-Flächen Gewichtung.	63
5.6	Iterationsschritt t zur rekursiven Erzeugung einer Punktmenge X^{t+1} aus einer Menge X^t und den Elementen $T(x_i^t)_{i=1, \dots, p^t} \in TFS^0$	66
5.7	Problemstellung: Gesucht ist eine Oberfläche \mathcal{S} (schwarz angedeutete Linien) in Schlauchform zur Approximation von X (rote Punkte).	74
5.8	Anforderungen an X mit Radius r und Fehlertoleranz δ nicht erfüllt.	75
5.9	Rekonstruktion von \mathcal{S} : Schrittweise Hintereinanderausführungen von drei Funktionen φ_i mit Zwischenergebnissen $\tilde{\mathcal{S}}_i$	76

5.10	Berechnungsschema des innovativen Formrekonstruktionsalgorithmus.	80
6.1	Verwendete Materialien und benötigtes Equipment für die Sensorprototypen: A - FBG-Glasfaser, B - Zweikomponentensilikon <i>ELASTOSIL</i> [®] <i>VARIO 40</i> , C - Spritzen, D - Schrumpfschläuche und Kabelbündelschläuche, E - Plastik- stab mit Durchmesser $d_1 = 2 \text{ mm}$ und PVC-Rundschläuche mit Durchmesser innen $d_{2i} = 12 \text{ mm}$, $d_{3i} = 8 \text{ mm}$ und $d_{4i} = 4 \text{ mm}$ und Durchmesser außen von $d_{2a} = 15 \text{ mm}$, $d_{3a} = 10 \text{ mm}$ und $d_{4a} = 6 \text{ mm}$, F - Vakuumglocke.	103
6.2	<i>Testsensor 1</i>	107
6.3	<i>Testsensor 2</i>	109
6.4	<i>Formsensorprototyp</i>	111
6.5	Vergleich der konventionellen Sensorik mit paralleler Faserführung [Pau13] (links) und der innovativen Sensorrealisierung (rechts): Unterschiedliches Faserverhalten bei gleicher Sensordeformation.	113
6.6	Darstellung der freien FBG-Verteilung bei innovativer FBG-Formsensorik (oben) und FBG-Verteilung unter vorgegeben Restriktionen bei konventionel- ler FBG-Formsensorik (unten).	114
6.7	Formplatten zur kontrollierten Sensordeformation: Plattenbemaßung (links), Aluminiumformplatte mit eingelegtem Sensor (mittig) und Markierung am Sensorende(rechts).	118
6.8	Art der vorliegenden Messdaten.	119
6.9	Histogramm für ein Gitter, aufgestellt über alle 25 Messwerte der Stichprobe bei der Deformation Def_{18}	121
6.10	Konfidenzintervalle der Messwerte bei konstantem Krümmungsradius und sich ändernder Krümmungsrichtung: Ein Sinusverlauf ist deutlich zu erken- nen.	122
6.11	Verteilung der Messunsicherheit über die Stichproben aller gemessenen De- formationen $Def_{n=1,\dots,32}$ der <i>Testreihe 1</i> (links) und mittlere Messunsicherheit bei separater Betrachtung der einzelnen Krümmungsradien (rechts).	123
6.12	Sinuskurve als Ausgleichsfunktion durch die Mittelwerte der Stichproben- messwerte für ein Gitter bei konstantem Krümmungsradius von $R = 200$ über veränderte Krümmungsrichtung.	125
6.13	Messreihenverhalten bei zunehmender Krümmung.	126
6.14	Vergleich der Änderung des Krümmungsradius und der Amplitude der zu- gehörigen sinusförmigen Messreihen; eine reziproke Proportionalität ist er- sichtlich.	126
6.15	Präzision, exemplarisch für ein FBG.	128
6.16	Sinuskurve als Ausgleichsfunktion durch die Mittelwerte der Stichproben- messwerte für ein Gitter bei konstantem Krümmungsradius von $R = 300$ über veränderte Krümmungsrichtung.	130
6.17	Verteilung der Messunsicherheit über die Stichproben aller gemessenen De- formationen $Def_{n=1,\dots,32}$ der <i>Testreihe 3</i> (links) und mittlere Messunsicherheit bei separater Betrachtung der einzelnen Krümmungsradien (rechts).	130
6.18	Messverlauf für verschiedene Krümmungsradien ($R = 300$ $R = 400$ und $R = 500$) für zwei Gitter (Diagramm oben und unten).	131

6.19	Grenzkurve für den maximalen Gangwinkel der helikalen Faserführung. Abhängig von dem Sensordurchmesser \odot und der maximalen zu erwartenden Krümmung κ_{max} des Sensors.	132
6.20	Aluminium-Formplatte mit <i>S</i> -förmigen Rillen und eingezeichneter Bemessung der für die Tests verwendeten Vertiefung.	134
6.21	Ergebnis der Formrekonstruktion bei <i>C</i> -förmiger Deformation (oben: Topansicht, unten: Frontansicht).	135
6.22	Vergleich der rekonstruierten Form mit den gegebenen Referenzformen: Eine maximale Abweichung an der Sensorspitze von fast 30% und ein minimaler Fehler von unter 5% ist festzustellen.	136
6.23	Beispielhaftes Ergebnis der Formrekonstruktion bei <i>S</i> -förmiger Deformation (die Referenzform ist als blau eingefärbte Linie mit abgebildet).	137

Tabellenverzeichnis

5.1	Abschätzung der Komplexitätsklassen für die einzelnen Berechnungsschritte des konventionellen Algorithmus.	48
5.2	Abschätzung der Komplexitätsklassen für die einzelnen Berechnungsschritte des innovativen Algorithmus.	90
6.1	<i>Testsensor 1</i> : Konfigurationsparameter.	99
6.2	<i>Testsensor 2</i> : Konfigurationsparameter.	100
6.3	<i>Formsensorprototyp</i> : Konfigurationsparameter.	101
6.4	Materialaufwand beim Sensorprototyping.	105
6.5	Kostenaufwand für einen Sensorprototypen.	106
6.6	Zeitaufwand für die Herstellung eines Sensorprototypen.	106
6.7	<i>Testsensor 1</i> : Händisch ermittelte Sensorparameter.	108
6.8	<i>Testsensor 2</i> : Händisch ermittelte Sensorparameter.	110
6.9	<i>Formsensorprototyp</i> : Händisch ermittelte Sensorparameter.	112
6.10	Durchgeführte Deformationen bei <i>Testreihe 1</i>	120
6.11	Fehlerhochrechnung einer Formschätzung bei angenommener Messunsicherheit von $\pm 0,025 \text{ nm}$	124
6.12	Durchgeführte Deformationen bei <i>Testreihe 2</i>	127
6.13	Durchgeführte Deformationen bei <i>Testreihe 3</i>	129
6.14	Durchgeführte Deformationen bei den in <i>Testteil 2</i> vorgenommenen Testreihen.	134

Anhang

A Nomenklatur

Die in der Arbeit verwendeten Bezeichnungen sind in dieser Nomenklatur zusammengefasst. Alle sensorspezifischen Angaben sind im ersten Teil der Nomenklatur aufgeführt. Die zur Beschreibung der mathematischen Konzepte und der Algorithmen verwendeten Parameter sind im zweiten Teil gegeben. Die Bedeutung der Bezeichnungen ist jeweils bezüglich der Verwendung der Parameter in dieser Arbeit beschrieben. Einige Variablen werden mehrfach verwendet, die unterschiedliche Bedeutung ist aus dem Kontext zu erschließen.

<i>Sensorspezifische Angaben / Technische Angaben</i>	
-------------------------------------------------------	--

Bezeichnung:	Bedeutung:
FBG_i, M_i	i-te Messestelle.
$i = 1, \dots, I$	Indexmenge zur Nummerierung der Messstellen.
I	Anzahl der Messstellen.
$P_i =$	Sensorkonfigurationsparameter bezüglich der Messestelle FBG_i .
$P_i(s_i, r_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$	
s_i	Sensorachsenabschnitt bei der Messestelle FBG_i .
r_i	Abstand der Messestelle FBG_i zur Sensorachse.
\vec{Ref}	Referenzrichtung, verwendet zur Angabe der Messstellenpositionierung.
α_i	Lage der Messestelle FBG_i , relativ zur Referenzrichtung \vec{Ref} .
β_i, γ_i	Ausrichtung der Messestelle FBG_i .
\vec{n}, \vec{p}	Hilfsvektoren zur Angabe von β_i und γ_i .
E_i	Sensor-Querschnittsebene bei der Messestelle FBG_i .
S	Sensorlänge.
d, \varnothing	Sensordurchmesser.
d_{Kern}	Sensorkern-Durchmesser.
$C(s)$	Sensorachsenkurve mit $s \in [0, S]$.
$T(s)$	Die Raumkurve $C(s)$ begleitender Tangentialvektor mit $s \in [0, S]$.
$C(S), T(S)$	Position und Ausrichtung an der Sensorspritze.
S_i	Sensoroberfläche.
ε_i	Dehnung der Messestelle FBG_i .
$\Delta l, (\Delta l_{FBG_i})$	Längenänderung (der Messestelle FBG_i).
$l_0, (l_{0,FBG_i})$	Ursprüngliche Länge (der Messestelle FBG_i).
R	Krümmungsradius.
$\kappa (\kappa_s, \kappa(s))$	Krümmung der Sensorachse (an der Stelle s mit $s \in [0, S]$) mit $\kappa = \frac{1}{R}$.
$\vec{\kappa}, \vec{\kappa}_s, \vec{\kappa}(s)$	Lokale Krümmungsrichtung der Sensorachse (an der Stelle s mit $s \in [0, S]$).
$\tau (\tau_s, \tau(s))$	Torsion (an der Stelle s mit $s \in [0, S]$).
\tilde{r}_i	$R + \tilde{r}_i$ ist der Krümmungsradius der Messstellenkrümmung von FBG_i .
k	Photoelastischer Koeffizient mit $k = 0, 78$.
$\mathcal{O}(n)$	O-Notation zur Angabe der Laufzeitkomplexität; Eingabelänge = n .
λ_i	Messwert (Wellenlänge), gemessen über die Messestelle FBG_i .
λ_i^0	Basiswellenlängenwert, zugehörig zu der Messestelle FBG_i .
$\Delta \lambda_i$	Wellenlängendifferenz; es gilt: $\lambda_i = \lambda_i^0 + \Delta \lambda_i$.
Pow_i	Intensität mit der die Wellenlänge λ_i gemessen wird.
Hz	Hertz (SI-Einheit für die Frequenz); es gilt $1 \text{ Hz} = \frac{1}{\text{sek}}$.
Def_n	n -te Deformation.
$\lambda_{i,m}^{Def_n}$	Gemessene Wellenlänge bei Def_n über FBG_i , m -te Messwiederholung.

Bezeichnungen zu den Themen mathematische Konzepte und Algorithmen

Bezeichnung:	Bedeutung:
\mathcal{M}_i	Topologischer Raum / Mannigfaltigkeit.
$\mathcal{M}_i = (\mathcal{M}, g)$	Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Metrik g .
\mathcal{S}_i	Mannigfaltigkeit zur Beschreibung der Sensoroberfläche.
$\overset{\circ}{\mathcal{S}}_i$	Rektifizierter/unverformter Sensorkörper (massiver Zylinder).
$X \in \mathbb{R}^n, (X, d)$	Metrischer Raum (mit Metrik d).
$x := \{x^i\}_{i=1, \dots, n}$	Koordinaten n -Tupel (kontravariante Koordinaten bezüglich kovarianter Basis \rightarrow Index oben).
V_p, W_q	Vektorräume endlicher Dimension.
k	Koordinatenabbildung: Funktion die einem Punkt ein Koordinatensystem zuordnet.
\tilde{f}	Andere Funktion mit ähnlichem Charakter wie die Funktion f .
$T_x \mathcal{M}_i$	Tangentialraum zu x auf \mathcal{M} .
ε	Kleine Zahl in \mathbb{R}_+ .
\mathbf{R}	
\mathcal{M}_i	Mannigfaltigkeit mit Rand (\mathbf{R}).
\mathcal{S}^2	Sphäre als Mannigfaltigkeit (mit $\dim \mathcal{S}^2 = 2$ und $\mathcal{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$).
\mathcal{T}^2	Torus als Mannigfaltigkeit (mit $\dim \mathcal{T}^2 = 2$ und $\mathcal{T}^2 \subset \mathbb{R}^3$).
\mathcal{Z}^2	Zylinder als Mannigfaltigkeit (mit $\dim \mathcal{Z}^2 = 2$ und $\mathcal{Z}^2 \subset \mathbb{R}^3$).
m	Dimension einer Mannigfaltigkeit.
n	Dimension eines (metrischen) Raumes.
x_i bzw. x^i	Komponenten eines kovarianten bzw. kontravarianten Tensors (\rightarrow Index fett).
e^i bzw. e_i	Basis (Kontravariant bzw. Kovariant).
$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$	Skalare.
p, q	Skalare aus \mathbb{N} zur Angabe der Tensorstufe (kontra-, kovariant).
\otimes	Tensorprodukt.
$Multi^p(V)$	Raum von Tensoren der Stufe q , über ein Tensorprodukt aus demselben Vektorraum V .
t^{ij}, t_{ij}	Tensorkomponenten (kontravariant, kovariant).
$(i, j = 1, \dots, m)$	
$T_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_p}$	Indexnotation eines Tensors.
α, β, γ	Winkel (skalare Größen).
$P = \{p^1, p^2, p^3\}$	Ortsvektor (mit kontravarianten Komponenten p^i).
$T\mathcal{M}_i$	Tangentialbündel.
$T_x \mathcal{M}_i$	Tangentialraum.
$T_x^* \mathcal{M}_i$	Kotangentialraum.
$VF\mathcal{M}_i$	Vektorfeld.
$\Gamma T\mathcal{M}_i$	Menge aller differenzierbaren Vektorfelder über \mathcal{M} .
$TF\mathcal{M}^r$	r -fach kontravariantes Tensorfeld.
$TF\mathcal{M}_s$	s -fach kovariantes Tensorfeld.
$T \in TF\mathcal{M}_i$	Tensor als Element des Tensorfeldes $TF\mathcal{M}$.

Bezeichnung:	Bedeutung:
$V \in \mathcal{VFM}$	Tensor als Element des Vektorfeldes \mathcal{VFM} .
V_x	Vektor aus \mathcal{VFM} , dem Wert $x \in \mathcal{M}$ zugeordnet.
V_x^k	k -te Vektorkomponenten mit $k \in \{1, \dots, n\}$ und $n = \dim V$.
M	Grad eines Polynoms.
b_m, b_m^k	Basis(funktionen) mit $m = 1, \dots, \mathbf{M}$.
$\vec{a} = (a^1, \dots, a^{\mathbf{M}})$,	Komponentenvektoren.
$\vec{a}_k = (a_k^1, \dots, a_k^{\mathbf{M}})$	
$\Gamma(F)$	Graph $\Gamma(F) = \{(x, F(x)) : x \in \mathbb{R}^n\}$.
K	Körper $(K, +, \cdot)$.
F	Fortsetzung einer Funktion f .
d_h	Hausdorff-Abstand, auch d_h^X , als Abstand zweier Mengen in X .
\inf	Infimum (größte untere Schranke/maximales Minimum).
$U_r(X)$	Offene und abgeschlossene Mengenumgebungen.
$B_r(x)$ bzw. $\mathcal{U}(P_0)$	Offene und abgeschlossene Punktumgebungen.
$A = \varepsilon$ -Netz in X	Verteilte Menge A in X mit Verteilung charakterisiert durch ε , oft in der Literatur auch als ε -Überdeckung von X bezeichnet.
$A, B \subset X$	Unterräume, Mengen.
δ	Fehlerschranke / Toleranzschranke.
$A_i \subset X$	Affiner Unterraum von X .
$ \cdot , \langle \cdot, \cdot \rangle$	Standardnorm, Standardskalarprodukt (euklidisch).
B_X	Basis vom Raum X .
P_A	Projektion auf die Ebene/den affinen Raum A .
\mathbb{R}_+^0	Positive reelle Zahlen mit Null.
\mathbb{R}_+	Echt positive reelle Zahlen ohne Null.
φ, μ	(Glatte) Funktionen.
C, σ_m	Konstanten mit σ_m abhängig von $m = \dim \mathcal{S}$.
$e_k^i(x_i, V_{x_i}^k, \vec{a}_k)$	Fehler der Approximation.
$D \subseteq \mathcal{M}$	Definitionsmenge.
$F, \Sigma_i F_i$	Flächeninhalte und Summe von Flächeninhalten.
T	Anzahl der Iterationen zur Erzeugung einer Punktwolke.
$t = 1, \dots, T$	Indexmenge zur Nummerierung der Iterationsschritte.
a^t, a^{s^t}	Elemente auf der Sensorachse mit $s \in [0, S]$ und $t \in [0, T]$.
E^t, E^{s^t}	Sensor-Querschnittsebenen.
ζ^t	Schrittweite der Iteration t .
p^t	Anzahl der Stützstellen/Startwerte einer Iteration t .
$\omega_\tau^t, \omega_i^t, \vartheta_i^t$	Verkipfungswinkel der Tensoren (abhängig von der Torsion τ).
$\varepsilon_{x_i^t}$	Dehnung bei x_i in Iterationsschritt t .
ξ	Schrittweite (verwendet beim konventionellen Algorithmus).
$\mathcal{L}(\vec{v})$	Länge des Vektors \vec{v} .
$\angle(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$	Winkel zwischen zwei Vektoren \vec{v}_1 und \vec{v}_2 .
$T(\varepsilon_i, \beta_i)$,	Tensoren zur Messdatendarstellung.
$T(pow_i)$	

