

Wärmeflussmodellierung turbulenter Kanalströmungen bei niedrigen Prandtl-Zahlen

Zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Ingenieurwissenschaften
der Fakultät für Maschinenbau
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

genehmigte
Dissertation
von

Dipl.-Ing. Florian Trimborn
aus Ludwigshafen am Rhein

Tag der mündlichen Prüfung: 15.12.2017

Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. Martin Gabi
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Robert Stieglitz



Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung 3.0 Deutschland Lizenz (CC BY 3.0 DE): <http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/de/>

Florian Trimborn

Wärmeflussmodellierung turbulenter Kanalströmungen bei niedrigen Prandtl-Zahlen

Dissertation

Karlsruhe 2017

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Fachgebiet Strömungsmaschinen des Karlsruher Instituts für Technologie.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Martin Gabi für die Möglichkeit der Anfertigung dieser Arbeit, das entgegengebrachte Vertrauen und den verlässlichen Rückhalt als Hauptreferent.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Robert Stieglitz danke ich für die Übernahme des Korreferats und die begleitenden, wissenschaftlichen und stets anregenden Diskussionen zu meiner Arbeit während der jährlichen Treffen der Helmholtz-Allianz LIMTECH.

Frau Prof. Dr.-Ing. Bettina Frohnappel, der Vorsitzenden des Prüfungsausschusses, gilt ebenfalls mein Dank.

Herrn Dr.-Ing. Balazs Pritz möchte ich danken für die unzähligen lehrreichen Diskussionen im Bereich der Numerik, die Anregungen zu dieser Arbeit und die hilfreichen Ratschläge, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Der Helmholtz-Allianz LIMTECH möchte ich danken für die Finanzierung und Förderung meiner wissenschaftlichen Tätigkeit sowie für die Weiterbildung in unterschiedlichen Gebieten der Flüssigmetall-Technologien während der jährlichen Tagungen.

Bedanken möchte ich mich auch bei allen jetzigen und ehemaligen Kollegen des Fachgebiets Strömungsmaschinen für die stets freundschaftliche Arbeitsatmosphäre und konstruktive Kritik.

Mein ganz besonderer Dank gilt abschließend meiner Familie, speziell meinen Eltern Ulrike und Thomas, meiner älteren Schwester Friederike und ihrem Ehemann Dirk, sowie meiner jüngeren Schwester Barbara, die mich auch außerhalb meiner wissenschaftlichen Tätigkeit stets tatkräftig unterstützt und motiviert haben.

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beschreibt die Untersuchung existierender Schließungsansätze der Energieerhaltungsgleichung in turbulenten Platten- und Rechteckkanalströmungen unter Berücksichtigung des Einflusses der molekularen Prandtl-Zahl. Hier im Fokus stehen Flüssigmetallströmungen, die durch ihre spezifisch niedrigen molekularen Prandtl-Zahlen charakterisiert werden. Im Gegensatz zu konventionellen Fluiden ist ein Transport von großen Mengen an Wärmeenergie bereits durch rein molekulare Diffusion möglich. Diese Eigenschaft erlaubt es, thermodynamische Prozesse auf höheren Temperaturniveaus einphasig betreiben zu können und somit den Gesamtwirkungsgrad zu verbessern. Flüssigmetallströmungen können in verschiedenen technischen Anwendungen eingesetzt werden, wie z.B. in flüssigmetallgekühlten Reaktoren, konzentrierter Solarthermie (Concentrated Solar Power - CSP) oder zur Umwandlung von Wärmeenergie in elektrische Energie (Power Conversion System - PCS).

Experimentelle Untersuchungen von Flüssigmetallströmungen sind zeit- und kostenaufwendig, da z.B. flüssiges Natrium hochreaktiv in Kombination mit Wasser oder Luft und eutektisches Blei-Bismuth stark korrosiv ist. Um diese Technologien, Prozesse und Forschungsanlagen dennoch hinsichtlich ihres Designs oder ihrer Leistungsfähigkeit zu beurteilen und optimieren, besteht daher ein wachsendes Interesse an unterstützenden numerischen Werkzeugen, z.B. in Form einer numerischen Strömungssimulation (Computational Fluid Dynamics - CFD).

Die numerische Strömungssimulation lässt sich aufteilen in vollständig aufgelöste, direkte numerische Simulationen (Direct Numerical Simulation - DNS), nur teilweise aufgelöste Grobstruktursimulationen (Large Eddy Simulation - LES) und Simulationen auf Basis der Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations - RANS). Die beiden erstgenannten Methoden müssen aufgrund der Eigenschaften der Turbulenz stets vollständig dreidimensional und instationär durchgeführt werden. Dies erfordert speziell bei großen Reynolds-Zahlen sowie bei komplexen Geometrien auch nach heutigem Stand einen erheblichen Aufwand. Der RANS-Ansatz hingegen stellt im Gegensatz hierzu einen geeigneten Kompromiss zwischen numerischer Genauigkeit und erforderlichem Aufwand dar. Er ermöglicht im Unterschied zu den beiden anderen Verfahren mit Hilfe von Mittelungsansätzen eine Beschreibung der turbulenten Strömung unter der Annahme eines quasi-stationären Zustandes. Dies erlaubt es auch komplexe, sicherheitsrelevante Fragestellungen in technisch relevanten Geometrien mit vertretbarem Aufwand zu analysieren.

Eine Beurteilung von entwickelten Schließungsansätzen der Impuls- und Energieerhaltungsgleichung für die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes- und Erhaltungsgleichungen erfordert stets eine hinreichend genaue Validierung anhand verfügbarer experimenteller und numerischer Daten. Da experimentell meist nur einzelne Größen, wie z.B. der Geschwindigkeits- oder Temperaturverteilung, zugänglich sind, werden komplexere Modellierungsansätze zumeist anhand von geschlossenen Datensätzen aus direkten numerischen Simulationen (DNS) oder Grobstruktursimulationen (LES) verifiziert.

Im Rahmen dieser Arbeit werden zunächst Modellansätze aus der Literatur zur Beschreibung der turbulenten Wärmeflüsse analysiert. Für symmetrisch beheizte, turbulente Plattenkanalströmungen existieren in der Literatur hochaufgelöste DNS-Daten bei verschiedenen Reynolds- und Prandtl-Zahlen. Anhand dieser Daten werden die verschiedenen Modellansätze detailliert miteinander verglichen und bewertet.

In einem zweiten Schritt werden geeignete Ansätze ausgewählt und unter Berücksichtigung der Anforderungen einer Rechteckkanalströmung niedriger molekularer Prandtl-Zahl erweitert bzw. modifiziert. Ziel dieses Vorgehens ist die Beseitigung von Schwachstellen vorhandener Modelle, wie z.B. numerische Unstetigkeiten infolge der scharfen Ecken des Rechteckkanals. Zur Effizienzsteigerung der erweiterten Modelle wird darüber hinaus eine algebraische Reduktion der vollständigen Transportgleichungen vorgeschlagen, die es erlaubt ein algebraisches turbulentes Wärmeflussmodell abzuleiten.

In einem dritten Schritt werden die entwickelten Ansätze mit einem Turbulenzmodell gekoppelt. Das kombinierte Modell wird anhand von Ergebnissen der DNS bzw. eigener LES sowie empirischen Korrelationen in symmetrisch und asymmetrisch beheizten, turbulenten Plattenkanalströmungen validiert.

Anschließend werden LES in vollständig hydraulisch und thermisch eingelaufenen Rechteckkanalströmungen bei zwei verschiedenen molekularen Prandtl-Zahlen und unterschiedlichen Beheizungszuständen durchgeführt. Die Ergebnisse werden analysiert und mit den Ergebnissen der entwickelten Schließungsansätze verglichen.

Im letzten Schritt wird das Potential der Modellkombination aus Reynolds-Spannungsmodell und turbulentem Wärmeflussmodell für den Bereich der Mischkonvektion bei Strömungen niedriger molekularer Prandtl-Zahl aufgezeigt und diskutiert. Für einen Vergleich werden hierzu LES bei verschiedenen Beheizungszuständen durchgeführt.

Abschließend erfolgt eine Beurteilung der Genauigkeit sowie der Limitierung der entwickelten Modelle hinsichtlich der Verwendung in technischen Systemen.

Abstract

The present work investigates existing closure proposals for the energy conservation equation under consideration of the influence of the molecular Prandtl number. Especially Liquid metal flows (LM) can be characterized by low molecular Prandtl numbers and the transport of thermal energy is dominated by molecular diffusion. This allows operating a thermodynamical process on a higher temperature level hence increasing the overall efficiency of the system. Liquid metal flows can be used in different fields of applications, e.g. liquid metal cooled nuclear reactor systems, Concentrated Solar Power (CSP), or Power Conversion Systems (PCS), which enable the direct conversion from heat to electrical power.

An analysis based on experimental data is rather difficult in liquid metal flows, for example due to the high reactivity of liquid sodium in combination with air and water or steel corrosion in lead-bismuth eutectic (LBE). Thus, for the optimization of the design or the investigation of the performance of these technologies, there is an increasing demand for reliable numerical tools, e.g. Computational Fluid Dynamics (CFD).

Within the framework of CFD different methods and approaches exist for the simulation of turbulent flows, e.g. direct numerical simulations (DNS), partially resolved simulations (LES) or simulations based on the Reynolds-Averaged Navier-Stokes-Equations (RANS). Due to the three-dimensional and chaotic nature of turbulence, DNS and LES require the time-dependent solution of the full set of conservation and transport equations. Especially for higher Reynolds numbers and complex geometries, this requires additional numerical effort. Among the given methods, the RANS approach is the best compromise between numerical effort and accuracy. This allows the investigation of complex, safety-relevant scientific problems of large scale facilities.

The assessment of different levels of closure approaches for the momentum and energy conservation equations demands a careful validation by means of available experimental or numerical data. Since the comparison with experimental data is limited to first order quantities, e.g. velocity or temperature profiles, one requires the results from DNS or LES to derive more accurate modelling proposals for the different budget terms.

Therefore the present work is subdivided into the following sections. First, different approaches for the turbulent heat fluxes from literature are investigated. For turbulent channel flows highly resolved DNS data for different Reynolds and Prandtl numbers are available from the literature. By means of these data the closure proposals are analyzed and compared in detail.

In a second step the most promising turbulent heat flux models are selected and modified to meet the requirements of turbulent square duct flows at low molecular Prandtl numbers. The main goal is the analysis and removal of deficiencies, e.g. an unsteady numerical behavior within the corner region of the square duct. To increase the efficiency of the turbulent heat flux models an algebraic truncation of the transport equations is proposed, which then allows to derive an implicit algebraic heat flux model.

In a third step the proposals will be combined with a turbulence model. Then a validation of the full set of transport equations is performed in symmetrically and asymmetrically heated, turbulent channel flows based on DNS data, empirical data and data obtained from own LES, respectively.

Furthermore LES in rectangular ducts (square ducts) for different Prandtl numbers and heating conditions are performed and then compared to the results of the proposed algebraic turbulent heat flux models.

Finally, the potential of the proposed combination of models is discussed in turbulent square duct flows at low molecular Prandtl numbers and within the mixed convection regime. For this study additional LES are conducted.

In the last chapter the proposed models will be discussed, especially considering their accuracy and limitations in technical systems.

Publikationen

Nachfolgend sind alle Publikationen gelistet, die im Rahmen dieser Arbeit entstanden sind:

- Trimborn, F.; Pritz, B.; Gabi, M.: An Algebraic Model For the Turbulent Heat Fluxes in Liquid Metal Flows, In: *Proceedings of the 16th International Conference on Fluid Flow Technologies (CMFF'15)*, 1-4 September 2015, Budapest, Ungarn.
- Jäger, W.; Trimborn, F.; Hering, W.; Pritz, B.; Gabi, M.: Thermo-hydraulic Investigation Of A Vertical Rectangular Duct With Liquid Metal Flow by Means Of System Code And CFD Code Predictions, In: *Proceedings of the International Congress on Advances in Nuclear Power Plants (ICAPP)*, 17-20 April 2016, San Francisco, U.S.A.
- Trimborn, F.; Pritz, B.; Gabi, M.: Investigation of turbulent heat flux models for low molecular Prandtl numbers in turbulent planar channel and square duct flows, In: *Proceedings of the 13th International Symposium on Experimental and Computational Aerothermodynamics of Internal Flows (ISAIF'13)*, 7-11 May 2017, Okinawa, Japan.
- Jäger, W.; Trimborn, F.; Niemann, M.; Saini, V.; Hering, W.; Stieglitz, R.; Pritz, B.; Fröhlich, J.; Gabi, M.: Transition between free, mixed and forced convection, In: *IOP Conf. Series: Material Science and Engineering*, 228, 2017.

Symbolverzeichnis

Abkürzungen

ADS	Accelerator driven nuclear reactor system
AHM	Algebraisches turbulentes Wärmeflussmodell
AMTEC	Alkali Metal Thermal to Electric Converter
ARSM	Algebraic Reynolds stress model
ASTRID	Advanced Sodium Technological Reactor for Industrial Demonstration
ATEFA	AMTEC Test Facility
BASE	Beta-Alumina Solid Electrolyte
CFD	Computational Fluid Dynamics
CPU	Central Processing Unit
CSP	Concentrated Solar Power
DFM	Differentielles turbulentes Wärmeflussmodell
DNS	Direkte numerische Simulation
EARSM	Explizit algebraisches Reynolds-Spannungsmodell
EBM	Elliptic blending model
EVM	Eddy viscosity model
FS	Feinstrukturen
GGDH	Generalized gradient diffusion hypothesis
GS	Grobstrukturen
IARSM	Implicit algebraic Reynolds stress model
KALLA	Karlsruhe Liquid Metal Laboratory
KASOLA	Karlsruhe Sodium Laboratory
KIT	Karlsruhe Institut für Technologie
LBE	Lead Bismuth Eutectic
LES	Grobstruktursimulation
LEVME	Linear eddy viscosity model
LFR	Bleigekühlter schneller Reaktor
LIMTECH	Liquid Metal Technologies
MYRRHA	Multi-purpose hybrid research reactor for high-tech applications
NEVM	Nonlinear eddy viscosity model

PCS	Power Conversion System
PRISM	Power Reactor Innovative Small Module
RANS	Reynolds-averaged Navier Stokes Equations
RSM	Reynolds-Spannungsmodell
RSM-EBM	Reynolds-Spannungsmodell nach Dehoux (2012)
SFR	Natriumgekühlter schneller Reaktor
SOMMER	Solar furnace with molten metal-cooled receiver

Lateinische Buchstaben

A	$[m^2]$	Querschnittsfläche
A	$[-]$	Invariante des Anisotropietensors
A^+	$[-]$	Dämpfungskonstante
B^+	$[-]$	Dämpfungskonstante
C_{ij}	$[m^2/s^3]$	Konvektionsterm der Reynolds-Spannungen
$C_{i\theta}$	$[Km/s^2]$	Konvektionsterm des turbulenten Wärmeflussvektors
C_{TT}	$[K^2/s^2]$	Konvektionsterm der Temperaturvarianz
$C_{\varepsilon TT}$	$[K^2/s^3]$	Konvektionsterm der Dissipationsrate der Temperaturvarianz
C_S	$[-]$	Smagorinsky-Konstante
C_k	$[m^2/s^3]$	Konvektionsterm der turbulenten kinetischen Energie
D	$[m]$	Durchmesser
D_{ij}	$[m^2/s^3]$	Totale Diffusion der Reynolds-Spannungen
D_{ij}^m	$[m^2/s^3]$	Molekulare Diffusion der Reynolds-Spannungen
D_{ij}^t	$[m^2/s^3]$	Turbulente Diffusion der Reynolds-Spannungen
D_{ij}^p	$[m^2/s^3]$	Druckdiffusion der Reynolds-Spannungen
$D_{i\theta}$	$[Km/s^2]$	Totale Diffusion des turbulenten Wärmeflussvektors
$D_{i\theta}^m$	$[Km/s^2]$	Molekulare Diffusion des turbulenten Wärmeflussvektors
$D_{i\theta}^t$	$[Km/s^2]$	Turbulente Diffusion des turbulenten Wärmeflussvektors
$D_{i\theta}^p$	$[Km/s^2]$	Druckdiffusion des turbulenten Wärmeflussvektors
D_k	$[m^2/s^3]$	Totale Diffusion des turbulenten kinetischen Energie
D_k^p	$[m^2/s^3]$	Druckdiffusion des turbulenten kinetischen Energie
$D_{TT}, D_{\theta\theta}$	$[K^2/s^2]$	Totale Diffusion des Temperaturvarianz
$D_{\varepsilon TT}^m$	$[K^2/s^3]$	Molekulare Diffusion des Dissipationsrate der Temperaturvarianz
$D_{\varepsilon TT}^t$	$[K^2/s^3]$	Turbulente Diffusion des Dissipationsrate der Temperaturvarianz
D_h	$[m]$	Hydraulischer Durchmesser
E_k	$[-]$	Energiespektrum der turbulenten kinetischen Energie

E_T	[-]	Energiespektrum der thermischen Fluktuationen
F_{ij}	[m ² /s ³]	Kraftterm der Reynolds-Spannungen
G_{ij}	[m ² /s ³]	Auftriebsbedingte Produktion der turbulenten Reynolds-Spannungen
$G_{i\theta}$	[Km/s ²]	Auftriebsbedingte Produktion des turbulenten Wärmeflussvektors
G_k	[Km/s ²]	Auftriebsbedingte Produktion der turbulenten kinetischen Energie
$G(x_i, x'_i)$	[-]	Lokaler Filterkern
Gr	[-]	Grashof-Zahl
L	[m]	Charakteristische Länge
L_x	[m]	Länge des Rechteckkanals
L_y, L_z	[m]	Seitenlänge des Rechteckkanals
L_{ij}	[m ² /s ³]	Zeitliche Änderung der turbulenten Reynolds-Spannungen
L_{ij}	[m ² /s ³]	Leonard-Term
$L_{i\theta}$	[Km/s ²]	Zeitliche Änderung des turbulenten Wärmeflussvektors
$L_{\varepsilon_{TT}}$	[K ² /s ³]	Zeitliche Änderung der Dissipationsrate der Temperaturvarianz
Nu	[-]	Nusselt-Zahl
Pr	[-]	Molekulare Prandtl-Zahl
Pr_t	[-]	Turbulente Prandtl-Zahl
$Pr_{t,SGS}$	[-]	Turbulente Prandtl-Zahl der Feinstrukturen
P_{ij}	[m ² /s ³]	Produktionsrate der turbulenten Reynolds-Spannungen
$P_{i\theta}^U$	[Km/s ²]	Produktionsrate des turbulenten Wärmeflussvektors
$P_{i\theta}^T$	[Km/s ²]	Produktionsrate des turbulenten Wärmeflussvektors
P_k	[m ² /s ³]	Produktionsrate der turbulenten kinetischen Energie
$P_{i\theta}$	[Km/s ²]	Produktionsrate des turbulenten Wärmeflussvektors
$P_{TT}, P_{\theta\theta}$	[K ² /s ²]	Produktionsrate der Temperaturvarianz
Pe	[-]	Péclet-Zahl
Pe_t	[-]	Turbulente Péclet-Zahl
R	[-]	Zeitskalenverhältnis
R^h	[-]	Zeitskalenverhältnis im homogenen Bereich
Ra	[-]	Rayleigh-Zahl
Re	[-]	Reynolds-Zahl
Re_t	[-]	Turbulente Reynolds-Zahl
Ri	[-]	Richardson-Zahl
S_h	[kg/ms ³]	Quellterm der Energieerhaltungsgleichung
S_h^*	[K/s]	Quellterm der Energieerhaltungsgleichung
S_{ij}	[1/s]	Tensor der Deformationsrate
T	[K]	Temperatur
T_0	[K]	Referenztemperatur

T_τ	[K]	Reibungstemperatur
T_{ij}	[N/m ²]	Spannungstensor
$\overline{T^2}$	[K ²]	Temperaturvarianz
U	[m]	Umfang
V	[m ³]	Volumen
a_{ij}	[-]	Anisotropietensor
c_f	[-]	Reibungskoeffizient (Darcy-Konvetion)
c_p	[J/kgK]	Spezifische Wärmekapazität
d	[m]	Wandnormaler Abstand
f	[-]	Reibungskoeffizient (Fanning-Konvetion)
f_i	[kg/ms]	Kraftterm in der Impulserhaltungsgleichung
f_{ij}	[-]	Elliptischer Relaxationstensor
g	[m/s ²]	Erdbeschleunigung
h	[m]	Halbe Kantenlänge des Rechteckkanals
h	[J/kg]	Spezifische Enthalpie
k	[m ² /s ²]	Turbulente kinetische Energie
l, l^s	[m]	Turbulentes Längenmaß
l_m	[m]	Mischungsweglänge
n_i	[-]	Vektor in wandnormaler Richtung
p	[N/m ²]	Druck
q, q^s	[m/s]	Turbulentes Geschwindigkeitsmaß
\dot{q}	[W/m ²]	Wärmelstromdichte
t	[s]	Zeit
u	[m/s]	Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmungsrichtung
u_i	[m/s]	Geschwindigkeitsvektor $(u, v, w)^T$
u_k	[m/s]	Kolmogorov'sches Geschwindigkeitsmaß
u_τ	[m/s]	Reibungsgeschwindigkeit
v	[m/s]	Geschwindigkeitskomponente in Querrichtung
w	[m/s]	Geschwindigkeitskomponente in Querrichtung
x	[m]	Koordinate
x_i	[m]	Ortsvektor $(x, y, z)^T$
y	[m]	Koordinate
z	[m]	Koordinate

Griechische Buchstaben

Θ	[K]	Temperaturdifferenz zwischen Wand- und Bulktemperatur
Π_{ij}	[m ² /s ³]	Redistributionstensor
$\Pi_{i\theta}$	[K ² /s]	Druck-Temperatur-Korrelationstensor
Ω	[1/s]	Vortizitätsvektor
Ω_x	[1/s]	Vortizität in Strömungsrichtung
Ω_{ij}	[1/s]	Tensor der Vortizitätsrate
α	[m ² /s]	Thermische Diffusivität
α	[-]	Elliptischer Übergangparameter
α_θ	[-]	Elliptischer Übergangparameter
α_t	[m ² /s]	Turbulente thermische Diffusivität
$\alpha_{t,SGS}$	[m ² /s]	Turbulente Diffusivität der Feinstrukturen
β	[1/K]	Volumetrischer Ausdehnungskoeffizient
γ	[-]	Koeffizient
δ	[m]	Halbe Plattenkanalhöhe
δ_{ij}	[-]	Kronecker-Delta
δ_{th}	[m]	Thermische Grenzschichtdicke
δ_v	[m]	Hydraulische Grenzschichtdicke
ε	[m ² /s ³]	Dissipationsrate der turbulenten kinetischen Energie
ε_{ij}	[m ² /s ³]	Anisotrope Dissipationsrate
$\varepsilon_{i\theta}$	[m ² /s ³]	Dissipationsrate der turbulenten Wärmeflüsse
$\varepsilon_{TT}, \varepsilon_{\theta\theta}$	[K ² /s]	Dissipationsrate der Temperaturvarianz
ζ_i	[-]	Dimensionsloser Wärmeflussvektor
η_{BT}	[m]	Bachelor-Längenskala
η_k	[m]	Kolmogorov-Längenskala
η_T	[m]	Corrsin-Längenskala
$\overline{\theta'^2}$	[K ²]	Temperaturvarianz
κ	[1/m]	Wellenzahl
κ	[-]	Von-Kármán-Konstante
λ	[W/mK]	Wärmeleitfähigkeit
μ	[Ns/m ²]	Dynamische Viskosität
ν	[m ² /s]	Kinematische Viskosität
ν_t	[m ² /s]	Turbulente Wirbelviskosität
ϕ	[-]	Transportgröße
ϕ_{ij}	[m ² /s ³]	Dilatationstensor
$\phi_{i\theta}$	[K ² /s]	Druck-Temperatur-Korrelationstensor

ρ	[kg/m ³]	Dichte
ρ_b	[kg/m ³]	Dichteänderung infolge von Auftrieb (Boussinesq-Approximation)
σ_{ii}	[N/m ²]	Viskose Normalspannung
τ	[N/m ²]	Spannung
τ	[s]	Turbulente Zeitskala
τ_k	[s]	Kolmogorov'sches Zeitmaß
τ_m	[s]	Mechanische Zeitskala
τ_{th}	[s]	Thermische Zeitskala
τ_{ij}	[m ² /s ²]	Viskoser Spannungstensor
τ_{ij}^s	[m ² /s ²]	Feinstrukturspannungen
ψ	[-]	Transportgröße
ω	[1/s]	Turbulente Frequenz

Indizes

D_h	auf hydraulischen Durchmesser bezogen
b	Massenstromgemittelte Größe
c	Charakteristische Größe
w	Wandnaher Bereich der Strömung

Sonstige

h	Homogener Bereich der Strömung
w	Wandnaher Bereich der Strömung
$+$	durch u_τ, T_τ oder v normierte Größe
$(\cdot)'$	Fluktuationsgröße
$\overline{(\cdot)}$	Zeitlich gemittelte Größe
$\widetilde{(\cdot)}$	Räumlich gefilterte Größe
$\langle \cdot \rangle$	Räumlich gemittelte Größe

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	iii
Abstract	v
Symbolverzeichnis	ix
1 Einleitung und Zielsetzung der Arbeit	1
1.1 Flüssigmetallströmungen in der Energietechnik	1
1.2 Stand der Forschung	9
1.3 Zielsetzung und Vorgehensweise	15
1.4 Gliederung der Arbeit	16
2 Grundlagen des Impuls- und Energietransports in Strömungen	17
2.1 Erhaltungsprinzipien	17
2.1.1 Massenerhaltung	17
2.1.2 Impulserhaltung	18
2.1.3 Energieerhaltung	20
2.2 Konvektionsarten bei unterschiedlichen Randbedingungen	21
2.3 Dimensionslose Kennzahlen zur Strömungscharakterisierung	23
2.3.1 Reynolds-Zahl	23
2.3.2 Prandtl-Zahl	23
2.3.3 Nusselt-Zahl	26
2.3.4 Grashof-Zahl	27
2.3.5 Rayleigh-Zahl	27
2.3.6 Richardson-Zahl	28
3 Einführung in die Turbulenz von Strömungen	29
3.1 Eigenschaften turbulenter Strömungen	29
3.2 Energiespektrum der Turbulenz	30
3.3 Energiespektrum bei Strömungen mit Wärmeübergang	32
4 Mathematische Beschreibung turbulenter Strömungen	35
4.1 Direkte numerische Simulation	35

4.2	Grobstruktursimulation	36
4.2.1	Räumliche Filterung	37
4.2.2	Anwenden der Filterung auf das Gleichungssystem	39
4.2.3	Smagorinsky-Modell	41
4.2.4	Dynamisches Smagorinsky-Modell	42
4.2.5	Modellierung der Feinstruktur-Prandtl-Zahl	44
4.3	Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen	45
4.3.1	Zeitliche Mittelung	45
4.3.2	Reynolds-gemittelte Erhaltungsgleichungen	46
4.4	Turbulenz im wandnahen Bereich	49
5	Schließungsansätze der Impulserhaltungsgleichungen	55
5.1	Transportgleichungen der turbulenten Reynolds-Spannungen	55
5.2	Transportgleichung der turbulenten kinetischen Energie und ihrer Dissipation	57
5.3	Modellansätze der turbulenten Reynolds-Spannungen	59
5.3.1	Lineare Wirbelviskositätsmodelle	60
5.3.2	Erweiterte Wirbelviskositätsmodelle	63
5.3.3	Reynolds-Spannungsmodelle	66
5.3.4	Anisotropie der Turbulenz in Wandnähe	73
6	Analyse und Bewertung von Schließungsansätzen der Energieerhaltungsgleichung	75
6.1	Übersicht über die Modellierungsstufen der turbulenten Wärmeflüsse	76
6.2	Modellierung der turbulenten Prandtl-Zahl	77
6.2.1	Bestimmung unter Berücksichtigung globaler Strömungsparameter	80
6.2.2	Bestimmung unter Berücksichtigung lokaler Strömungsparameter	84
6.3	Modellierung der turbulenten thermischen Diffusivität	90
6.3.1	Transportgleichung der Temperaturvarianz	90
6.3.2	Transportgleichung der Dissipationsrate der Temperaturvarianz	93
6.3.3	Ansatz von So & Sommer (1994)	95
6.3.4	Ansätze von Abe et al. (1995) und Manservigi & Menghini (2014)	100
6.4	Modellierung auf Basis zweiter Momente	106
6.4.1	Transportgleichungen der turbulenten Wärmeflüsse	106
6.4.2	Wandlimitierungsverhalten turbulenter Fluktuationsgrößen	108
6.4.3	Identifikation zentraler Transport- und Dissipationsmechanismen	111
6.4.4	Kombinierte Modellansätze der Temperatur-Druck-Korrelation und der Dissipationsrate	114

7	Turbulenter Energietransport in Platten- und Rechteckkanalströmungen . . .	129
7.1	Erweiterung und Verifizierung der selektierten Schließungsansätze	129
7.1.1	Implizite algebraische Wärmeflussmodelle (AHM)	129
7.1.2	Entwicklung des AHM nach Carteciano (Carteciano-AHM)	134
7.1.3	Entwicklung des AHM nach Shikazono & Kasagi (SK-AHM)	137
7.1.4	Erweiterung des Ansatzes nach Manservigi & Menghini (MM-TD)	139
7.2	Validierung anhand einer symmetrisch beheizten Plattenkanalströmung	142
7.3	Validierung anhand einer asymmetrisch beheizten Plattenkanalströmung	158
7.4	Validierung in turbulenten Rechteckkanalströmungen	162
7.5	Anwendung bei auftriebsbehafteten Rechteckkanalströmungen	180
8	Zusammenfassung und Ausblick	191
8.1	Zusammenfassung	191
8.2	Ausblick	193

A	Anhang	195
A.1	Numerische Verfahren zur Berechnung von Strömungen	195
A.1.1	Finite-Volumen-Methode (FVM)	195
A.1.2	Diskretisierung	196
A.1.3	Geschwindigkeits-Druck-Korrektur	198
A.1.4	Berechnung voll entwickelter Strömungen	200
A.2	Turbulente Wärmeflussmodellierung	211
A.2.1	Einfluss der Reynolds- und Prandtl-Zahl auf “globale” Konzepte der turbulenten Prandtl-Zahl	211
A.2.2	Einfluss der Reynolds- und Prandtl-Zahl auf “lokale” Konzepte der turbulenten Prandtl-Zahl	216
A.2.3	Einfluss der Reynolds- und Prandtl-Zahl auf die Transportterme der Temperaturvarianzgleichung	222
A.2.4	Einfluss der Prandtl-Zahl auf Konzepte der turbulenten thermischen Diffusivität	224
A.2.5	Erweiterung des Ansatzes nach So & Sommer (1994)	226
A.2.6	Einfluss der Reynolds- und Prandtl-Zahl auf Ansätze zweiter Ordnung	229
A.2.7	Einfluss der thermischen Randbedingungen auf die Schließungsansätze	234
A.3	Einfluss der Reynolds- und Prandtl-Zahl auf die entwickelten Ansätze	238
A.3.1	Carteciano-AHM	238
A.3.2	SK-AHM	240
A.4	Ausgewählte numerische Ergebnisse	242
A.4.1	Einfluss des Koeffizienten im Carteciano-AHM	242
A.4.2	Asymmetrisch beheizte Plattenkanalströmung	244
A.4.3	Rechteckkanalströmung	246
A.4.4	Rechteckkanalströmung mit Auftrieb	259
A.4.5	Fluid-Struktur-Interaktion	261

1 Einleitung und Zielsetzung der Arbeit

1.1. Flüssigmetallströmungen in der Energietechnik

Flüssigmetalle unterscheiden sich von anderen Fluiden durch ihre hohe Wärmeleitfähigkeit und niedrige spezifische Wärmekapazität. Der Wärmetransport wird durch molekulare Wärmeleitung dominiert. Flüssigmetalle werden daher auch durch niedrige molekulare Prandtl-Zahlen beschrieben. Ihr großer nutzbarer Temperaturbereich zwischen Schmelzpunkt und Verdampfung erlaubt es bei atmosphärischen Bedingungen große Mengen thermischer Energie einphasig zu absorbieren. Thermodynamische Prozesse können auf höheren Temperaturniveaus durchgeführt werden und ermöglichen höhere thermodynamische Wirkungsgrade des Gesamtsystems.

Der Großteil der bisherigen Forschungsarbeit in Strömungen niedriger molekularer Prandtl-Zahl fokussiert sich auf flüssigmetallgekühlte nukleare Reaktorsysteme, die im Zuge des weltweit wachsenden Bedarfs an Energie zunehmend an Interesse gewinnen [1–3]. Eine wesentliche Motivation ist hierbei die Reduktion des Gefahrenpotenzials bzw. der Radiotoxizität des langlebigen nuklearen Abfalls. Auch nach Millionen von Jahren ist die radioaktive Strahlung im nuklearen Abfall noch messbar, so dass zwingend eine geeignete Lagerung erforderlich ist [4,5]. Durch die damit verbundenen Risiken und Kosten ist das Interesse an einer Wiederaufbereitung des nuklearen Abfalls dementsprechend groß.

Eine Möglichkeit die Radiotoxizität zu senken, ist eine Kombination aus Partitionierung und Transmutation in Beschleuniger-getriebenen, nuklearen Reaktorsystemen (ADS¹). Ziel dieser Verfahren ist die Umwandlung langlebiger, radioaktiver Radionuklide in stabile Nuklide unter Energiefreisetzung [2,4]. Flüssigmetalle dienen hier nicht nur der Kühlung, sondern auch als Neutronenquelle². Entscheidend ist, dass das eingesetzte Reaktorkühlmittel keine Moderatorwirkung besitzt [4,6].

¹eng.: ADS - Accelerator driven nuclear reactor systems

²„Schnelle“ Neutronen entstehen beim Aufeinandertreffen eines beschleunigten Protons, z.B. durch einen Teilchenbeschleuniger, auf einen schweren Atomkern

Unter sechs vorgeschlagenen „Generation IV“-Konzepten basieren zwei Ansätze auf Flüssigmetall-gekühlten Reaktoren [2,3]. Bei dem ersten Konzept handelt es sich um einen bleigekühlten Reaktor (LFR) (vgl. Abb. 1.1). Eines der wichtigsten Projekte dieser Art ist der MYRRHA-Reaktor [7,8]. Reaktoren dieses Typs können mehrere Jahre ohne Einbringen neuen Brennstoffs betrieben werden, weswegen man sie auch als „nukleare Batterie“ bezeichnet [2]. Das eingesetzte Blei muss während des Betriebs stets flüssig gehalten werden. Die Kühlung des Kerns in kleineren Reaktoren erfolgt mittels Naturkonvektion des Flüssigmetalls, so dass der Einsatz von zusätzlichen Pumpsystemen entfällt. Die große Dichte schwerer Flüssigmetalle erfordert hierbei eine erdbebensichere Grundstruktur der Anlage [2].

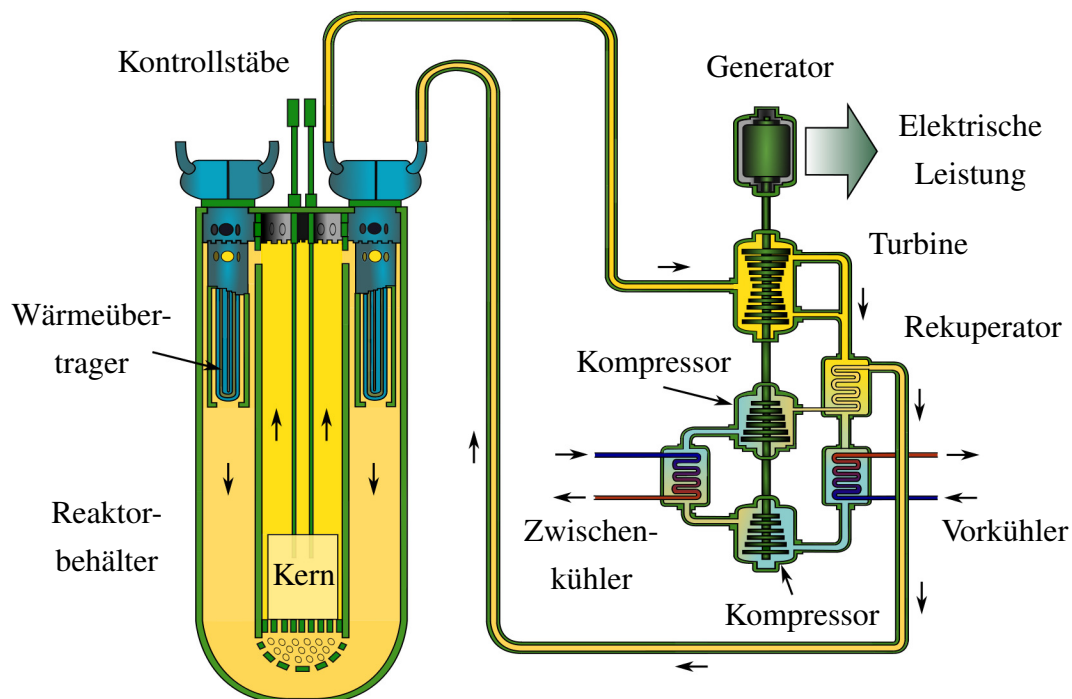


Abbildung 1.1.: Prinzipskizze eines bleigekühlten Reaktors (LFR) mit angeschlossenen Joule-Brayton Gasturbinen-Kreisprozess (Grafik illustriert nach [2]).

Beim zweiten Konzept handelt es sich um einen schnellen natriumgekühlten Reaktor (SFR) (vgl. Abb. 1.2). Eine Vielzahl unterschiedlicher Projekte zur Entwicklung wurde bereits umgesetzt, wie z.B. Phénix³ oder die russischen BN-Reaktoren [10]. Im Rahmen der „Generation IV“-Konzepte sind das französische ASTRID⁴- sowie das PRISM-Projekt [1,11,12] zu nennen. Der Einsatz von flüssigem Natrium erfordert Maßnahmen zur Vermeidung exothermer Reaktionen mit Wasser oder Luft während der Entwurfs- und Auslegungsphase solcher Reaktoren. Ebenso wie Blei bzw. Blei-

³Die Stilllegung erfolgte nach Angaben des PRIS [9] (Power Reactor Information System) am 1. Februar 2010.

⁴Abkürzung: ASTRID - Advanced Sodium Technological Reactor for Industrial Demonstration

Bismuth weist flüssiges Natrium⁵ einen großen nutzbaren Temperaturbereich zwischen Schmelz- und Verdampfungspunkt auf [13]. Es entfällt somit die Notwendigkeit eines hohen Druckniveaus, wie z.B. für überkritische Leichtwasserreaktoren. Darüber hinaus ist infolge der hohen Wärmeleitfähigkeit das Gefahrenpotenzial einer Überhitzung deutlich gesenkt [2,3]. Wie Abb. 1.2 zu entnehmen ist, existieren drei separate Kreisläufe: ein primärer und sekundärer Natriumkreislauf, die über Wärmeübertrager miteinander interagieren, sowie ein dritter Kreislauf, in dem unter anderem Wasser verdampft und zur Stromerzeugung genutzt wird.

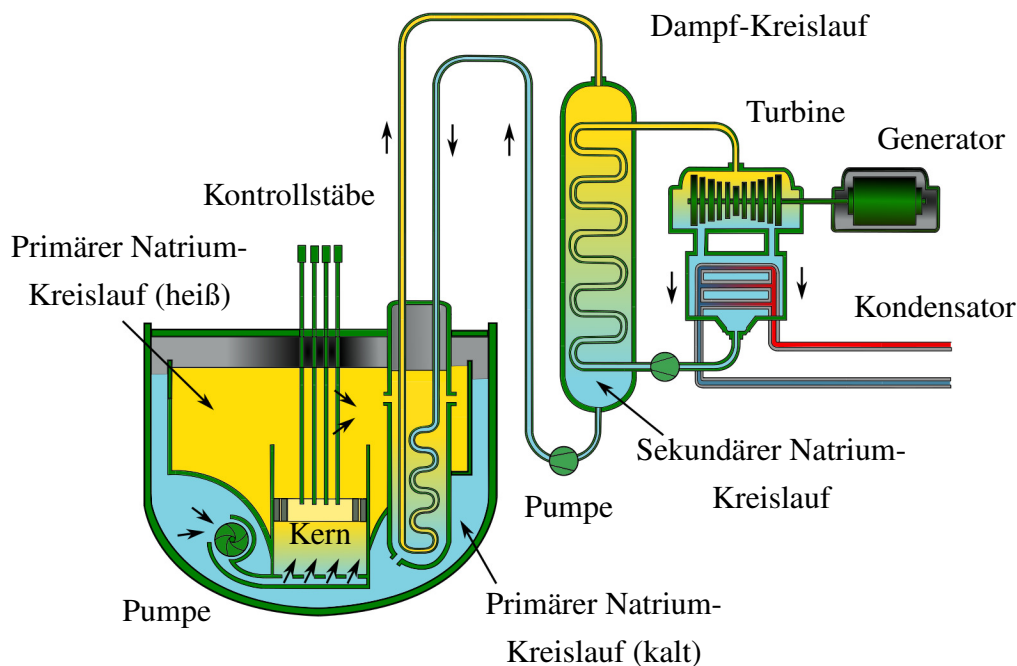


Abbildung 1.2.: Prinzipskizze eines Natrium gekühlten Reaktors (SFR) mit angeschlossenem Dampfkreislauf zur Energiegewinnung (Grafik illustriert nach [2])

Für Flüssigmetalle existiert eine Vielzahl weiterer Anwendungsoptionen. Eine Möglichkeit stellt die Erzeugung elektrischer Energie aus erneuerbaren Ressourcen dar. In solarthermischen Anwendungen bzw. Kraftwerken (CSP⁶) werden als Kollektoren üblicherweise Parabolrinnen bzw. Parabolspiegel oder Spiegelfelder mit zentralen Türmen eingesetzt. Die Spiegelflächen reflektieren die von der Sonne kommende Strahlung und konzentrieren diese auf eine Absorberfläche (thermischer Receiver) [14]. Das Wärmeträgermedium, das entlang der Absorberfläche strömt, nimmt die Wärme auf, die in einem nachgeschalteten Wärmeübertrager und einem konventionellen Dampfkraftprozess in elektrische Energie umgewandelt werden kann. Aufgrund ihrer thermischen Eigenschaften können zu diesem Zweck Flüssigmetalle verwendet werden.

⁵eng: Sodium

⁶Abkürzung: CSP - Concentrated Solar Power plant

1. Einleitung und Zielsetzung der Arbeit

Eine technische Umsetzung eines solchen CSP-Systems mit der Bezeichnung SOMMER⁷, die auf der Verwendung von Flüssigmetallen als Übertragungsmedium basiert, wird derzeit am Karlsruhe Liquid metal Laboratory (KALLA) des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT) untersucht [15–17]. Die wesentlichen Komponenten der SOMMER-Anlage werden in Abb. 1.3 gezeigt.

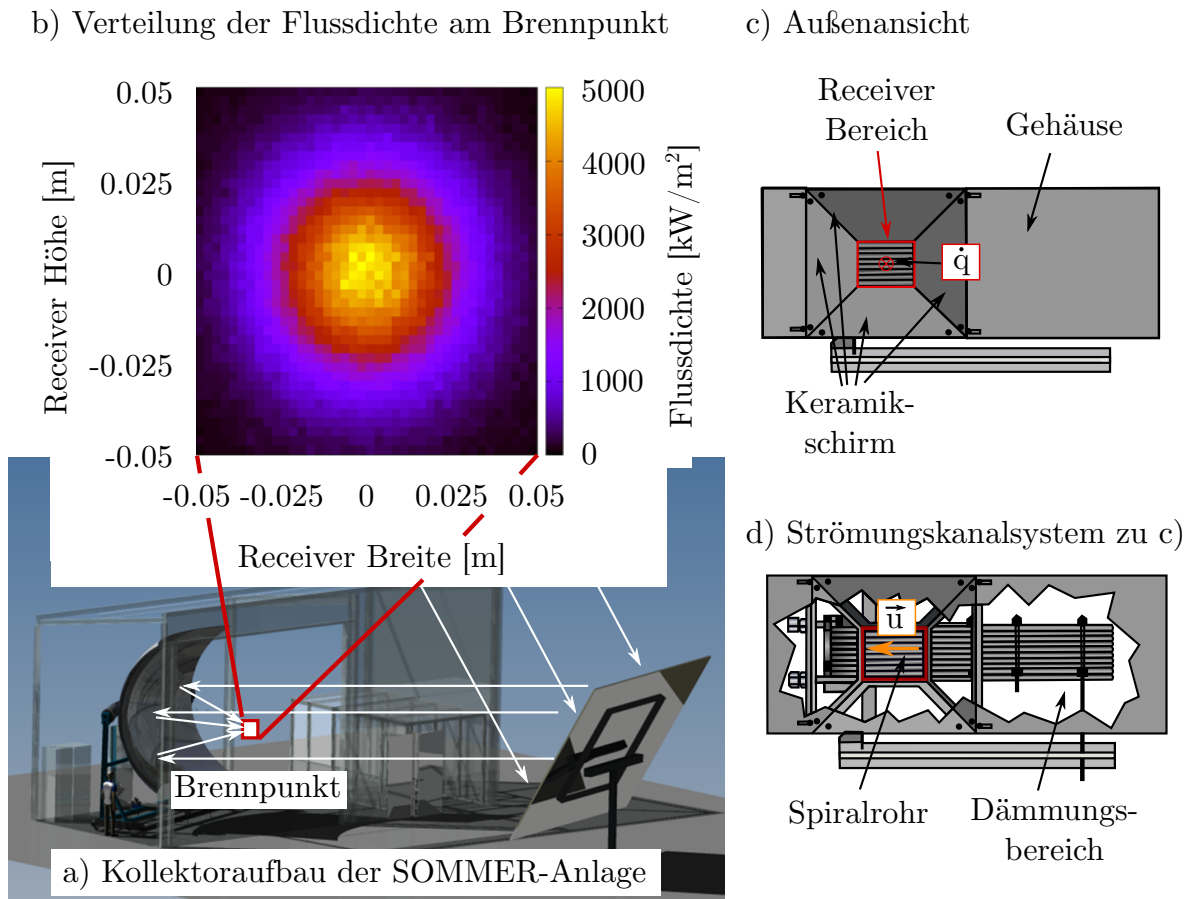


Abbildung 1.3.: Prinzipskizze der Kollektoranordnung a), der Flussdichte am Brennpunkt b), des Receivers und der Absorberfläche c) sowie des zugehörigen Strömungskanals d) der SOMMER-Anlage des KALLA-Labors (KIT) [15–18].

Die absorbierte Leistung des SOMMER-Konzepts beträgt ungefähr 10 kW und es ergibt sich im Betrieb ein Temperaturbereich von 400 – 600 °C [15]. Um diese große Energiemenge geeignet abzuführen, ist aufgrund seiner thermischen Eigenschaften Blei-Bismuth (LBE) als Arbeitsmedium bzw. Receiver-Flüssigkeit vorgesehen [15,18]. Prinzipiell eignen sich jedoch auch andere Flüssigmetalle, wie z.B. flüssiges Natrium [19].

Ein weiteres Beispiel für den Einsatz von Flüssigmetallen, speziell flüssiger Alkalimetallen wie Natrium oder Lithium, zur direkten Umwandlung von thermischer in elektrische Energie ist die

⁷Abkürzung: SOMMER - Solar furnace with molten metal-cooled receiver

AMTEC⁸-Zelle (vgl. Abb. 1.4) [20,21]. Das wesentliche Element der Funktionsweise ist ein fester Keramikelektrolyt aus Aluminiumoxid (Al_2O_3) (BASE⁹) mit einer hinreichend großen Ionen- und einer vernachlässigbaren Elektronenleitfähigkeit [21]. Dieser teilt die Zelle in einen Bereich hoher Temperatur und hohen Drucks, sowie in einen Bereich niedriger Temperatur und niedrigen Drucks [21]. An der Oberfläche des Keramikelektrolyts wird Natrium in Form von Na^+ -Ionen, die infolge des Temperatur- und Druckgradienten ($p_1 > p_2$) durch den Ionenleiter getrieben werden, und Elektronen e^- , die durch eine anliegende Spannung Elektrizität erzeugen, aufgeteilt. Auf der Seite der Kathode entsteht aus den Na^+ -Ionen und den Elektronen e^- wieder „neutrales“ Natrium, das am Kondensator in einen flüssigen Zustand übergeht [21]. Ein wesentlicher Vorteil dieser Technologie ist ihre Fähigkeit mit beliebigen Wärmequellen kombiniert zu werden [21]. Am Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik (INR) des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT) ist hierzu eine spezielle Testanlage (ATEFA¹⁰) aufgebaut [21].

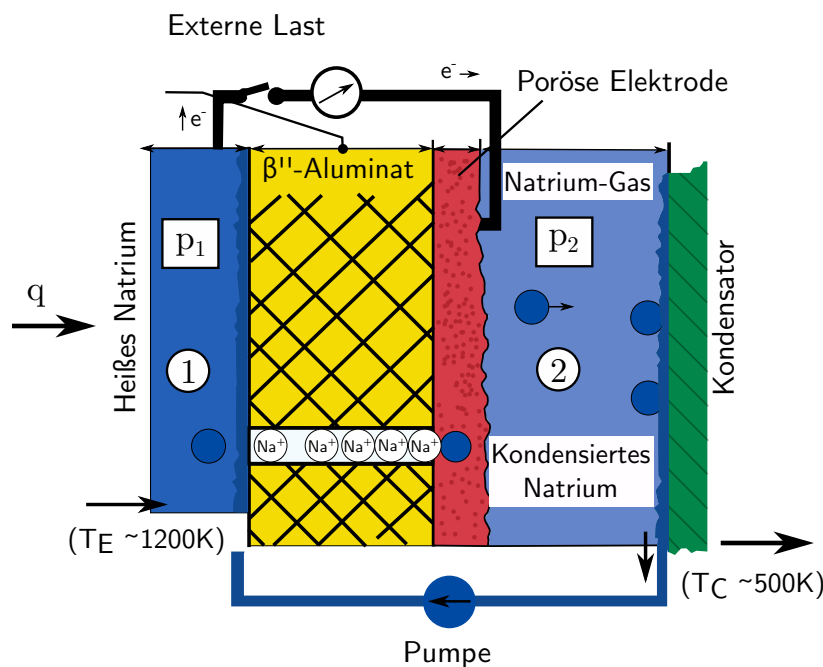


Abbildung 1.4.: Schematische Skizze des AMTEC-Konverters zur direkten Umwandlung von Wärme in elektrische Energie (Grafik illustriert nach [21]).

Abseits der Energietechnik sind weitere technische Einsatzgebiete von Flüssigmetallen denkbar, wie z.B. zur Kühlung thermisch hochbelasteter Oberflächen wie z.B. von Prozessoren, von Kokillen im Metallguss sowie in der Aluminiumgewinnung oder Glasherstellung.

⁸engl.: AMTEC - Alkali Metal Thermal to Electric Converter

⁹eng.: BASE - Beta-Alumina Solid Electrolyte

¹⁰Abkürzung: ATEFA - AMTEC Test Facility

Um die vorgestellten Technologien, speziell den Entwurf und den Betrieb großtechnischer Anlagen, hinsichtlich sicherheitsrelevanter Fragestellungen zu unterstützen, werden zunehmend numerische Verfahren eingesetzt. Zur Untersuchung der strömungsmechanischen und thermischen Phänomene turbulenter Strömungen können direkte numerische Simulationen (DNS), Grobstruktursimulationen (LES) sowie Simulationen basierend auf den Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (RANS) eingesetzt werden. Unter den drei vorgestellten Methoden stellt der RANS-Ansatz einen ökonomischen Kompromiss zwischen erforderlichem numerischen Aufwand und erzielbarer Genauigkeit dar, da der Einsatz von DNS oder LES bis zum heutigen Tag auf einfache Geometrien, niedrige Reynolds-Zahlen und spezialisierte numerische Rechnerstrukturen, z.B. in Form von Hochleistungsrechnern, beschränkt ist. Auf der anderen Seite bieten sich zur Untersuchung dieser Phänomene auch Experimente an. Diese wiederum sind kapitalintensiv und erfordern ein umfassendes Wissen über die Reinheit des eingesetzten Mediums, der chemischen Reaktivität z.B. im Fall von flüssigem Natrium oder der Korrosivität von eutektischem Blei-Bismuth (LBE).

Aus diesem Grund zielt die vorliegende Arbeit im Wesentlichen darauf ab, existierende turbulente Wärmeflussmodelle unter Berücksichtigung des Einflusses niedriger molekularer Prandtl-Zahlen und unter Verwendung vorhandener Datensätze zu untersuchen und weiterzuentwickeln. Der übliche Ansatz basiert auf der Verwendung einer konstanten turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t , deren theoretischer Ursprung auf Ähnlichkeitsannahmen zwischen dem turbulenten Geschwindigkeits- und Temperaturfeld basiert. Dies führt, wie gezeigt wird, bei Strömungen einer niedrigen molekularer Prandtl-Zahl zu starken Abweichungen zwischen der Realität und den numerischen Ergebnissen [22,23]. Es ist demnach zwingend erforderlich den Einfluss der molekularer Prandtl-Zahl in Form von komplexeren Modellen in das Gleichungssystem aufzunehmen und diese mit geeigneten experimentellen oder numerischen Ergebnissen zu untersuchen und zu validieren. Unter Berücksichtigung des Einflusses des Schwerfeldes der Erde und dem damit verbundenen Auftreten unterschiedlicher Konvektionsarten (Natur-, Misch- und erzwungenen Konvektion) sowie dem Übergang zwischen diesen Formen, muss das jeweilige turbulente Wärmeflussmodell das spezielle thermische Verhalten von Flüssigmetallströmungen hinreichend genau wiedergeben.

Das SOMMER-Projekt sowie der AMTEC-Konverter sind als Forschungsprojekte beide Bestandteil der Helmholtz-Allianz LIMTECH¹¹ [24]. Diese Allianz aus Forschungseinrichtungen und technischen Universitäten in Deutschland hat das Ziel neue Technologien im Bereich von Flüssigmetallen zu entwickeln und zu untersuchen. Diese reichen von Systemen der Energieumwandlung bei hohen Temperaturen, neuartigen Batteriekonzepten, verbesserten Fertigungsverfahren (Stahlguss), einer Kohlendioxid freien Herstellung von Wasserstoff bis hin zu der Bereitstellung grundlagenorientierter, experimenteller Daten zur Entwicklung numerischer Modelle [24].

Das letztgenannte Ziel stellt die wesentliche Motivation der vorliegenden Arbeit dar. Als Teilprojekt der Helmholtz-Allianz LIMTECH wird ein vertikal durchströmter Rechteckkanal in unter-

¹¹Abkürzung: LIMTECH - Liquid Metal Technologies

schiedlichen Konvektionsarten untersucht. Hierfür werden in Zukunft experimentelle Daten der KASOLA¹²-Forschungsanlage am Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik (INR) des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT) in flüssigem Natrium ($Pr \approx 0,0088$) für eine Validierung turbulenter Wärmeflussmodelle zur Verfügung gestellt [25–29]. Die KASOLA-Anlage sowie eine Skizze der experimentellen Testsektion ist in der Abb. 1.5 dargestellt.

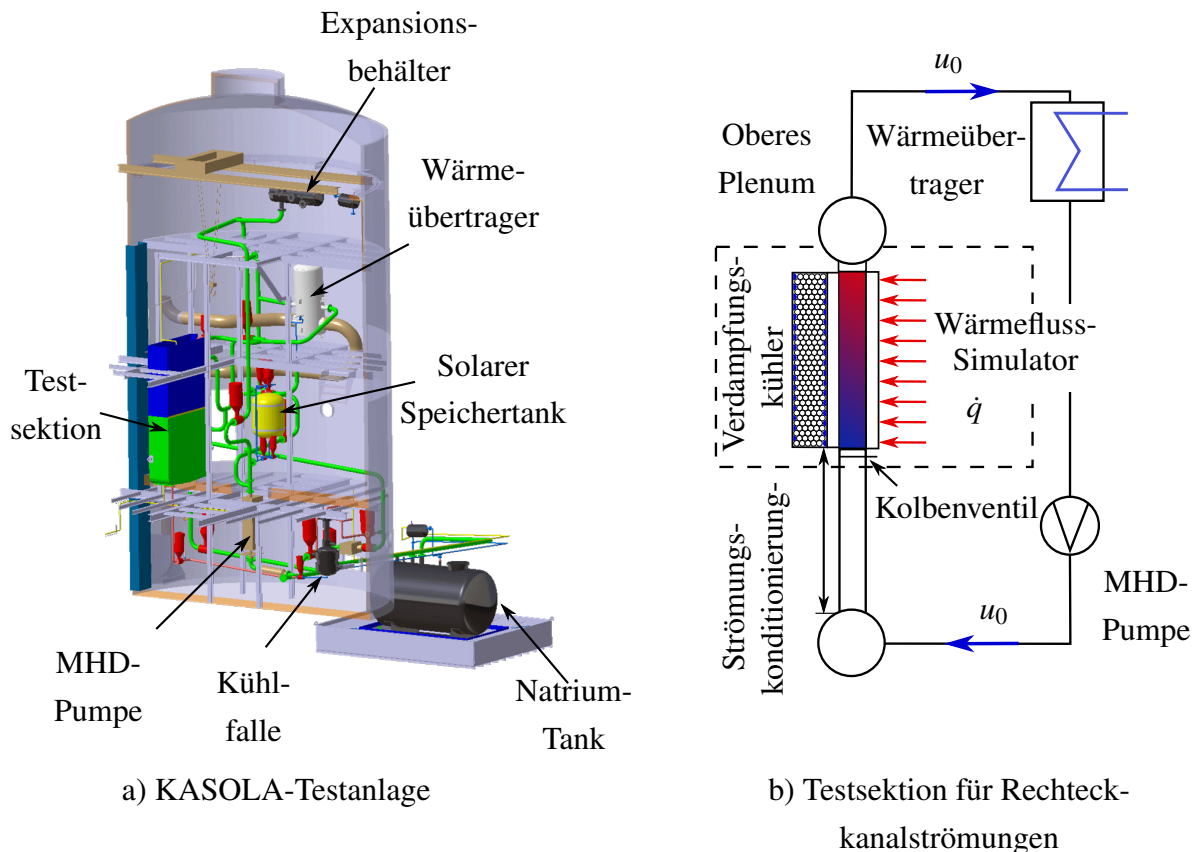


Abbildung 1.5.: Skizze der KASOLA-Testanlage des INR (KIT-CN) (links) sowie Detailskizze der Testsektion für Rechteckkanalströmungen (rechts) (Grafiken illustriert nach [25,26,29]).

Die Strömung durch Rechteckkanäle ist durch das Auftreten von turbulenzinduzierten Sekundärströmungen und somit durch die Vortizität in Strömungsrichtung Ω_x gekennzeichnet. Dies ist eine unmittelbare Konsequenz der Verteilung der Normal- und Schubspannungskomponenten des turbulenten Reynolds-Spannungstensors. Für eine korrekte Beschreibung dieses Phänomens auf Basis des RANS-Ansatzes ist demnach der Einsatz von nichtlinearen anisotropen Turbulenzmodellen erforderlich [30]. Auch wenn im Fall der erzwungenen Konvektion das Verhältnis der Sekundärströmung zur Hauptströmungsgeschwindigkeit u_b mit ca. 2-3 % sehr klein ist, kann infolge des Betrags und der Richtung des Schwerfeldes der Erde ein zunehmender Einfluss der Sekundärströmung auf die Temperaturverteilung festgestellt werden [31,32].

¹²Abkürzung: KASOLA - Karlsruhe Sodium Laboratory

Unter der Annahme hinreichend großer Reynolds-Zahlen ist die turbulenzinduzierte Sekundärströmung in erzwungener Konvektion durch die Existenz von acht Wirbelstrukturen charakterisiert, wobei jeweils zwei Strukturen entlang der Flächendiagonalen eine gegenläufige Rotation aufweisen (vgl. Abb. 1.6) [33].

Die Strömung in der Testsektion der KASOLA-Anlage ist vollständig hydraulisch entwickelt. Das flüssige Natrium strömt in einen einseitig beheizten Abschnitt. Die gegenüberliegende Wand ist mit einer konstanten Temperatur¹³ ($T_w = \text{konst.}$) beaufschlagt, die unterhalb der Eintrittstemperatur T_{in} liegt. Dies stellt unter Berücksichtigung von Auftriebseffekten einen hochkomplexen Strömungsfall dar, zu dem nach aktuellem Stand keine experimentellen oder numerischen Vergleichsdaten vorliegen. Eine Validierung bzw. Ableitung von Modellansätzen der turbulenten Wärme-flüsse anhand der KASOLA-Testsektion ist demnach noch nicht möglich. Mit einem Betrieb der KASOLA-Anlage ist nach Kenntnis des Autors im Spätjahr 2017 zu rechnen.

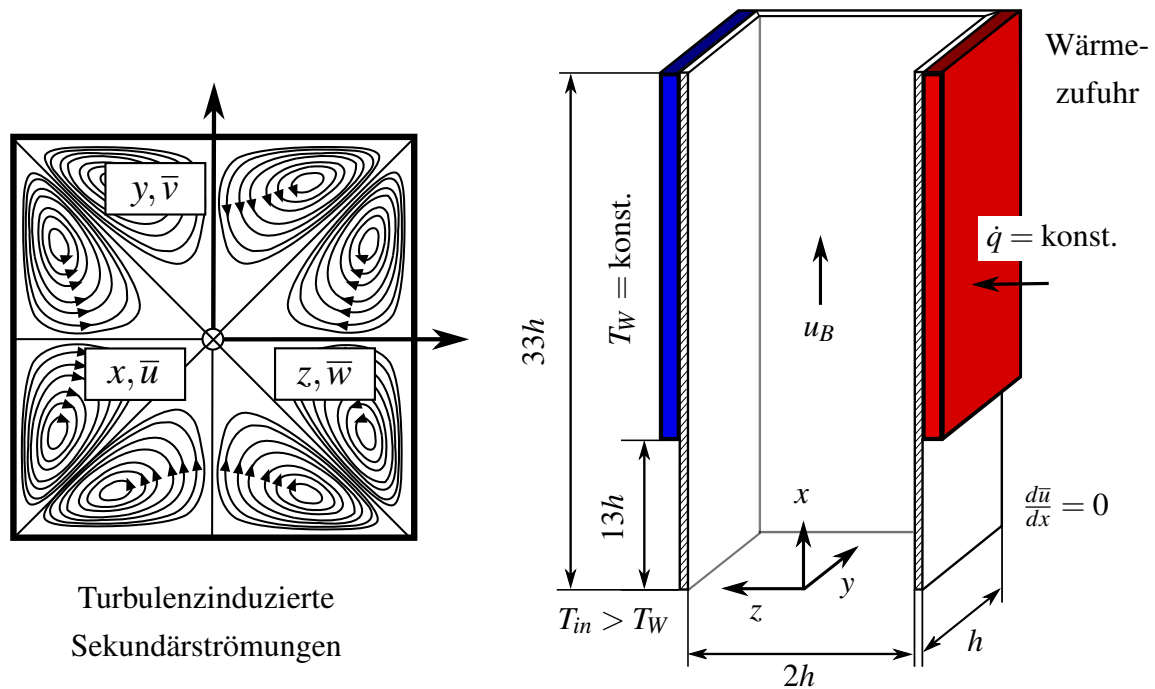


Abbildung 1.6.: Schematische Skizze der Stromlinienverteilung der turbulenzinduzierten Sekundärströmung im Rechteckkanal (links) und detaillierte Skizze der Testsektion in der KASOLA-Anlage mit zugehörigen Randbedingungen (rechts).

Zu diesem Zweck wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit zunächst ausschließlich das Verhalten von existierenden oder weiterentwickelten Ansätzen der turbulenten Wärme-flüsse in hydraulisch und thermisch vollständig entwickelten Rechteckkanalströmungen unterschiedlicher Beheizungs-zustände und bei variierender Prandtl-Zahl untersucht.

¹³Anmerkung: Ausgehend vom ursprünglichen Schema wird anstelle einer konstanten Wandtemperatur aktuell als Randbedingung eine nahezu perfekt isolierte Wand ($\dot{q} = 0$) angedacht.

1.2. Stand der Forschung

Vollständig entwickelte Rechteckkanalströmungen sind in Abhängigkeit der Reynolds-Zahl und der Konvektionsart durch die Existenz einer turbulenzinduzierten Sekundärströmung¹⁴ gekennzeichnet. Diese komplexen turbulenten Strömungen weisen zwei inhomogene Richtungen auf und äußern sich durch das Auftreten von bis zu acht Wirbelstrukturen im Querschnitt, wobei jeweils zwei dieser Strukturen eine gegenläufigen Rotation aufweisen (vgl. Abb. 1.6). Das Fluid wird somit jeweils aus dem Zentrum des Rechteckkanals entlang der Flächendiagonalen in Richtung der Ecken transportiert. Infolge der Kontinuität wird das Fluid entlang der Wand und der Flächenhalbierenden zurück ins Zentrum befördert. Obwohl der Betrag der Geschwindigkeitskomponenten in der Querschnittsebene sehr gering ist (ungefähr 2-3 % der Hauptströmungskomponente), zeigt sich ein deutlicher Einfluss auf die Verteilung der Wandschubspannung, den Wärmeübergang oder die Verteilung von passiven Skalargrößen in der Strömung [35].

Ausgehend von experimentellen Untersuchungen an Kanälen mit nicht kreisförmigem Querschnitt von Nikuradse [36,37] folgerte Prandtl bereits 1926, dass diese Sekundärströmungen in Regionen mit einer Krümmung der Isotachen¹⁵ auf turbulente Geschwindigkeitsfluktuationen zurückzuführen sind [34]. Einstein & Li [38] zeigten anhand einer umfassenden theoretischen Untersuchung, dass Unterschiede in den Gradienten der turbulenten Reynolds-Spannungen die wesentliche Ursache für das Auftreten der Sekundärströmungen sind. Brundrett & Baines [39] analysierten die wesentlichen Terme der Erhaltungsgleichung der Vortizität in Strömungsrichtung anhand eigener experimenteller Daten sowie der Daten von Hoagland [40]. Sie schlussfolgerten daraus, dass ausschließlich der Term der turbulenten Normalspannungsgradienten von Bedeutung ist und durch den Konvektions- bzw. Diffusionsterm ausgeglichen wird. Perkins [41] konnte jedoch in seiner Arbeit nachweisen, dass ein Fehler der Messmethodik¹⁶ sowie die geringe Anzahl der Messpunkte von Brundrett & Baines [39] zu starken Abweichungen speziell in der Bestimmung der turbulenten Scherspannung $\overline{v'w'}$ führt, und ihre Erkenntnisse demnach weitergehend untersucht werden müssten. Gessner & Jones [42] verwendeten eine Hitzdrahtsonde in X-Anordnung zur genaueren Messung der Verläufe der turbulenten Reynolds-Spannungen in einer sich entwickelnden Strömung. Sie konnten anhand ihrer experimentellen Daten schlussfolgern, dass die Terme der turbulenten Reynolds-Spannungen die gleiche Ordnung aufweisen und den Druckgradienten ausgleichen. Sie konnten nachweisen, dass der konvektive Term und der molekulare Diffusionsterm jeweils um zwei Größenordnungen kleiner ist und letztgenannter Term einen Einfluss ausschließlich im wandnahen Bereich der Strömung aufweist. Dies widerspricht der ursprünglichen Aussage von Brundrett & Baines [39] eines unmittelbaren Gleichgewichts dieser Größen [30]. Perkins [41] experimentelle

¹⁴Diese wird auch als Sekundärströmung der zweiten Art nach Prandtl (1926) bezeichnet [34].

¹⁵Isotachen entsprechen Linien gleicher Geschwindigkeit.

¹⁶Brundrett & Baines verwendeten eine Hitzdrahtsonde auf einem Gitter von insgesamt 8x8 Messpunkten zur Gradientenbestimmung mittels einfacher finiter Differenzen.

Untersuchungen bestätigten die Arbeit von Gessner & Jones [42], ergänzten diese aber um eine Aussage für die Produktion der turbulenten Scherspannung $\overline{v'w'}$. Er schlussfolgerte, dass die Produktion sich auf einen Anteil infolge der Gradienten der Geschwindigkeitskomponenten in Querrichtung und einen Anteil infolge der turbulenten Normalspannungen bzw. des Gradienten der Strömungsgeschwindigkeit aufteilen lässt [30,41]. Gessner [43] erweiterte vorangegangene Untersuchungen und analysierte die einzelnen Terme der Transportgleichung der totalen kinetischen Energie. Auf Basis einer energetischen Bilanzierung postulierte er, dass das Energiedefizit, bedingt durch eine positive Scherspannung entlang der Flächendiagonalen, durch einen Anstieg der totalen kinetischen Energie kompensiert wird [43,44]. Damit ist die Anisotropie der primären Normalspannung die wesentliche Ursache für das Auftreten von Sekundärströmungen. Eine umfassende Übersicht über experimentelle Arbeiten bezüglich der Ursachen von Sekundärströmungen in verschiedenen Geometrien ist bei Bradshaw [45] zu finden.

In der Literatur lassen sich eine Vielzahl numerischer Untersuchungen in Rechteckkanalströmungen für unterschiedliche Modellvorschläge finden, so dass an dieser Stelle ausschließlich auf die wichtigsten Arbeiten verwiesen wird. Launder & Ying [46] konnten erstmals nachweisen, dass Schließungsansätze der Reynolds-gemittelten Erhaltungsgleichungen unter Verwendung einer isotropen Wirbelviskosität das Phänomen der turbulenzinduzierten Sekundärströmung nicht berücksichtigen können. Mit Hilfe einer algebraischen Reduktion der vollständigen Transportgleichungen des turbulenten Reynolds-Spannungstensors entwickelten sie einen erweiterten, nichtlinearen Schließungsansatz, der in verschiedenen Arbeiten zwecks einer verbesserten Übereinstimmung mit experimentellen Datensätzen weiter modifiziert und angepasst wurde [47–50]. Eine Übersicht über die ersten Schritte der Entwicklung von Modellen dieser Art ist der Arbeit von Demuren & Rodi [30] zu entnehmen.

Eine Überprüfung der experimentell abgeleiteten Thesen von Brundrett & Baines [39], Perkins [41] oder Gessner & Jones [42] konnte mit Hilfe steigender Rechnerkapazitäten erstmals mit Hilfe einer Grobstruktursimulation (LES) bzw. direkten numerischen Simulation (DNS) von Madabhushi & Vanka [51] und Gavrilakis [52] geführt werden. Letztgenannter untersuchte die wesentlichen Transportterme der Erhaltungsgleichung der Vortizitätsrate in Strömungsrichtung Ω_x . Seine Ergebnisse zu Verteilungen der Geschwindigkeits- und turbulenten Reynolds-Spannungskomponenten bestätigten, dass die Ursache des Auftretens von Sekundärströmungen im Wesentlichen auf die Unterschiede der turbulenten Normalspannungskomponenten $\overline{w'w'} - \overline{v'v'}$ und der Scherspannungskomponente $\overline{v'w'}$ zurückzuführen ist. Eine weiterführende Untersuchung ist den Arbeiten von Pinnelli et al. [33], Huser & Biringen [44] und Uhlmann et al. [53] zu entnehmen. Diese führten die Ursache der Sekundärströmung auf die Existenz von kohärenten Strukturen zurück, die maßgeblich für die örtliche Verteilung der lokalen Maxima und Minima der Wandschubspannung im Rechteckkanal verantwortlich sind.

Die Vortizität in Strömungsrichtung Ω_x ist wie folgt definiert:

$$\Omega_x = \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}. \quad (1.1)$$

Ausgehend von dieser Definition kann eine Transportgleichung der Größe abgeleitet werden:

$$\underbrace{\bar{v} \frac{\partial \Omega_x}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \Omega_x}{\partial z}}_{\text{Konvektion}-A_1} + \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\overline{w'w'} - \overline{v'v'})}_{\text{Einfluss der turbulenten Spannungen}-A_2+A_3} + \underbrace{v \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Omega_x}_{\text{Diffusion}-A_4} = 0. \quad (1.2)$$

Anhand der DNS-Daten von Pinelli et al. [33] bzw. Uhlmann et al. [53] (vgl. Abb. 1.7) kann gezeigt werden, dass sich die Terme der turbulenten Normal- (A_2) und Scherspannungen (A_3) gegenseitig ausgleichen. In unmittelbarer Wandnähe ist zusätzlich der Einfluss des Diffusionsterms (A_4) entscheidend. Dies bestätigt die bisherigen experimentellen Ergebnisse von Perkins [41] bzw. Gessner & Jones [42].

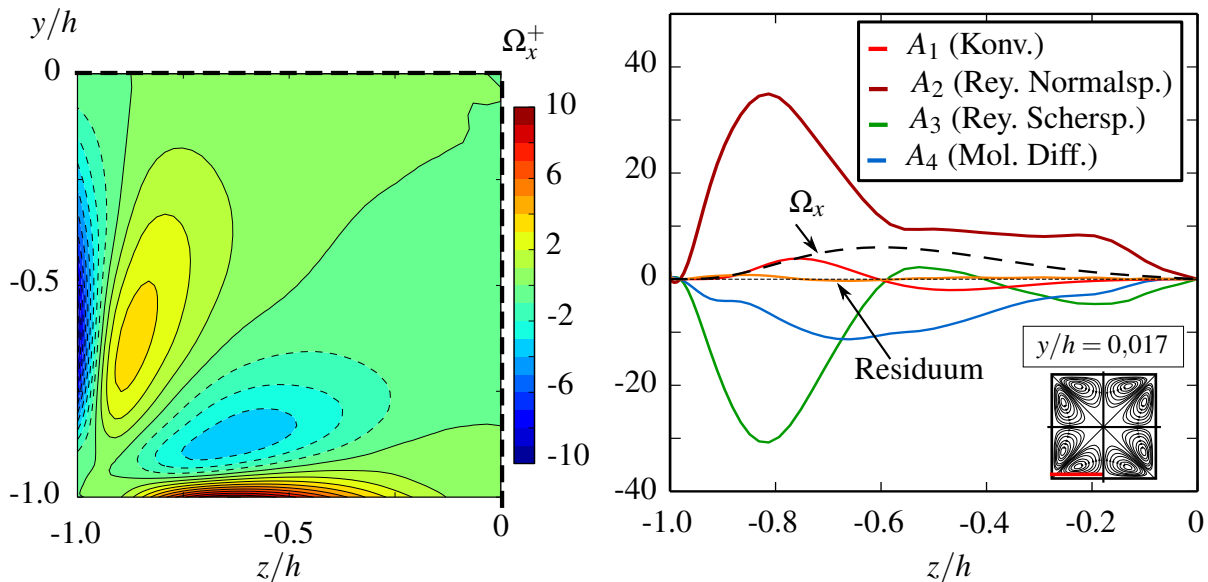


Abbildung 1.7.: Verteilung der Vortizität in Strömungsrichtung in einem Quadranten (links). Detaillierter Verlauf der einzelnen Transportterme der Vortizitätsgleichung für Ω_x^+ (rechts) bei $y/h = 0,017$ jeweils unter Verwendung von DNS-Daten in vollständig entwickelten Rechteckkanalströmungen bei $Re_B = 2200$ [33,53,54].

Der Einfluss von Auftriebseffekten auf die Wirbelstrukturen bzw. Sekundärbewegungen in einer Rechteckkanalströmung bei hohen molekularen Prandtl-Zahlen ($Pr = 0,71$) ist in den Arbeiten von Ma et al. [31,55] oder Sekimoto et al. [32] untersucht worden. Je nach Ausrichtung der Strömung zum Schwerfeld der Erde ändert sich unter zunehmender Beheizung die Form und Anzahl dieser Wirbelstrukturen, die in Abhängigkeit der molekularen Prandtl-Zahl die Temperaturverteilung im Querschnitt bestimmen.

Die turbulente Wärmeflussmodellierung im Fall von Flüssigmetallströmungen bzw. Strömungen niedriger molekularer Prandtl-Zahl ist im Gegensatz zur Entwicklung von Schließungsansätzen der Impulserhaltungsgleichungen weit weniger intensiv untersucht worden. Ein übliches Vorgehen basiert auf der Verwendung von einfachen Korrelationen der turbulenten Prandtl-Zahlen, die aus Analogiebetrachtungen zwischen experimentell oder numerisch ermitteltem Geschwindigkeits- und Temperaturfeld abgeleitet werden [22,56,57].

Diese einfachste Form der turbulenten Wärmeflussmodellierung basiert somit auf der Bestimmung einer isotropen turbulenten thermischen Diffusivität α_t , die ausschließlich in Kombination mit einem Gradientenansatz des Temperaturfeldes zu verwenden ist. Die empirischen Korrelationen reichen von einfachen Ansätzen in Abhängigkeit „globaler“ Parametern, wie z.B. der Reynolds-Zahl oder Prandtl-Zahl, bis zu aufwändigen Ansätzen in Abhängigkeit des lokalen Wandabstandes [22,57]. Ein wesentlicher Nachteil der empirischen Korrelationen ist ihre Limitierung auf meist einfache Strömungsfälle in rein erzwungener Konvektion, da komplexe auftriebsbehaftete Strömungsvorgänge nur bedingt wiedergegeben werden können [58].

Für sehr komplexe Strömungsfälle werden diese erweiterten Konzepte der turbulenten Prandtl-Zahl aufgrund der schwierigen Wahl geeigneter Bezugsgrößen, wie z.B. der Reynolds-Zahl, nahezu nicht verwendet und es wird stattdessen auf die Annahme einer räumlich konstanten turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t zurückgegriffen. Es kann jedoch unter Verwendung von Ergebnissen einer direkten numerischen Simulationen in Kanalströmungen gezeigt werden, dass speziell in Wandnähe diese Annahme für Strömungen einer niedrigen molekularen Prandtl-Zahl nicht erfüllt ist [22,59]. Grötzbach [59] und Wörner [60] zeigten mit Hilfe von direkten numerischen Simulationen (DNS) am Beispiel einer horizontalen Fluidschicht (Rayleigh-Bénard Konvektion), dass einfache Turbulenzmodelle in Kombination mit empirischen Korrelationen für die turbulenten Wärmeflüsse in Naturkonvektion Defizite bei der Bestimmung der korrekten Profile der turbulenten Wärmeflüsse aufweisen.

Eine Alternative zur Berücksichtigung der Skalentrennung bzw. der unterschiedlichen Dicke der viskosen und thermischen Grenzschicht in Flüssigmetallströmungen stellt die Verwendung von Modellkonzepten der turbulenten thermischen Diffusivität auf Basis der Transportgleichungen der Temperaturvarianz und ihrer Dissipationsrate dar. Der Quotient dieser beiden Größen entspricht einer thermischen Zeitskala, deren Verhältnis zum Quotienten der turbulenten kinetischen Energie und ihrer Dissipationsrate dem sogenannten Zeitskalenverhältnis entspricht. Die Einführung dieser Größe ermöglicht es, den Einfluss der molekularen Prandtl-Zahl unmittelbar über die Modellgleichungen in das turbulente Wärmeflussmodell aufzunehmen und den Effekt der Skalentrennung mehr oder minder auf „natürlichem“ Weg zu berücksichtigen. Der Transport der Temperaturvarianz von einem in einen anderen Bereich der Strömung, wie z.B. hinter einer beheizten Gitterstruktur, kann im Gegensatz zum Konzept der turbulenten Prandtl-Zahl unmittelbar aus der Transportgleichung bestimmt werden [59]. Beispiele für dieses Konzept sind die Modellvorschläge von Abe

et al. [61], Nagano & Shimada [62], Hwang & Lin [63] sowie Nagano et al. [64]. Von all diesen Modellen berücksichtigt ausschließlich das Modell von Nagano & Shimada [62] explizit den Einfluss der molekularen Prandtl-Zahl auf die Skalentrennung und somit einer Abweichung von der Reynolds-Analogie. Letztgenannte Hypothese basiert auf der Annahme eines konstanten Proportionalitätsfaktors zwischen turbulenter Wirbelviskosität und turbulenter thermischer Diffusivität. Der wesentliche Schwachpunkt ihres Modells ist seine Beschränkung auf zweidimensionale Strömungen [62].

Kürzlich veröffentlichten Manservigi & Menghini [65,66] speziell für Strömungen einer niedrigen molekularen Prandtl-Zahl eine Weiterentwicklung des Ansatzes von Abe et al. [61]. Durch eine Modifikation der Formulierung der Dämpfungsfunktionen und der turbulenten thermischen Diffusivität α_t erlaubt es dieser Ansatz, den Temperaturverlauf von Flüssigmetallströmungen zumindest in Kanal- und Stabbündelströmungen hinreichend genau wiederzugeben [65,66].

Analog zu Ansätzen auf Basis empirischer Korrelationen ist ein wesentlicher Nachteil dieses Konzeptes sein isotroper Charakter. Hanjalić [58] bemerkt hierzu, dass für den Fall einer unendlich langen, vertikal überströmten Platte mit einer konstant hohen Temperatur die turbulenten Wärmeflüsse in Strömungsrichtung im vollständig entwickelten Bereich und somit auch die auftriebsbedingte Produktion der turbulenten kinetischen Energie nicht wiedergegeben werden können.

Einige der wesentlichen Nachteile der bereits erläuterten Konzepte können durch Modellierung der vollständigen Transportgleichungen der turbulenten Wärmeflüsse vollständig eliminiert werden [58,67]. Die zeitliche Änderung sowie der lokale Transport bzw. die Konvektion infolge der Hauptströmung werden in dieser Modellstufe exakt¹⁷ und vollständig berücksichtigt. Eine Modellierung des vollständigen Satzes der zweiten Momente führt demnach in der inkompressiblen Formulierung auf insgesamt 16 partielle Differentialgleichungen. Dies stellt einen erheblichen Mehraufwand im Vergleich zur Verwendung einfacher isotroper Ansätze dar. Darüber hinaus muss für jede Komponente des turbulenten Wärmeflussvektors eine geeignete Modellierung der einzelnen Transportmechanismen gewährleistet sein [67–69]. Speziell der Druckgradienten-Temperatur-Korrelationsterm sowie die Dissipationsrate erfordern je nach molekulare Prandtl-Zahl eine geeignete Modellformulierung [70]. Um in Strömungen niedriger molekulare Prandtl-Zahl den Effekt der Skalentrennung sowie Auftriebseffekte korrekt wiederzugeben müssen ebenfalls die Transportgleichungen der Temperaturvarianz und ihrer Dissipationsrate in das Gleichungssystem aufgenommen werden. Eine Übersicht über verschiedene Ansätze zur Modellierung der Einzelterme kann den Arbeiten von Hanjalić [58] und Hanjalić & Launder [71] entnommen werden.

Eine Vielzahl dieser Ansätze zur Modellierung der einzelnen Transport- und Vernichtungsterme in der Transportgleichung der turbulenten Wärmeflüsse ist für molekulare Prandtl-Zahlen nahe eins entwickelt worden. Diese sind meist nur bedingt zur Berechnung von Flüssigmetallströ-

¹⁷Der Begriff „exakt“ in diesem Kontext bezieht sich darauf, dass keine weitere Modellierung der einzelnen Transportterme erforderlich ist.

mungen geeignet. Shikazono & Kasagi [72] entwickelten ausgehend von dieser Motivation einen vollständig differentiellen Ansatz, der den Effekt der Prandtl-Zahl hinreichend genau zu berücksichtigen versucht. Hierzu formulierten sie jeweils hochspezialisierte Modelle des vollständigen Druckgradienten-Temperatur-Korrelations- und Dissipationsterms der turbulenten Wärmeflüsse. Das Modell von Carteciano [73] wurde speziell zur Berechnung eines Natrium-Freistrahls entwickelt und versucht in Abhängigkeit der Prandtl-Zahl durch Einführung eines neuen Terms den steigenden bzw. sinkenden Einfluss der beiden wesentlichen Transportmechanismen in den Schließungsansatz aufzunehmen. Shin et al. [74] sowie Dehoux [75] nutzen jeweils eine abgewandelte Form der Methode der elliptischen Relaxation, erstmals durch Durbin [76] vorgeschlagen, um speziell den Einfluss und das asymptotische Verhalten im wandnahen Bereich der Strömung korrekt abzubilden. Speziell das Modell von Dehoux [75] zeigt auch für niedrige molekulare Prandtl-Zahlen ein Potenzial, das im Rahmen dieser Arbeit analysiert und bewertet werden soll. Baumann [70] entwickelte eine Kombination aus einem explizit algebraischen Reynolds-Spannungsmodell nach Hellsten [77,78] und einer neuen Modellformulierung der Transportgleichungen der turbulenten Wärmeflüsse. Der Einfluss der Prandtl-Zahl auf den Korrelations- und Dissipationsterm wird in diesem Modell über eine Dämpfungsfunktion berücksichtigt.

Jede beliebige Modellstufe der turbulenten Wärmeflüsse erfordert analog zu Ansätzen der turbulenten Reynolds-Spannungen eine sorgfältige Prüfung und Validierung in unterschiedlichen Strömungstypen. Da für den Fall niedriger molekularer Prandtl-Zahlen zu diesem Vorhaben nur eine begrenzte Auswahl von experimentellen oder numerischen Datensätzen zur Verfügung steht, ist dies nur bedingt möglich. Speziell die Modellierung der einzelnen Transportmechanismen der vollständigen Transportgleichung der turbulenten Wärmeflüsse erfordert einen umfassenden Einblick in die Verteilung der turbulenten Fluktuationsgrößen, die in Flüssigmetallströmungen experimentell nur sehr limitiert zugänglich sind. Somit bleibt für eine Prüfung der Schließungsansätze anhand experimenteller Daten ausschließlich der Vergleich integraler Größen, wie z.B. der Temperaturverteilung. Eine ausführliche Übersicht früher experimenteller Arbeiten an flüssigem Natrium kann der Arbeit von Fuchs [79] entnommen werden. Experimente an eutektischem Bleiwismut in Stabbündel- und Ringspaltströmungen werden am Kalsruher Liquid Metal Laboratory (KALLA) des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT) durchgeführt, siehe z.B. den THESYS-Kreislauf [80–83] oder den THEADES-Kreislauf [84].

Zur Entwicklung oder Anpassung von Schließungsansätzen auf Basis zweiter Momente muss demnach auf geeignete DNS-Daten zurückgegriffen werden, die jedoch meist nur bei einfachen Geometrien, kleinen Reynolds-Zahlen und hohen molekularen Prandtl-Zahlen verfügbar sind. Eine Ausnahme stellen die DNS-Daten von Abe et al. [85,86] in turbulenten Plattenkanalströmungen dar. Für komplexere Strömungsfälle, wie z.B. in Rechteckkanälen oder bei Einfluss von Auftriebseffekten, müssen für Flüssigmetallströmungen hingegen aufgrund der Skalentrennung zwischen turbulentem Impuls- und Temperaturfeld zunächst geeignete Vergleichsdaten bestimmt werden.

1.3. Zielsetzung und Vorgehensweise

Im Rahmen dieser Arbeit werden Kombinationen von Schließungsansätzen der Impuls- und Energieerhaltungsgleichungen entwickelt, die speziell für turbulente Platten- und Rechteckkanalströmungen variierender molekularer Prandtl-Zahl geeignet sind. Sie konzentriert sich hierbei auf folgende Aspekte:

- Rechteckkanalströmungen können durch das Auftreten einer turbulenzinduzierten Sekundärströmung charakterisiert werden. Diese verlangen den Einsatz von nichtlinearen, anisotropen Schließungsansätzen zur Bestimmung der turbulenten Reynolds-Spannungen. Zu diesem Zweck werden geeignete Ansätze aus der Literatur ausgewählt, verglichen und hinsichtlich ihrer Eignung für Plattenkanal- und Rechteckkanalströmungen untersucht.
- Ein wesentlicher Fokus dieser Arbeit ist die Analyse von Schließungsansätzen der Energieerhaltungsgleichung bei Strömungen niedriger molekularer Prandtl-Zahl. Hierfür werden Schließungsansätze erster und zweiter Ordnung aus der Literatur mit Hilfe von verfügbaren DNS-Daten in Plattenkanalströmungen hinsichtlich ihrer theoretischen Grundlagen und numerischen Eigenschaften analysiert und verglichen.
- Unter den vorgestellten Ansätzen werden die Vielversprechendsten ausgewählt und für die speziellen Anforderungen von turbulenten Rechteckkanalströmungen unterschiedlicher Prandtl-Zahlen geeignet erweitert bzw. modifiziert. Ziel ist die Ableitung eines effizienten, einfachen Ansatzes z.B. durch eine algebraische Reduktion.
- Die erweiterten turbulenten Wärmeflussmodelle werden in einem ersten Schritt mit einem Schließungsansatz der Impulserhaltungsgleichung gekoppelt. Das kombinierte Modell wird dann in turbulenten Plattenkanalströmungen bei variierenden Reynolds- und Prandtl-Zahlen sowie bei verschiedenen Beheizungszuständen anhand von Ergebnissen der DNS, eigens durchgeführter Grobstruktursimulationen und empirischen Korrelationen validiert.
- Für turbulente Rechteckkanalströmungen quadratischen Querschnitts sind nach Kenntnis des Autors keine belastbaren Vergleichsdaten verfügbar. Daher werden hier Grobstruktursimulationen bei erzwungener und gemischter Konvektion durchgeführt. Die Ergebnisse dienen einer weiterführenden Validierung und Verifizierung der entwickelten Schließungsansätze. Das Potenzial der entwickelten Modellansätze in Rechteckkanalströmungen niedriger molekularer Prandtl-Zahl wird ausführlich diskutiert.

1.4. Gliederung der Arbeit

Im ersten Kapitel wird der aktuelle Stand der Forschung, der theoretische Kontext und die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit erläutert. Kapitel 2 beinhaltet die wesentlichen theoretischen Grundlagen der Strömungsmechanik. Dazu gehören neben den Erhaltungssätzen auch die Erläuterung der unterschiedlichen Konvektionsarten. Eine Klassifizierung von verschiedenen Strömungskonfigurationen ist durch Einführung dimensionsloser Kennzahlen möglich. Der wichtigste Parameter für die numerische Berechnung von Strömungen mit Wärmeübergang ist die molekulare Prandtl-Zahl. In Kapitel 3 werden die wesentlichen Charakteristiken der Turbulenz in Innenströmungen unter Berücksichtigung der Energieerhaltung diskutiert. Im Anschluss werden in Kapitel 4 die verschiedenen Verfahren der mathematischen Beschreibung turbulenter Strömungen erläutert.

In den Kapiteln 5 bis 7 werden existierende Schließungsansätze der Impuls- und Energietransportgleichungen analysiert und drei neu entwickelte Schließungsansätze vorgestellt. Dieser Abschnitt stellt die wesentlichen Ergebnisse der Arbeit dar. Die entwickelten Modelle werden hinsichtlich ihrer Genauigkeit anhand von Vergleichsdaten in Abhängigkeit der molekularen Prandtl-Zahl verifiziert. In Kapitel 5 werden anisotrope Schließungsansätze der Impulserhaltungsgleichungen zur Berechnung von turbulenzinduzierten Sekundärströmungen vorgestellt und diskutiert. Das Kapitel 6 beschreibt und analysiert Schließungsansätze erster und zweiter Ordnung der Energieerhaltungsgleichung aus der Literatur. Die Modelle werden hinsichtlich ihrer theoretischen Grundlagen und erreichbaren Genauigkeit ausschließlich anhand von verfügbaren DNS-Daten in turbulenten Plattenkanalströmungen untersucht und gegeneinander abgegrenzt. Ausgehend von den Erkenntnissen dieser Untersuchung werden mehrere geeignete Schließungsansätze ausgewählt und für einen Einsatz in Rechteckkanalströmungen bei niedrigen molekularen Prandtl-Zahlen erweitert. In Kapitel 7 werden die entwickelten turbulenten Wärmeflussmodelle mit einem Schließungsansatz der Impulserhaltungsgleichung kombiniert und in turbulenten Plattenkanalströmungen bei variierenden Prandtl- und Reynolds-Zahlen sowie bei verschiedenen Beheizungszuständen mit Hilfe der Ergebnisse von DNS und empirischen Korrelationen validiert. Im Anschluss wird das Validierungskonzept auf Rechteckkanalströmungen bei unterschiedlichen Beheizungszuständen, Prandtl-Zahlen und Konvektionszuständen erweitert.

Das letzte Kapitel 8 fasst die zentralen Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zusammen und gibt einen Ausblick auf eine mögliche Ausweitung der Untersuchung turbulenter Rechteckkanalströmungen bei verschiedenen Konvektionsarten.

Im Anhang wird ergänzend zu dieser Arbeit eine Analyse und Bewertung der vorgestellten und entwickelten Ansätze unter Einfluss der Reynolds- und Prandtl-Zahl diskutiert.

2 Grundlagen des Impuls- und Energietransports in Strömungen

Im Rahmen dieses Kapitels werden kompakt die Grundlagen der strömungsmechanischen Erhaltungsgleichungen eingeführt. Dies umfasst die Beschreibung der elementaren Gleichungen sowie der wichtigsten dimensionslosen Kennzahlen in nicht isothermen Strömungen.

2.1. Erhaltungsprinzipien

Die Erhaltungsprinzipien umfassen die Erhaltung der Masse, des Impulses und die Erhaltung skalarer Größen, wie z.B. der Energie. Sie beschreiben ein instantanes Geschwindigkeitsfeld für ein infinitesimales Kontrollvolumen und weisen in ihrer Formulierung keine Limitierung hinsichtlich ihrer Möglichkeit zur Beschreibung laminarer oder turbulenter Strömungen auf. Nachfolgend sollen die Gleichungen unter Verwendung der Einstein-Notation formuliert werden. Dies bedeutet eine Summation über alle Werte des Indizes falls ein Index in einem Term mehrfach vorkommt.

2.1.1. Massenerhaltung

Die Gleichung der Massenerhaltung bzw. die Kontinuitätsgleichung beschreibt die Änderung der Dichte ρ innerhalb eines Kontrollvolumens. Die Massenerhaltung impliziert, dass die totale Ableitung, also die Summe der partiellen Ableitung der Zeit t sowie durch Zu- und Abflüsse durch die Oberfläche des Kontrollvolumens, den Wert Null annehmen muss. Die Gleichung kann in kartesischen Koordinaten x_i ($i = 1,2,3$) bzw. $\vec{x} = (x, y, z)^T$ angegeben werden zu:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0. \quad (2.1)$$

Der erste Term beschreibt hierbei die zeitliche Änderung der Dichte ρ und der zweite Term eine Änderung aufgrund ein- bzw. ausströmender Massenflüsse in das betrachtete Volumen. Die Gleichung der Massenerhaltung lässt sich für ein inkompressibles Medium, in dem die Dichte keine Funktion der Zeit oder des Ortes $\rho \neq f(x_i, t)$ ist, weiter vereinfachen zu:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.2)$$

Der physikalische Zusammenhang der ursprünglichen Erhaltungsgleichung der Masse verschwindet und sie stellt vielmehr eine mathematische Zwangsbedingung für das vektorielle Geschwindigkeitsfeld dar. Man bezeichnet ein solches Feld auch als divergenzfrei oder quellenfrei. Dies hat erheblichen Einfluss auf die Formulierung und die Wahl des numerischen Verfahrens zur Berechnung der Impulsgleichung, da ein allgemeiner algebraischer Zusammenhang, wie z.B. die thermische Zustandsgleichung idealer Gase, im Falle eines inkompressiblen Mediums für die Kopplung des Geschwindigkeits- und Druckfeldes entfällt.

2.1.2. Impulserhaltung

Die Impulserhaltung beschreibt die zeitliche Änderung des Impulses eines Kontrollvolumens unter Berücksichtigung von ein- bzw. ausströmenden Impulsflüssen durch seine Oberflächen, Scherkräften und Normalspannungen sowie einer Einwirkung äußerer Kräfte f_i auf das Volumen. Sie kann in differentieller Form wie folgt angegeben werden

$$\frac{D(\rho u_i)}{D t} = \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + f_i, \quad (2.3)$$

wobei im ersten Term D/Dt die Anwendung des Operators der totalen zeitlichen Ableitung auf die Impulsdichte ρu_i enthalten ist. Der Tensor T_{ij} stellt den Spannungstensor dar, der den Einfluss von auf das Volumen wirkenden Normal- und Scherspannungen umfasst. Die Diagonalelemente des Spannungstensors bzw. die Normalspannungen können hierbei in zwei verschiedene Anteile zerlegt werden:

$$T_{11} = -p + \sigma_{11}, \quad T_{22} = -p + \sigma_{22}, \quad T_{33} = -p + \sigma_{33}. \quad (2.4)$$

Der erste Anteil p bezeichnet den statischen Druck, wohingegen die Anteile σ_{ii} den Einfluss der Reibung bzw. der Viskosität μ des Mediums berücksichtigen. Für Gase gilt bezüglich der Viskosität die Näherung $\lambda^* = -\frac{2}{3}\mu$. Der Spannungstensor kann demnach unter Verwendung des Kronecker-Deltas ($\delta_{ij} = 1$ falls $i = j$ bzw. $\delta_{ij} = 0$ falls $i \neq j$) umformuliert werden zu:

$$T_{ij} = - \left(p - \lambda^* \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \delta_{ij} + 2\mu S_{ij}, \quad (2.5)$$

$$\tau_{ij} = 2\mu S_{ij} + \lambda^* \delta_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_j}. \quad (2.6)$$

Die Größe τ_{ij} stellt den viskosen Anteil des Spannungstensor dar, dessen Diagonal- und Nebendiagonalelemente mit viskosen Normalspannungen σ_{ij} für $i = j$ sowie viskosen Scherspannungen

τ_{ij} für $i \neq j$ besetzt sind:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Die Größe S_{ij} entspricht dem symmetrischen Tensor der Deformationsrate:

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.8)$$

Für ein inkompressibles Medium entfällt unter Annahme eines divergenzfreien Geschwindigkeitsfeldes der zusätzliche Anteil der viskosen Normalspannungen (vgl. Gl. (2.2)). Weiterhin soll an dieser Stelle die zeitlich und räumlich konstante kinematische Viskosität $\nu = \mu/\rho \neq f(x_i, t)$ eingeführt werden. Die Impulsgleichung reduziert sich damit auf:

$$\frac{D(u_i)}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + f_i. \quad (2.9)$$

Unter Berücksichtigung der Stetigkeit der Ableitungen lässt sich nach dem Satz von Schwarz die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschen. Dies führt für den Fall einer inkompressiblen Strömung zu folgender differentieller Darstellung der Impulserhaltung:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + f_i. \quad (2.10)$$

Der Vektor f_i beschreibt den Einfluss von Volumenkräften, wie z.B. durch Gravitation oder elektromagnetische Kräfte, auf das Kontrollvolumen. Dieser Term hat somit erheblichen Einfluss auf die Wahl des numerischen Verfahrens, wie z.B. der Druckkorrektur-Geschwindigkeits-Korrektur¹⁸, und erfordert die Einteilung der Variablen in sogenannte aktive oder passive Größen [87].

Die Auftriebswirkung basiert auf einer temperaturabhängigen Dichteänderung des Mediums sowie der Richtung der wirkenden Gravitation g_i . Unter der Annahme hinreichend geringer Temperaturdifferenzen ist es zulässig den Einfluss der Dichteänderung im Rahmen der Impulserhaltungsgleichung auf den Auftriebsterm zu beschränken. Dies bezeichnet man als Boussinesq-Approximation, die wie folgt angegeben werden kann:

$$\rho_b = \rho_b(T) = \rho_0 \times [1 - \beta (T - T_0)]. \quad (2.11)$$

Diese Gleichung basiert auf einem linearen Zusammenhang der auftriebsbedingten Dichteänderung ρ_b/ρ_0 zur Temperaturänderung $(T - T_0)$. Der Index 0 bezeichnet einen Referenzzustand bzw.

¹⁸Verfahren der Druck-Geschwindigkeits-Korrektur wie z.B. der SIMPLE- oder PISO-Algorithmus müssen unter Einwirkung von Auftriebskräften entsprechen erweitert werden

einen Bezugswert der Temperatur in der Strömung, der geeignet gewählt werden muss. Die Größe β entspricht hierbei dem volumetrischen, thermischen Ausdehnungskoeffizienten des Volumens V aufgrund einer Temperaturänderung unter konstantem Druck:

$$\beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p. \quad (2.12)$$

Es ergibt sich somit für die Kraft f_i unter Berücksichtigung des Schwerfeldes der Erde folgender Zusammenhang:

$$f_i = \left(\frac{\rho_b}{\rho_0} \right) g_i = (1 - \beta (T - T_0)) g_i. \quad (2.13)$$

Die Gültigkeit der Boussinesq-Approximation und somit der Vernachlässigung der Kompressibilität in den Impulserhaltungsgleichungen ist für jede numerische Simulation entsprechend zu prüfen.

2.1.3. Energieerhaltung

Eine spezielle Form der Energieerhaltung beschreibt die zeitliche Änderung der spezifischen Enthalpie h unter Berücksichtigung der Summe an Energieströmen durch Konvektion, durch molekulare Diffusion oder durch Quellen und Senken der skalaren Energie in einem Kontrollvolumen. Der Einfluss der viskosen Dissipation bzw. der Umwandlung von Reibung in Wärmeenergie sowie eine Energieänderung infolge Strahlung sollen hierbei vernachlässigt werden:

$$\frac{D(\rho h)}{D t} = \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho h u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial x_j} + S_h. \quad (2.14)$$

Der Vektor der Wärmestromdichte \dot{q}_j kann mit Hilfe des Fourier'schen Wärmeleitungsgesetzes unter Annahme eines Gradientenansatzes formuliert werden als:

$$\dot{q}_j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j}. \quad (2.15)$$

Hierbei bezeichnen die Größen λ und T die sogenannte molekulare Wärmeleitfähigkeit und die instantane Temperatur. Dem Quell- bzw. Senkterm S_h kommt je nach Problemstellung z.B. unter dem Einfluss chemischer Reaktionen unterschiedliche Bedeutungen zu, die im Anhang (vgl. Anhang A.1.4) speziell für den Fall vollständig entwickelter Strömungen ausführlich erläutert wird. Unter Annahme einer räumlich und zeitlich konstanten Dichte ρ , Wärmeleitfähigkeit λ und spezifischen Wärmekapazität c_p des Mediums lässt sich obige Gleichung (2.14) zu einer Transportgleichung der Temperatur umwandeln:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \left(\frac{\lambda}{\rho c_p} \right) \frac{\partial^2 T}{\partial x_j^2} + S_h^*. \quad (2.16)$$

Der Diffusionskoeffizient der molekularen Wärmeleitung entspricht der sogenannten thermischen Diffusivität $\alpha = \lambda / (\rho c_p)$. Die Größe S_h^* bezeichnet einen Quellterm.

Im Rahmen dieser Arbeit soll ausschließlich die Transportgleichung der Temperatur (vgl. Gl. (2.16)) numerisch gelöst und untersucht werden.

2.2. Konvektionsarten bei unterschiedlichen Randbedingungen

Je nach Verhältnis der Auftriebs- und Impulskräfte lassen sich verschiedene Konvektionsarten einer Strömung identifizieren: erzwungene Konvektion, Misch- und Naturkonvektion. Unter erzwungener Konvektion versteht man einen Strömungszustand im Schwerfeld der Erde in dem Auf- und Abtriebskräfte bedingt durch Unterschiede der Dichte des Mediums vernachlässigbar klein gegenüber den vorherrschenden Impulskräften sind. Da die Temperatur keine Rückwirkung auf die Impulsverteilung aufweist, kann sie auch als sogenannter passiver Skalar bezeichnet werden. Die gegenseitige Kopplung der Energieerhaltungs- und Impulserhaltungsgleichung entfällt somit für diesen Fall. Dies stellt unter Berücksichtigung des erforderlichen Aufwands und der Wahl eines geeigneten numerischen Verfahrens eine erhebliche Vereinfachung dar.

Mit zunehmender Größe der Auftriebskräfte erfolgt der Übergang in den Bereich der Mischkonvektion. Temperaturunterschiede beeinflussen nun unmittelbar das Geschwindigkeitsfeld und können je nach Richtung des Gravitationsvektors Ursache für eine Verzögerungen bzw. Beschleunigung der Strömung in kühleren oder wärmeren Bereichen des Systems sein. Dies betrifft unmittelbar die Produktion turbulenter Strukturen und es kann gegenüber der erzwungenen Konvektion zu Phänomenen, wie z.B. einer Relaminarisierung der Strömung, führen. Da im Falle der Mischkonvektion nur eine begrenzte Anzahl von ausreichend genauen experimentellen oder numerischen Vergleichsdaten existiert, stellt dieser Konvektionsfall eine der größten Herausforderungen im Rahmen der Modellentwicklung dar.

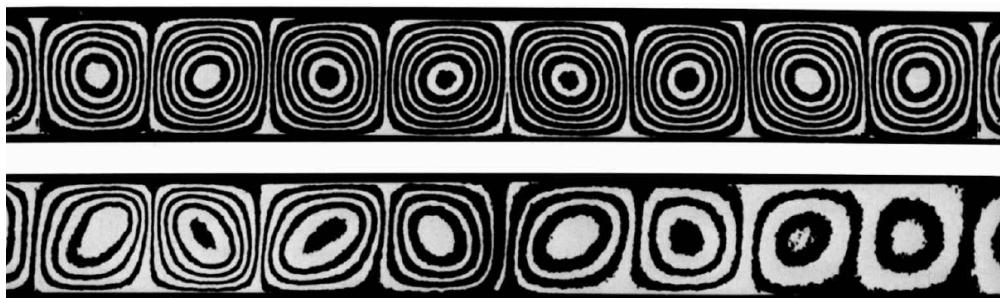


Abbildung 2.1.: Interferogramm auftriebsbedingter Konvektionsrollen für eine gleichmäßige Temperaturdifferenz (oben) und für eine über die Wandlänge zunehmende Temperaturdifferenz (unten) zwischen beiden Wänden [88].

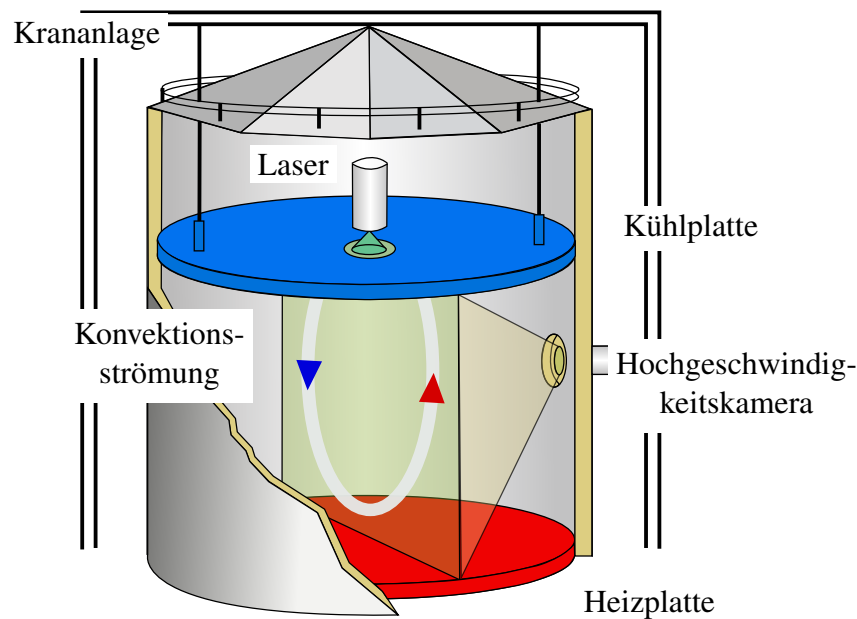


Abbildung 2.2.: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus einer Rayleigh-Bénard-Konvektion im *Ilmenauer Fass* (Grafik illustriert nach [90]).

Die Naturkonvektion bzw. freie Konvektion bezeichnet Strömungsvorgänge, die ausschließlich durch vorherrschende Auf- und Abtriebskräfte beeinflusst sind. Ein Beispiel mit besonderem wissenschaftlichen Interesse stellt die sogenannte Rayleigh-Bénard-Konvektion dar. Diese spezielle Strömungsform der freien Konvektion ist gekennzeichnet durch das Auftreten von statistisch regulären Mustern an Konvektionszellen, die auf eine Temperaturdifferenz zwischen zwei voneinander entfernten Begrenzungsflächen des Mediums zurückzuführen sind. Besonders erwähnenswert sind diesbezüglich die experimentellen Untersuchungen der TU Ilmenau am *Ilmenauer Fass* (vgl. Abb. 2.2), das weltweit die größte Einrichtung zur Untersuchung der großskaliger turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion darstellt [89,90]. Eine umfangreiche Untersuchung mit Hilfe direkter numerischer Simulationen (DNS) für diesen Strömungstyp ist durch die Arbeit von Wörner [60] für Medien unterschiedlicher Prandtl-Zahlen gegeben.

In komplexen Systemen besteht die Möglichkeit, dass verschiedene Konvektionsarten in unterschiedlichen Systembereichen parallel existieren, wie z.B. in einem Schichtspeicher, siehe Shah & Furbo [91] oder Schwamberger [92]. Auch das An- und Herunterfahren von Anlagen oder der Ausfall von elementaren Systemkomponenten kann die Ursache für einen transienten Wechsel der verschiedenen Konvektionsarten der Strömung sein. Zur Abschätzung des Transitionsbereichs zwischen den einzelnen Arten eignen sich dimensionslose Kennzahlen, wie z.B. die Richardson und Reynolds-Zahl, deren Größenordnung sich unmittelbar aus Verhältnissen der vorherrschenden Auftriebs-, Zähigkeits- und Impulskräften ergibt.

2.3. Dimensionslose Kennzahlen zur Strömungscharakterisierung

2.3.1. Reynolds-Zahl

Die dimensionslose Reynolds-Zahl Re beschreibt das Verhältnis von Impuls- bzw. Trägheits- zu Zähigkeitskräften in der Strömungsmechanik [93]. Sie ist definiert als:

$$Re = \frac{\rho u_c L}{\mu}. \quad (2.17)$$

In der obiger Gleichung stellen die neu eingeführten Größen u_c und L eine charakteristische Geschwindigkeit und Länge dar. Diese müssen je nach vorliegendem Problemfall geeignet gewählt werden. Im Falle einer Rohrströmung verwendet man üblicherweise die massenstromgemittelte Geschwindigkeit u_b und den hydraulischen Durchmesser D_h . Ein wesentlicher Vorteil der Verwendung dimensionsloser Kennzahlen ist die Möglichkeit des Vergleichs von Strömungen unterschiedlicher Stoffe oder spezifischer Größenverhältnisse unter der Voraussetzung, dass die gebildeten dimensionslosen Kennzahlen auf den selben Referenzpunkten und -definitionen basieren. Ausnahmefälle stellen komplexe Strömungsvorgänge, wie z.B. bei der Durchströmung von Schaukelkanälen in hydraulischen oder thermischen Strömungsmaschinen, dar.

Die Reynolds-Zahl kann auch als Maß der Informationsausbreitung eines Signals infolge eines konvektiven oder diffusiven Transports verstanden werden. Für sehr große Reynolds-Zahlen beschränkt sich der Einfluss der Zähigkeitskräfte auf einen sehr kleinen wandnahen Bereich der Strömung, der sogenannten Grenzschicht. Für vollständig entwickelte Innenströmung erstreckt sich hierbei die Grenzschicht über den gesamten Strömungsquerschnitt und es erfolgt die Ausbildung typischer Geschwindigkeitsprofile.

2.3.2. Prandtl-Zahl

Die molekulare Prandtl-Zahl Pr stellt neben der Reynolds-Zahl Re eine der wichtigsten Kennzahlen zur Analyse und Beschreibung des konvektiven Wärmeübergangs dar. Sie beschreibt das Verhältnis des molekularen Diffusionskoeffizienten des Impulses zum Diffusionskoeffizienten der Energie:

$$Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda} = \frac{\nu}{\alpha}. \quad (2.18)$$

Die Prandtl-Zahl Pr kann auch in Analogie zur Stoffübertragung als Schmidt-Zahl Sc verstanden werden. Im Allgemeinen weist sie für Gase und Flüssigkeiten eine Abhängigkeit von der Temperatur und vom Druck $Pr = f(T, p)$ auf, da jedoch im Rahmen der vorliegenden Arbeit ausschließlich Fluide mit konstanten Stoffgrößen untersucht werden, wird die molekulare Prandtl-Zahl im Folgenden ebenfalls als konstant angenommen.

Die molekulare Prandtl-Zahl hat erheblichen Einfluss auf die Form des Profils der Temperaturverteilung (vgl. Abb. 2.3) sowie auf die Einlaufänge einer Strömung zu einem vollständig hydraulisch und thermisch entwickelten Zustand. Speziell im Fall von Strömungen niedriger molekularer Prandtl-Zahl oder Mischkonvektion kann die thermische Einlaufänge die erforderliche hydraulische Einlaufänge deutlich übertreffen [94]. Wie man der Abb. 2.3 für den Fall einer überströmten ebenen Platte mit konstantem Temperaturgefälle $T_w - T_0$ entnehmen kann, ist die thermische Grenzschichtdicke δ_{th} für niedrige Prandtl-Zahlen $Pr \ll 1$ deutlich größer als die hydraulische Grenzschicht δ_v . Dieses Verhalten ist charakteristisch für Flüssigmetalle in Außenströmungen. Für eine Prandtl-Zahl $Pr \approx 1$ sind die Grenzschichtdicken nahezu identisch groß. Für Strömung sehr großer Prandtl-Zahlen $Pr \gg 1$ hingegen kehrt sich dieser Zustand um und es gilt $\delta_v \ll \delta_{th}$. Dieses Beispiel eines einfachen Strömungstyps zeigt, dass infolge zu- bzw. abnehmender Prandtl-Zahlen das Geschwindigkeits- und Temperaturfeld deutlich sichtbare Skalenunterschiede aufweisen, die eine allgemeingültige Beschreibung durch numerische Modellansätze erschweren. Im Gegensatz hierzu kann für eine Innenströmung analytisch am Beispiel einer beheizten, laminaren und vollständig entwickelten Kanalströmung gezeigt werden, dass das Temperaturprofil in diesem Fall keine Funktion der Prandtl-Zahl ist. Mit zunehmender Reynolds-Zahl geht die Strömung von einem laminaren in einen turbulenten Zustand über. Die molekulare Prandtl-Zahl beeinflusst nun die Form des Temperaturprofils maßgeblich. Der Wärmeübergang setzt sich für Strömungen hinreichend großer Reynolds-Zahlen aus molekularer und turbulenter Wärmeleitung sowie dem Wärmetransport infolge der Konvektion zusammen. Im Bereich großer Prandtl-Zahlen ist der viskos dominierte Anteil der Wärmeleitung auf den wandnahen Bereich der Strömung beschränkt, wohingegen er für niedrige Prandtl-Zahlen bis in den Bereich der Kernströmung wirkt [94].

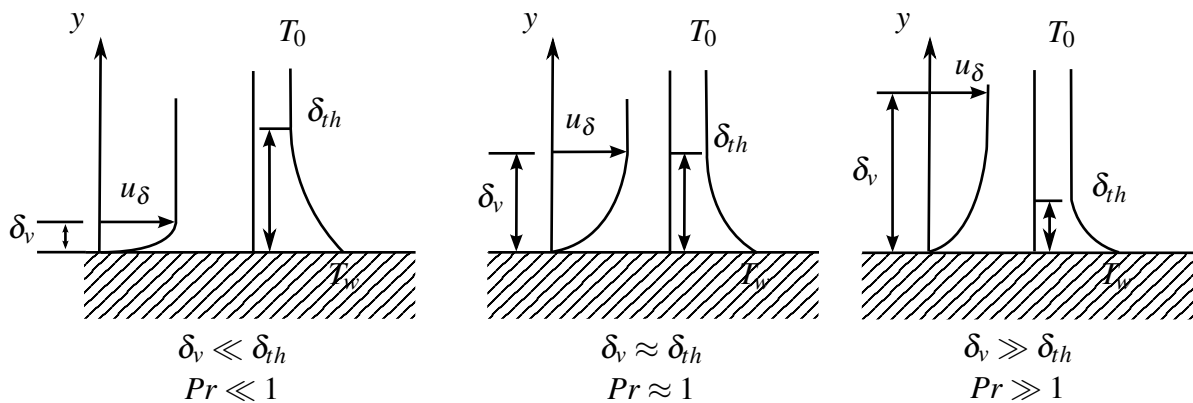


Abbildung 2.3.: Schematische Darstellung des Einflusses der Prandtl-Zahl auf die Dicke der thermischen Grenzschicht einer ebenen überströmten Platte (Grafik illustriert nach [94]).

Die molekulare Prandtl-Zahl ist je nach Größenordnung auch ein Maß der Dämpfung turbulenter, thermischer Strukturen der Strömung. Für Werte der Prandtl-Zahl nahe Eins ist die sogenannte

Reynolds-Analogie zwischen Geschwindigkeits- und Temperaturfeld gültig. Diese besagt unter anderem, dass eine Proportionalität zwischen turbulenten Reynolds-Spannungen und Wärmeflüssen existiert. Dies stellt die Grundlage der Verwendung eines meist konstanten Proportionalitätsfaktors zur Modellierung der turbulenten Wärmeflüsse, der sogenannten turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t , dar. Wie Abb. 2.4 am Beispiel der instantanen Verteilungen des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes einer turbulenten, beidseitig beheizten Plattenkanalströmung bei unterschiedlichen Prandtl-Zahlen dargestellt ist, ist die Reynolds-Analogie zwischen Geschwindigkeits- und Temperaturfeld infolge der großen viskosen Dämpfung für niedrige Prandtl-Zahlen nur bedingt erfüllt. Ein Überblick und Vergleich über die wesentlichen thermischen Größen verschiedener ausgewählter Fluide nach den Empfehlungen der Literatur [13,95] ist durch Tabelle 2.1 gegeben.

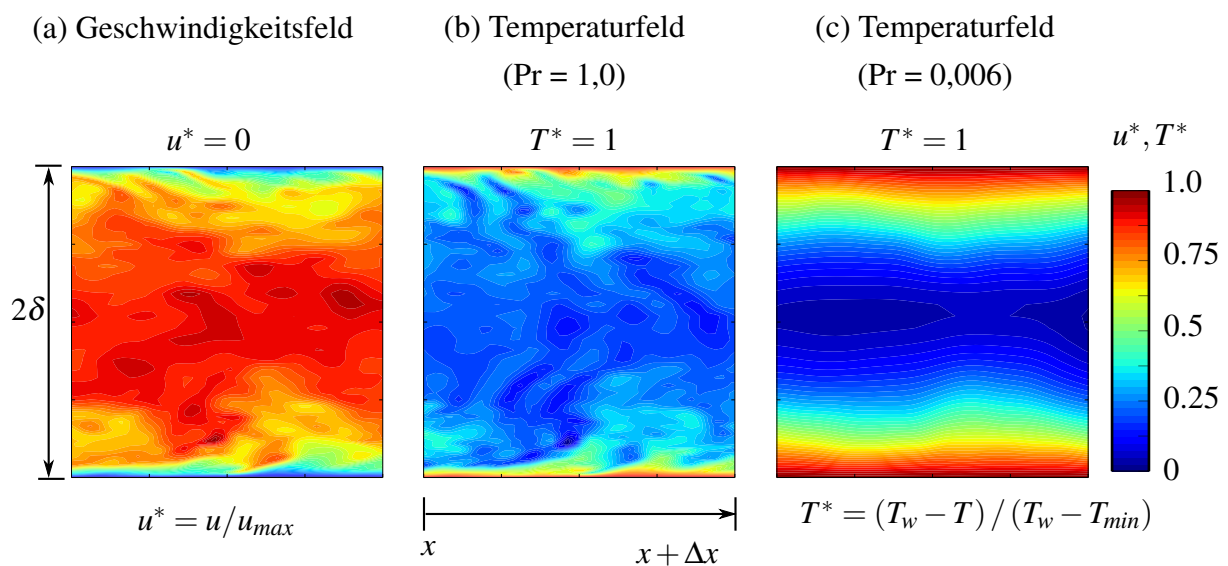


Abbildung 2.4.: Instantane Geschwindigkeits- (a) und Temperaturverteilung einer Grobstruktursimulation (LES) einer beidseitig ($T^* = 1$) beheizten, turbulenten Kanalströmung bei unterschiedlichen molekularen Prandtl-Zahlen (b,c) und einer Reynolds-Zahl $Re_b = 14140$.

Es ist ersichtlich, dass sich im Fall von flüssigem Natrium oder eutektischem Blei-Bismuth die Ordnung der molekularen Prandtl-Zahl deutlich von herkömmlichen Fluiden, wie z.B. Luft und Wasser, unterscheidet. Darüber hinaus lässt sich aufgrund der niedrigen kinematischen Viskosität ν erwarten, dass Flüssigmetallströmungen in praktischen Anwendungen durch spezifisch große Reynolds-Zahlen charakterisiert sind.

Im Rahmen dieser Arbeit soll daher speziell der Einfluss der molekularen Prandtl-Zahl bzw. der Skalentrennung zwischen Geschwindigkeits- und Temperaturfeld auf verschiedene Schließungsansätze der Energieerhaltungsgleichung untersucht werden.

Eigenschaft	Luft [95] $T = 20^\circ\text{C}$	Wasser [95] $T = 20^\circ\text{C}$	Natrium [13] $T = 500^\circ\text{C}$	LBE [13] $T = 500^\circ\text{C}$
Dichte ρ [kg/m ³]	~ 1,189	~ 998,2	~ 832,3	~ 10065
Spez. Wärmekapazität c_p [J/kgK]	~ 1006	~ 4185	~ 1264	~ 141,0
Kin. Viskosität ν [10 ⁻⁸ m ² /s]	~ 1532	~ 100,3	~ 28,32	~ 13,02
Therm. Diffusivität α [10 ⁻⁸ m ² /s]	~ 2163	~ 14,32	~ 6431	~ 1015
Pr-Zahl Pr [-]	~ 0,708	~ 7,009	~ 0,0044	~ 0,013

Tabelle 2.1.: Vergleich wesentlicher thermo-physikalischer Stoffeigenschaften für Luft, Wasser, flüssiges Natrium und eutektisches Blei-Bismuth (LBE) unter normalem atmosphärischen Druck nach Angaben von [13] und [95].

2.3.3. Nusselt-Zahl

Die Nusselt-Zahl Nu repräsentiert einen dimensionslosen Wärmeübergangskoeffizienten. Sie setzt die Anteile des Wärmeübergangs durch Konvektion und der reinen Wärmeleitung ins Verhältnis:

$$Nu = \frac{\dot{q}_{\text{Gesamt}}}{\dot{q}_{\text{Wärmeleitung}}} = 1 + \frac{\dot{q}_{\text{Konvektion}}}{\dot{q}_{\text{Wärmeleitung}}}. \quad (2.19)$$

Demzufolge nimmt die Nusselt-Zahl ausschließlich Werte größer als $Nu > 1$ an und ist in turbulenten Strömungen maßgeblich bestimmt durch die Größenordnung der Reynolds- und Prandtl-Zahl und somit der Péclet-Zahl $Pe = RePr$:

$$Nu = f(Re, Pr, \dots). \quad (2.20)$$

Sie stellt eine der wesentlichen integralen Kenngrößen zur Beurteilung des konvektiven Wärmeübergangs einer Strömung dar und ist somit für eine Vielzahl von experimentellen und numerischen Untersuchungen elementarer Forschungsgegenstand.

Die Nusselt-Zahl Nu lässt sich für eine Strömung wie folgt bestimmen:

$$Nu = \frac{hL}{\lambda} = \frac{\dot{q}L}{\lambda(T_w - T_c)}. \quad (2.21)$$

Hierbei entsprechen die Größen h einem Wärmeübergangskoeffizienten, L einer charakteristischen Länge, z.B. einem Plattenabstand 2δ bzw. hydraulischen Durchmesser D_h , λ der thermischen Wärmeleitfähigkeit, \dot{q} der Wärmestromdichte sowie $(T_w - T_c)$ dem Temperaturgefälle zwischen Wandtemperatur T_w und einer charakteristischen Temperatur T_c . Die Wärmestromdichte repräsentiert hierbei die gesamte zugeführte Energie, wohingegen die sich einstellende Temperaturdifferenz ein Maß für den Wärmetransport durch Konvektion darstellt.

2.3.4. Grashof-Zahl

Im Falle reiner Naturkonvektion ist aufgrund der Wahl einer geeigneten Bezugsgeschwindigkeit in der Reynolds-Zahl die Einführung einer neuen dimensionslosen Kennzahl, der sogenannten Grashof-Zahl Gr , erforderlich [93,96]. Sie ist bei Wahl einer konstanten Temperaturdifferenz als Randbedingung definiert über den Zusammenhang

$$Gr = \frac{\beta g (T_w - T_c) L^3}{\nu^2}, \quad (2.22)$$

definiert; bzw. bei Vorgabe einer konstanten Wärmestromdichte \dot{q} als Randbedingung

$$Gr = \frac{\beta g \dot{q} L^4}{\lambda \nu^2}, \quad (2.23)$$

mit dem volumetrischen Ausdehnungskoeffizienten β , dem Betrag des Gravitationsvektors g , einer Temperaturdifferenz $(T_w - T_c)$ bzw. einer Wärmestromdichte \dot{q} , der kinematischen Viskosität ν , der Wärmeleitfähigkeit λ sowie einer charakteristischen Länge L . Sie kann verallgemeinert auch als Produkt des Kräfteverhältnisses zwischen Auftriebs- und Reibungskräften sowie Impuls- und Reibungskräften verstanden werden [60].

2.3.5. Rayleigh-Zahl

Die Rayleigh-Zahl ist formuliert als das Produkt aus Grashof-Zahl Gr und molekularer Prandtl-Zahl Pr :

$$Ra = GrPr = \frac{\beta g \dot{q} L^4}{\lambda \nu \alpha}. \quad (2.24)$$

Sie ist eine maßgebliche Kenngröße zur Beschreibung von auftriebsdominierten Strömungsformen, wie der Rayleigh-Bénard-Konvektion. Mit zunehmender Rayleigh-Zahl beginnt das Fluid von einem ruhenden Zustand dominiert durch reine Wärmeleitung in einen Zustand regulärer Muster bzw. Konvektionsrollen überzugehen. Bei weiterer Erhöhung der Temperaturunterschiede im Fluid erfolgt ein Übergang in einen Strömungszustand in dem nach Wörner [60] der Einfluss der Turbulenz nicht mehr vernachlässigbar ist.

2.3.6. Richardson-Zahl

Die Richardson-Zahl ist eine dimensionslose Kenngröße, die das Verhältnis der Grashof-Zahl Gr zum quadratischen Wert der Reynolds-Zahl Re beschreibt:

$$Ri = \frac{Gr}{Re^2} = \frac{\beta g \Delta T L}{u_c^2}. \quad (2.25)$$

Ihre Größenordnung gibt demnach Auskunft über die zu erwartende Konvektionsart der Strömung. Für eine verschwindende Richardson-Zahl $Ri \approx 0$ handelt es sich um eine erzwungene Konvektion, in welcher der Einfluss der Reynolds-Zahl Re dominiert. Für steigende Richardson-Zahlen beeinflussen zunehmend Auftriebskräfte die Strömung und es erfolgt der Übergang zu Misch- bzw. Naturkonvektion.

3 Einführung in die Turbulenz von Strömungen

3.1. Eigenschaften turbulenter Strömungen

Strömungen niedriger Reynolds-Zahl zeichnen sich durch ein hohes Maß an Ordnung aus. Selbst transiente Strömungsphänomene, wie z.B. eine laminare Kármánsche Wirbelstraße, unterliegen rein molekularen Diffusionsvorgängen. Zeitliche und chaotische Schwankungen der lokalen Eigenschaften der Strömung werden infolge der Viskosität des Mediums vollständig gedämpft. Mit zunehmender Reynolds-Zahl bzw. mit zunehmenden Impulskräften ist die Strömung jedoch nicht mehr in der Lage diesen geordneten Zustand beizubehalten. Es treten erste lokale Instabilitäten auf, die als Transitions- bzw. laminar-turbulenter Übergangsbereich der Strömung bezeichnet werden. Erhöht sich die Reynolds-Zahl weiter geht die Strömung in einen vollständig turbulenten Zustand über. Dieser ist gekennzeichnet durch zeitlich und örtlich variierende Schwankungen bzw. Fluktuationen der physikalischen Eigenschaften der Strömung. Durch einfache Methoden lassen sich solche Fluktuationen sichtbar machen, wie z.B. durch das Einbringen von Rauch, farbiger Tinte oder Partikeln in die Strömung. Man kann feststellen, dass diese instantanen, turbulenten Strukturen räumlich miteinander in Beziehung stehen bzw. miteinander räumlich korrelieren. Aufgrund ihrer äußeren Form werden sie häufig auch als Wirbelstrukturen bezeichnet. Beispiele turbulenter Strömungen sind in unserem alltäglichen Leben fast überall zu erkennen z.B. in atmosphärischen Grenzschichten, offenen Feuerstellen oder bei der Umströmung eines Fahrzeugs. Sie beeinflussen hierbei maßgeblich das Verhalten der Strömung z.B. durch Erhöhung des Widerstands, durch eine verbesserte Vermischung von Stoffen oder durch Erhöhung des Wärmetransportes. Diese Phänomene lassen sich auf eine erhöhte Diffusivität bzw. einen zusätzlichen Impuls- und Energieaustausch der Strömung senkrecht zur Hauptströmung zurückführen, welche in ihrer Größenordnung die molekulare Diffusion deutlich übertreffen kann [97]. Hierbei ist die sogenannte turbulente Diffusivität, die auch als Scheinviskosität bezeichnet wird, nicht wie die molekulare Diffusion auf den wandnahen Bereich der Strömung begrenzt, sondern ihr Einflussbereich kann sich bis in den Bereich der Kernströmung erstrecken.

Eine einfache Beschreibung von Turbulenz und ihrer zentralen Mechanismen ist aufgrund ihres dreidimensionalen, chaotischen und regellosen Zustands nicht möglich, so dass Turbulenz bis heute ein wesentlicher Gegenstand der Forschung ist. Eine rein zweidimensionale Turbulenz kann beispielsweise in Seifenfilmen beobachtet werden (siehe z.B. Fröhlich [98]), so dass dies lediglich als sehr seltener Ausnahmefall betrachtet werden kann.

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die in Kapitel 2 vorgestellten Gleichungen der Impuls- und Energieerhaltung zwar einer vollständigen Beschreibung der Bewegung und des Wärmeübergangs einer Strömung dienen, ungeachtet dessen, ob es sie sich in einem laminaren oder turbulenten Zustand befindet. Eine allgemeingültige Aussage über den Ursprung und des Verhaltens der Turbulenz lassen sie jedoch nicht zu [98,99].

3.2. Energiespektrum der Turbulenz

Ein wesentlicher Beitrag zum Verständnis der wesentlichen Mechanismen der Turbulenz ist durch die Arbeit von Kolmogorov [100,101] gegeben¹⁹. Drei wesentlichen Aussagen seiner Hypothesen werden detailliert in der Arbeit von Pope [102] diskutiert und sind nachfolgend aufgeführt:

1. Bei hinreichend hohen Reynolds-Zahlen der Strömung ist die Turbulenz der kleinsten Skalen lokal in einem isotropen Zustand.
2. In jeder turbulenten Strömung bei hohen Reynolds-Zahlen ist die Statistik der kleinstskaligen Bewegungen einzig allein durch die Viskosität ν und die Dissipation ε bestimmt.
3. In jeder turbulenten Strömung bei hohen Reynolds-Zahlen ist die Statistik der Bewegung der Strukturen im Trägheitsbereich einzig allein durch die Dissipation ε bestimmt und unabhängig von der molekularen Viskosität ν .

Einer der wesentlichen Aspekte der Theorie nach Kolmogorov ist die Existenz unterschiedlicher Skalen der Turbulenz [100,101]. Das Energiespektrum E_k beschreibt demnach die vollständige Verteilung des Energiegehalts auf unterschiedlich große turbulente Strukturen. Eine Einordnung der Größe eines turbulenten Wirbels erfolgt in diesem Kontext ihre reziproke Größe, genauer gesagt der sogenannten Wellenzahl κ . Wie in Abb. 3.1 dargestellt ist, sind große Wirbel der Größenordnung l durch Bereiche kleiner Wellenzahlen und kleine Wirbel der Größenordnung η durch Bereiche großer Wellenzahlen charakterisiert.

Die größten energietragenden Wirbelstrukturen ($\kappa \approx l^{-1}$) können stark anisotrope Zustände einnehmen und erhalten ihre Energie infolge einer Scherung der Hauptströmung z.B. beim Durchströmen eines Turbulenz erzeugenden Gitters. Die Scherung ist eine unmittelbare Folge der Existenz äußerer Randbedingungen. Sie umfasst die Interaktion der Hauptströmung mit den größten

¹⁹Eine englischsprachige Übersetzung der wissenschaftlichen Arbeiten von Kolmogorov ist, anlässlich des 50. Geburtstags der ursprünglichen Veröffentlichungen, im Jahr 1991 in einer Sonderausgabe der Zeitschrift *Proceedings of the Royal Society* [100,101] veröffentlicht worden.

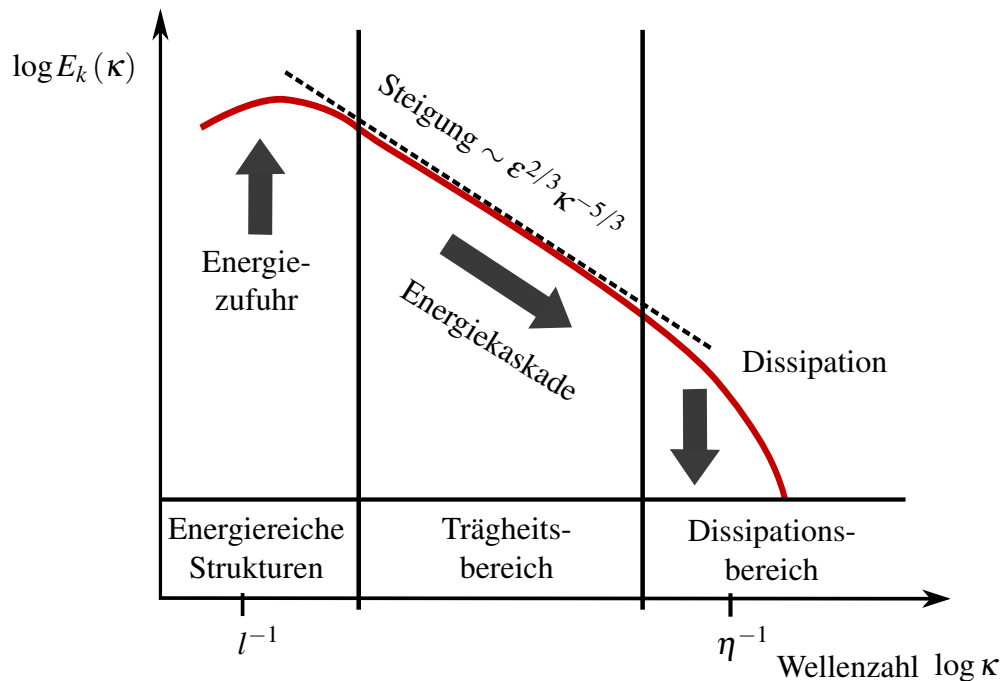


Abbildung 3.1.: Schematische Darstellung des Energiespektrums der turbulenten kinetischen Energie und seiner wesentlichen Teilbereiche als Funktion der Wellenzahl κ .

Wirbelstrukturen [102]. Hierbei entziehen die turbulenten Wirbelstrukturen der Hauptströmung kinetische Energie, was den wesentlichen, antreibenden Mechanismus der Energiezufuhr der Turbulenz darstellt. Die Längenskalen der größten Wirbelstrukturen können, speziell in Innenströmungen, anhand der räumlichen Abmessung der äußeren Berandung der Strömung abgeschätzt werden.

Der Bereich zwischen den größten und kleinsten Wellenzahlen ($l^{-1} < \kappa < \eta^{-1}$) ist dominiert durch einen Energieaustausch zwischen den unterschiedlichen Skalen, der sogenannten *Kolmogorovschen Energiekaskade*. Eine wesentliche Charakteristik der Energiekaskade ist die stetige Deformation und der anschließende Zerfall größerer Wirbelstrukturen zu kleineren Strukturen. Der Energietransport erfolgt somit von den groben zu den feinen Skalen des Spektrums [98]. In diesem Bereich hängt das Energiespektrum gemäß der dritten Hypothesen nach Kolmogorov allein von der Wellenzahl κ und der zugeführten bzw. dissipierten Energie ab und kann über folgenden mathematischen Zusammenhang beschrieben werden:

$$E_k(\kappa) = C_K \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}, \quad (3.1)$$

in dem C_K die sogenannte Kolmogorov-Konstante und ε die Dissipation darstellt [98,102,103].

Im Gegensatz zum Trägheitsbereich ist der Bereich der kleinsten Skalen ($\kappa \approx \eta^{-1}$) geprägt durch die Umwandlung kinetischer Energie in Wärme. Diese Form der Energieumwandlung ist eine unmittelbare Folge der molekularen Viskosität ν und wird im Allgemeinen auch als Dissipation

ε bezeichnet [98,103]. Die kleinsten Strukturen sind gemäß der ersten Hypothese nach Kolmogorov [102] statistisch isotrop. Ihre Größe hängt unmittelbar von der jeweiligen Reynolds-Zahl der Strömung ab. Für steigende Reynolds-Zahlen werden die feinen Strukturen zunehmend kleiner (vgl. Abb. 3.1). Eine Abschätzung ihrer Größe und ihres zeitlichen Verhaltens kann mit Hilfe der sogenannten Kolmogorov-Skalen erfolgen. Sie können hinsichtlich der Größe η_k , der Geschwindigkeit u_k und der Zeit τ_k wie folgt bestimmt werden [101,102]:

$$\eta_k = \left(\frac{v^3}{\varepsilon} \right)^{1/4}, \quad (3.2)$$

$$u_k = (\varepsilon v)^{1/4}, \quad (3.3)$$

$$\tau_k = \left(\frac{v}{\varepsilon} \right)^{1/2}. \quad (3.4)$$

Diese drei abgeleiteten Größen finden in der Entwicklung von Schließungsansätzen der Reynolds-gemittelten Erhaltungsgleichungen in verschiedensten Modellen Berücksichtigung (siehe z.B. Durbin [76,104] oder Abe et al. [105]). Es kann mit Hilfe der auf Basis der Kolmogorov-Skalen bestimmten Reynolds-Zahl $Re_\eta = \eta_k u_k / \nu = 1$ gezeigt werden, dass der Energietransfer von großen zu kleinen Skalen genau solange erfolgt, bis im Bereich der Kolmogorov-Skalen die entsprechend formulierte Reynolds-Zahl klein genug ist [102].

3.3. Energiespektrum bei Strömungen mit Wärmeübergang

Für eine turbulente Strömung mit Wärmeübergang kann nach Grötzbach [23,106] die Darstellung des Energiespektrums in Abhängigkeit der molekularen Prandtl-Zahl Pr erweitert werden (vgl. Abb. 3.2). Das Temperaturfeld unterliegt ebenso wie das Geschwindigkeitsfeld turbulenten Schwankungen. Infolge einer höheren thermischen Diffusivität α bzw. niedrigeren molekularen Prandtl-Zahl Pr werden Temperaturschwankungen stärker gedämpft. Der thermischen Diffusivität α kommt demnach eine ähnliche Bedeutung zu wie der molekularen Viskosität ν im Geschwindigkeitsfeld. Für Prandtl-Zahlen nahe eins hat das thermische Spektrum $E_T(\kappa)$ einen nahezu identischen Verlauf im Vergleich zum Spektrum der turbulenten kinetischen Energie $E_k(\kappa)$. Für niedrigere Prandtl-Zahlen hingegen sinkt der Energiegehalt des thermischen Spektrums infolge der Dämpfungswirkung der molekularen Wärmeleitung. Nach Grötzbach [23,106] kann weiterhin eine Verschiebung des Spektrums zu größeren Skalen bzw. kleineren Wellenzahlen κ festgestellt werden. Die Größe der kleinsten thermischen Strukturen ist erstmals durch Corrsin [107] abgeschätzt worden. Für Prandtl-Zahlen $Pr \leq 1$ kann sie mit folgendem Zusammenhang bestimmt werden:

$$\eta_T = \left(\frac{\alpha^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} = \frac{\eta_k}{Pr^{3/4}}. \quad (3.5)$$

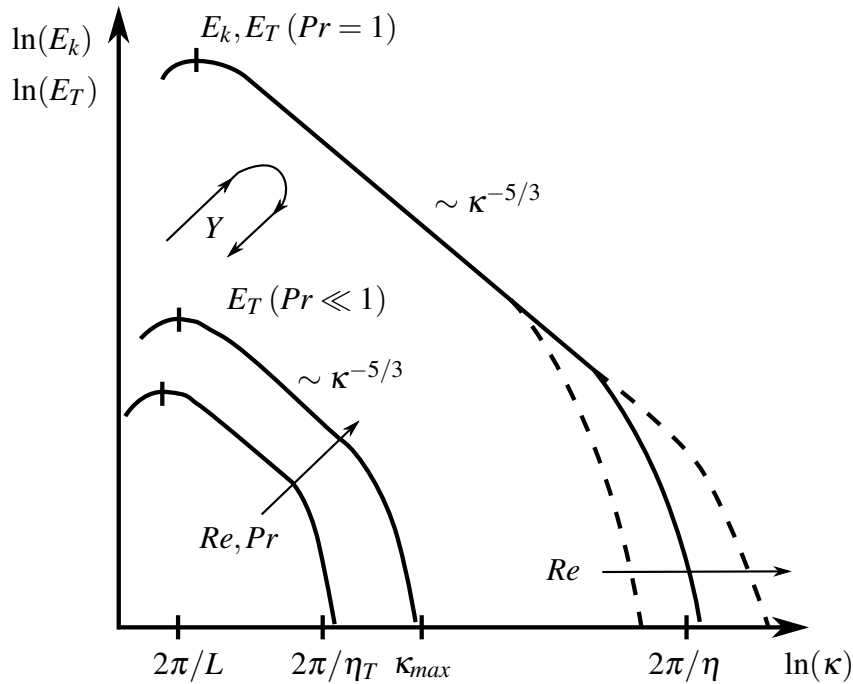


Abbildung 3.2.: Schematische Darstellung des dreidimensionalen Energiespektrums der Geschwindigkeits- $E_k(\kappa)$ und Temperaturfluktuationen $E_T(\kappa)$ in Plattenkanalströmungen verschiedener Prandtl-Zahlen $Pr \leq 1$ nach Grötzbach [23,106].

Auch dieser mathematische Zusammenhang verdeutlicht den Einfluss der molekularen Prandtl-Zahl auf die Größe der kleinsten thermischen Skalen im direkten Vergleich zur Größe der Kolmogorov-Längenskala η_k . Für den Bereich der Prandtl-Zahl $Pr \gg 1$ ist die Größe der Skalen in der Größenordnung der sogenannten Bachelor-Längenskala η_{TB} [106]:

$$\eta_{BT} = \left(\frac{\nu \alpha^2}{\varepsilon} \right)^{1/4} = \frac{\eta_k}{Pr^{1/2}}. \quad (3.6)$$

Die Gleichungen (3.5) und (3.6) lassen die Schlussfolgerung zu, dass für Strömungen niedriger molekularer Prandtl-Zahl die kleinsten zu berücksichtigenden turbulenten Strukturen im Geschwindigkeitsfeld und für hohe Prandtl-Zahlen im Bereich des Temperaturfeldes auftreten. Eine weitere wichtige Erkenntnis ist durch die Größenordnung der größten Skalen gegeben. Für Strömungen niedriger Prandtl-Zahlen treten nach Grötzbach [23,106] die größten turbulenten Strukturen im Temperaturfeld auf. Man beachte hierbei die Verschiebung des thermischen Energiespektrums zu niedrigeren Wellenzahlen (vgl. Abb. 3.2).

Bezüglich der Entwicklung von geeigneten Schließungsansätzen zeigt sich bereits bei reiner Analyse der Energiespektren des turbulenten Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes, dass in Abhängigkeit der molekularen Prandtl-Zahl Pr große Skalenunterschiede zu berücksichtigen sind. Diese lassen sich im Wesentlichen auf das Verhältnis der Dämpfung der turbulenten Schwankungen bzw. Fluktuationen infolge der kinematischen Viskosität und der thermische Diffusivität zu-

3. Einführung in die Turbulenz von Strömungen

rückführen. Ein wesentliches Ziel der Modellierung muss es demnach sein, die wesentlichen Eigenschaften und physikalischen Zusammenhänge von Strömungen mit Wärmeübergang in Abhängigkeit der molekularen Prandtl-Zahl geeignet zu beschreiben.

4 Mathematische Beschreibung turbulenter Strömungen

Die Verfahren zur Lösung turbulenter Strömungen können nach den notwendigen Anpassungen der Massen-, Impuls- und Energieerhaltungsgleichungen in drei verschiedene Kategorien eingeteilt werden:

- Direkte Numerische Simulation (DNS),
- Grobstruktursimulation (LES),
- Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen (RANS).

Trotz deutlicher Unterschiede hinsichtlich ihrer mathematischen Formulierung und Funktionsweise können die unterschiedlichen Ansätze jeweils aus den allgemeinen Erhaltungsgleichungen (vgl. Gl. (2.1), (2.3) und (2.14)) abgeleitet werden. Dies soll nachfolgend für jede einzelne Methode erläutert werden.

4.1. Direkte numerische Simulation

Die direkte numerische Simulation (DNS) ist ein numerisches Verfahren, das auf dem Lösen der instationären, dreidimensionalen Massen-, Impuls- und Energieerhaltung basiert. Im Vergleich zur Grobstruktursimulation (LES) oder den Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (RANS) sind keine Modifikationen des Gleichungssystems, wie z.B. durch das Anwenden einer zeitlichen Mittelung, erforderlich. Die einzig Approximationen, die im Rahmen dieses Simulationstyps eingesetzt werden, basieren auf der Diskretisierung der Erhaltungsgleichungen und somit der Überführung in ein lösbares algebraisches Gleichungssystem. Das Energiespektrum der turbulenten kinetischen Energie und die damit verbundene Energiekaskade zu den kleinsten turbulenten Strukturen (vgl. Abb. 3.1 und 3.2) sollen idealerweise in Abhängigkeit der zeitlichen und räumlichen Diskretisierung vollständig bis zum Skalenbereich der Dissipation der Energie aufgelöst werden.

Grötzbach [106] zeigt im Rahmen seiner Untersuchung an turbulenten Kanalströmungen, dass eine im Vergleich zu der Kolmogorov- und Corrsin-Längenskala leicht gröbere Auflösung bereits

ausreicht, um die wesentlichen physikalischen Eigenschaften des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes in einer DNS korrekt wiederzugeben. Einzig die Untersuchung von Momenten höherer Ordnung der turbulenten Fluktuationsgrößen, speziell im wandnahen Bereich der Strömung, erfordert eine weitere Verfeinerung der räumlichen Diskretisierung. Zur Auflösung der Bewegung der kleinsten, isotropen Wirbelstrukturen im Geschwindigkeits- bzw. Temperaturfeld sind demnach theoretisch in jeder Raumrichtung mindestens zwei räumliche Diskretisierungsschritte der Größenordnung $\eta_k/2$ bzw. $\eta_T/2$ erforderlich. Eine grobe Abschätzung der Größe dieser Strukturen kann demnach bereits über die Kolmogorov-Längenskala η_k (vgl. Gl. (3.2)) erfolgen und ist von der jeweiligen Reynolds-Zahl der Strömung abhängig [106].

Die vollständige Auflösung der Energiekaskade und Dissipation der turbulenten Strömung erfordert eine große Anzahl von räumlichen Diskretisierungsschritten, die sich mit zunehmender Reynolds-Zahl weiter exponentiell erhöhen (siehe z.B. Tennekes & Lumley [108]). Direkte numerische Simulationen bleiben daher trotz einer stetigen Verbesserung der Rechnerarchitekturen und Leistung der Prozessoren (CPU) weiterhin auf einfache Geometrien, wie z.B. Kanalströmungen und niedrige Reynolds-Zahlen, beschränkt. Darüber hinaus erfordert die Durchführung genauer direkter numerischer Simulationen geeignete Diskretisierungsverfahren und Methodiken, deren numerisch bedingte Diffusivität hinreichend klein ist. Der Umfang der Informationen der Ergebnisse einer DNS kann einen detaillierten Einblick in das Entstehen und die räumliche Entwicklung kohärenter, turbulenter Wirbelstrukturen geben. Korrelationen, wie z.B. zwischen Geschwindigkeits- und Druckfluktuationen, sind experimentell nach heutigem Stand nur sehr aufwendig zu ermitteln [87]. Speziell für den Fall von Strömungen niedriger molekularer Prandtl-Zahl stellt die DNS, auch bedingt durch einen hohen experimentellen Aufwand, weiterhin ein wesentliches Werkzeug zur Analyse, Entwicklung und Validierung von Schließungsansätzen der Reynolds-gemittelten Impuls- und Energieerhaltungsgleichung dar.

4.2. Grobstruktursimulation

Turbulente Strömungen lassen sich durch die Existenz von turbulenten Skalen verschiedener Größenordnung charakterisieren. Diese reichen von sogenannten Grobstrukturen bei kleinen Wellenzahlen bis zu Feinstrukturen bei großen Wellenzahlen. Wie bereits erläutert wurde ist jeder Skalenbereich Gegenstand unterschiedlicher Wirkmechanismen, wie z.B. der Zufuhr von Energie auf großen anisotropen Skalen oder der Vernichtung bzw. Dissipation von Energie auf den kleinsten isotropen Skalen [101,102]. Die größten Strukturen sind nach dieser Vorstellung die wesentlichen Träger der Energie der Erhaltungsgrößen [87]. Die kleinsten kurzlebigen Skalen hingegen zeichnen sich durch ihren niedrigen Energiegehalt sowie durch den wesentlichen Mechanismus der Dissipation der turbulenten kinetischen Energie aus.

4.2.1. Räumliche Filterung

Diese zwei Skalenbereiche der Grobstrukturen (GS) und Feinstrukturen (FS) eines beliebigen instationären Signals $\phi(x_i, t)$ können durch das von Leonard [109] vorgeschlagene Konzept der räumlichen Trennung in folgender Notation angegeben werden:

$$\phi(x_i, t) = \tilde{\phi}(x_i, t) + \phi''(x_i, t). \tag{4.1}$$

Hierbei bezeichnet $\tilde{\phi}(x_i, t)$ den aufgelösten Anteil des instationären Signals und $\phi''(x_i, t)$ den Anteil der Feinstrukturen, vgl. Abb. 4.1 und 4.2. Um den Einfluss der hochfrequenten, instantanen Fluktuationen aus dem Signalverlauf zu eliminieren ist eine räumliche Filterung des Signals mit Hilfe eines Tiefpassfilters notwendig. Die Filterung einer beliebigen Größe sei in nachfolgenden Erläuterungen mit der symbolischen Notation $\tilde{(\cdot)}$ gekennzeichnet.

Eine verallgemeinerte Formulierung der Filterungsoperation auf ein beliebiges Signal kann wie folgt angegeben werden:

$$\tilde{\phi}(x_i) = \int_{\mathbb{R}^3} G(x_i, x'_i) \phi(x'_i) dx'_i \quad x_i \in \mathbb{R}, \tag{4.2}$$

wobei $G(x_i, x'_i)$ den lokalen Filterkern mit einer Filterweite $\Delta(x_i)$ darstellt [87,98].

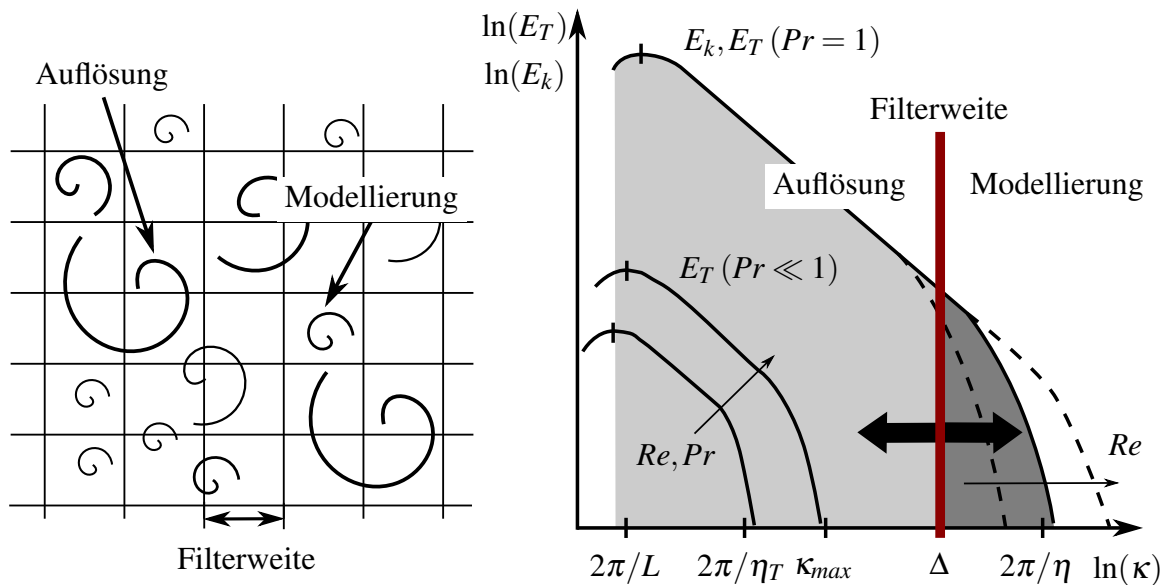


Abbildung 4.1.: Schematische Darstellung der Trennung zwischen aufgelösten und modellierten Strukturen in Abhängigkeit einer lokalen Filterweite $\Delta(x_i)$ (links) sowie anhand des Energiespektrums (rechts) nach Grötzbach [23,106].

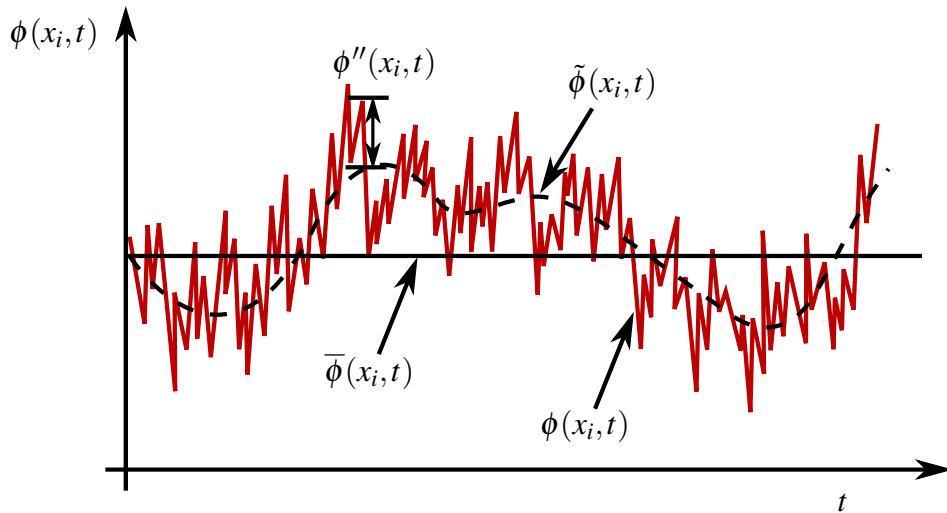


Abbildung 4.2.: Schematische Darstellung der verschiedenen Mittelungsoperationen auf ein statistisch stationäres Signal $\phi_{x_i,t}$ als Erweiterung einer Abbildung nach Ferziger [87].

Der Filterkern unterliegt hierbei folgender Einschränkung:

$$\int_{\mathbb{R}} G(x_i, x'_i) dx'_i = 1. \quad (4.3)$$

Verschiedene Typen von Filterkerne können im Rahmen einer Grobstruktursimulation eingesetzt werden, wie z.B. ein Boxfilter. Die Filterweite entspricht hierbei nicht zwangsläufig der Gitterweite bzw. dem jeweiligen Abstand der Diskretisierungspunkte im Rechengebiet. Sie hängt rein von der Formulierung des ausgewählten Filterkerns ab.

Folgende wesentliche Eigenschaften der Filter-Operation sind zu beachten [98,110]:

1. Konservativität der Konstanten:

$$\widetilde{C} = C. \quad (4.4)$$

2. Linearität:

$$\widetilde{\phi + \psi} = \widetilde{\phi} + \widetilde{\psi}. \quad (4.5)$$

3. Kommutativität der Ableitung:

$$\widetilde{\frac{\partial \phi}{\partial s_i}} = \frac{\partial \widetilde{\phi}}{\partial s_i} \quad \text{mit} \quad s_i = f(x_i, t). \quad (4.6)$$

4. Projektionseigenschaft:

$$\widetilde{\widetilde{\phi}} \neq \widetilde{\phi}. \quad (4.7)$$

5. Unterschied zwischen Filterung und statistischer Mittelung bzw. Reynolds-Mittelung:

$$\text{Mittelung: } \overline{\phi \psi} = \overline{\phi} \overline{\psi} \quad \text{und} \quad \text{Filterung: } \widetilde{\phi \psi} \neq \widetilde{\phi} \widetilde{\psi}. \quad (4.8)$$

6. Vertauschbarkeit der räumlichen Filterung ($\widetilde{\cdot}$) und zeitlichen Mittelung ($\overline{\cdot}$):

$$\overline{\widetilde{\phi}} = \widetilde{\overline{\phi}}. \quad (4.9)$$

Die Kommutativität als Eigenschaft ist hierbei theoretisch ausschließlich für zeitliche Ableitungen gültig. Bei Anwendung homogener Filter, also Filtern einer konstanten Filterweite Δ , kann jedoch der resultierende Fehler im Fall örtliche Ableitungen ignoriert werden [111]. Eine umfangreiche Diskussion dieses Fehlertyps ist durch die Arbeit von Ghosal & Moin [112] gegeben. Nach Fröhlich [98] ist der wesentliche Vorteil der räumlichen Filterung gegenüber der zeitlichen Mittelung (vgl. Kapitel 4.3.1), dass die Erhaltungsgrößen bzw. Zustandsgrößen über Variation der Filterweite „verschieden stark gemittelt werden können“, was dem Auftreten verschieden großer Skalen im Energiespektrum gerecht wird.

4.2.2. Anwenden der Filterung auf das Gleichungssystem

Die energietragenden Wirbelstrukturen einer räumlichen Erstreckung größer der lokalen Filterweite $\Delta(x_i)$ werden über die „gefilterten“ Erhaltungsgleichungen berücksichtigt. Für den Fall eines inkompressiblen Mediums ergibt sich ausgehend von den ursprünglichen Gleichungen der Massen-, Impuls- und Energieerhaltung (vgl. Gl. (2.2),(2.9) und (2.16)) bei Anwendung der Filteroperation folgendes Gleichungssystem:

$$\frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial x_j} = 0, \quad (4.10)$$

$$\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\widetilde{u}_i \widetilde{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \widetilde{p}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widetilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial \widetilde{T}}{\partial t} + \frac{\partial (\widetilde{u}_j \widetilde{T})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_j} \right) + \widetilde{S}_q. \quad (4.12)$$

Die „gefilterten“ Erhaltungsgleichungen weisen in ihrer vorliegenden Form Ähnlichkeit zu den Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen auf, die in Kapitel 4.3 erläutert werden. Sie „erben“ darüber hinaus die wesentlichen Eigenschaften der ursprünglichen Erhaltungsgleichungen, wie z.B. die Galilei-Invarianz. Die Massenerhaltungsgleichung ist linear zur Geschwindigkeit und wird somit bei Anwendung der Filteroperation nicht um einen zusätzlichen Term erweitert (vgl.

Gl. (4.10)). Es gilt darüber hinaus bezüglich des nichtlinearen, konvektiven Terms der Impulserhaltung:

$$\widetilde{u_i u_j} \neq \widetilde{u_i} \widetilde{u_j}, \quad (4.13)$$

bzw. der Energieerhaltung:

$$\widetilde{u_i T} \neq \widetilde{u_i} \widetilde{T}. \quad (4.14)$$

Die Größen der linken Seite der Gleichungen können nicht direkt bestimmt werden, so dass eine weitere Untersuchung der Terme notwendig ist [87,109]:

$$\tau_{ij}^s = (\widetilde{u_i u_j} - \widetilde{u_i} \widetilde{u_j}). \quad (4.15)$$

Der Tensor zweiter Ordnung τ_{ij}^s bezeichnet die sogenannten Feinstruktur-Reynolds-Spannungen. Sie beschreiben den durch kleinskalige, nicht aufgelöste Strukturen bedingten Impulsfluss in den großskaligen, aufgelösten Komponenten [87]. Gemäß der Aufteilung nach Leonard [109] ergibt sich folgender Ansatz für die Geschwindigkeit der Feinstrukturen (vgl. Gl. (4.1)):

$$u_i'' = u_i - \widetilde{u}_i. \quad (4.16)$$

Durch Kombination der beiden obigen Gleichungen ergibt sich [109]:

$$\tau_{ij}^s = \underbrace{\widetilde{u_i u_j} - \widetilde{u_i} \widetilde{u_j}}_{=:L_{ij}} + \underbrace{\widetilde{u_i'' u_j} + \widetilde{u_i} \widetilde{u_j''}}_{=:C_{ij}} + \underbrace{\widetilde{u_i'' u_j''}}_{=:R_{ij}}. \quad (4.17)$$

Die Summe der ersten beiden Terme wird auch als Leonard-Term L_{ij} bezeichnet. Er beschreibt die Anteile der Feinstruktur-Spannungen, die durch die Interaktion der großen Skalen entstehen. Die nächsten beiden Terme, zusammengefasst als Kreuzterm C_{ij} , ergeben die Wechselwirkung der groben und feinen Skalen untereinander. Der letzte Term R_{ij} berücksichtigt den Einfluss der nicht aufgelösten Skalen auf die aufgelösten Strukturen [98].

Für die Feinstruktur-Reynolds-Spannungen existieren unterschiedliche Modellierungsansätze. In ihrer Charakteristik basieren die meisten dieser Ansätze auf rein dissipativen Formulierungen einer Scheinviskosität der Feinstrukturen $\nu_{t,SGS}$, siehe z.B. die Modellansätze nach Smagorinsky [113], Germano et al. [114] oder Nicoud & Ducros [115]. Ferziger [87] empfiehlt diesbezüglich die Verwendung von Modellen, die auf partiellen Differentialgleichungen basieren und demnach Informationen aus der Vergangenheit des Fluids bereitstellen. Eine Modellierung des vollständigen Feinstruktur-Spannungstensors über sechs partielle Differentialgleichungen ist beispielsweise durch die Arbeit von Deardorff [116] oder Fureby et al. [117] gegeben.

Nachfolgend soll das verwendete Feinstruktur-Modell sowie seine Ausgangsform hinsichtlich ihrer wesentlichen Funktionsweise kurz erläutert werden.

4.2.3. Smagorinsky-Modell

Einer der bekanntesten Ansätze zur Berechnung der Feinstrukturen ist durch die Arbeit von Smagorinsky [113] gegeben. Dieser besteht aus zwei wesentlichen Teilschritten:

- Ansatz zur Bestimmung der Feinstruktur-Spannungen τ_{ij}^s ,
- Bestimmung der Wirbelviskosität der Feinstrukturen $\nu_{t,SGS}$.

Der erste Schritt beschreibt die Wahl eines geeigneten Ansatzes zur Bestimmung der Feinstruktur-Spannungen. Der üblicherweise verwendete Ansatz basiert auf der Boussinesq-Hypothese und bezieht den spurfreien, anisotropen Anteil der Feinstruktur-Spannungstensor τ_{ij}^a auf das aufgelöste Geschwindigkeitsfeld:

$$\tau_{ij}^a = -2\nu_{t,SGS}\tilde{S}_{ij} = -\nu_{t,SGS}\left(\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial x_i}\right). \quad (4.18)$$

Die gesamten Feinstruktur-Spannungen ergeben sich demnach zu:

$$\tau_{ij}^s = \tau_{ij}^a + \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk}. \quad (4.19)$$

Der letzte Term wird üblicherweise in einen „erweiterten“ Druck $\tilde{p}^* = \tilde{p} + \tau_{kk}/3$ aufgenommen, so dass die Feinstruktur-Spannungen üblicherweise allein über den ersten Term der rechten Seite der Gleichung $\tau_{ij}^s \approx \tau_{ij}^a$ bestimmt werden können [98].

Der zweite Schritt basiert auf der Modellierung der Wirbelviskosität $\nu_{t,SGS}$. Dies erfolgt durch Kombination eines geeigneten Längen- und Geschwindigkeitsmaßes:

$$\nu_{t,SGS} = q^{(s)} l^{(s)}. \quad (4.20)$$

Das Geschwindigkeitsmaß $q^{(s)}$ kann mit Hilfe der Norm des Deformationstensors $|\tilde{\mathbf{S}}|$ bestimmt werden [98]:

$$q^s = l^s |\tilde{\mathbf{S}}| = l^s \sqrt{2\tilde{S}_{ij}\tilde{S}_{ij}}. \quad (4.21)$$

Als Längenmaß $l^{(s)}$ eignet sich eine Kombination der Filterweite Δ und der sogenannten Smagorinsky-Konstanten C_S :

$$l^s = C_S \Delta. \quad (4.22)$$

Die Wirbelviskosität kann nun durch Einsetzen der Gleichungen (4.21) und (4.22) in die Ausgangsgleichung (4.20) bestimmt werden:

$$\nu_{t,SGS} = (C_S \Delta)^2 |\tilde{\mathbf{S}}|. \quad (4.23)$$

Die endgültige Formulierung der Feinstruktur-Spannungen kann somit angegeben werden zu [98]:

$$\tau_{ij}^a = -2(C_S \Delta)^2 |\widetilde{\mathbf{S}}| \widetilde{S}_{ij}, \quad (4.24)$$

Ein universeller Wert der Smagorinsky-Konstanten C_S , der für verschiedene Strömungstypen geeignet ist, existiert nicht. Sie muss demzufolge für jeden Strömungstyp sinnvoll gewählt werden. Gemäß der Literatur erstreckt sich ihr Wertebereich von $C_S \approx 0,19..0,24$ in isotroper Turbulenz bis zu $C_S \approx 0,065..0,1$ in einfachen Scherströmungen. Eine umfassende Diskussion zu verschiedenen Möglichkeiten ihrer Bestimmung ist in der Arbeit von Fröhlich [98] gegeben.

Die Wirbelviskosität $\nu_{t,SGS}$ ist für das Smagorinsky-Modell stets positiv und rein dissipativ, so dass ein Energietransfer von kleinen zu großen Skalen, der auch als Backscatter-Effekt bezeichnet wird, nicht abgebildet werden kann. Das Smagorinsky-Modell muss hierbei in Wandnähe mit Rücksicht auf ein korrektes asymptotisches Wandverhalten mit einer geeigneten Dämpfungsfunktion, wie z.B. der Van-Driest Dämpfungsfunktion [118], erweitert werden.

4.2.4. Dynamisches Smagorinsky-Modell

Eine wesentliche Weiterentwicklung der Feinstruktur-Modellierung ist die sogenannten dynamischen Prozedur. Ihr wesentliches Ziel ist es, die meist umständliche Wahl der Smagorinsky-Konstanten C_S vollständig zu eliminieren. Die dynamische Prozedur basiert in ihren theoretischen Grundlagen auf der sogenannten Germano-Identität, die einen Bezug zwischen den modellierten Feinstruktur-Spannungen auf zwei voneinander unterschiedlichen räumlichen Filterebenen herstellt; dem ursprünglichen Filter und einem Testfilter. Um deutlich auf den Unterschied des Filters und des Testfilters hinzuweisen, ist die Anwendung des Testfilters im Nachfolgenden mit der Notation $\widehat{(\)}$ gekennzeichnet.

Die Filter-Operation des Testfilters kann durch eine zum ursprünglichen Filter analoge Formulierung beschrieben werden:

$$\widehat{\phi}(x_i) = \int_{\mathbb{R}^3} \widehat{G}(x_i, x'_i) \phi(x'_i) dx'_i \quad x_i \in \mathbb{R}. \quad (4.25)$$

Der Testfilter ist stets größer bzw. „gröber“ als der ursprüngliche Filter und wird nach Fröhlich [98] bzw. nach Morar [111] im Allgemeinen doppelt so groß gewählt $\widehat{\Delta}/\Delta = 2$.

Der Testfilter $\widehat{\Delta}$ kann nun erneut auf die bereits „gefilterten“ Erhaltungsgleichungen angewendet werden. Die zu modellierenden Feinstrukturen der verschiedenen Filterebenen können anschließend miteinander verglichen werden [98]:

$$\text{Filter-Niveau } \Delta: \quad \tau_{ij}^s = \widetilde{u_i u_j} - \widetilde{u_i} \widetilde{u_j} \approx \tau_{ij}^{mod}(C, \Delta, \widetilde{u_i}), \quad (4.26)$$

$$\text{Testfilter-Niveau } \widehat{\Delta}: \quad T_{ij}^s = \widehat{\widetilde{u_i u_j}} - \widehat{\widetilde{u_i}} \widehat{\widetilde{u_j}} \approx \tau_{ij}^{mod}(C, \widehat{\Delta}, \widehat{\widetilde{u_i}}). \quad (4.27)$$

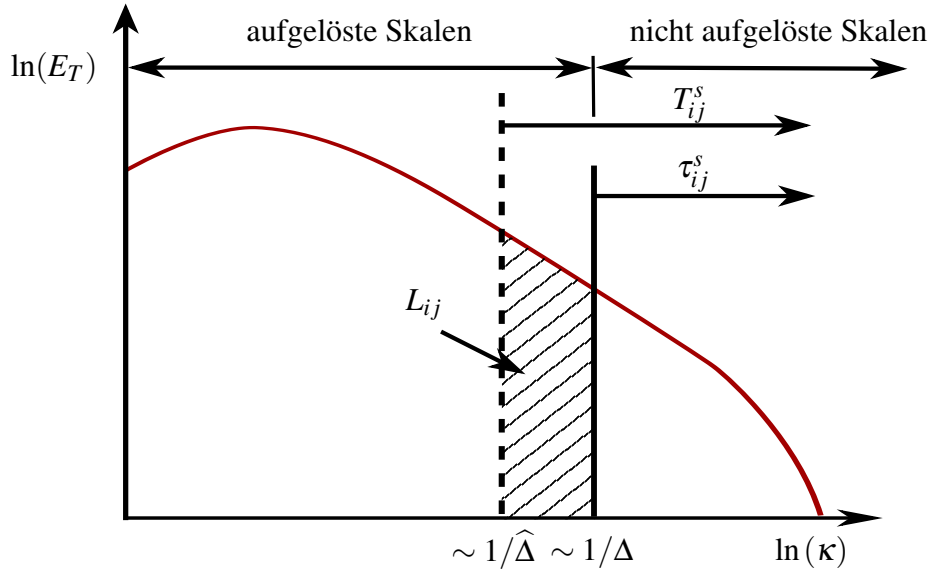


Abbildung 4.3.: Schematische Darstellung der Bedeutung der Germano-Identität, Abbildung nach [98].

Der Leonard-Term $L_{ij} = \widehat{\widehat{u_i u_j}} - \widehat{\widetilde{u_i}} \widehat{\widetilde{u_j}}$ kann unmittelbar durch Anwenden des Testfilters auf die instantane Geschwindigkeit $\widetilde{u_i}$ bestimmt werden. Die Germano-Identität verbindet die, durch den ursprünglichen Filter und den Testfilter, nicht aufgelösten Feinstrukturen. Sie kann demnach gemäß Abbildung 4.3 bestimmt werden zu:

$$T_{ij}^s = L_{ij} + \widehat{\tau_{ij}^s}. \quad (4.28)$$

Durch Einsetzen der Gl. (4.26) und (4.27) in die Germano-Identität e (vgl. Gl. (4.28)) ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\begin{aligned} L_{ij}^{mod} &= \widehat{\tau_{ij}^{mod}}(C, \widehat{\Delta}, \widehat{\widetilde{u_i}}) - \widehat{\tau_{ij}^{mod}}(C, \Delta, \widetilde{u_i}), \\ &= -2C \left(\widehat{\Delta^2 |\widehat{\widetilde{S}}| \widehat{\widetilde{S}}_{ij}} - \Delta^2 |\widehat{\widetilde{S}}| \widehat{\widetilde{S}}_{ij} \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Die Bestimmung der Norm der gefilterten Scherrate kann Gl. (4.21) entnommen werden. Der neu eingeführte Koeffizient C wird üblicherweise als C_S^2 aufgefasst und muss als nahezu räumlich konstant angenommen werden um sie aus der Filterungsoperation zu extrahieren [98]. Die Kombination der obigen Gl. (4.29) mit dem testgefilterten Leonard-Term $L_{ij} = \widehat{\widehat{u_i u_j}} - \widehat{\widetilde{u_i}} \widehat{\widetilde{u_j}}$ ergibt:

$$L_{ij} - L_{ij}^{mod} = 0. \quad (4.30)$$

Durch Substitution der rechten Seite der Gl. (4.8) mit $2CM_{ij}$ kann nun die Konstante C mit Hilfe der Minimierung der Fehlerquadrate nach einem Vorschlag von Lilly [119] bestimmt werden:

$$C = \frac{1}{2} \frac{L_{ij}^a M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}}. \quad (4.31)$$

Ein wesentlicher Vorteil dieser Methodik ist, dass der unbekannte Koeffizient C nun nicht mehr vorgegeben werden muss. Dieser erweiterte Ansatz wird auch als dynamisches Smagorinsky-Modell bezeichnet. Die dynamische Prozedur selbst kann auf beliebige Modellansätze erweitert werden, wie z.B. in der Arbeit von Kim & Menon [120] erläutert wird. Um numerische Oszillationen des Koeffizienten C zu eliminieren existieren unterschiedliche Mittelungs- bzw. Glättungsoperationen, die umfassend von Fröhlich [98] oder Morar [111] beschrieben werden. Die nach diesem Verfahren bestimmte Scheinviskosität $\nu_{t,SGS}$ kann im Strömungsgebiet auch lokal negative Werte annehmen. Aufgrund dieser Tatsache existiert in der Literatur die weit verbreitete Überzeugung, dass die dynamische Prozedur die Möglichkeit der Berücksichtigung des Backscatter-Effektes bietet [98]. Infolge des lokalen und instationären Auftretens von negativen Werten der Wirbelviskosität wurde im Rahmen dieser Arbeit eine Limitierung der effektiven Viskosität vorgenommen:

$$\nu_{eff} = \nu_{t,SGS} + \nu \geq 0. \quad (4.32)$$

Diese Limitierung der Scheinviskosität, speziell auch mit Blick auf die Bestimmung der Feinstruktur-Wärmeflüsse, führt zu einer deutlichen Verbesserung der Stabilität in den Berechnungen.

4.2.5. Modellierung der Feinstruktur-Prandtl-Zahl

Für die „gefilterte“ Energieerhaltungsgleichung gilt analog zu Gleichung 4.14 folgender Zusammenhang für die Feinstruktur-Wärmeflüsse q_i^s :

$$q_i^s = \rho c_p \left(\widetilde{u_i T} - \widetilde{u_i} \widetilde{T} \right). \quad (4.33)$$

Auch für die Feinstruktur-Wärmeflüsse q_i^s ist ein geeignetes Modellierungskonzept notwendig. Weit verbreitet ist die Modellierung auf Basis einer thermischen Feinstruktur-Diffusivität $\alpha_{t,SGS}$. Sie kann über Kombination der Feinstruktur-Viskosität $\nu_{t,SGS}$ und einer üblicherweise konstanten Feinstruktur-Prandtl-Zahl $Pr_{t,SGS}$ bestimmt werden zu:

$$q_i^s = -\rho c_p \alpha_{t,SGS} \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_j} = -\rho c_p \left(\frac{\nu_{t,SGS}}{Pr_{t,SGS}} \right) \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_j}. \quad (4.34)$$

Bei der Wahl einer geeigneten Feinstruktur-Prandtl-Zahl $Pr_{t,SGS}$ muss ihre Abhängigkeit zur molekularen Prandtl-Zahl Pr berücksichtigt werden. Bereits aus der Analyse des Energiespektrums (vgl. Abb. 3.2) kann für niedrige Prandtl-Zahlen abgeleitet werden, dass bei hinreichender Auflösung des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes eine nahezu vollständige Auflösung des thermischen Energiespektrums möglich ist [106]. Demnach wäre es sinnvoll, die Feinstruktur-

Prandtl-Zahl $Pr_{t,SGS}$ für ausreichend niedrige Péclet-Zahlen der Strömung unendlich groß zu wählen. Auf Basis der Untersuchungen an Kanalströmungen kann nach Grötzbach [106] für Strömungen einer molekularer Prandtl-Zahl nahe Eins ein Wert von $Pr_{t,SGS} \approx 0,452$ angenommen werden. Eine intensive Auseinandersetzung mit verschiedenen Möglichkeiten der Schließungsansätze der Feinstruktur-Wärmefflüsse ist durch die Arbeit von Morar [111] gegeben. Im Rahmen seiner Arbeit formulierte er in Abhängigkeit der molekularen Prandtl-Zahl Pr folgenden Ansatz zur Bestimmung der Feinstruktur-Prandtl-Zahl [111]:

$$Pr_{t,SGS} = \frac{\nu_{t,SGS}}{\alpha_{t,SGS}} = \left[\left(\frac{4\gamma}{\zeta} \right)^{1/2} Pr^{4/9} \right]. \quad (4.35)$$

Die Koeffizienten sind zu $\gamma \approx 1,6$ und $\zeta \approx 1,3$ gewählt. Durch Einführung der molekularen Prandtl-Zahl Pr in der Formulierung des Ansatzes ist anzunehmen, dass sich gegenüber einer üblicherweise konstant gewählten Feinstruktur-Prandtl-Zahl $Pr_t \approx 0,45$ Vorteile ergeben [111].

Es lässt sich zusammenfassen, dass im Rahmen der Grobstruktursimulation ausschließlich die größten turbulenten Strukturen aufgelöst und in den Erhaltungsgleichungen berechnet werden müssen. Die Eigenschaften der Strukturen einer Größe unterhalb der Filterweite müssen jeweils für das Geschwindigkeits- und Temperaturfeld separat über geeignete Schließungsansätze bestimmt werden. Infolge der damit verbundenen Reduktion der erforderlichen Auflösung und somit der notwendigen Diskretisierungsschritte im Rechengebiet ist eine Grobstruktursimulation im Vergleich zur direkten numerischen Simulation für Strömungen großer Reynolds-Zahlen in komplexen Geometrien oder einer niedrigen verfügbaren Rechenleistung besser geeignet.

4.3. Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen

4.3.1. Zeitliche Mittelung

Turbulenz ist ein regelloser, chaotischer Zustand der Strömung, der fast ausschließlich dreidimensional und instationär ist. Trotz dieses speziellen Charakters ist es durch eine zeitliche Mittelung möglich Turbulenz statistisch zu beschreiben.

In Abb. 4.4 ist schematisch der Verlauf zweier verschiedener zeitlicher Signale $\phi(x_i, t)$ einer beliebigen physikalischen Größe ϕ der Strömung dargestellt. Der Verlauf des Signals im linken Bildausschnitt entspricht einer sogenannten statistisch stationären Strömung. Das Signal in der rechten Bildhälfte hingegen beschreibt eine Strömung, die einer kontinuierlichen zeitlichen Änderung unterliegt. Gemäß der Dekomposition nach Reynolds (1895) kann das zeitliche Signal der lokalen physikalische Eigenschaft $\phi(x_i, t)$ in einen zeitlichen Mittelwert $\bar{\phi}(x_i, t)$ und einen instantanen fluktuierenden Anteil $\phi'(x_i, t)$ zerlegt werden:

$$\phi(x_i, t) = \bar{\phi}(x_i) + \phi'(x_i, t). \quad (4.36)$$

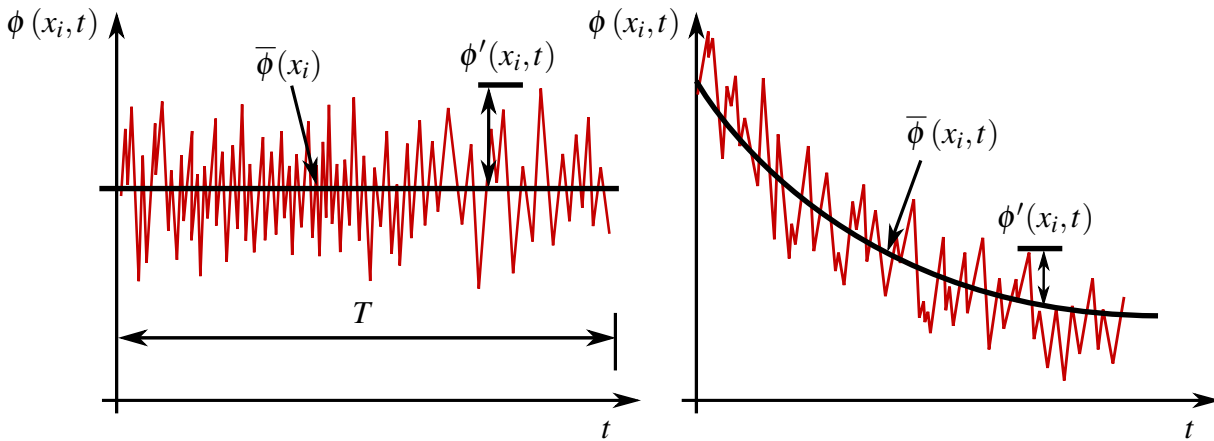


Abbildung 4.4.: Schematische Darstellung der zeitlichen Mittelung für ein statistisch stationäres Signal (links) und des ensemblegemittelten Verlaufs eines vollständig instationären Signals (rechts) im Punkt x_i (Grafik illustriert nach Ferziger [87]).

Der zeitliche Mittelwert des Signals des linken Bildausschnittes $\bar{\phi}(x_i)$ lässt sich durch Integration des Signalverlaufs über ein definiertes Zeitintervall T bestimmen:

$$\bar{\phi}(x_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \phi(x_i, t) dt. \quad (4.37)$$

Die zeitliche Mittelung der Fluktuationsgröße $\bar{\phi}'(x_i, t)$ des Signals kann durch Kombination der beiden Gl. (4.36) und (4.37) zu Null bestimmt werden. Der Fall eines zeitlich veränderlichen Mittelwerts $\bar{\phi}(x_i, t)$ (vgl. rechter Bildausschnitt der Abb. 4.4) verlangt hingegen die Durchführung einer Ensemble-Mittelung des Signals [87]:

$$\bar{\phi}(x_i, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \phi_n(x_i, t). \quad (4.38)$$

In Gl. (4.38) bezeichnet der Parameter N die Gesamtanzahl der Elemente der Ensemble-Mittelung. Diese muss in Abhängigkeit der Dynamik bzw. der zeitlichen Veränderung der Strömung hinreichend groß gewählt werden [87].

4.3.2. Reynolds-gemittelte Erhaltungsgleichungen

Die Gleichungen der Massen-, Impuls- und Energieerhaltung können bei Anwendung der zeitlichen Mittelungsoperation in die sogenannten Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (RANS²⁰) überführt werden. Im Rahmen der statistischen Betrachtungsweise (vgl. Gl. (4.36)) auf die Erhaltungsgleichungen ist folgender Zusammenhang zu berücksichtigen:

²⁰eng: RANS - Reynolds-Averaged Navier-Stokes-Equations

$$\begin{aligned} \overline{u_i \phi} &= \overline{(\bar{u}_i + u_i') (\bar{\phi} + \phi')} = \bar{u}_i \bar{\phi} + \overline{u_i' \phi'}, \\ \text{mit } \overline{\phi u_i'} &= \overline{\phi' u_i'} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \overline{u_i \phi'} = \overline{u_i' \phi} = 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Die Folge der zeitlichen Mittelungsoperation auf die Erhaltungsgleichungen ist demnach die Entstehung sogenannter Momente zweiter Ordnung $\overline{u_i' \phi'}$, deren Ursprung sich auf die Konvektionsterme der Impuls- und Energieerhaltung zurückverfolgen lässt. Diese müssen über geeignete Schließungsansätze bestimmt werden [87,97,98]. Die auftretenden Momente zweiter Ordnung entsprechen sogenannten Einpunkt-Korrelationen der turbulenten Fluktuationsgrößen und man unterscheidet je nach Ordnung des resultierenden Tensors in sogenannte turbulente Reynolds-Spannungen $\rho \overline{u_i' u_j'}$ oder turbulente Skalarflüsse $\rho \overline{u_i' \phi'}$.

Da ausschließlich die inkompressible Formulierung der Erhaltungsgleichungen verwendet werden soll, entfällt die Dichte ρ in den Definitionen der zweiten Momente. Die zeitlich gemittelten Gleichungen der Massen-, Impuls- und Energieerhaltung können nun angegeben werden zu:

$$\frac{\partial (\bar{u}_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (4.40)$$

$$\bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial (\overline{u_i' u_j'})}{\partial x_j}, \quad (4.41)$$

$$\bar{u}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} = \alpha \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial (\overline{u_j' T'})}{\partial x_j} + S_q. \quad (4.42)$$

Die Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (vgl. Gl. (4.40) und (4.41)) in Kombination mit der zeitlichen gemittelten Erhaltungsgleichung der Energie (vgl. Gl. (4.42)) stellen hinsichtlich des erforderlichen Zeitaufwandes die einfachste Möglichkeit der Berechnung komplexer, turbulenter Strömungen dar. Eine analytische Lösung der obigen Gleichungen ist meist nur für Strömungstypen geringer Komplexität oder durch Verwendung vereinfachender Annahmen möglich. Aufgrund der Wichtigkeit der Vorhersage und der Einschätzung turbulenter Strömungsphänomene, speziell in messtechnisch schwer zugänglichen Anwendungsfällen, sind geeignete Modellierungsansätze zwingend erforderlich. Die wesentliche Aufgabe der Schließungsansätze zur Bestimmung der turbulenten Reynolds-Spannungen $\overline{u_i' u_j'}$ bzw. der turbulenten Wärme Flüsse $\overline{u_j' T'}$ basiert auf der vollständigen Modellierung des Verhaltens des Energiespektrums von den großen energietragenden bis zu den kleinsten dissipativen Skalen. Da die größten Wirbelstrukturen und somit der wesentliche Mechanismus der Energiezufuhr der Turbulenz stark von Randbedingungen dominiert sind, ist die Entwicklung universell einsetzbarer Modellierungsansätze bis heute ein wesentlicher Forschungsgegenstand.

4. Mathematische Beschreibung turbulenter Strömungen

Eine übliche Annahme zur Schließung der Reynolds-gemittelten Impulsgleichungen ist die Verwendung der sogenannten Boussinesq-Hypothese. Boussinesq leitete aus dem Newtonschen Ansatz der molekularen Schubspannungen, die Hypothese ab, dass die zweiten Momente der turbulenten Fluktuationsgrößen ebenfalls über zeitlich gemittelte Größen der Hauptströmung bestimmt werden können [96]. Aus dem Verhältnis der turbulenten Reynolds-Spannungen und der Scherrate \bar{S}_{ij} lässt sich für das Beispiel einer eindimensionalen Scherströmung (vgl. Abb. 4.5) eine physikalische Größe bzw. ein Proportionalitätsfaktor der Dimension einer Viskosität ableiten:

$$\nu_t \propto \frac{\overline{u'v'}}{d\bar{u}/dy}. \quad (4.43)$$

Diese Größe wird auch als turbulente Scheinviskosität bzw. Wirbelviskosität bezeichnet und alle dieser Größe zugehörigen Modellansätzen werden der Gruppe der sogenannten Wirbelviskositätsmodelle zugeordnet. Eine der einfachsten Modellierungsansätze ist durch den Prandtl'schen Mischungswegansatz gegeben. Hierbei entspricht die Größe l_m einer Distanz, die ein Element bis zu seiner vollständigen Durchmischung mit seiner Umgebung zurücklegt [96].

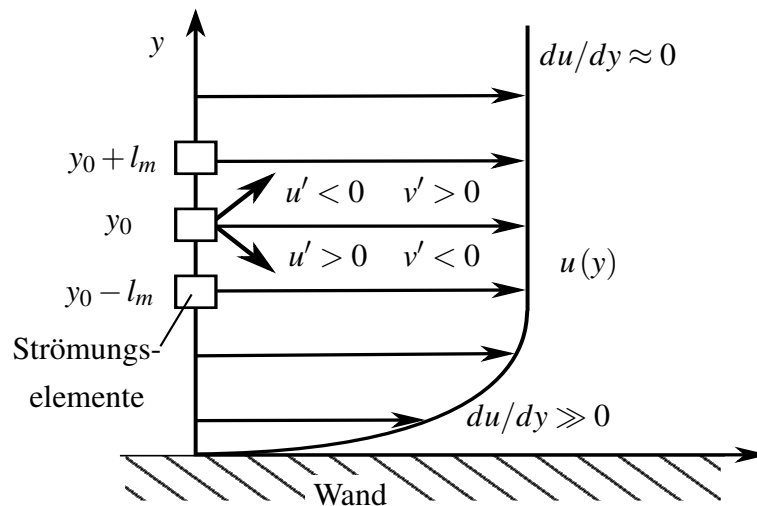


Abbildung 4.5.: Schematische Darstellung einer eindimensionalen Scherströmung zur Illustration des Prandtl'schen Mischungswegansatzes (Grafik nach Oertel et al. [96]).

Auf Basis einer Taylor-Reihenentwicklung kann gezeigt werden, dass nach Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung die Geschwindigkeitsfluktuationen u' und v' in einem direkten Zusammenhang mit dem Geschwindigkeitsgradienten und der Mischungsweglänge stehen:

$$u'(y_0 + l_m) = -l_m \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right) \Big|_{y_0}, \quad (4.44)$$

$$v' = l_m \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right) \Big|_{y_0}. \quad (4.45)$$

Man kann somit einen Ausdruck formulieren, der die zweiten Momente der Geschwindigkeitsfluktuationen in einen Zusammenhang mit der zeitlich gemittelten Scherrate bzw. den Geschwindigkeitsgradienten der Hauptströmung setzt:

$$\overline{u'v'} = -l_m^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 \quad \text{und} \quad v_t = l_m^2 \frac{d\bar{u}}{dy}. \quad (4.46)$$

Die Mischungsweglänge l_m muss für jeden Strömungstyp geeignet gewählt werden, was einen der größten Nachteile dieses einfachen algebraischen Ansatzes darstellt [96]. Für komplexe Strömungen z.B. durch veränderliche Kanalquerschnitte ist dieser Ansatz nur bedingt geeignet und es ist der Einsatz von aufwendigeren Modellierungskonzepten notwendig.

Die allgemein übliche Definition der Reynolds-Spannungen bzw. zweiten Momente der Geschwindigkeitsfluktuationen $\overline{u'_i u'_j}$ ist unter Verwendung des Kronecker-Deltas δ_{ij} durch folgende Gleichung gegeben:

$$\overline{u'_i u'_j} = -2\nu_t \bar{S}_{ij} + \frac{2}{3} k \delta_{ij}. \quad (4.47)$$

Der zweite Term der rechten Seite der Gl. (4.47) stellt sicher, dass auch für den Fall einer spurfreien Scherrate in vollständig entwickelten Strömungen, die Summe der Diagonalelementen des Reynolds-Spannungstensor der turbulenten kinetischen Energie $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$ entspricht.

Schließungsansätze auf Basis von Wirbelviskositätsmodellen sind bis zum heutigen Tag die wohl am meisten verbreitete Methodik zur Berechnung turbulenter Strömungen. Ein wesentlicher Nachteil dieser Modelle ist durch die Verwendung einer isotropen Viskosität gegeben. Speziell im wandnahen Bereich der Strömung weichen die Reynolds-Normalspannungen stark voneinander ab. Turbulenzinduzierte Sekundärströmungen, die charakteristisch für Strömungen in Rechteckkanälen oder Stabbündeln sind, können durch solche Modelle nicht vorhergesagt werden und es müssen entsprechend erweiterte Modellansätze berücksichtigt werden. Ein weiterer Nachteil ist bereits durch die statistische Mittelung der Erhaltungsgleichungen gegeben. Da im Unterschied zur Grobstruktursimulation der Energiegehalt der unterschiedlichsten Skalen vollständig modelliert und wiedergegeben werden muss, sind diese Modelle meist hinsichtlich eines jeweiligen Einsatzgebietes stark limitiert und müssen für jeden Strömungstyp hinreichend validiert werden.

4.4. Turbulenz im wandnahen Bereich

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit sollen im Wesentlichen durch Wände begrenzte Strömungen untersucht werden. Wie in der Literatur üblich, soll an dieser Stelle eine geeignete Normierung der relevanten Größen eingeführt werden.

4. Mathematische Beschreibung turbulenter Strömungen

Für die Normierung des Geschwindigkeitsprofils (vgl. Abb. 4.6) in einer turbulenten Plattenkanalströmung eignet sich jeweils die Wandschubspannungsgeschwindigkeit u_τ :

$$\bar{u}^+ = \frac{\bar{u}}{u_\tau}. \quad (4.48)$$

Diese ist unmittelbar verbunden mit der Wandschubspannung τ_w und somit mit dem Reibungswiderstand der Strömung:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{|\tau_w|}{\rho}}. \quad (4.49)$$

Der Betrag der Wandschubspannung $|\tau_w|$ kann mit Berücksichtigung der wandnormalen Koordinate n bestimmt werden über:

$$|\tau_w| = \left| \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right) \right|_w. \quad (4.50)$$

Unter Verwendung der Wandschubspannungsgeschwindigkeit u_τ lässt sich auch die wandnormale Koordinate y bzw. n normieren:

$$y^+ = \frac{y u_\tau}{\nu}. \quad (4.51)$$

Das über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ dargestellte normierte Geschwindigkeitsprofil $u^+(y^+)$ lässt sich in verschiedene charakteristische Bereiche unterteilen, die in diesem Abschnitt kurz erläutert werden sollen. Unmittelbar an der Begrenzungsfläche zwischen Strömung und Wand gilt die sogenannte Haftbedingung. Die mittlere Strömungsgeschwindigkeit sowie ihre Fluktuation erhalten mit abnehmendem Wandabstand asymptotisch den Wert Null (vgl. Abb. 4.7). Die Strömung in diesem Bereich wird maßgeblich durch molekulare Diffusionsvorgänge dominiert. Dies bewirkt eine starke Dämpfung der turbulenten Schwankungen im Geschwindigkeitsfeld. Aus diesem Grund wird dieser Bereich auch als viskose Unterschicht bezeichnet.

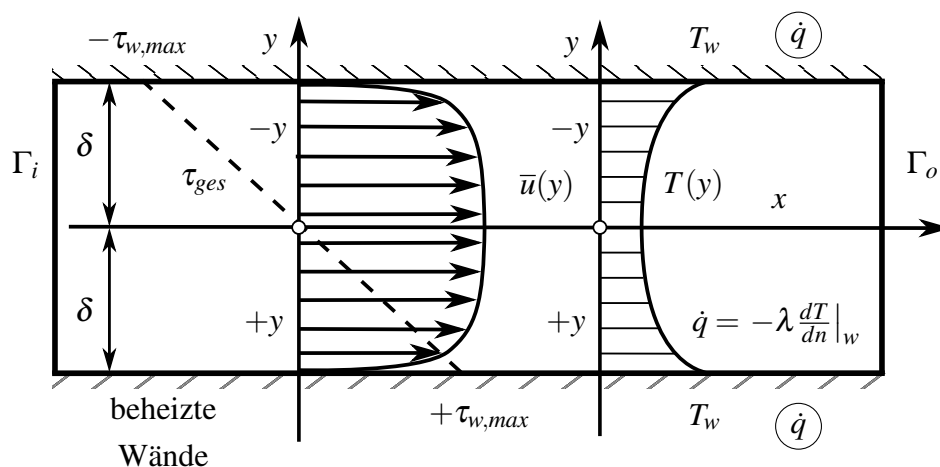


Abbildung 4.6.: Skizze einer beidseitig beheizten Plattenkanalströmung zur Illustration der für eine Normierung relevanten Strömungsgrößen.

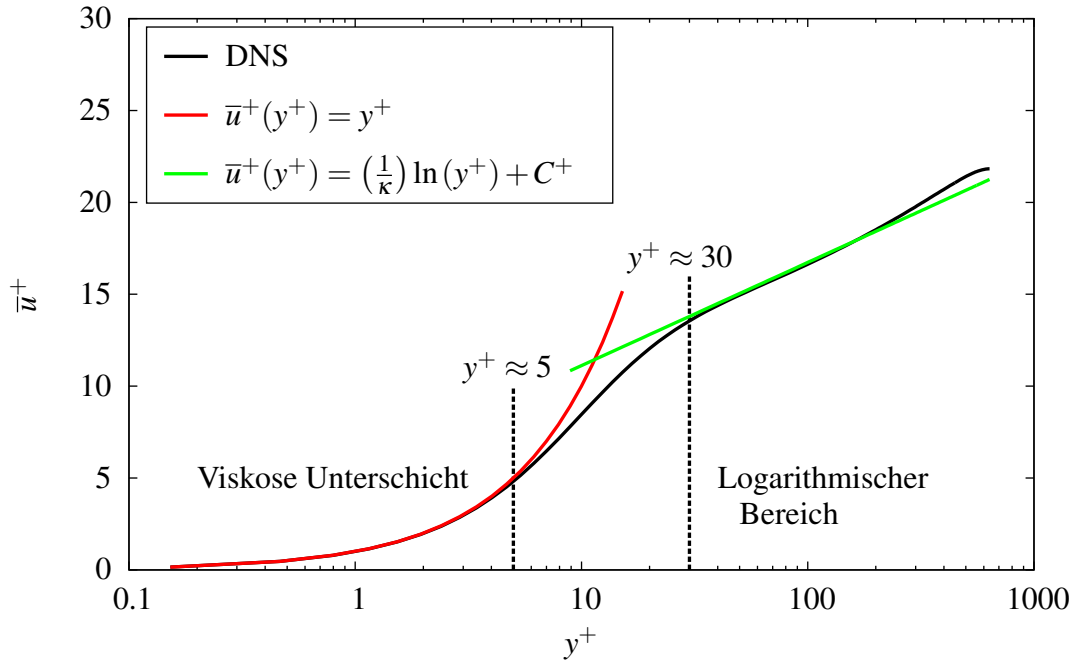


Abbildung 4.7.: Darstellung des normierten Geschwindigkeitsprofils einer turbulenten Plattenkanalströmung auf Basis der DNS-Daten für $Re_\tau = 640$ nach Abe et al. [85,86] mit den Werten $\kappa = 0,41$ und $C^+ = 5,5$ für das logarithmische Wandgesetz.

Mit zunehmenden Wandabstand folgt nach der viskosen Unterschicht zunächst der Übergang in eine Pufferzone und anschließend in den sogenannten logarithmischen Bereich des Geschwindigkeitsprofils. Innerhalb dieses Bereichs nehmen die turbulenten Fluktuationen der Erhaltungsgrößen deutlich zu. Dies äußert sich in einer deutlichen Verringerung des wandnormalen Geschwindigkeitsgradienten infolge des erhöhten Impulsaustausches.

Das normierte Geschwindigkeitsprofil $\bar{u}^+(y)$ kann für die viskose Unterschicht durch einen linearen Zusammenhang mit dem dimensionslosen Wandabstand y^+ (vgl. Gl. (4.52)) sowie für den wandfernen Bereich durch das sogenannte logarithmische Wandgesetz (vgl. Gl. (4.53)) beschrieben werden:

$$\bar{u}^+(y^+) = y^+ \quad \text{für} \quad 0 < y^+ < 5, \quad (4.52)$$

$$\bar{u}^+(y^+) = \left(\frac{1}{\kappa}\right) \ln(y^+) + C^+ \quad \text{für} \quad 30 < y^+. \quad (4.53)$$

Die beiden Konstanten des logarithmischen Wandgesetzes können aus experimentellen oder numerischen Datensätzen bestimmt werden. Für hydraulisch glatte Wände gibt Schlichting [93] Werte für die von-Kármán-Konstante von $\kappa = 0,41$ und für die Konstante $C^+ = 5,0$ an. Im Allgemeinen ist die Wahl der Konstante C^+ in Abhängigkeit der Wandrauigkeit k_s^+ zu treffen. In der vorliegenden Arbeit sollen jedoch ausschließlich Strömungen über hydraulisch glatte Wände untersucht werden, so dass eine Untersuchung des Einflusses der Wandrauigkeit an dieser Stelle entfällt.

Für Strömungen mit Wärmeübergang (vgl. Abb. 4.6) kann ebenfalls eine geeignete Normierung mittels einer Dimensionsanalyse durchgeführt werden. In Analogie zur Schubspannungsgeschwindigkeit kann nach Schlichting [93] eine Reibungstemperatur T_τ definiert werden:

$$T_\tau = \frac{\dot{q}}{\rho c_p u_\tau} = \left(\frac{\alpha}{u_\tau} \right) \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_w. \quad (4.54)$$

Für den Fall eines identischen Beheizungszustandes auf beiden Wandflächen des Plattenkanals (vgl. rechte Seite der Abb. 4.6) wird im Rahmen der Normierung üblicherweise die Temperaturdifferenz zwischen der Wandtemperatur \bar{T}_w und dem Temperaturprofil $\bar{T}(y)$ verwendet:

$$\bar{\Theta}(y) = \bar{T}_w - \bar{T}(y), \quad (4.55)$$

$$\bar{\Theta}^+ = \frac{\bar{\Theta}}{T_\tau}. \quad (4.56)$$

Das normierte Temperaturprofil $\bar{\Theta}^+(y^+)$ weist im Vergleich zur normierten Geschwindigkeitsverteilung ebenfalls einen viskos dominierten Bereich in unmittelbarer Wandnähe auf. Die Größe dieses Bereichs in wandnormaler Richtung ist streng an die Größenordnung der molekularen Prandtl-Zahl Pr gebunden. Wie bereits in Kapitel 3.3 diskutiert wurde, ist die Dämpfungswirkung eine Funktion der thermischen Diffusion α und nimmt mit sinkender molekularer Prandtl-Zahlen stark zu. In den Abb. 4.8 und 4.9 ist jeweils das normierte Temperaturprofil $\bar{\Theta}^+(y^+)$ für die Prandtl-Zahlen $Pr = 0,025$ und $Pr = 0,71$ dargestellt.

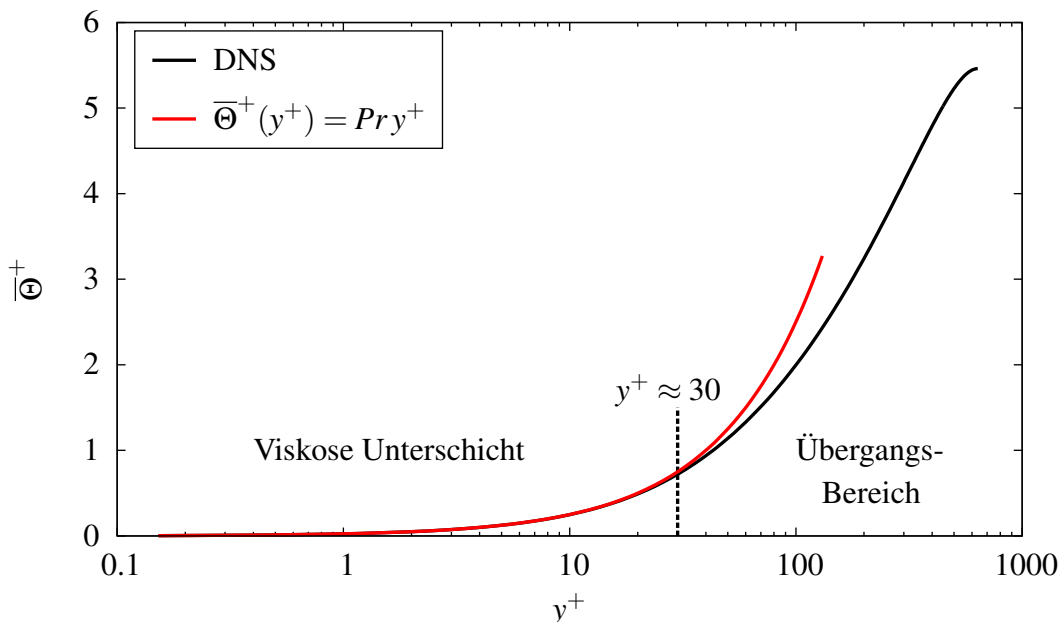


Abbildung 4.8.: Normiertes Temperaturprofil $\bar{\Theta}^+$ einer turbulenten Plattenkanalströmung auf Basis der DNS-Daten für $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$ nach Abe et al. [85,86].

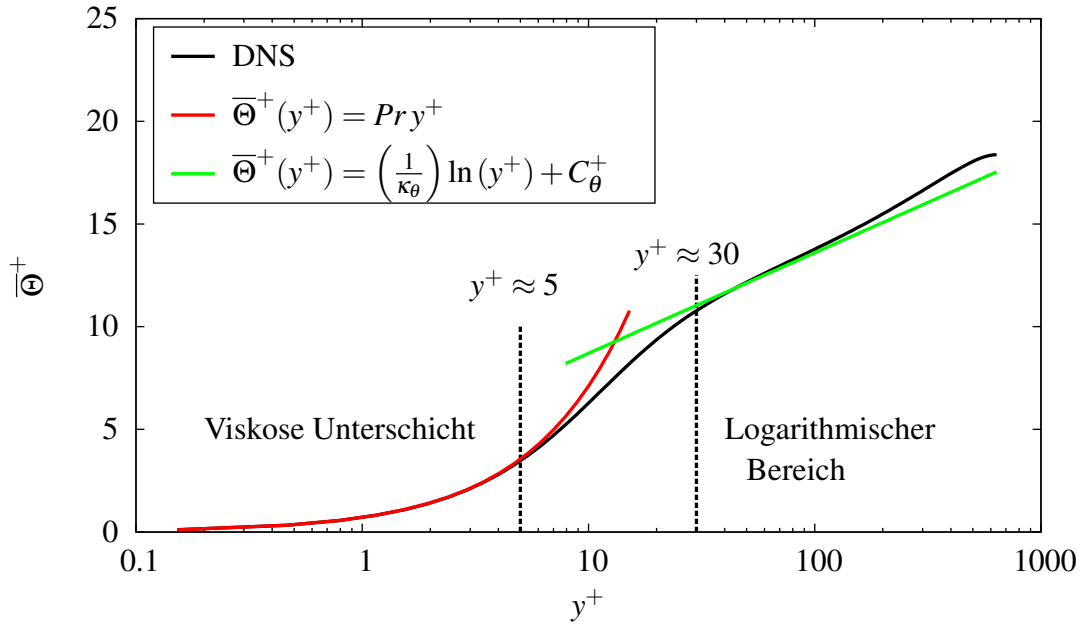


Abbildung 4.9.: Normiertes Temperaturprofil $\bar{\Theta}^+$ einer turbulenten Plattenkanalströmung auf Basis der DNS-Daten für $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,71$ nach Abe et al. [85,86] mit den Werten $\kappa_\theta = 0,47$ und $C_\theta^+ = 3,8$ für das logarithmische Wandgesetz.

Es ist leicht zu erkennen, dass im Falle der niedrigeren Prandtl-Zahl (vgl. Abb. 4.8) die viskose Unterschicht weit in den Bereich der Kernströmung hineinragt. Mit zunehmendem Abstand von der Wand des Plattenkanals sinkt die molekulare Dämpfungswirkung und Fluktuationen der Temperatur nehmen zu. Dieser Übergangsbereich kann nicht wie im Fall des normierten Geschwindigkeitsprofils eindeutig einem Bereich des dimensionslosen Wandabstand y^+ zugeordnet werden und ist stets unter Berücksichtigung der molekularen Prandtl-Zahl zu untersuchen.

Für ausreichend hohe Prandtl- bzw. Péclet-Zahlen kann ein logarithmischer Bereich des Temperaturprofils identifiziert werden (vgl. Abb. 4.9). Für niedrigere Prandtl-Zahlen bzw. niedrige Péclet-Zahlen hingegen entfällt dieser Bereich vollständig (vgl. Abb. 4.8). Es ist ausschließlich ein Übergangsbereich bei einem dimensionslosen Wandabstand von $y^+ \approx 30$ zu erkennen.

Der lineare Zusammenhang zum dimensionslosen Wandabstand y^+ in der viskosen Unterschicht und das logarithmische Wandgesetz des Temperaturprofils kann nach Schlichting [93] über die beiden folgenden Gleichungen beschrieben werden:

$$\bar{\Theta}^+(y^+) = Pr y^+, \quad (4.57)$$

$$\bar{\Theta}^+(y^+) = \left(\frac{1}{\kappa_\theta}\right) \ln(y^+) + C_\theta^+. \quad (4.58)$$

Hierbei kann nach Wier & Römer [121] der Wert der Konstante zu $\kappa_\theta = 0,47$ bestimmt werden. Die Konstante C_θ^+ ist in Abhängigkeit der Prandtl-Zahl zu wählen. Nach Schlichting [93] folgt zur

Bestimmung der Konstanten für hydraulisch glatte Wände:

$$C_{\theta}^+(Pr) = 13,7 Pr^{2/3} - 7,5. \quad (4.59)$$

Für den vorliegenden Fall einer turbulenten Plattenkanalströmung kann anhand der DNS-Daten von Abe et al. [85,86] zur Approximation des logarithmischen Bereichs des normierten Temperaturprofils für den Fall $Pr = 0,71$ ein Wert von $C_{\theta}^+ = 3,8$ bestimmt werden (vgl. Abb. 4.9).

An dieser Stelle soll ebenfalls eine auf Basis der Wandschubspannungsgeschwindigkeit und dem halben Plattenabstand δ gebildete Reynolds-Zahl Re_{τ} eingeführt werden:

$$Re_{\tau} = \frac{u_{\tau}\delta}{\nu}. \quad (4.60)$$

Für Kanalströmungen ist ebenfalls die Verwendung einer auf Basis der mittleren Geschwindigkeit u_b und des Plattenabstandes 2δ formulierte Reynolds-Zahl Re_b üblich:

$$Re_b = \frac{u_b 2\delta}{\nu}. \quad (4.61)$$

Nach Dean [122] existiert ein aus experimentellen Daten für Kanalströmungen basierender Zusammenhang zwischen diesen beiden Formulierungen der Reynolds-Zahlen, der wie folgt angegeben werden kann:

$$Re_{\tau} = \frac{1}{2} \left(0,073^{1/2} 2^{-5/8} Re_b^{7/8} \right). \quad (4.62)$$

5 Schließungsansätze der Impulserhaltungsgleichungen

Infolge der zeitlichen Mittelung bzw. Reynolds-Dekomposition der Erhaltungsgrößen entstehen Momente zweiter Ordnung in den Erhaltungsgleichungen. Aufgrund der zusätzlichen Terme im Gleichungssystem können die Erhaltungsgleichungen für turbulente Strömungen in den meisten Fällen nicht ohne die Verwendung von Vereinfachungen analytisch gelöst werden. Die Entwicklung geeigneter Schließungsansätze erfordert eine hinreichend genaue Modellierung des Verhaltens des gesamten Energiespektrums. Dies umfasst den Einfluss der Randbedingungen des Strömungsgebietes auf die größten Skalen genauso wie der Dissipation auf die kleinsten Skalen der Turbulenz. Bei der Modellierung der turbulenten Wärmeflüsse kommt dem Schließungsansatz der Impulserhaltungsgleichung speziell in Strömungen, die durch das Auftreten einer turbulenzinduzierten Sekundärströmung gekennzeichnet sind, eine entscheidende Bedeutung zu.

Im Folgenden soll zunächst eine grobe Übersicht über die theoretischen Grundlagen existierender Schließungsansätze der Reynolds-gemittelten Impulserhaltungsgleichungen gegeben werden. Im Anschluss soll ein geeigneter Modellierungsansatz ausgewählt werden, der fortan als „Grundgerüst“ für die Modellierung der turbulenten Wärmeflüsse dienen soll.

5.1. Transportgleichungen der turbulenten Reynolds-Spannungen

Um ein allgemeines Verständnis der verschiedenen Modellierungsansätze der turbulenten Reynolds-Spannungen zu erhalten, ist es zunächst erforderlich auf die Herleitung ihrer exakten Erhaltungsgleichungen sowie ihrer wesentlichen Transportmechanismen einzugehen.

In der Literatur wird üblicherweise der Begriff der Reynolds-Spannungen τ'_{ij} auch auf das zweite Moment der Geschwindigkeitsfluktuationen $\overline{u'_i u'_j}$ erweitert:

$$\tau'_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}, \quad (5.1)$$

so dass im Folgenden das zweite Moment der Geschwindigkeitsfluktuationen ebenfalls als Reynolds-Spannungen bezeichnet wird.

Die Herleitung der exakten Form der Transportgleichungen der turbulenten Reynolds-Spannungen erfolgt in mehreren Teilschritten. Zunächst muss eine Erhaltungsgleichung der Geschwindigkeitsfluktuation u'_i formuliert werden. Diese kann durch Subtraktion der Erhaltungsgleichung der zeitlich gemittelten Geschwindigkeit \bar{u}_i von der Erhaltungsgleichung der instantanen Geschwindigkeit u_i bestimmt werden. Eine exakte Transportgleichung der Reynolds-Spannungen kann nun mit Hilfe des Produktes der Gleichung der Geschwindigkeitsfluktuationen u'_i und u'_j und anschließender Anwendung der zeitlichen Mittelungsoperation abgeleitet werden [71,103]:

$$\begin{aligned}
 \frac{D\overline{u'_i u'_j}}{Dt} = & \underbrace{\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t}}_{\text{zeitliche Änderung}} + \underbrace{\bar{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k}}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{- \left(\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \right)}_{\text{Produktion infolge der Hauptströmung}} + \underbrace{\frac{1}{\rho} \sum_n \left(\overline{f_i^n u'_j} + \overline{f_j^n u'_i} \right)}_{\text{Produktion infolge äußerer Kräfte}} \\
 & - \underbrace{\frac{1}{\rho} \left(\overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \right)}_{\text{Geschwindigkeits-Druck-Korrelationsterm}} - \underbrace{2\nu \frac{\partial \overline{u'_i} \partial \overline{u'_j}}{\partial x_k \partial x_k}}_{\text{Dissipation}} \\
 & + \underbrace{\nu \frac{\partial^2 \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k^2}}_{\text{molekulare Diffusion}} - \underbrace{\frac{\partial \overline{u'_i u'_j u'_k}}{\partial x_k}}_{\text{turbulente Diffusion}}.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Zur Übersichtlichkeit soll die in der Literatur übliche Notation der einzelnen Terme obiger Transportgleichung an dieser Stelle eingeführt werden [103,123]:

$$L_{ij} + C_{ij} = P_{ij} + F_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij} + D_{ij}^v + D_{ij}^t. \tag{5.3}$$

Die ersten beiden Terme der linken Seite der Gl. (5.3) beschreiben die zeitliche Änderung sowie die Konvektion der Reynolds-Spannungen durch die Geschwindigkeitskomponenten der Hauptströmung. Beide Terme verlangen keine weitere Modellierung und geben die zeitliche und räumliche „Vergangenheit“ der Strömung wieder. Die ersten beiden Terme der rechten Seite beinhalten die Produktion infolge von Scherung der Hauptströmung P_{ij} , sowie durch die Einwirkung äußerer Kräfte F_{ij} , wie z.B. durch Auftrieb. Der dritte Term Π_{ij} entspricht einem Korrelationsterm zwischen Geschwindigkeits- und Druckfluktuationen und lässt sich als Summe des sogenannten Druckdilatationsterms und der turbulenten Druckdiffusion formulieren [123]:

$$\Pi_{ij} = -\frac{1}{\rho} \left(\overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} \right) = \underbrace{\frac{1}{\rho} \overline{p' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)}}_{\text{Druckdilatation}} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{p' (u'_i \delta_{jk} + u'_j \delta_{ik})}}_{\text{Druckdiffusion}}, \tag{5.4}$$

bzw. in symbolischer Notation:

$$\Pi_{ij} = \phi_{ij} + D_{ij}^p. \quad (5.5)$$

Für inkompressible Strömungen verschwindet in Analogie zur Hauptströmungsgeschwindigkeit die Divergenz der Geschwindigkeitsfluktuationen. Der Druckdilatationsterm ϕ_{ij} ist demnach spurlos ($\phi_{ii} = 0$). In der exakten Transportgleichung der turbulenten kinetischen Energie $k = \frac{1}{2}\overline{u'_i u'_i}$, die als Summe der Diagonalelemente des Reynolds-Spannungstensors definiert ist, verschwindet der Druckdilatationsterm. Diese wichtige Eigenschaft lässt bereits einen wesentlichen Rückschluss auf seine Wirkungsweise zu. In inkompressiblen Fluiden trägt der Druckdilatationsterm nicht zur Erhöhung des Niveaus der Turbulenz bei, sondern dient vielmehr der Umverteilung der Energie zwischen den Reynolds-Normalspannungskomponenten [123]. Die Terme D_{ij}^v bzw. D_{ij}^t beschreiben jeweils die molekulare bzw. turbulente Diffusion. Die molekulare Diffusion bedarf im Unterschied zur turbulenten Diffusion keiner weiteren Modellierung und ist in ihrem Einfluss auf den wandnahen Bereich der Strömung beschränkt. Die turbulente Diffusion basiert auf einem sogenannten dritten Moment der turbulenten Fluktuationsgrößen $\overline{u'_i u'_j u'_k}$ und resultiert unmittelbar aus dem Konvektionsterm infolge der Anwendung der zeitlichen Mittelungsoperation. Dies verdeutlicht, dass bei einem beliebigen Modellierungsvorhaben eines zweiten Moments stets Terme höherer Ordnung entstehen, die selbst ein Schließungsproblem darstellen und geeignete Modellansätze erfordern. Der Tensor ε_{ij} beschreibt die anisotrope Dissipation der turbulenten Reynoldspannungen und somit die Vernichtung der Energie der Fluktuationen auf den kleinsten Skalen.

Die Produktion infolge der Einwirkung äußerer Kräfte F_{ij} muss für jeden beliebigen Fall geeignet formuliert werden. Im Falle einer einwirkenden Gravitationskraft auf die Strömung ergibt sie sich zu:

$$F_{ij} = G_{ij} = -\beta g_j \overline{u'_i \theta'} - \beta g_i \overline{u'_j \theta'}. \quad (5.6)$$

wobei die Größen β den thermischen Ausdehnungskoeffizienten, g_i den Gravitationsvektor und $\overline{u'_i \theta'}$ den turbulenten Wärmeflussvektor darstellen. Im Folgenden soll ausschließlich die Auswirkung des Auftriebs im Rahmen der Transportgleichungen untersucht werden.

5.2. Transportgleichung der turbulenten kinetischen Energie und ihrer Dissipation

Die Gleichung der turbulenten kinetischen Energie k kann über die Spur des Reynolds-Spannungstensors bzw. über die Summe der Normalspannungskomponenten bestimmt werden [103]:

$$k = \frac{1}{2}\overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2}(\overline{u' u'} + \overline{v' v'} + \overline{w' w'}). \quad (5.7)$$

Eine exakte Transportgleichung der turbulenten kinetischen Energie k kann somit unmittelbar aus Gl. (5.2) abgeleitet werden [103]:

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = -\overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} - \beta g_i \overline{u'_i \theta'} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\nu \frac{\partial k}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \overline{u'_l u'_l u'_k} - \frac{1}{\rho} \overline{p' u'_k} \right] - \varepsilon, \quad (5.8)$$

bzw. in symbolischer Notation:

$$L_k + C_k = P_k + G_k + D_k^v + D_k^t - D_k^p - \varepsilon. \quad (5.9)$$

Die Größe ε beschreibt in diesem Zusammenhang die isotrope Dissipationsrate (ε_{ii}) der turbulenten kinetischen Energie und kann über folgende Korrelation (vgl. Gl. (5.2)) angegeben werden:

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u'_l}{\partial x_k} \frac{\partial u'_l}{\partial x_k}}. \quad (5.10)$$

Auch für die isotrope Dissipationsrate ε kann eine Transportgleichung abgeleitet werden [103]:

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = & \underbrace{-2\nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{P_{\varepsilon 1} + P_{\varepsilon 2}} \underbrace{- 2\nu \overline{u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_k \partial x_j}}}_{P_{\varepsilon 3}} \\ & \underbrace{- 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \frac{\partial u'_k}{\partial x_m}}_{P_{\varepsilon 4}} \underbrace{- 2\nu \beta g_i \frac{\partial u'_i}{\partial x_l} \frac{\partial \theta'}{\partial x_l}}_{G_\varepsilon} \underbrace{- 2\nu^2 \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_m} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_m}}_{\Upsilon_\varepsilon} \\ & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\varepsilon}{\partial x_j} - \nu \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_m} \frac{\partial u'_i}{\partial x_m}} - \frac{2\nu}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_m} \frac{\partial u'_j}{\partial x_m} \right)}_{D_\varepsilon}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

wobei die Größen $P_\varepsilon = P_{\varepsilon 1} + P_{\varepsilon 2} + P_{\varepsilon 3} + P_{\varepsilon 4}$ den Anteil der Schwankungsgrößen, die in Dissipation umgewandelt werden, G_ε den Einfluss der Auftriebswirkung, D_ε die Summe der molekularen und turbulenten Diffusion sowie Υ_ε eine Umsetzung von Schwankungen in Wärme darstellen. Eine exakte Analyse der einzelnen Terme ist nahezu unmöglich, da sie auf mehrfachen Produkten von lokalen Ableitungen der Geschwindigkeitsfluktuationen basieren [75]. In der Literatur existieren eine Vielzahl von Ansätzen zur Bestimmung der Dissipationsrate ε . Eine umfassende Erläuterung dieser Thematik ist beispielsweise in der Arbeit von Hanjalić & und Launder [71] gegeben.

Es soll zunächst eine allgemeine Übersicht der verschiedenen Stufen von Modellansätzen der turbulenten Reynolds-Spannungen gegeben werden.

5.3. Modellansätze der turbulenten Reynolds-Spannungen

Eine Übersicht verschiedener Modellierungsstufen ist in Abb. 5.1 gegeben. Sämtliche Schließungsansätze lassen sich in zwei Kategorien unterteilen, den sogenannten Wirbelviskositätsmodellen und den Reynolds-Spannungsmodellen. Erstgenannte Gruppe basiert in ihren theoretischen Grundlagen auf der Bestimmung einer skalarwertigen isotropen Wirbelviskosität durch Modellierung eines geeigneten turbulenter Geschwindigkeits- und Längenmaßes. Reynolds-Spannungsmodelle (RSM) hingegen basieren im Gegensatz zu Wirbelviskositätsmodellen nicht auf der Boussinesq-Hypothese. Für jede einzelne Komponente des Tensors wird eine eigene partielle Differentialgleichung gelöst. Der wesentliche Vorteil der letztgenannten Kategorie ist ihre „natürliche“ Berücksichtigung der Anisotropie der Reynolds-Normalspannungskomponenten.

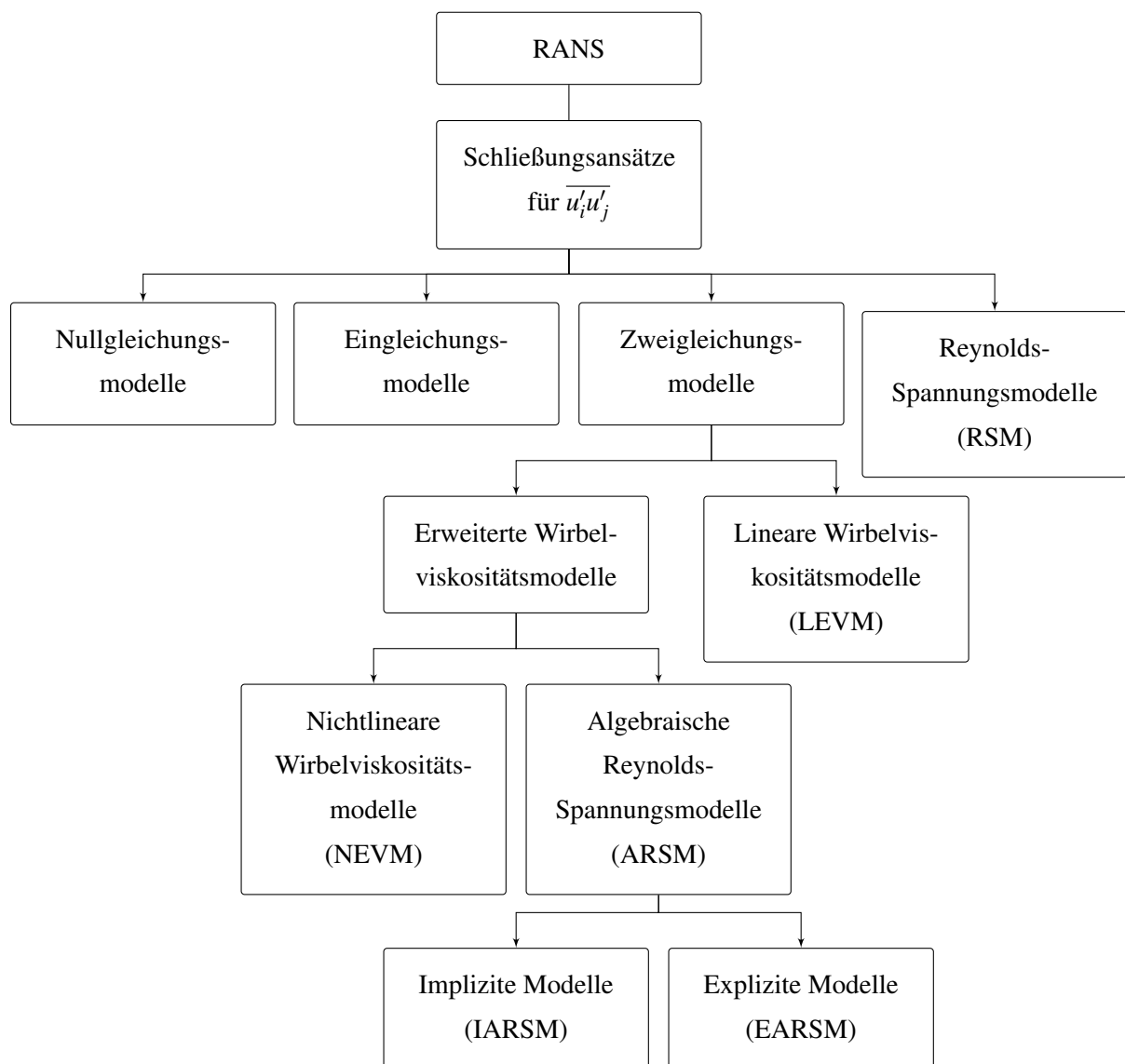


Abbildung 5.1.: Übersicht über die verschiedenen Modellierungsstufen von Schließungsansätzen der Reynolds-gemittelten Impulsgleichungen

Speziell im wandnahen Bereich der Strömung weichen die Diagonalelemente des Reynolds-Spannungstensors voneinander ab. Dies kann die Ursache für das Auftreten sogenannter Sekundärströmungen zweiter Art sein, auf die in nachfolgenden Kapiteln ausführlich am Beispiel der Rechteckkanalströmung eingegangen werden soll. Wirbelviskositätsmodelle basieren üblicherweise auf einem linearen Zusammenhang der turbulenten Reynolds-Spannungen und des Deformationstensor S_{ij} (vgl. Gl. (2.8)). Es ist leicht ersichtlich, dass für verschwindende Gradienten der Hauptströmungsgeschwindigkeit ohne entsprechende Erweiterungen der Boussinesq-Hypothese keine Anisotropie der Reynolds-Spannungen vorhergesagt werden kann. Trotz dieses Nachteils sind Wirbelviskositätsmodelle für die Berechnung einer Vielzahl von turbulenten Strömungen in der Literatur erfolgreich eingesetzt worden. Das turbulente Geschwindigkeits- und Längenmaß q' bzw. l' der energietragenden Wirbel wird in Abhängigkeit der turbulenten kinetischen Energie k und ihrer Dissipationsrate ε bzw. Frequenz ω formuliert. Eine allgemeine Formulierung ist nach Gatski & Jongen [124] wie folgt gegeben:

$$v_t = C'_\mu q' l', \quad (5.12)$$

wobei die Größen C'_μ einem Koeffizienten sowie die Variablen q' und l' einem charakteristischen Geschwindigkeits- bzw. Längenmaß der turbulenten Strömung entsprechen.

5.3.1. Lineare Wirbelviskositätsmodelle

Die einfachste Klasse der Schließungsansätze der Reynolds-gemittelten Impulsgleichungen basieren auf sogenannten Nullgleichungsmodellen. Diese beinhalten rein algebraische Ausdrücke zur Bestimmung einer isotropen turbulenten Wirbelviskosität v_t in Abhängigkeit lokaler Strömungsgrößen. Die bekanntesten Vertreter dieser Kategorie sind das bereits erläuterte Mischungswegmodell nach Prandtl [125] (vgl. Kapitel 4.3.2), das Cebeci-Smith-Modell [126] oder das Baldwin-Lomax-Modell [127].

Im Gegensatz zu Nullgleichungsmodellen ist bei Verwendung von sogenannten Eingleichungsmodellen ergänzend zu den Reynolds-gemittelten Erhaltungsgleichungen eine zusätzliche partielle Differentialgleichung der turbulenten kinetischen Energie k , wie z.B. im Prandtl'schen Eingleichungsmodell [128], oder der turbulenten Wirbelviskosität v_t , wie z.B. im Ansatz nach Spalart & Allmaras [129], zu lösen. Die Reynolds-Spannungen können mit Hilfe der Wirbelviskosität v_t und der Boussinesq-Hypothese bestimmt werden:

$$\overline{u'_i u'_j} = -v_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} k \delta_{ij}. \quad (5.13)$$

Ein wesentlicher Vorteil im Vergleich zu rein algebraischen Modellen ist die Berücksichtigung zurückliegender Ereignisse der Strömung durch die jeweiligen Konvektionsterme der Transport-

gleichungen. Es lassen sich aber auch Nachteile für Null- und Eingleichungsmodelle erkennen. Für jeden beliebigen Strömungsfall ist stets ein geeignetes Längenmaß zu bestimmen. Dies ist streng genommen nur bei einem konstanten Verhältnis der Produktion zur Dissipation möglich, so dass bei komplexen Strömungsformen nur bedingt eine verlässliche Vorhersage der wesentlichen Strömungseigenschaften zu erwarten ist [103].

Die wohl bekanntesten Vertreter der linearen Wirbelviskositätsmodelle sind die Zweigleichungsmodelle. Die meisten Modelle dieses Typs basieren auf einer Erweiterung bzw. Modifikation des ursprünglichen $k - \varepsilon$ -Modells von Jones & Launder [130] oder des $k - \omega$ -Modells von Wilcox [131]. Ihr wesentlicher Vorteil ist auf die Verwendung einer zusätzlichen Transportgleichung zurückzuführen und es entfällt die meist an empirische oder an experimentelle Daten angepasste Wahl eines geeigneten Längenmaßes [103]. Modelle dieser Kategorie eignen sich daher auch zur Berechnung von komplexen Strömungen.

Ausgehend von der exakten Transportgleichung der turbulenten kinetischen Energie k (vgl. Gl. (5.8)) müssen die unbekanntenen Transportterme durch geeignete Modelle ersetzt werden. Die Summe der turbulenten Diffusion D_k^t und Druckdiffusion D_k^p wird meist zusammen modelliert

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\overline{p'u'_k}}{\rho} \right)}_{D_k^p} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} \overline{u'_l u'_l u'_k} \right)}_{D_k^t} = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \right), \quad (5.14)$$

wobei σ_k eine empirische Konstante bzw. Schmidt-Zahl darstellt [131]. Die resultierende Gleichung nimmt demnach für eine statistisch stationäre Strömung folgende Form an:

$$\bar{u}_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = - \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(v + \frac{v_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] - \varepsilon. \quad (5.15)$$

Die Dissipationsrate ε muss ebenfalls durch Lösung einer geeigneten Transportgleichung bestimmt werden. Hanjalic & Launder [71] merken hierzu an, dass in der exakten Gleichung die wichtigsten Wirkmechanismen durch Wirbelstreckung²¹ infolge der turbulenten Bewegung und durch viskose Dissipation gegeben sind. Beide Phänomene sind auf die kleinsten Skalen der Turbulenz beschränkt und demnach nur „bedingt zugänglich für einen experimentellen Aufbau oder eine Analyse“ [71]. Erstmals wurde eine exakten Formulierung der Transportgleichung der Dissipation in der Arbeit von Chou [132] vorgestellt. Erst die Weiterentwicklung des $k - \varepsilon$ -Modell durch Jones & Launder [130] stellt jedoch einen „Meilenstein“ in der Turbulenzmodellierung dar. Nachfolgend sei ihre Formulierung der Transportgleichung der Dissipationsrate der turbulenten kinetischen Energie angegeben [103,130]:

²¹eng.: vortex-stretching

$$\bar{u}_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right], \quad (5.16)$$

wobei $C_{\varepsilon 1}$ und $C_{\varepsilon 2}$ Koeffizienten darstellen, die in Abstimmung mit experimentellen oder numerischen Daten geeignet bestimmt werden müssen. Die turbulente Diffusion wird ebenfalls mit Hilfe des Verhältnisses der Wirbelviskosität ν_t und einer Schmidt-Zahl σ_ε formuliert.

Die Wirbelviskosität lässt sich nun wie folgt bestimmen [103]:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (5.17)$$

wobei $C_\mu \approx 0,09$ eine weitere eingeführte Konstante ist. Eine wesentliche Einschränkung des obigen Modells ist seine Limitierung auf den wandfernen Bereich der Strömung in dem die Voraussetzung eines isotropen Zustands der Turbulenz erfüllt ist. Im wandnahen Bereich müssen zusätzlich Wandfunktionen, die das Verhalten der wandnahen Strömung vollständig modellieren, eingesetzt werden, oder die zu modellierenden Gleichungen müssen um Dämpfungsfunktionen erweitert werden. Diese ermöglichen es das Strömungsgebiet bis in den Bereich der viskosen Unterschicht, also in Gebiete niedriger turbulenter Reynolds-Zahlen Re_t , vollständig aufzulösen:

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (5.18)$$

Die Dämpfungsfunktion f_μ gewährleistet bei Verwendung der Wirbelviskosität ν_t ein korrektes asymptotisches Verhalten der turbulenten Scherspannungen $\overline{u'v'}$ proportional zur dritten Potenz²² des wandnormalen Abstandes d^3 . Weitere Dämpfungsfunktionen f_1 bzw. f_2 sind zusätzlich für die Modellierung der Transportgleichung der Dissipationsrate ε erforderlich.

In der Literatur existieren unterschiedliche Weiterentwicklungen des Modells von Jones & Launder [130]. Da die Dissipationsrate ε an der Wand einen endlichen, meist unbekanntem Wert annimmt, kann die Transportgleichung einer transformierten Variable $\tilde{\varepsilon}$ gelöst werden, die über folgenden Zusammenhang abgeleitet werden kann:

$$\varepsilon = \tilde{\varepsilon} + 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x_j} \right)^2 \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon = \tilde{\varepsilon} + 2\nu \frac{k}{d^2}. \quad (5.19)$$

Diese nimmt unmittelbar an der Wand den Wert $\tilde{\varepsilon} = 0$ an. Bekannte Modelle auf Basis der transformierten Dissipationsrate $\tilde{\varepsilon}$ sind z.B. den Arbeiten von Launder & Sharma [133] oder Chien [134] zu entnehmen. Weitere Alternativen sind Modelle die auf einer Transportgleichung einer turbulenten „Frequenz“ ω basieren, die z.B. umfangreich in den Arbeiten von Wilcox [103,131] er-

²²Dies kann mit Hilfe einer einfachen Taylor-Reihenentwicklung gezeigt werden, auf die in nachfolgenden Kapiteln ausführlicher eingegangen wird.

läutert wird. Menter [135,136] formuliert in seiner Arbeit eine Übergangsfunktion zwischen einer $k - \varepsilon$ - und $k - \omega$ -Formulierung des Gleichungssystems. Diese ermöglicht es die wesentlichen Nachteile beider Modellvarianten, die bei der Verwendung der ε -Formulierung bis in die viskose Unterschicht sowie durch die Sensitivität der ω -Formulierung zu den Bedingungen der ungestörten Zuströmung [103] gegeben sind, zu umgehen. Die Überführung von Gl. (5.16) in eine ω -Formulierung ist Ursache für das Auftreten von sogenannten Kreuz-Korrelationstermen, die speziell im wandnahen Bereich der Strömung eine zusätzliche Verfeinerung der Diskretisierung erfordern [103]. Dieses Modell wird auch als $k-\omega$ -SST-Modell²³ bezeichnet und ist erfolgreich für die Berechnung einer Vielzahl von turbulenten Strömungen eingesetzt worden. Für eine umfangreiche Erläuterung der Gleichungen und Koeffizienten sei an dieser Stelle an die Arbeit von Menter [135,136] oder Wilcox [103] verwiesen.

5.3.2. Erweiterte Wirbelviskositätsmodelle

Trotz ihres erfolgreichen Einsatzes zur Berechnung verschiedenster Strömungstypen weisen Zweigleichungsmodelle auch Nachteile auf. Einer der wesentlichsten Defizite dieser Modellkategorie basiert in der linearen Abhängigkeit der turbulenten Reynolds-Spannungen von der Deformationsrate (vgl. Gl. (2.8)) gemäß der Boussinesq-Hypothese (vgl. Gl. (5.13)). Bedingt durch den isotropen Charakter der Wirbelviskosität als Proportionalitätsparameter dieser Hypothese kann die Anisotropie der turbulenten Reynolds-Spannungen nicht wiedergegeben werden. Komplexe Strömungsphänomene, wie z.B. Sekundärströmungen der zweiten Art nach Prandtl, können aus diesem Grund unter Verwendung von Zweigleichungsmodellen nicht berechnet werden. Eine Erläuterung weiterer Nachteile kann der Arbeit von Hanjalić [123] entnommen werden.

Um die wesentlichen Nachteile linearer Zweigleichungsmodelle zu eliminieren, sind erweiterte Wirbelviskositätsmodelle entwickelt worden. Unter diese Kategorie fallen alle Zweigleichungsmodelle in denen die Boussinesq-Hypothese der turbulenten Reynolds-Spannungen um einen nicht-linearen Term erweitert ist [124]. Dieser wird üblicherweise unter Verwendung eines turbulenten Zeitmaßes τ sowie Tensorprodukten des symmetrischen Tensors der Deformationsrate S_{ij} und des asymmetrischen Tensors der Vortizitätsrate Ω_{ij} formuliert:

$$\tau_{ij} = \tau_{ij} \left(S_{kl}, \Omega_{kl}, \tau = \left(\frac{k}{\varepsilon} \right) \right). \quad (5.20)$$

Man unterteilt die erweiterten Wirbelviskositätsmodelle in die Gruppe der nichtlinearen Modelle (NEVM) sowie die Gruppe der impliziten und expliziten algebraischen Reynolds-Spannungsmodelle (ASM). Die nichtlinearen Terme können durch Vereinfachung der Transportgleichung des spurlosen Anisotropietensors der Reynolds-Spannungen $a_{ij} = \overline{u'_i u'_j} / k - (2/3) \delta_{ij}$, z.B. durch Annahme eines lokalen Gleichgewichts zwischen Produktion und Dissipation, abgeleitet werden.

²³eng.: SST - Shear Stress Transport

5. Schließungsansätze der Impulserhaltungsgleichungen

Ein Ansatz zur Bestimmung des Anisotropietensors a_{ij} kann mit Hilfe von Projektionen auf die linear unabhängigen Tensoren T_{ij}^n ($n = 1, \dots, N$) formuliert werden [124]:

$$a_{ij} = \sum_{n=1}^N \beta_n T_{ij}^n, \quad (5.21)$$

wobei β_n die zu bestimmenden Koeffizienten darstellen. Neben der Abhängigkeit von einem turbulenten Zeit-, Geschwindigkeits- oder Längenmaß ist bei der Modellierung der Reynolds-Spannungen auch die Abhängigkeit zu den Geschwindigkeitsgradienten und somit der Deformations- und Vortizitätsrate (vgl. Gl. (5.20)) zu berücksichtigen. Aus diesem Grund werden üblicherweise auch die linear unabhängigen Tensoren T_{ij} unter Verwendung der normierten bzw. dimensionslosen Form von S_{ij}^* bzw. Ω_{ij}^* formuliert [124]:

$$S_{ij}^* = \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{bzw.} \quad \Omega_{ij}^* = \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (5.22)$$

Nach Wallin & Johansson [137] ist eine explizite, allgemeine Darstellung des Anisotropietensors für dreidimensionale Strömungen durch:

$$a_{ij}^{(exp)} = \beta_1 T_{1,ij} + \beta_2 T_{2,ij} + \beta_3 T_{3,ij} + \beta_4 T_{4,ij} + \beta_5 T_{5,ij} \quad (5.23)$$

$$+ \beta_6 T_{6,ij} + \beta_7 T_{7,ij} + \beta_8 T_{8,ij} + \beta_9 T_{9,ij}, \quad (5.24)$$

gegeben, wobei die linear unabhängigen Tensoren T_{ij}^n mit Hilfe des Cayley-Hamilton-Theorems²⁴ wie folgt formuliert werden können:

$$T_{1,ij} = S_{ij}^*, \quad T_{2,ij} = S_{ik}^* S_{kj}^* - \frac{1}{3} II_S \delta_{ij}, \quad T_{3,ij} = \Omega_{ik}^* \Omega_{kj}^* - \frac{1}{3} II_\Omega \delta_{ij}, \quad (5.25)$$

$$T_{4,ij} = S_{ik}^* \Omega_{kj}^* - \Omega_{ik}^* S_{kj}^*, \quad T_{5,ij} = S_{ik}^* S_{kl}^* \Omega_{lj}^* - \Omega_{ik}^* S_{kl}^* S_{lj}^*, \quad (5.26)$$

$$T_{6,ij} = S_{ik}^* \Omega_{kl}^* \Omega_{lj}^* + \Omega_{ik}^* \Omega_{kl}^* S_{lj}^* - \frac{2}{3} IV \delta_{ij}, \quad (5.27)$$

$$T_{7,ij} = S_{ik}^* S_{kl}^* \Omega_{lm}^* \Omega_{mj}^* + \Omega_{ik}^* \Omega_{kl}^* S_{lm}^* S_{mj}^* - \frac{2}{3} V \delta_{ij}, \quad (5.28)$$

$$T_{8,ij} = S_{ik}^* \Omega_{kl}^* S_{lm}^* S_{mj}^* - S_{ik}^* S_{kl}^* \Omega_{lm}^* S_{mj}^*, \quad (5.29)$$

$$T_{9,ij} = \Omega_{ik}^* S_{kl}^* \Omega_{lm}^* \Omega_{mj}^* - \Omega_{ik}^* \Omega_{kl}^* S_{lm}^* \Omega_{mj}^*, \quad (5.30)$$

$$T_{10,ij} = \Omega_{ik}^* S_{kl}^* S_{lm}^* \Omega_{mn}^* \Omega_{nj}^* - \Omega_{ik}^* \Omega_{kl}^* S_{lm}^* S_{mn}^* \Omega_{nj}^*. \quad (5.31)$$

Die Invarianten der dimensionslosen Deformations- bzw. Vortizitätsrate S_{ij}^* und Ω_{ij}^* werden wie folgt bestimmt:

²⁴Dieses besagt, dass ein Polynom durch eine endliche Anzahl linear unabhängiger Invarianten und Tensoren ausgedrückt werden kann [137].

$$II_S = S_{ij}^* S_{ji}^*, \quad II_\Omega = \Omega_{ij}^* \Omega_{ji}^*, \quad IV = S_{ik}^* \Omega_{kj}^* \Omega_{ji}^*, \quad V = S_{ik}^* S_{kl}^* \Omega_{lm}^* \Omega_{mi}^*. \quad (5.32)$$

Die Koeffizienten $\beta_{(n)}$ (vgl. Gl. (5.24)) können nun als Funktionen der Invarianten und charakteristischer Zeitskalen formuliert werden [124,137]. Der erste Term $T_{1,ij}$ entspricht dem üblichen linearen Term, wohingegen alle Terme $T_{n,ij}$ mit $n \geq 2$ nichtlineare Quellterme und somit Erweiterungen des linearen Ansatzes entsprechen.

Basierend auf Gl. (5.24) kann nun eine Einteilung in nichtlineare Wirbelviskositätsmodelle (NEVM) und explizit algebraische Reynolds-Spannungsmodelle (EARSM) erfolgen. Zur Herleitung des erstgenannten Modelltyps werden die Koeffizienten $\beta_{(n)}$ üblicherweise aus empirischen Überlegungen abgeleitet oder für spezielle Strömungstypen unter Verwendung experimenteller Daten entsprechend kalibriert. Im Gegensatz hierzu werden die Koeffizienten des explizit algebraischen Reynolds-Spannungsmodell unmittelbar aus der reduzierten Transportgleichung des Anisotropietensors abgeleitet. Dies erfordert spezielle Lösungsverfahren, die ausführlich in den Arbeiten von Gatski & Jongen [124], Wallin & Johansson [137] oder Hellsten [77,78] beschrieben werden.

Der durch Wallin & Johansson [137] erläuterte Ansatz lässt sich mit einem beliebigen linearen Zweigleichungsmodell kombinieren und sieht darüber hinaus auch den Einsatz von Dämpfungsfunktionen für den wandnahen Bereich der Strömung vor. Eine dreidimensionale Formulierung des Ansatzes für den Anisotropietensor wurde mit verschiedenen linearen Wirbelviskositätsmodellen kombiniert. Es zeigt sich jedoch für komplexe Strömungen z.B. einer turbulenten Strömung in einem Rechteckkanal, dass dies zu Instabilitäten im Bereich der Ecken führt. Dies mag einer der wesentlichen Gründe sein, warum Hellsten [77,78] und Menter et al. [138] auf den Einsatz der zusätzlichen Dämpfungsfunktionen verzichten.

Speziell in auftriebsbehafteten Strömungen sind für solche Modellansätze geeignete Erweiterungen erforderlich. Dies stellt im Fall von explizit algebraischen Reynolds-Spannungsmodellen einen nicht unerheblichen Mehraufwand dar, da im Rahmen ihrer Herleitung auch Auftriebseffekte und somit die turbulenten Wärmeflüsse berücksichtigt werden müssen. Spezialisierte Modellentwicklungen, die sich dieser Problematik annehmen sind z.B. durch die kürzlich veröffentlichten Arbeiten von Vanpouille [139] oder Lazeroms et al. [140] gegeben. Im Rahmen dieser Arbeit wurden Modelle dieser beiden Kategorien mit dem Ziel eines Vergleichs der Leistungsfähigkeit verschiedener Schließungsansätze für unterschiedliche Strömungstypen eingesetzt. Besonders hervorzuheben seien in diesem Kontext das nichtlineare Wirbelviskositätsmodell von Myong & Kasagi [141], sowie die explizit algebraischen Modelle von Hellsten [77,78] und Menter et al. [138], die in das freie Softwarepaket OpenFOAM[®] [142] implementiert und für eine Rechteckkanalströmung miteinander verglichen (vgl. Anhang A.4.3) wurden.

5.3.3. Reynolds-Spannungsmodelle

Reynolds-Spannungsmodelle (RSM) stellen die höchste Stufe der Modellierung des turbulenten Reynolds-Spannungstensors dar. Für jede Komponente des Tensors $\overline{u'_i u'_j}$ muss eine eigene Transportgleichung formuliert und gelöst werden. Die jeweilige Dissipation der einzelnen Komponenten ε_{ij} wird üblicherweise unter Verwendung einer zusätzlichen Transportgleichung der Dissipationsrate ε modelliert. Ein wesentlicher Vorteil von Schließungsansätzen zweiter Ordnung ist die Berücksichtigung einer exakten Produktionsrate der turbulenten Reynolds-Spannungen. Effekte, wie z.B. der Einfluss des Schwerefeldes auf die Produktion G_{ij} oder die Anisotropie der Komponenten in Wandnähe, können für diesen Modelltyp mit vertretbarem Aufwand in die Transportgleichungen integriert werden.

Die wesentlichen Transportmechanismen der Transportgleichungen der Reynolds-Spannungen sind bereits in Kapitel 5.1 diskutiert worden. Speziell das von Dehoux [75] entwickelte Modell (im Folgenden als RSM-EBM bezeichnet) stellt für die vorliegende Arbeit ein wesentliches „Grundgerüst“ für die Modellierung der turbulenten Wärmeflüsse dar. Aus diesem Grund soll dieses Modell hinsichtlich seiner wesentlichen Merkmale und Eigenschaften im Folgenden kurz beschrieben werden. Für eine umfassende Beschreibung verschiedener Modellierungsansätze der einzelnen Transportmechanismen sei an dieser Stelle z.B. auf die Arbeit von Hanjalić [123] verwiesen.

Einer der wesentlichen Wirkmechanismen ist der Korrelationsterm zwischen Geschwindigkeits- und Druckfluktuationen Π_{ij} . Dieser lässt sich als Summe der Druckdilatation ϕ_{ij} und der Druckdiffusion D_{ij}^p formulieren (vgl. Gl. (5.4) bzw. (5.5)). Die wesentliche Eigenschaft des Druckdilatationstensors ist, dass die Summe seiner Diagonalelemente bzw. seine Spur den Wert Null annimmt. Es kann demnach gefolgert werden, dass sein Wirken ausschließlich auf eine Verteilung der Energie zwischen den Komponenten des Reynolds-Spannungstensors beschränkt ist. Der Druckdiffusionstensor D_{ij}^p hingegen beschreibt einen rein diffusiven Mechanismus, so dass er meist mit der turbulenten Diffusion D_{ij}^t zusammengefasst wird.

Durch eine Analyse der Poisson-Gleichung der Druckfluktuationen p' lässt sich schlussfolgern, dass diese in drei unterschiedliche Terme aufgeteilt werden können [75]:

$$p' = p^{(1)} + p^{(2)} + p^{(3)}. \quad (5.33)$$

Der erste Term $p^{(1)}$ wird im Gegensatz zum zweiten, „schnellen“ Term $p^{(2)}$ auch als „langsamer“ Term bezeichnet, da er nicht von der gemittelten Geschwindigkeit abhängt. Der dritte Term $p^{(3)}$ dient der Berücksichtigung der Einwirkung äußerer Kräfte, wie z.B. infolge des Schwerefeldes [75,123]. Für jeden Term lässt sich nun eine separate Poisson-Gleichung formulieren:

$$\frac{\partial^2 p^{(1)}}{\partial x_j^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(u'_i u'_j - \overline{u'_i u'_j} \right), \quad (5.34)$$

$$\frac{\partial^2 p^{(1)}}{\partial x_j^2} = -2 \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}, \quad (5.35)$$

$$\frac{\partial^2 p^{(3)}}{\partial x_j^2} = -\beta g_i \frac{\partial \theta'}{\partial x_i}, \quad (5.36)$$

Durch Multiplikation mit $\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)$ und unter Berücksichtigung der Green'schen Funktion ergibt sich mit $\underline{r} = \underline{x}' - \underline{x}$ folgender Ausdruck des Dilatationstensors für den Bereich der Kernströmung ϕ_{ij}^h :

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^h &= \frac{1}{4\pi} \int_V \overline{\nabla^2 p' \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right)} \frac{dV(\underline{x}')}{\|\underline{r}\|} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_V \underbrace{\frac{\partial^2 u'_k u'_l}{\partial x_k \partial x_l}(\underline{x}') \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}(\underline{x}) + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}(\underline{x}) \right)}_{\phi_{ij}^{(1)}} \frac{dV(\underline{x}')}{\|\underline{r}\|} \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_V \underbrace{2 \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_l}(\underline{x}') \frac{\partial u'_l}{\partial x_k}(\underline{x}') \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}(\underline{x}) + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}(\underline{x}) \right)}_{\phi_{ij}^{(2)}} \frac{dV(\underline{x}')}{\|\underline{r}\|} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_V \underbrace{\beta g_l \frac{\partial \theta'}{\partial x_l}(\underline{x}') \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j}(\underline{x}) + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}(\underline{x}) \right)}_{\phi_{ij}^{(3)}} \frac{dV(\underline{x}')}{\|\underline{r}\|}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Der Druckdilatationsterm ϕ_{ij}^h im wandfernen Bereich der Strömung ergibt sich in symbolischer Notation somit aus der Summe der folgenden Einzelterme:

$$\phi_{ij}^h = \phi_{ij}^{(1)} + \phi_{ij}^{(2)} + \phi_{ij}^{(3)}. \quad (5.38)$$

Jeder Einzelterm repräsentiert unterschiedliche physikalische Wirkmechanismen [75]. Der erste Term $\phi_{ij}^{(1)}$ beschreibt die Rückkehr der anisotropen Turbulenz zu einem isotropen Zustand. Der zweite und dritte Term berücksichtigen den Prozess der Rückkehr zu einer isotropen Produktion der gemittelten Geschwindigkeit bzw. die Einwirkung durch äußere Kräfte [123].

Diese Terme müssen jeweils unter Berücksichtigung ihrer individuellen Einflüsse, z.B. infolge lokaler Verhältnisse der Turbulenz, separat modelliert werden. Der langsame Anteil $\phi_{ij}^{(1)}$ soll die Turbulenz in einen isotropen Zustand durch Umverteilung der Energie zwischen den Komponenten überführen. Aus diesem Grund wird er üblicherweise unter Verwendung des Anisotropietensors a_{ij} oder seiner Invarianten $A_2 = a_{ik}a_{ki}$ bzw. $A_3 = a_{ik}a_{kj}a_{ji}$ modelliert [123]. Ein allgemeingültiges

nichtlineares Modell ist unter Verwendung des Cayley-Hamilton-Theorems durch Lumley [143] formuliert worden:

$$\phi_{ij}^{(1)} = -C_1 \varepsilon a_{ij} + C'_1 \varepsilon \left(a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} A_2 \delta_{ij} \right). \quad (5.39)$$

Speziale et al. [144] stellten fest, dass ein im Vergleich zum Koeffizienten $C_1 = 1,7$ negativer Wert des zweiten Koeffizienten $C'_1 = -1,05$ für den wandfernen Bereich der Strömung mitunter die besten Ergebnisse liefert. In einer Vielzahl von vorgeschlagenen Schließungsansätzen wird der zweite Term meist vernachlässigt. Dies entspricht dem ursprünglichen linearen Ansatz nach Rotta [145]. Lumley [143] konnte analytisch nachweisen, dass für das lineare Modell der Koeffizient C_1 nicht als Konstante gewählt werden kann, sondern vielmehr als Funktion der Invarianten A_2 bzw. A_3 zu formulieren ist.

Der „schnelle“ Term $\phi_{ij}^{(2)}$ wird üblicherweise unter Annahme einer nahezu homogenen gemittelten Geschwindigkeit mit Hilfe eines Tensors vierter Ordnung A_{ijkl} gebildet [123]:

$$\phi_{ij}^{(2)} = (A_{ijkl} + A_{jikl}) \frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_k}. \quad (5.40)$$

Tensoren vierter Ordnung können durch lineare Terme oder Terme höherer Ordnung des Anisotropietensors a_{ij} modelliert werden. Speziale et al. [144] (SSG) schlagen hierfür einen Ausdruck in Abhängigkeit der Deformations- und Vortizitätsrate S_{ij} bzw. Ω_{ij} vor:

$$\phi_{ij,SSG}^{(2)} = C'_2 P_k a_{ij} + (C_3 - C'_3 \sqrt{a_{kl} a_{kl}}) k S_{ij} + C_4 k \left(a_{ik} S_{jk} + a_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} a_{kl} S_{kl} \delta_{ij} \right) \quad (5.41)$$

$$+ C_5 k (a_{ik} \Omega_{jk} + a_{jk} \Omega_{ik}). \quad (5.42)$$

wobei die Koeffizienten C'_2, C_3, C'_3, C_4 und C_5 als Konstanten formuliert sind.

Der dritte Term $\phi_{ij}^{(3)}$ beschreibt den Einfluss der Auftriebswirkung in der Modellierung des Dilatationstensors. Nach Hanjalić & Launder [71] wird dieser Term unter Verwendung der auftriebsbedingten Produktion G_{ij} bestimmt zu:

$$\phi_{ij}^{(3)} = -C_6 \left(G_{ij} - \frac{1}{3} G_{kk} \delta_{ij} \right), \quad (5.43)$$

wobei für den Koeffizienten C_6 üblicherweise ein Wert von $0,5 - 0,66$ angenommen wird.

Da im Rahmen dieser Arbeit auch der anisotrope, wandnahe Bereich der Strömung untersucht werden soll, muss auch dieser Einfluss in der Modellierung für den Dilatationstensor diskutiert werden. Der vollständige Tensor ergibt sich als Summe des homogenen Modellansatzes ϕ_{ij}^h und eines Ansatzes in Wandnähe ϕ_{ij}^w :

$$\phi_{ij} = \phi_{ij}^h + \phi_{ij}^w. \quad (5.44)$$

Bisher diskutierte Ansätze sind rein auf den wandfernen Bereich der Strömung limitiert. Für Innenströmungen in Platten- oder Rechteckkanälen ist es jedoch erforderlich auch den wandnahen Bereich der Strömung „aufzulösen“²⁵. Erste Modellierungsansätze beschränkten sich auf die Berücksichtigung des sogenannten Echo-Effektes an der festen Wand, bei dem die wandnormale Normalspannungskomponente der Reynolds-Spannungen stark gedämpft wird und ihr Energieanteil in die anderen Komponenten überführt wird [123]. Eine Vielzahl von Modellierungsansätzen beruht auf der Verwendung des wandnormalen Abstandes d oder Funktionen in Abhängigkeit von einer lokalen Reynolds-Zahl. Dies ist speziell für Strömungen in komplexen Geometrien fragwürdig [123].

Ein alternativer Modellansatz ist in den Arbeiten von Durbin [76,104], Manceau & Hanjalić [146] oder Dehoux [75] beschrieben. Hierbei gehen diese Autoren nicht von einer Modellierung des Dilatationstensors ϕ_{ij} aus, sondern von einer Modellierung des vollständigen Geschwindigkeits-Druckgradienten-Korrelationsterms Π_{ij} (vgl. Gl. (5.5)). Die Grundlage ihrer Methode ist eine elliptische Relaxation²⁶ [76] bzw. eine elliptischen Übergangsfunktion²⁷ [75,147]. Eine integrale Lösung der Poisson-Gleichung der Druckfluktuationen kann wie folgt angegeben werden [146]:

$$\Pi_{ij} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \overline{u'_i(\underline{x}) \nabla^2 \frac{\partial p'}{\partial x_j}(\underline{x}') + u'_j(\underline{x}) \nabla^2 \frac{\partial p'}{\partial x_i}(\underline{x}')} \frac{dV(\underline{x}')}{\|\underline{x}' - \underline{x}\|}. \quad (5.45)$$

Der Ansatz von Durbin [76,104] basiert auf der Annahme, dass eine Korrelation zwischen zwei verschiedenen Punkten $r = \|\underline{x}' - \underline{x}\|$ exponentiell abfällt [75]:

$$\overline{u'_i(\underline{x}) \nabla^2 \frac{\partial p'}{\partial x_j}(\underline{x}') + u'_j(\underline{x}) \nabla^2 \frac{\partial p'}{\partial x_i}(\underline{x}')} = \overline{u'_i(\underline{x}') \nabla^2 \frac{\partial p'}{\partial x_j}(\underline{x}') + u'_j(\underline{x}') \nabla^2 \frac{\partial p'}{\partial x_i}(\underline{x}')} \exp\left(-\frac{r}{L}\right), \quad (5.46)$$

wobei die Größe L ein charakteristisches Längenmaß für die betrachtete Korrelation zwischen den zwei verschiedenen Punkten ist. Dieser Ansatz kann nun in Gl. (5.45) eingesetzt werden. Die Green'sche Funktion kann nach Durbin [76] unmittelbar in Bezug zum elliptischen Operator $(-\nabla^2 + 1/L^2)$ gesetzt werden. Es ergibt sich demnach zur Bestimmung des Geschwindigkeits-Druckgradienten-Korrelationsterms [146]:

$$\Pi_{ij} - L^2 \nabla^2 \Pi_{ij} = -\frac{L^2}{\rho} \overline{u'_i(\underline{x}) \nabla^2 \frac{\partial p'}{\partial x_j}(\underline{x}) + u'_j(\underline{x}) \nabla^2 \frac{\partial p'}{\partial x_i}(\underline{x})}. \quad (5.47)$$

Im isotropen Bereich der Strömung verschwindet der zweite Term der linken Seite und der Quellterm kann durch ein beliebiges homogenes Modell ϕ_{ij}^h ersetzt werden. Der Einsatz dieser Form des Dilatationsterms vernachlässigt nach Manceau [148] nicht die Berücksichtigung des Druckdif-

²⁵ „Auflösen“ bezeichnet die Integration der Erhaltung- und Transportgleichungen bis unmittelbar an die Wand.

²⁶ eng.: elliptic relaxation

²⁷ eng.: elliptic blending

fusionsterms D_{ij}^p . Dieser ist implizit in der Formulierung des Tensors Π_{ij} im wandnahen Bereich enthalten, vorausgesetzt die Randbedingungen entsprechen einem geeigneten asymptotischen Verhalten. Die Längenskala wird hierbei wie folgt bestimmt [146]:

$$L = C_L \max \left(\frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, C_\eta \frac{v^{3/4}}{\varepsilon^{1/4}} \right), \quad (5.48)$$

mit Werten für die Koeffizienten $C_L = 0,125$ und $C_\eta = 80$.

Nach Manceau [146] wird durch den Einsatz einer differentiellen elliptischen Gleichung der nicht-lokale Charakter des Redistributionsterms Π_{ij} gewahrt. Dies involviert auch unmittelbar den Dämpfungseffekt der wandnormalen Normalspannungskomponente ($\overline{u'u'} \sim y^2$ aber $\overline{v'v'} \sim y^4$) unter der Voraussetzung, dass geeignete Randbedingungen definiert werden. Durbin [76] schlägt aus diesem Grund eine Modifikation der Gl. (5.47) vor und führt den Tensor $f_{ij} = \xi_{ij}/k$ ein:

$$f_{ij} - L^2 \nabla^2 f_{ij} = f_{ij}^h, \quad (5.49)$$

wobei der Tensor ξ_{ij} nach Durbin [76] wie folgt definiert ist:

$$\xi_{ij} = -\frac{1}{\rho} \overline{u'_i \partial_j p'} - \frac{1}{\rho} \overline{u'_j \partial_i p'} + \frac{2}{3\rho} \delta_{ij} \partial_k \overline{u'_k p'} - \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} + \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} \varepsilon. \quad (5.50)$$

Für die anisotrope Dissipationsrate im wandnahen Bereich verwendet Durbin [76] in den Transportgleichungen der Reynolds-Spannungen das Modell von Rotta [145]. Diese Erweiterung berücksichtigt er ebenfalls als letzten Term des Redistributionsterms (vgl. Gl. (5.50)). Dies erfordert die Vorgabe einer Randbedingung für jede der sechs Komponenten des symmetrischen Tensors f_{ij} , wobei Durbin [76] sich in seiner Veröffentlichung ausschließlich auf die Analyse einer zweidimensionalen Strömungskonfiguration beschränkt. In Summe müssen demnach zusätzlich zu den Erhaltungsgleichungen ein System von mindestens 13 partiellen Differentialgleichungen²⁸ gelöst werden. Dies stellt einen erheblichen numerischen Mehraufwand dar. Ein weiterer wesentlicher Nachteil der Methode der elliptischen Relaxation ist die gesteigerte Empfindlichkeit des Gleichungssystems auf marginale Änderungen von Einzelgrößen, die zu numerischen Instabilitäten führen können [75,148].

Um einige der Nachteile der Methode der elliptischen Relaxation (ERM) zu umgehen, entwickelten Manceau & Hanjalić [146] eine elliptische Übergangsfunktion (EBM) unter Verwendung eines skalaren Parameters α :

$$\alpha - L^2 \nabla^2 \alpha = 1. \quad (5.51)$$

²⁸Anmerkung: Sechs Gleichungen für den Reynolds-Spannungstensor, eine Gleichung für die Dissipation sowie sechs weitere Gleichungen zur Bestimmung des Geschwindigkeits-Druckgradienten-Korrelationsterms

Die wesentliche Idee ihrer Arbeit basiert auf der Verwendung ausschließlich einer einzigen elliptischen Gleichung um die Effekte und Einflüsse des wandnahen Strömungsbereichs im Redistributionsterm zu berücksichtigen [146–148]. Im Gegensatz zur ERM kann eine einfache Randbedingung unmittelbar an der Wand definiert werden $\alpha|_w = 0$. Für die Längenskala wird ebenfalls die nach Durbin [76] vorgeschlagene Formulierung (vgl. Gl. (5.48)) verwendet.

Im Rahmen dieser Arbeit wird hauptsächlich eine durch Dehoux [75] erweiterte Variante des Modells verwendet. Diese soll nachfolgend kurz in ihren elementaren Gleichungen und Definitionen erläutert werden. Die vollständige Gleichung der turbulenten Reynolds-Spannungen in symbolischer Notation kann wie folgt angegeben werden:

$$\frac{D\overline{u'_i u'_j}}{Dt} = P_{ij} + G_{ij} + D_{ij}^v + D_{ij}^t + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij}. \quad (5.52)$$

Die turbulente Diffusion wird gemäß des Modellvorschlags nach Daly & Harlow [68] über einen Gradientenansatz (GGDH²⁹) formuliert:

$$D_{ij}^t = -C_S \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\tau \overline{u'_k u'_m} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_m} \right). \quad (5.53)$$

wobei der Wert des Koeffizient $C_S = 0,21$ gesetzt wird. Die turbulente Zeitskala τ ergibt sich analog zur Formulierung des Längenmaßes L wie folgt:

$$\tau = \max \left(\frac{k}{\varepsilon}, 6\sqrt{\frac{v}{\varepsilon}} \right). \quad (5.54)$$

Der Redistributionsterm Π_{ij} wird mit Hilfe des elliptischen Übergangsparmeters α als Funktion eines wandnahen Modells ϕ_{ij}^w und eines Modells für den homogenen, wandfernen Bereich der Strömung ϕ_{ij}^h definiert [75]:

$$\Pi_{ij} = (1 - \alpha^3) \phi_{ij}^w + \alpha^3 \phi_{ij}^h, \quad (5.55)$$

wobei das Modell für den wandnahen Bereich wie folgt formuliert werden kann [75,147]:

$$\phi_{ij}^w = -5 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u'_i u'_k} n_j n_k + \overline{u'_j u'_k} n_i n_k - \frac{1}{2} \overline{u'_k u'_l} n_k n_l (n_i n_j + \delta_{ij}) \right). \quad (5.56)$$

Der Vektor n_i repräsentiert den normierten wandnormalen Vektor und wird mit Hilfe des Übergangsparmeters α bestimmt:

$$n_i = \frac{\nabla \alpha}{\|\nabla \alpha\|}. \quad (5.57)$$

²⁹GGDH: eng. Generalized Gradient Diffusion Hypothesis

Dies ist für komplexe Geometrien vorteilhaft, da diese Formulierung einen kontinuierlichen Übergang des wandnormalen Vektors, wie z.B. in den Eckbereichen eines Rechteckkanals, zulässt.

Das Modell im wandfernen Bereich der Strömung ϕ_{ij}^h basiert in seinen Grundzügen auf dem Modellierungsansatz von Speziale et al. [144] und ist wie folgt formuliert [75]:

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^h = & - (C_1 \varepsilon - C_2' P_k) a_{ij} + (C_3 - C_3' \sqrt{a_{kl} a_{kl}}) k S_{ij} + C_4 k \left(a_{ik} S_{jk} + a_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} a_{kl} S_{kl} \delta_{ij} \right) \\ & + C_5 k (a_{ik} \Omega_{jk} + a_{jk} \Omega_{ik}) + C_6 \left(G_{ij} - \frac{2}{3} G_k \delta_{ij} \right). \end{aligned} \quad (5.58)$$

Die gewählten Koeffizienten des homogenen Modells sind nachfolgend aufgeführt [75]:

$$C_1 = 1,7; C_2' = 0,9; C_3 = 0,8; C_3' = 0,65; C_4 = 0,625; C_5 = 0,2 \text{ und } C_6 = 0,5. \quad (5.59)$$

Die anisotrope Dissipation ε_{ij} kann gemäß der Überlegungen von Durbin [76] bzw. Manceau [147,148] ebenfalls unter Verwendung der Übergangsfunktion α definiert werden:

$$\varepsilon_{ij} = (1 - \alpha^3) \varepsilon_{ij}^w + \alpha^3 \varepsilon_{ij}^h, \quad (5.60)$$

Hierbei basiert die Formulierung des Modells für den wandnahen Bereich ε_{ij}^w auf dem klassischen Modell von Rotta [145] sowie im homogenen Bereich ε_{ij}^h auf einem isotropen Ansatz:

$$\varepsilon_{ij}^w = \frac{\overline{u_i' u_j'}}{k} \varepsilon, \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_{ij}^h = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij}. \quad (5.61)$$

Für die Modellierung der Transportgleichung der isotropen Dissipationsrate ε schlägt Durbin [76,104] die Verwendung der turbulenten Zeitskala τ (vgl. Gl. (5.54)) vor. Dies ermöglicht es ohne zusätzliche Dämpfungsfunktionen die Gleichung bis in unmittelbare Wandnähe zu integrieren. Die resultierende Transportgleichung kann nun wie folgt angegeben werden [75]:

$$\begin{aligned} \frac{D\varepsilon}{Dt} = & \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_S^\varepsilon \tau \overline{u_k' u_m'} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_m} \right) + C_{\varepsilon 1} \left(1 + A_1^P (1 - \alpha^3) \frac{P_k}{\varepsilon} \right) \frac{P_k}{\tau} \\ & - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon}{\tau} + C_{\varepsilon 3} \frac{\sqrt{Pr} G_k}{\sqrt{R} \tau} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right), \end{aligned} \quad (5.62)$$

wobei für die Koeffizienten die Werte $C_S^\varepsilon \approx 0,183$, $C_{\varepsilon 1} = 1,44$, $C_{\varepsilon 2} = 1,83$, $C_{\varepsilon 3} = 2,02$, $\sigma_\varepsilon = 1,1$ und $A_1^P = 0,1$ angegeben sind. Der zum Koeffizienten $C_{\varepsilon 3}$ zugehörige Term stellt eine Erweiterung des ursprünglichen Modells von Manceau [147] für auftriebsbehaftete Strömungen nach Dehoux [75] dar. Die Größe R beschreibt das sogenannte Zeitskalenverhältnis zwischen einer hydraulischen und einer thermischen Zeitskala und wird ausführlich im nächsten Kapitel 6 behandelt.

5.3.4. Anisotropie der Turbulenz in Wandnähe

Im Rahmen der Reynolds-gemittelten Impulsgleichungen ist für eine turbulente, vollständig entwickelte Plattenkanalströmung mit Blick auf das Schließungsproblem einzig allein die primäre Scherspannung $\overline{u'v'}$ des Reynolds-Spannungstensors von Interesse. Die wesentliche Aufgabe des Turbulenzmodells ist es demnach eine möglichst genaue Beschreibung dieser Komponenten auf Basis einer turbulenten Wirbelviskosität. Eine Vielzahl von Schließungsansätzen basiert auf der Verwendung einer Transportgleichung der turbulenten kinetischen Energie $k = \frac{1}{2}\overline{u'_i u'_i}$ und deren isotroper Dissipationsrate ε . Der Energietransfer zwischen den einzelnen Normalspannungskomponenten des Reynolds-Spannungstensor speziell in Wandnähe geht als Information bei der Verwendung linearer Wirbelviskositätsmodelle verloren, da der Dilatationstensor ϕ_{ij} (vgl. Gl. (5.5)), der den wesentlichen Mechanismus der Umverteilung der Energie beschreibt, spurfrei ist. Er kann demnach nicht in der Modellierung der Transportgleichung der turbulenten kinetischen Energie berücksichtigt werden.

Wie in Abb. 5.2 für eine turbulente Kanalströmung gezeigt wird, stellt die Komponente $\overline{u'^2}$ die größte der drei Normalspannungskomponenten des Reynolds-Spannungstensors dar. Deutlich zu erkennen ist das unterschiedliche asymptotische Verhalten der einzelnen Normalspannungen für kleiner werdende Wandabstände. Die Komponente $\overline{v'^2}$ wird stark in unmittelbarer Wandnähe gedämpft ($\overline{v'^2} \sim y^4$) und die Turbulenz geht in das Zwei-Komponenten-Limit über [149]. Eine möglichst exakte Reproduktion dieses Verhaltens stellt eine der wesentlichen Anforderungen an die Modellierung des Geschwindigkeits-Druck-Korrelationsterms und der Dissipation dar.

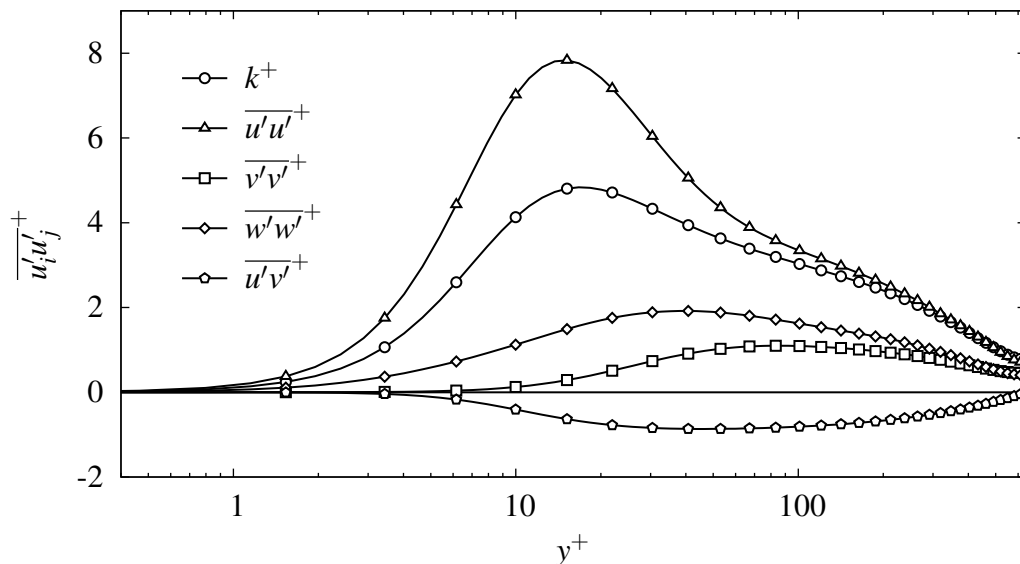


Abbildung 5.2.: Verlauf der normierten Reynolds-Spannungskomponenten $\overline{u'_i u'_j}^+$ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ auf Basis der DNS-Daten (nur jeder vierte Datenpunkt als Symbol) von Abe et al. [85,86] in einer turbulenten Plattenkanalströmung bei $Re_\tau = 640$.

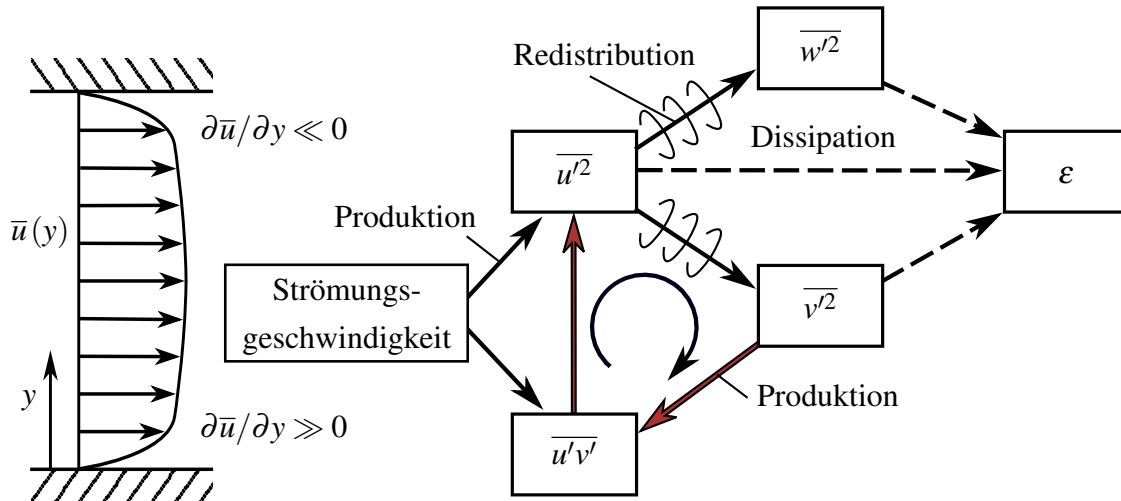


Abbildung 5.3.: Übersicht der wesentlichen Einflussgrößen auf die Produktion durch die Hauptströmung (schwarze Pfeile) und durch die Reynolds-Spannungen (rote Pfeile) sowie der wesentlichen Interaktionen der Reynolds-Spannungen am Beispiel einer turbulenten, vollständig entwickelten Plattenkanalströmung (Abbildung nach Hanjalić & Launder [71]).

Für eine vollständig entwickelte, turbulente Plattenkanalströmung³⁰ ist anhand einer Analyse der exakten Transportgleichung der turbulenten Reynolds-Spannungen (vgl. Gl. (5.2)) nachzuweisen, dass der Produktionsterm P_{ij} ausschließlich für die Komponente $\overline{u'^2}$ und $\overline{u'v'}$ Werte ungleich Null annimmt:

$$P_{ij} = - \left(\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_k} + \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} \right), \quad (5.63)$$

$$P_{11} = -2 \overline{u'v'} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \quad \text{bzw.} \quad P_{12} = -\overline{v'v'} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}. \quad (5.64)$$

Bei Analyse des Geschwindigkeitsprofils $\overline{u}(y)$ lässt sich feststellen, dass der Produktionsterm der Normalspannungskomponente $\overline{u'^2}$ stets positive Werte über die gesamte Kanalhöhe annimmt, wohingegen der Produktionsterm der Scherspannung $\overline{u'v'}$ analog zum Verlauf der Komponenten einen Vorzeichenwechsel in der Mitte des Kanals unterliegt³¹. Auch wenn die weiteren Normalspannungskomponenten $\overline{v'^2}$ und $\overline{w'^2}$ selbst keine unmittelbare Produktion aufweisen, erfahren sie infolge des Druckdilatationsterms ϕ_{ij} (vgl. Gl. (5.2)), der für eine Umverteilung der Energie zwischen den Normalspannungskomponenten [71] verantwortlich ist, einen Energieeintrag. Die Dissipation wirkt einem unkontrollierbaren Wachstum infolge der Produktion durch den primären Geschwindigkeitsgradienten entgegen. Eine Übersicht der wesentlichen Energieflüsse und Interaktionen der Reynolds-Spannungskomponenten sei in Abb. 5.3 dargestellt.

³⁰Es verschwinden alle partiellen Ableitungen in die homogenen Richtungen $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial z}$ sowie alle Terme mit den Geschwindigkeitskomponenten \overline{v} bzw. \overline{w} .

³¹Dieser Nachweis kann für beide Komponenten unter Berücksichtigung des Geschwindigkeitsgradienten sowie der Verläufe der Reynolds-Spannungen (vgl. Abb. 5.2) geführt werden.

6 Analyse und Bewertung von Schließungsansätzen der Energieerhaltungsgleichung

Der wesentliche Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der Analyse und Bewertung von existierenden Schließungsansätzen der Energieerhaltungsgleichung unter Berücksichtigung des Einflusses der molekularen Prandtl- bzw. Péclet-Zahl. In den letzten Jahrzehnten ist eine Vielzahl von unterschiedlichen Modellen zur Schließung der Impulserhaltungsgleichungen vorgeschlagen worden. Im Gegensatz hierzu stellen turbulente Wärmeflussmodelle zur Schließung der Energieerhaltungsgleichung speziell bei Berücksichtigung des Einflusses der molekularen Prandtl-Zahl oder des Schwerfeldes der Erde in der Literatur bzw. Forschung eher einen Randbereich der Turbulenzmodellierung dar. Im Vergleich zu herkömmlichen Turbulenzmodellen sind für eine umfassende Entwicklung und Validierung von turbulenten Wärmeflussmodellen nur in unzureichendem Maß experimentelle oder numerische Daten bei verschiedenen Reynolds- oder Prandtl-Zahlen, komplexen Geometrien oder unterschiedlichen Konvektionsarten verfügbar.

Bisher veröffentlichte Schließungsansätze lassen sich in verschiedene Kategorien unterteilen. Eine Vielzahl dieser Ansätze basiert auf der Modellierung einer turbulenten thermischen Diffusivität α_t . Man geht von der Annahme aus, dass sich turbulente Wärmeflüsse analog zur molekularen Wärmeleitung (vgl. Fourier'sche Wärmeleitung) verhalten und infolgedessen unter Verwendung einer isotropen skalaren Größe modelliert werden können. Dies entspricht einer erheblichen Vereinfachung, deren Auswirkung speziell unter Berücksichtigung von Auftriebseffekten für jeden Strömungstyp neu bewertet werden muss. Komplexere Ansätze erfordern die Lösung zusätzlicher partieller Differentialgleichungen, welche die exakte Produktion der turbulenten Wärmeflüsse berücksichtigen. Die Modellierung der restlichen Transportmechanismen stellt jedoch aufgrund des Mangels an Vergleichsdaten eine Herausforderung dar.

In diesem Kapitel werden turbulente Wärmeflussmodelle unterschiedlicher Komplexität analysiert und mit Hilfe von verfügbaren numerischen Datensätzen (DNS) hinsichtlich ihrer Eignung für Strömungen unterschiedlicher Prandtl-Zahl geprüft. Die vielversprechendsten Modelle werden selektiert und gegebenenfalls für den Einsatz in komplexen Geometrien angepasst.

6.1. Übersicht über die Modellierungsstufen der turbulenten Wärmeflüsse

Schließungsansätze für die Reynolds-gemittelte Energieerhaltungsgleichung lassen sich in isotrope und anisotrope Modelle unterteilen (vgl. Abb. 6.1). Darüber hinaus unterscheidet man Ansätze erster Ordnung z.B. Modelle auf Basis einer turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t , in denen ausschließlich turbulente Momente erster Ordnung verwendet werden, und Ansätzen zweiter Ordnung, die auf einer Berechnung der zweiten Momente basieren z.B. in Form eines vollständig differentiellen Modells der turbulenten Wärmeflüsse (DFM) [59]. Die verschiedenen Varianten unterscheiden sich hierbei erheblich hinsichtlich der getroffenen Annahmen und des erforderlichen numerischen Aufwandes zur Lösung des Schließungsproblems.

Die einfachste Form von Schließungsansätzen stellen Modelle zur Bestimmung der turbulenten thermischen Diffusivität α'_t dar. Diese ist an dieser Stelle bewusst in einer allgemein gehaltenen Formulierung als Tensor definiert. In Analogie zum Fourier'schen Gesetz der molekularen Wärme-

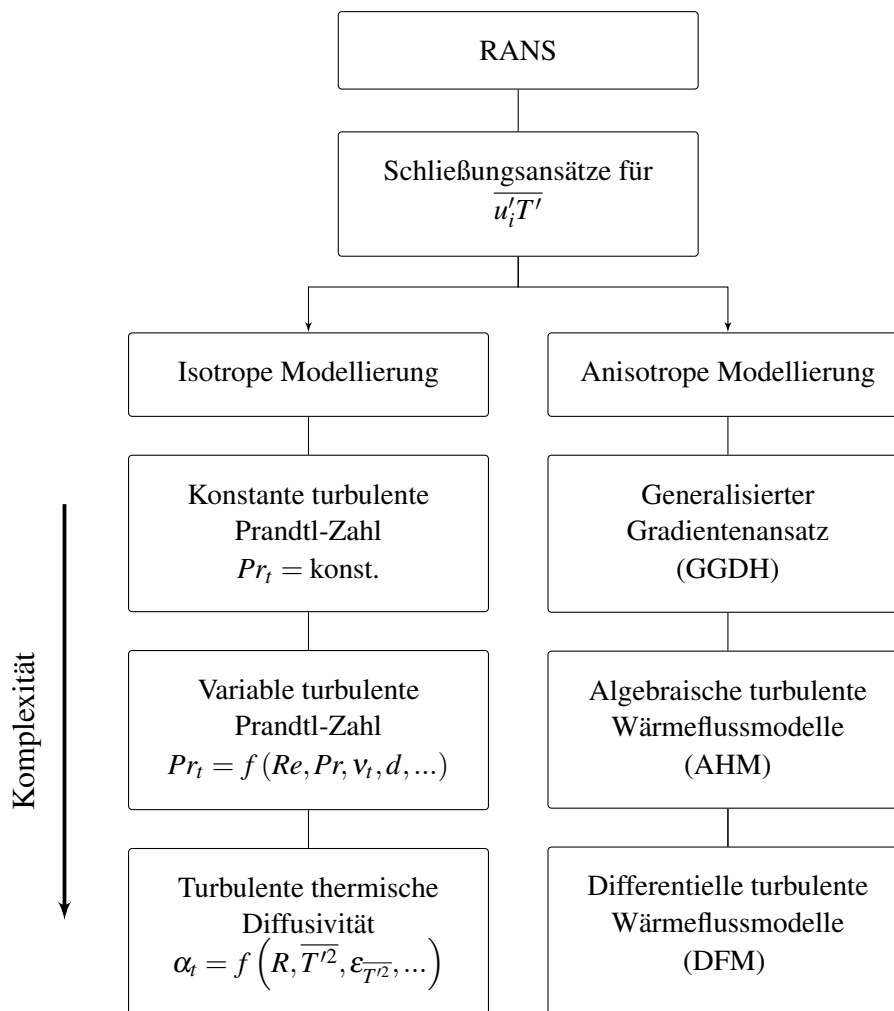


Abbildung 6.1.: Übersicht über die verschiedenen Modellierungsstufen von Schließungsansätzen der Reynolds-gemittelten Energieerhaltungsgleichung

leitung (vgl. Gl. (2.15)) können die turbulenten Wärmeflüsse $\overline{u'_i T'}$ wie folgt bestimmt werden [59]:

$$\overline{u'_i T'} = -\alpha_t^i \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_j}. \quad (6.1)$$

In vielen Schließungsansätzen wird anstelle der allgemeinen Formulierung (vgl. Gl. (6.1)) die turbulente thermische Diffusivität als isotroper Skalar α_t modelliert. Diese kann im einfachsten Fall unter Annahme der sogenannten Reynolds-Analogie aus dem Verhältnis der turbulenten Wirbelviskosität ν_t und einer Proportionalitätskonstanten in Form einer turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t bestimmt werden. Speziell in Flüssigmetallströmungen oder stark auftriebsbehafteten Strömungen mag ein Einsatz dieses Modellansatzes unter anderem aufgrund der großen Skalentrennung zwischen turbulentem Geschwindigkeits- und Temperaturfeld (vgl. Kapitel 3.3) fragwürdig sein. Ausgefeiltere Ansätze formulieren die turbulente thermische Diffusivität unter Berücksichtigung turbulenter mechanischer und thermischer Zeitskalen τ_m bzw. τ_{th} . Dieses Vorgehen ähnelt der Modellierung der turbulenten Wirbelviskosität (vgl. Kapitel 5.3.1). Zur Bestimmung der Zeitskalenunterschiede verlangen solche Ansätze das Lösen zweier zusätzlicher Transportgleichungen für die Temperaturvarianz $\overline{T'^2}$ und deren Dissipationsrate ε_{TT} , deren Einführung ebenfalls eine Modellierung einer Vielzahl von Transport- und Vernichtungstermen beinhaltet.

Eine Schwachstelle von Modellen erster Ordnung ist durch die lineare Abhängigkeit der Formulierung der turbulenten Wärmeflüsse vom Temperaturgradienten gegeben. Grötzbach [59] nennt diesbezüglich als problematisches Beispiel Kanalströmungen mit inhomogenen Randbedingungen z.B. infolge einer Variation des Beheizungszustandes oder auch auftriebsgetriebene Strömungen, wie z.B. die intern beheizte Fluidschicht (IHL³²) oder die Rayleigh-Bénard-Konvektion (RBC).

6.2. Modellierung der turbulenten Prandtl-Zahl

Die einfachste Möglichkeit der Modellierung der turbulenten Wärmeflüsse basiert auf der Annahme der Reynolds-Analogie zwischen turbulentem Geschwindigkeits- und Temperaturfeld. Diese kann unmittelbar über das Verhältnis der turbulenten Wirbelviskosität ν_t zur der turbulenten thermischen Diffusivität α_t formuliert werden. Die sich für diesen Fall ergebende skalare Proportionalitätskonstante wird auch als turbulente Prandtl-Zahl Pr_t bezeichnet und sie verknüpft für einfache eindimensionale Strömungsfälle, wie z.B. eine beheizte Kanalströmung, die primäre turbulente Reynolds-Scherspannungen mit der turbulenten Wärmeflusskomponente in wandnormaler Richtung. Sie kann demnach über folgenden Zusammenhang bestimmt werden:

$$Pr_t = \frac{\nu_t}{\alpha_t} = \frac{-\overline{u'v'}/(d\overline{u}/dy)}{-\overline{v'T'}/(d\overline{T}/dy)}. \quad (6.2)$$

³²eng: IHL - Internally Heated fluid Layer

Für komplexere Strömungsfälle ist bereits an dieser Stelle ersichtlich, dass es keine allgemeingültige konstante Proportionalitätskonstante geben kann. Die Annahme einer isotropen Wirbelviskosität ν_t und thermischen Diffusivität α_t ist nur für wenige Spezialfälle gültig. Dennoch erfreut sich dieser einfache Ansatz großer Beliebtheit auch für die Berechnung sehr komplexer Strömungstypen. Dies wird ausführlich in den Arbeiten von Chandra et al. [150] oder Pacio et al. [84] für eine Stabbündelströmung diskutiert.

Für das Beispiel einer symmetrisch beheizten turbulenten Plattenkanalströmung (vgl. Abb. 4.6) kann die turbulente Prandtl-Zahl Pr_t mit Hilfe der Gl. (6.2) unmittelbar aus den DNS-Daten [85,86] bestimmt werden. In Abb. 6.2 ist hierzu der Verlauf der turbulente Prandtl-Zahl Pr_t über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ bei einer Reynolds-Zahl $Re_\tau = 640$ und zwei verschiedenen Prandtl-Zahlen $Pr = 0,025$ und $Pr = 0,71$ dargestellt.

Der Verlauf der turbulente Prandtl-Zahl Pr_t weist eine starke Abhängigkeit zur molekularen Prandtl-Zahl Pr auf. Für $Pr = 0,025$ lässt sich ein Maximalwert der turbulente Prandtl-Zahl von $Pr_t \approx 2,1$ bei $y^+ \approx 7$ und für $Pr = 0,71$ von $Pr_t \approx 1,1$ unmittelbar an der Wand feststellen. Ursache ist die größere Dämpfungswirkung der thermischen Diffusivität $\alpha = \nu/Pr$ bei niedrigen molekularen Prandtl-Zahlen. Der viskos dominierte Bereich des normierten Temperaturprofils $\bar{\Theta}^+$, der fast ausschließlich durch molekulare Diffusion geprägt ist, ragt in diesem Fall weit in den Bereich der Kernströmung hinein (vgl. Abb. 4.8). Die Dämpfungswirkung äußert sich darin, dass thermische Schwankungen in diesem Bereich und somit auch die turbulenten Wärmeflüsse bei $Pr \ll 1$ stärker unterdrückt werden. Die turbulente Prandtl-Zahl ist in Plattenkanalströmungen direkt abhängig zum Verhältnis der turbulenten Reynolds-Schubspannung $\overline{u'v'}$ und der wandnormalen turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{v'T'}$ (vgl. Gl. (6.2)). Dies erklärt bei gleicher Reynolds-Zahl auch die größeren Werte von Pr_t bei $Pr \ll 1$ im Vergleich zu $Pr \sim 1$.

Für $Pr = 0,71$ ist der Verlauf der turbulente Prandtl-Zahl Pr_t über dem wandnormalen Abstand y^+ nahezu konstant. Das Temperaturprofil ist in einem gewissen Abstand zur Wand deutlicher stärker vom konvektiven Transport des Mediums dominiert. Der Einfluss der molekularen Wärmeleitung und somit der Dämpfung thermischer Schwankungen bleibt in diesem Fall auf den wandnahen Bereich beschränkt.

Der jeweils endliche Wert der turbulente Prandtl-Zahl unmittelbar an der Wand kann für beide molekulare Prandtl-Zahlen mit Hilfe des asymptotischen Wandverhaltens erklärt werden. Dieses lässt sich mit Hilfe einer Taylor-Reihenentwicklung der einzelnen Fluktuationsgrößen ableiten (vgl. Kap. 6.4.2). Abe et al. [85,86] lösen in beheizten Plattenkanalströmungen für ihre DNS eine Transportgleichung des normierte Temperaturprofil $\bar{\Theta}^+$ (vgl. Gl. (4.55) und (4.56)). Für das Temperaturprofil an der Wand ergibt sich somit die Randbedingung $\bar{\Theta}^+|_w = 0$, was auch zu einer verschwindenden thermischen Fluktuation $\theta'|_w = 0$ führt. Da die turbulente Prandtl-Zahl über das Verhältnis von turbulenter Wirbelviskosität $\nu_t \sim y^{+3}$ zur turbulenten thermischen Diffusivität $\alpha_t \sim y^{+3}$ definiert ist und die Gradienten des Geschwindigkeits- und Temperaturprofils unmittelbar

an der Wand einen linearen Verlauf zum normierten Wandabstand y^+ aufweisen (vgl. Gl. (4.52) und (4.57)), lässt sich in Abhängigkeit von der molekularen Prandtl-Zahl ein endlicher Wert für Pr_t ungleich Null an der Wand bestimmen.

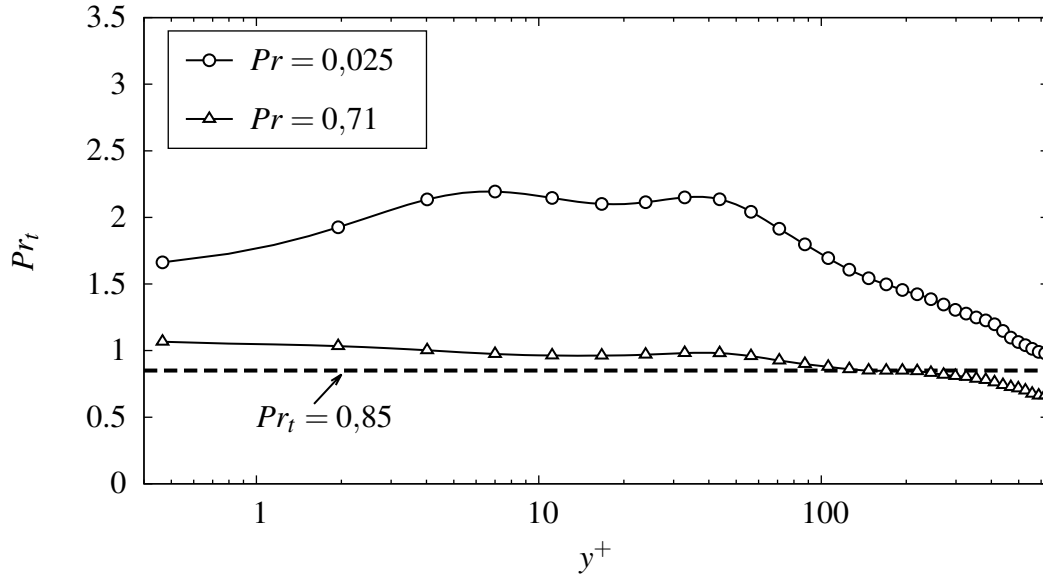


Abbildung 6.2.: Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ einer turbulente Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 640$ und unterschiedlichen molekularen Prandtl-Zahlen $Pr = 0,025$ und $Pr = 0,71$ anhand der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].

Da für Kanalströmungen üblicherweise die Differenz der Wandtemperatur und des Temperaturprofils als Transportgröße Θ bestimmt wird, soll nachfolgend die für diesen Strömungsfall in der Literatur übliche Notation der turbulenten Wärmeflüsse $\overline{u'_i \theta'}$ eingeführt und verwendet werden.

Die turbulenten Wärmeflüsse können mit der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t und eines Gradientenansatzes (SHDH³³) der Temperatur \overline{T} bzw. Temperaturdifferenz $\overline{\Theta}$ wie folgt bestimmt werden:

$$\overline{u'_i T'} = -\frac{v_t}{Pr_t} \frac{\partial \overline{T}}{\partial x_i} \quad \text{bzw.} \quad \overline{u'_i \theta'} = -\frac{v_t}{Pr_t} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_i}. \quad (6.3)$$

Dies verlangt eine starke Korrelation der turbulenten Wärmeflüsse $\overline{u'_i T'}$ (bzw. $\overline{u'_i \theta'}$) und des Temperaturgradienten $\partial \overline{T} / \partial x_i$ bzw. $\partial \overline{\Theta} / \partial x_i$. Diese Annahme ist nicht für jeden Strömungstyp erfüllt. Speziell in auftriebsbehafteten Strömungen, z.B. einer unendlich großen, vertikal überströmten Platte einer konstanten Temperatur, führt dieser Ansatz zu einer fehlerbehafteten Vorhersage [58]. Nach einer Einlaufstrecke entlang der Platte verschwindet der Temperaturgradient in Strömungsrichtung und somit die turbulente Wärmeflusskomponente in Strömungsrichtung. Der Einfluss des Auftriebsterms in der Transportgleichung der turbulenten kinetischen Energie $G_k = -\beta g_i \overline{u'_i T'}$ (vgl. Gl. (5.8)) kann somit für diesen Strömungsfall nicht wiedergegeben werden.

³³SHDH: Simple Gradient Diffusion Hypothesis

6.2.1. Bestimmung unter Berücksichtigung globaler Strömungsparameter

Der übliche Ansatz in der Literatur für diese Modellierungsstufe ist die Wahl einer konstanten turbulenten Prandtl-Zahl $Pr_t = 0,85$. Dies begründet sich auf theoretischen Überlegungen bezüglich des logarithmischen Wandgesetzes der Geschwindigkeit und Temperatur (vgl. Gl. (4.53) und (4.58)) für einfache turbulente Scherströmungen. Für einen dimensionslosen Wandabstand $y^+ > 30$ kann für eine ausreichend hohe molekulare Prandtl-Zahl angenommen werden, dass molekulare gegenüber turbulenten Diffusionsvorgängen vernachlässigbar sind und somit das Geschwindigkeits- bzw. Temperaturprofil einen logarithmischen Verlauf aufweist [22]. Diese Annahme ist strikt auf molekulare Prandtl-Zahlen der Größenordnung $\mathcal{O}(Pr) \approx 1$ beschränkt (für den Fall einer turbulenten Plattenkanalströmung vgl. Abb. 4.8). Die turbulente Scherspannung $\overline{u'v'}$ und die turbulente Wärmeflusskomponente $\overline{v'T'}$ können für den Fall einer einfachen Scherströmung als nahezu konstant angenommen werden [22]. Eine Kombination der Gl. (6.2) und den nach der wandnormalen Koordinate y^+ differenzierten, logarithmischen Wandgesetzen (vgl. Gl. (4.53) und (4.58)) ergibt demnach unter guter Näherung folgenden Ausdruck:

$$Pr_t \approx \frac{\kappa}{\kappa_\theta} \approx 0,85 = \text{konst.} \quad (6.4)$$

Die turbulente Prandtl-Zahl Pr_t kann demzufolge im logarithmischen Bereich der Scherströmung als nahezu konstant angenommen werden. Im Gegensatz hierzu weist eine beheizte, turbulente Plattenkanalströmung eine kontinuierliche Änderung der turbulenten Scherspannung $\overline{u'v'}$ und der wandnormalen Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'}$ über der Kanalhöhe auf.

Wie Abb. 6.2 zu entnehmen ist, kann für höhere molekulare Prandtl-Zahlen der Verlauf der DNS-Daten durch Wahl einer konstanten turbulenten Prandtl-Zahl $Pr_t = 0,85$ akzeptabel über einen großen Bereich der Strömung wiedergegeben werden. Doch speziell für Strömungen niedriger Prandtl-Zahl ($\mathcal{O} \approx 10^{-3} - 10^{-2}$) zeigt sich eine erhebliche Abweichung um nahezu den Faktor Zwei. Dies ist auf den Einfluss der molekularen Diffusion bis in den Bereich der Kernströmung zurückzuführen. Wie aus Abb. 4.8 ersichtlich ist, lässt sich für $Pr \ll 1$ im wandfernen Bereich der Strömung kein logarithmischer Bereich des Temperaturprofils erkennen. Da dieser Ansatz demnach den Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t im Vergleich zu den DNS-Daten [85,86] unterschätzt, wird der Verlauf der turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'}^+$ stark überbewertet (vgl. Gl. (6.3)). Infolge des zu großen thermischen Energieaustauschs ist bei Verwendung einer konstanten turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t demzufolge auch zu erwarten, dass das normierte Temperaturprofil Θ^+ zu stark „gedämpft“ bzw. die Differenz zwischen der Wandtemperatur T_w und der massenstromgemittelten³⁴ Temperatur T_b der Strömung als zu niedrig vorhergesagt wird.

Speziell um auf den Einfluss einer niedrigen molekularen Prandtl-Zahl Pr einzugehen sind wei-

³⁴eng.: bulk temperature

tere sogenannte „globale“³⁵ Modelle der turbulenten Prandtl-Zahl entwickelt worden. Diese bestimmen Pr_t in Abhängigkeit von Parametern, wie z.B. der Reynolds-Zahl Re oder molekularen Prandtl-Zahl Pr . Eine Zusammenstellung dieser Modelle für Rohrströmungen niedriger Prandtl-Zahl kann z.B. den Arbeiten von Cheng & Tak [57] oder Taler [151] entnommen werden.

Der erste untersuchte Ansatz der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t stammt von Aoki [152] und ist eine Funktion der Reynolds-Zahl Re und der molekularen Prandtl-Zahl Pr :

$$Pr_t = \left\{ 0,014 Re^{0,45} Pr^{0,2} \left[1 - \exp\left(-\frac{1}{0,014 Re^{0,45} Pr^{0,2}}\right) \right] \right\}^{-1}. \quad (6.5)$$

Reynolds [153] veröffentlichte 1975 einen alternativen Ansatz zur Bestimmung der turbulenten Prandtl-Zahl, der auf der Reynolds-Zahl Re und der Péclet-Zahl $Pe = Pr Re$ basiert:

$$Pr_t = \left(1 + 100 Pe^{-0,5}\right) \left(\frac{1}{1 + 120 Re^{-0,5}} - 0,15\right). \quad (6.6)$$

Das dritte Modell der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t , das an dieser Stelle vorgestellt werden soll, ist der Ansatz nach Jischa & Rieke [154]. Dieser wurde im Jahr 1979 veröffentlicht und ist auf Basis von theoretischen Überlegungen bezüglich der Transportgleichungen der turbulenten kinetischen Energie k und der turbulenten Wärmeflüsse $\overline{u_i' T'}$ entwickelt worden. Die turbulente Prandtl-Zahl Pr_t kann für dieses Modell über folgenden Zusammenhang bestimmt werden [154]:

$$Pr_t = 0,9 + \frac{182,4}{Pr Re^{0,888}}. \quad (6.7)$$

Bei diesem Modell lässt sich feststellen, dass das übliche Modell einer konstanten turbulenten Prandtl-Zahl $Pr_\infty = 0,9$ durch einen Ausdruck in Abhängigkeit der molekularen Prandtl-Zahl Pr und der Reynolds-Zahl Re ergänzt wird. Es ist leicht ersichtlich, dass für große Werte der molekularen Prandtl-Zahl bzw. der Reynolds-Zahl der zweite Term der Gl. (6.7) kleiner wird, was in seiner Tendenz dem zu erwartenden Verhalten entspricht (vgl. Abb. 6.2).

Als letzter „global“ definierter Ansatz soll das Modell von Cheng & Tak [57] aus dem Jahr 2006 vorgestellt werden. Dieses Modell wurde auf Basis einer experimentell ermittelten Korrelation speziell für Rohrströmungen niedriger Prandtl-Zahl sowie einem konstanten zugeführten Wärmefluss entwickelt. Ihr Ansatz ist auf Zwangskonvektion beschränkt. Die turbulente Prandtl-Zahl Pr_t wird hier in Abhängigkeit eines Parameters ξ formuliert. Dieser ist nach Cheng & Tak [57] bereichsweise in Abhängigkeit der Péclet-Zahl Pe definiert:

$$\xi = \begin{cases} 5,4 - 9 \times 10^{-4} Pe & \text{für } 1000 < Pe \leq 2000 \\ 3,6 & \text{für } 2000 < Pe \leq 6000 \end{cases} \quad (6.8)$$

³⁵Der Begriff „global“ bezieht sich in diesem Zusammenhang auf die Verwendung dimensionsloser nicht-lokaler Eigenschaften der Strömung, wie z.B. Reynolds-Zahl.

Die turbulente Prandtl-Zahl Pr_t kann nach Cheng & Tak [57] nun unter Verwendung des Parameters ξ wie folgt bestimmt werden:

$$Pr_t = \begin{cases} 4,12 & \text{für } Pe \leq 1000 \\ (0,01 Pe) / [0,018 Pe^{0,8} - (7,0 - \xi)]^{1,25} & \text{für } 1000 < Pe \leq 6000 \end{cases} \quad (6.9)$$

Da einige der vorgestellten Modelle für die Analyse von turbulenten Rohrströmungen entwickelt wurden, wird an dieser Stelle die, auf dem hydraulischen Durchmesser D_h basierende, Reynolds-Zahl Re_{D_h} eingeführt. Diese lässt sich mit Hilfe der massengemittelten Geschwindigkeit u_b und der kinematischen Viskosität ν über folgenden Ansatz bestimmen:

$$Re_{D_h} = \frac{u_b D_h}{\nu}. \quad (6.10)$$

Der hydraulische Durchmesser D_h muss nun für eine Kanalgeometrie mit der Plattenbreite L_z und dem Plattenabstand $L_y = 2\delta$ bestimmt werden. Dies ist durch einen einfachen geometrischen Zusammenhang des durchströmten Querschnitts A und seines Umfangs U möglich:

$$D_h = \frac{4 A}{U}. \quad (6.11)$$

Für eine unendliche Plattenbreite L_z (homogene Richtung der Strömung) ist demzufolge eine einfache Grenzwertbetrachtung erforderlich. Der hydraulischen Durchmesser einer Plattenkanalströmung kann nun wie folgt ermittelt werden:

$$D_h = \frac{4 A}{U} = \lim_{L_z \rightarrow \infty} \frac{4 (2\delta L_z)}{2(L_z + 2\delta)} = \frac{8\delta L_z}{2 L_z} = 4\delta. \quad (6.12)$$

Um die vorgestellten „globalen“ Ansätze der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t hinsichtlich ihrer Eignung für eine symmetrisch beheizte Plattenkanalströmungen bei verschiedenen Reynolds- Re_b und Prandtl-Zahlen Pr zu prüfen, sollen die verschiedenen Modelle unter Verwendung der DNS-Daten von Abe et al. [85,86] untersucht werden. Dies ermöglicht es, den Einfluss einer vermeintlich fehlerbehafteten Modellierung des Reynolds-Spannungstensors bzw. der turbulenten Wirbelviskosität ν_t vollständig aus der Analyse zu eliminieren. Eine Reduktion der Reynolds-Zahl Re_b bzw. der auf der Reibungsgeschwindigkeit u_τ basierenden Reynolds-Zahl Re_τ bewirkt einen Anstieg der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t speziell im wandnahen Bereich der Strömung. Infolge der niedrigeren Reynolds-Zahl steigt der Einfluss des viskos dominierten Bereiches der Strömung. Die zweiten Momente der Reynolds-Spannungen $\overline{u'_i u'_j}$ bzw. der turbulenten Wärmeflüsse $\overline{u'_i \theta'}$ werden somit stärker gedämpft. Eine Darstellung des Einflusses der Reynolds-Zahl ist dem Anhang zu entnehmen (vgl. Anhang A.2.1).

Wie in Abb. 6.3 und 6.4 ersichtlich ist, wird die turbulente Prandtl-Zahl Pr_t in den „globalen“ Modellansätzen als konstante Proportionalitätskonstante zwischen dem turbulenten Geschwindigkeits- und Temperaturfeld in Abhängigkeit von vorgegebenen Parametern bestimmt. Speziell der Anstieg der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t in Wandnähe kann somit durch keines der untersuchten Modelle wiedergegeben werden. Dies ist eine unmittelbare Folge des Verzichts der Modellansätze lokale Größen, wie z.B. den wandnormalen Abstand d , die turbulente Wirbelviskosität ν_t oder die turbulente Péclet-Zahl $Pe_t = Pr \nu_t$ zu berücksichtigen. Es zeigt sich, dass der empirische Ansatz von Cheng & Tak [57] nicht für turbulente Plattenkanalströmungen geeignet ist. Die turbulente Prandtl-Zahl Pr_t wird für beide untersuchte molekulare Prandtl-Zahlen $Pr = 0,025$ bzw. $Pr = 0,71$ erheblich überbewertet. Dies lässt sich zurückführen auf die Optimierung des Modells auf Basis einer experimentell bestimmte Korrelation für turbulente Rohrströmungen niedriger Prandtl-Zahl. Unter den untersuchten Modellvorschlägen ergibt sich für das Modell von Jischa & Rieke [154] die beste Übereinstimmung mit den DNS-Daten [85,86]. Dennoch führt auch dieser Ansatz zu starken Abweichungen des Verlaufs über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ . Diese Ergebnisse zeigen, dass für eine genauere Modellformulierung der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t die Einführung lokaler Größen zwingend erforderlich ist.

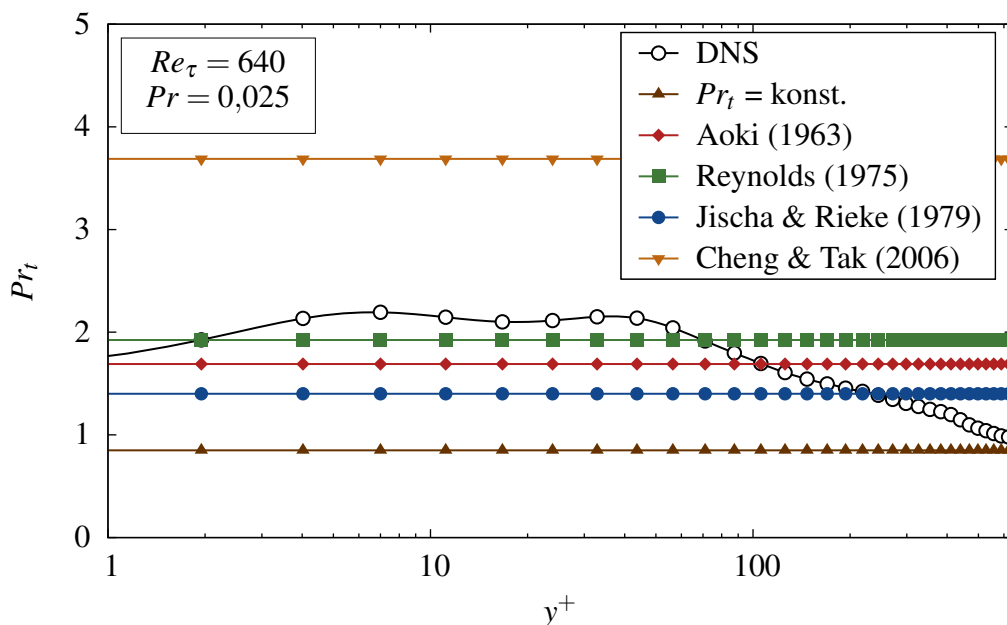


Abbildung 6.3.: Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t über dem Wandabstand y^+ für eine beidseitig konstant beheizte, turbulente Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 640$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,025$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].

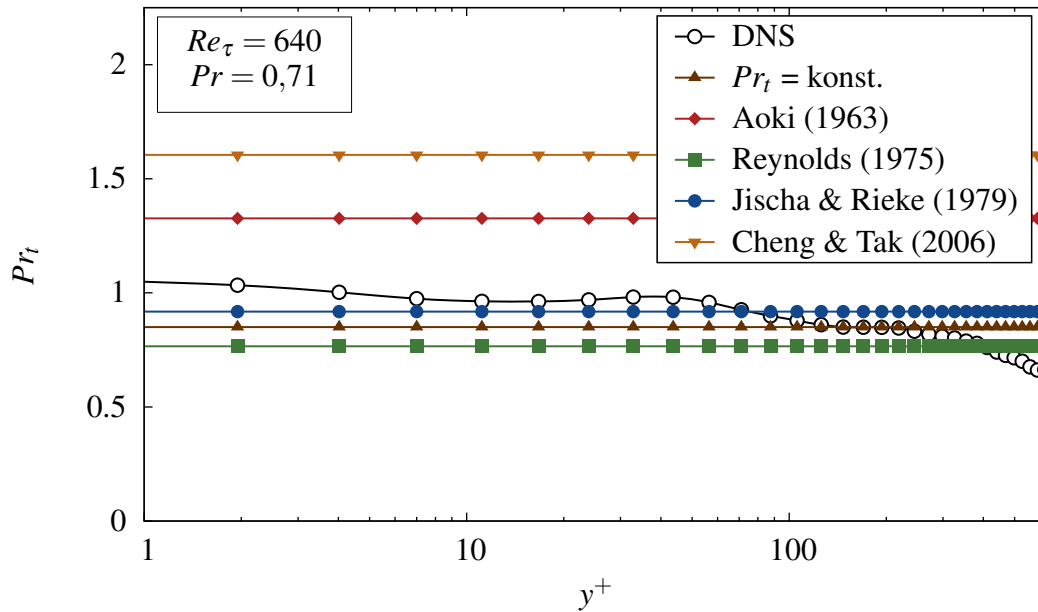


Abbildung 6.4.: Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t über dem Wandabstand y^+ für eine beidseitig konstant beheizte, turbulente Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 640$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass ein Vergleich der vorgestellten Modellansätze mit den DNS-Daten nicht unmittelbar für die turbulenten Wärmeflüsse $\overline{u_i' T'}$ (vgl. Gl. (6.3)) geführt werden kann, da der Verlauf des Temperaturprofils bzw. des Temperaturgradienten eine unmittelbare Abhängigkeit zur Formulierung der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t aufweist. Für eine umfassende Darstellung des Verlaufs der turbulenten thermischen Diffusivität $\alpha_t = \nu_t / Pr_t$ der einzelnen Modelle sei auf den Anhang (vgl. Anhang A.2.1) verwiesen.

6.2.2. Bestimmung unter Berücksichtigung lokaler Strömungsparameter

Der Einsatz von lokaler Strömungsgrößen zur besseren Beschreibung des Verlaufs der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t ist zwingend erforderlich. Nachfolgend soll eine Auswahl dieser Konzepte hinsichtlich ihrer Formulierung erläutert und anschließend mit Hilfe der DNS-Daten von Abe et al. [85,86] validiert werden.

Cebeci & Bradshaw [56] entwickelten ein Modell, dass im Wesentlichen aus dem Verhältnis der von-Kármán-Konstante $\kappa = 0,4$ und ihres thermischen Gegenstückes $\kappa_\theta = 0,47$ basiert. Diese werden in Abhängigkeit des dimensionslosen Wandabstandes y^+ mit zusätzlichen Dämpfungsfunktionen erweitert

$$Pr_t = \frac{\nu_t}{\alpha_t} \approx \frac{\kappa}{\kappa_\theta} \frac{1 - \exp(-y/A)}{1 - \exp(-y/B)} \approx \frac{\kappa}{\kappa_\theta} \frac{1 - \exp(-y^+/A^+)}{1 - \exp(-y^+/B^+(Pr))}, \quad (6.13)$$

wobei die Parameter wie folgt angegeben sind:

$$B^+(Pr) = \frac{1}{\sqrt{Pr}} \sum_{i=1}^5 C_{C,i} [\log_{10}(Pr)]^{i-1}, \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} A^+ = 26; \quad \kappa = 0,4; \quad \kappa_\theta = 0,47; \quad C_{C,1} = 34,96; \quad C_{C,2} = 28,79; \\ C_{C,3} = 33,95; \quad C_{C,4} = 6,3; \quad C_{C,5} = -1,896; \quad \frac{\kappa}{\kappa_\theta} \approx 0,851. \end{aligned} \quad (6.15)$$

In der Formulierung der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t wird eine sogenannte van Driest'sche Dämpfungsfunktion $f_\kappa = 1 - \exp(-y^+/A^+)$ eingesetzt. Mit zunehmendem Wandabstand y^+ nähert der Zähler sich asymptotisch dem Wert Eins. Auch im Nenner wird eine solche Dämpfungsfunktion $f_{\kappa_\theta} = 1 - \exp(-y^+/B^+(Pr))$ verwendet. Diese ist eine Funktion des dimensionslosen Wandabstandes y^+ und der molekularen Prandtl-Zahl Pr . Der Verlauf dieser beiden Dämpfungsfunktionen ist für verschiedene molekulare Prandtl-Zahlen ($Pr = 0,006$, $Pr = 0,025$ und $Pr = 0,71$) in der nachfolgenden Abb. 6.5 dargestellt.

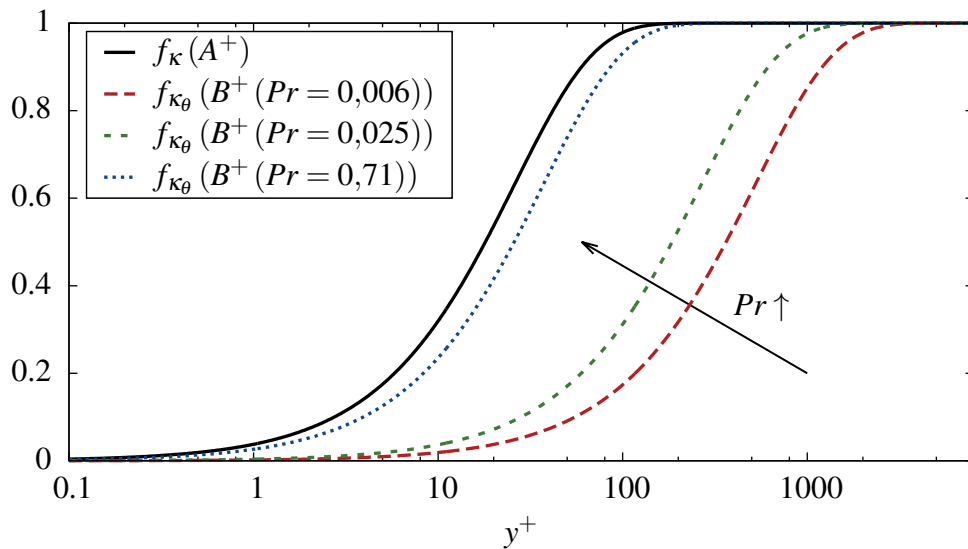


Abbildung 6.5.: Verlauf der Dämpfungsfunktionen f_κ und f_{κ_θ} des Cebeci-Modells [56] über dem dimensionslosen wandnormalen Wandabstand y^+ .

Für große molekulare Prandtl-Zahlen Pr ist der Verlauf der beiden Dämpfungsfunktionen f_κ und f_{κ_θ} sehr ähnlich. Somit ergibt sich nur eine geringfügige Vergrößerung des Verhältnisses $\kappa/\kappa_\theta \approx 0,851$. Je niedriger jedoch die molekulare Prandtl-Zahl gewählt wird, desto geringer zeigt sich die Dämpfungswirkung durch die Funktion f_{κ_θ} . Dies wiederum vergrößert das Verhältnis κ/κ_θ und somit die turbulente Prandtl-Zahl Pr_t deutlich. Ein Nachteil dieses Modells ist seine Abhängigkeit vom dimensionslosen Wandabstand. Speziell für komplexe Strömungen z.B. der Strömung über eine rückwärtsgeneigte Stufe können die Dämpfungsfunktionen f_κ und f_{κ_θ} infolge der auftretenden Ablösung der Strömung nicht eingesetzt werden.

Kays [22] untersuchte 1994 in seiner Arbeit experimentell verfügbare Daten der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t in zweidimensionalen Grenzschichtströmungen und vollständig eingelaufenen Rohr- und Kanalströmungen. Sein aus diesen Informationen abgeleiteter Ansatz basiert auf einer empirischen Korrelation in Abhängigkeit der turbulenten Wirbelviskosität ν_t sowie der thermischen Diffusivität bzw. Temperaturleitfähigkeit $\alpha = \nu/Pr$ zur Bestimmung der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t [22]:

$$Pr_t = 0,85 + 0,7 \left(\frac{\alpha}{\nu_t} \right). \quad (6.16)$$

Der wesentliche Vorteil dieses Ansatzes ist, dass das Modell einfach in jede beliebige Code-Struktur implementiert werden kann solange diese auch für die Berechnungen turbulenter Strömungen eingesetzt werden kann.

Weigand et al. [155] veröffentlichen 1997 eine Erweiterung des Modellansatzes von Kays & Crawford [156]. Diese Erweiterung basiert in ihren Grundzügen auf dem Modellvorschlag von Jischa & Rieke [154] zur Bestimmung der turbulenten Prandtl-Zahl $Pr_{t,\infty}$ im Bereich großer turbulenter Péclet-Zahlen $Pe_t = Pr(\nu_t/\nu)$. Der Ansatz von Kays & Crawford [156] ist wie folgt formuliert:

$$Pr_t = \left\{ \frac{1}{2Pr_{t,\infty}} + C_{KC} Pe_t \sqrt{\frac{1}{Pr_{t,\infty}}} - (C_{KC} Pe_t)^2 \left[1 - \exp \left(-\frac{1}{C_{KC} Pe_t \sqrt{Pr_{t,\infty}}} \right) \right] \right\}^{-1}, \quad (6.17)$$

wobei die Konstante zu $C_{KC} = 0,3$ angegeben ist. Die turbulente Prandtl-Zahl Pr_t bei großen turbulenten Péclet-Zahlen Pe formulieren Weigand et al. [155] zu:

$$Pr_{t,\infty} = 0,85 + \frac{100}{Pr Re^{0,888}}. \quad (6.18)$$

Für unendliche große Péclet-Zahlen $Pe \rightarrow \infty$ nimmt die turbulente Prandtl-Zahl $Pr_{t,\infty} = 0,85$ an. Dieser Ansatz ist somit neben lokalen Größen der turbulenten Wirbelviskosität ν_t auch vom „globalen“ Parameter der Reynolds-Zahl Re abhängig. Diese ist für komplexe Strömungen, wie z.B. einer Strömung über eine rückwärtsgeneigte Stufe oder bei einer kontinuierlichen Querschnittsänderung, nicht einheitlich zu bestimmen. Die Erweiterung nach Weigand et al. [155] unterscheidet sich somit ausschließlich für niedrige molekulare Prandtl-Zahlen vom ursprünglichen Modellvorschlag von Kays & Crawford [156].

Lin et al. [157] entwickelten unter Verwendung der Renormierungsgruppentheorie³⁶ eine implizite Formulierung der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t durch Lösung einer kubischen Gleichung für den funktionalen Parameter γ :

$$\left(\frac{\gamma+2}{\gamma_0+2} \right)^{1/3} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma_0-1} \right)^{2/3} = \frac{\nu}{\nu + \nu_t}, \quad (6.19)$$

³⁶eng.: renormalization group analysis

mit:

$$\gamma = \frac{1 + (Pe_t/Pr_t)}{Pr + Pe_t} \quad \text{bzw.} \quad \gamma_0 = \frac{1}{Pr}. \quad (6.20)$$

Als letztes Modell soll an dieser Stelle die Formulierung der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t nach Notter & Schleicher [158] (vgl. auch die Veröffentlichung von Churchill [159]) aufgeführt werden. Diese kann unter Verwendung der turbulenten Wirbelviskosität ν_t wie folgt angegeben werden:

$$Pr_t = \frac{1 + \phi}{0,025 Pr (\nu_t/\nu) / [1 - (\nu_t/\nu)] + \phi} \left\{ 1 + \frac{10}{35 + (\nu_t/\nu) / [1 - (\nu_t/\nu)]} \right\}, \quad (6.21)$$

mit:

$$\phi = 90 Pr^{3/2} \left(\frac{\nu_t/\nu}{1 - \nu_t/\nu} \right)^{1/4}. \quad (6.22)$$

Es zeigt sich in den Abb. 6.6 und 6.7, dass die Ansätze von Kays [22] und Weigand et al. [155] die besten Übereinstimmung mit den DNS-Daten [85,86] aufweisen. Unmittelbar an der Wand nimmt das Modell nach Weigand et al. [155] den Wert $Pr_t = 2 Pr_{t,\infty}$ (vgl. Gl. (6.18)) an, wohingegen das Modell von Kays [22] für einen kleiner werdenden Wandabstand y^+ asymptotisch gegen unendlich läuft. Dies lässt sich auf darauf zurückführen, dass die turbulente Wirbelviskosität sich asymptotisch dem Wert $\nu_t|_w = 0$ an der Wand annähert. Speziell für niedrige molekulare Prandtl-Zahlen $Pr = 0,025$ zeigt das Modell von Kays [22] im Bereich $y^+ = 60 - 120$ eine sehr gute Übereinstimmung mit den DNS-Daten mit einer relativen Abweichung von weniger als 2 %.

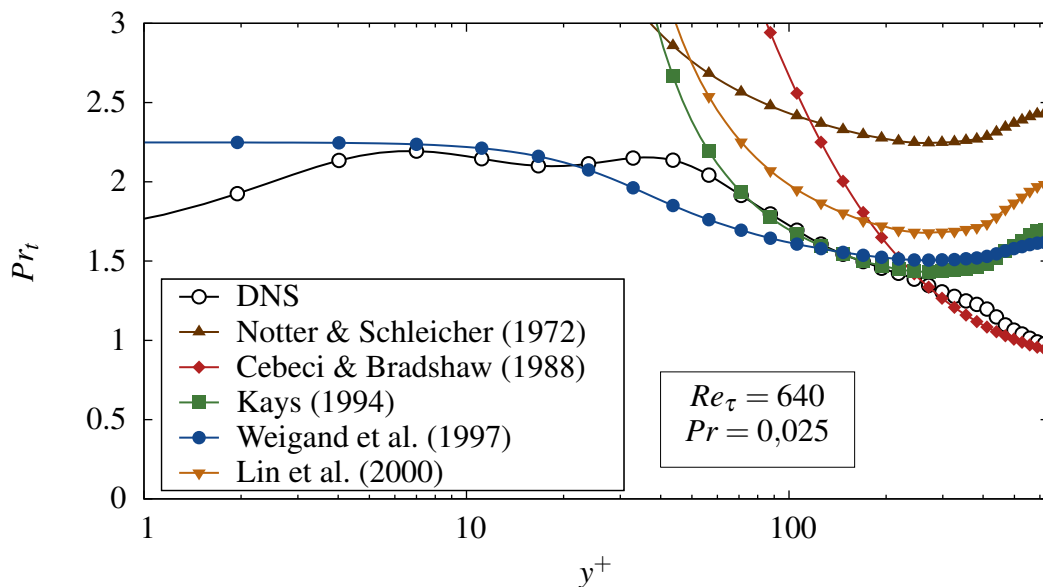


Abbildung 6.6.: Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t über dem Wandabstand y^+ für eine beidseitig konstant beheizte, turbulente Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 640$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,025$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].

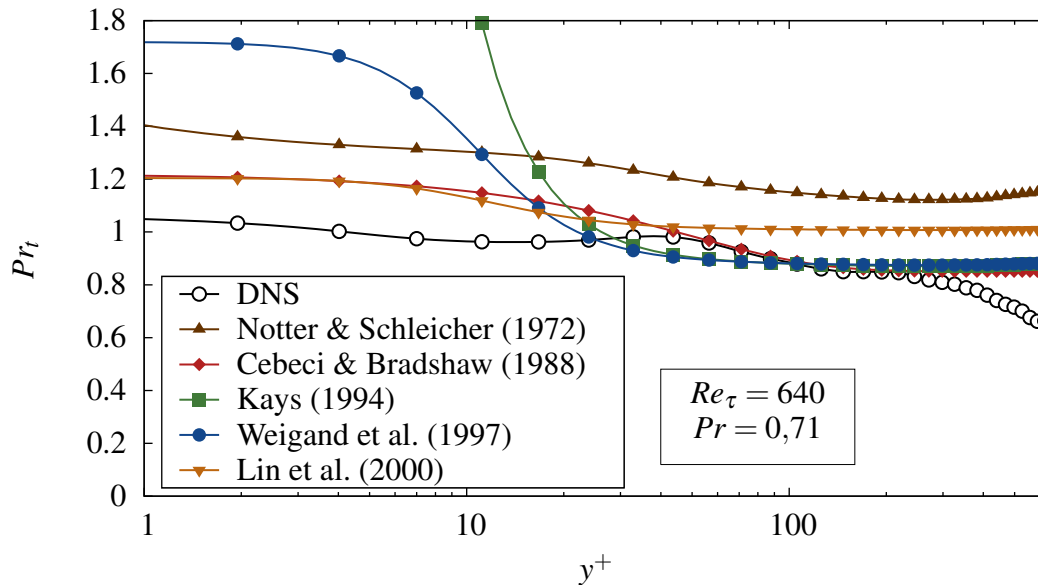


Abbildung 6.7.: Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t über dem Wandabstand y^+ für eine beidseitig konstant beheizte, turbulente Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 640$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].

In Abb. 6.8 und 6.9) ist der Verlauf der turbulenten thermischen Diffusivität α_t^+ über dem Wandabstand y^+ dargestellt. Ihr Verlauf kann aus den DNS mit Hilfe der turbulenten Wirbelviskosität ν_t^+ über den Ausdruck $\alpha_t^+ = \nu_t^+ / Pr_t$ ermittelt werden. Die turbulente thermische Diffusivität α_t^+ nimmt unmittelbar an der Wand den Wert Null an. Nach dem viskos dominierten Bereich der Strömung in Wandnähe lässt sich ihr Maximum für beide molekulare Prandtl-Zahlen bei ca. $y^+ \approx 350$ erkennen. Analog zum Verlauf der turbulenten Wirbelviskosität ν_t^+ existiert für den beidseitig beheizten Zustand ein lokales Minimum in der Kanalmitte ($y^+ = 640$). Deutlich zu erkennen ist, dass die Größe des Maximums eine unmittelbare Funktion der molekularen Prandtl-Zahl Pr ist. Diese ist mit $\alpha^+ \approx 36$ für den Fall $Pr = 0,025$ ungefähr halb so groß wie für den Fall $Pr = 0,71$ mit $\alpha^+ \approx 60$. Dies lässt sich auf die gesteigerte Dämpfung turbulenter Schwankungen bei niedrigen molekularen Prandtl-Zahlen zurückführen.

Der Ansatz von Cebeci & Bradshaw [56] ergibt für niedrige Prandtl-Zahlen eine deutlich Unterschätzung des Verlaufs in Wandnähe mit Abweichungen von bis zu 40 %. Im Gegensatz zu den Modellen von Weigand et al. [155] und Kays [22] ist dies vor allem für einen Bereich des dimensionslosen Wandabstandes zwischen $y^+ = 60 - 120$ festzustellen. Der Ansatz nach Kays [22] und Weigand et al. [155] hingegen weisen die beste Übereinstimmung mit einer relativen Abweichung des Maximums von jeweils 14 % zu den DNS-Daten. Der Verlauf im Bereich $y^+ = 1 - 200$ wird hingegen für beide Modelle nahezu perfekt bestimmt. Für höhere Prandtl-Zahlen ($Pr = 0,71$) hingegen zeigt das Modell von Cebeci & Bradshaw [56] im Vergleich zu den beiden anderen Modellen einen fast identischen Verlauf der turbulenten thermischen Diffusivität α_t in diesem Bereich des Wandabstands. Das Maximum wird für alle drei Modelle mit einer relativen Abweichung zur

DNS von weniger als 8 % vorhergesagt. Für das Modell von Notter & Schleicher [158] zeigt sich wie auch für das Modell von Lin et al. [157] bei beiden molekularen Prandtl-Zahlen ($Pr = 0,025$ bzw. $Pr = 0,71$) eine Überschätzung der turbulenten Prandtl-Zahl bzw. eine Unterschätzung der turbulenten thermischen Diffusivität α_t^+ , speziell im Bereich $y^+ = 100 - 400$.

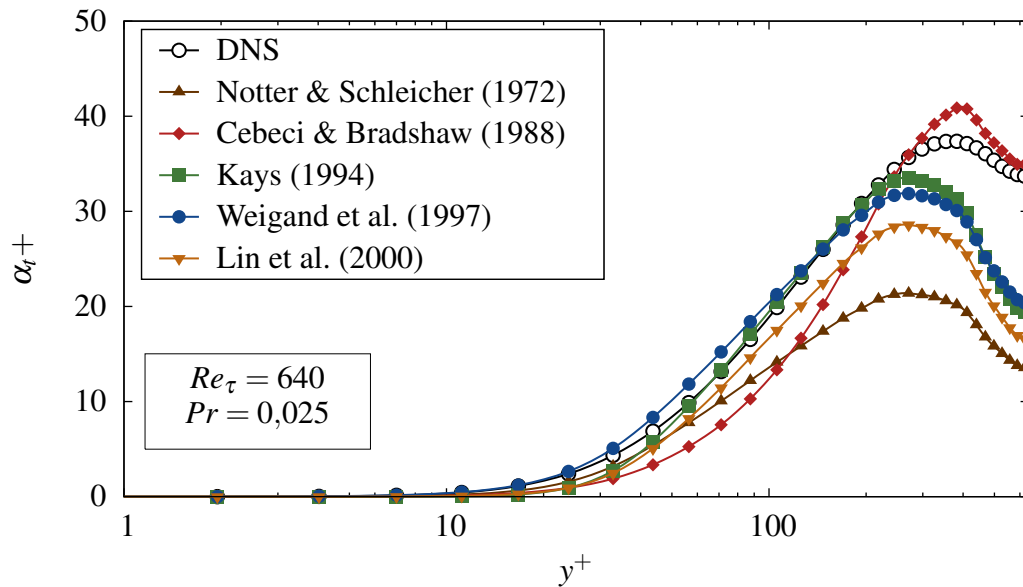


Abbildung 6.8.: Verlauf der turbulenten thermischen Diffusivität $\alpha_t^+ = \alpha_t/\nu$ über dem Wandabstand y^+ für eine beidseitig konstant beheizte, turbulente Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 640$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,025$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].

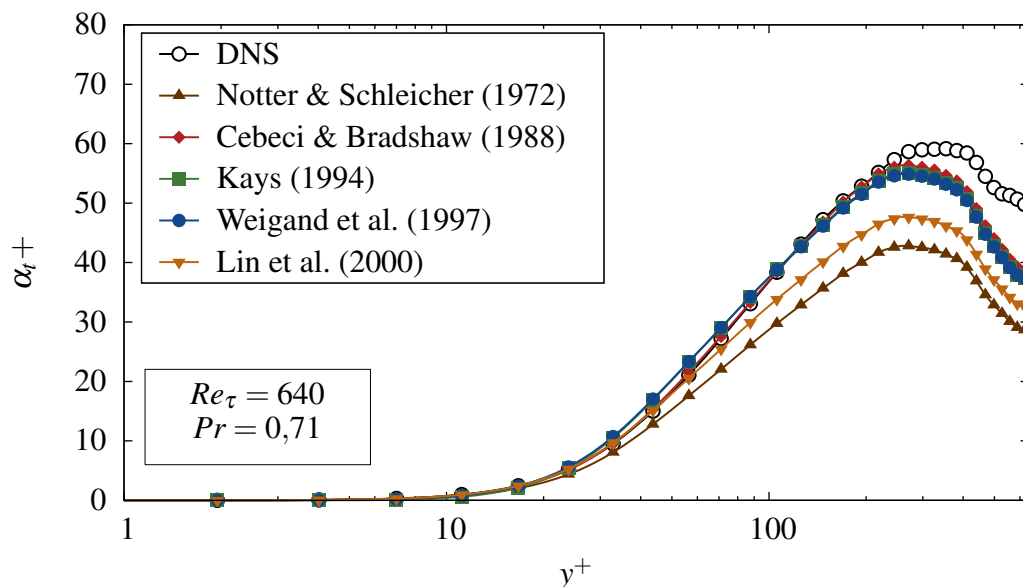


Abbildung 6.9.: Verlauf der turbulenten thermischen Diffusivität $\alpha_t^+ = \alpha_t/\nu$ über dem Wandabstand y^+ für eine beidseitig konstant beheizte, turbulente Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 640$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].

Zusammenfassend ist für die Analyse der Ansätze zur Bestimmung der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t auf Basis lokaler Größen festzustellen, dass für Strömungen niedriger molekularer Prandtl-Zahlen bis auf das Modell von Weigand et al. [155] alle Korrelationen den Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t im wandnahen Bereich deutlich überschätzen. Da dieser Bereich für Strömungen niedriger Péclet-Zahl Pe fast ausschließlich durch molekulare Diffusion dominiert wird, kann der Einfluss dieses Fehlers vernachlässigt werden. Mit zunehmendem Wandabstand y^+ steigt jedoch zunehmend der Einfluss der turbulenten Prandtl-Zahl. Im direkten Vergleich zeigen die Korrelationen von Kays [22] und Weigand et al. [155] im Bereich $y^+ = 60 - 120$ die beste Übereinstimmung mit den DNS-Daten. Da letztgenannte Korrelation jedoch von „globalen“ Parametern wie der Reynolds-Zahl Re abhängt, ist ein Einsatz bei komplexeren Strömungen nicht ohne zusätzliche Erweiterungen bzw. Modifikationen möglich. Die von Kays [22] vorgestellte Korrelation hingegen ist rein von lokalen Strömungsgrößen, wie z.B. der turbulenten Wirbelviskosität ν_t , abhängig. Sie kann mit Turbulenzmodellen beliebiger Ordnung, wie z.B. Zweigleichungsmodellen, kombiniert werden. Für eine höhere molekulare Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ zeigt speziell im logarithmischen Bereich des Temperaturprofils neben der Korrelationen von Kays [22] auch die Korrelation von Cebeci & Bradshaw [56] eine gute Übereinstimmung mit den DNS-Daten. Eine Analyse des Einflusses der Reynolds-Zahl kann dem Anhang (vgl. Anhang A.2.2) entnommen werden.

Da der Einfluss des Turbulenzmodells bei der vorliegenden Untersuchung nicht berücksichtigt wurde, muss angemerkt werden, dass eventuelle Abweichungen in der Berechnung der turbulenten Wärmeflüsse stets auch von den jeweiligen Modellierungsfehlern z.B. bei der Bestimmung der turbulenten Wirbelviskosität abhängen.

6.3. Modellierung der turbulenten thermischen Diffusivität

6.3.1. Transportgleichung der Temperaturvarianz

Die Temperaturvarianz $\overline{T'^2}$ (bzw. $\overline{\theta'^2}$) nimmt im Rahmen der turbulenten Wärmeflussmodellierung eine zur turbulenten kinetischen Energie k vergleichbare Funktion ein. Sie definiert in Kombination mit ihrer Dissipationsrate ε_{TT} (bzw. $\varepsilon_{\theta\theta}$) die turbulenten thermische Skalen des Temperaturfeldes [71]. Speziell in auftriebsdominierten Strömungen geht die Temperaturvarianz als Einflussgröße in den Auftriebsterm der turbulenten Wärmeflüsse ein (vgl. Gl. (6.52)). Der Analyse und Modellierung ihrer wesentlichen Transportmechanismen kommt speziell unter Berücksichtigung des Skalenunterschieds zwischen Geschwindigkeit- und Temperaturfeld in Abhängigkeit der molekularen Prandtl-Zahl eine entscheidende Bedeutung zu.

Die Formulierung ihrer exakten Transportgleichung, die 1952 erstmals von Corrsin [160] beschrieben wurde, kann durch Multiplikation der skalaren Erhaltungsgleichung, in diesem Fall der instantanen Temperatur T bzw. Temperaturdifferenz Θ , mit der doppelten Temperaturfluktuation $2T'$ bzw. $2\theta'$ und einer anschließenden zeitlichen Mittelung bestimmt werden:

$$\mathcal{E}(T) 2T' = 0, \quad (6.23)$$

wobei der Operator $\mathcal{E}(T)$ die Anwendung der Energieerhaltungsgleichung auf die instantanen Temperatur symbolisiert. Die vollständige Transportgleichung der Temperaturvarianz $\overline{T'^2}$ ergibt sich somit zu [71]:

$$\underbrace{\frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial t}}_{\text{zeit. Änderung}} + \underbrace{\bar{u}_j \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_j}}_{\text{Konvektion}} = \underbrace{-2 \overline{u'_j T'}}_{\text{Produktion}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \underbrace{2 \alpha \left(\frac{\partial T'}{\partial x_j} \right)^2}_{\text{Dissipation}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha \frac{\partial \overline{T'^2}}{\partial x_j} \right)}_{\text{Mol. Diffusion}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\overline{u'_j T' T'} \right)}_{\text{Turb. Diffusion}}, \quad (6.24)$$

bzw. in einer in der Literatur üblichen symbolischer Notation:

$$L_{TT} + C_{TT} = P_{TT} - 2\varepsilon_{TT} + D_{TT}^V + D_{TT}^I. \quad (6.25)$$

Die linke Seite der Gl. (6.24) beschreibt die zeitliche Änderung L_{TT} und den konvektiven Transport der Temperaturvarianz durch die zeitlich gemittelte Geschwindigkeit C_{TT} . Die zeitliche Änderung der Temperaturvarianz ist an dieser Stelle zur Vollständigkeit mit aufgeführt, entfällt aber bei der Berechnung stationärer Strömungen. Beide Terme sind „exakt“ und bedürfen keiner Modellierung. Der erste Term der rechten Seite P_{TT} beschreibt den Produktionsmechanismus aufgrund der turbulenten Wärmefflüsse und des Temperaturgradienten. Auch dieser Term ist „exakt“ und muss nicht mit Hilfe eines Modellierungsansatzes bestimmt werden. Der zweite Term $2\varepsilon_{TT}$ repräsentiert den Vernichtungsterm der Transportgleichung. Die molekulare Dissipation stellt hierbei in Kombination mit der Temperaturvarianz $\overline{T'^2}$ eine Möglichkeit zur Formulierung turbulenter thermischer Zeit- und Längenskalen dar, die in vielen Modellierungsansätzen von signifikanter Bedeutung sind [71]. Die Dissipationsrate der Temperaturvarianz ε_{TT} ist analog zur Dissipationsrate der turbulenten kinetischen Energie ε nicht unmittelbar bestimmbar. Im Vergleich zur Temperaturvarianz $\overline{T'^2}$ erfordert die Entwicklung geeigneter Schließungsansätze für ε_{TT} einen wesentlich größeren Aufwand. Dies wird nachfolgend anhand ihrer exakten Transportgleichung erläutert. Der vierte Term der rechten Seite D_{TT}^V beschreibt die molekulare Diffusion der Temperaturvarianz. Im Unterschied zum fünften Term D_{TT}^I , der die turbulente Diffusion beschreibt, kann sie unmittelbar aus den gemittelten Strömungsgrößen bestimmt werden. Die turbulente Diffusion D_{TT}^I hingegen resultiert als sogenanntes drittes Moment unmittelbar aus dem Konvektionsterm und muss mit Hilfe geeigneter Modellierungsansätze formuliert werden. Diese reichen von einfachen Gradientenansätzen bis zu exakten Transportgleichung des dritten Momentes [58].

Mit Hilfe der DNS-Daten von Abe et al. [85,86] ist es möglich den Verlauf der einzelnen Wirkmechanismen der exakten Transportgleichung der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}$ zu analysieren (vgl. Abb. 6.10 und 6.11). Die einzelnen Terme stehen stets im Gleichgewicht, so dass ihre Summe dem Wert Null entsprechen muss. Für eine Kanalströmung niedriger molekularer Prandtl-Zahl Pr ist der wesentliche „Gegenspieler“ des exakten Produktionsterms P_{TT} der Dissipationsterm ε_{TT} . In unmittelbarer Wandnähe $y^+ \approx 12$ steigt der Einfluss des molekularen Diffusionsterms D_{TT}^v . Diffusion und Dissipation stehen an der Wand miteinander im Gleichgewicht. Im Gegensatz hierzu ist der Einfluss der turbulenten Diffusion D_{TT}^t nahezu vernachlässigbar in erzwungener Konvektion. Auch für eine höhere molekulare Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ zeigt sich ein ähnliches Verhalten der Transportterme. Die Größenordnung ist jedoch deutlich erhöht infolge der geringeren molekularen Dämpfung. Dies bewirkt auch eine Verschiebung des Maximums der Produktion zu kleineren Wandabständen ($y^+ \approx 10$). Die viskose thermische Unterschicht bleibt auf den wandnahen Bereich der Strömung beschränkt. Auch für diesen Bereich der Prandtl-Zahlen gleicht die Dissipation die Produktion in einem Großteil der Strömung aus. Im wandnahen Bereich nimmt neben der molekularen Diffusion D_{TT}^v auch die turbulente Diffusion D_{TT}^t eine im Vergleich zu niedrigen Prandtl-Zahlen geringfügig wichtigere Rolle ein. Es ist an dieser Stelle anzumerken, dass gemäß der Untersuchungen nach Otić et al. [161] die Modellierung der turbulenten Diffusion der Temperaturvarianz für stark auftriebsbehaftete Strömung zunehmend an Bedeutung gewinnt. Eine Analyse des Einflusses der Reynolds- und Prandtl-Zahl auf die Transportterme der Temperaturvarianz kann dem Anhang (vgl. Anhang A.2.3) entnommen werden.

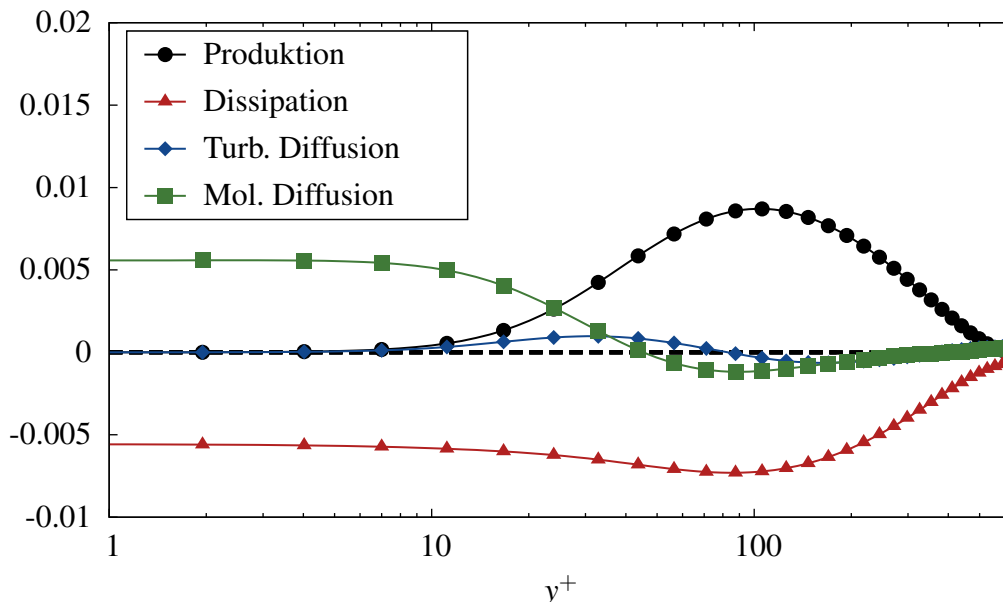


Abbildung 6.10.: Verlauf der entdimensionierten Transportterme der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}$ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ gemäß der DNS-Daten für eine vollständig entwickelte Plattenkanalströmung bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$ von Abe et al. [85,86].

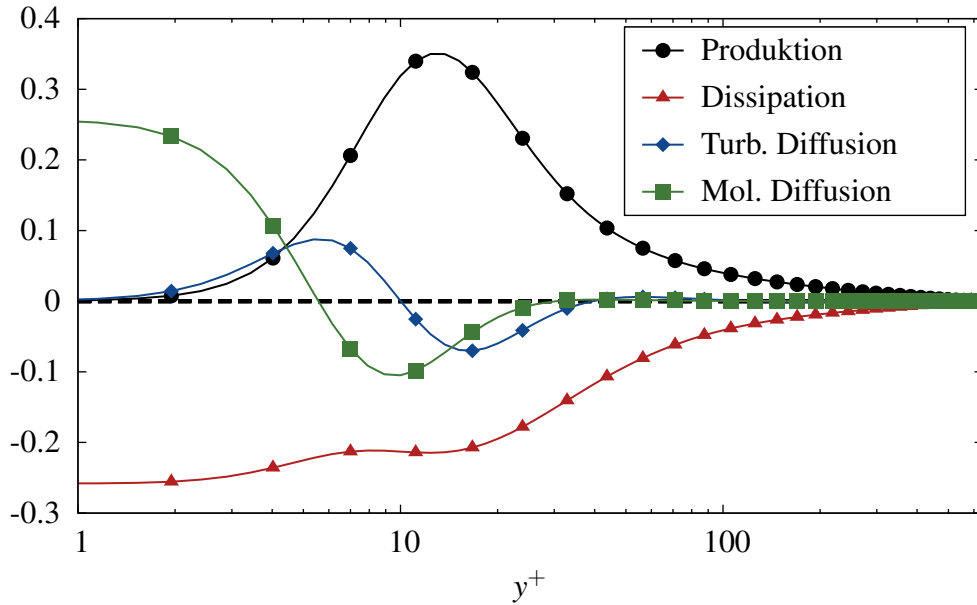


Abbildung 6.11.: Verlauf der entdimensionierten Transportterme der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}$ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ gemäß der DNS-Daten für eine vollständig entwickelte Plattenkanalströmung bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,71$ von Abe et al. [85,86].

6.3.2. Transportgleichung der Dissipationsrate der Temperaturvarianz

Die Dissipationsrate der Temperaturvarianz ε_{TT} bzw. $\varepsilon_{\theta\theta}$ kann über zwei verschiedene Ansätze bestimmt werden, die an dieser Stelle kurz erläutert werden sollen. Der erste Ansatz basiert in der Verwendung des sogenannten Zeitskalenverhältnisses R_h im homogenen wandfernen Bereich der Strömung. Dieses ist im Allgemeinen definiert als Verhältnis der thermischen τ_{th} und mechanischen Zeitskalen τ_m :

$$R = \frac{\tau_{th}}{\tau_m} = \left(\frac{\overline{T'^2}}{2\varepsilon_{TT}} \right) / \left(\frac{k}{\varepsilon} \right) \quad \text{bzw.} \quad R = \frac{\tau_{th}}{\tau_m} = \left(\frac{\overline{\theta'^2}}{2\varepsilon_{\theta\theta}} \right) / \left(\frac{k}{\varepsilon} \right). \quad (6.26)$$

Dieses kann für Strömungen hinreichend großer molekularer Prandtl-Zahl Pr im wandfernen Bereich der Strömung als nahezu konstant angenommen werden (vgl. Abb. 6.12). Der Einfluss der Reynolds-Zahl Re_τ ist jedoch deutlich zu erkennen. Die Dissipationsrate kann durch einfaches Umstellen der Gl. (6.26) ermittelt werden:

$$\varepsilon_{TT} = \left(\frac{\overline{T'^2}}{2R_h} \right) / \left(\frac{k}{\varepsilon} \right). \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \left(\frac{\overline{\theta'^2}}{2R_h} \right) / \left(\frac{k}{\varepsilon} \right). \quad (6.27)$$

Das Zeitskalenverhältnis R stellt für viele verschiedene Modellansätze eine wichtige Größe dar, da diese Größe maßgeblich den Einfluss der Skalentrennung infolge der molekularer Prandtl-Zahl repräsentiert. Betrachtet man nun eine übliche Plattenkanalströmung unter Verwendung der Er-

haltungsgröße $\overline{\Theta}$ kann mit Hilfe einer Taylor-Reihenentwicklung der turbulenten Fluktuationsgrößen in Wandnähe gezeigt werden, dass für verschwindende Temperaturfluktuationen an der Wand $\overline{\theta'^2}|_w = 0$ das Zeitskalenverhältnis R asymptotisch auf den Wert der molekularen Prandtl-Zahl Pr strebt (vgl. Abb. 6.12) [75]. Dies stellt eine wichtige Nebenbedingung der Modellierung der Dissipationsrate $\varepsilon_{\theta\theta}$ in Plattenkanalströmungen dar.

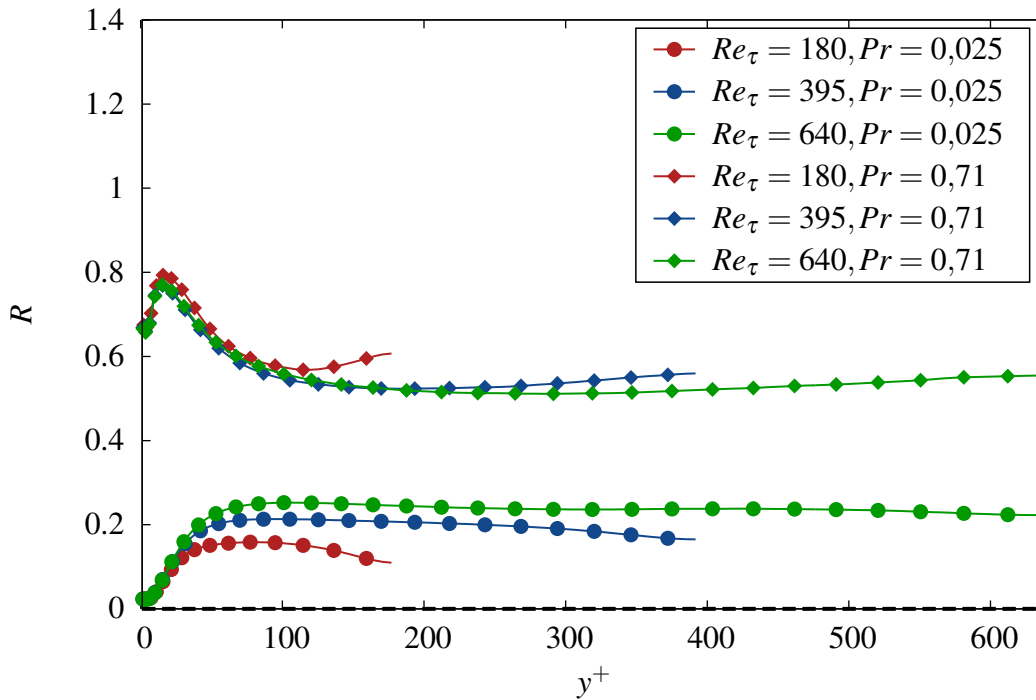


Abbildung 6.12.: Verlauf des Zeitskalenverhältnisses R über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ turbulenter Plattenkanalströmungen mit variierender Reynolds-Zahl Re_τ und unterschiedlichen molekularen Prandtl-Zahlen, $Pr = 0,025$ und $Pr = 0,71$, ermittelt mit Hilfe der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].

Ein Nachteil dieser Methodik ist, dass für jeden Strömungstyp einer jeweiligen molekularen Prandtl- Pr bzw. Reynolds-Zahl Re_τ eine genaue Kenntnis des Zeitskalenverhältnisses im homogenen Bereich der Strömung erforderlich ist. Speziell für komplexe Strömungen oder Strömungen unter Berücksichtigung von Auftriebseffekten ist dies nicht zwangsläufig aus experimentellen oder numerischen Daten mit hinreichender Genauigkeit bekannt.

Die zweite Möglichkeit der Modellierung basiert auf dem Lösen einer zusätzlichen Transportgleichung für ε_{TT} bzw. $\varepsilon_{\theta\theta}$. Die Transportgleichung weist in ihrer Komplexität und ihrer Ableitung große Ähnlichkeit zur Transportgleichung der Dissipationsrate der turbulenten kinetischen Energie ε auf. Zunächst wird die partielle Ableitung nach x_j der beiden Seiten der Transportgleichung der instantanen Temperatur $T = \overline{T} + T'$ gebildet. Anschließend kann jeder Term mit $2\alpha (\partial T' / \partial x_j)$ multipliziert und eine zeitliche Mittelung durchgeführt werden [71]:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\frac{\partial \varepsilon_{TT}}{\partial t}}_{\text{zeit. Änderung}} + \underbrace{\bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon_{TT}}{\partial x_j}}_{\text{Konvektion}} &= \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\alpha \frac{\partial \varepsilon_{TT}}{\partial x_k} \right)}_{\text{Mol. Diffusion}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(-\overline{\varepsilon'_{TT} u'_k} \right)}_{\text{Turb. Diffusion}} \\
 &\quad - \underbrace{2\alpha \left(\frac{\partial T'}{\partial x_l} \frac{u'_k}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} - 2\alpha \left(\frac{\partial T'}{\partial x_l} \frac{\partial T'}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - 2\alpha u'_k \frac{\partial T'}{\partial x_l} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_k \partial x_l}}_{\text{Produktion bzw. Vernichtung durch Hauptströmung}} \\
 &\quad - \underbrace{2\alpha \frac{\partial T'}{\partial x_k} \frac{\partial T'}{\partial x_l} \frac{\partial u'_k}{\partial x_l}}_{\text{Prod. bzw. Vern. durch Fluktuationen}} - \underbrace{2\alpha^2 \frac{\partial^2 T'}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial^2 T'}{\partial x_j \partial x_i}}_{\text{mol. Vernichtungsterm}},
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

bzw. in symbolischer Notation:

$$L_{\varepsilon_{TT}} + C_{\varepsilon_{TT}} = D_{\varepsilon_{TT}}^v + D_{\varepsilon_{TT}}^t + P_{\varepsilon_{TT}1} + P_{\varepsilon_{TT}2} + P_{\varepsilon_{TT}3} + P_{\varepsilon_{TT}4} - Y_{\varepsilon_{TT}}. \tag{6.29}$$

Auch hierfür müssen eine Vielzahl von Produktion-, Vernichtungs- und Diffusionstermen geeignet modelliert werden. Leider existieren keine aus experimentellen Daten bestimmten Verläufe der einzelnen Terme, so dass die Entwicklung von Ansätzen der Modellierung rein auf Basis numerischer Daten beruht. Die ersten beiden Terme beschreiben die zeitliche Änderung $L_{\varepsilon_{TT}}$ und Konvektion $C_{\varepsilon_{TT}}$. Die beiden Terme der rechten Seite $D_{\varepsilon_{TT}}^v$ und $D_{\varepsilon_{TT}}^t$ entsprechen der molekularen und turbulenten Diffusion. Die turbulente Diffusion muss geeignet modelliert werden. Üblicherweise erfolgt dies mittels eines Gradientenansatzes (SGDH bzw. GGDH). Die Summe der Terme $P_{\varepsilon_{TT}1} + P_{\varepsilon_{TT}2} + P_{\varepsilon_{TT}3}$ stellt die Produktion bzw. Vernichtung von ε_{TT} infolge der Hauptströmung dar. Der vorletzte Term $P_{\varepsilon_{TT}4}$ stellt ebenfalls einen Produktions- bzw. Vernichtungsterm dar infolge der turbulenten Fluktuationsgrößen. Der letzte Term $Y_{\varepsilon_{TT}}$ beschreibt die molekulare Vernichtung der Dissipationsrate ε_{TT} .

Auch für diesen Fall müssen sämtliche Terme, die auf unbekanntem Fluktuationsgrößen basieren, modelliert werden. Geeignete Modellansätze bzw. Vereinfachungen der exakten Transportgleichungen, sollen nachfolgend für unterschiedliche Modelle diskutiert werden.

6.3.3. Ansatz von So & Sommer (1994)

Das turbulente Wärmeflussmodell von So & Sommer [162] ist eine Modifikation des Schließungsansatzes von Sommer et al. [163] aus dem Jahr 1992. Die turbulente thermische Diffusivität α_t wird im Rahmen dieses Modells unter Einsatz einer Transportgleichungen der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}$ und ihrer Dissipationsrate $\varepsilon_{\theta\theta}$ bestimmt. So & Sommer [162] folgen in ihrer Arbeit der

Argumentation von Nagano et al. [164] bzw. So et al. [165]. Diese besagt, dass eine Berechnung der turbulenten Wärmeflüsse auf Basis von Zweigleichungsmodelle die niedrigst erforderliche Modellierungsstufe in erzwungener Konvektion darstellt. Die resultierende Genauigkeit eines Ansatzes erster Ordnung der turbulenten Wärmeflüsse, ist in diesem Fall stark an die Ordnung und Genauigkeit des Schließungsansatzes der Impulserhaltungsgleichung gekoppelt [162].

Analog zur turbulenten Wirbelviskosität ν_t kann die turbulente thermische Diffusivität α_t mit Hilfe eines turbulenten Geschwindigkeits- und Längenmaßes bestimmt werden. Das Geschwindigkeitsmaß wird, wie im Rahmen der Turbulenzmodellierung üblich, mit Hilfe der turbulenten kinetischen Energie $k^{1/2}$ gebildet. Das turbulente Längenmaß hingegen kann aus dem Produkt eines turbulenten Geschwindigkeits- und Zeitmaßes ermittelt werden. Um den Einfluss der Skalentrennung infolge der Prandtl-Zahl zu berücksichtigen, schlagen Sommer et al. [163] in der Formulierung des turbulenten Zeitmaßes eine Kombination der mechanischen τ_m und thermischen Zeitskalen τ_{th} (vgl. Gl. (6.26)) vor. Die turbulente thermische Diffusivität α_t kann nun wie folgt ermittelt werden [162,163]:

$$\alpha_t = C_\lambda f_\lambda k \left[k \overline{T'^2} / \varepsilon \varepsilon_{TT} \right]^{1/2}, \quad (6.30)$$

wobei die Größen C_λ und f_λ eine Konstante und eine Dämpfungsfunktion darstellten.

Im ursprünglichen Ansatz von Sommer et al. [163] ist der Koeffizient mit $C_\lambda = 0,11$ angegeben. Die Dämpfungsfunktion f_λ ist wie folgt formuliert:

$$f_\lambda = \left[\exp \left(- (Re_t/80)^2 \right) \frac{C_{\lambda 1}}{Re_t^{1/4}} \right] + [1 - \exp(-y^+/A^+)]^2, \quad (6.31)$$

wobei die Koeffizienten mit $C_{\lambda 1} = 0,1$ und $A^+ = 30$ angegeben werden [163]. Die Größe $Re_t = k^2 / (\varepsilon \nu)$ entspricht der sogenannten turbulenten Reynolds-Zahl. So & Sommer [162] erweitern diese Formulierung unter Berücksichtigung der molekularen Prandtl-Zahl Pr :

$$f_\lambda(Pr) = C_{\lambda 1}(Pr) [1 - f_{\lambda 1}(Pr)] / Re_t^{1/4} + f_{\lambda 1}(Pr), \quad (6.32)$$

wobei die Funktion $f_{\lambda 1}(Pr) = \{1 - \exp[-y^+/A^+(Pr)]\}^2$ die bereits im ursprünglichen Modell eingesetzte Dämpfungsfunktion (vgl. zweiter Term der Gl. (6.31)) darstellt.

Durch eine Analyse des asymptotischen Wandverhaltens der turbulenten Fluktuationsgrößen kann nachgewiesen werden, dass die turbulente thermische Diffusivität α_t sich der Wand asymptotisch mit y^{+3} nähert [162]. In ihrem Ansatz beruht die Dämpfungsfunktion $f_{\lambda 1}$ auf einer van Driest'schen Dämpfungsfunktion, die als Funktion des dimensionslosen Wandabstandes y^+ das korrekte asymptotische Verhalten³⁷ der turbulenten thermischen Diffusivität sicherstellen soll. Der

³⁷Für beide Dämpfungsfunktionen ist leicht nachzuweisen (vgl. Gl. (6.31)), dass infolge des Quadrats ihr asymptotisches Verhalten an die Wand proportional zu y^{+2} ist.

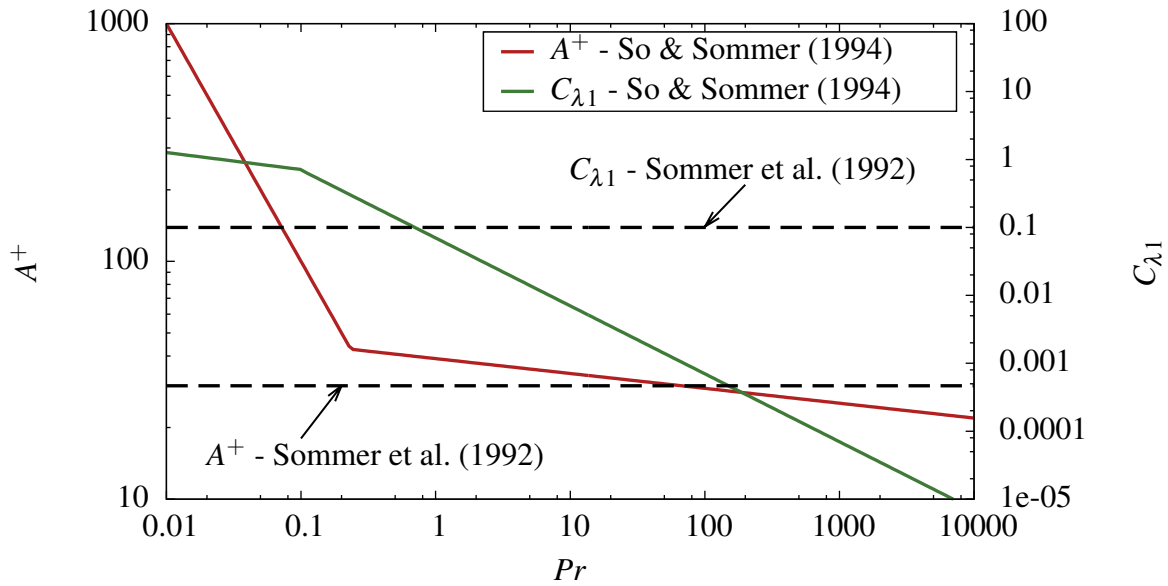


Abbildung 6.13.: Verlauf der Koeffizienten C_{λ_1} und A^+ der Dämpfungsfunktion f_λ von Sommer et al. [163] sowie So & Sommer [162] in Abhängigkeit der molekularen Prandtl-Zahl Pr .

Einfluss der Prandtl-Zahl soll durch geeignete Wahl der Koeffizienten A^+ und C_{λ_1} in die Modellierung der turbulenten thermischen Diffusivität eingeführt werden [162]:

$$A^+(Pr) = \begin{cases} 10/Pr & \text{für } Pr < 0,25, \\ 39/Pr^{1/16} & \text{für } Pr \geq 0,25, \end{cases} \quad (6.33)$$

$$C_{\lambda_1}(Pr) = \begin{cases} 0,4/Pr^{1/4} & \text{für } Pr < 0,1, \\ 0,07/Pr & \text{für } Pr \geq 0,1. \end{cases} \quad (6.34)$$

Die Konstante $C_\lambda = 0,095$ ist nach So & Sommer [162] geringfügig niedriger gewählt als in der Arbeit von Sommer et al. [163]. Der Verlauf der Funktionen $C_{\lambda_1}(Pr)$ und $A^+(Pr)$ ist jeweils für eine variierende molekulare Prandtl-Zahl in Abb. 6.13 dargestellt. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass So & Sommer [162] den Verlauf der beiden Koeffizienten durch eine Parameterstudie des numerischen Modells im Vergleich zur Korrelation von Kader [166] ermittelten. Dieses Vorgehen beinhaltet somit auch die Korrektur des Fehlers, der auf Abweichungen bei der numerischen Berechnung der mechanischen und thermischen Zeitskalen τ_m bzw. τ_{th} und somit auf das, von So & Sommer [162] bzw. Sommer et al. [163] im Rahmen ihrer Untersuchung eingesetzte, Turbulenzmodell³⁸ zurückzuführen ist. Um den Einfluss dieses Modellierungsfehlers bei der Wahl der Koeffizienten $C_{\lambda_1}(Pr)$ und $A^+(Pr)$ zu prüfen, ist in den Abb. 6.14 und 6.14 der auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86] ermittelte Verlauf der turbulenten thermischen Diffusivität α_t^+ für die beiden Prandtl-Zahlen $Pr = 0,025$ und $Pr = 0,71$ dargestellt.

³⁸Beide Modelle sind mit einem Reynolds-Spannungsmodell von Zhang et al. [167] kombiniert.

Speziell für niedrige molekulare Prandtl-Zahlen $Pr = 0,025$ ist zu erkennen, dass die Dämpfung für das Modell von So & Sommer [162] infolge eines zu hohen Wertes des Parameters $A^+(Pr)$ im Bereich der Kernströmung zu stark ist. Für das Modell von Sommer et al. [163] mit einem konstanten Parameter $A^+ = 30$ zeigt sich für niedrige Prandtl-Zahlen hingegen eine zu niedrige Dämpfung der turbulenten thermischen Diffusivität α^+ . Bedingt durch den zu niedrig bestimmten Impulsaustausch des Modells von So & Sommer [162] lässt sich erwarten, dass, unter Annahme einer idealen Berechnung des Verlaufs der turbulenten Reynolds-Spannungen, die Nusselt-Zahl als integrale Größe zu niedrig vorhergesagt wird. Für eine höhere Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ zeigt das Modell von So & Sommer [162], speziell im wandnahen Bereich der Strömung, eine wesentlich bessere Übereinstimmung mit den DNS-Daten [85,86] mit einer Abweichung des Maximums von 4 % zur DNS. In der Kanalmitte $y^+ \approx 640$ ist jedoch eine deutliche Unterbewertung (ca. 25 %) zu erkennen. Auch für diesen Fall ist der Parameter im Ansatz von Sommer et al. [163] zu niedrig gewählt und das Maximum der turbulenten thermischen Diffusivität wird ca. 22 % überschätzt.

Beide Ansätze lassen sich nicht im Bereich niedriger Prandtl-Zahlen empfehlen. Es soll angemerkt werden, dass diese Bewertung keine Aussage bezüglich der verschiedenen Modellansätze der Transportgleichung der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}$ oder ihrer Dissipationsrate $\varepsilon_{\theta\theta}$ beinhaltet. Eine Verbesserung bzw. Modifikation des Ansatzes von So & Sommer [162] muss, gemäß der vorliegenden Untersuchung, für die Koeffizienten $A^+(Pr)$ und $C_{\lambda 1}$ erfolgen. Die Dämpfungswirkung der Funktion f_λ im Bereich niedriger Prandtl-Zahlen ist zu groß gewählt. Auch ein Einfluss der Reynolds-Zahl Re_τ bzw. der Péclet-Zahl Pe_τ ist für die Wahl eines geeigneten Koeffizientenpaares zu überdenken.

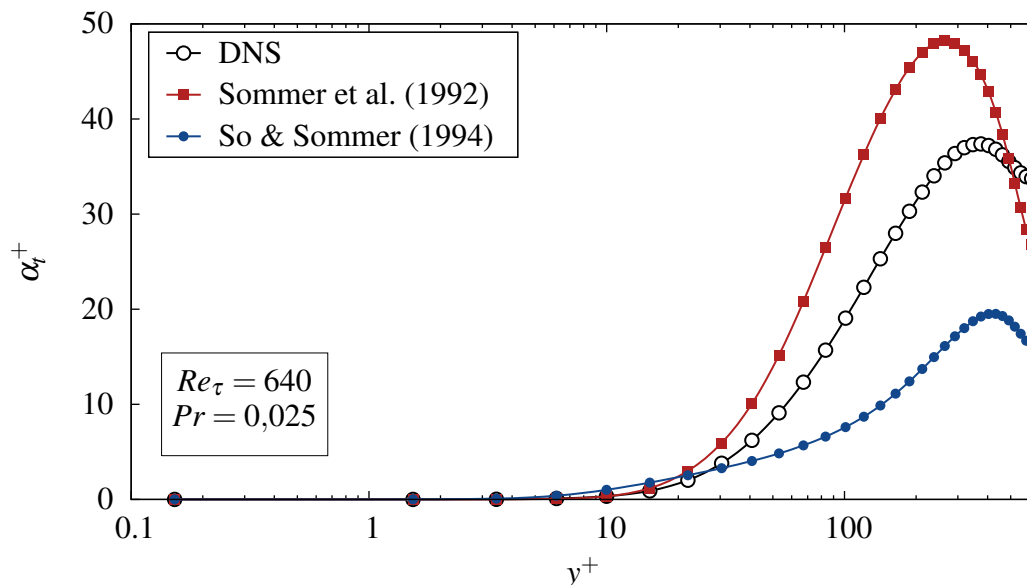


Abbildung 6.14.: Verlauf der turbulenten Diffusivität α_r^+ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ für die Modelle von Sommer et al. [163] und So & Sommer [162] im Vergleich zu den DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).

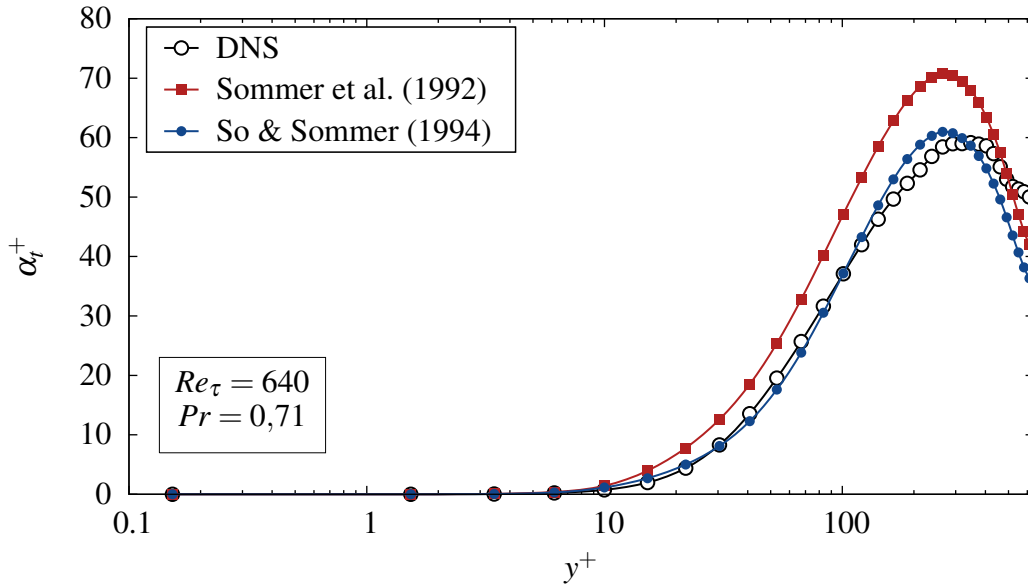


Abbildung 6.15.: Verlauf der turbulenten Diffusivität α_t^+ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ für die Modelle von Sommer et al. [163] und So & Sommer [162] im Vergleich zu den DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,71$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).

Die Transportgleichungen der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}$ bzw. ihrer Dissipationsrate $\varepsilon_{\theta\theta}$ können nach So & Sommer [162] (in üblicher Notation bei Kanalströmungen) wie folgt angegeben werden:

$$\frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\alpha \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_{\theta^2} \overline{u'_k u'_j} \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_j} \right) - 2 \overline{u'_k \theta'} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_k} - 2 \varepsilon_{\theta\theta}, \quad (6.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\alpha \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(C_{\theta\theta} \overline{u'_k u'_j} \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial x_j} \right) + C_{d1} \frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{\bar{\theta}^2} P_\theta \\ &\quad C_{d2} \frac{\varepsilon}{k} P_\theta + C_{d3} \frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{k} P_k - C_{d4} \frac{\tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}}{\bar{\theta}^2} \varepsilon_{\theta\theta} - C_{d5} \frac{\tilde{\varepsilon}_{\theta\theta}}{k} \varepsilon_{\theta\theta} + \zeta_{\varepsilon\theta}, \end{aligned} \quad (6.36)$$

wobei die Größen $P_\theta = -\overline{u'_k \theta'}$ ($\partial \bar{\Theta} / \partial x_k$) und $P_k = -\overline{u'_i u'_j}$ ($\partial \bar{u}_i / \partial x_j$) die Produktionsterme der Temperaturvarianz und der turbulenten kinetischen Energie darstellen. Der Term $\zeta_{\varepsilon\theta}$ stellt eine Korrekturfunktion im wandnahen Bereich der Strömung unter Berücksichtigung eines korrekten asymptotischen Verhaltens der Temperaturvarianz und ihrer Dissipationsrate dar. Er ist durch So & Sommer [162] wie folgt angegeben:

$$\begin{aligned} \zeta_{\varepsilon\theta} = \exp \left(- (Re_t / 80)^2 \right) &\left[(C_{d4} - 4) \frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{\bar{\theta}^2} \tilde{\varepsilon}_{\theta\theta} + C_{d5} \frac{\tilde{\varepsilon}}{k} \varepsilon_{\theta\theta} - \frac{\varepsilon_{\theta\theta}^{*2}}{\bar{\theta}^2} \right. \\ &\left. + (2 - C_{d1} - C_{d2} Pr) \frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{\bar{\theta}^2} P_\theta^* \right], \end{aligned} \quad (6.37)$$

wobei P_θ^* der Produktion infolge des Temperaturgradienten in Strömungsrichtung entspricht. Die Größen $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - 2\nu \left(\partial \sqrt{k} / \partial d \right)$, $\varepsilon_{\theta\theta}^* = \varepsilon_{\theta\theta} - \alpha \overline{\theta'^2} / d^2$ und $\tilde{\varepsilon}_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta} - \alpha \left[\partial \sqrt{\overline{\theta'^2}} / \partial d \right]^2$ entsprechen der modifizierten Dissipationsrate der turbulenten kinetischen Energie bzw. der Temperaturvarianz. In diesem Kontext entspricht die Größe d der wandnormalen Koordinate bzw. dem wandnormalen Abstand. Die Koeffizienten der turbulenten Diffusionsterme sowie der Produktionsterme beider Gleichungen sind nach So & Sommer [162] angegeben zu:

$$\begin{aligned} C_{d1} = 1,8; \quad C_{d2} = 0; \quad C_{d3} = 0,72; \quad C_{d4} = 2,2; \quad C_{d5} = 0,8; \\ C_{\theta^2} = 0,11; \quad C_{\theta\theta} = 0,11. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Die jeweiligen Formulierungen der Transportgleichungen der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}$ und ihrer Dissipationsrate $\varepsilon_{\theta\theta}$ hängen zwar nicht vom dimensionslosen Wandabstand y^+ ab, jedoch von der wandnormalen Koordinate d . Dies kann für komplexere Geometrien unerwünscht sein und muss für diese Fälle hinreichend untersucht werden. Eine potenzielle Erweiterung des Ansatzes von So et al. [162] kann dem Anhang (vgl. Anhang A.2.5) entnommen werden.

6.3.4. Ansätze von Abe et al. (1995) und Manservisi & Menghini (2014)

Abe et al. [61] verfolgten für ihren Modellansatz ein ähnliches Vorgehen wie So & Sommer [162]. Neben der Modellierung eines geeigneten Längenmaßes in der Modellierung der turbulenten thermischen Diffusivität α_t , das gleichbedeutend für den wandnahen und wandfernen Bereich der Strömung geeignet ist, liegt der wesentliche Fokus ihrer Arbeit in der Modellierung geeigneter Zeitskalen zwischen Geschwindigkeits- und Temperaturfeld:

$$\alpha_t \propto k \quad \tau_\gamma = k^{1/2} \left(k^{1/2} \tau_\gamma \right), \quad (6.39)$$

wobei τ_γ in diesem Zusammenhang einem „hybriden“ Zeitmaß entspricht, das wiederum aus einer Kombination des mechanischen τ_m und thermischen Zeitmaßes τ_{th} zu bestimmen ist [61]:

$$\tau_\gamma \propto \left(\tau_m^l \tau_{th}^m \right) = \tau_m R^m \quad (l + m = 1). \quad (6.40)$$

Die Größe R entspricht in diesem Zusammenhang dem Zeitskalenverhältnis gemäß Gl. (6.26). Es existiert eine Vielzahl von Möglichkeiten der Bestimmung der Exponenten l und m , jedoch unter der Bedingung, dass ihre Summe stets dem Wert $l + m = 1$ entspricht. Eine Möglichkeit ist die Verwendung einer von Zeman & Lumley [168] vorgeschlagenen, gemischten Zeitskala als harmonischen Mittelwert der Zeitskalen des Geschwindigkeits- und Temperaturfeldes:

$$\tau_\gamma \propto \left(1/\tau_m + C_m/\tau_{th} \right)^{-1} = \tau_m [R / (C_m + R)], \quad (6.41)$$

wobei C_m eine Konstante darstellt. Abe et al. [61] untersuchten darüber hinaus unterschiedliche Dämpfungsfunktionen für den wandnahen Bereich der Strömung. Um ihren Modellvorschlag auch für abgelöste Strömungen, z.B. über eine rückwärtsgeneigte Stufe, zu erweitern, wird der üblicherweise eingesetzte dimensionslose Wandabstand y^+ in der van Driest'schen Dämpfungsfunktion durch eine alternative Formulierung $y^* = u_\varepsilon d/v$ ersetzt. Die Größe $u_\varepsilon = (v\varepsilon)^{1/4}$ entspricht dem Kolmogorov'schen Geschwindigkeitsmaß (vgl. Gl. (3.3)).

Abe et al. [61] schlagen drei verschiedene Modellansätze vor. Der erste Modellansatz, nachfolgend als Modell A bezeichnet, lautet:

$$\begin{aligned} \alpha_t = C_\lambda & \left\{ \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{2R}{C_m + R} \right) + 3k^{1/2} \left(\frac{v^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \frac{(2R)^{1/2}}{Pr} f_d \right\} \\ & \times \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{y^*}{14} \right) \right\} \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{Pr^{1/2} y^*}{14} \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.42)$$

Er basiert auf der Anwendung eines zusammengesetzten Zeitmaßes. Die Konstante dieses Zeitmaßes wird zu $C_m = 0,5$ gewählt, so dass die resultierende turbulente Prandtl-Zahl $Pr_t = \nu_t/\alpha_t$ des Modells den üblichen Wert $Pr_t = 0,9$ annimmt. Unter alleiniger Berücksichtigung der Bedingung der Exponenten formulierten Abe et al. [61] ein weiteres Modell (Modell B) mit $m = 1$:

$$\begin{aligned} \alpha_t = C_\lambda & \left\{ \frac{k^2}{\varepsilon} (2R) + 3k^{1/2} \left(\frac{v^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \frac{(2R)^{1/2}}{Pr} f_d \right\} \\ & \times \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{y^*}{14} \right) \right\} \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{Pr^{1/2} y^*}{14} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (6.43)$$

sowie für den Exponenten $m = 1/2$ (Modell C):

$$\begin{aligned} \alpha_t = C_\lambda & \left\{ \frac{k^2}{\varepsilon} (2R)^{1/2} + 3k^{1/2} \left(\frac{v^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \frac{(2R)^{1/2}}{Pr} f_d \right\} \\ & \times \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{y^*}{14} \right) \right\} \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{Pr^{1/2} y^*}{14} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

In jeweils allen drei Modellen ist die Konstante zu $C_\lambda = 0,1$ angegeben, sowie die Dämpfungsfunktion im zweiten Term zu $f_d = \exp \left(- (Re_t/200)^2 \right)$ [61]. Es ist leicht nachzuweisen, dass die turbulente thermische Diffusivität infolge der Dämpfungsfunktionen ein asymptotisches Verhalten proportional zu y^{+3} aufweist. Für den wandnahen Bereich der Strömung ist einzig der zweite Term von Bedeutung. Mit zunehmendem Wandabstand verringert sich jedoch sein Einfluss und der erste Term bestimmt zunehmend den Verlauf der turbulenten thermischen Diffusivität α_t . Für eine Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ kann gemäß der DNS-Daten [85] das Zeitskalenverhältnis im homo-

genen Bereich der Strömung zu $R \approx 0,5$ angenommen werden (vgl. Abb. 6.12). Fernab der Wand ist somit zu erwarten, dass sich für alle drei Modellvorschläge A, B und C nach Abe et al. [61] ein nahezu identischer Verlauf einstellt. Für Strömungen niedriger Prandtl-Zahl, z.B. für $Pr = 0,025$, hingegen trifft dies nicht zu. Abe et al. [61] weisen in ihrer Arbeit explizit darauf hin, dass ein allgemeingültiger Modellansatz speziell unter Berücksichtigung des Einflusses der molekularen Prandtl-Zahl durch keinen der drei Modellvorschläge gegeben ist. Dies soll nachfolgend anhand der DNS-Daten [85] überprüft werden.

In Abb. 6.16 und 6.17 ist der Verlauf der normierten, turbulenten thermischen Diffusivität α_t^+ gemäß der drei Modellvorschläge über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ aufgetragen. Es zeigt sich, dass speziell für niedrige Prandtl-Zahlen ($Pr = 0,025$) keiner der drei Ansätze für turbulente Kanalströmungen eine akzeptable Übereinstimmung mit den DNS-Daten aufweist. Dies lässt sich auf einen zu starken, kombinierten Einfluss der drei Dämpfungsfunktionen zurückführen. Für höhere Prandtl-Zahlen ($Pr = 0,71$) hingegen zeigt sich eine deutlich bessere Übereinstimmung der drei verschiedenen Ansätze im Vergleich zu den DNS-Daten. Die relative Abweichung zur DNS beträgt für das Maximum ca. 10 %. Es lässt sich schlussfolgern, dass eine Verbesserung der Modelle von Abe et al. [61] durch die Modifikation der Dämpfungsfunktionen und des kombinierten Zeitskalenverhältnisses (vgl. Gl. (6.40)) erzielt werden muss.

Der Modellvorschlag von Manservisi & Menghini [65,66] setzt genau an diesem Punkt an und erweitert die Definition der lokalen thermische Zeitskala τ_γ (vgl. Gl. (6.39)) speziell für Strömungen niedriger molekularer Prandtl-Zahl. Leider sind die Veröffentlichungen von Manservisi & Menghini [65,66] hinsichtlich der Formulierungen und Definitionen der einzelnen Funktionen untereinander inkonsistent bzw. teilweise auch fehlerbehaftet. Im Nachfolgenden sei demnach eine, in Abgleich zur ursprünglichen Veröffentlichung von Abe et al. [61] rekonstruierte, Variante ihres Modells angegeben. Ausgangsgleichung für die Formulierung der turbulenten thermischen Diffusivität ist erneut die Gl. (6.39). Der Ansatz nach Manservisi & Menghini [65,66] für diese Größe kann nun wie folgt formuliert werden:

$$\alpha_t = C_\lambda \left\{ \frac{k^2}{\varepsilon} \left[\frac{1}{Pr_{t\infty}} + \left(\frac{2R}{C_m + R} \right) f_\phi \right] + 1,3 k^{1/2} \left(\frac{v^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \frac{\sqrt{2R}}{Pr} f_d \right\} \times \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{y^*}{14} \right) \right\} \left\{ 1 - \exp \left(-\frac{Pr^{1/2} y^*}{19} \right) \right\}, \quad (6.45)$$

wobei die beiden Dämpfungsfunktionen angegeben werden zu:

$$f_\phi = 1 - \exp \left(-(Re_t/500)^2 \right) \quad \text{und} \quad f_d = 1 - \exp \left(-(Re_t/200)^2 \right). \quad (6.46)$$

Diese Formulierung zeigt große Ähnlichkeiten zum Ausgangsmodell von Abe et al. [61]. Der Koeffizient $C_\lambda = 0,1$ ist identisch gewählt. Der erste Term, der im Bereich der Kernströmung wirkt,

entspricht dem Konzept einer konstanten turbulenten Prandtl-Zahl $Pr_{t\infty} = 0,9$. Der zweite Term stellt eine aus der mechanischen und thermischen Zeitskala zusammengesetzten Größe dar, wobei der zugehörige Parameter einen Wert $C_m = 0,3$ aufweist. Im Gegensatz zu Abe et al. [61] wird für diese Zeitskala eine zusätzliche Dämpfungsfunktion f_ϕ (vgl. Gl. (6.46)) eingeführt. Für den dritten Term fällt auf, dass der Wert des vorangestellten Koeffizienten im Vergleich zur den Modellansätzen nach Abe et al. [61] von 3 auf 1,3 reduziert wurde. Die zu diesem Term zugehörige Dämpfungsfunktion f_d entspricht hingegen ihrer ursprünglichen Definition. Die zwei nachfolgenden Terme sind ebenfalls Dämpfungsfunktionen in Abhängigkeit des normierten Wandabstands $y^* = u_\epsilon d/\nu$ und ähneln ebenfalls in ihrer Form der ursprünglichen Modellformulierung. Einzig der Nenner der zweiten Dämpfungsfunktion ist mit einem Wert 19 (vgl. Gl. (6.44)) geringfügig höher gewählt. Dies führt zu einer geringeren Dämpfungswirkung im Übergangsbereich des wandnahen und wandfernen Bereichs.

Der Vergleich der verschiedenen vorgestellten Modellkonzepte kann für zwei unterschiedliche Prandtl-Zahlen $Pr = 0,025$ und $0,71$ den Abb. 6.16 und 6.17 entnommen werden. Das Modell von Manservisi & Menghini [65,66] zeigt gemäß der Erwartung eine wesentlich bessere Übereinstimmung für niedrigere Prandtl-Zahlen mit einer relativen Abweichung des Maximalwertes von ca. 15 %. Bei höheren Prandtl-Zahlen hingegen (vgl. Abb. 6.17) wird der Verlauf der turbulenten thermischen Diffusivität deutlich überbewertet (rel. Abweichung von bis zu 44 %).

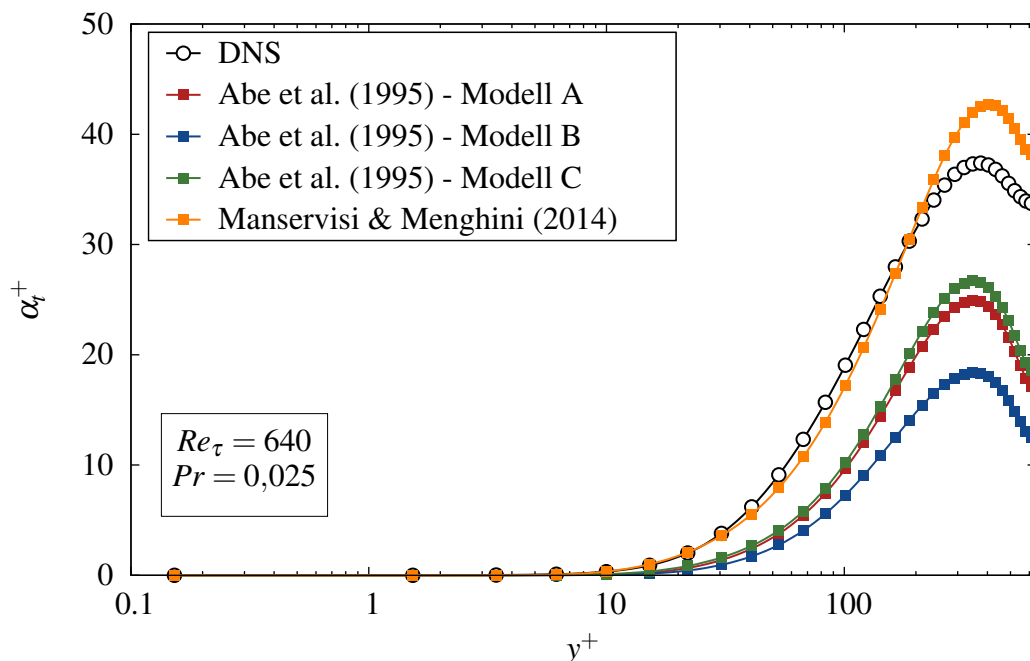


Abbildung 6.16.: Verlauf der turbulenten Diffusivität α_t^+ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ für die Modelle von Abe et al. [61] und Manservisi & Menghini [65,66] im Vergleich zu den DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).

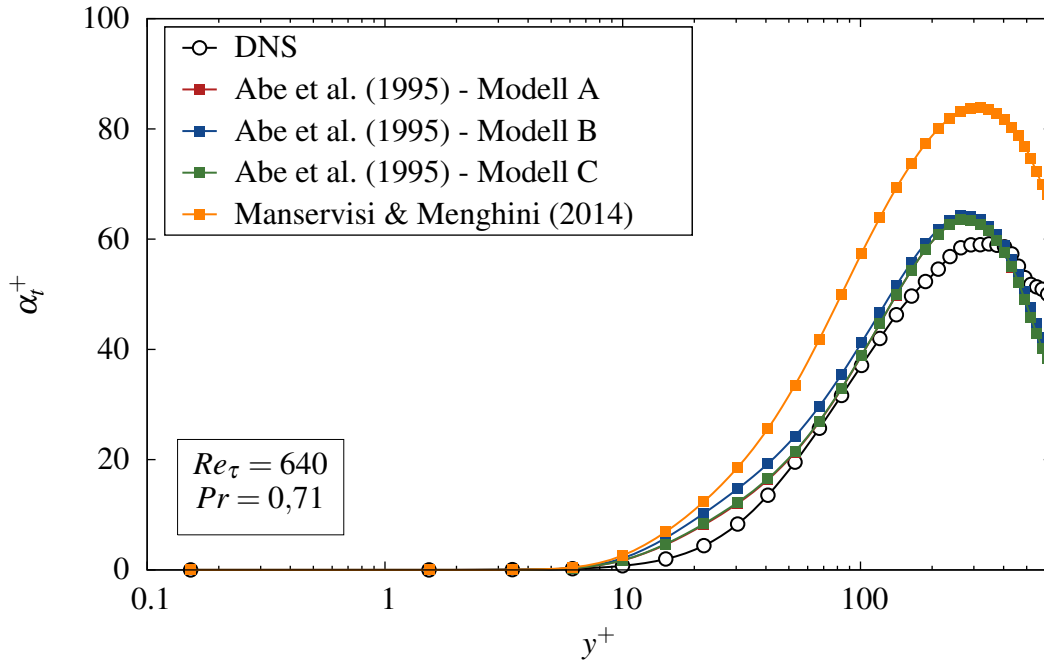


Abbildung 6.17.: Verlauf der turbulenten Diffusivität α_t^+ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ für die Modelle von Abe et al. [61] und Manservisi & Menghini [65,66] im Vergleich zu den DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,71$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).

Einer der wesentlichen Vorteile gegenüber dem Konzept der turbulenten Prandtl-Zahl ist die „natürliche“ Berücksichtigung des Skalenunterschieds bei niedrigen Prandtl-Zahlen zwischen dem Geschwindigkeits- und Temperaturfeld durch Einbeziehen des Zeitskalenverhältnisses R (vgl. Gl. (6.26)) in die Modellierung der turbulenten thermischen Diffusivität α_t . Um das Zeitskalenverhältnisses R zu berechnen, formulieren Abe et al. [61] folgende modellierte Form der Transportgleichungen der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}$ sowie ihrer Dissipationsrate $\varepsilon_{\theta\theta}$:

$$\frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \left(\alpha + \frac{\alpha_t}{\sigma_h} \right) \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_k} \right\} - 2 \overline{u'_k \theta'} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_k} - 2 \varepsilon_{\theta\theta}, \quad (6.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial x_k} = & \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \left(\alpha + \frac{\alpha_t}{\sigma_\phi} \right) \frac{\partial \varepsilon_{\theta\theta}}{\partial x_k} \right\} - C_{P1} f_{P1} \frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{\overline{\theta'^2}} \overline{u'_k \theta'} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial x_j} \\ & - C_{P2} f_{P2} \frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{k} \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - C_{D1} f_{D1} \frac{\varepsilon_{\theta\theta}^2}{\overline{\theta'^2}} - C_{D2} f_{D2} \frac{\varepsilon_{\theta\theta}}{k}, \end{aligned} \quad (6.48)$$

wobei der Zusammenhang zwischen turbulentem Wärmeflussvektor und der zeitlich gemittelten Temperatur bzw. skalaren Erhaltungsgröße $\bar{\Theta}$ wie folgt definiert ist:

$$\overline{u'_j \theta'} = -\alpha_t \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_j}. \quad (6.49)$$

In den Transportgleichungen werden in beiden Ansätzen für die turbulente Diffusion ausschließlich isotrope Gradientenansätze unter Verwendung einer jeweiligen Schmidt-Zahl σ_h bzw. σ_ϕ verwendet [61,65,66]. Die Werte und Formulierungen der verschiedenen Koeffizienten und Dämpfungsfunktionen sollen, aufgrund ihrer besseren Eignung für niedrige Prandtl-Zahlen, im Folgenden ausschließlich nach Manservisi & Menghini [65,66] aufgeführt werden.

Bei einem direkten Vergleich der Koeffizienten zwischen der Arbeit von Manservisi & Menghini [65,66] und Abe et al. [61] fällt jedoch auf, dass sich diese untereinander nur marginal unterscheiden. Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass Manservisi & Menghini [65,66] in ihrer Arbeit nicht die vollständige Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}$ sondern die alternative Formulierung $k_\theta = \frac{1}{2} \overline{\theta'^2}$ als Transportgröße verwenden. Die hier dargestellten Werte der Koeffizienten lassen sich jedoch einfach durch Halbieren der Werte rekonstruieren. Vollständig lautet sie:

$$C_\lambda = 0,1; \quad C_{d1} = 2,0; \quad C_{p1} = 1,85; \quad C_{p2} = 0,9; \\ C_{d2} = \left\{ 1,9 \left[1 - 0,3 \exp \left(- \left(\frac{Re_t}{6,5} \right)^2 \right) \right] - 1 \right\} \left\{ 1 - \exp \left(- \frac{y^*}{5,7} \right) \right\}^2 \quad (6.50)$$

Ein wesentlicher Vorteil der beiden Modellvarianten nach Abe et al. [61] bzw. Manservisi & Menghini [65,66] ist, dass sie anstelle des dimensionslosen Wandabstandes y^+ eine alternative Formulierung y^* verwenden. Dies ist speziell für Strömungen, die durch Ablösungen gekennzeichnet sind, von entscheidender Bedeutung, da Dämpfungsfunktion in Abhängigkeit von y^+ ansonsten zu großen Abweichungen im Bereich der Ablösung führen können. Jeweils beide Modellvarianten sind mit einem linearen Wirbelviskositätsmodell von Abe et al. [169] kombiniert. Zur Berechnung von Sekundärströmungen der zweiten Art muss demnach untersucht werden, ob die verschiedenen Modelle sich auch mit einem Schließungsansatz höherer Ordnung der Impulserhaltungsgleichung kombinieren lassen.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass speziell das Modell von Manservisi & Menghini [65,66] für niedrige molekulare Prandtl-Zahlen ($Pr = 0,025$) eine sehr gute Übereinstimmung im Vergleich zu den DNS-Daten [85,86] zeigt. Die in diesem Modell eingeführten Modifikationen des Schließungsansatzes von Abe et al. [61] basieren jedoch auf rein empirischen Überlegungen und müssen für komplexe Strömungstypen hinsichtlich ihrer Gültigkeit neu bewertet werden. Eine Analyse des kombinierten Einflusses der Reynolds- und Prandtl-Zahl in turbulenten Plattenkanalströmungen kann dem Anhang entnommen werden (vgl. Anhang A.2.4).

6.4. Modellierung auf Basis zweiter Momente

6.4.1. Transportgleichungen der turbulenten Wärmeflüsse

Für die Entwicklung eines vollständig differentiellen Schließungsansatzes muss zunächst die exakte Transportgleichung der turbulenten Wärmeflüsse $\overline{u'_i T'}$ formuliert werden. Diese lässt sich in zwei wesentlichen Schritten ableiten. Im ersten Schritt wird die Summe aus den Produkten der Energieerhaltungsgleichung (vgl. Gl. (2.16)) und der Geschwindigkeitsfluktuation u'_i sowie der Impulserhaltungsgleichung der instantanen Geschwindigkeitskomponente u_i und der Temperaturfluktuation T' gebildet. Im Anschluss kann, unter Berücksichtigung der „mathematischen Regeln“ der Reynolds-Dekomposition (vgl. Kapitel 4.3.1), die Summe diesen beiden Produkte zeitlich gemittelt werden. Diese Teilschritte der Ableitung lassen sich wie folgt zusammenfassen [170]:

$$\overline{\mathcal{N}(u_i) T' + \mathcal{E}(T) u'_i} = 0. \quad (6.51)$$

In diesem Kontext entsprechen die Notationen \mathcal{N} dem Operator der Impulserhaltungsgleichung angewendet auf die instantane Geschwindigkeitskomponente u_i und \mathcal{E} dem Operator der Energieerhaltungsgleichung angewendet auf die instantane Temperatur T .

Die exakte Transportgleichungen der drei Komponenten ($i = 1, 2$ und 3) des turbulenten Wärmeflussvektors $\overline{u'_i T'}$ lautet damit:

$$\begin{aligned} \underbrace{\frac{\partial \overline{u'_i T'}}{\partial t}}_{\text{zeitl. Änderung}} + \underbrace{\bar{u}_k \frac{\partial \overline{u'_i T'}}{\partial x_k}}_{\text{Konvektion}} = & \underbrace{-\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} - \overline{u'_k T'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}}_{\text{Produktionsterme}} \underbrace{- \beta g_i \bar{T}'^2}_{\text{Auftriebsterm}} - \underbrace{(\nu + \alpha) \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} \frac{\partial T'}{\partial x_k}}_{\text{Dissipationsterm}} \\ & + \underbrace{\frac{\overline{p'}}{\rho} \frac{\partial T'}{\partial x_i}}_{\text{Druckumverteilungsterm}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(-\frac{\delta_{ik}}{\rho} \overline{p' T'} \right)}_{\text{Druckdiffusion}} \\ & + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu T' \frac{\partial \overline{u'_i}}{\partial x_k} + \alpha \overline{u'_i} \frac{\partial T'}{\partial x_k} \right)}_{\text{Molekulare Diffusion}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(-\overline{u'_i u'_k T'} \right)}_{\text{Turbulente Diffusion}}. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Die exakte Transportgleichung der turbulenten Wärmeflüsse wird in der Literatur üblicherweise in symbolischer Notation für die einzelnen Transportterme³⁹ angegeben:

$$L_{i\theta} + C_{i\theta} = P_{i\theta}^T + P_{i\theta}^U + G_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} + \phi_{i\theta} + D_{i\theta}^P + D_{i\theta}^V + D_{i\theta}^t. \quad (6.53)$$

³⁹Die Reihenfolge der Transportterme entspricht vollständig der Auflistung in Gl. (6.52).

Die linke Seite der Gleichung beschreibt die zeitliche Änderung $L_{i\theta}$ und Konvektion der turbulenten Wärmeflüsse infolge der gemittelten Geschwindigkeit $C_{i\theta}$. Die ersten beiden Terme der rechten Seite der Gl. (6.52) beschreiben die Produktionsrate der turbulenten Wärmeflüsse infolge des Temperaturgradienten $P_{i\theta}^T$ bzw. infolge der Geschwindigkeitskomponenten der Hauptströmung $P_{i\theta}^U$. Beide Terme sind exakt und verlangen keine weitere Modellierung. Dies stellt, wie bereits im Rahmen der Modellierung der turbulenten Reynolds-Spannungen diskutiert wurde (vgl. Kapitel 5.1), einen der wesentlichen Vorteile differentieller Schließungsansätze dar. Der dritte Term der rechten Seite $G_{i\theta}$ entspricht dem Auftriebsterm infolge des Schwerfeldes. Dieser muss analog zu den Produktionstermen ebenfalls nicht in der Modellentwicklung berücksichtigt werden. Er kann einfach aus dem Produkt des volumetrischen Ausdehnungskoeffizienten β , dem Betrag der Erdbeschleunigung und der Temperaturvarianz $\overline{T'^2}$ bestimmt werden. Dieser kommt im Rahmen der Wärmeflussmodellierung eine spezielle Bedeutung zu, da sie zur Bestimmung der charakteristischen thermischen Zeitskala τ_{th} notwendig ist. Die Ableitung ihrer exakten Transportgleichung sowie gängige Modellierungsansätze ihrer wesentlichen Transportmechanismen kann dem Kapitel 6.3.1 entnommen werden. Der vierte Term der rechten Seite $\varepsilon_{i\theta}$ wird auch als Dissipations- bzw. Vernichtungsterm der Transportgleichung bezeichnet. Im Gegensatz zu den vorangegangenen Termen lässt sich die Dissipation nicht unmittelbar durch die zeitlich gemittelten Erhaltungs- bzw. Transportgrößen bestimmen. Sie muss stattdessen mit Hilfe von geeigneten Modellierungsansätzen berücksichtigt werden. Bei Analyse einer Vielzahl von verfügbaren Schließungsansätzen der turbulenten Wärmeflüsse lässt sich feststellen, dass auf den Dissipationsterm bzw. eine Modellierung der Dissipation üblicherweise verzichtet wird. Diese Annahme ist strikt auf den Zustand isotroper Turbulenz limitiert [58]. Es kann jedoch bei Analyse von DNS-Daten gezeigt werden, dass für ausreichend große molekulare Prandtl- bzw. Péclet-Zahlen die Größenordnung der Dissipation im Vergleich zu den anderen Transportmechanismen von untergeordneter Bedeutung ist. Der fünfte und sechste Term der exakten Erhaltungsgleichung der turbulenten Wärmeflüsse beschreiben die Druckumverteilung $\phi_{i\theta}$ bzw. die Druckdiffusion $D_{i\theta}^p$. Diese Aufteilung des vollständigen Temperatur-Druckgradienten-Korrelationsterms $\Pi_{i\theta}$ ist in der Literatur häufig zu finden, siehe z.B. die Arbeiten von Baumann [70] oder Carteciano [73]. Sie ergibt jedoch im Gegensatz zur Modellierung des Redistributionstensors der turbulenten Reynolds-Spannungen Π_{ij} (vgl. Gl. (5.5)) keine nennenswerten Vorteile für das weitere Modellierungsvorhaben, da sich beide Terme, $\phi_{i\theta}$ und $D_{i\theta}^p$, in Wandnähe gegenseitig ausgleichen und jeweils an der Wand endliche Werte ungleich Null annehmen [58,71]. Anstelle der Formulierung eines eigenständigen Modellansatzes wird die Druckdiffusion üblicherweise in den Modellansatz der turbulenten Diffusion $D_{i\theta}^t$ absorbiert. Im Gegensatz zum Fall der erzwungenen Konvektion, bei welcher der Druckdiffusion nur geringe Bedeutung zukommt, zeigt sich für Strömungsfälle, die stark durch Auftriebseffekte dominiert werden, dass der Einfluss der Druckdiffusion nicht mehr gänzlich vernachlässigbar ist und gesondert behandelt werden muss [58]. Der siebte Term $D_{i\theta}^v$ der rechten Seite der Gleichung beschreibt die molekulare

Diffusion. Im Gegensatz zu den Transportgleichungen des Reynolds-Spannungstensors $\overline{u'_i u'_j}$ oder der Temperaturvarianz $\overline{T'^2}$ ist dieser Term für molekulare Prandtl-Zahlen $Pr \neq 1$ nicht exakt und muss modelliert werden. Ein Modellansatz $\widehat{D}_{i\theta}^v$ für die molekulare Diffusion lässt sich wie folgt formulieren [58]:

$$\widehat{D}_{i\theta}^v = \frac{1}{2} (\nu + \alpha) \frac{\partial^2 \overline{u'_i T'}}{\partial x_k^2} = D_{i\theta}^v + \frac{1}{2} (\alpha - \nu) \overline{T' \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k^2}} - \frac{1}{2} (\alpha - \nu) \overline{u'_i \frac{\partial^2 T'}{\partial x_k^2}}. \quad (6.54)$$

Es ist leicht ersichtlich, dass für eine Prandtl-Zahl $Pr = 1$ die beiden letzten Terme der rechten Seite der Gleichung 6.54 verschwinden⁴⁰. Für Prandtl-Zahlen Pr die stark von 1 abweichen, müssten diese Terme eigentlich berücksichtigt werden. Hanjalić [71] merkt hierzu jedoch an, dass aufgrund der großen Unterschiede zwischen den Skalen der Fluktuationen und ihrer zweiten Ableitungen die beiden Korrelationsterme meist von untergeordneter Bedeutung sind und demnach vernachlässigt werden können. Der letzte Term der rechten Seite der Gleichung 6.52 entspricht der turbulenten Diffusion $D_{i\theta}^t$, die infolge der zeitlichen Mittelung bei der Ableitung der exakten Transportgleichung unmittelbar aus dem Konvektionsterm hervorgeht. Sie ist definiert als Gradient der dreifachen Korrelation⁴¹ aus turbulenten Geschwindigkeits- und Temperaturfluktuationen. Eine übliche Strategie zur Modellierung dieses Transportterms ist die Verwendung des Ansatzes von Daly & Halow [68]. Es existieren jedoch auch komplexere Vorschläge auf Basis einer schrittweisen Vereinfachung einer vollständigen Transportgleichung der dreifachen Korrelation $\overline{u'_i u'_k T'}$ [67,71]. Diese komplexen Modelle basieren auf einer Vielzahl von zusätzlichen Termen, die meist nur in einigen wenigen Spezialfällen zu einer erheblich verbesserten Vorhersage des turbulenten Diffusionsterms führen.

6.4.2. Wandlimitierungsverhalten turbulenter Fluktuationsgrößen

Eines der wesentlichen Elemente der Entwicklung von Schließungsansätzen ist die Wiedergabe des asymptotischen Wandverhaltens der turbulenten Fluktuationsgrößen erster oder zweiter Ordnung. Auf Basis dieser Untersuchung kann ebenfalls das Verhalten der einzelnen Transport- und Vernichtungsterme der Transportgleichung turbulenter Wärmeflüsse in turbulenten Kanalströmungen analysiert werden. Eine häufig verwendete Annahme beruht auf vernachlässigbar kleinen Temperaturfluktuationen θ' an der Wand. Dies stellt eine wichtige Einschränkung der folgenden Untersuchung dar, da das asymptotische Wandverhalten der einzelnen Terme stark von dieser Fluktuationsgröße abhängen kann. Ebenfalls müssten je nach Strömungsform gegebenenfalls zusätzliche Effekte, wie z.B. Auftrieb berücksichtigt werden.

Das asymptotische Wandverhalten der normierten Strömungsgrößen und ihrer Fluktuationsgrößen kann mit Hilfe einer Taylor-Reihenentwicklung bestimmt und analysiert werden [67,171]:

⁴⁰Für eine Prandtl-Zahl $Pr = 1$ entspricht die thermische Diffusivität α genau der kinematischen Viskosität ν .

⁴¹eng.: triple correlation

$$\begin{aligned}
 \bar{u}^+ &= y^+ + \dots ; \\
 \bar{\Theta}^+ &= Pr y^+ + \dots ; \\
 u'^+ &= a_1 + b_1 y^+ + c_1 y^{+2} + d_1 y^{+3} + \dots ; \\
 v'^+ &= a_2 + b_2 y^+ + c_2 y^{+2} + d_2 y^{+3} + \dots ; \\
 w'^+ &= a_3 + b_3 y^+ + c_3 y^{+2} + d_3 y^{+3} + \dots ; \\
 \theta'^+ &= a_\theta + b_\theta y^+ + c_\theta y^{+2} + d_\theta y^{+3} + \dots ; \\
 p'^+ &= a_p + b_p y^+ + c_p y^{+2} + d_p y^{+3} + \dots ;
 \end{aligned} \tag{6.55}$$

wobei die Größen y^+ den dimensionslosen Wandabstand, \bar{u}^+ und $\bar{\Theta}^+$ die normierte Geschwindigkeit und Skalargröße, u'^+ , v'^+ und w'^+ die Geschwindigkeitsfluktuationen in einer jeweiligen Raumrichtung ($i = 1, 2, 3$), θ'^+ die Temperaturfluktuation und p' die Druckfluktuation darstellen. Aus der Kontinuitätsgleichung der turbulenten Geschwindigkeitsfluktuationen eines inkompressiblen Mediums und der Haftbedingung an der Wand ($y = 0$) kann unmittelbar gefolgert werden, dass $a_i = 0$ und $b_2 = 0$ gelten muss. Dies äußert sich im sogenannten Zwei-Komponenten-Limit [149] der Turbulenz, da die Normalspannungskomponente $\overline{v'^2}^+ \sim y^{+4}$ stärker als die anderen Komponenten in Wandnähe gedämpft wird. Unter der Annahme vernachlässigbarer Temperaturfluktuationen an der Wand muss $a_\theta = 0$ gelten.

Für die zweiten Momente gilt demnach unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung:

$$\begin{aligned}
 \overline{u'^2}^+ &= \overline{b_1^2} y^{+2} + \dots ; & \overline{v'^2}^+ &= \overline{c_2^2} y^{+4} + \dots ; & \overline{w'^2}^+ &= \overline{b_3^2} y^{+2} + \dots ; \\
 \overline{u'v'}^+ &= \overline{b_1 c_2} y^{+3} \dots ; \\
 k^+ &= \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2}^+ + \overline{v'^2}^+ + \overline{w'^2}^+ \right) = \frac{1}{2} \left[\overline{b_1^2} + \overline{b_3^2} \right] y^{+2} + \frac{1}{2} \overline{c_2^2} y^{+4} + \dots ; \\
 \varepsilon^+ &= \nu \frac{\partial u_i'^+}{\partial y^+} \frac{\partial u_i'^+}{\partial y^+} = \nu \left(\overline{b_1^2} + \overline{b_3^2} \right) + \dots ; \\
 \overline{u'\theta'}^+ &= \overline{b_1 b_\theta} y^{+2} + \dots ; & \overline{v'\theta'}^+ &= \overline{c_2 b_\theta} y^{+3} + \dots ; \\
 \overline{\theta'^2}^+ &= \overline{b_\theta^2} y^{+2} + \dots ; & \varepsilon_{\theta\theta}^+ &= 2\alpha \frac{\partial \theta'^+}{\partial y^+} \frac{\partial \theta'^+}{\partial y^+} = 2\alpha \overline{b_\theta^2} + \dots .
 \end{aligned} \tag{6.56}$$

Es kann für den Fall einer turbulenten Plattenkanalströmung bei symmetrischer bzw. gleicher Beheizung der beiden Wände folgende wichtige Beziehung für das Zeitskalenverhältnis R (vgl. Gl. (6.12)) abgeleitet werden:

$$R = \frac{\overline{\theta'^2}^+}{\varepsilon_{\theta\theta}^+} \frac{\varepsilon^+}{k^+} \approx \frac{\overline{b_\theta^2} y^{+2}}{2\alpha \overline{b_\theta^2}} \frac{2\nu \left(\overline{b_1^2} + \overline{b_3^2} \right)}{\left(\overline{b_1^2} + \overline{b_3^2} \right) y^{+2}} = Pr + \dots . \tag{6.57}$$

Das Zeitskalenverhältnis nimmt demnach unmittelbar an der Wand den Wert der molekularen Prandtl-Zahl Pr an. Dies muss speziell bei der Wahl geeigneter Randbedingungen für die Transportgleichungen der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}$ und ihrer Dissipationsrate $\varepsilon_{\theta\theta}$ berücksichtigt werden. Diese Erkenntnis bestätigt sich auch bei verschiedenen Prandtl-Zahlen mit Hilfe der DNS-Daten von Abe et al. [85,86] (vgl. Abb. 6.12).

Für die turbulente Wirbelviskosität ν_t^+ und die turbulente thermische Diffusivität α_t^+ ergeben sich unter Berücksichtigung der Gl. (5.13) und (6.49):

$$\nu_t^+ = \frac{-\overline{u'v'}^+}{\partial \overline{u}^+ / \partial y^+} = -\overline{b_1 c_2} y^{+3} + \dots ; \quad \alpha_t^+ = \frac{-\overline{v'\theta'}^+}{\partial \overline{\Theta}^+ / \partial y^+} = -\frac{\overline{c_2 b_\theta} y^{+3}}{Pr} + \dots . \quad (6.58)$$

Die turbulente Prandtl-Zahl Pr_t nimmt als Verhältnis dieser beiden Größen unmittelbar an der Wand einen konstanten Wert an (vgl. Abb. 6.2):

$$Pr_t = \frac{\nu_t^+}{\alpha_t^+} = \frac{\overline{b_1 c_2} Pr}{\overline{c_2 b_\theta}} + \dots . \quad (6.59)$$

In Tab. 6.1 ist das asymptotische Wandverhalten der wesentlichen Transport- und Vernichtungsterme der Transportgleichung der turbulenten Wärmeflüsse (vgl. Gl. (6.52)) für die axiale und wandnormale Komponente aufgeführt. Die Ableitung ihres Wandverhaltens erfolgt unmittelbar aus den exakten Formulierungen der Transportgleichung der turbulenten Wärmeflüsse. Die umrandeten Terme in der Tabelle 6.1 stehen jeweils an der Wand miteinander im Gleichgewicht. Für die turbulente Wärmeflusskomponente in Strömungsrichtung $\overline{u'\theta'}^+$ gleichen sich die Dissipationsrate $\varepsilon_{1\theta}^+$ und die molekulare Diffusion $D_{1\theta}^{\nu+}$ gegenseitig aus. Für die wandnormale Komponente $\overline{v'\theta'}^+$ gleicht sich der Korrelationsterm $\Pi_{2\theta}^+$, die Dissipationsrate $\varepsilon_{2\theta}^+$ und die molekulare Diffusion $D_{2\theta}^{\nu+}$ gegenseitig aus. Die Produktion $P_{i\theta}^+$ und die turbulente Diffusion $D_{i\theta}^{\prime+}$ ist jeweils nur von untergeordneter Bedeutung hinsichtlich ihres asymptotischen Wandverhaltens.

Ein vollständiger Schließungsansatz auf Basis der zweiten Momente sollte daher zum Ziel haben, dieses charakteristische Wandverhalten der einzelnen Transport- und Vernichtungsterme für den Fall einer turbulenten Kanalströmung korrekt wiederzugeben. Bei Verwendung der Temperaturdifferenz als Transportgröße und unter Annahme einer verschwindender Fluktuationsgröße θ'^+ ist die vorliegende Untersuchung gültig. Für Annahme einer Temperaturfluktuation ungleich Null muss sie jedoch entsprechend angepasst werden. Da dies jedoch verlangt, dass die Verteilung der Temperaturfluktuation auf der Wand a priori für eine beliebige Geometrie bekannt ist, soll im Nachfolgenden das Wandverhalten der einzelnen Wärmeflussmodelle ausschließlich hinsichtlich einfacher Plattenkanalströmungen untersucht werden. Eine ausführlichere Diskussion der verschiedenen thermischen Randbedingungen und ihrer Auswirkungen auf das asymptotische Verhalten kann dem Anhang (vgl. Anhang A.2.7) entnommen werden.

Term	Strömungsrichtung ($i = 1$)	Wandnormale Richtung ($i = 2$)
$P_{i\theta}^+$	$\mathcal{O}(y^{+3})$	$\mathcal{O}(y^{+4})$
$\varepsilon_{i\theta}^+$	$\boxed{\left(1 + \frac{1}{Pr}\right) \overline{b_1 b_\theta}}$	$\boxed{2 \left(1 + \frac{1}{Pr}\right) \overline{c_2 b_\theta} y^+}$
$\phi_{i\theta}^+$	$\overline{(\partial b_\theta / \partial x^+) a_p} y^+$	$\overline{b_\theta a_p} + (\overline{b_\theta b_p} + 2\overline{c_\theta a_p}) y^+$
$D_{i\theta}^{p+}$	-	$-\overline{b_\theta a_p} - 2(\overline{b_\theta b_p} + \overline{c_\theta a_p}) y^+$
$\Pi_{i\theta}^+ = \phi_{i\theta}^+ + D_{i\theta}^{p+}$	$\overline{(\partial b_\theta / \partial x^+) a_p} y^+$	$\boxed{-\overline{b_\theta b_p} y^+}$
$D_{i\theta}^{v+}$	$\boxed{\left(1 + \frac{1}{Pr}\right) \overline{b_1 b_\theta}}$	$\boxed{2 \left(2 + \frac{1}{Pr}\right) \overline{c_2 b_\theta} y^+}$
$D_{i\theta}^{t+}$	$\mathcal{O}(y^{+3})$	$\mathcal{O}(y^{+4})$

Tabelle 6.1.: Vergleich des asymptotischen Wandverhaltens der wesentlichen Transport- und Vernichtungs-
terme der turbulenten Wärmeflussgleichung in einer turbulenten Kanalströmung.

6.4.3. Identifikation zentraler Transport- und Dissipationsmechanismen

Bevor Modellansätze für die jeweiligen Transport- und Vernichtungsmechanismen der turbulenten Wärmeflüsse analysiert bzw. entwickelt werden können, ist es notwendig den jeweiligen Beitrag der einzelnen Transportterme (vgl. Gl. (6.53)) in Abhängigkeit der molekularen Prandtl-Zahl zu prüfen. Daher bieten sich für eine weiterführende Analysen der Transportmechanismen in turbulenten Plattenkanalströmungen die DNS-Daten von Abe et al. [85,86] an. Eine vereinfachte Darstellung des untersuchten Strömungsgebietes und der gewählten Randbedingungen der DNS-Daten ist durch Abb. 4.6 sowie durch Abe et al. [85] gegeben.

In einer vollständig hydraulisch und thermisch eingelaufenen Strömung ist leicht anhand der transformierten Energieerhaltungsgleichung nimmt einzig die wandnormale Komponente ($i = 2$) des turbulenten Wärmeflussvektors $\overline{v'\theta'}$ Einfluss auf das Profil des passiven Skalarfelds. Demnach sollen zunächst die wesentlichen Transport- und Vernichtungsmechanismen (vgl. Notation in Gl. (6.53)) für die Transportgleichung dieser Komponente untersucht werden.

Die Terme der zeitlichen Änderung $L_{2\theta}^+$ und der Konvektion $C_{2\theta}^+$ verschwinden in vollständig entwickelten Kanalströmungen und müssen nicht weiter berücksichtigt werden. Die restlichen Transportterme der rechten Seite der Gl. (6.53) müssen demnach in einem Gleichgewicht zuein-

ander stehen. Das heißt die Summe ihrer Beiträge muss Null ergeben. Die Produktion aufgrund der Hauptströmung $P_{2\theta}^+ = P_{2\theta}^{T+} + P_{2\theta}^{U+}$ ist exakt und benötigt keine weiteren Modellannahmen. Es ist jedoch anzumerken, dass bei Kombination eines differentiellen Ansatzes der turbulenten Wärmeflüsse mit einem Schließungsansatz der Impulserhaltung Modellierungsfehler der turbulenten Reynolds-Spannungen unmittelbaren Einfluss auf das Ergebnis nehmen. Die Produktion infolge des Schwerefeldes bzw. durch Auftrieb $G_{2\theta}^+$ kann in erzwungener Konvektion vollständig vernachlässigt werden. Nachfolgende Abb. 6.18 und 6.19 sind aus den DNS-Daten von Abe et al. [85,86] abgeleitet worden. Sie erlauben die Identifikation der wesentlichen zu modellierenden Transport- und Vernichtungsmechanismen in Abhängigkeit der molekularen Prandtl-Zahl.

Für Strömungen niedriger Prandtl- bzw. Péclet-Zahl ($Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$) ist für den Fall der wandnormalen turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'}^+$ der wesentliche „Gegenspieler“ des exakten Produktionsterms $P_{2\theta}^+$ die Dissipationsrate $\varepsilon_{2\theta}^+$ (vgl. Abb. 6.18). Der Temperatur-Druckgradienten-Korrelationsterm $\Pi_{2\theta}^+$ ist über den gesamten Bereich der Strömung nur von untergeordneter Bedeutung. In unmittelbarer Nähe zur Wand (ab $y^+ \leq 10$) gleicht der molekulare Diffusionsterm $D_{2\theta}^{v+}$ die Produktion aus. Die turbulente Diffusion $D_{2\theta}^{t+}$ hat für den vorliegenden Fall einer erzwungenen Konvektionsströmung nahezu keine Bedeutung.

Für eine höhere Prandtl- bzw. Péclet-Zahl ($Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,71$) wird die Produktionsrate $P_{2\theta}^+$ im Wesentlichen durch den Korrelationsterm $\Pi_{2\theta}^+$ ausgeglichen (vgl. Abb. 6.19). Die Dissipationsrate $\varepsilon_{2\theta}^+$ hingegen ist fernab des wandnahen Bereichs nahezu zu vernachlässigen. Die Bedeutung der molekularen Diffusion $D_{2\theta}^{v+}$ ist auf den viskosen Bereich der Strömung beschränkt. Die turbulente Diffusion $D_{2\theta}^{t+}$ zeigt im Vergleich zu Strömungen niedrigerer Prandtl-Zahl einen geringfügig größeren Einfluss im Übergangsbereich zwischen viskoser Unterschicht und logarithmischem Bereich des dimensionslosen Temperaturprofils (vgl. Abb. 4.9 und 4.8).

Zusammenfassend lässt sich anmerken, dass in Abhängigkeit der molekularen Prandtl-Zahl bzw. Péclet-Zahl der Strömung der Ausgleich der exakten Produktionsrate $P_{2\theta}$ durch jeweils den Korrelationsterm $\Pi_{2\theta}$ bzw. die Dissipationsrate $\varepsilon_{2\theta}$ erfolgt. Speziell für niedrigere Prandtl-Zahlen müssen demnach für den Vernichtungsterm geeignete Modellierungsstrategien analysiert und hinsichtlich ihrer Eignung überprüft werden. Das Maximum der Produktionsrate ist im Vergleich zu größeren Prandtl-Zahlen infolge des größeren, viskos dominierten Bereichs der Strömung in Richtung der Kanalmitte verschoben. Für eine steigende Péclet-Zahl nimmt der Einfluss des Korrelationsterm der Temperatur- und Druckfluktuationen zu. Für die Entwicklung bzw. Analyse turbulenter Wärmeflussmodelle, die für einen großen Bereich der Péclet-Zahl geeignet sind, muss demnach dieses gegenläufige Verhalten der wesentlichen Transport- bzw. Vernichtungsmechanismen hinreichend genau berücksichtigt werden. Eine häufig eingesetzte Strategie bei der Entwicklung neuer Schließungsansätze ist eine kombinierte Modellierung dieser beiden wesentlichen Transportterme. Nachfolgend sollen verschiedene Ansätze aus der Literatur analysiert und untereinander unter Berücksichtigung des Einflusses der molekularen Prandtl-Zahl verglichen werden.

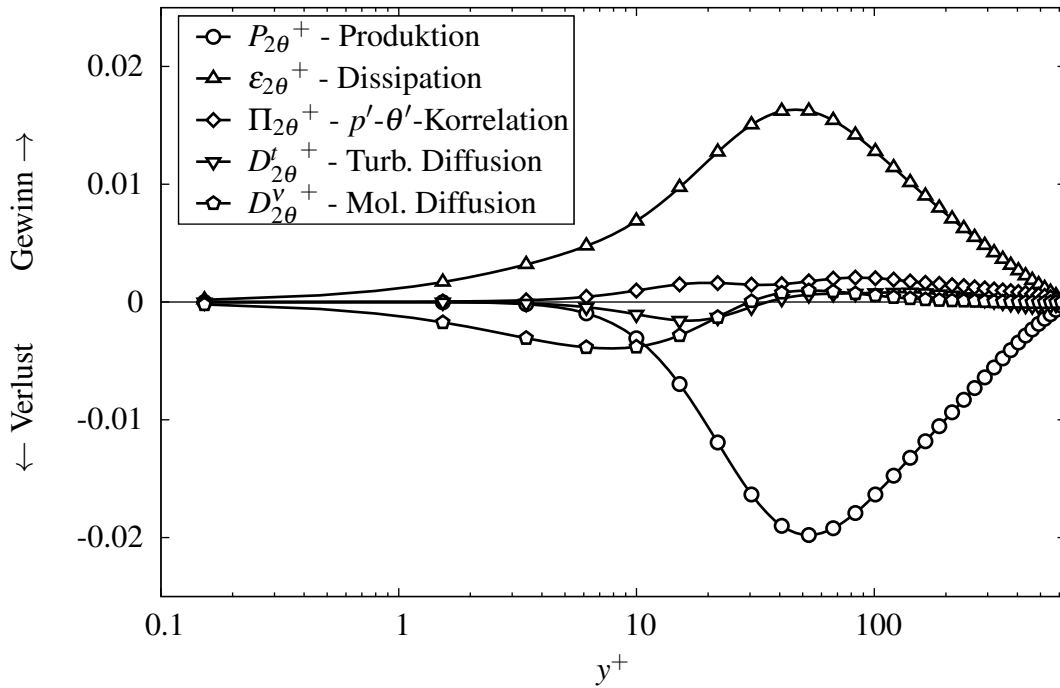


Abbildung 6.18.: Verlauf der einzelnen Transport- und Vernichtungsterme über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ für die wandnormale Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'^+}$ unter Verwendung der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).

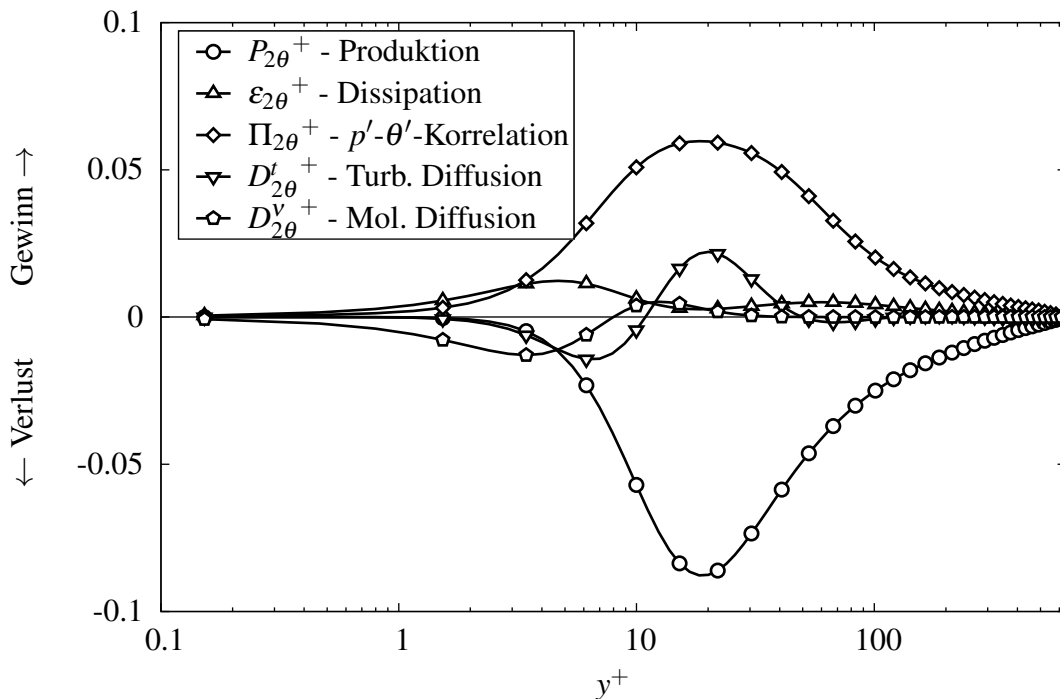


Abbildung 6.19.: Verlauf der einzelnen Transport- und Vernichtungsterme über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ für die wandnormale Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'^+}$ unter Verwendung der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,71$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).

6.4.4. Kombinierte Modellansätze der Temperatur-Druck-Korrelation und der Dissipationsrate

In der Literatur existieren unterschiedliche Modellansätze der einzelnen Transport- und Vernichtungsmechanismen der Transportgleichung der turbulenten Wärmeflüsse. Diese müssen immer in Kombination miteinander modelliert und untersucht werden (z.B. unter Berücksichtigung des asymptotischen Wandverhaltens).

Die Untersuchung der wesentlichen Transport- und Vernichtungsmechanismen hat ergeben, dass eine Modellierungsstrategie im wesentlichen auf der vollständigen Abbildung des kombinierten Einflusses des Korrelationsterms $\Pi_{i\theta}$ und der Dissipationsrate $\varepsilon_{i\theta}$ in Abhängigkeit der molekularen Prandtl-Zahl Pr beruhen sollte. In den meisten Schließungsansätzen der zweiten Momente wird letztgenannter Term üblicherweise nur im wandnahen Bereich der Strömung bedacht. Im homogenen Bereich der Strömung, mit hinreichender Entfernung zur Wand, wird die Dissipationsrate $\varepsilon_{i\theta}$ unter Annahme einer lokalen Isotropie der Turbulenz, häufig zu Null gesetzt [75,172]. Dies mag darauf zurückzuführen sein, dass eine Vielzahl von Schließungsansätzen für Strömungen Prandtl-Zahlen nahe Eins entwickelt wurden. Für Strömungen niedriger Prandtl- bzw. Péclet-Zahl ist diese Annahme jedoch nicht zutreffend. Im Folgenden sollen demnach verschiedene Modellkombinationen dieser beiden Terme aus der Literatur hinsichtlich dieser Eigenschaft in turbulenten Kanalströmungen untersucht werden.

6.4.4.1. Schließungsansatz von Lai & So (1990)

Als ersten Ansatz soll der Modellvorschlag von Lai & So [172] erläutert werden. Den Korrelationsterm $\Pi_{i\theta}$ formulieren letztgenannte Autoren zu:

$$\Pi_{i\theta} = \Pi_{i\theta}^h + f_{w,\theta} \Pi_{i\theta}^w, \quad (6.60)$$

wobei $\Pi_{i\theta}^h$ für den homogenen, wandfernen Bereich der Strömung und unmittelbar an der Wand mit einem wandnahen Modell $\Pi_{i\theta}^w$ überlagert wird. Analog zur Modellierung des Redistributors des Reynolds-Spannungen (vgl. Gl. (5.38)) kann für den homogenen Bestandteil des Korrelationsterms $\Pi_{i\theta}^h$ ebenfalls eine Einteilung in der Art ihres Beitrags erfolgen:

$$\Pi_{i\theta}^h = \Pi_{i\theta}^{h(1)} + \Pi_{i\theta}^{h(2)} + \Pi_{i\theta}^{h(3)} + \Pi_{i\theta}^{h(w)}. \quad (6.61)$$

Der erste Term der rechten Seite $\Pi_{i\theta}^{h(1)}$ beschreibt den Beitrag der turbulenten Schwankungsgrößen, $\Pi_{i\theta}^{h(2)}$ den Anteil bedingt durch die Hauptströmung, $\Pi_{i\theta}^{h(3)}$ den Beitrag infolge angreifender äußerer Kräfte und $\Pi_{i\theta}^{h(w)}$ den Beitrag bedingt durch die Existenz einer festen Wand⁴². Für den nichtlinearen Term folgen Lai & So [172] dem Modellvorschlag von Monin [173]:

⁴²eng.: wall reflection contribution

$$\Pi_{i\theta}^h (1) = -C_{1\theta} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_i \theta'}, \quad (6.62)$$

wobei $C_{1\theta}$ eine Konstante darstellt. Als Zeitskalenverhältnis wird im Rahmen dieser Modellierung einzig allein der reziproke Wert des mechanischen Zeitskalenverhältnisses $\tau_m = k/\varepsilon$ verwendet. Das Modell des schnellen Terms im Ansatz nach Lai & So [172] $\Pi_{i\theta}^h (2)$ basiert auf einem Ansatz der Minderung der Produktion nach Launder [174]:

$$\Pi_{i\theta}^h (2) = -C_{2\theta} P_{i\theta}^U = C_{2\theta} \overline{u'_k \theta'} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k}. \quad (6.63)$$

Auch in diesem Ansatz stellt $C_{2\theta}$ einen konstanten Koeffizienten dar. Für den dritten Term $\Pi_{i\theta}^h (3)$ geben Lai & So [172] keine Angaben, da sich ihr Schließungsansatz auf Strömungen in rein erzwungener Konvektion beschränkt. Als letzten Bestandteil des „homogenen“ Modells geben sie den, ebenfalls durch Launder [174] formulierten, Beitrag zum Korrelationsterm infolge der Wand $\Pi_{i\theta}^h (w)$ wie folgt an:

$$\Pi_{i\theta}^h (w) = -C_{4\theta} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_k \theta'} n_k n_i \frac{k^{3/2}}{\varepsilon d}, \quad (6.64)$$

wobei die Größen $C_{4\theta}$ ein Koeffizient, n_i ein Vektor in wandnormaler Richtung und d den wandnormalen Abstand darstellen. Lai & So [172] stellen in ihrer Arbeit die Notwendigkeit dieses Terms in Frage. Ihr Modell soll daher im Folgenden jeweils mit und ohne zusätzlichen Wandterm des homogenen Modells untersucht werden.

Der wesentliche Fokus der Arbeit von Lai & So [172] liegt auf der Sicherstellung eines korrekten asymptotischen Wandverhaltens (vgl. Abschnitt 6.4.2). Wie aus Tabelle 6.1 ersichtlich ist, stehen der Korrelationsterm $\Pi_{i\theta}$, der Dissipationsterm $\varepsilon_{i\theta}$ und der molekulare Diffusionsterm für die wandnormale Komponente des turbulenten Wärmeflussvektors $\overline{v' \theta'}$ unmittelbar an der Wand miteinander im Gleichgewicht. Dies lässt sich auch in einem allgemeinen Zusammenhang formulieren, der an dieser Stelle beispielhaft auch für nachfolgende Modellansätze erläutert werden soll:

$$\Pi_{2\theta}^w = \varepsilon_{2\theta} - D_{2\theta}^v. \quad (6.65)$$

Für den molekulare Diffusionsterm geben Lai & So [172] folgende Formulierung an:

$$D_{i\theta}^v = \nu \frac{\partial^2 \overline{u'_i \theta'}}{\partial x_k^2} + \left(\frac{\alpha - \nu}{n_i + 2} \right) \frac{\partial^2 \overline{u'_i \theta'}}{\partial x_k^2}, \quad (6.66)$$

wobei explizit darauf hingewiesen werden muss, dass in diesem Fall für n_i keine Summation über die Indizes erfolgt. Für die Dissipationsrate $\varepsilon_{i\theta}$ formulieren Lai & So [172] folgenden Ansatz:

$$\varepsilon_{i\theta} = \frac{1}{2} f_{w,\theta} \left(1 + \frac{1}{Pr} \right) \frac{\varepsilon}{k} \left[\overline{u'_i \theta'} + \overline{u'_k \theta'} n_k n_i \right]. \quad (6.67)$$

Der Term $f_{w,\theta} = \exp \left[- (Re_t/80)^2 \right]$ stellt eine Dämpfungsfunktion dar, die bereits in Gl. (6.60) eingesetzt wurde. Durch Kombination der Gl. (6.65) mit Gl. (6.66) und (6.67) lässt sich auf sehr einfache Weise folgendes Modell für den Korrelationsterm in Wandnähe ableiten [172]:

$$\Pi_{i\theta}^w = C_{1\theta} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i' \theta'} - \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_k' \theta'} n_k n_i. \quad (6.68)$$

Der erste Term der rechten Seite gleicht in unmittelbarer Wandnähe vollständig das Modell für den Korrelationsterm im homogenen Bereich $\Pi_{i\theta}^h$ aus. Der zweite Term stellt das entsprechende korrekte asymptotische Verhalten des Terms für die wandnormale Komponente des turbulenten Wärmeflussvektors sicher.

$C_{1\theta}$	$C_{2\theta}$	$C_{3\theta}$	$C_{4\theta}$
3,0	0,4	-	0,75

Tabelle 6.2.: Übersicht der Koeffizienten des Modells nach Lai & So [172].

6.4.4.2. Schließungsansatz von Shikazono & Kasagi (1996)

Der Schließungsansatz auf Basis der zweiten Momente nach Shikazono & Kasagi [72] ist speziell unter Berücksichtigung von Effekten der molekularen Prandtl-Zahl entwickelt worden. Die Entwicklung ihres Modells speziell bezüglich des Korrelationsterms $\Pi_{i\theta}$ folgt unmittelbar aus der Analyse von Korrelationskoeffizienten der Ableitungen turbulenter Fluktuationsgrößen. Für eine umfangreiche Erläuterung der schrittweisen Entwicklung ihres Modells sei der interessierte Leser an Shikazono & Kasagi [72] verwiesen. Im Folgenden sollen, zwecks eines Vergleichs mit weiteren Ansätzen der Literatur, ausschließlich die wesentlichen Formulierungen ihres Ansatzes aufgeführt werden.

Ihr Ansatz umfasst die vollständige Modellierung des Korrelationsterms $\Pi_{i\theta}$ sowie seines korrekten, asymptotischen Wandverhaltens. Der Korrelationsterm nach Shikazono & Kasagi [72] ist wie folgt formuliert:

$$\Pi_{i\theta} = -\frac{\varepsilon}{k} \overline{u_k' \theta'} n_k n_i f_w + C_{\Pi} f_{\Pi 1} f_{\Pi 2} C_p \sqrt{Re_t} \sqrt{\frac{k}{2u_{(i)}^2}} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u_i' \theta'}, \quad (6.69)$$

wobei der erste Term das asymptotische Wandverhalten sicherstellt und der zweite Term, mit Hilfe der Dämpfungsfunktionen $f_{\Pi 1}$ und $f_{\Pi 2}$, im wandfernen Bereich der Strömung wirkt. Der Einfluss der Skalentrennung infolge der molekularen Prandtl-Zahl Pr wird hierbei über die Dämpfungsfunktionen in das Modell implementiert. Die Dämpfungsfunktionen und Koeffizienten lauten [72]:

$$\begin{aligned}
 C_p &= \sqrt{A} \left(0,8 + 0,3 \frac{P_k}{\varepsilon} \right); & P_k &= -\overline{u'_i u'_j} \partial \bar{u}_i / \partial x_j; \\
 A &= 1 - 9/8 (a_{ij} a_{ij} - a_{ij} a_{jk} a_{ki}); & a_{ij} &= \left(\overline{u'_i u'_j} / k - 2/3 \delta_{ij} \right); \\
 f_{\Pi 1} &= 1 - \exp(-10 r); & f_{\Pi 2} &= \min \left[1; \frac{1}{1,2} \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R}} \right]; \\
 r &= \frac{C_R / R + 1}{\sqrt{Re_t} f_{\Pi 2}}; & f_w &= \exp \left[-\max \left[4; 0,6 Pr^{3/4} \right] \sqrt{A} \right],
 \end{aligned} \tag{6.70}$$

wobei die Koeffizienten $C_R = 0,7$ und $C_{\Pi} = -0,264$ jeweils Konstanten sind. Die Wandfunktion f_w wirkt in Abhängigkeit der Invariante des Anisotropietensors und der molekularen Prandtl-Zahl und berücksichtigt daher die unterschiedliche Dicke der viskosen Unterschicht in Strömungen als Funktion der molekularen Prandtl-Zahl. Die Dämpfungsfunktionen $f_{\Pi 1}$ und $f_{\Pi 2}$ versuchen ebenfalls diesen Einfluss unter Verwendung der Parameter der turbulenten Reynolds-Zahl Re_t und des Zeitskalenverhältnisses R in die Modellierung aufzunehmen. Diese Formulierung des Korrelationsterms ist nicht invariant bei der Änderung des Koordinatensystems (vektorielle Invarianz) [72]. Daher ist sie auf einfache Kanalströmungen beschränkt und muss für komplexeren Strömungsformen und Geometrien angepasst werden.

Das Modell der Dissipationsrate der turbulenten Wärmeflüsse ist analog zum Ansatz für den Korrelationsterm $\Pi_{i\theta}$ durch Einsatz der Wandfunktion f_w in einen wandnahen und wandfernen Bereich aufgeteilt. Diese lauten [72]:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{i\theta} &= \left\{ \frac{1 + Pr}{2Pr} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_i \theta'} + \frac{1 + Pr}{2Pr} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_k \theta'} n_k n_i \right\} f_w \\
 &\quad + \left\{ C_\varepsilon f_{\varepsilon 1} f_{\varepsilon 2} \frac{1 + Pr}{2\sqrt{Pr}\sqrt{R}} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_i \theta'} \right\} (1 - f_w).
 \end{aligned} \tag{6.71}$$

Die Dämpfungsfunktionen sind in ähnlicher Weise formuliert, wie die Funktionen des Korrelationsterms (vgl. Gl. (6.70)) [72]:

$$f_{\varepsilon 1} = 1 - \exp(-10r); \quad f_{\varepsilon 2} = \min \left[6 \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R}}; \min \left[1; \frac{\sqrt{R}}{\sqrt{Pr}} \right] \right]. \tag{6.72}$$

Der Koeffizient $C_\varepsilon = 0,8$ ist ebenfalls als Konstante formuliert und aus Experimenten bei isotroper Turbulenz bestimmt worden [72].

Die molekulare Diffusion $D_{i\theta}^v$ ist ebenfalls nicht exakt und muss, auch wenn ihr Einfluss auf den wandnahen Bereich der Strömung beschränkt bleibt, über geeignete Modellierungsansätze ermittelt werden. Shikazono & Kasagi [72] schlagen folgenden Ansatz vor:

$$D_{i\theta}^v = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[f_w n_i n_j \frac{(v - \alpha)}{6} \frac{\partial \overline{u'_j \theta'}}{\partial x_k} + \frac{(v + \alpha)}{2} \frac{\partial \overline{u'_i \theta'}}{\partial x_k} \right], \quad (6.73)$$

wobei die Größe n_i den wandnormalen Vektor darstellt.

Zur Bestimmung des Zeitskalenverhältnisses R formulieren sie vollständige Ansätze der Transportgleichungen der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}$ und der Dissipationsrate $\varepsilon_{\theta\theta}$.

Der Ansatz nach Shikazono & Kasagi [72] zeichnet sich durch komplexe Dämpfungsfunktionen und Koeffizienten aus. Die Abhängigkeit der Prandtl-Zahl ist einer der wesentlichen Schwerpunkte ihrer Arbeit, wobei ihr Modell nur begrenzt experimentell validiert ist. Darüber hinaus ist der Ansatz des Korrelationsterms $\Pi_{i\theta}$ nicht ohne Weiteres auf komplexere Strömungen übertragbar.

6.4.4.3. Schließungsansatz von Carteciano (1996)

Dieser Schließungsansatz ist in [73] und [175] beschrieben und soll an dieser Stelle nur kurz beschrieben werden. In beiden Arbeiten liegt der Fokus auf der Modellierung des Einflusses der Dissipationsrate der turbulenten Wärmeflüsse $\varepsilon_{i\theta}$ und des Korrelationsterms der Druck- und Temperaturfluktuationen $\Pi_{i\theta}$ in Abhängigkeit der Prandtl- bzw. Péclet-Zahl. Anstelle eines eigenständigen Modells der Dissipationsrate beruht der Ansatz von Carteciano [73] auf einer kombinierten Modellierung der beiden wesentlichen Transport- bzw. Vernichtungsterme. Der Korrelationsterm basiert auf den Ansätzen von Monin [173] für den nichtlinearen und von Launder [174] für den schnellen Term. Der vollständige Ansatz lautet [73,175]:

$$\Pi_{i\theta} = -C_{1\theta} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_i \theta'} + C_{2\theta} \overline{u'_k \theta'} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} + C_{3\theta} g_i \beta \overline{\theta'^2} - C_{4\theta} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_k \theta'} n_k n_i \frac{k^{3/2}}{\varepsilon d}. \quad (6.74)$$

Um den Einfluss der molekularen Prandtl- bzw. Péclet-Zahl in ihrem Ansatz zu berücksichtigen, wird anstelle einer eigenständigen Modellierung der Dissipationsrate $\varepsilon_{i\theta}$ ein zusätzlicher Term $Z_{i\theta}$ in die Transportgleichung der turbulenten Wärmeflüsse eingeführt [73,175]:

$$Z_{i\theta} = -\frac{1 + Pr}{2\sqrt{Pr}\sqrt{R}} \left(\frac{\varepsilon}{k} \right) \exp[-C_{5\theta} (Re_t + Pe_t)] \overline{u'_i \theta'}, \quad (6.75)$$

wobei die Größen $Re_t = k^2 / (\varepsilon \nu)$ und $Pe_t = Pr Re_t$ die turbulente Reynolds- bzw. Péclet-Zahl darstellen. Dieses Modell ähnelt dem von Shikazono & Kasagi [72] für den wandfernen Bereich der Strömung auf. Dieser Term berücksichtigt den kombinierten Einfluss der molekulare Prandtl-Zahl auf den Korrelations- und Dissipationsterm. Der molekulare Diffusionsterm $D_{i\theta}^v$ ist [73,175]:

$$D_{i\theta}^v = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{(v + \alpha)}{2} \frac{\partial \overline{u'_i \theta'}}{\partial x_k} \right]. \quad (6.76)$$

Dieser Schließungsansatz verzichtet auf die Einhaltung des asymptotischen Wandverhaltens. Eine Übersicht der Koeffizienten zeigt die Tabelle 6.3.

$C_{1\theta}$	$C_{2\theta}$	$C_{3\theta}$	$C_{4\theta}$	$C_{5\theta}$
3,0	0,33	0,5	0,5	0,0007

Tabelle 6.3.: Übersicht der Koeffizienten des Modells nach Carteciano [73].

6.4.4.4. Schließungsansatz von Baumann (2012)

Der Ansatz von Baumann [70] basiert auf den Modellen von Lai & So [172] für den Korrelations- und Vernichtungsterm. Durch die Einführung zusätzlicher, empirischer Dämpfungsfunktionen in beiden Termen wird der Einfluss der molekularen Prandtl-Zahl abgebildet. Der Korrelationsterm $\Pi_{i\theta}$ lautet:

$$\Pi_{i\theta} = -C_{1\theta} f_{pt} \frac{\varepsilon \overline{u'_i \theta'}}{k} + C_{2\theta} \overline{u'_k \theta'} \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_k} + C_{3\theta} g_i \beta \overline{\theta'^2} - C_{4\theta} f_{pt} \frac{\varepsilon \overline{u'_k \theta'}}{k} n_k n_i \frac{k^{3/2}}{\varepsilon d} \quad (6.77)$$

wobei die Funktion $f_{pt} = Pr / (1,2Pr + 0,18)$ den Einfluss der Prandtl-Zahl auf die wesentlich wirksamen Terme des Korrelationsterm (nichtlinearer Term und Reflexionsterm) einbeziehen soll. Diese ist empirisch unter Verwendung der DNS-Daten von Abe et al. [85,86] abgeleitet worden. In turbulenten, beheizten Plattenkanalströmungen stellt der nichtlineare Term den dominierenden Anteil des Korrelationsterms dar, so dass der Einfluss der Funktion f_{pt} maßgeblich für diesen Term in Kombination mit dem Koeffizienten $C_{1\theta}$ zu beurteilen ist. Baumann [70] erweitert den Ansatz von Lai & So [172] um einen vollständigen Ansatz der Dissipationsrate der turbulenten Wärmeflüsse $\varepsilon_{i\theta}$:

$$\varepsilon_{i\theta} = \frac{1}{2} f_{w,B} \left(1 + \frac{1}{Pr} \right) \frac{\varepsilon}{k} \left[\overline{u'_i \theta'} + \overline{u'_k \theta'} n_k n_i \right]. \quad (6.78)$$

wobei $f_{w,B}$ eine komplexe, exponentielle Funktion in Abhängigkeit des dimensionslosen Wandabstandes $y^* = \sqrt{k}y/\nu$ darstellt. Diese ergibt sich aus empirischen Überlegungen und Vergleichen mit DNS-Daten von Abe et al. [85,86] und lautet [70]:

$$f_{w,B} = \min(a \exp(-by^*) + c \exp(-dy^*) + e; 0,8), \quad (6.79)$$

mit folgenden Koeffizienten:

$$a = 1,347; \quad b = -0,1397; \quad c = 0,07554; \quad d = -0,01621; \quad e = 0,15. \quad (6.80)$$

Diese empirische Funktion weist Defizite in unmittelbarer Wandnähe auf. An dieser Stelle wird beispielhaft eine Modifikation der Dämpfungsfunktion vorgeschlagen:

$$f_{w,B}^* = \min \left[a^* \exp \left(- \left(\frac{y^*}{b^*} \right)^2 \right) + c^* \exp \left(- \frac{y^*}{d^*} \right) + e^* ; 1,0 \right], \quad (6.81)$$

unter Verwendung der nachstehenden Koeffizienten:

$$a^* = 0,6558; \quad b^* = 31,14; \quad c^* = 0,125; \quad d^* = 154,3; \quad e^* = 0,124. \quad (6.82)$$

Diese modifizierten Koeffizienten der Dämpfungsfunktion $f_{w,B}^*$ ergeben sich unmittelbar aus DNS-Daten [85,86]. Ein direkter Vergleich der ursprünglichen Variante nach Baumann [70] und der modifizierten Form für verschiedene Reynolds-Zahlen Re_τ ist in der Abb. 6.20 dargestellt.

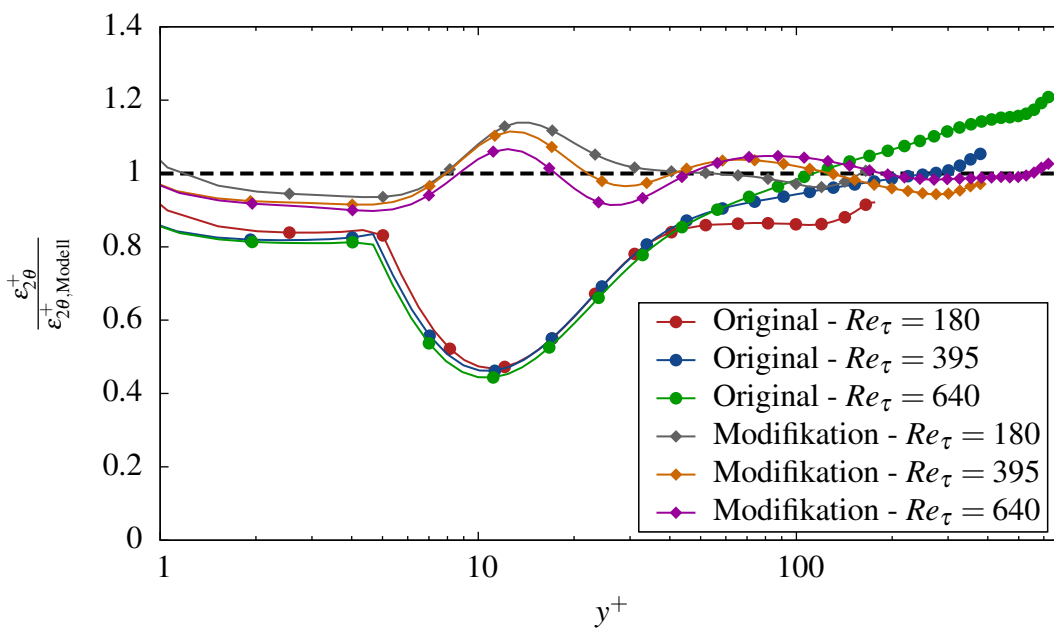


Abbildung 6.20.: Verlauf des Verhältnisses der Dissipationsrate $\varepsilon_{i\theta}^+$ zum Modellansatz von Baumann [70] bzw. einer weiteren Modifikation über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ für die wandnormale Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'^+}$ auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei variierender Reynolds-Zahl Re_τ und $Pr = 0,025$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).

Die Modifikation (vgl. Gl. (6.81)) zeigt speziell im wandnahen Bereich der Strömung gegenüber der ursprünglichen Formulierung (vgl. Gl. (6.79)) eine bessere Übereinstimmung mit abgeleiteten Verlauf der Dissipation der wandnormalen Wärmeflusskomponente. Der Ansatz der Dissipation nach Baumann [70] nimmt hierbei keinen Bezug auf ein korrektes asymptotisches Verhalten der turbulenten Wärmeeflüsse. In unmittelbarer Wandnähe bzw. im rein viskos dominierten Bereich der Strömung, ist darüber hinaus die Dämpfungsfunktion $f_{w,B}$ zu niedrig gewählt. Weitere zu nennende Kritikpunkte sind das Fehlen der Abhängigkeit der Koeffizienten in der Dämpfungsfunktion $f_{w,B}$ bzw. $f_{w,B}^*$ von der molekularen Prandtl-Zahl. Aufgrund der empirischen Natur ihrer Ableitung ist darüber hinaus fraglich, ob die beiden vorgestellten Ansätze auch für komplexere Strömungs-

formen, speziell z.B. bei Einwirken von Auftriebseffekten, und Geometrie geeignet sind. Eine Übersicht der Koeffizienten des Modells kann der nachfolgenden Tabelle 6.4 entnommen werden.

$C_{1\theta}$	$C_{2\theta}$	$C_{3\theta}$	$C_{4\theta}$
3,6	0,5	0,5	0,75

Tabelle 6.4.: Übersicht der Koeffizienten des Modells nach Baumann [70]

6.4.4.5. Schließungsansatz von Dehoux (2012)

Dehoux [75] (nachfolgend mit DH abgekürzt) verwendet ein vollständiges turbulentes Wärme-flussmodell der zweiten Momente vor auf Basis einer elliptischen Übergangsfunktion α_θ . Dieses Vorgehen ist erstmals durch Shin et al. [74] beschrieben worden und entspricht in seinen theoretischen Grundzügen der Methodik von Manceau [147] zur Modellierung des Redistributionstensors der Reynolds-Spannungen.

Der vollständige Temperatur-Druckgradienten-Korrelationsterm $\Pi_{i\theta}$ lautet:

$$\Pi_{i\theta} = -\frac{1}{\rho} \overline{\theta' \frac{\partial p'}{\partial x_i}}. \quad (6.83)$$

Der Gradient des fluktuierenden Druckes kann mit Hilfe einer Green'schen Funktion im Raum wie folgt formuliert werden [75]:

$$\frac{\partial p'}{\partial x_k}(\underline{x}) = \int \nabla^2 \frac{\partial p'}{\partial x_k}(\underline{x}') G(\underline{x}, \underline{x}') dV. \quad (6.84)$$

Das Einsetzen der Gl. (6.84) in Gl. (6.83) führt auf [75]:

$$\rho \Pi_{i\theta} = \int \psi_{i\theta}(\underline{x}, \underline{x}') G(\underline{x}, \underline{x}') dV, \quad (6.85)$$

wobei $\psi_{i\theta}$ eine Korrelation in zwei verschiedenen Punkten \underline{x} bzw. \underline{x}' zwischen der Temperaturfluktuation und der räumlich abgeleiteten Druckfluktuation darstellt:

$$\psi_{i\theta}(\underline{x}, \underline{x}') = -\overline{\theta'(\underline{x}) \nabla^2 \frac{\partial p'}{\partial x_k}(\underline{x}')}. \quad (6.86)$$

Nach Durbin [76] bzw. Manceau & Hanjalić [146] kann ein exponentieller Abfall der Korrelation angenommen werden:

$$\psi_{i\theta}(\underline{x}, \underline{x}') = \psi_{i\theta}(\underline{x}', \underline{x}') e^{-r/L_\theta}, \quad (6.87)$$

wobei $r = \|\underline{x} - \underline{x}'\|$ den räumlichen Abstand der beiden betrachteten Punkte und L_θ ein geeignet zu wählendes thermisches Längenmaß darstellt. Für den Korrelationsterm ergibt sich damit [75]:

$$\rho \Pi_{i\theta} = \frac{1}{4\pi} \int \psi_{i\theta}(\underline{x}', \underline{x}') \frac{\exp(-r/L_\theta)}{r} dV. \quad (6.88)$$

Analog zur Arbeit [76] deutet Dehoux [75] auf den Zusammenhang zwischen dem Ausdruck der Green'schen Funktion $(1/4\pi) \exp(-r/L_\theta)/r$ und des Operators $(-\nabla^2 + 1/L_\theta^2)$ hin. Ausgehend davon leitet er eine Gleichung des Korrelationsterms $\Pi_{i\theta}$ ab:

$$\Pi_{i\theta} - L_\theta^2 \nabla^2 \Pi_{i\theta} = -\frac{L_\theta^2}{\rho} \overline{\theta'(x) \nabla^2 \frac{\partial p'}{\partial x_i}(x)}. \quad (6.89)$$

Für den Term der rechten Seite der Gl. (6.89) lässt sich ein beliebiges, homogenes Modell für $\Pi_{i\theta}^h$ einsetzen. Das korrekte asymptotische Verhalten wird einzig allein durch Berücksichtigung des elliptischen Ausdrucks sichergestellt [75]:

$$\Pi_{i\theta} - L_\theta^2 \nabla^2 \Pi_{i\theta} = \Pi_{i\theta}^h. \quad (6.90)$$

Ausgehend von dieser theoretischen Basis leitet Dehoux [75] folgenden kombinierten Ansatz zwischen Korrelationsterm $\Pi_{i\theta}$ und Dissipationsterm $\varepsilon_{i\theta}$ ab:

$$\Pi_{i\theta} = (1 - \alpha_\theta) \Pi_{i\theta}^w + \alpha_\theta \Phi_{i\theta}^h, \quad \varepsilon_{i\theta} = (1 - \alpha_\theta) \varepsilon_{i\theta}^w + \alpha_\theta \varepsilon_{i\theta}^h, \quad (6.91)$$

$$\Pi_{i\theta}^h = -\frac{\sqrt{R^h}}{\sqrt{R}\tau} C_{1\theta} \overline{u'_i \theta'} + C_{2\theta} \overline{u'_j \theta'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + C_{3\theta} \beta g_i \overline{\theta'^2}, \quad (6.92)$$

$$\Pi_{i\theta}^w = -\frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R}\tau} \left[1 + C_{w\theta}^\phi (1 - \alpha_\theta) \frac{P_k + G_k}{\varepsilon} \right] \overline{u'_k \theta'} n_k n_i, \quad (6.93)$$

$$\varepsilon_{i\theta}^h = 0 \quad (6.94)$$

$$\varepsilon_{i\theta}^w = \frac{\sqrt{Pr}}{\sqrt{R}\tau} C_\varepsilon \left[1 + C_{w\theta}^\varepsilon (1 - \alpha_\theta) \frac{P_k + G_k}{\varepsilon} \right] \left(\overline{u'_i \theta'} + \overline{u'_k \theta'} n_k n_i \right). \quad (6.95)$$

wobei $P_k = -\overline{u'_i u'_j} (\partial \bar{u}_i / \partial x_j)$ die Produktion der turbulenten kinetischen Energie k und $G_k = -\beta g_i \overline{u'_i \theta'}$ die auftriebsbedingte Produktion darstellen. Im wandfernen Bereich der Strömung wird isotrope Turbulenz angenommen ($\varepsilon_{i\theta}^h = 0$). Die Größe R^h entspricht dem Zeitskalenverhältnis im homogenen Bereich der Strömung. Dieses ist nur für die wenigsten Strömungen ohne experimentelle oder numerische Daten a priori abzuschätzen und stellt den größten Nachteil dieses Ansatzes dar. Das Modell für den Korrelationsterm im homogenen Bereich $\Pi_{i\theta}^h$ entspricht dem klassischen Ansatz nach Launder [174]. Die Wandmodelle des Korrelation- und Dissipationsterms sind unter Verwendung der Produktionsraten der turbulenten kinetischen Energie P_k und durch Auftriebseffekte G_k entsprechend erweitert [75]. Für den elliptischen Übergangsparameter muss eine einfache

Laplace-Gleichung wie folgt gelöst werden [75]:

$$\alpha_\theta - L_\theta^2 \nabla^2 \alpha_\theta = 1 \quad \text{mit} \quad L_\theta = 2,5L, \quad (6.96)$$

wobei L_θ ein thermisches Längenmaß repräsentiert. Dehoux [75] wählt dies mit Hilfe einer Parameterstudie als Vielfaches des mechanischen Längenmaßes (vgl. Gl. (5.48)).

Das Zeitskalenverhältnis R wird nicht durch Lösen einer Transportgleichung der Temperaturvarianz und ihrer Dissipationsrate bestimmt, sondern unter Einsatz der Übergangsfunktion α_θ :

$$R = (1 - \alpha_\theta) Pr + \alpha_\theta R^h, \quad (6.97)$$

wobei das Zeitskalenverhältnis unmittelbar an der Wand dem Wert der molekularen Prandtl-Zahl und fernab der Wand dem Wert der vorgegebenen Konstante für R_h entspricht (vgl. Abb. 6.21).

In Abb. 6.21 sind beispielhaft die Verläufe für verschiedene Formulierungen des thermischen Längenmaßes L_θ unter Verwendung der DNS-Daten nach Abe et al. [85,86] dargestellt. Die DNS-Daten zeigen, dass das Zeitskalenverhältnis beim Einsatz der Randbedingungen $\Theta|_w = 0$ und $\theta'|_w = 0$ unmittelbar an der Wand der molekularen Prandtl-Zahl Pr entspricht. Für $Pr = 0,025$ zeigt sich für das Zeitskalenverhältnis R bei $y^+ \approx 100$ ein Maximum ($R \approx 0,25$) und geht mit größer werdendem Wandabstand y^+ in einen nahezu konstanten Bereich über. Für $Pr = 0,71$ zeigt sich das Maximum des Zeitskalenverhältnisses ($R \approx 0,78$) bei $y^+ \approx 15$. Eine physikalische Begründung für dieses Verhalten kann bei erzwungener Konvektion für beide Prandtl-Zahlen ausschließlich unter Berücksichtigung der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}^+$ und deren Dissipationsrate $\varepsilon_{\theta\theta}^+$ geführt werden. Das Maximum der Produktion der Temperaturvarianz ist im Vergleich zu niedrigen Prandtl-Zahlen für $Pr = 0,71$ zu kleineren Wandabständen verschoben [171] (vgl. Abb. 6.10 und 6.11). Dies äußert sich demnach auch in der Position des Maximums der Temperaturvarianz, dass bei hohen Prandtl-Zahlen ebenfalls bei kleineren Wandabständen ($y^+ \approx 20$) festzustellen ist. Diese Verschiebung wirkt sich unmittelbar auch im Verhalten der turbulente thermische Zeitskala $\tau_{th} = \overline{\theta'^2} / \varepsilon_{\theta\theta}$ aus. Ihr Maximum befindet sich nun näher an der Wand, was somit den ansteigenden Wert des Zeitskalenverhältnisses τ_{th} / τ_m im Bereich $y^+ \approx 4 - 16$ erklärt. Dieser Effekt ist für niedrige molekulare Prandtl-Zahlen (hier: $Pr = 0,025$) deutlich schwächer ausgeprägt [171].

Keine der Definitionen zeigt eine vollständige Übereinstimmung zu den DNS-Daten, weder für $Pr = 0,025$ noch für $Pr = 0,71$. Es lässt sich schlussfolgern, dass der Einfluss der Prandtl-Zahl ebenfalls Berücksichtigung in der Wahl des thermischen Längenmaßes L_θ finden sollte. Speziell im wandnahen Bereich der Strömung kann der exakte Verlauf des Zeitskalenverhältnisses R durch den Ansatz nach Dehoux [75] nicht wiedergegeben werden. Darüber hinaus erfordert das Modell die Vorgabe eines konstanten Zeitskalenverhältnisses R_h für den homogenen Bereich der Strömung durch den Anwender. Dieses ist aber eine unmittelbare Funktion der Péclet-Zahl der Strömung sowie des Zustands der Strömung und kann a priori nicht bestimmt werden.

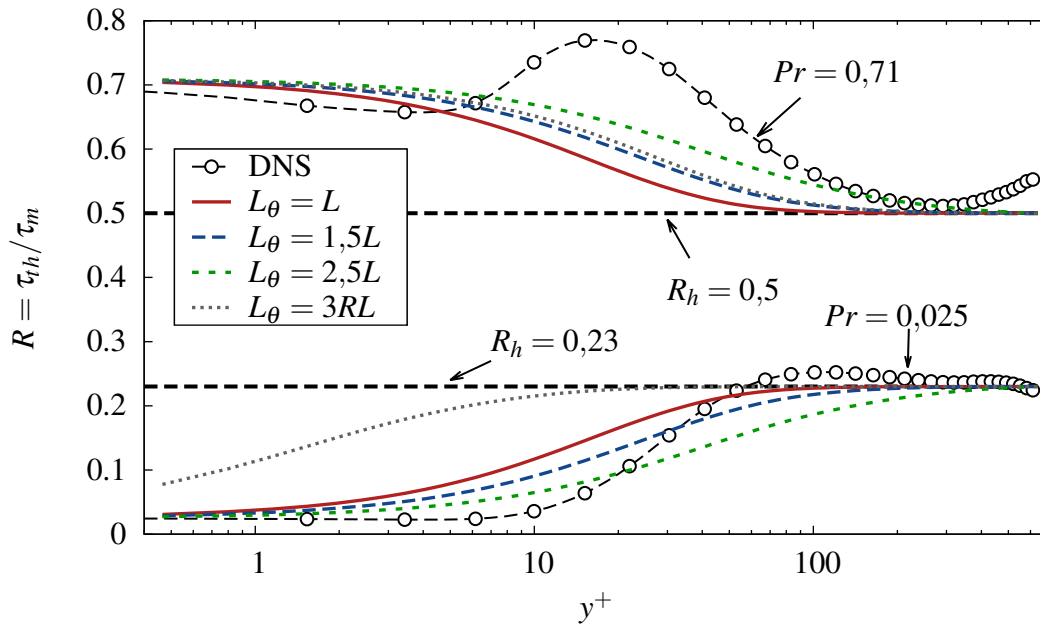


Abbildung 6.21.: Verlauf des Zeitskalenverhältnisses R für zwei verschiedene Prandtl-Zahlen $Pr = 0,025$ und $Pr = 0,71$ als Funktion des normierten Wandabstands y^+ nach dem Modellansatz von Dehoux [75], bestimmt auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).

6.4.4.6. Vergleich der kombinierten Modelle auf Basis von DNS-Daten

Nachfolgend sollen die kombinierten Ansätze des Korrelations- und Dissipationsterms $\Pi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta}$ unter Verwendung der DNS-Daten von Abe et al. [85,86] miteinander verglichen werden. Dieses Vorgehen erlaubt, die Güte der einzelnen Modellierungsvorschläge für die einzelnen Transport- und Vernichtungsterme ohne den Einfluss zusätzlicher Modellannahmen zu beurteilen.

Anhand der Taylor-Reihenentwicklung (vgl. Kapitel 6.4.2) kann nachgewiesen werden, dass die Modelle von Carteciano [73,175] sowie von Baumann [70] für den Fall einer turbulenten Plattenkanalströmung kein korrektes asymptotisches Wandverhalten aufweisen. Die Abb. 6.22 und 6.23 vergleichen die kombinierten Ansätze der Transportterme und der DNS-Daten [85,86] bei zwei verschiedenen Prandtl-Zahlen ($Pr = 0,025$ und $Pr = 0,71$). Für die turbulente Wärmeflusskomponente in Strömungsrichtung $\overline{u'\theta'^+}$ lässt sich mit Hilfe der DNS-Daten ein asymptotischer Grenzwert ungleich Null für beide molekulare Prandtl-Zahlen erkennen. Dies bestätigt das abgeleitete asymptotische Wandverhalten (vgl. Tab. 6.1). Für die wandnormale turbulente Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'^+}$ ist der asymptotische Grenzwert im Vergleich sehr klein bei beiden Prandtl-Zahlen und steht mit der molekularen Diffusion $D_{2\theta}^{v+}$ im Gleichgewicht. Deutlich zu erkennen sind die Unterschiede in der Größenordnung des Maximums des kombinierten Transportterms $\Pi_{i\theta}^+ - \varepsilon_{i\theta}^+$ (ca. Faktor Sechs) für beide turbulente Wärmeflusskomponenten bei $Pr = 0,025$ und $0,71$. Dies lässt sich auf die größere Dämpfung bei niedrigen Prandtl-Zahlen zurückführen.

Für $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$ zeigt sich, dass für die turbulente Wärmeflusskomponente in Strömungsrichtung $\overline{u'\theta'^+}$ keines der Modelle eine hinreichend genaue Beschreibung des Verlaufs der DNS-Daten ermöglicht. Der Ansatz von Lai & So [172] zeigt für diese Wärmeflusskomponente im Vergleich zu den restlichen Ansätzen die beste Übereinstimmung im Bereich $y^+ \approx 15 - 100$. Für eine vollständig eingelaufene, beheizte Strömung ist ausschließlich die wandnormale Komponente des turbulenten Wärmeflussvektors $\overline{v'\theta'^+}$ für den Verlauf und die Form des ermittelten Temperaturprofils verantwortlich. Der Ansatz von Lai & So [172] zeigt eine deutliche Abweichung des Maximums bei $y^+ \approx 40$ um fast 40 % im Vergleich zu den DNS-Daten [85,86]. Speziell der Ansatz von Shikazono & Kasagi [72] sticht mit einer max. Abweichung von 12 % bei Analyse des gesamten Bereich des dimensionslosen Wandabstands y^+ hervor. Bei höheren molekularen Prandtl-Zahlen ($Pr = 0,71$) (vgl. Abb. 6.23) steht im Bereich der Kernströmung der Korrelations-term $\Pi_{i\theta}^+$ im Gleichgewicht zum exakten Produktionsterm $P_{i\theta}^+$. Der Ansatz der Dissipationsrate $\varepsilon_{i\theta}^+$ ist nur von untergeordneter Bedeutung. Es zeigt sich für die turbulente Wärmeflusskomponente in Strömungsrichtung $\overline{u'\theta'^+}$, dass die Modellansätze von Shikazono & Kasagi [72] (max. Abweichung ca. 10 %) und Dehoux [75] (max. Abweichung ca. 23 %) eine gute Übereinstimmung mit den DNS-Daten aufweisen. Für die Ansätze nach Baumann [70] oder Carteciano [73] zeigt sich erneut, dass der korrekter Verlauf von $\Pi_{1\theta}^+ - \varepsilon_{1\theta}^+$ im wandnahen Bereich nicht wiedergegeben werden kann. Für die turbulente Wärmeflusskomponente in wandnormaler Richtung $\overline{v'\theta'^+}$ lässt sich feststellen, dass vor allem die Ansätze nach Baumann [70], Dehoux [75] und Shikazono & Kasagi [72] eine gute Übereinstimmung des Verlaufs $\Pi_{2\theta}^+ - \varepsilon_{2\theta}^+$ mit den DNS-Daten [85,86] aufweisen. Alle drei Modelle sind unter Verwendung von DNS-Daten optimiert worden, der Ansatz von Carteciano [73] hingegen ist zur Berechnung von Freistrahlen entwickelt worden. Obwohl der Ansatz von Shikazono & Kasagi [72] die beste Vorhersage der DNS-Daten ermöglicht, ist für den Einsatz in komplexeren Geometrien eine Anpassung des Korrelationsterms $\Pi_{i\theta}$ erforderlich.

Bei niedrigeren Reynolds-Zahlen Re_b bzw. Re_τ zeigt sich eine insgesamt geringfügig schlechtere Übereinstimmung aller Modelle im Vergleich zu den DNS-Daten (vgl. Anhang A.2.6). Der Schließungsansatz von Lai & So [172] ist für einen Einsatz bei höheren molekularer Prandtl- bzw. Péclet-Zahlen beschränkt und kann nicht für Flüssigmetallströmungen eingesetzt werden. Eine Erweiterung stellt der Ansatz von Baumann [70] dar, dessen eingeführte Dämpfungsfunktion jedoch auf einer empirischen Abhängigkeit zum dimensionslosen Wandabstand beruht. Deshalb ist dieser Ansatz für komplexere Strömungsgeometrien problematisch. Ursache ist, dass die Dämpfungsfunktion keinen Bezug zum Zeitskalenverhältnis oder zur Prandtl-Zahl aufweist. Die Modellstrategie nach Dehoux [75] einer kombinierten Modellierung des Korrelations- und Dissipationsterms mit Hilfe einer elliptischen Übergangsfunktion zeigt für niedrige und höhere Prandtl-Zahlen eine gute Übereinstimmung. Sie kann jedoch nur auf bereits experimentell oder numerisch untersuchte Strömungsgeometrien angewendet werden. Der Ansatz von Carteciano [73] bzw. Carteciano & Grötzbach [175] stellt eine einfache Möglichkeit dar, den Einfluss der Prandtl- bzw. Péclet-Zahl

in die Modellierung hinreichend genau abzubilden. Im Vergleich zu den DNS-Daten zeigt sich für niedrige Prandtl-Zahlen eine akzeptable Übereinstimmung. Der Vorteil dieses Modells liegt in seiner einfachen Formulierung, die eine Implementierung in einen beliebigen CFD-Code ermöglicht.

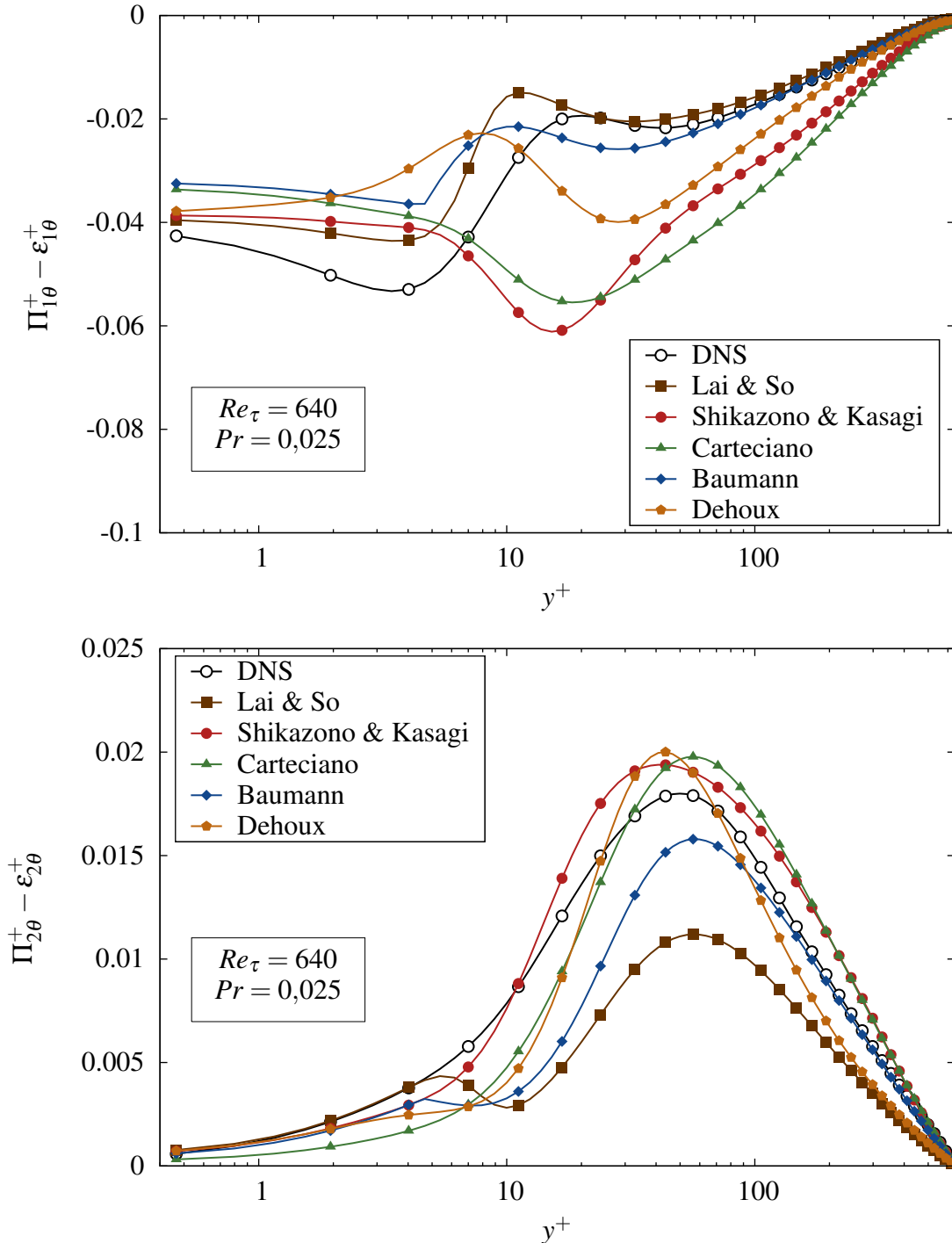


Abbildung 6.22.: Verlauf der vorgestellten, kombinierten Modellansätze des Korrelations- und Dissipations-terms $\Pi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta}$ (oben) bzw. $\Pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ (unten), ermittelt auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).

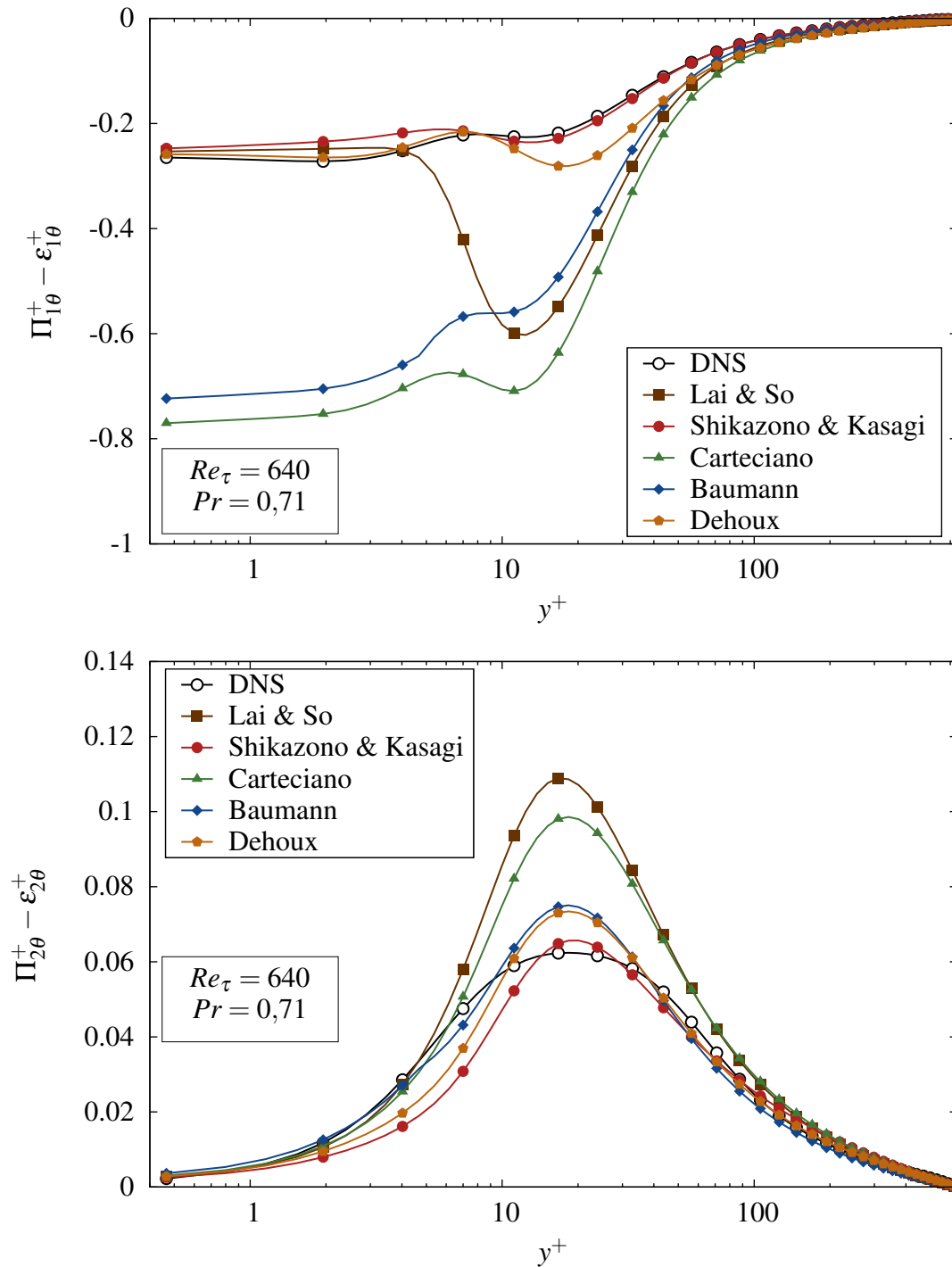


Abbildung 6.23.: Verlauf der vorgestellten, kombinierten Modellansätze des Korrelations- und Dissipations-terms $\Pi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta}$ (oben) bzw. $\Pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ (unten), ermittelt auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,71$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).

Für eine weitere Diskussion möglicher Anpassungen werden daher die Ansätze von Shikazono & Kasagi [72] und Carteciano [73] ausgewählt. Nachfolgend werden Erweiterungen der beiden Modelle für Rechteckkanalströmungen diskutiert und hinsichtlich ihrer Gültigkeit analysiert. Eine

6. Analyse und Bewertung von Schließungsansätzen der Energieerhaltungsgleichung

Analyse des kombinierten Einflusses der Reynolds- und Prandtl-Zahl auf die vorgestellten Modelle kann dem Anhang (vgl. Anhang A.2.6) entnommen werden.

7 Turbulenter Energietransport in Platten- und Rechteckkanalströmungen

Ziel dieses Abschnitts ist es ausgewählte Modellansätze gemäß der Anforderungen turbulenter Strömungen in Platten- und Rechteckkanalströmungen bei variierenden Prandtl-Zahlen zu erweitern. Um den numerischen Aufwand zu reduzieren, werden die Schließungsansätze in eine algebraische Form überführt. Die Gültigkeit der getroffenen Annahmen wird ausführlich diskutiert und analysiert. Es folgt anschließend eine Validierung der entwickelten Modelle in turbulenten Platten- und Rechteckkanalströmungen unter Verwendung von experimentellen und numerischen Vergleichsdaten bei unterschiedlichen Reynolds- und Prandtl-Zahlen. Hier wird gezielt die Kombination aus Turbulenz- und Wärmestrommodell für verschiedene Strömungstypen und Konvektionsarten untersucht. Dies erlaubt es die korrekte Funktionsweise der Modellkombinationen für technisch relevante Strömungen zu beurteilen.

Zu diesem Zweck werden die Modelle in das freie Softwarepaket OpenFOAM[®] [142] implementiert. Zur Berechnung der voll entwickelten Strömung sowie dem Einfluss von Auftrieb wird der Lösungsalgorithmus geeignet erweitert. Für eine Übersicht der eingesetzten numerischen Verfahren sowie deren Validierung finden sich Details im Anhang (vgl. Anhang A.1).

7.1. Erweiterung und Verifizierung der selektierten Schließungsansätze

7.1.1. Implizite algebraische Wärmeflussmodelle (AHM)

Soll das Schließungsproblem der Impuls- und Energieerhaltungsgleichungen vollständig über Ansätze zur Bestimmung der zweiten Momente gelöst werden, erfordert dies in der inkompressiblen Formulierung der Erhaltungs- und Transportgleichung je nach Konvektionsfall die Lösung von insgesamt bis zu 16 partiellen Differentialgleichungen. Mit dem Ziel diesen Aufwand zu reduzieren, können mit Hilfe von Hypothesen und Annahmen die Transportgleichungen des turbulenten Wärmeflussvektors in eine algebraische Form überführt werden. Die algebraische Reduktion

wird hier beispielhaft anhand des Modellansatzes von Carteciano [73] bzw. Carteciano & Grötzbach [175] erläutert. Dieses Vorgehen lässt sich aber prinzipiell auf jeden Schließungsansatz zweiter Momente übertragen. Je nach Komplexität und Umfang der vereinfachenden Annahmen setzt sich das resultierende algebraische Modell aus verschiedenen Teilkomponenten zusammen, die im folgenden Abschnitt erläutert werden.

Der Ausgangspunkt des algebraischen Modells ist die exakte Transportgleichung der turbulenten Wärmeflüsse (vgl. Gl. (6.52) bzw. (6.53)). Die Ableitung eines algebraischen Ausdrucks erfordert es die nichtlinearen Konvektions- und Diffusionsterme zu eliminieren. Zu diesem Zweck kann die Hypothese des schwachen Gleichgewichts⁴³ angewendet werden. Diese verlangt die Einführung eines dimensionslosen turbulenten Wärmeflussvektors $\zeta_{i\theta}$, der wie folgt definiert ist:

$$\zeta_{i\theta} = \frac{\overline{u'_i \theta'}}{\sqrt{k} \sqrt{\overline{\theta'^2}}} \quad \text{und} \quad \frac{D \zeta_{i\theta}}{D t} - D_{\zeta_{i\theta}} = 0. \quad (7.1)$$

Die Hypothese des schwachen Gleichgewichts unterstellt, dass diese dimensionslose Größe konstant in Raum und Zeit ist [67]. Sie geht auf Rodi [176] und Gibson & Launder [177] zurück.

Im Rahmen dieser Arbeit wird eine turbulente Plattenkanalströmung bei erzwungener Konvektion mit Hilfe der DNS-Daten von Abe et al. [85,86] untersucht. In Abb. 7.1 dargestellt sind die beiden normierten turbulenten Wärmeflusskomponenten $\zeta_{1\theta}$ und $\zeta_{2\theta}$. In unmittelbarer Nähe zur Wand muss das asymptotische Wandverhalten berücksichtigt werden, das für die Komponenten des turbulenten Wärmeflussvektors jeweils das Verhalten $\overline{u' \theta'}^+ \sim y^{+2}$ bzw. $\overline{v' \theta'}^+ \sim y^{+3}$ vorsieht. Für die turbulente kinetische Energie k sowie die Temperaturvarianz kann ein asymptotisches Verhalten von $k \sim y^{+2}$ bzw. $\overline{\theta'^2} \sim y^+$ (vgl. Kapitel 6.4.2) beobachtet werden. Es lässt sich leicht nachweisen, dass für die wandnormale Komponente des dimensionslosen Wärmeflussvektors $\zeta_{2\theta}$ sich demnach ein Wert gleich Null unmittelbar an der Wand ergeben muss ($\sim y^+$), wohingegen für die Komponente in Strömungsrichtung $\zeta_{1\theta}$ das Verhalten proportional zu $\mathcal{O}(1)$ ist. Infolge der beidseitig identischen Beheizung der Plattenkanalströmung wechselt die wandnormale Komponente ihr Vorzeichen und muss einen Schnittpunkt mit der Abszisse aufweisen.

Es ist zu erkennen, dass für einen großen Bereich des dimensionslosen Wandabstands y^+ die Annahme eines konstanten Verlaufs des dimensionslosen Wärmeflussvektors $\zeta_{i\theta}$ für die Komponente in Strömungsrichtung sowie in wandnormaler Richtung in guter Näherung erfüllt ist.

Mit dieser Hypothese kann nun der konvektive und diffusive Transport durch die Transportterme der turbulenten kinetischen Energie k und der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}$ ersetzt werden:

$$\frac{1}{\sqrt{k} \sqrt{\overline{\theta'^2}}} \left(\frac{D \overline{u'_i \theta'}}{D t} - D_{i\theta} \right) = \frac{1}{2} \frac{\overline{u'_i \theta'}}{\sqrt{k} \sqrt{\overline{\theta'^2}}} \left[\frac{1}{k} \left(\frac{D k}{D t} - D_k \right) + \frac{1}{\overline{\theta'^2}} \left(\frac{D \overline{\theta'^2}}{D t} - D_{\theta\theta} \right) \right]. \quad (7.2)$$

⁴³eng.: weak-equilibrium hypothesis

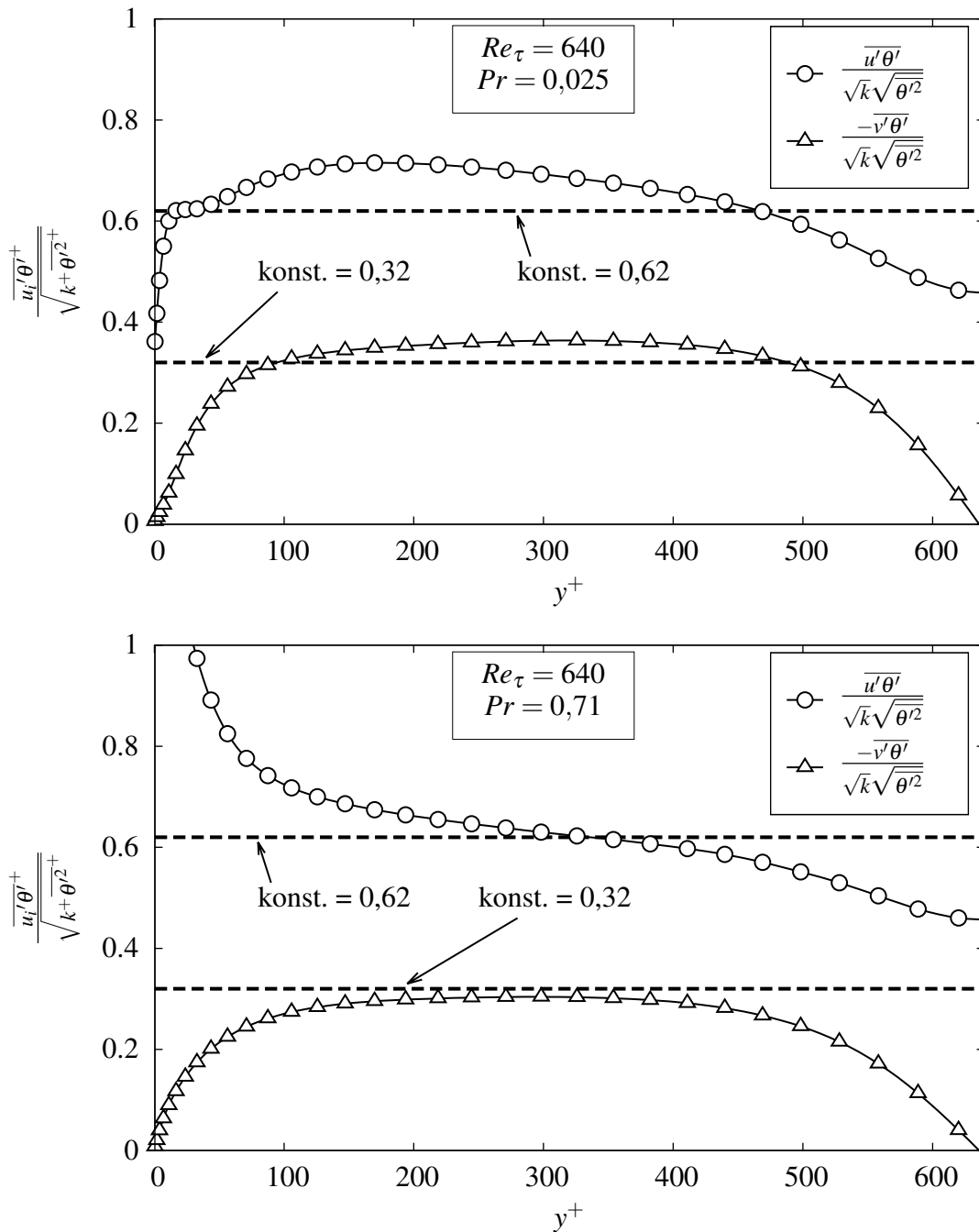


Abbildung 7.1.: Turbulente Wärmeflusskomponente in Strömungsrichtung $\overline{u'\theta'}$ und wandnormaler Richtung $\overline{v'\theta'}$ normiert mit der turbulenten kinetischen Energie k und der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}$, ermittelt auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$ (oben) bzw. $Pr = 0,71$ (unten) (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).

In voll eingelaufenen Strömungen entspricht die Summe der totalen Diffusion der turbulenten kinetischen Energie k und der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}$ der totalen Diffusion des turbulenten Wärmeflussvektors [67,75]:

$$D_{i\theta} = \frac{1}{2} \overline{u'_i \theta'} \left(\frac{1}{k} D_k + \frac{1}{\overline{\theta'^2}} D_{\theta\theta} \right). \quad (7.3)$$

Dies erlaubt es, Gl. (7.2) unter Verwendung der symbolischen Notation der einzelnen Transportgleichungen (vgl. Gl. (5.9), (6.25) und (6.53)) weiter zu vereinfachen:

$$P_{i\theta} + G_{i\theta} + \Pi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} - \frac{\overline{u'_i \theta'}}{2k} (P_k + G_k - \varepsilon) - \frac{\overline{u'_i \theta'}}{2\overline{\theta'^2}} (P_{\theta\theta} - \varepsilon_{\theta\theta}). \quad (7.4)$$

Damit verbleiben als Transportmechanismen die exakten Produktionsterme der turbulenten Wärmeflüsse $P_{i\theta}$ und $G_{i\theta}$, der turbulenten kinetischen Energie P_k und G_k sowie der Temperaturvarianz $P_{\theta\theta}$. Darüber hinaus tritt weiterhin der Korrelationsterm $\Pi_{i\theta}$ sowie die Vernichtungsterme $\varepsilon_{i\theta}$, ε und $\varepsilon_{\theta\theta}$ auf. Der Ausdruck in Gl. (7.4) kann durch Annahme eines Gleichgewichts der Produktions- und Vernichtungsterme der turbulenten kinetischen Energie k und der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}$ weiter vereinfacht werden [67,75]:

$$P_k + G_k = \varepsilon \quad \text{und} \quad P_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}. \quad (7.5)$$

Die Gültigkeit dieser Annahme wird, wie in Abb. 7.2 dargestellt ist, ebenfalls anhand der DNS-Daten [85,86] überprüft. Es zeigt sich, dass das Verhältnis der Produktion zur Dissipation der turbulenten kinetischen Energie k und der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}$ bei beiden Prandtl-Zahlen für einen Bereich von $y^+ = 80$ bis $y^+ = 400$ nahe eins ist. In unmittelbarer Nähe zur Wand verschwindet die Produktion der turbulenten kinetischen Energie P_k^+ und es dominiert die Dissipation ε^+ , die an der Wand bedingt durch die Viskosität des Mediums einen endlichen Wert ungleich Null annimmt. Mit zunehmendem Wandabstand findet die Produktion der turbulenten kinetischen Energie bei $y^+ \approx 13$ ihr Maximum. Fernab der Wand im Bereich $y^+ \approx 400 - 640$ verringert sich zunehmend der Geschwindigkeitsgradient in wandnormaler Richtung und somit die von dieser Größe abhängige Produktionsrate. Die Analyse der Produktions- und Dissipationsrate der Temperaturvarianz $P_{\theta\theta}^+$ bzw. $\varepsilon_{\theta\theta}^+$ in Abhängigkeit von Pr zeigt bei höherer molekularer Prandtl-Zahl einen ähnlichen Verlauf zum Verhältnis der Produktion und Dissipation der turbulenten kinetischen Energie k . Ursache hierfür ist die Skalenähnlichkeit zwischen Geschwindigkeits- und Temperaturfeld. Aber auch für $Pr = 0,71$ kann festgestellt werden, dass die Gültigkeit der Gleichgewichtsannahme in Wandnähe nicht erfüllt ist. Für niedrige Prandtl-Zahlen ($Pr = 0,025$, vgl. Abb. 7.2) zeigt sich hingegen deutlich die Auswirkung des Skalenunterschieds. Das Maximum des Verlaufs bei hohen Prandtl-Zahlen ($y^+ \approx 13$) wird bei $Pr \ll 1$ vollständig durch schnelle Wärmeleitvorgänge, die die Dissipation übertreffen, gedämpft. Dennoch ist auch bei $Pr \ll 1$ ein Gleichgewicht zwischen Produktionsrate und Dissipation für $y^+ \gg 1$ zu erkennen, wenngleich es den Bezugswert Eins um bis zu 20 % übertrifft.

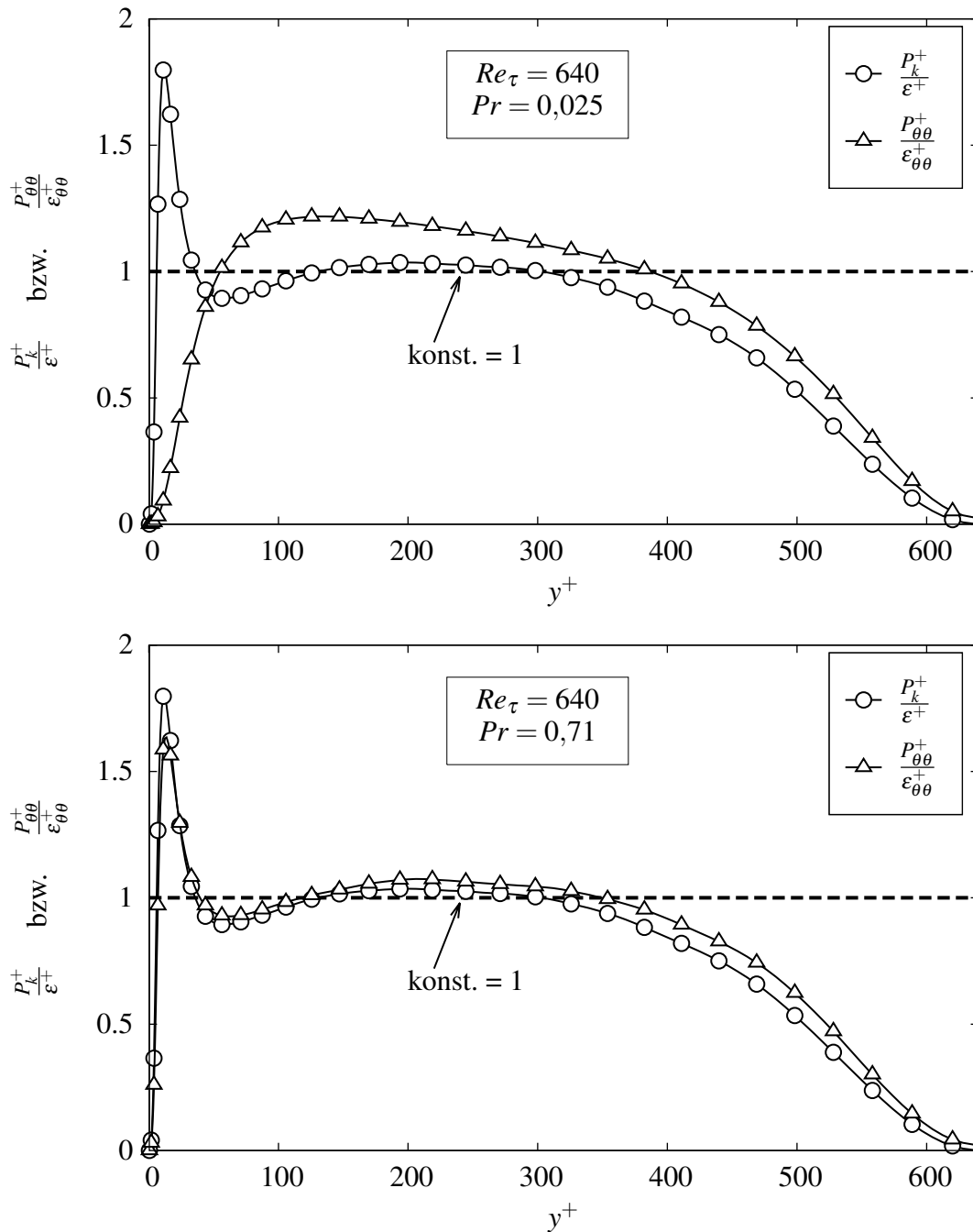


Abbildung 7.2.: Verhältnis zwischen Produktions- und Dissipationsrate der turbulenten kinetischen Energie k und der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}$ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ , ermittelt auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$ (oben) bzw. $Pr = 0,71$ (unten) (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).

Die Gl. (7.5) kann nun mit Hilfe dieser zweiten Annahme weiter vereinfacht werden:

$$P_{i\theta} + G_{i\theta} + \Pi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} = 0. \quad (7.6)$$

Die wesentlichen Wirkmechanismen der Transportgleichung, wie z.B. der Korrelationsterms $\Pi_{i\theta}$, die Dissipation $\varepsilon_{i\theta}$ sowie auch die Produktion infolge der Hauptströmung $P_{i\theta}$ und bedingt durch Auftriebseffekte $G_{i\theta}$ bleiben im algebraischen Ansatz demnach vollständig erhalten.

7.1.2. Entwicklung des AHM nach Carteciano (Carteciano-AHM)

Ausgehend von Gl. (7.6) kann nun nahezu jeder beliebige Modellansatz des Korrelations- und Dissipationsterms zur Herleitung eines algebraischen Modells (AHM) verwendet werden. Das Vorgehen wird anhand einer abgewandelten Formulierungen des Modellansatzes von Carteciano [73] (nachfolgend Carteciano-AHM) beispielhaft erläutert. Für den Korrelationsterm $\Pi_{i\theta}$ wird eine modifizierte Form eingesetzt:

$$\Pi_{i\theta} = -C_{1\theta} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_i \theta'} + C_{2\theta} \overline{u'_j \theta'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + C_{3\theta} \beta g_i \overline{\theta'^2}, \quad (7.7)$$

wobei die Koeffizienten $C_{1\theta}, C_{2\theta}$ und $C_{3\theta}$ angepasst werden. Der Reflexionsterm (vgl. Gl. (6.74)), der in unmittelbarer Wandnähe wirksam ist, wird vernachlässigt. Durch diese Maßnahme ist es möglich, den Ansatz unabhängig vom wandnormalen Abstand d zu formulieren und somit besser auf komplexe Geometrien anzuwenden. Bereits Lai & So [172] erkannten, dass ohne den Reflexionsterm der Modellansatz des Korrelationsterms $\Pi_{i\theta}$ eine deutlich bessere Übereinstimmung mit den verwendeten DNS-Daten aufweist. Dies kann auch an dieser Stelle anhand der DNS-Daten [85,86] nachgewiesen werden (vgl. Abb. 7.3). Hier dargestellt ist für das Ausgangsmodell und die Weiterentwicklung die Summe aus Korrelations- und Dissipationsterm der wandnormalen Wärmeflusskomponente im Vergleich zu den DNS-Daten bei $Re_\tau = 640$ sowie den molekularen Prandtl-Zahlen $Pr = 0,025$ und $Pr = 0,71$.

Infolge der Modifikation der Koeffizienten (vgl. Tab. 7.1) kann eine bessere Übereinstimmung zu den DNS-Daten festgestellt werden. Da der Einfluss des Korrelationsterms $\Pi_{i\theta}$ und somit seiner Modellierung mit zunehmender molekulare Prandtl- bzw. Péclet-Zahl steigt, ist speziell für den Fall $Pr = 0,71$ eine deutlich bessere Vorhersage des Maximums zu erkennen. Die relative Abweichung des Maximums sinkt hier von ca. 60 % für den ursprünglichen Ansatz auf ca. 13 % für den modifizierten Ansatz. Für niedrigere molekulare Prandtl-Zahlen $Pr = 0,025$ ist der Einfluss des Korrelationsterms geringer, da in diesem Fall der Einfluss des Modellierungsansatzes der Dissipationsrate $\varepsilon_{i\theta}$ überwiegt. Hier beträgt die relative Abweichung bei $y^+ \approx 170$ ca. 24 % für das ursprüngliche Modell und 14 % beim modifizierten Ansatz. Die relative Abweichung des Maximalwertes kann durch die Erweiterung von 13 % auf unter 1 % reduziert werden. Dieser positive Effekt der Modifikation wird auch mit sinkender Reynolds-Zahl gemindert. Dies ist auf das insgesamt sinkende Turbulenzniveau der Strömung zurückzuführen. Eine Darstellung des Einflusses der Reynolds-Zahl bei verschiedenen Prandtl-Zahlen im Vergleich zu den DNS-Daten [85,86] kann dem Anhang (vgl. Anhang A.3.1) entnommen werden.

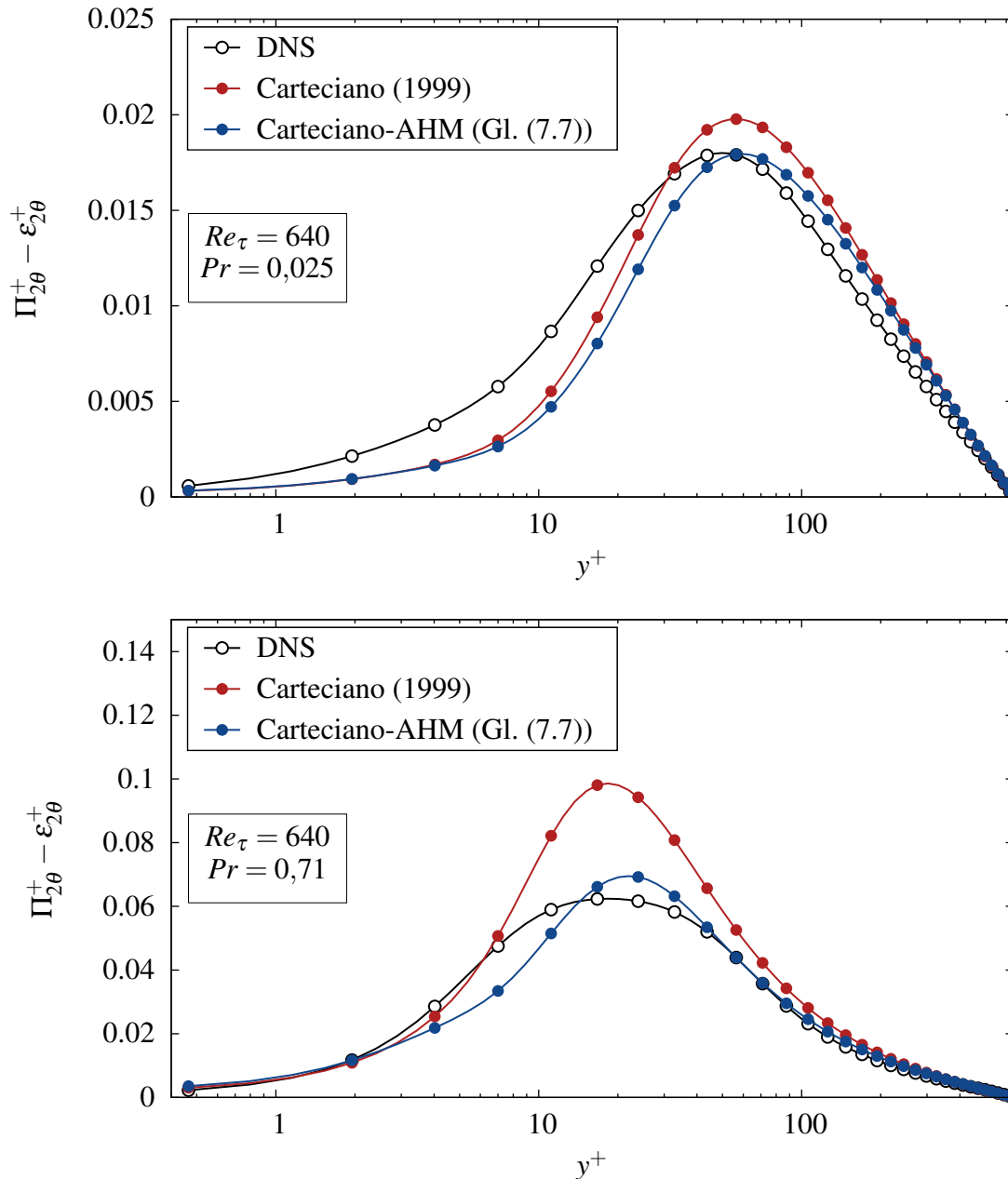


Abbildung 7.3.: Verlauf der kombinierten Modellansätze des Korrelations- und Dissipationsterms $\Pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ des angepassten Ansatzes nach Carteciano [73] für die turbulente Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'}^+$ als Funktion des Wandabstands y^+ , ermittelt auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$ (oben) bzw. $Pr = 0,71$ (unten) (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).

Um den Effekt der Skalentrennung und des gegenläufigen Einflusses der beiden wesentlichen Transport- bzw. Vernichtungsmechanismen in Abhängigkeit der molekularen Prandtl-Zahlen im algebraischen Modell zu berücksichtigen, wird auch an dieser Stelle der Ansatz nach Carteciano [73] bzw. Carteciano & Grötzbach [175] verfolgt. Anstelle der Einführung einer eigenständigen Modellierung der Dissipationsrate $\varepsilon_{i\theta}$, sieht ihr Vorschlag die Einführung eines Terms $Z_{i\theta}$ in den Transportgleichungen vor. Diese Größe hat ebenfalls die physikalische Bedeutung eines Dissipa-

tionsterms und soll, in Kombination mit dem Modell des Korrelationsterms $\Pi_{i\theta}$, den wachsenden bzw. sinkenden Einfluss der beiden Transportmechanismen in Abhängigkeit der Prandtl-Zahl abbilden [73,175]:

$$Z_{i\theta} = -\frac{1+Pr}{2\sqrt{Pr}\sqrt{R}} \left(\frac{\varepsilon}{k}\right) \exp[-C_{5\theta} (Re_t + Pe_t)] \overline{u'_i\theta'}. \quad (7.8)$$

Durch Einführung des Zeitskalenverhältnisses R sowie der turbulenten Reynolds- bzw. Péclet-Zahl (Re_t und Pe_t) als Eingangsgröße, kann dieser Ansatz in einer einfachen Form den Einfluss der Skalentrennung und der molekularen Prandtl-Zahl berücksichtigen. Das algebraische Modell (Carteciano-AHM) in seiner endgültigen, implizit algebraischen Form lässt sich demnach wie folgt formulieren:

$$\overline{u'_i\theta'} = -\left(\frac{k}{\varepsilon}\right) \frac{\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial x_j} + \alpha \overline{u'_j \theta'} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \gamma \beta g_i \overline{\theta'^2}}{C_{1\theta} + \frac{1+Pr}{2\sqrt{Pr}\sqrt{R}} \exp[-C_{5\theta} (Re_t + Pe_t)]}, \quad (7.9)$$

wobei die Koeffizienten den Zusammenhängen $\alpha = (1 - C_{2\theta})$ bzw. $\gamma = (1 - C_{3\theta})$ entsprechen. Das Modell ist implizit von dem turbulenten Wärmeflussvektor $\overline{u'_i\theta'}$ abhängig. Dies stellt jedoch im Rahmen des iterativen Prozesses keine erwähnenswerte Schwierigkeit dar. Da beide Terme des Nenners stets positiv definiert sind, bedarf es keiner weiteren Maßnahmen zur Vorbeugung eventueller Unstetigkeiten. Das Modell verlangt durch Einführung des Zeitskalenverhältnisses R zusätzlich die Lösung der Temperaturvarianzgleichung $\overline{\theta'^2}$ (vgl. Gl. (6.24)) sowie deren Dissipationsrate $\varepsilon_{\theta\theta}$ (vgl. Gl. (6.28)). Da in den Arbeiten [73] und [175] ausschließlich Modellansätze für den Bereich der Kernströmung enthalten sind, wird anstelle das Modell von So & Sommer [162] bzw. Sommer et al. [163] verwendet (vgl. Gl. (6.35) und (6.36)). Dieses ist bereits für einen großen Bereich der Reynolds- und Prandtl-Zahlen anhand experimenteller und numerischer Datensätze sowie der empirischen Korrelation nach Kader [166] in turbulenten Kanal- und Rohrströmungen validiert. Eine Übersicht der Modellkoeffizienten des ursprünglichen Ansatzes [73] und des Carteciano-AHM ist der Tabelle 7.1 zu entnehmen.

Modell	$C_{1\theta}$	$C_{2\theta}$	$C_{3\theta}$	$C_{4\theta}$	$C_{5\theta}$
Carteciano (1999)	3,0	0,33	0,5	0,5	0,0007
Carteciano-AHM	3,6	0,5	0,5	-	0,001

Tabelle 7.1.: Übersicht der Koeffizienten des Modells nach Carteciano [73] und des implizit algebraischen Modells (Carteciano-AHM).

7.1.3. Entwicklung des AHM nach Shikazono & Kasagi (SK-AHM)

Ein Nachteil des Ansatzes von Shikazono & Kasagi [72] ist das Modell für den Korrelations-terms $\Pi_{i\theta}$. Dieses erfüllt zwar ein korrektes asymptotisches Wandverhalten (vgl. Tab. 6.1), verletzt aber die Anforderung invariant gegenüber einer Änderung des Koordinatensystems zu sein. Ursache ist die Einführung der Anisotropie der turbulenten Reynolds-Normalspannungskomponenten in das Modell des Korrelationsterms.

Da die Modifikation des Korrelationsterms des Carteciano-AHM (vgl. Gl. (7.7)) nur in Kombination mit dem Modell der Dissipationsrate (vgl. Gl. (7.8)) eingesetzt werden sollen, wird hier stattdessen das Modell des Korrelationsterms nach Baumann [70] (vgl. Gl. (6.77)) verwendet. Über eine zusätzliche globale Dämpfungsfunktion f_{pt} in Abhängigkeit von der molekularen Prandtl-Zahl erlaubt dieser Ansatz den steigenden bzw. sinkenden Einflusses des Korrelationsterms in Abhängigkeit der Péclet-Zahl abzubilden. Ein weiterer Vorteil ist, dass die vorgeschlagene Erweiterung im Gegensatz zum ursprünglichen Modell von Shikazono & Kasagi [72] auch in komplexeren Geometrien einsetzbar ist. Der Ansatz für die Dissipationsrate $\varepsilon_{i\theta}$ entspricht dem von Shikazono & Kasagi [72] (vgl. Gl. (6.71)). Das vollständige Modell des Korrelationsterms $\Pi_{i\theta}$ lautet damit:

$$\begin{aligned} \Pi_{i\theta} = & \left(C_{1\theta} f_{pt} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_i \theta'} - \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_k \theta'} n_k n_i \right) f_w - C_{1\theta} f_{pt} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_i \theta'} \\ & + C_{2\theta} \overline{u'_k \theta'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + C_{3\theta} \beta g_i \overline{\theta'^2} - C_{4\theta} \frac{\varepsilon}{k} \overline{u'_k \theta'} n_k n_i \frac{k^{3/2}}{\varepsilon d}, \end{aligned} \quad (7.10)$$

wobei die „globale“ Dämpfungsfunktion in Abhängigkeit der Prandtl-Zahl Pr nach Baumann [70] zu $f_{pt} = Pr / (1,2Pr + 0,18)$ verwendet wird.

Wie der Abb. 7.4 entnommen werden kann, zeigt sich unabhängig von der Prandtl-Zahl eine verbesserte Übereinstimmung mit den DNS-Daten [85,86] im Vergleich zur ursprünglichen Formulierung von Shikazono & Kasagi [72]. Ab $y^+ \approx 60$ kann der Verlauf der DNS-Daten mit Hilfe der Modifikation für beide Prandtl-Zahlen nahezu perfekt wiedergegeben werden. Für $Pr = 0,025$ beträgt die relative Abweichung des Maximums für das Ausgangsmodell 9 % und für das erweiterte Modell weniger als 1 %. Bei Strömungen einer Prandtl-Zahl nahe Eins ($Pr = 0,71$) wird das Maximum des Verlaufs ($y^+ \approx 20$) durch die ursprüngliche Formulierung um 30 % und für die Modifikation um 6 % überschätzt. Eine Darstellung der Ergebnisse bei sinkenden Reynolds-Zahlen kann dem Anhang (vgl. Anhang A.3.2) entnommen werden.

Auch für diesen Ansatz kann ein implizit algebraisches Modell (SK-AHM) abgeleitet werden (vgl. Kap. 7.1.1):

$$\overline{u'_i \theta'} = - \left(\frac{k}{\varepsilon} \right) \frac{\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x_j} + \alpha \overline{u'_j \theta'} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \gamma \beta g_i \overline{\theta'^2} + \left[C_{4\theta} f_{pt} \frac{\sqrt{k}}{d} + \frac{\varepsilon}{k} f_w + \frac{1+Pr}{2Pr} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right] \overline{u'_j \theta'} n_j n_i}{(1 - f_w) \left[C_{1\theta} f_{pt} + C_\varepsilon f_{\varepsilon 1} f_{\varepsilon 2} \frac{1+Pr}{2\sqrt{Pr}\sqrt{R}} \right] + \frac{1+Pr}{2Pr} f_w}, \quad (7.11)$$

wobei die Größen $\alpha = (1 - C_{2\theta})$ und $\gamma = (1 - C_{3\theta})$ beschreiben. Dies verlangt erneut die Bestimmung des Zeitskalenverhältnisses R , das analog zum Carteciano-AHM mit Hilfe der modellierten Transportgleichungen der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}$ und deren Dissipationsrate $\varepsilon_{\theta\theta}$ nach [162] bzw. [163] bestimmt wird. Die eingeführten Koeffizienten $C_{1\theta}$, $C_{2\theta}$, $C_{3\theta}$ und $C_{4\theta}$ sind der Tabelle 7.2 zu entnehmen.

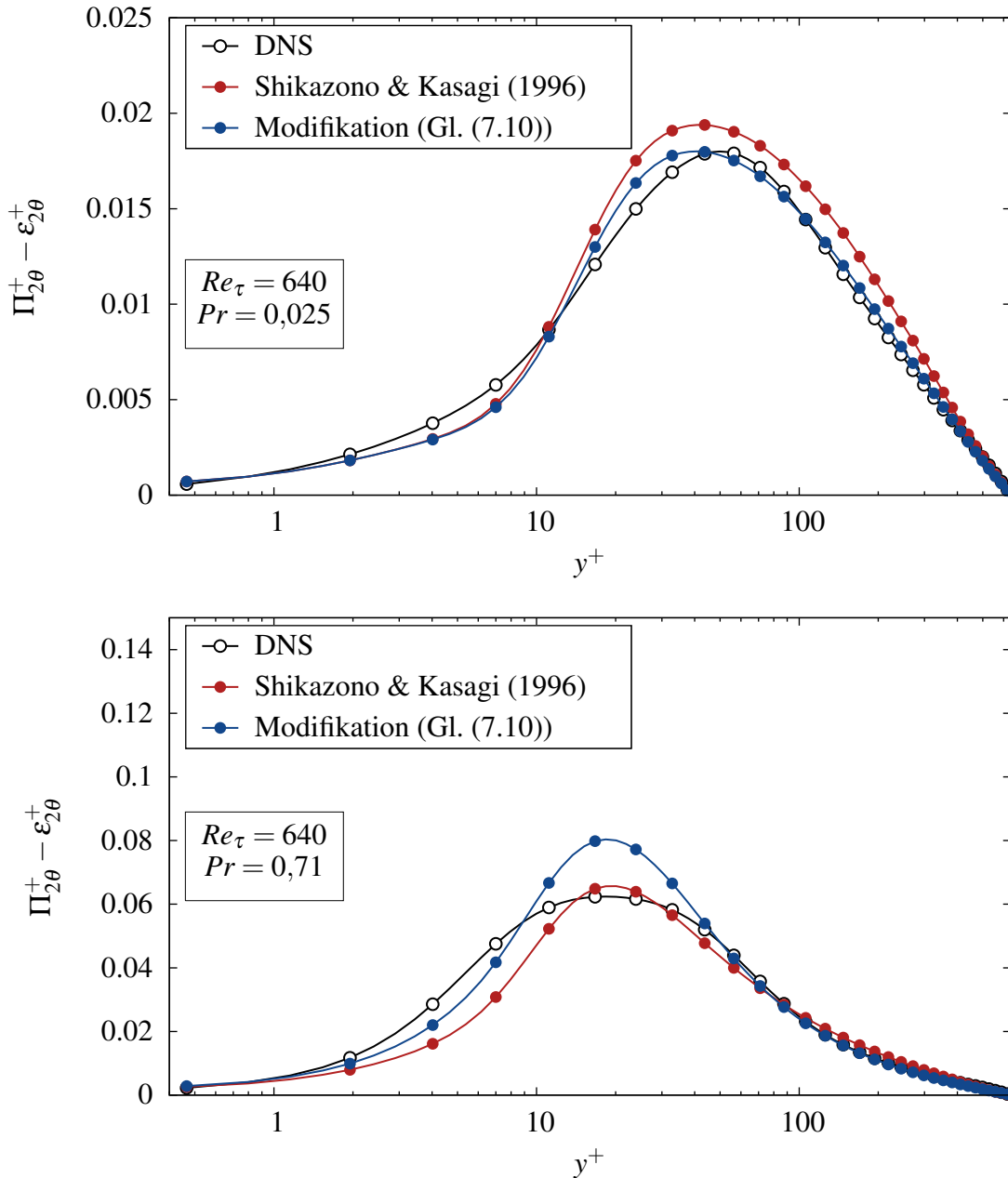


Abbildung 7.4.: Verlauf der kombinierten Modellansätze des Korrelations- und Dissipationsterms $\Pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ des angepassten Ansatzes nach Shikazono & Kasagi [72] für die turbulente Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'^+}$ über y^+ , ermittelt auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$ (oben) bzw. $Pr = 0,71$ (unten) (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).

Modell	$C_{1\theta}$	$C_{2\theta}$	$C_{3\theta}$	$C_{4\theta}$
SK-AHM	3,6	0,5	0,5	0,5

Tabelle 7.2.: Übersicht der Koeffizienten des implizit algebraischen Modells (SK-AHM) durch Kombination der Modellansätze von Baumann [70] und Shikazono & Kasagi [72].

7.1.4. Erweiterung des Ansatzes nach Manservisi & Menghini (MM-TD)

Einer der Nachteile des Modells nach Manservisi & Menghini [65,66] ist die Beschränkung auf das Zweigleichungsmodell von Abe et al. [169] zur Bestimmung der turbulenten Reynolds-Spannungen. In Rechteckkanalströmungen, die durch eine Sekundärströmung der zweiten Art gekennzeichnet sind, oder auftriebsbehaftete Strömungen ist eine Erweiterung der Ordnung des Schließungsansatzes der Impulserhaltungsgleichung erforderlich. Im Rahmen dieser Arbeit wird daher eine Kombination des elliptischen Reynolds-Spannungsmodells (RSM-EBM) nach Dehoux [75] mit dem thermischen Zweigleichungsmodell nach Manservisi & Menghini [65,66] vorgeschlagen (nachfolgend als MM-TD bezeichnet).

Die Modellierung der thermischen Diffusivität α_t (vgl. Gl. (6.45)) bleibt unverändert. Dennoch ermöglicht die Kombination mit einem Ansatz zweiter Ordnung der turbulenten Reynolds-Spannungen die turbulenten Diffusionsterme der Transportgleichungen der Temperaturvarianz- und ihrer Dissipationsrate auszutauschen. Diese werden über einen anisotropen Ansatz nach Dol et al. [67] bestimmt:

$$D_{TT}^t = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{TT} \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_k} \right) \quad \text{bzw.} \quad D_{\varepsilon_{TT}}^t = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{\varepsilon_{TT}} \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \varepsilon_{TT}}{\partial x_k} \right), \quad (7.12)$$

wobei die Koeffizienten jeweils den Wert $C_{TT} = 0,22$ bzw. $C_{\varepsilon_{TT}} = 0,22$ annehmen. Der Verlauf der beiden Ansätze zur Bestimmung der turbulenten Diffusion der Temperaturvarianz bzw. des Gradienten des dritten Momentes D_{TT}^t im Vergleich zu den DNS-Daten [85,86] ist in Abb. 7.5 für eine Kanalströmung einer niedrigen molekularen Prandtl-Zahl ($Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$) dargestellt. Wie in Abb. 7.5 dargestellt ist, zeigt sich im wandfernen Bereich der Strömung ($y^+ = 100 - 640$) für den modifizierte Ansatz der turbulenten Diffusion (vgl. Gl. (7.12)) eine bessere Übereinstimmung mit den DNS-Daten im Vergleich zur ursprünglichen Formulierung nach Manservisi & Menghini [65,66]. Einzig das Maximum nahe der Wand bei $y^+ \approx 30$ wird durch den anisotropen Ansatz überbewertet mit einer relativen Abweichung zu den DNS-Daten von fast 80 %. Der isotrope Ansatz nach [65,66] hingegen zeigt eine Unterschätzung des Maximums bei $y^+ \approx 30$ mit einer Abweichung ungefähr 60 %.

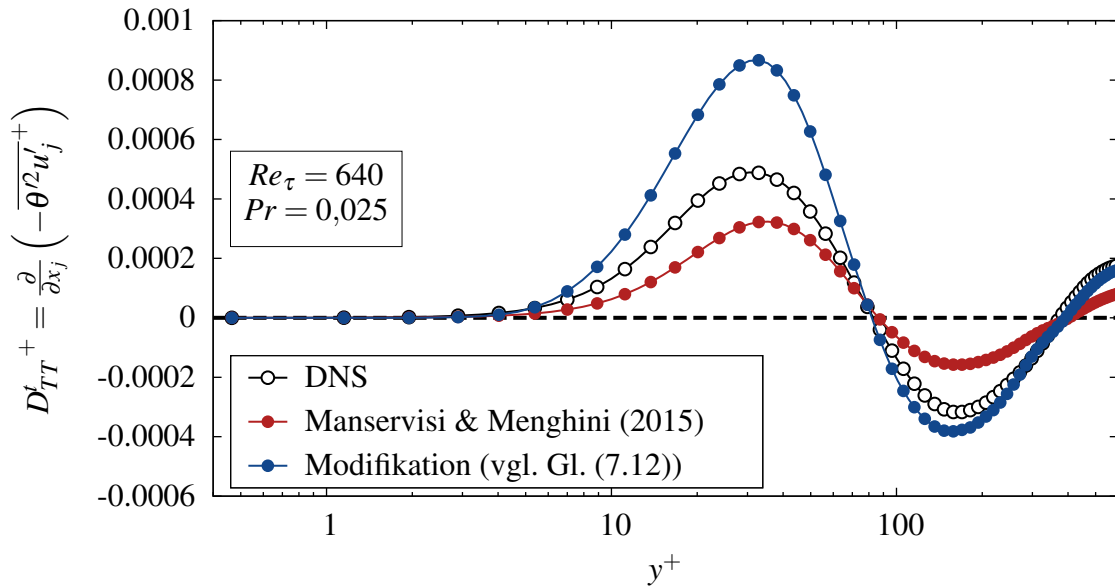


Abbildung 7.5.: Verlauf der beiden Ansätze des turbulenten Diffusionsterms D_{TT}^+ bzw. des Gradienten der dritten Momente $\overline{\theta^2 u_j^+}$ über dem wandnormalen Abstand y^+ , ermittelt auf Basis der DNS-Daten [85,86] für $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).

Eine zusätzliche Erweiterung, die für Rechteckkanalströmungen von Bedeutung ist, betrifft die Bestimmung des wandnormalen Abstandes d . Dieser wird in transformierter Form als dimensionsloser Wandabstand y^* an verschiedenen Stellen, fast ausschließlich im Zusammenhang von Dämpfungsfunktionen, in ihren Formulierungen eingeführt. Dies führt zu einer Unstetigkeit des Ansatz entlang der Flächendiagonalen (vgl. Abb. 7.7), die auch in der Verteilung der turbulenten thermischen Diffusivität α_t sowie der turbulenten Wärmeflüsse $\overline{v'T'}$ bzw. $\overline{w'T'}$ zu erkennen ist.

Eine Alternative ist ein einmaliges Lösen einer Poisson-Gleichung [178–180]:

$$\nabla^2 \phi = -1 \quad \text{und} \quad d = -|\nabla \phi| + \sqrt{|\nabla \phi|^2 + 2\phi}, \quad (7.13)$$

wobei die Größe d den dimensionsbehafteten Wandabstand darstellt. Die zur Lösung erforderlichen Randbedingungen sind durch $\phi = 0$ unmittelbar an der Wand sowie $\partial \phi / \partial n = 0$ an allen Begrenzungsflächen gegeben. Bei einer zeitlichen Änderung der Geometrie ist die Berechnung der Gl. (7.13) entsprechend mehrfach auszuführen. Es kann gezeigt werden, dass sich für Gl. (7.13) in einer quasi-zweidimensionalen Plattenkanalströmung ein identischer Verlauf zum exakten Wandabstand ergibt (vgl. Abb. 7.6).

Der wesentliche Vorteil der Bestimmung des Wandabstandes mit Hilfe der Poisson-Gl. ist in Rechteckkanalgeometrien (vgl. Abb. 7.7) ersichtlich. Hier dargestellt ist der wandnormale Abstand eines jeden Punktes im Querschnitt ermittelt als exakte wandnormale Distanz und mit Hilfe des Poisson-Ansatzes. Entlang der Diagonalen der Querschnittsfläche ($y = z$) ist eine Unstetigkeit zu erkennen, da stets zu jeder Wand jeweils nur der kleinste Wandabstand berechnet wird. Der Ansatz

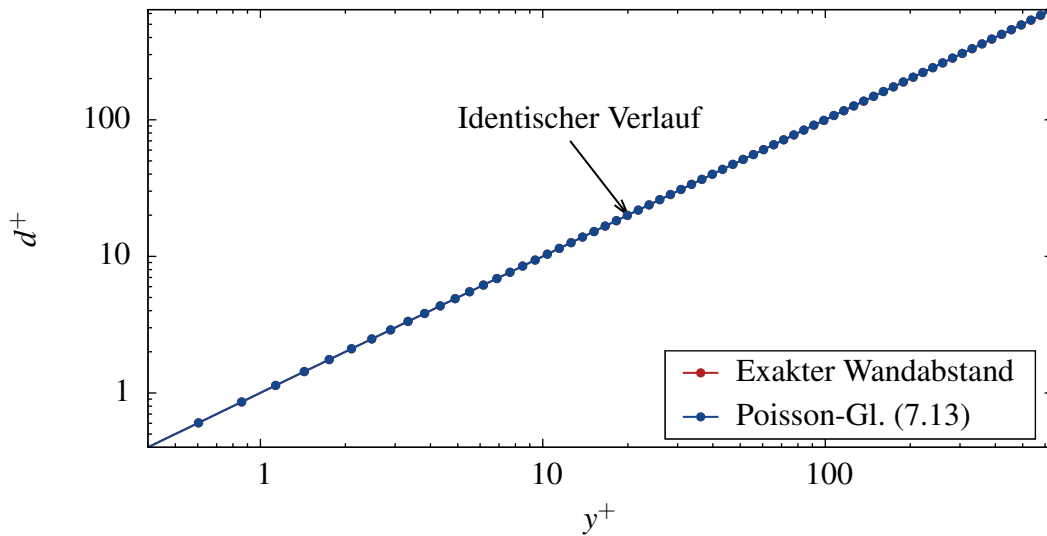


Abbildung 7.6.: Vergleich des Modellansatzes der Poisson-Gleichung nach [178–180] (vgl. Gl. (7.13)) mit der exakten Bestimmung des wandnormalen Abstandes für eine Plattenkanalgeometrie.

auf Basis der Poisson-Gleichung liefert nahe der Wand eine akzeptable Übereinstimmung mit dem exakten Wert des Wandabstandes. Im Zentrum des Rechteckkanals hingegen ergibt sich eine Abweichung vom geometrischen Wandabstand von ca. 30 %. Der Wandabstand d wird hier nur in den Dämpfungsfunktionen verwendet, deren Einflussbereich auf den wandnahen Bereich begrenzt ist. Dennoch ist die Auswirkung dieses Verfahrens für Rechteckkanalströmungen zu prüfen.

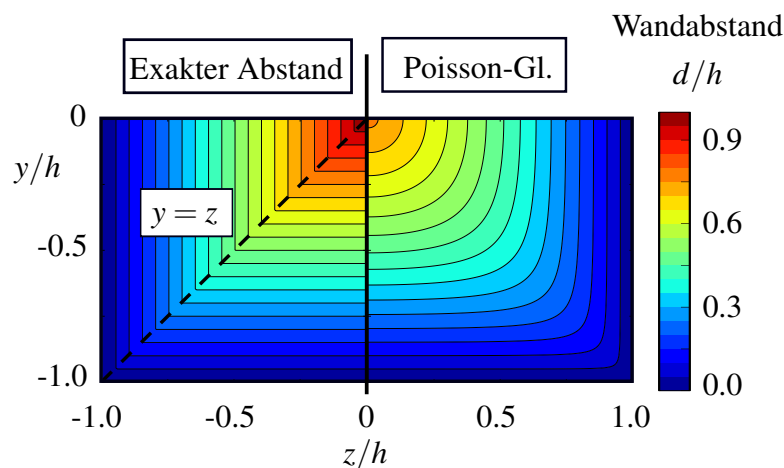


Abbildung 7.7.: Vergleich des Modellansatzes zur Bestimmung des Wandabstands auf Basis der Poisson-Gleichung nach [178–180] (vgl. Gl. (7.13)) mit der exakten Bestimmung (minimaler Abstand zu den einzelnen Wänden) für eine Rechteckkanalgeometrie.

In Abb. 7.8 ist die Verteilung der normierten turbulenten thermischen Diffusivität α_t/ν und der turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{v'T'^+}$ in einer Rechteckkanalströmung bei $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,025$ dargestellt. Deutlich zu erkennen ist bei exakter Bestimmung des Wandabstandes ei-

ne Unstetigkeit bei beiden Verteilungen entlang der Flächendiagonalen. Dies äußert sich in einer Überhöhung der turbulenten thermischen Diffusivität und des turbulenten Wärmeflusses entlang der Diagonalen. Diese Unstetigkeiten sind unphysikalisch, da sowohl das Geschwindigkeits- als auch das Temperaturfeld in diesem Fall stetig und differenzierbar sind. Bei Verwendung des modifizierten Wandabstands mit Hilfe der Poisson-Gl. verschwindet dieser Effekt und es wird im Vergleich ein niedrigeres Maximum ermittelt. Ursache ist der Einfluss des modifizierten Wandabstands in den Dämpfungsfunktionen des Modellansatzes.

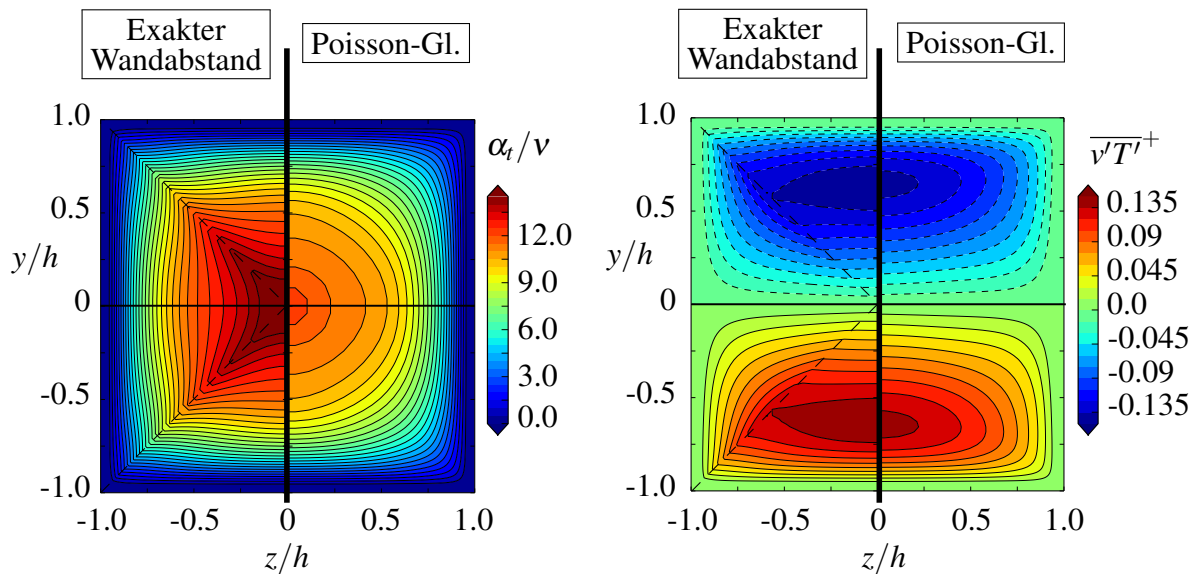


Abbildung 7.8.: Vergleich des Verhältnisses der turbulenten thermischen Diffusivität α_t zur kinematischen Viskosität ν (links) und der normierten Wärmeflusskomponente $\overline{v'T'}^+$ für den ursprünglichen Ansatz nach Manservisi & Menghini [65,66] bei exakter Bestimmung des wandnormalen Abstandes und der modifizierten Form (MM-TD).

Nachfolgend werden die vorgestellten Modelle und eingeführten Erweiterungen unter Verwendung von numerischen und experimentellen Daten in Platten- und Rechteckkanalströmungen bei verschiedenen molekularen Prandtl-Zahlen untersucht und hinsichtlich ihrer Gültigkeit geprüft.

7.2. Validierung anhand einer symmetrisch beheizten Plattenkanalströmung

Die turbulente Plattenkanalströmung stellt einen einfachen Strömungstyp dar. Für eine voll eingelaufene Strömung reduziert sich das Gleichungssystem auf wenige Transportterme in den Transportgleichungen. Dies ist speziell für die Entwicklung und Überprüfung von Schließungsansätzen von Vorteil, da mit Hilfe von DNS-Daten Modelle für die unterschiedlichen Transport- und Wirkmechanismen oder ein korrektes, asymptotisches Wandverhalten abgeleitet werden können. Eine schematische Darstellung des Strömungsgebietes und der Randbedingungen kann Abb. 4.6 entnommen werden.

Bei reiner Zwangskonvektion ist die Temperatur ein passiver Skalar, der keinerlei Rückwirkung auf das Geschwindigkeitsfeld oder die Verteilung der turbulenten Reynolds-Spannungen aufweist. Damit ist einzig die turbulente Scherspannung $\overline{u'v'}$ im Gleichungssystem von Bedeutung, so dass bei alleiniger Untersuchung des Geschwindigkeitsfeldes auch isotrope Ansätze der Wirbelviskosität mit hinreichender Genauigkeit eingesetzt werden könnten. Hier wird zunächst das verwendete Reynolds-Spannungsmodell (RSM-EBM) nach Dehoux [75,148] mit Hilfe von experimentellen und numerischen Daten überprüft und validiert.

Zunächst werden die dimensionslosen Geschwindigkeitsprofile der Komponente \bar{u}^+ bei verschiedenen Reynolds-Zahlen ($Re_\tau = 180, 395, 640$ und 1020) mit DNS-Daten von Abe et al. [85,86] verglichen, wie dies die Abb. 7.9 zeigt.

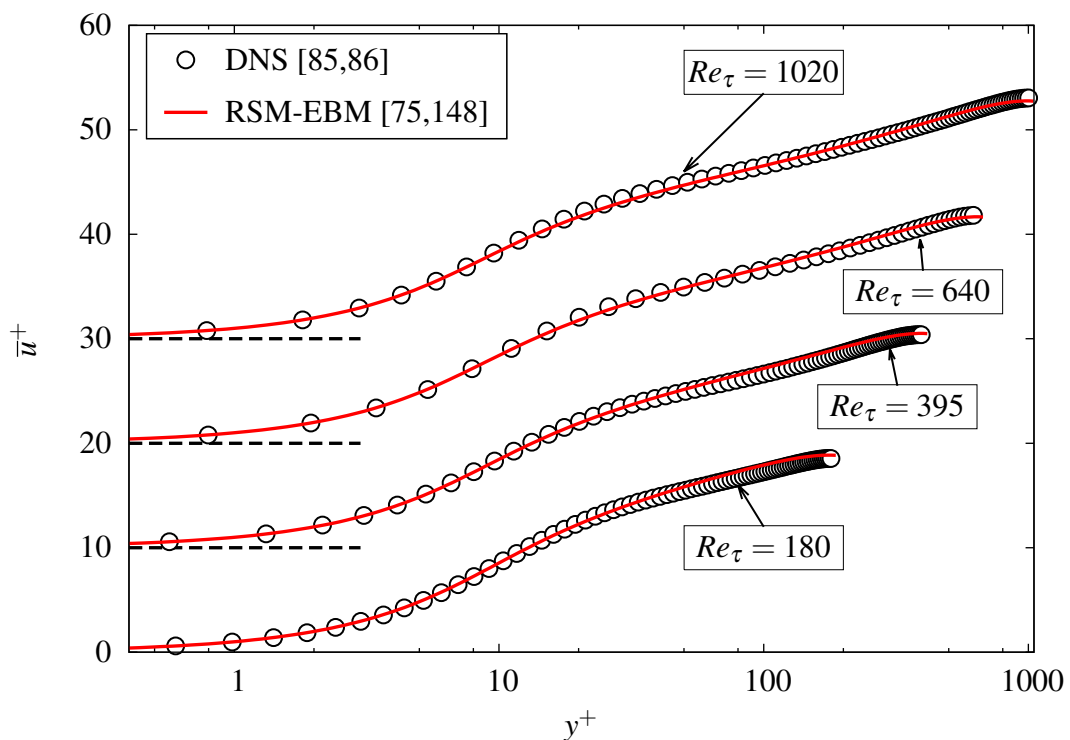


Abbildung 7.9.: Dimensionslose Geschwindigkeitsprofile \bar{u}^+ (für steigende Reynolds-Zahlen Re_τ sind die Profile jeweils verschoben) über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ für das RSM-EBM im Vergleich zu den DNS-Daten [85,86] (nur jedes 3. Symbol dargestellt).

Für alle Reynolds-Zahlen wird eine sehr gute Übereinstimmung mit den DNS-Daten festgestellt. Einzig für $Re_\tau = 180$ wird der Übergangsbereich zwischen der viskosen Unterschicht und dem logarithmischen Bereich geringfügig überschätzt. Die relative Abweichung beträgt hier 4 % zu den DNS-Daten. Dies ist auf das sehr niedrige Turbulenzniveau bei kleinen Reynolds-Zahlen zurückzuführen. Für eine zunehmende Reynolds-Zahl wird hingegen der Übergang in den logarithmischen Bereich mit einer hinreichenden Genauigkeit vorhergesagt.

Da die Anisotropie der turbulenten Reynolds-Spannungen von Bedeutung ist, werden die ermittelten Verläufe für das EARSM⁴⁴ nach Hellsten [77,78] und das RSM-EBM⁴⁵ [75,148] bei einer Reynolds-Zahl ($Re_\tau = 640$) unter Verwendung der DNS-Daten miteinander verglichen.

Wie in Abb. 7.10 dargestellt ist, kann das EARSM nach Hellsten [77,78] die Anisotropie der turbulenten Reynolds-Normalspannungen nicht korrekt wiedergeben. Dies ist auf eine vereinfachte Formulierung des vollständigen Ansatzes von Wallin & Johansson [137] zurückzuführen, die im EARSM enthalten ist. Dies mag mit dem Ziel einer verbesserten numerischen Stabilität erfolgt sein, die maßgeblich durch die zusätzlich erforderlichen Dämpfungsterme beeinflusst wird [137]. Die Bildung der turbulenten kinetischen Energie k^+ erfolgt im EARSM nicht über die Spur des Tensors der Reynolds-Spannungen, sondern mit Hilfe einer eigenen Transportgleichung. Daraus erklärt sich auch die gute Übereinstimmung des Verlaufs der primären turbulenten Scherspannung $\overline{u'v'}$ mit den DNS-Daten.

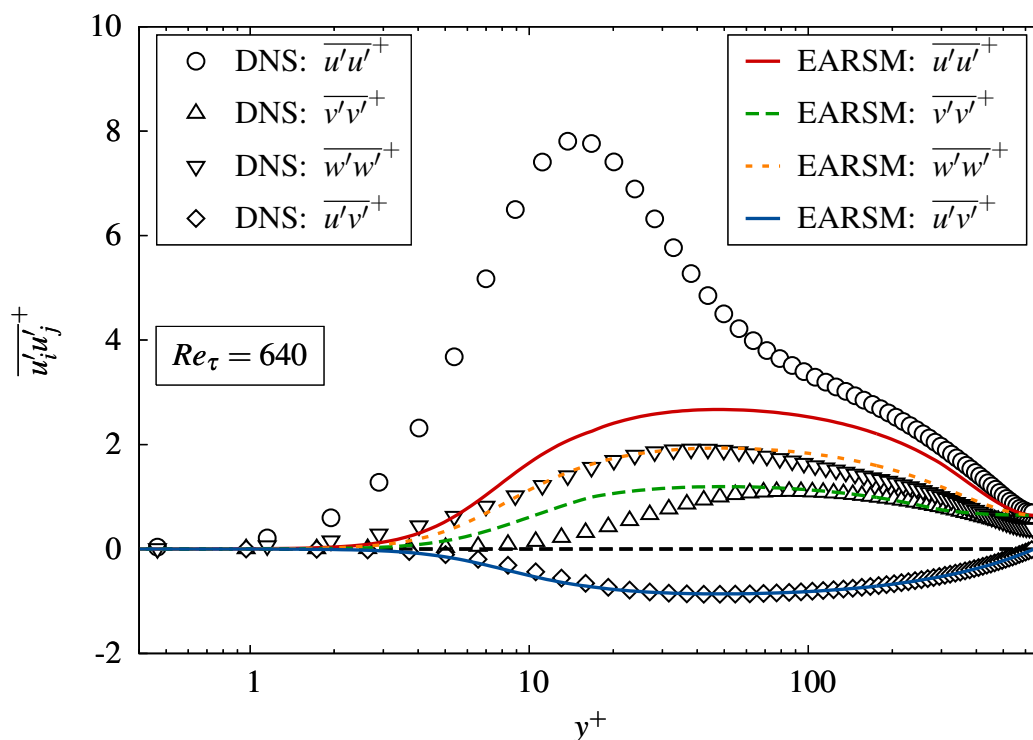


Abbildung 7.10.: Verlauf der turbulenten Reynolds-Spannungen $\overline{u'_i u'_j}^+$ für das EARSM nach Hellsten [77, 78] (Linien) über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ im Vergleich zu den DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und Zwangskonvektion (nur jedes 3. Symbol dargestellt).

Im Gegensatz zum EARSM nach Hellsten [77,78] liefert das RSM-EBM für die turbulenten Reynolds-Spannungen eine sehr gute Übereinstimmung mit den DNS-Daten (vgl. Abb. 7.11). Die Anisotropie der turbulenten Normalspannungen $\overline{u'_i u'_i}^+$ kann nahezu exakt wiedergegeben wer-

⁴⁴EARSM: Explizit algebraische Reynolds-Spannungsmodell

⁴⁵Reynolds-Spannungsmodell auf Basis eines elliptischen Übergangsparameters

den. Einzig eine geringe Überbewertung des jeweiligen Maximums der beiden Normalspannungen $\overline{u'u'^+}$ bzw. $\overline{w'w'^+}$ ist im wandnahen Bereich der Strömung festzustellen. Die relative Abweichung zur DNS beträgt an dieser Stelle für $\overline{u'u'^+}$ jedoch nur 3,5 %.

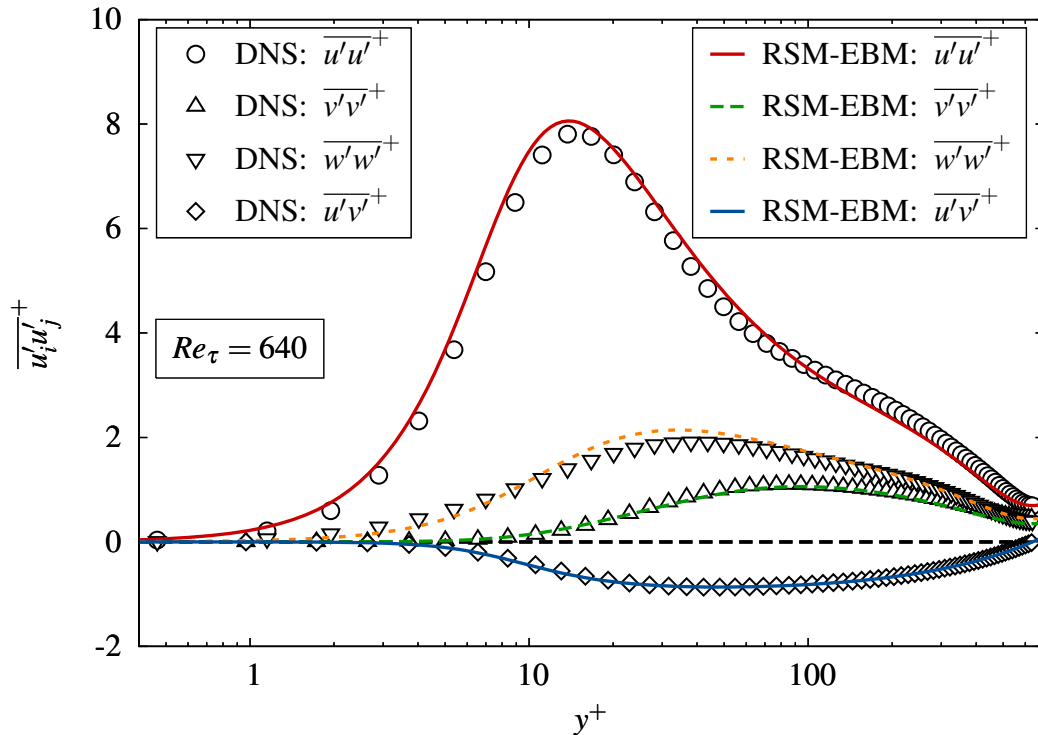


Abbildung 7.11.: Verlauf der turbulenten Reynolds-Spannungen $\overline{u'_i u'_j}^+$ für das RSM-EBM nach Dehoux [75, 148] (Linien) über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ im Vergleich zu den DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und Zwangskonvektion (nur jedes 3. Symbol dargestellt).

Zur Beurteilung von Strömungen auf Basis von eindimensionalen Systemanalysen sind möglichst genaue Korrelationen des Reibungskoeffizienten c_f (nach Fanning⁴⁶) zwingend erforderlich. Die bekannteste Korrelation für Rohrströmungen stammt von Blasius [181]:

$$c_f = 0,0791 Re_{D_h}^{-0,25} \quad \text{für} \quad 2000 < Re_{D_h} < 4 \cdot 10^5. \quad (7.14)$$

Diese kann bei Verwendung der über den hydraulischen Durchmesser D_h definierten Reynoldszahl Re_{D_h} (vgl. Gl. (6.10)) auch für turbulente Plattenkanalströmungen eingesetzt werden. Die Korrelation von Churchill [182,183] basiert auf der impliziten Korrelation von Colebrook⁴⁷ [184] und überführt diese in eine rein explizite Formulierung:

⁴⁶Es ist hier darauf zu achten, dass je nach Art (Fanning c_f oder Darcy-Konvention $f = 4 \cdot c_f$) des Koeffizienten ein Faktor von 4 beachtet werden muss.

⁴⁷Diese Korrelation dient auch als Basis für das gleichnamige Diagramm des Reibungskoeffizienten in Rohrströmungen.

$$c_f = 2 \times \left[\left(\frac{8}{Re_{D_h}} \right)^{12} + \frac{1}{(a+b)^{1,5}} \right]^{1/12}, \quad (7.15)$$

wobei die beiden Parameter a und b über die folgenden Formulierungen bestimmt werden können:

$$a = \left\{ 2,475 \ln \left[\left(\frac{7}{Re_{D_h}} \right) + 0,27 \left(\frac{k_s}{D_h} \right) \right] \right\}^{16} \quad \text{bzw.} \quad b = \left(\frac{37539}{Re_{D_h}} \right)^{16}. \quad (7.16)$$

Bei Annahme einer glatten Wand (Wandrauhigkeit $k_s = 0$) ergibt sich der in Abb. 7.12 dargestellte Verlauf des Reibungskoeffizienten c_f für die beiden Turbulenzmodelle im Vergleich zu experimentellen, numerischen und über die beiden Korrelationen bestimmten Daten. Die Korrelationen nach Blasius [181] und Churchill [182,183] zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit den experimentellen Daten nach Brouillette & Lykoudis [185] und Takahashi et al. [186]. Beide Turbulenzmodelle zeigen für größere Reynolds-Zahlen eine sehr gute Übereinstimmung mit der Korrelation nach Blasius [181] oder Churchill [182,183]. Speziell jedoch im Bereich $Re_{D_h} \approx 1000$ erkennt man für das EARSM nach Hellsten [77,78] eine Überbewertung des Reibungskoeffizienten. Die Ergebnisse des RSM-EBM nach Dehoux [75,148] stimmen hingegen sehr gut mit den DNS-Daten und der Korrelation nach Churchill [182,183] überein. Ein weiterer wesentlicher Vorteil des RSM-EBM ist, bei alleiniger Betrachtung des Turbulenzmodells, seine geringe Sensitivität auf die wandnahe Auflösung (speziell auf die Entfernung des ersten Gitterpunktes zur Wand). Dies wurde in früheren Arbeiten von Manceau & Hanjalić [146] bestätigt.

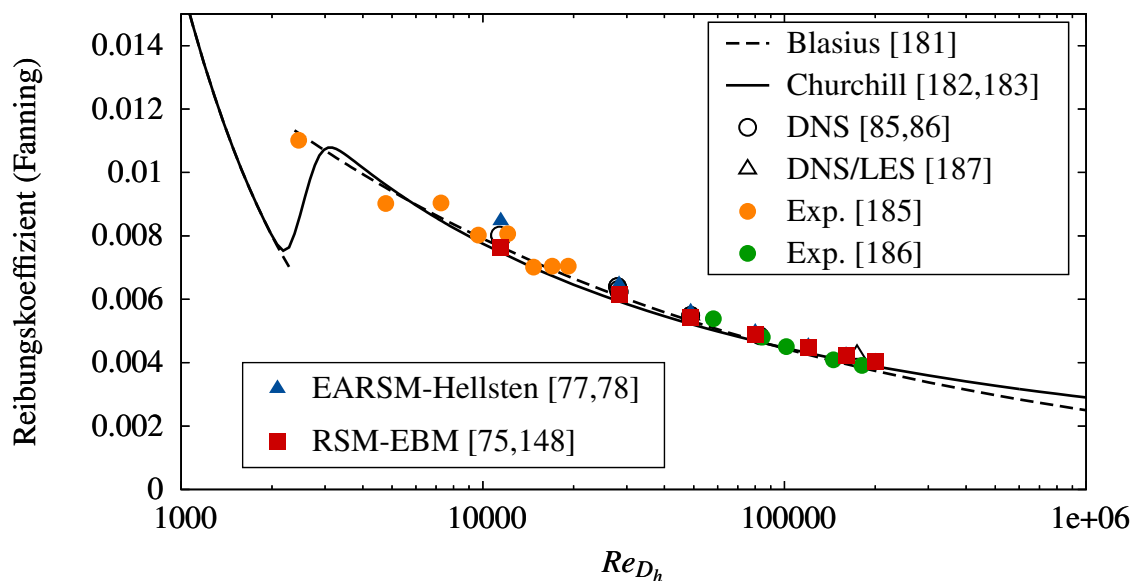


Abbildung 7.12.: Verlauf des Reibungskoeffizienten c_f für das EARSM und RSM-EBM über der Reynolds-Zahl Re_{D_h} im Vergleich zu experimentellen, empirischen und numerischen Daten.

Im nächsten Schritt werden die modifizierten turbulenten Wärmeflussmodelle untersucht, wobei die Ergebnisse mit DNS-Daten bei zwei unterschiedlichen molekularen Prandtl-Zahlen verglichen werden. Die Auswahl für Pr beschränkt sich auf $Pr = 0,025$ (Größenordnung von Flüssigmetallen) und $Pr = 0,71$ (Luft). Der Fokus liegt auf der Beurteilung der Qualität und Limitierung beider impliziter algebraischer Wärmeflussmodelle, Carteciano-AHM und SK-AHM, gegenüber anderen Konzepten.

Für das Modell der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t nach Kays [22] ist die Bestimmung einer turbulenten Wirbelviskosität erforderlich. Das Reynolds-Spannungsmodell nach Dehoux [75,148] sieht keine Berechnung dieser Größe vor, so dass hier auf eine Formulierung von Durbin⁴⁸ [104] zurückgegriffen wird:

$$v_t = C_\mu \tau \overline{u'_i u'_j} n_i n_j, \quad (7.17)$$

wobei die Größen τ dem turbulenten Zeitmaß (vgl. Gl. (5.54)), n_i einem wandnormalen Vektor und $C_\mu = 0,22$ einem konstanten Koeffizienten entsprechen. Folgende Modelle sind für die weiterführende Untersuchung ausgewählt worden (vgl. Tab. 7.3).

Bezeichnung	Typ	Turbulenzmodell - $\overline{u'_i u'_j}$	Verweis
Kays [22]	Pr_t -Konzept	RSM-EBM	Kap. 6.2.2
MM-TD ⁴⁹	α_t -Konzept	RSM-EBM	Kap. 6.3.4 + 7.1.4
Carteciano-AHM	AHM ⁵⁰	RSM-EBM	Kap. 7.1.2
SK-AHM	AHM	RSM-EBM	Kap. 7.1.3

Tabelle 7.3.: Übersicht über die untersuchten Kombinationen aus Turbulenz- und Wärmeflussmodell.

Die Abb. 7.13 zeigt die Verläufe des dimensionslosen Temperaturprofils $\overline{\Theta}^+$ und der wandnormalen turbulenten Wärmeflusskomponente $-\overline{v'\theta'}^+$ bei einer Reynolds- und Prandtl-Zahl von $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$ im Vergleich zu den DNS-Daten [85,86]. Alle vier Modelle zeigen beim Vergleich des dimensionslosen Temperaturprofils $\overline{\Theta}^+$ eine gute Übereinstimmung mit den DNS-Daten [85,86]. Der Ansatz von Kays [22] kombiniert mit dem RSM-EBM [75,148] überschätzt das Maximum des Temperaturprofils im Bereich der Kernströmung um ca. 5 %. Dies lässt sich auf eine Unterbewertung der wandnormalen, turbulenten Wärmeflusskomponente $-\overline{v'\theta'}^+$ bis $y^+ \approx 300$ zurückzuführen. Die beste Übereinstimmung des Temperaturprofils zeigt das MM-TD mit einer relativen Abweichung des Maximalwertes von nur 0,2 %, gefolgt vom Carteciano-AHM und SK-AHM mit einer Abweichung von ca. 1 %. Für die turbulente Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'}^+$

⁴⁸Durbin [104] sieht diese Formulierung für das sogenannte $v^2 - f$ -Turbulenzmodell vor.

⁴⁹TD - Turbulent thermal diffusivity - Turbulente thermische Diffusivität

⁵⁰AHM - Algebraic Heat Flux Model - Implizit algebraisches Wärmeflussmodell

zeigt sich beim MM-TD eine Unterbewertung des Verlaufs in Wandnähe (bis $y^+ \approx 200$). Für den wandfernen Bereich bei $y^+ \approx 250 - 640$ weist das Modell hingegen die beste Übereinstimmung mit den DNS-Daten auf. Für das Carteciano-AHM und SK-AHM ergibt sich eine Abweichung in Wandnähe von 4 % bei $y^+ \approx 25$ und im Bereich der Kernströmung von ungefähr 7 % zur DNS.

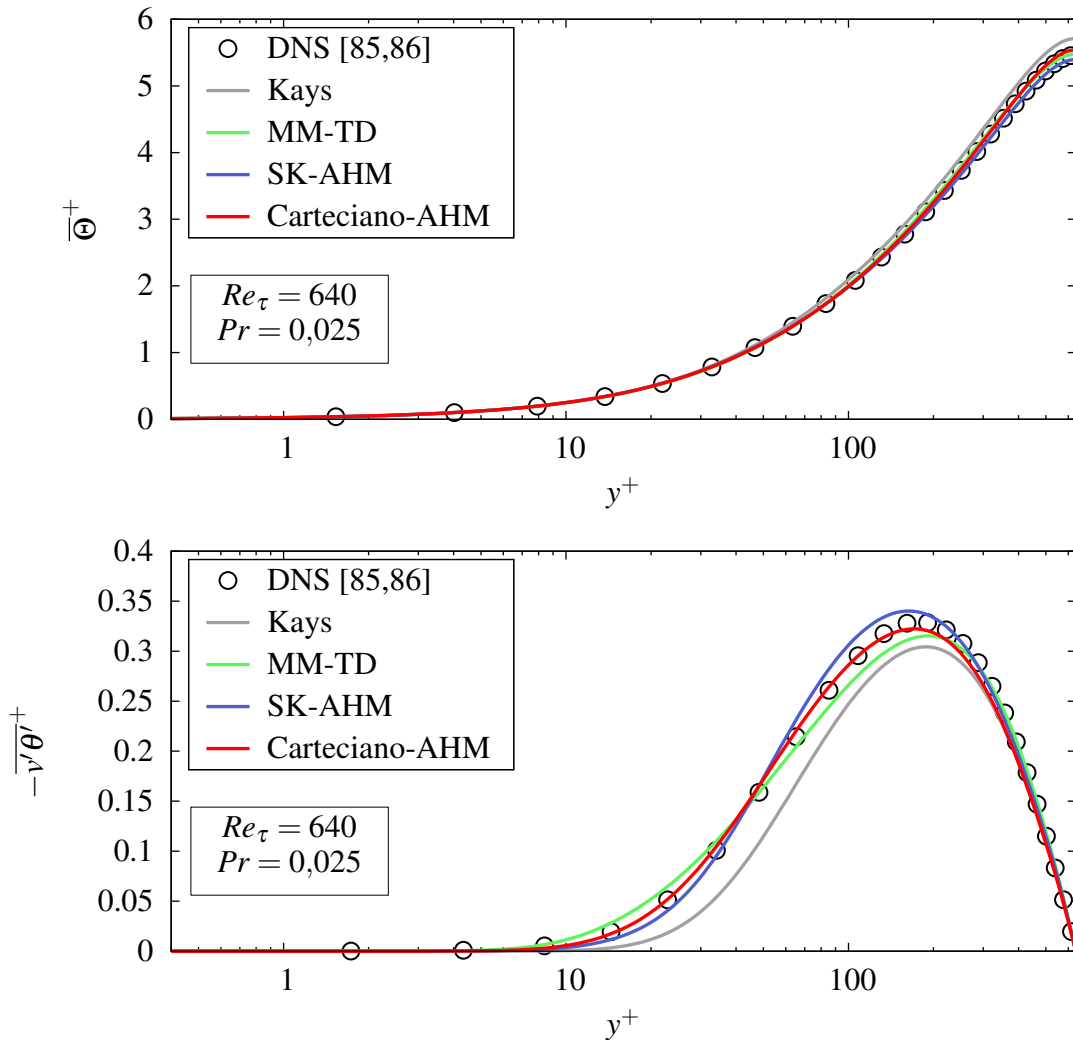


Abbildung 7.13.: Verlauf des dimensionslosen Temperaturprofils $\bar{\Theta}^+$ (oben) und der wandnormalen, turbulenten Wärmeflusskomponente $-\overline{v'\theta'}^+$ (unten) für die einzelnen Ansätze über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ im Vergleich zu DNS-Daten (nur jeder 5. Datenpunkt der DNS ist als Symbol dargestellt) bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$.

Wie in Abb. 7.14 dargestellt ist, zeigen die algebraischen Modelle bei $Pr = 0,71$ eine gute Übereinstimmung mit den DNS-Daten. Die Abweichung des Maximums des normierten Temperaturprofils beträgt für das Carteciano-AHM 2,2 % und für das SK-AHM 0,6 %. Die Abweichungen des Ansatzes nach Kays [22] mit 8,5 % oder des MM-TD mit 20,5 % lassen sich mit Hilfe des Verlaufs der wandnormalen Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'}^+$ erklären. Der Ansatz nach Kays zeigt eine Unterbewertung des Verlaufs in Wandnähe im Vergleich zu den DNS-Daten. Der Grund hier-

für ist, dass die berechnete turbulente Prandtl-Zahl Pr_t bei Annäherung an die Wand zunehmende Abweichungen zur DNS aufweist (vgl. Abb. 6.6 und 6.7). Für das MM-TD wird der wandnormale turbulente Wärmefluss $\overline{v'\theta'}^+$ in Wandnähe bis zu 60 % überschätzt. Ursache ist die spezielle Ausrichtung der Dämpfungsfunktionen des Modells auf niedrige Prandtl-Zahlen (vgl. Kap. 6.45).

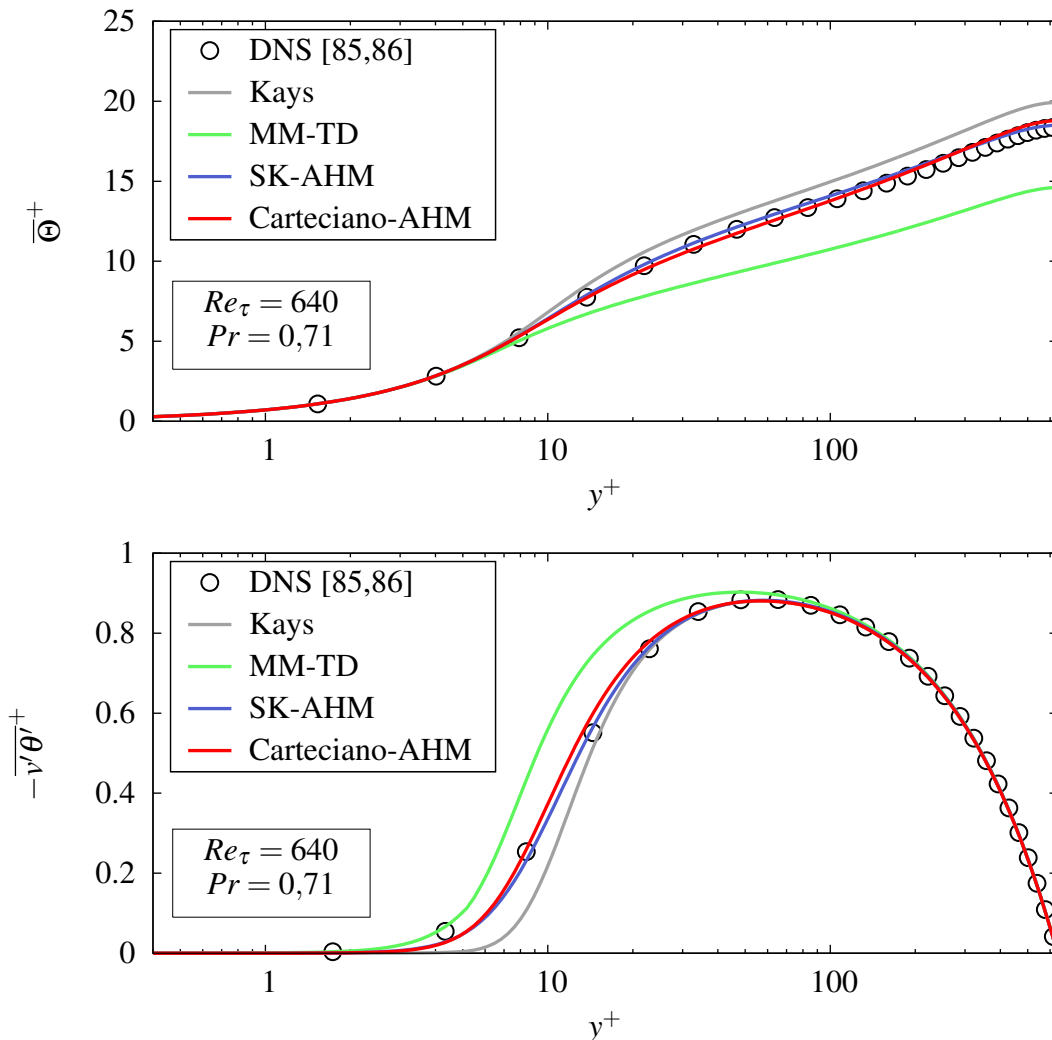


Abbildung 7.14.: Verlauf des dimensionslosen Temperaturprofils $\overline{\Theta}^+$ (oben) und der wandnormalen, turbulenten Wärmeflusskomponente $-\overline{v'\theta'}^+$ (unten) für die einzelnen Ansätze über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ im Vergleich zu DNS-Daten (nur jeder 5. Datenpunkt der DNS ist als Symbol dargestellt) bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,71$.

Um zu gewährleisten, dass die beiden entwickelten, algebraischen Modelle auch bei verschiedenen Reynolds- bzw. Prandtl-Zahlen eine gute Übereinstimmung mit den DNS-Daten von Abe et al. [85,86] aufweisen, erfolgt eine separate Analyse des SK-AHM und das Carteciano-AHM. Die Ergebnisse des Carteciano-AHM in turbulenten Plattenkanalströmungen zeigen nur eine geringe Sensitivität auf den Wert des Koeffizienten $C_{5\theta}$ (vgl. Anhang A.4.1), so dass hier ausschließlich der Wert $C_{5\theta} = 0,001$ verwendet wird.

In Abb. 7.15 ist für die Kombination aus SK-AHM und dem RSM-EBM [75,148] das dimensionslose Temperaturprofil $\bar{\Theta}^+$ für drei verschiedene Reynolds-Zahlen $Re_\tau = 180, 395$ und 640 sowie für zwei unterschiedliche Prandtl-Zahlen $Pr = 0,025$ und $Pr = 0,71$ im Vergleich zu DNS-Daten [85,86] dargestellt. Für beide Prandtl-Zahlen ist eine sehr gute Übereinstimmung mit den DNS-Daten zu erkennen. Bei $Pr = 0,71$ erweist sich die Kombination aus dem Dissipationsmodell nach Shikazono & Kasagi [72] und dem Modell für den Korrelationsterm von Baumann [70] als vorteilhaft. Die gute Übereinstimmung der normierten Temperaturprofile $\bar{\Theta}^+$ ist auf die marginalen Abweichungen der turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'^+}$ zurückzuführen, wie die Abb. 7.16 illustriert. Insgesamt zeigt das SK-AHM eine gute Übereinstimmung mit den DNS-Daten [85,86].

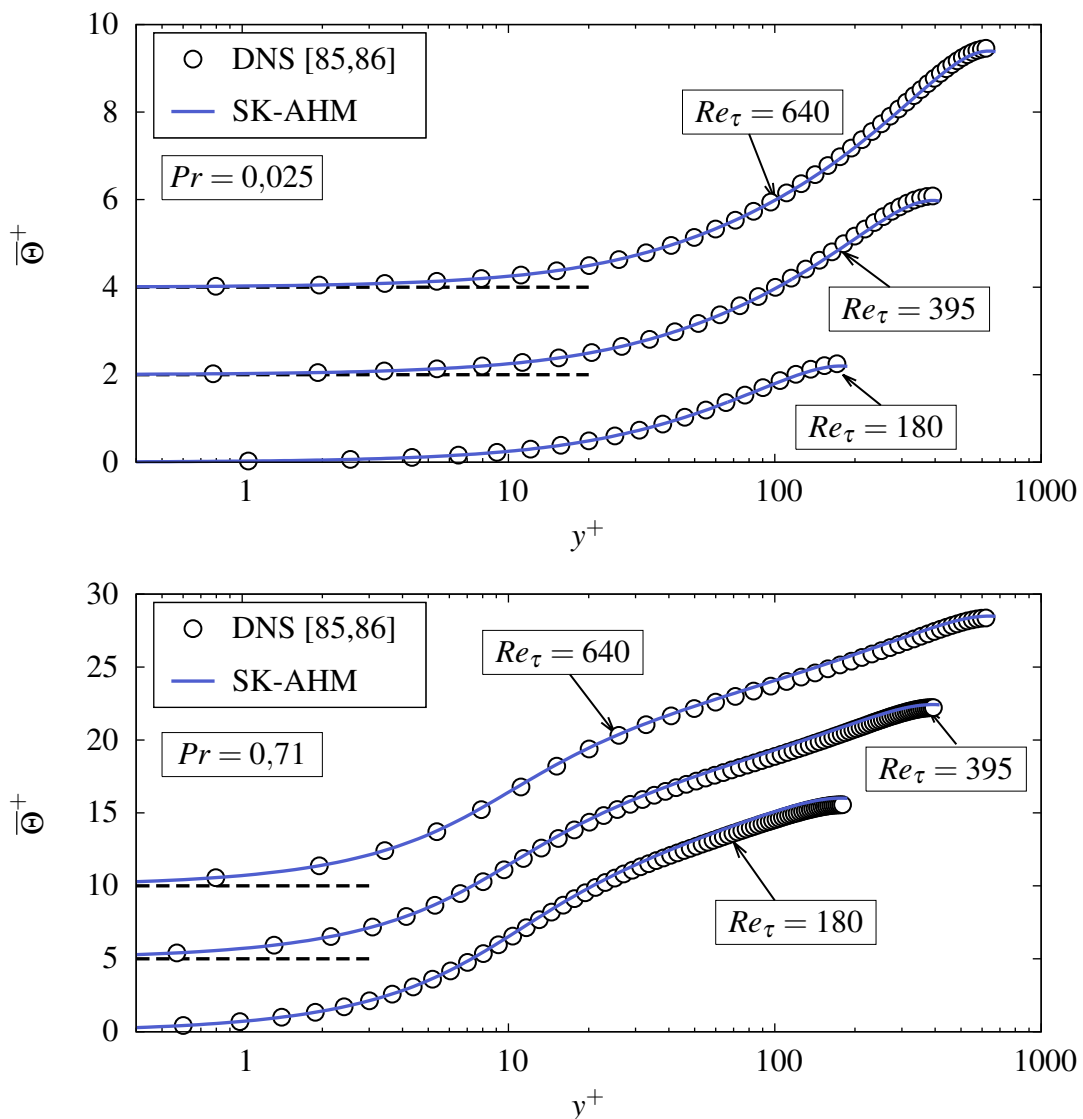


Abbildung 7.15.: Verlauf der normierten Temperaturprofile $\bar{\Theta}^+$ des SK-AHM (Profile um 2 bzw. 5 dimensionslose Einheiten verschoben) über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ im Vergleich zu DNS-Daten (nur jeder 3. Datenpunkt der DNS ist als Symbol dargestellt) bei $Pr = 0,025$ (oben) und $Pr = 0,71$ (unten).

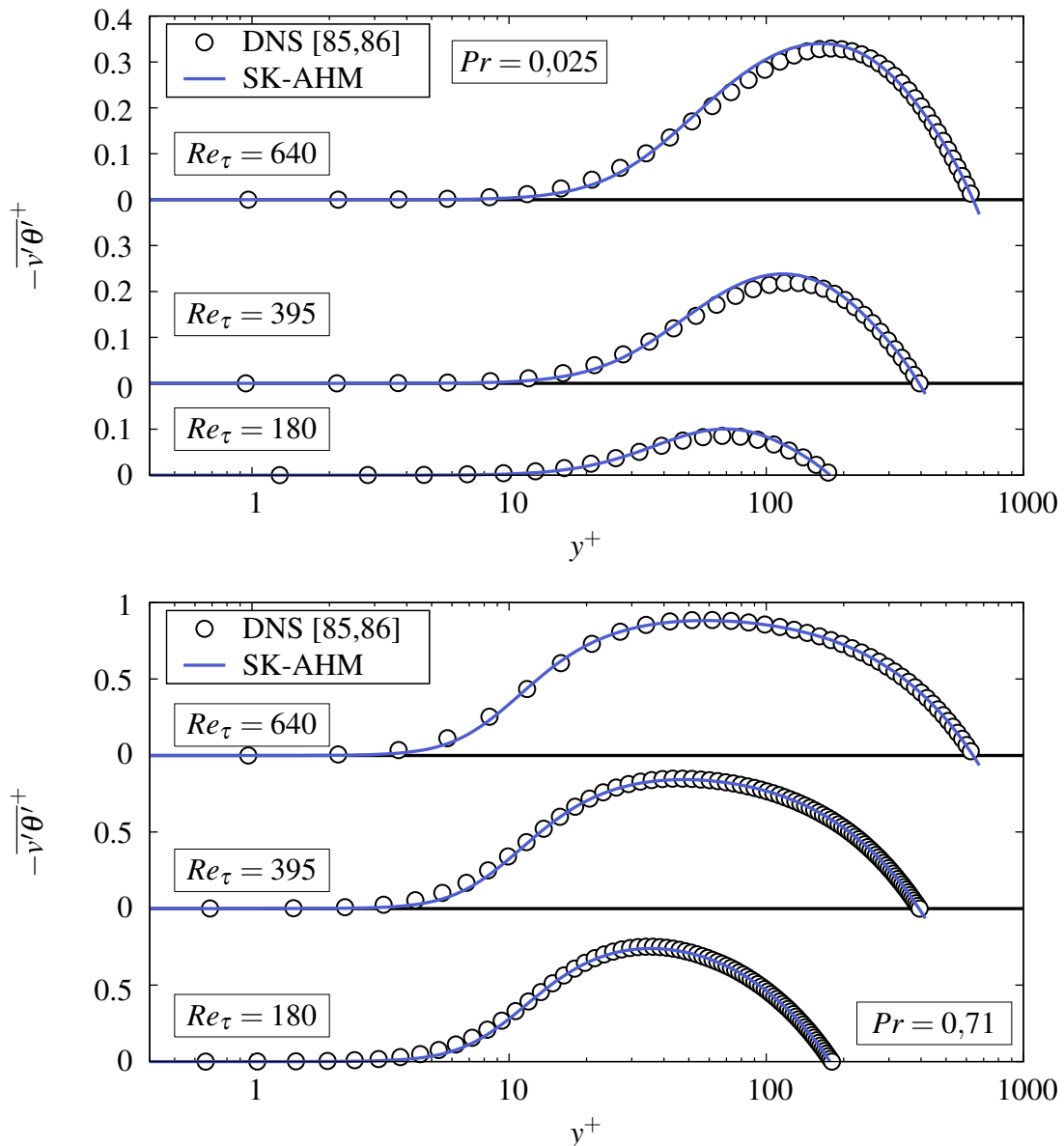


Abbildung 7.16.: Verlauf der turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'}^+$ des SK-AHM über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ im Vergleich zu DNS-Daten (nur jeder 3. Datenpunkt der DNS ist als Symbol dargestellt) bei $Pr = 0,025$ (oben) und $Pr = 0,71$ (unten).

Im nächsten Schritt wird das zweite modifizierte algebraische Modell (Carteciano-AHM) bei verschiedenen Reynolds- und Prandtl-Zahlen untersucht. Wie in Abb. 7.17 dargestellt ist, zeigt der Vergleich der dimensionslosen Temperaturprofile $\overline{\Theta}^+$ bei verschiedenen Reynolds-Zahlen ebenfalls vernachlässigbare Abweichungen zu den DNS-Daten. Dies gilt im Vergleich zum SK-AHM insbesondere bei $Pr = 0,025$. Die Verläufe werden hier mit kleineren Abweichungen bestimmt. Für $Pr = 0,71$ hingegen werden die Temperaturprofile im Vergleich bei kleinen Reynolds-Zahlen leicht überschätzt. Die Ursache für die schlechteren Übereinstimmung mit den DNS-Daten ist die wandnormale turbulente Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'}^+$, die in Abb. 7.18 dargestellt ist. Der

Verlauf dieser Komponente stimmt bei niedriger molekularer Prandtl-Zahl ($Pr = 0,025$) für alle Reynolds-Zahlen mit den DNS-Daten überein. Die relativen Abweichungen zu den DNS-Daten in der Vorhersage des Maximalwertes sind auch hier im Vergleich zum SK-AHM geringfügig geringer mit jeweils weniger als 1 %. Die Überbewertung des dimensionslosen Temperaturprofils für $Pr = 0,71$ bei $Re_\tau = 180$ bzw. $Re_\tau = 395$ beruht auf einer geringfügigen Unterbewertung des Verlaufs der Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'^+}$ im wandfernen Bereich. Der zu niedrige Energietransport in wandnormaler Richtung führt folglich zu einer zu großen Spreizung des Temperaturprofils.

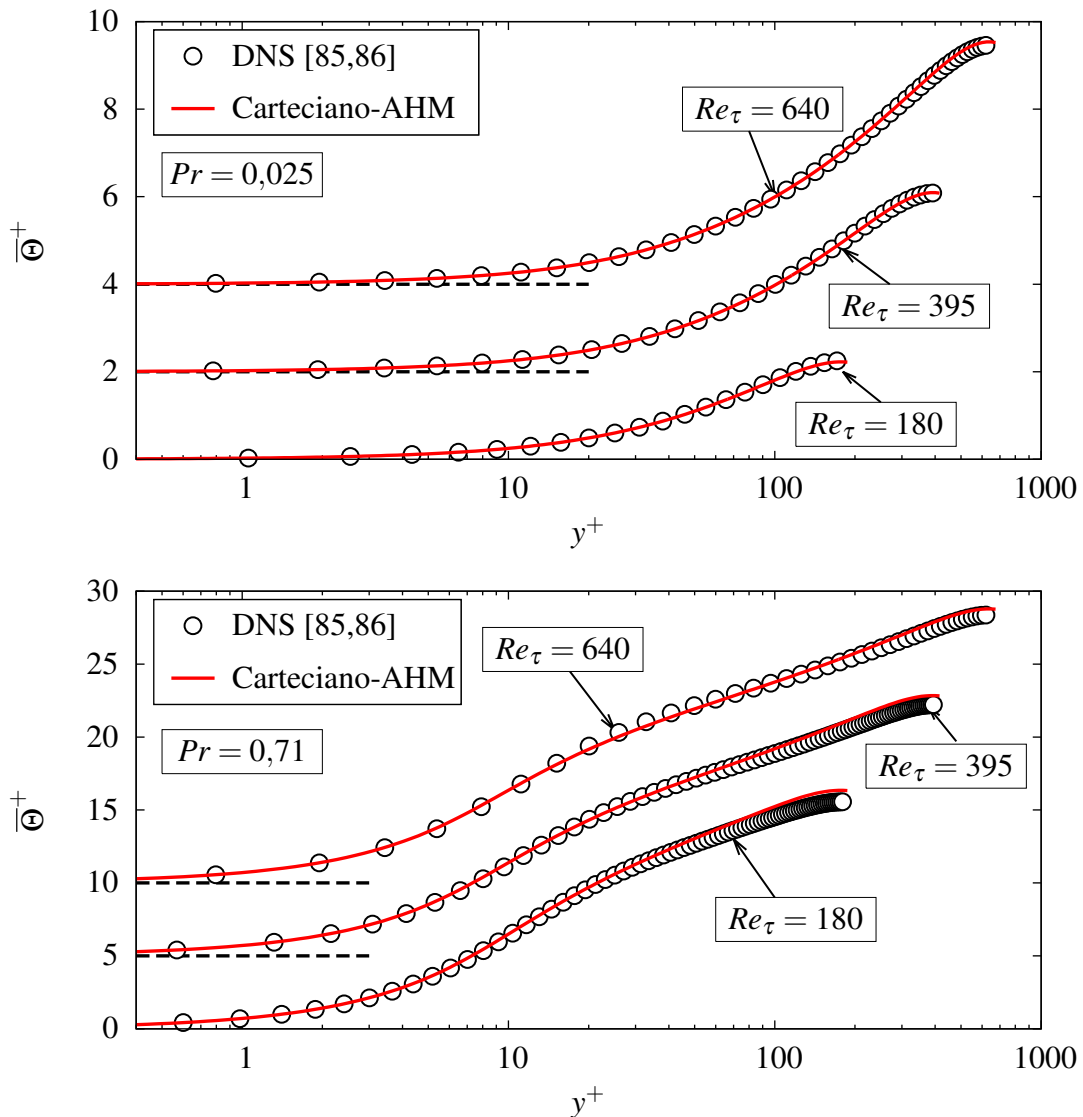


Abbildung 7.17.: Verlauf der normierten Temperaturprofile $\overline{\Theta}^+$ des Carteciano-AHM (Profile um 2 bzw. 5 dimensionslose Einheiten verschoben) über dem Wandabstand y^+ im Vergleich zu DNS-Daten (nur jeder 3. Datenpunkt der DNS ist als Symbol dargestellt) bei $Pr = 0,025$ (oben) und $Pr = 0,71$ (unten).

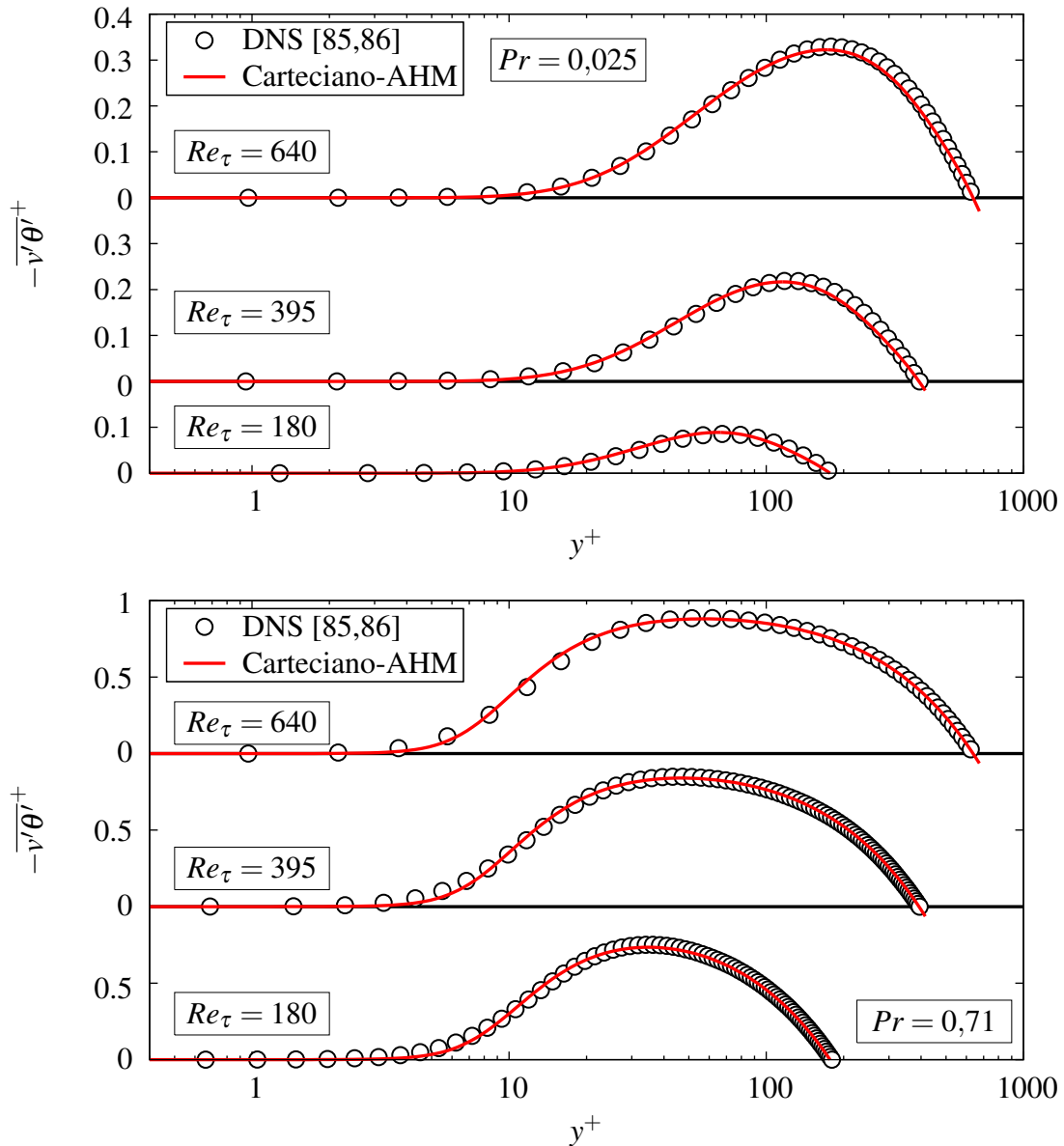


Abbildung 7.18.: Verlauf der turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'}^+$ des Carteciano-AHM über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ im Vergleich zu DNS-Daten (nur jeder 3. Datenpunkt der DNS ist als Symbol dargestellt) bei $Pr = 0,025$ (oben) und $Pr = 0,71$ (unten).

In den Abb. 7.19 und 7.20 ist jeweils ein Vergleich der Ergebnisse aller drei erweiterten Modelle mit den DNS-Daten für die Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}^+$ dargestellt. Diese weist ein Maximum für $Pr = 0,025$ bei $y^+ \approx 200$ und für $Pr = 0,71$ bei $y^+ \approx 18$ auf. Es lässt sich anhand des Verlaufs deutlich die Auswirkung der höheren molekularen Dämpfung bei niedrigen Prandtl-Zahlen erkennen. Das thermische Zweigleichungsmodell von Manservisi & Menghini [65,66] liefert für $Pr = 0,025$ die beste Übereinstimmung der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}$ mit einer relativen Abweichung des Maximums von 10 % im Vergleich zu den DNS-Daten. Die Kombination aus den algebraischen Modellen (SK-AHM und Carteciano-AHM) mit dem thermischen Zweigleichungsmodell

von So & Sommer [162] zeigt hingegen eine Überbewertung des Maximums bei $y^+ \approx 200$ um 30 %. Dies lässt sich auf die Unterbewertung des Verlaufs der Dissipation der Temperaturvarianz $\varepsilon_{\theta\theta}$ zurückführen, die in Abb. 7.20 dargestellt ist. Für eine höhere Prandtl-Zahl ($Pr = 0,71$) ist die starke Spezialisierung des MM-TD auf niedrige Prandtl-Zahlen zu erkennen. In voll eingelaufenen Strömungen stehen in der Transportgleichung die Produktionsrate und die Dissipation miteinander im Gleichgewicht (vgl. Abb. 6.10 und 6.11). Infolge der deutlichen Unterbewertung der Dissipationsrate $\varepsilon_{\theta\theta}$ ergibt sich bei $Pr = 0,71$ für das MM-TD auch beim Verlauf der Temperaturvarianz eine deutliche Abweichung von über 80 % zu den DNS-Daten. Hier zeigt sich der größte Vorteil des Zweigleichungsmodells von So & Sommer [162], das für beide algebraische Modelle auch bei $Pr = 0,71$ eine gute Übereinstimmung mit einer relativen Abweichung des Maximalwertes von nur 8 % zur DNS liefert.

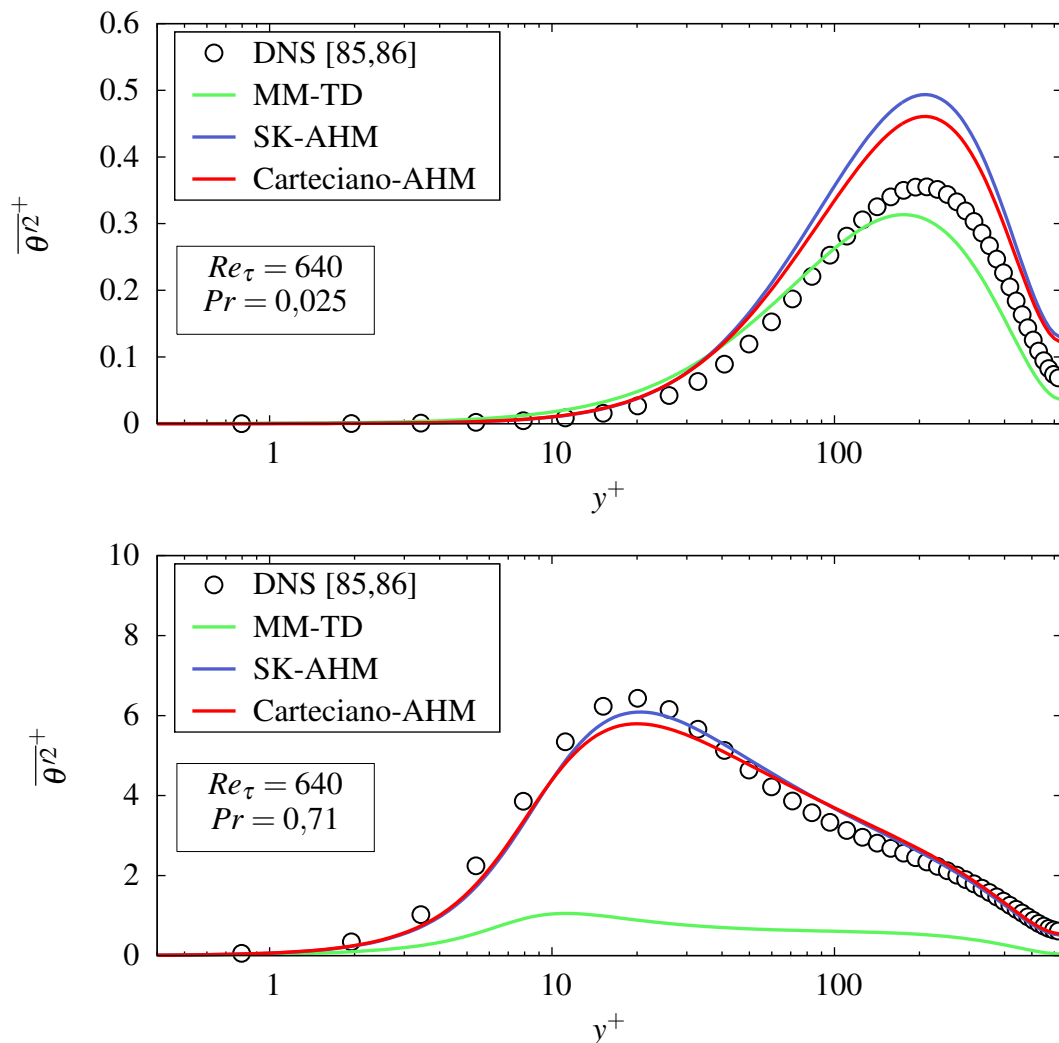


Abbildung 7.19.: Verlauf der normierten Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}^+$ über dem normierten Wandabstand y^+ im Vergleich zur DNS [85,86] bei $Pr = 0,025$ (oben) und $Pr = 0,71$ (unten) (nur jeder 3. Datenpunkt als Symbol).

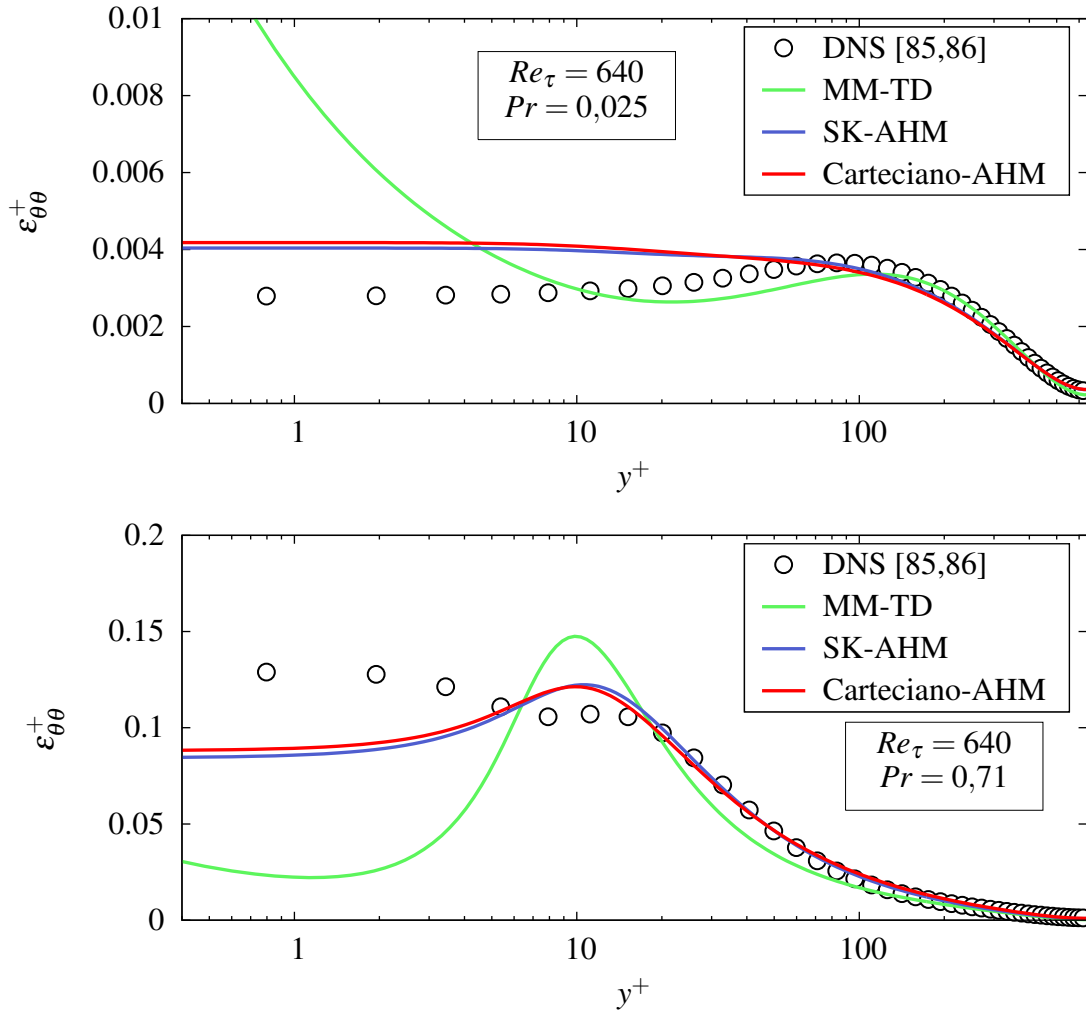


Abbildung 7.20.: Verlauf der Dissipationsrate der Temperaturvarianz $\varepsilon_{\theta\theta}^+$ über dem normierten Wandabstand y^+ im Vergleich zur DNS [85,86] bei $Pr = 0,025$ (oben) und $Pr = 0,71$ (unten) (nur jeder 3. Datenpunkt als Symbol).

Der letzten Validierungsschritt für symmetrisch beheizte Plattenkanalströmungen beruht auf dem Vergleich der Modelle bezüglich der Nusselt-Zahl Nu_{D_h} . Für Strömungen niedriger Prandtl-Zahl existieren verschiedene Korrelationen, die vor allem für turbulente Rohrströmungen entwickelt wurden. Für Flüssigmetallströmungen wird hier neben den DNS-Daten von Abe et al. [85,86] und den DNS/LES-Daten von Duponcheel et al. [187] die semi-empirische Korrelation von Lyon [188] in einem Vergleich verwendet. Diese ist wie folgt definiert:

$$Nu_{D_h} = 7 + 0,025 (Pe_{D_h})^{0,8} \quad \text{mit} \quad Pe_{D_h} = Pr Re_{D_h}, \quad (7.18)$$

wobei die Nusselt-Zahl Nu_{D_h} wie folgt formuliert ist:

$$Nu_{D_h} = \frac{h D_h}{\lambda} = \frac{\dot{q} D_h}{\lambda (T_w - T_b)}. \quad (7.19)$$

In dieser Gleichung entsprechen die Größen $D_h = 4\delta$ dem hydraulische Durchmesser, δ der halben Kanalhöhe und T_b der massenstromgemittelten Temperatur.

Einen Vergleich der Nusselt-Zahlen Nu_{D_h} als Funktion der Péclet-Zahl Pe_{D_h} zeigt die Abb. 7.21. Der Graph zeigt eine sehr gute Übereinstimmung aller drei Modelle mit den DNS- [85,86] bzw. DNS/LES-Daten [187] bei $Pr = 0,025$. Im Vergleich zur semi-empirischen Korrelation nach Lyon [188] wird erst für eine Péclet-Zahl $Pe_{D_h} \gg 2000$ eine gute Übereinstimmung erzielt. Für niedrigere Péclet-Zahlen unterschätzt die semi-empirische Korrelation den Verlauf der Nusselt-Zahl im Vergleich zu den numerischen Daten. Da die Korrelation nach Lyon [188] aus experimentellen Daten abgeleitet wurde, müssen etwaige Messfehler (Verunreinigungen im Fluid sowie Schwierigkeiten beim Ermitteln der korrekten Wandtemperatur T_w) berücksichtigt werden. Darüber hinaus kann die axiale Wärmeleitung im Fall eines konstanten Wärmestroms ebenso wie die nur marginal messbaren Temperaturunterschiede eine Ursache für die erläuterten Abweichungen sein.

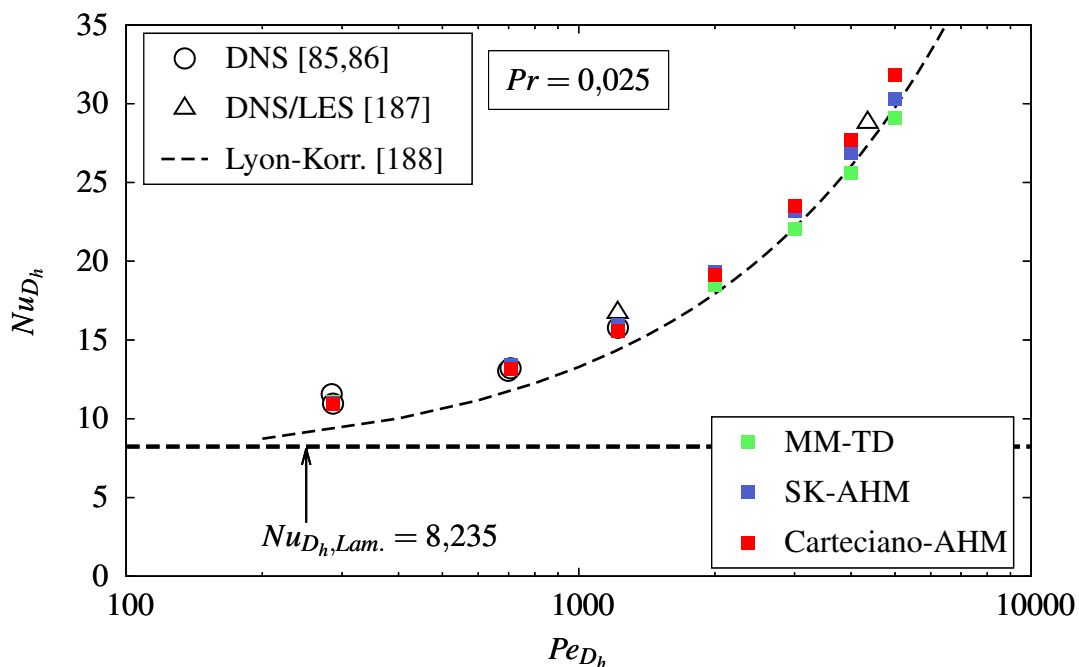


Abbildung 7.21.: Verlauf der Nusselt-Zahl Nu_{D_h} (basierend auf dem hydraulischen Durchmesser D_h) über der Péclet-Zahl Pe_{D_h} im Vergleich zu Ergebnissen der DNS [85,86] bzw. DNS/LES [187] sowie zu einer empirischen Korrelation der Literatur für eine Prandtl-Zahl $Pr = 0,025$.

Für eine höhere molekulare Prandtl-Zahl ($Pr = 0,71$) wird für einen Vergleich die sogenannte Dittus-Boelter-Korrelation [189–191] verwendet. Diese ist auf Basis der Reynolds-Zahl Re_{D_h} wie folgt definiert:

$$Nu_{D_h, DB} = 0,023 (Re_{D_h})^{0,8} (Pr)^{0,4} . \quad (7.20)$$

Eine zweite Möglichkeit stellt die Korrelation nach Gnielinski [192] dar:

$$Nu_{D_h,G} = \frac{(f/8)(Re_{D_h} - 1000) Pr}{1 + 12,7(f/8)^{1/2}(Pr^{2/3} - 1)}, \quad (7.21)$$

wobei für den Reibungskoeffizient f die Formulierung nach Petukhov eingesetzt wird [193]:

$$f = (0,79 \ln(Re_{D_h}) - 1,64)^{-2}. \quad (7.22)$$

Ein Vergleich der Ergebnisse der beiden algebraischen Modelle (SK-AHM und Carteciano-AHM) ist für eine höhere molekulare Prandtl-Zahl ($Pr = 0,71$) über den Verlauf der Péclet-Zahl Pe_{D_h} in der folgenden Abb. 7.22 dargestellt. Für beide algebraische Modelle lassen sich nahezu identische Werte der Nusselt-Zahl Nu_{D_h} ermitteln. Die Ergebnisse der beide Modelle, aber auch der DNS-Daten [85,86], zeigen darüber hinaus über den gesamten Bereich der Péclet-Zahl Pe_{D_h} eine sehr gute Übereinstimmung zur Dittus-Boelter-Korrelation (vgl. Gl. (7.20)). Die relative Abweichungen der beiden algebraischen Modelle zur Dittus-Boelter-Korrelation beträgt jeweils ca. 2,3 % und zur Gnielinski-Korrelation ca. 5 %.

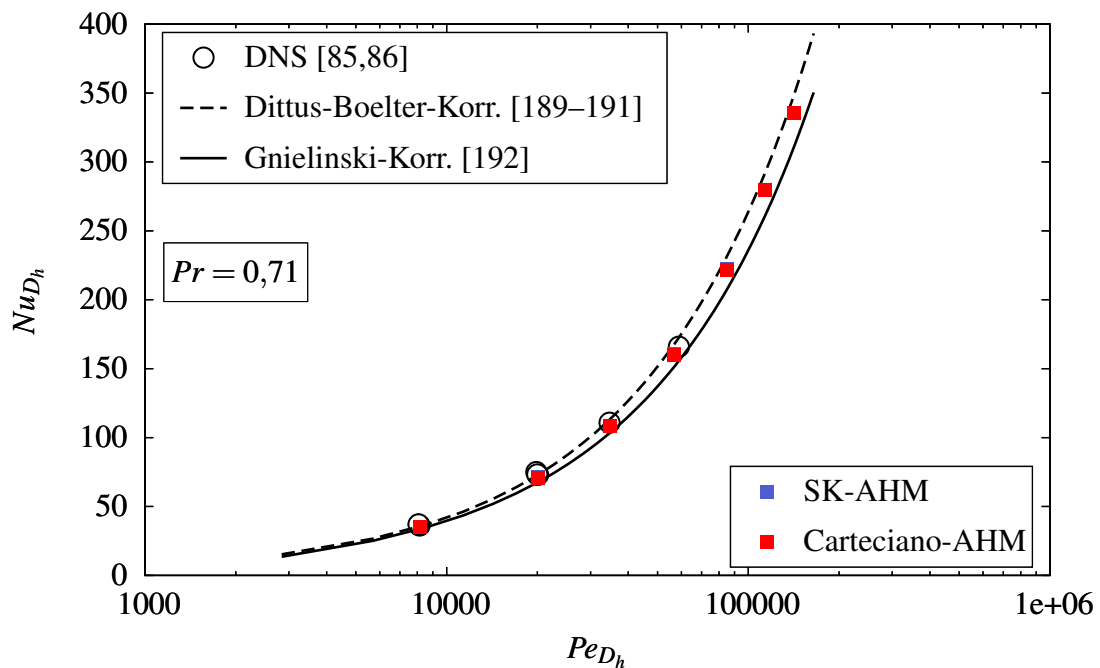


Abbildung 7.22.: Verlauf der Nusselt-Zahl Nu_{D_h} (basierend auf dem hydraulischen Durchmesser D_h) über der Péclet-Zahl Pe_{D_h} im Vergleich zu Ergebnissen der DNS [85,86] sowie zu empirischen Korrelationen der Literatur für eine Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$.

Beide Korrelationen sind für Rohrströmungen mit konstanter Wärmezufuhr entwickelt worden, so dass sich zunächst nur feststellen lässt, dass beide algebraische Modelle verifiziert und im Rahmen der allgemeinen Genauigkeit validiert sind. Für diesen ersten Validierungsschritt in sym-

metrisch beheizten Plattenkanalströmungen lässt sich dennoch zusammenfassen, dass die guten Ergebnisse der beiden entwickelten, implizit algebraischen Modelle (SK-AHM und Carteciano-AHM) eine weiterführende Untersuchung in Plattenkanalströmungen bei asymmetrischer Beheizung und Rechteckkanalströmung rechtfertigen.

7.3. Validierung anhand einer asymmetrisch beheizten Plattenkanalströmung

Hierbei wird eine asymmetrisch beheizte Plattenkanalströmung analysiert, bei der eine Wand mit einem konstanten Wärmefluss beaufschlagt wird, während die gegenüberliegende Wand als perfekt isoliert (adiabat) angenommen wird. Die Besonderheit an dieser Konfiguration ist, dass bei Verwendung der üblichen Methodik, die auf der Lösung einer Erhaltungsgleichung der transformierten, skalaren Variablen⁵¹ $\bar{\Theta}$ basiert, an der adiabaten ein endlicher Wert der Skalarfluktuationen ungleich Null zu erwarten ist. Das erläuterte asymptotische Wandverhalten der einzelnen Transport- und Vernichtungsterme verliert für diese adiabate Wand somit seine Gültigkeit. Beide Typen von Randbedingungen stellen jeweils einen Extremfall dar. In der Realität ist die Größenordnung der auftretenden Temperaturfluktuationen T' bzw. θ' von den thermischen Eigenschaften der Wand und des Fluids abhängig [194]. Um Temperaturfluktuationen an der adiabaten Wand geeignet im Rahmen einer Simulation zu berücksichtigen, müssten eigentlich spezielle Randbedingungen für die Transportvariablen $\bar{\theta'^2}$ sowie $\varepsilon_{\theta\theta}$ des thermischen Zweigleichungsmodells definiert werden. Eine naheliegende Annahme ist es den Gradienten der Temperaturvarianz $\bar{\theta'^2}$ in wandnormaler Richtung zu Null zu setzen. Dies führt aber bei Verwendung von periodischen Randbedingungen für den Ein- und Auslass zu einem „numerisch steifen“ Problem [194], da das Niveau der Temperaturvarianz im Strömungsgebiet nicht eindeutig definiert ist. Im Folgenden wird demnach analog zu anderen Arbeiten der Literatur [65,66,194] an den Wänden die Randbedingung $\bar{\theta'^2}|_w = 0$ für die Temperaturvarianz eingesetzt. Für eine detailliertere Beschreibung und Diskussion dieser Thematik in Abhängigkeit der molekularen Prandtl-Zahl sei an dieser Stelle auf den Anhang (vgl. Anhang A.2.7) und die Literatur [194–196] verwiesen.

Für eine Validierung der beiden algebraischen Modelle bei asymmetrischer Beheizung wurde eine Grobstruktursimulation (LES) bei einer Reynolds-Zahl $Re_\tau = 395$ und unterschiedlichen Prandtl-Zahlen ($Pr = 0,006, 0,025$ und $0,71$) durchgeführt. Da die größten turbulenten Strukturen bei Strömungen niedriger molekularer Prandtl-Zahlen im Temperaturfeld zu erwarten sind [106], ist die Größe des untersuchten Strömungsgebietes analog zu den Vorgaben aus der Literatur gewählt [85]. Ein Vergleich der Ergebnissen der Grobstruktursimulation (LES) und der DNS-Daten [85,86] für das zeitlich gemittelte Geschwindigkeitsprofil \bar{u}^+ und die turbulenten Reynolds-Spannungen $\overline{u'_i u'_j}^+$ kann dem Anhang (vgl. Anhang A.4.2) entnommen werden.

⁵¹Die Variable Θ entspricht der Differenz der Wandtemperatur T_w und der massenstromgemittelten Strömungstemperatur T_b . Der sich einstellende Wärmefluss wird rein über einen zusätzlichen Quellterm in der Erhaltungsgleichung vorgegeben. Für die passive, instantane Skalargröße wird die Randbedingung $\Theta|_w = 0$ vorgegeben [85,187].

Die verwendeten numerischen Verfahren werden umfassend im Anhang (vgl. Anhang A.1) erläutert und validiert. Die wichtigsten Parameter der Grobstruktursimulation, wie z.B. das eingesetzte Feinstrukturmodell, zeigt die Tabelle 7.4.

Parameter	Symbol	Wert
Reynolds-Zahl	Re_τ	395
Prandtl-Zahlen	Pr	0,006; 0,025; 0,71
Abmessungen	$L_x \times L_y \times L_z$	$4\pi\delta \times 2\delta \times 2\pi\delta$
Anzahl der Elemente	$n_x \times n_y \times n_z$	$230 \times 140 \times 230$
Mittelungsintervall	$T_s u_B / 2\delta$	~ 3000
Räumliche Diskretisierung	-	2. Ordnung
SGS-Modell	-	Dyn. Smag.-Modell [119]
SGS-Wärmeflussmodell	$Pr_{t,SGS}$	Ansatz nach Morar [111]

Tabelle 7.4.: Übersicht der wesentlichen Parameter der Grobstruktursimulation (LES).

Das dimensionslose Temperaturprofil $\bar{\Theta}^+$ der LES (aus „Perspektive“ der beheizten Wand) und der beiden algebraischen Modelle ist in Abb. 7.23 im Vergleich zu den LES-Daten dargestellt. Es zeigt sich, dass das Carteciano-AHM-Modell bei niedrigen molekularen Prandtl-Zahlen $Pr = 0,006$ bzw. $Pr = 0,025$ eine bessere Übereinstimmung zur Grobstruktursimulation aufweist. Die relative Abweichung des Maximums der normierten Temperaturdifferenz $\bar{\Theta}^+$ zur Grobstruktursimulation an der adiabaten Wand beträgt für das Carteciano-AHM bei $Pr = 0,006$ genau 2 % und bei $Pr = 0,025$ genau 6,6 %. Für das SK-AHM ergibt sich eine Abweichung des Maximums bei $Pr = 0,006$ von ebenfalls 2 % und bei $Pr = 0,025$ von 13 %. Speziell für $Pr = 0,006$ lässt sich die geringe Abweichung der beiden algebraischen Modelle auf das insgesamt sehr niedrige Niveau der turbulenten Wärme Flüsse im Vergleich zum molekularen Wärmetransport zurückführen. Für höhere Prandtl-Zahlen ($Pr = 0,71$), zeigt das SK-AHM wie auch für den Fall einer symmetrischen Beheizung eine geringfügig bessere Übereinstimmung zu den Vergleichsdaten mit einer relativen Abweichung von nur 0,1 %. Das Carteciano-AHM hingegen zeigt eine Überbewertung des Maximums mit einer Abweichung zur Grobstruktursimulation von 5 %.

Eine Erklärung der Ursachen für dieses Verhalten kann mit Hilfe des Verlaufs der wandnormalen turbulenten Wärme flusskomponente $\overline{v'\theta'}^+$, die in Abb. 7.24 dargestellt ist, geführt werden. Es ist eine Überbewertung des Maximums der turbulenten Wärme flusskomponente durch das SK-AHM für $Pr = 0,025$ zu erkennen. Das Carteciano-AHM zeigt hingegen eine bessere Übereinstimmung zu den Vergleichsdaten, kann jedoch ebenso wie das SK-AHM den Bereich eines abnehmenden Temperaturgradienten in wandnormaler Richtung (ab $y^+ \geq 200$) nur bedingt abbilden.

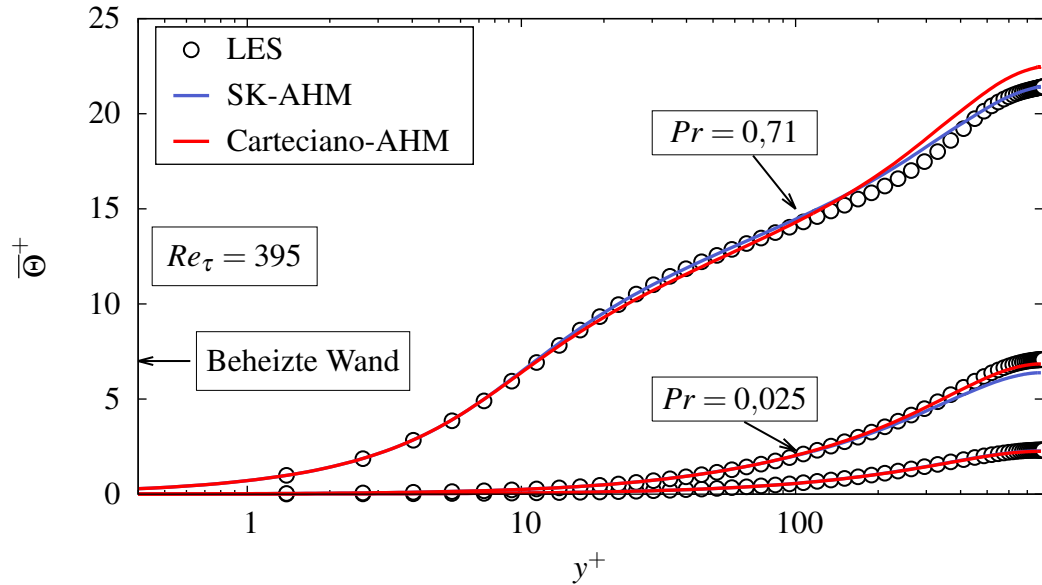


Abbildung 7.23.: Verlauf des normierten Temperaturprofils $\bar{\Theta}^+$ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ der algebraischen Modelle (SK-AHM und Carteciano-AHM) und der LES-Daten bei $Re_\tau = 395$ sowie drei Prandtl-Zahlen $Pr = 0,006, 0,025$ und $0,71$.

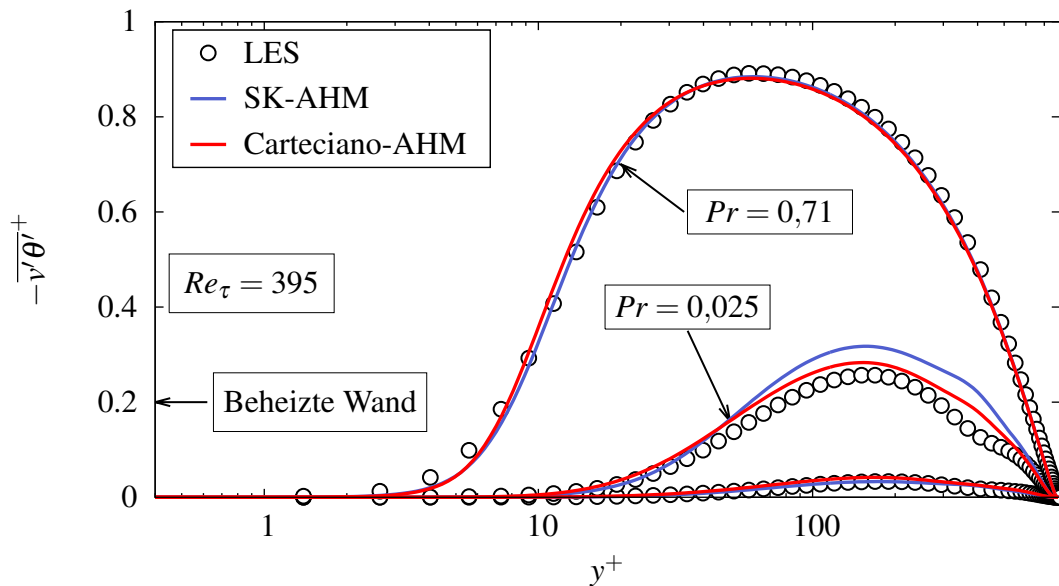


Abbildung 7.24.: Verlauf der turbulenten Wärmeflusskomponente $-\overline{v'\theta'}^+$ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ der algebraischen Modelle (SK-AHM und Carteciano-AHM) und der LES-Daten bei $Re_\tau = 395$ sowie drei Prandtl-Zahlen $Pr = 0,006, 0,025$ und $0,71$.

Um den Einfluss der Péclet-Zahl Pe_{D_h} auch für den Fall eines asymmetrisch beheizten Plattenkanals zu untersuchen, soll ein Vergleich der Nusselt-Zahl Nu_{D_h} (vgl. Gl. (7.19)) mit empirischen Korrelationen aus der Literatur erfolgen. Jäger et al. [197] entwickelten unter Berücksichtigung einer Vielzahl von experimentellen und numerischen Datensätze für turbulente Plattenkanalströ-

mungen niedriger molekularer Prandtl-Zahl eine semi-empirische Korrelation der Nusselt-Zahl, die wie folgt formuliert ist:

$$Nu_{D_h} = 5,2686 + 0,00104 (Pe_{D_h})^{1,171} \quad \text{für} \quad Pe_{D_h} < 3000. \quad (7.23)$$

Eine weitere, aus theoretischen Überlegungen abgeleitete Korrelation der Nusselt-Zahl kann der Arbeit von Hartnett & Irvine [198] entnommen werden:

$$Nu_{D_h} = \left(\frac{2}{3}\right) Nu_s + 0,015 (Pe_{D_h})^{0,8} \quad \text{mit} \quad Nu_s = 6,0. \quad (7.24)$$

Der Wert des Parameters Nu_s ist einerseits in Abhängigkeit der Geometrie und des Beheizungs-zustandes zu wählen [198]. Die analytische Lösung des Grätz-Problems für asymmetrisch beheizte Plattenkanalströmungen liefert eine Nusselt-Zahl für den voll eingelaufenen Zustand der Strömung von $Nu_{D_h, Lam.} = 5,384$. Beide Korrelationen werden diesem Limit nicht gerecht.

Die vorliegende Untersuchung stellt eine Erweiterung der Arbeit von Jäger et al. [199] dar, an der im Rahmen dieser Arbeit mitgewirkt wurde. Es soll an dieser Stelle zusätzlich der Einfluss der Seitenwände untersucht werden. Zu diesem Zweck wird für das Carteciano-AHM in vier zusätzliche Simulationen die Strömung durch ein vollständig dreidimensionales Strömungsgebiet berechnet. Für diesen Fall wird das Verhältnis der Seitenkanten des Rechteckkanals mit 1:10 angenommen. Die Ergebnisse der ermittelten Nusselt-Zahlen sind für die beiden entwickelten algebraischen Wärmeflussmodelle in der folgenden Abb. 7.25 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass der Einfluss der Seitenwände in einer Rechteckkanalströmung bei einem Seitenverhältnis von 1:10 noch nicht vernachlässigt werden können. Eine Ursache ist das Konzept des hydraulischen Durchmessers, dass sich nur bedingt auf thermische Größen übertragen lässt. Im technisch relevanten Bereich der Reynolds- bzw. Péclet-Zahl ($2 \cdot 10^4 \ll Re_{D_h} \ll 6 \cdot 10^4$) beträgt die Abweichung der algebraischen Modelle zur Korrelation nach Jäger et al. [199] im Mittel ca. 8 %. Dies mag auf die geringe Menge an experimentellen und numerischen Vergleichsdaten zurückzuführen sein, die zur Entwicklung dieser Korrelation verwendet wurden. Es wurde darüber hinaus keine Selektion der Daten hinsichtlich der unterschiedlichen thermischen Randbedingungen (symmetrisch bzw. asymmetrisch beheizte Wände) durchgeführt. Mit steigender Péclet-Zahl ($Pe_{D_h} \approx 700 - 1000$) wird die Abweichung der Korrelation zu den RANS-Ergebnissen geringer (Abweichung von ca. 2 %). Für niedrige Péclet-Zahlen ($Pe_{D_h} \approx 100 - 600$) ergibt sich eine Abweichung der Korrelation von Hartnett & Irvine [198] zu den algebraischen Modellen von bis zu 25 %. In Bereich sehr niedriger Péclet-Zahlen muss im Experiment der Einfluss der axialen Wärmeleitung berücksichtigt werden. Die Ergebnisse bei Berücksichtigung der Seitenwände (Carteciano-AHM - 3D) zeigt hingegen eine gute Übereinstimmung zu der Korrelation nach Jäger et al. [197] mit einer relativen Abweichung von weniger als 1 % bei $Pe_{D_h} = 500$.

Aus den Ergebnissen dieser Untersuchung kann eine neue Korrelation der Nusselt-Zahl für asymmetrisch beheizte Plattenkanalströmungen bei niedrigen molekularen Prandtl-Zahlen abgeleitet werden. Diese ist ebenfalls in Abb. 7.25 dargestellt und lautet:

$$Nu_{D_h} = 5,384 + 0,0078 (Pe_{D_h})^{0,888} . \quad (7.25)$$

Diese Korrelation erfüllt bei eingelaufenen Plattenkanalströmungen mit asymmetrischer Beheizung das Grenzlinit der Nusselt-Zahl $Nu_{D_h,Lam.} = 5,384$ für laminare Strömungen. Für ihre Verifizierung ist in Zukunft eine weiterführende Untersuchung mit experimentellen Daten notwendig.

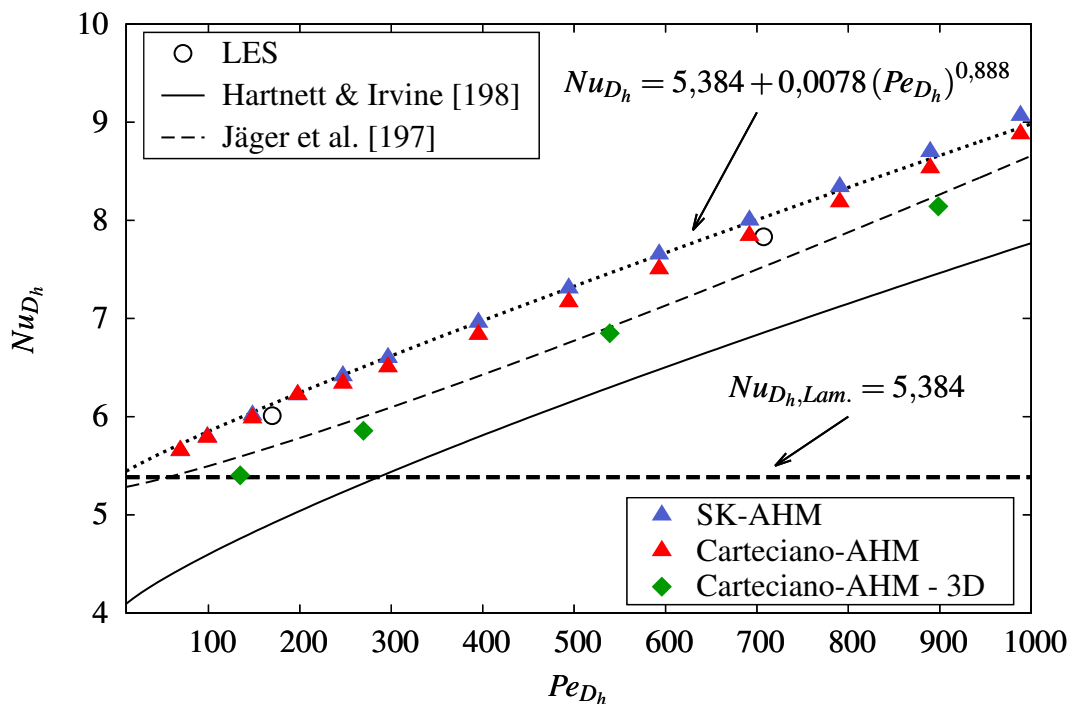


Abbildung 7.25.: Verlauf der Nusselt-Zahlen Nu_{D_h} über der Péclet-Zahl Pe_{D_h} der beiden algebraischen Modelle im Vergleich zu semi-empirischen Korrelationen nach Jäger et al. [197] und Hartnett & Irvine [198] bei $Pr = 0,018$.

7.4. Validierung in turbulenten Rechteckkanalströmungen

Die Rechteckkanalströmung mit quadratischen Querschnitt ist charakterisiert durch das Auftreten einer turbulenzinduzierten Sekundärströmung. Herkömmliche Turbulenzmodelle unter Verwendung eines isotropen Ansatzes zur Bestimmung der turbulenten Wirbelviskosität ν_t können dieses typische Phänomen nicht wiedergeben [30]. Der erste Validierungsschritt besteht darin, die Qualität des RSM-EBM mit Hilfe verfügbarer DNS-Daten [33,54] für das „hydraulische“ Verhalten der voll entwickelten Strömung zu untersuchen und zu bewerten. Eine Darstellung des Strömungsgebietes und des Ursprungs des gewählten Koordinatensystems ist in Abb. 7.26 gegeben.

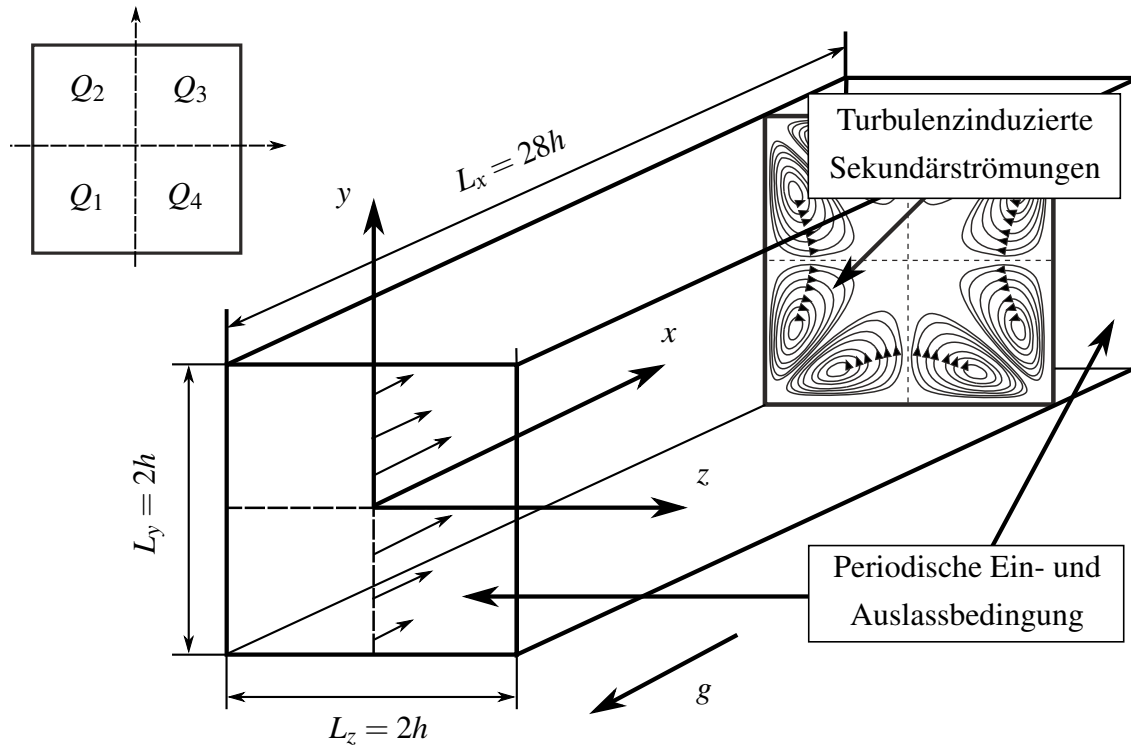


Abbildung 7.26.: Schematische Darstellung des Strömungsgebietes und des gewählten Koordinatensystems einer voll eingelaufenen Rechteckkanalströmung quadratischen Querschnitts.

Die Reynolds-Zahl Re_b ist wie folgt definiert:

$$Re_b = \frac{u_b 2h}{\nu}, \quad (7.26)$$

wobei die Größen u_b der massenstromgemittelte Geschwindigkeit, h der halbe Seitenlänge und ν der kinematischen Viskosität entsprechen. Der hydraulische Durchmesser nimmt für den quadratischen Rechteckkanal den Wert $D_h = 2h$ an.

Um die Qualität des Turbulenzmodells zu bewerten, wird das RSM-EBM [75,148] und das EARSM nach Hellsten [77,78] bei einer Reynolds-Zahl $Re_b = 7000$ mit DNS-Daten [54] verglichen. Die Abb. 7.27 zeigt den Vergleich der Isotachen der Hauptströmungskomponente und des Betrags der Sekundärströmung. Durch Ausnutzen der Symmetriebedingungen der Strömung entlang der Flächenthalbierenden wird hier ein Viertel (Q_1 bzw. Q_4) des Rechteckkanals untersucht. Eine Erweiterung der Untersuchung für eine niedrigere Reynolds-Zahl ($Re_b = 4400$) ist im Anhang (vgl. Anhang A.4.3) aufgeführt. Die Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmungsrichtung zeigt, dass die Isotachen eine Krümmung in Richtung der Eckbereiche aufweisen. Dies ist eine unmittelbare Folge der turbulenzinduzierten Sekundärströmung. Ebenfalls dargestellt ist der Betrag der Sekundärströmungskomponenten. Entlang der Flächendiagonalen zeigt die Strömung in Richtung der Ecken. Entlang der Wände wird sie zur Wandhalbierenden zurückgeführt.

Ein direkter Vergleich der Ergebnisse zeigt, dass das RSM-EBM mit den Ergebnisse der DNS-Daten [54] sehr gut übereinstimmt. Die Geschwindigkeitsverteilung der Hauptströmungskomponente \bar{u}/u_b zeigt nur geringe Unterschiede der Anordnung der Isotachen⁵² erkennen. Das Maximum im Zentrum wird im Vergleich zu den DNS-Daten mit einer Abweichung von nur 2 % bestimmt. Das Maximum des Betrags der Sekundärströmungen \bar{S}/u_b wird hingegen unterbewertet mit einer relativen Abweichung zu den DNS-Daten von 13 %. Das EARSM nach Hellsten [77,78] hingegen zeigt eine zu starke Krümmung der Isotachen im Bereich der Ecken. Dies führt zu einem Defizit der Hauptströmungskomponente im Bereich der Wandhalbierenden ($z/h = 0$). Das Maximum der Hauptströmungsgeschwindigkeit im Zentrum wird hingegen durch das EARSM ebenfalls mit einer Abweichung von nur 2 % bestimmt. Die Sekundärströmungen beim EARSM werden im Vergleich zu den DNS-Daten und den Ergebnissen des RSM-EBM deutlich unterbewertet. Die Abweichung des Maximums der Sekundärströmungen lässt sich zu 32 % angeben. Um die Ursachen diese Verhaltens zu klären, sollen auch die Verteilung der Komponenten der turbulenten Reynolds-Spannungen analysiert werden, die in Abb. 7.28 dargestellt sind.

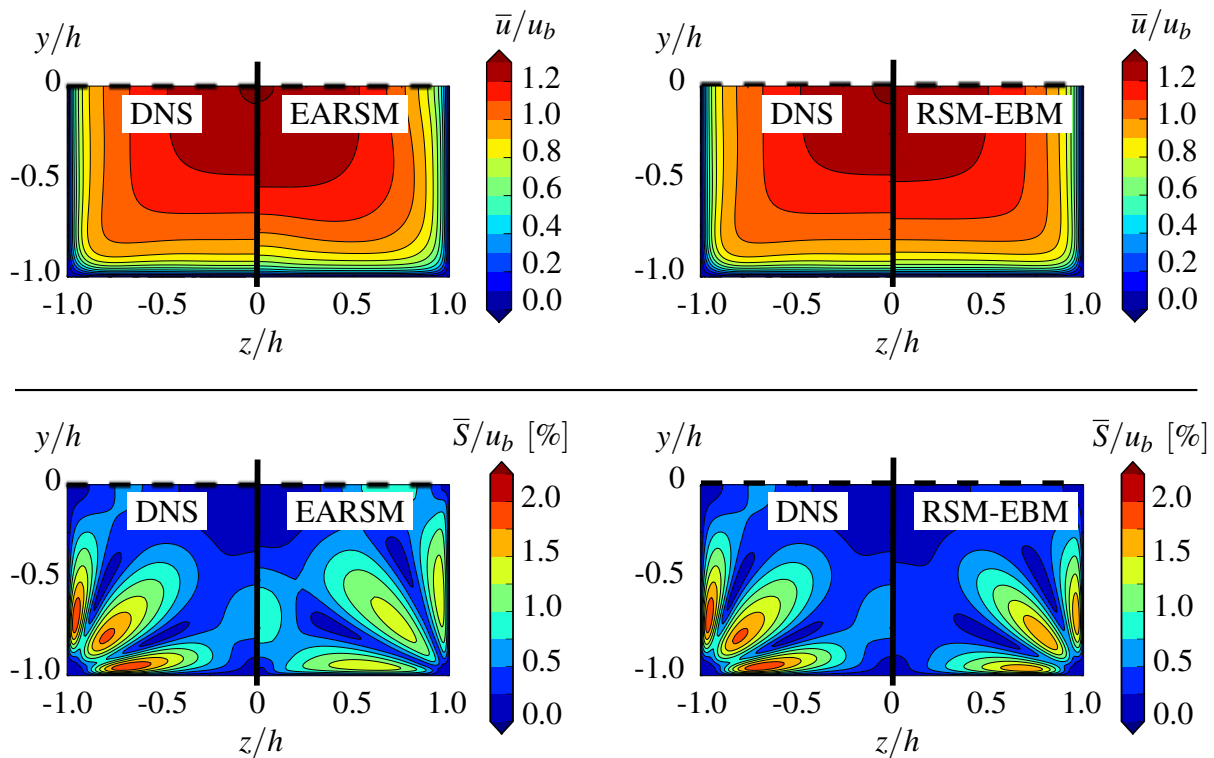


Abbildung 7.27.: Isotachen der Hauptströmungskomponente (\bar{u}/u_b) (oben) und des Betrags der Sekundärströmungskomponenten (\bar{S}/u_b) in der Querschnittsebene (unten) für das EARSM nach Hellsten [77,78] und das RSM-EBM [75,148] im Vergleich mit den DNS-Daten [54] bei $Re_b = 7000$.

⁵²Als Isotachen bezeichnet man eine Linie gleicher Geschwindigkeit.

Die primäre, turbulente Normalspannung $\overline{u'u'}$ wird bei Verwendung des EARSM nach Hellsten [77,78] deutlich unterbewertet mit einer Abweichung des Maximalwertes von 66 %. Ursache hierfür ist der stark vereinfachte Ansatzes für den Reynolds-Spannungstensor. Das RSM-EBM [75,148] hingegen zeigt für die primäre Normalspannung eine gute Übereinstimmung mit einer nur geringen Überschätzung im Zentrum des Rechteckkanals. Das Maximum wird sehr genau mit einer marginalen Abweichung von 0,2 % bestimmt. Die Verteilung dieser Komponente wird in den Ecken nicht korrekt durch das RSM-EBM wiedergegeben, was eine unmittelbare Konsequenz der Definition des „wandnormalen“ Vektors ist, der beim RSM-EBM mit Hilfe des Gradienten des Übergangsparameters α gebildet wird (vgl. Gl. (5.57)). Da dieser Vektor in der Modellierung des Redistributionsterms Π_{ij} und der Dissipationsrate ε_{ij} der turbulenten Reynolds-Spannungen enthalten ist, führt dies zu den beobachteten Abweichungen von den DNS-Daten.

Die sekundäre Normalspannungskomponente⁵³ $\overline{w'w'}$ zeigt für beide Turbulenzmodelle eine deutliche Überschätzung gegenüber den DNS-Daten. Hier liegt das RSM-EBM mit einer Abweichung des Maximalwertes von 40 % schlechter als das EARSM mit nur 30 % zu den DNS-Daten. Für das EARSM zeigt die Verteilung zusätzliche Defizite im Eckbereich des Rechteckkanals. Obwohl ihr Energiegehalt weniger als 0,1 % der Hauptströmung darstellt, wirkt die Normalspannungsdifferenz der sekundären Komponenten in den Ecken als wichtiger Produktionsmechanismus für die Sekundärströmungen. Dies ist eine der Ursachen, weshalb der Betrag der Sekundärströmungen für das EARSM gegenüber den DNS-Daten zu gering ist.

Einen wesentlichen Beitrag zur Impulserhaltungsgleichungen in Strömungsrichtung liefern die beiden turbulenten Schubspannungen $\overline{u'v'}$ bzw. $\overline{u'w'}$, die beide nur geringe Abweichungen zu den DNS-Daten aufweisen, was in Abb. 7.28 dargestellt ist. Die Abweichung zu den DNS für den Maximal- bzw. Minimalwert beträgt für beide Turbulenzmodelle weniger als 12 %.

Zur Bewertung der beiden Turbulenzmodelle bei steigenden Reynolds-Zahlen⁵⁴ Re_b werden sie mit semi-empirischen Korrelationen des Reibungskoeffizienten f ($c_f = 1/4 f$) nach Jones [200] verglichen. Dieser basiert auf der Gleichung nach Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log_{10} Re^* \sqrt{f} - 0,8 \quad \text{mit} \quad Re^* = \phi^* \left(\frac{L_z}{L_y} \right) Re_b. \quad (7.27)$$

Die Funktion ϕ^* stellt eine geometrieabhängige Funktion dar, die zwischen den beiden Grenzfällen der turbulenten Plattenkanalströmung und der Rechteckkanalströmung definiert ist [200]:

$$\phi^* (L_z/L_y) = \frac{2}{3} + \frac{11}{24} \frac{L_y}{L_z} \left(2 - \frac{L_y}{L_z} \right). \quad (7.28)$$

⁵³Die Komponente $\overline{v'v'}$ und $\overline{w'w'}$ sind bei Rotation um 90° des gegebenen Koordinatensystem zueinander identisch, so dass an dieser Stelle nur eine der beiden Komponenten für einen Vergleich dargestellt ist.

⁵⁴Für den Fall eines quadratischen Strömungsquerschnitts des Rechteckkanals sind in diesem Fall Re_b und Re_{D_h} identisch.

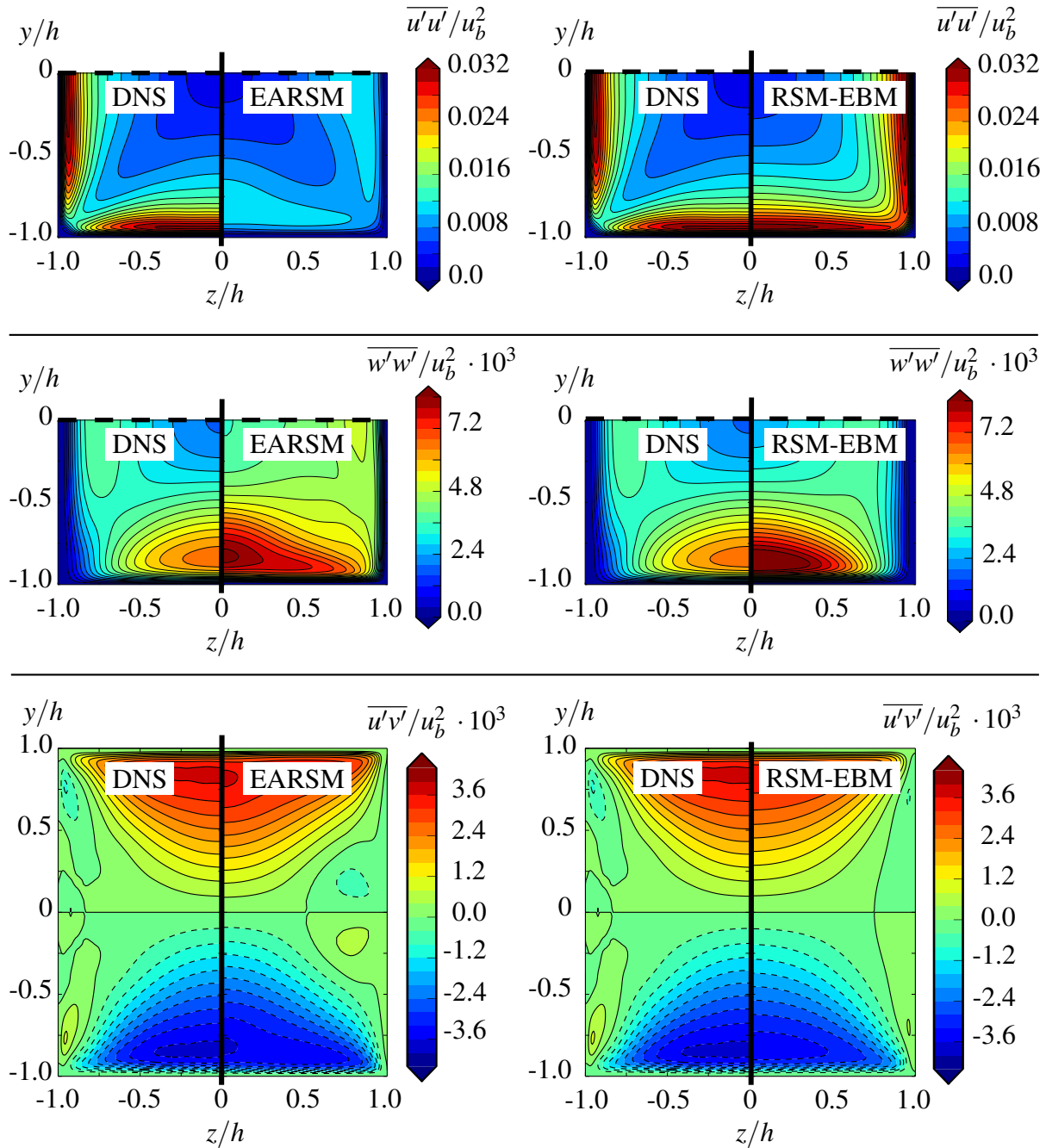


Abbildung 7.28.: Verteilung der turbulenten Reynolds-Spannungen $\overline{u'u'}/u_b^2$ (oben), $\overline{w'w'}/u_b^2$ (mittlerer Ausschnitt) und $\overline{u'v'}/u_b^2$ (unten) für das EARSM nach Hellsten [77,78] und das RSM-EBM [75,148] im Vergleich mit den DNS-Daten [54] bei $Re_b = 7000$.

In Abb. 7.28 ist der Verlauf des Reibungskoeffizienten der DNS-Daten, der Korrelation nach Jones [200] und der Experimente von Schiller [201] und Hartnett [202] im Vergleich zu den Ergebnissen der beiden Turbulenzmodelle dargestellt. Die Abweichung der Korrelation nach Jones [200] zu den DNS-Daten [54] beträgt bei $Re_{D_h} = 7000$ nur 0,4 %, so dass beide Vergleichsdaten einander bestätigen. Es zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung des RSM-EBM mit den Ergebnissen

der Korrelation nach Jones [200] mit einer gemittelten relativen Abweichungen von nur 0,88 % über den gesamten Bereich der Reynolds-Zahl. Für das EARSM beträgt die Abweichung 3,3 %. Speziell bei niedrigen Reynolds-Zahlen Re_{D_h} zeigt das RSM-EBM gegenüber dem EARSM eine bessere Übereinstimmung mit den Vergleichsdaten, was sich in einer Abweichung bis zu 1,3 % für das RSM-EBM und 13 % für das EARSM ausdrückt. Für den Bereich größerer Reynolds-Zahlen schwindet dieser Vorteil des RSM-EBM und beide Turbulenzmodelle geben den Verlauf der experimentellen Daten bzw. der Korrelation korrekt wieder. Eine weiterführende Analyse mit zusätzlichen Turbulenzmodellen befindet sich im Anhang (vgl. Anhang A.4.3).

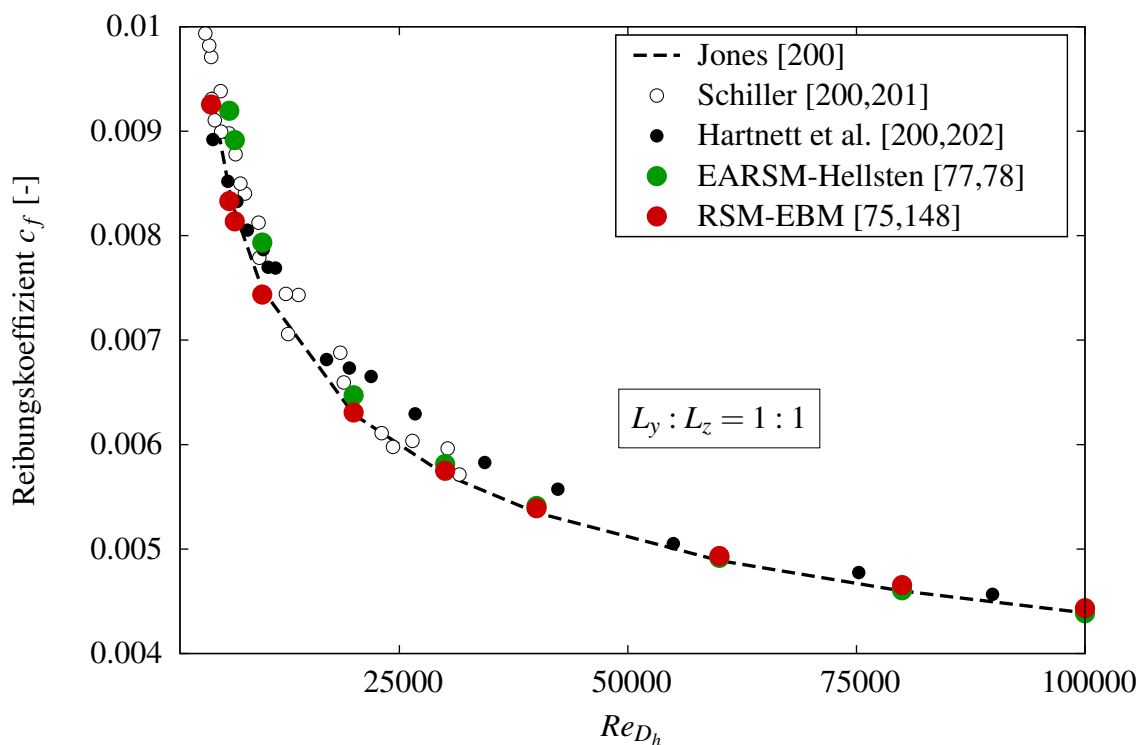


Abbildung 7.29.: Verlauf des ermittelten Reibungskoeffizienten c_f (Fanning-Stil) einer turbulenten Rechteckkanalströmung quadratischen Querschnitts über der Reynolds-Zahl Re_{D_h} im Vergleich zur empirischen Korrelation nach Jones [200] sowie experimentellen Daten nach Schiller [201] und Hartnett et al. [202].

Aufgrund der besseren Vorhersage der Sekundärströmungen und des Reibungskoeffizienten wird im Folgenden das RSM-EBM [75,148] zur Berechnung von turbulenten Rechteckkanalströmungen eingesetzt.

Da für Strömungen mit $Pr \ll 1$ keine numerischen Vergleichsdaten zur Validierung der beiden algebraischen Wärmeflussmodelle verfügbar sind, sind Vergleichsdaten mit Hilfe einer Grobstruktursimulationen bei einer Reynolds-Zahl $Re_b = 7000$ und für verschiedene Prandtl-Zahlen sowie Beheizungszuständen durchgeführt worden. Die Eckdaten der Numerik finden sich im Anhang (vgl. Anhang A.1) und der Tabelle 7.5.

Parameter	Symbol	Wert
Reynolds-Zahl	$Re_b = u_b 2h/\nu$	7000
Prandtl-Zahlen	Pr	0,025 und 0,71
Abmessungen	$L_x \times L_y \times L_z$	$28h \times 2h \times 2h$
Anzahl der Elemente	$n_x \times n_y \times n_z$	$245 \times 120 \times 120$
Zellgröße in x-Richtung	Δx^+	~ 26
Zellgröße an der Wand	$\Delta y^+ _w$ bzw. $\Delta z^+ _w$	0,25 - 0,52
Räumliche Diskretisierung	-	2. Ordnung
Mittelungsintervall	$T_s u_B/h$	≈ 8000
SGS-Modell	-	Dyn. Smag.-Modell [119]
SGS-Wärmeflussmodell	$Pr_{t,SGS}$	Ansatz nach Morar [111]

Tabelle 7.5.: Übersicht der wesentlichen Parameter der Grobstruktursimulation (LES).

Um die Qualität der Grobstruktursimulation (LES) zu prüfen, wird ein Vergleich zu in der Literatur verfügbaren Daten einer Kanalströmung quadratischen Querschnitts (vgl. Abb. 7.30) gezogen.

Da die größten turbulenten Strukturen bei Strömungen niedriger molekularer Prandtl-Zahl im Temperaturfeld zu erwarten sind [106], muss gewährleistet werden, dass die gewählte axiale Länge des Strömungsgebietes $L_x = 28h$ ausreichend ist. Dies ist mit Hilfe einer Untersuchung des Energiespektrums $E_k(k)$ bzw. der Zweipunktkorrelationen $R_{\phi'\phi'}$ der einzelnen Fluktuationsgrößen an verschiedenen Punkten des durchströmten Querschnitts möglich (vgl. Anhang A.4.3). Es zeigt sich, dass eine Länge von $L_x = 28h$ ausreicht, um die turbulenten Strukturen hinsichtlich ihrer Größe vollständig im periodischen Strömungsgebiet zu berücksichtigen.

Eine Analyse der Geschwindigkeitsprofile in Strömungs- \bar{u} sowie in Querrichtung \bar{w} bzw. Verläufe der turbulenten Normalspannung \bar{u}_{RMS} an verschiedenen Positionen des Querschnitts (vgl. Abb. 7.30) zeigt eine gute Übereinstimmung des Ergebnisses der Grobstruktursimulation (LES) mit den experimentellen Daten nach Kawahara et al. [203] und der DNS-Daten [33,53,54]. Eine geringfügige Unterbewertung der Normalspannungen mag in diesem Fall, ebenso wie für den Fall der turbulenten Plattenkanalströmung (vgl. Anhang A.44), auf den gewählten Filtertyp („Box-Filter“⁵⁵) zurückzuführen sein, der bei stark anisotroper Diskretisierung in Wandnähe für eine zu starke Dämpfung der Fluktuationen verantwortlich ist. Auch das RSM-EBM [75,148] kann die Profile der Vergleichsdaten hinreichend genau wiedergeben mit einer maximalen relativen Abweichung von 5 % für die Hauptströmungsgeschwindigkeit \bar{u} und 20 % der Querströmungsgeschwindigkeit \bar{w} . Einzig die turbulente Normalspannung \bar{u}_{RMS} wird, wie bereits in den Ergebnissen (vgl.

⁵⁵Der Box-Filter wird gleichmäßig auf Basis der Zellgröße gewählt zu $\Delta = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}$.

Abb. 7.28) zuvor gezeigt wurde, mit einer relativen Abweichung von bis zu 16 % bei $z/h = -0,7$ überbewertet. Eine weiterführende Analyse der Geschwindigkeitsverteilung und der turbulenten Reynolds-Spannungen im Vergleich zu den DNS-Daten findet sich im Anhang (vgl. Abb. A.49).

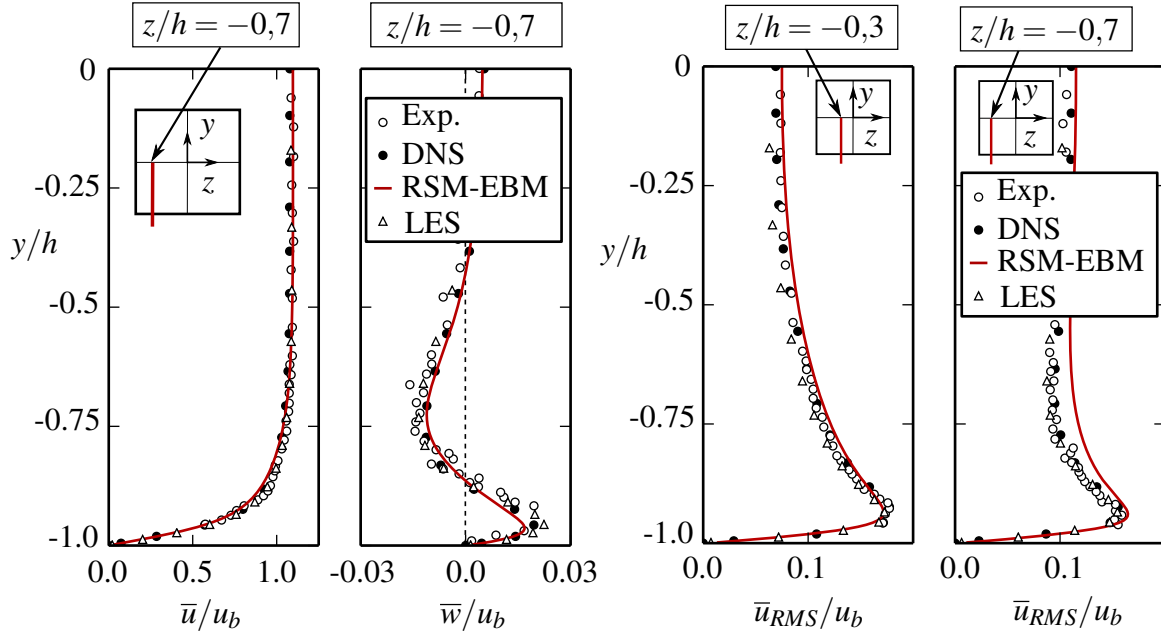


Abbildung 7.30.: Verlauf der Geschwindigkeitsprofile \bar{u}/u_b und \bar{w}/u_b sowie der primären, turbulenten Normalspannung \bar{u}_{RMS}/u_b der Grobstruktursimulation im Vergleich zu der experimentellen Arbeit von Kawahara et al. [203], den DNS-Daten von Pinelli et al. [33,53,54] und dem RSM-EBM [75,148] bei $Re_b = 7000$ und erzwungener Konvektion.

Da für eine Rechteckkanalströmung mit kleinem Seitenlängenverhältnis keine eindeutige Normierung der thermischen Größen in der Literatur üblich ist, wird eine der turbulenten Plattenkanalströmung konforme Variante formuliert. Das dimensionslose Temperaturprofil $\bar{\Theta}^+$ ist wie folgt definiert:

$$\bar{\Theta}^+ = \frac{(\bar{T}_{wB} - \bar{T})}{T_\tau} \quad \text{mit} \quad T_\tau = \frac{\dot{q}}{\rho c_p \langle u_\tau \rangle_4}, \quad (7.29)$$

wobei die Größen T_{wB} die Temperatur am Mittelpunkt der beheizten Wand ($y/h = 0$ und $z/h = -1$), T die sich einstellende Temperatur, T_τ eine Reibungstemperatur [93] und $\langle u_\tau \rangle_4$ die über alle vier Wände gemittelte Reibungsgeschwindigkeit darstellen. Dies ermöglicht einen direkten Vergleich der ermittelten Temperaturprofile mit turbulenten Plattenkanalströmungen. Der turbulente Wärmeflussvektor kann mit der gemittelten Reibungsgeschwindigkeit $\langle u_\tau \rangle_4$ und der Reibungstemperatur T_τ normiert werden:

$$\overline{u'_i \theta'}^+ = \frac{\overline{u'_i \theta'}}{T_\tau \langle u_\tau \rangle_4}. \quad (7.30)$$

Für einen Vergleich werden die algebraischen, turbulenten Wärmeflussmodelle (Carteciano-AHM und SK-AHM) sowie das MM-TD mit den Ergebnissen der LES verglichen. Wegen seiner Defizite bei großen Prandtl-Zahlen wird das MM-TD hier nur für $Pr = 0,025$ eingesetzt. Im Weiteren werden für zwei Prandtl-Zahlen ($Pr = 0,025$ bzw. $Pr = 0,71$) und bei $Re_b = 7000$ die Ergebnisse der LES und der RANS-Modelle für zwei verschiedene Beheizungs Zustände untersucht. Beim asymmetrisch beheizten Zustand ist die untere Wand ($y/h = -1$) durch einen konstanten Wärmefluss (\dot{q}) beaufschlagt. Die drei restlichen Wände werden perfekt isoliert angenommen. Beim symmetrisch beheizten Zustand ist das Wandpaar ($y/h = -1$ und $y/h = 1$) beheizt und jeweils die vertikalen Wände ($z/h = -1$ und $z/h = 1$) adiabat.

Für $Pr = 0,025$ und eine asymmetrische Beheizung zeigt das Carteciano-AHM im Vergleich zu den Ergebnissen der Grobstruktursimulation eine bessere Übereinstimmung als das SK-AHM (vgl. Abb. 7.31). Das Maximum der normierten Temperaturdifferenz $\bar{\Theta}^+$ wird für beide Modelle mit einer relativen Abweichung zur LES von 8 % beim Carteciano-AHM und 14 % beim SK-AHM unterbewertet. Dies deckt sich mit den Erkenntnissen der Plattenkanalströmung (vgl. Abb. 7.23) und ist für die algebraischen Modellen auf eine Überschätzung der turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'^+}$ zurückzuführen. Für das Carteciano-AHM beträgt die Abweichung des Maximums hier 11 % und für das SK-AHM 38 %. Wesentliche Ursache ist die Abweichung des durch das RSM-EBM ermittelten Maximums der turbulenten Normalspannung $\overline{v'v'}/u_b^2$ (vgl. Abb. 7.28) und somit des Produktionsterms $P_{2\theta}$ (vgl. Gl. (6.52)). Wie dem Anhang (vgl. Anhang A.4.3) entnommen werden kann, wird auch das Maximum der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}^+$ für alle Prandtl-Zahlen durch das thermische Zweigleichungsmodell nach So & Sommer [162] deutlich überschätzt. Die Abweichung zur LES beträgt für $Pr = 0,025$ bei beiden algebraischen Modellen fast 50 %. Dies führt auch zur Bestimmung eines zu hohen Zeitskalenverhältnisses R . Aus der Formulierung des Terms $Z_{i\theta}$ des Carteciano-AHM (reziproke Abhängigkeit zu R) (vgl. Gl. (7.8)) folgt eine Unterschätzung der Dissipation. Durch das gekoppelte System an Transportgleichungen (zweite Momente gehen jeweils in Produktions- und Dissipationsterme ein) lässt sich jedoch nur schwer eine einzige Ursache dieser Überbewertung identifizieren. Der axiale turbulente Wärmefluss $\overline{u'\theta'^+}$ wird für das Carteciano-AHM unterschätzt mit einer Abweichung des Maximalwertes von 15 %. Das SK-AHM zeigt hier eine bessere Übereinstimmung mit einer Abweichung von nur 12 %.

Wie in Abb. 7.32 dargestellt ist, zeigt sich für $Pr = 0,025$ bei symmetrischer Beheizung eine bessere Übereinstimmung der algebraischen Modelle mit der LES. Das Maximum der dimensionslosen Temperaturdifferenz $\bar{\Theta}^+$ im Zentrum wird erneut unterschätzt. Die relative Abweichung zur LES beträgt hier für das Carteciano-AHM 5 % und für das SK-AHM 6 %. Ursache ist eine Überschätzung der der turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'^+}$. Die Abweichung des Maximalwertes kann für das Carteciano-AHM mit 4 % und für das SK-AHM mit 20 % bestimmt werden. Das Maximum der axialen turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{u'\theta'^+}$ wird beim Carteciano-AHM um 25 % und für das SK-AHM um nur 10 % unterschätzt.

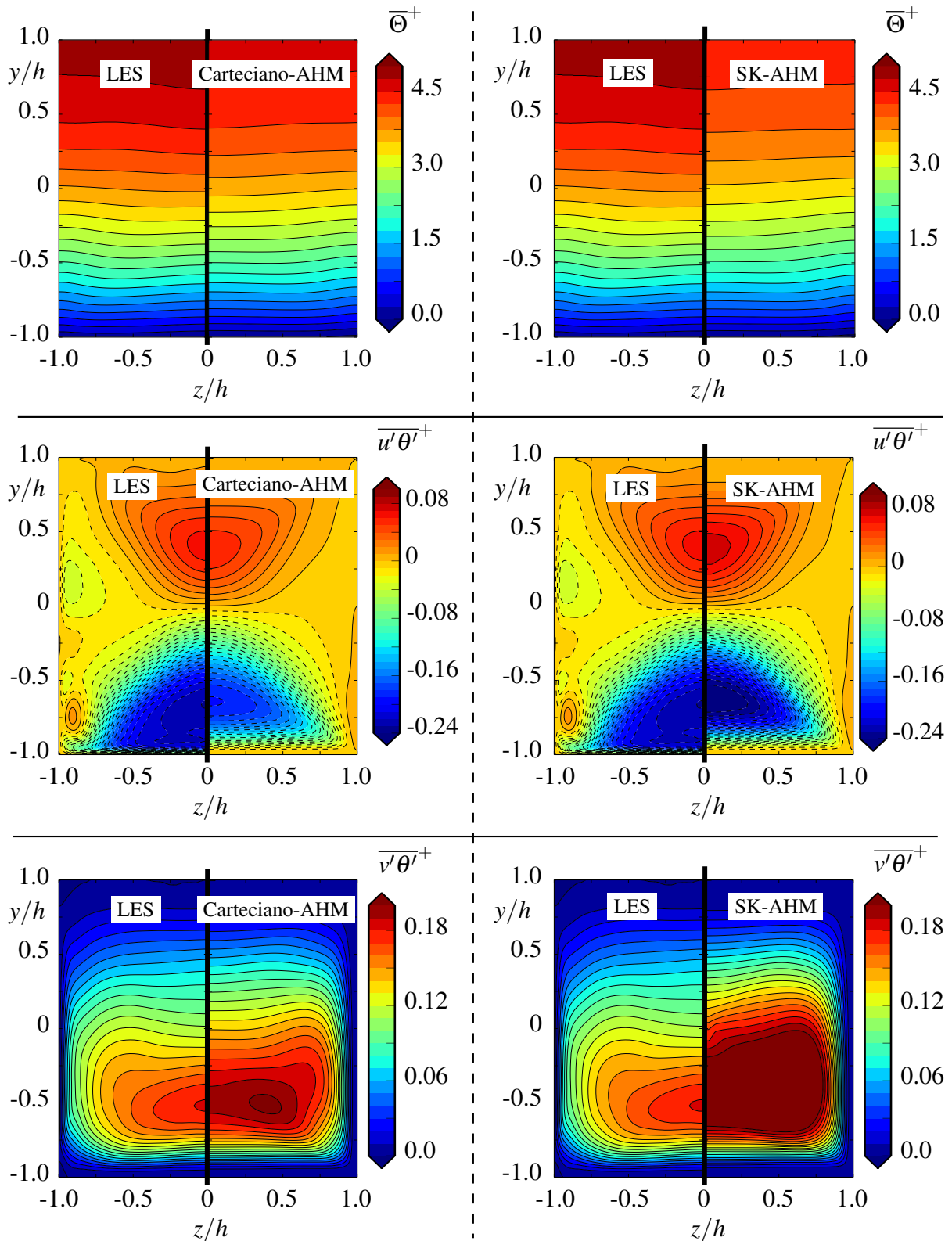


Abbildung 7.31.: Vergleich der normierten Temperaturverteilung $\overline{\Theta}^+$ (oben), des axialen turbulenten Wärmeflusses $\overline{u'\theta'}^+$ (Mitte) und des turbulenten Wärmeflusses $\overline{v'\theta'}^+$ (unten) für die Grobstruktursimulation (LES) jeweils mit den Ergebnissen der beiden algebraischen Modelle, Carteciano-AHM (linke Spalte) und SK-AHM (rechte Spalte), für einen asymmetrischen Beheizungszustand bei $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,025$.

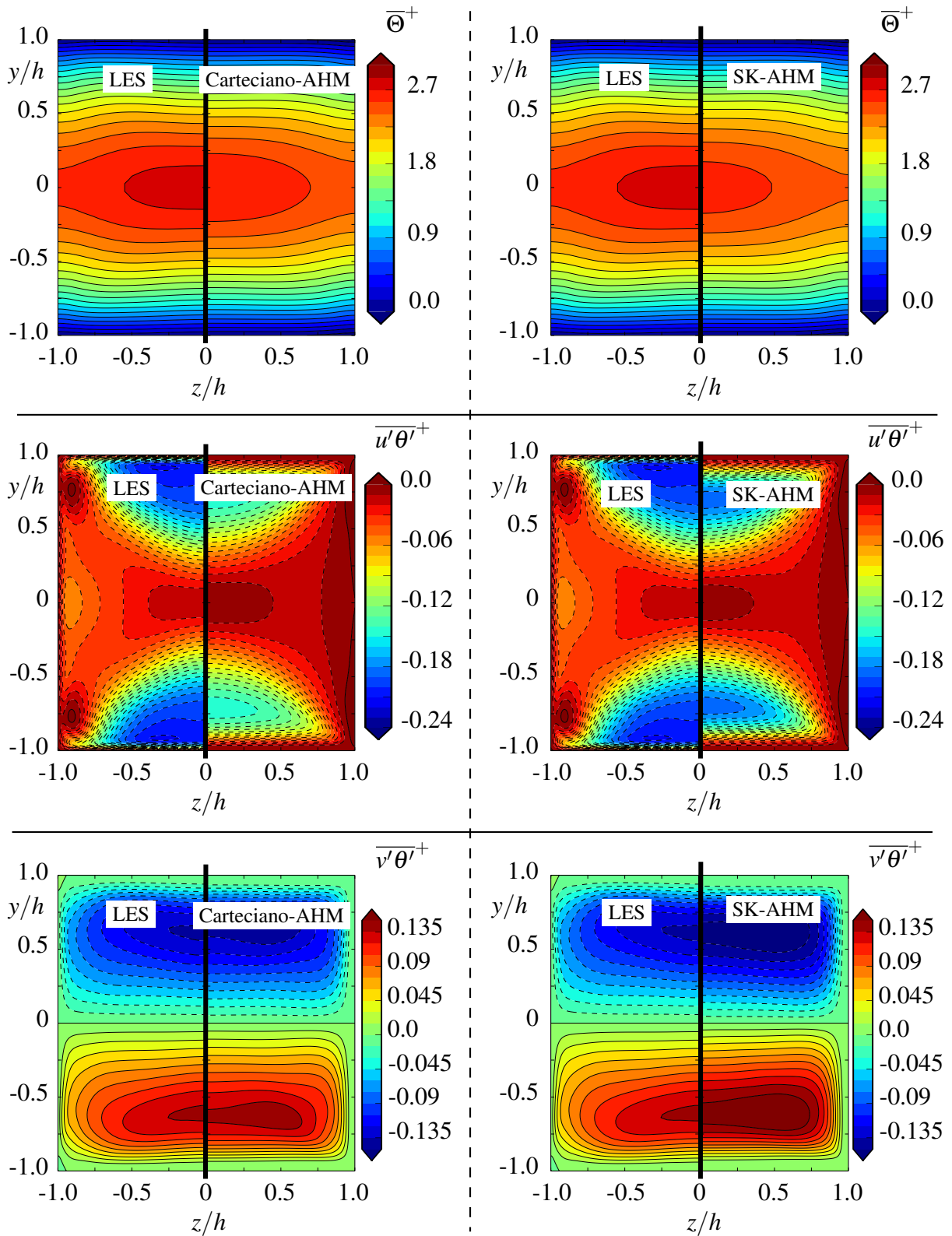


Abbildung 7.32.: Vergleich der normierten Temperaturverteilung $\overline{\Theta}^+$ (oben), des axialen turbulenten Wärmeflusses $\overline{u'\theta'^+}$ (Mitte) und des turbulenten Wärmeflusses $\overline{v'\theta'^+}$ (unten) für die Grobstruktursimulation (LES) jeweils mit den Ergebnissen der beiden algebraischen Modelle, Carteciano-AHM (linke Spalte) und SK-AHM (rechte Spalte), für einen symmetrischen Beheizungszustand bei $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,025$.

Wie in Abb. 7.33 für die normierte Temperatur $\bar{\Theta}^+$ und die turbulente Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'}^+$ dargestellt ist, zeigt das MM-TD eine ähnlich gute Übereinstimmung wie das Carteciano-AHM. Insbesondere bei der asymmetrischen Beheizung wird die Temperaturverteilung $\bar{\Theta}^+$ und die Verteilung der turbulente Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'}^+$ mit einer sehr guten Genauigkeit wiedergegeben. Die relative Abweichung des Maximums zur LES beträgt hier für die normierte Temperatur 10 %. Das Maximum der turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'}^+$ wird für die asymmetrische Beheizung mit einer Abweichung von 11 % zu den LES ermittelt. Für die symmetrische Beheizung ergibt sich eine Abweichung des Maximalwertes der normierten Temperatur $\bar{\Theta}^+$ von 6 % und der turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'}^+$ von nur 2 %.

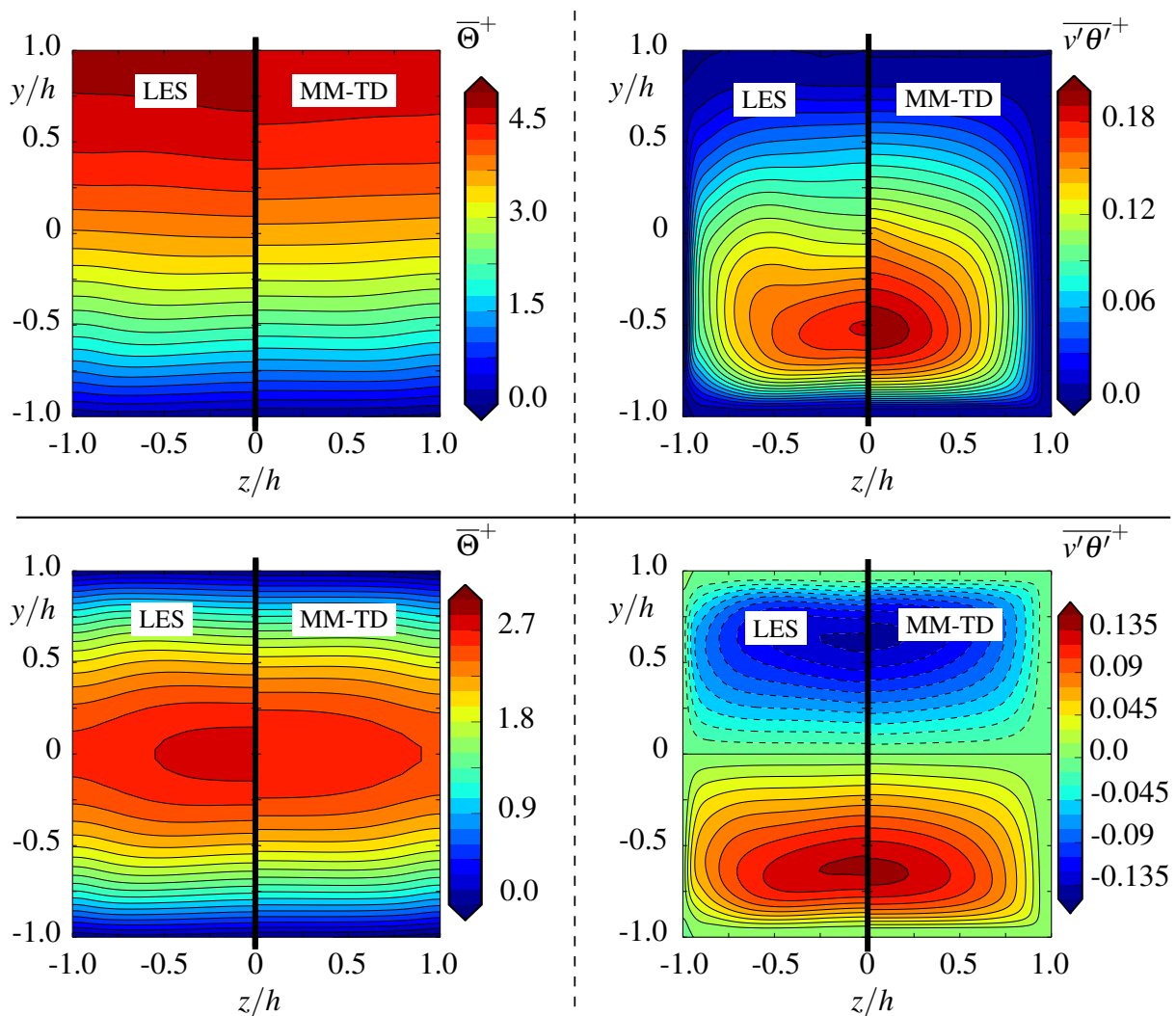


Abbildung 7.33.: Vergleich der normierten Temperaturverteilung $\bar{\Theta}^+$ (linke Spalte) und des turbulenten Wärmeflusses $\overline{v'\theta'}^+$ (rechte Spalte) für die Grobstruktursimulation (LES) im Vergleich zum MM-TD für einen asymmetrischen (oben) und einen symmetrischen (unten) Beheizungszustand bei $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,025$.

Ein wesentlicher Nachteil dieser Modellvariante ist seine Abhängigkeit vom Temperaturgradienten. Die turbulente Wärmeflusskomponente $\overline{u'\theta'^+}$ kann für die dimensionslose Skalargröße $\overline{\Theta}^+$ in einer voll eingelaufenen Strömung nicht korrekt ermittelt werden.

Ein Vergleich der beiden algebraischen Modelle bei einer höheren molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ ist in Abb. 7.35 dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass bei größeren Prandtl-Zahlen der Einfluss der Sekundärströmung auf die Temperaturverteilung steigt.

In der asymmetrischen beheizten Konfiguration zeigen beide algebraische Wärmeflussmodelle eine akzeptable Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Grobstruktursimulation. Das Maximum der normierten Temperatur wird für das Carteciano-AHM mit einer relativen Abweichung von 4 % überschätzt. Für das SK-AHM wird sie hingegen mit einer Abweichung von 5 % unterschätzt. Für die turbulente Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'^+}$ ist deutlich zu erkennen, dass beide algebraische Modelle entlang des vertikalen Wandpaares (entlang der y-Richtung) einen zu großen Wert und somit über den Term $P_{2\theta} = -\overline{v'v'}(\partial T/\partial y)$ eine zu große Produktionsrate dieser Komponente aufweisen. Ursache hierfür ist erneut die Überbewertung der turbulenten Reynolds-Spannung $\overline{v'v'}$ durch das RSM-EBM (vgl. Abb. 7.28). Entlang der Halbierenden der beheizten Wand ($z/h = 0$) wird das Maximum für beide algebraische Modelle unterschätzt. Die relative Abweichung zur LES beträgt hier für das Carteciano-AHM 3,5 % und für das SK-AHM 5 %. Die Wärmeflusskomponente in Strömungsrichtung wird für beide Wärmeflussmodelle ebenfalls deutlich in ihrer Größenordnung unterschätzt. Die Abweichung beträgt bei dieser Komponente für das Carteciano-AHM fast 60 % und für das SK-AHM fast 50 %. Die Anisotropie der turbulenten Wärmeflüsse kann demnach nicht korrekt wiedergegeben werden. Dies ist auf ein Fehlverhalten für den Druck-Temperaturgradienten-Korrelationsterm $\Pi_{1\theta}$ zurückzuführen.

Für die symmetrisch beheizte Strömung zeigt das Carteciano-AHM wegen einer leichten Unterschätzung der turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'^+}$ eine überhöhte Spreizung des Temperaturprofils $\overline{\Theta}^+$. Die relative Abweichung des Maximums der normierten Temperatur beträgt für das Carteciano-AHM 2,6 %. Für das SK-AHM wird hingegen das Maximum mit einer Abweichung von nur 1 % bestimmt. Für die turbulente Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'^+}$ ergibt sich eine Abweichung des Maximums bzw. Minimums (symmetrische Komponente zu y) zu 3 % beim Carteciano-AHM und zu 4 % beim SK-AHM. Analog zum asymmetrisch beheizten Zustand kann auch hier die Größe der axialen turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{u'\theta'^+}$ nicht korrekt wiedergegeben werden. Beide algebraische Modelle unterschätzen das Minimum dieser Komponente. Für das Carteciano-AHM beträgt die relative Abweichung zur LES 66 % und für das SK-AHM 50 %. Hier ist ebenfalls die Ursache auf den Druck-Temperaturgradienten-Korrelationsterm $\Pi_{1\theta}$ zurückzuführen. Beide Modelle können die Anisotropie des turbulenten Wärmeflussvektors bei großen molekularen Prandtl-Zahlen nicht wiedergeben. Da die axiale Komponente keinen Einfluss auf die Transportgleichung der Temperatur in voll eingelaufenen Strömungen nimmt, kann eine Rückwirkung auf andere Transportgrößen für diesen Strömungsfall ausgeschlossen werden.

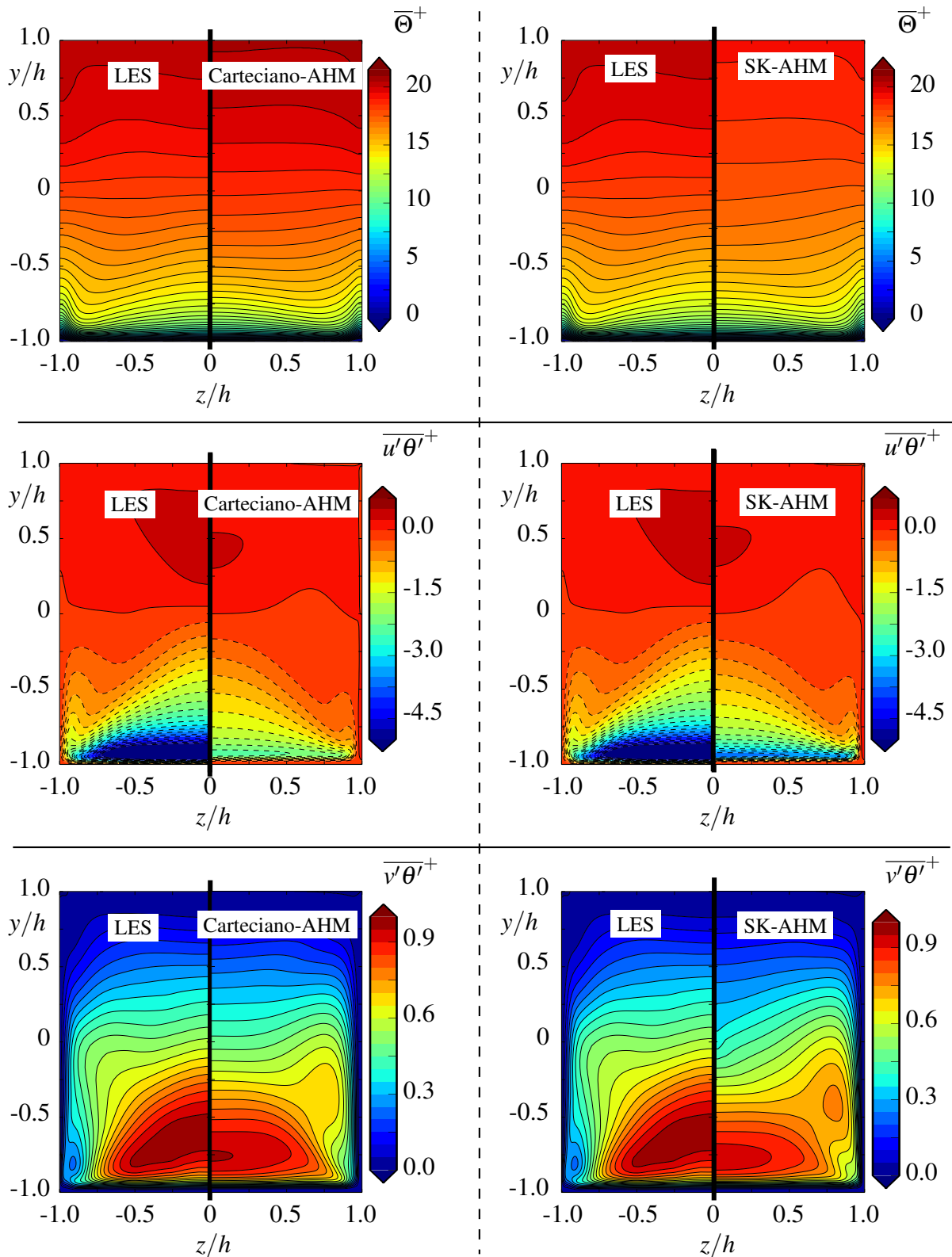


Abbildung 7.34.: Vergleich der normierten Temperaturverteilung $\overline{\Theta}^+$ (oben), des axialen turbulenten Wärmeflusses $\overline{u'\theta'}^+$ (Mitte) und des turbulenten Wärmeflusses $\overline{v'\theta'}^+$ (unten) für die Grobstruktursimulation (LES) jeweils mit den Ergebnissen der beiden algebraischen Modelle, Carteciano-AHM (linke Spalte) und SK-AHM (rechte Spalte), für einen asymmetrischen Beheizungszustand bei $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,71$.

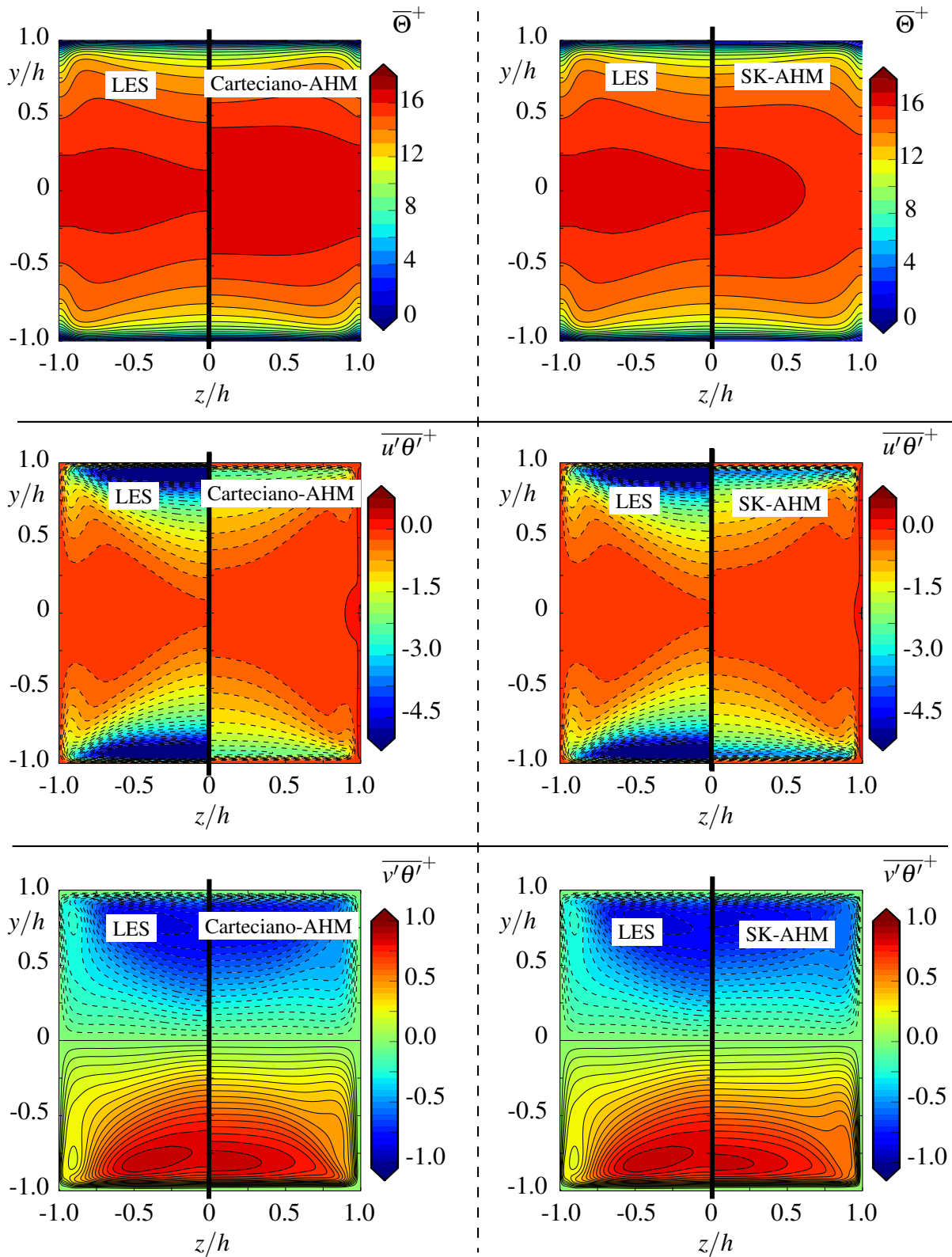


Abbildung 7.35.: Vergleich der normierten Temperaturverteilung $\overline{\Theta}^+$ (oben), des axialen turbulenten Wärmeflusses $\overline{u'\theta'^+}$ (Mitte) und des turbulenten Wärmeflusses $\overline{v'\theta'^+}$ (unten) für die Grobstruktursimulation (LES) jeweils mit den Ergebnissen der beiden algebraischen Modelle, Carteciano-AHM (linke Spalte) und SK-AHM (rechte Spalte), für einen symmetrischen Beheizungszustand bei $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,71$.

Ein Vergleich der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}^+$ und ihrer Dissipationsrate $\varepsilon_{\theta\theta}^+$ bei $Pr = 0,71$ kann für die beiden Beheizungs Zustände dem Anhang (vgl. Anhang A.4.3) entnommen werden. Es zeigt sich, dass analog zur turbulenten Plattenkanalströmung die Größenordnung der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}^+$ überschätzt wird. Die relative Abweichung beider Modelle zur LES beträgt bis zu 11 % bei asymmetrischer und bis zu 12 % bei symmetrischer Beheizung. Für die Dissipationsrate $\varepsilon_{\theta\theta}^+$ hingegen lässt sich, trotz der „falschen“ Annahme einer verschwindenden Temperaturfluktuation für die Turbulenzmodelle an der Wand, eine gute Übereinstimmung erkennen (vgl. Anhang A.4.3). Die relative Abweichung des Maximums beträgt hier bei den algebraischen Modellen ca. 4 % bei asymmetrischer und 3 % bei symmetrischer Beheizung des Rechteckkanals.

Die Nusselt-Zahl Nu_{D_h} als integraler Parameter des hydraulischen und thermischen Verhaltens der Strömung ist wie folgt definiert:

$$Nu_{D_h} = \frac{\dot{q} 2h}{\lambda (\langle \bar{T}_w \rangle - \bar{T}_b)}, \quad (7.31)$$

wobei die Größen $2h$ der Kantenlänge, \dot{q} dem an der beheizten Wand zugeführten Wärmestromdichte, λ der Wärmeleitfähigkeit, \bar{T}_b der massenstromgemittelten Temperatur und $\langle \bar{T}_w \rangle$ der, über die beheizte Wand gemittelten Temperaturverteilung entsprechen.

Die relative Abweichung der ermittelten Nusselt-Zahlen Nu_{D_h} ist für die verschiedenen Modellvorschläge im Vergleich zu den Ergebnissen der Grobstruktursimulation (LES) in den Tabellen 7.6 und 7.7 aufgeführt. Für niedrige Prandtl-Zahlen ($Pr = 0,025$) zeigt das Carteciano-AHM und das MM-TD eine bessere Übereinstimmung als das SK-AHM mit der Grobstruktursimulation (LES). Die Nusselt-Zahlen Nu_{D_h} des SK-AHM zeigen nur eine geringe Abweichung für den symmetrisch beheizten Fall, aber die größte Abweichung für die asymmetrisch beheizten Konfiguration.

Typ	Beheizungs Zustand	Nu_{D_h}	rel. Abweichung in [%]
LES	asymm.	3,41	-
Carteciano-AHM	asymm.	3,47	1,76
SK-AHM	asymm.	3,61	5,86
MM-TD	asymm.	3,39	0,59
LES	symm.	5,91	-
Carteciano-AHM	symm.	5,86	0,85
SK-AHM	symm.	5,95	0,68
MM-TD	symm.	5,77	2,37

Tabelle 7.6.: Vergleich der berechneten Nusselt-Zahlen für eine turbulente Rechteckkanalströmung bei $Re_b = 7000$, einer molekularen Prandtl-Zahl von $Pr = 0,025$ sowie verschiedenen Beheizungs Zuständen.

Bei einer größeren molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ können die Nusselt-Zahlen der Grobstruktursimulation (LES) durch die RANS-Modelle bestätigt werden. Das SK-AHM zeigt für beide Beheizungszustände eine geringere Abweichung zu den Vergleichsdaten. Die Ursache für dieses Verhalten ist allerdings nicht unmittelbar offensichtlich. Bei alleiniger Betrachtung der Temperaturverteilung der asymmetrischen Beheizung (vgl. Abb. 7.34) fällt auf, dass die Ergebnisse des Carteciano-AHM eine bessere Approximation der Vergleichsdaten liefern. Dies bestätigt auch die Analyse der Temperaturprofile in y-Richtung (vgl. Anhang A.4.3). Eine Ursache der besseren Übereinstimmung des SK-AHM mit der LES ist die Überbewertung der turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{w'\theta'^+}$ in unmittelbarer Nähe zur beheizten Wand (vgl. Abb. 7.36). Dies führt zu einer Vergleichmäßigung der Temperatur entlang der Wand und somit dazu, dass die Nusselt-Zahl als abhängige Variable in ihrer Größe überbewertet wird.

Typ	Beheizungszustand	Nu_{D_h}	rel. Abweichung in [%]
LES	asymm.	19,26	-
Carteciano-AHM	asymm.	18,41	4,41
SK-AHM	asymm.	19,39	0,67
LES	symm.	23,11	-
Carteciano-AHM	symm.	21,90	5,23
SK-AHM	symm.	22,42	2,98

Tabelle 7.7.: Vergleich der Nusselt-Zahlen für eine turbulente Rechteckkanalströmung bei $Re_b = 7000$, einer molekularen Prandtl-Zahl von $Pr = 0,71$ sowie verschiedenen Beheizungszuständen.

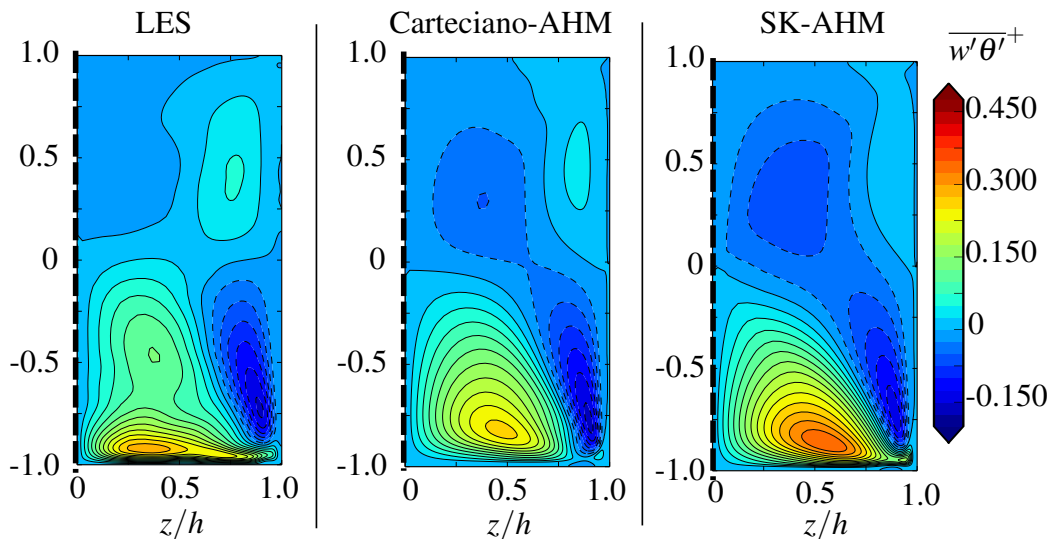


Abbildung 7.36.: Vergleich der turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{w'\theta'^+}$ für die Grobstruktursimulation und die algebraischen Wärmeflussmodelle (Carteciano-AHM und SK-AHM) in einer asymmetrisch beheizten Rechteckkanalströmung bei $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,71$.

Dies stellt die Frage der Eignung der verwendeten Formulierung der Nusselt-Zahl Nu_{D_h} . In zukünftigen Arbeiten muss für einen Abgleich mit experimentellen Daten, eine geeignete, eindeutige Formulierung entwickelt werden. In Strömungen niedriger molekularer Prandtl-Zahl zeigt wegen der großen molekularen Wärmeleitung die Temperatur entlang der beheizten Wand einen nahezu konstanten Verlauf. Dies mindert gravierend die Auswirkungen des erläuterten Fehlers bei der Formulierung und Bestimmung der Nusselt-Zahl. Ein weitere Schwierigkeit stellt das Konzept des hydraulischen Durchmessers dar. Dieses ist schon bei Betrachtung von hydraulischen Größen, wie z.B. des Reibungskoeffizienten, problematisch [200]. Es ist demnach ohne entsprechende Erweiterung auch nur bedingt für einen Vergleich der thermischen Größen bei unterschiedlichen, komplexen Strömungsgeometrien geeignet.

Die folgende Abb. 7.37 zeigt für beide algebraischen Modelle bei $Pr = 0,025$ den Einfluss einer Variation der Péclet-Zahl Pe_{D_h} auf die berechneten Nusselt-Zahlen Nu_{D_h} . Anhand dieser Ergebnisse lassen sich Korrelationen für die Nusselt-Zahl Nu_{D_h} in Rechteckkanalströmungen ableiten. Beide entwickelten Korrelationen sind hierbei in einer allgemeinen Form analog zur Dittus-Boelter-Korrelation ($Nu = a + b Pe^c$) angegeben. Auch an dieser Stelle ist der untere Grenzwert der Nusselt-Zahl in laminaren voll eingelaufenen Strömungen zu beachten. Bei Zufuhr eines konstanten Wärmestroms ($\dot{q} = \text{konst.}$) lässt sich dieser Grenzwert bei asymmetrischer Beheizung numerisch zu $Nu_{D_h,Lam.} \approx 2,68$ und bei symmetrischer Beheizung zu $Nu_{D_h,Lam.} \approx 4,07$ bestimmen.

Für eine asymmetrischen Beheizung des Rechteckkanals ($L_y = L_z$) kann nun folgende Formulierung der Nusselt-Zahl Nu_{D_h} abgeleitet werden:

$$Nu_{D_h,Asymm.} = 2,68 + 0,009 (Pe_{D_h})^{0,888} . \quad (7.32)$$

Für den symmetrisch beheizten Zustand ist die Nusselt-Zahl Nu_{D_h} im direkten Vergleich größer. Die abgeleitete Korrelation lautet demnach:

$$Nu_{D_h,Symm.} = 4,1 + 0,025 (Pe_{D_h})^{0,8} . \quad (7.33)$$

Beide entwickelte Korrelationen zeigen eine gute Approximation der Ergebnisse des algebraischen Wärmeflussmodelle. Für den asymmetrisch beheizten Zustand zeigt die Korrelation aus Gl. (7.32) eine mittlere Abweichung von 3,5 % über den gesamten Bereich der Péclet-Zahl. Für den symmetrisch beheizten Zustand liegt für beide algebraische Modelle die Abweichung zur Korrelation aus Gl. (7.33) bei nur 2,5 % . Für eine Verifizierung dieser Korrelationen sind experimentelle Daten speziell bei großen Péclet-Zahlen erforderlich. Die Gültigkeit der beiden Formulierungen ist somit in künftigen Arbeiten zu prüfen. Ausgehend von diesen Korrelationen kann nun auch für ein reales Fluid, wie z.B. Quecksilber oder LBE, die sich einstellende Temperaturdifferenz zwischen Wandtemperatur T_w und massenstromgemittelter Temperatur T_b bei unterschiedlichen Wärmestromdichten \dot{q} untersucht werden (vgl. Anhang A.60).

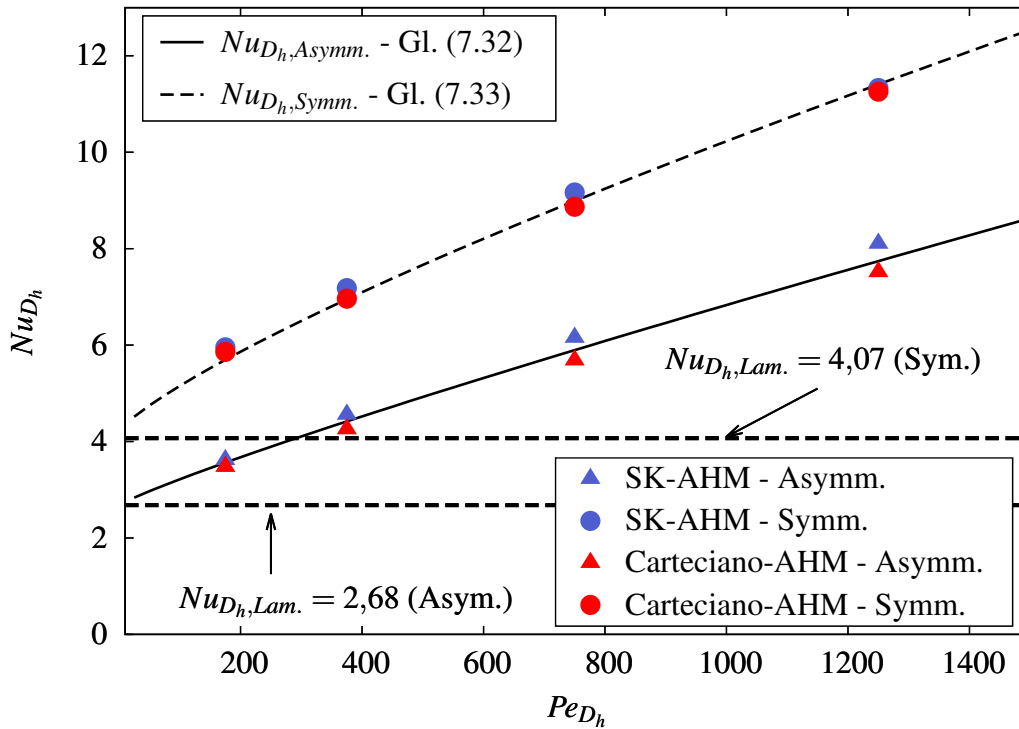


Abbildung 7.37.: Einfluss einer Variation der Péclet-Zahl Pe_{D_h} auf die berechnete Nusselt-Zahl Nu_{D_h} für die algebraischen Wärmeflussmodelle (Carteciano-AHM und SK-AHM) bei $Pr = 0,025$.

Zusammenfassend zeigt das Carteciano-AHM, insbesondere für niedrige molekulare Prandtl-Zahlen, eine wesentlich bessere Übereinstimmung als das SK-AHM. Das MM-TD ist gegenüber den beiden algebraischen turbulenten Wärmeflussmodellen vergleichbar genau wie das Carteciano-AHM. Ist die Strömungsrichtung jedoch parallel zur Wirkungsrichtung des Schwerfeldes der Erde, kann das MM-TD, infolge der Kopplung mit einem einfachen Gradientenansatz der Skalargröße $\bar{\Theta}$, die auftriebsbedingte Produktion der turbulenten Reynolds-Spannungen nicht korrekt wiedergeben (vgl. Gl. (5.6)).

7.5. Anwendung bei auftriebsbehafteten Rechteckkanalströmungen

Die untersuchte Strömungskonfiguration entspricht der des vorangegangenen Abschnitts und es werden in Mischkonvektion erneut die zwei Beheizungs Zustände (asymmetrische und symmetrische Beheizung) analysiert. Die molekulare Prandtl-Zahl beträgt $Pr = 0,025$, wobei die Konfiguration der Testsektion der KASOLA-Anlage (vgl. Abb. 1.5) entspricht. Eine wesentliche Größe zur Beschreibung von auftriebsbehafteten Strömungen ist die Richardson-Zahl Ri (vgl. Kap. 2.3.6). Sie ist definiert als das Verhältnis der Grashof-Zahl Gr zur Reynolds-Zahl Re_b :

$$Ri = \frac{Gr}{Re_b^2} = \frac{\beta g \dot{q} (2h)^2}{\lambda u_b^2}, \quad (7.34)$$

wobei die Grashof-Zahl Gr definiert ist als:

$$Gr = \frac{\beta g \dot{q} (2h)^4}{\lambda \nu^2}. \quad (7.35)$$

Die Richardson-Zahl Ri wurde hier nur so groß gewählt, dass eine maximale Dichteänderung des Mediums infolge der Temperaturunterschiede von weniger als 3% auftritt. Dies stellt eine inkompressible Formulierung des Gleichungssystems sicher ohne die Boussinesq-Approximation zu verletzen. Der resultierende Fehler skaliert linear für jeden Term der verschiedenen Erhaltungs- und Transportgleichungen. Die Stoffeigenschaften werden als temperaturunabhängig und somit konstant angenommen. Die Länge des periodischen Strömungsgebietes L_x muss hinreichend groß gewählt werden. Hierfür wird eine Analyse der Zweipunktkorrelationen der Fluktuationsgrößen zu Identifikation der größten turbulenten Strukturen herangezogen. Diese können im Vergleich zur erzwungenen Konvektion in ihrer Größe zunehmen (vgl. Anhang A.4.4). Eine Darstellung der wichtigsten numerischen Parameter und Größen ist in der Tabelle 7.8 dargestellt.

Parameter	Symbol	Wert
Reynolds-Zahl	$Re_b = u_b 2h/\nu$	7000
Richardson-Zahl	$Ri = Gr/Re_b^2$	$\approx 0,09$
Prandtl-Zahl	Pr	0,025
Erdbeschleunigung	g_i	-9,81 ($i = 1$)
Abmessungen	$L_x \times L_y \times L_z$	$28h \times 2h \times 2h$
Anzahl der Elemente	$n_x \times n_y \times n_z$	$245 \times 120 \times 120$
Zellgröße in x-Richtung	Δx^+	~ 26
Zellgröße an den Wänden Asymm. Beheizung	$\Delta y^+ _w$ bzw. $\Delta z^+ _w$	0,25 - 0,61
Zellgröße an den Wänden Symm. Beheizung	$\Delta y^+ _w$ bzw. $\Delta z^+ _w$	0,25 - 0,57
Räumliche Diskretisierung	-	2. Ordnung
Mittelungsintervall	$T_s u_B/h$	≈ 3200
SGS-Modell	-	Dyn. Smag.-Modell [119]
SGS-Wärmeflussmodell	$Pr_{t,SGS}$	Ansatz nach Morar [111]

Tabelle 7.8.: Übersicht der wesentlichen Parameter der Grobstruktursimulation (LES) unter Berücksichtigung von Auftriebseffekten.

Zunächst wird der Einfluss der Auftriebseffekte auf die Form und Position der Wirbelstrukturen in der Rechteckkanalströmung bei niedriger molekularer Prandtl-Zahl analysiert. Für den asym-

metrisch beheizten Zustand zeigt sich ein Maximum der Hauptströmungsgeschwindigkeit in Nähe der beheizten Wand ($y/h = -1$) (vgl. Abb. 7.38). Im Vergleich zur erzwungenen Konvektion ändert sich deutlich die Position und Form der Wirbelstrukturen in der Querschnittsebene. Während bei erzwungener Konvektion eine Symmetrie der Wirbelsysteme entlang der Flächendiagonalen festgestellt werden konnte, zeigen sich nun unter Einfluss des Auftriebs symmetrisch zur Flächenebene der beheizten Wand zwei große, gegenläufige Wirbelstrukturen. Diese befördern warmes Fluid aus unmittelbarer Nähe der beheizten Wand in den Bereich der Kernströmung hinein. Die Größenordnung der Sekundärströmungen nimmt geringfügig zu, von ca. 2-3% in erzwungener Konvektion (vgl. Abb. 7.27) auf bis zu 3-4 % bei einer Richardson-Zahl von $Ri = 0,09$.

Die dimensionslose Temperaturverteilung (vgl. Abb. 7.39) zeigt stärkere Gradienten in Richtung der Eckbereiche über der beheizten Wand. Die Krümmung der Isothermen ist hierbei auf den kombinierten Beitrag der stärkeren Sekundärströmung und der turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'^+}$ zurückzuführen, die beide verantwortlich für einen im Vergleich marginal stärkeren Wärmetransport in wandnormaler Richtung sind. Das Maximum ist in Richtung des Zentrums verschoben und nimmt im Vergleich zur erzwungenen Konvektion nur mit ca. 2 % zu.

Für den symmetrisch beheizten Zustand hingegen ist ein deutlich geringerer Einfluss des Auftriebs auf die Geschwindigkeitsverteilung festzustellen (vgl. Abb. 7.40). Die vier Wirbelstrukturen in Nähe der beheizten Wände ($y/h = -1$ bzw. $y/h = 1$) nehmen in ihrer Größe gegenüber der erzwungenen Konvektion (vgl. Abb. 7.27) geringfügig zu. Die Sekundärströmung, deren Größenordnung mit 2,4 % der Hauptströmungskomponente nahezu identisch bleibt, weist nun jedoch entlang der beheizten Wand ihr Maximum auf. Auch für diesen Fall zeigt die Temperaturverteilung (vgl. Abb. 7.41) den Einfluss der Sekundärströmungen über den Eckbereichen der beheizten Wände. Die Größenordnung der turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'^+}$ nimmt im Vergleich zur erzwungenen Konvektion (vgl. Abb. 7.32) um fast 30 % ab. Dies ist auf eine Reduktion des Maximums der turbulenten Reynolds-Spannung $\overline{v'v'^+}$ entlang des vertikalen Wandpaares um 30 % zurückzuführen⁵⁶ (Relaminarisierung). Da die Reynolds-Normalspannungskomponente Bestandteil des Produktionsterms $P_{2\theta} = -\overline{v'v'}(\partial T/\partial y)$ ist, muss diese in ihrer Größe ebenfalls abnehmen.

Im Folgenden werden die Ergebnisse des Carteciano-AHM in Kombination mit dem RSM-EBM für beide Beheizungszustände mit der Grobstruktursimulation verglichen. Die Temperatur übernimmt bei Berücksichtigung von Auftriebseffekten nun die Rolle eines aktiven Skalars. Das Geschwindigkeits- und Temperaturfeld sind beeinflussen sich demnach gegenseitig.

Wie in Abb. 7.38 dargestellt ist, lässt sich bei asymmetrischer Beheizung der Rechteckkanalströmung für die Kombination aus RSM-EBM und Carteciano-AHM im Allgemeinen eine gute Übereinstimmung mit der LES feststellen. Die Geschwindigkeitsverteilung der Hauptströmungskomponente zeigt nur geringe Abweichungen im Bereich der Ecken. Das Maximum der Geschwin-

⁵⁶Die turbulente Reynolds-Spannung $\overline{v'v'^+}$ kann aus Abb. 7.28 durch Rotation der Verteilung von $\overline{w'w'^+}$ um 90° bestimmt werden.

digkeit wird mit einer relativen Abweichung zur LES von nur 1 % gut wiedergegeben. Die Größenordnung der Sekundärströmung wird, wie bei der erzwungenen Konvektion, leicht unterschätzt. Die relative Abweichung des Maximalwertes beträgt hier beim Carteciano-AHM 6 % im Vergleich zur LES. Ein Defizit lässt sich im Speziellen entlang der Flächenhalbierenden der beheizten Wand feststellen. Die Position und Größe der Wirbelstrukturen kann korrekt ermittelt werden. Die Verteilung der turbulenten Reynolds-Spannungen wird insgesamt nur bedingt wiedergegeben. Die Abweichung des Maximum für die Reynolds-Normalspannung $\overline{u'u'}^+$ beträgt nur 0,5 %. Auch unter Berücksichtigung von Auftriebseinflüssen werden jedoch die turbulenten Normalspannungskomponenten $\overline{v'v'}^+$ bzw. $\overline{w'w'}^+$ (letztenannte Komponente ist in dieser Abb. nicht dargestellt) in ihrer Größe deutlich überschätzt. Die Abweichung des RSM-EBM zusammen mit dem Carteciano-AHM für die Komponente $\overline{v'v'}^+$ beträgt hier für den Maximalwert 40 %. Die turbulente Reynolds-Schubspannung $\overline{u'v'}^+$ zeigt hingegen eine gute Übereinstimmung mit der LES. Beim Minimum ist für diese Größe eine Abweichung von 1,6 % und beim Maximum von 8 % festzustellen.

Die dimensionslose Skalar- bzw. Temperaturverteilung $\overline{\Theta}^+$ bzw. der Verlauf der einzelnen Isothermen kann durch das Carteciano-AHM in einem großen Bereich der Strömung genau wiedergegeben werden (vgl. Abb. 7.39). Einzig das Maximum entlang der adiabaten Wand ($y/h = 1$) wird, wie bei erzwungener Konvektion, nicht korrekt ermittelt. Die relative Abweichung zur LES beträgt weniger als 3 %. Dies lässt sich zurückführen auf die Überschätzung der turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'}^+$ von 14 % im Vergleich zur LES. Dieses Defizit ist erneut hauptsächlich mit der Abweichung in der Vorhersage der Reynolds-Normalspannung $\overline{v'v'}$ zu erklären (40 % Abweichung dieser Komponente) und daher des Produktionsterms $P_{2\theta}$. Die turbulente Wärmeflusskomponente $\overline{u'\theta'}^+$ wird in ihrer Größe ebenfalls nicht korrekt wiedergegeben. Die relative Abweichung des Minimums bzw. Maximums lässt sich für die Komponente ermitteln zu 9 % bzw. zu 30 %. Die Komponente $\overline{w'\theta'}^+$ des turbulenten Wärmeflussvektors wird ebenfalls mit 50 % im Maximalwert überschätzt. Analog zur Komponente $\overline{v'\theta'}^+$ lässt sich dies ebenfalls mit einer Überschätzung der turbulenten Reynolds-Normalspannungen durch das RSM-EBM erklären. Auch für die Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}^+$ lässt sich hier eine deutliche Überschätzung des Maximums von fast 55 % feststellen, wohingegen die zugehörige Dissipationsrate $\varepsilon_{\theta\theta}$ in ihrer Verteilung eine gute Übereinstimmung mit einer Abweichung von nur 4 % zur LES aufweist. Die Abweichung der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}^+$ ist für das Carteciano-AHM eine unmittelbare Folge des überschätzten Produktionsterms bzw. des Wärmeflussvektors. Es muss auch auf den Einfluss der Randbedingungen für die beiden letztgenannten Größen hingewiesen werden. Wie leicht zu erkennen ist, entspricht auf allen vier Wänden die idealisierte Formulierung $\overline{\theta'^2}|_w = 0$ als Randbedingung nicht den Ergebnissen der Grobstruktursimulation. Eine Lösung für diese Problematik ist nach Kenntnis des Autors in der Literatur nicht eindeutig geklärt [65,66,194] und bedarf in Zukunft weiterer Untersuchungen, so dass hier keine alternativen Konfigurationen bzw. Randbedingungen für das Carteciano-AHM getestet wurden.

Für die symmetrischen Beheizung der Rechteckkanalströmung zeigt die Kombination aus RSM-EBM und Carteciano-AHM ebenfalls eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der Grobstruktursimulation (vgl. Abb. 7.40). Die Geschwindigkeitsverteilung der Hauptströmungskomponente wird mit einer Abweichung des Maximalwertes von nur 1 % gut wiedergegeben. Die Position und Größe der Wirbelstrukturen weicht nur geringfügig ab. Dies lässt sich auch in der Größe der Sekundärströmung erkennen, die nicht ganz die Größenordnung der Vergleichsdaten aufweist. Die relative Abweichung zur LES beträgt hier 20 %. Die Verteilung der turbulente Reynolds-Spannung $\overline{u'u'}^+$ zeigt eine gute Übereinstimmung. Das Maximum wird mit einer Genauigkeit von 6 % im Vergleich zur LES wiedergegeben. Erneut wird deutlich die Reynolds-Normalspannung $\overline{v'v'}^+$ entlang des vertikalen Wandpaares ($z/h = -1$ bzw. $z/h = 1$) mit einer Abweichung ihres Maximums von fast 60 % überschätzt. Die primäre turbulente Scherspannung $\overline{u'v'}^+$, als eine der maßgeblichen Einflussgröße für die Impulserhaltungsgleichung in Strömungsrichtung, weist hingegen wie auch die Konfiguration mit einer asymmetrischen Beheizung mit einer relativen Abweichung von 8 % eine gute Übereinstimmung zu den Ergebnissen der Grobstruktursimulation auf. Dies erklärt auch die gute Reproduktion der Geschwindigkeitsverteilung \bar{u}/u_b durch das RANS-Modell.

Die dimensionslose Temperaturverteilung $\bar{\Theta}^+$ zeigt eine geringfügige Abweichung von 3,5 % im Zentrum des Rechteckkanals. Die Wölbung der Isothermen in Richtung der Eckbereiche wird zwar in ihrer Form korrekt wiedergegeben, die Größe der Isothermen jedoch unterschätzt. Dies lässt sich zurückführen auf den zu niedrig ermittelten Betrag der Sekundärströmung. Für die Kombination aus RSM-EBM und Carteciano-AHM wird in dieser Konfiguration eine zu geringe Menge kälteren Fluids entlang der Flächendiagonalen in die Eckbereiche transportiert. Die turbulente Wärmeflusskomponente $\overline{u'\theta'}^+$ wird deutlich unterschätzt. Die Abweichung des Minimums bzw. Maximums dieser Komponente zur LES beträgt hier fast 35 % bzw. 50 %. Auch dies ist auf den Korrelationsterm $\Pi_{i\theta}$ (vgl. Gl. (7.7)) und die Dissipationsrate $\varepsilon_{i\theta}$ (vgl. Gl. (7.8)) zurückzuführen, welche im Carteciano-AHM die Anisotropie der turbulenten Wärme Flüsse nur bedingt wiedergeben können. Die, die Temperaturverteilung im Wesentlichen prägende, turbulente Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'}^+$ wird mit einer Abweichung zur LES von 15 % ausreichend genau wiedergegeben. Die Komponente $\overline{w'\theta'}^+$ lässt sich hingegen nur mit einer Abweichung von 30 % bestimmen. Die Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}^+$ wird für diesen Fall, ähnlich zum Fall der asymmetrischen Beheizung, in der Höhe ihres Maximums bis zu 15 % überschätzt. Ihre Dissipationsrate $\varepsilon_{\theta\theta}^+$ hingegen wird erneut mit einer geringen relativen Abweichung von nur 8 % bestimmt.

Zusammenfassend lässt sich für diese Analyse feststellen, dass die Verteilungen der normierten Geschwindigkeit \bar{u}/u_b bzw. der Temperatur $\bar{\Theta}^+$ durch das Carteciano-AHM im Vergleich zur LES mit weniger als 5 % für beide Beheizungszustände gut wiedergegeben werden kann. Deutliche Defizite weist das Modell in der Vorhersage der Reynolds-Normalspannungen $\overline{v'v'}^+$ bzw. $\overline{w'w'}^+$ auf. Die Auswirkung dieser Überschätzung geht in die Produktionsterme des turbulenten Wärmevektors ein und führt zu Abweichungen von bis zu 50 % der axialen Komponente.

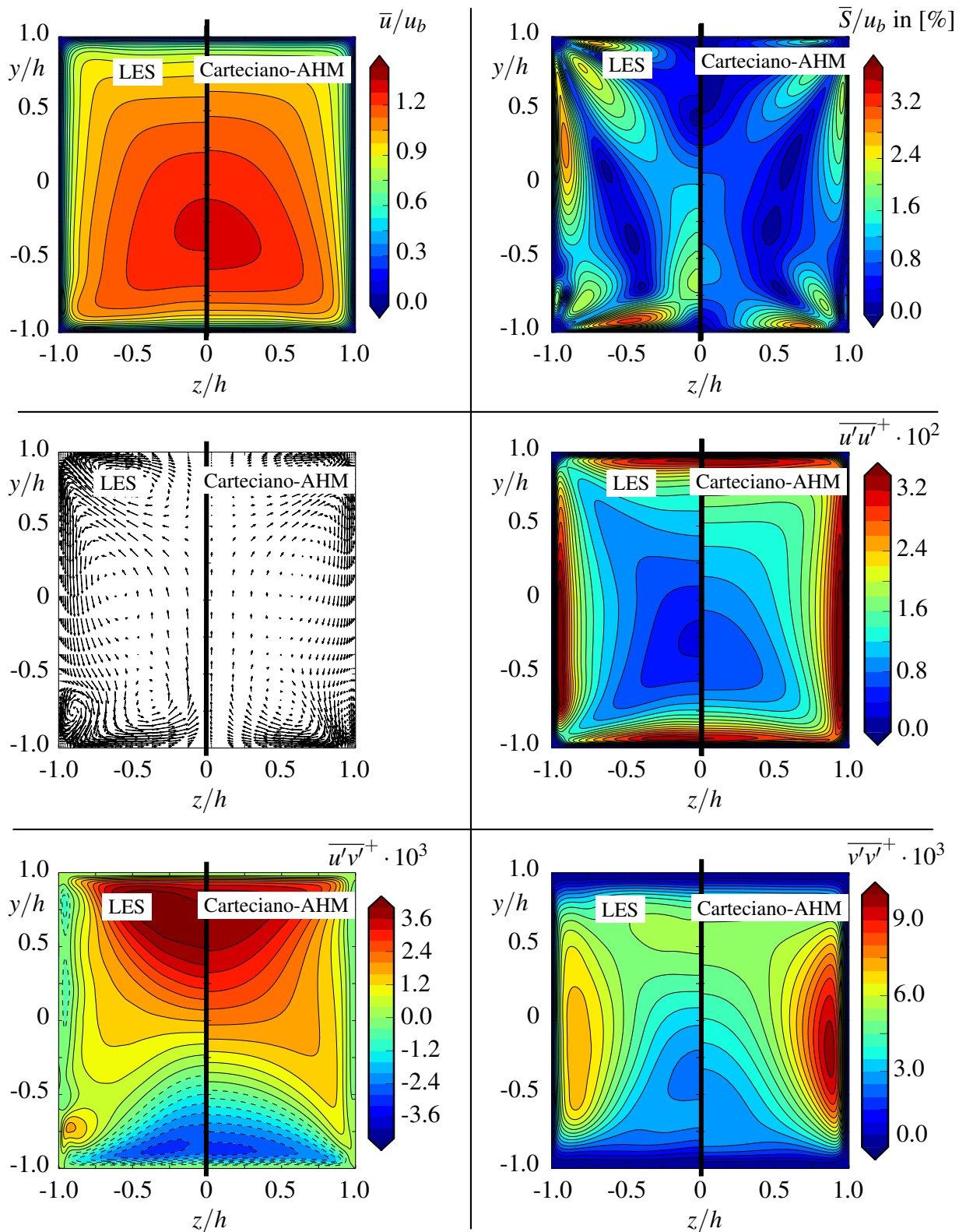


Abbildung 7.38.: Vergleich der Impulsfelddaten der LES (jeweils linke Kanalhalf) mit den Ergebnissen des Carteciano-AHM (jeweils rechte Kanalhalf) für einen asymmetrischen Beheizungs-
zustand der Rechteckkanalströmung bei $Re_b = 7000$, $Pr = 0,025$ und $Ri = 0,09$.

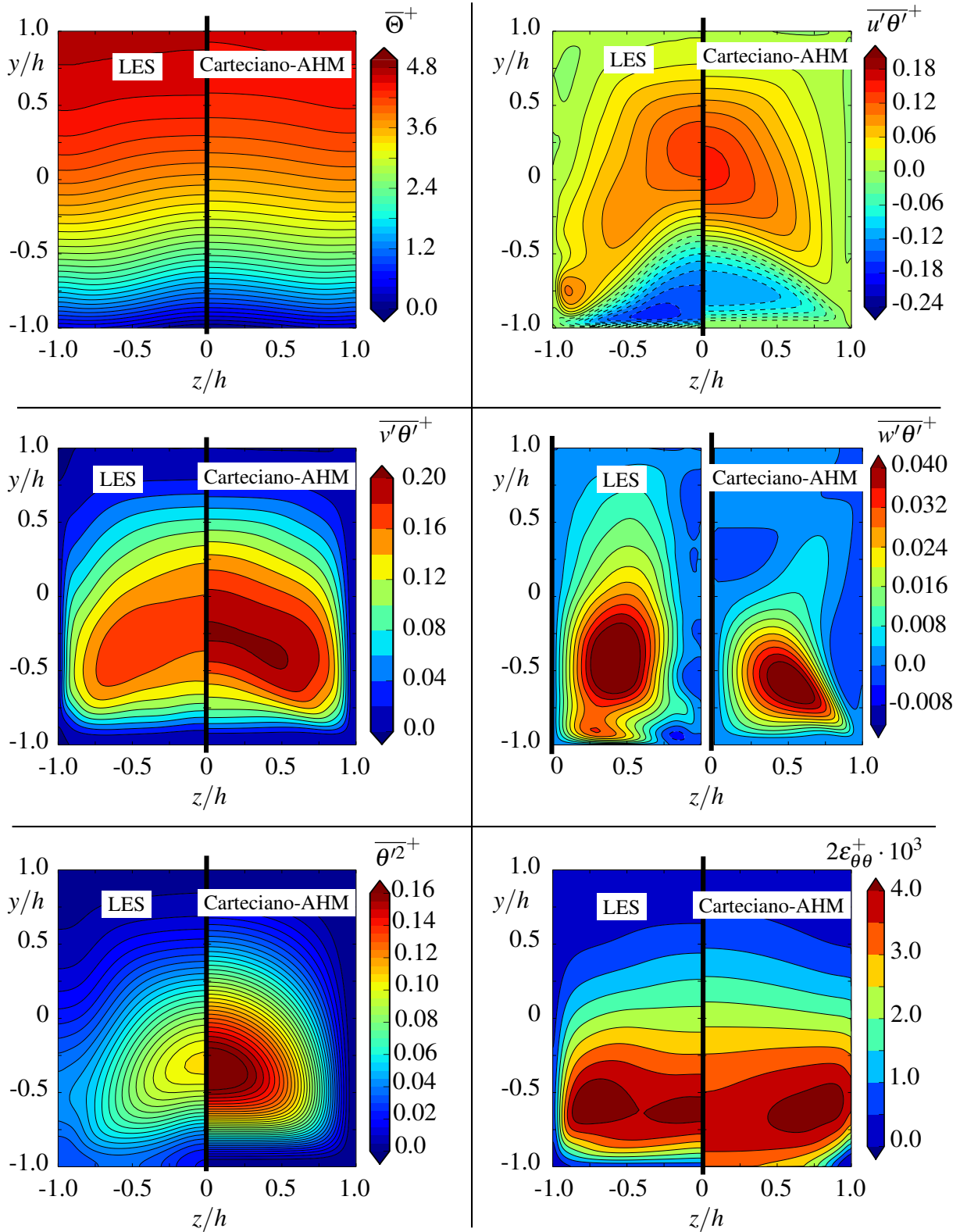


Abbildung 7.39.: Vergleich der thermischen Felddaten der LES (jeweils linke Kanalhalf) mit den Ergebnissen des Carteciano-AHM (jeweils rechte Kanalhalf) für einen asymmetrischen Beheizungs- zustand der Rechteckkanalströmung bei $Re_b = 7000$, $Pr = 0,025$ und $Ri = 0,09$.

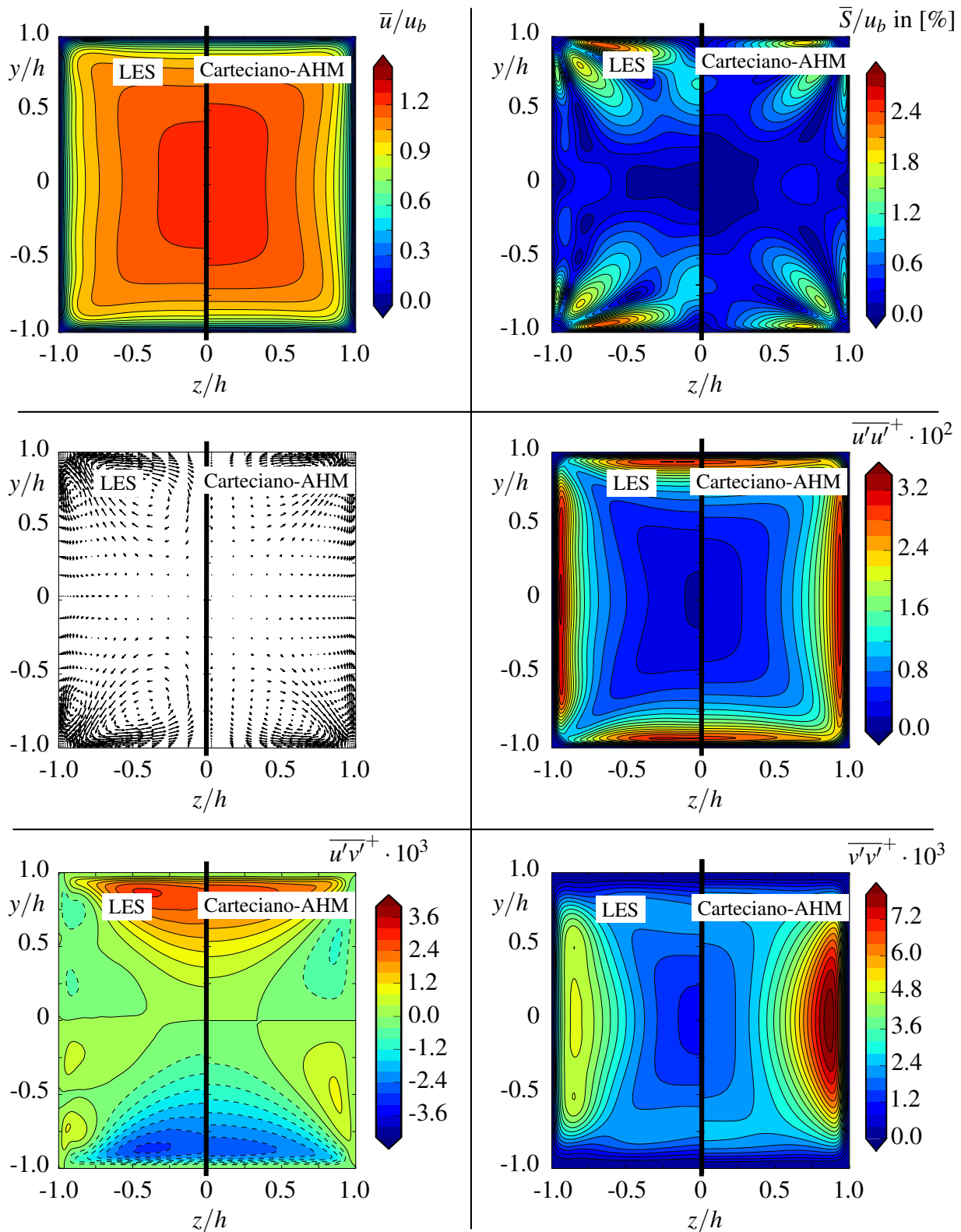


Abbildung 7.40.: Vergleich der Impulsfelddaten der LES (jeweils linke Kanalhalf) mit den Ergebnissen des Carteciano-AHM (jeweils rechte Kanalhalf) für einen symmetrischen Beheizungs Zustand der Rechteckkanalströmung bei $Re_b = 7000$, $Pr = 0,025$ und $Ri = 0,09$.

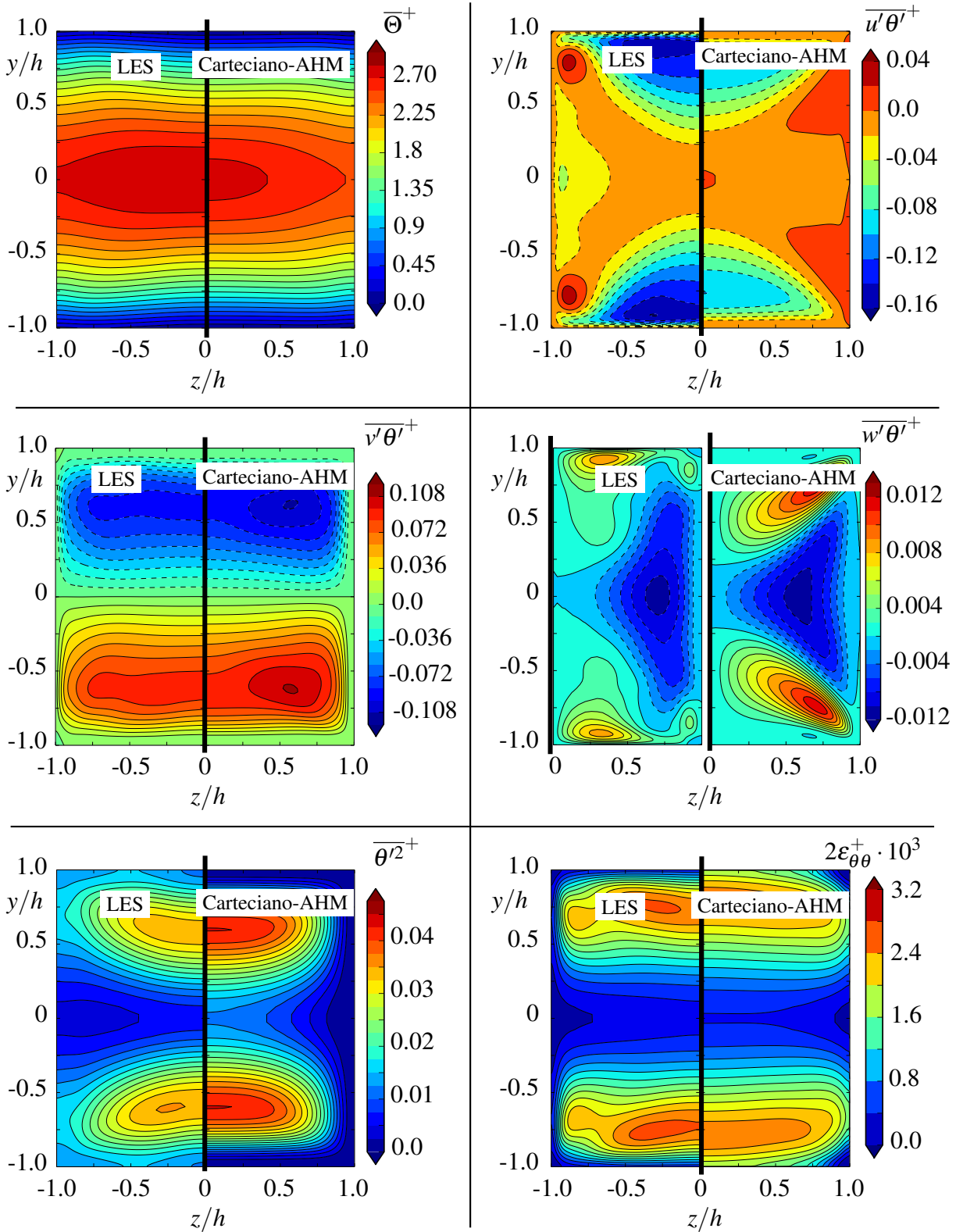


Abbildung 7.41.: Vergleich der thermischen Felddaten der LES (jeweils linke Kanalhalf) mit den Ergebnissen des Carteciano-AHM (jeweils rechte Kanalhalf) für einen symmetrischen Beheizungs- zustand der Rechteckkanalströmung bei $Re_b = 7000$, $Pr = 0,025$ und $Ri = 0,09$.

Eine Übersicht der ermittelten Nusselt-Zahlen Nu_{D_h} für das entwickelte Carteciano-AHM im Vergleich mit der LES ist in der Tabelle 7.9 dargestellt.

Typ	Beheizungszustand	Nu_{D_h}	rel. Abweichung in [%]
LES	asymm.	3,75	-
Carteciano-AHM	asymm.	3,76	0,27
LES	symm.	5,8	-
Carteciano-AHM	symm.	5,76	0,68

Tabelle 7.9.: Vergleich der berechneten Nusselt-Zahlen Nu_{D_h} für eine turbulente Rechteckkanalströmung unter Berücksichtigung von Auftriebseffekten ($Ri = 0,09$) bei $Re_b = 7000$, einer molekularen Prandtl-Zahl von $Pr = 0,025$ sowie zwei verschiedenen Beheizungszuständen.

Die relative Abweichung des entwickelten RANS-Ansatzes beträgt im Vergleich zur LES im Maximum weniger als 0,7% beim symmetrischen und sogar nur 0,3 % beim asymmetrischen Beheizungszustand. In zukünftigen Arbeiten sollte deshalb speziell auch der Einfluss einer Variation der Reynolds- bzw. Richardson-Zahl auf die gewählte Kombination aus RSM-EBM und Carteciano-AHM untersucht werden, um ihre allgemeine Eignung für Rechteckkanalströmungen bei verschiedenen Konvektionszuständen zu verifizieren.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass der RANS-Ansatz seine Eignung zur Vorhersage von integralen Größen wie z.B. der Temperaturverteilung bei niedrigen Prandtl-Zahlen nicht nur in erzwungener Konvektion, sondern auch im Fall der Mischkonvektion bestätigt. Das zugrunde liegende Turbulenzmodell (RSM-EBM) erlaubt es, das Phänomen der Sekundärströmung auch unter Einfluss des Auftriebs in seiner grundlegenden Form abzubilden. Die Größenordnung wird jedoch für beide Beheizungszustände unterschätzt. Ein wesentlicher Nachteil des RSM-EBM ist die schlechte Vorhersage der turbulenten Reynolds-Normalspannungskomponenten, die deutlich um bis zu 40 % überschätzt werden. Das entwickelte Carteciano-AHM zeigt, dass es prinzipiell auch für die Berechnung von komplexen, auftriebsbehafteten Strömungen einsetzbar ist. Für eine allgemeingültige Validierung ist ein Vergleich mit experimentellen Daten bei den verschiedenen Konvektionsarten erforderlich.

8 Zusammenfassung und Ausblick

8.1. Zusammenfassung

Flüssigmetallströmungen zeichnen sich in ihren physikalischen Eigenschaften durch eine hohe Wärmeleitfähigkeit und niedrige spezifische Wärmekapazität aus, die sie vor allem zur Kühlung von technischen Anlagen besonders interessant machen. Sie unterscheiden sich von konventionellen Fluiden vor allem durch ihre niedrige molekulare Prandtl-Zahl. Ihre Anwendung umfasst ein weites Gebiet der Energietechnik und erstreckt sich von flüssigmetallgekühlten Reaktorsystemen bis zu solarthermischen Anlagen. Für all diese Technologien ist das grundsätzliche Verständnis des thermischen Verhaltens der Strömung zwingend erforderlich.

Der Fokus der vorliegenden Arbeit liegt auf der Berechnung turbulenter Kanal- und Rechteckkanalströmungen bei unterschiedlichen Beheizungszuständen und Konvektionsarten. Im Gegensatz zur Plattenkanalströmung ist die turbulente Rechteckkanalströmung durch das Auftreten einer turbulenzinduzierten Sekundärströmung charakterisiert. Um den Einfluss der Prandtl-Zahl bei der numerischen Berechnung turbulenter Strömungen mit Wärmeübergang für diese beiden Konfigurationen korrekt abzubilden, werden Erweiterungen existierender Schließungsansätze der Energieerhaltungsgleichungen vorgeschlagen.

Um die Komplexität der Untersuchung zunächst auf ein eindimensionales Strömungsproblem zu begrenzen, werden verschiedene Schließungsansätze aus der Literatur in turbulenten Plattenkanalströmungen unter Einfluss der Reynolds- und Prandtl-Zahl sowie unterschiedlichen Beheizungszuständen untersucht. Eine Analyse und Bewertung der einzelnen Modellen erfolgt hier mit Hilfe von verfügbaren DNS-Daten, aber auch Ergebnissen eigener Grobstruktursimulationen.

Anhand dieser Analyse werden die am besten geeigneten Wärmeflussmodelle ausgewählt und hinsichtlich der Anforderungen einer turbulenten Rechteckkanalströmung geeignet angepasst bzw. erweitert. Entscheidend sind hier die korrekte Modellierung des Druck-Temperatur-Korrelations- und Dissipationsterms, die jeweils beide den Einfluss der molekularen Prandtl-Zahl abbilden müssen. Sie werden daher in dieser Untersuchung zusammengefasst analysiert. Darüber hinaus wird

eine algebraische Reduktion für Ansätze zweiter Ordnung vorgeschlagen und die Gültigkeit der verwendeten Hypothesen mit Hilfe von DNS-Daten verifiziert. Die Reduktion erlaubt es die nicht-linearen und diffusiven Terme der Transportgleichung des turbulenten Wärmeflussvektors zu eliminieren und diese in algebraische Ausdrücken zu überführen. Aus den erweiterten Modellansätzen werden so zwei neue algebraische Modelle, das Carteciano-AHM und das SK-AHM, abgeleitet. Beide werden mit einem Reynolds-Spannungsmodell kombiniert, dessen Eignung separat in turbulenten Platten- und Rechteckkanalströmungen geprüft wird.

In symmetrisch beheizten, turbulenten Plattenkanalströmungen zeigt sich bei Analyse des normierten Temperaturverlaufs, dass die beiden algebraischen Modelle eine sehr gute Übereinstimmung zu den Vergleichsdaten aufweisen. Das Temperaturprofil kann für beide Modelle bei niedrigen molekularen Prandtl-Zahlen ($Pr = 0,025$) mit einer maximalen Abweichung zur DNS von weniger als 1 % ermittelt werden. Für höhere Prandtl-Zahlen ($Pr = 0,71$) beträgt der Unterschied zu den DNS-Daten weniger als 2 %. Der Einfluss der Prandtl-Zahl wird somit korrekt abgebildet.

Bei asymmetrischer Beheizung der Plattenkanalströmung sind keine Vergleichsdaten in der Literatur verfügbar, so dass für eine Validierung der algebraischen Modelle zunächst Grobstruktursimulationen bei drei verschiedenen Prandtl-Zahlen durchgeführt werden. Das Carteciano-AHM zeigt für diese Untersuchung insgesamt die beste Übereinstimmung mit einer maximalen Abweichung des Temperaturprofils über alle Konfigurationen von 7 % bei $Pr = 0,025$. Das SK-AHM hingegen überschätzt speziell für $Pr = 0,025$ das Maximum des Temperaturprofils mit 13 %.

Für turbulente Rechteckkanalströmungen existieren selbst in erzwungener Konvektion nur wenige experimentelle Vergleichsdaten, so dass auch für diesen Fall bei verschiedenen Prandtl-Zahlen und Beheizungszuständen eigene Ergebnisse einer LES für eine Verifizierung der algebraischen Modelle genutzt werden. Das Carteciano-AHM weist auch hier für verschiedene Prandtl-Zahlen und Beheizungszustände eine bessere Übereinstimmung zur LES auf. Das Maximum der Temperaturverteilung wird über alle untersuchten Konfigurationen mit einer relativen Abweichung von weniger als 8 % ($Pr = 0,025$) bestimmt. Diese gute Übereinstimmung zeigt sich auch für die ermittelten Nusselt-Zahlen, die eine Abweichung von weniger als 6 % zur LES aufweisen. Ausgehend von diesen Ergebnissen werden zwei Vorschläge für empirische Korrelationen der Nusselt-Zahl in asymmetrisch und symmetrisch beheizten Rechteckkanalströmungen bei $Pr = 0,025$ abgeleitet.

In einem letzten Schritt wird aufgrund dieser Ergebnisse das Carteciano-AHM auf auftriebsbehaftete Rechteckkanalströmungen bei $Pr = 0,025$ angewendet. Die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung werden für beide untersuchte Beheizungszustände mit einer relativen Abweichung des Maximums zur durchgeführten LES von weniger als 3,5 % bestimmt. Die Vorzüge des entwickelten Carteciano-AHM zeigen sich insbesondere beim Vergleich der ermittelten Nusselt-Zahlen. Diese zeigen eine Abweichung von weniger als 0,7 %. Damit ist nachgewiesen, dass das Carteciano-AHM auch für die Berechnung von auftriebsbehafteten Rechteckkanalströmungen und somit der Analyse von Transitionsvorgängen Potenzial besitzt.

8.2. Ausblick

Die vorliegende Arbeit hat sich auf die Entwicklung eines turbulenten Wärmeflussmodells für turbulente Kanalströmungen niedriger Reynolds- und molekularer Prandtl-Zahl beschränkt. Ein Punkt, den zukünftige Arbeiten daher berücksichtigen sollten, betrifft die weitere Validierung der entwickelten Modelle in komplexeren Geometrien, wie z.B. für Stabbündel- oder Ringspaltströmungen.

Dies beinhaltet auch eine Erweiterung des thermischen Zweigleichungsmodells der Temperaturvarianz und deren Dissipationsrate, um eine Variation der Reynolds- und Prandtl-Zahl der Strömung noch besser abbilden zu können. Darüber hinaus könnte bei künftigen Erweiterungen der Einfluss der Randbedingungen für die Temperaturvarianz und ihre Dissipationsrate unmittelbar an der Wand untersucht werden.

Anstelle eines Reynolds-Spannungsmodells können zur weiteren Effizienzsteigerung des Gesamtmodells alternativ nichtlineare Wirbelviskositätsmodellen oder explizit algebraische Reynolds-Spannungsmodelle eingesetzt werden, die für die Berechnung von turbulenten Rechteckkanalströmungen verifiziert werden müssen.

Mit Hilfe experimenteller Daten sollten die entwickelten turbulenten Wärmeflussmodelle in Zukunft auch hinsichtlich ihrer Fähigkeit bei der Vorhersage von Transitionsvorgängen bzw. Transitionsgrenzen zwischen erzwungener, gemischter und natürlicher Konvektion in Rechteckkanalströmungen überprüft werden.

Um den Einfluss der Wärmeleitung in den festen Wänden in Zukunft berücksichtigen zu können, sollte eine Fluid-Struktur-Interaktion durchgeführt werden. Ein Beispiel einer Fluid-Struktur-Interaktion kann dem Anhang (vgl. Anhang A.4.5) entnommen werden, die als erste Abschätzung für das Potenzial dieser Methode im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurde. Sie sollte in Zukunft noch erweitert und hinsichtlich ihrer numerischen Stabilität verbessert werden.

A Anhang

A.1. Numerische Verfahren zur Berechnung von Strömungen

In diesem Kapitel werden die wesentlichen Grundlagen der numerischen Methoden erläutert. Für eine umfassende Diskussion der einzelnen Verfahren wird auf die Literatur verwiesen.

A.1.1. Finite-Volumen-Methode (FVM)

Die Finite-Volumen-Methode (FVM) basiert auf der integralen Formulierung der Erhaltung- und Transportgleichungen. Das Rechengebiet wird im Rahmen dieser Methode in eine endliche Anzahl von Kontrollvolumina (KV) aufgeteilt, in denen jeweils die Erhaltungsgleichungen gelöst werden. Das Kontrollvolumen besteht aus einem Knotenpunkt in der Zellmitte sowie Begrenzungsflächen Ω_k zu den jeweiligen Nachbarelementen bzw. zu den Randflächen des Rechengebietes.

Ein zentrales Element der FVM ist die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf die integralen Formulierung der Erhaltungsgleichungen:

$$\int_V \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) dV = \oint_{\Omega} \phi n_j d\Omega, \quad (\text{A.1})$$

wobei die Größen V dem Volumen des Kontrollvolumens, Ω seiner gesamten Oberfläche, ϕ einem Tensor beliebiger Ordnung und \vec{n} dem nach außen gerichteten Normalenvektor der Oberfläche entsprechen. Die Folge der Anwendung des Gaußschen Integralsatzes ist die Reduzierung der Ordnung des Differenzialquotienten und somit der Umwandlung eines Volumenintegrals in ein Integral über die gesamte Oberfläche des Kontrollvolumens. Dies entspricht der ursprünglichen Vorstellung der Erhaltungsgleichungen, in der die zeitliche Änderung einer Erhaltungsgröße in einem Kontrollvolumen die Folge von Zu- und Abflüssen über seine Randflächen ist. Man bezeichnet die FVM demnach auch als konservative Methode.

Die Integration über die Oberfläche Ω des Kontrollvolumens lässt sich auch als Summe über die Teilflächen des Kontrollvolumens Ω_f ermitteln:

$$\oint_{\Omega} \phi n_j d\Omega = \sum_f \int_{\Omega_f} \phi_f n_{j,f} d\Omega_f. \quad (\text{A.2})$$

wobei die Notation $(\)_f$ die Werte der Erhaltungs- und Transportgrößen auf der Randfläche f des Kontrollvolumens kennzeichnet.

Für ein kartesisches Kontrollvolumen ergeben sich im zweidimensionalen Fall vier und in dreidimensionalen Fall sechs Randflächen des Kontrollvolumens. Am Beispiel der Impulserhaltungsgleichung erfolgt eine Reduzierung der Ordnung des Differentialquotientens für den konvektiven,

den diffusiven und den Druckgradienten-Term. Die Werte der Flüsse über die Randflächen des Kontrollvolumens müssen im Rahmen der Diskretisierung durch Interpolation der Werte der Erhaltungsgrößen in der Zellmitte bestimmt werden. Für instationäre Strömung ist darüber hinaus die Wahl einer geeigneten zeitlichen Diskretisierung erforderlich.

A.1.2. Diskretisierung

A.1.2.1. Zeitliche Diskretisierung

Die verwendete zeitliche Diskretisierung entspricht einem Rückwärtsverfahren zweiter Ordnung (eng.: backward scheme) [204]. Die Herleitung dieses Verfahrens basiert auf einer Taylorreihen-Entwicklung. Die zeitliche Entwicklung einer Variable ϕ beliebiger Ordnung von einem aktuellen Zeitschritt n zu einem nachfolgenden Zeitschritt $n + 1$ ergibt sich zu:

$$\phi(t) = \phi^n = \phi^{n+1} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \Delta t^2 + O(\Delta t^3). \quad (\text{A.3})$$

Für die zeitliche Ableitung erhält man durch einfaches Umstellen der obigen Gleichung:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \Delta t + O(\Delta t^2). \quad (\text{A.4})$$

Diese Formulierung der zeitlichen Ableitung weist eine Genauigkeit erster Ordnung auf, da der Abbruchfehler proportional zur Zeitschrittweite Δt ist (vgl. zweiter Term der rechten Seite). Um ein zeitliches Diskretisierungsverfahren zweiter Ordnung zu erhalten, werden daher drei Zeitebenen $n + 1$, n und $n - 1$ eingeführt.

Eine zusätzliche Taylorreihen-Entwicklung für einen weiter in der Vergangenheit zurückliegenden Zeitpunkt $n - 1$ führt auf:

$$\phi(t) = \phi^{n-1} = \phi^{n+1} - 2 \frac{\partial \phi}{\partial t} \Delta t + 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \Delta t^2 + O(\Delta t^3). \quad (\text{A.5})$$

Bei Kombination der Gl. (A.3) und (A.5) kann durch Umstellen das Rückwärtsverfahren zweiter Ordnung für eine allgemeine Erhaltungsgröße $(\rho \phi)$ abgeleitet werden [204]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \phi dV = \frac{3(\rho \phi V)^{(n+1)} + (\rho \phi V)^{(n)} + (\rho \phi V)^{(n-1)}}{2\Delta t} \quad (\text{A.6})$$

Ein wesentlicher Nachteil dieses impliziten Verfahrens ist der höhere Speicherplatzbedarf der Erhaltungsgrößen in drei verschiedenen Zeitebenen im Vergleich zu Verfahren erster Ordnung.

Eine umfassende Diskussion und Analyse verschiedener Verfahren ist in [98], [87] oder [204] zu finden.

A.1.2.2. Räumliche Diskretisierung

Zusätzlich zur zeitlichen Diskretisierung ist eine geeignete räumliche Diskretisierungsverfahren zu wählen. Diese können in beliebiger Ordnung für Konvektions-, Diffusions- und Gradiententerme separat gewählt werden. Unter Anwendung des Gaußschen Integralsatzes lassen sich die Konvektionsterme der Transportgleichungen eines Tensors beliebiger Ordnung ϕ wie folgt formulieren:

$$\int_V \frac{\partial (\rho u_j \phi)}{\partial x_j} dV = \oint_{\Omega} (\rho u_j \phi) n_j d\Omega = \sum_f (\rho u_j \phi) n_{j,f} \Omega_f. \quad (\text{A.7})$$

Der erste wesentliche Schritt der Diskretisierung basiert auf der Approximation der Oberflächenintegrale (vgl. zweiter Term der Gl. (A.7)). Unter Verwendung der Mittelpunkregel, die ein Verfahren zweiter Ordnung darstellt, werden Randflächenwerte der Variablen allein unter der Verwendung der Werte in den benachbarten Zellmittelpunkten bestimmt.

Es sei angenommen, dass eine beliebige Begrenzungsfläche Ω_f zwei Kontrollvolumen, deren Zellmittelpunkte mit N und P bezeichnet werden sollen, im Inneren des Rechengebietes voneinander trennt. Die Variablen bzw. Erhaltungsgrößen unmittelbar auf der Trennfläche Ω_f der Kontrollvolumen müssen durch eine geeignete Interpolationsvorschrift bestimmt werden. Ein solches Verfahren zweiter Ordnung ist die lineare Interpolation:

$$\phi_f = f_\phi \phi_P + (1 - f_\phi) \phi_N. \quad (\text{A.8})$$

Die Größe f_ϕ repräsentiert einen linearen Interpolationsfaktor, die sich bei nicht äquidistanten Gittern über das Verhältnis des Abstandes des Zellmittelpunktes P zur Begrenzungsfläche Ω_f und der Entfernung der Zellmittelpunkte voneinander bzw. bestimmen lässt:

$$f_\phi = \frac{(x_f - x_P)}{(x_N - x_P)}. \quad (\text{A.9})$$

Bei hinreichend kleinen Streckungsfaktoren der räumlichen Diskretisierungsschritten in jeder Raumrichtung kann der Interpolationsfaktor auch entfallen. Für die Gradienten einer beliebigen, skalaren Variablen ϕ ergibt sich durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes und der Mittelpunkregel zur Approximation des Oberflächenintegrals:

$$\int_V \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) dV = \oint_{\Omega} \phi n_j d\Omega = \sum_f \phi_f n_{j,f} \Omega_f. \quad (\text{A.10})$$

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) dV = \oint_{\Omega} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) n_j d\Omega = \sum_f \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right)_f n_{j,f} d\Omega_f. \quad (\text{A.11})$$

wobei die Größe Γ dem jeweiligen Diffusionskoeffizienten der Transportgröße ϕ entspricht.

A.1.3. Geschwindigkeits-Druck-Korrektur

Für eine Strömung zeitlich und räumlich konstanter Dichte vereinfacht sich die Massenerhaltungsgleichung (vgl. Gl. (2.2)) erheblich. Sie stellt in ihrer inkompressiblen Formulierung eine „kinematische Zwangsbedingung“ für das Geschwindigkeitsfeld dar [87]. Für inkompressible Medien entfällt die Kopplung der Dichte und des Druckfeldes über eine Zustandsgleichung. Da der Druckverteilung bzw. dem Druckgradient im Strömungsgebiet eine entscheidende Bedeutung in den Impulserhaltungsgleichungen zukommt, sind geeignete Lösungsstrategien erforderlich.

Eine Vielzahl von Verfahren basiert auf einer schrittweisen Anpassung des Druckfeldes mit dem Ziel, die kinematische Bedingung eines divergenzfreien Geschwindigkeitsfeldes zu erfüllen. Das jeweilige Niveau der Druckverteilung ist hierbei für die inkompressible Formulierung der Erhaltungsgleichungen unerheblich, da ausschließlich der räumliche Änderungen und somit der Druckgradient berücksichtigt wird. Eine Gleichung zur Bestimmung des Druckes kann durch Kombination der Massen- und Impulserhaltungsgleichung abgeleitet werden. Durch Anwendung des Divergenz-Operators auf die Impulserhaltungsgleichung ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial (\rho u_i u_j)}{\partial x_j} \right). \quad (\text{A.12})$$

Diese sogenannte Poisson-Gleichung des Druckes kann unter Anwendung des Laplace-Operators auf der linken Seite der Gleichung, sowie einem Produkt eines Divergenz-Operators und eines Gradienten auf der rechten Seite formuliert werden. In der numerischen Diskretisierung ist diese explizite Trennung der Operatoren für die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes von Bedeutung [87]. Die rechte Seite der Gl. (A.12) stellt einen Impulsfluss $(\rho u_j u_i)_f$ über die Randflächen Ω_f eines betrachteten Kontrollvolumens dar.

Hier werden zwei Verfahren der implizitem Druck-Geschwindigkeits-Korrekturen auf Basis des SIMPLE⁵⁷ [205] - und PISO⁵⁸-Algorithmus [206] verwendet.

Statt das Gleichungssystem in einer gekoppelten oder sequenziellen Form iterativ zu lösen, wird beim PISO-Algorithmus ein impliziter Prädiktor-Schritt und mehrere explizite Korrekturschritte durchgeführt. Eine diskretisierte Form der Impulserhaltungsgleichung soll an dieser Stelle in symbolischer Notation eingeführt werden:

$$A_p u_i = H_i - \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right), \quad (\text{A.13})$$

wobei:

$$H_i = - \sum_N a_N u_{i,N} + r_i. \quad (\text{A.14})$$

⁵⁷eng.: SIMPLE - Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations

⁵⁸eng.: PISO - Pressure-Implicit with Splitting of Operators

Die Größen A_p und a_N stellen jeweils eine Koeffizienten-Matrix des betrachteten Elements P und seiner Nachbarelemente N dar. Der Vektor H_i ist eine Funktion der Geschwindigkeit (konvektive und diffusive Anteile) und beinhaltet neben der Koeffizienten-Matrix der Nachbarelemente auch alle Quellterme r_i , wie z.B. den Auftriebsterm, abseits des Druckes [204]. Unter Verwendung dieser Notation kann auch die Poisson-Gleichung (vgl. Gl. (A.12)) in einer analogen symbolischen Notation überführt werden:

$$\sum_f \left[\left(\frac{1}{A_p} \right)_f \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right)_f \right] = \sum_f \left(\frac{H_i(u_i)}{A_p} \right)_f. \quad (\text{A.15})$$

Gleichung A.13 kann zur Bestimmung der Geschwindigkeit u_i folgendermaßen umgestellt werden:

$$u_i = \left(\frac{H_i}{A_p} \right) - \left(\frac{1}{A_p} \right) \left(\frac{\partial p}{\partial x_i} \right). \quad (\text{A.16})$$

Der wesentliche Ablauf im Rahmen des PISO-Algorithmus lautet stichpunktartig:

1. Prädiktor: Ein Geschwindigkeitsfeld u_i^* wird mit Hilfe der Gleichung A.13 unter Verwendung des Druckes der vorangegangenen Iteration p^n bzw. aus einer initialen Abschätzung p^0 berechnet. Dies stellt eine erste Abschätzung des Geschwindigkeitsfeldes dar, aber erfüllt nicht die kinematische Bedingung eines divergenzfreien Geschwindigkeitsfeldes.
2. Erster Korrektor-Schritt: Mit Hilfe des abgeschätzten Geschwindigkeitsfeldes u_i^* kann der Vektor H_i^* formuliert und auf die Zellfläche f , vgl. Gl. (A.15), interpoliert werden. Mit Hilfe der Poisson-Gleichung kann nun ein neues Druckfeld p^* berechnet werden. Dieses kann wiederum in Gleichung A.16 eingesetzt werden um durch einen expliziten Korrekturschritt ein korrigiertes Geschwindigkeitsfeld u_i^{**} zu bestimmen.
3. Zweiter Korrektor-Schritt: Analog zum ersten Korrektor-Schritt kann erneut die Poisson-Gleichung für einen Druck p^{**} gelöst werden und eine weitere explizite Geschwindigkeitskorrektur u_i^{***} durchgeführt werden.

Die Anzahl der Korrektur-Schritte kann beliebig unter der Bedingung ein vorbestimmtes Kriterium zu erfüllen erhöht werden [204]. Für die Korrektur des Vektors H_i^* ist entscheidend, dass ausschließlich die Geschwindigkeitskomponente aktualisiert wird. Die Koeffizienten-Matrix bleibt über den gesamten Algorithmus konstant und wird erst im nachfolgenden Prädiktor-Schritt neu bestimmt. Der PISO-Algorithmus kann dabei mit beliebigen zeitlichen Diskretisierungsverfahren kombiniert werden [87].

Der SIMPLE-Algorithmus von Patankar & Spalding [205] basiert im Unterschied zum PISO-Algorithmus auf folgenden wesentlichen Schritten:

1. Prädiktor: Das approximierten Geschwindigkeitsfeldes u_i^* wird mit dem Gradienten des Druckes der vorangegangenen Iteration p^n bzw. aus einer initialen Abschätzung p^0 berechnet. Das zu lösende Gleichungssystem wird unter Verwendung einer impliziten Unter-Relaxation⁵⁹ bestimmt.
2. Korrektor-Schritt: Ein aktualisiertes Druckfeld p^* wird durch Lösen der Poisson-Gleichung des Druckes (vgl. Gl. (A.12)) bestimmt. Anschließend erfolgt eine explizite Korrektur des Geschwindigkeitsfeldes mit Hilfe des aktualisierten Druckgradienten (vgl. Gl. (A.16)). Der Druck wird ebenfalls unter-relaxiert.

A.1.4. Berechnung voll entwickelter Strömungen

Als vollständig entwickelte Strömung wird ein Strömungszustand bezeichnet, in dem sämtliche betrachtete Strömungsgrößen- und profile sich in die jeweilige Strömungsrichtung nicht mehr ändern. Eine Untersuchung dieses Strömungszustandes weist im Gegensatz zu entwickelnden Strömungen wesentliche Vorteile hinsichtlich des erforderlichen Modellierungsaufwands der numerischen Strömungssimulation auf.

A.1.4.1. Hydraulisch eingelaufene Strömungen

Im Folgenden soll als eine stationäre, laminare Strömung zwischen unendlich ausgedehnten, parallelen Platten (vgl. Abb. 4.6) als Testfall dienen. Das Koordinatensystem sei in der Mitte des Kanals definiert. Bei Annahme einer voll eingelaufenen Strömung entfällt für diesen Fall die linke Seite (Zeitableitung und Konvektionsterm) der Impulserhaltungsgleichungen ($\partial/\partial x = 0$). Darüber hinaus soll angenommen werden, dass die Strömung in z -Richtung (Querrichtung) homogen bzw. periodisch ist ($\partial/\partial z = 0$).

Die Massenerhaltungs- bzw. Kontinuitätsgleichung lauten damit:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \cancel{\frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\partial v}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial w}{\partial z}} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (\text{A.17})$$

Aufgrund der Haftbedingung der Strömung an der Wand ($u_i = 0$) gilt für die wandnormale Geschwindigkeitskomponente $v = 0$. Die Impulserhaltungsgleichung kann ebenfalls vereinfacht werden:

$$\frac{Du_i}{Dt} = \cancel{\frac{\partial u_i}{\partial t}} + u_j \cancel{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = - \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial y^2}. \quad (\text{A.18})$$

⁵⁹Relaxation bzw. Unter-Relaxation dient allgemein der Stabilisierung des Berechnungsverfahrens durch limitierte Aktualisierung der Lösung zum neuen Iterationsschritt.

Das analytische Modell reduziert sich auf ein eindimensionales Problem, das in Abhängigkeit der wandnormalen Richtung y zu lösen ist. Das vollständig entwickelte Geschwindigkeitsprofil resultiert gemäß Gleichung A.18 aus Gleichgewicht zwischen einem von außen aufgeprägten Druckgradienten und viskosen Kräften der Strömung.

Eine analytische Lösung des Geschwindigkeitsprofils kann unter Berücksichtigung der Randbedingungen (z.B. der Haftbedingung) durch Integration aus den Impulserhaltungsgleichungen abgeleitet werden:

$$u(y) = \frac{3}{2}u_b \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right), \quad (\text{A.19})$$

wobei die Größen u_b und δ der über den Querschnitt gemittelte Geschwindigkeit und dem halben Plattenabstand entsprechen. Das resultierende, dimensionslose Geschwindigkeitsprofil einer Strömung ist im laminaren Zustand unabhängig von der Viskosität ν und der Reynolds-Zahl Re_b .

Der erforderliche Aufwand der numerischen Simulation voll entwickelter Strömungen kann für Plattenkanalströmungen durch den Einsatz periodischer Randbedingungen in Strömungs- und Querrichtung (x - bzw. z -Richtung) erheblich reduziert werden. Es wird im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich ein solch periodischer Ausschnitt des Kanals betrachtet und es entfällt die vollständige räumliche Diskretisierung der Einlaufstrecke der Strömung. Die Periodizität umfasst eine unmittelbare Kopplung zweier Randflächen des Rechengebietes, z.B. der Eintritts- und Austrittsfläche. Für einen Tensor beliebiger Ordnung ϕ kann die Kopplung zweier räumlich getrennter, periodische Flächen Γ_i und Γ_o wie folgt definiert werden:

$$\phi(x_i, t)|_{\Gamma_i} = \phi(x_i, t)|_{\Gamma_o}. \quad (\text{A.20})$$

Der Druck oder die Temperatur sind in dieser Betrachtung keine periodischen Größen mehr. Die Verwendung periodischer Randbedingungen verlangt für das numerische Modell eine Modifikation der wesentlichen Erhaltungsgleichung.

Das in den Impulserhaltungsgleichungen eingesetzte Druckfeld $p(x_i, t)$ kann in einen periodischen Anteil $\tilde{p}(y)$ und einen linear veränderlichen Anteil aufgeteilt werden (vgl. Abbildung A.2):

$$p(x, y) = x \left(\frac{dp}{dx}\right) + \tilde{p}(y) = \underbrace{\left(\frac{x}{L_x}\right) \Delta p}_{\text{linearer Anteil}} + \underbrace{\tilde{p}(y)}_{\text{periodischer Anteil}}. \quad (\text{A.21})$$

Die an dieser Stelle eingeführte Notation $(\tilde{})$ dient der Kennzeichnung des periodischen Anteils der Profils und ist in diesem Zusammenhang nicht zu verwechseln mit der Notation der räumlichen Filter-Operation der Grobstruktursimulation (vgl. Kapitel 4.2.1). Ausschließlich das linear veränderliche Druckprofil berücksichtigt den Effekt der viskosen bzw. reibungsbehafteten Kräfte der Strömung und kann in einen direkten Zusammenhang zur auftretenden Wandschubspannung

gesetzt werden. In laminaren Kanalströmungen ist der Druck keine Funktion der wandnormalen Richtung, so dass $\bar{p} = 0$ gilt. Ein formaler Zusammenhang zwischen der Wandschubspannung und des Druckgradienten für eine turbulente Strömung durch unendlich große, parallele Platten kann wie folgt angegeben werden [102]:

$$u_\tau = \left(\frac{\tau_w}{\rho} \right)^{(1/2)} = \left[- \left(\frac{\delta}{\rho} \right) \left(\frac{dp}{dx} \right) \right]^{(1/2)}. \quad (\text{A.22})$$

Beim Einsatz periodischer Randbedingungen entfällt die Vorgabe einer extern angreifenden Kraft bzw. eines von außen aufgeprägten Druckgradienten und es ist die Einführung eines zusätzlichen Quellterms f_i in die zu lösenden Impulserhaltungsgleichungen erforderlich. Dieser dient dem Ausgleich viskoser Kräfte in der Strömung und entspricht nach Gleichung A.20 dem treibenden linearen Druckgradienten in Strömungsrichtung. Der Quellterm f_i kann in seiner Größe so bestimmt werden, dass die Einhaltung eines konstanten Volumenstroms im numerischen Modell gewährleistet wird⁶⁰.

Die Abbildung A.1 zeigt die beiden verwendeten Lösungsverfahren auf Basis des SIMPLE- und PISO-Algorithmus. Beide stimmen mit der analytischen Lösung einer laminaren Kanalströmung (vgl. Gl. (A.19)) überein.

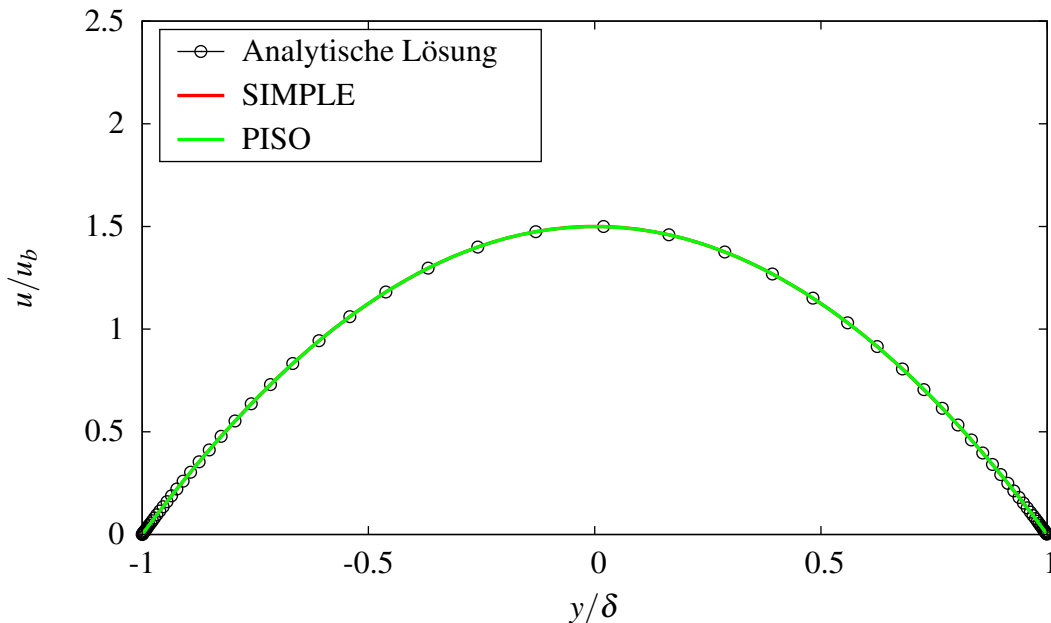


Abbildung A.1.: Vergleich der Geschwindigkeitsprofile in Strömungsrichtung einer laminaren Kanalströmung (vgl. Abb. 4.6) unter Verwendung des SIMPLE- und PISO-Algorithmus mit der analytischen Lösung (vgl. Gl. (A.19)).

⁶⁰Zu diesem Zweck wurde im Rahmen dieser Arbeit wurde die in OpenFOAM® [142] bereits implementierte Bibliothek *fvOptions* verwendet.

Eine wichtige Anmerkung ist, dass sich die vorgestellte Methodik ohne weitere Modifikation auch zur Berechnung voll entwickelter Strömungen in unterschiedlichsten Querschnittsformen eignet, z.B. einer Ringspalt- oder Rechteckkanalströmung, sowie allgemein zur Berechnung turbulenter und transienter Strömungen übertragen lässt.

A.1.4.2. Thermisch eingelaufene Strömungen

Auch Strömungen mit Wärmeübergang können einen voll entwickelten thermisch Zustand erreichen. Dieser ist nicht auf den ersten Blick ersichtlich. Unter zeitlich und räumlich konstanter Beheizung ($\dot{q} = \text{konst.}$) entlang der Wandflächen erfährt das Fluid in Strömungsrichtung einen kontinuierlicher Energieeintrag, der sich in einer zunehmenden Temperaturerhöhung des durchströmenden Mediums äußert.

In einer vollständig hydraulisch und thermisch eingelaufenen Strömung kann durch eine einfache Energiebilanz nachgewiesen werden, dass das Niveau der mittleren Temperatur unter konstanter Beheizung linear ansteigt (vgl. Abbildung A.2). Das vollständige Temperaturprofil $T(x, y)$ einer laminaren, stationären Kanalströmung kann demnach in Analogie zum Druckfeld ebenfalls in einen linear ansteigenden und einen periodischen Anteil aufgeteilt werden:

$$T(x, y) = x \left(\frac{dT}{dx} \right) + \tilde{T}(y) = \underbrace{x \left(\frac{\Delta T}{L_x} \right)}_{\text{Linearer Anteil}} + \underbrace{\tilde{T}(y)}_{\text{Periodischer Anteil}}, \quad (\text{A.23})$$

wobei die Größe L_x die Länge des zu berechnenden Strömungsgebietes in x -Richtung darstellt.

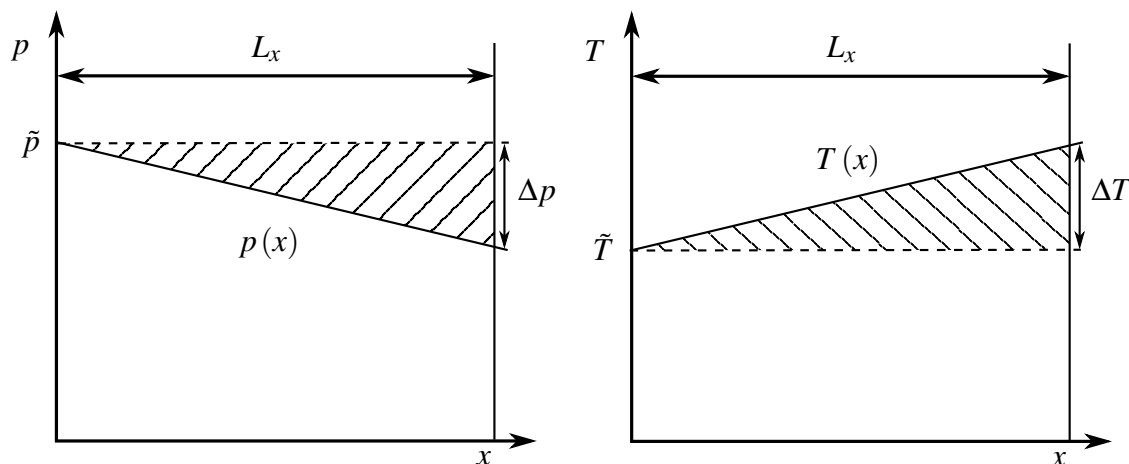


Abbildung A.2.: Verlauf und Aufteilung des Druckes p und der Temperatur T in einen linearen und einen periodischen Anteil des Profils über die Lauflänge L_x einer vollständig entwickelten, laminaren Kanalströmung bei konstanter Beheizung ($\dot{q} = \text{konst.}$) nach [207].

Diese Aufteilung macht bereits deutlich, dass ein unendlich langer Kanal Modifikationen der Energieerhaltungsgleichung erfordert. Der linear ansteigende Anteil des Temperaturprofils kann mit Hilfe einer Energiebilanz für ein periodische Element des Plattenkanals bestimmt werden:

$$\dot{m} c_p \Delta T = 2 L_x L_z \dot{q}_w = 2 L_x L_z \lambda \left(\frac{dT}{dn} \right) \Big|_w, \quad (\text{A.24})$$

$$\left(\frac{\Delta T}{L_x} \right) = \frac{1}{u_b \delta} \left(\frac{\lambda}{\rho c_p} \right) \left(\frac{dT}{dn} \right) \Big|_w, \quad (\text{A.25})$$

wobei die Größen \dot{m} den Massenstrom durch das System, ΔT den mittleren Temperaturanstieg in Strömungsrichtung, L_x , $L_y = 2\delta$ und L_z die Erstreckung des Strömungsgebietes in die jeweiligen Raumrichtungen und \dot{q} die aufgeprägte Wärmestromdichte auf beiden Wänden bezeichnet. Es wird angenommen, dass die Beheizung der oberen und unteren Wand identisch ist.

Die rechte Seite der Gl. (A.23) kann nun in Kombination mit Gl. (A.25) anstelle der Temperatur T in die Energieerhaltungsgleichung (vgl. Gl. (2.16)) eingesetzt werden:

$$u(y) \left(\frac{dT}{dx} \right) = \left(\frac{v}{Pr} \right) \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x_j^2}. \quad (\text{A.26})$$

Der zusätzliche Quellterm auf der rechten Seite der Gl. (A.26) resultiert unmittelbar aus dem Konvektionsterm der Energieerhaltung und kann aus dem Produkt der Geschwindigkeit in Strömungsrichtung $u(y)$ und dem linearen Anstieg der Temperatur nach Gl. (A.25) bestimmt werden. Die Gültigkeit dieses zusätzlichen Quellterms in der Energieerhaltungsgleichung ist auch für den instationären, turbulenten Fall unter der Voraussetzung gewährleistet, dass ein räumlich und zeitlich konstanter Beheizungszustand des Strömungsgebiets vorliegt.

Eine in beheizten Kanalströmungen übliche Vorgehensweise basiert in der Substitution der Temperatur T durch die Variable Θ , die der Differenz der Wandtemperatur $T_w(x, y)$ zum Temperaturprofil $T(x, y)$ entspricht (vgl. Gl. (4.55)). Es kann nun an beiden Wänden unter Annahme unendlich großer, identisch beheizter Platten die Randbedingung $\Theta_w = 0$ verwendet werden. Der zusätzliche Quellterm in diesem Fall „steuert“ den Beheizungszustand und ist somit für die Ausprägung des Profils verantwortlich. Diese Maßnahme ist streng auf Strömungen mit zwei homogenen Richtungen beschränkt, da nur in diesem Fall eine im statistischen Mittel gleichbleibende Temperaturverteilung in Querrichtung (z -Richtung) zu erwarten ist. In turbulenten Strömungen resultiert die Anwendung dieser Methodik in einer Vernachlässigung der Temperaturfluktuationen unmittelbar an der Wand $\theta'_w = 0$. Dies stellt einen idealisierten Zustand dar, der in realen Anwendungen oder Experimenten nur bedingt reproduziert werden kann.

Für eine laminare, beheizte Kanalströmung kann nun mit Hilfe des Geschwindigkeitsprofils (vgl. Gl. (A.19)) eine analytische Lösung des Temperaturprofils bestimmt werden:

$$\Theta(y) = \tilde{T}_w - \tilde{T}(y) = -\frac{3}{2}u_b \left(\frac{Pr}{\nu}\right) \left(\frac{dT}{dx}\right) \left[\left(\frac{1}{2}\right)y^2 - \left(\frac{1}{12}\right)\frac{y^4}{\delta^2} - \left(\frac{5}{12}\right)\delta^2 \right]. \quad (\text{A.27})$$

Wie in Abb. A.3 dargestellt ist, zeigt der Vergleich der verwendeten Lösungsstrategien eine vollständige Übereinstimmung mit der analytischen Lösung. Für die Berechnung von zeitaufgelösten Strömungen in komplexeren Geometrien, z.B. im Fall von Grobstruktursimulationen in Rechteckkanälen, sei anzumerken, dass die vorgestellte Methodik auf Strömungen mit einem räumlich und zeitlich konstanter Beheizungszustand beschränkt ist. Zur Berechnung komplexerer Beheizungs Zustände sind dementsprechend geeignete Erweiterungen notwendig.

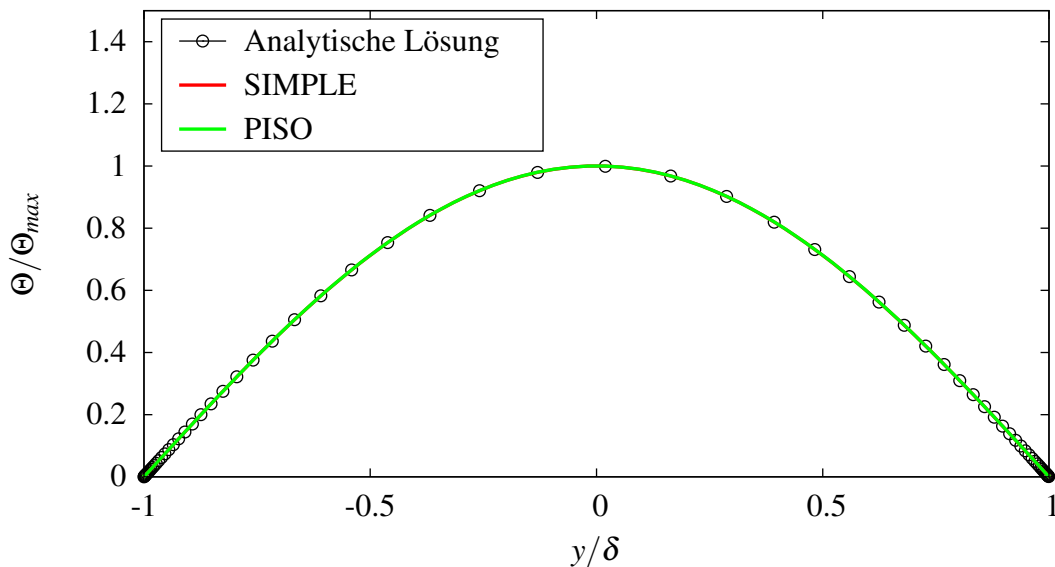


Abbildung A.3.: Vergleich der entdimensionierten Temperaturprofile einer laminaren, symmetrisch beheizten Kanalströmung (vgl. Abb. 4.6) unter Verwendung des SIMPLE- und PISO-Algorithmus mit der analytischen Lösung (vgl. Gl. (A.27)).

Ein alternatives Verfahren basiert auf der Kopplung eines Strömungsquerschnitts in ausreichendem Abstand zum Einlassbereichs des Strömungsgebietes mit der Eintrittsfläche. Das in diesem Querschnitt extrahierte Geschwindigkeits- und Temperaturprofil muss geeignet skaliert werden, um viskose Kräfte bzw. den linearen Temperaturanstieg bei konstanter Beheizung zu kompensieren. Eine mögliche Umsetzung für thermisch beaufschlagte Strömungen ist in der Arbeit von Baumann [70] aufgeführt. Die Wahl eines ausreichend großen Abstandes der periodischen Randbedingungen im Strömungsgebiet ist jeweils für beide Methoden unter Berücksichtigung der räumlichen Ausweitung der größten vorherrschenden turbulenten Strukturen zu treffen. Speziell die einfache Handhabung der ersten vorgestellten Methodik mag einer der wesentlichen Gründe sein, warum sie in einer Vielzahl von Arbeiten erfolgreich eingesetzt wurde [85,171,187].

A.1.4.3. Berechnung auftriebsbehafteter Strömungen

Die Berechnung voll entwickelter, auftriebsbehafteter Strömungen verlangt eine zusätzliche Modifikation der Lösungsalgorithmen. Unter Anwendung der Boussinesq-Approximation in den Impulserhaltungsgleichungen muss der zusätzliche Auftriebsterm bzw. Quellterm auch in den Algorithmen der Geschwindigkeits-Druck-Korrektur berücksichtigt werden. Gleichung A.12 muss durch die allgemeinere Formulierung in Gleichung A.15 ersetzt werden. Die Divergenz des Auftriebsterms kann durch Anwendung des Gaußschen Integralsatz in ein Flächenintegral umgeformt werden. Anschließend wird der Vektor H_i um den Auftriebsterm erweitert und auf die Trennfläche Ω_f interpoliert. Im Lösungsalgorithmus wird stets der explizite Wert des Auftriebsterms aus der unmittelbar vorangegangenen Iteration verwendet. In OpenFOAM[®] [142] sind bereits zwei verschiedene Ansätze zur Berechnung von auftriebsbehafteten Strömungen implementiert⁶¹. Diese erweisen sich als nicht geeignet für hydraulisch und thermisch vollständig eingelaufenen Strömungen, so dass eine Erweiterung für Strömungen mit Auftrieb durchgeführt worden ist.

Eine Möglichkeit der Validierung der Erweiterung für auftriebsbehaftete, laminare Mischkonvektionsströmungen in vertikalen Plattenkanälen ist durch Cheng et al. [208] gegeben (vgl. Abbildung A.4). Sie konnten auf Basis einer theoretischen Analyse bei Strömungen beliebiger Beheizungszustände analytische Lösungen ableiten, die als Grundlage einer Validierung dienen sollen.

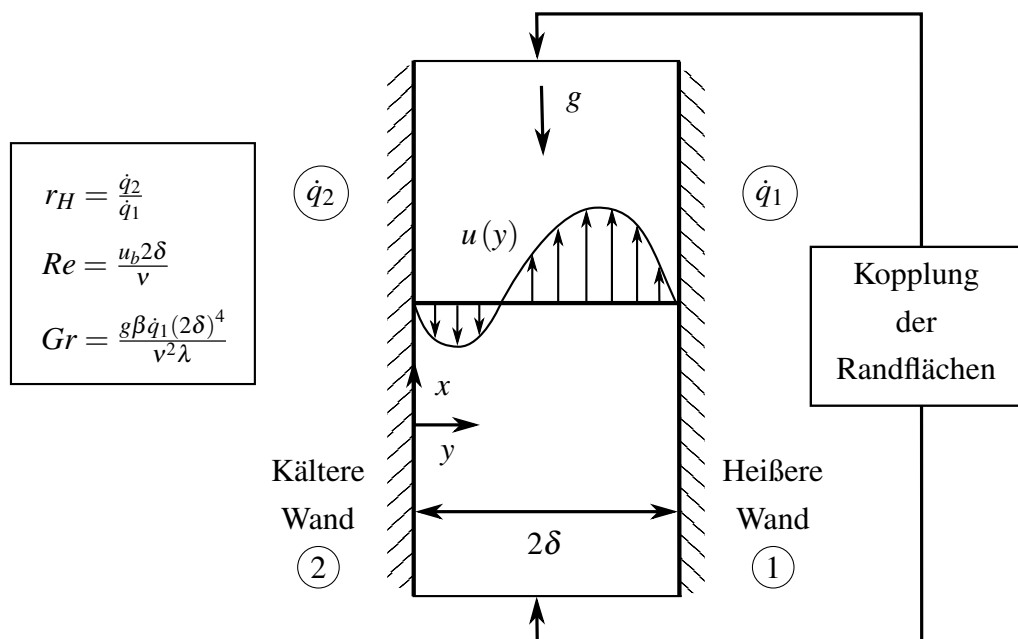


Abbildung A.4.: Skizze des periodischen Strömungsgebietes für verschiedene Beheizungszustände der auftriebsbehafteten Strömung (Grafik nach Cheng et al. [208]).

⁶¹Die Bibliotheken *buoyantBoussinesqSimple* und *buoyantBoussinesqPimple* sind standardmäßig in der Version OpenFOAM-2.3.x (OpenFOAM[®]) enthalten [142].

Der Beheizungszustand soll im Zuge dieser Untersuchung beliebig variiert werden und ist eindeutig über das Verhältnis r_H der beiden aufgeprägten Wärmeflüsse \dot{q}_1 und \dot{q}_2 definiert:

$$r_H = \frac{\dot{q}_2}{\dot{q}_1}. \quad (\text{A.28})$$

Im Folgenden werden alle Stoffeigenschaften als konstant angenommen. Für unterschiedliche Verhältnisse der Grashof- Gr und Reynolds-Zahl Re kann nun eine Validierung der, um die Boussinesq-Approximation erweiterten, Lösungsverfahren durchgeführt werden. Die wesentlichen Gleichungen zur Bestimmung der analytischen Lösung des Geschwindigkeitsfeldes nach Cheng et al. [208] sind:

$$Gr = \frac{g\beta\dot{q}_1(2\delta)^4}{v^2\lambda}, \quad (\text{A.29})$$

$$Re = \frac{u_b 2\delta}{v}, \quad (\text{A.30})$$

$$y^* = \frac{y}{2\delta}, \quad (\text{A.31})$$

$$U^*(y^*) = e^{Ky^*/\sqrt{2}} \left[C_1 \cos(Ky^*/\sqrt{2}) + C_2 \sin(Ky^*/\sqrt{2}) \right] + e^{-Ky^*/\sqrt{2}} \left[C_3 \cos(Ky^*/\sqrt{2}) + C_4 \sin(Ky^*/\sqrt{2}) \right], \quad (\text{A.32})$$

mit:

$$K = [(1 + r_H) / (Re/Gr)]^{1/4}, \quad (\text{A.33})$$

$$C_2 = E_2/E_1, \quad C_3 = E_3/E_1, \quad C_4 = E_4/E_1, \quad C_1 = -C_3, \quad (\text{A.34})$$

$$E_1 = - \left(e^{-K\sqrt{2}} + e^{K\sqrt{2}} \right) + 4 \sin^2 \left(K/\sqrt{2} \right) + 2, \quad (\text{A.35})$$

$$E_2 = \left(r_H \sqrt{2}/K^3 \right) \left[1 + \sin \left(K\sqrt{2} \right) - e^{-K\sqrt{2}} \right] + \left(2\sqrt{2}/K^3 \right) e^{-K/\sqrt{2}} \sin \left(K/\sqrt{2} \right) \quad (\text{A.36})$$

$$- \left(\sqrt{2}/K^3 \right) \left(e^{-K/\sqrt{2}} - e^{K/\sqrt{2}} \right) \cos \left(K/\sqrt{2} \right),$$

$$E_3 = \left(2\sqrt{2}/K^3 \right) R_H \sin^2 \left(K/\sqrt{2} \right) - \left(\sqrt{2}/K^3 \right) \left(e^{-K/\sqrt{2}} - e^{K/\sqrt{2}} \right) \sin \left(K/\sqrt{2} \right), \quad (\text{A.37})$$

$$E_4 = \left(r_H \sqrt{2}/K^3 \right) \left[1 - \sin \left(K\sqrt{2} \right) - e^{K\sqrt{2}} \right] - \left(2\sqrt{2}/K^3 \right) e^{K/\sqrt{2}} \sin \left(K/\sqrt{2} \right) + \left(\sqrt{2}/K^3 \right) \left(e^{-K/\sqrt{2}} - e^{K/\sqrt{2}} \right) \cos \left(K/\sqrt{2} \right). \quad (\text{A.38})$$

Ein auf die flächengemittelte Geschwindigkeit u_b bezogenes Geschwindigkeitsprofil kann durch Multiplikation mit dem Verhältnis der Grashof- und Reynolds-Zahl ermittelt werden:

$$\frac{u(y^*)}{u_b} = \frac{U^*(y^*) Gr}{Re}. \quad (\text{A.39})$$

Diese Gleichungen können für unterschiedliche Parametersätze gelöst werden, und ermöglichen die Validierung der Lösungsalgorithmen für voll entwickelte Strömungen.

Eine Erweiterung der Arbeit von Cheng et al. [208] stellt die Formulierung einer analytische Lösung des Temperaturprofils dar. Das Temperaturprofil kann für beliebige Beheizungs Zustände durch zweifache Integration des Geschwindigkeitsprofils bestimmt werden (vgl. Gl. (A.26)). Die Gleichung des Temperaturprofils in Abhängigkeit der Grashof-Zahl stellen eine Ergänzung der Arbeit von Cheng et al. [208] und lauten:

$$\begin{aligned} \Theta^*(y^*) &= \frac{\lambda (T_{w,1} - T(y))}{2\delta\dot{q}_1} \\ &= -R_2 - R_1 y^* - \gamma \left(\frac{Gr}{Re} \right) \frac{e^{-\zeta y^*}}{2\zeta^2} [C_4 \cos(\zeta y^*) - C_3 \sin(\zeta y^*) \\ &\quad - C_2 e^{2\zeta y^*} \cos(\zeta y^*) + C_1 e^{2\zeta y^*} \sin(\zeta y^*)], \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

mit:

$$\begin{aligned} R_1 &= r_H + \frac{\gamma}{2\zeta} (C_1 - C_2 - C_3 + C_4) \left(\frac{Gr}{Re} \right), \\ R_2 &= R_1 + \left(\frac{\gamma}{2\zeta^2} \right) e^{-\zeta} [C_4 \cos(\zeta) - C_3 \sin(\zeta) \\ &\quad + e^{2\zeta} (C_1 \sin(\zeta) - C_2 \cos(\zeta))] \left(\frac{Gr}{Re} \right), \\ \gamma &= 1 + r_h, \\ \zeta &= K/\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

Die Ergebnisse der beiden vorgestellten Lösungsmethoden (SIMPLE- und PISO-Verfahren) sind nachfolgend für zwei verschiedene Beheizungs Zustände bei unterschiedlichen Verhältnissen der Reynolds- und Grashof-Zahl darstellt. Wie den Abbildungen entnommen werden kann, zeigen beide erweiterte Lösungsverfahren eine gute Übereinstimmung mit den analytischen Lösungen. Wie in Abb. A.5 dargestellt ist, zeigt sich für einen identischen Beheizungs Zustand auf beiden Wänden ($r_h = 1$) eine starke Erhöhung der Geschwindigkeit in Nähe der Wände. Für ein kleines Verhältnis Re/Gr existiert ein Rückströmgebiet im Zentrum des Kanals, dass mit sinkendem Einfluss des Auftriebs verschwindet. Die Normierung des Temperaturprofils ist hier auf die Wand ① bezogen (vgl. Abb. A.4). Das normierte Temperaturprofil wird unter Einwirkung des Auftriebs-

erms maßgeblich durch die veränderte Geschwindigkeitsverteilung beeinflusst. Mit zunehmendem Größe des Auftriebsterms vergleichmäßigt sich durch die verminderte Konvektion in Strömungsrichtung das Temperaturprofil in der Kanalmitte. Der erweiterte PISO-Algorithmus zeigt für die normierten Geschwindigkeits- und Temperaturprofile bei unterschiedlichen Verhältnissen Re/Gr eine vollständige Übereinstimmung mit der analytischen Lösung.

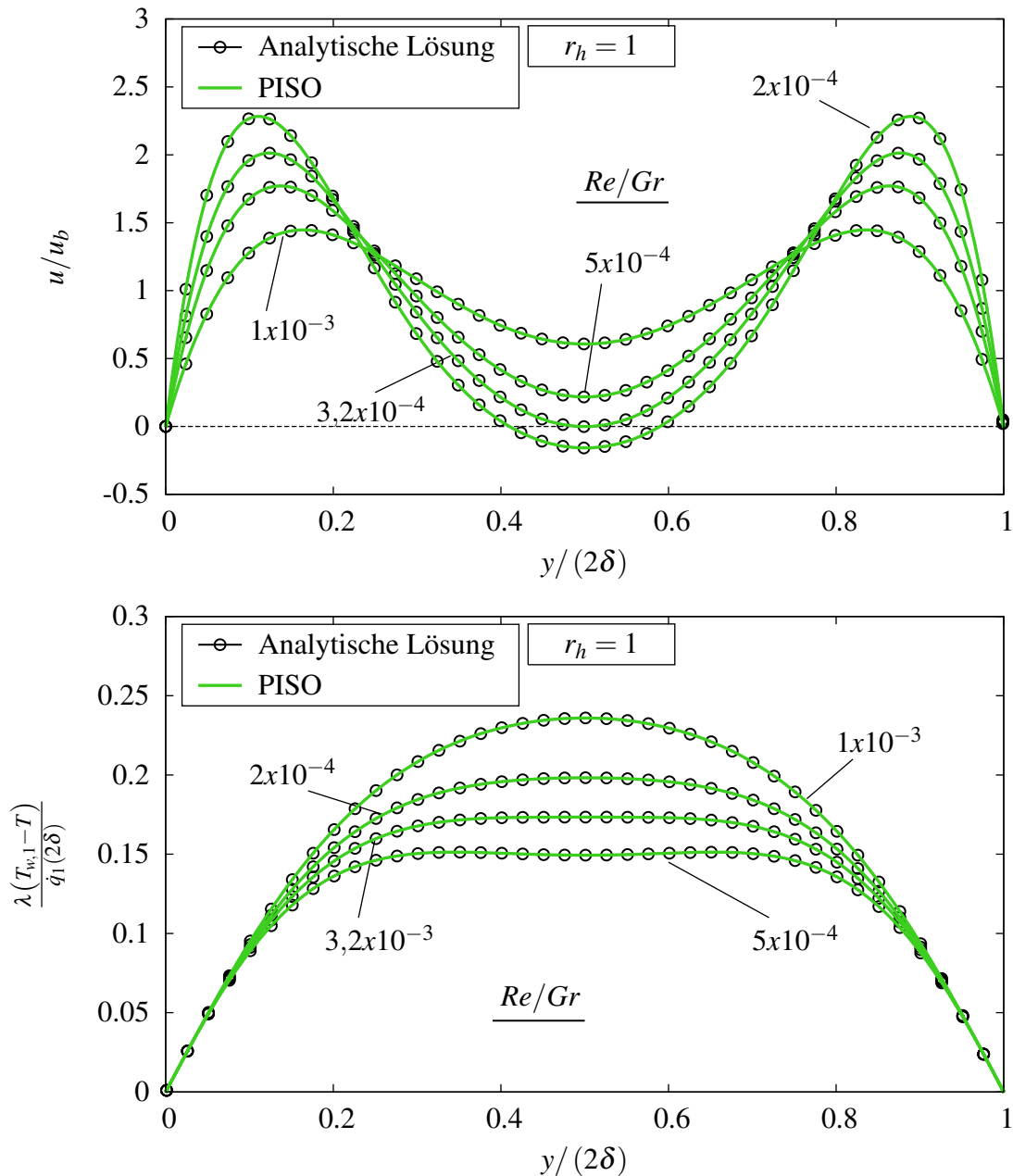


Abbildung A.5.: Vergleich der normierten Geschwindigkeitsprofile (oben) und Temperaturprofile (unten) des um Auftriebseffekte erweiterten PISO-Algorithmus mit der analytischen Lösung nach Cheng et al. [208] für eine laminare, beheizte Plattenkanalströmung bei $r_h = 1$.

Wie in Abb. A.6 dargestellt ist, stellt sich für eine einseitige Beheizung der Wand ① ($r_h = 0$) ein asymmetrisches Geschwindigkeitsprofil ein, das in der Nähe der beheizten Wand ein deutliches Maximum aufweist. Bei hinreichend großen Grashof-Zahlen ist für einen Großteil des Querschnitts eine Rückströmung zu erkennen. Dies äußert sich in den normierten Temperaturprofilen. Infolge der geringen Konvektion in der Nähe der adiabaten Wand ② zeigt sich über einen Großteil des Querschnitts ein konstantes Niveau des normierten Temperaturprofils.

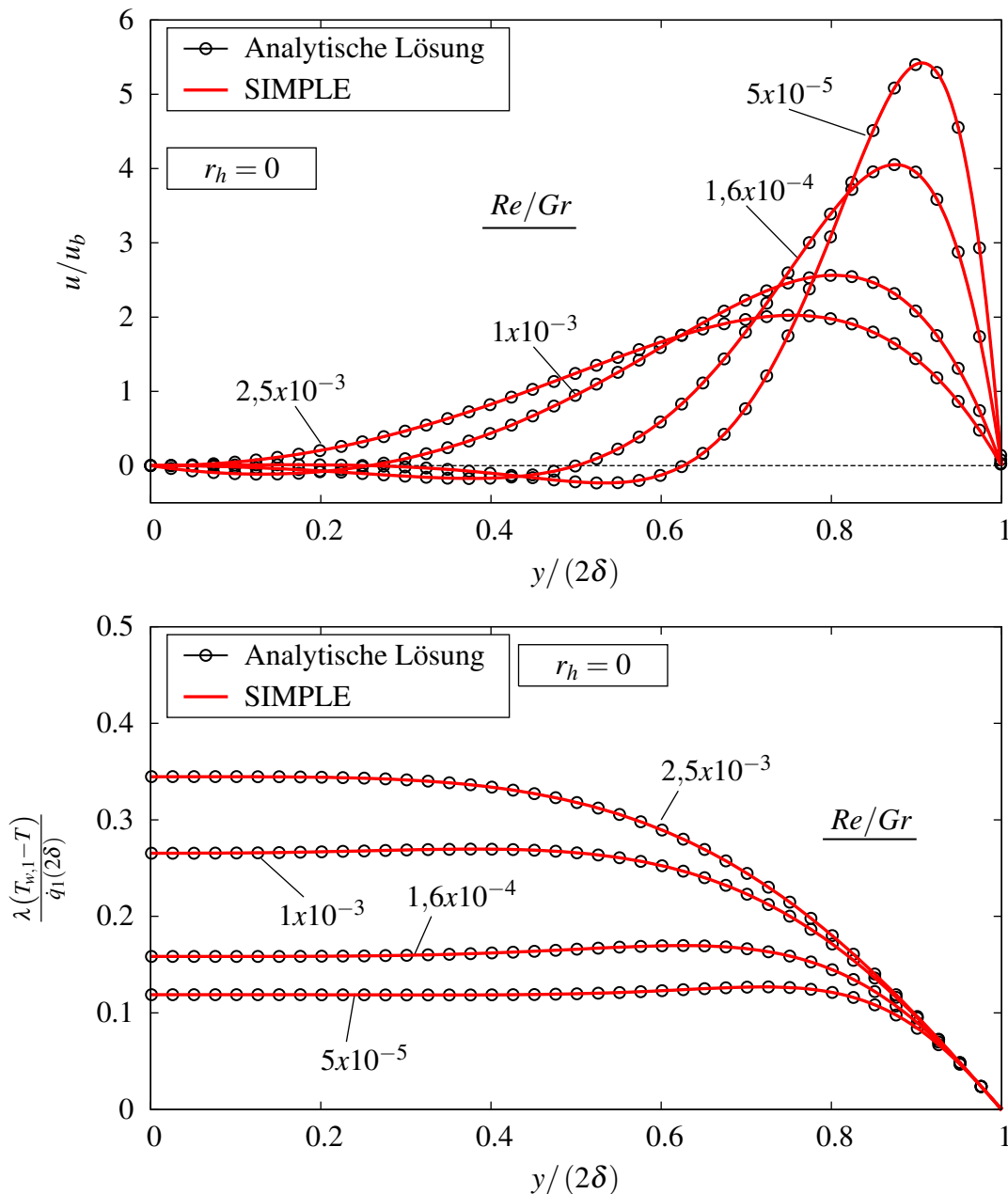


Abbildung A.6.: Vergleich der normierten Geschwindigkeitsprofile (oben) und Temperaturprofile (unten) des um Auftriebseffekte erweiterten SIMPLE-Algorithmus mit der analytischen Lösung nach Cheng et al. [208] für eine laminare, beheizte Plattenkanalströmung bei $r_h = 0$.

Beide erweiterte Lösungsverfahren zeigen eine zufriedenstellende Übereinstimmung mit den analytischen Lösungen nach Cheng [208] und können für weitere Untersuchungen eingesetzt werden. Eine Darstellung der vollständigen Ergebnisse von beiden Lösungsverfahren ist den nachfolgenden Abbildungen zu entnehmen.

A.2. Turbulente Wärmeflussmodellierung

A.2.1. Einfluss der Reynolds- und Prandtl-Zahl auf “globale” Konzepte der turbulenten Prandtl-Zahl

Die einzelnen Modelle sind in Kapitel 6.2 aufgeführt. Hier werden die Ergebnisse der verschiedenen Ansätze hinsichtlich des Einflusses der Reynolds- und Prandtl-Zahl analysiert.

Wie in Abb. A.7 und A.8 dargestellt ist, zeigen bei $Pr = 0,025$ und niedrigen Reynolds-Zahlen $Re_\tau = 180$ und 395 die Modelle von Aoki [152], Reynolds [153] und Jischa & Rieke [154] im wandnahen Bereich der Strömung (bis $y^+ \approx 100$) die beste Übereinstimmung zur DNS. Die gemittelte, relative Abweichung zur DNS der drei Modelle liegt in diesem Bereich bei ungefähr 12 %. Fernab der Wand wird der Verlauf für alle Modelle hingegen deutlich mit bis zu 60 % Abweichung überschätzt. Der Ansatz einer konstanten turbulenten Prandtl-Zahl $Pr_t = 0,9$ zeigt wie auch der Ansatz von Cheng & Tak [57] eine deutliche Abweichung des Verlaufs zur DNS von bis zu 70 % bzw. 40 % im Bereich $y^+ = 10 - 100$. Wie in Abb. A.9 und A.10 dargestellt ist, äußert sich dies bei $Pr = 0,025$ in der Größenordnung der turbulenten thermischen Diffusivität α_t^+ . Im der Kanalmitte ($y^+ = 180$ bzw. 395) wird das Maximum für die Modelle von Aoki [152], Reynolds [153] und Jischa & Rieke [154] jeweils um bis zu 30 % bei $Re_\tau = 180$ und 26 % bei $Re_\tau = 395$ unterschätzt. Die konstante turbulente Prandtl-Zahl zeigt hier die größte Abweichung der vorgestellten Modelle mit einer Überschätzung des Maximums von 140 % bei $Re_\tau = 180$ und 75 % bei $Re_\tau = 395$. Das Modell von Cheng & Tak [57] unterschätzt bei beiden Reynolds-Zahlen das Maximum mit einer Abweichung zur DNS in der Kanalmitte von 60 % bei $Re_\tau = 180$ und 75 % bei $Re_\tau = 395$.

Die Abb. A.11 und A.12 zeigen bei $Pr = 0,71$ sowie bei den Reynolds-Zahlen $Re_\tau = 180$ und 395 den Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t . Die beste Übereinstimmung zeigt der Ansatz von Jischa & Rieke [154] mit einer relativen Abweichung zur DNS von 5 % im wandnahen Bereich ($y^+ = 1 - 80$). Auch die konstante turbulente Prandtl-Zahl $Pr_t = 0,9$ liefert eine gute Approximation der DNS-Daten mit einer Unterschätzung von weniger als 10 % in diesem Bereich. Für die Modelle von Aoki [152] und Cheng & Tak [57] lassen sich große Abweichungen von 50 % bzw. 75 % beobachten. In Abb. A.13 und A.14 sind die Verläufe der turbulenten thermischen Diffusivität α_t^+ dargestellt. Das Modell von Jischa & Rieke [154] zeigt im Bereich $y^+ = 10 - 200$ eine Überschätzung zur DNS von 10 %. Der Wert in der Kanalmitte wird bei $Re_\tau = 180$ bzw. $Re_\tau = 395$ mit einer Abweichung von 37 % bzw. 20 % bestimmt. Der Ansatz $Pr_t = 0,9$ führt zu einer Abweichung in der Kanalmitte von bis zu 32 % bei $Re_\tau = 180$ und 10 % bei $Re_\tau = 395$.

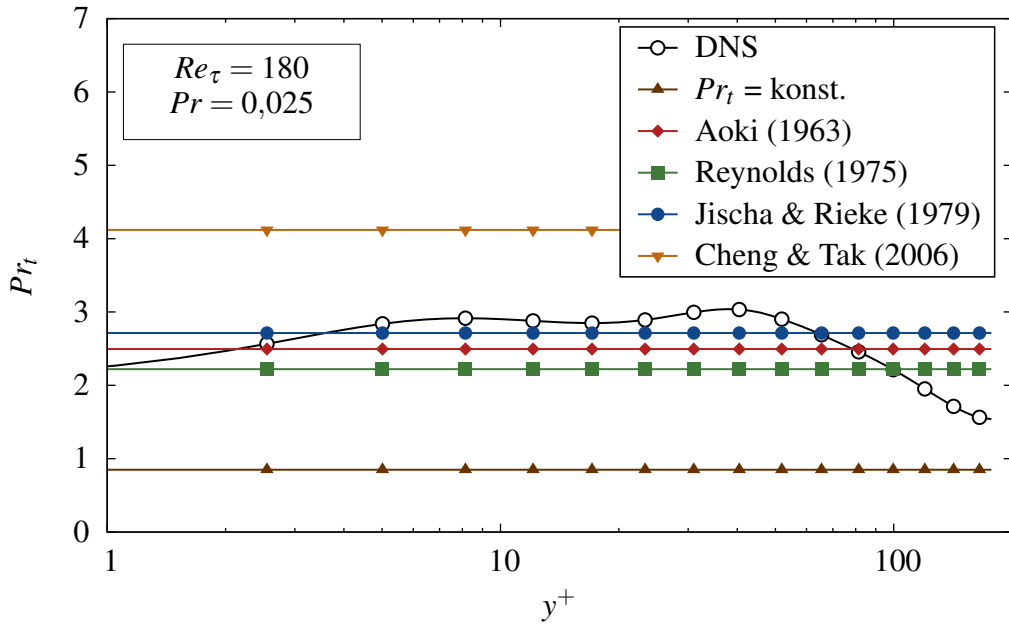


Abbildung A.7.: Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente, beidseitig beheizte Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 180$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,025$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].

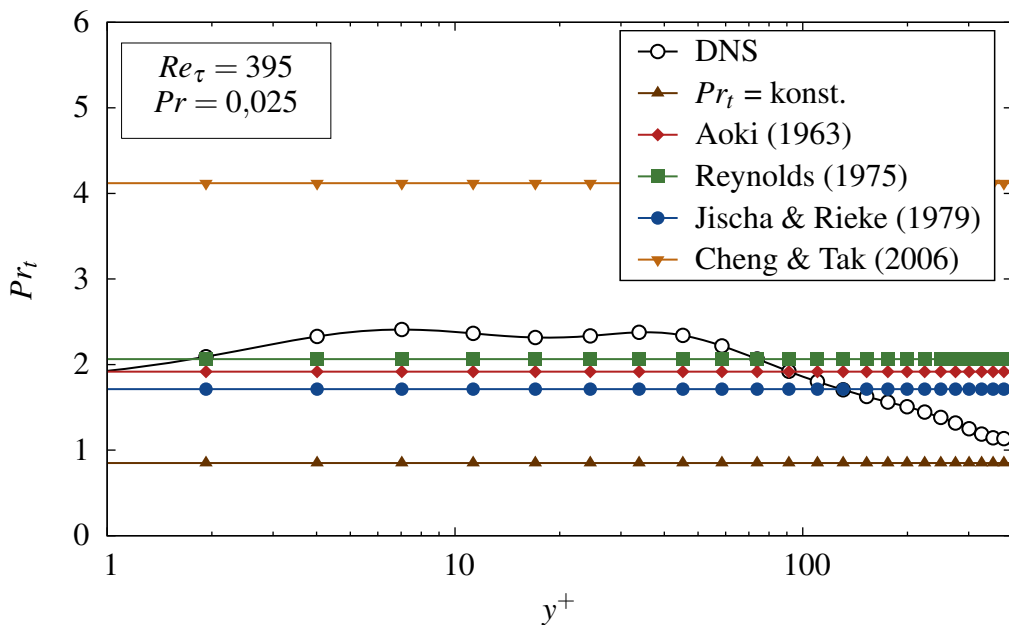


Abbildung A.8.: Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente, beidseitig beheizte Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 395$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,025$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].

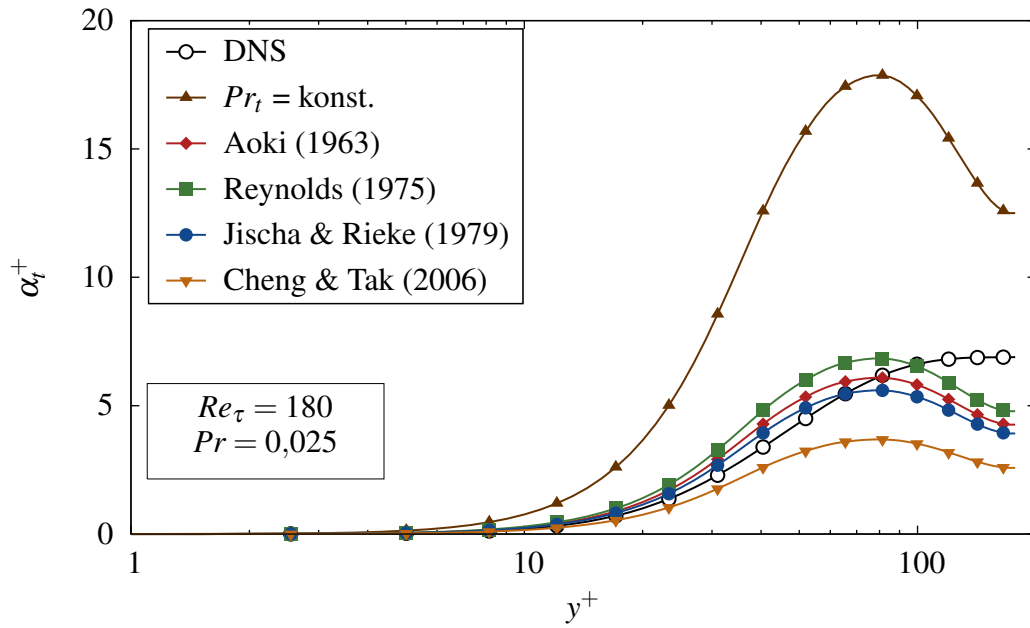


Abbildung A.9.: Verlauf der turbulenten thermischen Diffusivität α_t über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 180$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,025$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].

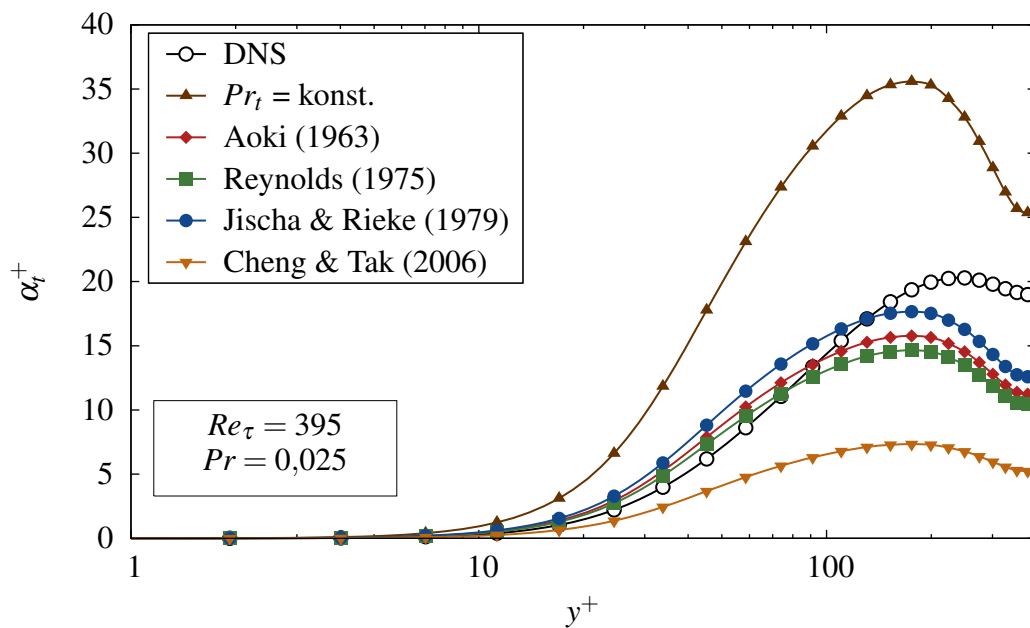


Abbildung A.10.: Verlauf der turbulenten thermischen Diffusivität α_t über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 395$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,025$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].

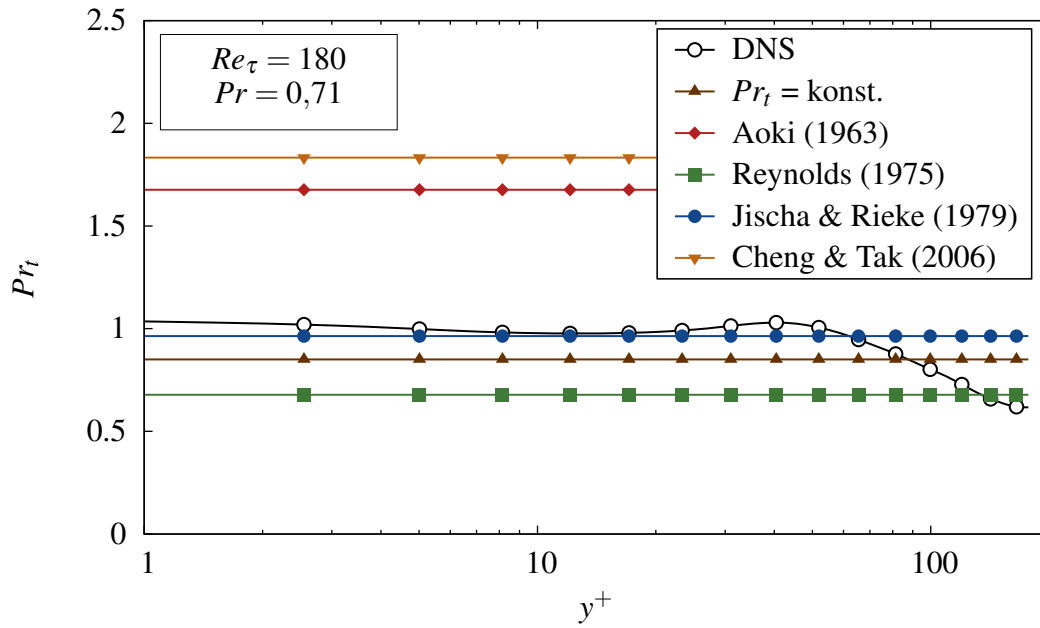


Abbildung A.11.: Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente, beidseitig beheizte Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 180$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].

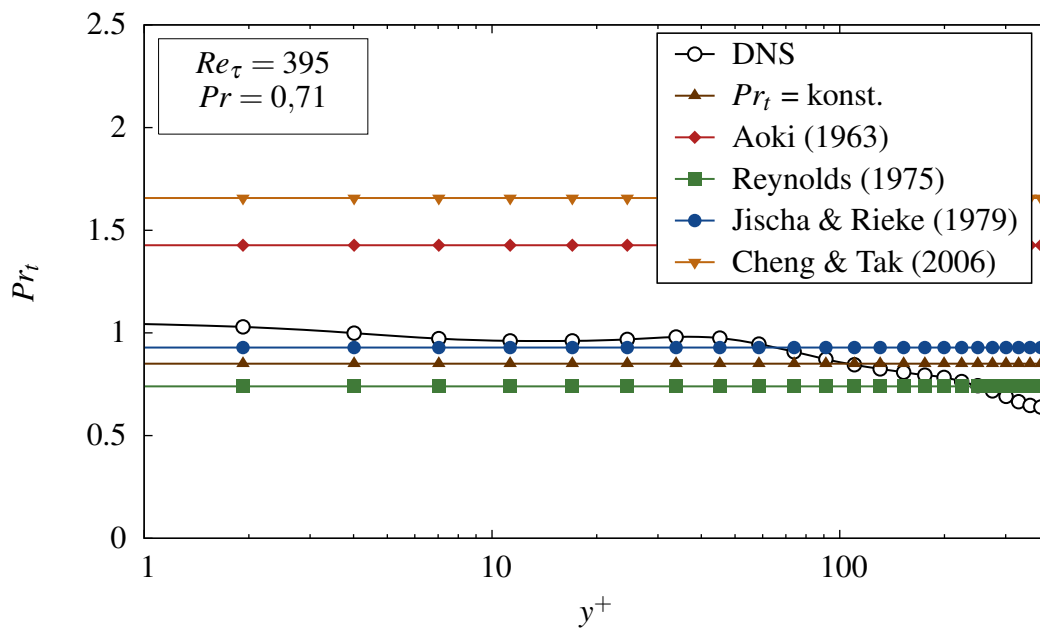


Abbildung A.12.: Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente, beidseitig beheizte Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 395$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].

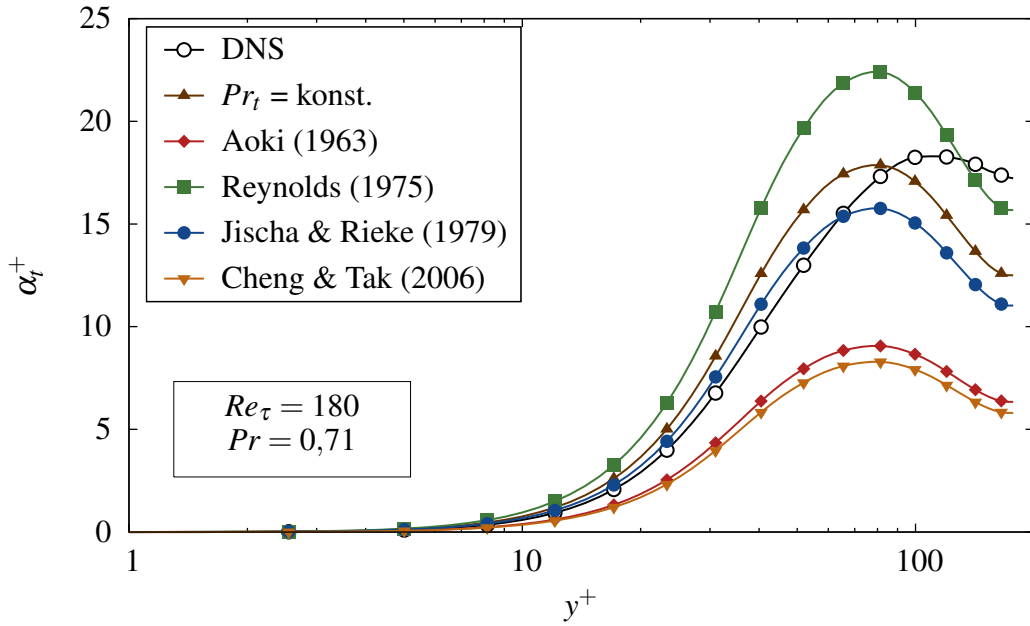


Abbildung A.13.: Verlauf der turbulenten thermischen Diffusivität α_t über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 180$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].

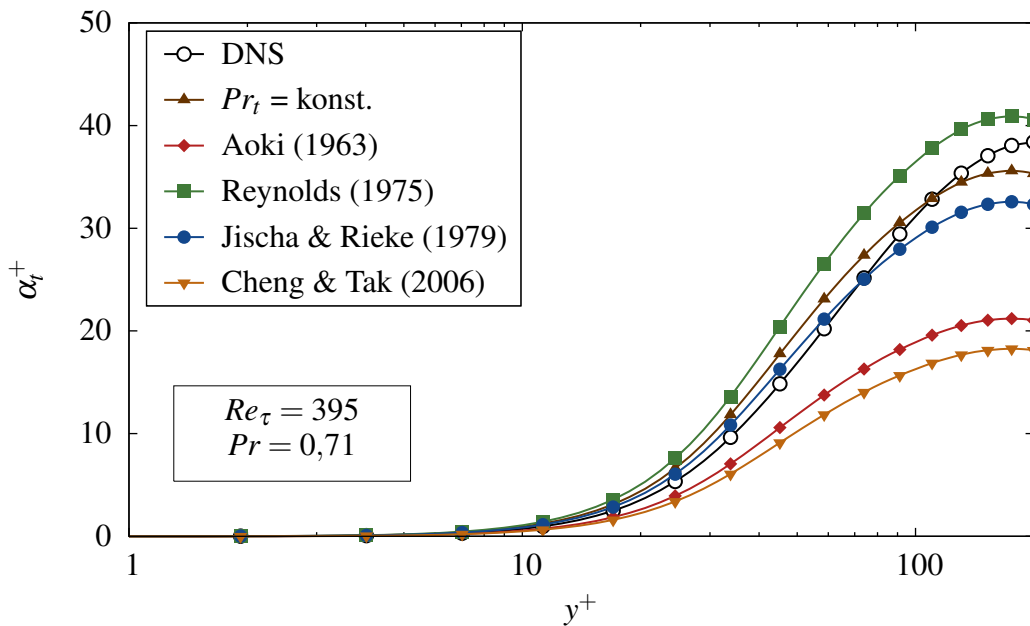


Abbildung A.14.: Verlauf der turbulenten thermischen Diffusivität α_t über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 395$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].

A.2.2. Einfluss der Reynolds- und Prandtl-Zahl auf "lokale" Konzepte der turbulenten Prandtl-Zahl

Wie in Abb. A.15 und A.16 bei $Re_\tau = 180$ und 395 sowie einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,025$ dargestellt ist, zeigt sich die beste Übereinstimmung des Verlaufs der turbulenten Prandtl-Zahl für die Modelle von Kays [22] und Weigand et al. [155]. Im relevanten Bereich $y^+ = 40 - 80$ ist bei $Re_\tau = 180$ die gemittelte Abweichung beider Modelle mit 7% für den Ansatz nach Kays [22] und 8% besonders gering. Auch der Ansatz von Notter & Schleicher [158] zeigt mit einer Abweichung von 8% eine gute Übereinstimmung zur DNS in diesem Bereich. In Wandnähe ($y^+ = 1 - 30$) zeigt das Modell nach Weigand et al. [155] die beste Übereinstimmung. Der Ansatz von Kays [22], Cebeci & Bradshaw [56] und Lin et al. [157] können den asymptotischen Grenzwert unmittelbar an der Wand nicht wiedergeben. Für $Re_\tau = 395$ zeigt das Modell nach Kays [22] die beste Übereinstimmung zur DNS. Das Modell von Weigand et al. [155] zeigt zwar als einziges Modell eine Übereinstimmung in Wandnähe, überschätzt aber die DNS-Daten im Bereich $y^+ = 80 - 200$ um bis zu 19% . Das Modell von Cebeci & Bradshaw [56] weist zwar nur geringe Abweichungen in der Kanalmitte ($y^+ \approx 395$) auf, zeigt jedoch im technisch relevanten Bereich eine deutliche Überschätzung von bis zu 45% bei $y^+ = 100$. Die Modelle von Notter & Schleicher [158] und Lin et al. [157] können den Einfluss der steigenden Reynolds-Zahl nicht korrekt wiedergeben und sind aus diesem Grund für komplexere Strömungen nicht geeignet. Dies zeigt sich auch bei Analyse des Verlaufs der turbulenten thermischen Diffusivität α_t^+ , die für beide Reynolds-Zahlen bei $Pr = 0,025$ in den Abb. A.17 und A.18 dargestellt ist. Für den wandnahen Bereich der Strömung zeigt sich bei $Re_\tau = 180$, dass die Modelle von Notter & Schleicher [158] und Weigand et al. [155] die beste Übereinstimmung zur DNS liefern mit einer nahezu exakten Übereinstimmung im Bereich $y^+ = 1 - 50$. Das Modell von Kays [22] zeigt in diesem Bereich ebenso wie die Ansätze von Cebeci & Bradshaw [56] und Lin et al. [157] eine relative Abweichung zur DNS von bis zu 40% . Ab $y^+ \approx 40 - 70$ zeigt der Ansatz von Kays [22] von allen Modellen die beste Übereinstimmung zur DNS mit einer guten Übereinstimmung (maximale, relative Abweichung zur DNS von nur 12%). Für $Re_\tau = 395$ zeigt sich, dass das Maximum der turbulenten thermischen Diffusivität α_t^+ in der Kanalmitte ($y^+ = 395$) zwar erneut vom Modell von Cebeci & Bradshaw [56] gut wiedergegeben wird (rel. Abweichung von 3%), der Verlauf im relevanten Bereich $y^+ = 30 - 140$ jedoch nur mit Abweichungen von bis zu 40% zur DNS wiedergegeben wird. Hier zeigen erneut die Ansätze von Kays [22] und Weigand et al. [155] die beste Übereinstimmung mit einer maximalen Abweichung von ca. 5% .

Für $Pr = 0,71$ ist der Verlauf der ermittelten, turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t in den Abb. A.19 und A.20 dargestellt. Im technisch relevanten Bereich $y^+ = 20 - 100$ zeigen bis auf das Modell von Notter & Schleicher [158] alle Modelle bei $Re_\tau = 180$ eine gute Übereinstimmung zur DNS. Besonders der Ansatz von Cebeci & Bradshaw [56] zeigt nur geringe Abweichungen zur DNS von weniger als 10% . Die Ansätze von Kays [22] und Weigand et al. [155] zeigen jeweils eine

maximale rel. Abweichung von 12 %. Den asymptotischen Grenzwert der turbulenten Prandtl-Zahl $Pr_t|_w = 1,05$ können die Modelle von Cebeci & Bradshaw [56] und Lin et al. [157] noch am besten wiedergegeben mit einer Abweichung von jeweils 14 %. Der Einfluss einer steigenden Reynolds-Zahl ist für $Pr = 0,71$ im Vergleich zu $Pr = 0,025$ niedriger. Das Maximum der turbulenten Prandtl-Zahl verschiebt sich betragsmäßig zwischen $Re_\tau = 180$ und 395 bei $Pr = 0,025$ um 30 %, wohingegen sich bei $Pr = 0,71$ nur eine Abweichung von 1,5 % feststellen lässt. Die grundlegenden Tendenzen der einzelnen Modelle sind somit nahezu identisch zu $Re_\tau = 180$. In Abb. A.21 und A.22 sind die Verläufe der turbulenten thermischen Diffusivität α_t^+ für $Pr = 0,71$ bei einer Reynolds-Zahl $Re_\tau = 180$ und 395 dargestellt. Für $Re_\tau = 180$ lassen sich die geringsten Abweichungen zur DNS für die Modelle von Cebeci & Bradshaw [56], Kays [22] und Weigand et al. [155] erkennen. Die letzten beiden Modelle überschätzen im Bereich $y^+ = 30 - 70$ den Verlauf der DNS mit einer maximalen Abweichung von 12 %. Der Ansatz von Cebeci & Bradshaw [56] zeigt hier eine geringere Abweichung von nur 5 %. Der Ansatz von Notter & Schleicher [158] zeigt das größte Defizit. Die größte relative Abweichung zur DNS beträgt für dieses Modell 25 % bei $y^+ = 80$. Für $Re_\tau = 395$ zeigt sich eine ähnliche Tendenz der Ergebnisse. Die maximalen Abweichungen der Modelle von Cebeci & Bradshaw [56] (max. Abweichung 9 %), Kays [22] (max. Abweichung 12 %) und Weigand et al. [155] (max. Abweichung 13 %) sind nahezu identisch zu $Re_\tau = 180$. Die größte Abweichung zeigt auch hier der Ansatz von Notter & Schleicher [158] mit 32 % bei $y^+ = 180$.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass der Einfluss der Reynolds-Zahl für niedrige Prandtl-Zahlen größer ist. Das Maximum der turbulenten Prandtl-Zahl nimmt für eine steigende Reynolds-Zahl bei $Pr = 0,025$ um 30 % ab, wohingegen bei $Pr = 71$ das Niveau nahezu identisch bleibt. Den Einfluss der molekularen Prandtl-Zahl lässt sich am besten durch die Modelle von Kays [22] und Weigand et al. [155] abbilden, die für beide molekulare Prandtl-Zahlen eine gute Übereinstimmung (weniger als 13 % Abweichung im relevanten Bereich der Strömung) aufweisen. Diese Ergebnisse bestätigen somit die Analyse bei $Re_\tau = 640$ (vgl. Kap. 6.2.2).

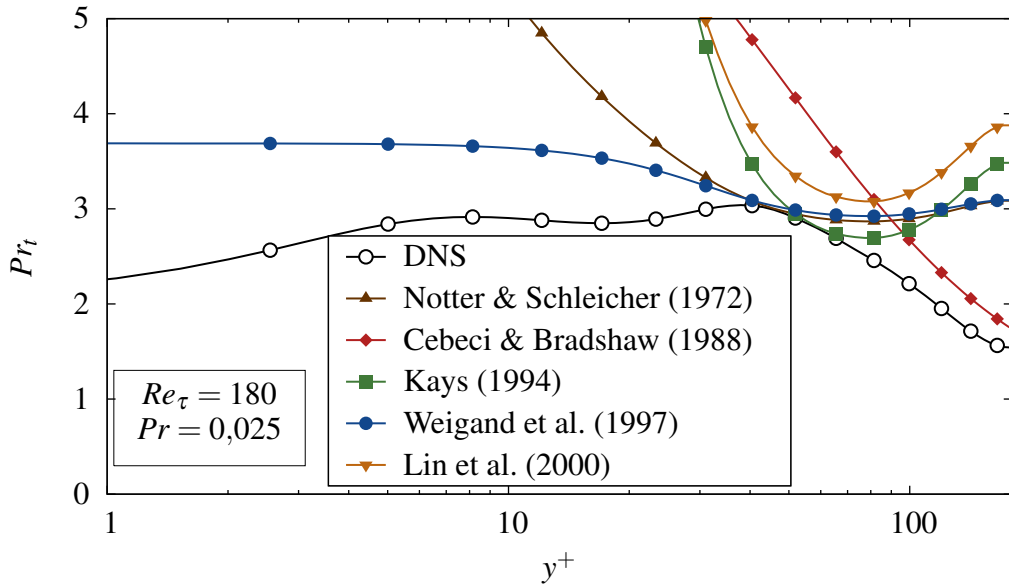


Abbildung A.15.: Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente, beidseitig beheizte Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 180$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,025$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].

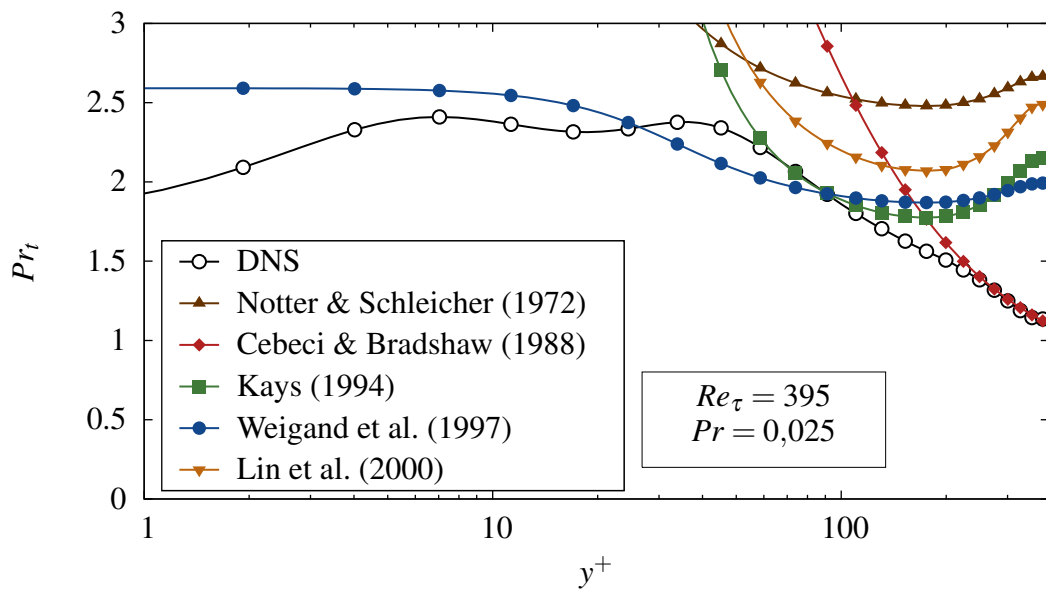


Abbildung A.16.: Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente, beidseitig beheizte Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 395$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,025$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].

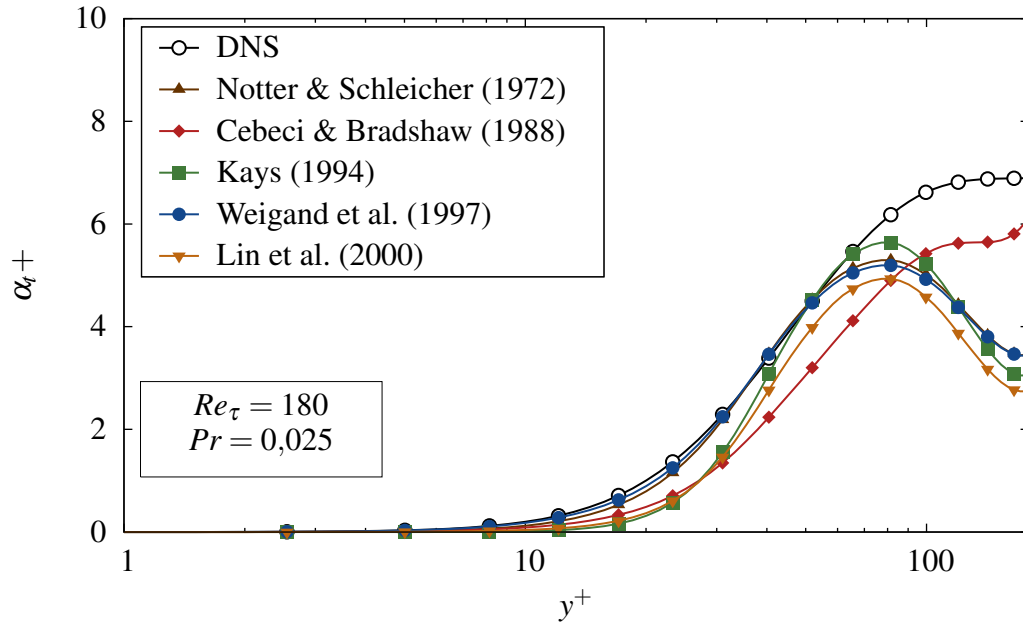


Abbildung A.17.: Verlauf der turbulenten thermischen Diffusivität α_t^+ über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente, symmetrisch beheizte Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 180$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,025$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].

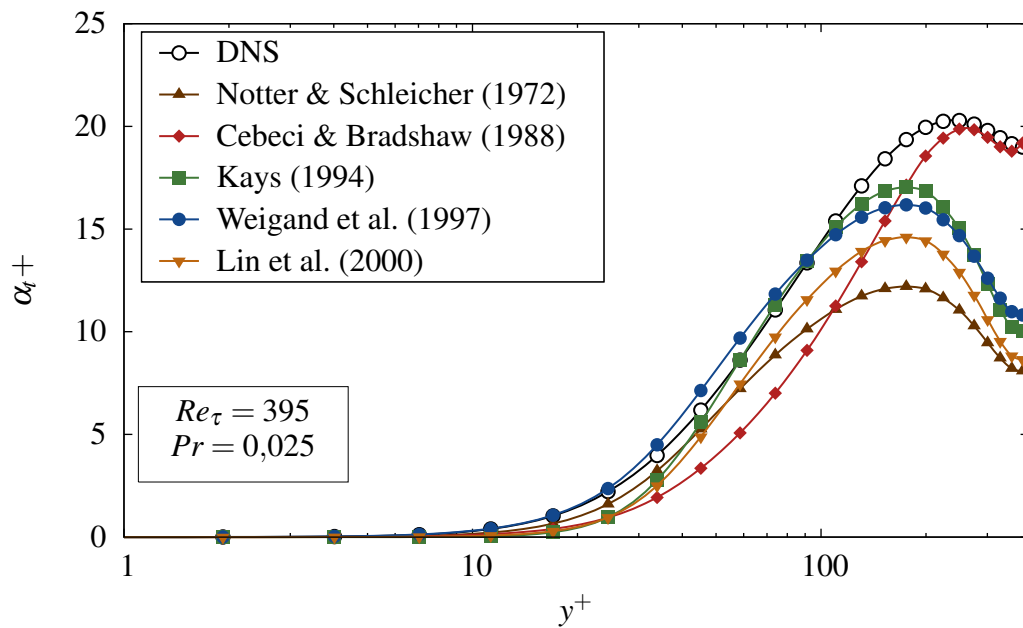


Abbildung A.18.: Verlauf der turbulenten thermischen Diffusivität α_t^+ über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente, symmetrisch beheizte Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 395$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,025$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].

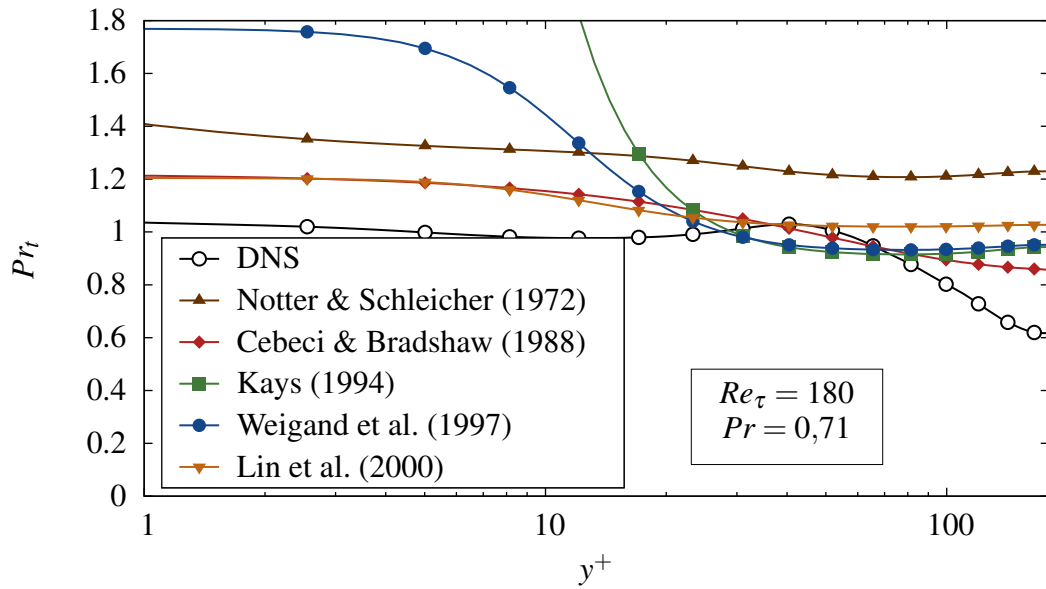


Abbildung A.19.: Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente, beidseitig beheizte Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 180$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].

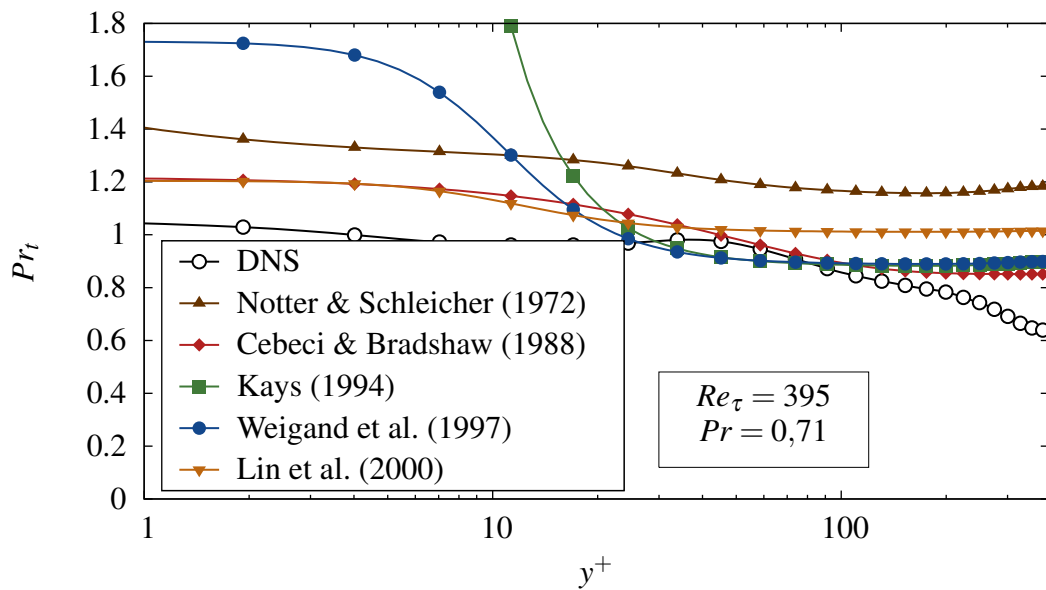


Abbildung A.20.: Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente, beidseitig beheizte Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 395$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].

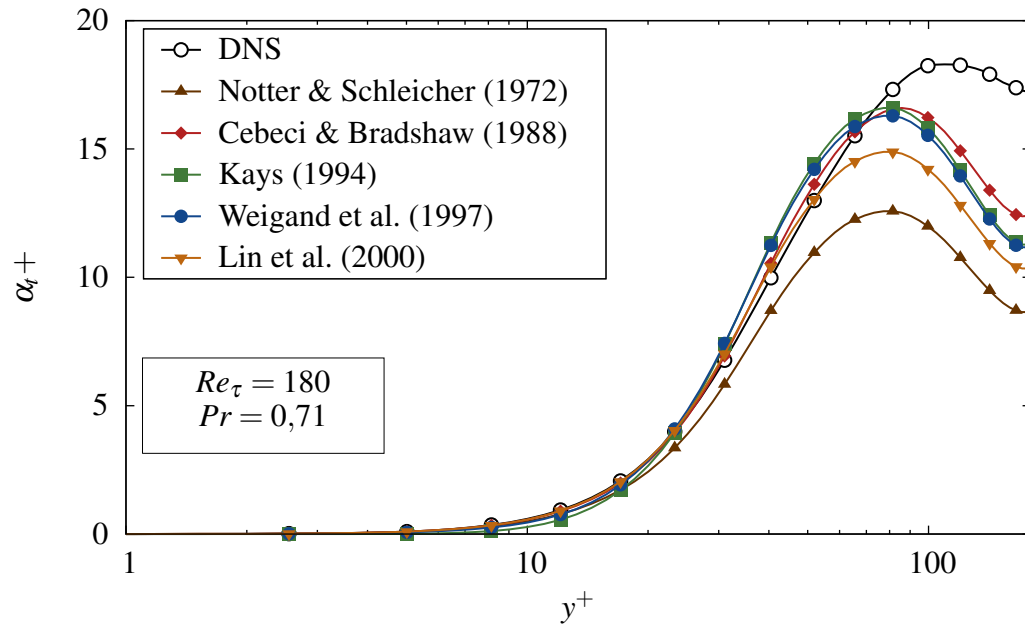


Abbildung A.21.: Verlauf der turbulenten thermischen Diffusivität α_t^+ über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente, symmetrisch beheizte Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 180$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].

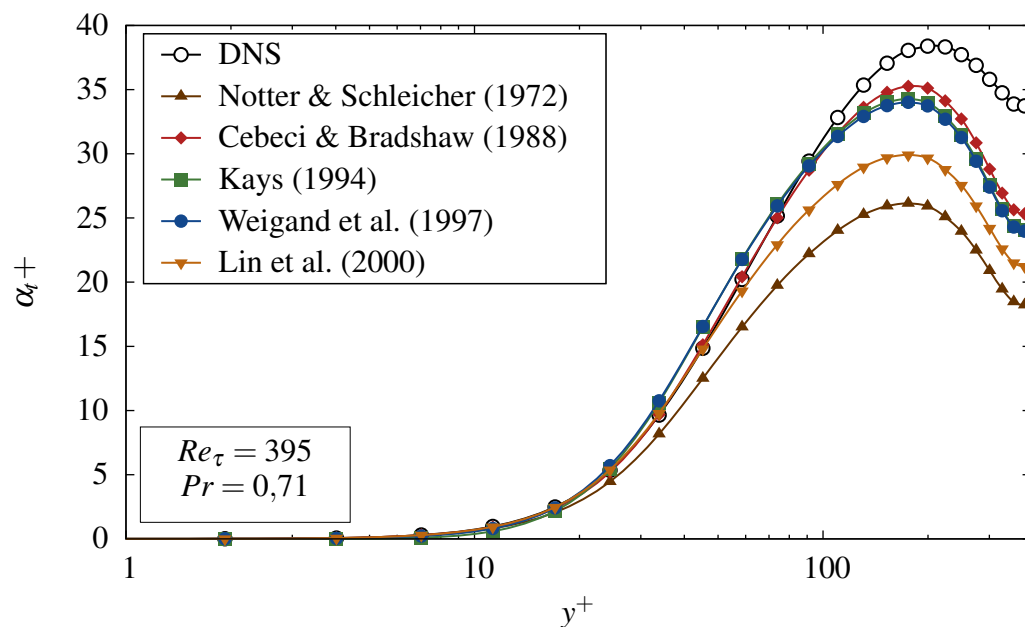


Abbildung A.22.: Verlauf der turbulenten thermischen Diffusivität α_t^+ über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente, symmetrisch beheizte Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 395$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].

A.2.3. Einfluss der Reynolds- und Prandtl-Zahl auf die Transportterme der Temperaturvarianzgleichung

In den Abb. A.23 bis A.26 sind die Verläufe der Transportterme der Temperaturvarianzgleichung aus den DNS von Abe et al. [85,86] unter Einfluss der Reynolds- und Prandtl-Zahl dargestellt.

Bei $Pr = 0,025$ zeigt sich für eine steigende Reynolds-Zahl $Re_\tau = 180$ zu 395 , dass das Maximum der einzelnen Transportterme größer wird. Dies ist auf den größeren Energiegehalt der turbulenten Strömung und somit der Schwankungsgrößen zurückzuführen. Der Produktionsterm $P_{\theta\theta}$ wächst bei steigender Reynolds-Zahl um 130 %. Dies lässt sich auch für den Dissipations-term und die molekulare Diffusion beobachten. Die Position der maximalen Produktion verschiebt sich von $y^+ \approx 50$ bei $Re_\tau = 180$ zu $y^+ \approx 85$ bei $Re_\tau = 395$. Der viskose Bereich hat bei niedrigen Prandtl-Zahlen einen Einfluss bis weit in den Bereich der Kernströmung hinein. Unmittelbar an der Wand gleichen sich die Terme der Dissipation und der molekularen Diffusion gegenseitig aus. Mit zunehmendem Wandabstand y^+ stehen der Produktions- und Dissipationsterm im Gleichgewicht.

Für $Pr = 0,71$ zeigt sich ein geringer Einfluss der Reynolds-Zahl auf die Größe der Transportterme. Das Maximum der Produktion der Temperaturvarianz wächst beim Anstieg der Reynolds-Zahl von $Re_\tau = 180$ auf 395 um nur 2,5 %. Diese Größenordnung ist für alle Transportterme zu beobachten. Ursache ist die geringere Dämpfungswirkung der thermischen Diffusivität bei $Pr = 0,71$. Das Maximum der Produktion ist für $Re_\tau = 180$ und für $Re_\tau = 395$ bei $y^+ \approx 13$ zu erkennen. Auch hier gleichen sich unmittelbar an der Wand die Terme der Dissipation und molekularen Diffusion aus. Ab einem Wandabstand $y^+ \approx 5$ stehen die Produktion und die Dissipation im Gleichgewicht.

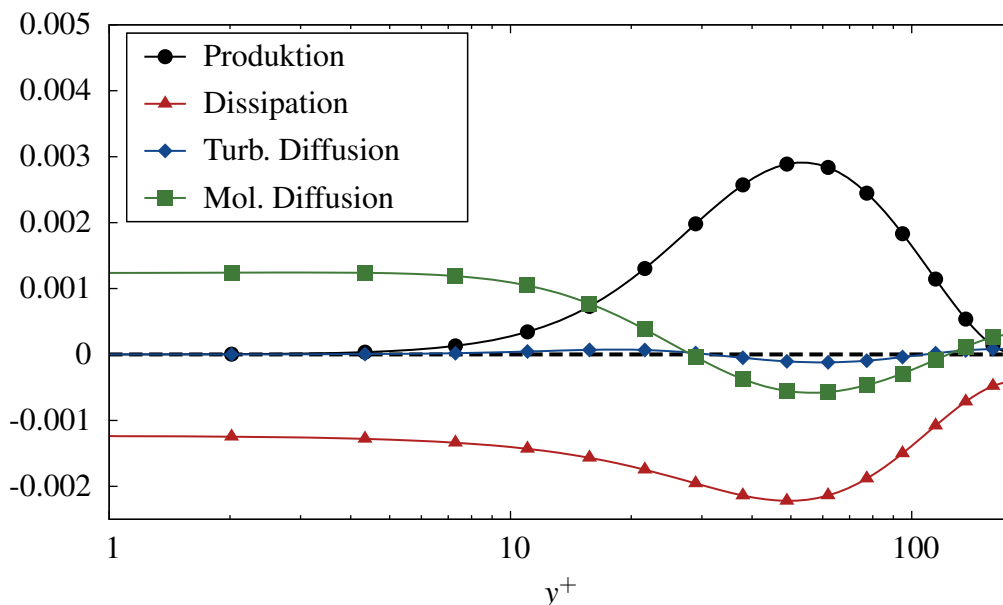


Abbildung A.23.: Verlauf der entdimensionierten Transportterme der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}$ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ mittels der DNS-Daten für eine vollständig entwickelte Plattenkanalströmung bei $Re_\tau = 180$ und $Pr = 0,025$ von Abe et al. [85,86].

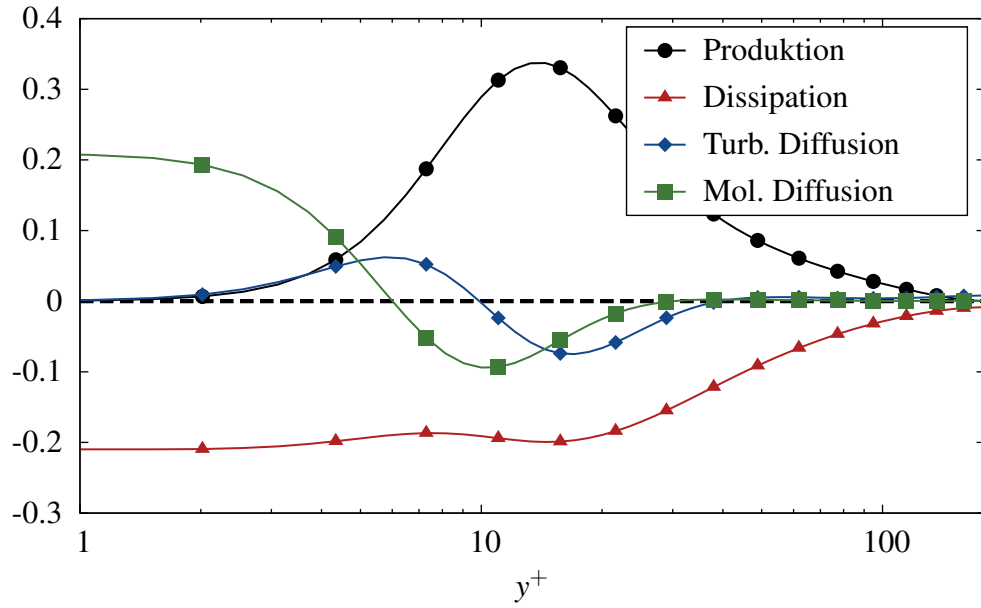


Abbildung A.24.: Verlauf der entdimensionierten Transportterme der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}$ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ mittels der DNS-Daten für eine vollständig entwickelte Plattenkanalströmung bei $Re_\tau = 180$ und $Pr = 0,71$ von Abe et al. [85,86].

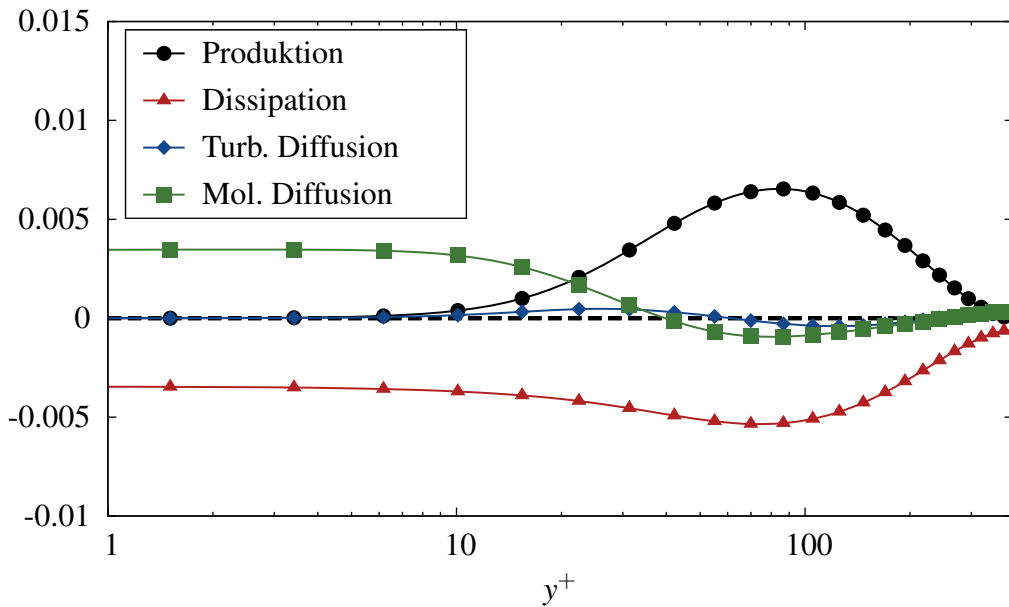


Abbildung A.25.: Verlauf der entdimensionierten Transportterme der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}$ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ mittels der DNS-Daten für eine vollständig entwickelte Plattenkanalströmung bei $Re_\tau = 395$ und $Pr = 0,025$ von Abe et al. [85,86].

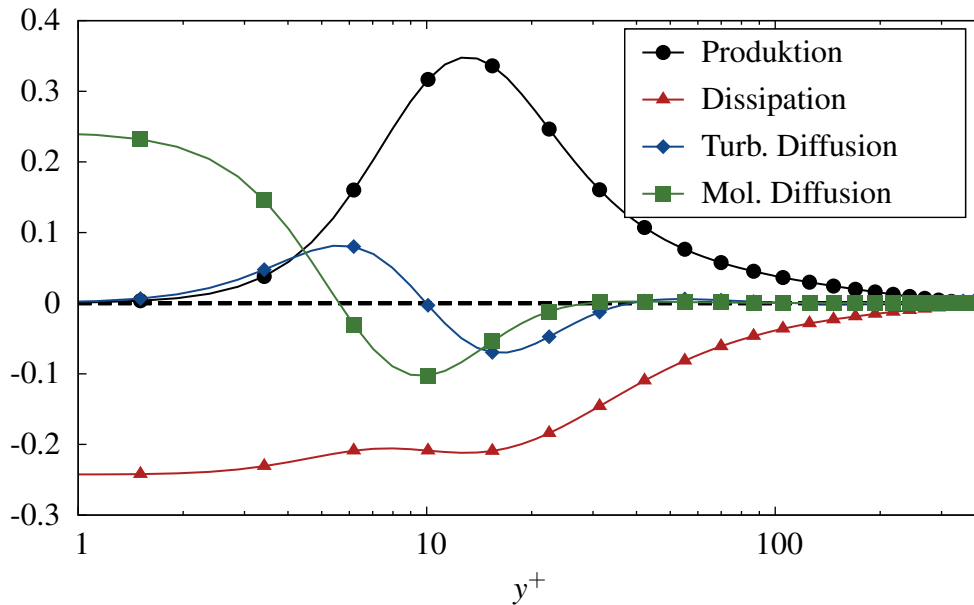


Abbildung A.26.: Verlauf der entdimensionierten Transportterme der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}$ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ mittels der DNS-Daten für eine vollständig entwickelte Plattenkanalströmung bei $Re_\tau = 395$ und $Pr = 0,71$ von Abe et al. [85,86].

A.2.4. Einfluss der Prandtl-Zahl auf Konzepte der turbulenten thermischen Diffusivität

Hier soll der Einfluss der Prandtl-Zahl auf verschiedene Ansätze der turbulenten thermischen Diffusivität α_t bei niedriger Reynolds-Zahl $Re_\tau = 180$ mit Hilfe der DNS-Daten von Abe et al. [85,86] analysiert werden. Dieser Vergleich stellt eine Ergänzung der Analyse bei $Re_\tau = 640$ dar, die in den Abb. 6.16 und 6.17 dargestellt ist.

In den Abb. A.27 und A.28 ist der Verlauf der turbulenten thermischen Diffusivität α_t^+ über dem normierten Wandabstand y^+ für $Re_\tau = 180$ bei $Pr = 0,025$ und $Pr = 0,71$ dargestellt. Für die DNS bei $Pr = 0,025$ nimmt das Maximum der turbulenten thermischen Diffusivität α_t^+ von $\alpha_t^+ \approx 37,5$ bei $Re_\tau = 640$ auf $\alpha_t^+ \approx 6,85$ bei $Re_\tau = 180$ ab. Bei $Pr = 0,71$ verschiebt sich das Maximum der turbulenten thermischen Diffusivität nur leicht von $\alpha_t^+ \approx 59$ bei $Re_\tau = 640$ zu $\alpha_t^+ \approx 18,2$ bei $Re_\tau = 180$. Ursache für diesen Effekt ist das allgemein niedrigere Turbulenzniveau der Strömung sowie die starke viskose Dämpfungswirkung der Schwankungsgrößen bei niedrigen molekularen Prandtl-Zahlen.

Für $Pr = 0,025$ zeigt der Ansatz von Manservisi & Menghini [65,66] die beste Übereinstimmung zur DNS. Dies wird durch die Ergebnisse bei $Re_\tau = 640$ bestätigt. Hier beträgt die maximale Abweichung zur DNS weniger als 8 %. Die drei Modelle von Abe et al. [61] zeigen hingegen eine deutliche Unterschätzung des Verlaufs von bis zu 70 % (Modell C). Aus diesem Grund sind sie für die Berechnung von Strömungen niedriger molekularer Prandtl-Zahl nicht geeignet.

Für $Pr = 0,71$ lässt sich eine Überschätzung für den Ansatz von Manservisi & Menghini [65, 66] feststellen. Die maximale Abweichung beträgt hier bei $y^+ \approx 100$ 34 % zur DNS. Auch die drei Modelle von Abe et al. [61] können den Verlauf der DNS nicht korrekt wiedergeben. Der Maximalwert von α_t^+ wird für die Modelle A , B und C um bis zu 28 % unterschätzt.

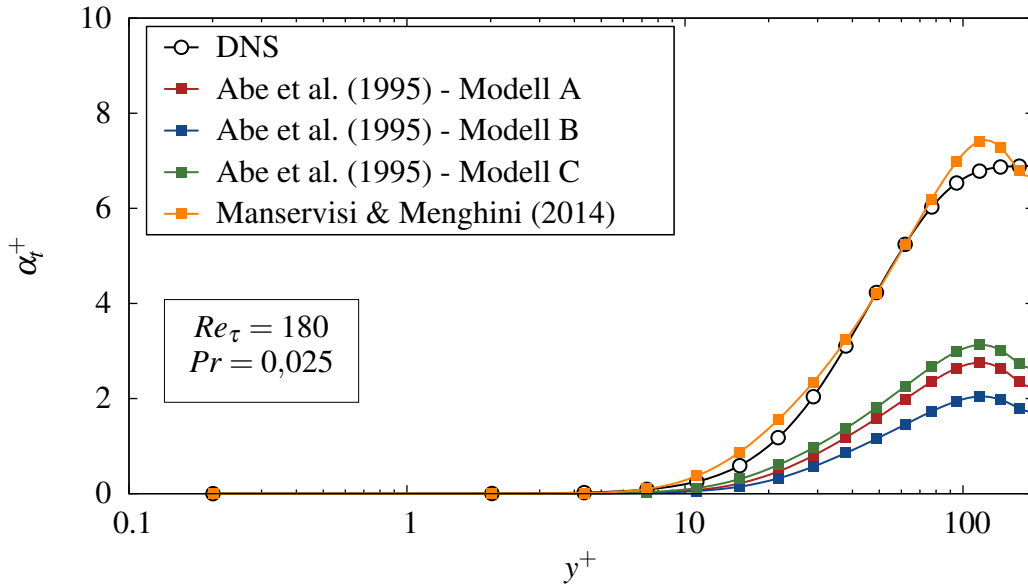


Abbildung A.27.: Verlauf der turbulenten Diffusivität α_t^+ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ für die Modelle von Abe et al. [61] und Manservisi & Menghini [65,66] im Vergleich zu den DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 180$ und $Pr = 0,025$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).

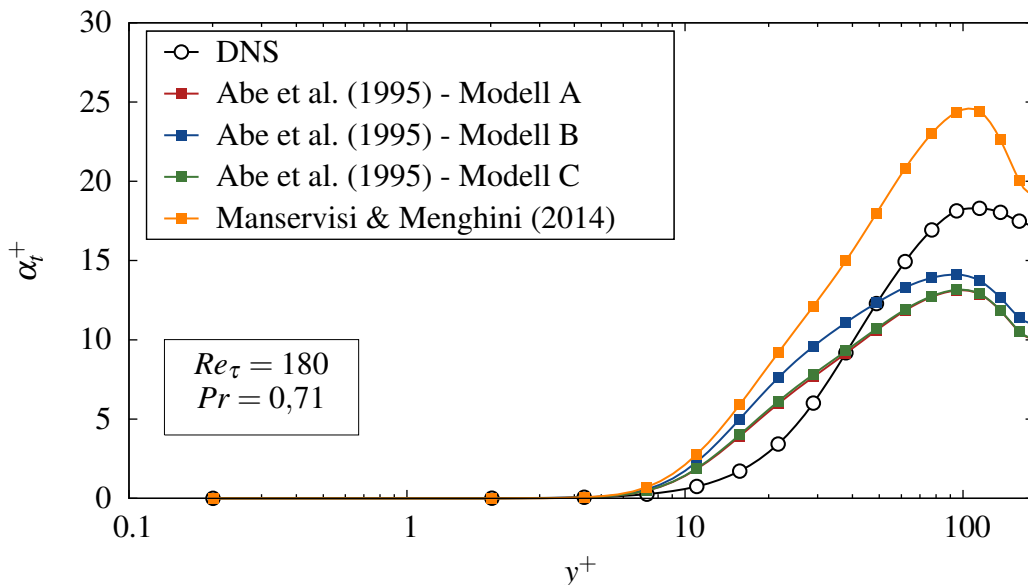


Abbildung A.28.: Verlauf der turbulenten Diffusivität α_t^+ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ für die Modelle von Abe et al. [61] und Manservisi & Menghini [65,66] im Vergleich zu den DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 180$ und $Pr = 0,71$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).

Es lässt sich schlussfolgern, dass die Ergebnisse für $Pr = 0,025$ und $Re_\tau = 640$ bestätigt werden. Der Ansatz von Manservisi & Menghini [65,66] ist durch Einführung des Einflusses der molekularen Prandtl-Zahl in den Dämpfungsfunktionen das einzige Modell, das im Vergleich zu den DNS den Verlauf der turbulenten thermischen Diffusivität α_t^+ mit geringen Abweichungen wiedergeben kann. Für $Pr = 0,71$ hingegen zeigen alle untersuchten Modelle eine deutliche Abweichung des Verlaufs von bis zu 30 % gegenüber der DNS.

A.2.5. Erweiterung des Ansatzes nach So & Sommer (1994)

Mit Hilfe einer Parameterstudie für ein numerisches Modell kann eine Modifikation der wesentlichen Koeffizienten C_{λ_1} und A^+ in Abhängigkeit der molekularen Prandtl-Zahl Pr ermittelt werden. Als Validierung dienen ebenfalls die DNS-Daten von Abe et al. [85,86], die einen genauen Einblick in die Verläufe der turbulenten thermischen Diffusivität und des Temperaturverlaufs bei unterschiedlichen Re_τ und Pr geben.

Für eine Variation wurde ausschließlich der Parameter $A^+(Pr)$ variiert, da sich der Einfluss dieser Terms der Dämpfungsfunktion bis weit in die Kernströmung bemerkbar macht. Die Formulierung des modifizierten Koeffizienten sei wie folgt angegeben:

$$A^+(Pr) = \begin{cases} 33/Pr^{0,4} & \text{falls } Pr < 0,25 \\ 50/Pr^{1/8} & \text{falls } Pr \geq 0,25 \end{cases} \quad (\text{A.42})$$

Wie in Abb. A.30 dargestellt ist, zeigt sich bei einem direkten Vergleich der Verläufe der modifizierten und ursprünglichen Koeffizienten, dass bei $Pr = 0,025$ nun eine geringe Dämpfungswirkung im wandfernen Bereich der Strömung zu beobachten ist. Es ist auch insgesamt eine deutlich Verbesserung bei niedrigen molekularen Prandtl-Zahlen zu erkennen. Die relative Abweichung des Verlaufs von α_t^+ zur DNS beträgt für das modifizierte Modell nur 9 %, wohingegen sich für die beiden ursprünglichen Formulierungen Abweichungen von 19 % für den Ansatz nach Sommer et al. [163] bzw. 48 % für den Ansatz von So & Sommer [162] ermitteln lassen.

Für $Pr = 0,71$ lässt sich nur eine geringe Verschlechterung feststellen. Das modifizierte Modell weist hier eine maximale Abweichung zur DNS von 28 % bei $y^+ = 65$ auf. Dies äußert sich auch in der Vorhersage des dimensionslosen Temperaturprofils, wie in Abb. A.32 dargestellt ist. Die Modelle sind jeweils mit dem „Elliptic-Blending“-Reynolds-Spannungsmodell von Dehoux [75] kombiniert worden. Die Modellgleichungen der Temperaturvarianz und ihrer Dissipationsrate sind hier in ihrer ursprünglichen Formulierung in OpenFOAM® [142] implementiert worden.

Das Modell mit modifiziertem Koeffizienten $A^+(Pr)$ zeigt auch für sehr hohe Prandtl-Zahlen eine Verbesserung im Vergleich zu den DNS-Daten. Eine allgemeingültige Aussage zur Eignung des Modells bei variierender Prandtl-Zahl kann leider erst unter Berücksichtigung weiterer Testfä-

le erfolgen. Vielmehr wird durch diese Modifikation gezeigt, welches Potenzial durch eine Überarbeitung gegeben ist.

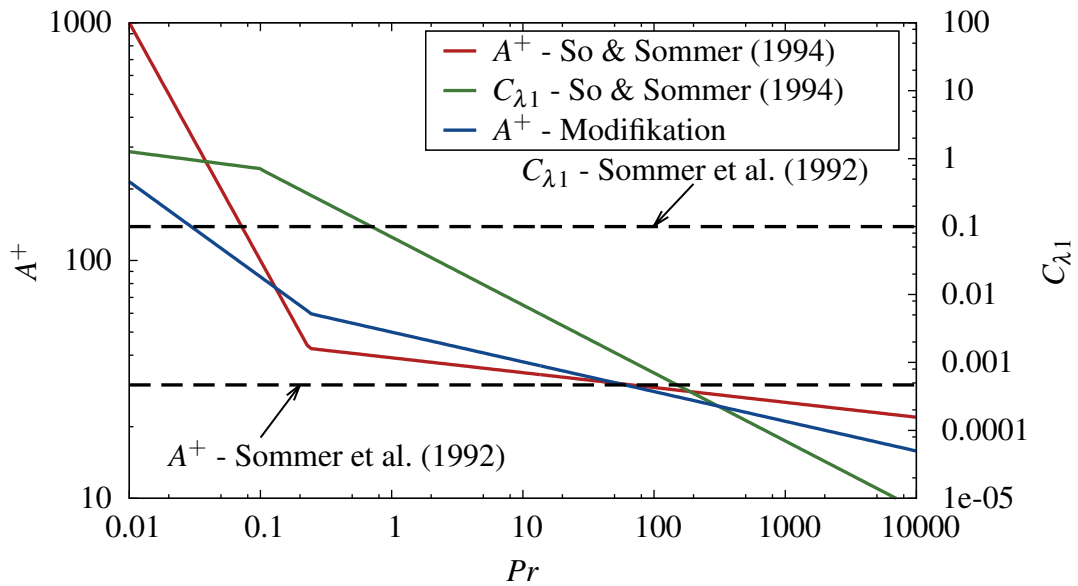


Abbildung A.29.: Verlauf der Koeffizienten $C_{\lambda 1}$ und A^+ der Dämpfungsfunktion von Sommer et al. [163] sowie So & Sommer [162] in Abhängigkeit der molekularen Prandtl-Zahl Pr .

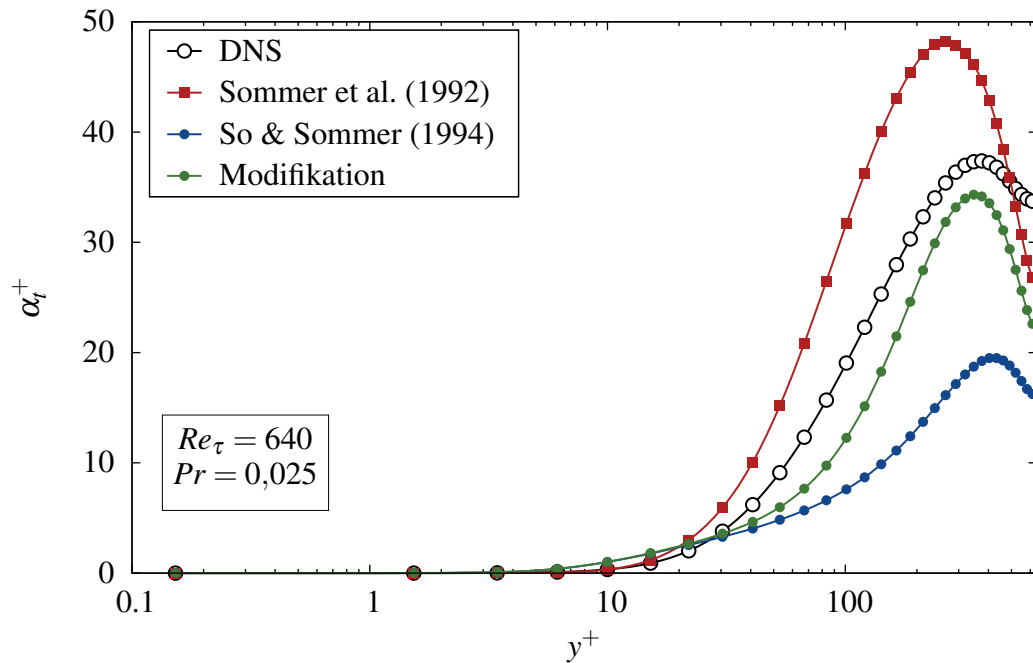


Abbildung A.30.: Verlauf der turbulenten Diffusivität α_t^+ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ für die Modelle von Sommer et al. [163], So & Sommer [162] sowie einer modifizierten Variante im Vergleich zu den DNS-Daten nach Abe et al. [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).

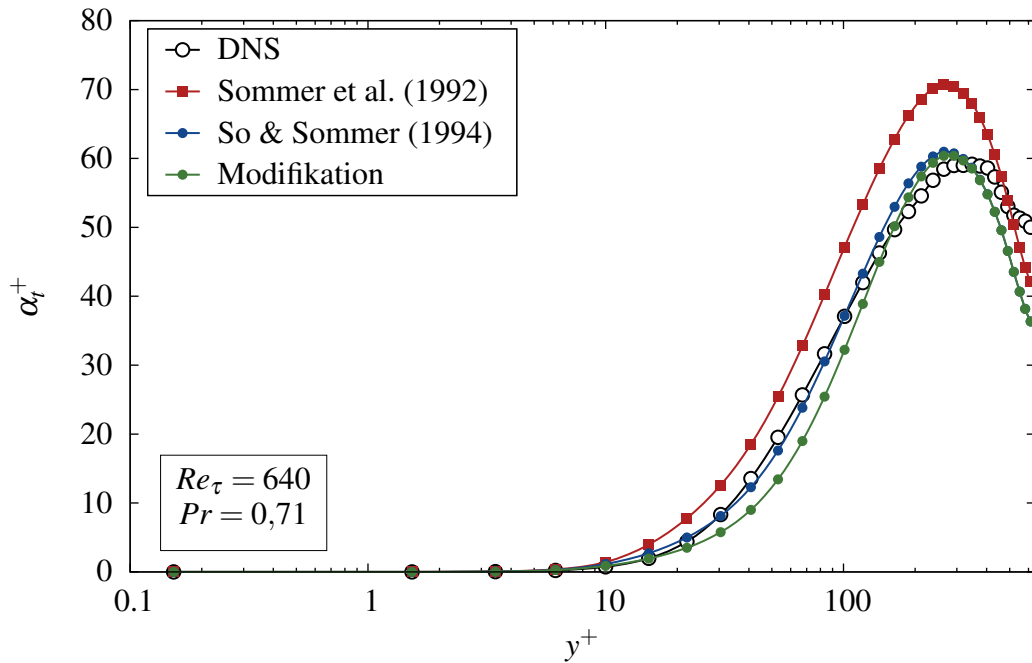


Abbildung A.31.: Verlauf der turbulenten Diffusivität α_t^+ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ für die Modelle von Sommer et al. [163], So & Sommer [162] sowie einer modifizierten Variante im Vergleich zu den DNS-Daten nach Abe et al. [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,71$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).

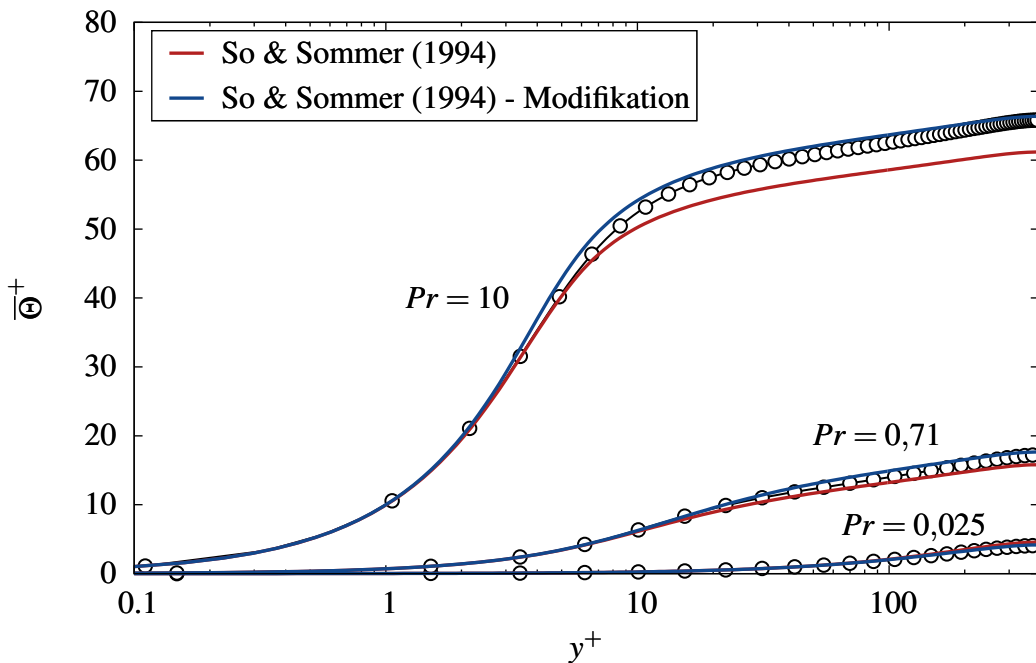


Abbildung A.32.: Verlauf der normierten Temperatur $\bar{\Theta}^+$ des Modells nach So & Sommer [162] und des modifizierten Modells (jeweils gekoppelt mit dem RSM-EBM [75]) über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ bei $Re_\tau = 395$ und unterschiedlichen Prandtl-Zahlen Pr im Vergleich zur DNS von Abe et al. [85,86] (Symbole für jeden 4. Datenpunkt).

A.2.6. Einfluss der Reynolds- und Prandtl-Zahl auf Ansätze zweiter Ordnung

In dieser Analyse wird der Einfluss der Reynolds- und Prandtl-Zahl auf Ansätze zweiter Ordnung der turbulenten Wärmeflüsse mit Hilfe der DNS-Daten von Abe et al. [85,86] untersucht.

In Abb. A.33 und A.34 ist der Verlauf des kombinierten Korrelations- und Dissipationsterm $\Pi_{i\theta}^+ - \varepsilon_{i\theta}^+$ für die axiale und wandnormale turbulente Wärmeflusskomponente dargestellt. Mit zunehmender Reynolds-Zahl nimmt das Minimum der Kombination für die axiale Wärmeflusskomponente betragsmäßig um 46 % zu. Die Position des Minimums ist für beide Reynolds-Zahlen bei $y^+ \approx 4$ zu erkennen. Auch für die wandnormale Komponente nimmt das Maximum bei steigender Reynolds-Zahl zu. Zwischen $Re_\tau = 180$ und 395 lässt sich ein Anstieg des Maximalwertes von fast 50 % beobachten. Die Position des Maximums bleibt nahezu unverändert bei $y^+ \approx 40$. Der Anstieg des kombinierten Transportterms der beiden turbulenten Wärmeflusskomponenten lässt sich auf das insgesamt höhere Turbulenzniveau und den größeren Energiegehalt der Schwankungsgrößen bei steigender Reynolds-Zahl zurückführen.

Für die axiale Wärmeflusskomponente zeigen das Modell nach Lai & So [172] und nach Baumann [70] die beste Übereinstimmung zur DNS. Für das Modell von Lai & So [172] beträgt die größte Abweichung zur DNS bei $Re_\tau = 180$ ungefähr 36 % und für $Re_\tau = 395$ ungefähr 34 %. Der Ansatz von Baumann [70] zeigt für den Bereich $y^+ = 20 - 100$ die beste Übereinstimmung. Er weist seine größte Abweichung in Wandnähe auf ($y^+ \approx 4$). Die Ansätze von Shikazono & Kasagi [72] und Carteciano [73] können den Verlauf der DNS nicht korrekt wiedergeben. Ihre maximale Abweichung zur DNS beträgt bei $Re_\tau = 180$ und 395 jeweils fast 180 %. Für die wandnormale turbulente Wärmeflusskomponente zeigen alle Modellansätze deutliche Abweichungen. Die beste Übereinstimmung weist erneut der Ansatz von Baumann [70] auf. Die Abweichung des Maximums im Vergleich zur DNS beträgt bei diesen Ansatz für $Re_\tau = 180$ fast 12 % und für $Re_\tau = 395$ fast 10 %. Der Ansatz von Carteciano [73] zeigt hier eine Überbewertung von fast 50 % bei $Re_\tau = 180$ und 20 % bei $Re_\tau = 395$. In der Tendenz nehmen die Abweichungen der Modellansätze zur DNS bei steigenden Reynolds-Zahlen ab. Der Ansatz von Lai & So [172] zeigt für die wandnormale turbulente Wärmeflusskomponente das größte Defizit mit einer Abweichung von fast 40 % bei $Re_\tau = 395$.

In Abb. A.35 und A.36 ist der Verlauf des kombinierten Korrelations- und Dissipationsterm $\Pi_{i\theta}^+ - \varepsilon_{i\theta}^+$ für $Pr = 0,71$ dargestellt. Hier ist bei beiden Wärmeflusskomponenten der Einfluss der Reynolds-Zahl deutlich geringer. Für die axiale Komponente ergibt sich für einen Anstieg der Reynolds-Zahl eine Änderung von nur 10 %. Das Maximum der wandnormalen Komponente ändert sich nur um 30 %. Die Position der Extremwerte bleibt für beide Komponenten identisch.

Für $Pr = 0,71$ lässt sich für die axiale turbulente Wärmeflusskomponente die beste Übereinstimmung für den Ansatz von Shikazono & Kasagi [72] erkennen. Seine maximale Abweichung zur DNS beträgt in unmittelbarer Wandnähe für beide Reynolds-Zahlen weniger als 20 %. Die größte Abweichung lässt sich für den Ansatz von Carteciano [73] erkennen. Sie beträgt für einen

dimensionslosen Wandabstand $y^+ = 2$ fast 170 % bei $Re_\tau = 395$. Für die wandnormale turbulente Wärmeflusskomponente zeigt erneut das Modell nach Shikazono & Kasagi [72] die beste Übereinstimmung. Die Abweichung des Maximums beträgt für $Re_\tau = 180$ fast 32 % und für $Re_\tau = 395$ fast 28 % im Vergleich zur DNS. Die Ansätze von Lai & So [172] und Carteciano [73] zeigen die schlechteste Übereinstimmung mit einer Überschätzung des Maximalwertes von fast 100 %.

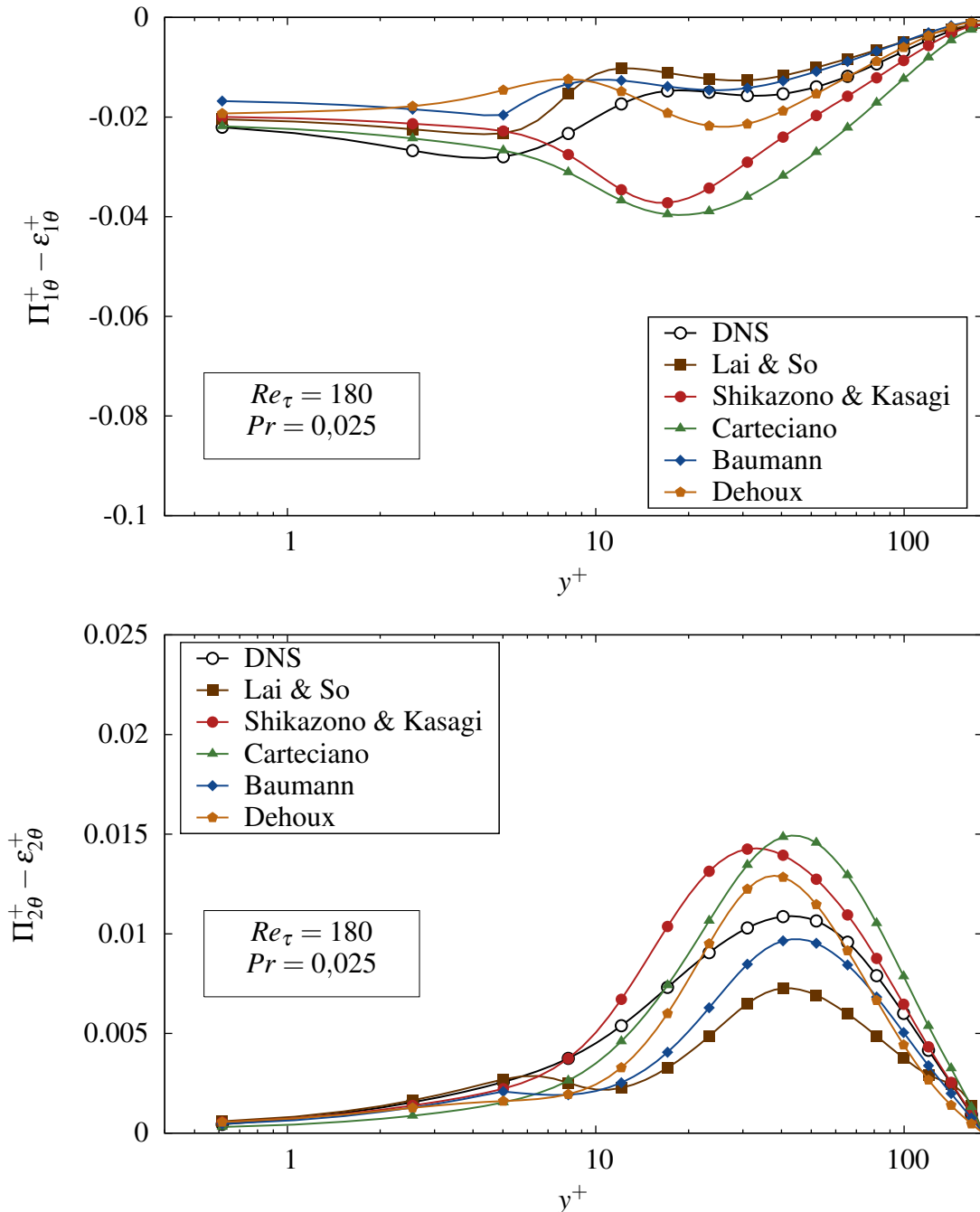


Abbildung A.33.: Verlauf der vorgestellten, kombinierten Modellansätze des Korrelations- und Dissipationsterms $\Pi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta}$ (oben) bzw. $\Pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ (unten), ermittelt auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 180$ und $Pr = 0,025$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).

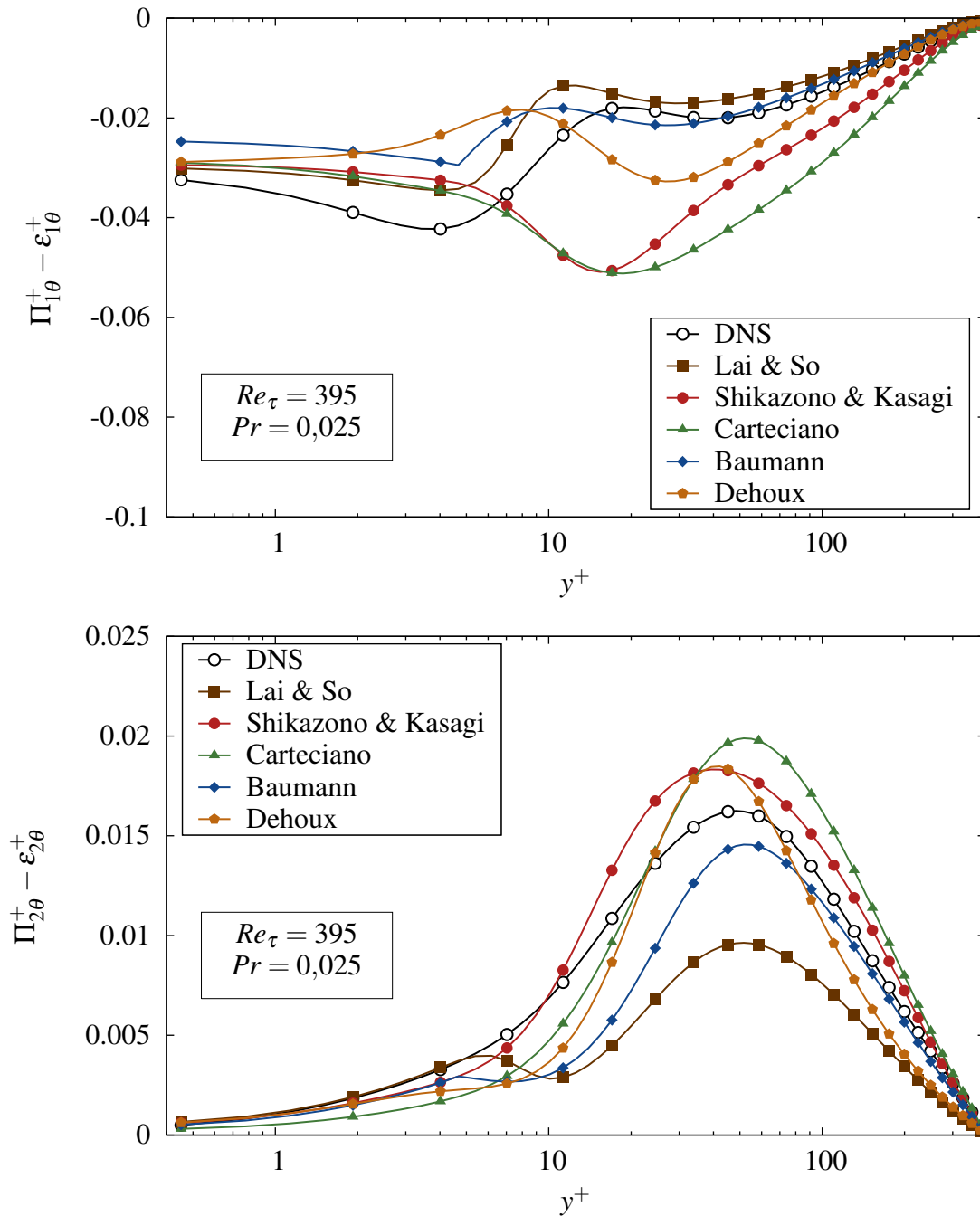


Abbildung A.34.: Verlauf der vorgestellten, kombinierten Modellansätze des Korrelations- und Dissipationsterms $\Pi_{1\theta} - \epsilon_{1\theta}$ (oben) bzw. $\Pi_{2\theta} - \epsilon_{2\theta}$ (unten), ermittelt auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 395$ und $Pr = 0,025$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).

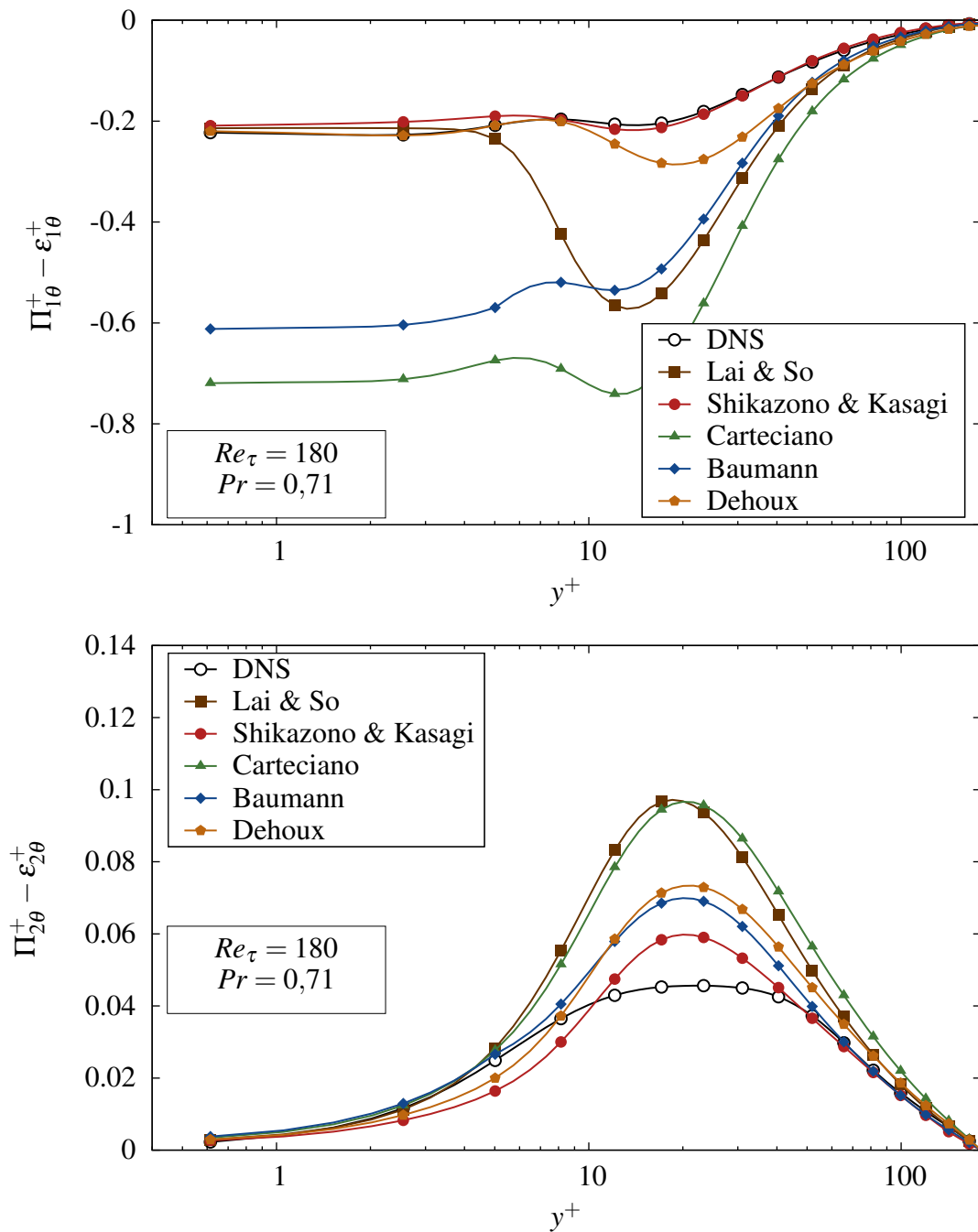


Abbildung A.35.: Verlauf der vorgestellten, kombinierten Modellansätze des Korrelations- und Dissipationsterms $\Pi_{1\theta} - \epsilon_{1\theta}$ (oben) bzw. $\Pi_{2\theta} - \epsilon_{2\theta}$ (unten), ermittelt auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 180$ und $Pr = 0,71$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).

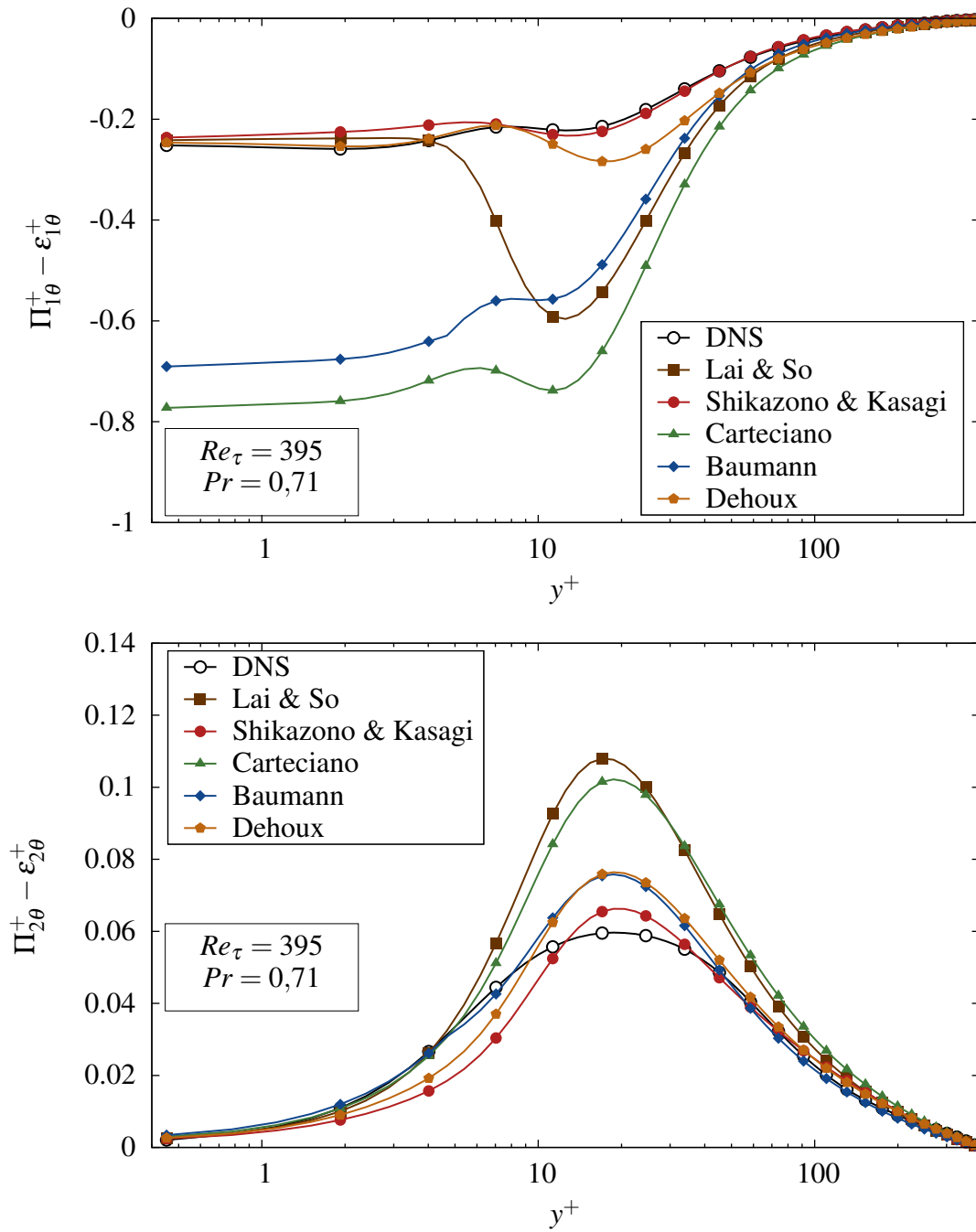


Abbildung A.36.: Verlauf der vorgestellten, kombinierten Modellansätze des Korrelations- und Dissipationsterms $\Pi_{1\theta} - \epsilon_{1\theta}$ (oben) bzw. $\Pi_{2\theta} - \epsilon_{2\theta}$ (unten), ermittelt auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 395$ und $Pr = 0,71$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).

A.2.7. Einfluss der thermischen Randbedingungen auf die Schließungsansätze

Bei direkten numerischen Simulationen in turbulenten Plattenkanalströmungen wird üblicherweise als Transportgröße die Temperaturdifferenz zwischen Wand- und Strömung $\Theta = (T_w - T)$ berücksichtigt [85,187]. Dies erlaubt den Einsatz von periodischen Randbedingungen für die Energieerhaltungsgleichung am Ein- und Auslass des Strömungsgebiets. Als Randbedingung der DNS ergibt sich bei konstanter, beidseitiger Beheizung der Wände ($\dot{q} = \text{konst.}$) an der Wand $\Theta|_w = 0$. Der über die Wände zugeführte Wärmestrom wird ausschließlich über den Quellterm S^* in der Transportgleichung berücksichtigt. Die Größe $\overline{\theta'}$ entspricht hier der Fluktuation um den zeitlich Mittelwert der Temperaturdifferenz $\overline{\Theta}$. Bei Vorgabe eines konstanten Wert der Temperaturdifferenz an der Wand muss demnach auch für ihre Schwankungsgröße die Bedingung $\theta'|_w = 0$ gültig sein. Das asymptotische Wandverhalten, das mit einer Taylorreihen-Entwicklung abgeleitet werden kann (vgl. Kap. 6.4.2), ist nur für diesen Fall gültig.

Eine Vielzahl von Modellansätzen wird unter Annahme einer verschwindenden Temperaturfluktuation an den Wänden entwickelt. Dies stellt eine erhebliche Vereinfachung dar, die in realen Strömungen so nicht erfüllt ist. Diese Modelle dürften somit für die Berechnung komplexer Geometrien nicht eingesetzt werden. Für den Ansatz einer konstanten turbulenten Prandtl-Zahl gilt:

$$\overline{v'T'} = -\frac{v_t}{Pr_t} = -\frac{-\overline{u'v'}/(d\bar{u}/dy)}{Pr_t} \quad \text{mit} \quad Pr_t = 0,9. \quad (\text{A.43})$$

Da die turbulente Wärmeflusskomponente in Bezug zur turbulenten Reynolds-Schubspannung $\overline{u'v'} \sim y^{+3}$, die an der Wand den Wert Null annimmt, gesetzt wird, lässt sich nach Sommer et al. [194] mit $v_t^+ \sim y^+$ auch für diesen Ansatz die Annahme $\theta'|_w = 0$ ableiten.

Wird anstelle der Transportgleichung der Temperaturdifferenz Θ die Transportgleichung der Temperatur T gelöst, ergibt sich auch ein anderes asymptotisches Wandverhalten der zeitlich gemittelten Größen und der Schwankungsgrößen:

$$\begin{aligned} \bar{u}^+ &= y^+ + \dots ; \\ \bar{\Theta}^+ &= Pr y^+ + \dots ; \\ u'^+ &= b_1 y^+ + c_1 y^{+2} + d_1 y^{+3} + \dots ; \\ v'^+ &= c_2 y^{+2} + d_2 y^{+3} + \dots ; \\ w'^+ &= b_3 y^+ + c_3 y^{+2} + d_3 y^{+3} + \dots ; \\ \theta'^+ &= a_\theta + b_\theta y^+ + c_\theta y^{+2} + d_\theta y^{+3} + \dots ; \\ p'^+ &= a_p + b_p y^+ + c_p y^{+2} + d_p y^{+3} + \dots ; \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

wobei die Größen y^+ den dimensionslosen Wandabstand, \bar{u}^+ und $\bar{\Theta}^+$ die normierte Geschwindigkeit und Skalargröße, u'^+ , v'^+ und w'^+ die Geschwindigkeitsfluktuationen in einer jeweiligen

Raumrichtung ($i = 1,2,3$), θ'^+ die Temperaturfluktuation und p' die Druckfluktuation darstellen. Aus der Kontinuitätsgleichung der turbulenten Geschwindigkeitsfluktuationen eines inkompressiblen Mediums und der Haftbedingung an der Wand ($y = 0$) kann unmittelbar gefolgert werden, dass $a_i = 0$ und $b_2 = 0$ gelten muss. Unter Annahme nicht verschwindender Temperaturfluktuationen θ' wird a_θ nun nicht mehr eliminiert.

Für die zweiten Momente gilt demnach unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung:

$$\begin{aligned}
\overline{u'^2}^+ &= \overline{b_1^2} y^{+2} + \dots; & \overline{v'^2}^+ &= \overline{c_2^2} y^{+4} + \dots; & \overline{w'^2}^+ &= \overline{b_3^2} y^{+2} + \dots; \\
\overline{u'v'}^+ &= \overline{b_1 c_2} y^{+3} \dots; \\
k^+ &= \frac{1}{2} (\overline{u'^2}^+ + \overline{v'^2}^+ + \overline{w'^2}^+) = \frac{1}{2} [\overline{b_1^2} + \overline{b_3^2}] y^{+2} + \frac{1}{2} \overline{c_2^2} y^{+4} + \dots; \\
\varepsilon^+ &= \nu \overline{\frac{\partial u_i'^+}{\partial y^+} \frac{\partial u_i'^+}{\partial y^+}} = \nu (\overline{b_1^2} + \overline{b_3^2}) + \dots; \\
\overline{u'\theta'}^+ &= \overline{b_1 a_\theta} y^+ + \dots; & \overline{v'\theta'}^+ &= \overline{c_2 a_\theta} y^{+2} + \dots; \\
\overline{\theta'^2}^+ &= \overline{a_\theta^2} + \dots; & \varepsilon_{\theta\theta}^+ &= 2\alpha \overline{\frac{\partial \theta'^+}{\partial y^+} \frac{\partial \theta'^+}{\partial y^+}} = 2\alpha \overline{b_\theta^2} + \dots.
\end{aligned} \tag{A.45}$$

Für die turbulente Wirbelviskosität ν_t^+ und die turbulente thermische Diffusivität α_t^+ ergeben sich nun unter Berücksichtigung der Gl. (5.13) und (6.49):

$$\nu_t^+ = \frac{-\overline{u'v'}^+}{\partial \overline{u^+} / \partial y^+} = -\overline{b_1 c_2} y^{+3} + \dots; \quad \alpha_t^+ = \frac{-\overline{v'\theta'}^+}{\partial \overline{\Theta^+} / \partial y^+} = -\frac{\overline{c_2 a_\theta} y^{+2}}{Pr} + \dots. \tag{A.46}$$

Die Ordnung der turbulenten thermischen Diffusivität α_t^+ hat sich im Vergleich zu Gl. (6.58) um Eins gesenkt. Für die turbulente Prandtl-Zahl Pr_t gilt nun:

$$Pr_t = \frac{\nu_t^+}{\alpha_t^+} = \frac{\overline{b_1 c_2} Pr}{\overline{c_2 a_\theta}} y^+ + \dots. \tag{A.47}$$

Mit Hilfe der Tab. A.1 können die wesentlichen Transport- und Vernichtungsterme der Transportgleichung der turbulenten Wärmeflüsse (vgl. Gl. (6.52)) mit und ohne Temperaturfluktuationen an der Wand hinsichtlich ihres Verhaltens analysiert werden. Im Unterschied zur Annahme verschwindender Temperaturfluktuationen an der Wand stehen nun unmittelbar an der Wand der Korrelationsterm $\Pi_{2\theta}^+$ und der molekulare Diffusionsterm $D_{2\theta}^{\nu+}$ miteinander im Gleichgewicht. Dies macht eine Anpassung des Korrelationsterms in Wandnähe erforderlich. Bisher ist jedoch für Ansätze zweiter Ordnung in der Literatur kein Vorschlag veröffentlicht worden.

Term	$\theta'_w = 0$	$\theta'_w \neq 0$
$P_{i\theta}^+$	$\mathcal{O}(y^{+4})$	$\mathcal{O}(y^{+4})$
$\varepsilon_{i\theta}^+$	$2 \left(1 + \frac{1}{Pr}\right) \overline{c_2 b_\theta} y^+$	$2 \left(1 + \frac{1}{Pr}\right) \overline{c_2 b_\theta} y^+$
$\Pi_{i\theta}^+$	$-\overline{b_\theta b_p} y^+$	$-\overline{b_p a_\theta}$
$D_{i\theta}^{v+}$	$2 \left(2 + \frac{1}{Pr}\right) \overline{c_2 b_\theta} y^+$	$\frac{2}{Pr} \overline{c_2 b_\theta} y^+ + \overline{2a_\theta c_2}$
$D_{i\theta}^{t+}$	$\mathcal{O}(y^{+4})$	$\mathcal{O}(y^{+3})$

Tabelle A.1.: Vergleich des asymptotischen Wandverhaltens der wesentlichen Transport- und Vernichtungs-
terme der wandnormalen, turbulenten Wärmeflusskomponente in einer Kanalströmung mit
nicht verschwindenden Temperaturfluktuationen.

Auch bei Verwendung von thermischen Zweigleichungsmodellen müssen für die Transportgleichungen der Temperaturvarianz und deren Dissipationsrate geeignete Randbedingungen definiert werden. Eine Möglichkeit besteht in der Annahme eines verschwindenden, wandnormalen Gradienten der Temperaturvarianz $\partial \overline{\theta'^2} / \partial n|_w = 0$. Für ihre Dissipationsrate kann dann $\varepsilon_{\theta\theta}|_w = 0$ angenommen werden. Dies führt jedoch bei Verwendung von periodischen Randbedingungen zu einem numerisch steifen Problem, da das Niveau der Temperaturvarianz im Strömungsgebiet nicht eindeutig definiert ist.

Sommer et al. [194] umgehen diese Problematik und leiten die Größe der Temperaturfluktuation an der Wand für verschiedene Konfigurationen von turbulenten Plattenkanalströmungen mit Hilfe des Energiespektrums der Temperaturfluktuationen nach Polyakov [209] ab. Dieses ist auf einfache Strömungsfälle beschränkt und wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
E_\theta &= \frac{0,072 Pr^4 \sqrt{f} \exp(-9\sqrt{f})}{\beta^6 [f Pr \Lambda^2 + \beta^2 + 1,4 f \beta (t+s) \sqrt{f Pr}]}, \\
\beta &= [0,014 + (f + 0,05)^2 Pr^2]^{1/4}, \\
t &= \cos \left\{ \frac{1}{2} \arctan [10 Pr (f + 0,05)] \right\}, \\
s &= \sin \left\{ \frac{1}{2} \arctan [10 Pr (f + 0,05)] \right\},
\end{aligned} \tag{A.48}$$

wobei $\Lambda = 1/K$ über das thermische „Aktivierungsverhältnis“ $K = \sqrt{(\rho c_p \lambda)_{\text{Fluid}} / (\rho c_p \lambda)_{\text{Wand}}}$ definiert ist und f die Frequenz darstellt. Die Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}^+$ an der Wand ergibt sich dann wie folgt:

$$\overline{\theta'^2}^+ = \int_0^\infty E_\theta(f, Pr, K) df. \tag{A.49}$$

Die Größe der Temperaturvarianz an der Wand ist von den thermischen Eigenschaften des Fluids und der Wand abhängig, was auch durch andere Arbeiten bestätigt wird [195,210].

Der Verlauf der Temperaturfluktuation $\overline{\theta'_w}$ über dem Aktivierungsverhältnis K ist bei verschiedenen Prandtl-Zahlen in Abb. A.37 dargestellt. Für niedrige Werte von K ergeben sich auch niedrige Werte der Temperaturfluktuation. Mit steigender molekularer Prandtl-Zahl nimmt auch die Größenordnung der Schwankungsgröße zu. Für ein großes Aktivierungsverhältnis existiert bei den verschiedenen molekularen Prandtl-Zahlen jeweils ein asymptotischer Grenzwert, der sich beim Ansatz nach Polyakov [209] in einem Bereich $K \approx 0,1 - 1$ einstellt. Für Quecksilber ($Pr = 0,025$) nimmt das Aktivierungsverhältnis je nach Material der Wand die Größenordnung $K \approx 0,2 - 7$ an, wohingegen für Luft ($Pr = 0,71$) die Größenordnung für verschiedene Medien mit $K \approx 0,0001 - 0,01$ angegeben werden kann [195].

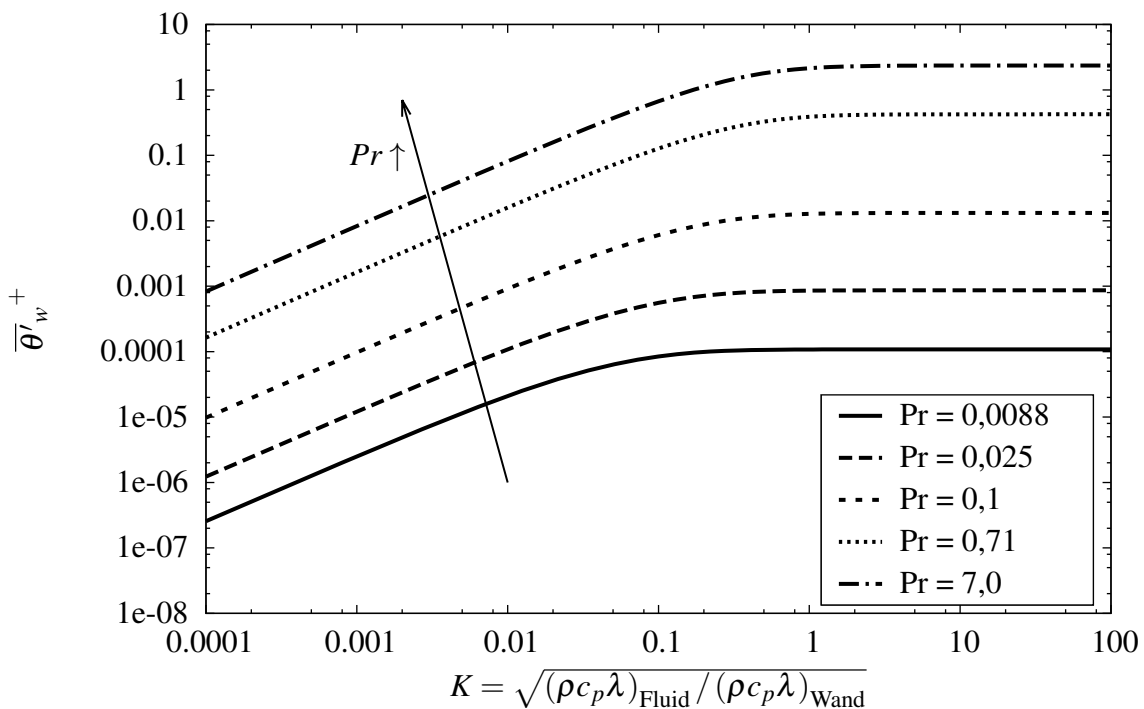


Abbildung A.37.: Verlauf der Temperaturfluktuation an der Wand $\overline{\theta'_w}^+$ über dem thermischen „Aktivierungsverhältnis“ K bei verschiedenen Prandtl-Zahlen, ermittelt mit Hilfe des Energiespektrums nach Polyakov [209].

Sommer et al. [194] konnten darüber hinaus bestätigen, dass der Einfluss nicht verschwindender Temperaturfluktuationen auf das Temperaturprofil in turbulenten Plattenkanalströmungen gering ist. Der Verlauf der Temperaturvarianz selbst hingegen wird durch eine Verschiebung des Maximums beeinflusst, was auch durch andere Arbeiten [195,196] bestätigt wird. Dies ist im Speziellen bei der Bestimmung von abhängigen Größen, wie z.B. dem Zeitskalenverhältnis R , von Bedeutung.

A.3. Einfluss der Reynolds- und Prandtl-Zahl auf die entwickelten Ansätze

A.3.1. Carteciano-AHM

In Abb. A.38 ist der Verlauf des kombinierten Korrelations- und Dissipationsterms $\Pi_{2\theta}^+ - \varepsilon_{2\theta}^+$ bei $Pr = 0,025$ und den Reynolds-Zahlen $Re_\tau = 180$ und 395 dargestellt. Die Modifikation des Korrelationsterms $\Pi_{i\theta}$ hat für niedrige Prandtl-Zahlen nur einen geringen Einfluss (vgl. Kap. 6.4.3). Die Überschätzung des Maximums beim Carteciano-AHM nimmt bei zunehmender Reynolds-Zahl geringfügig ab. Bei $Re_\tau = 180$ beträgt die relative Abweichung zur DNS ca. 30 % und bei $Re_\tau = 395$ ca. 15 %. Mit zunehmender Péclet- bzw. Reynolds-Zahl gewinnt der Korrelationsterm zunehmend an Bedeutung, was auch die marginale Verringerung der Abweichung erklärt.

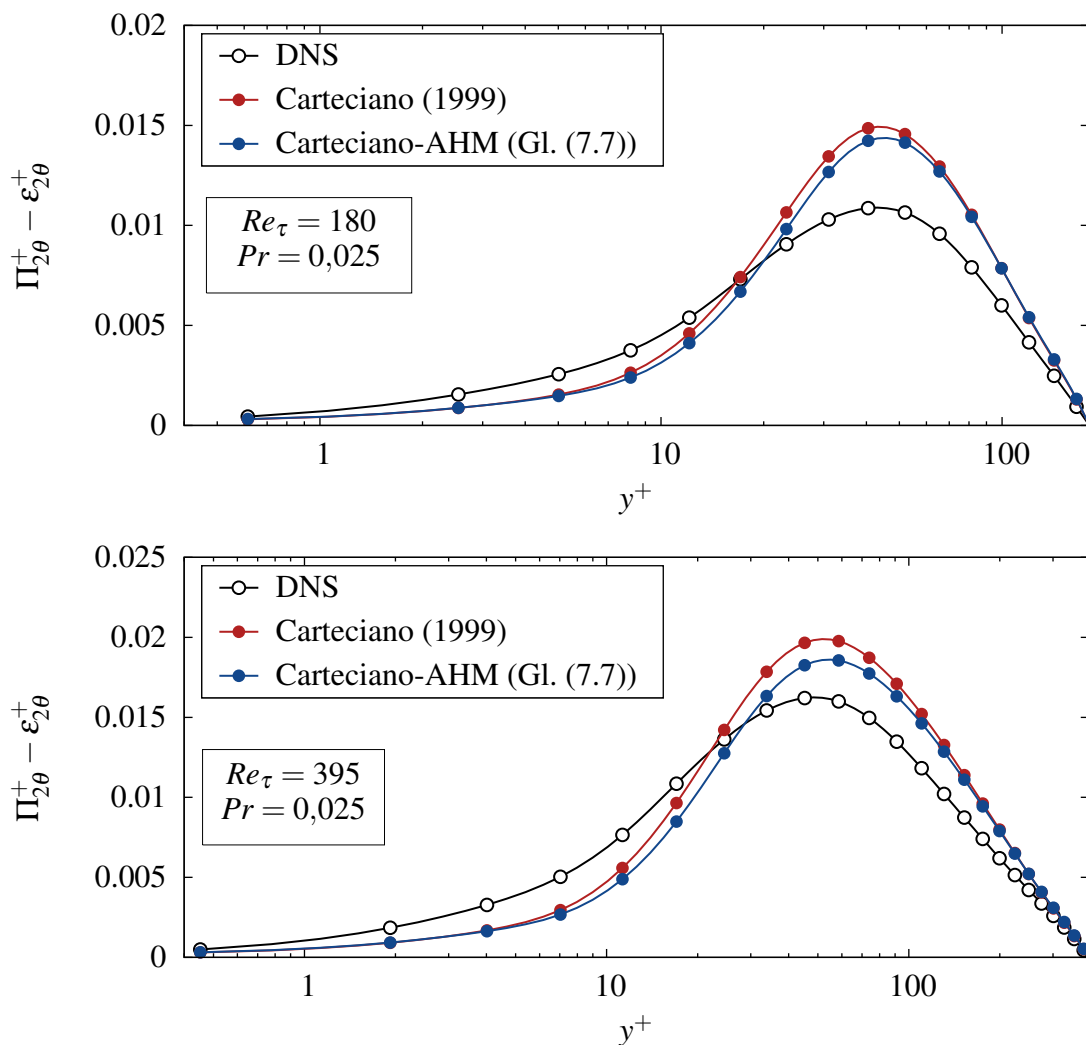


Abbildung A.38.: Verlauf der kombinierten Modellansätze des Korrelations- und Dissipationsterms $\Pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ der wandnormalen turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'}^+$ als Fkt. des dimensionslosen Wandabstands y^+ auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 180$ (oben) und $Re_\tau = 395$ (unten) sowie $Pr = 0,025$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).

Mit größerer molekularer Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ ist ein zunehmender Einfluss des Korrelations-terms $\Pi_{i\theta}$ festzustellen, was in Abb. A.39 dargestellt ist. Es lässt sich erkennen, dass die Modifikation für steigende Reynolds-Zahlen eine deutliche Verbesserung bewirkt. Für den ursprünglichen Ansatz nach Carteciano [73] beträgt die Abweichung des Maximums zur DNS fast 100 % bei $Re_\tau = 180$ und fast 75 % bei $Re_\tau = 395$. Das Carteciano-AHM hingegen weist nur eine Abweichung von 60 % bei $Re_\tau = 180$ und von 28 % bei $Re_\tau = 395$ auf. Dies erlaubt auch Strömungen variierender Prandtl-Zahlen korrekt abzubilden.

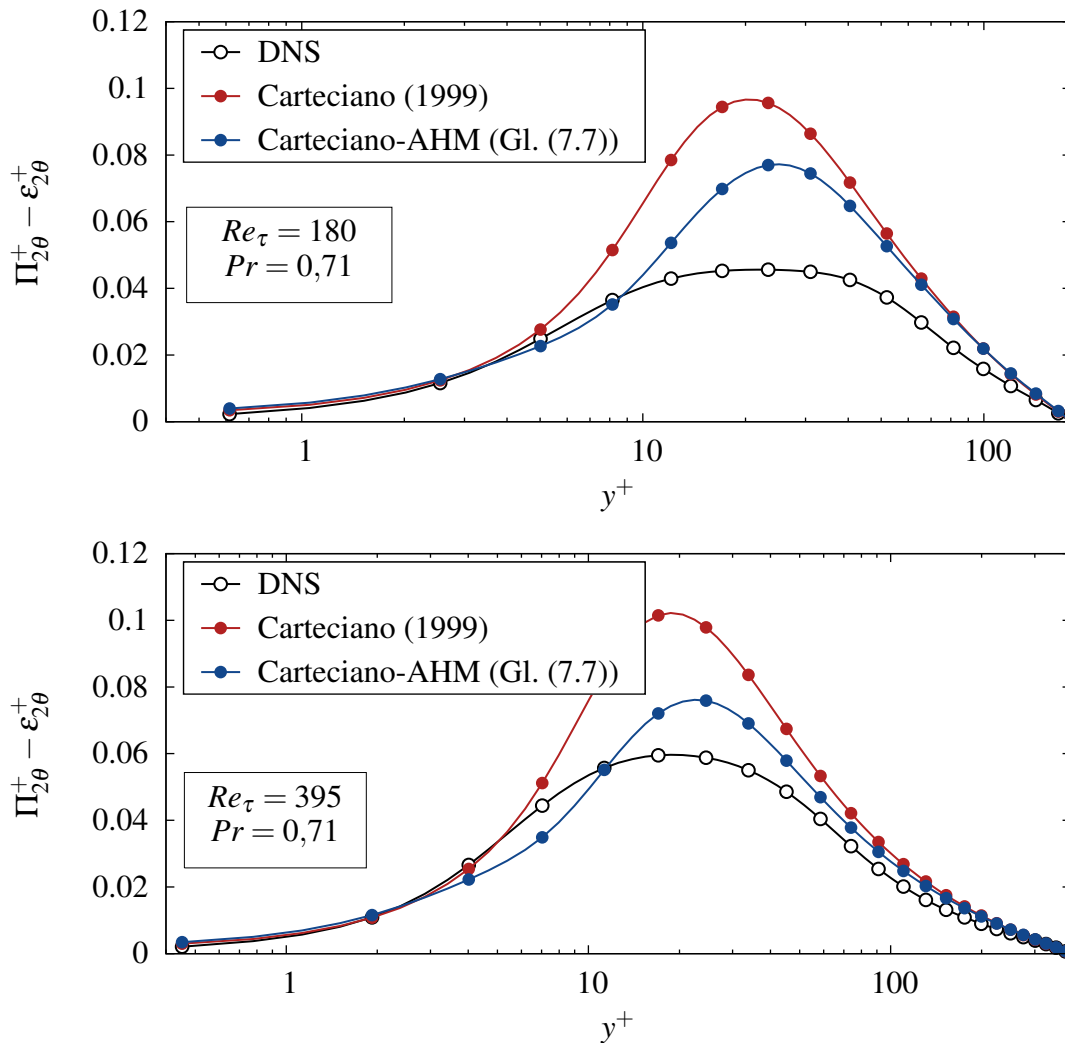


Abbildung A.39.: Verlauf der kombinierten Modellansätze des Korrelations- und Dissipationsterms $\Pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ der wandnormalen turbulenten Wärmeflusskomponente $\bar{v}\theta'^+$ als Fkt. des dimensionslosen Wandabstands y^+ auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 180$ (oben) und $Re_\tau = 395$ (unten) sowie $Pr = 0,71$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).

A.3.2. SK-AHM

In Abb. A.40 ist der Verlauf des kombinierten Korrelations- und Dissipationsterms $\Pi_{2\theta}^+ - \varepsilon_{2\theta}^+$ bei $Pr = 0,025$ und den Reynolds-Zahlen $Re_\tau = 180$ und 395 dargestellt. Die Modifikation des Korrelationsterms $\Pi_{i\theta}$ beim SK-AHM hat ebenfalls bei niedrigen Prandtl-Zahlen nur einen geringen Einfluss (vgl. Kap. 6.4.3). Beim SK-AHM nimmt die Überschätzung des Maximums bei zunehmender Reynolds-Zahl geringfügig ab. Bei $Re_\tau = 180$ beträgt die Abweichung zur DNS ca. 22 % sowie bei $Re_\tau = 395$ ca. 6 %. Insgesamt ist die Abweichung somit niedriger als beim Carteciano-AHM.

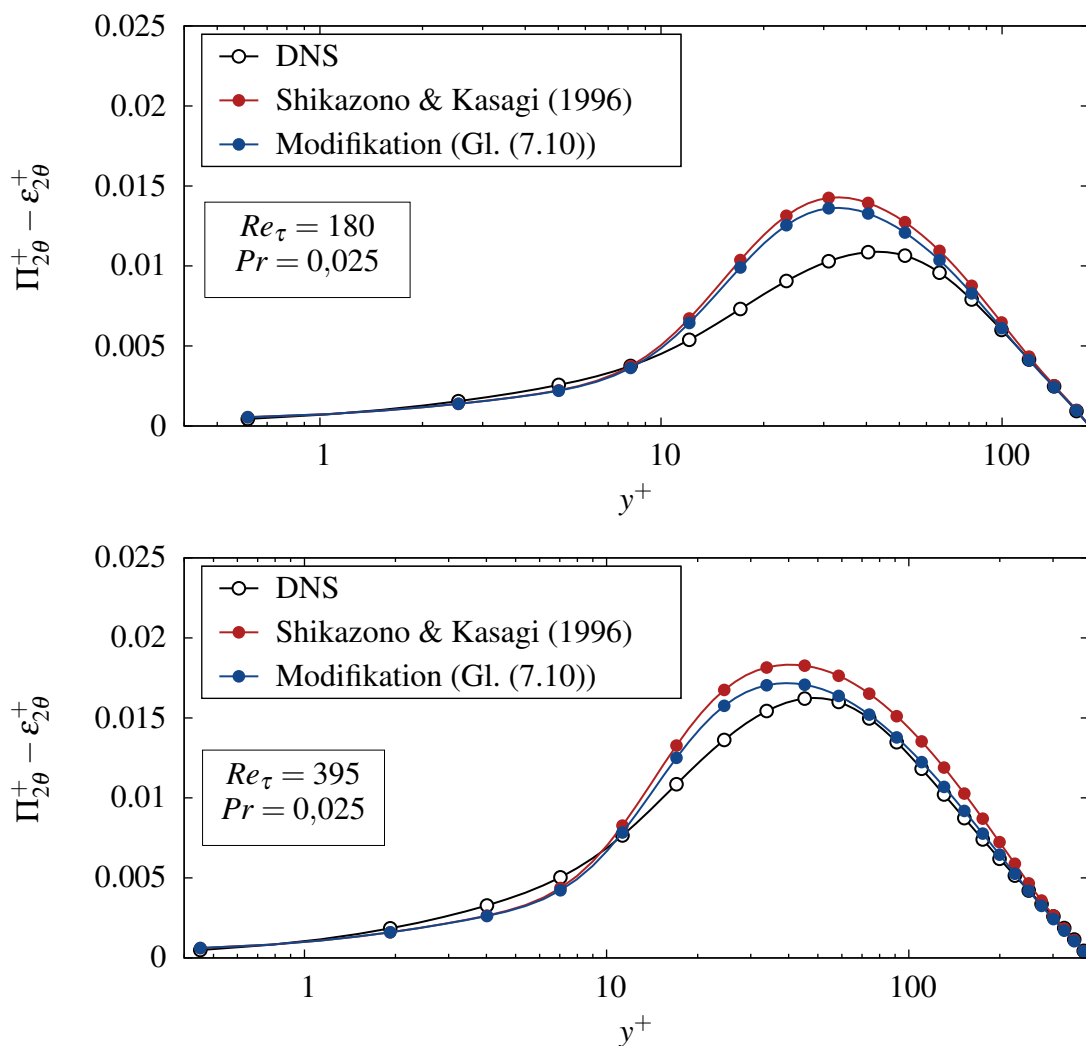


Abbildung A.40.: Verlauf der kombinierten Modellansätze des Korrelations- und Dissipationsterms $\Pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ der wandnormalen turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'^+}$ als Fkt. des dimensionslosen Wandabstands y^+ auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 180$ (oben) und $Re_\tau = 395$ (unten) sowie $Pr = 0,025$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).

In Abb. A.41 ist der Verlauf des kombinierten Transportterms $\Pi_{2\theta}^+ - \varepsilon_{2\theta}^+$ für $Pr = 0,71$ dargestellt. Es lässt sich erkennen, dass auch hier die Modifikation für steigende Reynolds-Zahlen eine deutliche Verbesserung bewirkt. Für den ursprünglichen Ansatz nach Shikazono & Kasagi [72] beträgt die Abweichung des Maximums zur DNS fast 65 % bei $Re_\tau = 180$ und 36 % bei $Re_\tau = 395$. Das SK-AHM hingegen weist nur eine Abweichung von 30 % bei $Re_\tau = 180$ und von 10 % bei $Re_\tau = 395$ auf.

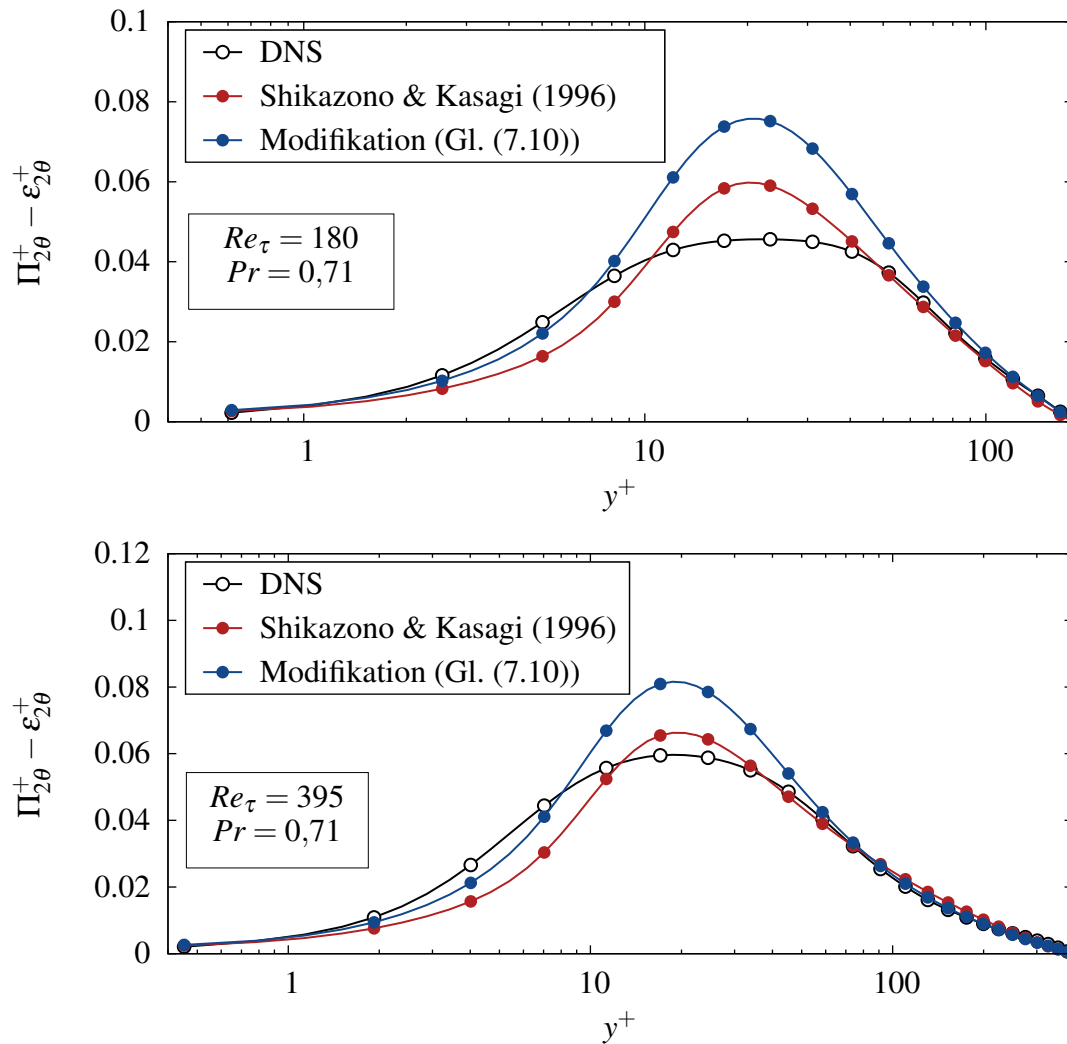


Abbildung A.41.: Verlauf der kombinierten Modellansätze des Korrelations- und Dissipationsterms $\Pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ der wandnormalen turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'}$ als Fkt. des dimensionslosen Wandabstands y^+ auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 180$ (oben) und $Re_\tau = 395$ (unten) sowie $Pr = 0,71$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).

A.4. Ausgewählte numerische Ergebnisse

A.4.1. Einfluss des Koeffizienten im Carteciano-AHM

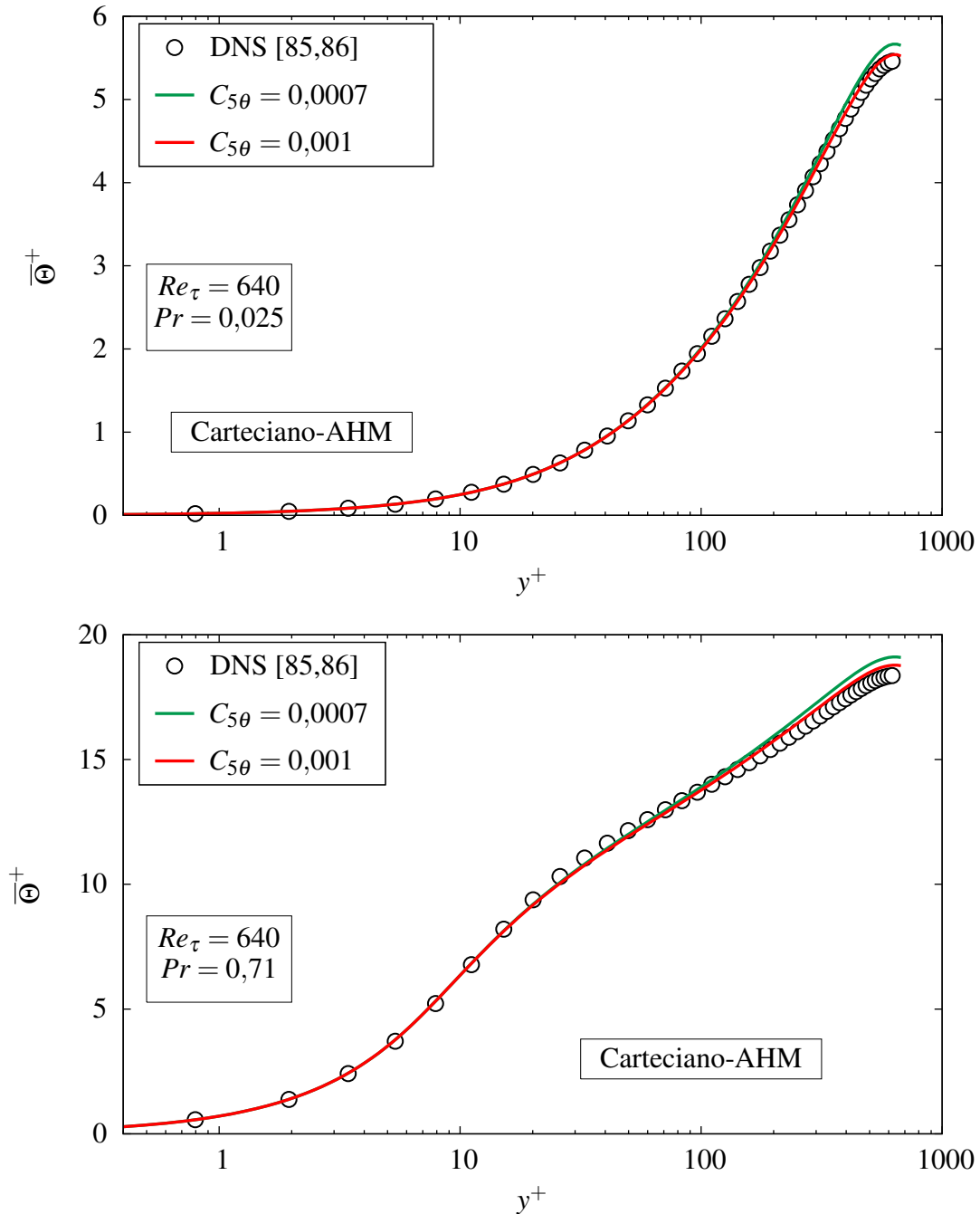


Abbildung A.42.: Verlauf des Temperaturprofils $\bar{\Theta}^+$ des Carteciano-AHM für zwei verschiedene Werte des Koeffizienten $C_{5\theta}$ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ im Vergleich zu DNS-Daten [85,86] (nur jeder 3. Datenpunkt der DNS ist als Symbol dargestellt) bei $Pr = 0,025$ (oben) und $Pr = 0,71$ (unten).

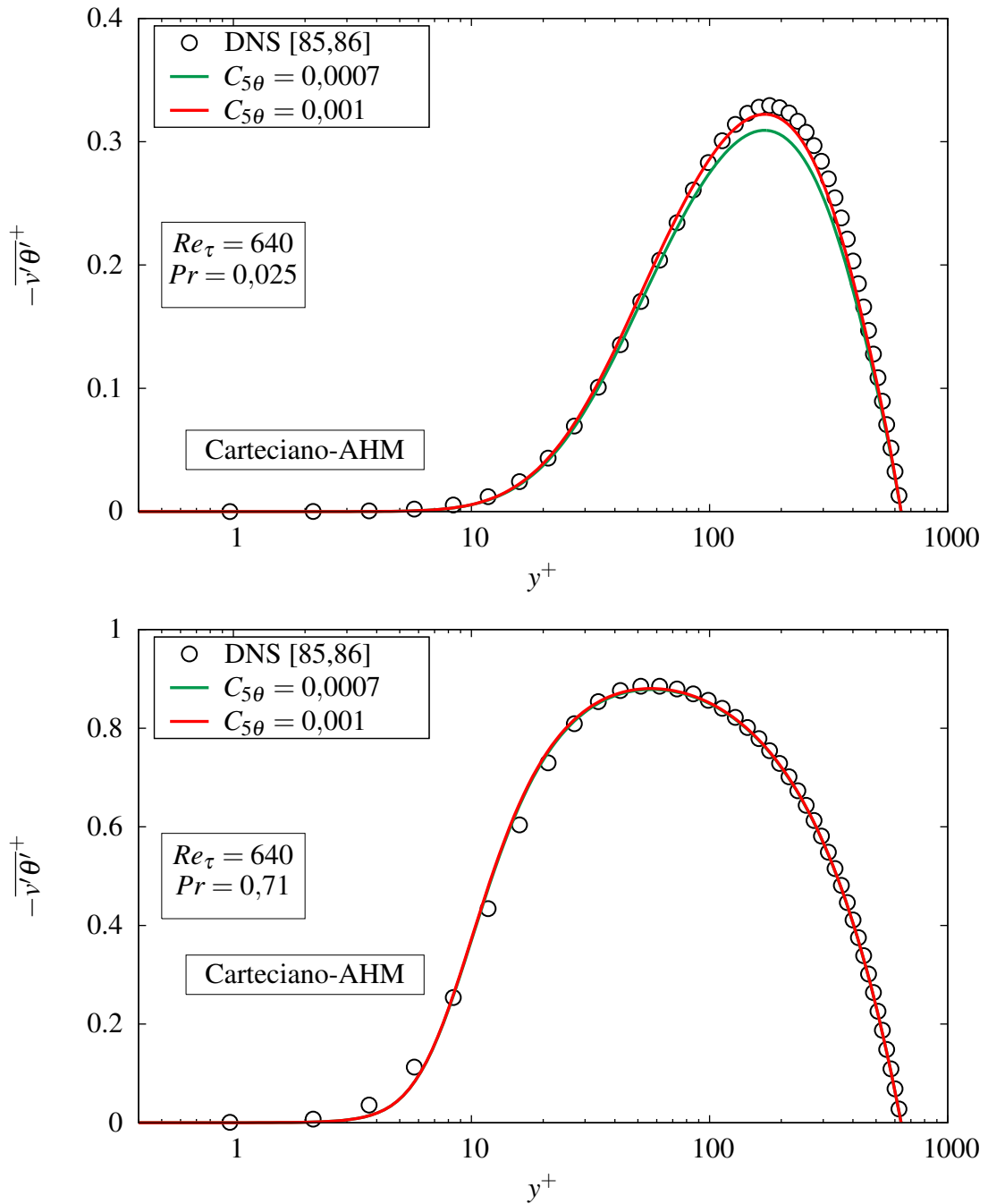


Abbildung A.43.: Verlauf der wandnormalen turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'}^+$ des Carteciano-AHM für zwei verschiedene Werte des Koeffizienten $C_{5\theta}$ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ im Vergleich zu DNS-Daten [85,86] (nur jeder 3. Datenpunkt der DNS ist als Symbol dargestellt) bei $Pr = 0,025$ (oben) und $Pr = 0,71$ (unten).

A.4.2. Asymmetrisch beheizte Plattenkanalströmung

In den folgenden Abbildungen ist die Validierung der Grobstruktursimulation (LES) einer asymmetrisch, beheizten Plattenkanalströmung dargestellt.

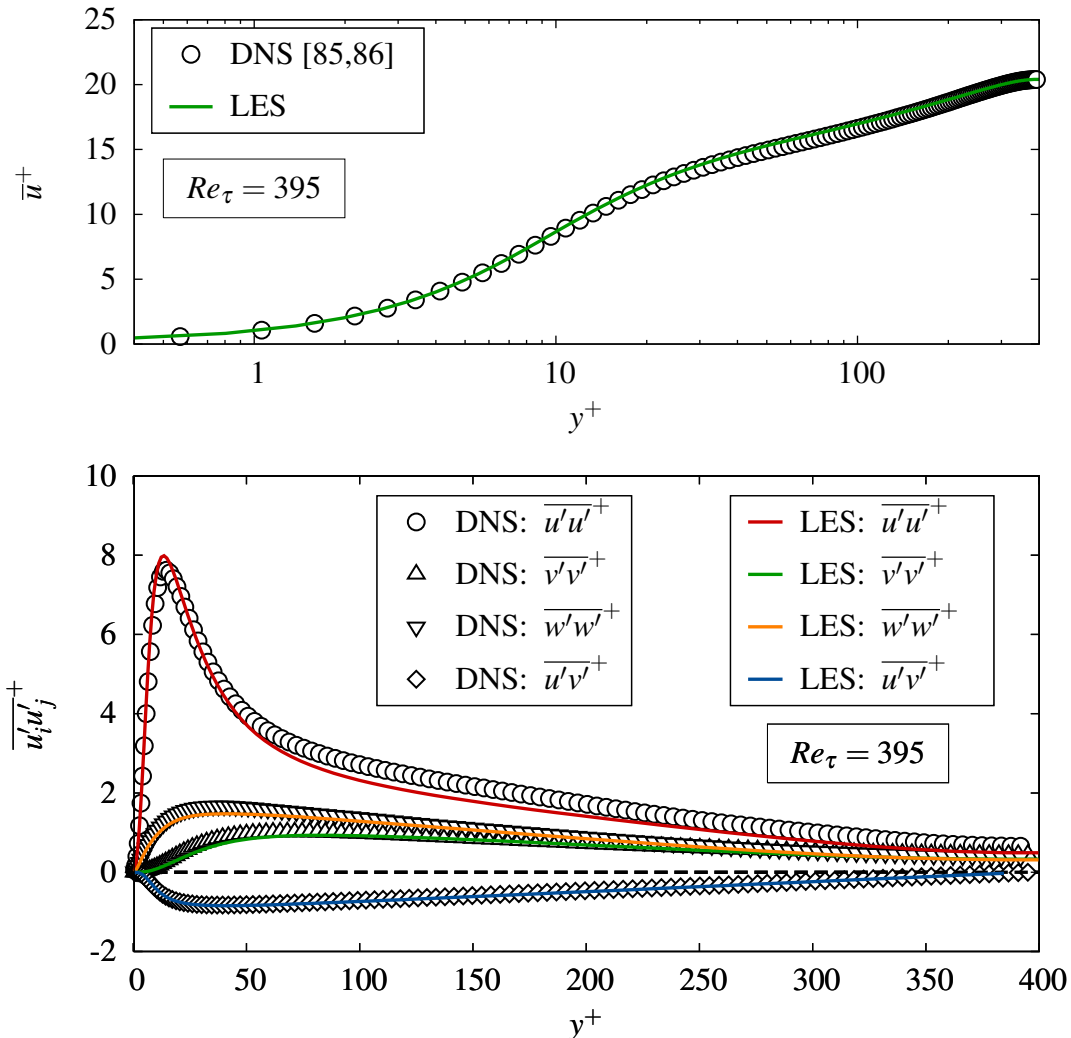


Abbildung A.44.: Verlauf des entdimensionierten Geschwindigkeitsprofils \bar{u}^+ (oben) und der aufgelösten Reynolds-Spannungen $\overline{u_i' u_j'}$ (unten) der Grobstruktursimulation über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ im Vergleich zu DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 395$.

Für das Geschwindigkeitsprofil sowie die Verläufe der einzelnen, turbulenten Reynolds-Spannungen zeigt sich eine gute Übereinstimmung mit den DNS-Daten [85,86]. Das Maximum der turbulenten Normalspannungskomponente $\overline{u'u'}$ wird geringfügig um ca. 6 % überbewertet. Für einen größer werdenden Wandabstand werden die turbulenten Normalspannungen geringfügig unterbewertet. Dies ist auf die Wahl des dynamischen Smagorinsky-Modells zur Berechnung der Feinstrukturen und auf den sogenannten „Box-Filters“ (Filterweite gemittelt über das Zellvolumen: $\Delta = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3}$) zurückzuführen. Infolge der stark anisotropen Diskretisierung in die ver-

schiedenen Raumrichtungen wird die Filterweite falsch bewertet. Dieses Verhalten lässt sich für turbulente Plattenkanalströmungen auch in den Ergebnissen anderen Arbeiten, siehe z.B. Pritz et al. [211] unter Verwendung von „SPARC“ (Structured PARallel Research Code), feststellen.

Nachfolgend ist ein Vergleich mit den numerischen Ergebnissen der DNS von Abe et al. [85,86] für das entdimensionierten Temperatur- und Wärmeflussprofil bei zwei unterschiedlichen Prandtl-Zahlen ($Pr = 0,025$ und $0,71$) dargestellt. Die Ergebnisse zeigen eine gute Übereinstimmung mit den DNS-Daten für den symmetrisch beheizten Fall. Die relative Abweichung des Maximums des Temperaturprofils in der Kanalmitte beträgt zwischen LES und DNS genau 2,2 %. Für niedrige Prandtl-Zahlen ist die Abweichung deutlich kleiner als 1%. Die Methodik (Diskretisierung und numerische Verfahren) kann somit auch auf den asymmetrischen Fall ausgeweitet werden.

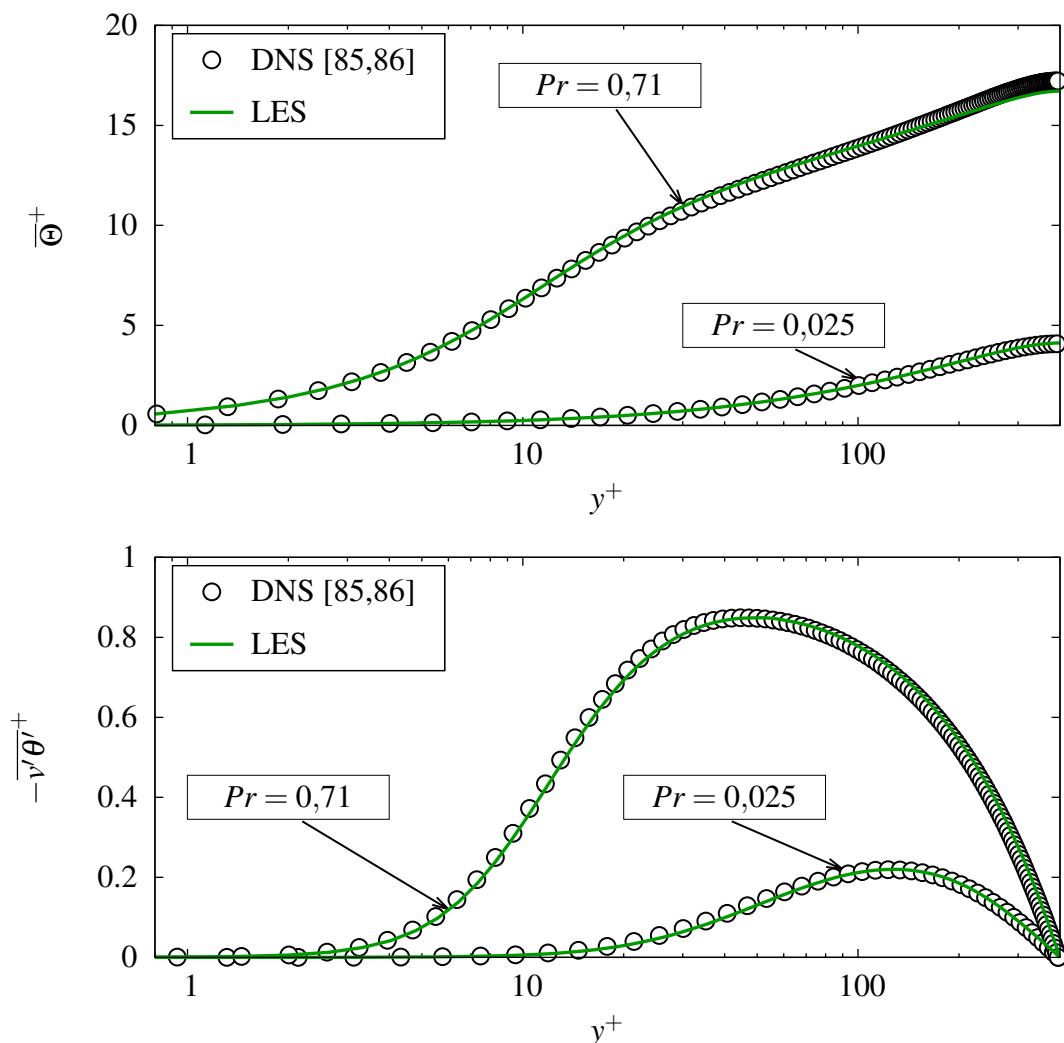


Abbildung A.45.: Verlauf des Temperaturprofils Θ^+ (oben) und der wandnormalen Wärmeflusskomponente $-\overline{v'\theta'}^+$ (unten) der Grobstruktursimulation über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ im Vergleich zu DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 395$ und den beiden Prandtl-Zahlen $Pr = 0,025$ und $Pr = 0,71$.

A.4.3. Rechteckkanalströmung

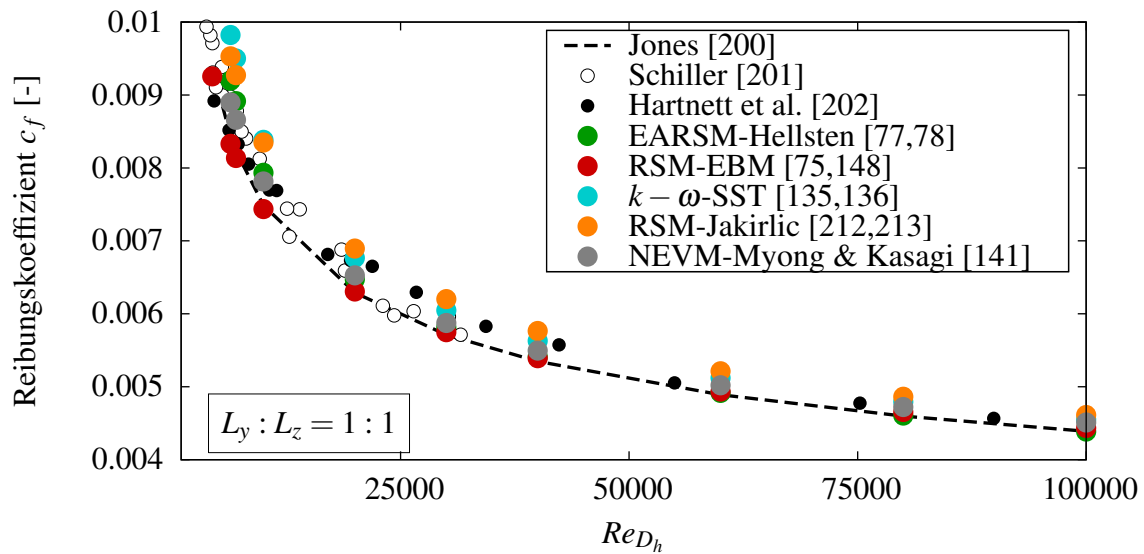


Abbildung A.46.: Verlauf des ermittelten Reibungskoeffizienten c_f (Fanning-Stil) einer turbulenten Rechteckkanalströmung quadratischen Querschnitts über der Reynolds-Zahl Re_{D_h} bzw. Re_b im Vergleich zur empirischen Korrelation nach Jones [200] und experimentellen Daten nach Schiller [201] und Hartnett et al. [202].

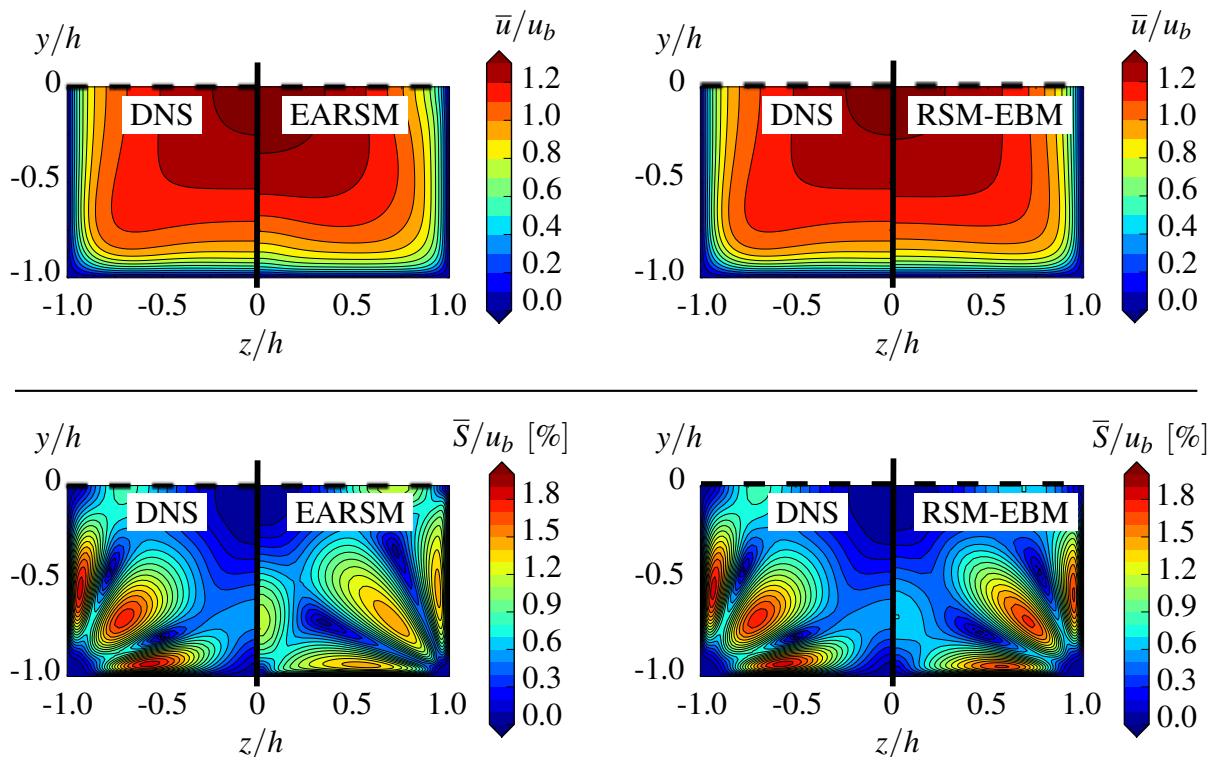


Abbildung A.47.: Vergleich des EARSM-Hellsten [77,78] und des RSM-EBM [75,148] mit den DNS-Daten [54] bei einer Rechteckkanalströmung quadratischen Querschnitts und $Re_b = 4400$.

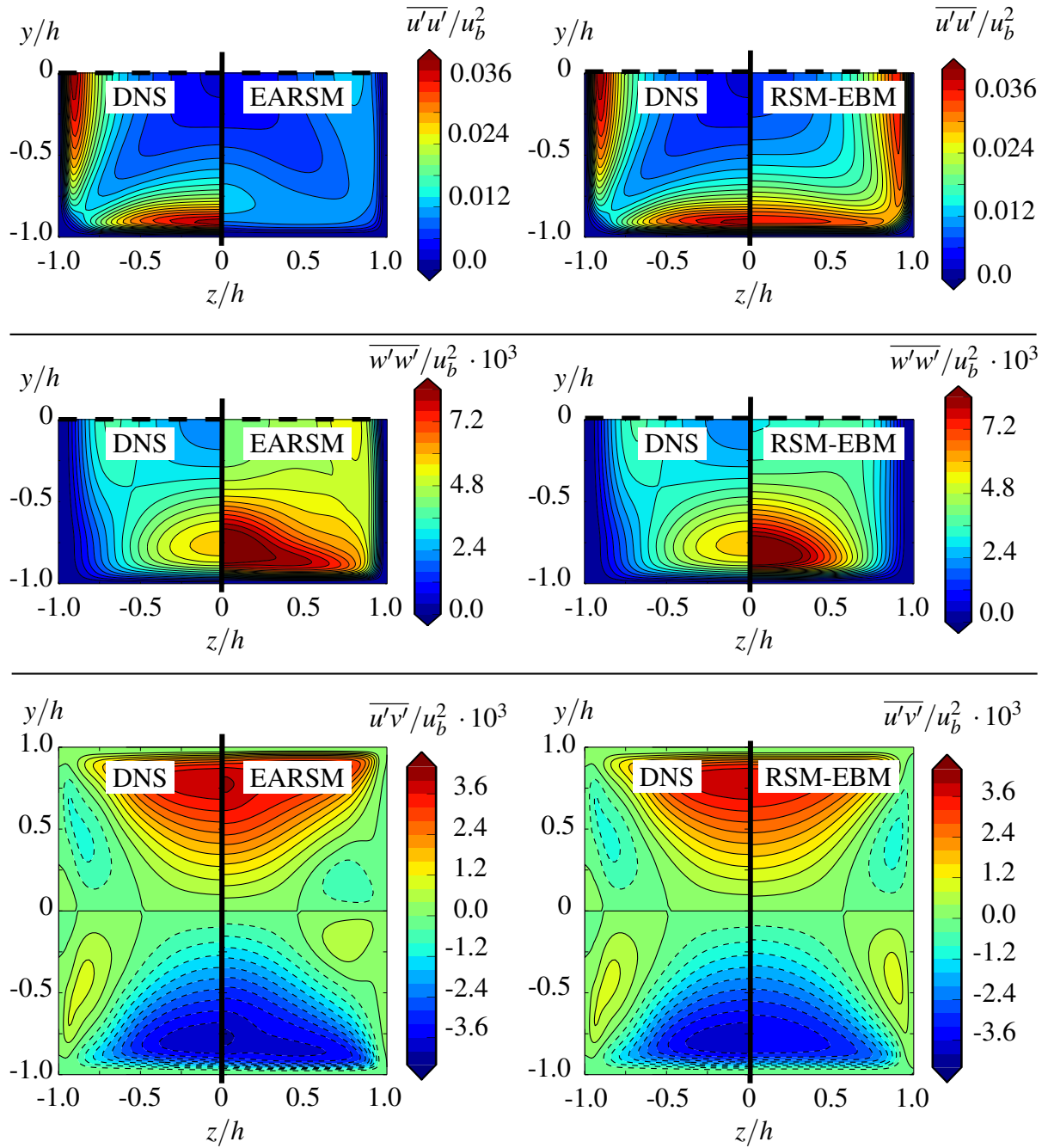


Abbildung A.48.: Verteilung der turbulenten Reynolds-Spannungen $\overline{u'u'}/u_b^2$ (oben), $\overline{w'w'}/u_b^2$ (mittlerer Ausschnitt) und $\overline{u'v'}/u_b^2$ (unten) für das EARSM nach Hellsten [77,78] und das RSM-EBM [75,148] im Vergleich mit den DNS-Daten [54] $Re_b = 4400$.

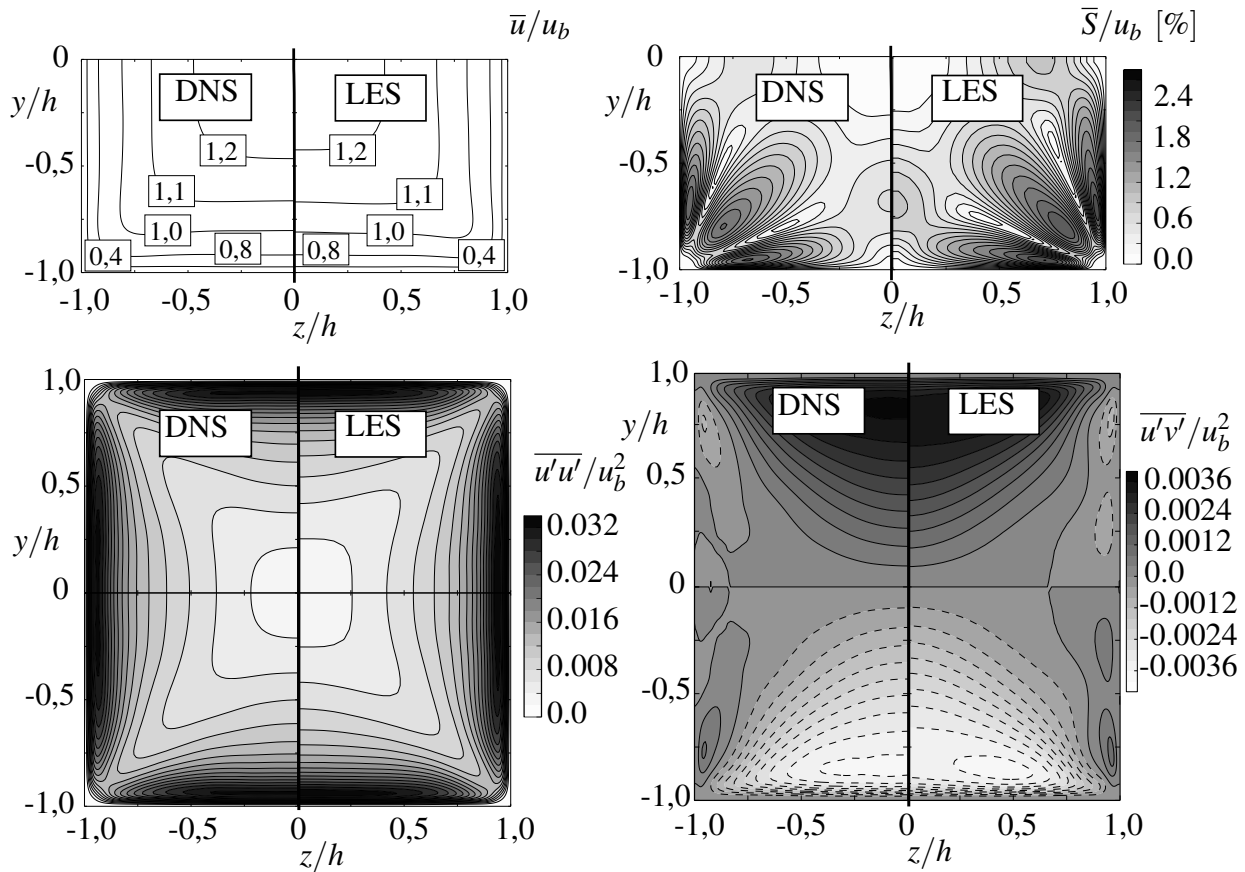


Abbildung A.49.: Normierte Geschwindigkeitsverteilung (links oben), Betrag der Sekundärströmungsgeschwindigkeit (rechts oben), entdimensionierte Normalspannung (links unten) und Scherspannung (rechts unten) der LES im Vergleich zu den DNS-Daten [54].

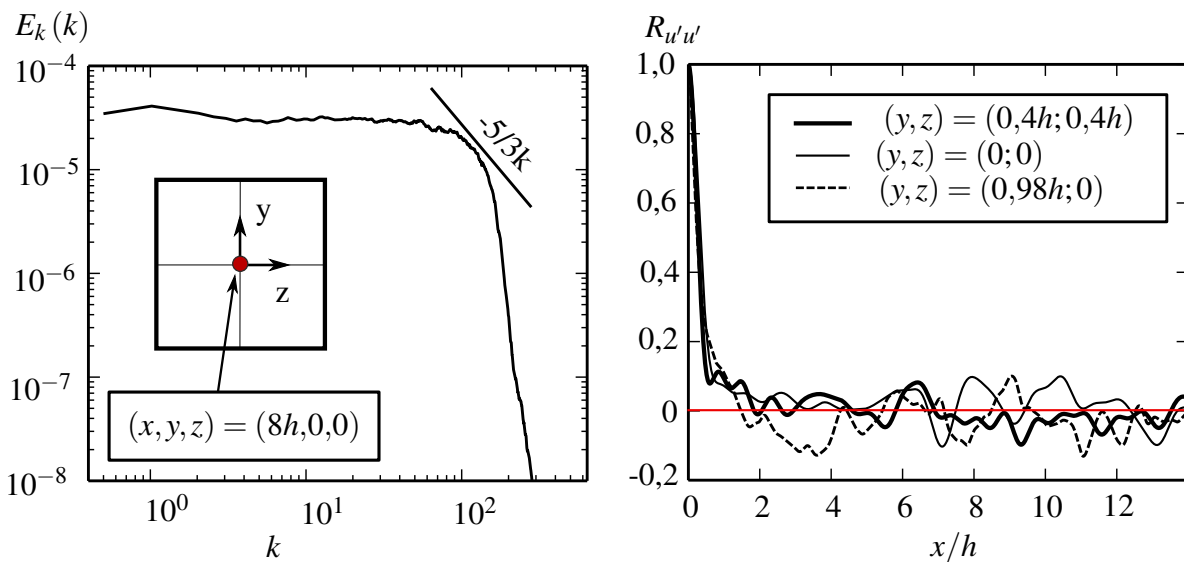


Abbildung A.50.: Energiespektrum für einen Punkt im Zentrum $(x,y,z) = (0,0,0)$ einer turbulenten Rechteckkanalströmung bei $Re_b = 7000$ (links) und Zweipunktkorrelation der Fluktuationsgröße in axialer Richtung an drei verschiedenen Punkten (rechts).

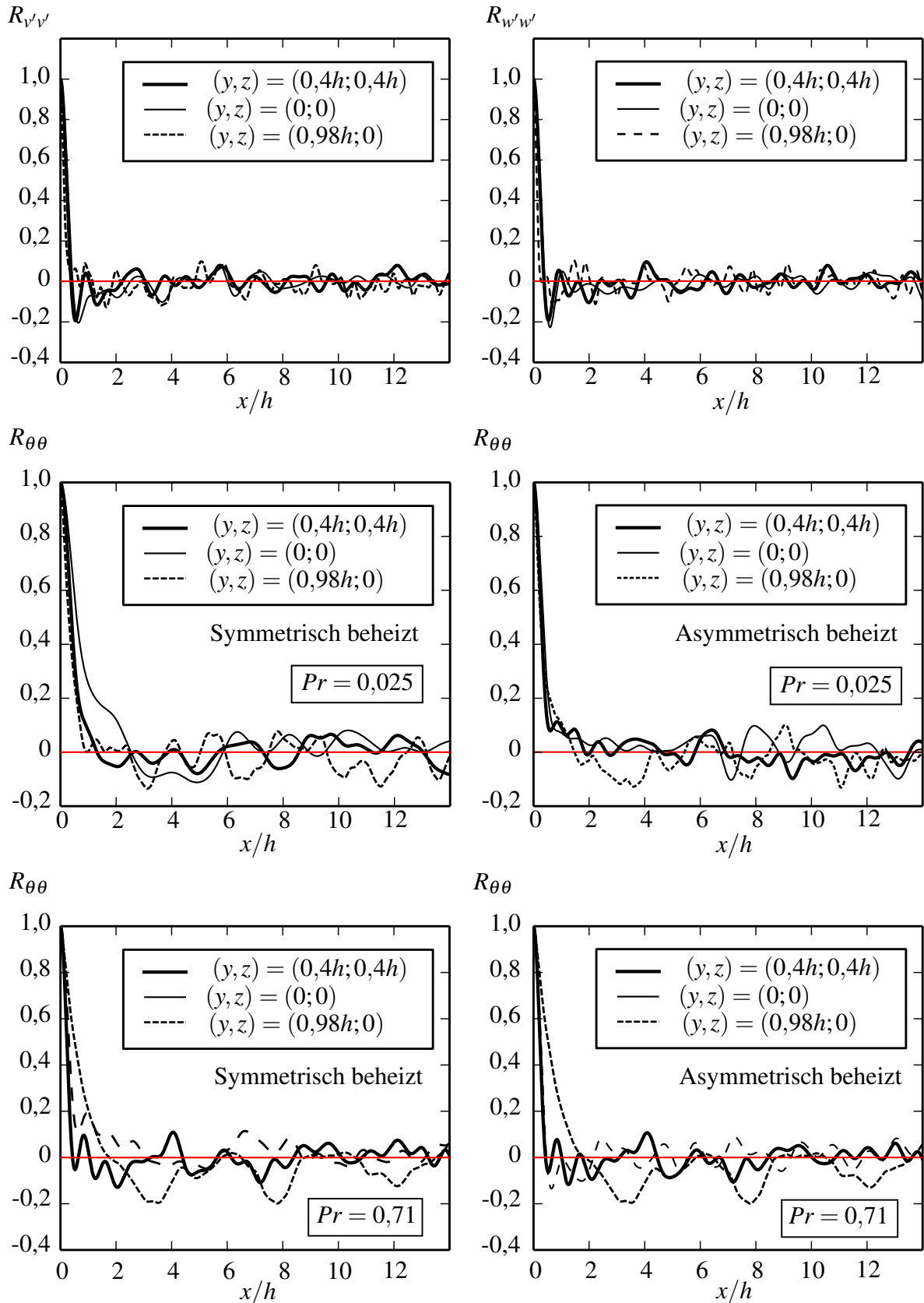


Abbildung A.51.: Zweipunktkorrelation der beiden Fluktuationsgrößen in Querrichtung (oben), der Temperaturfluktuationen für $Pr = 0,025$ (Mitte) und für $Pr = 0,71$ (unten) jeweils für einen symmetrisch (jeweils links) und asymmetrisch (jeweils rechts) beheizten Zustand an drei verschiedenen Punkten des Strömungsgebietes.

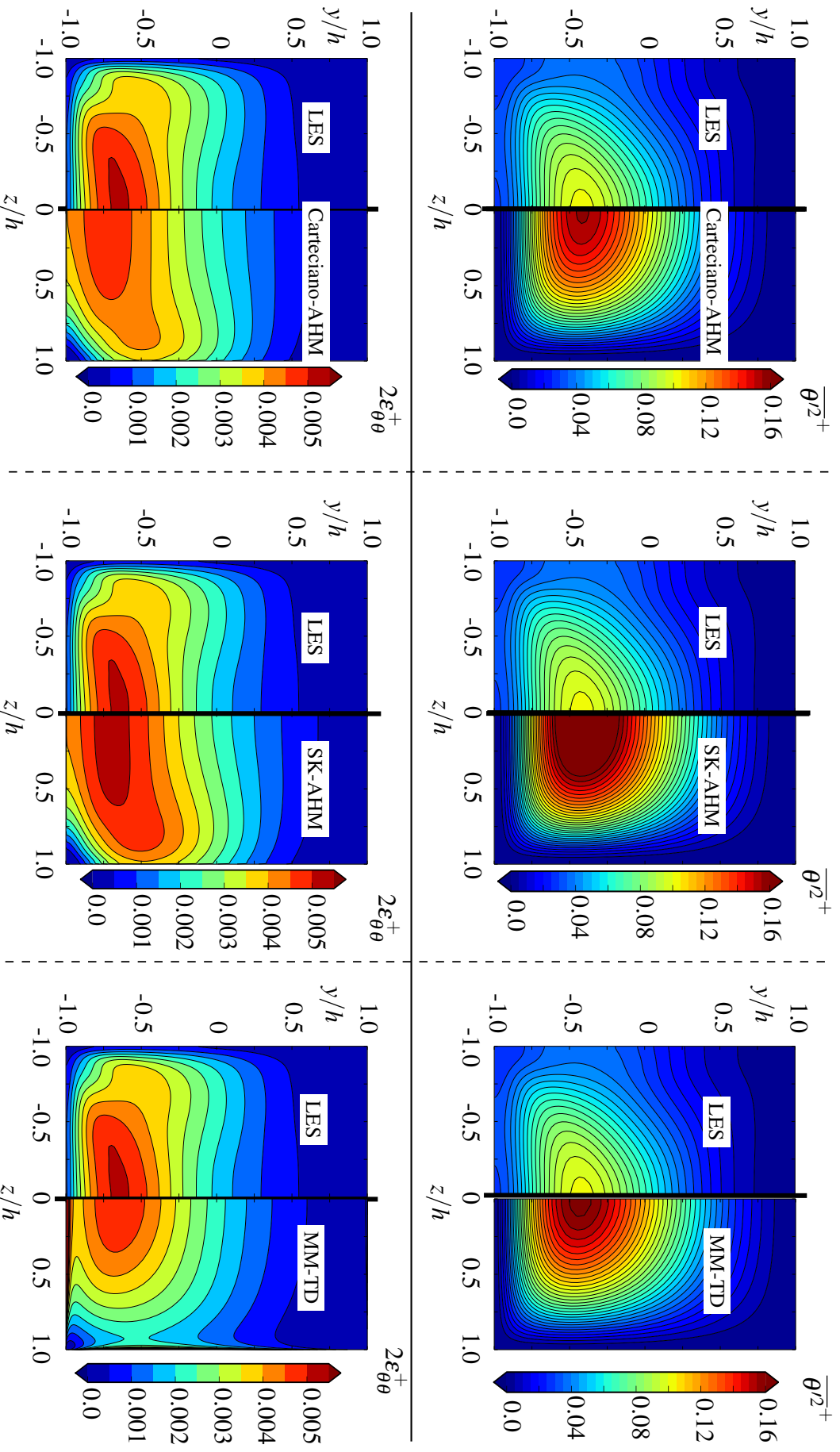


Abbildung A.52.: Vergleich der Grobstruktursimulation mit den Ergebnissen der beiden algebraischen Modelle, Carteciano-AHM (links) und SK-AHM (Mitte) und der Erweiterung des Modells nach Manservigi & Menghini - MM-TD (rechts), für einen asymmetrischen Beheizungszustand bei $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,025$.

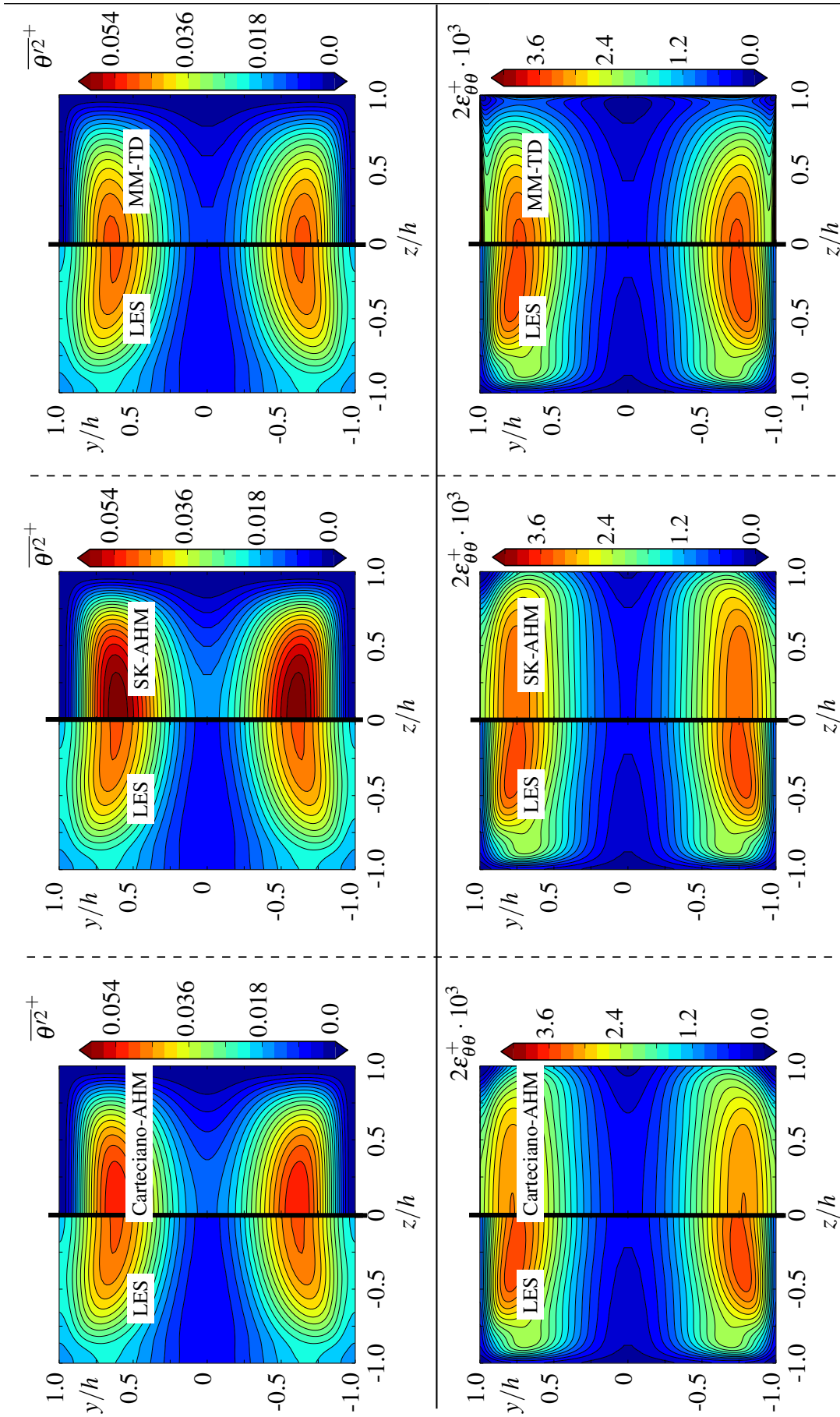


Abbildung A.53.: Vergleich der Grobstruktursimulation mit den Ergebnissen der beiden algebraischen Modelle, Carteciano-AHM (links) und SK-AHM (Mitte) und der Erweiterung des Modells nach Manservigi & Menghini - MM-TD (rechts), für einen symmetrischen Beheizungszustand bei $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,025$.

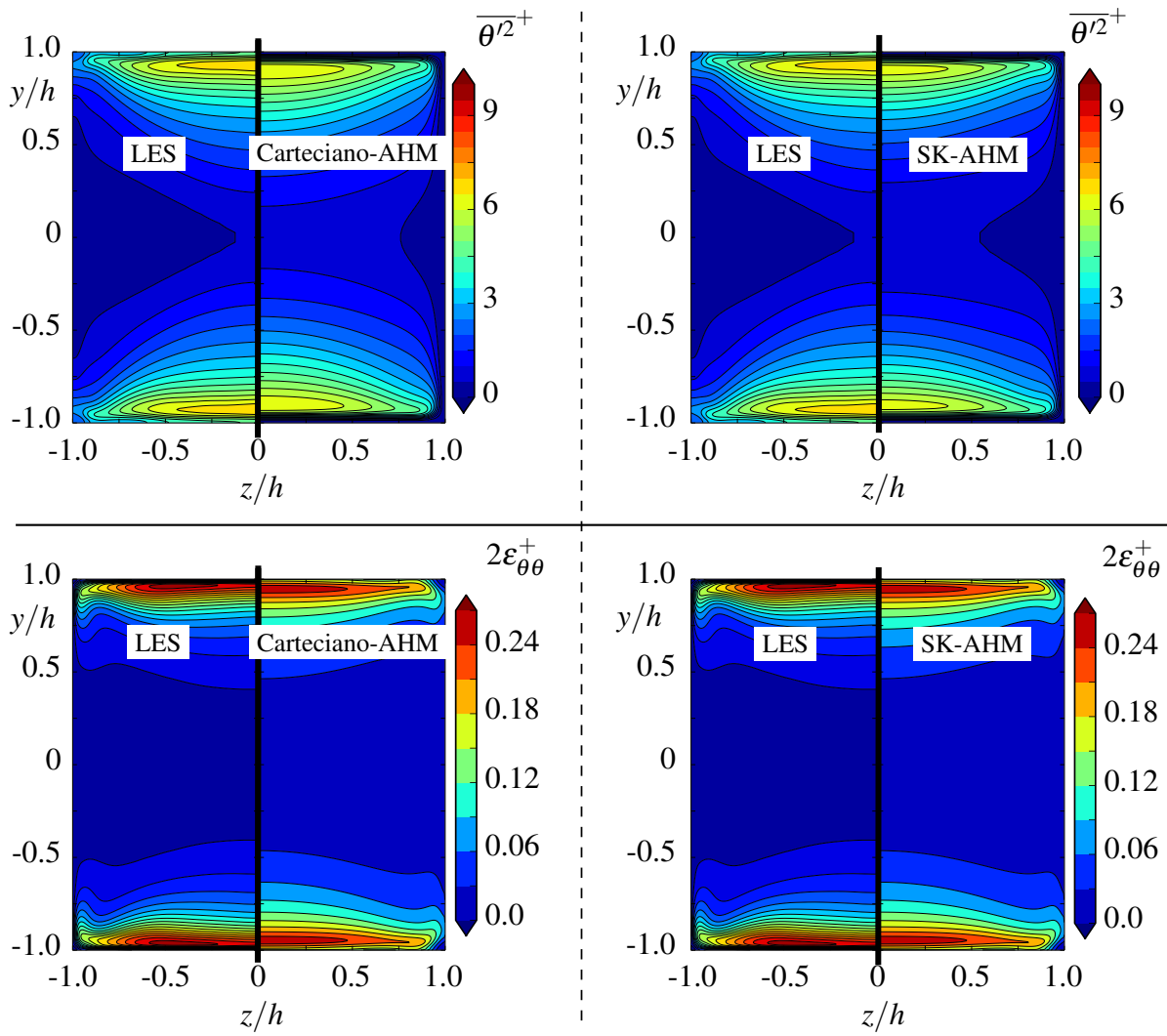


Abbildung A.54.: Vergleich der Grobstruktursimulation mit den Ergebnissen der beiden algebraischen Modelle, Carteciano-AHM (links) und SK-AHM (rechts) für einen symmetrischen Beheizungszustand bei $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,71$.

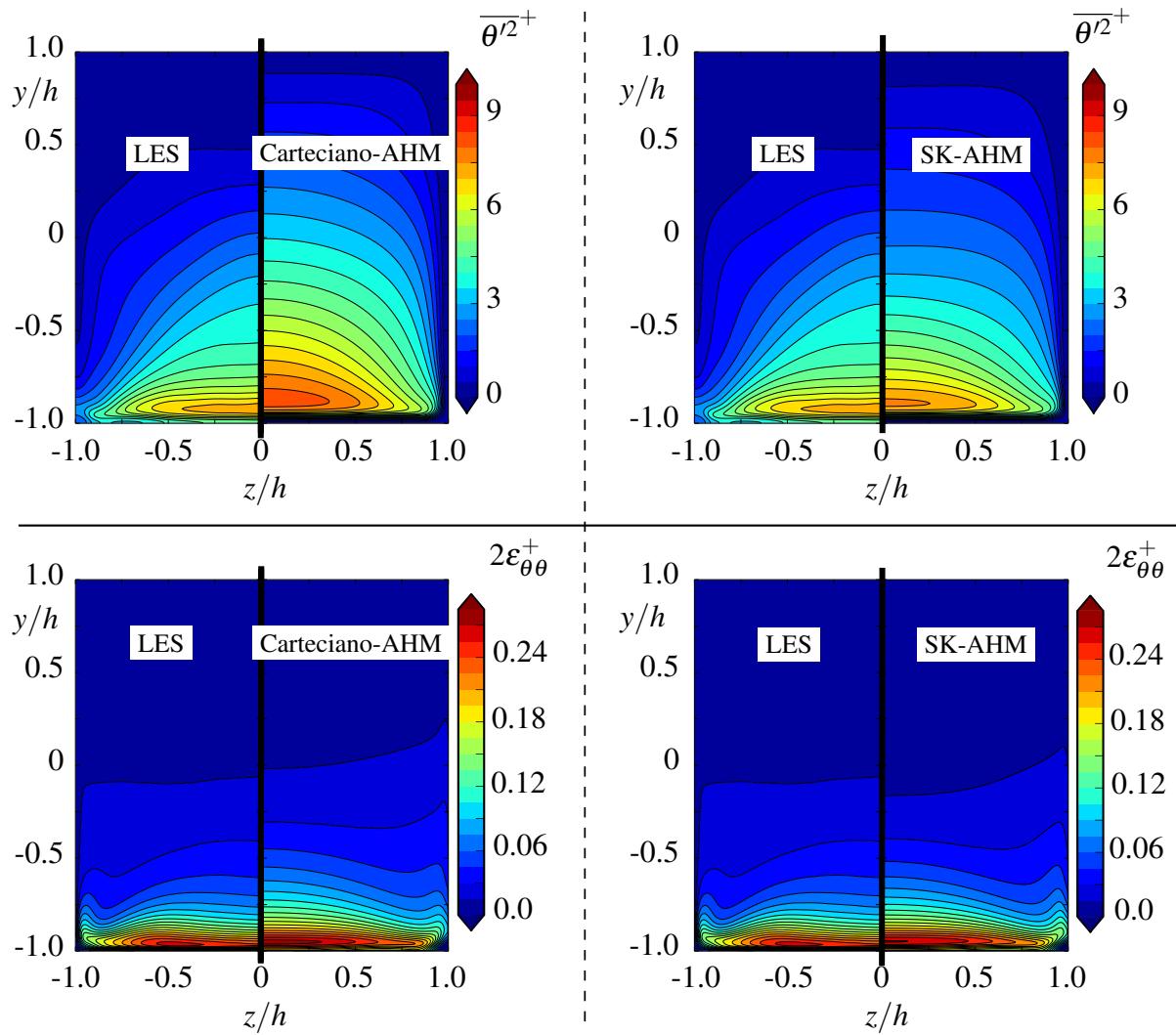


Abbildung A.55.: Vergleich der Grobstruktursimulation mit den Ergebnissen der beiden algebraischen Modelle, Carteciano-AHM (links) und SK-AHM (rechts) für einen asymmetrischen Beheizungszustand bei $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,71$.

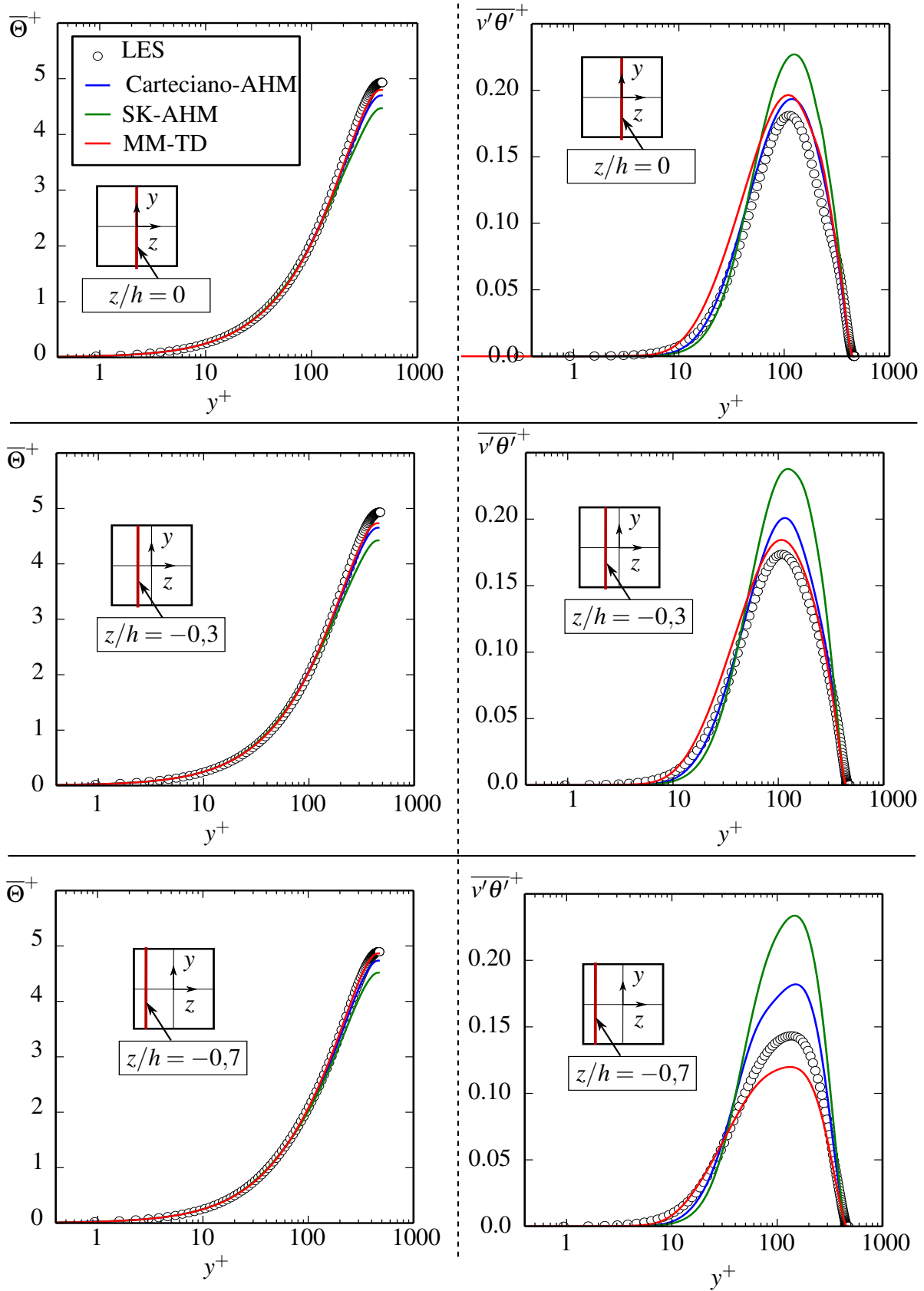


Abbildung A.56.: Vergleich der extrahierten Profile an unterschiedlichen Stellen des Rechteckkanals für eine asymmetrische Beheizung, $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,025$.

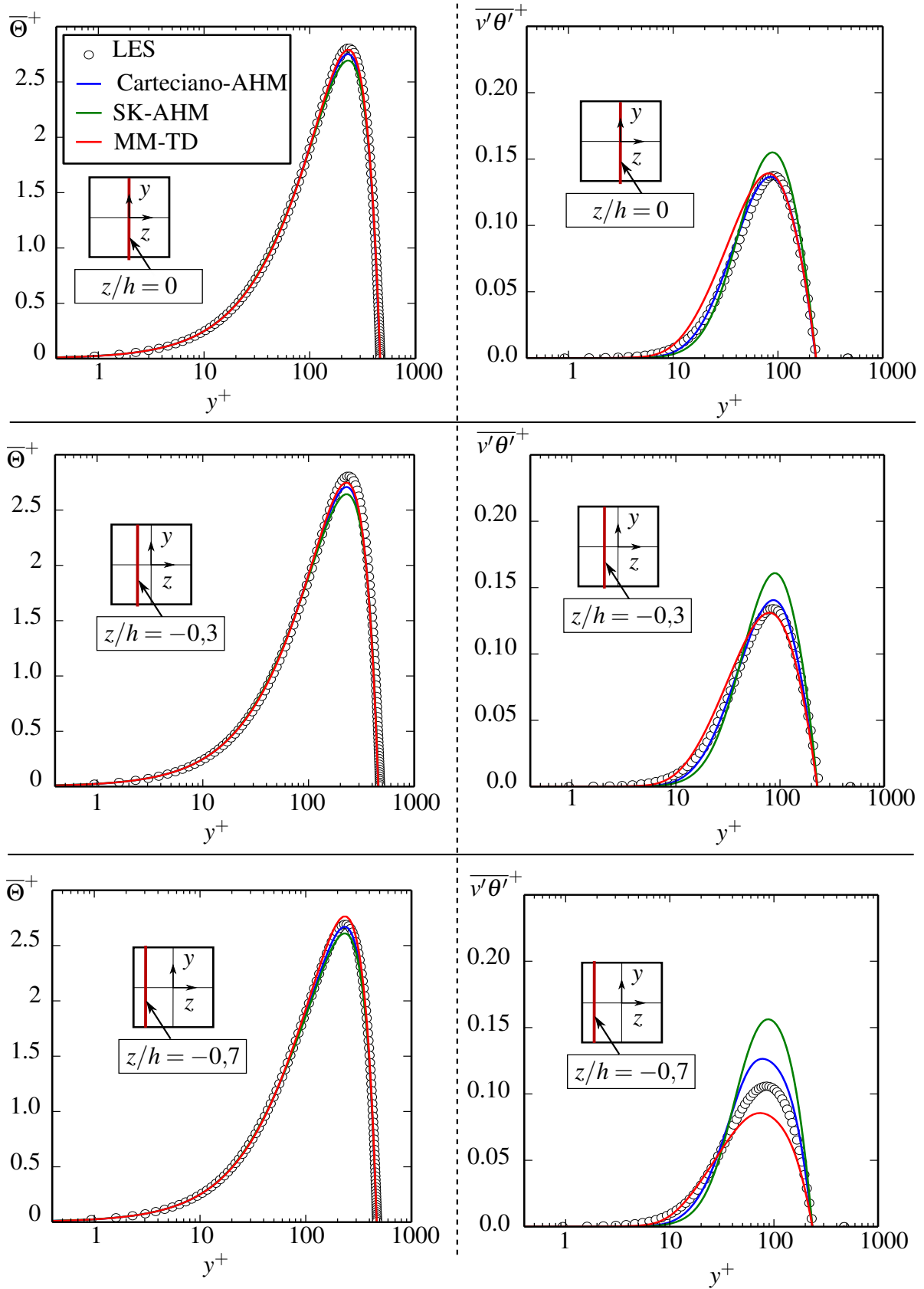


Abbildung A.57.: Vergleich der extrahierten Profile an unterschiedlichen Stellen des Rechteckkanals für eine symmetrische Beheizung, $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,025$.

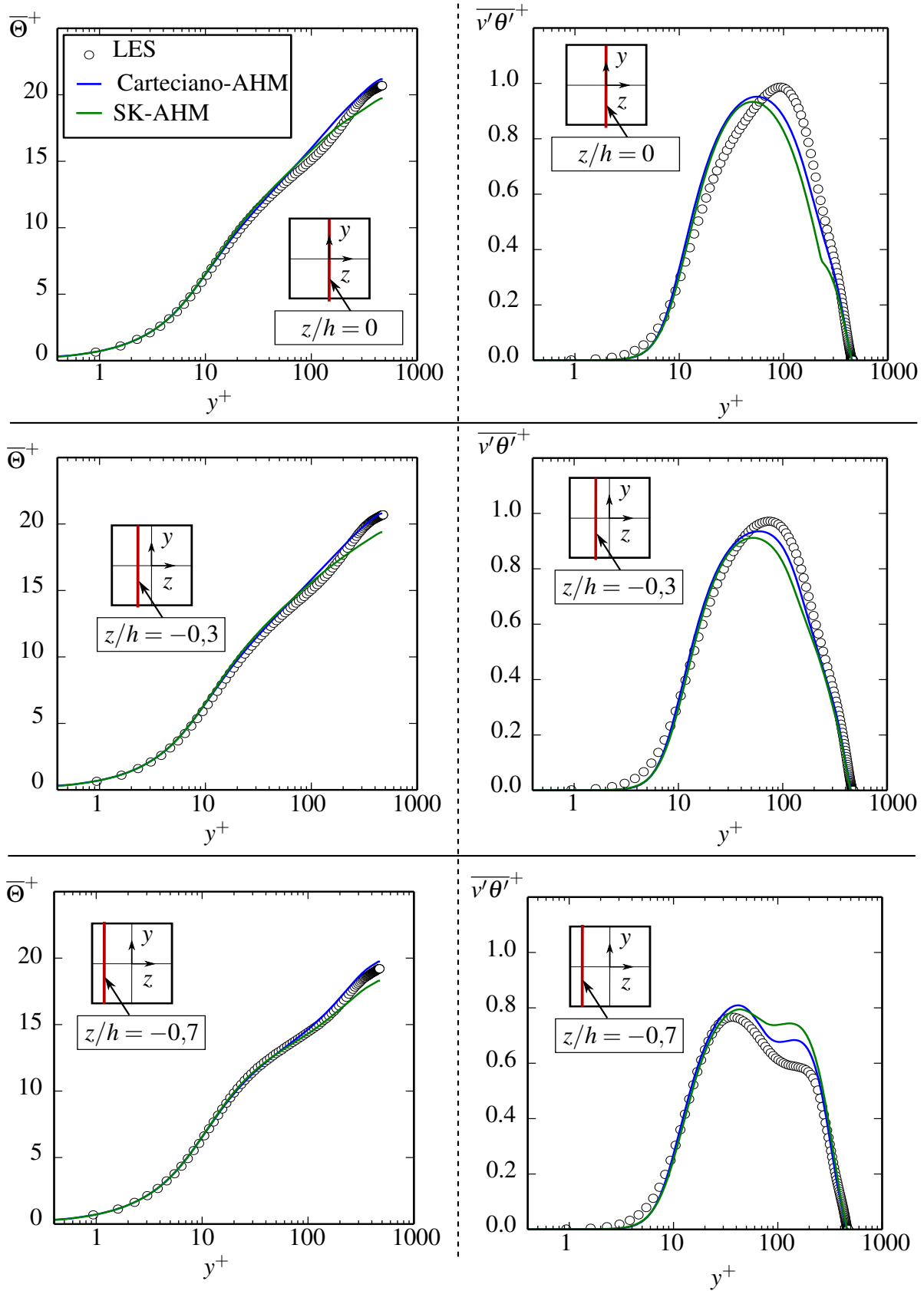


Abbildung A.58.: Vergleich der extrahierten Profile an unterschiedlichen Stellen des Rechteckkanals für eine asymmetrische Beheizung, $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,71$.

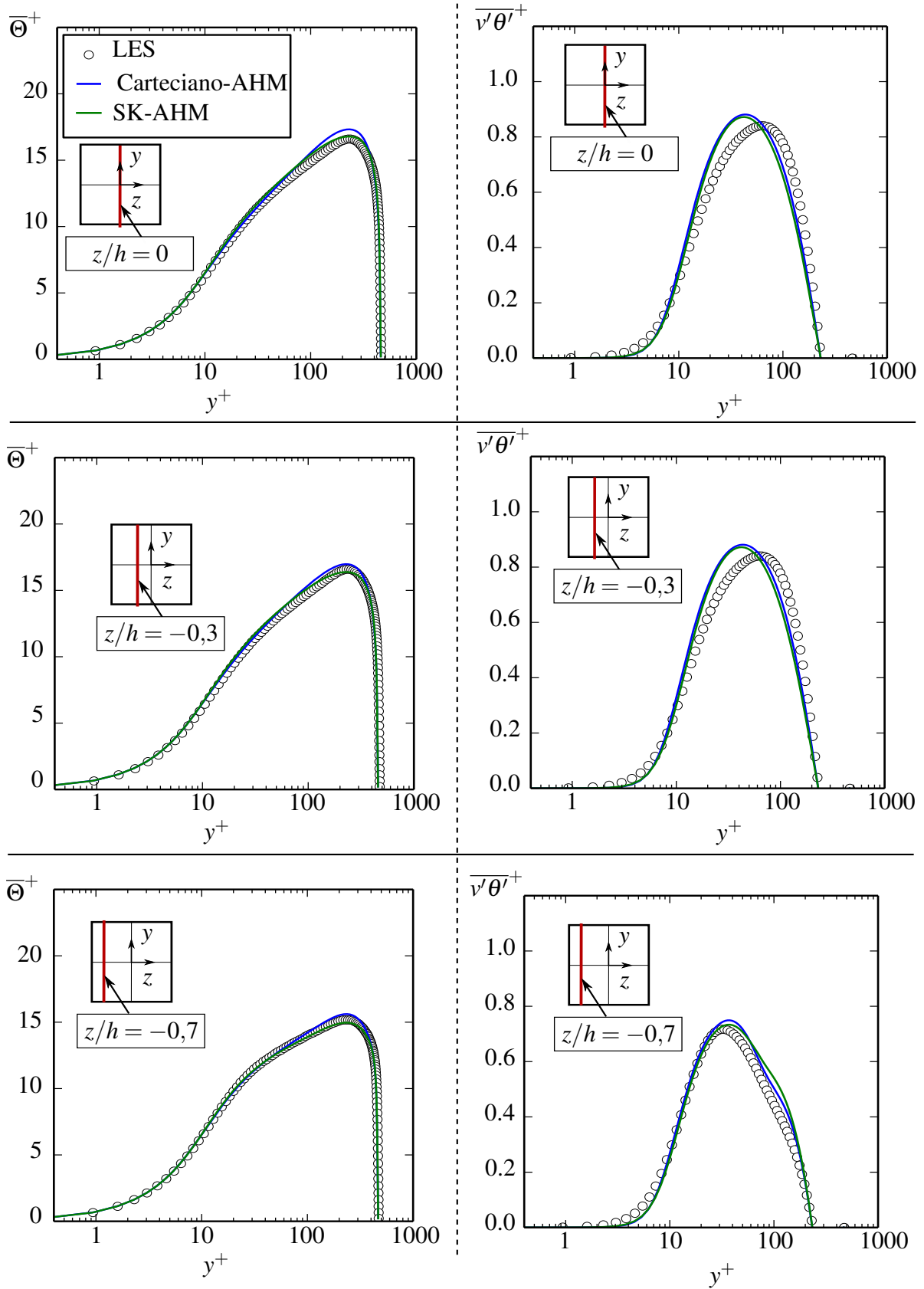


Abbildung A.59.: Vergleich der extrahierten Profile an unterschiedlichen Stellen des Rechteckkanals für eine symmetrische Beheizung, $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,71$.

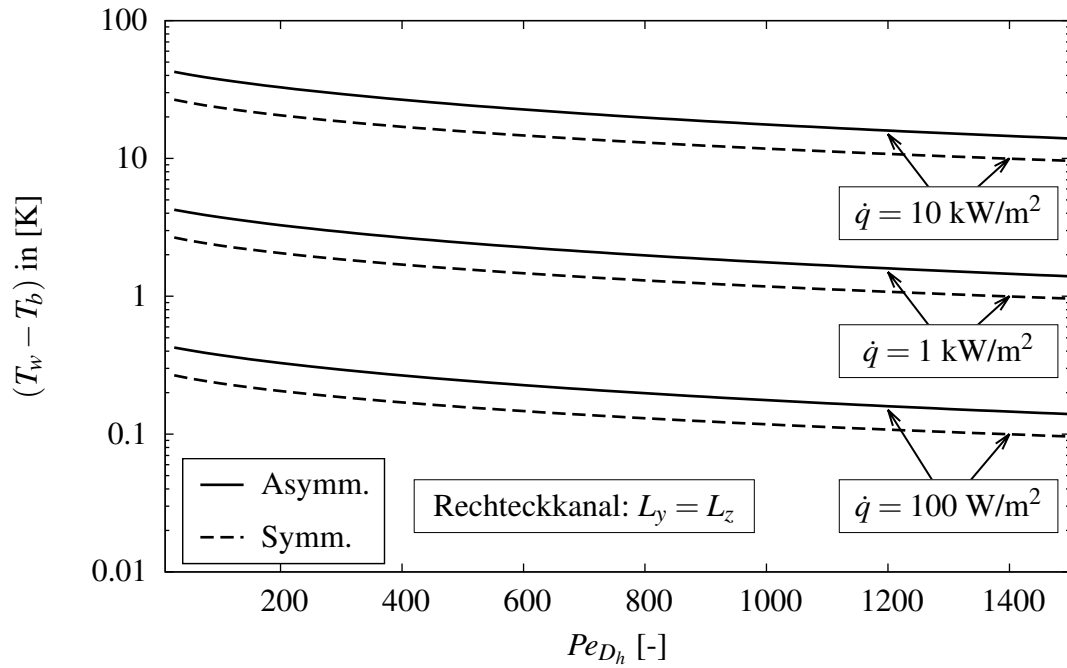


Abbildung A.60.: Schematische Verläufe der sich einstellenden Temperaturdifferenzen einer beheizten Rechteckkanalströmung zwischen Wandtemperatur T_w und der Bulk-Temperatur T_b am Beispiel Quecksilber ($D_h = 0,1$ m, $\lambda = 8,3$ W/mK und $Pr = 0,023$), abgeleitet aus den entwickelten Nusselt-Korrelationen (vgl. Gl. (7.32) und (7.33)).

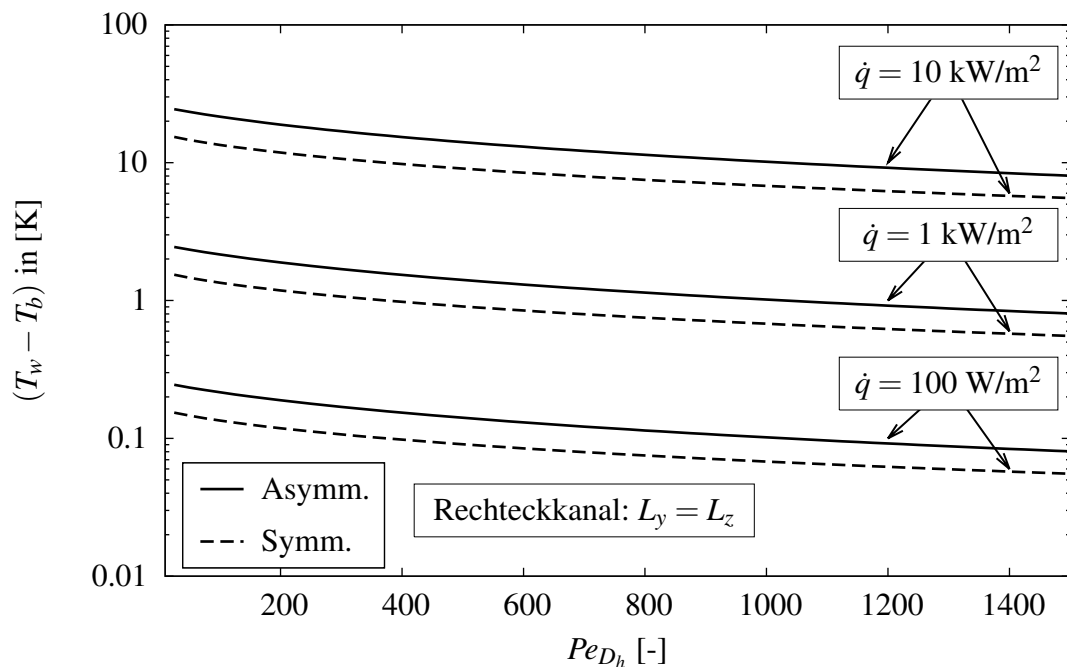


Abbildung A.61.: Schematische Verläufe der sich einstellenden Temperaturdifferenzen einer beheizten Rechteckkanalströmung zwischen Wandtemperatur T_w und der Bulk-Temperatur T_b am Beispiel LBE ($D_h = 0,1$ m, $\lambda = 14,4$ W/mK und $Pr = 0,014$), abgeleitet aus den entwickelten Nusselt-Korrelationen (vgl. Gl. (7.32) und (7.33)).

A.4.4. Rechteckkanalströmung mit Auftrieb

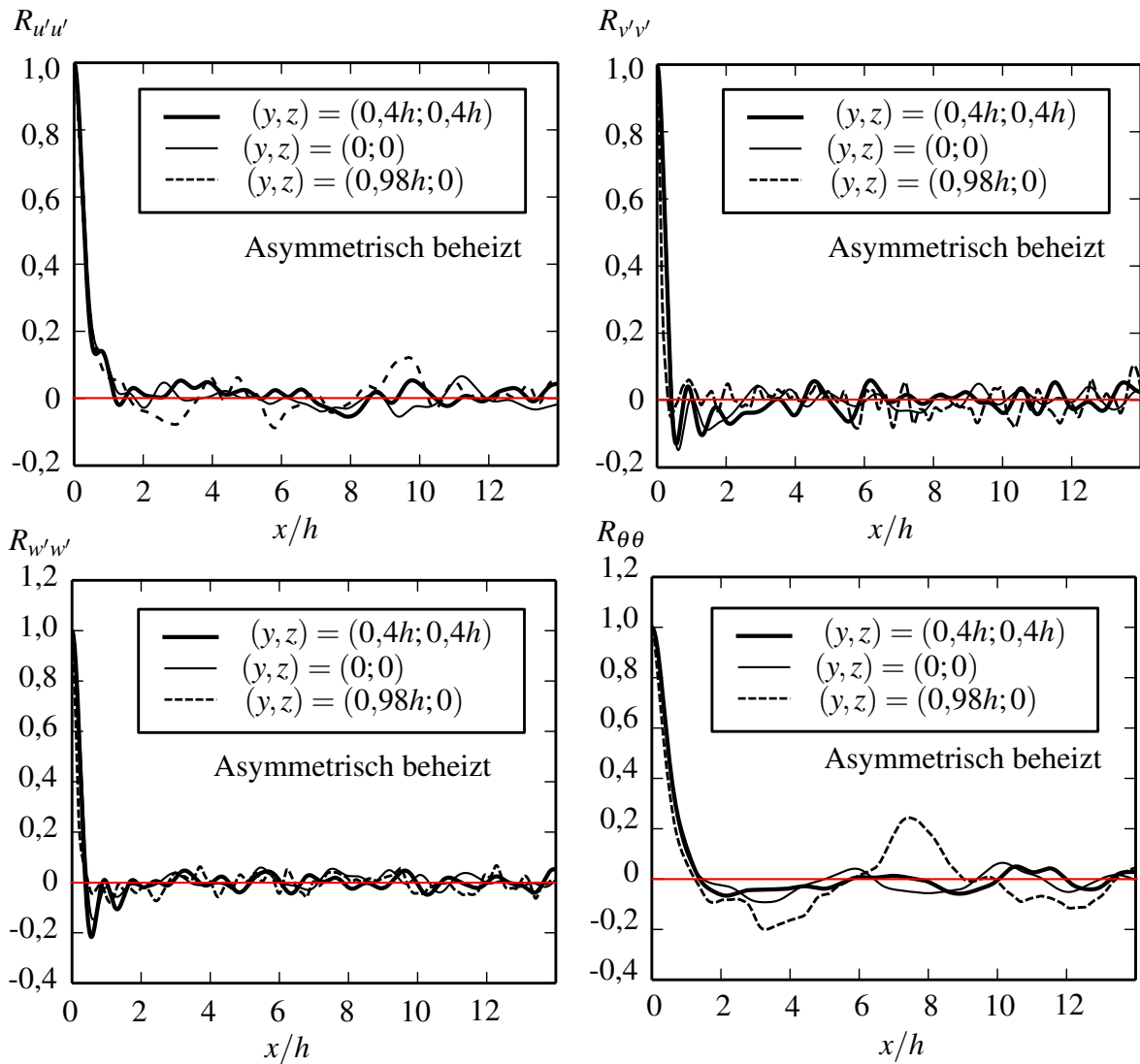


Abbildung A.62.: Vergleich der Zweipunktkorrelationen für eine asymmetrisch beheizte Rechteckkanalströmung unter Berücksichtigung von Auftriebseffekten bei $Re_b = 7000$, $Pr = 0,025$ und $Ri = 0,09$.

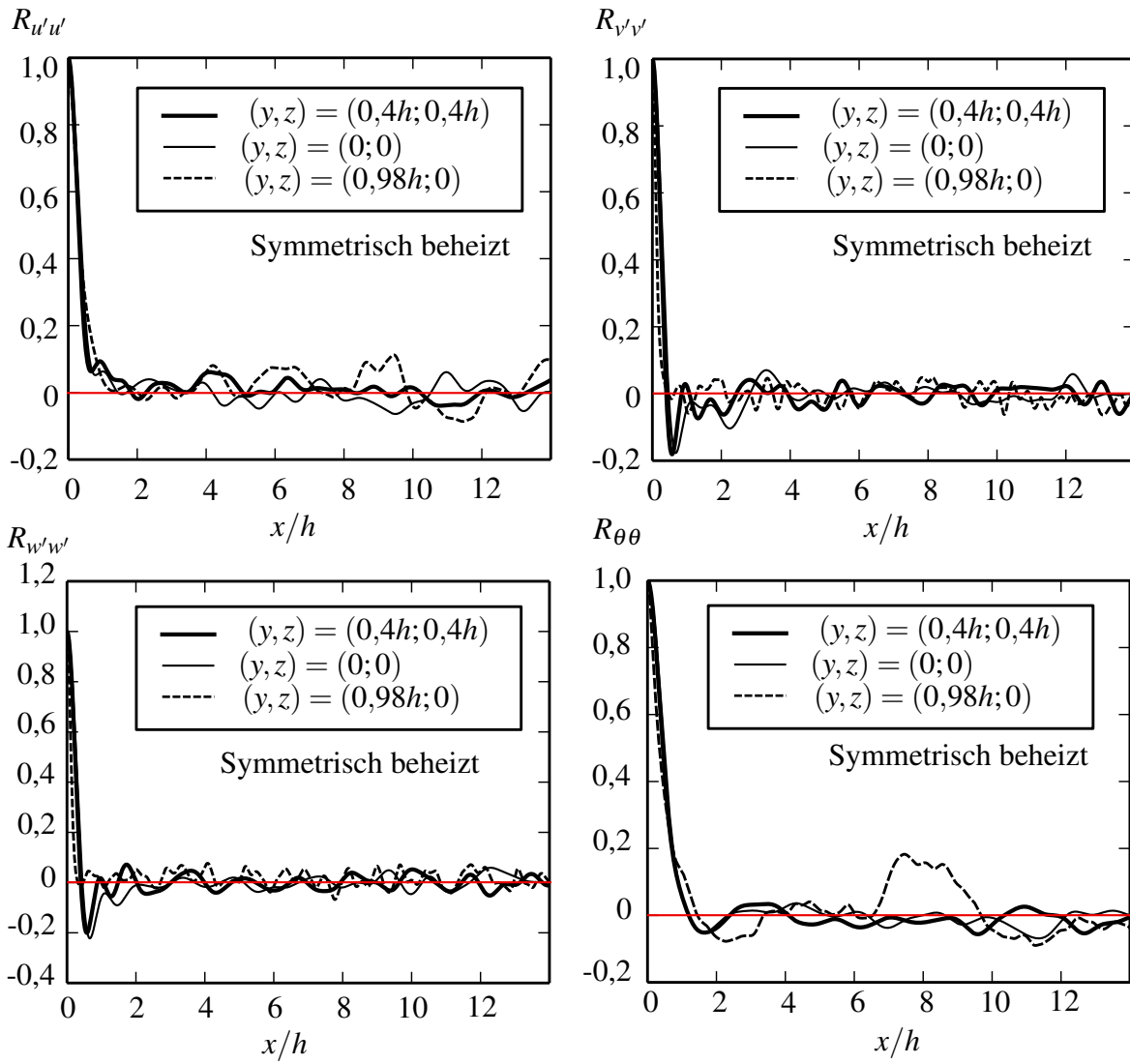


Abbildung A.63.: Vergleich der Zweipunktkorrelationen für eine symmetrisch beheizte Rechteckkanalströmung unter Berücksichtigung von Auftriebseffekten bei $Re_b = 7000$, $Pr = 0,025$ und $Ri = 0,09$.

A.4.5. Fluid-Struktur-Interaktion

In Abb. A.64 ist das Ergebnis einer Fluid-Struktur-Interaktion für einen Rechteckkanal bei asymmetrischer Beheizung dargestellt. Es wurde hierfür ein eigener Löser in OpenFOAM[®] [142] implementiert. Dieser basiert in seinen Grundzügen auf dem Löser „multiphaseInterFoam“, nutzt jedoch nur konstante Stoffeigenschaften. Es werden jeweils separat die Energieerhaltungsgleichung in der Struktur und im Fluid gelöst. Über die Randbedingungen bzw. das Interface sind beide Gebiete miteinander verbunden. Die Berechnung erfolgt sequenziell, so dass nach dem Lösen des Gleichungssystems für das Fluid die Werte des Interfaces aktualisiert werden. Diese können dann als Randbedingung für das Gleichungssystem der Struktur genutzt werden.

Deutlich zu erkennen ist der lineare Verlauf der Temperatur in der Struktur. Das Fluid zeigt hingegen ein typisches Temperaturprofil, das durch den konvektiven Transport beeinflusst ist. Die vorläufige Version des Löser muss in Zukunft weiter getestet und erweitert werden.

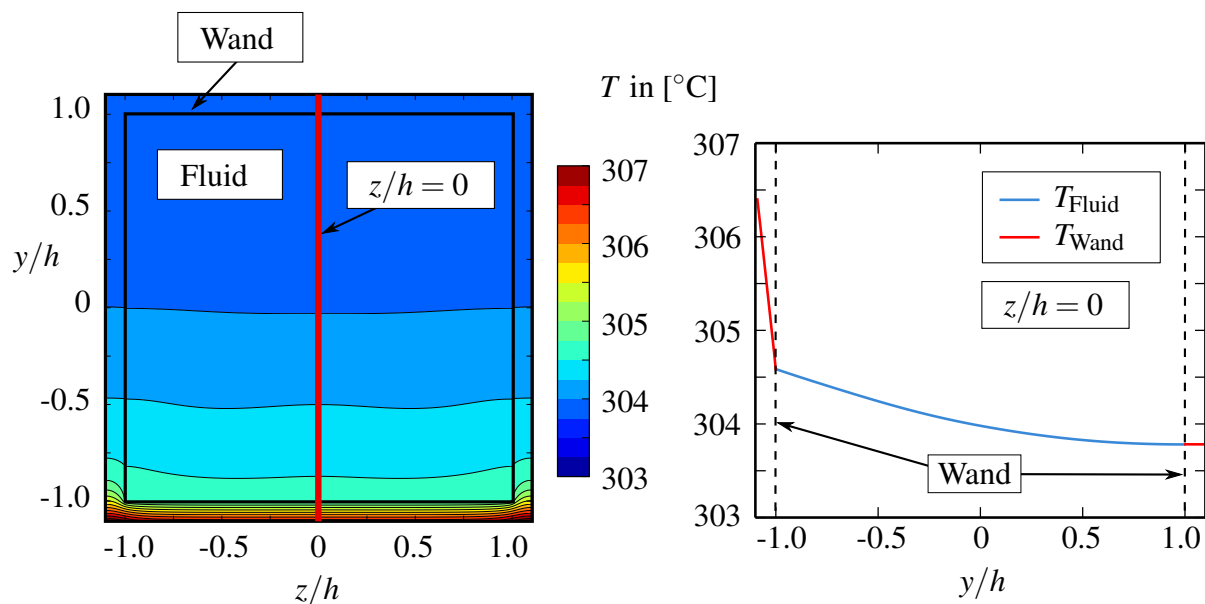


Abbildung A.64.: Temperaturverteilung des Fluids und der Wand als Ergebnis einer gekoppelten Simulation unter Verwendung des EARSM-Hellsten [77,78] und des Ansatzes nach Kays [22] bei asymmetrischer Beheizung sowie Reynolds-Zahl $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,025$.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Prinzipiskizze eines bleigekühlten Reaktors (LFR) mit angeschlossenem Joule-Brayton Gasturbinen-Kreisprozess (Grafik illustriert nach [2]).	2
1.2	Prinzipiskizze eines Natrium gekühlten Reaktors (SFR) mit angeschlossenem Dampf-Kreislauf zur Energiegewinnung (Grafik illustriert nach [2])	3
1.3	Prinzipiskizze der Kollektoranordnung a), der Flussdichte am Brennpunkt b), des Receivers und der Absorberfläche c) sowie des zugehörigen Strömungskanal d) der SOMMER-Anlage des KALLA-Labors (KIT) [15–18].	4
1.4	Schematische Skizze des AMTEC-Konverters zur direkten Umwandlung von Wärme in elektrische Energie (Grafik illustriert nach [21]).	5
1.5	Skizze der KASOLA-Testanlage des INR (KIT-CN) (links) sowie Detailskizze der Testsektion für Rechteckkanalströmungen (rechts) (Grafiken illustriert nach [25,26,29]).	7
1.6	Schematische Skizze der Stromlinienverteilung der turbulenzinduzierten Sekundärströmung im Rechteckkanal (links) und detaillierte Skizze der Testsektion in der KASOLA-Anlage mit zugehörigen Randbedingungen (rechts).	8
1.7	Verteilung der Vortizität in Strömungsrichtung in einem Quadranten (links). Detaillierter Verlauf der einzelnen Transportterme der Vortizitätsgleichung für Ω_x^+ (rechts) bei $y/h = 0,017$ jeweils unter Verwendung von DNS-Daten in vollständig entwickelten Rechteckkanalströmungen bei $Re_B = 2200$ [33,53,54].	11
2.1	Interferogramm auftriebsbedingter Konvektionsrollen für eine gleichmäßige Temperaturdifferenz (oben) und für eine über die Wandlänge zunehmende Temperaturdifferenz (unten) zwischen beiden Wänden [88].	21
2.2	Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus einer Rayleigh-Bénard-Konvektion im <i>Ilmenauer Fass</i> (Grafik illustriert nach [90]).	22
2.3	Schematische Darstellung des Einflusses der Prandtl-Zahl auf die Dicke der thermischen Grenzschicht einer ebenen überströmten Platte (Grafik illustriert nach [94]).	24
2.4	Instantane Geschwindigkeits- (a) und Temperaturverteilung einer Grobstruktursimulation (LES) einer beidseitig ($T^* = 1$) beheizten, turbulenten Kanalströmung bei unterschiedlichen molekularen Prandtl-Zahlen (b,c) und einer Reynolds-Zahl $Re_b = 14140$	25
3.1	Schematische Darstellung des Energiespektrums der turbulenten kinetischen Energie und seiner wesentlichen Teilbereiche als Funktion der Wellenzahl κ	31
3.2	Schematische Darstellung des dreidimensionalen Energiespektrums der Geschwindigkeits- $E_k(\kappa)$ und Temperaturfluktuationen $E_T(\kappa)$ in Plattenkanalströmungen verschiedener Prandtl-Zahlen $Pr \leq 1$ nach Grötzbach [23,106].	33
4.1	Schematische Darstellung der Trennung zwischen aufgelösten und modellierten Strukturen in Abhängigkeit einer lokalen Filterweite $\Delta(x_i)$ (links) sowie anhand des Energiespektrums (rechts) nach Grötzbach [23,106].	37
4.2	Schematische Darstellung der verschiedenen Mittelungsoperationen auf ein statistisch stationäres Signal $\phi_{x_i,t}$ als Erweiterung einer Abbildung nach Ferziger [87].	38

4.3	Schematische Darstellung der Bedeutung der Germano-Identität, Abbildung nach [98].	43
4.4	Schematische Darstellung der zeitlichen Mittelung für ein statistisch stationäres Signal (links) und des ensembledemittelten Verlaufs eines vollständig instationären Signals (rechts) im Punkt x_i (Grafik illustriert nach Ferziger [87]).	46
4.5	Schematische Darstellung einer eindimensionalen Scherströmung zur Illustration des Prandtlschen Mischungswegansatzes (Grafik nach Oertel et al. [96]).	48
4.6	Skizze einer beidseitig beheizten Plattenkanalströmung zur Illustration der für eine Normierung relevanten Strömungsgrößen.	50
4.7	Darstellung des normierten Geschwindigkeitsprofils einer turbulenten Plattenkanalströmung auf Basis der DNS-Daten für $Re_\tau = 640$ nach Abe et al. [85,86] mit den Werten $\kappa = 0,41$ und $C^+ = 5,5$ für das logarithmische Wandgesetz.	51
4.8	Normiertes Temperaturprofil $\bar{\Theta}^+$ einer turbulenten Plattenkanalströmung auf Basis der DNS-Daten für $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$ nach Abe et al. [85,86].	52
4.9	Normiertes Temperaturprofil $\bar{\Theta}^+$ einer turbulenten Plattenkanalströmung auf Basis der DNS-Daten für $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,71$ nach Abe et al. [85,86] mit den Werten $\kappa_\theta = 0,47$ und $C_\theta^+ = 3,8$ für das logarithmische Wandgesetz.	53
5.1	Übersicht über die verschiedenen Modellierungsstufen von Schließungsansätzen der Reynolds-gemittelten Impulsgleichungen	59
5.2	Verlauf der normierten Reynolds-Spannungskomponenten $\overline{u'_i u'_j}^+$ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ auf Basis der DNS-Daten (nur jeder vierte Datenpunkt als Symbol) von Abe et al. [85,86] in einer turbulenten Plattenkanalströmung bei $Re_\tau = 640$	73
5.3	Übersicht der wesentlichen Einflussgrößen auf die Produktion durch die Hauptströmung (schwarze Pfeile) und durch die Reynolds-Spannungen (rote Pfeile) sowie der wesentlichen Interaktionen der Reynolds-Spannungen am Beispiel einer turbulenten, vollständig entwickelten Plattenkanalströmung (Abbildung nach Hanjalić & Launder [71]).	74
6.1	Übersicht über die verschiedenen Modellierungsstufen von Schließungsansätzen der Reynolds-gemittelten Energieerhaltungsgleichung	76
6.2	Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ einer turbulente Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 640$ und unterschiedlichen molekularen Prandtl-Zahlen $Pr = 0,025$ und $Pr = 0,71$ anhand der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].	79
6.3	Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t über dem Wandabstand y^+ für eine beidseitig konstant beheizte, turbulente Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 640$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,025$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].	83
6.4	Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t über dem Wandabstand y^+ für eine beidseitig konstant beheizte, turbulente Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 640$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].	84
6.5	Verlauf der Dämpfungsfunktionen f_κ und f_{κ_θ} des Cebeci-Modells [56] über dem dimensionslosen wandnormalen Wandabstand y^+	85
6.6	Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t über dem Wandabstand y^+ für eine beidseitig konstant beheizte, turbulente Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 640$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,025$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].	87

6.7	Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t über dem Wandabstand y^+ für eine beidseitig konstant beheizte, turbulente Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 640$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].	88
6.8	Verlauf der turbulenten thermischen Diffusivität $\alpha_t^+ = \alpha_t/\nu$ über dem Wandabstand y^+ für eine beidseitig konstant beheizte, turbulente Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 640$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,025$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].	89
6.9	Verlauf der turbulenten thermischen Diffusivität $\alpha_t^+ = \alpha_t/\nu$ über dem Wandabstand y^+ für eine beidseitig konstant beheizte, turbulente Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 640$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].	89
6.10	Verlauf der entdimensionierten Transportterme der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}$ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ gemäß der DNS-Daten für eine vollständig entwickelte Plattenkanalströmung bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$ von Abe et al. [85,86].	92
6.11	Verlauf der entdimensionierten Transportterme der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}$ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ gemäß der DNS-Daten für eine vollständig entwickelte Plattenkanalströmung bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,71$ von Abe et al. [85,86].	93
6.12	Verlauf des Zeitskalenverhältnisses R über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ turbulenter Plattenkanalströmungen mit variierender Reynolds-Zahl Re_τ und unterschiedlichen molekularen Prandtl-Zahlen, $Pr = 0,025$ und $Pr = 0,71$, ermittelt mit Hilfe der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].	94
6.13	Verlauf der Koeffizienten $C_{\lambda 1}$ und A^+ der Dämpfungsfunktion f_λ von Sommer et al. [163] sowie So & Sommer [162] in Abhängigkeit der molekularen Prandtl-Zahl Pr	97
6.14	Verlauf der turbulenten Diffusivität α_t^+ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ für die Modelle von Sommer et al. [163] und So & Sommer [162] im Vergleich zu den DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).	98
6.15	Verlauf der turbulenten Diffusivität α_t^+ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ für die Modelle von Sommer et al. [163] und So & Sommer [162] im Vergleich zu den DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,71$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).	99
6.16	Verlauf der turbulenten Diffusivität α_t^+ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ für die Modelle von Abe et al. [61] und Manservisi & Menghini [65,66] im Vergleich zu den DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).	103
6.17	Verlauf der turbulenten Diffusivität α_t^+ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ für die Modelle von Abe et al. [61] und Manservisi & Menghini [65,66] im Vergleich zu den DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,71$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).	104
6.18	Verlauf der einzelnen Transport- und Vernichtungsterme über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ für die wandnormale Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'^+}$ unter Verwendung der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).	113
6.19	Verlauf der einzelnen Transport- und Vernichtungsterme über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ für die wandnormale Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'^+}$ unter Verwendung der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,71$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).	113
6.20	Verlauf des Verhältnisses der Dissipationsrate $\varepsilon_{i\theta}^+$ zum Modellansatz von Baumann [70] bzw. einer weiteren Modifikation über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ für die wandnormale Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'^+}$ auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei variierender Reynolds-Zahl Re_τ und $Pr = 0,025$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).	120
6.21	Verlauf des Zeitskalenverhältnisses R für zwei verschiedene Prandtl-Zahlen $Pr = 0,025$ und $Pr = 0,71$ als Funktion des normierten Wandabstands y^+ nach dem Modellansatz von Dehoux [75], bestimmt auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).	124

6.22	Verlauf der vorgestellten, kombinierten Modellansätze des Korrelations- und Dissipationsterms $\Pi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta}$ (oben) bzw. $\Pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ (unten), ermittelt auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).	126
6.23	Verlauf der vorgestellten, kombinierten Modellansätze des Korrelations- und Dissipationsterms $\Pi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta}$ (oben) bzw. $\Pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ (unten), ermittelt auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,71$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).	127
7.1	Turbulente Wärmeflusskomponente in Strömungsrichtung $\overline{u'\theta'}$ und wandnormaler Richtung $\overline{v'\theta'}$ normiert mit der turbulenten kinetischen Energie k und der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}$, ermittelt auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$ (oben) bzw. $Pr = 0,71$ (unten) (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).	131
7.2	Verhältnis zwischen Produktions- und Dissipationsrate der turbulenten kinetischen Energie k und der Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}$ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ , ermittelt auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$ (oben) bzw. $Pr = 0,71$ (unten) (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).	133
7.3	Verlauf der kombinierten Modellansätze des Korrelations- und Dissipationsterms $\Pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ des angepassten Ansatzes nach Carteciano [73] für die turbulente Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'^+}$ als Funktion des Wandabstands y^+ , ermittelt auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$ (oben) bzw. $Pr = 0,71$ (unten) (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).	135
7.4	Verlauf der kombinierten Modellansätze des Korrelations- und Dissipationsterms $\Pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ des angepassten Ansatzes nach Shikazono & Kasagi [72] für die turbulente Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'^+}$ über y^+ , ermittelt auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$ (oben) bzw. $Pr = 0,71$ (unten) (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).	138
7.5	Verlauf der beiden Ansätze des turbulenten Diffusionsterms D_{TT}^{l+} bzw. des Gradienten der dritten Momente $\overline{\theta'^2 u'_j}$ über dem wandnormalen Abstand y^+ , ermittelt auf Basis der DNS-Daten [85,86] für $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).	140
7.6	Vergleich des Modellansatzes der Poisson-Gleichung nach [178–180] (vgl. Gl. (7.13)) mit der exakten Bestimmung des wandnormalen Abstandes für eine Plattenkanalgeometrie.	141
7.7	Vergleich des Modellansatzes zur Bestimmung des Wandabstands auf Basis der Poisson-Gleichung nach [178–180] (vgl. Gl. (7.13)) mit der exakten Bestimmung (minimaler Abstand zu den einzelnen Wänden) für eine Rechteckkanalgeometrie.	141
7.8	Vergleich des Verhältnisses der turbulenten thermischen Diffusivität α_t zur kinematischen Viskosität ν (links) und der normierten Wärmeflusskomponente $\overline{v'T'^+}$ für den ursprünglichen Ansatz nach Manservigi & Menghini [65,66] bei exakter Bestimmung des wandnormalen Abstandes und der modifizierten Form (MM-TD).	142
7.9	Dimensionslose Geschwindigkeitsprofile $\overline{u^+}$ (für steigende Reynolds-Zahlen Re_τ sind die Profile jeweils verschoben) über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ für das RSM-EBM im Vergleich zu den DNS-Daten [85,86] (nur jedes 3. Symbol dargestellt).	143
7.10	Verlauf der turbulenten Reynolds-Spannungen $\overline{u'_i u'_j}$ für das EARSM nach Hellsten [77,78] (Linien) über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ im Vergleich zu den DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und Zwangskonvektion (nur jedes 3. Symbol dargestellt).	144
7.11	Verlauf der turbulenten Reynolds-Spannungen $\overline{u'_i u'_j}$ für das RSM-EBM nach Dehoux [75,148] (Linien) über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ im Vergleich zu den DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und Zwangskonvektion (nur jedes 3. Symbol dargestellt).	145

7.12	Verlauf des Reibungskoeffizienten c_f für das EARSM und RSM-EBM über der Reynolds-Zahl Re_{D_h} im Vergleich zu experimentellen, empirischen und numerischen Daten.	146
7.13	Verlauf des dimensionslosen Temperaturprofils $\bar{\Theta}^+$ (oben) und der wandnormalen, turbulenten Wärmeflusskomponente $-\overline{v'\theta'}^+$ (unten) für die einzelnen Ansätze über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ im Vergleich zu DNS-Daten (nur jeder 5. Datenpunkt der DNS ist als Symbol dargestellt) bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$	148
7.14	Verlauf des dimensionslosen Temperaturprofils $\bar{\Theta}^+$ (oben) und der wandnormalen, turbulenten Wärmeflusskomponente $-\overline{v'\theta'}^+$ (unten) für die einzelnen Ansätze über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ im Vergleich zu DNS-Daten (nur jeder 5. Datenpunkt der DNS ist als Symbol dargestellt) bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,71$	149
7.15	Verlauf der normierten Temperaturprofile $\bar{\Theta}^+$ des SK-AHM (Profile um 2 bzw. 5 dimensionslose Einheiten verschoben) über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ im Vergleich zu DNS-Daten (nur jeder 3. Datenpunkt der DNS ist als Symbol dargestellt) bei $Pr = 0,025$ (oben) und $Pr = 0,71$ (unten).	150
7.16	Verlauf der turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'}^+$ des SK-AHM über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ im Vergleich zu DNS-Daten (nur jeder 3. Datenpunkt der DNS ist als Symbol dargestellt) bei $Pr = 0,025$ (oben) und $Pr = 0,71$ (unten).	151
7.17	Verlauf der normierten Temperaturprofile $\bar{\Theta}^+$ des Carteciano-AHM (Profile um 2 bzw. 5 dimensionslose Einheiten verschoben) über dem Wandabstand y^+ im Vergleich zu DNS-Daten (nur jeder 3. Datenpunkt der DNS ist als Symbol dargestellt) bei $Pr = 0,025$ (oben) und $Pr = 0,71$ (unten).	152
7.18	Verlauf der turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'}^+$ des Carteciano-AHM über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ im Vergleich zu DNS-Daten (nur jeder 3. Datenpunkt der DNS ist als Symbol dargestellt) bei $Pr = 0,025$ (oben) und $Pr = 0,71$ (unten).	153
7.19	Verlauf der normierten Temperaturvarianz $\overline{\theta'^2}^+$ über dem normierten Wandabstand y^+ im Vergleich zur DNS [85,86] bei $Pr = 0,025$ (oben) und $Pr = 0,71$ (unten) (nur jeder 3. Datenpunkt als Symbol).	154
7.20	Verlauf der Dissipationsrate der Temperaturvarianz $\varepsilon_{\theta\theta}^+$ über dem normierten Wandabstand y^+ im Vergleich zur DNS [85,86] bei $Pr = 0,025$ (oben) und $Pr = 0,71$ (unten) (nur jeder 3. Datenpunkt als Symbol).	155
7.21	Verlauf der Nusselt-Zahl Nu_{D_h} (basierend auf dem hydraulischen Durchmesser D_h) über der Péclet-Zahl Pe_{D_h} im Vergleich zu Ergebnissen der DNS [85,86] bzw. DNS/LES [187] sowie zu einer empirischen Korrelation der Literatur für eine Prandtl-Zahl $Pr = 0,025$	156
7.22	Verlauf der Nusselt-Zahl Nu_{D_h} (basierend auf dem hydraulischen Durchmesser D_h) über der Péclet-Zahl Pe_{D_h} im Vergleich zu Ergebnissen der DNS [85,86] sowie zu empirischen Korrelationen der Literatur für eine Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$	157
7.23	Verlauf des normierten Temperaturprofils $\bar{\Theta}^+$ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ der algebraischen Modelle (SK-AHM und Carteciano-AHM) und der LES-Daten bei $Re_\tau = 395$ sowie drei Prandtl-Zahlen $Pr = 0,006, 0,025$ und $0,71$	160
7.24	Verlauf der turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta'}^+$ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ der algebraischen Modelle (SK-AHM und Carteciano-AHM) und der LES-Daten bei $Re_\tau = 395$ sowie drei Prandtl-Zahlen $Pr = 0,006, 0,025$ und $0,71$	160
7.25	Verlauf der Nusselt-Zahlen Nu_{D_h} über der Péclet-Zahl Pe_{D_h} der beiden algebraischen Modelle im Vergleich zu semi-empirischen Korrelationen nach Jäger et al. [197] und Hartnett & Irvine [198] bei $Pr = 0,018$	162
7.26	Schematische Darstellung des Strömungsgebietes und des gewählten Koordinatensystems einer voll eingelaufenen Rechteckkanalströmung quadratischen Querschnitts.	163

7.27	Isotachen der Hauptströmungskomponente (\bar{u}/u_b) (oben) und des Betrags der Sekundärströmungskomponenten (\bar{S}/u_b) in der Querschnittsebene (unten) für das EARSM nach Hellsten [77,78] und das RSM-EBM [75,148] im Vergleich mit den DNS-Daten [54] bei $Re_b = 7000$	164
7.28	Verteilung der turbulenten Reynolds-Spannungen ($\overline{u'u'}/u_b^2$) (oben), $\overline{w'w'}/u_b^2$ (mittlerer Ausschnitt) und $\overline{v'v'}/u_b^2$ (unten) für das EARSM nach Hellsten [77,78] und das RSM-EBM [75,148] im Vergleich mit den DNS-Daten [54] bei $Re_b = 7000$	166
7.29	Verlauf des ermittelten Reibungskoeffizienten c_f (Fanning-Stil) einer turbulenten Rechteckkanalströmung quadratischen Querschnitts über der Reynolds-Zahl Re_{D_h} im Vergleich zur empirischen Korrelation nach Jones [200] sowie experimentellen Daten nach Schiller [201] und Hartnett et al. [202].	167
7.30	Verlauf der Geschwindigkeitsprofile \bar{u}/u_b und \bar{w}/u_b sowie der primären, turbulenten Normalspannung \bar{u}_{RMS}/u_b der Grobstruktursimulation im Vergleich zu der experimentellen Arbeit von Kawahara et al. [203], den DNS-Daten von Pinelli et al. [33,53,54] und dem RSM-EBM [75,148] bei $Re_b = 7000$ und erzwungener Konvektion.	169
7.31	Vergleich der normierten Temperaturverteilung $\bar{\Theta}^+$ (oben), des axialen turbulenten Wärmeflusses $\overline{u'\theta'^+}$ (Mitte) und des turbulenten Wärmeflusses $\overline{v'\theta'^+}$ (unten) für die Grobstruktursimulation (LES) jeweils mit den Ergebnissen der beiden algebraischen Modelle, Carteciano-AHM (linke Spalte) und SK-AHM (rechte Spalte), für einen asymmetrischen Beheizungszustand bei $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,025$	171
7.32	Vergleich der normierten Temperaturverteilung $\bar{\Theta}^+$ (oben), des axialen turbulenten Wärmeflusses $\overline{u'\theta'^+}$ (Mitte) und des turbulenten Wärmeflusses $\overline{v'\theta'^+}$ (unten) für die Grobstruktursimulation (LES) jeweils mit den Ergebnissen der beiden algebraischen Modelle, Carteciano-AHM (linke Spalte) und SK-AHM (rechte Spalte), für einen symmetrischen Beheizungszustand bei $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,025$.	172
7.33	Vergleich der normierten Temperaturverteilung $\bar{\Theta}^+$ (linke Spalte) und des turbulenten Wärmeflusses $\overline{v'\theta'^+}$ (rechte Spalte) für die Grobstruktursimulation (LES) im Vergleich zum MM-TD für einen asymmetrischen (oben) und einen symmetrischen (unten) Beheizungszustand bei $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,025$	173
7.34	Vergleich der normierten Temperaturverteilung $\bar{\Theta}^+$ (oben), des axialen turbulenten Wärmeflusses $\overline{u'\theta'^+}$ (Mitte) und des turbulenten Wärmeflusses $\overline{v'\theta'^+}$ (unten) für die Grobstruktursimulation (LES) jeweils mit den Ergebnissen der beiden algebraischen Modelle, Carteciano-AHM (linke Spalte) und SK-AHM (rechte Spalte), für einen asymmetrischen Beheizungszustand bei $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,71$.	175
7.35	Vergleich der normierten Temperaturverteilung $\bar{\Theta}^+$ (oben), des axialen turbulenten Wärmeflusses $\overline{u'\theta'^+}$ (Mitte) und des turbulenten Wärmeflusses $\overline{v'\theta'^+}$ (unten) für die Grobstruktursimulation (LES) jeweils mit den Ergebnissen der beiden algebraischen Modelle, Carteciano-AHM (linke Spalte) und SK-AHM (rechte Spalte), für einen symmetrischen Beheizungszustand bei $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,71$.	176
7.36	Vergleich der turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{w'\theta'^+}$ für die Grobstruktursimulation und die algebraischen Wärmeflussmodelle (Carteciano-AHM und SK-AHM) in einer asymmetrisch beheizten Rechteckkanalströmung bei $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,71$	178
7.37	Einfluss einer Variation der Péclet-Zahl Pe_{D_h} auf die berechnete Nusselt-Zahl Nu_{D_h} für die algebraischen Wärmeflussmodelle (Carteciano-AHM und SK-AHM) bei $Pr = 0,025$	180
7.38	Vergleich der Impulsfelddaten der LES (jeweils linke Kanalhälfte) mit den Ergebnissen des Carteciano-AHM (jeweils rechte Kanalhälfte) für einen asymmetrischen Beheizungszustand der Rechteckkanalströmung bei $Re_b = 7000$, $Pr = 0,025$ und $Ri = 0,09$	185
7.39	Vergleich der thermischen Felddaten der LES (jeweils linke Kanalhälfte) mit den Ergebnissen des Carteciano-AHM (jeweils rechte Kanalhälfte) für einen asymmetrischen Beheizungszustand der Rechteckkanalströmung bei $Re_b = 7000$, $Pr = 0,025$ und $Ri = 0,09$	186

7.40	Vergleich der Impulsfelddaten der LES (jeweils linke Kanalhälfte) mit den Ergebnissen des Carteciano-AHM (jeweils rechte Kanalhälfte) für einen symmetrischen Beheizungs- zustand der Rechteckkanalströmung bei $Re_b = 7000$, $Pr = 0,025$ und $Ri = 0,09$	187
7.41	Vergleich der thermischen Felddaten der LES (jeweils linke Kanalhälfte) mit den Ergebnissen des Carteciano-AHM (jeweils rechte Kanalhälfte) für einen symmetrischen Beheizungs- zustand der Rechteckkanalströmung bei $Re_b = 7000$, $Pr = 0,025$ und $Ri = 0,09$	188
A.1	Vergleich der Geschwindigkeitsprofile in Strömungsrichtung einer laminaren Kanalströmung (vgl. Abb. 4.6) unter Verwendung des SIMPLE- und PISO-Algorithmus mit der analytischen Lösung (vgl. Gl. (A.19)).	202
A.2	Verlauf und Aufteilung des Druckes p und der Temperatur T in einen linearen und einen periodischen Anteil des Profils über die Lauflänge L_x einer vollständig entwickelten, laminaren Kanalströmung bei konstanter Beheizung ($\dot{q} = \text{konst.}$) nach [207].	203
A.3	Vergleich der entdimensionierten Temperaturprofile einer laminaren, symmetrisch beheizten Kanal- strömung (vgl. Abb. 4.6) unter Verwendung des SIMPLE- und PISO-Algorithmus mit der analyti- schen Lösung (vgl. Gl. (A.27)).	205
A.4	Skizze des periodischen Strömungsgebietes für verschiedene Beheizungs- zustände der auftriebsbehafteten Strömung (Grafik nach Cheng et al. [208]).	206
A.5	Vergleich der normierten Geschwindigkeitsprofile (oben) und Temperaturprofile (unten) des um Auf- triebseffekte erweiterten PISO-Algorithmus mit der analytischen Lösung nach Cheng et al. [208] für eine laminare, beheizte Plattenkanalströmung bei $r_h = 1$	209
A.6	Vergleich der normierten Geschwindigkeitsprofile (oben) und Temperaturprofile (unten) des um Auf- triebseffekte erweiterten SIMPLE-Algorithmus mit der analytischen Lösung nach Cheng et al. [208] für eine laminare, beheizte Plattenkanalströmung bei $r_h = 0$	210
A.7	Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente, beidseitig beheizte Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 180$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,025$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].	212
A.8	Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente, beidseitig beheizte Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 395$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,025$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].	212
A.9	Verlauf der turbulenten thermischen Diffusivität α_t über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 180$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,025$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].	213
A.10	Verlauf der turbulenten thermischen Diffusivität α_t über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 395$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,025$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].	213
A.11	Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente, beidseitig beheizte Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 180$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].	214
A.12	Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente, beidseitig beheizte Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 395$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].	214
A.13	Verlauf der turbulenten thermischen Diffusivität α_t über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 180$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].	215

A.14	Verlauf der turbulenten thermischen Diffusivität α_t über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 395$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].	215
A.15	Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente, beidseitig beheizte Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 180$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,025$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].	218
A.16	Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente, beidseitig beheizte Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 395$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,025$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].	218
A.17	Verlauf der turbulenten thermischen Diffusivität α_t^+ über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente, symmetrisch beheizte Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 180$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,025$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].	219
A.18	Verlauf der turbulenten thermischen Diffusivität α_t^+ über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente, symmetrisch beheizte Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 395$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,025$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].	219
A.19	Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente, beidseitig beheizte Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 180$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].	220
A.20	Verlauf der turbulenten Prandtl-Zahl Pr_t über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente, beidseitig beheizte Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 395$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].	220
A.21	Verlauf der turbulenten thermischen Diffusivität α_t^+ über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente, symmetrisch beheizte Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 180$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].	221
A.22	Verlauf der turbulenten thermischen Diffusivität α_t^+ über dem Wandabstand y^+ für eine turbulente, symmetrisch beheizte Plattenkanalströmungen mit $Re_\tau = 395$ bei einer molekularen Prandtl-Zahl $Pr = 0,71$ auf Basis der DNS-Daten von Abe et al. [85,86].	221
A.23	Verlauf der entdimensionierten Transportterme der Temperaturvarianz $\overline{\theta^2}$ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ mittels der DNS-Daten für eine vollständig entwickelte Plattenkanalströmung bei $Re_\tau = 180$ und $Pr = 0,025$ von Abe et al. [85,86].	222
A.24	Verlauf der entdimensionierten Transportterme der Temperaturvarianz $\overline{\theta^2}$ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ mittels der DNS-Daten für eine vollständig entwickelte Plattenkanalströmung bei $Re_\tau = 180$ und $Pr = 0,71$ von Abe et al. [85,86].	223
A.25	Verlauf der entdimensionierten Transportterme der Temperaturvarianz $\overline{\theta^2}$ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ mittels der DNS-Daten für eine vollständig entwickelte Plattenkanalströmung bei $Re_\tau = 395$ und $Pr = 0,025$ von Abe et al. [85,86].	223
A.26	Verlauf der entdimensionierten Transportterme der Temperaturvarianz $\overline{\theta^2}$ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ mittels der DNS-Daten für eine vollständig entwickelte Plattenkanalströmung bei $Re_\tau = 395$ und $Pr = 0,71$ von Abe et al. [85,86].	224
A.27	Verlauf der turbulenten Diffusivität α_t^+ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ für die Modelle von Abe et al. [61] und Manservisi & Menghini [65,66] im Vergleich zu den DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 180$ und $Pr = 0,025$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).	225
A.28	Verlauf der turbulenten Diffusivität α_t^+ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ für die Modelle von Abe et al. [61] und Manservisi & Menghini [65,66] im Vergleich zu den DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 180$ und $Pr = 0,71$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).	225

A.29	Verlauf der Koeffizienten $C_{\lambda 1}$ und A^+ der Dämpfungsfunktion von Sommer et al. [163] sowie So & Sommer [162] in Abhängigkeit der molekularen Prandtl-Zahl Pr	227
A.30	Verlauf der turbulenten Diffusivität α_t^+ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ für die Modelle von Sommer et al. [163], So & Sommer [162] sowie einer modifizierten Variante im Vergleich zu den DNS-Daten nach Abe et al. [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,025$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).	227
A.31	Verlauf der turbulenten Diffusivität α_t^+ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ für die Modelle von Sommer et al. [163], So & Sommer [162] sowie einer modifizierten Variante im Vergleich zu den DNS-Daten nach Abe et al. [85,86] bei $Re_\tau = 640$ und $Pr = 0,71$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).	228
A.32	Verlauf der normierten Temperatur $\overline{\Theta}^+$ des Modells nach So & Sommer [162] und des modifizierten Modells (jeweils gekoppelt mit dem RSM-EBM [75]) über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ bei $Re_\tau = 395$ und unterschiedlichen Prandtl-Zahlen Pr im Vergleich zur DNS von Abe et al. [85,86] (Symbole für jeden 4. Datenpunkt).	228
A.33	Verlauf der vorgestellten, kombinierten Modellansätze des Korrelations- und Dissipationsterms $\Pi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta}$ (oben) bzw. $\Pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ (unten), ermittelt auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 180$ und $Pr = 0,025$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).	230
A.34	Verlauf der vorgestellten, kombinierten Modellansätze des Korrelations- und Dissipationsterms $\Pi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta}$ (oben) bzw. $\Pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ (unten), ermittelt auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 395$ und $Pr = 0,025$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).	231
A.35	Verlauf der vorgestellten, kombinierten Modellansätze des Korrelations- und Dissipationsterms $\Pi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta}$ (oben) bzw. $\Pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ (unten), ermittelt auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 180$ und $Pr = 0,71$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).	232
A.36	Verlauf der vorgestellten, kombinierten Modellansätze des Korrelations- und Dissipationsterms $\Pi_{1\theta} - \varepsilon_{1\theta}$ (oben) bzw. $\Pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ (unten), ermittelt auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 395$ und $Pr = 0,71$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).	233
A.37	Verlauf der Temperaturfluktuation an der Wand $\overline{\theta}'_w^+$ über dem thermischen „Aktivierungsverhältnis“ K bei verschiedenen Prandtl-Zahlen, ermittelt mit Hilfe des Energiespektrums nach Polyakov [209].	237
A.38	Verlauf der kombinierten Modellansätze des Korrelations- und Dissipationsterms $\Pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ der wandnormalen turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta}'^+$ als Fkt. des dimensionslosen Wandabstands y^+ auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 180$ (oben) und $Re_\tau = 395$ (unten) sowie $Pr = 0,025$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).	238
A.39	Verlauf der kombinierten Modellansätze des Korrelations- und Dissipationsterms $\Pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ der wandnormalen turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta}'^+$ als Fkt. des dimensionslosen Wandabstands y^+ auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 180$ (oben) und $Re_\tau = 395$ (unten) sowie $Pr = 0,71$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).	239
A.40	Verlauf der kombinierten Modellansätze des Korrelations- und Dissipationsterms $\Pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ der wandnormalen turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta}'^+$ als Fkt. des dimensionslosen Wandabstands y^+ auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 180$ (oben) und $Re_\tau = 395$ (unten) sowie $Pr = 0,025$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).	240
A.41	Verlauf der kombinierten Modellansätze des Korrelations- und Dissipationsterms $\Pi_{2\theta} - \varepsilon_{2\theta}$ der wandnormalen turbulenten Wärmeflusskomponente $\overline{v'\theta}'^+$ als Fkt. des dimensionslosen Wandabstands y^+ auf Basis der DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 180$ (oben) und $Re_\tau = 395$ (unten) sowie $Pr = 0,71$ (Symbol für jeden 4. Datenpunkt).	241

A.42	Verlauf des Temperaturprofils $\bar{\Theta}^+$ des Carteciano-AHM für zwei verschiedene Werte des Koeffizienten $C_{5\theta}$ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ im Vergleich zu DNS-Daten [85,86] (nur jeder 3. Datenpunkt der DNS ist als Symbol dargestellt) bei $Pr = 0,025$ (oben) und $Pr = 0,71$ (unten).	242
A.43	Verlauf der wandnormalen turbulenten Wärmeflusskomponente $\bar{v}'\theta'^+$ des Carteciano-AHM für zwei verschiedene Werte des Koeffizienten $C_{5\theta}$ über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ im Vergleich zu DNS-Daten [85,86] (nur jeder 3. Datenpunkt der DNS ist als Symbol dargestellt) bei $Pr = 0,025$ (oben) und $Pr = 0,71$ (unten).	243
A.44	Verlauf des entdimensionierten Geschwindigkeitsprofils \bar{u}^+ (oben) und der aufgelösten Reynolds-Spannungen $\bar{u}'_i\bar{u}'_j^+$ (unten) der Grobstruktursimulation über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ im Vergleich zu DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 395$	244
A.45	Verlauf des Temperaturprofils $\bar{\Theta}^+$ (oben) und der wandnormalen Wärmeflusskomponente $-\bar{v}'\theta'^+$ (unten) der Grobstruktursimulation über dem dimensionslosen Wandabstand y^+ im Vergleich zu DNS-Daten [85,86] bei $Re_\tau = 395$ und den beiden Prandtl-Zahlen $Pr = 0,025$ und $Pr = 0,71$	245
A.46	Verlauf des ermittelten Reibungskoeffizienten c_f (Fanning-Stil) einer turbulenten Rechteckkanalströmung quadratischen Querschnitts über der Reynolds-Zahl Re_{D_h} bzw. Re_b im Vergleich zur empirischen Korrelation nach Jones [200] und experimentellen Daten nach Schiller [201] und Hartnett et al. [202].	246
A.47	Vergleich des EARSM-Hellsten [77,78] und des RSM-EBM [75,148] mit den DNS-Daten [54] bei einer Rechteckkanalströmung quadratischen Querschnitts und $Re_b = 4400$	246
A.48	Verteilung der turbulenten Reynolds-Spannungen $(\bar{u}'u'/u_b^2)$ (oben), $\bar{w}'w'/u_b^2$ (mittlerer Ausschnitt) und $\bar{u}'v'/u_b^2$ (unten) für das EARSM nach Hellsten [77,78] und das RSM-EBM [75,148] im Vergleich mit den DNS-Daten [54] $Re_b = 4400$	247
A.49	Normierte Geschwindigkeitsverteilung (links oben), Betrag der Sekundärströmungsgeschwindigkeit (rechts oben), entdimensionierte Normalspannung (links unten) und Scherspannung (rechts unten) der LES im Vergleich zu den DNS-Daten [54].	248
A.50	Energiespektrum für einen Punkt im Zentrum $(x, y, z) = (0,0,0)$ einer turbulenten Rechteckkanalströmung bei $Re_b = 7000$ (links) und Zweipunktkorrelation der Fluktuationsgröße in axialer Richtung an drei verschiedenen Punkten (rechts).	248
A.51	Zweipunktkorrelation der beiden Fluktuationsgrößen in Querrichtung (oben), der Temperaturfluktuationen für $Pr = 0,025$ (Mitte) und für $Pr = 0,71$ (unten) jeweils für einen symmetrisch (jeweils links) und asymmetrisch (jeweils rechts) beheizten Zustand an drei verschiedenen Punkten des Strömungsgebietes.	249
A.52	Vergleich der Grobstruktursimulation mit den Ergebnissen der beiden algebraischen Modelle, Carteciano-AHM (links) und SK-AHM (Mitte) und der Erweiterung des Modells nach Manservigi & Menghini - MM-TD (rechts), für einen asymmetrischen Beheizungszustand bei $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,025$	250
A.53	Vergleich der Grobstruktursimulation mit den Ergebnissen der beiden algebraischen Modelle, Carteciano-AHM (links) und SK-AHM (Mitte) und der Erweiterung des Modells nach Manservigi & Menghini - MM-TD (rechts), für einen symmetrischen Beheizungszustand bei $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,025$	251
A.54	Vergleich der Grobstruktursimulation mit den Ergebnissen der beiden algebraischen Modelle, Carteciano-AHM (links) und SK-AHM (rechts) für einen symmetrischen Beheizungszustand bei $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,71$	252
A.55	Vergleich der Grobstruktursimulation mit den Ergebnissen der beiden algebraischen Modelle, Carteciano-AHM (links) und SK-AHM (rechts) für einen asymmetrischen Beheizungszustand bei $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,71$	253

A.56	Vergleich der extrahierten Profile an unterschiedlichen Stellen des Rechteckkanals für eine asymmetrische Beheizung, $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,025$	254
A.57	Vergleich der extrahierten Profile an unterschiedlichen Stellen des Rechteckkanals für eine symmetrische Beheizung, $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,025$	255
A.58	Vergleich der extrahierten Profile an unterschiedlichen Stellen des Rechteckkanals für eine asymmetrische Beheizung, $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,71$	256
A.59	Vergleich der extrahierten Profile an unterschiedlichen Stellen des Rechteckkanals für eine symmetrische Beheizung, $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,71$	257
A.60	Schematische Verläufe der sich einstellenden Temperaturdifferenzen einer beheizten Rechteckkanalströmung zwischen Wandtemperatur T_w und der Bulk-Temperatur T_b am Beispiel Quecksilber ($D_h = 0,1$ m, $\lambda = 8,3$ W/mK und $Pr = 0,023$), abgeleitet aus den entwickelten Nusselt-Korrelationen (vgl. Gl. (7.32) und (7.33)).	258
A.61	Schematische Verläufe der sich einstellenden Temperaturdifferenzen einer beheizten Rechteckkanalströmung zwischen Wandtemperatur T_w und der Bulk-Temperatur T_b am Beispiel LBE ($D_h = 0,1$ m, $\lambda = 14,4$ W/mK und $Pr = 0,014$), abgeleitet aus den entwickelten Nusselt-Korrelationen (vgl. Gl. (7.32) und (7.33)).	258
A.62	Vergleich der Zweipunktkorrelationen für eine asymmetrisch beheizte Rechteckkanalströmung unter Berücksichtigung von Auftriebseffekten bei $Re_b = 7000$, $Pr = 0,025$ und $Ri = 0,09$	259
A.63	Vergleich der Zweipunktkorrelationen für eine symmetrisch beheizte Rechteckkanalströmung unter Berücksichtigung von Auftriebseffekten bei $Re_b = 7000$, $Pr = 0,025$ und $Ri = 0,09$	260
A.64	Temperaturverteilung des Fluids und der Wand als Ergebnis einer gekoppelten Simulation unter Verwendung des EARSM-Hellsten [77,78] und des Ansatzes nach Kays [22] bei asymmetrischer Beheizung sowie Reynolds-Zahl $Re_b = 7000$ und $Pr = 0,025$	261

Tabellenverzeichnis

2.1	Vergleich wesentlicher thermo-physikalischer Stoffeigenschaften für Luft, Wasser, flüssiges Natrium und eutektisches Blei-Bismuth (LBE) unter normalem atmosphärischen Druck nach Angaben von [13] und [95].	26
6.1	Vergleich des asymptotischen Wandverhaltens der wesentlichen Transport- und Vernichtungsterme der turbulenten Wärmeflussgleichung in einer turbulenten Kanalströmung.	111
6.2	Übersicht der Koeffizienten des Modells nach Lai & So [172].	116
6.3	Übersicht der Koeffizienten des Modells nach Carteciano [73].	119
6.4	Übersicht der Koeffizienten des Modells nach Baumann [70]	121
7.1	Übersicht der Koeffizienten des Modells nach Carteciano [73] und des implizit algebraischen Modells (Carteciano-AHM).	136
7.2	Übersicht der Koeffizienten des implizit algebraischen Modells (SK-AHM) durch Kombination der Modellansätze von Baumann [70] und Shikazono & Kasagi [72].	139
7.3	Übersicht über die untersuchten Kombinationen aus Turbulenz- und Wärmeflussmodell.	147
7.4	Übersicht der wesentlichen Parameter der Grobstruktursimulation (LES).	159
7.5	Übersicht der wesentlichen Parameter der Grobstruktursimulation (LES).	168
7.6	Vergleich der berechneten Nusselt-Zahlen für eine turbulente Rechteckkanalströmung bei $Re_b = 7000$, einer molekularen Prandtl-Zahl von $Pr = 0,025$ sowie verschiedenen Beheizungszuständen.	177
7.7	Vergleich der Nusselt-Zahlen für eine turbulente Rechteckkanalströmung bei $Re_b = 7000$, einer molekularen Prandtl-Zahl von $Pr = 0,71$ sowie verschiedenen Beheizungszuständen.	178
7.8	Übersicht der wesentlichen Parameter der Grobstruktursimulation (LES) unter Berücksichtigung von Auftriebseffekten.	181
7.9	Vergleich der berechneten Nusselt-Zahlen Nu_{D_h} für eine turbulente Rechteckkanalströmung unter Berücksichtigung von Auftriebseffekten ($Ri = 0,09$) bei $Re_b = 7000$, einer molekularen Prandtl-Zahl von $Pr = 0,025$ sowie zwei verschiedenen Beheizungszuständen.	189
A.1	Vergleich des asymptotischen Wandverhaltens der wesentlichen Transport- und Vernichtungsterme der wandnormalen, turbulenten Wärmeflusskomponente in einer Kanalströmung mit nicht verschwindenden Temperaturfluktuationen.	236

Literaturverzeichnis

- [1] IAEA - International Atomic Energy Agency. *Fast Reactor Database: 2006 Update*. Report IAEA-TECDOC-1531, Dezember 2006.
- [2] M. Ragheb. Fourth Generation Reactor Concepts. *Nuclear, Plasma and Radiation Science-Inventing the Future*, part IV(6):1–13, 2014. Url: <http://mragheb.com/NPRE%20402%20ME%20405%20Nuclear%20Power%20Engineering/Fourth%20Generation%20Reactor%20Concepts.pdf>, Zugriff: Mai 2017.
- [3] GIV Generation IV International Forum. GIV - Annular Report 2015, Url: https://www.gen-4.org/gif/upload/docs/application/pdf/2016-09/gif_2015_annual_report_-_final_e-book_v2_sept2016.pdf, Zugriff: Mai 2017.
- [4] A. Ziegler and H.-J. Allelein. *Reaktortechnik: Physikalisch-technische Grundlagen*. Springer-Verlag, 2013.
- [5] K. Strauß. *Kraftwerkstechnik: zur Nutzung fossiler, regenerativer und nuklearer Energiequellen*. Springer-Verlag, 2013. ISBN: 978-3-642-32582-3.
- [6] IRSN - Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire. Review of Generation IV Nuclear Energy Systems. Technical Report, 2015. Url: http://www.irsn.fr/EN/newsroom/News/Documents/IRSN_Report-GenIV_04-2015.pdf, Zugriff Mai 2017.
- [7] F. Roelofs, B. de Jager, A. Class, H. Jeanmart, P. Schuurmans, A. Ciampichetti, G. Gerbeth, R. Stieglitz, and C. Fazio. European research on HLM thermal-hydraulics for ADS applications. *Journal of Nuclear Materials*, 376(3):401–404, 2008.
- [8] A. G. Class, D. Angeli, A. Batta, M. Dierckx, F. Fellmoser, V. Moreau, F. Roelofs, P. Schuurmans, K. Van Tichelen, and T. Wetzel. XT-ADS Windowless spallation target thermohydraulic design & experimental setup. *Journal of Nuclear Materials*, 415(3):378–384, 2011.
- [9] PRIS (Power Reactor Information System). Webpräsenz, Url: <https://www.iaea.org/PRIS/CountryStatistics/ReactorDetails.aspx?current=162>, Zugriff: Mai 2017.
- [10] IAEA. Liquid Metal Cooled Reactors: Experience in Design and Operation. Technical report, IAEA-TECDOC-1569, Vienna, Austria, 2008.
- [11] CEA Nuclear Energy Division. 4th-Generation Sodium-cooled fast reactors - The ASTRID Technological Demonstrator. Technical report, CEA, Dezember 2012.
- [12] P. R. Pluta, F. E. Tippets, R. E. Murata, C. E. Boardman, C. S. Schatmeier, A. E. Dubberley, D. M. Switick, and W. Kwant. PRISM: An Innovative Inherently Safe Modular Sodium Cooled Breeder Reactor. In *Advances in Nuclear Science and Technology*, pages 109–203. Springer, 1987.
- [13] V. Sovolev. Database of thermophysical properties of liquid metal coolants for GEN-IV. Scientific Report BLG-1069, SCK-CEN, December 2011.
- [14] M. Kaltschmitt, W. Streicher, and A. Wiese. *Erneuerbare Energien*. Springer, 2006. eBook-ISBN: 978-3-540-28205-1.
- [15] J. Flesch, A. Fritsch, G. Cammi, L. Marocco, F. Fellmoser, J. Pacio, and Th. Wetzel. Construction of a test facility for demonstration of a liquid lead-bismuth-cooled 10kW thermal receiver in a solar furnace arrangement-SOMMER. *Energy Procedia*, 69:1259–1268, 2015.

- [16] K. Niedermeier, J. Flesch, L. Marocco, and Th. Wetzel. Assessment of thermal energy storage options in a sodium-based CSP plant. *Applied Thermal Engineering*, 107:386–397, 2016.
- [17] L. Marocco, G. Cammi, J. Flesch, and Th. Wetzel. Numerical analysis of a solar tower receiver tube operated with liquid metals. *International Journal of Thermal Sciences*, 105:22–35, 2016.
- [18] Institut für Kern- und Energietechnik (IKET) - Karlsruher Institut für Technologie (KIT). Abteilung: KALLA - zuständiger Mitarbeiter: Flesch, J., Url: <https://www.iket.kit.edu/618.php>, Zugriff: 06.05.2017.
- [19] J. Pacio, A. Fritsch, C. Singer, and R. Uhlig. Liquid metals as efficient coolants for high-intensity point-focus receivers: implications to the design and performance of next-generation CSP systems. *Energy Procedia*, 49:647–655, 2014.
- [20] J. T. Kummer, N. Weber, and I. Forbes. Thermo-electric generator, 1969. U.S. Patent No. 3458356.
- [21] A. Onea, N. D. de los Rios Ramos, W. Hering, R. Stieglitz, and P. Moster. Direct energy conversion using liquid metals. In *EPJ Web of Conferences*, volume 79. EDP Sciences, 2014.
- [22] W. M. Kays. Turbulent Prandtl Number - Where Are We? *Journal of Heat Transfer*, 116(2):284, 1994.
- [23] G. Grötzbach. Challenges in low-Prandtl number heat transfer simulation and modelling. *Nuclear Engineering and Design*, 264:41–55, Nov 2013.
- [24] HZDR - Helmholtz-Zentrum Dresden Rossendorf. Helmholtz-Alliance - LIMTECH (Liquid Metal Technologies). Url: <https://www.hzdr.de/db/Cms?pNid=2920>, Zugriff: Mai 2017.
- [25] Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik (INR) des Karlsruher Institut für Technologie (KIT). Kasola - karlsruhe sodium laboratory. Url: <https://www.inr.kit.edu/258.php> - letzter Zugriff: Mai 2017.
- [26] HZDR (Helmholtz Zentrum Dresden Rossendorf). Helmholtz-Alliance - LIMTECH (Liquid Metal Technologies) - Subproject B1. Url: <https://www.hzdr.de/db/Cms?pOid=36958&pNid=2921>, Zugriff: Mai 2017.
- [27] W. Hering, R. Stieglitz, and Th. Wetzel. Application of liquid metals for solar energy systems. In *EPJ Web of Conferences*, volume 33, page 03003. EDP Sciences, 2012.
- [28] A. Onea, W. Hering, C. Homann, A. Jianu, M. Lux, S. Scherrer, and R. Stieglitz. Optimization of the KASOLA high temperature liquid metal loop. 15th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermalhydraulics (NURETH 2013), Pisa, I, May 12-17, 2013 Proc.on USB-Stick NURETH15-545, 2013.
- [29] W. Hering, A. Stieglitz, R. and Jianu, M. Lux, A. Onea, S. Scherrer, and C. Homann. Scientific program of the Karlsruhe Sodium Laboratory (KASOLA). IAEA-CN-199/257, Int. Conf. on Fast Reactors and Related Fuel Cycles, Paris, France, March 4.–7, 2015. Url: http://www-pub.iaea.org/MTCD/Publications/PDF/SupplementaryMaterials/PI665CD/Track7_Experiments_and_Simulation.pdf, Zugriff: Mai 2017.
- [30] A. O. Demuren and W. Rodi. Calculation of turbulence-driven secondary motion in non-circular ducts. *Journal of Fluid Mechanics*, 140:189–222, 1984.
- [31] L.-D. Ma, Z.-Y. Li, and W.-Q. Tao. Direct numerical simulation of turbulent flow and heat transfer in a square duct with natural convection. *Heat and Mass Transfer*, 44(2):229, 2007.
- [32] A. Sekimoto, G. Kawahara, K. Sekiyama, M. Uhlmann, and A. Pinelli. Turbulence-and buoyancy-driven secondary flow in a horizontal square duct heated from below. *Physics of Fluids*, 23(7):075103, 2011.
- [33] A. Pinelli, M. Uhlmann, A. Sekimoto, and G. Kawahara. Reynolds number dependence of mean flow structure in square duct turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 644:107, Feb 2010.

-
- [34] L. Prandtl. Über die ausgebildete Turbulenz. *Verh. des 2. internationalen Kongresses für technische Mechanik*, page 71, 1926.
- [35] A. O. Demuren. Calculation of turbulence-driven secondary motion in ducts with arbitrary cross section. *AIAA Paper 90-0245*, 29(4):531–537, 1991.
- [36] J. Nikuradse. *Untersuchungen über die Geschwindigkeitsverteilung in turbulenten Strömungen*. Dissertation, Göttingen, 1926.
- [37] J. Nikuradse. Untersuchungen über turbulente Strömungen in nicht kreisförmigen Rohren. *Ingenieur-Archiv*, 1(3):306–332, 1930.
- [38] H. A. Einstein and H. Li. Secondary currents in straight channels. *Eos, Transactions American Geophysical Union*, 39(6):1085–1088, 1958.
- [39] E. Brundrett and W. D. Baines. The production and diffusion of vorticity in duct flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 19(03):375–394, 1964.
- [40] J. Nikuradse. *Fully developed turbulent flow in straight rectangular ducts - secondary flow, its cause and effect on the primary flow*. Phd thesis, Dept. Mech. Engng, MIT, 1926.
- [41] H. J. Perkins. The formation of streamwise vorticity in turbulent flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 44(04):721–740, 1970.
- [42] F. B. Gessner and J. B. Jones. On some aspects of fully-developed turbulent flow in rectangular channels. *Journal of Fluid Mechanics*, 23(04):689–713, 1965.
- [43] F. B. Gessner. The origin of secondary flow in turbulent flow along a corner. *Journal of Fluid Mechanics*, 58(1):1–25, 1973.
- [44] A. Huser and S. Biringen. Direct numerical simulation of turbulent flow in a square duct. *Journal of Fluid Mechanics*, 257:65–95, 1993.
- [45] P. Bradshaw. Turbulent secondary flows. *Annual review of fluid mechanics*, 19(1):53–74, 1987.
- [46] B. E. Launder and W. M. Ying. Prediction of flow and heat transfer in ducts of square cross-section. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 187(1):455–461, 1973.
- [47] D. G. Tatchell. *Convection processes in confined three-dimensional boundary layers*. Phd thesis, University of London, 1975.
- [48] A. D. Gosman and C. W. Rapley. A prediction method for fully-developed flow through non-circular passages. In *Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow*, pages 271–285, 1978.
- [49] V. Ramachandra. *The numerical prediction of flow and heat transfer in rod-bundle geometries*. Phd thesis, University of London, 1979.
- [50] F.B. Gessner and A. F. Emery. The numerical prediction of developing turbulent flow in rectangular ducts. *Journal of Fluids Engineering*, 103:445–453, 1981.
- [51] R. K. Madabhushi and S. P. Vanka. Large eddy simulation of turbulence-driven secondary flow in a square duct. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 3(11):2734–2745, 1991.
- [52] S. Gavrilakis. Numerical simulation of low-Reynolds-number turbulent flow through a straight square duct. *Journal of Fluid Mechanics*, 244(-1):101, Nov 1992.

- [53] M. Uhlmann, A. Pinelli, G. Kawahara, and A. Sekimoto. Marginally turbulent flow in a square duct. *Journal of fluid mechanics*, 588:153–162, 2007.
- [54] Institut für Hydromechanik (IfH): Prof. Dr.-Ing. M. Uhlmann, Karlsruher Institut für Technologie (KIT). IfH-DNS data base, Url: http://www-cfd.ifh.uni-karlsruhe.de/uhlmann/home/report_2.html, Zugriff: März 2017.
- [55] L.-D. Ma, Z.-Y. Li, and W.-Q. Tao. Large eddy simulation of turbulent flow and heat transfer in a square duct with unstable natural convection on the cross section. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 66:46–63, 2013.
- [56] T. Cebeci and P. Bradshaw. Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer. *Physical and Computational Aspects of Convective Heat Transfer*, 1988.
- [57] X. Cheng and N. Tak. Investigation on turbulent heat transfer to lead-bismuth eutectic flows in circular tubes for nuclear applications. *Nuclear Engineering and Design*, 236(4):385–393, Feb 2006.
- [58] K. Hanjalić. ONE-POINT CLOSURE MODELS FOR BUOYANCY-DRIVEN TURBULENT FLOWS. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 34(1):321–347, Jan 2002.
- [59] G. Grötzbach. FZKA 7363 - Anisotropy and Buoyancy in Nuclear Turbulent Heat Transfer - Critical Assessment and Needs for Modelling. Technical report, Institut für Kern- und Energietechnik, 2007.
- [60] M. Wörner. *Direkte Simulation turbulenter Rayleigh-Bénard-Konvektion in flüssigem Natrium*. Dissertation, Kernforschungszentrum Karlsruhe, Institut für Reaktorsicherheit, November 1994.
- [61] K. Abe, T. Kondoh, and Y. Nagano. A new turbulence model for predicting fluid flow and heat transfer in separating and reattaching flows-II. Thermal field calculations. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 38(8):1467–1481, May 1995.
- [62] Y. Nagano and M. Shimada. Development of a two-equation heat transfer model based on direct simulations of turbulent flows with different Prandtl numbers. *Physics of Fluids*, 8(12):3379–3402, 1996.
- [63] C. B. Hwang and C. A. Lin. A low Reynolds number two-equation $k_\theta - \varepsilon_\theta$ model to predict thermal fields. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 42(17):3217–3230, 1999.
- [64] Y. Nagano, CQ Pei, and H. Hattori. A new low-Reynolds-number one-equation model of turbulence. *Flow, turbulence and combustion*, 63(1):135–151, 2000.
- [65] S. Manservigi and F. Menghini. A CFD four parameter heat transfer turbulence model for engineering applications in heavy liquid metals. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 69:312–326, Feb 2014.
- [66] S. Manservigi and F. Menghini. Triangular rod bundle simulations of a CFD $\kappa - \varepsilon - \kappa_\theta - \varepsilon_\theta$ heat transfer turbulence model for heavy liquid metals. *Nuclear Engineering and Design*, 273:251–270, Jul 2014.
- [67] H.S. Dol, K. Hanjalić, and S. Kenjereš. A comparative assessment of the second-moment differential and algebraic models in turbulent natural convection. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 18(1):4–14, Feb 1997.
- [68] B. J. Daly and F. H. Harlow. Transport Equations in Turbulence. *Physics of Fluids*, 13(11):2634–2649, 1970.
- [69] M. M. Gibson and B. E. Launder. Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 86(3):491–511, 1978.
- [70] T. Baumann. *Turbulenzmodellierung von Strömungen niedriger molekularer Prandtlzahl*. Dissertation, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), 2012.

- [71] K. Hanjalić and B. Launder. *Modelling turbulence in engineering and the environment: Second-Moment Routes to Closure*. Cambridge university press, 2011.
- [72] N. Shikazono, N. and Kasagi. Second-moment closure for turbulent scalar transport at various Prandtl numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 39(14):2977–2987, Sep 1996.
- [73] L. N. Carteciano. *FZKA 5775 - Entwicklung eines Turbulenzmodells für Auftriebsströmungen*. Dissertation, Institut für Angewandte Thermo- und Fluidodynamik, Projekt Nukleare Sicherheitsforschung, Forschungszentrum Karlsruhe GmbH, Karlsruhe, 1996.
- [74] J. K. Shin, J. S. An, Y. D. Choi, Y. Chan Kim, and M. S. Kim. Elliptic relaxation second moment closure for the turbulent heat fluxes. *Journal of Turbulence*, 9:1–29, 2008.
- [75] F. Dehoux. *Modélisation statistique des écoulements turbulents en convection forcée, mixte et naturelle*. PhD thesis, Université de Poitiers, 2012.
- [76] P. A. Durbin. A Reynolds stress model for near-wall turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, 249(-1):465, Apr 1993.
- [77] A. K. Hellsten. *NEW TWO-EQUATION TURBULENCE MODEL FOR AERODYNAMICS APPLICATIONS*. PhD Thesis (Report A-21), Helsinki University of Technology, Laboratory of Aerodynamics, June 2004.
- [78] A. K. Hellsten. New Advanced $k-\omega$ Turbulence Model for High-Lift Aerodynamics. *AIAA Journal*, 43(9):1857–1869, Sep 2005.
- [79] H. Fuchs. *Wärmeübergang an strömendes Natrium - Theoretische und experimentelle Untersuchungen über Temperaturprofile und turbulente Temperaturschwankungen bei Rohrgeometrie*. Dissertation (Diss. Nr. 5110), Eidgenössische Technische Hochschule Zürich, 1974.
- [80] J. Zeininger. *Turbulenter Wärmetransport in flüssigem Blei-Wismut an einem vertikalen Heizstab im Ringspalt*. Dissertation, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), 2009.
- [81] L. Marocco, A. Loges, T. Wetzel, and R. Stieglitz. Experimental investigation of the turbulent heavy liquid metal heat transfer in the thermal entry region of a vertical annulus with constant heat flux on the inner surface. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 55(23):6435–6445, 2012.
- [82] R. Thiele and H. Anglart. Numerical modeling of forced-convection heat transfer to lead-bismuth eutectic flow in vertical annuli. *Journal of Nuclear Engineering and Design*, 254:111–119, 2013.
- [83] R. Thiele. *Turbulenter Wärmetransport in flüssigem Blei-Wismut an einem vertikalen Heizstab im Ringspalt*. PhD thesis, Royal Institute of Technology (KTH), Sweden, 2015.
- [84] J. Pacio, K. Litfin, A. Batta, M. Viellieber, A. Class, H. Doolaard, F. Roelofs, S. Manservigi, F. Menghini, and M. Böttcher. Heat transfer to liquid metals in a hexagonal rod bundle with grid spacers: Experimental and simulation results. *Nuclear Engineering and Design*, 290:27–39, Aug 2015.
- [85] H. Abe, H. Kawamura, and Y. Matsuo. Surface heat-flux fluctuations in a turbulent channel flow up to $Re_\tau = 1020$ with $Pr = 0.025$ and 0.71 . *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 25(3):404–419, Jun 2004.
- [86] Kawamura Lab, In collaboration with JAXA (Japan Aerospace Exploration Agency). DNS Database of Wall Turbulence and Heat Transfer, Url: <http://murasun.me.noda.tus.ac.jp/turbulence/>, Zugriff: Januar 2017.
- [87] J. H. Ferziger and M. Peric. *Numerische Strömungsmechanik*. Springer-Verlag, 2008.
- [88] M. Van Dyke. *An album of fluid motion*. THE PARABOLIC PRESS, Department of Mechanical Engineering, Stanford University, Stanford, California, June 1982. ISBN: 978-0915760022.

- [89] R. Du Puits, C. Resagk, A. Tilgner, F. H. Busse, and A. Thess. Structure of thermal boundary layers in turbulent Rayleigh-Bénard convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 572:231, Jan 2007.
- [90] Technische Universität Ilmenau - AG Ilmenauer Fass, Leitung: Priv.-Doz. Dr.-Ing. habi. R. du Puits. Experiment, Url: <http://www.tu-ilmenau.de/ilmenauer-fass/experiment/>, Zugriff: Januar 2017.
- [91] L. J. Shah and S. Furbo. Entrance effects in solar storage tanks. *Solar Energy*, 75(4):337–348, Oct 2003.
- [92] V. Schwamberger. *Thermodynamische und numerische Untersuchung eines neuartigen Sorptionszyklus zur Anwendung in Adsorptionswärmepumpen und -kältemaschinen*. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau - Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Fachgebiet Strömungsmaschinen (FSM), Juni 2016.
- [93] H. Schlichting and K. Gersten. *Grenzschicht-Theorie*. Springer-Verlag, 2006. ISBN: 978-3-540-23004-5.
- [94] OECD/NEA Nuclear Science Committee, 2007. *Handbook on Lead-Bismuth Eutectic Alloy and Lead Properties, Materials Compatibility, Thermo-hydraulics and Technologies*. NEA No. 6195, 2007.
- [95] Verfahrenstechnische Gesellschaft im VDI. *VDI-Wärmeatlas (German Edition)*. Springer Vieweg, 2013. ISBN: 978-3-642-19981-3.
- [96] H. Oertel jr., M. Böhle, and T. Reviol. *Strömungsmechanik - Grundlagen - Grundgleichungen - Lösungsmethoden - Softwarebeispiele*. Vieweg + Teubner Verlag, 2011. 6. Auflage, ISBN:978-3-8348-1397-8.
- [97] F. Durst. *Grundlagen der Strömungsmechanik: eine Einführung in die Theorie der Strömung von Fluiden*. Springer-Verlag Ber, 2007. ISBN: 978-3-540-31323-6.
- [98] J. Fröhlich. *Large eddy simulation turbulenter Strömungen*. Vieweg + Teubner Verlag, 2006. ISBN-13: 987-3-8351-0104-3.
- [99] M. Germano. Ten years of the dynamic model. *Modern simulation strategies for turbulent flow*, pages 173–190, 2001.
- [100] A. N. Kolmogorov. The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Numbers. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 434(1890):9–13, July 1991.
- [101] A. N. Kolmogorov. Dissipation of Energy in the Locally Isotropic Turbulence. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 434(1890):15–17, July 1991.
- [102] S. B. Pope. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2006.
- [103] D. C. Wilcox. *Turbulence modeling for CFD*, volume 2. DCW industries La Canada, CA, 1998.
- [104] P. A. Durbin. Near-wall turbulence closure modeling without “damping functions”. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 3(1):1–13, 1991.
- [105] K. Abe, Y.-J. Jang, and M. A. Leschziner. An investigation of wall-anisotropy expressions and length-scale equations for non-linear eddy-viscosity models. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 24(2):181–198, Apr 2003.
- [106] G. Grötzbach. Revisiting the resolution requirements for turbulence simulations in nuclear heat transfer. *Nuclear Engineering and Design*, 241(11):4379–4390, Nov 2011.
- [107] S. Corrsin. Turbulent flow. *American Scientist*, 49(3):300–325, 1961.
- [108] H. Tennekes and J. L. Lumley. *A first course in turbulence*. MIT press, 1972.

- [109] A. Leonard. Energy Cascade in Large-Eddy Simulations of Turbulent Fluid Flows. *Advances in Geophysics*, pages 237–248, 1975.
- [110] P. Sagaut. *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows*. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2006. ISBN: 978-3-540-26344-9.
- [111] D. Morar. *Subgrid-scale heat flux modeling for large eddy simulation of turbulent mixed convection*. Dissertation, Fakultät für Maschinenbau - Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Dezember 2014.
- [112] S. Ghosal and P. Moin. The Basic Equations for the Large Eddy Simulation of Turbulent Flows in Complex Geometry. *Journal of Computational Physics*, 118(1):24–37, Apr 1995.
- [113] J. Smagorinsky. General circulation experiments with the primitive equations, part I: the basic experiment. *Monthly Weather Review*, 91(3):99–164, Mar 1963.
- [114] M. Germano, U. Piomelli, and W. H. Moin, P. and Cabot. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. In *Studying Turbulence Using Numerical Simulation Databases. 3: Proceedings of the 1990 Summer Program*, volume 1, pages 5–17, 1990.
- [115] F. Nicoud and F. Ducros. Subgrid-Scale Stress Modelling Based on the Square of the Velocity Gradient Tensor. *Flow, Turbulence and Combustion*, 62(3):183–200, 1999.
- [116] J. W. Deardorff. The Use of Subgrid Transport Equations in a Three-Dimensional Model of Atmospheric Turbulence. *Journal of Fluids Engineering*, 95(3):429–448, 1973.
- [117] C. Fureby, G. Tabor, H. G. Weller, and A. D. Gosman. Differential subgrid stress models in large eddy simulations. *Physics of Fluids*, 9(11):3578–3580, Nov 1997.
- [118] P. Moin and J. Kim. Numerical investigation of turbulent channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 118(-1):341–377, May 1982.
- [119] D. K. Lilly. A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 4(3):633–635, March 1992.
- [120] W.-W. Kim and S. Menon. A new dynamic one-equation subgrid-scale model for large eddy simulations. *33rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Jan 1995.
- [121] M. Wier and L. Römer. Experimentelle Untersuchung von stabil und instabil geschichteten turbulenten Plattenrenzschichten mit Bodenrauigkeit. *Zeitschrift für Flugwissenschaften und Weltraumforschung*, 11(2):78–86, 1987.
- [122] R. B. Dean. Reynolds Number Dependence of Skin Friction and Other Bulk Flow Variables in Two-Dimensional Rectangular Duct Flow. *Journal of Fluids Engineering*, 100(2):215–223, 1978.
- [123] K. Hanjalić. Advanced turbulence closure models: a view of current status and future prospects. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 15(3):178–203, Jun 1994.
- [124] T. B. Gatski and T. Jongen. Nonlinear eddy viscosity and algebraic stress models for solving complex turbulent flows. *Progress in Aerospace Sciences*, 36(8):655–682, Nov 2000.
- [125] L. Prandtl. Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. *Z. Angew. Math. Mech*, 5(2):136–139, 1925.
- [126] A. M. O. Smith and T. Cebeci. Numerical Solution of the Turbulent-boundary-layer Equations. Technical report, DTIC Document, 1967.

- [127] B. Baldwin and H. Lomax. Thin-layer approximation and algebraic model for separated turbulentflows. *16th Aerospace Sciences Meeting*, page 257, Jan 1978.
- [128] L. Prandtl. Über ein neues Formelsystem für die ausgebildete Turbulenz. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. Klasse*, pages 6–19, 1945.
- [129] P. Spalart and S. Allmaras. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Jan 1992.
- [130] W. P. Jones and B. E. Launder. The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15(2):301–314, Feb 1972.
- [131] D. C. Wilcox. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA Journal*, 26(11):1299–1310, Nov 1988.
- [132] P. Y. Chou. On velocity correlations and the solutions of the equations of turbulent fluctuation. *Quarterly of Applied Mathematics*, 3(1):38–54, 1945.
- [133] B. E. Launder and B. I. Sharma. Application of the Energy-Dissipation Model of Turbulence to the Calculation of Flow Near a Spinning Disc. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 1(2):131–137, Dec 1974.
- [134] K.-Y. Chien. Predictions of channel and boundary-layer flows with a low-Reynolds-number turbulence model. *AIAA journal*, 20(1):33–38, 1982.
- [135] F. R. Menter. Zonal two equation $k - \omega$ turbulence models for aerodynamic flows. In *24rd AIAA Fluid Dynamics Conference, 6-9 Jul. 1993, Orlando, FL; United States*, page 22, 1993.
- [136] F. R. Menter. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*, 32(8):1598–1605, Aug 1994.
- [137] S. Wallin and A. V. Johansson. An explicit algebraic Reynolds stress model for incompressible and compressible turbulent flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 403:89–132, Jan 2000.
- [138] F. R. Menter, A. V. Garbaruk, and Y. Egorov. Explicit algebraic Reynolds stress models for anisotropic wall-bounded flows. In *Progress in Flight Physics*, volume 3, pages 89–104. EDP Sciences, 2012.
- [139] D. Vanpouille. *Développement de modèles de turbulence adaptés à la simulation des écoulements de convection naturelle à haut nombre de Rayleigh*. Phd-thesis, Fluid mechanics [physics.class-ph]. Institut Supérieur de l’Aéronautique et de l’Espace - ISAE, Submitted: July 2014, 2013, French.
- [140] W. M. J. Lazeroms, G. Brethouwer, S. Wallin, and A. V. Johansson. Efficient treatment of the nonlinear features in algebraic Reynolds-stress and heat-flux models for stratified and convective flows. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 53:15–28, Jun 2015.
- [141] H. K. Myong and N. Kasagi. Prediction of Anisotropy of the Near-Wall Turbulence With an Anisotropic Low-Reynolds-Number $k - \epsilon$ Turbulence Model. *Journal of Fluids Engineering*, 112:521–524, 1990.
- [142] The OpenFOAM Foundation Ltd, Directors: H. Weller, C. Greenshields, C. de Rouvray, London, United Kingdom. OpenFOAM®, Url: <https://openfoam.org>, Zugriff: März 2017.
- [143] J. L. Lumley. Computational Modeling of Turbulent Flows. *Advances in Applied Mechanics*, 18:123–176, 1979.
- [144] C. G. Speziale, S. Sarkar, and T. B. Gatski. Modelling the pressure-strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach. *Journal of Fluid Mechanics*, 227(-1):245, Jun 1991.

- [145] J. Rotta. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. *Zeitschrift für Physik*, 129(6):547–572, Nov 1951.
- [146] R. Manceau and K. Hanjalić. Elliptic blending model: A new near-wall Reynolds-stress turbulence closure. *Physics of Fluids*, 14(2):744, 2002.
- [147] R. Manceau. An improved version of the elliptic blending model application to non-rotating and rotating channel flows. In *TSFP DIGITAL LIBRARY ONLINE*. Begel House Inc., 2005.
- [148] R. Manceau. Recent progress in the development of the Elliptic Blending Reynolds-stress model. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 51:195–220, Feb 2015.
- [149] S. Jakirlić. *Reynolds-Spannungs-Modellierung komplexer turbulenter Strömungen*. Herbert Utz Verlag, Wissenschaft, 1997.
- [150] L. Chandra, F. Roelofs, M. Houkema, and B. Jonker. A stepwise development and validation of a RANS based CFD modelling approach for the hydraulic and thermal-hydraulic analyses of liquid metal flow in a fuel assembly. *Nuclear Engineering and Design*, 239(10):1988–2003, Oct 2009.
- [151] D. Taler. Heat Transfer in Turbulent Tube Flow of Liquid Metals. *Procedia Engineering*, 157:148–157, 2016.
- [152] S. Aoki. A consideration on the heat transfer in liquid metal. *Bulletin of the Tokyo Institute of Technology*, 54, 1963.
- [153] A. J. Reynolds. The prediction of turbulent Prandtl and Schmidt numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 18(9):1055–1069, Sep 1975.
- [154] M. Jischa and H. B. Rieke. About the prediction of turbulent prandtl and schmidt numbers from modeled transport equations. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 22(11):1547–1555, Nov 1979.
- [155] B. Weigand, J. R. Ferguson, and M. E. Crawford. An extended Kays and Crawford turbulent Prandtl number model. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 40(17):4191–4196, Oct 1997.
- [156] W. M. Kays and M. E. Crawford. *Convective Heat and Mass Transfer*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1997. Third Edition, ISBN-13:978-0070337213.
- [157] C. C. Lin, B.-S. Chang and C.-T. Wang. Renormalization group analysis for thermal turbulent transport. *Physical Review E*, 63(1), Dec 2000.
- [158] R. H. Notter and C. A. Sleicher. A solution to the turbulent Graetz problem—III Fully developed and entry region heat transfer rates. *Chemical Engineering Science*, 27(11):2073–2093, 1972.
- [159] S. W. Churchill. A Reinterpretation of the Turbulent Prandtl Number†. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 41(25):6393–6401, Dec 2002.
- [160] S. Corrsin. Heat transfer in isotropic turbulence. *Journal of Applied Physics*, 23(1):113–118, 1952.
- [161] I. Otić, G. Grötzbach, and M. Wörner. Analysis and modelling of the temperature variance equation in turbulent natural convection for low-Prandtl-number fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 525:237–261, Feb 2005.
- [162] R. M. C. So and T. P. Sommer. A Near-Wall Eddy Conductivity Model for Fluids With Different Prandtl Numbers. *Journal of Heat Transfer*, 116(4):844–854, 1994.
- [163] T.P. Sommer, R.M.C. So, and Y.G. Lai. A near-wall two-equation model for turbulent heat fluxes. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 35(12):3375–3387, Dec 1992.

- [164] Y. Nagano, M. Tagawa, and T. Tsuji. An Improved Two–Equation Heat Transfer Model for Wall Turbulent Shear Flows. In *Proceedings of the 3rd ASME-JSME Thermal Engineering Joint Conference*, pages 223–240, 1991.
- [165] R. M. C. So, S. P. Yuan, and T. P. Sommer. A hierarchy of near-wall closures for turbulent heat transfer. *Trends Heat Mass Momentum Transfer*, 2:203–221, 1992.
- [166] B. A. Kader. Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 24(9):1541–1544, 1981.
- [167] H.S. Zhang, R. M. C. So, and M. L. Zhu. A Near-Wall Second-Order Turbulence Model for Wall-Bounded Flows. In *Proc. 9th Symp. Turbulent Shear Flows, Aug. 16-18, Kyoto, Japan, 1993*, 1993.
- [168] O. Zeman and J. L. Lumley. Modeling Buoyancy Driven Mixed Layers. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 33(10):1974–1988, Oct 1976.
- [169] K. Abe, T. Kondoh, and Y. Nagano. A new turbulence model for predicting fluid flow and heat transfer in separating and reattaching flows—I. Flow field calculations. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 37(1):139–151, Jan 1994.
- [170] C. duP. Donaldson. Construction of a dynamic model of the production of atmospheric turbulence and the dispersal of atmospheric pollutants. In *Workshop on Micrometeorology*, pages 313–390. Amer. Meteor. Soc, 1973.
- [171] H. Kawamura and Y. Abe, H. and Matsuo. DNS of turbulent heat transfer in channel flow with respect to Reynolds and Prandtl number effects. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 20(3):196–207, Jun 1999.
- [172] Y.G. Lai and R.M.C. So. Near-wall modeling of turbulent heat fluxes. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 33(7):1429–1440, Jul 1990.
- [173] A. S. Monin. On the symmetry properties of turbulence in the surface layer of air (Symmetry properties of surface air layer turbulence and single point second moments of turbulent pulsations). *IZV Atm. Oceanic Phys.*, 1:25–30, 1965.
- [174] B. E. Launder. On the Computation of Convective Heat Transfer in Complex Turbulent Flows. *Journal of Heat Transfer*, 110(4b):1112–1128, 1988.
- [175] L. Carteciano and G. Grötzbach. Validation of turbulence models in the computer code FLUTAN for a free hot sodium jet in different buoyancy flow regimes. *Wissenschaftliche Berichte FZKA 6600, Forschungszentrum Karlsruhe*, 2003.
- [176] W. Rodi. A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 65:219–221, 1976.
- [177] M. M. Gibson and B. E. Launder. On the Calculation of Horizontal, Turbulent, Free Shear Flows Under Gravitational Influence. *Journal of Heat Transfer*, 98(1):81–87, 1976.
- [178] E. Fares and W. Schröder. A differential equation for approximate wall distance. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 39(8):743–762, Jun 2002.
- [179] P. G. Tucker. Differential equation-based wall distance computation for DES and RANS. *Journal of Computational Physics*, 190(1):229–248, Sep 2003.
- [180] P. G. Tucker, C. L. Rumsey, P. R. Spalart, R. B. Bartels, and R. T. Biedron. Computations of wall distances based on differential equations. *AIAA journal*, 43(3):539–549, 2005.

- [181] H. Blasius. Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten. In *Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens*, pages 1–41. Springer, 1913.
- [182] S. W. Churchill. Friction-factor equation spans all fluid-flow regimes. *Chemical Engineering*, 84(24):91–92, 1977.
- [183] D. J. Zigrang and N. D. Sylvester. Explicit approximations to the solution of Colebrook’s friction factor equation. *AIChE Journal*, 28(3):514–515, 1982.
- [184] C. F. Colebrook. TURBULENT FLOW IN PIPES, WITH PARTICULAR REFERENCE TO THE TRANSITION REGION BETWEEN THE SMOOTH AND ROUGH PIPE LAWS. *Journal of the Institution of Civil Engineers*, 11(4):133–156, 1939.
- [185] E. C. Brouillette and P. S. Lykoudis. Magneto-Fluid-Mechanic Channel Flow. I. Experiment. *The Physics of Fluids*, 10(5):995–1001, 1967.
- [186] M. Takahashi, M. Aritomi, A. Inoue, and M. Matsuzaki. MHD pressure drop and heat transfer of lithium single-phase flow in a rectangular channel under transverse magnetic field. *Fusion Engineering and Design*, 42(1):365–372, 1998.
- [187] M. Duponcheel, L. Bricteux, M. Manconi, G. Winckelmans, and Y. Bartosiewicz. Assessment of RANS and improved near-wall modeling for forced convection at low Prandtl numbers based on LES up to $Re_\tau = 2000$. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 75:470–482, Aug 2014.
- [188] R. N. Lyon. Liquid metal heat-transfer coefficients. *Chem. Eng. Progress*, 47:75–79, 1951.
- [189] F. W. Dittus and L. M. K. Boelter. Heat transfer in automobile radiators of the tubular type (Reprinted). *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 12(1):3–22, 1985.
- [190] R. H. S. Winterton. Where did the Dittus and Boelter equation come from? *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 41(4-5):809–810, 1998.
- [191] W. H. McAdams. *Heat Transmission: 3rd Ed.* McGraw-Hill, 1954.
- [192] V. Gnielinski. Neue Gleichungen für den Wärme-und den Stoffübergang in turbulent durchströmten Rohren und Kanälen. *Forschung im Ingenieurwesen*, 41(1):8–16, 1975.
- [193] F. P. Incropera, D. P. DeWitt, T. L. Bergman, and A. S. Lavine. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer: 6th Edn.* John Wiley & Sons, 2006. ISBN: 9978-0471457282.
- [194] T. P. Sommer, R. M. C. So, and H. S. Zhang. Heat Transfer Modeling and the Assumption of Zero Wall Temperature Fluctuations. *Journal of Heat Transfer*, 116(4):855–863, 1994.
- [195] N. Kasagi, A. Kuroda, and M. Hirata. Numerical Investigation of Near-Wall Turbulent Heat Transfer Taking Into Account the Unsteady Heat Conduction in the Solid Wall. *Journal of Heat Transfer*, 111:385–392, 1989.
- [196] I. Tiselj and L. Cizelj. DNS of turbulent channel flow with conjugate heat transfer at Prandtl number 0.01. *Nuclear Engineering and Design*, 253:153–160, 2012.
- [197] W. Jäger, W. Hering, M. Lux, and F. Portes. ICONE23-1101: LIQUID METAL THERMAL HYDRAULICS IN RECTANGULAR DUCTS : REVIEW, PROPOSAL AND VALIDATION OF EMPIRICAL MODELS. In *Proceedings of the 23rd International Conference on Nuclear Engineering, May 17-21, 2015, Chiba, Japan.* The Japan Society of Mechanical Engineers, 2015.
- [198] J. P. Hartnett and T. F. Irvine. Nusselt Values for Estimating Turbulent Liquid Metal Heat Transfer in Noncircular Ducts. *A.I.Ch.E. Journal*, 3(3):313–317, 1957.

- [199] W. Jäger, F. Trimborn, W. Hering, B. Pritz, and M. Gabi. Thermo-hydraulic Investigation Of A Vertical Rectangular Duct With Liquid Metal Flow by Means of System Code and CFD Code Predictions. In *Proceedings of the International Congress on Advances in Nuclear Power Plants, April, 17-20, 2016, San Francisco, U.S.A.* American Nuclear Society, 2016.
- [200] O. C. Jones. An improvement in the Calculation of Turbulent fFriction in Rectangular Ducts. *Journal of Fluids Engineering*, 98(2):173–180, 1976.
- [201] L. Schiller. Über den Strömungswiderstand von Rohren verschiedenen Querschnitts und Rauigkeitsgrades. *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 3(1):2–13, 1923.
- [202] J. P. Hartnett, J. C. Y. Koh, and S. T. McComas. A Comparison of Predicted and Measured Friction Factors for Turbulent Flow Through Rectangular Ducts. *Journal of Heat Transfer*, 84(1):82–88, 1962.
- [203] G. Kawahara, K. Ayukawa, J. Ochi, F. Ono, and E. Kamada. Wall shear stress and Reynolds stresses in a low Reynolds number turbulent square duct flow. *Trans. JSME B*, 66(641):95–102, 2000.
- [204] H. Jasak. *Error Analysis and Estimation for the Finite Volume Method with Applications to Fluid Flow*. PhD Thesis, Department of Mechanical Engineering, Imperial College of Science, Technology and Medicine, June 1996.
- [205] S. V. Patankar and D. B. Spalding. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15(10):1787–1806, Oct 1972.
- [206] R. I. Issa. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. *Journal of Computational Physics*, 62(1):40–65, Jan 1986.
- [207] S. W. van Haren. Testing the DNS capability of OpenFOAM and STAR-CCM+ - In support of ththermal fatigue Assessment for complex geometries. Master thesis, TU Delft, May 2011.
- [208] C.-H. Cheng, H.-S. Kou, and W.-H. Huang. Flow reversal and heat transfer of fully developed mixed convection in vertical channels. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, 4(3):375–383, Jul 1990.
- [209] A. F. Polyakov. Wall Effect on Temperature Fluctuations in the Viscous Sublayer. *Teplofizika Vysokikh Temperatur*, 12:328–337, 1974.
- [210] Y. M. Khabakhpasheva. Experimental investigation of turbulent momentum and heat transfer in the proximity of the wall. *Heat Transfer, Proceedings of the 8th Internal Heat Transfer Conference, CA. USA*, 1986.
- [211] B. Pritz, F. Magagnato, and M. Gabi. Stability Analysis of Combustion Systems by Means of Large Eddy Simulation. In *Proceedings of the 14th International Conference on Fluid Flow Technologies (CMFF'09), Budapest, Hungary*, pages 313–390. BME Dept. Fluid Mech., Hungary, 2009.
- [212] S. Jakirlić and K. Hanjalić. A new approach to modelling near-wall turbulence energy and stress dissipation. *Journal of Fluid Mechanics*, 459:193–166, May 2002.
- [213] S. Jakirlić and R. Maduta. Extending the bounds of “steady” RANS closures: Toward an instability-sensitive Reynolds stress model. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 51:175–194, Feb 2015.