

# Randwertprobleme in geometrischer Sichtweise

**Wolfgang Keller**

Geodätisches Institut, Universität Stuttgart  
E-Mail: wolfgang.keller@gis.uni-stuttgart.de

## Zusammenfassung

Ausgehend von der Dualität zwischen Punkt- und Geradeninformation in der projektiven Geometrie werden die Schwere- und Geometrieinformationen in geodätischen Randwertproblemen gegeneinander ausgetauscht, so dass das freie geodätische Randwertproblem in ein Problem mit festem Rand überführt werden kann.

## 1 Einführung

Ein immer wiederkehrendes Thema im wissenschaftlichen Werk von Bernhard Heck sind die geodätischen Randwertprobleme. Grundlegend sind seine Arbeiten zur Klassifikation der Randwertprobleme in skalar, vektoruell mit festem und mit freiem Rand (Grafarend u. a., 1985; Heck, 1988; Heck und Seitz, 2003) aber auch seine Studien zur notwendigen Datenvorverarbeitung z. B. durch Helmert's Kondensationsmethode und zu direkten und indirekten Effekten (Heck, 2003).

Stets war dabei die Physik die gedankliche Leitschnur. Es gibt aber auch einen geometrischen Zugang zu den geodätischen Randwertproblemen, der, obwohl derzeit wenig praxisrelevant, durch die Symmetrien zum klassischen Randwertproblem gedanklich reizvoll und interessant ist. Davon soll hier die Rede sein.

## 2 Projektive Geometrie

Eins der fundamentalen Probleme der euklidischen Geometrie ist das Parallelenpostulat. Einerseits wurde die euklidische Geometrie von Kant als synthetisches Urteil a priori und damit zur Denknöwendigkeit erklärt, andererseits zeigten die Arbeiten von Gauß und Bolay, dass auch eine nichteuklidische Geometrie wi-

derspruchsfrei ist. Und: das Parallelenpostulat erzeugt eine Asymmetrie in der euklidischen Geometrie. Denn

- einerseits gilt: Durch zwei Punkte geht genau eine Gerade.
- Aber es gilt eben nicht, dass sich zwei Geraden in genau einem Punkt schneiden.

Um sich aus diesem Dilemma zu befreien, ist ein Weg die Einführung uneigentlicher Punkte in der projektiven Geometrie. Ein uneigentlicher Punkt wird eingeführt als der *Schnittpunkt* einer Schaar von im euklidischen Sinn parallelen Geraden. Durch diesen Kunstgriff werden die Probleme des Parallelenpostulats in der euklidischen Geometrie beseitigt. Denn jetzt gilt in der projektiven Ebene wieder

- Durch zwei Punkte geht genau eine Gerade.
- Zwei Geraden schneiden sich in genau einem Punkt. (Gegebenenfalls im uneigentlichen Punkt).

Obiges Aussagenpaar ist wohl das einfachste Beispiel für das Dualitätsprinzip der ebenen projektiven Geometrie:

**Dualitätsprinzip 1** *Sei A eine wahre Aussage der ebenen projektiven Geometrie. Ersetzt man in A den Begriff Punkt durch den Begriff Gerade und die Wendung*



geht durch die Wendung liegt auf, so entsteht wiederum eine wahre Aussage.

In der projektiven Ebene sind also die Elemente Punkt und Gerade gleichwertig. Es liegt daher nahe, nicht allein eine glatte Kurve  $(x(t), y(t))$  in der projektiven Ebene zu betrachten, sondern die Kurve mitsamt ihren Tangenten  $(x(t), y(t), p(t) = \dot{y}(t)/\dot{x}(t))$ . Dieses Konstrukt wurde von *S. Lie* (Lie und Scheffers, 1896) Elementverein genannt.

Mit Hilfe des Dualitätsprinzips lässt sich jeder Elementverein in seinen dualen Elementverein abbilden und die dann (hoffentlich leichter) abgeleiteten Aussagen über den dualen Elementverein lassen sich in Aussagen über den Ursprungselementverein rückübersetzen. Dies ist die Technik der Korrelationen:

**Definition 1** Eine projektive Abbildung, die jede Figur in ihre duale Figur abbildet, indem sie Geraden in Punkte und umgekehrt Punkte in Geraden überführt heißt Korrelation.

### 3 Berührungstransformationen

Nicht jede Abbildung

$$X = X(x, y, p), Y = Y(x, y, p), P = P(x, y, p) \quad (3.1)$$

überführt einen Elementverein wieder in einen Elementverein. Um dies zu gewährleisten, muss die sogenannte Kontaktbedingung

$$X_p(Y_x + pY_y) = Y_p(X_x + pX_y), \quad Y_p = PX_p \quad (3.2)$$

erfüllt sein. Derartige Abbildungen heißen Berührungstransformationen. Um die Korrelationen auch analytisch fassen zu können, müssen in der projektiven Ebene Koordinaten eingeführt werden, die auch die uneigentlichen Punkte mit erfassen. Diese Art von Koordinaten sind die sogenannten *homogenen* Koordinaten. Zur Motivation der homogenen Koordinaten betrachten wir zunächst die Gleichung einer Geraden  $g$  in der euklidischen Ebene

$$a_0 + a_1x + a_2y = 0. \quad (3.3)$$

Nach *J. Plücker* (Plücker und Clebsch, 1868) können die Koeffizienten  $a_0, a_1, a_2$  als Koordinaten der Geraden  $g$  angesehen werden. Diese Geradenkoordi-

ten sind homogen, d. h. sowohl  $(a_0, a_1, a_2)$  als auch  $(c \cdot a_0, c \cdot a_1, c \cdot a_2)$ ,  $c \in \mathbb{R}$  beschreiben die selbe Gerade. Um die Symmetrie der ebenen projektiven Geometrie auch analytisch wieder herzustellen, müssen auch homogene Punktkoordinaten eingeführt werden. Dazu wählt man  $(x_0, x_1, x_2)$  so, dass

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0} \quad (3.4)$$

gilt. Das schließt alle eigentlichen Punkte ( $x_0 \neq 0$ ) aber auch die uneigentlichen Punkte ( $x_0 = 0$ ) ein. Die neu eingeführten Koordinaten sind dann offensichtlich ebenfalls homogen. Interessant ist in diesem Zusammenhang die Gleichung

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0, \quad (3.5)$$

die je nach Bedarf als Gleichung aller Geraden, die durch  $(x_0, x_1, x_2)$  laufen oder als Gleichung aller Punkte, die auf der Geraden  $(a_0, a_1, a_2)$  liegen, gedeutet werden kann. Auch hier scheint wieder das Dualitätsprinzip durch und wir haben eine ästhetischen Gleichklang von Form und Formel.

Um die Berührungstransformationen mit den Korrelationen der projektiven Geometrie in Zusammenhang zu bringen, stellen wir zunächst die ebene Kurve  $(x(t), y(t))$  in homogenen Koordinaten dar

$$(x_0, x_1, x_2) = (1, x(t), y(t)). \quad (3.6)$$

Die Tangente an die ebene Kurve hat die Gleichung

$$y - y(t) = p(t)(x - x(t)), \quad (3.7)$$

die vermöge der homogenen Geradenkoordinaten

$$(a_0, a_1, a_2) = (px - y, -p, 1) \quad (3.8)$$

in der symmetrischen Form (3.5) ausgedrückt werden kann.

Eine Korrelation berechnet nun neue homogene Punktkoordinaten aus homogenen Geradenkoordinaten. Ein einfaches Beispiel dafür ist

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ p \\ px - y \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Ein Zurückschreiben auf kartesische Koordinaten erzeugt die folgende Transformation eines Elementvereins

$$X = \frac{X_1}{X_0} = p, \quad Y = \frac{X_2}{X_0} = px - y, \quad P = \frac{dX_2}{dX_1} = x, \quad (3.10)$$

die wegen

$$\begin{aligned} X_p(Y_x + pY_y) - Y_p(X_x + pX_y) \\ = 1(p + (-1)p) - x(0 + p0) = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

in der Tat eine Berührungstransformation ist. Diese Transformation ist in der Literatur unter dem Namen Legendre-Transformation bekannt und hat vielfältige Anwendungen in der Mechanik und Thermodynamik. Während aber gewöhnlich die Legendre-Transformation ohne einleuchtende Motivation eingeführt wird, ergibt sie sich beinahe zwangsläufig als Ergebnis einer projektiven Korrelation.

## 4 Randwertproblem im Schwereraum

Nach diesen Vorbereitungen kann nun das freie geodätische Randwertproblem aus der Perspektive der projektiven Geometrie betrachtet werden.

Dieses Problem besteht darin, aus gegebenen Werten  $v$  und gegebenen Gradienten  $\mathbf{g}$  einer harmonischen Funktion  $V$  auf einer unbekannt orientierbaren und geschlossenen Fläche  $S$ , diese Fläche  $S$  selbst und die harmonische Funktion  $V$  außerhalb der Fläche zu bestimmen:

$$\Delta V(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \text{ext } S, \quad (4.1)$$

$$V|_S = v, \quad \nabla V|_S = \mathbf{g}. \quad (4.2)$$

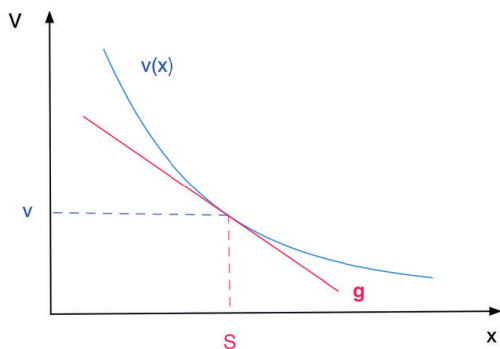


Abbildung 4.1: Eindimensionales Analogon

Die Schwierigkeit bei der Lösung dieses Problems besteht darin, dass es ein sogenanntes freies Randwertproblem ist, bei der die Randfläche unbekannt und selbst mit zu bestimmen ist (siehe Abbildung 4.1).

Im eindimensionalen Analogon kann man die Situation folgendermaßen veranschaulichen:

Der gegebene Gradient  $\mathbf{g}$  definiert eine Gerade, die Tangente an die unbekannt harmonische Funktion  $V$ . Diese berührt die harmonische Funktion  $V$  im unbekanntem Punkt  $(S, V(X)) = (S, v)$ . Die Gleichung der Tangente ist dann

$$V - V(S) = V'(S)(x - S) \Leftrightarrow V - v = g(x - S). \quad (4.3)$$

Die Schwierigkeit des freien Randes besteht also darin, dass zwar die Berührungsgerade gegeben ist, der Berührungspunkt aber nicht. Man hat also einen Mangel an Punktinformationen aber einen Überschuss an Geradeninformationen. Es liegt nun nahe, durch eine Korrelation die mangelnden Punktinformationen gegen die überschüssigen Geradeninformationen auszutauschen. Die homogenen Koordinaten von Punkt und Gerade sind

$$\begin{bmatrix} x_0, x_1, x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ V(x) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_0, a_1, a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V'(S) \cdot S - v \\ g \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Die Überführung von Punkten in Geraden kann z. B. durch eine Legendre-Transformation erfolgen:

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ V' \\ V' \cdot x - V \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Wenn die homogenen Koordinaten wieder in kartesische Koordinaten überführt werden, erhält man daraus

$$\gamma = \frac{X_1}{X_0} = V', \quad \psi = \frac{X_2}{X_0} = V' \cdot x - V. \quad (4.6)$$

Da  $V'$  am Rand  $S$  bekannt ist, ist für das adjungierte Potential  $\psi$  der Rand bekannt. Damit ist ein Problem mit freiem Rand in eine äquivalente Problem mit festem Rand überführt (siehe Abbildung 4.2). Diese Idee

ins Dreidimensionale übertragen führt auf die Schwereräumtheorie von Sanso (Sansò, 1978). Wegen

$$\psi(\gamma) = O(\sqrt{\gamma}), \quad \gamma \rightarrow 0 \quad (4.7)$$

weist die Schwereräumtheorie eine Singularität im Ursprung auf, da das zu bestimmende adjungierte Potential  $\psi$  dort nicht differenzierbar ist. Die Ursache für diese Singularität besteht darin, dass bei der Legendre-Transformation der unendlich ferne Punkt in den Ursprung abgebildet wird. Da in der Nacht des Unendlichen alle Katzen grau sind, verliert der Begriff Differenzierbarkeit dort seinen Sinn. Um das Problem zu beheben, muss eine Korrelation gefunden werden, die den unendlichen Punkt auf sich selbst abbildet.

Eine alternative Korrelation die Punkte in Geraden und Geraden in Punkte überführt ist

$$\begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ \sqrt{GM} \frac{a_1}{|a_1|^{\frac{3}{2}}} \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{GM} \frac{g}{|g|^{\frac{3}{2}}} \\ V' \cdot x - V \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

Mit einigem Aufwand kann man nachrechnen, dass es sich dabei wirklich um eine Berührungstransformation handelt.

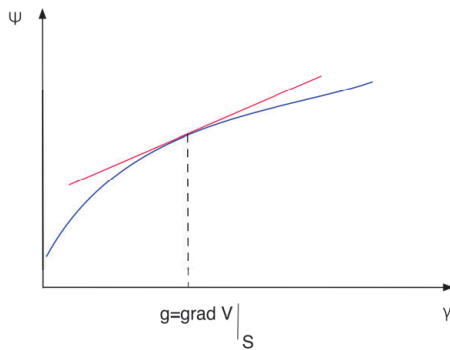


Abbildung 4.2: Adjungiertes Potential

Wenn man nun die homogenen Koordinaten in kartesische Koordinaten rücküberführt, ergibt sich

$$\gamma = \frac{X_1}{X_0} = -\sqrt{GM} \frac{g}{|g|^{\frac{3}{2}}}, \quad \psi = \frac{X_2}{X_0} = V' \cdot x - V. \quad (4.9)$$

Der Einfachheit halber sollen die neuen unabhängigen Variablen  $\gamma$  Schwerekoordinaten und die neue abhängige Variable  $\psi$  adjungiertes Potential genannt werden. Man erkennt unschwer, dass für die duale Figur der Randpunkt  $(\gamma, \psi) = (-\sqrt{GM} \frac{g}{|g|^{\frac{3}{2}}}, g \cdot x - v)$  bekannt

ist. Das Randwertproblem mit freiem Rand ist somit in ein Randwertproblem mit festem Rand überführt. Der dafür zu zahlende Preis, wird sichtbar, wenn man vom eindimensionalen Analogon zum ursprünglich dreidimensionalen Problem zurückkehrt. Dann lauten die Transformationsbeziehungen

$$\gamma = \sqrt{GM} \frac{\nabla V(\mathbf{x})}{\|\nabla V \mathbf{x}\|^{\frac{3}{2}}}, \quad \psi = \nabla V(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} - V(\mathbf{x}) \quad (4.10)$$

und das Randwertproblem für das adjungierte Potential

$$\text{tr}(\nabla^2 \psi) - (\text{tr} \nabla^2 \psi)^2 = 0, \quad (4.11)$$

$$\left( -\frac{1}{2} \gamma \cdot \nabla \psi - \psi \right) \Big|_{\gamma = -\sqrt{GM} \frac{g}{|g|^{\frac{3}{2}}}} = v. \quad (4.12)$$

Dies ist ein Randwertproblem mit festem Rand, aber es ist nunmehr eine nichtlineare Differentialgleichung vom Monge-Ampere Typ.

Interessant ist auch die Randfläche  $\Sigma = -\sqrt{GM} \frac{g}{|g|^{\frac{3}{2}}}$ . Für diese Randfläche gilt nämlich

$$\nabla U|_{\Sigma} = \nabla V|_S, \quad (4.13)$$

wobei  $U$  das Normalpotential bezeichnet, d.h. die Randfläche im Schwereräum ist das gravimetrische Telluroid.

## 5 Linearisiertes Randwertproblem im Schwereräum

Linearisiert man das nichtlineare Randwertproblem im Schwererräum (4.12) um das adjungierte Normalpotential  $\psi_0 = -2GM/|\gamma|$ , so lautet das entstehende Randwertproblem für das adjungierte Störpotential  $\tau = \psi - \psi_0$

$$\Delta \tau(\gamma) = 0, \quad \left( -\frac{1}{2} \gamma \cdot \nabla \tau - \tau \right) \Big|_{\sigma} = \Delta v. \quad (5.1)$$

Von seiner Struktur her ist das linearisierte Problem (5.1) identisch dem linearisierten Molodenskijproblem. Lediglich Schwere und Potential haben ihre Rollen getauscht. Während beim linearisierten Randwertproblem die Randfläche das durch das Potential definierte Telluroid ist, ist die Randfläche beim linearisierten Schwereräum das gravimetrische Telluroid. Im Molodenskijproblem sind die Randwerte die

Schwereanomalien  $\Delta g$ , während beim Schwereräumproblem die Randwerte durch die Potentialanomalien  $\Delta v$  gebildet werden. Auch hier scheint wieder das Dualitätsproblem der projektiven Geometrie herauf.

Neben diesen interessanten Symmetrien hält das linearisierte Randwertproblem im Schwereräum auch einige potentiell interessante praktische Eigenheiten bereit: Die als Randwerte zu benutzenden Potentialanomalien können auf den Kontinenten durch Nivellement und auf den Ozeanen durch Altimetrie bestimmt werden. Sie liegen daher in höherer Dichte vor als die Schwereanomalien.

Würde man das gravimetrische Telluroid  $\Sigma$  als Höhenbezugsfläche einführen, so ergäben sich die Höhen über dieser Bezugsfläche zu

$$h = -\frac{R}{\gamma}(g - \gamma), \quad g - \text{Schwere, } \gamma - \text{Normalschwere.} \quad (5.2)$$

Mit fortschreitender Entwicklung der Absolutgravimetrie wäre somit eine absolute Höhenbestimmung möglich.

## 6 Zusammenfassung

Da geodätische Instrumente im Allgemeinen horizontal und zentriert werden, nehmen sie neben der Geometrieinformation auch die angeheftete Schwereinfor-

mation auf. Neben der gebräuchlichen geometrischen Betrachtung einer Messanordnung ist die damit verbundene schwerefeldbezogene Betrachtung mathematisch völlig gleichwertig. Beide Betrachtungsweisen entsprechen der Sicht der gleichen Messanordnung aus unterschiedlichen Perspektiven. Diese unterschiedlichen Perspektiven können durch projektive Korrelationen ineinander überführt werden. Werden diese Korrelationen geeignet gewählt, so kann ein bestehender Mangel an geometrischen Informationen durch einen Überschuss an schwerefeldbezogenen Informationen kompensiert werden und umgekehrt.

## Literatur

- Grafarend, E., Heck, B. und Knickmeyer, E. (1985): The free versus fixed geodetic boundary value problem for different combinations of geodetic observables. *Bulletin Géodésique* 59:11–32.
- Heck, B. (1988): On the non-linear geodetic boundary value problem for a fixed boundary surface. *Bulletin Géodésique* 62:57–67.
- Heck, B. (2003): On Helmert's methods of condensation. *Journal of Geodesy* 77:155–170.
- Heck, B. und Seitz, K. (2003): Solutions of the linearized geodetic boundary value problem for an ellipsoidal boundary to order  $e^3$ . *Journal of Geodesy* 77:182–192.
- Lie, S. und Scheffers, G. (1896): Geometrie der Berührungstransformationen. B.G. Teubner, Leipzig.
- Plücker, J. und Clebsch, A. (1868): Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. B.G. Teubner, Leipzig.
- Sansò, F. (1978): Molodensky's problem in gravity space: A review of the first result. *Bulletin Géodésique* 52:59–70.