KFK-117
(2. Aufl.)

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Juli 1965 KFK 117

Institut für Radiochemie

Die mathematische Behandlung der Zerfalls- und Bildungsgesetze der Radioaktivität mit grafisch gelösten Beispielen

Zweite Auflage

W. Seelmann-Eggebert, J. Flegenheimer, G. Pfennig

GESELLSCHAFT FUR KERNFORSCHUNG M. B. H.
KARLSRUHE

KERNFORSCHUNGSZENTRUM KARLSRUHE

Juli 1965 KFK 117

Institut für Radiochemie

DIE MATHEMATISCHE BEHANDLUNG DER ZERFALLS- UND BILDUNGSGESETZE DER RADIOAKTIVITÄT MIT GRAFISCH GELÖSTEN BEISPIELEN

Zweite Auflage

alther man erda
W. Seelmann-Eggebert, J. Flegenheimer und G. Pfennig

Gesellschaft für Kernforschung m.b.H., Karlsruhe

INHALT SEITE

ZERFALLSGESETZE

BILDUNG VON RADIONUKLIDEN DURCH KERNREAKTIONEN

V O R W O R T

Der Zusammenstellung liegen Vorlesungen und Seminare zugrunde, welche im Zusammenhang mit radiochemischen Praktikumskursen in Buenos Aires/Argentinien und in Mainz bzw, Karlsruhe gehalten wurden.

Die erste, inzwischen stark veränderte Ausgabe wurde von Herrn J. Flegenheimer in spanischer Sprache verfaßt.

Karlsruhe, im Juli 1965 W. Seelmann-Eggebert

ZERFALLSGESETZE

1. Zerfall eines einzelnen Radionuklids

Die zeitliche Abhängigkeit des Zerfalls eines Radionuklids gehorcht, da es sich um einen mononuklearen Prozeß handelt,der 1. Ordnung. Deshalb gilt folgender Differentialansatz:

$$\frac{dN}{dt} = - \lambda N \qquad (1)$$

Diese Gleichung sagt aus, daß die Zahl der pro Zeiteinheit sich umwandelnden Atomkerne proportional der Zahl der in jedem Augenblick vorhandenen Kerne des betreffenden Nuklids ist. Das Minuszeichen zeigt an, daß die Zahl der Atome N als Funktion der Zeit t abnimmt. Der Proportionalitätsfaktor λ ist eine jedem Radionuklid eigene charakteristische Größe. Sie gibt den Bruchteil der jeweils vorhandenen Kerne an, der in der Zeiteinheit zerfällt und wird Zerfallskonstante genannt.

Durch Integration der Gleichung (1) gelangt man zur allgemeinen Zerfallsgleichung:

$$N_{(t)} = N_{(o)} \cdot e^{-\lambda t} \qquad (2)$$

Die Zeit,nach der die Anzahl der ursprünglich vorhandenen Atome $N_{(o)}$ auf die Hälfte abgesunken ist, bezeichnet man als Halbwertszeit $T_{1/2}$. Nach einer Halbwertszeit wird

$$N_{(t)} = \frac{N_{(o)}}{2} \quad \text{und } t = T_{1/2}.$$

Aus Gleichung (2) folgt dann:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{T_{1/2}}$$

In vielen Fällen wird die Zerfallskonstante durch Messung der Halbwertszeit bestimmt. Da die Halbwertszeit zudem eine so viel anschaulichere Größe ist, wird $T_{1/2}$ und nicht λ zur Charakterisierung der Zerfallswahrscheinlichkeit eines Radionuklids verwendet. Auch bei der Benutzung der Gleichungen, welche die Zeitabhängigkeit des Zerfalls eines Radionuklids beschreiben, insbesondere bei ihrer grafischen Darstellung ist es vielfach zweckmäßiger λ durch $T_{1/2}$ zu ersetzen. Statt der Halbwertszeit kann ferner die mittlere Lebensdauer ($\mathcal{T} = \frac{1}{\lambda} = 1{,}44\ T_{1/2}$) benutzt werden. $\mathcal{T}$ ist die Zeit, in der eine gegebene Menge radioaktiver Kerne auf den e-ten Teil abgenommen hat.

Die Zahl der pro Zeiteinheit zerfallenden Atome $\lambda N = A$ eines Nuklids bezeichnet man als Aktivitätsrate, Zerfallsrate, Umwandlungsrate oder absolute Aktivität. Somit ergibt sich aus Gleichung (2) die Zeitabhängigkeit der absoluten Aktivität

$$A_{(t)} = A_{(o)} \cdot e^{-\lambda t} \qquad (3)$$

oder in logarithmischer Schreibweise:

$$\log A_{(t)} = -\lambda t \log e + \log A_{(o)} \qquad (4)$$

wobei $A_{(t)}$ die Aktivität zur Zeit t und $A_{(o)}$ die Aktivität zur Zeit $t = 0$ ist (Anfangsaktivität).

Trägt man log A als Ordinate gegen t als Abszisse auf, so erhält man eine Gerade mit der Neigung $-\lambda \log e$, die zur Zeit $t = 0$ die Ordinate im Punkt $\log A_{(o)}$ schneidet.

<u>Abbildung 1</u>

Die Aktivitätsrate läßt sich nur unter sehr speziellen Bedingungen direkt bestimmen. Meist mißt man eine ihr proportionale Größe, die Meßrate oder relative Aktivität R.

$$R = f_W \cdot A \qquad (5)$$

Die allgemeine Zerfallsgleichung für relative Aktivitäten lautet daher,

$$R_{(t)} = R_{(o)} \cdot e^{-\lambda t} \qquad (6)$$

deren Werte sich nur um den Faktor f_W von der Gleichung (3) unterscheiden.

2. Zerfall eines Radionuklids aufgrund zweier konkurrierender Umwandlungsprozesse

Es kommt vor, daß ein Radionuklid durch verschiedenartige Umwandlungsprozesse (im allgemeinen jedoch nicht mehr als zwei) zerfällt, z.B. sowohl durch Elektroneneinfang als auch durch Positronenemission, oder sowohl durch α-Zerfall als auch durch Spontanspaltung. Die Halbwertszeit bleibt jedoch auch in diesen Fällen ihrer Definition gemäß eine charakteristische Konstante des Radionuklids, da es für seine Zerfallsgeschwindigkeit ohne Bedeutung ist, wie der Zerfall der einzelnen Kerne erfolgt. Dagegen kann man die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zahl der Atomkerne eines Radionuklids durch einen bestimmten Prozess abnimmt, durch eine dieser Übergangsart eigenen Zerfallskonstanten λ_1^* und λ_2^* ausdrücken, denen die "partiellen Halbwertszeiten" T_1^* und T_2^* entsprechen, die allerdings experimentell niemals in Erscheinung treten.

Die Zerfallskonstante λ des Nuklids ist dann gleich der Summe der beiden partiellen Zerfallskonstanten,

$$\lambda = \lambda_1^* + \lambda_2^* \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{T} = \frac{1}{T_1^*} + \frac{1}{T_2^*} \tag{7}$$

woraus sich für die Halbwertszeit

$$T = \frac{T_1^* \, T_2^*}{T_1^* + T_2^*}$$

ergibt. Ferner ist

$$\lambda_1^* N + \lambda_2^* N = A_1^* + A_2^* = A$$

und somit

$$\frac{A_1^*}{A_2^*} = \frac{\lambda_1^*}{\lambda_2^*} \tag{8}$$

Dieser Quotient wird als Verzweigungsverhältnis bezeichnet; er ergibt sich aus den experimentell bestimmbaren partiellen Zerfallsraten A_1^* und A_2^*.

Unter Berücksichtigung der Gleichung (3) erhält man:

$$A_{(t)} = A^*_{1(o)}e^{-\lambda t} + A^*_{2(o)}e^{-\lambda t} = A_{(o)}e^{-\lambda t}$$

$$A_{(o)}e^{-\lambda t} = A_{(o)}e^{-(\lambda^*_1 + \lambda^*_2)t} \qquad (9)$$

Diese Gleichung verdeutlicht, daß, obwohl für jede Zerfallsart eine "partielle Halbwertszeit" errechnet werden kann, die partiellen Aktivitätsraten mit der Halbwertszeit des Nuklids abnehmen.

Abbildung 2

Die den Verzweigungszerfall beschreibende mathematische Gleichung (9) gilt gleichfalls, wenn die Abnahme der Atomkerne eines Radionuklids noch durch einen anderen, den statistischen Gesetzen gehorchenden Prozeß erfolgt; z.B. dann, wenn die Abnahme der Atomkerne einer Kernart neben dem radioaktiven Zerfall noch durch Neutroneneinfang verursacht wird (siehe auch Seite 20).

Für die Berechnung der Abnahme inkorporierter Radionuklide gelten analoge Überlegungen. Die im Körper nach einer Zeit t verbliebene Aktivität errechnet sich nach der Gleichung:

$$A_{(t)} = A_{(o)} \cdot e^{-\lambda_{eff} t} \qquad (10)$$

Dabei ist λ_{eff} gleich der Summe aus λ_{ra} und λ_{biol}. Hierbei bedeutet λ_{ra} die physikalische Zerfallskonstante des inkorporierten Radionuklids und λ_{biol} die Ausscheidungskonstante des Radionuklids in dem betreffenden biologischen System. Sie hängt von der Geschwindigkeit der aufgrund biologischer Vorgänge erfolgenden Ausscheidung ab. Zwischen der effektiven, der biologischen und der physikalischen Halbwertszeit gilt demnach die Beziehung:

$$\frac{1}{T_{eff}} = \frac{1}{T_{ra}} + \frac{1}{T_{biol}} \qquad (11)$$

3. Abfall und Analyse einer Mischung mehrerer Radionuklide, die nicht in genetischem Zusammenhang stehen

Die Gesamtaktivität einer Mischung mehrerer Radionuklide ist zu jeder Zeit gleich der Summe der zu diesem Zeitpunkt vorhandenen Einzelaktivitäten.

$$A = A_1 + A_2 + \ldots A_n = A_{1(o)}e^{-\lambda_1 t} + A_{2(o)}e^{-\lambda_2 t} + \ldots A_{n(o)}e^{-\lambda_n t} \quad (12)$$

Abbildung 3

Zur grafischen Darstellung der Gleichung (12) konstruiert man die einzelnen Zerfallsgeraden und summiert die Einzelaktivitäten zu beliebigen, untereinander gleichen Zeitpunkten t. Überwiegt zu irgendeiner Zeit die Aktivität eines Nuklids sehr stark, so nähert sich der Verlauf der Gesamtaktivität einer Geraden mit einer Neigung, die der Halbwertszeit des betreffenden Nuklids entspricht. Umgekehrt ist es möglich aus dem Aktivitätsverlauf einer Mischung zweier Radionuklide durch grafische Analyse die Halbwertszeit der einzelnen Komponenten zu ermitteln. Dies geschieht, indem man die langlebige Aktivität aus dem geradlinigen Teil heraus bis zur Zeit Null extrapoliert und die erhaltenen Werte von der Kurve abzieht. Die Differenzen für sich aufgetragen, ergeben eine Gerade, aus der man Aktivität und Halbwertszeit des kürzerlebigen Radionuklids ablesen kann. Auch Gemische mehrerer Radionuklide lassen sich so analysieren, wenn sich ihre Halbwertszeiten genügend und ihre Anfangsaktivitäten nicht allzu sehr voneinander unterscheiden.

4. Aktivitätsverlauf zweier Nuklide, die untereinander in genetischem Zusammenhang stehen

Entsteht beim Zerfall eines Radionuklids ein radioaktives Folgeprodukt, so verwendet man die Begriffe Mutter- und Tochternuklid.

Der Aktivitätsverlauf des Mutternuklids ist bereits durch Gleichung (3) beschrieben, der des Tochternuklids ist komplizierter. Dieses wird einerseits durch den Zerfall des Mutternuklids (Zerfallskonstante λ_1) gebildet, zerfällt andererseits mit eigener Zerfallskonstante λ_2.

Der Differentialansatz für die zeitliche Änderung der Zahl der Tochterkerne lautet:

$$\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \tag{13}$$

Die Zahl der Kerne des Tochternuklids zur Zeit t ergibt sich nach Integration zu:

$$N_{2(t)} = N_{1(o)} \lambda_1 \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) + N_{2(o)} e^{-\lambda_2 t} \tag{14}$$

Nach entsprechender Multiplikation mit λ_2 erhält man für den Aktivitätsverlauf des Tochternuklids unter Berücksichtigung, daß $\lambda N = A$ ist:

$$A_{2(t)} = A_{1(o)} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) + A_{2(o)} e^{-\lambda_2 t} \tag{15a}$$

bzw.

$$A_{2(t)} = A_{1(o)} \frac{T_1}{T_1 - T_2} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) + A_{2(o)} e^{-\lambda_2 t} \tag{15b}$$

Sofern zur Zeit t = 0 kein Tochternuklid vorhanden ist, d.h. zur Zeit t = 0 das Tochternuklid quantitativ abgetrennt wurde, entfällt der letzte Summand. (Abb. 4 siehe Anhang)

$$A_{2(t)} = A_{1(o)} \frac{T_1}{T_1 - T_2} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \tag{15}$$

Zur grafischen Darstellung der Gleichung (15) gelten nachstehende Überlegungen:

Bei der Anwendung der Gleichung (15) sind vier Möglichkeiten zu unterscheiden: die Halbwertszeit des Mutternuklids ist sehr viel größer, größer, etwa gleich oder wesentlich kleiner als die des Tochternuklids. Die sich daraus ergebenden Vereinfachungen werden in den folgenden Abschnitten einzeln behandelt.

Die in der Klammer stehenden Summanden ergeben in halblogarithmischer Darstellung zwei Geraden mit einer ihrer Zerfallskonstanten entsprechenden Neigung. Beide Geraden, die als Hilfsgeraden zu zeichnen sind, haben zur Zeit t = 0 den gleichen Ordinatenausgangspunkt

$$A' = A_{1(o)} \frac{T_1}{T_1 - T_2}$$

Ihre Differenz entspricht dem Aktivitätsanstieg und Abfall des Tochternuklids

Den Verlauf der Gesamtaktivität erhält man folgendermaßen:

1. Man konstruiert die Zerfallsgerade des Mutternuklids mit dem Ordinatenausgangspunkt A_1 zur Zeit $t = 0$.
2. Man errechnet den gemeinsamen Ordinatenausgangspunkt der beiden Hilfsgeraden $e^{-\lambda_1 t}$ und $e^{-\lambda_2 t}$:

   $A' = A_{1(o)} \frac{T_1}{T_1 - T_2}$ und zeichnet sie.

   Ist T_2 größer als T_1, so ergibt der Ausdruck $A_{1(o)} \frac{T_1}{T_1 - T_2}$ einen negativen Wert. Der Wert der Klammer der Gleichung (15) ist in diesem Fall gleichfalls negativ, so daß sich für die Aktivität des Tochternuklids wieder positive Werte ergeben.
3. Anschließend trägt man die zu verschiedenen Zeitpunkten abgelesenen Differenzwerte beider Hilfsgeraden zur jeweiligen Zeit auf. Man erhält die Anstiegskurve des Tochternuklids, die von Null ansteigt und ein Maximum durchläuft.
4. Summiert man die Zerfallsgerade des Mutternuklids und die Anstiegskurve des Tochternuklids, so erhält man den Gesamtaktivitätsverlauf, wenn zur Zeit $t = 0$ kein Tochternuklid vorhanden war.

War zur Zeit $t = 0$ bereits eine Aktivität des Tochternuklids vorhanden, so muß die Zerfallsgerade des Tochternuklids mit dem Ordinatenausgangspunkt $A_{2(o)}$ gezeichnet werden. Der Gesamtaktivitätsverlauf ergibt sich als Summe der Zerfallsgeraden von Mutter- und Tochternuklid und der Anstiegskurve des Tochternuklids.

4.1. Permanentes Gleichgewicht ($T_1 \gg T_2$)

Wenn die Halbwertszeit des Mutternuklids sehr viel größer als die des Tochternuklids ist, kann T_2 im Verhältnis zu T_1 in Gleichung (15) vernachlässigt werden, so daß diese sich vereinfacht zu:

$$A_{2(t)} = A_1 \, (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \qquad (16)$$

Wenn außerdem $t \ll T_1$ ist, kann man die Gleichung (16) in der weiter vereinfachten Form verwenden:

$$A_{2(t)} = A_1 \, (1 - e^{-\lambda_2 t}) \; . \qquad (17)$$

Eine weitere Vereinfachung ist zulässig, wenn $t \ll T_2$ ist. Die dann geltende Näherungsformel lautet,

$$A_{2(t)} = A_1 \cdot \lambda_2 t \cong A_1 \cdot \frac{0{,}7\ t}{T_2} \qquad (18)$$

da die Zahl der Tochterkerne N_2 zunächst mit $A_1 \cdot t$ anwächst.

Aus den Gleichungen (17) und (18) ergibt sich, daß der Anstieg der Tochteraktivität nur von der Halbwertszeit des Tochternuklids abhängt.

Nach etwa 7 Halbwertszeiten des Tochternuklids hat die Tochteraktivität A_2 die Aktivität des Mutternuklids A_1 fast erreicht ($\sim$ 99 %). Wird t sehr viel größer als die Halbwertszeit des Folgeprodukts, so erreicht der Klammerausdruck der Gleichung (16) schließlich den Wert 1. Diesen Zustand bezeichnet man als permanentes Gleichgewicht. Die Gesamtaktivität ist dann über Zeitintervalle, die klein im Vergleich zu T_1 sind, konstant und somit gleich 2 A_1. Ferner gilt

$$A_1 = A_2 = \lambda_2 N_2 = \lambda_1 N_1$$

und somit

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{T_1}{T_2} \qquad (19)$$

d.h. die Zahl der Atome von Tochter- und Mutternuklid verhalten sich wie ihre Halbwertszeiten.

Abbildung 5 und 6

Bei der grafischen Darstellung der Gleichung (17) stellt die Zerfallsgerade des Mutternuklids eine Parallele zur Abszissenachse im Abstand A_1 dar. Die Aktivität des Systems steigt im Gleichgewicht auf den Wert 2 A_1 an. In der nichtlogarithmischen Darstellung ist gut zu erkennen, daß im Bereich $t \ll T_2$ die Tochteraktivität proportional zur Zeit ansteigt. Gleichung (18).

4.2. Laufendes Gleichgewicht ($T_1 \gg T_2$)

Wenn die Halbwertszeit des Mutternuklids zwar größer als die Halbwertszeit des Tochternuklids ist, aber beide von ähnlicher Größenordnung sind, dann ist die Gleichung (15) zu verwenden. Für t größer als etwa 7 T_2 vereinfacht sie sich, da der Ausdruck $e^{-\lambda_2 t}$ mit der Zeit viel schneller abnimmt als $e^{-\lambda_1 t}$, zu:

$$A_{2(t)} = A_{1(o)} \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\lambda_1 t} \qquad (20)$$

Die Aktivität des Tochternuklids nimmt dann mit der Halbwertszeit des Mutternuklids ab. Dieser Zustand wird als laufendes Gleichgewicht bezeichnet.

Da

$$A_{1(o)} \cdot e^{-\lambda_1 t} = A_{1(t)}$$

ist, kann man schreiben:

$$A_{2(t)} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot A_{1(t)}$$

oder

$$\frac{A_{2(t)}}{A_{1(t)}} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \qquad (21)$$

bzw. wenn man die Zahl der Kerne von Mutter- und Tochternuklid betrachtet

$$\frac{N_{2(t)}}{N_{1(t)}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \qquad (22)$$

Im laufenden Gleichgewicht ist also die Zerfallsrate des Tochternuklids größer als die des Mutternuklids. Da die Aktivität des Tochternuklids A_2 für t = 0 den Wert Null besitzt und wenn t sehr groß wird, wieder gegen Null strebt, ergibt sich, daß A_2 ein Maximum durchlaufen muß. Die diesem Maximalwert zugehörige Zeit t_m läßt sich errechnen, wenn man die Gleichung (15) nach t differenziert, die Ableitung gleich Null setzt und nach t_m auflöst. Man erhält:

$$t_m = \frac{T_1 T_2}{(T_2 - T_1) \ln 2} \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} \qquad (23)$$

4.3. Ähnliche Halbwertszeiten ($T_1 \cong T_2$)

Wenn die Halbwertszeiten von Mutter- und Tochternuklid sehr ähnlich sind, kann die Gleichung (15) nicht mehr verwendet werden. Je weniger die Halbwertszeiten voneinander abweichen, um so mehr nähern sich sowohl der Quotient als auch der Klammerausdruck dem Wert Null. In diesen Fällen muß daher die durch eine Reihenentwicklung erhaltene Formel benutzt werden. Sie lautet:

$$A_{2(t)} = A_{1(o)} \lambda_2 t \cdot e^{-\lambda_2 t} \left(1 + \frac{t(T_1 - T_2)}{2T_1 T_2} \ln 2\right) \qquad (24a)$$

Der Ausdruck

$$\frac{t(T_1 - T_2)}{2T_1 T_2} \ln 2$$

kann für Werte $\ll 1$ vernachlässigt werden. Für Werte ≈ 1 ist er jedoch zu berücksichtigen und für Werte $\gg 1$ muß wieder die Gleichung (15) verwendet werden.

Ist T_1 von T_2 kaum zu unterscheiden, so erhält man die Gleichung:

$$A_{2(t)} = A_{1(o)} \lambda t \cdot e^{-\lambda t} \qquad (24)$$

Differenziert man die Gleichung (24) nach t und setzt die Ableitung gleich Null, dann wird:

$$t_m = \frac{T}{\ln 2} = \frac{1}{\lambda} = 1{,}44\ T \qquad (25)$$

Sofern das Mutternuklid zur Zeit $t = 0$ tochterfrei war, ist t_m außerdem noch der Zeitpunkt, zu dem die Tochteraktivität gleich der Mutteraktivität ist. (Abb. 7 siehe Anhang)

Zur grafischen Darstellung der Gleichung (24) zeichnet man die Zerfallsgerade des Mutternuklids, welche durch $A_{1(o)} e^{-\lambda t}$ gegeben ist, und multipliziert mehrere abgelesene Werte mit dem Produkt aus λ und den entsprechenden Zeitwerten t.

Der Gesamtaktivitätsverlauf ist die Summe dieser berechneten Anstiegskurve des Tochternuklids und der Zerfallsgeraden des Mutternuklids.

4.4. Halbwertszeit der Mutter kürzer als die der Tochter ($T_1 < T_2$)

Wenn $T_1 < T_2$ wird sowohl der Quotient als auch der Klammerausdruck negativ, das Produkt jedoch bleibt positiv, so daß es zweckmäßig ist, die Gleichung (15) umzuformen, in dem man -1 vor die Klammer zieht. Man erhält dann:

$$A_{2(t)} = A_{1(o)} \frac{T_1}{T_2 - T_1} (e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}) \qquad (26)$$

Für Werte von $t \ll T_2$ und $T_1 < 1/2\ T_2$ hängt die Geschwindigkeit des Anstiegs der Tochteraktivität A_2 im Gegensatz zum dauernden und laufenden Gleichgewicht nur von der Halbwertszeit des Mutternuklids T_1 ab:

$$A_{2(t)} = A_{1(o)} \frac{T_1}{T_2 - T_1} (1 - e^{-\lambda_1 t}) \qquad (27)$$

Für Werte von $t > 7\ T_1$ fällt die Tochteraktivität mit der ihr eigenen Halbwertszeit ab:

$$A_{2(t)} = A_{1(o)} \frac{T_1}{T_2 - T_1} e^{-\lambda_2 t} \qquad (28)$$

Zieht man in Gleichung (26) $e^{-\lambda_1 t}$ vor die Klammer und setzt für $A_{1(o)}\ e^{-\lambda_1 t}$ $A_{1(t)}$ ein, so folgt für

$$\frac{A_{2(t)}}{A_{1(t)}} = \frac{T_1}{T_2 - T_1} (e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} - 1) \qquad (29)$$

Es existiert also kein Gleichgewicht, weil das Aktivitätsverhältnis zwischen Tochter- und Mutternuklid als Funktion der Zeit laufend größer wird. Die Tochteraktivität durchläuft ein Maximum. Die zugehörige Zeit t_m kann mit der Gleichung (23) errechnet werden.

Abbildung 8

In Abbildung 8 ist der Aktivitätsverlauf sowohl der Tochter- als auch der Gesamtaktivität für $T_1 < T_2$ dargestellt.

Im speziellen Falle, wenn $2\ T_1 = T_2$ ist, ergibt sich, daß die Gesamtaktivität geradlinig verläuft und zwar mit einer Neigung, die der Halbwertszeit des Tochternuklids T_2 entspricht.

In den Fällen, in denen die Halbwertszeit des Mutternuklids größer oder kleiner ist als die des Tochternuklids, ändert sich die Gesamtaktivität nach Abtrennung des Tochternuklids sofort; sie steigt anfänglich an bzw. fällt ab, weil Mutternuklid und Folgeprodukt verschiedene Zerfallswahrscheinlichkeiten haben. In dem zwischen beiden Bereichen liegenden Grenzfall dagegen, wenn $T_1 = T_2$ ist, verändert sich die Gesamtaktivität anfangs nicht, so daß die Kurve horizontal verläuft. Dies verdeutlicht den physikalischen Sachverhalt, daß für jeden zerfallenden Kern des Mutternuklids ein Tochterkern entstanden ist, der nun wieder dieselbe Lebenserwartung hat wie zuvor. Die Zahl der insgesamt vorhandenen Kerne verändert sich also zunächst nicht, so daß die Zerfallsrate konstant bleibt; die Gesamtaktivität beginnt daher erst abzunehmen, wenn die Zahl der Kerne des Mutternuklids merklich kleiner geworden ist.

5. Aktivitätsverlauf des Enkelnuklids einer radioaktiven Familie

Wenn durch den Zerfall des Tochternuklids ein weiteres Radionuklid entsteht, so beschreibt die folgende Gleichung den Aktivitätsverlauf des Enkelnuklids, wenn zur Zeit t = 0 das Mutternuklid frei von radioaktiven Folgeprodukten ist.

$$A_3(t) = A_1(o)T_1\left(\frac{T_1}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)} e^{-\lambda_1 t} + \frac{T_2}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)} e^{-\lambda_2 t} + \frac{T_3}{(T_3-T_1)(T_3-T_2)} e^{-\lambda_3 t} \right) \quad (30)$$

Wenn die Halbwertszeit des Mutternuklids viel größer ist als die des Tochternuklids und des Enkelnuklids, so vereinfacht sich die Gleichung (30) unter der zusätzlichen Bedingung, daß $t \ll T_1$ ist, zu:

$$A_3(t) = A_1(o)\left(1 - \frac{T_2}{T_2-T_3} e^{-\lambda_2 t} + \frac{T_3}{T_2-T_3} e^{-\lambda_3 t} \right) \quad (31)$$

Ist jedoch die Halbwertszeit des Tochternuklids größer als die des Mutternuklids und des Enkelnuklids, so sind unter den zusätzlichen Bedingungen $t \gg T_1$ und $t \gg T_3$ der erste und der dritte Summand der

Gleichung (30) gegenüber dem zweiten sehr klein und können daher vernachlässigt werden. Unter dieser Voraussetzung läßt sich die Gleichung für die Enkelaktivität vereinfachen und lautet dann:

$$A_{3(t)} = A_{1(o)} \frac{T_1 T_2}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)} e^{-\lambda_2 t} \qquad (32)$$

Für die Bedingungen $T_1 < T_2$ und $T_3 \ll T_2$ läßt sich die Gleichung (32) weiter vereinfachen und in folgender Form schreiben:

$$A_{3(t)} = A_{1(o)} \frac{T_1}{T_2 - T_1} e^{-\lambda_2 t} = A_{2(t)} \qquad (33)$$

Diese Gleichung (33) ist mit der Gleichung (20) für das System Mutter - Tochter identisch, was verständlich wird, da wegen des laufenden Gleichgewichts zwischen Enkel und Tochter das Aktivitätsverhältnis durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$\frac{A_{3(t)}}{A_{2(t)}} = \frac{T_2}{T_2 - T_3} \qquad (34)$$

6. Aktivitätsverlauf des n-ten Gliedes einer radioaktiven Familie (Bateman-Gleichung)

Die allgemeine Gleichung, welche den Aktivitätsverlauf des n-ten Gliedes einer radioaktiven Familie oder Reihe beschreibt, wurde von Bateman+) angegeben. Die Bateman-Gleichung beschreibt den Aktivitätsverlauf des n-ten Gliedes, wenn zur Zeit t = 0 die Mutter keine Folgeprodukte hatte:

$$A_{n(t)} = K_1 e^{-\lambda_1 t} + K_2 e^{-\lambda_2 t} + \ldots K_n e^{-\lambda_n t} \qquad (35)$$

Hierin bedeuten:

$$K_1 = A_{1(o)} T_1 \frac{T_1^{(n-2)}}{(T_1-T_2)(T_1-T_3)\ldots(T_1-T_n)}$$

$$K_2 = A_{1(o)} T_1 \frac{T_2^{(n-2)}}{(T_2-T_1)(T_2-T_3)\ldots(T_2-T_n)}$$

+) Proc. Camb. Phil. Soc. 15, 423 (1910)

$$K_n = A_{1(o)}\, T_1 \frac{T_n^{(n-2)}}{(T_n-T_1)(T_n-T_2)\ldots(T_n-T_{n-1})}$$

BILDUNG VON RADIONUKLIDEN DURCH KERNREAKTIONEN

1. Aktivitätsanstieg eines durch eine Kernreaktion gebildeten Radionuklids (Zahl der Ausgangskerne konstant)

Z.B. Ausgangsnuklid $\xrightarrow[\sigma_o]{(n,\gamma)}$ Radionuklid $\xrightarrow[\lambda_1]{\beta^-}$

Bei der Erzeugung eines Radionuklids durch Bestrahlung in einem gleichförmigen, zeitlich konstanten Partikelstrom ist die Bildungsrate, d.h. die Zahl P_o der pro Zeiteinheit entstehenden Kerne des Radionuklids folgenden Größen proportional:

1. der Zahl N_o der Kerne des Ausgangsnuklids (Targetnuklid)
2. dem die Targetkerne durchsetzenden Partikelfluß und
3. dem Aktivierungsquerschnitt σ_o des Ausgangsnuklids

$$P_o = N_o\, \Phi\, \sigma_o \qquad (36)$$

Die Zahl der Ausgangskerne N_o erhält man aus der Beziehung

$$N_o = \frac{m\, N_L\, H}{A} \qquad (37)$$

Hierbei ist

- m die Menge des bestrahlten Elements in g
- N_L die Loschmidt'sche Zahl
- H die Isotopenhäufigkeit (in %/100)
- A das Atomgewicht des betreffenden Elements

In der Gleichung (36) wird vorausgesetzt, daß die Zahl der Ausgangskerne N_o konstant bleibt, obwohl sie sich während der Bestrahlung durch Kernreaktion laufend vermindert. Diese Abnahme ist jedoch meist so unbedeutend, daß man sie vernachlässigen kann.

Ein Teil der bei der Bestrahlung entstehenden Kerne des Radionuklids zerfällt bereits während der Bestrahlung wieder. Für die sich ergebende Zuwachsrate der radioaktiven Atome gilt daher analog zu der Nachbildung eines Tochternuklids aus einem langlebigen-Mutternuklid:

$$\frac{dN_1}{dt_*} = P_o - \lambda_1 N_1 \qquad (38)$$

Durch Integration der Gleichung (38) erhält man den Aktivitätsanstieg als Funktion der Bestrahlungszeit t_* :

$$\lambda_1 N_1 = A_{1(t_*)} = P_o \ (1 - e^{-\lambda_1 t_*}) \qquad (39)$$

Für $t_* \longrightarrow \infty$ wird $A_{1(t_*)} = P_o = A_{1(\infty)}$

$A_{1(\infty)}$ ist die höchste Aktivität, die man erzielen kann (Sättigungsaktivität); sie ist dann erreicht, wenn die Zerfallsrate gleich der Bildungsrate geworden ist. Nach Ende der Bestrahlung klingt die Aktivität mit $e^{-\lambda_1 t}$ ab. Daher gilt:

$$A_{1(t)} = P_o \ (1 - e^{-\lambda_1 t_*}) \ e^{-\lambda_1 t} \qquad (40)$$

wobei unter t die nach Ende der Bestrahlung vergangene Zeit verstanden wird.

2. Aktivitätsanstieg der Folgeprodukte eines durch eine Kernreaktion gebildeten Radionuklids (Zahl der Ausgangskerne konstant)

Z.B. Nuklid 0 $\xrightarrow[\sigma_o]{(n,\gamma)}$ Nuklid 1 (Mutter) $\xrightarrow[\lambda_1]{\beta^-}$ Nuklid 2 (Tochter) $\xrightarrow[\lambda_2]{\beta^-}$

In vielen Fällen bildet das durch einen Kernprozeß erzeugte Radionuklid ein gleichfalls radioaktives Tochternuklid nach. Bezeichnet man mit der Indexzahl 0 das Ausgangsnuklid und mit den Indexzahlen 1 bzw. 2 das radioaktive Mutter- bzw. Tochternuklid, so ergeben sich die Differentialansätze:

$$\frac{dN_1}{dt_*} = P_o - \lambda_1 N_1 \qquad (41)$$

$$\frac{dN_2}{dt_*} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 \qquad (42)$$

Setzt man in die Gleichung (42) den Wert von N_1 ein, den man durch Integration von Gleichung (41) erhält und löst die Differentialgleichung, so folgt für den Aktivitätsverlauf des Tochternuklids während der Bestrahlungszeit t_* :

$$A_{2(t_*)} = P_o \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-\lambda_1 t_*} - \frac{T_2}{T_2 - T_1} e^{-\lambda_2 t_*}\right) \qquad (43)$$

Falls das zweite Radionuklid beim Zerfall weitere Folgeprodukte nachbildet, so kann man eine Reihe von Gleichungen aufstellen, die nach den Gleichungen (41) und (42) gebildet werden.

$$\text{Nuklid 0} \xrightarrow[\sigma_o]{(n,\gamma)} \text{Nuklid 1(Mutter)} \xrightarrow[\lambda_1]{\beta^-} \text{Nuklid 2(Tochter)}$$

$$\xrightarrow[\lambda_2]{\beta^-} \text{Nuklid 3(Enkel)} \xrightarrow[\lambda_3]{\beta^-} \;\ldots\ldots\; \text{Nuklid n} \xrightarrow[\lambda_n]{\beta^-}$$

Die allgemeine Gleichung für n Glieder siehe Seite 20

3. Aktivitätsanstieg eines durch doppelten Einfangsprozeß gebildeten Radionuklids (Zahl der Ausgangskerne konstant)

$$\text{Z.B. Nuklid 0} \xrightarrow[\sigma_o]{(n,\gamma)} \underset{\Lambda_1}{\text{Nuklid 1}} \begin{cases} \xrightarrow[\lambda_1]{\beta^-} \text{Nuklid 3} \\ \xrightarrow[\sigma_1]{(n,\gamma)} \text{Nuklid 2} \xrightarrow[\lambda_2]{\beta^-} \end{cases}$$

Die bisherigen Gleichungen gelten nur dann, wenn die Zahl der gebildeten Kerne allein durch radioaktiven Zerfall abnimmt. Die Abnahme eines im Neutronenstrom gebildeten Radionuklids kann zusätzlich jedoch auch noch durch einen weiteren Neutroneneinfangprozeß bewirkt werden (doppelter Einfang).

Meist braucht man diesen zweiten Einfangprozeß nicht zu berücksichtigen; bei hohem Neutronenfluß und sehr großem Wirkungsquerschnitt σ_1 darf er jedoch nicht mehr vernachlässigt werden. Die Gleichung (38) muß dann durch folgende Beziehung ersetzt werden:

$$\frac{dN_1}{dt_*} = P_o - \lambda_1 N_1 - N_1 \bar{\Phi} \sigma_1 \tag{44}$$

umgeformt

$$\frac{dN_1}{dt_*} = P_o - N_1 \left(\lambda_1 + \bar{\Phi} \sigma_1\right) \tag{45}$$

setzt man

$$\lambda_1 + \bar{\Phi} \sigma_1 = \Lambda_1$$

so ergibt sich:

$$\frac{dN_1}{dt_*} = P_o - \Lambda_1 N_1 \tag{46}$$

Λ_1 ist funktionell eine Zerfallskonstante. Ihr Wert ist stets größer als die Zerfallskonstante λ des radioaktiven Zerfalls.

Durch Integration der Gleichung (46) ergibt sich:

$$N_{1(t_*)} = \frac{P_o}{\Lambda_1} \left(1 - e^{-\Lambda_1 t_*}\right) \quad \text{oder} \quad A_{1(t_*)} = \frac{P_o \lambda_1}{\Lambda_1} \left(1 - e^{-\Lambda_1 t_*}\right) \tag{47}$$

Die Bildungsgleichung eines durch doppelten Einfang erzeugten Radionuklids (Index 2) ist:

$$\frac{dN_2}{dt_*} = N_1 \bar{\Phi} \sigma_1 - \lambda_2 N_2 \tag{48}$$

Diese Gleichung (48) gilt unter der Voraussetzung, daß N_o während der Bestrahlungsdauer unverändert bleibt und Nuklid 2 nur durch radioaktiven Zerfall abnimmt.

Wenn man N_1 aus Gleichung (43) einsetzt und die Differentialgleichung integriert, erhält man:

$$A_2(t_*) = \frac{N_o \Phi^2 \sigma_o \sigma_1}{\Lambda_1} \left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \Lambda_1} e^{-\Lambda_1 t_*} + \frac{\Lambda_1}{\lambda_2 - \Lambda_1} e^{-\lambda_2 t_*}\right) \quad (49)$$

Man erkennt, daß die Aktivität des durch doppelten Einfang gebildeten Radionuklids dem Quadrat des Neutronenflusses proportional ist.

In den Gleichungen (47) und (49) geht der Wert der Klammer nach 1, wenn die Bestrahlungszeit t_* sehr groß gegen die Halbwertszeit T_1 und T_2 wird, da die Exponenten $\lambda_2 t_*$ und $\Lambda_1 t_* = (\lambda_1 + \Phi \sigma_1) t_*$ sehr groß werden. Wenn das Sättigungsgleichgewicht für beide Radionuklide erreicht ist, nimmt das Aktivitätsverhältnis folgenden Wert an:

$$\frac{A_2(t_*)}{A_1(t_*)} (t_* \longrightarrow \infty) = \frac{\Phi \sigma_1}{\lambda_1} \quad (50)$$

4. Kernprozeß, dem nach einem ß-Zerfall ein weiterer Kernprozeß folgt (Zahl der Ausgangskerne konstant)

$$\text{Z.B. Nuklid 0} \xrightarrow[\sigma_o \text{ bzw. } \sigma_f]{(n,\gamma) \text{ bzw. } (n,f)} \text{Nuklid 1} \xrightarrow[\lambda_1]{\beta^-} \underset{\Lambda_2}{\text{Nuklid 2}} \begin{cases} \xrightarrow[\lambda_2]{\beta^-} \text{Nuklid 3} \\ \xrightarrow[\sigma_2]{(n,\gamma)} \text{Nuklid 4} \end{cases}$$

Bei einem Kernprozeß (z.B. bei der Uranspaltung) wird ein radioaktives Nuklid 1 gebildet, dessen Zerfallsprodukt (Nuklid 2) außer durch radioaktiven Zerfall zugleich durch Neutroneneinfang abnimmt.

Als Beispiel für ein solches System soll die Formel für den Fall eines Neutroneneinfangprozesses in einer spaltisobaren Reihe berechnet werden.

Unter der Annahme, daß zu Beginn der Uranspaltung keine Spaltprodukte vorhanden waren, wird die Zahl der gebildeten Kerne des Nuklids 1 während der Bestrahlung durch die Gleichung (41) beschrieben: (Bildung eines Nuklids durch Bestrahlung mit anschließendem ß-Zerfall)

$$\frac{dN_1}{dt_*} = P_o Y - \lambda_1 N_1 \quad (51)$$

Dabei bedeutet Y die Spaltausbeute.

$$N_{1(t_*)} = \frac{P_o Y}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 t_*}) \qquad (52)$$

Für die Zahl der erzeugten Kerne des Nuklids 2 während der Bestrahlung gilt:

$$\frac{dN_2}{dt_*} = \lambda_1 N_1 - \lambda_2 N_2 - \Phi \sigma_2 N_2 \qquad (53)$$

oder wenn ($\lambda_2 + \Phi \sigma_2$) gleich Λ_2 gesetzt wird:

$$\frac{dN_2}{dt_*} = \lambda_1 N_1 - \Lambda_2 N_2 \qquad (54)$$

Hieraus ergibt sich die Zahl der zu irgendeinem Zeitpunkt t_* während der Bestrahlung vorhandenen Kerne des Nuklids 2 zu:

$$N_{2(t_*)} = \frac{P_o Y}{\Lambda_2} \left(1 - \frac{\Lambda_2}{\Lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t_*} + \frac{\lambda_1}{\Lambda_2 - \lambda_1} e^{-\Lambda_2 t_*}\right) \qquad (55)$$

Nachdem die Sättigungsaktivität erreicht ist, beträgt die Zahl der Kerne des Nuklids 1 bzw. 2:

$$N_1 = \frac{P_o Y}{\lambda_1} \qquad\qquad N_2 = \frac{P_o Y}{\Lambda_2}$$

Wird die Bestrahlung unterbrochen, so wird die Abnahme der Kerne nur noch durch den radioaktiven Zerfall der Nuklide bestimmt. Die Zahl der Kerne des Nuklids 1 nimmt dem allgemeinen Zerfallsgesetz (2) entsprechend ab, die des Nuklids 2 nach Gleichung (15) (Mutter-Tochtersystem).

Unter der Voraussetzung, daß bei Bestrahlungsende Sättigungsaktivität erreicht war, gilt für die zeitliche Abnahme der Kerne des Nuklids 1 die Gleichung:

$$N_{1(t)} = \frac{P_o Y}{\lambda_1} e^{-\lambda_1 t} \qquad (56)$$

und für die des Nuklids 2:

$$N_{2(t)} = \frac{P_o Y}{\lambda_1 - \lambda_2}\left(e^{-\lambda_2 t} - e^{-\lambda_1 t}\right) + \frac{P_o Y}{\Lambda_2}\, e^{-\lambda_2 t} \qquad (57)$$

t ist in den Gleichungen (56) und (57) die Zeit vom Bestrahlungsende an gerechnet.

Die Aktivität des Nuklids 2 durchläuft ein Maximum, dessen Höhe vom Neutronenfluß und dem Verhältnis der Halbwertszeiten abhängt.

5. Aktivitätsanstieg eines durch eine Kernreaktion gebildeten Radionuklids bei merklich abnehmender Zahl der Targetkerne

$$\text{Z.B. Ausgangsnuklid } \underset{\Lambda.}{} \begin{cases} \xrightarrow[\lambda_o]{\beta^-} \text{ Nuklid 2} \\ \xrightarrow[\sigma_o]{(n,\gamma)} \text{ Nuklid 1 } \xrightarrow[\lambda_1]{\beta^-} \end{cases}$$

In den bisherigen Beispielen wurde angenommen, daß die Zahl der Ausgangskerne während der Bestrahlungszeit unverändert bleibt. Bestrahlt man ein Nuklid, dessen Abnahme während der Bestrahlung nicht mehr zu vernachlässigen ist, so ergibt sich der Aktivitätsverlauf für das gebildete Radionuklid durch folgende Gleichung:

$$A_{1(t_*)} = \frac{N_o \lambda_1 \Phi \sigma_o}{\lambda_1 - \Lambda_o}\left(e^{-\Lambda_o t_*} - e^{-\lambda_1 t_*}\right) \qquad (59)$$

wobei $\lambda_o + \Phi\sigma_o$ gleich Λ_o gesetzt ist.

6. Aktivitätsanstieg des n-ten Gliedes eines durch eine Kernreaktion gebildeten Radionuklids (Allgemeine Gleichung)

Diese allgemeine Gleichung beschreibt die Bildung des n-ten Gliedes eines bei einer Bestrahlung mit einem zeitlich konstanten Neutronenfluß gebildeten Radionuklids, wenn bei Beginn der Bestrahlung nur Kerne des Ausgangsnuklids vorlagen. Sie ist allgemein anwendbar und berücksichtigt sowohl radioaktiven Zerfall als auch Kernreaktionen aller Zwischenglieder.

Man muß bei der Anwendung der Gleichung den Reaktionsweg beachten, den man rechnerisch verfolgen will.

Die allgemeine Gleichung für das n-te Glied lautet:

$$N_{n(t_*)} = C_o e^{-\Lambda_o t_*} + C_1 e^{-\Lambda_1 t_*} + C_2 e^{-\Lambda_2 t_*} + \ldots C_n e^{-\Lambda_n t_*} \quad (60)$$

wobei

$$C_o = \frac{\Lambda_o^* \Lambda_1^* \Lambda_2^* \ldots \Lambda_{n-1}^*}{(\Lambda_1 - \Lambda_o)(\Lambda_2 - \Lambda_o) \ldots (\Lambda_n - \Lambda_o)} N_{o(t=0)}$$

$$C_1 = \frac{\Lambda_o^* \Lambda_1^* \Lambda_2^* \ldots \Lambda_{n-1}^*}{(\Lambda_o - \Lambda_1)(\Lambda_2 - \Lambda_1) \ldots (\Lambda_n - \Lambda_1)} N_{o(t=0)}$$

$$C_2 = \frac{\Lambda_o^* \Lambda_1^* \Lambda_2^* \ldots \Lambda_{n-1}^*}{(\Lambda_o - \Lambda_2)(\Lambda_1 - \Lambda_2) \ldots (\Lambda_n - \Lambda_2)} N_{o(t=0)}$$

usw.

$$C_n = \frac{\Lambda_o^* \Lambda_1^* \Lambda_2^* \ldots \Lambda_{n-1}^*}{(\Lambda_o - \Lambda_n)(\Lambda_1 - \Lambda_n) \ldots (\Lambda_{n-1} - \Lambda_n)} N_{o(t=0)}$$

hierin bedeuten:

Index o	=	Ausgangsnuklid
Index 1	=	1. Produkt
....		
Index n	=	n-tes Produkt
Λ^*	=	Zerfallswahrscheinlichkeit, die zu einem bestimmten Produkt führt. Für Λ^* ist daher je nachdem, welcher Reaktionsweg verfolgt werden soll, λ oder $\Phi\sigma$ einzusetzen.
Λ	=	Wahrscheinlichkeit der Abnahme eines Nuklids. Sie ist gleich der Summe der partiellen Übergangswahrscheinlichkeiten. Für Λ ist daher $\lambda + \Phi\sigma$ einzusetzen.

Für die Aktivität des n-ten Gliedes folgt:

$$A_{n(t_*)} = \Lambda_o^* \Lambda_1^* \Lambda_2^* \dots \Lambda_{n-1}^* N_{o(t=0)} \cdot \lambda_n \left[\frac{e^{-\Lambda_o t_*}}{(\Lambda_1 - \Lambda_o)(\Lambda_2 - \Lambda_o)\dots(\Lambda_n - \Lambda_o)} + \right.$$

$$\left. \frac{e^{-\Lambda_1 t_*}}{(\Lambda_o - \Lambda_1)(\Lambda_2 - \Lambda_1)\dots(\Lambda_n - \Lambda_1)} + \dots \frac{e^{-\Lambda_n t_*}}{(\Lambda_o - \Lambda_n)(\Lambda_1 - \Lambda_n)\dots(\Lambda_{n-1} - \Lambda_n)} \right] \tag{61}$$

Wird die Zahl der Ausgangskerne als konstant angenommen, so vereinfacht sich die Gleichung (61).

$$A_{n(t)} = \frac{\Lambda_o^* \Lambda_1^* \Lambda_2^* \dots \Lambda_{n-1}^*}{\Lambda_1 \Lambda_2 \dots \Lambda_n} N_{o(t=0)} \cdot \lambda_n \left[1 - \frac{e^{-\Lambda_1 t} \Lambda_2 \Lambda_3 \dots \Lambda_n}{(\Lambda_2 - \Lambda_1)(\Lambda_3 - \Lambda_1)\dots(\Lambda_n - \Lambda_1)} \right.$$

$$\left. \dots - \frac{e^{-\Lambda_n t} \Lambda_1 \Lambda_2 \dots \Lambda_{n-1}}{(\Lambda_1 - \Lambda_n)(\Lambda_2 - \Lambda_n)\dots(\Lambda_{n-1} - \Lambda_2)} \right] \tag{62}$$

Die Zahl der Kerne des n-ten Gliedes erhält man, in dem man beide Seiten der Gleichungen (61) und (62) durch λ_n dividiert.

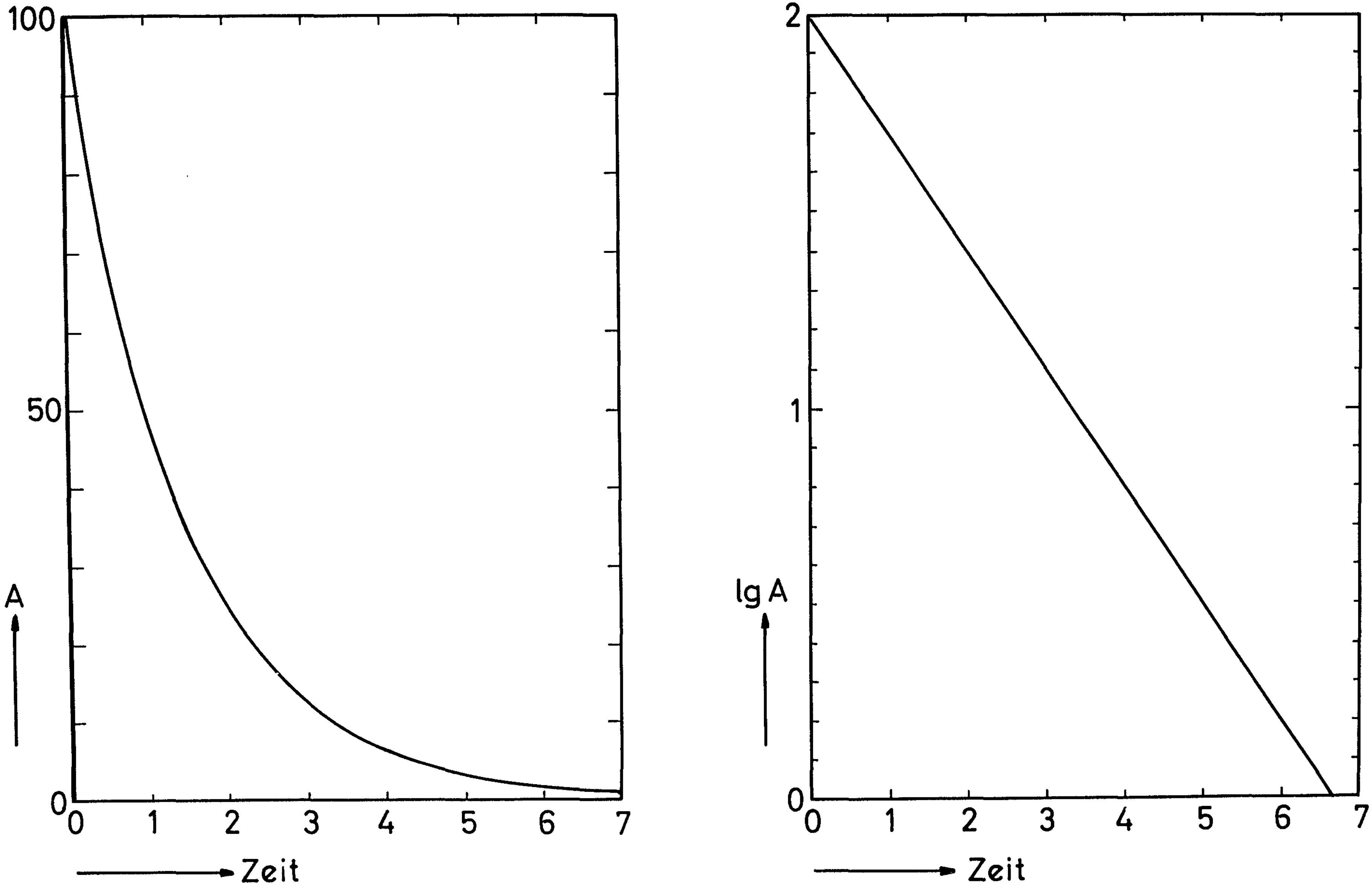

Abb.1 Grafische Darstellung eines Aktivitätsabfalls in linearem und halblogarithmischem Maßstab (Kapitel 1)

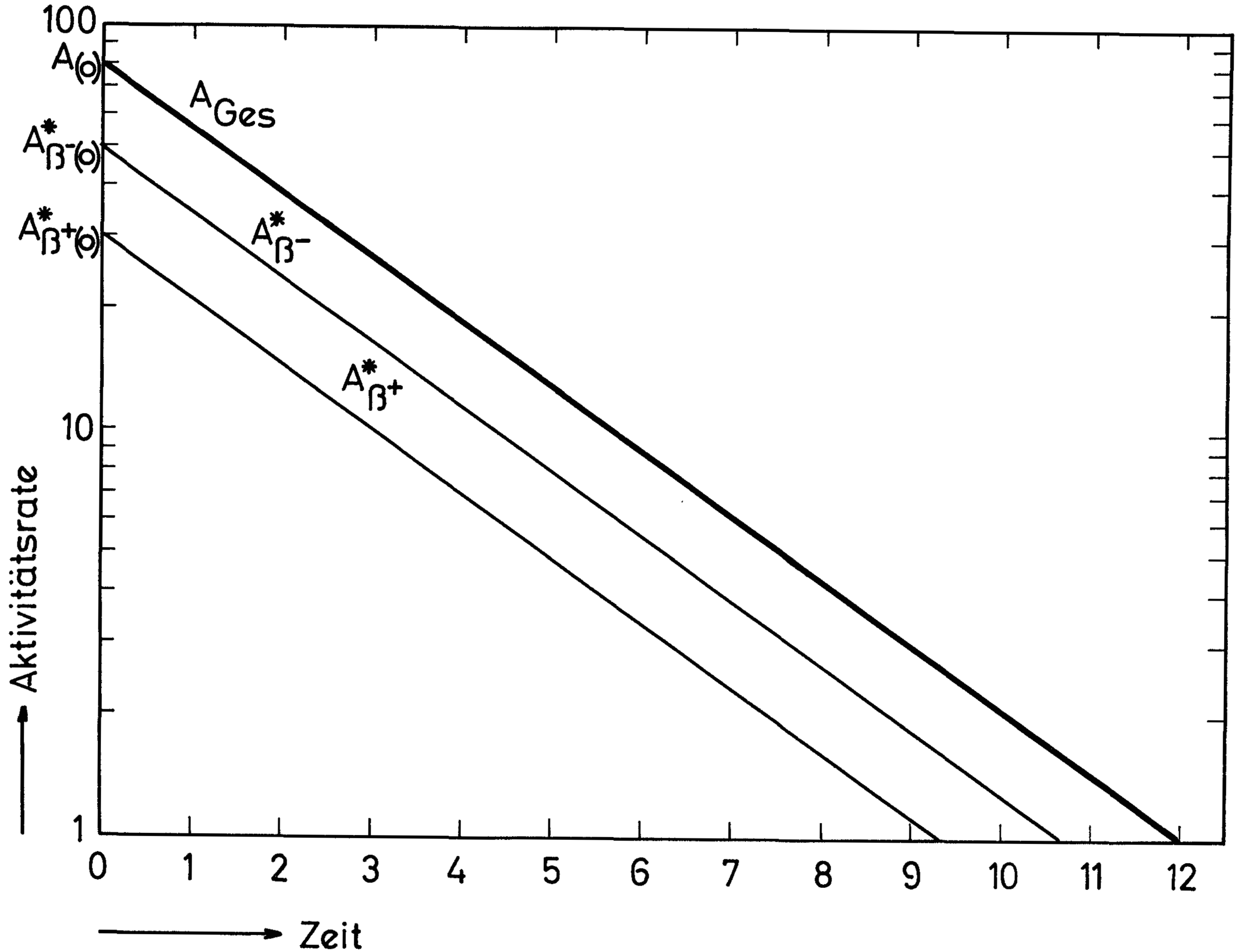

Abb.2 Aktivitätsverlauf eines Radionuklids, das sowohl Negatronen als auch Positronen emittiert (Kapitel 2)

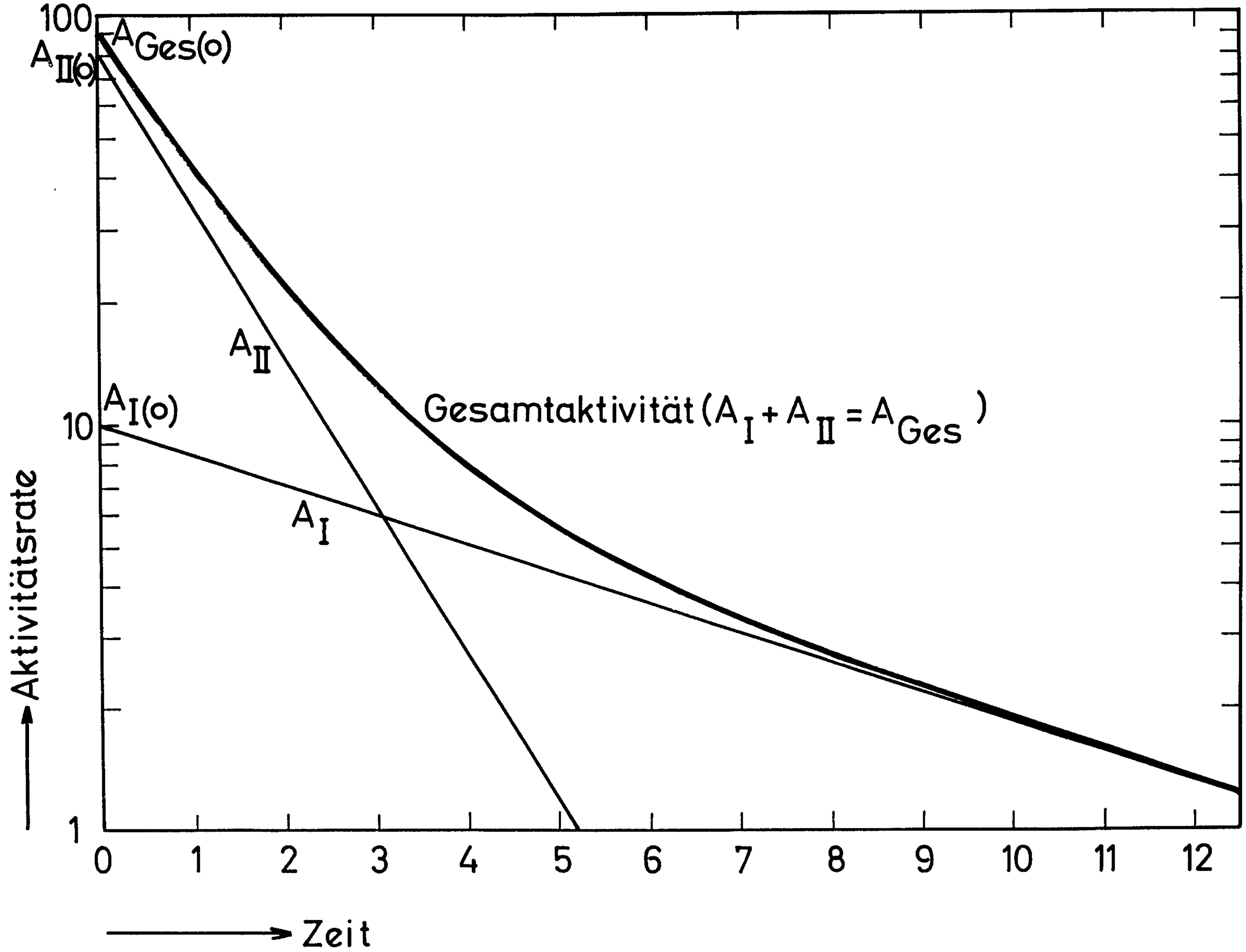

Abb. 3 Verlauf der Einzelaktivitäten zweier Radionuklide I und II, die nicht im genetischen Zusammenhang stehen (Kapitel 3)

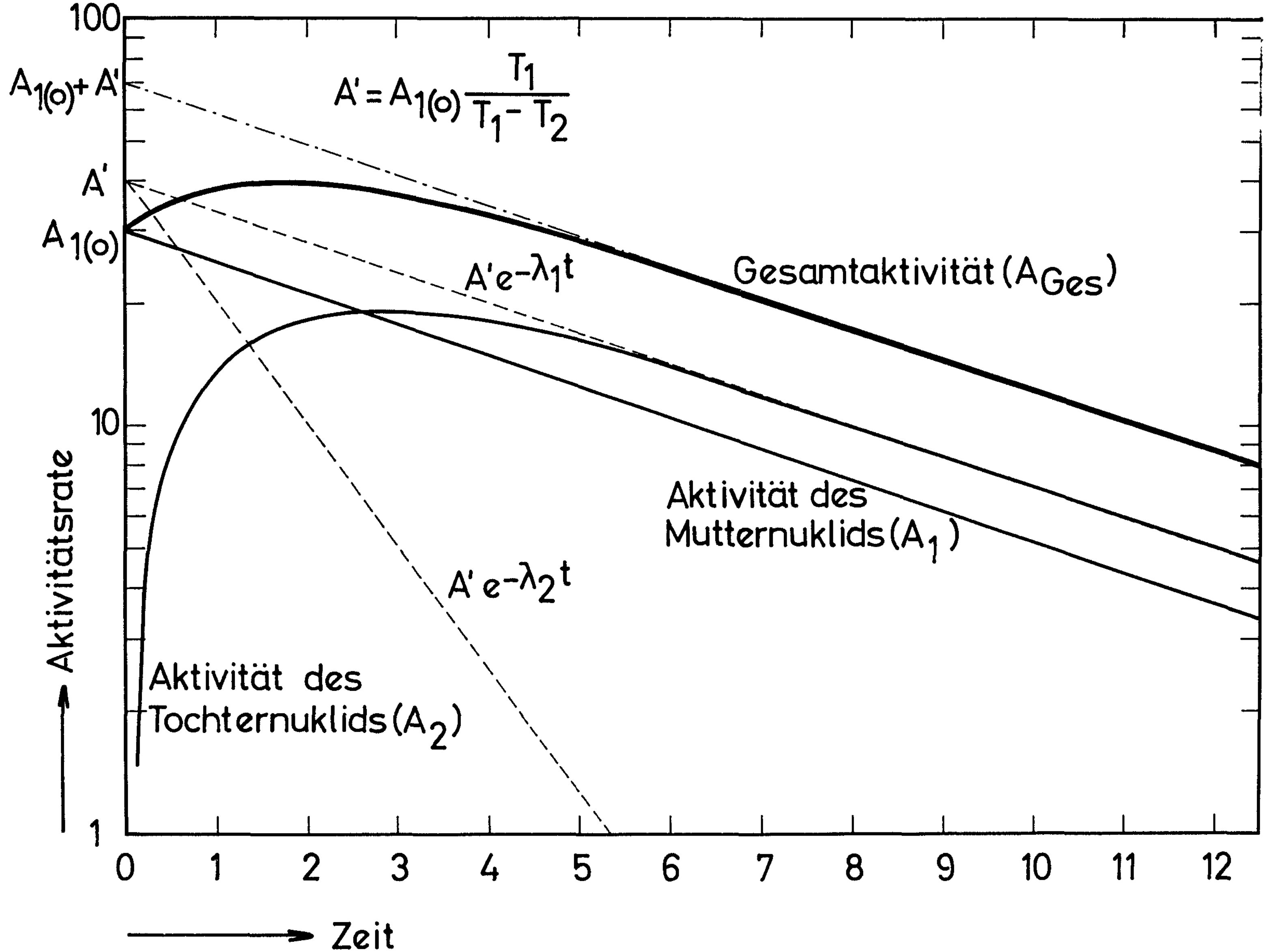

Abb.4 Aktivitätsverlauf eines Mutter-Tochter-Systems, bei dem die Halbwertszeit des Mutternuklids größer ist als die des Tochternuklids (Kapitel 4)

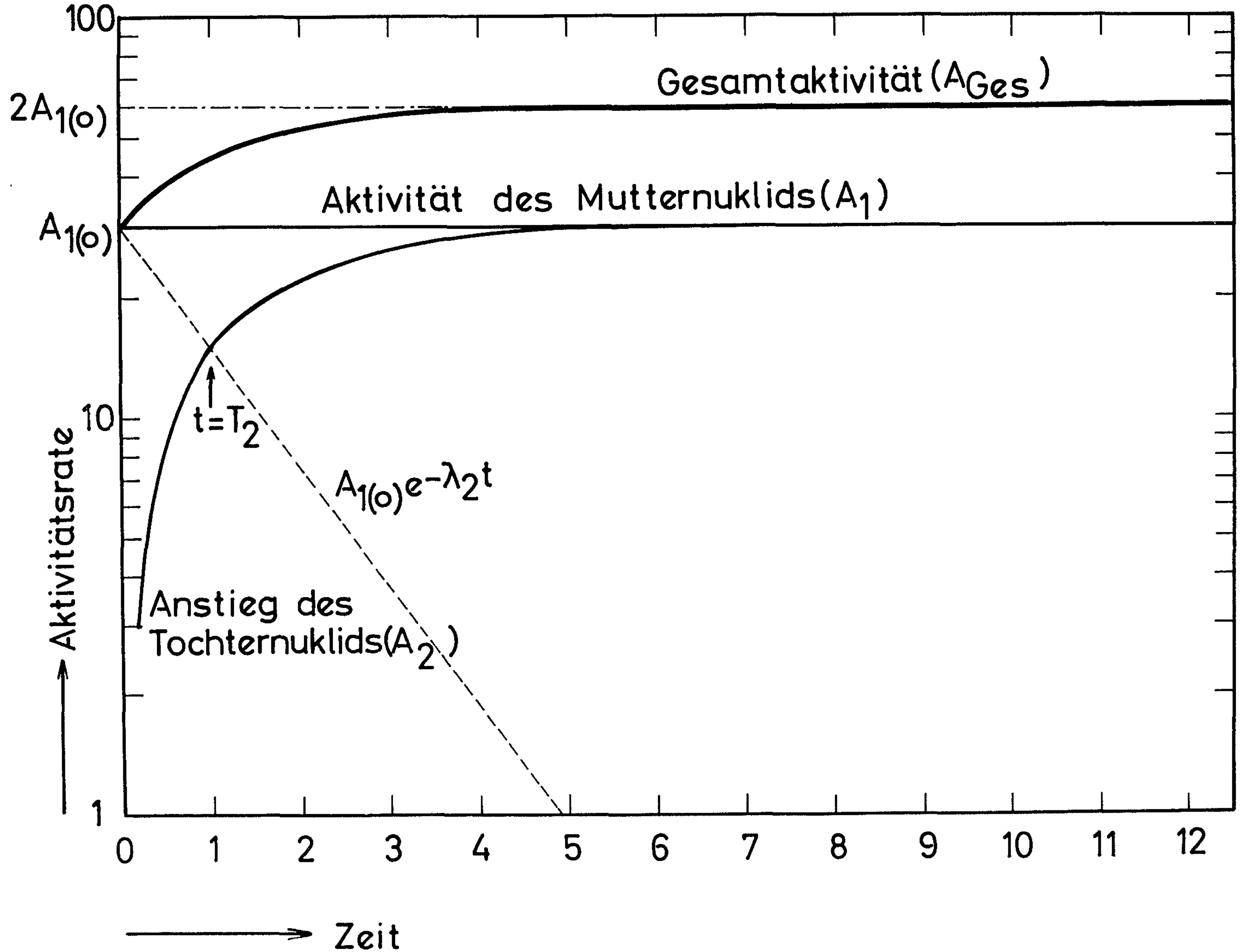

Abb.5 Aktivitätsverlauf eines Mutter-Tochter-Systems, bei dem die Halbwertszeit des Mutternuklids sehr viel größer ist als die des Tochternuklids (Kapitel 4.1)

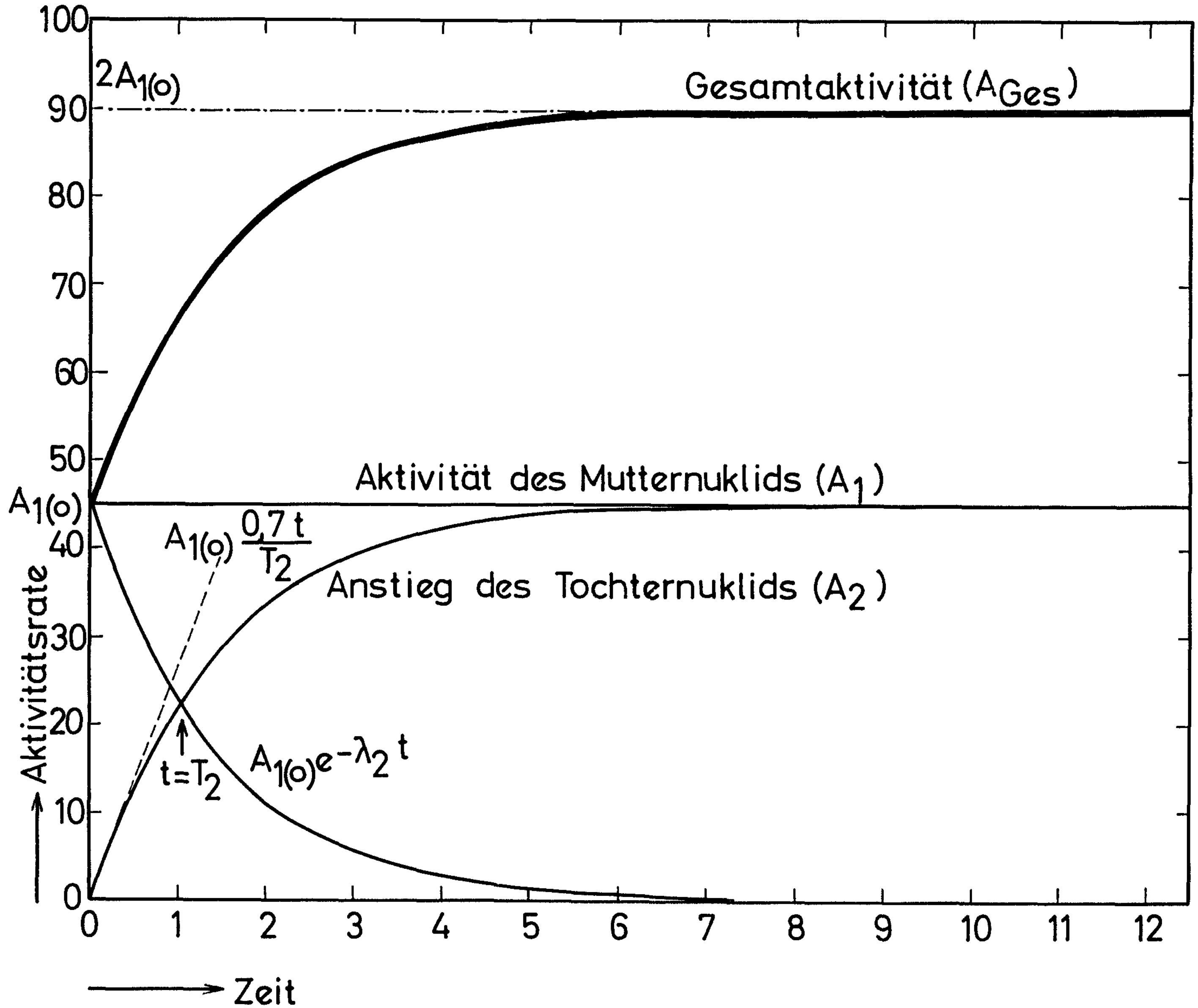

Abb. 6 Aktivitätsverlauf eines Mutter-Tochter-Systems, bei dem die Halbwertszeit des Mutternuklids sehr viel größer ist als die des Tochternuklids (linearer Maßstab) (Kapitel 4.1)

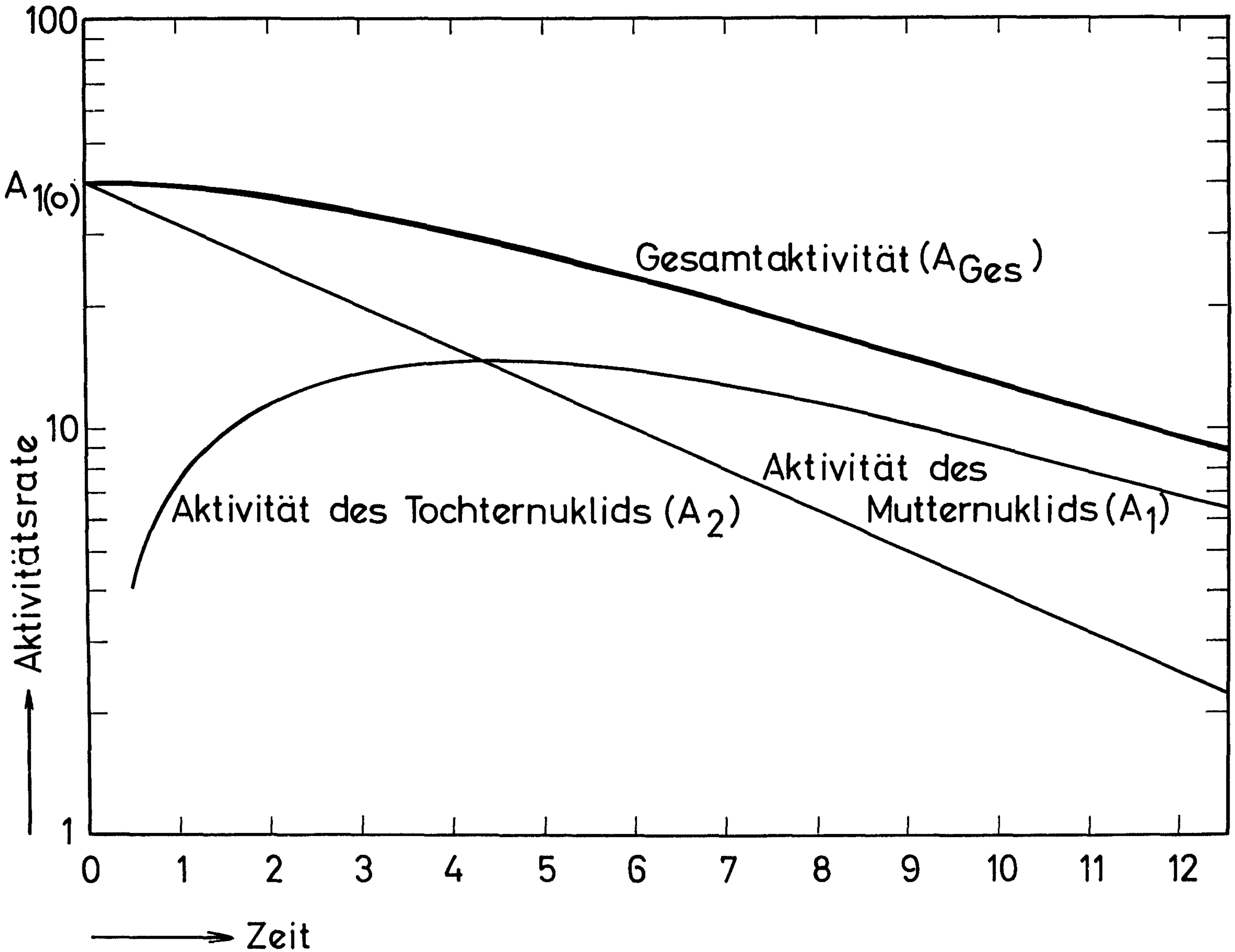

Abb. 7 Aktivitätsverlauf eines Mutter-Tochter-Systems, bei dem die Halbwertszeiten der beiden Nuklide ähnlich sind (Kapitel 4.3)

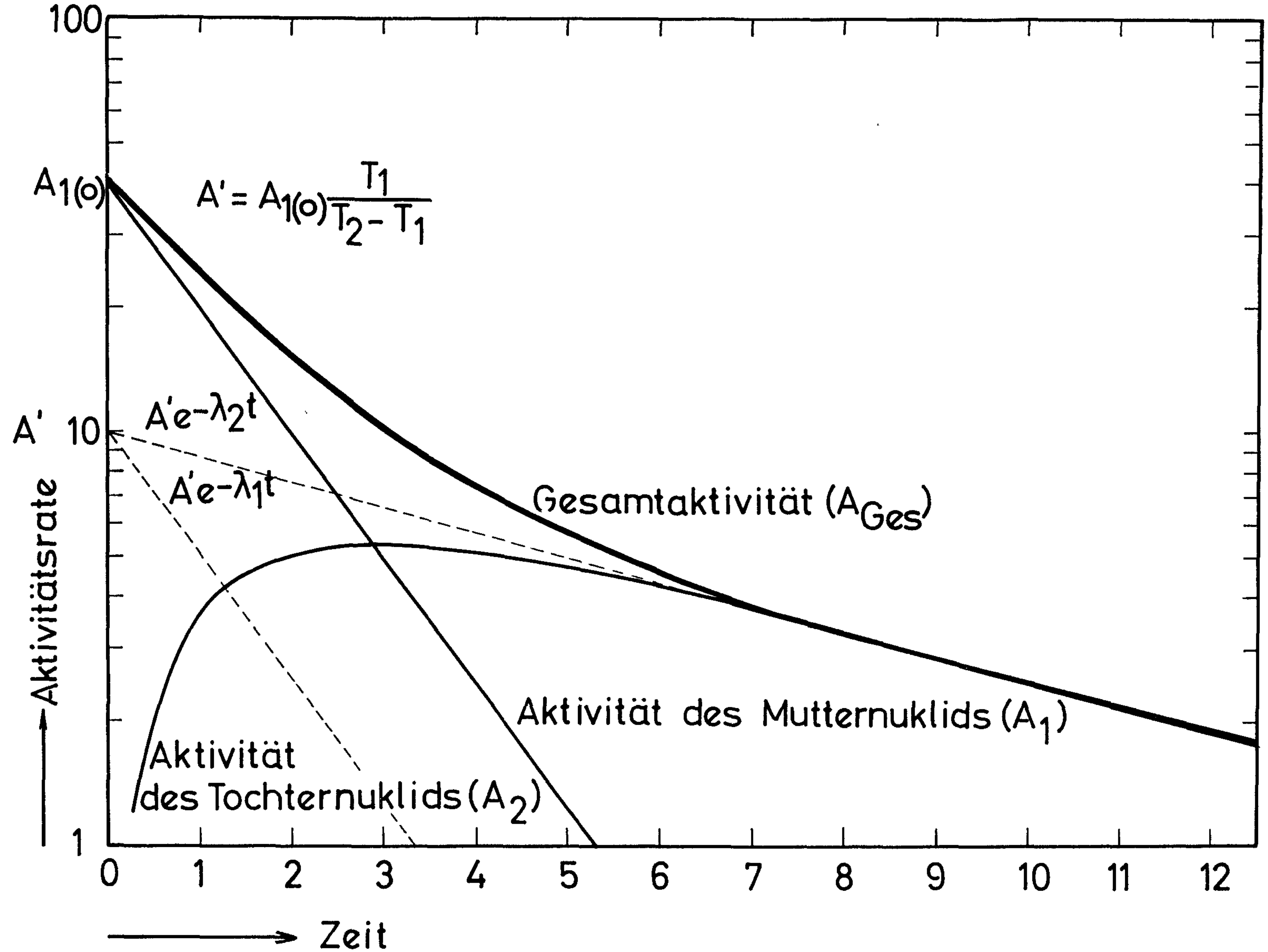

Abb. 8 Aktivitätsverlauf eines Mutter-Tochter-Systems, bei dem die Halbwertszeit des Mutternuklids kürzer ist als die des Tochternuklids (Kapitel 4.4)