

Auswirkungen der Datumswahl bei der Berechnung und Beurteilung von Vertikalbewegungen

Karl Zippelt

In den Buchen 8, 75053 Gondelsheim
E-Mail: karl.zippelt@gmx.de

Zusammenfassung

Geodätisch bestimmte Vertikalbewegungen werden in den Geowissenschaften bei der Beurteilung der rezenten Geodynamik herangezogen. Zur Bestimmung dieser Deformationswerte stehen der Geodäsie verschiedene moderne Messverfahren zur Verfügung, die in den letzten Jahren auch zusehends satellitengestützt sind und die sich gegenseitig in ihren Berechnungsergebnissen unterstützen (Fuhrmann, 2016). Höchste Genauigkeit bei der Berechnung von vertikalen Bewegungsraten wird jedoch immer noch mit der Auswertung klassischer Präzisionsnivelements erzielt, die durch die amtlichen Vermessungsdienststellen in den letzten Jahrzehnten wiederholt durchgeführt wurden. Dabei ist zu beachten, dass die Ergebnisse dieser Berechnungen sowohl von der funktionalen Modellbildung als auch von der Datumsformulierung im Gesamtmodell abhängig sind. Der vorliegende Beitrag beschäftigt sich mit verschiedenen Möglichkeiten der Datumswahl in sogenannten Einzelpunktmodellen, die die Höhe eines Punktes als Funktion der Zeit betrachten und damit die Bestimmung der Veränderungsgeschwindigkeit einer Höhenfestlegung an der Erdoberfläche erlauben.

1 Allgemeine Modellbildung

Zur Analyse der Vertikalbewegungen können Präzisionsnivelements hoher Genauigkeit, die in Mitteleuropa seit etwa einhundert Jahren von den amtlichen Vermessungsstellen landesweit in verschiedenen Ordnungen (Genauigkeitsstufen) durchgeführt werden, herangezogen werden. Durch den langen Zeitraum und die hohe Anzahl an Wiederholungsmessungen sind Voraussetzungen gegeben, um in weiten Bereichen entlang den Nivellementlinien eine stabile Modellierung der stattgefundenen regelmäßigen Bewegungen zu erreichen. Da das Nivellement jedoch ein zeit- und kostenintensives Messverfahren ist, das zudem erfahrenes Personal erfordert, können die Messungen nicht innerhalb eines kurzen Zeitraumes durchgeführt werden. Dadurch sind vor allem in großen, landesweiten Netzen die Beobachtungen zeitlich

über einen längeren Zeitraum (mehrere Jahre oder gar Jahrzehnte) mit einer ungleichmäßigen Anzahl von Wiederholungen verteilt. Eine Beschreibung der Punkthöhen auf der Erdoberfläche zu einem festen Zeitpunkt ist deshalb nicht möglich. Um dieses Datenproblem aufzufangen, ist es bei der Berechnung von Vertikalbewegungen erforderlich, von einer statischen Modellierung des Höhennetzes zu einer kinematischen Modellierung überzugehen. In der kinematischen Modellierung eines Höhennetzes wird die Punkthöhe als eine Funktion der Zeit betrachtet. Aus dieser Grundform können je nach Modellierung der Geschwindigkeitsfunktion verschiedene Modelle abgeleitet werden. Hierüber finden sich in Zippelt (1988) ausführliche Hinweise. Unter der Annahme einer räumlich unabhängigen, stetigen, nicht sprunghaften Punktbe-
wegung

Erschienen bei KIT Scientific Publishing
Schriftenreihe des Studiengangs
Geodäsie und Geoinformatik 2018,1

DOI Einzelbeitrag:
10.5445/KSP/1000080252

Festschrift zur Verabschiedung von
Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. Bernhard Heck
(Schw)Ehre, wem (Schw)Ehre gebührt

DOI Festschrift:
10.5445/KSP/1000080324



Dieses Werk ist lizenziert unter einer
Creative Commons Namensnennung
- Weitergabe unter gleichen Bedin-
gungen 4.0 International Lizenz (CC BY-SA 4.0): [https://
creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.en](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.en)

kann die Geschwindigkeitsfunktion eines Punktes P_j z. B. in eine Taylorreihe mit folgender Form entwickelt werden

$$v_j(t_i) = c_{1,j} + c_{2,j} \cdot \Delta t_i + \dots \quad (1.1)$$

mit:

$$\Delta t_i = t_i - t_0$$

$c_{1,j}$: Geschwindigkeitskoeffizient

$c_{2,j}$: Beschleunigungskoeffizient

wobei in Abhängigkeit des verfügbaren Beobachtungsmaterials prinzipiell weitere Koeffizienten durch Erweiterung der Taylorreihe möglich sind. Wird diese Geschwindigkeitsfunktion (1.1) in die ursprüngliche Funktion der Punktbeziehung eingesetzt, so ergibt sich die zeitabhängige Funktion für den Verlauf der Höhenbewegung des Punkte P_j

$$H_j(t_i) = H_{0,j} + c_{1,j} \cdot \Delta t_i + \frac{1}{2!} \cdot c_{2,j} \cdot \Delta t_i^2 + \dots \quad (1.2)$$

die es ermöglicht, für jeden einzelnen Punkt das Bewegungsverhalten unabhängig von seiner Nachbarschaft zu beschreiben. Diese Modellform wird auch Einzelpunktmodell genannt. Durch die Verknüpfung des Einzelpunktmodells mit dem funktionalen Modell eines beobachteten Höhenunterschiedes wird aus diesem eine zeitabhängige Beobachtung

$$\Delta h_{i,AB}(t) = H_{i,B}(t) - H_{i,A}(t). \quad (1.3)$$

Dieses funktionale Modell der Beobachtungen bildet die Grundlage für eine Schätzung der unbekannt Parameter in einer vermittelnden Ausgleichung nach dem Gauß-Markov-Modell (GMM)

$$\mathbf{I} + \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (1.4)$$

Die Konfigurationsmatrix \mathbf{A} beschreibt darin den funktionalen Zusammenhang der im Vektor \mathbf{I} zusammengefassten Beobachtungen mit den im Vektor der Unbekannten \mathbf{x} enthaltenen unbekannt Parameter $H_{0,j}$, $c_{1,j}$ und $c_{2,j}$ (siehe Gleichung (1.2)). Der Vektor \mathbf{v} bezeichnet die Verbesserungen der Beobachtungen, für die Normalverteilung angenommen wird.

In einer Ausgleichung setzt sich das Gesamtmodell aus Angaben zum

- a) funktionalen Modell
- b) stochastischen Modell und
- c) Datummodell

zusammen. Zur Beschreibung der Eigenschaften eines Ausgleichungsergebnisses gehören demnach auch immer Aussagen über die Stochastik der Beobachtungen. Diese werden im stochastischen Modell zusammengefasst und beschrieben. Da geodätische Nivelements keine Informationen über die Lagerung der unbekannt Parameter in einem Bezugssystem enthalten, müssen im Datummodell zusätzliche Vorgaben über die Festlegung des Bezugsniveaus in das Gesamtmodell eingeführt werden. Diese zusätzlichen Bedingungen müssen so formuliert werden, dass die aus (1.4) abgeleitete Normalgleichungsmatrix $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$ regulär und damit eindeutig invertierbar wird. Die Formulierungen der Datumfestlegungen haben damit großen Einfluss auf die Schätzwerte und Standardabweichungen der Modellparameter. Bei der Bewertung eines Ausgleichungsergebnisses ist die Datumfestlegung also immer mit anzugeben. Es ist zu berücksichtigen, dass die Schätzwerte der unbekannt Parameter und ihre Standardabweichungen von der gewählten Datumfestlegung abhängig sind, es handelt sich um datumsabhängige Schätzwerte. Der Ablauf einer Ausgleichung im GMM ist bekannt und soll hier nicht erneut dargestellt werden. Für den Sonderfall einer kinematischen Modellbildung von Präzisionsnivelements ist dieser Ablauf im Detail in Zippelt (1988) enthalten. Welche Möglichkeiten der Datumfestlegung in einem kinematischen Deformationsnetz zur Verfügung stehen und welche Auswirkungen die Datumswahl hat soll im Folgenden im Detail dargestellt und diskutiert werden.

2 Möglichkeiten der Datummodellierung

Zur Regularisierung der Normalgleichungsmatrix \mathbf{N} ist es erforderlich, Zusatzbedingungen (= Datumfestlegungen) zu definieren, um damit das Gleichungssystem zu ergänzen. Üblicherweise fehlt in der kinematischen Modellbildung eine Festlegung zum Niveau der Höhenparameter $H_{0,j}$ und eine weitere zum Niveau der Geschwindigkeitskoeffizienten $c_{1,j}$. Zusatzbedingungen für die Beschleunigungskoeffizienten $c_{2,j}$ und weitere Parameter sind nicht erforderlich. Im Folgenden werden mögliche Datumfestlegungen beschrieben.

2.1 Zwangsfreies Datum

Durch die a-priori Festlegung beliebiger Werte für die Höhe und die Geschwindigkeit eines ausgewählten Referenzpunktes P_R wird eindeutig über das Referenzsystem verfügt. Dies ist gleichbedeutend mit der Einführung folgender Zwangsbedingungen:

$$H_{0,R} = \text{const} \quad c_{1,R} = \text{const}. \quad (2.1)$$

Dies führt dazu, dass das Niveau der Höhe und das Niveau der Geschwindigkeit von einem deterministischen (fehlerfreien) Datumspunkt (= Referenzpunkt) fixiert werden und die dazugehörigen Koeffizienten sowohl in \mathbf{A} , \mathbf{x} und \mathbf{N} entfallen. Diese Zwangsbedingungen haben keinen Einfluss auf die innere Netzgeometrie und die Verhältnisse zwischen den Schätzwerten, so dass dieses Datummodell auch als zwangsfreies Datum bezeichnet wird. Die Schätzwerte der Höhen und vor allem auch der Geschwindigkeitskoeffizienten sind auf die Vorgaben zu diesem (Datums-)Punkt entsprechend Gleichung (2.1) bezogen. Vorteilhaft ist, dass Unabhängigkeit zwischen den Schätzwerten der beiden Parametertypen besteht. Die Niveaufinitionen machen eine einfache und physikalisch nachvollziehbare Interpretation der Ergebnisse möglich. Aufgrund der Abhängigkeit der Ausgleichungsergebnisse von den angenommenen Werten werden an diese gewisse Bedingungen gestellt. Insbesondere die Vorgabe der Geschwindigkeit des Referenzpunktes ist in einer kinematischen Deformationsanalyse von besonderer Bedeutung. Meistens wird davon ausgegangen, dass sich der Referenzpunkt nicht bewegt, d. h. stabil ist, so dass

$$c_{1,R} = \text{const} \quad \rightarrow \quad c_{1,R} = 0 \quad (2.2)$$

angenommen wird. Dies hat zur Folge, dass die Bewegungsraten aller Punkte um die unbekannt, tatsächliche Eigenbewegung des Referenzpunktes verfälscht sein werden. Da die Lagerung des Netzes lediglich über einen einzigen Referenzpunkt erfolgt, wird es aufgrund der Fehlerfortpflanzung der Messgenauigkeit über die einzelnen Netzlinien dazu kommen, dass die Standardabweichungen der geschätzten Parameter umso größer werden, je weiter der betreffende Netzpunkt vom Referenzpunkt entfernt liegt. Einen untergeordneten Einfluss spielt die Netz-

geometrie, d. h. der Effekt der entfernungsabhängig ansteigenden Standardabweichung wird umso größer, je schwächer die Netzgeometrie (abhängig von der Anzahl der Wiederholungsmessungen, der Liniendichte, des Umfangs der einzelnen Netzschleifen, ...) ist. Weitere Einflussfaktoren werden in Fuhrmann (2016) diskutiert. Zu beachten ist zudem, dass sich im zwangsfreien Datummodell der Effekt der entfernungsabhängig ansteigenden Standardabweichung der Schätzwerte auch negativ auf die Aufdeckbarkeit von Modellfehlern und die Signifikanz der geschätzten Punktbewegungen auswirkt, die weit vom Referenzpunkt entfernt sind. Aufgrund der Eindeutigkeit bei der Interpretation der Ergebnisse wurde dieses Datummodell in den letzten Jahren/Jahrzehnten bevorzugt angewendet (Zippelt und Dierks, 2006; Fuhrmann und Zippelt, 2013).

2.2 Datum über Minimierungsbedingungen

Anstatt die zuvor definierten Bedingungen (2.1) an einem Referenzpunkt zu berücksichtigen, wird die Regularisierung von \mathbf{N} erreicht, indem für die Schätzwerte der Höhenparameter und der Geschwindigkeitsparameter gefordert wird, dass sie quadratisch minimal von den benutzten Näherungswerten abweichen. Es entsteht ein GMM mit Restriktionen (Wolf, 1975) das auch als freie Ausgleichung bezeichnet wird. Zusätzlich zur bisherigen Zielfunktion $\Omega = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} \rightarrow \min$ werden für das System der Höhenwerte und das System der Geschwindigkeitskoeffizienten zusätzliche Zielfunktionen aufgestellt.

$$\begin{aligned} (\Delta \hat{\mathbf{H}}_{0,D})^T (\Delta \hat{\mathbf{H}}_{0,D}) &\rightarrow \min \\ (\Delta \hat{\mathbf{c}}_{1,D})^T (\Delta \hat{\mathbf{c}}_{1,D}) &\rightarrow \min. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Hier steht $(\Delta \hat{\mathbf{H}}_{0,D})$ für die Verbesserung der Näherungswerte der Höhenunbekannten und $(\Delta \hat{\mathbf{c}}_{1,D})$ für die Verbesserung der linearen Koeffizienten der Bewegungsgleichungen der selben (Datums-)Punkte. Eine detaillierte Darstellung findet sich in Zippelt (1988). Diese Zielfunktionen (2.3) werden durch linear unabhängige Nebenbedingungen umgesetzt

$$\sum_{i=1}^n \Delta \hat{H}_{0,D_i} = 0, \quad \sum_{i=1}^n \Delta \hat{c}_{1,D_i} = 0. \quad (2.4)$$

Wird das Normalgleichungssystem um diese beiden Nebenbedingungen ergänzt, so ergibt sich eine reguläre Normalgleichungsmatrix \mathbf{N}_D die zur Kofaktorenmatrix \mathbf{Q}_D invertiert werden kann. Im Vergleich zu anderen Inversen von \mathbf{N} hat diese Kofaktorenmatrix \mathbf{Q}_D die Eigenschaft einer minimalen Spur über die gewählten Datumspunkte D_i . Die Standardabweichungen der geschätzten Parameter in dieser Lösung sind nicht mehr von der Entfernung zu einem Referenzpunkt sondern nur noch von der Geometrie des Netzes, der Anzahl der Wiederholungsmessungen und den Beobachtungsgewichten abhängig.

Die Festlegung der Datumspunkte kann auf zwei Arten erfolgen (Illner, 1985):

- Es werden alle Punkte eines Netzes zur Datumsfestlegung herangezogen (Gesamtspurminimierung).
- Es wird lediglich eine begrenzte Anzahl von Netzpunkten zur Datumsfestlegung herangezogen, wobei diese Punkte frei wählbar sind (Teilspurminimierung).

Geometrisch interpretiert stellt dieses Datummodell eine Auffelderung der Schätzwerte $\Delta\hat{H}_{0,D_i}$ und $\Delta\hat{c}_{1,D_i}$ auf die Näherungswerte H_{0,D_i} und c_{1,D_i} mit minimalen Restklaffungen dar. Werden für die Datumspunkte D_i die Näherungswerte $c_{1,D_i} = 0$ (entspricht der Nullhypothese: die Datumspunkte D_i bewegen sich nicht) angenommen, so stellen die berechneten Schätzwerte $\Delta\hat{c}_{1,D_i}$ ein mittleres Niveau der Bewegungsraten dar, das jedoch an keinem speziellen Punkt definiert ist. Eine Datumsdefinition über alle Punkte eines Netzes, in dem extreme einseitige Bewegungen (z. B. in einem Bergbauggebiet) stattfinden und deshalb die Stabilität dieser Punkte nicht gegeben ist, erscheint nicht empfehlenswert. Bei der Auswahl einer begrenzten Anzahl von sinnvollen Datumspunkten wird dieser Effekt umgangen. Abschließend bleibt jedoch festzustellen, dass es bei Anwendung einer Teilspurminimierung zwar zu nicht entfernungsabhängigen Standardabweichungen der Schätzwerte kommt, diese wegen der vernachlässigten Stochastizität der Stabilitätsannahme oft unrealistisch niedrig sind.

2.3 Datum durch stochastische Vorinformationen

Alle bisher vorgestellten Datummodelle gehen von der Annahme aus, dass die Ausgangswerte, die für die Referenzfestlegung der Höhen und Geschwindigkeiten benutzt werden, für Stabilität stehen und fehlerfrei sind. Dies ist in der Realität selten zutreffend, so dass die mit diesen Datummodellen erzielten Standardabweichungen sehr optimistisch sind. In der Regel sind für die Ausgangswerte in den Datumspunkten auch Genauigkeitsangaben verfügbar. Quellen solcher Angaben sind sowohl Stabilitätsbewertungen aus geologischen Karten oder Informationen aus anderen geodätischen Überwachungsmessungen wie z. B. GNSS oder InSAR.

Ziel der Modellbildung sollte es deshalb sein, diese Informationen als eine weitere Gruppe von Beobachtungen, die von den Nivellements unabhängig sind, in das funktionale Modell aufzunehmen. Der bisherige Beobachtungsvektor \mathbf{I} der nivellitischen Beobachtungen wird ergänzt mit den Beobachtungen \mathbf{I}_S der zusätzlichen Vorinformationen über die Parameter auf den gewählten Datumspunkten. Diese Beobachtungen können sowohl aus Höhen-Vorinformationen \mathbf{I}_H als auch aus Geschwindigkeits-Vorinformationen \mathbf{I}_c bestehen, so dass \mathbf{I}_S sich aufteilen lässt in:

$$\mathbf{I}_S = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_H \\ \mathbf{I}_c \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Üblicherweise werden beide Beobachtungstypen punktweise berücksichtigt. Diesen Zusatzbeobachtungen sind die Beobachtungsgenauigkeiten σ_H bzw. σ_c zugeordnet, so dass es zu einer Erweiterung des stochastischen Modells kommt. Die Größe dieser Beobachtungsgenauigkeiten entscheidet darüber, wie restriktiv die beobachteten Parameter im Modell behandelt werden. Wird die Stochastizität der Vorinformation sehr gering angesetzt so kann damit auch ein zwangsweiser Anschluss an die Vorinformationen erreicht werden. Im erweiterten funktionalen Modell treten Verbesserungsgleichungen mit folgenden Anteilen auf:

- für nivellitische Beobachtungen $l_{\Delta h_i}$

$$l_{\Delta h_i} + v_{\Delta h_i} = H_{0,B} + c_{1,B} \cdot \Delta t_i + \dots - H_{0,A} - c_{1,A} \cdot \Delta t_i - \dots \quad (2.6)$$

b) für Höhenvorinformationen l_{H_0,S_i}

$$l_{H_0,S_i} + v_{H_0,S_i} = H_{0,S_i} \quad (2.7)$$

c) für Geschwindigkeitsvorinformationen l_{c_1,S_i}

$$l_{c_1,S_i} + v_{c_1,S_i} = c_{1,S_i} \quad (2.8)$$

denen die jeweiligen Standardabweichungen $\sigma_{\Delta h}$, σ_{l_H} und $\sigma_{l_{c_1}}$ zugeordnet sind. Es entsteht ein GMM mit gemessenen Unbekannten (Wolf, 1975). Die daraus entstehende Normalgleichungsmatrix \mathbf{N}_s ist regulär und kann ohne weitere Nebenbedingungen invertiert werden. Details zur weiteren funktionalen und stochastischen Beschreibung dieses Modells finden sich in Zippelt (1988).

Werden die Punkte mit stochastischen Vorinformationen zur Höhe und Geschwindigkeit einigermaßen gleichmäßig über das Netz verteilt, so ergeben sich Schätzwerte, die zwar von den eingeführten Vorinformationen abhängig sind, jedoch realistische Standardabweichungen mit einer geringen Entfernungsabhängigkeit zeigen. Je dichter das Feld der stochastischen Anschlusspunkte ist, desto geringer ist die Entfernungsabhängigkeit ausgeprägt. Es ergibt sich ein Ausgleichsmodell, das zur Integration von Vorinformationen geeignet ist, aber auch die Integration unabhängiger Analysemethoden ermöglicht.

3 Vergleichende Berechnungen und Beurteilungen der Standardabweichungen

Die dargestellte Methodik der kinematischen Höhenausgleichung mit unterschiedlichen Datumsformulierungen wurde in einem Projekt mit der Bundesanstalt für Gewässerkunde (BfG) auf die Höhenmessungen entlang des Rheins angewendet. Die detaillierten Ergebnisse sind in Zippelt u. a. (2016) enthalten.

In einem mehrere Nivellementsleifen breiten Korridor beidseits des Rheins zwischen Basel und der niederländischen Grenze wurde aus allen verfügbaren amtlichen Höhenmessungen 1. und 2. Ordnung das in Abbildung 3.1 dargestellte Nivellementnetz zusammengestellt. Neben unterschiedlichen geologischen Formationen (Schwarzwald, Oberrheingraben, Rheinisches Schiefergebirge, ...) sind in diesem Netz

auch das bergbaulich geprägte Ruhrgebiet und Gebiete des Braunkohletagebaus in der Niederrheinischen Bucht enthalten.

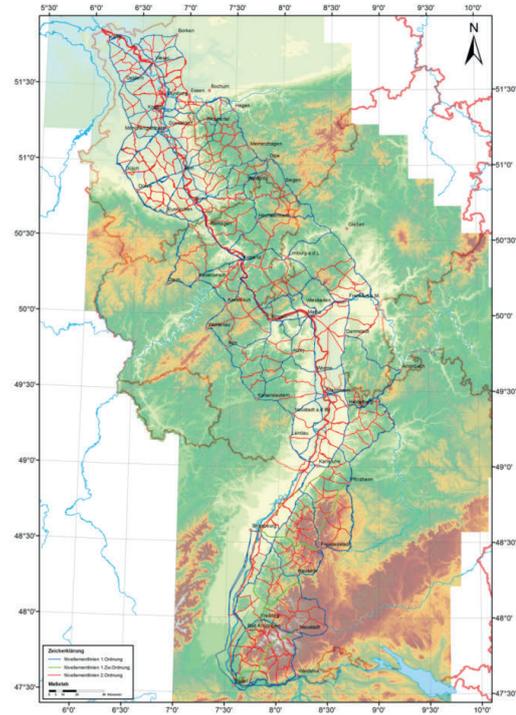


Abbildung 3.1: Nivellementnetz 1. + 2. Ordnung entlang des Rheins (Zippelt u. a., 2016).

Zur Wahl der Referenzpunkte in den verschiedenen Datumsmodellen wurden insbesondere geologische Kriterien und Bewertungen der Punktvermarkung herangezogen. In Zippelt u. a. (2016) ist eine ausführliche Beschreibung dieser Auswahl enthalten. Die für das Datumsmodell der Teilspurminimierung und der stochastischen Anschlusspunkte gewählten Punkte verteilen sich einigermaßen gleichmäßig im südlichen (Laufenburg am Hochrhein, Freudenstadt im Schwarzwald und Seitzenbuche im Odenwald) und im nördlichen Netzteil. Der mittlere Bereich wird durch keinen Punkt repräsentiert. Mit der getroffenen Auswahl an Datumpunkten wird u.a. das Ziel verfolgt, den Einfluss zufälliger langwelliger Effekte im Fehlerhaushalt des Nivellements zu dämpfen. In den vergleichenden Berechnungen mit

- dem zwangsfreien Datumsmodell mit einem Datumpunkt (Wehen/Taunus)
- dem Datumsmodell mit Spurminimierung über mehrere Datumpunkte (s.o.)
- dem Datumsmodell mit stochastischen Vorinformationen für die Datumpunkte (s.o.)

zeigt sich, dass die innere Geometrie der Schätzwerte für Bewegungsparameter weitgehend erhalten wird. Lediglich das Referenzniveau der Bewegungsraten ist an unterschiedlichen Punkten festgelegt. Besonders die Lösung mit der (Gesamt-)Spurminimierung über alle Netzpunkte weicht im Bezugsniveau durch den Einfluss der teilweise erheblichen Senkungen in den Bergbaugebieten von den übrigen Lösungen ab und ist nicht realistisch. Deshalb wird die Modellrechnung mit Teilspurminimierung über die gleichen Datumpunkte wie im Modell mit stochastischen Vorinformationen durchgeführt.

Entsprechend der Thematik der vorliegenden Betrachtung wird in den folgenden Abbildungen der Schwerpunkt mehr auf das Verhalten der Standardabweichungen der Geschwindigkeitskoeffizienten als auf die Schätzwerte der einzelnen Lösungen gelegt. Die benutzten Datumpunkte sind in allen folgenden Abbildungen durch das Symbol  gekennzeichnet.

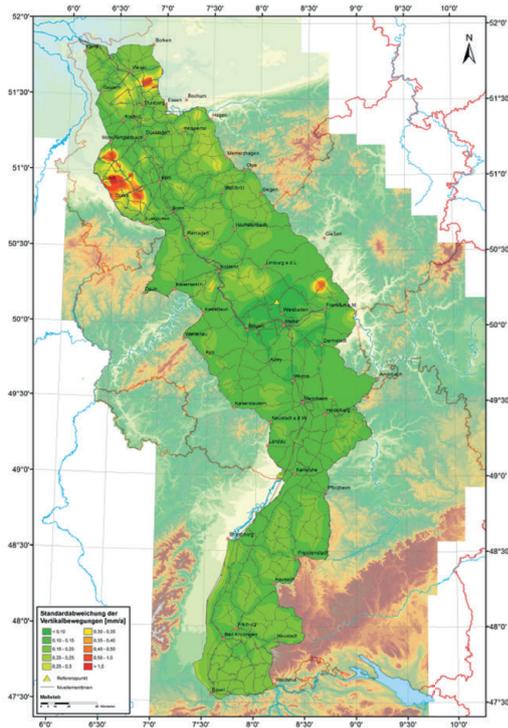


Abbildung 3.2: Standardabweichungen der Geschwindigkeitskoeffizienten des zwangsfreien Modells mit zentralem Referenzpunkt (Zippelt u. a., 2016).

Für die zwangsfreie Modellierung wurde der Referenzpunkt auf einen zentral gelegenen Punkt bei Wehen/Taunus festgelegt. Anhand der farblichen Einfärbung in Abbildung 3.2 ist gut erkennbar, wie die Standardabweichungen der geschätzten Geschwindigkeits-

koeffizienten mit der Entfernung immer größer und damit farblich heller werden. Besonders im südlichen Netzteil ist anhand der farblichen Einfärbung neben des entfernungsabhängigen Anwachsens der Standardabweichungen auch der Einfluss der Netzgeometrie auf die Standardabweichungen erkennbar. Hier zeigt sich, dass durch die erhöhte Anzahl von Wiederholungsmessungen auf den Linien 1. Ordnung eine bessere Netzgeometrie vorliegt als auf den Linien 2. Ordnung, die vorwiegend nur mit einer Wiederholungsmessung verfügbar sind.

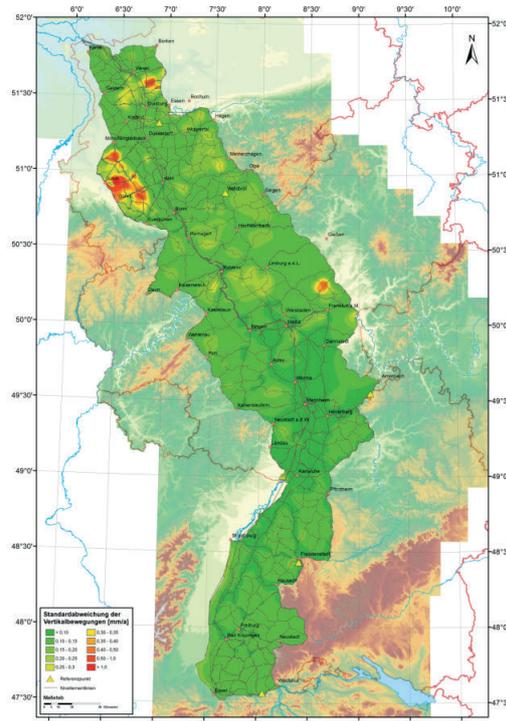


Abbildung 3.3: Standardabweichungen der Geschwindigkeitskoeffizienten nach einer Teilspurminimierung über fünf Datumpunkte (Zippelt u. a., 2016).

Für die Berechnung der Standardabweichungen der Lösung mit (Teil-)Spurminimierung wurden fünf Datumpunkte gewählt die möglichst homogen über das Netz verteilt sind. Abbildung 3.3 zeigt im Gegensatz zu Abbildung 3.2 nahezu keine entfernungsabhängigen Anteile in den Standardabweichungen. Vielmehr ist über das gesamte Netz (bis auf die Bergbaugebiete) eine einheitliche mittlere Standardabweichung erkennbar die nur in Gebieten mit sehr schlechter Netzgeometrie leicht anwächst. Gegenüber den Standardabweichungen aus Abbildung 3.2 sind diese um 1-2 Farbklassen geringer und flächenhaft homogen ausgeprägt. Zu beachten ist, dass diese Stan-

dardabweichungen jedoch lediglich die innere Genauigkeit des Modells ausdrücken da sie auf fehlerfreie Datumspunkte bezogen sind.

Für das Modell mit stochastischen Vorinformationen wurden die gleichen Punkte ausgewählt wie bei der Teilspurminimierung. Alle Punkte wurden als stabile Punkte eingestuft, d.h. dass für die „beobachteten“ Geschwindigkeiten $\mathbf{l}_c = 0$ gilt. Die beobachteten Höhen wurden den amtlichen Höhen des DHHN92 gleichgesetzt. Da beide Parametersysteme in der Schätzung unabhängig voneinander sind hat die Wahl des Höhen Bezugssystems keinen Einfluss auf die Schätzung der Geschwindigkeitskoeffizienten. Die Genauigkeiten der beobachteten Geschwindigkeiten wurden mit $0,25\text{mm/a} < \sigma_{l_c} < 0,65\text{mm/a}$ angenommen, wobei die drei Punkte im südlichen Netzteil als sicherer bewertet wurden als die beiden Punkte im nördlichen Teil.

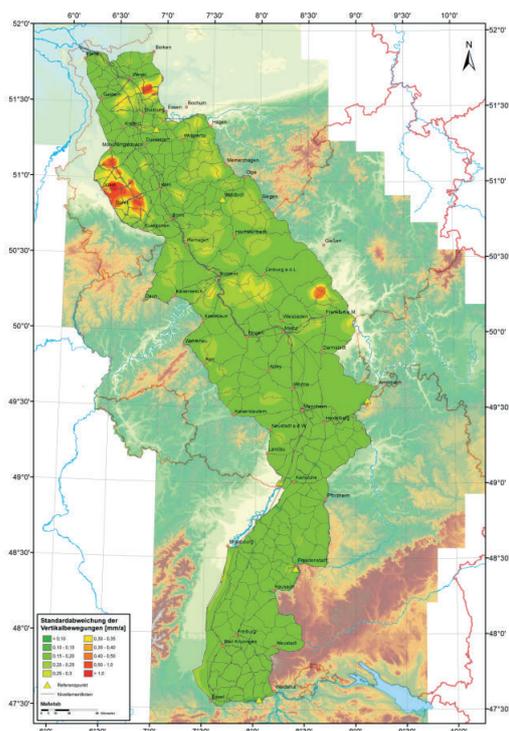


Abbildung 3.4: Standardabweichungen der geschätzten Geschwindigkeitsparameter bei einer stochastischen Lagerung auf fünf Punkte (Zippelt u. a., 2016).

Abbildung 3.4 zeigt die interpolierten Standardabweichungen der geschätzten Geschwindigkeitsparameter die mit diesem Modell erzielt wurden. Dabei sind zwei Eigenschaften besonders bemerkenswert:

a) Es wird ein sehr homogenes Bild in den Standardabweichungen erzielt. Entfernungsabhängige An-

teile und der Einfluss der Netzgeometrie sind fast nicht zu erkennen.

b) Die Standardabweichungen sind gegenüber denjenigen der freien Lösung leicht erhöht und erreichen ein realistisches Niveau. Dies wird zurückgeführt auf die in den Datumspunkten berücksichtigten Unsicherheiten der beobachteten Bewegungsparameter.

Diese verbesserte Schätzung der Standardabweichungen ist bei gleicher innerer Geometrie der Schätzwerte Grundlage für eine realistische Beurteilung der Bewegungsraten auf Signifikanz. Für die mittlere Standardabweichung wird ein Wert in der Größenordnung von $\bar{\sigma}_{c_1} \sim 0,25\text{mm/a}$ erzielt, sodass Bewegungsraten über das gesamte Netz verteilt ab etwa $|\hat{c}_1| > 0,5\text{mm/a}$ mit 95% Sicherheitswahrscheinlichkeit als signifikant bewertet werden können.

Zusammenfassend ist also festzustellen, dass gegenüber dem zwangsfreien Datummodell oder dem Datummodell mit Spurminimierung durch die Einführung stochastischer Vorinformationen sowohl gut interpretierbare Schätzwerte für die Vertikalbewegungen als auch realistische Standardabweichungen geschätzt werden können. Bei sinnvoller Punktauswahl wird eine flächenhaft homogene Verteilung der Standardabweichungen erzielt die wiederum Grundlage für eine sensitive Signifikanzanalyse der Bewegungsraten ist. Es ergeht deshalb die Empfehlung, Vertikalbewegungen bevorzugt durch die Berücksichtigung von stochastischen Informationen zu modellieren und berechnen.

4 Dank

Die umfangreichen Modellrechnungen wurden im Rahmen eines von der Bundesanstalt für Gewässerkunde unterstützten Projektes durchgeführt. Die Daten wurden von amtlichen Vermessungsdienststellen aus Baden-Württemberg, Hessen, Rheinland-Pfalz, Nordrhein-Westfalen, Bayern, der Schweiz und Frankreich dankenswerter Weise zur Verfügung gestellt. Die Datenaufbereitung und die Berechnungen wurden von Dipl.-Ing. David Vatter auf den Rechnern des Geodätischen Instituts (GIK) durchgeführt. Prof. Dr.-Ing. habil. Bernhard Heck hat in vielen Diskussionen durch sein Wissen und seine Erfahrungen wesentlich zum

Gelingen des Projektes beigetragen. Hierfür sei ihm an dieser Stelle ausdrücklich gedankt.

Literatur

- Fuhrmann, T. (2016): Surface Displacements from Fusion of Geodetic Measurement Techniques Applied to the Upper Rhine Graben Area. *Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C*, no. 773. Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften in Kommission beim Verlag C. H. Beck, München.
- Fuhrmann, T. und Zippelt, K. (2013): Berechnung und Beurteilung rezenter vertikaler Oberflächenbewegungen abgeleitet aus wiederholten Präzisionsnivellements in den Regionen Nordschweiz und Südwestdeutschland. NAB-Bericht 12-33. NAGRA (Nationale Genossenschaften für die Lagerung radioaktiver Abfälle).
- Illner, I. (1985): Datumsfestlegung in freien Netzen. *Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C*, no. 309. Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften in Kommission beim Verlag C. H. Beck, München.
- Wolf, H. (1975): Ausgleichsrechnung - Formeln zur praktischen Anwendung. Dümmler.
- Zippelt, K. (1988): Modellbildung, Berechnungsstrategie und Beurteilung von Vertikalbewegungen unter Verwendung von Präzisionsnivellements. *Deutsche Geodätische Kommission, Reihe C*, no. 343. Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften in Kommission beim Verlag C. H. Beck, München.
- Zippelt, K. und Dierks, O. (2006): Auswertung von wiederholten Präzisionsnivellements im südlichen Schwarzwald, Bodenseeraum sowie in angrenzenden schweizerischen Landesteilen. NAB-Bericht 07-27. NAGRA (Nationale Genossenschaften für die Lagerung radioaktiver Abfälle).
- Zippelt, K., Vatter, D., Sudau, A., Bengel, W. und Meutsch, M. (2016): Pegelgestützte integrierte kinematische Analyse von rezenten Höhenänderungen am Rhein (PELIKAN). BfG-Bericht 1936. Koblenz: Bundesanstalt für Gewässerkunde, S. 1–163. DOI: 10.5675/BfG-1936.