

# Die Karlsruher Tesseroidmethode

**Kurt Seitz und Thomas Grombein**

Geodätisches Institut, Karlsruher Institut für Technologie  
E-Mail: kurt.seitz@kit.edu, thomas.grombein@kit.edu

## Zusammenfassung

Die Wirkungen von Massen im System Erde haben eine wichtige Bedeutung in der Erdsystemforschung. Hierbei ist zum einen die Modellierung von Massenverlagerungen erforderlich um dynamische Prozesse in einen stationären Zustand abzubilden. Zum anderen ist es auch von zentraler Bedeutung Funktionale des Erdschwerefeldes, welche von unterschiedlichen Massen (Atmosphäre, Eis, Topographie etc.) abhängig sind, zu glätten und somit einer geeigneten Modellbildung zuzuführen. Dies wird durch die Reduktion von Masseneffekten realisiert.

In den Geowissenschaften Geophysik und Geodäsie handelt es sich insbesondere um topographische und isostatische Massen, die modelliert und reduziert werden. Die dazu erforderlichen Gelände- und Dichtemodelle werden in zunehmend höherer Genauigkeit und Auflösung bereitgestellt. Hierzu muss auch die entsprechende Modellbildung stets verifiziert werden, ob sie noch den steigenden Anforderungen hinsichtlich Genauigkeit und Effizienz bei der numerischen Umsetzung gerecht wird.

In diesem Kontext sind Bernhard Heck wertvolle Weiterentwicklungen in der Modellbildung zuzuschreiben. Insbesondere hat er eine echte sphärische Diskretisierung der Massenelemente in Form von Tesseroiden motiviert und vorangebracht.

## 1 Motivation

Die Modellierung von Massenwirkungen auf das Gravitationspotential und dessen partiellen Ableitungen hat vielseitige Anwendungen in der Physikalischen Geodäsie und der Geophysik. Von zentraler Bedeutung ist die Elimination topographischer und isostatischer Anteile aus gemessenen Funktionalen des Schwerefeldes der Erde. Diese Reduktionen haben als Zielsetzung die Glättung von Funktionalen um ihre analytischen und numerischen Eigenschaften bei Interpolationsaufgaben zu verbessern. Des weiteren werden gewisse Randwerte der Physikalischen Geodäsie mit Hilfe dieser Reduktionen aufbereitet, damit sie für entsprechende Integrale als Randwerte verwendet werden können. Digitale Gelände- sowie Dichtemodelle bilden die Grundlage hierfür.

Bei der klassischen Randwertaufgabe nach Stokes (Stokes, 1849) wird das Geoid als Randfläche eingeführt, weshalb die Randwerte (skalare Schwereanomalien) bzw. die an der physischen Oberfläche gemessenen Schwerewerte auf die mathematische Randfläche (Geoid) zu reduzieren sind. Dabei werden topographische und isostatische Reduktionen angewendet (Heiskanen und Moritz, 1967, Kap. 3). Obwohl in der alternativen Vorgehensweise von Molodenskii (Molodenskii u. a., 1962) zur Lösung der geodätischen Randwertaufgabe gerade keine Massenreduktionen vorgesehen sind, da mit ihnen Dichtehypothesen verbunden wären, treten in der praktischen Realisierung Reduktionen zutage (vergl. Heck und Seitz, 2016). So sind bei der Berechnung der Molodenskii-Terme (Denker und Tziavos, 1999) intensive Massenreduktionen erforderlich, ebenso wie bei



der Behandlung der sogenannten planaren Approximation (Moritz, 1980; Müßle u. a., 2014). Die im Rahmen der Gradiometrie-Mission GOCE gemessenen zweiten Ableitungen des Gravitationspotentials der Erde sollten vor einer Weiterverarbeitung geglättet werden, was einen enormen numerischen Aufwand erfordert. Hier bietet sich eine effiziente Berechnung mittels Tesseroiden an (Grombein u. a., 2014b; Janák u. a., 2012).

## 2 Das Tesseroid

Die numerische Auswertung von Massenwirkungen erfordert die geometrische Diskretisierung der felderzeugenden Massen. Dazu wurden klassischer Weise Punktmassen, Massenlinien (Tsoulis, 1999, 2012) oder Quader (Mader, 1951) verwendet. Letztere werden auch als Prismen oder flat top prisms in der Literatur bezeichnet (Nagy, 1966; Nagy u. a., 2000, 2002). Die Verwendung von allgemeinen prismatischen Körpern wird in Petrović (1996) vorgestellt.

Im Folgenden wird die Diskretisierung von Massenverteilungen mittels *Tesseroiden* erläutert. Es wird die analytische Darstellung der Potentialwirkung eines Tesseroids mit ihren ersten und zweiten partiellen Ableitungen sowie die numerische Auswertung der Tesseroidformeln dargelegt. Die analytische Form (Tesseroidformeln), so wie sie heute unter zahlreichen Nutzern verbreitet ist, wurde von Bernhard Heck vorgeschlagen und die Ausarbeitung ihrer analytischen Darstellung von ihm wissenschaftlich begleitet.

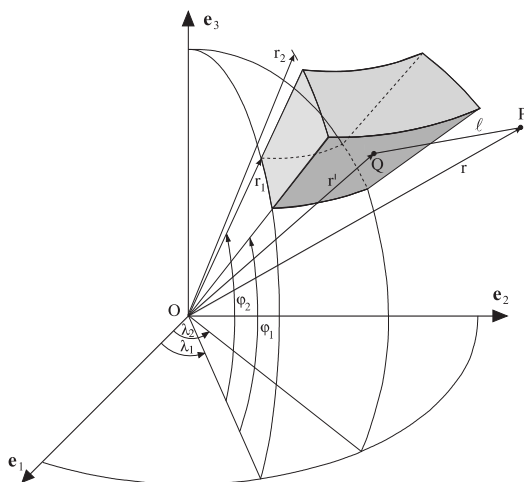


Abbildung 2.1: Geometrie eines sphärischen Tesseroids (Heck und Seitz, 2007).

### 2.1 Geometrie eines Tesseroids

Die sphärische Diskretisierung eines Volumenelements wird erstmals in Anderson (1976) als Tesseroid bezeichnet. In Abbildung 2.1 ist ein sphärisches Tesseroid dargestellt. Seine Parametrisierung erfolgt im erdfesten Äquatorsystem, das durch die Basisvektoren  $\mathbf{e}_i$  aufgespannt ist. Die östliche und westliche Begrenzungsflächen eines sphärischen Tesseroids sind durch Meridianebenen in den Längen  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  gegeben. Die nördliche sowie südliche Begrenzung ist durch die Oberfläche eines Kegels mit dem Öffnungswinkel  $\pi/2 - \varphi_1$  bzw.  $\pi/2 - \varphi_2$  festgelegt. Die geozentrische Breite ist mit  $\varphi$  bezeichnet. Die Grund- und Deckfläche sind durch Kugeloberflächen von konzentrischen Kugeln mit den Radien  $r_1$  und  $r_2$  definiert. Daraus folgen die Dimensionen eines Tesseroids in sphärischen Koordinaten zu

$$\begin{aligned} \Delta r &= r_2 - r_1, \\ \Delta\varphi &= \varphi_2 - \varphi_1 \quad \text{sowie} \\ \Delta\lambda &= \lambda_2 - \lambda_1. \end{aligned} \quad (2.1)$$

### 2.2 Das Potential eines Tesseroids

Die Wirkung eines massegefüllten Tesseroids mit der homogenen Dichte  $\rho$  wird über das Newton-Integral (Heiskanen und Moritz, 1967, S. 14)

$$v(r, \varphi, \lambda) = G\rho \int_{r'=r_1}^{r_2} \int_{\varphi'=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\lambda'=\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{1}{\ell} dr' d\varphi' d\lambda' \quad (2.2)$$

dargestellt. Die geozentrische Gravitationskonstante ist mit  $G$  bezeichnet. Der Euklidische Abstand  $\ell$  zwischen dem Berechnungspunkt  $P(r, \varphi, \lambda)$  und dem variablen Integrationspunkt  $Q(r', \varphi', \lambda')$  kann aus deren sphärischen Koordinaten mit dem ebenen Kosinussatz dargestellt werden (Bronstein u. a., 2008, S. 137):

$$\ell(P, Q) = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi}. \quad (2.3)$$

Hierbei bezeichnet  $\psi$  die sphärische Distanz zwischen  $P$  und  $Q$  und berechnet sich aus dem sphärischen Kosinussatz (Bronstein u. a., 2008, S. 160):

$$\cos \psi = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos (\lambda' - \lambda). \quad (2.4)$$

Mit Gleichung (2.3) resultiert aus (2.2) die Potentialdarstellung

$$v(r, \varphi, \lambda) = G\rho \int_{r'=r_1}^{r_2} \int_{\varphi'=\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\lambda'=\lambda_1}^{\lambda_2} K(P, Q) dr' d\varphi' d\lambda' \quad (2.5)$$

mit dem Integralkern

$$K(P, Q) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi}}. \quad (2.6)$$

Dieser Integralkern ist prinzipiell über  $r'$  integrierbar (Martinec, 1998). Bezüglich der Variablen  $\varphi'$  und  $\lambda'$  stellt (2.5) jedoch ein elliptisches Integral dar, für das keine analytische Lösung existiert.

### 2.3 Lösung des Newton-Integrals mit der Karlsruher Tesseroidmethode

Die Karlsruher Tesseroidmethode basiert auf der Idee den Integranden in Gleichung (2.5), also den Integralkern (2.6), in eine Taylor-Reihe zu entwickeln und die Reihenterme anschließend gliedweise zu integrieren (Heck und Seitz, 2007). Die Taylor-Reihenentwicklung wird im geometrischen Mittelpunkt  $Q_0$  des Tesseroids angesetzt (vergleiche Abbildung 2.1 und Deng u. a., 2016)

$$K(P, Q) = \sum_{i,j,k} \frac{K_{ijk}(P, Q_0)}{i!j!k!} \times (r' - r_0)^i (\varphi' - \varphi_0)^j (\lambda' - \lambda_0)^k \quad (2.7)$$

mit den Koordinaten des Entwicklungspunktes  $Q_0$ :

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{1}{2} (r_1 + r_2), \\ \varphi_0 &= \frac{1}{2} (\varphi_1 + \varphi_2) \quad \text{und} \\ \lambda_0 &= \frac{1}{2} (\lambda_1 + \lambda_2). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Die partiellen Ableitungen des Integralkerns sind im Entwicklungspunkt  $Q_0$  auszuwerten:

$$K_{ijk}(P, Q_0) := \left. \frac{\partial^{i+j+k} K(P, Q)}{\partial r'^i \partial \varphi'^j \partial \lambda'^k} \right|_{\substack{r' = r_0 \\ \varphi' = \varphi_0 \\ \lambda' = \lambda_0}}. \quad (2.9)$$

Dadurch dass der geometrische Mittelpunkt des Tesseroids als Taylor-Punkt gewählt wird, werden alle

Teilintegrale mit ungerader Potenz des entsprechenden Taylor-Terms der partiellen Ableitungen zu Null.

#### Tesseroidformeln 3ter-Ordnung

Wird die Taylor-Reihenentwicklung für den Integralkern (2.7) nach den Termen 2ter-Ordnung abgebrochen, so resultiert nach der Integration die Taylor-Formel 3ter-Ordnung für die Potentialwirkung eines homogenen Tesseroids:

$$\begin{aligned} v(r, \varphi, \lambda) &= G\rho \Delta r \Delta \varphi \Delta \lambda \left[ K_{000} + \right. \\ &+ \frac{1}{24} \left( K_{200} \Delta r^2 + K_{020} \Delta \varphi^2 + K_{002} \Delta \lambda^2 \right) \\ &\left. + O\left(\Delta^4 / \ell_0^5\right) \right], \end{aligned} \quad (2.10)$$

wobei das Landau-Symbol  $O(\Delta^4 / \ell_0^5)$  die Fehlerordnung angibt.

In gleicher Weise werden die skalare (Heck und Seitz, 2007) und die vektorielle Schwerewirkung (Wild-Pfeiffer, 2007, 2008; Grombein u. a., 2010b) sowie die Elemente des Marussi-Tensors (Gravitations-Gradienten) (Wild-Pfeiffer, 2007, 2008; Grombein u. a., 2010b) hergeleitet. Von Grombein u. a. (2013) wurden darüber hinaus auch Formeln in kartesischen Koordinaten hergeleitet, die sich hinsichtlich ihrer numerischen Eigenschaften auszeichnen. Des weiteren weisen sie an den Polen keine Singularitäten auf, was eine weitere wichtige Eigenschaft dieser Entwicklungen ist.

Details der hier skizzierten Vorgehensweise sowie die partiellen Ableitungen der jeweiligen Integralkerne sind ausführlich in Heck und Seitz (2007), Wild-Pfeiffer (2008) und Grombein u. a. (2013) dargelegt.

Die entsprechenden (sphärischen) Formeln können ohne signifikanten Genauigkeitsverlust auch für ellipsoidische Tesseroiden angewendet werden. Dazu muss lediglich die geographische Breite  $\phi$  in die geozentrische Breite  $\varphi$  mit Hilfe der ersten numerischen Exzentrizität  $e'$  umgerechnet werden (siehe Heck, 1995, S. 70, (3.27b)):

$$\varphi = \frac{1}{1 + e'^2} \tan \phi. \quad (2.11)$$

In Abbildung 2.2 ist der Approximationsfehler für das Potential für ein Tesseroid der Ausdehnung  $5' \times 5' \times 2$  km mit einer homogenen Dichte von  $\rho = 2670$  kg m<sup>-3</sup> ausgewertet. Der Berechnungspunkt befindet sich 2 km Höhe über dem Pol.

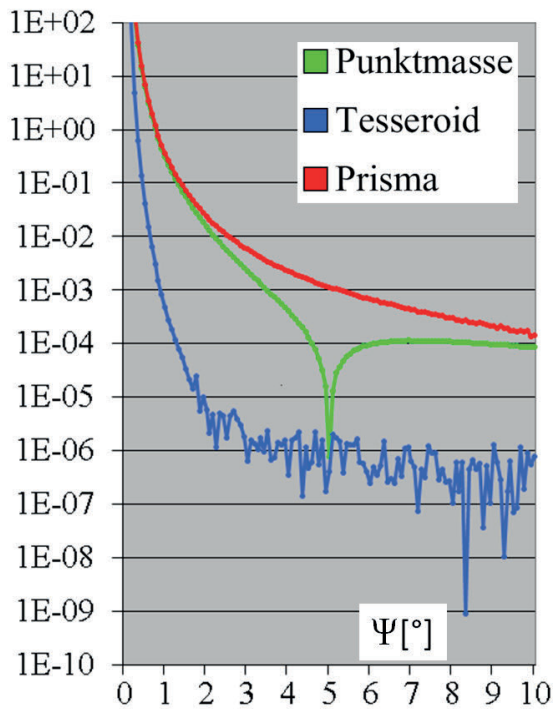


Abbildung 2.2: Approximationsfehler für die Schwerewirkung eines Tesseroids (Seitz u. a., 2004b,c)

**Tesseroidformeln 1ter-Ordnung**

Wird die Approximation 0ter-Ordnung für den Integralkern (2.7) verwendet, so lautet die resultierende Darstellung mit  $(i = j = k = 0)$

$$v(r, \varphi, \lambda) = G\rho\Delta r\Delta\varphi\Delta\lambda \cdot K_{000} + O\left(\Delta^2/\ell_0^5\right). \quad (2.12)$$

Der Taylor-Reihenterm  $K_{000}$  ist in  $Q_0$  auszuwerten und ist aber auch von  $P$  abhängig:

$$K_{000} = K(P, Q_0) = \frac{1}{\sqrt{r_P^2 + r_0^2 - 2r_P r_0 \cos \psi_0}}. \quad (2.13)$$

Die sphärische Distanz zwischen  $P$  und  $Q_0$  lautet:

$$\begin{aligned} \cos \psi_0 &= \sin \varphi_P \sin \varphi_0 \\ &+ \cos \varphi_P \cos \varphi_0 \cos (\lambda_P - \lambda_0). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Diese Stufe (2.14) der Approximation der Massenwirkung eines Tesseroids entspricht einer numerischen Integration mit einer Gauss-Legendre-Kubaturformel 1ter-Ordnung. Sie ist mit einer Punktmassenapproximation identisch. Zur numerischen Lösung von Integralen im Kontext der Physikalischen Geodäsie und der dabei erforderlichen Approximation des Integralkerns siehe Hirt u. a. (2011).

**3 Historie der Tesseroidmethode am GIK**

Wie in Kapitel 2.1 angesprochen, geht die Bezeichnung eines sphärischen Volumenelements als Tesseroid auf Anderson (1976) zurück.

Am GIK wurde das Tesseroid erstmals in den Dissertationen von Grüniger (1990) und Kuhn (2000) zur Modellierung und Berechnung von topographischen und isostatischen Effekten eingesetzt, allerdings noch in der Approximation 1ter-Ordnung (siehe Abschnitt 2.3), d. h. das Integral (2.5) wurde mittels der Reihenentwicklung 0ter-Ordnung für den Integralkern (2.7) angenähert. Die Potentialwirkung berechnet sich mit Gleichung (2.12).

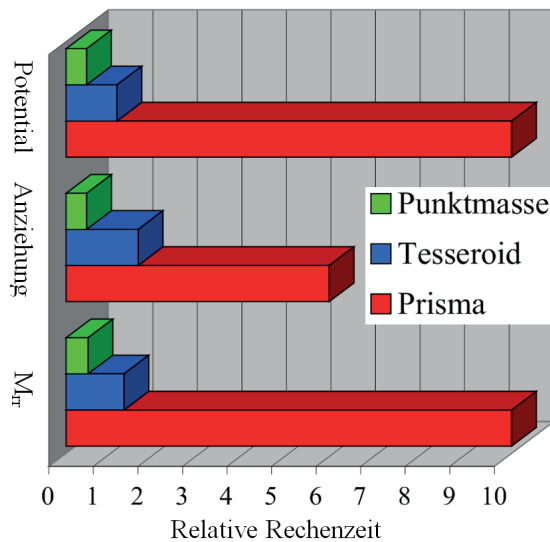


Abbildung 3.1: Vergleich der erforderlichen (relativen) Rechenzeit mit Tesseroid, Prisma oder Punktmasse, um Potential, Anziehung und Gravitationsgradient  $M_{rr}$  zu berechnen (Seitz u. a., 2004b,c)

Schon in diesen Dissertationen wurde darauf hingewiesen, dass der immens hohe Rechenaufwand bei Verwendung der klassischen Prismen/Quaderformel (Mader, 1951) durch alternative Verwendung von Tesseroiden deutlich reduziert werden könnte. Die hohe Rechenzeitkosten bei Verwendung der Quaderformeln ist den darin auftretenden intrinsischen Tangens-, Arcus-Tangens- und Wurzelfunktionen zuzuschreiben. Diese treten bei den Tesseroidformeln nicht auf. Ein Rechenzeitvergleich bei der Auswertung von Potentialeffekt und Schwerewirkung wurde in Heck und Seitz (2007) vorgenommen. Abbildung 3.1 zeigt den signifikanten Vorteil bei der Rechenzeit unter Verwendung von Tesseroidformeln an Stelle von Prismen. Dieser Vorteil konnte durch die optimierten Tesseroidformeln

von Grombein u. a. (2013), welche in kartesischen Koordinaten formuliert sind, noch weiter zu Gunsten des Tesseroids vergrößert werden.

Durch die Anregung von Bernhard Heck begannen ab dem Jahre 2000 die intensiven Untersuchungen zur Massenmodellierung mittels Tesseroiden. In der Folge wurden die Tesseroidformeln für die Potentialwirkung von Heck und Seitz (2000) bei der Geodätischen Woche (GW) in Potsdam präsentiert. Danach wurden erstmals die Tesseroidformeln sowohl für das Potential als auch für die skalare gravitative Wirkung eines sphärischen Tesseroids bei der IAG-Tagung in Budapest von Seitz und Heck (2001b) vorgestellt.

Es folgten weitere Vorträge (V) und Posterpräsentationen (P) bei denen die numerische Effizienz, Anwendungsmöglichkeiten, aber auch das Problem der numerischen Instabilität der Reihenentwicklung falls der Berechnungspunkt  $P$  direkt auf der Oberfläche des Tesseroids liegt ( $r_P = r_2$ ), diskutiert wurden:

- Seitz und Heck (2001a, GW Köln, (V))
- Heck und Seitz (2001, EGS Nizza, (V))
- Seitz und Heck (2002, GW Frankfurt, (V))
- Heck und Seitz (2002, EGS Nizza, (V))
- Seitz und Heck (2003a, EGS Nizza, (P))
- Seitz und Heck (2003b, IUGG Sapporo, (P))
- Seitz u. a. (2004b, GGSM Porto, (P))
- Seitz u. a. (2004c, GW Stuttgart, (P))
- Seitz u. a. (2005, GW Düsseldorf, (P))
- Heck u. a. (2005a, EGU Wien, (V))
- Heck u. a. (2005b, DGG Graz, (V))
- Heck u. a. (2005c, GW Düsseldorf, (V))
- Seitz und Heck (2006, GW München, (V))
- Wild-Pfeiffer (2008, IUGG Perugia, (P))
- Seitz und Heck (2008, GW Bremen, (P))
- Heck und Seitz (2008, EGU Wien, (V))
- Grombein u. a. (2009, GW Karlsruhe, (V))
- Grombein u. a. (2010a, GW Köln, (V))
- Grombein u. a. (2011, IUGG Melbourne, (V))
- Grombein u. a. (2012, EGU Wien, (P))
- Müßle u. a. (2012, GW Hannover, (V))

Die Tensorelemente eines Tesseroids wurden in sphärischen Koordinaten von Wild-Pfeiffer (2007) hergeleitet. Des weiteren finden sich diesbezüglich interessante Aspekte in Wild-Pfeiffer und Heck (2007). Auf der Basis dieser Tesseroidformeln wurden intensive Voruntersuchungen für eine Schwerefeldmission vom Typ GOCE durchgeführt (Wild und Heck, 2008; Wild-Pfeiffer, 2008; Wild-Pfeiffer u. a., 2008; Janák u. a., 2012). Aspekte bei der rechentechnischen Umsetzung der zweiten Ableitungen des Gravitationspotentials

werden in Wild-Pfeiffer u. a. (2007) diskutiert.

Eine Darstellung der Tesseroidformeln für die ersten und zweiten Ableitungen, bei denen an den Polen keine Singularitäten auftreten, wurde von Grombein u. a. (2013) vorgelegt. Untersuchungen zur effizienten Berechnung topographischer Effekte auf den Gradiententensor am Fallbeispiel der Satellitengradiometrie-mission GOCE wurde in Grombein u. a. (2010b, 2011, 2014 b,c) vorgenommen. Numerische Untersuchungen zum Glättungsverhalten an Realdaten von GOCE wurden in Grombein u. a. (2014a) unter zusätzlicher Anwendung einer Wavelet-Analyse durchgeführt. Die Dissertation von Grombein (2017) enthält u. a. die Herleitung der optimierten Tesseroidformeln und zeigt die Effizienz in der numerischen Umsetzung sowie mögliche Anwendungsfelder auf. Im REAL-GOCE Projekt wurden die gemessenen zweiten Ableitungen des Gravitationspotentials durch Reduktion topographischer und isostatischer Effekte unter Anwendung der Tesseroidformeln geglättet (Grombein u. a., 2014 a,b).

Extensive Anwendung erfuhren die Tesseroidformeln bei der Berechnung der globalen Rock-Water-Ice(RWI)-Kugelfunktionsmodelle (Grombein u. a., 2014a, 2015, 2016a) zur Darstellung der topographischen und isostatischen Effekte bis Grad und Ordnung  $N = 2190$ , was international Anklang gefunden hat und die auf der Internetseite des International Centre for Global Earth Models (ICGEM, 2018) verfügbar sind.

Durch immer genauere und auch höher auflöste digitale Geländemodelle (DGMs) wächst der Rechenaufwand enorm. So werden im Rahmen des Quasigeoidprojekts am Lehrstuhl von Bernhard Heck mit dem Landesamt für Geoinformation und Landentwicklung in Baden-Württemberg (LGL) stetig neue Versionen einer regionalen Quasigeoidlösung für Baden-Württemberg erzeugt (Seitz u. a., 2004a). Sie haben immer die aktuellsten DGMs und Schwerewerte als Datengrundlage (Seitz u. a., 2009a,b). Allein der Austausch des DGMs für den Nahbereich von  $50 \text{ m} \times 50 \text{ m}$  auf das hochaufgelöste  $10 \text{ m} \times 50 \text{ m}$  DGM hat eine Steigerung der Rechenzeit um den Faktor 25 zur Folge. Dabei kommen optimierte Tesseroidformeln sowohl im remove-Schritt als auch im restore-Schritt zum Einsatz (Forsberg, 1984; Forsberg und Tscherning, 1997). In internationalen Kooperationen zum Thema spektrale Erweiterung (Hirt u. a., 2014), Vorwärtsmodellie-

zung im Orts- und Frequenzbereich (Kuhn und Seitz, 2003, 2005), der Berechnung eines Geoidmodells für Afrika (Abd-Elmotaal u. a., 2016a,b), einer Quasigeoid Lösung für Nordeuropa (Farahani u. a., 2017) sowie der inversen Modellierung von hydrologischen Phänomenen mittels Tesseroiden (Ferreira u. a., 2016), um nur einige zu nennen, wurden und werden die Tesseroidprogramme des GIK erfolgreich eingesetzt.

Die zahlreichen studentischen Arbeiten zu der hier erläuterten Thematik der Vorwärtsmodellierung topographischer und isostatischer Effekte mittels der Tesseroidmethode machen deutlich, dass am Lehrstuhl von Bernhard Heck Forschung und Lehre ineinander greifen. So hat Hermann Bähr in seiner Studienarbeit eine Bouguerkarte für das Saarland berechnet die bei der EUCOR-URGENT-Tagung 2008 vorgestellt wurde (Seitz u. a., 2008). Von Müßle (2011) und Müßle u. a. (2013) wurde die Kernfunktion für Potential- und Schwerewirkung eines Tesseroids, wie in Abschnitt 2.2 angedeutet, radial integriert, bevor die Reihenentwicklung in Richtung  $\varphi$  und  $\lambda$  ausgeführt wird. Analytische Aspekte wurden von Grombein u. a. (2010b) untersucht und dabei eine optimierte Darstellung der Tesseroidformeln für das Potential, den vektoriellen Schwereeinfluss und den tensoriellen Gravitationsgradienten entwickelt. Erste Ansätze zur inversen Tesseroidmodellierung wurden in Grombein u. a. (2012) präsentiert und in den Bachelor-Arbeiten Fuhrmann (2014) und Härter (2016) weitergeführt. Dabei wurden aus differentiellen Monatslösungen (Dezember 2008) für das Gravitationsfeld der Erde (siehe Abbildung 3.2 (a)), die in einer Höhe von 250 km synthetisiert wurden, die Höhen der für die Unterschiede in den Lösungen verantwortlichen Wassersäulen über Australien geschätzt (siehe Abbildung 3.2 (b)). Aus diesen geschätzten Wassermassen wurde das zugehörige Po-

tential wieder durch Vorwärtsrechnung generiert und mit den Ausgangsdaten verglichen. Die Residuen sind in Abbildung 3.2 (c) dargestellt und sind dem Betrag nach kleiner als  $10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ .

Diese vielversprechenden Resultate der inversen Tesseroidmodellierung können im Rahmen der Neuausrichtung des Lehrstuhls von Bernhard Heck in Richtung Geodätischer Erdsystemwissenschaft vertieft werden.

In Diplom- bzw. Masterarbeiten wurde die Tesseroidmethode für rechenintensive Massenreduktionen eingesetzt. Von Müßle (2013) und Müßle u. a. (2014) wurde die Tesseroidmethode bei der Behandlung der sogenannten planaren Approximation verwendet um die Molodenskii-Terme zu berechnen. Bei der Behandlung der Vereinigung regionaler Höhensysteme zu einem globalen Höhendatum wurde eine fixe Randwertaufgabe formuliert (Porz, 2015; Porz u. a., 2017). Auch hier wurden residuale topographische Effekte mittels Tesseroiden ausgewertet (Grombein u. a., 2016b, 2017). Beim Vergleich der Berechnungsweise von topographischen Effekten durch Vorwärtsmodellierung im Frequenz- bzw. Ortsbereich wurde von Schmitz (2017) von der Tesseroidmethode intensiv Gebrauch gemacht.

## 4 Externe Sichtbarkeit der Karlsruher Tesseroidmethode

Parameter, an dem der Impact einer Publikation festgemacht werden kann, sind die Anzahl der Downloads und die Häufigkeit ihrer Zitierung. Die Publikation von Heck und Seitz (2007) wurde bis heute 792 von der Internetseite des J Geod heruntergeladen und 83 mal zitiert.

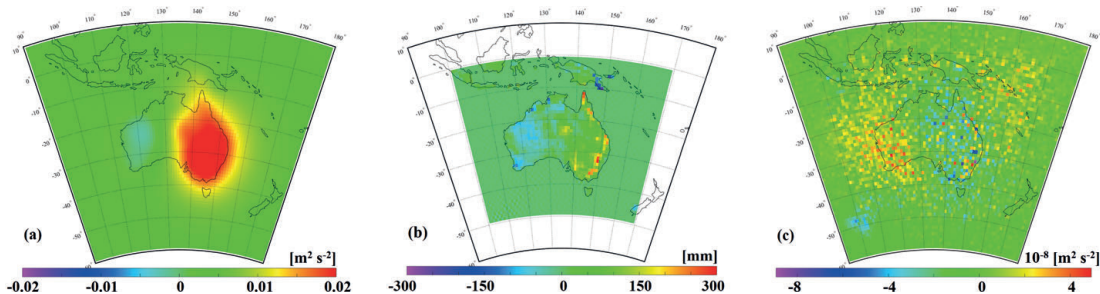


Abbildung 3.2: Schätzung von Wassersäulen aus einem inversen Tesseroidansatz über Australien (Härter, 2016). (a) Potentialänderung, (b) geschätzte Höhen der Wassersäulen, (c) Residuen auf Potentialebene

Die Approximation für das Potential eines Tesseroids wird in Shen und Deng (2016) bis zur 5ten-Ordnung erweitert. Die zweiten Ableitungen werden ebenfalls bis zur 5ten-Ordnung in sphärischen Koordinaten (Deng und Shen, 2017) und in kartesischen Koordinaten (Deng und Shen, 2018) unter Anwendung der Karlsruher Methode veröffentlicht. Ebenso wurde das Tesseroidkonzept von Uieda u. a. (2016) im geophysikalischen Kontext adaptiert. In Marotta und Barzaghi (2017) wird die Tesseroidmethode modifiziert. Dabei wird unter hohem Rechenaufwand jedes Tesseroid in das System sphärischer Polarkoordinaten des Berechnungspunkts transformiert. Die Lösung des sphärischen Integrals durch Gauss-Legendre Quadrat (2.2) wird u. a. in Roussel u. a. (2015) diskutiert.

## 5 Ausblick

Die Erfolgsgeschichte der Karlsruher Tesseroidmethode wurde durch Bernhard Heck initiiert und wissenschaftlich begleitet. Bislang beschränkte sich die Diskretisierung mittels Tesseroiden auf topographische und isostatische Massen.

Die Erweiterung der Tesseroidmodellierung auf hydrologische oder atmosphärische Massenwirkungen befinden sich in Planung. Eine strenge ellipsoidische Modellierung der Methode ist möglich. Die Ursache der numerischen Instabilität der Tesseroidformeln im unmittelbaren Nahfeld ist noch nicht zufriedenstellend geklärt. Zukünftige Schwerefeldmissionen erfordern möglicherweise die Berechnung der topographischen und isostatischen Effekte auf die dritten Ableitungen.

## Literatur

- Abd-Elmotaal, H. A., Ashry, M., Seitz, K. und Heck, B. (2016a): Effect of Victoria Lake on Gravity Reduction and Geoid Determination in Africa. GGHS, Thessaloniki, 19.-23. September 2016.
- Abd-Elmotaal, H. A., Seitz, K., Abd-Elbaky, M. und Heck, B. (2016b): Tailored Reference Geopotential Model for Africa. In: *IAG 150 Years: Proceedings of the IAG Scientific Assembly in Postdam, Germany, 2013*. Hrsg. von C. Rizos und P. Willis. Cham: Springer International Publishing, S. 383–390. DOI: 10.1007/1345\_2015\_84.
- Anderson, E. G. (1976): The effect of topography on solutions of Stokes' problem. Unisurv S-14, Report. School of Surveying, University of New South Wales, Australia.
- Bronstein, I. N., Semendjajew, K. A., Musiol, G. und Mühlig, H. (2008): Taschenbuch der Mathematik. Verlag Harri Deutsch.
- Deng, X.-L., Grombein, T., Shen, W.-B., Heck, B. und Seitz, K. (2016): Corrections to "A comparison of the tesseroid, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modelling" (Heck and Seitz, 2007) and "Optimized formulas for the gravitational field of a tesseroid" (Grombein et al., 2013). *Journal of Geodesy* 90(6):585–587. DOI: 10.1007/s00190-016-0907-8.
- Deng, X.-L. und Shen, W.-B. (2017): Evaluation of gravitational curvatures of a tesseroid in spherical integral kernels. *Journal of Geodesy* 2017. DOI: 10.1007/s00190-017-1073-3.
- Deng, X.-L. und Shen, W.-B. (2018): Evaluation of Optimal Formulas for Gravitational Tensors up to Gravitational Curvatures of a Tesseroid. *Surveys in Geophysics* 2018. DOI: 10.1007/s10712-018-9460-8.
- Denker, H. D. und Tziavos, I. N. T. (1999): Investigation of the Molodensky series terms for terrain reduced gravity field data. *Bollettino di Geofisica Teorica ed Applicata* 40(3-4):195–203.
- Farahani, H. H., Slobbe, D. C., Klees, R. und Seitz, K. (2017): Impact of accounting for coloured noise in radar altimetry data on a regional quasi-geoid model. *Journal of Geodesy* 91(1):97–112. DOI: 10.1007/s00190-016-0941-6.
- Ferreira, V. G., Heck, B., Seitz, K. und Grombein, T. (2016): Using tesseroid mascons to improve the estimations of water-mass variations with GRACE. EGU-Tagung, Wien, 17.-22. April 2015.
- Forsberg, R. (1984): A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling. Report 355. Department of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus, USA.
- Forsberg, R. und Tscherning, C. C. (1997): Topographic effects in gravity field modelling for BVP. In: Sansò, F., und Rummel, R. (Hrsg.) Geodetic boundary value problems in view of the one centimeter geoid, *Lecture Notes in Earth Sciences*, vol. 65. Springer Berlin Heidelberg, S. 239–272. DOI: 10.1007/BFb0011707.
- Fuhrmann, C. (2014): Numerische Untersuchungen zu den RTM-Effekten auf die Höhenanomalie. BA im Studiengang Geodäsie und Geoinformatik am GIK/KIT, Karlsruhe, (unveröffentlicht).
- Grombein, T. (2017): Gravity forward modeling with a tesseroid-based Rock-Water-Ice approach – Theory and applications in the context of the GOCE mission and height system unification. *Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik*, no. 2017,1. Karlsruhe Institute of Technology (KIT), KIT Scientific Publishing, Karlsruhe. DOI: 10.5445/KSP/1000068500.
- Grombein, T., Luo, X., Seitz, K. und Heck, B. (2014a): A wavelet-based assessment of topographic-isostatic reductions for GOCE gravity gradients. *Surveys in Geophysics* 35(4):959–982. DOI: 10.1007/s10712-014-9283-1.
- Grombein, T., Seitz, K., Awange, J. L. und Heck, B. (2012): Detection of hydrological mass variations by means of an inverse tesseroid approach. EGU-Tagung, Wien, 22.-27. April 2012.
- Grombein, T., Seitz, K. und Heck, B. (2016a): The Rock-Water-Ice topographic gravity field model RWL\_TOPO\_2015 and its comparison to a conventional rock-equivalent version. *Surveys in Geophysics* 37(5):937–976. DOI: 10.1007/s10712-016-9376-0.
- Grombein, T., Seitz, K. und Heck, B. (2016b): Height system unification based on the fixed GBVP approach. In: Rizos, C., und Willis, P. (Hrsg.) IAG 150 years, *International Association of Geodesy Symposia*, vol. 143. Springer Berlin Heidelberg, S. 305–311. DOI: 10.1007/1345\_2015\_104.
- Grombein, T., Seitz, K. und Heck, B. (2009): Optimierte Tesseroidformeln zur Berechnung topographischer Effekte auf den Gradiententensor. Geodätische Woche, Karlsruhe, 22.-24. September 2009.
- Grombein, T., Seitz, K. und Heck, B. (2010a): Einfluss von Dichteanahmen auf die Modellierung topographischer Effekte. Geodätische Woche, Köln, 05.-07. Oktober 2010.
- Grombein, T., Seitz, K. und Heck, B. (2010b): Untersuchungen zur effizienten Berechnung topographischer Effekte auf den Gradiententensor am Fallbeispiel der Satellitengradiometriemission GOCE. *Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik*, no. 2010,1. Karlsruhe Institute of Technology (KIT), KIT Scientific Reports 7547, Karlsruhe.
- Grombein, T., Seitz, K. und Heck, B. (2011): Topographic-isostatic reduction of GOCE gravity gradients. IUGG, Melbourne, 28. Juni - 07. Juli 2011.
- Grombein, T., Seitz, K. und Heck, B. (2013): Optimized formulas for the gravitational field of a tesseroid. *Journal of Geodesy* 87(7):645–660. DOI: 10.1007/s00190-013-0636-1.

- Grombein, T., Seitz, K. und Heck, B. (2014b): Incorporating Topographic-Isostatic Information into GOCE Gravity Gradient Processing. In: *Observation of the System Earth from Space - CHAMP, GRACE, GOCE and future missions: GEOTECHNOLOGIEN Science Report No. 20*. Hrsg. von F. Flechtner, N. Sneeuw und W.-D. Schuh. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, S. 95–101. DOI: 10.1007/978-3-642-32135-1\_12.
- Grombein, T., Seitz, K. und Heck, B. (2014c): Topographic-isostatic reduction of GOCE gravity gradients. IAG Symp, vol 139, 349–356. DOI: 10.1007/978-3-642-37222-3\_46.
- Grombein, T., Seitz, K. und Heck, B. (2015): RWI\_TOPO\_2015: An update of the Rock-Water-Ice topographic gravity field model of the Earth up to degree and order 2190. IUGG, Prague, 22. Juni - 02. Juli 2015.
- Grombein, T., Seitz, K. und Heck, B. (2017): On high-frequency topography-implied gravity signals for height system unification using GOCE-based global geopotential models. *Surveys in Geophysics* 38(2):443–477. DOI: 10.1007/s10712-016-9400-4.
- Grüninger, W. (1990): Zur topographisch-isostatischen Reduktion der Schwere. PhD thesis. Universität Karlsruhe, Germany.
- Härter, N. (2016): Rekonstruktion von äquivalenten Wassersäulen aus einem inversen Tesseroidansatz in einer closed-loop Simulation. BA im Studiengang Geodäsie und Geoinformatik am GIK/KIT, Karlsruhe, (unveröffentlicht).
- Heck, B. und Seitz, K. (2007): A comparison of the tesseroid, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modelling. *Journal of Geodesy* 81(2):121–136. DOI: 10.1007/s00190-006-0094-0.
- Heck, B. und Seitz, K. (2016): Molodenski – quo vadis? – Aktueller Stand und künftige Entwicklungen des Geodätischen Randwertproblems. In: Freedon, W., und Rummel, R. (Hrsg.) *Handbuch der Geodäsie, Springer Reference Naturwissenschaften*. Springer Berlin Heidelberg, S. 1–32. DOI: 10.1007/978-3-662-46900-2\_14-1.
- Heck, B. (1995): *Rechenverfahren und Auswertemodelle der Landesvermessung - Klassische und moderne Methoden*. 2. Auflage. Herbert Wichmann Verlag, Heidelberg.
- Heck, B. und Seitz, K. (2000): Die Potentialwirkung eines Tesseroids. Geodätische Woche, Potsdam, 09.-13. Oktober 2000.
- Heck, B. und Seitz, K. (2001): Gravitational attraction of a Tesseroid. EGS-Tagung, Nizza, 26.-30. März 2001.
- Heck, B. und Seitz, K. (2002): Efficient calculation of topographic reductions by the use of tesseroids. EGS-Tagung, Nizza, 21.-26. April 2002.
- Heck, B. und Seitz, K. (2008): Representation of the time variable gravity field due to hydrological mass variations by surface layer potentials. EGU-Tagung, Wien, 13.-18. April 2008.
- Heck, B., Wild-Pfeiffer, F. und Seitz, K. (2005a): A comparison of different mass elements for use in gravity gradiometry. EGU-Tagung, Wien, 24.-29. April 2005.
- Heck, B., Wild-Pfeiffer, F. und Seitz, K. (2005b): Vergleich verschiedener Massenkörper zur Modellierung der 2. Ableitungen des Schwerepotentials. 65. Jahrestagung der Deutschen Geophysikalischen Gesellschaft, Graz, 22. Februar 2005.
- Heck, B., Wild-Pfeiffer, F. und Seitz, K. (2005c): Vergleich von analytischen und numerischen Methoden zur Berechnung des Gravitationspotentials von Massenelementen und seiner ersten und zweiten Ableitungen. Geodätische Woche, Düsseldorf, 04.-06. Oktober 2005.
- Heiskanen, W. A. und Moritz, H. (1967): *Physical geodesy*. W. H. Freeman & Co., San Francisco, USA.
- Hirt, C., Featherstone, W. E. und Claessens, S. J. (2011): On the accurate numerical evaluation of geodetic convolution integrals. *Journal of Geodesy* 85(8):519–538. DOI: 10.1007/s00190-011-0451-5.
- Hirt, C., Kuhn, M., Claessens, S., Pail, R., Seitz, K. und Gruber, T. (2014): Study of the Earth's short-scale gravity field using the ERTM2160 gravity model. *Computers & Geosciences* 73(Supplement C):71–80. DOI: 10.1016/j.cageo.2014.09.001.
- ICGEM (2018): International Centre for Global Earth Models. URL: <http://icgem.gfz-potsdam.de/home> (besucht am 12.01.2018).
- Janák, J., Wild-Pfeiffer, F. und Heck, B. (2012): Smoothing the gradiometric observations using different topographic-isostatic models: a regional case study. In Sneeuw et al. (eds), Proc. VII Hotine-Marussi Symposium, Rome, Italy, 2009, IAG Symposia, vol. 137, pp. 245–250, Springer, Berlin. DOI: 10.1007/978-3-642-22078-4\_37.
- Kuhn, M. (2000): Geoidbestimmung unter Verwendung verschiedener Dichtehypothesen. *Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C*, no. 520. Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften in Kommission beim Verlag C. H. Beck, Munich, Germany.
- Kuhn, M. und Seitz, K. (2003): Evaluation of Newton's integral in the space and frequency domains. IAG General Assembly Sapporo, Japan June 30 – July 11, 2003.
- Kuhn, M. und Seitz, K. (2005): Comparison of Newton's Integral in the Space and Frequency Domains. In: Sansò, F. (Hrsg.) *A Window on the Future of Geodesy*, Proceedings of the International Association of Geodesy IAG General Assembly Sapporo, Japan June 30 – July 11, 2003. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, S. 386–391. ISBN: 978-3-540-27432-2.
- Mader, K. (1951): Das Newtonsche Raumpotential prismatischer Körper und seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung. *Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, Sonderheft* 11.
- Marotta, A. M. und Barzaghi, R. (2017): A new methodology to compute the gravitational contribution of a spherical tesseroid based on the analytical solution of a sector of a spherical zonal band. *Journal of Geodesy* 91(10):1207–1224. DOI: 10.1007/s00190-017-1018-x.
- Martinez, Z. (1998): Boundary-value problems for gravimetric determination of a precise geoid. *Lecture notes in earth sciences, vol. 73*. Springer, Berlin, Germany.
- Molodenskii, M. S., Eremeev, V. F. und Yuikina, M. I. (1962): Methods for study of the external gravitational field and figure of the earth. *Translated from Russian (1960) by Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem* 1962.
- Moritz, H. (1980): *Advanced Physical Geodesy*. Herbert Wichmann Verlag Karlsruhe.
- Müßle, M. (2011): Untersuchungen zur numerischen Stabilität der Tesseroidformeln. SA im Studiengang Geodäsie und Geoinformatik am GIK/KIT, Karlsruhe, (unveröffentlicht).
- Müßle, M. (2013): Untersuchungen zur planaren Approximation im Geodätischen Randwertproblem. DA im Studiengang Geodäsie und Geoinformatik am GIK/KIT, Karlsruhe, (unveröffentlicht).
- Müßle, M., Heck, B., Seitz, K. und Grombein, T. (2013): Untersuchungen zur planaren Approximation im Geodätischen Randwertproblem. *Schriftenreihe des Studiengangs Geodäsie und Geoinformatik*, no. 2013,1. Karlsruhe Institute of Technology (KIT), KIT Scientific Reports 7652, Karlsruhe.
- Müßle, M., Heck, B., Seitz, K. und Grombein, T. (2014): On the effect of planar approximation in the Geodetic Boundary Value Problem. *Studia Geophysica et Geodaetica* 58(4):536–555. DOI: 10.1007/s11200-013-0249-4.
- Müßle, M., Seitz, K., Grombein, T. und Heck, B. (2012): Numerische Untersuchungen zur Genauigkeit der Tesseroidformeln für die Massenmodellierung im Nahbereich. Geodätische Woche, Hannover, 09.-11. Oktober 2012.
- Nagy, D., Papp, G. und Benedek, J. (2000): The gravitational potential and its derivatives for the prism. *Journal of Geodesy* 74(7–8):552–560. DOI: 10.1007/s001900000116.
- Nagy, D., Papp, G. und Benedek, J. (2002): Corrections to *The gravitational potential and its derivatives for the prism*. *Journal of Geodesy* 76(8):475. DOI: 10.1007/s00190-002-0264-7.
- Nagy, D. (1966): The gravitational attraction of a right rectangular prism. *Geophysics* 31(2):362–371. DOI: 10.1190/1.1439779.
- Petrović, S. (1996): Determination of the potential of homogeneous polyhedral bodies using line integrals. *J Geod* 71(1):44–52. DOI: 10.1007/s001900050074.
- Porz, L. (2015): Berechnung von RTM-Effekten ultra-kurzwelliger Erdtopographie und Vergleich mit ERTM2160. BA im Studiengang Geodäsie und Geoinformatik am GIK/KIT, Karlsruhe, (unveröffentlicht).
- Porz, L., Grombein, T., Seitz, K., Heck, B. und Wenzel, F. (2017): Height system unification based on the Fixed Geodetic Boundary Value Problem with limited availability of gravity data. In: Ge-



- neral Assembly of the European Geosciences Union 2017. Vienna, Austria, 23.–28. Apr. 2017. *Geophysical Research Abstracts*, vol. 19.
- Roussel, C., Verdun, J., Cali, J. und Masson, F. (2015): Complete gravity field of an ellipsoidal prism by Gauss-Legendre quadrature. *Geophysical Journal International* 203(3):2220–2236. DOI: 10.1093/gji/ggv438.
- Schmitz, B. (2017): Untersuchung und Implementierung der Vorwärtsmodellierung des Topographiepentials im Spektralbereich. MA im Studiengang Geodäsie und Geoinformatik am GIK/KIT, Karlsruhe, (unveröffentlicht).
- Seitz, K., Bähr, H., Wild, F., Heck, B. und Roth, K. (2005): Berechnung einer Bouguerkarte für das Saarland. Geodätische Woche, Düsseldorf, 04.-06. Oktober 2005.
- Seitz, K., Bähr, H., Wild, F., Heck, B. und Roth, K. (2008): A Bouguer gravity anomaly map for the Saarland region. EUCOR-urgent meeting.
- Seitz, K. und Heck, B. (2001a): Anziehung und Potential von Tesseroiden. Geodätische Woche, Köln, 18.-21. September 2001.
- Seitz, K. und Heck, B. (2001b): Tesseroids for the calculation of topographic reductions. Vistas for Geodesy in the New Millennium: IAG Scientific Assembly, Budapest, Hungary, September 2-7, 2001.
- Seitz, K. und Heck, B. (2002): Effiziente Berechnung topographischer Reduktionen mit Tesseroiden. Geodätische Woche, Frankfurt, 15.-17. Oktober 2002.
- Seitz, K. und Heck, B. (2003a): Efficient calculation of topographic reductions by the use of tesseroids. EGS-Tagung, Nizza, 06.-11. April 2003.
- Seitz, K. und Heck, B. (2003b): Efficient calculation of topographic reductions by the use of tesseroids. IUGG General Assembly, Sapporo, 07. Juli 2003.
- Seitz, K. und Heck, B. (2006): Zum Einfluss der Elliptizität und Höhenbezugsfläche auf die topographische Reduktion. Geodätische Woche, München, 10.-12. Oktober 2006.
- Seitz, K. und Heck, B. (2008): Behandlung des Nahfeldeinflusses bei der regionalen Quasigeoidbestimmung. Geodätische Woche, Bremen, 30.09.-02. Oktober 2008.
- Seitz, K., Heck, B., Meichle, H., Wild, F. und Lindner, K. (2004a): Studie zur regionalen Quasi-Geoidberechnung am Beispiel von Baden-Württemberg. Geodätische Woche, Stuttgart, 12.-15. Oktober 2004.
- Seitz, K., Lindner, K. und Heck, B. (2009a): Quasigeoidmodell für Baden-Württemberg. Geodätische Woche, Karlsruhe, 22.-24. September 2009.
- Seitz, K., Lindner, K. und Heck, B. (2009b): Spektrale Zerlegung und harmonische Fortsetzung im Kontext der regionalen Quasigeoidbestimmung. Geodätische Woche, Karlsruhe, 22.-24. September 2009.
- Seitz, K., Wild, F. und Heck, B. (2004b): Efficient calculation of the tesseroid potential and its derivatives up to second order. GGSM Symposium on Gravity, Geoid and Space Missions, Porto, 30. August - 03. September 2004.
- Seitz, K., Wild, F. und Heck, B. (2004c): Effiziente Berechnung des Potentials eines Tesseroids sowie seiner ersten und zweiten Ableitungen. Geodätische Woche, Stuttgart, 12.-15. Oktober 2004.
- Shen, W.-B. und Deng, X.-L. (2016): Evaluation of the fourth-order tesseroid formula and new combination approach to precisely determine gravitational potential. *Studia Geophysica et Geodaetica* 60(4):583–607. DOI: 10.1007/s11200-016-0402-y.
- Stokes, G. G. (1849): On the variation of gravity on the surface of the Earth. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* 8:672–695.
- Tsoulis, D. (1999): Analytical and numerical methods in gravity field modelling of ideal and real masses. *Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C*, no. 510. Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften in Kommission beim Verlag C. H. Beck, Munich, Germany.
- Tsoulis, D. (2012): Analytical computation of the full gravity tensor of a homogeneous arbitrarily shaped polyhedral source using line integrals. *Geophysics* 77(2):F1–F11. DOI: 10.1190/geo2010-0334.1.
- Uieda, L., Barbosa, V. C. F. und Braitenberg, C. (2016): Tesseroids: Forward-modeling gravitational fields in spherical coordinates. *Geophysics* 81(5):41–48. DOI: 10.1190/geo2015-0204.1.
- Wild, F. und Heck, B. (2008): Topographic and isostatic reductions for use in satellite gravity gradiometry. In Xu et al. (eds), Proc. VI Hotine-Marussi Symposium, Wuhan, China, 2006, IAG Symposia, vol. 132, pp. 49–55, Springer, Berlin. DOI: 10.1007/978-3-540-74584-6\_8.
- Wild-Pfeiffer, F. (2007): Auswirkungen topographisch-isostatischer Massen auf die Satellitengradiometrie. *Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C*, no. 604. Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften in Kommission beim Verlag C. H. Beck, Munich, Germany.
- Wild-Pfeiffer, F. (2008): A comparison of different mass elements for use in gravity gradiometry. *J Geod* 82(10):637–653. DOI: 10.1007/s00190-008-0219-8.
- Wild-Pfeiffer, F., Augustin, W. und Heck, B. (2007): Optimierung der Rechenzeit bei der Berechnung der 2. Ableitungen des Gravitationspotentials von Massenelementen. *Zeitschrift für Geodäsie, Geoinformatik und Landmanagement (ZfV)* 7:377–384.
- Wild-Pfeiffer, F. und Heck, B. (2007): Comparison of the modelling of topographic and isostatic masses in the space and the frequency domain for use in satellite gravity gradiometry. In Kiliçoğlu, A., Forsberg, R. (eds), Proc. 1st Int. Symposium IGFS: Gravity Field of the Earth, Istanbul, Turkey, 2006, Harita Dergisi, Special Issue 18, pp. 312–317.
- Wild-Pfeiffer, F., Heck, B. und Seitz, K. (2008): Comparison of analytical and numerical methods for the computation of the potential of different mass elements and its first and second derivatives. IUGG, Perugia, 02.-13. Juli 2008.