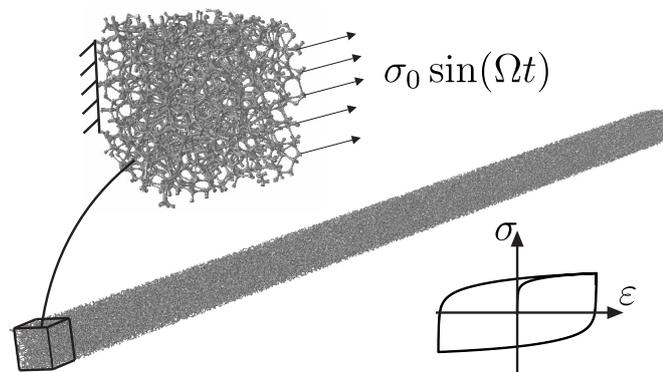


Dissertation

Multiskalenmodellierung der Dämpfung und Ermüdung von heterogenen Metallschaumstrukturen



Dipl.-Ing. Maximilian Geißendörfer

Abbildung auf der Titelseite: Schematische Darstellung der Multiskalenmodellierung

Multiskalenmodellierung der Dämpfung und Ermüdung von heterogenen Metallschaumstrukturen

Zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften

der
Fakultät für Maschinenbau
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

genehmigte
Dissertation

von

Dipl.-Ing. Maximilian Geißendörfer
aus Kitzingen

Tag der mündlichen Prüfung:
Hauptreferent:
Korreferent:

21. November 2017
Prof. Dr.-Ing. Carsten Proppe
Prof. Dr.-Ing. Steffen Marburg

Kurzfassung

Metallschäume zeichnen sich unter anderem durch eine gute Dämpfung von Schwingungen aus. Einer der dazu beitragenden Mechanismen ist die Mikroplastizität, die neben Dämpfung aber auch Materialermüdung bewirkt. Dieser Aspekt motiviert die vorliegende Arbeit, die die Modellierung und Simulation von Dämpfung und getrennt davon die Materialermüdung von heterogenen, offenzelligen Metallschaumstrukturen mittels einer Multiskalenmodellierung beinhaltet. Ziel ist die Untersuchung des Einflusses der Mikroplastizität in einer heterogenen Mikrostruktur auf das makroskopische Verhalten einfacher Strukturen hinsichtlich Dämpfung und Schadensakkumulation während der Lebensdauer des Materials.

Zur Erstellung geeigneter Mikrostrukturen werden sowohl VORONOI-Schäume als auch Schäume basierend auf Daten von realen Aluminiumschäumen im Rahmen einer FEM-Modellierung generiert. Auf der mesoskopischen Skala erfolgt die Homogenisierung der Steifigkeits- und Dämpfungsparameter. Dabei zeigt sich für letztere ein nichtlineares Verhalten in Abhängigkeit der Belastungsamplitude. Außerdem wird ein iteratives Schema zur Bestimmung von randeffektunabhängigen Parametern angewendet. Zur Berechnung der Schadensakkumulation während der Lebensdauer wird ein auf der Steifigkeit basierender Algorithmus vorgestellt und ein Versagenkriterium definiert. Makroskopische Realisierungen werden mit Hilfe der KARHUNEN-LOÈVE-Zerlegung und einer *wavelet*-GALERKIN-Methode generiert. Im Rahmen einer MONTE-CARLO-Simulation wird schließlich das Dämpfungs- und Lebensdauerverhalten von einfachen, makroskopischen Strukturen berechnet.

Ein Vergleich des aufgebauten Multiskalenmodells mit vollskalierten Stichproben zeigt qualitative und quantitative Übereinstimmungen in der Dämpfungsberechnung. Der Verlauf der Steifigkeit während der Lebensdauer wird ebenfalls qualitativ richtig wiedergegeben. Es zeigen sich allerdings quantitative Differenzen, die auf das implementierte mesoskopische Modell zurückzuführen sind.

In einer Parameterstudie werden Einflüsse verschiedener Modellannahmen und Materialparameter auf das Verhalten der Metallschaummodelle untersucht. In abschließenden Fallstudien werden verschiedene Aspekte sowohl an gedämpften als auch an materialermüdeten Balken untersucht und aufgezeigt.

Die vorliegende Arbeit zeigt, dass die Dämpfung aufgrund von Mikroplastizität nicht immer vernachlässigt werden kann. Allerdings wird dies durch die heterogene Mikrostruktur nur unwesentlich beeinflusst. Im Vergleich dazu wird die Versagenslastspielzahl aufgrund der Heterogenität um bis zu $\sim 36\%$ herabgesetzt. Zudem können sich die Versagensstellen im Vergleich zu homogenen Strukturen entscheidend ändern.

Danksagung

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Technische Mechanik, Bereich Dynamik/Mechatronik des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT) in den Jahren 2012 bis 2017.

Ein herzliches Dankeschön gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Carsten Proppe für die Anregung zum Thema und Betreuung der Arbeit sowie der Übernahme des Hauptreferates. Seine Unterstützung und Förderung habe ich stets sehr geschätzt, nicht zuletzt weil er mir die Möglichkeit bot, mich auf Konferenzen mit Kollegen weltweit wissenschaftlich auszutauschen. Ebenso bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Steffen Marburg von der Technischen Universität München für die Übernahme des Korreferates und die wertvollen Anmerkungen.

Bei Frau Prof. Dr. rer. nat. Britta Nestler bedanke ich mich für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes, für das entgegengebrachte Interesse an meiner Arbeit sowie für die Durchführung des Promotionsprozesses.

Ebenfalls danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Seemann und Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Fidlin für die anregenden Fragen und Diskussionsbereitschaft im Rahmen der Abteilungsseminare.

Allen Kollegen am Institut für Technische Mechanik möchte ich herzlich für die angenehme Arbeitsatmosphäre und Kollegialität danken. Ganz besonders gilt Herrn Dipl.-Ing. Maximilian Koebele größter Dank für die interessanten wissenschaftlichen Diskussionen und dem Korrekturlesen meiner Dissertation.

Abschließend möchte ich mich ganz herzlich bei meinen Eltern bedanken, ohne deren Unterstützung ich mich nicht in diesem Maße auf mein Ingenieurstudium konzentrieren hätte können, was den Grundstein für meine Promotion gelegt hat.

Zu guter Letzt gilt aber der größte Dank meiner Frau Katharina, die mich mit ihrem Zuspruch in den letzten fünf Jahren stets motiviert hat, insbesondere in der Zeit der Anfertigung der Dissertation. Vielen Dank für alles!

Karlsruhe, den 17. Dezember 2017
Dipl.-Ing. Maximilian Geißendörfer

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	IX
Symbolverzeichnis	XV
Abkürzungsverzeichnis	XXI
1 Einleitung	1
1.1 Motivation der Arbeit	1
1.2 Allgemeines zu Metallschäumen	4
1.2.1 Charakterisierung	4
1.2.2 Deformationsverhalten	5
1.3 Aktueller Forschungsstand	6
1.3.1 Dämpfung in Metallschäumen	6
1.3.2 Lebensdauer von Metallschäumen	12
1.3.3 Stochastische Finite-Elemente-Methode	14
1.4 Ziel und Aufbau der Arbeit	16
2 Modellierung auf verschiedenen Größenskalen	19
2.1 Allgemeines Prinzip	19
2.2 Mesoskopische Modellbeschreibung	22
2.2.1 Festkörpermechanik eines Volumenelements	23
2.2.2 Statistisches Volumenelement	27
2.2.3 Dämpfung	31
2.2.4 Lebensdauerverhalten	33
2.3 Makroskopische Kontinuumsschwingungen	35
3 Mikrostruktur	39
3.1 Erzeugen von Eingangsdaten	39
3.1.1 VORONOI-Schäume	39
3.1.2 Reale Aluminiumschäume	39
3.2 Erstellung der Mikrostruktur	40
4 Mesoskopisches Modell	43
4.1 Homogenisierung der Steifigkeit	43
4.2 Homogenisierung der Dämpfung	49
4.3 Homogenisierung randeffektunabhängiger Materialparameter	59
4.3.1 Allgemeines Prinzip	61
4.3.2 Validierung	66
4.4 Randeffektunabhängiger Elastizitätsmodul	69
4.5 Randeffektunabhängiger Dämpfungsparameter	72
4.6 Berechnung der Lebensdauer	74

4.7	Korrelation der Parameter	82
5	Makroskopisches Modell	85
5.1	Diskretisierung der Zufallsfelder	85
5.2	Einbeziehung der Lebensdauer	91
5.3	MONTE-CARLO Simulation	94
5.3.1	Dämpfungsrechnung	94
5.3.2	Lebensdauerberechnung	95
6	Vergleich mit einem Vollskalenmodell	97
6.1	Zugstab mit Dämpfung	98
6.2	Zugstab mit Materialermüdung	99
7	Parameterstudien	103
7.1	Einfluss der Masse	103
7.2	Einfluss der Zwischenelemente	105
7.3	Einfluss der relativen Dichte	106
7.4	Einfluss elastischer und plastischer Materialparameter	106
8	Fallstudien	109
8.1	Dämpfung einseitig eingespannter Stäbe	109
8.2	Versagensverhalten einseitig eingespannter Stäbe	112
9	Zusammenfassung und Ausblick	119
	Abbildungsverzeichnis	123
	Tabellenverzeichnis	125
	Literaturverzeichnis	127

Symbolverzeichnis

Symbole

\mathbb{A}	Lokalisierungstensor	[]
A	Fläche	[m ²]
\mathbb{B}	Lokalisierungstensor	[]
\mathbb{C}	Steifigkeitstensor	[$\frac{N}{m^2}$]
\mathfrak{C}	Steifigkeits-Differentialoperator	[]
c	Steifigkeitskonstante	[$\frac{N}{m}$]
\mathfrak{D}	Dämpfungs-Differentialoperator	[]
d	Mesoskopische Länge	[m]
D_{LEHR}	LEHR'sches Dämpfungsmaß	[$\frac{1}{s}$]
d_{makro}	Makroskopische Dämpfung	[]
\mathbf{E}	Verzerrungstensor nach GREEN	[]
\mathcal{E}	Erwartungswert	[]
E	Elastizitätsmodul	[$\frac{N}{m^2}$]
E_d	Dissipierte Energie	[Nm]
E_e	Elastisch gespeicherte Energie	[Nm]
\mathbf{F}	Deformationsgradient	[]
\mathcal{F}	Verteilungsfunktion/Versagensfunktion	[]
\mathfrak{F}	Fließbedingung	[]
f	Dichtefunktion	[]
F	Kraft	[N]
f	Frequenz	[$\frac{1}{s}$]

G	Schubmodul	$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right]$
\mathbf{H}	Verschiebungsgradient	$[\]$
\mathcal{H}	relative Häufigkeit	$[\]$
h	Hazard-Funktion	$[\]$
\mathbb{I}	Einheitstensor 4. Stufe	$[\]$
\mathbf{I}	Einheitstensor 2. Stufe	$[\]$
I	Flächenträgheitsmoment	$[\text{m}^4]$
\mathcal{K}	Kovarianz	$[\]$
L	Makroskopische Länge	$[\text{m}]$
l	Mikroskopische Länge	$[\text{m}]$
\mathfrak{M}	Masse-Differentialoperator	$[\]$
m	Masse	$[\text{kg}]$
\mathbf{n}	Normalenvektor	$[\]$
N	Lastspielzahl	$[\]$
N_V	Versagenslastspielzahl	$[\]$
\mathcal{P}	Wahrscheinlichkeit	$[\]$
P	Porosität	$[\]$
\mathcal{R}	Korrelation	$[\]$
\Re	Realteil	$[\]$
R	Spannungsverhältnis	$[\]$
R_F	Fließgrenze	$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right]$
R_M	Streckgrenze	$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right]$
R_{p02}	0, 2%-Fließgrenze	$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right]$
\mathbb{S}	Nachgiebigkeitstensor	$\left[\frac{\text{m}^2}{\text{N}}\right]$
\mathcal{S}	Standardabweichung	$[\]$
S	Schädigungsparameter	$[\]$

\mathbf{t}	Spannungsvektor	$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right]$
T	Schwingungsdauer	[s]
t	Zeit	[s]
\mathbf{u}	Verschiebungsvektor	[m]
\mathcal{V}	Varianz	[]
V	Volumen	$[\text{m}^3]$
\mathbf{X}	Anfangsplatzierung	[m]
\mathbf{x}	Momentanplatzierung	[m]
X	Zufallszahl	[]
x_V	Versagensstelle	[m]
\mathcal{Z}	Zuverlässigkeitsfunktion	[]

Griechische Symbole

α	Steifigkeitsfaktor	[]
β	Massefaktor	[]
$\mathbf{\Gamma}$	Kovarianzmatrix	[]
Γ	Korrelationskoeffizient	[]
γ	Variationskoeffizient	[]
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Linearer Verzerrungstensor	[]
η	Dämpfung	[]
ζ	Skalierungsfaktor	[]
θ	Elementarereignis	[]
λ	Eigenwert	[]
μ	Mittelwert	[]
ν	Querkontraktion	[]
ϕ	Phasenverschiebung	[]
φ	Eigenfunktion	[m]

ρ	Dichte	$\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$
ρ_A	Dichte Ausgangsmaterial	$\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$
ρ_{rel}	Relative Dichte	[]
ρ_S	Dichte Schaum	$\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$
σ	Spannungstensor nach CAUCHY	$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$
σ	Standardabweichung	[]
σ_m	Streckgrenze	$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$
σ_{MISES}	Vergleichsspannung nach VON MISES	$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$
σ_D	Dauerschwingfestigkeit	$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$
σ_{Vgl}	Vergleichsspannung	$\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$
ψ	Basisfunktion	[]
Ω	Kreisfrequenz	$\left[\frac{1}{\text{s}} \right]$
ω_0	Ungedämpfte Eigenkreisfrequenz	$\left[\frac{1}{\text{s}} \right]$

Indizes

x_B	Zustand bei Biegung
x_D	Zustand bei Dehnung
x_e	Elastischer Zustand
x_{eff}	Effektive Größe
x_{gen}	Generalisierte Größe
x^{hKURB}	Zustand bei hKURB
x^{hSURB}	Zustand bei hSURB
x^{KURB}	Zustand bei KURB
x_{krit}	Kritischer Zustand
x_p	Plastischer Zustand
x_r	Zustand nach Entlastung

x^{SURB}	Zustand bei SURB
$\langle x \rangle$	Volumenmittelwert
\bar{x}	Gemittelttes Feld
Δx	Differenz
\hat{x}	Amplitude
\tilde{x}	Elastische Vergleichsgröße
x'	Fluktuierendes Feld
x^*	Scheinbare Größe
x^0	Standardisiertes Zufallsfeld
x_0	Mesoskopischer Zustand

Abkürzungsverzeichnis

CT	Computertomographie
FEM	Finite-Elemente-Methode
hKURB	harmonische, kinematisch uniforme Randbedingungen
hSURB	harmonische, spannungsuniforme Randbedingungen
HVE	homogenisiertes Volumenelement
KL-Zerlegung	KARHUNEN-LOÈVE-Zerlegung
KURB	kinematisch uniforme Randbedingungen
MPZ	mikroplastische Zonen
MSM	Multiskalenmodell
MVE	Mittelungsvolumenelement
OGRB	orthogonal gemischte Randbedingungen
RVE	repräsentatives Volumenelement
SFEM	stochastische Finite-Elemente-Methode
SURB	spannungsuniforme Randbedingungen
SVE	statistisches Volumenelement
VE	Volumenelement
VSM	Vollskalenmodell
ZE	Zwischenelemente

1 Einleitung

Zur einleitenden Hinführung in die Thematik wird die vorliegende Arbeit zunächst motiviert, indem die Vor- und Nachteile von Metallschäumen für den technischen Einsatz aufgezeigt werden und ein Überblick über Anwendungsgebiete gegeben wird. Zudem werden die wichtigsten Grundbegriffe zur Beschreibung von Metallschäumen eingeführt. Im darauf folgenden Abschnitt wird auf den für diese Arbeit relevanten aktuellen Forschungsstand eingegangen. Dies umfasst zum einen die Dämpfung und zum anderen das Ermüdungsverhalten von Metallschäumen. Da darin gezeigt werden wird, dass die Modellierung dieser beider Aspekte stochastische Ansätze benötigt, wird zudem ein Überblick über grundlegende veröffentlichte Arbeiten zur stochastischen Modellierung gegeben. Am Ende der Einleitung werden die Ziele dieser Dissertation formuliert und in den Kontext offener Forschungsfragen eingeordnet.

1.1 Motivation der Arbeit

Zellulare Materialien treten in der Natur vielfach auf, wie z.B. Holz, Pflanzenblätter, Schäume, Korallen, Bienenwaben oder Knochen. Es gibt gute Gründe, warum sich zellulare Materialien im Laufe der Evolution in der Natur bewährt haben. So verwendet die Natur beispielsweise die im Verhältnis zur Steifigkeit geringe Dichte von zellularen Materialien für Leichtbau von Bäumen oder Skeletten und nutzt die zellulare Eigenschaft gleichzeitig für den Transport von Flüssigkeiten aus. Auch der Mensch erkannte schon in der Antike die Vorteile dieser Materialien und verwendet sie bis heute in verschiedenen Bereichen, von Verpackungen und Polsterungen über Korken und Holz bis hin zu Brot und Kuchen [6]. So nutzten die Ägypter bereits 2600 v. Chr. die Schwimmfähigkeit von zellularen Materialien für ihre Holzboote. Später erkannten die Römer die positiven Eigenschaften von zellularen Materialien, indem sie Kork für Schuhsohlen oder Flaschenverschlüsse verwendeten [27]. Ebenso erfolgte schon relativ früh eine wissenschaftliche Herangehensweise zur Untersuchung von zellularen Materialien, indem etwa HOOKE 1664 die mikrostrukturellen Formen unter dem Mikroskop untersuchte [52] und DARWIN im Jahr 1859 über deren Herkunft und Funktion spekulierte [16]. KELVIN begann im Jahr 1887 die Packungsdichte von zellularen Materialien in der Arbeit [112] zu untersuchen [28]. In der Neuzeit werden die positiven Eigenschaften der natürlichen Materialien gezielt auf synthetisch hergestellte, zellulare Materialien übertragen. Eine große Gruppe bilden dabei Schäume, die aus Metallen, Polymeren, Keramiken und Gläsern hergestellt werden können. In dieser Arbeit sind ausschließlich Metallschäume Gegenstand der Betrachtungen.

Die Vorteile von zellularen Materialien im Allgemeinen und Metallschäumen im Speziellen gegenüber Vollmaterialien decken eine große Bandbreite ab. So besitzen Metallschäume eine hohe Steifigkeit bei geringer Dichte, was beispielsweise für den Leichtbau eine zentrale

Kenngroße ist. Aufgrund der Hohlräume in Metallschäumen lassen sich diese zudem extrem stauchen. Daher besitzen Metallschäume ein hohes Potential an Energieabsorption, was z.B. für Crashbauteile verwendet wird. Des Weiteren resultiert aus ihrer Porosität ein hoher Oberflächenanteil im Verhältnis zum Volumen, was für chemische und fluidmechanische Anwendungen von Interesse sein kann. Zudem bewirkt die Porosität einen hohen Dämpfungsgrad und eine hohe Geräuschabsorption, weshalb sich Metallschäume durch gute Dämpfung von mechanischen und akustischen Schwingungen auszeichnen. Außerdem zeigen Metallschäume eine geringe thermische und elektrische Leitfähigkeit auf, sind nicht toxisch, nicht brennbar, recyclebar, schwimmfähig und besitzen einen hohen Reibungskoeffizienten [7, 28]. Daneben können bei Schäumen, im Gegensatz zu metallischen Vollmaterialien, bei Bedarf eine Vielzahl der genannten Eigenschaften gleichzeitig genutzt werden. Diese kurzgefasste Auflistung zeigt bereits, dass Metallschäume unter Ausnutzung ihrer vielseitigen Eigenschaften in verschiedensten Anwendungen zum Einsatz kommen können, wie Tabelle 1.1 zeigt.

Neben den aufgeführten Vorteilen bringen Metallschäume durch ihre komplexe und heterogene Struktur jedoch auch Schwierigkeiten mit sich. In der Herstellung besteht die Problematik der Kontrollierbarkeit von Keimbildung und -wachstum in der Schmelze, der Hinzugabe eines Zusatzstoffes zur Bildung von Poren oder der Einstellung einer gewünschten Materialsymmetrie. Auch wenn Metallschaumstrukturen nicht identisch hergestellt werden können, so ist zumindest eine gewisse Reproduzierbarkeit zu gewährleisten. Außerdem sind Fehlstellen, wie Risse oder Löcher in den Zellwänden zu vermeiden [17]. In der Verarbeitung stellen sich ebenfalls Herausforderungen, sowohl in den spanenden als auch in den nicht spanenden Verarbeitungsschritten. So zerstört beispielsweise eine Bohrung Zellwände und weist keine glatten Innenwände auf. Auch verbindende Verarbeitungsschritte, wie Schweißen oder Löten, sind der porösen Struktur anzupassen. Zudem stellen sich spezifische Problematiken in der Auslegung bezüglich äußerer Bedingungen, Lastkollektiven oder Lebensdauer. Zur Simulation von Metallschäumen sind eigene Modelle zu entwickeln, die sich von den klassischen, deterministischen Modellen zur Berechnung von Vollmaterialien unterscheiden. Ein Schaum ist für sich genommen aufgrund seiner heterogenen Mikrostruktur ein Unikat. Dadurch werden die Eigenschaften eines Bauteils beeinflusst und es treten zwangsweise Streuungen zwischen nominell gleichen Bauteilen auf. Für eine gewünschte zuverlässige Aussage über das Bauteilverhalten und zur Berücksichtigung der Streuung sind daher probabilistische Modelle zu entwickeln. Schäume mit periodischer Mikrostruktur, wie sie zum Beispiel mit 3D-Druckern hergestellt werden können, sind von der Problematik natürlich ausgenommen und auch nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Neben den technischen Aspekten sind die meisten Metallschäume, verglichen mit herkömmlichen Vollmaterialien, zudem noch wirtschaftlich unrentabel, sodass es bisher meist Spezialgebiete sind, in denen sie zum Einsatz kommen.

Wie aus den Anwendungsbeispielen in Tabelle 1.1 deutlich wird, treten in einer Vielzahl der Anwendungen unumgebar Schwingungen auf, was mehrere Folgen nach sich ziehen kann. Zum einen kann der Metallschaum dadurch abhängig von den äußeren Gegebenheiten dämpfend wirken. Zum anderen führen die Schwinglastspiele je nach Amplitude zu nachhaltigen Veränderungen in der Mikrostruktur der Metallschäume, was zu einer

Eigenschaft	Anwendungsbeispiele	Quellen
Hohes Verhältnis von Steifigkeit zu Dichte	Karosseriepaneele Sandwichbauteile	[86]
Hohes Verhältnis von Oberfläche zu Volumen	Katalysatoren Filter Elektroden Wärmetauscher CO ² -Wäscher	[3, 7]
Hohe Energieabsorption	Stoßstangen Verpackungen Schutzhelme	[28, 80]
Hohe Dämpfung	Fräsmaschinen Getriebefundamente	[2]
Geringe Wärmeleitfähigkeit	Heißgetränkebecher Solarenergienutzung Transpirationskühlungen Hohlwanddämmungen Brennkammern Wärmeabschirmungen Kühlwagen Hitzeschilder	[3, 28, 71]
Hohe Geräuschabsorption	Autotüren Schotten Gebäudewände Schallwände	[70]
Geringe elektrische Leitfähigkeit	Funksender Elektrische Abschirmung	[3, 28]
Porosität	Knochenersatz Implantate Entlüftungsschrauben Brennstoffzellen Windschutz	[3, 27]

Tabelle 1.1: Anwendungsbereiche technischer Schäume

zunehmenden Schädigung und einem letztendlichen Versagen führen kann. Bei der Auslegung eines Bauteils aus Metallschaum, das während des Einsatzes dynamischen Lasten ausgesetzt ist, ist es daher notwendig, im Vorfeld Kenntnisse über Dämpfung und Schädigungsverhalten durch Experimente oder Simulationen zu erlangen. Letztere beanspruchen im Vergleich zu Experimenten im Allgemeinen weniger Zeit und Ressourcen und tragen so

zur besseren Wirtschaftlichkeit von Metallschäumen bei. Dieser Aspekt bildet die Thematik der vorliegenden Arbeit, die sich mit der Modellbildung und Simulation von Dämpfung und Lebensdauerverhalten von Metallschäumen beschäftigt. Die genauen Ziele und der Aufbau dieser Arbeit sind in Abschnitt 1.4 formuliert.

1.2 Allgemeines zu Metallschäumen

In diesem Abschnitt werden grundlegende Begriffe und Charakteristika zu Metallschäumen erläutert, die zum Verständnis für die vorliegende Arbeit notwendig sind. Für darüber hinausgehende Grundlagen, die für diese Arbeit nicht benötigt werden, sei an dieser Stelle auf die Literatur verwiesen. Grundlagen zu Metallschäumen und zellulären Materialien im Allgemeinen sind in [27, 28] zu finden. Einen guten Überblick zu Grundlagen der Herstellung von Metallschäumen ist in [7] und [17] gegeben. Eine Auflistung von verschiedenen Forschungsgebieten zu Metallschäumen können der Arbeit [101] entnommen werden.

1.2.1 Charakterisierung

Für eine eindeutige Beschreibung des Metallschaumes und dessen verschiedener Komponenten sind zuerst einige Begrifflichkeiten einzuführen, die in dieser Arbeit genutzt werden. Wie in der mikrostrukturellen Darstellung in Abbildung 1.1 verdeutlicht, besteht ein Schaum aus einer Vielzahl von *Knoten*, die mit *Stegen* verbunden sind. Sind die Knoten ausschließlich mit Stegen verbunden, so spricht man von einem *offenzelligem Schaum*. Sind die Stege untereinander noch mit Flächen verbunden, so wird von *geschlossenzelligen Schäumen* gesprochen. Eine einzelne Zelle ist demzufolge in einem offenzelligem Schaum mit anderen Zellen verbunden. Bei geschlossenzelligen Schäumen hingegen sind die Zellen durch Wände voneinander getrennt. Das Material, aus dem die Stege bzw. Wände bestehen, wird als *Ausgangsmaterial* des Schaumes bezeichnet. In der Realität treten aufgrund des Herstellungsprozesses unvermeidbare Imperfektionen auf, sodass z.B. bei offenzelligen Schäumen vereinzelt Zellen geschlossen sein können, einzelne Stege fehlen oder deformiert sind. Bei geschlossenzelligen Schäumen hingegen können einzelne Zellwände fehlen, Löcher aufweisen oder ebenfalls deformiert sein.

Es gibt eine Vielzahl von Parametern, mit denen Schäume charakterisiert werden können. Die geometrische Struktur des Schaumes kann wie aufgeführt offene oder geschlossene Zellen aufweisen, die periodisch oder zufällig angeordnet sein können. Eine zufällige Anordnung von Zellen ist zudem durch eine Verteilungsfunktion beschreibbar. Die einzelnen Zellen können des Weiteren durch ihren Volumenanteil, ihre Form, Orientierung, Größe und Seitenverhältnisse charakterisiert werden. Schließlich wird der Schaum durch sein Ausgangsmaterial, dessen chemische Zusammensetzung und mikroskopische Defekte entscheidend beeinflusst [7, 17].

Eine der grundlegenden Größen zur Charakterisierung des Metallschaums ist die relative Dichte

$$\rho_{rel} = \frac{\rho_S}{\rho_A}, \tag{1.1}$$

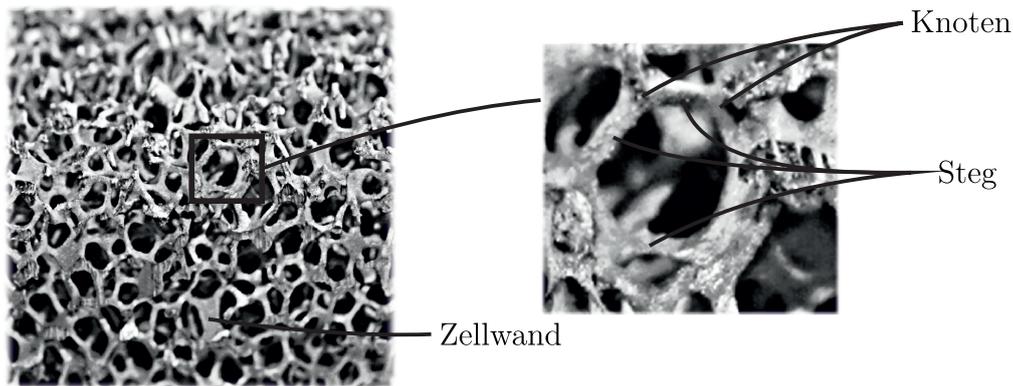


Abbildung 1.1: Zusammensetzung eines offenzelligen Metallschaumes

die die Dichte des Schaumes ρ_S in das Verhältnis zur Dichte des Ausgangsmaterials ρ_A setzt und per definitionem Werte im Intervall $\rho_{rel} = [0, 1]$ annehmen kann. Daneben wird häufig der Begriff der Porosität

$$P = 1 - \rho_{rel} = 1 - \frac{\rho_S}{\rho_A} \quad (1.2)$$

genutzt. Eine hohe Porosität bedeutet folglich eine geringe relative Dichte. Für Metallschäume bewegt sich ρ_{rel} in der Praxis in dem Wertebereich zwischen 0,001 und 0,4 [28]. Alternativ, meist im englischen Sprachgebrauch, wird auch die Anzahl der Zellen pro Längeneinheit (engl. *pores per inch*, PPI) angegeben. Weitere Charakterisierungsgrößen sind der genannten Literatur zu entnehmen, da diese nicht für die vorliegende Arbeit benötigt werden.

1.2.2 Deformationsverhalten

Für ein grundlegendes Verständnis des generell unterschiedlichen Deformationsverhaltens von Metallschäumen im Vergleich zu Vollmaterialien ist in Abbildung 1.2 ein charakteristisches Spannung-Dehnungs-Diagramm aufgezeigt, das sich in vier Bereiche unterteilen lässt. Bereich *I* umfasst linear-elastisches Verhalten, das durch Biegung der Stege und Zellwände gekennzeichnet ist. Bei erhöhter Stauchung schließt sich Bereich *II* an, bei dem ein Spannungsplateau erreicht wird. In diesem Bereich verformen sich die Stege und Zellwände plastisch. Aufgrund der Hohlräume in den Zellen nimmt die plastische Stauchung bei konstanter Spannung stetig zu. Erst wenn der Metallschaum so stark gestaucht ist, dass sich Stege und Zellwände gegenseitig berühren, steigt die Spannung stark an und es kommt zum Versagen. Dieser Bereich des rasanten Spannungsanstiegs wird Densifikation genannt (Bereich *III*) [28]. Bei der Überschreitung der Fließgrenze im Zugbereich (Bereich *IV*) verformt sich der Metallschaum plastisch bis es zur Materialtrennung und damit zum Versagen kommt [45]. Aus dem Diagramm wird auch die gute Energieabsorption von Metallschäumen ersichtlich, die maßgeblich durch die vom Spannungsplateau beeinflusste, absorbierte Energie E_A im Bereich *II* hervorgerufen wird. Vor allem im Bereich der

Stauchung verhält sich ein Metallschaum also grundsätzlich anders als sein Pendant aus Vollmaterial, das sowohl im Zug- als auch Druckbereich qualitativ das gleiche Verhalten aufzeigt.

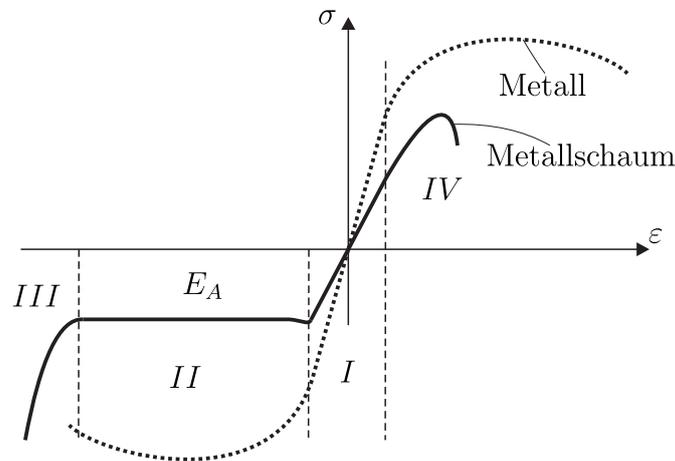


Abbildung 1.2: Qualitatives Deformationsverhalten eines Metallschaumes [17]

1.3 Aktueller Forschungsstand

In diesem Abschnitt wird ein Überblick über den aktuellen Forschungsstand zum Dämpfungs- und Lebensdauerverhalten von Metallschäumen gegeben. Da zur Beschreibung dieser Verhalten stochastische Modellierungsansätze benötigt werden, sind am Ende dieses Abschnittes verschiedene Ansätze zur stochastischen Strukturmodellierung aus der aktuellen Literatur zusammengefasst.

1.3.1 Dämpfung in Metallschäumen

Eine der charakteristischen Eigenschaften von metallischen Schäumen ist die gute Dämpfungseigenschaft, welche auf mehrere zugrundeliegende Mechanismen zurückzuführen ist und sich zunächst in äußere und innere Dämpfung unterteilen lässt (Abbildung 1.3). Innere Dämpfung umfasst energiedissipierende Mechanismen, die innerhalb des Werkstoffs auftreten. Dies beinhaltet, wie in der Abbildung gezeigt, eine Reihe von verschiedenen Phänomenen. Äußere Dämpfung hingegen tritt aufgrund der Geometrie der mikroskopischen Struktur des Metallschaums auf und beschreibt Verluste infolge von Strömungen durch oder innerhalb der Zellen. Im Folgenden werden die dem aktuellen Forschungsstand entsprechenden Ursachen der Dämpfung sowie die experimentell festgestellten Erkenntnisse und analytischen Beschreibungen der Dämpfung erläutert. Dazu werden zunächst verschiedene Dämpfungsgrößen eingeführt und gegeneinander abgegrenzt.

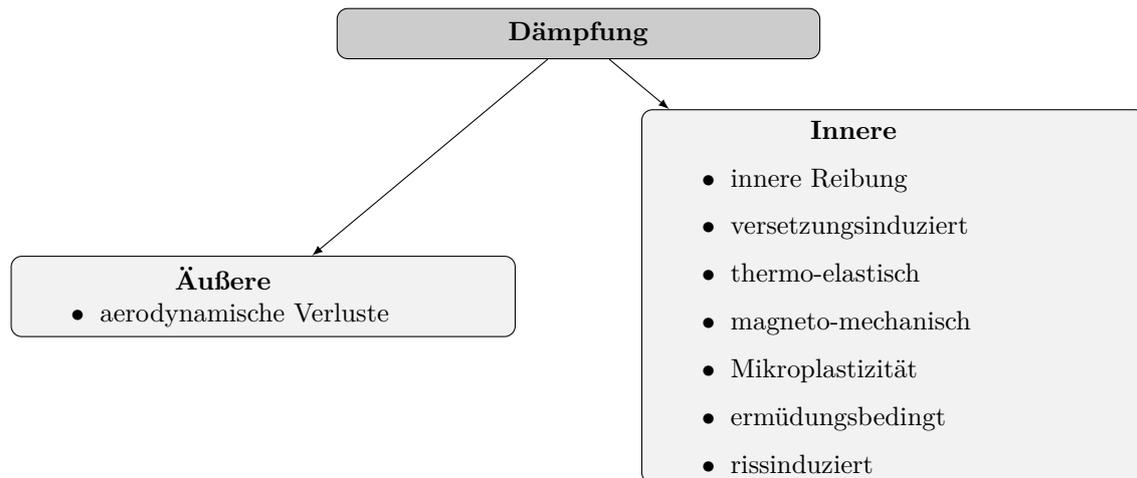


Abbildung 1.3: Unterteilung der Dämpfungsmechanismen [30]

Dämpfungsgrößen

Dämpfung bedeutet Energiedissipation aus einem System. Dabei wird aufgrund des Energieerhaltungssatzes die dem System entzogene Energie in Wärmeenergie umgewandelt. Man unterscheidet dabei zwischen innerer und äußerer Dämpfung. Innere Dämpfung beinhaltet im Wesentlichen die Materialdämpfung, also Dämpfung im Werkstoff aufgrund von Defekten wie Fehlstellen, Korngrenzen oder Versetzungen. Äußere Dämpfung hingegen kann vielseitig hervorgerufen werden, wie etwa durch Reibung, magnetische Felder, Strömungen und vieles mehr. Für die Handhabung wurde in der Vergangenheit eine Vielzahl an phänomenologischen und mathematischen Dämpfungsmodellen und Dämpfungsparametern eingeführt. Nach [59] lassen sich die verschiedenen Dämpfungsparameter zu

$$\eta = \tan(\phi) = 2\omega_0 D_{\text{LEHR}} = \frac{E_d}{2\pi E_e} \quad (1.3)$$

ineinander überführen, wobei der Verlustfaktor η für kleine Dämpfungen ($\eta < 0,1$) gleich der Phasenverschiebung ϕ zwischen Systemein- und ausgang ist. Durch Energiedissipation entsteht zudem eine Hysteresekurve zwischen Systemein- und ausgang. Die Fläche der Hysteresekurve entspricht dabei dem Energieverlust pro Zyklus E_d . Wird Letzteres auf die maximal gespeicherte elastische Energie E_e bezogen, führt dies ebenfalls zum Verlustfaktor η . In dieser Arbeit wird der mesoskopische Dämpfungsparameter ausschließlich mit η bezeichnet.

Innere Dämpfung

Dämpfung aufgrund von innerer Reibung. Wie in metallischen Vollmaterialien tritt innere Reibung in Metallschäumen an Imperfektionen des Werkstoffes auf, was aufgrund der resultierenden Energiedissipation eine dämpfende Wirkung hervorruft. Innere Reibung entsteht aufgrund einer Vielzahl verschiedener Mechanismen. Defekte, die innere Reibungen bewirken, sind beispielsweise Punktdefekte, Korngrenzen oder Zwillingsgrenzen. Ohne an

dieser Stelle weiter ins Detail zu gehen, führen diese Mechanismen zu einer amplitudenunabhängigen, allerdings frequenz- und temperaturabhängigen Dämpfung [62]. Die verschiedenen Defekte führen in unterschiedlichen Frequenz- bzw. Temperaturbereichen zu erhöhter Dämpfung, wodurch frequenz- bzw. temperaturabhängige Dämpfungsspitzen auftreten. Nichtsdestotrotz beträgt die maximale Dämpfung weniger als $\eta = 0,01$, weswegen diese Art der Dämpfung für die meisten Anwendungen vernachlässigt werden kann [62]. Eine genaue Erläuterung der Effekte kann in [10] gefunden werden.

Versetzungsinduzierte Dämpfung. Neben den Imperfektionen im Werkstoff führen reversible, amplitudenabhängige Versetzungsbewegungen zur Dissipation von Energie. Diese Bewegungen werden durch Scherspannungen entlang der Gleitebenen im Werkstoff hervorgerufen. Die daraus resultierende Dämpfung ist frequenzabhängig und es tritt eine Resonanzspitze in der Dämpfung auf [62]. Nach [30] besteht der Hauptunterschied zu den Vollmaterialien in einer höheren Spannung-Dehnungs-Lokalisierung in den Schäumen, weswegen Versetzungsbewegungen nur für kleine Dehnungsamplituden ($\varepsilon < 10^{-4}$) reversibel sind. Für diesen Bereich lässt sich zur Beschreibung der Dämpfung das GRANATO-LÜCKE-Modell heranziehen [35], auf das an dieser Stelle nicht näher eingegangen wird. Nach [67] genügt die versetzungsinduzierte Dämpfung zudem der Proportionalitätsbedingung

$$\eta \sim \frac{P}{D(1-P)} \frac{1}{f} \quad (1.4)$$

mit der Porosität P , der Porengröße D und der Frequenz f . Danach steigt versetzungsinduzierte Dämpfung mit der Porosität und fällt mit anwachsender Porengröße und relativer Dichte.

Thermo-elastische Dämpfung. Ein weiterer dämpfender Mechanismus ist die thermo-elastische Dämpfung, die auch in Vollmaterialien zu beobachten ist und erstmals von ZENER in seinen Veröffentlichungen [117, 118] in den Jahren 1937/38 beschrieben wurde. Thermo-elastische Dämpfung tritt auf, wenn schnelle, inhomogene, elastische Verformungen mit einem Temperaturfeld überlagert werden. Durch die Inhomogenität der Verformung entsteht ein Temperaturgradient, der Wärmeströmungen zur Folge hat. Somit wandelt sich ein Teil der mechanischen Verformungsenergie in Wärmeenergie um, was sich in einem dämpfenden Verhalten des Schaumes äußert. Experimentelle Untersuchungen belegen, dass aufgrund der Wärmeleitfähigkeit von Metallschäumen Dämpfungswerte der Größenordnung $\eta = 10^{-3}$ erreicht werden können [40]. Thermo-elastische Dämpfung ist unabhängig von der Belastungsamplitude, jedoch abhängig von der Frequenz. Analytisch kann die Frequenzabhängigkeit der Dämpfung mit der DEBYE-Kurve

$$\eta = \frac{\pi\alpha^2 ET}{C} \frac{f \cdot f_0}{f^2 + f_0^2} \quad ; \quad f_0 = \frac{\pi\lambda}{2d^2 C} \quad (1.5)$$

mit den Parametern $d, \lambda, C, \alpha, E, T$ für Dicke, thermische Konduktivität, Wärmekapazität, Wärmeausdehnungskoeffizient, Elastizitätsmodul und Temperatur angegeben werden, was mit experimentellen Ergebnissen verglichen wurde [40]. Demnach steigt die Dämpfung aufgrund der thermischen Strömungen im Metall bis zu $f = f_0$ an und fällt danach monoton

mit weiter steigender Frequenz ab. Dies liegt darin begründet, dass für geringe Belastungsfrequenzen kleine Verformungsänderungen und Temperaturgradienten auftreten und somit der Prozess annähernd isotherm bleibt, was eine geringe dissipative Energie zur Folge hat. Für hohe Frequenzen ist das System hingegen als adiabatisch anzusehen, da die Wärme nicht so schnell abgeleitet werden kann, wie sich der Temperaturgradient verändert. Daher ist auch hier der Wärmestrom gering und damit auch die Dämpfung. Für mittlere Frequenzen hingegen, bei denen die Periodendauer in der gleichen Größenordnung wie die Zeit ist, die der Wärmestrom zur Ableitung der Wärme benötigt, tritt erhöhte Dämpfung auf [62]. Dieses Maximum der Dämpfung wird auch DEBYE-Peak genannt. In experimentellen Untersuchungen in [31] wurde zudem gezeigt, dass diese Art der Dämpfung linear abhängig von der Temperatur ist. Nach [32] ist sie jedoch meist gering im Vergleich zu den anderen Dämpfungsarten. Zudem ist anzumerken, dass die Dicke d in Gleichung (1.5) nicht eindeutig bestimmt werden kann, da a priori unklar ist, ob die Zelldicke, Zelllänge, Knotendicke oder sonst eine andere geometrische Größe einzusetzen ist [31]. Da d für eine heterogene Mikrostruktur in jedem Fall aber nicht konstant ist, ist dem Parameter eine Verteilungsfunktion zu hinterlegen, was eine Verteilung der Peak-Frequenz f_0 zur Folge hat. Dies wurde auch in Experimenten in [31] gezeigt.

Magneto-mechanische Dämpfung. In ferromagnetischen Metallschäumen kann durch die Magnetisierung Energie dissipiert werden, wodurch ebenfalls eine dämpfende Wirkung auftritt. Dies wurde beispielsweise in Nickel-basierten Schäumen beobachtet [32]. Eine aufgebrachte zyklische, mechanische Spannung hat eine Änderung der Magnetisierung des ferromagnetischen Metallschaumes zur Folge. Die daraus resultierenden magnetischen Strömungen überführen die in Folge der angelegten Spannung gespeicherte mechanische Energie in Wärmeenergie. Magneto-mechanische Dämpfung ist frequenz- und amplitudenabhängig. Letzteres kann analog zur thermo-elastischen Dämpfung mit der DEBYE-Kurve mit der Amplitude an Stelle der Frequenz in Gleichung (1.5) beschrieben werden [62]. Im Vergleich zu einem analogen Vollmaterial ist die Amplitudenabhängigkeit stärker ausgeprägt, da sich die charakteristische Länge der Mikrostruktur des Schaumes und der magnetische Wirkungsbereich in der gleichen Größenordnung befindet und sich so ein Spannungs- bzw. Dehnungsgradient stärker auf magnetische Strömungen auswirkt. Das Maximum der DEBYE-Kurve ist hingegen geringer als bei vergleichbarem Vollmaterial [32].

Dämpfung aufgrund von Mikroplastizität. Steigt die Belastungsamplitude über $\varepsilon > 10^{-4}$, so tritt Dämpfung aufgrund von Mikroplastizität auf [30]. In den Metallschäumen tritt der Kerbeffekt an den Knoten, an denen sich Zellwände bzw. Stege treffen, aufgrund starker Krümmung an den Zellknoten auf. Dies hat zur Folge, dass an diesen Stellen Spannungsspitzen auftreten. Abhängig von der äußeren Belastung kann der Kerbeffekt in Knotennähe lokal zur Überschreitung der Fließgrenze führen, was in plastische Verformung resultiert. Dadurch entstehen um die Zellknoten herum mikroplastische Zonen (MPZ), worin Energie dissipiert wird. Diese Art der Dämpfung ist irreversibel und amplitudenabhängig [32]. MPZ können auch dann auftreten, wenn die eigentliche äußere Belastung am Metallschaum unterhalb der plastischen Fließgrenzen liegt. Mit steigender Belastungsamplitude nimmt die Anzahl und Größe der MPZ zu. Außerdem besitzt neben dem Ausgangsmaterial auch die Stegdickenverteilung einen gewichtigen Einfluss auf die Ausbildung und Lage der

MPZ [73, 74]. Da der Durchmesser der Stege bei realen Schäumen an den Knotenpunkten am größten ist und zur Stegmitte abnimmt, fällt bei einer gegebenen Biegespannung die Spannungsspitze in der Nähe der Knoten geringer aus und die Lage der MPZ verschiebt sich vom Knotenpunkt weg in Richtung Stegmitte. Die Verschiebung der MPZ hängt dabei stark von der Durchmesserabnahme der Stege ab. Des Weiteren wurde in ausführlichen, experimentellen Untersuchungen in [121, 122] aufgezeigt, dass die plastische Verformung der Stege einerseits abhängig von der Orientierung der Stege zur Belastungsrichtung ist. Andererseits tritt an der Schaumoberfläche zuerst plastische Deformation auf, da einzelne Stege aus der Oberfläche herausstehen. Nach [5, 33] wurde für die daraus resultierende Dämpfung aufgrund von MPZ der analytische Zusammenhang

$$\eta = \frac{\int_{\gamma_{krit}}^{\gamma^*} \left[1 - \Phi \left(\sqrt{\frac{1-P}{P}} \left(\frac{\tau}{G^* \gamma^*} - 1 \right) \right) \right] d\gamma}{G^* \gamma^{*2}} \quad (1.6)$$

mit der kritischen Scherung γ_{krit} , der wirkenden Scherung γ^* , dem effektiven Schubmodul G^* , der Porosität P und der GAUSS'schen Verteilungsfunktion der MPZ Φ aufgestellt. Auch wenn die Autoren eine Übereinstimmung mit durchgeführten Experimenten aufzeigen, beruht die Gleichung auf vereinfachenden Annahmen, wie einer homogenen Verteilung der Poren und einer angenommenen GAUSS'schen Verteilung der MPZ mit idealer Plastizität.

Ermüdungsbedingte Dämpfung. Durch das Auftreten der MPZ für Amplituden $\varepsilon > 10^{-4}$ verändert sich das mikrostrukturelle Verhalten des Metallschaums stetig mit der Lastspielzahl. Dadurch verhält sich die Dämpfung instabil in dem Sinne, dass durch die Plastifizierung keine konstante Dämpfung mehr auftritt. Durch das Auftreten der MPZ verändert sich das Material über die Lastspielzahlen zunehmend und ermüdet. Die Veränderung der Dämpfung aufgrund von Materialermüdung kann sich auf zwei Arten äußern, wie Messergebnisse belegen. Bei duktilen Werkstoffen, wie Aluminiumschäumen, bei denen viele Versetzungsbewegungen auftreten können, wird eine Verschiebung der Dämpfung zu höheren Werten für alle Belastungsamplituden beobachtet. Bei weniger duktilen Schäumen, die auf Al-Si oder Zn-Al-Cu basieren, verschieben sich die Dämpfungswerte je nach Mikrostruktur nur für kleine Amplituden oder es bildet sich ein Dämpfungsmaximum für eine Amplitude heraus [32, 34]. Diese Beobachtungen für eher spröde Metallschäume sind auf Rissentstehung während der Ermüdung zurückzuführen.

Rissinduzierte Dämpfung. Experimentelle Untersuchungen zeigen zudem auf, dass Risse und rissähnliche Defekte ebenfalls Dämpfung hervorrufen, da an der Risspitze aufgrund der dort auftretenden Kerbwirkung ebenfalls MPZ auftreten. Mit zunehmender Ermüdung des Werkstoffes kommt es zu Rissbildung und -wachstum, wenn eine kritische Amplitude ε_{krit} überschritten wird, was zu einem zusätzlichen Dämpfungsanstieg führt. Aufbauend auf einem rheologischen Modell lässt sich die Dämpfung über

$$\eta = A \int_0^\varepsilon \frac{\varepsilon_{krit}}{\varepsilon_{krit} + \varepsilon} \exp \left(-\frac{(\ln \varepsilon_{krit} - \ln \varepsilon_m)^2}{2 (\ln \sigma_{\varepsilon_m})^2} \right) d\varepsilon_{krit} \quad (1.7)$$

mit dem Parameter A , der die Anzahl der Risse und deren Beitrag zur Dämpfung berücksichtigt, mit dem mittleren kritischen Dehnungswert ε_m und dessen Standardabweichung σ_{ε_m} beschreiben [4, 34].

Äußere Dämpfung

Äußere Dämpfung umfasst Dämpfung aufgrund von aerodynamischen Verlusten. Bei offenporigen Schäumen wird durch abwechselndes Stauchen und Dehnen des Schaumes Luft in die Zellen herein bzw. heraus gepumpt. Durch die Verwirbelungen der Luft innerhalb der Zellen und Reibung an den einzelnen Stegen kommt es zu Energieverlusten, indem die Energie als Wärme an die Umgebung abgegeben wird, was sich als dämpfendes Verhalten des Schaumes äußert. Diese Verluste treten auch auf, wenn sich andere füllende Medien in den Schaumporen befinden, z.B. Öl. Bei geschlossenporigen Schäumen können ebenfalls aerodynamische Verluste auftreten. Bedingt durch die Herstellung treten Fehlstellen in geschlossenporigen Schäumen auf, wie das Fehlen ganzer Zellwände oder Löchern in den Zellwänden [31]. Durch solche Fehlstellen kann das füllende Medium ebenfalls gepumpt werden. Aber auch in perfekt geschlossenzelligen Schäumen kann Dämpfung auftreten, indem durch Stauchung der Zellen das füllende Medium komprimiert und so Wärme an die Umgebung abgegeben wird.

Die äußere Dämpfung aufgrund von aerodynamischen Verlusten ist abhängig von der Frequenz der Belastung, da mit zunehmender Belastungsfrequenz die Geschwindigkeit zunimmt, mit der das füllende Medium hin- und her gepumpt wird. Die Intensität des Pumpvorganges ist abhängig von vielen Faktoren, wie der Zellgröße, der Größe des Bauteils oder der Viskosität des füllenden Mediums. Bei niedrigen Frequenzen und erhöhten Amplituden ist die äußere Dämpfung vernachlässigbar klein, da in diesem Bereich der inneren Dämpfung eine gewichtigere Rolle zukommt. So zeigen GUI et al. [38] in ihrer Veröffentlichung, dass die Dämpfung für einen Al-Si Schaum frequenzunabhängig im Bereich 1 - 50 Hz ist. GOLOVIN und SINNING zeigen in [31] einen Anstieg der inneren Reibung, wenn Luft in eine zuvor evakuierte Messkammer eintritt. Experimentelle Untersuchungen von MASLOV und KINRA [77] und BANHART et al. [8] zeigen zudem auf, dass im Falle eines Vakuums das Fehlen eines füllenden Mediums frequenzunabhängige Dämpfung zur Folge hat. Neben diesen Veröffentlichungen, die sich mit der äußeren Dämpfung beschäftigen, existieren weitere Untersuchungen zu Auswirkungen des füllenden Mediums, deren Untersuchungsgegenstand Strömung durch offenzellige, poröse Strukturen [11], Wärmeübertragung [71], Druckverluste [58] oder akustische Wellen [69] sind. Außerdem ist die Schallabsorption von Metallschäumen (Dämpfung von akustischen Wellen) auf die gleichen Vorgänge wie Dämpfung aufgrund von aerodynamischen Verlusten zurückzuführen. Beide Vorgänge basieren auf Luftbewegungen innerhalb der Zellen. Experimentelle Untersuchungen zur Schallabsorption sind in [37, 70] zu finden.

Zusammenfassung der Dämpfungsmechanismen

Zusammenfassend zeigt die Dämpfung in Metallschäumen zum einen eine starke Abhängigkeit von der Belastungsamplitude, der Belastungsfrequenz und der Temperatur (Tabelle 1.2), die allesamt nichtlinearen Charakter aufweisen [42, 43, 67]. Zum anderen ist die Dämpfung abhängig vom Ausgangswerkstoff, der Porosität, der relativen Dichte und der Vorverformung [43, 44, 67, 68]. Im Vergleich zu Vollmaterialien kann je nach Dämpfungsmechanismus eine vielfach höhere Dämpfung auftreten. Auch wenn es sowohl eine

Dämpfungsmechanismus	Abhängigkeit	relevanter Bereich
innere Reibung	Frequenz, Temperatur	
versetzungsinduziert	Amplitude, Frequenz	$\varepsilon < 10^{-4}$
thermo-elastisch	Frequenz, Temperatur	$f < 1 \text{ kHz}$
magneto-mechanisch	Amplitude, Frequenz	$\varepsilon \sim 10^{-4}$
MPZ	Amplitude	$\varepsilon > 10^{-4}$
ermüdungsbedingt	Amplitude, Lastspielzahl	
rissinduziert	Amplitude, Lastspielzahl	$\varepsilon \gtrsim 10^{-4}$
Aerodynamik	Amplitude, Frequenz	$f \sim 1 \text{ kHz}$

Tabelle 1.2: Zusammenfassung der Dämpfungsmechanismen im Metallschaum

Reihe von experimentellen Untersuchungen als auch einige simulative und analytische Herangehensweisen bezüglich Dämpfung in Metallschäumen gibt, sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die dem Autor bekannte Literatur recht übersichtlich ist. Dies mag verschiedene Gründe haben, wie die allgemeine Komplexität, Erfassung und Handhabung von Dämpfung.

1.3.2 Lebensdauer von Metallschäumen

Zur Untersuchung des Schädigungsverhaltens von Metallschäumen bei harmonischer Dauerbelastung wurden experimentelle und simulative Untersuchungen durchgeführt, die hier zusammengefasst werden. Wie eingangs dargelegt, führen bereits kleine zyklische Belastungen, bei denen sich der Metallschaum linear-elastisch verhält, zu Materialermüdung. Dies ist zum einen erneut auf MPZ zurückzuführen, da durch die Spannungsüberhöhung das Material nachhaltig verändert wird. Zum anderen tritt Materialermüdung an Inhomogenitäten im Material oder an bereits vorhandenen Rissen auf. Die Belastungsart und -amplitude sind dabei entscheidend für das Ermüdungsverhalten und die auftretenden Mechanismen. Im Folgenden wird daher auf das experimentell festgestellte Ermüdungsverhalten von Metallschäumen bei verschiedenen Belastungsarten eingegangen. Am Ende dieses Abschnitts erfolgt eine Übersicht zu existierenden Modellen zur Berechnung der Lebensdauer von Metallschäumen.

Im Falle einer spannungsgeregelten, harmonischen Zug-Zug-Belastung ist mit ansteigender Lastspielzahl eine Längung des Schaumes bis zu einer Versagensdehnung von 1 – 2 % sowohl für geschlossenzellige als auch für offenzellige Schäume zu beobachten [79]. Versagen ist hierbei bei Materialtrennung definiert. Die Versagensdehnung ist annähernd unabhängig von der Amplitude der Belastung. Die Zunahme der Längung ist dabei konstant bis kurz vor dem Eintreten des Versagens, wo die Längung stark ansteigt. Gegen Ende der Lebenszeit bildet sich ein makroskopischer Riss aus, der quer durch die Struktur wächst. Die für die Längung verantwortlichen Mechanismen sind *Ratcheting* und Ermüdungsversagen einzelner Stege bzw. Zellwände [45]. Unter dem Begriff *Ratcheting* ist die Zunahme des arithmetischen Dehnungsmittelwerts unter zyklischer Belastung zu verstehen [54]. Die

Grenze, für die ein Metallschaum als dauerfest bezeichnet wird, ergibt sich aus Experimenten zu

$$\frac{\hat{\sigma}}{\sigma_m} \approx 0,5 \quad (1.8)$$

mit der auf die Streckgrenze σ_m aus monotonen Belastungsversuchen normalisierten Belastungsamplitude $\hat{\sigma}$. Die Dauerfestigkeitsgrenze ist damit vergleichbar mit der von Vollmaterialien [45]. Aufgrund der heterogenen Mikrostruktur weisen die Lastspielzahlen, bei denen es zu Versagen kommt, eine große Streuung auf [79, 120].

Im Falle einer spannungsgeregelten, harmonischen Druck-Druck-Belastung tritt bis zu einer werkstoffabhängigen Lastspielzahl eine Inkubationszeit auf, in der sich die Stauchung wenig ändert. Die Inkubationszeit nimmt dabei mit abnehmender Belastung zu und ist aufgrund der Heterogenität des Schaumes abhängig von der Schaumprobe [109]. Nachdem die Stauchung etwa 2 % erreicht hat, wächst die Stauchungsrate rapide an. Dies liegt in der Bildung eines Versagensbandes (engl. *crash band*) an verschiedenen Stellen im Schaum. Bei einer Stauchung von ~ 40 % hat sich das *crash band* komplett über die Struktur ausgebildet und die Stege bzw. Zellwände kommen in gegenseitigen Kontakt. Dadurch nimmt der Betrag der akkumulierten plastischen Dehnung pro Lastspielzahl stark zu. Versagen ist hierbei definiert, wenn die Stauchung um mehr als 2 % zugenommen hat [79, 109]. Die Grenze zur Dauerfestigkeit ergibt sich zu $\hat{\sigma} \approx 0,85 \cdot \sigma_m$.

Bei einer spannungsgeregelten, wechselnden Zug-Druck-Belastung wurde keine nennenswerte Längung oder Stauchung festgestellt [84]. Lediglich ab einigen wenigen Zyklen vor dem Versagen der untersuchten Proben wurde eine extreme Zunahme der Längung ermittelt. Der Versagensmechanismus beruht dabei auf Rissentstehung und -wachstum. Die Rissinitiierung ist an Stellen von Materialinhomogenitäten zu beobachten [17]. Die Risse vereinen sich dabei mit zunehmender Lastspielzahl zu einem makroskopischen Riss. Bei einer totaldehnungsgesteuerten, wechselnden Zug-Druck-Belastung hingegen tritt in den ersten Lastzyklen eine Verfestigung auf, wobei sich nach wenigen Lastspielzahlen eine Sättigung einstellt. Dies hat eine plastische Dehnungsamplitude für die restliche Lebensdauer zur Folge [55].

Bei Untersuchungen mit dem Mikroskop wurde beobachtet, dass bei offenzelligen Schäumen einzelne Stegsegmente herausbrechen, während bei geschlossenzelligen Schäumen eine Durchbiegung der Zellwände bis hin zum Bruch beobachtet wurde. Dieses Herausbrechen von Stegen bzw. die Zerstörung von Zellwänden hat ein Herabsetzen der Steifigkeit mit zunehmender Lastspielzahl zur Folge [45, 109, 123]. Dabei befinden sich die Risse in den Stegen in verschiedenen Stadien des Risswachstums. Es treten gleichzeitig Rissentstehung, Risswachstum und bereits gebrochene Stege auf. Andere Stege hingegen zeigen keinerlei Schädigung auf [123].

Die Grenze der Dauerfestigkeit von Metallschäumen, ab der kein Versagen aufgrund von Materialermüdung auftritt, ist in einer vergleichbaren Größenordnung wie bei metallischen Vollmaterialien. Dabei ist die Anzahl an Lastspielen bis zum Versagen bei Zug-Zug-Beanspruchung etwa 40 % geringer als bei Druck-Druck-Beanspruchung. Die Belastungsfrequenz hat keinen Einfluss auf die Lebensdauer [55]. Des Weiteren wurde in der

Arbeit [123] der Einfluss der Wärmebehandlung von Metallschäumen auf das Lebensdauerverhalten untersucht. Während verfestigte Metallschäume ein um eine Größenordnung verschlechtertes Lebensdauerverhalten bei Druck-Druck-Belastung aufzeigen, verlängert Glühen die Lebensdauer im Vergleich zu unbehandelten Schäumen. Zusammengefasst verkürzt sich die Lebensdauer mit steigender Festigkeit der Schäume.

Basierend auf experimentellen Erkenntnissen wurde eine Reihe von analytischen Untersuchungen durchgeführt. So wurde in der Dissertation [41] die Ermüdung von Aluminiumschäumen eingehend experimentell und darauf aufbauend simulativ untersucht. Des Weiteren haben PINOT et al. in der Arbeit [93] unter der Annahme einer linearen und quadratischen Schadensakkumulation ein statistisches Modell für geschlossenzellige Schäume aufgebaut. Daneben besteht eine Reihe von FEM-Modellen des zu untersuchenden Schaums, die alle einem ähnlich strukturierten Algorithmus zur Lebensdauerberechnung folgen. In Abhängigkeit der aufgetragenen harmonischen Belastung lässt sich der kritische Steg bzw. die kritische Zellwand in dem FEM-Modell ermitteln, die zuerst versagt. Zur Ermittlung der kritischen Stelle existieren verschiedene Ansätze. Während in [18] und der zuvor genannten Dissertation [41] das Lebensdauerverhalten der einzelnen Stege über die WÖHLER-Kurve bestimmt wird, werden in [72, 99] das Risswachstum modelliert und daraus resultierend das Versagen der Stege bestimmt. Nach Herausschneiden des gebrochenen Elements aus dem FEM-Modell und einer Aktualisierung der Lastspielzahl und Schadensakkumulation in den verbliebenen Stegen bzw. Zellwänden lässt sich das nächste kritische Element ermitteln. Dieser Algorithmus wird bis zu einem definierten Versagenskriterium des Schaumes wiederholt. Neben der Implementierung für Metallschäume [18, 41] wurde das FEM-Modell auch zur Untersuchung der Lebensdauer von Knochen angewandt [72, 99].

1.3.3 Stochastische Finite-Elemente-Methode

Metallische Schäume sind für sich genommen ein Unikat. Um dennoch zuverlässige Aussagen treffen und Berechnungen technischer Bauteile durchführen zu können, ist eine stochastische Modellierung notwendig. Dazu wird eine Struktur mit statistisch verteilten Materialparametern betrachtet. Ein kurzer Überblick zu verschiedenen Modellierungsansätzen mit Verweis zu vertiefenden Arbeiten wird im Folgenden gegeben.

Generell können Materialparameter, geometrische Abmessungen und äußere Belastungen Streuungen aufweisen. Für alle drei Faktoren sind entsprechend Zufallsfelder aufzustellen. Zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens einfacher Strukturen wurden in einer Reihe von Veröffentlichungen Störungsansätze für die streuenden Parameter eingeführt. Diese nutzen die TAYLOR-Reihenentwicklung, die um die Mittelwerte der streuenden Parameter entwickelt wird. Während in [21] Störungsansätze erster Ordnung und in [113] zweiparametrische Störungsansätze benutzt werden, basiert die Störungsrechnung in [85] auf Funktionalen der Zufallsfelder. Für eine bestimmte Wahl an Parametern wurde z.B. in [75] eine exakte Lösung für Stäbe mit Streuungen gefunden. Trotz der Übereinstimmung in einigen ausgewählten Fallbeispielen ist die Güte der Approximation mit den Termen des Störungsansatzes begrenzt, da meist nach dem ersten Term abgebrochen wird [82]. Zudem sind nur einfache Strukturen behandelbar.

Zur umfangreicheren Untersuchung von Strukturen mit streuenden Eigenschaften wurde ausgehend von der klassischen FEM die stochastische Finite-Elemente-Methode (SFEM) entwickelt. Wie in der deterministischen Mechanik wird hierbei das physikalische Rechengebiet diskretisiert, wobei die Parameter nun eine Zufallsverteilung aufweisen. Damit müssen für die Parameter zusätzlich passende Zufallsverteilungen generiert werden. Neben der üblichen Anpassung der Vernetzung an den Spannungsgradienten im Rahmen der FEM, hängt die Diskretisierung bei der SFEM von zwei weiteren Faktoren ab. Zum Einen muss die Größe der Elemente so klein gewählt werden, dass die Korrelationslänge der Zufallsparameter ausreichend genau beschrieben wird. Zum Anderen darf die Vernetzung aber auch nicht zu fein gewählt werden, da dies zu stark korrelierten Zufallsparametern führt [78].

Für die vor der Diskretisierung benötigte Modellierung der stochastischen Prozesse oder Felder existieren dabei verschiedene Methoden, insbesondere die spektrale Zerlegung und die Reihenentwicklung mit Hilfe von biorthogonalen Funktionen. Für Letztere wird vor allem die KARHUNEN-LOÈVE-Zerlegung angewendet. Während bei der spektralen Zerlegung das Zufallsfeld in eine Summe von trigonometrischen Funktionen mit zufallsverteilten Phasenverschiebungen zerlegt wird, basiert die KARHUNEN-LOÈVE-Zerlegung auf der spektralen Zerlegung der Autokovarianzfunktion. Dazu werden durch die Formulierung eines Eigenwertproblems, der FREDHOLM-Gleichung, die Eigenfunktionen und -werte der Autokovarianzfunktion bestimmt. Dies ist nur in wenigen Fällen analytisch möglich, im Allgemeinen muss die Gleichung numerisch gelöst werden. Ein Vergleich beider genannten Methoden kann in [107] gefunden werden. Die von ZHANG und ELLINGWOOD in [119] vorgeschlagene *Orthogonal-Series-Expansion*-Methode umgeht das Eigenwertproblem in der KARHUNEN-LOÈVE-Zerlegung, indem von Anfang an eine komplette Menge von orthogonalen Funktionen gewählt wird. Darüber hinaus gibt es noch weitere Methoden zur Modellierung von Zufallsfeldern, wie die *Expansion-Optimal-Linear-Estimation*-Methode [65], die auf der spektralen Darstellung des Vektors der Knotenvariablen basiert, die *Turning-Band*-Methode [76], die sich für höher dimensionale Zufallsfelder eignet oder *Autoregressive-Moving-Average*-Modelle [98], die auch für nicht-stationäre Zufallsfelder anwendbar sind. Eine zusätzliche Herausforderung bei der Modellierung von Zufallsfeldern stellt sich hierbei bei nicht normalverteilten Zufallsfeldern. Einen guten Überblick über die verschiedenen Ansätze geben [106, 108].

Die SFEM kann im Allgemeinen in drei Schritte unterteilt werden: Die Diskretisierung der stochastischen Prozesse bzw. Felder, die Formulierung einer stochastischen Systemmatrix und die Berechnung der Streuung der Systemantwort [106]. Dabei existieren verschiedene Varianten des Vorgehens. Mit Störungsansätzen wird die stochastische Systemmatrix mit Hilfe einer Taylor-Reihenentwicklung entwickelt, wobei auch die Kräfte bzw. Verschiebungen unter Umständen in eine Reihe entwickelt werden müssen. Bei einer spektralen SFEM werden die Systemparameter mit Hilfe von orthogonaler Reihenentwicklung modelliert. Zudem lässt sich die SFEM im Rahmen einer MONTE-CARLO-Simulation umsetzen, bei der die Problemstellung für eine große Anzahl an Varianten der Systemparameter, die sich aus der Zufallsfelderzerlegung ergeben, gelöst wird. Zur Berechnung von Strukturen mit streuenden Parametern mit Hilfe von SFEM gibt es eine Vielzahl an Veröffentlichungen. So wurde in den Arbeiten [102, 104] eine polynomiale Chaoszerlegung im Rahmen einer

FEM-Modellierung genutzt, um die Streuung des Elastizitätsmoduls bzw. des Dämpfungsparameters von Verbundwerkstoffen einzubeziehen. Weitere Ausführungen zu diesem Themenkomplex sind in den Veröffentlichungen [78, 103] zu finden. Verschiedene stochastische Modellierungsansätze in der Strukturdynamik sind des Weiteren in den Arbeiten [100, 105] zu finden.

Bei der vollständigen Betrachtung einer heterogenen Struktur muss vor der Modellierung der Zufallsfelder und Berechnung mit Hilfe von SFEM zunächst die Streuung aufgrund der Heterogenität in der Mikrostruktur erfasst werden. Dies motiviert die Multiskalenmodellierung. Zunächst werden auf einer Skala zwischen der heterogenen Mikrostruktur und der makroskopischen Struktur, der Mesoskala, die stochastischen Eigenschaften der Materialparameter durch Homogenisierung bestimmt. Mit Hilfe der gewonnenen Ergebnisse lässt sich im nächsten Schritt die SFEM, wie im Absatz zuvor beschrieben, auf das makroskopische Bauteil anwenden. So wurde im Rahmen der Arbeit [101] ein mehrskaliges Modell entwickelt, das den Einfluss der heterogenen Mikrostruktur auf das makroskopische Strukturverhalten für den linear-elastischen Fall untersucht. Auf die entwickelten Multiskalenmodellierung in letztgenannter Arbeit und deren Weiterentwicklungen in [23, 24] baut die vorliegende Arbeit auf. Die Grundlagen dazu werden in Kapitel 2 dargelegt.

1.4 Ziel und Aufbau der Arbeit

Für die Auslegung von Metallschaumstrukturen für technische Anwendungen, die im Betrieb dynamischen Lasten ausgesetzt sind, sind Kenntnisse über Dämpfungs- und Lebensdauerverhalten nötig. Wie in Kapitel 1.3 gezeigt wurde, können bereits geringe Belastungsamplituden zu nicht vernachlässigbaren Dämpfungswerten führen. Darüber hinaus ermüdet der Metallschaum zunehmend bis es aufgrund von Schadensakkumulation zum Versagen kommt. Diese Aspekte wurden in diversen Forschungsarbeiten experimentell untersucht. Mit Hilfe der daraus gewonnenen Erkenntnisse wurden Modelle entwickelt, die sowohl Dämpfung als auch Lebensdauerverhalten abbilden. In einigen Arbeiten sind die unbekannt Parameter an die Experimente angepasst, sodass hier die allgemeine Gültigkeit der Modelle zu hinterfragen ist. Weitere Modelle gehen von starken Vereinfachungen aus, wie die Betrachtung eines zweidimensionalen Schaumes oder einer vereinfachten Mikrostruktur. In einigen Veröffentlichungen wird zwar auf die aus der heterogenen Mikrostruktur resultierende Streuung hingewiesen, jedoch werden die Untersuchungen an periodischen Mikrostrukturen durchgeführt oder es werden ad-hoc Annahmen getroffen, wie etwa eine Normalverteilung der Materialparameter. Die dem Autor bekannten modellbehafteten Untersuchungen beschränken sich dabei auf kleinere Metallschaumproben. Forschungsarbeiten zur Beeinflussung kompletter Metallschaumstrukturen durch mikrostrukturell bedingte Dämpfungsmechanismen oder Schadensakkumulationen fehlen jedoch. Für den linear-elastischen Fall existiert die Arbeit [101], die den Einfluss heterogener Mikrostruktur auf das Eigenfrequenzverhalten von makroskopischen Schaumstrukturen beschreibt.

An der aufgeführten Forschungslücke der Betrachtung des Verhaltens aufgrund von MPZ über verschiedene Größenskalen hinweg setzt das Ziel dieser Arbeit an. Die Untersuchun-

gen stützen sich auf reale, dreidimensionale, heterogene Metallschäume, ohne dabei vereinfachende Annahmen im Vorfeld zu treffen. Die resultierende Streuung in den Materialparametern bzw. der Einfluss der Heterogenität auf das Verhalten makroskopischer Bauteile wird aufgezeigt. Diese Untersuchungen werden in der vorliegenden Arbeit an zwei Aspekten durchgeführt: Die Auswirkung von MPZ auf das Dämpfungsverhalten und auf Schadensakkumulation innerhalb der Lebensdauer. Für den ersten Schwerpunkt wird untersucht, inwiefern Dämpfung aufgrund von MPZ in der Modellierung zu berücksichtigen ist und wie sie durch die heterogene Mikrostruktur hinsichtlich Mittelwert und Streuung beeinflusst wird. Am Schluss wird der Einfluss der Dämpfung aufgrund von MPZ auf die makroskopische Strukturodynamik untersucht. In dieser Arbeit erfolgt die Bestimmung eines streuenden Dämpfungsparameters aufgrund der mikrostrukturellen Modellierung für kleine Anregungsfrequenzen im Gegensatz zu dem Ansatz aus [102], in der der streuende Dämpfungsparameter in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz aus durchgeführten Experimenten ermittelt wird. Der zweite Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der analogen Untersuchung des Einflusses von MPZ auf die Schadensakkumulation, auf den Mittelwert und die Streuung der Materialparameter sowie das makroskopische Bauteilverhalten während der Lebensdauer. Bei der Untersuchung des Einflusses von MPZ auf das Lebensdauerverhalten wird von ungedämpftem Material und dehnungsgesteuerter Wechselbelastung ausgegangen. In dieser Arbeit erfolgt keine Betrachtung von Dämpfung während der Lebensdauer, d.h. keine Modellierung von ermüdungsbedingter Dämpfung. Dies würde eine Modellierung von Rissbildung und Risswachstum voraussetzen, was nicht Gegenstand dieser Arbeit ist.

Bei den durchzuführenden Untersuchungen liegt der Schwerpunkt dieser Arbeit nicht in der reinen Ermüdungsuntersuchung von Metallschäumen wie in [41] oder in der Entwicklung und Optimierung einer Prozesskette bezüglich der Multiskalenmodellierung. Vielmehr liegt der Schwerpunkt der Untersuchung auf der Auswirkung von MPZ bezüglich Dämpfung und Lebensdauer über verschiedene Größenskalen. Dazu baut die Arbeit auf der entwickelten Multiskalenmodellierung für den linear-elastischen Fall in [101] auf und entwickelt das Modell für den elastisch-plastischen Fall weiter. Dafür sind tiefgreifende Erweiterungen der entwickelten Multiskalenmodellierung auf Dämpfung und Schadensakkumulation nötig, um die Amplitudenabhängigkeit bei der Homogenisierung von Materialparametern auf der Mesoebene und der Projizierung der Eigenschaften auf die Makroebene zu berücksichtigen. Im Rahmen dieser Arbeit erfolgt eine modellbasierte Validierung der Multiskalenmodellierung durch einen Vergleich mit einem Vollskalenmodell.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: Zuerst werden in Kapitel 2 die Grundlagen zur Multiskalenmodellierung erörtert, indem das Prinzip der Modellierung über verschiedene Größenskalen erklärt wird. Anschließend erfolgen die einzelnen Modellierungsschritten entsprechenden mathematischen, mechanischen und werkstoffkundlichen Grundlagen. In Kapitel 3 wird auf die Generierung einer Mikrostruktur eingegangen. Dies beinhaltet die Erzeugung passender Eingangsdaten und die darauf aufbauende Erstellung einer geeigneten Struktur. In dieser Arbeit werden zwei Generatoren genutzt. Zum einen wird eine Mikrostruktur generiert, die aus theoretischen Überlegung hergeleitet wird und sich für diverse Untersuchungen eignet. Zum anderen wird basierend auf der Analyse von rea-

len Aluminiumschäumen eine Mikrostruktur generiert. In Kapitel 4 wird zunächst der Steifigkeitstensor homogenisiert. Darauf aufbauend wird ein Zufallsfeld für homogenisierte Dämpfungs- und Schädigungsparameter bestimmt, die von der Belastungsamplitude abhängen. Außerdem wird die Veränderung der Steifigkeit in Abhängigkeit von der Lebensdauer berechnet. Bei der Bestimmung der homogenisierten Materialparameter erhält man, abhängig von der Größe des betrachteten Strukturelements, lediglich ein von den Randbedingungen abhängiges Intervall. Da in dieser Arbeit kleine Strukturelemente homogenisiert werden, besteht die Abhängigkeit der Materialparameter von den Randbedingungen. Die Elimination der Randbedingungsabhängigkeit und die Bestimmung eindeutiger Materialparameter werden in dieser Arbeit durch eine iterative Herangehensweise umgesetzt. Die Validität wird sowohl an einem einfachen zweidimensionalen, heterogenem Fallbeispiel als auch am Metallschaum untermauert. In Kapitel 5 werden die homogenisierten Parameter diskretisiert und auf die Makroskala projiziert. In einem finalen Modellierungsschritt werden im Rahmen einer MONTE-CARLO-Simulation makroskopische Realisierungen generiert. Danach erfolgt in Kapitel 6 eine Validierung des implementierten Modells, indem das Multiskalenmodell mit einem Vollskalenmodell unter Berücksichtigung von Dämpfung als auch von Materialermüdung verglichen wird. In einer Parameterstudie in Kapitel 7 werden getroffene Modellannahmen durch Parametervariation verifiziert und der Einfluss ausgewählter Materialparameter auf das Verhalten des Metallschaums untersucht. In Kapitel 8 wird an einfachen Strukturen im Rahmen von Fallstudien die Dämpfung und Lebensdauer und der Einfluss der heterogenen Mikrostruktur auf das makroskopische Verhalten aufgezeigt. Abschließend erfolgt in Kapitel 9 eine Zusammenfassung der Arbeit und ein Ausblick auf zukünftige Forschungsfragen. Der Aufbau der Arbeit entsprechend der verschiedenen Modellierungsebenen ist in Abbildung 1.4 veranschaulicht.

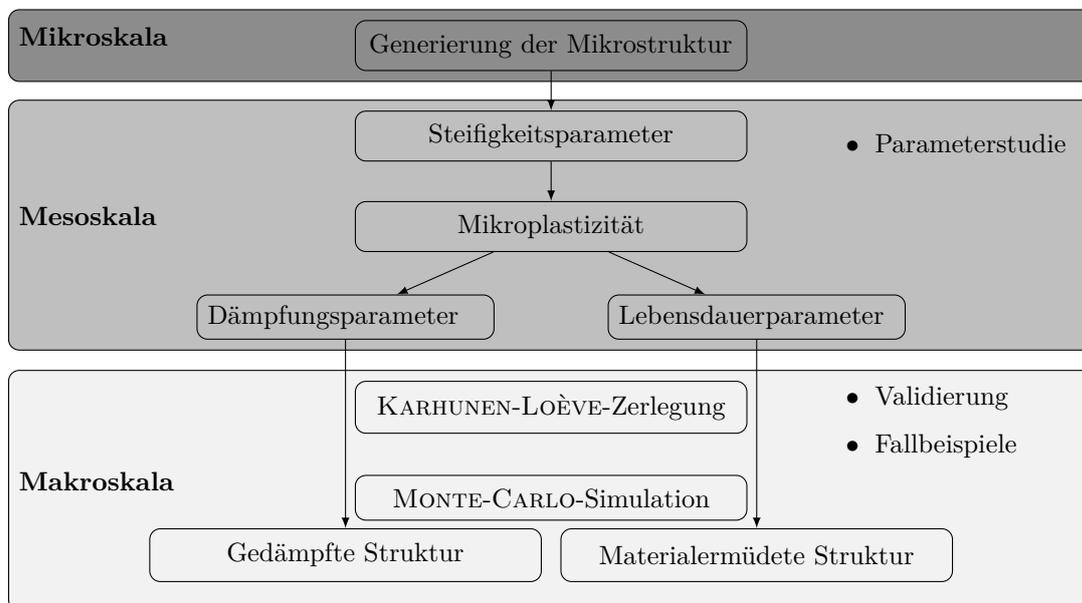


Abbildung 1.4: Überblick zum Aufbau der Arbeit

2 Modellierung auf verschiedenen Größenskalen

In diesem Kapitel werden überblicksartig die benötigten prinzipiellen, stochastischen, mechanischen und werkstoffkundlichen Grundlagen mit Hinweisen auf weiterführende Literatur vorgestellt. Zunächst wird unter Einführung verschiedener Größenskalen das allgemeine Prinzip der Multiskalenmodellierung skizziert. Darauf aufbauend werden auf der mesoskopischen Größenskala die benötigten Begriffe der linearen Elastizitätstheorie und der Plastizitätstheorie zur Bestimmung von Materialparametern eingeführt. Des Weiteren werden benötigte Grundlagen der Stochastik vorgestellt. Für die spätere Dämpfungsmodellierung werden außerdem verschiedene Modelle zusammengefasst und benötigte Grundlagen zur Beschreibung von Lebensdauerverhalten bzw. Schadensakkumulation eingeführt. Zur Berechnung von makroskopischen Metallschaumstrukturen wird am Ende des Kapitels die Verschiebungsfunktion zur Beschreibung allgemeiner eindimensionaler Kontinuumsschwingungen hergeleitet.

2.1 Allgemeines Prinzip

Viele Alltagsgegenstände und technische Bauteile lassen sich in verschiedene Größenskalen unterteilen, die auf ihrer mikrostrukturellen Größenskala eine ausgeprägte Heterogenität aufweisen. So trägt zum Beispiel in der Natur ein Baum eine Vielzahl an Ästen, die wiederum jeweils eine Vielzahl an Blättern tragen. Sowohl Äste als auch Blätter sind dabei in der Regel ungleichmäßig verteilt. Die Blätter bestehen letztendlich aus Fasern und einzelnen Zellen. Zur Beschreibung des Verhaltens des Baumes, z.B. bei Windböen, wäre es rechenzeitig viel zu aufwendig, jedes einzelne Blatt mit der Mikrostruktur zu modellieren. Stattdessen sind Überlegungen anzustellen, wie der Baum als Ganzes präzise genug modelliert werden kann, ohne sich in den einzelnen mikroskopischen Details des Baumes zu verlieren. Dabei sind verschiedene, dem Problem angepasste Größenskalen zu definieren, die eindeutig voneinander abgegrenzt sind und die jeweilige Charakteristik mit deren Informationsgehalt hinreichend beschreiben. Zudem sind die verschiedenen Größenskalen passend miteinander zu verknüpfen.

Die gleiche Problematik stellt sich ebenfalls bei heterogenen Materialien im Allgemeinen und Metallschäumen im Speziellen, wenn komplette Strukturen betrachtet werden sollen. Bei der Berechnung eines makroskopischen Bauteils aus Metallschaum ist es aufgrund der resultierenden Rechenzeit nicht ratsam, jede einzelne Zelle des Schaumes zu modellieren. Diese Überlegungen machen eine Modellierung auf verschiedenen Größenskalen notwendig. Das zugrunde liegende Prinzip der *Multiskalenmodellierung* wird in diesem Abschnitt vorgestellt.

Im Folgenden wird eine Matrix aus heterogenem Material betrachtet, das gleichmäßig heterogen verteilt (statistisch homogen [46]) und im Mittel unabhängig vom Ort der Be-

trachtung (ergodisch) ist. Eine genaue Definition der genannten Begriffe erfolgt in den Grundlagen zur Stochastik in Abschnitt 2.2.2. Zur Trennung der verschiedenen Größenskalen werden drei Längenskalen entsprechend [36] zu

$$L \gg d \gg l \tag{2.1}$$

eingeführt, wobei l die charakteristische Länge der kleinsten Skala, der *Mikrostruktur*, darstellt und L die Größenordnung der *Makrostruktur* besitzt. Dazwischen wird die *Mesoskala* mit der charakteristischen Länge d definiert (Abbildung 2.1). Die Definition und Abgrenzung der Größenskalen, die verschiedene Größenordnungen besitzen, ist eine Aufgabe der Modellbildung und problemspezifisch [36].

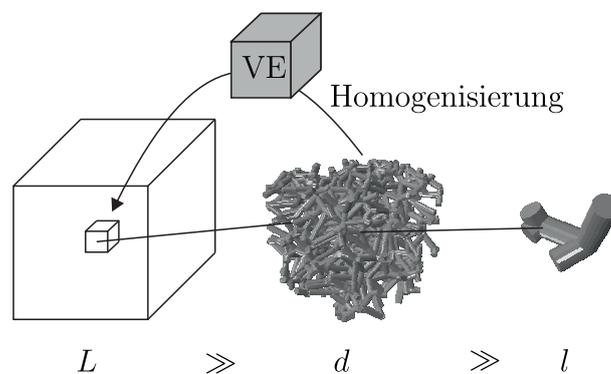


Abbildung 2.1: Prinzip der Multiskalenmodellierung

Das Ziel der eingangs erwähnten Trennung der verschiedenen Größenskalen ist die spätere Anwendung der klassischen Theorien der deterministischen Kontinuumsmechanik auf der makroskopischen Ebene. Dazu ist per definitionem ein kubisches Volumenelement (VE) zu bestimmen, das als sehr klein im Vergleich zu L angenommen werden kann. Dies motiviert die Definition eines VE auf der Mesoebene, das die komplette Mikrostruktur beinhaltet. Für die klassische Kontinuumsmechanik sind den einzelnen VE Materialparameter zuzuordnen. Diese werden dabei über die Kantenlänge d des VE ermittelt. Dieser Vorgang, in dem aus der heterogenen Mikrostruktur und den daraus resultierenden, heterogenen Materialparametern ein homogener, mesoskopischer Parameter bestimmt wird, wird *Homogenisierung* genannt (Abbildung 2.1). Die heterogenen Eigenschaften werden also über die Länge d „verschmiert“ bzw. homogenisiert.

Die Herausforderung bei der Einführung der verschiedenen Größenskalen stellt sich bei der Wahl von d und der damit verbundenen Forderung, dass die über d homogenisierten Parameter die Heterogenität bzw. den Informationsgehalt der Mikrostruktur genau genug wiedergeben müssen. Dazu wird ein aus der Struktur herausgeschnittenes VE mit der Kantenlänge d betrachtet. Bei einer mikroskopischen Struktur, die sich periodisch wiederholt, muss d genau der Länge der Periode entsprechen, wie z.B. bei Bienenwaben genau einer Wabe. Bei einer zufällig verteilten Struktur hingegen ist d so groß zu wählen, dass

die gesamte, notwendige Information der Mikrostruktur im VE enthalten ist. Somit ist das VE repräsentativ für die komplette Struktur. In diesem Fall spricht man von einem repräsentativem Volumenelement (RVE). Dabei ist es unwesentlich, an welcher Stelle das RVE aus der Struktur herausgeschnitten wurde. Die durch die Homogenisierung erhaltenen Materialparameter werden in diesem Fall daher auch *effektive Materialparameter* genannt. Man erhält in diesem Fall aus der heterogenen, zufallsverteilten Mikrostruktur eindeutige, deterministische Materialparameter.

Da die zuvor genannte Definition eines RVE bei heterogener Mikrostruktur den notwendigen Informationsgehalt der Mikrostruktur lediglich abstrakt charakterisiert, wurden verschiedene quantitative Bemessungsgrundlagen zur Bestimmung des RVE definiert. HILL, der 1965 den Begriff des RVE einführte, definiert das RVE als ein VE, das eine für die komplette Matrix typische Struktur aufweist und dessen effektive Parameter unabhängig von den Randbedingungen sind [51]. Letztere Aussage der Definition wird in [53, 97] an heterogenen Körpern aufgezeigt. KANIT et al. hingegen berechnen für verschiedene Größen des VE durch Homogenisierung Materialparameter und definieren das RVE für die Größe, für die die Streuung zwischen verschiedenen VE mit äquivalenter Kantenlänge eine definierte Grenze unterschreitet [57]. Andere Vorschläge zur Bestimmung des RVE gehen vom kleinsten VE, das die gemittelte konstitutive Materialgleichung erfüllt [20] oder von der minimalen Streuung zwischen stochastisch unabhängigen VE mit Hilfe von MONTE-CARLO-Simulationen [39] aus. Pragmatischere Ansätze gehen davon aus, dass das RVE 10 bis 100 mal so groß wie die charakteristische Mikroskala sein sollte. Einen guten Überblick über die Definition und Größenbestimmung des RVE gibt [29].

Ist die mikrostrukturelle Heterogenität so stark ausgebildet, dass ein RVE unter Berücksichtigung der Gleichung (2.1) nicht definierbar ist, so muss zur Erfüllung der Größenskalentrennung ein VE eingeführt werden, das kleiner als das RVE ist. Das eingeführte VE ist nun nicht repräsentativ für die Gesamtstruktur, da es nicht mehr den kompletten mikrostrukturellen Informationsgehalt beinhaltet. Daher wird ein solches VE im Folgenden statistisches Volumenelement (SVE) genannt. Hier weisen mehrere herausgeschnittene VE unterschiedliche, homogenisierte Materialparameter auf, weshalb Streuung zwischen den VE auftritt [88]. In diesem Fall sind lediglich *scheinbare Materialparameter* bestimmbar. Zudem sind die SVE ortsabhängig, da der Ort des Herausschneidens aus der Matrix nicht mehr unwesentlich ist. Für das SVE ist es außerdem charakteristisch, dass es abhängig von der Kantenlänge d ist, da sich mit der Größe des SVE der Informationsgehalt der Struktur ändert. Für größer werdende Kantenlängen geht das SVE in das RVE über. Um trotz der Streuung einen validen scheinbaren Materialparameter zur Berechnung auf der Makroebene zu erhalten, ist eine Mittelung über eine Vielzahl von SVE nötig [57]. Außerdem sind die Eigenschaften der SVE abhängig von den Randbedingungen, was in Kapitel 4 gezeigt wird.

Neben der Untersuchung eines passenden VE für die Multiskalenmodellierung gibt es zudem eine Vielzahl von Veröffentlichungen, die die Beeinflussung zwischen Mikro- und Makroskala an einfachen, theoretischen Modellen untersuchen und entsprechende Methoden entwickeln. An dieser Stelle sei lediglich darauf hingewiesen, dass nach [90] für solche Untersuchungen eine Vielzahl an Modellen existieren, beispielsweise das *Kugelmodell* [47], die

selbstkonsistente Methode [50], die *generalisierte selbstkonsistente Methode* [15] oder die *Mori-Tanaka Methode* [83].

Die für die Multiskalenmodellierung benötigten Grundlagen werden im Folgenden abgehandelt und in den darauf folgenden Kapiteln auf die in dieser Arbeit untersuchten Metallschäume angewendet. Dazu wird in Kapitel 3 die Mikrostruktur von Metallschäumen generiert. In Kapitel 4 wird auf der Mesoebene ein SVE definiert, anhand dessen zum einen der homogenisierte, scheinbare Steifigkeits- und Dämpfungsparameter und zum anderen das Materialverhalten in Abhängigkeit von der Lebensdauer berechnet wird. Abschließend werden in Kapitel 5 die gewonnenen Materialeigenschaften von der Mesoebene auf die Makroebene projiziert.

2.2 Mesoskopische Modellbeschreibung

Das Ziel einer mesoskopischen Modellierung ist die Berechnung von Materialparametern. In der vorliegenden Arbeit werden Parameter zur Beschreibung von Steifigkeit, Dämpfung und Lebensdauer bestimmt. Für die Beschreibung der benötigten mechanischen und stochastischen Zusammenhänge auf der Mesoskala sind zunächst eine einheitliche Notation und einige mathematische Operatoren einzuführen. Für die Beschreibung mathematischer Zusammenhänge hat sich im Ingenieurwesen die Tensoralgebra als das beherrschende Werkzeug zur Beschreibung etabliert. Dies beruht im Wesentlichen darauf, dass alle physikalischen Größen als Tensoren aufgefasst werden können und dass die Tensoralgebra eine kompakte und übersichtliche Darstellung bietet [14].

Für die mathematischen Gleichungen der vorliegenden Arbeit werden verschiedene dimensionsbehaftete Tensoren verwendet. Dazu wird in Tabelle 2.1 eine einheitliche Nomenklatur eingeführt.

Tensorstufe	0 (Skalar)	1 (Vektor)	2	3	4	$n > 4$
	a, b	\mathbf{a}, \mathbf{b}	\mathbf{A}, \mathbf{B}	$\mathbf{A}_{\langle 3 \rangle}, \mathbf{B}_{\langle 3 \rangle}$	\mathbb{A}, \mathbb{B}	$\mathbf{A}_{\langle n \rangle}, \mathbf{B}_{\langle n \rangle}$
	α, β	$\vec{\alpha}, \vec{\beta}$	$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$	$\boldsymbol{\alpha}_{\langle 3 \rangle}, \boldsymbol{\beta}_{\langle 3 \rangle}$	$\boldsymbol{\alpha}_{\langle 4 \rangle}, \boldsymbol{\beta}_{\langle 4 \rangle}$	$\boldsymbol{\alpha}_{\langle n \rangle}, \boldsymbol{\beta}_{\langle n \rangle}$

Tabelle 2.1: Nomenklatur der Tensorstufen

Zur Modellierung werden in dieser Arbeit hauptsächlich Tensoren 2. Stufe benötigt. Diese sind in der Orthonormalbasis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ über

$$\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \quad (2.2)$$

mit dem dyadischen Produktzeichen \otimes definiert. Die neun Dyaden $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ sind zueinander biorthogonal und normiert mit $i, j = 1, 2, 3$. Das Tensorprodukt zweier Tensoren 2. Stufe ist über

$$\mathbf{AB} = A_{ij} B_{jk} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \quad (2.3)$$

mit der EINSTEIN'schen Summenkonvention, die die Summierung über gleiche Indizes besagt, definiert. Das doppelte Skalarprodukt zweier Tensoren 2. Stufe ergibt sich zu

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{spur}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T) = \text{spur}(\mathbf{A}^T\mathbf{B}) = A_{ij}B_{ij} \quad (2.4)$$

und die lineare Abbildung durch einen Tensor 4. Stufe zu

$$\mathbb{A}[\mathbf{B}] = A_{ijkl}B_{kl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \mathbb{A} : \mathbf{B}. \quad (2.5)$$

Der Doppelpunkt bezeichnet in der symbolischen Schreibweise in den Gleichungen (2.4) und (2.5) die Summation über zwei Indizes.

2.2.1 Festkörpermechanik eines Volumenelements

Zunächst wird ein VE mit der Kantenlänge d betrachtet, das der Bedingung (2.1) genügt. Zur Beschreibung des elastischen Verhaltens eines VE werden Verzerrungs- und Spannungstensor benötigt, anhand derer gemäß der linearen Elastizitätstheorie die Steifigkeit des VE bestimmt werden kann. Außerdem werden zur späteren Beschreibung von MPZ und von einer Schädigungsentwicklung Grundlagen der Plastizitätstheorie benötigt. Die folgenden Ausführungen der genannten Aspekte stützen sich auf [13, 36, 116].

Verzerrungstensor

Zur Beschreibung einer materiellen Verzerrung im VE wird zunächst ein materieller Punkt unter Einführung eines kartesischen Koordinatensystems in seiner Anfangsplatzierung mit seinen Koordinaten $\mathbf{X} = (X \ Y \ Z)^T$ definiert. Durch eine Verzerrung verschiebt sich der Punkt zu seiner sogenannten Momentanplatzierung \mathbf{x} , die im gleichen Koordinatensystem wie \mathbf{X} beschrieben wird. Unter der Annahme, dass jede Momentanplatzierung \mathbf{x} einer eindeutigen Anfangsplatzierung \mathbf{X} zuzuordnen ist, lässt sich $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ schreiben. Damit ergibt sich für den Verschiebungsvektor

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}. \quad (2.6)$$

Als Deformationsmaß wird die inkrementelle Veränderung der Momentanplatzierung bezüglich der Anfangsplatzierung definiert. Dies ergibt den Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}}. \quad (2.7)$$

Analog dazu kann die Deformation, die die Verschiebung im materiellen Punkt hervorruft, durch den Verschiebungsgradienten

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial (\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F} - \mathbf{I} \quad (2.8)$$

mit dem Einheitstensor \mathbf{I} beschrieben werden. Aus den Deformationen lässt sich die Verzerrung bestimmen. In der Mechanik wird dafür der GREEN'sche Verzerrungstensor 2. Stufe

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T\mathbf{H}) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2.9)$$

verwendet. Für kleine Verschiebungsgradienten kann für das Tensorprodukt $\mathbf{H}^T \mathbf{H} \approx 0$ angenommen und von linearer Verzerrung ausgegangen werden, sodass sich der infinitesimale, lineare Verzerrungstensor

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \approx \mathbf{E} \quad (2.10)$$

ergibt. Da der Verzerrungstensor stets symmetrisch ist, gilt

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^T \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.11)$$

Spannungstensor

Analog zum Verzerrungstensor wird der CAUCHY'sche Spannungstensor 2. Stufe

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

eingeführt, der den Spannungszustand an einem VE beschreibt. Aufgrund des Momentengleichgewichts gilt auch hier die Symmetriebedingung

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.13)$$

Der Spannungsvektor \mathbf{t} , der auf einer Schnittebene mit dem Normalenvektor \mathbf{n} wirkt, wird mit dem CAUCHY'sche Spannungstensor zu

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (2.14)$$

berechnet.

Unter Einführung der VOIGT'sche Notation lässt sich der symmetrische Verzerrungstensor bzw. Spannungstensor in die Form

$$\vec{\sigma}_{\text{VOIGT}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix}; \quad \vec{\varepsilon}_{\text{VOIGT}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

überführen.

Lineare Elastizität

Die eingeführten Verzerrungs- und Spannungstensoren sind fest aneinander gekoppelt. Im Fall der linearen Elastizität stellt der Steifigkeitstensor \mathbb{C} bzw. der Nachgiebigkeitstensor \mathbb{S} den proportionalen Zusammenhang zwischen Dehnung und Spannung her. Dies wird mit dem HOOKE'schen Gesetz

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.16)$$

bzw. mit der Inversen $\mathbb{S} = \mathbb{C}^{-1}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{S} : \boldsymbol{\sigma} \quad (2.17)$$

beschrieben. Durch die Kopplung der jeweils neun Einträge der Tensoren 2. Stufe $\boldsymbol{\varepsilon}$ und $\boldsymbol{\sigma}$ besitzen die Tensoren 4. Stufe \mathbb{C} bzw. \mathbb{S} je $9^2 = 81$ Einträge. Je nach vorliegender Materialsymmetrie lässt sich die Anzahl der unabhängigen Einträge jedoch stark reduzieren. Für die in der vorliegende Arbeit relevanten Materialsymmetrien, der kubischen Symmetrie (3 unabhängige Einträge) und der Isotropie (2 unabhängige Einträge), können die Steifigkeitstensoren mit der VOIGT'sche Notation als Tensoren 2. Stufe zu

$$\mathbb{C}_{orth} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{1111} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2C_{2323} & 0 & 0 \\ & & & & 2C_{2323} & 0 \\ & & & & & 2C_{2323} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

$$\mathbb{C}_{iso} = \begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{1111} & C_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{1111} - C_{1122} & 0 & 0 \\ & & & & C_{1111} - C_{1122} & 0 \\ & & & & & C_{1111} - C_{1122} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\mathbb{S}_{orth} = \mathbb{C}_{orth}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2G} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2G} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2G} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

$$\mathbb{S}_{iso} = \mathbb{C}_{iso}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1+\nu}{E} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1+\nu}{E} & 0 \\ & & & & & \frac{1+\nu}{E} \end{pmatrix}$$

mit dem Elastizitätsmodul E , der Querkontraktion ν und dem Schubmodul G angegeben werden. Damit lässt sich das HOOKE'sche Gesetz nach Gleichung (2.16) vollständig zu $\vec{\sigma}_{\text{VOIGT}} = \mathbf{C} \vec{\varepsilon}_{\text{VOIGT}}$ darstellen.

Plastizität

Ab einer materialspezifischen Belastungsgrenze fängt das VE an, sich plastisch zu deformieren. Unter der für kleine Verformungen üblichen Annahme $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$ ergibt sich für das HOOKE'sche Gesetz

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \varepsilon_e = \mathbf{C} : (\varepsilon - \varepsilon_p). \quad (2.20)$$

Für die plastische Verformung, auch plastisches Fließen genannt, muss die spannungsabhängige Fließbedingung

$$\mathfrak{F}(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (2.21)$$

erfüllt sein. Im neundimensionalen Raum des Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ stellt $\mathfrak{F}(\boldsymbol{\sigma})$ eine konvexe Fläche dar, auf der plastisches Fließen stattfindet. Unterhalb dieser Fläche verhält sich das Material hingegen elastisch. Damit werden durch

$$\mathfrak{F}(\boldsymbol{\sigma}) \leq 0 \quad (2.22)$$

alle möglichen Zustände beschrieben. Allerdings kann sich die Fläche im Verlauf des plastischen Fließens verändern. So kann die Fläche ihre Form oder Lage verändern [36], was isotroper bzw. kinematischer Verfestigung entspricht. Bleibt die Fläche hingegen unverändert, wird dies als ideal-plastisch bezeichnet. Die Veränderung der Fließfläche wird mit Fließregeln beschrieben, auf die an dieser Stelle nicht näher eingegangen wird, da diese nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind.

Zur Bestimmung von $\mathfrak{F}(\boldsymbol{\sigma})$ wurden verschiedene Ansätze entwickelt. Die häufigste Anwendung finden die von VON MISES und TRESCA entwickelten Fließkriterien. Nach VON MISES tritt Fließen ein, wenn die Gestaltänderungsenergie einen vordefinierten Grenzwert erreicht. Dies lässt sich im Hauptspannungsraum durch

$$\mathfrak{F}_{\text{MISES}}(\boldsymbol{\sigma}) = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_F^2 = 0 \quad (2.23)$$

mit der Fließspannung σ_F und den Hauptspannungen $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ darstellen. Im Hauptspannungsraum stellt die Fließfläche nach VON MISES einen Kreiszyylinder dar. Nach dem Fließkriterium nach TRESCA beginnt plastisches Fließen, sobald die maximale Schubspannung die Fließspannung erreicht, bzw. wenn im Hauptspannungsraum die Bedingung

$$\mathfrak{F}_{\text{TRESCA}}(\boldsymbol{\sigma}) = \max(|\sigma_2 - \sigma_1|, |\sigma_3 - \sigma_2|, |\sigma_1 - \sigma_3|) - \sigma_F = 0 \quad (2.24)$$

erfüllt ist. Dies ist im Hauptspannungsraum ein sechseckiges Prisma. Für den zweidimensionalen Fall sind die beiden genannten Fließkriterien sowie die Verfestigungsarten nach VON MISES schematisch in Abbildung 2.2 verdeutlicht.

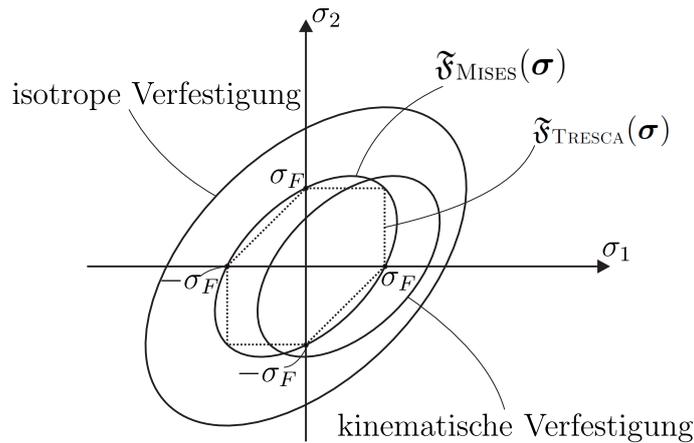


Abbildung 2.2: Fließbedingungen im zweidimensionalen Hauptspannungsraum

2.2.2 Statistisches Volumenelement

In der vorliegenden Arbeit werden aufgrund der in diesem Kapitel einleitenden Darstellung ausschließlich SVE betrachtet, da die Gleichung (2.1) für ein RVE aufgrund der stark ausgeprägten Mikrostruktur der betrachteten Metallschäume nicht erfüllt ist. Damit treten für die zuvor vorgestellten Materialparameter \mathbb{C} , \mathbb{S} und für die Fließbedingung $\mathfrak{F}(\sigma)$ Streuungen auf. Die Handhabung streuender Materialparameter setzt stochastische Grundlagen voraus, die im Folgenden zusammengefasst werden.

Nach [25] ist Stochastik die Lehre von den Gesetzmäßigkeiten des Zufalls, die in zwei Teilbereiche untergliedert werden kann: Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Während erstere sich mit der Beschreibung und Untersuchung von zufälligen Vorgängen befasst, beinhaltet Statistik den Umgang mit Zufällen und deren Schlussfolgerungen [25]. Die folgenden Grundlagen zur Beschreibung eines SVE basieren auf den Darstellungen in [25, 63, 81, 89, 94].

Wahrscheinlichkeitsraum

Zur Beschreibung des Wahrscheinlichkeitsverhaltens der Materialparameter ist zunächst ein mathematischer Raum zu definieren, in dem später operiert wird. Für die Modellierung eines Wahrscheinlichkeitsraumes werden drei Dinge benötigt: Erstens die Definition eines Raumes, in dem alle möglichen Ergebnisse liegen werden. Zweitens wird Algebra zur Berechnung der Ereignisse in dem Ergebnisraum benötigt. Und drittens ist eine Wahrscheinlichkeitsbewertung der errechneten Ereignisse einzuführen:

1. Ergebnismenge: Die Summe aller möglichen Elementarereignisse θ ergibt die Ergebnismenge $\Omega = \{\theta\}$, die endlich oder unendlich sein kann. Eine Menge A an Elementarereignissen θ heißt Ereignis und ist eine Teilmenge von Ω , also $A \subset \Omega$.

2. σ -Algebra: Ein System \mathcal{A} von Teilmengen in Ω wird σ -Algebra genannt, wenn

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- Für $A \in \mathcal{A}$ folgt $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- Für $A_i \in \mathcal{A}$ folgt $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}, i \in \mathbb{N}$.

Nach [25] bzw. Abbildung 2.3 erhält man dadurch ein Ereignissystem, mit dem gemäß der Mengenalgebra Berechnungen durchführbar sind.

3. Wahrscheinlichkeitsbewertung: Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereignis A eintritt, betrage $\mathcal{P}(A)$. Nach den Axiomen von KOLMOGOROW [60] gilt

1. Axiom: $0 \leq \mathcal{P}(A) \leq 1$
2. Axiom: $\mathcal{P}(\Omega) = 1$
3. Axiom: $\mathcal{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_i)$, falls $\mathcal{P}(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = \emptyset$.

Der Wahrscheinlichkeitsraum wird letztendlich durch das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ aufgespannt.

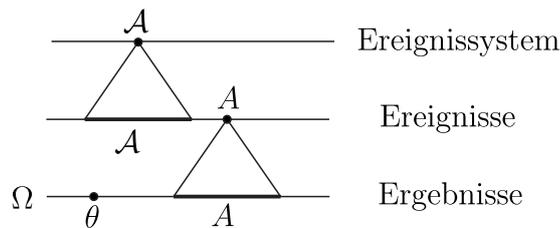


Abbildung 2.3: Ebenen in der Stochastik [25]

Zufallsvariable und Zufallsfeld

Die Menge aller theoretisch möglichen SVE entspricht der Ergebnismenge Ω . Ein einzelnes generiertes SVE ist ein Elementarereignis θ , für das die allgemeine Zufallsvariable $X(\theta)$ eingeführt wird, die der Abbildung $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ im Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ folgt, falls $\theta \in \Omega : X^{-1}(\theta) \in \mathcal{A}$. Diese Zufallsvariable kann beispielsweise die zuvor eingeführten Materialparameter repräsentieren, sodass $\mathbb{C}(\theta)$ für das SVE gilt. Jedem Elementarereignis θ wird demnach ein Zahlenwert zugeordnet. Zur Beschreibung der Verteilung der einzelnen Zufallsvariablen $X(\theta)$ wird die Verteilungsfunktion über

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{P}(X(\theta) \leq x), x \in \mathbb{R} \tag{2.25}$$

definiert. Es gilt $\mathcal{F} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. Daraus lässt sich die Dichtefunktion (auch Wahrscheinlichkeitsdichte genannt) $f(t)$ herleiten, die ein Maß für die Dichte der Verteilung der Zufallsvariable ist. Die Dichtefunktion hängt mit der Verteilungsfunktion über

$$\mathcal{F}(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, x \in \mathbb{R} \tag{2.26}$$

zusammen. Die bekannteste und meist verwendete Verteilungsfunktion ist die Normalverteilung (GAUSS-Verteilung), die zusammen mit der Dichtefunktion in Abbildung 2.4 dargestellt ist.

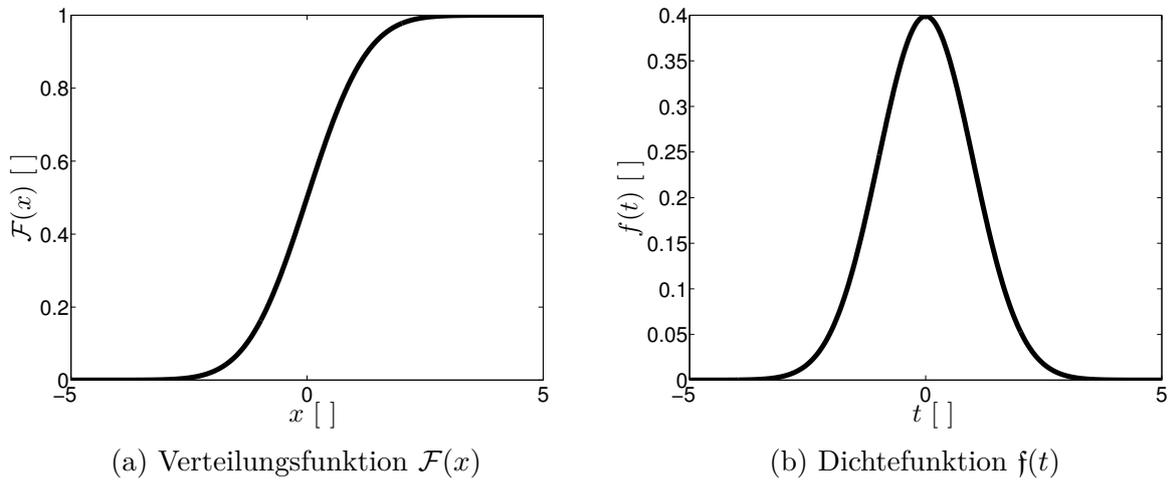


Abbildung 2.4: Charakteristik einer normalverteilten Zufallsvariablen

Hängt eine Größe neben dem Elementarereignis zusätzlich von einer deterministischen Größe ab, spricht man von einem Zufallsfeld $X(\theta, x)$, wie z.B. $\mathcal{F}(\theta, \sigma)$. Im speziellen Fall der Zeitabhängigkeit wird von einem Zufallsprozess $X(\theta, t)$ gesprochen. Für ein festen Wert der Variable ergibt sich aus dem Zufallsfeld bzw. -prozess eine Zufallsvariable. Wird hingegen ein festes Ereignis $\hat{\theta}$ betrachtet, so spricht man von einer Realisierung.

Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

Zur Beschreibung und Charakterisierung einer Ereignismenge sind Kenngrößen einzuführen. Der Erwartungswert für eine stetig verteilte Zufallsvariable $X(\theta)$ mit der Dichteverteilung $f(t)$ ergibt sich zu

$$\mathcal{E}(X(\theta)) = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt, \quad (2.27)$$

wenn die Bedingung $\int_{-\infty}^{\infty} |t| f(t) dt < \infty$ erfüllt ist. In dieser Arbeit liegen jedoch ausschließlich N Stichproben eines SVE vor. Dabei handelt es sich um diskrete Zufallsvariablen, deren Schätzwert des Mittelwerts sich über die endliche Summe zu

$$\mu_X = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k(\theta) \underset{N \rightarrow \infty}{=} \mathcal{E}(X(\theta)) \quad (2.28)$$

ergibt. Für $N \rightarrow \infty$ nähert sich der Schätzwert dem Erwartungswert an. Der Schätzwert der Streuung um den Mittelwert einer Zufallsvariable wird mit der Varianz

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (X_k(\theta) - \mu_X)^2 \stackrel{N \rightarrow \infty}{=} \mathcal{V}(X(\theta)) = \mathcal{E}([X(\theta) - \mathcal{E}(X(\theta))]^2) \quad (2.29)$$

bzw. mit der Standardabweichung

$$\sigma_X = \sqrt{\sigma_X^2} \stackrel{N \rightarrow \infty}{=} \mathcal{S}(X(\theta)) = \sqrt{\mathcal{V}(X(\theta))} \quad (2.30)$$

eingeführt, die ein Maß für den Mittelwert der quadratischen Abweichung vom Mittelwert darstellen. Das Verhältnis von Standardabweichung zu Mittelwert wird durch den Variationskoeffizient

$$\gamma_X = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \quad (2.31)$$

dargestellt. Mit den eingeführten Größen lässt sich jede beliebige Zufallsvariable

$$X^0(\theta) = \frac{X(\theta) - \mu_X}{\sigma_X} \quad (2.32)$$

mit $\mu_{X^0} = 0$ und $\sigma_{X^0} = 1$ standardisieren.

Bei einem Zufallsfeld $X(\theta, x)$ wird bei der Mittelung über Realisierungen von Ensemblemittelung

$$\mu_X(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X_k(\theta, x) \quad (2.33)$$

gesprochen, wofür sich eine ortsabhängige Mittelwertfunktion ergibt. Im Gegensatz dazu wird von räumlicher Mittelung $\bar{X}(\theta)$ gesprochen, wenn über x gemittelt wird.

Korrelations- und Kovarianzfunktion

Bei der Einführung von zwei oder mehreren Zufallsvariablen ist deren gegenseitige Abhängigkeit von Interesse. Analog zu den eingeführten Größen der Varianz und des Variationskoeffizienten wird die Korrelation

$$\mathcal{R}(X(\theta), Y(\theta)) = \mathcal{E}(X(\theta) \cdot Y(\theta)) \quad (2.34)$$

und die Kovarianz

$$\mathcal{K}(X(\theta), Y(\theta)) = \mathcal{E}([X(\theta) - \mathcal{E}(X(\theta))] \cdot [Y(\theta) - \mathcal{E}(Y(\theta))]) \quad (2.35)$$

eingeführt. Für standardisierte Zufallsvariablen nach Gleichung (2.32) sind Korrelation und Kovarianz äquivalent. Der Korrelationskoeffizient ist über

$$\Gamma(X(\theta), Y(\theta)) = \frac{\mathcal{K}(X(\theta), Y(\theta))}{\mathcal{S}(X(\theta)) \mathcal{S}(Y(\theta))} \quad (2.36)$$

definiert, für den $-1 \leq \Gamma \leq 1$ gilt.

Im Falle von zwei oder mehreren Zufallsfeldern wird die Kreuzkovarianzfunktion

$$\mathcal{K}(X(\theta, x), Y(\theta, y)) = \mathcal{K}_{XY}(x, y) = \mathcal{E}([X(\theta, x) - \mu_X(x)] \cdot [Y(\theta, y) - \mu_Y(y)]) \quad (2.37)$$

bzw. Kreuzkorrelationsfunktion

$$\mathcal{R}(X(\theta, x), Y(\theta, y)) = \mathcal{R}_{XY}(x, y) = \mathcal{E}(X(\theta, x) \cdot Y(\theta, y)) \quad (2.38)$$

verwendet. Für ein Zufallsfeld ist des Weiteren die Korrelation in Abhängigkeit von x von Interesse. Damit werden die Gleichungen (2.37) und (2.38) zur Autokovarianzfunktion

$$\mathcal{K}_{XX}(x_1, x_2) = \mathcal{E}([X(\theta, x_1) - \mu_X(x_1)] \cdot [X(\theta, x_2) - \mu_X(x_2)]) \quad (2.39)$$

und Autokorrelationsfunktion

$$\mathcal{R}_{XX}(x_1, x_2) = \mathcal{E}(X(\theta, x_1) \cdot X(\theta, x_2)). \quad (2.40)$$

Eigenschaften von Zufallsfeldern

Für die Modellierung von zufallsverteilten Problemen ist es notwendig, das Zufallsfeld mit einigen Kriterien zu charakterisieren und zu klassifizieren. Zur Multiskalenmodellierung wurde ein heterogenes Material eingeführt, dessen Eigenschaften als stationär und ergodisch zu betrachten sind. Mit den in diesem Abschnitt eingeführten Größen lassen sich diese beiden Begriffe näher eingrenzen.

Stationarität

Die Stationarität (auch Homogenität genannt) lässt sich auf zwei Arten unterscheiden. Stationarität im weiteren Sinne bzw. schwache Stationarität besagt, dass der Mittelwert ortsunabhängig ist und bei einer endlichen Varianz die Autokorrelationsfunktion $\mathcal{R}_{XX}(\Delta x)$ nur von $\Delta x = x_1 - x_2$ abhängt, also unabhängig von Verschiebungen ist. Von Stationarität im engeren Sinne oder strenger Stationarität eines Zufallsfeldes $X(\theta, x)$ spricht man, wenn zudem die Verteilungsfunktion des Zufallsfeldes unabhängig von x ist.

Ergodizität

Eine weitere Eigenschaft von Zufallsfeldern ist die Ergodizität. Ein Zufallsfeld ist ergodisch, wenn die Ensemblemittelung der räumlichen (bzw. bei Zufallsprozessen der zeitlichen) Mittelung entspricht, also $\mu_X(x) = \bar{X}(\theta)$.

2.2.3 Dämpfung

Wie im einleitenden Kapitel 1 dargelegt, konzentriert sich die vorliegende Arbeit auf die Untersuchung von MPZ-induzierter Dämpfung eines SVE. Daraus lässt sich ein zufallsverteilter Dämpfungsparameter bestimmen. Da die Beschreibung von Dämpfung im Allgemeinen sehr abstrakt ist, existieren verschiedene Dämpfungsmodelle, die je nach Problemstellung ihre Anwendung finden.

Dämpfungsmodelle

Zur Beschreibung verschiedener Dämpfungsarten existieren eine Vielzahl von Dämpfungsmodellen. Die bekanntesten Modelle werden hier kurz vorgestellt [115].

Viskose Dämpfung

Die viskose Dämpfung ist geschwindigkeitsproportional. Damit ergibt sich für die resultierende Dämpfungskraft

$$F_D(t) = -d\dot{x}(t), \quad (2.41)$$

bzw. für die Bewegungsgleichung eines Einfreiheitsgradsystems

$$m\ddot{x}(t) + d\dot{x}(t) + cx(t) = 0. \quad (2.42)$$

Im Fall einer linearen, viskosen Dämpfung steigt der Dämpfungsterm linear mit der Erregerfrequenz Ω an. Häufig wird für eine bessere Handhabung das LEHR'sche Dämpfungsmaß

$$D_{\text{LEHR}} = \frac{d}{2m\omega_0} \quad (2.43)$$

mit der ungedämpften Eigenkreisfrequenz ω_0 eingeführt, womit sich Gleichung (2.42) zu

$$\ddot{x}(t) + 2\omega_0 D_{\text{LEHR}} \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0 \quad (2.44)$$

ergibt. Die Schwingung weist dabei die gedämpfte Eigenkreisfrequenz $\omega_D = \sqrt{1 - D_{\text{LEHR}}^2} \omega_0$ auf und klingt exponentiell mit $e^{-\omega_0 D_{\text{LEHR}} t}$ ab. Je nach Höhe der Dämpfung unterscheidet man zwischen kritischer ($D_{\text{LEHR}} = 1$), unterkritischer ($0 < D_{\text{LEHR}} < 1$) und überkritischer Dämpfung ($D_{\text{LEHR}} > 1$).

Strukturdämpfung

In einigen Fällen, wie z.B. bei innerer Dämpfung von Werkstoffen, wurde durch Experimente ein annähernd geschwindigkeitsunabhängiges Dämpfungsverhalten beobachtet. Diese Strukturdämpfung (auch Hysteresedämpfung genannt) wird mit einem zusätzlichen Faktor in der Bewegungsgleichung berücksichtigt. Damit ergibt sich

$$m\ddot{x}(t) + \frac{1}{\Omega} d\dot{x}(t) + cx(t) = 0. \quad (2.45)$$

Modale Dämpfung

Bei einer modalen Dämpfung wird angenommen, dass jede Eigenschwingung für sich einzeln gedämpft ist. Damit ergibt sich für die k -te Eigenschwingung $\varphi_k(t)$ die Dämpfungskraft

$$F_{D,k}(t) = -d_k \dot{\varphi}_k(t). \quad (2.46)$$

Gerade für Modellreduktionsverfahren, die auf Eigenschwingungen beruhen, bietet sich daher diese Dämpfungsmodellierung an.

RAYLEIGH-Dämpfung

Die Problematik der bisher vorgestellten Dämpfungsgrößen liegt darin, dass im Gegensatz zur Masse und Steifigkeit die Dämpfung meist schwer zu bestimmen und physikalisch zu erfassen ist. Zur einfacheren Handhabung wird häufig die RAYLEIGH-Dämpfung mit Hilfe der *Bequemlichkeitshypothese*

$$\mathbf{D} = \alpha \mathbf{C} + \beta \mathbf{M} \quad (2.47)$$

in matrizieller Form angewendet, die davon ausgeht, dass die Dämpfung über die Faktoren α und β proportional zur Systemsteifigkeit und/oder -masse ist. Dieser Ansatz besitzt allerdings keine physikalische Plausibilität und wird lediglich aus einfacher mathematischer Handhabbarkeit genutzt.

Neben den genannten Dämpfungsmodellen existiert eine Reihe von weiteren Modellen, die phänomenologischer Natur sind, wie z.B. die COULOMB'sche Dämpfung für Reibkontakte.

2.2.4 Lebensdauerverhalten

Bei statischer Beanspruchung eines VE tritt Versagen im plastischen Bereich auf, wenn ein werkstoffspezifischer Grenzwert erreicht wird, z.B. die Streckgrenze R_m . Bei dynamischer Beanspruchung kann ein VE allerdings auch bei Belastungen versagen, die sich rein rechnerisch noch im elastischen Bereich befinden. Dies geschieht aufgrund von in der Realität unvermeidbaren Inhomogenitäten im Werkstoff, die Spannungsspitzen hervorrufen und örtlich zu plastischen Verformungen führen können. In Metallschäumen treten zudem Spannungsspitzen an den Knotenpunkten auf, die lokal MPZ hervorrufen. Der daraus resultierende Schädigungszuwachs wird Materialermüdung genannt, die Zeit bis zum Versagen wird als Lebensdauer und die bis dahin aufgebrachte Anzahl an Lastzyklen als Versagenslastspielzahl bezeichnet. In diesem Abschnitt ist das Verhalten während dieser Lebensdauer von Interesse.

Zur Grundcharakterisierung einer Schwingung dient das Spannungsverhältnis $R = \frac{\sigma^-}{\sigma^+}$, das den Spannungsverlauf in Druckbeanspruchung, Zug-Druck-Wechselbeanspruchung und Zugbeanspruchung unterteilt (Abbildung 2.5a). Im Folgenden werden ausschließlich mittelwertfreie, harmonische Schwingungen mit $R = -1$ untersucht. Im Allgemeinen wird bei Ermüdung eines Werkstoffes von Rissentstehung und Risswachstum ausgegangen. Darauf aufbauend wurde eine auf dem Spannungsintensitätsfaktor K aufbauende Theorie entwickelt. Da in der vorliegenden Arbeit die Lebensdauermodellierung ausschließlich auf der WÖHLER-Kurve basiert, nicht aber auf Rissentstehung und -wachstum, sei an dieser Stelle auf die weiterführende Literatur verwiesen, z.B. [96].

In Abhängigkeit von der angelegten Belastung kann die Anzahl der Schwingungen bis zum Versagen experimentell ermittelt werden. Die Kurve, die sich aus zahlreichen durchgeführten Experimenten für verschiedene Belastungsamplituden ergibt, wird WÖHLER-Kurve

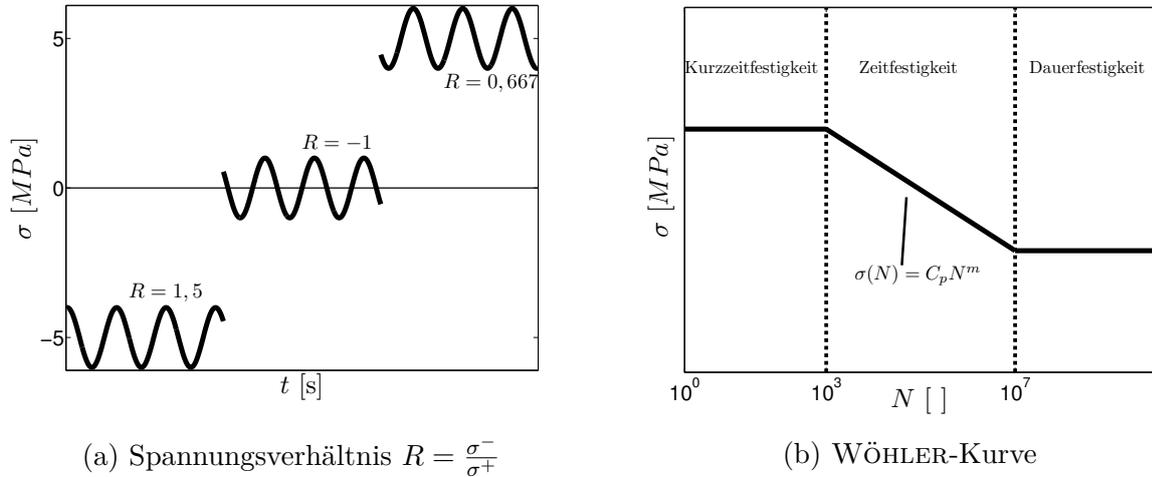


Abbildung 2.5: Charakteristika zur Lebensdauer

genannt (Abbildung 2.5b). Diese lässt sich in drei Abschnitte unterteilen: Die Kurzzeitfestigkeit befindet sich bis ca. 10^3 Versagenslastspielzahlen. Daran schließt die Zeitfestigkeit an, die in der doppelt-logarithmischen Auftragung eine annähernd fallende Gerade ergibt. Die Lebensdauer in diesem Abschnitt wird mit der Gleichung nach BASQUIN

$$\sigma = C_p N^m \quad (2.48)$$

mit den Materialkonstanten C_p und m beschrieben. Oberhalb einer Versagenslastspielzahl von $\sim 10^7$ wird von Dauerfestigkeit gesprochen. Die WÖHLER-Kurve kann durch Zug-Druck-Belastung an zylindrischen Testobjekten experimentell bestimmt werden. Aufgrund der in den Experimenten auftretenden Streuung der verschiedenen Proben ist die WÖHLER-Kurve als Mittelwertkurve der Versagenslastspielzahlen anzusehen.

In der Praxis wird ein Bauteil während seiner Lebenszeit oft mit einem Spektrum an verschiedenen Amplituden belastet. Dadurch sind die entstehenden, unterschiedlichen Ermüdungszuwächse entsprechend miteinander zu verrechnen. Die Schadensakkumulation kann mit der linearen PALMGREN-MINER-Regel

$$S = \sum_{k=1}^M \frac{N_k}{N_{V,k}}, \quad (2.49)$$

mit der Lastspielanzahl N_k für die Amplitude \hat{u}_k und der aus der WÖHLER-Kurve ergebenden Versagenslastspielzahl $N_{V,k}$ beschrieben werden. Das akkumulierte Versagen tritt auf, wenn $S = 1$.

Mit Hilfe des Schädigungsparameters S kann eine Zuverlässigkeitsanalyse durchgeführt werden, was das Ziel der Untersuchungen zur Lebensdauer eines Bauteils ist. Im technischen Einsatz ist von Interesse mit welcher Wahrscheinlichkeit das Bauteil zu welchem Zeitpunkt versagt bzw. betrieben werden kann. Die zugrunde liegende Annahme ist, dass

das Versagen zu einem Zeitpunkt keine deterministische Größe ist, sondern durch eine Zufallsvariable beschrieben werden muss. Zur Beschreibung der Wahrscheinlichkeit des Versagens zum Zeitpunkt t wird entsprechend Gleichung (2.25) die Verteilungsfunktion $\mathcal{F}(t)$ (hier \mathcal{F} für engl. *failure* = Versagen) zu

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{P}(X_t(\theta) \leq t), \quad t \in [0; \infty[$$

mit der Zufallsvariablen $X_t(\theta)$, die die Lebenszeit bzw. die Zeit bis zum Versagen beschreibt, gesetzt. Die Zuverlässigkeit eines Bauteils wird durch die Funktion $\mathcal{Z}(t)$ (oft auch mit \mathcal{R} gekennzeichnet für engl. *reliability* = Zuverlässigkeit) beschrieben und ergibt sich aus der Versagenskurve zu

$$\mathcal{Z}(t) = 1 - \mathcal{F}(t) = \mathcal{P}(X_t(\theta) > t), \quad t \in [0; \infty[.$$

Die erwartete, mittlere Lebensdauer entspricht dabei dem einfachen Mittelwert μ_{X_t} . Die Bestimmung der Funktionen \mathcal{F} bzw. \mathcal{Z} ist je nach Problemstellung nicht immer einfach. Dazu bestehen in der Literatur neben analytischen und numerischen Lösungen bzw. Methoden auch näherungsweise und simulative Herangehensweisen [110]. In dieser Arbeit wird letztere durch eine MONTE-CARLO-Simulation umgesetzt.

Des Weiteren kann es für den Einsatz eines Bauteils von Interesse sein, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Bauteil in einem vorgegebenen Zeitintervall versagt, wenn es davor noch intakt war. Für die Beschreibung dieser sogenannten instantanen Versagensrate [110], die dem Versagen im nächsten Zeitinkrement entspricht, wird in der Literatur die Hazard-Funktion $h(t)$ verwendet. Diese ergibt sich zu

$$h(t) = \frac{\frac{d\mathcal{F}(t)}{dt}}{\mathcal{Z}(t)} = \frac{f(t)}{\mathcal{Z}(t)}. \quad (2.50)$$

Zur Beschreibung des Versagens von realen Systemen aufgrund von Materialermüdung hat sich die WEIBULL-Verteilung

$$\mathcal{F}_{\text{WEIBULL}}(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t-t_0}{a}\right)^b} \quad (2.51)$$

mit den Koeffizienten a und b und der Zeit t_0 , in der kein Versagen auftritt, bewährt, da sie die Versagenswahrscheinlichkeit in der Praxis hinreichend genau wiedergibt. Die Idee dahinter basiert auf der *weakest link*-Theorie. Diese besagt, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Körpers gleich dem Produkt der Ausfallwahrscheinlichkeiten der einzelnen Volumenelemente ist.

2.3 Makroskopische Kontinuumsschwingungen

Auf der makroskopischen Skala können mit den auf der Mesoebene gewonnenen Materialparametern heterogene Strukturen berechnet werden. In dieser Arbeit stehen Schwingungen von harmonisch zwangserregten, eindimensionalen Kontinua im Fokus, die mit einer skalaren Verschiebungsfunktion beschrieben werden können. Dazu wird die allgemeine Form der Bewegungsgleichung entsprechend [116] zu

$$\mathfrak{M}(\theta)[u_{,tt}(x, t)] + \mathfrak{D}(\theta)[u_{,t}(x, t)] + \mathfrak{C}(\theta)[u(x, t)] = p(x, t) \quad (2.52)$$

mit den örtlichen Differentialoperatoren $\mathfrak{M}(\theta)$, $\mathfrak{D}(\theta)$ und $\mathfrak{C}(\theta)$, der skalaren, orts- und zeitabhängige Verschiebungsfunktion $u(x, t)$ und der Kräfteerregung $p(x, t)$ eingeführt. Der in den Operatoren aufgrund der Materialparameter enthaltenen Streuung wird durch das Argument θ Rechnung getragen.

Mit dem Ansatz

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x) a_j(t) \quad (2.53)$$

mit den Eigenfunktionen $\varphi_j(x)$ und den unbekanntenen Zeitfunktionen $a_j(t)$ werden die Eigenschwingungen additiv überlagert [22]. Damit ergibt sich die Bewegungsgleichung (2.52) zu

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\mathfrak{M}(\theta)[\varphi_j(x) a_{j,tt}(t)] + \mathfrak{D}(\theta)[\varphi_j(x) a_{j,t}(t)] + \mathfrak{C}(\theta)[\varphi_j(x) a_j(t)]) = p(x, t). \quad (2.54)$$

Unter Ausnutzung der verallgemeinerten Orthogonalitätsbedingung von Eigenfunktionen werden durch Multiplikation der Gleichung (2.54) mit der Eigenfunktion φ_k alle Summanden außer für $k = j$ zu Null. Mit der Integration über die Länge L des eindimensionalen Kontinuums folgt für den j -ten Summand

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^L \{ \mathfrak{M}(\theta)[\varphi_j(x) a_{j,tt}(t)] \varphi_j(x) + \mathfrak{D}(\theta)[\varphi_j(x) a_{j,t}(t)] \varphi_j(x) + \mathfrak{C}(\theta)[\varphi_j(x) a_j(t)] \varphi_j(x) \} dx \\ = \int_{x=0}^L p(x, t) \varphi_j(x) dx. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Dies lässt sich mit der Einführung generalisierter Größen wiederum in die klassische Darstellungsform einer Bewegungsgleichung zu

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{x=0}^L \mathfrak{M}(\theta)[\varphi_j(x)] \varphi_j(x) dx}_{m_{gen,j}} \ddot{a}_j(t) + \underbrace{\int_{x=0}^L \mathfrak{D}(\theta)[\varphi_j(x)] \varphi_j(x) dx}_{d_{gen,j}} \dot{a}_j(t) \\ + \underbrace{\int_{x=0}^L \mathfrak{C}(\theta)[\varphi_j(x)] \varphi_j(x) dx}_{c_{gen,j}} a_j(t) = \underbrace{\int_{x=0}^L p(x, t) \varphi_j(x) dx}_{f_{gen,j}} \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$m_{gen,j}(\theta) \ddot{a}_j(t) + d_{gen,j}(\theta) \dot{a}_j(t) + c_{gen,j}(\theta) a_j(t) = f_{gen,j}$$

überführen. Damit ergibt sich für die j -te Eigenschwingung ein klassischer, gedämpfter Ein-Massen-Schwinger mit der realisationsabhängigen, ungedämpften Eigenkreisfrequenz

$$\omega_{j,0}^2(\theta) = \frac{c_{gen,j}(\theta)}{m_{gen,j}(\theta)}. \quad (2.57)$$

Eine allgemeine, harmonische Anregung kann über eine FOURIER-Reihe zu $p(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j^+(x)e^{ij\Omega t} + p_j^-(x)e^{-ij\Omega t}$ aufgestellt werden, wobei p_j^- komplex konjugiert zu p_j^+ ist. Mit dem Ansatz $a_j(t) = a_j^+ e^{i\Omega t} + a_j^- e^{-i\Omega t}$ ergibt sich bei einem Vergleich der gleichfrequenten Anteile

$$m_{gen,j}(\theta)(i\Omega)^2 a_j^+ + d_{gen,j}(\theta)(i\Omega)a_j^+ + c_{gen,j}(\theta)a_j^+ = \int_0^L p_j^+(x)\varphi_j(x)dx \quad (2.58)$$

$$a_j^+(\theta) = \frac{1}{-m_{gen,j}(\theta)\Omega^2 + d_{gen,j}(\theta)(i\Omega) + c_{gen,j}(\theta)} \int_0^L p_j^+(x)\varphi_j(x)dx.$$

Ebenso wie die Eigenfunktion $\varphi(x)$ sind die Koeffizienten a_j abhängig von der Realisierung und resultieren dadurch in einer Verschiebungsfunktion $u(\theta, x, t)$. Da $2\Re(a_j^+ e^{ij\Omega t}) = a_j^+ e^{ij\Omega t} + a_j^- e^{-ij\Omega t}$ gilt, lässt sich die Verschiebung durch Einsetzen in den Ansatz (2.53) in der kompakten Schreibweise

$$u(\theta, x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(\theta, x)a_j(\theta, t)$$

$$= 2\Re \left(\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(\theta, x) \frac{1}{c_{gen,j}(\theta) \left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_{j,0}(\theta)} \right)^2 + \frac{id_{gen,j}(\theta)\Omega}{c_{gen,j}(\theta)} \right)} \int_0^L p_j^+(x)\varphi_j(\theta, x)dx e^{i\Omega t} \right) \quad (2.59)$$

darstellen. Es ist ersichtlich, dass die Verschiebung für jeden Summand aus drei Faktoren besteht. Der erste Faktor besteht aus der Eigenfunktion selbst. Der zweite Faktor stellt den Frequenzgang dieser Eigenfunktion dar und hat für den ungedämpften Fall an der Stelle $\frac{\Omega}{\omega_{j,0}} = 1$ eine Singularität. Der dritte Faktor gewichtet die äußere Anregung entsprechend mit der Eigenfunktion [22].

3 Mikrostruktur

Die Modellbildung der Mikrostruktur basiert auf zwei unterschiedlichen Schaumtypen. Dabei handelt es sich um die Generierung synthetischer VORONOI-Schäume, die auf theoretischen Überlegungen basieren und die Generierung von Schäumen, die auf Daten von realen Aluminiumschäumen basieren. Im Folgenden wird zunächst die Erzeugung von Eingangsdaten für beide Schäume erläutert und im Anschluss auf die Erstellung der Mikrostruktur eingegangen.

3.1 Erzeugen von Eingangsdaten

3.1.1 Voronoi-Schäume

In der vorliegenden Arbeit wird der Generator zur Erzeugung von VORONOI-Schäumen aus [101] genutzt. Unter der Annahme, dass beim Wachstumsprozess von Schäumen die Zellkerne alle gleichzeitig entstehen, sich nicht verschieben und alle Zellen isotrop mit der gleichen Geschwindigkeit wachsen [12, 124], werden in einem vorgegebenen kubischen Raum Punkte zur Festlegung der Zellkerne mit einer Gleichverteilung generiert. Von diesen Punkten aus wachsen die Zellen isotrop bis sie sich gegenseitig berühren. An den Stellen, wo sich zwei Zellen berühren, befinden sich die späteren Zellwände bzw. Stege. An den Stellen, wo mehr als zwei Zellen aufeinander treffen, sind Knotenpunkte. Durch diese Erzeugung weisen benachbarte Zellen die gleiche euklidische Distanz zwischen Zellwand und Zellmittelpunkt auf. Die entstehenden Zellwände und Zellflächen bzw. -volumina weisen dabei eine Γ -Verteilung auf [124].

3.1.2 Reale Aluminiumschäume

Die hier dargelegte Erzeugung der Eingangsdaten realer Aluminiumschäume wurde von einer Forschungsgruppe um Juniorprof. REDENBACH an der Universität Kaiserslautern durchgeführt. Weiterführende Einzelheiten sind den Veröffentlichungen [23, 24] zu entnehmen. Die Schäume wurden von ERG AEROSPACE CORPORATION [3], das die Aluminiumschäume unter dem Handelsnamen DUOCEL vertreibt, erworben. Aus den erhaltenen Schaumbalken mit dem Querschnitt $15 \cdot 15 \text{ mm}^2$ werden zur Strukturanalyse Schaumwürfel mit einer Kantenlänge von 15 mm herausgeschnitten und anschließend mit Hilfe der Computertomographie (CT) dreidimensionale Bilder der Mikrostruktur erstellt. Durch Binarisieren der Aufnahmen werden schwarzweiße Bilder erzeugt. Mittels einer euklidischen Abstandstransformation der binarisierten Bilder lässt sich für jedes Pixel der nächstgelegene Steg bestimmen. Dadurch werden lokale Distanzmaxima in den Zellmitten erhalten. Zusätzliche Maxima, die aufgrund von Diskretisierung oder Irregularitäten auftreten können, werden durch weitere geeignete Transformationen entfernt, auf die hier nicht näher

eingegangen wird. Zur Bestimmung der einzelnen Zellen wird schließlich eine Wasserscheidentransformation durchgeführt. Als Ergebnis dieser Bildverarbeitung erhält man den Mittelwert und die Standardabweichung der geometrischen Größen des Schaumes, wie etwa Zellendurchmesser, -oberflächen oder -volumina. Details zur Rekonstruktion realer Schäume aufgrund von CT-Aufnahmen sind [87] zu entnehmen.

3.2 Erstellung der Mikrostruktur

Für eine gegebene Menge an Punkten \mathfrak{P} der Zellkerne ergibt sich für jeden Zellkern $\mathbf{x}_i \in \mathfrak{P}$ mit dem VORONOI-Generator die Zelle

$$C(\mathbf{x}_i, \mathfrak{P}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{y} - \mathbf{x}_i| \leq |\mathbf{y} - \mathbf{x}_j|, \forall \mathbf{x}_j \in \mathfrak{P}\} \quad (3.1)$$

mit der euklidischen Distanz $|\cdot|$. Jeder Punkt \mathbf{y} , der zu \mathbf{x}_i die minimale Distanz aufweist, liegt innerhalb der Zelle $C(\mathbf{x}_i, \mathfrak{P})$.

Zur Erstellung von realen Schaummodellen ist ein VORONOI-Generator weniger geeignet, da dieser in der Zellgrößenverteilung begrenzt ist. Vielmehr ist ein Generator zu verwenden, der eine Gewichtung des VORONOI-Generators beinhaltet, um eine größere Variabilität zu ermöglichen. Die in dieser Arbeit verwendeten Modelle basieren auf dem LAGUERRE-Generator. Für eine gegebene Menge an Kugeln \mathfrak{S} ergibt sich demnach für die Kugel $s(\mathbf{x}_i, r_i)$ mit dem Mittelpunkt \mathbf{x}_i und dem Radius r_i die LAGUERRE-Zelle

$$C(s(\mathbf{x}_i, r_i), \mathfrak{S}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{y} - \mathbf{x}_i|^2 - r_i^2 \leq |\mathbf{y} - \mathbf{x}_j|^2 - r_j^2, \forall s(\mathbf{x}_j, r_j) \in \mathfrak{S}\}. \quad (3.2)$$

Der Unterschied zum VORONOI-GENERATOR besteht darin, dass alle Punkte in der Kugel s mit dem Radius r_i innerhalb der Zelle $C(s(\mathbf{x}_i, r_i), \mathfrak{S})$ liegen. Damit weisen zwei benachbarte Zellen nicht zwingend die gleiche euklidische Distanz zwischen Zellwand und Zellkern auf. Für den Fall, dass alle Kugeln den gleichen Radius besitzen wird aus Gleichung (3.2) ein VORONOI-Generator [61].

Die Stege werden im Folgenden als Biegebalken modelliert. Im Rahmen des in dieser Arbeit verwendeten FEM-Programms ABAQUS besteht die Möglichkeit zwischen TIMOSHENKO-Biegebalkenelementen mit linearer oder quadratischer Interpolation und EULER-BERNOULLI-Biegebalkenelementen mit kubischer Interpolation zu wählen. Aufgrund der in Abschnitt 4.6 gezeigten hohen Rechenzeit, die ohnehin zur Berechnung der Lebensdauer benötigt wird, werden in dieser Arbeit ausschließlich die EULER-BERNOULLI-Elemente benutzt, d.h. die Schubverformung der Stege wird nicht berücksichtigt. Bei den verwendeten Biegebalkenelementen wird auch Verschiebung in axialer Richtung berücksichtigt, sodass es sich um überlagerte Zug-Biege-Elemente handelt.

Untersuchungen an Stegen in [56, 66] haben gezeigt, dass sich aufgrund des Herstellungsprozesses mehr Material an den Knoten ablagert als in der Mitte der Stege. Folglich bilden sich Dickeverteilungen der Stegquerschnitte aus. Des Weiteren besitzt der Querschnitt die Form eines Dreieckes mit nach innen gewölbten Seiten.

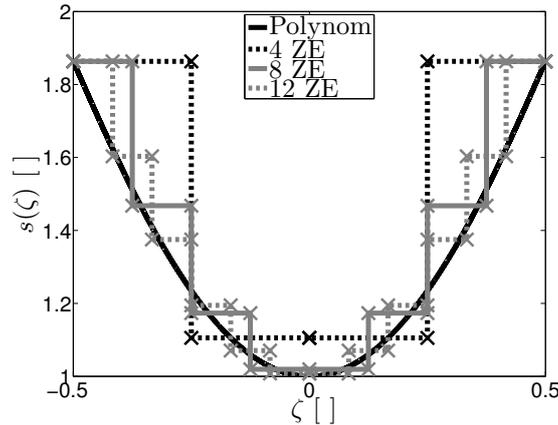


Abbildung 3.1: Modellierung der Stegdickenverteilung

Ein Vergleich zwischen Metallschaummodellen, deren Stege als TIMOSHENKO-Biegebalken mit quadratischer Interpolation und einem nach innen gewölbten Dreiecksquerschnitt modelliert sind und damit der Realität am nächsten entsprechen, und den in dieser Arbeit verwendeten Metallschaummodellen, deren Stege als EULER-BERNOULLI-Biegebalken mit Kreisquerschnitt modelliert sind, zeigt für letztere bei konstanter Stegdicke eine um $\sim 15\%$ niedrigere Steifigkeit bei einer Rechenzeiteinsparung von $\sim 25\%$. An dieser Stelle sei betont, dass dieser Modellierungsansatz die Ergebnisse nicht qualitativ, sondern nur quantitativ ändert, was dem Modellierungsaufwand und der Rechenzeit geschuldet ist.

Zur Beschreibung der Stegdickenverteilung wird gemäß [66] ein Polynom

$$s(\zeta) = 1 + a_2(l) \zeta^2 + a_4(l) \zeta^4 + a_6(l) \zeta^6 + a_8(l) \zeta^8, \quad \zeta = \frac{x}{l} \quad (3.3)$$

mit der Koordinate x , die ihren Ursprung in der Stegmitte hat, und der Steglänge l verwendet. Die Koeffizienten a_2, a_4, a_6, a_8 sind dabei abhängig von der Steglänge. Dazu wurden die Stege in zehn Längensklassen unterteilt. Für die Berücksichtigung der Stegdickenverteilung im FEM-Modell werden die Stege in Zwischenelemente (ZE) unterteilt (Abbildung 3.1).

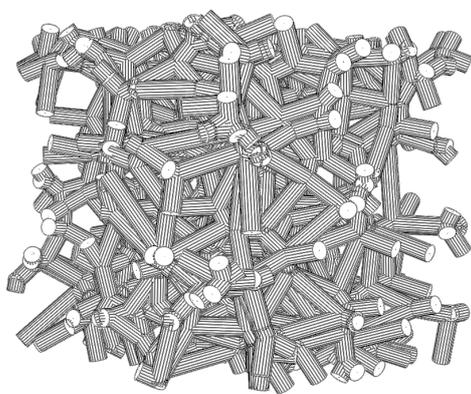
Materialparameter	Wert	Einheit
E	70	GPa
ν	0,33	–
ρ	2,7	$\frac{g}{cm^3}$
R_F	172	MPa
R_m	200	MPa
σ_D	120	MPa
Knotendicke	0,3858	mm

Tabelle 3.1: Materialdaten von Aluminium

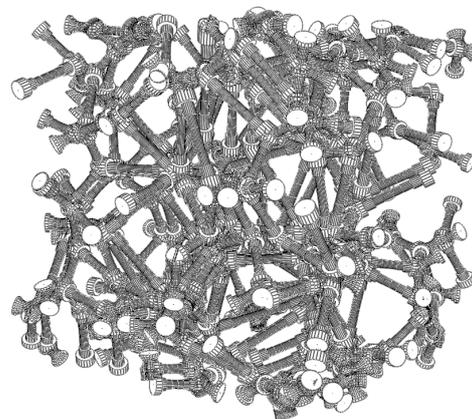
Dabei besitzen die ZE die gleiche Länge. Die Dicke der ZE wird für N ZE an den Stützstellen $s(\zeta_i)$ mit $\zeta_i = -\frac{1}{2} + \frac{i-1}{(N-1)}$, $i = 1, 2, \dots, N$ bestimmt.

Fehlstellen, Vorverformungen und weitere Inhomogenitäten, die in der Realität auftreten, werden in den Modellen der vorliegenden Arbeit nicht berücksichtigt. Außerdem werden ausschließlich offenzellige Schäume betrachtet, d.h. die Schaummodelle verfügen über keine Zellwände.

Die zugrundeliegenden Materialdaten beider Schaummodelle sind in Tabelle 3.1 zusammengefasst. Die angegebene Knotendicke bezieht sich dabei auf die Modelle des DUOCEL-Schaums. Für die erzeugten VORONOI-Schäume wird entweder die relative Dichte oder eine Knotendicke vorgegeben. Beispiele für je eine Realisierung der Schäume sind in Abbildung 3.2 gegeben.



(a) VORONOI-Schaum, 1 ZE



(b) DUOCEL-Schaum, 6 ZE

Abbildung 3.2: Metallschaummodelle

4 Mesoskopisches Modell

Oberhalb der mikroskopischen Skala lassen sich auf der mesoskopischen Ebene die homogenisierten Materialparameter bestimmen. In dieser Arbeit ist neben dem Steifigkeitsparameter das dämpfende Verhalten und der Schädigungszuwachs in Folge von Materialermüdung bzw. das Lebensdauerverhalten von Interesse. Die Darstellung und Herleitung der Homogenisierungen in Kapitel 4.1 und 4.2 orientiert sich an [36, 89]. Die Homogenisierung im linear-elastischen Fall wurde, wie bereits erwähnt, in der Dissertation [101] ausführlich behandelt. Da das in dieser Arbeit implementierte, nichtlineare Modell darauf aufbaut, wird als Grundlage für das zu entwickelnde Modell zunächst die Homogenisierung der Steifigkeit behandelt.

Für die folgenden Betrachtungen werden SVE herangezogen, da ein RVE für die untersuchten Metallschäume die gleiche Größenordnung wie die der Makroskala besitzt. Aus diesem Grund sind, wie in Kapitel 2 dargelegt, zur Berechnung der scheinbaren Materialparameter eine Vielzahl von SVE zu berechnen.

4.1 Homogenisierung der Steifigkeit

Eine Realisierung eines SVE, das aus linear-elastischem Material mit räumlicher Heterogenität und Ergodizität besteht, wird unter Einführung eines lokalen Koordinatensystems auf der Mikroebene mit dem ortsabhängigen Steifigkeitstensor $\mathbb{C}(\theta, \mathbf{x})$ beschrieben. Die ebenfalls mikroskopischen, ortsabhängigen Spannungs- und Dehnungszustände $\boldsymbol{\sigma}(\theta, \mathbf{x})$ bzw. $\boldsymbol{\varepsilon}(\theta, \mathbf{x})$ werden auf der Mesoebene über

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_{SVE}(\theta) &= \langle \boldsymbol{\sigma}(\theta, \mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma}(\theta, \mathbf{x}) dV \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{SVE}(\theta) &= \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\theta, \mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\theta, \mathbf{x}) dV\end{aligned}\tag{4.1}$$

homogenisiert, was einer Mittelung über das Volumen V des SVE bzw. ein „Verschmieren“ der Zustände über das SVE entspricht. Die Klammer $\langle \square \rangle = \frac{1}{V} \int_V \square dV$ wird zwecks Übersichtlichkeit im Folgenden an Stelle des Volumenintegrals genutzt.

Der Zusammenhang in Gleichung (4.1) lässt sich ebenso umgekehrt einsetzen, d.h. bei einem vorgegebenen mesoskopischen Dehnungszustand $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ bzw. Spannungszustand $\boldsymbol{\sigma}_0$ folgt

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_0 &= \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\theta, \mathbf{x}) \rangle \\ \boldsymbol{\sigma}_0 &= \langle \boldsymbol{\sigma}(\theta, \mathbf{x}) \rangle.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Mit der Einführung von Lokalisierungstensoren $\mathbb{A}(\theta, \mathbf{x})$ und $\mathbb{B}(\theta, \mathbf{x})$ lassen sich aus den mesoskopischen Zuständen die lokalen Tensoren zu

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}(\theta, \mathbf{x}) &= \mathbb{A}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_0 \\ \boldsymbol{\sigma}(\theta, \mathbf{x}) &= \mathbb{B}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_0\end{aligned}\quad (4.3)$$

berechnen. Dabei gilt für die Volumenmittelung der Lokalisierungstensoren

$$\begin{aligned}\langle \mathbb{A}(\theta, \mathbf{x}) \rangle &= \mathbb{I} \\ \langle \mathbb{B}(\theta, \mathbf{x}) \rangle &= \mathbb{I}\end{aligned}\quad (4.4)$$

mit dem Einheitstensor \mathbb{I} . Die Homogenisierung mit dem Übergang von der Mikro- zur Mesoebene ist für eine Realisierung θ_i schematisch in Abbildung 4.1 dargestellt. Neben der Homogenisierung der Dehnung und Spannung ist es Ziel, für den ortsabhängigen Tensor $\mathbb{C}(\theta, \mathbf{x})$ einen homogenisierten Steifigkeitstensor $\mathbb{C}^*(\theta)$ zu bestimmen.

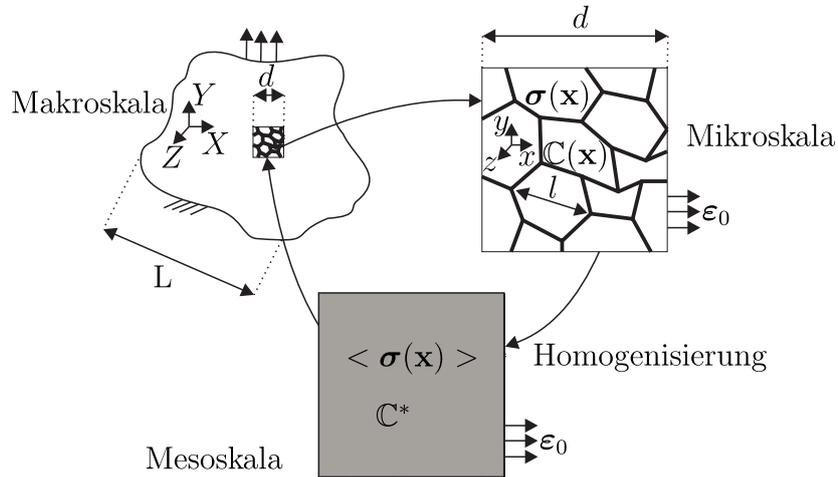


Abbildung 4.1: Homogenisierung im Rahmen der Multiskalenmodellierung für eine Realisierung θ_i

Ebenso wie die Äquivalenz zwischen den homogenisierten und mikroskopischen Spannungen bzw. Dehnungen in Gleichung (4.1), muss die elastisch gespeicherte Energiedichte $E_e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}_0$ auf der Mesoebene der gesamten gespeicherten Energiedichte auf der mikroskopischen Ebene entsprechen. Dieser von HILL in [51] aufgestellte Zusammenhang wird zur HILL-Bedingung

$$\boldsymbol{\sigma}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \langle \boldsymbol{\sigma}(\theta, \mathbf{x}) \rangle : \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\theta, \mathbf{x}) \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\theta, \mathbf{x}) \rangle \quad (4.5)$$

formuliert. Die lokalen Spannungs- und Verzerrungsfelder können in ein gemitteltes und ein in beiden Argumenten fluktuierendes Feld zu

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}(\theta, \mathbf{x}) &= \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}'(\theta, \mathbf{x}) \\ \boldsymbol{\sigma}(\theta, \mathbf{x}) &= \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}'(\theta, \mathbf{x})\end{aligned}\quad (4.6)$$

additiv zerlegt werden. Die Anwendung der HILL-Bedingung (4.5) auf die zerlegten Felder ergibt

$$\langle \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}'(\theta, \mathbf{x}) \rangle : \langle \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}'(\theta, \mathbf{x}) \rangle = \langle [\bar{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}'(\theta, \mathbf{x})] : [\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}'(\theta, \mathbf{x})] \rangle. \quad (4.7)$$

Da per definitionem die Fluktuationfelder im Mittel gleich Null sind, folgt

$$\begin{aligned} \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}} \rangle : \langle \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle &= \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\sigma}'(\theta, \mathbf{x}) : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon}'(\theta, \mathbf{x}) + \boldsymbol{\sigma}'(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}'(\theta, \mathbf{x}) \rangle \\ &= \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\sigma}'(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}'(\theta, \mathbf{x}) \rangle \\ \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}} \rangle : \langle \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle - \langle \bar{\boldsymbol{\sigma}} : \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle &= \langle \boldsymbol{\sigma}'(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}'(\theta, \mathbf{x}) \rangle. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Durch erneute Anwendung der HILL-Bedingung auf der linken Seite der Gleichung (4.8) ergibt sich $\langle \boldsymbol{\sigma}'(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}'(\theta, \mathbf{x}) \rangle = 0$, d.h. der Volumenmittelwert des Produktes der fluktuierenden Felder ist ebenfalls Null. Unter Zuhilfenahme der Indexnotation und des GAUSS'schen Integralsatzes resultiert aus der Umformung gemäß [89] das Flächenintegral

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \boldsymbol{\sigma}'(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}'(\theta, \mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma'_{ij}(\theta, \mathbf{x}) \varepsilon'_{ij}(\theta, \mathbf{x}) dV \\ &= \frac{1}{V} \int_V [\sigma_{ij}(\theta, \mathbf{x}) - \bar{\sigma}_{ij}] [\varepsilon_{ij}(\theta, \mathbf{x}) - \bar{\varepsilon}_{ij}] dV \\ &= \frac{1}{V} \int_V \{ [(\sigma_{ij}(\theta, \mathbf{x}) - \bar{\sigma}_{ij})(u_i(\theta, \mathbf{x}) - \bar{u}_i)]_{,j} - [(\sigma_{ij,j}(\theta, \mathbf{x}) - \bar{\sigma}_{ij,j})(u_i(\theta, \mathbf{x}) - \bar{u}_i)] \} dV \\ &= \frac{1}{V} \int_{\delta V} [(\sigma_{ij}(\theta, \mathbf{x}) - \bar{\sigma}_{ij})(u_i(\theta, \mathbf{x}) - \bar{u}_i)] n_j(\mathbf{x}) dA \\ &= \frac{1}{V} \int_{\delta V} [(t_i(\theta, \mathbf{x}) - \bar{\sigma}_{ij} n_j(\mathbf{x})) \cdot (u_i(\theta, \mathbf{x}) - \bar{\varepsilon}_{ij} x_j)] dA \\ 0 &= \frac{1}{V} \int_{\delta V} [(\mathbf{t}(\theta, \mathbf{x}) - \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n}(\mathbf{x})) \cdot (\mathbf{u}(\theta, \mathbf{x}) - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{x})] dA. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Folglich ist das zur Erfüllung der HILL-Bedingung zu berechnende Integral nur auf dem Randbereich δV des SVE auszuwerten. Zur Bestimmung der tatsächlichen Spannungs- bzw. Dehnungsfelder und zur Sicherstellung der Äquivalenz zwischen heterogenem Ausgangsmaterial und homogenisiertem Material sind entsprechende Randbedingungen am SVE zu definieren. Die notwendige Bedingung $\langle \boldsymbol{\sigma}'(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}'(\theta, \mathbf{x}) \rangle = 0$ kann demnach durch Randbedingungen auf drei Arten erfüllt werden. Entweder ist einer der beiden Faktoren oder das gesamte Produkt im Flächenintegral in der letzten Zeile der Gleichung (4.9) gleich Null. Die entsprechenden Randbedingungen an δV werden im Folgenden vorgestellt.

Das Nullsetzen des ersten Faktors $\mathbf{t}(\theta, \mathbf{x}) - \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0$ wird an den Rändern des SVE mit der Normalen $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ durch spannungsuniforme Randbedingungen (SURB) $\boldsymbol{\sigma}_0 = \bar{\boldsymbol{\sigma}}$ erreicht, sodass für den Spannungsvektor

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}_0 \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \delta V \quad (4.10)$$

gilt. In diesem Fall ergibt sich durch Homogenisierung der resultierenden Dehnung der scheinbare Nachgiebigkeitstensor aus der Inversen der HOOKE'schen Gleichung zu

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\theta, \mathbf{x}) \rangle = \mathbb{S}_{SURB}^*(\theta) : \boldsymbol{\sigma}_0 \quad (4.11)$$

für eine gegebene Realisierung θ eines SVE. Der lokale Nachgiebigkeitstensor errechnet sich über $\mathbb{S}_{SURB}^*(\theta) = \langle \mathbb{S}(\theta, \mathbf{x}) : \mathbb{B}(\theta, \mathbf{x}) \rangle$. Im Folgenden werden homogenisierte, scheinbare Parameter mit * gekennzeichnet.

Zur Erfüllung des Nullsetzens des zweiten Faktors $\mathbf{u}(\theta, \mathbf{x}) - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{x} = 0$ werden an den Rändern des SVE kinematisch uniforme Randbedingungen (KURB) $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ definiert. Damit ergibt sich der Verschiebungsvektor

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}_0\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \delta V \quad (4.12)$$

und der scheinbare Steifigkeitstensor aus

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\theta, \mathbf{x}) \rangle = \mathbb{C}_{KURB}^*(\theta) : \boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad (4.13)$$

für eine gegebene Realisierung eines SVE, für das $\mathbb{C}_{KURB}^* = \langle \mathbb{C}(\theta, \mathbf{x}) : \mathbb{A}(\theta, \mathbf{x}) \rangle$ gilt.

Im letzten Fall, in dem das gesamte Produkt in Gleichung (4.9) zu Null gesetzt wird, ergibt sich $(\mathbf{t}(\theta, \mathbf{x}) - \bar{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{n}(\mathbf{x})) \cdot (\mathbf{u}(\theta, \mathbf{x}) - \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}\mathbf{x}) = 0$, wobei beide Faktoren ungleich Null sind. Auch hier können durch sogenannte orthogonal gemischte Randbedingungen (OGRB) $\boldsymbol{\sigma}_0 = \bar{\boldsymbol{\sigma}}$ und $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ die Gleichung zu

$$(\mathbf{t}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\sigma}_0\mathbf{n}(\mathbf{x})) \cdot (\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}_0\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \delta V \quad (4.14)$$

erfüllt werden, womit sich der scheinbare Steifigkeitstensor \mathbb{C}_{OGRB}^* bestimmen lässt.

Für homogene Materialien ergeben sich für alle drei aufgeführten Randbedingungen gleiche Steifigkeitstensoren. Bei heterogenen Materialien hingegen stellt sich ein anderer Sachverhalt ein. Im Fall von KURB hat HILL in [51] gezeigt, dass sich für diese Art von Randbedingungen, die von VOIGT in [114] vorgeschlagen werden, eine absolute obere Materialgrenze ergibt. Diese wird in der Literatur als VOIGT oder HILL-VOIGT-Grenze bezeichnet. Analog ergibt sich im Fall von SURB eine absolut untere Materialgrenze, die nach REUSS [95] als REUSS- bzw. HILL-REUSS-Grenze bezeichnet wird. HUET zeigt in [53], dass der scheinbare Steifigkeitstensor immer innerhalb dieser Grenzen liegt und damit die Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{REUSS}^*(\theta) = \mathbb{C}_{SURB}^*(\theta) &\leq \mathbb{C}^*(\theta) \leq \mathbb{C}_{KURB}^*(\theta) = \mathbb{C}_{VOIGT}^*(\theta) \quad \text{bzw.} \\ \mathbb{S}_{VOIGT}^*(\theta) = \mathbb{S}_{KURB}^*(\theta) &\leq \mathbb{S}^*(\theta) \leq \mathbb{S}_{SURB}^*(\theta) = \mathbb{S}_{REUSS}^*(\theta) \end{aligned} \quad (4.15)$$

gelten. Für ein RVE gehen die Materialgrenzen ineinander über und aus dem scheinbaren Steifigkeitstensor ergibt sich ein effektiver Parameter, sodass

$$\mathbb{C}_{REUSS}^{*,RVE}(\theta) = \mathbb{C}_{SURB}^{*,RVE}(\theta) = \mathbb{C}^*(\theta) = \mathbb{C}_{eff}(\theta) = \mathbb{C}_{KURB}^{*,RVE}(\theta) = \mathbb{C}_{VOIGT}^{*,RVE}(\theta) \quad (4.16)$$

gilt. Darauf aufbauend zeigt HAZANOV und HUET in [48], dass außerdem

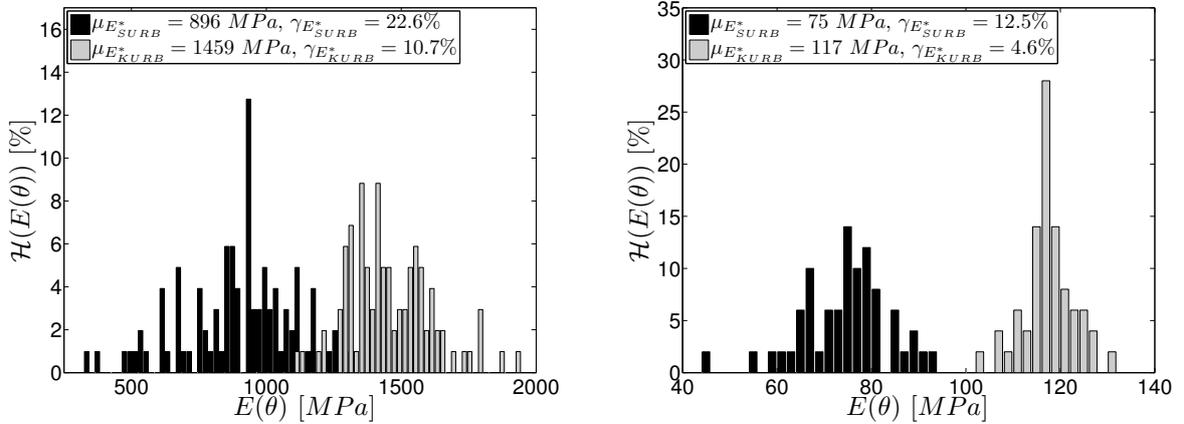
$$\mathbb{C}_{SURB}^*(\theta) \leq \mathbb{C}_{OGRB}^*(\theta) \leq \mathbb{C}_{KURB}^*(\theta) \quad (4.17)$$

gilt.

Zur Bestimmung der Unbekannten in den Tensoren \mathbb{S}_{SURB}^* bzw. \mathbb{C}_{KURB}^* werden sechs unabhängige Lastfälle so definiert, dass nur ein Eintrag in dem VOIGT'schen Spannungsvektor aus Gleichung (2.15) ungleich Null ist. Physikalisch gesehen sind das die drei Normalenbelastungen und die drei Scherbelastungen, die an einem SVE definierbar sind. Entsprechend lässt sich für KURB und SURB der Verschiebungsvektor $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ bzw. der Spannungsvektor $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ definieren. So ergibt sich beispielsweise für eine Normalenbelastung für SURB in x -Richtung der Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{1111} & & & & & & \\ S_{2211} & S_{2222} & & & & & \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & & & & \\ S_{2311} & S_{2322} & S_{2333} & S_{2323} & & & \\ S_{1311} & S_{1322} & S_{1333} & S_{1323} & S_{1313} & & \\ S_{1211} & S_{1222} & S_{1233} & S_{1223} & S_{1213} & S_{1212} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

mit dem die Einträge in der ersten Spalte S_{ij11} , $i, j = 1, 2, 3$ berechnet werden können.



(a) VORONOI, $\mu_{\rho_{rel}} = 0,28$, $\gamma_{\rho_{rel}} = 4,5\%$,
1 ZE, 100 Realisationen

(b) DUOCEL, $\mu_{\rho_{rel}} = 0,07$, $\gamma_{\rho_{rel}} = 1,3\%$,
6 ZE, 50 Realisationen

Abbildung 4.2: Histogramm des homogenisierten Elastizitätsmoduls

In Abbildung 4.2 sind die Ergebnisse aus der Homogenisierung anhand des Elastizitätsmoduls von VORONOI- und DUOCEL-Schäumen in eine Raumrichtung aufgezeigt. Für die VORONOI-Schäume wurde dabei eine Knotendicke von $d = 0,8$ mm gewählt. Für die generierten Schaummodelle ergeben sich eine obere und eine untere Schranke für den Elastizitätsmodul, die jeweils unterschiedliche Streuungen aufweisen. Für die aus SURB resultierenden Zufallsfelder ist eine vielfach höhere Streuung als für KURB zu beobachten. Für

die VORONOI-Schäume gehen die Histogramme zudem stellenweise ineinander über und die Maxima der relativen Häufigkeit $\mathcal{H}(E(\theta))$ liegen bei $< 14 \%$. Die DUOCEL-Schäume zeigen hingegen eine wesentlich engere Streuung um den Mittelwert mit Maxima von bis zu $\mathcal{H}(E(\theta)) \approx 28 \%$ auf. Ein Vergleich der beiden Schäume zeigt des Weiteren, dass eine höhere relative Dichte ρ_{rel} zu höheren Steifigkeiten führt. Außerdem steigt die Streuung des Elastizitätsmoduls mit der relativen Dichte an. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass zudem die Modellierung der Stegdickenverteilung einen Einfluss besitzt. Dies wird in Kapitel 7 näher untersucht. Damit lässt sich für den Mittelwert und die Streuung des scheinbaren Steifigkeitstensors zumindest ein Intervall angeben. Eine exakte Bestimmung des scheinbaren Elastizitätsmoduls erfolgt in Abschnitt 4.3.

Durch Standardisierung der Zufallsfelder aus Abbildung 4.2 lassen sich die Verteilungsfunktionen in Abbildung 4.3 angeben. Für alle berechneten Felder zeigt sich, dass diese näherungsweise durch eine Normalverteilung approximiert werden können.

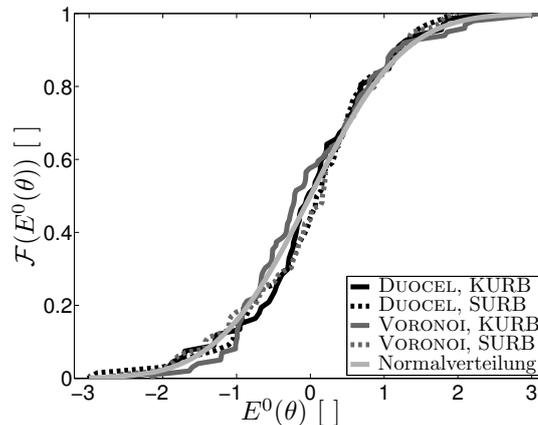


Abbildung 4.3: Verteilungsfunktionen des standardisierten Elastizitätsmoduls

Aus der Berechnung des Nachgiebigkeitstensors in Gleichung (4.18) lässt sich zudem die Materialsymmetrie des Schaumes angeben. Eine eingehende Untersuchung in [101] hat gezeigt, dass für den Ensemble-Mittelwert des Steifigkeitstensors für VORONOI-Schäume zumindest von einer kubischen Symmetrie ausgegangen werden kann. Allerdings ist die Materialsymmetrie größenabhängig, wobei sich mit zunehmender Größe der SVE Isotropie einstellt. Für DUOCEL-Schäume wurde in [23] eine Mischung beider Materialsymmetrien für SVE mit einer Kantenlänge von 25 mm aufgezeigt. Für die vorliegende Arbeit sind die Ergebnisse aus Abbildung 4.2 unabhängig von der Materialsymmetrie ausreichend, da sich die späteren Untersuchungen auf eindimensionale Probleme beschränken.

4.2 Homogenisierung der Dämpfung

Auf der Mesoskala lässt sich ein homogenisierter Dämpfungsparameter zur Beschreibung der Energiedissipation aufgrund von MPZ bestimmen. Die Entstehung und Ausprägung von MPZ hängt in hohem Maße von der Belastungsamplitude ab. Die daraus resultierende Amplitudenabhängigkeit des zu homogenisierenden Dämpfungsparameters hat zur Folge, dass das Superpositionsprinzip wie im linear-elastischen Fall in Abschnitt 4.1 nicht mehr gegeben ist [111]. Vielmehr ist für jede Belastungsamplitude eine eigene Homogenisierung der Zustandsgrößen durchzuführen. Für die Bestimmung eines Dämpfungsparameters ist zudem eine periodische Belastung zu definieren.

Im Folgenden wird ein allgemeines, heterogenes Material betrachtet, das sich mikroskopisch linear-elastisch und ab der Fließgrenze $\mathfrak{F}(\boldsymbol{\sigma}) = R_F$ ideal-plastisch verhält. Der plastische Anteil soll allerdings auf der Mesoebene als vernachlässigbar klein gelten, wofür im Folgenden ein Gültigkeitskriterium aufgestellt wird. Dies dient dem Ziel, dass auf der Mesoebene und später auf der Makroebene von linear-elastischem Verhalten mit Dämpfung ausgegangen werden kann. Zur Herleitung des homogenisierten Dämpfungsparameters wird zudem ein rein linear-elastisches Vergleichsmaterial gemäß [36] eingeführt, dessen Größen mit einer Tilde gekennzeichnet werden. Zunächst wird auf die Homogenisierung der plastischen Dehnung eingegangen. Anschließend wird die gespeicherte und dissipierte Energie in einem SVE bestimmt und damit ein Dämpfungsparameter angegeben. Die folgenden Ausführungen basieren auf den Darstellungen in [36].

Plastische Dehnung

Die lokale Gesamtdehnung lässt sich im elastisch-plastischen Fall zu

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\varepsilon}_e(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\varepsilon}_p(\mathbf{x}, t) \quad (4.19)$$

in einen elastischen und einen plastischen Verzerrungsanteil $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ bzw. $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ additiv aufteilen. Im Folgenden wird die homogenisierte, plastische Dehnung hergeleitet, die eine Äquivalenz zwischen SVE und dem homogenisierten Material sicherstellt.

Zur Erfüllung der weiterhin gültigen HILL-Bedingung werden mittelwertfreie, harmonische Schwingungen als Randbedingungen definiert. Im Falle von einfach harmonischen, kinematisch uniformen Randbedingungen (hKURB) mit der Kreisfrequenz Ω gilt für das rein linear-elastische Vergleichsmaterial der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\theta, \mathbf{x}, t) &= \mathbb{A}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) = \mathbb{A}(\theta, \mathbf{x}) : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \sin(\Omega t) \\ \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\theta, \mathbf{x}, t) \rangle &= \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0 \sin(\Omega t). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Im Vergleich zu Gleichung (4.3) kommt im linear-elastischen Fall also lediglich der sinus-Term hinzu. Die ortsabhängigen Dehnungen $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\theta, \mathbf{x}, t)$ schwingen zwar mit der gleichen Kreisfrequenz Ω , durch das Auftreten von MPZ jedoch nicht zwingend mit dem aufgetragenen Sinusverlauf.

Für das Produkt $\langle \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \langle \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle \\
& = \langle \mathbb{C}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_e(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) : \mathbb{A}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) \rangle \\
& = \langle \mathbb{C}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : (\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\varepsilon}_p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t)) : \mathbb{A}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) \rangle \\
& = \langle \mathbb{C}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) : \mathbb{A}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) \rangle - \langle \mathbb{C}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) : \mathbb{A}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) \rangle \\
& = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle - \langle \mathbb{C}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) : \mathbb{A}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) \rangle \\
& = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle : \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle - \langle \mathbb{C}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) : \mathbb{A}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) \rangle .
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Mit $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) = \mathbb{C}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \mathbb{A}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_0(t)$ und unter Anwendung der HILL-Bedingung auf der linken Seite der Gleichung lässt sich $\boldsymbol{\varepsilon}_0(t)$ auf beiden Seiten der Gleichung eliminieren. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle & = \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle : \langle \mathbb{C}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \mathbb{A}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) \rangle - \langle \mathbb{C}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) : \mathbb{A}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) \rangle \\
& = \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) : \mathbb{C}_{KURB}^*(\boldsymbol{\theta}) - \langle \boldsymbol{\varepsilon}_p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) : \mathbb{C}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \mathbb{A}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) \rangle
\end{aligned} \tag{4.22}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle & = \mathbb{C}_{KURB}^*(\boldsymbol{\theta}) : \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) - \langle \mathbb{C}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) : \mathbb{A}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) \rangle \\
& = \mathbb{C}_{KURB}^*(\boldsymbol{\theta}) : \left(\boldsymbol{\varepsilon}_0(t) - \mathbb{C}_{KURB}^{*-1}(\boldsymbol{\theta}) : \langle \boldsymbol{\varepsilon}_p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) : \mathbb{C}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \mathbb{A}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) \rangle \right) \\
& = \mathbb{C}_{KURB}^*(\boldsymbol{\theta}) : \left(\boldsymbol{\varepsilon}_0(t) - \boldsymbol{\varepsilon}_{p,0}^{hKURB}(\boldsymbol{\theta}, t) \right)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

mit der homogenisierten, plastischen Dehnung

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{p,0}^{hKURB}(\boldsymbol{\theta}, t) = \mathbb{C}_{KURB}^{*-1}(\boldsymbol{\theta}) : \langle \boldsymbol{\varepsilon}_p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) : \mathbb{C}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \mathbb{A}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) \rangle . \tag{4.24}$$

Die homogenisierte, plastische Dehnung bildet im Unterschied zur homogenisierten Dehnung im linear-elastischen Fall nicht den einfachen Volumenmittelwert der lokalen plastischen Dehnung $\boldsymbol{\varepsilon}_p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t)$, sondern muss zusätzlich mit dem Faktor $\mathbb{C}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \mathbb{A}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x})$ gewichtet werden, damit die gespeicherte Energiedichte im Sinne von HILL im homogenisierten Material äquivalent wiedergegeben wird [36].

Für harmonische, spannungsuniforme Randbedingungen (hSURB) gelten die Zusammenhänge

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) & = \mathbb{B}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_0(t) = \mathbb{B}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 \sin(\Omega t) \\
\langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle & = \boldsymbol{\sigma}_0(t) = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 \sin(\Omega t).
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Mit einer analogen Auswertung wie im Fall von hKURB ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle \\
& = \langle \mathbb{B}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_0(t) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle \\
& = \langle \mathbb{B}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_0(t) : (\boldsymbol{\varepsilon}_e(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\varepsilon}_p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t)) \rangle \\
& = \langle \mathbb{B}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_0(t) : \boldsymbol{\varepsilon}_e(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle + \langle \mathbb{B}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_0(t) : \boldsymbol{\varepsilon}_p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle \\
& = \langle \mathbb{B}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_0(t) : \mathbb{C}^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle + \langle \mathbb{B}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_0(t) : \boldsymbol{\varepsilon}_p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle
\end{aligned} \tag{4.26}$$

und mit der HILL-Bedingung und Multiplikation der Gleichung mit $\boldsymbol{\sigma}_0^{-1}(t)$

$$\begin{aligned}
 \langle \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle &= \langle \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) : \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle + \langle \mathbb{B}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_0(t) : \boldsymbol{\varepsilon}_p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle \\
 \boldsymbol{\sigma}_0 : \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle &= \boldsymbol{\sigma}_0 : \mathbb{S}_{SURB}^*(\boldsymbol{\theta}) : \langle \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle + \langle \mathbb{B}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_0(t) : \boldsymbol{\varepsilon}_p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle \\
 \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle &= \mathbb{S}_{SURB}^*(\boldsymbol{\theta}) : \boldsymbol{\sigma}_0(t) + \langle \mathbb{B}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle \\
 \boldsymbol{\sigma}_0(t) &= \mathbb{C}_{SURB}^*(\boldsymbol{\theta}) : (\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle - \langle \mathbb{B}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle) \\
 \boldsymbol{\sigma}_0(t) &= \mathbb{C}_{SURB}^*(\boldsymbol{\theta}) : (\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle - \boldsymbol{\varepsilon}_{p,0}^{hSURB}(\boldsymbol{\theta}, t))
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

mit der homogenisierten plastischen Dehnung

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{p,0}^{hSURB}(\boldsymbol{\theta}, t) = \langle \mathbb{B}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_p(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle . \tag{4.28}$$

Im Falle von hSURB ergibt sich für die homogenisierte plastische Dehnung ein mit $\mathbb{B}(\mathbf{x})$ gewichteter Volumenmittelwert der plastischen Dehnung.

Elastische Energie

Die gespeicherte Energie aufgrund von elastischen Verzerrungen berechnet sich zu

$$E_e(t) = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_e(\mathbf{x}, t) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) dV = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}_e(\mathbf{x}, t) : \mathbb{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_e(\mathbf{x}, t) dV. \tag{4.29}$$

Die elastische Dehnung wird im Fall von hSURB mit

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\varepsilon}_e(\mathbf{x}, t) &= \mathbb{C}^{-1}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbb{C}^{-1}(\mathbf{x}) : (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\sigma}_r(\mathbf{x}, t)) \\
 &= \mathbb{C}^{-1}(\mathbf{x}) : (\mathbb{B}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_0(t) + \boldsymbol{\sigma}_r(\mathbf{x}, t))
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

ersetzt, wobei

$$\boldsymbol{\sigma}_r(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) \tag{4.31}$$

die Differenz zwischen der wahren Spannung $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ und der Spannung $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t)$ im linear-elastischen Vergleichsmaterial ist. Wie der Index andeutet, kann $\boldsymbol{\sigma}_r$ auch als die lokale Restspannung angesehen werden, die nach einer Entlastung aufgrund der MPZ im SVE bestehen bleibt. Für die gemittelte gespeicherte Energie ergibt sich durch Einsetzen von Gleichung (4.30) in Gleichung (4.29)

$$\begin{aligned}
 E_{e,0}^{hSURB}(\boldsymbol{\theta}, t) &= \frac{1}{2} \int_V \langle \boldsymbol{\varepsilon}_e(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) : \mathbb{C}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_e(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle dV \\
 &= \frac{1}{2} \int_V \langle \mathbb{C}^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \mathbb{B}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_0(t) : \mathbb{B}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_0(t) \\
 &\quad + \mathbb{C}^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \mathbb{B}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_0(t) : \boldsymbol{\sigma}_r(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \\
 &\quad + \mathbb{C}^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_r(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) : \mathbb{B}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_0(t) \\
 &\quad + \mathbb{C}^{-1}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_r(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) : \boldsymbol{\sigma}_r(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}, t) \rangle dV.
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

Unter der Ausnutzung der Tensorsymmetrie folgt

$$\begin{aligned}
E_{e,0}^{hSURB}(\theta, t) &= \frac{1}{2} \int_V \langle (\mathbb{C}^{-1}(\theta, \mathbf{x}) : \mathbb{B}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_0(t))^T : \mathbb{B}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_0(t) \\
&\quad + 2\boldsymbol{\sigma}_r(\theta, \mathbf{x}, t) : \mathbb{C}^{-1}(\theta, \mathbf{x}) : \mathbb{B}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_0(t) + \boldsymbol{\sigma}_r(\theta, \mathbf{x}, t) : \mathbb{C}^{-1}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_r(\theta, \mathbf{x}, t) \rangle dV \\
&= \frac{1}{2} \int_V \langle \boldsymbol{\sigma}_0(t) : (\mathbb{C}^{-1}(\theta, \mathbf{x}) : \mathbb{B}(\theta, \mathbf{x}))^T : \mathbb{B}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_0(t) + 2\boldsymbol{\sigma}_r(\theta, \mathbf{x}, t) : \mathbb{C}^{-1}(\theta, \mathbf{x}) : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\theta, \mathbf{x}, t) \\
&\quad + \boldsymbol{\sigma}_r(\theta, \mathbf{x}, t) : \mathbb{C}^{-1}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_r(\theta, \mathbf{x}, t) \rangle dV \\
&= \frac{1}{2} \int_V [\boldsymbol{\sigma}_0(\mathbf{x}, t) : \langle \mathbb{B}^T(\theta, \mathbf{x}) : \mathbb{C}^{-1}(\theta, \mathbf{x}) : \mathbb{B}(\theta, \mathbf{x}) \rangle : \boldsymbol{\sigma}_0(t) + 2 \langle \boldsymbol{\sigma}_r(\theta, \mathbf{x}, t) : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\theta, \mathbf{x}, t) \rangle \\
&\quad + \langle \boldsymbol{\sigma}_r(\theta, \mathbf{x}, t) : \mathbb{C}^{-1}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_r(\theta, \mathbf{x}, t) \rangle] dV \\
&= \frac{1}{2} \int_V [\boldsymbol{\sigma}_0(t) : \mathbb{S}_{SURB}^*(\theta) : \boldsymbol{\sigma}_0(t) + \langle \boldsymbol{\sigma}_r(\theta, \mathbf{x}, t) : \mathbb{C}^{-1}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_r(\theta, \mathbf{x}, t) \rangle] dV \\
&= \frac{1}{2} \int_V [\boldsymbol{\varepsilon}_{e,0}(t) : \mathbb{C}_{SURB}^*(\theta) : \boldsymbol{\varepsilon}_{e,0}(t) + \langle \boldsymbol{\sigma}_r(\theta, \mathbf{x}, t) : \mathbb{C}^{-1}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_r(\theta, \mathbf{x}, t) \rangle] dV.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Die homogenisierte elastische Energie besteht aus zwei Termen. Der erste Term entspricht der gespeicherten Energie, die aus den mesoskopisch elastischen Verzerrungen resultiert. Der zweite Term beinhaltet gespeicherte Energie aufgrund von Restspannungen im Material, die durch mikroplastische Verzerrungen entstehen. Nach Entlastung des SVE bleibt also gespeicherte Energie aufgrund von Restspannungen erhalten.

Für hKURB wird das Hilfsfeld

$$\boldsymbol{\varepsilon}_r(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\varepsilon}_e(\mathbf{x}, t) - \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\varepsilon}_e(\mathbf{x}, t) - \mathbb{A}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) \tag{4.34}$$

eingeführt. Die homogenisierte, elastische Energie ergibt sich mit einer analogen Umformung wie für hSURB zu

$$\begin{aligned}
E_{e,0}^{hKURB}(\theta, t) &= \frac{1}{2} \int_V \langle \boldsymbol{\varepsilon}_e(\theta, \mathbf{x}, t) : \mathbb{C}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_e(\theta, \mathbf{x}, t) \rangle dV \\
&= \frac{1}{2} \int_V \langle (\boldsymbol{\varepsilon}_r(\theta, \mathbf{x}, t) + \mathbb{A}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_0(t)) : \mathbb{C}(\theta, \mathbf{x}) : (\boldsymbol{\varepsilon}_r(\theta, \mathbf{x}, t) + \mathbb{A}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_0(t)) \rangle dV \\
&= \frac{1}{2} \int_V \langle \boldsymbol{\varepsilon}_r(\theta, \mathbf{x}, t) : \mathbb{C}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_r(\theta, \mathbf{x}, t) \\
&\quad + 2\boldsymbol{\varepsilon}_r(\theta, \mathbf{x}, t) : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\theta, \mathbf{x}, t) + \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) : \mathbb{C}_{KURB}^* : \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) \rangle dV \\
&= \frac{1}{2} \int_V [\langle \boldsymbol{\varepsilon}_r(\theta, \mathbf{x}, t) : \mathbb{C}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_r(\theta, \mathbf{x}, t) \rangle + \boldsymbol{\varepsilon}_0(t) : \mathbb{C}_{KURB}^* : \boldsymbol{\varepsilon}_0(t)] dV.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Analog zur gespeicherten Energie für hSURB ergeben sich ebenfalls zwei Summanden, zum einen die gespeicherte Energie der mesoskopischen Dehnung und zum anderen aufgrund von mikroplastischen Verzerrungen.

Dissipierte Energie

Neben der Energie, die ein SVE aufgrund von elastischen Verzerrungen speichert, wird ein Teil der Energie durch mikroplastische Verzerrungen dissipiert. Die dissipierte Energie kann über

$$E_d(t) = \int_V \int_{\varepsilon_p(\mathbf{x}, t)} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \tau) : d\varepsilon_p(\mathbf{x}, \tau) dV = \int_V \int_{t_0}^t \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \tau) : \dot{\varepsilon}_p(\mathbf{x}, \tau) d\tau dV \quad (4.36)$$

berechnet werden. Für hSURB lässt sich durch mathematische Umformung, analog zur Homogenisierung der gespeicherten Energie, der Zusammenhang

$$\begin{aligned} E_{d,0}^{hSURB}(\theta, t) &= \int_V \int_{t_0}^t \langle \mathbb{B}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_0(\tau) + \boldsymbol{\sigma}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau) \rangle : \dot{\varepsilon}_p(\theta, \mathbf{x}, \tau) > d\tau dV \\ &= \int_V \int_{t_0}^t \langle \mathbb{B}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_0(\tau) : \dot{\varepsilon}_p(\theta, \mathbf{x}, \tau) + \boldsymbol{\sigma}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau) : (\dot{\varepsilon}(\theta, \mathbf{x}, \tau) - \dot{\varepsilon}_e(\theta, \mathbf{x}, \tau)) \rangle d\tau dV \\ &= \int_V \int_{t_0}^t \langle \dot{\varepsilon}_p(\theta, \mathbf{x}, \tau) : \mathbb{B}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_0(\tau) + \boldsymbol{\sigma}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau) : \dot{\varepsilon}(\theta, \mathbf{x}, \tau) \\ &\quad - \boldsymbol{\sigma}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau) : (\mathbb{C}^{-1}(\theta, \mathbf{x}) : \mathbb{B}(\theta, \mathbf{x}) : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_0(\tau) - \mathbb{C}^{-1}(\theta, \mathbf{x}) : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau)) \rangle d\tau dV \\ &= \int_V \int_{t_0}^t \dot{\varepsilon}_{p,0}(\theta, \mathbf{x}, \tau) : \boldsymbol{\sigma}_0(\tau) + \langle \boldsymbol{\sigma}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau) : \dot{\varepsilon}(\theta, \mathbf{x}, \tau) \rangle - \langle \boldsymbol{\sigma}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau) \\ &\quad : \mathbb{C}^{-1}(\theta, \mathbf{x}) : \mathbb{B}(\theta, \mathbf{x}) : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_0(\tau) \rangle - \langle \boldsymbol{\sigma}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau) : \mathbb{C}^{-1}(\theta, \mathbf{x}) : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau) \rangle d\tau dV \\ &= \int_V \int_{t_0}^t \dot{\varepsilon}_{p,0}(\tau) : \boldsymbol{\sigma}_0(\tau) + \langle \boldsymbol{\sigma}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau) : \dot{\varepsilon}(\theta, \mathbf{x}, \tau) \rangle - \langle \boldsymbol{\sigma}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau) : \tilde{\varepsilon}(\theta, \mathbf{x}, \tau) \rangle \\ &\quad - \langle \boldsymbol{\sigma}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau) : \mathbb{C}^{-1}(\theta, \mathbf{x}) : \dot{\boldsymbol{\sigma}}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau) \rangle d\tau dV \\ &= \int_V \int_{t_0}^t \dot{\varepsilon}_{0,p}(\tau) : \boldsymbol{\sigma}_0(\tau) - \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \langle \boldsymbol{\sigma}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau) : \mathbb{C}^{-1}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau) \rangle dt dV \end{aligned} \quad (4.37)$$

ermitteln. Aufgrund von plastischer Verzerrung dissipiert die Energie nach Gleichung (4.37) nicht vollständig. Ein Teil der Energie wird im Material in Form von Restspannung $\boldsymbol{\sigma}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau) : \mathbb{C}^{-1}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\sigma}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau)$ gespeichert. Dieser Term, um den die dissipierte Energie vermindert wird, lässt sich entsprechend dem Energieerhaltungssatz als zusätzlich gespeicherte Energie im Term der homogenisierten gespeicherten Energie in Gleichung (4.33) wiederfinden.

Für hKURB lässt sich die dissipierte Energie

$$\begin{aligned}
E_{d,0}^{hKURB}(\theta, t) &= \int_V \int_{t_0}^t \langle \mathbb{C}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_e(\theta, \mathbf{x}, \tau) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p(\theta, \mathbf{x}, \tau) \rangle d\tau dV \\
&= \int_V \int_{t_0}^t \langle \mathbb{C}(\theta, \mathbf{x}) : (\boldsymbol{\varepsilon}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau) + \mathbb{A}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_0(\tau)) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p(\theta, \mathbf{x}, \tau) \rangle d\tau dV \\
&= \int_V \int_{t_0}^t \langle \mathbb{C}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p(\theta, \mathbf{x}, \tau) + \mathbb{C}(\theta, \mathbf{x}) : \mathbb{A}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_0(\tau) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_p(\theta, \mathbf{x}, \tau) \rangle d\tau dV \\
&= \int_V \int_{t_0}^t [\langle \mathbb{C}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau) : (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\theta, \mathbf{x}, \tau) - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau) - \mathbb{A}(\theta, \mathbf{x}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0(\tau)) \rangle \\
&\quad + \mathbb{C}_{KURB}^* : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{p,0}(\tau) : \boldsymbol{\varepsilon}_0(\tau)] d\tau dV \\
&= \int_V \int_{t_0}^t [\langle \boldsymbol{\varepsilon}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau) : \mathbb{C}(\theta, \mathbf{x}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\theta, \mathbf{x}, \tau) - \boldsymbol{\varepsilon}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau) : \mathbb{C}(\theta, \mathbf{x}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau) \\
&\quad - \boldsymbol{\varepsilon}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau) : \mathbb{C}(\theta, \mathbf{x}) : \mathbb{A}(\theta, \mathbf{x}) \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_0(\tau) \rangle + \mathbb{C}_{KURB}^* : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{p,0}(\tau) : \boldsymbol{\varepsilon}_0(\tau)] d\tau dV \\
&= \int_V \int_{t_0}^t [\langle \boldsymbol{\varepsilon}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau) : \mathbb{C}(\theta, \mathbf{x}) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\theta, \mathbf{x}, \tau) \rangle - \langle \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (\boldsymbol{\varepsilon}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau) : \mathbb{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau)) \rangle \\
&\quad - \langle \boldsymbol{\varepsilon}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau) : \dot{\boldsymbol{\sigma}}(\theta, \mathbf{x}, \tau) \rangle + \mathbb{C}_{KURB}^* : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{p,0}(\tau) : \boldsymbol{\varepsilon}_0(\tau)] d\tau dV \\
&= \int_V \int_{t_0}^t [\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{p,0}^{KURB}(\tau) : \mathbb{C}_{KURB}^* : \boldsymbol{\varepsilon}_0(\tau) - \langle \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (\boldsymbol{\varepsilon}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau) : \mathbb{C}(\theta, \mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}_r(\theta, \mathbf{x}, \tau)) \rangle] d\tau dV
\end{aligned} \tag{4.38}$$

beschreiben. Die Argumentation beider Summanden ist analog zu dem der Homogenisierung für hSURB.

Dämpfungsparameter

Mit den zuvor ausgeführten Herleitungen nach [36] wird in dieser Arbeit der homogenisierte Dämpfungsparameter mit dem Verhältnis aus der dissipierten Energie nach einer Schwingungsperiode zur maximal gespeicherten, elastischen Energie eingeführt. Für eine Sinus-Belastung ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
\eta_{hKURB}^*(\theta, \boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{E_{d,0}^{hKURB}(\theta, T)}{2\pi E_{e,0}^{hKURB}(\theta, \frac{T}{4})} \\
\eta_{hSURB}^*(\theta, \boldsymbol{\sigma}) &= \frac{E_{d,0}^{hSURB}(\theta, T)}{2\pi E_{e,0}^{hSURB}(\theta, \frac{T}{4})},
\end{aligned} \tag{4.39}$$

wobei das Argument die Amplitudenabhängigkeit beinhaltet. Alternativ kann der homogenisierte Dämpfungsparameter durch die Phasenverschiebung ϕ zwischen Systemeingang und -ausgang zu

$$\begin{aligned}\eta_{hKURB}^*(\theta, \boldsymbol{\varepsilon}) &= \phi(\boldsymbol{\varepsilon}_0(t), \langle \boldsymbol{\sigma}(\theta, \mathbf{x}, t) \rangle) = \phi\left(\boldsymbol{\varepsilon}_0(t), \mathbb{C}_{KURB}^*(\theta) : \left(\boldsymbol{\varepsilon}_0(t) - \boldsymbol{\varepsilon}_{p,0}^{hKURB}(\theta, t)\right)\right) \\ \eta_{hSURB}^*(\theta, \boldsymbol{\sigma}) &= \phi(\boldsymbol{\sigma}_0(t), \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\theta, \mathbf{x}, t) \rangle) = \phi\left(\boldsymbol{\sigma}_0(t), \mathbb{C}_{SURB}^*(\theta) : \boldsymbol{\sigma}_0(t) + \boldsymbol{\varepsilon}_{p,0}^{hSURB}(\theta, t)\right)\end{aligned}\quad (4.40)$$

bestimmt werden.

Wie oben erwähnt, wird in dieser Arbeit ein Dämpfungsparameter für mesoskopisch linear-elastisches Materialverhalten gesucht. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit der Benennung eines Kriteriums als Obergrenze, unterhalb der die homogenisierten, plastischen Dehnungen so gering sind, dass von linearer Elastizität ausgegangen werden kann. Die vorliegende Arbeit beruht dabei auf der aus dem werkstoffkundlichen Bereich bekannten Streckgrenze $R_{p0,2}$, bei der die plastische Dehnung 0,2 % beträgt. Demnach beschränken sich alle folgenden Untersuchungen auf

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}_{p,0}^{hKURB}(\theta, t) - 0,002 &\leq 0 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{p,0}^{hSURB}(\theta, t) - 0,002 &\leq 0.\end{aligned}\quad (4.41)$$

Zur Berechnung des Dämpfungsparameters können die selben sechs unabhängigen Lastfälle am SVE definiert werden, wie dies bei der Berechnung des Nachgiebigkeitstensors der Fall ist. Damit lässt sich im Fall einer Anisotropie ein richtungsabhängiger Dämpfungsparameter berechnen. Zur Abbildung der Amplitudenabhängigkeit müssen zudem für eine Vielzahl von Belastungsamplituden die Lastfälle berechnet werden [111]. In der Arbeit beschränken sich die Untersuchungen auf Dämpfung in Folge von Normalenbelastung in

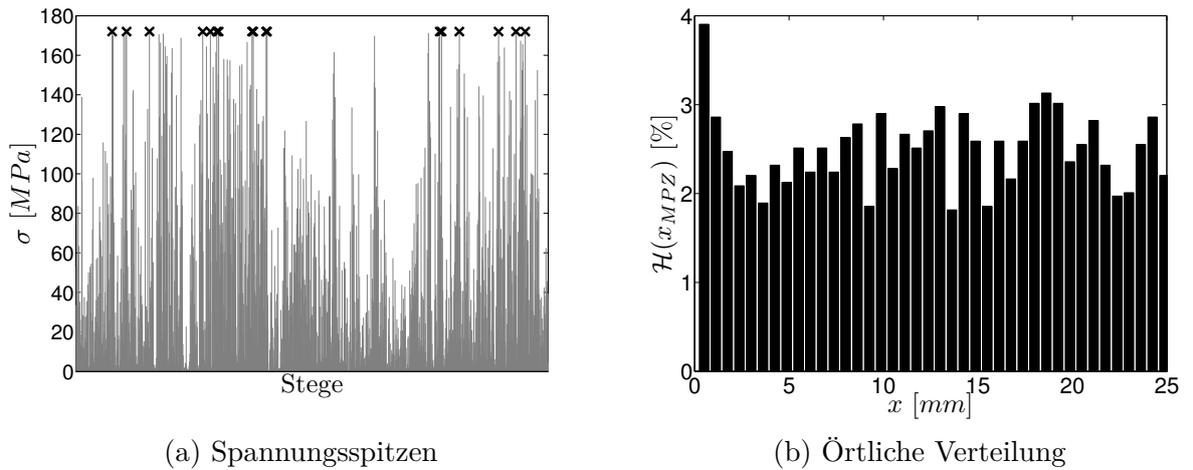


Abbildung 4.4: Häufigkeit an MPZ für hSURB, $\hat{\sigma}_0 = 1,225 \text{ MPa}$

eine Raumrichtung. Außerdem wird quasi-statisch gerechnet, d.h. der Einfluss der Trägheit wird vernachlässigt. In Kapitel 7.1 wird gezeigt, inwiefern die Vernachlässigung der Masse gerechtfertigt ist.

In Abbildung 4.4a ist beispielhaft die Spannungsverteilung in einem SVE eines VORONOI-Schaumes mit 25 mm Kantenlänge aufgezeigt. Dabei entspricht x der Belastungsrichtung. Es existieren je nach Lage der Knoten einige wenige Spannungsspitzen, die die Fließgrenze überschreiten (in der Abbildung mit schwarzen Markern gekennzeichnet). In diesen Stegen treten MPZ auf, die dämpfendes Verhalten hervorrufen. Bei der in der Abbildung gezeigten Realisierung bilden sich an lediglich 1,1 % der Stege MPZ. Für die 100 Realisierungen der VORONOI-Schäume treten für die Belastungsamplitude $\hat{\sigma} = 1,225$ MPa im Mittel in 1,7 % der Stege MPZ auf. Bei der Betrachtung der örtlichen Verteilung in Abbildung 4.4b zeigt sich eine annähernde Gleichverteilung mit $\mathcal{H}(x_{MPZ}) \approx 2,5$ %. Lediglich an der fest eingespannten Stelle ($x = 0$ mm) kommen MPZ mit einer erhöhten Dichte vor. Diese Verteilung lässt sich auch in die beiden anderen Raumrichtungen beobachten. Dabei ist die Anzahl und räumliche Verteilung der MPZ abhängig von der Belastung.

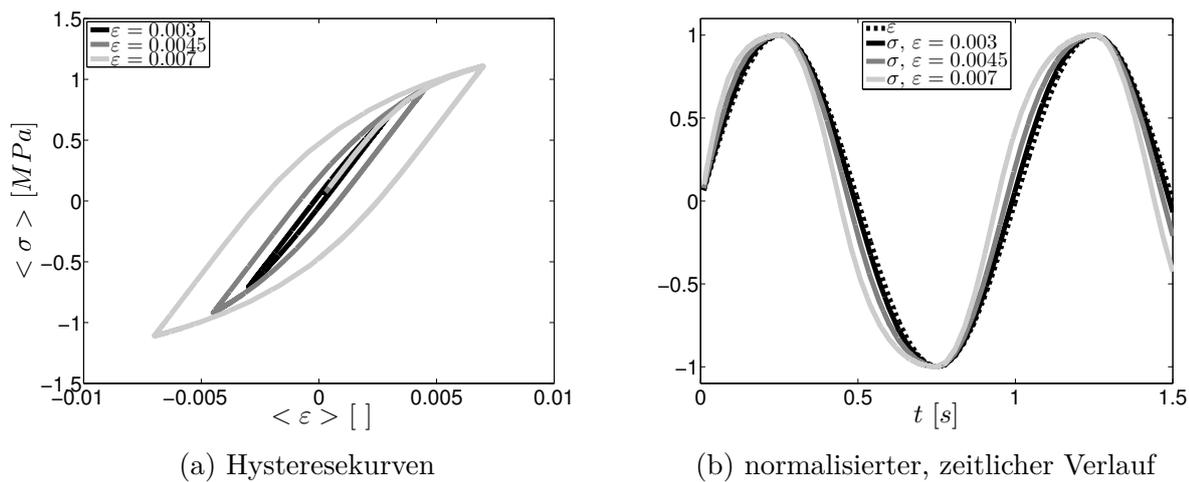


Abbildung 4.5: Verhalten der SVE aufgrund von MPZ für hKURB

Wie in Abbildung 4.5a dargestellt, bilden sich im homogenisierten Dehnung-Spannungs-Raum in Folge von mittelwertfreien, harmonischen Belastungen Hystereseschleifen aus, die ihren Mittelpunkt im Ursprung besitzen. Neben dem erwarteten Anwachsen der Hysterese-fläche bei zunehmender Belastungsamplitude ist an der Form der Hysterese eine Zunahme der Nichtlinearität des homogenisierten Spannungsverlaufs zu erkennen. Diese Zunahme wird auch in Abbildung 4.5b deutlich, in der die normalisierten, zeitlichen Verläufe für ausgewählte Amplituden aufgezeigt sind. Neben der mit zunehmender Amplitude wachsenden zeitlichen Verschiebung der Nullstellen der σ -Kurve ist ein zunehmendes Abflachen der Kurve im Bereich der Maximalwerte zu erkennen. Diese Zunahme der Nichtlinearität ist in der ansteigenden Anzahl an MPZ mit zunehmender Amplitude begründet.

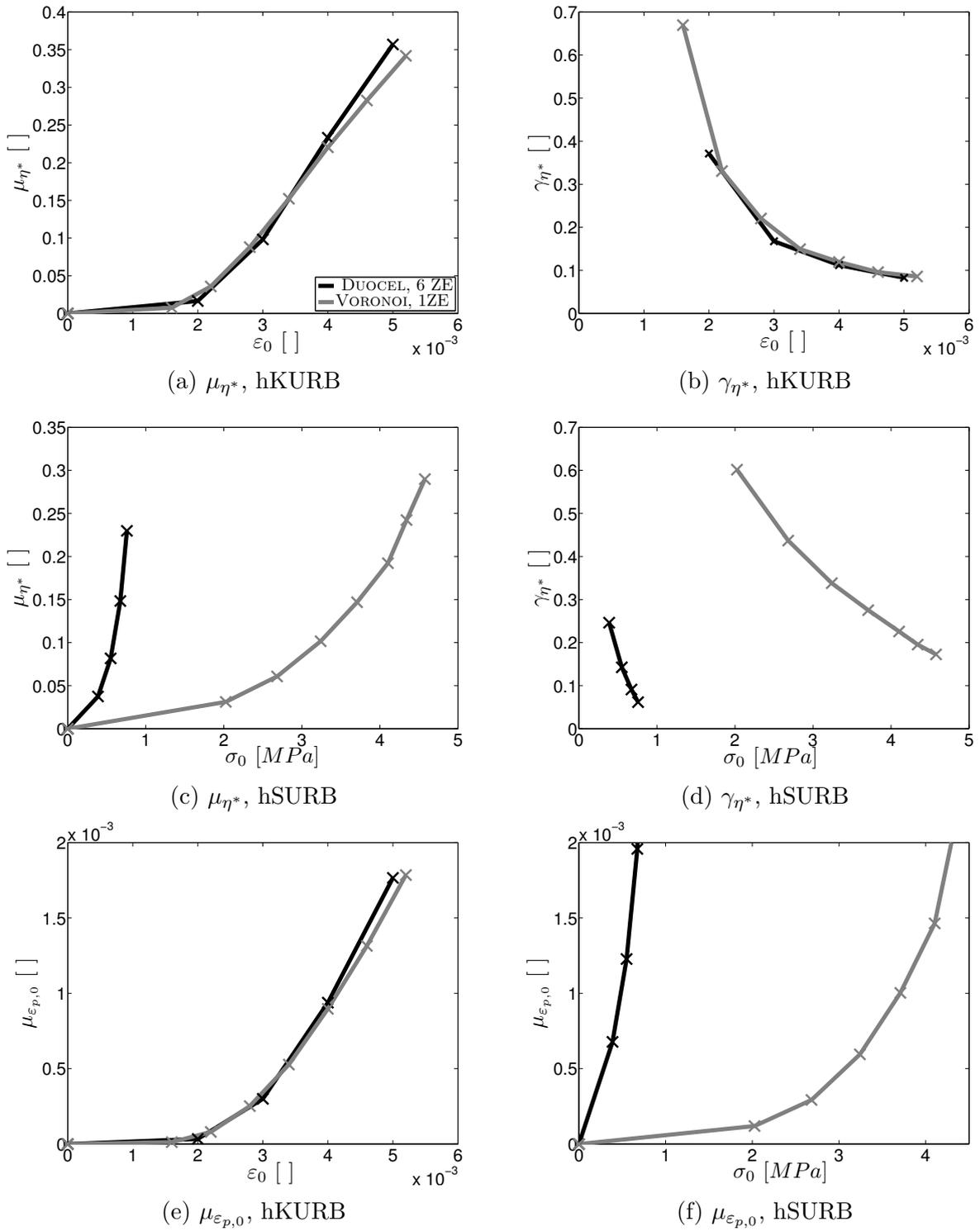


Abbildung 4.6: Dämpfungsverhalten aufgrund von MPZ

In Abbildung 4.6 sind die Ergebnisse aus der Homogenisierung der VORONOI- und DUOCEL-Schäume zusammengefasst. Ohne die beiden Schäume quantitativ vergleichen zu wollen, ist die starke Amplitudenabhängigkeit für beide Schaumarten ersichtlich. So steigt μ_{η^*} für beide Randbedingungen aufgrund der zunehmenden Anzahl an MPZ nichtlinear an (Abbildung 4.6a und 4.6c). Für hKURB zeigt sich mit zunehmender Amplitude ein annähernd lineares Verhalten. Der Variationskoeffizient γ_{η^*} hingegen nimmt ausgehend von hohen Werten mit zunehmender Amplitude ab (Abbildung 4.6b und 4.6d). Dies liegt darin begründet, dass für kleine Amplituden nur einige wenige MPZ in einigen SVE zur Dämpfung beitragen. Andere SVE weisen hingegen noch keine plastische Deformation in der Mikrostruktur auf. Mit ansteigender Amplitude nimmt die Anzahl der MPZ in allen SVE zu, sodass dies zu einem geringeren γ_{η^*} führt. Für eine Abschätzung der Grenze des mesoskopisch elastischen Zustandes ist die Dämpfung in Abhängigkeit von der homogenisierten plastischen Dehnung $\mu_{\varepsilon_{p,0}}$ für beide Schäume und beide Randbedingungen in Abbildung 4.6e und 4.6f aufgezeigt. Diese Ergebnisse unterstreichen die Beobachtung, dass mit zunehmender Belastung die Anzahl der MPZ ansteigt, was zu einem Anwachsen von $\mu_{\varepsilon_{p,0}}$ führt. Zudem lassen sich die Belastungsgrenzen für hKURB und hSURB so bestimmen, dass $\mu_{\varepsilon_{p,0}} < 0,002$ erfüllt ist.

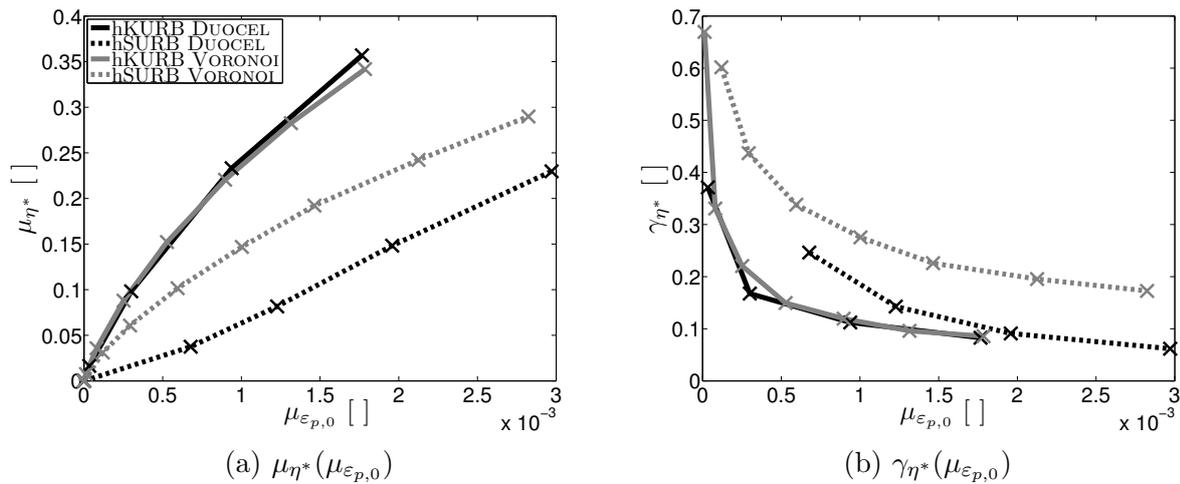
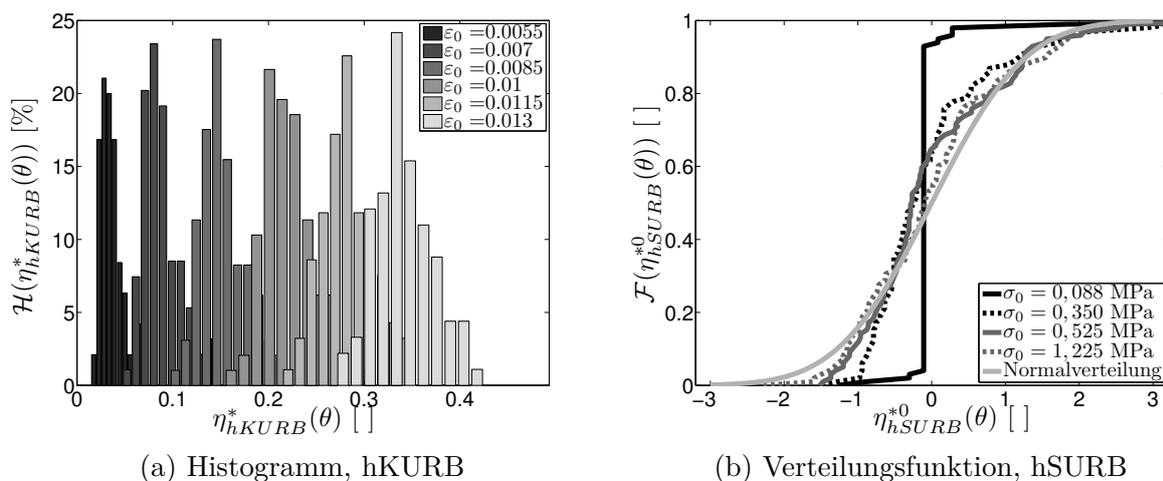


Abbildung 4.7: η^* in Abhängigkeit von $\mu_{\varepsilon_{p,0}}$

Beim Vergleich beider homogenisierter Dämpfungsparameter auf Basis der gemittelten plastischen Dehnung ergeben sich die Darstellungen in Abbildung 4.7. Zum einen ist hier die Aussage wiederzufinden, dass mit zunehmender plastischer Dehnung der Mittelwert μ_{η^*} ansteigt und γ_{η^*} abfällt. Zum anderen wird aus Abbildung 4.7a ersichtlich, dass, analog zur Homogenisierung des Steifigkeitstensors, eine obere und untere Materialschranke existiert, die den scheinbaren Dämpfungsparameter begrenzen. Im Fall von hKURB ergibt sich für beide Schäume eine annähernd identische obere Schranke des Dämpfungsparameters. Analog zur Homogenisierung der Steifigkeit ist der Variationskoeffizient für hSURB größer als für hKURB (Abbildung 4.7b).

Abbildung 4.8: Eigenschaften von η^* , VORONOI

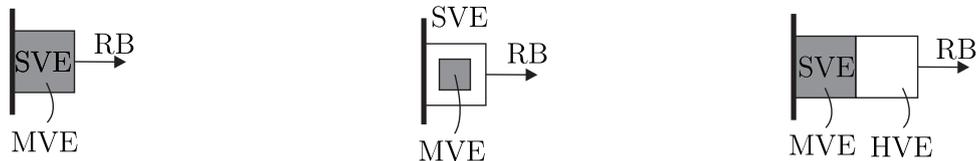
Das Histogramm für die VORONOI-Schäume für verschiedene Belastungsamplituden ist in Abbildung 4.8a aufgezeigt. Die Verteilungsfunktion für das standardisierte Zufallsfeld des Dämpfungsparameters ist in Abbildung 4.8b dargestellt. Insbesondere für geringe Belastungsamplituden zeigt sich eine nicht-normalverteilte Verteilungsfunktion. Dies lässt sich, wie bereits oben für γ_{η^*} dargelegt, auf nur wenige MPZ in einigen wenigen SVE zurückführen. Für geringe Amplituden beträgt die Dämpfung für die meisten SVE $\eta^* = 0$ bzw. $\eta^{*0} = 0$. Für anwachsende Amplituden nimmt die Verteilungsfunktion zunehmend eine normalverteilte Charakteristik an.

4.3 Homogenisierung randeffektunabhängiger Materialparameter

Mit den vorangegangenen Homogenisierungen konnte lediglich ein Intervall gefunden werden, das die scheinbaren Materialparameter enthält. In der Literatur existieren verschiedene Methoden, um den Einfluss der Randbedingungen auf die homogenisierten Materialparameter zu mindern. Ohne hier auf einzelne Veröffentlichungen eingehen zu wollen, beschränken sich die meisten dieser Ansätze auf vereinfachte, theoretische Modelle. Zur allgemein gültigen Berechnung der Materialparameter soll in diesem Abschnitt weiterhin von KURB und SURB bzw. hKURB und hSURB ausgegangen werden. Aufbauend auf diesen Randbedingungen wird in diesem Abschnitt ein Modell vorgestellt und validiert, mit dessen Hilfe randeffektunabhängige Materialparameter iterativ bestimmbar sind. In den beiden anschließenden Abschnitten 4.4 und 4.5 erfolgt die Bestimmung eines randeffektunabhängigen, scheinbaren Elastizitätsmoduls und eines Dämpfungsparameters.

Bisher wurde das für die Homogenisierung notwendige Volumenintegral über das vollständige SVE ausgewertet. Um den Einfluss der Randbedingungen auf die Homogenisierung

zu mindern, werden zwei Erweiterungen untersucht. Zum einen ist es überlegenswert, nur über ein inneres Teilvolumen des SVE zu mitteln. Bei kleiner werdendem Teilvolumen wird die Distanz zum Rand vergrößert und somit der Einfluss reduziert. Die andere Methode basiert auf dem umgekehrten Prinzip: Das Volumenintegral wird weiterhin über das komplette SVE ausgewertet, wobei die uniformen Randbedingungen nicht direkt an dem SVE definiert werden. In Abbildung 4.9 sind neben der bisherigen Homogenisierung (Abbildung 4.9a) die beiden erweiterten Varianten aufgezeigt. Dabei kennzeichnet das Mittelungsvolumenelement (MVE) den Bereich, über den der Volumenmittelwert $\langle \square \rangle$ zur Homogenisierung ausgewertet wird. Das dargestellte, homogenisierte Volumenelement (HVE) in Abbildung 4.9c weist bereits homogenisierte, scheinbare Materialparameter auf. Das HVE dient in Variante II dazu, den Einfluss der Randbedingungen auf den Rand des SVE bzw. MVE zu mindern.



(a) bisherige Homogenisierung

(b) Variante I

(c) Variante II

Abbildung 4.9: Schematische Darstellung der randeffektunabhängigen Homogenisierungsvarianten mit MVE und HVE

Die Variante I aus Abbildung 4.9b, die z.B. in [19] angewendet wird, ist für die Untersuchung von offenzelligen Schäumen ungeeignet. Schäume weisen in den Randbereichen durch das Heraustrennen aus einer größeren Matrix zwangsweise gebrochene Zellen bzw. Stege auf. Im Inneren der Schäume hingegen, wo im Idealfall keine gebrochenen Zellen und Stege auftreten, ist somit die Steifigkeit höher als am Rand. Das Auswerten des Volumenmittelwerts über das innere Teilvolumen führt zwar zu randeffektunabhängigen Materialparametern, allerdings beschreiben diese nur die Steifigkeit im Inneren des Schaumes. Zur vollständigen, ganzheitlichen Beschreibung des SVE und damit zur korrekten Homogenisierung im Rahmen einer Multiskalenmodellierung muss der Volumenmittelwert über das vollständige SVE gebildet werden.

In Variante II hingegen wird über das kubische MVE mit der Kantenlänge d_{MVE} gemittelt. Dabei entspricht das MVE dem bisherigen SVE. Die uniformen Randbedingungen werden in dieser Variante am freien Ende des HVE aufgebracht. Damit ist die aus Variante I formulierte Bedingung des Volumenmittelwerts über das vollständige SVE erfüllt. Diese modellhafte Überlegung wird im Folgenden weiter entwickelt und eingehend untersucht.

4.3.1 Allgemeines Prinzip

Es wird ein makroskopischer, dreidimensionaler Körper der Größenordnung L betrachtet, der eine heterogene Mikrostruktur aufweist, die statistisch homogen und ergodisch ist. Die Heterogenität ist dabei so stark ausgeprägt, dass die Definition eines RVE ohne einer Trennung der Größenskalen im Sinne der Multiskalenmodellierung nicht möglich ist. Des Weiteren wird der Körper in gleich große VE mit der Kantenlänge d unterteilt, die der charakteristischen Länge der Mesoskala entsprechen und als homogenisiert angesehen werden. Die Autokorrelation der Materialparameter zwischen den VE wird mit $\mathcal{R}_{XX}(\Delta x)$ beschrieben. Durch das Herausschneiden eines VE aus dem Körper ergibt sich ein SVE, dessen randeffektabhängige Parameter gemäß vorangegangenen Kapiteln bestimmt werden können. Werden aus dem Körper zwei zusammenhängende VE gemeinsam herausgeschnitten, so können diese in zwei separate SVE unterteilt werden. Im ersten SVE wird die Struktur weiter mikroskopisch aufgelöst, sodass die Heterogenität erkennbar ist und noch keine homogenisierten Parameter existieren. Für das zweite SVE werden der scheinbare Steifigkeitstensor und die zugehörige obere bzw. untere Materialschranke zunächst als bekannt vorausgesetzt. Somit wird dieses SVE als bereits homogenisiert angesehen und daher im Folgenden als HVE bezeichnet. Diese Vorüberlegung ist in Abbildung 4.10 illustriert. Ziel ist die Bestimmung von echten scheinbaren Materialparametern des SVE mit Hilfe des HVE. Damit wurde das Schema der Variante *II* in Abbildung 4.9c in einen physikalischen Kontext eingeordnet, wobei das SVE dem MVE entspricht.

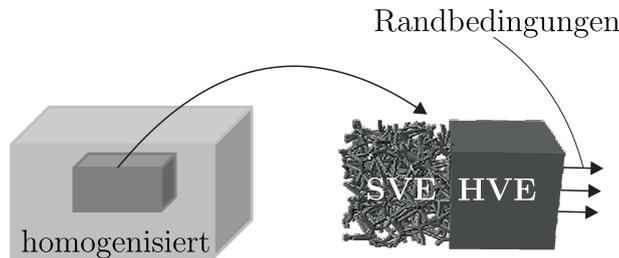


Abbildung 4.10: Schematische Darstellung des Modells zur iterativen, randeffektunabhängigen Homogenisierung

Aufgrund der oben eingeführten HILL-Bedingung gilt für das SVE weiterhin der Zusammenhang

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\theta, \mathbf{x}, t) : \boldsymbol{\varepsilon}(\theta, \mathbf{x}, t) \rangle_{SVE} = \langle \boldsymbol{\sigma}(\theta, \mathbf{x}, t) \rangle_{SVE} : \langle \boldsymbol{\varepsilon}(\theta, \mathbf{x}, t) \rangle_{SVE}, \quad (4.42)$$

wofür sich analog zur Homogenisierung des Steifigkeitstensors in Kapitel 4.1 die Bedingung $\langle \boldsymbol{\sigma}'(\theta, \mathbf{x}, t) : \boldsymbol{\varepsilon}'(\theta, \mathbf{x}, t) \rangle_{SVE} = 0$ formulieren lässt. Damit können die Materialschranken des Steifigkeitstensors für das SVE mit den am HVE angebrachten, uniformen Randbedingungen über die Gleichungen

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\sigma}_{KURB}(\theta, \mathbf{x}, t) \rangle_{SVE} &= \mathbb{C}_{KURB, SVE}^* : \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{KURB}(\theta, \mathbf{x}, t) \rangle_{SVE} \\ \langle \boldsymbol{\varepsilon}_{SURB}(\theta, \mathbf{x}, t) \rangle_{SVE} &= \mathbb{S}_{SURB, SVE}^* : \langle \boldsymbol{\sigma}_{SURB}(\theta, \mathbf{x}, t) \rangle_{SVE} \end{aligned} \quad (4.43)$$

bestimmt werden. Die Definition der sechs unabhängigen Lastfälle zur Bestimmung der Steifigkeitstensoren, wobei nur ein Eintrag im VOIGT'schen Spannungsvektor ungleich Null ist, ist bei dem Verbund SVE-HVE ebenfalls anwendbar, da dieses Modell mit einer Reihenschaltung von Federn vergleichbar ist, in der die Kräfte bzw. in diesem Fall die Spannungen gleich sind. Der Unterschied zur bisherigen Homogenisierung besteht allerdings darin, dass für KURB an Stelle von $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_{0,SVE}$ die Dehnung $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{\varepsilon}_{0,SVE+HVE}$ vorgegeben wird, woraus sich $\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{KURB} \rangle_{SVE}$ in Gleichung (4.43) ergibt. Für SURB ergibt sich analog $\boldsymbol{\sigma}_0 = \boldsymbol{\sigma}_{0,SVE+HVE}$. Im Folgenden wird die randeffektunabhängige Homogenisierung anhand des Elastizitätsmoduls weiter erläutert.

Beim Zweierverbund SVE-HVE ist zu berücksichtigen, dass sich die Materialparameter des homogenisierten Körpers in einer räumlichen Abhängigkeit befinden. Für eine gegebene Korrelation \mathcal{R} können die Elastizitätsmodule zu

$$\begin{aligned} E_{KURB,SVE}^* &= \Xi_{KURB} E_{KURB,HVE}^* \text{ mit } \mathcal{R} = \mathcal{R}(E_{KURB,SVE}^*, E_{KURB,HVE}^*) \\ E_{SURB,SVE}^* &= \Xi_{SURB} E_{SURB,HVE}^* \text{ mit } \mathcal{R} = \mathcal{R}(E_{SURB,SVE}^*, E_{SURB,HVE}^*) \end{aligned} \quad (4.44)$$

mit dem Faktor Ξ_{KURB} bzw. Ξ_{SURB} in Bezug zueinander gesetzt werden. Dabei ist es nicht zwingend, dass die Materialschränken die gleiche Korrelation aufweisen. Damit kann für den gesuchten scheinbaren Elastizitätsmodul E_{SVE}^* das Intervall im Bezug auf das HVE zu

$$\Xi_{KURB} E_{KURB,HVE}^* \geq E_{SVE}^* \geq \Xi_{SURB} E_{SURB,HVE}^* \quad (4.45)$$

ohne Einschränkung der allgemeinen Gültigkeit vorausgesetzt werden. Für eine erste Untersuchung wird zunächst angenommen, dass die Materialschränken von SVE und HVE näherungsweise gleich sind und dass für die Elastizitätsmodule die Korrelation $\mathcal{R} \approx 1$ gilt. Auf den Einfluss der Korrelation wird weiter unten eingegangen.

Zur Untersuchung des Konvergenzverhaltens der Materialschränken des SVE in Abhängigkeit von der Kantenlänge des HVE und vom zunächst unbekanntem, scheinbaren Elastizitätsmodul E_{HVE} wird im ersten Schritt die Kantenlänge d_{HVE} variiert, wobei stets $d_{HVE} \leq d_{SVE}$ gilt. Zur Einordnung und Berechnung von E_{SVE} in Abhängigkeit von E_{HVE} kann die Konvergenz der Materialschränken des Elastizitätsmoduls in Abhängigkeit von d_{HVE} wie folgt zusammengefasst werden:

Hypothese 4.3.1 Für ein SVE seien die Materialschranken E_{KURB}^* und E_{SURB}^* gegeben und das HVE besitze näherungsweise die gleichen Materialschranken. Dann gelten in Abhängigkeit von E_{HVE} folgende Zusammenhänge:

i) Für $d_{SVE} = konst.$, wenn

$$a) E_{KURB,HVE}^* \geq E_{HVE} > E_{HVE}^*,$$

$$\text{dann } \lim_{d_{HVE} \rightarrow d_{SVE}} E_{KURB,SVE} = E'_{KURB} \text{ und } \lim_{d_{HVE} \rightarrow d_{SVE}} E_{SURB,SVE} = E'_{KURB}$$

$$\text{mit } E_{KURB,SVE}^* \geq E'_{KURB} > E_{SVE}^*$$

$$b) E_{SURB,HVE}^* \leq E_{HVE} < E_{HVE}^*,$$

$$\text{dann } \lim_{d_{HVE} \rightarrow d_{SVE}} E_{KURB,SVE} = E'_{SURB} \text{ und } \lim_{d_{HVE} \rightarrow d_{SVE}} E_{SURB,SVE} = E'_{SURB}$$

$$\text{mit } E_{SURB,SVE}^* \leq E'_{SURB} < E_{SVE}^*$$

$$c) E_{HVE} = E_{HVE}^*,$$

$$\text{dann } \lim_{d_{HVE} \rightarrow d_{SVE}} E_{KURB,SVE} = E' \text{ und } \lim_{d_{HVE} \rightarrow d_{SVE}} E_{SURB,SVE} = E'$$

$$\text{mit } E' = E_{SVE}^*$$

ii) Wenn $E'_{KURB} = E' = E'_{SURB} = E_{HVE}^*$, dann $E_{HVE}^* = E_{SVE}^*$.

Die Bedingungen aus i) in Hypothese 4.3.1 sagen aus, dass die Materialgrenzen des Elastizitätsmoduls E_{SVE} auf ein kleineres Intervall für alle möglichen Werte des Elastizitätsmoduls E_{HVE} konvergieren. Es befinden sich beide Elastizitätsmodule entweder gleichzeitig zwischen der oberen Schranke und dem scheinbaren Elastizitätsmodul oder zwischen der unteren Schranke und dem scheinbaren Elastizitätsmodul. Wird hingegen $E_{HVE} = E_{HVE}^*$ gesetzt, so konvergiert auch E_{SVE} gegen seinen scheinbaren Wert. Aus ii) in Hypothese 4.3.1 folgt der Umkehrschluss, dass es sich um E_{SVE}^* bei einer Übereinstimmung des konvergierten Elastizitätsmoduls des SVE mit dem des HVE handelt. Auch wenn die aufgeführten Bedingungen in der Hypothese 4.3.1 an dieser Stelle nicht mathematisch mit einer Konvergenzanalyse bewiesen werden und es sich daher nicht um einen Satz im mathematischen Sinne handelt, werden im Folgenden die getroffenen Aussagen anschaulich begründet und später auf die Metallschäume angewendet.

Für eine Homogenisierung über ein Teilvolumen, an dem in einer gewissen Entfernung die Randbedingungen SURB oder KURB angebracht werden, gehen die zwei Materialgrenzen zwangsweise ineinander über. Zum einen können sie nicht noch weiter voneinander divergieren, da sie schon die absoluten Grenzen darstellen. Zum anderen ist es physikalisch nicht plausibel, wenn beim Anbringen der Randbedingungen in gewisser Entfernung vom MVE die Materialschranken konstant bleiben und nicht zueinander konvergieren. In der oben erwähnten Arbeit [19] befindet sich das MVE gemäß Variante I in einem gewissen Abstand vom Rand innerhalb eines SVE, wobei sich ebenfalls eine Konvergenz zeigt. Neben der Konvergenz an sich wird anhand von Validierungsbeispielen in Abschnitt 4.3.2 die Richtigkeit der Konvergenzgrenzen aus Hypothese 4.3.1 aufgezeigt.

Mit den erlangten Erkenntnissen muss der zunächst unbekannte scheinbare Elastizitätsmodul des HVE mit dem Elastizitätsmodul des SVE übereinstimmen. Dabei erfolgt die Bestimmung iterativ. Der dazugehörige Algorithmus ist in Abbildung 4.11 zusammengefasst. Als Anfangswert werden die aus der Homogenisierung in Abschnitt 4.1 erhaltenen Materialgrenzen für die Materialschranken des HVE angesetzt. Daraus resultieren nach Hypothese 4.3.1 die zwei neuen Schranken $E_{K,i+1} = E'_{KURB}$ und $E_{S,i+1} = E'_{SURB}$, die bereits ein engeres Intervall für die Materialparameter bilden. Diese lassen sich in einem nächsten Iterationsschritt als neue Materialschranken für das HVE einsetzen. Somit kann das Intervall iterativ verkleinert werden, bis die Grenzen auf einen Wert konvergieren und damit dem scheinbaren Elastizitätsmodul des HVE entsprechen, was gleichzeitig das Abbruchkriterium des Algorithmus darstellt.

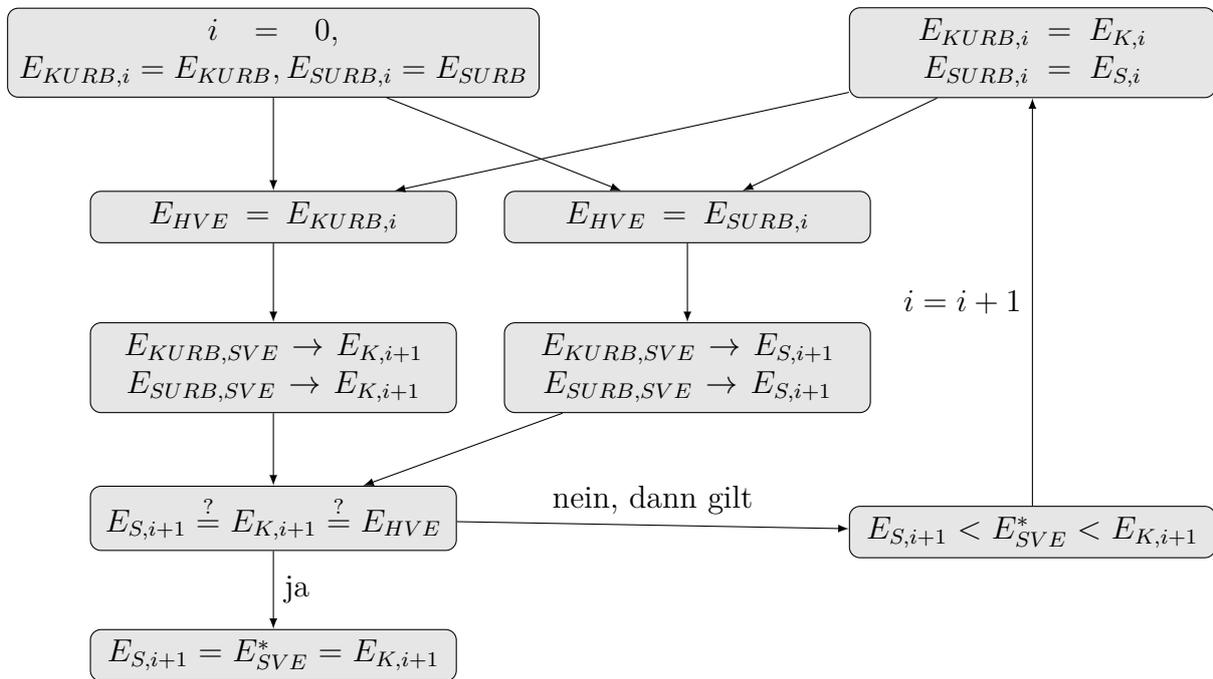


Abbildung 4.11: Algorithmus zur Berechnung des scheinbaren Elastizitätsmoduls

Zur Bestimmung eines randeffektunabhängigen Dämpfungsparameters ist ein analoges Vorgehen möglich, wobei sich das HVE weiterhin linear-elastisch verhält. Zusätzlich enthält das HVE eine steifigkeitsproportionale Dämpfung, die dem jeweiligen homogenisierten Dämpfungsparameter entspricht. Die Belastungsamplitude muss mit dem amplitudenabhängigen Dämpfungsparameter konsistent sein. Für das MVE wird nun ein linear-elastisches, idealplastisches Materialverhalten entsprechend Abschnitt 4.2 induziert. Durch Anwendung der Iteration aus Abbildung 4.11 lässt sich ein scheinbarer Dämpfungsparameter bestimmen, der dem Zusammenhang

$$\left. \begin{array}{l} \eta_{hKURB}^* \rightarrow \eta^* \\ \eta_{hSURB}^* \rightarrow \eta^* \end{array} \right\} \text{für } E_{SVE} \rightarrow E_{HVE} \text{ und } \eta_{SVE} \rightarrow \eta_{HVE} \quad (4.46)$$

genügt.

Abschließend wird der Einfluss der Korrelation zwischen $E_{SVE}(\theta)$ und $E_{HVE}(\theta)$ auf das Homogenisierungsergebnis einbezogen. Werden beide zufallsverteilte Parameter als Vektoren mit den Realisierungen als deren Einträge, d.h.

$$\mathbf{e}_{SVE} := \begin{pmatrix} E_{SVE}(\theta_1) \\ E_{SVE}(\theta_2) \\ \dots \\ E_{SVE}(\theta_N) \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

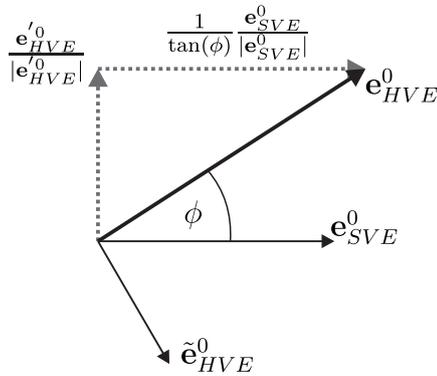
aufgefasst, lässt sich für standardisierte Zufallsfelder die Korrelation $\mathcal{R}(E_{SVE}^0, E_{HVE}^0)$ als Winkelverhältnis zwischen den beiden Vektoren interpretieren. Über die Definition des Skalarproduktes zweier Vektoren ergibt sich die Beziehung

$$\frac{\mathbf{e}_{SVE}^0 \cdot \mathbf{e}_{HVE}^0}{|\mathbf{e}_{SVE}^0| \cdot |\mathbf{e}_{HVE}^0|} = \cos(\phi) = \mathcal{R}(E_{SVE}^0, E_{HVE}^0) \quad (4.48)$$

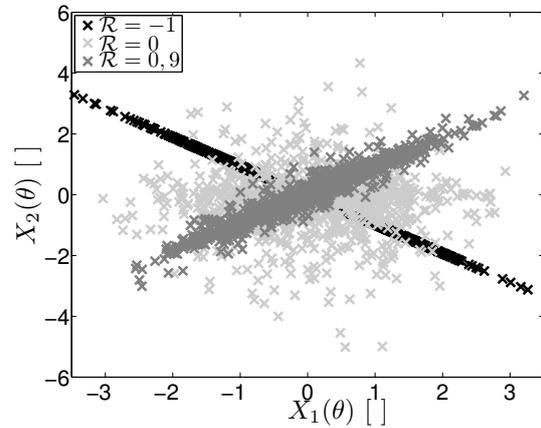
mit dem standardisierten Vektor $\mathbf{e}_{HVE}^0 := E_{HVE}^0(\theta)$ und dem Winkel ϕ , den die beiden Vektoren einschließen. Zur Bestimmung passender Einträge für das HVE mit vorgegebener Korrelation wird zunächst ein normalverteilter, sonst aber beliebiger Vektor $\tilde{\mathbf{e}}_{HVE}^0$ generiert. Mit der Vektoraddition gemäß Abbildung 4.12a ergibt sich

$$\mathbf{e}_{HVE}^0 = \frac{\tilde{\mathbf{e}}_{HVE}^0}{|\tilde{\mathbf{e}}_{HVE}^0|} + \frac{1}{\tan(\phi)} \frac{\mathbf{e}_{SVE}^0}{|\mathbf{e}_{SVE}^0|} \quad (4.49)$$

für $\phi \neq 0$, wobei $\tilde{\mathbf{e}}_{HVE}^0$ die zu \mathbf{e}_{SVE}^0 orthogonale Projektion von $\tilde{\mathbf{e}}_{HVE}^0$ ist [1].



(a) Vektordiagramm



(b) Zufallszahlen

Abbildung 4.12: Berechnung von $E_{HVE}(\theta)$ bei vorgegebener Korrelation

In Abbildung 4.12b sind beispielhaft zwei Zufallsvariablen mit 1000 Einträgen mit vorgegebener Korrelation abgebildet. Für eine vollständige Unkorreliertheit $\mathcal{R} = 0$ ergibt sich damit im Mittel eine Gerade entlang der Abszisse und für eine gegenteilige Korrelation eine linear abfallende Gerade mit der Steigung -1 .

4.3.2 Validierung

In diesem Abschnitt wird das iterative Homogenisierungsschema randeffektunabhängiger Materialparameter anhand von zwei Fallbeispielen validiert und die Anordnung von SVE zu HVE diskutiert. Bei allen Untersuchungen ist das SVE mit dem HVE fest verbunden, d.h. es gibt keine relativen Freiheitsgrade im Übergangsbereich SVE-HVE.

Der erste Validierungsfall erfolgt an einem einfachen zweidimensionalen Problem. Dazu wird ein Stab der Größe $15 \cdot 600 \text{ mm}^2$ erzeugt, der über kreisrunde Inhomogenitäten verfügt. Diese sind so verteilt, dass bei einer Segmentierung des Stabes in 40 gleich große VE jeweils fünf zufällig angeordnete Inhomogenitäten in jedes VE fallen (Abbildung 4.13). Durch diese Anordnung entsprechen die einzelnen Segmente der Definition eines SVE. Die Inhomogenitäten besitzen dabei die Steifigkeit $E_{Inhomogenitäten} = \frac{1}{1000} E_{Matrix}$.



Abbildung 4.13: Stab mit kreisförmigen Inhomogenitäten

Zunächst wird der Stab in seine 40 SVE zerschnitten. Anschließend wird für jedes SVE der scheinbare Elastizitätsmodul mit dem vorgestellten iterativen Schema berechnet. Aus den Ergebnissen erhält man den Elastizitätsmodul des ganzen Stabes über

$$\langle E_{SVE} \rangle_{Stab} = \frac{N}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{E_{i,SVE}^*}}, \quad N = 40, \quad (4.50)$$

was einer Serienschaltung von Steifigkeiten entspricht. Zusätzlich wird der Elastizitätsmodul des ganzen Stabes direkt berechnet, indem der Stab linksseitig eingespannt wird und rechtsseitig mit SURB bzw. KURB belastet wird. Aufgrund der Länge des Stabes handelt es sich für den Elastizitätsmodul in Längsrichtung um ein annäherndes RVE, sodass der resultierende Elastizitätsmodul randeffektunabhängig ist. Im Idealfall sollte der Elastizitätsmodul E_{Stab} des ganzen Stabes mit dem gemittelten Elastizitätsmodul $\langle E_{SVE} \rangle_{Stab}$ aus den 40 SVE übereinstimmen.

Aus den Ergebnissen in Tabelle 4.1 ist ersichtlich, dass bei der direkten Berechnung von E_{Stab} sich ein annähernd randeffektunabhängiger Elastizitätsmodul einstellt. Das Intervall zwischen $E_{KURB,0}$ und $E_{SURB,0}$ beträgt lediglich $\sim 0,3 \%$. Bei der Mittelung der Ergebnisse der 40 SVE ergeben sich für KURB und SURB $\sim 9 \%$ bzw. $\sim 15 \%$ Abweichung von E_{Stab} . Mit der Anwendung des implementierten Homogenisierungsschemas

[MPa]	E_{Stab}	$\langle E_{SVE} \rangle_{Stab}$	Modell 1	Modell 2	$\frac{\langle E_{SVE} \rangle_{Stab}}{E_{Stab,KURB}}$	$\frac{\langle E_{SVE} \rangle_{Stab}}{E_{Stab,SURB}}$
$E_{KURB,0}$	25.707	27.859			8,4 %	8,7 %
$E_{KURB,1}$		25.920	24.391	25.673	0,8 %	1,1 %
$E_{KURB,2}$		25.824			0,5 %	0,7 %
$E_{SURB,2}$		25.765			0,2 %	0,5 %
$E_{SURB,1}$		25.511	23.814	23.552	0,8 %	0,5 %
$E_{SURB,0}$	25.637	21.847			15,0 %	14,8 %

Tabelle 4.1: Scheinbare Materialparameter eines heterogenen Stabs

mit $E_{KURB,i}$ bzw. $E_{SURB,i}$ aus Abbildung 4.11 wird ein annähernd randeffektunabhängiger Elastizitätsmodul errechnet. Bereits nach der ersten Iteration beträgt die Abweichung der Elastizitätsmodule nur $\sim 1\%$ und nimmt nach der zweiten Iteration auf $\leq 0,7\%$ ab, was im Rahmen der Modellierung vernachlässigbar klein ist. Das Intervall zwischen den Materialschränken nimmt dabei von anfänglich 22% auf $< 0,3\%$ ab. Die auftretende Differenz (der scheinbare Elastizitätsmodul liegt leicht über $E_{Stab,KURB}$) tritt aufgrund der im Rahmen der FEM benötigten, feinen Vernetzung der Inhomogenitäten auf. Für den Fall, dass durch den Zufallsgenerator eine Inhomogenität sehr nah an den Rand eines SVE gesetzt wird, können ebenfalls kleine Abweichungen auftreten. Zusammenfassend zeigt sich nichtsdestotrotz, dass die Materialschränken sowohl zueinander als auch gegen die richtigen Werte konvergieren.

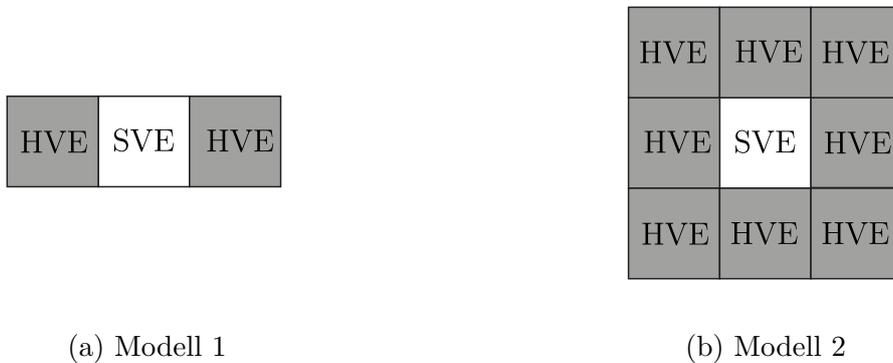


Abbildung 4.14: Verschiedene Anordnungen der HVE am SVE

Bisher wurde neben dem SVE ein HVE betrachtet. Zur Bewertung des Homogenisierungsschemas wird im Folgenden der Einfluss der Anordnung HVE-SVE auf den scheinbaren Elastizitätsmodul untersucht, indem aus dem homogenisierten Körper in Abbildung 4.10 ein größerer Ausschnitt entnommen wird. Dazu werden die Verbände aus Abbildung 4.14 betrachtet und auf das zweidimensionale Problem in Abbildung 4.13 angewendet. Aus den Ergebnissen in Tabelle 4.1 ist ersichtlich, dass beide erweiterten Modelle zu einem geringeren Elastizitätsmodul führen als es für den einfachen Verbund SVE-HVE der Fall ist.

Die Ursache hierfür ist mit den resultierenden Verschiebungen in Abbildung 4.15 erklärbar. Während sich im Fall des einfachen SVE-HVE-Verbundes das SVE an der linken Seite aufgrund der Einspannung nicht in Belastungsrichtung verschieben kann, ist dies für Modell 1 und 2 der Fall. Dadurch fällt der homogenisierte Elastizitätsmodul ab, da die versteifend wirkende Randbedingung am linken Rand wegfällt. Folglich ist für eine Konsistenz zur bisherigen Homogenisierung eines linksseitig eingespannten und rechtsseitig belasteten SVE nur der einfache Verbund SVE-HVE anwendbar.

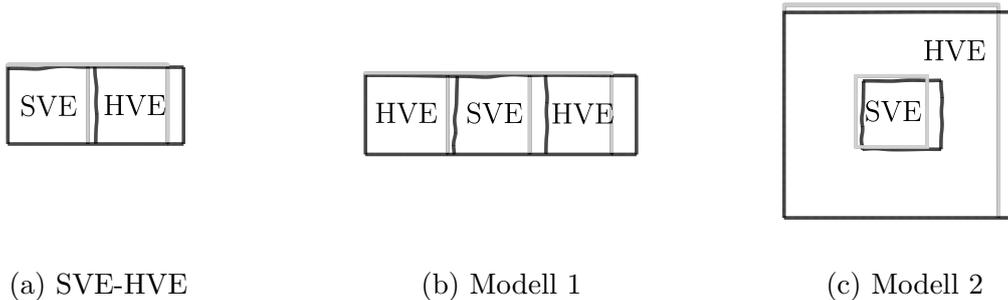


Abbildung 4.15: Qualitative Verschiebung der SVE-HVE-Modelle

Unter Heranziehen der Erkenntnisse aus dem zweidimensionalen Fallbeispiel wird die Validität der Homogenisierungsmethode für reale DUOCEL-Metallschäume untersucht. Dazu wird eine Realisierung eines $15 \cdot 15 \cdot 180 \text{ mm}^3$ langen Stabes erstellt und der Elastizitätsmodul des ganzen Stabes mit dem resultierenden, gemittelten Elastizitätsmodul der SVE wie im zweidimensionalen Fall verglichen. Wie aus den Ergebnissen in Tabelle 4.2 hervorgeht, sind die Materialgrenzen des resultierenden Elastizitätsmoduls $\langle \tilde{E}_{SVE} \rangle_{Stab}$ im Vergleich zu E_{Stab} für beide Randbedingungen um 5 % bzw. 23 % zu gering. Offensichtlich besitzen die gebrochenen Stege im Randbereich, der im Vergleich zur Stablänge vernachlässigbar klein ist, keinen Einfluss auf die Steifigkeit, wohingegen der konstant bleibende, weichere Randbereich bei den SVE die Steifigkeit mindert. Bisher wurden die Freiheitsgrade in Belastungsrichtung an der eingespannten Stelle der SVE zu Null gesetzt. Um makroskopischen Strukturen entsprechend den Einfluss des Randbereichs zu reduzieren und höhere Steifigkeiten zu erhalten, werden die SVE linksseitig fest eingespannt, d.h. die Knoten besitzen dort keine Freiheitsgrade mehr. Diese künstliche Versteifung dient zur Reduktion des Einflusses der geschnittenen Stege im Randbereich auf das SVE. Der daraus resultierende, steifere Elastizitätsmodul $\langle E_{SVE} \rangle_{Stab}$ ist ebenfalls in Tabelle 4.2 aufgezeigt. Es zeigt sich für beide Materialgrenzen eine wesentlich höhere Übereinstimmung des Intervalls. Der randeffektunabhängige Elastizitätsmodul wird nun nur noch mit 4 % unterschätzt. Diese Diskrepanz beruht allerdings weniger auf dem Homogenisierungsschema als auf der Tatsache, dass durch das Herausschneiden der SVE die zerschnittenen Zellen stets einen Einfluss auf die Ergebnisse haben. Ein weiterer Grund liegt in der FEM-Berechnung, da aufgrund des Übergangs zwischen SVE und HVE eine sehr feine Vernetzung notwendig ist, um eine Konvergenz der Berechnung sicherzustellen. Da dies die Rechenzeit extrem ansteigen lässt, wird die Vernetzung etwas gröber gewählt. Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass

durch die vorgestellte iterative Homogenisierung scheinbare Materialparameter bestimmbar sind, die unabhängig von den Randbedingungen sind und mit einem gewissen, kleinen Fehler gegen den richtigen Wert konvergieren. Die hier aufgezeigte notwendige Versteifung wird im Folgenden stets angewendet. Auf dieser Weise wurden auch die bereits gezeigten Ergebnisse der Homogenisierung berechnet.

[MPa]	E_{Stab}	$\langle \tilde{E}_{SVE} \rangle_{Stab}$	$\langle E_{SVE} \rangle_{Stab}$	$\frac{\langle E_{SVE} \rangle}{E_{Stab}}$
$E_{KURB,0}$	360	339	377	6 %
E^*	~ 356		~ 342	4 %
$E_{SURB,0}$	352	276	300	16 %

Tabelle 4.2: Scheinbare Materialparameter eines DUOCEL-Stabs

4.4 Randeffektunabhängiger Elastizitätsmodul

Bei der Anwendung des Homogenisierungsschemas auf 50 Realisierungen der VORONOI-Schäume mit $\mathcal{R} = 1$ zur Untersuchung der getroffenen Aussagen in Hypothese 4.3.1 ergeben sich die Verläufe in Abbildung 4.16. Für $E_{HVE} = E_{SURB}$ konvergieren beide Materialschranken gegen den Wert $\mu_{E_{SURB}}^* = 1101 \text{ MPa}$ und für $E_{HVE} = E_{KURB}$ gegen $\mu_{E_{KURB}}^* = 1168 \text{ MPa}$. Die Schranken für SURB befinden sich dabei stets unterhalb der Schranken von KURB. Durch die neu erhaltenen Schranken hat sich das Intervall, worin sich der scheinbare Elastizitätsmodul befindet, um 88 % im Vergleich zur herkömmlichen Homogenisierung verringert. Für den Variationskoeffizienten zeigt sich ein analoges Verhalten, wobei sich für E_{SURB} erneut ein höherer Variationskoeffizient ergibt. Bei beiden Größen tritt eine Konvergenz bereits bei $\frac{d_{HVE}}{d_{SVE}} \approx 0,5$ auf.

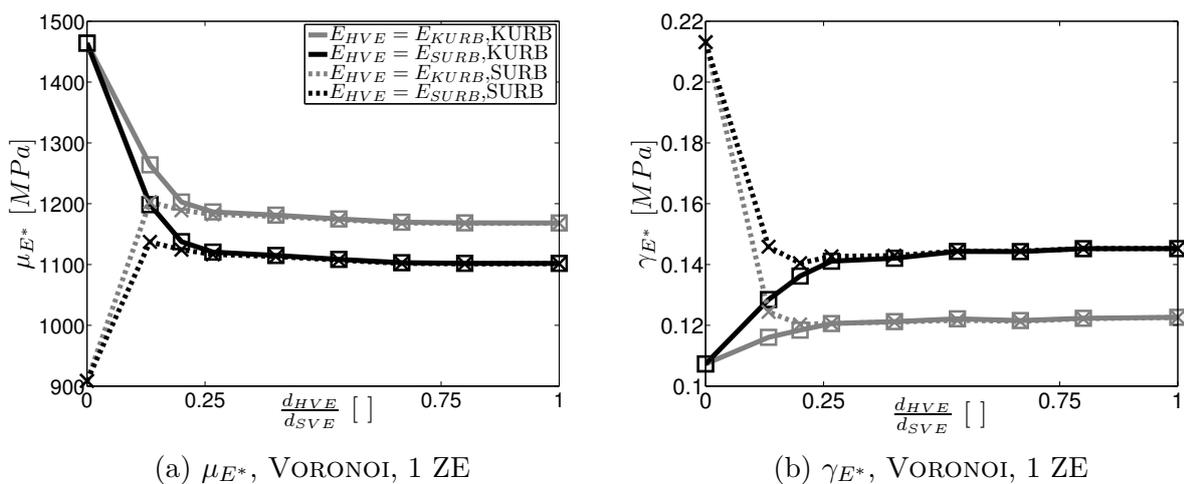


Abbildung 4.16: Konvergenzverhalten von μ_{E^*} und γ_{E^*}

Mit den neuen Materialschränken lässt sich durch wiederholte Anwendung des Modellverbunds SVE-HVE gemäß dem Algorithmus aus Abbildung 4.11 ein eindeutiger, scheinbarer Elastizitätsmodul bestimmen, wobei stets $d_{HVE} = d_{SVE}$ gilt. Damit ergeben sich die in Abbildung 4.17 dargestellten Materialgrenzen des scheinbaren Elastizitätsmoduls. Dabei wurde der Algorithmus für die VORONOI-Schäume nach drei und aufgrund der erhöhten Rechenzeit bei den DUOCEL-Schäumen mit 6 ZE nach zwei Rechenschleifen abgebrochen. Die Konvergenz der beiden Materialgrenzen auf einen Wert ist für beide Schaumarten in den Abbildungen ersichtlich. Allerdings verhält sich der scheinbare Elastizitätsmodul im Verhältnis zu den ursprünglichen Materialgrenzen unterschiedlich. Während die Werte bei den VORONOI-Schäumen auf $\mu_{E^*} \approx 0,77 \cdot \mu_{E_{KURB}^*}$ bzw. $\gamma_{E^*} \approx 1,31 \cdot \gamma_{E_{KURB}^*}$ konvergieren, betragen der Mittelwert und der Variationskoeffizient des scheinbaren Elastizitätsmoduls für DUOCEL-Schäume mit 6 ZE $\mu_{E^*} \approx 0,87 \cdot \mu_{E_{KURB}^*}$ bzw. $\gamma_{E^*} \approx 1,07 \cdot \gamma_{E_{KURB}^*}$ und mit 1 ZE $\mu_{E^*} \approx 0,91 \cdot \mu_{E_{KURB}^*}$ bzw. $\gamma_{E^*} \approx 1,09 \cdot \gamma_{E_{KURB}^*}$.

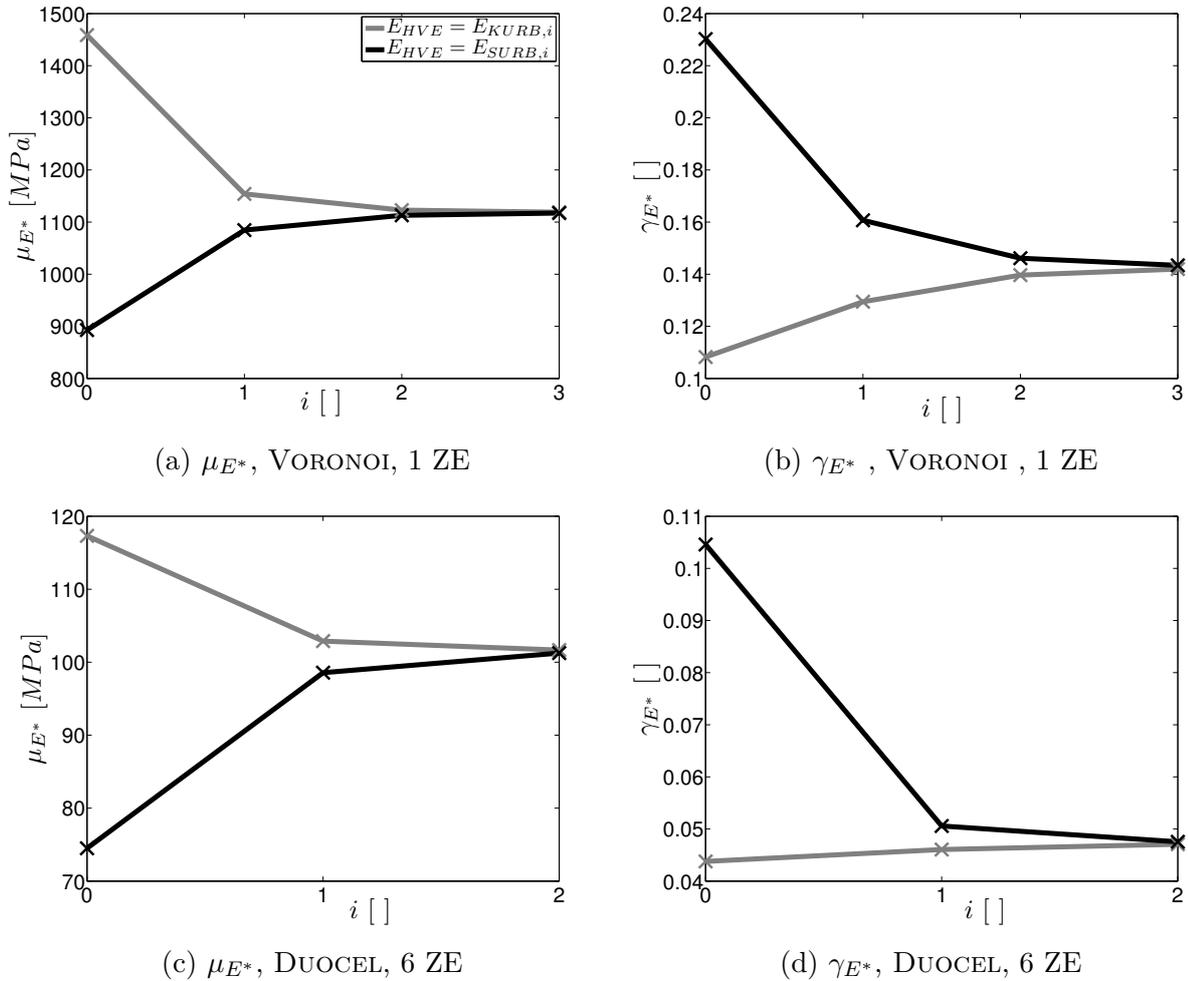


Abbildung 4.17: Randeffektunabhängiger Elastizitätsmodul

Die in Abbildung 4.17 aufgeführten Ergebnisse unterstreichen die nur bedingte Gültigkeit der für den scheinbaren Elastizitätsmodul getroffenen Annahme des arithmetischen Mittelwerts aus den beiden Materialgrenzen in der Arbeit [101]. So ergibt sich für die VORONOI-Schäume ein Mischungsverhältnis von $E^* = 0,4 \cdot E_{KURB}^* + 0,6 \cdot E_{SURB}^*$, für die DUOCEL-Schäume mit 6 ZE $E^* = 0,63 \cdot E_{KURB}^* + 0,37 \cdot E_{SURB}^*$ und für DUOCEL-Schäume mit 1 ZE $E^* = 0,55 \cdot E_{KURB}^* + 0,45 \cdot E_{SURB}^*$. Zusammenfassend zeigt sich bei den drei modellierten Schaumarten eine durch die ansteigende Steifigkeit bedingte Verschiebung des scheinbaren Elastizitätsmoduls in Richtung der REUSS-Schranke.

Wie in Abbildung 4.18 beispielhaft am DUOCEL-Schaum aufgezeigt wird, ändert sich näherungsweise der charakteristische Verlauf der Verteilungsfunktion des Elastizitätsmoduls aufgrund des Homogenisierungsschemas nicht. Daher wird in den anschließenden Untersuchungen weiterhin von einer Normalverteilung ausgegangen.

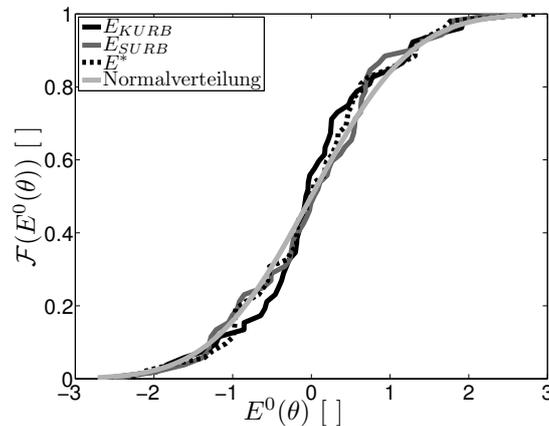


Abbildung 4.18: Verteilungsfunktion, DUOCEL, 6 ZE

Bisher wurden die scheinbaren Parameter unter der Bedingung $\mathcal{R} = 1$ berechnet. Aber auch für Korrelationen mit $\mathcal{R} \neq 1$ lässt sich der Algorithmus gemäß Abbildung 4.11 anwenden, wenn die Anfangsbedingungen für die Materialschränken des HVE entsprechend der Gleichung (4.49) in Abhängigkeit des SVE mit vorgegebener Korrelation bestimmt werden. Für verschiedene vorgegebene Korrelationen sind die Ergebnisse nach der ersten Iteration in Abbildung 4.19 für 50 Realisierungen zusammengefasst. Für den Mittelwert μ_{E^*} zeigt sich ein insgesamt vernachlässigbarer Einfluss der Korrelation. So verkleinert sich das Intervall der Materialschränken je nach Korrelation zwischen 87 % und 91 %. Die Materialschränken nach dem ersten Iterationsschritt liegen nahezu aufeinander, die Streuung der Materialschränken für die verschiedenen Korrelation beträgt $< 0,5$ %. Im Gegensatz dazu wird der Variationskoeffizient γ_{E^*} durchaus beeinflusst. Je größer die Korrelation \mathcal{R} zwischen SVE und HVE ist, desto größer ist der konvergierte Wert sowohl für KURB als auch für SURB. Während für $\mathcal{R} = -0,88$ bereits nach einem Iterationsschritt der Variationskoeffizient auf $\sim 0,12$ für beide Randbedingungen konvergiert ist, nimmt sowohl der absolute

Wert als auch die Größe des Intervalls mit zunehmender Korrelation zu. So befindet sich der Variationskoeffizient für $\mathcal{R} = +0,77$ noch im Bereich $\gamma_{E^*} = [0, 13; 0, 16]$.

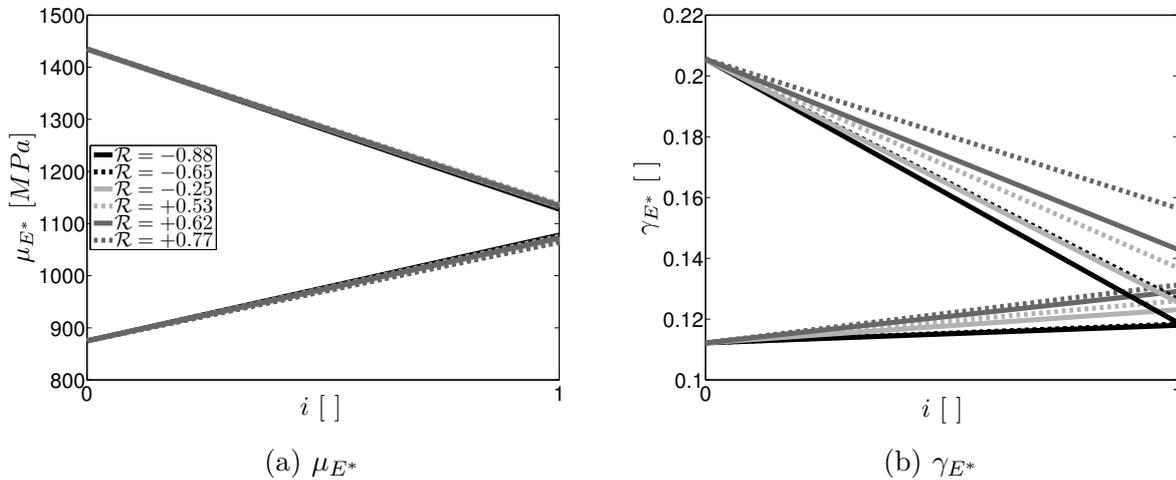


Abbildung 4.19: Einfluss von \mathcal{R} auf E^* , VORONOI, 1 ZE

Trotz der aufgezeigten Diskrepanzen des Variationskoeffizienten, die je nach gewählter Korrelation auftreten, werden alle vorliegenden Berechnungen von scheinbaren Materialparametern in dieser Arbeit mit $\mathcal{R} = 1$ durchgeführt. Da Untersuchungen der Korrelationsfunktion an VORONOI-Schäumen sowohl in [101] als auch in Abschnitt 4.7 zeigen, dass $\mathcal{R}_{XX}(x) > -0,2$ sowohl für E_{KURB} als auch für E_{SURB} gilt, ist der maximale Fehler des Variationskoeffizienten, der im ungünstigsten Fall bei der Homogenisierung auftreten kann, kleiner als zehn Prozent.

4.5 Randeffektunabhängiger Dämpfungsparameter

Zur Berechnung eines randeffektunabhängigen Dämpfungsparameters wird der iterative Algorithmus aus Abbildung 4.11 erneut verwendet. Dazu werden zunächst die Materialschränken für die Steifigkeit und für die Dämpfung mittels hKURB und hSURB entsprechend Abschnitt 4.2 bestimmt. Basierend auf diesen Ergebnissen werden die gleichen Belastungsamplituden am Verbund SVE-HVE vorgegeben. Das HVE wird dabei mit linear-elastischem Verhalten mit der entsprechenden Materialschranke modelliert. Zusätzlich wird steifigkeitsproportionale Dämpfung implementiert. Dabei entspricht die Dämpfung dem von der Belastungsamplitude abhängigen Wert aus der zuvor durchgeführten Homogenisierung. Das SVE wird wie zuvor mit linear-elastischem und ideal-plastischem Materialverhalten modelliert. Für eine Verkürzung der sehr hohen Rechenzeit wird für hSURB die Belastungsamplitude $\hat{\sigma}_{hSURB} = 0,85 \cdot \langle \hat{\sigma}_{hKURB} \rangle$ gewählt. Bei einer unabhängigen Vorgabe von $\hat{\sigma}_{hSURB}$ besteht die Gefahr, dass die Wahl der Belastungsamplitude bereits ein

vollplastisches Materialverhalten hervorruft und so die Rechnung nur sehr langsam oder gar nicht konvergiert.

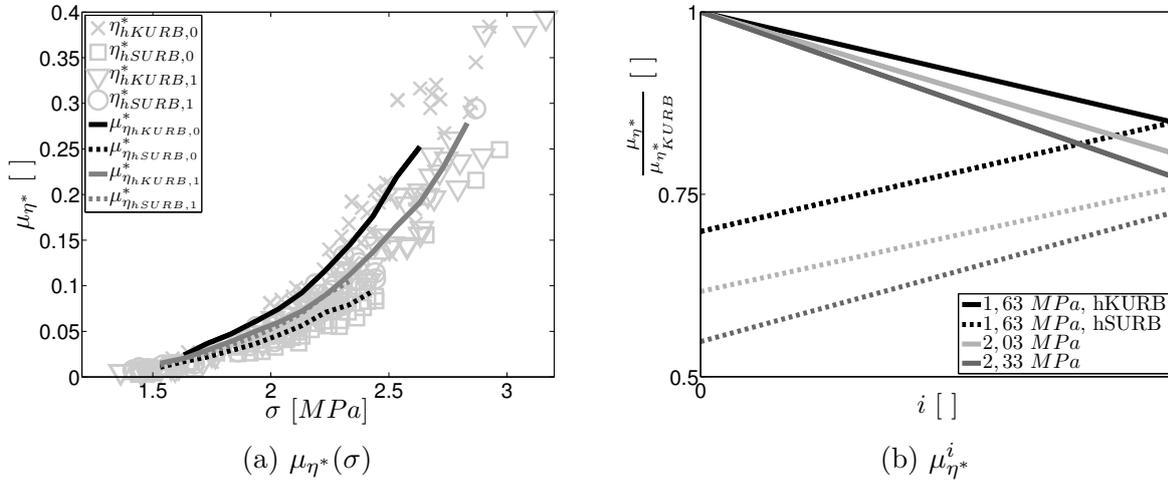


Abbildung 4.20: Randeffectunabhängiger Dämpfungsparameter, DUOCEL, 1 ZE

Die Ergebnisse nach der ersten Iteration sind in Abbildung 4.20 zusammengefasst. Aufgrund der vielfach höheren Rechenzeit wurden lediglich 15 Realisierungen von DUOCEL-Schäumen mit einem ZE berechnet. Je nach Belastungshöhe dauert die Berechnung für eine Realisierung und eine Amplitude aufgrund der nötigen feinen Vernetzung und der kleinen Schrittweite bis zu fünf Stunden. Die gezeigten Ergebnisse, basierend auf σ , sind für alle berechneten Punkte mit verschiedenen Symbolen in Abbildung 4.20a dargestellt. Aufgrund der Differenzen in den verschiedenen Spannungen lassen sich nur Mittelwerte der interpolierten Kurven von μ_{η^*} angeben. Nichtsdestotrotz wird deutlich, dass sich auch bei der Dämpfung beide Materialschränken einander nähern und so ein scheinbarer Dämpfungsparameter μ_{η^*} bestimmt werden kann. Aufgrund der geringen Anzahl an berechneter Realisierungen und der nicht gleichen Spannungsschritte σ kann an dieser Stelle keine valide Darstellung von γ_{η^*} erfolgen, weswegen sich die Ergebnisse auf den Mittelwert beschränken. In Abbildung 4.20b ist die Konvergenz der Materialschränken für ausgewählte Spannungen dargestellt. In Abhängigkeit von der Belastung ist die Konvergenz unterschiedlich stark ausgeprägt. Für eine amplitudenunabhängige Näherung kann der scheinbare Dämpfungsparameter aber im Mittel mit $\mu_{\eta^*} \approx 0,8 \cdot \mu_{\eta^*_{hKURB}}$ angenähert werden, was für weitere Simulationen verwendet wird. Der Variationskoeffizient wird damit nicht explizit untersucht und auf den scheinbaren Parameter angepasst. Stattdessen wird davon ausgegangen, dass der Variationskoeffizient von η^* annähernd mit $\gamma_{\eta^*_{hKURB}}$ übereinstimmt.

4.6 Berechnung der Lebensdauer

Das Ziel einer Lebensdauerberechnung ist die bis zum Materialversagen aufgebrauchte Schwinglastspielzahl zu bestimmen sowie die Entwicklung der Schädigung mit einem belastungsabhängigen Parameter zu erfassen. Dafür werden die SVE analog zur Homogenisierung der Dämpfung mit hKURB bzw. hSURB belastet. Die Modellierung der Schadensakkumulation in einem Material während der Lebensdauer ist in der Regel komplex und mathematisch schwer zu erfassen. Die Bestimmung der Lebensdauer eines Metallschaumes wird durch die stark ausgeprägte Heterogenität der Mikrostruktur zusätzlich erschwert. Um dennoch ein qualitativ valides Modell zu erhalten, sind vereinfachende Modellierungsansätze unumgänglich.

Die Beschreibung der Ermüdung metallischer Werkstoffe basiert in viele Fällen auf der empirisch bestimmten WÖHLER-Kurve. Für den Anwendungsfall ist die Zeitfestigkeit, die die Festigkeit des Bauteils für Lastspielzahlen im Intervall $10^3 \leq N \leq 10^7$ beschreibt, von größter Bedeutung. Auf diesen Bereich beschränken sich folgende Ausführungen. Die Abhängigkeit der Versagenslastspielzahl N_V von der Amplitude der Belastungsspannung $\hat{\sigma}$ lässt sich im genannten Bereich durch die BASQUIN-Gleichung

$$\hat{\sigma} = aN_V^b \quad (4.51)$$

beschreiben. Die materialspezifischen Parameter a und b werden im Folgenden so gewählt, dass $\hat{\sigma}$ mit der Streckgrenze R_m bei $N = 10^3$ bzw. der Dauerfestigkeit σ_D bei $N = 10^7$ entsprechend der Daten von Aluminium in Tabelle 3.1 übereinstimmen. Bei einer vorgegebenen harmonischen Belastung auf ein SVE kann eine Vergleichsspannung $\sigma_{Vgl} = \hat{\sigma}$ für jeden einzelnen Steg in der Struktur ermittelt werden. In dieser Arbeit wird dafür die VON MISES-Spannung σ_{MISES} verwendet. Damit lässt sich aus Gleichung (4.51) die Versagenslastspielzahl zu

$$N_{V,i} = \left(\frac{1}{a} \sigma_{MISES,i} \right)^{\frac{1}{b}} \quad (4.52)$$

für jeden einzelnen Steg i berechnen. Dieser Modellierungsansatz vereinfacht die Komplexität der Lebensdauerberechnung erheblich, da das für das Ermüdungsverhalten verantwortliche Risswachstum nicht modelliert wird. Stattdessen wird davon ausgegangen, dass bei konstanter harmonischer Belastung sich die Spannungsverteilung bis zum Bruch trotz etwaiger Risse in den Stegen nicht nennenswert ändert. Diese Annahme bringt den weiteren Vorteil mit sich, dass nicht alle Schwinglastspielzahlen bis zum Versagen simuliert werden müssen. Nach einem initialen Simulationslauf der SVE unter harmonischer Belastung ist der nächste Simulationslauf erst dann notwendig, wenn nach Gleichung (4.52) ein Steg versagt hat und sich durch die daraus resultierende Spannungsverteilung in der Mikrostruktur die VON MISES-Spannung $\sigma_{MISES,i}$ bei allen verbliebenen Stegen ändert.

Der kritische Steg i_{krit} , der bei vorgegebener Belastung als erstes versagt, kann über das Minimumkriterium $N_{V,i=i_{krit}} = \min(N_{V,i})$ bestimmt werden. Mit der Einführung eines

linearen Schädigungsparameters $S_i = [0; 1]$ für jeden Steg weisen die restlichen Stege zum Zeitpunkt des Versagens des Stags i_{krit} die Schädigung

$$S_i = \frac{N_{V,i_{krit}}}{N_{V,i}} \quad (4.53)$$

auf. Aus dieser Gleichung ist die Konsistenz des Schädigungsparameters bezüglich des versagten Stags ersichtlich, da dieser eine Schädigung von $S_{i_{krit}} = 1$ aufweist. Nach dem Versagen des Stags i_{krit} verhält sich das SVE so, als wäre dieser Steg nicht vorhanden. Zur Einsparung von Rechenzeit wird daher der gebrochene Steg aus dem FEM-Modell gelöscht. Theoretisch können natürlich auch zwei oder mehrere Stege gleichzeitig brechen. Das SVE mit der neuen Anzahl an Stegen wird im nächsten Schritt erneut mit hKURB bzw. hSURB belastet. Dabei wird die Lastspielzahl um

$$\Delta N = N_{V,i_{krit}} \quad (4.54)$$

aktualisiert. Es wird in der Simulation also genau an die Stelle gesprungen, an der sich die Mikrostruktur des SVE durch das Versagen eines oder mehrerer Stege ändert. Unter der Berücksichtigung der Vorschädigung eines jeden Stages kann der nächste versagende Steg zu

$$N_{V,i_{krit}} = \Delta N = \min \left(\left(1 - \sum_{j=1}^M S_{i,j} \right) N_{V,i} \right) \quad (4.55)$$

für M vorangegangene Rechenschritte bestimmt werden. Die addierten M Schädigungskremente in Gleichung (4.55) werden mit der neu dazugekommenen Schädigung linear akkumuliert. Damit ergibt sich der neue Schädigungsparameter nach der PALMGREN-MINER-Regel zu

$$S_{i,M+1} = \sum_{j=1}^M S_{i,j} + \frac{N_{V,i_{krit}}}{N_{V,i}}. \quad (4.56)$$

Die erneute Berechnung der SVE nach jedem Sprung in der Lastspielzahl ΔN und dem Herauslösen der versagten Stege kann bis zu einem gewählten mesoskopischen Versagens- bzw. Abbruchkriterium beliebig lange fortgeführt werden.

In Abbildung 4.21 ist der Algorithmus zur Bestimmung des Steifigkeitstensors in Abhängigkeit von der Lebensdauer sowie zur Berechnung eines homogenisierten Schädigungsparameters $S^*(\theta)$ zusammengefasst. Wie bereits eingangs im Forschungsüberblick in Abschnitt 1.3.2 dargelegt, wurde dieser Algorithmus so oder in ähnlicher Weise bereits in den Arbeiten [18, 41, 72, 99] angewendet. Aufgrund des Versagens einzelner Stege und des damit verbundenen Abfalls der Steifigkeit des SVE wird für jede Rechenschleife der Steifigkeitstensor \mathbb{C}_M^* für linear-elastisches Materialverhalten neu berechnet. Im nächsten Schritt wird hKURB zur Bestimmung der Schädigung an das SVE angebracht, dass jetzt zusätzlich ideal-plastisches Verhalten beinhaltet. Wird das noch zu definierende mesoskopische Verhalten $S^* = 1$ erreicht, wird der Algorithmus abgebrochen.

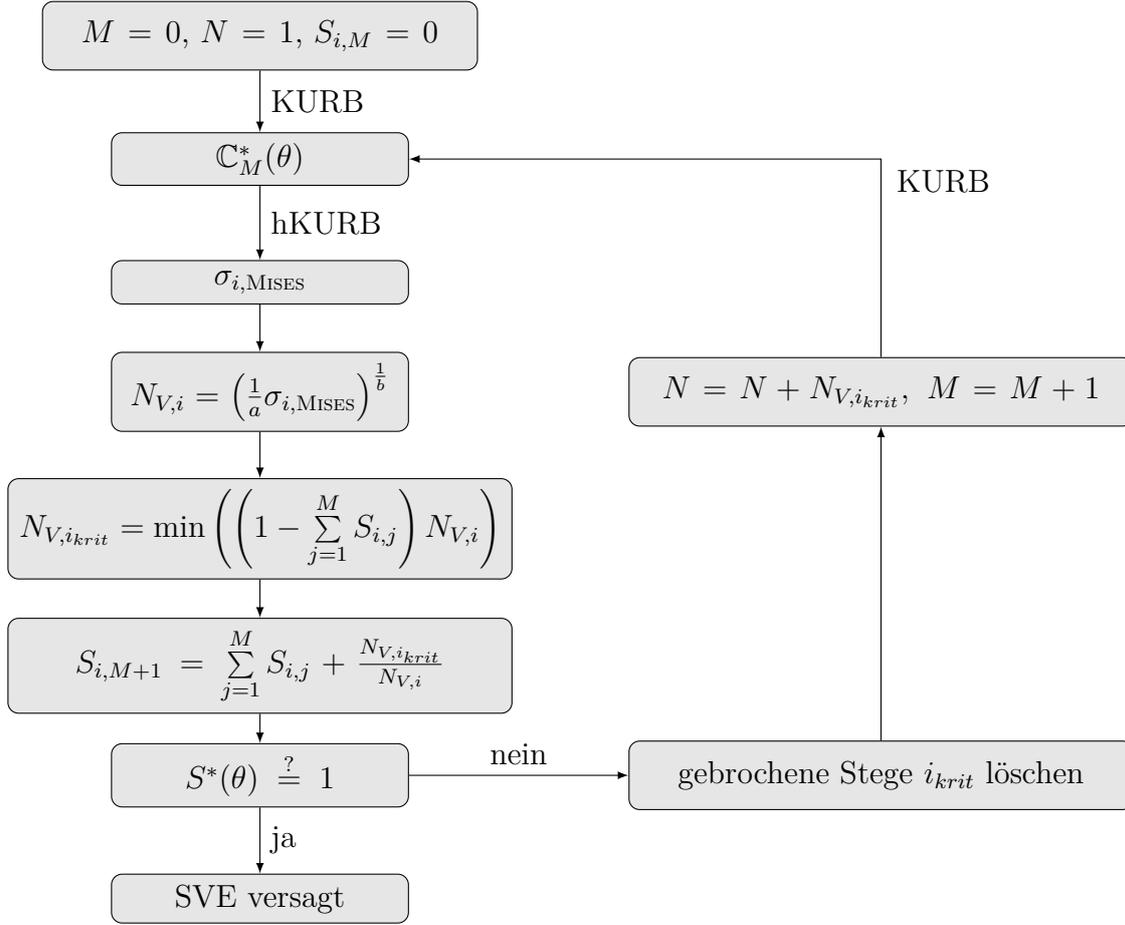


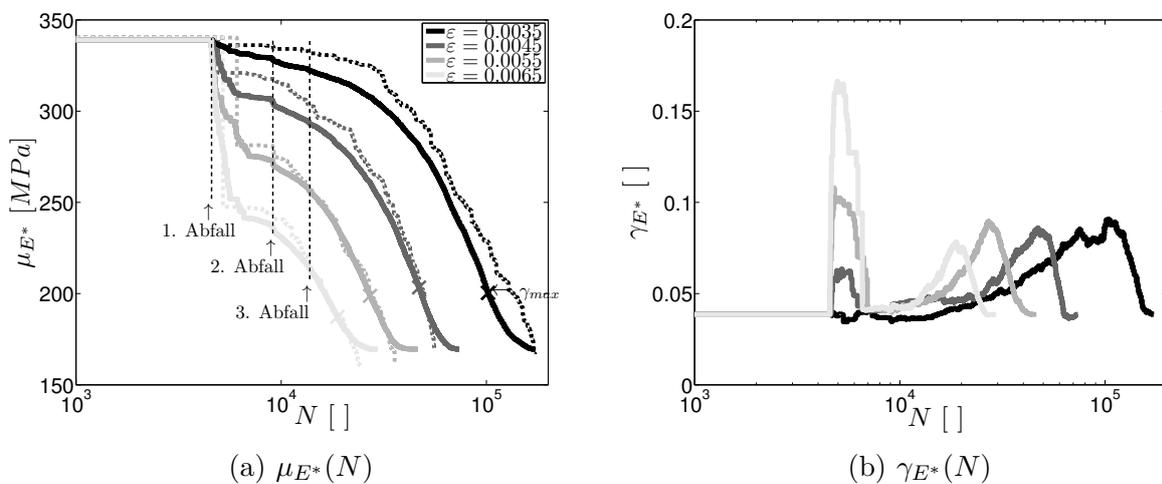
Abbildung 4.21: Algorithmus zur Berechnung der Lebensdauer eines SVE

Basierend auf dem Elastizitätsmodul aus dem Steifigkeitstensor \mathbb{C}_M^* , der den mikrostrukturellen Schädigungsverlauf widerspiegelt, wird der mesoskopische, homogenisierte Schädigungsparameter zu

$$S^*(\theta) := \frac{1}{1 - \zeta} \left(1 - \frac{E_M^*(\theta)}{E_0^*(\theta)} \right), \quad E_M^*(\theta) = [\zeta E_0^*(\theta); E_0^*(\theta)], \quad \zeta = [0; 1] \quad (4.57)$$

mit dem anfänglichen Elastizitätsmodul $E_0^*(\theta)$ und dem aktuellen Elastizitätsmodul $E_M^*(\theta)$ des SVE definiert [64]. Versagen des SVE tritt ein, wenn $S^*(\theta) = 1$. Der Skalierungsfaktor ζ wird zusätzlich eingeführt, um Versagen bei einer selbst gewählten, kritischen Steifigkeit zu definieren. Im Folgenden wird $\zeta = 0,5$ gesetzt, was Versagen bei Unterschreiten von 50 % der Anfangssteifigkeit bedeutet. Diese an sich willkürliche Grenze wird aufgrund des ohnehin rechenintensiven Rechenalgorithmus gesetzt. Auch wenn in dieser Arbeit ausschließlich die aktuelle Steifigkeit den Schädigungsparameter bestimmt, so sind an dieser Stelle auch andere Kriterien zur Bestimmung der Schädigung denkbar, wie zum Beispiel Materialtrennung bzw. das Auseinanderbrechen des SVE oder wie in [55] anhand der Veränderung der sich ausbildenden Hystereseschleife.

Aus Rechenzeitgründen werden im Folgenden lediglich 30 Realisierungen des DUOCEL-Schaums mit einem ZE mit hKURB für vier Amplituden berechnet. Wie unten noch gezeigt wird, ist diese Anzahl der Realisierungen für ein valides Ergebnis im Sinne der Stochastik ausreichend. Aufgrund der Ergebnisse der Untersuchungen in Abschnitt 4.4 wird der scheinbare Elastizitätsmodul für jede Realisierung mit $E^*(\theta) = 0,91 \cdot E_{KURB}^*(\theta)$ berechnet. Aufgrund der Linearität des Erwartungswert-Operators ergibt sich damit der korrekte Mittelwert $\mu_{E^*}(\theta) = 0,91 \cdot \mu_{E_{KURB}^*}(\theta)$. Allerdings kann damit an dieser Stelle keine Anpassung an den Variationskoeffizienten erfolgen. Stattdessen wird mit $\gamma_{E^*} = \gamma_{E_{KURB}^*}$ gerechnet, was nach den zuvor vorgestellten Ergebnissen näherungsweise angenommen werden kann. Im Folgenden werden die wichtigsten Simulationsergebnisse aufgezeigt und diskutiert.

Abbildung 4.22: $E^*(N)$, DUOCEL, 1 ZE

In Abbildung 4.22a ist die Änderung des Mittelwerts des Elastizitätsmoduls für die vier verschiedenen Belastungsamplituden mit zunehmender Lastspielzahl abgebildet. Nach einer Inkubationszeit von $N \approx 4\,550$ Schwinglastspielzahlen, in denen kein Steg bricht, nimmt die Steifigkeit zunächst sprunghaft und daraufhin kontinuierlich ab, bevor sie mit abklingendem Steifigkeitsverlust die beim definierten Versagenskriterium vorliegende Steifigkeit $0,5 \cdot \mu_{E_0^*}$ erreicht. Letzteres ist nur für den Mittelwert zu beobachten. Für einzelne Realisierungen fällt die Steifigkeit nach dem anfänglichen Abfall ohne abnehmender Rate bis zum Versagen ab. Dies ist für eine Realisierung in Abbildung 4.22a mit gepunkteten Kurven aufgezeigt. Die abnehmende Rate des Mittelwerts ergibt sich daraus, dass die SVE unterschiedliche Versagenslastspielzahlen aufweisen. Neben dem ersten, sprunghaften Steifigkeitsverlust sind bei $N \approx 9\,100$ bzw. $N \approx 13\,600$ erneute Sprünge für μ_{E^*} zu erkennen, die allerdings stark abnehmen und auf die noch näher eingegangen wird. Mit zunehmender Amplitude nehmen diese sprunghaften Abfälle der Steifigkeit zu.

Der Variationskoeffizient γ_{E^*} hingegen erreicht nach der Inkubationszeit ein erstes Maximum, bevor er monoton ansteigt und nach einer kurzen Phase des starken Abfalls wieder seinen Ausgangswert annimmt (Abbildung 4.22b). Dabei können die Maximalwerte eine

bis zu dreifache Streuung des Anfangswertes aufweisen. Der Verlauf ist in etwa analog zur Veränderung des Steifigkeitsabfalls. Je stärker die Mittelwertkurven fallen, desto höher ist der Variationskoeffizient, d.h. der Variationskoeffizient verhält sich qualitativ ähnlich wie die negative erste Ableitung der Mittelwertkurve. Beim Wendepunkt der Mittelwertkurven, wo die negative Steigung maximal ist, befinden sich abgesehen vom anfänglichen Abfall auch die lokalen Maximalwerte des Variationskoeffizienten γ_{max} . Diese sind in Abbildung 4.22a zusätzlich gekennzeichnet. Gerade die kritischen Intervalle der Lebensdauer, in denen die Steifigkeit verhältnismäßig schnell abnimmt, weisen durch die erhöhte Streuung zusätzlich kritisches Potential im Sinne der Zuverlässigkeitsberechnung auf.

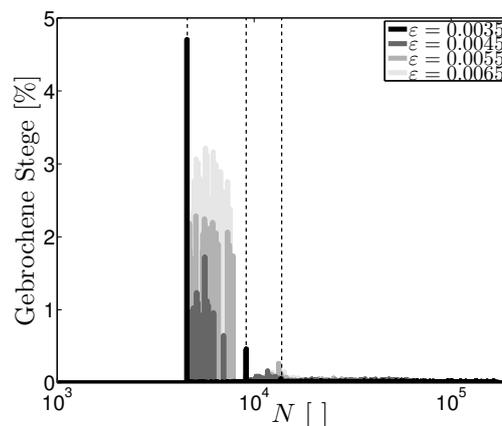


Abbildung 4.23: Prozentualer Anteil der gebrochenen Stege

Für ein Verständnis der Verläufe in Abbildung 4.22 wird der prozentuale Anteil der gebrochenen Stege im Verhältnis zu allen gebrochenen Stegen während der Lebensdauer aller 30 Realisierungen betrachtet (Abbildung 4.23). Nach der Inkubationszeit brechen die meisten Stege zu einem Zeitpunkt. Dies liegt darin begründet, dass zunächst alle am Anfang vorhandenen kritischen Stege eliminiert werden. Dabei verbreitert sich der Bereich, in dem sehr viele Stege brechen, mit zunehmender Amplitude über mehr Lastspielzahlen. Während für die kleinste Amplitude in diesem Bereich $\sim 4,7\%$ der Stege brechen, brechen für $\varepsilon = 0,0065$ in diesem Bereich $\sim 80\%$ aller Stege und der Bereich nimmt von $\Delta N = 13$ auf $\Delta N \approx 2800$ Lastspiele zu. Aufgrund der höheren Amplitude werden also nach der Inkubationszeit mehr kritische Stege über mehr Schwinglastspielzahlen herausgelöscht, was zum ersten Abfall des Mittelwertes bzw. zum Maximum des Variationskoeffizienten nach der Inkubationszeit führt. Die Stellen der Steifigkeitsabfälle sind in Abbildung 4.23 jeweils mit einer gestrichelten Linie gekennzeichnet. Nach dieser Phase werden für alle Amplituden pro Rechenschleife nur wenige Stege herausgelöscht, bis ein Bereich erreicht wird, in dem wieder auf einen Schlag mehrere Stege brechen. Dies führt zum zweiten und dritten sprunghaften Abfall der Steifigkeit, die allerdings jeweils wesentlich geringer ausfallen als zuvor. Der darauf folgende, kontinuierliche Abfall des Mittelwertes ist dem Versagen einzelner Stege geschuldet.

Während für $\varepsilon = 0,0035$ im Mittel 456 Stege brechen (mit einer Streuung von 7,9 %), brechen für $\varepsilon = 0,0065$ lediglich 311 Stege (8,2 %). Obwohl bei höheren Amplituden die Steifigkeit schneller abnimmt und Versagen früher eintritt, brechen innerhalb der Lebensdauer weniger Stege als bei kleineren Amplituden. Im Mittel muss der Rechenalgorithmus 422-mal für $\varepsilon = 0,0035$ durchlaufen werden (8,5 %), während 222 Rechendurchgänge für $\varepsilon = 0,0065$ ausreichend sind (17 %). Je geringer also die Belastungsamplitude ist, desto öfter muss der Algorithmus durchlaufen werden. Allerdings benötigt der einzelne Rechenschritt weniger Zeit, je geringer die Amplitude ist.

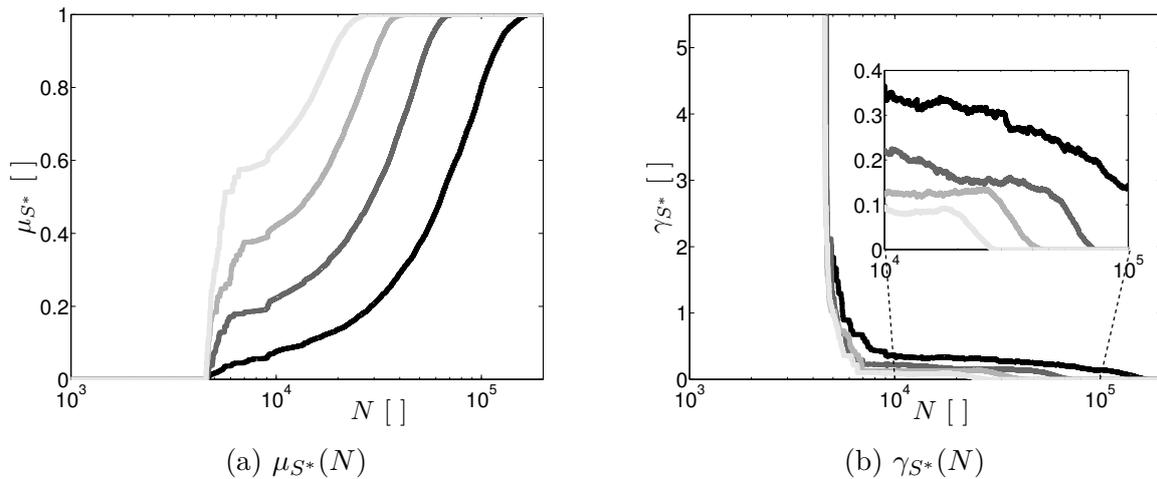


Abbildung 4.24: $S^*(N)$, DUOCEL, 1 ZE

Der homogenisierte Schädigungsparameter $S^*(\theta)$, der gemäß Gleichung (4.57) berechnet wird, ist in Abbildung 4.24 dargestellt. Der Mittelwert μ_{S^*} hat per definitionem einen umgekehrt proportionalen Verlauf zum Mittelwert des Elastizitätsmoduls. In Abbildung 4.24a sind analog an den Stellen des abrupten Steifigkeitsabfalls sprunghafte Schädigungszunahmen zu verzeichnen. So besitzen die SVE für die höchste Amplitude nach dem ersten Steifigkeitsabfall bereits eine mittlere Schädigung von 60 %. Der Variationskoeffizient γ_{S^*} fällt dabei von sehr hohen Werten > 1 zu Beginn kontinuierlich ab, bis schließlich beim Versagen aller SVE keine Streuung mehr auftritt. Die Auswirkung des Versagens einzelner Stege führt anfangs zu sehr unterschiedlich homogenisierten Schädigungsparametern. Mit zunehmender Schwinglastspielzahl wird die Bandbreite der Schädigungsparameter geringer, bis alle SVE $S^* = 1$ aufweisen, d.h. versagen und somit $\gamma_{S^*} = 0$ wird. Dabei nimmt die Kurve des Variationskoeffizienten für niedrige Lastspielzahlen zunehmend kleinere Werte an, je höher die Belastungsamplitude ist. Wie in der Vergrößerung in Abbildung 4.24b zu sehen ist, liegt für Schwinglastspielzahlen $N = [10^4; 10^5]$ der Variationskoeffizient mit $\varepsilon = 0,0035$ zwischen $\gamma_{S^*} = [0, 4; 0, 1]$, während er für die höchste Amplitude von $\gamma_{S^*} \approx 0, 1$ auf Null abfällt. Obwohl die Mittelwerte des Elastizitätsmoduls und des Schädigungsparameters aufgrund der Definition (4.57) ähnliche Verläufe aufzeigen, sind die Verläufe der Variationskoeffizienten grundverschieden.

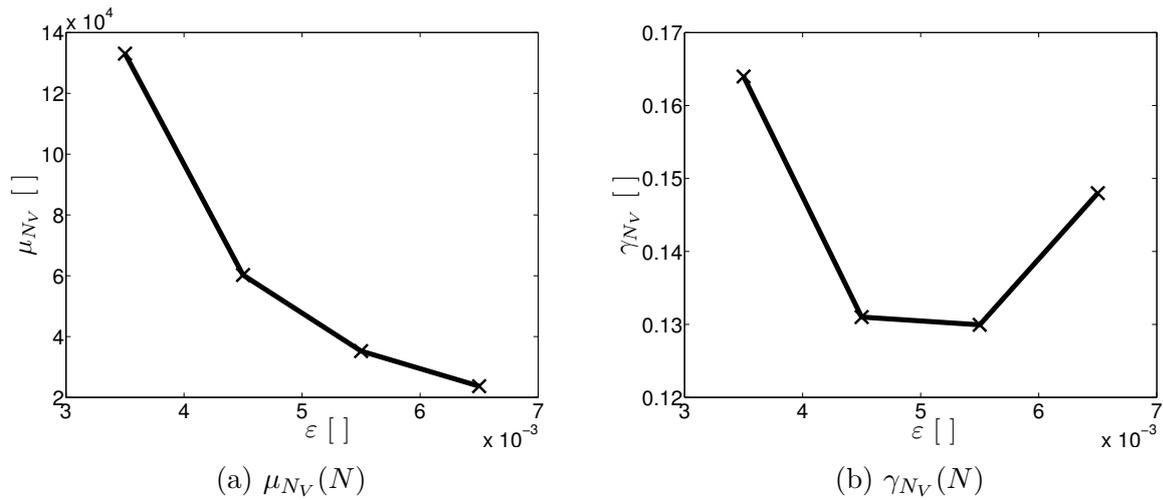


Abbildung 4.25: Versagenslastspielzahl N_V , DUOCEL, 1 ZE

Ausgehend vom Schädigungsparameter lassen sich die mesoskopischen Versagenslastspielzahlen N_V der SVE bestimmen. Diese sind in Abhängigkeit von den Belastungsamplituden in Abbildung 4.25 dargestellt. Der Mittelwert nimmt für die berechneten Belastungsamplituden von $\mu_{N_V} = 133\,200$ auf $\mu_{N_V} = 23\,680$ mit exponentiellem Charakter ab. Für die Streuung, die zwischen 16 % und 13 % variiert, lässt sich mit den vier Amplitudengängen keine eindeutige Tendenz bestimmen.

Zur Untersuchung der Aussagekraft der 30 Realisierungen wird die prozentuale Veränderung $1 - \frac{E_i}{E_{i-1}}$ für die i -te Realisierung mit $i = [2; 30]$ für die Belastung $\varepsilon = 0,0065$ zu den Zeitpunkten, wenn 0 %, 25 %, 50 % bzw. 75 % der SVE bereits versagt haben, be-

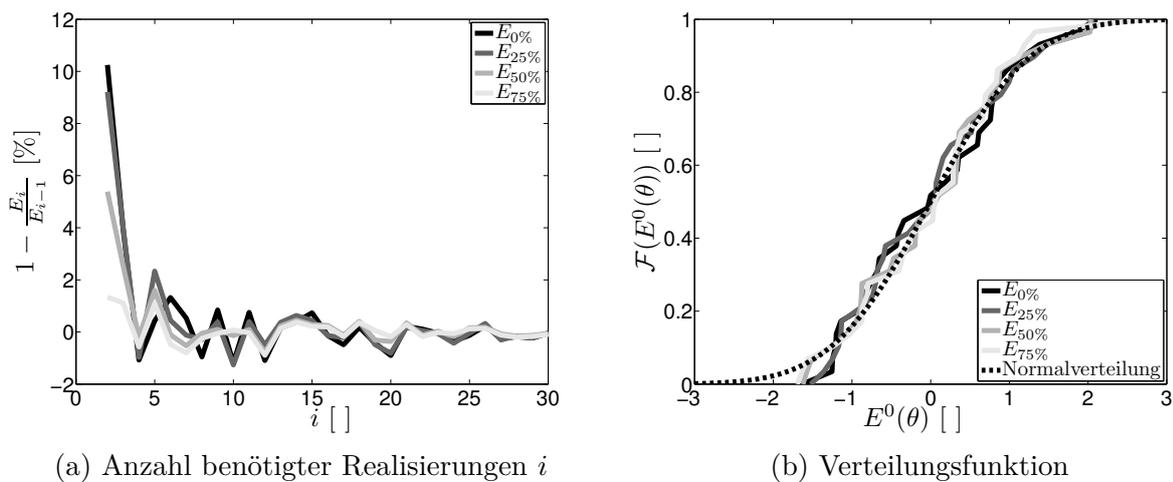


Abbildung 4.26: Stochastische Eigenschaften während der Lebensdauer

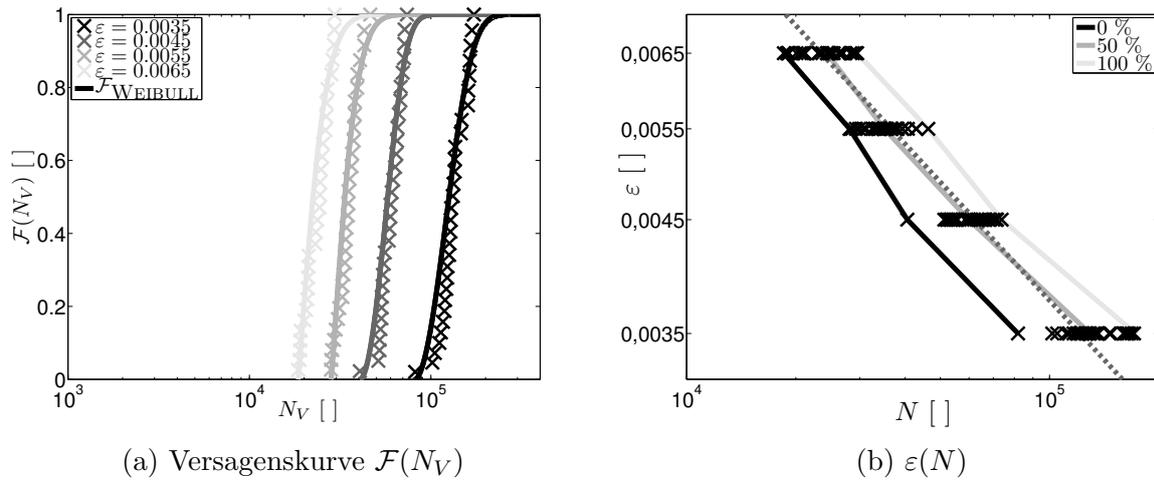


Abbildung 4.27: Versagensverhalten, DUOCEL, 1 ZE

rechnet. Der resultierende Verlauf ist in Abbildung 4.26a gezeigt. Mit 25 Realisierungen liegt die relative Veränderung der Ergebnisse bei Hinzunahme weiterer SVE bereits unter 0,5 % und für 30 Realisierungen fällt die Veränderung auf $< 0,1$ %. Damit zeigt sich eine valide stochastische Aussagekraft hinsichtlich der gewählten Anzahl an SVE. Abbildung 4.26b zeigt zudem auf, dass die Annahme einer Normalverteilung des Elastizitätsmoduls als Näherung weiterhin zu jedem Zeitpunkt gerechtfertigt ist.

Als letzten Punkt der Ergebnisdarstellung sind in Abbildung 4.27a die Versagenswahrscheinlichkeiten der SVE durch WEIBULL-Verteilungen $\mathcal{F}_{\text{WEIBULL}}$ mit Hilfe einer Maximum-Likelihood-Schätzung angenähert. Die nach Gleichung (2.51) bestimmten, amplitudenabhängigen Koeffizienten $N_0 = \frac{t_0}{T}$, a und b sind in Tabelle 4.3 zusammengefasst. Die Parameterwerte a kennzeichnen die Lastspielzahlen wenn 63,2 % aller SVE versagt haben.

ε [$\cdot 10^{-4}$]	N_0 [$\cdot 10^4$]	a [$\cdot 10^5$]	b
35	8,18	1,36	1,71
45	4,05	0,62	1,87
55	2,81	0,35	1,17
65	1,85	0,23	1,13

Tabelle 4.3: Koeffizienten der WEIBULL-Verteilung

In Abbildung 4.27b sind die aus den Versagenskurven resultierenden Grenzen in Abhängigkeit von der Belastung aufgezeigt. Diese zeigen in der doppelt-logarithmischen Auftragung einen annähernd linearen Abfall, was der Zeitfestigkeit in der WÖHLER-Kurve in Abbildung 2.5b entspricht. Für den Median ergibt sich analog zur BASQUIN-Gleichung die kritische Dehnungskurve zu

$$\varepsilon = 0,2899 \cdot N^{-0,3773}, \quad (4.58)$$

die in der Abbildung zusätzlich als gestrichelte Kurve eingezeichnet ist.

Zum Schluss wird die benötigte Rechenzeit zur Lebensdauerberechnung zur Größeneinordnung aufgezeigt. Zum Vergleich dient ein herkömmlicher WINDOWS-Rechner mit einem 3,2 GHz-Prozessor und einem 8 GB RAM Arbeitsspeicher. Während zur Berechnung z.B. für $E_{KURB}^*(\theta)$ für DUOCEL-Schäume ohne iteratives Homogenisierungsschema etwa 45 Sekunden benötigt werden, werden für eine Rechenschleife im Algorithmus aus Abbildung 4.21 für $\varepsilon = 0,0035$ ca. 120 Sekunden benötigt. Dies summiert sich bei einer durchschnittlichen Anzahl von 422 Durchläufen des Rechenalgorithmus auf 14 Stunden zur Berechnung einer Realisierung, bzw. 17,5 Tage für alle 30 Realisierungen. Dies unterstreicht die Notwendigkeit einer vereinfachenden Modellierung wie die Diskretisierung mit EULER-BERNOULLI-Balken, der Verwendung von 1 ZE und der Definition von Versagen bei der Hälfte der Anfangssteifigkeit. Zur Handhabung der Rechenzeit wurden die Berechnungen daher parallelisiert auf einer Workstation durchgeführt, die über eine höhere Rechenleistung als der oben genannte Rechner verfügt.

4.7 Korrelation der Parameter

Neben der Verteilungsfunktion \mathcal{F} werden die Zufallsfelder durch ihre örtliche Korrelationsfunktion charakterisiert. Dabei ist zum einen die Autokorrelationsfunktion $\mathcal{R}_{XX}(x)$ der Parameter an sich und zum anderen die Kreuzkorrelationsfunktion $\mathcal{R}_{XY}(x)$ zwischen den verschiedenen Parametern von Interesse. Da von ergodischen Zufallsfeldern ausgegangen wird, sind die Funktionen nicht vom absoluten Ort, sondern nur von Δx abhängig. Zur Untersuchung der Korrelationen werden 50 Realisierungen von $10 \cdot 10 \cdot 85 \text{ mm}^3$ VORONOI-Schaumbalken mit einem ZE und einer Knotendicke von $0,8 \text{ mm}$ generiert. An diesen Balken werden die Korrelationen mit Hilfe der MOVING-WINDOW-Methode bestimmt, die

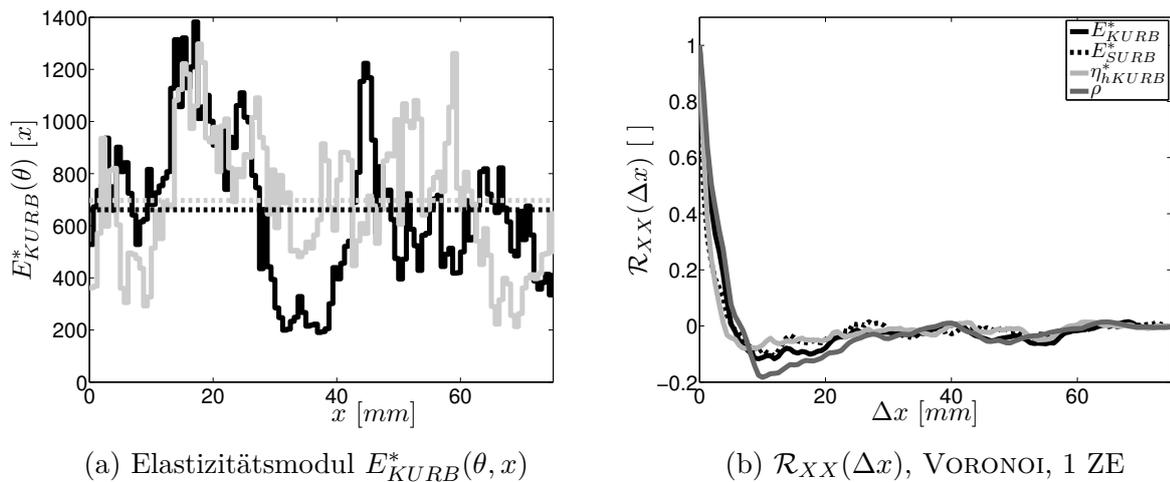


Abbildung 4.28: Ortsabhängigkeit der Materialparameter

bereits in der Arbeit [101] zur Untersuchung der Korrelation von Metallschäumen angewendet wird.

Im Rahmen der MOVING-WINDOW-Methode wird ein Fenster mit vorgegebener Größe definiert [9], das durch das zu untersuchende Material bewegt wird. Dabei werden an jeder festgelegten, diskretisierten Stelle \mathbf{x}_i , an die das Fenster bewegt wird, die Materialparameter des Fensterausschnittes bestimmt. Dadurch lässt sich die Ortsabhängigkeit der Materialparameter bestimmen. Die Größe und die diskretisierten Stellen \mathbf{x}_i der Ausschnittsfenster sind für eine korrekte Abbildung kleiner als die Korrelationslänge zu wählen [101]. Für die generierten VORONOI-Schaumbalken wird als Fenster ein VE mit den Maßen $10 \cdot 10 \cdot 5 \text{ mm}^3$ gewählt. Dieses wird entlang der Längsachse mit der Schrittweite $\Delta x = 0,625 \text{ mm}$ bewegt. Daraus ergeben sich 121 Rechenpunkte bzw. SVE für jeden Schaumbalken, die mit KURB bzw. SURB für die Steifigkeit und mit hKURB bzw. hSURB für die Dämpfung berechnet werden.

In Abbildung 4.28a ist beispielhaft der örtliche Verlauf von E_{KURB}^* für zwei Realisierungen sowie deren Mittelwerte dargestellt, der sich mit der MOVING-WINDOW-Methode ergibt. Die Mittelwerte der Autokorrelationsfunktionen der standardisierten Materialparameter in Abbildung 4.28b weisen für alle Parameter den gleichen charakteristischen Verlauf auf. Nach einer exponentiellen Abnahme der Korrelation streben die Funktionen nach einem Überschwingen bei $\Delta x \approx 10 \text{ mm}$ der Null zu. Die Korrelationslänge beträgt für den Elastizitätsmodul $l_{E,R_{xx}} \approx 5 \text{ mm}$, für die Dämpfung $l_{\eta,R_{xx}} \approx 4 \text{ mm}$ und für die relative Dichte $l_{\rho_{rel},R_{xx}} \approx 6,5 \text{ mm}$. Zudem zeigt sich, dass die Korrelationsfunktion annähernd unabhängig von den Randbedingungen ist. Die Kreuzkorrelationsfunktionen weisen für alle aufgezeigten Parameter eine Korrelationslänge von $\approx 5 \text{ mm}$ auf (Abbildung 4.29). Der Elastizitätsmodul ist dabei sowohl mit der Dämpfung als auch mit der relativen Dichte stark korreliert. Hingegen ist die relative Dichte mit der Dämpfung schwach korreliert.

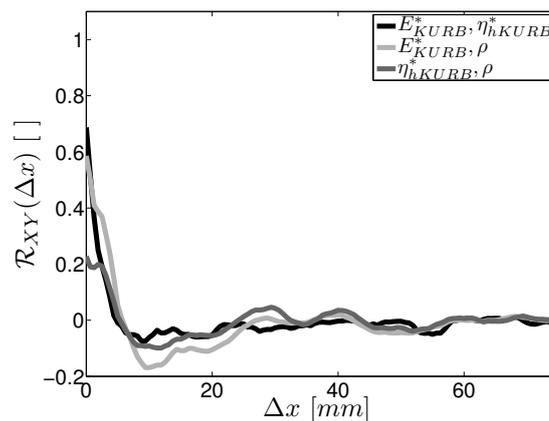


Abbildung 4.29: $\mathcal{R}_{XY}(\Delta x)$, VORONOI, 1 ZE

5 Makroskopisches Modell

Mit einem makroskopischen Modell sollen Bauteile berechnet und untersucht werden, die aus einer heterogenen Mikrostruktur bestehen. Im Fall von deterministischen Materialparametern wird meist die FEM als Berechnungswerkzeug genutzt. Zur Berechnung von Modellen mit Zufallsfeldern wurde darauf aufbauend, wie bereits in Abschnitt 1.3.3 beschrieben, die SFEM entwickelt. In beiden Fällen wird das physikalische Rechenggebiet diskretisiert, d.h. in finite Elemente unterteilt. Bei der SFEM stellt sich zusätzlich die Herausforderung der Modellierung von entsprechenden, zufallsverteilten Parametern, um die Charakteristik der homogenisierten Parameter zwischen den einzelnen Realisierungen und den diskretisierten Elementen korrekt wiederzugeben. Dazu werden die Verteilungsfunktionen und Korrelationsfunktionen der Parameter benötigt. Zur Modellierung der Parameter werden vor allem die Spektraldarstellung und die KARHUNEN-LOÈVE-Zerlegung (KL-Zerlegung) angewendet [106]. Letztere wurde in dieser Arbeit genutzt, um die auf der Mesoebene erhaltenen Materialparameter zu diskretisieren.

5.1 Diskretisierung der Zufallsfelder

Für die Anwendung der SFEM sind die Zufallsfelder der Materialparameter in ihre physikalische und stochastische Domäne zu zerlegen. Zur korrekten Wiedergabe der physikalischen und stochastischen Eigenschaften muss die Korrelations- und Verteilungsfunktion in die Diskretisierung einbezogen werden. Dazu wird ein standardisiertes, normalverteiltes Zufallsfeld $X^0(\theta, x)$ mit Hilfe einer orthogonalen Reihenentwicklung zu

$$X^0(\theta, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \zeta_k(\theta) h_k(x) \quad (5.1)$$

mit den konstanten Koeffizienten c_k und den mittelwertfreien und normalverteilten Zufallsvariablen $\zeta_k(\theta)$ zerlegt [119]. Die Funktionen $h_k(x)$ bilden dabei eine Menge von bi-orthogonalen und deterministischen Funktionen. Die Koeffizienten c_k und $\zeta_k(\theta)$ sind so zu wählen, dass die Gleichung

$$\int_{\Omega} \mathcal{K}_{XX}(x_1, x_2) h_l(x_1) dx_1 = \sum_{m=0}^{\infty} c_l c_m \mathcal{E}(\zeta_l(\theta) \zeta_m(\theta)) h_m(x_2) \quad (5.2)$$

mit der Kovarianzfunktion $\mathcal{K}_{XX}(x_1, x_2)$ für $l = 0, 1, 2, \dots, \infty$ erfüllt ist.

Werden die Eigenwerte λ und Eigenfunktionen $\varphi(x)$ der Kovarianzfunktion $\mathcal{K}_{XX}(x_1, x_2)$ zu $\lambda_k = c_k^2$ und $\varphi_k(x) = h_k(x)$ gesetzt, ergibt sich aus Gleichung (5.1) die KL-Zerlegung

$$X^0(\theta, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k} \zeta_k(\theta) \varphi_k(x). \quad (5.3)$$

Die Eigenfunktionen erfüllen die Biorthogonalität entsprechend den Anforderungen für $h(x)$. Die Eigenfunktionen bzw. -werte werden mit der FREDHOLM-Gleichung 2. Art

$$\int_{\Omega} \mathcal{K}_{XX}(x_1, x_2) \varphi_k(x_1) dx_1 = \lambda_k \varphi_k(x_2), \quad (5.4)$$

die sich aus Gleichung (5.2) ergibt, berechnet. In der praktischen Anwendung muss die KL-Zerlegung in Gleichung (5.3) nach einer endlichen Anzahl an Termen abgebrochen werden, sodass sich

$$X^0(\theta, x) \approx \sum_{k=1}^N \sqrt{\lambda_k} \zeta_k(\theta) \varphi_k(x) \quad (5.5)$$

ergibt. Nach wievielen N Termen abgebrochen werden kann, ist abhängig von der Problemstellung und im Einzelfall zu untersuchen. Nach [26] werden mehr Terme benötigt, je mehr das Zufallsfeld bzw. der Zufallsprozess dem weißen Rauschen entspricht.

Eine analytische Lösung der Gleichung (5.4) ist nur für einfache Geometrien und spezielle Kovarianzfunktionen möglich [106]. In der Arbeit [101] wurde eine analytische Lösung für die Kovarianzfunktion von VORONOI-Schäumen gefunden, die allerdings in Abhängigkeit von der Problemstellung zahlreiche Terme und damit eine hohe Rechenzeit benötigt. Deshalb erfordert Gleichung (5.4) eine numerische Lösung. In dieser Arbeit wird dazu die *wavelet*-GALERKIN Methode angewendet, die an Stelle von gewöhnlichen Funktionen *wavelet*-Funktionen verwendet. Die folgenden Ausführungen zur Lösung der FREDHOLM-Gleichung basieren auf [92].

Für die k -te Eigenfunktion der Korrelationsfunktion wird der Ansatz nach GALERKIN

$$\varphi_k(x) = \sum_{i=0}^N d_i^k \psi_i(x) \quad (5.6)$$

mit den konstanten Koeffizienten d_i^k und den zunächst allgemeinen Basisfunktionen $\psi_i(x)$ gewählt. Damit ergibt sich Gleichung (5.4) zu

$$\int_{\Omega} \mathcal{K}(x_1, x_2) \sum_{i=0}^N d_i^k \psi_i(x_1) dx_1 = \lambda_k \sum_{i=0}^N d_i^k \psi_i(x_2). \quad (5.7)$$

Als Basisfunktionen werden die einfachsten *wavelet*-Funktionen gewählt, die HAAR-*wavelets*, die über

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1/2) \\ -1 & x \in [1/2, 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.8)$$

definiert sind. Eine Menge von zueinander biorthogonalen HAAR-Funktionen kann über die Rechenvorschrift

$$\psi_i(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k); \quad i = 2^j + k; \quad k = 0, 1, \dots, 2^j; \quad j = 0, 1, \dots, m-1 \quad (5.9)$$

für $N = 2^m$ Summanden generiert werden. An den beispielhaften ein- und zweidimensionalen Basisfunktionen in Abbildung 5.1 wird die Biorthogonalität der Funktionen ersichtlich. Im Folgenden wird ausschließlich der eindimensionale Fall betrachtet.

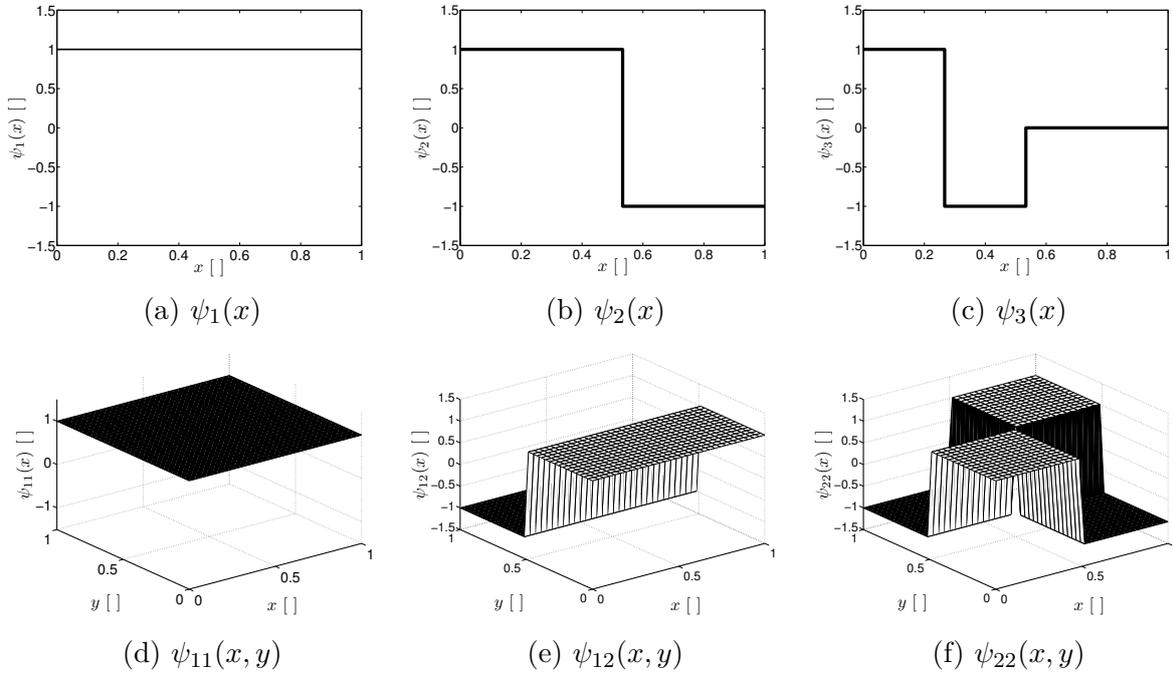


Abbildung 5.1: HAAR-Funktionen

Durch eine vektorielle Darstellung von Gleichung (5.6) ergibt sich

$$\varphi_k(x) = \begin{pmatrix} \psi_0(x) & \psi_2(x) & \dots & \psi_N(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1^k \\ d_2^k \\ \dots \\ d_N^k \end{pmatrix} = \boldsymbol{\psi}^T(x) \mathbf{d}^k. \quad (5.10)$$

Des Weiteren kann die Kovarianzfunktion über

$$\mathcal{K}(x_1, x_2) = \boldsymbol{\psi}^T(x_1) \mathbf{A} \boldsymbol{\psi}(x_2) \quad (5.11)$$

mit der Transformationsmatrix \mathbf{A} dargestellt werden. Gleichung (5.10) und (5.11) in Gleichung (5.4) eingesetzt ergibt

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\psi}^T(x_1) \mathbf{A} \boldsymbol{\psi}(x_2) \boldsymbol{\psi}^T(x_1) \mathbf{d}^k dx_1 = \lambda_k \boldsymbol{\psi}^T(x_2) \mathbf{d}^k. \quad (5.12)$$

Mit der Diagonalmatrix

$$\mathbf{H} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\psi}(x) \boldsymbol{\psi}^T(x) dx \quad (5.13)$$

ergibt sich schließlich

$$\boldsymbol{\psi}^T(x) \mathbf{A} \mathbf{H} \mathbf{d}^k = \lambda_k \boldsymbol{\psi}^T(x) \mathbf{d}^k. \quad (5.14)$$

Aus Gleichung (5.14) wird der Vorteil der *wavelet*-Funktionen ersichtlich: An Stelle rechenintensiver Integration in Gleichung (5.7) sind lediglich Matrixmultiplikationen durchzuführen.

Durch Multiplikation mit $\mathbf{H}^{\frac{1}{2}}$ und einem Koeffizientenvergleich ergibt sich aus Gleichung (5.14) das Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{\frac{1}{2}} \mathbf{A} \mathbf{H}^{\frac{1}{2}} \mathbf{H}^{\frac{1}{2}} \mathbf{d}^k &= \lambda_k \mathbf{H}^{\frac{1}{2}} \mathbf{d}^k \\ \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{d}}^k &= \lambda_k \tilde{\mathbf{d}}^k. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Mit dem Lösen des Eigenwertproblems erhält man für die KL-Zerlegung schließlich die Eigenwerte λ_k und die Eigenfunktionen durch Einsetzen von $\mathbf{d}^k = \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{d}}^k$ in Gleichung (5.10). Bei einer Diskretisierung von \mathbf{x} werden aus den Vektoren $\boldsymbol{\psi}$ und $\tilde{\mathbf{d}}^k$ die Matrizen $\boldsymbol{\Psi}$ bzw. $\tilde{\mathbf{D}}$. Das Eigenwertproblem benötigt eine quadratische Matrix $\tilde{\mathbf{D}}$. Daher wird der Ortsvektor \mathbf{x} in der Implementierung so diskretisiert, dass die Matrix $\boldsymbol{\Psi}$ quadratisch ist. Die Diskretisierungspunkte im Ort entsprechen dadurch der Anzahl der Summanden in der KL-Zerlegung. Die KL-Zerlegung lässt sich damit für M Realisierungen in der matriziellen Form

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^0 &= \begin{pmatrix} \zeta_{1,\theta_1} & \zeta_{2,\theta_1} & \dots & \zeta_{N,\theta_1} \\ \zeta_{1,\theta_2} & \zeta_{2,\theta_2} & \dots & \zeta_{N,\theta_2} \\ \dots & & & \\ \zeta_{1,\theta_M} & \zeta_{2,\theta_M} & \dots & \zeta_{N,\theta_M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{\lambda_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{1,x_1} & \varphi_{1,x_2} & \dots & \varphi_{1,x_N} \\ \varphi_{2,x_1} & \varphi_{2,x_2} & \dots & \varphi_{2,x_N} \\ \dots & & & \\ \varphi_{N,x_1} & \varphi_{N,x_2} & \dots & \varphi_{N,x_N} \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\varphi} \\ &= \boldsymbol{\zeta} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}} \tilde{\mathbf{D}} \end{aligned} \quad (5.16)$$

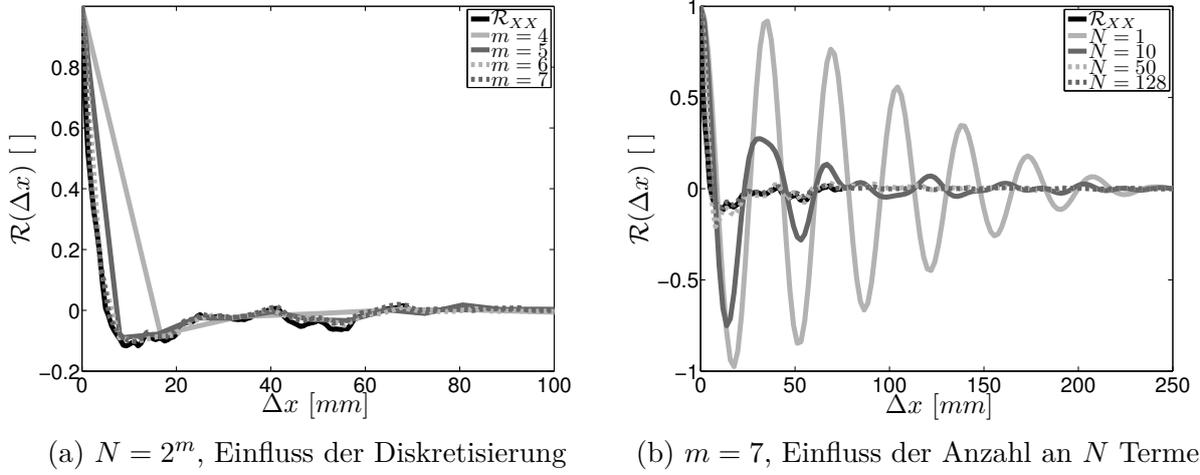
mit der $M \times N$ Matrix

$$\mathbf{X}^0 = \begin{pmatrix} X_{\theta_1,x_1}^0 & X_{\theta_1,x_2}^0 & \dots & X_{\theta_1,x_N}^0 \\ X_{\theta_2,x_1}^0 & X_{\theta_2,x_2}^0 & \dots & X_{\theta_2,x_N}^0 \\ \dots & & & \\ X_{\theta_M,x_1}^0 & X_{\theta_M,x_2}^0 & \dots & X_{\theta_M,x_N}^0 \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

angeben.

Im Gegensatz zur analytischen Lösungsmethode aus [101], in der die Güte der Approximation von der Anzahl der verwendeten Terme abhängt, besitzt die Standardabweichung $\sigma(X^0)$ mit der *wavelet*-GALERKIN-Methode stets den Wert 1, da abhängig von den gewählten Termen N immer eine vollständige Menge an HAAR-Funktionen generiert wird. Ein weiterer Vorteil besteht darin, dass die Autokovarianzfunktion nicht als eine analytische Funktion bestimmt werden muss, sondern die KL-Zerlegung direkt an der ermittelten Autokovarianzfunktion durchgeführt werden kann.

In Abbildung 5.2a ist der Einfluss der mit einzubeziehenden Terme auf die örtliche Zerlegung des Zufallsfeldes dargestellt. Neben der Zielfunktion \mathcal{R}_{XX} , die für standardisierte Zufallsfelder äquivalent zur Kovarianzfunktion ist, sind die Autokorrelationsfunktionen der KL-Zerlegung für $N = 2^m$ generierte HAAR-Funktionen aus Gleichung (5.9) aufgezeigt. Für die betrachtete Länge $L = 250 \text{ mm}$ ergibt sich für $m \geq 6$ bzw. $N \geq 2^6 = 64$ Diskretisierungspunkte eine ausreichend genaue Abbildung der Autokorrelationsfunktion. Des Weiteren ist in Abbildung 5.2b für $m = 7$ der Einfluss der mitzunehmenden Terme auf die Autokorrelationsfunktion abgebildet. Mit steigender Anzahl an Termen reduzieren sich die Überschwinger der Autokorrelationsfunktion.


 Abbildung 5.2: \mathcal{R}_{XX} -Abbildung der KL-Zerlegung

Für die bisherige KL-Zerlegung der elastischen Materialparameter hat die Annahme von normalverteilten Zufallsfeldern aufgrund der Ergebnisse in Abbildung 4.3 ausgereicht. Für den homogenisierten Dämpfungsparameter wurde in Abbildung 4.8b jedoch aufgezeigt, dass die Annahme einer Normalverteilung hinfällig ist. Zur KL-Zerlegung von nicht-normalverteilten Zufallsfeldern wird im Rahmen dieser Arbeit ein iterativer Ansatz nach PHOON [91] genutzt. Ausgehend von unkorrelierten und normalverteilten Zufallszahlen $\zeta(\theta)$ wird die KL-Zerlegung zunächst nach Gleichung (5.3) berechnet. Unter Zuhilfenahme der Bedingung

$$\vartheta_i(\theta, x) = F_{Ziel}^{-1}(\vartheta) F_i(X^0) X_i^0(\theta, x), \quad (5.18)$$

mit der Zielverteilungsfunktion $F_{Ziel}(\vartheta)$ und der aktuellen Verteilungsfunktion $F_i(X^0)$ für die i -te Iteration, lässt sich das normalverteilte Zufallsfeld X_i^0 auf das neue Zufallsfeld ϑ_i transformieren. Über das Integral

$$\zeta_{k,i+1}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_{\Omega} (\vartheta_i(\theta, x) - \mu_{\vartheta_i}) \varphi_k(x) dx \quad (5.19)$$

werden neue Zufallszahlen mit angepasster Verteilung generiert, die ferner standardisiert

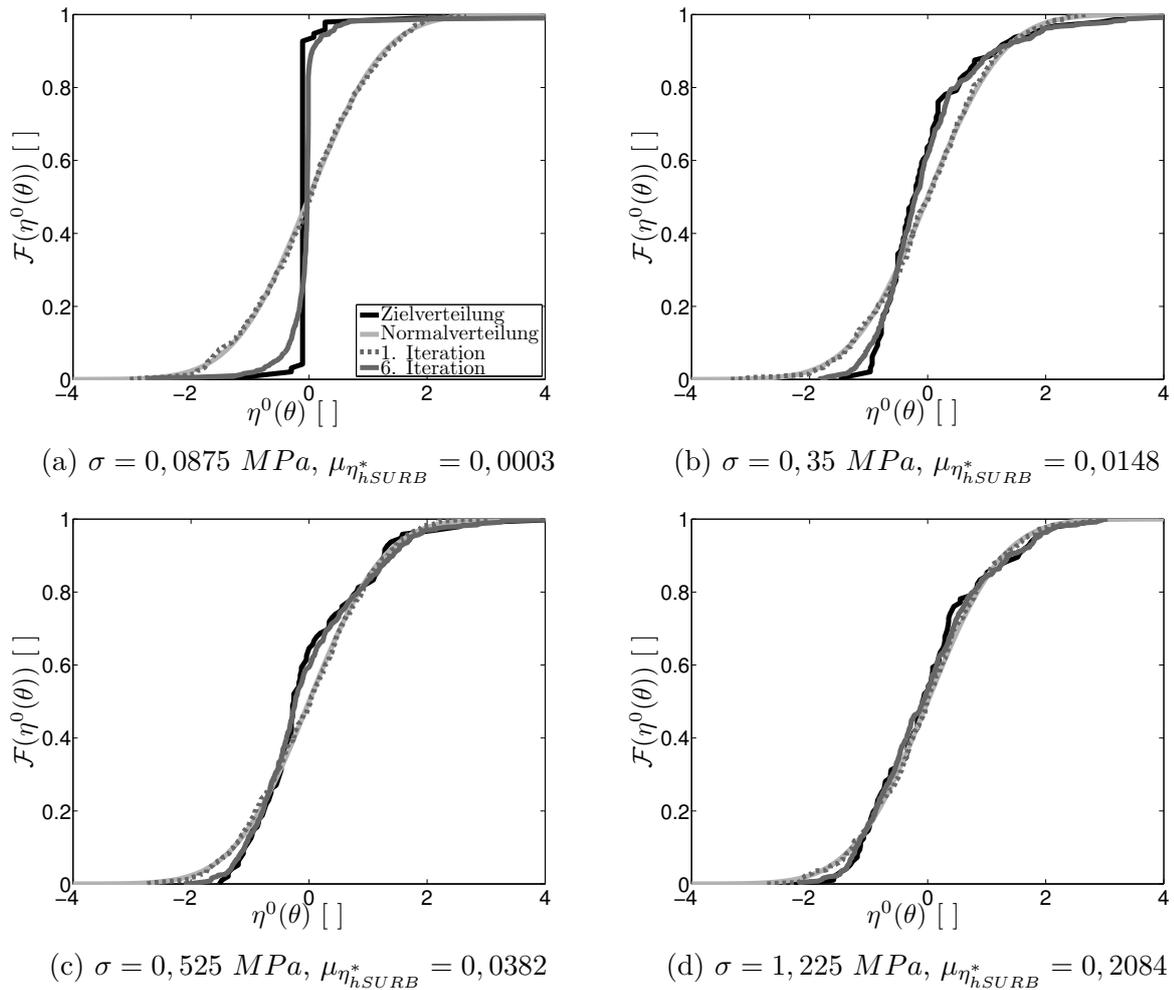


Abbildung 5.3: Ergebnisse der iterativen KL-Zerlegung von η_{hSURB}^* für 500 Realisationen und $N = 64$

werden. Zur Sicherstellung einer reduzierten Korrelation zwischen den neu erhaltenen Zufallszahlen wird im letzten Schritt ein *Latin Hypercube Sampling* durchgeführt. Details können [91] entnommen werden. Die KL-Zerlegung wird in einem neuen Iterationsschritt mit den neuen Zufallszahlen $\zeta_{i+1}(\theta)$ abermals berechnet. Dieser Algorithmus wird so oft wiederholt, bis die Zielverteilungsfunktion F_{Ziel} mit einem vorgegebenem Kriterium genau genug approximiert wird.

In Abbildung 5.3 sind die Ergebnisse der iterativen KL-Zerlegung des Dämpfungsparameters für hSURB aufgezeigt. Neben der zu erwartenden Normalverteilung der initialen KL-Zerlegung ist eine hohe Übereinstimmung der Zielverteilung bereits nach sechs Iterationen zu erkennen. Lediglich für die erste Belastungsamplitude $\sigma = 0,0875 \text{ MPa}$ ist aufgrund der geringen Breite der Verteilungsfunktion eine größere Abweichung zu erkennen, was wegen des sehr geringen Dämpfungsgrades vernachlässigbar ist. Für zunehmende

Amplituden nähert sich die Verteilungsfunktion des Dämpfungsparameters der Normalverteilung an, was die Anzahl der notwendigen Iterationsschritte reduziert.

5.2 Einbeziehung der Lebensdauer

In der bisherigen Diskretisierung der Zufallsfelder wurde die Abhängigkeit der Materialparameter von der Schwinglastspielzahl nicht berücksichtigt. Unter der Hinzunahme der Lebensdauer kommt die Zeitabhängigkeit t hinzu. Im Folgenden wird statt der Zeit t die Schwinglastspielzahl $N = \frac{t}{T}$ mit der Schwingungsdauer T eingesetzt. Außerdem ist ausschließlich die Veränderung des Elastizitätsmoduls in Abhängigkeit der Lebensdauer von Interesse.

Für die Zerlegung des Zufallsfeldes ist neben der Ortsabhängigkeit auch die Abhängigkeit von der Amplitude und der Schwinglastspielzahl mit einzubeziehen. Daraus ergibt sich das Zufallsfeld $E^*(\theta, x, N, \hat{u})$. Aus den Ergebnissen der Homogenisierung in Abschnitt 4.6 ist ersichtlich, dass der Elastizitätsmodul mit zunehmender Schwinglastspielzahl und steigender Belastungsamplitude monoton abfällt. Zur Sicherstellung dieses Sachverhaltes wird das Zufallsfeld zu

$$\begin{aligned}
 E^*(\theta, x, N, \hat{u}) = & E_1(\theta, x) - \Delta E(\theta, x, N_1, \hat{u}_1) - \Delta E(\theta, x, N_2, \hat{u}_1) - \dots - \Delta E(\theta, x, N_M, \hat{u}_1) \\
 & - \Delta E(\theta, x, N_1, \hat{u}_2) - \Delta E(\theta, x, N_2, \hat{u}_2) - \dots - \Delta E(\theta, x, N_M, \hat{u}_2) \\
 & - \dots \\
 & - \Delta E(\theta, x, N_1, \hat{u}_V) - \Delta E(\theta, x, N_2, \hat{u}_V) - \dots - \Delta E(\theta, x, N_M, \hat{u}_V)
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

für vorgegebene M diskretisierte Lastspielzahlen und V Belastungsamplituden additiv zerlegt. Der tiefgestellte Index $_1$ in $E_1(\theta, x)$ hebt hervor, dass es sich hierbei um das Zufallsfeld zu Beginn bei $N = 1$ bzw. dem aus Abschnitt 5.1 handelt.

Mit Hilfe der Summanden aus Gleichung (5.20) lässt sich die Matrix

$$\mathbf{M}(\theta, x) = \begin{pmatrix} E_1(\theta, x) & \Delta E_{N_1, \hat{u}_1}(\theta, x) & \Delta E_{N_2, \hat{u}_1}(\theta, x) & \dots & \Delta E_{N_M, \hat{u}_1}(\theta, x) \\ 0 & \Delta E_{N_1, \hat{u}_2}(\theta, x) & \Delta E_{N_2, \hat{u}_2}(\theta, x) & \dots & \Delta E_{N_M, \hat{u}_2}(\theta, x) \\ \dots & & & & \\ 0 & \Delta E_{N_1, \hat{u}_V}(\theta, x) & \dots & & \Delta E_{N_M, \hat{u}_V}(\theta, x) \end{pmatrix} \tag{5.21}$$

definieren, die nur aus positiven Einträgen besteht. Die Nullen in der ersten Spalte stellen die Amplitudenunabhängigkeit da, wenn keine Lastspielzahl durchlaufen wurde. Da diese Einträge für eine Zerlegung nicht von Interesse sind, wird die Matrix zu

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} E_1 & \Delta E_{N_1, \hat{u}_1} & \Delta E_{N_2, \hat{u}_1} & \dots & \Delta E_{N_M, \hat{u}_1} & \Delta E_{N_1, \hat{u}_2} & \dots & \Delta E_{N_M, \hat{u}_2} & \dots & \Delta E_{N_M, \hat{u}_V} \end{pmatrix} \tag{5.22}$$

umgeschrieben, wobei aus Gründen der Übersichtlichkeit auf das Argument (θ, x) verzichtet wird. Für spätere dynamische Problemstellungen wird neben dem Elastizitätsmodul die

Dichte ρ benötigt. Zur Sicherstellung der Kreuzkorrelation zwischen den beiden Parametern wird die Dichte in $\hat{\mathbf{M}}$ eingefügt. Für die standardisierten Zufallsfelder ergibt sich somit die Matrix

$$\hat{\mathbf{M}}^0 = \begin{pmatrix} E_1^0 & \Delta E_{N_1, \hat{u}_1}^0 & \Delta E_{N_2, \hat{u}_1}^0 & \dots & \Delta E_{N_M, \hat{u}_1}^0 & \dots & \Delta E_{N_M, \hat{u}_2}^0 & \dots & \Delta E_{N_M, \hat{u}_V}^0 & \rho^0 \end{pmatrix}. \quad (5.23)$$

Mit der Annahme, dass die Dichte während der Lebensdauer annähernd konstant bleibt, d.h. dass die Mehrheit der Stege im Schaum nur brechen, nicht aber herausbrechen, entfallen die Terme $\Delta\rho$. Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass sich die Autokorrelationsfunktion während der Lebensdauer nicht ändert. Mit der bereits beschriebenen KL-Zerlegung und der bestimmten Korrelationsfunktion kann für jeden Eintrag der Matrix $\hat{\mathbf{M}}^0$ ein Zufallsfeld aufgestellt werden. Für Variationskoeffizienten $\gamma \ll 1$ ergeben sich die geforderten positiven Werte für $\Delta E_{N_i, \hat{u}_j}$. Gerade für klein gewählte ΔN , bei denen eine große Streuung auftritt, wie z.B. im Lastspielintervall $N = [4500; 7500]$ in Abbildung 4.22a, kann die KL-Zerlegung stellenweise zu unphysikalischen, negativen Werten $\Delta E < 0$ führen. Dies liegt darin begründet, dass bei der Generierung des Zufallsfeldes auch Zahlen außerhalb des Intervalls $\mu \pm \sigma$ liegen. Diese unphysikalischen Werte werden zur Vereinfachung zu Null gesetzt. Um die Anzahl der zu Null gesetzten Terme zur Sicherstellung von validen Ergebnisse zu minimieren, ist bei der Diskretisierung der Lastspielzahl daher auf ein ausreichend großes ΔN zu achten.

Für die nach der KL-Zerlegung erhaltenen Zufallsfelder im Tensor

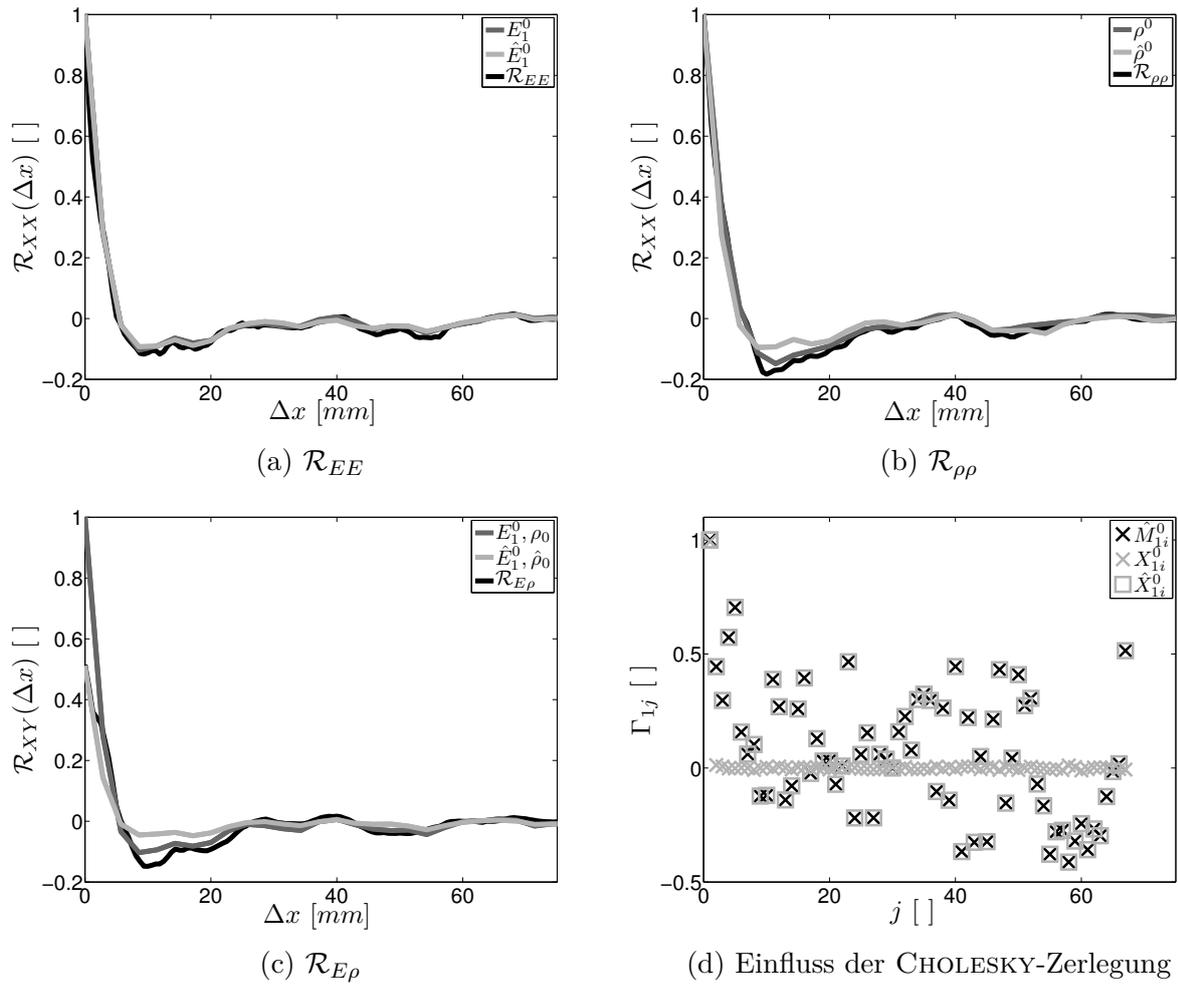
$$\mathbf{X}^0 = \begin{pmatrix} X_1^0 & \Delta X_{1,1}^0 & \Delta X_{2,1}^0 & \dots & \Delta X_{M,1}^0 & \dots & \Delta X_{N_M,2}^0 & \dots & \Delta X_{M,V}^0 & X_\rho^0 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

ist die korrekte Korrelation zwischen den Einträgen sicherzustellen. Dies erfolgt mit Hilfe der CHOLESKY-Zerlegung, die eine positiv definite Matrix \mathbf{A} in eine obere Dreiecksmatrix \mathbf{R} , die unterhalb der Diagonalen nur Nulleinträge besitzt, so zerlegt, dass $\mathbf{A} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$ gilt. Damit ergibt sich Gleichung (5.24) zu

$$\hat{\mathbf{X}}^0 = \mathbf{X}^0 \mathbf{\Pi}_{\mathbf{X}^0}^{-1} \mathbf{\Pi}_{\hat{\mathbf{M}}^0}, \quad (5.25)$$

mit $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{X}^0} = \mathbf{\Pi}_{\mathbf{X}^0}^T \mathbf{\Pi}_{\mathbf{X}^0}$ und $\mathbf{\Gamma}_{\hat{\mathbf{M}}^0} = \mathbf{\Pi}_{\hat{\mathbf{M}}^0}^T \mathbf{\Pi}_{\hat{\mathbf{M}}^0}$ und den Kovarianzmatrizen $\mathbf{\Gamma}_{\mathbf{X}^0}$ und $\mathbf{\Gamma}_{\hat{\mathbf{M}}^0}$. Da letztere positiv definit sein müssen, dies aber a priori nicht zwingend für die diskretisierten Felder erfüllt ist, wird für nicht positiv definite Kovarianzmatrizen die im Sinne der FROBENIUS-Norm $\|\mathbf{A}\|_F = \left(\sum_i \sum_j A_{ij}^2 \right)^{1/2}$ nächst positiv definite Matrix bestimmt und für die KL-Zerlegung verwendet [49]. Dadurch haben sich keine nennenswerten Unterschiede der Ergebnisse gezeigt.

Die Güte der Korrelationen der so berechneten Zufallsfelder ist in Abbildung 5.4 dargestellt. Neben der Autokorrelationsfunktion \mathcal{R} , die auf der Mesoebene bestimmt wurde, ist die Autokorrelationsfunktion der aus der KL-Zerlegung erhaltenen Zufallsfelder vor und nach der CHOLESKY-Zerlegung dargestellt. Sowohl für den anfänglichen Elastizitätsmodul E_1^0 bzw. \hat{E}_1^0 (Abbildung 5.4a) als auch für alle weiteren ΔE^0 zeigt sich eine weitgehende

Abbildung 5.4: Korrelationsgüte der Einträge in $\hat{\mathbf{X}}^0(\theta, x)$

Übereinstimmung mit \mathcal{R}_{EE} . Die CHOLESKY-Zerlegung beeinflusst die Autokorrelationsfunktion nicht. Für die Dichte zeigt sich hingegen eine Veränderung der Autokorrelationsfunktion (Abbildung 5.4b). Dies beschränkt sich im Wesentlichen auf den Überschwinger bei $\Delta x \approx 10 \text{ mm}$. Die Notwendigkeit einer CHOLESKY-Zerlegung wird vor allem bei der Betrachtung der Kreuzkorrelationsfunktion $\mathcal{R}_{E\rho}$ in Abbildung 5.4c deutlich. Erst durch die Zerlegung wird die Korrelation bei $\Delta x = 0 \text{ mm}$ korrekt wiedergegeben. Allerdings zeigt sich auch hier, dass der Überschwinger nur in geringem Ausmaße abgebildet wird. Für die Einträge in der ersten Zeile von Γ wird die Korrektur durch die CHOLESKY-Zerlegung in Abbildung 5.4d aufgezeigt. Trotz der Differenzen bei den Überschwingern werden die zerlegten Zufallsfelder bezüglich der Autokorrelationsfunktionen als ausreichend genau betrachtet, da das grundsätzliche Verhalten des exponentiellen Abfalls wiedergegeben wird.

5.3 Monte-Carlo Simulation

Für eine strukturdynamische Problemstellung lassen sich durch die KL-Zerlegung einzelne Realisierungen erzeugen und im Rahmen einer MONTE-CARLO-Simulation berechnen. Im dynamischen Fall ist die Bewegungsgleichung (2.56) zu lösen. Die generalisierten Größen werden dabei gemäß der in Kapitel 2.3 vorgestellten Grundlagen bestimmt. Für den amplitudenabhängigen Dämpfungsparameter und Schädigungsparameter sind iterative Berechnungsverfahren notwendig, die im Folgenden zusammenfassend dargestellt werden. Da beide Parameter nur für einige Belastungsamplituden berechnet wurden, für die MONTE-CARLO-Simulation jedoch ein kontinuierliches Amplitudenspektrum benötigt wird, werden die Parameterwerte für unbekannte Amplituden linear interpoliert. In beiden MONTE-CARLO-Simulationen ist die Kreisfrequenz Ω so klein gewählt, dass der Trägheitseinfluss vernachlässigbar klein ist.

5.3.1 Dämpfungsberechnung

Der Dämpfungsparameter $d_{gen}(\theta_i)$ wird als steifigkeitsproportionale RAYLEIGH-Dämpfung modelliert, indem in der Bequemlichkeitshypothese in Gleichung (2.47) $\alpha = \eta(\theta, x)$ und $\beta = 0$ gewählt wird. Dies wird durch Abbildung 4.29 motiviert, in der aufgezeigt ist, dass die Dämpfung wesentlich stärker mit der Steifigkeit als mit der Masse korreliert. Da der homogenisierte Dämpfungsparameter der Strukturdämpfung entsprechend unabhängig von der Belastungsfrequenz ist, wird zusätzlich durch die Belastungskreisfrequenz Ω dividiert. Aufgrund dieser vereinfachenden Modellierung geht der nichtlineare, zeitliche Verlauf der Dämpfung verloren, der im Rahmen der Homogenisierung in Abschnitt 4.2 aufgezeigt wurde. Stattdessen ergibt sich eine „lineare“ Hysteresekurve gemäß Abbildung 5.5. Da zur Untersuchung des Dämpfungseinflusses bzw. zur Bestimmung von $\eta(\theta, x)$ nur die pro Schwingungsperiode dissipierte Energie und nicht der exakte zeitliche Verlauf innerhalb

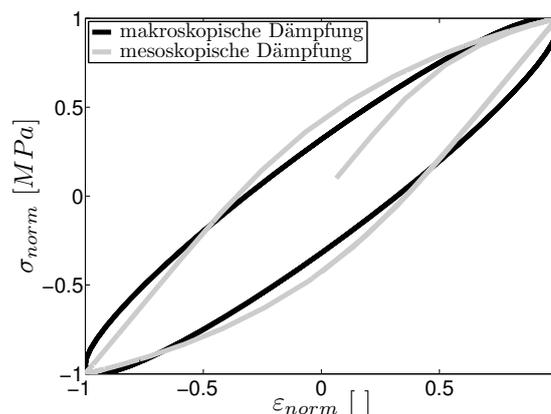


Abbildung 5.5: Hystereseschleife des makroskopischen Dämpfungsmodells im Vergleich zur homogenisierten Dämpfung

der Schwingungsperiode von Interesse ist, ist die lineare Modellierung zulässig, sofern die Hysteresefflächen äquivalent sind.

In Abbildung 5.6 ist die Dämpfungsberechnung zusammengefasst. Für eine harmonische Belastung $F(t)$ und der i -ten Realisierung lassen sich mittels FEM die problemspezifischen Eigenfunktionen $\varphi(\theta_i, x)$ und ungedämpften Eigenkreisfrequenzen $\omega_0(\theta_i)$ ermitteln. Da die amplitudenabhängige Dämpfung a priori nicht bekannt ist, wird diese ausgehend vom ungedämpften Fall ($\eta(\theta_i, x) = 0$) bis zu einer Konvergenz der Verschiebung $w(\theta_i, x)$ iterativ bestimmt. Letztere wird entsprechend Abschnitt 2.3 berechnet, woraus sich zudem die Dehnung $\varepsilon(\theta_i, x)$ ableiten lässt. In Abhängigkeit davon ergibt sich eine angepasste, amplitudenabhängige Dämpfung $\eta(\theta_i, x)$. Nach Erhalt einer konvergierten Verschiebung lässt sich durch die errechnete Dehnung und Dämpfung die gesamte, in der Struktur gespeicherte und dissipierte Energie ermitteln. Der Quotient aus beiden Größen ist nach Kapitel 2.2.3 der makroskopische Dämpfungswert $d_{makro}(\theta_i)$.

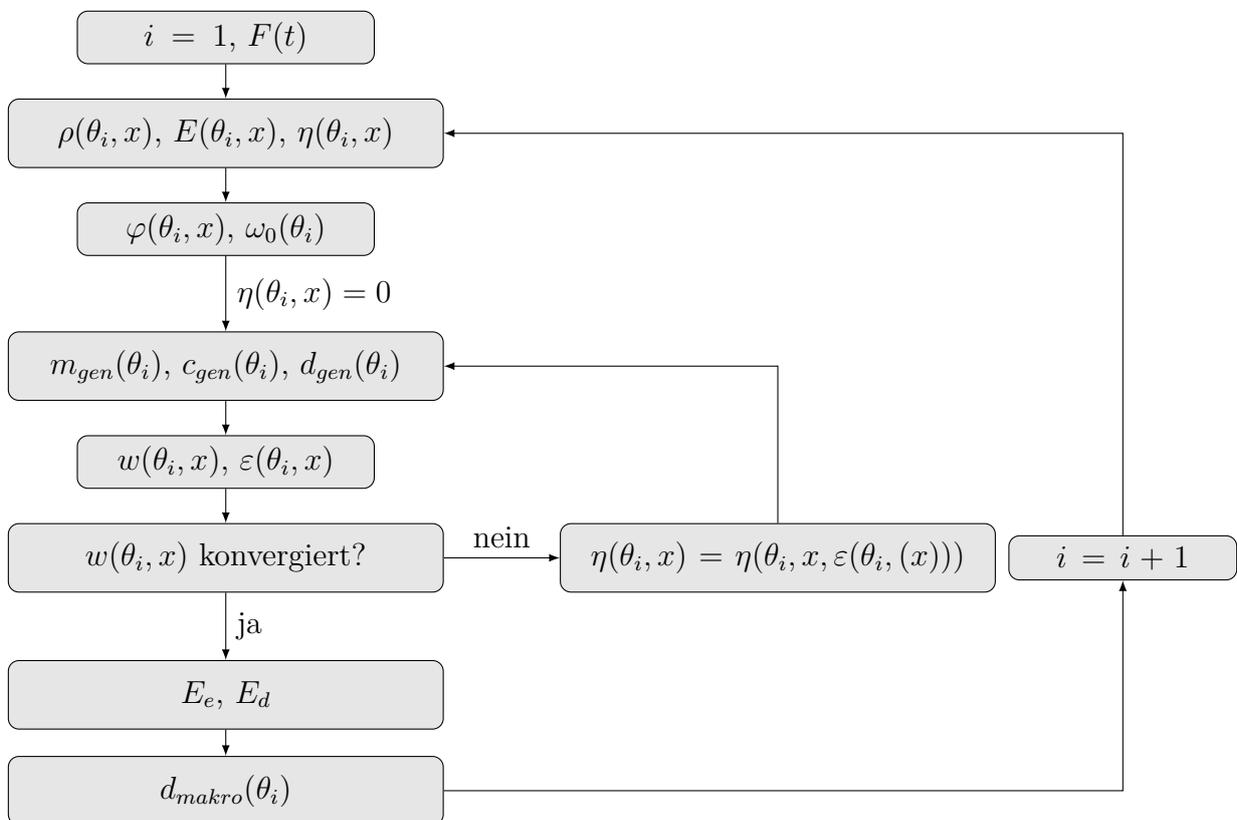


Abbildung 5.6: MONTE-CARLO-Simulation zur Berechnung der Dämpfung

5.3.2 Lebensdauerberechnung

Bei der Berechnung der Lebensdauer kommt neben der Berechnungsschleife für die MONTE-CARLO-Simulation noch eine Schleife zur Berechnung der Lebensdauer hinzu (Abbildung 5.7). Aus der Verschiebung bzw. Dehnung lässt sich der Elastizitätsmodul

für die nächste, diskretisierte Lastspielzahl N_{n+1} aus der Matrix $\hat{\mathbf{X}}^0$ in Gleichung (5.25) bestimmen. Damit kann das zugefügte Schädigungsinkrement mit der bisherigen Schädigung akkumuliert werden. Diese Schleife wird solange wiederholt, bis entweder alle diskretisierten Lastspielzahlpunkte durchlaufen wurden oder bis der Schädigungsparameter an einer Stelle den Wert 1 aufweist, d.h. Versagen erreicht ist. Die Dichte ρ ist dabei aufgrund der Massenerhaltung unabhängig von N .

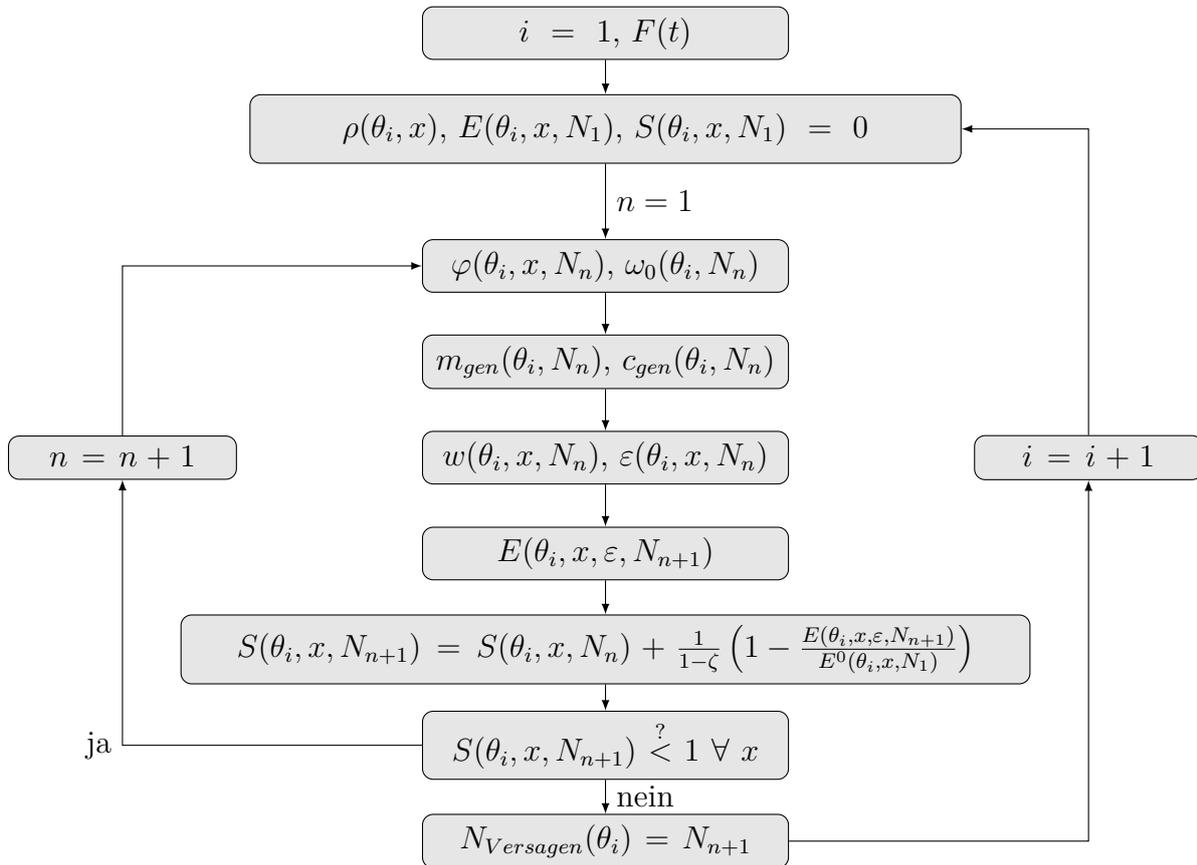
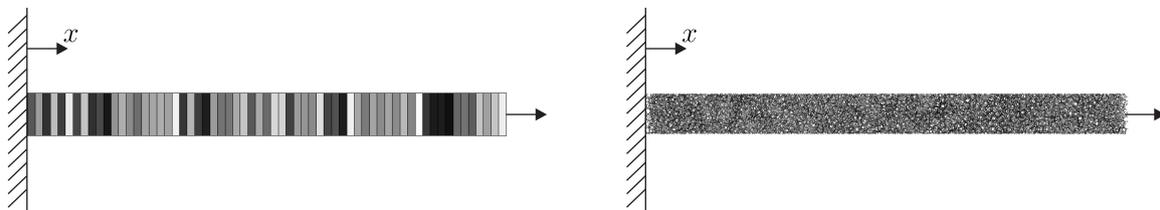


Abbildung 5.7: MONTE-CARLO-Simulation zur Berechnung der Lebensdauer

6 Vergleich mit einem Vollskalenmodell

Das in den vorangegangenen Kapiteln aufgebaute Multiskalenmodell (MSM) wird in diesem Kapitel anhand eines Vollskalenmodells (VSM) validiert, das mit dem Generator für DUOCEL-Schäume erstellt wird. Da der Schwerpunkt dieser Arbeit auf der Erstellung eines Modells über verschiedene Größenskalen liegt, wird ausschließlich dieser Aspekt in einer modellbasierten Validierung näher untersucht. Ein Vergleich mit experimentellen Untersuchungen erfolgt in dieser Arbeit nicht. Sofern die vollskalierten Metallschäume, die im Rahmen von CT-Messungen und anschließender Bildanalyse erstellt wurden, mit realen Schäumen übereinstimmen, ist eine valide Aussagekraft der beiden Modelle bezüglich der Realität äquivalent.

Das VSM weist eine geometrische Abmessung von $15 \cdot 15 \cdot 180 \text{ mm}^3$ auf und wird mit Hilfe der Daten von DUOCEL-Schäumen, wie in Kapitel 3 dargestellt, generiert. Die Stege werden dabei mit einem ZE modelliert. Durch Herausschneiden von SVE werden die Materialdaten für das MSM entsprechend Kapitel 4 homogenisiert und später auf das makroskopische Modell wie in Kapitel 5 übertragen. Anhand dieses Vergleichs von MSM zu VSM wird die entwickelte Modellbildung über die verschiedenen Größenskalen validiert bzw. werden deren Grenzen aufgezeigt.



(a) 1D-MSM

(b) 3D-VSM

Abbildung 6.1: Skalenmodelle eines Metallschaumbalkens

Es werden für beide Modelle linksseitig eingespannte Zugstäbe generiert, die rechtsseitig eine vorgegebene harmonische, niederfrequente Verschiebung erfahren (Abbildung 6.1). Wie in Abbildung 6.1a gezeigt, wird das MSM in Längsrichtung mit 64 Elementen diskretisiert, die jeweils über den Querschnitt konstante Materialdaten besitzen. Das MSM ist eindimensional in dem Sinne, dass es in der MONTE-CARLO-Simulation nur mit der Variablen x gemäß der Zugstab-Theorie berechnet wird. Das VSM hingegen ist dreidimensional und wird mit der FEM berechnet.

Während 500 Realisierungen der Stäbe für das MSM berechnet werden, werden für das VSM aufgrund der unten aufgezeigten Rechenzeit nur einige wenige Stäbe berechnet. Letztere sind damit als Stichproben aus einer Vielzahl von Schaumbalken anzusehen, mit denen jedoch die stochastische Aussagekraft des MSM überprüft werden kann. In den folgenden Abschnitten 6.1 und 6.2 erfolgt ein Vergleich beider Modelle zum einen bezüglich der Gesamtdämpfung der Stäbe und zum anderen bezüglich des Verhaltens der Steifigkeit bei zunehmender Schadensentwicklung während der Lebensdauer. Eine detailliertere Untersuchung des MSM mit Parametervariation erfolgt anhand von Fallstudien in Kapitel 8.

6.1 Zugstab mit Dämpfung

Zur Berechnung der in den Stäben wirkenden Dämpfung wird die Phasenverschiebung zwischen Weganregung und Kraftantwort an der Stelle $x = L$ für beide Modelle ausgewertet. Dazu wurden 20 Stichproben des VSM berechnet. Der Dämpfungsparameter des MSM wurde gemäß Abschnitt 4.2 für acht Belastungsamplituden homogenisiert. Die Ergebnisse sind in Abbildung 6.2 für verschiedene Amplituden dargestellt. Während die Stichproben des VSM tendenziell etwas geringere Dämpfungswerte für kleine Amplituden aufweisen, werden bei größeren Amplituden die Dämpfungswerte mit dem MSM innerhalb des Intervalls $\mu \pm \sigma$ korrekt wiedergegeben, wobei eine Verschiebung der VSM-Ergebnisse von $\mu - \sigma$ zu $\mu + \sigma$ erkennbar ist. Daraus resultiert eine richtige Berechnung der Dämpfung unter Berücksichtigung der Streuung. Der Grund für das Auftreten von Differenzen zwischen beiden Modellen liegt in den diskreten Amplitudenschritten, für die im MSM die Dämpfung homogenisiert wurde. Während die Homogenisierung für acht Dehnungsamplituden durchgeführt wurde, sind die Dämpfungswerte auf der Makroskala für andere Dehnungswerte linear zu interpolieren. Unter Hinzunahme von zusätzlichen Amplituden bei der Homogenisierung würden die Ergebnisse entsprechend genauer werden. Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass das MSM sowohl qualitativ als auch quantitativ korrekte Dämpfungswerte voraussagt.

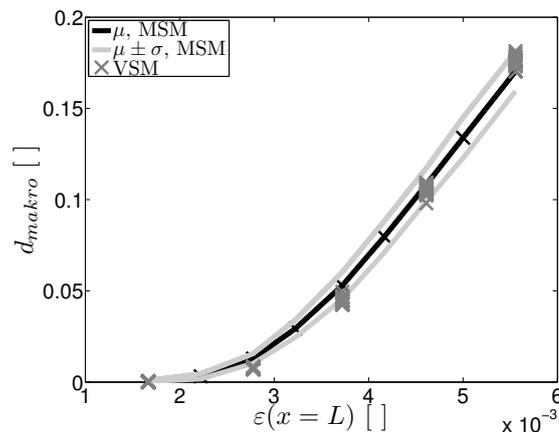


Abbildung 6.2: Vergleich der Dämpfung bei Stäben zwischen VSM und MSM

Der Hauptvorteil des MSM gegenüber dem VSM besteht in der benötigten Rechenzeit. Die Homogenisierung der Materialparameter im MSM benötigt zwar eine Rechenzeit von etwa einem Tag, sind die Materialparameter jedoch einmal auf der Mesoskala homogenisiert, so lassen sich im Rahmen der MONTE-CARLO-Simulation verschiedene Systemzustände vergleichsweise schnell berechnen. Nachdem die Erstellung der KL-Zerlegung für eine vorgegebene Verschiebung im MSM ~ 50 Sekunden in Anspruch genommen hat, wird für die Berechnung einer Realisierung ~ 6 Sekunden benötigt. Dies summiert sich für alle 500 Stäbe auf ca. 50 Minuten Rechenzeit. Im Gegensatz dazu benötigt das VSM je nach Belastungsamplitude zwischen ~ 20 und ~ 45 Minuten Rechenzeit für eine Realisierung. Dies summiert sich für die 20 Stichproben auf mehr als zwei Tage Rechenzeit. Damit wird durch das MSM Rechenzeit um den Faktor > 200 eingespart.

6.2 Zugstab mit Materialermüdung

Zur Ermittlung der Veränderung der Steifigkeit der Zugstäbe während der Lebensdauer wird gemäß dem Algorithmus aus Abbildung 5.7 der Elastizitätsmodul des MSM nach jedem Schädigungszuwachs berechnet. Hingegen werden für das VSM, analog zur Schadensberechnung der SVE auf der Mesoskala bzw. dem Algorithmus aus Abbildung 4.21, die kritischen Stege ermittelt und herausgelöscht. Auch wenn aus Konvergenzgründen in der FEM-Berechnung in diesem Abschnitt die Verschiebung statt der Kraft vorgegeben wird, bleibt das Prinzip der Schadensakkumulierung gleich. Aufgrund der unten aufgezeigten, hohen Rechenzeit für das VSM werden lediglich zehn Stichproben betrachtet und der Rechenalgorithmus wird abgebrochen, sobald 80 % der Anfangssteifigkeit der Stäbe unterschritten wird. Im Rahmen eines Vergleichs beider Modelle lässt sich an dieser Stelle keine Versagenslastspielzahl ermitteln. Für das VSM kann lediglich der Elastizitätsmodul des ganzen Stabs berechnet werden. Eine detailliertere Auflösung des örtlichen Verlaufs des Elastizitätsmoduls ist nicht möglich. Daher kann der Elastizitätsmodul lokal bereits eine Steifigkeit von kleiner als 80 % aufweisen, was nach vorheriger Definition schon Versagen wäre, während der Stab insgesamt noch über der 80 %-Grenze liegt. Im Gegensatz dazu würde das MSM den Algorithmus abbrechen, sobald es an irgendeiner lokalen Stelle der Stäbe einen Elastizitätsmodul kleiner als 80 % detektieren würde. Stattdessen wird in diesem Abschnitt zur Validierung der Multiskalenmodellierung die Steifigkeitsabnahme des Elastizitätsmoduls des ganzen Stabes bei beiden Modellen verglichen. Der Algorithmus des MSM wird daher auch erst abgebrochen, wenn die Gesamtsteifigkeit kleiner als 80 % beträgt.

Die Ergebnisse der Realisierungen beider Modelle sind in Abbildung 6.3 zusammengefasst, wobei die Stichproben des VSM auf ihren Mittelwert normalisiert wurden und für das MSM alle Realisierungen für die diskretisierte Lastspielzahl aufgezeigt sind, bis die letzte Realisierung die 80 %-Grenze unterschreitet. Da bereits in Kapitel 4 gezeigt wurde, dass das MSM den Elastizitätsmodul um ~ 4 % unterschätzt, ist an dieser Stelle die relative Änderung bezogen auf die Anfangssteifigkeit angegeben. Der Verlauf des Elastizitätsmoduls wird qualitativ korrekt wiedergegeben, indem bei beiden Modellen der abrupte Abfall bei $N \approx 4500$ Lastspielzahlen mit der gleichen relativen Änderung der Steifigkeit überein-

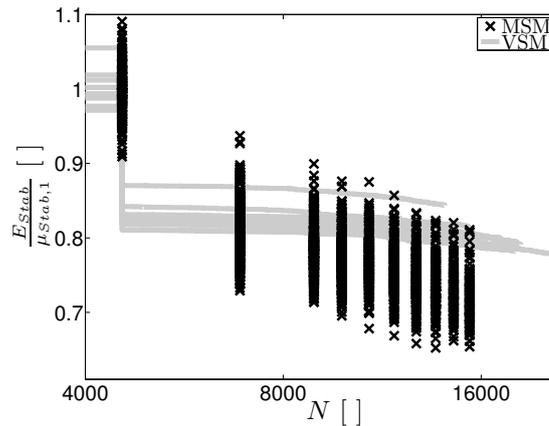


Abbildung 6.3: Vergleich der Steifigkeitsabnahme bei Stäben zwischen VSM und MSM

stimmt. Außerdem ist die darauffolgende Steifigkeitsabnahme für beide Modelle gering, an sich jedoch steigend. Allerdings fällt die Steifigkeit der Realisierungen des MSM schneller ab und erreicht damit die 80 %-Grenze für geringere Lastspielzahlen. Dies liegt darin begründet, dass schon der homogenisierte Verlauf auf der Mesoskala dieses Verhalten aufzeigt. Ein Vergleich zwischen dem Verlauf des MSM und μ_{E^*} aus Abschnitt 4.6 zeigt, dass die Verläufe und deren Streuung äquivalent sind und dass die homogenisierten Parameter korrekt auf die Makroskala projiziert werden. Der Grund für die Differenz in den qualitativen Werten liegt damit in der Mesoskala. Offensichtlich bewirkt die zur besseren Wiedergabe der Steifigkeit (Abschnitt 4.3.2) durchgeführte Modellierung eine Überschätzung des Schädigungsparameters. Das MSM berechnet also den qualitativ korrekten Steifigkeitsverlauf, zeigt aber quantitative Differenzen der Steifigkeit aufgrund der getroffenen Modellierung im Rahmen der Homogenisierung auf.

Ein Vergleich zwischen einer versteiften und einer herkömmlichen Stichprobe¹ eines SVE zeigt auf, dass der Steifigkeitsabfall bei letzterer bei $N \approx 4500$ geringer ausfällt und die Steifigkeit danach auch weniger schnell abnimmt. Trotz der Differenzen bewirkt das in dieser Arbeit verwendete, versteifte Modell eine bessere Abbildung der Steifigkeit, da das herkömmliche Modell schon zu Beginn die Steifigkeit um $\sim 15\%$ unterschätzt. Da in dieser Arbeit die Modellierung mit dem Hauptaugenmerk auf einer korrekten Anfangssteifigkeit durchgeführt wurde, ist in einem nächsten Schritt die Modellierung bezüglich quantitativ besserer Steifigkeitswerte bzw. Steifigkeitsverläufe während der Lebensdauer anzupassen. Die Bearbeitung dieser Frage würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen, verwiesen sei an dieser Stelle auf die Formulierung weiterer Forschungsfragen im Ausblick in Kapitel 9.

Nichtsdestotrotz kann damit das aufgebaute MSM im Sinne der oben formulierten Zielsetzung, der Validierung der Modellierung über verschiedene Größenskalen, als valide an-

¹Mit herkömmlichen Stichproben sind SVE gemeint, bei denen für die Homogenisierung nur die Freiheitsgrade in Belastungsrichtung an der eingespannten Stelle eingeschränkt werden. Im Gegensatz dazu werden für das in dieser Arbeit verwendete versteifte Modell alle Freiheitsgrade eingeschränkt.

gesehen werden, da die Diskrepanzen auf die Frage der Modellierung auf der Mesoskala zurückzuführen sind. Davon abgesehen, kann das MSM für qualitative Untersuchungen, wie sie in einem Fallbeispiel in Kapitel 8.2 durchgeführt werden, durchaus angewendet werden.

Der Mehrwert des aufgebauten MSM besteht gegenüber dem VSM vor allem darin, in vergleichsweise kurzer Rechenzeit qualitative Untersuchungen mit Parametervariationen durchführen zu können. So benötigt das MSM für die Berechnung einer Realisierung in der MONTE-CARLO-Simulation drei Minuten, was sich für die Berechnung der 500 Realisierungen auf 25 Stunden summiert. Das VSM benötigt für die Berechnung einer Belastung ca. 25 min. Das ergibt für die Lebensdauerberechnung einer einzigen Stichprobe mit ca. 200 benötigten Rechendurchläufen eine Rechenzeit von $\sim 3,5$ Tagen und übersteigt damit die Rechendauer des MSM um das 1500-fache.

7 Parameterstudien

Im ersten Teil der vorliegenden Parameterstudie werden die in Kapitel 4 im Rahmen der Modellierung getroffenen Annahmen auf ihre Gültigkeit untersucht. Dies umfasst zum einen die Analyse des Masseneinflusses auf die Ergebnisse der homogenisierten Parameter. Zum anderen wird in einer weiteren Studie aufgezeigt, dass die Modellierung der Stegdickenverteilung mit sechs ZE zu ausreichend genauen Ergebnissen führt. Im zweiten Teil der Parameterstudie wird der Einfluss verschiedener Materialparameter aufgrund von Rechenzeiten ausschließlich auf die homogenisierte plastische Dehnung untersucht, die die zentrale Größe für die in dieser Arbeit modellierte Dämpfung und Schadensakkumulation bildet. Dazu werden sowohl die relative Dichte der SVE als auch die Materialparameter des Ausgangswerkstoffes variiert.

7.1 Einfluss der Masse

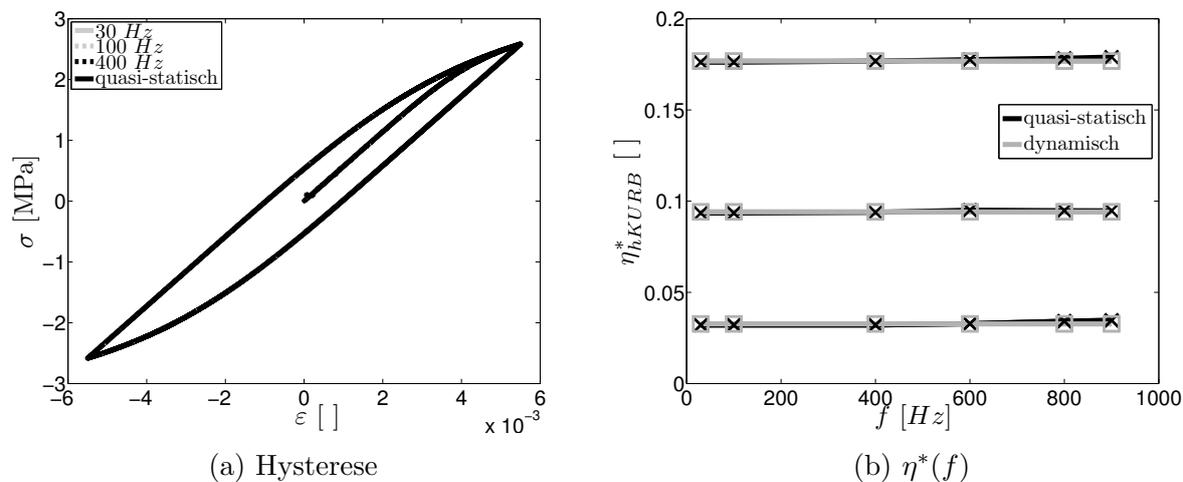


Abbildung 7.1: Einfluss der Masse auf das Dämpfungsverhalten, VORONOI, hKURB

In Kapitel 4 wurde eine quasi-statische Berechnung der Dämpfung und Schadensakkumulation durchgeführt. Um dies zu rechtfertigen, werden im Folgenden unter Betrachtung eines realisierten SVE des VORONOI-Schaumes die Ergebnisse der quasi-statisch durchgeführten Homogenisierung mit Ergebnissen unter Berücksichtigung der Trägheitsterme verglichen. Letztere wurden im Rahmen einer explizit-dynamischen Berechnung einbezogen. Bei einem Vergleich der bei beiden Berechnungsarten auftretenden Hysteresekurven in Abbildung 7.1a zeigt sich bei verschiedenen Frequenzen kein erkennbarer Unterschied.

Dies bewirkt keine nennenswerten Differenzen für den homogenisierten Dämpfungsparameter mit $f < 1 \text{ kHz}$ in Abbildung 7.1b. Der Fehler zwischen beiden Berechnungsarten beträgt weniger als zwei Prozent, was auf die kleine Zeitschrittweite für die dynamische Berechnung zurückzuführen ist. Für geringe Belastungsfrequenzen führt somit die quasi-statische Rechnung bei wesentlich geringerer Rechenzeit zu identischen Ergebnissen.

Auch auf die Lebensdauer und Schädigungsentwicklung hat die Masse einen vernachlässigbaren Einfluss, wie es für ein SVE in Abbildung 7.2 dargestellt ist. So beträgt die relative Differenz zwischen der berechneten maximalen VON MISES-Spannung $\sigma_{Mises,max}$ für die aufgezeigten Belastungsamplituden weniger als 0,4 %. Dabei sind in Abbildung 7.2a nur die Stege aufgezeigt, die einen Fehler größer als 0,05 % aufweisen. Die Anzahl der Stege, die einen Fehler größer als den genannten Wert aufzeigen, nimmt zwar mit der Belastungsamplitude zu, allerdings treten die Fehler nur für $f > 100 \text{ Hz}$ im nennenswerten Umfang auf, sodass für kleinere Belastungsfrequenzen quasi-statisch gerechnet werden kann. Der resultierende Verlauf des Elastizitätsmoduls in Abhängigkeit von der Lastspielzahl zeigt ebenfalls keinen erkennbaren Unterschied auf, wie Abbildung 7.2b für die ersten Rechenschritte aufzeigt.

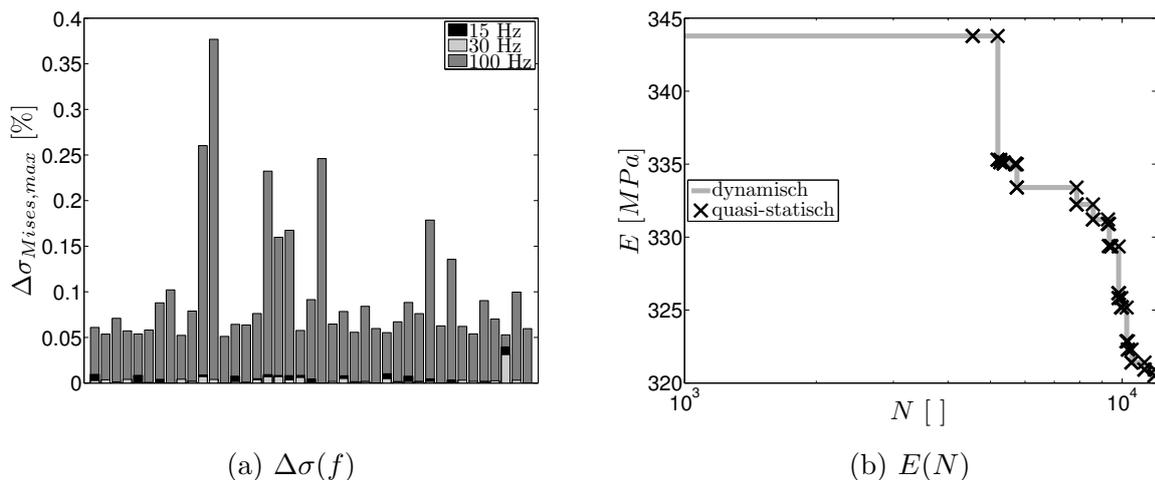


Abbildung 7.2: Einfluss quasi-statischer und dynamischer Rechnung auf das Lebensdauerverhalten

Die Ursache dafür, dass die Masse einen vernachlässigbaren Einfluss auf die Ergebnisse der Homogenisierung ausübt, besteht im eingangs erwähnten, geringen Verhältnis von Dichte zu Steifigkeit $\frac{\rho}{E}$. In einem schwingenden System wird der Einfluss der Trägheitsterme erst in der Nähe der Eigenfrequenzen bemerkbar. Diese sind sich jedoch umgekehrt proportional zum Verhältnis $\frac{\rho}{E}$, weswegen die Einflüsse der Trägheitsterme bei Metallschäumen erst bei relativ hohen Frequenzen deutlich werden. Für Belastungsfrequenzen $< 500 \text{ Hz}$ sind die in dieser Arbeit vorgestellten Modelle in jedem Fall anwendbar. Wie im Fall der Dämpfung gezeigt wurde, sind die Modelle auch für Belastungen bis in den kHz -Bereich anwendbar, da nur kleine Abweichungen auftreten.

7.2 Einfluss der Zwischenelemente

Bei der Berücksichtigung der Stegdickenverteilung in den FEM-Schaummodellen in Kapitel 4 wurde jeder Steg mit sechs ZE modelliert. In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass dies zu hinreichend genauen Ergebnissen führt. In Abbildung 7.3 ist der Mittelwert und der Variationskoeffizient der homogenisierten plastischen Dehnung $\varepsilon_{p,0}$ für verschiedene Amplituden und ZE aufgezeigt. Dabei wurde die Knotendicke in allen SVE jeweils so angepasst, dass alle Modelle die gleiche relative Dichte $\rho_{rel} = 0,08$ aufweisen. Aus Abbildung 7.3a wird ersichtlich, dass die Modellierung mit sechs ZE ausreichend ist, da eine weitere Erhöhung der Anzahl von ZE den Mittelwert $\mu_{\varepsilon_{p,0}}$ nicht wesentlich verändert. Der Variationskoeffizient ist für kleine Amplituden weiterhin unterschiedlich, was durch die hohen Werte $\gamma_{\varepsilon_{p,0}} > 0,4$ beeinflusst wird. Wie aus Abbildung 7.3b ersichtlich ist, konvergiert $\gamma_{\varepsilon_{p,0}}$ für ansteigende Amplituden ebenfalls für $ZE \geq 6$. Sowohl $\mu_{\varepsilon_{p,0}}$ als auch $\gamma_{\varepsilon_{p,0}}$ nähern sich mit Überschwingern der Sättigung an. Während das Modell mit einem ZE den Mittelwert unterschätzt und die Streuung überschätzt, ist es bei dem Modell mit vier ZE umgekehrt. Dies setzt sich bei einer höheren Anzahl von ZE fort.

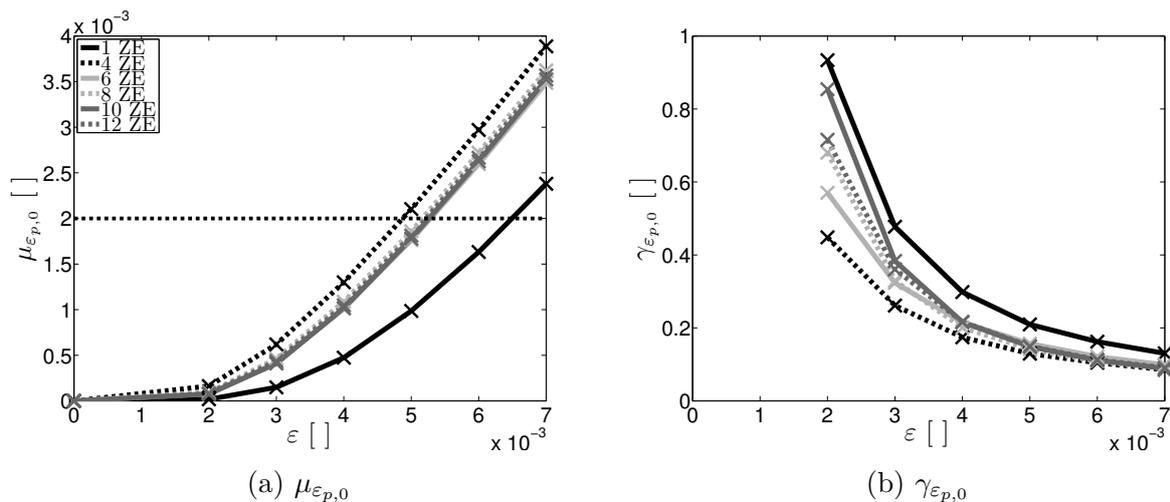


Abbildung 7.3: Plastische Dehnung in Abhängigkeit der Anzahl an ZE, VORONOI, hKURB, 50 Realisationen

Ferner ist in Abbildung 7.3a die Grenze des mesoskopisch linear-elastischen Bereichs $\varepsilon_{p,0} \leq 0,002$ durch die horizontal gestrichelte Linie gekennzeichnet. Auch hier überschätzt das Modell die Fließgrenze ohne die Berücksichtigung der Stegdickenverteilung, während das Modell mit 4 ZE die Fließgrenze unterschätzt und sich eine Fließgrenze für alle weiteren Modelle bei $\varepsilon \approx 0,0052$ einstellt. Da sich die Elementenanzahl im FEM-Modell durch Hinzunahme weiterer ZE vervielfacht, steigt die Rechenzeit immens. Als Kompromiss zwischen Rechenzeit und -genauigkeit werden in der vorliegenden Arbeit zur Abbildung der Stegdickenverteilung ausschließlich 6 ZE verwendet.

7.3 Einfluss der relativen Dichte

Wie in Kapitel 1 dargelegt, bildet die relative Dichte die zentrale Größe zur Beschreibung von Metallschäumen. Ihr Einfluss auf die plastische Dehnung und die daraus folgende Auswirkung auf die Dämpfung und Schadensakkumulation wird in diesem Abschnitt behandelt. Dazu wird die relative Dichte ρ_{rel} durch Änderung der Zellenanzahl bei gleichbleibender Stegdicke mit einem ZE und bei konstantem Volumen des SVE variiert. Ein Anwachsen der relativen Dichte des Metallschaumes bewirkt zum einen eine höhere Steifigkeit und zum anderen steigt bei einer konstanten Belastung mit der Anzahl an Knotenpunkten die Häufigkeit von MPZ und damit die homogenisierte plastische Dehnung. Der Mittelwert ist für drei verschiedene relative Dichten in Abbildung 7.4a dargestellt. Die mesoskopische Fließgrenze wird bei geringeren Amplituden erreicht, je höher ρ_{rel} ist. Daraus lässt sich folgern, dass eine höhere Dichte auch zu einer höheren Dämpfung aufgrund von MPZ bzw. zu einer erhöhten Schadensakkumulation führt. Wie Abbildung 7.4b aufzeigt, setzt eine höhere relative Dichte zudem den Variationskoeffizienten herab, da schon bei geringen Amplituden in allen 50 SVE mehr MPZ hervorgerufen werden. Während für $\rho_{rel} = 0,09$ der Variationskoeffizient für erhöhte Amplituden auf 12 % abfällt, beträgt er für die beiden anderen Dichten nur 5,5 % bzw. 5,0 %.

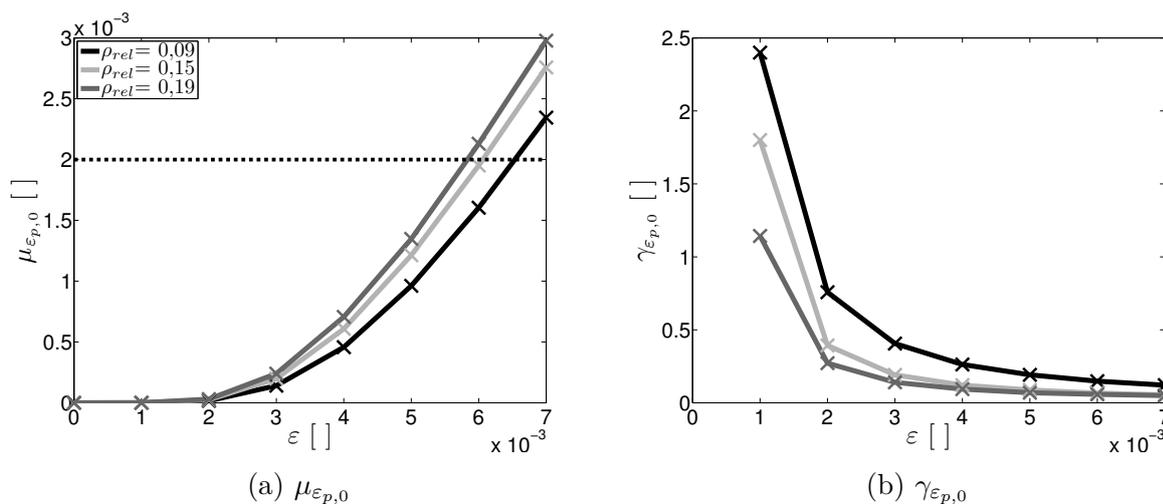


Abbildung 7.4: Plastische Dehnung in Abhängigkeit von der relativen Dichte, VORONOI-Schäume, hKURB, 50 Realisationen

7.4 Einfluss elastischer und plastischer Materialparameter

Bisher wurde das Plastizitätsverhalten ausschließlich ideal, d.h. ohne Verfestigung modelliert. Zur Untersuchung des Einflusses von nicht-idealem Fließverhalten wird die Auswirkung von isotroper Verfestigung nach Abbildung 2.2 untersucht. Zusätzlich wird der Elastizitätsmodul der Stege variiert. Die vier untersuchten Materialverhalten sind in einem Dehnung-Spannungs-Diagramm in Abbildung 7.5 zusammengefasst.

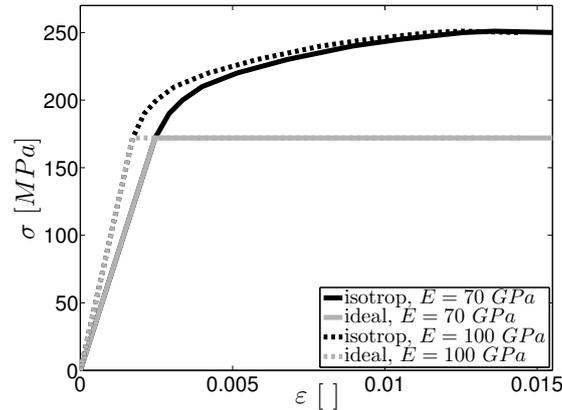


Abbildung 7.5: Untersuchtes Materialverhalten in VORONOI-Schäumen

Der Einfluss der Variation des Ausgangswerkstoffes auf die plastische Dehnung ist in Abbildung 7.6 abgebildet. Eine höhere Steifigkeit der Stege führt bei gleicher Belastung zu einer größeren mittleren plastischen Dehnung. Dies ist gemäß Abbildung 7.5 auch zu erwarten, da bei einer höheren Steifigkeit die Fließgrenze für kleinere Dehnungen erreicht wird. Dahingegen setzt die isotrope Verfestigung die plastische Dehnung herab. Dies liegt darin begründet, dass die Verfestigung bei einer gleichen Gesamtdehnung zu einer geringeren plastischen Dehnung führt als bei ideal-plastischem Verhalten. Dadurch werden in der Folge auch weniger MPZ hervorgerufen. Die höhere plastische Dehnung bei höherer Steifigkeit und idealem Fließverhalten bewirkt zum einen ein Herabsetzen der mesoskopischen Fließgrenze, wie in Abbildung 7.6a für $\varepsilon_{p,0} = 0,002$ aufgezeigt ist und zum anderen ein Herabsetzen des Variationskoeffizienten $\gamma_{\varepsilon_{p,0}}$ (Abbildung 7.6b).

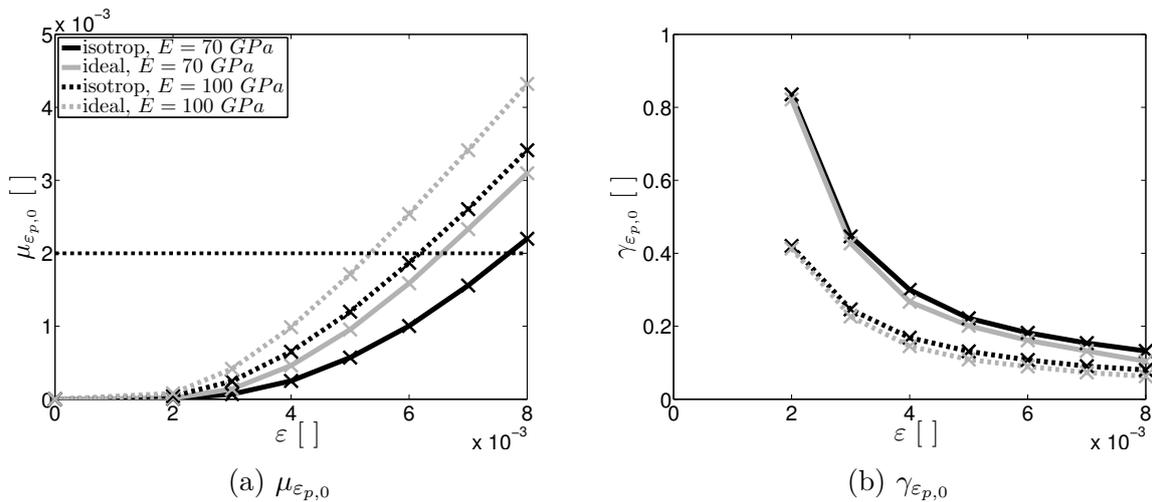


Abbildung 7.6: Plastische Dehnung in Abhängigkeit von elastischen und plastischen Materialparametern, 1 ZE, VORONOI, hKURB, 50 Realisationen

8 Fallstudien

In diesem Kapitel wird an Fallstudien die Auswirkung der heterogenen Mikrostruktur auf das makroskopische Strukturverhalten hinsichtlich Dämpfung und Schadensakkumulation untersucht. Dazu werden eindimensionale Strukturen mit einer Querschnittsabmessung von $15 \cdot 15 \text{ mm}^2$ sowie mit drei verschiedenen Längen $L = 180, 200$ und 220 mm mit der SFEM berechnet, indem die Längsachse mit 64 Elementen diskretisiert wird. Die Strukturen sind linksseitig fest eingespannt und werden rechtsseitig an der Stelle L durch eine harmonische, niederfrequente Kraft entweder auf Zug oder auf Biegung zwangserregt. Die Biegebalken werden mit den Annahmen nach EULER-BERNOULLI modelliert, sodass der Elastizitätsmodul zur Beschreibung der Steifigkeit ausreichend ist. Zur Berechnung werden 500 Realisierungen basierend auf den homogenisierten Materialparametern von DUOCEL-Schäumen mit sechs ZE für die Dämpfungsberechnung sowie ausgehend von den Ergebnissen in Abschnitt 4.6 mit einem ZE für die Lebensdauerberechnung generiert. Zunächst wird die makroskopische Dämpfung von Metallschaumstäben untersucht. Anschließend wird in Abschnitt 8.2 das Schädigungs- und Versagensverhalten der Metallschäume während der Lebensdauer näher beleuchtet. In beiden Fallstudien werden die Einflüsse der Heterogenität auf das makroskopische Verhalten in Abhängigkeit von verschiedenen Parametern aufgezeigt und die Ergebnisse mit homogenen Stäben verglichen.

8.1 Dämpfung einseitig eingespannter Stäbe

Die Berechnung der makroskopischen Dämpfung in den Stäben erfolgt mit der vorgestellten MONTE-CARLO-Simulation aus Abbildung 5.6 unter Anwendung der an die Belastung angepassten generalisierten Größen. Diese ergeben sich für die j -te Eigenschwingung zu

$$\begin{aligned} m_{gen,D,j}(\theta) &= A \int_{x=0}^L \rho(\theta, x) \varphi_j^2(\theta, x) dx \\ c_{gen,D,j}(\theta) &= A \int_{x=0}^L E(\theta, x) \left(\frac{d\varphi_j(\theta, x)}{dx} \right)^2 dx \\ d_{gen,D,j}(\theta) &= A \int_{x=0}^L \eta(\theta, x) E(\theta, x) \left(\frac{d\varphi_j(\theta, x)}{dx} \right)^2 dx \end{aligned} \quad (8.1)$$

für Zugbelastung und

$$\begin{aligned}
 m_{gen,B,j}(\theta) &= A \int_{x=0}^L \rho(\theta, x) \varphi_j^2(\theta, x) dx \\
 c_{gen,B,j}(\theta) &= \frac{1}{12} A^2 \int_{x=0}^L E(\theta, x) \left(\frac{d^2 \varphi_j(\theta, x)}{dx^2} \right)^2 dx \\
 d_{gen,B,j}(\theta) &= \frac{1}{12} A^2 \int_{x=0}^L \eta(\theta, x) E(\theta, x) \left(\frac{d^2 \varphi_j(\theta, x)}{dx^2} \right)^2 dx
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

für Biegebelastung. Für die Biegebalken ergibt sich eine von der eingespannten Stelle ausgehende, linear abfallende Dehnung, die beispielhaft für die Balken mit $L = 220 \text{ mm}$ in Abbildung 8.1a dargestellt ist. Zusätzlich ist die örtliche Standardabweichung $\mu_\varepsilon \pm \sigma_\varepsilon$ aufgezeigt. Während alle Realisierungen keine Dehnung an der freien Stelle aufweisen, nimmt die Streuung zur eingespannten Stelle stetig zu. Der daraus resultierende, ortsabhängige Dämpfungsparameter $\eta(x)$ ist in Abbildung 8.1b abgebildet. Dieser weist trotz des linearen Abfalls von ε einen nichtlinearen Verlauf auf, der sich aus der Nichtlinearität des homogenisierten Dämpfungsparameters ergibt. Folglich werden die Biegebalken an der Einspannstelle überproportional zu dem Rest des Balkens gedämpft. Der Großteil der Balken erfährt nur eine geringe Dämpfung. Während die Dehnung unter den 500 Realisierungen an der eingespannten Stelle mit $\gamma \approx 3,0 \%$ und im Mittel mit $\gamma \approx 2,3 \%$ variiert, zeigt der resultierende Dämpfungsparameter an der Einspannstelle einen erhöhten Variationskoeffizienten von $\gamma \approx 14,5 \%$ auf, der bis zum freien Balkenende zudem auf eine mittlere Streuung von $\gamma \approx 32,5 \%$ ansteigt. Durch die Heterogenität der Mikrostruktur und die damit verbundene Streuung der Dehnung wird der örtliche Variationskoeffizient der Dämpfung zusätzlich erhöht.

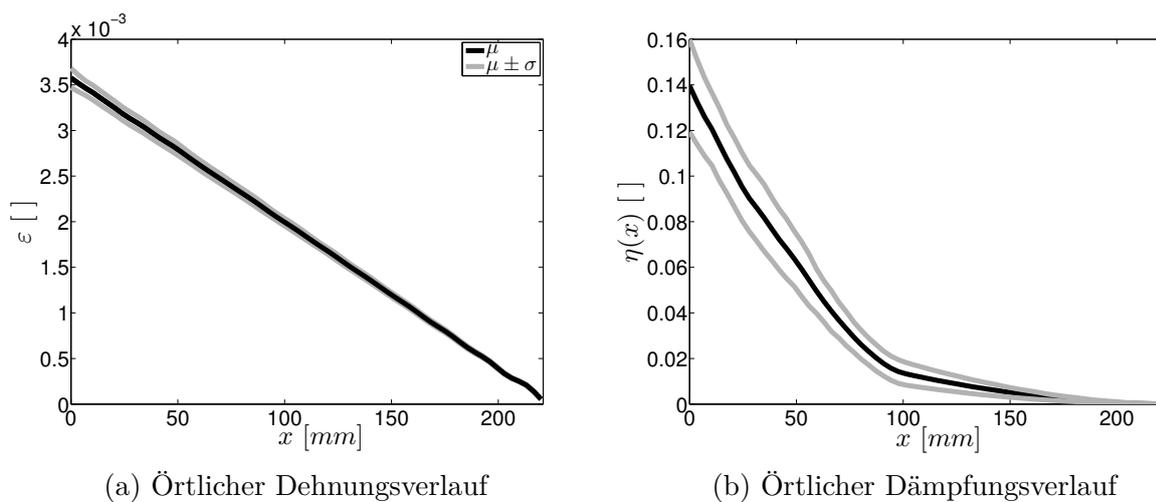
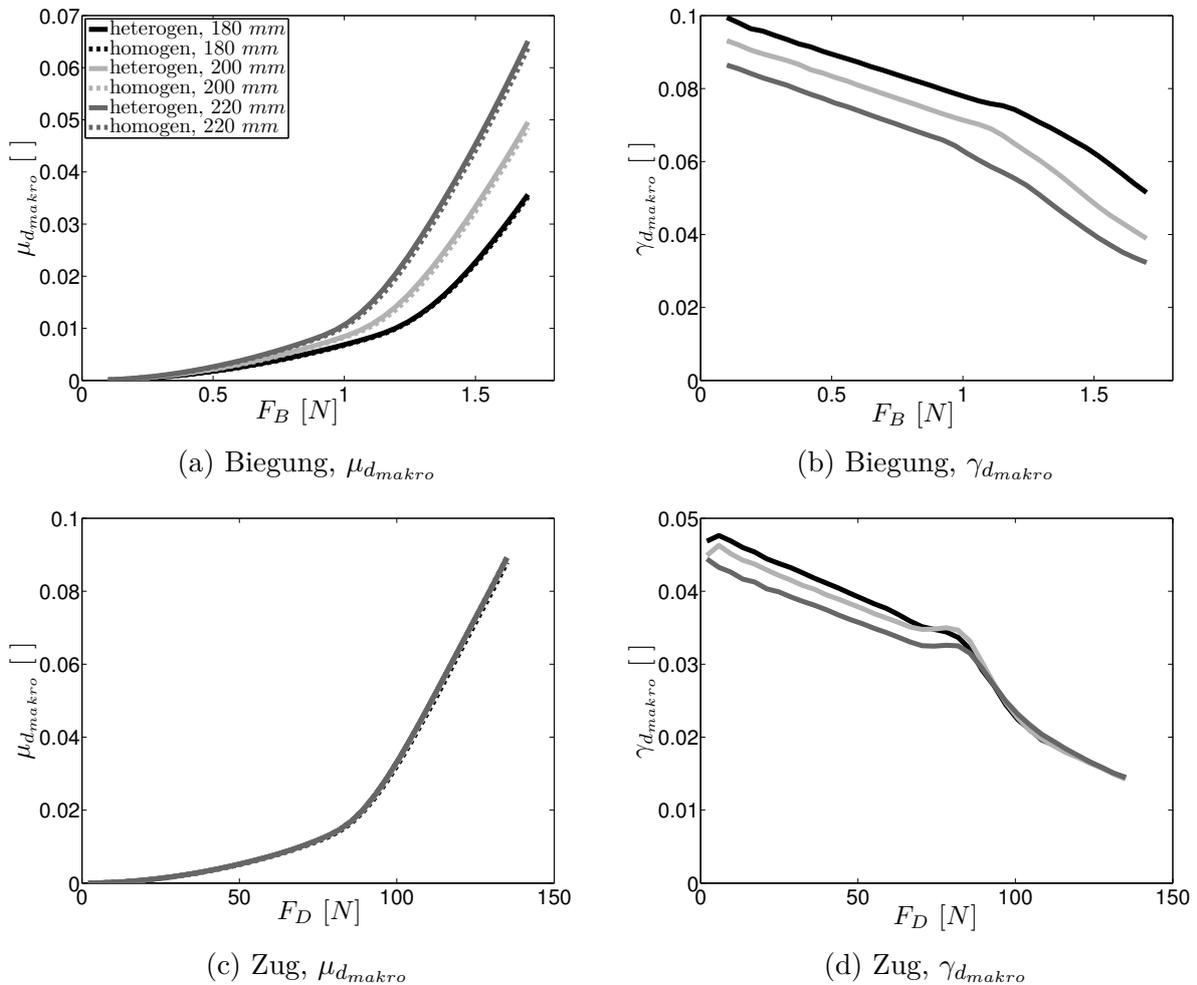


Abbildung 8.1: Dämpfungsverhalten von Biegebalken, $L = 220 \text{ mm}$

In Abbildung 8.2 sind die resultierenden makroskopischen Dämpfungswerte d_{makro} , die die gesamte dissipierte Energie in das Verhältnis zur gesamten gespeicherten Energie setzen, für die verschiedenen Stablängen und Belastungsarten in Abhängigkeit der Belastungsamplituden dargestellt. Der makroskopische Dämpfungsmittelwert nimmt bei der Biegung sowohl mit der Balkenlänge als auch mit der Biegekraft F_B zu (Abbildung 8.2a), da beide eine höhere Dehnung an der Einspannstelle bewirkt. Die makroskopische Dämpfung ist wesentlich geringer als die maximal auftretenden örtlichen Dämpfungswerte. Im Gegensatz zu einem homogenen Balken erhöht die heterogene Mikrostruktur die Dämpfung für alle Geometrien, allerdings in vernachlässigbarem Maß. Der homogene Vergleichsbalken besitzt die ortsunabhängigen Mittelwerte des Elastizitätsmoduls, der Dichte und der Dämpfung. Der Variationskoeffizient verhält sich genau umgekehrt proportional zur Zunahme des Mittelwertes, indem er mit zunehmender Kraftamplitude und Balkenlänge abnimmt (Abbildung 8.2b). Damit weist er einen annähernd ähnlichen Verlauf wie die negative, erste Ableitung von $\mu_{d_{makro}}(F_B)$ auf. Im Fall von Zugbelastung ist die Dämpfung hingegen nur

Abbildung 8.2: Einfluss von L und F auf d_{makro}

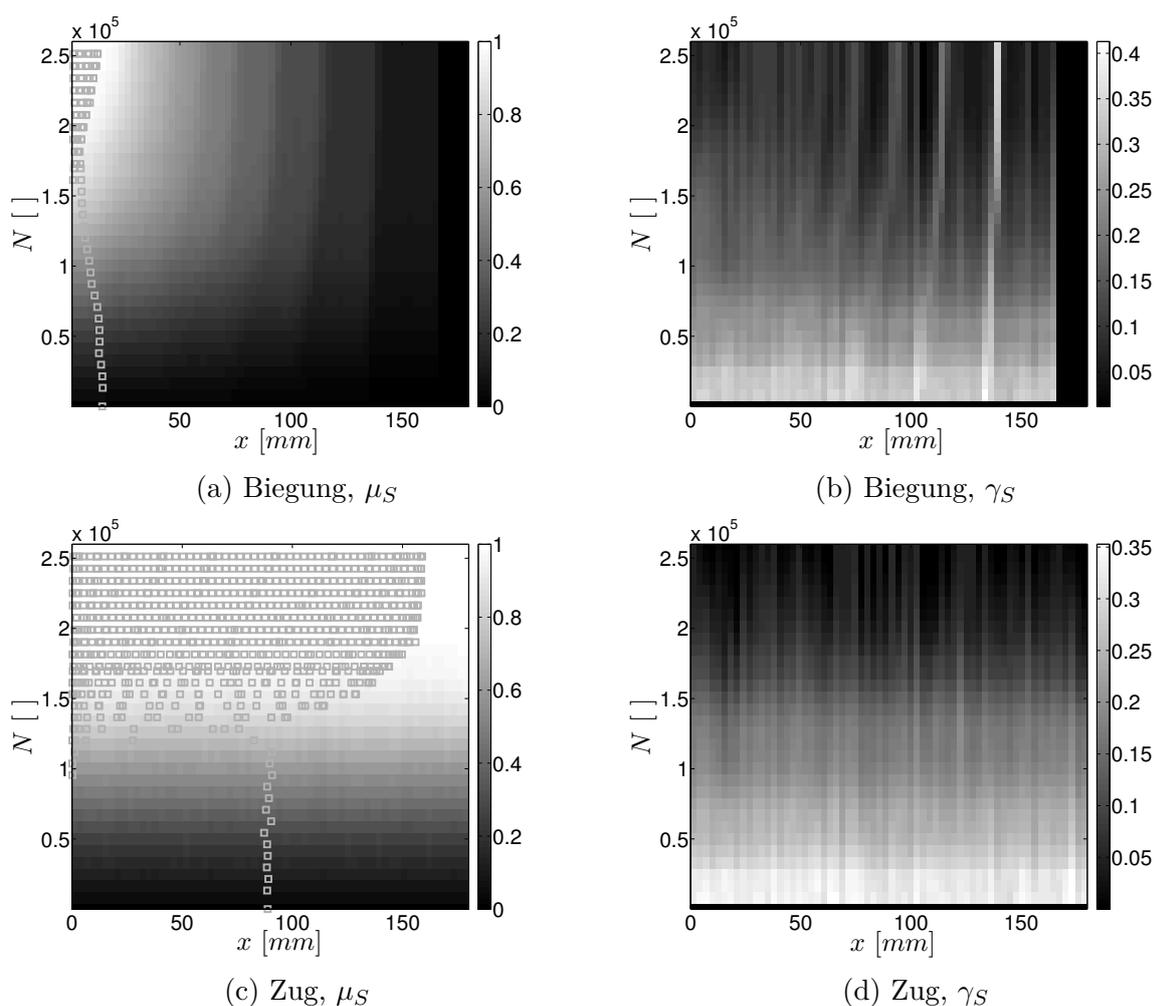
von der Belastungsamplitude abhängig, wie aus Abbildung 8.2c hervorgeht. Gegenüber der Stablänge ist die Dämpfung typischerweise invariant, da im Fall von Zugbelastung die Dehnung nur durch die Querschnittfläche des Stabs beeinflusst wird. Trotzdem weist d_{makro} einen von der Stablänge geringfügig abhängigen Variationskoeffizienten auf (Abbildung 8.2d). Der Variationskoeffizient fällt analog zum Fall der Biegebelastung mit zunehmender Kraftamplitude ab und verhält sich ähnlich wie die negative erste Ableitung der Mittelwertkurve.

Insgesamt zeigt sich ein relativ geringer makroskopischer Dämpfungsparameter für alle berechneten Dämpfungswerte. Auch wenn für die betrachteten DUOCEL-Schäume lokal Dämpfungswerte von $> 0,1$ auftreten können, ist der resultierende makroskopische Dämpfungswert aufgrund der starken Nichtlinearität stets $< 0,1$. Die mikrostrukturelle Heterogenität besitzt keinen nennenswerten Einfluss auf die Dämpfungswerte, allerdings streuen diese mit bis zu 10 %.

8.2 Versagensverhalten einseitig eingespannter Stäbe

Zur Untersuchung des qualitativen Verhaltens der Stäbe während ihrer Lebensdauer werden die Lastspielzahlen mit 32 Stützstellen bis $N = 260\,000$ diskretisiert. Zunächst werden die 180 mm langen Stäbe mit $F_B = 2,2\text{ N}$ bzw. $F_D = 135\text{ N}$ belastet. Die Berechnung der Schädigung erfolgt gemäß dem Algorithmus aus Abbildung 5.7. Wie bereits in der Modellierung in Kapitel 4.6 behandelt, führen die in Abhängigkeit von der Belastung stellenweise auftretenden MPZ zu einem kontinuierlichen Schadenszuwachs, indem einzelne Stege versagen und sich dadurch ein kontinuierlicher Steifigkeitsabfall der Stäbe ergibt. Bei einer konstanten Kraftanregung folgt daraus eine zunehmende Verschiebung bzw. Dehnung in den Stäben. An den Stellen mit erhöhter Dehnung sind folglich die größten Werte des Schädigungsparameters zu erwarten. Im Fall der Biegung befindet sich dies an der eingespannten Stelle und im Fall der Zugbelastung bewirkt die konstante Dehnung eine über die Stablänge annähernd konstant anwachsende Schädigung. Die Mittelwerte der Schädigung sind zusammenfassend in den Abbildungen 8.3a und 8.3c dargestellt. Die lokalen, maximalen Schädigungen für jede simulierte Lastspielzahl sind in den Abbildungen zusätzlich mit quadratischen Symbolen gekennzeichnet. Des Weiteren nimmt der in Abbildung 8.3b bzw. 8.3d dargestellte Variationskoeffizient für beide Belastungsfälle von Anfangswerten $\gamma > 0,3$ für geringe Lastspielzahlen auf kleine Werte im Bereich hoher Schädigung ab. Allerdings fällt die Lokalisierung von γ_S nicht so deutlich aus wie für den Mittelwert μ_S .

Die Stellen, an denen der Schädigungsparameter zuerst den Wert 1 aufweist, lassen sich als Versagensstellen bezeichnen. Für die 500 Realisierungen ergeben sich damit die Histogramme in Abbildung 8.4. Theoretisch kann Versagen insbesondere bei einer Zugbelastung auch an mehreren Stellen gleichzeitig auftreten. Während das aus der klassischen Biegebalkentheorie bekannte, dehnungsbedingte Versagen an der fest eingespannten Stelle in Abbildung 8.4a dominiert, zeigt sich, dass die mikrostrukturelle Heterogenität zu einer erhöhten, relativen Häufigkeit der Versagensstellen x_V im Intervall $\Delta x \approx 0,15 \cdot L$ führt. Die Versagensstellen bei Zugbelastung werden durch die Heterogenität nicht wesentlich beeinflusst,

Abbildung 8.3: Schädigungsparameter S einseitig eingespannter Balken

da sich für das Versagen eine Gleichverteilung mit $\mathcal{H}(x_V) \approx 1,5\%$ ergibt, die der theoretischen Wahrscheinlichkeit von diskreten Gleichverteilungen zu $f = \frac{1}{\text{Stützstellen}} = \frac{1}{64} = 1,56\%$ entspricht (Abbildung 8.4b).

Bei der Entwicklung der gemittelten kritischen Schädigung S_{krit} , die dem Mittelwert der maximalen Schädigungen $\mu_{S_{max}}$ in den Stäben entspricht, ergeben sich die Verläufe in Abbildung 8.5. Die Stellen x_{krit} , an denen die kritische Schädigung auftritt, sind während der Lebensdauer nicht notwendigerweise konstant, wie bereits in Abbildung 8.3a bzw. 8.3c aufgezeigt wurde. Versagen tritt also nicht unbedingt an der Stelle auf, die bereits zu Beginn die größte Schädigung aufweist. In der Abbildung 8.5 ist zusätzlich die Entwicklung der kritischen Schädigung für ein homogenes Vergleichsmaterial dargestellt. Letzteres besitzt dabei die ortsunabhängigen Mittelwerte des Elastizitätsmoduls aus Abbildung 4.22a und die gemittelte relative Dichte. Die Heterogenität bewirkt folglich ein Anwachsen der kritischen Schädigung, da durch die Streuung des Schädigungsparameters lokal kritischere Werte als der des Mittelwertes auftreten können. Der maximale Zuwachs von S_{krit} im

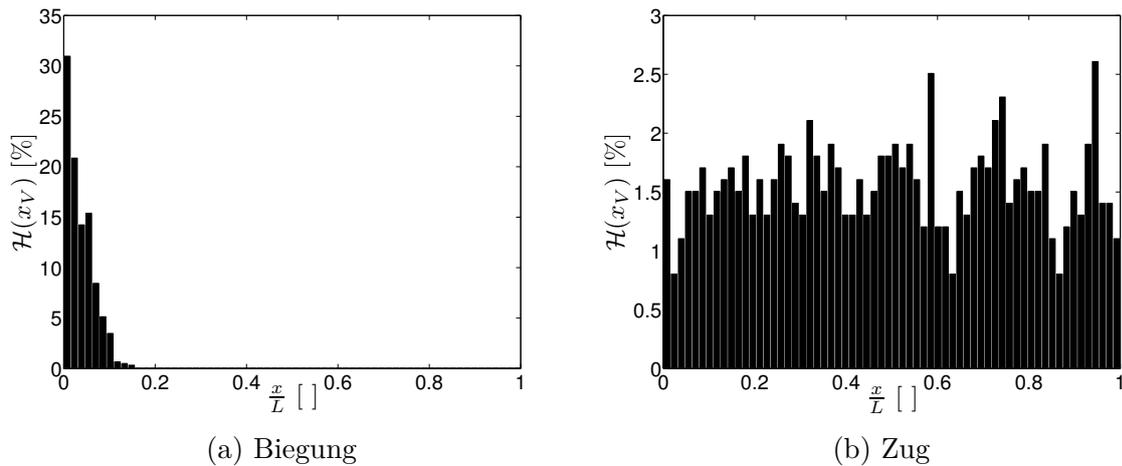


Abbildung 8.4: Versagensstellen x_V

Vergleich zum homogenen Material beträgt zu Beginn der Schädigungsentwicklung bei Biegung 40 % und bei Zugbelastung 80 % und nimmt anschließend kontinuierlich ab.

Das Anwachsen der kritischen Schädigung der heterogenen Stäbe bewirkt im Vergleich zu den homogenen Stäben ein Herabsetzen der Versagenslastspielzahl. Bei Biegebelastung wird die Versagenslastspielzahl von $N_V = 198\,920$ des homogenen Balken um 17 % auf $\mu_{N_V} = 165\,270$ ($\gamma_{N_V} = 12,3\%$) der heterogenen Balken herabgesetzt. Bei Zugbelastung ergibt sich ein analoges Herabsetzen um 33 % von $N_V = 181\,470$ auf $\mu_{N_V} = 122\,270$ ($\gamma_{N_V} = 4,8\%$). Durch das wesentlich breitere, kritische Schädigungsband bei Zugbelastung (quadratische Symbole in Abbildung 8.3c) bzw. durch die Gleichverteilung im örtlichen Versagensverhalten kann ein Zugstab innerhalb eines Schwinglastspielintervalls an

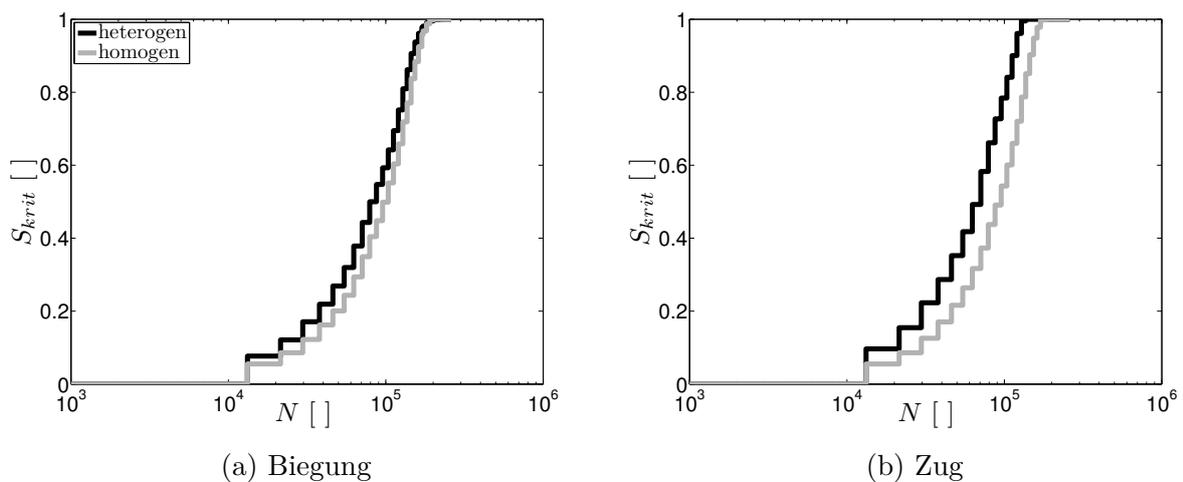
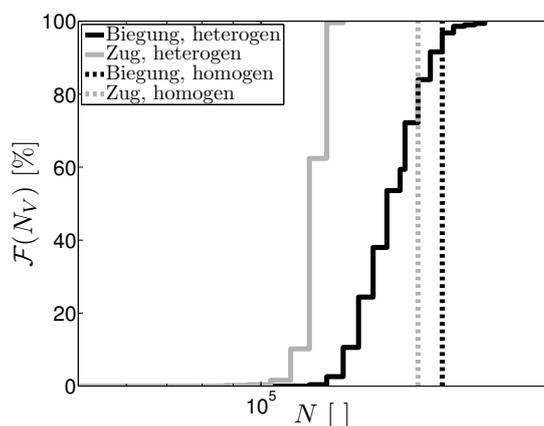
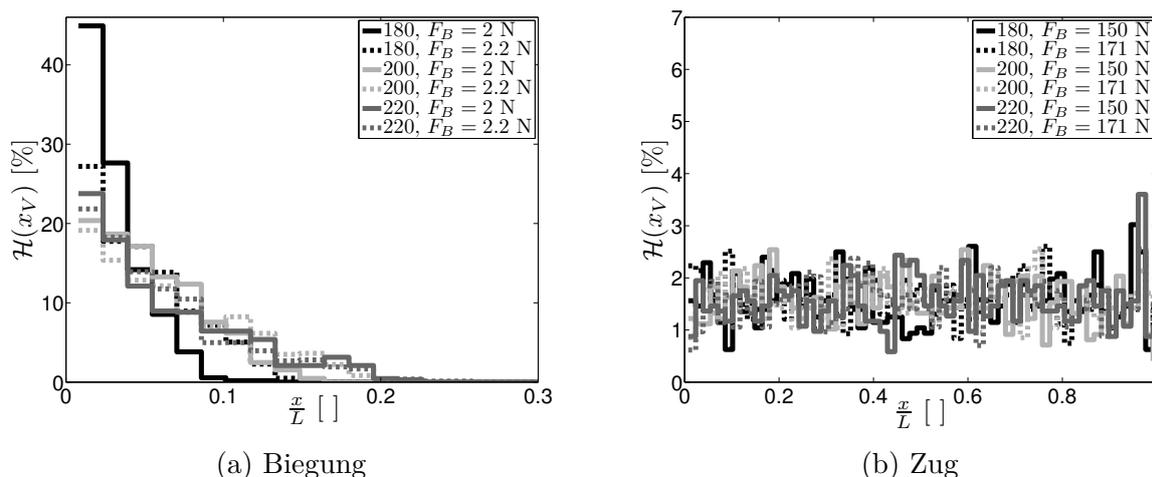


Abbildung 8.5: Kritische Schädigung S_{krit}

mehreren Stellen versagen, was im Vergleich zur Biegung zu einem stärkeren Herabsetzen von N_V und zu einer wesentlich geringeren Streuung γ_{N_V} führt. Dies zeigt sich auch in dem steilen Anstieg der Versagensfunktion für den Zugstab (Abbildung 8.6). Das zeitliche Intervall, in dem die Stäbe versagen, ist bei Biegung fast 2,5-mal so lang wie bei Zugbelastung.

Abbildung 8.6: Versagensfunktion $\mathcal{F}(N_V)$

Bei der Betrachtung der Versagensstellen x_V bei verschiedenen Stablängen und Belastungskräften ergeben sich die in Abbildung 8.7 gezeigten Verläufe. Bei der Biegung sind die relativen Häufigkeitsverläufe sehr unterschiedlich (Abbildung 8.7a). Für $L = 180 \text{ mm}$ und $F_B = 2 \text{ N}$ versagt der Balken mit einer Wahrscheinlichkeit von $\sim 45 \%$ für $x < 0,01 \cdot L$. Allerdings nimmt die maximale, relative Häufigkeit sowohl für zunehmende Belastungskräfte als auch Balkenlängen an absolutem Wert ab, während es vom Umfang $\frac{x}{L}$ her zunimmt.

Abbildung 8.7: Einfluss von L und F auf x_V

So bewirkt die Heterogenität bei einem Balken z.B. mit 220 mm , der mit einer Kraft von $F_B = 2,2\text{ N}$ belastet wird, eine relative Häufigkeit $\mathcal{H}(x_V)$ von $\sim 22\%$, die bis zu einer Länge von $x \approx 0,25 \cdot L$ kontinuierlich abnimmt. Dies unterscheidet sich klar vom Versagensverhalten des homogenen Balkens. Der Grund für die Verschiebung der Häufigkeit ist mit Hilfe der Biegedehnung $\varepsilon(x=0) = \frac{F_B L}{EI} d$ mit der Biegesteifigkeit EI und der halben Dicke d des Balkens an der Einspannstelle zu erklären. Sowohl die Kraft F_B als auch die Länge L bewirken an der Einspannstelle eine höhere Dehnung. Diese nimmt linear bis zum Balkenende auf $\varepsilon(x=L) = 0$ ab. Die erhöhte Dehnung an der Einspannstelle hat ein größeres Längenintervall der Balken mit potentiell kritischem Schädigungszuwachs zur Folge. Dadurch kann der Biegebalken auch an Stellen versagen, die fern von der Einspannstelle liegen. Im Gegensatz dazu hat im Fall von Zugbelastung (Abbildung 8.7b) weder die Stablänge noch die Belastungsamplitude einen wesentlichen Einfluss auf die Versagensstellen, da die Dehnung $\varepsilon = \frac{F_D}{EA}$ unabhängig von der Stablänge ist. Stattdessen tritt stets eine Gleichverteilung der Versagensstellen mit $\sim 1,55\%$ auf.

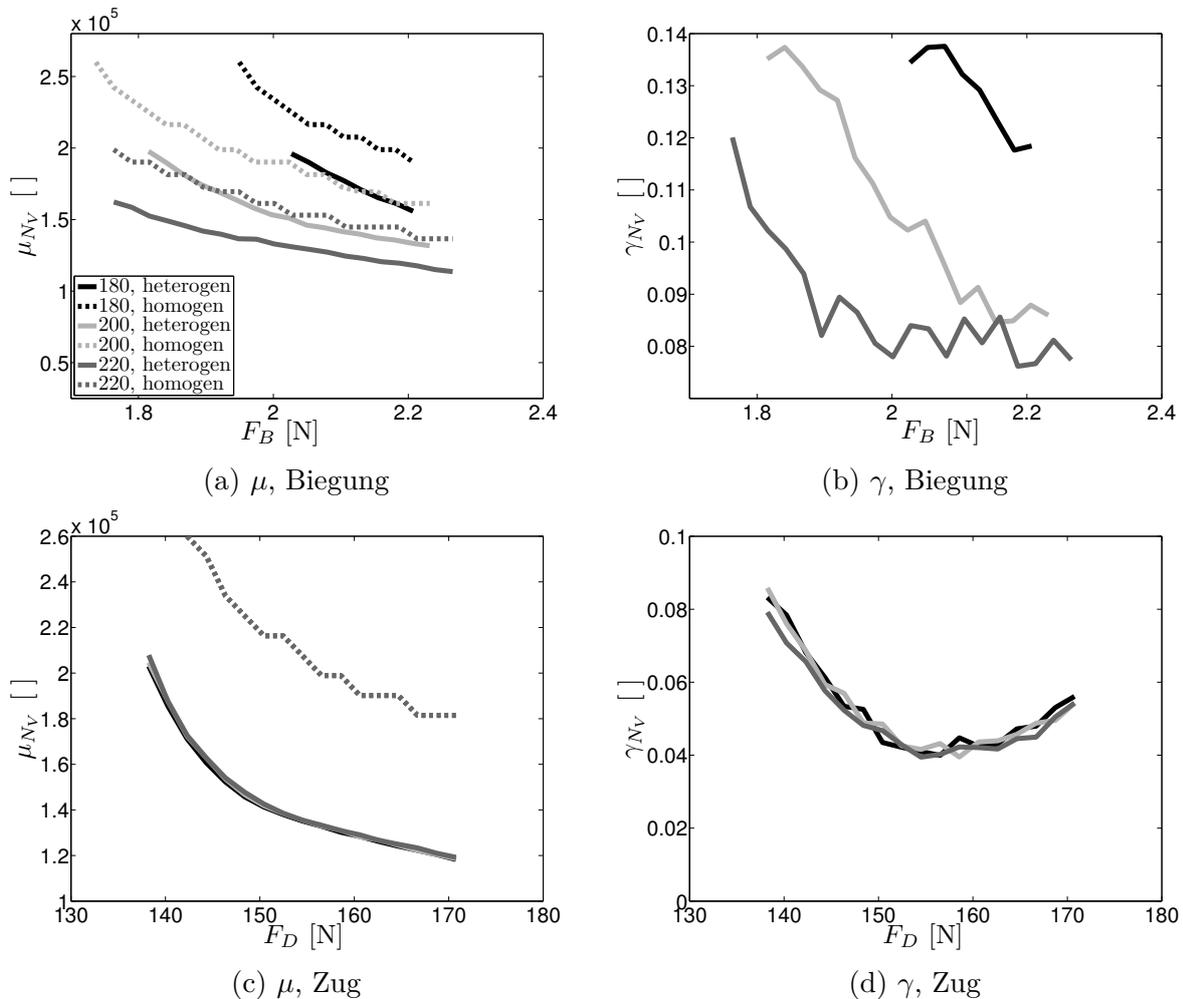


Abbildung 8.8: Einfluss von L und F auf N_V

Das Herabsetzen der Versagenslastspielzahl μ_{N_V} und deren Streuung γ_{N_V} ist stark abhängig von der Belastung und der Stablänge. Bei einer Variation der beiden Größen ergeben sich die für die Versagenslastspielzahl in Abbildung 8.8 gezeigten Verläufe. Dabei sind nur die Simulationspunkte angegeben, bei denen alle 500 Schaumstäbe versagen. Mit zunehmender Biegebelastung und Balkenlänge wird die Versagenslastspielzahl herabgesetzt. Dabei bewirkt die Heterogenität gegenüber dem homogenen Vergleichsmodell eine zusätzliche Herabsetzung von 12 % bis 20 % (Abbildung 8.8a). Der Variationskoeffizient weist unabhängig von der Balkenlänge einen annähernd gleichen charakteristischen Kraftverlauf mit je einem globalen Maximum von $\gamma_{N_V} \approx 0,14$ auf. Die Balkenlänge bewirkt lediglich eine Verschiebung des Maximums zu niedrigeren Biegekräften (Abbildung 8.8b). Betrachtet man hingegen die Verläufe über das Biegemoment $F_B \cdot L$ an der eingespannten Stelle, so liegen die Kurven für μ_{N_V} und γ_{N_V} jeweils näherungsweise übereinander. Somit ist die Versagenslastspielzahl und deren Streuung ausschließlich vom Biegemoment abhängig, da dies die Dehnung bestimmt. Die Ursache für den charakteristischen Verlauf des Variationskoeffizienten lässt sich anhand der Versagensstellen in Abbildung 8.7a herleiten. Wird die Belastung gesteigert, kann Versagen mit zunehmender Wahrscheinlichkeit bis zu einer Länge von $\sim 0,25 \cdot L$ je nach Balkenlänge auftreten. Da es damit mehr Möglichkeiten für ein Versagen des Balkens bei einem diskretisierten N gibt, fällt γ_{N_V} ab.

Bei Zugbelastung bewirkt die zunehmende Zugkraft ein Herabsetzen der Versagenslastspielzahl. Zusätzlich mindert die Heterogenität die Versagenslastspielzahl im Vergleich zu den homogenen Vergleichsstäben um 32 % bis 36 %. Wie aus Abbildung 8.8c deutlich wird, besitzt die Länge der Stäbe hingegen keinen Einfluss auf das Versagen, da die dafür verantwortliche Dehnung nur vom Querschnitt abhängt.

9 Zusammenfassung und Ausblick

Zellulare Festkörper im Allgemeinen und Metallschäume im Speziellen bieten gegenüber konventionellen Materialien sowohl in alltäglichen als auch in ingenieurwissenschaftlichen Anwendungen eine Reihe von Vorteilen. Einer davon ist die gute Dämpfungseigenschaft von mechanischen Schwingungen. Allerdings sind die komplexen Mechanismen, die dazu beitragen, bis heute nicht in ihrer Ganzheit beschrieben. Trotz des vorhandenen Forschungsbedarfs existiert zu diesem Themengebiet eine überschaubare Anzahl an wissenschaftlichen Veröffentlichungen. Diese basieren hauptsächlich auf experimentellen Untersuchungen zu den Ursachen der Dämpfung. Modellbasierte Untersuchungen der Dämpfungseinflüsse fehlen fast gänzlich. Einer der in diesen Arbeiten festgestellten Mechanismen ist die Dämpfung aufgrund von mikroplastischem Materialverhalten. Dieser besteht darin, dass durch lokale plastische Verformung Energie dissipiert wird, was sich im dämpfenden Verhalten der Metallschaumstruktur äußert. Dieses wird ausschließlich bei zeitabhängigen Belastungen hervorgerufen. Damit stellt sich bei der Betrachtung von mikroplastischem Verhalten zwangsläufig die Frage nach der Materialermüdung während der Lebensdauer des betreffenden Materials. Bei der ohnehin komplexen Modellierung zur Untersuchung der Auswirkung von Mikroplastizität auf Dämpfung und Lebensdauerverhalten von Metallschäumen muss auch die ausgeprägte Heterogenität der Mikrostruktur einbezogen werden. Zur Einsparung von Rechenzeit sind bei der Modellierung daher Ansätze zu wählen, die die Mikrostruktur durch geeignete Verfahren auf die makroskopische Schaumstruktur projizieren. Dies begründet die Motivation dieser Arbeit, die in der Modellierung der Mikroplastizität auf verschiedenen Größenskalen liegt.

Die vorliegende Dissertation beinhaltet die Modellierung und Simulation von Dämpfung sowie getrennt davon die Materialermüdung von heterogenen Metallschaumstrukturen über verschiedene Größenskalen hinweg. Dazu werden die benötigten Grundlagen der Multiskalenmodellierung erarbeitet. Anschließend wird auf die Generierung geeigneter Mikrostrukturen eingegangen. Dies beinhaltet sowohl offenzellige VORONOI-Schäume als auch offenzellige Aluminiumschäume, die auf Messungen und Bildanalyse realer Schäume basieren. Hiermit lassen sich FEM-Modelle erstellen. Die einzelnen Stege werden dabei als Biegebalken modelliert. Auf der Mesoskala werden zunächst Materialschränken für den Steifigkeitstensor durch Homogenisierung bestimmt. Darauf aufbauend wird unter Hinzunahme von ideal-plastischem Fließverhalten ein amplitudenabhängiger, homogenisierter Dämpfungsparameter berechnet. Für spätere Berechnungen auf der makroskopischen Skala mit linear-elastischem Verhalten wird zudem ein mesoskopisches Fließkriterium eingeführt. Da durch die Definition von uniformen Randbedingungen lediglich Schranken für die Materialparameter bestimmt werden können, wird ein iteratives Homogenisierungsschema vorgestellt. Dies basiert auf einem zum SVE zusätzlich hinzugefügten VE mit bereits homogenisierten Materialparametern (HVE), an das die Randbedingungen angebracht werden. Durch iterative Anpassung der Materialschränken an das so entstandene HVE ergeben sich bereits

nach drei Iterationsschritten eindeutige, scheinbare Materialparameter für das SVE. Zudem wird aufgezeigt, dass die Korrelation zwischen den beiden VE einen zu vernachlässigenden Einfluss auf die Ergebnisse besitzt. Die Ergebnisse werden sowohl anhand von zweidimensionalen Stäben mit heterogen verteilten Inhomogenitäten als auch an Metallschäumen validiert. Bei ersteren zeigt sich eine Ungenauigkeit des Algorithmus von $< 1\%$. Für die Metallschäume liegt der Fehler bei $\sim 5\%$. Dies liegt darin begründet, dass die Steifigkeit durch das Herausschneiden der Schaumwürfel aus einer Matrix herabgesetzt wird, da im Randbereich Zellen zerstört werden. Im Vergleich zu einer makroskopisch großen Struktur resultieren daher zwangsweise kleinere Steifigkeiten. Im Rahmen einer Homogenisierung von VE können mit dem Algorithmus nichtsdestotrotz zufriedenstellende Steifigkeits- und Dämpfungsparameter bestimmt werden.

Bei der Berechnung der Lebensdauer des Metallschaums werden die kritischen Stege in Abhängigkeit von der Last anhand einer hinterlegten WÖHLER-Kurve ermittelt und herausgelöst. Dabei erfolgt in den verbleibenden Stegen eine lineare Schadensakkumulation. Unter der Annahme, dass sich die Spannungsverteilung in den Stegen bei konstanter harmonischer Belastung bis zu ihrem Versagen nicht ändert, wird nach dem Herauslösen der zuvor gebrochenen Stege die Lastspielzahl um deren Versagenslastspielzahl aktualisiert. Daher sind nicht alle Lastzyklen zu simulieren, sondern nur diejenigen, in denen ein oder mehrere Stege brechen. Dieses Rechenschema wird solange wiederholt, bis ein zuvor definiertes Versagenskriterium erreicht wird. In dieser Arbeit ist dies bei Unterschreiten von 50% der anfänglichen Steifigkeit definiert. Im Rahmen einer abschließenden mesoskopischen Untersuchung der Korrelationen der Materialparameter zeigt sich für alle untersuchten Größen ein qualitativ gleiches Verhalten, das durch exponentielles Abfallen der Korrelation gekennzeichnet ist.

Zur Projizierung der homogenisierten Materialparameter auf die Makroskala wird die KARHUNEN-LOÈVE-Zerlegung angewendet. Zur Lösung der dafür benötigten FREDHOLM-Gleichung wird dabei die *wavelet*-GALERKIN-Methode herangezogen. Zur Abbildung der nicht-normalverteilten Zufallsfelder im Fall der Dämpfung werden die Zerlegungen zusätzlich iterativ an die tatsächliche Verteilung angepasst. Im Fall der Lebensdauerberechnung wird der Elastizitätsmodul zunächst additiv entsprechend seiner diskretisierten Amplituden und Lastspielzahlen zerlegt, um dann die Summanden mit der KARHUNEN-LOÈVE-Zerlegung auf die Makroskala zu projizieren. Zur Sicherstellung der Korrelation zwischen den einzelnen Termen wird zusätzlich eine CHOLESKY-Zerlegung durchgeführt. Aufgrund der additiven Zerlegung des Elastizitätsmoduls muss die Lastspielzahl in ausreichend großen Schritten diskretisiert werden, damit unphysikalisches Anwachsen des Elastizitätsmoduls ausgeschlossen werden kann. Ein Vergleich zwischen den zerlegten Zufallsfeldern und den homogenisierten Parametern zeigt eine weitestgehende Übereinstimmung. Lediglich die Streuung der Parameter während der Lebensdauer weist eine gewisse Abweichung auf. Im Rahmen einer MONTE-CARLO-Simulation können schließlich strukturdynamische Probleme bezüglich Dämpfung und Materialermüdung gelöst werden.

Ein Vergleich zwischen dem aufgebauten Multiskalenmodell mit Stichproben aus vollskalierten Modellen zeigt bei der Dämpfungsberechnung eine qualitative und quantitative

Übereinstimmung. Bei der Berechnung des Steifigkeitsverlustes während der Lebensdauer zeigt sich eine qualitativ richtige Wiedergabe der Verläufe. Allerdings bestehen gewisse quantitative Differenzen, die auf die Modellierung zurückzuführen sind. In einer Parameterstudie wird des Weiteren aufgezeigt, dass die Simulationen ohne Berücksichtigung von Trägheitseinflüssen durchgeführt werden können. Bei Einbeziehung der Stegdickenverteilung in den Modellen sind indes sechs Zwischenelemente in dem FEM-Modell ausreichend. Außerdem wird aufgezeigt, wie die relative Dichte und die Materialparameter des Ausgangswerkstoffes das mikroplastische Verhalten des Metallschaumes beeinflussen. In einer abschließenden Fallstudie wird die Auswirkung der Dämpfung aufgrund von Mikroplastizität sowie der Einfluss der heterogenen Mikrostruktur auf das makroskopische Strukturverhalten untersucht. Dabei zeigt sich für die untersuchten, heterogenen Aluminiumschäume, dass der Mittelwert der Dämpfung im Vergleich zu einem homogenen Vergleichsmaterial nur unwesentlich beeinflusst wird. Bei einer Fallstudie zur Untersuchung des Lebensdauerhaltens von Balken bewirkt die heterogene Mikrostruktur hingegen eine Zunahme des Schädigungsparameters und eine damit verbundene Herabsetzung der Versagenslastspielzahl von bis zu 50 %. Zudem beeinflusst die Heterogenität der Biegebalken je nach Belastungsamplitude und Balkenlänge entscheidend die auftretenden Versagensstellen.

Insgesamt zeigt die vorliegende Arbeit auf, dass Dämpfung aufgrund von Mikroplastizität zu nicht vernachlässigbaren Werten führen kann. Allerdings sind die gemittelten makroskopischen Dämpfungswerte aufgrund der nichtlinearen Abhängigkeit von der Belastungsamplitude um ein Vielfaches kleiner. Die Streuung des Dämpfungsparameters nimmt bei zunehmender Dämpfung stetig ab, wobei die Ausgangswerte sehr hoch sind. Die makroskopische Dämpfung wird nur unwesentlich durch die Heterogenität der Struktur beeinflusst. Bei der Lebensdauer hingegen weist der Steifigkeitsparameter gerade an den kritischen Stellen mit starkem Steifigkeitsverlust hohe Streuungen auf. Außerdem bewirkt die Heterogenität ein Herabsetzen der Versagenslastspielzahl. Abhängig von der Belastung und Geometrie der Struktur wird zudem eine Verschiebung der Versagensstellen bewirkt. Neben diesen Erkenntnissen reduziert das aufgebaute Multiskalenmodell die Rechenzeit je nach Problemstellung um den Faktor > 200 im Vergleich zu vollskalierten Modellen.

In weiterführenden Arbeiten kann überlegt werden, inwiefern das Homogenisierungsschema und das hier eingeführte Modell anzupassen oder zu erweitern sind, damit die Ergebnisse bezüglich der Steifigkeit bzw. des quantitativen Steifigkeitsverlaufs während der Lebensdauer zu genaueren Werten führen. So kann in einem nächsten Schritt der Schädigungsparameter mit SVE ohne Versteifung, aber auf das versteifte Modell normiert, berechnet werden oder der Größeneinfluss der SVE auf die Ergebnisse untersucht werden. Des Weiteren kann die Diskretisierung der Schwinglastspielzahlen weiterentwickelt werden, sodass es bei beliebig kleinen Diskretisierungen nicht zu unphysikalischen Ergebnissen des Elastizitätsmoduls kommt. Hier könnte eine *Proper Generalized Decomposition*, die Zufallsfelder in mehreren Dimensionen zerlegt, weiterhelfen. Allerdings ist auch hier zusätzlich sicherzustellen, dass es nicht zu unphysikalischen Ergebnissen kommt. Zudem könnte eine über die Schwinglastspielzahl monoton abfallende Funktion für den Elastizitätsmodul eingeführt werden, die zufallsverteilte Parameter beinhaltet. Darüber hinaus sind für eine weiter annähernde Abbildung der Realität zusätzliche Dämpfungsmechanismen in das

Modell miteinzubeziehen. Dies beinhaltet auch das Zusammenspiel der in dieser Arbeit getrennt voneinander untersuchten Aspekte, ermüdungsbedingte Dämpfung bzw. Dämpfung aufgrund von Rissentstehung und -wachstum während der Lebensdauer. Des Weiteren kann das aufgebaute Multiskalenmodell auf geschlossenzellige Schäume angewandt und auf andere Materialien übertragen werden, wie z.B. zur Untersuchung von Ermüdung in Knochen. Für weiterführende makroskopische Simulationen sind Untersuchungen dazu durchzuführen, inwiefern die Rechenzeit weiter reduziert werden kann, damit größere und komplexere Strukturen wie z.B. Platten untersucht werden können. Nicht zuletzt können auch Überlegungen hinsichtlich weiterer, experimenteller Validierungsmöglichkeiten der Modelle angestellt werden.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Zusammensetzung eines offenzelligen Metallschaumes	5
1.2	Qualitatives Deformationsverhalten eines Metallschaumes [17]	6
1.3	Unterteilung der Dämpfungsmechanismen [30]	7
1.4	Überblick zum Aufbau der Arbeit	18
2.1	Prinzip der Multiskalenmodellierung	20
2.2	Fließbedingungen im zweidimensionalen Hauptspannungsraum	27
2.3	Ebenen in der Stochastik [25]	28
2.4	Charakteristik einer normalverteilten Zufallsvariablen	29
2.5	Charakteristika zur Lebensdauer	34
3.1	Modellierung der Stegdickenverteilung	41
3.2	Metallschaummodelle	42
4.1	Homogenisierung im Rahmen der Multiskalenmodellierung für eine Realisierung θ_i	44
4.2	Histogramm des homogenisierten Elastizitätsmoduls	47
4.3	Verteilungsfunktionen des standardisierten Elastizitätsmoduls	48
4.4	Häufigkeit an MPZ für hSURB, $\hat{\sigma}_0 = 1,225 MPa$	55
4.5	Verhalten der SVE aufgrund von MPZ für hKURB	56
4.6	Dämpfungsverhalten aufgrund von MPZ	57
4.7	η^* in Abhängigkeit von $\mu_{\varepsilon_p,0}$	58
4.8	Eigenschaften von η^* , VORONOI	59
4.9	Schematische Darstellung der randeffektunabhängigen Homogenisierungsvarianten mit MVE und HVE	60
4.10	Schematische Darstellung des Modells zur iterativen, randeffektunabhängigen Homogenisierung	61
4.11	Algorithmus zur Berechnung des scheinbaren Elastizitätsmoduls	64
4.12	Berechnung von $E_{HVE}(\theta)$ bei vorgegebener Korrelation	65
4.13	Stab mit kreisförmigen Inhomogenitäten	66
4.14	Verschiedene Anordnungen der HVE am SVE	67
4.15	Qualitative Verschiebung der SVE-HVE-Modelle	68
4.16	Konvergenzverhalten von μ_{E^*} und γ_{E^*}	69
4.17	Randeffektunabhängiger Elastizitätsmodul	70
4.18	Verteilungsfunktion, DUOCEL, 6 ZE	71
4.19	Einfluss von \mathcal{R} auf E^* , VORONOI, 1 ZE	72
4.20	Randeffektunabhängiger Dämpfungsparameter, DUOCEL, 1 ZE	73
4.21	Algorithmus zur Berechnung der Lebensdauer eines SVE	76

4.22	$E^*(N)$, DUOCEL, 1 ZE	77
4.23	Prozentualer Anteil der gebrochenen Stege	78
4.24	$S^*(N)$, DUOCEL, 1 ZE	79
4.25	Versagenslastspielzahl N_V , DUOCEL, 1 ZE	80
4.26	Stochastische Eigenschaften während der Lebensdauer	80
4.27	Versagensverhalten, DUOCEL, 1 ZE	81
4.28	Ortsabhängigkeit der Materialparameter	82
4.29	$\mathcal{R}_{XY}(\Delta x)$, VORONOI, 1 ZE	83
5.1	HAAR-Funktionen	87
5.2	\mathcal{R}_{XX} -Abbildung der KL-Zerlegung	89
5.3	Ergebnisse der iterativen KL-Zerlegung von η_{hSURB}^* für 500 Realisationen und $N = 64$	90
5.4	Korrelationsgüte der Einträge in $\hat{\mathbf{X}}^0(\theta, x)$	93
5.5	Hystereseschleife des makroskopischen Dämpfungsmodells im Vergleich zur homogenisierten Dämpfung	94
5.6	MONTE-CARLO-Simulation zur Berechnung der Dämpfung	95
5.7	MONTE-CARLO-Simulation zur Berechnung der Lebensdauer	96
6.1	Skalenmodelle eines Metallschaumbalkens	97
6.2	Vergleich der Dämpfung bei Stäben zwischen VSM und MSM	98
6.3	Vergleich der Steifigkeitsabnahme bei Stäben zwischen VSM und MSM	100
7.1	Einfluss der Masse auf das Dämpfungsverhalten, VORONOI, hKURB	103
7.2	Einfluss quasi-statischer und dynamischer Rechnung auf das Lebensdauer- verhalten	104
7.3	Plastische Dehnung in Abhängigkeit der Anzahl an ZE, VORONOI, hKURB, 50 Realisationen	105
7.4	Plastische Dehnung in Abhängigkeit von der relativen Dichte, VORONOI- Schäume, hKURB, 50 Realisationen	106
7.5	Untersuchtes Materialverhalten in VORONOI-Schäumen	107
7.6	Plastische Dehnung in Abhängigkeit von elastischen und plastischen Mate- rialparametern, 1 ZE, VORONOI, hKURB, 50 Realisationen	107
8.1	Dämpfungsverhalten von Biegebalken, $L = 220 \text{ mm}$	110
8.2	Einfluss von L und F auf d_{makro}	111
8.3	Schädigungsparameter S einseitig eingespannter Balken	113
8.4	Versagensstellen x_V	114
8.5	Kritische Schädigung S_{krit}	114
8.6	Versagensfunktion $\mathcal{F}(N_V)$	115
8.7	Einfluss von L und F auf x_V	115
8.8	Einfluss von L und F auf N_V	116

Tabellenverzeichnis

1.1	Anwendungsbereiche technischer Schäume	3
1.2	Zusammenfassung der Dämpfungsmechanismen im Metallschaum	12
2.1	Nomenklatur der Tensorstufen	22
3.1	Materialdaten von Aluminium	41
4.1	Scheinbare Materialparameter eines heterogenen Stabs	67
4.2	Scheinbare Materialparameter eines DUOCEL-Stabs	69
4.3	Koeffizienten der WEIBULL-Verteilung	81

Literaturverzeichnis

- [1] <http://stats.stackexchange.com/questions/15011>. – aufgerufen am 10.10.2016
- [2] https://www.iwu.fraunhofer.de/de/schaumzentrum/produkte_maschinenbau.html. – aufgerufen am 20.10.2016
- [3] <http://www.ergaerospace.com/index.html>. – aufgerufen am 24.10.2016
- [4] ARHIPOV, I. ; GOLOVIN, I. ; GOLOVIN, S. A.: Damping caused by fatigue in porous 316L steel. In: *Philosophical Magazine* 86 (2006), Nr. 16, S. 2399–2406
- [5] ARHIPOV, I. ; GOLOVIN, I. ; GOLOVIN, S. ; SINNING, H.-R. : Damping caused by microplasticity in porous 316L steels. In: *Philosophical Magazine* 85 (2005), Nr. 14, S. 1557–1574
- [6] ASHBY, M. : The properties of foams and lattices. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 364 (2006), Nr. 1838, S. 15–30
- [7] ASHBY, M. ; EVANS, A. ; FLECK, N. ; HUTCHINSON, J. ; WADLEY, H. ; GIBSON, L. : *Metal foams: a design guide*. Elsevier, 2000
- [8] BANHART, J. ; BAUMEISTER, J. ; WEBER, M. : Damping properties of aluminium foams. In: *Materials Science and Engineering A205* (1996), S. 221–228
- [9] BAXTER, S. ; GRAHAM, L. : Characterization of random composites using moving-window technique. In: *Journal of Engineering Mechanics* 126 (2000), Nr. 4, S. 389–397
- [10] BLANTER, M. ; GOLOVIN, I. ; NEUHÄUSER, H. ; SINNING, H.-R. : *Internal Friction in Metallic Materials*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007
- [11] BOOMSMA, K. ; POULIKAKOS, D. ; VENTIKOS, Y. : Simulations of flow through open cell metal foams using an idealized periodic cell structure. In: *International Journal of Heat and Fluid Flow* 24 (2003), S. 825–834
- [12] BOOTS, B. : The arrangement of cells in “random” networks. In: *Metallography* 15 (1982), Nr. 1, S. 53–62
- [13] BÖHLKE, T. : *Skript zur Vorlesung Höhere Technische Festigkeitslehre*, 2009
- [14] BÖHLKE, T. : *Skript zur Vorlesung Mathematische Methoden der Festigkeitslehre*, 2009

- [15] CHRISTENSEN, R. ; LO, K. : Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 27 (1979), Nr. 4, S. 315–330
- [16] DARWIN, C. : *On the Origin of Species*. 1859
- [17] DEGISCHER, H.-P. ; KRISZT, B. : *Handbook of cellular metals*. Wiley-vch Weinheim, 2002
- [18] DEMIRAY, S. ; BECKER, W. ; HOHE, J. : Investigation of the fatigue behavior of open cell foams by a micromechanical 3-D model. In: *Materials Science and Engineering A* 504 (2009), S. 141–149
- [19] DI PAOLA, M. F.: *Modélisation multi-échelles du comportement thermo-élastique de ccomposite à particlues sphériques*, École Centrale Paris, Diss., 2010
- [20] DRUGAN, W. ; WILLIS, J. : A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 44 (1996), Nr. 4, S. 497–524
- [21] GANESAN, R. ; KOWDA, V. K.: Free-vibration of Composite Beam-columns with Stochastic Material and Geometric Properties Subjected to Random Axial Loads. In: *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 24 (2005), Nr. 1
- [22] GASCH, R. ; KNOTHE, K. ; LIEBICH, R. : *Strukturodynamik: Diskrete Systeme und Kontinua*. Springer Verlag, 2012
- [23] GEISSENDÖRFER, M. ; LIEBSCHER, A. ; PROPPE, C. ; REDENBACH, C. ; SCHWARZER, D. : Statistical Volume Elements for Metal Foams. In: *Multiscale Modeling and Uncertainty Quantification of Materials and Structures*. Springer, 2014, S. 171–185
- [24] GEISSENDÖRFER, M. ; LIEBSCHER, A. ; PROPPE, C. ; REDENBACH, C. ; SCHWARZER, D. : Stochastic multiscale modeling of metal foams. In: *Probabilistic Engineering Mechanics* 37 (2014), S. 132–137
- [25] GEORGII, H.-O. : *Stochastik Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. 3. Walter de Gruyter Berlin New York, 2007
- [26] GHANEM, R. : Stochastic finite elements with multiple random non-Gaussian properties. In: *Journal of Engineering Mechanics* 125 (1999), Nr. 1, S. 26–40
- [27] GIBSON, L. ; ASHBY, M. ; HARLEY, B. : *Cellular Materials in Nature and Medicine*. Cambridge University Press, New York, 2010
- [28] GIBSON, L. J. ; ASHBY, M. F.: *Cellular solids*. 2. Cambridge University Press, 1997
- [29] GITMAN, I. ; ASKES, H. ; SLUYS, L. : Representative volume: existence and size determination. In: *Engineering fracture mechanics* 74 (2007), Nr. 16, S. 2518–2534

-
- [30] GOLOVIN, I. ; SINNING, H.-R. : Damping in some cellular metallic materials. In: *Journal of Alloys and Compounds* 355 (2003), S. 2–9
- [31] GOLOVIN, I. ; SINNING, H.-R. : Damping of Some Aluminium Foams at Low Amplitudes. In: *Solid State Phenomena* 89 (2003), S. 261–266
- [32] GOLOVIN, I. ; SINNING, H.-R. : Internal friction in metallic foams and some related cellular structures. In: *Materials Science and Engineering* (2004), Nr. A370, S. 504–511
- [33] GOLOVIN, I. ; SINNING, H.-R. ; ARHIPOV, I. ; GOLOVIN, S. ; BRAM, M. : Damping in some cellular metallic materials due to microplasticity. In: *Materials Science and Engineering* 370 (2004), S. 531–536
- [34] GOLOVIN, I. ; SINNING, H.-R. ; GÖKEN, J. ; RIEHEMANN, W. : Fatigue-related damping in some cellular metallic materials. In: *Materials Science and Engineering* 370 (2004), S. 537–541
- [35] GRANATO, A. ; LÜCKE, K. : Application of Dislocation Theory to Internal Friction Phenomena at High Frequencies. In: *Journal of Applied Physics* 27 (1956), Nr. 7, S. 789–805
- [36] GROSS, D. ; SEELIG, T. : *Bruchmechanik: Mit einer Einführung in die Mikromechanik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007
- [37] GUAN, D. ; WU, J. ; WU, J. ; LI, J. ; ZHAO, W. : Acoustic performance of aluminum foams with semiopen cells. In: *Applied Acoustics* 87 (2015), S. 103–108
- [38] GUI, M. ; WANG, D. ; WU, J. ; LI, C. : Deformation and damping behaviors of foamed Al-Si-SiCp composite. In: *Materials Science and Engineering* A286 (2000), S. 282–288
- [39] GUSEV, A. : Representative volume element size for elastic composites: a numerical study. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 45 (1997), Nr. 9, S. 1449–1459
- [40] GÖKEN, J. ; RIEHEMANN, W. : Thermoelastic damping of the low density metals AZ91 and DISPAL. In: *Materials Science and Engineering* A324 (2002), S. 134–140
- [41] HADERS, H. : *Ermüdung von Aluminiumschaum*, Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig, Diss., 2005
- [42] HAN, F. ; ZHU, Z. ; LIU, C. : Nonlinear internal friction character of foamed aluminum. In: *Scripta Materialia* 37 (1997), Nr. 9, S. 1441–1447
- [43] HAN, F. ; ZHU, Z. ; LIU, C. ; GAO, J. : Damping Behavior of Foamed Aluminum. In: *Metallurgical and Materials Transactions A* 30 (1999), Nr. 3, S. 771–776

- [44] HAO, G. ; HAN, F. ; WU, J. ; WANG, X. : Mechanical and damping properties of porous AZ91 magnesium alloy. In: *Powder Metallurgy* 50 (2007), Nr. 2, S. 127–131
- [45] HARTE, A.-M. ; FLECK, N. ; ASHBY, M. : Fatigue failure of an open cell and a closed cell aluminium alloy foam. In: *Acta materialia* 47 (1999), Nr. 8, S. 2511–2524
- [46] HASHIN, Z. : Analysis of composite materials-a survey. In: *Journal of Applied Mechanics* 50 (1983), Nr. 3
- [47] HASHIN, Z. : The elastic moduli of heterogeneous materials. In: *Journal of Applied Mechanics* 29 (1962), Nr. 1, S. 143–150
- [48] HAZANOV, S. ; HUET, C. : Order relationships for boundary conditions effect in heterogeneous bodies smaller than the representative volume. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 42 (1994), Nr. 12, S. 1995–2011
- [49] HIGHAM, N. J.: Computing a nearest symmetric positive semidefinite matrix. In: *Linear Algebra and its Applications* 103 (1988), S. 103–118
- [50] HILL, R. : A self-consistent mechanics of composite materials. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 13 (1965), Nr. 4, S. 213–222
- [51] HILL, R. : Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11 (1963), Nr. 5, S. 357–372
- [52] HOOKE, R. : *Micrographia*. The Royal Society, 1664
- [53] HUET, C. : Application of variational concepts to size effects in elastic heterogeneous bodies. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 38 (1990), Nr. 6, S. 813–841
- [54] HÜBEL, H. : Basic conditions for material and structural ratcheting. In: *Nuclear Engineering and Design* 162 (1996), S. 55–65
- [55] INGRAHAM, M. ; DEMARIA, C. ; ISSEN, K. ; MORRISON, D. : Low cycle fatigue of aluminum foam. In: *Materials Science and Engineering A* 504 (2009), S. 150–156
- [56] JANG, W.-Y. ; KRAYNIK, A. ; KYRIAKIDES, S. : On the microstructure of open-cell foams and its effect on elastic properties. In: *International Journal of Solids and Structures* 45 (2008), Nr. 7, S. 1845–1875
- [57] KANIT, T. ; FOREST, S. ; GALLIET, I. ; MOUNOURY, V. ; JEULIN, D. : Determination of the size of the representative volume element for random composite: statistical and numerical approach. In: *International Journal of Solids and Structures* 40 (2003), S. 3647–3679
- [58] KIM, T. ; HODSON, H. ; LU, T. : Fluid-flow and endwall heat-transfer characteristics of an ultralight lattice-frame material. In: *International Journal of Heat and Mass Transfer* 47 (2004), S. 1129–1140

-
- [59] KINRA, V. ; WOLFENDEN, A. : *M3D: Mechanics and Mechanisms of Material Damping*. ASTM STP 1169, 1992
- [60] KOLMOGOROV, A. : *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Springer Verlag, Heidelberg, 1933
- [61] LAUTENSACK, C. ; ZUYEV, S. : Random laguerre tessellations. In: *Advances in applied probability* (2008), S. 630–650
- [62] LAZAN, B. : *Damping of Materials and Memebers in Structural Mechanics*. 1. Pergamon Press Inc., 1968
- [63] LEHN, J. ; WEGMANN, H. : *Einführung in die Statistik*. B. G. Teubner Verlag / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 2006
- [64] LEMAITRE, J. : A Continuous Damage Mechanics Model for Ductile Fracture. In: *Journal of Engineering Materials and Technology* 107 (1985), S. 83–89
- [65] LI, C.-C. ; DER KIUREGHIAN, A. : Optimal discretization of random fields. In: *Journal of engineering mechanics* 119 (1993), Nr. 6, S. 1136–1154
- [66] LIEBSCHER, A. ; REDENBACH, C. : Statistical analysis of the local strut thickness of open cell foams. In: *Image Analysis and Stereology* 32 (2013), S. 1–13
- [67] LIU, C. ; ZHU, Z. ; F.S., H. ; BANHART, J. : Low-frequency internal friction of foamed Al. In: *Philosophical Magazine A* 78 (1998), Nr. 6, S. 1329–1337
- [68] LIU, C. ; ZHU, Z. ; HAN, F. ; BANHART, J. : Internal friction of foamed aluminium in the range of acoustic frequencies. In: *Journal of Materials Science* 33 (1998), S. 1769–1775
- [69] LIU, C. ; ZHU, Z. ; HAN, F. ; BANHART, J. : Study on nonlinear damping properties of foamed Al. In: *Philiosophical Magazine* 80 (2000), Nr. 5, S. 1085–1092
- [70] LU, T. ; HESS, A. ; ASHBY, M. : Sound absorption in metallic foams. In: *Journal of Applied Physics* 85 (1999), S. 7528–7539
- [71] LU, T. ; STONE, H. ; ASHBY, M. : Heat transfer in open-cell metal foams. In: *Acta Materialia* 46 (1998), Nr. 10, S. 3619–3635
- [72] MAKIYAMA, A. ; VAJJHALA, S. ; GIBSON, L. : Analysis of Crack Growth in a 3D Voronoi Structure: A Model for Fatigue in Low Density Trabecular Bone. In: *Journal of Biomechanical Engineering* 124 (2002), Nr. 5, S. 512–520
- [73] MANGIPUDI, K. ; BUUREN, S. van ; ONCK, P. : The microstructural origin of strain hardening in two-dimensional open-cell metal foams. In: *International Journal of Solids and Structures* 47 (2010), S. 2081–2096

- [74] MANGIPUDI, K. ; ONCK, P. : Multifoams modelling of damage and failure in two-dimensional metallic foams. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 59 (2011), S. 1437–1461
- [75] MANOHAR, C. ; KEANE, A. : Axial vibrations of a stochastic rod. In: *Journal of sound and vibration* 165 (1993), Nr. 2, S. 341–359
- [76] MANTOGLOU, A. ; WILSON, J. L.: The turning bands method for simulation of random fields using line generation by a spectral method. In: *Water Resources Research* 18 (1982), Nr. 5, S. 1379–1394
- [77] MASLOV, K. ; KINRA, V. : Damping capacity of carbon foam. In: *Materials Science and Engineering A* 367 (2004), S. 89–95
- [78] MATTHIES, H. ; BRENNER, C. ; BUCHER, C. ; SOARES, C. : Uncertainties in probabilistic numerical analysis of structures and solids-stochastic finite elements. In: *Structural safety* 19 (1997), Nr. 3, S. 283–336
- [79] MCCULLOUGH, K. ; FLECK, N. ; ASHBY, M. : The stress-life fatigue behaviour of aluminium alloy foams. In: *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 23 (2000), Nr. 199-208
- [80] MILLS, N. : *Polymer Foams Handbook: Engineering and Biomechanics Applications and Design Guide*. Elsevier Ltd., 2007
- [81] MITTAG, H.-J. : *Statistik - Eine Einführung mit interaktiven Elementen*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014
- [82] MOENS, D. ; VANDEPITTE, D. : Recent Advances in Non-probabilistic Approaches for Non-deterministic Dynamic Finite Element Analysis. In: *Archives of Computational Methods in Engineering* 13 (2006), Nr. 3, S. 389–464
- [83] MORI, T. ; TANAKA, K. : Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. In: *Acta metallurgica* 21 (1973), Nr. 5, S. 571–574
- [84] MOTZ, C. ; FRIEDL, O. ; PIPPAN, R. : Fatigue crack propagation in cellular metals. In: *International Journal fo Fatigue* 27 (2005), S. 1571–1581
- [85] NACHUM, S. ; ALTUS, E. : Natural frequencies and mode shapes of deterministic and stochastic non-homogeneous rods and beams. In: *Journal of Sound and Vibration* 302 (2007), S. 903–924
- [86] NING, H. ; JANOWSKI, G. ; VAIDYA, U. ; HUSMAN, G. : Thermoplastic sandwich structure design and manufacturing for the body panel of mass transit vehicle. In: *Composite Structures* 80 (2007), S. 82–91
- [87] OHSER, J. ; SCHLADITZ, K. : *3D images of materials structures: processing and analysis*. John Wiley & Sons, 2009

- [88] OSTOJA-STARZEWSKI, M. : Random field models of heterogeneous materials. In: *International Journal of Solids and Structures* 35 (1998), Nr. 19, S. 2429–2455
- [89] OSTOJA-STARZEWSKI, M. : *Microstructural Random and Scaling in Mechanics of Materials*. Chapman & Hall/CRC, 2007
- [90] PAIBOON, J. : *Numerical analysis of homogenization using random finite element method*, Diss., 2007
- [91] PHOON, K. ; HUANG, H. ; QUEK, S. : Simulation of strongly non-Gaussian processes using Karhunen-Loeve expansion. In: *Probabilistic Engineering Mechanics* 20 (2005), S. 188–198
- [92] PHOON, K. ; HUANG, S. ; QUEK, S. : Implementation of Karhunen-Loeve expansion for simulation using a wavelet-Galerkin scheme. In: *Probabilistic Engineering Mechanics* 17 (2002), S. 293–303
- [93] PINTO, H. ; ARWADE, S. : Damage accumulation model for aluminium-closed cell foams subjected to fully reversed cyclic loading. In: *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 34 (2011), Nr. 12, S. 1021–1034
- [94] PROPPE, C. : *Skript zur Vorlesung Stochastische Mechanik*, 2006
- [95] REUSS, A. : Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. In: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 9 (1929), Nr. 1, S. 49–58
- [96] RICHARD, H. ; SANDER, M. : *Fatigue Crack Growth*. Springer International Publishing Switzerland 2016, 2016
- [97] SAB, K. : On the homogenization and the simulation of random materials. In: *European Journal of Mechanics - A/Solids* 11 (1992), S. 585–607
- [98] SAID, S. E. ; DICKEY, D. A. : Testing for unit roots in autoregressive-moving average models of unknown order. In: *Biometrika* 71 (1984), Nr. 3, S. 599–607
- [99] SCHAFFNER, G. ; GUO, X. ; SILVA, M. ; GIBSON, L. : Modelling fatigue damage accumulation in two-dimensional Voronoi honeycombs. In: *International Journal of Mechanical Sciences* 42 (2000), S. 645–656
- [100] SCHUËLLER, G. ; PRADLWARTER, H. : Uncertain linear systems in dynamics: Retrospective and recent developments by stochastic approaches. In: *Engineering Structures* 31 (2009), Nr. 11, S. 2507–2517
- [101] SCHWARZER, D. : *Stochastische und mehrskalige Modellierung der Strukturdynamik von Metallschäumen*, Karlsruher Institut für Technologie, Diss., 2010
- [102] SEPAHVAND, K. : Stochastic finite element method for random harmonic analysis of composite plates with uncertain modal damping parameters. In: *Journal of Sound and Vibration* 400 (2017), S. 1–12

- [103] SEPAHVAND, K. ; MARBURG, S. : Stochastic FEM to Structural Vibration with Parametric Uncertainty. In: *Multiscale Modeling and Uncertainty Quantification of Materials and Structures*. Springer, 2014, S. 299–306
- [104] SEPAHVAND, K. ; MARBURG, S. ; HARDTKE, H.-J. : Stochastic free vibration of orthotropic plates using generalized polynomial chaos expansion. In: *Journal of Sound and Vibration* 331 (2012), Nr. 1, S. 167–179
- [105] SOIZE, C. : Stochastic modeling of uncertainties in computational structural dynamics—recent theoretical advances. In: *Journal of Sound and Vibration* 332 (2013), Nr. 10, S. 2379–2395
- [106] STEFANOÛ, G. : The stochastic finite element method: Past, present and future. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (2009), S. 1031–1051
- [107] STEFANOÛ, G. ; PAPADRAKAKIS, M. : Assessment of spectral representation and Karhunen–Loève expansion methods for the simulation of Gaussian stochastic fields. In: *Computer methods in applied mechanics and engineering* 196 (2007), Nr. 21, S. 2465–2477
- [108] SUDRET, B. ; DER KIUREGHIAN, A. : *Stochastic finite element methods and reliability: a state-of-the-art report*. Department of Civil and Environmental Engineering, University of California Berkeley, CA, 2000
- [109] SUGIMURA, Y. ; RABIEL, A. ; EVANS, A. ; HARTE, A. ; FLECK, N. : Compression fatigue of a cellular Al alloy. In: *Materials Science and Engineering A* 269 (1999), S. 38–48
- [110] SÁNCHEZ-SILVA, M. ; KLUTKE, G.-A. : *Reliability and Life-Cycle Analysis of Deteriorating Systems*. Springer International Publishing Switzerland, 2016
- [111] TEPLY, J. ; DVORAK, G. : Bounds on overall instantaneous properties of elastic-plastic composites. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 36 (1988), Nr. 1, S. 29–58
- [112] THOMSON, W. : On the Division of Space with Minimum Partitional Area. In: *Philosophical Magazine* 24 (1887), S. 151
- [113] VAICAITIS, R. : Free vibrations of beams with random characteristics. In: *Journal of Sound and Vibration* 35 (1974), Nr. 1, S. 13–21
- [114] VOIGT, W. : Theoretische Studien über die Elasticitätsverhältnisse der Krystalle. In: *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen* 34 (1887), S. 3–51
- [115] WANDINGER, J. : *Unterlagen zur Vorlesung Elastodynamik 1*, 2013

-
- [116] WAUER, J. : *Kontinuumsschwingungen: Vom einfachen Strukturmodell zum komplexen Mehrfeldsystem*. Wiesbaden : Vieweg+Teubner / GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 2008. – In: Springer-Online
- [117] ZENER, C. : Internal Friction in Solids, I. Theory of internal friction in reeds. In: *Physical Review* 52(1) (1937), S. 230–235
- [118] ZENER, C. : Internal friction in solids, II. General theory of thermoelastic internal friction. In: *Physical Review* 53 (1938), S. 90–99
- [119] ZHANG, J. ; ELLINGWOOD, B. : Orthogonal Series Expansions of Random Fields in Reliability Analysis. In: *Journal of Engineering Mechanics* 120 (1994), Nr. 12, S. 2660–2677
- [120] ZHAO, M. ; FAN, X. ; FANG, Q.-Z. ; WANG, T. : Experimental Investigation of the fatigue of closed-cell aluminum alloy foam. In: *Materials Letters* 160 (2015), S. 68–71
- [121] ZHOU, J. ; GAO, J. ; ALLAMEH, S. ; CUITINO, A. ; SOBOYEJO, W. : Multiscale Deformation of Open Cell Aluminum Foams. In: *Mechanics of Advanced Materials and Structures* 12 (2005), Nr. 3, S. 201–216
- [122] ZHOU, J. ; SHROTRIYA, P. ; SOBOYEJO, W. : Mechanisms and mechanics of compressive deformation in open-cell Al foamS. In: *Mechanics of Materials* 36 (2004), S. 781–797
- [123] ZHOU, J. ; SOBOYEJO, W. : Compression-compression fatigue of open cell aluminum foams: macro-/micro- mechanics and the effects of heat treatment. In: *materials Science and Engineering A* 369 (2004), S. 23–35
- [124] ZHU, H. ; THORPE, S. ; WINDLE, A. : The geometrical properties of irregular two-dimensional Voronoi tessellations. In: *Philosophical Magazine A* 81 (2001), Nr. 12, S. 2765–2783