

Marius Eckert

Modellbasierte Identifikation fraktionaler Systeme und ihre Anwendung auf die Lithium-Ionen-Zelle

Marius Eckert

**Modellbasierte Identifikation fraktionaler Systeme
und ihre Anwendung auf die Lithium-Ionen-Zelle**

Karlsruher Beiträge zur
Regelungs- und Steuerungstechnik
Karlsruher Institut für Technologie

Band 03

Modellbasierte Identifikation fraktionaler Systeme und ihre Anwendung auf die Lithium-Ionen-Zelle

von
Marius Eckert

Dissertation, Karlsruher Institut für Technologie
KIT-Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik

Tag der mündlichen Prüfung: 18. Mai 2017

Referenten: Prof. Dr.-Ing. Sören Hohmann

Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek

Impressum



Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

KIT Scientific Publishing

Straße am Forum 2

D-76131 Karlsruhe

KIT Scientific Publishing is a registered trademark
of Karlsruhe Institute of Technology.

Reprint using the book cover is not allowed.

www.ksp.kit.edu



*This document – excluding the cover, pictures and graphs – is licensed
under a Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International License
(CC BY-SA 4.0): <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.en>*



*The cover page is licensed under a Creative Commons
Attribution-No Derivatives 4.0 International License (CC BY-ND 4.0):
<https://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/deed.en>*

Print on Demand 2017 – Gedruckt auf FSC-zertifiziertem Papier

ISSN 2511-6312

ISBN 978-3-7315-0690-4

DOI 10.5445/KSP/1000071542

Modellbasierte Identifikation fraktionaler Systeme und ihre Anwendung auf die Lithium-Ionen-Zelle

Zur Erlangung des akademischen Grades eines
DOKTOR-INGENIEURS
an der Fakultät für
Elektrotechnik und Informationstechnik
des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)
genehmigte

DISSERTATION

von
Dipl.-Ing. Marius Eckert
geb. in Freiburg i. Br.

Tag der mündlichen Prüfung:	18.05.2017
Hauptreferent:	Prof. Dr.-Ing. Sören Hohmann
Koreferent:	Prof. Dr.-Ing. Ferdinand Svaricek

Vorwort

Diese Dissertation entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme (IRS) am Karlsruher Institut für Technologie (KIT).

An erster Stelle möchte ich mich bei meinem Doktorvater Professor Sören Hohmann für die spannenden Herausforderungen bedanken und dafür, dass er immer an mich geglaubt und mich stets unterstützt hat. Die vielen Diskussionen und Gespräche, die wir trotz seines vollen Terminkalenders geführt haben, brachten mich jedes Mal voran. Einen kompetenteren, zuverlässigeren und motivierenderen Doktorvater kann ich mir nicht vorstellen. Ich möchte mich außerdem bei Professor Svaricek für die Übernahme des Koreferats bedanken sowie bei Professorin Ellen Ivers-Tiffée und ihren Mitarbeitern vom Institut für Angewandte Materialien – Werkstoffe der Elektrotechnik (IAM-WET) am KIT für die Zusammenarbeit und die Bereitstellung von Messdaten.

Weiterhin richtet sich mein Dank an meine Kollegen Martin Pfeifer, Stefan Schwab, Oliver Stark und Mathias Kluwe sowie an meinen sehr guten Freund Jörg für die fachliche Durchsicht dieser Arbeit. Ihre Hinweise waren stets äußerst wertvoll. Ein besonderer Dank gilt auch meiner Schwester Angela und meiner sehr guten Freundin Anne für die sprachliche Durchsicht.

Außerdem danke ich herzlich all meinen Arbeitskollegen/innen am IRS für die angenehme und kollegiale Zusammenarbeit. Ich habe mich in diesem Team immer sehr wohl gefühlt. Das großartige Arbeitsklima war für mich eine wichtige Grundlage, um die Arbeit erfolgreich schreiben zu können. Speziell möchte ich mich bei Mathias Kluwe bedanken, der mir mit seiner Erfahrung und Hilfsbereitschaft immer ein wichtiger Ansprechpartner war. Auch die gelegentlichen Treffen mit Professor Krebs waren hilfreich und ich werde sie in guter Erinnerung behalten.

Desweiteren gilt mein Dank den Studenten, die bei mir als Abschlussarbeiter/innen oder wissenschaftliche Hilfskräfte tätig waren. Ihre wertvollen Erkenntnisse sind in die Arbeit eingeflossen.

Zum Schluss möchte ich mich von ganzem Herzen bei meiner Familie und meinen Freunden bedanken, die mich immer unterstützt haben und jederzeit für mich da waren.

Marius Eckert

Karlsruhe, 27. Juli 2017

Ever tried. Ever failed.
No matter. Try again.
Fail again. Fail better.

Samuel Beckett

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Verfahren zur Alterungsbestimmung	7
2.1	Lithium-Ionen-Zelle	9
2.1.1	Funktionsweise	10
2.1.2	Solid Electrolyte Interphase	12
2.1.3	Alterung	12
2.2	Alterungsbestimmung auf Basis phänomenologischer Maßzahlen	12
2.2.1	Alterungsgrößen	13
2.2.2	Zustandsbestimmungsverfahren	14
2.3	Physikalisch motiviertes fraktionales Batterieimpedanzmodell	15
2.3.1	Impedanzspektrum	15
2.3.2	Mathematische Beschreibung des Spektrums	17
2.4	Identifikation des fraktionales Impedanzmodells	22
2.4.1	Nichtparametrische Verfahren	23
2.4.2	Parametrische early-lumping Verfahren	23
2.5	Lücke des State-of-the-Art und Ziele der Arbeit	26
2.6	Zusammenfassung	27
3	Fraktionales Zeitbereichsmodell	29
3.1	Fraktionale Analysis	29
3.1.1	Fraktionale Integration	30
3.1.2	Fraktionale Ableitung	33
3.1.3	Operatoren-Eigenschaften	35
3.2	Fraktionale Systemdarstellungen	36
3.2.1	Fraktionale Übertragungsfunktion	36
3.2.2	Fraktionale Ein-/Ausgangsdarstellung im Zeitbereich	38
3.2.3	Batteriesimulation	40
3.3	Fraktionale Zustandsraumdarstellung	42
3.4	Zusammenfassung	45
4	Methode der Modulationsfunktionen für fraktionale Systeme	47
4.1	Fraktionale partielle Integration	48
4.2	Fraktionale Modulationsfunktionstransformation	51
4.3	Parameteridentifikation mit Modulationsfunktionen	53
4.4	Parameteridentifikation bei fehlerhaften Messgrößen	61
4.5	Algebraisches Verfahren für fraktionale Systeme	63

4.5.1	Algebraische Darstellung fraktionaler Systeme	63
4.5.2	Charakteristische Gleichung	65
4.5.3	Parameteridentifikation	68
4.6	Zusammenfassung	70
5	Batterieidentifikation	71
5.1	Methode der Modulationsfunktionen mit Simulationsdaten	71
5.1.1	Simulations- und Identifikationssetting	71
5.1.2	Identifikationsergebnisse	74
5.2	Identifikation mit Simulationsdaten inklusive Ruhespannung	75
5.2.1	Identifikationsgleichung	76
5.2.2	Identifikationseinstellungen	77
5.2.3	Ergebnisse	77
5.3	Methode der Modulationsfunktionen mit realen Messdaten	79
5.3.1	Datenvorverarbeitung und Identifikationseinstellungen	79
5.3.2	Identifikationsergebnisse	81
5.4	Algebraisches Verfahren mit Simulationsdaten	84
5.4.1	Simulations- und Identifikationssetting	84
5.4.2	Identifikationsergebnisse	86
5.5	Zusammenfassung	88
6	Steuerungsbasierte Methode der Modulationsfunktionen	91
6.1	Parameterspezifische Modulationsfunktion	92
6.2	Ersatzsystem	96
6.3	Zeitvariante Systemmatrix und Eingangsvektor des Ersatzsystems	100
6.4	Steuerungsbasierte Identifikation	106
6.5	Zusammenfassung	111
7	Fraktionale Optimalsteuerung	113
7.1	Fraktionale Peano-Baker-Reihe und R -Matrixfunktion	114
7.2	Lösung der zeitvarianten FDGL	118
7.3	Fraktionale Steuerbarkeit	124
7.4	Fraktionale energieoptimale Steuerung	131
7.5	Zusammenfassung	136
8	Realisierbarkeit der steuerungsbasierten Methode der Modulationsfunktionen	139
8.1	R -Matrixfunktion des Ersatzsystems	139
8.2	Realisierbarkeit	141
8.3	Zusammenfassung	146
9	Zusammenfassung und Bewertung	149
A	Operatoren und Betafunktion	153

B	Fraktionale partielle Ableitung und vektorielle Ableitung	157
	B.1 Fraktionale Zwei-Variablen Integration und Ableitung	157
	B.2 Vektorielle Operatoren	159
C	Spline-Typ-Modulationsfunktion	161
D	F- und R-Matrix bei konstantem Lambda	163
E	R-Matrix des Beispielsystems	165
F	G-Vektor des Ersatzsystems	167
G	KOKAM Lithium-Polymer-Batteriezelle	169
H	DRT und RQ-Element	173
I	Beweise	175
	I.1 Beweis von Satz 2.1: Zusammenhang zwischen RQ-Element und DRT . .	175
	I.2 Beweis von Satz 2.2: Diffusionsimpedanz	176
	I.3 Beweis von Lemma B.1: Ableitungsregel I	177
	I.4 Beweis von Lemma 3.1: Caputo-Ableitung eines Integrals	178
	I.5 Beweis von Lemma 3.2: Vertauschung von Ableitungen	179
	I.6 Beweis von Lemma 4.2: Fraktionale partielle Integration der fraktionalen Ableitung	180
	I.7 Beweis von Lemma 4.5: Fraktionale Produktregel der Transformation . .	181
	I.8 Beweis von Satz 4.6: Fraktionale algebraische Ableitung	181
	I.9 Beweis von Satz 6.4: Identifikationsfehler	183
	I.10 Beweis von Satz 6.5: Obere Schranke des Identifikationsfehlers	183
	I.11 Beweis von Satz 7.1: Eindeutigkeit der fraktionalen Zustandslösung . . .	185
	I.12 Beweis von Lemma 7.1: Ableitungseigenschaft der F -Matrix	186
	I.13 Beweis von Lemma 7.2: Ableitungseigenschaft der R -Matrix	187
	I.14 Beweis von Satz 7.3: Lösung der rechtsseitigen zeitvarianten fraktionalen Zustandsgleichung	188
	I.15 Beweis von Lemma 7.3: Eliminationseigenschaft der R -Matrix	189
	I.16 Beweis von Korollar 7.2: Steuerbarkeit eines zeitinvarianten Systems . .	190
	I.17 Beweis von Satz 8.3: Realisierbarkeit steuerungs-basiertes Modulations- funktionsverfahren	191
J	Initialisierungsfunktionen	193
K	Faltungs- und Divisionsalgebra	197
	K.1 Vor- und Nachteile zum Einsatz des Mikusiński-Operatorenkalküls . . .	199
L	Short-Memory-Approximation	201

M Batteriemessstand	203
M.1 Versuchsaufbau	203
M.1.1 Komponenten	203
M.1.2 Spezifikationen	204
M.1.3 Vernetzung	206
M.2 Datengenerierung	207
M.2.1 Kontaktierung und Verkabelung	207
M.2.2 OCV-Daten	207
M.2.3 Impedanzdaten	208
M.2.4 Validierungsdaten	208
N Hinreichende Bedingung und Konvexität	211
Literaturverzeichnis	XV

Abbildungsverzeichnis

2.1	Überblick über die verschiedenen Modelle und Identifikationsarten, die zur Alterungsbestimmung eingesetzt werden	7
2.2	Batterieprozesse einer Lithium-Ionen-Zelle bei der Entladung	10
2.3	Impedanzkurven der KOKAM LiPO-Zelle aus Anhang G a) für zwei verschiedene Ladezustände und b) für eine neue und eine gebrauchte Zelle bei SoC=50%	17
2.4	ESB eines RQ-Elements	19
2.5	ESB des in dieser Arbeit betrachteten vereinfachten Batteriemodells	22
3.1	Ganzzahlige Integrationen einer Geradenfunktion	30
3.2	Fraktionale Integrationen einer Geradenfunktion	32
3.3	Grafische Darstellung der Ableitung nach Riemann-Liouville	35
3.4	Ausschnitt des Strom-/Spannungsverlaufs der KOKAM Batteriezelle	41
3.5	Vergleich der Simulationen eines RQ- und eines RC-Modells	41
4.1	Zentrale Schritte beim Modulationsfunktionsverfahren	47
4.2	Beispielhafter Verlauf der Ausgangsgröße eines fraktionalen Systems	56
5.1	Blockdiagramm der Identifikationsprozedur	72
5.3	Fehler bei der Identifikation der Batterieparameter mit dem Modulationsfunktionsverfahren	75
5.4	Identifikationsfehler der Batteriezelle	78
5.5	Blockdiagramm der Identifikationsprozedur, der Index m steht für Messung.	80
5.6	a) Verläufe der identifizierten Impedanz bei einem SNR=37.97 dB und der EIS-Messung bei einem SNR>100 dB für SoC=50 %, b) Verläufe der identifizierten und gemessenen Spannung für SoC=50 %	82
5.7	Blockdiagramm der Simulations- und Identifikationsprozedur bei der algebraischen Batterieidentifikation	85
5.8	Das algebraische Identifikationsergebnis des ohmschen Widerstands R_0 mit Singularitäten.	85
5.9	Identifikationsfehler des algebraischen Verfahrens	87
5.10	Mit dem algebraischen Verfahren identifizierte DRT	88
6.1	Zentrale Verfahrensschritte des fraktionalen Modulationsfunktionsverfahrens mit modellbasierter Bestimmung der Modulationsfunktion	91
6.2	Integratorenkette des ersten Untersystems Δ	100
6.3	Struktur des zweiten Untersystems $+$	101

6.4	Struktur des dritten Untersystems e	102
6.5	Parallele Integratorenketten des vierten Untersystems \square	102
7.1	Zentrale Schritte zum Entwurf einer fraktionalen Optimalsteuerung	114
7.2	Zustandstrajektorien und energieoptimale Steuerfunktion des zeitvarianten Beispielsystems	136
A.1	Darstellung der links- und rechtsseitigen Integration einer Sinusfunktion. Die Variable t markiert den aktuellen Zeitpunkt.	155
C.1	Grafische Darstellung der Ableitungen der Spline-Typ-Funktion	162
G.1	KOKAM LiPO-Batteriezelle	169
G.2	Datenblatt der KOKAM-Zelle mit der Bezeichnung SLPB 834374H	170
G.3	Ruhe Spannungskurve der KOKAM-Zelle	170
G.4	Kenmlinien der Parameter des fraktionalen Batteriemodells	171
H.1	DRT für unterschiedliche α	173
H.2	Ortkurve des RQ-Elements für unterschiedliche α und festes τ_0	173
J.1	Grafische Darstellung der initialisierten fraktionalen Ableitung der Ordnung $\alpha = 0.4$ von $f(t) = \sigma(t)$	194
M.1	Batteriemessstandsaufbau am IRS	204
M.2	Batteriehalterung mit Kupferelektroden	207
M.3	Gemessene Ortskurve bei SoC=50%	208
M.4	Ausschnitte aus der mit dem BOP20-20M a) erzeugten Stromvorgabe und b) mit $f_s = 10$ Hz abgetasteten Spannungsmessung	209

Abkürzungen und Symbole

Verwendete Abkürzungen

Abkürzung	Bedeutung
AC	Absolute Continuous
BoL	Begin of Life
C	Caputo
CCCV	Constant Current Constant Voltage
CNLS	Complex Nonlinear Least-Squares
CO ₂	Kohlenstoffdioxid
CPE	Constante Phase Element
DGL	Differentialgleichung
DRT	Distribution of Relaxation Times
EIS	Electrical Impedance Spectroscopy
EKF	Extended Kalman Filter
EoL	End of Life
ESB	Elektrisches Ersatzschaltbild
FDGL	Fraktionale Differentialgleichung
FIR	Finite Impulse Response
FLW	Finite Length Warburg
FOMCON	Fractional-Order Modeling and Control
FOTF	Fractional-Order Transfer Function
FPM	First Principle Model
GL	Grünwald-Letnikov
IAM-WET	Institut für Angewandte Materialien – Werkstoffe der Elektrotechnik
IRS	Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme
IV	Instrumental Variable
L	Lebesgue
LGS	Lineares Gleichungssystem
LiPO	Lithium-Polymer
LPV	Linear Parameter-Varying
LS	Least-Squares
LTI	Linear Time-Invariant

LTV	Linear Time-Variant
o.B.d.A.	Ohne Beschränkung der Allgemeinheit
OCV	Open Circuit Voltage
PDGL	Partielle Differentialgleichung
PRBS	Pseudo-Random Binary Sequence
RH	Robotnov-Hartley
RL	Riemann-Liouville
SNR	Signal-to-Noise Ratio
SEI	Solid Electrolyte Interphase
SoH	State of Health
SoC	State of Charge
SPM	Single Particle Model
SLPB	Superior Lithium-Polymer Battery
TLM	Transmission Line Model
u.v.a.	und viele andere

Operatoren

Symbol	Bedeutung
${}^t\mathcal{I}_t^\alpha$	Initialisierte linksseitige fraktionale Integration
${}^e\mathcal{I}_t^\alpha$	Uninitialisierte linksseitige fraktionale Integration
${}^t\mathcal{D}_t^\alpha$	Initialisierte linksseitige fraktionale Ableitung
${}^e\mathcal{D}_t^\alpha$	Uninitialisierte linksseitige fraktionale Ableitung
${}^t\mathcal{I}_g^\alpha$	Initialisierte rechtsseitige fraktionale Integration
${}^t\mathcal{I}_g^\alpha$	Uninitialisierte rechtsseitige fraktionale Integration
${}^t\mathcal{D}_g^\alpha$	Initialisierte rechtsseitige fraktionale Ableitung
${}^t\mathcal{D}_g^\alpha$	Uninitialisierte rechtsseitige fraktionale Ableitung
\mathcal{Q}	Reflektionsoperator
Φ	Modulationsfunktionsoperator
\mathcal{L}	Laplace-Operator
\mathcal{S}	Stieltjes-Transformation

Symbole

Symbol	Bedeutung
α	Fraktionale Ableitungsordnung
$\underline{\alpha}$	Vektor mit fraktionalen Ableitungsordnungen
$AC^{[\alpha]}[e, t]$	Menge der im Intervall $[e, t]$ $[\alpha]$ -fach absolut kontinuierlichen Funktionen
$\underline{A}(t)$	Systemmatrix
a	„Geburtszeitpunkt“ einer Funktion
$\underline{B}(t)$	Eingangsmatrix
β	Fraktionale Ableitungsordnung
\mathbb{C}	Komplexe Zahlen
C_0	Differentielle Kapazität
$C(t)$	Zum aktuellen Zeitpunkt t verfügbare Ladungsmenge in [As] der Zelle
$c(t, x)$	Ladungskonzentration in Abhängigkeit von Zeit t und Weg x
\mathcal{C}	Raum der Initialisierungsfunktionen
$\delta(t)$	Dirac'sche Distribution
δ	Variation
η	Initialisierungsfunktion der linksseitigen Integration
η_{rs}	Initialisierungsfunktion der rechtsseitigen Integration
\underline{F}_{α}	\underline{F} -Matrixfunktion (Fraktionale Peano-Baker-Reihe)
$\underline{F}_{\alpha, rs}$	Rechtsseitige \underline{F} -Matrixfunktion
f_a	Abtastfrequenz
f_g	Grenzfrequenz
Γ	Gammafunktion
$G(j\omega)$	Frequenzgang
$G(s)$	Übertragungsfunktion
h	Schrittweite
i	Strom
J	Gütemaß
$j\omega$	Komplexe Variable
ℓ	Mikusiński Integrationsvariable
$L[e, t]$	Menge der im Intervall $[e, t]$ Lebesgue integrierbaren Funktionen
\underline{M}	Regressormatrix
\underline{M}^+	Pseudoinverse der Regressormatrix
$\underline{\mu}(t)$	Lagrange-Multiplikator
\mathbb{N}	Natürliche Zahlen
$\mathbb{N}_{\geq 0}$	$\{x \in \mathbb{N} x \geq 0\}$

$\mathbb{N}_{>0}$	$\{x \in \mathbb{N} x > 0\}$
φ	Modulationsfunktion
φ_s	Die zu dem s -ten Parameter spezifische Modulationsfunktion
\underline{p}	Parametervektor
\mathbf{p}	Mikusiński-Ableitungsvariable
ψ_{RL}	Initialisierungsfunktion der linksseitigen RL-Ableitung
ψ_C	Initialisierungsfunktion der rechtsseitigen C-Ableitung
$\psi_{rs,RL}$	Initialisierungsfunktion der rechtsseitigen RL-Ableitung
$\psi_{rs,C}$	Initialisierungsfunktion der rechtsseitigen C-Ableitung
\underline{R}_α	\underline{R} -Matrixfunktion (Zeitvariante Erweiterung der Robotnov-Hartley-Funktion)
$\underline{R}_{\alpha,rs}$	Rechtsseitige \underline{R} -Matrixfunktion
\mathcal{R}	Menge der im Intervall $[0, \infty)$ $[\alpha]$ -fach absolut kontinuierlichen Funktionen
\mathbb{R}	Reelle Zahlen
$\mathbb{R}^{\geq 0}$	$\{x \in \mathbb{R} x \geq 0\}$
$\mathbb{R}^{>0}$	$\{x \in \mathbb{R} x > 0\}$
s	Komplexe Laplace-Variable
T_a	Abtastzeit
T_{voll}	Zeitspanne, zu der die Zelle vollgeladen ist
τ_0	Hauptwert der DRT bzw. Zeitkonstante des RQ-Elements
\mathcal{U}	Menge der kontinuierlichen und beschränkten Funktionen
u_s^*	Die zu dem s -ten Parameter spezifische Steuerfunktion des Ersatzsystems
\hat{u}_s^*	Die zu dem s -ten Parameter spezifische Steuerfunktion des Ersatzsystems für einen minimalen Identifikationsfehler
u_0	Ruhspannung
\mathcal{V}_s	Die zu dem s -ten Parameter spezifische Menge der Steuerfunktionen
\mathcal{W}_s	Die zu dem s -ten Parameter spezifische Menge der Modulationsfunktionen
\underline{W}	Fraktionale Gram'sche Matrix
ω	Kreisfrequenz
\mathcal{X}	Zustandsraum
\underline{x}	Fraktionaler Zustandsvektor
$Z(j\omega)$	Impedanz

Spezielle Elemente, Vektoren und Matrizen

Bezeichnung	Definition
$[\alpha]$	$\min\{k \in \mathbb{Z} k > \alpha\}$
$\lfloor \alpha \rfloor$	$\lfloor \alpha \rfloor - 1$
$\{p\}_j$	$p \in \mathbb{R}^{c \times 1}$, $c \in \mathbb{N}_{>0}$, j -tes Element des Vektors p
\underline{e}_s	$\underline{e}_s \in \mathbb{R}^{n+m+1 \times 1}$, $\{\underline{e}_s\}_{i,1} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = s, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
\underline{I}	Einheitsmatrix
\underline{J}	Block-Jordan-Matrix, die auf der Hauptdiagonalen ausschließlich Nullen aufweist.
\underline{H}	$\underline{H} \in \mathbb{R}^{n \times nw}$, $\underline{h}_j \in \mathbb{R}^{nw \times 1}$, $\underline{H} := \begin{bmatrix} \underline{h}_1^T \\ \vdots \\ \underline{h}_n^T \end{bmatrix}, \quad \{\underline{h}_j\}_k = \begin{cases} 1 & \text{für } k = (j-1)w + 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
$\text{diag}(\underline{y}_1, \dots, \underline{y}_n)$	$\begin{bmatrix} \underline{y}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \underline{y}_n \end{bmatrix}$
$\underline{L}_{m \times n}$	Die aus den ersten m Zeilen und ersten n Spalten der Matrix \underline{L} bestehende Matrix wird betrachtet.

1 Einleitung

Mit der sogenannten Energiewende ist für Politik, Industrie und Wissenschaft die Stromerzeugung aus erneuerbaren Energien zum zentralen Thema geworden. Die Frage nach geeigneten Speichertechnologien ist dabei eine der größten Herausforderungen. In der Automobilindustrie haben Batterien eine vielversprechende Zukunft – aufgrund ihrer vergleichsweise hohen Energiedichte vor allem die Lithium-Ionen-Batterie. Allerdings weist diese momentan noch den nicht unerheblichen Nachteil auf, dass sich die Speicherkapazität durch sogenannte Alterungsvorgänge verringert.

Einer möglichst optimalen Ausnutzung der in der Batterie gespeicherten Energie kommt also eine große Bedeutung zu. Die Batterieeffizienz zu erhöhen und zudem einen sicheren Betrieb zu gewährleisten erfordert hochentwickelte Diagnosesysteme. Ein wichtiger Baustein hierbei ist die automatische Identifikation des physikalisch motivierten Alterungszustands. Diese ermöglicht neben einer hohen Batterieeffizienz bei zugleich sicherem Betrieb eine bessere Prozessüberwachung bei der Zellherstellung und hilft bei der Weiterentwicklung von Zellmaterialien.

Bisher gängige Ansätze zur Alterungsbestimmung bilden eine Summe von physikalischen Alterungsprozessen mit jeweils unterschiedlichem Alterungsverhalten in einer einzigen Maßzahl ab, beispielsweise als aktuell verfügbare Ladungsmenge oder als Zyklenzahl. Solche globalen Größen haben jedoch nur eine geringe Aussagekraft, da einzelne Prozesse nicht separat untersucht werden können.

In dieser Arbeit werden die verschiedenen Batterieprozesse hingegen in einem physikalischen Modell separat abgebildet und dessen Parameter modellbasiert im Zeitbereich identifiziert. Anders als bei signalbasierten Methoden wie der *Electrical Impedance Spectroscopy*¹ (EIS) lassen sich die Parameter durch die Modellannahme automatisch im Zeitbereich während der Identifikation bestimmen. Somit kann die in den Materialwissenschaften etablierte, sogenannte *Distribution of Relaxation Times*² (DRT) automatisch berechnet und dadurch das Alterungsverhalten physikalisch interpretiert werden. Je nach Anwendungsszenario sind die Verfahren in der Lage, im laufenden Betrieb eingesetzt zu werden.

Zur Beschreibung der Batterie werden in der Literatur mit absteigender Detaillierung folgende Modellformen eingesetzt:

¹ engl. für *elektrische Impedanzspektroskopie*

² engl. für *Verteilungsfunktion der Relaxationszeiten*

Mikromodelle sind feingranulare 3-D-Modelle. Sie werden mit einem Rasterelektronenmikroskop aufgenommen, beschreiben die Reaktionskinetik und zeichnen sich durch eine sehr hohe Genauigkeit aus [EJCIT11]. Sie sind aufgrund ihrer hohen Komplexität physikalisch exakt.

Mesomodelle beinhalten die wesentlichen Diffusionsprozesse und den Ladungstransfer an den Grenzschichten. Von Vorteil ist, dass sie intrinsisch physikalisch interpretierbar sind, aber trotzdem eine vergleichsweise geringe strukturelle Komplexität aufweisen. Eine Gruppe dieser Modelle lässt sich als *Elektrisches Ersatzschaltbild* (ESB) darstellen.

Makromodelle arbeiten mit konzentrierten Parametern in Form von einfachen ESBs. Positiv zu bewerten ist die einfache Handhabung, da bereits zahlreiche Identifikationsmethoden existieren. Zu bedenken ist allerdings, dass sie physikalisch nicht interpretierbar und relativ ungenau sind.

In den meisten wissenschaftlichen Arbeiten zur modellbasierten Batterieidentifikation werden Makromodelle in Form von gewöhnlichen Impedanzen betrachtet. Sie ergeben sich durch Approximation der Mesomodelle. Die Identifikation der Modellparameter erfolgt mit Standardverfahren aus der Regelungstechnik, wie etwa die *Least-Squares*³ (LS)-Schätzung und das Kalman Filter.

In der vorliegenden Arbeit spielen Makromodelle keine Rolle, da sie nicht physikalisch motiviert sind und daher keine physikalische Interpretation der Alterung erlauben. Die Mikromodelle sind für den Online-Einsatz aufgrund ihrer Komplexität und den entsprechend hohen Anforderungen an die Rechenleistung ungeeignet. Stattdessen finden in dieser Arbeit Mesomodelle Anwendung, da sie die positiven komplementären Eigenschaften von Mikro- und Makromodellen vereinen und bei überschaubarer struktureller Komplexität physikalisch interpretierbar sind. Die konkrete Modellform ist ein fraktionales Impedanzmodell, das sich in die einzelnen Batterieprozesse wie den Ladungstransfer, die Diffusion und die *Solid Electrolyte Interphase* (SEI) separieren lässt. Verändert ein Degradierungsmechanismus, wie z.B. die Zunahme der SEI, nun die Impedanz, so lässt sich das Alterungsverhalten der SEI genau analysieren. Durch dieses Wissen können dann neue Entwurfsverfahren für die Batterie entwickelt werden, welche das Anwachsen der SEI verkleinern. Da die Verfahren in der Lage sind, auch im laufenden Betrieb eingesetzt zu werden, kann die Analyse auch online erfolgen. Dadurch ließe sich beispielsweise die Effizienz der Batterie eines Elektrofahrzeugs erhöhen.

Der **erste fundamentale Beitrag** dieser Arbeit in **Kapitel 4** besteht in der Automatisierung der physikalischen Alterungsbestimmung durch den Entwurf zweier modellbasierter Methoden zur automatischen Identifikation fraktionaler Systeme im Zeitbereich:

³ engl. für *kleinste Quadrate*

- Methode der Modulationsfunktionen für fraktionale Systeme
- Algebraisches Verfahren für fraktionale Systeme

Die Methode der Modulationsfunktionen hat sich schon für gewöhnliche Systeme bewährt und wird hier erstmalig gesamtheitlich für fraktionale Systeme entwickelt. Die Eigenschaften des Verfahrens werden durch die sogenannte Φ -Transformation bestimmt. Diese basiert auf einer Modulationsfunktion, die gewisse Bedingungen erfüllen muss und zunächst heuristisch ermittelt wird.

Allerdings müssen einige Modellparameter, die sogenannten fraktionalen Ableitungsordnungen, vorab bekannt sein, was einen Nachteil des Modulationsfunktionsverfahrens darstellt. Aus diesem Grund wird ein algebraisches Identifikationsverfahren hergeleitet, welches in der Lage ist, die Ableitungsordnungen zu identifizieren. Das Verfahren basiert auf einer algebraischen Darstellung des fraktionalen Systems, in welcher die Ableitungsordnungen als gewöhnliche Parameter vorkommen.

Um die Verfahren an realen Zellen einer Batterie testen zu können, wurde im Rahmen dieser Arbeit eine Labortestumgebung mit einem Batteriemessstand aufgebaut. Da in dieser Arbeit die Methodik im Vordergrund steht, wurden keine umfangreichen Studien durchgeführt. Die Messergebnisse liefern jedoch klare Hinweise darauf, dass die Identifikation mit dem Modulationsfunktionsverfahren auch im realen Einsatz im Fahrzeug funktionieren kann.

Beide Verfahren grenzen sich ab von der unter nahezu rauschfreien Bedingungen im Labor durchgeführten EIS, die in den Materialwissenschaften zum Handwerkszeug zur Bestimmung des Impedanzspektrums der Batterie gehört. Da die EIS signalbasiert im Frequenzbereich abläuft, hat sie den Vorteil, dass sie keine Modellannahme benötigt. In vielen Fällen ergeben sich jedoch lange Wartezeiten. Nach Aufnahme des Spektrums wird die DRT in einem Zwischenschritt durch manuelles Eingreifen aus dem Spektrum berechnet und die Alterungsanalyse unter Annahme einer bestimmten Modellstruktur durchgeführt. Aufgrund dieses spät eingebrachten Modellwissens kann die Identifikation nicht automatisch ablaufen und ist daher in vielen Fällen aufwendig in der Umsetzung.

Falls ein Modell vorliegt, lässt sich also mit den Methoden dieser Arbeit die DRT-Identifikation von manuelle auf automatische Schritte übertragen. Soll jedoch die DRT beispielsweise zur Modellierung eingesetzt werden, dann sind diese Methoden keine Alternative zum Vorgehen mit der EIS.

Problematisch bei der Modulationsfunktionsmethode sind die entwickelten Heuristiken zum Finden einer passenden Modulationsfunktion. Deshalb besteht der **zweite fundamentale Beitrag** dieser Arbeit darin, die Methode der Modulationsfunktionen für fraktionale Systeme durch eine methodische Bestimmung einer speziellen Modulationsfunktion erstmalig theoretisch weiterzuentwickeln. Dies ist in den **Kapiteln 6 bis 8** dargestellt.

Mit der modellbasierten Modulationsfunktion können die Alterungsparameter getrennt voneinander ohne Heuristik identifiziert werden. Das Verfahren basiert auf einem definierten Ersatzsystem in Form einer zeitvarianten fraktionalen Zustandsraumdarstellung. Die Zustandsgrößen des Ersatzsystems werden dabei so gewählt, dass die Vorgabe bestimmter Endwerte einhergeht mit der Erfüllung der Bedingungen für die Modulationsfunktion. Um die Endwerte einstellen zu können, wird eine Steuerfunktion für das fraktionale System benötigt.

Allerdings hat sich gezeigt, dass die zeitvarianten fraktionalen Zustandsraumsysteme im Gegensatz zum zeitinvarianten Fall weitgehend unerforscht sind. Losgelöst von der fraktionalen Identifikation beinhaltet daher ein großer Teil dieser Arbeit die Erweiterung der fraktionalen Systemtheorie in **Kapitel 7**. Hierbei wird der Weg von der analytischen Lösung der zeitvarianten fraktionalen Zustandsgleichung über die Systemanalyse bis hin zur Steuerungssynthese erstmalig beschritten.

Die Definition eines *fraktionalen Zustands* aus dieser Arbeit unterscheidet sich grundlegend von der des *gewöhnlichen Zustands* nach KALMAN, da er von seiner kompletten Vergangenheit abhängig ist. Dieser fraktionale Zustand erfüllt die zeitvariante fraktionale Zustandsgleichung. Die analytische Lösung dieser Gleichung bildet die Grundlage für die Systemanalyse und die Steuerungssynthese und wird daher in der Arbeit hergeleitet. Die Lösung basiert auf einer entsprechend neu definierten R -Matrixfunktion, welche in gewisser Weise eine Erweiterung der fraktionalen Matrixexponentialfunktion darstellt. Die in diesem Zusammenhang von den gewöhnlichen Systemen bekannte Bezeichnung Transitionsmatrix muss hierbei vermieden werden, da die Transitions-eigenschaft aufgrund der Tatsache, dass ein fraktionaler Zustand laut Definition ein unendliches Gedächtnis besitzt, ausgeschlossen ist.

Für den fraktionalen Zustand wird, basierend auf der Zustandslösung, eine fraktionale Definition der ursprünglich von KALMAN für gewöhnliche Systeme definierten Begriffe der Steuerbarkeit und Erreichbarkeit eingeführt und ein Kriterium zur Überprüfung dieser Eigenschaften vorgestellt. In diesem Zusammenhang ergibt sich eine fraktionale Gram'sche Matrix. Ebenfalls unter Zuhilfenahme der analytischen Zustandslösung erhält man eine Steuerung für das fraktionale System, die ein modifiziertes energieoptimales Gütemaß minimiert und die fraktionalen Anfangsbedingungen und Endwerte berücksichtigt.

Mit diesem Stellsignal lässt sich schließlich die Modulationsfunktion steuerungs-basiert ermitteln. Ob das Ersatzsystem überhaupt vollständig steuerbar ist, wird mit dem hergeleiteten Steuerbarkeitskriterium überprüft.

Zum Einstieg in die Thematik werden zunächst in **Kapitel 2** die wichtigsten *State-of-the-Art*⁴-Verfahren zur Alterungsbestimmung der Batterie im Betrieb vorgestellt. Außerdem erfolgt die Einführung der fraktionalen Impedanz und es wird gezeigt, mit welchen Methoden diese bisher identifiziert wurde. Anschließend wird die Forschungslücke erörtert, die diese Arbeit zu schließen beabsichtigt. In **Kapitel 3** wird eine kurze Einführung in die Grundlagen der bekannten fraktionalen Analysis gegeben. Dies ist

⁴ engl. für *Stand der Technik*

notwendig, da in dieser Arbeit modifizierte Definitionen fraktionaler Operatoren eingeführt werden. Darauf aufbauend werden fraktionale Zeitbereichsmodelle definiert und das zu identifizierende Batteriemodell vorgestellt. Die fraktionale Methode der Modulationsfunktionen steht im Fokus von **Kapitel 4**. Hierfür wird eine neue Integraltransformation eingeführt, welche auf einer Modulationsfunktion mit bestimmten Eigenschaften beruht. Basierend auf dieser Transformation wird die fraktionale Methode der Modulationsfunktionen hergeleitet. Das Verfahren kann zwar die Koeffizienten, nicht aber die fraktionalen Ableitungsordnungen der fraktionalen Impedanz identifizieren. Daher wird außerdem eine algebraische Methode präsentiert, die genau dies ermöglicht. Das **Kapitel 5** ist der Anwendung gewidmet, indem die Ergebnisse einer realen Batterieidentifikation mit dem Modulationsfunktionsverfahren präsentiert werden. Außerdem wird durch Simulation gezeigt, dass sowohl das Modulationsfunktionsverfahren als auch das algebraische Verfahren zur Batterieidentifikation eingesetzt werden können. Nach dem Anwendungskapitel folgt im zweiten Teil dieser Arbeit die theoretische Herleitung einer neuen Methode, welche die Heuristiken des Modulationsfunktionsverfahrens vermeidet. Hierfür wird in **Kapitel 6** gezeigt, wie die Modulationsfunktion mit Hilfe eines Ersatzsystems modellbasiert gefunden werden kann. Außerdem wird erörtert, wie sich mit dieser Modulationsfunktion einzelne Parameter separat identifizieren lassen. Für den Ansatz sind allerdings neue systemtheoretische Erkenntnisse für fraktionale Systeme notwendig, die in **Kapitel 7** hergeleitet werden. Anschließend ist es dann in **Kapitel 8** möglich, die Realisierbarkeit des methodischen Verfahrens zu überprüfen. Eine Zusammenfassung in **Kapitel 9** beleuchtet noch einmal die zentralen Aussagen dieser Arbeit.

Die Arbeit ist entstanden aus dem von der deutschen Forschungsgesellschaft geförderten Projekt *Identifikation von Lithium Zellen mit physikalisch interpretierbaren Modellen im Fahrzeugbetrieb*.⁵

⁵ Die Projektnummer lautet HO 4738/1-1 und die Antragsteller sind Prof. Dr.-Ing. Sören Hohmann vom *Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme (IRS)* am KIT und Prof. Dr.-Ing. Ellen Ivers-Tiffée vom *Institut für Angewandte Materialien – Werkstoffe der Elektrotechnik (IAM-WET)* am KIT, 2014

2 Verfahren zur Alterungsbestimmung

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung von modellbasierten, automatischen Identifikationsverfahren im Zeitbereich, mit denen sich der Alterungszustand einer Lithium-Ionen-Zelle physikalisch motiviert feststellen lässt. Zur Untersuchung der Alterung sind hauptsächlich zwei Modellformen verbreitet, die in Abbildung 2.1 links dargestellt sind: physikalisch motivierte fraktionale Impedanzmodelle und phänomenologische Modelle in Form von Maßzahlen. Losgelöst davon sind signalbasierte Analyseverfahren ohne detaillierte Modellbeschreibung. Die Maßzahlen fusionieren eine Summe von verschie-

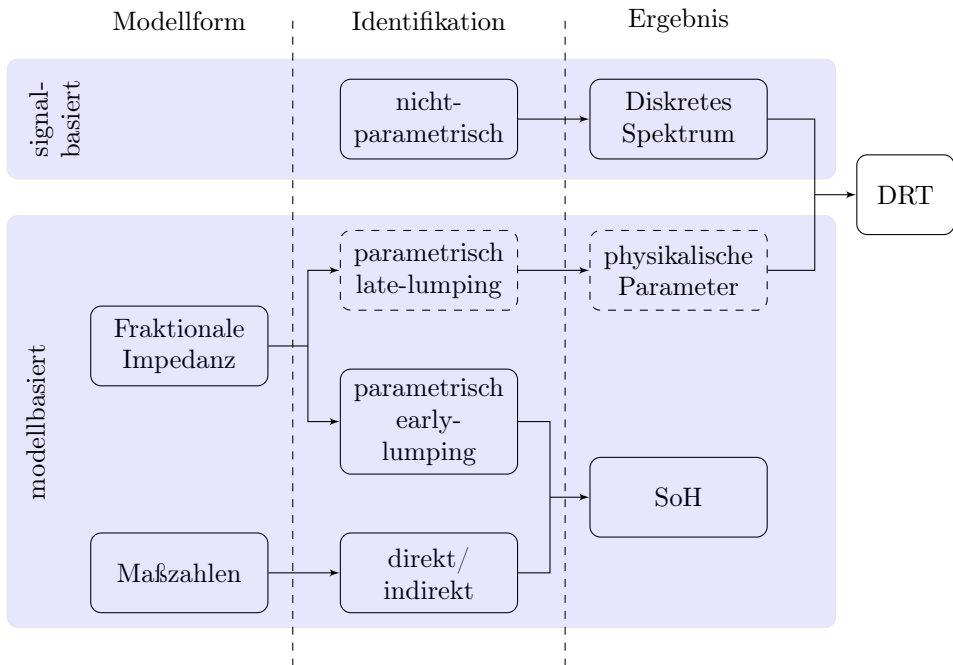


Abbildung 2.1: Überblick über die verschiedenen Modelle und Identifikationsarten, die zur Alterungsbestimmung eingesetzt werden. Die Blöcke mit den durchgezogenen Rändern sind hierbei State-of-the-Art, die gestrichelten Blöcke werden erstmalig in dieser Arbeit behandelt.

denen Alterungsprozessen in einer einzigen Größe. Durch diese Aggregation lassen sich die einzelnen Phänomene und ihr Einfluss auf die Alterung jedoch nicht mehr separat betrachten, wodurch die detaillierte Analyse und die Ableitung gezielter Synthesever-

fahren erschwert wird. Sie können entweder direkt, beispielsweise durch Fuzzy-Logik, bestimmt werden, oder indirekt durch Prognosemodelle, die sich offline bestimmen lassen und dann im Betrieb mitgeführt werden. Mit den Maßzahlen lässt sich dann der sogenannte *State of Health*⁶ (SoH) im laufenden Betrieb berechnen.

Die fraktionale Impedanz hingegen bildet die Alterungsprozesse getrennt voneinander ab und ist intrinsisch physikalisch motiviert. Zu ihrer Identifikation werden drei grundsätzlich verschiedene Herangehensweisen betrachtet, die in Definition 2.1 zusammengefasst sind. Die Identifikationsarten sind in der mittleren Spalte in Abbildung 2.1 dargestellt.

Definition 2.1 (Klassifikation von Identifikationsverfahren für die fraktionale Impedanz)

- **Parametrische late-lumping Identifikation:** Modellbasierte, automatische Zeitbereichsidentifikation der Parameter des fraktionierten Modells ohne jegliche Approximation. Je nach Anforderung in der Lage, während des Betriebs mit wenig Implementierungsaufwand eingesetzt zu werden.
- **Parametrische early-lumping Identifikation:** Modellbasierte, automatische Zeitbereichsidentifikation der Parameter eines Modells, welches die fraktionale Impedanz approximiert. Je nach Anforderung in der Lage, während des Betriebs eingesetzt zu werden.
- **Nichtparametrische Identifikation:** Signalbasierte Aufnahme des Frequenzspektrums für diskrete Frequenzen in einem bestimmten Frequenzbereich mit der EIS und ohne Modellannahme.

In der werkstofforientierten Batterieforschung gehört die nichtparametrische Identifikation mit der *Electrical Impedance Spectroscopy*⁷ (EIS) zum Handwerkszeug [OT11]. Anschließend erfolgt manuell eine numerische Umrechnung des Impedanzspektrums in die *Distribution of Relaxation Times*⁸ (DRT) [MB87, S.34-42]. Basierend auf der Annahme einer bestimmten Modellstruktur lassen sich die Batterieprozesse in der DRT-Darstellung besser analysieren. Durch dieses signalbasierte Vorgehen wird das Modellwissen also erst spät eingebracht, was dazu führt, dass die Identifikation nicht automatisch ablaufen kann. Da aufgrund der signalbasierten EIS zudem in vielen Fällen lange Messzeiten entstehen, eignen sich diese Verfahren vornehmlich für den Laborbereich.

Das beschriebene nichtparametrische Vorgehen wurde vom *Institut für Angewandte Materialien – Werkstoffe der Elektrotechnik* (IAM-WET) am KIT zunächst für Brennstoffzellen angewendet [SMV⁺02] und dann auf Batterien übertragen [ICE⁺10] u.v.a.. Führend in der werkstofforientierten Batterieforschung sind in Deutschland neben dem IAM-WET folgende Einrichtungen:

⁶ engl. für *Gesundheitszustand*

⁷ engl. für *elektrische Impedanzspektroskopie*

⁸ engl. für *Verteilungsfunktion der Relaxationszeiten*

- *Münster Electrochemical Energy Technology* (MEET)
- *Zentrum für Sonnenenergie- und Wasserstoff-Forschung Baden-Württemberg* (ZSW)
- *Fraunhofer-Institut für Chemische Technologie* (ICT) in Pfinztal
- *Lehrstuhl für Elektrische Energiespeichertechnik* an der Technischen Universität München
- *Lehrstuhl für Elektrochemische Energiewandlung und Speichersystemtechnik* an der RWTH Aachen
- *Institut für Angewandte Materialien* (IAM) am KIT

Die beiden parametrischen Verfahren sind modellbasiert, unterscheiden sich jedoch in der Modellform. Die early-lumping Methode, die in der anwendungsorientierten Batterieforschung weit verbreitet ist, approximiert die fraktionale Impedanz und kann dann Standardverfahren zur Identifikation anwenden. Diese Vereinfachung geht jedoch einher mit dem Verlust der physikalischen Interpretierbarkeit. Daher kann mit den identifizierten Parametern nur noch der phänomenologische SoH berechnet werden.

Der große Vorteil der parametrischen late-lumping Verfahren ist, dass sie physikalisch interpretierbar sind, da sie gänzlich ohne Approximation des fraktionalen Modells auskommen. Die Vermeidung von Näherungen reduziert außerdem in vielen Fällen den Implementierungsaufwand. Durch die Nutzung des Modellwissens werden die fraktionalen Parameter während der Identifikation automatisch bestimmt. Da ein analytischer Zusammenhang besteht, lässt sich die DRT mit diesen Parametern ohne manuelles Eingreifen direkt berechnen. Aufgrund der beschriebenen Eigenschaften erfüllen die Methoden wichtige Voraussetzungen um im laufenden Betrieb eingesetzt zu werden. Anhand dieses Kapitels wird sichtbar, dass es unter den late-lumping Verfahren bisher nur erste Ansätze gibt, die im Batteriebereich keine Verwendung finden.

In diesem Kapitel wird zunächst das Funktionsprinzip einer Lithium-Ionen-Zelle erklärt und auf ihre Alterungsmechanismen eingegangen. Dann folgt die Bestimmung des SoH auf Basis phänomenologischer Größen. Der anschließende Abschnitt widmet sich der Batterieimpedanz. Hierbei wird das Impedanzspektrum vorgestellt und die fraktionale Beschreibungsform hergeleitet. Der analytische Zusammenhang zwischen den Impedanzparametern und der DRT ist ebenso Thema. Der letzte Abschnitt stellt den State-of-the-Art der parametrischen und nichtparametrischen Verfahren dar. Hierbei wird insbesondere herausgearbeitet, dass es zwar zahlreiche early-lumping und nichtparametrische Verfahren gibt, die late-lumping Methoden bisher jedoch weitgehend unerforscht sind.

2.1 Lithium-Ionen-Zelle

Eine Lithium-Ionen-Zelle ist ein galvanisches Element, mit welchem sich gespeicherte chemische Energie durch Oxidation und anschließende Reduktion in elektrische Energie

umwandeln lässt. Da die Zelle als elektro-chemischer Wandler funktioniert, lässt sich der chemische Speicher wieder auffüllen. Daher wird die Zelle auch als Sekundärspeicher bezeichnet. Der größte Vorteil dieser Batterietechnologie besteht darin, dass sie eine sehr hohe spezifische Energiedichte besitzt [LR95, S.32-34]. Dies geht allerdings einher mit einer leichten Entflammbarkeit, z.B. durch eine exotherme Reaktion bei Überladung, was bis zu einer Explosion führen kann (*Thermal Runaway*) [Fra12, LM14].

2.1.1 Funktionsweise

Um die Identifikationsmethoden beispielhaft nachzuweisen, wird in dieser Arbeit eine *Lithium-Polymer* (LiPO)-Zelle von KOKAM mit Graphit an der Anode und einem Blend aus Nickel-Cobalt-Aluminium und Cobaltdioxid an der Kathode (Anhang G) als Beispielsystem eingesetzt.⁹ Es handelt sich um eine Pouchzelle, welche aufgrund ihrer sehr flachen Bauweise häufig in Notebooks oder Smartphones eingesetzt wird.¹⁰ Die Funktionsweise einer Lithium-Ionen-Zelle stellt Abbildung 2.2 dar. An der Grenzflä-

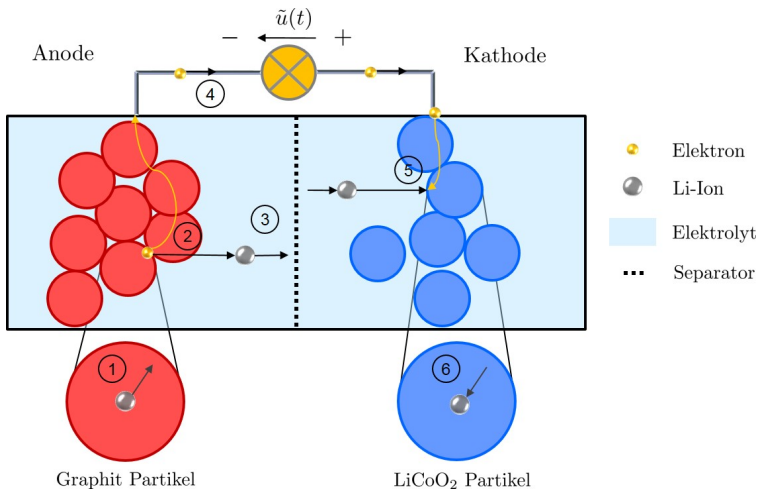
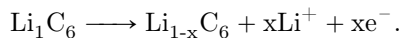


Abbildung 2.2: Batterieprozesse einer Lithium-Ionen-Zelle bei der Entladung

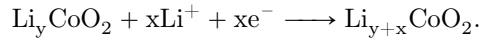
che zwischen der negativen Anode und Elektrolyt findet, im Falle von Graphit an der Anode, während der Entladung folgende Reaktion statt:



Das frei gewordene Elektron fließt über den elektrischen Leiter, während das Ion durch den Elektrolyten transportiert wird. Im Falle von Lithium-Cobaltdioxid an der positiven Kathode erfolgt dann die Reduktion:

⁹ Verschiedene Anoden- und Kathoden-Materialien werden in [Ill14, S.6-12][Whi04] diskutiert.

¹⁰ Für Vor- und Nachteile von Gehäuseformen siehe [Sch13, S.11-12].



Zwei wesentliche Prozesse, die in der Zelle ablaufen, sind der Ladungstransfer und die Festkörperdiffusion, die in den Definitionen 2.2 und 2.3 beschrieben werden:

Definition 2.2 (Ladungstransfer)

An der Grenzschicht Anode/Elektrolyt kommt es zum Ladungstransfer, in dem das Lithiumatom ein Elektron abgibt und als Ion in den Elektrolyten eintaucht. Das Elektron gelangt über den Anodenstromableiter in den äußeren Stromkreis. An der Grenzfläche Kathode/Elektrolyt findet erneut ein Ladungstransfer statt. Das Li^+ -Ion nimmt ein Elektron auf und wird wieder zum Lithiumatom.

Definition 2.3 (Festkörperdiffusion)

Am Ort des Ladungsdurchtritts an der Grenzschicht Anode/Elektrolyt werden Li^+ -Ionen aus der Anode ausgebaut, wodurch ein Konzentrationsgefälle in der Anode entsteht. Der entstehende Prozess der Ladungswanderung durch den Festkörper hin zur Grenzschicht wird als Diffusion bezeichnet. Aufgrund des Ladungstransfers an der Grenzfläche Kathode/Elektrolyt entsteht ein Konzentrationsunterschied im Kathodenmaterial. Der entstehende Prozess der Ladungswanderung durch den Festkörper hinein in die Kathode wird als Diffusion bezeichnet.

Im Detail laufen in der Batterie während der Entladung folgende physikalische Vorgänge ab (siehe Abbildung 2.2):

1. Festkörperdiffusion in der Anode entsprechend Definition 2.3.
2. Ladungstransfer an der Grenzschicht Anode/Elektrolyt entsprechend Definition 2.2.
3. Das Li^+ -Ion diffundiert durch den Elektrolyten. Da dieser Vorgang äußerst schnell abläuft, kann er als ohmscher Widerstand beschrieben werden [Jos05].
4. Das Elektron wandert durch den äußeren Stromkreis zur Kathode und kann einen Verbraucher speisen.
5. Ladungstransfer an der Grenzschicht Kathode/Elektrolyt entsprechend Definition 2.2.
6. Festkörperdiffusion in der Kathode entsprechend Definition 2.3.

Jeder dieser Prozesse hat eine Überspannung zur Folge, welche auch als Verlustspannung bezeichnet wird. Die gesamte Verlustspannung ist dann die Summe über alle Überspannungen. In dieser Arbeit wird davon ausgegangen, dass ein Kleinsignalverhalten vorliegt und die Batterie sich ausschließlich linear verhält. In Abschnitt 2.3 wird zu sehen sein, dass sich die Dynamik der Prozesse mit einer fraktionalem Impedanz modellieren lässt.

Die eben beschriebenen Überspannungen treten dann auf, wenn ein Verbraucher angeschlossen ist und Strom fließt. Falls jedoch die Batterie in Ruhe ist und alle Prozesse abgeklungen sind, ist trotzdem eine Spannung messbar. Diese Spannung wird als Ruhespannung oder *Open Circuit Voltage* (OCV) bezeichnet [JW06, S.16]. Die gesamte Spannung $\tilde{u}(t)$ setzt sich daher aus den Überspannungen und der Ruhespannung zusammen.

2.1.2 Solid Electrolyte Interphase

Nach den ersten Zyklen bildet sich an der Grenzfläche Anode/Elektrolyt eine Festkörperschicht, die sogenannte *Solid Electrolyte Interphase* (SEI) [DB11, S.479-523], [LR95, S.427,1017 u.a.]. Diese ist unvermeidbar und sorgt dafür, dass der Elektrolyt sich nicht zersetzt. Die SEI an der Grenzfläche Kathode/Elektrolyt ist weniger ausgeprägt. Problematisch ist, dass die Schicht bei Benutzung der Zelle und auch in Ruhe weiter wächst und eine Vergrößerung des Innenwiderstands verursacht [Ill14, S.14].

2.1.3 Alterung

Generell unterscheidet man zwischen der zyklischen Alterung, also der Alterung aufgrund von Entlade- und Ladevorgängen und der kalendarischen Alterung, also der natürlichen Alterung aufgrund der bloßen fortgeschrittenen Lebensdauer [Trö05, ab S.108]. Die Summe aller Alterungsvorgänge führt zu einer Verringerung sowohl der verfügbaren Kapazität als auch der abrufbaren maximalen Leistung [SZK⁺14a, WGDIT16]. Letztere wird durch einen erhöhten Innenwiderstand aufgrund von SEI-Wachstum oder eine Verschlechterung der ablaufenden Prozesse wie Ladungstransfer oder Diffusion aus den Definitionen 2.2 und 2.3 verursacht.

2.2 Alterungsbestimmung auf Basis phänomenologischer Maßzahlen

In Abschnitt 2.1.3 wurde schon erwähnt, dass die zyklische und kalendarische Alterung einhergeht mit einer Verringerung sowohl der verfügbaren Ladungsmenge als auch der abrufbaren maximalen Leistung [SZK⁺14a, WGDIT16]. Ausschlaggebend für das Maß der Änderung sind laut [MN12, AWD98] Entladetiefe, Temperatur und Entladerate. Übersichtliche Darstellungen der physikalischen Alterungsprozesse und deren Auswirkung auf Kapazität und Leistung sind z.B. in [VNW⁺05, LWHG⁺10, ALC⁺03] beschrieben.

2.2.1 Alterungsgrößen

Im Folgenden werden die zur Alterungsbeschreibung gängigen Maßzahlen SoH_C und SoH_R eingeführt. Diese repräsentieren jeweils in einer einzigen Größe eine Summe von Alterungsprozessen, welche ganz unterschiedliches Alterungsverhalten aufweisen. Dadurch haben sie eine sehr geringe Aussagekraft, denn es ist nicht möglich aus der Summe heraus einzelne Prozesse zu separieren und dann getrennt zu untersuchen, um Rückschlüsse auf die physikalischen Ursachen treffen zu können. Es sind lediglich globale Aussagen denkbar, wie beispielsweise „die Zelle ist beschädigt“.

Der die Leistung begrenzende Spannungseinbruch bei einem Strompuls hängt vom Gleichstromwiderstand R_i ab, der durch Pulstests bestimmt werden kann [SOK⁺10]:

$$R_i = \frac{\Delta u}{\Delta i} = \frac{u(t_1) - u(t_2)}{i(t_1) - i(t_2)}. \quad (2.1)$$

Dabei stellt Δu den Spannungs- und Δi den Stromsprung dar, t_1 und t_2 sind zwei unterschiedliche Zeitpunkte, die ausreichend nah beinander liegen müssen, um die Berechnung nicht durch Dynamiken zu verfälschen. Um mit der Leistung als Maßzahl bewerten zu können, ob eine Zelle noch die gewünschte Leistung besitzt oder nicht, definiert man ein *End of Life*¹¹ (EoL). Dieser ist genau dann erreicht, wenn die verfügbare maximale Leistung nur noch zu einem bestimmten Prozentsatz, normalerweise 60%, vom Wert am *Begin of Life*¹² (BoL) abrufbar ist [HXZ09]:

$$P_{max,EoL} = m \cdot P_{max,BoL}, \quad m \in (0, 1]. \quad (2.2)$$

Unter Zuhilfenahme von Gl. (2.1) resultiert für den maximalen Strompuls:

$\Delta i_{max} = \frac{\Delta u_{max}}{R_i}$ und man erhält für die Leistung in Gl. (2.2):

$$P_{max,EoL} = m \frac{\Delta u_{max}^2}{R_{i,BoL}}. \quad (2.3)$$

Der EoL Widerstand ist daher definiert als:

$$R_{i,EoL} = \frac{R_{i,BoL}}{m}. \quad (2.4)$$

Die verfügbare Ladungsmenge $C(T_{voll})$ und damit die mögliche Reichweite beispielsweise eines Elektrofahrzeugs berechnet sich im Labor durch eine komplette Vollladung einer zu Beginn leeren Batteriezelle und der gleichzeitigen Integration des Ladestroms $i(t)$ [NMCH09]:

$$C(T_{voll}) = \int_0^{T_{voll}} i(t) dt. \quad (2.5)$$

Die Bestimmung der Ladungsmenge durch die Stromintegration ist jedoch bei Messfehlern verfälscht [ECS⁺12]. Abhilfe schafft hier eine Methode zur Bestimmung der aktuellen Kapazität, die zusätzlich die Spannungsmessung berücksichtigt [Ple11]. Weiterhin

¹¹ engl. für *Lebensende*

¹² engl. für *Lebensanfang*

ist es möglich, einen Kapazitätsverlust anhand der Steilheit der Ruhespannungskurve zu detektieren [SFC10].

Mit den beschriebenen Größen definiert man üblicherweise den SoH, indem man das Verhältnis zwischen der aktuell verfügbaren Ladungsmenge und der Ladungsmenge im Neuzustand der Batterie bildet [JW06, NMCH09, PPC⁺08]:

$$SoH_C = \frac{C(T_{voll})}{C_{BoL}} \times 100\%. \quad (2.6)$$

Entsprechend Gl. (2.3) und Gl. (2.4) führt eine Verringerung der Leistungsfähigkeit zu einem erhöhten Innenwiderstand. Daher lässt sich auch hier ein SoH angeben [RBSGD13, RBD14]:

$$SoH_R = \left(1 + \frac{R_{i,BoL} - R_i}{R_{i,BoL}} \right) \times 100\%. \quad (2.7)$$

Eine alternative Definition ergibt sich mit dem Widerstand R_{EoL} am EoL [HXZ09]:

$$SoH_R = \frac{R_{EoL} - R_i}{R_{EoL} - R_{i,BoL}} \times 100\%. \quad (2.8)$$

Die naheliegendste und einfachste Methode, die zyklische Alterung zu bestimmen, besteht darin, sich ein Haltbarkeitsdatum in Form der maximalen Zyklenzahl zu definieren und die Lade-/Entladezyklen zu zählen [SW08]. Somit lässt sich auch hier ein SoH angeben:

$$SoH = \frac{\text{akt. Zyklenzahl}}{\text{max. Zyklenzahl}} \times 100\%. \quad (2.9)$$

Neben dem SoH ist der *State of Charge*¹³ (SoC) eine weitere wichtige Definitionsgröße:

$$SoC(t) = SoC(0) + \frac{\int_0^t (i(t)/3600) dt}{C(T_{voll})} \times 100\%. \quad (2.10)$$

Da der SoC nur bezüglich der aktuell verfügbaren Ladungsmenge berechnet werden kann, ist er in Abhängigkeit vom SoH zu betrachten. Angenommen, die maximale Ladungsmenge der Batterie sei bekannt, so lässt sich der SoC also durch Stromintegration bestimmen [NMCH09]. Außerdem besteht die Möglichkeit, über den OCV-SoC-Zusammenhang den SoC zu ermitteln, wobei die OCV-Kurve immer auf dem aktuellen Stand gehalten werden muss [STR⁺13]. Eine Verfahrensübersicht ist in [PPJ01] zu finden.

2.2.2 Zustandsbestimmungsverfahren

Im Folgenden werden Verfahren zur Bestimmung der Alterungsgrößen aus dem vorherigen Abschnitt aufgezeigt.

¹³ engl. für *Ladezustand*

Direkte Verfahren Diese Verfahren nutzen die obigen Definitionsgleichungen (2.6)-(2.8) und bestimmen die dafür notwendigen Größen in Echtzeit im Fahrzeug. Es gibt parametrische Verfahren, die auf einem approximativen elektrischen Ersatzschaltbild beruhen. Diese können in Abschnitt 2.4.2 nachgeschlagen werden, eine Übersicht ist in [Ros10, S.123][WFS14] zu finden. Eine weitere Vorgehensweise besteht darin, die Entropie eines Datensatzes [RM00] von Strom- und Spannungsmessungen zu verwenden, da diese Entropie mit der Kapazität der Batterie korreliert [HLJE14, WSCY11, SJW09]. Außerdem werden in [SFS⁺99, SR02] Methoden basierend auf Fuzzy-Logik vorgestellt, welche die Abhängigkeit der elektrischen Impedanz von der Alterung an bestimmten Frequenzpunkten ausnutzen.

Indirekte Verfahren Diese Verfahren bringen Alterungsmodelle offline in Bezug zur Nutzungsdauer oder zur Zyklenzahl. Hieraus entsteht dann ein Prognosemodell, welches im Fahrzeug in Echtzeit simulativ mitgeführt wird. In [WLHG⁺11] wurde mittels beschleunigter Alterungstests und sogenannten destruktiven Methoden [GJD97] eine Testmatrix erstellt und der Kapazitätsverlust als Funktion von Temperatur, Zeit, Entladetiefe und Stromstärke dargestellt. Hierbei handelt es sich um der Arrhenius Gleichung in [Arr89] ähnliche Modelle, wie sie auch in [EGV⁺12] vorkommen. Bekannt ist auch die Extrapolation von Kapazität und weiteren Größen durch Neuronale Netze, deren Training und Datengenerierung in Summe fünf Jahre beansprucht [MBK07] oder auch nur weniger als 50 Zyklen [PRK07]. In [EBV14] ist ausgeführt, dass bei einer *Constant Current Constant Voltage*¹⁴ (CCCV)-Ladung¹⁵ der Batterie, die Zeitspanne in der CV-Phase von der Alterung abhängig ist, was wiederum zu einem SoH-Wert führt.

2.3 Physikalisch motiviertes fraktionales Batterieimpedanzmodell

Bei einer physikalisch korrekten Alterungsuntersuchung muss es möglich sein, die Auswirkung der Alterung auf jeden einzelnen Prozess beobachten zu können. Dies sind hauptsächlich mehrere Ladungstransferprozesse gemäß Definition 2.2, die SEI aus Abschnitt 2.1.2 und die Festkörperdiffusion entsprechend Definition 2.3. Im Folgenden wird erläutert, weshalb gerade das Impedanzspektrum der Batterie genau dies ermöglicht. Daraufhin wird die mathematische Beschreibungsform der Impedanz hergeleitet, welche intrinsisch fraktionaler Natur ist.

2.3.1 Impedanzspektrum

Die Aufnahme des Spektrums einer Batteriezelle erfolgt mit der EIS [MB87, OT11]. Hierbei wird die Zelle mit einem sinusförmigen Strom- oder Spannungssignal fester

¹⁴ engl. für *Konstant Strom Konstant Spannung*

¹⁵ Die CCCV-Ladung wird gelegentlich auch als IU-Ladung bezeichnet [JW06, S.199].

Frequenz ω angeregt und die Antwort gemessen. Ist das System linear, so ist das Ausgangssignal ebenfalls sinusförmig mit der gleichen Frequenz. Die Impedanz ergibt sich dann mit den Amplituden I_A und U_A und der Phasenverschiebung $\Delta\varphi$:

$$Z(j\omega) = \frac{U_A}{I_A} e^{j\Delta\varphi}. \quad (2.11)$$

Um ein ganzes Spektrum aufzunehmen, wird die Frequenz variiert und die Prozedur für jede Frequenz wiederholt. Die EIS benötigt eine sehr hohe *Signal-to-Noise Ratio*¹⁶ (SNR) von $\text{SNR} > 100$ dB. Das Ergebnis ist in Abbildung 2.3 am Beispiel einer LiPO-Zelle von KOKAM als Nyquist-Plot dargestellt. Die Daten stammen vom IAM-WET. Abgebildet sind in a) Kurven, die bei verschiedenen Ladezuständen aufgenommen wurden und in b) Kurven, die bei verschiedenen Alterungszuständen gemessen wurden.

Die Kurven in a) schneiden bei 3.5 kHz die reelle Achse. Diese Verschiebung lässt sich als ohmscher Widerstand modellieren. Steigt die Frequenz an, so zeigt die Zelle ein Verhalten ähnlich einer Induktivität. Sinkt die Frequenz, zeigt sich ein Verhalten ähnlich einer Kapazität. Es ist zu erkennen, dass sich bei der Kurve mit dem kleineren SoC der Knick bei 0.65 Hz nach rechts verschoben hat. Der Ladungstransferprozess zeigt sich bei mittleren Frequenzen in Form eines abgeflachten Halbkreises (hier: 3.5 kHz-0.65 Hz). Dieser Prozess teilt sich wiederum auf in den Ladungstransfer der Anode und Kathode und die SEI. Der Diffusionsprozess tritt dagegen bei kleineren Frequenzen auf und beschreibt zusammen mit der sogenannten differentiellen Kapazität $C_0 = \frac{\partial \text{SoC}}{\partial \text{OCV}} C(T_{\text{voll}})$ den kapazitiven Ast.¹⁷ Verändert ein Degradierungsmechanismus einen der Prozesse, dann ändern sich laut [SZK⁺14a, SZK⁺14b, BPJ⁺06] die betroffenen Impedanzbereiche. Da es also eine klare Zuordnung von Prozess und Impedanzbereich gibt, lässt sich das Zellverhalten analysieren. In der Abbildung a) hat sich z.B. der Verlauf des kapazitiven Diffusionsastes verändert. Die Prozesse des Ladungstransfers und der SEI lassen sich noch besser voneinander separieren, wenn die Impedanzdaten in die DRT umgerechnet werden (siehe Abschnitt 2.3.2).

Um die Abhängigkeit des Impedanzspektrums von dem Alterungszustand der Zelle zu zeigen, sind in Abbildung 2.3 b) das Impedanzspektrum einer neuen Zelle und einer gealterten Zelle beispielhaft dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass sich der Schnitt mit der reellen Achse nach rechts verschoben hat, was sich entsprechend Abschnitt 2.1.2 mit einem größeren Innenwiderstand durch die SEI erklären lässt. Auch der Verlauf der Kurve im Ladungstransfer- und Diffusionsbereich hat sich verändert.

¹⁶ engl. für *Signal-Rausch-Verhältnis*

¹⁷ Für die differentielle Kapazität siehe Abschnitt 5.2 oder [Sch13, S.22].

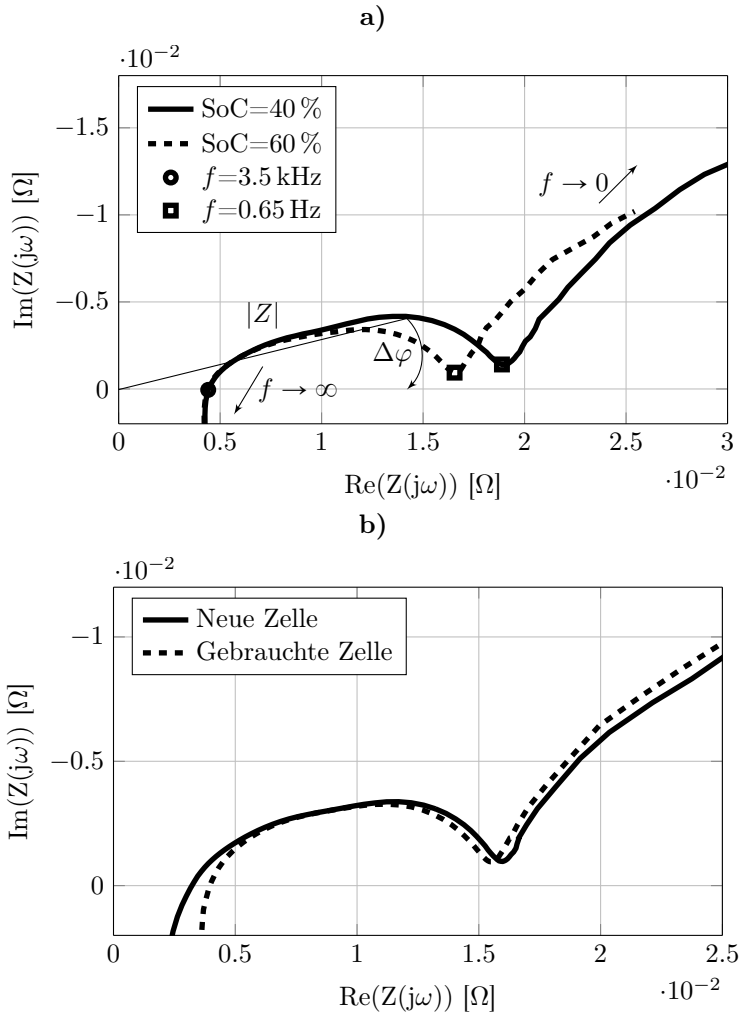


Abbildung 2.3: Impedanzkurven der KOKAM LiPO-Zelle aus Anhang G a) für zwei verschiedene Ladezustände und b) für eine neue und eine gebrauchte Zelle bei SoC=50%

2.3.2 Mathematische Beschreibung des Spektrums

Das Spektrum aus dem vorherigen Abschnitt soll nun in eine mathematische Darstellung überführt werden, um es für die modellbasierte Identifikation einsetzen zu können. Hierbei soll die physikalische Interpretierbarkeit nicht verloren gehen. Im Folgenden wird herausgearbeitet, dass das fraktionale Impedanzmodell mit der allgemeinen Beschreibungform

$a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, $m \leq n$, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}^{>0}$, $j\omega \in \mathbb{C}$

$$Z(j\omega) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j (j\omega)^{\beta_j}}{\sum_{i=0}^n a_i (j\omega)^{\alpha_i}} \quad (2.12)$$

intrinsisch physikalisch motiviert ist.¹⁸ Charakteristisch in Gl. (2.12) sind die nicht-ganzzahligen Exponenten. Um die Gesamtimpedanz der Zelle angeben zu können, werden der Ladungstransferprozess aus Definition 2.2, die SEI aus Abschnitt 2.1.2 und die Diffusion aus Definition 2.3 getrennt betrachtet und anschließend zusammengefügt.

Ladungstransfer und SEI

Gesucht wird eine mathematische Beschreibung des Spektrums im mittleren Frequenzbereich, da hier der in Definition 2.2 definierte Ladungstransfer und die Bildung der SEI stattfindet. In dem Beispiel in Abbildung 2.3 a) ist das der Bereich zwischen 0.65 Hz und 3.5 kHz. Um sich der Beschreibung zu nähern, ist es hilfreich, den Grenzbereich Elektrode/Elektrolyt näher zu betrachten. Hier stehen sich Ladungen unterschiedlicher Polarisierung gegenüber, was sich unter realen Bedingungen durch die Parallelschaltung eines Kondensators und eines ohmschen Widerstands darstellen lässt. Dies wird als RC-Element bezeichnet. Inhomogenitäten innerhalb der Zelle sorgen jedoch dafür, dass der Ladungstransfer komplexer ist und nicht mit nur einem einzigen RC-Element, welches nur mit einer Relaxationszeit charakterisiert ist, beschrieben werden kann. Vielmehr ist eine Modellierung in Form der DRT $g(\tau)$ physikalisch motiviert, bei der sich die Relaxationszeiten τ um einen Hauptwert $\tau_0^{1/\alpha}$ gruppieren [MB87, S.34-42],[SMV⁺02, ICE⁺10]. Laut [CC41] kann die Streuung der Zeitkonstanten mit einer sogenannten Cole-Verteilung beschrieben werden, die einer Gaußverteilung entspricht.^{19 20}

Definition 2.4 (Distribution of Relaxation Times (DRT))

$\tau_0 \in \mathbb{R}^{>0}$, $\alpha \in (0, 1)$

$$g(\tau) = \frac{1}{2\pi\tau} \frac{\sin((1-\alpha)\pi)}{\cosh(\alpha \ln(\tau/\tau_0^{1/\alpha})) - \cos((1-\alpha)\pi)}. \quad (2.13)$$

In Abbildung H.1 im Anhang H sind die glockenförmigen Verläufe der Dichtefunktionen für unterschiedliche α zu sehen. Falls die fraktionale Impedanz tatsächlich physikalisch

¹⁸ Es gibt zahlreiche Beispiele in [OS74, KST06, Das11, Pod99] u.v.a. dafür, dass *partielle Differentialgleichungen* (PDGLen) natürlicherweise zu fraktionalen Impedanzen führen wenn man diese an der Systemgrenze betrachtet.

¹⁹ Für die Verteilungsfunktion $G(\sigma)$ gilt $G(\sigma) = \int_0^\sigma g(\tau) d\tau$, $\lim_{\sigma \rightarrow \infty} G(\sigma) = 1$.

²⁰ Achtung, in der Literatur (z.B. [MB87, S.37]) werden oft die Parameter α und τ_0 der Gl. (2.13) durch die Funktionen $\alpha = 1 - \tilde{\alpha}$ und $\tau_0 = \tilde{\tau}_0^{1-\tilde{\alpha}}$ substituiert.

motiviert ist, muss es möglich sein, die DRT mit den Impedanzparametern zu verknüpfen. Hierfür wird zunächst das RQ-Element aus [CC41, SMV⁺02, Has08] definiert:

Definition 2.5 (RQ-Element)

$R, Q \in \mathbb{R}^{>0}$, $\alpha \in (0, 1)$

$$Z_{RQ}(j\omega) = \frac{R}{1 + \tau_0(j\omega)^\alpha}, \quad \tau_0 = RQ. \quad (2.14)$$

Das RQ-Element ist demnach eine Parallelschaltung eines ohmschen Widerstands und eines *Constant Phase Element* (CPE) [Mac84, S.37] mit der Übertragungsfunktion $Z_{CPE} = \frac{1}{Q(j\omega)^\alpha}$ (siehe Abbildung 2.4).²¹ Die Ortskurve eines RQ-Elements beschreibt einen Halbkreis, dessen Endpunkte auf der reellen Achse liegen und dessen Mittelpunkt sich unterhalb der reellen Achse befindet. In der Abbildung H.2 im Anhang H sind zwei Ortskurven für verschiedene α dargestellt. Weitere Informationen über das RQ-Element können den oben angegebenen Quellen entnommen werden. Der Satz 2.1

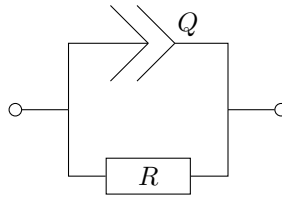


Abbildung 2.4: ESB eines RQ-Elements

postuliert nun den Zusammenhang zwischen dem RQ-Element und der DRT:

Satz 2.1 (Zusammenhang zwischen RQ-Element und DRT)

Die Parameter τ_0 und α des RQ-Elements (2.14) entsprechen denen der DRT aus Gl. (2.13).

Der Beweis von Satz 2.1 befindet sich im Anhang I.1. Er wurde in zahlreichen Veröffentlichungen durch numerische Berechnung der DRT aus Impedanzdaten verifiziert [SCE⁺11] u.v.a.. Da die DRT den physikalischen Prozessen zugeordnet ist, gehört entsprechend Satz 2.1 auch das RQ-Element zu einem physikalischen Prozess. In der Literatur wird häufig die Darstellung der DRT bevorzugt, da mit ihr Änderungen der Prozesse besser erkennbar sind [ICE⁺10, Ill14, SZK⁺14a].

²¹ Für $\alpha = 1$ wird des CPE-Element zu einem Kondensator und das RQ- zu einem RC-Element.

Das bisher Beschriebene trifft auf einen Transferprozess zu. Nach neuesten Erkenntnissen lässt sich das Gesamtmodell der Anode bzw. der Kathode jeweils physikalisch mit einem sogenannten *Transmission Line Model* (TLM) beschreiben [Ill14, S.45-48]. Das TLM enthält den Ladungstransfer und die SEI. Im DRT-Spektrum treten unendlich viele Peaks auf, die durch Gl. (2.13) beschrieben werden.

In vielen Fällen müssen aber nur eine endlich Anzahl von Peaks betrachtet werden. Bei Untersuchungen an der Anode einer SONY 18650 Hochleistungszelle in [Ill14, S.161] stellte sich beispielsweise heraus, dass zwei Peaks dominant sind und es ausreicht, nur diese zu berücksichtigen. Da die Prozesse der Kathode, im Vergleich zur Anode, keine nennenswerten Auswirkungen zeigten, wurde für die Kathode kein Modell verwendet. Die Gesamtimpedanz in diesem Beispiel ist daher die Summe über $N = 2$ Prozesse:

$$R_k, Q_k \in \mathbb{R}^{>0}, \quad \alpha_k \in (0, 1)$$

$$Z_{Lt}(j\omega) = \sum_{k=1}^N \frac{R_k}{1 + \tau_{0,k}(j\omega)^{\alpha_k}}, \quad \tau_{0,k} = R_k Q_k. \quad (2.15)$$

Nimmt man die Kurven in Abbildung 2.3 a) als Beispiel, dann ist die Gl. (2.15) also die mathematische Beschreibung des Spektrums zwischen 0.65 Hz und 3.5 kHz. Es sei jedoch erwähnt, dass $N = 2$ zunächst nur für die SONY 18650 Hochleistungszelle in [Ill14, S.161] gilt und N variieren kann (z.B. für unterschiedliche Zellmaterialien).

Diffusion

Gesucht ist nun die mathematische Beschreibung des einer Kapazität ähnlichen Astes im Spektrum abzüglich der differentiellen Kapazität. Für das Beispiel in Abbildung 2.3 a) betrifft dies Teile des Spektrums für Frequenzen kleiner als 0.65 Hz, bei denen sich die in Definition 2.3 beschriebene Diffusion zeigt. Unter Annahme einer eindimensionalen Bewegung stellt diese die Ausbreitung der Ladungskonzentration $c(t, x)$ in x -Richtung im Falle eines Konzentrationsgradienten dar. Das verteiltparametrische Verhalten aufgrund der räumlichen als auch zeitlichen Abhängigkeit der Konzentration führt auf eine *partielle Differentialgleichung* (PDGL) in Gestalt der Fick'schen Gesetze. Wird diese PDGL gelöst und am Diffusionsrand ausgewertet, ergibt sich ein sogenanntes fraktionales Warburg-Element, welches sich wiederum durch RQ-Elemente formulieren lässt. Dieses Ergebnis ist in Satz 2.2 festgehalten, der Beweis findet sich im Anhang I.2.

Satz 2.2 (Diffusionsimpedanz)

Der Diffusionsprozess lässt sich durch eine Summe von RQ-Elementen beschreiben:

$$R_k, Q_k \in \mathbb{R}^{>0}, \quad \alpha_k \in (0, 1)$$

$$Z_{diff}(j\omega) = \sum_{k=1}^L \frac{R_k}{1 + \tau_{0,k}(j\omega)^{\alpha_k}}, \quad \tau_{0,k} = R_k Q_k. \quad (2.16)$$

Die messtechnische Verifikation von Gl. (2.16) bzw. Gl. (I.7) anhand von Batteriedaten ist in [Ill14, S.151-156] zu finden. In der DRT-Darstellung von (2.16) gibt es einen Hauptpeak mit stark abfallenden Nebenpeaks [Ill14, S.42]. Daher reicht es in vielen Fällen aus, eine endliche Anzahl von L Peaks zu betrachten. Wie groß L letztendlich ist, muss in der konkreten Problemstellung entschieden werden.

Ruhspeannung

Wie schon in Abschnitt 2.1 auf Seite 12 beschrieben, ist auch im unbelasteten Fall eine Spannung zu messen, welche als OCV bezeichnet wird. Sie beschreibt eine vom Ladezustand abhängige, nichtlineare Funktion (siehe Abbildung G.3). Im Impedanzspektrum zeigt sie sich bei sehr niedrigen Frequenzen als die genannte differentielle Kapazität $C_0 = \frac{\partial S_{oC}}{\partial OCV} C(T_{voll})$ (siehe Abschnitt 5.2). Für die vorliegende Arbeit gilt nun folgendes:

Annahme 2.1

Der aktuelle Wert der Ruhspeannung wird in der gesamten Arbeit als bekannt vorausgesetzt und braucht daher weder im Frequenz- noch im Zeitbereichsmodell berücksichtigt zu werden.

Die Annahme 2.1 ist durchaus plausibel, da die OCV, falls sie bekannt ist, einfach aus der gemessenen Spannung subtrahiert werden kann (siehe hierfür auch das Anwendungskapitel 5).

Gesamtmodell

In den vorherigen Abschnitten wurde gezeigt, dass die fraktionale Modellierung des Ladungstransferprozesses, der SEI und der Diffusion intrinsisch physikalisch motiviert ist. Das Gesamtmodell ergibt sich dann aus der Summe der Impedanzen beider Prozesse zuzüglich eines ohmschen Widerstands R_i , welcher ohmsche Verluste durch metallische Ableiter, Elektrolyt etc. berücksichtigt und für die Verschiebung der Ortskurve um R_i in Abbildung 2.3 sorgt. Gemäß Gl. (2.15) und Satz 2.2 lautet die Gesamtimpedanz:

Definition 2.6 (Fraktionales Batteriemodell)

$$Z_{ges}(j\omega) = R_i + Z_{Lt}(j\omega) + Z_{diff}(j\omega). \quad (2.17)$$

Um prinzipiell die Funktionsweise der Identifikationsverfahren zu zeigen, wird speziell in dieser Arbeit ein vereinfachtes Modell verwendet, das lediglich den Diffusionsprozess berücksichtigt. Dieser ist der langsamste Vorgang in der Batterie. D.h. im Zeitbereich hat die Spannung – verursacht durch die Ladungstransferimpedanz (2.14) nach einem Stromsprung – schon annähernd ihren Endwert erreicht, wenn die Diffusion sichtbar

wird [JW06, S.19]. Wie man an der Ortskurve H.2 im Anhang H erkennt, ist die Impedanz der RQ-Elemente bei niedrigen Frequenzen reell. Der Ladungstransfer aus Gl. (2.15) ist daher durch einen ohmschen Widerstand repräsentierbar:²²

$$Z_{Lt} = \sum_{k=1}^N R_k. \quad (2.18)$$

Dieser Widerstand wird mit R_i zu R_0 zusammengefasst. Für die Diffusionsimpedanz (2.16) wird angenommen, dass sie sich mit einem RQ-Element modellieren lässt. Das vereinfachte Gesamtmodell für den niederfrequenten Part ist daher die Summe aus R_0 und einem RQ-Element:

Definition 2.7 (Niederfrequentes fraktionales Batteriemodell)

$$b_0 = R_0 + R, \quad b_1 = R_0\tau_0, \quad a_0 = \tau_0, \quad \tau_0 = RQ$$

$$Z(j\omega) = \frac{b_0 + b_1(j\omega)^\alpha}{a_0(j\omega)^\alpha + 1}. \quad (2.19)$$

Das ESB von Gl. (2.19) zeigt Abbildung 2.5.

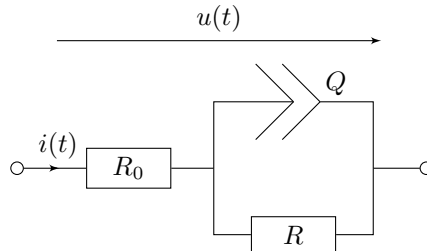


Abbildung 2.5: ESB des in dieser Arbeit betrachteten vereinfachten Batteriemodells

2.4 Identifikation des fraktionalen Impedanzmodells

In diesem Abschnitt wird der State-of-the-Art der Verfahren zur Identifikation der fraktionalen Impedanz mit der allgemeinen Beschreibung in Gl. (2.12) vorgestellt. Es handelt sich hierbei ausschließlich um die in Definition 2.1 klassifizierten parametrischen early-lumping sowie die nichtparametrischen Methoden. Die bisher kaum untersuchten parametrischen late-lumping Ansätze sind dann Gegenstand von Abschnitt 2.5.

²² Dies bestätigt auch der Endwertsatz der Laplace-Transformation [Föll1], denn für die Sprungantwort h_{Lt} gilt mit Gl. (2.15): $\lim_{t \rightarrow \infty} h_{Lt}(t) = Z_{Lt}(0) = \sum_{k=1}^N R_k$.

2.4.1 Nichtparametrische Verfahren

Bei den nichtparametrischen Verfahren wird das Impedanzspektrum, wie in Abschnitt 2.3.1 beschrieben, mit der EIS bei einem in der Regel sehr hohen $\text{SNR} > 100$ dB aufgenommen [MB87, OT11]. Durch die frequenzserielle Sinusanregung mit mehreren Schwingungen über einen großen Frequenzbereich entstehen lange Wartezeiten, weshalb die Aufnahme üblicherweise nur im Labor möglich ist. Die nichtparametrischen Verfahren benötigen kein Modell zur Aufnahme des Impedanzspektrums. Zur anschließenden Interpretation wird eine Modellstruktur jedoch benötigt [SCE⁺11, BPJ⁺06, TKT02, BPJ⁺06]. Da sie eine noch bessere Trennung der Prozesse erlaubt, wird in der Regel die DRT in einem Zwischenschritt durch manuelles Eingreifen aus den Impedanzdaten mit Gl. (I.1) numerisch berechnet [SMV⁺02, Sch13, ISWIT13, ICE⁺10, Ill14, SZK⁺14a, SZK⁺14b]. Zur Alterungsanalyse in der DRT-Darstellung muss ebenfalls Modellwissen vorhanden sein. Alternativ lassen sich die Batteriemodelle aus Kapitel 2.3.2 mit Hilfe des *Complex Nonlinear Least-Squares*²³ (CNLS)-Verfahrens [Bou85] an das Impedanzspektrum fitten [SSS⁺14] um die Parameter zu extrahieren. In diesem Fall werden dann die Parameter physikalisch interpretiert. Möglich ist es auch stochastische Algorithmen wie etwa Partikelfilter [BTK11] zur Bestimmung der Modellparameter zu nutzen. Alternativen zur EIS wie z.B. die Korrelationsanalyse [IM11], die für eine schnellere Identifikation des Spektrums sorgen sollen, werden in [KSSIT11, GBK14, BRL02, Kro12] eingesetzt.

Sowohl die DRT-Berechnung als auch das CNLS-Fitting erfolgen also in einem Zwischenschritt nach Aufnahme des Spektrums. Daher lassen sich nichtparametrische Verfahren nicht zur automatischen Identifikation einsetzen.

2.4.2 Parametrische early-lumping Verfahren

Diese Verfahren approximieren die fraktionale Impedanz (2.12), um dann gängige regelungstechnische Identifikationsverfahren wie etwa LS-Schätzung oder Kalman Filter einzusetzen. Nachteilig hierbei ist, dass durch dieses sogenannte early-lumping die physikalische Interpretierbarkeit verloren geht. Im Folgenden werden parametrische Identifikationsverfahren vorgestellt, wobei sich drei Verfahrensklassen unterscheiden lassen. Die ersten basieren auf der Approximation des RQ-Elements, die zweiten nutzen die Näherung der *First Principle Models* (FPMs) und die dritten approximieren direkt im Zeitbereich den fraktionalen Operator.

Approximation des RQ-Elements

Eine Approximation des RQ-Elements (2.14) ergibt sich durch Diskretisierung der kontinuierlichen Dichtefunktion $g(\tau)$ aus Gl. (2.13). Hierfür werden nicht mehr unendlich viele Relaxationszeiten τ angenommen, sondern nur eine endliche Anzahl l . Die

²³ engl. für *komplexes nichtlineares Least-Squares Verfahren*

Funktion $g(\tau)$ wird daher mit einem mit $g(\tau_i)$ gewichteten Impulskamm angenähert [SMV⁺02, ICE⁺10]:

$$g(\tau) = \sum_{i=1}^l g(\tau_i) \delta(\tau - \tau_i), \quad (2.20)$$

δ ist die Dirac'sche Distribution [OMS09, S.76]. Durch Einsetzen von Gl. (2.20) in Gl. (I.1) erhält man unmittelbar die Approximation im Frequenzbereich, welche einer Reihenschaltung von RC-Elementen entspricht [RS11, OT11, MK97, Has08]:²⁴

$$\hat{Z}_{RQ}(j\omega) = \sum_{k=1}^l \frac{g(\tau_k)}{1 + \tau_k j\omega}, \quad (2.21)$$

$g(\tau_i) = R_i$, $\tau_i = R_i C_i$.²⁵ Je mehr RC-Elemente verwendet werden, desto besser wird die Approximation [BTDDK05]. Die Intention der folgenden Verfahren ist dann, die Parameter des RC-Modells direkt im Zeitbereich zu identifizieren, um mit diesen wiederum die phänomenologischen Größen SoH und SoC aus Abschnitt 2.2 berechnen zu können. Dieses Vorgehen entspricht den *direkten Verfahren* (vgl. Abschnitt 2.2.2). Die Parameteridentifikation der im Zeitbereich resultierenden gewöhnlichen *Differentialgleichung* (DGL) erfolgt meistens mit gängigen LS-Verfahren [DBL⁺15, MKC12, LKC11]. Einige Publikationen nutzen das identifizierte Modell, um mit einem *Extended Kalman Filter* (EKF) [RBS11, JLL09], Luenberger Beobachter [REBC12] oder Zustandsmengenbeobachter [RKS⁺14] den SoC zu bestimmen. Manche Verfahren identifizieren Parameter und den SoC gleichzeitig, indem sie einen sogenannten *dual* EKF verwenden [ZHML15, AASGS13, Ple04a, Ple04b, Ple04c]. Eine Methode, die den SoC mit einem PI-Beobachter schätzt, ist in [TWC15] zu finden. Veröffentlichungen, in denen basierend auf einem schon identifizierten RC-Modell nur der SoC bestimmt wird, gibt es zahlreiche [TWC15, ECS⁺12, CSR08]. Eine Kombination von einem neuronalen Netz und einem EKF beschreibt [ANSGS13].

Will man keine Modellstruktur und Ordnung des Batteriemodells vorgeben, bietet sich die Subspaceidentifikation in [RBD13] an. Auch hier werden mit den resultierenden Parametern SoC und SoH berechnet.

Approximation der First Principle Models (FPMs)

FPMs [NTA04, DFN93, FDN94] werden durch nichtlineare, gekoppelte PDGLen beschrieben und resultieren aus der Approximation von feingranularen Modellen [EJCIT11, WCBH11], welche die Reaktionskinetik und die dreidimensionale, poröse Mikrostruktur der Batterie abbilden. Da die Modelle für eine modellbasierte Identifikation aufgrund der Komplexität und der vielen unbekanntenen Parameter jedoch immer noch ungeeignet sind, gehen noch weiter vereinfachte Modelle davon aus, dass es entweder nur

²⁴ Weitere Verfahren, die eine Approximation durch gewöhnliche Systeme im Frequenzbereich liefern, sind die Oustaloup-Näherung [OLMN00], die Crone-Näherung [VC11] und die Kettenbrucherweiterung [VHPF00]. Speziell in der Literatur zur Batterieidentifikation tauchen diese Verfahren jedoch nicht auf.

²⁵ Das RC-Modell wird gelegentlich auch als Voigt-Modell bezeichnet [OSM02].

einen Partikel pro Elektrode mit einer Ausbreitungsrichtung der Ladungsträger gibt (*Single Particle Model* (SPM)) [CKC⁺10, SGRW06, SW06]) oder treffen sonstige Vereinfachungen [SMF⁺13, KCC⁺10, SRW08]. Ein Modellvergleich ist in [SDDFS09] zu finden. Durch die mehrfache Approximation erhält man ein virtuelles Modell, welches viele Phänomene nicht mehr abbildet. Daher ist es fragwürdig, ob diese überhaupt noch physikalisch interpretiert werden können. Da das Modell nicht zugänglich ist, bleiben viele Parameter unbekannt. Die vereinfachten FPMs werden dann nochmals simplifiziert, um anschließend modellbasiert Parameter bestimmen zu können [SPSR11]:

- Einerseits können FPMs analytisch am Rand ausgewertet werden, was zu Impedanzen mit hyperbolischer und fraktionaler Struktur führt [FWHS14a, SMF⁺13]. Die Näherung dieser analytischen Ausdrücke kann durch eine gewöhnliche Impedanz [FBSF11] mit der Padé-Approximation [BGM96] erfolgen, wobei die Impedanzparameter dann mit gängigen LS-Verfahren identifiziert werden [FWHS14b, PR13, MKC12]. Basierend auf einem Padé-Modell lässt sich der EKF zur SoC-Bestimmung einsetzen [BMO⁺16]. Weitere analytische Methoden nutzen ein vereinfachtes SPM und wenden direkt PDGL-Filtertechniken wie einen PDGL-Beobachter an, um die Ladungskonzentration zu bestimmen [RKS⁺14, MCK12b, MCK12a, MKC12, KCC⁺10]. Eine analytische Alterungsformel leitet [TR15] her. In [SBIG10] wird ein nichtlineares Optimierungsproblem bezüglich unbekannter Parameter aufgestellt und mit einem LS-Verfahren gelöst.
- Andererseits lassen sich die räumlichen Ableitungen der PDGLen durch Differenzenquotienten ersetzen, wobei numerische Verfahren wie die Finite-Differenzen-Methode, die Finite-Elemente-Methode [SB73] und Spektralmethoden [Cos04] zum Einsatz kommen. Dabei werden die Partikel in einzelne Diskretisierungspunkte aufgeteilt [Ott11, SRW07]. Jeder Knoten beschreibt dann eine gewöhnliche DGL erster Ordnung für die Ladungskonzentration. Die DGLen werden in einem Zustandsraummodell zusammengefasst und die Zustände mit Hilfe eines Kalman Filters [BZDH15, DFS08], moving horizon-Techniken [SRNG13] oder einem Partikelfilter [GB03] geschätzt.

Mit den Impedanzparametern und der Ladungskonzentration lassen sich dann wieder die phänomenologischen Größen SoH und SoC aus Abschnitt 2.2 berechnen.

Approximation des fraktionalen Operators

Die Interpretation der komplexen fraktionalem Variable $(j\omega)^\alpha$ im Zeitbereich kann mit Hilfe des sogenannten *Grünwald-Letnikov* (GL)-Operators approximiert werden (siehe Anhang L). Dadurch ergibt sich eine Zeitfunktion, die den Ausgang beschreibt und von den Messgrößen und den Parametern abhängt. Die Parameter lassen sich somit mit einem LS-Verfahren identifizieren [Xia12]. Problematisch an dieser Vorgehensweise ist der erhöhte Rechenaufwand durch die GL-Approximation. Einen ähnlichen Ansatz, allerdings mit einem nicht physikalischen fraktionalem Modell, verfolgen [SCL⁺10, SAO⁺06]. Da die Parameter hier keine physikalische Bedeutung haben, dienen sie dazu, in einem zweiten Schritt den SoC über die Parameterkennfelder zu

bestimmen. Der SoC kann aber auch in einem Schritt bestimmt werden, indem die Parameter in der Zeitfunktion mit ihren SoC-abhängigen Funktionen ersetzt werden. Da der Ausgang dann nur noch vom SoC abhängt, kann dieser mit einem nichtlinearen Optimierungsverfahren direkt identifiziert werden [EXH12, EH13]. In weiteren Verfahren [KSGH16, LLW⁺16, WLL⁺17, XMCC13] wird mit einem diskretisierten fraktionalen Zustandsraummodell der SoC mit Kalman Filtern geschätzt, wobei die mit dem GL-Operator approximierte Spannung über dem RQ-Element sowie der SoC die Zustandsgrößen sind. Der entscheidende Nachteil der GL-Approximation ist insgesamt ein stark erhöhter Rechenaufwand der die Online-Bestimmung bei knappen Hardware-Ressourcen unmöglich macht.

2.5 Lücke des State-of-the-Art und Ziele der Arbeit

In den vorherigen Abschnitten wurde herausgearbeitet, dass sich parametrische late-lumping Methoden am besten zur Alterungsbestimmung eignen, da sie das physikalisch motivierte fraktionale Modell mit der allgemeinen Beschreibung in Gl. (2.12) ohne Approximation identifizieren können.

In der Batterieforschung werden diese Methoden jedoch bislang nicht eingesetzt. Es existieren ausschließlich die phänomenologischen Ansätze aus Abschnitt 2.2 sowie die early-lumping und nichtparametrischen Verfahren aus Abschnitt 2.4. Durch das early-lumping geht jedoch die physikalische Interpretierbarkeit verloren und die nichtparametrischen Verfahren können aufgrund des notwendigen manuellen Zwischenschritts zur Berechnung der DRT nicht automatisch ablaufen.

In anderen Fachrichtungen gibt es erste Ansätze zur Identifikation fraktionaler Systeme mit parametrischen late-lumping Methoden, beispielsweise in [GR13b, VMGO13, LLKGP13]. Allerdings muss man Folgendes konstatieren:

- In [LLKGP13] werden spezielle Anfangsbedingungen der Systeme vorausgesetzt, welche Sonderfälle darstellen und in der konkreten Anwendung falsche Ergebnisse liefern
- In [GR13b, VMGO13] müssen die speziellen Anfangsbedingungen zudem bekannt sein
- Die Methode nach [GR13b] zeigt sich stark rauschempfindlich
- Das Verfahren nach [VMGO13] ist aufwendig in der Umsetzung
- Die Methode nach [LLKGP13] muss für unterschiedliche fraktionale Systeme, beispielsweise Batteriezellen mit unterschiedlichen Materialien, heuristisch angepasst werden
- Keine der Methoden wurde bisher in der Realität ausgeführt

Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, die vorhandene Forschungslücke zu schließen und neue parametrische late-lumping Methoden zu entwerfen.

Hierfür soll im ersten fundamentalen Beitrag dieser Arbeit die sogenannte Methode der Modulationsfunktionen für fraktionale Systeme erstmalig gesamtlich hergeleitet werden. Eine Modulationsfunktion ist zunächst heuristisch zu bestimmen. Das Verfahren ist inspiriert von [LLKGP13], schränkt die Anwendung jedoch nicht auf Sonderfälle bezüglich der Anfangswertbedingungen ein. Mit diesem Verfahren können die Parameter a_i und b_j von Gl. (2.12) identifiziert werden. Damit sich auch die fraktionalen Exponenten α_i und β_j bestimmen lassen, ist ein weiteres Ziel ein von [GR13b] inspiriertes algebraisches Verfahren vorzustellen welches dies ermöglicht. Mit den Parametern und den Exponenten ist es dann möglich, die DRT mit der geschlossenen Darstellung (2.13) zu berechnen.

Die entwickelten Methoden sollen zur Batterieidentifikation mit realen Messdaten einer Lithium-Ionen-Zelle beispielhaft angewendet werden.

Das Ziel des zweiten fundamentalen Beitrags dieser Arbeit ist, die notwendige Heuristik zur Bestimmung der Modulationsfunktion zu vermeiden, indem die Methode der Modulationsfunktionen um eine modellbasierte Generierung der Modulationsfunktion theoretisch erweitert wird. Hierfür sind neue systemtheoretische Erkenntnisse über die Steuerbarkeitsanalyse und den Entwurf einer fraktionalen energieoptimalen Steuerung für zeitvariante fraktionale Systeme notwendig.

Im Laufe dieser Arbeit musste festgestellt werden, dass hier eine weitere große Forschungslücke besteht, denn viele der in der gängigen Regelungstechnik für gewöhnliche Systeme schon lange etablierten Methoden sind für fraktionale Systeme bisher komplett unerforscht. Dies betrifft hauptsächlich die zeitvarianten fraktionalen Systeme, da es für zeitinvariante bereits Ansätze gibt. Daher soll ein großer Teil der Arbeit aus der grundlegenden Herleitung der analytischen Lösung einer zeitvarianten fraktionalen Zustandsgleichung, der erstmaligen Formulierung des fraktionalen Steuerbarkeitskriteriums basierend auf einer fraktionalen Gram'schen Matrix und der Synthese einer fraktionalen energieoptimalen Steuerung bestehen.

In der vorliegenden Arbeit sind zahlreiche Sätze und Lemmata enthalten. Hierfür gilt:

Falls nicht explizit anders angegeben, sind die in dieser Arbeit in Satz-Beweis- bzw. in Lemma-Beweis-Struktur dargestellten Aussagen und deren Beweise neu.

2.6 Zusammenfassung

Dieses Kapitel beleuchtete zunächst phänomenologische Verfahren zur Alterungsbestimmung. Anschließend wurde die mathematische Beschreibungsform eines Impedanzspektrums einer Batterie hergeleitet und gezeigt, dass diese Beschreibung intrinsisch physikalisch motiviert ist. Hierbei ließ sich ein analytischer Zusammenhang zwischen den Parametern des Modells und der DRT herstellen. Dadurch ist es möglich, die

DRT direkt mit den Parametern zu berechnen. Es wurde dargestellt, dass zur Identifikation der Impedanz in der Literatur lediglich early-lumping und nichtparametrische Methoden zu finden sind. Die für das early-lumping benötigten Approximationen des fraktionalen Modells waren ebenso Gegenstand dieses Kapitels wie die Beschreibung der manuellen Schritte des nichtparametrischen Verfahrens.

Demgegenüber haben die in dieser Arbeit erstmalig betrachteten late-lumping Verfahren den Vorteil, den modellbasierten Ansatz mit physikalischer Deutungsmöglichkeit zu kombinieren. Dieses Kapitel stellte die in der Literatur vorhanden late-lumping Verfahren vor und legte dar, dass es sich hierbei lediglich um erste Ansätze handelt.

Als Zielsetzung liegt daher der Entwurf von drei neuartigen late-lumping Methoden zur Identifikation der fraktionalen Impedanz im Zeitbereich vor. Da für speziell eine der Methoden tiefere systemtheoretische Untersuchungen für zeitvariante fraktionale Zustandsraumsysteme wie die fraktionale Steuerbarkeitsanalyse und eine fraktionale energieoptimale Steuerungssynthese benötigt werden, ist die Erarbeitung dieser Grundlagen fraktionaler Systemtheorie ebenso ein wichtiger Bestandteil dieser Arbeit.

3 Fraktionales Zeitbereichsmodell

Grundlage für eine parametrische late-lumping Identifikation²⁶ der Frequenzbereichsdarstellung (2.12) ist ein Zeitbereichsmodell und damit eine Interpretation der komplexen Frequenzbereichsvariablen mit nicht-ganzzahligen Exponenten im Zeitbereich. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden daher die fraktionale Integration und die fraktionale Ableitung definiert. Die Besonderheit an diesen Operationen ist, dass sie nicht-ganzzahliger Ordnung sind. Sie sind in der Literatur bekannt, in dieser Arbeit werden sie aus folgendem Grund trotzdem definiert: Ein Großteil der Definitionen in der Literatur berücksichtigt keine Anfangswerte der fraktionalen Operatoren, was zu falschen Ergebnissen in der Berechnung führt. Daher ist es notwendig, korrigierte Integrations- und Ableitungsoperatoren zu definieren, welche um eine sogenannte Initialisierungsfunktion erweitert sind. Fraktionale Operatoren von Funktionen mit zwei Veränderlichen und eine „vektorielle Ableitung“ werden im Anhang B definiert.

Basierend auf den modifizierten fraktionalen Integrations- und Ableitungsoperatoren können dann *Linear Time-Invariant*²⁷ (LTI)-Systeme in Form von *Fraktionalen Differentialgleichungen* (FDGLen) definiert werden. Es wird deutlich werden, dass sich der Zusammenhang zwischen der Frequenzbereichsdarstellung und dem Zeitbereich durch die Laplace-Transformation herstellen lässt. Das Batteriemodell (2.19) lässt sich daher im Zeitbereich als spezielle FDGL interpretieren. Die Verifikation des Zeitbereichsmodells erfolgt durch einen Vergleich der Simulation mit realen Daten. Am Ende dieses Kapitels wird außerdem ein *Linear Time-Varying*²⁸ (LTV)-System in Form einer fraktionalen Zustandsraumdarstellung eingeführt und die Definition eines „*fraktionalen Zustands*“ gegeben.

3.1 Fraktionale Analysis

Die fraktionale Analysis ist eine Verallgemeinerung der herkömmlichen Analysis. Während für gewöhnlich die Integrations- und Ableitungsordnungen $n \in \mathbb{N}_{>0}$ einer Funktion $f(t)$ ganzzahlig sind, werden im fraktionalen Fall reelle Integrations- und Ableitungsordnungen $\alpha \in \mathbb{R}^{>0}$ betrachtet. Die Definitionen in dieser Arbeit entsprechen denen in [LH07, LH00, LH11], welche korrigierte Versionen der sonst gängigen Operatoren in [Pod99, S.65,68,79],[KST06, S.69,70,92] sind, da sie $f(t)$ über den kompletten Geltungsbereich betrachten. Es sind auch approximierte Operatoren in [SFT14, TM11] oder zeitdiskrete Operatoren (siehe Anhang L) bekannt. Da in dieser Arbeit late-lumping

²⁶ Die parametrische late-lumping Identifikation ist in Definition 2.1 definiert.

²⁷ engl. für *linear zeitinvariante*

²⁸ engl. für *linear zeitvariante*

Verfahren ohne Approximationen entworfen werden, spielen diese Definitionen hier keine Rolle.

3.1.1 Fraktionale Integration

Betrachtet wird zunächst die gewöhnliche Integration der kontinuierlichen Funktion $\varphi(t) = t$. Wie in Abbildung 3.1 zu sehen ist, führt die einfache Integration zu einer Parabel und die zweifache Integration zu einer Hyperbel (in Grün und Blau dargestellt). Die zweifache Integration ergibt sich hierbei durch zwei hintereinander ausgeführte Integrationen erster Ordnung. Auf diesem Wege ließe sich also eine allgemeine n -fache Integration durch die Hintereinanderreihung von n -Integrationen erster Ordnung berechnen. Um das n -fache Integral einer Funktion $\varphi(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zu berechnen, muss aber

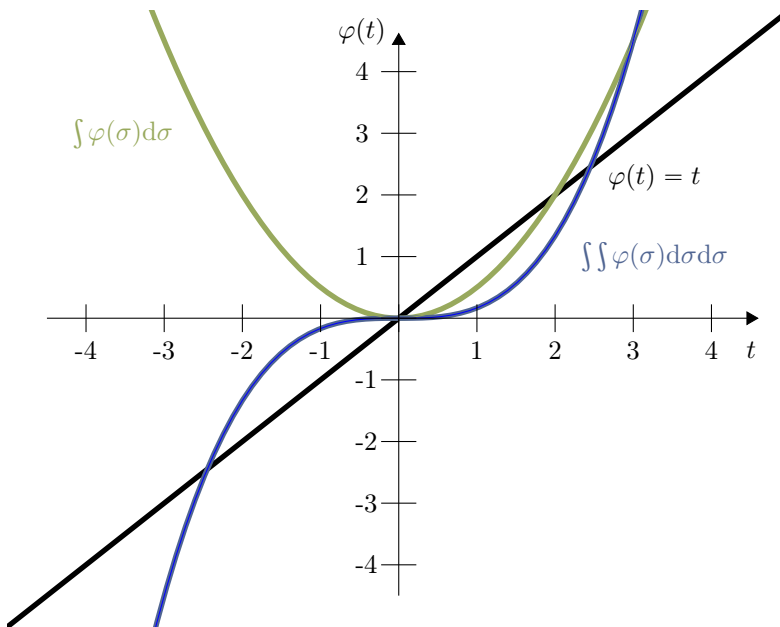


Abbildung 3.1: Ganzzahlige Integrationen (in Grün und Blau) einer Geradenfunktion $\varphi(t) = t$ (in Schwarz)

nicht zwingend n -mal eine Integration erster Ordnung durchgeführt werden. Stattdessen kann die n -fache Integration auch auf eine einfache, mit $\Gamma(n)^{-1}(t-\zeta)^{n-1}$ gewichtete Integration von $\varphi(\zeta)$ reduziert werden [Kac11, S.29]:

$$\forall \tilde{t} \leq e : \varphi(\tilde{t}) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_{>0}$$

$$\int_e^t \int_e^{\sigma_1} \int_e^{\sigma_2} \cdots \int_e^{\sigma_{n-1}} \varphi(\sigma_n) d\sigma_n d\sigma_{n-1} \cdots d\sigma_1 = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_e^t \frac{\varphi(\zeta)}{(t-\zeta)^{1-n}} d\zeta. \quad (3.1)$$

In Gl. (3.1) ist $\Gamma(n)$ die Gammafunktion [BSM05, S.476]. Ausgehend von dieser Darstellung ist eine natürliche Erweiterung auf eine reelle Integrationsordnung $\alpha \in \mathbb{R}^{>0}$ möglich, da $\Gamma(n)$ auch für reelle Zahlen definiert ist und daher n durch α ersetzt werden kann. Dies führt zu der linksseitigen fraktionalen Integration ${}^t_e \mathcal{I}_t^\alpha \varphi(t)$ nach *Riemann-Liouville* (RL), die in Gl. (3.3) definiert ist.

Definition 3.1 (Fraktionales Integral)

Die initialisierte fraktionale linksseitige RL-Integration ${}^t_e \mathcal{I}_t^\alpha$ der Ordnung $\alpha \in \mathbb{R}^{>0}$ ist definiert zu:

$$a \leq e < t, \quad \forall \tilde{t} \leq a : \varphi(\tilde{t}) = 0, \quad \varphi(t) \in L[a, t]$$

$${}^t_e \mathcal{I}_t^\alpha \varphi(t) := {}^t_e i_t^\alpha \varphi(t) + \eta(\varphi, \alpha, a, e, t), \quad (3.2)$$

mit dem in [SKM93, S.33] definierten uninitialisierten Integrationsoperator

$${}^t_e i_t^\alpha \varphi(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_e^t \frac{\varphi(\zeta)}{(t - \zeta)^{1-\alpha}} d\zeta \quad (3.3)$$

und der Initialisierungsfunktion $\eta(\varphi, \alpha, a, e, t)$, die so gewählt werden muss, dass ${}^t_e \mathcal{I}_t^\alpha \varphi(t) \equiv {}^t_a i_t^\alpha \varphi(t)$ gilt (siehe Gl. (J.1) im Anhang J). Nun wird $t < g \leq b, \forall \tilde{t} \geq b : \varphi(\tilde{t}) = 0$ und $\varphi(t) \in L[t, b]$ angenommen. Dann ist die rechtsseitige fraktionale Integration wie folgt definiert:

$${}^t_i \mathcal{I}_g^\alpha \varphi(t) := {}^t_i i_g^\alpha \varphi(t) + \eta_{rs}(\varphi, \alpha, g, b, t), \quad (3.4)$$

mit der uninitialisierten rechtsseitigen Integration

$${}^t_i i_g^\alpha \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^g \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - t)^{1-\alpha}} d\zeta. \quad (3.5)$$

Die Indizes des Operators \mathcal{I} bzw. i sind wie folgt zu deuten: Links oben kennzeichnet die Variable, bezüglich welcher integriert wird, in diesem Fall also t . Rechts oben steht die Integrationsordnung und links bzw. rechts unten sind die Integrationsgrenzen angegeben. Damit die fraktionale Integration existiert, muss die zu integrierende Funktion $\varphi(t)$ im Integrationsintervall, definiert durch $[e, t]$, Lebesgue integrierbar sein [KST06, S.72].²⁹ Die Menge der Lebesgue integrierbaren Funktionen wird in dieser Arbeit mit $L[e, t]$ bezeichnet. Zur Veranschaulichung der fraktionalen Integration ist in Abbildung 3.2 die linksseitige Integration einer Geradenfunktion dargestellt. Bisher wurde der spezielle Fall $\forall \tilde{t} \leq e : \varphi(\tilde{t}) = 0$ betrachtet. Im Allgemeinen kann die Funktion jedoch schon ab einem früheren Zeitpunkt $a \leq e$ gültig sein. In diesem Fall muss das fraktionale Integral \mathcal{I} in Gl. (3.2) in einen zeitabhängigen Initialisierungsterm, der die Vergangenheit berücksichtigt, und ein uninitialisiertes Integral aufgeteilt werden [LH00]. In Abbildung J.1 des Anhangs J ist die fraktionale Initialisierungsrechnung an

²⁹ In [KST06, S.1-2] sind Funktionsräume und im Speziellen die Lebesgue Integrierbarkeit definiert.

einem Beispiel grafisch veranschaulicht, allerdings wird dabei die Ableitung betrachtet. Eine Tabelle mit wichtigen fraktionalem Integralen ist in [Rey13, S.138-139] zu finden. In Gl. (B.12) ist die Erweiterung auf eine vektorielle Integration mit mehreren Integrationsordnungen für eine Matrixfunktion definiert. Eine Besonderheit bei fraktionalem Systemen ist, dass es auch eine sogenannte rechtsseitige fraktionale Integration gibt, die in den Gln. (3.4) und (3.5) definiert ist. Da die untere Grenze bei t liegt, befindet sich das Integrationsintervall immer rechts von der Integrationsvariablen (im Unterschied zur linksseitigen Integration, bei der sich das Integrationsintervall immer links befindet). Einen grafischen Vergleich zwischen den beiden Integrationsdefinitionen zeigt Abbildung A.1 im Anhang A. Die rechtsseitige Initialisierungsfunktion η_{rs} wird so berechnet, dass ${}^t\mathcal{I}_g^\alpha \varphi(t) \equiv {}^t i_b^\alpha \varphi(t)$ gilt (siehe Gl. (J.2)). Bisher wurde nur die skalare Integration einer Funktion betrachtet. Für die Grenzbetrachtung $\alpha \in \mathbb{N}_{>0}$ ergibt sich $\alpha = \lfloor \alpha \rfloor$ und man erhält Konsistenz zur klassischen Definition, denn die Initialisierungsfunktion (J.1) ergibt sich in diesem Fall zu $\eta(\varphi, \alpha, a, e, t) = \sum_{i=1}^{\lfloor \alpha \rfloor} c_i t^i$.

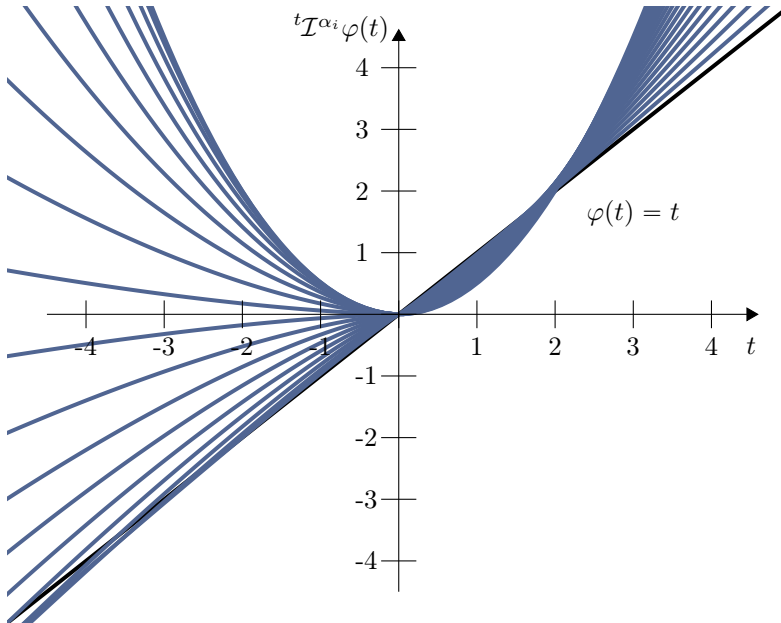


Abbildung 3.2: Fraktionale Integrationen der Ordnungen $\alpha_i \in (0, 1]$ (Blau) einer Geradenfunktion (Schwarz). Für $\alpha = 1$ ergibt sich wie zu erwarten die Parabelfunktion.

3.1.2 Fraktionale Ableitung

Nachdem die fraktionale Integration eingeführt wurde, kann nun die fraktionale Ableitung der Ordnung $\alpha \in \mathbb{R}^{>0}$ einer Funktion $f(t)$ in Definition 3.2 betrachtet werden.

Für die Existenz der fraktionalen Ableitung von $f(t)$ muss $f(t)$ $[\alpha]$ -fach absolut kontinuierlich im Ableitungsintervall $[e, t]$ sein, wobei $[\alpha] := \min\{k \in \mathbb{Z} | k > \alpha\}$ und $[\alpha] := [\alpha] - 1$ gilt [KST06, S.73,92].³⁰ Die Menge der $[\alpha]$ -fach absolut kontinuierlichen Funktionen wird in dieser Arbeit mit $AC^{[\alpha]}$ bezeichnet. Prinzipiell gibt es mehrere konkurrierende Ableitungsdefinitionen in [SKM93, OS74, KST06, Pod99], welche alle die für eine fraktionale Ableitung notwendigen Kriterien in [OM14] erfüllen. Eine Übersicht über die verschiedenen Definitionen, beispielsweise nach Riesz [Agr07b], Hadamard, Weyl oder RL, ist in [OM14] zu finden.³¹ Am weitesten verbreitet ist die RL-Ableitung. Daher wird sie, zusammen mit der eng verwandten *Caputo* (C)-Ableitung, in dieser Arbeit betrachtet. In den eben erwähnten Quellen werden die Ableitungen ohne Anfangswerte betrachtet. Wie im Folgenden zu sehen sein wird, führt dies jedoch zu falschen Ergebnissen in der konkreten Problemstellung. Daher wird die fraktionale Ableitung in dieser Arbeit in Definition 3.2 mit sogenannten Initialisierungsfunktionen korrigiert eingeführt.

Die Differentiation nach RL in Gl. (3.7) setzt sich aus einer fraktionalen Integration und einer anschließenden ganzzahligen Ableitung zusammen. Warum das so ist, lässt sich sehr anschaulich anhand von Abbildung 3.3 erklären. Hier ist beispielhaft die Vorgehensweise zur Berechnung der ($\alpha = 2.4$)-ten Ableitung einer Funktion $f(t)$ grafisch dargestellt. Um die gesuchte Ableitung zu bilden, integriert man zunächst fraktional mit $[\alpha] - \alpha = 0.6$. Das bedeutet, man bewegt sich auf dem Zahlenstrahl 0.6 nach links. Anschließend wird ganzzahlig $[\alpha]$ -fach abgeleitet und sich daher um 3 nach rechts bewegt, wodurch man schließlich bei 2.4 landet (roter Punkt). Bei der C-Ableitung nach Gl. (3.8) werden fraktionale Integration und ganzzahlige Ableitung in umgekehrter Reihenfolge durchgeführt.

Da die fraktionale Ableitung in beiden Fällen durch die fraktionale Integration definiert wird, ist sie im Gegensatz zur gewöhnlichen Ableitung keine lokale Operation. Falls die abzuleitende Funktion schon für $a \leq e$ gültig ist, muss das initialisierte Integral aus Gl. (3.2) zur Berechnung der fraktionalen Ableitung verwendet werden. Hieraus ergibt sich die initialisierte fraktionale Ableitung in Gl. (3.6) mit der allgemeinen Initialisierungsfunktion $\psi(f, \alpha, a, e, t)$ [LH00].

³⁰ In [KST06, S.1-2] ist die Menge der absolut kontinuierlichen Funktionen definiert.

³¹ Eine Approximation der fraktionalen Ableitung basierend auf dem *Short-Memory-Prinzip* ist Thema des Anhangs L.

Definition 3.2 (Fraktionale Ableitung)

Die initialisierte fraktionale linksseitige Ableitung der Ordnung $\alpha \in \mathbb{R}^{>0}$ ist wie folgt definiert:

$$a \leq e < t, \forall \tilde{t} \leq a : f(\tilde{t}) = 0, \quad f(t) \in AC^{[\alpha]}[a, t]$$

$${}^t\mathcal{D}_t^\alpha f(t) := {}^t d_t^\alpha f(t) + \psi(f, \alpha, a, e, t), \quad (3.6)$$

wobei die uninitialisierte Ableitung ${}^t d_t^\alpha$ gemäß [Agr07a, S.5470] für den RL-Fall definiert ist als

$${}^t dRL_t^\alpha f(t) := \left(\frac{d}{dt} \right)^{[\alpha]+1} \left[{}^t i_{t-}^{[\alpha]+1-\alpha} f(t) \right], \quad (3.7)$$

im C-Fall lautet sie

$${}^t dC_t^\alpha f(t) := {}^t i_{t-}^{[\alpha]+1-\alpha} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^{[\alpha]+1} f(t) \right]. \quad (3.8)$$

Die Funktion $\psi(f, \alpha, a, e, t)$ wird Initialisierungsfunktion genannt und wird so bestimmt, dass ${}^t\mathcal{D}_t^\alpha f(t) \equiv {}^t d_t^\alpha f(t)$ gilt (siehe Gln. (J.3) und (J.4)). Es sei nun $t < g \leq b, \forall \tilde{t} \geq b : f(\tilde{t}) = 0$ und $f(t) \in AC^{[\alpha]}[t, b]$. Dann ist die rechtsseitige Ableitung definiert als:

$${}^t\mathcal{D}_g^\alpha f(t) := {}^t d_g^\alpha f(t) + \psi_{rs}(f, \alpha, g, b, t) \quad (3.9)$$

mit den uninitialisierten rechtsseitigen RL- und C-Ableitungen [Agr07a, S.5470]:

$${}^t dRL_g^\alpha f(t) := (-1)^{[\alpha]+1} \left(\frac{d}{dt} \right)^{[\alpha]+1} \left[{}^t i_{g-}^{[\alpha]+1-\alpha} f(t) \right], \quad (3.10)$$

$${}^t dC_g^\alpha f(t) := (-1)^{[\alpha]+1} {}^t i_{g-}^{[\alpha]+1-\alpha} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^{[\alpha]+1} f(t) \right]. \quad (3.11)$$

Die rechtsseitigen Initialisierungsfunktionen sind in den Gln. (J.5) und (J.6) zu finden.

Im Unterschied zum ganzzahligen Fall muss die fraktionale Ableitung also aufgrund des Integrals initialisiert werden. In Abbildung J.1 des Anhangs J ist die fraktionale Initialisierungsrechnung anhand eines Beispiels grafisch veranschaulicht. Es ist zu erwähnen, dass die beiden initialisierten Ableitungsoperatoren für $\alpha \in (0, 1)$ identisch sind, wenn $\forall \tilde{t}, a \leq \tilde{t} \leq e : f(\tilde{t}) = konst.$ gilt [LH11]. Fraktionale Ableitungen und Integrale über wichtige Funktionen sind in [HMS11, S.11,12,90,123], [OS74, S.95], [Mun04, S.8], [Pod99, ab S.309] oder [Rey13, S.138-139] zu finden.

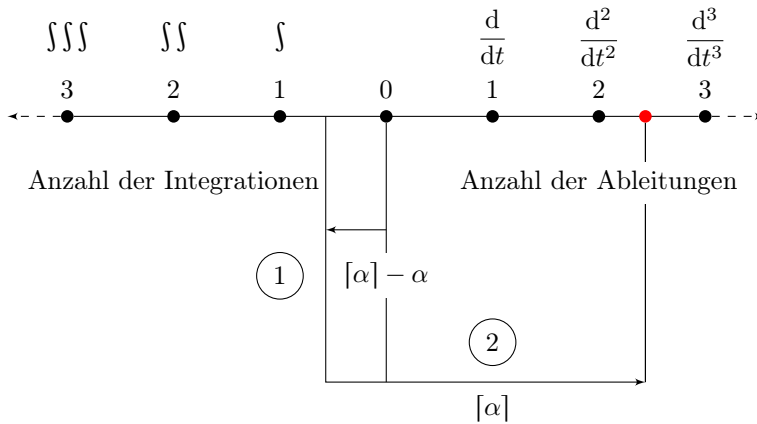


Abbildung 3.3: Grafische Darstellung der fraktionalen Ableitung nach Riemann-Liouville

Analog zur rechtsseitigen Integration gibt es auch eine rechtsseitige fraktionale Ableitung. Um beim vorherigen Beispiel zu bleiben, wird im ersten Schritt in Abbildung 3.3 das linksseitige Integral durch das rechtsseitige ersetzt und dieses dann ganzzahlig abgeleitet (im RL-Fall). Daraus resultiert Gl. (3.10). Für die C-Ableitung ergibt sich Gl. (3.11). Falls die Funktion schon ab einem Zeitpunkt $b \geq g$ gültig ist, muss die initialisierte Integration (3.4) abgeleitet werden, wodurch sich die initialisierte rechtsseitige Ableitung (3.9) ergibt.

Für die Grenzbetrachtung $\alpha \in \mathbb{N}_{>0}$ ergibt sich $\alpha = [\alpha]$, es verschwinden also die Initialisierungsfunktionen und man erhält Konsistenz zur klassischen Definition [KST06].

3.1.3 Operatoren-Eigenschaften

In der fraktionalen Analysis gilt die Überlagerungseigenschaft für zwei fraktionale Ableitungsoperatoren [Pod99, S.74] bzw. Integrationsoperatoren [SKM93, S.34] sowie die gemischte Überlagerung von Ableitungs- und Integrationsoperator [KST06, S.74,75,94,95]. Diese Eigenschaften werden als bekannt vorausgesetzt und daher nicht gesondert thematisiert. Für diese Arbeit ist außerdem der Zusammenhang zwischen der RL- und C-Ableitung, dargestellt in Gl. (A.6) des Anhangs A, sowie der Reflektionsoperator, dargestellt in Definition A.1 des Anhangs A, wichtig. Zwei Operatoren-Eigenschaften, die in Abschnitt 7.1 benötigt werden, in der Literatur aber bislang nicht behandelt wurden, werden im Folgenden in den Lemmata 3.1 und 3.2 erstmalig vorgestellt:

Lemma 3.1 (Caputo-Ableitung eines Parameterintegrals)

$$\alpha \in ([0, 1])^q$$

$$\begin{aligned} {}^t_0 dC_t^\alpha \int_{t_0}^t \underline{F}(t, \tau) d\tau &= {}^t_0 dRL_t^\alpha \int_{t_0}^t \underline{F}(t, \tau) d\tau \\ &= \int_{t_0}^t {}^t_\tau dRL_t^\alpha \underline{F}(t, \tau) d\tau + \lim_{\tau \rightarrow t-0} {}^t_\tau \underline{I}_t^{1-\alpha} \underline{F}(t, \tau). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Lemma 3.2 (Vertauschung von Ableitungen)

Die RL-Ableitung lässt sich vertauschen:

$$\alpha \in ((0, 1))^q$$

$${}^\tau dRL_t^\alpha {}^t_\tau dRL_t^\alpha \underline{F}(t, \tau) = {}^t_\tau dRL_t^\alpha {}^\tau dRL_t^\alpha \underline{F}(t, \tau). \quad (3.13)$$

In den Gln. (3.12) und (3.13) werden die vektorielle Ableitung (B.12) und die Matrixfunktion (B.11) verwendet. Die Beweise finden sich im Anhang als I.4 und I.5.

3.2 Fraktionale Systemdarstellungen

In diesem Abschnitt werden mit Hilfe der eben eingeführten Integrations- und Ableitungsoperatoren fraktionale Zeitbereichsmodelle in Form von FDGLen definiert. Um die Systeme korrekt zu modellieren, ist es höchst wichtig, die fraktionalen Ableitungen aus Definition 3.2 zu verwenden, da diese die Anfangswerte korrekt berücksichtigen [LH00]. Der Zusammenhang mit dem Frequenzbereich ergibt sich hierbei durch die Laplace-Transformation. Diese Verbindung ermöglicht eine direkte Interpretation der Batterieimpedanz (2.19) im Zeitbereich. Die FDGL im Allgemeinen und die Batterie als spezielle FDGL werden in dieser Arbeit direkt im Zeitbereich mit late-lumping Verfahren identifiziert.

3.2.1 Fraktionale Übertragungsfunktion

In Anlehnung an den fraktionalen Frequenzgang $G(j\omega)$ der Batterie in Gl. (2.12) lässt sich eine Verallgemeinerung der Darstellung durchführen. Dabei wird das komplexe Argument $j\omega$ um einen Realteil zu $s = \sigma + j\omega$ erweitert, was bedeutet, dass die Übertragungsfunktion $G(s)$ betrachtet wird. Hierbei wird s als komplexe Laplace-Variable bezeichnet [Föl11]. Dies führt auf die Systembeschreibung mit dem Eingang $U(s)$

und dem Ausgang $Y(s)$ in Form einer fraktionalen, nicht-kommensurablen³² Laplace-Übertragungsfunktion [Pod99, S.245],[MCV10]:

Definition 3.3 (Nicht-kommensurable fraktionale Übertragungsfunktion)

$a_i, b_j \in \mathbb{R}, \quad n, m \in \mathbb{N}_{\geq 0}, \quad m \leq n, \quad \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}^{>0}$

$$G(s) := \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^{\beta_j}}{\sum_{i=0}^n a_i s^{\alpha_i}}. \quad (3.14)$$

Der Zusammenhang mit dem Zeitbereich wird wie für gewöhnliche Systeme auch über die Laplace-Transformation hergestellt [Föl11]. Das Laplace-Integral einer Zeitfunktion $f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lautet:

$t \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}^{>0}, \quad \sigma_f := \min\{\sigma \in \mathbb{R} \mid |f(t)| < ce^{\sigma t}\}, \quad D := \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > \sigma_f\}$

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} := \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad s \in D. \quad (3.15)$$

Die Gl. (3.15) ist in der durch D angegebenen rechten s -Halbebene absolut konvergent [Föl11, S.5].³³ Wird das fraktionale Integral und die fraktionale Ableitung einer Funktion $f(t)$ mit Gl. (3.15) in den Bildbereich transformiert, dann ergeben sich folgende Ausdrücke [LH98, S.48,54]:

Lemma 3.3 (Fraktionales Integral- und Differentiationssatz der Laplace-Transformation)

Die Laplace-Transformation von ${}^t\mathcal{I}_t^\alpha f(t)$ lautet

$$\mathcal{L}\{{}^t\mathcal{I}_t^\alpha f(t)\} = s^{-\alpha} F(s) + \mathcal{L}\{\eta(f, \alpha, a, e, t)\} \quad (3.16)$$

und von ${}^t\mathcal{D}_t^\alpha f(t)$:

$$\mathcal{L}\{{}^t\mathcal{D}_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) + \mathcal{L}\{\psi(f, \alpha, a, e, t)\}. \quad (3.17)$$

Die Laplace-Transformierten der Initialisierungsfunktionen sind in Lemma J.1 zu finden. Für Ableitungen ohne Initialisierungsfunktionen, wie sie standardmäßig betrachtet werden, ist die Transformation beispielsweise in [Pod99, S.104,106] oder Lemma J.2 nachzuschlagen. Eine Tabelle mit fraktionalen Laplace-Transformationen verschiedener Funktionen ist in [MCV10, S.392] dargestellt.

³² In der kommensurablen Darstellung sind alle Ableitungsordnungen Vielfache der Ordnung α .

³³ Für $\# c \in \mathbb{R}^{>0}, \sigma \in \mathbb{R} : |f(t)| < ce^{\sigma t}$ stellt D entsprechend die leere Menge dar. Dies ist beispielsweise für $f(t) = e^{t^2}$ der Fall.

3.2.2 Fraktionale Ein-/Ausgangsdarstellung im Zeitbereich

Analog zum gewöhnlichen Fall lassen sich auch im Fraktionalen Differentialgleichungen aufstellen, um dynamische Systeme mit dem Eingang $u(t)$ und dem Ausgang $y(t)$ im Zeitbereich zu beschreiben. Mit dem initialisierten fraktionalen Ableitungsoperator von Gl. (3.6) werden folgende FDGLen definiert:

Definition 3.4 (Fraktionale Differentialgleichungen)

Das folgende Eingrößensystem wird als nicht-kommensurable FDGL bezeichnet:

$$a_n = 1, \quad a_i, b_j \in \mathbb{R}, \quad a \leq t_0 < t, \quad n, m \in \mathbb{N}_{\geq 0}, \quad m \leq n, \quad \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}^{>0}, \\ u, y \in AC^{|\alpha|}[a, t]$$

$${}_{t_0}^t \mathcal{D}_t^{\alpha_n} y(t) = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i {}_{t_0}^t \mathcal{D}_t^{\alpha_i} y(t) + \sum_{j=0}^m b_j {}_{t_0}^t \mathcal{D}_t^{\beta_j} u(t). \quad (3.18)$$

Für den Fall, dass alle Ableitungsordnungen Vielfache von α sind, ergibt sich die kommensurable FDGL:

$$\alpha \in \mathbb{R}^{>0}$$

$$a_n {}_{t_0}^t \mathcal{D}_t^{n\alpha} y(t) = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i {}_{t_0}^t \mathcal{D}_t^{i\alpha} y(t) + \sum_{j=0}^m b_j {}_{t_0}^t \mathcal{D}_t^{j\alpha} u(t). \quad (3.19)$$

Anstelle gewöhnlicher Ableitungen in DGLen treten also fraktionale Ableitungen auf, daher die Bezeichnung FDGL. In der vorliegenden Arbeit werden nur eindeutige Systeme betrachtet.³⁴ Unter der gegebenen Annahme gilt:

Annahme 3.1 (Eindeutigkeit der fraktionalen Systeme)

Für die in dieser Arbeit betrachteten Modelle aus den Definitionen 3.3 und 3.4 gilt stets, dass die Polynome

$$\lambda^{\alpha_n} + a_{n-1} \lambda^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 \lambda^{\alpha_0} \quad \text{und} \quad b_m \lambda^{\beta_m} + b_{m-1} \lambda^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 \lambda^{\beta_0} \quad (3.20)$$

teilerfremd sind.

Falls ein System in Form einer Übertragungsfunktion (3.14) vorliegt, können die FDGLen durch Faktorisierung und anschließende Rücktransformation mit Gl. (3.17) in den Zeitbereich, hergeleitet werden. Andererseits können sie auch direkt aus physikalischen Zusammenhängen im Zeitbereich entstehen.³⁵ Die beiden Darstellungen in

³⁴ Die Eindeutigkeit ist eine notwendige Bedingung für die Identifizierbarkeit der Systeme.

³⁵ Da die Menge der in den Laplace-Bereich transformierbaren Funktionen wie in Abschnitt 3.2.1 erwähnt eingeschränkt ist, gelten die FDGLen für eine größere Funktionsmenge.

Definition 3.4 sind auch in den Standardwerken [Pod99, S.122], [KST06] oder [MCV10] zu finden, allerdings wird dort immer nur der Fall mit einer speziellen Initialisierung aus [Pod99, S.104,106] betrachtet. Es ist offensichtlich, dass dieser Fall nur eine einzige von unendlich vielen Möglichkeiten darstellt, die Ableitungen zu initialisieren. Außerdem berücksichtigt die spezielle Initialisierung nur einen einzigen Anfangswert zum Zeitpunkt t_0 , wohingegen die allgemeine Initialisierungsfunktion gemäß Definition J.1 die gesamte Vergangenheit mit einbezieht. Um fraktionale Systeme korrekt zu modellieren, ist es daher höchst wichtig, die fraktionalen Ableitungen aus Definition 3.2 zu verwenden, da diese die komplette Historie repräsentieren [LH00].

Durch Anwendung des in Definition A.1 im Anhang A deklarierten Reflektionsoperators \mathcal{Q} mit der Eigenschaft (A.4) auf der linken und rechten Seite der Gl. (3.19) kann diese in eine äquivalente rechtsseitige Darstellung überführt werden:

Definition 3.5 (Äquivalente rechtsseitige zeitinvariante FDGL)

$a_n = 1, \quad a_i, b_j \in \mathbb{R}, \quad t < t_e \leq b, \quad n, m \in \mathbb{N}_{\geq 0}, \quad m \leq n, \quad \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}^{>0},$
 $\tilde{u}, \tilde{y} \in AC^{[\alpha]}[t, b], \quad \tilde{y} = \mathcal{Q}y, \quad \tilde{u} = \mathcal{Q}u$

$${}^t\mathcal{D}_{t_e}^{n\alpha} \tilde{y}(t) = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i {}^t\mathcal{D}_{t_e}^{i\alpha} \tilde{y}(t) + \sum_{j=0}^m b_j {}^t\mathcal{D}_{t_e}^{j\alpha} \tilde{u}(t). \quad (3.21)$$

Die äquivalente Darstellung beschreibt also die gleiche Dynamik, allerdings mit rechtsseitigen Ableitungen. In Kapitel 6 wird sich herausstellen, dass diese äquivalente Darstellung von großem Nutzen für die Identifikation fraktionaler Systeme ist.

Das Ziel der in den Kapiteln 4 und 6 vorgestellten Identifikationsverfahren ist die Bestimmung der Parameter a_i , b_j und der fraktionalen Ableitungsordnungen α_i , β_j der FDGLen aus Definition 3.4, die als Spezialfall die Zeitbereichsinterpretation der Batterieimpedanz (2.19) enthalten. Die FDGL der Batterie ergibt sich über die Laplace-Rücktransformation von Gl. (2.19) mit Gl. (3.17) unter Berücksichtigung der Initialisierungsfunktionen zu:³⁶

Satz 3.1 (Fraktionales Zeitbereichsmodell der Batterie)

$b_0 = R_0 + R, \quad b_1 = R_0 R Q, \quad a_0 = R Q$

$$u(t) = -a_0 {}^t\mathcal{D}_t^\alpha u(t) + b_0 i(t) + b_1 {}^t\mathcal{D}_t^\alpha i(t). \quad (3.22)$$

Eine Batteriesimulation ist im nächsten Abschnitt 3.2.3 zu finden.

³⁶ Das Modell (3.22) ohne die Ruhespannung ist zulässig, da gemäß Annahme 2.1 die Ruhespannung im Batteriemodell dieser Arbeit nicht berücksichtigt werden muss.

3.2.3 Batteriesimulation

In diesem Abschnitt wird die KOKAM LiPO-Batteriezelle mit Graphit an der Anode und einem Blend aus Nickel-Cobalt-Aluminium und Cobaltdioxid an der Kathode, welche im Anhang G dargestellt ist, beispielhaft numerisch simuliert. Das Zeitbereichsmodell resultiert aus der Maschengleichung des Ersatzschaltbildes in Abbildung 2.5:

$$u(t) = u_{RQ}(t) + R_0 i(t). \quad (3.23)$$

$u_{RQ}(t)$ ist die Spannung über dem RQ-Element mit der FDGL:

$${}^t d_t^\alpha u_{RQ}(t) = -\frac{1}{RQ} u_{RQ}(t) + \frac{1}{Q} i(t). \quad (3.24)$$

Die Gl. (3.23) ist äquivalent zum Zeitbereichsmodell in Gl. (3.22). Die Zelle wurde bei Aufnahme der Referenzdaten am IAM-WET bei konstanter Raumtemperatur betrieben. Ein Ausschnitt des Strom- und Spannungsprofils ist in Abbildung 3.4 zu sehen. Gut zu beobachten ist der auf einen Stromsprung direkt folgende Spannungssprung, hervorgerufen durch den ohmschen Innenwiderstand R_0 . Die Übergangsphase bis zum nächsten Sprung wird durch das RQ-Element bestimmt. Zusätzlich zu den Validierungsdaten wurde auch die OCV-Kurve vermessen. Für die Simulation der Batteriezelle wird diese Ruhespannung zu der Spannung $u(t)$ aus Gl. (3.23) addiert:

$$\tilde{u}(t) = u_0(\text{SoC}) + u(t). \quad (3.25)$$

Löst man die Gl. (3.24) numerisch mit Hilfe der GL-Ableitung (L.4) aus dem Anhang L und setzt das Ergebnis in Gl. (3.25) ein, ergibt sich:³⁷

$$\tilde{u}(t) = u_0(\text{SoC}) - \frac{RQ}{RQ + h^\alpha} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{M}{h} \rfloor} w_{\alpha,k} u_{RQ}(t - kh) + \left(R_0 + \frac{R}{1 + RQh^{-\alpha}} \right) i(t). \quad (3.26)$$

In (3.26) werden Vergangenheitswerte bis zu $M = 220$ s berücksichtigt, was $N = \lfloor \frac{M}{h} \rfloor = 1100$ Werten bei einer Schrittweite von $h = 0.2$ s entspricht.³⁸

Zur Parametrierung des Modells wurden die EIS mit einem sehr hohen SNR > 100 dB und das CNLS-Fitting genutzt. Die SoC-abhängigen Parameterkurven sind in Abbildung G.4 im Anhang G zu finden. Da die Parameter sich sehr langsam ändern, ist es gerechtfertigt, das Modell als zeitinvariant zu betrachten. In Abbildung 3.5 ist ein Ausschnitt aus den Ergebnissen der Simulation zu sehen. Das Modell wurde mit dem gleichen Strom $i(t)$ wie die reale Zelle beaufschlagt. Zum Vergleich wurde das Ergebnis eines gewöhnlichen Modells mitgeplottet, bei welchem das RQ- mit einem RC-Element ersetzt wurde. An den Ergebnissen ist zu erkennen, dass die fraktionale Simulation der Referenz deutlich genauer folgt. Allerdings ist die Übereinstimmung nicht über die

³⁷ Alternativ könnte auch Gl. (3.22) numerisch gelöst und in Gl. (3.25) eingesetzt werden.

³⁸ Dieser Speicher wurde heuristisch bestimmt. Es zeigte sich, dass sowohl eine Verkleinerung als auch eine Vergrößerung zu schlechteren Ergebnissen bei der Batteriesimulation führt. Letzteres lässt sich mit numerischen Problemen durch den erhöhten Rechenaufwand erklären.

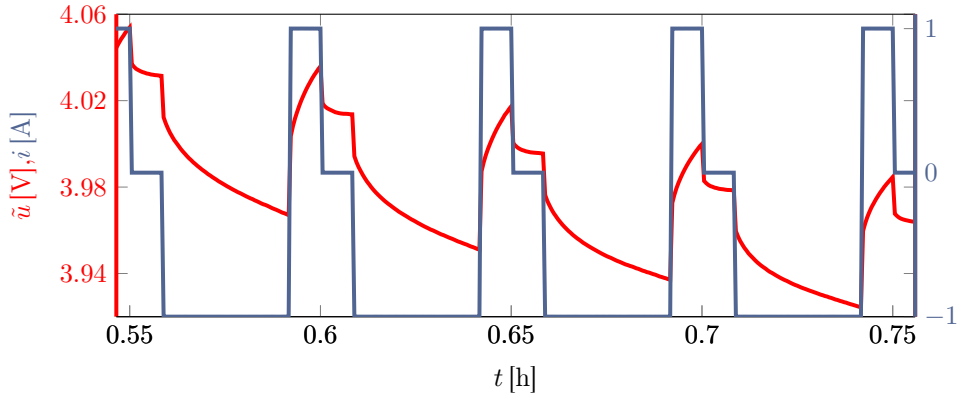


Abbildung 3.4: Ausschnitt des Strom-/Spannungsverlaufs der Kokam Batteriezelle bei einem sprungförmigen Stromprofil, welches die Batterie abwechselnd lädt, entlädt und relaxieren lässt. Im Durchschnitt wird die Batterie mit $C(T_{voll})/4$ h entladen, was einer Nutzungsdauer von 4 h Stunden entspricht, die Abtastfrequenz beträgt 5 Hz.

gesamten 4 h Stunden exakt. Desweiteren gibt es Abschnitte in denen das RC-Modell akkurater ist. Über den gesamten Zeitraum betrachtet hatte das fraktionale Modell einen relativen Root Mean Squares Error (rRMS) $\epsilon = \frac{1}{L} \sum_{k=1}^L \frac{\tilde{u}(k) - \tilde{u}_{Ref}(k)}{\tilde{u}_{Ref}(k)} = 0.130\%$ bei einer Simulationsdauer von 337.5 s. Im Vergleich dazu hatte das RC-Modell einen rRMS von $\epsilon = 0.154\%$ mit einer Simulationsdauer von 105 s. Die längere Laufzeit des RQ-Modells resultiert aus der Tatsache, dass die fraktionale Ableitung eine globale Operation ist und daher mehrere Rechenschritte notwendig sind.

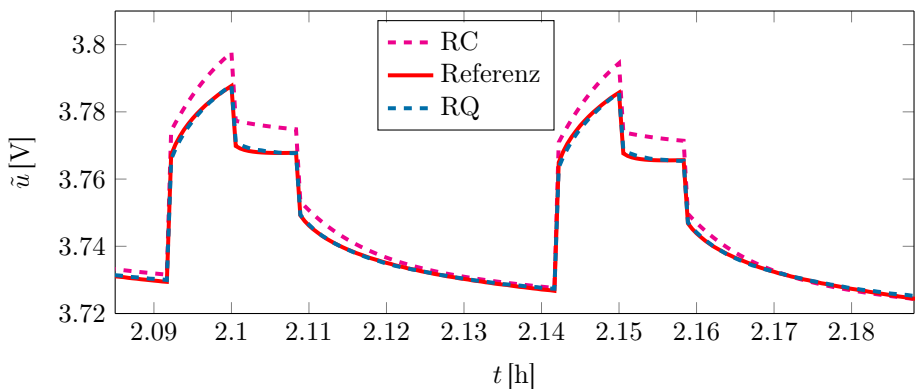


Abbildung 3.5: Vergleich der Simulationen eines RQ- und eines RC-Modells in MATLAB 7.0 (Hardware: Laptop mit Celeron 2.2 GHz Prozessor)

3.3 Fraktionale Zustandsraumdarstellung

Bisher wurde nur das Ein-/Ausgangsverhalten eines fraktionales Systems betrachtet. Im späteren Verlauf dieser Arbeit wird es jedoch auch wichtig sein, ein Systemmodell zu finden, welches nur bestimmte Ableitungsordnungen besitzt. Zu diesem Zweck lässt sich ein Zustandsraummodell aufstellen, bei dem ein fraktionaler Zustand wie folgt definiert ist:

Definition 3.6 (Fraktionaler Zustand)

Eine Vektorfunktion $\underline{x}(t)$ heißt dann *fraktionaler Zustand eines Systems*, wenn sich allein mittels der Initialisierungsvektorfunktion $\underline{\psi}_0(\tau) = \underline{\psi}(\underline{x}, \alpha, a, t_0, \tau)$ und des Verlaufs der Eingangsvektorfunktion $\underline{u}(t)$ alle Folgezustände für beliebige Zeiten $t \in [t_0, t_e]$ eindeutig bestimmen lassen.

Entspricht eine Größe einem fraktionales Zustand dann spricht man auch von einer inneren Systemgröße. Laut Definition 3.6 muss also der fraktionale Zustandsvektor $\underline{x}(t)$ für alle $t \leq t_0$ bekannt sein. Aufgrund dieser Definition unterscheidet sich der fraktionale Zustand grundlegend von dem Zustand eines gewöhnlichen Systems nach KALMAN, der dadurch charakterisiert ist, dass mittels eines einzigen Anfangswertes $\underline{x}(t_0)$ und des Verlaufs von $\underline{u}(t)$ alle Folgezustände eindeutig berechnet werden können [Lun96, S.53][Lud95, S.14]. Aufgrund dieses Unterschieds bezeichnet [SFT14] den fraktionales Zustand auch als einen „Pseudo-Zustand“. In dieser Veröffentlichung wird zu Recht kritisiert, dass in [Das13, MCV10] u.v.a. die Historie von $\underline{x}(t)$ nicht berücksichtigt wird, da ausschließlich eine spezielle Initialisierungsfunktion

$$\underline{\psi}(\underline{x}, \alpha, a, t_0, t) = {}_{t_0}^t I_t^{1-\alpha} \underline{x}(t) \Big|_{t=t_0} \delta(t - t_0) \quad (3.27)$$

mit der Dirac'schen Distribution δ [OMS09, S.76] zum Einsatz kommt. Diese berücksichtigt nur einen fraktionales Anfangswert zum Startzeitpunkt. Um dem entgegenzuwirken, wird in [SFT14] versucht, die Historie zu approximieren. In der vorliegenden Arbeit wird dieses Problem ohne Approximation behoben, indem durchweg initialisierte Ableitungen zum Einsatz kommen. Eine Vektorfunktion $\underline{x}(t)$, welche als Zustand im Sinne von Definition 3.6 bezeichnet werden kann, beschreibt folgende lineare und zeitvariante FDGL, die somit auch *Fraktionales Zustandsraumsystem* genannt wird:

Definition 3.7 (Fraktionales Zustandsraumsystem)

$i, n_i \in \mathbb{N}_{>0}$, $\alpha_i \in (0, 1]$, $a \leq t_0 < t$, $\underline{x}_i(t) : \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{n_i \times 1}$, $\underline{x}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^q n_i \times 1}$,
 $\underline{x}(t) \in (AC[a, t])^{\sum_{i=1}^q n_i \times 1}$, $\forall \tilde{t} \leq a : \underline{x}(\tilde{t}) = \underline{0}$, $\underline{\psi}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^q n_i \times 1}$,
 $\underline{u}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times 1}$, $\underline{y}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{r \times 1}$, $\underline{A}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^q n_i \times \sum_{i=1}^q n_i}$,
 $\underline{B}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^q n_i \times p}$, $\underline{C}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{r \times \sum_{i=1}^q n_i}$, $\underline{D}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{r \times p}$

$${}_{t_0}^t \mathcal{J}_i^\alpha \underline{x}(t) + \underline{\psi}(x, \alpha, a, t_0, t) = \underline{A}(t)\underline{x}(t) + \underline{B}(t)\underline{u}(t), \quad (3.28)$$

$$\underline{y}(t) = \underline{C}(t)\underline{x}(t) + \underline{D}(t)\underline{u}(t). \quad (3.29)$$

Die Initialisierungsvektorfunktion $\underline{\psi}(x, \alpha, a, t_0, t)$ setzt sich aus den Initialisierungsvektoren der einzelnen Untervektorzustände zusammen:

$$\begin{aligned} & \underline{\psi}(x, \alpha, a, t_0, t) \\ &= \left[\underline{\psi}(\underline{x}_1, \alpha_1, a, t_0, t)^T \quad \underline{\psi}(\underline{x}_2, \alpha_2, a, t_0, t)^T \quad \dots \quad \underline{\psi}(\underline{x}_q, \alpha_q, a, t_0, t)^T \right]^T. \end{aligned} \quad (3.30)$$

In Definition 3.7 sind der Eingang $\underline{u}(t)$ und der Ausgang $\underline{y}(t)$ stückweise kontinuierliche Vektorfunktionen und die Systemmatrix $\underline{A}(t)$, die Ausgangsmatrix $\underline{C}(t)$, der Durchgriff $\underline{D}(t)$ sowie die Eingangsmatrix $\underline{B}(t)$ sind kontinuierliche und beschränkte Matrixfunktionen. Da ein fraktionales System mehrere Ableitungen besitzen kann, handelt es sich um ein *Mischsystem*. Das bedeutet, der Ableitungsvektor ist vektoriell mit insgesamt q unterschiedlichen Ableitungsordnungen $\alpha \in (\mathbb{R}^{>0})^q$, wobei der i -te Eintrag des Ableitungsvektors den i -ten Untervektor von $\underline{x}(t)$ ableitet. Der vektorielle Ableitungsoperator ist in Gl. (B.12) definiert. In der Literatur sind deutlich restriktivere fraktionale Zustandsraumsysteme gängig. Diese sind zeitinvariant, besitzen die spezielle Initialisierung von Gl. (3.27) und haben nur eine Ableitungsordnung [Das13, MCV10]. Lediglich in [XLZ14] wird ein Mischsystem betrachtet, das jedoch auch zeitinvariant mit spezieller Initialisierung ist. In [Das11, S.350-359] und [MT11] werden allgemeine Initialisierungsfunktionen zugelassen, jedoch ist das Modell zeitinvariant und hat nur eine Ableitungsordnung. Verfahren, welche das fraktionale Zustandsraumsystem durch ein gewöhnliches approximieren, sind in [TM11, SFT14] zu finden.

Wie aus dem vorherigen Absatz hervorgeht, werden fraktionale LTV-Systeme systemtheoretisch in aktuellen Standardwerken über fraktionale Systeme [PD13, MCV10, SLMO15, Das11] nicht behandelt. Rein mathematische Standardwerke beschäftigen sich zwar mit der analytischen Lösung fraktionaler zeitvarianter DGLen, allerdings wird nur die Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Lösung gezeigt [KST06, S.135-220].³⁹ Es gibt jedoch einzelne Veröffentlichungen über fraktionale LTV-Systeme, wie z.B. [Ost16], in welcher die Linearisierung eines fraktionalen nichtlinearen LTV-Systems behandelt wird. Dazu zählen auch numerische Ansätze zur Zustandsschätzung [SD06],

³⁹ In Kapitel 7 werden erstmalig eine analytische Zustandslösung und darauf aufbauend ein Steuerbarkeitskriterium sowie eine energieoptimale Steuerung hergeleitet. Mit diesen Ergebnissen lässt sich die in Kapitel 6 vorgestellte steuerungsbasierte Parameteridentifikation einer FDGL in kommensurabler Form (3.19) realisieren.

zur Lösung eines Optimalsteuerungsproblems [AB07b, Agr04] und zur robusten Regelung [SOIL02] von fraktionalen LTV-Systemen. In der vorliegenden Arbeit werden jedoch late-lumping Verfahren entworfen, d.h. numerische Approximationen werden vermieden.

Im Gegensatz zu den fraktionalen Systemen werden gewöhnliche LTV-Systeme in einer Reihe von Werken betrachtet. Hierzu zählen klassische Werke wie [Kai80, Kapitel 9][Fre71] und neuere Bücher wie [BM11, Rug96, Lud95]. Die Lösung der gewöhnlichen Zustandsgleichung ist z.B. in [Rug96, Kapitel 3] zu finden.

Ein Spezialfall der LTV-Systeme sind die sogenannten *Linear Parameter-Varying*⁴⁰ (LPV)-Systeme. Sie wurden für den gewöhnlichen Fall in den letzten Jahren intensiv erforscht [Cor15, Tót10]. LPV-Systeme sind auch für Batteriesysteme relevant. Betrachtet man einen größeren Operationsbereich, dann ändern sich die Batterieparameter aufgrund ihrer Abhängigkeit von der Temperatur und dem SoC [Ple04a]. In [RBD13, RBSGD13, RBD14] wird ein gewöhnliches LPV-Batteriemodell mit Subspace-Methoden identifiziert. Für fraktionale LPV-Systeme gibt es erste Veröffentlichungen zu Modellierung [MGBGMG09] und Identifikation [SCA16], die mit dem Thema Batterie jedoch nichts zu tun haben. In der vorliegenden Arbeit wird die Batterie in einem definierten Bereich betrieben, sodass Parameteränderungen vernachlässigt werden können.

Beispiel 3.1:

In diesem Beispiel wird die Impedanz (2.17) mit jeweils einem RQ-Element für den Ladungstransfer und für die Diffusion sowie einem Innenwiderstand R_i in ein fraktionales Zustandsraummodell überführt. Der Strom $i(t)$ ist die Eingangsgröße und die Spannung $u(t)$ über alle Elemente die Ausgangsgröße. Die beiden Spannungen über den RQ-Elementen werden als Zustandsgrößen x_1 und x_2 aufgefasst. Über die Laplace-Rücktransformation durch Gl. (3.17) ergeben sich zwei FDGLen mit α_1 -ter und α_2 -ter Ordnung. Mit der vektoriellen Ableitungsordnung $\alpha = [\alpha_1 \quad \alpha_2]$ erhält man daher:

$${}_{t_0}\mathcal{D}_t^\alpha \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/\tau_{0,1} & 0 \\ 0 & -1/\tau_{0,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/Q_1 \\ 1/Q_2 \end{bmatrix} i(t). \quad (3.31)$$

Der Spannungsausgang $u(t)$ setzt sich aus der Summe der Zustandsgrößen sowie dem Durchgriff des Stroms über dem Innenwiderstand zusammen:

$$u(t) = [1 \quad 1] \underline{x}(t) + R_i i(t). \quad (3.32)$$

Für die fraktionalen Systeme gibt es immer ein rechtsseitiges Pendant zur linksseitigen Darstellung. Das rechtsseitige fraktionale Zustandsraummodell lautet mit dem rechtsseitigen Ableitungsoperator (3.9) wie folgt:

⁴⁰ engl. für *linear parametervariierende*

Definition 3.8 (Rechtsseitiges fraktionales Zustandsraumssystem)

$$t < t_e \leq b, \quad \forall \tilde{t} \geq b : \underline{x}(\tilde{t}) = 0$$

$${}^t D_{t_e}^\alpha \underline{x}(t) + \underline{\psi}_{rs}(\underline{x}, \underline{\alpha}, t_e, b, t) = \underline{A}(t)\underline{x}(t) + \underline{B}(t)\underline{u}(t). \quad (3.33)$$

Die Initialisierungsvektorfunktion $\underline{\psi}_{rs}(\underline{x}, \underline{\alpha}, t_e, b, t)$ setzt sich aus den Initialisierungsvektoren der einzelnen Untervektorzustände zusammen:

$$\begin{aligned} & \underline{\psi}_{rs}(\underline{x}, \underline{\alpha}, t_e, b, t) \\ &= \left[\underline{\psi}_{rs}(x_1, \underline{\alpha}, t_e, b, t)^T \quad \dots \quad \underline{\psi}_{rs}(x_n, \underline{\alpha}, t_e, b, t)^T \right]^T. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Auch in Gl. (3.33) wird die vektorielle Ableitung gemäß Gl. (B.12) eingesetzt. Diese Modellform ist notwendig um in Kapitel 7.4 eine energieoptimale Steuerung für das linksseitige System (3.28) herleiten zu können. Die Lösung von Gl. (3.33) ist dann in Satz 7.3 erstmalig angegeben.

3.4 Zusammenfassung

Dieses Kapitel führte die fraktionale Integration und Ableitung von Funktionen ein und stellte einen Zusammenhang mit dem Laplace- bzw. Frequenzbereich her. Es bildet dadurch die Grundlage für die gesamte fraktionale Integral- und Differentialrechnung der vorliegenden Arbeit. Basierend auf diesen Ausführungen wurden Zeitbereichsdarstellungen für fraktionale Systeme definiert, die als Spezialfall das in dieser Arbeit eingesetzte fraktionale Batteriemodell beschreiben. Hierbei wurde festgehalten, dass nur eindeutige Systeme in dieser Arbeit betrachtet werden, was eine notwendige Bedingung für die Identifizierbarkeit darstellt. Die Systeme werden in den folgenden Kapiteln ohne Approximation der Operatoren im Zeitbereich identifiziert. Das Zeitbereichsmodell wurde numerisch simuliert und mit realen Messdaten verglichen, wobei sich eine hohe Übereinstimmung der Werte zeigte. Am Ende des Kapitels erfolgte die Definition eines fraktionales Zustandsraumsystems. Es wurde klar, dass der fraktionale Zustand sich grundlegend von dem gewöhnlichen Zustand unterscheidet.

4 Methode der Modulationsfunktionen für fraktionale Systeme

Nachdem im vorherigen Kapitel das fraktionale Zeitbereichsmodell der Batterie präsentiert wurde, soll nun ein parametrisches late-lumping Identifikationsverfahren zur Bestimmung der physikalischen Batterieparameter hergeleitet werden. Bei dem Identifikationsverfahren handelt es sich um die sogenannte Methode der Modulationsfunktionen, die schon für gewöhnliche Systeme bekannt ist [Shi54, PR93] und nun erstmalig gesamtheitlich für fraktionale Systeme ohne Einschränkungen bezüglich der Anfangswertfunktionen der Messdaten entwickelt wird [EKH14b, EKH14a, EKH14c]. Das Verfahren wird zunächst allgemein für eine FDGL beliebiger Ordnung gemäß Definition 3.4 betrachtet. Die Batterie wird dann als Spezialfall vorgestellt. Da es sich um eine late-lumping Methode handelt, werden keine Approximationen durchgeführt, was in vielen Fällen den Implementierungsaufwand reduziert.

Die wesentlichen Verfahrensschritte der Methode der Modulationsfunktionen sind in Abbildung 4.1 dargestellt. Zum Einsatz kommt eine auf einer speziellen Funktion – der Modulationsfunktion – basierende Φ -Transformation. Diese Transformation überführt

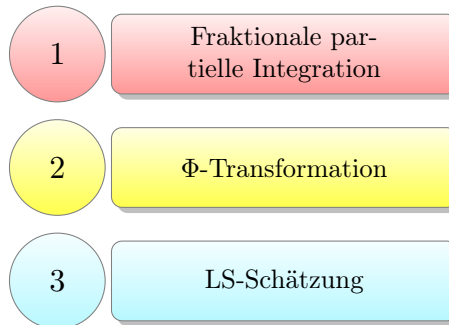


Abbildung 4.1: Zentrale Schritte beim Modulationsfunktionsverfahren

die Differentialgleichung in eine algebraische Darstellung, indem sie die Ableitungen der Messgrößen auf die Modulationsfunktion überträgt. Die Parameter ergeben sich dann, falls Messgrößen mit additiven Störungen vorliegen, über eine LS-Schätzung. Für rauschfreie Messgrößen können die Parameter analytisch berechnet werden. Da die Φ -Transformation bisher nur für gewöhnliche Systeme bekannt war, wird sie in diesem Kapitel auf fraktionale Systeme erweitert. Grundlage bildet hierfür die partielle Integrationsregel, welche für fraktionale Ableitungen neu definiert werden muss.

Eine besondere Herausforderung stellt die heuristische Wahl einer geeigneten Modulationsfunktion dar. Diese muss bestimmte Eigenschaften besitzen, welche sich von System zu System unterscheiden können. Das Problem wird ab Kapitel 6 gesondert betrachtet und die Lösung stellt den zweiten fundamentalen Beitrag dieser Arbeit dar.

Das Grundprinzip des algebraischen Verfahrens ist, die FDGL in eine algebraische Darstellung zu überführen, um dort durch sukzessives Ableiten die fraktionalen Ableitungsvariablen zu entfernen. Dadurch ergibt sich eine für die jeweilige FDGL charakteristische Gleichung, in welcher die Ableitungsordnungen als gewöhnliche Parameter auftauchen.

Abschnitt 4.1 führt die fraktionale partielle Integration ein. Darauf aufbauend wird die fraktionale Φ -Transformation definiert und gezeigt, wie mit dieser Transformation eine Identifikationsgleichung hergeleitet werden kann. Im Anschluss folgt die Konvergenzbetrachtung der Identifikation im Falle von mit additiven Störungen belasteten Messgrößen. Der letzte Teil leitet das algebraische Verfahren zur Bestimmung der Ableitungsordnungen her.

4.1 Fraktionale partielle Integration

Bevor auf die partielle Integration für fraktionale Ableitungen eingegangen wird, soll zunächst noch die bekannte partielle Integration für gewöhnliche Ableitungen erwähnt werden. Unter der Annahme, dass die Funktionen $\gamma(t)$ und $f(t)$ ausreichend glatt sind (d.h. ihre Ableitungen sind stetig) gilt folgender Zusammenhang [Rie97, SR11]:

$$e < g, \quad n \in \mathbb{N}_{>0}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\int_e^g \gamma(t) \frac{d^n f(t)}{dt^n} dt = (-1)^n \int_e^g \frac{d^n \gamma(t)}{dt^n} f(t) dt + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \left[\frac{d^{n-j-1} f(t)}{dt^{n-j-1}} \frac{d^j \gamma(t)}{dt^j} \right]_e^g. \quad (4.1)$$

Gl. (4.1) besitzt die besondere Eigenschaft, dass die Ableitung der Ordnung n von der Funktion $f(t)$ zu $\gamma(t)$ wechselt. Zusätzlich kommt noch ein Vorfaktor $(-1)^n$ sowie ein Summenterm mit Randwerten hinzu.

Im fraktionalen Fall gibt es eine partielle Integrationsregel sowohl für die fraktionale Integration als auch für die fraktionale Ableitung. Auch hier wechselt die Ableitung bzw. die Integration die Funktion. Dies bestätigt die fraktionale partielle Integrationsregel für die fraktionale Integration in Gl. (4.2), die unter dem äußeren gewöhnlichen Integral eine fraktionale Integration beinhaltet [SKM93]:

Lemma 4.1 (Fraktionale partielle Integration der fraktionalen Integration)

$a \leq e < t < g \leq b$, $\alpha \in \mathbb{R}^{>0}$, $t \in \mathbb{R}$, $\omega(t) \in L[a, g]$, $\rho(t) \in L[e, b]$

$$\int_e^g {}^t\mathcal{I}_t^\alpha \omega(t) \rho(t) dt = \int_e^g \omega(t) {}^t\mathcal{I}_g^\alpha \rho(t) dt. \quad (4.2)$$

Gl. (4.2) bildet die Grundlage für die in Lemma 4.2 festgelegte partielle Integration für fraktionale Ableitungen [Agr07b, S.6291].⁴¹ Hierbei kommen unter dem Integral anstelle der fraktionalen Integration, wie es in Gl. (4.2) der Fall ist, fraktionale Ableitungen in den Gln. (4.3) und (4.4) vor. Wie zu sehen ist, verbinden diese nicht nur die links- und rechtsseitige Ableitung, sondern auch die RL- und C-Definition. Die Gleichungen in Lemma 4.2 können als ein Analogon zum gewöhnlichen Fall in Gl. (4.1) angesehen werden.

Lemma 4.2 (Fraktionale partielle Integration der fraktionalen Ableitung)

$a \leq e < t < g \leq b$, $\alpha \in \mathbb{R}^{>0}$, $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \in AC^{[\alpha]}[a, g]$, $\gamma(t) \in AC^{[\alpha]}[e, b]$

$$\begin{aligned} \int_e^g \gamma(t) {}^t\mathcal{DRL}_t^\alpha f(t) dt &= \int_e^g {}^t\mathcal{DC}_g^\alpha \gamma(t) f(t) dt \\ &\quad - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \left[(-1)^{|\alpha|+1+j} {}^t\mathcal{DRL}_t^{\alpha+j-[\alpha]-1} f(t) \frac{d^{[\alpha]-j} \gamma(t)}{dt^{[\alpha]-j}} \right]_e^g \end{aligned} \quad (4.3)$$

$a \leq e < t < g \leq b$, $\alpha \in \mathbb{R}^{>0}$, $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \in AC^{[\alpha]}[e, b]$, $\gamma(t) \in AC^{[\alpha]}[a, g]$

$$\begin{aligned} \int_e^g \gamma(t) {}^t\mathcal{DRL}_g^\alpha f(t) dt &= \int_e^g {}^t\mathcal{DC}_t^\alpha \gamma(t) f(t) dt \\ &\quad - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \left[{}^t\mathcal{DRL}_g^{\alpha+j-[\alpha]-1} f(t) \frac{d^{[\alpha]-j} \gamma(t)}{dt^{[\alpha]-j}} \right]_e^g \end{aligned} \quad (4.4)$$

Der Beweis von Gl. (4.3) befindet sich im Anhang I.6. Die Gleichungen in Lemma 4.2 vereinfachen sich, wenn die Summenterme durch die geeignete Wahl der gewöhnlichen Randwerte von $\gamma(t)$ und der fraktionalen Randwerte von $f(t)$ verschwinden. Werden in Gl. (4.3) die linksseitigen fraktionalen Ableitungen der Ordnung $\alpha + j - [\alpha] - 1$ von $f(t)$ an den Stellen e und g zu Null gesetzt, ergibt sich die vereinfachte Gl. (4.5). Un-

⁴¹ Die Gleichungen stammen ursprünglich aus der fraktionalen Lagrange und Hamilton Mechanik in [Rie97]. In [OMT12, S. 11] werden sie mit einer generalisierten fraktionalen Ableitung für $0 < \alpha < 1$ bestätigt. Für die Herleitung der Gleichungen siehe auch [Kup13, S.53-56].

ter Annahme verschwindender rechtsseitiger fraktionaler Randwerte wird aus Gl. (4.4) die Gl. (4.6). Eine weitere Option, die Summenterme zu entfernen, besteht darin, die Funktion $\gamma(t)$ sowie ihre ganzzahligen Ableitungen an den Stellen e und g bis zur Ordnung $[\alpha]$ zu Null zu setzen. Somit wird aus Gl. (4.3) die vereinfachte Gl. (4.7). Für die gleichen Randwerte wird aus Gl. (4.4) außerdem die Gl. (4.8).

Korollar 4.1 (Vereinfachte fraktionale partielle Integration für die fraktionale Ableitung)

$$\begin{aligned} {}_e^t \mathcal{DRL}_t^{\alpha+k-[\alpha]-1} f(t) \Big|_{t=e} = {}_e^t \mathcal{DRL}_t^{\alpha+k-[\alpha]-1} f(t) \Big|_{t=g} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, [\alpha] \\ \int_e^g \gamma(t) {}_e^t \mathcal{DRL}_t^\alpha f(t) dt = \int_e^g {}_t^g \mathcal{DC}_g^\alpha \gamma(t) f(t) dt, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} {}_t^g \mathcal{DRL}_g^{\alpha+k-[\alpha]-1} f(t) \Big|_{t=e} = {}_t^g \mathcal{DRL}_g^{\alpha+k-[\alpha]-1} f(t) \Big|_{t=g} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, [\alpha] \\ \int_e^g \gamma(t) {}_t^g \mathcal{DRL}_g^\alpha f(t) dt = \int_e^g {}_e^t \mathcal{DC}_t^\alpha \gamma(t) f(t) dt, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \gamma^{(k)}(e) = \gamma^{(k)}(g) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, [\alpha] \\ \int_e^g \gamma(t) {}_e^t \mathcal{DRL}_t^\alpha f(t) dt = \int_e^g {}_t^g \mathcal{DC}_g^\alpha \gamma(t) f(t) dt, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\int_e^g \gamma(t) {}_t^g \mathcal{DRL}_g^\alpha f(t) dt = \int_e^g {}_e^t \mathcal{DC}_t^\alpha \gamma(t) f(t) dt. \quad (4.8)$$

Es ist durch den Einsatz des Reflektionsoperators \mathcal{Q} aus Definition A.1 außerdem möglich, die rechtsseitigen Ableitungen, die z.B. in den Gln. (4.5) und (4.8) vorkommen, zu vermeiden [LLKGP13]:

$$\begin{aligned} \int_e^g \mathcal{Q} \gamma(t) {}_e^t \mathcal{DRL}_t^\alpha f(t) dt &= \int_e^g {}_t^g \mathcal{DC}_g^\alpha \mathcal{Q} \gamma(t) f(t) dt \\ &= \int_e^g \mathcal{Q} {}_e^t \mathcal{DC}_t^\alpha \gamma(t) f(t) dt. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Wie in Gl. (4.9) zu sehen ist, geht die Vermeidung der akausalen rechtsseitigen Ableitung einher mit zusätzlichen Einschränkungen durch den Reflektionsoperator.

4.2 Fraktionale Modulationsfunktionstransformation

Die Φ -Transformation der Funktion $f(t)$ in Gl. (4.10) ist definiert als ein Integralausdruck mit konstanten Grenzen e und g und mit der sogenannten Modulationsfunktion $\varphi(t)$ als Kern. Daher wird sie auch Modulationsfunktionstransformation genannt. So wie es auch bei der Laplace-Transformation gängig ist, \mathcal{L} durch den Buchstaben der zu transformierenden Funktion zu ersetzen, so wird hier Φ entsprechend mit F ersetzt. Der hochgestellte Index gibt den Kern der Transformation an – also die verwendete Modulationsfunktion – und die tiefgestellten Indizes die Integralgrenzen:

Definition 4.1 (Fraktionale Φ -Transformation)

$f(t), \varphi(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$F_{e,g}^\varphi := \Phi_{e,g}^\varphi\{f(t)\} := \int_e^g f(t)\varphi(t)dt. \quad (4.10)$$

Die Eigenschaften der Transformation werden durch die Wahl der Modulationsfunktion bestimmt. Es handelt sich entgegen [PR93] jedoch nicht um eine Filterung der Funktion $f(t)$, da (4.10) keine Faltung darstellt. Im Folgenden soll die links- und rechtsseitige RL-Ableitung der Ordnung α einer Funktion $f(t)$ transformiert werden. Hierfür ist die Modulationsfunktion so zu wählen, dass die Funktion selbst und ihre ganzzahligen Ableitungen bis zur Ordnung $[\alpha]$ an den Grenzen e und g verschwinden. Die Φ -Transformationen von ${}_e^tDRL_t^\alpha f(t)$ und ${}_t^gDRL_g^\alpha f(t)$ lauten dann unter der Annahme, dass die eben beschriebenen Randbedingungen erfüllt sind:

Lemma 4.3 (Φ -Transformation der Riemann-Liouville-Ableitung)

Die Φ -Transformation der linksseitigen RL-Ableitung lautet:

$f(t) \in AC^{[\alpha]}[a, g]$, $\varphi(t) \in AC^{[\alpha]}[e, b]$, $\varphi^{(k)}(e) = \varphi^{(k)}(g) = 0$,
 $k = 0, 1, \dots, [\alpha]$, $a \leq e < t < g \leq b$

$$\Phi_{e,g}^\varphi\{{}_e^tDRL_t^\alpha f(t)\} = \int_e^g f(t) {}_t^gDC_g^\alpha \varphi(t) dt = F_{e,g}^{t^gDC_g^\alpha \varphi(t)}. \quad (4.11)$$

Die Φ -Transformation der rechtsseitigen RL-Ableitung ergibt sich zu:

$f(t) \in AC^{[\alpha]}[e, b]$, $\varphi(t) \in AC^{[\alpha]}[a, g]$, $\varphi^{(k)}(e) = \varphi^{(k)}(g) = 0$,
 $k = 0, 1, \dots, [\alpha]$, $a \leq e < t < g \leq b$

$$\Phi_{e,g}^\varphi\{{}_t^gDRL_g^\alpha f(t)\} = \int_e^g f(t) {}_e^tDC_t^\alpha \varphi(t) dt = F_{e,g}^{e^tDC_t^\alpha \varphi(t)}. \quad (4.12)$$

Beweis:

Mit der Definition der Φ -Transformation in Gl. (4.10) ergibt sich für die Transformation der linksseitigen RL-Ableitung:

$$\Phi_{e,g}^{\varphi} \{ {}_e^t \mathcal{D}RL_t^{\alpha} f(t) \} = \int_e^g {}_e^t \mathcal{D}RL_t^{\alpha} f(t) \varphi(t) dt. \quad (4.13)$$

Anwendung der vereinfachten fraktionalen partiellen Integration (4.7) führt unter der Annahme verschwindender gewöhnlicher Randbedingungen zu Gl. (4.11). Um auf Gl. (4.12) zu kommen, wird die Φ -Transformation von ${}_t^t \mathcal{D}RL_g^{\alpha} f(t)$ unter Annahme verschwindender gewöhnlicher Randbedingungen gebildet und auf den entstehenden Ausdruck die vereinfachte fraktionale partielle Integrationsregel (4.8) angewendet. \square

Es gibt zahlreiche Modulationsfunktionen, welche die erforderlichen ganzzahligen Randwerte in Lemma 4.3 erfüllen [PR93, EKH14c, Shi54], darunter auch die in Kapitel 5 verwendete Spline-Typ-Funktion (siehe Anhang C). Es fällt auf, dass sowohl in Gl. (4.11) als auch in Gl. (4.12) die fraktionale Ableitung durch die Φ -Transformation von der Funktion $f(t)$ auf die Modulationsfunktion übergeht. Hierbei ändert sich auch die Ableitungsdefinition von RL zu C sowie die Ableitungsrichtung von der linksseitigen auf die rechtsseitige Ableitung und umgekehrt. Im Folgenden soll die linksseitige C-Ableitung der Ordnung α transformiert werden. Hierfür muss die Modulationsfunktion $\varphi(t)$ so gewählt sein, dass deren fraktionale Randwerte mit den Ordnungen $\alpha + j - [\alpha] - 1$ verschwinden und die Funktion für alle $\tilde{t} \leq e$ null ist. Die Φ -Transformierte von ${}_t^t \mathcal{D}C_g^{\alpha} f(t)$ auf Basis der eben beschriebenen Modulationsfunktion lautet dann:

Lemma 4.4 (Φ -Transformation der Caputo-Ableitung)

Die Φ -Transformation der linksseitigen C-Ableitung lautet:

$$f(t) \in AC^{[\alpha]}[e, b], \quad \varphi(t) \in AC^{[\alpha]}[a, g], \quad {}_e^t \mathcal{D}RL_t^{\alpha+k-[\alpha]-1} \varphi(t)|_{t=e} = 0, \\ {}_e^t \mathcal{D}RL_t^{\alpha+k-[\alpha]-1} \varphi(t)|_{t=g} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, [\alpha], \quad a \leq e < t < g \leq b$$

$$\Phi_{e,g}^{\varphi} \{ {}_t^t \mathcal{D}C_g^{\alpha} f(t) \} = \int_e^g f(t) {}_e^t \mathcal{D}RL_t^{\alpha} \varphi(t) dt = F_{e,g}^{{}_e^t \mathcal{D}RL_t^{\alpha} \varphi(t)}. \quad (4.14)$$

Die Φ -Transformation der rechtsseitigen C-Ableitung berechnet sich zu:

$$f(t) \in AC^{[\alpha]}[a, g], \quad \varphi(t) \in AC^{[\alpha]}[e, b], \quad {}_t^t \mathcal{D}RL_g^{\alpha+k-[\alpha]-1} \varphi(t)|_{t=e} = 0, \\ {}_t^t \mathcal{D}RL_g^{\alpha+k-[\alpha]-1} \varphi(t)|_{t=g} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, [\alpha], \quad a \leq e < t < g \leq b$$

$$\Phi_{e,g}^{\varphi} \{ {}_e^t \mathcal{D}C_t^{\alpha} f(t) \} = \int_e^g f(t) {}_t^t \mathcal{D}RL_g^{\alpha} \varphi(t) dt = F_{e,g}^{{}_t^t \mathcal{D}RL_g^{\alpha} \varphi(t)}. \quad (4.15)$$

Beweis:

Die Φ -Transformierte der rechtsseitigen C-Ableitung lässt sich mit der Gl. (4.10) folgendermaßen darstellen:

$$\Phi_{e,g}^\varphi \{ {}^t\mathcal{D}C_g^\alpha f(t) \} = \int_e^g {}^t\mathcal{D}C_g^\alpha f(t) \varphi(t) dt. \quad (4.16)$$

Anwendung der vereinfachten fraktionalen partiellen Integrationsregel (4.5) führt zu Gl. (4.14); Gl. (4.15) basiert auf Gl. (4.6). \square

Eine Modulationsfunktion heuristisch zu finden, welche die fraktionalen Randwerte in Lemma 4.4 erfüllt, ist sehr schwierig. Dies liegt in der Tatsache begründet, dass sich die fraktionalen Ableitungen einer Funktion nicht interpretieren lassen (z.B. als Steigung etc.). Trotzdem sind fraktionale Randwerte bei der modellbasierten Bestimmung der Modulationsfunktion in Kapitel 6 zu wählen, denn nur mit ihnen ist eine methodische Generierung möglich.⁴² Für die Φ -Transformation lässt sich auch eine Produktregel aufstellen:

Lemma 4.5 (Fraktionale Produktregel der Φ -Transformation)

$f(t) \in AC^{[\alpha]}[a, g]$, $\varphi(t), h(t) \in AC^{[\alpha]}[e, b]$, $\varphi^{(k)}(e) = \varphi^{(k)}(g) = 0$,
 $k = 0, 1, \dots, [\alpha]$, $a \leq e < t < g \leq b$

$$\Phi_{e,g}^\varphi \{ h(t) {}^t\mathcal{D}RL_t^\alpha f(t) \} = \int_e^g f(t) {}^t\mathcal{D}C_g^\alpha (\varphi(t)h(t)) dt. \quad (4.17)$$

Der Beweis findet sich im Anhang I.7.

4.3 Parameteridentifikation mit Modulationsfunktionen

In diesem Abschnitt wird nun gezeigt, dass mit Hilfe der in Abschnitt 4.2 definierten Φ -Transformation die Parameter

$$\underline{p}^T := [a_0 \quad \cdots \quad a_{n-1} \quad b_0 \quad \cdots \quad b_m] \quad (4.18)$$

der FDGLen (3.18) und (3.19) identifiziert werden können. Aufgrund der Annahme 3.1 ist das System stets eindeutig. Die Messgrößen $u(t)$, $y(t)$ und die fraktionalen Exponenten α_i und β_j sind als bekannt vorausgesetzt und es wird davon ausgegangen, dass die Initialisierungsfunktionen der Messgrößen beliebig sind und keine Informationen über sie vorliegen. Zunächst wird von störfreien Messgrößen ausgegangen. Die Betrachtung von additiven Störungen ist Gegenstand von Abschnitt 4.4.

⁴² Der Grund hierfür ist, dass sich die Anforderungen an die fraktionalen Randwerte im Gegensatz zu den Ganzzahligen in ein Anfangswertproblem eines bestimmten fraktionalen Zustandsraumsystems übersetzen lassen.

Als Erstes wird die nicht-kommensurable Variante (3.18) in RL-Form betrachtet:

$${}^t_0 \mathcal{DRL}_t^{\alpha_n} y(t) = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i {}^t_0 \mathcal{DRL}_t^{\alpha_i} y(t) + \sum_{j=0}^m b_j {}^t_0 \mathcal{DRL}_t^{\beta_j} u(t). \quad (4.19)$$

Der Satz 4.1 postuliert mit Gl. (4.23) eine Berechnungsvorschrift für die gesuchten Parameter.⁴³ Vorab werden die für die Berechnung benötigten Vektoren und Matrizen definiert:

Definition 4.2

Die Elemente der Matrizen

$$\begin{aligned} a \leq t_0 < t, \quad n, m, v \in \mathbb{N}_{\geq 0}, \quad m \leq n, \quad \alpha_i, \beta_j, \Delta T, T \in \mathbb{R}^{>0}, \quad t_0 \in \mathbb{R}^{\geq 0}, \\ q = n + m + 1, \quad \varphi^{(k)}(t)|_{t=t_0, t_0+T} = 0, \quad \varphi(t) \in AC^{[\alpha]}[e, b], \quad t_v = t_0 + v\Delta T, \\ t'_v = t_v + T, \quad k = 0, 1, \dots, \lfloor \max\{\max\{\alpha_i\}, \max\{\beta_j\}\} \rfloor \end{aligned}$$

$$\underline{Y} := [W_0 \quad W_1 \quad \dots \quad W_{q-1}]^T, \quad \underline{M} := [m_0 \quad \dots \quad m_{q-1}]^T \quad (4.20)$$

lauten:

$$W_v := Y_{t_v, t'_v}^{t_0 \mathcal{D}C_{t'_v}^{\alpha_n} \varphi(t-v\Delta T)}, \quad (4.21)$$

$$m_v^T := \begin{bmatrix} -Y_{t_v, t'_v}^{t_0 \mathcal{D}C_{t'_v}^{\alpha_0} \varphi(t-v\Delta T)} & \dots & -Y_{t_v, t'_v}^{t_0 \mathcal{D}C_{t'_v}^{\alpha_{n-1}} \varphi(t-v\Delta T)} \\ U_{t_v, t'_v}^{t_0 \mathcal{D}C_{t'_v}^{\beta_0} \varphi(t-v\Delta T)} & \dots & U_{t_v, t'_v}^{t_0 \mathcal{D}C_{t'_v}^{\beta_m} \varphi(t-v\Delta T)} \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Satz 4.1 (Riemann-Liouville-Identifikation)

Die Parameter \underline{p} des Systems (4.19) in RL-Form ergeben sich zu

$$\underline{p} = \underline{M}^{-1} \underline{Y} \quad (4.23)$$

mit \underline{Y} und \underline{M} gemäß Definition 4.2. Die Parameter lassen sich dann und nur dann mit Gl. (4.23) identifizieren, falls $\text{Rang}(\underline{M}) = n + m + 1$ gilt.

Beweis:

Zunächst wird die Φ -Transformation (4.10) der zu identifizierenden Gl. (3.18) mit den Grenzen t_0 und $t_0 + T$ durchgeführt. Da die Ableitungsregel (4.11) gilt, ergibt sich mit (4.21) und (4.22) aus Definition 4.2:

$$W_0 = m_0^T \underline{p}. \quad (4.24)$$

⁴³ Die zentralen Schritte des anschließenden Beweises können der Abbildung 4.1 entnommen werden.

Die Modulationsfunktion muss entsprechend den Angaben für Gl. (4.11) so gewählt sein, dass ihre ganzzahligen Ableitungen bis zur Ordnung $\lceil \max\{\max\{\alpha_i\}, \max\{\beta_j\}\} \rceil$ verschwinden. Um eine weitere linear unabhängige Gleichung zu erhalten, verschiebt man das Zeitintervall um ΔT und transformiert mit den Grenzen $t_1 = t_0 + \Delta T$ und $t'_1 = t_0 + \Delta T + T$ erneut, wodurch man

$$W_1 = m_1^T p \quad (4.25)$$

erhält. Als Nächstes wird das Integrationsintervall um $2\Delta T$ verschoben und die Transformation nochmals durchgeführt. So fährt man sukzessive fort, bis $q = n + m + 1$ Gleichungen generiert worden sind und sich schließlich mit \underline{Y} und \underline{M} aus (4.20) das *Lineare Gleichungssystem* (LGS) $\underline{Y} = \underline{M}p$ aufstellen lässt. \square

Damit die Matrix \underline{M} aus Gl. (4.20) vollen Rang besitzen kann, muss die Eingangsgröße so gewählt sein, dass das betrachtete System (4.19) „hinreichend angeregt“ wird (engl. *persistent excitation*). Der Begriff *persistent excitation* wird häufig verwendet [IM11, S.250], eine genaue Definition lässt sich hier jedoch nicht angeben. Damit \underline{M} invertierbar ist, muss als weitere notwendige Bedingung das System eindeutig sein, was hier durch Annahme 3.1 gegeben ist.

In den Einträgen des Vektors \underline{Y} und der Matrix \underline{M} aus Gl. (4.20) der Identifikationsgleichung (4.23) befinden sich Φ -Transformationen der Eingangs- und Ausgangsgrößen $u(t)$ und $y(t)$ mit einer geeignet zu wählenden Modulationsfunktion $\varphi(t)$ – bzw. deren rechtsseitigen fraktionalen C-Ableitungen – als Integrationskern. Die akasalen rechtsseitigen Ableitungen der Modulationsfunktion stellen hier kein Problem dar, da für die Integration ebenfalls die Aufnahme aller Messdaten nötig ist. Zudem ist $\varphi(t)$ a priori bekannt, d.h. die benötigten Ableitungen können bereits im Voraus offline berechnet werden. In dieser algebraischen Darstellung sind also die fraktionalen Ableitungen der Eingangs- und Messgrößen durch die Φ -Transformation auf die Modulationsfunktion übergegangen. Das bedeutet auch, dass die in der FDGL zu berücksichtigenden Vergangenheitswerte dieser Größen (im fraktionalen Fall sind das unendlich viele) bei der Identifikation wegfallen. Die Ableitungsordnungen entsprechen gerade denen, die in der zu identifizierenden FDGL (4.19) vorkommen. Die Modulationsfunktion ist so zu wählen, dass die ganzzahligen Randwerte aus Definition 4.2 erfüllt werden. In Abschnitt 4.2 wurde schon darauf eingegangen, dass es zahlreiche Veröffentlichungen gibt, die eine solche Funktion beinhalten. Für die vorliegende Arbeit wurde hieraus die im Anhang C dargestellte Spline-Typ-Modulationsfunktion ausgewählt. Vorteilhaft an dem Verfahren ist außerdem, dass es leicht auf zeitvariante Systeme erweitert werden kann (siehe Satz 4.5).

Das Integrationsintervall der Φ -Transformation hat die Länge T . Die Elemente von \underline{Y} unterscheiden sich dann zeilenweise jeweils lediglich darin, dass das Integrationsintervall um ΔT verschoben ist. Das Gleiche gilt für die Elemente aufeinanderfolgender Zeilen in der Matrix \underline{M} . In Abbildung 4.2 ist dies beispielhaft anhand des Verlaufs der Ausgangsgröße einer zu identifizierenden FDGL veranschaulicht. Hätte das Integrationsintervall eine Länge von $T = 100$ s, würden in dem Beispiel die Ausgangsdaten vom obersten Bild für die Transformationen in den ersten Zeile von \underline{M} und \underline{Y} verwendet

werden. Im nächsten Bild sind in Dunkelblau die Daten dargestellt, welche im Falle von $\Delta T = 20\text{ s}$ für die Transformationen in den zweiten Zeilen verwendet würden. Das unterste Bild zeigt in Dunkelblau die Daten, die für die Transformationen in den dritten Zeilen bei $\Delta T = 20\text{ s}$ genommen würden.

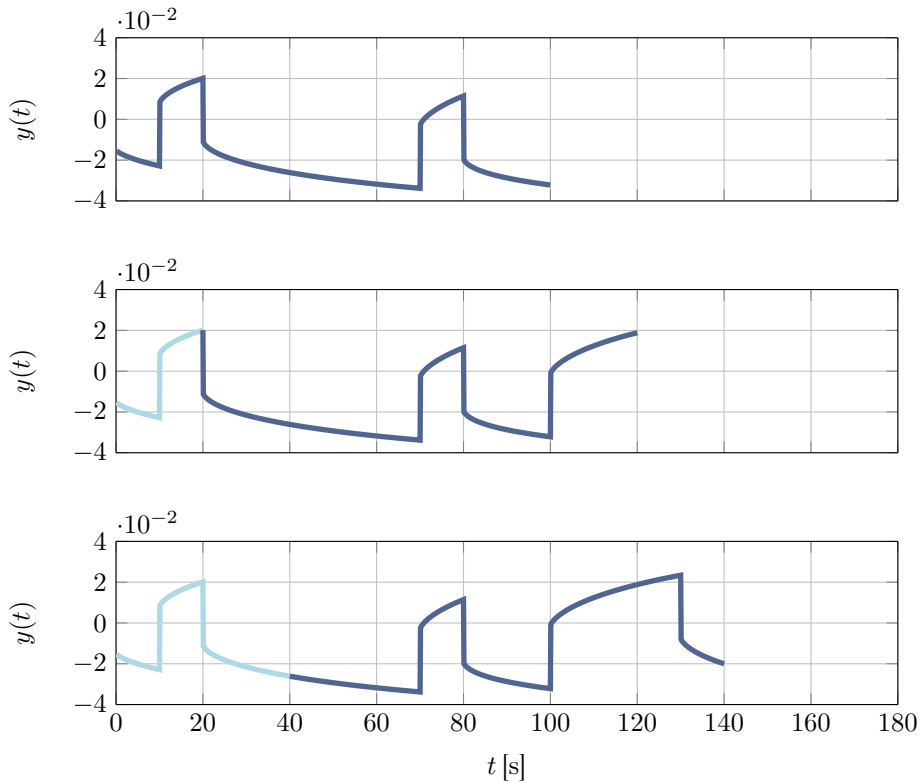


Abbildung 4.2: Beispielhafter Verlauf der Ausgangsgröße eines fraktionalen Systems. Die dunkelblau eingefärbten Verläufe zeigen die unterschiedlichen Daten, welche jeweils für die ersten drei um ΔT verschobenen Φ -Transformationen verwendet würden.

In Beispiel 4.1 wird die Identifikationsgleichung des Modulationsfunktionsverfahrens für die Batterie vorgestellt. Die praktische Umsetzung folgt mit Simulationsdaten in den Abschnitten 5.1 und 5.2 und mit realen Messdaten einer Lithium-Ionen-Zelle in Abschnitt 5.3.

Beispiel 4.1:

In diesem Beispiel sollen die physikalischen Parameter a_0 , b_0 und b_1 bzw. die Bauteilparameter R_0 , R und Q des fraktionalen Zeitbereichsmodells der Batterie (3.22) in RL-Form identifiziert werden:

$$b_0 = R_0 + R, \quad b_1 = R_0 R Q, \quad a_0 = R Q, \quad t_0 = 0$$

$$u(t) = -a_0 {}^t \mathcal{D} R L_t^\alpha u(t) + b_0 i(t) + b_1 {}^t \mathcal{D} R L_t^\alpha i(t). \quad (4.26)$$

Es gelte $\alpha = 0.71$. Anwendung der Φ -Transformation (4.10) mit dem Integrationsintervall T auf die äquivalente rechtsseitige Darstellung von Gl. (4.26) entsprechend Gl. (3.21) führt in Vektor-Matrix-Notation zu:

$$U_{0,T}^{\varphi(t)} = \begin{bmatrix} -U_{0,T}^{{}^t \mathcal{D} C_T^\alpha \varphi(t)} & I_{0,T}^{\varphi(t)} & I_{0,T}^{{}^t \mathcal{D} C_T^\alpha \varphi(t)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Voraussetzung für die Transformation ist, dass $\varphi(t_0) = \varphi(t_0 + T) = 0$ gilt. Verschiebt man nun das Integrationsintervall um ΔT und wendet die Transformation wieder auf das Batteriesystem (4.26) an, so ergibt sich eine zweite Gleichung:

$$\begin{aligned} & U_{\Delta T, \Delta T + T}^{\varphi(t - \Delta T)} \\ &= \begin{bmatrix} -U_{\Delta T, \Delta T + T}^{{}^t \mathcal{D} C_{\Delta T + T}^\alpha \varphi(t - \Delta T)} & I_{\Delta T, \Delta T + T}^{\varphi(t - \Delta T)} & I_{\Delta T, \Delta T + T}^{{}^t \mathcal{D} C_{\Delta T + T}^\alpha \varphi(t - \Delta T)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

So fährt man fort, bis mindestens so viele Gleichungen generiert sind, wie es unbekannte Parameter gibt. In diesem Fall sind das also drei Verschiebungen des Zeitintervalls. Aus den Gleichungen lässt sich dann ein *Lineares Gleichungssystem* (LGS) aufstellen um die Parameter entsprechend Gl. (4.23) zu identifizieren:

$$\underline{Y} := [W_0 \quad W_1 \quad \cdots \quad W_2]^T, \quad \underline{M} := [m_0 \quad \cdots \quad m_2]^T, \quad t_v = v \Delta T, \\ t'_v = t_v + T$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \underline{M}^{-1} \underline{Y} \quad (4.29)$$

mit

$$\underline{m}_v^T := \begin{bmatrix} -U_{t_v, t'_v}^{{}^t \mathcal{D} C_{t'_v}^\alpha \varphi(t - v \Delta T)} & I_{t_v, t'_v}^{\varphi(t - v \Delta T)} & I_{t_v, t'_v}^{{}^t \mathcal{D} C_{t'_v}^\alpha \varphi(t - v \Delta T)} \end{bmatrix}, \quad W_v := U_{t_v, t'_v}^{\varphi(t - v \Delta T)}. \quad (4.30)$$

Über die nichtlinearen Zusammenhänge

$$\underline{p} := \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R Q \\ R_0 + R \\ R_0 R Q \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

ergeben sich letztendlich die Bauteilparameter zu:

$$\begin{bmatrix} R_0 \\ R \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_3/p_1 \\ p_2 - p_3/p_1 \\ p_1/(p_2 - p_3/p_1) \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Mit der Gl. (4.29) wird in Abschnitt 5.1 die Identifikation anhand des Simulationsmodells durchgeführt und entsprechende Ergebnisse präsentiert.

Das Modulationsfunktionsverfahren ist nicht nur auf RL-Systeme beschränkt, sondern kann auch für ein kommensurables System (3.19) in C-Form

$${}^{t_0}\mathcal{D}C_t^{n\alpha}y(t) = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i {}^{t_0}\mathcal{D}C_t^{i\alpha}y(t) + \sum_{j=0}^m b_j {}^{t_0}\mathcal{D}C_t^{j\alpha}u(t) \quad (4.33)$$

angewendet werden. Der Satz 4.2 postuliert mit Gl. (4.37) eine Berechnungsvorschrift für die gesuchten Parameter. Vorab werden die für die Berechnung benötigten Vektoren und Matrizen definiert:

Definition 4.3

Die Elemente der Matrizen

$a \leq t_0 < t$, $n, m, v \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, $m \leq n$, $\alpha, \Delta T, T \in \mathbb{R}^{>0}$, $t_0 \in \mathbb{R}^{\geq 0}$, $q = n + m + 1$, ${}^{t_0}\mathcal{D}RL_t^{i\alpha+k-|\alpha|^{-1}}\varphi(t)|_{t=t_0, t_0+T} = 0$, $k = 0, 1, \dots, [i\alpha]$, $\tilde{u} = \mathcal{Q}u$, $\tilde{y} = \mathcal{Q}y$, $i = 0, 1, \dots, n$, $t_v = t_0 + v\Delta T$, $t'_v = t_v + T$

$$\tilde{Y} := [\tilde{W}_0 \quad \tilde{W}_1 \quad \dots \quad \tilde{W}_{q-1}]^T, \quad \tilde{M} = [\tilde{m}_1 \quad \dots \quad \tilde{m}_{q-1}]^T \quad (4.34)$$

lauten:

$$\tilde{W}_v := \tilde{Y}_{t_v, t'_v} {}^{t_0}\mathcal{D}RL_t^{n\alpha}\varphi(t-v\Delta T), \quad (4.35)$$

$$\tilde{m}_v^T := \left[\begin{array}{cccc} -\tilde{Y}_{t_v, t'_v} \varphi(t-v\Delta T) & \dots & -\tilde{Y}_{t_v, t'_v} {}^{t_0}\mathcal{D}RL_t^{(n-1)\alpha}\varphi(t-v\Delta T) & \\ & & \tilde{U}_{t_v, t'_v} \varphi(t-v\Delta T) & \dots & \tilde{U}_{t_v, t'_v} {}^{t_0}\mathcal{D}RL_t^{m\alpha}\varphi(t-v\Delta T) \end{array} \right]. \quad (4.36)$$

Satz 4.2 (Caputo-Identifikation)

Die Parameter p des Systems (4.33) in C-Form ergeben sich zu

$$p = \tilde{M}^{-1}\tilde{Y} \quad (4.37)$$

mit \tilde{Y} und \tilde{M} gemäß Definition 4.3. Die Parameter lassen sich dann und nur dann mit Gl. (4.37) berechnen, falls $\text{Rang}(\tilde{M}) = n + m + 1$ gilt.

Beweis:

Zur Herleitung der Gl. (4.37) wird die äquivalente rechtsseitige Darstellung (3.21) des zu identifizierenden C-Systems (4.33) betrachtet. Auf diese Gleichung wird die Φ -Transformation (4.14) angewendet, unter der Voraussetzung, dass die fraktionalen

Randwerte der Modulationsfunktion in Definition 4.3 verschwinden. Die weitere Beweisführung entspricht der des Beweises von Satz 4.1. \square

Für die Invertierbarkeit der Matrix \tilde{M} gelten die Anmerkungen nach Satz 4.1 bezüglich der Invertierbarkeit von M . Im Unterschied zur Identifikationsgleichung (4.23) des RL-Systems, bei welcher rechtsseitige C-Ableitungen der Modulationsfunktion vorkommen, müssen bei der Identifikation des C-Systems linksseitige RL-Ableitungen der Modulationsfunktion in der Identifikationsgleichung (4.37) berücksichtigt werden. Ein weiterer auffälliger Unterschied besteht darin, dass die Modulationsfunktion keine gewöhnlichen, sondern fraktionale Randwerte erfüllen muss. Solch eine Funktion heuristisch zu finden, ist extrem schwer, da die fraktionalen Randwerte im Gegensatz zu den gewöhnlichen Randwerten nicht physikalisch (z.B. als Steigung etc.) interpretiert werden können. Wie schon in Abschnitt 4.2 erklärt, sind bei der modellbasierten Bestimmung der Modulationsfunktion in Kapitel 6 trotzdem die fraktionalen Randwerte zu bevorzugen.

Für die RL-Identifikation kann alternativ zu Gl. (4.23) eine äquivalente Identifikationsgleichung verwendet werden, in der linksseitige Ableitungen vorkommen:

Satz 4.3 (Äquivalente Riemann-Liouville-Identifikation)

Eine zu Satz 4.1 äquivalente Identifikation ergibt sich, indem in Gl. (4.23) die Ableitung ${}^t\mathcal{D}C_{t_v}$ durch ${}^t\mathcal{D}C_t$ ersetzt wird und y, u durch $\tilde{y} = Qy, \tilde{u} = Qu$ ersetzt werden.

Beweis:

Wird in dem Beweis von Satz 4.1 die äquivalente rechtsseitige FDGL (3.21) verwendet und dementsprechend die Modulationsfunktionstransformation mit der Ableitungsregel (4.12) anstelle der Ableitungsregel (4.11) eingesetzt, folgt unmittelbar der Satz 4.3. \square

Diesen Ansatz verfolgt auch [LLKGP13]. Die äquivalente Gleichung hat jedoch keine besonderen Vorteile, da die Berechnung der akasalen rechtsseitigen Ableitung in Gl. (4.23) wie erwähnt keine Probleme darstellt und die Modulationsfunktion identisch ist. Auch für die Identifikation des C-Systems lässt sich alternativ zu Gl. (4.37) eine äquivalente Identifikationsgleichung mit rechtsseitigen Ableitungen aufstellen:

Satz 4.4 (Äquivalente Caputo-Identifikation)

Eine zu Satz 4.2 äquivalente Identifikation ergibt sich, indem in Gl. (4.37) die Ableitung ${}^t\mathcal{D}RL_t$ durch ${}^t\mathcal{D}RL_{t_v}$ ersetzt wird und \tilde{y}, \tilde{u} durch $y = Q\tilde{y}, u = Q\tilde{u}$ ersetzt werden und die Modulationsfunktion anstelle der linksseitigen fraktionalen Randwerte die rechtsseitigen Randbedingungen erfüllt.

Beweis:

Wird in dem Beweis von Satz 4.2 die FDGL (4.33) anstelle der äquivalenten rechtsseitigen Darstellung (3.21) verwendet und dementsprechend die Modulationsfunktions-
transformation mit der Ableitungsregel (4.15) anstelle der Ableitungsregel (4.14) ein-
gesetzt, folgt der Satz 4.4, sofern die rechtsseitigen Randwerte der Gl. (4.15) berück-
sichtigt werden. \square

Eine günstige Eigenschaft des Modulationsfunktionsverfahrens besteht darin, dass sich
die Identifikation des RL-Systems leicht auf einen zeitvarianten Spezialfall

$${}^t_0\mathcal{D}RL_t^{\alpha_n}y(t) = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i g_i(t) {}^t_0\mathcal{D}RL_t^{\alpha_i}y(t) + \sum_{j=0}^m b_j h_j(t) {}^t_0\mathcal{D}RL_t^{\beta_j}u(t) \quad (4.38)$$

erweitern lässt. Die Koeffizienten $a_i g_i(t)$ und $b_j h_j(t)$ setzen sich aus dem Produkt be-
kannter zeitabhängiger Funktionen $g_i(t)$ bzw. $h_j(t)$ und den unbekanntem a_i bzw. b_j
zusammen. Die Berechnungsvorschrift für die unbekanntem Parameter a_i bzw. b_j der
Gl. (4.38) postuliert Satz 4.5 mit Gl. (4.39). Falls die Zeitfunktionen $g_i(t)$ und $h_j(t)$
unbekannt wären, ließen sie sich auch als Polynomfunktionen mit unbekanntem Koeff-
zienten darstellen. In diesem Fall könnten dann die einzelnen Polynomkoeffizienten
identifiziert werden. Aus Gründen der Übersicht werden hier aber die bekannten Funk-
tionen $g_i(t)$, $h_j(t)$ betrachtet.

Satz 4.5 (Zeitvariante Riemann-Liouville-Identifikation)

Die Identifikationsgleichung für Gl. (4.38) lautet:

$$p = \underline{M}^{-1}\underline{Y}, \quad (4.39)$$

wobei \underline{Y} und \underline{M} in Gl. (4.20) definiert sind und

$$\underline{m}_v^T := \begin{bmatrix} -Y_{t_v, t'_v} {}^t_0\mathcal{D}C_{t'_v}^{\alpha_0} g_0(t-v\Delta T)\varphi(t-v\Delta T) & \dots & -Y_{t_v, t'_v} {}^t_0\mathcal{D}C_{t'_v}^{\alpha_{n-1}} g_{n-1}(t-v\Delta T)\varphi(t-v\Delta T) \\ U_{t_v, t'_v} {}^t_0\mathcal{D}C_{t'_v}^{\beta_0} h_0(t-v\Delta T)\varphi(t-v\Delta T) & \dots & U_{t_v, t'_v} {}^t_0\mathcal{D}C_{t'_v}^{\beta_m} h_m(t-v\Delta T)\varphi(t-v\Delta T) \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

gilt.

Beweis:

Der Beweis ist identisch zum Beweis von Satz 4.1 mit dem einzigen Unterschied, dass
anstelle der Ableitungsregel (4.11) der Φ -Transformation die Produktregel (4.17) zu
verwenden ist. \square

4.4 Parameteridentifikation bei fehlerhaften Messgrößen

Unter realen Umständen sind die Messungen Funktionen $y_o(t)$ und $u_o(t)$, welche in vielen Fällen von additiven stochastischen Störungen $y_s(t)$ und $u_s(t)$ überlagert werden:

$$y(t) = y_o(t) + y_s(t), \quad (4.41)$$

$$u(t) = u_o(t) + u_s(t). \quad (4.42)$$

In diesem Fall kommt zu den Identifikationsgleichungen (4.23), (4.37) und (4.39) noch ein zusätzlicher Fehlerterm hinzu, der sogenannte Gleichungsfehler \underline{e} :⁴⁴

$$\underline{Y} = \underline{M}\hat{p} + \underline{e}. \quad (4.43)$$

Ein direktes Lösen der Gl. (4.43) bezüglich \hat{p} durch Invertierung von \underline{M} würde aufgrund des Gleichungsfehlers zu ungenauen Ergebnissen führen. Vielmehr ist es hier sinnvoll, mit Hilfe von Optimierungsverfahren die Parameter so zu wählen, dass ein geeignetes Fehlermaß minimiert wird. Für den Fall, dass der Gleichungsfehler im quadratischen Mittel minimiert werden soll, lassen sich bekannte Verfahren aus der Regelungstechnik anwenden [Lju99, IM11]. Die Parameter berechnen sich mit dem Modulationsfunktionsverfahren dann so wie in Lemma 4.6 beschrieben. Um den Einfluss der Störungen gering zu halten, sollte für die Anzahl der Messgleichungen $q \gg n + m + 1$ gelten [IM11, S.226].

Definition 4.4

Die Matrizen \underline{M} und \underline{Y} entsprechen denen in Definition 4.2, Definition 4.3 und Satz 4.5 mit dem Unterschied, dass die fehlerhaften Messgrößen (4.41) und (4.42) verwendet werden und für die Anzahl der Zeilen $q \gg n + m + 1$ gilt. Mit den Matrizen wird der Gleichungsfehler definiert:

$$\underline{e} := \underline{Y} - \underline{M}\hat{p} = \underline{Y}_s - \underline{M}_s\hat{p} \quad (4.44)$$

⁴⁴ Da die Parameter aufgrund der fehlerhaften Messgrößen nicht mehr exakt bestimmt werden können, wird in diesem Abschnitt die Nomenklatur \hat{p} anstatt p verwendet.

Lemma 4.6 (Methode der Modulationsfunktionen mit LS-Schätzung)

Der Parametervektor p der Systeme (4.19) und (4.33) mit den fehlerhaften Messgrößen (4.41) und (4.42) ist dann und nur dann identifizierbar, falls

$\text{Rang}(\underline{M}) = n + m + 1$ gilt. Für den Fall, dass der Gleichungsfehler \underline{e} aus Gl. (4.44) im quadratischen Mittel minimiert werden soll, ergeben sich die Parameter mit dem rekursiven LS-Verfahren [IM11, S.269-279] oder mit der Pseudoinversen $\underline{M}^+ := (\underline{M}^T \underline{M})^{-1} \underline{M}^T$ von \underline{M} [IM11, S.225-227]. Letzteres führt zu:

$$\hat{p} = \underline{M}^+ \underline{Y}, \quad (4.45)$$

wobei \underline{Y} und \underline{M} gemäß Definition 4.4 festgelegt sind.

Für die Regularität der Matrix \underline{M} gelten die Aussagen über die „hinreichende Anregung“ des zu identifizierenden eindeutigen Systems in den Anmerkungen nach Satz 4.1.

Der Vorteil der rekursiven LS-Schätzung ist, dass sie sich je nach Anwendung mit wenig Rechenaufwand im laufenden Betrieb einsetzen lässt. Daher wurde das rekursive Verfahren in dieser Arbeit verwendet. Somit würde zum Beispiel in Abbildung 4.2 ab 100s alle 20s ein neuer Schätzwert berechnet werden. Für die Konvergenz der Parameteridentifikation mit Gl. (4.45) gilt die Aussage in Korollar 4.2. Aus Korollar 4.2 folgt unmittelbar Korollar 4.3. Der Biasfehler (4.46) hängt von der Stärke der Störungen $y_s(t)$ und $u_s(t)$ ab. Um ihn klein zu halten kann das *Instrumental Variables*⁴⁵ (IV)-Verfahren anstatt der LS-Schätzung eingesetzt werden [Lju99, S.224-227].

Korollar 4.2 (Konvergenz)

Die Parameteridentifikation mit Gl. (4.45) besitzt den Bias

$$\underline{b} = E\{\underline{M}^+ \underline{e}\}, \quad (4.46)$$

wobei \underline{e} den Gleichungsfehler (4.44) darstellt [IM11, S.230]. Daher ist die Identifikation biasfrei falls $E\{\underline{e}\} = \underline{0}$ gilt und \underline{e} und \underline{M}^T unkorreliert sind.

Korollar 4.3

Da ohne weitere Vorkehrungen $E\{\underline{e}\} \neq \underline{0}$ gilt und \underline{e} und \underline{M}^T nicht unkorreliert sind, ist das Modulationsfunktionsverfahren nicht biasfrei. Der Bias entspricht Gl. (4.46).

Wie groß der Einfluss der Störung letztlich auf die Ergebnisse ist, wird hauptsächlich von den Eigenschaften der Φ -Transformation der verrauschten Eingangs- und Messgrößen und damit durch die Modulationsfunktion bestimmt. Auch die Wahl der Integrationszeit T sowie der Zeitverschiebung ΔT spielt bei der Transformation eine entscheidende Rolle. Durch die Integration wird die Rauschsensitivität sicher verringert.

⁴⁵ engl. für *Hilfsvariablen*

Günstig ist auch, dass keine Ableitungen bezüglich den Eingangs- und Messgrößen mehr vorkommen. Es kann aber entgegen den Behauptungen in [PR93] nicht davon ausgegangen werden, dass die Eingangs- und Messgrößen gefiltert werden, da es sich bei der Transformation eben nicht um eine Faltung handelt. Dementsprechend gibt es bei der Wahl der Modulationsfunktion und der Einstellung der Transformationsparameter keine Anhaltspunkte, was zu einem unsystematischen Ausprobieren führen kann. Abhilfe schafft hier die modellbasierte Bestimmung der Modulationsfunktion, welche in Kapitel 6 dargestellt wird.

4.5 Algebraisches Verfahren für fraktionale Systeme

Das Modulationsfunktionsverfahren kann die Koeffizienten der FDGLen (3.18) bzw. (3.19) identifizieren, nicht aber deren fraktionale Ableitungsordnungen. Zu diesem Zweck wird in dem vorliegenden Abschnitt ein Ansatz vorgestellt, welcher auf einer algebraischen Darstellung der FDGL im sogenannten Mikusiński-Operatorenbereich basiert und alle Parameter inklusive Ableitungsordnungen bestimmt [EKH15].⁴⁶ Für die Batterieidentifikation hat dies den Vorteil, dass die von den Ableitungsordnungen abhängige DRT direkt mit Formel (2.13) berechnet werden kann. Im Folgenden wird nun das algebraische Identifikationsverfahren zur Bestimmung der Parameter

$$p^T := [a_0 \quad \cdots \quad a_n \quad b_0 \quad \cdots \quad b_m \quad \alpha_0 \quad \cdots \quad \alpha_n \quad \beta_0 \quad \cdots \quad \beta_m] \quad (4.47)$$

der nicht-kommensurablen FDGL (3.18)

$${}^t d_t^{\alpha_n} y(t) = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i {}^t d_t^{\alpha_i} y(t) + \sum_{j=0}^m b_j {}^t d_t^{\beta_j} u(t) \quad (4.48)$$

hergeleitet. Aufgrund der Annahme 3.1 ist das System eindeutig. Zusätzlich werden stets homogene Anfangsbedingungen $\forall \hat{t} \leq 0 : u(\hat{t}) = i(\hat{t}) = 0$ vorausgesetzt.

Zunächst wird die Mikusiński-Interpretation der fraktionalen Ableitung dargelegt und die algebraische Übertragungsfunktion eingeführt. Darauf aufbauend wird eine Gleichung aufgestellt, die für das zu identifizierende System (4.48) charakteristisch ist und in welche die fraktionalen Ableitungsordnungen als gewöhnliche Parameter zusammen mit den Koeffizienten eingehen. Diese Gleichung ermöglicht dann die Identifikation von p .

4.5.1 Algebraische Darstellung fraktionaler Systeme

Bevor eine algebraische Systemdarstellung der FDGL (3.18) angegeben werden kann, muss die fraktionale Ableitung im sogenannten \mathfrak{R} -Bereich interpretiert werden. Dies

⁴⁶ Einige Vor- und Nachteile der Mikusiński-Operatorenrechnung im Vergleich zur Laplace-Transformation sind im Anhang K.1 zu finden.

kann mit Hilfe der Faltungs- und Divisionsalgebra aus Anhang K geschehen. Die Elemente im \mathfrak{R} -Bereich heißen Mikusiński-Operatoren. Für die Interpretation der fraktionalen Ableitungen wird eine Integrations- und Differentiationsvariable definiert:

Definition 4.5 (Mikusiński's Integrations- und Differentiationsvariable)

Die fraktionale Integrationsvariable wird mit dem ersten Homomorphismus (K.9) definiert:

$$\ell^\alpha := \Theta \left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right). \quad (4.49)$$

Die fraktionale Differentiationsvariable ist definiert als das algebraisch Inverse zu Gl. (4.49):

$$\mathfrak{p}^\alpha := \ell^{-\alpha}. \quad (4.50)$$

Man beachte, dass für $\alpha = 1$ die gewöhnliche Integrationsvariable $\ell = \sigma$ resultiert. Ähnlich der Differentiationsregel der Laplace-Transformation in Gl. (3.17) kann mit den Operatoren von Definition 4.5 nach Mikusiński eine algebraische Darstellung der fraktionalen Ableitung (3.6) einer Funktion $f \in \mathcal{R}$ hergeleitet werden. Dabei ist die Menge \mathcal{R} in Definition K.1 deklariert. Das Ergebnis ist in Satz 4.6 dargestellt.

Satz 4.6 (Fraktionale algebraische Ableitung)

Im \mathfrak{R} -Bereich gilt für jede Funktion $f \in \mathcal{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}^{>0}$ die folgende Gleichung:

$${}_0\mathcal{D}_t^\alpha f = \mathfrak{p}^\alpha f + \psi, \quad (4.51)$$

wobei die Mikusiński-Darstellung der Initialisierungsfunktion in Lemma J.1 zu finden ist.

Der Beweis für Satz 4.6 befindet sich im Anhang I.8. Wie im Anhang K erwähnt, ist die Funktionsmenge der im \mathfrak{R} -Bereich interpretierbaren Funktionen größer als die Funktionsmenge der im Laplace-Bereich interpretierbaren Funktionen. Der Zusammenhang (4.51) kann dazu genutzt werden, um die fraktionale FDGL (3.18) in eine algebraische Darstellung zu überführen:

Lemma 4.7 (Algebraische Übertragungsfunktion)

$a_i, b_j \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, $m \leq n$, $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}^{>0}$

$$G(\mathfrak{p}) := \frac{y}{u} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j \mathfrak{p}^{\beta_j}}{\sum_{i=0}^n a_i \mathfrak{p}^{\alpha_i}}. \quad (4.52)$$

Beweis:

Jeder Summenterm der FDGL (4.48) lässt sich mit Hilfe von (K.13) und Gl. (4.51) nach Mikusiński unter Annahme homogener Initialisierungsfunktionen ($\tilde{t} \leq 0 : f(\tilde{t}) = 0$) wie folgt interpretieren:

$$v_0^{\tilde{t}} d_t^\gamma f = v \mathbf{p}^\gamma f. \quad (4.53)$$

□

In Beispiel K.1 wird die algebraische Darstellung des Batteriesystems aus Abschnitt 3.2.2 betrachtet.

4.5.2 Charakteristische Gleichung

Das besondere Merkmal des algebraischen Verfahrens besteht darin, dass die Ableitungsordnungen unbekannt angenommen werden. Eine direkte Interpretation des Systems im Zeitbereich wie beim Modulationsfunktionsverfahren ist daher ausgeschlossen. Es ist allerdings möglich, durch sukzessives Ableiten für jedes fraktionale System (4.52) eine charakteristische Gleichung aufzustellen, in welcher alle Parameter p inklusive der fraktionalen Ableitungsordnungen als gewöhnliche Parameter erscheinen und die sonst nur noch von den Ein- und Ausgangsgrößen sowie der gewöhnlichen Mikusiński-Variablen \mathbf{p} abhängig ist. Diese Gleichung, für die zunächst folgende Definition festgelegt wird, ist in Gl. (4.55) deklariert.

Definition 4.6

$$\underline{l} := [\mathbf{p}^{\alpha_0} \quad \dots \quad \mathbf{p}^{\alpha_n} \quad \mathbf{p}^{\beta_0} \quad \dots \quad \mathbf{p}^{\beta_m}]^T. \quad (4.54)$$

Satz 4.7 (Charakteristische Gleichung)

Für jedes algebraische System der Form (4.52) gilt das LGS $\underline{H}\underline{l} = \underline{0}$ und daher die charakteristische Gleichung:

$$F(y, u, \mathbf{p}^{-k}, p) = \det(\underline{H}) = 0, \quad k \in \mathbb{N}_{>0}, \quad (4.55)$$

mit

$$\underline{H} := \begin{bmatrix} a_0 y & \cdots & a_n y & -b_0 u & \cdots & -b_m u \\ \hat{y}_{1,0}^{\alpha,a} & \cdots & \hat{y}_{1,n}^{\alpha,a} & -\hat{u}_{1,0}^{\beta,b} & \cdots & -\hat{u}_{1,m}^{\beta,b} \\ \hat{y}_{2,0}^{\alpha,a} & \cdots & \hat{y}_{2,n}^{\alpha,a} & -\hat{u}_{2,0}^{\beta,b} & \cdots & -\hat{u}_{2,m}^{\beta,b} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hat{y}_{n+m+1,0}^{\alpha,a} & \cdots & \hat{y}_{n+m+1,n}^{\alpha,a} & -\hat{u}_{n+m+1,0}^{\beta,b} & \cdots & -\hat{u}_{n+m+1,m}^{\beta,b} \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$

Die einzelnen Matrixelemente berechnen sich durch:

$$\hat{h}_{M,i}^{\gamma,c} := \frac{1}{\mathbf{p}^{\gamma_i}} \left(\frac{d}{d\mathbf{p}} \right)^M (c_i \mathbf{p}^{\gamma_i} h). \quad (4.57)$$

Beweis:

Die Faktorisierung der algebraischen Übertragungsfunktion (4.52) führt zu:

$$a_0 \mathbf{p}^{\alpha_0} y + \dots + a_n \mathbf{p}^{\alpha_n} y - b_0 \mathbf{p}^{\beta_0} u - \dots - b_m \mathbf{p}^{\beta_m} u = 0. \quad (4.58)$$

Nun wird die vorherige Gleichung abgeleitet und es ergibt sich beispielhaft für den ersten Term $a_0 \mathbf{p}^{\alpha_0} y$:

$$a_0 \alpha_0 \mathbf{p}^{\alpha_0-1} y + a_0 \mathbf{p}^{\alpha_0} y', \quad (4.59)$$

wobei $y' := \frac{dy}{d\mathbf{p}}$ gilt. Im nächsten Schritt wird die so entstandene Gleichung nochmals abgeleitet und man erhält z.B. für Gl. (4.59):

$$\alpha_0 a_0 (\alpha_0 - 1) \mathbf{p}^{\alpha_0-2} y + 2\alpha_0 a_0 \mathbf{p}^{\alpha_0-1} y' + \alpha_0 \mathbf{p}^{\alpha_0} y''. \quad (4.60)$$

Dies wird nun sukzessive fortgeführt, bis es soviele Gleichungen wie unbekannte Ableitungsordnungen gibt. Dadurch erhält man das LGS:

$$\underline{H} \begin{bmatrix} \mathbf{p}^{\alpha_0} & \cdots & \mathbf{p}^{\alpha_n} & \mathbf{p}^{\beta_0} & \cdots & \mathbf{p}^{\beta_m} \end{bmatrix}^T = \underline{0}. \quad (4.61)$$

Offensichtlich muss hier $\det(\underline{H}) = 0$ gelten, damit das LGS erfüllt ist, was Gl. (4.55) bestätigt. \square

Für den Fall, dass r Ableitungsordnungen ($r < n + m + 2$) aus dem Vektor \underline{p} unbekannt sind, kann eine vereinfachte charakteristische Gleichung aufgestellt werden. Fasst man im Vektor \underline{l}^\square alle Mikusiński-Ableitungsvariablen mit unbekanntem Ableitungsordnungen zusammen, so ergibt sich Korollar 4.4 direkt aus dem Satz 4.7. In dem Vektor \underline{l}^\square kommt dabei jede Ableitungsvariable nur einmal vor.

Definition 4.7

$$\tilde{\underline{l}} \in \mathbb{R}^{r+1 \times 1}, \quad \underline{l}^\square \in \mathbb{R}^{r \times 1}$$

$$\tilde{\underline{l}} := \begin{bmatrix} 1 & \underline{l}^{\square T} \end{bmatrix}^T \quad (4.62)$$

Korollar 4.4 (Reduzierte charakteristische Gleichung)

Falls es r unbekannte Ableitungsordnungen gibt, sind nur die ersten $r + 1$ Zeilen des LGS $\underline{H}\underline{l} = \underline{0}$ aus Satz 4.7 von Interesse. Aus dem LGS $\underline{H}_{r+1 \times n+m+2}\underline{l}$ heraus lässt sich dann eine reduzierte Gleichung $\tilde{\underline{H}}\tilde{\underline{l}} = \underline{0}$ aufstellen, zu der es folgende zu (4.55) alternative charakteristische Gleichung gibt:

$$\tilde{\underline{H}} \in \mathbb{R}^{r+1 \times r+1}$$

$$\det(\tilde{\underline{H}}) = 0. \quad (4.63)$$

Das folgende Beispiel zeigt die charakteristische Gleichung für das Batteriesystem in Beispiel K.1:

Beispiel 4.2:

Die algebraische Batteriedarstellung (K.14) enthält die unbekannte Ableitung α doppelt und die bekannte Ableitungsordnung Null kommt ebenfalls zweimal vor. Daher lässt sich die reduzierte charakteristische Gleichung aus Korollar 4.4 aufstellen. Da es eine unbekannte Ableitungsordnung gibt, wird mit den ersten beiden Zeilen der Matrix (4.56) folgendes LGS aufgestellt:

$$\begin{bmatrix} a_0 u & u & -b_0 i & -b_1 i \\ a_0 u' + a_0 \alpha u \mathbf{p}^{-1} & u' & -b_0 i' & -b_1 i' - b_1 \alpha i \mathbf{p}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}^\alpha \\ 1 \\ 1 \\ \mathbf{p}^\alpha \end{bmatrix} = \underline{0}. \quad (4.64)$$

Umschreiben der Gleichung führt zu:

$$\begin{bmatrix} a_0 u - b_1 i & u - b_0 i \\ a_0 u' - b_1 i' + (a_0 u - b_1 i) \alpha \mathbf{p}^{-1} & u' - b_0 i' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}^\alpha \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{0}, \quad (4.65)$$

wobei $f' := \frac{df}{d\mathbf{p}}$ gilt. Mit der Matrix

$$\tilde{\underline{H}} = \begin{bmatrix} a_0 u - b_1 i & u - b_0 i \\ a_0 u' - b_1 i' + (a_0 u - b_1 i) \alpha \mathbf{p}^{-1} & u' - b_0 i' \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

erhält man die charakteristische Gleichung entsprechend Gl. (4.63):

$$\det(\tilde{\underline{H}}) = (a_0 u - b_1 i)(u' - b_0 i') - (a_0 u' - b_1 i' + (a_0 u - b_1 i) \alpha \mathbf{p}^{-1})(u - b_0 i) = 0. \quad (4.67)$$

4.5.3 Parameteridentifikation

Wurde die charakteristische Gleichung (4.55) bzw. (4.63) einmal aufgestellt, so lässt sich diese im Zeitbereich interpretieren, da es keine unbekannte fraktionale Mikusiński-Variable mehr gibt. Die Gleichung lässt sich so umformen, dass Terme aus Produkten von u und y sowie deren ganzzahligen Ableitungen entstehen. Diese Terme werden mit gewöhnlichen Integrationsvariablen multipliziert. Im Zeitbereich entsteht somit eine Gleichung mit integrierten Faltungstermen. Fasst man die aus den ursprünglichen Parametern zusammengesetzten Koeffizienten dieser Terme als Ersatzparameter $\underline{\theta}$ zusammen und erzeugt linear unabhängige Gleichungen durch wiederholte gewöhnliche Integration, so ergibt sich schließlich ein LGS zur Bestimmung der Ersatzparameter. Dieses Vorgehen bezeichnet man gemeinhin als Überparametrierung [GR13a]. Die ursprünglichen Systemparameter lassen sich dann aus den nichtlinearen Zusammenhängen zwischen Ersatz- und Systemparametern bestimmen. Das Vorgehen wird in Beispiel 4.3, welches auf Beispiel 4.2 aufbaut, wieder für die Batterieidentifikation erläutert. Die praktische Umsetzung folgt mit Simulationsdaten einer Lithium-Ionen-Zelle in Abschnitt 5.4.

Beispiel 4.3:

Für die Batterieidentifikation wird deren charakteristische Gl. (4.67) aus Beispiel 4.2 aufgegriffen. Einsetzen der Bauteilparameter in diese Gleichung und Umformung führen zu:

$$\theta_1 = -(R + R_0)R_0, \quad \theta_2 = 2R_0 + R, \quad \theta_3 = -\frac{R}{\alpha}$$

$$\theta_1 \cdot \frac{ii}{p} + \theta_2 \cdot \frac{iu}{p} + \theta_3 \cdot (i'u - iu') = \frac{uu}{p}. \quad (4.68)$$

Interpretation der Gl. (4.68) im Zeitbereich und wiederholte Integration führen zu folgendem LGS:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\Pi}(t)^T \\ \int_0^t \underline{\Pi}(t')^T dt' \\ \int_0^t \left(\int_0^{t'} \underline{\Pi}(t'')^T dt'' \right) dt' \end{bmatrix}}_{=:P(t)} \underbrace{\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}}_{=: \underline{\theta}} = \underbrace{\begin{bmatrix} q(t) \\ \int_0^t q(t') dt' \\ \int_0^t \left(\int_0^{t'} q(t'') dt'' \right) dt' \end{bmatrix}}_{=:q(t)}, \quad (4.69)$$

mit

$$\underline{\Pi}(t)^T = [\pi_{11}(t) \quad \pi_{12}(t) \quad \pi_{13}(t)], \quad (4.70)$$

$$\pi_{11}(t) = \int_0^t (i * i)(t') dt', \quad \pi_{12}(t) = \int_0^t (i * u)(t') dt', \quad (4.71)$$

$$\pi_{13}(t) = (-t \cdot i(t)) * u(t) - i(t) * (-t \cdot u(t)) \quad (4.72)$$

und

$$q(t) = \int_0^t (u * u)(t') dt'. \quad (4.73)$$

Falls die Matrix $\underline{P}(t)$ regulär ist, können die Ersatzparameter durch

$$\underline{\theta} = \underline{P}(t)^{-1} \underline{q}(t) \quad (4.74)$$

berechnet werden. Für die Regularität der Matrix $\underline{P}(t)$ gelten die Aussagen über die „hinreichende Anregung“ des zu identifizierenden eindeutigen Systems in den Anmerkungen nach Satz 4.1. Die Bauteilparameter ergeben sich hier zu:

$$R_0 = \frac{\theta_2}{2} - \sqrt{\frac{\theta_2^2}{4} + \theta_1}, \quad R = \sqrt{\theta_2^2 + 4\theta_1}, \quad (4.75)$$

$$\alpha = \frac{-\sqrt{\theta_2^2 + 4\theta_1}}{\theta_3}. \quad (4.76)$$

Die verallgemeinerte Kapazität Q kommt in dem Ersatzvektor $\underline{\theta}$ nicht mehr vor. Da die restlichen Parameter aber mit den Gln. (4.75) und (4.76) bekannt sind, kann Gl. (K.14) nach dem noch fehlenden Parameter aufgelöst werden:

$$Q = \frac{\mathfrak{p}^{-\alpha}((R_0 + R)i - u)}{Ru - R_0 Ri}. \quad (4.77)$$

Interpretation im Zeitbereich führt damit zu:

$$Q = \frac{1}{Ru(t) - R_0 Ri(t)} {}_0^t i^\alpha ((R_0 + R)i(t) - u(t)). \quad (4.78)$$

Mit Formel (2.13) kann schließlich die DRT berechnet werden, deren Ergebnisse in Abschnitt 5.4 vorgestellt werden.

Problematisch an der beschriebenen Vorgehensweise ist, dass schon bei Systemen kleiner Ordnung sehr komplexe Gleichungen entstehen können, woraus sich eine hohe Anzahl zu bestimmender Ersatzparameter ergibt. Zu erkennen ist das an der Matrix \underline{H} der charakteristischen Gleichung (4.55), welche schon für $m = n = 1$ einer 4×4 -Matrix entspricht. Als Konsequenz erhält man schlecht konditionierte Matrizen, die zu einem rauschempfindlichen Verhalten und Singularitäten führen, was z.B. in der Anwendung in Abschnitt 5.4 oder auch in [GR13a, Köl13] deutlich wird. Außerdem können sich durch die Umformungen bei der Bestimmung der Determinanten Parameter herauskürzen. Diese Parameter sind dann entweder nicht identifizierbar oder können, wie in Beispiel 4.3 die Pseudokapazität Q , erst in einem zweiten Schritt berechnet werden. Im Gegensatz zu den Modulationsfunktionsverfahren in den Kapiteln 4 und 6 ist eine korrekte Berücksichtigung der Initialisierungsfunktionen nicht möglich, da man die Ableitungsordnung kennen muss, um diese Funktionen und ihre Mikusiński-Darstellung berechnen zu können (siehe Anhang J). Eine Identifikation unter Annahme der speziellen Randbedingungen in [Pod99, S.104,106] ist zwar möglich [GR13a], aber von geringer Bedeutung, da dies einen Ausnahmefall darstellt. Daher bleibt der große Vorteil des Verfahrens, dass die unbekanntesten fraktionalen Ableitungsordnungen mit identifiziert werden können.

4.6 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde das fraktionale Modulationsfunktionsverfahren zur Identifikation fraktionaler Differentialgleichungen beliebiger Ordnung erstmalig gesamtheitlich vorgestellt. Hierbei wurden sowohl der Fall von störfreien Messdaten als auch der Fall von mit additiven Störungen versehenen Daten theoretisch beleuchtet. Das Verfahren basiert auf einer neu eingeführten Φ -Transformation, welche die fraktionalen Ableitungen der Eingangs- und Messgrößen auf die sogenannte Modulationsfunktion überträgt. Die Modulationsfunktion muss bestimmte Randwerte besitzen und wird in dem vorliegenden Kapitel heuristisch bestimmt. Es kann erwartet werden, dass sich durch die Transformation die Rauschempfindlichkeit verbessert. Außerdem hat sie den Vorteil, dass die Historie der Messgrößen nicht mehr benötigt wird, was insbesondere für fraktionale Systeme mit dem unendlichen Gedächtnis wichtig ist. Das vorliegende Kapitel zeigte außerdem die konkrete Identifikationsgleichung, mit der sich das in dieser Arbeit betrachtete Batteriemodell mit der Methode der Modulationsfunktionen identifizieren lässt. Bei der Untersuchung des Konvergenzverhaltens im Falle von fehlerhaften Messgrößen stellte sich heraus, dass das Verfahren ohne weitere Vorkehrungen einen Biasfehler aufweist.

Eine notwendige Voraussetzung des Modulationsfunktionsverfahrens ist, dass die fraktionalen Ableitungsordnungen bekannt sind. Daher wurde ein algebraischer Ansatz zur Identifikation dieser Ableitungsordnungen vorgestellt. Hierbei wird die fraktionale Differentialgleichung in eine algebraische Darstellung überführt. Wiederholtes ganzzahliges Ableiten führt dann für jedes System zu einer charakteristischen Gleichung, in welcher die fraktionalen Ableitungsordnungen zusammen mit den sonstigen Koeffizienten als gewöhnliche Parameter auftreten und die fraktionalen Ableitungsoperatoren verschwunden sind. Die Identifikationsgleichung ergibt sich durch die Zeitbereichsinterpretation der charakteristischen Gleichung.

5 Batterieidentifikation

Ziel dieses Kapitels ist es, Indizien dafür zu liefern, dass die Methode der Modulationsfunktionen und das algebraische Verfahren aus Kapitel 4 zur Identifikation einer realen Lithium-Ionen-Zelle angewandt werden können. Die Verifikation erfolgt sowohl anhand von Simulations- [EKH14c, EKH15] als auch mit realen Messdaten [ESSH17]. Es werden keine umfangreichen Studien durchgeführt, sondern die Anwendung beispielhaft an einer einzigen LiPO-Batteriezelle von KOKAM aus Anhang G gezeigt.

Um die Messdaten generieren zu können, wurde am *Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme* (IRS) im Rahmen der vorliegenden Arbeit eine Batteriemessstandsumgebung aufgebaut [EH15, ESSH17]. Diese Testumgebung unterscheidet sich von gängigen, aus der Materialwissenschaft bekannten Aufbauten hauptsächlich dadurch, dass beliebige Signale mit sehr hoher Dynamik aufgeschaltet werden können. Der Aufbau des Batteriemessstands, die Beschreibung der einzelnen Komponenten und deren Vernetzung sowie der Prozess der Datengenerierung werden gesondert im Anhang M erläutert.

Der erste Abschnitt präsentiert die Identifikationsergebnisse des Modulationsfunktionsverfahrens, basierend auf Simulationsdaten. Hierbei wird, wie in der gesamten Arbeit (Annahme 2.1) und bei der EIS, die Ruhespannung als bekannt vorausgesetzt. Weitere Ergebnisse zeigen, dass es möglich ist, die Ruhespannung mit zu identifizieren. Anschließend folgt die Identifikation mit realen Messungen. Das Kapitel endet mit der auf Simulationsdaten basierenden Anwendung des algebraischen Verfahrens.

5.1 Methode der Modulationsfunktionen mit Simulationsdaten

In diesem Abschnitt wird die Methode der Modulationsfunktionen zur simulativen Identifikation der Bauteilparameter R_0 , R , Q des Zeitbereichsmodells der Batterie aus Gl. (4.26) eingesetzt [EKH14c]. Das Modell geht davon aus, dass die Ruhespannung bekannt ist. Zunächst erfolgt die Beschreibung der Simulations- und der Identifikationseinstellungen und im Anschluss die Diskussion der Ergebnisse.

5.1.1 Simulations- und Identifikationssetting

Das Identifikationsschema dieses Abschnitts ist in Abbildung 5.1 dargestellt. Die Identifikation erfolgt simulativ mit dem Zeitbereichsmodell der Batterie aus Gl. (4.26):

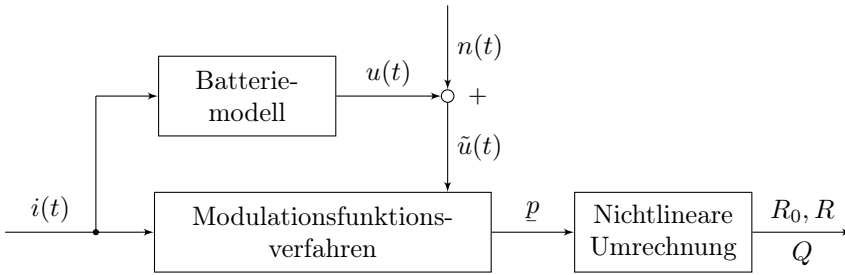


Abbildung 5.1: Blockdiagramm der Identifikationsprozedur

$$b_0 = R_0 + R, \quad b_1 = R_0 R Q, \quad a_0 = R Q, \quad t_0 = 0$$

$$u(t) = -a_0 {}^t D R L_t^\alpha u(t) + b_0 i(t) + b_1 {}^t D R L_t^\alpha i(t). \quad (5.1)$$

Um die Batterie realitätsnah zu simulieren, werden Modellparameter verwendet, welche aus einer präzisen EIS-Messung bei einem sehr hohen $\text{SNR} > 100 \text{ dB}$ und einem SoC von 50% extrahiert wurden: $R_0 = 0.0154 \Omega$, $R = 0.0441 \Omega$, $Q = 610.69 \text{ As/V}$, $\alpha = 0.71$. Der fraktionale Exponent wird vereinbarungsgemäß bei der Identifikation als bekannt vorausgesetzt. Das Stromanregungssignal $i(t)$ ist eine mit einem 8-Bit Schieberegister erzeugte *Pseudo-Random Binary Sequence*⁴⁷ (PRBS) mit einer Amplitude von 1 A und einem Sprungabstand von 1 s [Kro12]. Die Taktrate beträgt 0.1 s. Die Berechnung der Ausgangsspannung $u(t)$ des Modells (5.1) erfolgt mit Hilfe des Matlab-Befehls *Fractional-Order Transfer Function* (FOTF) aus der *Fractional-Order Modeling and Control* (FOMCON)-Toolbox. Sie wird bei der Identifikation mit mittelwertfreiem weißen gaußschen Rauschen $n(t) = n_{WR}(t)$ überlagert ($\tilde{u}(t) = u(t) + n_{WR}(t)$). Die Abbildung 5.2 zeigt für $n(t) = 0$ einen Ausschnitt des PRBS-Stromsignals und der Spannungsantwort. In der Simulation gilt o.B.d.A $\forall \tilde{t} \leq t_0 : u(\tilde{t}) = i(\tilde{t}) = 0$. Der Strom und die verrauschte Spannung dienen dann zur Identifikation mit der Methode der Modulationsfunktionen.

In Gl. (4.29) des Beispiels 4.1 wurde die zu dem Modell (5.1) passende Identifikationsgleichung $\underline{p} = \underline{M}^{-1} \underline{Y}$ schon aufgestellt. Da hier jedoch Störungen betrachtet werden, erfolgt die Berechnung anstatt mit der Inversen von \underline{M} , entsprechend Lemma 4.6 durch das Modulationsfunktionsverfahren in Kombination mit der rekursiven LS-Schätzung. Als Modulationsfunktion $\varphi(t)$ findet die im Anhang C beschriebene Spline-Typ-Funktion Verwendung.⁴⁸ Die einstellbaren Parameter lauten $m = 12$, $T_0 = 43.75 \text{ s}$ und folglich $T = 525 \text{ s}$, womit auf jeden Fall sichergestellt ist, dass $\varphi(t_0) = \varphi(t_0 + T) = 0$ gilt. Da für die Spline-Typ-Modulationsfunktion $\varphi(t_0) = 0$ gilt, kann gemäß (A.6) sowohl RL als auch C zur Ableitungsberechnung verwendet werden.

⁴⁷ engl. für *pseudobinäres Rauschen*

⁴⁸ Die Identifikation mit einer sinusoidalen Funktion ergab sehr ähnliche Ergebnisse [EKH14c], weshalb sie hier nicht extra betrachtet wird.

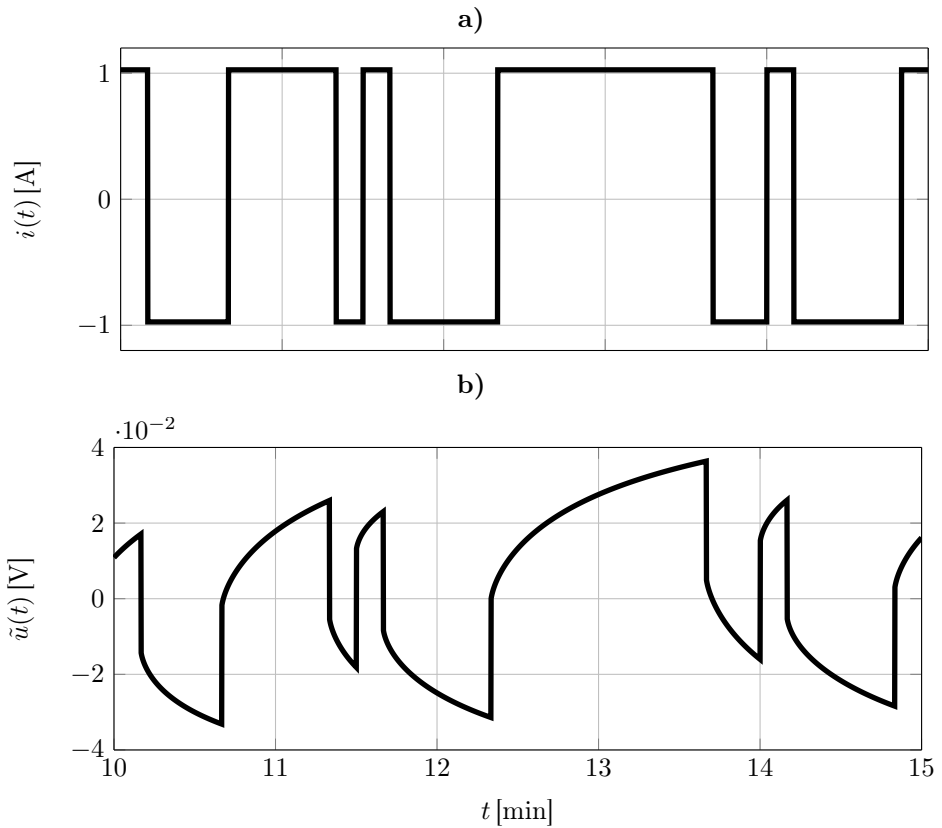


Abbildung 5.2: Abbildung a) Ausschnitt des pseudobinären Stromsignals, b) Zugehörige Spannungsantwort des Batteriemodells ohne Rauschen ($n(t) = 0$)

Außerdem verschwinden wegen $\forall \tilde{t} \leq t_0 : \varphi(\tilde{t}) = 0$ die Initialisierungsfunktionen. Zur Schätzung des Parametervektors:

$$\underline{p} := \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RQ \\ R_0 + R \\ R_0RQ \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

wird die rekursive LS-Schätzung verwendet. Insgesamt wurden 150 Messgleichungen erzeugt, mit einer Zeitverschiebung von $\Delta T = 6.5$ s. Daher ist alle 6.5 s ein neuer Schätzwert berechnet worden. Der Messzeitraum betrug $150\Delta T + T = 1500$ s. Die rechtsseitigen Ableitungen der Modulationsfunktion wurden mit dem auf dem Short-Memory-Prinzip aus Anhang L basierenden Matrixansatz von [Pod00] berechnet.

Im letzten Schritt wurden die Bauteilparameter über die nichtlinearen Zusammenhänge in Gl. (5.2) bestimmt:

$$\begin{bmatrix} R_0 \\ R \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_3/p_1 \\ p_2 - p_3/p_1 \\ p_1/(p_2 - p_3/p_1) \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Die reale Berechnungszeit der Simulation betrug inklusive Identifikation ca. 2s und war damit im Vergleich zur eingestellten Simulationszeit von 25 min deutlich geringer, was als Indiz für die Echtzeitfähigkeit angesehen werden kann. Als Hardware wurde ein Laptop mit Intel Core i5 2.2 GHz Prozessor verwendet.

5.1.2 Identifikationsergebnisse

Die Prozedur wird entsprechend Abbildung 5.1 durchgeführt. Betrachtet werden zwei Szenarien: Zunächst erfolgt eine Diskussion der Ergebnisse im Falle einer rauschfreien Spannung, d.h. $n(t) = 0$, und dann der Ergebnisse bei mittelwertfreiem weißen gaußschen Rauschen $\tilde{u}(t) = u(t) + n_{WR}(t)$. Die Resultate im Falle eines Sinusrauschens können [EKH14c] entnommen werden.

Szenario 1 In Abbildung 5.3 a) sind die Fehler $e(t)$ der identifizierten Parameter im Falle einer rauschfreien Spannung $\tilde{u}(t) = u(t)$ dargestellt. Trotz der idealen Bedingungen liegen die Fehler nicht exakt bei Null. Die größte Abweichung beträgt ca. 0.11 %. Dies lässt sich durch numerische Ungenauigkeiten bei der Berechnung der fraktionalen Ableitungen der Modulationsfunktion und in der Simulation erklären. Da die Unsicherheit des LS-Verfahrens in den ersten Minuten vergleichsweise hoch ist, haben die Ungenauigkeiten dort einen großen Einfluss auf die Ergebnisse. Für große Zeiten konvergiert die Schätzung gegen einen sehr kleinen Biasfehler.

Szenario 2 In Abbildung 5.3 b) sind die Parameterfehler $e(t)$ für den Fall dargestellt, dass die Ausgangsspannung von einem mittelwertfreien weißen gaußschen Rauschen mit einer Varianz von $\sigma^2 = 0.25 \mu V^2$ überlagert ist ($\tilde{u}(t) = u(t) + n_{WR}(t)$). Dies führt zu einem SNR = 32.5 dB. Trotz dieses sehr niedrigen SNR (die Impedanzspektroskopie hat in dieser Arbeit ein SNR > 100 dB) erscheinen die Ergebnisse äußerst akkurat. Durch die vergleichsweise hohe Kovarianz des LS-Verfahrens zu Beginn, haben die Störungen in den ersten Minuten einen großen Einfluss auf die Ergebnisse. Mit der Zeit wird der Einfluss geringer.⁴⁹ Entsprechend Korollar 4.3 ist das Modulationsfunktionsverfahren im Falle von Störungen jedoch nicht biasfrei. Dies ist auch in der Anwendung zu sehen, da die Parameterfehler gegen einen Wert ungleich Null konvergieren. Die Abweichungen

⁴⁹ Dieses Einschwingen bei fehlerhaften Messdaten kann auch beim klassischen LS-Verfahren beobachtet werden [IM11, S.242-244]. Die Einschwingzeit von mehreren Minuten ist hier, verglichen mit den Zeiten bei dem klassischen LS-Verfahren im Sekundenbereich, länger. Der Grund ist, dass beim klassischen Verfahren zu jeder Taktzeit eine neue Messgleichung vorliegt, während hier die Zeitverschiebung $\Delta T = 6.5$ s beträgt.

liegen allerdings in einem Bereich, der kleiner als 1% ist. Das Verfahren zeigt sich also wenig rauschempfindlich.

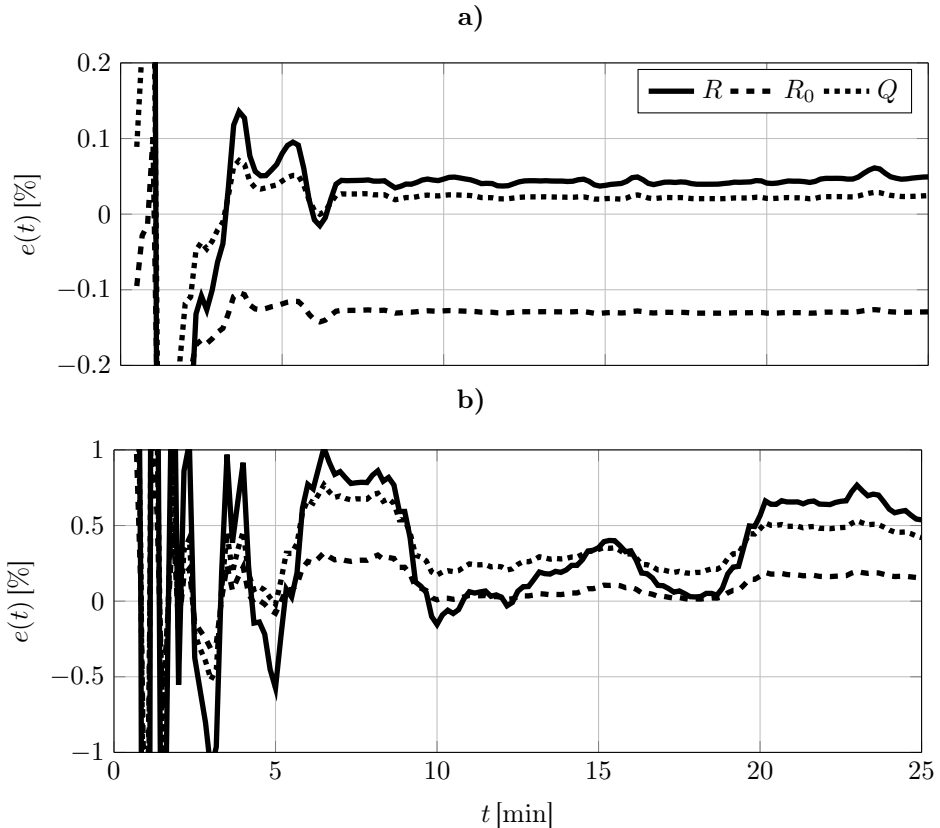


Abbildung 5.3: Fehler $e(t)$ bei der Identifikation der Batterieparameter bei Verwendung einer Spline-Typ-Funktion: a) Ohne Rauschen, b) Bei additivem weißen Ausgangsrauschen mit einem $\text{SNR} = 32.5$ dB

5.2 Methode der Modulationsfunktionen mit Simulationsdaten inklusive Ruhespannung

In der gesamten Arbeit wird die Ruhespannung entsprechend Annahme 2.1 als bekannt angenommen und kann daher aus dem Batteriemodell eliminiert werden. Dieser Abschnitt beschreibt nun noch die Identifikation für den Fall, dass die Ruhespannung unbekannt ist [EKH14b]. Sie wird dann zusammen mit den anderen Parametern iden-

tifiziert. Zur Identifikation wird die Methode der Modulationsfunktionen aus Kapitel 4 eingesetzt.

5.2.1 Identifikationsgleichung

Für den Fall einer unbekanntem Ruhespannung muss gemäß Abschnitt 2.1.1 zu der Spannung über dem Innenwiderstand und dem RQ-Element noch $u_0(\text{SoC})$ addiert werden. Für die Klemmenspannung gilt dann:

$$u(t) = u_0(\text{SoC}) + u_{RQ}(t) + R_0 i(t). \quad (5.4)$$

Die nichtlineare Ruhespannung⁵⁰ lässt sich mit der Taylorreihe linearisieren:

$$u_0(\text{SoC}) = \bar{u}_0 + \frac{\partial u_0}{\partial \text{SoC}} \frac{1}{C(T_{\text{voll}})} \int_0^t i(t') dt'. \quad (5.5)$$

Der Ausdruck $C_0 = \frac{\partial \text{SoC}}{\partial u_0} C(T_{\text{voll}})$ wird auch als differentielle Kapazität bezeichnet [Sch13, S.22]. Einsetzen von Gl. (5.5) in Gl. (5.4) ergibt:

$$u(t) = \bar{u}_0 + u_{RQ}(t) + R_0 i(t) + \frac{1}{C_0} \int_0^t i(t') dt'. \quad (5.6)$$

Schließlich löst man Gl. (5.6) nach $u_{RQ}(t)$ auf und setzt den Ausdruck in die FDGL (3.24) eines RQ-Elements ein. Insgesamt resultiert folgende Batteriebeschreibung im Zeitbereich:

$$\begin{aligned} u(t) = & -a_0 {}^t D R L_t^\alpha u(t) + b_3 {}^t D R L_t^\alpha i(t) + b_2 {}^t D R L_t^{\alpha-1} i(t) \\ & + b_1 i(t) + b_0 {}^t D_t^{-1} i(t) + \bar{u}_0 + a_1 {}^t D R L_t^\alpha \bar{u}_0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

mit $b_0 = \frac{1}{C_0}$, $b_1 = R_0 + R$, $b_2 = \frac{RQ}{C_0}$, $b_3 = R_0 RQ$, $a_1 = RQ$, $a_0 = RQ$. Der erweiterte Parametervektor lautet daher:

$$\underline{p} := \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \bar{u}_0 \\ RQ\bar{u}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RQ \\ \frac{1}{C_0} \\ R_0 + R \\ \frac{RQ}{C_0} \\ R_0 RQ \\ \bar{u}_0 \\ RQ\bar{u}_0 \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Der Parameter $p_7 = RQ\bar{u}_0$ ist eine Kombination aus p_1 und p_6 : $p_7 = p_1 p_6$. Dementsprechend enthält p_7 keine neuen Informationen und muss erst gar nicht bestimmt werden. Wie schon bei der Identifikation ohne Ruhespannung in Abschnitt 5.1 wird das Modulationsfunktionsverfahren aus Kapitel 4 zur Identifikation der Parameter \underline{p} verwendet. Mit Satz 4.1 ergibt sich für Gl. (5.7) die folgende Identifikationsgleichung, wobei der

⁵⁰ Für den Verlauf der Ruhespannung in Abhängigkeit des Ladezustands siehe Abbildung G.3.

letzte Summenterm in (5.7) aus den angegebenen Gründen nicht mehr berücksichtigt wird:

$$\underline{p} = \underline{M}^{-1}\underline{Y} \quad (5.9)$$

mit:

$$t_v = t_0 + v\Delta T, \quad t'_v = t_v + T$$

$$\underline{Y} := [W_0 \quad W_1 \quad \cdots \quad W_{q-1}]^T, \quad \underline{M} := [m_1 \quad \cdots \quad m_{q-1}]^T \quad (5.10)$$

und

$$W_v := U_{t_v, t'_v}^{\varphi(t-v\Delta T)}, \quad (5.11)$$

$$m_v^T = \begin{bmatrix} -U_{t_v, t'_v}^{t\mathcal{D}C_{t'_v}^{\alpha} \varphi(t-v\Delta T)} & I_{t_v, t'_v}^{t\mathcal{D}C_{t'_v}^{\alpha} \varphi(t-v\Delta T)} & I_{t_v, t'_v}^{t\mathcal{D}C_{t'_v}^{\alpha-1} \varphi(t-v\Delta T)} \\ I_{t_v, t'_v}^{\varphi(t-v\Delta T)} & I_{t_v, t'_v}^{t\mathcal{D}C_{t'_v}^{-1} \varphi(t-v\Delta T)} & \mathbf{1}_{t_v, t'_v}^{\varphi(t-v\Delta T)} \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

Die Bauteilparameter berechnen sich dann wie folgt:

$$\begin{bmatrix} R_0 \\ R \\ Q \\ \bar{u}_0 \\ C_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_5/p_1 \\ p_3 - p_5/p_1 \\ p_1/(p_3 - p_5/p_1) \\ p_6 \\ p_1/p_4 \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

5.2.2 Identifikationseinstellungen

Die Einstellungen entsprechen denen in Kapitel 5.1.1, mit dem Unterschied, dass hier eine sehr kleine Amplitude von 0.01 A des PRBS-Signals verwendet wird. Dies ist notwendig, da die Ruhespannung als SoC-abhängige nichtlineare Funktion in die Simulation eingeht, für die Identifikation jedoch in Gl. (5.5) linearisiert wird. Bei hohen Stromstärken würde sich der SoC zu stark ändern und es ergäbe sich ein stark nichtlineares Verhalten der Simulation.

5.2.3 Ergebnisse

In Szenario 1 wird anstatt direkt Gl. (5.9) zur Identifikation zu verwenden, das Modulationsfunktionsverfahren mit der rekursiven LS-Schätzung entsprechend Lemma 4.6 kombiniert. Dies ist aufgrund numerischer Ungenauigkeiten sinnvoll. In Szenario 2 kommt ein Regularisierungsverfahren zum Einsatz, um die Konditionierung der Regressormatrix \underline{M} zu verbessern.

Szenario 1 In diesem Szenario wird der Fall einer variablen Ruhespannung ohne Rauschen betrachtet. Es fällt auf, dass trotz idealer Bedingungen in Abbildung 5.4 a) die Fehler nicht bei Null liegen. Im Vergleich zu den Ergebnissen bei der Identifikation des Batteriemodells ohne Ruhespannung und ohne Rauschen in Abschnitt 5.1.2 sind die Fehler der Parameter R_0 , R und Q deutlich angestiegen. Diese Tatsache kann zwei Ursachen haben: Zum einen wäre es möglich, dass die Taylorreihenapproximation der Ruhespannung durch den Abbruch nach dem ersten Glied zu ungenau ist. Dies wurde jedoch durch die Hinzunahme weiterer Taylorglieder untersucht, mit dem Ergebnis, dass sich durch die Hinzunahme keine Verbesserung ergab. Zum anderen könnte die Ursache darin liegen, dass die Identifikationsmatrix \underline{M} im Vergleich zu der in Gl. (4.29) schlechter konditioniert ist, da das Batteriemodell zusätzliche Parameter besitzt. In so einem Fall führen numerische Ungenauigkeiten, die z.B. bei der Berechnung der fraktionalen Ableitungen der Modulationsfunktion entstehen, zu großen Fehlern. Aufgrund dieses dann schlecht gestellten inversen Problems wurde im folgenden Szenario

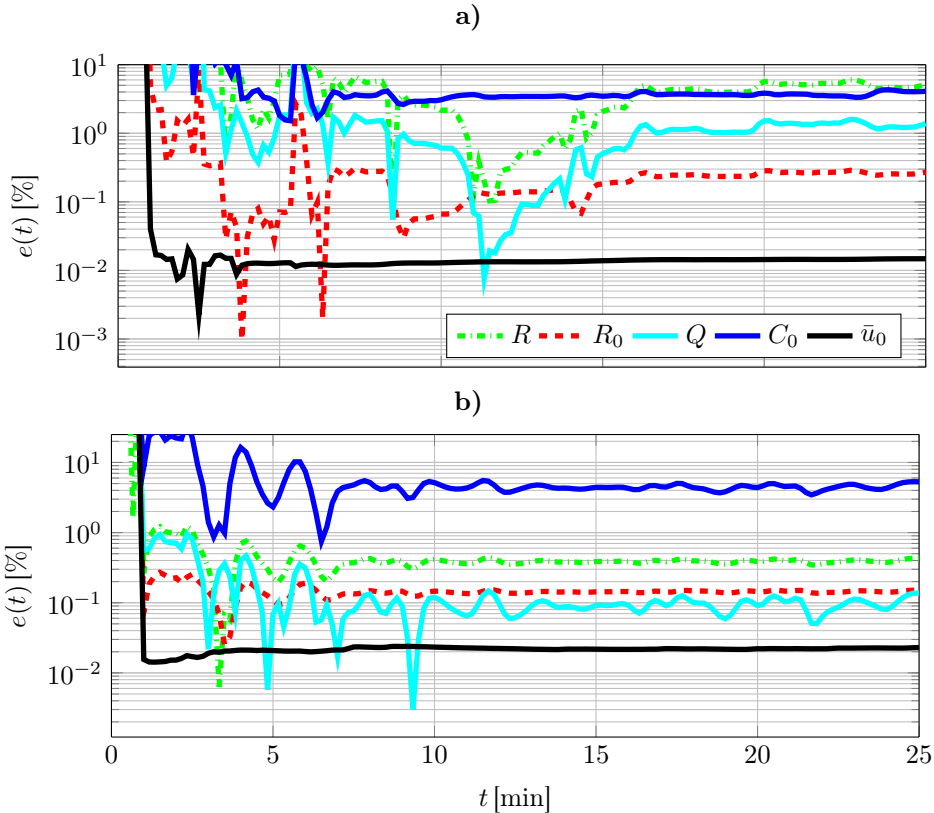


Abbildung 5.4: Identifikationsfehler der Batteriezeile bei Verwendung von Spline-Typ-Funktionen, logarithmisch aufgetragen: a) ohne Rauschen, b) ohne Rauschen und mit Regularisierung

2 eine Regularisierung der Matrix nach dem Verfahren von Tikhonov [TGSY95] implementiert. Wurde weißes gaußsches Rauschen $\tilde{u}(t) = u(t) + n_{WR}(t)$ betrachtet, lieferte das Verfahren brauchbare Ergebnisse bis zu einem SNR=60 dB, was deutlich über den 32.5 dB der Identifikation ohne Ruhespannung im Abschnitt 5.1.2 liegt.

Szenario 2 In diesem Szenario soll die Auswirkung der Regularisierung der Matrix \underline{M} mit dem Tikhonov-Verfahren untersucht werden. Das Grundprinzip ist in Kapitel 5.3.2 erläutert. In Abbildung 5.4 b) erkennt man, dass die Regularisierung teilweise die Ergebnisse verbessert. Insbesondere die Parameter R_0 , R und Q weisen einen kleineren Fehler auf, C_0 ändert sich kaum und der Fehler bei \bar{u}_0 ist in beiden Fällen vernachlässigbar klein. Nachteilig hierbei ist allerdings, dass Zusatzinformationen über die ungefähre Lage der Parameter vorhanden sein müssen. Die Grenze von SNR=60 dB bei der Rauschbetrachtung in Szenario 1 ließ sich auch mit der Regularisierung nicht nennenswert verbessern.

5.3 Methode der Modulationsfunktionen mit realen Messdaten

Mit dem im Anhang M beschriebenen Batteriemessstand wurden die Validierungsdaten (Strom- und Spannungsmessungen), die OCV-Daten und die Impedanzkurven der LiPO-Batteriezelle von KOKAM aus Anhang G aufgezeichnet. Für die Validierungsdaten gilt SNR=37.97 dB und für die EIS-Messung SNR>100 dB. Nun kann mit dem Modulationsfunktionsverfahren die Identifikation durchgeführt werden [ESSH17]. Diese basiert auf dem Modell (3.22), welches auch bei der Identifikation mit Simulationsdaten in Abschnitt 5.1 verwendet wurde:

$$b_0 = R_0 + R, \quad b_1 = R_0 R Q, \quad a_0 = R Q, \quad t_0 = 0$$

$$u(t) = -a_0 {}^t\mathcal{D}_t^\alpha u(t) + b_0 i(t) + b_1 {}^t\mathcal{D}_t^\alpha i(t). \quad (5.14)$$

Das Ziel ist also die Identifikation der Parameter a_0, b_0, b_1 . Die Ableitungsordnung wird – wie im Anhang M.2.3 beschrieben – schon vorher bestimmt und ergibt sich zu $\alpha = 0.68$ bei SoC=50 %. Sie wird als bekannt angenommen. Der Aufbau zur Identifikation ist in Abbildung 5.5 dargestellt. Der Strom wird mit dem BOP20-20M Vierquadrantensteller von KEPCO generiert. Wie zu sehen ist, müssen die Spannungsdaten $\tilde{u}_m(t)$ vor der eigentlichen Identifikation noch bearbeitet werden. Im Folgenden werden zunächst die Vorverarbeitung und die Identifikationseinstellungen beschrieben und anschließend werden die Ergebnisse der Identifikation diskutiert.

5.3.1 Datenvorverarbeitung und Identifikationseinstellungen

Bei der Datenvorverarbeitung wird die Ruhespannung aus der gemessenen Spannung eliminiert. Anschließend folgt eine Filterung des entstandenen Signals $u_m(t)$.

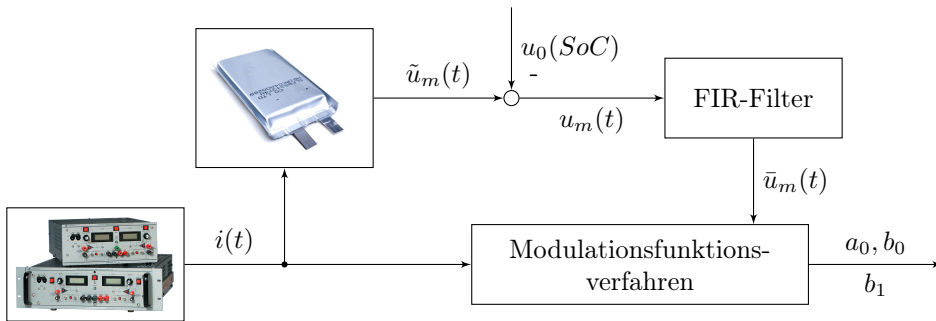


Abbildung 5.5: Blockdiagramm der Identifikationsprozedur, der Index m steht für Messung.

OCV-Elimination Vor der eigentlichen Identifikation muss die gemessene Spannung noch um die OCV-Daten bereinigt werden, da die Ruhespannung im Modell nicht berücksichtigt wird. Wie im Anhang M.2.4 beschrieben, wird während der Aufnahme der Validierungsdaten der $\text{SoC}(t)$ mit aufgezeichnet. Daher ist in Kombination mit der a priori gemessenen OCV-Kennlinie $u_0(\text{SoC})$ der aktuelle OCV-Wert zu jedem Zeitpunkt bekannt, was der Annahme 2.1 entspricht. Nun ist es möglich, die Ruhespannung aus den gemessenen Spannungsdaten durch einfache Differenzbildung $u_m(t) = \tilde{u}_m(t) - u_0(\text{SoC})$ zu eliminieren. Es hat sich gezeigt, dass es extrem wichtig ist, sehr genaue OCV-Werte zu nutzen, was die geringe Stromstärke von $C(T_{\text{voll}})/40\text{h}$ bei der OCV-Bestimmung im Anhang M.2.2 rechtfertigt.

Filterung Gemäß Abbildung 5.5 wird die um die Ruhespannung bereinigte Spannung $\tilde{u}_m(t)$ gefiltert. Bei dem Filter handelt es sich um ein digitales *Finite Impulse Response*⁵¹ (FIR)-Filter 64ter Ordnung [PLKJ11]. Dieses Filter ist nicht nur aufgrund der Rauschfilterung günstig, sondern es sorgt auch dafür, dass höherfrequente Systemanteile, die nicht zur Diffusion gehören, entfernt werden, da sie im Modell nicht enthalten sind. Da die zu identifizierende Ortskurve in Abbildung M.3 bei 1 Hz beginnt, wird die Grenzfrequenz des Filters auf $f_g = 1\text{ Hz}$ festgelegt. Das gefilterte Signal $\bar{u}_m(t)$ kann nun zur Identifikation genutzt werden.

Die Einstellungen bezüglich des Modulationsfunktionsverfahrens sollen nun noch kurz erläutert werden:

Setting Die „Eingangsgrößen“ für die Identifikation sind der Eingangsstrom $i(t)$ und die gefilterte Spannung $\bar{u}_m(t)$, betrachtet wird ein SoC von 50%. Das Batteriemodell (5.14) soll nun mit der Methode der Modulationsfunktionen identifiziert werden. Wie schon bei der Simulation in Abschnitt 5.1 wird auch hier das Verfahren in Kombination mit der rekursiven LS-Schätzung entsprechend Lemma 4.6 verwendet. Die Transformationen der Regressormatrix \underline{M} sowie des Vektors \underline{Y} besitzen alle ein Integrationsintervall von $T = 525\text{ s}$ und sind zeilenweise jeweils um $\Delta T = 6.5\text{ s}$ verschoben.

⁵¹ engl. für *endliche Impulsantwort*

Dies bedeutet, dass alle 6.5 s ein neuer Schätzwert berechnet wird (siehe hierfür auch Abbildung 4.2). Da zuvor $\alpha = 0.68 < 1$ bestimmt wurde, muss als Randbedingung nur die Funktion selbst verschwinden, d.h. $\varphi(t_0) = \varphi(t_0 + T) = 0$ gelten. Daher ist es möglich, die gleiche Spline-Typ-Modulationsfunktion wie bei der simulativen Identifikation in Kapitel 5.1 einzusetzen. Die Funktion ist im Detail im Anhang C beschrieben. Die einstellbaren Parameter lauten $m = 12$, $T_0 = 43.75$ s und folglich $T = 525$ s. Durch das hohe m ist auf jeden Fall sichergestellt, dass die Randwerte erfüllt sind. Insgesamt wurden 150 Messgleichungen aufgenommen, was einem Beobachtungszeitraum von 1500 s entspricht. Die Schrittweite h wurde wie die Abtastzeit T_a zu 0.1 s gewählt.

5.3.2 Identifikationsergebnisse

Die Parameter a_0 , b_0 und b_1 der Frequenzbereichsdarstellung

$$G(j\omega) = \frac{b_0 + b_1(j\omega)^{0.68}}{a_0(j\omega)^{0.68} + 1} \quad (5.15)$$

sollen nun modellbasiert bestimmt werden. Die identifizierte Ortskurve lässt sich dann mit der gemessenen Ortskurve aus Abbildung M.3 vergleichen. Außerdem wird mit der parametrisierten FDGL (5.14) eine Zeitbereichssimulation durchgeführt, um die resultierende Spannung $\hat{u}(t) = \hat{u}(t) + u_0(\text{SoC})$ mit der gemessenen Spannung $\tilde{u}_m(t)$ zu vergleichen.⁵² Die eigentlichen Bauteilparameter ergeben sich mit den nichtlinearen Zusammenhängen (5.2).

In Szenario 1 wird das rekursive LS-Verfahren verwendet. In Szenario 2 wird dann noch versucht, durch eine Regularisierung die Konditionierung der Matrix M zu verbessern.

Szenario 1 Mit dem rekursiven LS-Verfahren ergibt sich die folgende Batterieimpedanz:

$$\hat{G}(j\omega) = \frac{0.0345 + 0.1(j\omega)^{0.68}}{1 + 8.83(j\omega)^{0.68}}. \quad (5.16)$$

Der grafische Vergleich zwischen der bei einem sehr niedrigen SNR=37.97 dB mit dem Modulationsfunktionsverfahren identifizierten Impedanz (5.16) in Blau und der mit der EIS bei einem SNR>100 dB gemessenen Impedanz ist in Abbildung 5.6 a) dargestellt. Man erkennt trotz des niedrigen SNR eine gute Übereinstimmung der Kurven, über den betrachteten Frequenzbereich ergibt sich lediglich ein mittlerer Fehler von 1.35 %. Unverkennbar ist allerdings auch die Verschiebung auf der reellen Achse, denn der ohmsche Widerstand R_0 wurde um 5 % niedriger als die Referenz geschätzt. Bei sehr kleinen Frequenzen im Diffusionsbereich zeigt sich ebenfalls eine Abweichung. Der ohmsche Fehler äußert sich beim Vergleich der gemessenen Spannung und der Spannung,

⁵² In der Simulation wird die a priori bekannte OCV-Kurve einfach zu der simulierten Spannung $\hat{u}(t)$ addiert.

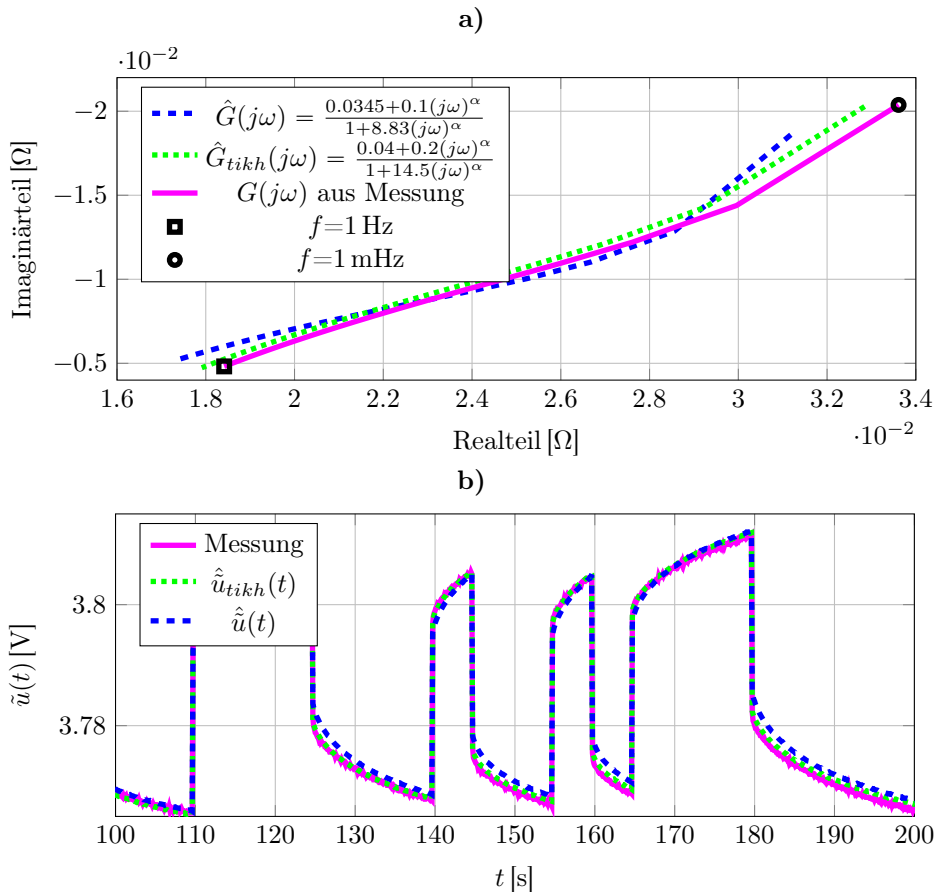


Abbildung 5.6: a) Verläufe der identifizierten Impedanz bei einem $\text{SNR}=37.97$ dB und der EIS-Messung bei einem $\text{SNR}>100$ dB für $\text{SoC}=50\%$, b) Verläufe der identifizierten und gemessenen Spannung für $\text{SoC}=50\%$

die sich aus dem parametrisierten Modell ergibt, als Fehler direkt bei einem Spannungssprung (siehe Abbildung 5.6 b)). Auch in der darauffolgenden Phase, in der sich die Diffusionsspannung zeigt, erkennt man eine leicht unterschiedliche Dynamik.

Insgesamt sind die erzielten Ergebnisse positiv zu bewerten, da sie wenig empfindlich gegenüber Rauschen sind. Die Gründe für die vorliegenden Ungenauigkeiten werden im Folgenden diskutiert:

Als Ursache für die Abweichung auf der reellen Achse wird der ohmsche Innenwiderstand der Kabel vermutet, denn für die EIS-Messung wurden andere Kabel verwendet als bei der Spannungsmessung am Batteriemessstand. Außerdem wurde, wie zuvor beschrieben, die EIS-Messung bei einem sehr hohen SNR größer als 100 dB aufgenommen, währenddessen das BOP-Messgerät gemäß Anhang M.2.4 ein SNR von 37.97 dB auf-

weist. Das sehr geringe Rauschen bei der EIS-Messung hat zudem den Vorteil, dass die Amplitude der Stromanregung im mA-Bereich liegen kann, während bei der BOP-Messung die Amplitude höher gewählt werden muss. Somit ist die Kramers-Kronig Beziehung [Bou95] nicht eingehalten. Höherfrequente Dynamiken im Signal, die trotz der langsamen Abtastung und der Filterung enthalten sind, führen zu Modellfehlern. Eine potentielle Fehlerquelle ist auch der Temperaturunterschied im Inneren der Zelle, den der Klimaschrank nicht exakt ausgleichen kann. Zu einem Fehler könnten außerdem ungenaue OCV-Werte führen, wenn der Anfangsladezustand nicht genau genug bestimmt werden konnte oder die OCV-Kurve sich z.B. durch Alterung verändert hat. Es hat sich generell gezeigt, dass die Ergebnisse äußerst sensitiv auf OCV-Fehler reagieren. Möglich ist natürlich auch, dass die Zellparameter sich zwischen den Parameterbestimmungen durch Alterung verändert haben. Außerdem führt das eher geringe SNR zu einem Biasfehler in den Parametern gemäß Gl. (4.46) und im Falle einer schlechten Konditionierung der Regressormatrix \underline{M} zu Problemen bei der LS-Optimierung. Um einem sogenannten schlecht gestellten Problem entgegenzuwirken, wird nun eine Regularisierung in Form des weit verbreiteten Tikhonov-Verfahrens [TGSY95] vorgenommen.

Szenario 2 In diesem Szenario soll die Auswirkung einer Regularisierung der Regressormatrix \underline{M} auf die Ergebnisse untersucht werden. Zum Einsatz kommt das bekannte Tikhonov-Verfahren [TGSY95]. Da es bekannt ist, wird hier nur die Grundidee kurz dargestellt:⁵³ Das sonst übliche Gütemaß bei der LS-Schätzung wird um den Parameterfehler erweitert, was dafür sorgen soll, dass größere Abweichungen nicht vorkommen:

$$\|\underline{M}\hat{\underline{p}} - \underline{Y}\|^2 + \left\| \lambda(\hat{\underline{p}} - \underline{p}_{erw}) \right\|^2. \quad (5.17)$$

$\|\cdot\|$ ist die euklidische Norm und \underline{p}_{erw} der erwartete Parametervektor. Die Minimierung muss in Blockverarbeitung erfolgen, wobei die eigentliche Herausforderung in der Wahl des Gewichtungsfaktors λ besteht. Prinzipiell gibt es hierfür mehrere systematische Ansätze, wobei in dieser Arbeit das sogenannte L-Kriterium genutzt wurde. Nachteilig ist das notwendige Zusatzwissen, das man benötigt, um \underline{p}_{erw} zu bestimmen. Hierbei hatten zwei der drei angenommenen Parameterwerte eine Abweichung von ca. 20 % bzw. ca. 10 % und einer von ca. 0 %.⁵⁴ Mit dem Tikhonov-Verfahren ergibt sich in diesem Fall folgende Impedanz:

$$\hat{G}_{tikh}(j\omega) = \frac{0.04 + 0.2(j\omega)^{0.68}}{1 + 14.5(j\omega)^{0.68}}. \quad (5.18)$$

Der grafische Vergleich von gemessener (in Magenta) und identifizierter Impedanz (in Grün) ist in Abbildung 5.6 a) dargestellt. Zu erkennen ist eine Verbesserung gegenüber der blauen Kurve sowohl bei der Verschiebung auf der Realteilachse als auch im Verlauf

⁵³ In den Materialwissenschaften wird das Tikhonov-Verfahren verwendet, um die DRT numerisch aus den Impedanzdaten zu berechnen [ICE⁺10].

⁵⁴ Die Vergleichsparameter sind ausschließlich durch Ausprobieren entstanden. Andere Konstellationen könnten daher durchaus zu besseren Ergebnissen führen.

des Diffusionsastes. Diese Verbesserungen wirken sich auch im Zeitbereich positiv aus, was in Abbildung 5.6 b) deutlich wird. Zu sehen ist jeweils nur ein vernachlässigbarer Fehler beim Spannungssprung und in der Diffusionsspannung. Allerdings erfordert dieses genauere Ergebnis Zusatzwissen, das im Allgemeinen nicht zur Verfügung steht.

Die Rechenzeit mit MATLAB ist in beiden Szenarien im Vergleich zur Messdauer vernachlässigbar gering, was einen Hinweis auf die Echtzeitfähigkeit des Verfahrens gibt. Als Hardware wurde ein Laptop mit Intel Core i5 2.2 GHz Prozessor verwendet.

5.4 Algebraisches Verfahren mit Simulationsdaten

In diesem Abschnitt wird das algebraische Verfahren zur simulativen Identifikation des Bauteilparametervektors

$$p := [R_0 \quad R \quad Q \quad \alpha]^T \quad (5.19)$$

des Zeitbereichsmodells der Batterie aus Gl. (4.26)

$$b_0 = R_0 + R, \quad b_1 = R_0 R Q, \quad a_0 = R Q, \quad t_0 = 0$$

$$u(t) = -a_0 {}^t d_t^\alpha u(t) + b_0 i(t) + b_1 {}^t d_t^\alpha i(t) \quad (5.20)$$

eingesetzt [EKH15]. Anschließend wird mit diesen Parametern die DRT mit folgender Formel aus Gl. (2.13) berechnet:

$$g(\tau) = \frac{1}{2\pi\tau} \frac{\sin((1-\alpha)\pi)}{\cosh(\alpha \ln(\tau/\tau_0^{1/\alpha})) - \cos((1-\alpha)\pi)}, \quad \tau_0 = RQ. \quad (5.21)$$

5.4.1 Simulations- und Identifikationssetting

Die gesamte Anordnung zur Simulation und Identifikation ist in Abbildung 5.7 dargestellt. Die grundlegenden Simulationseinstellungen entsprechen denen bei der Verifikation des Modulationsfunktionsverfahrens in Abschnitt 5.1.1. D.h. es wird das gleiche Modell (5.20) und das gleiche PRBS-Eingangssignal $i(t)$, allerdings mit einer kleineren Amplitude von 0.5 A, verwendet. Das Spannungssignal $u(t)$ wird mit Hilfe der FOMCON-Toolbox bei einer Schrittweite von $h = 5$ ms berechnet. Die prinzipiellen Verläufe der Signale entsprechen daher auch der früheren Abbildung 5.2. Die Anfangsbedingungen sind stets homogen ($\forall \tilde{t} \leq 0 : u(\tilde{t}) = i(\tilde{t}) = 0$). Der große Unterschied zur Identifikation mit dem Modulationsfunktionsverfahren liegt darin, dass der fraktionale Exponent α mit identifiziert wird. Für eine realitätsnahe Simulation werden auch hier die Referenzparameter mit der sehr genauen EIS mit einem SNR größer als 100 dB und dem anschließenden CNLS-Fit aufgenommen. Allerdings handelt es sich hier um ein anderes Zellexemplar, weshalb sich die Referenzparameter etwas unterscheiden: $R_0 = 0.6963 \Omega$, $R = 0.02868 \Omega$, $Q = 553.7 \text{ As/V}$, $\alpha = 0.6$. Der Hauptwert der DRT-Kurve liegt daher bei $\tau_0 = 15.8801$ s.

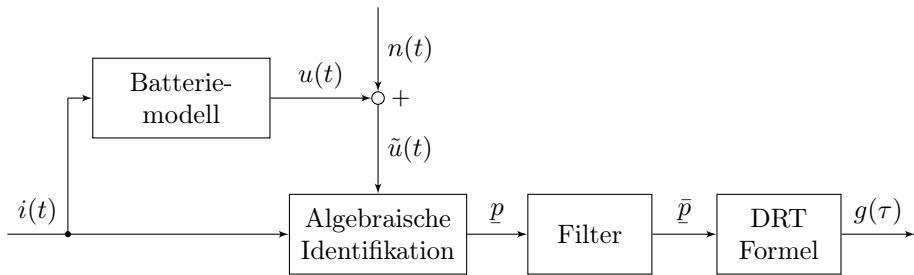


Abbildung 5.7: Blockdiagramm der Simulations- und Identifikationsprozedur bei der algebraischen Batterieidentifikation

Mit Gl. (4.74) des Beispiels 4.3 wurde die algebraische Berechnungsvorschrift $\underline{\theta} = \underline{P}(t)^{-1}\underline{q}(t)$ zur Identifikation der Ersatzparameter $\theta_1 = -(R + R_0)R_0$, $\theta_2 = 2R_0 + R$ und $\theta_3 = -\frac{R}{\alpha}$ bereits hergeleitet. Die Matrix \underline{P} sowie der Vektor \underline{q} sind in Gl. (4.69) zu finden. Die eigentlichen Bauteilparameter ergeben sich dann mit $\underline{\theta}$ über die nichtlinearen Zusammenhänge in den Gln. (4.75), (4.76) und (4.78). Wie in Abbildung 5.7 dargestellt, erfolgt nach der algebraischen Identifikation eine Filterung der identifizierten Parameter \underline{p} . Dies ist erforderlich, weil bereits im idealen Fall ohne Rauschen bei der Inversion der Matrix \underline{P} in Gl. (4.74) Singularitäten auftreten, welche sich stark auf die Identifikationsergebnisse auswirken. Zu sehen ist dies im Identifikationsfehler des Parameters R_0 in Abbildung 5.8.⁵⁵ Die Filterung erfolgt alle 5 s durch

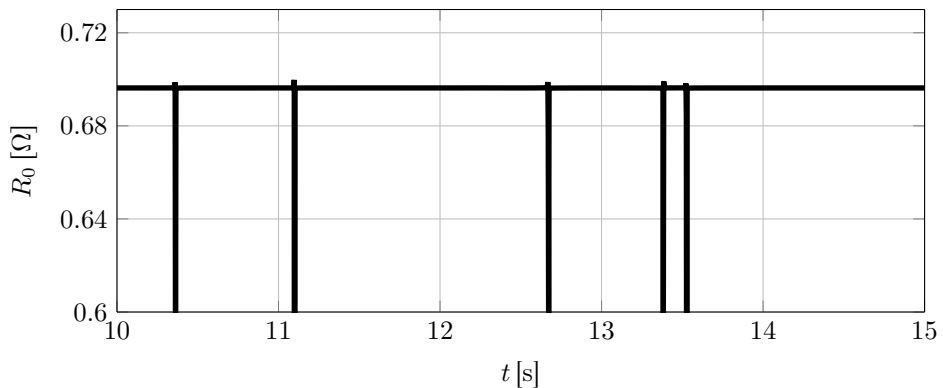


Abbildung 5.8: Das algebraische Identifikationsergebnis des ohmschen Widerstands R_0 mit Singularitäten.

eine Mittelwertbildung mit einem Zeitfenster von 10 s, wobei 5 s der vergangenen und 5 s der zukünftigen Werte verwendet werden. Mit den gefilterten Parametern $\bar{\underline{p}}$ erfolgt letztlich die Berechnung der DRT mit Gl. (5.21).

⁵⁵ Auch die Ergebnisse in [GR13a] weisen Singularitäten auf.

5.4.2 Identifikationsergebnisse

Es werden zwei Szenarien betrachtet: Im ersten ist die Ausgangsspannung $u(t)$ rauschfrei und im zweiten mit einem weißen gaußschen Rauschen $n_{WR}(t)$ beaufschlagt. Die Simulation dauert $T_{sim} = 30$ s bei einer Schrittweite von 0.5 ms, was bedeutet, dass 60000 Messwerte vorliegen. Im Versuch wurde sichtbar, dass die Ergebnisse nur von der Anzahl der Messwerte abhängen. Bei einer Schrittweite von 0.25 ms würde man also bei gleichen Simulationseinstellungen die gleichen Identifikationsergebnisse bereits nach 15 s erzielen.

Szenario 1 Die Abbildung 5.9 a) zeigt die Identifikationsfehler im Falle einer rauschfreien Ausgangsspannung. Es ist ersichtlich, dass trotz dieser idealen Bedingungen die Fehler nicht wie erwartet bei Null liegen. Dies liegt daran, dass durch die Inversion der Matrix \bar{P} in Gl. (4.74) Singularitäten auftreten, welche sich stark auf die Identifikationsergebnisse auswirken. Diese Tatsache lässt sich auch gut an Abbildung 5.8 erkennen, welche die R_0 -Schätzung ohne Filterung zeigt. Der maximale Fehler von 10 % entsteht beim Parameter Q . Im Vergleich zu dem rauschfreien Szenario 1 bei der Identifikation mit Modulationsfunktionen in Abschnitt 5.1.2 sind die Fehler also deutlich weniger akkurat. Die identifizierten Parameter $\bar{R} = 0.02857 \Omega$, $\bar{Q} = 609.3$ As/V und $\bar{\alpha} = 0.6001$ führen zu der blauen DRT in Abbildung 5.10 a). Zu erkennen ist, dass die Kurve in Höhe und Breite sehr gut mit der Referenz übereinstimmt, was auf das sehr genau geschätzte α zurückzuführen ist. Der Hauptwert beträgt allerdings $\bar{\tau}_0 = 17.4077$ s und bedeutet einen Fehler von 9 %. Nimmt man noch $\bar{R}_0 = 0.6964 \Omega$ hinzu, so lässt sich die Ortskurve in Abbildung 5.10 b) zeichnen. Hier sieht man, dass die Verschiebung auf der reellen Achse aufgrund des ebenfalls sehr genau identifizierten Parameters R_0 quasi fehlerfrei ist. Bei kleineren Frequenzen wirken sich dann die fehlerhaften Parameter des RQ-Elements aus und die Abweichung von der Referenz wird größer.

Szenario 2 In diesem Szenario wird die Ausgangsspannung mit einem weißen gaußschen Rauschen $n(t) = n_{WR}(t)$ beaufschlagt: $\hat{u}(t) = u(t) + n_{WR}(t)$. Dies führt zu einem SNR = 75 dB. Wie erwartet steigen die Identifikationsfehler in Abbildung 5.9 b) an. Die gemittelten Parameterschätzungen lauten $\bar{R}_0 = 0.6963 \Omega$, $\bar{R} = 0.03113 \Omega$, $\bar{\alpha} = 0.5919$, $\bar{Q} = 581$ As/V. Die grünen Kurven in Abbildung 5.10 zeigen die Auswirkung dieser Fehler auf die DRT und die Impedanz. Bei Betrachtung der grünen DRT-Kurve fällt auf, dass sie sich in der Höhe und Breite etwas von den anderen beiden Kurven unterscheidet. Dies lässt sich durch den größeren Fehler in α erklären, wodurch auch eine fehlerhafte Impedanz bei kleineren Frequenzen geschätzt wird. Der Fehler des Hauptwertes $\bar{\tau}_0$ beträgt 13 %. Für ein SNR < 75 dB konnten keine brauchbaren Ergebnisse erzielt werden. Aus diesem Grund lies sich das Verfahren auch nicht an realen Daten am Batteriemessstand testen, da für die Messdaten dort ein SNR = 37.97 dB vorliegt. Die Ergebnisse sind also deutlich rauschempfindlicher als die Resultate bei der Identifikation mit Modulationsfunktionen in den Abschnitten 5.1 und 5.3.

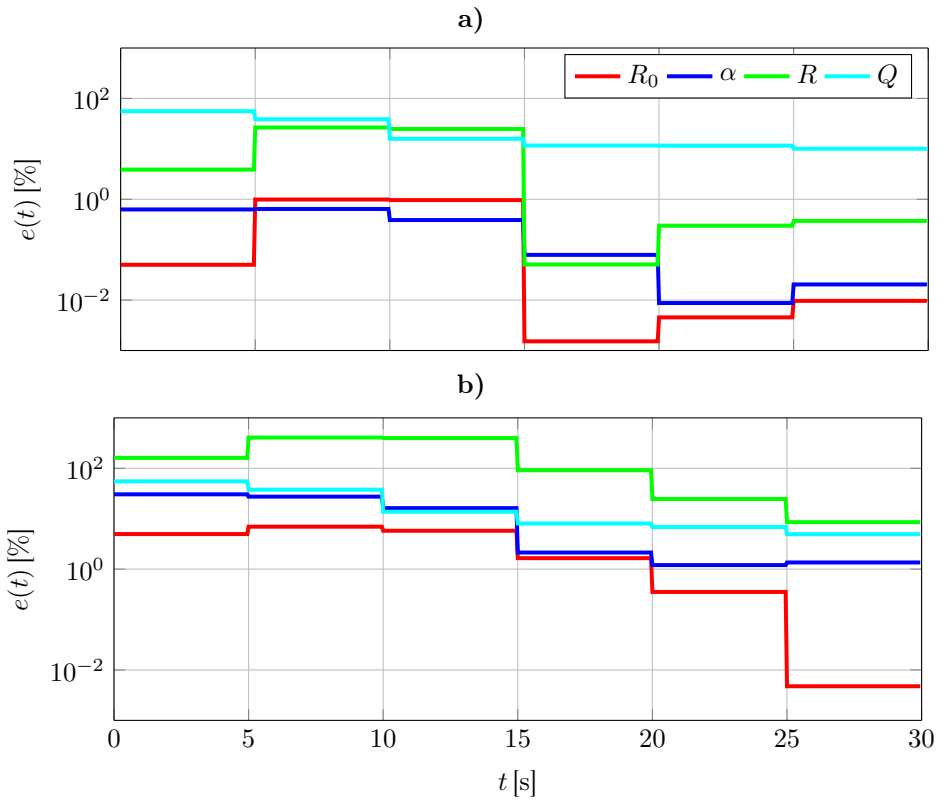


Abbildung 5.9: Identifikationsfehler des algebraischen Verfahrens, logarithmisch aufgetragen. In Bild a) sind die Simulationsdaten rauschfrei, in Bild b) wird additiv weißes gaußsches Rauschen aufgeschaltet, so dass $\text{SNR}=75$ dB gilt.

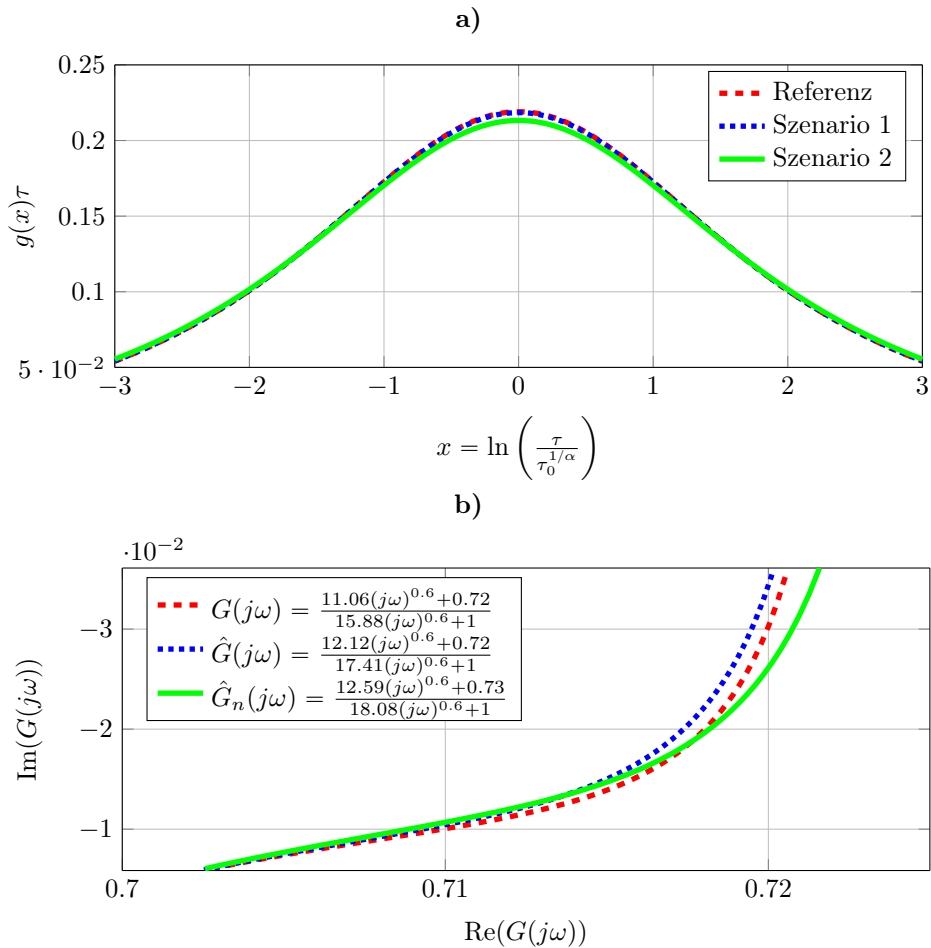


Abbildung 5.10: Mit dem algebraischen Verfahren identifizierte a) DRT und b) Impedanz. Die blauen Kurven sind ohne Rauschen und die grünen mit Ausgangsrauschen bei 75 dB entstanden. Die Legende in Bild b) zeigt die jeweils mit den Identifikationsergebnissen parametrisierten Übertragungsfunktionen aus Gl. (K.14) für die Szenarien.

5.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde das Modulationsfunktionsverfahren zunächst mit Simulationsdaten einer Lithium-Ionen-Zelle ohne Berücksichtigung der Ruhespannung getestet. Das Verfahren zeigte sich wenig rauschempfindlich. Es funktionierte bei additivem weißen gaußschen Rauschen stabil mit akkuraten Ergebnissen bis zu einem äußerst niedrigen $\text{SNR}=32.5$ dB. Zum Vergleich: Die EIS aus dem State-of-the-Art in Abschnitt 2.4.1 benötigt ein $\text{SNR}>100$ dB. Im Anschluss konnte gezeigt werden, dass auch eine Para-

meteridentifikation inklusive der Ruhespannung im Gegensatz zur EIS möglich ist. Hier waren die Resultate allerdings nur bis zu einem $\text{SNR}=60$ dB brauchbar. Auch ein Regularisierungsverfahren verbesserte die Ergebnisse bzgl. des SNRs nicht. Anschließend wurde die Identifikation an realen Messdaten ohne die Ruhespannung am eigens dafür aufgebauten Batteriemessstand erstmalig durchgeführt. Hierbei bestätigte sich das wenig rauschempfindliche Verhalten aus der Simulation, denn es ergaben sich sehr genaue Schätzergebnisse bei einem ebenfalls sehr geringen $\text{SNR}=37.97$ dB der Spannungsmessung. Während die Dauer der Identifikation mit dem Modulationsfunktionsverfahren 25 Minuten betrug, hatte die EIS eine Messzeit von ca. 2 h. Obwohl keine umfangreiche Studie durchgeführt wurde, können die wenig rauschempfindlichen Identifikationsergebnisse als ein Indiz dafür angesehen werden, dass das Verfahren auch in der Realität gut funktioniert. Durch die Regularisierung ließen sich die Ergebnisse noch verbessern, das Auffinden der hierzu erforderlichen Tuningparameter war jedoch sehr arbeitsintensiv.

Zum Ende des Kapitels wurde das algebraische Verfahren simulativ anhand der Batterieidentifikation getestet. Dieses lieferte brauchbare Ergebnisse bis zu einem SNR von 75 dB, zeigte sich also deutlich rauschempfindlicher als das Modulationsfunktionsverfahren. Es hat allerdings den großen Vorteil, dass die Ableitungsordnung mit identifiziert wird und somit die DRT berechnet werden kann.

Für die Identifikation des kompletten fraktionalen Systems werden aufgrund ihrer komplementären Eigenschaften sowohl das algebraische (Identifikation der Ableitungsordnung) als auch das Modulationsfunktionsverfahren (wenig rauschempfindliche Identifikation der Koeffizienten) benötigt. Es kann aus den bisherigen Erkenntnissen sinnvoll sein, beide Verfahren in einem iterativen Ansatz zu kombinieren.

6 Steuerungsbasierte Methode der Modulationsfunktionen

Nachdem der erste fundamentale Beitrag dieser Arbeit mit der Batterieidentifikation in Kapitel 5 abgeschlossen wurde, beginnt nun der zweite fundamentale Beitrag. Das vorliegende Kapitel zeigt erstmalig, wie die fraktionale Methode der Modulationsfunktionen durch die modellbasierte Bestimmung einer Modulationsfunktion theoretisch erweitert werden kann [EH15]. Mit der modellbasierten Modulationsfunktion ist die separate Identifikation des einzelnen s -ten Parameters p_s von

$$p^T = [p_1 \ \cdots \ p_{n+m+1}] := [a_0 \ \cdots \ a_{n-1} \ b_0 \ \cdots \ b_m] \quad (6.1)$$

des C-Systems in kommensurabler Form aus den Gln. (3.19) bzw. (4.33) möglich. Durch die methodische Generierung der Modulationsfunktion wird die Schwachstelle des Modulationsfunktionsverfahrens, also die heuristische Bestimmung einer geeigneten Modulationsfunktion, gelöst. Dies ist insbesondere dann wichtig, wenn das Verfahren auf unterschiedliche Systeme angewendet werden soll, wie beispielsweise auf Batteriezellen mit unterschiedlichen Materialien. Die Parameter werden einzeln, d.h. ohne Verwendung der restlichen Parameter, identifiziert. Somit ist sichergestellt, dass sich mögliche Parameterfehler nicht fortpflanzen. Die zentralen Verfahrensschritte sind in Abbildung 6.1 dargestellt. Die zu bestimmende Modulationsfunktion ergibt sich unmit-

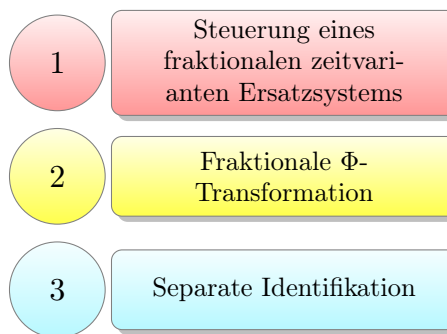


Abbildung 6.1: Zentrale Verfahrensschritte des fraktionalen Modulationsfunktionsverfahrens mit modellbasierter Bestimmung der Modulationsfunktion

telbar durch die Steuerung eines definierten zeitvarianten fraktionalen Ersatzsystems in Zustandsraumdarstellung in einen bestimmten Endwert. Im Anschluss an die Ermittlung der Modulationsfunktion erfolgt die aus dem Abschnitt 4.2 bekannte fraktionale

Φ -Transformation des zu identifizierenden Systems. Dadurch kann für jeden zu identifizierenden Parameter eine separate Identifikationsgleichung berechnet werden. Im Falle von fehlerhaften Messgrößen sorgt eine energieoptimale Steuerung für einen geringen Identifikationsfehler. Das Vorgehen ist inspiriert von dem Ansatz für gewöhnliche Systeme in [SR11, Sch11, FD16].

Die für den steuerungsbasierten Ansatz benötigten neuen systemtheoretischen Erkenntnisse, wie die Lösung eines zeitvarianten fraktionalen Steuerungsproblems, werden in Kapitel 7 hergeleitet. Das Kapitel 8 untersucht dann, ob sich das Verfahren realisieren lässt.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird beschrieben, wie eine parameterspezifische Modulationsfunktion aussehen muss, damit sich mit ihr ein einzelner Parameter bestimmen lässt. Im zweiten Abschnitt wird ein Ersatzsystem in Form eines zeitvarianten fraktionalen Zustandsraumsystems eingeführt. Die Beschreibung der zu dem Ersatzsystem gehörenden Systemmatrix ist Gegenstand des dritten Abschnitts. Der letzte Abschnitt macht dann deutlich, dass eine Steuerung, die das Ersatzsystem in einen spezifischen Endzustand führt, die gesuchte Funktion implizit enthält. Mit Hilfe der Steuerung wird dann eine Berechnungsvorschrift zur separaten Identifikation eines einzelnen Parameters präsentiert. Desweiteren wird gezeigt, dass sich im Falle fehlerhafter Messgrößen eine obere Schranke des Identifikationsfehlers minimieren lässt.

6.1 Parameterspezifische Modulationsfunktion

Im Folgenden wird die Möglichkeit aufgezeigt, einen einzelnen Parameter mit einer parameterspezifischen Modulationsfunktion über die Φ -Transformation (4.10) separat und direkt zu identifizieren. Die zu identifizierenden Größen sind, wie beim Modulationsfunktionsverfahren in Satz 4.2, die Parameter $a_i, b_j \in \mathbb{R}$ des kommensurablen und gemäß Annahme 3.1 eindeutigen Systems (3.19) in C-Form

$${}^t\mathcal{D}C_t^{n\alpha}y(t) = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i {}^t\mathcal{D}C_t^{i\alpha}y(t) + \sum_{j=0}^m b_j {}^t\mathcal{D}C_t^{j\alpha}u(t), \quad (6.2)$$

wobei hier zusätzlich $m < n$, $m \in \mathbb{N}_{\geq 0}$, $n \in \mathbb{N}_{> 0}$ und $\alpha \in \mathbb{R}^{> 0} \setminus \mathbb{N}_{> 0}$ angenommen wird. Die Ableitungsordnung α sei bekannt und es wird davon ausgegangen, dass keinerlei Informationen über die Initialisierungsfunktionen der Eingangs- und Messgrößen vorliegen. Für die Eingangsgröße $u(t)$ gilt die Annahme, dass sie keine homogene FDGL bis zur Ordnung $m\alpha$ beschreibt:

Annahme 6.1

Für nicht komplett verschwindende Koeffizienten $b_j \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\sum_{j=0}^m b_j {}^t D_t^{\beta_j} u(t) \neq 0. \quad (6.3)$$

Der Satz 6.1 postuliert die Gl. (6.10), mit welcher der einzelne Parameter p_s des Parametervektors aus Gl. (6.1) separat identifiziert werden kann. In dieser Gleichung ist $\varphi_s \in \mathcal{W}_s$ eine zu dem Parameter p_s spezifische Modulationsfunktion aus Definition 6.1. Auf der linken Seite der Gl. (6.10) steht die Φ -Transformation (4.10) von \tilde{y} mit dem Kern ${}^t dRL_t^{n\alpha} \varphi_s(t)$.

Somit kommt der Funktionsmenge \mathcal{W}_s aus Definition 6.1 für die folgenden Betrachtungen eine essentielle Bedeutung zu. Die Modulationsfunktion muss die folgenden Eigenschaften (6.5)-(6.7) erfüllen, damit sie zu \mathcal{W}_s gehört, wobei die Gln. (6.5) und (6.6) auch für die Modulationsfunktion beim Standardverfahren in Satz 4.2 gelten müssen (siehe Definition 4.3). Die Eigenschaften aus den Gln. (6.5) und (6.6) sind für alle zu identifizierenden Parameter p_s gleich. Allerdings ist die Eigenschaft in Gl. (6.7) von der Parameternummer s abhängig. Daher wird $\varphi_s(t)$ auch s -spezifische Funktion genannt.

Definition 6.1 (s -spezifische Funktion)

Eine Funktion φ_s wird s -spezifische Funktion genannt, falls $\varphi_s \in \mathcal{W}_s$ gilt, wobei die Menge \mathcal{W}_s wie folgt definiert ist:

$$a \leq t_0 < t, \quad s \in [1, \dots, n+m+1], \quad \varphi_s(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\bullet \quad \mathcal{W}_3 := \mathcal{W}_1 \cap \mathcal{W}_2 \cap \mathcal{W}_3^s, \quad (6.4)$$

$$\bullet \quad \mathcal{W}_1 := \{\varphi_s(t) : \forall \tilde{t} \leq 0 : \varphi_s(\tilde{t}) \stackrel{!}{=} 0\}, \quad (6.5)$$

$$\bullet \quad \mathcal{W}_2 := \{\varphi_s(t) : {}^t dRL_t^{i\alpha+k-[i\alpha]-1} f(t)|_{t=t_e} \stackrel{!}{=} 0, \quad (6.6)$$

$$k = 0, 1, \dots, [i\alpha], \quad i = 0, 1, \dots, n-1\},$$

$$\bullet \quad \mathcal{W}_3^s := \{\varphi_s(t) : m(t_e) \stackrel{!}{=} e_s\}. \quad (6.7)$$

$$\bullet \quad e_s \in \mathbb{R}^{n+m+1 \times 1}, \quad \{e_s\}_{i,1} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = s, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (6.8)$$

$$m(t)^T := \left[-\tilde{Y}_{t_0,t} \varphi_s(t) \quad \dots \quad -\tilde{Y}_{t_0,t} {}^t dRL_t^{(n-1)\alpha} \varphi_s(t) \quad \tilde{U}_{t_0,t} \varphi_s(t) \quad \dots \quad \tilde{U}_{t_0,t} {}^t dRL_t^{m\alpha} \varphi_s(t) \right]. \quad (6.9)$$

Satz 6.1 (Parameterspezifische Identifikation)

Der s -te Parameter des kommensurablen Systems (6.2) in C -Form berechnet sich mit seiner s -spezifischen Modulationsfunktion wie folgt:

$$\varphi_s \in \mathcal{W}_s, \quad p_s := \{\underline{p}^T\}_{1,s}, \quad \tilde{u} = Qu, \quad \tilde{y} = Qy$$

$$\tilde{Y}_{t_0, t_e}^{t_0} {}^t dRL_t^{n\alpha} \varphi_s(t) = p_s. \quad (6.10)$$

Beweis:

Für den Beweis von Gl. (6.10) ist es notwendig, die rechtsseitige Darstellung (3.21) der Gl. (6.2) zu verwenden:

$${}^t \mathcal{D}C_{t_e}^{n\alpha} \tilde{y}(t) = - \sum_{i=0}^{n-1} a_i {}^t \mathcal{D}C_{t_e}^{i\alpha} \tilde{y}(t) + \sum_{j=0}^m b_j {}^t \mathcal{D}C_{t_e}^{j\alpha} \tilde{u}(t). \quad (6.11)$$

Nun wird die Φ -Transformation der Gl. (6.11) mit Hilfe der Ableitungsregel (4.14) und der Modulationsfunktion φ_s durchgeführt:

$$\tilde{Y}_{t_0, t_e}^{t_0} {}^t dRL_t^{n\alpha} \varphi_s(t) = \underline{m}(t_e)^T \underline{p}. \quad (6.12)$$

Dies ist entsprechend den Angaben für Gl. (4.14) nur dann erlaubt, falls die fraktionalen Randwerte der Modulationsfunktion verschwinden. Wird die spezifische Funktion $\varphi_s(t)$ aus Definition 6.1 verwendet, verschwinden aufgrund der Eigenschaft (6.5) zunächst die Randwerte an der unteren Grenze:

$$k = 0, 1, \dots, [i\alpha], \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$${}^t_0 \mathcal{D}RL_t^{i\alpha+k-[i\alpha]-1} \varphi_s(t) \Big|_{t=t_0} = {}^t_0 \mathcal{D}RL_t^{i\alpha+k-[i\alpha]-1} \varphi_s(t) \Big|_{t=t_0} = 0. \quad (6.13)$$

Die homogenen Randbedingungen an der oberen Grenze werden durch Gl. (6.6) sichergestellt. Aufgrund der dritten Eigenschaft (6.7) von $\varphi_s(t)$ wird aus Gl. (6.12) die Gl. (6.10). \square

Die Gl. (6.10) wird über die Φ -Transformation mit ihrer Ableitungsregel (4.14) hergeleitet. Die dafür benötigten Randbedingungen der Modulationsfunktion werden durch die Eigenschaften (6.5) und (6.6) abgedeckt. Der Unterschied zur Modulationsfunktions-Transformation bei der Herleitung von Satz 4.2 liegt darin, dass die hier betrachtete Modulationsfunktion $\varphi_s(t)$ zusätzlich zu den Randbedingungen noch die spezifische Eigenschaft (6.7) besitzt. Mit ihr lassen sich alle Terme aus der Identifikationsgleichung (6.10) entfernen, deren Koeffizienten nicht identifiziert werden sollen. Diese Eigenschaft ermöglicht die separate Identifikation jedes einzelnen Parameters. In Abschnitt 6.4 wird sich herausstellen, dass es ein Vorteil ist, dass in Definition 6.1 und Satz 6.1 ausschließlich linksseitige Ableitungen enthalten sind.

Eine Modulationsfunktion, in der Art wie sie eben beschrieben wurde, kann nicht ohne weiteres gefunden werden, da fraktionale Randwerte zu erfüllen sind und außerdem

für jeden zu schätzenden Parameter eine eigene Funktion bestimmt werden muss. In Kapitel 6.4 wird gezeigt, wie die Funktion methodisch generiert werden kann. Ein hierfür benötigtes fraktionales Zustandsraummodell wird bereits im nächsten Abschnitt eingeführt.

Im folgenden Beispiel werden die Entwurfsschritte im Detail erläutert, beginnend mit der Systemgleichung eines Beispielsystems bis zu seiner spezifischen Identifikationsgleichung.

Beispiel 6.1:

Gesucht sei der Parameter a_1 des kommensurablen Systems 2α -ter Ordnung ($n = 2, m = 1$) mit $\alpha = 0.4$

$${}^t_0\mathcal{D}C_t^{2\alpha}y(t) = -a_0y(t) - a_1{}^t_0\mathcal{D}C_t^\alpha y(t) + b_0u(t) + b_1{}^t_0\mathcal{D}C_t^\alpha u(t). \quad (6.14)$$

Zu a_1 gehört die spezifische Modulationsfunktion $\varphi_2(t) \in \mathcal{W}_2$. Wie sich später herausstellen wird, ist es zunächst sinnvoll, die äquivalente rechtsseitige Darstellung von Gl. (6.14) entsprechend Definition 3.5 aufzustellen:

$${}^t_0\mathcal{D}C_{t_e}^{2\alpha}\tilde{y}(t) = -a_0\tilde{y}(t) - a_1{}^t_0\mathcal{D}C_{t_e}^\alpha\tilde{y}(t) + b_0\tilde{u}(t) + b_1{}^t_0\mathcal{D}C_{t_e}^\alpha\tilde{u}(t). \quad (6.15)$$

Entsprechend Definition 6.1 erfüllt $\varphi_2(t)$ mehrere Eigenschaften:

Erstens wird wegen Gl. (6.5) die Initialisierungsfunktion

$$\psi(\varphi_2, 2\alpha, a, t_0, t) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \forall \tilde{t} \leq 0 : \varphi_2(\tilde{t}) = 0 \quad (6.16)$$

gesetzt, was zu

$${}^t_0\mathcal{D}RL_t^\mu\varphi_2(t)|_{t=t_0} = {}^t_0dRL_t^\mu\varphi_2(t)|_{t=t_0} = 0, \quad \mu \in [2\alpha - 1, \alpha - 1, -1] \quad (6.17)$$

führt. Zudem werden gemäß Gl. (6.6) folgende Ableitungen am oberen Rand $t = t_e$ Null gesetzt:

$${}^t_0\mathcal{D}RL_t^\mu\varphi_2(t)|_{t=t_e} = {}^t_0dRL_t^\mu\varphi_2(t)|_{t=t_e} \stackrel{!}{=} 0, \quad \mu \in [2\alpha - 1, \alpha - 1, -1]. \quad (6.18)$$

Durch die Gln. (6.17)-(6.18) sind alle Voraussetzungen für eine Φ -Transformation des Systems (6.15) mit Gl. (4.14) gegeben. Mit der Transformation kann das System dann in die Integraldarstellung

$$\tilde{Y}_{t_0,t}^{t_0} {}^t_0dRL_t^{2\alpha}\varphi_2(t) = \underline{m}(t)^T \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

mit der Vektorfunktion

$$\underline{m}(t)^T := \left[-\tilde{Y}_{t_0,t}^{\varphi_2(t)} \quad -\tilde{Y}_{t_0,t}^{t_0} {}^t_0dRL_t^\alpha\varphi_2(t) \quad \tilde{U}_{t_0,t}^{\varphi_2(t)} \quad \tilde{U}_{t_0,t}^{t_0} {}^t_0dRL_t^\alpha\varphi_2(t) \right] \quad (6.20)$$

überführt werden. Nun wird weiterhin angenommen, dass $\varphi_2(t)$ gemäß Gl. (6.7) gewählt ist und daher für $\underline{m}(t)$ folgendes gilt:

$$\underline{m}(t_e)^T = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]. \quad (6.21)$$

Damit erhält man durch Einsetzen von Gl. (6.21) in Gl. (6.19) eine einfache Identifikationsgleichung für den Parameter a_1 :

$$\tilde{Y}_{t_0, t_e}^{t_0, t_e} \overset{t}{d}RL_t^{2\alpha} \varphi_2(t) = a_1. \quad (6.22)$$

6.2 Ersatzsystem

In Abbildung 6.1 wurde vermerkt, dass die methodische Bestimmung der Modulationsfunktion $\varphi_s(t) \in \mathcal{W}_s$, welche zur parameterspezifischen Identifikation gemäß Gl. (6.10) des Systems (6.2) mit den Systemordnungen n und m und der Ableitungsordnung α führt, auf einem Ersatzsystem basiert. Dieses soll nun formal definiert werden. Wie mit diesem Modell die separate Identifikation gelingt, ist dann Gegenstand des Abschnitts 6.4.

Bei dem Ersatzsystem handelt es sich um das linksseitige fraktionale Zustandsraumssystem mit gemischten Ableitungen wie in Gl. (6.23) dargestellt:

Definition 6.2 (Ersatzsystem)

$$\underline{x}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{wn+n+m+1+[n\alpha]+r \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha]}, \quad u^*(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad n, m \in \mathbb{N}_{>0}$$

$$m < n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^{>0}, \quad w := \min\{k \in \mathbb{N}_{>0} \mid \frac{\alpha}{k} < 1\}, \quad r := \min\{k \in \mathbb{N}_{>0} \mid \frac{\max(\gamma)}{k} < 1\}$$

$$\begin{bmatrix} \overset{t}{d}_t^{\frac{\alpha}{w}} \underline{x}^\Delta(t) \\ \dot{\underline{x}}^+(t) \\ \dot{\underline{x}}^e(t) \\ \overset{t}{d}_t^{\frac{\gamma}{r}} \underline{x}^\square(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\psi}(\underline{x}^\Delta, \frac{\alpha}{w}, a, t_0, t) \\ -\underline{x}^+(t_0)\delta(t-t_0) \\ -\underline{x}^e(t_0)\delta(t-t_0) \\ \underline{\psi}(\underline{x}^\square, \gamma/r, a, t_0, t) \end{bmatrix} = \underline{A}(t) \begin{bmatrix} \underline{x}^\Delta(t) \\ \underline{x}^+(t) \\ \underline{x}^e(t) \\ \underline{x}^\square(t) \end{bmatrix} + \underline{b} u^*(t), \quad (6.23)$$

$$u^*(t) := \overset{t}{d}_t^{n\alpha} \varphi(t). \quad (6.24)$$

Das System ist aus vier Untersystemen mit den Symbolen Δ , $+$, e und \square zusammengesetzt, wobei der Zustandsvektor $\underline{x}(t)$ in den folgenden Gln. (6.25)-(6.29) definiert ist. Gemäß Definition 3.6 wird er fraktionaler Zustandsvektor genannt. Die zugehörige zeitvariante Systemmatrix $\underline{A}(t)$ und der Eingangsvektor \underline{b} werden detailliert in Abschnitt 6.3 behandelt. Die vektorielle Ableitung von $\underline{x}^\square(t)$ mit den Ableitungsordnungen $\frac{\gamma}{r}$ ist in Gl. (6.31) definiert. Das System ist offensichtlich ein Eingrößensystem mit der Eingangsgröße $u^*(t)$ in Gl. (6.24). Da unterschiedliche Ableitungsordnungen vorkommen, ist es zusätzlich ein sogenanntes Mischsystem.

Der erste Untervektor $\underline{x}^\Delta(t)$ in Gl. (6.25) wird fraktional mit der Ordnung $\frac{\alpha}{w}$ abgeleitet. Der Parameter w ist wie folgt einzustellen: $w := \min\{k \in \mathbb{Z} \mid \frac{\alpha}{k} < 1\}$. Somit ist garantiert, dass die Ableitungsordnung kleiner als Eins ist, was für ein fraktionales Zustandsraumsystem Voraussetzung ist (siehe Definition 3.7). Der Vektor selbst besteht wiederum aus Teilvektoren, welche die Modulationsfunktion $\varphi(t)$ und deren fraktionale Ableitungen beinhalten. Jeder dieser Teilvektoren beginnt mit einer fraktionalen Ableitung mit dem ganzzahligen Vielfachen von α als Ableitungsordnung. Das bedeutet, der erste Teilvektor startet mit der Ordnung Null, der zweite mit α , usw., bis zum letzten Teilvektor, der mit der Ordnung $(n-1)\alpha$ beginnt.

Definition 6.3 (Fraktionaler Zustandsvektor des Ersatzsystems)

$$\begin{aligned} \underline{x}^\Delta(t) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^{wn \times 1}, & \underline{x}(t)^+ : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^{n+m+1 \times 1}, & \underline{x}^e(t) : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^{\lceil n\alpha \rceil \times 1}, \\ \underline{x}^\square : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^{r \sum_{v=1}^n \lceil (n-v)\alpha \rceil \times 1} \end{aligned}$$

$$\underline{x}^\Delta(t) := \begin{bmatrix} \underline{x}_0^\Delta \\ \vdots \\ \underline{x}_{n-1}^\Delta \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_j^\Delta := \begin{bmatrix} {}^t_0 d_t^{j\alpha} \varphi(t) \\ {}^t_0 d_t^{j\alpha + \frac{\alpha}{w}} \varphi(t) \\ \vdots \\ {}^t_0 d_t^{j\alpha + \frac{w-1}{w}\alpha} \varphi(t) \end{bmatrix}, \quad (6.25)$$

$$\underline{x}(t)^+ := \underline{m}(t), \quad (6.26)$$

$$\underline{x}^e(t) := \begin{bmatrix} {}^t_0 d_t^{n\alpha - \lceil n\alpha \rceil} \varphi(t) \\ {}^t_0 d_t^{j\alpha + 1 - \lceil n\alpha \rceil} \varphi(t) \\ \vdots \\ {}^t_0 d_t^{n\alpha - 1} \varphi(t) \end{bmatrix}, \quad (6.27)$$

$$\underline{x}^\square(t) := \begin{bmatrix} \underline{x}_1^\square \\ \underline{x}_2^\square \\ \vdots \\ \underline{x}_{\sum_{v=1}^n \lceil (n-v)\alpha \rceil}^\square \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_j^\square := \begin{bmatrix} \{\underline{x}^\diamond\}_j \\ \underline{x}_{j1}^\square \\ \underline{x}_{j2}^\square \\ \vdots \\ \underline{x}_{j(r-1)}^\square \end{bmatrix}, \quad (6.28)$$

$$\underline{x}_{j1}^\square := {}^t_0 d_t^{\frac{\{\gamma\}_j}{r}} \{\underline{x}^\diamond\}_j, \quad \dots, \quad \underline{x}_{j(r-1)}^\square := {}^t_0 d_t^{\frac{(r-1)\{\gamma\}_j}{r}} \{\underline{x}^\diamond\}_j. \quad (6.29)$$

Zusätzlich enthält jeder Vektor jeweils $w-1$ weitere Zustände, welche ebenfalls fraktionale Ableitungen der Modulationsfunktion zwischen den ganzzahligen Schritten darstellen. Der in Gl. (6.26) enthaltene zweite Untervektor $\underline{x}^+(t)$ entspricht dem in Gl. (6.9) definierten Vektor $\underline{m}(t)$. Die beiden Teilsysteme $\underline{x}^+(t)$ und $\underline{x}^e(t)$ bilden gewöhnliche Zustandsraumsysteme, da die Vektoren einfach ganzzahlig abgeleitet werden. Der Vek-

tor $\underline{x}^e(t)$ beinhaltet einen Teil der Funktionen, die in Gl. (6.6) am oberen Rand t_e verschwinden müssen. Es muss gelten:

$${}^t dRL_t^{n\alpha+k-[\!|n\alpha|\!]-1} \varphi(t) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, [n\alpha]. \quad (6.30)$$

Der vierte und letzte Untervektor $\underline{x}^\square(t)$ ist in Gl. (6.28) definiert. Er setzt sich wiederum aus den Untervektoren $\underline{x}_1^\square, \dots, \underline{x}_{\sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha]}^\square$ zusammen und wird vektoriell abgeleitet:

$${}^t dRL_t^{\frac{\gamma}{r}} \underline{x}^\square = \begin{bmatrix} {}^t dRL_t^{\frac{\{\gamma\}_1}{r}} & \dots & {}^t dRL_t^{\frac{\{\gamma\}_{\sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha]}}{r}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1^\square \\ \vdots \\ \underline{x}_{\sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha]}^\square \end{bmatrix}. \quad (6.31)$$

Der Vektor mit den Ableitungsordnungen lautet:

$$\gamma \in \mathbb{R}^{\sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha]}$$

$$\gamma := \begin{bmatrix} \underline{\beta}_1^T & \underline{\beta}_2^T & \dots & \underline{\beta}_{n-1}^T & n\alpha + 1 \end{bmatrix}, \quad (6.32)$$

mit

$$\underline{\beta}_i^T := \begin{bmatrix} [(n-i)\alpha] + i\alpha & [(n-i)\alpha] - 1 + i\alpha & \dots & 1 + i\alpha \end{bmatrix}. \quad (6.33)$$

Um sicherzustellen, dass alle Ableitungsordnungen kleiner als Eins sind, wird jeder Eintrag durch r geteilt, wobei $r := \min\{k \in \mathbb{N}_{>0} \mid \frac{\max(\gamma)}{k} < 1\}$ gelten muss. Der Zustandsvektor $\underline{x}^\square(t)$ beinhaltet den Teil der Funktionen, die in Gl. (6.6) am oberen Rand t_e verschwinden müssen und in $\underline{x}^e(t)$ noch nicht enthalten sind:

$${}^t dRL_t^{i\alpha+k-[\!|i\alpha|\!]-1} \varphi(t), \quad k = 0, 1, \dots, [i\alpha], \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (6.34)$$

Die Funktionen aus Gl. (6.34) sind zur besseren Übersicht noch einmal in dem folgenden Vektor zusammengefasst:

$$\underline{x}^\diamond(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha]}$$

$$\underline{x}^\diamond(t) := \begin{bmatrix} {}^t d_t^{(n-1)\alpha-[(n-1)\alpha]} \varphi(t) \\ {}^t d_t^{(n-1)\alpha+1-[(n-1)\alpha]} \varphi(t) \\ \vdots \\ {}^t d_t^{(n-1)\alpha-1} \varphi(t) \\ {}^t d_t^{(n-2)\alpha-[(n-2)\alpha]} \varphi(t) \\ {}^t d_t^{(n-2)\alpha+1-[(n-2)\alpha]} \varphi(t) \\ \vdots \\ {}^t d_t^{(n-2)\alpha-1} \varphi(t) \\ {}^t d_t^{\alpha-[\!|\alpha|\!]} \varphi(t) \\ {}^t d_t^{\alpha+1-[\!|\alpha|\!]} \varphi(t) \\ \vdots \\ {}^t d_t^{\alpha-1} \varphi(t) \\ {}^t d_t^{-1} \varphi(t) \end{bmatrix}. \quad (6.35)$$

In $\underline{x}^\square(t)$ findet sich gemäß Gl. (6.29) also $\underline{x}^\diamond(t)$ mit den Komponenten, die in Gl. (6.35) detailliert beschrieben sind.

Im folgenden Beispiel wird das System (6.14) mit $\alpha = 0.4$, $n = 2$, $m = 1$ aufgegriffen und es werden der Zustandsvektor und die fraktionalen Ableitungsordnungen des zugehörigen Ersatzsystems (6.23) angegeben. Die Eingangsgröße lautet gemäß Gl. (6.24): $u^*(t) := {}_t^0 dRL_t^{2\alpha} \varphi(t)$.

Beispiel 6.2:

Der Zustandsvektor des Ersatzsystems ist entsprechend Definition 6.3 in vier Untervektoren aufgeteilt:

$$\begin{aligned} \underline{x}^\Delta(t) &:= \begin{bmatrix} \varphi(t) \\ {}_t^0 d_t^\alpha \varphi(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{x}^+(t) := m(t), \quad x^e(t) := {}_t^0 dRL_t^{2\alpha-1} \varphi(t), \quad (6.36) \\ \underline{x}^\square(t) &:= \begin{bmatrix} \underline{x}_1^\square \\ \underline{x}_2^\square \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_1^\square := \begin{bmatrix} {}_t^0 dRL_t^{\alpha-1} \varphi(t) \\ {}_t^0 dRL_t^{\frac{3\alpha-1}{2}} \varphi(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_2^\square := \begin{bmatrix} {}_t^0 dRL_t^{-1} \varphi(t) \\ {}_t^0 dRL_t^{\frac{2\alpha-1}{2}} \varphi(t) \end{bmatrix}. \quad (6.37) \end{aligned}$$

Das erste Untersystem Δ in Gl. (6.25) wird fraktional mit $\frac{\alpha}{w}$ abgeleitet, wobei hier $\alpha = 0.4 < 1 \Rightarrow w = 1$ gilt. Der Zustandsvektor \underline{x}^Δ enthält die Modulationsfunktion und deren α -fache Ableitung. Das zweite Untersystem ist gewöhnlich und wird mit $+$ bezeichnet. Der Zustandsvektor \underline{x}^+ entspricht dem Vektor aus Gl. (6.20) und besitzt daher vier Zustandsgrößen. Das dritte Untersystem ist mit einem e indiziert und besteht nur aus einer einzigen Zustandsgröße, welche gerade der ersten Funktion aus Gl. (6.18) entspricht. Das vierte und letzte Untersystem ist mit \square markiert. Der zugehörige Vektor mit den Ableitungsordnungen (6.32) ergibt sich mit (6.33) zu:

$$\gamma = [\alpha + 1 \quad 2\alpha + 1] = [1.4 \quad 1.8]. \quad (6.38)$$

Mit Gl. (6.38) ist $r := \min\{k \in \mathbb{N}_{>0} \mid \frac{\max(\gamma)}{k} < 1\} = 2$ und die vektorielle Ableitung (6.31) des letzten Untersystems lautet:

$${}_t^0 dRL_t^{\frac{\gamma}{2}} \underline{x}^\square := \begin{bmatrix} {}_t^0 dRL_t^{\frac{\alpha+1}{2}} & {}_t^0 dRL_t^{\frac{2\alpha+1}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1^\square \\ \underline{x}_2^\square \end{bmatrix}. \quad (6.39)$$

Der Zustandsvektor \underline{x}^\square hat daher die Dimension vier und ist wiederum in zwei Untervektoren der Dimension zwei unterteilt. Der erste Zustand des ersten Untervektors entspricht der zweiten, der erste Zustand des zweiten Untersystems der dritten homogenen Randbedingung aus Gl. (6.18).

6.3 Zeitvariante Systemmatrix und Eingangsvektor des Ersatzsystems

In diesem Abschnitt wird die zeitvariante Systemmatrix $\underline{A}(t)$ und der Eingangsvektor \underline{b} des fraktionalen Zustandsraumsystems (6.23) mit dem Zustandsvektor gemäß Definition 6.3 definiert. Zunächst wird jedes der Untersysteme Δ , $+$, e und \square für sich betrachtet. Anschließend werden die Untersysteme zu einem Gesamtsystem zusammengefügt.

Untersystem Δ Die Abbildung 6.2 zeigt das Strukturdiagramm des ersten Untersystems mit dem fraktionalen Zustandsvektor \underline{x}^Δ von Gl. (6.25). Die Ausgänge der Integratoren sind demnach die einzelnen Zustände.

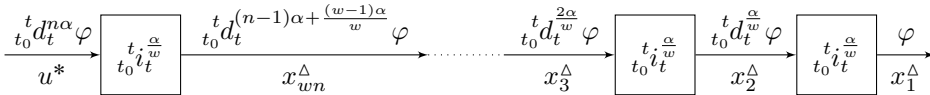


Abbildung 6.2: Integratorenkette des ersten Untersystems Δ

Den Anfang der Integratorenkette bildet die Eingangsgröße des Ersatzsystems. Solch eine Kette stellt systemtheoretisch ein Zustandsraumsystem in Regelungsnormalform mit einer Block-Jordan-Matrix, die auf der Hauptdiagonalen ausschließlich mit Nullen besetzt ist, dar [MCV10, S.38]:

$$\underline{A}^\Delta \in \mathbb{R}^{wn \times wn}, \quad \underline{b}^\Delta \in \mathbb{R}^{wn \times 1}, \quad w := \min\{k \in \mathbb{N}_{>0} \mid \frac{\alpha}{k} < 1\}$$

$$t_0^{\frac{\alpha}{w}} d_t^{-\frac{\alpha}{w}} \underline{x}^\Delta(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{wn-1 \times 1} & \mathbf{I}_{wn-1 \times wn-1} \\ 0 & \mathbf{0}_{1 \times wn-1} \end{bmatrix}}_{\underline{A}^\Delta} \underline{x}^\Delta(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{wn-1 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\underline{b}^\Delta} u^*(t). \quad (6.40)$$

Untersystem $+$ Das Strukturdiagramm des zweiten Untersystems mit dem Zustandsvektor \underline{x}^+ von Gl. (6.26) ist in Abbildung 6.3 gezeigt. Die Ausgänge der Integratoren sind wieder die einzelnen Zustände. Dadurch, dass in die Eingänge der Multiplikatoren die Modulationsfunktion sowie deren fraktionale Ableitungen $k\alpha$ -ter Ordnung mit $k \in \mathbb{N}_{>0}$ eingehen, steht das zweite Untersystem in direkter Verbindung zum ersten Untersystem Δ . Die Zustände hängen nicht von sich selbst ab. Da jedoch in die Multiplikatoren auch die zeitabhängigen Ein- und Ausgangsgrößen des zu identifizierenden Systems eingehen, ist das Untersystem zeitvariant. Mit Hilfe des Strukturdiagramms von Abbildung 6.3 lässt sich die folgende gewöhnliche Zustandsdarstellung herleiten:

$B^+(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n+m+1 \times nw}$

$$\dot{\mathbf{x}}^+(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} -\tilde{y}(t) \cdot \mathbf{H}_{n \times nw} \\ \tilde{u}(t) \cdot \mathbf{H}_{m+1 \times nw} \end{bmatrix}}_{=: B^+(t)} \mathbf{x}^\Delta(t). \quad (6.41)$$

Die Matrix \mathbf{H} in Gl. (6.41) ist wie folgt definiert:⁵⁶

Definition 6.4

$\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n \times nw}$, $h_j \in \mathbb{R}^{nw \times 1}$

$$\mathbf{H} := \begin{bmatrix} h_1^T \\ \vdots \\ h_n^T \end{bmatrix}, \quad \{h_j\}_k = \begin{cases} 1 & \text{für } k = (j-1)w + 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (6.42)$$

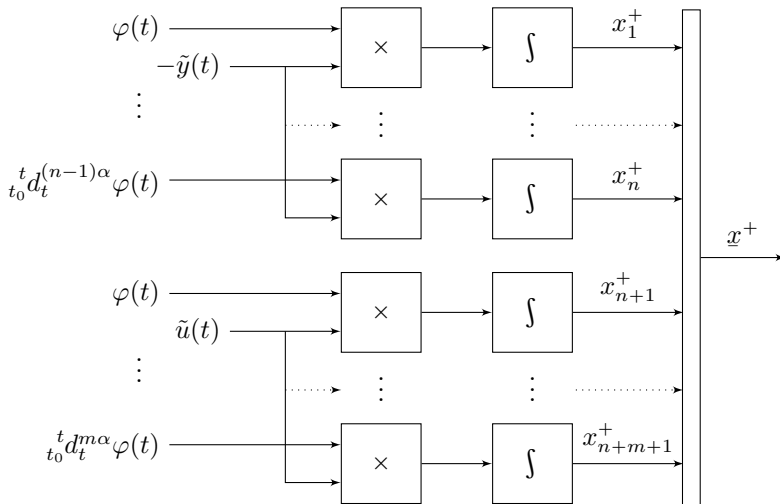
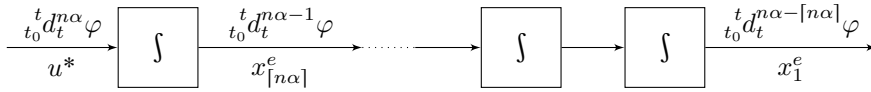


Abbildung 6.3: Struktur des zweiten Untersystems +

Untersystem e Das dritte Untersystem mit dem Zustandsvektor \mathbf{x}^e von Gl. (6.27) lässt sich mit einer Integratorenkette, bei der die Ausgänge der ganzzahligen Integratoren die einzelnen Zustände bilden, in Abbildung 6.4 darstellen.

⁵⁶ Für $w = 1$ wird die Matrix \mathbf{H} zur $n \times n$ Einheitsmatrix, da in diesem Fall $\alpha < 1$ gilt und im ersten Untersystem keine Zwischenzustände eingeführt werden müssen.

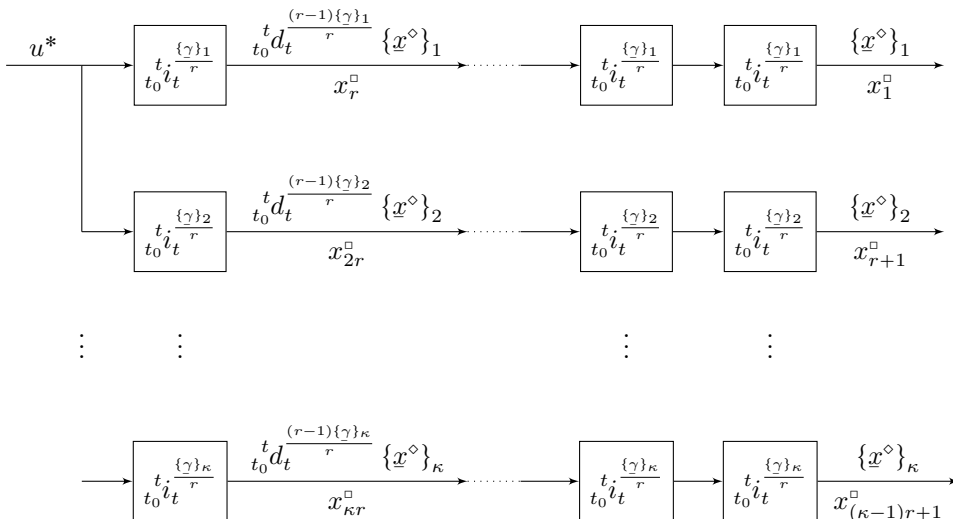
Abbildung 6.4: Struktur des dritten Untersystems e

Das Untersystem ist offenbar von den anderen Untersystemen vollständig entkoppelt, nur die Eingangsgröße des Ersatzsystems wirkt direkt auf die Ableitung des letzten Zustands. Somit ergibt sich (wie auch schon beim ersten Untersystem Δ) eine gewöhnliche Zustandsdarstellung in Regelungsnormalform:

$$A^e \in \mathbb{R}^{[n\alpha] \times [n\alpha]}, \quad b^e \in \mathbb{R}^{[n\alpha] \times 1}$$

$$\dot{x}^e(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{[n\alpha]-1 \times 1} & I_{[n\alpha]-1 \times [n\alpha]-1} \\ 0 & 0_{1 \times [n\alpha]-1} \end{bmatrix}}_{A^e} x^e(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{[n\alpha]-1 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}}_{b^e} u^*(t). \quad (6.43)$$

Untersystem \square Bei dem vierten und letzten Untersystem mit dem fraktionalen Zustandsvektor x^\square von Gl. (6.28) ist es sinnvoll, sich zunächst dessen Untervektoren x_j^\square anzuschauen. Wie in Abbildung 6.5 gezeigt ist, kann für jedes x_j^\square eine Integratorenkette erstellt werden.

Abbildung 6.5: Parallele Integratorenketten des vierten Untersystems \square , $\kappa := \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha]$

Jede Integratorenkette hat u^* als Eingang und das j -te Element des Vektors (6.35) als Ausgang. Die Integratoren sind fraktional, wobei die Ordnung der Integratorenblöcke des j -ten Stranges die j -te Komponente des Vektors γ von Gl. (6.32) bezüglich r bildet. Die $r - 1$ Zwischenzustände sind in Gl. (6.29) definiert. Die j -te Integratorenkette beschreibt folgendes fraktionales Zustandssystem in Regelungsnormalform [MCV10, S.38]:

$$\Xi := r - 1, \quad r := \min\{k \in \mathbb{N}_{>0} \mid \frac{\max(\gamma)}{k} < 1\}$$

$${}^t_0 d_t^{\frac{\{\gamma\}_j}{r}} x_j^\square(t) = \begin{bmatrix} \underline{0}_{\Xi \times 1} & \underline{I}_{\Xi \times \Xi} \\ 0 & \underline{0}_{1 \times \Xi} \end{bmatrix} x_j^\square(t) + \begin{bmatrix} \underline{0}_{\Xi \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} u^*(t). \quad (6.44)$$

Fasst man die parallele Struktur in einer Gleichung zusammen, so ergibt sich folgende Blockdarstellung:

$$z := r \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha], \quad \underline{A}^\square \in \mathbb{R}^{z \times z}, \quad \underline{b}^\square \in \mathbb{R}^{z \times 1}, \quad r := \min\{k \in \mathbb{N}_{>0} \mid \frac{\max(\gamma)}{k} < 1\}$$

$${}^t_0 d_t^{\frac{\gamma}{r}} x^\square(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{0}_{\Xi \times 1} & \underline{I}_{\Xi \times \Xi} \\ 0 & \underline{0}_{1 \times \Xi} \end{bmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix} \underline{0}_{\Xi \times 1} & \underline{I}_{\Xi \times \Xi} \\ 0 & \underline{0}_{1 \times \Xi} \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{=: \underline{A}^\square} x^\square(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{0}_{\Xi \times 1} \\ 1 \\ \vdots \\ \underline{0}_{\Xi \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}}_{=: \underline{b}^\square} u^*(t). \quad (6.45)$$

Es besteht also keine Verbindung zu einem der anderen Subsysteme.

Gesamtsystem Das Gesamtsystem setzt sich nun aus den Untersystemen der Gln. (6.40), (6.41), (6.43) und (6.45) zusammen:

$$z := wn + n + m + 1 + [n\alpha] + r \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha], \quad \underline{A}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{z \times z}, \quad \underline{b} \in \mathbb{R}^{z \times 1}$$

$$\begin{bmatrix} {}^t_0 d_t^{\frac{\alpha}{w}} x^\Delta(t) \\ \dot{x}^+(t) \\ \dot{x}^e(t) \\ {}^t_a d_t^{\frac{\gamma}{r}} x^\square(t) \end{bmatrix} = \underline{A}(t) \begin{bmatrix} x^\Delta(t) \\ x^+(t) \\ x^e(t) \\ x^\square(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{b}^\Delta \\ \underline{0}_{n+m+1 \times 1} \\ \underline{b}^e \\ \underline{b}^\square \end{bmatrix}}_{=: \underline{b}} u^*(t), \quad (6.46)$$

mit der zeitvarianten Systemmatrix

$$A(t) = \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \underline{A}^\Delta \\ \underline{B}^+(t) \\ \underline{0}_{[n\alpha] \times wn} \\ \underline{0}_{r \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha] \times wn} \end{array} & \begin{array}{c} \underline{0}_{wn \times n+m+1} \\ \underline{0}_{n+m+1 \times n+m+1} \\ \underline{0}_{[n\alpha] \times n+m+1} \\ \underline{0}_{r \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha] \times n+m+1} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \underline{0}_{wn \times [n\alpha]} \\ \underline{0}_{n+m+1 \times [n\alpha]} \\ \underline{A}^e \\ \underline{0}_{r \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha] \times [n\alpha]} \end{array} & \begin{array}{c} \underline{0}_{wn \times r \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha]} \\ \underline{0}_{n+m+1 \times r \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha]} \\ \underline{0}_{[n\alpha] \times r \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha]} \\ \underline{A}^\square \end{array} \end{array} \right]. \quad (6.47)$$

Durch Einsetzen der Matrizen \underline{A}^Δ , $\underline{B}^+(t)$, \underline{A}^e , \underline{A}^\square und der Vektoren \underline{b}^Δ , \underline{b}^e , \underline{b}^\square ergeben sich schließlich die Systemmatrix (6.48) und der konstante Eingangsvektor (6.49) des Ersatzsystems (6.23):

$$z := wn + n + m + 1 + [n\alpha] + r \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha], \quad A(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{z \times z}, \quad \underline{b} \in \mathbb{R}^{z \times 1},$$

$$w := \min\{k \in \mathbb{N}_{>0} \mid \frac{\alpha}{k} < 1\}, \quad r := \min\{k \in \mathbb{N}_{>0} \mid \frac{\max(\gamma)}{k} < 1\}, \quad \Xi := r - 1$$

$$A(t) := \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \underline{0}_{wn-1 \times 1} \quad \underline{I}_{wn-1 \times wn-1} \\ \underline{0} \quad \underline{0}_{1 \times wn-1} \\ -\underline{\tilde{y}}(t) \cdot \underline{H}_{n \times nw} \\ \underline{\tilde{u}}(t) \cdot \underline{H}_{m+1 \times nw} \\ \underline{0}_{[n\alpha] \times wn} \\ \underline{0}_{r \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha] \times wn} \end{array} & \begin{array}{c} \underline{0}_{wn \times n+m+1} \\ \underline{0}_{n+m+1 \times n+m+1} \\ \underline{0}_{[n\alpha] \times n+m+1} \\ \underline{0}_{r \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha] \times n+m+1} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \underline{0}_{wn \times [n\alpha]} \\ \underline{0}_{n+m+1 \times [n\alpha]} \\ \underline{0}_{[n\alpha]-1 \times 1} \quad \underline{I}_{[n\alpha]-1 \times [n\alpha]-1} \\ \underline{0} \quad \underline{0}_{1 \times [n\alpha]-1} \\ \underline{0}_{r \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha] \times [n\alpha]} \end{array} & \begin{array}{c} \underline{0}_{wn \times r \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha]} \\ \underline{0}_{n+m+1 \times r \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha]} \\ \underline{0}_{[n\alpha] \times r \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha]} \\ \underline{0}_{\Xi \times 1} \quad \underline{I}_{\Xi \times \Xi} \\ \underline{0} \quad \underline{0}_{1 \times \Xi} \\ \ddots \\ \underline{0}_{\Xi \times 1} \quad \underline{I}_{\Xi \times \Xi} \\ \underline{0} \quad \underline{0}_{1 \times \Xi} \end{array} \end{array} \right], \quad (6.48)$$

$$\underline{b} := \left[\begin{array}{c} \underline{0}_{wn-1 \times 1} \\ 1 \\ \underline{0}_{n+m+1 \times 1} \\ \underline{0}_{[n\alpha]-1 \times 1} \\ 1 \\ \underline{0}_{\Xi \times 1} \\ 1 \\ \vdots \\ \underline{0}_{\Xi \times 1} \\ 1 \end{array} \right]. \quad (6.49)$$

In Gl. (6.48) stellt die Matrix \underline{I} die Einheitsmatrix dar, die Matrix \underline{H} ist in Gl. (6.42) definiert. Die Ursache für die Zeitvarianz der Systemmatrix ist die Abhängigkeit von den eigentlichen zeitabhängigen Eingangs- bzw. Messgrößen $u(t)$ und $y(t)$ des zu identifizierenden Systems (6.2). Auf die Größen wird allerdings der Reflektionsoperator \underline{Q} angewendet, so dass sie als $\tilde{u}(t) = \underline{Q}u(t)$ und $\tilde{y}(t) = \underline{Q}y(t)$ in Gl. (6.48) eingehen. Wie man anhand der Systemmatrix und des Eingangsvektors erkennt, sind die Untersysteme Δ, e sowie die Subsysteme von \square parallele Integratorenketten mit $u^*(t)$ als Eingangsgröße. Weiterhin lässt sich ablesen, dass kein anderes Subsystem auf Δ, e und \square einwirkt, da außer auf den Hauptdiagonalen ausschließlich Nullmatrizen auftauchen. Die Subsysteme Δ und e beeinflussen ihrerseits kein weiteres Untersystem, was bedeutet, dass diese beiden Subsysteme vollständig vom Rest des Systems entkoppelt sind. Im Unterschied dazu wirkt Δ auf $+$. Eine vorteilhafte Eigenschaft der Systemmatrix ist darin zu sehen, dass sie nilpotent ist, da $\exists k \in \mathbb{N}_{>0} : \underline{A}^k(t) = \underline{0}$ gilt.

Zum Ende dieses Abschnitts wird noch einmal das Beispiel 6.2 aufgegriffen. Für das darin betrachtete System sollen die Systemmatrix und der Eingangsvektor gebildet werden.

Beispiel 6.3:

Für das erste Subsystem erhält man mit $w = 1$ (da $\alpha = 0.4 < 1$) nach α -facher Ableitung von $x^\Delta(t)$ eine Darstellung in Regelungsnormalform [MCV10, S.38]:

$${}_{t_0}^t d_t^\alpha x^\Delta(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x^\Delta(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u^*(t). \quad (6.50)$$

Wird der Vektor $x^+(t)$ einfach abgeleitet, erhält man folgenden zeitvarianten Zusammenhang zwischen dem ersten und zweiten Untersystem:

$$\dot{x}^+(t) = \begin{bmatrix} -\tilde{y} \cdot \underline{I}_{2 \times 2} \\ \tilde{u} \cdot \underline{I}_{2 \times 2} \end{bmatrix} x^\Delta(t). \quad (6.51)$$

Die gewöhnliche Ableitung von $x^e(t)$ führt zu einem Integrator mit $u^*(t)$ als Eingang:

$$\dot{x}^e(t) = u^*(t). \quad (6.52)$$

Die Differentiation von $x^\square(t)$ mit der vektoriellen Ableitung (6.39) führt mit $r = 2$ zu zwei parallelen Integratorenketten, die jeweils $u^*(t)$ als Eingang haben:

$${}_{t_0}^t d_t^\gamma x^\square(t) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \end{bmatrix} x^\square(t) + \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{bmatrix} \end{bmatrix} u^*(t). \quad (6.53)$$

Dieses Untersystem ist von den restlichen entkoppelt. Mit den Gln. (6.50) bis (6.53) ergibt sich für $\underline{\psi}(x, \underline{\alpha}, a, t_0, t) = 0$ insgesamt folgendes Ersatzsystem:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} {}^t d_t^\alpha \underline{x}^\Delta(t) \\ \underline{x}^+(t) \\ \underline{x}^e(t) \\ {}^t d_t^{\frac{\gamma}{2}} \underline{x}^\square(t) \end{bmatrix} \\
 = & \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{-\tilde{y}} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{-\tilde{y}} \\ \bar{\tilde{u}} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{\tilde{u}} \\ \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}^\Delta(t) \\ \underline{x}^+(t) \\ \underline{x}^e(t) \\ \underline{x}^\square(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{bmatrix} u^*. \tag{6.54}
 \end{aligned}$$

Das gleiche Ergebnis erhält man auch direkt mit Gl. (6.48) und Gl. (6.49) für $n = 2$, $m = 1$ und $\alpha = 0.4$.

6.4 Steuerungsbasierte Identifikation

In Abschnitt 6.1 wurde in Definition 6.1 eine s -spezifische Modulationsfunktion $\varphi_s(t) \in \mathcal{W}_s$ zur separaten Identifikation des s -ten Parameters der FDGL (6.2) mit Gl. (6.10) definiert. Die Modulationsfunktion wird s -spezifisch genannt, weil sie entsprechend Definition 6.1 Eigenschaften erfüllen muss, die von s abhängig sind. Eine solche Funktion wurde in dieser Arbeit allerdings bisher noch nicht vorgestellt. In diesem Abschnitt soll daher gezeigt werden, dass sie methodisch generiert werden kann. Die Funktion wird hierbei jedoch nicht direkt erzeugt, sondern über die Lösung eines Steuerungsproblems gefunden. Wenn im Folgenden von dem Ersatzsystem (6.23) die Rede ist, wird dieses entsprechend folgender Definition 6.5 als RL-System interpretiert.

Definition 6.5 (Riemann-Liouville-Ersatzsystem)

Das Ersatzsystem (6.23) wird als RL-System interpretiert:

${}_{t_0}^t dRL_t^\alpha x(t) + \underline{\psi}_{RL}(x, \alpha, a, t_0, t) = \underline{A}(t)x(t) + \underline{b} u^*(t)$. Alle in Definition 6.3 festgelegten Zustandsgrößen des Ersatzsystems und die Eingangsfunktion werden ebenfalls als RL-Ableitungen interpretiert.

Da die Steuerfunktion $u^*(t)$ des Ersatzsystems (6.23) aus der Modulationsfunktion gebildet wird, lässt sich auch eine s -spezifische Steuerfunktion wie folgt festlegen:

Definition 6.6 (s -spezifische Steuerfunktion)

Die Steuerfunktion (6.24) des Ersatzsystems (6.23) in RL-Form (entsprechend Definition 6.5) wird s -spezifische Steuerfunktion genannt, falls sie aus der s -spezifischen Modulationsfunktion $\varphi_s(t)$ gebildet wird:

$$u_s^*(t) \in \mathcal{V}_s, \quad \mathcal{V}_s := \{f(t) := {}_{t_0}^t dRL_t^{n\alpha} \varphi_s(t) \mid \varphi_s(t) \in \mathcal{W}_s\}. \quad (6.55)$$

Die Generierung der spezifischen Modulationsfunktion wird also überführt in das Auffinden einer spezifischen Steuerfunktion. Ist diese bekannt, kennt man auch implizit die Modulationsfunktion. Die s -spezifische Steuerfunktion lässt sich laut folgendem Satz 6.2 generieren, indem man ihre Initialisierungsfunktion zu Null wählt und die Steuerung so auslegt, dass das Ersatzsystem (6.23) bestimmte Endwerte besitzt.

Satz 6.2 (Generierung der s -spezifischen Steuerfunktion)

Die s -spezifische Steuerfunktion aus Definition 6.6 des Ersatzsystems (6.23) in RL-Interpretation entsprechend Definition 6.5 ergibt sich, wenn die Steuerung uninitialisiert vorliegt, d.h.

$$\psi(\varphi_s, n\alpha, a, t_0, t) = 0 \quad (6.56)$$

gilt und zudem so ausgelegt ist, dass der von s abhängige fraktionale Endzustand

$$\begin{bmatrix} \underline{x}^\Delta(t_e) & \underline{x}^+(t_e) & \underline{x}^e(t_e) & \underline{x}^\square(t_e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{e}_s & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \quad (6.57)$$

erreicht wird, mit \underline{e}_s entsprechend Gl. (6.8).

Beweis:

Damit die Steuerfunktion s -spezifisch ist, muss sie so gewählt sein, dass $\varphi_s(t) \in \mathcal{W}_s$ gilt. Daher ist zu zeigen, dass Gl. (6.56) und Gl. (6.57) zu einer Funktion $\varphi_s(t)$ mit den Eigenschaften (6.5)-(6.7) führen. Mit Gl. (6.56) folgt unmittelbar die Eigenschaft (6.5), denn es gilt:

$$\psi(\varphi_s, n\alpha, a, t_0, t) = 0 \Rightarrow \forall \tilde{t} \leq 0 : \varphi_s(\tilde{t}) = 0. \quad (6.58)$$

Gl. (6.57) sichert dann die Eigenschaft (6.6), denn es gilt entsprechend den fraktionalen Zustandsvektoren $\underline{x}^e(t)$ und $\underline{x}^\square(t)$ aus Gl. (6.27) und Gl. (6.28):

$$\begin{aligned} \underline{x}^e(t_e) = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad & {}^t_0 dRL_t^{n\alpha+k-\lfloor n\alpha \rfloor - 1} \varphi_s(t) \Big|_{t=t_e} = 0, \\ & k = 0, 1, \dots, \lfloor n\alpha \rfloor \end{aligned} \quad (6.59)$$

und

$$\begin{aligned} \underline{x}^\square(t_e) = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad & {}^t_0 dRL_t^{i\alpha+k-\lfloor i\alpha \rfloor - 1} \varphi_s(t) \Big|_{t=t_e} = 0, \\ & k = 0, 1, \dots, \lfloor i\alpha \rfloor, \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Abschließend ergibt sich mit Gl. (6.57) gemäß dem Zustandsvektor (6.26) die letzte geforderte Eigenschaft (6.7):

$$\underline{x}^+(t_e) = \underline{e}_s \Rightarrow \underline{m}(t_e) = \underline{e}_s. \quad (6.61)$$

□

Mit Satz 6.2 lässt sich also die Steuerung $u_s^*(t)$ aus Definition 6.6 erzeugen. Durch Einsetzen von $u_s^*(t)$ in Gl. (6.10) ergibt sich schließlich der Parameter p_s der FDGL (6.2) durch:

Satz 6.3 (Steuerungsbasierte Identifikation)

$$\tilde{Y}_{t_0, t_e} u_s^*(t) = p_s. \quad (6.62)$$

Das Identifikationsproblem wurde also in ein Steuerungsproblem für ein zeitvariantes fraktionales System überführt. Positiv hierbei ist, dass die Steuerung eines *linksseitigen* Systems zu entwerfen ist, was deutlich intuitiver erscheint, da es ein kausales System darstellt. Aus der Eigenschaft (6.56) folgt außerdem Gl. (6.58) und damit die Uninitialisiertheit des Ersatzsystems:

$$\begin{bmatrix} \underline{\psi}(\underline{x}^\Delta, \frac{\alpha}{w}, a, t_0, t) \\ -\underline{x}^+(t_0)\delta(t-t_0) \\ -\underline{x}^e(t_0)\delta(t-t_0) \\ \underline{\psi}(\underline{x}^\square, \gamma/r, a, t_0, t) \end{bmatrix} = \underline{0}. \quad (6.63)$$

Das folgende Beispiel greift das System (6.14) aus den Beispielen 6.1 bis 6.3 nochmal auf und zeigt die Anwendbarkeit von Satz 6.3.

Beispiel 6.4:

Es ist zu zeigen, dass sich die Eigenschaften (6.17)-(6.18) und (6.21) durch die passenden Endwerte und die passende Steuerfunktion $u_2^*(t) := {}^t_0 dRL_t^{2\alpha} \varphi_2(t)$ des Ersatzsystems (6.54) wie in Satz 6.2 beschrieben erfüllen lassen, denn dann ist die

passende Modulationsfunktion $\varphi_2(t)$ zur Identifikation von a_1 gefunden. Eine uninitialisierte Steuerfunktion $u^*(t)$ führt zu Gl. (6.16) und damit sind die unteren Randwerte (6.17) erfüllt. Weiterhin wird, wie in Gl. (6.57) vorgeschlagen, der folgende fraktionale Endzustand gewählt:

$$\underline{x}(t_e)^T = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]. \quad (6.64)$$

Aus Gl. (6.64) geht hervor, dass $\underline{x}^+(t_e) = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$ gilt. Das +-System entspricht dem Vektor von Gl. (6.20), womit sich die folgende Relation ergibt:

$$\underline{x}^+(t_e) = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \Rightarrow m(t_e)^T = [0 \ 1 \ 0 \ 0]. \quad (6.65)$$

Damit ist Gl. (6.21) erfüllt. Der Endzustand des e -Systems ist $x^e(t_e) = 0$, womit folgender Zusammenhang besteht:

$$x^e(t_e) = 0 \Rightarrow {}^{t_0}dRL_t^{2\alpha-1}\varphi_2(t)|_{t=t_e} = 0. \quad (6.66)$$

Weiterhin ist $\underline{x}^\square(t_e) = \underline{0}$ und daher gilt:

$$\underline{x}^\square(t_e) = \underline{0} \Rightarrow {}^{t_0}dRL_t^{\alpha-1}\varphi_2(t)|_{t=t_e} = {}^{t_0}dRL_t^{-1}\varphi_2(t)|_{t=t_e} = 0. \quad (6.67)$$

Gln. (6.66) und (6.67) kombiniert entsprechen Gl. (6.18). Der Parameter a_1 ergibt sich dann mit Gl. (6.62) zu:

$$\tilde{Y}_{t_0, t_e}^{u_2^*(t)} = a_1. \quad (6.68)$$

Angenommen, es existieren bereits Syntheseverfahren für die Steuerung eines zeitvarianten fraktionalen Systems, so können verschiedene Steuerungen $u_s^*(t) \in \mathcal{V}_s$ berechnet werden und es stellt sich letztlich die Frage, wie man gerade diejenige auswählt, welche zu einem möglichst kleinen Identifikationsfehler $\Delta p_s = \hat{p}_s - p_s$ führt. Um dies herauszufinden, muss man das Modulationsfunktionsverfahren unter realen Umständen betrachten. Dies bedeutet, dass die Messungen als Funktionen, welche von additiven Störungen $y_e(t)$ und $u_e(t)$ überlagert sind, eingeführt werden müssen:

$$\tilde{y}_{mess}(t) = \tilde{y}(t) + \tilde{y}_e(t), \quad (6.69)$$

$$\tilde{u}_{mess}(t) = \tilde{u}(t) + \tilde{u}_e(t). \quad (6.70)$$

In den Gln. (6.69) und (6.70) wurde auf der linken und rechten Seite der Reflektionsoperator \mathcal{Q} aus Definition A.1 angewendet. Wird die Identifikation mit den fehlerhaften Messgrößen durchgeführt, so erhält man den fehlerhaft geschätzten Parameter \hat{p}_s . Der Identifikationsfehler $\Delta p_s = \hat{p}_s - p_s$ ergibt sich dann zu:

Satz 6.4 (Identifikationsfehler)

$$\Delta p_s = \tilde{Y}_{t_0, t_e}^* u_s^*(t) - m_e(t_e)^T \underline{p}. \quad (6.71)$$

Der Beweis findet sich im Anhang I.9. Sinnvoll ist offensichtlich die Wahl desjenigen Stellsignals, welches den Identifikationsfehler Δp_s möglichst klein macht. Anhand von Gl. (6.71) lässt sich solch eine Steuerung zwar nicht direkt erkennen, jedoch ist es möglich, für den Identifikationsfehler eine obere Fehlerschranke anzugeben. Die Herleitung der Fehlerschranke kann dem Anhang I.10 entnommen werden, das Ergebnis ist im folgenden Satz 6.5 mit Gl. (6.72) angegeben. Die darin enthaltene Funktion G gemäß Gl. (I.60) hängt vom betrachteten Zeitintervall, den Parametern und den Störgrößen ab. Im Wurzelterm kommt der in Gl. (6.73) definierte, von der Steuerung $u_s^*(t)$ und dem Zeitintervall abhängende Integralterm $J(u_s^*, t_0, t_e)$ vor:

Satz 6.5 (Obere Schranke des Identifikationsfehlers)

$$|\Delta p_s| \leq G(t_0, t_e, \underline{p}, \tilde{y}_e, \tilde{u}_e) \cdot \sqrt{2 \frac{t_e^2}{t_0} i_e^{2-2\alpha} J(u_s^*, t_0, t_e)}, \quad (6.72)$$

mit G aus (I.60) sowie

$$q = 3 + \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha], \quad \alpha \in \mathbb{R}^q, \quad \beta := \max\{\{\alpha\}_i, i = 1, \dots, q \mid \{\alpha\}_i < 1\}$$

$$J(u_s^*, t_0, t_e) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_e} (t_e - \zeta)^{2\beta-2} u_s^*(\zeta)^2 d\zeta. \quad (6.73)$$

Der Integralterm (6.73) kann als ein mit einem Vorfaktor versehenes, energieoptimales Gütemaß betrachtet werden. Hierbei ist α der Vektor mit den Ableitungsordnungen des Ersatzsystems (6.23). Anhand von Gl. (6.72) erkennt man, dass für einen möglichst kleinen Identifikationsfehler Δp_s dasjenige Steuersignal eingesetzt werden sollte, welches $J(u_s^*, t_0, t_e)$ und damit die obere Fehlerschranke minimiert, was unmittelbar zu folgendem Satz 6.6 führt:

Satz 6.6 (Energieoptimale Steuerung für eine minimale obere Fehlerschranke)

Die obere Schranke (6.72) wird minimal, wenn in Gl. (6.62) unter all den möglichen Steuerfunktionen $u_s^* \in \mathcal{V}_s$ die energieoptimale Steuerung

$$\hat{u}_s^* = \arg \min_{u_s^* \in \mathcal{V}_s} J(u_s^*, t_0, t_e) \quad (6.74)$$

ausgewählt wird.

Beweis:

Der Satz 6.6 folgt unmittelbar aus der Gl. (6.72) und dem Satz 6.3. □

6.5 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde erstmalig gezeigt, wie mit einer energieoptimalen Steuerung für ein definiertes Ersatzsystem in fraktionaler zeitvarianter Zustandsdarstellung eine parameterspezifische Modulationsfunktion modellbasiert generiert werden kann. Mit dieser Modulationsfunktion ist eine separate Bestimmung einzelner Parameter möglich. Der Ansatz ist neu und unterscheidet sich von den entwickelten Heuristiken des Modulationsfunktionsverfahrens in Kapitel 4.

Zunächst wurden die geforderten Eigenschaften solch einer Modulationsfunktion hergeleitet, bevor die Definition und Diskussion des hierzu benötigten Ersatzsystems erfolgte. Es stellte sich heraus, dass die Modulationsfunktion bestimmte Randwerte und eine parameterspezifische Bedingung erfüllen muss. Bei dem Ersatzsystem handelt es sich um ein Mischsystem mit unterschiedlichen Ableitungsordnungen. Die Zustandsgrößen wurden so gewählt, dass die Randbedingungen an die Modulationsfunktion gerade dann erfüllt sind, wenn das Ersatzsystem einen bestimmten Endwert besitzt. Somit wurde das Identifikationsproblem in ein Steuerungsproblem für ein fraktionales zeitvariantes Zustandsraumssystem überführt.

Im weiteren Verlauf wurde der Fall von fehlerhaften Messdaten beleuchtet. Hierbei ließ sich eine obere Fehlerschranke für den durch die Messfehler resultierenden Identifikationsfehler herleiten. Es stellte sich heraus, dass diese Fehlerschranke von der Steuerung des Ersatzsystems abhängig ist. Sie wird minimal wenn die Steuerung energieoptimal bezüglich einem für fraktionale Systeme modifizierten Gütemaß ist. Daher ist die Identifikation mit diesem Ansatz in gewisser Weise optimal.

Die Aufgabenstellung lässt sich also als ein Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen zusammenfassen: Gesucht ist eine Steuerung, welche das energieoptimale Gütemaß unter der Randbedingung $u_s^*(t) \in \mathcal{V}_s$ für ein zeitvariantes fraktionales Zustandsraumssystem minimiert. Ein solcher Steuerungsentwurf ist für gewöhnliche Systeme hinlänglich bekannt [Föl94], bisher jedoch nicht für fraktionale zeitvariante Systeme. Natürlicherweise stellt sich in diesem Zusammenhang auch die Frage, ob das Ersatzsystem überhaupt vollständig steuerbar ist. Bisher gab es in der Literatur jedoch auch kein Steuerbarkeitskriterium.

7 Fraktionale Optimalsteuerung

In diesem Kapitel wird das allgemeine zeitvariante fraktionale Zustandsraumssystem aus Definition 3.7 mit dem fraktionalen Zustandsvektor $\underline{x}(t)$ und der Eingangsfunktion $\underline{u}(t)$ betrachtet, welches folgendermaßen lautet:

$$\underline{x}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^q n_i \times 1}, \quad \underline{u}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times 1}$$

$${}_{t_0}^t \mathcal{D}_t^\alpha \underline{x}(t) + \underline{\psi}(\underline{x}, \alpha, a, t_0, t) = A(t)\underline{x}(t) + B(t)\underline{u}(t). \quad (7.1)$$

Für dieses System soll eine geschlossene energieoptimale Steuerfunktion entworfen werden. Um zu überprüfen, ob im konkreten Fall eine solche Steuerung überhaupt möglich ist, wird zuvor ein Steuerbarkeitskriterium hergeleitet. Diese allgemein gültigen Erkenntnisse können dann auf das Ersatzsystem aus Abschnitt 6.2 angewendet werden, um die Identifikation mit der steuerungs-basierten Methode der Modulationsfunktionen aus Kapitel 6 durchführen zu können.

Prinzipiell möglich wäre auch eine numerische Lösung des Steuerungsproblems [AB07b, Agr04, TC08, TC10, Hor15]. Das Ziel dieser Arbeit ist jedoch late-lumping Verfahren zu entwerfen, d.h. also eine Approximation zu vermeiden bzw. so spät wie möglich durchzuführen. Dies reduziert in vielen Fällen den Implementierungsaufwand.

Die prinzipiellen Schritte zum Entwurf der energieoptimalen Steuerung für das System (7.1) sind in Abbildung 7.1 wiedergegeben und entsprechen denen des herkömmlichen Entwurfs einer Steuerung für gewöhnliche Systeme; siehe dazu beispielsweise [Föl94, Unb93]. Eine zentrale Rolle spielt die analytische Lösung der zu steuernden Zustandsgleichung (7.1). Diese Lösung basiert auf einer entsprechend neu definierten sogenannten \underline{R} -Matrixfunktion, die im fraktionalen Fall vergleichbar ist mit der Transitionsmatrix bei der Lösung einer gewöhnlichen DGL. Für den zeitinvarianten fraktionalen Fall sind solche Lösungen bereits bekannt [Das11, S.350-359],[Das13, MCV10],[SFT14].⁵⁷ Für den zeitvarianten Fall gibt es jedoch nur einen unvollständigen und leider nicht korrekten Lösungsansatz [QGX05]. Daher ist die Bestimmung der Zustandslösung für zeitvariante fraktionale Systeme Gegenstand des vorliegenden Kapitels. Basierend auf dem resultierenden fraktionalen Zustandsvektor $\underline{x}(t)$ lässt sich die fraktionale Steuerbarkeit definieren und ein Steuerbarkeitskriterium inklusive einer fraktionalen Gram'schen Matrix herleiten. Außerdem ergibt sich mit Hilfe der Zustandslösung und des fraktionalen Hamiltonverfahrens die energieoptimale Steuerung. Da bisher nur zeitinvariante Zustandslösungen existieren, sind auch nur Steuerbarkeitskriterien [MAN96] und Steuerfunktionen [Das13, MT11] für zeitinvariante Systeme bekannt. Im Folgenden werden daher die vier Schritte in der Abbildung 7.1

⁵⁷ Eine numerische Lösung kann mit Hilfe der GL-Approximation aus Gl. (L.4) bestimmt werden [SD06] u.v.a..

erstmalig auf den zeitvarianten Fall verallgemeinert. Das Kapitel ist entsprechend den Schritten strukturiert. Um die Zusammenhänge verständlicher zu machen, werden alle



Abbildung 7.1: Zentrale Schritte zum Entwurf einer fraktionalen Optimalsteuerung

hergeleiteten Kriterien und Lösungen, angefangen bei der R -Matrixfunktion bis zur Steuerfunktion, anhand desselben Beispielsystems veranschaulicht.

7.1 Fraktionale Peano-Baker-Reihe und R -Matrixfunktion

In diesem Abschnitt werden zwei neue Matrizen, die sogenannten \underline{F} - und \underline{R} -Matrixfunktionen, definiert und ihre Eigenschaften diskutiert. Es wird in Abschnitt 7.2 deutlich werden, dass die \underline{R} -Matrixfunktion bei der fraktionalen Zustandslösung eine ähnlich wichtige Rolle spielt wie die zeitvariante Erweiterung der Matrixexponentialfunktion, welche als die sogenannte Peano-Baker-Reihe bekannt ist [Unb93, S.93][Rug96, S.44], bei der Lösung gewöhnlicher Zustandsraumssysteme. Im gewöhnlichen Fall werden die Peano-Baker-Reihe bzw. die Matrixexponentialfunktion meistens als Transitionsmatrix bezeichnet [Lud95, S.43] u.v.a.. Bei fraktionalen Systemen muss auf diese Bezeichnung unbedingt verzichtet werden, da es aufgrund der Definition 3.6 eines fraktionalen Zustands keine *Transition* von einem einzigen fraktionalen Zustand in einen anderen geben kann. Zunächst wird die \underline{F} -Matrix definiert:⁵⁸

⁵⁸ Die \underline{F} -Matrix (7.2) wird in dieser Arbeit auch als *linksseitige* \underline{F} -Matrix bezeichnet.

Definition 7.1 (\underline{F} -Matrixfunktion (Fraktionale Peano-Baker-Reihe))

Es sei $v, i, j, k, q, n_l \in \mathbb{N}_{>0}$, $j \leq k$, $v \leq k+1$, $\tau, t, \xi_v \in \mathbb{R}$, $\tau \leq t$, $\alpha \in (\mathbb{R}^{>0})^q$
 $\underline{\Lambda}(\xi_i) \in (L[\tau, t])^{\sum_{i=1}^q n_i \times \sum_{i=1}^q n_i}$, $\underline{\Lambda}_i(\xi_v) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_i \times \sum_{i=1}^q n_i}$ und
 $\underline{\Lambda}(\xi_v) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^q n_i \times \sum_{i=1}^q n_i}$. Dann gilt:

$$\underline{F}_\alpha(t, \tau, \underline{\Lambda}(\xi)) := \underline{I} + \frac{\xi_1 i_1^\alpha}{\tau i_1^\alpha} \underline{\Lambda}(\xi_1) + \frac{\xi_1 i_1^\alpha}{\tau i_1^\alpha} \underline{\Lambda}(\xi_1) \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^k \frac{\xi_{j+1} i_j^\alpha}{\tau i_j^\alpha} \underline{\Lambda}(\xi_{j+1}). \quad (7.2)$$

Da die \underline{F} -Matrix (7.2) der Peano-Baker-Reihe ähnelt, kann sie auch als deren fraktionales Pendant bezeichnet werden. Der Unterschied liegt darin, dass fraktionale Integrationsoperatoren (3.3) in den Summentermen verwendet werden. Für $\alpha = 1$ stellt die \underline{F} -Matrix die klassische Peano-Baker-Reihe dar. Gilt darüber hinaus der zeitinvariante Fall, d.h. $\underline{\Lambda}$ ist konstant, dann ergibt sich die Matrixexponentialfunktion. Als wichtiger Aspekt ist hervorzuheben, dass im fraktionalen zeitinvarianten Fall die \underline{F} -Matrix zu der bekannten Mittag-Leffler-Funktion [PD13, S.11] wird, siehe Lemma D.1. Diese Matrix wird in Anlehnung zum gewöhnlichen Fall häufig fraktionale Matrixexponentialfunktion genannt. In gleicher Weise kann man eine rechtsseitige \underline{F} -Matrix $\underline{F}_{\alpha,rs}(\tau, t, \underline{\Lambda}(t))$, $\tau \geq t$ definieren. Dafür müssen nur die linksseitigen Integrale in Gl. (7.2) durch rechtsseitige Integrale ersetzt werden.

Eine weitere Matrixdefinition, die sogenannte \underline{R} -Matrix in Gl. (7.4) gemäß der folgenden Definition 7.2, resultiert aus der $(1 - \alpha)$ -fachen rechtsseitigen Ableitung der \underline{F} -Matrix von Gl. (7.2) bezüglich τ .⁵⁹

Definition 7.2 (\underline{R} -Matrixfunktion (Zeitvariante Erweiterung der Robertson-Hartley-Funktion))

Die \underline{R} -Matrixfunktion ist folgendermaßen definiert:

$$\underline{R}_\alpha(t, \tau, \underline{\Lambda}(\xi)) := \tau \underline{d}RL_t^{1-\alpha} \underline{F}_\alpha(t, \tau, \underline{\Lambda}(\xi)). \quad (7.3)$$

Durch Einsetzen von Gl. (7.2) in Gl. (7.3) ergibt sich der Ausdruck:

$$\begin{aligned} \underline{R}_\alpha(t, \tau, \underline{\Lambda}(\xi)) = & \underline{E} + \tau \underline{d}RL_t^{1-\alpha} \frac{\xi_1 i_1^\alpha}{\tau i_1^\alpha} \underline{\Lambda}(\xi_1) \\ & + \tau \underline{d}RL_t^{1-\alpha} \frac{\xi_1 i_1^\alpha}{\tau i_1^\alpha} \underline{\Lambda}(\xi_1) \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^k \frac{\xi_{j+1} i_j^\alpha}{\tau i_j^\alpha} \underline{\Lambda}(\xi_{j+1}), \end{aligned} \quad (7.4)$$

wobei

$$\underline{E} := \text{diag} \left(\frac{(t - \tau)^{\alpha_1 - 1}}{\Gamma(\alpha_1)} \underline{I}_{n_1 \times n_1}, \dots, \frac{(t - \tau)^{\alpha_q - 1}}{\Gamma(\alpha_q)} \underline{I}_{n_q \times n_q} \right). \quad (7.5)$$

⁵⁹ Die \underline{R} -Matrix (7.4) wird in dieser Arbeit auch als *linksseitige* \underline{R} -Matrix bezeichnet.

In Lemma D.2 wird gezeigt, dass Gl. (7.4) für ein konstantes $\underline{\Lambda}$ zu der bekannten *Robotnov-Hartley* (RH)-Funktion von Gl. (D.3) wird [LH99, S.2] und somit die zeitvariante Erweiterung dieser Matrix ist. Für $\alpha = 1$ entspricht die \underline{R} - der \underline{F} -Matrix und damit auch der Peano-Baker-Reihe.

Die linksseitige Ableitung bezüglich τ aus Gl. (B.7) von $\underline{F}_{\alpha,rs}$ führt zu der rechtsseitigen \underline{R} -Matrix:

$$\underline{R}_{\alpha,rs}(\tau, t, \underline{\Lambda}(\xi)) := \tau \underline{d}RL_{\tau}^{1-\alpha} \underline{F}_{\alpha,rs}(\tau, t, \underline{\Lambda}(\xi)). \quad (7.6)$$

Sowohl die links- als auch die rechtsseitige \underline{R} -Matrix besitzt Singularitäten an der Stelle $t = \tau$, falls $\alpha_i < 1$ für mindestens ein i zwischen 1 und q gilt.

Die \underline{R} -Matrix des Ersatzsystems aus Gl. (6.23) ist in Gl. (8.6) zu finden. In Beispiel 7.1 wird die zu einer Matrix $\underline{\Lambda}(t)$ gehörende links- und rechtsseitige \underline{R} -Matrix berechnet.

Beispiel 7.1:

In diesem Beispiel wird die links- und rechtsseitige \underline{R} -Matrix für

$$\underline{\Lambda}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} \quad (7.7)$$

und $\alpha \in (0, 1)$ berechnet. Mit $\underline{\Lambda}(t)^2 = \underline{0}$ und Gl. (3.3) ergibt sich die benötigte linksseitige \underline{F} -Matrix (7.2) zu

$$\underline{F}_{\alpha}(t, \tau, \underline{\Lambda}(\xi)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(t-\tau)^{\alpha} t}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{(t-\tau)^{1+\alpha}}{\Gamma(\alpha)(1+\alpha)} & 1 \end{bmatrix}, \quad (7.8)$$

die rechtsseitige \underline{F} -Matrix lautet

$$\underline{F}_{\alpha,rs}(\tau, t, \underline{\Lambda}(\xi)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(\tau-t)^{\alpha} t}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{(\tau-t)^{1+\alpha}}{\Gamma(\alpha)(1+\alpha)} & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.9)$$

Nun wird die Gl. (7.8) rechtsseitig bezüglich τ abgeleitet. Unter Zuhilfenahme von Ableitungsregel (B.9) ergibt sich:

$$\underline{R}_{\alpha}(t, \tau, \underline{\Lambda}(\xi)) = \begin{bmatrix} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & 0 \\ \frac{(t-\tau)^{2\alpha-1} t}{\Gamma(2\alpha)} - \frac{\Gamma(2+\alpha)(t-\tau)^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)(1+\alpha)\Gamma(1+2\alpha)} & \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \end{bmatrix}. \quad (7.10)$$

Die Gl. (7.9) wird linksseitig bezüglich τ abgeleitet, was mit Ableitungsregel (B.10) zu

$$\underline{R}_{\alpha,rs}(\tau, t, \underline{\Lambda}(\xi)) = \begin{bmatrix} \frac{(\tau-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & 0 \\ \frac{(\tau-t)^{2\alpha-1} \tau}{\Gamma(2\alpha)} + \frac{\Gamma(2+\alpha)(\tau-t)^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)(1+\alpha)\Gamma(1+2\alpha)} & \frac{(\tau-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

führt.

Das Besondere an den vorgestellten Matrizen ist, dass sie einige wichtige Eigenschaften besitzen, die im Folgenden betrachtet werden. Alle Eigenschaften der \underline{R} -Matrix werden in Abschnitt 7.2 für den Beweis der Lösung (7.18) der zeitvarianten fraktionalen Zustandsgleichung benötigt. Dies kann wieder mit dem gewöhnlichen Fall verglichen werden, denn die Peano-Baker-Reihe besitzt ähnliche Eigenschaften [Rug96, Kapitel 4][Lud95, S.47][Kai80, S.598-599] u.v.a.. Zu betonen ist, dass die Transitions- und Einheitseigenschaft bei der \underline{R} -Matrix aufgrund der Definition 3.6 eines fraktionalen Zustands nicht dazugehören kann. Die Eigenschaften der \underline{F} -Matrix werden in den Beweisen zu den Eigenschaften der \underline{R} -Matrix benötigt.

Das folgende Lemma 7.1 postuliert zunächst die α -fache Ableitung der Matrixfunktion (7.2) bezüglich t :

Lemma 7.1 (Ableitungseigenschaft der \underline{F} -Matrix)

$${}^t d_t^\alpha \underline{F}_\alpha(t, \tau, \Lambda(\xi)) = {}^t d_t^\alpha \underline{I} + \Lambda(t) \underline{F}_\alpha(t, \tau, \Lambda(\xi)). \quad (7.12)$$

Für den C-Fall würde der erste Term verschwinden und es ergäbe sich eine homogene FDGL α -ter Ordnung. Der Beweis von Gl. (7.12) ist im Anhang I.12 zu finden. Die \underline{R} -Matrix erfüllt eine zeitvariante homogene FDGL:

Lemma 7.2 (Ableitungseigenschaft der \underline{R} -Matrix)

$$\alpha \in ((0, 1))^q$$

$${}^t d R L_t^\alpha \underline{R}_\alpha(t, \tau, \Lambda(\xi)) = \Lambda(t) \underline{R}_\alpha(t, \tau, \Lambda(\xi)). \quad (7.13)$$

Den Beweis von Gl. (7.13) liefert Anhang I.13. Zudem erfüllt die \underline{R} -Matrix die sogenannte Eliminationseigenschaft:

Lemma 7.3 (Eliminationseigenschaft der \underline{R} -Matrix)

$$\lim_{\tau \rightarrow t-0} {}^t i_t^{1-\alpha} \underline{R}_\alpha(t, \tau, \Lambda(\xi)) = \underline{I}. \quad (7.14)$$

$\tau \rightarrow t-0$ bedeutet, dass τ größer wird und sich von links t nähert.

Der Beweis von Gl. (7.14) kann im Anhang I.15 verfolgt werden. Als letzte Eigenschaft ist noch die sogenannte Einheitseigenschaft der \underline{F} -Matrix zu nennen:

Lemma 7.4 (Einheitseigenschaft der \underline{F} -Matrix)

Es ist offensichtlich, dass für $t = \tau$ die \underline{F} -Matrixfunktion $\underline{F}_\alpha(t, \tau, \Delta(\xi))$ zu

$$\underline{F}_\alpha(\tau, \tau, \Delta(\xi)) = \underline{I} \quad (7.15)$$

wird.

7.2 Lösung der zeitvarianten FDGL

Bevor auf die analytische Lösung der linksseitigen zeitvarianten Zustandsgleichung (3.28) bzw. (7.1) eingegangen wird, soll die Eindeutigkeit einer möglichen Lösung betrachtet werden. Hierfür wird folgende Vektorfunktion definiert:

Definition 7.3

Die Vektorfunktion $\underline{f}(\underline{x}, t)$ erfüllt die Lipschitz-Bedingung [BSM05, S.205] bezüglich \underline{x} und ist kontinuierlich, wobei \underline{x} den in Gl. (7.1) definierten Zustandsvektor darstellt.

In [KST06, S.135-220] konnte bereits gezeigt werden, dass eine FDGL in der Form von Gl. (3.28) ${}^t_0 d_t^\alpha \underline{x}(t) + \underline{\psi}_s(t) = \underline{f}(\underline{x}, t)$ eine eindeutige Lösung besitzt, wobei $\underline{f}(\underline{x}, t)$ die Vektorfunktion aus Definition 7.3 darstellt. Hierbei ist $\underline{\psi}_s(t)$ allerdings eine spezielle Initialisierungsfunktion (siehe Lemma 7.6). In der vorliegenden Arbeit werden jedoch allgemeine fraktionale Systeme betrachtet, ohne Einschränkung bezüglich einer bestimmten Initialisierungsfunktion. Für diesen Fall kann der folgende Satz aufgestellt werden:

Satz 7.1 (Eindeutigkeit der Zustandslösung)

Unter der Annahme, dass für die in Gl. (3.28) definierte fraktionale Zustandsdarstellung

$${}^t_0 d_t^\alpha \underline{x}(t) + \underline{\psi}(\underline{x}, \alpha, a, t_0, t) = \underline{f}(\underline{x}, t) \quad (7.16)$$

mit $\underline{f}(\underline{x}, t)$ aus Definition 7.3 eine Lösung existiert, ist diese eindeutig. Dies gilt insbesondere für $\underline{f}(\underline{x}, t) := \underline{A}(t)\underline{x}(t) + \underline{B}(t)\underline{u}(t)$.

Der Beweis von Satz 7.1 ist im Anhang I.11 zu finden. Mit den in Abschnitt 7.1 definierten Matrizen als Grundlage wird nun die analytische Lösung von Gl. (3.28) in Gl. (7.18) präsentiert. Entsprechend Satz 7.1 ist diese eindeutig.

Satz 7.2 (Lösung der zeitvarianten fraktionalen Zustandsgleichung)

Es sei

$${}^t_0 D_t^\alpha x(t) + \underline{\psi}(x, t) = \underline{A}(t)x(t) + \underline{B}(t)u(t) \quad (7.17)$$

die in Gl. (3.28) bzw. Gl. (7.1) definierte fraktionale Zustandsdarstellung. Dann lautet die eindeutige Lösung $x(t)$ von Gl. (7.17):

$$x(t) = - \int_{t_0}^t \underline{R}_\alpha(t, \tau, \underline{A}(\xi)) \underline{\psi}(x, \tau) d\tau + \int_{t_0}^t \underline{R}_\alpha(t, \tau, \underline{A}(\xi)) \underline{B}(\tau)u(\tau) d\tau. \quad (7.18)$$

Beweis:

Der Beweis von Satz 7.2 wird rückwärts geführt. Das bedeutet, falls er korrekt ist, muss die α -fache Ableitung von Gl. (7.18) der Gl. (7.17) entsprechen. Um dies zu überprüfen, wird die entsprechende Ableitung zunächst gebildet:

$$\begin{aligned} {}^t_0 D_t^\alpha x(t) &= - {}^t_0 D_t^\alpha \int_{t_0}^t \underline{R}_\alpha(t, \tau, \underline{A}(\xi)) \underline{\psi}(x, \tau) d\tau \\ &\quad + {}^t_0 D_t^\alpha \int_{t_0}^t \underline{R}_\alpha(t, \tau, \underline{A}(\xi)) \underline{B}(\tau)u(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (7.19a)$$

Anwendung des Parameterintegralproblems von Lemma 3.1 auf beiden Seiten der Gl. (7.19a) führt zu:

$$\begin{aligned} {}^t_0 D_t^\alpha x(t) &= - \int_{t_0}^t {}^t_\tau D_t^\alpha \underline{R}_\alpha(t, \tau, \underline{A}(\xi)) \underline{\psi}(x, \tau) d\tau \\ &\quad - \lim_{\tau \rightarrow t-0} {}^t_\tau I_t^{1-\alpha} \{ \underline{R}_\alpha(t, \tau, \underline{A}(\xi)) \} \underline{\psi}(x, \tau) \\ &\quad + \int_{t_0}^t {}^t_\tau D_t^\alpha \underline{R}_\alpha(t, \tau, \underline{A}(\xi)) \underline{B}(\tau)u(\tau) d\tau \\ &\quad + \lim_{\tau \rightarrow t-0} {}^t_\tau I_t^{1-\alpha} \{ \underline{R}_\alpha(t, \tau, \underline{A}(\xi)) \} \underline{B}(\tau)u(\tau). \end{aligned} \quad (7.19b)$$

Die Ableitung der \underline{R} -Matrix lässt sich unter beiden Integralen mit Hilfe der Ableitungseigenschaft (7.13) aus Lemma 7.2 ausdrücken. Es ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} {}^t_0 D_t^\alpha x(t) &= - \int_{t_0}^t \underline{A}(t) \underline{R}_\alpha(t, \tau, \underline{A}(\xi)) \underline{\psi}(x, \tau) d\tau \\ &\quad - \lim_{\tau \rightarrow t-0} {}^t_\tau I_t^{1-\alpha} \{ \underline{R}_\alpha(t, \tau, \underline{A}(\xi)) \} \underline{\psi}(x, \tau) \\ &\quad + \int_{t_0}^t \underline{A}(t) \underline{R}_\alpha(t, \tau, \underline{A}(\xi)) \underline{B}(\tau)u(\tau) d\tau \\ &\quad + \lim_{\tau \rightarrow t-0} {}^t_\tau I_t^{1-\alpha} \{ \underline{R}_\alpha(t, \tau, \underline{A}(\xi)) \} \underline{B}(\tau)u(\tau). \end{aligned} \quad (7.19c)$$

Unter Zuhilfenahme der Eliminationseigenschaft der \underline{R} -Matrix aus Lemma 7.3 kann der Grenzwert $\tau \rightarrow t - 0$ des zweiten und des letzten Summenterms gebildet werden. Damit folgt:

$$\begin{aligned} {}^t d_t^\alpha \underline{x}(t) &= - \int_{t_0}^t \underline{A}(t) \underline{R}_\alpha(t, \tau, \underline{A}(\xi)) \underline{\psi}(\underline{x}, \tau) d\tau - \underline{\psi}(\underline{x}, t) \\ &\quad + \int_{t_0}^t \underline{A}(t) \underline{R}_\alpha(t, \tau, \underline{A}(\xi)) \underline{B}(\tau) \underline{u}(\tau) d\tau + \underline{B}(t) \underline{u}(t). \end{aligned} \quad (7.19d)$$

Klammert man die Systemmatrix $\underline{A}(t)$ aus den Integraltermen aus und bringt dann noch die Initialisierungsvektorfunktion auf die linke Seite der Gleichung, so erhält man:

$$\begin{aligned} {}^t d_t^\alpha \underline{x}(t) + \underline{\psi}(\underline{x}, t) &= \underline{A}(t) \left(- \int_{t_0}^t \underline{R}_\alpha(t, \tau, \underline{A}(\xi)) \underline{\psi}(\underline{x}, \tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_0}^t \underline{R}_\alpha(t, \tau, \underline{A}(\xi)) \underline{B}(\tau) \underline{u}(\tau) d\tau \right) + \underline{B}(t) \underline{u}(t). \end{aligned} \quad (7.20)$$

Der Term in der Klammer entspricht gerade dem Zustandsvektor $\underline{x}(t)$ von Gl. (7.18), was den Satz 7.2 schließlich bestätigt:

$${}^t d_t^\alpha \underline{x}(t) + \underline{\psi}(\underline{x}, t) = \underline{A}(t) \underline{x}(t) + \underline{B}(t) \underline{u}(t). \quad (7.21)$$

□

Wie man es von gewöhnlichen Systemen kennt, setzt sich die Lösung (7.18) aus einem homogenen Anteil und einem partikulären Anteil zusammen. Der homogene, erste Term beschreibt die Trajektorie von $\underline{x}(t)$ im Falle einer freien Bewegung in Abhängigkeit von den Initialisierungsfunktionen. Der partikuläre, zweite Term beschreibt dann die durch die Steuervektorfunktion $\underline{u}(t)$ erzwungene Bewegung von $\underline{x}(t)$. Der Vektor $\underline{x}(t)$ wird fraktionaler Zustand genannt, da er nicht von nur einem Vergangenheitswert abhängt, sondern von unendlich vielen Werten ab $t = a$, was gemäß Definition 3.6 den Forderungen eines fraktionalen Zustands entspricht.

Die Gl. (7.18) ist konsistent mit der gewöhnlichen Lösung für $\alpha = 1$ (siehe Spezialfall in Lemma 7.6) und mit der Lösung für fraktionale zeitinvariante Systeme (siehe Gl. (7.30)). Basierend auf der Lösung der linksseitigen FDGL wird in Satz 7.3 die Lösung der rechtsseitigen FDGL (3.33) hergeleitet. In Lemma 7.6 kommen Lösungen mit speziellen Initialisierungsfunktionen zur Sprache, welche konsistent zu in der Literatur weit verbreiteten Lösungen für zeitinvariante Systeme sind. Hierbei wird deutlich, dass diese Lösungen nur von geringer Bedeutung sind, verglichen mit den allgemeinen Lösungen (7.18) bzw. (7.30).

Im folgenden Beispiel 7.2 wird für ein zeitvariantes fraktionales System anhand von Gl. (7.18) eine Zustandslösung berechnet und mit einer Referenz verglichen.

Beispiel 7.2:

Zu lösen ist die zeitvariante fraktionale Zustandsgleichung:

$${}^t_0 d_t^\alpha \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t). \quad (7.22)$$

Als Eingang wird ein Sprungsignal $u(t) = \sigma(t - t_0)$ angenommen und es gilt $\alpha \in (0, 1)$. Für die Lösung der Zustandsgleichung anhand von Gl. (7.18) wird zunächst die in Gl. (7.4) definierte \underline{R} -Matrix unter Berücksichtigung von

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ t & 0 \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

benötigt. Diese wurde bereits in Gl. (7.10) des Beispiels 7.1 hergeleitet und lautet:

$$\underline{R}_\alpha(t, \tau, A(\xi)) = \begin{bmatrix} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & 0 \\ \frac{(t-\tau)^{2\alpha-1}t}{\Gamma(2\alpha)} - \frac{\Gamma(2+\alpha)(t-\tau)^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)(1+\alpha)\Gamma(1+2\alpha)} & \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \end{bmatrix}. \quad (7.24)$$

Einsetzen von Gl. (7.24) in Gl. (7.18) ergibt schließlich folgende Lösung der FDGL:

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \begin{bmatrix} \int_{t_0}^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} d\tau \\ \int_{t_0}^t \frac{(t-\tau)^{2\alpha-1}t}{\Gamma(2\alpha)} d\tau - \int_{t_0}^t \frac{\Gamma(2+\alpha)(t-\tau)^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)(1+\alpha)\Gamma(1+2\alpha)} d\tau \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(t-t_0)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ \frac{(t-t_0)^{2\alpha}t}{\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{\Gamma(1+\alpha)(t-t_0)^{2\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2+2\alpha)} \end{bmatrix} \\ &\stackrel{t_0=0}{=} \dots = \begin{bmatrix} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ \frac{1+\alpha}{\Gamma(2+2\alpha)} t^{2\alpha+1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Die geschlossene Lösung (7.25) ergibt sich in diesem Fall auch durch direkte Integration von Gl. (7.22):

$$x_1(t) = {}^t_0 i_t^\alpha 1, \quad (7.26)$$

$$x_2(t) = {}^t_0 i_t^\alpha t x_1, \quad (7.27)$$

$$\Rightarrow x_1(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad (7.28)$$

$$\Rightarrow x_2(t) = {}^t_0 i_t^\alpha \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{1+\alpha}{\Gamma(2+2\alpha)} t^{2\alpha+1}. \quad (7.29)$$

Falls ein zeitinvariantes System betrachtet wird, also konstante Matrizen \underline{A} und \underline{B} in (7.17) vorliegen, wird die Lösung (7.18) zu der Lösung (7.30). In Lemma D.2 wird gezeigt, dass dann die \underline{R} -Matrix der bekannten klassischen RH-Matrix $\underline{R}_\alpha(t - \tau, \underline{A})$ in

Gl. (D.3) entspricht. Die Lösung (7.30) stimmt mit [LH00, S.9] und [Das11, S.350-359] überein:

Lemma 7.5 (Lösung der zeitinvarianten fraktionalen Zustandsgleichung)

Für das System (7.17) gilt mit den konstanten Matrizen A und B folgende Lösung:

$$\underline{x}(t) = - \int_{t_0}^t \underline{R}_\alpha(t - \tau, A) \underline{\psi}(\underline{x}, \tau) d\tau + \int_{t_0}^t \underline{R}_\alpha(t - \tau, A) \underline{B} \underline{u}(\tau) d\tau. \quad (7.30)$$

Entsprechend Satz 7.1 ist die Lösung eindeutig.

Für die Herleitung der Optimalsteuerfunktion für ein linksseitiges System, welche in Abschnitt 7.4 dargestellt ist, wird auch die Lösung der rechtsseitigen zeitvarianten FDGL (3.33) benötigt. Diese kann mit Hilfe der linksseitigen fraktionalen Zustandstrajektorie hergeleitet werden und lautet:

Satz 7.3 (Lösung der rechtsseitigen zeitvarianten fraktionalen Zustandsgleichung)

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) = & - \int_t^{t_e} \underline{R}_{\alpha,rs}(\tau, t, A(\xi)) \underline{\psi}_{rs}(\underline{x}, \tau) d\tau \\ & + \int_t^{t_e} \underline{R}_{\alpha,rs}(\tau, t, A(\xi)) \underline{B}(\tau) \underline{u}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Der Beweis befindet sich im Anhang I.14.

Nun sollen noch die Spezialfälle betrachtet werden, die sich ergeben, wenn das System mit einem mit dem Vektor \underline{c} gewichteten Impuls δ am Anfang des Integrationsintervalls t_0 initialisiert wird:

Lemma 7.6 (Spezialfälle)

Es sei $\underline{\psi}(t) = -\underline{c}\delta(t - t_0)$, mit \underline{c} als konstantem Vektor und der Dirac'schen Distribution δ [OMS09, S.76]. Dann lautet entsprechend Gl. (7.18) die homogene Lösung der zeitvarianten linksseitigen FDGL (7.17):

$$\underline{x}_H(t) = \int_{t_0}^t \underline{R}_{\underline{\alpha}}(t, \tau, \underline{A}(\xi)) \underline{c}\delta(\tau - t_0) d\tau = \underline{R}_{\underline{\alpha}}(t, t_0, \underline{A}(\xi)) \underline{c}. \quad (7.32)$$

Mit $\underline{\psi}_{rs}(t) = -\underline{c}\delta(t_e - t)$ lautet die homogene Lösung für das zeitvariante rechtsseitige System (3.33):

$$\underline{x}_H(t) = \int_t^{t_e} \underline{R}_{\alpha,rs}(\tau, t, \underline{A}(\xi)) \underline{c}\delta(t_e - \tau) d\tau = \underline{R}_{\alpha,rs}(t_e, t, \underline{A}(\xi)) \underline{c}. \quad (7.33)$$

Falls $\underline{c} = {}_{t_0}^{t,1-\alpha} \underline{x}(t)|_{t=t_0}$ gewählt wird und ein zeitinvariantes Zustandssystem vorliegt, entspricht das Resultat in Gl. (7.32) dem in [Pod99, S.139][Das13, S.85]. Anhand der Gleichung sieht man, dass sich \underline{c} als ein konstanter fraktionaler Anfangswert zum Zeitpunkt t_0 interpretieren lässt. Die Lösung (7.32) für die zeitinvariante FDGL ist in der Literatur weit verbreitet. Wie durch Lemma 7.6 deutlich wurde, bedeutet sie jedoch nur einen Spezialfall der allgemeinen Lösung (7.30), in welcher die komplette Historie durch eine zeitabhängige Initialisierungsfunktion berücksichtigt wird. Für $\alpha = 1$ wird der konstante Vektor zu $\underline{c} = \underline{x}(t_0)$ und die \underline{R} -Matrix stellt die gewöhnliche Peano-Baker-Reihe dar (vgl. Gl. (7.4) und Gl. (7.2)). Die Lösung (7.32) stimmt dann mit der bekannten Lösung für gewöhnliche Systeme überein [Rug96, Kapitel 3][Kai80, S.601][Lud95, S.49].

Eine spezielle Zustandslösung, welche die Initialisierungsfunktionen mit gewöhnlichen Ableitungen approximiert, wird in [SFT14] vorgestellt.

7.3 Fraktionale Steuerbarkeit

In diesem Abschnitt wird ein Steuerbarkeitskriterium für das fraktionale und zeitvarian- te Mischsystem (7.1) hergeleitet. Bekannt waren bisher nur Kriterien für zeitinvariante fraktionale Systeme mit nur einer einzigen Ableitungsordnung wie in [MAN96] u.v.a.. Zudem wurden die Anfangswertfunktionen nicht berücksichtigt. Insofern sind die in der Literatur behandelten Fälle Sonderfälle, die in der konkreten Problemstellung falsche Ergebnisse generieren. Insbesondere wird der verteilte Charakter verkannt, d.h. die Steuerbarkeit darf unter keinen Umständen so definiert werden wie bei gewöhnlichen Systemen.

Zunächst muss geklärt werden, was die Begriffe Erreichbarkeit und Steuerbarkeit im fraktionalen Kontext überhaupt bedeuten, denn im Unterschied zu den gewöhnlichen Systemen gibt es keinen eindeutigen Anfangszustand mehr, sondern eine Initialisierungsfunktion. Daher stellt sich hier die Frage, ob es einen Eingang $\underline{u}(t) \in \mathcal{U}$ gibt, der das zeitvariante fraktionale System (7.1) welches die Initialisierungsfunktion $\underline{\psi}_0(\tau) = \underline{\psi}(\underline{x}, \alpha, a, t_0, \tau)$ und die Zustandslösung (7.18) aufweist in einen eindeutigen finalen Endzustand $\underline{x}_e = \underline{x}(t_e)$ überführt, wobei \mathcal{U} die Menge der kontinuierlichen und beschränkten Funktionen darstellt.⁶⁰ Genauer gesagt besteht die Aufgabe darin, herauszufinden, ob ein Eingang $\underline{u}(t)$ existiert, der das System von $\underline{\psi}_0(\tau)$ in den Zustand \underline{x}_e steuert bzw. ob \underline{x}_e von $\underline{\psi}_0(\tau)$ aus erreicht werden kann. Daher wird Folgendes definiert:

Definition 7.4

Die Menge der erreichbaren fraktionalen Zustände zum Zeitpunkt t_e , ausgehend von der Initialisierungsfunktion $\underline{\psi}_0(\tau)$, ist gegeben durch:

$$\mathcal{Y}_{err}(t_0, t_e, \underline{\psi}_0(\tau)) := \{ \underline{x}_e : \underline{x}_e = \underline{x}(t_e, t_0, \underline{\psi}_0(\tau), \underline{u}), \underline{u} \in \mathcal{U} \}. \quad (7.34)$$

Die steuerbare Funktionsmenge, die vom Zeitpunkt t_0 in den fraktionalen Zustand \underline{x}_e gesteuert werden kann, ist gegeben durch:

$$\mathcal{Y}_{steu}(t_0, t_e, \underline{x}_e) := \{ \underline{\psi}_0(\tau) : \underline{x}_e = \underline{x}(t_e, t_0, \underline{\psi}_0(\tau), \underline{u}), \underline{u} \in \mathcal{U} \}. \quad (7.35)$$

Es ist hervorzuheben, dass (7.35) einen *Funktionsraum* darstellt, wohingegen bei gewöhnlichen Systemen die steuerbare Menge aus konstanten *Anfangswerten* $\underline{x}_0 = \underline{x}(t_0)$ besteht. Mit den formulierten erreichbaren und steuerbaren Mengen kann nun weiter definiert werden:

⁶⁰ Es gibt nur deshalb einen eindeutigen Endzustand, weil die fraktionale Zustandslösung entsprechend Satz 7.1 nur eine einzige Lösung besitzt.

Definition 7.5 (Fraktionale Erreichbarkeit und Steuerbarkeit)

Das zeitvariante fraktionale System (3.28) wird vollständig erreichbar von $\underline{\psi}_0(\tau)$ aus im Zeitraum $[t_0, t_e]$ genannt, falls die Vereinigung über alle Erreichbarkeitsmengen von t_0 bis t_e dem gesamten Zustandsraum gleicht:

$$\bigcup_{t=t_0}^{t_e} \mathcal{Y}_{err}(t_0, t, \underline{\psi}_0(\tau)) = \mathcal{X} = \mathbb{R}^{\sum_{l=1}^q n_l}. \quad (7.36)$$

Das System wird im Zeitraum $[t_0, t_e]$ vollständig nach \underline{x}_e steuerbar genannt, falls die Vereinigung über alle steuerbaren Initialisierungsvektorfunktionen von t_0 bis t_e dem gesamten $\sum_{l=1}^q n_l$ -dimensionalen Funktionenvektorraum der Lebesgue integrierbaren Funktionen gleicht:

$$\bigcup_{t=t_0}^{t_e} \mathcal{Y}_{steu}(t, t_e, \underline{x}_e) = \mathcal{C} = (L[t_0, t_e])^{\sum_{l=1}^q n_l}. \quad (7.37)$$

Die Definitionen 7.4 und 7.5 lassen sich folgendermaßen verstehen: Der Zustand \underline{x}_e wird gemäß Gl. (7.34) und Gl. (7.36) in dem Zeitraum $[t_0, t_e]$ von $\underline{\psi}_0(\tau)$ aus erreichbar genannt, falls ein $\underline{u}(t) \in \mathcal{U}$, $t \in [t_0, t_e]$ existiert für welches $\underline{x}(t) = \underline{x}_e$ gilt. Gemäß Gl. (7.35) und Gl. (7.37) wird eine Initialisierungsfunktion $\underline{\psi}(\tau)$ im Zeitraum $[t_0, t_e]$ in einen Zustand \underline{x}_e steuerbar genannt, falls ein $\underline{u}(t) \in \mathcal{U}$, $t \in [t_0, t_e]$ existiert für welches $\underline{\psi}(\underline{x}, \alpha, a, t, \tau) = \underline{\psi}_0(\tau)$ gilt. Nachdem die fraktionale Erreich- und Steuerbarkeit eingeführt wurden, soll nun die Analyse eines Systems bezüglich dieser Eigenschaften betrachtet werden. Der folgende Satz 7.4 ist hierfür notwendig.⁶¹

⁶¹ Die Grundlagen linearer Abbildungen können [Lud95, S.358-361] entnommen werden.

Satz 7.4

Sei $G(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\sum_{l=1}^q n_l \times p}$ mit $n_l, p \in \mathbb{N}_{>0}$ eine stetige Matrixfunktion, $u(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times 1}$ eine stückweise stetige Vektorfunktion und V die symmetrische $(\sum_{l=1}^q n_l \times \sum_{l=1}^q n_l)$ -Matrix

$$V(t_0, t_e) := \int_{t_0}^{t_e} G(\tau)G(\tau)^T d\tau. \quad (7.38)$$

Der Vektor $\underline{y} \in \mathbb{R}^{\sum_{l=1}^q n_l}$ kann dann und nur dann in der Form

$$\underline{y} = \int_{t_0}^{t_e} G(\tau)u(\tau)d\tau \quad (7.39)$$

berechnet werden, falls $\underline{y} \in \text{Bild}(V)$ gilt. In diesem Fall muss

$$\underline{z} \in \mathbb{R}^{\sum_{l=1}^q n_l \times 1}$$

$$u(t) = G(t)^T \underline{z} \quad (7.40)$$

gelten.

Aus Satz 7.4 ergibt sich das Korollar 7.1:

Korollar 7.1

Es gilt die folgende Äquivalenz $\forall t \in [t_0, t_e]$:

$$\underline{x} \in \text{Kern}(V) \Leftrightarrow G(t)^T \underline{x} = \underline{0}. \quad (7.41)$$

Beweis:

Da V aus Gl. (7.38) symmetrisch ist, gilt $V = V^T$. Daraus ergibt sich, dass V positiv-semidefinit ist, denn mit Gl. (7.38) gilt für die quadratische Form

$\underline{p}^T V \underline{p} = \int_{t_0}^{t_e} \|G(t)^T \underline{p}\|^2 dt \geq 0$. Nun ist bekannt, dass bei einer semidefiniten Matrix der Kern mit derjenigen Menge übereinstimmt, welche die quadratische Form auslöscht [KK85, S.31], woraus sich Gl. (7.41) ergibt. \square

Mit Satz 7.4 lässt sich zeigen, dass die erreichbare Menge \mathcal{Y}_{err} in Gl. (7.34) ein Unterraum des Zustandsraums und die steuerbare Menge \mathcal{Y}_{steu} in Gl. (7.35) ein Unterraum des Vektorraums der Initialisierungsfunktionen bildet. Dies postuliert Satz 7.5, dessen Beweis folgt im Anschluss. Vorab werden einige wichtige Matrizen definiert:

Definition 7.6 (Fraktionale Gram'sche Matrix)

Die fraktionale Gram'sche Matrix lautet:

$$W(t_0, t_e) := \int_{t_0}^{t_e} \tilde{G}(\tau) \tilde{G}(\tau)^T d\tau, \quad (7.42)$$

mit

$$\tilde{G}(\tau) := R_\alpha(t_e, \tau, A(\xi)) B(\tau). \quad (7.43)$$

Satz 7.5 (Erreichbare und steuerbare Räume)

Das zeitvariante fraktionale System (7.1) hat zum Zeitpunkt t_e die erreichbare Menge:

$$\mathcal{Y}_{err}(t_0, t_e, \underline{0}) = \text{Bild}(W(t_0, t_e)). \quad (7.44)$$

Unter der Voraussetzung, dass $R_\alpha(t_e, \tau, A(\xi))$ eine reguläre Matrixfunktion darstellt, ist die steuerbare Funktionsmenge zum Zeitpunkt t_0 gegeben durch:

$$\mathcal{Y}_{steu}(t_0, t_e, \underline{0}) = (L[t_0, t_e])^{\text{Rang}(W(t_0, t_e))}. \quad (7.45)$$

Beweis:

Falls der Endzustand x_e für $\psi_0(\tau) = \underline{0}$ erreichbar ist, d.h. $x_e \in \mathcal{Y}_{err}(t_0, t_e, \underline{0})$ und $x_e \neq \underline{0}$ gilt, berechnet er sich gemäß der Zustandslösung (7.18) und Gl. (7.43) über die Gleichung:

$$x_e = \int_{t_0}^{t_e} \tilde{G}(\tau) u(\tau) d\tau. \quad (7.46)$$

Laut Satz 7.4 muss dann aber $x_e \in \text{Bild}(W(t_0, t_e))$ gelten, was Gl. (7.44) bestätigt. Nun wird die steuerbare Menge betrachtet. Falls eine Initialisierungsfunktion $\psi_0(\tau)$ steuerbar ist, d.h. $\psi_0(\tau) \in \mathcal{Y}_{steu}(t_0, t_e, \underline{0})$ gilt, muss gemäß der Zustandslösung (7.18), welche die Gl. (7.43) beinhaltet, sowie gemäß $x_e = \underline{0}$ folgende Gleichung gelten:

$$\int_{t_0}^{t_e} R_\alpha(t_e, \tau, A(\xi)) \psi_0(\tau) d\tau = \int_{t_0}^{t_e} \tilde{G}(\tau) u(\tau) d\tau. \quad (7.47)$$

Die rechte Seite der Gl. (7.47) entspricht der Gl. (7.46) und beschreibt damit die Menge $\mathcal{Y}_{err}(t_0, t_e, \underline{0})$. Folglich wird aus Gl. (7.47) unter Berücksichtigung von $x_{e, err} \in \mathcal{Y}_{err}(t_0, t_e, \underline{0})$:

$$\int_{t_0}^{t_e} R_\alpha(t_e, \tau, A(\xi)) \psi_0(\tau) d\tau = x_{e, err}. \quad (7.48)$$

Anhand von Gl. (7.48) lässt sich nun Folgendes für $\psi_0(\tau)$ feststellen: Erstens darf jede der $\sum_{i=1}^q n_i$ Funktionen der $\sum_{i=1}^q n_i$ -dimensionalen Vektorfunktion $\psi_0(\tau)$ alle Lebesgue

integrierbaren Funktionen darstellen. Unter der Voraussetzung, dass $R_\alpha(t_e, \tau, A(\xi))$ eine reguläre Matrixfunktion darstellt, muss der Raum der Vektorfunktion $\psi_0(\tau)$ außerdem die Dimension $\text{Rang}(W(t_0, t_e))$ besitzen, damit die linke Seite der Gl. (7.48) dem $\sum_{i=1}^q n_i$ -dimensionalen Raum $x_{e, \text{err}}$ gleicht. Damit ist (7.45) gezeigt. \square

Die Matrix (7.42) wird fraktionale Gram'sche Matrix genannt, da sich für $\alpha = 1$ die gewöhnliche Gram'sche Matrix [Lud95, S.261] ergibt. Falls $W(t_0, t_e)$ eine reguläre Matrix ist, gilt $\text{Bild}(W(t_0, t_e)) = \mathcal{X} = \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^q n_i}$ und gemäß Gl. (7.44) auch $\mathcal{Y}_{\text{err}}(t_0, t_e, \mathbf{0}) = \mathcal{X}$. Dies bedeutet, dass der erreichbare Raum dem gesamten Zustandsraum entspricht. Falls die Initialisierungsfunktion ungleich Null ist, wird die erreichbare Menge lediglich um $-\int_{t_0}^{t_e} R_\alpha(t, \tau, A(\xi)) \psi(x, \tau) d\tau$ verschoben und beschreibt daher immer noch den gleichen Raum:

$$\mathcal{Y}_{\text{err}}(t_0, t_e, \psi_0) = \mathcal{Y}_{\text{err}}(t_0, t_e, \mathbf{0}) = \mathcal{X}. \quad (7.49)$$

Wenn zusätzlich noch $R_\alpha(t_e, t_0, A(\xi))$ regulär ist, entspricht die steuerbare Menge der Initialisierungsfunktionen laut (7.45) dem gesamten $\sum_{i=1}^q n_i$ -dimensionalen Funktionsvektorraum der Lebesgue integrierbaren Funktionen. Anhand von Gl. (7.48) lässt sich leicht erkennen, dass dies auch für $x_e \neq \mathbf{0}$ gilt:

$$\mathcal{Y}_{\text{steu}}(t_0, t_e, x_e) = \mathcal{Y}_{\text{steu}}(t_0, t_e, \mathbf{0}) = \mathcal{C}. \quad (7.50)$$

Mit den gewonnenen Erkenntnissen lässt sich folgendes Kriterium zur Überprüfung der Erreichbarkeit und Steuerbarkeit zeitvarianter fraktionaler Systeme formulieren:

Satz 7.6 (Fraktionales Erreichbarkeits- und Steuerbarkeitskriterium)

Die zeitvariante FDGL gemäß Gl. (3.28) und Gl. (7.1) ist dann und nur dann vollständig erreichbar, wenn die fraktionale Gram'sche Matrix vollen Rang besitzt: $\text{Rang}(W(t_0, t_e)) = \sum_{i=1}^q n_i$. Die FDGL ist dann und nur dann vollständig steuerbar, wenn $\text{Rang}(W(t_0, t_e)) = \text{Rang}(R_\alpha(t_e, t_0, A(\xi))) = \sum_{i=1}^q n_i$ gilt, wobei $R_\alpha(t_e, t_0, A(\xi))$ in Gl. (7.4) definiert ist.

Da die Zustandslösung (7.18) eindeutig ist, kann Satz 7.6 als notwendig und hinreichendes Kriterium angesehen werden. Während ein gewöhnliches System garantiert steuerbar ist, wenn seine Gram'sche Matrix regulär ist, ist ein fraktionales System erst dann garantiert steuerbar wenn seine Gram'sche Matrix regulär ist und zusätzlich die R -Matrix $R_\alpha(t_e, t_0, A(\xi))$ vollen Rang besitzt.

Für $\alpha = 1$ wird die R -Matrix zur Peano-Baker-Reihe die garantiert invertierbar ist [Lud95, S.45]. Da in diesem Fall zudem $W(t_0, t_e)$ zur gewöhnlichen Gram'schen Matrix wird, herrscht Konsistenz zum gewöhnlichen Kriterium in [Kai80, S.610][Lud95, S.263]. Mit Hilfe von Korollar 7.1 lässt sich alternativ ein äquivalentes Kriterium aufstellen, mit dem sich die Analyse oft vereinfacht. Daher wird dieses Kriterium auch zur Untersuchung der Steuerbarkeit des Ersatzsystems (6.23) in Abschnitt 8.2 präferiert.

Satz 7.7 (Äquivalentes Kriterium zu Satz 7.6)

Die zeitvariante FDGL in Gl. (3.28) und Gl. (7.1) ist dann und nur dann vollständig erreichbar, wenn für einen beliebigen Vektor $\underline{a} \neq \underline{0}$ für die Menge

$\{\underline{a} : \tilde{G}(t)^T \underline{a} = \underline{0}\} = \emptyset$ gilt. Die zeitvariante FDGL ist dann und nur dann vollständig steuerbar, wenn $\{\underline{a} : \tilde{G}(t)^T \underline{a} = \underline{0}\} = \emptyset$ und

$\text{Rang}(R_\alpha(t_e, t_0, A(\xi))) = \sum_{i=1}^q n_i$ gilt.

Beweis:

Falls das System vollständig steuerbar ist, muss das orthogonale Komplement des von der Gram'schen Matrix aufgespannten Raumes leer sein. Es muss also gelten:

$$\{\underline{a} : \text{Kern}(W(t_0, t_e))\} = \emptyset. \quad (7.51)$$

Mit Korollar 7.1 ergibt sich schließlich $\{\underline{a} : \tilde{G}(t)^T \underline{a} = \underline{0}\} = \emptyset$.

□

Zum Ende des Abschnitts wird noch als Spezialfall der zeitinvariante Fall betrachtet. Das Kriterium in dem folgenden Korollar geht aus dem zeitvarianten Kriterium hervor. Der Beweis findet sich im Anhang I.16 auf.

Korollar 7.2 (Steuerbarkeit eines zeitinvarianten Einfachsystems)

Im zeitinvarianten Fall ist das fraktionale System (3.28) im Falle einer einzigen Ableitungsordnung α dann und nur dann vollständig steuerbar, falls $\text{Rang}(Q) = n$ erfüllt ist, wobei gilt:

$$Q = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}. \quad (7.52)$$

Das Korollar ist konsistent mit dem bekannten Kalman-Kriterium für gewöhnliche Systeme [KK85, S.35] u.v.a. und für zeitinvariante fraktionale Systeme [MAN96, MCV10]. Im folgenden Beispiel wird die Steuerbarkeit des Systems (7.22) aus Beispiel 7.2 betrachtet:

Beispiel 7.3:

Die Steuerbarkeit des Systems (7.22) wird mit Hilfe der Kriterien aus Satz 7.7 untersucht. Die hierfür benötigte R -Matrix wurde schon in Beispiel 7.1 mit Gl. (7.10) berechnet:

$$\begin{aligned} R_\alpha(t, \tau, A(\xi)) &= \begin{bmatrix} \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & 0 \\ \frac{(t-\tau)^{2\alpha-1}t}{\Gamma(2\alpha)} - \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1+\alpha)\Gamma(1+2\alpha)} & \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.53)$$

Einsetzen von Gl. (7.53) in Gl. (7.43) ergibt:

$$\tilde{G}(\tau)^T = (R_\alpha(t_e, \tau, A(\xi))b)^T = \begin{bmatrix} \frac{(t_e - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \frac{(t_e - \tau)^{2\alpha-1}t}{\Gamma(2\alpha)} - \frac{\Gamma(2+\alpha)(t_e - \tau)^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)(1+\alpha)\Gamma(1+2\alpha)} \end{bmatrix}. \quad (7.54)$$

Für Gl. (7.54) existiert kein Vektor \underline{a} , für den $\tilde{G}(\tau)^T \underline{a} \equiv 0$ gilt, außer dem Nullvektor. Da außerdem

$$\det(R_\alpha) = \frac{(t_e - \tau)^{2\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)^2} \neq 0 \quad (7.55)$$

für $\tau < \infty$ gilt, ist das System (7.22) vollständig steuerbar.

Abschließend wird die Steuerbarkeit eines Systems mit zwei parallel geschalteten Integratoren betrachtet, auf welche die gleiche Eingangsgröße wirkt. Das Interessante an diesem System ist, dass es für gewöhnliche Integratoren nicht steuerbar ist, im Falle eines fraktionalen Mischsystems mit unterschiedlichen Ableitungsordnungen jedoch schon.

Beispiel 7.4:

Untersucht wird das System

$${}_{t_0}^t d_t^\alpha \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (7.56)$$

mit $\underline{\alpha} = [\alpha_1 \quad \alpha_2]$. Die R -Matrix gemäß Gl. (7.4) lautet:

$$R_\alpha(t_e, \tau, A(\xi)) = \begin{bmatrix} \frac{(t_e - \tau)^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)} & 0 \\ 0 & \frac{(t_e - \tau)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)} \end{bmatrix}. \quad (7.57)$$

Einsetzen von Gl. (7.57) in Gl. (7.43) führt zu:

$$\tilde{G}(\tau)^T = (R_\alpha(t_e, \tau, A(\xi))b)^T = \begin{bmatrix} \frac{(t_e - \tau)^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)} & \frac{(t_e - \tau)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)} \end{bmatrix}. \quad (7.58)$$

Da

$$\det(R_\alpha) = \frac{(t_e - \tau)^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)} \frac{(t_e - \tau)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)} \neq 0 \quad (7.59)$$

für $\tau < \infty$ gilt und die Gleichung

$$\tilde{G}(\tau)^T \underline{q} = q_1 \frac{(t_e - \tau)^{\alpha_1-1}}{\Gamma(\alpha_1)} + q_2 \frac{(t_e - \tau)^{\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_2)} \equiv 0 \quad (7.60)$$

für einen beliebig zu wählenden Vektor $\underline{q} \neq \underline{0}$ nur dann erfüllt ist, falls $\alpha_1 = \alpha_2$ gilt, ist das System für alle anderen Fälle steuerbar. Das Resultat ist anschaulich klar, denn bei zwei gleichen Ableitungsordnungen können die Zweige nicht unterschieden werden und das System ist nicht steuerbar.

7.4 Fraktionale energieoptimale Steuerung

In diesem Abschnitt wird die geschlossene Lösung des Optimalsteuerungsproblems für das zeitvariante fraktionale System (7.1) erstmalig hergeleitet. Die Optimierung erfolgt hierbei energieoptimal bezüglich des Gütemaßes:

$$\beta := \begin{cases} 1 & \text{falls } q = 1 \text{ und } \alpha = 1, \\ \max\{\{\alpha\}_l, l = 1, \dots, q \mid \{\alpha\}_l < 1\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$J(\underline{u}) = \int_{t_0}^{t_e} \frac{1}{2} (t_e - \zeta)^{2\beta-2} \underline{u}(\zeta)^T \underline{u}(\zeta) d\zeta. \quad (7.61)$$

Bisher waren nur geschlossene Lösungen für zeitinvariante fraktionale Systeme mit nur einer einzigen Ableitungsordnung [MT11] und einer speziellen Initialisierungsfunktion bekannt [Das13]. Im fraktionalen Fall wird das übliche quadratische Gütemaß aus [Föl94, S.29] um den Faktor $(t_e - \zeta)^{2\beta-2}$ erweitert [Das13]. Dies wird sich zur Kompensation von Singularitäten in der Steuerfunktion als hilfreich erweisen. Zudem hat sich gezeigt, dass es nur dieses Gütemaß ist, das zur Minimierung der oberen Schranke (6.72) des Identifikationsfehlers (6.71) bei der methodischen Berechnung der Modulationsfunktion in Kapitel 6 eingesetzt werden kann. Für $\beta = 1$ wird (7.61) zu dem üblichen Gütemaß.

Gesucht wird also eine Steuerung $\underline{u}(t)$, welche das System (7.1) ausgehend von allen Vergangenheitswerten zu jedem beliebigen Endpunkt $\underline{x}(t_e)$ steuert und dabei Gl. (7.61) minimiert. Da der Integrand von J im Zeitraum $[t_0, t_e]$ stark konvex ist, gibt es laut Lemma N.1 eine eindeutige Lösung des Problems.⁶² Diese Lösung entspricht Gl. (7.62). Nun ist erkennbar, weshalb der zusätzliche Faktor im Gütemaß (7.61) unverzichtbar ist, denn er kompensiert die Singularitäten in der linksseitigen \underline{R} -Matrix (7.4) und der rechtsseitigen \underline{R} -Matrix (7.6) jeweils an der Stelle $\tau = t_e$. Somit ist sichergestellt, dass die Steuerung berechnet werden kann (siehe auch Beispiel 7.5). Der Beweis für Satz 7.8 ist ebenso sowohl für den zeitinvarianten fraktionalen Fall, als auch für $\beta = 1$ gültig. Damit entspricht die hier gefundene Steuerung, falls ein zeitinvariantes fraktionales System vorliegt, der in [MT11, Das13] und für gewöhnliche Systeme der in [SR11].

⁶² Die grundsätzliche Voraussetzung, dass die Zustandslösung (7.18) eindeutig ist, wurde schon in Satz 7.1 festgehalten.

Satz 7.8 (Fraktionale energieoptimale Steuerung)

Die Steuerung

$$\underline{u}(t) = (t_e - t)^{2-2\beta} \underline{B}(t)^T \underline{R}_{\alpha,rs}(t_e, t, \underline{A}(\xi)^T) \underline{K}(t_0, t_e)^{-1} \cdot \left[\underline{x}(t_e) + \int_{t_0}^{t_e} \underline{R}_{\alpha}(t_e, \tau, \underline{A}(\xi)) \underline{\psi}(\underline{x}, \tau) d\tau \right] \quad (7.62)$$

mit

$$\begin{aligned} & \underline{K}(t_0, t_e) \\ &= \int_{t_0}^{t_e} (t_e - \tau)^{2-2\beta} \underline{R}_{\alpha}(t_e, \tau, \underline{A}(\xi)) \underline{B}(\tau) \underline{B}(\tau)^T \underline{R}_{\alpha,rs}(t_e, \tau, \underline{A}(\xi)^T) d\tau \end{aligned} \quad (7.63)$$

ist die einzige Steuerung, die das zeitvariante System (3.28) bzw. (7.1) ausgehend von $\underline{\psi}(\underline{x}, \tau)$ zu einem gegebenen Endzustand $\underline{x}(t_e)$ steuert und das energieoptimale Gütemaß (7.61) minimiert.

Beweis:

Unter Einführung des Lagrange-Multiplikators $\underline{\mu}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\Sigma_{i=1}^n n_i}$ und Verwendung der fraktionalen Variationsrechnung [MOT15] erhält man mit $\underline{f} := {}_{t_0}^t \mathcal{D}_t^{\alpha} \underline{x}(t) + \underline{\psi}(\underline{x}, t) = \underline{A}(t)\underline{x}(t) + \underline{B}(t)\underline{u}(t)$ die Hamiltonfunktion

$$H(\underline{x}, \underline{\mu}, \underline{u}, t) = \underline{f}^T \underline{\mu} - \frac{1}{2} (t_e - t)^{2\beta-2} \underline{u}^T \underline{u} \quad (7.64)$$

und die Variation erster Ordnung von Gl. (7.61) zu [Agr04]:

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_{t_0}^{t_e} \left[\left({}_{t_0}^t \mathcal{D}_t^{\alpha} \underline{x}(t) - \frac{\partial H}{\partial \underline{\mu}} \right) \delta \underline{\mu} \right. \\ &\quad \left. + \left({}_{t_0}^t \mathcal{D}_t^{\alpha} \underline{\mu}(t) - \frac{\partial H}{\partial \underline{x}} \right) \delta \underline{x} - \frac{\partial H}{\partial \underline{u}} \delta \underline{u} \right] dt. \end{aligned} \quad (7.65)$$

Die beiden letztgenannten Gleichungen (7.64) und (7.65) stammen ursprünglich von [Agr04, AB07b, BA06, Agr02]. In dieser Arbeit wurden sie auf zeitvariante Systeme mit allgemeinen Initialisierungsfunktionen und gemischten Ableitungsordnungen erweitert. An der Stelle, an der das Gütemaß J einen Extremwert besitzt, gilt für die Variation erster Ordnung $\delta J = 0$ [Agr04, Mac12]. Daher leiten sich anhand von Gl. (7.65) die folgenden notwendigen Optimierungsbedingungen ab:

$$\frac{\partial H}{\partial \underline{u}} = \underline{0}, \quad (7.66)$$

$${}_{t_0}^t \mathcal{D}_t^{\alpha} \underline{x}(t) + \underline{\psi}(\underline{x}) = \frac{\partial H}{\partial \underline{\mu}}, \quad (7.67)$$

$${}_{t_0}^t \mathcal{D}_t^{\alpha} \underline{\mu}(t) + \underline{\psi}_{rs,RL}(\underline{\mu}, t) = \frac{\partial H}{\partial \underline{x}}. \quad (7.68)$$

Es ist wichtig zu betonen, dass laut Lemma N.1 die Bedingungen (7.66) bis (7.68) aufgrund der starken Konvexität von J nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend sind. Variationen höherer Ordnung $\delta^2 J, \delta^3 J, \dots$ [Mac12] müssen daher nicht betrachtet werden. Einsetzen von Gl. (7.64) in Gl. (7.68) liefert eine homogene rechtsseitige RL-FDGL:

$${}^t_d R L_t^\alpha \underline{\mu}(t) + \underline{\psi}_{rs,RL}(\underline{\mu}, t) = \underline{A}(t)^T \underline{\mu}(t). \quad (7.69)$$

Die Gl. (7.69) kann mit Satz 7.3 gelöst werden:

$$\underline{\mu}(t) = - \int_t^{t_e} R_{\alpha,rs}(\tau, t, \underline{A}(\xi)^T) \underline{\psi}_{rs,RL}(\underline{\mu}, \tau) d\tau. \quad (7.70)$$

Weiterhin ergibt sich mit der Hamiltonfunktion (7.64) und der Bedingung (7.66) die folgende Steuerfunktion:

$$\underline{u}(t) = (t_e - t)^{2-2\beta} \underline{B}(t)^T \underline{\mu}(t). \quad (7.71)$$

Einsetzen von Gl. (7.70) in Gl. (7.71) liefert:

$$\underline{u}(t) = -(t_e - t)^{2-2\beta} \underline{B}(t)^T \cdot \int_t^{t_e} R_{\alpha,rs}(\tau, t, \underline{A}(\xi)^T) \underline{\psi}_{rs,RL}(\underline{\mu}, \tau) d\tau. \quad (7.72)$$

Die Randbedingungen $\underline{\psi}(x)$ und $x(t_e)$ des fraktionalen Zustandsraumsystems (7.17) werden nun genutzt, um die einzig noch unbekannt GröÙe $\underline{\psi}_{rs,RL}(\underline{\mu}, \tau)$ in (7.72) zu bestimmen. Hierfür substituiert man Gl. (7.72) in die Lösung der linksseitigen FDGL (7.18) zum Zeitpunkt $t = t_e$:

$$\begin{aligned} x(t_e) = & - \int_{t_0}^{t_e} R_\alpha(t_e, \tau, \underline{A}(\xi)) \underline{\psi}(x, \tau) d\tau \\ & - \int_{t_0}^{t_e} (t_e - \tau)^{2-2\beta} R_\alpha(t_e, \tau, \underline{A}(\xi)) \underline{B}(\tau) \\ & \cdot \underline{B}(\tau)^T \int_\tau^{t_e} R_{\alpha,rs}(\tilde{\tau}, \tau, \underline{A}(\xi)^T) \underline{\psi}_{rs,RL}(\underline{\mu}, \tilde{\tau}) d\tilde{\tau} d\tau. \end{aligned} \quad (7.73)$$

Jede implizite Lösung $\underline{\psi}_{rs,RL}$ der Gl. (7.73) erfüllt die notwendigen Bedingungen (7.66) bis (7.68). Da diese Bedingungen aber auch hinreichend sind, ist eine gefundene Lösung $\underline{\psi}_{rs,RL}$ (und damit auch \underline{u}) zugleich die einzig Mögliche. Daher kann man o.B.d.A. die Funktion $\underline{\psi}_{rs,RL}(\underline{\mu}) := -\underline{c}\delta(t_e - t)$ ansetzen, wobei \underline{c} ein noch zu bestimmender konstanter Vektor ist und δ die Dirac'sche Distribution [OMS09, S.76]. Einsetzen in Gl. (7.73) liefert:

$$\begin{aligned} x(t_e) = & - \int_{t_0}^{t_e} R_\alpha(t_e, \tau, \underline{A}(\xi)) \underline{\psi}(x, \tau) d\tau \\ & + \int_{t_0}^{t_e} (t_e - \tau)^{2-2\beta} R_\alpha(t_e, \tau, \underline{A}(\xi)) \underline{B}(\tau) \\ & \cdot \underline{B}(\tau)^T R_{\alpha,rs}(t_e, \tau, \underline{A}(\xi)^T) d\tau \underline{c}. \end{aligned} \quad (7.74)$$

Der Integralausdruck im zweiten Term ist gemäß Gl. (7.63) aus Satz 7.8 $K(t_0, t_e)$, womit Auflösen von Gl. (7.74) nach \underline{c} liefert:

$$\underline{c} = K(t_0, t_e)^{-1} \left[x(t_e) + \int_{t_0}^{t_e} R(t_e, \tau, A(\xi)) \underline{\psi}(x, \tau) d\tau \right]. \quad (7.75)$$

Im letzten Schritt wird Gl. (7.75) in $\underline{\psi}_{rs,RL}(\underline{\mu}) := -\underline{c}\delta(t_e - t)$ eingesetzt und $\underline{\psi}_{rs,RL}(\underline{\mu})$ in Gl. (7.72) substituiert. Da die Ausblendeigenschaft der Dirac'schen Distribution das Integral aufhebt, resultiert schließlich die Steuerfunktion (7.62). Damit ist der Beweis vollständig. \square

Da das Steuerproblem nun allgemein gelöst ist, kann auch für das Ersatzsystem (6.23) die parameterspezifische Steuerung $u_s^*(t)$ aus Gl. (6.24) berechnet werden, um dann durch Gl. (6.62) eine separate Identifikation der Parameter der FDGL (6.2) zu ermöglichen. Aufgrund von Satz 6.5 sorgt diese Steuerung zudem für einen geringen Identifikationsfehler.

Das folgende Beispiel berechnet die energieoptimale Steuerung für das akademische System (7.22):

Beispiel 7.5:

Bislang wurde von dem Beispielsystem (7.22) die Zustandslösung berechnet und die Steuerbarkeit überprüft (siehe Beispiele 7.2 und 7.3). In diesem Beispiel soll nun die Steuerfunktion anhand von Gl. (7.62) berechnet werden, welche das zeitvariante System (7.22) energieoptimal bezüglich des Gütemaßes (7.61)

$$J(u) = \int_0^{t_e} \frac{1}{2} (t_e - \zeta)^{2\alpha-2} u(\zeta)^2 d\zeta \quad (7.76)$$

vom Zeitpunkt $t_0 = 0$ s ausgehend in den Endzustand $x_e = [0 \ 1]^T$ überführt. Der Faktor $(t_e - \zeta)^{2\alpha-2}$ im Gütemaß (7.76) wird für $\zeta \rightarrow 1$ immer größer. Er „bestraft“ daher späte Stelleingriffe, da diese stärker gewichtet werden. Es werden im Folgenden homogene Anfangsbedingungen angenommen. Um die in der Steuergleichung vorkommende Matrix $K(t_0, t_e)$ in Gl. (7.63) berechnen zu können, werden sowohl die links- als auch die rechtsseitige R -Matrix benötigt. Die linksseitige R -Matrix wurde schon in Gl. (7.10) des Beispiels 7.1 berechnet und die rechtsseitige R -Matrix

entspricht hier der Transponierten der Matrix (7.11) aus dem Beispiel 7.1. Die Matrix $\underline{K}(t_0, t_e)$ lautet daher:

$$\begin{aligned}
& \underline{K}(0, t_e) \\
&= \int_0^{t_e} (t_e - \tau)^{2-2\alpha} \left[\frac{(t_e - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right. \\
&\quad \left. \cdot \left[\frac{(t_e - \tau)^{2\alpha-1} t_e}{\Gamma(2\alpha)} - \beta(t_e - \tau)^{2\alpha} \right] \right. \\
&\quad \left. \cdot \left[\frac{(t_e - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{(t_e - \tau)^{2\alpha-1} t_e}{\Gamma(2\alpha)} + \beta(t_e - \tau)^{2\alpha} \right] d\tau \right. \\
&= \int_0^{t_e} (t_e - \tau)^{2-2\alpha} \left[\frac{(t_e - \tau)^{2\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)^2} \quad \frac{(t_e - \tau)^{3\alpha-2} t_e}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha)} + \beta \frac{(t_e - \tau)^{3\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right. \\
&\quad \left. \frac{(t_e - \tau)^{3\alpha-2} t_e}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha)} - \beta \frac{(t_e - \tau)^{3\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad \frac{(t_e - \tau)^{4\alpha-2} t_e^2}{\Gamma(2\alpha)^2} - \beta^2 (t_e - \tau)^{4\alpha} \right] \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{\Gamma(\alpha)^2} & \frac{t_e^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha)(\alpha+1)} + \frac{\beta t_e^{3\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)(3\alpha+1)} \\ \frac{t_e^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha)(\alpha+1)} - \frac{\beta t_e^{3\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)(3\alpha+1)} & \frac{t_e^{2\alpha+2}}{\Gamma(2\alpha)^2(2\alpha+1)} - \frac{\beta^2 t_e^{2\alpha+3}}{2\alpha+3} \end{bmatrix}, \quad (7.77)
\end{aligned}$$

wobei $\beta := \frac{\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(\alpha)^2(1+\alpha)\Gamma(1+2\alpha)}$ gilt. Anhand von Gl. (7.77) wird deutlich, wie wichtig der für fraktionale Systeme neu eingeführte Faktor $(t_e - \tau)^{2-2\alpha}$ ist, denn ohne diesen hätte $\underline{K}(0, t_e)$ Singularitäten bei $t = 0$ s. Die Inverse von Gl. (7.77) ergibt sich mit $\gamma := \det(\underline{K}(0, t_e))$ zu:

$$\underline{K}(0, t_e)^{-1} = \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} \frac{t_e^{2\alpha+3}}{\Gamma(\alpha)^2(2\alpha+1)} - \frac{\beta^2 t_e^{2\alpha+3}}{2\alpha+3} & -\left(\frac{t_e^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha)3\alpha} + \frac{\beta t_e^{3\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)(3\alpha+1)} \right) \\ \frac{\beta t_e^{3\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)(3\alpha+1)} - \frac{t_e^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2\alpha)3\alpha} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)^2} \end{bmatrix}. \quad (7.78)$$

Durch Einsetzen von Gl. (7.78) und Gl. (7.11) in Gl. (7.62) erhält man die energieoptimale Steuerfunktion

$$\begin{aligned}
u(t) &= - \left(\frac{t_e^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha)^2\Gamma(2\alpha)3\alpha} + \frac{\beta t_e^{3\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)^2(3\alpha+1)} \right) \frac{(t_e - t)^{1-\alpha}}{\gamma} \\
&\quad + \frac{t_e}{\Gamma(\alpha)^2\Gamma(2\alpha)\gamma} (t_e - t) + \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)^2\gamma} (t_e - t)^2. \quad (7.79)
\end{aligned}$$

In Gl. (7.79) ist zu erkennen, dass auch in der Steuerfunktion der Faktor $(t_e - \tau)^{2-2\alpha}$ wichtig ist, denn ohne ihn hätte sie eine Singularität bei $t = t_e$. Die zu der Steuerung gehörenden Zustandstrajektorien berechnen sich schließlich durch Einsetzen von Gl. (7.79), Gl. (7.11) und $\underline{b} = [1 \ 0]^T$ in Gl. (7.18). Verwendet man hierbei die Zahlenwerte $\alpha = 0.5$ und $t_e = 1$ s so ergeben sich die Steuerung und die Trajektorien in Abbildung 7.2.

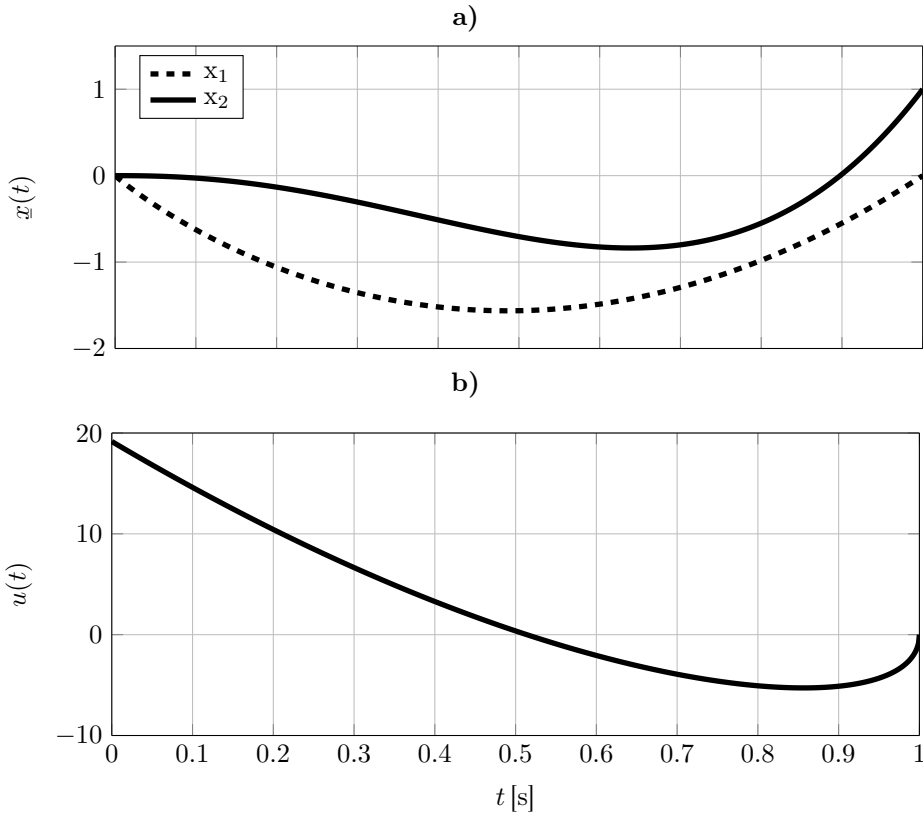


Abbildung 7.2: a) Zustandstrajektorien und b) energieoptimale Steuerfunktion des zeitvarianten Beispielsystems für $\alpha = 0.5$, $t_e = 1$ s und $\bar{x}_e = [0 \ 1]^T$

7.5 Zusammenfassung

Dieses Kapitel behandelte erstmalig einige fundamentale Aspekte fraktionaler zeitvarianter Systeme. Basierend auf einer neu eingeführten R -Matrixfunktion wurde zunächst die analytische Lösung der zeitvarianten fraktionalen Zustandsgleichung hergeleitet und gezeigt, dass diese Lösung eindeutig ist. Das fraktionale System hängt hierbei von seiner gesamten Vergangenheit ab, was mit der Definition eines fraktionalen Zustands in Abschnitt 3.3 einhergeht. In der Literatur war bisher nur die Lösung einer fraktionalen zeitinvarianten Zustandsgleichung bekannt, wobei zudem der Zustand fälschlicherweise nur von einem einzigen fraktionalem Anfangswert abhängt. Die hier präsentierte Lösung eröffnet daher erstmals die Möglichkeit, eine Steuerung sowie ein Steuerbarkeitskriterium für zeitvariante fraktionale Systeme zu bestimmen.

Für das Steuerbarkeitskriterium musste zunächst die fraktionale Erreichbarkeit und Steuerbarkeit grundlegend definiert werden. Denn im Unterschied zu gängigen Defini-

tionen berücksichtigt die vorliegende Arbeit, dass es bei fraktionalen Systemen nicht Anfangswerte sind, die gesteuert werden, sondern Anfangsfunktionen. In Kombination mit der Zustandslösung war es dann möglich, erreichbare und steuerbare Räume festzulegen. Es stellte sich heraus, dass die steuerbaren Räume den Räumen der Lebesgue integrierbaren Funktionen entsprechen. In diesem Zusammenhang wurde das fraktionale Pendant zur Gram'schen Matrix, die für gewöhnliche Systeme bekannt ist, gefunden. Es ließ sich erstmalig zeigen, dass ein fraktionales System dann und nur dann vollständig steuerbar ist, wenn sowohl die Gram'sche Matrix als auch die R -Matrix vollen Rang besitzen. Hier liegt ein weiterer Unterschied zu den gewöhnlichen Systemen, da dort die Regularität der Gram'schen Matrix ausreichend ist.

Ebenfalls auf der Zustandslösung aufbauend ließ sich mit dem fraktionalen Hamiltonverfahren eine energieoptimale Steuerung für die betrachtete Systemklasse herleiten. Die Steuerung minimiert ein für fraktionale Systeme modifiziertes energieoptimales Gütemaß. Das Gütemaß besitzt einen zusätzlichen zeitabhängigen Faktor, der dafür sorgt, dass die Steuerfunktion keine Singularitäten enthält.

Die Resultate dieses Kapitels, also die Zustandslösung, das Steuerbarkeitskriterium, die fraktionale Gram'sche Matrix und die energieoptimale Steuerung wurden anhand eines einfachen Beispielsystems erläutert. Zusätzlich hat sich gezeigt: Wenn in den Ansätzen die Ableitungsordnung zu $\alpha = 1$ gesetzt wird, erhält man als Spezialfall die jeweiligen Pendants für gewöhnliche Systeme.

8 Realisierbarkeit der steuerungs-basierten Methode der Modulationsfunktionen

Mit dem Steuerbarkeitskriterium aus Kapitel 7 wird im Folgenden überprüft, ob das Ersatzsystem (6.23) vollständig steuerbar ist. Wäre dies der Fall, könnte mit der energieoptimalen Steuerung aus Gl. (7.62) mit Gl. (6.62) die separate Identifikation eines einzelnen Parameters des Systems (6.2) erfolgen. Die zu dem Parameter spezifische Modulationsfunktion hätte man somit automatisch bestimmt.

Die Steuerbarkeit des Ersatzsystems ist in ihrer Bedeutung vergleichbar mit der Regularität der Matrizen aus den Identifikationsgleichungen in Kapitel 4 oder den klassischen LS-Verfahren in [Lju99]. Durch die Steuerbarkeitsanalyse in diesem Kapitel lassen sich konkrete Anforderungen an das zu identifizierende System und dessen Eingangssignal ableiten, damit sich das steuerungs-basierte Verfahren realisieren lässt.

Zur Darstellung der Realisierbarkeit wird zunächst die R -Matrixfunktion aus Gl. (7.4) für das Ersatzsystem (6.23) aufgestellt. Anschließend folgt die Überprüfung der Steuerbarkeit des Ersatzsystems.

8.1 R -Matrixfunktion des Ersatzsystems

In diesem Abschnitt wird die R -Matrix für $\underline{\Lambda}(t) = \underline{A}(t)$ berechnet, wobei $\underline{A}(t)$ die Systemmatrix (6.48) des Ersatzsystems (6.23) darstellt. Schon in Abschnitt 6.3 wurde erwähnt, dass $\underline{A}(t)$ nilpotent ist und damit ab einer endlichen Potenz verschwindet. Aufgrund dieser Tatsache kann induktiv eine geschlossene Darstellung der R -Matrix mit den Matrizen \underline{P}^Δ , \underline{P}_y^+ , \underline{P}_u^+ , \underline{P}^e und \underline{P}^\square aus Definition 8.1 hergeleitet werden, die aus endlichen Summentermen besteht. Das Resultat liegt mit der folgenden Gl. (8.6) vor. Die Matrix \underline{J} in den Gln. (8.1)-(8.5) ist eine Block-Jordan-Matrix, die auf der Hauptdiagonalen ausschließlich Nullen aufweist und damit ebenfalls eine nilpotente Matrix darstellt. Die enthaltene Matrix \underline{H} ist in Gl. (6.42) definiert.

Definition 8.1

$$\underline{P}^\Delta \in \mathbb{R}^{nw \times wn}, \quad \underline{P}_{\tilde{y}}^+ \in \mathbb{R}^{n \times nw}, \quad \underline{P}_{\tilde{u}}^+ \in \mathbb{R}^{m+1 \times nw}, \quad \underline{P}^e \in \mathbb{R}^{[n\alpha] \times [n\alpha]},$$

$$\underline{P}^\square \in \mathbb{R}^{r \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha] \times r \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha]}$$

$$\underline{P}^\Delta = \sum_{k=0}^{nw-1} \frac{(t_e - \tau)^{(k+1)\frac{\alpha}{w} - 1}}{\Gamma((k+1)\frac{\alpha}{w})} \underline{J}_{nw \times nw}^k, \quad (8.1)$$

$$\underline{P}_{\tilde{y}}^+ = -\underline{H}_{n \times nw} \left(\sum_{k=0}^{nw-1} \frac{\tau_i^k t_e^{k\frac{\alpha}{w} + 1}}{\tau^i t_e^k} \tilde{y}(\tau) \cdot \underline{J}_{nw \times nw}^k \right), \quad (8.2)$$

$$\underline{P}_{\tilde{u}}^+ = \underline{H}_{m+1 \times nw} \left(\sum_{k=0}^{nw-1} \frac{\tau_i^k t_e^{k\frac{\alpha}{w} + 1}}{\tau^i t_e^k} \tilde{u}(\tau) \cdot \underline{J}_{nw \times nw}^k \right), \quad (8.3)$$

$$\underline{P}^e = \sum_{k=0}^{[n\alpha]-1} (t_e - \tau)^k \underline{J}_{[n\alpha] \times [n\alpha]}^k, \quad (8.4)$$

$$\underline{P}^\square = \begin{bmatrix} \underline{P}_1^\square & & \\ & \ddots & \\ & & \underline{P}_{\sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha]}^\square \end{bmatrix}, \quad \underline{P}_j^\square = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(t_e - \tau)^{(k+1)\frac{\{\gamma\}_j - 1}{r}}}{\Gamma((k+1)\frac{\{\gamma\}_j}{r})} \underline{J}_{r \times r}^k. \quad (8.5)$$

Satz 8.1 (R-Matrixfunktion des Ersatzsystems)

Die \underline{R} -Matrix des Ersatzsystems (6.23) lautet:

$$z := wn + n + m + 1 + [n\alpha] + r \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha], \quad \underline{R}_\alpha(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{z \times z}$$

$$\underline{R}_\alpha(t_e, \tau, A(\xi)) = \begin{bmatrix} \underline{P}^\Delta & \underline{0}_{nw \times n+m+1} \\ \underline{P}_{\tilde{y}}^+ & \underline{I}_{n+m+1 \times n+m+1} \\ \underline{P}_{\tilde{u}}^+ & \\ \underline{0}_{[n\alpha] \times nw} & \underline{0}_{[n\alpha] \times n+m+1} \\ \underline{0}_{r \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha] \times nw} & \underline{0}_{r \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha] \times n+m+1} \\ \underline{0}_{nw \times [n\alpha]} & \underline{0}_{nw \times r \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha]} \\ \underline{0}_{n+m+1 \times [n\alpha]} & \underline{0}_{n+m+1 \times r \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha]} \\ \underline{P}^e & \underline{0}_{[n\alpha] \times r \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha]} \\ \underline{0}_{r \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha] \times [n\alpha]} & \underline{P}^\square \end{bmatrix}. \quad (8.6)$$

Beweis:

Die Matrix (8.6) lässt sich induktiv herleiten, indem die Systemmatrix (6.48) für verschiedene Systemordnungen n , m und Ableitungsordnungen α aufgestellt und jeweils in Gl. (7.4) eingesetzt wird. Die Matrizen \underline{P}^Δ , \underline{P}^e und \underline{P}^\square können auf diese Weise direkt erhalten werden; für $\underline{P}_{\tilde{y}}^+$ und $\underline{P}_{\tilde{u}}^+$ ergibt sich zunächst:

$$\underline{P}_{\tilde{y}}^+ = -\underline{H}_{n \times nw} \left(\sum_{k=0}^{nw-1} \int_{\tau}^{t_e} \tilde{y}(v) \frac{(v-\tau)^{k \frac{\alpha}{w}}}{\Gamma(k \frac{\alpha}{w} + 1)} dv \cdot \underline{J}_{nw \times nw}^k \right), \quad (8.7)$$

$$\underline{P}_{\tilde{u}}^+ = \underline{H}_{m+1 \times nw} \left(\sum_{k=0}^{nw-1} \int_{\tau}^{t_e} \tilde{u}(v) \frac{(v-\tau)^{k \frac{\alpha}{w}}}{\Gamma(k \frac{\alpha}{w} + 1)} dv \cdot \underline{J}_{nw \times nw}^k \right). \quad (8.8)$$

Gl. (8.7) lässt sich ebenfalls auf eine andere Weise schreiben, denn das $(k \frac{\alpha}{w} + 1)$ -te rechtsseitige Integral von $\tilde{y}(\tau)$ bezüglich τ lautet gemäß Gl. (3.3):

$$\int_{\tau}^{t_e} \tilde{y}(\tau) \frac{(v-\tau)^{k \frac{\alpha}{w} + 1}}{\Gamma(k \frac{\alpha}{w} + 1)} dv = \int_{\tau}^{t_e} \tilde{y}(v) \frac{(v-\tau)^{k \frac{\alpha}{w} + 1 - 1}}{\Gamma(k \frac{\alpha}{w} + 1)} dv. \quad (8.9)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite der Gl. (8.9) entspricht dem Integralterm in Gl. (8.7). Daher kann $\underline{P}_{\tilde{y}}^+$ gemäß Gl. (8.2) definiert werden. In Gl. (8.9) lässt sich $\tilde{y}(\tau)$ mit $\tilde{u}(\tau)$ ersetzen. Aufgrund dessen kann in gleicher Weise wie $\underline{P}_{\tilde{y}}^+$ auch $\underline{P}_{\tilde{u}}^+$ mit einem fraktionalem Integral gemäß Gl. (8.3) ausgedrückt werden. \square

Die zu der Systemmatrix des Ersatzsystems (6.54) in Beispiel 6.3 passende \underline{R} -Matrix ist im Anhang E zu finden.

8.2 Realisierbarkeit

An dieser Stelle wird die Steuerbarkeit des Ersatzsystems (6.23) mit der Systemmatrix (6.48) und dem Eingangsvektor (6.49) untersucht.

In der klassischen Systemtheorie wäre das Ersatzsystem nicht steuerbar, da mehrere parallele Integratorenketten mit der gleichen Eingangsgröße vorliegen. Da es sich hier jedoch um ein fraktionales Mischsystem handelt, bei dem die Integratorenketten unterschiedliche Ableitungsordnungen besitzen, ist eine vollständige Steuerbarkeit nicht ausgeschlossen (siehe auch Beispiel 7.4). Die Beurteilung der Steuerbarkeit geschieht unter Verwendung des Satzes 7.7, wobei die benötigte \underline{R} -Matrix des Ersatzsystems in Gl. (8.6) zu finden ist. Vorab werden einige Hilfsgrößen definiert:

Definition 8.2

Definiert werden folgende Mengen, wobei n die Systemordnung und α die Ableitungsordnung der FDGL (6.2) darstellen:

$$\mathcal{M} := \mathcal{M}_0 \cap \mathcal{M}_1 \cap \dots \mathcal{M}_{n-1}, \quad (8.10)$$

$$\mathcal{M}_j := \left\{ x_j \in \mathbb{R} \mid p \frac{[j\alpha] - i + (n-j)\alpha}{r} - 1, \quad (8.11) \right.$$

$$p = 1, \dots, r, i = 0, \dots, [j\alpha] - 1 \left. \right\},$$

$$\mathcal{S}_1 := \left\{ s_1 \in \mathbb{R} \mid z \frac{\alpha}{w} - 1, z = 1, \dots, nw \right\}, \quad (8.12)$$

$$\mathcal{S}_2 := \{ s_2 \in \mathbb{N}_{\geq 0} \mid [n\alpha] - l, l = 1, \dots, [n\alpha] \}. \quad (8.13)$$

Außerdem wird eine weitere Funktion $Q(\tau)$ benötigt gemäß der Definition

$$q_i, q_{j,i,p} \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} Q(\tau) := & \sum_{z=1}^{nw} q_{nw-z+1} \frac{(t_e - \tau)^{z \frac{\alpha}{w} - 1}}{\Gamma(z \frac{\alpha}{w})} + \sum_{z=0}^{[n\alpha]-1} q_{nw+n+m+2-z+1+[n\alpha]} (t_e - \tau)^z \\ & + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{[j\alpha]-1} \sum_{p=1}^r q_{j,i,p} \frac{(t_e - \tau)^{p \frac{[j\alpha]-i+(n-j)\alpha}{r} - 1}}{\Gamma(p \frac{[j\alpha]-i+(n-j)\alpha}{r})}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Hiermit lässt sich folgender Satz zur Steuerbarkeit des Ersatzsystems formulieren:

Satz 8.2 (Steuerbarkeit des Ersatzsystems)

Das Ersatzsystem (6.23) ist dann und nur dann vollständig fraktional steuerbar, falls die Ordnung n des zu identifizierenden Systems (6.2) und seine Ableitungsordnung α so gewählt sind, dass der Schnitt der Mengen (8.10), (8.12) und (8.13) leer ist

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset \quad (8.15)$$

und ebenso $\tilde{u}(\tau)$ so gewählt ist, dass die Gleichung

$$\tau d_{t_e}^{\frac{(nw-1)}{w}\alpha+1} Q(\tau) + \sum_{j=0}^m q_{nw+n+j+1} \tau d_{t_e}^{j\alpha} \tilde{u}(\tau) \equiv 0 \quad (8.16)$$

mit $Q(\tau)$ aus Gl. (8.14) nur erfüllt ist, falls sich in Gl. (8.16) Terme von $\tau d_{t_e}^{\frac{(nw-1)}{w}\alpha+1} Q(\tau)$ und Terme von $\sum_{j=0}^m q_{nw+n+j+1} \tau d_{t_e}^{j\alpha} \tilde{u}(\tau)$ gegenseitig für beliebige nicht verschwindende Koeffizienten nicht auslöschen. Außerdem müssen die Annahmen 3.1 und 6.1 erfüllt sein.

Beweis:

Mit der \underline{R} -Matrix aus Gl. (8.6) und dem Eingangsvektor \underline{b} aus Gl. (6.49) ergibt sich der Vektor $\tilde{G}(\tau)^T = (\underline{R}(t_e, \tau, \underline{A}(\xi))\underline{b}(\tau))^T$ aus Gl. (7.43) entsprechend Gl. (F.1) (siehe Anhang F). Damit Steuerbarkeit vorliegt, muss gemäß Satz 7.7 überprüft werden ob folgende Gleichung für einen beliebigen konstanten Vektor $\underline{q} \neq \underline{0}$ erfüllt ist:

$$\epsilon := [(n-1)\alpha] + \alpha$$

$$\begin{aligned} & \tilde{G}(\tau)^T \underline{q} \\ = & q_1 \frac{(t_e - \tau)^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)} + \dots + q_{nw} \frac{(t_e - \tau)^{\frac{\alpha}{w}-1}}{\Gamma(\frac{\alpha}{w})} \\ & - q_{nw+1} \tau i_{t_e}^{\tau, \frac{nw-1}{w}\alpha+1} \tilde{y}(\tau) - \dots - q_{nw+n} \tau i_{t_e}^{\tau, \frac{nw-1}{w}\alpha+1-(n-1)\alpha} \tilde{y}(\tau) \\ & + q_{nw+n+1} \tau i_{t_e}^{\tau, \frac{nw-1}{w}\alpha+1} \tilde{u}(\tau) + \dots + q_{nw+n+m+1} \tau i_{t_e}^{\tau, \frac{nw-1}{w}\alpha+1-m\alpha} \tilde{u}(\tau) \\ & + q_{nw+n+m+2} (t_e - \tau)^{[n\alpha]-1} + \dots + q_{nw+n+m+1+[n\alpha]} \cdot 1 \\ & + q_{nw+n+m+2+[n\alpha]} \frac{(t_e - \tau)^{\frac{\epsilon}{r}-1}}{\Gamma(\frac{\epsilon}{r})} + \dots + q_{nw+n+m+1+[n\alpha]+r} \frac{(t_e - \tau)^{\epsilon-1}}{\Gamma(\epsilon)} \\ & + \dots \\ & + q_{wn+n+m+1+[n\alpha]+r \sum_{v=1}^{n-1} [(n-v)\alpha]+1} \frac{(t_e - \tau)^{\frac{1+n\alpha}{r}-1}}{\Gamma(\frac{1+n\alpha}{r})} + \dots \\ & + q_{wn+n+m+1+[n\alpha]+r \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha]} \frac{(t_e - \tau)^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)} \equiv 0. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Die Summe aller Polynomterme in Gl. (8.17) stimmt mit der Funktion $Q(\tau)$ aus Gl. (8.14) überein. Der erste Summenterm in $Q(\tau)$ entspricht hierbei gerade der ersten Zeile in Gl. (8.17), der Zweite der vierten Zeile und der Dritte entspricht den Zeilen ab Fünf bis zum Ende.

Zunächst wird angenommen, dass die Zeilen zwei und drei der Summe (8.17) Null seien ($q_{nw+1} = \dots = q_{nw+n+m+1} = 0$), so dass nur noch $Q(\tau)$ zurück bleibt. In diesem Fall ist zu untersuchen, ob $Q(\tau) \equiv 0$ für nicht verschwindende Koeffizienten in $Q(\tau)$ gelten kann. Einzelne Summenterme in Gl. (8.14) können sich offenbar nur dann auslöschen, falls sich die Exponenten von $(t_e - \tau)$ gleichen. Werden alle Exponenten des ersten Summenterms in der Menge \mathcal{S}_1 aus Gl. (8.12) und alle Exponenten des zweiten Summenterms in der Menge \mathcal{S}_2 aus Gl. (8.13) sowie die Exponenten des dritten Terms in der Menge \mathcal{M} aus Gl. (8.10) zusammengefasst, so wird klar, dass $Q(\tau) \equiv 0$ für nicht verschwindende Koeffizienten niemals eintreten kann, falls für die Systemordnung n und die Ableitungsordnung α genau $\mathcal{M} \cap \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset$ gilt.

In der Folge werden alle Koeffizienten der Polynomterme zu Null gesetzt (d.h. $Q(\tau) = 0$) und ausschließlich die zweite und dritte Zeile mit den Koeffizienten q_i betrachtet, wobei

$nw < i < nw + n + m + 2$ gilt. Für die Untersuchung ist es hilfreich die Summe fraktional rechtsseitig bezüglich τ mit der Ordnung $(\frac{nw-1}{w}\alpha + 1)$ abzuleiten:

$$\begin{aligned} & -q_{nw+1}\tilde{y}(\tau) - q_{nw+2}\tau d_{t_e}^{\alpha}\tilde{y}(\tau) - q_{nw+3}\tau^2 d_{t_e}^{2\alpha}\tilde{y}(\tau) - \dots - q_{nw+n}\tau^n d_{t_e}^{(n-1)\alpha}\tilde{y}(\tau) \\ & + q_{nw+n+1}\tilde{u}(\tau) + q_{nw+n+2}\tau d_{t_e}^{\alpha}\tilde{u}(\tau) + \dots + a_{nw+n+m+1}\tau^m d_{t_e}^{m\alpha}\tilde{u}(\tau) \equiv 0. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Es ist zu erkennen, dass Gl. (8.18) immer auf die Form von Gl. (6.2) gebracht werden kann, falls mindestens einer der Ausgangssignalterme nicht verschwindet. Dies bedeutet aber, dass Gl. (8.18) eine kommensurable FDGL in Ein-/Ausgangsdarstellung für \tilde{u} und \tilde{y} höchstens der Ordnung $(n-1)\alpha$ (oder kleiner) darstellt. Aufgrund der in Annahme 3.1 vorausgesetzten Eindeutigkeit des zu identifizierenden Systems (Teilerfremdheit) können \tilde{u} und \tilde{y} jedoch ausschließlich FDGLen erfüllen, welche die Ordnung $n\alpha$ besitzen. Somit ist Gl. (8.18) für nicht verschwindende Ausgangsterme ausgeschlossen. Falls die Ausgänge verschwinden, entsteht eine homogene FDGL für \tilde{u} :

$$q_{nw+n+1}\tilde{u}(\tau) + q_{nw+n+2}\tau d_{t_e}^{\alpha}\tilde{u}(\tau) + \dots + a_{nw+n+m+1}\tau^m d_{t_e}^{m\alpha}\tilde{u}(\tau) \equiv 0. \quad (8.19)$$

Da zugunsten der Systemanregung per Annahme 6.1 eine homogene FDGL bis zur Ordnung $m\alpha$ für $\tilde{u}(t)$ ausgeschlossen wurde, kann Gl. (8.19) nicht erfüllt werden falls mindestens ein q_i ungleich Null ist.

Eine weitere Möglichkeit folgt, falls in den Zeilen zwei und drei von Gl. (8.17) nicht verschwindende Terme auftauchen und in den restlichen Zeilen, welche die Polynome enthalten, mindestens ein Term übrigbleibt:

$$\begin{aligned} & Q(\tau) - q_{nw+1}\tau_i^{\frac{nw-1}{w}\alpha+1}\tilde{y}(\tau) - \dots - q_{nw+n}\tau_i^{\frac{nw-1}{w}\alpha+1-(n-1)\alpha}\tilde{y}(\tau) \\ & + q_{nw+n+1}\tau_i^{\frac{nw-1}{w}\alpha+1}\tilde{u}(\tau) + \dots + q_{nw+n+m+1}\tau_i^{\frac{nw-1}{w}\alpha+1-m\alpha}\tilde{u}(\tau) \equiv 0. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Zur Untersuchung dieses Falles wird Gl. (8.20) $(\frac{nw-1}{w}\alpha + 1)$ -fach rechtsseitig bezüglich τ abgeleitet, wodurch sich

$$\begin{aligned} & \tau d_{t_e}^{\frac{(nw-1)}{w}\alpha+1}Q(\tau) \\ & - q_{nw+1}\tilde{y}(\tau) - q_{nw+2}\tau d_{t_e}^{\alpha}\tilde{y}(\tau) - q_{nw+3}\tau^2 d_{t_e}^{2\alpha}\tilde{y}(\tau) - \dots - q_{nw+n}\tau^n d_{t_e}^{(n-1)\alpha}\tilde{y}(\tau) \\ & + q_{nw+n+1}\tilde{u}(\tau) + q_{nw+n+2}\tau d_{t_e}^{\alpha}\tilde{u}(\tau) + \dots + q_{nw+n+m+1}\tau^m d_{t_e}^{m\alpha}\tilde{u}(\tau) \equiv 0 \end{aligned} \quad (8.21)$$

ergibt. Solange in Gl. (8.21) nicht verschwindende Ausgangsterme enthalten sind, kann ebenso argumentiert werden wie bei Gl. (8.18): Aufgrund der Eindeutigkeit der FDGL können \tilde{u} und \tilde{y} die Gleichung nicht erfüllen ($\tau^n d_{t_e}^{(n-1)\alpha}\tilde{y}(\tau)$ kommt nicht vor). Eine weitere Möglichkeit eröffnet sich durch das Verschwinden aller Ausgangsterme in Gl. (8.21):

$$\tau d_{t_e}^{\frac{(nw-1)}{w}\alpha+1}Q(\tau) + q_{nw+n+1}\tilde{u}(\tau) + q_{nw+n+2}\tau d_{t_e}^{\alpha}\tilde{u}(\tau) + \dots + q_{nw+n+m+1}\tau^m d_{t_e}^{m\alpha}\tilde{u}(\tau) \equiv 0. \quad (8.22)$$

Der Spezialfall; $\tilde{u}(t)$ wird gerade so gewählt, dass Gl. (8.22) erfüllt ist; muss explizit ausgeschlossen werden.

Für vollständige Steuerbarkeit muss zudem die zweite Bedingung in Satz 7.7 erfüllt sein. Dies bedeutet nichts anderes, als dass die \underline{R} -Matrix (8.6) des Ersatzmodells vollen Rang besitzen muss. Um dies zu überprüfen, wird die Determinante betrachtet:

$$\det(\underline{R}_\alpha(t_e, \tau, A(\xi))) = \prod_{k=0}^{nw-1} \frac{(t_e - \tau)^{\alpha/w-1}}{\Gamma(\alpha/w)} \prod_{j=1}^{\sum_{v=1}^{n-1} [(n-v)\alpha]} \prod_{k=0}^{r-1} \frac{(t_e - \tau)^{\frac{\{\gamma\}_j}{r}-1}}{\Gamma(\frac{\{\gamma\}_j}{r})}. \quad (8.23)$$

Da $\frac{\alpha}{w} \in (0, 1)$ und $\frac{\{\gamma\}_j}{r} \in (0, 1)$ gilt, ist das Produkt (8.23) gerade dann Null, falls $t_e \rightarrow \infty$ gilt, was sich leicht ausschließen lässt. \square

Die Aussage über die Realisierbarkeit der steuerungsbasierten Methode der Modulationsfunktionen wird mit Hilfe von Satz 8.2 in Satz 8.3 formuliert. Zuvor wird die Annahme 8.1 über die Steuerbarkeit des Ersatzsystems getroffen.

Annahme 8.1

Das zu der FDGL (6.2) gehörende Ersatzsystem (6.23) sei im Sinne von Satz 8.2 vollständig fractional steuerbar. D.h. für die FDGL und die Eingangsgröße $u(t)$ gilt:

1. Die System- und Ableitungsordnungen n und α der FDGL (6.2) erfüllen die Gl. (8.15)
2. Die FDGL (6.2) ist entsprechend Annahme 3.1 eindeutig
3. Die Eingangsgröße $u(t)$ bzw. $\tilde{u}(t)$ der FDGL ist so gewählt, dass sie die Gln. (8.16) bzw. (8.22) nicht erfüllt
4. Die Eingangsgröße beschreibt entsprechend Annahme 6.1 keine homogene FDGL bis zur Ordnung $m\alpha$

Satz 8.3 (Realisierbarkeit der steuerungsbasierten Methode der Modulationsfunktionen)

Die FDGL (6.2) kann dann und nur dann mit der steuerungsbasierten Methode der Modulationsfunktionen identifiziert werden, falls Annahme 8.1 gilt. Jeder Parameter p_s berechnet sich dann entsprechend Gl. (6.62):

$$\tilde{Y}_{t_0, t_e}^{u_s^*(t)} = p_s. \quad (8.24)$$

Der Beweis ist im Anhang I.17 zu finden.

Da die System- und Ableitungsordnungen die Gl. (8.15) in der Regel erfüllen, ist das Verfahren für die meisten eindeutigen FDGLen realisierbar, wenn die Eingangsgröße entsprechend Annahme 8.1 gewählt wird.

Die Modulationsfunktion ist implizit in der Steuerung $u_s^*(t)$ enthalten. Prinzipiell könnten alle möglichen Steuerungen genutzt werden. Entsprechend Satz 6.6 wird jedoch sinnvollerweise die energieoptimale Steuerung aus Gl. (7.62) in der Identifikationsgleichung (8.24) verwendet, da diese die obere Schranke des Identifikationsfehlers in Gl. (6.72) minimiert und daher für einen geringen Identifikationsfehler sorgt. Zur Berechnung der Steuerung wird die \underline{R} -Matrix aus Gl. (8.6) des Ersatzsystems verwendet.

Folgend wird mit Satz 8.3 überprüft, ob sich das steuerungs-basierte Modulationsfunktionsverfahren zur Identifikation des Beispielsystems (6.14) aus Beispiel 6.1 einsetzen lässt.

Beispiel 8.1:

Damit sich das Verfahren realisieren lässt, muss laut Satz 8.3 die Annahme 8.1 erfüllt sein. Da die Schnittmenge von

$$\mathcal{M}_0 = \left\{ \frac{1+2\alpha}{2} - 1, 2\alpha \right\}, \quad (8.25)$$

$$\mathcal{M}_1 = \left\{ \frac{1+\alpha}{2} - 1, \alpha \right\}, \quad (8.26)$$

$$\mathcal{S}_1 = \{\alpha - 1, 2\alpha - 1\}, \quad (8.27)$$

$$\mathcal{S}_2 = \{0\} \quad (8.28)$$

leer ist:

$$\mathcal{M}_0 \cap \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset, \quad (8.29)$$

ist die Bedingung (8.15) erfüllt. Wird die Eingangsgröße entsprechend der 3. und 4. Bedingung in Annahme 8.1 gewählt und geht man davon aus, dass das Beispielsystem (6.14) eindeutig ist, dann kann a_1 mit Gl. (6.68) berechnet werden:

$$\tilde{Y}_{t_0, t_e}^{u_2^*}(t) = a_1. \quad (8.30)$$

8.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde die mathematische Realisierbarkeit des steuerungs-basierten Modulationsfunktionsverfahrens aus Kapitel 6 zur separaten Identifikation einzelner Parameter der FDGL (6.2) überprüft. Aus Kapitel 6 ging hervor, dass das Verfahren nur dann umgesetzt werden kann, falls das in Abschnitt 6.2 definierte zeitvariante Ersatzsystem vollständig steuerbar ist. Daher wurde dieses Ersatzsystem mit Hilfe des in Abschnitt 7.3 hergeleiteten Steuerbarkeitskriteriums analysiert. Zuvor wurde die für das Kriterium benötigte \underline{R} -Matrix des Ersatzsystems aufgestellt.

Bei der Untersuchung hat sich gezeigt, dass die Steuerbarkeit meistens gegeben ist. Nur in Spezialfällen geht sie verloren. Die FDGLen bei denen dies der Fall ist wurden aufgeführt. Somit ist das steuerungs-basierte Modulationsfunktionsverfahren für die Identifikation der meisten eindeutigen fraktionalen Systeme anwendbar.

An die Eingangsgröße des Systems lassen sich konkrete Anforderungen formulieren. So darf sie bis zur Ordnung $m\alpha$ keine homogene FDGL beschreiben. Hinzu kommt eine weitere Bedingung, die jedoch nur in ganz speziellen Fällen nicht erfüllt ist.

Im Unterschied zu den eben beschriebenen konkreten Forderungen, kann für die Regularität der zu invertierenden Matrizen in den Identifikationsgleichungen in Kapitel 4 nur der wenig konkrete Hinweis auf eine „hinreichende Anregung“ des Systems gegeben werden. Die Regularität dieser Matrizen ist in ihrer Bedeutung vergleichbar mit der Steuerbarkeit des Ersatzsystems.

Um die notwendige Ableitungsordnung zu bestimmen, wurde bereits in Abschnitt 4.5 ein algebraischer Ansatz vorgestellt.

Nach diesem Kapitel ist die steuerungs-basierte Bestimmung der Modulationsfunktion theoretisch vollständig durchleuchtet und der zweite fundamentale Beitrag dieser Arbeit abgeschlossen.

9 Zusammenfassung und Bewertung

In dieser Arbeit wurden modellbasierte Methoden zur Bestimmung der physikalischen Alterungsparameter einer Batteriezelle im laufenden Betrieb entworfen. Mit den Parametern kann die in den Materialwissenschaften zur Alterungsanalyse eingesetzte *Distribution of Relaxation Times* (DRT) automatisch berechnet werden. Üblich ist es, die DRT in einem Zwischenschritt durch manuelles Eingreifen aus dem mit der signalbasierten *Electrical Impedance Spectroscopy* (EIS) aufgenommenen Impedanzspektrum der Zelle zu bestimmen, wobei eine Modellstruktur erst nach Aufnahme des Spektrums angenommen wird. Die modellbasierten Methoden dieser Arbeit sind also ein wesentlicher Baustein für zukünftige Diagnosesysteme, da sie erstmalig die Möglichkeit eröffnen, die standardmäßig manuellen Schritte für die Alterungsanalyse auf automatische Schritte zu übertragen.

Zahlreiche modellbasierte Verfahren basieren auf makroskopischen Modellen in Form von gewöhnlichen Impedanzen. Problematisch hierbei ist, dass die makroskopischen Modelle nicht physikalisch motiviert sind. Die hier betrachteten Methoden basieren auf fraktionalen Impedanzmodellen, da diese bei überschaubarer struktureller Komplexität physikalisch motiviert sind. Die fraktionale Impedanz lässt sich im Zeitbereich in Form einer *Fraktionalen Differentialgleichung* (FDGL) interpretieren. Das Ziel bestand nun darin, die physikalischen Parameter der FDGL automatisch direkt im Zeitbereich zu bestimmen. Die hierzu erarbeiteten Methoden wurden für allgemeine FDGLen hergeleitet und beispielhaft auf die Batterie angewendet.

Im Zuge dieser Arbeit sind folgende drei gesamtheitlich neue, modellbasierte Identifikationsverfahren für fraktionale Systeme entstanden:

- Methode der Modulationsfunktionen für fraktionale Systeme
- Algebraisches Verfahren für fraktionale Systeme
- Steuerungsbasierte Methode der Modulationsfunktionen für fraktionale Systeme

Im Unterschied zum State-of-the-Art agieren alle drei Verfahren erstmalig als late-lumping Verfahren, d.h. sie schaffen es die Approximation der fraktionalen Ableitung und Integration gänzlich zu vermeiden bzw. erst spät durchzuführen. Durch dieses late-lumping weisen die Methoden Vorteile bezüglich der Rauschempfindlichkeit und dem Implementierungsaufwand auf. Je nach Anforderung können sie daher im laufenden Betrieb online eingesetzt werden.

Im **ersten fundamentalen Beitrag** dieser Arbeit wurden das Modulationsfunktionsverfahren und das algebraische Verfahren zunächst theoretisch hergeleitet. Es wurden modifizierte Definitionen der fraktionalen Integrale und Ableitungen verwendet, da die

gängigen Definitionen in der konkreten Problemstellung zu falschen Ergebnissen geführt hätten.

Das Modulationsfunktionsverfahren wird durch die sogenannte Φ -Transformation charakterisiert. Diese beschreibt eine Integraltransformation mit der Modulationsfunktion als Kern. Falls die Modulationsfunktion bestimmte Randbedingungen erfüllt, besitzt das Verfahren die vorteilhafte Eigenschaft mit der Transformation die fraktionalen Ableitungen von den Messgrößen der zu identifizierenden FDGL auf die Modulationsfunktion übertragen zu können. Die Bestimmung der Modulationsfunktion erfolgte zunächst heuristisch. Das Verfahren wurde mit fehlerhaften Messdaten theoretisch betrachtet und das Konvergenzverhalten untersucht. Hierbei wurde gezeigt, dass es in diesem Fall ohne weitere Vorkehrungen einen Biasfehler aufweist.

Die Methode der Modulationsfunktionen ist zwar in der Lage, die Koeffizienten der FDGL auch bei verrauschten Größen akkurat zu bestimmen, allerdings ist eine Identifikation der fraktionalen Ableitungsordnungen nicht möglich. Zum Zweck einer solchen Ableitungsidentifikation wurde das fraktionale algebraische Verfahren entwickelt. Das Grundprinzip hierbei ist, die FDGL in eine algebraische Darstellung zu überführen, um dann durch sukzessives Ableiten die fraktionalen Ableitungsvariablen zu entfernen. Die Ableitungsordnungen tauchen danach als gewöhnliche Parameter in der Gleichung auf. Aufgrund der komplementären Eigenschaften benötigt man beide Verfahren zur Identifikation fraktionaler Systeme und es ist ggf. sinnvoll, sie in einem iterativen Ansatz zu kombinieren.

Nach der Herleitung der Verfahren wurde die Methode der Modulationsfunktionen für die Identifikation einer *Lithium-Polymer* (LiPO)-Zelle von KOKAM mit realen Messdaten eingesetzt. Die Daten wurden von einem im Rahmen der Arbeit entstandenen Batteriemessstand erzeugt. Der Versuchsaufbau erlaubt die Aufschaltung beliebiger Signale mit sehr hoher Dynamik. Bevor die Messdaten verwendet wurden, erfolgte noch die Batterieidentifikation in der Simulation. Hierbei ergaben sich unter additivem weißen gaußschen Rauschen sehr akkurate Ergebnisse bis zu einem äußerst niedrigen SNR=32.5 dB. Diese wenig rauschempfindlichen Resultate haben sich auch mit realen Messdaten bestätigt: Das Verfahren lieferte am Batteriemessstand, bei einem SNR=37.97 dB der Spannungsmessung, ebenfalls sehr akkurate Parameterschätzungen. Verglichen mit der EIS, welche im Rahmen der vorliegenden Arbeit ein SNR>100 dB benötigte, um das Spektrum überhaupt aufnehmen zu können, erzielte die Methode deutlich bessere Ergebnisse. Das Modulationsfunktionsverfahren benötigte ca. 15 Minuten, um die Identifikation durchzuführen. Dies ist in vielen Fällen deutlich schneller als die Identifikation mit signalbasierten Methoden. Da der Schwerpunkt der Arbeit auf der Methodik lag, wurde keine umfangreiche Studie durchgeführt. Trotzdem können die wenig rauschempfindlichen und akkuraten Ergebnisse als ein Indiz dafür gesehen werden, dass das Verfahren auch in der Praxis einsetzbar ist. Zusätzlich ließ sich in der Simulation demonstrieren, dass mit dem Modulationsfunktionsverfahren – im Gegensatz zu signalbasierten Methoden – auch die Ruhespannung identifiziert werden kann. Hierbei ergaben sich brauchbare Ergebnisse bis zu einem SNR=60 dB. Als weiteres Anwendungsergebnis wurde dann noch das algebraische Verfahren in der Simulation getestet. Hierbei konnten brauchbare Ergebnisse bis zu einem SNR=75 dB

erzielt werden. Diese Methode ist daher deutlich rauschempfindlicher als die Methode der Modulationsfunktionen.

Es muss berücksichtigt werden, dass die in der vorliegenden Arbeit betrachteten Methoden ein parametrisches Modell benötigen, wohingegen signalbasierte Methoden ohne Modellannahme auskommen. Es ist also nur dann sinnvoll beide Verfahren wie eben zu vergleichen, wenn ohnehin Modellinformationen vorliegen. Soll jedoch beispielsweise ein Modell mit Hilfe der DRT erstellt werden, dann sind die Methoden dieser Arbeit keine Alternative zum Vorgehen mit der EIS.

Nun gab es zur Wahl der Modulationsfunktion, die für einen möglichst kleinen Identifikationsfehler sorgt, außer den entwickelten Heuristiken bisher kaum Anhaltspunkte. Außerdem müssen für verschiedene Systeme auch unterschiedliche Modulationsfunktionen gewählt werden. Dies ist insbesondere für Zellen, die aus unterschiedlichen Materialien bestehen, unvorteilhaft, da sich das System dadurch verändert.

Um dieses Problem zu lösen, wurde im **zweiten fundamentalen Beitrag** dieser Arbeit die Methode der Modulationsfunktionen erstmalig theoretisch auf eine steuerungsbasierte Bestimmung der Modulationsfunktion erweitert. Mit dieser ist es möglich, jeden Parameter des Systems einzeln methodisch zu identifizieren. Neben der steuerungsbasierten Bestimmung der Modulationsfunktion hat die separate Identifikation den großen Vorteil, dass sich etwaige Identifikationsfehler der Parameter nicht fortpflanzen.

Für die methodische Identifikation wurde zunächst einmal eine für einen einzelnen Parameter spezifische Modulationsfunktion definiert. Diese Funktion besitzt die gleichen Eigenschaften, die auch die heuristische Modulationsfunktion erfüllen muss. Zusätzlich muss sie aber für jeden zu identifizierenden Parameter ein spezifisches Merkmal vorweisen. Dieses sorgt dafür, dass alle unerwünschten Terme, deren Koeffizienten nicht identifiziert werden sollen, aus der Identifikationsgleichung entfernt werden.

Um die Modulationsfunktion methodisch zu erzeugen, wurde ein Ersatzsystem in Form eines fraktionalen zeitvarianten Zustandsraumsystems eingeführt. Es ließ sich zeigen, dass durch die Wahl der Zustandsgrößen des Ersatzsystems die Bedingungen an die Modulationsfunktion gerade dann erfüllt sind, wenn das Ersatzsystem einen bestimmten Endwert besitzt. Dadurch wird das Identifikationsproblem in ein Steuerungsproblem für das Ersatzsystem überführt. Darüber hinaus war zu erkennen, dass der Identifikationsfehler gering ist, wenn eine energieoptimale Steuerung eingesetzt wird. Für die Realisierbarkeit der Identifikationsmethode musste also zunächst geklärt werden, ob das Ersatzsystem vollständig fraktional steuerbar ist. Denn wäre dies der Fall, könnte anschließend der Entwurf einer energieoptimalen Steuerung erfolgen.

Allerdings wurden in der Literatur zeitvariante fraktionale Systeme bisher nicht betrachtet und somit war bislang weder ein Steuerbarkeitskriterium noch eine energieoptimale Steuerung verfügbar.

Im Rahmen dieser Arbeit ist es erstmals gelungen, die analytische Lösung der zeitvarianten Zustandsgleichung auf der Basis einer neu eingeführten \underline{R} -Matrixfunktion herzuleiten und zu zeigen, dass die Lösung eindeutig ist. Bisher waren nur spezielle

Lösungen für zeitinvariante Systeme bekannt. Der R -Matrixfunktion konnten wichtige Eigenschaften nachgewiesen werden, die in ähnlicher Weise auch die Transitionsmatrix für gewöhnliche Systeme besitzt. Die Zustandslösung eröffnete erstmalig die Möglichkeit, ein Steuerbarkeitskriterium und eine Steuerung für zeitvariante fraktionale Systeme herzuleiten.

Zunächst wurde die Steuerbarkeit betrachtet. Hierbei konnten erreichbare und steuerbare Räume definiert werden, wodurch sich ein fraktionales Steuerbarkeitskriterium und eine fraktionale Gram'sche Matrix für zeitvariante fraktionale Systeme ergaben. Bei der Definition der fraktionalen Steuerbarkeit wurde erstmalig beachtet, dass sie auf keinen Fall so definiert werden darf wie bei gewöhnlichen Systemen nach KALMAN. Denn bei fraktionalen Systemen sind es nicht Anfangswerte, die gesteuert werden, sondern Anfangsfunktionen. Daher handelt es sich bei den steuerbaren Räumen im fraktionalen Fall um Funktionsräume. Die Analyse mit dem hergeleiteten Kriterium hat erbracht, dass das Ersatzsystem vollständig steuerbar ist. Eine Ausnahme bilden spezielle System- und Ableitungsordnungen, die jedoch höchstens sporadisch vorhanden sind. In diesem Zusammenhang ergaben sich konkrete Anforderungen an die Eingangsgröße des zu identifizierenden Systems. Somit zeigte sich das steuerungs-basierte Modulationsfunktionsverfahren für die Identifikation der meisten FDGLen anwendbar. Für die Umsetzung des Verfahrens fehlte nur noch eine Steuerung für die betrachtete Systemklasse. Diese konnte mit Hilfe der Zustandslösung und des fraktionalen Hamiltonverfahrens hergeleitet werden. Die Steuerung minimiert hierbei ein speziell für fraktionale Systeme modifiziertes energieoptimales Gütemaß. Dieses enthält zusätzlich einen zeitabhängigen Faktor, der dafür sorgt, dass die Steuerung keine Singularitäten enthält. Mit der energieoptimalen Steuerung war die methodische Voraussetzung erbracht, um die Modulationsfunktion modellbasiert mit dem vorgestellten Ansatz bestimmen zu können.

A Operatoren und Betafunktion

Der folgende Reflektionsoperator wird in dieser Arbeit häufig verwendet, beispielsweise für die Definition 3.5 äquivalenter rechtsseitiger Systeme oder in dem Beweis für die Lösung der rechtsseitigen Zustandsgleichung in Satz 7.3:

Definition A.1 (Reflektionsoperator)

Der Reflektionsoperator \mathcal{Q} , angewendet auf die Funktion $g(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ist laut [SKM93] wie folgt definiert:

$$a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b: \quad \mathcal{Q}g(t) := g(a + b - t). \quad (\text{A.1})$$

In [SKM93] werden die Reflektionsbeziehungen für den Spezialfall präsentiert, dass der Reflektionsoperator auf eine Funktion $g(t)$ angewendet wird, welche das fraktionale Integral einer Funktion $\varphi(t)$ ist. Das ist zusammengefasst in den Gln. (A.2) und (A.3): $\alpha \in \mathbb{R}^{>0}$, $\varphi(t) \in L[a, b]$, $f \in AC^{[\alpha]}[a, b]$

$$\mathcal{Q}_a^{t_i^\alpha} \varphi(t) = {}_t i_b^\alpha \mathcal{Q}\varphi(t), \quad (\text{A.2})$$

$$\mathcal{Q}_t^{t_i^\alpha} \varphi(t) = {}_a i_t^\alpha \mathcal{Q}\varphi(t). \quad (\text{A.3})$$

Zusätzlich zu [SKM93] lässt sich nachweisen, dass es möglich ist, die Reflektionsbeziehung auch auf eine Funktion $g(t)$ anzuwenden, welche die fraktionale Ableitung einer Funktion $f(t)$ ist:

$$\mathcal{Q}_a^t d_t^\alpha f(t) = {}_t d_b^\alpha \mathcal{Q}f(t), \quad (\text{A.4})$$

$$\mathcal{Q}_t^t d_b^\alpha f(t) = {}_a d_t^\alpha \mathcal{Q}f(t). \quad (\text{A.5})$$

Es ist wichtig zu erwähnen, dass alle Beziehungen auch für fraktionale Integrale und Ableitungen bezüglich τ gelten.

Die fraktionale uninitialisierte RL-Ableitung lässt sich mit der C-Ableitung ausdrücken [KST06, S.91],[Das11, S.28]:

Lemma A.1

$a \leq e < t, \quad f \in AC^{[\alpha]}[a, b]$

$${}^t_e dRL_t^\alpha f(t) = {}^t_e dC_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{[\alpha]} {}^t_e dRL_t^\alpha \frac{f^k(e)}{k!} (t-e)^k. \quad (\text{A.6})$$

Laut [Pod99, S.75] gilt folgende Äquivalenz:

Lemma A.2

$k = 0, 1, \dots, [\alpha]$

$${}^t_e dRL_t^{\alpha-k-1} f(t)|_{t=e} = 0 \Leftrightarrow f^k(e) = 0. \quad (\text{A.7})$$

Die nachfolgend definierte Betafunktion spielt eine entscheidende Rolle bei der Berechnung von fraktionalem Ableitungen, wie in den Beweisen I.3 und I.13 im Anhang I zu erkennen:

Definition A.2 (Betafunktion)

Die Betafunktion ist laut [OMS09, S.604] wie folgt definiert:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt. \quad (\text{A.8})$$

Sie besitzt die Eigenschaften:

$$B(x, y) = B(y, x), \quad (\text{A.9})$$

$$B(x, y) = B(x, y+1) + B(x+1, y), \quad (\text{A.10})$$

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \quad \Gamma(1+\alpha) = \alpha\Gamma(\alpha). \quad (\text{A.11})$$

Die Abbildung A.1 zeigt die links- und rechtsseitige Integration einer Sinusfunktion.

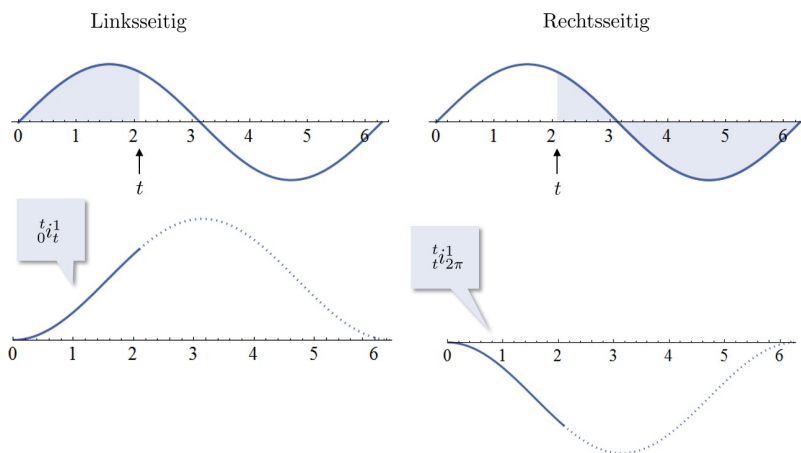


Abbildung A.1: Darstellung der links- und rechtsseitigen Integration einer Sinusfunktion. Die Variable t markiert den aktuellen Zeitpunkt.

B Fraktionale partielle Ableitung und vektorielle Ableitung

In diesem Abschnitt werden zunächst die partiellen Ableitungen einer Funktion mehrerer Veränderlicher eingeführt. Im Anschluss folgt die Definition eines Ableitungsoperators welcher mehrere Ableitungsordnungen besitzt.

B.1 Fraktionale Zwei-Variablen Integration und Ableitung

In Kapitel 7 wird die fraktionale Systemtheorie behandelt, wofür partielle Integrationen und Ableitungen von Funktionen mit zwei Veränderlichen benötigt werden. Die entsprechenden Definitionen für mehrere Veränderliche sind in [KST06, S.123-125] zu finden. Zur einfachen Handhabung werden sie hier vorgestellt:

Definition B.1 (Zwei-Variablen Integration)

Die fraktionalen links- und rechtsseitigen Integrationen einer Funktion mit zwei Veränderlichen $\varphi(t) \in L[a, b]$ sind wie folgt definiert ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$):

$${}_a^t i_t^\alpha \varphi(t, \tau) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{\varphi(\zeta, \tau)}{(t - \zeta)^{1-\alpha}} d\zeta, \quad (\text{B.1})$$

$${}_t^b i_b^\alpha \varphi(t, \tau) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \frac{\varphi(\zeta, \tau)}{(\zeta - t)^{1-\alpha}} d\zeta, \quad (\text{B.2})$$

$${}_a^\tau i_\tau^\alpha \varphi(t, \tau) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^\tau \frac{\varphi(t, v)}{(\tau - v)^{1-\alpha}} dv, \quad (\text{B.3})$$

$${}_\tau^b i_b^\alpha \varphi(t, \tau) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_\tau^b \frac{\varphi(t, v)}{(v - \tau)^{1-\alpha}} dv. \quad (\text{B.4})$$

Definition B.2 (Zwei-Variablen Ableitung)

Die fraktionalen links- und rechtsseitigen RL-Ableitungen einer Funktion mit zwei Veränderlichen $f(t) \in AC^{[\alpha]}[a, b]$ sind wie folgt definiert:

$${}^t_d RL_t^\alpha f(t, \tau) := \left(\frac{d}{dt} \right)^{[\alpha]+1} \left[{}^t_a I_t^{[\alpha]+1-\alpha} f(t, \tau) \right], \quad (\text{B.5})$$

$${}^t_d RL_b^\alpha f(t, \tau) := (-1)^{[\alpha]+1} \left(\frac{d}{dt} \right)^{[\alpha]+1} \left[{}^t_a I_b^{[\alpha]+1-\alpha} f(t, \tau) \right], \quad (\text{B.6})$$

$${}^\tau_d RL_\tau^\alpha f(t, \tau) := \left(\frac{d}{d\tau} \right)^{[\alpha]+1} \left[{}^\tau_a I_\tau^{[\alpha]+1-\alpha} f(t, \tau) \right], \quad (\text{B.7})$$

$${}^\tau_d RL_b^\alpha f(t, \tau) := (-1)^{[\alpha]+1} \left(\frac{d}{d\tau} \right)^{[\alpha]+1} \left[{}^\tau_a I_b^{[\alpha]+1-\alpha} f(t, \tau) \right]. \quad (\text{B.8})$$

Im Unterschied zu den Definitionen B.1 und B.2 werden in [KST06, S.123-125] dem Operator jeder Veränderlichen noch eine eigene Integrations- bzw. Ableitungsordnung zugeschrieben. Die partiellen Ableitungen kommen beispielsweise auch für die fraktionale Variationsrechnung in [RMT10] zum Einsatz. Desweiteren können mit ihnen spezielle Operatoren wie z.B. der fraktionale Gradient einer Funktion mit mehreren Veränderlichen oder die fraktionale Divergenz eines Vektorfeldes definiert werden [Tar10, S.250-257]. Damit ist es möglich fraktionale Maxwell-Gleichungen aufzustellen [Tar08].

In den Kapiteln über die fraktionale Systemtheorie wird außerdem die $(1 - \alpha)$ -fache fraktionale Ableitung einer Funktion $(t - \tau)^v$ bezüglich τ gebraucht. Die Regel zu einer solchen Ableitung wird hier erstmalig präsentiert, der Beweis findet sich im Anhang I.3:

Lemma B.1 (Ableitungsregel I)

Die rechtsseitige fraktionale Ableitung von $(t - \tau)^v$, $v > -1$ bezüglich τ lautet:

$\alpha \in (0, 1)$

$${}^\tau_d RL_t^{1-\alpha} (t - \tau)^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+\alpha)} (t - \tau)^{v-1+\alpha}. \quad (\text{B.9})$$

Durch einen Vergleich mit der Ableitung von $(t - \tau)^v$ bezüglich t in [Pod99, S.56] ist zu erkennen, dass der Zusammenhang ${}^\tau_d RL_t^{1-\alpha} (t - \tau)^v \equiv {}^t_d RL_t^{1-\alpha} (t - \tau)^v$ gilt. Die linksseitige Ableitung bezüglich τ von $(t - \tau)^v$, $v > -1$ berechnet sich wie folgt:

Lemma B.2 (Ableitungsregel II)

Die linksseitige fraktionale Ableitung von $(\tau - t)^v$, $v > -1$ bezüglich τ lautet:

$${}_{\tau}dRL_{\tau}^{1-\alpha}(\tau - t)^v = \frac{\Gamma(v+1)}{\Gamma(v+\alpha)}(\tau - t)^{v-1+\alpha}. \quad (\text{B.10})$$

Beweis:

Die Beweisführung entspricht mit kleinen Änderungen der von Lemma B.1 im Anhang I.3. \square

B.2 Vektorielle Operatoren

Bisher wurde, wie in der Literatur üblich, die „skalare“ fraktionale Integration und Ableitung mit einer Ableitungsordnung betrachtet. Im Folgenden ist es wichtig, auch über Operatoren zu verfügen, welche „vektoriell“ sind, also mehrere Ableitungs- bzw. Integrationsordnungen besitzen. Daher wird in Definition B.4 ein vektorieller fraktionaler Ableitungsoperator definiert, welcher eine Matrix in der Form von Gl. (B.11) vektoriell ableitet.

Definition B.3

$n_l, m, q \in \mathbb{N}_{>0}$, $p := \sum_{i=1}^q n_i = n_1 + \dots + n_q$, $\underline{F}(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times m}$,
 $\underline{f}_l(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n_l \times m}$, $\underline{F}(t) \in (AC^{[\alpha]}[a, t])^{p \times m}$

$$\underline{F}(t) := [\underline{f}_1(t)^T \quad \dots \quad \underline{f}_q(t)^T]^T \quad (\text{B.11})$$

Definition B.4 (Vektorielle fraktionale Ableitung)

Die vektorielle Ableitung ${}^t\mathcal{D}_t^{\underline{\alpha}}$ mit dem Ableitungsvektor $\underline{\alpha} \in (\mathbb{R}^{>0})^q$ ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} {}^t d_t^{\underline{\alpha}} \underline{F} + \underline{\psi}(\underline{\Omega}, \underline{\alpha}, a, e, t) &= \begin{bmatrix} {}^t d_t^{\alpha_1} & \dots & {}^t d_t^{\alpha_q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{f}_1 \\ \vdots \\ \underline{f}_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\psi}(\underline{f}_1, \alpha_1, a, e, t) \\ \vdots \\ \underline{\psi}(\underline{f}_q, \alpha_q, a, e, t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {}^t d_t^{\alpha_1} \underline{f}_1 \\ \vdots \\ {}^t d_t^{\alpha_q} \underline{f}_q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\psi}(\underline{f}_1, \alpha_1, a, e, t) \\ \vdots \\ \underline{\psi}(\underline{f}_q, \alpha_q, a, e, t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Gl. (B.12) stellt eine vektorielle fraktionale Ableitung mit q „skalaren“ Ableitungen unterschiedlicher Ordnung dar, die eine Matrix $\underline{F}(t)$ mit q Untermatrizen ableitet. Die Gl. (B.12) darf daher auf keinen Fall mit den vektoriellen Operatoren in [Tar10, S.250-257] verwechselt werden. Diese beschreiben beispielsweise den fraktionalen Gradienten einer Funktion mehrerer Veränderlicher oder die fraktionale Divergenz eines Vektorfeldes [Tar08]. Die Gl. (B.12) wird in dieser Arbeit hingegen zur Beschreibung eines fraktionalen Zustandsraumsystems mit mehreren Ableitungsordnungen in Gl. (3.28) eingesetzt. Diesen Zweck erfüllt sie auch in [XLZ14, SD06]. Für die vektorielle Integration muss in Gl. (B.12) nur der Operator \mathcal{D} durch \mathcal{I} ersetzt werden.

C Spline-Typ-Modulationsfunktion

Die Spline-Typ-Modulationsfunktion wird durch eine mit dem Binomialkoeffizienten gewichtete Folge von $m + 1$ Impulsen

$$\varphi_{m,m}(t) = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} \delta(iT_0 - t) \quad (\text{C.1})$$

durch wiederholte Integration erzeugt:

$$\varphi_{m,j}(t) = \int_{t_0}^t \overbrace{\dots}^{k=m-j} \int_{t_0}^t \varphi_{m,m}(t) dt^k. \quad (\text{C.2})$$

$\delta(t)$ bezeichnet die Dirac'sche Distribution [OMS09, S.76]. Charakteristisch an Gl. (C.1) ist, dass die Summe der gewichteten Impulse immer Null ergibt. Aus diesem Grund sind die Integrale über diese Summe in Gl. (C.2) an den Rändern $t_0, t_0 + T$ mit dem Zeitintervall $T = mT_0$ immer Null. Die Ordnung bzw. der erste Index m der Modulationsfunktion $\varphi_{m,0}(t)$ gibt demnach an, wie oft die Funktion differenziert werden darf, bevor diese Eigenschaft verloren geht. Es gilt daher:

$$\varphi_{m,0}^{(k)}(t_0) = \varphi_{m,0}^{(k)}(t_0 + T) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m. \quad (\text{C.3})$$

In Abbildung C.1 sind die neunten bis zwölften Ableitungen der Modulationsfunktion $\varphi_{12,0}(t)$ dargestellt. Die einstellbaren Tuningparameter sind T_0 und m . In [PR93] wird beschrieben, dass bei der Modulationsfunktionstransformation (4.10) mit der Spline-Funktion als Kern Frequenzen oberhalb von $\frac{1}{T_0}$ gedämpft werden. Dies wirkt sich positiv auf das Verhalten bei Rauschen und daher auch auf die Güte der Identifikationsergebnisse aus. Ein großes m verbessert dieses Verhalten.

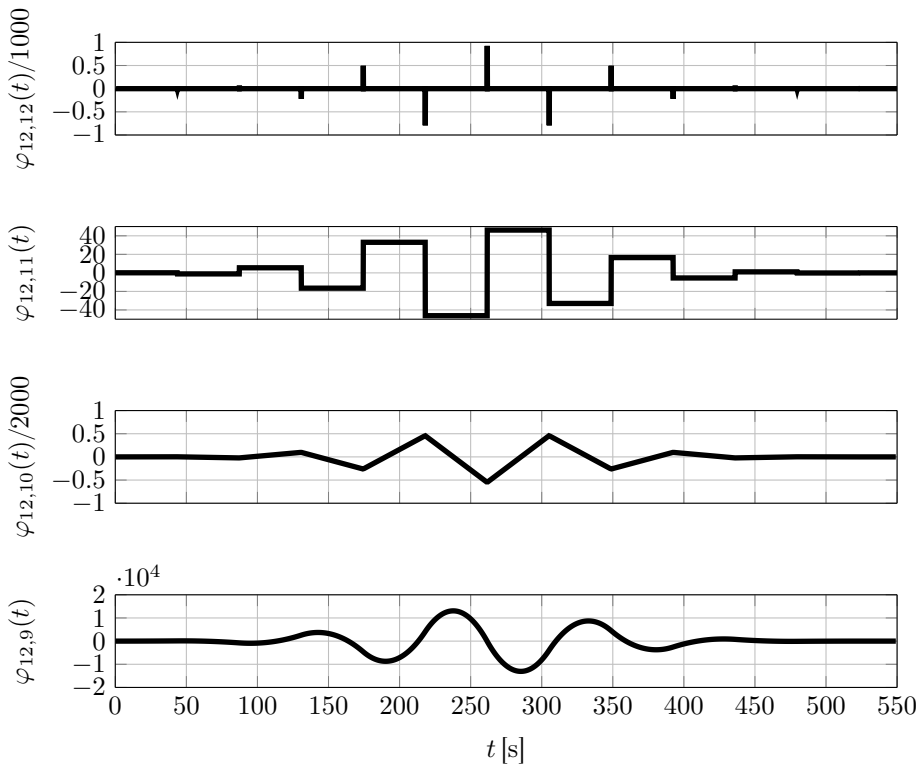


Abbildung C.1: Grafische Darstellung der Ableitungen der Spline-Typ-Modulationsfunktion $\varphi_{12,0}(t)$ für $T_0 = 43.75$ s und $T = 525$ s

D F - und R -Matrix bei konstantem Λ

In diesem Abschnitt werden die zur Berechnung der Lösung (7.30) der zeitinvarianten Zustandsgleichung benötigten Matrizen vorgestellt. Im Falle einer konstanten Matrix Λ wird die \underline{F} -Matrix (7.2) zu der weitläufig bekannten einparametrisigen Mittag-Leffler-Funktion [PD13, S.11], [Pod99, S.17]. Für $\alpha = 1$ resultiert die Matrixexponentialfunktion.

Lemma D.1 (Mittag-Leffler-Funktion)

Für ein konstantes Λ wird die \underline{F} -Matrix aus Gl. (7.2) zu der folgenden Mittag-Leffler-Funktion:

$$\underline{F}_\alpha(t - \tau, \Lambda) := \underline{F}_\alpha(t, \tau, \Lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \{\Lambda^j\}_1 \frac{(t-\tau)^{j\alpha_1}}{\Gamma(j\alpha_1+1)} \\ \vdots \\ \{\Lambda^j\}_q \frac{(t-\tau)^{j\alpha_q}}{\Gamma(j\alpha_q+1)} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.1})$$

Beweis:

Für eine konstante Matrix Λ lautet Gl. (7.2):

$$\begin{aligned} \underline{F}_\alpha(t, \tau, \Lambda) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \underline{I} + \begin{bmatrix} \Lambda_1 \frac{t, \alpha_1}{\tau \ell_t} 1 \\ \vdots \\ \Lambda_q \frac{t, \alpha_q}{\tau \ell_t} 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{\Lambda^2\}_1 \frac{t, 2\alpha_1}{\tau \ell_t} 1 \\ \vdots \\ \{\Lambda^2\}_q \frac{t, 2\alpha_q}{\tau \ell_t} 1 \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \dots + \begin{bmatrix} \{\Lambda^k\}_1 \frac{t, k\alpha_1}{\tau \ell_t} 1 \\ \vdots \\ \{\Lambda^k\}_q \frac{t, k\alpha_q}{\tau \ell_t} 1 \end{bmatrix} \right\}. \quad (\text{D.2}) \end{aligned}$$

Fractionale Integration des Einselements führt direkt zu der Mittag-Leffler-Funktion in Gl. (D.1). \square

Für den zeitinvarianten Fall wird die \underline{R} -Matrix zu der bekannten *Robotnov-Hartley* (RH)-Funktion [LH99, S.2]:

Lemma D.2 (Robotnov-Hartley-Funktion)

Für ein konstantes $\underline{\Lambda}$ wird die \underline{R} -Matrix aus Gl. (7.4) zu der folgenden RH-Funktion:

$$\underline{R}_{\underline{\alpha}}(t - \tau, \underline{\Lambda}) = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} \{\underline{\Lambda}^j\}_1 \frac{(t-\tau)^{(j+1)\alpha_1-1}}{\Gamma((j+1)\alpha_1)} \\ \vdots \\ \{\underline{\Lambda}^j\}_q \frac{(t-\tau)^{(j+1)\alpha_q-1}}{\Gamma((j+1)\alpha_q)} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.3})$$

Beweis:

Die \underline{R} -Matrix kann mit Gl. (7.3) und der Mittag-Leffler-Funktion (D.1) berechnet werden:

$$\underline{R}_{\underline{\alpha}}(t - \tau, \underline{\Lambda}(t)) := {}_{\tau}dRL_t^{1-\alpha} \underline{F}_{\underline{\alpha}}(t - \tau, \underline{\Lambda}). \quad (\text{D.4})$$

Einsetzen von Gl. (D.1) in Gl. (D.4) führt zu:

$$\underline{R}_{\underline{\alpha}}(t - \tau, \underline{\Lambda}(t)) = \sum_{j=0}^{\infty} \begin{bmatrix} {}_{\tau}dRL_t^{1-\alpha_1} \{\underline{\Lambda}^j\}_1 \frac{(t-\tau)^{j\alpha_1}}{\Gamma(j\alpha_1+1)} \\ \vdots \\ {}_{\tau}dRL_t^{1-\alpha_q} \{\underline{\Lambda}^j\}_q \frac{(t-\tau)^{j\alpha_q}}{\Gamma(j\alpha_q+1)} \end{bmatrix}. \quad (\text{D.5})$$

Mit Gl. (B.9) von Lemma B.1 ergibt sich:

$${}_{\tau}dRL_t^{1-\alpha_i} (t - \tau)^{j\alpha_i} = \frac{\Gamma(j\alpha_i + 1)}{\Gamma(\alpha_i(j + 1) + 1)} (t - \tau)^{j\alpha_i - (1-\alpha_i)}. \quad (\text{D.6})$$

Durch Einsetzen von Gl. (D.6) in Gl. (D.5) erhält man schließlich die RH-Funktion gemäß Gl. (D.3). \square

E R -Matrix des Beispielsystems

Beispiel E.1:

Für das Ersatzsystem (6.54) mit $n = 2$, $m = 1$, $\alpha = 0.4$ und daher $w = 1$, $r = 2$ und $\gamma = [\alpha + 1 \quad 2\alpha + 1]$ ergibt sich mit Formel (8.6) die R -Matrix zu:

$$R_{\alpha} = \begin{bmatrix}
 \frac{(t_e - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \frac{(t_e - \tau)^{2\alpha-1}}{\Gamma(2\alpha)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{(t_e - \tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\int_{\tau}^{t_e} \tilde{y}(\tau) d\tau & -\frac{\tau}{t_e} t_e^{\alpha+1} \tilde{y}(\tau) & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\int_{\tau}^{t_e} \tilde{y}(\tau) d\tau & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \int_{\tau}^{t_e} \tilde{u}(\tau) d\tau & \frac{\tau}{t_e} t_e^{\alpha+1} \tilde{u}(\tau) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & \int_{\tau}^{t_e} \tilde{u}(\tau) d\tau & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{(t_e - \tau)^{(\alpha+1)/2-1}}{\Gamma((\alpha+1)/2)} & \frac{(t_e - \tau)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{(t_e - \tau)^{(\alpha+1)/2-1}}{\Gamma((\alpha+1)/2)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{(t_e - \tau)^{(2\alpha+1)/2-1}}{\Gamma((2\alpha+1)/2)} & \frac{(t_e - \tau)^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{(t_e - \tau)^{(2\alpha+1)/2-1}}{\Gamma((2\alpha+1)/2)} & \frac{(t_e - \tau)^{(2\alpha+1)/2-1}}{\Gamma((2\alpha+1)/2)} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(t_e - \tau)^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} & \frac{(t_e - \tau)^{(2\alpha+1)/2-1}}{\Gamma((2\alpha+1)/2)}
 \end{bmatrix}. \quad (\text{E.1})$$

F G -Vektor des Ersatzsystems

Der zur Untersuchung der Steuerbarkeit in Kapitel 8.2 benötigte Vektor $\tilde{G}(\tau)^T$ lautet:

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}(\tau)^T = & \left[\begin{array}{cccc}
 \frac{(t_e - \tau)^{n\alpha - 1}}{\Gamma(n\alpha)} & \dots & \frac{(t_e - \tau)^{\frac{2\alpha}{w} - 1}}{\Gamma(\frac{2\alpha}{w})} & \frac{(t_e - \tau)^{\frac{\alpha}{w} - 1}}{\Gamma(\frac{\alpha}{w})} \\
 -\tau i_{t_e}^{\frac{nw-1}{w}\alpha + 1} \tilde{y}(\tau) & -\tau i_{t_e}^{\frac{nw-1}{w}\alpha + 1 - \alpha} \tilde{y}(\tau) & \dots & -\tau i_{t_e}^{\frac{(nw-1)}{w}\alpha + 1 - (n-1)\alpha} \tilde{y}(\tau) \\
 \tau i_{t_e}^{\frac{nw-1}{w}\alpha + 1} \tilde{u}(\tau) & \dots & \tau i_{t_e}^{\frac{nw-1}{w}\alpha - m\alpha + 1} \tilde{u}(\tau) & (t_e - \tau)^{[n\alpha] - 1} \dots 1 \\
 \frac{(t_e - \tau)^{\frac{[(n-1)\alpha] + \alpha}{r} - 1}}{\Gamma(\frac{[(n-1)\alpha] + \alpha}{r})} & \frac{(t_e - \tau)^{2\frac{[(n-1)\alpha] + \alpha}{r} - 1}}{\Gamma(2\frac{[(n-1)\alpha] + \alpha}{r})} & \dots & \frac{(t_e - \tau)^{[(n-1)\alpha] + \alpha - 1}}{\Gamma([(n-1)\alpha] + \alpha)} \\
 \frac{(t_e - \tau)^{\frac{[(n-1)\alpha] - 1 + \alpha}{r} - 1}}{\Gamma(\frac{[(n-1)\alpha] - 1 + \alpha}{r})} & \frac{(t_e - \tau)^{2\frac{[(n-1)\alpha] - 1 + \alpha}{r} - 1}}{\Gamma(2\frac{[(n-1)\alpha] - 1 + \alpha}{r})} & \dots & \frac{(t_e - \tau)^{[(n-1)\alpha] + \alpha - 2}}{\Gamma([(n-1)\alpha] - 1 + \alpha)} \\
 & \dots & & \\
 \frac{(t_e - \tau)^{\frac{1 + \alpha}{r} - 1}}{\Gamma(\frac{1 + \alpha}{r})} & \frac{(t_e - \tau)^{2\frac{1 + \alpha}{r} - 1}}{\Gamma(2\frac{1 + \alpha}{r})} & \dots & \frac{(t_e - \tau)^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} \\
 \frac{(t_e - \tau)^{\frac{[(n-2)\alpha] + 2\alpha}{r} - 1}}{\Gamma(\frac{[(n-2)\alpha] + 2\alpha}{r})} & \frac{(t_e - \tau)^{2\frac{[(n-2)\alpha] + 2\alpha}{r} - 1}}{\Gamma(2\frac{[(n-2)\alpha] + 2\alpha}{r})} & \dots & \frac{(t_e - \tau)^{[(n-2)\alpha] + 2\alpha - 1}}{\Gamma([(n-2)\alpha] + 2\alpha)} \\
 \frac{(t_e - \tau)^{\frac{[(n-2)\alpha] - 1 + 2\alpha}{r} - 1}}{\Gamma(\frac{[(n-2)\alpha] - 1 + 2\alpha}{r})} & \frac{(t_e - \tau)^{2\frac{[(n-2)\alpha] - 1 + 2\alpha}{r} - 1}}{\Gamma(2\frac{[(n-2)\alpha] - 1 + 2\alpha}{r})} & \dots & \frac{(t_e - \tau)^{[(n-2)\alpha] + 2\alpha - 2}}{\Gamma([(n-2)\alpha] - 1 + 2\alpha)} \\
 & \dots & & \\
 \frac{(t_e - \tau)^{\frac{1 + 2\alpha}{r} - 1}}{\Gamma(\frac{1 + 2\alpha}{r})} & \frac{(t_e - \tau)^{2\frac{1 + 2\alpha}{r} - 1}}{\Gamma(2\frac{1 + 2\alpha}{r})} & \dots & \frac{(t_e - \tau)^{2\alpha}}{\Gamma(1 + 2\alpha)} \\
 & \dots & & \\
 \frac{(t_e - \tau)^{\frac{[\alpha] + (n-1)\alpha}{r} - 1}}{\Gamma(\frac{[\alpha] + (n-1)\alpha}{r})} & \frac{(t_e - \tau)^{2\frac{[\alpha] + (n-1)\alpha}{r} - 1}}{\Gamma(2\frac{[\alpha] + (n-1)\alpha}{r})} & \dots & \frac{(t_e - \tau)^{[\alpha] + (n-1)\alpha - 1}}{\Gamma([\alpha] + (n-1)\alpha)} \\
 \frac{(t_e - \tau)^{\frac{[\alpha] - 1 + (n-1)\alpha}{r} - 1}}{\Gamma(\frac{[\alpha] - 1 + (n-1)\alpha}{r})} & \frac{(t_e - \tau)^{2\frac{[\alpha] - 1 + (n-1)\alpha}{r} - 1}}{\Gamma(2\frac{[\alpha] - 1 + (n-1)\alpha}{r})} & \dots & \frac{(t_e - \tau)^{[\alpha] + (n-1)\alpha - 2}}{\Gamma([\alpha] - 1 + (n-1)\alpha)} \\
 & \dots & & \\
 \frac{(t_e - \tau)^{\frac{1 + (n-1)\alpha}{r} - 1}}{\Gamma(\frac{1 + (n-1)\alpha}{r})} & \frac{(t_e - \tau)^{2\frac{1 + (n-1)\alpha}{r} - 1}}{\Gamma(2\frac{1 + (n-1)\alpha}{r})} & \dots & \frac{(t_e - \tau)^{(n-1)\alpha}}{\Gamma(1 + (n-1)\alpha)} \\
 \frac{(t_e - \tau)^{\frac{1 + n\alpha}{r} - 1}}{\Gamma(\frac{1 + n\alpha}{r})} & \frac{(t_e - \tau)^{2\frac{1 + n\alpha}{r} - 1}}{\Gamma(2\frac{1 + n\alpha}{r})} & \dots & \frac{(t_e - \tau)^{n\alpha}}{\Gamma(1 + n\alpha)}
 \end{array} \right]. \quad (F.1)
 \end{aligned}$$

G KOKAM Lithium-Polymer-Batteriezelle

Die in dieser Arbeit eingesetzte Zelle ist eine Lithium-Polymer (LiPO)-Batteriezelle von KOKAM mit Graphit an der Anode und einem Blend aus Nickel-Cobalt-Aluminium und Cobaltdioxid [Ill14, S.8][Whi04] an der Kathode mit der Bezeichnung SLPB 834374H. Bei der Zelle handelt es sich, wie in Abbildung G.1 zu sehen, um eine Pouchzelle. Das dazu passende Datenblatt zeigt Abbildung G.2.

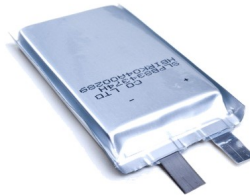


Abbildung G.1: KOKAM LiPO-Batteriezelle

Die Abbildung G.3 zeigt die Ruhespannungskurve der Zelle. Die OCV-Kurve wurde bei einer C-Rate von $C(T_{voll})/40$ h am IAM-WET aufgenommen. Zu erkennen ist das Hystereseverhalten zwischen ca. 20%-40%.

Für die gleiche Zelle wurden auch Impedanzdaten aufgenommen und das Batteriemodell (2.19) mit dem *Complex Nonlinear Least-Squares*⁶³ (CNLS)-Verfahren [Bou85] daran angefitet (siehe hierzu auch Abschnitt 2.4.1). Die resultierenden SoC-abhängigen Parameterfunktionen zeigt Abbildung G.4.

⁶³ engl. für *komplexes nichtlineares Least-Squares Verfahren*

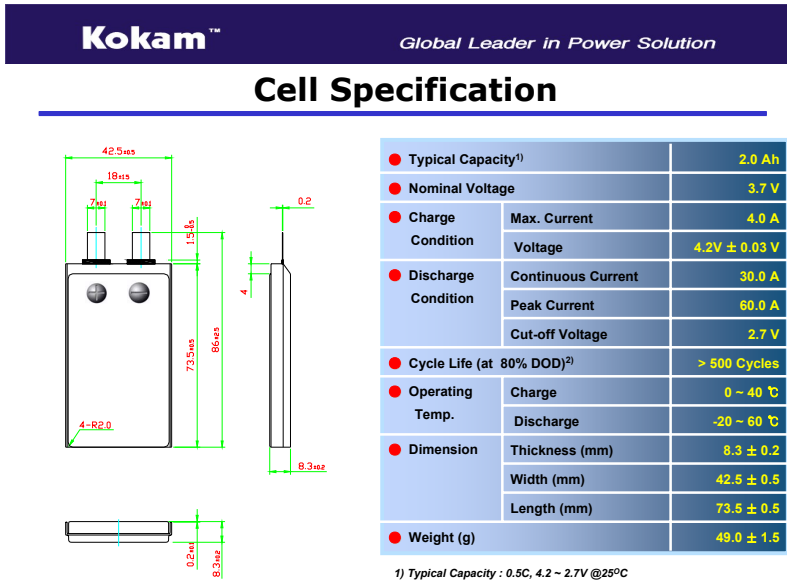


Abbildung G.2: Datenblatt der KOKAM-Zelle mit der Bezeichnung SLPB 834374H

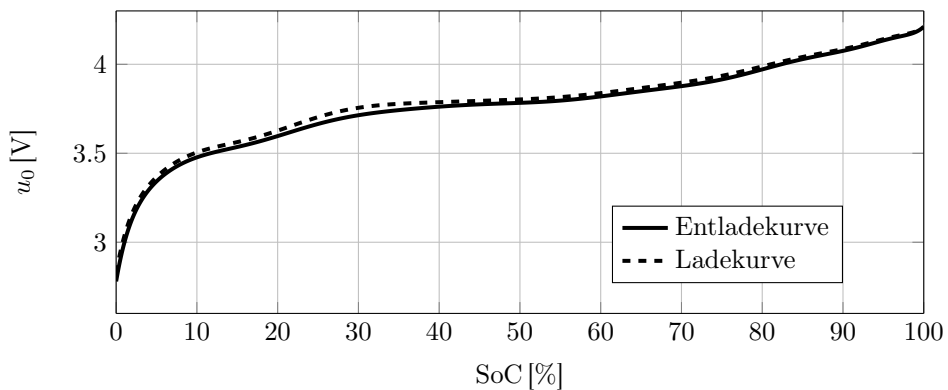


Abbildung G.3: Ruhespannungskurve der KOKAM-Zelle mit der Bezeichnung SLPB 834374H

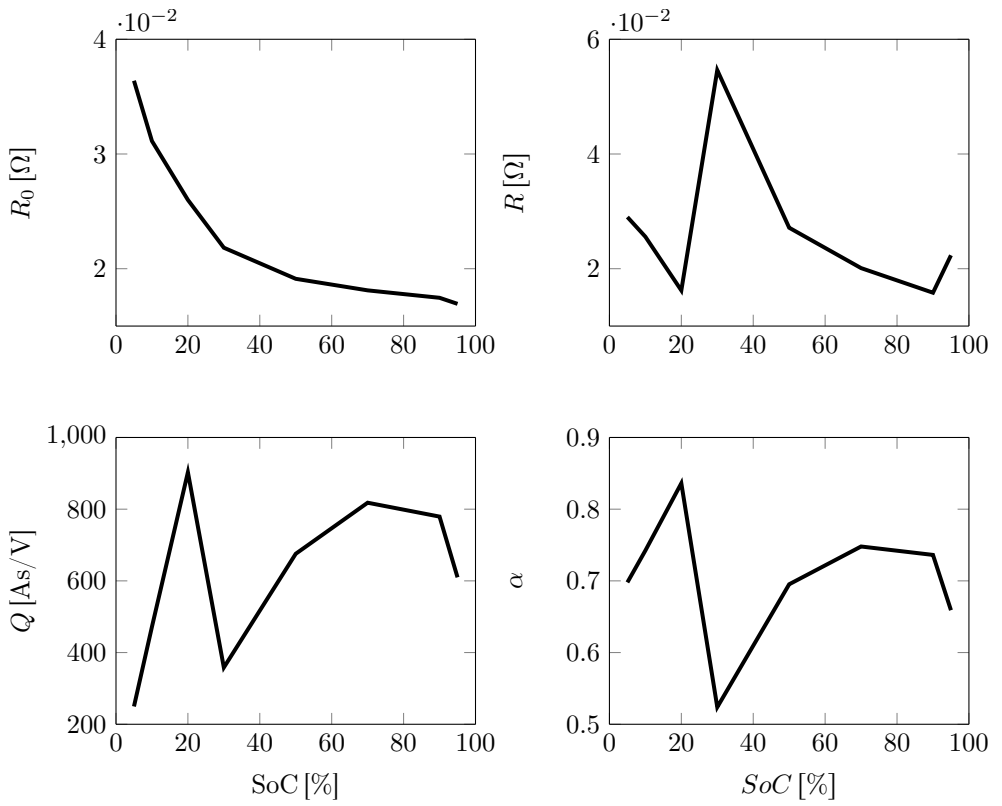


Abbildung G.4: Kennlinien der Parameter des fraktionalen Batteriemodells

H DRT und RQ-Element

In Abbildung H.1 ist jeweils die mit der analytischen Gl. (2.13) berechnete DRT für unterschiedliche α zu sehen. Die Abbildung H.2 zeigt die Ortskurven zweier RQ-Elemente

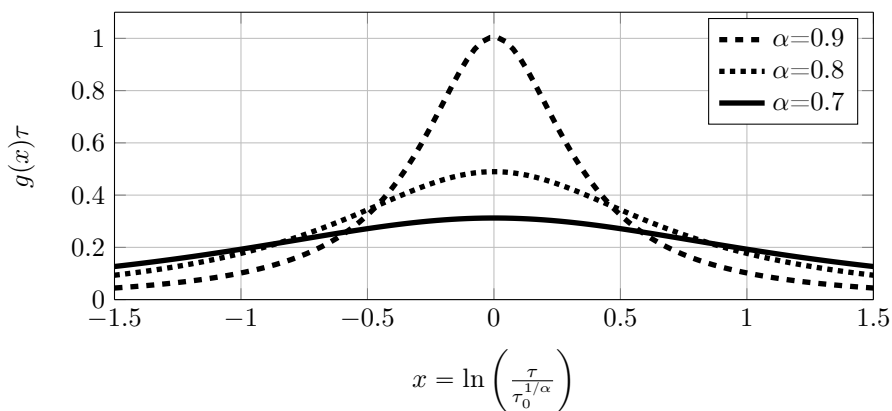


Abbildung H.1: DRT für unterschiedliche α

gemäß Gl. (2.14).

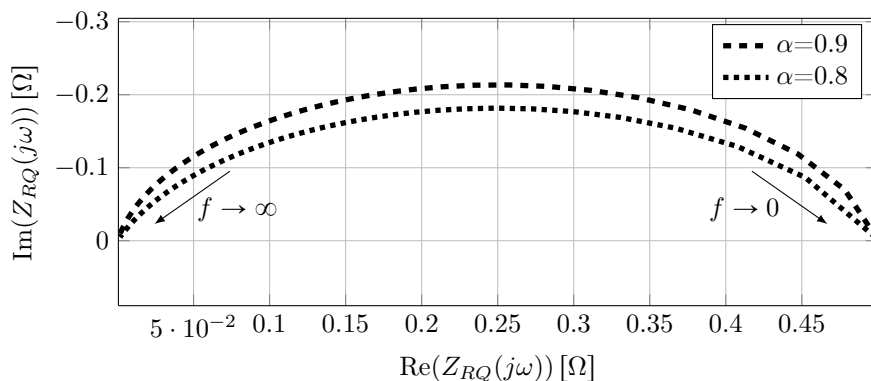


Abbildung H.2: Ortskurve des RQ-Elements für unterschiedliche α und festes $\tau_0 = 3.5$ s ($R = 0.5$ Ohm, $Q = 7$ As/V)

I Beweise

In diesem Abschnitt werden Beweise bereit gestellt, welche eher formaler Natur sind und für das Verständnis in den jeweiligen Kapiteln nicht unbedingt erforderlich sind.

I.1 Beweis von Satz 2.1: Zusammenhang zwischen RQ-Element und DRT

Beweis:

Ein Zusammenhang zwischen der DRT eines Materials und seiner Impedanz wurde experimentell erstmals in [Wag13] hergestellt, in [SMV⁺02] auf die Brennstoffzelle und in [ICE⁺10] schließlich auf die Batterie übertragen:

$$Z(j\omega) = \epsilon \int_0^{\infty} \frac{g(\tau)}{1 + \tau j\omega} d\tau, \quad (\text{I.1})$$

wobei ϵ die dielektrische Konstante ist. Die Annahme hinter Gl. (I.1) ist, dass es aufgrund der stochastischen Modellierung der Zeitkonstanten zu einer Summe unendlich vieler RC-Elemente kommt und sich somit im Grenzfall ein Integral ergibt. Für die Konvergenzbetrachtung hilft es, sich klar zu machen, dass die Integralgleichung (I.1) der sogenannten Stieltjes-Transformation in [MB56] entspricht. Die Gl. (I.1) ist demnach eine zweifach hintereinander ausgeführte Laplace-Transformation von $g(\tau)\tau$:⁶⁴

$$\lambda = \tau^{-1}, \quad D(\lambda) = g(\lambda^{-1})\lambda^{-1}$$

$$Z(j\omega) = \epsilon \mathcal{L}\{\mathcal{L}\{D(\lambda)\}\} = \epsilon \mathcal{S}\{D(\lambda)\} = \epsilon \int_0^{\infty} \frac{D(\lambda)}{\lambda + j\omega} d\lambda. \quad (\text{I.2})$$

Konvergenz liegt also vor, falls das Laplace-Integral von $g(\tau)\tau$ existiert. Setzt man nun die Dichte (2.13) in (I.1) oder (I.2) ein, so ergibt sich schließlich tatsächlich ein fraktionaler Ausdruck mit einem reellen Exponenten α von $j\omega$ [MB87],[CC41]:

$$Z(j\omega) = \frac{\epsilon}{1 + \tau_0(j\omega)^\alpha}. \quad (\text{I.3})$$

⁶⁴ Die erste Laplace-Transformation kann als reellwertige Transformation angesehen werden [Tit48, S.317-318]: $f(x) := \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} D(\lambda) d\lambda$, $D(\lambda) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^{>0}$, welche auch eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz von Gl. (I.2) darstellt. Von Vorteil ist, dass es eine inverse Stieltjes-Transformation gibt, mit der die Dichte berechnet werden kann [Tit48, S.318]:

$$D(\lambda) = \mathcal{S}^{-1}(Z(j\omega)) = \frac{j}{2\pi} (Z(\lambda e^{j\pi}) - Z(\lambda e^{-j\pi})).$$

Der gesuchte Zusammenhang zwischen der DRT und der Impedanz ist somit gefunden, da die Impedanzparameter α und τ_0 gleichzeitig die DRT (2.13) definieren. Durch einen Vergleich mit (2.14) erkennt man, dass (I.3) dem RQ-Element entspricht, wenn $\tau_0 = RQ$ und $\epsilon = R$ gesetzt wird. \square

I.2 Beweis von Satz 2.2: Diffusionsimpedanz

Beweis:

Die Diffusion stellt, unter Annahme einer eindimensionalen Bewegung, die Ausbreitung der Ladungskonzentration $c(t, x)$ in x -Richtung im Falle eines Konzentrationsgradienten dar. Hierbei gilt das zweite Ficksche Gesetz [JW95]:⁶⁵

$$\frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{I.4})$$

mit dem Diffusionskoeffizienten D . Die generelle Lösung dieser Gleichung ergibt sich über die Laplace-Transformation zu:

$$c(x) = A \sinh \left(\sqrt{\frac{j\omega}{D}} (L - x) \right) + B \cosh \left(-\sqrt{\frac{j\omega}{D}} (L - x) \right) \quad (\text{I.5})$$

mit der Diffusionslänge L . Wird eine endliche Diffusionslänge betrachtet, d.h. die Ladungskonzentration verschwindet bereits bei $x = L$ statt für $x \rightarrow \infty$, ergibt sich $B = 0$ wegen $c(x = L) = 0$. Da die Teilchenstromdichte $J(x, t)$ am unteren Diffusionsrand $x = 0$ dem ersten Fickschen Gesetz $J_0 := J(0, t) = -D \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x=0}$ folgt, erhält man für die Ladungskonzentration schließlich:

$$c(x) = \frac{J_0}{\sqrt{Dj\omega}} \tanh \left(\sqrt{\frac{j\omega}{D}} (L - x) \right). \quad (\text{I.6})$$

Die Impedanz lässt sich dann am unteren Rand $x = 0$ mit Hilfe der Nernstgleichung $\eta_{Diff} = Z_0 c(0)$ aus [JW06, S.12] berechnen:

$$Z_{FLW}(s) = \frac{\eta_{Diff}}{J_0} = \frac{Z_0}{\sqrt{D}} \frac{\tanh \left(\sqrt{\frac{j\omega}{D}} L \right)}{\sqrt{j\omega}}. \quad (\text{I.7})$$

Da eine endliche Diffusionslänge angenommen wurde, wird die Impedanz *Finite Length Warburg* (FLW)-Element genannt.⁶⁶ Aufgrund der Wurzel über der komplexen Variablen $j\omega$ ist das FLW-Element fraktional. Es ist zu betonen, dass diese fraktionale

⁶⁵ In einigen Publikationen [GCK16], [Das11, S.437-444] wird die Ableitung erster Ordnung auf der linken Seite von Gl. (I.4) mit einer fraktionalen Ableitung ersetzt. Dies basiert allerdings bisher nur auf Beobachtungen und wurde daher in der vorliegenden Arbeit nicht berücksichtigt. Wird die Diffusion mehrdimensional betrachtet, wird in Gl. (I.4) der Nablaoperator ∇ benötigt.

⁶⁶ Wählt man anstelle einer verschwindenden Ladungskonzentration $c(x = L) = 0$ eine verschwindende Stromdichte $J(x = L) = 0$ als Randbedingung, wird in der Impedanz der \tanh zu einem \coth . Dieses Element wird dann *Finite Space Warburg* (FSW)-Element genannt. Es weist für kleine Frequenzen eine 90°-Steigung auf. Wenn die Ladungskonzentration erst im Unendlichen verschwindet, spricht man von einer semi-infinite Diffusion.

Darstellung ganz natürlich aus der physikalischen Beschreibung der Diffusion mit den Fickschen Gesetzen entstanden ist.

Um Gl. (I.7) für die modellbasierte Identifikation zugänglich zu machen, muss sie als rationale Übertragungsfunktion mit nicht-ganzzahligen Exponenten von $j\omega$ auftreten. Hierbei kann man sich die Form des Nyquistdiagramms des FLW-Elements zunutze machen. Dieses weist für hohe Frequenzen einen 45° -Anstieg auf, für niedrige Frequenzen hat die Kurve eine halbkreisähnliche Form, die in Richtung der reellen Achse konvergiert [MB87, S.58]. Für sehr kleine Frequenzen verhält sich die Impedanz also wie ein ohmscher Widerstand. Dies ermöglicht es, die FLW-Impedanz durch eine Integralgleichung wie in Gl. (I.1) darzustellen [Ill14, S.42]:

$$Z_{FLW}(j\omega) = \epsilon \int_0^\infty \frac{g_{FLW}(\tau)}{1 + \tau j\omega} d\tau. \quad (\text{I.8})$$

Die numerische Lösung für $g_{FLW}(\tau)$ in [Ill14, S.42] weist eine sehr ähnliche Verteilungsfunktion wie beim Ladungstransfer auf, denn es gibt einen glockenförmigen Hauptpeak bei niedrigen Frequenzen und mehrere Nebenpeaks, die mit steigender Frequenz abnehmen. Jeder dieser Peaks kann mit einer Dichtefunktion (2.13) beschrieben werden. Dieses Dichtespektrum entspricht gemäß Satz 2.1 im Frequenzbereich einer Reihe von RQ-Elementen. \square

I.3 Beweis von Lemma B.1: Ableitungsregel I

Beweis:

Der Beweis beginnt mit der Lösung des folgenden Integralausdrucks:

$$-2 \int_t^\tau \frac{(t-v)^\alpha}{(v-\tau)^{1-\alpha}(t-\tau)^{2\alpha}} dv. \quad (\text{I.9})$$

Mit $x := \frac{v-\tau}{t-\tau} \Rightarrow v = x(t-\tau) + \tau$ folgt:

$$A := -2 \int_1^0 \frac{(t-\tau)^\alpha (1-x)^\alpha}{x^{1-\alpha} (t-\tau)^{1-\alpha} (t-\tau)^{2\alpha}} (t-\tau) dx \quad (\text{I.10})$$

$$= 2 \int_0^1 x^{1-\alpha} (1-x)^\alpha dx \quad (\text{I.11})$$

$$= \int_0^1 x^{1-\alpha} (1-x)^\alpha dx + \int_0^1 x^{1-\alpha} (1-x)^\alpha dx. \quad (\text{I.12})$$

Mit der Betafunktion (A.8) ergibt sich für die rechte Seite von Gl. (I.12):

$$A = B(\alpha, \alpha + 1) + B(\alpha, \alpha + 1). \quad (\text{I.13})$$

Die Eigenschaft (A.9) der Betafunktion führt für die rechte Seite von Gl. (I.13) zu

$$A = B(\alpha + 1, \alpha) + B(\alpha, \alpha + 1) \quad (\text{I.14})$$

und die Eigenschaft (A.10) schließlich zu:

$$A = B(\alpha, \alpha). \quad (\text{I.15})$$

Es gilt also:

$$\int_t^\tau \frac{(t-v)^\alpha}{(v-\tau)^{1-\alpha}} dv = -\frac{1}{2}(t-\tau)^{2\alpha} B(\alpha, \alpha) \quad (\text{I.16})$$

mit der ganzzahligen Ableitung:

$$\frac{d}{d\tau} \int_t^\tau \frac{(t-v)^\alpha}{(v-\tau)^{1-\alpha}} dv = \alpha(t-\tau)^{2\alpha} B(\alpha, \alpha). \quad (\text{I.17})$$

Mit Eigenschaft (A.11) und $\Gamma(1+\alpha) = \alpha\Gamma(\alpha)$ erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{d\tau} \int_t^\tau \frac{(t-v)^\alpha}{(v-\tau)^{1-\alpha}} dv &= \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} (t-\tau)^{2\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} (t-\tau)^{2\alpha-1}. \end{aligned} \quad (\text{I.18})$$

Laut der Ableitungsdefinition (B.8) gilt für die $(1-\alpha)$ -fache Ableitung von $(t-\tau)^\alpha$ bezüglich τ :

$${}_\tau dRL_t^{1-\alpha} (t-\tau)^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{d\tau} \int_t^\tau \frac{(t-v)^\alpha}{(v-\tau)^{1-\alpha}} dv \quad (\text{I.19})$$

und daher unter Berücksichtigung von Gl. (I.18):

$${}_\tau dRL_t^{1-\alpha} (t-\tau)^\alpha = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} (t-\tau)^{2\alpha-1}. \quad (\text{I.20})$$

Das Ergebnis entspricht Gl. (B.9) für $v = \alpha$. Der Beweis lässt sich in gleicher Weise auch für die Ableitung von $(t-\tau)^{1+\alpha}$ durchführen, woraus resultiert:

$${}_\tau dRL_t^{1-\alpha} (t-\tau)^{1+\alpha} = \frac{\Gamma(2+\alpha)}{\Gamma(2\alpha+1)} (t-\tau)^{2\alpha}. \quad (\text{I.21})$$

Das Ergebnis der $(1-\alpha)$ -fachen Ableitung von $(t-\tau)^\alpha$ in Gl. (I.20) und von $(t-\tau)^{1+\alpha}$ in Gl. (I.21) entspricht also Gl. (B.9) für $v = \alpha$ und $v = 1 + \alpha$ – was Gl. (B.9) bestätigt. \square

I.4 Beweis von Lemma 3.1: Caputo-Ableitung eines Integrals

Um die Übersicht zu wahren, wird für diesen Beweis eine skalare Ableitungsordnung α angenommen.

Beweis:

Die linke Seite der Gl. (3.12) lässt sich entsprechend Lemma A.1 auch mit der RL-Ableitung ausdrücken:

$$\alpha \in [0, 1]$$

$${}^t_0 dC_t^\alpha \int_{t_0}^t f(t, \tau) d\tau = {}^t_0 dRL_t^\alpha \int_{t_0}^t f(t, \tau) d\tau - {}^t_0 dRL_t^\alpha \int_{t_0}^t f(t, \tau) d\tau \quad (\text{I.22})$$

Das RL-Parameterintegral ist in [Pod99, S.98] nachzuschlagen. \square

I.5 Beweis von Lemma 3.2: Vertauschung von Ableitungen

Um auch hier die wesentliche Beweisidee zu zeigen, wird o.B.d.A. eine skalare Ableitungsordnung α angenommen.

Beweis:

Im ersten Schritt wird die Gl. (B.8) in die linke Seite von Gl. (3.13) eingesetzt:

$${}^t_\tau dRL_t^\alpha {}^\tau dRL_t^\alpha f(t, \tau) = {}^t_\tau dRL_t^\alpha - \frac{d}{d\tau} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_\tau^t \frac{f(t, v)}{(v-\tau)^\alpha} dv. \quad (\text{I.23})$$

Anwendung von Gl. (B.5) ergibt:

$$\begin{aligned} & {}^t_\tau dRL_t^\alpha {}^\tau dRL_t^\alpha f(t, \tau) \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_\tau^t \frac{-\frac{d}{d\tau} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_\tau^\zeta \frac{f(\zeta, v)}{(v-\tau)^\alpha} dv}{(t-\zeta)^\alpha} d\zeta \\ &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\tau} \frac{d}{dt} \int_\tau^t \int_\tau^\zeta \frac{f(\zeta, v)}{(t-\zeta)^\alpha (v-\tau)^\alpha} dv d\zeta. \end{aligned} \quad (\text{I.24})$$

Mit Hilfe von Fubini's Theorem $\int_a^b \int_a^y f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_x^b f(x, y) dy dx$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} & {}^t_\tau dRL_t^\alpha {}^\tau dRL_t^\alpha f(t, \tau) \\ &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\tau} \frac{d}{dt} \int_\tau^t \int_v^t \frac{f(\zeta, v)}{(t-\zeta)^\alpha (v-\tau)^\alpha} d\zeta dv. \end{aligned} \quad (\text{I.25})$$

Anwendung der Leibniz Regel für Parameterintegrale

$\frac{d}{dx} \int_a^x f(x, y) dy = \int_a^x \frac{d}{dx} f(x, y) dy + \lim_{y \rightarrow x-} f(x, y)$ führt zu:

$$\begin{aligned} & {}^t_\tau dRL_t^\alpha {}^\tau dRL_t^\alpha f(t, \tau) \\ &= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\tau} \int_\tau^t \frac{d}{dt} \int_v^t \frac{f(\zeta, v)}{(t-\zeta)^\alpha (v-\tau)^\alpha} d\zeta dv \\ & \quad + \lim_{v \rightarrow t-} \int_v^t \frac{f(\zeta, v)}{(t-\zeta)^\alpha (v-\tau)^\alpha} d\zeta. \end{aligned} \quad (\text{I.26})$$

Der Term $\lim_{v \rightarrow t-} \int_v^t \frac{f(\zeta, v)}{(t-\zeta)^\alpha (v-\tau)^\alpha} d\zeta$ in Gl. (I.26) verschwindet aufgrund der Lebesgue Integrierbarkeit von f :

$${}^t dRL_t^{\alpha\tau} dRL_t^\alpha f(t, \tau) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\tau} \int_\tau^t \frac{\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dv} \int_v^t \frac{f(\zeta, v)}{(t-\zeta)^\alpha} d\zeta}{(v-\tau)^\alpha} dv. \quad (\text{I.27})$$

Der Zähler des Bruches unter dem ersten Integral in Gl. (I.27) beschreibt die fraktionale Ableitung von $f(t, v)$ bezüglich t :

$${}^t dRL_t^{\alpha\tau} dRL_t^\alpha f(t, \tau) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\tau} \int_\tau^t \frac{{}^t dRL_t^\alpha f(t, v)}{(v-\tau)^\alpha} dv. \quad (\text{I.28})$$

Anhand von Gl. (I.28) ist schließlich die rechtsseitige Ableitung von ${}^t dRL_t^\alpha f(t, \tau)$ bezüglich τ klar zu erkennen, was bedeutet, dass die Ableitungen sich einfach vertauschen haben. \square

I.6 Beweis von Lemma 4.2: Fraktionale partielle Integration der fraktionalen Ableitung

Beweis:

Der Beweis von Gl. (4.3) startet bei dem Integralausdruck mit der rechtsseitigen C-Ableitung der Funktion $\gamma(t)$:

$$\int_e^g {}^t DC_g^\alpha \gamma(t) f(t) dt. \quad (\text{I.29})$$

Gl. (I.29) lässt sich laut der Definition für die rechtsseitige C-Ableitung in Gl. (3.11) auch folgendermaßen schreiben:⁶⁷

$$\int_e^g {}^t DC_g^\alpha \gamma(t) f(t) dt = (-1)^{|\alpha|+1} \int_e^g {}^t \mathcal{I}_g^{|\alpha|+1-\alpha} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^{|\alpha|+1} \gamma(t) \right] f(t) dt. \quad (\text{I.30})$$

Durch Anwendung der fraktionalen partiellen Integration (4.2) auf der rechten Seite der Gl. (I.30) erhält man schließlich:

$$\int_e^g {}^t DC_g^\alpha \gamma(t) f(t) dt = (-1)^{|\alpha|+1} \int_e^g \left(\frac{d}{dt} \right)^{|\alpha|+1} \gamma(t) {}^t \mathcal{I}_t^{|\alpha|+1-\alpha} f(t) dt. \quad (\text{I.31})$$

Anwendung der gewöhnlichen partiellen Ableitung (4.1) führt zu Gl. (4.3), womit der Beweis vollständig ist. \square

⁶⁷ Achtung: da in Gl. (I.29) die initialisierte Ableitung vorkommt, muss in Gl. (3.11) auch das initialisierte Integral verwendet werden.

I.7 Beweis von Lemma 4.5: Fraktionale Produktregel der Φ -Transformation

Beweis:

Mit der Definition der Φ -Transformation (4.10) erhält man:

$$\Phi_{e,g}^{\varphi}\{h(t) {}_e^t \mathcal{D}RL_t^{\alpha} f(t)\} = \int_e^g {}_e^t \mathcal{D}RL_t^{\alpha} f(t) (\varphi(t)h(t)) dt. \quad (\text{I.32})$$

Anwendung der vereinfachten fraktionalen partiellen Integration (4.7) führt unter der Annahme verschwindender Randbedingungen $(h(t)\varphi(t))^{(k)}|_{t=e,t=g} = 0$ für $k = 0, 1, \dots, \lfloor \alpha \rfloor$ zu Gl. (4.17). Diese Annahme lässt sich dann treffen, wenn für den Einzelterm $\varphi^{(k)}(e) = \varphi^{(k)}(g) = 0$ erfüllt ist, denn es gilt laut der Leibniz-Regel [BSM05, S.401]:

$$(\varphi(t)h(t))^{(k)} = \sum_{\mu}^k \binom{k}{\mu} \varphi^{(\mu)}(t) h^{(k-\mu)}(t). \quad (\text{I.33})$$

□

I.8 Beweis von Satz 4.6: Fraktionale algebraische Ableitung

Beweis:

Der Beweis beginnt mit der Anwendung des Homomorphismus auf den fraktionalen Ableitungsoperator:

$$\Theta({}_0\mathcal{D}_t^{\alpha} f) = \Theta({}_0d_t^{\alpha} f + \psi(f, \alpha, a, 0, t)). \quad (\text{I.34})$$

Mit Eigenschaft (K.11) folgt:

$$\Theta({}_0\mathcal{D}_t^{\alpha} f) = \Theta({}_0d_t^{\alpha} f) \oplus \Theta(\psi(f, \alpha, a, 0, t)). \quad (\text{I.35})$$

Das fraktionale Integral von ${}_0d_t^{\alpha} f$ mit der Ordnung α lässt sich auch als Faltung ausdrücken:

$$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * {}_0d_t^{\alpha} f = \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} {}_0d_{\tau}^{\alpha} f d\tau \quad (\text{I.36})$$

$$= {}_0^i d_t^{\alpha} {}_0d_t^{\alpha} f. \quad (\text{I.37})$$

Die uninitialisierte Integration und Ableitung heben sich gemäß [KST06, S.75,95] gegenseitig auf:

$${}_0^i d_t^{\alpha} {}_0d_t^{\alpha} f = f. \quad (\text{I.38})$$

Fasst man die Gln. (I.36)-(I.38) zusammen, erhält man:

$$\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * {}_0d_t^\alpha f = f. \quad (\text{I.39})$$

Nun wird der \mathfrak{K} -Bereich betrachtet. Mit der Integrationsvariablen (4.49) ist folgende Gleichung erfüllt:

$$\ell^\alpha \circledast \Theta({}_0d_t^\alpha f) = \Theta\left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\right) \circledast \Theta({}_0d_t^\alpha f). \quad (\text{I.40})$$

Da Θ ein Homomorphismus mit der Eigenschaft (K.12) ist, lässt sich Gl. (I.40) auch schreiben als:

$$\ell^\alpha \circledast \Theta({}_0d_t^\alpha f) = \Theta\left(\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} * {}_0d_t^\alpha f\right). \quad (\text{I.41})$$

Substitution des Terms in Klammern mit Gl. (I.39) führt zu

$$\ell^\alpha \circledast \Theta({}_0d_t^\alpha f) = \Theta(f). \quad (\text{I.42})$$

Weiterhin gilt die folgende Beziehung:

$$\Theta({}_0d_t^\alpha f) = 1_{\mathfrak{K}} \circledast \Theta({}_0d_t^\alpha f) = (\mathfrak{p}^\alpha \circledast \ell^\alpha) \circledast \Theta({}_0d_t^\alpha f). \quad (\text{I.43})$$

Die Assoziativität in \mathfrak{K} sorgt dafür, dass es keinen Unterschied macht, wie die Elemente in (I.43) gruppiert sind. Es spricht also nichts gegen folgende Darstellung:

$$\Theta({}_0d_t^\alpha f) = \mathfrak{p}^\alpha \circledast (\ell^\alpha \circledast \Theta({}_0d_t^\alpha f)). \quad (\text{I.44})$$

Substituiert man den Term in Klammern auf der rechten Seite von Gl. (I.44) mit der Gl. (I.41) erhält man schließlich

$$\Theta({}_0d_t^\alpha f) = \mathfrak{p}^\alpha \circledast \Theta(f). \quad (\text{I.45})$$

Einsetzen in Gl. (I.35) liefert:

$$\Theta({}_0\mathcal{D}_t^\alpha f) = \mathfrak{p}^\alpha \circledast \Theta(f) \oplus \Theta(\psi(f, \alpha, a, 0, t)). \quad (\text{I.46})$$

Aufgrund des Homomorphismus und aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf eine explizite Erwähnung von Θ verzichtet, die Argumente von ψ weggelassen und \circledast und \oplus durch die Symbolik der herkömmlichen Algebra ersetzt:

$${}_0\mathcal{D}_t^\alpha f = \mathfrak{p}^\alpha f + \psi. \quad (\text{I.47})$$

□

I.9 Beweis von Satz 6.4: Identifikationsfehler

Beweis:

Gl. (6.10) gilt weiter, jedoch sind die Gln. (6.69) und Gl. (6.70) nach $\tilde{y}(t)$ bzw. $\tilde{u}(t)$ umzustellen und dann in Gl. (7.22) einzusetzen. Für $\underline{m}(t_e)$ ergibt sich dadurch

$$\underline{m}(t_e) = \underline{m}_{mess}(t_e) - \underline{m}_e(t_e) \quad (\text{I.48})$$

und damit

$$\tilde{Y}_{t_0, t_e, mess}^{u_s^*(t)} - \tilde{Y}_{t_0, t_e, e}^{u_s^*(t)} = (\underline{m}_{mess}(t_e)^T - \underline{m}_e(t_e)^T) \underline{p}. \quad (\text{I.49})$$

Da für das Ersatzmodell nur die Messgrößen vorliegen, gilt weiterhin

$$\underline{m}_{mess}(t_e)^T = \underline{x}^+(t_e)^T = \underline{e}_s^T \quad (\text{I.50})$$

und infolgedessen wird Gl. (I.49) zu

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{t_0, t_e, mess}^{u_s^*(t)} - \tilde{Y}_{t_0, t_e, e}^{u_s^*(t)} &= (\underline{e}_s^T - \underline{m}_e(t_e)^T) \underline{p} \\ &= \underline{p}_s - \underline{m}_e(t_e)^T \underline{p}, \end{aligned} \quad (\text{I.51})$$

wobei $\underline{p}_s := \{p\}_s$ das s -te Element des Vektors \underline{p} darstellt. Der erste Term $\tilde{Y}_{t_0, t_e, mess}^{u_s^*(t)}$ auf der linken Seite der Gleichung (I.51) entspricht dem fehlerhaft geschätzten Parameter \hat{p}_s :

$$\hat{p}_s - \tilde{Y}_{t_0, t_e, e}^{u_s^*(t)} = \underline{p}_s - \underline{m}_e(t_e)^T \underline{p}. \quad (\text{I.52})$$

Umstellen von Gl. (I.52) liefert einen Ausdruck für den Identifikationsfehler

$$\Delta p_s = \hat{p}_s - \underline{p}_s:$$

$$\Delta p_s = \tilde{Y}_{t_0, t_e, e}^{u_s^*(t)} - \underline{m}_e(t_e)^T \underline{p}. \quad (\text{I.53})$$

□

I.10 Beweis von Satz 6.5: Obere Schranke des Identifikationsfehlers

Beweis:

Gl. (I.53) bzw. Gl. (6.71) ist abhängig von den Rauschgrößen und von der Steuergröße $u_s^*(t)$, welche nun so gewählt werden soll, dass Δp_s möglichst klein wird. Um herauszufinden, wann dies der Fall ist, wird zunächst der Betrag von Gl. (I.53) gebildet. Mit der Dreiecksungleichung folgt:

$$|\Delta p_s| \leq \left| \tilde{Y}_{t_0, t_e, e}^{u_s^*(t)} \right| + \left| \underline{m}_e(t_e)^T \underline{p} \right|. \quad (\text{I.54})$$

Auf den zweiten Term in Gl. (I.54) kann wiederum die Dreiecksungleichung angewendet werden:

$$|\Delta p_s| \leq \left| \tilde{Y}_{t_0, t_e, e}^* u_s^*(t) \right| + \sum_{i=1}^{n+m+1} |m_{e,i}(t_e)| |p_i|. \quad (\text{I.55})$$

Eine weitere Abschätzung von Gl. (I.55) ist die Beziehung

$$\begin{aligned} |\Delta p_s| &\leq \left| \tilde{Y}_{t_0, t_e, e}^* u_s^*(t) \right| + \sum_{i=1}^n \left| \tilde{Y}_{t_0, t_e, e}^* d_t^{(n-i)\alpha} \varphi_s(t) \right| |p_{n-i+1}| \\ &\quad + \sum_{k=n-m}^n \left| \tilde{U}_{t_0, t_e, e}^* d_t^{(n-k)\alpha} \varphi_s(t) \right| |p_{2n-k+1}|. \end{aligned} \quad (\text{I.56})$$

Anwendung der Cauchy-Schwarz'schen-Ungleichung führt zu:

$$\begin{aligned} |\Delta p_s| &\leq \sqrt{\int_{t_0}^{t_e} |\tilde{y}_e|^2} \sqrt{\int_{t_0}^{t_e} |u_s^*(t)|^2} + \sum_{i=1}^n \sqrt{\int_{t_0}^{t_e} |\tilde{y}_e|^2} \sqrt{\int_{t_0}^{t_e} \left| d_t^{(n-i)\alpha} \varphi_s(t) \right|^2} |p_{n-i+1}| \\ &\quad + \sum_{k=n-m}^n \sqrt{\int_{t_0}^{t_e} |\tilde{u}_e|^2} \sqrt{\int_{t_0}^{t_e} \left| d_t^{(n-k)\alpha} \varphi_s(t) \right|^2} |p_{2n-k+1}|. \end{aligned} \quad (\text{I.57})$$

Nun lässt sich mit vollständiger Induktion beweisen:

$$\int_{t_0}^{t_e} \left| d_t^{(n-q)\alpha} \varphi_s(t) \right|^2 dt \leq \frac{(t_e - t_0)^{2q}}{2^q} \int_{t_0}^{t_e} |u_s^*(t)|^2 dt. \quad (\text{I.58})$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (I.58) wird aus Gl. (I.57) somit:

$$|\Delta p_s| \leq G(t_0, t_e, \underline{p}, \tilde{y}_e, \tilde{u}_e) \cdot \sqrt{\int_{t_0}^{t_e} u_s^*(t)^2 dt} \quad (\text{I.59})$$

mit

$$\begin{aligned} G(t_0, t_e, \underline{p}, \tilde{y}_e, \tilde{u}_e) &= \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{(t_e - t_0)^{2i}}{2^i} |p_{n-i+1}| \right) \sqrt{\int_{t_0}^{t_e} |\tilde{y}_e|^2} \\ &\quad + \sum_{k=n-m}^n \frac{(t_e - t_0)^{2k}}{2^k} |p_{2n-k+1}| \sqrt{\int_{t_0}^{t_e} |\tilde{u}_e|^2}. \end{aligned} \quad (\text{I.60})$$

Der Integralausdruck unter der Wurzel in Gl. (I.59) lässt sich auch mit Hilfe der fraktionalen Integration darstellen:

$$q = 3 + \sum_{v=1}^n [(n-v)\alpha], \quad \alpha \in \mathbb{R}^q, \quad \beta := \max\{\{\alpha\}_i, i = 1, \dots, q \mid \{\alpha\}_i < 1\}$$

$$\int_{t_0}^{t_e} u_s^*(t)^2 dt = 2 t_0^{2-2\beta} t_e^{-2\beta} \underbrace{t_0^{2\beta} t_e^{-2\beta} \frac{\Gamma(2\beta)}{2} (t_e - t)^{-1} u_s^*(t)^2}_{=: J(u_s^*, t_0, t)}. \quad (\text{I.61})$$

In Gl. (I.61) ist $\underline{\alpha}$ der Vektor mit den Ableitungsordnungen des Ersatzsystems (6.23). Der innere Term in Gl. (I.61)

$$J(u_s^*, t_0, t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t (t - \zeta)^{2\beta-1} (t_e - \zeta)^{-1} u_s^*(\zeta)^2 d\zeta, \quad (\text{I.62})$$

beschreibt eine Integration über eine Funktion, die über das gesamte Integrationsintervall positiv ist. Das bedeutet, $J(u_s^*, t_0, t)$ wächst stetig mit t und erreicht das Maximum bei $t = t_e$. In Gl. (I.61) wird über $J(u_s^*, t_0, t)$ fraktional integriert. Betrachtet man $J(u_s^*, t_0, t)$ konstant an der Stelle $t = t_e$, liefert der Integrand stets das Maximum von J und daher gilt:

$$\int_{t_0}^{t_e} u_s^*(t)^2 dt \leq 2 {}_{t_0}^t i_{t_e}^{2-2\beta} J(u_s^*, t_0, t_e). \quad (\text{I.63})$$

Für die Fehlerabschätzung (I.59) ergibt sich somit insgesamt:

$$|\Delta p_s| \leq G(t_0, t_e, \underline{p}, \tilde{y}_e, \tilde{u}_e) \cdot \sqrt{{}_{t_0}^t i_{t_e}^{2-2\beta} J(u_s^*, t_0, t_e)}. \quad (\text{I.64})$$

□

I.11 Beweis von Satz 7.1: Eindeutigkeit der fraktionalen Zustandslösung

Um die wesentliche Beweisidee zu zeigen, wird o.B.d.A. eine skalare Ableitungsordnung α angenommen.

Beweis:

Der Satz 7.1 wird über einen Widerspruch bewiesen. Hierfür wird angenommen, dass zwei verschiedene Lösungen $\underline{x}(t)$ und $\underline{y}(t)$ für die Zustandsgleichung (7.16) existieren, wobei beide Lösungen identische Anfangsfunktionen $\underline{\psi}(\underline{x}) = \underline{\psi}(\underline{y})$ besitzen. Damit die Annahme erfüllt ist, muss ein \tilde{t} existieren, so dass $\underline{x}(\tilde{t}) \neq \underline{y}(\tilde{t})$ gilt. Die Zustandsgleichungen sind durch ${}_{t_0}^t d_t^\alpha \underline{x}(t) + \underline{\psi}(\underline{x}, t) = \underline{f}(\underline{x}(t), t)$ und ${}_{t_0}^t d_t^\alpha \underline{y}(t) + \underline{\psi}(\underline{y}, t) = \underline{f}(\underline{y}(t), t)$ gegeben. Da $\underline{\psi}(\underline{x}) - \underline{\psi}(\underline{y}) = \underline{0}$ erhält man:

$${}_{t_0}^t J_t^\alpha \underline{x}(t) - {}_{t_0}^t J_t^\alpha \underline{y}(t) = \underline{f}(\underline{x}(t), t) - \underline{f}(\underline{y}(t), t). \quad (\text{I.65})$$

Fraktionale Integration α -ter Ordnung führt zu:

$$\underline{x}(t) - \underline{y}(t) = {}_{t_0}^t i_t^\alpha (\underline{f}(\underline{x}(t), t) - \underline{f}(\underline{y}(t), t)) \quad (\text{I.66})$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t (t - \zeta)^{\alpha-1} (\underline{f}(\underline{x}(\zeta), \zeta) - \underline{f}(\underline{y}(\zeta), \zeta)) d\zeta. \quad (\text{I.67})$$

Mit der Dreiecksungleichung ergibt sich weiter:

$$\|\underline{x}(t) - \underline{y}(t)\| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t \|(t - \zeta)^{\alpha-1} (f(\underline{x}(\zeta), \zeta) - f(\underline{y}(\zeta), \zeta))\| d\zeta. \quad (\text{I.68})$$

Da f die Lipschitz-Bedingung [BSM05, S.205] entsprechend Definition 7.3 erfüllt und der Faktor $(t - \zeta)^{\alpha-1}$ daran nichts ändert, gilt mit $k(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ die Abschätzung

$$\|\underline{x}(t) - \underline{y}(t)\| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^t k(\tau) \|\underline{x}(\tau) - \underline{y}(\tau)\| d\zeta \quad (\text{I.69})$$

und daher mit der Konstanten $c \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ und $\gamma(t) = \frac{k(t)}{\Gamma(\alpha)}$ auch:

$$\|\underline{x}(t) - \underline{y}(t)\| \leq c + \int_{t_0}^t \gamma(\tau) \|\underline{x}(\zeta) - \underline{y}(\zeta)\| d\zeta. \quad (\text{I.70})$$

Anwendung des Gronwallschen Lemmas [LR15, S.52] führt zu einer weiteren Abschätzung von Gl. (I.70):

$$0 \leq \|\underline{x}(t) - \underline{y}(t)\| \leq ce^{-\int_{t_0}^t \gamma(\zeta) d\zeta}. \quad (\text{I.71})$$

Für $c \rightarrow 0$ ergibt sich schließlich $\|\underline{x}(t) - \underline{y}(t)\| = 0$, was $\underline{x}(\tilde{t}) \neq \underline{y}(\tilde{t})$ widerspricht. \square

I.12 Beweis von Lemma 7.1: Ableitungseigenschaft der F -Matrix

Beweis:

Der Beweis startet mit der Ableitung der in Gl. (7.2) definierten F -Matrix:

$$\begin{aligned} {}^t d_t^\alpha F_\alpha(t, \tau, \Lambda(\xi)) &= {}^t d_t^\alpha I + {}^t d_t^\alpha \xi_1 {}^{\alpha-1} d_t^\alpha \Lambda(\xi_1) \\ &+ {}^t d_t^\alpha \xi_1 {}^{\alpha-1} d_t^\alpha \Lambda(\xi_1) \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^k \xi_{j+1} {}^{\alpha-1} d_t^\alpha \Lambda(\xi_{j+1}). \end{aligned} \quad (\text{I.72})$$

Da sich die Integrations- und Ableitungsoperatoren mit gleicher Ordnung kompensieren, falls die Integration zuerst durchgeführt wird (siehe [KST06, S.74]), ergibt sich nach Ausklammern von $\Lambda(t)$:

$$\begin{aligned} {}^t d_t^\alpha F_\alpha(t, \tau, \Lambda(\xi)) &= {}^t d_t^\alpha I + \Lambda(t) \left(I + \xi_1 {}^{\alpha-1} d_t^\alpha \Lambda(\xi_1) \right. \\ &\left. + \xi_1 {}^{\alpha-1} d_t^\alpha \Lambda(\xi_1) \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^k \xi_{j+1} {}^{\alpha-1} d_t^\alpha \Lambda(\xi_{j+1}) \right). \end{aligned} \quad (\text{I.73})$$

Der Term in der Klammer von Gl. (I.73) entspricht der \underline{F} -Matrix, womit Lemma 7.1 bewiesen ist:

$${}^t d_t^\alpha \underline{F}(t, \tau, \Lambda(\xi)) = {}^t d_t^\alpha \underline{I} + \Lambda(t) \underline{F}_\alpha(t, \tau, \Lambda(\xi)). \quad (\text{I.74})$$

□

I.13 Beweis von Lemma 7.2: Ableitungseigenschaft der R -Matrix

Um die Übersichtlichkeit zu wahren, wird für diesen Beweis o.B.d.A. eine skalare Ableitungsordnung α angenommen.

Beweis:

Laut Lemma 3.2 können die Ableitungen auf der linken Seite von Gl. (7.13) vertauscht werden:

$${}^t dRL_t^\alpha {}^\tau dRL_t^{1-\alpha} \underline{F}_\alpha(t, \tau, \Lambda(\xi)) = {}^\tau dRL_t^{1-\alpha} {}^t dRL_t^\alpha \underline{F}_\alpha(t, \tau, \Lambda(\xi)). \quad (\text{I.75})$$

Im nächsten Schritt wird die RL-Ableitung der \underline{F} -Matrix auf der rechten Seite von Gl. (I.75) gebildet. Zuvor wird diese durch Anwendung von Lemma A.1 als C-Ableitung formuliert:

$${}^t dRL_t^\alpha \underline{F}_\alpha(t, \tau, \Lambda(\xi)) = {}^t dC_t^\alpha \underline{F}_\alpha(t, \tau, \underline{I}) + {}^t dRL_t^\alpha \underline{F}_\alpha(\tau, \tau, \Lambda(\xi)). \quad (\text{I.76})$$

Auf den ersten Term auf der rechten Seite von Gl. (I.76) lässt sich die Ableitungseigenschaft von Lemma 7.1 anwenden, beim zweiten Term greift die Einheitseigenschaft von Lemma 7.4:

$${}^t dRL_t^\alpha \underline{F}_\alpha(t, \tau, \Lambda(\xi)) = {}^t dC_t^\alpha \underline{I} + \Lambda(t) \underline{F}_\alpha(t, \tau, \underline{I}) + {}^t dRL_t^\alpha \underline{I}. \quad (\text{I.77})$$

Die C-Ableitung der Einheitsmatrix \underline{I} ist Null und die RL-Ableitung von \underline{I} kann in [Das11, S.29] nachgeschlagen werden:

$${}^t dRL_t^\alpha \underline{F}_\alpha(t, \tau, \Lambda(\xi)) = \Lambda(t) \underline{F}_\alpha(t, \tau, \underline{I}) + \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \underline{I}. \quad (\text{I.78})$$

Um den Beweis weiterzuführen, muss entsprechend Gl. (I.75) die $(1-\alpha)$ -te rechtsseitige Ableitung bezüglich τ von (I.78) gebildet werden:

$$\begin{aligned} {}^\tau dRL_t^{1-\alpha} {}^t dRL_t^\alpha \underline{F}_\alpha(t, \tau, \Lambda(\xi)) &= {}^\tau dRL_t^{1-\alpha} \Lambda(t) \underline{F}_\alpha(t, \tau, \underline{I}) \\ &\quad + {}^\tau dRL_t^{1-\alpha} \frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \underline{I}. \end{aligned} \quad (\text{I.79})$$

Ausklammern von $\Delta(t)$ und Einsetzen der Ableitungsdefinition (B.8) führt zu:

$$\begin{aligned} {}^\tau dRL_t^{1-\alpha} {}^t dRL_t^\alpha F_\alpha(t, \tau, \Delta(\xi)) &= \Delta(t) {}^\tau dRL_t^{1-\alpha} F_\alpha(t, \tau, I) \\ &+ \frac{d}{d\tau} \left[\frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_\tau^t \frac{(t-v)^{-\alpha}}{(v-\tau)^{1-\alpha}} dv \right] I. \end{aligned} \quad (\text{I.80})$$

Im Folgenden wird nun gezeigt, dass der zweite Term auf der rechten Seite von Gl. (I.80) verschwindet. Für $0 < \alpha < 1$ and $0 < \tau < t$ kann von Euler's Integralformel für die hypergeometrische Funktion

$$B(b, c-b) {}_2F_1(a, b; c; z) = \int_0^1 x^{b-1} (1-x)^{c-b-1} (1-zx)^{-a} dx \quad (\text{I.81})$$

Gebrauch gemacht werden, mit den Parametern $a = b = \alpha$, $c = 1 + \alpha$, und $z = 1$, wobei B die Betafunktion gemäß Gl. (A.8) und ${}_2F_1$ die hypergeometrische Reihe darstellt. Mit diesen Parametern erhält man:

$${}_2F_1(\alpha, \alpha; 1 + \alpha; 1) = \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)\Gamma(1)} = \frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)}, \quad (\text{I.82})$$

$$B(\alpha, 1) = \frac{1}{\alpha}, \quad (\text{I.83})$$

und

$$\int_0^1 x^{b-1} (1-x)^{c-b-1} (1-zx)^{-a} dx = -(-1)^{-\alpha} \int_\tau^t \frac{(t-v)^{-\alpha}}{(\tau-v)^{1-\alpha}} dv, \quad (\text{I.84})$$

mit der Variablensubstitution $v = x(t-\tau) + \tau$. Durch die Gln. (I.82), (I.83) und (I.84) ergibt sich der Ausdruck

$$\int_\tau^t \frac{(t-v)^{-\alpha}}{(\tau-v)^{1-\alpha}} dv = (-1)^{2\alpha} \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}, \quad (\text{I.85})$$

welcher unabhängig von τ ist. Da gerade der konstante Term (I.85) in der Gl. (I.80) bezüglich τ abgeleitet wird, verschwindet der zweite Term in dieser Gleichung, was zu zeigen war. \square

I.14 Beweis von Satz 7.3: Lösung der rechtsseitigen zeitvarianten fraktionalen Zustandsgleichung

Beweis:

Die Idee des Beweises besteht darin, zunächst mit Hilfe des Reflektionsoperators \mathcal{Q} von Gl. (A.1) die zu lösende rechtsseitige Gl. (3.33) zu einer äquivalenten linksseitigen Darstellung umzuformulieren, deren Lösung bereits bekannt ist:

$$\mathcal{Q}_t^t d_{t_c}^\alpha x(t) + \mathcal{Q}\psi_{rs}(t) = \mathcal{Q}A(t)x(t) + \mathcal{Q}B(t)u(t) \quad (\text{I.86})$$

ergibt

$${}_{t_0}^t d_t^\alpha \tilde{x}(t) + \tilde{\psi}_{rs}(t) = \tilde{A}(t)\tilde{x}(t) + \tilde{B}(t)\tilde{u}(t), \quad (\text{I.87})$$

mit $\tilde{x}(t) := \mathcal{Q}x(t)$, $\tilde{\psi}_{rs}(t) := \mathcal{Q}\psi_{rs}(t)$, $\tilde{A}(t) := \mathcal{Q}A(t)$, $\tilde{B}(t) := \mathcal{Q}B(t)$ und $\tilde{u}(t) := \mathcal{Q}u(t)$. Die Gl. (I.87) ist eine linksseitige FDGL, die entsprechend Gl. (7.18) folgende Lösung besitzt:

$$\tilde{x}(t) = - \int_{t_0}^t R_\alpha(t, \tau, \tilde{A}(\xi)) \tilde{\psi}_{rs}(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t R_\alpha(t, \tau, \tilde{A}(\xi)) \tilde{B}(\tau) \tilde{u}(\tau) d\tau. \quad (\text{I.88})$$

Um $x(t)$ zu erhalten, wird der Reflektionsoperator diesmal auf Gl. (I.88) angewendet:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}\tilde{x}(t) &= - \mathcal{Q} \int_{t_0}^t R_\alpha(t, \tau, \tilde{A}(\xi)) \tilde{\psi}_{rs}(\tau) d\tau \\ &\quad + \mathcal{Q} \int_{t_0}^t R_\alpha(t, \tau, \tilde{A}(\xi)) \tilde{B}(\tau) \tilde{u}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (\text{I.89})$$

Der Gebrauch von Gl. (A.1) auf der linken und von Gl. (A.2) auf der rechten Seite führt zu:

$$\begin{aligned} x(t) &= - \int_t^{t_e} \mathcal{Q}R_\alpha(t, \tau, \tilde{A}(\xi)) \mathcal{Q}\tilde{\psi}_{rs}(\tau) d\tau \\ &\quad + \int_t^{t_e} \mathcal{Q}R_\alpha(t, \tau, \tilde{A}(\xi)) \mathcal{Q}\tilde{B}(\tau) \mathcal{Q}\tilde{u}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (\text{I.90})$$

Für den Term $\mathcal{Q}R_\alpha$ werden die Beziehungen in den Gln. (A.1), (A.2) und (A.5) genutzt, wodurch sich folgende Schritte angeben lassen:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}R_\alpha(t, \tau, \tilde{A}(\xi)) &= \mathcal{Q}^r dRL_t^{1-\alpha} \underline{F}_\alpha(t, \tau, \tilde{A}(\xi)) \\ &= {}_\tau dRL_\tau^{1-\alpha} \mathcal{Q}F_\alpha(t, \tau, \tilde{A}(\xi)) \\ &= {}_\tau dRL_\tau^{1-\alpha} \underline{F}_{\alpha,rs}(\tau, t, \mathcal{Q}\tilde{A}(\xi)) \\ &= \underline{R}_{\alpha,rs}(\tau, t, \underline{A}(\xi)). \end{aligned} \quad (\text{I.91})$$

Einsetzen von Gl. (I.91) in Gl. (I.90) und Berücksichtigen von Gl. (A.1) in den Termen $\mathcal{Q}\tilde{\psi}_{rs} = \psi_{rs}$, $\mathcal{Q}\tilde{B} = B$ und $\mathcal{Q}\tilde{u} = u$ führt schließlich zu

$$x(t) = - \int_t^{t_e} R_{rs}(\tau, t, A(\xi)) \psi_{rs}(\tau) d\tau + \int_t^{t_e} R_{rs}(\tau, t, A(\xi)) B(\tau) u(\tau) d\tau, \quad (\text{I.92})$$

was Gl. (7.31) bestätigt. \square

I.15 Beweis von Lemma 7.3: Eliminationseigenschaft der R -Matrix

Zur besseren Übersicht wird für diesen Beweis o.B.d.A. eine skalare Ableitungsordnung α angenommen.

Beweis:

Unter Berücksichtigung der \underline{R} -Matrix aus Gl. (7.3) und der \underline{F} -Matrix aus Gl. (7.2) lautet die Gl. (7.14)

$$\begin{aligned} & \lim_{\tau \rightarrow t-0} \left\{ {}^t i_t^{1-\alpha} {}^\tau dRL_t^{1-\alpha} \underline{F}_\alpha(t, \tau, \underline{\Delta}(\xi)) \right\} \\ &= \lim_{\tau \rightarrow t-0} \left\{ {}^t i_t^{1-\alpha} {}^\tau dRL_t^{1-\alpha} \left\{ \underline{I} + \xi_{1j}^\alpha \underline{\Delta}(\xi_1) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \xi_{1j}^\alpha \underline{\Delta}(\xi_1) \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^k \xi_{j+1j}^\alpha \underline{\Delta}(\xi_{j+1}) \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (I.93)$$

Die rechtsseitige Ableitung bezüglich τ und die anschließende linksseitige Ableitung bezüglich t in der Gl. (I.93) lässt sich auf jeden Summenterm anwenden. Da für die Ableitung der Einheitsmatrix

$${}^\tau dRL_t^{1-\alpha} \underline{I} = {}^t dRL_t^{1-\alpha} \underline{I} = \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \underline{I} \quad (I.94)$$

gilt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \lim_{\tau \rightarrow t-0} \left\{ {}^t i_t^{1-\alpha} {}^\tau dRL_t^{1-\alpha} \underline{F}_\alpha(t, \tau, \underline{\Delta}(\xi)) \right\} \\ &= \underline{I} + \lim_{\tau \rightarrow t-0} \left\{ {}^t i_t^{1-\alpha} {}^\tau dRL_t^{1-\alpha} \xi_{1j}^\alpha \underline{\Delta}(\xi_1) \right\} \\ & \quad + \lim_{\tau \rightarrow t-0} {}^t i_t^{1-\alpha} \left\{ {}^\tau dRL_t^{1-\alpha} \xi_{1j}^\alpha \underline{\Delta}(\xi_1) \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^k \xi_{j+1j}^\alpha \underline{\Delta}(\xi_{j+1}) \right\}. \end{aligned} \quad (I.95)$$

In Gl. (I.95) ist es erlaubt, den Limes auf die einzelnen Summenterme aufzuteilen, sofern die einzelnen Terme beschränkt sind. Für den Grenzwert $\tau \rightarrow t-0$ ist das Integrationsintervall Null und somit fallen alle Integralterme weg. Übrig bleibt daher nur die Einheitsmatrix. \square

I.16 Beweis von Korollar 7.2: Steuerbarkeit eines zeitinvarianten Einfachsystems

Beweis:

Es wird gezeigt, dass die orthogonalen Komplemente von $W(t_0, t_e)$ und Q im zeitinvarianten Fall identisch sind:

$$\underline{x} \in \text{Kern}(W(t_0, t_e)) \Leftrightarrow \underline{x} \in \text{Kern}(Q^T). \quad (I.96)$$

Gemäß Gl. (7.41) entspricht die linke Seite der Gl. (I.96)

$$\underline{x} \in \text{Kern}(B^T \underline{R}_\alpha (t_e - \tau, \underline{A})^T) \quad (I.97)$$

und daher gilt auch

$$\underline{x}^T R_\alpha(t_e - \tau, A) B = \underline{0}^T. \quad (\text{I.98})$$

Da Gl. (I.98) für alle t gelten soll, liefert das Einsetzen von Gl. (D.3) die äquivalente Bedingung

$$\underline{x}^T A^v B = 0, \quad v = 0, 1, \dots. \quad (\text{I.99})$$

Laut dem Theorem von Cayley-Hamilton [Lud95, S.352] lässt sich A^n aus den Matrizen A, A^2, \dots, A^{n-1} linear kombinieren. Daher sind von den Gln. (I.99) all diejenigen Matrizen überflüssig, bei denen $v \geq n$ gilt. Somit ist das Kriterium (I.99) äquivalent zu $\underline{x}^T \underline{Q} = \underline{0}^T$ mit $\underline{Q} = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B]$, womit der Beweis vollständig ist. \square

I.17 Beweis von Satz 8.3: Realisierbarkeit steuerungs-basiertes Modulationsfunktionsverfahren

Beweis:

Dann und nur dann, wenn das zu der identifizierenden FDGL passende Ersatzsystem vollständig fraktional steuerbar ist, lässt sich eine Steuerung $u_s^*(t)$ finden, welche das zugehörige Ersatzsystem in den Endwert (6.57) führt. Das bedeutet, dass gemäß Gl. (6.62) jeder Parameter p_s der FDGL identifiziert werden kann. \square

J Initialisierungsfunktionen

Definition J.1 (Initialisierungsfunktionen)

Die Initialisierungsfunktion η im Falle einer linksseitigen fraktionalen Integration ($a \leq e < t$) ist [LH00]:

$$\eta(\varphi, \alpha, a, e, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^e \frac{\varphi(\zeta)}{(t - \zeta)^{1-\alpha}} d\zeta \quad (\text{J.1})$$

und im Falle einer rechtsseitigen Integration ($t < g \leq b$):

$$\eta_{rs}(\varphi, \alpha, g, b, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_g^b \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - t)^{1-\alpha}} d\zeta. \quad (\text{J.2})$$

Die Initialisierungsfunktion ψ des linksseitigen RL-Ableitungsoperators ist [LH00], [Das11, S.356]:

$$\psi_{RL}(f, \alpha, a, e, t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^{|\alpha|+1} \left[\frac{1}{\Gamma(|\alpha| + 1 - \alpha)} \int_a^e \frac{f(v)}{(t - v)^{\alpha - |\alpha|}} dv \right] \quad (\text{J.3})$$

und die des C-Operators [LH11]:

$$\psi_C(f, \alpha, a, e, t) = \frac{1}{\Gamma(|\alpha| + 1 - \alpha)} \int_a^e \frac{\left(\frac{d}{dv} \right)^{|\alpha|+1} f(v)}{(t - v)^{\alpha - |\alpha|}} dv. \quad (\text{J.4})$$

Im Falle einer rechtsseitigen Ableitung nach RL ergibt sich:

$$\psi_{rs,RL}(f, \alpha, g, b, t) = (-1)^{|\alpha|+1} \left(\frac{d}{dt} \right)^{|\alpha|+1} \cdot \left[\frac{1}{\Gamma(|\alpha| + 1 - \alpha)} \int_g^b \frac{f(v)}{(v - t)^{\alpha - |\alpha|}} dv \right] \quad (\text{J.5})$$

und nach C:

$$\psi_{rs,C}(f, \alpha, g, b, t) = (-1)^{|\alpha|+1} \cdot \frac{1}{\Gamma(|\alpha| + 1 - \alpha)} \int_g^b \frac{\left(\frac{d}{dv} \right)^{|\alpha|+1} f(v)}{(v - t)^{\alpha - |\alpha|}} dv. \quad (\text{J.6})$$

Die Abbildung J.1 veranschaulicht grafisch die fraktionale Initialisierungsrechnung anhand der fraktionalen ($\alpha = 0.4$)-fachen Ableitung der Sprungfunktion $f(t) = \sigma(t)$. Die

Funktion ist schon ab $t = 0$ gültig, die Ableitung wird jedoch erst ab $t = 1$ betrachtet. In Blau ist die uninitialisierte Ableitung dargestellt und in Schwarz die initialisierte. Die grüne Kurve zeigt den Verlauf der Initialisierungsfunktion. Zu erkennen ist, dass die Ableitungen sich zu Beginn, wenn der Einfluss der Initialisierungsfunktion noch größer ist, voneinander unterscheiden. Mit der Zeit nimmt die Initialisierungsfunktion ab und die Kurven nähern sich an. Die schwarz gestrichelte Linie zeigt den Verlauf der initialisierten Ableitung vor dem Betrachtungszeitpunkt. In Lemma J.1 werden die

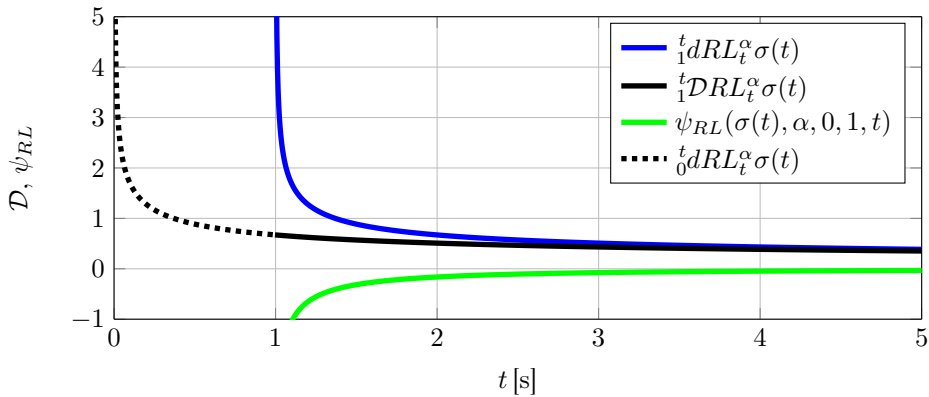


Abbildung J.1: Grafische Darstellung der initialisierten fraktionalen Ableitung der Ordnung $\alpha = 0.4$ von $f(t) = \sigma(t)$. Die Ableitung wird ab dem Zeitpunkt $t = 1$ s betrachtet, die Funktion ist jedoch schon ab $t = 0$ s gültig.

Laplace-Transformationen der Initialisierungsfunktionen von Definition J.1 präsentiert. Da nur die Transformation der C-Initialisierungsfunktion in der Literatur auffindbar war, wird der RL-Fall im Anschluss bewiesen.

Lemma J.1 (Laplace-Transformation der Initialisierungsfunktionen)

Die Laplace-Transformation der linksseitigen Initialisierungsfunktion (J.3) lautet:

$$\mathcal{L}(\psi_{RL}(f, \alpha, a, 0, t)) = s^{|\alpha|+1} \left[\frac{1}{\Gamma(|\alpha| + 1 - \alpha)} \int_a^0 f(v) \mathcal{L}((t-v)^{|\alpha|-\alpha}) dv \right] \quad (\text{J.7})$$

und für den C-Fall (J.4) [LH11]:

$$\mathcal{L}(\psi_C(f, \alpha, a, 0, t)) = \left[\frac{1}{\Gamma(|\alpha| + 1 - \alpha)} \int_a^0 \frac{d^{|\alpha|+1} f(v)}{dv^{|\alpha|+1}} \mathcal{L}((t-v)^{|\alpha|-\alpha}) dv \right]. \quad (\text{J.8})$$

Für $\alpha \in (0, 1)$ ergibt sich für RL:

$$\mathcal{L}(\psi_{RL}(f, \alpha, a, 0, t)) = s^\alpha \left[\frac{1}{\Gamma(+1 - \alpha)} \int_a^0 f(v) e^{-vs} \Gamma(1 - \alpha, -vs) dv \right] \quad (\text{J.9})$$

und für C [LH11]:

$$\mathcal{L}(\psi_C(f, \alpha, a, 0, t)) = s^{\alpha-1} \left[\frac{1}{\Gamma(+1 - \alpha)} \int_a^0 f(v) e^{-vs} \Gamma(1 - \alpha, -vs) dv \right]. \quad (\text{J.10})$$

Beweis:

Die Laplace-Transformation wird auf die RL-Initialisierungsfunktion (J.3) angewendet:

$$\mathcal{L}(\psi_{RL}) = \mathcal{L} \left(\left(\frac{d}{dt} \right)^{|\alpha|+1} \left[\frac{1}{\Gamma(|\alpha| + 1 - \alpha)} \int_e^a \frac{f(v)}{(t-v)^{\alpha-|\alpha|}} dv \right] \right). \quad (\text{J.11})$$

Anwendung der Ableitungsregel (3.17) ergibt:

$$\mathcal{L}(\psi_{RL}) = s^{|\alpha|+1} \mathcal{L} \left(\left[\frac{1}{\Gamma(|\alpha| + 1 - \alpha)} \int_e^a \frac{f(v)}{(t-v)^{\alpha-|\alpha|}} dv \right] \right). \quad (\text{J.12})$$

Nach einigen Rechenschritten wird (J.12) zu

$$\mathcal{L}(\psi_{RL}) = s^{|\alpha|+1} \frac{1}{\Gamma(|\alpha| + 1 - \alpha)} \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_a^0 \frac{f(v)}{(t-v)^{\alpha-|\alpha|}} dv \right) dt \quad (\text{J.13})$$

$$= s^{|\alpha|+1} \frac{1}{\Gamma(|\alpha| + 1 - \alpha)} \int_a^0 f(v) \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{(t-v)^{\alpha-|\alpha|}} dt dv \quad (\text{J.14})$$

$$= s^{|\alpha|+1} \frac{1}{\Gamma(|\alpha| + 1 - \alpha)} \int_a^0 f(v) \mathcal{L}((t-v)^{|\alpha|-\alpha}) dv, \quad (\text{J.15})$$

womit Gl. (J.7) bewiesen ist. Für den Spezialfall $\alpha \in (0, 1)$ ist die Laplace-Transformation von $(t-v)$ gemäß [LH11]:

$$\mathcal{L}((t-v)^{|\alpha|-\alpha}) = s^{\alpha-1} e^{-vs} \Gamma(1 - \alpha, -vs), \quad (\text{J.16})$$

womit auch Gl. (J.10) bestätigt ist. □

Wenn keine Initialisierungsfunktionen betrachtet werden, lautet die Laplace-Transformation der fraktionalen Ableitungsoperatoren [Pod99, S.104,106]:

Lemma J.2 (Laplace-Transformation bei Betrachtung der uninitialisierten fraktionalen Analysis)

$$\mathcal{L}({}_0^t dRL_t^\alpha f(t)) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{|\alpha|} s^k {}_0^t dRL_t^{\alpha-k-1} f(t)|_{t=0} \quad (\text{J.17})$$

$$\mathcal{L}({}_0^t dC_t^\alpha f(t)) = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{|\alpha|} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad (\text{J.18})$$

K Faltungs- und Divisionsalgebra

Im Folgenden wird die Faltungs- und Divisionsalgebra eingeführt, mit welcher eine Interpretation der fraktionalen Ableitung in Abschnitt 4.5.1 mit der sogenannten Mikusiński-Ableitungsvariablen erfolgen kann [EKH15, Dre08a, FSR03]. Für die Betrachtungen in diesem Abschnitt wird die Funktionsmenge \mathcal{R} definiert:

Definition K.1

Mit \mathcal{R} wird die Menge der im Intervall $[0, \infty)$ $[\alpha]$ -fach absolut kontinuierlichen Funktionen bezeichnet.

Zunächst wird die sogenannte Faltungsalgebra benötigt:

Definition K.2 (Faltungsalgebra)

Die kommutative \mathbb{K} -Algebra $(\mathcal{R}, +, \langle 0 \rangle, *, \mathbb{K}, \cdot)$ mit dem Nullelement $\langle 0 \rangle$ und den Rechenoperationen:

a) Addition $+$: $\mathcal{R} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$

$$(f, g) \mapsto f + g, \quad (f + g)(t) := f(t) + g(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (\text{K.1})$$

b) Faltung $*$: $\mathcal{R} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$

$$(f, g) \mapsto f * g, \quad (f * g)(t) := \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (\text{K.2})$$

c) Skalare Multiplikation \cdot : $\mathbb{K} \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$

$$(\zeta, f) \mapsto \zeta \cdot f, \quad (\zeta \cdot f)(t) := \zeta \cdot f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (\text{K.3})$$

wird Faltungsalgebra genannt.

Diese Algebra ist nullteilerfrei, was bedeutet, dass mit $f, g \in \mathcal{R} \setminus \langle 0 \rangle$ die Faltung $f * g = \langle 0 \rangle$ nicht existiert [Mik57]. Die sogenannte Macaulay-Klammer $\langle \rangle$ bringt zum Ausdruck, dass die eingeklammerte Funktion für Werte kleiner Null nullwertig ist, also mit der Sprungfunktion $\sigma(t)$ aus [Föll11, S.2] u.v.a. $\langle y \rangle := \sigma(t)y(t)$ gilt. Zu jeder nullteilerfreien und kommutativen Algebra existiert eine passende Divisionsalgebra, in welche die kommutative Algebra eingebettet werden kann [Mik57]. Mit der Operation:

$$f/g := \{(h, k) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} \setminus \langle 0 \rangle \mid f * k = h * g\} \quad (\text{K.4})$$

und der Menge \mathfrak{K} :

$$\mathfrak{K} := \{f/g \mid f \in \mathcal{R}, g \in \mathcal{R} \setminus \langle 0 \rangle\}, \quad (\text{K.5})$$

kann eine solche Divisionsalgebra definiert werden:

Definition K.3 (Divisionsalgebra)

Die Algebra $(\mathfrak{K}, \oplus, \circ_{\mathfrak{K}}, \circledast, 1_{\mathfrak{K}}, \mathbb{K}, \odot)$ mit den Rechenoperationen:

a) Addition $\oplus : \mathfrak{K} \times \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K}$

$$(f/g, h/k) \mapsto f/g \oplus h/k := \frac{f * k + h * g}{g * k}, \quad (\text{K.6})$$

b) Faltung $\circledast : \mathfrak{K} \times \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K}$

$$(f/g, h/k) \mapsto f/g \circledast h/k := \frac{f * h}{g * k}, \quad (\text{K.7})$$

c) Skalare Multiplikation $\odot : \mathbb{K} \times \mathfrak{K} \rightarrow \mathfrak{K}$

$$(\zeta, f/g) \mapsto \zeta \odot f/g := \frac{\zeta \cdot f}{g}, \quad (\text{K.8})$$

wird Divisionsalgebra genannt.

Die Elemente im \mathfrak{K} -Bereich werden als Mikusiński-Variablen bezeichnet. Um nun jedem Element aus \mathcal{R} ein passendes Element in \mathfrak{K} zuzuweisen, werden zwei injektive Homomorphismen definiert. Der erste Homomorphismus $\Theta : \mathcal{R} \rightarrow \mathfrak{K}$ lautet:

$$f \mapsto \Theta(f) := \frac{f * \sigma}{\sigma}, \quad (\text{K.9})$$

der zweite Homomorphismus $\Psi : \mathbb{K} \rightarrow \mathfrak{K}$ lautet:

$$\zeta \mapsto \Psi(\zeta) := \zeta \cdot 1_{\mathfrak{K}}. \quad (\text{K.10})$$

Für $a, b \in \mathcal{R}$ und $\gamma \in \mathbb{K}$ gilt dann:

$$\Theta(a + b) = \Theta(a) \oplus \Theta(b), \quad (\text{K.11})$$

$$\Theta(a * b) = \Theta(a) \circledast \Theta(b), \quad (\text{K.12})$$

$$\Theta(\gamma \cdot a) = \gamma \odot \Theta(a). \quad (\text{K.13})$$

Beispiel K.1:

Die Interpretation des fraktionalen Zeitbereichsmodells der Batterie (3.22) in der algebraischen Darstellung lautet gemäß Lemma 4.7:

$$b_0 = R_0 + R, \quad b_1 = R_0 R Q, \quad a_0 = R Q$$

$$\frac{u}{i} = \frac{b_0 + b_1 p^\alpha}{a_0 p^\alpha + 1}. \quad (\text{K.14})$$

K.1 Vor- und Nachteile zum Einsatz des Mikusiński-Operatorenkalküls

Im Folgenden werden einige Vor- und Nachteile der Operatorenrechnung nach Mikusiński gegenüber der Laplace-Transformation beschrieben.

Vorteile sind:

- Im Gegensatz zur Laplace-Transformation gibt es keinen Umweg über den „Bildbereich“. Alle Rechnungen basieren ausschließlich auf algebraischen Umformungen im Zeitbereich.
- Alle Ergebnisse, die sich mit der Laplace-Transformation erzielen lassen, können auch mit der Mikusiński-Operatorenrechnung erhalten werden [Ber65].
- Die Funktionsmenge \mathcal{R} , welche sich in \mathfrak{K} interpretieren lässt, wird ausschließlich durch die Angaben in Definition K.1 beschränkt. Sie ist somit weniger restriktiv als die Funktionsmenge, welche im Laplace-Bereich interpretiert werden kann, da hier das Laplace-Integral (3.15) nicht konvergieren muss (siehe Konvergenzintervall von Gl. (3.15)). Beispielsweise lässt sich die Funktion $f(t) = e^{t^2}$ im \mathfrak{K} -Bereich interpretieren, jedoch nicht im Laplace-Bereich.
- Das Arbeiten mit Distributionen zur Beschreibung der Dirac’schen Distribution [OMS09, S.76] entfällt, da es diese Distribution in der Mikusiński-Operatorenrechnung nicht gibt [Dre08a, S.46].
- Die komplexe Analysis aus der Funktionentheorie (siehe z.B. [Föll11, Kapitel 7]) wird nicht benötigt.

Nachteile sind:

- Der algebraische Formalismus kann für Ingenieure, die den Umgang mit der Laplace-Transformation gewohnt sind, zunächst schwierig erscheinen.
- Der Übergang zu der komplexen Frequenz $j\omega$ und die Interpretation als Frequenzgang sind nicht direkt ersichtlich.

L Short-Memory-Approximation

Aus dem Abschnitt 3.1.2 geht hervor, dass zur Berechnung der fraktionalen Ableitung einer Funktion ihre komplette Vergangenheit bekannt sein muss. In diesem Abschnitt wird nun gezeigt, dass es näherungsweise möglich ist, nur Werte zu betrachten, die innerhalb einer spezifizierten Speichertiefe liegen. Hierfür wird die Ableitungsdefinition nach *Grünwald-Letnikov* (GL) betrachtet [Pod99]:⁶⁸

Definition L.1 (GL-Ableitung)

$e < t, \forall \tilde{t} \leq e : f(\tilde{t}) = 0, f \in AC^{[\alpha]}[e, t], w_{\alpha, k} := (-1)^k \binom{\alpha}{k}$

$${}^t dGL_t^\alpha f(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^N w_{\alpha, k} f(t - kh), \quad N = \left\lfloor \frac{t - e}{h} \right\rfloor. \quad (\text{L.1})$$

Beweis:

Es ist bekannt, dass die Ableitung erster Ordnung einer kontinuierlichen Funktion f wie folgt lautet: $f^{(1)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(t-h)}{h}$. Die zweite Ableitung ergibt sich dann zu: $f^{(2)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t) - 2f(t-h) + f(t-2h)}{h^2}$. Es lässt sich induktiv zeigen, dass sich dann die Verallgemeinerung der Ableitungsordnung für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ergibt zu [Pod99, S.43]:

$$f^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh). \quad (\text{L.2})$$

Da der Binomialkoeffizient für $k > n$ verschwindet, ist es zulässig, Gl. (L.2) auch in folgender Form zu schreiben:

$$f^{(n)}(t) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh), \quad N = \left\lfloor \frac{t - e}{h} \right\rfloor. \quad (\text{L.3})$$

Der Binomialkoeffizient ist auch für reelle Zahlen definiert. Daher lässt sich eine Verallgemeinerung auf eine fraktionale Ableitung durchführen, indem, ähnlich wie bei der Herleitung der RL-Integration auf Seite 31, n durch $\alpha \in \mathbb{R}^{>0}$ ersetzt wird und es folgt Gl. (L.1). □

Die Gl. (L.1) basiert auf einer unendlichen Summe gewichteter Vergangenheitswerte mit einer Schrittweite h , wobei $h \rightarrow 0$ gilt. Unter realen Bedingungen kann dies auf ei-

⁶⁸ Es lässt sich zeigen, dass die GL-Derivierte äquivalent zur RL-Derivierten ist [Die04, S.37-42]. Daher existiert die GL-Ableitung für alle Funktionen, die $[\alpha]$ -fach absolut kontinuierlich sind. Konvergenzbetrachtungen hierzu können [SKTH11] entnommen werden.

nem Digitalrechner nicht realisiert werden. Beschränkt man sich auf hinreichend kleine Schrittweiten, wird aus der GL-Gleichung (L.1) eine gültige numerische Berechnungsvorschrift. Da, wie schon erwähnt, die fraktionale Ableitung eine globale Operation ist, steigt der Rechenaufwand mit jedem Schritt. Um die Rechenzeit zu verkürzen, kann auf das in [Pod99, S.203] vorgeschlagene Short-Memory-Prinzip zurückgegriffen werden. Dieses besagt, dass nicht alle Vergangenheitswerte benötigt werden, sondern nur solche, die in einer spezifizierten maximalen Speichertiefe $M \in \mathbb{R}^{>0}$ liegen:

Definition L.2 (Short-Memory-Approximation)

Die linksseitige GL-Approximation mit der Schrittweite h und Speichertiefe M lautet:

$${}_e\mathcal{D}GL_t^\alpha f(t) \approx {}_{t-M}\mathcal{D}GL_t^\alpha f(t) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{M}{h} \rfloor} w_{\alpha,k} f(t - kh). \quad (\text{L.4})$$

Die rechtsseitige Approximation ergibt sich zu:

$${}_t\mathcal{D}GL_g^\alpha f(t) \approx {}_{t+M}\mathcal{D}GL_t^\alpha f(t) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{M}{h} \rfloor} w_{\alpha,k} f(t + kh). \quad (\text{L.5})$$

Für die Integration kann einfach ein negatives α eingesetzt werden. Aus Symmetriegründen gibt es auch die genannte Approximation der rechtsseitigen Ableitung (L.5).

D.h., in der Short-Memory-Approximation in Gl. (L.4) wird nur das Intervall $[t - M, t]$ betrachtet. Dass dies plausibel ist, erkennt man, wenn man den Betrag Binomialkoeffizienten $|w_{\alpha,k}| = \binom{\alpha}{k}$ betrachtet. Dieser fällt monoton für große k und geht gegen Null, was bedeutet, dass Werte, die weit in der Vergangenheit liegen, weniger signifikant sind als neuere Werte [MCV10, S.29] und daher vernachlässigt werden können. Eine Fehlerabschätzung des Short-Memory-Prinzips ist in [Pod99, S.203] zu finden.

Die gezeigte Näherung ist nicht die einzige. Eine Übersicht über weitere Zeitbereichsapproximationen ist in [VHPF00, VC11] zu finden. Häufig verwendet werden hierbei die Matrixnäherung [Pod00], welche die GL-Approximation mit Hilfe einer Matrizenmultiplikation berechnet, sowie eine Verallgemeinerung der Tustin-Approximation auf fraktionale Ableitungen. Verfahren, die eine Approximation durch gewöhnliche Systeme im Frequenzbereich durchführen, sind die Oustaloup-Näherung [OLMN00], die Crone-Näherung [VC11] und die Kettenbrucherweiterung [VHPF00].

M Batteriemessstand

Für die Identifikation einer realen Batteriezelle in Abschnitt 5.3 wurde am IRS eine Batteriemessstand aufgebaut. Im Folgenden wird der Aufbau des Batteriemessstands, die Beschreibung der einzelnen Komponenten und deren Vernetzung sowie der Prozess der Datengenerierung ausführlich erläutert. Als Beispielsystem dient die LiPO-Batteriezelle von KOKAM aus Anhang G.

M.1 Versuchsaufbau

Die Anlage hat die Aufgabe, Strom- und Spannungsdaten einer Batteriezelle aufzunehmen, um mit diesen sogenannten Validierungsdaten die Identifikationsverfahren testen zu können. Im Unterschied zu sonst gängigen Aufbauten in materialwissenschaftlichen Labors können Messungen mit beliebiger Signalform durchgeführt werden. Die schematische Darstellung der gesamten Batteriemessstandsumgebung ist in Abbildung M.1 zu sehen. Es werden nun zunächst die Komponenten und deren Spezifikationen einzeln erklärt. Die Beschreibung der Vernetzung der Komponenten folgt dann im Anschluss.

M.1.1 Komponenten

Zunächst einmal ist es wichtig, Sicherheitsvorkehrungen zu treffen, denn die Lithium-Ionen-Batterietechnologie birgt ein gewisses Gefahrenpotential. Falls eine Zelle falsch betrieben wird (Überladung, Unterladung, Kurzschluss, externe Erhitzung, Verformung etc.), kann es zu einer Selbsterwärmung und dadurch zu einem *Thermal Runaway* kommen [Fra12, LM14]. Während der Messung befindet sich die Zelle daher in dem VC³ 4018 Klimaschrank der Firma VÖTSCH. Mit ihm kann die Zelle unter Belastung auf einer annähernd konstanten Temperatur gehalten werden. Der Klimaschrank hat einen Temperaturbereich von -40 °C bis $+180\text{ °C}$, einen Prüfrauminhalt von 190 Litern und kann auch die Feuchtigkeit regeln. Kommt es zu einem *Thermal Runaway*, wird dies von dem CO-Sensor Polytron7000 der Firma DRÄGER detektiert und eine CO₂-Flutung ausgelöst, um den Brand einzudämmen. Die benötigten CO₂-Flaschen sind, wie in der Abbildung M.1 zu erkennen ist, am Klimaschrank angebracht. Der Schrank kann entweder vom PC aus mit der Software SIMPATI oder direkt am Panel bedient und gesteuert werden. Gängige Arbeiten aus dem Bereich der Regelungstechnik betreiben die Batterie häufig unter unterschiedlichen Umgebungsbedingungen (Temperatur, Luftfeuchtigkeit etc.), so dass die Ergebnisse einer systematischen Überprüfung nicht standhalten.

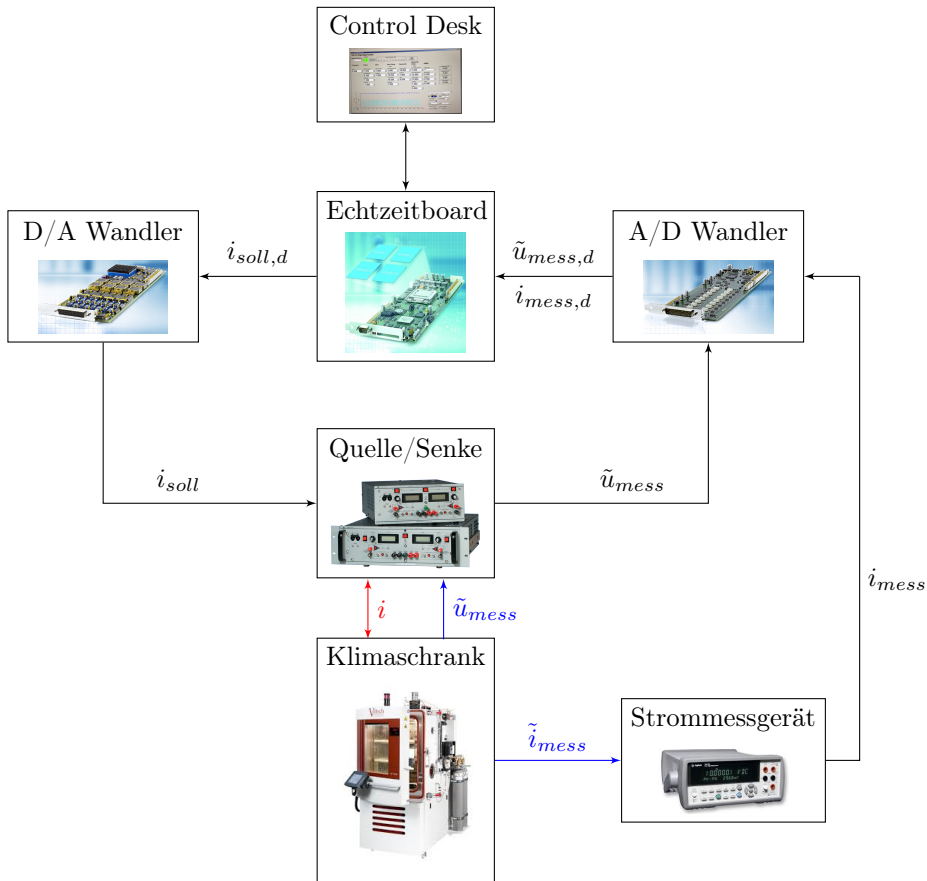


Abbildung M.1: Batteriemessstands Aufbau am IRS: Das rote Signal kennzeichnet den Stromfluss in beide Richtungen, blaue Linien symbolisieren die gemessene Spannung. Die restlichen Verbindungen beschreiben alle weiteren Informationsflüsse.

Als weitere Komponenten werden eine Signalquelle bzw. -senke mit hoher Flankensteilheit, ein Echtzeitboard mit den entsprechenden I/O-Karten zum Ansteuern dieses Geräts und eine Controlloberfläche (Control Desk) auf dem PC zur Steuerung benötigt. Die im Rahmen dieser Arbeit ausgewählten Komponenten und deren Spezifikationen sind im Anhang M.1.2 zusammengestellt.

M.1.2 Spezifikationen

Der Batteriemessstands Aufbau aus Abbildung M.1 besteht aus einem Echtzeitboard, I/O-Karten, einem Vierquadrantensteller, einem Klimaschrank und einem Digitalmultimeter mit folgenden Spezifikationen:

- dSPACE DS1006 (Echtzeitboard)
 - Quad-Core AMD Opteron Prozessor 2.8 GHz
 - 20 MB/s Übertragungsrate
- dSPACE DS-2102 (D/A-Wandler)
 - Auflösung: 16 Bit
 - Ausgangsspannungsbereich ± 5 V
 - Umwandlungsdauer 1.6 μ s
- dSPACE DS-2004 (A/D-Wandler)
 - Auflösung: 16 Bit
 - Spannungsbereich ± 5 V
 - Umwandlungsdauer 0.8 μ s
- KEPCO *Bipolar Operational Power Supply 20V-20A Max* (BOP20-20M) (Vierquadrantensteller)
 - Quelle und Senke, sowohl Strom- als auch Spannungsvorgabe möglich, analoge Ansteuerung
 - max. Strom ± 20 A, max. Spannung ± 20 V, max. Leistung 400 W
 - Anstiegs- und Abstiegszeit eines Strom- und Spannungssprungs von 35 μ s
- KEPCO BOP 6-125MG (Vierquadrantensteller)
 - max. Strom ± 125 A, max. Spannung ± 6 V, max. Leistung 1 kW
 - Stromanstiegszeit 1.2 s, Spannungsanstiegszeit von 250 μ s
- VÖTSCH VC³ 4018 (Klimaschrank)
 - Temperaturbereich: -40 °C bis $+180$ °C
 - Prüfrauminhalt: 190 Liter
 - Feuchtigkeitsregelung
- AGILENT 34410A (Digitalmultimeter)
 - $6\frac{1}{2}$ Stellen Auflösung
 - Genauigkeit: 0.0030 % DC, 0.06 % AC
 - 10000 Messungen/s bei $5\frac{1}{2}$ Stellen
 - 1000 Messungen/s bei $6\frac{1}{2}$ Stellen

Die Impedanzmessung wurde extern am IAM-WET mit dem SOLATRON 1470E durchgeführt. Das Gerät besitzt folgende Spezifikation:

- Genauigkeit Spannungs- und Strommessung: 0.1 % des jeweiligen Bereiches
- Spannungsbereich: 10 V, 1 V, 100 mV
- Strombereich: 5 A, 500 mA, ..., 500 μ A, 50 μ A
- Frequenzbereich: 10 μ Hz bis 1 MHz
- Frequenzfehler: 0.01 %

M.1.3 Vernetzung

Nun soll beschrieben werden, wie die Komponenten aus dem vorherigen Abschnitt M.1.2 bzw. aus Abschnitt M.1.1 miteinander in Verbindung stehen. Die Abbildung M.1 zeigt hierfür bereits den schematischen Aufbau. Zunächst einmal muss die Stromvorgabe realisiert werden. Für die Identifikation wurde ein PRBS-Strom genutzt, es sind aber auch zahlreiche andere Signale wie z.B. Chirp oder Sägezahn möglich. Der Code für die Stromerzeugung wird in MATLAB/SIMULINK auf dem PC programmiert. Auf dieselbe Weise lässt sich hier auch das bekannte CCCV-Verfahren [EBV14] zum Volladen der Zelle implementieren. Mit Rapid Prototyping wird der MATLAB-Code dann in einen C-Code übersetzt und auf das dSPACE DS1006 Echtzeitboard geladen. Die virtuelle Oberfläche zur Auswahl des Signals, zur Einstellung der Abtastzeit oder der Messdauer sowie weiterer Simulationsparameter wird mit dem dSPACE Control Desk auf dem PC ausgeführt. Die Software bildet somit während des Betriebs die Schnittstelle zum Echtzeitboard. Das Board selbst trägt die Hauptrechenlast und ist daher die begrenzen- de Komponente bezüglich der Taktzeit. Es kommuniziert über die I/O-Ports mit dem KEPCO *Bipolar Operational Power Supply 20V-20A Max* (BOP20-20M)-Gerät. Dafür gibt es die Information über den Strom i_{soll} digital zum DS-2102 D/A-Wandler, welcher dann analog die Quelle/Senke ansteuert. Diese wiederum lädt bzw. entlädt die sich im Klimaschrank befindende Batteriezelle mit dem eingestellten Stromsignal $i(t)$. Das KEPCO-Gerät hat gemäß den Kenndaten im Anhang M.1.2 eine sehr hohe Flankensteilheit von 35 μ s. Dies wurde bewusst so ausgewählt, damit ein PRBS-Signal mit steilen Flanken generiert werden kann, um damit auch hohe Dynamiken anregen zu können. Das Gerät kann außerdem zur Messung der Batteriespannung $\tilde{u}(t)$ eingesetzt werden. Die Messung wird allerdings von einem Rauschsignal $n(t)$ mit einer Varianz von $\sigma_n^2 = 165.86 \mu V^2$ überlagert. Prinzipiell lässt sich auch der Strom messen, jedoch zeigen sich hier sehr starke Messfehler. Aus diesem Grund wird zur Strommessung ein sehr genaues Digitalmultimeter AGILENT 34410A eingesetzt. Für hohe Leistungen steht als Alternative zum KEPCO BOP20-20M das KEPCO BOP 6-125MG zur Verfügung, was jedoch eine deutlich geringere Flankensteilheit aufweist. Die gemessenen Spannungs- und Stromdaten \tilde{u}_{mess} und i_{mess} werden analog von den Messgeräten weitergeleitet, um dann nach der D/A-Wandlung mit der DS-2004 Karte als digitale Signale $\tilde{u}_{mess,d}$ und $i_{mess,d}$ an das Echtzeitboard weitergegeben zu werden. Das Echtzeitboard sendet die gemessenen Daten dann an den PC, der sie speichert. Mit diesen Validierungsdaten wurde die in Abschnitt 5.3 beschriebene Identifikation durchgeführt.

M.2 Datengenerierung

Um die Identifikationsverfahren testen zu können, müssen zunächst Validierungsdaten, d.h. Strom- und Spannungsverläufe der Batterie, am Messstand erzeugt werden. Weiterhin müssen OCV-Daten und Impedanzdaten aufgenommen werden, um Referenzparameter bestimmen zu können. Die Batteriezelle befindet sich während der Messung im Klimaschrank, der auf Raumtemperatur 25 °C eingestellt ist. Von großer Wichtigkeit ist die Kontaktierung und Verkabelung der Zelle.

M.2.1 Kontaktierung und Verkabelung

Um Messfehler zu vermeiden, wird die Vierpolkontaktierung oder Vierpunktmessung praktiziert. Das Prinzip dieser Messung beruht darauf, dass zur Kontaktierung der Zellen getrennte Kabelpaare für Stromzufuhr und Spannungsmessung verwendet werden. Bei einer Zweipunktmessung würde nicht nur die Spannung über der Zelle gemessen, sondern auch der Spannungsabfall über die stromführenden Kabel. Aufgrund der guten Leitfähigkeit wird die Batteriezelle mit Elektroden aus Kupfer kontaktiert. Die Halterung ist in Abbildung M.2 zu sehen. Der elektrische Kabelwiderstand ist proportional zur Kabellänge, daher werden die Verbindungen so kurz wie möglich gehalten (hier $l \approx 2$ m).

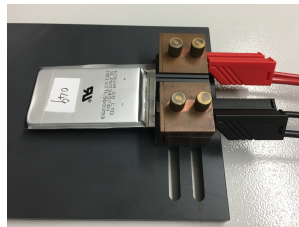


Abbildung M.2: Batteriehalterung mit Kupferelektroden

M.2.2 OCV-Daten

Die OCV-Messung erfolgt vor der Identifikation mit einer sehr kleinen Stromstärke von $C(T_{voll})/40$ h, um nichtlineares Verhalten und Überspannungen zu vermeiden. Das Ergebnis wurde als Kennlinie abgelegt, die mit Abbildung G.3 im Anhang G vorliegt. Wie man sieht, beschreibt die OCV ein Hystereseverhalten. Es hat sich gezeigt, dass für die Belange dieser Arbeit der Hystereseverlauf durch den Mittelwert zwischen beiden Kurven genähert werden kann.⁶⁹

⁶⁹ Für Fälle, in denen es doch notwendig ist, die Hysterese genau zu berücksichtigen, werden in [Ple04a, Ros10] verschiedene Möglichkeiten vorgeschlagen.

M.2.3 Impedanzdaten

Die Impedanzspektroskopie wurde am IAM-WET mit dem SOLATRON 1470E bei einem sehr hohen SNR größer als 100 dB durchgeführt. Die Spezifikation des Geräts ist im Anhang M.1.2 zu finden, der Messaufbau bei der EIS ist in [Sch13] beschrieben. Bei SoC=50 % entstand hierbei die Ortskurve in Abbildung M.3. Betrachtet wird, wie schon in der ganzen Arbeit, beispielhaft nur der Diffusionsbereich (hier also der Frequenzbereich von 1 Hz bis 1 mHz). Das CNLS-Fitting zum extrahieren der Modellparameter wurde in MATLAB implementiert und basiert auf dem Standard Nelder-Mead Simplex Algorithmus (siehe hierzu auch Abschnitt 2.4.1). Mit dem Fitting der Impedanz wird auch die für das Modulationsfunktionsverfahren benötigte Kennlinie des fraktionalen Exponenten bestimmt.

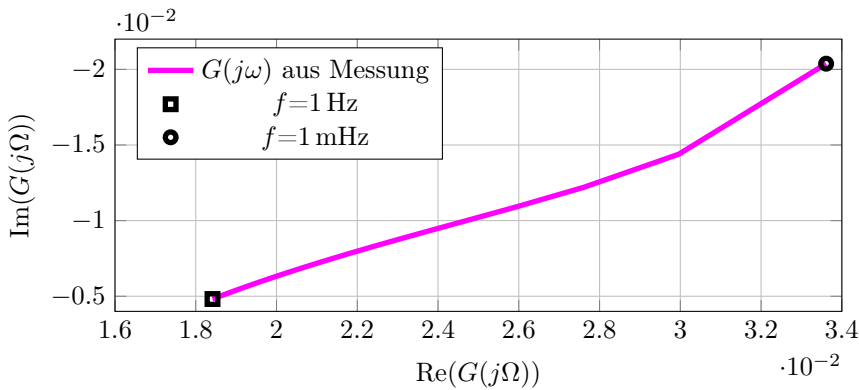


Abbildung M.3: Gemessene Ortskurve bei SoC=50 %

M.2.4 Validierungsdaten

In diesem Abschnitt wird beschrieben, wie die in Abbildung M.4 dargestellten Validierungsdaten $i_{mess}(t)$ und $\tilde{u}_{mess}(t)$ zustande kommen. Da nur der niederfrequente Teil betrachtet wird, sollte das Spannungssignal auch möglichst wenige hochfrequente Anteile enthalten, damit man keine zu großen Modellfehler erhält. Aus diesem Grund wird mit einer niedrigen Frequenz von $f_a = 10$ Hz abgetastet. Des Weiteren ist es aus folgenden Gründen sehr wichtig, den SoC mit aufzunehmen:

- Die Identifikationsergebnisse müssen mit der richtigen Impedanzkurve verglichen werden.
- Aufgrund von Annahme 2.1 gilt als eine Voraussetzung der vorliegenden Arbeit, dass der SoC abhängige OCV-Wert zu jedem Zeitpunkt bekannt ist und sich das Batteriemodell ohne Ruhespannung betrachten lässt.

- Die SoC-abhängigen fraktionalen Ableitungsordnungen müssen für das Modulationsfunktionsverfahren bekannt sein.

Da der SoC beim Starten der Anlage unbekannt ist, muss, bevor die eigentliche Datenerzeugung beginnen kann, mit den folgenden Schritten ein Anfangsladezustand manuell angefahren werden:

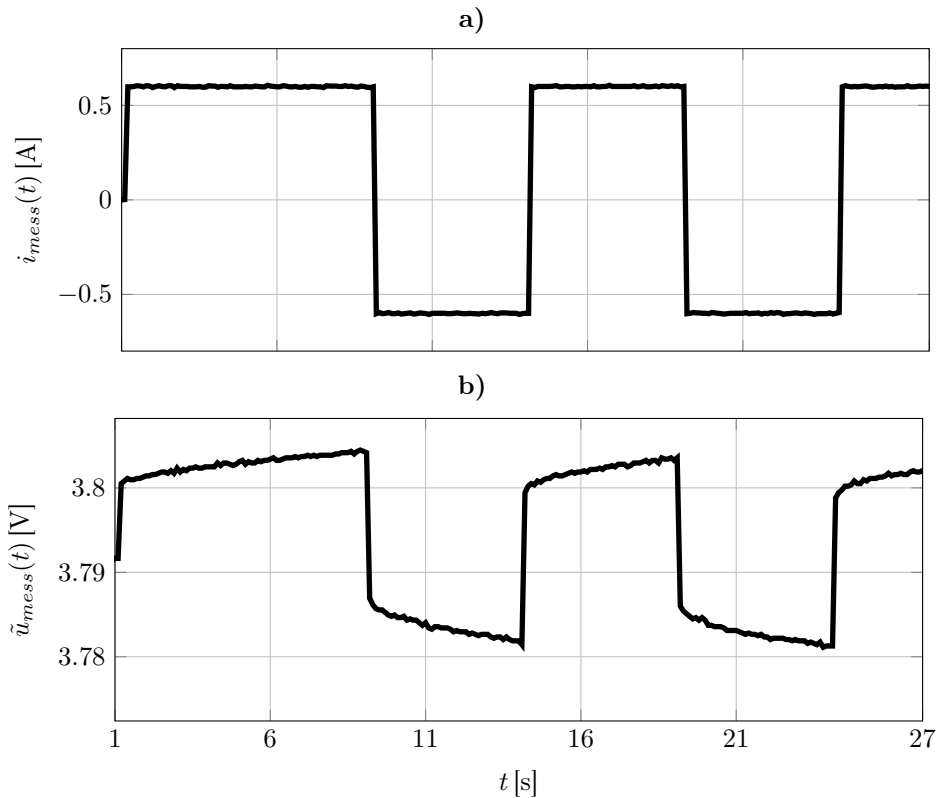


Abbildung M.4: Ausschnitte aus der mit dem BOP20-20M a) erzeugten Stromvorgabe und b) mit $f_s = 10$ Hz abgetasteten Spannungsmessung für die KOKAM LiPO-Zelle bei SoC=50 %

1. Die aktuell verfügbare Kapazität $C(T_{voll})$ der Zelle muss schon vorliegen, ansonsten muss sie zum jetzigen Zeitpunkt ermittelt werden.
2. Da für gewöhnlich unbekannt ist, bei welchem SoC sich die Zelle beim Starten der Anlage befindet, wird sie mit dem CCCV-Verfahren [EBV14] komplett vollgeladen.
3. Die Zelle wird ausgehend von 100% Ladezustand so lange entladen, bis der gewünschte SoC erreicht ist. Die Entladetiefe ergibt sich hierbei durch die Stro-

mintegration (2.10), welche wiederum die Nennkapazität $C(T_{voll})$ aus dem ersten Schritt benötigt. In der vorliegenden Arbeit wird ein SoC von 50 % angefahren.

4. Damit die Daten nicht durch etwaige Dynamiken verfälscht werden, die beim SoC-Anfahren entstanden sind, lässt man die Zelle vor der eigentlichen Messung eine gewisse Zeit relaxieren.

Nachdem der Anfangsladezustand festgelegt ist (hier sind das $SoC(0) = 50\%$), wird die PRBS-Stromvorgabe mit der Anlage über den Control Desk gestartet. Der SoC wird gleichzeitig über die Stromintegration mit erfasst:

$$SoC(t) = SoC(0) + \frac{\int_0^t i(t)/3600dt}{C(T_{voll})} \times 100\%. \quad (M.1)$$

Der Signalgenerator erzeugt hierbei das in Abbildung M.4 a) dargestellte 8 Bit PRBS-Stromsignal. Das Signal hat als einstellbare Parameter die Sprunglänge λ und die Amplitude. Bei der Amplitude muss man abwägen zwischen einer hohen Signalenergie und dem nichtlinearen Verhalten der Batterie. Außerdem sollte man die Zelle generell nicht über $C(T_{voll})/1h$ belasten, um Temperaturveränderungen zu vermeiden. Heuristisch konnte ermittelt werden, dass sich die besten Ergebnisse mit $\lambda = 5s$ und einer Amplitude von 600 mA erzielen lassen.⁷⁰ Die Spannungsmessung des BOP20-20M ist in Abbildung M.4 b) dargestellt. Sie wurde mit dem A/D-Wandler bei einer Abtastfrequenz von $f_a = 10Hz$ ermittelt. Da laut Abschnitt M.1.3 das BOP20-20M ein Spannungsrauschen $n(t)$ mit einer Varianz von $\sigma_n^2 = 165.86 \mu V^2$ besitzt, ergibt sich mit dem Spannungssignal aus Abbildung M.4 b) über die Formel $SNR=10 \log \left(\frac{\sum_k u(k)^2}{\sum_k n(k)^2} \right)$ ein $SNR=37.97 dB$. Bei einer Amplitude von 1 A resultiert vergleichsweise ein $SNR=42.46 dB$.

⁷⁰ Eine Messmatrix, in der die Ergebnisse mit verschiedenen Signalparametern dargestellt sind, ist in [Sch15] zu finden.

N Hinreichende Bedingung und Konvexität

Das folgende Lemma N.1 beschreibt eine hinreichende Bedingung für ein Extremum des Funktionals

$$J(\underline{u}) = \int_{t_0}^{t_e} f_0(\zeta, \underline{x}, \underline{u}) d\zeta. \quad (\text{N.1})$$

Lemma N.1 (Hinreichende Bedingung für ein Extremum [BV04, Mac12, GF03])

Falls der Integrand $f_0(\zeta, \underline{x}, \underline{u})$ des Funktionals $J(\underline{u})$ stark konvex im Intervall $[t_0, t_e]$ ist, so ist $J(\underline{u})$ selbst strikt konvex und besitzt ein eindeutiges und globales Minimum. In diesem Fall existiert höchstens ein \underline{u} welches die notwendige Bedingung $\delta J = 0$ erfüllt, wobei δJ die in [BSM05, S.582] deklarierte Variation erster Ordnung darstellt. Diese Variation ist somit eine hinreichende Bedingung für ein Minimum.

Literaturverzeichnis

Öffentlich zugängliche Quellen

- [AASGS13] ANDRE, A. ; APPEL, C. ; SOCZKA-GUTH, T. ; SAUER, D.U.: Advanced mathematical methods of SOC and SOH estimation for lithium-ion batteries. In: *Journal of Power Sources* 224 (2013), S. 20–27
- [AB07b] AGRAWAL, O.P. ; BALEANU, D.: A Hamiltonian Formulation and a Direct Numerical Scheme for Fractional Optimal Control Problems. In: *Journal of Vibration and Control* 13 (2007), Nr. 9-10, S. 1269–1281
- [Agr02] AGRAWAL, O.P.: Formulation of Euler-Lagrange equations for fractional variational problems. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 272 (2002), S. 368–379
- [Agr04] AGRAWAL, O.P.: A General Formulation and Solution Scheme for Fractional Optimal Control Problems. In: *Nonlinear Dynamics* 38 (2004), Nr. 1-4, S. 323–337
- [Agr07a] AGRAWAL, O.P.: Analytical schemes for a new class of fractional differential equations. In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 40 (2007), Nr. 21, S. 5469–5477
- [Agr07b] AGRAWAL, O.P.: Fractional variational calculus in terms of Riesz fractional derivatives. In: *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* 40 (2007), S. 6287–6303
- [ALC⁺03] ABRAHAM, D. ; LIU, J. ; CHEN, C. ; HYUNG, Y. ; STOLL, M. ; ELSEN, N. ; MACLAREN, S. ; TWESTEN, R. ; HAASCH, R. ; SAMMANN, E. ; PETROV, I. ; AMINE, K. ; HENRIKSEN, G.: Diagnosis of power fade mechanisms in high-power lithium-ion cells. In: *Journal of Power Sources* 119-121 (2003), S. 511–516
- [ANSGS13] ANDRE, D. ; NUCIC, A. ; SOCZKA-GUTH, T. ; SAUER, D.U.: Comparative study of a structured neural network and an extended Kalman filter for state of health determination of li-ion batteries in hybrid electric vehicles. In: *Engineering Applications of Artificial Intelligence* 26 (2013), S. 951–961

- [Arr89] ARRHENIUS, S.: Über die Reaktionsgeschwindigkeit bei der Inversion von Rohrzucker durch Säuren. In: *Zeitschrift für Physikalische Chemie* 4 (1889), S. 226–248
- [AWD98] ARORA, P. ; WHITE, R.E. ; DOYLE, M.: Capacity Fade Mechanisms and Side Reactions in Lithium-Ion Batteries. In: *Journal of the Electrochemical Society* 145 (1998), S. 3647–3667
- [BA06] BALEANU, D. ; AGRAWAL, O.P.: Fractional Hamilton formalism within Caputo’s derivatives. In: *Czechoslovak Journal of Physics* 56 (2006), S. 1087–1092
- [Ber65] BERG, Lothar: *Einführung in die Operatorenrechnung*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1965
- [BGM96] BAKER, G.A. ; GRAVES-MORRIS, P.: *Padé Approximations*. Cambridge University Press, 1996
- [BM11] BOURLÈS, H. ; MARINESCU, B.: *Linear Time-Varying Systems*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2011 (Lecture Notes in Control and Information Sciences 410)
- [BMO⁺16] BARTLETT, A. ; MARCICKI, J. ; ONORI, S. ; RIZZONI, G. ; YANG, X.G. ; MILLER, T.: Electrochemical Model-Based State of Charge and Capacity Estimation for a Composite Electrode Lithium-Ion Battery. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 24 (2016), Nr. 2, S. 384–399
- [Bou85] BOUKAMP, B.A.: A Nonlinear Least Squares Fit Procedure For Analysis of Imittance Data of Electrochemical Systems. In: *Solid State Ionics* 20 (1985), S. 31–44
- [Bou95] BOUKAMP, B.A.: A Linear Kronig-Kramers Transform Test for Imittance Data Validation. In: *Journal of the Electrochemical Society* 142 (1995), S. 1885–1894
- [BPJ⁺06] BLOOM, I. ; POTTER, B. ; JOHNSON, C. ; GERING, K. ; CHRISTOPHERSEN, J.: Effect of cathode composition on impedance rise in high-power lithium-ion cells: Long-term aging results. In: *Journal of Power Sources* 155 (2006), S. 415–419
- [BRL02] BARSOUKOV, E. ; RYU, S.H. ; LEE, H.: A novel impedance spectrometer based on carrier function Laplace-transform of the response to arbitrary excitation. In: *Journal of Electroanalytical Chemistry* 536 (2002), S. 109–122
- [BSM05] BRONSTEIN, I.N. ; SEMENDJAJEW, K.A. ; MUSIOL, G.: *Taschenbuch der Mathematik*. Deutsch (Harri), 2005

- [BTDDK05] BULLER, S. ; THELE, M. ; DE DONCKER, R.W.A.A. ; KARDEN, E.: Impedance-Based Simulation Models of Supercapacitors and Li-Ion Batteries for Power Electronic Applications. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 41 (2005), Nr. 3, S. 742–747
- [BTK11] BÜSCHEL, P. ; TROELTZSCH, U. ; KANOUN, O.: Use of stochastic methods for robust parameter extraction from impedance spectra. In: *Electrochimica Acta* 56 (2011), S. 8069–8077
- [BV04] BOYD, S. ; VANDERBERGHE, L.: *Convex Optimization*. Cambridge University Press, 2004
- [BZDH15] BIZERAY, A.M. ; ZHAO, S. ; DUNCAN, S.R. ; HOWEY, D.A.: Lithium-ion battery thermal-electrochemical model-based state estimation using orthogonal collocation and a modified extended Kalman filter. In: *Journal of Power Sources* 296 (2015), S. 400–412
- [CC41] COLE, K.S. ; COLE, R.H.: Dispersion and Absorption in Dielectrics I. Alternating Current Characteristics. In: *The Journal of Chemical Physics* 9 (1941), S. 341–351
- [CKC⁺10] CHATURVEDI, N.A. ; KLEIN, R. ; CHRISTENSEN, J. ; AHMED, J. ; KOJIC, J.: Algorithms for Advanced Battery-Management Systems. In: *IEEE Control Systems Magazine* 30 (2010), Nr. 3, S. 49–68
- [Cor15] CORENTIN, B.: *Advances in Delays and Dynamics*. Bd. 3: *Linear Parameter-Varying and Time-Delay Systems*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2015
- [Cos04] COSTA, B.: Spectral Methods for Partial Differential Equations. In: *Cubo, A Mathematical Journal* 6 (2004), S. 1–32
- [CSR08] CODECÀ, F. ; SAVARESI, S.M. ; RIZZONI, G.: On battery State of Charge estimation: a new mixed algorithm. In: *17th IEEE International Conference on Control Applications*. San Antonio, Texas, USA, 2008
- [Das11] DAS, S.: *Functional Fractional Calculus*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2011
- [Das13] DAS, S.: Gramian for Control of Fractional Order Multivariate Dynamic Systems. In: *International Journal of Applied Mathematics and Statistics* 37 (2013), Nr. 7, S. 71–96
- [DB11] DANIEL, C. (Hrsg.) ; BESENHARD, J.O. (Hrsg.): *Handbook of Battery Materials*. second edition. Wiley-VCH, 2011
- [DBL⁺15] DUONG, V.-H. ; BASTAWROUS, H.A. ; LIM, K.C. ; WAI SEE, K. ; ZHANG, P. ; DOU, S.X.: Online state of charge and model parameters estimation of the LiFePO₄ battery in electric vehicles

- using multiple adaptive forgetting factors recursive least-squares. In: *Journal of Power Sources* 296 (2015), S. 215–224
- [DFN93] DOYLE, M. ; FULLER, T.F. ; NEWMAN, J.: Modeling of Galvanostatic Charge and Discharge of the Lithium/Polymer/Insertion Cell. In: *Journal of the Electrochemical Society* 140 (1993), Nr. 6, S. 1526–1533
- [DFS08] DOMENICO, D.D. ; FIENGO, G. ; STEFANOPOULOU, A.: Lithium-Ion battery State of Charge estimation with a Kalman Filter based on an electrochemical model. In: *17th IEEE International Conference on Control Applications, Part of IEEE Multi-conference on Systems and Control*. San Antonio, Texas, USA, 2008, S. 702–707
- [Die04] DIETHELM, K.: *The Analysis of Fractional Differential Equations*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2004
- [Dre08a] DREYER, D.: Ein Plädoyer für den Einsatz des Operatorenkalküls nach Mikusiński. In: *Gastvortrag an der Technischen Universität Berlin*, 2008
- [EBV14] EDDAHECH, A. ; BRIAT, O. ; VINASSA, J.-M.: Determination of lithium-ion battery state-of-health based on constant-voltage charge phase. In: *Journal of Power Sources* 258 (2014), S. 218–227
- [EGV⁺12] ECKER, M ; GERSCHLER, J.B. ; VOGEL, J. ; KÄBITZ, S. ; HUST, F. ; DECHENT, P. ; SAUER, D.U.: Development of a lifetime prediction model for lithium-ion batteries based on extended accelerated aging test data. In: *Journal of Power Sources* 215 (2012), S. 248–257
- [EJCIT11] ENDER, M. ; JOOS, J. ; CARRARO, T. ; IVERS-TIFFÉE, E.: Three-dimensional reconstruction of a composite cathode for lithium-ion cells. In: *Electrochemistry Communications* 13 (2011), S. 166–168
- [FBSF11] FORMAN, J.C. ; BASHASH, S. ; STEIN, J.L. ; FATHY, H.K.: Reduction of an Electrochemistry-Based Li-Ion Battery Model via Quasi-Linearization and Padé Approximation. In: *Journal of The Electrochemical Society* 158 (2011), Nr. 2, S. A93–A101
- [FD16] FISCHER, F. ; DEUTSCHER, J.: Algebraische Fehlerdetektion für verteiltparametrische Systeme mittels Modulationsfunktionen. In: *50. Regelungstechnisches Kolloquium*. Boppard, 2016
- [FDN94] FULLER, T.F. ; DOYLE, M. ; NEWMAN, J.: Simulation and optimization of the dual lithium ion insertion cell. In: *Journal of Electrochemical Society* 141 (1994), S. 1–10
- [Föll94] FÖLLINGER, O.: *Optimale Regelung und Steuerung*. München : De Gruyter Oldenbourg, 1994 (Methoden der Regelungs- und Automatisierungstechnik)

- [Föll11] FÖLLINGER, O.: *Laplace-, Fourier- und z-Transformation*. Berlin, Offenbach : VDE-Verlag, 2011. – 10 Auflage
- [Fra12] FRANK, E.: Forced thermal runaway at an EV lithium-ion battery in a temperature test cabinet module. In: *Kraftwerk Batterie*, 2012
- [Fre71] FREUND, E.: *Zeitvariable Mehrgrößensysteme*. Berlin, Heidelberg : Springer, 1971 (Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Systems 57)
- [FSR03] FLIESS, M. ; SIRA-RAMÍREZ, H.: An algebraic framework for linear identification. In: *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* 9 (2003), S. 151–168
- [FWHS14a] FLEISCHER, C ; WAAG, W. ; HEYN, H.-M. ; SAUER, D.U.: On-line adaptive battery impedance parameter and state estimation considering physical principles in reduced order equivalent circuit battery models: Part 1. Requirements, critical review of methods and modeling. In: *Journal of Power Sources* 260 (2014), S. 276–291
- [FWHS14b] FLEISCHER, C ; WAAG, W. ; HEYN, H.-M. ; SAUER, D.U.: On-line adaptive battery impedance parameter and state estimation considering physical principles in reduced order equivalent circuit battery models: Part 2. Parameter and state estimation. In: *Journal of Power Sources* 262 (2014), S. 457–482
- [GB03] GOPALUNI, R.B. ; BRAATZ, R.D.: State of Charge Estimation in Li-ion Batteries Using an Isothermal Pseudo Two-Dimensional Model. In: *10th IFAC International Symposium on Dynamics and Control of Process Systems* 46 (2003), S. 135–140
- [GBK14] GÜNTHER, T. ; BÜSCHEL, P. ; KANOUN, O.: Eingebettetes Impedanzmesssystem für das Batteriemangement in Elektrofahrzeugen. In: *Technisches Messen* 81 (2014), Nr. 11, S. 560–565
- [GCK16] GE, F. ; CHEN, Y. ; KOU, C.: Regional boundary controllability of time fractional diffusion equations. In: *IMA Journal of Mathematical Control and Information* (2016), S. 1–18
- [GF03] GELFAND, I.M. ; FOMIN, S.V.: *Calculus of Variations*. Dover, 2003
- [GJD97] GARCHE, J. ; JOSSEN, A. ; DÖRING, H.: The influence of different operating conditions, especially over-discharge, on the lifetime and performance of lead/acid batteries for photovoltaic systems. In: *Journal of Power Sources* 67 (1997), S. 201–212
- [GR13a] GEHRING, N. ; RUDOLPH, J.: An Algebraic Approach for Identification of Linear Systems with Fractional Derivatives. In: *arXiv online library, Cornell University Library* (2013)

- [GR13b] GEHRING, N. ; RUDOLPH, J.: Algebraische Methoden zur Parameteridentifikation für lineare unendlichdimensionale Systeme. In: *47. Regelungstechnisches Kolloquium*. Boppard, 2013
- [Has08] HASCHKA, M.: *Online-Identifikation fraktionaler Impedanzmodelle für die Hochtemperaturbrennstoffzelle SOFC*, Universität Karlsruhe (TH), Diss., 2008
- [HLJE14] HU, X. ; LI, S. E. ; JIA, Z. ; EGARDT, B.: Enhanced sample entropy-based health management of Li-ion battery for electrified vehicles. In: *Energy* 64 (2014), S. 953–960
- [HMS11] HAUBOLD, H.J. ; MATHAI, A.M. ; SAXENA, R.K.: Mittag-Leffler functions and their applications. In: *Journal of Applied Mathematics* (2011)
- [HXZ09] HAIFENG, D. ; XUEZH, W. ; ZECHANG, S.: A New SOH Prediction Concept for the Power Lithium-ion Battery Used on HEV's. In: *Vehicle Power and Propulsion Conference* (2009), S. 1649–1653
- [ICE⁺10] ILLIG, J. ; CHROBAK, T. ; ENDER, M. ; SCHMIDT, J. P. ; KLOTZ, D. ; IVERS-TIFFÉE, E.: Studies on LiFePO₄ as Cathode Material in Li-Ion Batteries. In: *ECS Transactions* 28 (2010), Nr. 30, S. 3–17
- [Ill14] ILLIG, J.: *Physically based Impedance Modelling of Lithium-Ion Cells*, Karlsruhe Institute of Technology (KIT), Diss., 2014
- [IM11] ISERMANN, R. ; MÜNCHHOF, M.: *Identification of Dynamic Systems: An Introduction with Applications*. Heidelberg [u.a.]: Springer, 2011
- [ISWIT13] ILLIG, J. ; SCHMIDT, J.P. ; WEISS, M. ; IVERS-TIFFÉE, E.: Understanding the impedance spectrum of 18650 LiFePO₄-cells. In: *Journal of Power Sources* 239 (2013), S. 670–679
- [JLL09] JUNPING, W. ; JINGANG, G. ; LEI, D.: An adaptive Kalman filtering based State of Charge combined estimator for electric vehicle battery pack. In: *Energy Conversion & Management* 50 (2009), S. 3182–3186
- [Jos05] JOSSEN, A.: Fundamentals of battery dynamics. In: *Journal of Power Sources* 154 (2005), S. 530–538
- [JW95] JACOBSEN, T. ; WEST, K.: Diffusion Impedance in Planar, Cylindrical and Spherical Symmetry. In: *Electrochimica Acta* 40 (1995), Nr. 2, S. 255–262
- [JW06] JOSSEN, A. ; WEYDANZ, W.: *Moderne Akkumulatoren richtig einsetzen*. Inge Reichardt Verlag, 2006

- [Kac11] KACZOREK, T.: *Selected Problems of Fractional Systems Theory*. Berlin : Springer, 2011 (Lecture notes in control and information sciences ; 411)
- [Kai80] KAILATH, T.: *Linear Systems*. Prentice Hall, 1980 (Prentice Hall Information and System Sciences Series)
- [KCC⁺10] KLEIN, R. ; CHATURVEDI, N.A. ; CHRISTENSEN, J. ; AHMED, J. ; FINDEISEN, R. ; KOJIC, A.: State estimation of a reduced electrochemical model of a lithium-ion battery. In: *American Control Conference*. Marriott Waterfront, MD, USA, 2010, S. 6618–6623
- [KK85] KNOBLOCH, H.W. ; KWAKERNAAK, H.: *Lineare Kontrolltheorie*. Berlin, Heidelberg : Springer, 1985
- [KSGH16] KUPPER, M. ; SESAR-GIL, I. ; HOHMANN, S.: Distributed and Decentralized State Estimation of Fractional Order Systems. In: *American Control Conference (ACC)*. Boston, September 2016
- [KSSIT11] KLOTZ, D. ; SCHÖNLEBER, M. ; SCHMIDT, J.P. ; IVERS-TIFFÉE, E.: New approach for the calculation of impedance spectra out of time domain data. In: *Electrochimica Acta* 56 (2011), Nr. 24, S. 8763–8769
- [KST06] KILBAS, A.A. ; SRIVASTAVA, H.M. ; TRUJILLO, J.J.: *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Amsterdam : Elsevier Science & Tech, 2006 (North-Holland Mathematics Studies)
- [LH98] LORENZO, C.F. ; HARTLEY, T.T.: Initialization, Conceptualization and Application in the Generalized Fractional Calculus / National Aeronautics and Space Administration (NASA). 1998. – Forschungsbericht
- [LH99] LORENZO, C.F. ; HARTLEY, T.T.: Generalized Functions for the Fractional Calculus / National Aeronautics Space Administration (NASA). 1999. – Forschungsbericht
- [LH00] LORENZO, C.F. ; HARTLEY, T.T.: Initialized Fractional Calculus / National Aeronautics and Space Administration (NASA). 2000. – Forschungsbericht
- [LH07] LORENZO, C.F. ; HARTLEY, T.T.: Initialization of Fractional Differential Equations: Theory and Application. In: *Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference* (2007)
- [LH11] LORENZO, C.F. ; HARTLEY, T.T.: Time-Varying Initialization and Laplace Transform of the Caputo Derivative: With Order Between Zero and One. In: *Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference* (2011)

- [Lju99] LJUNG, L.: *System Identification: Theory for the User*. 2 edition. Prentice Hall, 1999 (PTR Prentice Hall Information and System Sciences Series)
- [LKC11] LEE, J. ; KIM, Y. ; CHA, H.: A new battery parameter identification considering current, SOC and Peukert's effect for Hybrid Electric Vehicles. In: *IEEE Energy Conversion Congress and Exposition (ECCE)*, 2011
- [LLKGP13] LIU, D.-Y. ; LALEG-KIRATI, T.-M. ; GIBARU, O. ; PERRUQUETTI, W.: Identification of fractional order systems using modulating functions method. In: *American Control Conference (2013)*, S. 1679–1684
- [LLW⁺16] LIU, C. ; LIU, W. ; WANG, L. ; HU, G. ; MA, L. ; REN, B.: A new method of modeling and state of charge estimation of the battery. In: *Journal of Power Sources* 320 (2016), S. 1–12
- [LM14] LARSSON, F. ; MELLANDER, B.-E.: Abuse by External Heating, Overcharge and Short Circuiting of Commercial Lithium-Ion Battery Cells. In: *Journal of The Electrochemical Society* 161 (2014), Nr. 10, S. A1611–A1617
- [LR95] LINDEN, D. ; REDDY, T.B.: *Handbook of Batteries*. 3rd edition. New York [u.a.] : McGraw-Hill, 1995
- [LR15] LYGEROS, J. ; RAMPONI, F.A.: *Lecture Notes on Linear System Theory*. Automatic Control Laboratory, ETH Zurich, 2015
- [Lud95] LUDYK, G.: *Theoretische Regelungstechnik 1*. Berlin [u.a.] : Springer, 1995 (Springer-Lehrbuch)
- [Lun96] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 1*. Berlin [u.a.] : Springer, 1996 (Springer-Lehrbuch)
- [LWHG⁺10] LIU, P. ; WANG, J.J. ; HICKS-GARNER, J. ; SHERMAN, E. ; SOUKIAZIAN, S. ; VERBRUGGE, M. ; TATARIA, H. ; MUSSER, J. ; FINAMORE, P.: Aging Mechanism of LiFePO₄ Batteries Deduced by Electrochemical and Structural Analyses. In: *Journal of The Electrochemical Society* 157 (2010), Nr. 4, S. A499–A507
- [Mac84] MACDONALD, J.R.: Note on the parameterization of the constant-phase admittance element. In: *Solid State Ionics* 13 (1984), Nr. 2, S. 147–149
- [Mac12] MACCLUER, C.R.: *Calculus of Variations: Mechanics, Control Theory and Other Applications*. Dover Publications, 2012

- [MAN96] MATIGNON, D. ; ANDRÉA-NOVEL, B.: Some Results on Controllability and Observability of Finite-Dimensional Fractional Differential Systems. In: *Computational Engineering in Systems Applications* (1996)
- [MB56] MACDONALD, J.R. ; BRACHMAN, M.K.: Linear-System Integral Transform Relations. In: *Reviews of Modern Physics* 28 (1956), Nr. 4, S. 393–422
- [MB87] MACDONALD, J.R. ; BARSOUKOV, E.: *Impedance Spectroscopy: Theory, Experiment, and Applications*. John Wiley & Sons, 1987
- [MBK07] MELLIT, A. ; BENGHANEM, M. ; KALOGIROU, S.S.: Modeling and simulation of a stand-alone photovoltaic system using an adaptive artificial neural network: Proposition for a new sizing procedure. In: *Renewable Energy* 32 (2007), S. 285–313
- [MCK12a] MOURA, S.J. ; CHATURVEDI, N.A. ; KRSTIĆ, M.: PDE Estimation Techniques for Advanced Battery Management Systems – Part I: SOC Estimation. In: *American Control Conference*. Montréal, Canada, 2012, S. 559–565
- [MCK12b] MOURA, S.J. ; CHATURVEDI, N.A. ; KRSTIĆ, M.: PDE Estimation Techniques for Advanced Battery Management Systems – Part II: SOH Identification. In: *American Control Conference*. Montréal, Canada, 2012, S. 566–571
- [MCV10] MONJE, C.A. ; CHEN, Y.Q. ; VINAGRE, B.M.: *Fractional-order Systems and Controls: Fundamentals and Applications*. London : Springer, 2010 (Advances in Industrial Control)
- [MGBGMG09] MARTÍNEZ-GONZÁLEZ, R. ; BOLEO, Y. ; GRAU, A. ; MARTÍNEZ-GARCÍA, H.: An LPV Fractional Model for Canal Control. In: *Mathematical Problems in Engineering* (2009), S. 1–18
- [Mik57] MIKUSIŃSKI, J.: *Operatorenrechnung*. Berlin : VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1957 (Mathematik für Naturwissenschaft und Technik ; 1)
- [MK97] MAURACHER, P. ; KARDEN, E.: Dynamic modelling of lead/acid batteries using impedance spectroscopy for parameter identification. In: *Journal of Power Sources* 67 (1997), S. 69–84
- [MKC12] MOURA, S.J. ; KRSTIC, M. ; CHATURVEDI, N.A.: Adaptive PDE Observer for Battery SOC/SOH Estimation. In: *ASME 5th Annual Dynamic Systems and Control Conference joint with the JSME 11th Motion and Vibration Conference*. Fort Lauderdale, Florida, USA, 2012, S. 101–110

- [MN12] MEZGER, T. ; NOBIS, P.: Batteriemessungen im Rahmen des Projekts AZE / Analysezentrum für Elektromobilität (AZE). Forschungsstelle für Energiewirtschaft, 2012. – Forschungsbericht
- [MOT15] MALINOWSKA, A.B. ; ODZIJEWICZ, T. ; TORRES, D.F.M.: *Advanced Methods in the Fractional Calculus of Variations*. SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology, 2015
- [MT11] MOZYSKA, D. ; TORRES, D.F.M.: Modified Optimal Energy and Initial Memory of Fractional Continuous-Time Linear Systems. In: *Signal Processing* 91 (2011), Nr. 3, S. 379–385
- [Mun04] MUNKHAMMAR, J.D.: Riemann-Liouville fractional derivatives and the Taylor-Riemann series. In: *UUDM project report 7* (2004), S. 1–18
- [NMCH09] NG, K.S. ; MOO, C.-S. ; CHEN, Yi-P. ; HSIE, Y.-C.: Enhanced coulomb counting method for estimating state-of-charge and state-of-health of lithium-ion batteries. In: *Applied Energy* 86 (2009), S. 1506–1511
- [NTA04] NEWMAN, J. S. ; THOMAS-ALYEA, K. E.: *Electrochemical Systems*. Wiley, 2004
- [OLMN00] OSTALOUP, A. ; LEVRON, F. ; MATHIEU, B. ; NANOT, F.M.: Frequency-Band Complex Noninteger Differentiator: Characterization and Synthesis. In: *IEEE Transactions on Circuits and Systems – I: Fundamentals, Theory and Applications* 47 (2000), Nr. 1, S. 25–39
- [OM14] OLIVEIRA, E.C. de ; MACHADO, J.A.T.: A Review of Definitions for Fractional Derivatives and Integral. In: *Mathematical Problems in Engineering* (2014)
- [OMS09] OLDHAM, K.B. ; MYLAN, J.C. ; SPANIER, J.: *An Atlas of Functions*. Springer, 2009
- [OMT12] ODZIJEWICZ, T. ; MALINOWSKA, A.B. ; TORRES, D.F.M.: Generalized fractional calculus with applications to the calculus of variations. In: *ArXiv e-prints* (2012)
- [OS74] OLDHAM, K.B. ; SPANIER, J.: *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order*. New York [u.a.] : Academic Press, 1974 (Mathematics in science and engineering; 111)
- [OSM02] ORAZEM, M.E. ; SHUKLA, P. ; MEMBRINO, M.A.: Extension of the measurement model approach for deconvolution of underlying distributions for impedance measurements. In: *Electrochimica Acta* 47 (2002), S. 2027–2034

- [Ost16] OSTALCZYK, P.: Linearization of the Non-linear Time-Variant Fractional-Order Difference Equation. In: *Theoretical Developments and Applications of Non-Integer Order Systems* 357 (2016), S. 41–55
- [OT11] ORAZEM, M.E. ; TRIBOLLET, B.: *Electrochemical Impedance Spectroscopy*. John Wiley & Sons, 2011 (The Electrochemical Society Series)
- [PD13] PAN, I. ; DAS, S.: *Intelligent Fractional Order Systems and Control - An Introduction*. Berlin : Springer, 2013 (Studies in Computational Intelligence)
- [Ple04a] PLETT, G.L.: Extended Kalman filtering for battery management systems of LiPB-based HEV battery packs: Part 1. Background. In: *Journal of Power Sources* 134 (2004), Nr. 2, S. 252–261
- [Ple04b] PLETT, G.L.: Extended Kalman filtering for battery management systems of LiPB-based HEV battery packs: Part 2. Modeling and identification. In: *Journal of Power Sources* 134 (2004), Nr. 2, S. 262–276
- [Ple04c] PLETT, G.L.: Extended Kalman filtering for battery management systems of LiPB-based HEV battery packs: Part 3. State and parameter estimation. In: *Journal of Power Sources* 134 (2004), Nr. 2, S. 277–292
- [Ple11] PLETT, G.L.: Recursive approximate weighted total least squares estimation of battery cell total capacity. In: *Journal of Power Sources* 196 (2011), Nr. 4, S. 2319 – 2331
- [PLKJ11] PUENTE LEÓN, F. ; KIENKE, U. ; JÄKEL, H.: *Signale und Systeme*. Oldenbourg Verlag München, 2011
- [Pod99] PODLUBNY, I.: *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. San Diego : Academic Press, 1999 (Mathematics in science and engineering; 198)
- [Pod00] PODLUBNY, I.: Matrix Approach to Discrete Fractional Calculus. In: *Fractional Calculus & Applied Analysis* 3 (2000), Nr. 4, S. 359–386
- [PPC⁺08] PATTIPATI, B. ; PATTIPATI, K. ; CHRISTOPHERSON, J.P. ; NAMBURU, S. M. ; PROKHOROV, D.V. ; QIAO, L.: Automotive Battery Management Systems. In: *IEEE AUTOTESTCON*. Salt Lake City, 2008, S. 581–586

- [PPJ01] PILLER, S. ; PERRIN, M.M. ; JOSSEN, A.: Methods for state-of-charge determination and their applications. In: *Journal of Power Sources* 96 (2001), Nr. 1, S. 113–120
- [PR93] PREISIG, H.A. ; RIPPIN, D.W.T.: Theory and application of the modulating function method – I. Review and theory of the method and theory of the spline-type modulating functions. In: *Computers & Chemical Engineering* 17 (1993), S. 1–16
- [PR13] PRASAD, G.K. ; RAHN, C.D.: Model based identification of aging parameters in lithium ion batteries. In: *Journal of Power Sources* 232 (2013), S. 79–85
- [PRK07] PARTHIBAN, T. ; RAVI, R. ; KALAISELVI, N.: Exploration of artificial neural network [ANN] to predict the electrochemical characteristics of lithium-ion cells. In: *Electrochimica Acta* 53 (2007), S. 1877–1882
- [QGX05] QINGSHAN, Z. ; GUANGYI, C. ; XINJIAN, Z.: Research of controllability for a class of fractional-order linear control systems. In: *Journal of Systems Engineering and Electronics* 16 (2005), Nr. 2, S. 376–381
- [RBD13] REMMLINGER, J. ; BUCHHOLZ, M. ; DIETMAYER, K.: Identification of a Bilinear and Parameter-varying Model for Lithium-ion Batteries by Subspace Methods. In: *American Control Conference (ACC)*. Washington, DC, 2013
- [RBD14] REMMLINGER, J. ; BUCHHOLZ, M. ; DIETMAYER, K.: Model-based On-board Monitoring for Lithium-Ion Batteries. In: *at - Automatisierungstechnik* 62 (2014), Nr. 4, S. 282–295
- [RBS11] ROSCHER, M.A. ; BOHLEN, O.S. ; SAUER, D.U.: Reliable State Estimation of Multicell Lithium-Ion Battery Systems. In: *IEEE Transactions on Energy Conversion* 26 (2011), Nr. 3, S. 737–743
- [RBSGD13] REMMLINGER, J. ; BUCHHOLZ, M. ; SOCZKA-GUTH, T. ; DIETMAYER, K.: On-board state-of-health monitoring of lithium-ion batteries using linear parameter-varying models. In: *Journal of Power Sources* 239 (2013), S. 689–695
- [REBC12] RAHIMI-EICHI, H. ; BARONTI, F. ; CHOW, M.-Y.: Modeling and Online Parameter Identification of Li-Polymer Battery Cells for SOC Estimation. In: *Industrial Electronics (ISIE)*, 2012
- [Rie97] RIEWE, F.: Mechanics with fractional derivatives. In: *Physical Review E* 55 (1997), Nr. 3, S. 3581–3592
- [RKS⁺14] RAUSCH, M. ; KLEIN, R. ; STREIF, S. ; PANKIEWITZ, C. ; FINDER-EISEN, R.: Modellbasierte Zustandsschätzung für Lithium-Ionen-Batterien. In: *at - Automatisierungstechnik* 62 (2014), Nr. 4, S. 296–311

- [RM00] RICHMAN, J.S. ; MOORMAN, J.R.: Physiological time-series analysis using approximate entropy and sample entropy. In: *American Journal of Physiology - Heart and Circulatory Physiology* 278 (2000), S. 2039–2049
- [RMT10] RICARDO, A. ; MALINOWSKA, A.B. ; TORRES, D.F.M.: A fractional calculus of variations for multiple integrals with application to vibrating string. In: *Journal of Mathematical Physics* 51 (2010), Nr. 3
- [Ros10] ROSCHER, M.: *Zustandserkennung von LiFePO₄-Batterien für Hybrid- und Elektrofahrzeuge*, RWTH Aachen, Diss., 2010
- [RS11] ROSCHER, M.A. ; SAUER, D.U.: Dynamic electric behavior and open-circuit-voltage modeling of LiFePO₄-based lithium ion secondary batteries. In: *Journal of Power Sources* 196 (2011), S. 331–336
- [Rug96] RUGH, W.J.: *Linear System Theory*. Prentice Hall, 1996 (Information and System Sciences Series)
- [SAO⁺06] SABATIER, J. ; AOUN, M. ; OSTALOUP, A. ; GREGOIRE, G. ; RAGOT, F. ; ROY, P.: Fractional system identification for lead acid battery state of charge estimation. In: *Signal Processing* 86 (2006), S. 2645–2657
- [SB73] STOER, J. ; BULIRSCH, R.: *Einführung in die Numerische Mathematik II*. Berlin [u.a.] : Springer-Verlag, 1973
- [SBIG10] SCHMIDT, A.P. ; BITZER, M. ; IMRE, Á.W. ; GUZZELLA, L.: Experiment-driven electrochemical modeling and systematic parameterization for a lithium-ion battery cell. In: *Journal of Power Sources* 195 (2010), S. 5071–5080
- [SCA16] SALEM, T. ; CHETOUI, M. ; AOUN, M.: Instrumental variable based methods for continuous-time linear parameter varying system identification with fractional models. In: *Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*. Athens, Greece, 2016
- [SCE⁺11] SCHMIDT, J. ; CHROBAK, T. ; ENDER, M. ; ILLIG, J. ; KLOTZ, D. ; IVERS-TIFFÉE, E.: Studies on LiFePO₄ as cathode material using impedance spectroscopy. In: *Journal of Power Sources* 196 (2011), S. 5342–4348
- [Sch11] SCHMID, C.: *Parameteridentifikation für zeitkontinuierliche Systeme mittels signalmodellgenerierter Modulationsfunktionen*, Universität Erlangen-Nürnberg, Diss., 2011
- [Sch13] SCHMIDT, J.P.: *Verfahren zur Charakterisierung und Modellierung von Lithium-Ionen Zellen*, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Diss., 2013

- [SCL⁺10] SABATIER, J. ; CUGNET, M. ; LARUELLE, S. ; GRUGEON, S. ; SAHUT, B. ; OSTALOUP, A. ; TARASCON, J.M.: A fractional order model for lead-acid battery crankability estimation. In: *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 15 (2010), Nr. 5, S. 1308–1317
- [SD06] SIEROCIUK, D. ; DZIELINSKI, A.: Fractional kalman filter algorithm for the states, parameters and order of fractional system estimation. In: *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* 16 (2006), Nr. 1, S. 129–140
- [SDDFS09] SPELTINO, C. ; DI DOMENICO, D. ; FIENGO, D. ; STEFANOPOULOU, A.: Comparison of Reduced Order Lithium-Ion Battery Models for Control Applications. In: *IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference* 48 (2009)
- [SFC10] SIMOPOULOS, G.N. ; FATTIC, G.T. ; CAPUTO, J.V.: *Method of determining the energy capacity of a battery*. 2010. – United States Patent, Number: US7800344B2
- [SFS⁺99] SALKIND, A.J. ; FENNIE, C. ; SINGH, P. ; ATWATER, T. ; REISNER, D.E.: Determination of state-of-charge and state-of-health of batteries by fuzzy logic methodology. In: *Journal of Power Sources* 80 (1999), S. 293–300
- [SFT14] SABATIER, J. ; FARGES, C. ; TRIGEASSOU, J.C.: Fractional systems state space description: some wrong ideas and proposed solutions. In: *Journal of Vibration and Control* 20 (2014), Nr. 7, S. 1076–1084
- [SGRW06] SANTHANAGOPALAN, S. ; GUO, Q. ; RAMADASS, P. ; WHITE, R.E.: Review of models for predicting the cycling performance of lithium ion batteries. In: *Journal of Power Sources* 156 (2006), S. 620–628
- [Shi54] SHINBROT, M.: On the analysis of linear and nonlinear dynamical systems from transient-response data / National Advisory Committee for Aeronautics. 1954. – Forschungsbericht
- [SJW09] SUN, Y.-H. ; JOU, H.-L. ; WU, J.-C.: Auxiliary diagnosis method for lead-acid battery health based on sample entropy. In: *Energy Conversion and Management* 50 (2009), S. 2250–2256
- [SKM93] SAMKO, S. ; KILBAS, A.A. ; MARICHEV, O.I.: *Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications*. Switzerland, Philadelphia, Pa., USA : Gordon and Breach Science Publishers, 1993
- [SKTH11] SCHERER, R. ; KALLA, S.L. ; TANG, Y. ; HUANG, J.: The Grünwald-Letnikov method for fractional differential equations. In: *Computers and Mathematics with Applications* 62 (2011), Nr. 3, S. 902–917. – Special Issue on Advances in Fractional Differential Equations II

- [SLMO15] SABATIER, J. ; LANUSSE, P. ; MELCHIOR, P. ; OUSTALOUP, A.: *Fractional Order Differentiation and Robust Control Design*. Netherlands : Springer, 2015 (Intelligent Systems, Control and Automation: Science and Engineering 77)
- [SMF⁺13] SABATIER, J. ; MERVEILLAUT, M. ; FRANCISCO, J.M. ; GUILLEMARD, F. ; PORCELATTO, D.: Fractional models for lithium-ion batteries. In: *European Control Conference (ECC)*. Switzerland, 2013, S. 3458–3463
- [SMV⁺02] SCHICHLEIN, H. ; MÜLLER, A.C. ; VOIGTS, M. ; KRÜGEL, A. ; IVERS-TIFFEE, E.: Deconvolution of electrochemical impedance spectra for the identification of electrode reaction mechanism in solid oxide fuel cells. In: *Journal of Applied Electrochemistry* 32 (2002), S. 875–882
- [SOIL02] SABATIER, J. ; OUSTALOUP, A. ; ITURRICA, A.G. ; LANUSSE, P.: CRONE Control: Principles and Extension to Time-Variant Plants with Asymptotically Constant Coefficients. In: *Nonlinear Dynamics* 29 (2002), Nr. 1, S. 363–385
- [SOK⁺10] SCHWEIGER, H.-G. ; OBEIDI, O. ; KOMESKER, O. ; RASCHKE, A. ; SCHIEMANN, M. ; ZEHNER, C. ; GEHNEN, M. ; KELLER, M. ; BIRKE, P.: Comparison of Several Methods for Determining the Internal Resistance of Lithium Ion Cells. In: *Sensors* 10 (2010), S. 5604–5625
- [SPSR11] SHI, Y. ; PRASAD, G. ; SHEN, Z. ; RAHN, C.D.: Discretization Methods for Battery Systems Modeling. In: *American Control Conference (ACC)*. San Francisco, CA, 2011, S. 356–361
- [SR02] SINGH, P. ; REISNER, D.: Fuzzy logic-Based State-of-Health Determination of Lead Acid Batteries. In: *Telecommunications Energy Conference*, 2002, S. 583–590
- [SR11] SCHMID, C. ; ROPPENECKER, G.: Parameteridentifikation für LTI-Systeme mit Hilfe signalmodellgenerierter Modulationsfunktionen. In: *at-Automatisierungstechnik* (2011), S. 521–527
- [SRNG13] SUTHAR, B. ; RAMADESIGAN, V. ; NORTHROP, P.W.C. ; GOPALUNI, B.: Optimal control and state estimation of lithium-ion batteries using reformulated models. In: *American Control Conference*, 2013, S. 5350–5355
- [SRW07] SMITH, K.A. ; RAHN, C.D. ; WANG, C.-Y.: Control oriented 1D electrochemical model of lithium ion battery. In: *Energy Conversion & Management* 48 (2007), S. 2565–2578

- [SRW08] SMITH, K.A. ; RAHN, C.D. ; WANG, C.-Y.: Model Order Reduction of 1D Diffusion Systems Via Residue Grouping. In: *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control* 130 (2008), Nr. 1
- [SSS⁺14] STROE, D.I. ; SWIERCZYNSKI, M ; STAN, A.I. ; KNAP, V. ; TEODOR-RESCU, R. ; ANDREASEN, S.J.: Diagnosis of Lithium-Ion Batteries State-of-Health based on Electrochemical Impedance Spectroscopy Technique. In: *Energy Conversion Congress and Exposition* (2014), S. 4576–4582
- [STR⁺13] SCHMIDT, J.P. ; TRAN, H.Y. ; RICHTER, J. ; IVERS-TIFFÉE, E. ; WOHLFAHRT-MEHRENS, M.: Analysis and prediction of the open circuit potential of lithium-ion cells. In: *Journal of Power Sources* 239 (2013), S. 696–704
- [SW06] SANTHANAGOPALAN, S. ; WHITE, R.E.: Online estimation of the state of charge of a lithium ion cell. In: *Journal of Power Sources* 161 (2006), S. 1346–1355
- [SW08] SAUER, D.U. ; WENZL, H.: Comparison of different approaches for lifetime prediction of electrochemical systems - Using lead-acid batteries as example. In: *Journal of Power Sources* 176 (2008), Nr. 2, S. 534–546
- [SZK⁺14a] STIASZNY, B. ; ZIEGLER, J.C. ; KRAUSS, E.E. ; SCHMIDT, J.P. ; IVERS-TIFFÉE, E.: Electrochemical characterization and post-mortem analysis of aged $\text{LiMn}_2\text{O}_4\text{-Li}(\text{Ni}_{0.5}\text{Mn}_{0.3}\text{Co}_{0.2})\text{O}_2$ /graphite lithium ion batteries. Part I: Cycle aging. In: *Journal of Power Sources* 251 (2014), S. 439–450
- [SZK⁺14b] STIASZNY, B. ; ZIEGLER, J.C. ; KRAUSS, E.E. ; ZHANG, M. ; SCHMIDT, J.P. ; IVERS-TIFFÉE, E.: Electrochemical characterization and post-mortem analysis of aged $\text{LiMn}_2\text{O}_4\text{-NMC}$ /graphite lithium ion batteries part II: Calendar aging. In: *Journal of Power Sources* 258 (2014), S. 61–75
- [Tar08] TARASOV, V.E.: Fractional vector calculus and fractional Maxwell's equations. In: *Annals of Physics* 323 (2008), Nr. 11, S. 2756–2778
- [Tar10] TARASOV, V.E.: *Fractional Dynamics*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2010 (Nonlinear Physical Science)
- [TC08] TRICAUD, C. ; CHEN, Y.Q.: Solving Fractional Order Optimal Control Problems in RIOTS95 . A General-Purpose Optimal Control Problems Solver. In: *Proceedings of the 3rd IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*. Turkey, 2008
- [TC10] TRICAUD, C. ; CHEN, Y.Q.: An approximate method for numerically solving fractional order optimal control problems of general

- form. In: *Computers and Mathematics with Applications* 59 (2010), Nr. 5, S. 1644–1655
- [TGSY95] TIKHONOV, A.N. ; GONCHARSKY, A. ; STEPANOV, V.V. ; YAGOLA, A.G.: *Numerical methods for the solution of ill-posed problems*. Dordrecht, Boston, London : Springer, 1995 (Mathematics and Its Applications)
- [Tit48] TITCHMARSH, E.C.: *Introduction to Theory of Fourier Integrals*. Oxford at the Clarendon Press, 1948
- [TKT02] TRÖLTZSCH, U. ; KANOUN, O. ; TRÄNKLER, H.-R.: Characterizing aging effects of lithium ion batteries by impedance spectroscopy. In: *Electrochimica Acta* 51 (2002), Nr. 8-9, S. 1664–1672
- [TM11] TRIGEASSOU, J.C. ; MAAMRI, N.: Initial conditions and Initialization of linear fractional differential equations. In: *Signal Processing* 91 (2011), S. 427–436
- [Trö05] TRÖLTZSCH, U.: *Modellbasierte Zustandsdiagnose von Gerätebatterien*, Universität der Bundeswehr München, Diss., 2005
- [TR15] TANIM, T.R. ; RAHN, C.D.: Aging formula for lithium ion batteries with solid electrolyte interphase layer growth. In: *Journal of Power Sources* 294 (2015), S. 239–247
- [Tót10] TÓTH, R.: *Modeling and Identification of Linear Parameter-Varying Systems*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2010 (Lecture Notes in Control and Information Sciences 403)
- [TWC15] TANG, X. ; WANG, Y. ; CHEN, Z.: A method for state-of-charge estimation of LiFePO₄ batteries based on a dual-circuit state observer. In: *Journal of Power Sources* 296 (2015), S. 23–29
- [Unb93] UNBEHAUEN, R.: *Systemtheorie*. München, Wien : R. Oldenbourg Verlag, 1993
- [VC11] VALÉRIO, D. ; COSTA, J.S. da: Variable-order fractional derivatives and their numerical approximations. In: *Signal Processing* 91 (2011), Nr. 3, S. 470–483
- [VHPF00] VINAGRE, B.M ; HERNÁNDES, A. ; PODLUBNY, I. ; FELIU, V.: Some approximations of fractional order operators used in control theory. In: *Fractional Calculus and Applied Analysis* 3 (2000), Nr. 3, S. 231–148
- [VMGO13] VICTOR, S. ; MALTI, R. ; GARNIER, H. ; OSTALOUP, A.: Parameter and differentiation order estimation in fractional models. In: *Automatica* 49 (2013), S. 926–935

- [VNW⁺05] VETTER, J. ; NOVAK, P. ; WAGNER, M.R. ; VEIT, C. ; MÖLLER, K.-C. ; BESENHARD, J.O. ; WINTER, M. ; WOHLFAHRT-MEHRENS, M. ; VOGLER, C. ; HAMMOUCHE, A.: Aging mechanisms in lithium-ion batteries. In: *Journal of Power Sources* 147 (2005), Nr. 1-2, S. 269–281
- [Wag13] WAGNER, K.W.: Zur Theorie der unvollkommenen Dielektrika. In: *Analen der Physik* 40 (1913), S. 818–1855
- [WCBH11] WILSON, J.R. ; CRONIN, J.S. ; BARNETT, S.A. ; HARRIS, S.J.: Measurement of three-dimensional microstructure in a LiCoO₂ positive electrode. In: *Journal of Power Sources* 196 (2011), S. 3443–3447
- [WFS14] WAAG, W. ; FLEISCHER, C. ; SAUER, D.U.: Critical review of the methods for monitoring of lithium-ion batteries in electric and hybrid vehicles. In: *Journal of Power Sources* 258 (2014), S. 321 – 339
- [WGDIT16] WEISS, M. ; GANTENBEIN, S. ; DIPPON, M. ; IVERS-TIFFÉE, E.: Capacity degradation of automotive Lithium-Ion Batteries. In: *Kraftwerk Batterie*. Münster, Germany, 2016
- [Whi04] WHITTINGHAM, M.S.: Lithium Batteries and Cathode Materials. In: *Chemical Reviews* 104 (2004), Nr. 10, S. 4271–4302
- [WLHG⁺11] WANG, J. ; LIU, P. ; HICKS-GARNER, J. ; SHERMAN, E. ; SOUKIAZIAN, S. ; VERBRUGGE, M. ; TATARIA, H. ; MUSSER, J. ; FINAMORE, P.: Cycle-life model for graphite-LiFePO₄ cells. In: *Journal of Power Sources* 196 (2011), Nr. 8, S. 3942–3948
- [WLL⁺17] WANG, B. ; LIU, Z. ; LI, S.E. ; MOURA, S.J. ; PENG, H.: State-of-Charge Estimation for Lithium-Ion Batteries Based on a Nonlinear Fractional Model. In: *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 25 (2017), S. 3–11
- [WSCY11] WIDODO, A. ; SHIM, M.-C. ; CAESARENDRA, W. ; YANG, B.-S.: Intelligent prognostics for battery health monitoring based on sample entropy. In: *Expert Systems with Applications* 38 (2011), Nr. 9, S. 11763–11769
- [XLZ14] XU, D. ; LI, Y. ; ZHOU, W.: Controllability and Observability of Fractional Linear Systems with Two Different Orders. In: *Hindawi Publishing Corporation, The Scientific World Journal* (2014), S. 1–8
- [XMCC13] XU, J. ; MI, C.C. ; CAO, B. ; CAO, J.: A new method to estimate the state of charge of lithium-ion batteries based on the battery impedance model. In: *Journal of Power Sources* 233 (2013), S. 277–284

- [ZHML15] ZOU, Y. ; HU, X. ; MA, H. ; LI, S.E.: Combined State of Charge and State of Health estimation over lithium-ion battery cell cycle life-span for electric vehicles. In: *Journal of Power Sources* 273 (2015), S. 793–803

Eigene Veröffentlichungen und Tagungsbeiträge

- [Eck15] ECKERT, M.: Modellbasierte Identifikation fraktionaler Batteriesysteme. In: *EEl Kolloquium*. Universität Erlangen-Nürnberg, 2015
- [ECS⁺12] ECKERT, M. ; CASPAR, M ; SCHMIDT, J.P. ; IVERS-TIFFÉE, E. ; HOHMANN, S.: Clusterbased Online/Offline State of Charge Diagnosis for Lithium-Ion Battery Stacks. In: *Kraftwerk Batterie*. Münster, 2012
- [EH13] ECKERT, M. ; HOHMANN, S.: Fractional Identification of the State of Charge of a Li-Ion Battery Cell. In: *Kraftwerk Batterie*. Aachen, 2013
- [EH15] ECKERT, M. ; HOHMANN, S.: Modellbasierte Identifikation fraktionaler Systeme. In: *49. Regelungstechnisches Kolloquium*. Boppard, 2015
- [EKH14a] ECKERT, M. ; KUPPER, M. ; HOHMANN, S.: Fraktionale Systemidentifikation von Batteriezellen mit Hilfe von Modulationsfunktionen. In: *GMA-Fachausschuss 1.30*. Salzburg, 2014
- [EKH14b] ECKERT, M. ; KUPPER, M. ; HOHMANN, S.: Functional Fractional Calculus for Battery Identification. In: *International Workshop on Impedance Spectroscopy (IWIS)*. Chemnitz : Chemnitz University of Technology, 2014
- [EKH14c] ECKERT, M. ; KUPPER, M. ; HOHMANN, S.: Functional Fractional Calculus for System Identification of Battery Cells. In: *at - Automatisierungstechnik* 62 (2014), Nr. 4, S. 272–281
- [EKH15] ECKERT, M. ; KÖLSCH, L. ; HOHMANN, S.: Fractional Algebraic Identification of the Distribution of Relaxation Times of Battery Cells. In: *Conference on Decision and Control (CDC)*. Osaka, Japan, December 2015, S. 2101–2108
- [ESSH17] ECKERT, M. ; STARK, O. ; STOJKOVIC, A. ; HOHMANN, S.: Fraktionale Zeitbereichsidentifikation einer Lithium-Ionen Zelle mit realen Messdaten. In: *8. VDI/VDE Fachtagung „AUTOREG 2017 - Automatisiertes Fahren und vernetzte Mobilität“*. Berlin, 2017, S. 213–222
- [EXH12] ECKERT, M. ; XIAO, C.N. ; HOHMANN, S.: Fractional Identification of the State of Charge of a Li-Ion Battery Cell. In: *International Workshop on Impedance Spectroscopy (IWIS)*. Chemnitz : Chemnitz University of Technology, 2012

Betreute studentische Arbeiten

- [Chr12] CHRIST, T.: *Modellbasierte Schätzung des Ladezustands von Li-Ionen Batteriepacks*, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Diplomarbeit, 2012
- [Hie12] HIENDRIANA, D.: *Rapid Prototyping von SOC-Algorithmen für Batterie-Management-Systeme*, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2012
- [Hor15] HORN, T.: *Numerische Bestimmung einer optimalen Steuerung für ein fraktionales System in Zustandsdarstellung*, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Masterarbeit, 2015
- [Köll13] KÖLSCH, L.: *Untersuchung algebraischer Identifikationsverfahren für fraktionale Systeme*, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2013
- [Kro12] KRONENWETT, N.: *Identifikation eines nichtparametrischen Batteriemodells*, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2012
- [Kup13] KUPPER, M.: *Parameteridentifikation eines fraktionalen Systems mit der Hilfe von Modulationsfunktionen*, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Masterarbeit, 2013
- [Ott11] OTTEN, J.: *Elektrochemische Modellierung und Ladezustandsbestimmung einer Lithium-Ionen-Zelle*, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2011
- [Rey13] REY, F.: *Identification of Fractional Systems via Model Generated Method Functions*, Karlsruhe Institute of Technology (KIT), Master Thesis, 2013
- [Sch15] SCHÖNFELDT, M.: *Verbesserung der modellbasierten Identifikation fraktionaler Batterieparameter durch die Tikhonov-Regularisierung*, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2015
- [Sto15] STOJKOVIC, A.: *Fraktionale Identifikation von Batterieparametern mit Hilfe von Modulationsfunktionen*, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2015
- [Sys13] SYSKOWSKI, P.: *Fraktionale Parameteridentifikation einer Lithium-Ionen Batteriezelle*, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2013
- [Vos11] VOSS, S.: *Modellgestützte Schätzung des Ladezustands von Li-Ionen-Batterien*, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2011
- [Wur13] WURST, C.: *Validierung von Algorithmen zur Parameteridentifikation von Li-Ionen-Batteriezellen*, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2013
- [Xia12] XIAO, C.N.: *Fractional Battery Modelling and Parameter Estimation*, Karlsruhe Institute of Technology (KIT), Bachelorarbeit, 2012

In dieser Arbeit werden modellbasierte Verfahren zur Identifikation physikalischer Alterungsparameter einer Lithium-Ionen-Batterie entworfen. Die Methoden sind in der Lage, die Parameter direkt im laufenden Betrieb zu identifizieren. Dadurch sind sie ein wichtiger Baustein für einen möglichst optimalen Einsatz der Batterie in der Elektromobilität.

Die Methoden basieren auf fraktionalen Impedanzmodellen, die den Vorteil haben, dass sie eine geringe strukturelle Komplexität besitzen und zudem physikalisch motiviert sind. Es werden drei gesamtheitlich neue Verfahren entworfen. Im Unterschied zum State-of-the-Art agieren die Ansätze als late-lumping Verfahren, d.h. es erfolgt keine Approximation der fraktionalen Impedanz mit gewöhnlichen Modellen. Die Verfahren gelten allgemein für fraktionale Systeme und sind daher nicht nur auf die Batterie beschränkt.

Die Arbeit ist in zwei fundamentale Beiträge unterteilt. Zunächst werden die fraktionale Methode der Modulationsfunktionen und das algebraische Verfahren für fraktionale Systeme theoretisch hergeleitet und für die Batterieidentifikation angewendet. Problematisch bei der Methode der Modulationsfunktionen sind die Heuristiken zum Finden einer passenden Modulationsfunktion. Daher wird das Verfahren anschließend im zweiten Teil theoretisch zu einer steuerungsbasierten Bestimmung der Modulationsfunktion weiterentwickelt. In diesem Zusammenhang erfolgt die Erweiterung der Systemtheorie zeitvarianter fraktionaler Systeme um die Steuerbarkeitsanalyse und die Synthese energieoptimaler Steuerungen.