Zur Realisierung eines einheitlichen globalen Höhendatums

Thomas Grombein und Kurt Seitz

Geodätisches Institut, Karlsruher Institut für Technologie
E-Mail: thomas.grombein@kit.edu, kurt.seitz@kit.edu

Zusammenfassung

Nationalen Höhensystemen liegt im Allgemeinen ein individuelles vertikales Datum zu Grunde, welches durch einen lokalen Meerespegel definiert ist. Global gesehen unterscheiden sich die Niveaus verschiedener Höhensysteme dadurch um ± 1–2 m. Bei vielen globalen geodätischen Aufgabenstellungen sowie bei der Bewertung globaler geodynamischer und klimatologischer Prozesse ist es allerdings erforderlich, sich auf ein einheitliches physikalisches Höhenniveau zu beziehen. Die Realisierung eines einheitlichen globalen Höhendatums ist hierfür von zentraler Bedeutung und erfordert die Ableitung von geeigneten Datumsparametern, mit denen eine Integration nationaler Höhensysteme in ein globales vertikales Datum ermöglicht wird. Vor dem Hintergrund dieser Höhendatumsproblematik werden in diesem Beitrag zwei Verfahren mit unterschiedlichem Genauigkeitsniveau vorgeschlagen und deren theoretischen Grundlagen präsentiert. Das erste Verfahren beruht auf einer satellitengestützten Höhenübertragung und kommt ohne terrestrische Punktschweremessungen aus. Es eignet sich daher vor allem für den Einsatz in Entwicklungs- und Schwellenländern mit geringer geodätischer Infrastruktur. Das zweite Verfahren basiert auf einem fixen geodätischen Randwertproblem (GRWP) und ermöglicht es durch die zusätzliche Einbeziehung von terrestrischen Schweremessungen eine hochgenaue Lösung zu erhalten.

1 Einleitung

Bei vertikalen Referenzsystemen muss grundsätzlich zwischen geometrisch und physikalisch definierten Höhensystemen unterschieden werden. Geometrische Höhen, die sich auf ein Referenzellipsoid beziehen, können mit GNSS-Verfahren (Global Navigation Satellite Systems) absolut und hochgenau gemessen werden. Hieraus abgeleitete dreidimensionale terrestrische Referenzsysteme erreichen Genauigkeiten im Subzentimeterbereich (z. B. ITRF2014, Altamimi u. a., 2016). Im Gegensatz hierzu basieren die meisten nationalen, physikalisch definierten Höhensysteme auf der relativen Höhenbestimmung mittels geometrischen Nivellements in Verbindung mit Schweremessungen.

Physikalischen Höhensystemen liegt i.d.R. ein individuelles vertikales Datum zu Grunde, welches traditionell durch den lokalen mittleren Meeresspiegel an einem Pegelbezugspunkt realisiert wurde. Bedingt durch Variationen der Meeresflächentopographie liegen diese Bezugspunkte nicht auf derselben Äquipotentialfläche, wodurch sich die so festgelegten Bezugsflächen nationaler Höhensysteme global gesehen um ca. ± 1–2 m unterscheiden (Heck, 1990). Die physikalischen Höhen verschiedener Länder sind somit inkonsistent und nicht direkt miteinander vergleichbar. Auf der einen Seite kann dies zu praktischen Problem bei regionalen Fragestellungen führen, wenn Höheninformationen von benachbarten Ländern verknüpft werden müssen, z. B. bei grenzübergreifenden Ingenieurprojekten. Auf der anderen Seite ist auch für die Überwachung des „Systems Erde“ und die damit verbundene Bewertung globaler geodynamischer und klimatologischer Prozesse wie dem Meeresspiegelanstieg ein weltweit ein-

Erschienen bei KIT Scientific Publishing
Schriftenreihe des Studiengangs
Geodäsie und Geoinformatik 2018,1

DOI Einzelbeitrag:
10.5445/KSP/1000080217

Festschrift zur Verabschiedung von
Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. Bernhard Heck
(Schw)Ehre, wem (Schw)Ehre gebührt

DOI Festschrift:
10.5445/KSP/1000080324

heitliches physikalisches Höhenniveau zwingend notwendig. Dies gilt auch für weitere globale geodätische Aufgabenstellungen wie dem Aufbau des Global Geodetic Observing System (GGOS, Kutterer und Neilan, 2016).

Zur Vereinheitlichung von Höhensystemen werden im Folgenden zwei Verfahren vorgeschlagen, die beide auf dem fundamentalen Zusammenhang

$$h = H + \zeta \tag{1.1}$$

zwischen ellipsoidischer Höhe h, Normalhöhe H und zugehöriger Höhenanomalie ζ basieren (siehe Heiskanen und Moritz, 1967, S. 291ff.).

Nachfolgend wird angenommen, dass die Erdoberfläche S in n lokale Datumszonen σ^i, $i = 1, \ldots, n$, unterteilt ist. Wird eine Normalhöhe H^i der Datumszone σ^i betrachtet, so kann der Höhenoffset δH^i dieser Zone durch die Diskrepanz der drei Größen berechnet werden

$$\delta H^i = h - H^i - \zeta, \tag{1.2}$$

wobei vorausgesetzt wird, dass h und ζ nicht vom Höhenoffset betroffen sind. Für die praktische Auswertung von Gl. (1.2) werden in jeder Datumszone GNSS/Nivellementpunkte (GNSS/Niv-Punkte) benötigt, d. h. Beobachtungspunkte $P_j^i \in \sigma^i$, $j = 1, \ldots, m_i$, in denen neben GNSS-basierten ellipsoidischen Höhen $h(P_j^i)$ auch die aus Nivellement und Schweremessungen abgeleiteten Normalhöhen $H^i(P_j^i)$ im lokalen Datum bekannt sind.

Für die Bestimmung der Höhenanomalie $\zeta(P_j^i)$ in Gl. (1.2) sind unabhängige Schwereinformationen notwendig. In Abhängigkeit von den Genauigkeitsanforderungen können diese z. B. aus einem globalen satellitenbasierten Geopotentialmodell (Kapitel 2) oder unter Einbeziehung von terrestrischen Schweremessungen aus der Lösung einer geodätischen Randwertaufgabe (Kapitel 3) abgeleitet werden.

2 Satellitengestütztes Verfahren

2.1 Grundlagen

Bei diesem ersten Verfahren wird die für Gl. (1.2) benötigte Höhenanomalie ζ aus den Kugelfunktionskoeffizienten eines Geopotentialmodells (GPM) bestimmt. Unter Verwendung geozentrisch sphärischer Koordinaten (r, φ, λ) erfolgt die Synthese eines GPM bis zu einem maximalen Entwicklungsgrad $n_{\max}$ durch

$$\zeta^{\mathrm{GPM}} = \frac{GM}{r\gamma} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \left(\frac{R}{r}\right)^n \times \sum_{m=0}^{n} \left(\Delta\overline{C}_{nm} \cos m\lambda + \Delta\overline{S}_{nm} \sin m\lambda\right) \overline{P}_{nm}(\sin\varphi)\,. \tag{2.1}$$

Hierbei ist GM die geozentrische Gravitationskonstante, R der Referenzradius und γ die Normalschwere am Oberflächenpunkt. Die zugeordneten Legendreschen Funktionen vom Grad n und Ordnung m sind mit $\overline{P}_{nm}$, die zugehörigen Koeffizienten nach Subtraktion eines Normalfeldes mit $\Delta\overline{C}_{nm}$ und $\Delta\overline{S}_{nm}$ bezeichnet.

Bei dieser Vorgehensweise eignen sich vor allem satellitenbasierte GPMs, welche aus Daten von Schwerefeldmissionen wie GOCE (Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer) abgeleitet sind. Diese GPMs liefern unabhängige und homogene Schwereinformationen, die nicht von den Diskrepanzen im vertikalen Datum betroffen sind (Rummel, 2002). Es ist allerdings zu beachten, dass durch die Messung in Satellitenhöhe und die begrenzte Messbandbreite des Instrumentariums die abgeleiteten GPMs eine eingeschränkte spektrale Auflösung aufweisen ($n_{\max}^{\mathrm{GOCE}} \leq 300$) und sich daher nur zur Darstellung langwelliger Signalanteile ζ^{LW} eignen.

Um Konsistenz zur vollen Spektralinformation der GNSS/Niv-Daten herzustellen, ist es notwendig die GPM-Information um fehlende mittel- und kurzwellige Signalanteile zu erweitern:

$$\zeta = \zeta^{\mathrm{LW}} + \zeta^{\mathrm{MW}} + \zeta^{\mathrm{KW}}, \tag{2.2}$$

wobei die mittelwelligen Anteile ζ^{MW} aus dem hochauflösenden Modell EGM2008 (Pavlis u. a., 2012) mit $n_{\max}^{\mathrm{EGM}} = 2190$ abgeleitet und die verbleibenden hochfrequenten Signale ζ^{KW} mittels Vorwärtsmodellierung aus digitalen Geländemodellen berechnet werden können. Um eine geeignete spektrale Erweiterung in Gl. (2.2) zu erreichen, müssen die Signalkomponenten unter Berücksichtigung ihrer jeweiligen Spektralinhalte sorgfältig miteinander kombiniert werden.

2.2 Kombination von GOCE-GPMs und EGM2008

Die spektralen Anteile eines GOCE-GPM und EGM2008 können durch eine Kombination ihrer jeweiligen Kugelfunktionskoeffizienten ($\overline{C}_{nm}^{\mathrm{GOCE}}, \overline{S}_{nm}^{\mathrm{GOCE}}$) und ($\overline{C}_{nm}^{\mathrm{EGM}}, \overline{S}_{nm}^{\mathrm{EGM}}$) miteinander verknüpft werden. Um einen glatten Übergang zwischen beiden Modellen zu erreichen, wird empfohlen hierzu eine Fensterfunktion zu verwenden, die durch einen zentralen Grad N, den sogenannten Kombinationsgrad, und die Fensterbreite dN zu parametrisierten ist.

Die kombinierten Koeffizienten ($\overline{C}_{nm}^{\mathrm{G/E}}, \overline{S}_{nm}^{\mathrm{G/E}}$) können dann durch eine (konvexe) Linearkombination berechnet werden:

$$\begin{Bmatrix} \overline{C}_{nm}^{\mathrm{G/E}} \\ \overline{S}_{nm}^{\mathrm{G/E}} \end{Bmatrix} = [1-w(n)] \begin{Bmatrix} \overline{C}_{nm}^{\mathrm{GOCE}} \\ \overline{S}_{nm}^{\mathrm{GOCE}} \end{Bmatrix} + w(n) \begin{Bmatrix} \overline{C}_{nm}^{\mathrm{EGM}} \\ \overline{S}_{nm}^{\mathrm{EGM}} \end{Bmatrix}, \tag{2.3}$$

wobei

$$w(n) = \begin{cases} 0, & 0 \leq n \leq N-dN, \\ f(n), & N-dN < n \leq N+dN \leq n_{\max}^{\mathrm{GOCE}}, \\ 1, & N+dN < n \leq n_{\max}^{\mathrm{EGM}}, \end{cases} \tag{2.4}$$

vom Grad n abhängende Gewichtsfaktoren sind und $f(n) \in (0,1)$ die verwendete Fensterfunktion ist, wie z. B. eine angepasste Hanning-Fensterfunktion:

$$f(n) = \frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{\pi(N-dN-n)}{2dN}\right)\right]. \tag{2.5}$$

Unter Verwendung der kombinierten Kugelfunktionskoeffizienten ($\overline{C}_{nm}^{\mathrm{G/E}}, \overline{S}_{nm}^{\mathrm{G/E}}$) für die Synthese in Gl. (2.1), ergibt sich die Höhenanomalie $\zeta^{\mathrm{G/E}}$, die zur Darstellung der lang- und mittelwelligen Signalanteile in Gl. (2.2) genutzt werden kann

$$\zeta^{\mathrm{LW}} + \zeta^{\mathrm{MW}} := \zeta^{\mathrm{G/E}}. \tag{2.6}$$

2.3 Topographische Schwerefeldsignale

Durch die Informationen von hochauflösenden digitalen Geländemodellen (DGMs) kann der Einfluss der topographischen Erdmassen auf das Schwerefeld mittels Vorwärtsmodellierung basierend auf dem Newton-Integral berechnet werden (Heiskanen und Moritz, 1967, S. 3). Im Folgenden wird hierfür eine Vorwärtsmodellierung im Ortsbereich basierend auf der Rock-Water-Ice (RWI)-Methode betrachtet (siehe Grombein u. a., 2014, 2016a). Die RWI-Methode ist durch eine Zerlegung der Erdtopographie in drei Schichten gekennzeichnet, die es erlaubt eine strenge, separate Modellierung der Gesteins-, Wasser-, und Eismassen mit individuellen Dichtewerten durchzuführen.

Für die Massendiskretisierung des Newton-Integrals wird dabei die von Heck und Seitz (2007) entwickelte und von Grombein u. a. (2013) optimierte Tesseroidmethode verwendet. Im Fall der Höhenanomalie ζ ergibt sich der gravitative Einfluss eines einzelnen homogenen Tesseroids mit einem Dichtewert ρ zu

$$\zeta^*(P) = \frac{G\rho}{\gamma} \int_{r_1}^{r_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{r'^2 \cos\varphi'}{\ell} \mathrm{d}r' \mathrm{d}\varphi' \mathrm{d}\lambda', \tag{2.7}$$

wobei G die Newtonsche Gravitationskonstante ist und ℓ den euklidischen Abstand zwischen dem Berechnungspunkt $P(r,\varphi,\lambda)$ und dem laufenden Integrationspunkt $Q(r',\varphi',\lambda')$ bezeichnet. Der gesamte topographische Effekt ergibt sich nach dem Superpositionsprinzip schließlich aus der Summe der Einflüsse der einzelnen Tesseroide der drei RWI-Schichten ($s = 1,2,3$):

$$\zeta^{\mathrm{Topo}} = \sum_{s=1}^{3} \sum \zeta^*. \tag{2.8}$$

Da die Höhenanomalie ζ^{Topo} in Gl. (2.8) zu allen spektralen Skalen des Schwerefeldes beiträgt, kann diese nicht direkt für die spektrale Erweiterung der GPM-Information verwendet werden, sondern muss zunächst in geeigneter Weise hochpassgefiltert werden. Für diesen Schritt wird meist die weitverbreitete RTM-Methode (Residual Terrain Modelling, Forsberg und Tscherning, 1997) verwendet. Bei dieser Methode wird bei der Vorwärtsmodellierung die Schwerewirkung einer residualen Topographie berechnet, die sich aus der Differenz zwischen einem hochauflösenden DGM und einem geglätteten Modell ergibt und welche daher nur noch langwellige Strukturen aufweist. Die zentrale Annahme, die hinter dieser Vorgehensweise steht, ist die spektrale Übereinstimmung von topographischen Höhen und abgeleiteten Schwerewerten, die allerdings nicht als allgemeingültig angesehen werden kann, siehe z. B. Hirt und Kuhn (2014).

Es wird daher vorgeschlagen, die aus Gl. (2.8) stammenden topographischen Effekte um konsistente Signalanteile ζ^{RWI} des topographischen Schwerefeldmodells RWI_TOPO_2015 (Grombein u. a., 2016a) zu reduzieren. Durch die Wahl eines geeigneten Entwicklungsgrades bei der Synthese können somit die bereits durch die GPM-Information modellierten lang- und mittelwelligen Signalanteile aus den ursprünglichen topographischen Effekten entfernt werden

$$\delta\zeta^{\mathrm{Topo}} = \zeta^{\mathrm{Topo}} - \zeta^{\mathrm{RWI}} =: \zeta^{\mathrm{KW}}. \tag{2.9}$$

Im Gegensatz zur RTM-Methode ermöglicht diese Herangehensweise eine direkte Hochpassfilterung im Schwerebereich.

2.4 Ausgleichungsansatz

Durch Einsetzen von Gl. (2.2) in Gl. (1.2) kann der Höhenoffset δH^i punktweise in jedem GNSS/Niv-Punkt P_j^i separat bestimmt werden. Bedingt durch Approximations- und Messfehler werden die so abgeleiteten Höhenoffsets regional mehr oder weniger stark streuen, so dass die Genauigkeit und Zuverlässigkeit durch eine Mittelwertbildung über einen größeren Bereich bzw. über die gesamte Datumszone gesteigert werden kann. Um zusätzlich systematische Fehler im Nivellementsnetz aufzufangen, wird der unbekannte Höhenoffset δH^i über einen 3-Parameter-Ausgleichungsansatz bestimmt.

Unter Verwendung von

$$\zeta^{\mathrm{GNSS/Niv}} = h - H', \tag{2.10}$$

ergibt sich für jeden GNSS/Niv-Punkt P_j^i, dargestellt in geographischen Koordinaten (B_j, L_j), die folgende Beobachtungsgleichung:

$$\begin{aligned} l_j^i &= \zeta^{\mathrm{GNSS/Niv}} - \zeta^{\mathrm{G/E}} - \delta\zeta^{\mathrm{Topo}}\Big|_{P_j^i} \\ &= \delta H^i + a^i \mathcal{B}_j^i + b^i \mathcal{L}_j^i \end{aligned} \tag{2.11}$$

mit

$$\mathcal{B}_j^i := B_j^i - B_0^i \;\text{ und }\; \mathcal{L}_j^i := (L_j^i - L_0^i)\cos B_j^i, \tag{2.12}$$

wobei δH^i der unbekannte Höhenoffset im Referenzpunkt (B_0, L_0) ist, und a^i und b^i die Neigungen des Nivellementsnetzes in Nord/Süd- bzw. Ost/West-Richtung darstellen.

Das auf Gl. (2.11) beruhende funktionale Modell kann durch

$$\vec{l} + \vec{v} = A\vec{x} \tag{2.13}$$

bzw.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} l_1^i + v_1^i \\ l_2^i + v_2^i \\ \vdots \\ l_{m_i}^i + v_{m_i}^i \end{pmatrix}}_{\vec{l}+\vec{v}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \mathcal{B}_1^i & \mathcal{L}_1^i \\ 1 & \mathcal{B}_2^i & \mathcal{L}_2^i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \mathcal{B}_{m_i}^i & \mathcal{L}_{m_i}^i \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \delta H^i \\ a^i \\ b^i \end{pmatrix}}_{\vec{x}} \tag{2.14}$$

angegeben werden, wobei $\vec{l}$ der Beobachtungsvektor, $\vec{v}$ der Spaltenvektor der Verbesserungen, A die Designmatrix und $\vec{x}$ der Vektor der Unbekannten ist. Durch Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate können schließlich der Höhenoffset und die Neigungen für jede Datumszone σ^i über

$$\vec{x} = \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} \cdot \vec{l} \tag{2.15}$$

geschätzt werden, wobei $\mathbf{N} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{A}$ die Normalgleichungsmatrix und $\mathbf{P}$ die Gewichtsmatrix ist, welche durch ein zusätzliches stochastisches Modell festgelegt werden kann.

3 Fixes geodätisches Randwertproblem

Während die abgeleiteten Höhenoffsets mit dem ersten Verfahren in einem cm–dm Genauigkeitsbereich liegen, wird die Genauigkeit beim zweiten Verfahren durch die zusätzlich Verwendung terrestrischer Schweremessungen weiter erhöht. Hierzu wird die in Gl. (1.2) benötigte Höhenanomalie ζ durch die Lösung eines geodätischen Randwertproblems (GRWP) in den GNSS/Niv-Punkten bestimmt. Im Gegensatz zu Studien basierend auf dem klassischen skalar-freien GRWP (Rummel und Teunissen, 1988; Gerlach und Rummel, 2013) wird hierbei eine alternative Methodik auf der Grundlage des fixen GRWP vorgeschlagen.

3.1 Grundlagen

In der modernen Formulierung des fixen GRWP werden Schwerestörungen

$$\delta g := g - \gamma(\varphi, h) \approx -\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_S \tag{3.1}$$

als Randwerte verwendet, die als Differenz zwischen gemessener Schwere g und Normalschwere $\gamma(\varphi, h)$ an der Erdoberfläche S definiert sind. Für die Berechnung der Normalschwere muss die ellipsoidische Höhe h der Punkte bekannt sein, z. B. durch den Einsatz von GNSS-Positionierungsverfahren.

In konstanter Radiusapproximation kann die analytische Lösung des fixen GRWP durch die sphärische Integralformel von Hotine angegeben werden (Hotine, 1969, S. 311ff.; Heck, 2011). Im Falle der Höhenanomalie ergibt sich

$$\zeta = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_\sigma \delta g \cdot \mathrm{H}(\psi)\, d\sigma, \tag{3.2}$$

wobei ψ die sphärische Distanz zwischen den Positionsvektoren des Berechnungs- und des laufenden Integrationspunktes auf der Kugel mit dem Radius R ist. Die Oberfläche der Einheitskugel ist mit σ, das zugehörige Oberflächenelement mit $d\sigma$ bezeichnet. Die unter dem Integral auftretende Kernfunktion $\mathrm{H}(\psi)$ wird Hotine-Funktion genannt und ergibt sich aus einer Reihenentwicklung nach Legendreschen Polynomen P_n:

$$\mathrm{H}(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n+1} P_n(\cos\psi). \tag{3.3}$$

3.2 Erweiterung auf Schwereanomalien

Die praktische Auswertung von Gl. (3.2) wird dadurch erschwert, dass für die meisten (historischen) Schweremesspunkte vor dem GNSS-Zeitalter keine ellipsoidische Höhe h bestimmt werden konnte und somit eine Berechnung von Schwerestörungen nach Gl. (3.1) nicht möglich ist. Stattdessen wurden meist Schwereanomalien (Heiskanen und Moritz, 1967, S. 291 ff.)

$$\Delta g := g - \gamma(\varphi, H) \approx \left.\left(-\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2\gamma}{r}\zeta\right)\right|_\Sigma \tag{3.4}$$

verwendet, wobei die Normalschwere $\gamma(\varphi, H)$ am Telluroid Σ in der Normalhöhe H ausgewertet wird. Bei Betrachtung einer lokalen Datumszone σ^i sind Schwereanomalien aufgrund der Abhängigkeit von der Normalhöhe H^i im lokalen Datum ebenfalls durch den Höhenoffset δH^i verfälscht (Heck, 1990; Heck und Seitz, 2017).

Durch Kombination der Randbedingungen in den Gl. (3.1) und (3.4) können Schwerestörungen δg in linearer Approximation als eine Funktion der Schwereanomalien Δg^i im lokalen Datum und des Höhenoffsets δH^i angegeben werden:

$$\delta g \approx \Delta g^i + \frac{2}{r} T + \frac{2\gamma}{r} \delta H^i, \tag{3.5}$$

wobei das zunächst unbekannte Störpotential T aus einem a priori Schwerefeldmodell zu berechnen ist.

3.3 Ausgleichungsansatz

Wie ausführlich in Grombein u. a. (2016b) dargelegt, führt die Kombination von Gl. (1.2), (3.2) und (3.5) schließlich zur Beobachtungsgleichung

$$\begin{aligned} l_j^i &= \zeta^{\text{GNSS/Niv}} - \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_\sigma \left(\Delta g^i + \frac{2}{R} T\right) \cdot \mathrm{H}(\psi)\, d\sigma \Bigg|_{P_j^i} \\ &= \delta H^i + a^i \mathcal{B}_j^i + b^i \mathcal{L}_j^i + \sum_{k=1}^{n} \delta H^k \cdot \mathrm{G}_j^{i,k} \end{aligned} \tag{3.6}$$

mit

$$\mathrm{G}_j^{i,k} := \frac{1}{2\pi} \iint_{\sigma^k} \mathrm{H}(\psi) d\sigma \Bigg|_{P_j^i}. \tag{3.7}$$

Hieraus ergibt sich das funktionale Modell zu

$$\vec{l} + \vec{v} = A\vec{x} \tag{3.8}$$

mit

$$l \vec{+} v = \begin{pmatrix} l_1^1 + v_1^1 & l_2^1 + v_2^1 & \cdots & l_1^2 + v_1^2 & \cdots & l_{m_n}^n + v_{m_n}^n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$A =$$

$$\begin{pmatrix} 1+\mathrm{G}_1^{1,1} & \mathcal{B}_1^1 & \mathcal{L}_1^1 & \mathrm{G}_1^{1,2} & 0 & 0 & \cdots & \mathrm{G}_1^{1,n} & 0 & 0 \\ 1+\mathrm{G}_2^{1,1} & \mathcal{B}_2^1 & \mathcal{L}_2^1 & \mathrm{G}_2^{1,2} & 0 & 0 & \cdots & \mathrm{G}_2^{1,n} & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \\ \mathrm{G}_1^{2,1} & 0 & 0 & 1+\mathrm{G}_1^{2,2} & \mathcal{B}_1^2 & \mathcal{L}_1^2 & \cdots & \mathrm{G}_1^{2,n} & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & & & \\ \mathrm{G}_{m_n}^{n,1} & 0 & 0 & \mathrm{G}_{m_n}^{n,2} & 0 & 0 & \cdots & 1+\mathrm{G}_{m_n}^{n,n} & \mathcal{B}_{m_n}^n & \mathcal{L}_{m_n}^n \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \delta H^1 & a^1 & b^1 & \delta H^2 & a^2 & b^2 & \cdots & \delta H^n & a^n & b^n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

wobei die Unbekannten wiederum aus einer Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate nach Gl. (2.15) bestimmt werden können.

Aufgrund der globalen Integration und der Abhängigkeiten durch die indirekten Höhenoffsets δH^k ist im Gegensatz zum ersten Verfahren zunächst keine separate Auswertung pro Datumszone möglich. Stattdessen müssen die Höhenoffsets aller Datumszonen gemeinsam geschätzt werden.

3.4 Einschränkung des globalen Integrationsbereiches

Für eine praktische Umsetzung das zweiten Verfahrens sind insbesondere hinsichtlich der eingeschränkten Verfügbarkeit von terrestrischen Schweremessungen weitere Anpassungen notwendig. Hierzu ist der globale Integrationsbereich ausgehend vom jeweiligen Berechnungspunkt auf eine innere Zone zu beschränken, innerhalb derer regional hochauflösende Schweredaten vorliegen.

Wie im Fall der Stokesschen Integralformel im skalarfreien GRWP nachgewiesen wurde, kann durch eine geeignete Modifikation der Kernfunktion im Bereich der inneren Zone der dabei entstehende Abbruchfehler minimiert werden. Hierbei gilt allgemein für eine Zielgröße F, Randwerte $f(\varphi,\lambda)$ und eine Kernfunktion $\mathrm{K}(\psi)$ mit einer Konstanten k:

$$\begin{aligned} F &= k \iint\limits_{\sigma} f(\varphi,\lambda) \cdot \mathrm{K}(\psi)\, d\sigma \\ &= k \int\limits_{\psi=0}^{\psi_{\max}} \int\limits_{\alpha=0}^{2\pi} f(\varphi,\lambda) \cdot \mathrm{K}(\psi)\, d\sigma + \delta F_{\mathrm{TE}}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

wobei (ψ,α) die auf den Berechnungspunkt bezogenen Polarkoordinaten sind, $\psi_{\max}$ ist die maximale sphärische Distanz der inneren Zone und δF_{TE} der durch die Beschränkung der Integration verursachte Abbruchfehler in der resultierenden Zielgröße F (Truncation Error). Ziel ist es den Einfluss des Abbruchfehlers soweit zu reduzieren, dass er entsprechend den Genauigkeitsanforderungen vernachlässigt werden kann.

Eine Möglichkeit um eine schnelle Konvergenz des Abbruchfehlers zu erreichen, ist die Forderung nach Stetigkeit (vgl. Jekeli, 1981). Betrachtet man den Abbruchfehler

$$\delta F_{\mathrm{TE}} = k \int\limits_{0}^{2\pi} \int\limits_{0}^{\pi} f(\varphi,\lambda) \cdot \Delta\mathrm{K}(\psi)\, d\sigma, \tag{3.10}$$

so weist der eingeführte Integralkern

$$\Delta\mathrm{K}(\psi) = \begin{cases} 0, & \psi \leq \psi_{\max}, \\ \mathrm{K}(\psi), & \psi > \psi_{\max}, \end{cases} \tag{3.11}$$

an der Stelle $\psi_{\max}$ im Allgemeinen eine Unstetigkeit auf, die durch die Bedingung $\mathrm{K}(\psi_{\max}) = 0$ behoben werden kann. Ausgehend von der ursprünglichen Kernfunktion $\mathrm{K}(\psi)$ ist es daher zweckmäßig, eine modifizierte Kernfunktion $\widetilde{\mathrm{K}}(\psi)$ zu verwenden, mit dem Ziel die Lage der ersten Nullstelle von $\mathrm{K}(\psi)$ an die Gebietsgröße der inneren Zone anzupassen.

Im Folgenden werden die drei deterministischen Modifikationsverfahren nach Meissl (Meissl, 1971), Wong und Gore (Wong und Gore, 1969) und Heck und Grüninger (Heck und Grüninger, 1987) betrachtet und für den Fall des fixen GRWP auf die Hotine-Funktion $\mathrm{H}(\psi)$ übertragen.

Bei der Modifikation nach Meissl wird der Wert der Kernfunktion am Integrationsradius $\psi_{\max}$ durch Subtraktion des konstanten Funktionswerts $\mathrm{H}(\psi_{\max})$ zu Null gesetzt:

$$\widetilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{M},\psi_{\max}}(\psi) = \begin{cases} \mathrm{H}(\psi) - \mathrm{H}(\psi = \psi_{\max}), & \psi \leq \psi_{\max}, \\ 0, & \psi > \psi_{\max}. \end{cases} \tag{3.12}$$

Hierdurch wird C^0-Stetigkeit der modifizierten Kernfunktion erreicht.

Ausgehend von der Reihendarstellung der Kernfunktion in Gl. (3.3) werden bei der Modifikation nach Wong und Gore die spektralen Anteile der Legendreschen Polynome bis zum Grad $\tau - 1$ entfernt

$$\widetilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{WG},\tau}(\psi) = \begin{cases} \mathrm{H}(\psi) - \sum\limits_{n=0}^{\tau-1} \frac{2n+1}{n+1} P_n(\cos\psi), & \psi \leq \psi_{\max}, \\ 0, & \psi > \psi_{\max}, \end{cases} \tag{3.13}$$

wodurch bei der Integration die langwelligen Anteile aus den Schweredaten herausgefiltert werden. Um C^0-Stetigkeit der modifizierten Kernfunktion zu erreichen, ist es sinnvoll den Integrationsradius $\psi_{\max}$ mit der ersten Nullstelle von $\widetilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{WG},\tau}(\psi)$ zu identifizieren.

Die Modifikation nach Heck und Grüninger beruht auf einer Kombination von Gl. (3.12) und (3.13). Der Integrationsradius $\psi_{\max}$ wird hier dem ersten Minimum von $\widetilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{WG},\tau}(\psi)$ gleichgesetzt, anschließend wird der Funktionswert an dieser Stelle subtrahiert:

$$\widetilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{HG},\tau^*}(\psi) = \begin{cases} \widetilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{WG},\tau^*}(\psi) - \widetilde{\mathrm{H}}_{\mathrm{WG},\tau^*}(\psi = \psi_{\max}), & \psi \leq \psi_{\max}, \\ 0, & \psi > \psi_{\max}. \end{cases} \tag{3.14}$$

Hierdurch wird C^1-Stetigkeit und somit eine weitere Glättung erreicht.

Als zusätzliche Maßnahme bei der Einschränkung des Integrationsradius empfiehlt sich die Einbeziehung von langwelligen GPM-Informationen im Rahmen eines Remove-Compute-Restore-Ansatzes (RCR, Forsberg, 1984). Hierdurch sollen insbesondere systematische Fehlereinflüsse bei der gravimetrischen Schwerefeldbestimmung reduziert werden. Im Remove-Step werden von den gemessenen Schwerestörungen δg zunächst synthetisierte Werte δg^{GPM} eines GPM abgezogen. Die resultierenden residualen Schwerestörungen werden im Compute-Step mittels Gl. (3.2) in Höhenanomalien feldtransformiert. Um die vollständige Höhenanomalie ζ zu erhalten, werden im Restore-Step durch erneute Auswertung des GPM schließlich wieder konsistente langwellige Anteile ζ^{GPM} hinzuaddiert.

Werden beide Maßnahmen zusammengefasst, so resultiert aus Gl. (3.2) schließlich

$$\zeta = \zeta^{\mathrm{GPM}} + \frac{R}{4\pi\gamma} \int_{\psi=0}^{\psi_{\max}} \int_{\alpha=0}^{2\pi} (\delta g - \delta g^{\mathrm{GPM}}) \cdot \widetilde{\mathrm{H}}(\psi)\, \mathrm{d}\sigma. \tag{3.15}$$

4 Zusammenfassung und Ausblick

Zur Realisierung eines einheitlichen globalen Höhendatums wurden in diesem Beitrag zwei Verfahren vorgeschlagen. Im ersten Verfahren werden aktuelle Geopotentialmodelle (GPMs) der GOCE-Satellitenmission, die ein globales einheitliches Bezugsniveau realisieren, zur Verknüpfung von Höhensystemen verwendet. Hierbei werden Höhenoffsets in einer Ausgleichung nach der Methode kleinster Quadrate durch den Vergleich von satellitenbasierten GPM-Informationen mit denen aus GNSS/Nivellementpunkten (GNSS/Niv-Punkte) geschätzt. Die eingeschränkte spektrale Auflösung der GPMs ist dabei zu erweitern, was in der Regel durch eine Kombination mit dem hochauflösenden Modell EGM2008 geschieht. Im Vergleich zu klassischen Vorgehensweisen wurden hierbei zwei wesentliche Optimierungen vorgestellt: (i) Spektrale Kombination von GOCE-GPMs und EGM2008 mittels einer Hanning-Fensterfunktion und (ii) Berücksichtigung von topographischen Effekten durch eine residuale Vorwärtsmodellierung basierend auf einer Hochpassfilterung im Schwerebereich.

Im Rahmen einer numerischen Studie wurde das erste Verfahren auf repräsentative Testgebiete in Deutschland, Österreich und Brasilien angewendet (siehe Grombein u. a., 2017b). Hierbei konnte gezeigt werden, dass die Berücksichtigung von hochfrequenten topographischen Effekten für die Schätzung von Höhenoffsets mit cm- bis dm-Genauigkeit sehr wichtig ist. Da das satellitenbasierte Verfahren ohne terrestrische Punktschweremessungen auskommt, eignet es sich vor allem für den Einsatz in Entwicklungs- und Schwellenländern mit geringer geodätischer Infrastruktur.

Für eine hochgenaue Höhenoffsetbestimmung, wurde in einem zweiten Verfahren eine neue, innovative Vorgehensweise basierend auf einem fixen geodätischen Randwertproblem (GRWP) vorgeschlagen. Hierzu wird das GRWP in den jeweiligen GNSS/Niv-Punkten gelöst und die Datumsparameter im Rahmen eines Ausgleichungsansatzes als Zusatzparameter geschätzt. Im Gegensatz zum ersten Verfahren sind hierzu terrestrische Schweremessungen als Datengrundlage erforderlich. Wie im Rahmen einer Closed-Loop-Simulation gezeigt werden konnte, ist mit diesem Verfahren eine mm-Genauigkeit für die zu schätzenden Höhenoffsets prinzipiell möglich (siehe Grombein u. a., 2016b).

Aufgrund der beschränkten Verfügbarkeit von hochgenauen terrestrischen Schweremessungen musste für die praktische Umsetzung des Verfahrens der globale Integrationsradius der Hotine-Integration allerdings stark eingeschränkt werden. Um den Einfluss des dabei entstehenden Abbruchfehlers zu reduzieren, wird vorgeschlagen eine geeignete Modifikation des Hotine-Integralkerns sowie die zusätzliche Einbindung eines GPM in einem Remove-Compute-Restore-Ansatz zu verwenden. Simulationen in Porz u. a. (2017) haben gezeigt, dass hierdurch für einen in der Praxis realistischen Integrationsradius von $\psi_{max} = 3^\circ$ der entstehende Abbruchfehler im Rahmen der Genauigkeitsanforderungen vernachlässigt werden kann. Aufbauend auf diesen Erkenntnissen wurde das zweite Verfahren auf einen zusammengestellten terrestrischen Schweredatensatz in Mitteleuropa zur Schätzung der Höhenoffsets von Deutschland, Österreich und der Schweiz angewendet und erste Ergebnisse in Grombein u. a. (2017a) vorgestellt.

Danksagung

Die Autoren bedanken sich bei der Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) für die finanzielle Unterstützung des Projektes „Methodische und numerische Untersuchungen zur Festlegung eines einheitlichen globalen vertikalen Datums“ unter den Fördernummern HE1433/20-1 und HE1433/20-2.

Literatur

Altamimi, Z., Rebischung, P., Métivier, L. und Collilieux, X. (2016): ITRF2014: A new release of the international terrestrial reference frame modeling nonlinear station motions. *Journal of Geophysical Research* 121(8):6109–6131. DOI: 10.1002/2016JB013098.

Forsberg, R. (1984): A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling. Report 355. Department of Geodetic Science und Surveying, The Ohio State University, Columbus, USA.

Forsberg, R. und Tscherning, C. C. (1997): Topographic effects in gravity field modelling for BVP. In: Sansò, F., und Rummel, R. (Hrsg.) Geodetic boundary value problems in view of the one centimeter geoid, *Lecture Notes in Earth Sciences*, vol. 65. Springer Berlin Heidelberg, S. 239–272. DOI: 10.1007/BFb0011707.

Gerlach, C. und Rummel, R. (2013): Global height system unification with GOCE: a simulation study on the indirect bias term in the GBVP approach. *Journal of Geodesy* 87(1):57–67. DOI: 10.1007/s00190-012-0579-y.

Grombein, T., Luo, X., Seitz, K. und Heck, B. (2014): A wavelet-based assessment of topographic-isostatic reductions for GOCE gravity gradients. *Surveys in Geophysics* 35(4):959–982. DOI: 10.1007/s10712-014-9283-1.

Grombein, T., Porz, L., Seitz, K. und Heck, B. (2017a): On the practical realization of the fixed GBVP approach for a unification of height systems in Central Europe. In: IAG-IASPEI Joint Scientific Assembly 2017. Kobe, Japan, 30. Juli–4. Aug. 2017.

Grombein, T., Seitz, K. und Heck, B. (2013): Optimized formulas for the gravitational field of a tesseroid. *Journal of Geodesy* 87(7):645–660. DOI: 10.1007/s00190-013-0636-1.

Grombein, T., Seitz, K. und Heck, B. (2016a): The Rock-Water-Ice topographic gravity field model RWI_TOPO_2015 and its comparison to a conventional rock-equivalent version. *Surveys in Geophysics* 37(5):937–976. DOI: 10.1007/s10712-016-9376-0.

Grombein, T., Seitz, K. und Heck, B. (2016b): Height system unification based on the fixed GBVP approach. In: Rizos, C., und Willis, P. (Hrsg.) IAG 150 years, *International Association of Geodesy Symposia*, vol. 143. Springer Berlin Heidelberg, S. 305–311. DOI: 10.1007/1345_2015_104.

Grombein, T., Seitz, K. und Heck, B. (2017b): On high-frequency topography-implied gravity signals for height system unification using GOCE-based global geopotential models. *Surveys in Geophysics* 38(2):443–477. DOI: 10.1007/s10712-016-9400-4.

Heck, B. (1990): An evaluation of some systematic error sources affecting terrestrial gravity anomalies. *Bulletin Géodésique* 64(1):88–108. DOI: 10.1007/BF02530617.

Heck, B. (2011): A Brovar-type solution of the fixed geodetic boundary-value problem. *Studia Geophysica et Geodætica* 55(3):441–454. DOI: 10.1007/s11200-011-0025-2.

Heck, B. und Grüninger, W. (1987): Modification of Stokes's integral formula by combining two classical approaches. In: Proceedings of the IAG General Assembly, XIX IUGG General Assembly. Vancouver, Canada, 9.–22. Aug. 1987. *International Association of Geodesy Symposia*. Bureau Central de l'IAG, Paris, S. 319–337.

Heck, B. und Seitz, K. (2007): A comparison of the tesseroid, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modelling. *Journal of Geodesy* 81(2):121–136. DOI: 10.1007/s00190-006-0094-0.

Heck, B. und Seitz, K. (2017): Molodenski – quo vadis? – Aktueller Stand und künftige Entwicklungen des Geodätischen Randwertproblems. In: Rummel, R. (Hrsg.) Erdmessung und Satellitengeodäsie: Handbuch der Geodäsie, *Springer Reference Naturwissenschaften*. Springer Berlin Heidelberg, S. 123–154. DOI: 10.1007/978-3-662-47100-5_14.

Heiskanen, W. A. und Moritz, H. (1967): Physical geodesy. W. H. Freeman & Co., San Francisco, USA.

Hirt, C. und Kuhn, M. (2014): Band-limited topographic mass distribution generates full-spectrum gravity field: gravity forward modeling in the spectral and spatial domains revisited. *Journal of Geophysical Research* 119(4):3646–3661. DOI: 10.1002/2013JB010900.

Hotine, M. (1969): Mathematical geodesy. ESSA Monograph 2, US Departement of Commerce, Washington, USA.

Jekeli, C. (1981): Modifying Stokes's function to reduce the error of geoid undulation computations. *Journal of Geophysical Research* 86(B8):6985–6990. DOI: 10.1029/JB086iB08p06985.

Kutterer, H. und Neilan, R. (2016): Global Geodetic Observing System (GGOS). *The Geodesists Handbook 2016, Journal of Geodesy* 90(10):1079–1094. DOI: 10.1007/s00190-016-0948-z.

Meissl, P. (1971): A study of covariance functions related to the Earth's disturbing potential. Report 151. Department of Geodetic Science und Surveying, The Ohio State University, Columbus, USA.

Pavlis, N. K., Holmes, S. A., Kenyon, S. C. und Factor, J. K. (2012): The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008. *Journal of Geophysical Research* 117:B04406. DOI: 10.1029/2011JB008916.

Porz, L., Grombein, T., Seitz, K., Heck, B. und Wenzel, F. (2017): Height system unification based on the Fixed Geodetic Boundary Value Problem with limited availability of gravity data. In: General Assembly of the European Geosciences Union 2017. Vienna, Austria, 23.–28. Apr. 2017. *Geophysical Research Abstracts*, vol. 19. EGU2017-15614.

Rummel, R. (2002): Global unification of height systems and GOCE. In: Sideris, M. G. (Hrsg.) Gravity, geoid and geodynamics 2000, GGG2000 IAG International Symposium. Banff, Alberta, Canada, 31. Juli–4. Aug. 2000. *International Association of Geodesy Symposia*, vol. 123. Springer Berlin Heidelberg, S. 13–20. DOI: 10.1007/978-3-662-04827-6_3.

Rummel, R. und Teunissen, P. (1988): Height datum definition, height datum connection and the role of the geodetic boundary value problem. *Bulletin Géodésique* 62(4):477–498. DOI: 10.1007/BF02520239.

Wong, L. und Gore, R. (1969): Accuracy of geoid heights from modified Stokes kernels. *Geophysical Journal International* 18(1):81–91. DOI: 10.1111/j.1365-246X.1969.tb00264.x.