

# Multisensornavigation auf Bayes'scher Grundlage – Stand, Anwendungen und Entwicklungen

**Reiner Jäger**

Hochschule Karlsruhe – University of Applied Sciences  
E-Mail: reiner.jaeger@web.de

## Zusammenfassung

Der Beitrag behandelt die Navigationszustandsschätzung und die damit einhergehende Steuerung von Navigationsobjekten (Bodies (b)) mittels verteilter GNSS/MEMS/MOEMS Sensorik sowie weiteren optischen Sensoren wie Laserscannern und Kameras. Anwendungen sind die Navigation und Steuerung von Boden-, Wasser- und Luftfahrzeugen (u. a. autonomes Fahren und Fliegen). Darüber hinaus zu nennen sind mobile Geodatenerfassung und GIS sowie das Smartphone als Body (b) zur nahtlosen Out- und Indoornavigation von Personen. Im aktuellen Fokus stehen auch die Entwicklungen von Mappingsystemen zur automatisierten Erstellung von 3D-Modellen von Infrastrukturen und Gebäuden.

Eingangs wird die im FuE-(Forschungs- und Entwicklungs-)Projekt NAVKA (NAVKA, 2018) seit 2010 vorangetriebene moderne Multisensor-Multiplattform Navigation in allgemeiner Leverarmverortung der Sensoren vorgestellt. Es folgt die Darstellung des Navigationszustandsvektors als ereignisbasierte Markov-Kette der auf einen Ausgangszustand folgenden Messungen und Steuerungsmaßnahmen. Die Markov-Kette wird in einen alle parametrische und stochastische Information subsumierenden Bayes'schen Ansatz als Ausgangspunkt der Navigationszustandsschätzung überführt. Die Bayes'sche Ausgangsbasis erlaubt die Integration der auf physikalischen Grundannahmen zum Bewegungsmodell sowie auf diskrete Steuerungen basierten Transitionsleichungen aufeinanderfolgender Navigationszustände (Chapman-Kolmogorov-Gleichung). Einhergehend mit zwei Annahmen zu Markov-Prozessen 1. Ordnung wird die finale Bayes-basierte a-posteriori Dichtefunktion zur Navigationszustandsschätzung aus obigen Komponenten dargestellt. Mit diesem Ausgangspunkt können nun unterschiedliche Zustandsschätzungen (Kalman-Filter (KF), Extended Kalman-Filter (EKF), Robustes KF/EKF, Partikel-Filter, SLAM) hergeleitet werden. Die Bayes'sche Grundlage liefert damit den gemeinsamen Nenner bzw. die Wurzel für die in verschiedenen Disziplinen (Robotik, Mechatronik, Luft- und Raumfahrt, Geodäsie, u. a.) und Anwendungen in unterschiedlichen Verzweigungen verfolgten mathematischen Modelle und Algorithmen zur Zustandsschätzung und Steuerung der o. g. Multisensor-Multiplattform-Navigationssysteme.

## 1 Aktuelle Themen der Multisensornavigation

Die multisensorielle Navigation unterschiedlicher Objekte - in der Navigation als Bodys (b) bezeichnet - mittels GNSS, MEMS (Gyroskope, Beschleunigungssensoren, Magnetometer, Inklinometer, Barometer), MO-

EMS (z. B. miniaturisierte plenoptische Kameras) sowie weiteren ebenfalls direkt auf dem jeweiligen Body (b) als Einzelsensoren (s) oder in kompakten Sensorplattformen (p) verteilten optischen Sensoren (Mono-, Stereokameras, Laserscanner) gewinnt in der geodä-

Erschienen bei KIT Scientific Publishing  
Schriftenreihe des Studiengangs  
Geodäsie und Geoinformatik 2018,1

DOI Einzelbeitrag:  
10.5445/KSP/1000080221

Festschrift zur Verabschiedung von  
Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. Bernhard Heck  
(Schw)Ehre, wem (Schw)Ehre gebührt

DOI Festschrift:  
10.5445/KSP/1000080324



Dieses Werk ist lizenziert unter einer  
Creative Commons Namensnennung  
- Weitergabe unter gleichen Bedin-  
gungen 4.0 International Lizenz (CC BY-SA 4.0): [https://  
creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.en](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.en)

tischen Forschung und Entwicklung an Hochschulen und in der Industrie zunehmend an Bedeutung. Im Fokus stehen Entwicklungen zur Navigation und Steuerung von Boden-, Wasser- und Luftfahrzeugen, z. B. für autonomes Fahren und Fliegen. Darüber sind als FuE-Gegenstände die mobile Geodatenerfassung und mobiles GIS sowie das Smartphone als Body (b) zur nahtlosen Out- und Indoornavigation von Personen zu nennen. Aktuell im Fokus von FuE steht schließlich die Entwicklung geodätischer Messsysteme zum automatisierten 3D-Out-/Indoor-Mapping von Infrastrukturen und Gebäuden (Abb. 5.1), die unter Aspekten der Wirtschaftlichkeit die wesentliche Voraussetzung für deren flächendeckende Nutzbarmachung zur nahtlosen Out- und Indoor-Navigation im Smart-City-Kontext sind. Darüber hinaus sind diese 3D-Mappingsysteme mit BIM (Building Information Modelling) einer der Motoren bzw. eine essentielle Komponente auf dem Weg zur Digitalisierung und Industrie 4.0 im Bauwesen zur Gebäudeerfassung und -Monitoring im Lebenszyklus von BIM Infrastrukturen.

## 2 Allgemeine Vorbetrachtungen

Der multisensorielle, fortlaufend zu bestimmende Navigationszustandsvektor  $\mathbf{y}_t$

$$\mathbf{y}_t = \left( x^e y^e z^e | \dot{x}^e \dot{y}^e \dot{z}^e | \ddot{x}^e \ddot{y}^e \ddot{z}^e | r^e p^e y^e | \omega_{eb,x}^b \omega_{eb,y}^b \omega_{eb,z}^b | \dot{\omega}_{eb,x}^b \dot{\omega}_{eb,y}^b \dot{\omega}_{eb,z}^b \right)^T \quad (2.1)$$

umfasst im erdfesten Rahmen (e) die 18 3D-Parameter der Position, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Orientierung (roll, pitch, yaw), Drehraten und Drehratenänderungen des Body (b). In der Praxis der Multisensor(s)-Multiplattform(p)-Navigation, wie sie im Rahmen des o. g. FuE-Projekts NAVKA (NAVKA, 2018) algorithmisch und softwaremäßig konsequent umgesetzt wurde, sind die einzelnen Sensoren  $s(i, j)$  mit bis zu elf sog. Sensor-Leverarmparametern  $\mathbf{sl}(i, j)$  auf dem zu navigierenden Body (b) zu „verorten“. Dabei handelt es sich um die drei Koordinaten des Translationsvektors  $\mathbf{t}_{p_j}^b$  der  $j$ -ten Plattform  $p_j$  im Body-Frame (b), die drei Parameter der Rotationsmatrix  $\mathbf{R}_{p_j}^b$  der  $j$ -ten Plattform  $p_j$  gegenüber dem Body-Frame (b), die drei Translationsparameter  $\mathbf{t}_{s_{ij}}^{p_j}$  des  $i$ -ten Sensors  $s_{ij}$  gegenüber dem Koordinatenursprung der  $j$ -ten Platt-

form  $p_j$  sowie die beiden Parameter  $(\alpha, \delta)_{s_{ij}}$  zur Orientierung des  $i$ -ten Sensors  $s_{ij}$  auf der  $j$ -ten Plattform  $p_j$ . Mit (2.2) wird die zentrale Verortungsbeziehung zur Reparametrisierung des bei der Entwicklung der individuellen Sensorbeobachtungsgleichungen  $l(i, j)$  erstinstanzlich auftretenden Sensororts  $\mathbf{x}_{s_{ij}}^e$  durch die Parameter  $\mathbf{x}_b^e$  und  $(r, p, y)$  des einheitlichen Body (b) Navigationszustandsvektors  $\mathbf{y}_t$  (2.1) und dem dortigen Anteil von neun der elf Leverarmparametern  $\mathbf{sl}(i, j)$  wiedergegeben

$$\mathbf{x}_{s_{ij}}^e = \mathbf{x}_b^e + \mathbf{R}_b^e(r, p, y) \cdot \left[ \mathbf{t}_{p_j}^b + \mathbf{R}_{p_j}^b \cdot \mathbf{t}_{s_{ij}}^{p_j} \right]. \quad (2.2)$$

Grundsätzlich hängen die zeitlich dynamischen Sensorbeobachtungen  $l(i, j)_t$  damit sowohl vom dynamischen globalen Bodyzustandsvektor  $\mathbf{y}_t$  (2.1) und den insgesamt elf statischen Leverarmparametern  $\mathbf{sl}(i, j)$  ab (Jäger u. a., 2012; Jäger, 2014). Es gilt damit:

$$l(i, j)_t = l(\mathbf{y}_t, \mathbf{sl}(i, j))_t. \quad (2.3)$$

Als erster wesentlicher stochastischer Bestandteil der fortlaufenden Zustandsschätzung von  $\mathbf{y}_t$  (2.1) dienen als Standardinformationsquelle die Beobachtungen  $l(i, j)_t$  aus Gl. (2.3), die im Weiteren mit  $\mathbf{l}_t$  zum Vektor aller Sensorbeobachtungen zum Zeitpunkt  $t$  zusammengefasst werden. Weitere hinzutretende stochastische Komponenten sind die Steuerungsmaßnahmen  $\mathbf{u}_t$ . Darunter subsumieren auch systemspezifische interne oder externe sonstige Einflussgrößen  $\mathbf{s}_t$  (3.15), die der Übersichtlichkeit aber im Moment nicht separat mitgeführt werden. Insgesamt bedingen die dem Ausgangszustand  $\mathbf{y}_0$  - in zeitlich aufeinanderfolgende Verkettung - folgenden o. g. stochastischen Ereignisse

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{0:t} &= (\mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_{t-1}, \mathbf{l}_t, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{t-1}, \mathbf{u}_t) \\ &= (\mathbf{l}_{0:t}, \mathbf{u}_{0:t}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

zum Zeitpunkt  $t$  den Systemzustand  $\mathbf{y}_t$  (2.1). Damit gilt für  $\mathbf{y}_t$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_t &= \mathbf{y}_t(\mathbf{l}_0, \mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_{t-1}, \mathbf{l}_t, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{t-1}, \mathbf{u}_t) \\ &= \mathbf{y}_t(\mathbf{l}_{0:t}, \mathbf{u}_{0:t}). \end{aligned} \quad (2.5)$$

### 3 Bayes basierte Multisensornavigation und Steuerung

Dieses Kapitel widmet sich der rekursiven Parameterschätzung des Navigationszustandsvektors  $\mathbf{y}_t$ , im Englischen „Navigation State Space Vector“. Um die komplette stochastische Information (Erwartungswerte und Varianzen) der Zustandsgrößen ausschöpfen bzw. erhalten zu können, wird die Verknüpfung (2.5) im weitreichenden mathematischen Modell auf Bayes'scher Grundlage beschrieben. Der wahrscheinliche Zustandsvektor bzw. dessen Wahrscheinlichkeitsdichte - aus dem Englischen „Belief“ („Überzeugungszustand“) als  $bel(\mathbf{y}_t)$  auch in die deutschsprachige Literatur (Herzberg u. a., 2012) übernommen - definiert sich damit über die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_0, \mathbf{l}_{0:t}, \mathbf{u}_{0:t})$  als

$$bel(\mathbf{y}_t) = p(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_0, \mathbf{l}_{0:t}, \mathbf{u}_{0:t}). \quad (3.1)$$

O. B. d. A können in Gl. (3.1) auch weitere Typen von inneren oder äußeren Systemeinflüssen  $\mathbf{s}_{0:t}$  den Termen  $\mathbf{u}_{0:t}$  bzw. den einzelnen Stellgrößenvektoren  $\mathbf{u}_t$  hinzugefügt werden. Unter Anwendung der Bayes'schen Regel (Koch, 2007; Köhler, 2005; Thrun u. a., 2006; Herzberg u. a., 2012) auf Gleichung (3.1) lässt sich die bedingte Wahrscheinlichkeit  $bel(\mathbf{y}_t)$  bzw. deren Wahrscheinlichkeitsdichte<sup>1</sup> mit der nachfolgenden Aufspaltung von  $\mathbf{e}_{0:t}$  weiter umformen. Es gilt:

$$\begin{aligned} bel(\mathbf{y}_t) &= p(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_0, \mathbf{l}_{0:t}, \mathbf{u}_{0:t}) \\ &= p(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_0, \mathbf{l}_{0:t-1}, \mathbf{l}_t, \mathbf{u}_{0:t-1}, \mathbf{u}_t) \\ &= p(\mathbf{l}_t|\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_0, \mathbf{l}_{0:t-1}, \mathbf{u}_{0:t-1}, \mathbf{u}_t) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{p(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_0, \mathbf{l}_{0:t-1}, \mathbf{u}_{0:t-1}, \mathbf{u}_t)}{p(\mathbf{l}_t|\mathbf{y}_0, \mathbf{l}_{0:t-1}, \mathbf{u}_{0:t-1}, \mathbf{u}_t)}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Mit der vom zu schätzenden Systemzustand  $\mathbf{y}_t$  unabhängigen Dichtefunktion im Nenner von (3.2) kann deren Kehrwert als Normierungsfaktor

$$\eta = p(\mathbf{l}_t|\mathbf{y}_0, \mathbf{l}_{0:t-1}, \mathbf{u}_{0:t-1}, \mathbf{u}_t)^{-1}$$

vorgezogen werden. Für die sukzessive auf den Ausgangszustand  $\mathbf{y}_0$  wirkenden stochastischen Ereignisse  $\mathbf{e}_{0:t}$  (siehe Gln. (2.4), (2.5)) ergibt sich damit nach Bayes

$$\begin{aligned} bel(\mathbf{y}_t) &= p(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_0, \mathbf{l}_{0:t}, \mathbf{u}_{0:t}) \\ &= \eta \cdot p(\mathbf{l}_t|\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_0, \mathbf{l}_{0:t-1}, \mathbf{u}_{0:t-1}, \mathbf{u}_t) \cdot \\ &\quad \cdot p(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_0, \mathbf{l}_{0:t-1}, \mathbf{u}_{0:t-1}, \mathbf{u}_t). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Mit einer ersten Markov-Annahme - dem Postulat von (3.1), (3.2) und (3.3) als Markov-Kette 1. Ordnung bzgl.  $\mathbf{l}_t$  - wird festgelegt, dass die Beobachtungen  $\mathbf{l}_t$  zum Systemzustand zum aktuellen Zeitpunkt  $t$  allein durch den aktuellen Zustand  $\mathbf{y}_t$  zu beschreiben sind. Damit reduziert sich die Kette der stochastischen Variablen in  $p(\mathbf{l}_t|\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_0, \mathbf{l}_{0:t-1}, \mathbf{u}_{0:t-1}, \mathbf{u}_t)$  und Gleichung (3.3) geht über in die

#### 1. Markov-Annahme

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_0, \mathbf{l}_{0:t}, \mathbf{u}_{0:t}) \\ = \eta \cdot p(\mathbf{l}_t|\mathbf{y}_t) \cdot p(\mathbf{y}_t|\mathbf{y}_0, \mathbf{l}_{0:t-1}, \mathbf{u}_{0:t-1}, \mathbf{u}_t). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Die in der Zustandsbeschreibung und Zustandsschätzung übliche Standardinformationsquelle - die sog. Transitionsleichungen (3.15) - treten in allen obigen Gleichungen (3.4) noch nicht auf. Um nun aber, über die fortlaufenden Messungen  $\mathbf{l}_t$  hinaus, diese i. d. R. vorliegende, weitere Informationsquelle zur Beschreibung des Systemzustandverhaltens ausschöpfen zu können, wird der letzte zweite Term auf der rechten Seite von Gleichung (3.4) unter äquivalenter Umformung entsprechend erweitert. Dies geschieht auf der Grundlage der allgemeinen Beziehung

$$p(\mathbf{x}) = \int p(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \cdot d\mathbf{x}'$$

zwischen der gemeinsamen Verbunddichte  $p(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$  und der einzelnen Randdichte  $p(\mathbf{x})$  zweier Zufallsvariablen  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{x}'$ . Unter entsprechender Anwendung auf den dritten Term in (3.4) erhalten wir mit dieser Erweiterung um  $\mathbf{y}_{t-1}$  die

<sup>1</sup>Die Bayes Beziehungen können äquivalent sowohl für bedingte Wahrscheinlichkeiten  $P$  (i. a. als Großbuchstabe) von Ereignissen als auch für parametrisierte Dichtefunktionen  $p$  (i. a. mit Kleinbuchstaben) von Zufallsvariablen verwendet werden. Vor dem Hintergrund der Zustandsparameterschätzung über Dichtefunktionen werden ausschließlich Kleinbuchstaben verwendet.

Chapman-Kolmogorov Gleichungen

$$\begin{aligned}
 & p(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_0, \mathbf{l}_{0:t-1}, \mathbf{u}_{0:t-1}, \mathbf{u}_t) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_0, \mathbf{l}_{0:t-1}, \mathbf{u}_{0:t-1}, \mathbf{u}_t, \mathbf{y}_{t-1}) \cdot \\
 & \quad \cdot p(\mathbf{y}_{t-1} | \mathbf{y}_0, \mathbf{l}_{0:t-2}, \mathbf{l}_{t-1}, \mathbf{u}_{0:t-2}, \mathbf{u}_{t-1}) d\mathbf{y}_{t-1}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}
 & p(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_0, \mathbf{l}_{0:t-1}, \mathbf{u}_{0:t-1}, \mathbf{u}_t) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_0, \mathbf{l}_{0:t-1}, \mathbf{u}_{0:t}, \mathbf{y}_{t-1}) \cdot \\
 & \quad \cdot p(\mathbf{y}_{t-1} | \mathbf{y}_0, \mathbf{l}_{0:t-1}, \mathbf{u}_{0:t-1}) d\mathbf{y}_{t-1}.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Nach der Einbindung des vorausgehenden Zustands  $\mathbf{y}_{t-1}$  über die Verbunddichte wird für das Ergebnis (3.6) nun eine zweite Markov-Annahme postuliert, nämlich dass i. A. die Transitionsbeziehungen  $\mathbf{t}_{\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-1}}$  (siehe (3.15)) zum Zustandsvektor  $\mathbf{y}_t$  - wiederum im Sinne eines Markov-Prozesses 1. Ordnung - allein in Abhängigkeit vom Vorgängerzustand  $\mathbf{y}_{t-1}$  und den zusätzlich im Schritt  $t$  abgeschlossenen, d. h. im Intervall  $[t-1, t]$  erfolgten, Steuerungsmaßnahmen  $\mathbf{u}_t$ , determiniert sind. Damit gilt für den ersten Integranden in (3.6) die

2. Markov-Annahme

$$\begin{aligned}
 & p(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{l}_{0:t-1}, \mathbf{u}_{0:t-1}, \mathbf{u}_t, \mathbf{y}_0) = \\
 & \quad = p(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{u}_t).
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Die Dichtefunktion der Transitionsbeziehungen  $\mathbf{t}_{\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-1}}$  ist dabei identisch mit der Dichtefunktion in Gleichung (3.7)  $p(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{u}_t)$  (siehe (3.15)). Die mit der vorausgehenden Schätzung bereits vorliegende Dichtefunktion  $bel(\mathbf{y}_{t-1})$  (vergl. (3.1)) wird mit

$$\bar{p}(\mathbf{y}_{t-1}) = bel(\mathbf{y}_{t-1}) = p(\mathbf{y}_{t-1} | \mathbf{l}_{0:t-1}, \mathbf{u}_{0:t-1}, \mathbf{y}_0)$$

abgekürzt. Sie wird im Bayes-Kontext als sog. a-priori Dichte bezeichnet. Aus (3.6) gehen mit der 2. Markov-Annahme (3.7) die entsprechend angepassten Chapman-Kolmogorov Gleichungen (Metzger, 2006) hervor:

Chapman-Kolmogorov Gleichungen

mit 2. Markov-Annahme

$$\begin{aligned}
 & p(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{l}_{0:t-1}, \mathbf{u}_{0:t-1}, \mathbf{u}_t, \mathbf{y}_0) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{u}_t) \cdot \\
 & \quad p(\mathbf{y}_{t-1} | \mathbf{l}_{0:t-1}, \mathbf{u}_{0:t-1}, \mathbf{y}_0) d\mathbf{y}_{t-1}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
 & p(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_0, \mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{l}_{0:t-1}, \mathbf{u}_{0:t-1}, \mathbf{u}_t, \mathbf{y}_0) \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{u}_t) \cdot \bar{p}(\mathbf{y}_{t-1}) d\mathbf{y}_{t-1}
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Ausgehend von (3.3) erhalten wir mit den beiden Annahmen (3.4) und (3.7) zu Markov-Prozessen 1. Ordnung und der nach der ersten Markov-Annahme erfolgten Integration des Vorgängerzustandes  $\mathbf{y}_{t-1}$  ((3.5), (3.6) bzw. ((3.8), (3.9)) zusammenfassend die allgemeinen Ausgangsbeziehungen zur sequentiellen Schätzung des Systemzustandes  $\mathbf{y}_t$ , ausgehend von  $\mathbf{y}_0$  und der hinreichenden Berücksichtigung aller sukzessiv eintretenden stochastischen Ereignissen und Maßnahmen  $\mathbf{e}_{0:t}$  (2.4) in der Form:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{p(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_0, \mathbf{l}_{0:t}, \mathbf{u}_{0:t})}_{\text{A-posteriori Dichte}} = \eta \cdot \underbrace{p(\mathbf{l}_t | \mathbf{y}_t)}_{\text{Dichtefkt. der Beob. im GM-Modell}} \cdot \\
 & \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{p(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{u}_t)}_{\text{Transitions-/Aktions-Modell (3.15)}} \cdot \underbrace{\bar{p}(\mathbf{y}_{t-1})}_{\text{A-priori Dichte}} \cdot d\mathbf{y}_{t-1}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Nach Gleichung (3.1) wird der Begriff des „Beliefs (bel)“ konsequent – und wie der Literatur zu Robotik und Navigation (Thrun u. a., 2006) üblich – auch in die einzelnen Komponenten von (3.10) eingeführt. Damit resultiert:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{p(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_0, \mathbf{l}_{0:t}, \mathbf{u}_{0:t})}_{bel(\mathbf{y}_t)} = \eta \cdot \underbrace{p(\mathbf{l}_t | \mathbf{y}_t)}_{\text{Dichtefkt. der Beob. im GM-Modell}} \cdot \\
 & \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} p(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{u}_t) \cdot \bar{p}(\mathbf{y}_{t-1}) \cdot d\mathbf{y}_{t-1}}_{\bar{bel}(\mathbf{y}_t)}.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Zur definitiven individuellen Systemerschließung bzw. zur Systemregelung müssen nun im Weiteren in ((3.10), (3.11)) die konkreten stochastischen Informationsquellen - d. h. die Dichtefunktionen der Messmodelle  $p(\mathbf{l}_t | \mathbf{y}_t)$ , des Vorhersagemodells  $p(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{u}_t)$ , und die a-priori Dichte  $\bar{p}(\mathbf{y}_{t-1})$  - über ihre jeweiligen wahren Fehler, Erwartungswerte und stochastischen Modelle (Kovarianzmatrizen) parametrisiert werden. Bei der Dichte der Sensordaten werden nun die Leverarme  $\mathbf{s}(i, j)$  (siehe Gl. (2.3)) der Sensoren  $s(i, j)$  wieder hinzugefügt, die in obigen Beziehungen - rein

der Übersichtlichkeit wegen - weggelassen wurden. Es gilt:

$$\varepsilon_t = \mathbf{l}_t - \mathbf{l}(\tilde{\mathbf{y}}_t, \mathbf{sl}(i, j)) \quad (3.12)$$

und damit

$$\begin{aligned} p(\mathbf{l}_t | \mathbf{y}_t) &=: p_{\mathbf{l}}(\varepsilon_t, \mathbf{C}_{\varepsilon_t}) \\ &= p_{\mathbf{l}}(\mathbf{l}_t - \mathbf{l}(\tilde{\mathbf{y}}_t, \mathbf{sl}(i, j)), \mathbf{C}_{\varepsilon_t}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Die Dichte der Vorhersage in Gleichung (3.11) wird auch als System- oder Prädiktionsdichte (Metzger, 2006) bzw. nach Herzberg u. a. (2012) auch als Transitions-/Aktionsmodell (3.10) bezeichnet. Sie lautet mit den Transitionsgleichungen  $\mathbf{t}_{\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-1}}$

$$\varepsilon_{\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-1}} = \mathbf{t}_{\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-1}}(\mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{u}_t, \mathbf{s}_t) - \tilde{\mathbf{y}}_t. \quad (3.14)$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{u}_t, \mathbf{s}_t) &=: p_{\mathbf{y}}(\varepsilon_{\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-1}}, \mathbf{C}_{\varepsilon_t}) \\ &= p_{\mathbf{y}}(\mathbf{t}_{\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-1}}(\mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{u}_t, \mathbf{s}_t) - \tilde{\mathbf{y}}_t, \\ &\quad \mathbf{C}_{\varepsilon_t}(\mathbf{C}_{\mathbf{y}_{t-1}}, \mathbf{C}_{\mathbf{u}_t}, \mathbf{C}_{\mathbf{s}_t})). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Für die a-priori Dichte  $\bar{p}(\mathbf{y}_{t-1})$  in (3.11) gilt:

$$\varepsilon_{\mathbf{y}_{t-1}} = \mathbf{y}_{t-1} - \tilde{\mathbf{y}}_{t-1} \quad (3.16)$$

und damit

$$\begin{aligned} bel(\mathbf{y}_{t-1}) &= \bar{p}(\mathbf{y}_{t-1}) =: \bar{p}(\varepsilon_{\mathbf{y}_{t-1}}, \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{t-1}}) \\ &= \bar{p}(\mathbf{y}_{t-1} - \tilde{\mathbf{y}}_{t-1}, \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{t-1}}). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Die Steuerungsgröße  $\mathbf{u}_t$  in (3.15) sowie weitere stochastische Einflüsse oder auch Störgrößen  $\mathbf{s}_t$  (Wind, Propellerphysik bei UAVs) bilden bei der Regelung von Navigationssystemen (z. B. Fernsteuerung eines UAV, Steuerungssysteme im autonomen Fliegen und Fahren (Jäger, 2016; Jäger und Zwiener, 2016)) über systemindividuelle Steuerungsgleichungen eine Teilkomponente innerhalb der i. A. nichtlinearen Transitions-gleichungen  $\mathbf{t}_{\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-1}}$  (3.15). Die Steuerungsmaßnahme bzw. -Korrektur

$$\Delta \mathbf{y}_{t-1} = \mathbf{f}(\mathbf{u}_t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}_{\mathbf{u}_t} \quad (3.18)$$

des im Ergebnis der vorausgehenden Zustandsschätzung  $\mathbf{y}_{t-1}$  in Rekursionsschritt  $t - 1$  festgestellten Re-

gelabweichung des Zustandsvektors  $\mathbf{y}_{t-1}$  vom Soll (Regeldifferenz) erfolgt innerhalb des Zeitintervalls  $\Delta t = [t - 1, t]$ . Je nach Dauer der Regelung, z. B. einem PID-Regler bei UAV (Jäger, 2016; Jäger und Zwiener, 2016) sind  $\Delta t$  und die damit die jeweilige Systemzeit  $t$  stochastisch abhängig von  $\mathbf{u}_t$ . Dieser Sachverhalt wird im Englischen als „Hidden Markov-Model (HMM)“ oder auch als „Dynamisches Bayes-Netz (DBN)“ bezeichnet.

## 4 Eigenschaften der Bayes basierten Schätzung

Die funktionalen und stochastischen Modelle (3.13) und (3.15) beinhalten - unabhängig welche jeweiligen Dichtefunktion hinterlegt sind - zusammen mit der vorausgehenden Schätzung  $\mathbf{y}_{t-1}$  und Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}_{\mathbf{y}_{t-1}}$  bzw. der Dichte  $\bar{p}(\mathbf{y}_{t-1})$  in Gleichungen (3.17) - die hinreichenden Informationsquellen zur Systemmodellierung und Steuerung über die rekursiven Algorithmen (3.10) und (3.11). Sie erlauben dabei mit Angabe der Vorgängerdichte  $\bar{p}(\mathbf{y}_{t-1})$  und letztlich der Ausgangsdichtefunktion  $p(\mathbf{y}_0)$ , der Messungen  $\mathbf{l}_t$  mit der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(\mathbf{l}_t | \mathbf{y}_t)$  (3.13) sowie der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{u}_t, \mathbf{s}_t)$  - mit der enthaltenen Transitions-/Aktionsgleichung

$$\mathbf{y}_{t,t-1} = \mathbf{t}_{\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-1}}(\mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{u}_t, \mathbf{s}_t)$$

zur Vorhersage  $\mathbf{y}_{t,t-1}$  von  $\mathbf{y}_t$  aus  $\mathbf{y}_{t-1}$  - die Darstellung der a-posteriori Dichte in Form des Beliefs

$$bel(\mathbf{y}_t) = p(\mathbf{y}_t | \mathbf{y}_0, \mathbf{l}_{0:t}, \mathbf{u}_{0:t}, \mathbf{s}_{0:t})$$

(siehe Gleichungen (3.10) und (3.11)) zum aktuellen Zustand  $\mathbf{y}_t$ . Dabei bestehen keine Voraussetzungen an den Typ der o. g. Dichtefunktionen der stochastischen Größen in  $bel(\mathbf{y}_t)$  ((3.10) und (3.11)).

## 5 Bayes basierte Navigationszustandsschätzung und Steuerung

### 5.1 Kalman-Filter (KF), Extended KF (EKF), Robuste KF und EKF

Unter der Annahme multivariater Normalverteilungen für die Dichtefunktionen im Transitions-/Aktionsmodell

$$p_{\mathbf{y}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{y}_t, \mathbf{y}_{t-1}}, \mathbf{C}_{\mathbf{y}_t}) = p_{\mathbf{y}}(\mathbf{t}_{\mathbf{y}_{t,t-1}}(\mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{u}_t, \mathbf{s}_t) - \tilde{\mathbf{y}}_t, \mathbf{C}_{\mathbf{y}_t})$$

(siehe (3.15)) und der a-priori Dichte des Beliefs

$$bel(\mathbf{y}_{t-1}) = \bar{p}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{y}_{t-1}}, \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{t-1}}) = \bar{p}(\mathbf{y}_{t-1} - \tilde{\mathbf{y}}_{t-1}, \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{t-1}})$$

(siehe (3.17)) resultiert aus dem Chapman-Kolmogorov-Integral über beide Dichten im Ergebnis für  $\overline{bel}(\mathbf{y}_t)$  (3.11) die multivariate Normalverteilungsdichte:

$$\begin{aligned} \overline{bel}(\mathbf{y}_t) &= p_{\mathbf{y}_{t,t-1}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{y}_{t,t-1}}, \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{t,t-1}}) \\ &= p_{\mathbf{y}}(\mathbf{t}_{\mathbf{y}_{t,t-1}}(\mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{u}_t, \mathbf{s}_t) - \tilde{\mathbf{y}}_t, \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{t,t-1}}) \\ &= p_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}_{t,t-1} - \tilde{\mathbf{y}}_t, \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{t,t-1}}) \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{t,t-1}} &= +\bar{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{t-1}} \cdot \bar{\mathbf{T}}^T + \bar{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{u}_t} \cdot \bar{\mathbf{U}}^T \\ &\quad + \bar{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{s}_t} \cdot \bar{\mathbf{S}}^T. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Eine ausführliche Herleitung von (5.1) und (5.2) für Normalverteilungsannahmen in  $\overline{bel}(\mathbf{y}_t)$  (3.11) findet sich in Metzger (2006). Die Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}_{\mathbf{y}_{t,t-1}}$  (5.2) resultiert mit Anwendung der Fehlerfortpflanzung auf die mit  $\overline{bel}(\mathbf{y}_t)$  vorliegenden finalen Transitions-/Aktionsgleichungen  $\mathbf{y}_{t,t-1} = \mathbf{t}_{\mathbf{y}_{t,t-1}}(\mathbf{y}_{t-1}, \mathbf{u}_t, \mathbf{s}_t)$  (3.14). Geht man nun im Gauß-Markov-Modell (GMM) beim Term  $p(\mathbf{l}_t | \mathbf{y}_t)$  (siehe Gl. (3.13)) ebenfalls von einer Normalverteilungsannahme aus, so ist die a-posteriori Dichte  $bel(\mathbf{y}_t)$  in (3.11) ebenfalls normalverteilt. Somit ist die Maximierung des Werts der a-posteriori Dichte in der folgenden Form gegeben:

$$\hat{\mathbf{y}}_{tM} = \underset{[\mathbf{y}_t]}{\operatorname{argmax}} \{ p(\mathbf{l}_t | \mathbf{y}_t) \cdot \overline{bel}(\mathbf{y}_t) \}. \quad (5.3)$$

Das Schätzkonzept (5.3) ist gleichbedeutend mit der Maximum-Likelihood-Schätzung  $\hat{\mathbf{y}}_{tM}$  der Zustandspa-

rameter  $\mathbf{y}_t$  des Beliefs  $bel(\mathbf{y}_t)$  (3.11). Mit der Vorhersagedichte ((5.1), (5.2)) und der Dichte ((3.12), (3.13)) der Sensorbeobachtungsgleichungen geht aus (5.3) die Maximum-Likelihood-Schätzung in der Form (5.4) hervor.

$$\hat{\mathbf{y}}_{tM} = \underset{[\tilde{\mathbf{y}}_t]}{\operatorname{argmax}} \left\{ p_{\mathbf{l}}(\mathbf{l}_t - \mathbf{l}(\tilde{\mathbf{y}}_t, \mathbf{sl}(i, j))_t, \mathbf{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}_t}) \cdot p_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}_{t,t-1} - \tilde{\mathbf{y}}_t, \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{t,t-1}}) \right\}. \quad (5.4)$$

Mit den negativen Exponenten der  $e$ -Funktionen („Gauß-Dichten“) ist (5.4) äquivalent zur Kleinste-Quadrate-Schätzung:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{l}_t - \mathbf{l}(\tilde{\mathbf{y}}_t, \mathbf{sl}(i, j)))^T \cdot \mathbf{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}_t}^{-1} \cdot (\mathbf{l}_t - \mathbf{l}(\tilde{\mathbf{y}}_t, \mathbf{sl}(i, j))) \\ &+ (\mathbf{y}_{t,t-1} - \tilde{\mathbf{y}}_t)^T \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{t,t-1}}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{t,t-1} - \tilde{\mathbf{y}}_t) = \underset{\hat{\mathbf{y}}_{tM}}{\operatorname{Min}}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Mit den Näherungswerten  $\mathbf{y}_0$  für  $\hat{\mathbf{y}}_{tM}$  führt die Zustandsschätzung (5.5) mit der Designmatrix  $\mathbf{A}(\mathbf{y}_0, \mathbf{sl}(i, j))$  aus der Linearisierung der Beobachtungsgleichungen  $\mathbf{l}(\tilde{\mathbf{y}}_t, \mathbf{sl}(i, j))$  auf das folgende linearisierte Gauß-Markov-Modell:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{t,t-1} + \mathbf{v}_y &= \mathbf{I} \cdot d\hat{\mathbf{y}}_{tM} + \mathbf{y}_0 \\ &\text{mit der Kovarianzmatrix } \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{t,t-1}} \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_t + \mathbf{v}_l &= \mathbf{A}(\mathbf{y}_0, \mathbf{sl}(i, j)) \cdot d\hat{\mathbf{y}}_{tM} + \mathbf{l}_t(\mathbf{y}_0, \mathbf{sl}(i, j)) \\ &\text{mit der Kovarianzmatrix } \mathbf{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}_t}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Die Residuen  $\mathbf{v}_y$  und  $\mathbf{v}_l$  stehen dabei für die Maximum-Likelihood-Schätzwerte der wahren Fehler  $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{y}_{t,t-1}}$  (5.1) bzw.  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  (3.13) in Gleichung (5.5). Die Kleinste-Quadrate-Schätzung für (5.5) führt mit (5.6) und (5.7) auf die Lösung

$$\begin{aligned} d\hat{\mathbf{y}}_{tM} &= \left( \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{t,t-1}}^{-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}_t}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \cdot \left[ \mathbf{A}^T \mathbf{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}_t}^{-1} \cdot \right. \\ &\quad \left. (\mathbf{l}_t - \mathbf{l}_t(\mathbf{y}_0, \mathbf{sl}(i, j))) + \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{t,t-1}}^{-1} \cdot (\mathbf{y}_{t,t-1} - \mathbf{y}_0) \right] \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{tM} = \mathbf{y}_0 + d\hat{\mathbf{y}}_{tM} \quad (5.9)$$

mit der Kovarianzmatrix

$$\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{y}}_{tM}} = \left( \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{t,t-1}}^{-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}_t}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \quad (5.10)$$

(Jäger u. a., 2018). In (5.8) lässt sich der Matrixterm

$$\mathbf{K} = \left( \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{t,t-1}}^{-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}_t}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \cdot \mathbf{A}^T \mathbf{C}_{\boldsymbol{\varepsilon}_t}^{-1} \quad (5.11)$$

als Kalman-Matrix (Wendel, 2007; Jäger und González, 2006) identifizieren. Mit der Wahl der Näherungswerte  $\mathbf{y}_0 =: \mathbf{y}_{t,t-1}$ , welche aus der Vorhersage (5.1) erhalten werden, gehen die Gleichungen (5.8), (5.9) und (5.10) direkt über in

$$\hat{\mathbf{y}}_{tM} \equiv \hat{\mathbf{y}}_{tKF} = \mathbf{y}_{t,t-1} + \mathbf{K} \cdot (\mathbf{l}_t - \mathbf{l}_t(\mathbf{y}_0, \mathbf{sl}(i, j))) \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{y}}_{tM}} &\equiv \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{y}}_{tKF}} = \left( \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{t,t-1}}^{-1} + \mathbf{A}^T \mathbf{C}_{\mathbf{l}_{e_t}}^{-1} \mathbf{A} \right)^{-1} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{K} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{t,t-1}}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

d. h., es gelten die Identitäten  $\hat{\mathbf{y}}_{tM} \equiv \hat{\mathbf{y}}_{tKF}$  und  $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{y}}_{tM}} \equiv \mathbf{C}_{\hat{\mathbf{y}}_{tKF}}$ . Somit ist die Kleinste-Quadrate-Schätzung ((5.8), (5.9) und (5.10)) zum Gauß-Markov-Modell ((5.6), (5.7)) identisch mit der klassischen Kleinste-Quadrate Kalman-Filterung (KF) nach  $\hat{\mathbf{y}}_{tKF}$  (siehe Gl. (5.12)) und  $\mathbf{C}_{\hat{\mathbf{y}}_{tKF}}$  (siehe Gl. (5.13)). In (5.12) können direkt die präzidierten nicht-linearen Sensordaten  $\mathbf{l}_t(\mathbf{y}_{t,t-1}, \mathbf{sl}(i, j))$  aus Gleichung (2.3) in Ansatz gebracht werden.

Ebenso kann in (5.12) auch direkt die nicht-lineare (3.15) Vorhersage eingesetzt werden. Im Gegensatz zu jeweils linearen Modellen wird die hier durch die Gleichungen (5.6) und (5.7) beschriebene KF auch als Extended Kalman-Filter (EKF) bezeichnet. Linearisierungen sind zur Realisierung des EKF jedoch für die Fehlerfortpflanzung sowie die Berechnung der Terme  $\bar{\mathbf{T}}, \bar{\mathbf{U}}, \bar{\mathbf{S}}$  in (5.2), sowie der Designmatrix  $\mathbf{A}(\mathbf{y}_0, \mathbf{sl}(i, j))$  (5.7), notwendig. Der Übergang von  $\overline{bel}(\mathbf{y}_t)$  aus Gleichung (3.11) nach (5.1) ist neben der Normalverteilung auch für weitere exponentielle Dichtefunktionen - z. B. die multivariate Laplace-Verteilung oder andere expo-

nentielle Zieldichten, die der robusten  $M$ -Schätzung (Jäger u. a., 2018) gegenüber sind - nachvollziehbar. Daher können auf die o. g. Bayes-Theorie auch robuste Kalman-Filterungen (Jäger und González, 2006) begründet werden.

## 5.2 Partikel-Filter

Das Partikel-Filter (PF) löst sich von der Forderung nach exponentiellen Dichtefunktionen für die einzelnen Komponenten der Bayes'schen Ausgangsdarstellung der Zustandsschätzung auf der rechten Seite von (3.11). Damit ist die Maximum-Likelihood-Schätzung (5.3) nicht mehr Optimalschätzung für  $\mathbf{y}_t$ , auch wenn für die Sensordatendichte (3.13) in (3.11) i. A. weiterhin die Normalverteilungsannahme bestehen bleibt. Kennzeichnend für das PF ist die Diskretisierung der a-priori Dichte  $\bar{p}(\mathbf{y}_{t-1})$  (3.11) über die Dirac'sche Deltafunktion  $\delta(\mathbf{y}_{t-1}^i - \tilde{\mathbf{y}}_{t-1})$  mit  $N$  Partikeln. Es gilt:

$$\begin{aligned} \bar{p}(\mathbf{y}_{t-1} - \tilde{\mathbf{y}}_{t-1}, \mathbf{C}_{\mathbf{y}_{t-1}}) &= \\ &= \sum_{i=1}^N w_{t-1}^i \cdot \delta(\mathbf{y}_{t-1}^i - \tilde{\mathbf{y}}_{t-1}) \quad (5.14) \\ \text{und } \sum_{i=1}^N w_{t-1}^i &= 1. \end{aligned}$$

Die Partikelwahrscheinlichkeiten werden dabei über deren Gewichte  $w_{t-1}^i$  gesteuert. Als typische Dichtefunktion wird bei unbekanntem Ausgangszustandskomponenten  $\mathbf{y}_t$  (z. B. der Position eines 3D-Mappingroboters in einem Gebäude) mit  $w_{t_0}^i = const.$  häufig die Gleichverteilung gewählt. Das Durchlau-

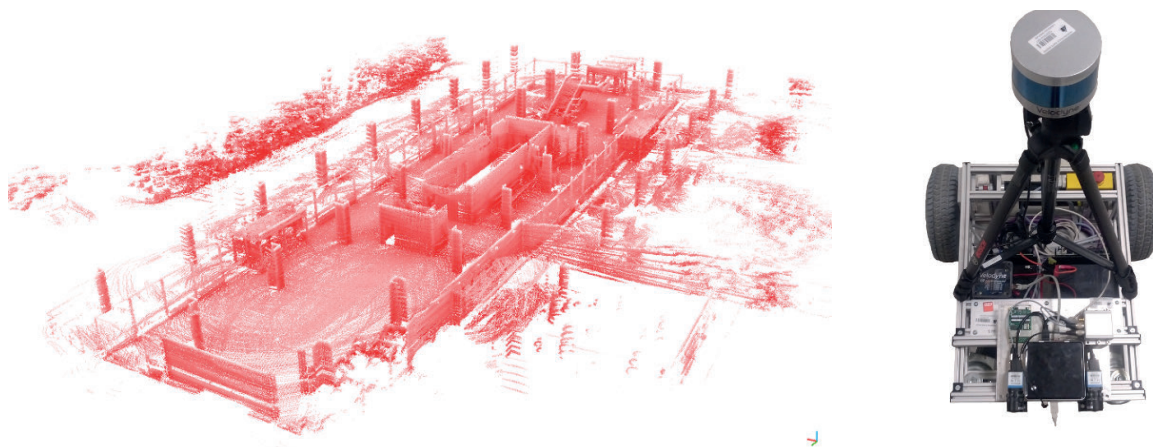


Abbildung 5.1: Links: Georeferenzierte 3D-Punktwolke als Ergebnis und Weiterverarbeitungsschnittstelle des 3D-Mappingsystems „MSM“. Rechts: Volksbot-Roboter Aufbau des 3D-Mappingsystems „MSM“ mit Laserscanner Velodyne VLP-16 als SLAM-Sensor. Im Vordergrund die GNSS/MEMS/Kamera MSM-Navigationsbox für SLAM

fen der Bayes'schen Beziehungen (3.11) führt in jedem Schritt  $t$  auf neue Gewichte (Herzberg u. a., 2012; Wendel, 2007; Thrun u. a., 2006) und damit auf eine sich schrittweise stabilisierende Zustandsschätzung  $y_t$ .

### 5.3 SLAM-Verfahren

Die aktuell im Fokus von FuE stehenden selbstreferenzierenden 3D-Mappingsysteme basieren i. d. R. auf den KF und PF Ansätzen. Beide stehen gemeinsam auf den Bayes Grundlagen. SLAM (Simultaneous Localisation And Mapping) bedeutet hier die Doppelnutzung bestimmter Navigationssensorik (z. B. Kameras, Laserscanner) sowohl für die Navigationszustandsschätzung als auch für die Objektaufnahme. Zusätzliche Redundanz durch Punktwolken- bzw. Bildüberlappungen und daraus zu gewinnende Bedingungsgleichungen zwischen zeitlich aufeinander folgenden Zustandsvektoren  $y_t$  bzw. zwischen wiederkehrenden örtlichen Überlappungen führen auf die Verfahren des Online-SLAM bzw. des Graph-SLAM. Die Ausschöpfung der entsprechenden Informationen aus den Bedingungsgleichung impliziert beim SLAM die Verbesserung der Genauigkeit der Gesamtrajektorie  $y(1:t)$  und damit einhergehend eine Steigerung der Genauigkeit für die sich mit der SLAM-Schätzung von  $y(1:t)$  verbindenden Georeferenzierung der 3D-Laserscannerpunktwolke (Abb. 5.1) bzw. der SLAM-prozessierten Bilddaten des 3D-Mapping. Die Abb. 5.1 zeigt das im Rahmen des im Forschungs- und Entwicklungsbereich NAVKA (NAVKA, 2018) entwickelte SLAM-basierte selbstreferenzierende Mappingsystem „MSM“.

## Literatur

- Herzberg, J., Lingemann, K. und Nüchter, A. (2012): Mobile Roboter. Springer Vieweg, Heidelberg.
- Jäger, R. (2014): Navigation mit verteilten GNSS/MEMS Sensoren - Mathematische Modelle, Algorithmen und Anwendungspotenziale. *Horizonte* 43:7–10. ISSN: 1432-0174.
- Jäger, R. (2016): Navigation und Steuerung skalierbarer UAV und bemannter e-Multicopter. Forschung aktuell 2016: Hochschule Karlsruhe Technik und Wirtschaft (Hrsg.)
- Jäger, R., Diekert, J., Hoscislowski, A. und Zwiener, J. (2012): SIMA - Raw Data Simulation Software for the Development and Validation of Algorithms for GNSS and MEMS based Multi-Sensor Navigation Platforms. In: *FIG Working Week 2012: Knowing to manage the territory, protect the environment, evaluate the cultural heritage. Rome, Italy, 6-10 May 2012*, S. 1–15. URL: [http://www.fig.net/pub/fig2012/papers/ts03d/TS03d\\_jaeger\\_diekert\\_et\\_al\\_6000.pdf](http://www.fig.net/pub/fig2012/papers/ts03d/TS03d_jaeger_diekert_et_al_6000.pdf).
- Jäger, R. und González, F. (2006): GNSS/LPS Based Online Control and Alarm System (GOCA) - Mathematical Models and Technical Realization of a System for Natural and Geotechnical Deformation Monitoring and Hazard Prevention. In: *Geodetic Deformation Monitoring: From Geophysical to Engineering Roles: IAG Symposium Jaén, Spain March 17–19, 2005*. Hrsg. von F. Sansò und A. J. Gil. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, S. 293–303. DOI: 10.1007/978-3-540-38596-7\_37.
- Jäger, R., Müller, T. und Saler, H. (2018): Klassische und robuste Ausgleichungsverfahren - Ein Leitfaden für Ausbildung und Praxis von Geodäten und Geoinformatikern. 2. Aufl. In Bearbeitung. Wichmann, Heidelberg.
- Jäger, R. und Zwiener, J. (2016): Flugdynamik, Multi-Sensor-Navigation und Steuerung skalierbarer Out-/Indoor-Multicopter UAV. In: *UAV 2016 – Vermessung mit unbemannten Flugsystemen*, 148. DVW Seminar, 18.-19. Feb. 2016. Universität Bonn. Bd. 82. ISBN: 978-3-95786-067-5.
- Koch, K.-R. (2007): Introduction to Bayesian Statistics. Springer, Berlin und Heidelberg.
- Köhler, B.-U. (2005): Konzepte der statistischen Signalverarbeitung. Springer, Berlin und Heidelberg.
- Metzger, J. (2006): Optimierung des Akquisitions- und Tracking-Verhaltens zentraler und modularer Terrainavigationssysteme. Dissertation Universität Karlsruhe, ITE.
- NAVKA (2018): Navigationsalgorithmen und -plattformen Karlsruhe. URL: [www.navka.de](http://www.navka.de) (besucht am 01.01.2018).
- Thrun, S., Burgard, W. und Fox, D. (2006): Probabilistic Robots. The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London.
- Wendel, J. (2007): Integrierte Navigationssysteme. Oldenburg Verlag, München und Wien.