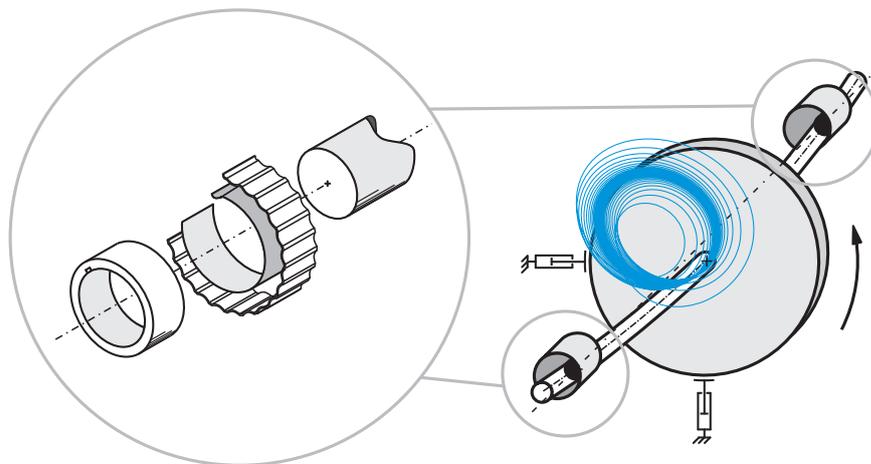


Dissertation

Zur Dynamik einfacher Rotoren
in aerodynamischen
Radialgleitlagern mit Pufferfolie



Dipl.-Ing. Christoph Baum

Abbildung auf der Titelseite: Skizze des Lagers und des Rotormodells

Zur Dynamik einfacher Rotoren in aerodynamischen Radialgleitlagern mit Pufferfolie

Zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften

der
Fakultät für Maschinenbau
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

genehmigte
Dissertation

von

Dipl.-Ing. Christoph Baum
aus Mainz

Tag der mündlichen Prüfung:
Hauptreferent:
Korreferent:

15. 09 2017
Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Seemann
Prof. Dr.-Ing. Hartmut Hetzler

Kurzfassung

Aerodynamische Gleitlager mit Pufferfolie sind Elemente, die zur Optimierung hochdrehender Rotoren beitragen können. Verglichen mit Wälz- und flüssigkeitsgeschmierten Gleitlagern zeichnen sie sich insbesondere durch eine Minimierung der reibungsbedingten Energieverluste aus. Gleichzeitig ist das Schmierstoffkonzept, das die Umgebungsluft als Schmiermittel nutzt, denkbar einfach. Da auch keine Schmieröle oder -fette verwendet werden, die bei Verbrennungsprozessen teilweise mitoxidieren, ist diese Lagertechnologie umweltfreundlich.

Der Auslegungsprozess der rotierenden Maschine beinhaltet auch die Gestaltung der Lager. Unter anderem Fragestellungen hinsichtlich der Tragfähigkeit und dem sich einstellenden Rotorverhalten, vor allem im Hinblick auf mögliche Schwingungen sind sorgfältig zu klären. Diese Fragestellungen motivieren die vorliegende Arbeit. Mittels moderner, modellbasierter Analysemethoden liefert sie einen Beitrag zur zuverlässigen, simulationsbasierten Auslegung und Optimierung luftgelagerter Rotoren.

In der vorliegenden Arbeit wird ein neues Modell eines aerodynamischen Gleitlagers mit Pufferfolie entwickelt. Die wesentliche Neuerung besteht in der Abbildung der nichtlinearen Verformungseigenschaften der Folien. Die Validierung des Modells erfolgt mittels publizierter Messergebnisse. Zudem wird eine Modellreduktion mittels Galerkin-Verfahren durchgeführt. Dadurch kann die Rechenzeit zur Lösung der Modellgleichungen gegenüber des nichtreduzierten Modells bei nur sehr geringen Genauigkeitsverlusten um über 99% reduziert werden.

Die Diskussion des Lagermodells erfolgt im Hinblick auf eine Kopplung mit Rotormodellen. Zur Darlegung der Druckaufbaumechanismen werden mittels Störungsrechnung analytische Näherungslösungen für den sich einstellenden Schmierfilmdruck in Abhängigkeit verschiedener Wellenzapfenbewegungen bestimmt. Außerdem werden Diskretisierungsfehler und die Einflüsse der Lagerparameter auf den Druck im Schmierfilm erörtert.

Zwei Rotormodelle werden mit dem Modell des aerodynamischen Gleitlagers mit Pufferfolie gekoppelt und detailliert untersucht. Beide Rotormodelle sind bewusst einfach gehalten, um möglichst isoliert den Einfluss der Lager und die Auswirkung der Lagergestaltung auf das sich einstellende Rotorverhalten zu studieren. Das erste Modell beschreibt einen starren, horizontal ausgerichteten und symmetrisch in zwei identischen Lagern betriebenen Rotor. Das zweite Modell erweitert das erste um eine biegeelastische Welle. Beide Modelle werden sowohl mit als auch ohne statische Unwucht diskutiert. Als Ausgangspunkt und Referenz dient das Verhalten der beiden Rotormodelle in aerodynamischen Starrlagern.

Anhand numerischer Stabilitäts- und Bifurkationsanalysen durch Anwendung von Pfadverfolgungsmethoden werden die gekoppelten Lager-Rotor-Modelle untersucht. Verschiedene in Experimenten zu beobachtende Schwingungsphänomene können durch die Modelle abgebildet werden. Einige Beispiele dieser Schwingungsphänomene sind der Halbfrequenzwirbel (air-whirl), der sogenannte air-whip sowie Resonanzeffekte.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Technische Mechanik des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT). Herr Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Seemann initiierte die Arbeit, betreute sie wissenschaftlich und übernahm das Hauptreferat. Dafür danke ich ihm sehr herzlich, insbesondere auch für die mir gewährte wissenschaftliche Freiheit, die vertrauensvolle Zusammenarbeit sowie die stete Unterstützung und Förderung. Herrn Prof. Dr.-Ing Hartmut Hetzler danke ich für die Übernahme des Korreferats. Durch sein stetes Interesse und viele lehrreiche, nicht nur wissenschaftliche, Diskussionen gab er wichtige Impulse und trug wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit bei. Herrn Prof. Dr.-Ing Peter Elsner danke ich für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes.

Außerdem bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr.h.c. Jörg Wauer und Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Fidlin für ihre kritischen, jedoch stets sachlichen Fragen und förderlichen Anmerkungen. Bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Frank Dienerowitz bedanke ich mich für die umfangreiche Förderung während meines Studiums und die Heranführung an wissenschaftliche Fragestellungen, von der ich bis heute profitiere. Auch bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Carsten Proppe, Herrn Prof. Dr.-Ing. Walter Wedig und Herrn Prof. Dr. Ing. Dr.h.c Jens Wittenburg möchte ich mich bedanken. Durch diverse Lehrveranstaltungen, auch im Rahmen meines Studiums, haben sie mir neben den oben genannten Herren die vielfältigen und spannenden Bereiche der Mechanik vermittelt.

Meinen Kollegen der Abteilung Dynamik und Mechatronik danke ich für die kollegiale Arbeitsatmosphäre, die kurzweiligen Erlebnisse am und außerhalb des Instituts sowie die vielen aufschlussreichen Diskussionen. Auch den Damen des Sekretariats sei an dieser Stelle für die Unterstützung im Institutsalltag gedankt. Meine Zeit am ITM werde ich in bester Erinnerung behalten. Einen herzlichen Dank auch an meine studentischen AbschlussarbeiterInnen. Eure Neugierde und euer Interesse haben mir geholfen die Dinge aus verschiedenen Blickwinkeln zu betrachten und haben mich motiviert die Zusammenhänge besser zu verstehen. Es hat mir immer sehr viel Freude bereitet mit Euch zusammenzuarbeiten.

Von ganzem Herzen dankbar bin ich meiner Familie, insbesondere meiner lieben Frau Katlehn, unseren wunderbaren Kindern und meinen Eltern. Ihr habt mich immer gefördert und unterstützt, ihr seid mein Rückhalt und mein Antrieb.

Kaiserslautern, im Dezember 2017
Christoph Baum

Inhaltsverzeichnis

Kurzfassung	V
Danksagung	VII
Symbolverzeichnis	XI
1 Einleitung	1
1.1 Zielstellung	2
1.2 Aufbau der Arbeit	3
1.3 Mathematische Schreibweise	4
2 Stand der Technik	7
2.1 Technische Ausführungen aerodynamischer Lager	7
2.1.1 Defizite zylindrischer Starrlager	7
2.1.2 Optimierende Modifikationen zylindrischer Starrlager	8
2.1.3 Aerodynamische Gleitlager mit variabler Innengeometrie	9
2.2 Literaturübersicht zu aerodynamischen Gleitlagern mit Pufferfolie	15
2.2.1 Lagermodellierung	15
2.2.2 Versuchsstände und Messungen zur Ermittlungen der Lagereigenschaften	17
2.2.3 Dynamik von in aerodynamischen Radialgleitlagern mit Pufferfolie betriebenen Rotoren	19
3 Modell eines aerodynamischen Radialgleitlagers mit Pufferfolie	25
3.1 Kinematik des Radialgleitlagers	25
3.1.1 Wellenzapfen	26
3.1.2 Fluidspalt	27
3.2 Fluidmodell	30
3.3 Lagerstrukturmodell	42
3.4 Gesamtmodell	44
3.5 Reduzierende Modellannahmen	49
3.5.1 Lagermodell ohne Strukturdämpfung	49
3.5.2 Starrlagermodell	52
4 Analyse der Lagereigenschaften	55
4.1 Kenngrößen der Folienlager	55
4.1.1 Geometriegrößen	55
4.1.2 Identifikation des Nachgiebigkeitsparameters	57
4.1.3 Parameterwerte des Lagermodells	63
4.2 Diskussion des Lagermodells	64
4.2.1 Bedingungen konstanten Fluiddrucks	65

4.2.2	Druckaufbaumechanismen	66
4.2.3	Diskretisierungsgenauigkeit	77
4.2.4	Einfluss der Folieneigenschaften auf den Schmierfilmdruck	79
4.3	Modellreduktion	83
5	Starrer Rotor in Gaslagern	91
5.1	Modell des starren Rotors	91
5.2	Gekoppeltes Rotor-Lager-Modell	94
5.3	Diskussion des starren Rotors in Starrlagern	95
5.3.1	Unwuchtfreier Fall	95
5.3.2	Rotor mit statischer Unwucht	101
5.3.3	Fazit	105
5.4	Diskussion des starren Rotors in Folienlagern	106
5.4.1	Unwuchtfreier Fall	106
5.4.2	Rotor mit statischer Unwucht	111
5.4.3	Fazit	114
6	Biegeelastischer Rotor in Gaslagern	115
6.1	Modell des biegeelastischen Rotors	115
6.2	Gekoppeltes Rotor-Lager-Modell	119
6.3	Diskussion des biegeelastischen Rotors in Starrlagern	120
6.3.1	Unwuchtfreier Fall	120
6.3.2	Rotor mit statischer Unwucht	123
6.3.3	Fazit	127
6.4	Diskussion des biegeelastischen Rotors in Folienlagern	130
6.4.1	Unwuchtfreier Fall	130
6.4.2	Rotor mit statischer Unwucht	134
6.4.3	Fazit	137
7	Zusammenfassung und Ausblick	139
7.1	Zusammenfassung	139
7.2	Ausblick	141
	Literaturverzeichnis	143

Symbolverzeichnis

Zeitableitungen

$(\dot{})$ Ableitung nach der dimensionsbehafteten Zeit t , siehe Gleichung (3.6)

$(\cdot)'$ Ableitung nach der dimensionslosen Zeit τ , Seite 47

Griechische Symbole

α_1 Winkel zur Ermittlung der Geschwindigkeit des Fluidrands, siehe Gleichung (3.32)

β Dimensionsloser Strukturnachgiebigkeitsparameter, siehe Gleichung (3.118)

$\bar{\beta}$ Dimensionsloser, gemittelter Strukturnachgiebigkeitsparameter, Seite 63

Γ Polarwinkel des Wellenzapfenmittelpunkts, siehe Gleichung (3.112)

$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ Polarwinkel bei maximalen Schmierfilmdruck, Seite 73

γ Polarwinkel des Wellenzapfenmittelpunkts, Seite 26

Δ_1, Δ_2 Längenmaß zur Beurteilung der Krümmung, siehe Gleichung (3.24) $(\Delta_i) = L$

$\Delta_{1,rel}, \Delta_{2,rel}$ Relatives Längenmaß zur Beurteilung der Krümmung, siehe Gleichung (3.28)

δ_a Dimensionsloser Abklingkoeffizient, siehe Gleichung (6.22)

δ_f Dimensionslose Dämpfungskonstante der Folien, siehe Gleichung (3.118)

ΔX Dimensionsloser Gitterabstand in \vec{e}_x^2 -Richtung, Seite 48

ΔZ Dimensionsloser Gitterabstand in \vec{e}_z^2 -Richtung, Seite 48

ϵ_{Disk} Maß zur Beurteilung des Diskretisierungsfehlers, siehe Gleichung (4.85)

ϵ_{red} Fehlermaß zur Beurteilung der Lösung des reduzierten Modells, siehe Gleichung (4.102)

ϵ_A Dimensionslose Exzentrizität des Wellenzapfenmittelpunkts, siehe Gleichung (3.111)

ϵ_S Dimensionslose Schwerpunktexzentrizität, siehe Gleichung (5.13)

ϵ_{uv} Kleiner Parameter, siehe Gleichung (3.64)

ϵ_{xy} Kleiner Parameter, siehe Gleichung (3.60)

ζ	Dimensionsloser Lagerkraftfaktor, siehe Gleichung (6.22)	
Θ_T	Temperatur des Schmierstoffs, Seite 34	$(\Theta_T) = \Theta$
θ	Relativkoordinate des Schmierfilms in Umfangsrichtung, Seite 27	
θ_s	Winkelkoordinate des Schnittpunkts, siehe Gleichung (4.5)	
Θ	Relativkoordinate des Schmierfilms in Umfangsrichtung, siehe Gleichung (3.161)	
κ	Dimensionsloser, geometrischer Lagerparameter, siehe Gleichung (3.109)	
λ_i	i -ter Eigenwert des gekoppelten Lager–Rotor–Modells, Seite 97	
λ_M	Mittlere freie Weglänge der Luftmoleküle, Seite 33	$(\lambda_M) = L$
μ_i	i -ter Floquet–Multiplikator des gekoppelten Lager–Rotor–Modells, Seite 99	
μ_L	Dynamische Viskosität der Schmierstoffs, Seite 34	$(\mu_L) = M L^{-1} T^{-1}$
ξ	Dimensionsloser Lagerkraftfaktor, siehe Gleichung (5.14)	
ρ	Dichte des Schmierstoffs, Seite 34	$(\rho) = M L^{-3}$
ρ_0	Skalierungsgröße der Schmierstoffdichte, siehe Gleichung (3.53)	$(\rho_0) = M L^{-3}$
ϱ	Dimensionslose Dichte des Schmierstoffs, siehe Gleichung (3.53)	
σ	Dimensionsloser Lastparameter, siehe Gleichung (5.14)	
τ	Dimensionslose Zeit, siehe Gleichung (3.61)	
φ	Absolutkoordinate des Schmierfilms in Umfangsrichtung, Seite 27	
φ_r	Drehwinkel des Rotors, Seite 93	
φ_s	Winkel zur Beurteilung der Krümmung, siehe Gleichung (3.22)	
χ	Position der Folienfixierung, Seite 27	
ψ	Dimensionsloser, geometrischer Lagerparameter, siehe Gleichung (3.110)	
Ω	Dimensionslose Winkelgeschwindigkeit, siehe Gleichung (3.107)	
Ω_G	Dimensionsloses Schmierfilmgebiet, Seite 46	
Ω_g	Schmierfilmgebiet, Seite 45	
Ω_r	Dimensionsloses, reduziertes Schmierfilmgebiet, Seite 84	
ω	Winkelgeschwindigkeit des Rotors, Seite 26	$(\omega) = T^{-1}$
ω_1, ω_2	Dimensionslose Eigenkreisfrequenzen, siehe Gleichung (6.22)	

ω_{eig}	Eigenkreisfrequenz der Scheibe bei fixiertem Zapfen, Seite 127	$(\omega_{\text{eig}}) = T^{-1}$
$\vec{\omega}$	Winkelgeschwindigkeitsvektor des Rotors, Seite 26	$(\vec{\omega}) = T^{-1}$
Lateinische Symbole		
0	Nullmatrix, Seite 4	
A	Matrix, siehe Gleichung (3.146)	
A	Geometrischer Mittelpunkt des Wellenzapfens, Seite 26	
a	Zeilenmatrix der Koeffizienten a_j , siehe Gleichung (3.141)	
a_j	Koeffizienten zur Ermittlung des axial gemittelten Schmierfilmdrucks, Seite 50	
B	Fester Punkt auf Wellenzapfenrand, Seite 26	
B_i	Diagonalmatrix der $b_{i,j}$, siehe Gleichung (3.147)	
b	Strukturnachgiebigkeitsparameter, Seite 43	$(b) = L$
$b_{i,j}$	Koeffizienten des instationären Druckterms, siehe Gleichung (3.144)	
\bar{b}	Gemittelter Strukturnachgiebigkeitsparameter, siehe Gleichung (4.15)	$(\bar{b}) = L$
C	Blockdiagonalmatrix der C_i , Seite 52	
C	Mittelpunkt der Scheibe (Wellendurchstoßpunkt), Seite 119	
C_i	Matrix, siehe Gleichung (3.150)	
c_w	Proportionalitätskonstante der Winklerbettung, Seite 60	$(c_w) = M L^{-2} T^{-2}$
D	Nichtlinearer Differentialoperator, siehe Gleichung (4.91)	
D	Punkt auf unverformten Lagerrand, Seite 26	
d_1, d_2, d_3	Verschiedene Wellenzapfendurchmesser, Seite 58	$(d_i) = L$
d_a	Proportionalitätskonstante der äußeren Dämpfung, Seite 119	$(d_a) = M T^{-1}$
d_f	Dämpfungskonstante der Folien, Seite 43	$(d_f) = M L^{-1} T^{-1}$
e_A	Exzentrizität des Wellenzapfenmittelpunkts A , siehe Gleichung (3.3)	$(e_A) = L$
\vec{e}_A	Vektor der Wellenzapfenexzentrizität, siehe Gleichung (3.3)	$(\vec{e}_A) = L$
\vec{e}_i^j	i -ter Einheitsvektor des Koordinatensystems \mathcal{K}_j , Seite 4	
e_S	Schwerpunktexzentrizität, Seite 93	$(e_S) = L$
e_{S1}, e_{S2}	Verschiedene Schwerpunktexzentrizitäten, Seite 96	$(e_{Si}) = L$

\vec{F}	Lagerkraft, Seite 49	$(\vec{F}) = M L T^{-2}$
F_{dx}, F_{dy}	Kraft der äußeren Dämpfung, siehe Gleichung (6.8)	$(F_{di}) = M L T^{-2}$
F_{kx}, F_{ky}	Federkraft der Welle, siehe Gleichung (6.7)	$(F_{ki}) = M L T^{-2}$
F_L	An Lagerschale wirkende Kraft, Seite 58	$(F_L) = M L T^{-2}$
$F_{L,\max}$	An Lagerschale wirkende maximale Kraft, Seite 58	$(F_{L,\max}) = M L T^{-2}$
F_x, F_y	Betrag der Lagerkraft in \vec{e}_x^0 -, bzw. \vec{e}_y^0 -Richtung, Seite 94	$(F_i) = M L T^{-2}$
\mathbf{f}	Vektorfeld, siehe Gleichung (3.132)	
\vec{f}	Dimensionslose Lagerkraft, siehe Gleichung (3.133)	
\mathbf{f}_a	Vektorfeld, siehe Gleichung (4.96)	
\vec{f}_a	Dimensionslose Lagerkraft bei Nutzung der Ansatzfunktion, siehe Gleichung (4.101)	
f_{eig}	Eigenfrequenz der Scheibe bei fixiertem Zapfen, Seite 127	$(f_{\text{eig}}) = T^{-1}$
f_X, f_Y	Betrag der dimensionslosen Lagerkraft in \vec{e}_x^0 -, bzw. \vec{e}_y^0 -Richtung, siehe Gleichung (3.133)	
f_x, f_y, f_z	Massenkraft pro Volumeneinheit im Schmierfilm in $\vec{e}_x^2, \vec{e}_y^2, \vec{e}_z^2$ -Richtung, Seite 34	$(f_i) = M L^{-2} T^{-2}$
G	Gewichtskraft, Seite 93	$(G) = M L T^{-2}$
g	Erdbeschleunigung, Seite 39	$(g) = L T^{-2}$
H	Dimensionslose Spaltfunktion, siehe Gleichung (3.106)	
h	Spaltfunktion, siehe Gleichung (3.18)	$(h) = L$
h_0	Lagerspiel, siehe Gleichung (3.1)	$(h_0) = L$
h_{01}, h_{02}	Verschiedene Lagerspiele, Seite 64	$(h_{0i}) = L$
i	Laufindex	
i_a	Hilfsparameter der Ansatzfunktion in axialer Richtung, siehe Gleichung (4.98)	
\mathbf{J}	Jacobimatrix, siehe Gleichung (5.20)	
j	Laufindex	
\mathcal{K}_j	Orthonormiertes Koordinatensystem j , Seite 4	
Kn	Knudsenzahl, siehe Gleichung (3.46)	

K_1, K_2, K_3, K_4	Integrationskonstanten, Seite 68	
$K_{I1}, K_{I2}, K_{I3}, K_{I4}$	Integrationskonstanten, Seite 39	
k	Steifigkeit des Rotors, Seite 119	$(k) = M T^{-2}$
k_1, k_2, k_3, k_4	Verschiedene Wellensteifigkeiten, Seite 122	$(k_i) = M T^{-2}$
L	Lagerbreite, Seite 26	$(L) = L$
L_{mess}	Gemessene Lagerlänge, Seite 58	
ℓ	Abstand Rotorschwerpunkt zur Lagermitte, Seite 93	$(\ell) = L$
ℓ_X, ℓ_Z	Anzahl Gitterpunkte in \vec{e}_x^2 -, bzw. \vec{e}_z^2 -Richtung, Seite 48	
$\ell_{X\text{ref}}, \ell_{Z\text{ref}}$	Anzahl Gitterpunkte der Referenzauflösung in \vec{e}_x^2 -, bzw. \vec{e}_z^2 -Richtung, Seite 79	
$\ell_{X\text{red}}$	Anzahl Gitterpunkte in \vec{e}_x^2 -Richtung bei reduzierter Auflösung, siehe Gleichung (4.84)	
M	Masse des starren Rotors, Seite 93	$(M) = M$
M_A	Massenpunkt, der die Welle repräsentiert, Seite 119	$(M_A) = M$
M_S	Masse der Scheibe, Seite 119	$(M_S) = M$
m_a	Parameter der Ansatzfunktion in axialer Richtung, Seite 86	
n	Rotordrehzahl, Seite 36	$(n) = T^{-1}$
n^*	Niedrigste Rotordrehzahl der instabilen Gleichgewichtslösungen, Seite 99 ($n^* = T$)	
n_{eig}	Resonanzdrehzahl der Scheibe bei fixiertem Zapfen, Seite 139	$(n_{\text{eig}}) = T^{-1}$
O	Geometrischer Mittelpunkt des unverformten Lagers, Seite 26	
P	Dimensionsloser Schmierfilmdruck, siehe Gleichung (3.52)	
\bar{P}	Dimensionsloser, axial gemittelter Schmierfilmdruck, siehe Gleichung (3.116)	
P_{1h}	Lösung der homogenen Differentialgleichung des ersten Reihenglieds, siehe Gleichung (4.34)	
P_{1p}	Partikuläre Lösung des ersten Reihenglieds, siehe Gleichung (4.36)	
\hat{P}_a	Approximierte Druckverteilung in Umfangsrichtung, siehe Gleichung (4.86)	
\bar{P}_a	Dimensionsloser, axial gemittelter Schmierfilmdruck bei Nutzung der Ansatzfunktion, siehe Gleichung (4.100)	

\tilde{P}_a	Approximierte Druckverteilung in axialer Richtung, siehe Gleichung (4.86)	
P_i	i -tes Glied der Potenzreihe des Schmierfilmdrucks, siehe Gleichung (4.31)	
\hat{P}_i	Diskreter, dimensionsloser Druckwert des reduzierten Modells in Umfangsrichtung, Seite 85	
$P_{i,j}$	Dimensionsloser Schmierfilmdruck im Gitterpunkt i, j , Seite 48	
\bar{P}_i	Dimensionsloser, axial gemittelter Schmierfilmdruck im Punkt i , Seite 49	
P_k	Konstanter Schmierfilmdruck, siehe Gleichung (4.16)	
P_{per}	Schmierfilmdruck bei Annahme periodischer Randbedingungen, siehe Gleichung (4.49)	
P_{red}	Schmierfilmdruck bei reduzierter Gitterauflösung, siehe Gleichung (4.85)	
P_{ref}	Schmierfilmdruck bei hoher Gitterauflösung (Referenzwert), siehe Gleichung (4.85)	
P_{τ_0}	Anfangsbedingung des dimensionslosen Schmierfilmdrucks, siehe Gleichung (3.123)	
p	Schmierfilmdruck, Seite 34	$(p) = M L^{-1} T^{-2}$
\bar{p}	Axial gemittelter Schmierfilmdruck, siehe Gleichung (3.99)	$(\bar{p}) = M T^{-2}$
p_0	Skalierungsgröße des Schmierfilmdrucks, siehe Gleichung (3.52)	$(p_0) = M L^{-1} T^{-2}$
\mathbf{p}_i	Spaltenmatrix des Drucks, siehe Gleichung (3.142)	
\bar{p}_{mech}	Axial gemittelter Druck im Versuch, Seite 60	$(\bar{p}_{\text{mech}}) = M T^{-2}$
p_{t_0}	Anfangsbedingung des Schmierfilmdrucks, siehe Gleichung (3.104)	$(p_{t_0}) = M L^{-1} T^{-2}$
Q	Dimensionslose Auslenkung der Lagerstruktur, siehe Gleichung (3.106)	
Q_1, Q_2	Schnittpunkte zweier Kreise, Seite 59	
Q_k	Konstante Folienverschiebung, siehe Gleichung (4.27)	
Q_{τ_0}	Anfangsbedingung der dimensionslosen Lagerauslenkung, siehe Gleichung (3.124)	
q	Auslenkung der Lagerstruktur, Seite 28	$(q) = L$
q_{t_0}	Anfangsbedingung der Folienauslenkung, siehe Gleichung (3.105)	$(q_{t_0}) = L$
R	Lagerradius, Seite 26	$(R) = L$
\tilde{R}	Spezifische Gaskonstante, Seite 34	$(\tilde{R}) = M L^2 T^{-2} \Theta^{-1} \text{mol}^{-1}$

${}^i\mathbf{R}^j$	Drehmatrix der Systeme \mathcal{K}_i und \mathcal{K}_j , siehe Gleichung (1.2)	
R_{mess}	Gemessener Lagerradius, Seite 58	
R_{nom}	Nominelle Lagerradius, Seite 58	
Re	Reynoldszahl, siehe Gleichung (3.73)	
r	Wellenzapfenradius, Seite 26	$(r) = L$
r_1, r_2	Geometriegrößen, Seite 28	$(r_i) = L$
r_a	Residuum, siehe Gleichung (4.93)	
\vec{r}_{AB}	Vektor von Punkt A zum Punkt B , Seite 26	$(\vec{r}_{AB}) = L$
S_1, S_2	Schnittpunkte zweier Kreise, Seite 59	
s	Kurvenparameter, siehe Gleichung (3.21)	$(s) = L$
T_{per}	Periodendauer eines Umlaufs auf dem Grenzzzyklus, Seite 102	$(T_{\text{rot}}) = T$
T_{rot}	Periodendauer einer Wellenumdrehung, Seite 102	$(T_{\text{rot}}) = T$
t	Zeit, Seite 34	$(t) = T$
U	Dimensionslose Strömungsgeschwindigkeit in \vec{e}_x^2 -Richtung, siehe Gleichung (3.55)	
u	Geschwindigkeit der Strömung in \vec{e}_x^2 -Richtung, Seite 34	$(u) = L T^{-1}$
u_0	Skalierungsgröße der Strömungsgeschwindigkeit in \vec{e}_x^2 -Richtung, siehe Gleichung (3.55)	$(u_0) = L T^{-1}$
V	Dimensionslose Strömungsgeschwindigkeit in \vec{e}_y^2 -Richtung, siehe Gleichung (3.55)	
v	Geschwindigkeit der Strömung in \vec{e}_y^2 -Richtung, Seite 34	$(v) = L T^{-1}$
v_0	Skalierungsgröße der Strömungsgeschwindigkeit in \vec{e}_y^2 -Richtung, siehe Gleichung (3.55)	$(v_0) = L T^{-1}$
\vec{v}_A	Geschwindigkeit des Punkts A , siehe Gleichung (3.6)	$(\vec{v}_A) = L T^{-1}$
\vec{v}_B	Geschwindigkeit des Punkts B , siehe Gleichung (3.7)	$(\vec{v}_B) = L T^{-1}$
$v_{L,r}$	Geschwindigkeitsanteil der Lagerstruktur in Radialrichtung, Seite 32	$(v_{L,r}) = L T^{-1}$
$v_{L,t}$	Geschwindigkeitsanteil der Lagerstruktur in Tangentialrichtung, Seite 32	$(v_{L,t}) = L T^{-1}$
$v_{W,r}$	Geschwindigkeitsanteil des Wellenzapfens in Radialrichtung, Seite 31	$(v_{W,r}) = L T^{-1}$

$v_{W,r,rot}$	Geschwindigkeitsanteil des Wellenzapfens infolge Rotation in radialer Richtung, Seite 30	$(v_{W,r,rot}) = L T^{-1}$
$v_{W,r,trn}$	Geschwindigkeitsanteil des Wellenzapfens infolge Translation in radialer Richtung, Seite 31	$(v_{W,r,trn}) = L T^{-1}$
$v_{W,t}$	Geschwindigkeitsanteil des Wellenzapfens in Tangentialrichtung, Seite 31	$(v_{W,t}) = L T^{-1}$
$v_{W,t,rot}$	Geschwindigkeitsanteil des Wellenzapfens infolge Rotation in Tangentialrichtung, Seite 30	$(v_{W,t,rot}) = L T^{-1}$
$v_{W,t,trn}$	Geschwindigkeitsanteil des Wellenzapfens infolge Translation in Tangentialrichtung, Seite 31	$(v_{W,t,trn}) = L T^{-1}$
W	Dimensionslose Strömungsgeschwindigkeit in \vec{e}_z^2 -Richtung, siehe Gleichung (3.55)	
w	Geschwindigkeit der Strömung in \vec{e}_z^2 -Richtung, Seite 34	$(w) = L T^{-1}$
w_0	Skalierungsgröße der Strömungsgeschwindigkeit in \vec{e}_z^2 -Richtung, siehe Gleichung (3.55)	$(w_0) = L T^{-1}$
w_a	Hilfsparameter der Ansatzfunktion in axialer Richtung, siehe Gleichung (4.99)	
X	Dimensionslose Schmierfilmkoordinate, siehe Gleichung (3.59)	
X_A	Dimensionslose Wellenzapfenmittelpunktskoordinate, siehe Gleichung (3.111)	
X_C	Dimensionslose Wellendurchstoßpunktkoordinate, siehe Gleichung (6.17)	
X_x	Position des maximalen Schmierfilmdrucks, Seite 72	
x	Umfangskoordinate des Schmierfilms, siehe Gleichung (3.29)	$(x) = L$
x_A	Wellenzapfenmittelpunktskoordinate, siehe Gleichung (3.3)	$(x_A) = L$
x_C	Koordinate des Wellendurchstoßpunkts, Seite 119	$(x_C) = L$
x_f	Kreiskoordinate, siehe Gleichung (4.6)	$(y_f) = L$
\mathbf{x}_L	Zustandsvektor des Lagermodells, siehe Gleichung (3.131)	
\mathbf{x}_{L2}	Zustandsvektor des Lagermodells ohne Dämpfung, siehe Gleichung (3.136)	
\mathbf{x}_{L3}	Zustandsvektor des Starrlagermodells, siehe Gleichung (3.158)	
\mathbf{x}_{La}	Zustandsvektor des reduzierten Lagermodells, siehe Gleichung (4.95)	
\mathbf{x}_{LRe}	Zustandsvektor des reduzierten Lager- und des biegeelastischen Rotormodells, siehe Gleichung (6.25)	

\mathbf{x}_{LRs}	Zustandsvektor des reduzierten Lager- und starren Rotormodells, siehe Gleichung (5.17)	
\mathbf{x}_{LRs0}	Gleichgewichtslösung des gekoppelten Lager- und Rotormodells, Seite 97	
\mathbf{x}_{LRsx}	Erweiterter Zustandsvektor des reduzierten Lager- und starren Rotormodells, siehe Gleichung (5.26)	
x_ℓ	Koordinate der unverformten Lagerkontur, siehe Gleichung (4.3)	$(x_\ell) = L$
\mathbf{x}_{Re}	Zustandsvektor des biegeelastischen Rotormodells, siehe Gleichung (6.24)	
\mathbf{x}_{Rs}	Zustandsvektor des starren Rotormodells, siehe Gleichung (5.16)	
x_S	Schwerpunktkoordinate des Rotors, siehe Gleichung (5.1)	$(x_S) = L$
x_w	Koordinate der Wellenzapfenkontur, siehe Gleichung (4.2)	$(x_w) = L$
Y	Dimensionslose Schmierfilmkoordinate, siehe Gleichung (3.59)	
Y_A	Dimensionslose Wellenzapfenmittelpunktskoordinate, siehe Gleichung (3.111)	
Y_C	Dimensionslose Wellendurchstoßpunktskoordinate, siehe Gleichung (6.17)	
y	Schmierfilmkoordinate in radialer Richtung, Seite 34	$(y) = L$
y_A	Wellenzapfenmittelpunktskoordinate, siehe Gleichung (3.3)	$(y_A) = L$
y_C	Koordinate des Wellendurchstoßpunkts, Seite 119	$(y_C) = L$
y_f	Kreiskoordinate, siehe Gleichung (4.6)	$(y_f) = L$
y_ℓ	Koordinate der unverformten Lagerkontur, siehe Gleichung (4.3)	$(y_\ell) = L$
y_L	Lagerverschiebung, Seite 58	$(y_L) = L$
y_q	Koordinate der Schnittpunkte, siehe Gleichung (4.7)	$(y_q) = L$
y_S	Schwerpunktkoordinate des Rotors, siehe Gleichung (5.2)	$(y_S) = L$
y_s	Koordinate der Schnittpunkte, siehe Gleichung (4.4)	$(y_s) = L$
y_w	Koordinate der Wellenzapfenkontur, siehe Gleichung (4.2)	$(y_w) = L$
Z	Dimensionslose Schmierfilmkoordinate, siehe Gleichung (3.59)	
z	Schmierfilmkoordinate in axialer Richtung, Seite 34	$(z) = L$
Z_1, \dots, Z_5	Verschiedene Wellenzapfenzustände, Seite 86	

1 Einleitung

Luftlagerungen bieten das Potential eines signifikanten technologischen Fortschritts im Bereich hochdrehender rotierender Maschinen. Der maßgebliche Vorteil gegenüber den vielfach eingesetzten Wälz- und flüssigkeitsgeschmierten Gleitlagern besteht in der erheblichen Reduktion der Reibungsverluste. Die Folge ist ein deutlicher Anstieg des Wirkungsgrads der Maschine. Durch die daraus resultierenden Energieeinsparungen und insbesondere durch einen kontaminationsfreien Gastransport bei Verbrennungsprozessen führt dies letztlich zu verringerten Emissionen. Weitere, durch den Einsatz der Luftlagertechnologie resultierende Vorzüge sind beispielsweise ein vereinfachtes Schmierstoffkonzept, niedrige Wartungskosten, höchste Temperatureinsatzbereiche aufgrund der thermischen und chemischen Beständigkeit des Schmierstoffs sowie eine geringere Geräuscentwicklung. Allerdings weisen Luftlager gegenüber den etablierten Wälz- und flüssigkeitsgeschmierten Gleitlagern einige Defizite auf. Bei aerodynamischen Lagern ohne externe Druckzufuhr ist dies zum Beispiel die niedrige Tragfähigkeit des Schmierfilms, für dessen Ausbildung hohe Drehzahlen und große Schmierfilmflächen notwendig sind. Voraussetzungen für den Aufbau des sehr dünnen Schmierfilms sind zudem die Einhaltung geringer Fertigungstoleranzen und einer hohen Montagegenauigkeit. Des Weiteren haben aerodynamische Gleitlager, resultierend durch die niedrige Viskosität des gasförmigen Schmierstoffs, geringere Dämpfungseigenschaften als ölgeschmierte Lager, was zu Rotorschwingungen mit hohen Amplituden führen kann. Zudem besteht die Problematik selbsterregter Schwingungen gleitgelagerter Rotoren. Für einen soliden Entwurf und zur sicheren Auslegung der Maschine bedarf es deshalb einer sorgfältigen Betrachtung der Schwingungsthematik luftgelagerter Rotoren. In diesem Kontext steht die vorliegende Arbeit. Sie diskutiert und analysiert das dynamische Verhalten in *aerodynamischen Radialgleitlagern mit Pufferfolie* betriebener einfacher Rotormodelle.

Aerodynamische Gleitlager mit Pufferfolie lassen sich der Kategorie Folienlager zuordnen. Sehr häufig dient die Umgebungsluft als Schmiermittel. Der tragende Schmierfilm entsteht dabei, im Unterschied zu aerostatischen Gleitlagern, einzig durch die Relativbewegung des Wellenzapfens und der Lagerschale. Ein vollständig ausgebildeter Schmierfilm trennt den Wellenzapfen und das Lager gänzlich. Der Rotor schwebt folglich auf dem Schmier- beziehungsweise Luftfilm. Ein Betrieb unter Mischreibungsbedingungen ist bei aerodynamischen Lagern nicht vorgesehen. Allerdings muss während des Anfahrvorgangs und des Auslaufs der Bereich der Festkörperreibung und das Mischreibungsgebiet durchlaufen werden.

Die charakterisierende Bezeichnung der Lagerkategorie begründet sich letztlich durch eine das Lager nach innen abschließende Folie, zumeist in Form eines dünnen Blechs. Sie trennt den Schmierfilm und die darunterliegende Lagerstruktur voneinander. In der Regel befindet sich zwischen der im Kontakt mit dem Schmiermittel stehenden Folie und dem massiven Lagergehäuse eine weitere nachgiebige Struktur, die häufig ebenfalls über eine Folie realisiert wird. Diese Zwischenfolie ist dabei so gestaltet, dass sie sich unter der

Einwirkung des Schmierfilmdrucks auf die Deckfolie verformen kann und somit zu einer Anpassung der Schmierspalthöhe und zu einer Toleranzerhöhung im Produktionsprozess und der Montage beiträgt sowie gleichzeitig dämpfende Eigenschaften einbringt.

Die Technologie der luftgeschmierten Gleitlager ist keineswegs neuartig. So wird von ersten erfolgreichen technischen Realisierungen luftgeschmierter Lager bereits im 19. Jahrhundert berichtet. Zu den Pionieren zählen GUSTAV ADOLF HIRN und ALBERT KINGSBURY. Heutzutage gibt es in Serie hergestellte Maschinen, deren Läufer in Luftlagern betrieben werden. Verglichen mit Wälz- und flüssigkeitsgeschmierten Gleitlagern werden Lager mit gasförmigen Schmiermitteln allerdings selten eingesetzt. Unter der Vision ölfreier Turbomaschinen und Gasturbinen ist gegenwärtig weltweit eine verstärkte Aktivität im Bereich der Luftlagertechnologie zu beobachten. Eine verheißungsvolle Variante ist das aerodynamische Gleitlager mit Pufferfolie, das im Fokus dieser Arbeit steht.

Die grundlegende Schwierigkeit bei der Studie und Identifizierung von physikalischen Zusammenhängen und Schwingungsursachen in Folienlagern betriebener Rotoren besteht in der Wechselwirkung von Folien, Schmierfilm und Rotor. Grundsätzlich sind Analysen hinsichtlich der Eigenschaften einzelner isolierter Systemkomponenten, wie beispielsweise der Folien, des zusammengesetzten Lagers oder des Rotors, erforderlich und notwendig. Zur modellbasierten Abbildung des Gesamtsystemverhaltens, insbesondere im Hinblick auf die sich einstellende Dynamik des Rotors, ist jedoch eine Kopplung aller Subsysteme vonnöten. Eine derartige Aufgabe beinhaltet strukturdynamische und strömungsmechanische Aspekte und lässt sich deshalb in den Kontext der Fluid-Struktur-Interaktion (FSI) einordnen. Ferner kann die Wechselwirkung des gasförmigen Schmierstoffs mit den umgebenden, teilweise verformbaren Strukturen als elasto-aero-dynamisches (EAD) Problem klassifiziert werden. Aufgrund der Verknüpfung einzelner domänenübergreifender Submodelle ist eine erhöhte Modellkomplexität zu erwarten. Trotz moderner Rechner und Lösungsalgorithmen bestehen die Problematiken der Konvergenz numerischer Verfahren und hoher Rechenzeiten. Letztere schränkt die Handhabbarkeit und folglich den Nutzen eines solchen gekoppelten Gesamtmodells ein.

1.1 Zielstellung

Die Literaturübersicht in Abschnitt 2.2 zeigt, dass eine valide Reproduktion des experimentell ermittelten, dynamischen Verhaltens in Folienlagern betriebener Rotoren durch theoretische Modelle bisher nur unzureichend möglich ist. Dies kann verschiedene Ursachen haben. Beispielsweise durch einen Mangel an Verständnis der zugrunde liegenden physikalischen Mechanismen und Zusammenhänge, die letztlich das sich einstellende Systemverhalten hervorrufen. Möglicherweise wurden die maßgeblichen Einflüsse bisher auch noch nicht eindeutig identifiziert und infolgedessen nicht in den Modellen abgebildet.

Die vorliegende Arbeit greift diese Thematik auf. Sie widmet sich der modellbasierten Beschreibung und Studie von in aerodynamischen Gleitlagern betriebener einfacher Rotoren. Dabei sollen die Zusammenhänge zwischen der Lagergestaltung, den Rotoreigenschaften und dem resultierenden dynamischen Verhalten, insbesondere aus schwingungstechnischer Sicht, aufgezeigt und systematisch untersucht werden.

In einem ersten Schritt ist ein neues Lagermodell aufzustellen, zu validieren und im Hinblick auf das Schwingungsverhalten des Rotors zu diskutieren. Das Modell soll insbesondere die nichtlinearen Verformungseigenschaften der Folien in Wechselwirkung mit dem Schmierfilm abbilden und somit eine Erweiterung der bisherigen, im Kontext der Rotordynamik verwendeten Lagermodelle darstellen. Gleichzeitig soll das Modell für die Kopplung mit diversen Rotormodellen geeignet und damit möglichst rechenzeiteffizient sein.

In einem zweiten Schritt ist das Lagermodell mit verschiedenen einfachen Rotormodellen zu koppeln. Die Modelle des Rotors sollen dabei einfach gehalten werden, um möglichst isoliert die Einflüsse der Lagergestaltung auf das dynamische Rotorverhalten untersuchen und aufzeigen zu können. Anhand einer schrittweisen, systematischen Erweiterung der Rotormodelle sollen die einzelnen Wirkmechanismen und Relationen dargelegt und somit ein Gefühl für die zugrunde liegende Physik geschaffen werden. Als Auswertemethoden sind Stabilitäts- und Bifurkationsanalysen vorgesehen, die bisher bei der Untersuchung der nichtlinearen Schwingungen luftgelagerten Rotoren nur sehr vereinzelt angewendet wurden.

Letztlich soll die Arbeit einen Beitrag zum Ziel eines zuverlässigen und simulationsbasierten Auslegungs- und Optimierungsverfahrens für luftgelagerte Rotoren liefern.

1.2 Aufbau der Arbeit

Das im Anschluss an diese Einleitung folgende *2. Kapitel* ist zweigeteilt. Der erste Abschnitt widmet sich der Technologie aerodynamischer Gleitlager. Schwerpunkt sind Lager mit verformbarer Lagerstruktur, insbesondere die im Fokus der Arbeit stehenden Folienlager. Der zweite Abschnitt des Kapitels widmet sich der bestehenden Literatur zu aerodynamischen Gleitlagern mit Pufferfolie. Gegliedert in drei Bereiche werden existierende Lagermodelle, experimentelle Verfahren zur Ermittlung der Lagereigenschaften und das zu beobachtende dynamische Verhalten derartig gelagerter Rotoren sowohl in Experimenten als auch in Simulationsstudien vorgestellt.

Im *3. Kapitel* wird ein neues Modell für aerodynamische Radialgleitlager mit Pufferfolie vorgestellt. Es verbindet die beiden Teilmodelle des Schmierfilms und der verformbaren Folienstruktur. Bei Vorgabe des Wellenzapfenzustands können daraus der Schmierfilm- und damit die am Wellenzapfen wirkenden Lagerkräfte sowie die Verformung der Lagerstruktur ermittelt werden. Das Modell wird in eine dimensionslose Form überführt. Zur Vorbereitung auf die numerische Lösung der Modellgleichungen werden diese mittels Finite Differenzen Verfahren diskretisiert und in eine geeignete Form gebracht.

Die Analyse des Lagermodells erfolgt im *4. Kapitel*. Auf Basis veröffentlichter Daten und Messergebnisse werden zunächst die Parameterwerte des Lagermodells identifiziert. Anschließend werden die Ursachen des Druckaufbaus im Schmierfilm infolge der Wellenzapfenbewegung und die Einflüsse der Modellparameter auf die Druckausbildung erörtert. Im letzten Abschnitt des Kapitels wird die Reduktion des Lagermodells mittels Galerkin-Verfahren beschrieben.

Im *5. Kapitel* wird das im Rahmen der Arbeit entwickelte Lagermodell mit einem starren, horizontal und symmetrisch gelagerten Rotormodell gekoppelt und dessen Verhalten untersucht. Als Ausgangspunkt und zu Vergleichszwecken beginnt die Analyse mit einem

in zylindrischen Starrlagern betriebenen Rotor. In beiden Fällen wird zunächst der ideal gewuchtete Rotor, und anschließend unter der Berücksichtigung einer statischen Unwucht diskutiert.

Das 6. Kapitel entspricht in seiner Struktur dem vorherigen. Anstelle des starren Rotormodells wird im Sinne einer systematischen Modellerweiterung jetzt ein biegeelastischer, horizontal und symmetrisch gelagerter Rotor untersucht. Auch hier erfolgt zunächst die Kopplung mit einem zylindrischen Starrlager. Wie zuvor wird das Systemverhalten für den Rotor mit und ohne statische Unwucht erörtert.

Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und einem Ausblick.

1.3 Mathematische Schreibweise

Die in der Arbeit verwendete Notation folgt den in der Technischen Mechanik üblichen Konventionen. Zur einfachen Lesbarkeit der Arbeit werden im Folgenden nochmals explizit einige wesentliche Punkte dargestellt.

Skalare und Matrizen Skalare Größen werden durch Symbole in normaler Schrift dargestellt, zum Beispiel a . Für Matrizen der Dimension $m \times n$, $m > 1$, $n > 1$ werden fette Großbuchstaben verwendet, beispielsweise \mathbf{M} . Spaltenmatrizen der Dimension $m \times 1$, $m > 1$ und Zeilenmatrizen der Dimension $1 \times n$, $n > 1$ werden mit fetten Kleinbuchstaben dargestellt, zum Beispiel \mathbf{x} . Das Symbol $\mathbf{0}$ kennzeichnet die Nullmatrix.

Vektoren Vektoren sind Größen, die über einen Betrag und eine Richtung charakterisiert sind. Sie werden mit einem Pfeil über dem Symbol gekennzeichnet, zum Beispiel \vec{v} . Einheitsvektoren sind Vektoren der Länge 1. Anhand dreier zueinander senkrecht stehender Einheitsvektoren \vec{e}_i^j , $i = x, y, z$ lässt sich ein orthonormiertes Koordinatensystem $\mathcal{K}_j(O, \vec{e}_x^j, \vec{e}_y^j, \vec{e}_z^j)$ mit dem Ursprung O definieren.

Ein Vektor \vec{v} kann als Linearkombination der Basisvektoren verschiedener Koordinatensysteme dargestellt werden:

$$\vec{v} = a_1 \vec{e}_x^1 + a_2 \vec{e}_y^1 + a_3 \vec{e}_z^1 = b_1 \vec{e}_x^2 + b_2 \vec{e}_y^2 + b_3 \vec{e}_z^2. \quad (1.1)$$

Der Zusammenhang zwischen den einzelnen Basisvektoren der beiden orthonormierten Systeme \mathcal{K}_1 und \mathcal{K}_2 kann mittels der Drehmatrix \mathbf{R} angegeben werden. Werden die Basisvektoren \vec{e}_i^1 , $i = x, y, z$ in einer Spaltenmatrix $\mathbf{e}^1 = [\vec{e}_x^1, \vec{e}_y^1, \vec{e}_z^1]^T$ und die Basisvektoren \vec{e}_i^2 in einer Spaltenmatrix $\mathbf{e}^2 = [\vec{e}_x^2, \vec{e}_y^2, \vec{e}_z^2]^T$ zusammengefasst, so gilt

$$\mathbf{e}^1 = {}^1\mathbf{R}^2 \mathbf{e}^2. \quad (1.2)$$

Die einzelnen Elemente der Drehmatrix ergeben sich aus dem Skalarprodukt der Basisvektoren

$${}^1r_{ij}^2 = \vec{e}_i^1 \cdot \vec{e}_j^2, \quad i = x, y, z, \quad j = x, y, z. \quad (1.3)$$

Häufig werden die Koordinaten eines Vektors \vec{v} (siehe (1.1)) in einer Matrix $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]^T$ zusammengefasst. Da diese Koordinaten vom verwendeten Bezugssystem abhängen, wird

dieses in der Schreibweise mitangegeben, zum Beispiel $\mathbf{v}^1 = [a_1, a_2, a_3]^T$ für Koordinaten bezüglich $\vec{e}_x^1, \vec{e}_y^1, \vec{e}_z^1$. Mittels der Drehmatrix \mathbf{R} können die Koordinaten des Vektors in verschiedenen Bezugssysteme ineinander überführt werden:

$$\mathbf{v}^1 = {}^1\mathbf{R}^2 \mathbf{v}^2. \tag{1.4}$$

2 Stand der Technik

Das Kapitel beginnt mit einer Übersicht der Technologie aerodynamischer Gleitlager. Zunächst werden die Defizite zylindrischer Starrlager herausgearbeitet und mögliche Optimierungsmaßnahmen vorgestellt. Im Anschluss werden Radialgleitlager mit variabler Innengeometrie kategorisiert. Im Mittelpunkt steht dabei das Folienlager als ein Vertreter der Gruppe Federlager. Rückblickend werden deren Entstehung, bestehende Varianten und Anwendungen erläutert sowie gegenwärtige Schwachpunkte und Entwicklungspotentiale erörtert.

Der zweite Teil des Kapitels widmet sich vertiefend aerodynamischen Radialgleitlagern mit Pufferfolie. Zunächst wird ein Überblick über die zahlreich vorhandenen Modelle derartiger Lager gegeben. Es folgt eine Aufstellung experimenteller Verfahren zur Ermittlung der Lagereigenschaften. Der letzte Abschnitt des Kapitels widmet sich der Dynamik von Rotoren in den besagten Lagern, zunächst den praktischen Versuchen. Dargelegt werden Versuchsrotoren, Mess- und Analyseverfahren und einige typisch auftretende Schwingungseffekte. Abschließend folgt eine Zusammenstellung theoretischer beziehungsweise numerischer Studien über das Verhalten in Folienlagern betriebener Rotoren. Sie beinhaltet einen Überblick über die Modelle, die angewandten Methoden und erörtert schließlich die bestehende Diskrepanz zwischen bestehender Theorie und Praxis.

2.1 Technische Ausführungen aerodynamischer Lager

2.1.1 Defizite zylindrischer Starrlager

Starre zylindrische Gleitlager werden häufig mit Ölschmierung, jedoch sehr selten mit gasförmigen Schmierstoffen eingesetzt. Die Probleme dieser Lagerart bei Nutzung von gasförmigen Schmierstoffen sind hinreichend erörtert. So haben zylindrische, aerodynamische Starrlager aufgrund der üblicherweise sehr dünnen Schmierfilme enge Herstellungstoleranzen und es bedarf einer hohen Montagegenauigkeit. Beides wirkt sich nicht zuletzt preisteigernd aus. Gleichzeitig sind diese Lager aufgrund der engen Spalte aber auch empfindlich gegenüber thermischen und elastischen Verformungen des Wellenzapfens, sowie Oberflächenfehlern und Schmutzpartikeln [9, 54, 75]. Ferner ist der Betriebsbereich derartig gelagerter Rotoren beschränkt. Dies liegt zum einen an einem nicht voll ausgebildeten tragendem Schmierfilm bei niedrigen Drehzahlen. Zum anderen besteht das Risiko auftretender, teils selbsterregter Schwingungen bei höheren Drehzahlen [30, 48, 52, 80, 89, 91, 123]. Wie bei zylindrischen Starrlagern mit flüssigen Schmiermitteln treten diese Schwingungen häufig in Form des sogenannten *Halbfrequenzwirbels* auf (vergleiche Kapitel 4 und 5). Bei zylindrischen Starrlagern mit gasförmigen Schmierstoffen stellt die Drehzahl bei einsetzenden Schwingungen des Halbfrequenzwirbels die Obergrenze des Einsatzbereichs dar [9, 122, 166]. Zur Verringerung der genannten Nachteile haben sich verschiedene konstruk-

tive Modifikationen des zylindrischen Starrlagers etabliert. Einige Möglichkeiten werden im Folgenden kurz vorgestellt.

2.1.2 Optimierende Modifikationen zylindrischer Starrlager

Druckluftzufuhr Wird an einer zylindrischen Form des Lagers festgehalten, so bietet sich beispielsweise die Möglichkeit, über eine oder mehrere Bohrungen in der Lagerschale den Schmierfilmaufbau durch eine Druckluftzufuhr zu fördern. Ist der tragende Schmierfilm vorwiegend durch die Druckspeisung verursacht, so wird von einem *aerostatischen Lager* gesprochen. Die nach diesem Wirkprinzip funktionierende Lagerart hat gegenüber den aerodynamischen Lagern den Vorteil einer erhöhten Tragfähigkeit bei niedrigen Drehzahlen. Gleichzeitig können die Lagerabmessungen durch kleinere Schmierfilmflächen verringert werden. Außerdem existiert ein voll ausgebildeter Schmierfilm auch bei nicht rotierender Welle. Beruht der Aufbau des tragenden Schmierfilms permanent oder zeitweise auf mehreren Mechanismen, wie beispielsweise der Rotation der Welle und der Schmierstoffspeisung, so hat sich die allgemeine Bezeichnung eines *hybriden Lagers* etabliert. Die Nachteile der einzelnen Prinzipien können so teilweise kompensiert werden. Beispielsweise kann durch die externe Luftzufuhr die kritische Drehzahl der einsetzenden Halbfrequenzschwingung erhöht werden [52]. Gleichzeitig kann den bei aerostatisch arbeitenden Lagern auftretenden destabilisierenden Effekten, wie beispielsweise dem sogenannten *air-hammer* [2, 9, 126, 152] entgegengewirkt werden. Selbstredend führen solche Kombinationslösungen allerdings zu höheren Kosten.

Bemusterung der Oberfläche Ist der Anschluss an eine externe Druckversorgung nicht möglich oder nicht gewünscht, so ist alternativ eine Bemusterung entweder der Lager- oder der Wellenoberfläche oder der beiden möglich. Bereits einzelne axiale Nuten in der Lageroberfläche können zu einer Verringerung der Schwingungsanfälligkeit des Rotors gegenüber zylindrischen Starrlagern führen [48, 124]. Lager mit optimierten und damit komplex geformten Nuten werden häufig aufgrund ihrer Optik als *Fischgrätlager*, englisch *herringbone-grooved bearings*, bezeichnet. Gegenüber zylindrischen Starrlagern weisen sie eine wesentliche Verbesserung der Last-Tragfähigkeit [130] sowie verbesserte Stabilitätseigenschaften des darin betriebenen Rotors auf [42, 48]. Allerdings reagieren Fischgrätlager ebenfalls empfindlich auf sich im Schmiermedium befindliche Partikel [124]. Diese können sich in den Rillen absetzen und wirken sich so negativ auf das Strömungsgebiet und folglich die Ausbildung des tragenden Schmierfilms aus. Ebenso besteht bei diesen Lagern weiterhin die Empfindlichkeit gegenüber Ausdehnungen des Wellenzapfens, der zu schwerwiegenden Versagensfällen führen kann [124, 130].

Mehrkeillager Analog zu flüssigkeitsgeschmierten Radialgleitlagern besteht auch bei gasförmigen Schmierstoffen die Möglichkeit von der Zylindergeometrie des Lagers abzuweichen, siehe zum Beispiel [146]. Solche sogenannten *Mehrkeillager* (engl. *lobe-bearings*) haben einen über den Umfang nicht konstanten Radius. Eine Anpassung der Innenkontur infolge des wirkenden Schmierfilmdrucks ist prinzipiell nicht beabsichtigt. Die Nutzung dieser Lagerart in Verbindung mit gasförmigen Schmierstoffen ist jedoch extrem selten.

2.1.3 Aerodynamische Gleitlager mit variabler Innengeometrie

Das Kippsegmentlager

Eine weitere Möglichkeit zur Reduktion der unter Abschnitt 2.1.1 genannten Nachteile zylindrischer Starrlager ist die Verwendung von *Kippsegmentlager*, englisch *tilting-pad bearing* oder *pivoted-pad bearing*. Bei dieser Lagerform ist die Lagerfläche in starre Segmente unterteilt, die jeweils drehbar gelagert sind. Sie sind zumindest idealisiert auch als anpassungsfähige Mehrkeillager aufzufassen. Verglichen mit Fischgrätlagern sind bei dieser Lagerart Partikel im Schmiermedium oder die Ausdehnung des Wellenzapfens nicht problematisch [130]. Auch die Gefahr subsynchroner Schwingungen ist bei in Kippsegmentlagern betriebenen Rotoren gegenüber zylindrischen Starrlagern erheblich reduziert [48, 131, 152]. Als nachteilig stellt sich der Verschleiß einzelner Segmente heraus, der langfristig das Lagerspiel reduziert und nicht zuletzt die Schmierfilmbildung zumeist negativ beeinflusst. Die Ursachen für den vermehrten Verschleiß können durch den Schmierfilm angeregte Schwingungen einzelner Elemente oder durch hohe Reibmomente in den Drehgelenken verhinderte Verdrehungen sein [152], die letztlich zum Kontakt zwischen den einzelnen Elementen und dem Wellenzapfen führen. Wenngleich die Genauigkeitsanforderungen an den Montageprozess des Läufers und der Lager recht niedrig sind [89], hat das einzelne Lager enge Fertigungstoleranzen und bedarf einer hohen Montagegenauigkeit [124]. Gepaart mit der hohen Anzahl an Teilkomponenten schlägt sich dies in den Kosten des Lagers nieder. Außerdem benötigen Kippsegmentlager einen recht großen Bauraum.

Der Typ Federlager

Alternativ zu den oben genannten Varianten gibt es die nach GLIENICKE und LAUNERT bezeichnete Gruppe der *Federlager* [9]. Kennzeichnendes Merkmal dieser Lagerkategorie ist eine Lagerinnenfläche oder einzelne Segmente, die sich im Betrieb elastisch verformen können. Das Lager ist dadurch im Stande, Montageungenauigkeiten und thermische sowie fliehkraftbedingte Verformungen des Wellenzapfens ohne unzulässige Lagerspieländerungen in gewissem Umfang selbstständig auszugleichen. Fertigungstoleranzen können vergrößert werden. Verglichen mit zylindrischen Starrlagern besteht eine geringere Empfindlichkeit gegenüber Partikeln im Schmiermedium. Auch der prinzipiell zu vermeidende Fall des Rotor-Stator-Kontaktes bei hohen Drehzahlen bleibt aufgrund der nachgiebigen Lagerstruktur erfahrungsgemäß weniger folgenschwer [122].

Ein weiterer Vorzug der Federlager besteht in der Möglichkeit durch eine entsprechende Gestaltung der nachgiebigen Struktur und zusätzliche Dissipationsmechanismen die Lagereigenschaften zum Beispiel im Hinblick auf eine Erhöhung der Tragfähigkeit und Reduzierung der Schwingungsanfälligkeit des Rotors zu modifizieren [54, 55, 77, 122]. Grundsätzlich besteht auch bei Federlagern die teilweise sehr effektive Möglichkeit, gewünschte Nachgiebigkeits- und Dämpfungseigenschaften durch eine entsprechende Abstützung des Lagers gegenüber dem Gehäuse zu gestalten [42, 124]. Dieses Prinzip der äußeren Lagerdämpfung wird jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter verfolgt.

Bis heute sind eine Vielzahl an Lagern der Kategorie Federlager entwickelt worden. Für einen Überblick wird der interessierte Leser beispielsweise auf [9] verwiesen. Nachfolgende Ausführungen beschränken sich auf Federlager, deren Nachgiebigkeit über dünne Bleche,

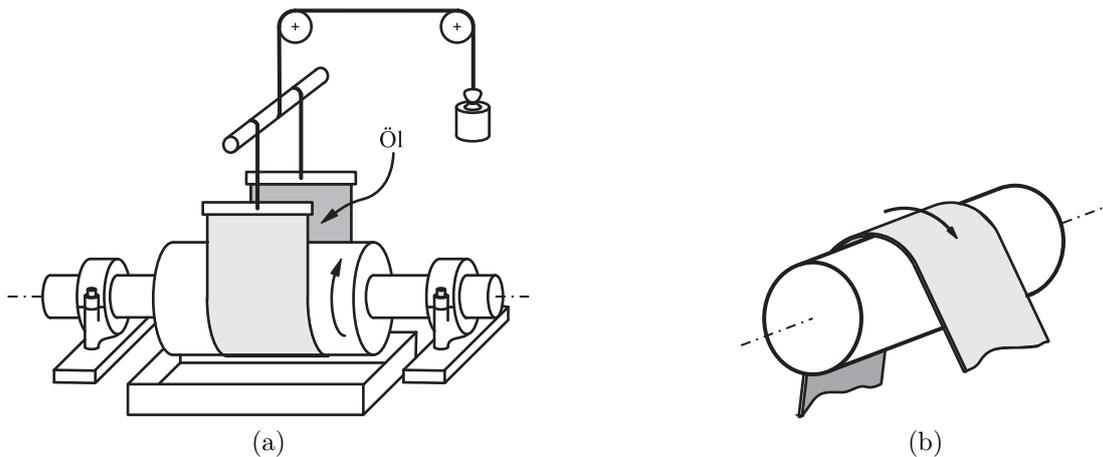


Abbildung 2.1: (a) Ursprungskonzept des Folienlagers. (b) Weiteres Folienlagerprinzip: Umlenkung eines weichen Fördermediums.

die häufig auch als Folien bezeichnet werden, realisiert sind. Folglich hat sich für derartige Lager der Terminus *Folienlager* etabliert.

Historie des Folienlagers Die erste Veröffentlichung über ein Folienlager stammt von BLOK und VAN ROSSUM aus dem Jahre 1953 [15]. Im vorgestellten Konzept wird eine Cellophanfolie verwendet und Öl als Schmiermittel eingesetzt. Abbildung 2.1a skizziert den Versuchsaufbau. Die dort beschriebene Lagermethode, insbesondere in Verbindung mit flüssigem Schmiermittel, kam jedoch in keiner Maschine zur Anwendung. Etwa ein Jahrzehnt später gewann die Folienlagerthematik an Bedeutung, jedoch in einer etwas anderen Form und mit Luft als Schmiermittel. Grundsätzlich beschreibt und analysiert die Thematik die Wechselwirkung zweier relativ zueinander bewegter Oberflächen mit deutlich unterschiedlicher Nachgiebigkeit und einem dazwischen befindlichen Fluid. Sie umfasst somit auch den Fall der Umlenkung und Führung von Folien, Filmen, Papier und weiteren Fördermedien. Dies soll möglichst reibungsfrei und häufig ohne direkten Kontakt stattfinden. Abbildung 2.1b veranschaulicht das Prinzip. Letztlich war es die elektronische Datenaufzeichnung, die eine vertiefende Behandlung der Thematik auslöste. Den Anstoß gab im Zuge steigender Bandgeschwindigkeiten die sinkende Aufnahmequalität, die wie sich später herausstellte, durch vergrößerte Filmdicken verursacht wurde [34].

Das vorliegende Prinzip eines sich aufbauenden und schließlich tragenden Luftfilms wurde wieder aufgegriffen und auf die Lagerung hochdrehender Rotoren angewandt. Eine erste Machbarkeitsstudie der Firma Ampex in Kollaboration mit der NASA, dokumentiert von STAHLER und HUCKABAY [166], lieferte mit erreichten Wellendrehzahlen von $381\,000\text{ min}^{-1}$ vielversprechende Ergebnisse. In einer darauffolgenden Publikation [120] stellte LICHT das verwendete Folienlager, das im Deutschen auch als *Bandlager* bezeichnet wird, näher vor und präsentierte weitere Messergebnisse. Das beschriebene Bandlager ist in Abbildung 2.2 skizziert. Es besteht aus einer dünnen, biegeweichen Folie, die über Umlenkrollen gespannt wird und so die Translationsbewegungen des Rotors einschränkt. In

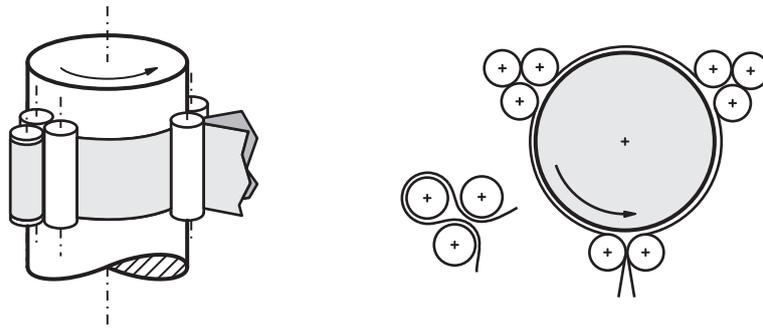


Abbildung 2.2: Bandlager (zugspannungsdominiertes Folienlager).

der zitierten Quelle wird von einer Druckluftzufuhr zur Förderung der Schmierfilmbildung während des Anfahrvorgangs berichtet.

Im Rahmen der oben genannten Zusammenarbeit wurde als erster Demonstrator, innerhalb dem ein solches Bandlager getestet wurde, eine Wärmekraftmaschine (Brayton cycle unit) ausgewählt [123]. Das Lager wurde ohne zusätzliche Druckspeisung betrieben, und der vertikal orientierte Läufer zeigte ein stabiles Betriebsverhalten mit ausreichend niedrigen Schwingungsamplituden. Im genannten Fall erwies sich das Bandlager gegenüber dem bisher verwendeten aerodynamisch arbeitendem zylindrischen Starrlager und auch im Vergleich mit dem Kippsegmentlager als vorteilhaft. Infolgedessen wurden alle derartigen von der NASA mitentwickelten Maschinen mit Bandlagern ausgestattet [34] und die Nutzung dieser innovativen Lagertechnologie durch diverse Veröffentlichungen, zum Beispiel [44, 125], verbreitet.

Obwohl bei Bandlagern die ansonsten bei in Fluidlagern betriebenen Rotoren allgegenwärtigen Instabilitätsprobleme in Form von selbsterregten Schwingungen nicht aufzutreten scheinen [125], konnte sich diese Lagertechnologie trotz allem nicht durchsetzen. Die identifizierten Mankos des Lagers sind der recht große Bauraum, der aufwendige Justageprozess und die schlechten Dämpfungseigenschaften, die letztlich nur durch die Materialdämpfung der Folien entstehen [55].

Sowohl das Bandlager als auch die Führung bewegter, biegeweicher Materialien, wie in Abbildung 2.1b dargestellt, werden von WALOWIT und ANNO [176] als *zugspannungsdominierte* (engl. *tension-dominated*) Folienlager klassifiziert. Alle nachfolgend beschriebenen Lagerarten fallen nach dieser vorgenommenen Einteilung in die Kategorie der *biegungsdominierten* (engl. *bending-dominated*) Folienlager.

Ebenfalls in den sechziger Jahren begann die Firma Garrett AiResearch, mittlerweile Honeywell Aerospace, mit der Entwicklung von Folienlagern für rotierende Maschinen. Bereits am Ende des besagten Jahrzehnts wurde die sogenannte *air-cycle-machine*, eine Kühlturbine in der Klimaanlage von Flugzeugen des Typs DC-10, in Folienlagern betrieben. Dies war zugleich die erste in Serie gefertigte Anwendung, in der Folienlager eingesetzt wurden. Mittlerweile laufen die Mehrheit aller Flugzeugkühlturbinen in dieser Lagertechnologie [1]. Einen Überblick gibt [99].

Das anfänglich in der DC-10 genutzte Folienlager ist in Abbildung 2.3 skizziert und wird in der deutschsprachigen Literatur als *Garrettlager* bezeichnet. Im Englischen existieren mehrere Bezeichnungen wie beispielsweise *cantilevered foil bearing* [55], *leaf-type foil bea-*

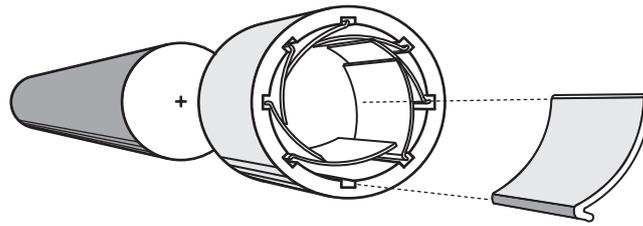


Abbildung 2.3: Garrett-Lager (biegungsdominiertes Folienlager).

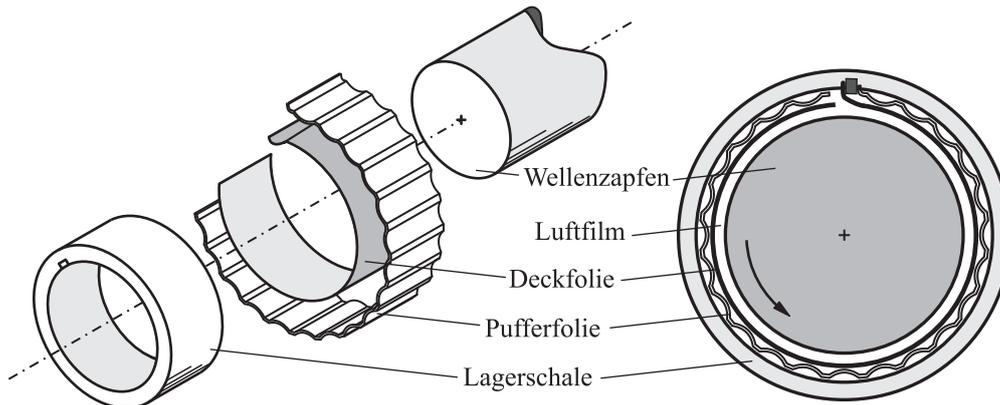


Abbildung 2.4: Aerodynamisches Gleitlager mit Pufferfolie (biegungsdominiertes Folienlager).

ring [35], oder *multipad foil journal bearing* [1]. Das genannte Lager besteht aus mehreren, zumeist aus Federblech hergestellten Segmenten, die einseitig mit dem Gehäuse verbunden sind und deren andere Enden am benachbarten Segment aufliegen. Üblicherweise berühren die einzelnen Segmente den ruhenden Rotor nach dem Prinzip der Vorspannung. Erst bei rotierendem Wellenzapfen und voll ausgebildetem Schmierfilm ist der Kontakt zwischen dem Rotor und den Segmenten aufgehoben. Diverse Modifikationen und Weiterentwicklungen des Lagers, vorrangig die Gestaltung der Segmente betreffend, wurden patentrechtlich geschützt, siehe zum Beispiel [3, 8, 47, 161].

Von den Mitentwicklern des Bandlagers LICHT und BRANGER wurde 1975 in [124] das *Spirallager*, englisch *spirally-wound cylindrical foil bearing* oder auch *tape-type bearing* [29], vorgestellt. Ein derartiges Lager besteht aus einer Folie, die mehrlagig aufgewickelt den Wellenzapfen und das Lagergehäuse trennt. Bedingt durch die natürliche Welligkeit der Folie entstehen kleine Luftspalte zwischen den einzelnen Schichten. Unter der Last des Schmierfilmdrucks wird die Schichtung lokal komprimiert, wobei zusätzlich Reibungseffekte infolge der Relativbewegung der einzelnen Lagen auftreten. Die technische Realisierung solcher Lager ist simpel und kostengünstig. Im Zuge der Entwicklungsarbeit hat sich herausgestellt, dass die Schwingungen des Rotors reduziert werden können, wenn die natürliche Welligkeit der Folien durch plastische Verformung infolge Biegung verstärkt wird [121].

Das Charakteristikum, das die nachgiebige Struktur über eine gewellte Folie realisiert, kennzeichnet auch das gegenwärtig in Veröffentlichungen am häufigsten diskutierte Foli-

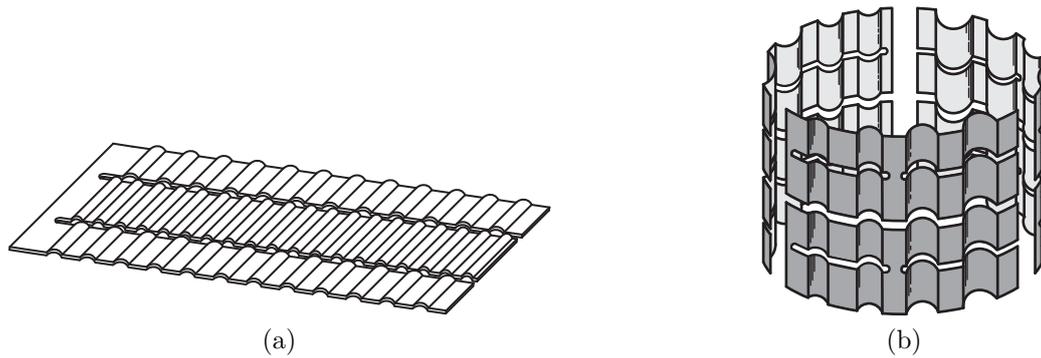


Abbildung 2.5: Pufferfolie der 2. (a) und 3. Generation (b).

enlager. Zu Beginn der 70er Jahre entwickelten die Firmen Mechanical Technology Inc. (MTI) und Hamilton Standard das sogenannte *Hydresillager* [1, 34, 99]. Abbildung 2.4 skizziert das Prinzip. In seiner ursprünglichen Form besteht das Lager aus zwei voneinander getrennten Schichten, einer sogenannten *Deckfolie*, englisch *top-foil*, und einer gewellten *Pufferfolie*, englisch *corrugated subsurface*. Letztgenannte wird häufig auch schlicht *bump-foil* genannt.

Größter Vorteil des Hydresillagers gegenüber dem Garrettlager ist eine vereinfachte Fertigung [55]. Mittlerweile sind mehrere Generationen dieses Lagertyps entwickelt worden. Die erste, mittlerweile patentrechtlich nicht mehr geschützte Generation des Lagers besteht aus einer in Umfangs- und axialer Richtung gleichmäßig geformten Pufferfolie. Verglichen mit anderen Federlagern hat dieses Lager ein günstiges Anfahrverhalten, jedoch keine ausgeprägten Dämpfungseigenschaften [1, 20]. Die Tragfähigkeit ist vergleichbar mit der zylindrischer Starrlager [36].

In der zweiten Generation dieses Lagertyps variieren die Eigenschaften der Pufferfolie entweder in Umfangs- oder axialer Richtung, zum Beispiel durch einzelne parallel angeordnete Pufferfolienstreifen (vergleiche Abbildung 2.5a). Infolge der angepassten Steifigkeit konnte die Tragfähigkeit der Lager gegenüber der ersten Generation verdoppelt werden [36]. In den Artikeln von DELLACORTE et al. [36] und CHEN et al. [29] ist ein möglicher Herstellungsprozess derartiger Lager der ersten und zweiten Generation beschrieben.

Die dritte Generation dieser Lagerart ist gekennzeichnet durch eine weitere Anpassung der Pufferfolieneigenschaften sowohl in Umfangs-, als auch axialer und radialer Richtung. Letztere bezieht sich auf eine Modifikation der Verformungseigenschaften [37] beziehungsweise der unverformten Pufferhöhe (vergleiche [66, 105]). Infolge der Neugestaltung haben Lager der dritten Generation die drei- bis vierfache Tragfähigkeit im Vergleich zur Ausgangsgeneration [36]. Abbildung 2.5b illustriert eine solche Pufferfolie der dritten Generation. Als weitere Modifizierung gegenüber den bisherigen ersten beiden Generationen wird jetzt teilweise auch keine über den gesamten Umfang laufende Deckfolie mehr eingesetzt. Vielmehr wird diese ebenfalls in Umfangsrichtung unterteilt, wobei jeder Abschnitt separat am Lagergehäuse fixiert ist, illustriert zum Beispiel in [66] und [105]. In einer Patentschrift von Heshmat [63] werden derartige Lager nicht mehr als Hydresillager bezeichnet, sondern allgemein als *compliant foil hydrodynamic journal bearings*. Als Mitbegründer der

Firma Mohawk Innovative Technology Inc. (MiTi), deren Kernkompetenz im Bereich der Folienlager liegt, und Urheber zahlreicher Patente ist, hat genannter Autor in vielen Veröffentlichungen die Anwendung dieses Lagertyps auf diverse Rotoren beschrieben und die Weiterentwicklung dieser Lagerart vorangetrieben. Einige Veröffentlichungen mit experimentellem Schwerpunkt dieser Institution sind zum Beispiel [64, 70, 151, 177].

Weitere Folienlagervarianten Erwartungsgemäß existieren mittlerweile eine Vielzahl weiterer Varianten von Folienlagern. Sie weisen verschiedenartige, teilweise plastisch verformte Folien, aber auch unverformte Folien in unterschiedlicher Anzahl mit variierenden Fixierungen auf. In Patenten von KANG und SAVILLE [85] sowie HAGEMEISTER [58] sind mehrere dieser Möglichkeiten dargestellt. Auch alternative Konzepte zur Realisierung der Nachgiebigkeitseigenschaften des Lagers sind dokumentiert. So beschreiben beispielsweise SONG und KIM in [164] ein Folienlager, dessen Lagergehäuse axiale Nuten aufweist, in denen überstehende Spiralfedern eingebracht sind. Die von HOU et al. in [74] gezeigten Lager bestehen aus Schichten von Dünnscheiben mit dazwischen liegenden, nicht eng gepackten, axial verlaufenden Kupferkabeln. SAN ANDRÉS et al. beschreibt in [154] ein Lager mit einem flexiblen Metallschaum zwischen Deckfolie und Lagerschale.

Neben verschiedenartigen Folienkonfigurationen wird auch die Form der Lagerschale optimiert. In einem Beitrag von KIM [90] wird kein zylinderförmiges Lagergehäuse beschrieben, sondern eine im Stil eines Mehrkeillagers geformte Fassung. Die Einbringung von Abstandsblechen, englisch *shims*, zwischen Lagerschale und Pufferfolien [23] hat eine vergleichbare Wirkung und führt mitunter zu reduzierten Schwingungen des Läufers, siehe zum Beispiel [96, 163].

Status quo der Anwendungen Gegenwärtig gibt es bereits eine geringe Anzahl verschiedenartiger Anwendungen, welche die Technologie der Folienlager nutzen. Beispiele sind die bereits oben erwähnten Kühlturbinen der Flugzeugklimaanlagen, aber auch Wärmekraftmaschinen oder Gasturbinen der Firma Capstone Turbine Corp.. Darüber hinaus sind eine Vielzahl an Demonstratoren für in Folienlagern betriebene Rotoren entwickelt und erprobt worden [70, 76, 151, 177]. Generell hat sich weltweit die Anzahl der Institutionen, die sich mit dieser Thematik befasst, in den letzten Jahren deutlich erhöht. Erklärtes Entwicklungsziel sind unter anderem ölfreie Turbomaschinen und Heißgasturbinen. Ein Schwerpunkt ist der luftgelagerte Turbolader, der schon patentiert ist [107], jedoch trotz diverser Studien und Versuche [17, 69, 75, 94, 118, 148, 162, 163] bisher noch nicht in Serie produziert wird.

Schwachstellen und Entwicklungspotentiale der Folienlager Verschiedene Defizite, die mitunter die Weiterverbreitung der Folienlagertechnologie verhindern, sind in der Literatur aufgeführt. SAN ANDRÉS und CHIRATHADAM nennen in [153] als Ursachen die lange Entwicklungszeit der Lager und der Prototypen, sowie verwendete exotische Materialien und hohe Herstellungskosten. Des Weiteren besteht generell das Bedürfnis nach einer Verbesserung der Lagereigenschaften in niedrigen Drehzahlbereichen. Dies betrifft einerseits das Streben nach einem voll ausgebildeten, tragendem Schmierfilm bei möglichst niedrigen Drehzahlen [34, 75, 162]. Andererseits wird versucht die Reibung und damit letztlich

das Anfahrmoment bei noch nicht voll ausgebildeten tragendem Schmierfilm zu minimieren [34]. In diesem Zusammenhang steht auch das Bestreben nach einer Verschleißverringerung der Folien infolge der Festkörper- und Mischreibung, was die Lebensdauer des Lagers vergrößert [99]. Durch widerstandsfähigere Materialien und Beschichtungen kann so der Abtrag reduziert und das Lagerspiel oder die Vorlast über eine höhere Anzahl an Anfahrvorgängen annähernd konstant gehalten werden [139]. Außerdem besteht ein Bedürfnis nach temperaturresistenten Folien, beziehungsweise deren Beschichtungen, die den Einsatz der Lager bei hohen Temperaturen ermöglichen [75, 99, 150].

Gegenwärtig – wenn gleich auch nicht in vollautomatisierter Serienproduktion – hergestellte Lager weisen trotz identischem Herstellungsprozess teilweise erhebliche, voneinander abweichende Lagerspiele, respektive Nachgiebigkeitseigenschaften aufgrund unterschiedlicher Puffergeometrien auf [6, 150, 156]. Als Folge eines zu geringen Lagerspiels oder einer zu großen Vorspannkraft kann es letztlich zum Erhitzen und schließlich zum Ausfall des Lagers kommen [73]. Einige konkret bei Versuchen aufgetretene Probleme sind publiziert. So konnte beispielsweise die angestrebte Maximaldrehzahl eines Turboladerprüfstands aufgrund einer nicht näher spezifizierten rotodynamischen Instabilität nicht erreicht werden [118]. Auf einem anderen Prüfstand konnten beispielsweise auch Experimente mit dynamischen Unwuchten infolge der rapiden Erhitzung der Lager nicht wie geplant durchgeführt werden [7]. Als weitere publizierte Problematik wird in [150] der Versagensfall eines Folienlagers auf einem Hochtemperaturprüfstand beschrieben.

Als Ansatzpunkt zur Verbesserung der Lagereigenschaften wird häufig eine Erhöhung der Dämpfung unter anderem in Form einer Reibungserhöhung der Folienstruktur propagiert [34, 116, 156]. Allerdings ist ein solider modellbasierter oder experimenteller Nachweis über die Minimierung oder gar Verhinderung von beispielsweise selbsterregten Schwingungen bisher noch nicht erbracht (siehe auch Abschnitt 2.2). Grundsätzlich besteht, wie auch am Ende des Kapitels gezeigt wird, ein Mangel an validierten Lagermodellen, die gekoppelt mit einem Rotormodell das dynamische Verhalten adäquat prognostizieren und so zur sicheren Auslegung des Rotor-Lager-Systems beitragen.

2.2 Literaturübersicht zu aerodynamischen Gleitlagern mit Pufferfolie

2.2.1 Lagermodellierung

Fluid Die Beschreibung des Fluidverhaltens nahezu aller Lagermodelle basiert auf den Annahmen der hydrodynamischen Schmierfilmtheorie. Sie führen letztlich auf die sogenannte *Reynoldsgleichung*. Sie beschreibt den Fluiddruck im Schmierpalt. Die Gleichung geht zurück auf eine Veröffentlichung [140] von REYNOLDS aus dem Jahre 1886. Motiviert durch experimentelle Beobachtungen von TOWER [172] leitet er in dem genannten Beitrag die später nach ihm benannte Differentialgleichung für inkompressible Fluide her. HARRISON publizierte 1913 in [60] für weitere vereinfachende Annahmen die Erweiterung auf kompressible Fluide. Die Verallgemeinerung der von REYNOLDS formulierten Druckgleichung um eine variable Dichte, auf die Form wie sie heutzutage Verwendung findet,

geht laut GROSS et al. [55] auf eine Veröffentlichung [170] von TIPEI aus dem Jahre 1954 zurück.

Lagerstruktur Im Unterschied zur Fluidmodellierung sind eine Vielzahl an Modellen der Folienstrukturen in den unterschiedlichsten Komplikationsstufen publiziert. Der vorliegende Abschnitt gibt einen Überblick der existierenden Modellvielfalt. WALOWIT und ANNO gehören zu den ersten Autoren, die Modelle für aerodynamische Lager mit Puffer- und Deckfolie veröffentlicht haben. In [176] beschreiben sie den Zusammenhang zwischen wirkender Last und Verschiebung der beiden eindimensional modellierten Folien. Die Coulombsche Reibung zwischen der Pufferfolie und der Lagerschale wird bereits im Ansatz berücksichtigt. Letztlich postulieren die Autoren nach diversen Vereinfachungen jedoch einen linearen Zusammenhang zwischen dem über ein halbkreisförmiges Pufferelement gemittelten Druck und dessen Verformung. Zum selben Ergebnis kommt wenig später CROSBY in [32].

Die Vereinfachung auf eine in jedem Punkt des Lagers lokale, lineare Druck-Verschiebungs-Relation (*Winkler'sche Bettung*) wurde von HESHMAT et al. zunächst für Axiallager [67] und anschließend für Radiallager [68] vorgeschlagen. In der englischsprachigen Literatur wird dieses Strukturmodell, insbesondere im Kontext der Folienlager, häufig als *simple elastic foundation model* bezeichnet. IORDANOFF greift den Ansatz auf und erweitert diesen. Er ermittelt für den ersten an der Lagerschale fixierten Puffer und den letzten Puffer am anderen Ende unter Berücksichtigung von Coulombscher Reibung deren lineare Steifigkeitskoeffizienten. Für die dazwischenliegenden Steifigkeitskoeffizienten schlägt er eine lineare Interpolation vor [81]. PENG und CARPINO veröffentlichen in [132] die Erweiterung des Winkler'schen Bettungsmodells um einen parallel geschalteten viskosen Dämpfer. Das Vorgehen zur Ermittlung der sich aus der Coulombschen Reibung ergebenden äquivalenten viskosen Dämpferkonstanten publizieren die beiden Autoren in [133]. Zeitgleich zu den beiden letztgenannten Veröffentlichungen wird von KU und HESHMAT [100, 102] die äquivalente viskose Dämpfung für das Modell von WALOWIT und ANNO eingeführt. In den zitierten Beiträgen erfolgt jedoch keine Kopplung mit einem Fluidmodell. LEE et al. koppeln das lineare Winklerbettungsmodell mit einer erweiterten Reynoldsgleichung unter Berücksichtigung des Wandschlupfs des Fluids [115]. HRYNIEWICZ et al. beschreiben auf Basis eines linear elastischen Strukturmodells ein analytisches Verfahren, das bei gegebener statischer Druckverteilung die Verformung der nachgiebigen Strukturen ermittelt [79].

Auch eine Vielzahl an komplexeren mehrdimensionalen Lagerstrukturmodellen sind in der Literatur beschrieben. Beispielsweise wird ein zweidimensionales Strukturmodell der Deckfolie in Verbindung mit einer elastischen Bettung bei Vernachlässigung der Reibungskräfte zwischen den beiden Folien von CARPINO et al. in [24] vorgestellt. Die Erweiterung dieses Modells um äquivalente viskose Dämpfung ist von PENG und CARPINO in [134] veröffentlicht. Die Modifikation der Deckfolie auf eine zylindrische Schale nach TIMOSHENKO und WOINOWSKY-KRIEGER sind in den Publikationen [25, 26] von CARPINO und TALMAGE zu finden. Die beiden letztgenannten Autoren haben in [27] auch erstmalig den Einfluss einer axial variierenden Steifigkeit untersucht. Über die Modellierung der Deckfolie als KIRCHHOFF-Platte mit verschiedenartigen Modellen der Pufferfolie berichtet LEE et al. in [113]. Von den selben Autoren wird auch anstelle eines zweidimensionalen Strukturmo-

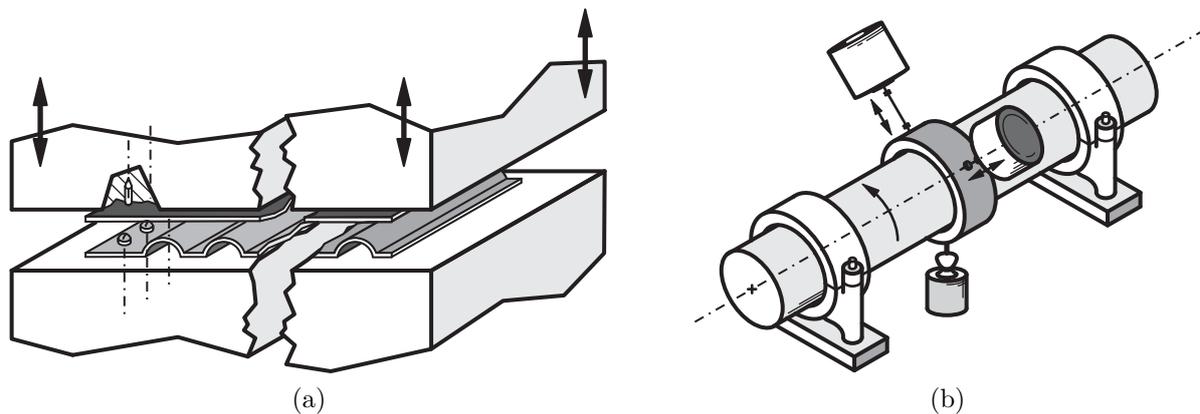


Abbildung 2.6: Versuchsaufbauten zur Identifikation der (a) Folien- und (b) Gesamtlagereigenschaften.

dells der Deckfolie die Nutzung eines eindimensionalen Balkenelements in Umfangsrichtung vorgeschlagen [112]. Ein Vergleich des Winklerbettungsmodells mit auf linearen Federn abgestützten ein- und zweidimensionalen Strukturmodellen ist von SAN ANDRÉS und KIM in [155] publiziert.

Eine weitere Variante der Pufferfolienmodellierung wird von LE LEZ et al. in [109] vorgeschlagen. Anstelle von Kontinuumsmodellen bilden sie die gewellte Folie durch diskrete lineare Federn und Coulombsche Reibelemente ab. Die Modifikation dieses Modells in Form einer Regularisierung der Reibkennlinie zugunsten einer besseren numerischen Handhabung ist in [110] beschrieben. Einen ähnlichen Ansatz wählen FENG und KANEKO in [45]. Sie modellieren die Pufferfolie über diskrete Federn und masselose starre Elemente, die Deckfolie jedoch als dreidimensionales Kontinuum, wobei auch Coulombsche Reibung zwischen den Folien mitberücksichtigt wird. Eine Weiterentwicklung des letztgenannten Modells ist von GAD und KANEKO in [49] dokumentiert. HOFFMANN et al. erweitern das Modell aus [45] um die Abstandsbleche zwischen Lagerschale und Pufferfolie in [72].

2.2.2 Versuchsstände und Messungen zur Ermittlungen der Lagereigenschaften

Zur Validierung der Lagermodelle und Identifikation der Modellparameter sind grundsätzlich zwei verschiedene Aufbauten und Methoden dokumentiert. Abbildung 2.6 skizziert beide Prinzipien. Abbildung 2.6a zeigt den Aufbau, mittels dem KU und HESHMAT erstmalig die Wechselwirkung und das Verformungsverhalten der beiden Folien testeten [101]. Im dargestellten Konzept werden die Puffer- und Deckfolie jeweils an einer massiven Platte fixiert und diese unter statischer und dynamischer Last gegeneinander verschoben. Die ermittelten Relationen sind Kraft-Verschiebungs-Kurven. Über einen vergleichbaren Versuchsaufbau sowie vergleichbare Messungen berichten auch LARSEN et al. in [106].

Ein alternatives und mehrheitlich vorzufindendes Versuchskonzept ist in Abbildung 2.6b visualisiert. Im Unterschied zum erstgenannten Konzept werden hier nicht einzelne Komponenten getestet, sondern das Lager in seiner komplett montierten Form. Auch hier werden

vorrangig Kraft-Verschiebungs-Kurven ermittelt. Dazu wird ein zylindrischer Prüfkörper verwendet. Bei einigen Prüfständen ist dabei eine Rotation des Prüfkörpers um seine Symmetrieachse möglich, in anderen Fällen ist dies nicht vorgesehen. Ist erstes der Fall, so ist für den Aufbau charakteristisch, dass die Lagerung der Welle nicht über den Prüfling selbst erfolgt. Das Testlager wird deshalb häufig als *schwimmendes Lager* bezeichnet. Je nach Prüfstand ist das Testlager innerhalb oder außerhalb der eigentlichen Lagerung angeordnet. Das dominierende Testszenario sieht eine Lasteinleitung in einer oder mehreren Richtungen über die Lagerschale, bei Messung der Verschiebung derselben, vor. Falls der Prüfkörper dabei keine Rotation ausführt, werden die Verformungseigenschaften der Folien ermittelt. Rotiert der Prüfkörper, charakterisieren die Messungen die gemeinsamen Eigenschaften der Folien und des gasförmigen Schmierfilms. Im Hinblick auf mögliche Anwendungen im Hochtemperaturbereich wie beispielsweise Abgasturbolader und Heißgasturbinen werden stellenweise auch das Testlager, die Wellen oder die Umgebungsluft erwärmt und der Temperaturverlauf einzelner Komponenten aufgezeichnet.

Ein derartiger Prüfstand mit nicht rotierendem Prüfkörper sowie einige Messergebnisse sind beispielsweise in [65] von HESHMAT und KU beschrieben. Die Autoren geben auch erstmals die aus Messungen ermittelten linearen Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten an. Ein analoger experimenteller Aufbau ist auch im Beitrag [142] von RUBIO und SAN ANDRÉS zu finden. Innerhalb des Beitrags erfolgt neben der Vorstellung von Messergebnissen auch ihr Vergleich mit dem Modell von IORDANOFF aus [81]. Später erschienene fortsetzende Beiträge mit weiteren Messergebnissen sind u.a. [93, 97, 144].

Eine der ältesten Dokumentationen [147] über experimentelle Untersuchungen an aerodynamischen Gleitlagern mit Pufferfolie ist von RUSCITTO et al. veröffentlicht. Schwerpunkt dieses Forschungsberichtes ist die messtechnische Erfassung der Schmierstalthöhe verschiedener Lagergeometrien bei unterschiedlichen Drehzahlen, äußeren Lasten und Temperaturen, nach dem in Abbildung 2.6b skizzierten Prinzip. Beabsichtigt war auch die Ermittlung des sich einstellenden Fluiddrucks, die aber nicht realisiert werden konnte. Auch die Drehzahl, ab der ein voll ausgebildeter tragender Schmierfilm vorliegt, wurde aus dem an der Welle anliegenden Drehmoment bestimmt. Darüber hinaus wurde bei nicht rotierender Welle die statische Last-Verschiebungs-Kurve ermittelt.

Weitere konzeptgleiche Prüfstände mit schwimmendem Lager werden beispielsweise von DELLACORTE in [33], von HOWARD et al. in [78], von ERTAS et al. in [43], von CONLON et al. in [31] und von MATTA et al. in [128] sowie ein zweiter Prüfstand der letztgenannten Autoren in [129] vorgestellt. Neben den Kraft-Verschiebungs-Kurven werden dort unter anderem auch das Widerstandsmoment des Lagers und dessen Tragfähigkeit messtechnisch erfasst. Anhand der gemessenen Daten werden dann teilweise die drehzahlabhängigen linearen Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten des Lagers, zum Beispiel in [145], bestimmt sowie auf die wirkende dissipativen Reibungsmomente und Energieverluste geschlossen.

2.2.3 Dynamik von in aerodynamischen Radialgleitlagern mit Pufferfolie betriebenen Rotoren

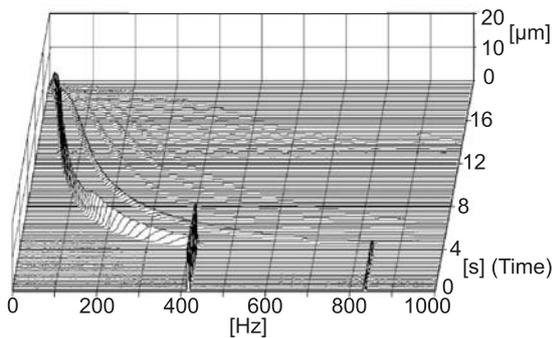
Experimente

Versuchsrotoren und Messgrößen Neben den oben beschriebenen experimentellen Methoden zur Identifizierung der Lagereigenschaften sind auch eine Reihe von Veröffentlichungen erschienen, die über das dynamische Verhalten von in Folienlagern betriebenen Rotoren berichten. Die eingesetzten Rotoren und folglich gefahrenen Drehzahlen unterscheiden sich dabei recht deutlich. Der leichteste Läufer ist eine Mikrogastrubine mit einer Masse von 9 g und erreichten Drehzahlen von bis zu $700\,000\text{ min}^{-1}$ [151]. Der schwerste Läufer hat eine Masse von ca. 21 kg bei einer maximalen Drehzahl von $30\,000\text{ min}^{-1}$ [104]. Die meisten Veröffentlichungen thematisieren Rotoren von ungefähr 1/4 kg [73, 94, 118, 163, 177] und im niedrigen kg-Bereich, [7, 62, 64, 70, 95, 96, 116, 122, 149, 150, 157], wobei die höchsten erreichten Drehzahlen der leichten Rotoren bei rund $100\,000 - 150\,000\text{ min}^{-1}$, die der schwereren bei grob $50\,000\text{ min}^{-1}$ liegen. In vielen Fällen sind die Versuchsrotoren dabei so gestaltet, dass kleine Zusatzmassen angebracht werden können, um den Unwuchteinfluss zu untersuchen.

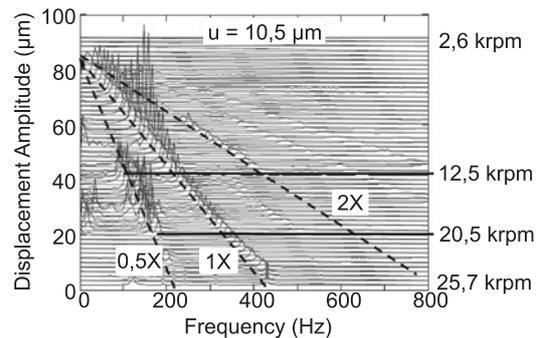
Die ermittelten Messgrößen sind in allen Beiträgen Auslenkungen beziehungsweise Verschiebungen des Läufers. Abhängig vom jeweiligen Prüfstand erfolgt die Messung entweder in der Nähe der Lagerstellen oder an den Rotorenden. Zusätzlich wird die Drehzahl erfasst, in manchen Fällen auch das Antriebsmoment. Bei Temperatureinflusstudien wird der Prüfstand mit zusätzlichen Temperatursensoren ausgestattet.

Die gängigste Variante des Antriebs des Läufers erfolgt über ein Turbinenrad. Vereinzelt werden auch Elektromotoren verwendet, beispielsweise in [95, 106, 149, 157]. Ist letzteres der Fall, so kann in der Regel die üblicherweise vorgegebene Rotordrehzahl gut eingestellt und auch über einen längeren Messzeitraum konstant gehalten werden. Sehr häufig werden die aufgezeichneten Daten jedoch im Rahmen von Auslaufversuchen gewonnen, da dort die Antriebseinheit das Rotorverhalten nicht zusätzlich beeinflusst. Die erfassten, in den Publikationen aber oftmals nur sporadisch dargestellten Daten sind Zeitschriebe einzelner Sensoren. Häufiger werden die Wellenorbits präsentiert, also die Bahn der Welle mit der Zeit als Kurvenparameter. Generell üblich ist auch die Analyse der Positionssignale im Frequenzbereich, deren Ergebnisse in sogenannten *Wasserfalldiagrammen* dargestellt werden.

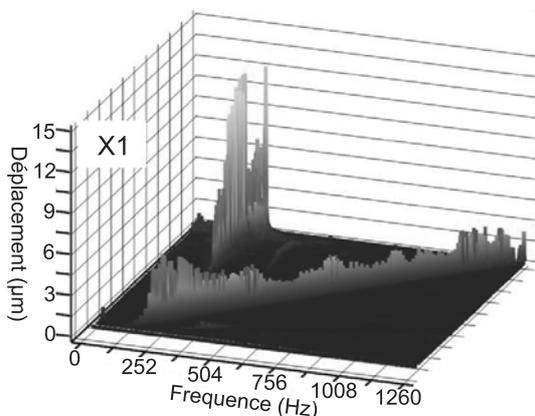
Beobachtungen Der von LICHT et al. verfasste Beitrag [122] gehört zu einer der ersten Veröffentlichungen über das dynamische Verhalten ausschließlich in Folienlagern betriebener Rotoren. Die dort eingesetzten Spirallager weisen zwar nicht wie die im Rahmen der Arbeit schwerpunktmäßig thematisierten Lager zwei Folien, eine Deck- und eine Pufferfolie auf. Die Bauweise der Spirallager ähnelt diesen aufgrund einer verformbaren Folienstruktur zwischen der Lagerschale und einer abschließenden Folienschicht jedoch stark. Die Autoren berichten von gegenüber aerodynamischen Starrlagern deutlich verbesserten Eigenschaften, die letztlich erst die erreichten hohen Drehzahlen des Läufers ermöglichen. Der erste Beitrag über einen in aerodynamischen Radialgleitlagern mit Pufferfolie betriebenen Rotor veröffentlichte HESHMAT [62].



(a) Analyse der Vertikalkoordinate.



(b) Analyse der Vertikalkoordinate am Rotorende.



(c) Analyse der Vertikalkoordinate des Rotors an Lagerung.

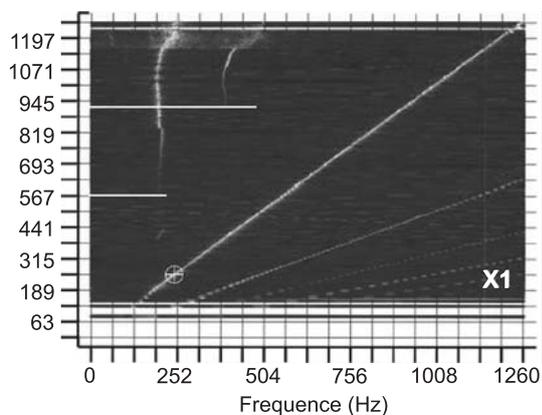


Abbildung 2.7: Wasserfalldiagramm von Auslaufversuchen aus (a) [92], (b) [157], (c) [6].

Die Analyse der Rotorbewegungen der oben genannten Beiträge zeigt in nahezu allen Fällen mit der Drehfrequenz der Welle synchrone Schwingungsanteile sowie häufig auch weitere Anteile mit deutlich geringen Amplituden bei ganzzahligen Vielfachen der Drehfrequenz. Abbildung 2.7a zeigt ein solches Wasserfalldiagramm aus der Veröffentlichung [92] von KIM und LEE. Der eigentliche Auslauf beginnt erst bei ca. 5s. Es gibt einige weitere Beispiele innerhalb denen nahezu keine weiteren Frequenzanteile der Rotorbewegung auftreten [117, 149, 151, 163]. Häufig treten aber zusätzlich noch subsynchrone Schwingungen auf, deren Amplituden oftmals größer sind als die mit der Drehfrequenz der Welle zusammenfallenden synchronen Schwingungsanteile. Verschiedene derartige Phänomene sind in der Literatur beschrieben.

In Abbildung 2.7b ist die Auswertung der Messdaten von SAN ANDRÉS et al. aus [157] dargestellt. Zu erkennen sind im Drehzahlbereich zwischen 12 500 – 20 500 min^{-1} dominierende Schwingungsamplituden mit ungefähr der halben Wellendrehfrequenz. Im gezeigten Fall wurde der Rotor mit einer Zusatzunwucht versehen. Ein analoges Verhalten für einen Rotor ohne Zusatzunwucht ist in der Dissertation [6] von BALDUCCHI dokumentiert. Eine weitere Form der auftretenden subsynchronen Schwingungen ist in Abbildung 2.7c aus der Arbeit von BALDUCCHI [6] dargestellt. Charakteristisch sind große Amplituden der

Schwingungsanteile, die keine Relation zur Drehfrequenz der Welle erkennen lassen. Sehr häufig sind die Amplituden größer als die der synchronen Schwingung. Außerdem treten sie wie im gezeigten Fall üblicherweise nicht in niedrigen Drehzahlbereichen, sondern erst oberhalb einer im Vorfeld unbekanntem Drehzahl auf. Dieses Schwingungsphänomen ist in Messungen häufig zu finden, beispielsweise in [7, 62, 64, 94, 95, 96, 177]. Darüber hinaus sind zum Beispiel in [7] auch Messergebnisse in Form von Wasserfalldiagrammen publiziert, bei denen weitaus mehr und nicht so eindeutig einer Frequenz zuordenbare subsynchrone Schwingungsanteile auftreten.

Modellrechnungen

Verwendete Lagermodelle Ähnlich den vorangegangenen Abschnitten existieren auch ein Vielzahl an Publikationen, die sich der modellbasierten Beschreibung eines in Folienlagern betriebenen Rotors widmen. Die in diesem Rahmen verwendeten Lagermodelle erreichen vorwiegend aus Gründen der Rechenzeiteffizienz in der Regel nicht die hohen Komplexitätsstufen wie viele der Lagermodelle aus Abschnitt 2.2.1. In der überwiegenden Mehrzahl der Fälle werden die beiden Folien über das Winklerbettungsmodell ohne [10, 175] und insbesondere auch mit diskreter viskoser Dämpfung abgebildet [14, 16, 17, 18, 53, 90, 91, 98, 105, 115, 117, 137, 157, 159]. Mitunter kommen auch deutlich detailliertere Lagermodelle zum Einsatz, jedoch ohne simultane Lösung von Rotor- und Lagermodell. Vielmehr basiert die Analyse des dynamischen Verhaltens des Läufers letztlich auf in der Regel einzig von der Wellendrehzahl abhängigen linearisierten Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten [28, 72, 95, 96].

Veröffentlichungen, deren Lagerbeschreibung weder auf linearisierten Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten basieren, noch das Winklerbettungsmodell nutzen, sind erheblich seltener. Beispielsweise verwendet IORDANOFF et al. in [82] das von ihnen entwickelte Lagermodell aus [81]. SAN ANDRÉS und KIM nutzen in [156], beziehungsweise SAN ANDRÉS und RYU in [158] ein an den Duffingschwinger angelehntes nichtlineares Steifigkeitsmodell der nachgiebigen Lagerstruktur, jedoch bei Vernachlässigung eines Fluidmodells. Von LE LEZ et al. wird in [111] das von ihnen entwickelte Lagerstrukturmodell aus [110] eingesetzt. LEE et al. bilden in [114] die Pufferfolie über ein eindimensionales Balkenmodell ab und FENG und KANEKO verwenden in [46] das von ihnen entworfene Modell aus [45].

Verwendete Rotormodelle Die diskutierten luftgelagerten Rotormodelle sind in der Regel simpel. Am häufigsten wird das Verhalten eines starren, horizontal und symmetrisch gelagerten Rotors ohne [10, 12, 16, 72, 137] sowie mit statischer Unwucht [11, 28, 46, 53, 71, 82, 90, 91, 111, 114, 156, 158] herangezogen. Mitunter wird auch der einfach biegeelastische, sogenannte *Lavalrotor* analysiert [13, 14] oder ein starrer, horizontal aber unsymmetrisch gelagerte Rotor [6, 105]. Vereinzelt, bei nicht durch linearisierte Steifigkeits- und Dämpfungsterme repräsentierten Lagereigenschaften, existieren Studien mit komplexeren Rotormodellen, zum Beispiel einem Kontinuumsmodell in [18] oder einem modal reduzierten Rotormodell in [17].

Kopplungsmethoden Prinzipiell lassen sich die Lager- und Rotormodelle auf verschiedene Weisen koppeln. Eine Möglichkeit besteht in der bereits oben genannten Nutzung *linearisierter Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten* des Lagers, deren Geltungsbereich jedoch auf kleine Abweichungen des Grundzustandes beschränkt ist. Eine Alternative ist die sogenannte *Kennfeldmethode*. Dabei werden im Vorfeld der eigentlichen Rotorsimulation in Abhängigkeit verschiedener Wellenzapfenzustände die Lagerkräfte ermittelt und in Kennfeldern hinterlegt. Innerhalb der Berechnung des Rotorverhaltens wird dann auf diese Kennfelder zurückgegriffen und mittels Interpolation die aktuell wirkende Lagerkraft bestimmt. Bei Luftlagern ist diese Kennfeldmethode im Unterschied zu ölgeschmierten Gleitlagern aufgrund der expliziten Zeitabhängigkeit des Schmierfilmdrucks jedoch unüblich.

Eine weitere Möglichkeit der Kopplung besteht in der simultanen, jedoch getrennten Lösung der einzelnen Teilmodelle. Im Rahmen dieser *Co-Simulation* werden die Systemgleichungen jedes Teilmodells, zum Beispiel des Rotors, des Fluids und der verformbaren Struktur von einem geeigneten Algorithmus parallel gelöst. Der Austausch der Kopplungsgrößen, in der Regel Wellenzapfenzustandsgrößen, Fluiddruck und gegebenenfalls Strukturkoordinaten der einzelnen Teilmodelle, findet dabei üblicherweise einen Zeitschritt versetzt statt (siehe zum Beispiel [90]). Erst in jüngster Vergangenheit wurde im Bereich aerodynamisch gelagerter Rotoren durch die Einführungen eines *Gesamtzustandsvektors aller Teilmodelle* ein Verfahren angewandt, das die Kopplung hinsichtlich einer simultanen Lösung des Gesamtproblems optimiert, siehe zum Beispiel die Arbeiten von PHAM und BONELLO [16, 137] sowie BAUM et al. [11, 12]. Durch diese Methode können einige rein numerische Effekte in Folge des zeitversetzten Austauschs der Kopplungsgrößen eliminiert werden. Wenngleich die mittels der Formulierung über einen Gesamtzustandsvektor gekoppelten Modelle prinzipiell validere Ergebnisse erwarten lassen, sind diese verglichen mit den anderen genannten Methoden jedoch tendenziell rechenzeitintensiver. So wird beispielsweise im Beitrag [16] von BONELLO und PHAM erwähnt, dass bei der von ihnen eingesetzten Methode bei feinen Diskretisierungen und damit einer hohen Gesamtgleichungsanzahl die aktuellen Grenzen der genutzten Algorithmen beziehungsweise der Rechnerkapazitäten erreicht werden. Am rechenzeiteffizientesten und zumeist am anschaulichsten sind *analytische Lösungen* der wirkenden Lagerkräfte. Im Bereich der Folienlager sind aufgrund der gekoppelten, nichtlinearen Modellgleichungen allerdings bisher keine bekannt.

Simulationsstudien Im Rahmen numerischer Studien werden üblicherweise mit Experimenten übereinstimmende Analysen vorgenommen, d. h. vorrangig Zeitsimulationen und teilweise eine anschließende Analyse der Wellenorbits im Frequenzbereich [7, 11, 17, 71, 90, 95, 96, 105, 117, 156, 157, 158]. Stabilitätsuntersuchungen mittels Bifurkationsanalysen und Pfadverfolgungsmethoden werden nur vereinzelt angewandt, siehe zum Beispiel die Beiträge von BONELLO und PHAM in [16, 137] und BAUM et al. in [12]. Jedoch gerade solche Methoden können aufschlussreich hinsichtlich des Lösungsraums der Modelle und des qualitativen Modellverhaltens sein.

Studien mit Parametervariation, vorrangig seitens der Lager, sind üblich. Sie kennzeichnen gerade den primären Nutzen von Modellen. Häufig ist in diesem Zusammenhang die Ermittlung von Gleichgewichtslösungen und eine anschließende Untersuchung hinsichtlich

ihrer Stabilität [10, 11, 12, 13, 16, 17, 46, 53, 71, 111, 159, 175]. Allerdings sind die Erkenntnisse nicht immer konsistent. So schlussfolgern beispielsweise GRAU et al. in [53], dass die Ruhelage des Rotors verglichen mit Starrlagern bereits bei niedrigeren Drehzahlen instabil wird. Dies ist laut den Autoren durch die Nachgiebigkeit der Folienlager bedingt. Erst durch zusätzliche im Modell berücksichtigte Dämpfung könne ein dem Starrlager äquivalentes Verhalten erreicht werden. Demgegenüber kommen VLEUGELS et al. in [175] zu dem Schluss, dass Folienlager auch ohne Dämpfung bereits verbesserte Stabilitätseigenschaften verglichen mit Starrlagern aufweisen. In einem Beitrag von BAUM et al. [12] wurde gezeigt, dass die Stabilitätsgrenze einerseits von der Modellierung der Lagerstruktur und andererseits von der Rotormasse abhängig ist. Die Ergebnisse lassen aufgrund der vielen Einflussparameter vermuten, dass eine generelle Tendenz hinsichtlich einer Verringerung oder Erhöhung der Grenzdrehzahl zum Beispiel durch Variation der Lagernachgiebigkeit nicht existiert.

Fazit Bisherige Veröffentlichungen zeigen, dass lineare Lagermodelle auf Basis von Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten in manchen Fällen die synchronen Schwingungen recht gut vorhersagen können, oftmals allerdings auch nicht, wie beispielsweise in [95, 117, 157]. Zur Erfassung und Abbildung der Lagereigenschaften, insbesondere auch im Hinblick auf subsynchrone Schwingungen, sind offenbar nichtlineare Lagermodelle vonnöten, siehe zum Beispiel [7, 111, 116, 156, 157, 158].

Jüngste Publikationen, zum Beispiel von BONELLO und PHAM [17] sowie BALDUCCHI et al. [7] zeigen einige übereinstimmende Tendenzen von Messungen und Modellrechnungen. Im speziellen Fall eines Lagers mit mehrteiligen Puffer- und Deckfolien konnte von LARSEN und SANTOS in [105] das dynamische Verhalten eines Testrotors anhand von Modellrechnungen gut reproduziert werden. Grundsätzlich besteht jedoch eine Diskrepanz an übereinstimmenden experimentellen Beobachtungen und modellbasierten Vorhersagen des Rotorverhaltens. Dies liegt unter anderem an einem Mangel an validierten nichtlinearen Lagermodellen, die aufgrund ihrer Rechenzeiteffizienz für eine direkte Kopplung mit Rotormodellen geeignet sind. Ferner werden an Lagermodelle hohe Anforderungen gestellt. Sie sollen möglichst die vorliegenden Folienstrukturen derart abbilden, dass ein eindeutiger Zusammenhang zwischen den Modellparametern und den Konstruktionsgrößen der Lagerstruktur erkennbar ist.

3 Modell eines aerodynamischen Radialgleitlagers mit Pufferfolie

Das Kapitel beginnt mit der kinematischen Beschreibung eines Radialgleitlagers. Sie beinhaltet die Einführung von Koordinaten für den Wellenzapfen und das Fluidgebiet, die Ermittlung der Spalthöhe in allgemeiner Zapfenposition sowie der Geschwindigkeit der das Schmiermedium umgebenden Strukturen. Anschließend erfolgt die Herleitung des Fluidmodells. Hierfür werden zunächst die zugrunde liegenden Annahmen dargelegt. Auf Basis einer Größenordnungsabschätzung folgt die Vereinfachung der Bilanzgleichungen der Strömungsmechanik. Die Verknüpfung der reduzierten Gleichungen unter Berücksichtigung der Stoffwertabhängigkeiten führt auf die sogenannte Reynoldssche Differentialgleichung. Sie beschreibt den Druck im Schmiermedium.

Im weiteren Verlauf wird ein neues Modell für die Folienstruktur vorgestellt. Verknüpft mit dem Fluidmodell bildet dieses, ergänzt durch Anfangs- und Randbedingungen, das Lagermodell. Das Modell wird anschließend in eine dimensionslose Form überführt. Zur Ermittlung numerischer Näherungslösungen erfolgt die Diskretisierung der räumlichen Ableitungen mittels Finiter Differenzen und die Überführung in ein System gekoppelter gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung bezüglich der Zeit. Am Ende des Kapitels werden zwei gegenüber der zuvor entwickelten Variante vereinfachte Modelle präsentiert.

3.1 Kinematik des Radialgleitlagers

Abbildung 3.1 skizziert einen Wellenzapfen in einem Radialgleitlager mit verformbarer Lagerschale. Es wird angenommen, dass die Symmetrieachsen des Wellenzapfens und des unverformten Lagers immer parallel zueinander ausgerichtet sind. Eine Verkippung des

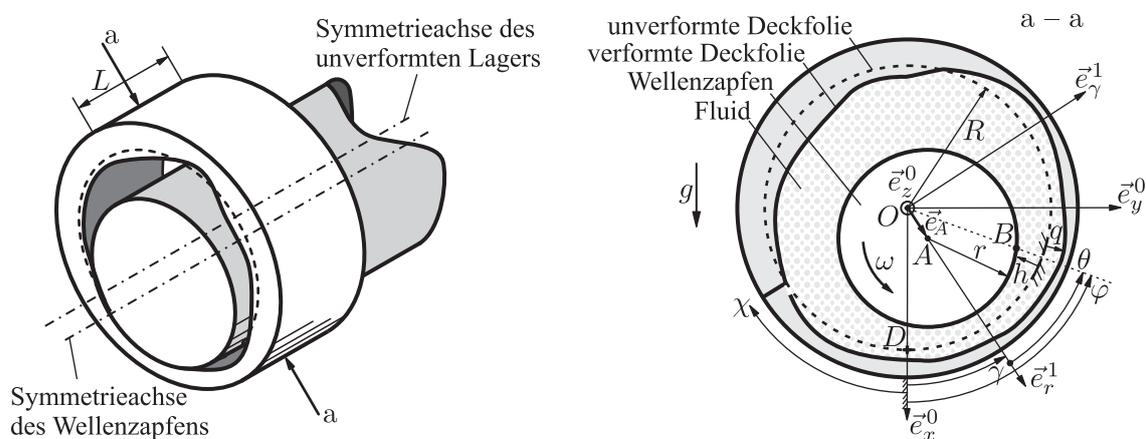


Abbildung 3.1: Skizze und kinematische Größen des Lagermodells.

Wellenzapfens innerhalb des Lagers wird folglich nicht berücksichtigt. In der Schnittebene $a - a$ senkrecht zu den Symmetrieachsen durch die Lagermitte werden die Punkte O , A , B und D eingeführt. Der Punkt O ist durch den Schnittpunkt der besagten Ebene und der Symmetrieachse des unverformten Lagers definiert. Der Punkt A kennzeichnet den Schnittpunkt der Ebene mit der Symmetrieachse des Wellenzapfens und B einen beliebigen, jedoch festen Punkt auf dem Rand des Wellenzapfens. Der untere Schnittpunkt des unverformten inneren Lagerrands mit der vertikalen Symmetrieachse des Lagers wird D genannt. Das Lager der Breite L hat im unverformten Zustand den Radius R . Für einen Wellenzapfenradius r ergibt sich somit ein Lagerspiel

$$h_0 = R - r. \quad (3.1)$$

3.1.1 Wellenzapfen

Zur weiteren Beschreibung werden die beiden Koordinatensysteme $\mathcal{K}_0 (O, \vec{e}_x^0, \vec{e}_y^0, \vec{e}_z^0)$ und $\mathcal{K}_1 (O, \vec{e}_r^1, \vec{e}_\gamma^1, \vec{e}_z^1)$ eingeführt. Das System \mathcal{K}_0 ist ein Inertialsystem. Das System \mathcal{K}_1 geht über eine Drehung γ um die \vec{e}_z^0 -Achse aus dem System \mathcal{K}_0 hervor. Die zugehörige Drehmatrix lautet

$${}^0\mathbf{R}^1 = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Die Orientierung des Systems \mathcal{K}_1 ist durch den Wellenzapfenmittelpunkt festgelegt. Der Basisvektor \vec{e}_r^1 zeigt dabei in Richtung des Vektors $\vec{e}_A = \vec{OA}$, der die Position von A beschreibt. Die Lage von A kann folglich sowohl mittels kartesischer - als auch mittels Polarkoordinaten angegeben werden:

$$\vec{e}_A = x_A \vec{e}_x^0 + y_A \vec{e}_y^0 = e_A \vec{e}_r^1. \quad (3.3)$$

Die Größe e_A bezeichnet darin die sogenannte Exzentrizität. Zwischen den Koordinaten gilt nach (3.3) mit (3.2) der Zusammenhang

$$x_A = e_A \cos \gamma, \quad (3.4)$$

$$y_A = e_A \sin \gamma. \quad (3.5)$$

Es wird weiter angenommen, dass der Wellenzapfen um seine Symmetrieachse mit vorgegebener Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z^0$ rotiert. Zusätzlich kann sich der Wellenzapfenmittelpunkt A – im Rahmen des Lagerspiels und möglicher Verformungen der inneren Lagerstruktur – translatorisch verschieben. Die Translationsgeschwindigkeit \vec{v}_A ergibt sich aus der Zeitableitung des Ortsvektors (3.3):

$$\vec{v}_A = \frac{d}{dt} \vec{e}_A = \dot{x}_A \vec{e}_x^0 + \dot{y}_A \vec{e}_y^0 = \dot{e}_A \vec{e}_r^1 + e_A \dot{\gamma} \vec{e}_\gamma^1. \quad (3.6)$$

Die Geschwindigkeit des Randpunkts B folgt aus der Superposition des Anteils infolge Translation und Rotation

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{r}_{AB} \times \vec{\omega} \quad (3.7)$$

mit dem Vektor \vec{r}_{AB} vom Punkt A zum Punkt B (vergleiche Abbildung 3.2b).

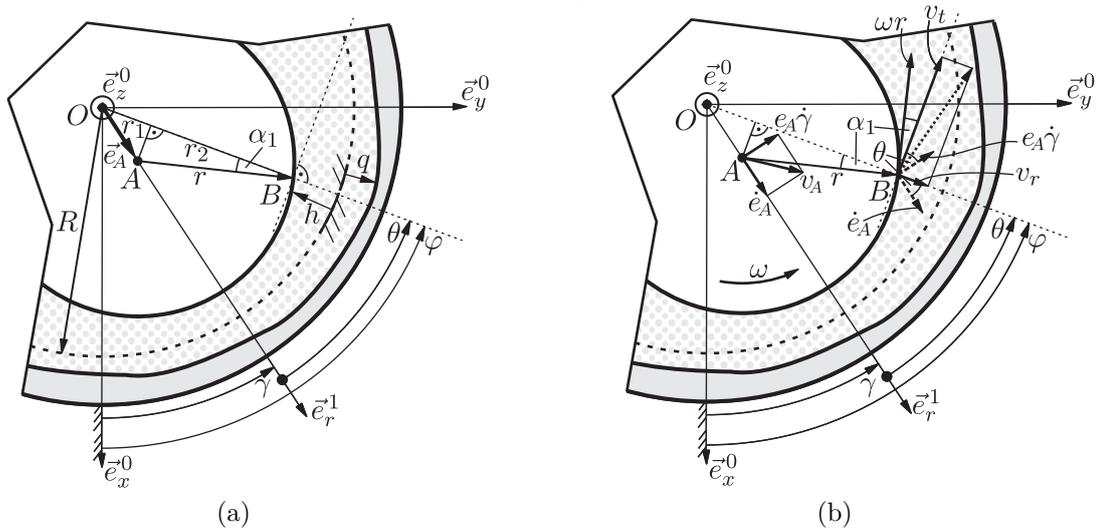


Abbildung 3.2: (a) Abstände und Winkel sowie (b) Geschwindigkeiten des Lagermodells.

3.1.2 Fluidspalt

Die Beschreibung des Fluids im Spalt zwischen Wellenzapfen und Lagerrand erfolgt in der ortsfesten EULER'SCHEN Betrachtungsweise in Abhängigkeit einer Axialkoordinate, einer Radialkoordinate und des Absolutwinkels φ in Umfangsrichtung. Zuweilen wird anstelle von φ auch der Relativwinkel θ ausgehend vom mitbewegten Basisvektor \vec{e}_r^1 verwendet. Nach Abbildung 3.1 gilt der Zusammenhang

$$\varphi = \gamma + \theta. \quad (3.8)$$

Der Winkel χ beschreibt ausgehend vom raumfesten Basisvektor \vec{e}_x^0 die Absolutlage der Fixierung der Deckfolie an der Lagerschale.

Charakteristische Längen des Fluidfilms Der Lagerradius und die Lagerbreite aerodynamischer Radialgleitlager liegen üblicherweise im Bereich weniger Zentimeter, d. h.

$$R \approx 10^{-2} \text{ m}, \quad L \approx 10^{-2} \text{ m}, \quad (3.9)$$

siehe zum Beispiel [142] und Abschnitt 4.1. Bei Lagern mit starrer Lagerinnenwand und vernachlässigbarer Schaftausdehnung ist die Schmierfilmhöhe durch das Lagerspiel h_0 und die Wellenzapfenposition vorgegeben. Ist die Lagerstruktur nachgiebig, hängt die Schmierfilmhöhe im Betrieb unter anderem von der Nachgiebigkeit des Lagers, der Lage des Wellenzapfens und der Rotordrehzahl ab. Für beide Lagerarten liegt die Schmierfilmhöhe in radialer Richtung bei rotierender Welle und vollständig voneinander getrennten Oberflächen in der Größenordnung von

$$h + q \approx 10^{-5} \text{ m}, \quad (3.10)$$

siehe zum Beispiel [36, 135]. Die Spaltfunktion h beschreibt darin ausgehend von der unverformten Deckfolie die innere Grenze des Spalts in Abhängigkeit der Wellenzapfenposition.

Die Koordinate q misst die Auslenkung der inneren Lagerstruktur, wobei ein positiver Wert eine Vergrößerung des Spalts in radialer Richtung bedeutet.

Fluidspalthöhe Die in radialer Richtung angegebene Höhe des Schmierpalts hängt von der Lage des Wellenzapfens und der Verformung des Lagers ab (vergleiche Abbildung 3.2a). Für die Spaltfunktion h gilt demnach

$$h = R - r_1 - r_2. \quad (3.11)$$

Mittels Dreiecksbeziehungen können die Maße r_1 und r_2 in Abhängigkeit der Wellenzapfenexzentrizität formuliert werden:

$$r_1 = e_A \cos \theta, \quad (3.12)$$

$$r_2^2 = r^2 - (e_A \sin \theta)^2. \quad (3.13)$$

Nach Einsetzen von (3.12) und (3.13) in (3.11) ergibt sich

$$h = R - e_A \cos \theta - r \sqrt{1 - \left(\frac{e_A}{r} \sin \theta\right)^2}. \quad (3.14)$$

Entwickeln der Wurzel in eine Potenzreihe, siehe beispielsweise [21], führt auf den Ausdruck

$$h = R - e_A \cos \theta - r \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{e_A}{r} \sin \theta\right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{e_A}{r} \sin \theta\right)^4 + \dots \right). \quad (3.15)$$

Da für alle Gleitlager aufgrund der typischen Längenabmessungen die Beziehung

$$e_A \ll r \quad (3.16)$$

gilt, kann die Spaltfunktion h mit (3.1) in guter Näherung über

$$h \approx h_0 - e_A \cos \theta \quad (3.17)$$

beziehungsweise mit (3.8) über

$$h \approx h_0 - e_A \cos(\varphi - \gamma) \quad (3.18)$$

beschrieben werden.

Soll die Spaltfunktion h in Abhängigkeit kartesischer Koordinaten des Wellenzapfenmittelpunkts x_A, y_A formuliert werden, kann die cosinus-Funktion in (3.18) über ein Additionstheorem, siehe zum Beispiel [21], in

$$h = h_0 - e_A(\cos \varphi \cos \gamma + \sin \varphi \sin \gamma) \quad (3.19)$$

zerlegt werden. Mit (3.4) und (3.5) folgt

$$h = h_0 - x_A \cos \varphi - y_A \sin \varphi. \quad (3.20)$$

Die Darstellung (3.20) in Abhängigkeit kartesischer Koordinaten bietet unter anderem bei der numerischen Simulation den Vorteil, dass auch der Fall der zentrischen Wellenzapfenlage ($e_A = 0, \gamma$ unbestimmt) problemlos durchlaufen werden kann.

Geschwindigkeit der Ränder Die Geschwindigkeiten der fluidumgebenden Strukturen (Wellenzapfen und Deckfolie) sind für die spätere Beschreibung des Fluidverhaltens in zwei zueinander orthogonale Richtungen zu zerlegen. Eine der beiden Geschwindigkeitskomponenten zeigt dabei ausgehend vom Mittelpunkt O in radiale Richtung (Index r), der zweite Tangentialanteil (Index t) entsprechend senkrecht dazu (siehe Abbildung 3.2b). Die positive Tangentialrichtung wird durch den Richtungssinn des Winkels φ vorgegeben. Die Geschwindigkeit des Wellenzapfenrands ergibt sich aus der Überlagerung der Translations- und der Rotationsbewegung, siehe (3.7). Bei reiner Rotation des Wellenzapfens und fester Wellenzapfenposition ($\omega \neq 0, \vec{v}_A = \vec{0}$) bleibt die Spaltgeometrie des inneren Rands h unverändert. Die Zerlegung der Wellenzapfengeschwindigkeit in die beschriebenen Richtungen ergibt

$$v_{W,t,rot} = \omega r \cos \alpha_1, \quad (3.21)$$

$$v_{W,r,rot} = -\omega r \sin \alpha_1. \quad (3.22)$$

Nach Abbildung 3.2a gilt die Winkelbeziehung

$$\sin \alpha_1 = \frac{e_A \sin \theta}{r}, \quad (3.23)$$

beziehungsweise nach Umformung

$$\cos \alpha_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{e_A}{r} \sin \theta\right)^2}. \quad (3.24)$$

Wie für (3.14) mit der Annahme (3.16) gezeigt, gilt folglich für (3.24) in guter Näherung $\cos \alpha_1 \approx 1$, sodass letztlich für (3.21) und (3.22) in guter Näherung

$$v_{W,t,rot} \approx \omega r, \quad (3.25)$$

$$v_{W,r,rot} = -\omega e_A \sin \theta \quad (3.26)$$

anzunehmen ist.

Im Fall reiner Translation des Wellenzapfenmittelpunkts ($\omega = 0, \vec{v}_A \neq \vec{0}$) ändert sich die Spaltgeometrie. Die Zerlegung der Geschwindigkeitsanteile nach (3.6) ergibt (siehe Abbildung 3.2b)

$$v_{W,t,trn} = e_A \dot{\gamma} \cos \theta - \dot{e}_A \sin \theta, \quad (3.27)$$

$$v_{W,r,trn} = e_A \dot{\gamma} \sin \theta + \dot{e}_A \cos \theta. \quad (3.28)$$

Im allgemeinen Fall nicht verschwindender Translations- und Rotationsgeschwindigkeit gilt nach Superposition mit der Winkelbeziehung (3.8) in Tangentialrichtung

$$v_{W,t} = v_{W,t,rot} + v_{W,t,trn} = r \left[\omega + \frac{e_A}{r} \dot{\gamma} \cos(\varphi - \gamma) - \frac{\dot{e}_A}{r} \sin(\varphi - \gamma) \right]. \quad (3.29)$$

Mit dem Größenvergleich (3.16), für $\dot{\gamma}/\omega \approx 1$, der Relation $\dot{e}_A/r \ll \omega$ und der Näherung $\omega r \approx \omega R$ folgt für den Tangentialanteil näherungsweise

$$v_{W,t} \approx \omega R. \quad (3.30)$$

In radialer Richtung ergibt sich mit der Winkelbeziehung (3.8)

$$v_{W,r} = v_{W,r,rot} + v_{W,r,trn} = e_A (\dot{\gamma} - \omega) \sin(\varphi - \gamma) + \dot{e}_A \cos(\varphi - \gamma). \quad (3.31)$$

Mittels der Änderung der Spaltfunktion (3.18) in Umfangsrichtung

$$\frac{\partial h}{\partial \varphi} = e_A \sin(\varphi - \gamma) \quad (3.32)$$

und der lokalen Spaltänderung infolge der Translation des Wellenzapfens

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\dot{e}_A \cos(\varphi - \gamma) - e_A \dot{\gamma} \sin(\varphi - \gamma) \quad (3.33)$$

lässt sich der radiale Geschwindigkeitsanteil des Wellenzapfens (3.31) in der kompakten Form

$$v_{W,r} = -\frac{\partial h}{\partial t} - \omega \frac{\partial h}{\partial \varphi} \quad (3.34)$$

angeben. Im Sinne der Strömungsmechanik entspricht der zweite Term der konvektiven Änderung infolge der Rotation der Welle.

Die Verformungsgeschwindigkeit der Lagerstruktur an der Stelle φ in radialer Richtung ist die Zeitableitung

$$v_{L,r} = \frac{\partial q}{\partial t} \quad (3.35)$$

der Koordinate q . Die Geschwindigkeit der Lagerstruktur in tangentialer Richtung wird vernachlässigt

$$v_{L,t} \approx 0. \quad (3.36)$$

(3.35) und (3.36) liegt dabei die Annahme zugrunde, dass das Lager gegenüber der Umgebung ruht, siehe auch Abbildung 3.4.

3.2 Fluidmodell

Der zu modellierende Schmierfilm ist begrenzt durch die Lagerenden in axialer Richtung sowie dem Wellenzapfen und der Deckfolie in radialer Richtung (vergleiche Abbildung 3.1 und 3.4). Infolge der Verschiebung des Wellenzapfens und der Verformung des Lagerrands ändern sich jedoch die Grenzen des zu beschreibenden Fluidgebiets. Aus rotordynamischer Sicht von primärem Interesse ist die Ermittlung der Druckverteilung innerhalb des Schmierfilms, da sich aus ihr direkt die auf den Wellenzapfen wirkenden Lagerkräfte ermitteln lassen. Die Analyse der Strömung steht dagegen weniger im Fokus.

Wie im Laufe des Abschnitts hergeleitet, wird letztlich der Schmierfilmdruck über die sogenannte *Reynoldsgleichung für ideale Gase* beschrieben. Wenngleich diese Gleichung mittlerweile sehr häufig Verwendung findet, sind die Begründungen für die zugrunde liegenden vereinfachenden Annahmen der *Navier-Stokes-Gleichungen* und folglich eine Abschätzung ihres Gültigkeitsbereichs nur selten dargelegt. HAMROCK [59] und SZERI [169] beispielsweise begründen die Vereinfachungen mittels Größenordnungsabschätzungen. Allerdings liegt deren Schwerpunkt trotz Berücksichtigung der Kompressibilität des Fluids auf einem flüssigen Schmierstoff. Eine direkte Übertragung auf gasförmige Schmierstoffe ist aufgrund der unterschiedlichen Größenordnungen der Fluideigenschaften, wie beispielsweise der Viskosität und Dichte, nur bedingt möglich. GROSS et al. in [55] hingegen beziehen sich in ihrer Größenordnungsabschätzung direkt auf gasförmige Schmierstoffe. Von seinem Argumentationsweg wird jedoch an einigen Stellen im Folgenden auch abgewichen. Trotz alledem ist das Resultat in allen Fällen wie absehbar identisch.

Kontinuumsannahme Der im Folgenden ausschließlich modellierte Fall beschränkt sich auf einen Betriebszustand mit vollständig durch einen tragenden Schmierfilm voneinander getrennten Oberflächen des Wellenzapfens und der Lagerstruktur. Die Beschreibung des Festkörperkontakts und des Mischreibungsbereichs der zum Beispiel bei Anfahrvorgängen durchlaufen wird, bedarf einer gesonderten Betrachtung, die nicht im Rahmen dieser Arbeit erfolgt. Aus Experimenten ist bekannt, dass je nach Lager und Rotor der Mischreibungsbereich bei Drehzahlen von ca. 2000 bis 6000 min^{-1} durchfahren ist [33, 92, 147, 157]. Die mittlere freie Weglänge der Moleküle für Luft ist antiproportional zum vorherrschenden Fluidruck [108] und beträgt bei Umgebungsbedingungen $\lambda_M \approx 7 \cdot 10^{-8} \text{ m}$ [83]. Aus dem Verhältnis der mittleren freien Weglänge und einer für die Strömung charakteristischen Länge kann die *Knudsenzahl* Kn ermittelt werden. Sie dient als Maß der Anwendbarkeit der Kontinuumstheorie für die Fluidmodellierung. Für aerodynamische Gaslager in radialer Bauweise ergibt sich mit der Schmierfilmdicke als charakteristische Länge eine *Knudsenzahl* von

$$\text{Kn} = \frac{\lambda_M}{h + q} \approx 0,007. \quad (3.37)$$

Nach GROSS et al. [55] und HERWIG [61] kann die Strömung mittels Kontinuumstheorie für $\text{Kn} \leq 0,01$, laut SZERI [169] lediglich für $\text{Kn} \leq 0,001$ modelliert werden. Auch für *Knudsenzahlen* größer als den genannten Grenzen ist die Modellierung als Kontinuum prinzipiell möglich, allerdings sind dann die Haftbedingungen an den Rändern durch modifizierte Randbedingungen zu ersetzen [160]. Die minimalen Filmdicken treten bei Gaslagern in der Regel mit Drücken größer als dem Umgebungsdruck und damit geringerer freier Weglänge auf. Ferner sind die minimalen Filmdicken in vielen Fällen größer $7 \mu\text{m}$, siehe Abschnitt 5.4. Bei Umgebungsdruck entspricht diese Filmdicke einer Knudsenzahl $\text{Kn} = 0,01$, sodass das Fluid als Kontinuum mit Haftbedingungen modelliert wird.

Vernachlässigung der Krümmung Da der Fluidspalt annähernd die Geometrie eines Kreisrings besitzt, liegt eine Beschreibung in Polar- beziehungsweise Zylinderkoordinaten nahe. Aufgrund der vorherrschenden typischen Größenordnungen der Spaltgeometrie kann

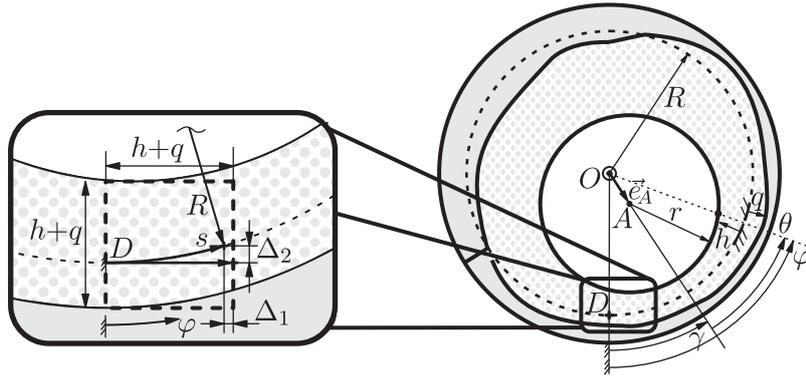


Abbildung 3.3: Skizze der kinematischen Größen zur Vernachlässigung der Krümmung.

jedoch, wie im Folgenden gezeigt, die Krümmung vernachlässigt werden und folglich die Beschreibung mittels kartesischer Koordinaten erfolgen. Nach Abbildung 3.3 gilt zwischen dem Kurvenparameter s , der die Bogenlänge beschreibt, und dem überstrichenen Winkel φ der Zusammenhang

$$s = \varphi R. \quad (3.38)$$

Zu einer Kreisbogenlänge, identisch der Schmierpalthöhe, gehört der überstrichene Winkel

$$\varphi_s = \frac{h+q}{R}. \quad (3.39)$$

Die Abweichungen Δ_1 und Δ_2 gegenüber einer ungekrümmten Strecke der Länge $h+q$ lauten auf Basis trigonometrischer Funktionen

$$\Delta_1 = h+q - R \sin \varphi_s, \quad (3.40)$$

$$\Delta_2 = R(1 - \cos \varphi_s). \quad (3.41)$$

Werden die trigonometrischen Funktionen über die ersten Glieder einer Potenzreihe, siehe zum Beispiel [21], dargestellt, so ergibt sich

$$\Delta_1 = h+q - R \left(\varphi_s - \frac{1}{6} \varphi_s^3 + \dots \right), \quad (3.42)$$

$$\Delta_2 = R \left(1 - 1 + \frac{1}{2} \varphi_s^2 - \dots \right). \quad (3.43)$$

Die Abweichungen bezogen auf die Spalthöhe $h+q$, also der ungekrümmten Strecke, liegen nach Ersetzen des Winkels φ_s aus (3.39) und für die angegebenen typischen Lagerabmessungen in den Größenordnungen von

$$\Delta_{1,rel} = \frac{\Delta_1}{h+q} = \frac{1}{6} \left(\frac{h+q}{R} \right)^2 \approx \mathcal{O}(10^{-6}), \quad (3.44)$$

$$\Delta_{2,rel} = \frac{\Delta_2}{h+q} = \frac{1}{2} \frac{h+q}{R} \approx \mathcal{O}(10^{-3}), \quad (3.45)$$

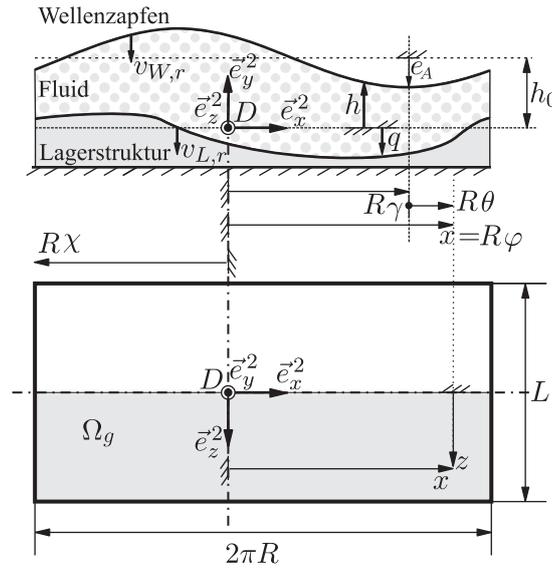


Abbildung 3.4: Skizze zur Kinematik des abgewickelten Schmierespalts.

sodass eine Beschreibung des Fluidgebiets mittels kartesischer Koordinaten gerechtfertigt ist. Abbildung 3.4 zeigt den abgewickelten Schmierespalt und das zur Beschreibung des Fluidverhaltens eingeführte System $\mathcal{K}_2 (D, \vec{e}_x^2, \vec{e}_y^2, \vec{e}_z^2)$. Demnach gilt für die Umfangskoordinate die Beziehung

$$x = R\varphi. \quad (3.46)$$

Die Unterschiede des Umfangs, respektive der Länge der inneren und äußeren Brandung des Fluidgebiets infolge der Abwicklung, werden vernachlässigt.

Grundgleichungen Genereller Ausgangspunkt zur Beschreibung einer Strömung sind die Grundgleichungen der Strömungsmechanik: Gleichung der Massenerhaltung, Impulsgleichungen und die Bilanz der Energie. Sie gelten zunächst für beliebige Fluide und beschreiben den zeitlichen Verlauf eines Fluidteilchens im Sinne der Kontinuumstheorie. Ergänzt werden diese Gleichungen durch vom Fluid abhängige Materialgleichungen. Für Gase üblich ist unter anderem die Annahme eines *isotropen Newtonschen Fluids* [165]. Diese rein empirische Annahme impliziert einen linearen, richtungsunabhängigen Zusammenhang zwischen den Deviatorspannungen und den Verformungsgeschwindigkeiten des Fluids, siehe zum Beispiel [160]. Wird weiter angenommen, dass die Proportionalitätskonstanten der Formänderung und der Volumenänderung miteinander verknüpft sind, sodass der Druck letztlich unabhängig von der Dilatation des differentiellen Fluidelements ist (Hypothese von STOKES [168]) [55, 160, 165], so gehen die in kartesischen Koordinaten formulierten *Navier-Stokes-Gleichungen*

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu_L \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_L \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu_L \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial p}{\partial x} + f_x, \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu_L \left[2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu_L \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_L \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] - \frac{\partial p}{\partial y} + f_y, \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \mu_L \left[2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu_L \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu_L \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] - \frac{\partial p}{\partial z} + f_z \end{aligned} \quad (3.49)$$

aus der Impulsbilanz hervor. Sie beschreiben das Fluidverhalten im Schmier-spalt. Darin sind x, y, z kartesische Koordinaten des Systems \mathcal{K}_2 aus Abbildung 3.4, $u = u(x, y, z, t)$, $v = v(x, y, z, t)$, $w = w(x, y, z, t)$ die Geschwindigkeitskomponenten der Strömung bezüglich den Richtungen $\vec{e}_x^2, \vec{e}_y^2, \vec{e}_z^2$, $p = p(x, y, z, t)$ der Fluiddruck, μ_L die dynamische Viskosität und $\rho = \rho(x, y, z, t)$ die Dichte des Fluids sowie f_x, f_y, f_z die Massenkräfte pro Volumeneinheit. Die *Navier-Stokes-Gleichungen* (3.47) – (3.49) gelten als sehr gute Näherung zur Beschreibung einer Gasströmung [165, 169].

Die *Kontinuitätsgleichung* liefert eine Aussage zur Erhaltung der Masse. Sie lautet in kartesischen Koordinaten

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0. \quad (3.50)$$

Die *Energiegleichung* bilanziert die zeitliche Änderung der Energie eines geschlossenen Systems und beinhaltet den ersten Hauptsatz der Thermodynamik. Sie bildet kurz gesagt die Tatsache ab, dass mechanische Energie in Wärme und Wärme in mechanische Energie umgewandelt werden kann. Für gewöhnlich kann bei aerodynamischen Gleitlagern die viskose Wärmeentwicklung innerhalb des Fluids vernachlässigt werden [87, 167, 169]. Dies liegt unter anderem an der Tatsache, dass die Wärmeabführung infolge der guten Wärmeleitfähigkeit der üblichen Lagermaterialien bedeutend größer ist als die innerhalb des Schmierfilms erzeugte Wärme [55]. Wenngleich diese Behauptung für Starrlager und nicht speziell für Folienlager mit Pufferfolie getroffen wurde, so wird nicht zuletzt aus Gründen der Einfachheit im Rahmen der vorliegenden Arbeit ein Wärmeübertrag von den umgebenden Strukturen in den Schmierfilm und umgekehrt nicht betrachtet. Folglich wird die Energiegleichung nicht weiter berücksichtigt und somit ein *isothermes Fluidverhalten* angenommen.

Stoffwertabhängigkeiten Vervollständigt werden die Grundgleichungen der Strömungsmechanik durch *Materialgleichungen*. Im hier betrachteten isothermen Fall ist dies der Zusammenhang zwischen Druck p und Dichte ρ sowie der Zusammenhang zwischen der dynamischen Viskosität μ_L und dem Druck p . Für Gase ist bis zu Drücken von 5 bar das ideale Gasgesetz

$$p = \rho \tilde{R} \Theta_T \quad (3.51)$$

mit der spezifischen Gaskonstanten \tilde{R} und der Gastemperatur Θ_T eine hinreichend genaue Beziehung zur Ermittlung des barotropen ($\rho = \rho(p) \neq \rho(\Theta_T)$) Druck-Dichte-Zusammenhangs [174].

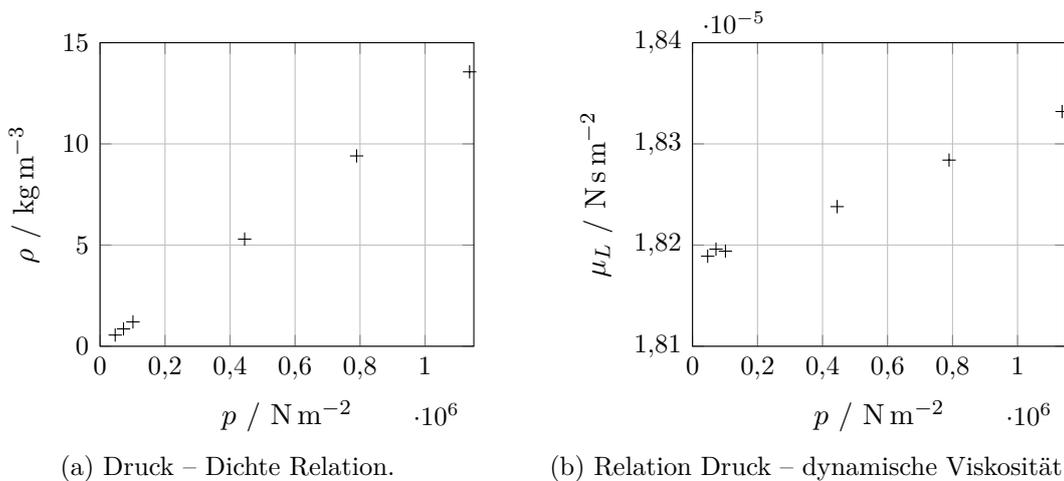


Abbildung 3.5: Experimentell ermittelte Zusammenhänge von Luft bei $\Theta_T = 293^\circ \text{K}$ aus [88].

Nach der kinetischen Gastheorie ist bei idealen Gasen die Viskosität unabhängig von der Dichte und damit unabhängig vom Druck [174]. Bei realen Gasen nimmt dagegen die dynamische Viskosität mit dem Druck beziehungsweise der Dichte zu. Jedoch ist die Änderung sehr gering [55, 160, 171], sodass im Weiteren von einer konstanten Viskosität ausgegangen wird. Abbildung 3.5 zeigt die aus Messungen ermittelten Zusammenhänge zwischen p und ρ sowie zwischen p und μ_L .

Mit (3.47) – (3.51) stimmt somit die Anzahl der abhängigen Veränderlichen u, v, w, p, ρ mit der Anzahl der Gleichungen überein. Bei Vorgabe von Anfangs- und Randbedingungen ist somit die Berechnung des Fluidverhaltens möglich. Die Lösung dieser Gleichungen, die aufgrund ihrer Komplexität ausschließlich numerisch erfolgen kann, gestaltet sich jedoch mitunter aufwendig. Auf Basis der für die vorliegende Problemstellung relevanten Größenordnungen der abhängigen und unabhängigen Veränderlichen ist eine Vereinfachung der Navier-Stokes-Gleichungen (3.47) – (3.49) möglich. Eine anschließende Verknüpfung der vereinfachten Gleichungen erlaubt eine Formulierung als einzige den Fluiddruck beschreibende Gleichung, die sogenannte Reynolds'sche Gleichung.

Referenzgrößen Experimentelle Untersuchungen von STINGELIN [167] an aerodynamischen Starrlagern haben gezeigt, dass der Fluiddruck einige Vielfache des Umgebungsdrucks annehmen kann. Der Druck lag aber immer noch in der gleichen Größenordnung wie der Umgebungsdruck bei Angabe in der SI-Einheit N m^{-2} . Folglich wird der Fluiddruck p mittels Umgebungsdruck p_0 in der Form

$$P = \frac{p}{p_0} \quad (3.52)$$

skaliert und P als neue dimensionslose abhängige Veränderliche eingeführt.

Die dimensionslose Dichte ϱ ergibt sich aus der Skalierung mittels Referenzdichte ρ_0 zu

$$\varrho = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad (3.53)$$

wobei für die Referenzdichte mit der spezifischen Gaskonstanten $\tilde{R} = 287,22 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ für Luft [5] nach dem idealen Gasgesetz

$$\rho_0 = \frac{p_0}{\tilde{R}\Theta_T}, \quad (3.54)$$

zu gelten hat.

Für die dimensionslosen Strömungsgeschwindigkeiten U, V, W als verbleibende abhängige Veränderliche gilt analog

$$U = \frac{u}{u_0}, \quad V = \frac{v}{v_0}, \quad W = \frac{w}{w_0}. \quad (3.55)$$

Als charakteristische Größe der Strömung in Umfangsrichtung des Lagers u_0 wird die Geschwindigkeit des Wellenzapfenrands bei reiner Rotation des Zapfens, angenähert durch

$$u_0 = \omega R, \quad (3.56)$$

siehe (3.30), gewählt. Über die Beziehung

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} \quad (3.57)$$

kann die Winkelgeschwindigkeit ω aus der Drehzahl n , angegeben in Umdrehungen pro Minute, ermittelt werden. Die Angabe der für das Strömungsgebiet typischen Bezugsgrößen v_0 und w_0 ist hingegen nicht naheliegend. In Anbetracht der geringen Schmierpalthe gegenüber Länge und Breite des Fluidgebietes (vergleiche (3.9) und (3.10)) und angesichts der Bewegungen der umgebenden Ränder kann jedoch zunächst die Abschätzung

$$v_0 = \varepsilon_{uv} u_0, \quad \varepsilon_{uv} \ll 1 \quad (3.58)$$

erfolgen. Wie sich später zeigen wird, ist eine genauere Spezifikation von w_0 an dieser Stelle nicht notwendig (siehe (3.65)).

Die Skalierung der unabhängigen Veränderlichen x, y, z erfolgt über

$$X = \frac{x}{R}, \quad Y = \frac{y}{\varepsilon_{xy} R}, \quad Z = \frac{z}{L}, \quad (3.59)$$

sodass die dimensionslosen Veränderlichen alle die Größenordnung $\mathcal{O}(1)$ haben. Aufgrund der Größenabschätzungen (3.9) und (3.10) gilt folglich

$$\varepsilon_{xy} = \mathcal{O}(10^{-3}) \ll 1. \quad (3.60)$$

Die Zeit wird über die Winkelgeschwindigkeit der Welle gemäß (3.56) skaliert:

$$\tau = t \omega = \frac{t}{R} u_0. \quad (3.61)$$

Für die Differentiale gilt nach (3.59) und (3.61)

$$dx = R dX, \quad dy = \varepsilon_{xy} R dY, \quad dz = L dZ, \quad dt = \frac{R}{u_0} d\tau = \omega d\tau. \quad (3.62)$$

Dimensionslose Kontinuitätsgleichung Ersetzen der Beziehungen (3.52), (3.53), (3.55), (3.59) und (3.61) in (3.50) und anschließende Multiplikation mit $R/(\rho_0 u_0)$ resultiert in

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \tau} + \frac{\partial \varrho U}{\partial X} + \frac{\varepsilon_{uv}}{\varepsilon_{xy}} \frac{\partial \varrho V}{\partial Y} + \frac{R w_0}{L u_0} \frac{\partial \varrho W}{\partial Z} = 0. \quad (3.63)$$

Die ersten beiden Terme haben aufgrund der durchgeführten Skalierung die Größenordnung 1. Der dritte Term hat wegen (3.60) die Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon_{uv}/\varepsilon_{xy}) = \varepsilon_{uv} 10^3$. Damit die anderen Terme nicht gegenüber dem dritten Term vernachlässigbar sind, muss

$$\mathcal{O}(\varepsilon_{uv}) = 10^{-3} \quad (3.64)$$

gelten.

Wie sich im weiteren Verlauf noch zeigen wird, treten Fluidbewegungen in axialer (\vec{e}_z^2) Richtung auf, die dann in der Kontinuitätsgleichung zu berücksichtigen sind. Auch hier wird aus der Anschauung gefordert, dass die Größenordnung der Strömung in axialer Richtung nicht die Größenordnung der Strömung in Umfangsrichtung (\vec{e}_x^2) dominiert, sodass letztlich aus $\mathcal{O}(R w_0/(L u_0)) = 1$ mit $R \approx L$ (siehe (3.9)),

$$w_0 \approx u_0 \quad (3.65)$$

geschlussfolgert wird. Mit den Beziehungen (3.64) und (3.65) ergibt sich somit die skalierte und dimensionslose Kontinuitätsgleichung (3.63)

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \tau} + \frac{\partial \varrho U}{\partial X} + \frac{\partial \varrho V}{\partial Y} + \frac{\partial \varrho W}{\partial Z} = 0. \quad (3.66)$$

Dimensionslose Navier-Stokes-Gleichungen Für eine konstante Viskosität μ_L lauten die *Navier-Stokes-Gleichungen* (3.47) – (3.49)

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + f_x \\ &+ \mu_L \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right), \end{aligned} \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + f_y \\ &+ \mu_L \left(\frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right), \end{aligned} \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + f_z \\ &+ \mu_L \left(\frac{1}{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{1}{3} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{4}{3} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (3.69)$$

Transformieren der Veränderlichen mittels (3.52), (3.53), (3.55), (3.59) und (3.61) und anschließende Multiplikation der Gleichungen (3.67) und (3.69) mit $R/(\rho_0 u_0^2)$ sowie Multiplikation der Gleichung (3.68) mit $R/(\rho_0 u_0^2 \varepsilon_{uv})$ liefert

$$\begin{aligned} & \varrho \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\varepsilon_{uv}}{\varepsilon_{xy}} V \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{R w_0}{L u_0} W \frac{\partial U}{\partial Z} \right) \\ &= - \frac{p_0}{\rho_0 u_0^2} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{R}{\rho_0 u_0^2} f_x \\ &+ \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{4}{3} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{1}{\varepsilon_{xy}^2} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \frac{R^2}{L^2} \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} + \frac{\varepsilon_{uv}}{3 \varepsilon_{xy}} \frac{\partial^2 V}{\partial X \partial Y} + \frac{R w_0}{3 L u_0} \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Z} \right), \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} & \varrho \left(\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\varepsilon_{uv}}{\varepsilon_{xy}} V \frac{\partial V}{\partial Y} + \frac{R w_0}{L u_0} W \frac{\partial V}{\partial Z} \right) \\ &= - \frac{p_0}{\rho_0 u_0^2 \varepsilon_{xy} \varepsilon_{uv}} \frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{R}{\rho_0 u_0^2 \varepsilon_{uv}} f_y \\ &+ \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{3 \varepsilon_{uv} \varepsilon_{xy}} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{4}{3 \varepsilon_{xy}^2} \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{R^2}{L^2} \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} + \frac{R w_0}{3 L u_0 \varepsilon_{uv} \varepsilon_{xy}} \frac{\partial^2 W}{\partial Y \partial Z} \right), \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} & \varrho \frac{w_0}{u_0} \left(\frac{\partial W}{\partial \tau} + U \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\varepsilon_{uv}}{\varepsilon_{xy}} V \frac{\partial W}{\partial Y} + \frac{R w_0}{L u_0} W \frac{\partial W}{\partial Z} \right) \\ &= - \frac{p_0 R}{\rho_0 u_0^2 L} \frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{R}{\rho_0 u_0^2} f_z \\ &+ \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{R}{3 L} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Z} + \frac{R \varepsilon_{uv}}{3 L \varepsilon_{xy}} \frac{\partial^2 V}{\partial Y \partial Z} + \frac{w_0}{u_0} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + \frac{w_0}{u_0 \varepsilon_{xy}^2} \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} + \frac{4 R^2 w_0}{3 L^2 u_0} \frac{\partial^2 W}{\partial Z^2} \right) \end{aligned} \quad (3.72)$$

mit der *Reynoldszahl*

$$\text{Re} = \frac{\rho_0 R u_0}{\mu_L}. \quad (3.73)$$

Für $p_0 \approx 10^5 \text{ N m}^{-2}$ folgt mit (3.54) $\rho_0 \approx 1 \text{ kg m}^{-3}$. Nach Abbildung 3.5 gilt $\mu_L \approx 10^{-5} \text{ N s m}^{-2}$ und für den Radius $R \approx 10^{-2} \text{ m}$ (siehe (3.9)). Für die charakteristische Strömungsgeschwindigkeit in Umfangsrichtung gilt nach (3.56) und (3.57) für $5000 \text{ min}^{-1} \leq n \leq 50000 \text{ min}^{-1} \rightarrow u_0 \approx 10 \text{ m s}^{-1}$, für $50000 \text{ min}^{-1} \leq n \leq 500000 \text{ min}^{-1} \rightarrow u_0 \approx 10^2 \text{ m s}^{-1}$. Folglich liegt in den angegebenen Drehzahlbereichen die Reynoldszahl in der Größenordnung $\text{Re} = \mathcal{O}(10^4) \dots \mathcal{O}(10^5)$.

Beruhend auf den Abschätzungen (3.9), (3.60), (3.64) und (3.65) haben alle Terme der linken Seiten der Gleichungen (3.70)–(3.72) die Größenordnung 1. Wird als Volumenkraft lediglich die Schwerkraft $f_i = g\rho$, $i = x, y$ mit der Erdbeschleunigung g und entsprechender Richtungsinformation berücksichtigt, so können für die oben angegebenen Drehzahlbereiche aufgrund der Größenordnung der dimensionslosen Faktoren $p_0/(\rho_0 u_0^2) = \mathcal{O}(10) \dots \mathcal{O}(10^3)$ und $1/(\text{Re} \varepsilon_{xy}^2) = \mathcal{O}(10) \dots \mathcal{O}(10^2)$ sowie

$p_0/(\rho_0 u_0^2 \varepsilon_{xy} \varepsilon_{uv}) = \mathcal{O}(10^7) \dots \mathcal{O}(10^9)$ die Gleichungen (3.70)–(3.72) auf die stark vereinfachte Form

$$0 = -\frac{p_0}{\rho_0 u_0^2} \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{1}{\text{Re} \varepsilon_{xy}^2} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \quad (3.74)$$

$$0 = -\frac{p_0}{\rho_0 u_0^2 \varepsilon_{xy} \varepsilon_{uv}} \frac{\partial P}{\partial Y}, \quad (3.75)$$

$$0 = -\frac{p_0 R}{\rho_0 u_0^2 B} \frac{\partial P}{\partial Z} + \frac{w_0}{\text{Re} u_0 \varepsilon_{xy}^2} \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \quad (3.76)$$

gebracht werden. Für Drehzahlen im mittleren sechsstelligen Bereich, gemessen in Umdrehungen pro Minute, ist die Vernachlässigung der linken Seite in (3.70)–(3.72) nicht mehr zulässig, sodass dann die Trägheitskräfte mitberücksichtigt werden müssen. Auch größere Schmierspalthöhen führen zu einer Verringerung der Größenordnung des Faktors vor dem dominanten viskosen Term, womit auch dieser Fall nicht eingeschlossen und somit gesondert zu diskutieren ist.

Geschwindigkeitsfelder Zur Ermittlung der Strömungsgeschwindigkeiten des Fluids werden die Gleichungen (3.74), (3.75) und (3.76) in dimensionsbehafteter Form

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu_L \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (3.77)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad (3.78)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu_L \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.79)$$

herangezogen, da ε_{xy} lediglich eine Größenordnungsinformation enthält. Aus (3.78) folgt, dass der Druck über die Schmierspalthöhe in radialer (\vec{e}_y^2) Richtung als konstant angenommen werden kann und folglich $p = p(t, x, z)$ gilt. Ebenso folgt für die Dichte mittels idealem Gasgesetz (3.51) $\rho = \rho(t, x, z)$. Die Unabhängigkeit des Drucks von Radial-, beziehungsweise Höhenkoordinate ermöglicht die zweimalige Integration von (3.77) und (3.79) über y , sodass sich für das Geschwindigkeitsfeld

$$u = \frac{1}{2\mu_L} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + K_{I1} y + K_{I2}, \quad (3.80)$$

$$w = \frac{1}{2\mu_L} \frac{\partial p}{\partial z} y^2 + K_{I3} y + K_{I4} \quad (3.81)$$

ergibt, wobei K_{Ij} , $j = 1, 2, 3, 4$ Integrationskonstanten sind. Aufgrund der gewählten positiven Koordinatenrichtungen für h und q (siehe Abschnitt 3.1.2), gilt für die Höhenkoordinate $-q \leq y \leq h$. Die Integrationskonstanten aus (3.80) und (3.81) lassen sich unter der Annahme von Haftrandbedingungen

$$u(y = h) = v_{W,t}, \quad u(y = -q) = v_{L,t} = 0, \quad w(y = h) = 0, \quad w(y = -q) = 0, \quad (3.82)$$

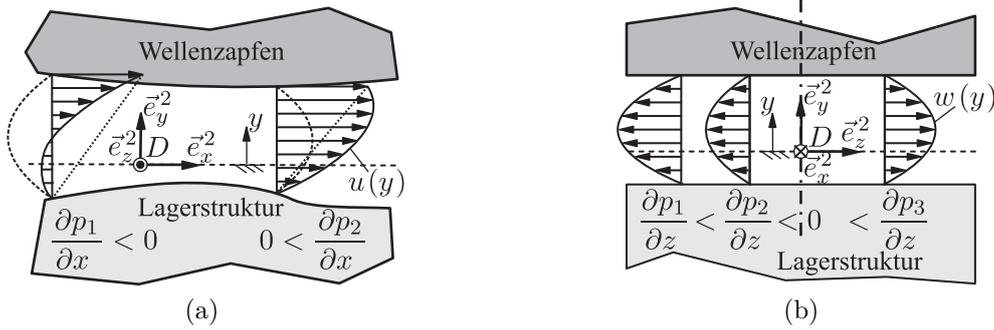


Abbildung 3.6: Ermittelte Bewegung des Schmiermediums in (a) Umfangsrichtung und (b) axialer Richtung.

siehe Abschnitt 3.1 und 3.2, durch die Geschwindigkeiten der Randstrukturen (3.30) und (3.36) bestimmen, wobei eine Bewegung des Wellenzapfens und der Deckfolie in axialer (\vec{e}_z^2) Richtung ausgeschlossen wird. Es ergeben sich somit die Geschwindigkeitsfelder

$$u = \frac{1}{2\mu_L} \frac{\partial p}{\partial x} (y-h)(y+q) + \frac{v_{W,t}}{h+q} (y+q), \quad (3.83)$$

$$w = \frac{1}{2\mu_L} \frac{\partial p}{\partial z} (y-h)(y+q), \quad (3.84)$$

wobei der Fluiddruck p zunächst noch nicht bekannt ist. In (3.83) und (3.84) wird der erste Term üblicherweise als *Poiseuille-Term*, der zweite in (3.83) als *Couette-Term* bezeichnet. Abbildung 3.6 veranschaulicht die erhaltenen Geschwindigkeitsprofile.

Fluiddruckgleichung Mit der Kontinuitätsgleichung (3.50) und dem idealen Gasgesetz (3.51) stehen noch zwei Gleichungen für die verbleibenden Unbekannten p und ρ zur Verfügung. Da sich jedoch aus den reduzierten Beziehungen (3.77) – (3.79) keine Geschwindigkeitsverteilung v in \vec{e}_y^2 -Richtung ableiten lässt, wird die Kontinuitätsgleichung über die Spalthöhe integriert:

$$\int_{-q}^h \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} dy = 0. \quad (3.85)$$

Insbesondere gilt mit dem Hauptsatz der Integralrechnung für eine von y unabhängige Dichte ρ

$$\int_{-q}^h \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy = \rho \int_{-q}^h \frac{\partial v}{\partial y} dy = \rho [v(y=h) - v(y=-q)], \quad (3.86)$$

sodass infolgedessen in Schmierfilmdickenrichtung (\vec{e}_y^2) lediglich die Geschwindigkeiten der Ränder auftreten. Für die angenommenen Haftrandbedingungen gilt nach den zuvor eingeführten positiven Koordinatenrichtungen (siehe Abbildung 3.2 und 3.4)

$$v(y=h) = -v_{W,r}, \quad v(y=-q) = -v_{L,r}. \quad (3.87)$$

Die Auswertung der Integration des ersten Terms aus (3.85) ergibt

$$\int_{-q}^h \frac{\partial \rho}{\partial t} dy = \frac{\partial \rho}{\partial t} \int_{-q}^h dy = \frac{\partial \rho}{\partial t} (h + q). \quad (3.88)$$

Für die beiden verbleibenden Integrale aus (3.85) gilt

$$\int_{-q}^h \frac{\partial \rho u}{\partial x} dy = \rho \int_{-q}^h \frac{\partial u}{\partial x} dy + \frac{\partial \rho}{\partial x} \int_{-q}^h u dy, \quad (3.89)$$

$$\int_{-q}^h \frac{\partial \rho w}{\partial z} dy = \rho \int_{-q}^h \frac{\partial w}{\partial z} dy + \frac{\partial \rho}{\partial z} \int_{-q}^h w dy. \quad (3.90)$$

Vertauschen von Integration und Ableitung bei den vorliegenden Parameterintegralen, siehe zum Beispiel [21], liefert für die beiden ersten Terme in (3.89) und (3.90)

$$\rho \int_{-q}^h \frac{\partial u}{\partial x} dy = \rho \left(\frac{\partial}{\partial x} \int_{-q}^h u dy - \frac{\partial h}{\partial x} u(y=h) - \frac{\partial q}{\partial x} u(y=-q) \right), \quad (3.91)$$

$$\rho \int_{-q}^h \frac{\partial w}{\partial z} dy = \rho \left(\frac{\partial}{\partial z} \int_{-q}^h w dy - \frac{\partial h}{\partial z} w(y=h) - \frac{\partial q}{\partial z} w(y=-q) \right). \quad (3.92)$$

Ersetzen der Geschwindigkeiten aus (3.83) und (3.84) in (3.89), (3.90), (3.91) und (3.92) ergibt nach Auswertung der Integrale mit den Randbedingungen (3.82)

$$\int_{-q}^h \frac{\partial \rho u}{\partial x} dy = \frac{\partial}{\partial x} \left[-\rho \frac{(h+q)^3}{12\mu_L} \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{1}{2} (h+q) v_{W,t} \right] - \rho \frac{\partial h}{\partial x} v_{W,t}, \quad (3.93)$$

$$\int_{-q}^h \frac{\partial \rho w}{\partial z} dy = \frac{\partial}{\partial z} \left[-\rho \frac{(h+q)^3}{12\mu_L} \frac{\partial p}{\partial z} \right]. \quad (3.94)$$

Die integrierte Kontinuitätsgleichung (3.85) lautet damit nach Einsetzen von (3.86), (3.87), (3.88), (3.93) und (3.94)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} (h+q) + \frac{\partial}{\partial x} \left[-\rho \frac{(h+q)^3}{12\mu_L} \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{1}{2} (h+q) v_{W,t} \right] - \rho \frac{\partial h}{\partial x} v_{W,t} \\ + \rho [-v_{W,r} + v_{L,r}] + \frac{\partial}{\partial z} \left[-\rho \frac{(h+q)^3}{12\mu_L} \frac{\partial p}{\partial z} \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Ersetzen der Geschwindigkeiten der Ränder $v_{W,t}$, $v_{W,r}$, $v_{L,r}$ aus (3.30), (3.34) und (3.35) mit (3.46) in (3.95) ergibt nach Sortierung der Terme

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\rho(h+q)^3}{12\mu_L} \frac{\partial p}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\rho(h+q)^3}{12\mu_L} \frac{\partial p}{\partial z} \right] + \frac{\omega R}{2} \frac{\partial}{\partial x} [\rho(h+q)] + \frac{\partial}{\partial t} [\rho(h+q)] = 0. \quad (3.96)$$

Mit dem Druck-Dichte-Zusammenhang aus dem idealen Gasgesetz (3.51) und kurzer Umformung ergibt sich schlussendlich die *Reynoldsgleichung für ideale Gase*

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{p(h+q)^3}{\mu_L} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{p(h+q)^3}{\mu_L} \frac{\partial p}{\partial z} \right] - 6\omega R \frac{\partial}{\partial x} [p(h+q)] - 12 \frac{\partial}{\partial t} [p(h+q)] = 0. \quad (3.97)$$

Eine Erweiterung der Theorie für in radialer Richtung nicht konstante Fluideigenschaften veröffentlichte DOWSON in [40].

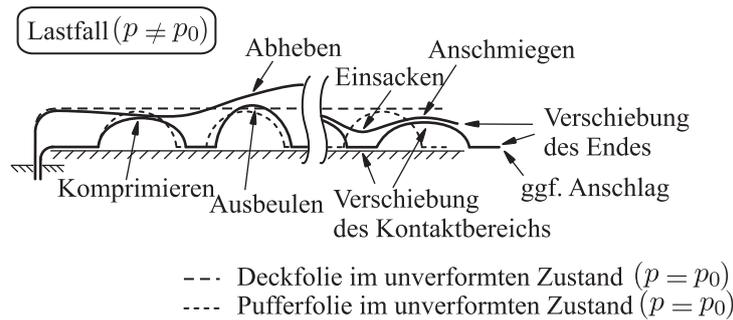


Abbildung 3.7: Mögliche Auswirkungen eines ausgebildeten Schmierfilms auf die Deck- und Pufferfolie.

3.3 Lagerstrukturmodell

Infolge der Wellenzapfenbewegung bildet sich eine Druckverteilung im Schmierfilm aus, die zu einer Verformung der Folien führt. Abbildung 3.7 skizziert mögliche auftretende Effekte der Deck- und Pufferfolie infolge eines allgemein anliegenden Schmierfilmdrucks. In Bereichen mit hohen Schmierfilmdrücken werden die Puffer komprimiert. Dies kann, wenn die Reibkräfte zwischen Pufferfolie und Lagergehäuse ausreichend klein sind, und in Abhängigkeit der Belastung der umgebenden Puffer zu einer Verschiebung einzelner Puffer, der Kontaktstellen und letztlich des Rands der Folie führen. Einzelne Puffer können dann auch ohne vorliegendem Unterdruck im Schmierfilm ausbeulen und lokal die Schmierpalthöhe verringern. Da die Deckfolie prinzipiell nicht mit der Pufferfolie verbunden ist, wird sie in Bereichen, in denen der Schmierfilmdruck geringer als der Umgebungsdruck ist, unter Umständen von der Pufferfolie abheben, was letztlich auch zu einer Verringerung der Spalthöhe führt. Im Bereich eines hohen Fluiddrucks ist zu erwarten, dass sich die Deckfolie der Kontur der Pufferfolie anschmiegt. Folglich vergrößert sich der Kontaktbereich zwischen den beiden Folien. Es ist zu erwarten, dass die Deckfolie zwischen den Puffern einsackt. Insbesondere bei sich zeitlich ändernden Schmierfilmdrücken werden die zwischen Lagergehäuse und Pufferfolie sowie zwischen Pufferfolie und Deckfolie wirkende Reibkräfte die Verformung der beiden Folien beeinflussen.

Die Berücksichtigung all der genannten Effekte erfordert eine detaillierte Modellierung der beiden Folien und der Reibung. Ein derartig umfangreiches Modell ist jedoch im Hinblick auf kurze Rechenzeiten für eine Kopplung mit den Modellen des Schmierfilms und des Rotors nur bedingt geeignet. Für eine erste grundlegende Analyse der Auswirkungen der Lagereigenschaften auf das dynamische Rotorverhalten ist ein solch komplexes Modell auch nicht zwingend erforderlich. Bei der Nachbildung des Folienverhaltens werden deshalb einige erhebliche vereinfachende Annahmen getroffen. Abbildung 3.8 skizziert das im Rahmen der Arbeit entwickelte Ersatzmodell der beiden Folien. Es wird angenommen, dass sich die beiden Folien über einzelne masselose, starre, stabähnliche Elemente mit einer endlichen Ausdehnung in axialer (\vec{e}_z^2) Richtung und ohne Kopplung der Elemente in Umfangsrichtung (\vec{e}_x^2) abbilden lassen. Die einzelnen Elemente haben dabei keine Ausdehnung im Umfangsrichtung, analog der Winkler'schen Bettung. Ferner wird angenommen, dass jedes dieser Elemente über eine nichtlineare Feder und einen parallel dazu geschalteten vis-

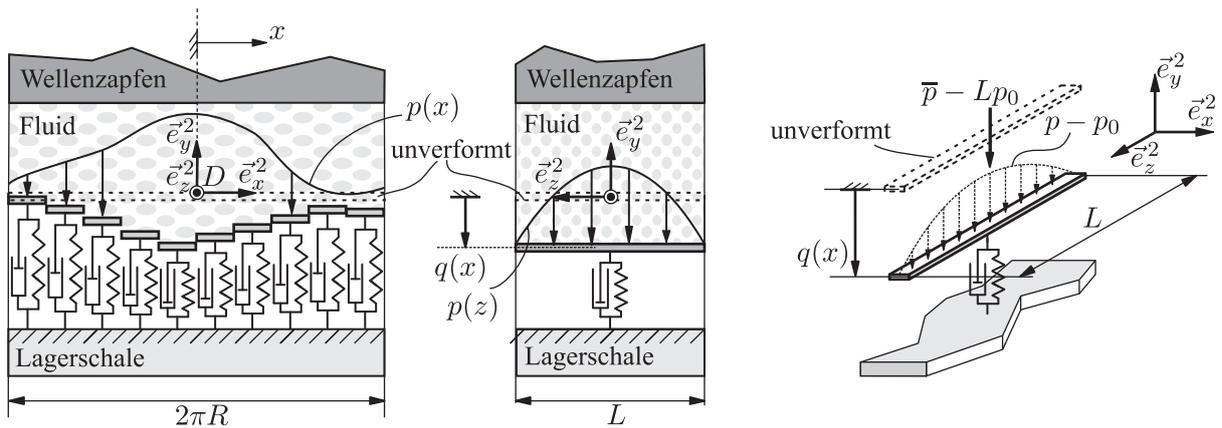


Abbildung 3.8: Skizze und kinematische Größen des Strukturmodells.

kosen Dämpfer mit dem als starr angenommenem Lagergehäuse verbunden ist. Aufgrund der Starrheitsannahme der einzelnen Elemente gilt für die Koordinate q , die die Auslenkung der Elemente beschreibt, $q = q(t, x)$. Für den Zusammenhang zwischen wirkender Last und Verschiebung wird die Beziehung

$$d_f \dot{q} + p_0 L \exp\left(\frac{q}{b}\right) = \bar{p} \quad (3.98)$$

angenommen, wobei

$$\bar{p} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} p \, dz \quad (3.99)$$

der über die Breite des Lagers integrierte Fluiddruck ist, d_f die Dämpfungskonstante der Dimension $(d_f) = M L^{-1} T^{-1}$ und b ein Strukturnachgiebigkeitsparameter der Dimension $(b) = L^1$.

Bemerkung zur Modellwahl Die Annahme der axialen Starrheit wird getroffen, um eine Verschiebung der Folien an den Lagerrändern in Axialrichtung sicherzustellen, siehe Abbildung 3.8. Bei der am häufigsten vorzufindenden Annahme vollkommen ungekoppelter, nachgiebiger Elemente dagegen, wie zum Beispiel bei der Winkler'schen Bettung, und der Annahme von Umgebungsdruck an den Enden, tritt eine Verformung der Randbereiche nicht auf. Sofern eine Durchdringung von Wellenzapfen und Folie nicht unberücksichtigt bleiben soll, ist damit die Auslenkung des Wellenzapfens auf das vorzufindende Lagerpiel beschränkt. Gerade das widerspricht aber der Intention des Folienlagers und den Beobachtungen in der Praxis. Die Nichtberücksichtigung einer möglichen Biegung der Elemente in axialer (\vec{e}_z^2) Richtung erfolgt aus Gründen der Einfachheit, was nicht unüblich ist (siehe Abschnitt 2.2.3). Da der Fluiddruck in Umfangsrichtung (\vec{e}_x^2) kontinuierlich ist und die Biegesteifigkeit der Deckfolie als klein gegenüber dem Verformungswiderstand der beiden Folien in radialer Richtung (\vec{e}_y^2) angenommen wird, kann die Kopplung der einzelnen Elemente vernachlässigt werden. Vergleichsrechnungen, die dies belegen, sind in einem im Zusammenhang zur vorliegenden Arbeit entstanden Beitrag von LEISTER et al. [119] veröffentlicht.

Ein exponentielles Verformungsgesetz wird gewählt, weil bei Messungen ein progressives Steifigkeitsverhalten der Folienstruktur identifiziert wurde, siehe zum Beispiel [156] und Abschnitt 4.1.2. Im Gegensatz zu einem allgemeinen Polynom gestattet die e-Funktion, die Umkehrfunktion leicht explizit zu formulieren. Gleichzeitig bringt sie den Vorteil eines unterschiedlichen Verformungswiderstands bei einem Fluiddruck größer und kleiner als der Umgebungsdruck, da sie weder punkt- noch achsensymmetrisch ist. Letzter Fall bildet tendenziell den Abhebevorgang der Deckfolie bei Unterdruck ab, da hier der Verformungswiderstand der Pufferfolie unberücksichtigt bleibt. Auch eine vorgespannte Folie, also der Fall ohne Lagerspiel, lässt sich mit diesem Modell prinzipiell realisieren. Des Weiteren wird bewusst nur ein Parameter (b) zur Charakterisierung der Steifigkeit gewählt. So bleibt die Parameteranzahl minimal, das Modell möglichst unkompliziert, und eine Variation des Parameters lässt sich eindeutig einer Erhöhung oder Absenkung der Steifigkeit beziehungsweise Nachgiebigkeit zuordnen. Der Nachteil einer schlechteren Anpassung an Messergebnisse gegenüber einer mehr-parametrischen Variante wird dafür hingenommen. Durch die Einführung eines von der Umfangskoordinate abhängigen Nachgiebigkeitsparameters ließe sich prinzipiell das unterschiedliche Verformungsverhalten an der Stelle eines Puffers und eines dazwischenliegenden Bereichs nachbilden. Da innerhalb des Modells aber auch mögliche Verschiebungen der Puffer nicht abgebildet sind und das Modell generell recht einfach gehalten werden soll, wird im Rahmen der Arbeit von dieser Möglichkeit abgesehen.

Die Modellierung dissipativer Eigenschaften wird über die einfachste mögliche Form, einen viskosen Dämpfer, realisiert. Wenngleich dieser radial wirkende Dissipationsmechanismus auch der in der Literatur am häufigsten vorzufindende Ansatz ist (siehe Abschnitt 2.2.3), so bildet er das zwischen den Folien und dem Lagergehäuse wirkende Reibungsverhalten, wenn überhaupt, nur rudimentär ab. Da allerdings innerhalb des Strukturmodells keine Massen und infolgedessen keine Trägheit berücksichtigt werden, dient der Dämpfer neben seinem Dissipationsmechanismus vorwiegend auch dazu, dass eine Verformung der Folie nicht instantan erfolgt, sondern eine gewisse Verzugszeit aufweist.

3.4 Gesamtmodell

Anfangs- und Randbedingungen Mit (3.97) und (3.98) sind die Modellgleichungen des Fluids und der nachgiebigen Lagerstruktur hergeleitet. Die Lösung dieser gekoppelten Differentialgleichungen prognostiziert das Lagerverhalten. Dafür notwendig sind Anfangs- und Randbedingungen, die letztlich das Lagermodell vervollständigen. Als erste Randbedingung für (3.97) wird aufgrund des Spalts in der Deckfolie an der Einspannstelle χ (siehe Abbildungen 3.1 und 3.4), die *Dirichlet-Randbedingung*

$$p(t, x = -\chi R, z) = p(t, x = 2\pi R - \chi R, z) = p_0 \quad (3.100)$$

angenommen. Ein solcher Spalt kann im Ausgangszustand mitunter einen Winkel von einigen Grad einschließen [62]. An den axialen Enden des Lagers wird ebenfalls Umgebungsdruck angenommen. Folglich gilt

$$p(t, x, z = -L/2) = p(t, x, z = L/2) = p_0. \quad (3.101)$$

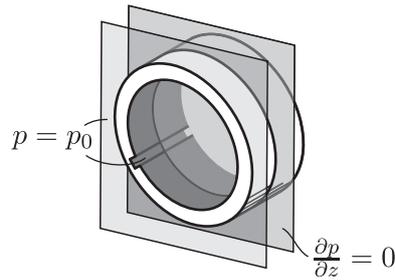


Abbildung 3.9: Angenommene Randbedingungen des Lagermodells.

Da jedoch ein symmetrisches Problem vorliegt, kann das Gebiet, auf dem (3.97) gilt, auf die halbe Lagerbreite reduziert werden: $\Omega_g = \{(x, z) | x = -\chi R \dots 2\pi R - \chi R, z = 0 \dots L/2\}$ (siehe Abbildung 3.4). Folglich liegen in Axialrichtung die Randbedingungen

$$\frac{\partial}{\partial z} p(t, x, z = 0) = 0, \quad (3.102)$$

$$p(t, x, z = \frac{L}{2}) = p_0 \quad (3.103)$$

vor. In Abbildung ?? sind die angenommenen Randbedingungen skizziert. Als Anfangsbedingung für den Fluiddruck wird

$$p(t = 0, x, z) = p_{t_0} \quad (3.104)$$

verwendet, für die Lagerstruktur wird

$$q(t = 0, x) = q_{t_0} \quad (3.105)$$

angenommen.

Anmerkungen zur Randbedingung Die Annahme der Dirichlet-Randbedingung (3.100) am Spalt der Deckfolie kann in Frage gestellt werden. Ein Beleg für deren Gültigkeit ist bisher experimentell nicht erbracht. Eine mögliche Alternative für das in Form der Reynoldsgleichung vorliegende Fluidmodell wäre die Annahme einer *periodischen Randbedingung* wie sie beispielsweise bei Starrlagern üblich ist (siehe (3.156)).

Im Betrieb, zum Beispiel bei einer der Rotation des Wellenzapfens überlagerten Wirbelbewegung des Mittelpunkts A , ist zu erwarten, dass der gasförmige Schmierstoff teilweise auch durch den Spalt strömt. Dieses Verhalten ist in den Annahmen, die letztlich auf die Reynoldsgleichung führen, nicht berücksichtigt. Verglichen mit dem restlichen Gebiet des Schmierfilms ist jedoch anzunehmen, dass dieser Effekt, insbesondere im Hinblick auf die am Wellenzapfen wirkenden Lagerkräfte, vernachlässigt werden kann [55]. Entsprechendes gilt für den Einlaufbereich an den axialen Enden des Lagers.

Bei Abwägung zwischen den beiden genannten Alternativen erscheint aus Sicht des Autors, auch im Vergleich zu einem zylindrischen Starrlager mit und ohne axiale Nuten, die Randbedingung (3.100) gegenüber periodischen Randbedingungen sinnvoller. Sie ist auch die im Kontext der hier diskutierten Lager die in der Literatur vorwiegend verwendete.

Dimensionslose Form Unter anderem zur Reduktion der Modellparameter wird das Gesamtlagermodell (3.97) und (3.98) inklusive der Rand- und Anfangsbedingungen (3.102) – (3.105) in eine dimensionslose Form überführt. Gleichzeitig werden durch die Skalierung die Größenordnungen einzelner Terme und der Veränderlichen untereinander angepasst, was die Robustheit und mitunter auch die Konvergenz numerischer Verfahren erhöht. Die Transformationen für den Druck (3.52) und die Koordinaten x und z (3.59) werden beibehalten. Die Schmierfilmhöhe $h + q$ wird über das Lagerspiel h_0 skaliert. Folglich gilt

$$H = \frac{h}{h_0}, \quad Q = \frac{q}{h_0}. \quad (3.106)$$

Von den verschiedenen Möglichkeiten, die zur Skalierung der Zeit zur Verfügung stehen, wird analog zu (3.61) der Kehrwert der Winkelgeschwindigkeit als Zeitskala gewählt. Dies hat den Vorteil, dass in der dimensionslosen Form der Reynoldsgleichung eine minimale Anzahl an dimensionslosen Parametern auftreten wird. Zugleich wird sich diese Wahl, wie im weiteren Verlauf ersichtlich, bei der Skalierung der Gleichungen des Rotormodells als günstig erweisen. Jedoch ist zu beachten, dass folglich eine dimensionslose Zeiteinheit von der Drehzahl des Rotors, respektive der Winkelgeschwindigkeit, abhängt. Der Vergleich dimensionsloser transients Vorgänge ist deshalb erschwert. Einsetzen der Beziehungen (3.52), (3.59), (3.61) und (3.106) in (3.97) und Einführen einer dimensionslosen Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega = \frac{6\mu_L R^2}{p_0 h_0^2} \omega \quad (3.107)$$

führt auf die *dimensionslose Reynoldsgleichung für ideale Gase*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} \left[P(H+Q)^3 \frac{\partial P}{\partial X} \right] + \kappa^2 \frac{\partial}{\partial Z} \left[P(H+Q)^3 \frac{\partial P}{\partial Z} \right] \\ - \Omega \left\{ \frac{\partial}{\partial X} [P(H+Q)] + 2 \frac{\partial}{\partial \tau} [P(H+Q)] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.108)$$

auf $\Omega_G = \{(X, Z) | X = -\chi \dots 2\pi - \chi, Z = 0 \dots 1/2\}$. Strukturell ähnelt diese Gleichung der in [50] angegebenen allgemeinen Form einer nichtlinearen *Diffusions-Konvektions-Reaktions-Prozess-Gleichung*. Zusätzlich tritt jedoch neben einem von der Ortskoordinate X abhängigen Faktor vor dem Diffusionsterm ($\frac{\partial^2 P}{\partial X^2}$) ein zusätzlicher Diffusionsterm in einer zweiten Ortsvariablen Z auf. In (3.108) ist

$$\kappa = \frac{R}{L} \quad (3.109)$$

ein dimensionsloser geometrischer Ähnlichkeitsparameter des Lagers. Ein weiterer geometrischer Ähnlichkeitsparameter

$$\psi = \frac{h_0}{R}, \quad (3.110)$$

das Verhältnis von Lagerspiel zum Lagerradius, tritt in (3.107) auf.

Ausgehend von der Skalierung (3.106) werden die dimensionslosen Wellenzapfenkoordinaten

$$\varepsilon_A = \frac{e_A}{h_0}, \quad X_A = \frac{x_a}{h_0}, \quad Y_A = \frac{y_A}{h_0} \quad (3.111)$$

eingeführt. Aufgrund von (3.46) und (3.59) gilt für die dimensionslose Umfangskoordinate und den dimensionslosen Winkel Γ

$$X = \varphi, \quad \Gamma = \gamma, \quad (3.112)$$

wobei beide Größe im Bogenmaß angegeben werden und damit letztlich für die dimensionslose Spaltfunktion (3.18), beziehungsweise (3.20)

$$H = 1 - X_A \cos X - Y_A \sin X = 1 - \varepsilon_A \cos(X - \Gamma). \quad (3.113)$$

Die Ableitungen (3.32) und (3.33) der Spaltfunktion in dimensionsloser Form lauten

$$\frac{dH}{dX} = X_A \sin X - Y_A \cos X = \varepsilon_A \sin(X - \Gamma), \quad (3.114)$$

$$\frac{dH}{d\tau} = -X'_A \cos X - Y'_A \sin X = -\varepsilon'_A \cos(X - \Gamma) - \varepsilon_A \Gamma' \sin(X - \Gamma), \quad (3.115)$$

wobei $(.)' = d(.)/d\tau$ die Ableitung nach der dimensionslosen Zeit τ kennzeichnet.

Für den axial gemittelten Druck nach (3.99) gilt in dimensionsloser Form

$$\bar{P} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} P \, dZ = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} P \, dZ = \frac{\bar{p}}{p_0 L}. \quad (3.116)$$

Das Strukturmodell (3.98) nimmt nach entsprechender Skalierung die dimensionslose Form

$$\delta_f Q' + \exp\left(\frac{Q}{\beta}\right) = \bar{P} \quad (3.117)$$

an, wobei die beiden dimensionslosen Größen

$$\delta_f = \frac{d_f h_0 \omega}{p_0 L}, \quad \beta = \frac{b}{h_0}, \quad (3.118)$$

die Strukturdämpfung (δ_f) und die Strukturnachgiebigkeit (β) charakterisieren.

Nach Einführung der Transformation (3.52) und (3.59) in (3.100), (3.102) und (3.103) sowie (3.104) und (3.105) ergeben sich schließlich die dimensionslosen Randbedingungen

$$P(\tau, X = -\chi, Z) = 1, \quad (3.119)$$

$$P(\tau, X = 2\pi - \chi, Z) = 1, \quad (3.120)$$

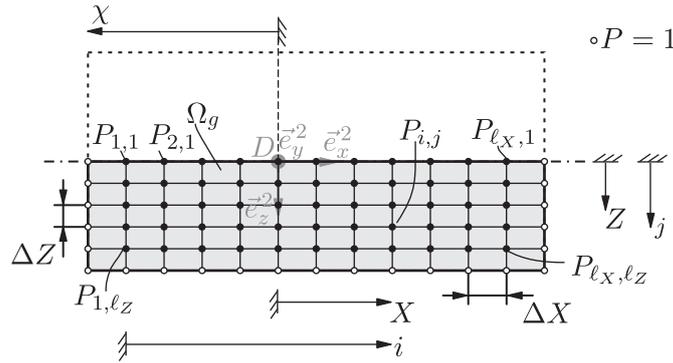
$$\frac{\partial}{\partial Z} P(\tau, X, Z = 0) = 0, \quad (3.121)$$

$$P(\tau, X, Z = \frac{1}{2}) = 1 \quad (3.122)$$

und die dimensionslosen Anfangsbedingungen

$$P(\tau = 0, X, Z) = P_{\tau_0}, \quad (3.123)$$

$$Q(\tau = 0, X) = Q_{\tau_0}. \quad (3.124)$$


 Abbildung 3.10: Diskretisiertes Fluidgebiet Ω_G .

Diskretisierung und Kopplung von Fluid und Struktur Die gekoppelten Differentialgleichungen (3.108) und (3.117) des Lagermodells sind nichtlinear und eine geschlossene Lösung ist nicht bekannt. Zur Ermittlung numerischer Näherungslösungen wird auf die Ortsableitungen in (3.108) die *Finite Differenzen Methode* (FD) angewandt. Die zweite Ableitung wird über den *zentralen Differenzenquotienten*

$$\left. \frac{\partial^2 P}{\partial X^2} \right|_{x_i=i\Delta x, y_j=j\Delta y} \approx \frac{P_{i+1,j} - 2P_{i,j} + P_{i-1,j}}{(\Delta X)^2}, \quad (3.125)$$

$$\left. \frac{\partial^2 P}{\partial Z^2} \right|_{x_i=i\Delta x, y_j=j\Delta y} \approx \frac{P_{i,j+1} - 2P_{i,j} + P_{i,j-1}}{(\Delta Z)^2} \quad (3.126)$$

approximiert. Für die erste Ableitung wird der *Rückwärtsdifferenzenquotient*

$$\left. \frac{\partial P}{\partial X} \right|_{x_i=i\Delta x, y_j=j\Delta y} \approx \frac{P_{i,j} - P_{i-1,j}}{\Delta X}, \quad (3.127)$$

$$\left. \frac{\partial P}{\partial Z} \right|_{x_i=i\Delta x, y_j=j\Delta y} \approx \frac{P_{i,j} - P_{i,j-1}}{\Delta Z} \quad (3.128)$$

verwendet. Im Unterschied zur zentralen Differenz der ersten Ableitung ist dieser lediglich von der Genauigkeit erster anstatt zweiter Ordnung. Allerdings weist diese sogenannte *upwind Differenz*, wie sich bei linearen Konvektions-Diffusions-Problemen zeigen lässt, gegenüber dem zentralen Differenzenquotienten eine verbesserte numerische Stabilität auf, siehe zum Beispiel [22].

Infolge der Diskretisierung wird das Gebiet Ω_G in ein äquidistantes Gitter mit dem Abständen ΔX in \vec{e}_x^2 -Richtung und ΔZ in \vec{e}_z^2 -Richtung zwischen den einzelnen Gitterpunkten $P_{i,j}$, $i = 1 \dots \ell_X$, $j = 1 \dots \ell_Z$ unter Beachtung der Randbedingungen (3.119), (3.120) und (3.122) diskretisiert. Abbildung 3.10 skizziert das Gitter und die Randbedingungen.

Nach Substitution der räumlichen Ableitungen durch die Differenzenquotienten entstehen anstelle der partiellen Differentialgleichung (3.108) gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichungen für alle diskreten Druckwerte $P_{i,j}$ mit der verbliebenen unabhängigen Veränderlichen τ . Diese Differentialgleichungen lassen sich explizit nach dem instationären Druckterm auflösen:

$$P'_{i,j} = f(P_{i-1,j}, P_{i,j}, P_{i+1,j}, P_{i,j-1}, P_{i,j+1}). \quad (3.129)$$

Entsprechend (3.129) gilt für jedes Element des Strukturmodells nach Umsortierung

$$Q'_i = \frac{1}{\delta_f} \left\{ \bar{P}_i - \exp\left(\frac{Q_i}{\beta}\right) \right\}. \quad (3.130)$$

Durch Einführen eines Zustandsvektors

$$\mathbf{x}_L = [P_{1,1}, P_{1,2}, \dots, P_{1,\ell_Z}, P_{2,1}, \dots, P_{\ell_X,1}, \dots, P_{\ell_X,\ell_Z}, Q_1, \dots, Q_{\ell_X}]^T, \quad \mathbf{x}_L \in \mathbb{R}^{(\ell_Z+1)\ell_X}, \quad (3.131)$$

der die unbekannt diskreten Druckwerte und die Strukturkoordinaten enthält, ist die Formulierung des Lagermodells als nichtlineares gekoppeltes Differentialgleichungssystem erster Ordnung der Form

$$\mathbf{x}'_L = \mathbf{f}(\mathbf{x}_L), \quad \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{(\ell_Z+1)\ell_X} \quad (3.132)$$

möglich. Zur Lösung eines solchen Systems (3.132) bieten sich die gängigen Lösungsverfahren für Anfangswertprobleme an.

Lagerkräfte Nach Lösung von (3.132) kann aus dem ermittelten Fluiddruck $P(\tau, X, Z)$ per Integration über die Schmierfilmfläche die am Wellenzapfen wirkende Lagerkraft

$$\vec{f} = - \underbrace{\left[\int_{-\chi}^{2\pi-\chi} 2 \int_0^{\frac{1}{2}} P \cos(X) \, dZ \, dX \right]}_{f_X} \vec{e}_x^0 - \underbrace{\left[\int_{-\chi}^{2\pi-\chi} 2 \int_0^{\frac{1}{2}} P \sin(X) \, dZ \, dX \right]}_{f_Y} \vec{e}_y^0 \quad (3.133)$$

ermittelt werden. Aus der Anwendung des Schnittprinzips auf den Schmierfilm und Wellenzapfen resultieren die negativen Vorzeichen. Die dimensionsbehaftete Lagerkraft \vec{F} ergibt sich aus der Multiplikation der dimensionslosen Lagerkraft \vec{f} mit p_0LR .

Da die Druckverteilung jedoch nicht in analytischer Form, sondern nach Lösung von (3.132) nur an den diskreten Gitterpunkten vorliegt, erfolgt die Approximation der Integrale in (3.133) im Rahmen der Arbeit über die *zusammengesetzte Simpson-Formel*, siehe zum Beispiel [21].

3.5 Reduzierende Modellannahmen

Zu Vergleichszwecken und im Rahmen eines systematischen Modellaufbaus werden zwei weitere vereinfachte Lagermodelle präsentiert. Die erste Variante vernachlässigt die Strukturdämpfung, die zweite Variante die Dämpfung und die Nachgiebigkeit und folglich das gesamte Strukturmodell. Das zweite Modell repräsentiert demnach ein zylindrisches Starrlager.

3.5.1 Lagermodell ohne Strukturdämpfung

Wird die Strukturdämpfung d_f in (3.98), beziehungsweise δ_f in (3.117) vernachlässigt, so wird aus der modellbeschreibenden Differentialgleichung (3.117) eine algebraische Gleichung. Auflösen dieser Gleichung nach der Auslenkung Q liefert die Beziehung

$$Q = \beta \ln \bar{P}, \quad (3.134)$$

die direkt in (3.108) eingesetzt werden kann. Es ergibt sich damit für das Modell mit nichtlinearer Strukturnachgiebigkeit und ohne Strukturdämpfung einzig die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} \left[P(H + \beta \ln \bar{P})^3 \frac{\partial P}{\partial X} \right] + \kappa^2 \frac{\partial}{\partial Z} \left[P(H + \beta \ln \bar{P})^3 \frac{\partial P}{\partial Z} \right] \\ - \Omega \left\{ \frac{\partial}{\partial X} [P(H + \beta \ln \bar{P})] + 2 \frac{\partial}{\partial \tau} [P(H + \beta \ln \bar{P})] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.135)$$

in P . Da sich durch (3.134) die Verschiebung der Lagerstruktur Q direkt aus dem Fluiddruck P ergibt, enthält der Zustandsvektor des Lagermodells in diesem Fall auch nur die diskreten Druckwerte $P_{i,j}$:

$$\mathbf{x}_{L2} = [P_{1,1}, \dots, P_{\ell_X, \ell_Z}]^T, \quad \mathbf{x}_{L2} \in \mathbb{R}^{\ell_Z \ell_X}. \quad (3.136)$$

Die Randbedingungen (3.119)–(3.122) behalten ihre Gültigkeit und werden lediglich durch die Anfangsbedingung (3.123) ergänzt.

Zur Überführung des Modells in die Form (3.132) wird (3.135) zunächst umgestellt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \tau} + \frac{\bar{P}(H + \beta \ln \bar{P})}{\beta P} \frac{\partial P}{\partial \tau} \\ = \frac{\bar{P}}{2\Omega P \beta} \left\{ \frac{\partial}{\partial X} \left[P(H + \beta \ln \bar{P})^3 \frac{\partial P}{\partial X} \right] + \kappa^2 \frac{\partial}{\partial Z} \left[P(H + \beta \ln \bar{P})^3 \frac{\partial P}{\partial Z} \right] \right. \\ \left. - \Omega \frac{\partial}{\partial X} [P(H + \beta \ln \bar{P})] \right\} - \frac{\bar{P}}{\beta} \frac{\partial H}{\partial \tau}. \end{aligned} \quad (3.137)$$

Ferner gilt für den ersten Term der linken Seite

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial \tau} = 2 \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\frac{1}{2}} P \, dZ = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\partial P}{\partial \tau} \, dZ = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} P' \, dZ. \quad (3.138)$$

Infolge der Diskretisierung geht das Integral in eine endliche Summe

$$2 \int_0^{\frac{1}{2}} P' \, dZ \approx 2 \sum_{j=1}^{\ell_Z} a_j P'_{i,j} \Delta Z \quad (3.139)$$

mit den Koeffizienten a_j über. Bei Anwendung der *zusammengesetzten Simpson-Formel*, mit Ausnahme der letzten drei Gitterpunkte, für die die *Trapezregel* genutzt wird, lauten die Koeffizienten bei einer ungeraden Anzahl an Gitterpunkten

$$a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{4}{3}, \quad a_3 = \frac{2}{3}, \quad a_4 = \frac{4}{3}, \quad \dots, \quad a_{\ell_Z-3} = \frac{2}{3}, \quad a_{\ell_Z-2} = \frac{4}{3}, \quad a_{\ell_Z-1} = \frac{1}{3}, \quad a_{\ell_Z} = 2. \quad (3.140)$$

Diese Koeffizienten lassen sich in einer Zeilenmatrix

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_{\ell_Z}] \quad (3.141)$$

zusammenfassen. Werden die zeitlichen Änderungen des Drucks aller Gitterpunkte in Axialrichtung ($j = 1 \dots \ell_Z$) an einer festen Stelle i in Umfangsrichtung ebenfalls in einer Spaltenmatrix

$$\mathbf{p}_i = [P_{i,1}, P_{i,2}, \dots, P_{i,\ell_Z}]^T \quad (3.142)$$

angeordnet, so kann der erste Term der linken Seite aus (3.137) nach Diskretisierung in Matrixschreibweise

$$\bar{P}'_i = 2 \Delta Z \mathbf{a} \mathbf{p}'_i \quad (3.143)$$

angegeben werden.

Der Koeffizient des zweiten instationären Druckterms ($\frac{\partial P}{\partial \tau}$) auf der linken Seite in (3.137) nimmt im Allgemeinen in jedem Gitterpunkt verschiedene Werte an. Für ihn wird die abkürzende Schreibweise

$$\frac{\bar{P}_i(H + \beta \ln \bar{P}_i)}{\beta P_{i,j}} = b_{i,j} \quad (3.144)$$

eingeführt. Analog (3.138) und (3.139) gilt

$$\bar{P} = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} P \, dZ \approx 2 \sum_{j=1}^{\ell_Z} a_j P_{i,j} \Delta Z = \bar{P}_i, \quad (3.145)$$

sodass der einzelne Koeffizient $b_{i,j}$ von allen Werten des Drucks in axialer \vec{e}_z^2 -Richtung ($j = 1 \dots \ell_Z$) abhängig ist. Wird die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a} \\ \vdots \\ \mathbf{a} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\ell_Z \times \ell_Z} \quad (3.146)$$

mit den Einträgen gemäß (3.141) und die Diagonalmatrix

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} b_{i,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{i,2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{i,\ell_Z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_i \in \mathbb{R}^{\ell_Z \times \ell_Z} \quad (3.147)$$

eingeführt, so lässt sich (3.137) nach Diskretisierung für alle Gitterpunkte in Axialrichtung ($j = 1 \dots \ell_Z$) an der Stelle i in Umfangsrichtung über

$$2 \Delta Z \mathbf{A} \mathbf{p}'_i + \mathbf{B}_i \mathbf{p}'_i = \mathbf{f}_i(P_{i-1,1}, \dots, P_{i-1,\ell_Z}, P_{i,1}, \dots, P_{i+1,\ell_Z}), \quad \mathbf{f}_i \in \mathbb{R}^{\ell_Z} \quad (3.148)$$

angeben. Nach dem Distributivgesetz der Matrizenmultiplikation gilt für die linke Seite

$$2 \Delta Z \mathbf{A} \mathbf{p}'_i + \mathbf{B}_i \mathbf{p}'_i = (2 \Delta Z \mathbf{A} + \mathbf{B}_i) \mathbf{p}'_i. \quad (3.149)$$

Mit der Matrix

$$\mathbf{C}_i = 2 \Delta Z \mathbf{A} + \mathbf{B}_i \quad (3.150)$$

lautet die strukturelle Form von (3.137) im diskreten Fall für alle Gitterpunkte $P_{i,j}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{C}_{\ell_X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}'_1 \\ \mathbf{p}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}'_{\ell_X} \end{bmatrix} = \mathbf{f}(P_{1,1}, \dots, P_{\ell_X, \ell_Z}), \quad \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{\ell_X \ell_Z}. \quad (3.151)$$

Die Inversion der Blockdiagonalmatrix $\mathbf{C} = \text{diag}(\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_{\ell_X})$ führt auf die zur numerischen Analyse übliche Formulierung als gekoppeltes System erster Ordnung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}'_1 \\ \mathbf{p}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}'_{\ell_X} \end{bmatrix} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{f}(P_{1,1}, \dots, P_{\ell_X, \ell_Z}). \quad (3.152)$$

Da \mathbf{C} eine Blockdiagonalmatrix ist, gilt für die Inverse

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{C}_{\ell_X} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{-1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2^{-1} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{C}_{\ell_X}^{-1} \end{bmatrix}, \quad (3.153)$$

was sich bei der numerischen Auswertung als vorteilhaft erweist.

3.5.2 Starrlagermodell

Wird neben der Strukturdämpfung auch die Nachgiebigkeit der Folien vernachlässigt, gilt

$$\delta_f = \beta = 0, \quad (3.154)$$

sodass die gesamte Strukturgleichung nicht mehr berücksichtigt wird. Die dimensionslose Reynoldsgleichung lautet dann

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[PH^3 \frac{\partial P}{\partial X} \right] + \kappa^2 \frac{\partial}{\partial Z} \left[PH^3 \frac{\partial P}{\partial Z} \right] - \Omega \left\{ \frac{\partial}{\partial X} [PH] + 2 \frac{\partial}{\partial \tau} [PH] \right\} = 0. \quad (3.155)$$

Diese Gleichung stellt das Modell eines aerodynamischen Starrlagers dar. Werden die Randbedingungen (3.119)–(3.122) weiterhin beibehalten, so repräsentieren diese beispielsweise eine axiale Nut im Lagergehäuse, die mitunter in der Praxis vorzufinden ist (siehe Abschnitt 2.1.2). Für ein zylindrisches Starrlager ohne axiale Nuten werden periodische Randbedingungen in Umfangsrichtung

$$P(\tau, X = -\pi, Z) = P(\tau, X = \pi, Z), \quad (3.156)$$

$$\frac{\partial}{\partial X} P(\tau, X = -\pi, Z) = \frac{\partial}{\partial X} P(\tau, X = \pi, Z) \quad (3.157)$$

angenommen. Die erste Randbedingung (3.156) ist aufgrund des geschlossenen Gebietes Ω_g offensichtlich und kennzeichnet einen steigen Druckverlauf. Die zweite Randbedingung (3.157), der stetigen Differenzierbarkeit des Drucks resultiert aus der Forderung einer stetigen Geschwindigkeitsverteilung $u(x_f)$ in Umfangsrichtung, siehe (3.83). Die Anfangsbedingung (3.123) gilt unverändert. Im Fall periodischer Randbedingungen vergrößert sich der Zustandsvektor gegenüber (3.136) um ℓ_Z Einträge auf

$$\mathbf{x}_{L3} = [P_{1,1}, P_{1,2}, \dots, P_{1,\ell_Z}, P_{2,1}, \dots, P_{\ell_{X+1},\ell_Z}]^T, \quad \mathbf{x}_{L2} \in \mathbb{R}^{\ell_Z(\ell_X+1)}, \quad (3.158)$$

da der Druck an den beiden Rändern des Gebiets Ω_G in (\vec{e}_x^2) -Richtung zwar gleich, dessen Wert jedoch unbekannt ist. Die Überführung in ein diskretes System gekoppelter Differentialgleichungen erster Ordnung ergibt sich durch Auflösen von (3.155) nach der zeitlichen Druckänderung und Substitution der räumlichen Ableitungen durch die Differenzenquotienten (3.125) – (3.128).

Quasistationäres Starrlagermodell

Der Schmierfilmdruck P in (3.155), (3.135) und (3.108) ist im Allgemeinen abhängig von den beiden Ortskoordinaten X und Z sowie der Zeit τ . Manchmal wird die Zeitabhängigkeit des Drucks vernachlässigt:

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = 0. \quad (3.159)$$

Anschaulich bedeutet diese Annahme, dass sich der Schmierfilmdruck zum Beispiel bei sich ändernden Zustandsgrößen des Wellenzapfens ($\varepsilon_A, \varepsilon'_A, \Gamma, \Gamma'$) instantan einstellt beziehungsweise ausbildet. Es wird dann häufig auch von einem *quasi-stationären* Fluidverhalten gesprochen.

Für das zylindrische Starrlager mit periodischen Randbedingungen (3.156) und (3.157) ist es in diesem Fall möglich, den Druck P nicht bezüglich des raumfesten Systems \mathcal{K}_2 sondern bezüglich eines mitbewegten Systems anzugeben. Der Ursprung dieses mitbewegten Systems ist durch den Schnittpunkt der Geraden durch O und A und der Lagerschale definiert. Ein solches Bezugssystem ist auch bei der Beschreibung von Schmierfilmen mit inkompressiblen Fluiden üblich. Wird analog zu (3.112) der dimensionslose Winkel

$$\Theta = \theta \quad (3.160)$$

bezüglich des Basisvektors \vec{e}_r^1 eingeführt, so gilt für die Beziehung (3.8) in dimensionsloser Form

$$X - \Gamma = \Theta. \quad (3.161)$$

Die dimensionslose Spaltfunktion (3.113) lautet dann

$$H = 1 - \varepsilon_A \cos(\Theta), \quad (3.162)$$

deren Zeitableitung (3.115) als

$$\frac{dH}{d\tau} = -\varepsilon'_A \cos(\Theta) - \varepsilon_A \Gamma' \sin(\Theta) \quad (3.163)$$

und die Ortsableitung (3.114) hier nach der Variablen Θ in der Form

$$\frac{dH}{d\Theta} = \varepsilon_A \sin(\Theta) \quad (3.164)$$

zu schreiben sind. Folglich ergibt sich für den besagten quasi-stationären Fall die Reynolds'sche Differentialgleichung für ideale Gase in der Form

$$\frac{\partial}{\partial \Theta} \left[PH^3 \frac{\partial P}{\partial \Theta} \right] + \kappa^2 \frac{\partial}{\partial Z} \left[PH^3 \frac{\partial P}{\partial Z} \right] - \Omega \left\{ \frac{\partial}{\partial \Theta} [PH] + 2P \frac{\partial}{\partial \tau} [H] \right\} = 0. \quad (3.165)$$

Im Unterschied zu (3.155) ist der Fluiddruck P bei der Beschreibung des Wellenzapfenzustands mittels Polarkoordinaten jetzt nur noch von drei Zustandsgrößen $\varepsilon_A, \varepsilon'_A$ und Γ' abhängig. Die periodischen Randbedingungen (3.156) und (3.157) lauten

$$P(\tau, \Theta = 0, Z) = P(\tau, \Theta = 2\pi, Z), \quad (3.166)$$

$$\frac{\partial}{\partial \Theta} P(\tau, \Theta = 0, Z) = \frac{\partial}{\partial \Theta} P(\tau, \Theta = 2\pi, Z). \quad (3.167)$$

Ist die Druckverteilung $P(\Theta)$ aus (3.165) mit (3.166) und (3.167) ermittelt, bietet es sich an, die am Wellenzapfen wirkende Lagerkraft nicht über (3.133), sondern bezüglich des mitbewegten Systems \mathcal{K}_1 über

$$\vec{f} = - \left[\int_0^{2\pi} 2 \int_0^{\frac{1}{2}} P \cos(\Theta) \, dZ \, d\Theta \right] \vec{e}_r^1 - \left[\int_0^{2\pi} 2 \int_0^{\frac{1}{2}} P \sin(\Theta) \, dZ \, d\Theta \right] \vec{e}_\gamma^1 \quad (3.168)$$

zu bestimmen.

4 Analyse der Lagereigenschaften

Inhalt des vorliegenden Kapitels ist die Analyse der Lagereigenschaften ohne Kopplung mit einem Rotormodell. Folglich sind die Lage- und Geschwindigkeitskoordinaten des Wellenzapfenmittelpunkts als Parameter aufzufassen. Das Kapitel beginnt mit einem Überblick typischer geometrischer Größen von aerodynamischen Radialgleitlagern mit Pufferfolie. Anhand von veröffentlichten Messergebnissen der Folienverformung bei Belastung mit einem zylindrischen, nicht rotierenden Prüfkörper wird der Nachgiebigkeitsparameter β des Lagermodells identifiziert. Die in der Arbeit vorwiegend verwendeten Modellparameterwerte werden anschließend aufgelistet.

Es folgt die Diskussion des Lagermodells. Auf Basis analytischer Näherungen der Reynoldsgleichung werden die Mechanismen des Druckaufbaus im Schmierfilm erörtert. Alle weiteren Modellanalysen erfolgen rein numerisch. Nacheinander wird der Einfluss des Diskretisierungsfehlers und der dimensionslosen Parameter aufgezeigt. Der letzte Teil des Kapitels widmet sich der Modellreduktion. Es wird gezeigt, wie sich bei Anwendung des GALERKIN-Verfahrens die Berechnungszeit des Modells bei nur geringen Genauigkeitsverlusten erheblich verringern lässt.

4.1 Kenngrößen der Folienlager

Nachdem im Verlauf des vorangegangenen Kapitels in den Abschnitten 3.1.2 und 3.2 bereits die Größenordnung einzelner Parameter quantifiziert wurde, erfolgt im Folgenden eine Präzisierung in Form eines Überblicks publizierter Kenngrößen.

4.1.1 Geometriegrößen

Die drei im Lagermodell auftretenden geometrischen Größen sind die Lagerbreite L , der Innendurchmesser beziehungsweise Radius R des Lagers und das sich aus der Differenz von Lager- und Wellenzapfenradius nach (3.1) ergebende Lagerspiel h_0 . Im dimensionslosen Fall treten nur die zwei Verhältnisgrößen κ und ψ dieser Längenmaße auf (siehe (3.109) und (3.110)).

Für die meisten auf Prüfständen untersuchten und in Experimenten eingesetzten Lager gilt für das Verhältnis von Lagerradius zur Lagerbreite $\kappa \approx 1/2$, [62, 92, 94, 98, 116, 117, 118, 129, 142, 147, 153, 157]. Einige Lager weisen auch ein Verhältnis von $\kappa \approx 1$ [118, 147, 149] sowie $\kappa \approx 3/4$, [94, 150] auf. Ein getestetes Lager hat ein Radius-zu-Längen-Verhältnis von $\kappa = 0,63$, [104]. Die Gründe für die bevorzugte Wahl $\kappa \approx 1/2$ sind laut HOWARD [75], dass lange Lager mit $\kappa \ll 1/2$ weniger Toleranz gegenüber Ausrichtungsfehlern bieten. Außerdem ist der Wärmetransport beziehungsweise die Kühlung infolge der durch die Zapfenbewegung verursachten axialen Durchströmung verhältnismäßig schlechter als bei kurzen Lagern. Kurze Lager dagegen mit $\kappa \gg 1/2$ weisen aufgrund des niedrigen Drucks in

den Randbereichen eine verringerte Tragfähigkeit auf. Auch Montageaufwand beziehungsweise Montagegenauigkeit sind bei kurzen Lager höher beziehungsweise verschlechtert, da sich kleinere Folien leichter wellen und verdrehen können. HOWARD schließt folglich empirisch, dass ein optimales Verhältnis der Lagerabmessungen bei $\kappa = 1/2$ liegt.

Als grober Anhaltspunkt der Lagerabmessungen gilt auf Basis der oben zitierten Quellen, dass bei Wellen mit Massen von ca. 1 kg Lager mit Radien von $R \approx 17,5 \text{ mm} - 22,5 \text{ mm}$ eingesetzt werden, bei Rotormassen von ca. 1/4 kg Lagerradien von $R \approx 12 \text{ mm}$. Die Längenabmessungen der eingesetzten Lager variieren hingegen stärker und ergeben sich aus dem vorliegenden Verhältnis κ .

Das Lagerspiel h_0 ist bei aerodynamischen Starrlagern, die Oberflächenrauheiten und Abweichungen von der idealen Kreisgeometrie vernachlässigt, eine eindeutig nach (3.1) definierte Maßzahl. Üblich sind Werte im Bereich von $28 \mu\text{m} \leq h_0 \leq 43 \mu\text{m}$ [41]. Für Folienlager wurde diese Maßzahl übertragen. Allerdings ist das Lagerspiel in diesem Kontext als ein "vages Konzept" aufzufassen [157]. Dies ist der Tatsache geschuldet, dass es aufgrund der flexiblen Innenkontur schwierig ist, den Radius des Lagers zu ermitteln. Durch die natürliche Welligkeit der Puffer- und der Deckfolie und ihrer Verformungen im Einbauzustand sowie Herstellungs- und Montageungenauigkeiten variiert der Radius üblicherweise über den Umfang. Im Einbauzustand bei nichtrotierender Welle liegt die Deckfolie in manchen Fällen am Wellenzapfen an, was letztlich $h_0 = 0$ bedeutet. Trotzdem kann es sein, dass ein gewisses Spiel zwischen der Deck- und Pufferfolie oder der Pufferfolie und dem Lagergehäuse vorliegt [138].

Eine erste Methode zur experimentellen Ermittlung des sogenannten Lagerspiels bei Folienlagern ist in dem umfassenden Bericht von RUSCITTO et al. [147] beschrieben. Das untersuchte Lager wird dabei als schwimmendes Lager nach dem in Abbildung 2.6b skizzierten Prinzip mit einem horizontal ausgerichteten, zylindrischen Prüfkörper getestet. Zunächst wirkt als einzige Last die Gewichtskraft. Im Rahmen der Identifikationsmethode wird dann eine in vertikaler Richtung wirkende Kraft auf das Lager aufgebracht. Die Last, zunächst entgegen der Erdbeschleunigung wirkend, wird kontinuierlich erhöht und die Verschiebung des Lagers erfasst. Anschließend erfolgt die Entlastung bis hin zu einer in Richtung der Erdbeschleunigung angreifenden Last. Den Weg, den das Lager zwischen der Position ohne wirkende Gewichtskraft und der Position bei doppelter Gewichtskraft zurücklegt, charakterisiert nach RUSCITTO et al. das doppelte Lagerspiel des Folienlagers. SAN ANDRÉS et al. greifen in [157] die Methode auf und übertragen das Verfahren auf einen in zwei Folienlagern gelagerten Rotor.

Eine weitere Variante zur experimentellen Ermittlung wird von RADIL et al. in [138] genannt. Ausgangspunkt ist die wie zuvor ermittelte Kraft-Verschiebungs-Kurve. Die Verschiebung, bei der der Verformungswiderstand deutlich ansteigt (deutliche Änderung der Steigung der Kurve) kann dann als Lagerspiel quantifiziert werden. Allerdings merken die Autoren an, dass dies ein sehr vages und subjektives Kriterium darstellt. Weitere Vorgehensweisen zur Ermittlung des sogenannten Lagerspiels bei Folienlagern sind dem Autor der vorliegenden Arbeit nicht bekannt.

Wenngleich das sogenannte Lagerspiel bei Folienlagern kein präzises Kriterium darstellt, wird es dennoch auch von Lagerherstellern in Form eines nominalen Lagerspiels angegeben (siehe zum Beispiel [142]). Wie bereits in Abschnitt 2.1.3 beschrieben, besteht des Weiteren

die grundsätzliche Problematik, dass identisch hergestellte Folienlager auf Basis der oben angegebenen Methoden voneinander abweichende Lagerspiele aufweisen [6, 150, 156].

Auch in den bekannten Berechnungsmodellen wird immer ein Lagerspiel $h_0 > 0$ vorausgesetzt. Theoretische Studien, innerhalb derer bei nicht rotierender Welle ein Kontakt zwischen Deckfolie und Wellenzapfen abgebildet wird, sind dem Autor der vorliegenden Arbeit nicht bekannt. Die üblicherweise angenommenen Werte des Lagerspiels, die teilweise mit den oben beschriebenen Methoden experimentell ermittelt wurden, liegen im Bereich von $25 \mu\text{m} \leq h_0 \leq 100 \mu\text{m}$. Es ist unklar, wie fundiert diese Werte sind, insbesondere vor dem Hintergrund teilweise berührender Deckfolie und Wellenzapfen. Allgemein bekannt ist, dass das sogenannte Lagerspiel des Folienlagers einen maßgeblichen Einfluss auf die Lagereigenschaften und das sich einstellende Rotorverhalten hat. Allerdings wurde dessen Einfluss im Rahmen modellbasierter Simulationsstudien bisher nur unzureichend untersucht. Arbeiten, innerhalb derer eine Variation des Lagerspiels erfolgt, sind die Beiträge von BONELLO und PHAM [17] sowie von RADIL et al. [138]. Auch in den Kapiteln 5 und 6 der vorliegenden Arbeit erfolgen hierzu einige numerische Untersuchungen.

Aus Gründen der Vollständigkeit werden an dieser Stelle noch die Grenzen erwähnt, innerhalb derer sich die typischen Abmessungen der Folien bewegen. Für das in Abschnitt 3.3 entwickelte Lagermodell sind diese Größen jedoch unerheblich. Die Dicke der verwendeten Folien liegt im Bereich zwischen 0,05 mm [98] und 0,2 mm [94]. In manchen Fällen ist die Dicke der Deckfolie unter anderem auch aufgrund von Beschichtungen etwas größer als die der Pufferfolie. Oftmals haben beide Folien aber auch die gleiche Materialstärke. Nur sehr selten ist hingegen die Pufferfolie dicker. Die Höhe der Puffer variiert von 0,25 mm [6] bis hin zu 0,9 mm [104]. Die Breite der Puffer liegt im Bereich von 1 mm [117] bis 6,6 mm [104], wobei im ersten Fall der Rotor eine Masse von ca. 14 g, im zweiten Fall von ca. 21 kg aufweist. Der Abstand zwischen zwei Puffern bewegt sich im Bereich von 0,25 mm [117] bis ca. 3 mm [62].

4.1.2 Identifikation des Nachgiebigkeitsparameters

Die Identifikation des Nachgiebigkeitsparameters b beziehungsweise β erfolgt mittels der in [142] von RUBIO und SAN ANDRÉS veröffentlichten Messergebnisse. Der dort verwendete Versuchsaufbau entspricht dem in der Abbildung 2.6b skizzierten Prinzip. Zur Lagerung der Welle wird eine Drehbank benutzt, wobei keine Ergebnisse bei rotierendem Prüfkörper dokumentiert sind. Die aufzubringende Last wird an der Lagerschale über den Werkzeugschlitten in horizontaler Richtung eingeleitet. Ein Kraftmesser erfasst deren Intensität. Im Winkel π zur Krafteinleitungsstelle wird über zwei verschiedene Sensoren die Verschiebung des Lagers gemessen. Im Beitrag dokumentiert sind die Kraft-Verschiebungs-Kurven für ein Folienlager mit Pufferfolie sowie für ein Garrett-Lager (siehe Abbildung 2.3). Letzteres wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht betrachtet. Die Pufferfolie des untersuchten Lagers ist in fünf Segmente in Umfangsrichtung unterteilt, wobei immer ein Ende fixiert und das andere Ende frei beweglich ist. Jedes dieser Segmente besteht aus vier Streifen (siehe Abbildung 2.5a) mit jeweils fünf Puffern. Eine Deckfolie, die ebenfalls an einem

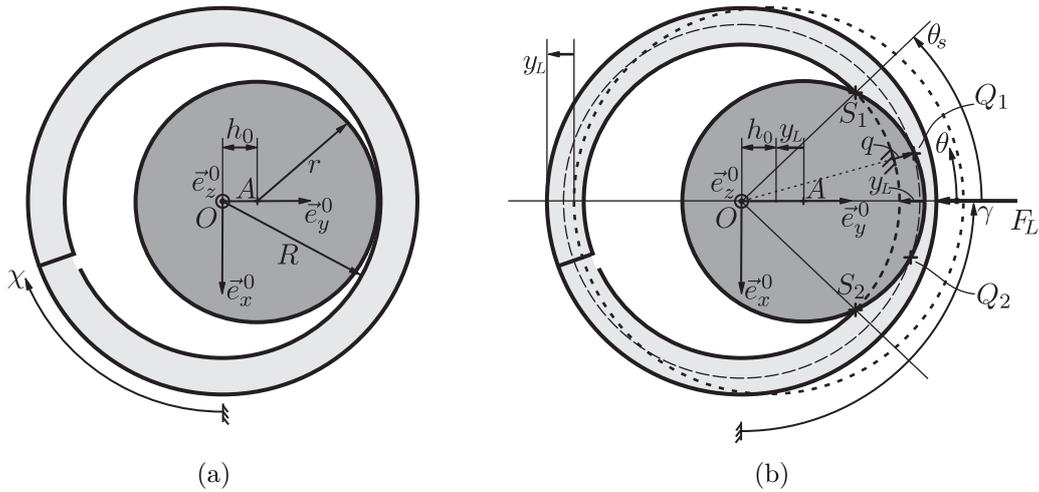


Abbildung 4.1: Skizze der Versuchsanordnung aus [142] und kinematische Größen: (a) lastfreie Ausgangslage, (b) Lastfall.

Ende fixiert ist, schließt das Lager nach innen ab. Getestet wurde das Lager mit drei verschiedenen Wellendurchmessern $d_1 = 38,1$ mm, $d_2 = 38,125$ mm und $d_3 = 38,075$ mm.

Abbildung 4.1 skizziert die Versuchsdetails und die für die Identifizierung des Nachgiebigkeitsparameters notwendigen kinematischen Größen. Im Sinne einer konsistenten jedoch auch minimalen Anzahl an Koordinatensystemen, Koordinaten und Geometriegrößen ist das System \mathcal{K}_0 ($O, \vec{e}_x^0, \vec{e}_y^0, \vec{e}_z^0$) ausschließlich hier und in Abweichung zum Rest der Arbeit nicht mehr raumfest, sondern als fest mit der Lagergehäuse verbunden angenommen. Abbildung 4.1a zeigt die angenommene Konfiguration von Wellenzapfen und Lagerschale ohne wirkende Last, Abbildung 4.1b skizziert die Verschiebung des Lagers y_L und die entsprechend dem Strukturmodell angenommene ideale Verformung der Folien q bei anliegender Kraft F_L . Da die am Lager angreifende Gewichtskraft nur ca. 1% der in horizontaler Richtung wirkenden maximalen Kraft $F_{L,\max}$ beträgt, wird deren Einfluss und somit die Verschiebung des Lagers in vertikaler (\vec{e}_x^0)-Richtung vernachlässigt.

Im zitierten Bericht [142] wird die Lagerlänge mit $L_{\text{mess}} = 38,344$ mm beziffert. Ferner sind zwei Werte für den Lagerdurchmesser beziehungsweise den Lagerradius R angegeben, wobei die Autoren durch Messungen einen Radius von $R_{\text{mess}} = 19,177$ mm ermittelt haben. Der Lagerhersteller gibt einen nominellen Radius von $R_{\text{nom}} = 19,086$ mm an. Da in einer später erschienenen Veröffentlichung [143] nur der nominelle Lagerradius R_{nom} angegeben ist, wird dieser auch im Folgenden für den Lagerradius herangezogen. Für alle oben angegebenen Wellendurchmesser d_1, d_2 und d_3 ist somit immer ein Lagerspiel ($h_0 > 0$) vorhanden, sodass die Deckfolie bei zentrischer Zapfenlage nicht am Wellenzapfen anliegt.

Für die Identifikation wird ferner angenommen, dass die Mittelpunkte des Lagers und der Welle in der Ausgangslage, d. h. ohne wirkende Last, nicht übereinander liegen. Vielmehr wird davon ausgegangen, dass das Lager bereits um das Lagerspiel gegenüber dem Wellenzapfen verschoben ist, da sämtliche im Bericht angegebenen Kraft-Verschiebungs-Relationen durch den Ursprung verlaufen. Die Autoren weisen aber darauf hin, dass es bei

niedrigen Belastungen Schwierigkeiten bei der Messauswertung gab. Die Zusammenhänge im niedrigen Belastungsbereich sind deshalb mit einer gewissen Vorsicht zu verwenden.

Kinematik des Versuchs Die Koordinaten des Mittelpunkts A , des als starr und ideal kreisförmig angenommenem Wellenzapfens können in Abhängigkeit der Verschiebung der Lagerschale y_L als

$$x_A = 0, \quad y_A = h_0 + y_L \quad (4.1)$$

(siehe Abbildung 4.1) abgelesen werden. Auf Basis dieser Koordinaten lässt sich die Kontur des Wellenzapfens über die Kreisgleichung

$$x_w^2 + (y_w - h_0 - y_L)^2 - r^2 = 0 \quad (4.2)$$

mit den Koordinaten x_w und y_w parametrisieren. Für die Innenkontur des unverformten Lagers, die ebenfalls als ideal kreisförmig angenommen wird, gilt entsprechend

$$x_\ell^2 + y_\ell^2 - R^2 = 0, \quad (4.3)$$

wenn analog zu (4.2) mit x_ℓ und y_ℓ die Koordinaten des Lagerkreises bezeichnet werden. Aufgrund der in Abschnitt 3.3 getroffenen Annahme einer verformbaren Struktur ohne Kopplung in Umfangsrichtung begrenzen die Schnittpunkte S_1 und S_2 der beiden Kreise den Verformungsbereich der Folienstruktur. Gleichsetzen der nach x_w aufgelösten Gleichung (4.2) und der nach x_ℓ aufgelösten Gleichung (4.3) liefert nach Ersetzen des Lagerspiels aus (3.1) die Koordinate

$$y_s = \frac{y_L^2 + 2(y_L + R)(R - r)}{2(R - r + y_L)} \quad (4.4)$$

der beiden Schnittpunkte. Der zugehörige Winkel θ_s , der den Rand des Verformungsbereichs der Lagerschale charakterisiert, ergibt sich nach Abbildung 4.1b aus

$$\theta_s = \arccos \frac{y_L^2 + 2(y_L + R)(R - r)}{2R(R - r + y_L)}. \quad (4.5)$$

Zur Ermittlung der vom Winkel θ abhängigen Verformung $q(\theta)$ wird ein weiterer Kreis mit dem Mittelpunkt O und dem Radius $R + q$ gemäß

$$x_f^2 + y_f^2 - (R + q)^2 = 0 \quad (4.6)$$

eingeführt. Darin bezeichnen x_f und y_f die hierfür relevanten Koordinaten des Kreises. Die Schnittpunkte Q_1 und Q_2 dieses Kreises mit dem die Welle repräsentierenden Kreis aus (4.2) ergeben sich durch Gleichsetzen der Koordinaten $x_f = x_w = x_q$ und $y_f = y_w = y_q$. Eliminieren von x_q resultiert in der Beziehung

$$y_q^2 - (R + q)^2 = (y_q - h_0 - y_L)^2 - r^2. \quad (4.7)$$

Mit der Winkelbeziehung $y_q = (R + q) \cos \theta$ und nach Ersetzen des Lagerspiels aus (3.1) ergibt sich für (4.7) nach Umsortieren

$$q^2 + 2[R - \cos \theta(R - r + y_L)]q + 2R(R - r + y_L)(1 - \cos \theta) + y_L(y_L - 2r) = 0. \quad (4.8)$$

Lösen dieser quadratischen Gleichung in q liefert für die geometrisch sinnvolle Lösung die Auslenkung q in Abhängigkeit der Winkels θ für $-\theta_s \leq \theta \leq \theta_s$:

$$q = -R + (R - r + y_L) \cos \theta + \sqrt{(R - r + y_L)^2 \cos^2 \theta - (R + y_L)(R - 2r + y_L)}. \quad (4.9)$$

Modellanpassung Für die Parameteridentifikation des Strukturmodells sind gegenüber (3.98) kleine Anpassungen vorzunehmen. Da die Lasterhöhung innerhalb des Versuchsvorgangs langsam erfolgt, wird der Einfluss der Dämpfung vernachlässigt und folglich $d_f = 0$ gesetzt. Des Weiteren ergibt sich die in (3.99) eingeführte Belastung \bar{p} nun durch Überlagerung des Anteils des Umgebungsdrucks und der mechanischen Belastung \bar{p}_{mech} in der Form

$$\bar{p} = \bar{p}_{\text{mech}} + p_0 L, \quad (4.10)$$

sodass für das Strukturmodell hier

$$p_0 L \left(\exp\left(\frac{q}{b}\right) - 1 \right) = \bar{p}_{\text{mech}} \quad (4.11)$$

anzunehmen ist. Entsprechend (3.133) ergibt sich damit für die in horizontaler Richtung wirkende Last

$$F_L = 2 \int_0^{\theta_s} \bar{p}_{\text{mech}} \cos \theta R d\theta. \quad (4.12)$$

Mit (4.5), (4.9), (4.11) und (4.12) kann somit der Zusammenhang zwischen wirkender Last F_L und Verschiebung y_L des Lagers ermittelt werden. Neben den bereits quantifizierten geometrischen Größen R und L wird für den Umgebungsdruck im Folgenden $p_0 = 10^5 \text{ Nm}^{-2}$ angenommen.

Vergleichsmodell Zu Vergleichszwecken wird das im Kontext der Folienlager am häufigsten verwendete *Winkler'sche Bettungsmodell*

$$c_w q = p, \quad (4.13)$$

mit der Proportionalitätskonstanten c_w zwischen Verschiebung q und Druck $p = p_{\text{mech}}$ herangezogen. Werden, wie beispielsweise in der Arbeit von BAUM et al. [12], in axialer \vec{e}_z^0 Richtung starre, masselose, balkenähnliche Elemente angenommen, deren Verschiebung linear vom axial gemittelten Druck abhängt, so gilt hier entsprechend

$$c_w L q = \bar{p}. \quad (4.14)$$

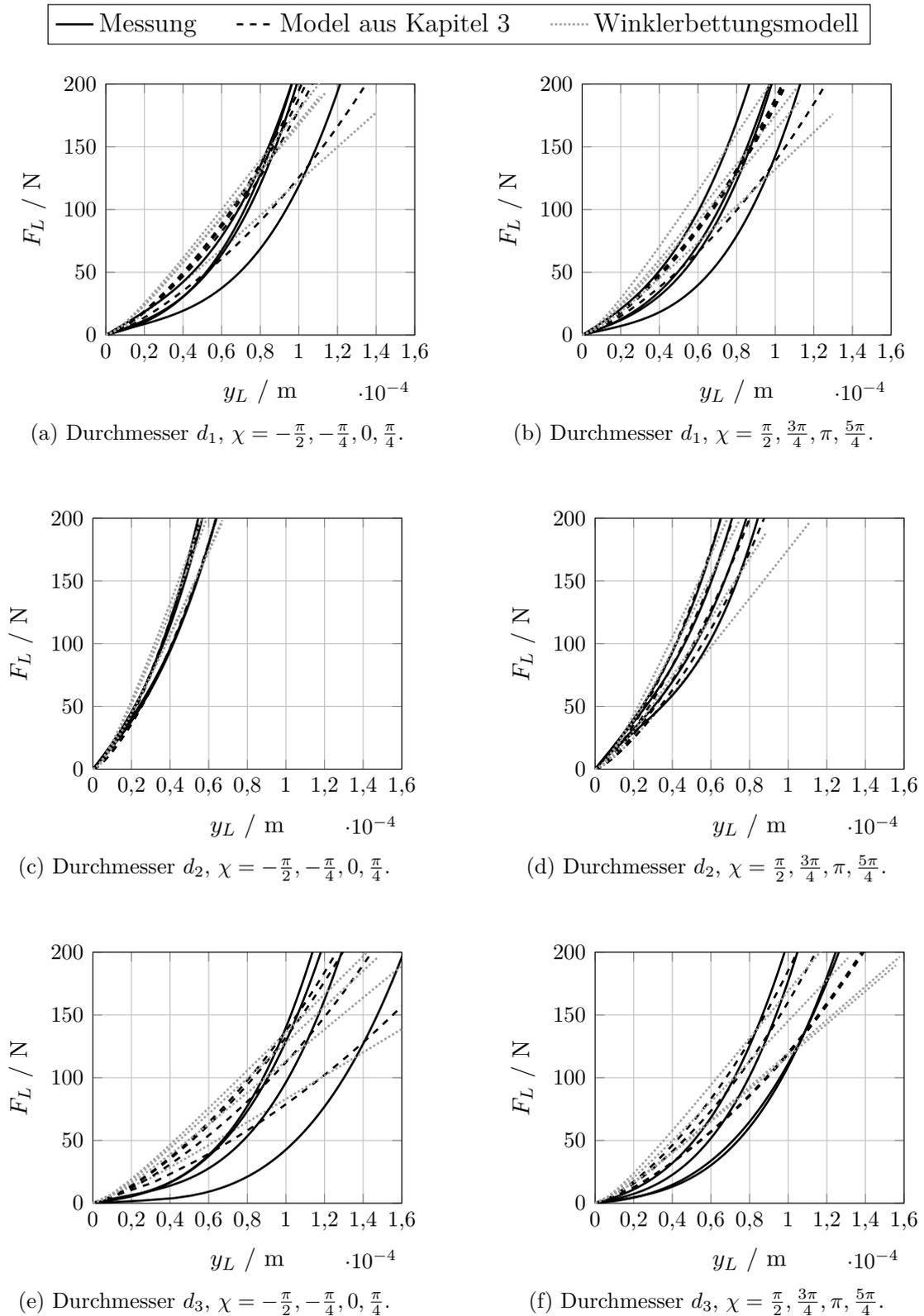


Abbildung 4.2: Messapproximation und angepasstes Modellverhalten bei kleinstem Fehlerquadrat. Parameter $L = 38,344$ mm; $R = 19,086$ mm; $p_0 = 10^5$ N m⁻²; $d_1 = 38,1$ mm; $d_2 = 38,125$ mm; $d_3 = 38,075$ mm.

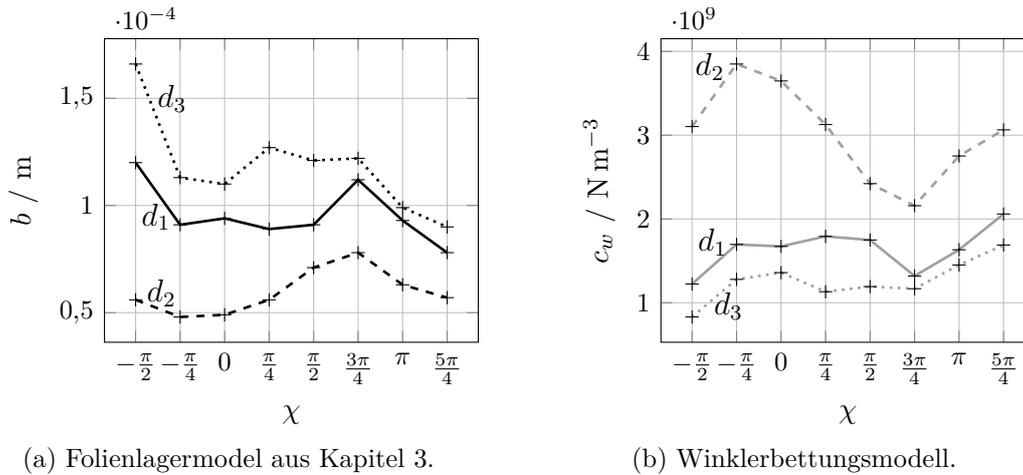


Abbildung 4.3: Identifizierte Modellparameter b und c_w in Abhängigkeit der Position der Folienfixierung χ und des Wellenzapfendurchmessers d .

Ergebnisse Neben den graphischen Darstellungen der Messergebnisse sind von RUBIO und SAN ANDRÉS in [142] auch an die Kraft-Verschiebungs-Kurven angepasste Polynome angegeben. Auf ihnen beruht der hier präsentierte Identifikationsprozess. Über einen Kurvenanpassungsalgorithmus basierend auf einer Minimierung der Fehlerquadrate wurden die optimalen Modellparameterwerte für b und c_w ermittelt. Abbildung 4.2 zeigt den Vergleich der Messergebnisse und des Modellverhaltens bei minimalen Abweichungen der beiden für verschiedene Wellenzapfendurchmesser d_1, d_2, d_3 und verschiedene Positionen der Deckfolienfixierung χ (siehe Abbildung 4.1). Es ist zu erkennen, dass das Modell bei großem Zapfendurchmesser d_2 (Abbildung 4.2c und 4.2d) die Messungen sehr gut approximiert. Mit kleiner werdendem Durchmesser d_1 beziehungsweise d_3 weichen Modell und Messung stärker voneinander ab (siehe Abbildung 4.2a, 4.2b 4.2e und 4.2f). Beim Vergleich der Approximationsgüte der beiden Modelle zeigt sich in allen Fällen eine geringfügig bessere Abbildung der Messergebnisse durch das nichtlineare Strukturmodell (4.11) beziehungsweise (3.98) als durch das Winklerbettungsmodell (4.13). Wie bereits in Abschnitt 3.3 angemerkt, ist zu erwarten, dass das nichtlineare Strukturmodell auch den im Rahmen der Experimente nicht erfassten Fall eines vorliegenden Unterdrucks $p < p_0$ deutlich besser reproduziert. Auf eine verbesserte Messapproximation durch ein mehr-parametrisches Modell wird aus besagten Gründen verzichtet.

Die zu den einzelnen in Abbildung 4.2 dargestellten Modellkurven gehörenden optimalen Parameter b und c_w sind in der Abbildung 4.3 dargestellt. Eine Abhängigkeit des optimalen Parameters b vom Durchmesser des Wellenzapfens und Orientierung des Lagers ist deutlich zu erkennen. Für den kleinsten Wellendurchmesser d_3 und den mittleren Durchmesser d_1 ist der Verformungswiderstand am kleinsten beziehungsweise der Parameterwert von b am größten, wenn sich die Position der Deckfolienfixierung $\chi = -\frac{\pi}{2}$ an der Krafteinleitungsstelle befindet. Für den größten Durchmesser d_2 tritt der maximale Parameterwert b an der Stelle $\chi = \frac{3\pi}{4}$ auf. Entsprechend zeigt Abbildung 4.3b die optimalen Parameterwerte des Winklerbettungsmodells (4.13).

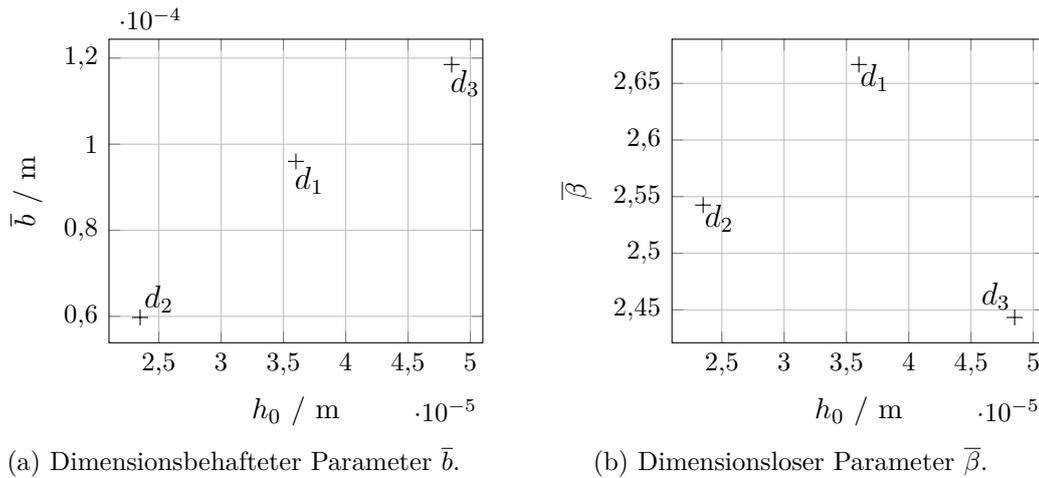


Abbildung 4.4: Mittelwerte der optimalen Parameter \bar{b} und $\bar{\beta}$ für verschiedene Durchmesser d_1 , d_2 und d_3 .

Werden sämtliche optimalen Parameterwerte b aller Positionen χ für jeden Durchmesser d_1 , d_2 und d_3 arithmetisch gemittelt, so ergibt sich die Größe

$$\bar{b} = \frac{b(\chi = -\frac{\pi}{2}) + b(\chi = -\frac{\pi}{4}) + \dots + b(\chi = -\frac{5\pi}{4})}{8}. \quad (4.15)$$

Diese Mittelwerte sind in Abbildung 4.4a über dem vorliegenden Lagerspiel h_0 aufgetragen. Der Zusammenhang der beiden Größen scheint annähernd linear. Abbildung 4.4b zeigt den gemittelten, dimensionslosen optimalen Parameterwert $\bar{\beta}$ nach (3.118) über dem Lagerspiel. Erneutes arithmetisches Mitteln der drei Werte liefert den identifizierten, dimensionslosen Nachgiebigkeitsparameter $\bar{\beta} \approx 2,55$ des untersuchten Lagers.

4.1.3 Parameterwerte des Lagermodells

Neben den Geometriegrößen des Lagers und dem Strukturnachgiebigkeitsparameter treten im Lagermodell (3.108) und (3.117) beziehungsweise auch in den dimensionslosen Größen (3.107), (3.118) die Parameter des Umgebungsdrucks p_0 , der Viskosität des Fluids μ_L , die Winkelgeschwindigkeit der Welle ω , die Strukturdämpfung d_f und die Position des Spalts in der Deckfolie χ auf. Innerhalb der vorliegenden Arbeit wird für den Umgebungsdruck $p_0 = 10^5 \text{ N m}^{-2}$, für die Viskosität nach Abbildung 3.5b $\mu_L = 18,2 \mu\text{N s m}^{-2}$ und für die Position des Spalts in der Deckfolie $\chi = \pi$ angenommen. Der vorrangig gewählte Wert des dimensionslosen Nachgiebigkeitsparameters ist $\beta = \frac{5}{2}$ (siehe Abschnitt 4.1.2). Dieser Parameter wurde auf Basis experimenteller Untersuchungen eines Lagers mit dem Radius $R = 19,086 \text{ mm}$ und der Länge $L = 38,172 \text{ mm}$ identifiziert. Folglich werden die beiden Abmessungen auch für die numerischen Studien zugrunde gelegt. Der Dämpfungsparameter d_f wird aus der Arbeit von KIM [90] übernommen. Dessen Wert wird dort über einen angegebenen Verlustfaktor, einer Bezugswinkelgeschwindigkeit und einer linearen Steifigkeit auf $d_f = 27,121 \text{ kN s m}^{-2}$ geschätzt.

Das Lagerspiel des zylindrischen Starrlagers wird in der Arbeit vorrangig mit $h_{01} = 36 \mu\text{m}$ beziffert. Für das Folienlagermodell wird zu Vergleichszwecken teilweise ebenfalls dieser

Symbol	Bezeichnung	Wert
R	Lagerradius	19,086 mm
L	Lagerbreite	38,172 mm
h_0	Lagerspiel	$h_{01} = 36 \mu\text{m}$, $h_{02} = 9 \mu\text{m}$ (nur Folienlager)
b	Nachgiebigkeitsparameter	in m; im Allgemeinen abhängig von h_0
p_0	Umgebungsdruck	10^5 N m^{-2}
μ_L	Viskosität	$18,2 \mu\text{N s m}^{-2}$
d_f	Strukturdämpfung	$27,121 \text{ kN s m}^{-2}$
χ	Position des Spalts in Deckfolie	π
ω	Winkelgeschwindigkeit	in rad s^{-1}

Symbol	Definition	Wert
κ	R/L	1/2
ψ	h_0/R	
Ω	$6\mu_L R^2 \omega/p_0/h_0^2$	
β	b/h_0	5/2
δ_f	$d_f h_0 \omega/p_0/L$	

Tabelle 4.1: Lagermodellparameter und typische, in der Arbeit verwendete numerische Werte.

Wert festgelegt. Daneben wird in den beiden folgenden Kapiteln für das Folienlager auch ein Wert von $h_{02} = 9 \mu\text{m}$ verwendet (siehe Abschnitt 4.1.1). Die Winkelgeschwindigkeit ist ein maßgeblicher Parameter, der im Rahmen der Arbeit vorrangig variiert wird. Die Angabe eines charakteristischen und zugleich konstanten Kennwerts erscheint deshalb hier nicht sinnvoll. Infolgedessen lassen sich auch einige der dimensionslosen Parameter nicht repräsentativ quantifizieren. Tabelle 4.1 fasst die Werte der dimensionsbehafteten und dimensionslosen Modellparameter zusammen.

Wird das Lagermodell, wie innerhalb dieses Kapitels praktiziert, nicht mit einem Rotormodell gekoppelt, so treten über die Spaltfunktion h (3.18) oder (3.20) beziehungsweise H (3.113) die Zustandsgrößen des Wellenzapfens als weitere vorzugebende Parameter auf. Eine entsprechende Angabe derer Werte erfolgt individuell für jede gezeigte Abbildung.

4.2 Diskussion des Lagermodells

Bisher sind keine exakten analytischen Lösungen der Reynoldsgleichung für ideale Gase (3.97) bekannt. Dies gilt sowohl für den Fall des Starrlagers (3.155) als auch für das im Rahmen der Arbeit entwickelte Lagermodell aus gekoppelter Reynolds- (3.108) und Strukturgleichung (3.117). Für einige vereinfachende Annahmen und Sonderfälle lassen sich jedoch grundlegende Zusammenhänge in analytischer Form bestimmen. Wenngleich diese keine Lösungen des Ausgangsproblems darstellen, so fördern sie dennoch das physikalische Verständnis. Gleichzeitig geben sie zumindest in der Tendenz und im Rahmen des Gültigkeitsbereichs der Näherung das Verhalten des Ursprungsmodells wieder.

Neben analytischen Näherungen besteht auch die Möglichkeit, numerische Näherungslösungen der Ausgangsgleichungen zu ermitteln. Allerdings sind diese aufgrund der notwendigen Festlegung der Parameterwerte weitaus weniger allgemein. Sowohl zur Validierung der analytischen Näherung als auch ganz allgemein wird im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit diese Lösungsmethode genutzt.

4.2.1 Bedingungen konstanten Fluiddrucks

Dem Fall eines im gesamten Schmierfilm konstanten Fluiddrucks

$$P = P_k = \text{konst.} \quad (4.16)$$

gebührt Beachtung, da nach (3.133) $\vec{f} = \vec{0}$ folgt und somit am Wellenzapfen keine Lagerkraft wirkt. Wird zunächst aus Gründen der Einfachheit das zylindrische Starrlager betrachtet, so verbleibt nach Einsetzen des Ansatzes (4.16) in (3.155)

$$-\Omega P_k \left(\frac{\partial H}{\partial X} + 2 \frac{\partial H}{\partial \tau} \right) = 0. \quad (4.17)$$

Ersetzen der Ableitungen der Spaltfunktion H aus (3.114) und (3.115) ergibt

$$\Omega P_k [(2\Gamma' - 1) \varepsilon_A \sin(X - \Gamma) + 2\varepsilon'_A \cos(X - \Gamma)] = 0. \quad (4.18)$$

Damit diese Bedingung für beliebige Winkelgeschwindigkeiten Ω und konstante Drücke P_k erfüllt ist, muss der Ausdruck in der Klammer identisch null sein. Also ist

$$(2\Gamma' - 1) \varepsilon_A = 0 \quad (4.19)$$

und

$$\varepsilon'_A = 0 \quad (4.20)$$

zu fordern. Daraus lassen sich zwei Wellenzapfenzustände ableiten, die letztlich eine konstante Druckverteilung im Schmierpalt hervorrufen. Der erste Zustand ist die stationäre, zentrische Lage des Wellenzapfens

$$\varepsilon_A = \varepsilon'_A = 0. \quad (4.21)$$

Für den zweiten Zustand gilt

$$2\Gamma' - 1 = \varepsilon'_A = 0. \quad (4.22)$$

Aus der linken Seite der Gleichung folgt

$$\Gamma' = \frac{1}{2}, \quad (4.23)$$

was nach Rücktransformation in die dimensionsbehaftete Schreibweise mit (3.61)

$$\dot{\gamma} = \frac{\omega}{2} \quad (4.24)$$

ergibt. Ein innerhalb des gesamten Schmierfilms konstanter Druck bei rotierendem Wellenzapfen ($\omega \neq 0$) kann sich folglich in zwei Situationen einstellen. Entweder bei zentrischer, stationärer Zapfenlage gemäß (4.21) oder bei Rotation des Mittelpunkts A mit konstanter Exzentrizität $0 < \varepsilon_A < 1$, $\varepsilon'_A = 0$ und halber Winkelgeschwindigkeit (4.24). Letztgenannter Zustand charakterisiert den in vielen Experimenten und numerischen Berechnungen für diese Lagerart kritischen Fall des sogenannten *Halbfrequenzwirbels* (siehe Abschnitt 2.1.1 und 2.2.3).

Erfüllen die Verschiebungen Q des Folienlagermodells die Bedingung

$$\exp\left(\frac{Q}{\beta}\right) = \bar{P}_k = P_k, \quad (4.25)$$

so folgt aus (3.117)

$$\delta_f Q' = 0. \quad (4.26)$$

Für ein konstantes Druckfeld (4.16) folgt damit eine in Umfangsrichtung konstante Verschiebung

$$Q = Q_k = \text{konst.}, \quad (4.27)$$

ein aus der Anschauung offensichtlicher Tatbestand. Werden die Beziehungen (4.16) und (4.27) in (3.108) eingesetzt, so führt dies auf die bereits bekannte Beziehung (4.17). Somit gehören die für das zylindrische Starrlager ermittelten Wellenzapfenzustände (4.21) und (4.22) für das hier beschriebene Folienlagermodell zu einem konstanten Schmierfilm-Druck. Auch bei Annahme eines Winkler'schen Bettungsmodells (4.13) mit und ohne viskose Dämpfung ändert sich an beiden Zuständen als Bedingung eines konstanten Fluiddrucks nichts.

4.2.2 Druckaufbaumechanismen

Zur Darlegung der Mechanismen, die eine nicht konstante Fluiddruckverteilung im Schmierspalt in Umfangsrichtung hervorrufen, wird auch hier aus Gründen der Einfachheit das starre Lager ($Q = 0$) in Form von (3.155) betrachtet. Wird außerdem der Druckgradient in Axialrichtung vernachlässigt ($\frac{\partial P}{\partial Z} = 0$), so reduziert sich die Reynoldsgleichung für ideale Gase (3.155) auf

$$\frac{\partial}{\partial X} \left[PH^3 \frac{\partial P}{\partial X} \right] - \Omega \left\{ \frac{\partial}{\partial X} [PH] + 2 \frac{\partial}{\partial \tau} [PH] \right\} = 0. \quad (4.28)$$

Diese Annahme charakterisiert beispielsweise ein sehr langes Lager mit $\kappa \rightarrow 0$. Es wird deshalb häufig vom Fall des *unendlichen breiten Lagers* oder der *Langlagertheorie* gesprochen.

Wird weiter angenommen, dass sich das Schmiermedium quasi-stationär (siehe (3.159)) verhält, so lautet die verbleibende Differentialgleichung

$$H^3 P \frac{d^2 P}{dX^2} + H^3 \left(\frac{dP}{dX} \right)^2 + 3H^2 \frac{\partial H}{\partial X} P \frac{dP}{dX} - \Omega \frac{\partial H}{\partial X} P - \Omega H \frac{dP}{dX} - 2\Omega \frac{\partial H}{\partial \tau} P = 0. \quad (4.29)$$

Der Druck P als abhängige Veränderliche hängt somit nur noch von der Umfangskoordinate X ab. Einsetzen der Spaltfunktion H und deren Ableitungen aus (3.113), (3.114) und (3.115) ergibt

$$\begin{aligned} & [1 - \varepsilon_A \cos(X - \Gamma)]^3 P \frac{d^2 P}{dX^2} + [1 - \varepsilon_A \cos(X - \Gamma)]^3 \left(\frac{dP}{dX} \right)^2 \\ & + 3 [1 - \varepsilon_A \cos(X - \Gamma)]^2 \varepsilon_A \sin(X - \Gamma) P \frac{dP}{dX} - \Omega \varepsilon_A \sin(X - \Gamma) P \\ & - \Omega [1 - \varepsilon_A \cos(X - \Gamma)] \frac{dP}{dX} + 2\Omega [\varepsilon'_A \cos(X - \Gamma) + \varepsilon_A \Gamma' \sin(X - \Gamma)] P = 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Als Größen, die den Schmierfilmdruck $P(X)$ beeinflussen, treten in (4.30) nur die Position und Geschwindigkeit des Wellenzapfenmittelpunkts $\varepsilon_A, \varepsilon'_A, \Gamma, \Gamma'$ und die Winkelgeschwindigkeit Ω auf. Im Folgenden wird der Einfluss dieser Größen auf die sich einstellende Druckverteilung möglichst isoliert ermittelt. Im Betrieb des Rotors hingegen variieren die genannten Größen im Allgemeinen simultan. Aufgrund des nichtlinearen Modellcharakters können die einzelnen Effekte jedoch nicht exakt superponiert werden.

Fall konstanter Exzentrizität

Zunächst wird der Fall eines konstanten Abstands des Wellenzapfenmittelpunkts A zum Lagerzentrum O betrachtet. Die Bedingung (4.20) ist weiterhin erfüllt. Einsetzen eines Potenzreihenansatzes

$$P(X) = 1 + \varepsilon_A P_1(X) + \varepsilon_A^2 P_2(X) + \dots \quad (4.31)$$

mit dem Störparameter ε_A und der Bedingung $\varepsilon'_A = 0$ in (4.30) liefert nach Sortieren in den Potenzen von ε_A die Relation

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{d^2 P_1}{dX^2} - \Omega \frac{dP_1}{dX} + (2\Gamma' - 1)\Omega \sin(X - \Gamma) \right\} \varepsilon_A \\ & + \left\{ \frac{d^2 P_2}{dX^2} - \Omega \frac{dP_2}{dX} + [P_1 - 3 \cos(X - \Gamma)] \frac{d^2 P_1}{dX^2} + \left[\frac{dP_1}{dX} + 3 \sin(X - \Gamma) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \Omega \cos(X - \Gamma) \right] \frac{dP_1}{dX} + (2\Gamma' - 1)\Omega \sin(X - \Gamma) P_1 \right\} \varepsilon_A^2 \\ & + \dots = 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Der Ansatz (4.31) wurde erstmalig von AUSMAN in [4] zur Ermittlung des Schmierfilmdrucks im stationären Fall ($\frac{\partial}{\partial \tau}(PH) = 0$) genutzt. Er kann jedoch, wie hier gezeigt, auch für den vorliegenden allgemeineren Fall verwendet werden. Damit die Gleichung (4.32) für beliebige Werte von ε_A erfüllt ist, müssen alle Vorfaktoren der ε_A -Potenzen null werden, sodass ein rekursiv lösbares Differentialgleichungssystem entsteht. Für die erste Näherung $P_1(X)$ folgt aus dem Vorfaktor von ε_A die lineare, gewöhnliche, inhomogene Differentialgleichung

$$\frac{d^2 P_1}{dX^2} - \Omega \frac{dP_1}{dX} = (1 - 2\Gamma')\Omega \sin(X - \Gamma). \quad (4.33)$$

Die Lösung der zu (4.33) gehörenden homogenen Differentialgleichung kann mittels eines Exponentialansatzes als

$$P_{1h}(X) = K_1 + K_2 \exp(\Omega X) \quad (4.34)$$

mit den beiden Integrationskonstanten K_1 und K_2 bestimmt werden. Für die rechte Seite von (4.33) gilt die Umformung

$$(1 - 2\Gamma')\Omega \sin(X - \Gamma) = (1 - 2\Gamma')\Omega \cos \Gamma \sin X - (1 - 2\Gamma')\Omega \sin \Gamma \cos X, \quad (4.35)$$

sodass zur Ermittlung der Partikulärlösung ein Ansatz vom Typ der rechten Seite

$$P_{1p}(X) = K_3 \sin X + K_4 \cos X \quad (4.36)$$

mit den noch zu bestimmenden Konstanten K_3 und K_4 gewählt wird. Einsetzen von (4.36) in (4.33) führt auf die Gleichung

$$[\Omega K_4 - K_3 - (1 - 2\Gamma')\Omega \cos \Gamma] \sin X + [(1 - 2\Gamma')\Omega \sin \Gamma - K_4 - \Omega K_3] \cos X = 0. \quad (4.37)$$

Sie ist erfüllt, sofern die beiden Vorfaktoren der trigonometrischen Funktionen null werden. Daraus ergibt sich ein lineares Gleichungssystem

$$-K_3 + \Omega K_4 = (1 - 2\Gamma')\Omega \cos \Gamma, \quad (4.38)$$

$$K_4 + \Omega K_3 = (1 - 2\Gamma')\Omega \sin \Gamma \quad (4.39)$$

mit den Lösungen

$$K_3 = \frac{(1 - 2\Gamma')\Omega}{1 + \Omega^2} (\Omega \sin \Gamma - \cos \Gamma), \quad (4.40)$$

$$K_4 = \frac{(1 - 2\Gamma')\Omega}{1 + \Omega^2} (\sin \Gamma + \Omega \cos \Gamma). \quad (4.41)$$

Die allgemeine Lösung von (4.33) lautet damit

$$\begin{aligned} P_1(X) &= P_{1h} + P_{1p} \\ &= K_1 + K_2 \exp(\Omega X) + \frac{(1 - 2\Gamma')\Omega}{1 + \Omega^2} [\Omega \cos(X - \Gamma) - \sin(X - \Gamma)]. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Mögliche Randbedingungen sind die Periodizitätsbedingungen (3.156) und (3.157), die ein kreiszylindrisches Starrlager kennzeichnen oder auch die DIRICHLET-Randbedingungen (3.119) und (3.120) die eine axiale Nut im Lager repräsentieren, in der Umgebungsdruck vorliegt. Beide Fälle werden im Folgenden diskutiert.

Periodische Randbedingungen Im Fall periodischer Randbedingungen und der quasi-stationären Annahme (3.159) ist es, wie in Abschnitt 3.5.2 beschrieben, vorteilhaft von der unabhängigen Koordinate X auf die unabhängige Koordinate Θ nach (3.161) überzugehen. Die allgemeine Lösung (4.42) lautet dann

$$P_1(\Theta) = K_1 + K_2 \exp(\Omega \Theta) + \frac{(1 - 2\Gamma')\Omega}{1 + \Omega^2} [(\Omega \cos \Theta - \sin \Theta)]. \quad (4.43)$$

Bei Annahme der periodischen Randbedingungen (3.166) und (3.167) liefert der Potenzreihenansatz (4.31) als Ergebnis

$$1 + \varepsilon_A P_1(0) + \varepsilon_A^2 P_2(0) + \dots = 1 + \varepsilon_A P_1(2\pi) + \varepsilon_A^2 P_2(2\pi) + \dots, \quad (4.44)$$

$$\varepsilon_A \frac{d}{d\Theta} P_1(0) + \varepsilon_A^2 \frac{d}{d\Theta} P_2(0) + \dots = \varepsilon_A \frac{d}{d\Theta} P_1(2\pi) + \varepsilon_A^2 \frac{d}{d\Theta} P_2(2\pi) + \dots, \quad (4.45)$$

sodass in erster Näherung die Bedingungen

$$P_1(0) = P_1(2\pi), \quad (4.46)$$

$$\frac{d}{d\Theta} P_1(0) = \frac{d}{d\Theta} P_1(2\pi) \quad (4.47)$$

zu erfüllen sind. Aus (4.46) folgt

$$K_2 [1 - \exp(2\Omega\pi)] = 0, \quad (4.48)$$

sodass für beliebige Werte von Ω die Bedingung $K_2 = 0$ gelten muss. Aus (4.47) folgt ebenfalls $K_2 = 0$. Die Integrationskonstante K_1 bleibt dagegen unbestimmt. Letztlich lautet die Potenzreihe (4.31) bei Berücksichtigung von Termen bis zur Größenordnung $\mathcal{O}(\varepsilon_A)$ im Falle periodischer Randbedingungen damit

$$P_{\text{per}}(\Theta) = 1 + \varepsilon_A \left\{ K_1 + \frac{(1 - 2\Gamma')\Omega}{1 + \Omega^2} [(\Omega \cos \Theta - \sin \Theta)] \right\}. \quad (4.49)$$

Dirichlet-Randbedingungen Werden DIRICHLET-Randbedingungen (3.119) und (3.120) vorgegeben, so liefern diese auf Basis des Potenzreihenansatzes (4.31) die beiden Relationen

$$P(X = -\chi) = 1 + \varepsilon_A P_1(-\chi) + \varepsilon_A^2 P_2(-\chi) + \dots = 1, \quad (4.50)$$

$$P(X = 2\pi - \chi) = 1 + \varepsilon_A P_1(2\pi - \chi) + \varepsilon_A^2 P_2(2\pi - \chi) + \dots = 1. \quad (4.51)$$

In erster Näherung gilt für $P_1(X)$ folglich

$$P_1(-\chi) = 0, \quad (4.52)$$

$$P_1(2\pi - \chi) = 0. \quad (4.53)$$

Mit $\sin(2\pi - \chi - \Gamma) = \sin(\chi - \Gamma)$ und $\cos(2\pi - \chi - \Gamma) = \cos(\chi - \Gamma)$ ergibt sich nach Substitution der allgemeinen Lösung (4.42) in (4.50) und (4.51) das lineare Gleichungssystem

$$K_1 + K_2 \exp(-\Omega\chi) + \frac{(1 - 2\Gamma')\Omega}{1 + \Omega^2} [\Omega \cos(-\chi - \Gamma) - \sin(-\chi - \Gamma)] = 0, \quad (4.54)$$

$$K_1 + K_2 \exp[\Omega(2\pi - \chi)] + \frac{(1 - 2\Gamma')\Omega}{1 + \Omega^2} [\Omega \cos(-\chi - \Gamma) - \sin(-\chi - \Gamma)] = 0, \quad (4.55)$$

dessen Lösungen

$$K_1 = -\frac{(1 - 2\Gamma')\Omega}{1 + \Omega^2} [\Omega \cos(-\chi - \Gamma) - \sin(-\chi - \Gamma)] \quad (4.56)$$

$$K_2 = 0 \quad (4.57)$$

ergeben. Nach Einsetzen der ermittelten Konstanten K_1 und K_2 aus (4.56) und (4.57) kann die Gesamtlösung sowie die Potenzreihe (4.31) bei Berücksichtigung von Termen bis zur Ordnung $\mathcal{O}(\varepsilon_A)$ angegeben werden:

$$P(X) = 1 + \varepsilon_A \frac{(1 - 2\Gamma')\Omega}{1 + \Omega^2} \{ \Omega [\cos(X - \Gamma) - \cos(-\chi - \Gamma)] - \sin(X - \Gamma) + \sin(-\chi - \Gamma) \}. \quad (4.58)$$

Lagerkräfte Anhand der ermittelten Druckverteilung im Schmierpalt kann die auf den Wellenzapfen wirkende Lagerkraft bestimmt werden. Nach (3.133) ergibt sich:

$$\vec{f} = - \left[\varepsilon_A \frac{(1 - 2\Gamma')\pi\Omega}{1 + \Omega^2} (\Omega \cos \Gamma + \sin \Gamma) \right] \vec{e}_x^0 - \left[\varepsilon_A \frac{(1 - 2\Gamma')\pi\Omega}{1 + \Omega^2} (\Omega \sin \Gamma - \cos \Gamma) \right] \vec{e}_y^0. \quad (4.59)$$

Die Gleichung (4.59) gilt für den gewählten Störungsansatz (4.31) unabhängig davon, ob periodische - oder DIRICHLET-Randbedingungen angenommen werden. Alternativ kann die auf den Wellenzapfen wirkende Lagerkraft \vec{f} auch über die Basisvektoren des mitbewegten \mathcal{K}_1 Systems angegeben werden:

$$\vec{f} = - \left[\varepsilon_A \frac{(1 - 2\Gamma')\pi\Omega^2}{1 + \Omega^2} \right] \vec{e}_r^1 + \left[\varepsilon_A \frac{(1 - 2\Gamma')\pi\Omega}{1 + \Omega^2} \right] \vec{e}_\gamma^1. \quad (4.60)$$

Vorbemerkung zur Auswertung Abbildung 4.5 zeigt für einige ausgewählte Parameterwerte die ermittelte Druckverteilung im Schmierfilm. Zur Beurteilung der Näherungsgüte ist für jeden dargestellten Parametersatz auch die numerische Lösung von (4.30) mit abgebildet. Letztere wird auf Basis *Finiter Differenzen* mittels den Diskretisierungen (3.125) und (3.127) von (4.30) ermittelt.

Dargestellt sind analytische Lösungen (4.58) und die numerische Lösung von (4.30) lediglich bei Annahme von DIRICHLET-Randbedingungen. Dies hat verschiedene Gründe. Für das Folienlagermodell werden im Rahmen der Arbeit ausschließlich DIRICHLET-Randbedingungen angenommen. Außerdem konvergierte das numerische Verfahren bei periodischen Randbedingungen teilweise nicht, und in der analytischen Näherung tritt die unbestimmte Konstante K_1 auf. Grundsätzlich ist zu erkennen, dass für die gewählten kleinen Exzentrizitäten eine gute Übereinstimmung zwischen der analytischen und der numerischen Näherung vorliegt.

Druckverteilung bei stationärer Wellenzapfenposition Für stationäre Wellenzapfenpositionen gilt bei gleichzeitiger Rotation der Welle $\varepsilon'_A = 0, \Gamma' = 0, \Omega \neq 0$. In Abschnitt 4.2.1 wurde gezeigt, dass die zentrische Zapfenlage $\varepsilon_A = 0$ mit einem konstanten Schmierfilmdruck einhergeht. Bei einer stationären Verschiebung ($\vec{v}_A = \vec{0}$) des Mittelpunkts aus dem Zentrum $\varepsilon_A \neq 0$ infolge der sich ändernden Schmierpalthehöhe dagegen bildet sich eine in Umfangsrichtung nicht konstante Druckverteilung aus. Abbildung 4.6a skizziert exemplarisch eine solche Druckverteilung und die sich daraus ergebenden Lagerkräfte. Konkrete Verläufe des Schmierfilmdrucks sind in Abbildung 4.5a für verschiedene kleine Exzentrizitäten dargestellt. Unter anderem ist zu erkennen, dass sich für die gewählten Parameterwerte die Druckmaxima mit steigender Exzentrizität erhöhen.

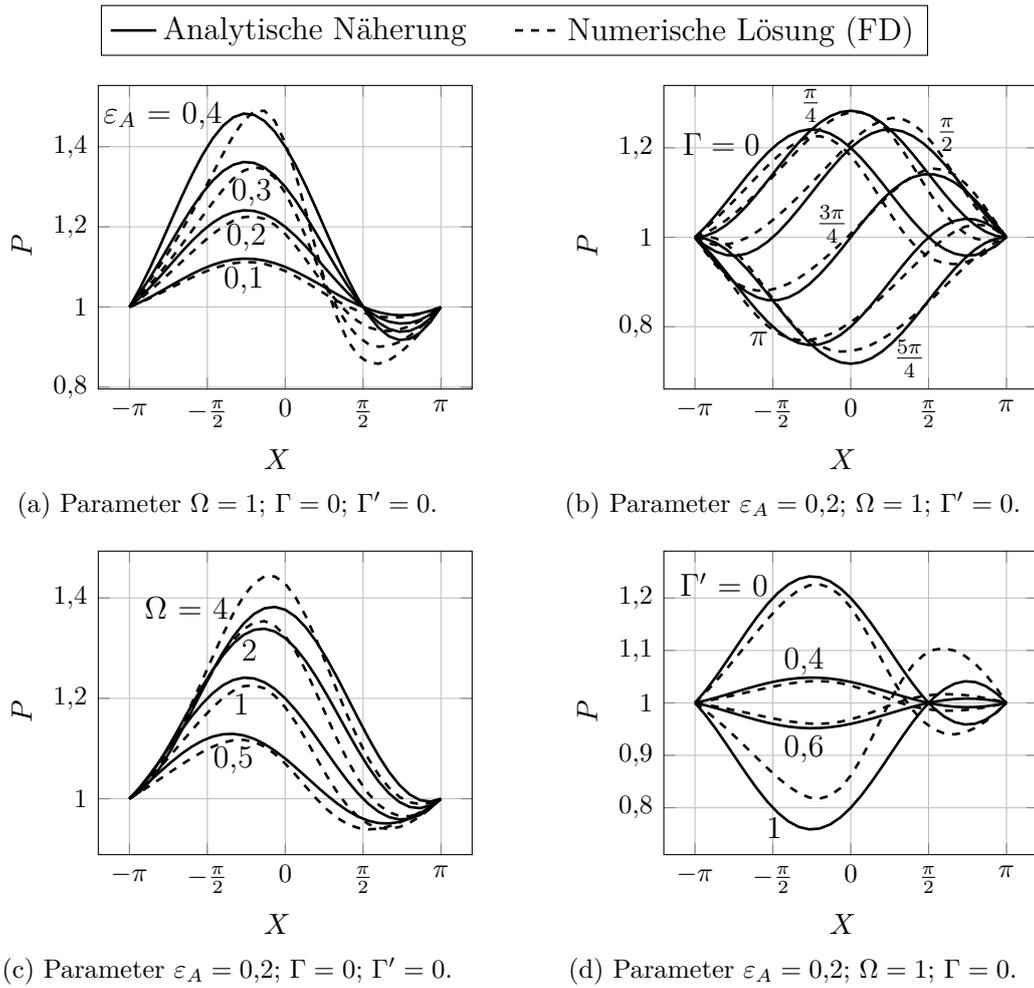


Abbildung 4.5: Vergleich des Schmierfilmdrucks P der analytischen und numerischen Näherungen des zylindrischen Starrlagers nach der Langlagertheorie bei Dirichlet-Randbedingungen für $\varepsilon'_A = 0; \chi = \pi$.

Die Extremwerte der Drucknäherung (4.58) liegen vor, wenn die Bedingung

$$\frac{dP}{dX} = \varepsilon_A \frac{(1 - 2\Gamma')\Omega}{1 + \Omega^2} [-\Omega \sin(X - \Gamma) - \cos(X - \Gamma)] = 0 \quad (4.61)$$

erfüllt ist. Für die zugehörige stationäre, nicht zentrische Wellenzapfenlage folgt daraus

$$X_x - \Gamma = \tan^{-1} \left(-\frac{1}{\Omega} \right), \quad (4.62)$$

wobei X_x die Position des Extremwerts in Umfangsrichtung kennzeichnet. Einsetzen von (4.62) in die zweite Ableitung des Drucks liefert

$$\frac{d^2P}{dX^2}(X = X_x) = \varepsilon_A \frac{(1 - 2\Gamma')\Omega}{1 + \Omega^2} \left[-\Omega \cos \left(\tan^{-1} \left(-\frac{1}{\Omega} \right) \right) + \sin \left(\tan^{-1} \left(-\frac{1}{\Omega} \right) \right) \right]. \quad (4.63)$$

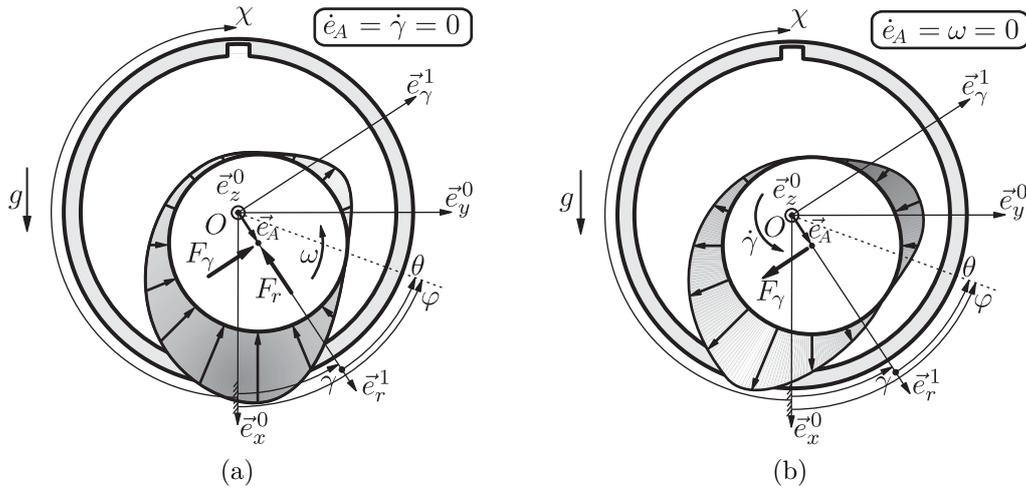


Abbildung 4.6: Prinzipskizze des wirkenden Schmierfilmdrucks und der resultierenden Lagerkräfte bei (a) stationärer Wellenzapfenlage und Rotation der Welle sowie (b) Kreisbewegung des Wellenzapfenmittelpunkts und nicht rotierender Welle.

Mittels trigonometrischer Umformungen, siehe zum Beispiel [21], wird (4.63) in

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P}{dX^2}(X = X_x) &= \varepsilon_A \frac{(1 - 2\Gamma')\Omega}{1 + \Omega^2} \left[-\Omega \cos \left(-\cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\Omega^2}}} \right) + \sin \left(\sin^{-1} \frac{-\frac{1}{\Omega}}{\sqrt{1 + \frac{1}{\Omega^2}}} \right) \right] \\ &= -\varepsilon_A \frac{(1 - 2\Gamma')\Omega(\Omega + \frac{1}{\Omega})}{(1 + \Omega^2)\sqrt{1 + \frac{1}{\Omega^2}}} \end{aligned} \quad (4.64)$$

umgeformt, sodass für $\Gamma' < \frac{1}{2}$ der Extremwert an der Stelle X_x das Druckmaximum charakterisiert. Mit (3.161) folgt aus (4.62), dass sich bei stationärer Wellenzapfenlage das Druckmaximum immer im Bereich des konvergierenden Spalts, jedoch vor der geringsten Spalthöhe bei $\Theta = 0$ befindet.

Mit der Kenntnis, dass bei rotierender Welle und einer stationären Wellenzapfenposition ein Druckmaximum auftritt, können nun drei Spezialfälle betrachtet werden. Wird im ersten Fall die Position des Wellenzapfens Γ_1 gesucht, für die das Druckmaximum dem vorgegebenen Umgebungsdruck in Form der Randbedingung (3.119) entspricht, so gilt nach (4.62)

$$\Gamma_1 = -\chi - \tan^{-1} \left(-\frac{1}{\Omega} \right). \quad (4.65)$$

Für diese Wellenzapfenposition ist der Schmierfilmdruck im gesamten Spalt kleiner beziehungsweise gleich dem Umgebungsdruck. In Abbildung 4.5b ist dieser Fall dargestellt ($\Gamma = \frac{5\pi}{4}$). Des Weiteren kann über

$$\Gamma_2 = \Gamma_1 + \pi = \pi - \chi - \tan^{-1} \left(-\frac{1}{\Omega} \right) \quad (4.66)$$

die Wellenzapfenposition Γ_2 ermittelt werden, für die im gesamten Schmierfilm der Druck größer beziehungsweise gleich dem Umgebungsdruck ist. Auch dieser Fall ist in Abbildung 4.5b für die Winkellage $\Gamma = \frac{\pi}{4}$ gezeigt. Der dritte ebenfalls gezeigte Spezialfall liegt bei

$$\Gamma_3 = \Gamma_1 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \chi - \tan^{-1}\left(-\frac{1}{\Omega}\right) \quad (4.67)$$

vor. Hier ist die analytische Näherung des Drucks punktsymmetrisch. Speziell für $\chi = \pi$ gilt $f_X = 0$.

Der maximale Schmierfilmdruck lässt sich durch Einsetzen von (4.62) in (4.58) ermitteln:

$$P(X = X_x) = 1 + \varepsilon_A \frac{(1 - 2\Gamma')\Omega}{1 + \Omega^2} \left[\frac{1 + \Omega^2}{\sqrt{1 + \Omega^2}} - \Omega \cos(-\chi - \Gamma) + \sin(-\chi - \Gamma) \right]. \quad (4.68)$$

Grundsätzlich steigt der Schmierfilmdruck mit steigender Winkelgeschwindigkeit Ω , wie Abbildung 4.5c exemplarisch zeigt. Für sehr hohe Winkelgeschwindigkeiten strebt der maximale Schmierfilmdruck in erster Näherung dem Wert

$$\begin{aligned} \lim_{\Omega \rightarrow \infty} P(X = X_x) &= \lim_{\Omega \rightarrow \infty} 1 + \varepsilon_A (1 - 2\Gamma') \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\Omega^2}}} - \frac{\cos(-\chi - \Gamma)}{1 + \frac{1}{\Omega^2}} + \frac{\sin(-\chi - \Gamma)}{\Omega + \frac{1}{\Omega}} \right] \\ &= 1 + \varepsilon_A (1 - 2\Gamma') [1 - \cos(-\chi - \Gamma)] \end{aligned} \quad (4.69)$$

entgegen.

Druckverteilung bei einer Kreisbewegung des Zapfenmittelpunkts und nicht rotierender Welle Neben der Lage des Wellenzapfenmittelpunkts A hat auch dessen Geschwindigkeit einen Einfluss auf die Ausbildung der Druckverteilung im Schmierfilm. Zur Isolation der einzelnen Druckaufbaumechanismen wird im Folgenden der Fall einer Kreisbewegung von A bei nicht rotierender Welle betrachtet ($\varepsilon_A \neq 0, \Gamma' \neq 0, \varepsilon'_A = 0, \Omega = 0$). Die ermittelte Näherungslösung (4.58) schließt diesen Fall ein. Aufgrund der Zeitskalierung über die Winkelgeschwindigkeit der Welle wird (4.58) mittels den Beziehungen (3.52), (3.59), (3.61), (3.107) und (3.111) zur besseren Interpretierbarkeit in die dimensionsbehaftete Form zurücktransformiert:

$$p(x) = p_0 + \frac{6\mu_L h_0 p_0^2 R^2 e_A (\omega - 2\dot{\gamma})}{(p_0 h_0^2)^2 + (6\mu_L R^2 \omega)^2} \left\{ \frac{6\mu_L R^2}{p_0 h_0^2} \omega [\cos(\frac{x}{R} - \gamma) - \cos(-\chi - \gamma)] - \sin(\frac{x}{R} - \gamma) + \sin(-\chi - \gamma) \right\}. \quad (4.70)$$

Für eine nicht rotierende Welle mit $\omega = 0$ vereinfacht sich die Druckverteilung zu

$$p(x) = p_0 + \frac{12\mu_L R^2 e_A \dot{\gamma}}{h_0^3} \left[\sin(\frac{x}{R} - \gamma) - \sin(-\chi - \gamma) \right]. \quad (4.71)$$

Mit der Winkelbeziehung (3.8) und (3.46) kann aus dem Vorzeichen des ersten Summanden in der Klammer geschlossen werden, dass der Schmierfilmdruck für $0 \leq \theta \leq \pi$ immer größer als der Druck im Bereich $-\pi \leq \theta \leq 0$ ist. Im Unterschied zur stationären Lage tritt der

höhere Druck hier im divergierenden Spaltbereich auf. Der Absolutwert des Drucks hängt außerdem von der aktuellen Position γ und der Lage der Nut χ ab. Die dimensionsbehaftete Lagerkraft der Näherung erster Ordnung lautet

$$\vec{F} = - \left[\frac{12\mu_L R^2 \pi e_A \dot{\gamma}}{p_0 h_0^3} \right] \vec{e}_\gamma^1, \quad (4.72)$$

sodass diese Wellenzapfenbewegung lediglich eine tangential zur Kreisbahn und entgegen der Drehrichtung wirkende Kraft zur Folge hat. Eine Komponente in radialer Richtung tritt bei dieser Bewegung nicht auf (vergleiche Abbildung 4.6b).

Druckverteilung bei Kreisbewegung des Zapfenmittelpunkts und rotierender Welle

Im Betrieb des Rotors tritt mitunter eine Überlagerung der beiden zuvor diskutierten isolierten Fälle auf. Die mittels Störungsansatz (4.31) ermittelte Näherungslösung (4.58) beschreibt den Fall des sich auf einer Kreisbahn bewegenden Zapfenmittelpunkts A bei gleichzeitiger Rotation der Welle. Abbildung 4.5d zeigt exemplarisch einige Druckverteilungen in Abhängigkeit von Γ' . Die Eigenart dieses Falls besteht in der Überlagerung zwei entgegengesetzter Wirkungen. Bei einer stationären Zapfenposition mit rotierender Welle entsteht der erhöhte Schmierfilmdruck im konvergierenden Spalt. Bei der Kreisbewegung des Zapfenmittelpunkts und nicht rotierender Welle dagegen stellt sich der erhöhte Druck im divergierenden Spaltbereich ein. Wie aus (4.58) ersichtlich und bereits in (4.23) angegeben, heben sich bei einer Rotation des Wellenzapfenmittelpunkts mit der halben Winkelgeschwindigkeit des Wellenzapfens die Wirkungen der beiden Druckaufbaumechanismen gegenseitig auf. Die Folge ist ein konstanter Schmierfilmdruck im gesamten Spalt.

Rotiert der Wellenzapfenmittelpunkt mit einer kleineren Winkelgeschwindigkeit als der halben Rotationswinkelgeschwindigkeit $\Gamma' < \frac{1}{2}$, befindet sich das Druckmaximum im Bereich des konvergierenden Spalts. Andernfalls tritt für $\Gamma' > \frac{1}{2}$ der erhöhte Druck im divergierenden Spalt auf (vergleiche Abbildung 4.5d). Infolgedessen ändert sich bei $\Gamma' = \frac{1}{2}$ die Richtung der am Wellenzapfen wirkenden Tangentialkraft f_Γ . Für $\Gamma' < \frac{1}{2}$ zeigt diese in positive \vec{e}_γ^1 -Richtung, für $\Gamma' > \frac{1}{2}$ in negative \vec{e}_γ^1 -Richtung (siehe Abbildung 4.6). Unter bestimmten Umständen ist der Rotor geneigt, sich auf einer Kreisbahn mit halber Winkelgeschwindigkeit zu bewegen. Diese Bewegung charakterisiert den bereits in Kapitel 2 und in Abschnitt 4.2.1 angesprochenen Halbfrequenzwirbel. Problematisch ist dabei insbesondere, dass bei konstanter Exzentrizität und für $\Gamma' = \frac{1}{2}$ keine radial wirkende Kraft am Wellenzapfen angreift.

Bewegung normal zur Lageroberfläche - Quetscheffekt

Zur Vervollständigung der durch die Bewegungen des Wellenzapfens hervorgerufenen Druckaufbaumechanismen wird im Folgenden die Verschiebung des Wellenzapfenmittelpunkts A normal zur Lageroberfläche diskutiert. Wie zuvor werden alle anderen Bewegungen vernachlässigt. Für einen nicht rotierenden Wellenzapfen gilt $\Omega = 0$, sodass sich (4.29) auf

$$H^3 P \frac{d^2 P}{dX^2} + H^3 \left(\frac{dP}{dX} \right)^2 + H^2 \frac{\partial H}{\partial X} P \frac{dP}{dX} - 2\Omega \frac{\partial H}{\partial \tau} P = 0 \quad (4.73)$$

reduziert, wobei der tangentielle Geschwindigkeitsanteil des Wellenzapfenmittelpunkts wie üblich vernachlässigt wird. Der im letzten Term auftretende Faktor Ω kennzeichnet dabei nicht die Winkelgeschwindigkeit des Wellenzapfens, da diese null gesetzt wurde. Vielmehr ist er durch die Skalierung der Zeit bedingt (vergleiche (3.61) und (3.107)) und gibt die charakteristische Bezugsgröße der dimensionslosen Zeit τ an. Zur Ermittlung einer analytischen Näherung wird ferner angenommen, dass sich der Wellenzapfenmittelpunkt A im Ursprung O befindet. Für eine beliebige Lage konnte keine geschlossene Lösung ermittelt werden. Da im Fall der zentrischen Zapfenposition eine Beschreibung mittels Polarkoordinaten ε_A, Γ nicht möglich ist, werden kartesische Koordinaten verwendet, für die $X_A = Y_A = 0$ gilt. Jede beliebige Geschwindigkeit $\vec{v}_A \neq 0$ des Mittelpunkts A steht folglich senkrecht auf der Lageroberfläche und charakterisiert somit den sogenannten *Quetscheffekt*. Für die zentrische Wellenzapfenlage vereinfacht sich Gleichung (4.73) weiter auf

$$P \frac{d^2 P}{dX^2} + \left(\frac{dP}{dX} \right)^2 - 2\Omega \frac{\partial H}{\partial \tau} P = 0. \quad (4.74)$$

Wird ein Potenzreihenansatz mit dem Störparameter der reziproken Zeitskala Ω

$$P(X) = 1 + \Omega P_1(X) + \Omega^2 P_2(X) + \dots \quad (4.75)$$

in (4.74) eingesetzt und nach Potenzen von Ω sortiert, so folgt

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{d^2 P_1}{dX^2} - 2 \frac{\partial H}{\partial \tau} \right\} \Omega \\ & + \left\{ \frac{d^2 P_2}{dX^2} + P_1 \frac{d^2 P_1}{dX^2} + \left(\frac{dP_1}{dX} \right)^2 + 2\Omega \cos(X - \Gamma) P_1 \right\} \Omega^2 + \dots = 0. \end{aligned} \quad (4.76)$$

Ein derartiger Ansatz wurde bereits von GROSS und ZACHMANOGLOU in [56] zur Ermittlung von Näherungslösungen der Reynoldsgleichung für ideale Gase im stationären Fall ($\frac{\partial}{\partial \tau}(\cdot) = 0$) verwendet. Für die erste Näherung $P_1(X)$ folgt aus der Bedingung, dass der Vorfaktor von Ω identisch null ist, mit (3.115) die lineare, gewöhnliche, inhomogene Differentialgleichung

$$\frac{d^2 P_1}{dX^2} = -2(X'_A \cos X + Y'_A \sin X). \quad (4.77)$$

Die Lösung der zu (4.77) gehörenden homogenen Differentialgleichung lautet

$$P_{1h}(X) = K_1 X + K_2. \quad (4.78)$$

Über einen Ansatz vom Typ der rechten Seite kann bei analogem Vorgehen wie bei der Untersuchung der Gleichungen (4.36) – (4.41) die partikuläre Lösung

$$P_{1p}(X) = 2Y'_A \sin X + 2X'_A \cos X \quad (4.79)$$

ermittelt werden. Folglich lautet die allgemeine Lösung von (4.77)

$$P_1(X) = P_{1h} + P_{1p} = K_1 X + K_2 + 2Y'_A \sin X + 2X'_A \cos X. \quad (4.80)$$

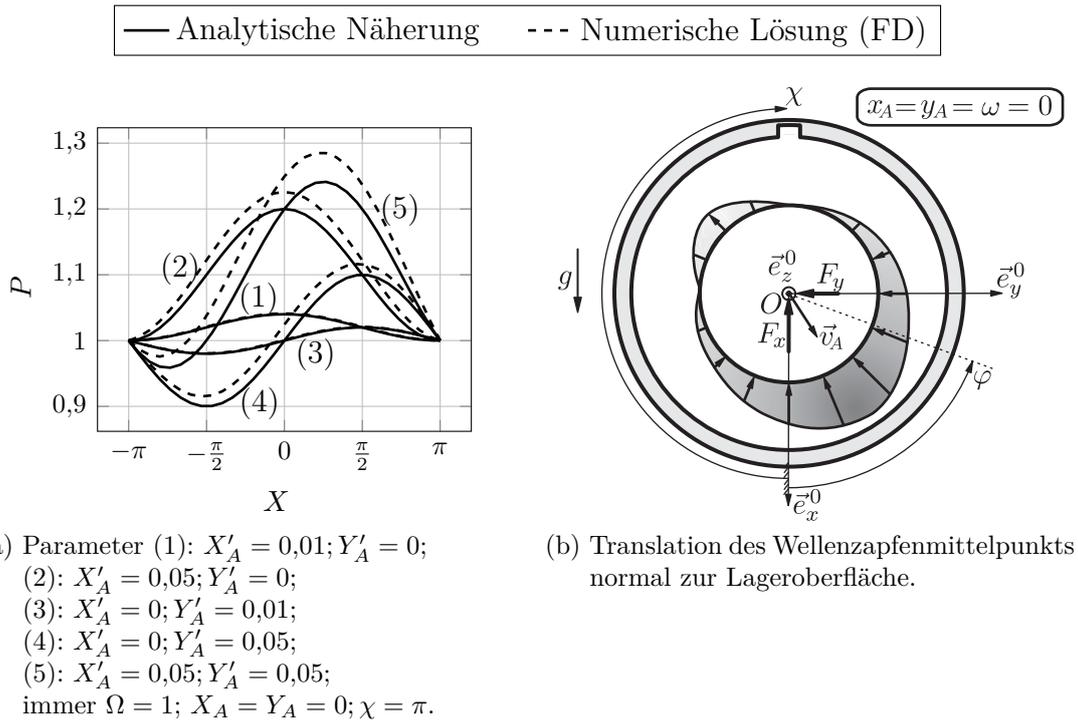


Abbildung 4.7: (a) Vergleich analytischer und numerischer Näherungen des Starrlagers bei Dirichlet-Randbedingungen; (b) Prinzipskizze zum Quetscheffekt.

Periodische Randbedingungen Werden periodische Randbedingungen vorgegeben, so gilt für die erste Näherung ebenfalls (4.46) und (4.47), sodass für die Konstante $K_1 = 0$ folgt. Die Konstante K_2 lässt sich bei den vorliegenden Randbedingungen auch hier nicht ermitteln und bleibt unbestimmt. Es ergibt sich damit für die Potenzreihe (4.75) bei periodischen Randbedingungen und Berücksichtigung von Termen bis zur Größenordnung $\mathcal{O}(\Omega)$ das Ergebnis

$$P_{\text{per}}(X) = 1 + \Omega(K_2 + 2Y'_A \sin X + 2X'_A \cos X). \quad (4.81)$$

Dirichlet-Randbedingungen Im Falle von DIRICHLET-Randbedingungen (3.119) und (3.120) gelten für die erste Näherung $P_1(X)$ ebenfalls die Bedingungen (4.52) und (4.53). Lösen des linearen Gleichungssystems für die Integrationskonstanten ergibt $K_1 = 0, K_2 = -2(X'_A \cos \chi - Y'_A \sin \chi)$. Damit ergibt sich für die Druckverteilung (4.75) bei DIRICHLET-Randbedingungen und Berücksichtigung von Termen bis zur Größenordnung $\mathcal{O}(\Omega)$ das Resultat

$$P(X) = 1 + 2\Omega[Y'_A(\sin X + \sin \chi) + X'_A(\cos X - \cos \chi)]. \quad (4.82)$$

Abbildung 4.7a visualisiert die ermittelte analytische Lösung. Außerdem sind zur Validierung die zugehörigen numerischen Referenzlösungen abgebildet. Wie in Abbildung 4.5 wurden für die dargestellten analytischen und numerischen Lösungen DIRICHLET-Randbedingungen angenommen. Zu erkennen ist eine gute Übereinstimmung bei kleinen

Geschwindigkeiten X'_A, Y'_A . Mit steigenden Werten weichen beide Lösungen quantitativ zunehmend voneinander ab, wobei die qualitative Übereinstimmung erhalten bleibt. Abbildung 4.7b skizziert exemplarisch eine Druckverteilung und die sich per Integration nach (3.133) ergebenden Komponenten der wirkenden Lagerkraft. Für die analytischer Näherung (4.82) gilt

$$\vec{f} = -[2\pi\Omega X'_A] \vec{e}_x^0 - [2\pi\Omega Y'_A] \vec{e}_y^0. \quad (4.83)$$

Damit ist gezeigt, dass hier die resultierende Lagerkraft immer entgegen der Bewegungsrichtung zeigt. Werden die Lagerkräfte hingegen aus der numerischen Lösung ermittelt, so tritt häufig auch ein geringer Anteil orthogonal zur Bewegungsrichtung auf. Die Richtung, in welche die orthogonale Kraftkomponente zeigt, hängt dabei maßgeblich von der Lage des Mittelpunkts A relativ zum Spalt in der Deckfolie χ ab. Beispielsweise anhand der Kurve (4) in Abbildung 4.7a ist erkennbar, dass keine Symmetrie der Druckverteilung mehr vorliegt und damit auch eine Lagerkraft orthogonal zur Bewegungsrichtung wirkt, während für Kurve (2) die Symmetrie weiterhin erhalten bleibt.

4.2.3 Diskretisierungsgenauigkeit

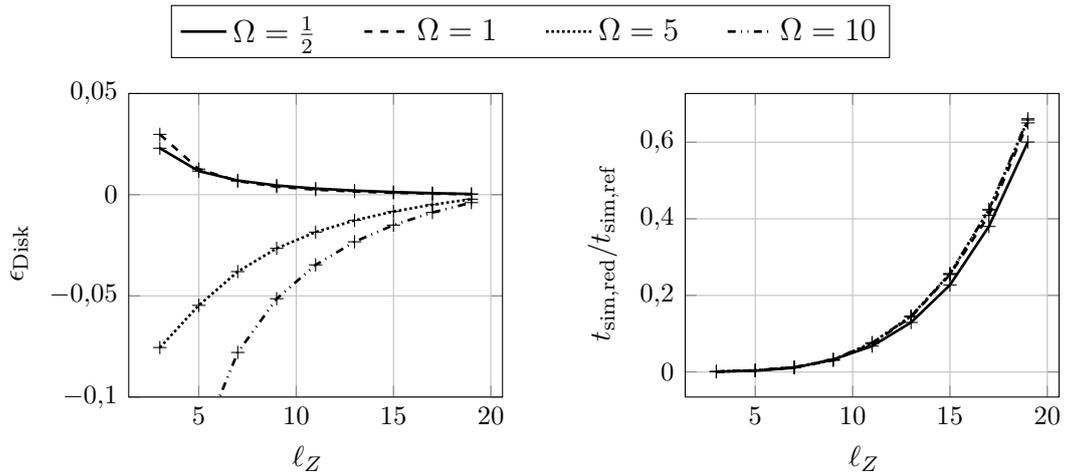
Bei der Ermittlung numerischer Näherungslösungen mittels finite Differenzenverfahren (siehe Abschnitt 3.4) tritt unter anderem ein *Diskretisierungsfehler* auf. Für gewöhnlich wird dieser Fehler kleiner, je feiner diskretisiert wird. Gleichzeitig erhöht sich mit steigender Anzahl an Gitterpunkten die Rechenzeit. Im Hinblick auf ein möglichst rechenzeiteffizientes Lagermodell mit kleinem Diskretisierungsfehler ist deshalb bei der Wahl der Gitterauflösung ein sinnvoller Kompromiss zu finden.

Da keine exakte Lösung des Lagermodells bekannt ist, wird zur Beurteilung der Näherungsgüte eine numerisch ermittelte Referenzlösung bei feiner Gitterauflösung herangezogen. Das im Rahmen der Arbeit vorwiegend verwendete Lagermodell weist ein Radius-zu-Längen-Verhältnis (3.109) von $\kappa = 1/2$ auf. Für ein äquidistantes Gitter in Umfangs- (\vec{e}_x^2) und axialer (\vec{e}_z^2) Richtung gilt für das Gebiet Ω_g folglich $\ell_X = 2\pi\ell_Z$. Da für die spätere Ermittlung der Lagerkräfte mittels der zusammengesetzten Simpson-Formel eine ungerade Anzahl an Gitterpunkten vonnöten ist, wird im Folgenden vereinfachend der Zusammenhang

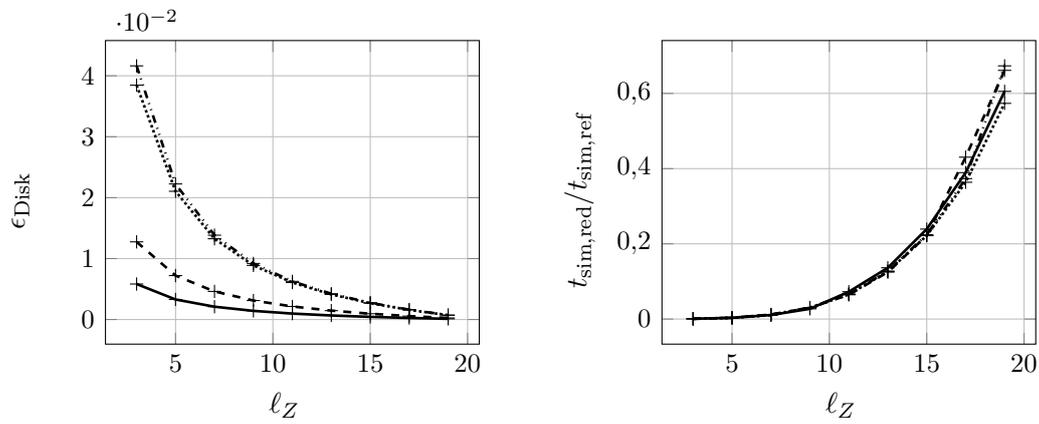
$$\ell_X = 6\ell_Z + 1 \quad (4.84)$$

zwischen den Gitterpunkten in Umfangs- und Axialrichtung verwendet. Die Referenzlösung wird mit einer willkürlich gewählten Auflösung von $\ell_{X\text{ref}} = 127$ und $\ell_{Z\text{ref}} = 21$ ermittelt. Für die Lösung bei vergrößertem Gitterabstand wird die Anzahl der Punkte in axialer Richtung schrittweise erhöht ($\ell_{Z,\text{red}} = 3, 5, 7, \dots, 19$). Die zugehörige Anzahl an Gitterpunkten in Umfangsrichtung ergibt sich aus (4.84). Aus rotordynamischer Sicht sind die wirkenden Lagerkräfte maßgeblich. Zur Beurteilung des Diskretisierungsfehlers wird deshalb ein integrales Fehlermaß

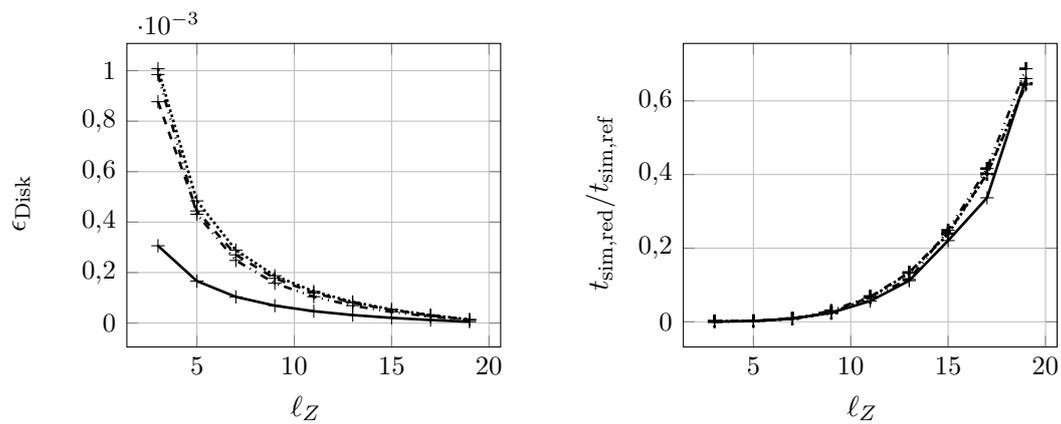
$$\epsilon_{\text{Disk}} = \frac{\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{1/2} P_{\text{ref}}^2 \, dZ \, dX} - \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{1/2} P_{\text{red}}^2 \, dZ \, dX}}{\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{1/2} P_{\text{ref}}^2 \, dZ \, dX}} \quad (4.85)$$



(a) Diskretisierungsfehler für $X_A = 0,85; Y_A = 0; X'_A = Y'_A = 0; \beta = 0$. (b) Relative Rechenzeit für $X_A = 0,85; Y_A = 0; X'_A = Y'_A = 0; \beta = 0$.



(c) Diskretisierungsfehler für $X_A = -0,3; Y_A = -0,5; X'_A = 0,05; Y'_A = -0,03; \beta = 0$. (d) Relative Rechenzeit für $X_A = -0,3; Y_A = -0,5; X'_A = 0,05; Y'_A = -0,03; \beta = 0$.



(e) Diskretisierungsfehler für $X_A = 0,85; Y_A = 0; X'_A = Y'_A = 0; \beta = \frac{5}{2}$. (f) Relative Rechenzeit für $X_A = 0,85; Y_A = 0; X'_A = Y'_A = 0; \beta = \frac{5}{2}$.

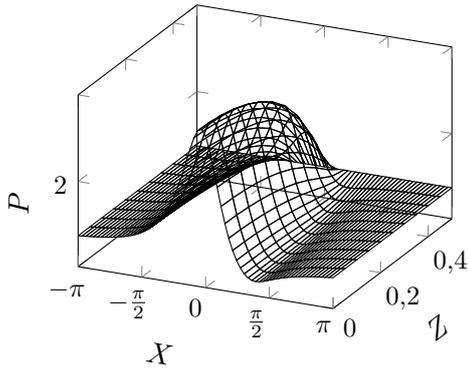
Abbildung 4.8: Diskretisierungsfehler in Abhängigkeit der Gitterauflösung und des Verhältnisses der zugehörigen Rechenzeiten des Starrlagers (a)–(d) und des Folienlagers (e) und (f). Parameter $\kappa = 1/2; \chi = \pi$.

eingeführt. Darin bezeichnet P_{ref} die Referenzlösung bei hoher Gitterauflösung und P_{red} den Schmierfilmdruck bei größerem Gitter. Aus Vereinfachungsgründen werden lediglich stationäre Lösungen des Schmierfilmdrucks verglichen.

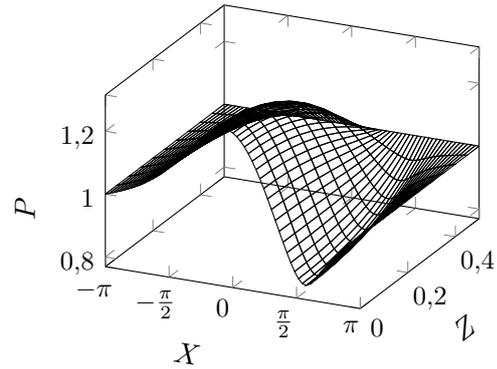
Da, wie im nächsten Abschnitt gezeigt, die flexiblen Folien den Schmierfilmdruck bei gleicher Wellenzapfenlage glätten, wird der Einfluss der Gitterauflösung zunächst für das zylindrische Starrlagermodell ermittelt und für das Folienlagermodell übertragen. Die Abbildungen 4.8a und 4.8c zeigen den ermittelten Fehler ϵ_{Disk} in Abhängigkeit der Anzahl an Gitterpunkten in Axialrichtung ℓ_Z für zwei verschiedene, beliebig ausgewählte Wellenzapfenzustände. Abbildung 4.8b und 4.8d zeigen das zugehörige Verhältnis der Rechenzeiten bei größerer Auflösung zur Rechenzeit des Referenzmodells mit feiner Auflösung. Abbildung 4.8e zeigt den ermittelten Fehler für das Folienlagermodell bei vernachlässigter Dämpfung ($d_f = 0$) und bei gleicher stationärer Lage des Wellenzapfens wie in Abbildung 4.8a. In Abbildung 4.8f ist das zugehörige Verhältnis der Rechenzeiten abgebildet. Zu erkennen ist in allen drei Fällen der erwartete Trend einer Minimierung des Fehlers ϵ_{Disk} mit steigender Anzahl an Gitterpunkten bei gleichzeitigem Anstieg der Rechenzeit. Die absolute Dauer für die Ermittlung der Druckverteilung des Referenzmodells eines Starrlagers liegt auf einem gewöhnlichen Desktop-PC im Bereich einiger Minuten. Für das Folienlagermodell erhöht sich die Rechenzeit um etwa eine Größenordnung. Auf Basis der gezeigten Ergebnisse wird als Kompromiss aus Genauigkeit und Rechenzeiteffizienz im Folgenden und sofern nicht explizit anders erwähnt immer eine Gitterauflösung von $\ell_Z = 11$ und $\ell_X = 76$ verwendet. Sie ist insbesondere dadurch begründet, dass im Rahmen der Arbeit auch das Starrlager diskutiert wird und eine über alle Modelle konsistente Gitterauflösung zugrunde gelegt wird.

4.2.4 Einfluss der Folieneigenschaften auf den Schmierfilmdruck

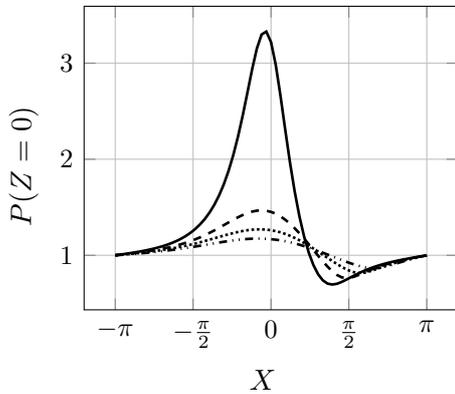
Beim Folienlager hängt die sich einstellende Druckverteilung im Schmierfilm neben der Rotordrehzahl und dem Wellenzapfenzustand maßgeblich von den Nachgiebigkeits- und Dämpfungseigenschaften der Folien ab. Ein kurzer Einblick über die grundsätzlichen Auswirkungen variierender Modellparameter auf die sich einstellende Druckverteilung wird im Folgenden gegeben. Allerdings ist, wie im anschließenden Kapitel gezeigt, die direkte Vergleichbarkeit von Starr- und Folienlager bei gleicher Wellendrehzahl sowie Lage und Geschwindigkeit des Wellenzapfenmittelpunkts nur bedingt möglich. Durch die Nachgiebigkeit der Folien sind die Schmierfilmdicken und deren Änderung in Umfangsrichtung bei beiden Lagerarten nicht übereinstimmend. Beides beeinflusst den Druckaufbau. Außerdem stellt sich bei einer Kopplung von Lager- und Rotormodell sowohl der Schmierfilmdruck als auch der Wellenzapfenzustand durch eine Wechselwirkung selbstständig ein. Des Weiteren sind durch das Zurückweichen der Folien auch Exzentrizitäten $\epsilon_A > 1$ bei einem ausgebildeten, tragenden Schmierfilm möglich. Bei einem Starrlager dagegen kennzeichnet der Fall $\epsilon_A = 1$ den Festkörperkontakt zwischen Wellenzapfen und Lagerschale und beschränkt damit konkret den möglichen Parameterbereich der Exzentrizität.



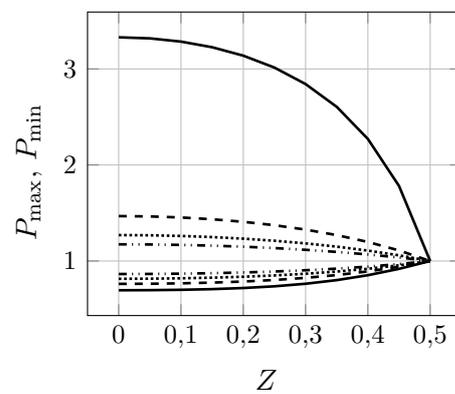
(a) Stat. Wellenzapfenposition: $X_A = 0,85$; $Y_A = X'_A = Y'_A = 0$; $\beta = 0$.



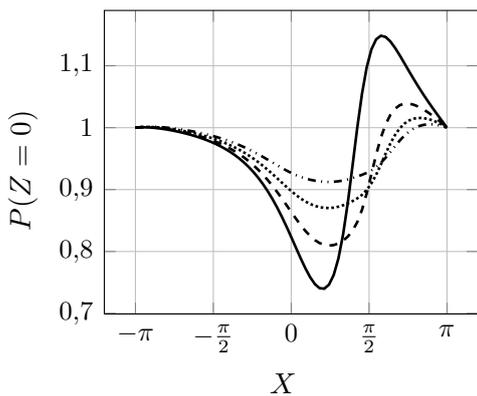
(b) Stat. Wellenzapfenposition: $X_A = 0,85$; $Y_A = X'_A = Y'_A = 0$; $\beta = \frac{5}{2}$.



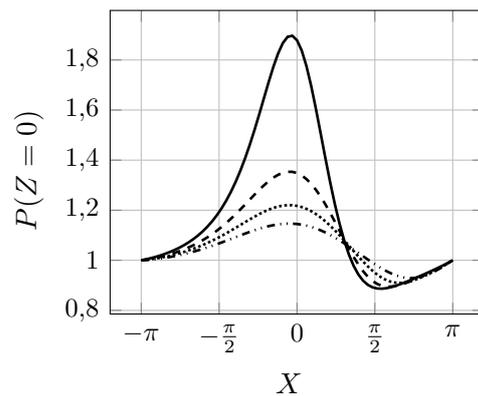
(c) Stat. Wellenzapfenposition: $X_A = 0,85$; $X'_A = Y_A = Y'_A = 0$.



(d) Stat. Wellenzapfenposition: $X_A = 0,85$; $X'_A = Y_A = Y'_A = 0$.



(e) Kreisbewegung des Wellenzapfens: $X_A = Y_A = 0,5$; $X'_A = -0,35$; $Y'_A = 0,35$.



(f) Radiale Bewegung des Wellenzapfens: $X_A = 0,6$; $X'_A = 0,1$; $Y_A = Y'_A = 0$.

Abbildung 4.9: Einfluss des Nachgiebigkeitsparameters auf die stationäre Druckverteilung verschiedener Wellenzapfenzustände. Parameter $\Omega = 1$; $\kappa = \frac{1}{2}$; $\chi = \pi$.

Einfluss der Nachgiebigkeit

Einen ersten Eindruck über die Wirkung der Nachgiebigkeitseigenschaften auf den Schmierfilmdruck liefern die Abbildungen 4.9a und 4.9b. Beide zeigen das stationäre 2D-Druckfeld bei gleicher Winkelgeschwindigkeit, gleichem stationären Wellenzapfenzustand und gleichem Verhältnis von Radius zur Länge und zwar links für das Starrlager ($\beta = 0$), rechts für das Folienlager ($\beta = \frac{5}{2}$). Zu erkennen ist ein deutlich geringeres Druckmaximum des Folienlagers. Ergänzend dazu zeigt die Abbildung 4.9c den Druckverlauf in der Symmetrieebene des Lagers bei $Z = 0$ für verschiedene Nachgiebigkeitswerte β . In Abbildung 4.9d sind die zugehörigen Druckverläufe in axialer Richtung an den Stellen des maximalen und minimalen Drucks dargestellt. Die ermittelten Ergebnisse zeigen mit zunehmender Nachgiebigkeit der Folien bei unveränderlicher Wellenzapfenposition geringer ausgeprägte Extremwerte des Drucks. Dabei bleibt die Lage der Maxima nahezu unverändert, während sich die Position der Minima in Umfangsrichtung mit weicher werdenden Folien weiter von der Position des Maximums entfernt (siehe Abbildung 4.9c). Der Verlauf des Drucks in axialer Richtung bleibt grundsätzlich gleichartig. Abbildung 4.9e zeigt einen exemplarischen Druckverlauf für den Fall, dass sich der Wellenzapfenmittelpunkt auf einer Kreisbahn bewegt. Für die Winkelgeschwindigkeit des Mittelpunkts gilt im dargestellten Fall $\Gamma' \approx \frac{7}{10} > \frac{1}{2}$. Analog zur stationären Wellenzapfenlage verursacht die Nachgiebigkeit eine Verringerung der Druckspitzen. Gleiche Tendenzen sind im Falle einer rein radialen Bewegung des Wellenzapfenmittelpunkts bei gleichzeitiger Rotation der Welle zu beobachten (vergleiche Abbildung 4.9f).

Einfluss der Dämpfung

Grundsätzlich ist, wie bereits in Abschnitt 3.3 ausgeführt, die Modellierung des reibungsbedingten Dissipationsmechanismus durch eine rein radial wirkende, geschwindigkeitsproportionale Dämpfung stark vereinfachend und wenig präzise. Aus genannten Gründen wird sie aber dennoch im Modell berücksichtigt. Anhand einzelner Simulationsergebnisse wird versucht, deren Einfluss aufzuzeigen.

Abbildung 4.10 zeigt den zeitlichen Verlauf des Drucks verschiedener Gitterpunkte mit und ohne Berücksichtigung der Lagerdämpfung d_f . In Abbildung 4.10a ist eine dimensionslose Winkelgeschwindigkeit $\Omega = 1$ gewählt, in Abbildung 4.10b $\Omega = 10$. In beiden Fällen wurde für eine stationäre Wellenzapfenposition $X_A = 0,85$, $Y_A = 0$ der Druckaufbau im Schmierpalt aus (3.132) beziehungsweise (3.152) für die Anfangsbedingung (3.123) $P_{\tau_0} = 1$ per Zeitintegration ermittelt. In den gezeigten Fällen erreicht der Druck in allen dargestellten Gitterpunkten seinen stationären Wert nach ungefähr einer Wellenumdrehung ($\tau = 2\pi$) und zwar bei der niedrigeren Winkelgeschwindigkeit etwas früher als bei der höheren Winkelgeschwindigkeit. Die Dauer bis zum Erreichen der stationären Lösungen scheint unabhängig von der Strukturdämpfung zu sein. Lediglich der zeitliche Verlauf unterscheidet sich.

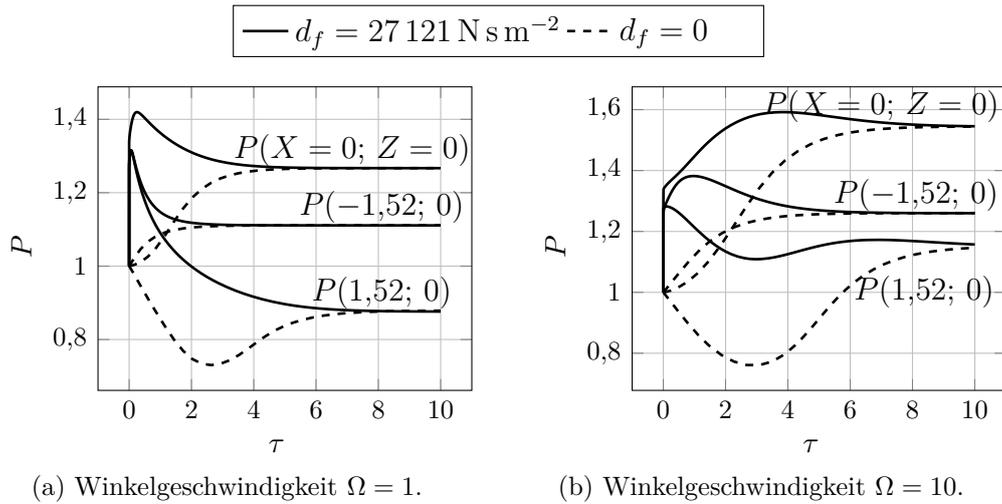


Abbildung 4.10: Einfluss des Dämpfungsparameters d_f des Strukturmodells auf die Ausbildung des Schmierfilmdrucks an ausgewählten Stellen des Fluidgebiets für ausgewählte Gitterpunkte als Funktion der Zeit. Parameter $X_A = 0,85$; $X'_A = Y_A = Y'_A = 0$; $\kappa = \frac{1}{2}$; $\beta = \frac{5}{2}$; $\chi = \pi$; $h_0 = 36 \mu\text{m}$; $L = 38,172 \text{ mm}$; $p_0 = 10^5 \text{ N m}^{-2}$.

Einfluss des Verhältnisses von Radius zur Länge

Der verbleibende explizit im dimensionslosen Lagermodell (3.108) und (3.117) auftretende Parameter ist das Verhältnis von Radius zur Länge κ (3.109). Wenngleich dieser Parameter unabhängig von den Folieneigenschaften, und sogar der Lagerart ist, wird auch dessen Einfluss nicht zuletzt aus Gründen der Vollständigkeit hier kurz diskutiert.

Abbildung 4.11 zeigt beispielhaft die stationäre Druckverteilung des Folienlagermodells bei stationärer Wellenzapfenposition für verschiedene Werte von κ . Im linken Teil der Abbildung ist der Schmierfilmdruck in der Symmetrieebene bei $Z = 0$ dargestellt, rechts daneben der Druck in Abhängigkeit der Axialkoordinate Z an der Stelle der Maxima und Minima. Qualitativ sind die ermittelten Verteilungen ähnlich. Grundsätzlich erhöht sich für die gewählten Parameterwerte mit steigender Lagerlänge der Maximaldruck. Gleichzeitig kommt es zu einer leichten Verschiebung des Minimums in positiver Koordinatenrichtung entlang des Umfangs.

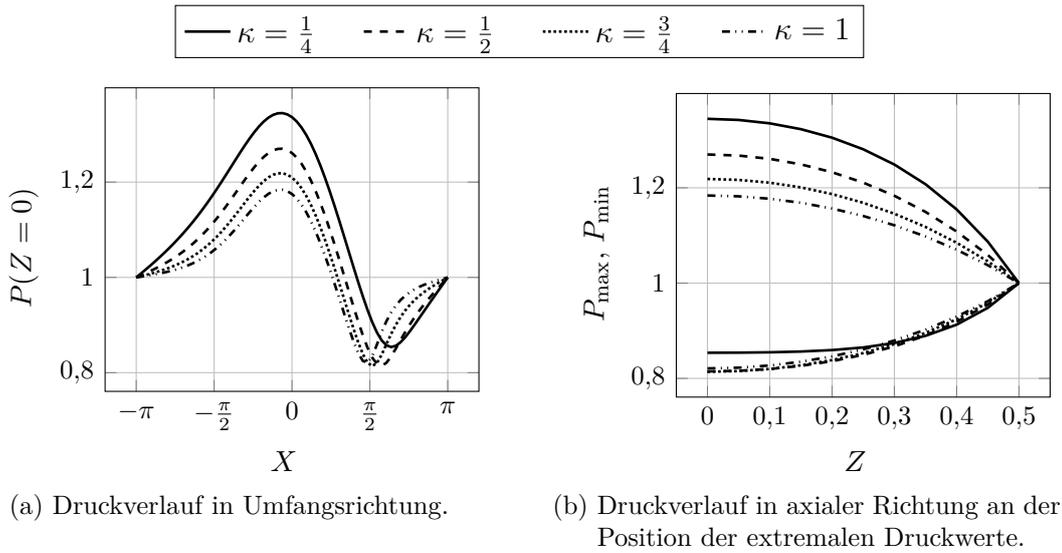


Abbildung 4.11: Einfluss des Verhältnisses von Lagerradius zu Lagerlänge κ auf die stationäre Druckverteilung. Parameter $X_A = 0,85$; $Y_A = X'_A = Y'_A = 0$; $\Omega = 1$; $\beta = \frac{5}{2}$.

4.3 Modellreduktion

Wird das entwickelte Folienlagermodell beispielsweise im Rahmen einer Zeitsimulation mit einem Rotormodell gekoppelt, so sind in jedem Zeitschritt neben den Gleichungen des Rotormodells $\ell_X(\ell_Z + 1)$ Lagermodellgleichungen zu lösen, (vergleiche (3.132)). Im Hinblick auf das angestrebte Ziel, der Erstellung eines Folienlagermodells, dass insbesondere rechenzeiteffizient ist, wird zur Verringerung der Lagermodellgleichungen im Folgenden eine Modellreduktion durchgeführt.

Galerkin-Verfahren zur Reduzierung der Modellgleichungen Motiviert durch die in den Abbildungen 4.9 und 4.11 dargestellten Druckverläufe wird angenommen, dass sich die einstellende Druckverteilung im Schmierfilm näherungsweise über einen Produktansatz der Form

$$P(\tau, X, Z) \approx P_a(\tau, X, Z) + 1 = \hat{P}_a(\tau, X) \tilde{P}_a(Z) + 1 \quad (4.86)$$

beschreiben lässt. Der Index a kennzeichnet die Approximation. Infolge des gewählten Ansatzes ergeben sich aus (3.119) – (3.122) homogene Randbedingungen

$$\hat{P}_a(\tau, X = -\chi) = 0, \quad (4.87)$$

$$\hat{P}_a(\tau, X = 2\pi - \chi) = 0, \quad (4.88)$$

$$\frac{\partial}{\partial Z} \tilde{P}_a(Z = 0) = 0, \quad (4.89)$$

$$\tilde{P}_a(Z = \frac{1}{2}) = 0. \quad (4.90)$$

Zur Reduktion der Gleichungen des Schmierfilmdrucks (3.132) sowie der diskreten Gitterpunkte und des Gebiets Ω_G wird das *Galerkin-Verfahren* genutzt. Dieses Verfahren ordnet sich in die *Methoden der gewichteten Residuen* ein und ist zum Beispiel in [86] oder [141] näher beschrieben.

Zunächst wird der nichtlineare Differentialoperator \mathcal{D}

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\{P\} = & \frac{\partial}{\partial X} \left[P(H+Q)^3 \frac{\partial P}{\partial X} \right] + \kappa^2 \frac{\partial}{\partial Z} \left[P(H+Q)^3 \frac{\partial P}{\partial Z} \right] \\ & - \Omega \left\{ \frac{\partial}{\partial X} [P(H+Q)] + 2 \frac{\partial}{\partial \tau} [P(H+Q)] \right\} \end{aligned} \quad (4.91)$$

eingeführt. Die dimensionslose Reynoldsgleichung (3.108) mit der unbekanntem, abhängigen Veränderlichen P lautet dann

$$\mathcal{D}\{P\} = 0. \quad (4.92)$$

Die Anwendung des Differentialoperators \mathcal{D} auf eine angenäherte Lösung P_a , zum Beispiel nach (4.86), wird diese Gleichung nicht exakt erfüllen. Vielmehr verbleibt ein Residuum

$$\mathcal{D}\{P_a\} = r_a \neq 0, \quad (4.93)$$

das hier im Allgemeinen sowohl orts- als auch zeitabhängig ist $r_a = r_a(\tau, X, Z)$.

Da die zuvor ermittelten Druckverläufe (siehe Abbildung 4.9d und 4.11b) in axialer Richtung einen qualitativ ähnlichen Verlauf bei unterschiedlichen Maximalwerten in der Lagermitte aufweisen, wird $\tilde{P}_a(Z)$ über eine Ansatzfunktion vorgegeben. Im Sinne der Methode der gewichteten Residuen wird nun gefordert, dass das zusätzlich mit einer Gewichtungsfunktion multiplizierte Residuum r_a im Mittel verschwindet. Das GALERKIN-Verfahren wählt als Gewichtungsfunktion die Ansatzfunktion selbst, sodass schließlich

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \tilde{P}_a r_a \, dZ = \int_0^{\frac{1}{2}} \tilde{P}_a \mathcal{D}\{P_a\} \, dZ = 0 \quad (4.94)$$

gefordert wird. Durch die Wahl einer Ansatzfunktion $\tilde{P}_a(Z)$ und Auswerten von (4.94) entfällt in der verbleibenden Druckgleichung des Schmierfilms die Abhängigkeit von der Axialkoordinate Z . Es verbleibt der zum Beispiel in der Lagermitte vorherrschende und noch unbekannt Druck in Form von $\hat{P}_a(\tau, X)$. Die somit reduzierte Reynoldsgleichung gilt folglich auf $\Omega_r = \{(X) | X = -\chi \dots 2\pi - \chi\}$.

Werden weiterhin die Diskretisierungen (3.125) und (3.127) beibehalten, so kann ein gegenüber (3.131) reduzierter Zustandsvektor

$$\mathbf{x}_{La} = \left[\hat{P}_1, \dots, \hat{P}_{\ell_x}, Q_1, \dots, Q_{\ell_x} \right]^T, \quad \mathbf{x}_L \in \mathbb{R}^{2\ell_x} \quad (4.95)$$

eingeführt werden. Die Größen \hat{P}_1 bis \hat{P}_{ℓ_x} kennzeichnen darin die unbekanntem diskreten Druckwerte, hier in der Lagermitte bei $Z = 0$ (vergleiche Abbildung 3.10). Auch das Lagermodell beschreibende Differentialgleichungssystem

$$\mathbf{x}'_{La} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{La}), \quad \mathbf{f}_a \in \mathbb{R}^{2\ell_x} \quad (4.96)$$

reduziert sich in gleichem Maß, sodass aufgrund der verringerten Gleichungsanzahl eine Reduzierung der Rechenzeit erwartet werden kann.

Bei der Wahl der Ansatzfunktion $\tilde{P}_a(Z)$ ist die Erfüllung der Randbedingungen (4.89) und (4.90) gefordert. Häufig werden für die Ansatzfunktion Reihenansätze gewählt. Sofern die Reihe ein vollständiges Funktionensystem beinhalten, ist davon auszugehen, dass mit zunehmender Anzahl an Reihengliedern die Approximationsgüte zunimmt [86]. Allerdings steigt gleichzeitig der Aufwand. Im vorliegenden Fall vergrößert sich mit jedem zusätzlichen Reihenglied die Größe des reduzierten Zustandsvektors und die Anzahl an Gleichungen um die Zahl der Gitterpunkte in Umfangsrichtung ℓ_X .

Gewählte Ansatzfunktion Zu den ersten Autoren die das GALERKIN-Verfahren auf die Reynoldsgleichung für ideale Gase angewendet haben, gehören CHENG und PAN. In [30] lösen die beiden Autoren im Kontext zylindrischer Starrlager die Druckgleichung über einen mehrgliedrigen Reihenansatz mit trigonometrischen Funktionen in axialer (\vec{e}_z^2) und Umfangsrichtung (\vec{e}_x^2). Diese Idee wird von PHAM und BONELLO in [137] beziehungsweise [16] aufgegriffen und auf die hier thematisierten Folienlager angewendet. Nach Kenntnis des Autors der vorliegenden Arbeit wurde die oben vorgestellte *Reduktionsmethode* im Kontext der Reynoldsgleichung für ideale Gase erstmalig in einer eigenen Veröffentlichung [11] beschrieben. Die Wahl der Reduktionsmethode anstelle einer vollständigen Lösung des Modells mittels des GALERKIN-Verfahrens ist motiviert in der Erwartung einer verbesserten Approximationsgüte bei mindestens gleicher Rechenzeiteffizienz. Aus letztgenanntem Grund wird ausschließlich ein eingliedriger Ansatz für \tilde{P}_a verwendet. Um dennoch eine hohe Approximationsgüte zu erreichen, wird eine bestmögliche Wahl der Ansatzfunktion angestrebt.

Im Rahmen der Schmierfilmtheorie für inkompressible Fluide ist bei Annahme eines kurzen Radialgleitlagers eine analytische Lösung der Druckverteilung ermittelbar, siehe zum Beispiel [169]. Diese sogenannte *Kurzlagerlösung* ist zudem ein Produkt zweier Funktionen, wobei eine Funktion von der Umfangskoordinate X , die andere von der Axialkoordinate Z abhängt. Konkret wird der Druckverlauf in axialer (\vec{e}_z^2) Richtung über eine quadratische Funktion beschrieben. Im Hinblick auf eine möglichst einfache, aber zugleich möglichst optimale Wahl der Ansatzfunktion wird eine Erweiterung dieser Funktion in Form von

$$\begin{aligned}\tilde{P}_a(Z) &= (1 - w_a) \left[1 - (2Z)^{2i_a} \right] + w_a \left[1 - (2Z)^{2(i_a+1)} \right] \\ &= 1 + (2Z)^{2i_a} \left[w_a(1 - 4Z^2) - 1 \right]\end{aligned}\tag{4.97}$$

vorgeschlagen. Darin sind i_a und w_a zwei Parameter, die sich aus einem Parameter m_a über

$$i_a = \lfloor m_a \rfloor,\tag{4.98}$$

$$w_a = m_a - i_a\tag{4.99}$$

ermitteln lassen. Für den Parameter wird $m_a \geq 1, m_a \in \mathbb{R}$ vorausgesetzt. Die *Gaußklammern* $\lfloor \cdot \rfloor$ in (4.98) kennzeichnen die Abrundungsfunktion. Die Formulierung (4.97) mit

Zustand	X_A	Y_A	X'_A	Y'_A
Z1	0,6	0,6	-0,4	0,4
Z2	0,4	-0,4	0,1	0,1
Z3	0,2	0,8	0,3	0,4
Z4	0	-0,7	0,8	-0,2
Z5	0,9	0	0	0

Tabelle 4.2: Verschiedene, allgemeine Wellenzapfenzustände.

(4.98) und (4.99) ermöglicht einen kontinuierlichen Übergang zwischen zwei Termen eines Polynoms mit geraden, ganzzahligen Potenzen ($2i_a$), wobei w_a als Wichtungsfaktor aufgefasst werden kann.

Mit der Ansatzfunktion (4.86) ergibt sich unter Verwendung von (4.97) für den axial gemittelten Druck (3.116) das Ergebnis

$$\bar{P}_a = \hat{P}_a(\tau, X) \frac{4i_a^2 + 6i_a + 2w_a}{4i_a^2 + 8i_a + 3} + 1. \quad (4.100)$$

Anschließend lässt sich die dimensionslose Lagerkraft (3.133) über

$$\begin{aligned} \vec{f}_a = & - \frac{4i_a^2 + 6i_a + 2w_a}{4i_a^2 + 8i_a + 3} \left\{ \left[\int_{-\chi}^{2\pi-\chi} \hat{P}_a(\tau, X) \cos(X) \, dX \right] \vec{e}_x^0 \right. \\ & \left. + \left[\int_{-\chi}^{2\pi-\chi} \hat{P}_a(\tau, X) \sin(X) \, dX \right] \vec{e}_y^0 \right\} \end{aligned} \quad (4.101)$$

ermitteln.

Identifizierung und Validierung der optimalen Ansatzfunktion Die Identifikation des optimalen Ansatzparameters m_a erfolgt anhand eines Abgleichs mit den 2D-Lösungen des Ausgangsmodells (3.108) und (3.117). In Anlehnung an (4.85) wird ein Fehlermaß

$$\epsilon_{\text{red}} = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{1/2} \left(\frac{P - P_a}{P} \right)^2 \, dZ \, dX} \quad (4.102)$$

eingeführt, auf dessen Basis die Qualität des reduzierten Modells beurteilt wird. Abbildung 4.12 zeigt den Wert des Ansatzparameter m_a bei minimalem Fehler ϵ_{red} für verschiedene Wellenzapfenzustände und Winkelgeschwindigkeiten und zwar in der ersten Zeile (Abbildung 4.12a und 4.12b) für das Modell des zylindrischen Starrlagers, in der zweiten Zeile (Abbildung 4.12c und 4.12d) für das Folienlagermodell. In der linken Spalte der Abbildung 4.12 ist der Parameter m_a für den Fall einer stationären Wellenzapfenlage in Abhängigkeit verschiedener Positionen X_A bei $Y_A = X'_A = Y'_A = 0$ dargestellt, auf der rechten Seite für vier verschiedene, willkürlich ausgewählte, allgemeine Wellenzapfenzustände, die in Tabelle 4.2 spezifiziert sind.

Für das Starrlager liegt bei stationären Wellenzapfenpositionen der optimale Ansatzparameter im Bereich $m_a \approx 1,5 \pm 0,3$ (siehe Abbildung 4.12a), für das Folienlager im Bereich

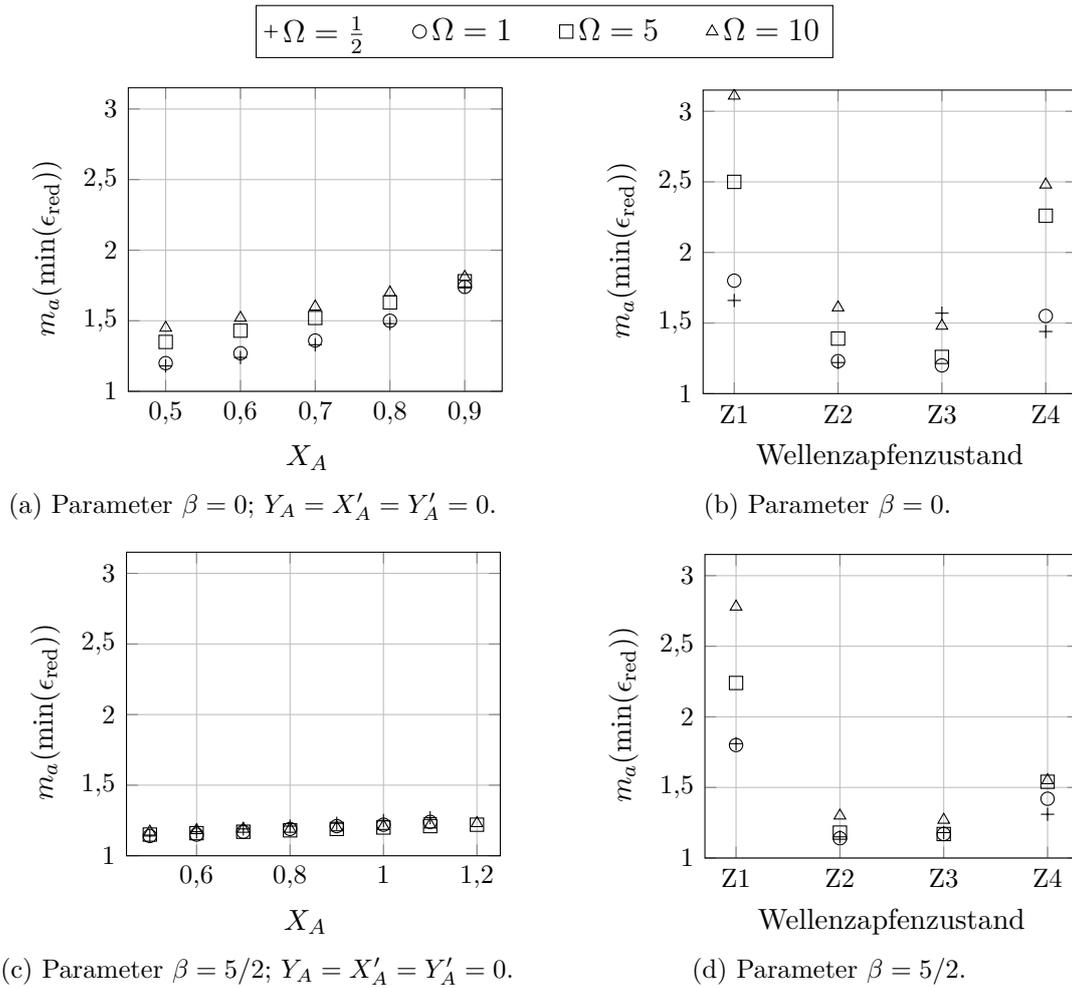


Abbildung 4.12: Optimaler Parameter m_a für verschiedene Winkelgeschwindigkeiten Ω und Wellenzapfenzustände. Parameter $\kappa = 1/2$; $d_f = 0$; $\chi = \pi$. Wellenzapfenzustände Z1 – Z4 nach Tabelle 4.2.

$m_a \approx 1,2 \pm 0,07$ (siehe Abbildung 4.12c). Der größere Wert des Starrlagers ist durch die höheren Druckmaxima begründet, die sich bei gleichen Wellenzapfenzuständen und Drehzahlen gegenüber dem Folienlager ausbilden. Bei den weiteren allgemein gewählten Zuständen Z1–Z4 liegen die Werte tendenziell höher und weisen eine größere Streuung auf. Ausgehend von den gezeigten Ergebnissen wird für die nachfolgenden Studien ein Ansatzparameter von $m_a = 1,4$ gewählt und zwar aus Gründen der Konsistenz sowohl für das Starr- als auch das Folienlager.

Die Güte der Approximation bei der genannten Parameterwahl zeigt die linke Spalte der Abbildung 4.13. Dargestellt ist der Fehler ϵ_{red} nach (4.102) für die in Tabelle 4.2 definierten Zustände Z1–Z5. In der rechten Spalte sind die zugehörigen Verhältnisse der Rechenzeiten des reduzierten Modells zum Ausgangsmodell aufgetragen. Die erste Zeile der Abbildung zeigt die Ergebnisse für das Modell des Starrlagers, die zweite Zeile für das Folienlagermodell.

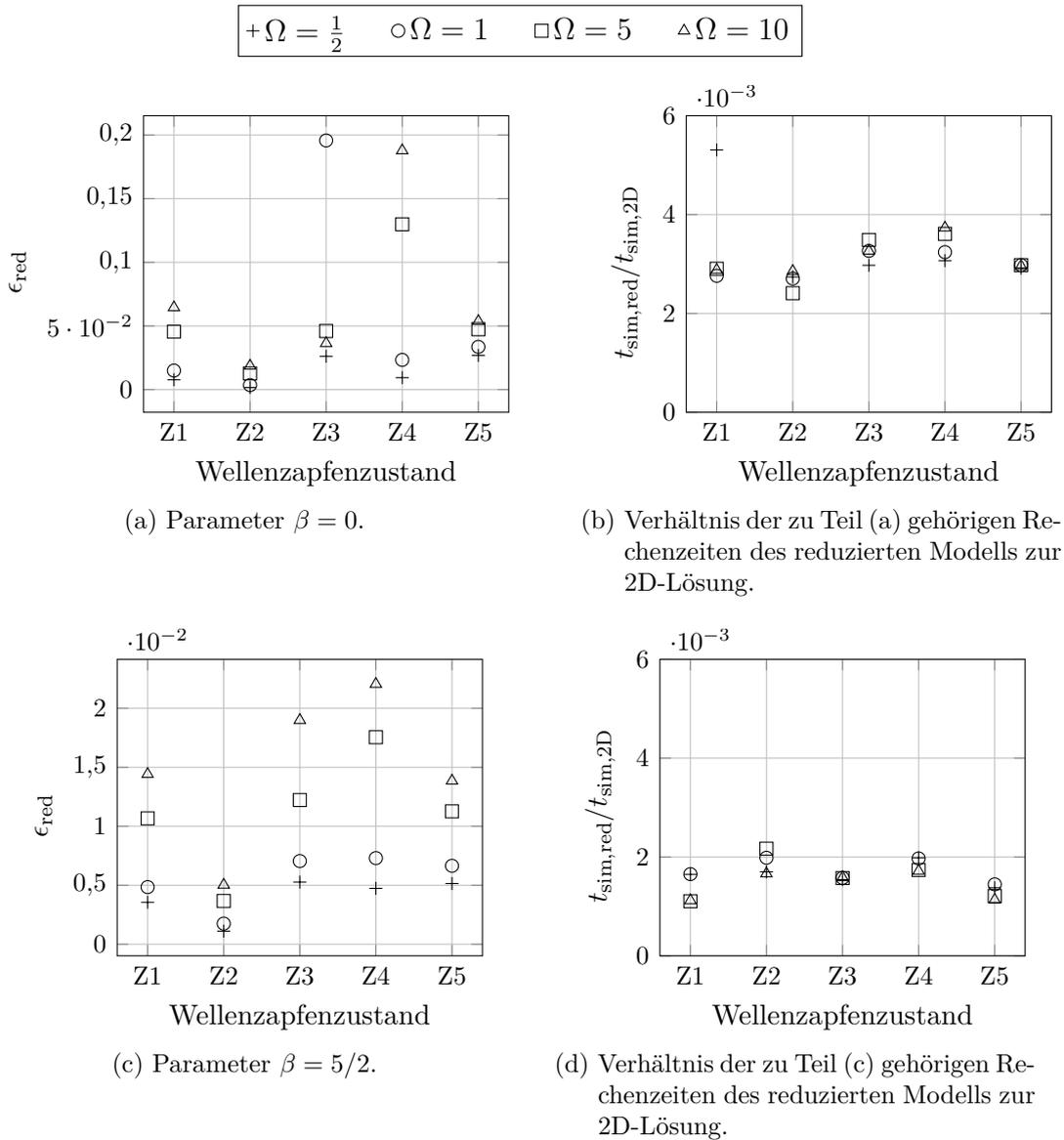


Abbildung 4.13: Fehler und Rechenzeitverhältnis durch Anwenden der Galerkin-Reduktion. Parameter $\kappa = 1/2$; $\delta_f = 0$; $\chi = \pi$; $m_a = 1,4$. Wellenzapfenzustände Z1 – Z5 nach Tabelle 4.2.

Beim Lager mit starrer Zylindergeometrie fallen zunächst drei Kombinationen von vorgegebenen Wellenzapfenzuständen und Winkelgeschwindigkeiten mit deutlich größerem Fehler ϵ_{red} als die übrigen auf. In diesen drei Fällen konvergiert bei der Ermittlung der Referenzlösung des 2D-Problems das numerische Verfahren nicht innerhalb der vorgegebenen Toleranzen. Zur weiteren Beurteilung ist deshalb in Abbildung 4.14a und 4.14b der Vergleich der beiden Druckverläufe für den Fall des größten auftretenden Fehlers dargestellt. Vorbehaltlich des Konvergenzproblems liegt jedoch eine zufriedenstellende Übereinstimmung vor.

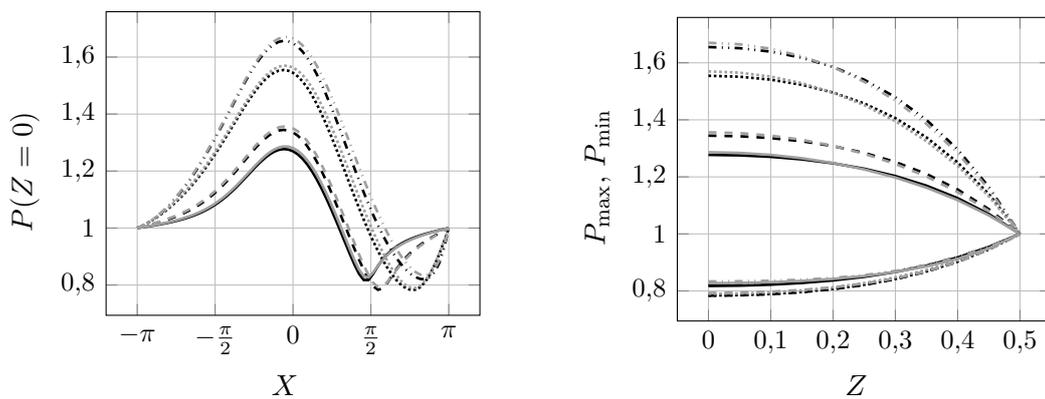
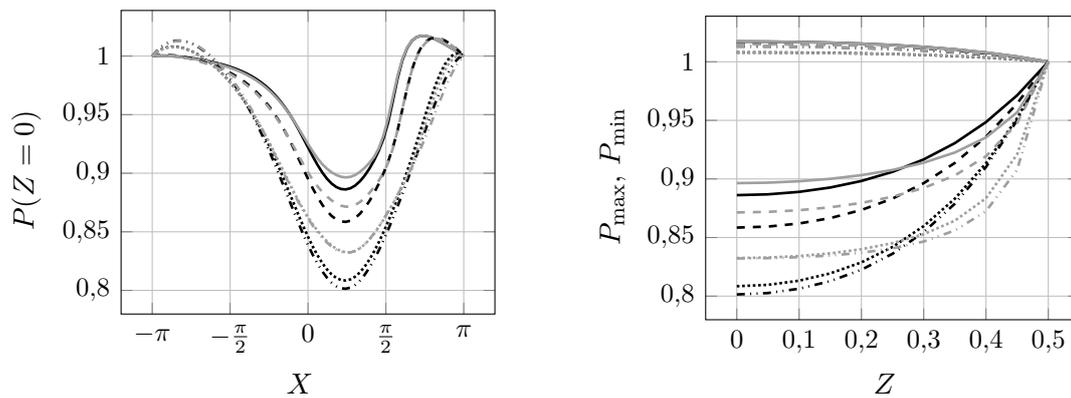
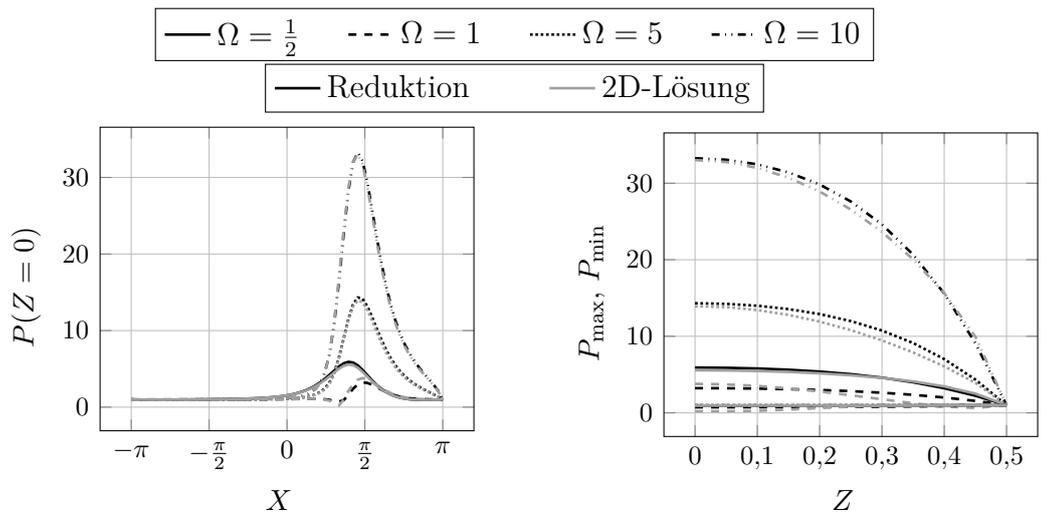


Abbildung 4.14: Vergleich der stationären Druckverteilung bei Anwendung der Reduktionsmethode für $m_a = 1,4$ und der 2D-Lösung für die Wellenzapfenzustände nach Tabelle 4.2.

Verglichen mit dem Starrlager sind die Fehler bei Berücksichtigung der Verformbarkeit der Lagerwand für dieselben Wellenzapfenzuständen etwas kleiner (siehe Abbildung 4.13c). Auch für diesen Fall sind ergänzend in den Abbildungen 4.14c–f für zwei Wellenzapfenzustände und verschiedene Winkelgeschwindigkeiten die Druckverteilungen sowohl des 2D-Problems als auch bei Anwendung der Reduktionsmethode dargestellt. Der Zustand Z1 in Abbildung 4.14c und 4.14d wurde gewählt, da hier der gewählte Ansatzparameter m_a am deutlichsten vom numerisch ermittelten Optimalwert abweicht (siehe Abbildung 4.12d). Es ist eine sehr gute Approximation für Drücke größer als der Umgebungsdruck ($P > 1$) und eine verhältnismäßig schlechte Näherung im Unterdruckbereich ($P < 1$) festzustellen. Da letzter hier dominiert, erklärt dies den größeren Fehler. Trotz der erkennbaren Abweichung der beiden Lösungen, insbesondere im Bereich des Unterdrucks, ist zu erwarten, dass der Fehler bei den über die Lagerbreite gemittelten Lagerkräften geringer ausfällt. Letztendlich ist davon auszugehen, dass die unter Anwendung der Reduktionsmethode ermittelten Lagerkräfte eine gute Näherung darstellen.

Der substanzielle Vorteil des reduzierten Lagermodells erschließt sich aus Abbildung 4.13b und 4.13d. Für die gewählte Gitterauflösung $\ell_Z = 11$, $\ell_X = 76$ ergibt sich bei Vorgabe einer äquivalenten, konstanten Startlösung für den Lösungsalgorithmus der Druckverteilung eine Rechenzeitersparnis von ca. 99,5%.

5 Starrer Rotor in Gaslagern

Nachdem in Kapitel 4 allein das Lagermodell untersucht wurde, erfolgt jetzt die Kopplung mit einem Rotormodell. Als denkbar einfachstes Modell wird hier ein starrer, horizontal und symmetrisch gelagerter Rotor gewählt, um möglichst isoliert den Einfluss der Lager auf das dynamische Verhalten des Rotors zu untersuchen. Dies erfolgt zunächst für zylindrische Starrlager, anschließend für die hier thematisierten Folienlager. Im Rahmen einer systematischen Modellerweiterung wird in beiden Fällen zunächst der Rotor ohne, anschließend mit statischer Unwucht diskutiert.

5.1 Modell des starren Rotors

In Abbildung 5.1a ist das Rotormodell skizziert. Es wird angenommen, dass der Rotor der Masse M starr, seine Rotationsachse senkrecht zur Erdbeschleunigung ausgerichtet ist und dieser in zwei identischen Lagern betrieben wird. Ferner wird angenommen, dass sich der Rotorschwerpunkt S in einer Ebene bewegt, die durch die beiden Basisvektoren \vec{e}_x^0 und \vec{e}_y^0 definiert ist und sich im gleichen Abstand ℓ zu den beiden Lagern befindet. Aufgrund der Symmetrie des Problems ist folglich eine ebene Betrachtung ausreichend. Die Symmetrie- und Rotationsachse des Rotors wird durch den Punkt A gekennzeichnet. Im Allgemeinen fällt der Schwerpunkt S nicht mit der Symmetrieachse zusammen. Der Abstand zwischen A und S wird mit e_S bezeichnet, sodass der Rotor, sofern $e_S \neq 0$ ist, eine statische Unwucht aufweist. Der Winkel φ_r gibt die Verdrehung des Rotors an.

Abbildung 5.1b zeigt den Freischnitt des Rotors und die eingeführten Koordinaten. Die eingezeichneten Koordinatensysteme wurden bereits in Abschnitt 3.1 definiert. Da die Verdrehung des Rotors φ_r vorgegeben wird, weist das System zwei Freiheitsgrade auf. Zur Beschreibung des Systemverhaltens werden die kartesischen Koordinaten x_A, y_A des Wellenmittelpunkts A gewählt. Zwischen diesen und den Koordinaten des Schwerpunkts S gilt der Zusammenhang

$$x_S = x_A + e_S \cos \varphi_r, \quad (5.1)$$

$$y_S = y_A + e_S \sin \varphi_r. \quad (5.2)$$

Die am Rotor angreifenden Kräfte sind die in positiver \vec{e}_x^0 -Richtung wirkende Gewichtskraft G und die sich aus dem Schmierfilmdruck ergebende Lagerkraft \vec{F} , siehe (3.133). Die Bilanzierung der Kräfte liefert die Bewegungsgleichungen des Rotors

$$M\ddot{x}_S + 2F_x = Mg, \quad (5.3)$$

$$M\ddot{y}_S + 2F_y = 0. \quad (5.4)$$

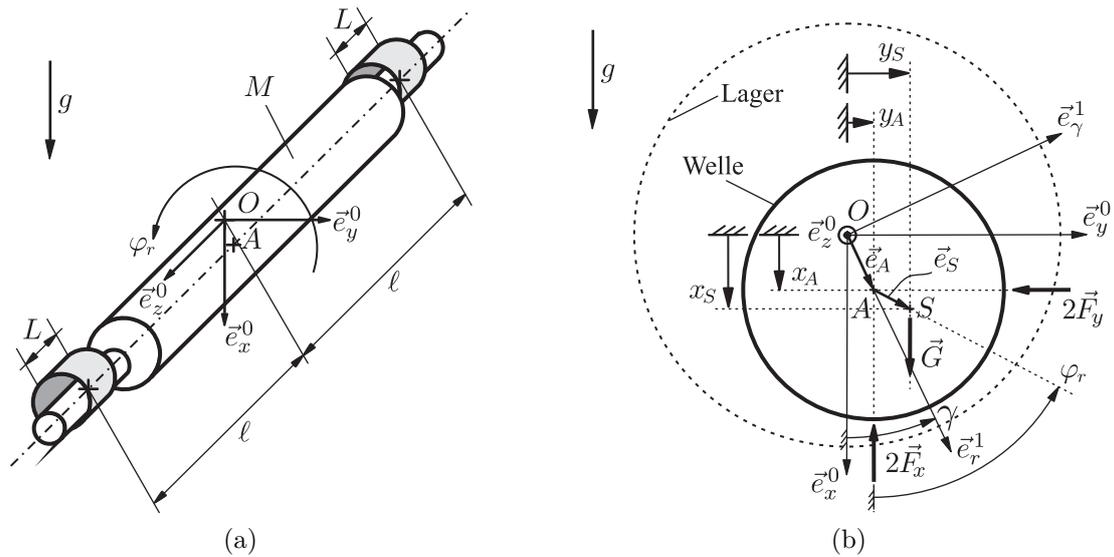


Abbildung 5.1: (a) Skizze und kinematische Größen des Rotormodells; (b) Freischnitt des Rotors und weitere kinematische Größen.

Ersetzen der Schwerpunktkoordinaten x_S und y_S nach (5.1) und (5.2) führt auf die Bewegungsgleichungen

$$M\ddot{x}_A + 2F_x = Me_S(\dot{\varphi}_r^2 \cos \varphi_r + \ddot{\varphi}_r \sin \varphi_r) + Mg, \quad (5.5)$$

$$M\ddot{y}_A + 2F_y = Me_S(\dot{\varphi}_r^2 \sin \varphi_r - \ddot{\varphi}_r \cos \varphi_r) \quad (5.6)$$

in den Koordinaten des Rotormittelpunkts A , wobei die Lagerkräfte F_x und F_y wie in Kapitel 3 beschrieben, nichtlineare Funktionen abhängig von der Lage und der Geschwindigkeit des Punkts A sind:

$$F_i = F_i(x_A, y_A, \dot{x}_A, \dot{y}_A, t), \quad i = x, y. \quad (5.7)$$

Für den Sonderfall einer vorgegebenen Drehung des Rotors mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω gilt

$$\varphi_r = \omega t, \quad \dot{\varphi}_r = \omega, \quad \ddot{\varphi}_r = 0. \quad (5.8)$$

Die Bewegungsgleichungen (5.5), (5.6) lauten in diesem Fall

$$M\ddot{x}_A + 2F_x = Me_S\omega^2 \cos(\omega t) + Mg, \quad (5.9)$$

$$M\ddot{y}_A + 2F_y = Me_S\omega^2 \sin(\omega t). \quad (5.10)$$

Dimensionslose Form des Rotormodells

Entsprechend der skalierten und dimensionslosen Formulierung des Lagermodells aus Abschnitt 3.4 wird auch das Rotormodell in eine dimensionslose Form überführt. Im Sinne

Symbol	Bezeichnung	Wert
M	Rotormasse	1 kg
e_S	Schwerpunktexzentrizität	$e_{S1} = 0,5 \mu\text{m}$, $e_{S2} = 5 \mu\text{m}$
Symbol	Definition	
ε	e_S/h_0	
ξ	$2RLp_0/M/h_0/\omega^2$	
σ	$g/h_0/\omega^2$	

Tabelle 5.1: Modellparameter des starren Rotors und typische, in der Arbeit verwendete numerische Werte.

eines konsistenten Gesamtmodells werden die Skalierungen (3.61) und (3.111) für die abhängigen und unabhängigen Veränderlichen des Rotormodells wieder aufgegriffen, ebenso die Skalierung der Winkelgeschwindigkeit nach (3.107). Auch die dimensionslose Lagerkraft wurden in (3.133) bereits eingeführt. Letztlich ergeben sich für den starren Rotor bei konstanter Winkelgeschwindigkeit (5.9) und (5.10) die dimensionslosen Bewegungsgleichungen

$$X''_A + \xi f_X = \varepsilon_S \cos \tau + \sigma, \quad (5.11)$$

$$Y''_A + \xi f_Y = \varepsilon_S \sin \tau. \quad (5.12)$$

In den beiden Gleichungen treten der dimensionslose Abstand des Schwerpunkts von der Drehachse

$$\varepsilon_S = \frac{e_S}{h_0} \quad (5.13)$$

sowie die dimensionslosen Parameter

$$\xi = \frac{2RLp_0}{Mh_0\omega^2}, \quad \sigma = \frac{g}{h_0\omega^2}, \quad (5.14)$$

auf. Der Parameter σ ist als dimensionsloser Lastparameter aufzufassen, ξ charakterisiert die systemabhängige Lagerkraft.

Parameterwerte des Rotormodells

Die in Verbindung mit aerodynamischen Luftlagern experimentell eingesetzten Rotoren variieren wider Erwarten mit der Größe der Lager (siehe Abschnitt 4.1). Für Lager der gemäß Tabelle 4.1 angegebenen Größenordnung sind für Rotoren der Masse $M \approx 1-2$ kg in der Literatur Messergebnisse dokumentiert (vergleiche [6, 7, 62, 149, 150, 157]), sodass für die nachfolgenden numerischen Studien vorrangig eine Rotormasse von $M = 1$ kg gewählt wird.

Real eingesetzte Rotoren besitzen trotz fortschrittlicher Fertigungsmethoden und Montageprozesse sowie modernen Auswuchtmaschinen üblicherweise immer eine kleine Restunwucht. DIN ISO 1940 definiert verschiedene Auswucht-Gütestufen und gibt zu den

einzelnen Stufen einige Beispielanwendungen. Auf Basis dieser Norm werden für die Simulationsstudien zwei verschiedene Unwuchten gewählt und so deren Einfluss auf das Betriebsverhalten des luftgelagerten Rotors untersucht. Als kleine Unwucht wird $e_{S1} = 0,5 \mu\text{m}$ angenommen, sodass bis zu einer Rotordrehzahl von $n = 50\,000 \text{ min}^{-1}$ die Gütestufe G2,5 eingehalten wird. Der im Rahmen der Arbeit gewählte große Abstand des Rotorschwerpunkts S von der Drehachse des Rotors beträgt $e_{S2} = 5 \mu\text{m}$. Tabelle 5.1 fasst alle Modellparameter und die typischen, im Rahmen der Arbeit verwendeten Werte zusammen.

5.2 Gekoppeltes Rotor-Lager-Modell

Für die numerische Analyse des Gesamtmodells wird das dimensionslose Rotormodell, beschrieben durch die beiden Differentialgleichungen (5.11) und (5.12), in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\mathbf{x}'_{Rs} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{Rs}), \quad \mathbf{f} \in \mathbb{R}^4 \quad (5.15)$$

überführt. Im darin auftretenden Zustandsvektor

$$\mathbf{x}_{Rs} = [X_A, Y_A, X'_A, Y'_A]^T \quad (5.16)$$

sind die Lagekoordinaten und Geschwindigkeiten des Rotorpunkts A zusammengefasst. Für die Kopplung des Rotormodells (5.15) mit dem reduzierten Lagermodell (4.96) kann nun ein Gesamtzustandsvektor

$$\mathbf{x}_{LRs} = [\mathbf{x}_{Rs}^T, \mathbf{x}_{La}^T]^T, \quad \mathbf{x}_{LRs} \in \mathbb{R}^{2\ell x+4} \quad (5.17)$$

eingeführt werden, mit dem sich das Gesamtmodell als nichtlineares gekoppeltes System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\mathbf{x}'_{LRs} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{LRs}), \quad \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{2\ell x+4} \quad (5.18)$$

formulieren lässt. Selbstredend kann auf gleiche Weise auch das nicht reduzierte 2D-Modell (3.132) bei einer entsprechenden Vergrößerung des Zustandsvektors und einer Erhöhung der Gleichungsanzahl oder die reduzierten Lagermodelle aus Abschnitt 3.5 mit dem Rotormodell gekoppelt werden.

Bei der Analyse des gekoppelten Rotor-Lager-Modells zeigt sich der Nutzen der dimensionslosen Modellbeschreibung. Durch die Skalierung der abhängigen Veränderlichen haben alle Einträge des Gesamtzustandsvektors gleiche Größenordnung. Dies erweist sich insbesondere bei der numerischen Lösung der Systemgleichungen als vorteilhaft. Auch die Anzahl der Modellparameter ist durch die Überführung in eine einheitenfreie Form reduziert und die Abhängigkeit des Modellverhaltens von den Systemparametern verallgemeinert. Allerdings ist der Transfer von Zusammenhängen in dimensionsloser Darstellung in dimensionsbehaftete Kennzahlen und Größen mit zusätzlichem Aufwand verbunden. Im Sinne einer einfacheren Interpretierbarkeit des Modellverhaltens und um die Vergleichbarkeit mit den Ergebnissen aus Kapitel 6, innerhalb dem teilweise anders definierte dimensionslose Kennzahlen auftreten, zu gewährleisten, werden die folgenden Ergebnisse häufig in dimensionsbehafteter Form angegeben.

5.3 Diskussion des starren Rotors in Starrlagern

Vorbemerkung Auf eine Einführung in die theoretischen Grundlagen dynamischer Systeme wird im Rahmen der Arbeit verzichtet. Für die entsprechenden Begrifflichkeiten, Definitionen und Systemeigenschaften wird der Leser beispielsweise auf die klassischen Werke von GUCKENHEIMER und HOLMES [57], WIGGINS [178] oder PERKO [136] verwiesen. Darüber hinaus empfehlenswert sind die Bücher von JORDAN und SMITH [84], GLENDINNING [51] sowie von MARX und VOGT [127]. Auch in der Dissertation von BOYACI [19] über die Dynamik von hochtourigen Rotoren in ölgeschmierten Gleitlagern ist eine Erklärung der wichtigsten Begrifflichkeiten und Grundlagen zu finden. Die für die Analyse der gekoppelten Rotor-Lager-Systeme zugrunde liegenden Kriterien werden an geeigneter Stelle kurz aufgeführt.

Aufgrund der großen Anzahl von gekoppelten nichtlinearen Modellgleichungen werden diese im Folgenden ausschließlich mittels numerischer Verfahren analysiert. Dazu wird die Software Matlab sowie für die Bifurkationsanalyse die Matlab-Toolbox MatCont [38] verwendet. Neben den frei verfügbaren Dokumentationen existiert von einem der Entwickler der Toolbox KUZNETSOV auch ein Buch [103] über die zugrunde liegende Theorie, die sich ebenfalls in die Reihe der obengenannten Bücher einordnen lässt.

5.3.1 Unwuchtfreier Fall

Ausgangspunkt der Analyse ist der in Starrlagern betriebene Rotor. Zunächst wird angenommen, dass sich der Schwerpunkt S auf der Symmetrieachse des Rotors befindet. Der Rotor ist damit ideal gewuchtet, und es gilt $e_S = \varepsilon_S = 0$. Somit entfällt bei einer konstanten Winkelgeschwindigkeit beziehungsweise Drehzahl des Rotors die harmonische Anregung in (5.9) und (5.10) beziehungsweise (5.11) und (5.12). Das nichtlineare Vektorfeld $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{LRs})$ aus (5.18) ist damit zeitunabhängig, sodass ein *autonomes System* vorliegt.

Gleichgewichtslösungen Zunächst erfolgt die Ermittlung von Gleichgewichtslösungen \mathbf{x}_{LRs0} des Systems (5.18). Sie genügen der Bedingung

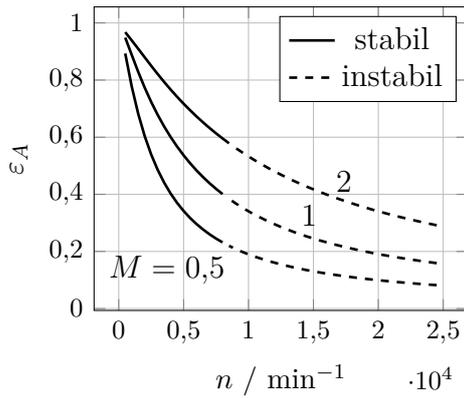
$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{LRs0}) \quad (5.19)$$

und ergeben sich somit aus der Lösung des nichtlinearen, algebraischen Gleichungssystems (5.19). Rückschlüsse auf die Stabilität der Gleichgewichtslösung liefern die Eigenwerte λ_i , $i = 1, 2, \dots, 2\ell_X + 4$ der Jacobimatrix, ausgewertet für die zuvor ermittelte Gleichgewichtslösung

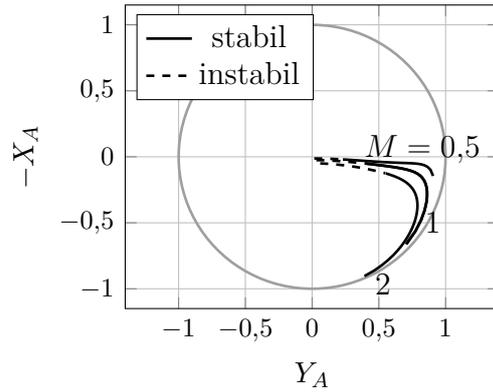
$$\mathbf{J} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_{LRs})}{\partial \mathbf{x}_{LRs}} \right|_{\mathbf{x}_{LRs} = \mathbf{x}_{LRs0}} = D_x \mathbf{f}(\mathbf{x}_{LRs0}). \quad (5.20)$$

Sind die Realteile aller Eigenwerte kleiner null ($\text{Re}(\lambda_i) < 0$, $i = 1, 2, \dots, 2\ell_X + 4$), so ist die Gleichgewichtslage stabil. Ist der Realteil eines Eigenwerts größer null, so ist die Gleichgewichtslage instabil.

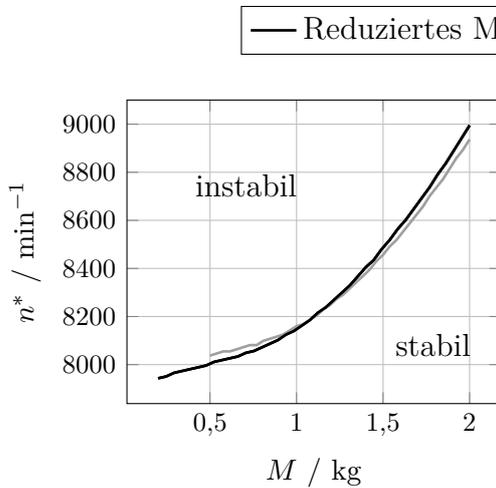
In Abbildung 5.2 sind einige Ergebnisse der Gleichgewichtslösungen des gekoppelten Rotor-Lager-Modells dargestellt. Abbildung 5.2a zeigt die dimensionslose Exzentrizität ε_A des



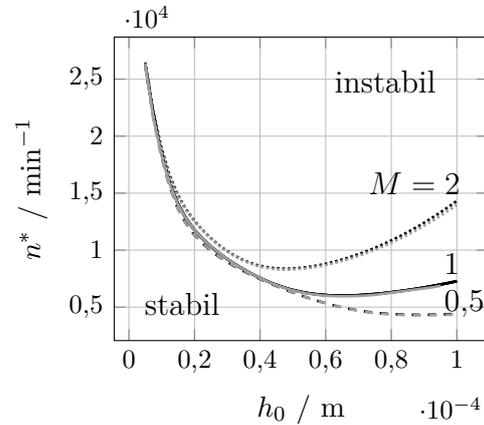
(a) Exzentrizität der Gleichgewichtslage. M in kg.



(b) Verlagerungsbahnen. M in kg.



(c) Stabilitätsgrenze der Gleichgewichtslage.



(d) Stabilitätsgrenze der Gleichgewichtslage. M in kg.

Abbildung 5.2: Analyse der Gleichgewichtslagen und deren Stabilitätsgrenze eines starren, unwuchtfreien Rotors in zylindrischen Starrlagern. Parameter $m_a = 1,4$; $e_S = 0$; R, L, h_{01}, p_0, μ_L nach Tabelle 4.1.

Wellenzapfen- und Rotormittelpunkts A in Abhängigkeit der Drehzahl für verschiedene Rotormassen M . Daneben sind in der Abbildung 5.2b die dazugehörigen sogenannten *Verlagerungsbahnen* dargestellt. Die abgebildeten Kurven zeigen die kartesischen Koordinaten X_A, Y_A der Gleichgewichtslagen, wobei der Kurvenparameter die Rotordrehzahl ist. In den Darstellungen ist zu erkennen, dass die Exzentrizität des Mittelpunkts A mit steigender Rotordrehzahl abnimmt. Die Bahn, die A dabei durchläuft, beginnt insbesondere für den schweren Rotor der Masse $M = 2$ kg in der Nähe der unteren, rein vertikal ausgelenkten Lage und durchläuft mit steigender Drehzahl einen annähernd halbkreisförmigen Bogen in Richtung des Zentrums. Alle drei gezeigten Kurven haben gemeinsam, dass die Gleichgewichtslagen für niedrige Drehzahlen stabil und oberhalb einer Grenzdrehzahl n^* instabil

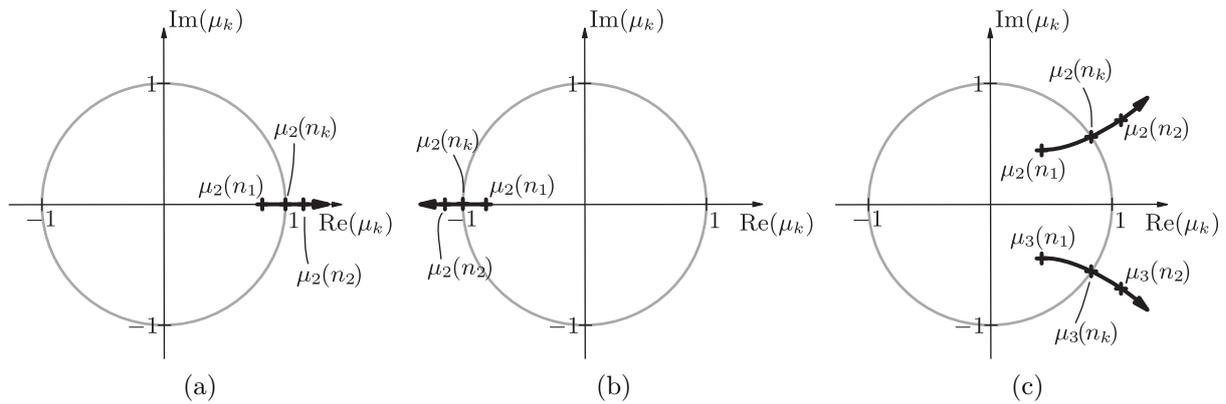


Abbildung 5.3: Charakteristische Floquet-Multiplikatoren bei (a) Sattelknoten-Bifurkation, (b) Flip-Bifurkation und (c) Torus-Bifurkation in Abhängigkeit des Bifurkationsparameters, der Drehzahl n . Es gilt $n_1 < n_k < n_2$.

sind. Je leichter der Rotor ist, desto näher befindet sich der Rotormittelpunkt bei der Grenzdrehzahl dem Zentrum.

Abbildung 5.2c zeigt die Stabilitätsgrenze in Abhängigkeit der Rotormasse. Es ist zu erkennen, dass sich die Grenzdrehzahl für die hier untersuchten Bereiche mit steigender Rotormasse erhöht. Gleichzeitig bildet sich der tragende Schmierfilm mit zunehmender Rotormasse erst bei höheren Drehzahlen aus [147].

Den Einfluss des Lagerspiels h_0 auf die Stabilitätsgrenze n^* veranschaulicht Abbildung 5.2d. Die höchste Grenzdrehzahl ergibt sich bei sehr geringen Lagerspielen. Außerdem verringert sich bei kleinen Werten von h_0 der Einfluss der Rotormasse, während die Stabilitätsgrenze bei großen Lagerspielen eine Abhängigkeit von der Rotormasse zeigt. Wie in Abschnitt 2.1.1 beschrieben, ist es beim zylindrischen Starrlager aus praktischer Sicht jedoch nicht möglich, das Lagerspiel beliebig zu reduzieren. Auch große Lagerspiele $h_0 > 0,1$ mm sind nicht praktikabel. Hier treten instabile Gleichgewichtslagen zwar erst bei erhöhten Drehzahlen auf, allerdings bildet sich der voll ausgebildete tragende Schmierfilm auch erst bei größeren Drehzahlen aus. Außerdem ist der Gültigkeitsbereich der Reynoldsgleichung durch die Größenordnungsabschätzung der Terme verletzt (siehe Abschnitt 3.2).

Alle in Abbildung 5.2 gezeigten Ergebnisse wurden mit dem nach Abschnitt 4.3 reduzierten Lagermodell ermittelt. Zu Vergleichszwecken und als abschließende Validierung der Reduktionsmethode sind in den Abbildungen 5.2c und 5.2d die kritische Drehzahl n^* des nicht reduzierten 2D-Modells dargestellt. Es ist eine sehr gute Übereinstimmung erkennbar, sodass im weiteren Verlauf ausschließlich das reduzierte und damit rechenzeiteffizientere Lagermodell verwendet wird.

Lösungsverzweigung Beim Übergang von stabilen zu instabilen Lösungen tritt eine *nicht-hyperbolische Gleichgewichtslage* auf. Sie ist charakterisiert durch einen oder mehrere Eigenwerte mit verschwindendem Realteil ($\text{Re}(\lambda_k) = 0$). In allen im Rahmen der Arbeit untersuchten Fällen war dies ein konjugiert komplexes Eigenwertpaar, das mit steigender Drehzahl die imaginäre Achse überquert. Der Übergang von stabilen zu in-

stabilen Gleichgewichtslagen lässt sich deshalb als *Hopf-Bifurkation* charakterisieren. In diesem Bifurkationspunkt verzweigt eine periodische Lösung, die sich im Phasenraum als Grenzyklus darstellen lässt. Auf die Stabilität der periodischen Lösung kann aus den Eigenwerten μ_i , $i = 1, 2, \dots, 2\ell_X + 3$ der *Monodromiematrix*, den sogenannten *Floquet-Multiplikatoren*, geschlossen werden. Dabei tritt immer ein Floquet-Multiplikator mit dem Wert $\mu_1 = +1$ auf. Anhand der verbleibenden, üblicherweise komplexen Eigenwerte μ_j , $j = 2, 3, \dots, 2\ell_X + 3$ kann auf die Stabilität der periodischen Lösung geschlossen werden. Liegen alle, mit Ausnahme des oben erwähnten Floquet-Multiplikators μ_1 , innerhalb des Einheitskreises in der komplexen Ebene ($|\mu_j| < 1$, $j = 2, 3, \dots, 2\ell_X + 3$), so ist der Grenzyklus stabil. Befindet sich mindestens ein Eigenwert μ_k außerhalb des Einheitskreises, so ist der Grenzyklus instabil.

Analog zum Wechsel der Stabilitätseigenschaften der Gleichgewichtslösungen treten auch beim Übergang von stabilen zu instabilen periodischen Lösungen verschiedene Szenarien auf, die Rückschlüsse auf das weitere Lösungsverhalten zulassen. Abbildung 5.3 skizziert mögliche Varianten. Verlässt beispielsweise ein Eigenwert den Einheitskreis mit verschwindendem Imaginärteil und positivem Realteil ($\text{Im}(\mu_k) = 0, \text{Re}(\mu_k) = 1$), so tritt eine *Sattelknoten-Bifurkation* auf (vergleiche Abbildung 5.3a). Diese Bifurkation kennzeichnet den Wechsel von stabilen zu instabilen periodischen Lösungen. Verlässt hingegen ein Eigenwert den Einheitskreis mit verschwindendem Imaginärteil und negativem Realteil ($\text{Im}(\mu_k) = 0, \text{Re}(\mu_k) = -1$), so ist eine *Flip-Bifurkation* zu identifizieren (vergleiche Abbildung 5.3b). Am Bifurkationspunkt entsteht neben der bereits existierenden periodischen Lösung eine weitere periodische Lösung mit doppelter Periode. Darüber hinaus können auch zwei konjugiert komplexe Floquet-Multiplikatoren $\mu_2 = e^{i\varphi}, \mu_3 = e^{-i\varphi}$ mit dem Betrag 1 auftreten, die infolge einer Variation des Bifurkationsparameters den Einheitskreis verlassen (vergleiche Abbildung 5.3c). Dieser Fall kennzeichnet eine *Torus-Bifurkation*, auch *Neimark-Sacker-Bifurkation* genannt. Ist $i/2\pi$ irrational entsteht im Bifurkationspunkt eine *quasi-periodische Lösung* mit zwei inkommensurablen Frequenzen ansonsten ist die Lösung weiterhin periodisch. Grundsätzlich können die beschriebenen Szenarien natürlich auch in umgekehrter Richtung erfolgen, sodass sich ein oder mehrere Floquet-Multiplikatoren bei Variation des Bifurkationsparameters in das Innere des Einheitskreises verschieben.

Periodische Lösungen Abbildung 5.4a und 5.4b illustrieren exemplarisch das Lösungsverhalten eines starren Rotors in aerodynamischen Starrlagern in Abhängigkeit einer als konstant angenommenen Rotordrehzahl (5.8). Beide Abbildungen zeigen sowohl die Gleichgewichtslösungen als auch die am Bifurkationspunkt verzweigenden Grenzyklen. Auf der linken Seite sind diese Lösungen in Form der beiden Rotorkoordinaten X_A und Y_A und der Drehzahl n dargestellt, rechts daneben lediglich die vertikale Rotorkoordinate X_A bei ($X'_A = 0$) über der Rotordrehzahl. Die periodischen Lösungen sind folglich über die maximalen und minimalen Koordinatenwerte X_A der Grenzyklen dargestellt. Die Kurve kann deshalb auch als Einhüllende der beim Durchlaufen des Grenzyklus auftretenden Auslenkungen interpretiert werden.

Da im Bifurkationspunkt der Gleichgewichtslösungen zunächst instabile, periodische Lösungen verzweigen, liegt eine *subkritische Hopf-Bifurkation* vor. Beim Verfolgen der in-

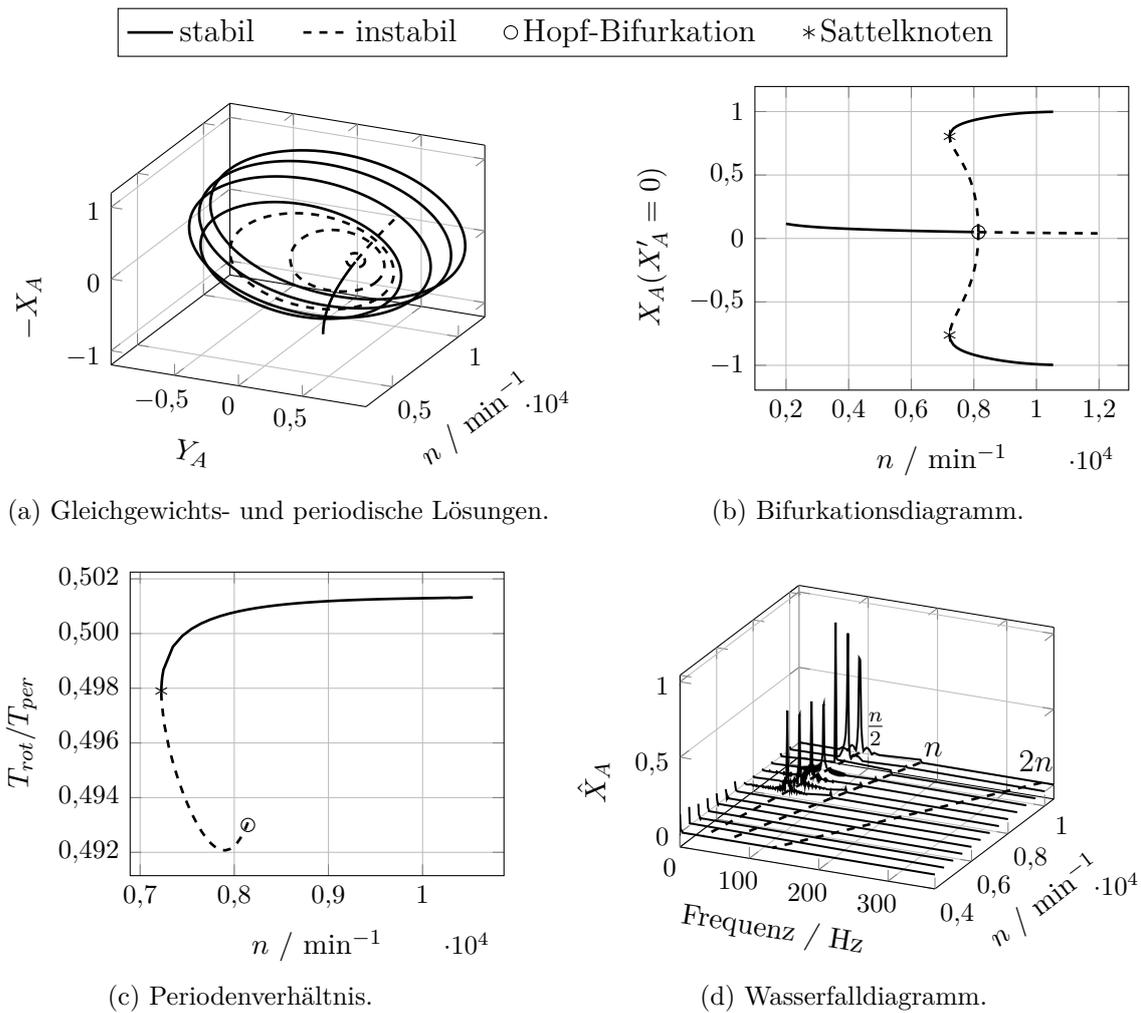


Abbildung 5.4: (a-c) Verzweungsverhalten des starren Rotors in zylindrischen Starrlagern und (d) Wasserfalldiagramm bei Reduktion der Drehzahl. Parameter $M = 1 \text{ kg}$; $e_S = 0$; $m_a = 1,4$; R, L, h_{01}, p_0, μ_L nach Tabelle 4.1.

stabilen Grenzzyklen tritt eine Sattelknoten-Bifurkation auf, sodass dort ein Wechsel von instabilen zu stabilen periodischen Lösungen stattfindet. Es ist zu erkennen, dass sich der Sattelknoten bei einer niedrigeren Drehzahl als die Hopf-Bifurkation befindet. Im Bereich zwischen diesen beiden Drehzahlen koexistieren zwei stabile Lösungen, wobei die instabilen Grenzzyklen den Einzugsbereich der beiden trennt. Die stabilen periodischen Lösungen existieren nur in einem geringen Drehzahlbereich zwischen der Sattelknoten-Bifurkation bei $n \approx 7200 \text{ min}^{-1}$ und $n \approx 10\,500 \text{ min}^{-1}$. Oberhalb dieses Bereichs bildet sich bei einem starren, unwuchtfreien Rotor kein tragender Schmierfilm mehr aus. Es kommt zum Kontakt zwischen Wellenzapfen und Lagerschale, der im Rahmen dieses Modells nicht abgebildet ist.

Bei autonomen Systemen ist die Periodendauer für den Durchlauf des Grenzzykus im Allgemeinen im Vorfeld unbekannt. Sie lässt sich jedoch häufig, zum Beispiel mittels numerischer Verfahren bestimmen. Abbildung 5.4c zeigt deshalb das ermittelte Verhältnis der

Periodendauer einer Wellenumdrehung zur Periodendauer eines Umlaufs des Grenzyklus T_{rot}/T_{per} . Zu erkennen ist, dass sowohl die instabilen als auch die stabilen Grenzyklen ungefähr die halbe Dauer einer Wellenumdrehung aufweisen. Sie charakterisieren somit den unerwünschten Halbfrequenzwirbel (vergleiche Abschnitt 4.2.2).

Als weitere Illustration dieses ersten Beispiels ist in Abbildung 5.4d das sogenannte Wasserfalldiagramm der vertikalen dimensionslosen Rotorkoordinate X_A dargestellt, eine Analyse der sich einstellenden stationären Rotorschwingungen für verschiedene Drehzahlen. Das Diagramm wird wie folgt ermittelt. Die Bewegungsgleichungen des Gesamtmodells (5.15) werden im Rahmen einer Zeitsimulation zunächst für die höchste dargestellte Drehzahl $n = 10\,500 \text{ min}^{-1}$ über 400 Rotorumdrehungen integriert. Aus dem Zeitverlauf der Koordinate X_A der letzten 100 Umdrehungen werden anschließend mittels einer schnellen Fourier-Transformation (FFT) die zu den verschiedenen Frequenzen gehörenden Amplitudenanteile ermittelt. Im nächsten Schritt wird der Zustandsvektor (5.16) am Ende der Simulation als Anfangsbedingung für die folgende Zeitintegration bei der nächst niedrigeren Drehzahl verwendet. Auch hier werden das Zeitsignal von X_A über 400 Umdrehungen integriert. Zur Analyse mittels der FFT werden wieder die letzten 100 Wellenumdrehungen herangezogen. Dieses Vorgehen wird für weitere Drehzahlen fortgesetzt. Als Anhaltspunkt sind in der Abbildung 5.4d die mit der Drehbewegung des Rotors synchrone Frequenz (n), die doppelte Frequenz der Drehbewegung ($2n$) sowie die halbe Drehfrequenz ($\frac{n}{2}$) eingezeichnet. Auch hier sind die bereits in Abbildung 5.4c identifizierten Halbfrequenzwirbel deutlich zu erkennen. Die auftretenden Amplituden der ganzzahligen Vielfachen der Hauptfrequenz sind sehr gering und lediglich bei der doppelten Frequenz der Hauptfrequenz bei manchen Drehzahlen noch leicht erkennbar. Der Zeitverlauf der vertikalen Rotorkoordinate im eingeschwungenen Zustand entspricht somit annähernd einer einfachen harmonischen Schwingung.

Abbildung 5.5 zeigt die Auswirkungen einer Verdopplung und einer Halbierung der Rotormasse M (Abbildung 5.5a und 5.5b) beziehungsweise des Lagerspiels h_0 (Abbildung 5.5c und 5.5d) bei ansonsten unveränderten Parametern. Auf der linken Seite sind jeweils die Koordinaten $X_A(X'_A = 0)$ dargestellt, rechts daneben das Verhältnis der Dauer einer Wellenumdrehung zur Periodendauer der periodischen Lösung. Bei einer Variation der Rotormasse tritt keine qualitative Veränderung des Modellverhaltens auf. Beim leichtesten Rotor ($M = \frac{1}{2} \text{ kg}$) ist die Drehzahldifferenz zwischen der Hopf-Bifurkation und dem Sattelnknoten am größten, beim schwersten Rotor ($M = 2 \text{ kg}$) am kleinsten. Der Drehzahlbereich, innerhalb dessen stabile periodische Drehzahlen existieren, ist in allen drei gezeigten Fällen etwa identisch. Auch die Periodendauer ist bei den verschiedenen Rotormassen jeweils ungefähr die doppelte Dauer einer Wellenumdrehung.

Bei einer Verdopplung des Lagerspiels auf $h_0 = 72 \mu\text{m}$ treten insgesamt drei Sattelnknoten auf (vergleiche Abbildung 5.5c). Beim Verfolgen der instabilen periodischen Lösungen tritt jetzt ein zusätzlicher kleiner Drehzahlbereich auf, innerhalb dessen stabile periodische Lösungen existieren. Alle Bifurkationspunkte liegen für dieses große Lagerspiel in einem sehr engen Drehzahlbereich. Die Periodendauer der instabilen und der dazwischen liegenden stabilen periodischen Lösungen weichen, verglichen mit den bisher gezeigten Fällen, am stärksten von der doppelten Umdrehungszeit der Welle ab. Bei einer Halbierung des anfänglichen Lagerspiels auf $h_0 = 18 \mu\text{m}$ tritt gegenüber dem Ausgangswert keine qualitative

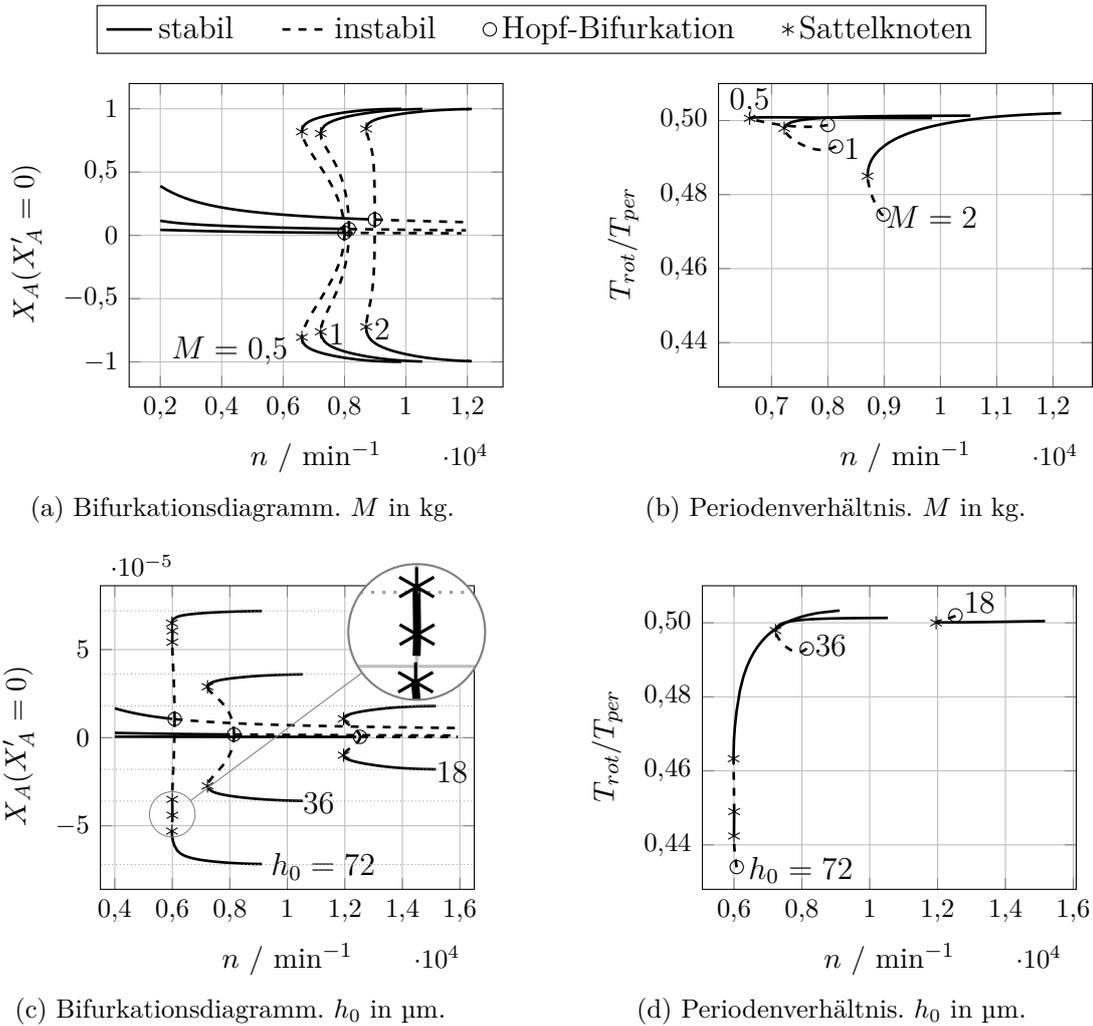


Abbildung 5.5: Bifurkationsverhalten und Periodendauer der periodischen Lösungen für verschiedene Rotormassen und Lagerspiele. Parameter $m_a = 1,4$; $M = 1$ kg; R, L, h_{01}, p_0, μ_L nach Tabelle 4.1.

Veränderung des Lösungsverhaltens auf. Die Erkenntnis einer erst bei höheren Drehzahlen auftretenden Bifurkation wurde bereits in Abbildung 5.2d identifiziert. Der Drehzahlbereich stabiler periodischer Lösungen ist verglichen mit einem Lagerspiel von $h_0 = 36 \mu\text{m}$ ähnlich groß, und das Verhältnis der Periodendauern bleibt nahezu unverändert.

5.3.2 Rotor mit statischer Unwucht

Liegt der Schwerpunkt des Rotors nicht mehr auf dessen Drehachse ($e_S \neq 0$ beziehungsweise $\varepsilon_S \neq 0$), so tritt in den Rotorgleichungen (5.9) und (5.10) beziehungsweise (5.11) und (5.12) infolge der umlaufenden Unwucht eine harmonische Erregung auf. Das gekoppelte System ist damit *heteronom*, da das Vektorfeld \mathbf{f} jetzt explizit zeitabhängig ist:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{LRs}, \tau) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{LRs}, \sin \tau, \cos \tau), \quad \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{2\ell x+4}, \quad (5.21)$$

siehe zum Beispiel [127]. Aufgrund der speziellen Zeitabhängigkeit in Form einer harmonischen Erregung kann durch die Erweiterung der Zustandsgleichungen um einen nichtlinearen Oszillator

$$x'_{LRs+1} = x_{LRs+1} + x_{LRs+2} - x_{LRs+1}(x_{LRs+1}^2 + x_{LRs+2}^2), \quad (5.22)$$

$$x'_{LRs+2} = -x_{LRs+1} + x_{LRs+2} - x_{LRs+2}(x_{LRs+1}^2 + x_{LRs+2}^2) \quad (5.23)$$

das heteronome in ein autonomes System überführt werden (vergleiche [39, 173]). Der Oszillator besitzt die asymptotisch stabilen Lösungen

$$x_{LRs+1} = \sin \tau, \quad (5.24)$$

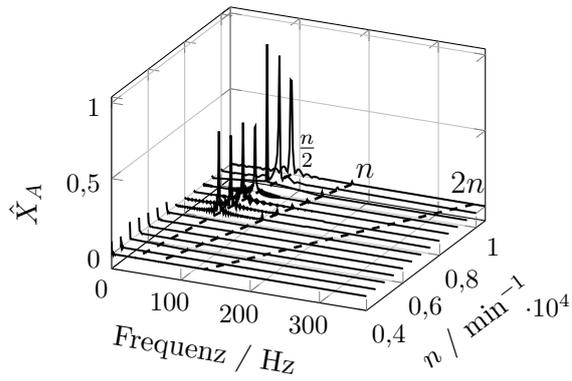
$$x_{LRs+2} = \cos \tau, \quad (5.25)$$

sodass die Anregungsterme in (5.11) und (5.12) durch die beiden zusätzlichen Zustandsgrößen x_{LRs+1}, x_{LRs+2} ersetzt werden können. Der neue, erweiterte Zustandsvektor lautet folglich

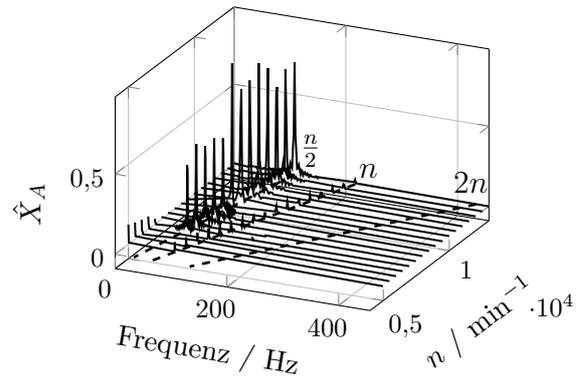
$$\mathbf{x}_{LRsx} = [\mathbf{x}_{Rs}^T, \mathbf{x}_{La}^T, x_{LRs+1}, x_{LRs+2}]^T, \quad \mathbf{x}_{LRsx} \in \mathbb{R}^{2\ell_x + 4 + 2}. \quad (5.26)$$

Abbildung 5.6a und 5.6b zeigen jeweils das Wasserfalldiagramm der horizontalen Rotorkoordinate X_A für die beiden gewählten Exzentrizitäten des Rotorschwerpunkts S . Für den kleineren Wert e_{S1} tritt verglichen zum unwuchtfreien Fall in Abbildung 5.4d nur eine sehr geringfügige Änderung in Form von minimalen mit der Drehfrequenz der Welle zusammenfallenden Amplituden auf. Für die größere Unwucht e_{S2} ist dieser Anteil stärker ausgeprägt. Gleichzeitig verschiebt sich der Kontakt zwischen Wellenzapfen und Lagerschale zu einer deutlich höheren Drehzahl.

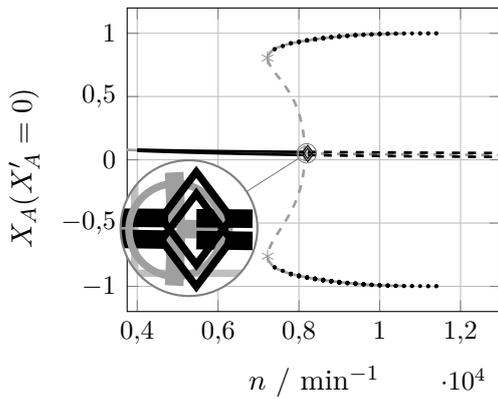
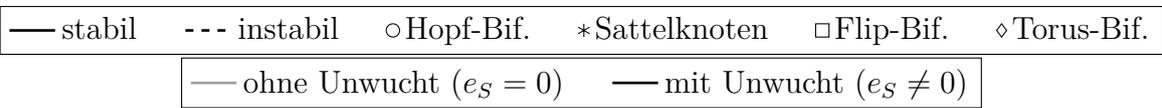
Als weitere Ergebnisse zeigen die Abbildungen 5.6c und 5.6d das Bifurkationsverhalten des unwuchtbehafteten Rotors. Links für die kleine, rechts für die große Exzentrizität des Rotorschwerpunkts S . Zu Vergleichszwecken ist in beiden Abbildungen in grau der unwuchtfreie Fall mit dargestellt. Für beide Schwerpunktexzentrizitäten e_S treten bis unterhalb der kritischen Drehzahl n^* des unwuchtfreien Falls (Hopf-Bifurkation) stabile periodische Lösungen auf. Der Rotor führt dabei kleine Schwingungen um die Ruhelage des unwuchtfreien Falls aus. Sie sind drehzahlsynchron und weisen die Anregungsfrequenz des Läufers auf. Die Schwingungsamplitude ist wie erwartet bei höherer Schwerpunktexzentrizität größer. Für die kleinere Schwerpunktexzentrizität lässt sich anstelle der Hopf-Bifurkation eine Torus-Bifurkation detektieren. Eine Verfolgung der im Bifurkationspunkt verzweigenden quasi-periodischen Lösung ist allerdings mittels der genutzten Version von MatCont nicht möglich. Per Zeitintegration, die in diesem Kontext häufig auch als Brute-force-Methode bezeichnet wird, lassen sich jedoch für vorgegebene Drehzahlen die stabilen quasi-periodischen Lösungen identifizieren. Dazu wird das System über einen langen Zeitraum integriert. Der transiente Vorgang, der auch als Einschwingzeit betrachtet werden kann, wird vernachlässigt und nur der anschließende Verlauf für die Auswertung berücksichtigt. In der überwiegenden Anzahl der Fälle werden 400 Rotorumdrehungen als Einschwingphase gewählt. Weitere 400 Umdrehungen sind die Grundlage der dargestellten



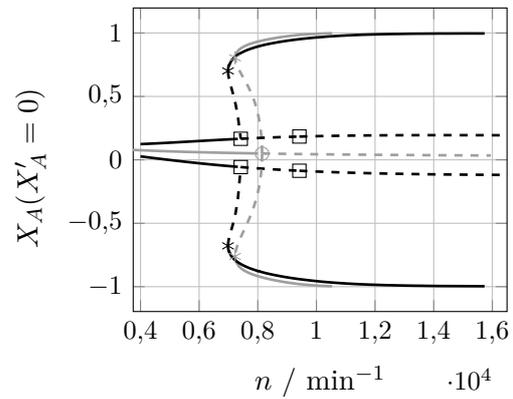
(a) Wasserfalldiagramm für e_{S1} .



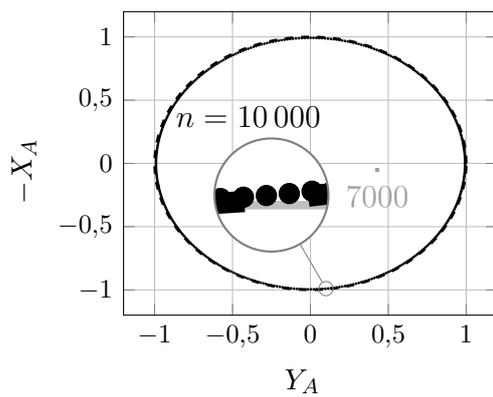
(b) Wasserfalldiagramm für e_{S2} .



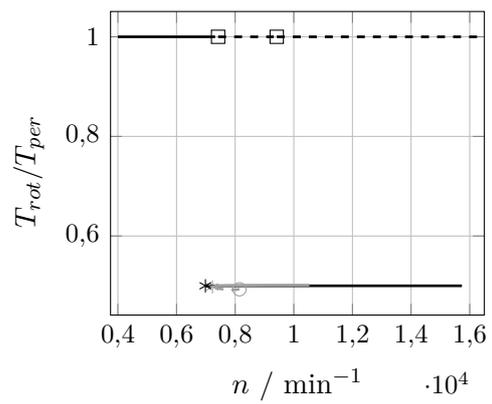
(c) Bifurkationsdiagramm für e_{S1} .



(d) Bifurkationsdiagramm für e_{S2} .



(e) Poincaré-Schnitt für e_{S1} .



(f) Periodenverhältnis für e_{S2} .

Abbildung 5.6: Einfluss der Schwerpunktexzentrizität auf das sich einstellende Rotorverhalten in Starrlagern. Parameter $m_a = 1,4$; R, L, h_{01}, p_0, μ_L nach Tabelle 4.1, M, e_{S1}, e_{S2} nach Tabelle 5.1.

Auswertung. Falls notwendig, werden beide Umdrehungszahlen erhöht. Der Zustandsvektor am Ende der Simulation dient als Anfangsbedingung für die Zeitintegration bei leicht variiertes Drehzahl.

Für die Auswertung der Zeitsimulationen nach Ende der transienten Phase werden alle extremalen Rotorkoordinaten über die Bedingung $X_A(X'_A = 0)$ ermittelt und in Abbildung 5.6c eingezeichnet. Im vorliegenden Fall treten dabei über den gesamten Integrationszeitraum für alle Drehzahlen nur sehr geringe Abweichungen der maximalen und minimalen Auslenkungen auf, die praktisch nicht erkennbar sind.

Zur ergänzenden Beurteilung der Lösungen im Hinblick auf periodisches beziehungsweise quasi-periodisches Verhalten dienen *Poincaré-Schnitte*, die über eine Stroboskop-Abbildung mit der Beleuchtungszeit $2\pi k_T, k_T = 1, 2, \dots$ ermittelt werden. Für zwei verschiedene Drehzahlen bei kleiner Unwucht sind die Lagekoordinaten des Rotors zu den Beleuchtungszeitpunkten in Abbildung 5.6e dargestellt. Für $n = 7000 \text{ min}^{-1}$ fallen alle Rotorkoordinaten zu den Belichtungszeitpunkten zusammen. Dieser *Fixpunkt* kennzeichnet somit eine periodische Lösung. Für $n = 10000 \text{ min}^{-1}$ bilden die Rotorkoordinaten zu den Beleuchtungszeitpunkten eine geschlossene Kurve und kennzeichnen somit eine quasi-periodische Lösung.

Für die hier diskutierte große Unwucht ($e_{S2} = 5 \mu\text{m}$) tritt anstelle der Hopf-Bifurkation bei einer leicht verringerten Drehzahl eine Flip-Bifurkation (Periodenverdopplung) auf. Es verzweigt ein neuer, zunächst instabiler Lösungsast, der weitere periodische Lösungen charakterisiert. Diese weisen gegenüber den primären periodischen Lösungen die doppelte Periodendauer auf. Analog zum unwuchtfreien Fall findet beim Verfolgen des verzweigenden Astes in Form eines Sattelknotens der Übergang zu stabilen periodischen Lösungen statt. Klar zu erkennen ist, dass der mit Unwucht betriebene Rotor bei höheren Drehzahlen betrieben werden kann als sein unwuchtfreies Pendant. Erst bei einer größeren Drehzahl kommt es zum Kontakt zwischen Wellenzapfen und Lagerschale. Die Unwucht wirkt der Neigung des Rotors, sich auf einer Kreisbahn mit halber Winkelgeschwindigkeit zu bewegen, entgegen.

Bei der weiteren Verfolgung der ursprünglichen und jetzt instabilen periodischen Lösungen kommt es mit steigender Drehzahl zu einer erneuten Flip-Bifurkation, da ein weiterer rein reeller Floquet-Multiplikator den Einheitskreis in negativer Richtung verlässt. Weitere verzweigende Lösungen konnten hier jedoch nicht identifiziert werden. Ergänzend zum Bifurkationsverhalten des Rotors mit großer Unwucht visualisiert Abbildung 5.6f die angesprochene Periodenverdopplung der Lösungen.

Als Fazit lässt sich festhalten, dass die Berücksichtigung einer Unwucht zu keinen unerwarteten neuen Phänomenen führt. Anstelle der Ruhelagen treten Schwingungen kleiner Amplitude auf, deren Frequenz mit der Drehfrequenz der Welle zusammenfällt. Der Übergang auf den einsetzenden Halbfrequenzwirbel variiert in der Regel leicht. Nach Überschreiten dieser Drehzahlgrenze ist das Rotorverhalten im unwuchtfreien Fall sowie für die hier gewählten Schwerpunkt exzentrizitäten aus praktischer Sicht kaum zu unterscheiden. Jedoch kann bei großer Unwucht infolge der wirkenden Erregungskräfte der Wellenzapfen-Lagerschalen-Kontakt zu höheren Drehzahlen verschoben werden. Für die hier diskutierten Fälle kann somit kein grundlegend nachteiliges Verhalten einer statischen Unwucht resümiert werden.

5.3.3 Fazit

Für einen in zylindrischen Starrlagern gelagerten starren, unwuchtfreien Rotor existieren Gleichgewichtslösungen. Sie beschreiben eine stationäre Lage des Rotors und eine stationäre Druckverteilung. Eine stabile Gleichgewichtslage kennzeichnet den idealen Betriebsbereich, der jedoch lediglich bei niedrigen Drehzahlen auftritt. Oberhalb einer Grenzdrehzahl sind die Gleichgewichtslagen instabil. Bisher ist dem Autor der vorliegenden Arbeit kein analytisches Kriterium bekannt, das den Zusammenhang zwischen den einzelnen Modellparametern und der Grenzzahl beschreibt. Deswegen muss die Grenzdrehzahl numerisch ermittelt werden. Für die im Rahmen der Arbeit gewählten Parameterwerte zeigt sich, dass eine höhere Rotormasse zu einer höheren Grenzdrehzahl führt. Allerdings baut sich der tragende Schmierfilm bei einem schwereren Rotor auch erst bei einer höheren Drehzahl auf. Neben der Rotormasse beeinflusst auch das Lagerspiel die Drehzahl, bei der der Übergang von stabilen zu instabilen Gleichgewichtslösungen stattfindet. Tendenziell führt ein geringeres Lagerspiel zu höheren Grenzdrehzahlen. Aus praktischen Gründen kann das Lagerspiel jedoch nicht beliebig reduziert werden.

Der Übergang von stabilen zu instabilen Gleichgewichtslösungen lässt sich als Hopf-Bifurkation charakterisieren, wobei periodische Lösungen verzweigen. Sie sind für alle im Rahmen der Arbeit untersuchten Fälle zunächst instabil. Beim Verfolgen dieser Lösungen kann eine Sattelknoten-Bifurkation detektiert werden. Dort entstehen wieder stabile periodische Lösungen. Sie kennzeichnen selbsterregte Schwingungen. Die periodischen Lösungen lassen sich eindeutig als Halbfrequenzwirbel charakterisieren, da die Periodendauer in etwa der halben Periode einer Wellenumdrehung entspricht. Der Sattelknoten befindet sich bei einer niedrigeren Drehzahl als die Hopf-Bifurkation. Folglich lassen sich beim Hoch- und beim Auslauf des Rotors verschiedene Drehzahlen identifizieren, bei der die Stabilitätsgrenze der Ruhelage erreicht ist.

Stabile periodische Lösungen existieren für das hier diskutierte starre, unwuchtfreie Rotormodell nur in einem engen Drehzahlbereich von $\Delta n \approx 3000 \text{ min}^{-1}$. Die Exzentrizitäten sind dabei sehr groß und steigen mit Erhöhung der Drehzahl weiter an, bis sich schließlich kein tragender Schmierfilm mehr ausbildet. Es kommt zum Kontakt zwischen Wellenzapfen und Lagerschale. Dieser wird jedoch nicht im Modell abgebildet. Die durchgeführten Studien bei Variation der Rotormasse und des Lagerspiels führen zu keinen grundlegenden Änderungen. Das qualitative Lösungsverhalten und auch der Drehzahlbereich, innerhalb dessen stabile periodische Lösungen existieren, bleibt vergleichbar. Lediglich die Hopf-Bifurkation tritt bei einer anderen Drehzahl auf.

Fallen Schwerpunkt und Mittelpunkt des Rotors nicht zusammen, so wird der Rotor durch die statische Unwucht harmonisch erregt. An die Stelle der Gleichgewichtslösungen treten periodische Lösungen. Sie beschreiben Schwingungen kleiner Amplituden um die Gleichgewichtslösungen des unwuchtfreien Systems. Die Periodendauer entspricht einer Wellenumdrehung. Im Bereich der Hopf-Bifurkation des nicht erregten Systems lassen sich in Abhängigkeit der Schwerpunktexzentrizität entweder eine Torus- oder eine Flip-Bifurkation detektieren. Bei ersterer verzweigen quasi-periodische Lösungen. An der Flip-Bifurkation entsteht ein Lösungsast mit doppelter Periodendauer. Grundsätzlich weichen die Wellenzapfenbewegungen des unwuchtbehafteten Systems nur geringfügig vom unwuchtfreien System ab. Auch der Halbfrequenzwirbel tritt unverändert auf. Bei einer großen Unwucht

ist gegenüber dem unwuchtfreien Fall eine merkliche Veränderung zu beobachten. Der Drehzahlbereich, innerhalb dessen stabile periodischen Lösungen existieren, ist deutlich vergrößert.

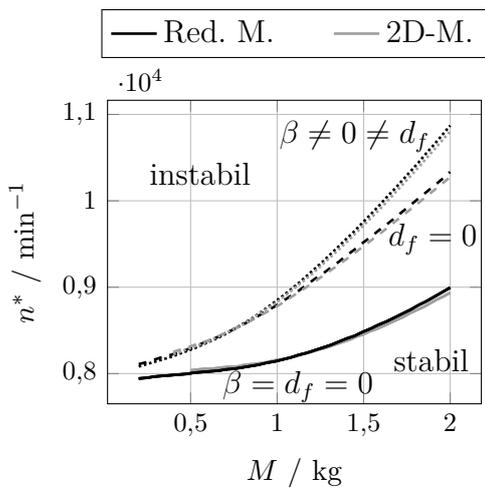
Mit dem gekoppelten Lager-Rotor-Modell und den verwendeten Analysemethoden kann der unerwünschte und in der Praxis häufig vorzufindende Halbfrequenzwirbel abgebildet und identifiziert werden. Auch die in der Literatur [9, 122, 166] vorzufindende Aussage, dass die Drehzahl des einsetzenden Halbfrequenzwirbels den Betriebsbereich des Rotors begrenzt, kann anhand des ermittelten Modellverhaltens durchaus bestätigt werden. Allerdings ist das hier verwendete Rotormodell größtmöglich idealisiert. Es ist deshalb im Einzelfall zu prüfen, inwieweit die getroffenen Annahmen für die jeweilige Anwendung zulässig sind. Die Wellenzapfenbewegung des Halbfrequenzwirbels ist durch große Amplituden und damit kleinen Schmierfilmdicken charakterisiert. Ob die Annahme von Haftrandbedingungen zum Beispiel nach Einsetzen des Halbfrequenzwirbels weiterhin Gültigkeit besitzt ist zu hinterfragen. Gegebenenfalls ist eine Modellanpassung vorzunehmen.

5.4 Diskussion des starren Rotors in Folienlagern

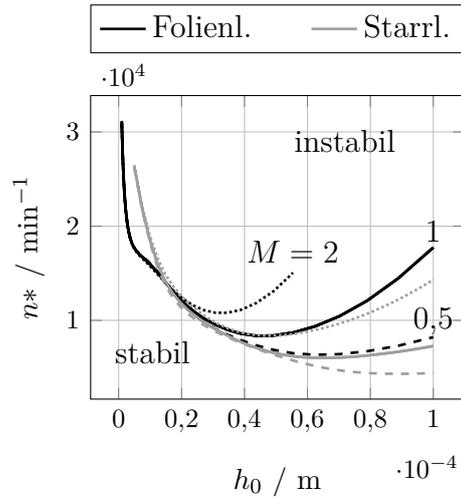
5.4.1 Unwuchtfreier Fall

Die Studie des starren, ideal gewuchteten und mit dem Folienlagermodell gekoppelten Rotors folgt dem Vorgehen beim entsprechenden Rotor in Starrlagern gemäß Abschnitt 5.3.1. Zunächst wird der Einfluss der Rotormasse und des Lagerspiels auf die Stabilitätsgrenze der Gleichgewichtslagen untersucht. Abbildung 5.7a und 5.7b veranschaulichen die Ergebnisse. Abbildung 5.7a zeigt die Stabilitätsgrenze bei Annahme eines zylindrischen Starrlagers sowie des Folienlagermodells jeweils mit und ohne Berücksichtigung der Strukturdämpfung bei sonst identischen Parametern. Zu erkennen ist in allen drei Kurven ein übereinstimmender Trend. Mit steigender Rotormasse erhöht sich die Grenzdrehzahl n^* , oberhalb derer die Gleichgewichtslösungen instabil sind. Es zeigt sich außerdem, dass die Stabilitätsgrenze beim Folienlagermodell bei einer höheren Drehzahl als beim Starrlagermodell liegt. Auch die Strukturdämpfung hat im gezeigten Fall einen stabilisierenden Effekt, der zu einer weiteren Erhöhung der kritischen Drehzahl bei ansonsten gleichen Parameterwerten führt. Absolut verschiebt sich bei einem Wechsel vom Starr- zum Folienlager mit Dämpfung die Grenzdrehzahl bei einer Rotormasse von $M = 1/2$ kg von $n^* \approx 8000$ min⁻¹ auf $n^* \approx 8300$ min⁻¹, für einen Rotor der Masse $M = 2$ kg von $n^* \approx 9000$ min⁻¹ auf $n^* \approx 10800$ min⁻¹. In der Abbildungen 5.7a ist wie in den Abbildungen 5.2c und 5.2d zur ergänzenden Validierung der Modellreduktion die Stabilitätsgrenze des äquivalenten nicht reduzierten 2D-Lagermodells dargestellt. Die erkennbare gute Übereinstimmung bestätigt erneut die Güte der Reduktion.

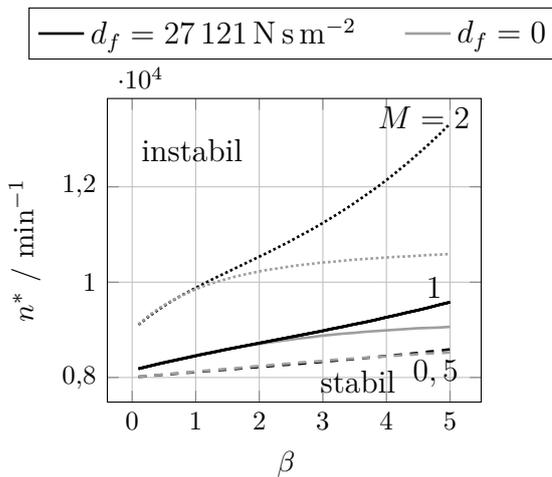
Den Einfluss des Lagerspiels auf die Stabilitätsgrenze zeigt Abbildung 5.7b. Als Vergleich dienen die Ergebnisse des in Starrlagern betriebenen Rotors. Grundsätzlich bleibt der Einfluss des Lagerspiels auf die Stabilitätsgrenze bei Nutzung eines Folienlagers vergleichbar mit der eines starren zylindrischen Lagers. Im Bereich von $h_0 \approx 20$ μm ist die Stabilitätsgrenze unabhängig von der Rotormasse und nahezu identisch für das Starr- und das Folienlager. Für ein kleineres Lagerspiel liegt die Grenzdrehzahl des in Folienlagern be-



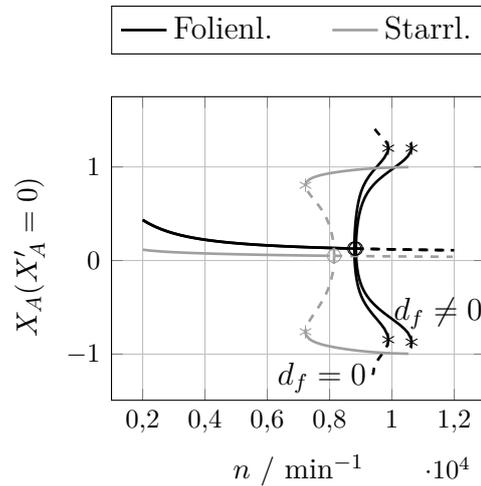
(a) Stabilitätsgrenze der Gleichgewichtslage.



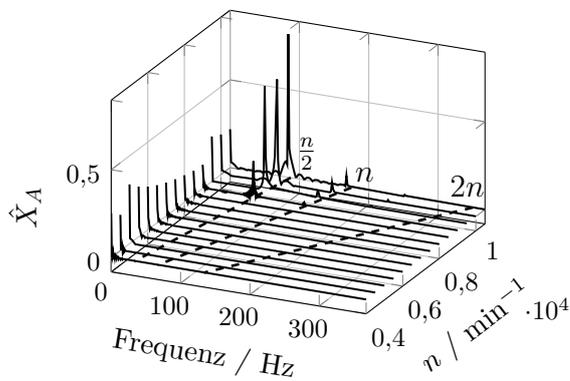
(b) Stabilitätsgrenze der Gleichgewichtslage.



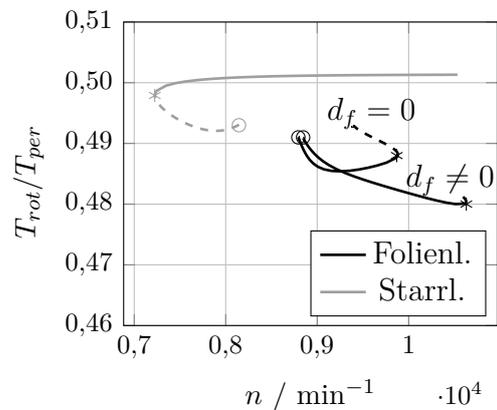
(c) Stabilitätsgrenze der Gleichgewichtslage.



(d) Bifurkationsdiagramm.



(e) Wasserfalldiagramm.



(f) Periodenverhältnis.

Abbildung 5.7: Vergleich der Stabilitätsgrenze des in Starr- und Folienlager betriebenen starren Rotors (a-c) sowie Analyse des Bifurkationsverhaltens des Rotors in Folienlagern (d) und (f) und Wasserfalldiagramm (e). Parameter $m_a = 1,4$; $M = 1 \text{ kg}$, $e_S = 0$; $R, L, h_{01}, \beta, d_f, p_0, \mu_L, \chi$ nach Tabelle 4.1.

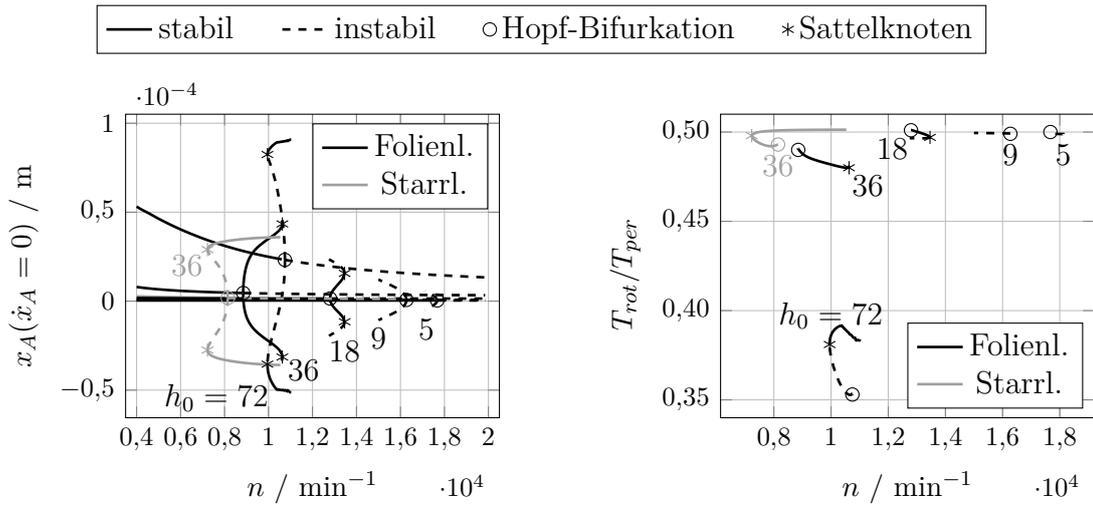
triebenen Rotors unterhalb, für ein größeres Lagerspiel oberhalb des in Starrlagern betriebenen Rotors. Die Kurve des schweren Rotors ($M = 2$ kg) deckt nicht den gesamten dargestellten Parameterbereich ab, da für $h_0 > 60$ μm aufgrund nicht valide ermittelbarer Gleichgewichtslösungen keine Stabilitätsgrenze mehr detektiert wird.

Als bedeutender Konstruktions- und Modellparameter weist das Folienlager den Nachgiebigkeitsparameter β auf. Wie sich eine Veränderung dieses Parameters auf die Grenzdrehzahl n^* des Rotors auswirkt, ist in Abbildung 5.7c illustriert. Für die hier diskutierten drei Rotormassen wird die Stabilitätsgrenze jeweils mit und ohne viskose Dämpfung der nachgiebigen Struktur ermittelt. Die abgebildeten Ergebnisse zeigen, dass für die gewählten Parameter eine Erhöhung des Nachgiebigkeitsparameters zu einer höheren Grenzdrehzahl führt. Die Drehzahldifferenz ist umso höher, je schwerer der Rotor ist. Der Einfluss der Dämpfung ist für den leichtesten der drei Rotoren gering und steigt mit zunehmender Rotormasse an. Für eine Rotormasse von $M = 2$ kg ist erkennbar, dass bei vernachlässigter Dämpfung der Einfluss des Nachgiebigkeitsparameters auf die Stabilitätsgrenze mit dessen Anstieg abnimmt. Die gleiche Tendenz, jedoch in abgeschwächter Form, ist für den gewählten Parameterbereich des Rotors der Masse $M = 1$ kg feststellbar.

Ein Vergleich des Bifurkationsverhaltens des starren Rotors für die verschiedenen Lagertypen ist in Abbildung 5.7d veranschaulicht. Gezeigt sind auch hier zu Vergleichszwecken die Simulationsergebnisse des Starrlagers in grau, und für ein Folienlager mit gleichen Abmessungen (R, L, h_0) sowohl mit als auch ohne Berücksichtigung der viskosen Dämpfung der Folien. Beim Folienlager verzweigen im Unterschied zum starren Lager im Bifurkationspunkt stabile periodische Lösungen, sodass sich die Hopf-Bifurkation als superkritisch charakterisieren lässt. Wie bereits in Abbildung 5.7a gezeigt, tritt diese erst bei einer höheren Rotordrehzahl auf. Für beiden Folienlagermodelle lässt sich beim Verfolgen der periodischen Lösung ein Sattelknoten detektieren. Somit existieren in einem geringen Drehzahlbereich auch instabile Grenzzyklen. Außerdem ist festzustellen, dass die höchste Drehzahl, bis zu der periodische Lösungen existieren, für in Starr- und Folienlagern mit viskoser Dämpfung betriebene ideale Rotoren nahezu identisch ist.

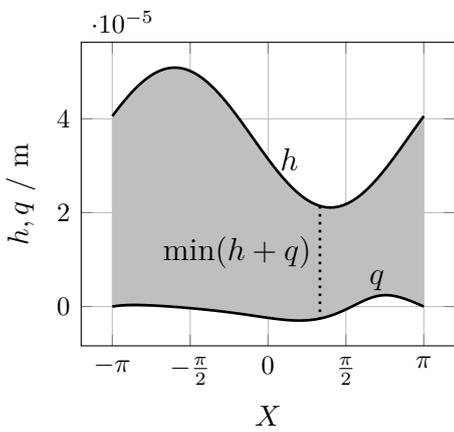
Analog zu Abbildung 5.4 ist ergänzend zum Bifurkationsdiagramm 5.7d ein Wasserfalldiagramm des in Folienlagern mit viskoser Dämpfung betriebenen Rotors in Abbildung 5.7e dargestellt. Die Ermittlung erfolgt entsprechend der in Abschnitt 5.3.1 beschriebenen Vorgehensweise. Auch hier sind für hohe Drehzahlen dominierende Amplituden mit ungefähr der halben Drehfrequenz der Welle zu erkennen. Die Amplituden der gegenüber den Hauptamplituden doppelten Frequenz sind verglichen mit dem in Starrlagern betriebenen Rotor etwas stärker ausgeprägt. Das konkrete Verhältnis der Perioden T_{rot}/T_{per} zeigt Abbildung 5.7f.

Da das Lagerspiel h_0 des Folienlagers, wie in Abschnitt 4.1.1 ausgeführt, grundsätzlich schwer zu quantifizieren, tendenziell jedoch kleiner als das Lagerspiel des Starrlagers ist, wird ergänzend zur Abbildung 5.7b dessen Einfluss auf das sich einstellende Rotorverhalten weiter untersucht. Abbildung 5.8a zeigt das Bifurkationsverhalten anhand der vertikalen Rotorkoordinate X_A bei Variation des Parameters h_0 . Wie bereits in Abbildung 5.7b dargestellt, verschiebt sich die Stabilitätsgrenze mit Verringerung des Lagerspiels zu höheren Drehzahlen. Dabei treten lediglich für große Lagerspiele $h_0 \geq 18$ μm stabile periodische

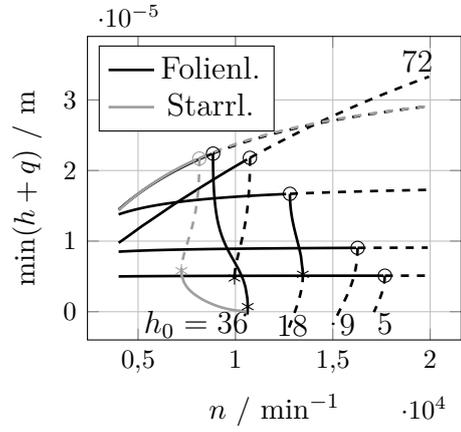


(a) Bifurkationsdiagramm. h_0 in μm .

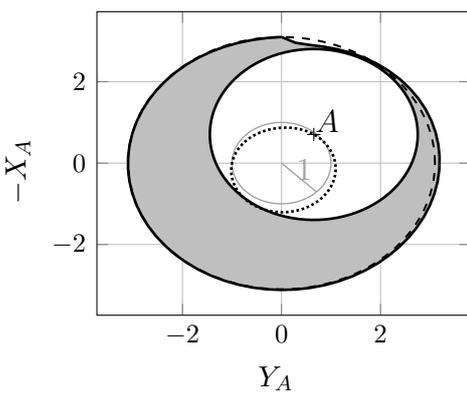
(b) Periodenverhältnis. h_0 in μm .



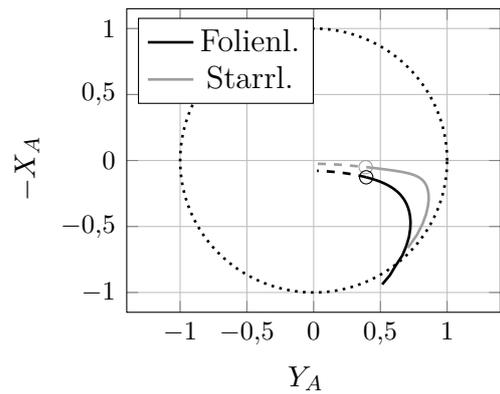
(c) Abgewickelter Schmierespalt in Hopf-Bifurkation



(d) Minimale Filmdicke. h_0 in μm .



(e) Konfiguration bei minimaler Filmdicke im Sattelknoten sowie Bahn des Punktes A der periodischen Lösung; Radien r und R nicht maßstabsgetreu.



(f) Verlagerungsbahnen.

Abbildung 5.8: Einfluss des Lagerspiels auf das Bifurkationsverhalten des starren unwucht-freien Rotors. Parameter $m_a = 1,4$; $M = 1 \text{ kg}$; $R, L, \mu_L, \beta, d_f, h_{01}, p_0, \chi$ nach Tabelle 4.1.

Lösungen auf. Für die beiden kleineren Lagerspiele $h_0 \leq 9 \mu\text{m}$ existieren nur instabile periodische Lösungen.

In Abbildung 5.8b sind die zugehörigen Verhältnisse der Periodendauer einer Wellenumdrehung zur Periodendauer der periodischen Lösung abgebildet. Abgesehen von dem sehr großen Lagerspiel $h_0 = 72 \mu\text{m}$, liegt das Verhältnis immer im Bereich $1/2$, was wiederum den Halbfrequenzwirbel charakterisiert. Dies lässt den Schluss zu, dass dieser Halbfrequenzwirbel mit Ausnahme der einsetzenden Drehzahl unabhängig vom Lagerspiel ist. Eine sowohl für die Berechnung in Form der Modellannahmen als auch für den praktischen Betrieb des Rotors relevante Kenngröße ist die auftretende minimale Schmierfilmdicke. Abbildung 5.8c visualisiert den abgewickelten Schmier spalt des Folienlagermodells in der Gleichgewichtslage an der Stelle der Hopf-Bifurkation. Der Schmierfilm wird einerseits begrenzt durch den sich nicht im Lagerzentrum befindenden Wellenzapfen sowie die Verformung der Lagerstruktur. Im dargestellten Fall ist die minimale Schmierfilmdicke im Bereich zwischen der maximalen Folienverformung und an der Position der einzig durch die Verschiebung des Wellenzapfens minimalen Spalthöhe h lokalisiert.

Vertiefend zeigt Abbildung 5.8d die minimale Schmierfilmdicke über der Drehzahl. Für die am Hopf-Punkt verzweigenden periodischen Lösungen wird die auftretende minimale Schmierfilmdicke über den gesamten Grenzyklus identifiziert. Grundsätzlich vergrößert sich für ein festes Lagerspiel h_0 die minimale Filmdicke der Gleichgewichtslösungen mit zunehmender Drehzahl, wobei die absolute Zunahme mit kleiner werdendem h_0 abnimmt. Außerdem steht für die Gleichgewichtslagen aufgrund der Nachgiebigkeit der Folien die sich einstellende minimale Filmdicke nicht in direktem Verhältnis zum Lagerspiel h_0 . Grundsätzlich führen, mit Ausnahme des Parameterwerts $h_0 = 72 \mu\text{m}$, der nur sehr geringe praktische Relevanz aufweist, größere Lagerspiele zu höheren minimalen Filmdicken. Ein Vergleich zwischen Starr- und Folienlager bei gleichem Lagerspiel h_0 zeigt nahezu identische minimale Filmdicken der Gleichgewichtslagen.

Exemplarisch für die periodischen Lösungen zeigt Abbildung 5.8e die Konfiguration bei minimaler auftretender Filmdicke im Sattelknoten. Wie in der Mehrheit der untersuchten Szenarien zu beobachten, tritt die minimale Filmdicke dabei nicht während der maximalen Auslenkung des Wellenzapfens auf. Vielmehr ist sie bei der Annäherung des Wellenzapfens an die obere Maximalauslenkung, der Einspannstelle der Folie und den dort vorgegeben Randbedingungen zu identifizieren.

Als abschließender Vergleich zwischen den Gleichgewichtslösungen des Rotors in Starr- und in Folienlagern zeigt Abbildung 5.8f die beiden ermittelten Verlagerungsbahnen bei gleichem Lagerspiel. Zu erkennen ist, dass aufgrund der Nachgiebigkeit der Lagerstruktur des Folienlagers auch Gleichgewichtslagen mit Exzentrizitäten $\varepsilon_A > 1$ auftreten. Ansonsten läuft die besagte Bahn für Folienlager nicht so nah am Lagerrand.

Wie sich eine Variation des Nachgiebigkeitsparameters auf das Bifurkationsverhalten des Rotors auswirkt, ist in Abbildung 5.9a dargestellt. Grundsätzlich resultiert eine Verdopplung oder Halbierung von β lediglich in leichten Modifikationen. Für das vom Starrlager übernommene Lagerspiel $h_{01} = 36 \mu\text{m}$ führt eine Verdopplung von β (weichere Lagerstruktur) zur Verschiebung der Stabilitätsgrenze zu höheren Drehzahlen. Gleiches gilt für die verzweigenden periodischen Lösungen, die ebenfalls zu höheren Drehzahlen verschoben werden. Eine Halbierung des Nachgiebigkeitsparameters (steifere Lagerstruktur) wirkt sich

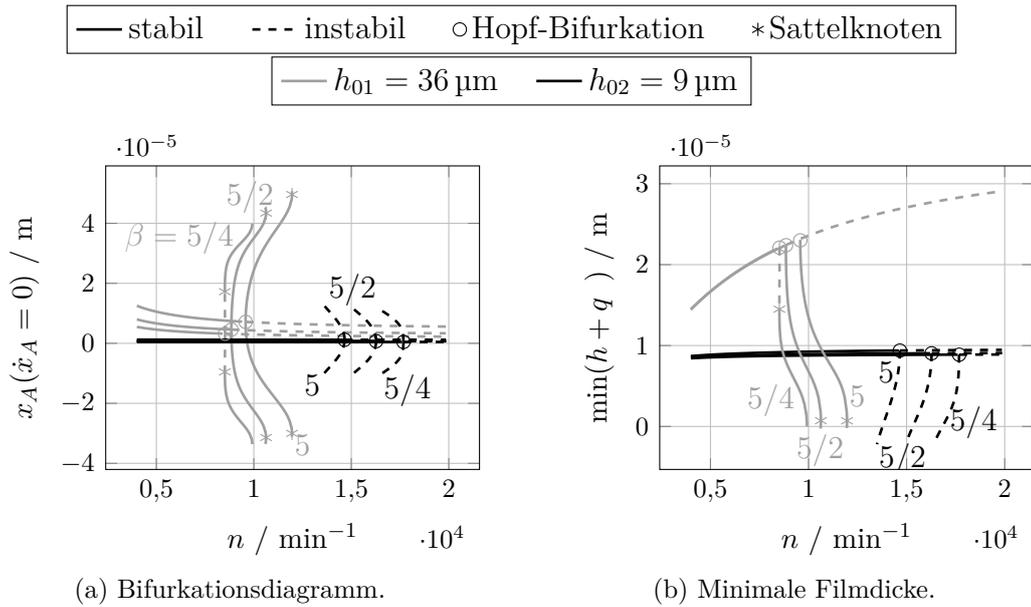


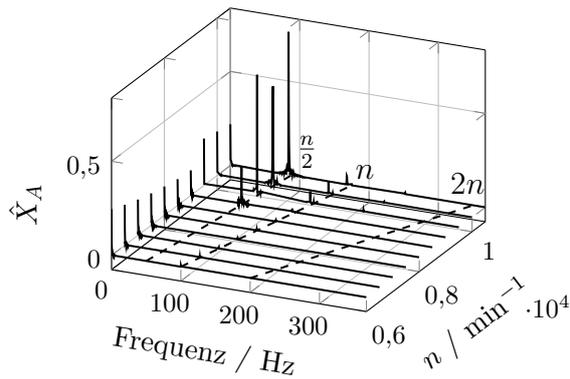
Abbildung 5.9: Einfluss der Foliennachgiebigkeit auf das Bifurkationsverhalten und die minimale Schmierfilmdicke des starren, unwuchtfreien Rotors. Parameter $m_a = 1,4$; $M = 1 \text{ kg}$; $R, L, \mu_L, \beta, p_0, d_f, \chi$ nach Tabelle 4.1.

in einer Erniedrigung der kritischen Drehzahl n^* aus. Darüber hinaus lässt sich für die weichere Struktur die Hopf-Bifurkation als subkritisch identifizieren, sodass dort zunächst instabile periodische Lösungen verzweigen. Für das kleinere Lagerspiel von $h_{02} = 9 \mu\text{m}$ ändert sich das Verzweigungsverhalten nicht grundlegend. Im Unterschied zum hier gezeigten größeren Lagerspiel führt eine weichere Lagerstruktur ($\beta = 5$) zum Stabilitätsverlust der Gleichgewichtslage bei niedrigen Drehzahlen. Entsprechend führt eine steifere Lagerstruktur ($\beta = 5/4$) zu einer Erhöhung der kritischen Drehzahl.

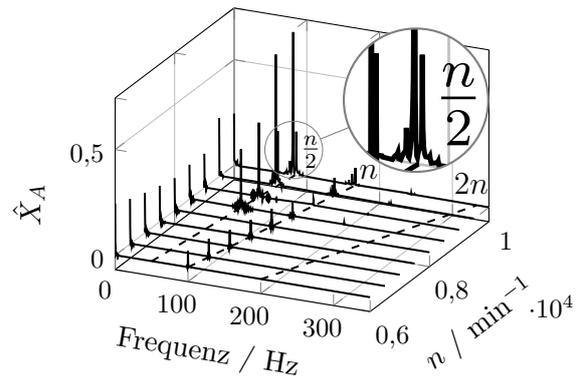
Ergänzend zeigt Abbildung 5.9b die Auswirkungen einer Variation des Nachgiebigkeitsparameters auf die sich einstellenden minimalen Filmdicken. Insbesondere für die Gleichgewichtslagen hat eine Veränderung des Nachgiebigkeitsparameters β für $h_{01} = 36 \mu\text{m}$ keinen, für $h_{02} = 9 \mu\text{m}$ lediglich einen sehr geringen Einfluss. Wie bereits in Abbildung 5.8d zu erkennen, liefert der Verfolgungsalgorithmus auch instabile periodische Lösungen, bei der sich Wellenzapfen und Lagerschale bereits durchdringen.

5.4.2 Rotor mit statischer Unwucht

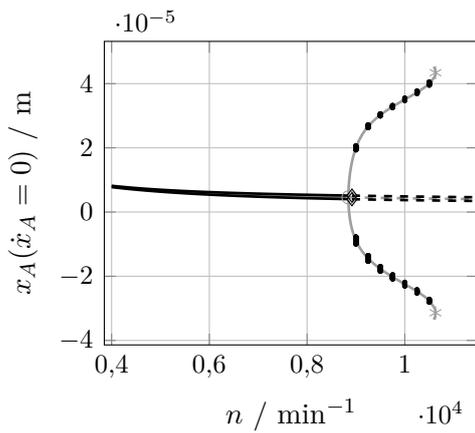
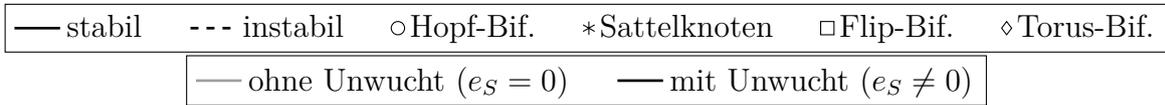
Die in Abschnitt 5.3.2 beschriebene Auswertemethodik wird auf die hier diskutierten in Folienlagern betriebenen Rotoren mit statischer Unwucht übertragen. Für zwei verschiedene Schwerpunktexzentrizitäten und ein Lagerspiel von $h_{01} = 36 \mu\text{m}$ sind in den Abbildungen 5.10a und 5.10b die Wasserfalldiagramme der vertikalen Koordinate X_A aufgetragen. Die Frequenzanalyse bei kleiner Unwucht e_{S1} unterscheidet sich mit Ausnahme der sehr geringen drehzahlsynchronen Amplitudenanteile kaum gegenüber der Frequenzanalyse des ideal gewuchteten Rotors (vergleiche Abbildung 5.7e). Für die größere Unwucht e_{S2} treten wie



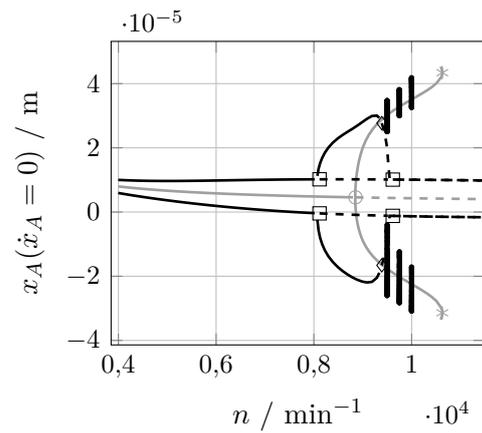
(a) Wasserfalldiagramm für e_{S1} und h_{01} .



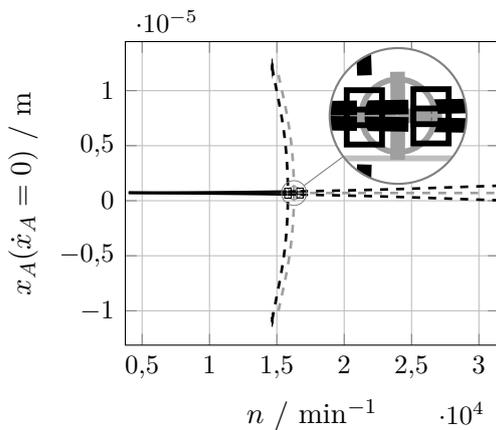
(b) Wasserfalldiagramm für e_{S2} und h_{01} .



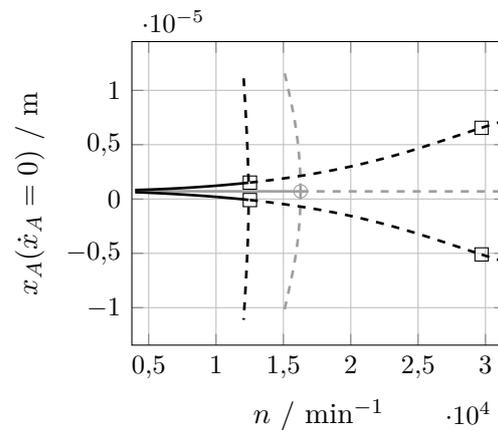
(c) Bifurkationsdiagramm für e_{S1} und h_{01} .



(d) Bifurkationsdiagramm für e_{S2} und h_{01} .



(e) Bifurkationsdiagramm für e_{S1} und h_{02} .



(f) Bifurkationsdiagramm für e_{S2} und h_{02} .

Abbildung 5.10: Auswirkungen einer statischen Unwucht auf das Verhalten des starren Rotors mit Unwucht in Folienlagern. Parameter $m_a = 1,4$; $R, L, \beta, d_f, \mu_L, p_0, \chi$ nach Tabelle 4.1, M, e_{S1}, e_{S2} nach Tabelle 5.1.

beim zylindrischen Starrlager größere, mit der Drehfrequenz der Welle zusammenfallende Amplituden über den gesamten Drehzahlbereich auf.

Die zugehörigen Bifurkationsdiagramme für die beiden Schwerpunktexzentrizitäten in der Koordinate x_A sind in den Abbildungen 5.10c und 5.10d dargestellt. Auch hier ist zu Vergleichszwecken das Lösungsverhalten des ideal gewuchteten Rotors in grau ergänzt. Wie im Fall des zylindrischen Starrlagers (vergleiche Abbildung 5.6c) vollführt der Rotor für niedrige Drehzahlen periodische Schwingungen um die Ruhelage im unwuchtfreien Fall. Bei kleiner Schwerpunktexzentrizität e_{S1} tritt anstelle der Hopf-Bifurkation bei einer ähnlichen Drehzahl eine Torus-Bifurkation auf. Wie beim Rotor in zylindrischen Starrlagern basieren die dargestellten Daten der quasi-periodischen Lösungen auf Zeitsimulationen über 800 Umdrehungen, von denen lediglich die letzten 400 für die Auswertung berücksichtigt werden. Grundsätzlich weichen die Schwingungsamplituden nur geringfügig von den Amplituden der periodischen Lösungen bei nicht vorhandener Unwucht ab.

Für die im Rahmen der Arbeit betrachtete große Exzentrizität e_{S2} stellen sich bei niedrigen Drehzahlen ebenfalls periodische Lösungen ein. Sie treten entsprechend den vorangegangenen Szenarien auch in Form einer Schwingung um die Ruhelage des ideal gewuchteten Rotors in Erscheinung. Anstelle der Hopf-Bifurkation bei $n^* \approx 8850 \text{ min}^{-1}$ lässt sich eine Flip-Bifurkation bei $n \approx 8110 \text{ min}^{-1}$ detektieren. Es entstehen stabile periodische Lösungen, wobei die Amplituden der Koordinaten x_A mit steigender Drehzahl anwachsen. Oberhalb $n \approx 9390 \text{ min}^{-1}$ werden die periodischen Lösungen instabil. Anhand der Floquet-Multiplikatoren lässt sich eine Torus-Bifurkation identifizieren. Auch im Wasserfalldiagramm 5.10b sind für die zwei höchsten dargestellten Drehzahlen durch die nah beieinander liegenden großen Amplituden entsprechende Änderungen zu erkennen. Die Analyse der quasi-periodischen Lösungen erfolgt in der wie in Abschnitt 5.3.2 beschriebenen Art und Weise. Im Unterschied zur kleinen Unwucht e_{S1} streuen die minimalen und maximalen Amplituden deutlich. Wie im Fall des starren Lagers (siehe Abbildung 5.6d) tritt bei der Verfolgung des primären Lösungszweigs eine weitere Flip-Bifurkation auf. Auch hier können keine verzweigenden Lösungen detektiert werden. Im Unterschied zum starren Lager verringert sich für das Folienlager jedoch die maximal mögliche Drehzahl des unwuchtbehafteten gegenüber dem unwuchtfreien Rotor.

Das Bifurkationsverhalten des starren, unwuchtbehafteten Rotors in Folienlagern mit kleinem Lagerspiel ($h_{02} = 9 \mu\text{m}$) ist in Abbildung 5.10e und 5.10f skizziert und zwar in Abbildung 5.10e für die kleine Unwucht e_{S1} , in Abbildung 5.10f für die große Unwucht e_{S2} . In beiden Fällen entstehen wie in allen bisher studierten Varianten für niedrige Drehzahlen periodische Lösungen mit Schwingungen um die Ruhelage des Systems mit $e_S = 0$. Anstelle der Hopf-Bifurkation lassen sich in beiden Fällen Flip-Bifurkationen detektieren. Es verzweigen jeweils instabile periodische Lösungen. Für e_{S1} liegt der Bifurkationspunkt nahe dem Hopf-Punkt, für e_{S2} ca. $\Delta n \approx 3760 \text{ min}^{-1}$ niedriger. Gemäß den diskutierten Fällen tritt jeweils eine weitere Flip-Bifurkation des primären Lösungszweigs auf, wobei auch hier keine neu entstehenden Lösungsäste detektiert werden können. Da für die beiden letzten numerischen Studien mit $h_{02} = 9 \mu\text{m}$ im gesamten Drehzahlbereich als einzige stabile Lösung die Schwingungen des Läufers um die Ruhelage des unwuchtfreien Rotors auftreten, wird auf die Darstellung der Wasserfalldiagramme verzichtet. Die Frequenz der sich einstellenden Schwingung entspricht der Drehfrequenz des Rotors. Auch hier führt,

wie schon beim Lagerspiel von $h_{01} = 36 \mu\text{m}$, die große Schwerepunktexzentrizität zu einer Verringerung der Maximaldrehzahl, oberhalb derer es zum Kontakt zwischen Wellenzapfen und Lagerschale kommt. Dieses Verhalten unterscheidet sich von dem beim Rotor in zylindrischen Starrlagern.

5.4.3 Fazit

Bei Kopplung des Rotormodells mit einem Folienlagermodell ergeben sich gegenüber jener mit dem Starrlager einige Änderungen. Das qualitative Verhalten bleibt vergleichbar. In den meisten Fällen führt eine Erweiterung des Lagermodells um eine nachgiebige Lagerstruktur zu einer Verschiebung der Hopf-Bifurkation zu höheren Drehzahlen. Die optimale Nachgiebigkeit der Folien im Hinblick auf eine bei möglichst hoher Drehzahl auftretende Hopf-Bifurkation hängt vom System ab und kann nicht allgemeingültig formuliert werden. Mit Berücksichtigung der Strukturdämpfung der Folien vergrößert sich die kritische Drehzahl weiter. Wie zuvor beim starren Lager kann die kritische Drehzahl durch eine Verringerung des Lagerspiels erhöht werden. Verglichen mit einem Starrlager sind aufgrund der nachgiebigen Struktur auch kleinere Lagerspiele realisierbar (siehe Abschnitt 4.1.1).

Auch der bereits beim in Starrlagern betriebenen Rotor identifizierte Halbfrequenzwirbel tritt bei Nutzung der hier diskutierten Folienlager auf. Bei kleinem Lagerspiel existieren jedoch keine stabilen periodischen Lösungen. Nach Überschreiten der kritischen Drehzahl kommt es direkt zum Kontakt zwischen Wellenzapfen und Lagerschale. Geringere Lagerspiele führen tendenziell zu kleineren minimalen Filmdicken. Bei den periodischen Lösungen tritt die minimale Filmdicke nicht bei maximaler Wellenzapfenexzentrizität auf, sondern bei Annäherung an den sich in der Deckfolie befindlichen Spalt.

Grundsätzlich bietet das Lösungsverhalten des unwuchtfreien Systems erneut einen guten Ausgangspunkt für das zu erwartende Verhalten eines Rotors mit statischer Unwucht. Wie bei zylindrischen Starrlagern sind beim in Folienlagern betriebenen starren Rotor mit statischer Unwucht anstelle der Gleichgewichtslösungen periodische Lösungen zu identifizieren. Sie beschreiben Schwingungen kleiner Amplitude um die Gleichgewichtslösungen. Abhängig von Lagerspiel und Schwerepunktexzentrizität tritt anstelle der Hopf-Bifurkation eine Torus- oder Flip-Bifurkation auf. Im Unterschied zum unwuchtbehafteten Rotor in Starrlagern wirkt sich in den hier untersuchten Fällen eine Unwucht immer nachteilig aus. Sie führt oftmals zu bei niedrigeren Drehzahlen beginnenden Halbfrequenzwirbeln mit großer Amplitude. Zudem existieren stabile Nichtgleichgewichtslösungen gegenüber dem unwuchtfreien Fall nur bis zu kleineren Drehzahlen.

Die Unklarheiten bzgl. der Gültigkeit der Annahme von Hafttrandbedingungen innerhalb des Fluidmodells bei großen Wellenzapfenamplituden bestehen auch für die Folienlagermodelle. Auf Basis der vorliegenden Simulationsergebnisse kann die häufig vorzufindende Behauptung von verbesserten Eigenschaften der Folienlager gegenüber zylindrischen Starrlagern bestätigt werden. Dies liegt unter anderem an kleineren Lagerspielen und der hier als viskos angenommenen Strukturdämpfung der Folien.

6 Biegeelastischer Rotor in Gaslagern

Das folgende Kapitel knüpft in seiner Systematik an das vorherige an. Im Sinne einer sukzessiven Modellanpassung wird das Rotormodell aus dem vorherigen Kapitel um die Eigenschaft einer biegeelastischen Welle erweitert. Die dabei durchgeführten Analyse- und Auswertemethoden entsprechen denen in Kapitel 5. Im Anschluss wird das Rotormodell beschrieben. Es folgen die Darstellungen der ermittelten Simulationsergebnisse, zunächst für die Kopplung des erweiterten Rotormodells mit dem Modell des zylindrischen Starrlagers, anschließend mit dem im Rahmen der Arbeit entwickelten Folienlagermodell. In beiden Fällen wird wie im vorherigen Kapitel zuerst die statische Unwucht vernachlässigt und dann miteinbezogen.

6.1 Modell des biegeelastischen Rotors

Abbildung 6.1 skizziert das Rotormodell. Wie beim Modell des starren Rotors wird weiterhin angenommen, dass der Rotor horizontal ausgerichtet ist und symmetrisch in zwei identischen Lagern betrieben wird. Die Welle wird allerdings nicht mehr als starr, sondern linear biegeelastisch mit der Proportionalitätskonstanten k modelliert. Auf der Welle befindet sich mittig in gleichem Abstand ℓ zu den beiden Lagern eine Scheibe der Masse M_S . Der Punkt C bezeichnet den Mittelpunkt der Scheibe (Wellendurchstoßpunkt), der Punkt S deren Schwerpunkt. Der Abstand zwischen C und S ist e_S . Beide Punkte liegen in der

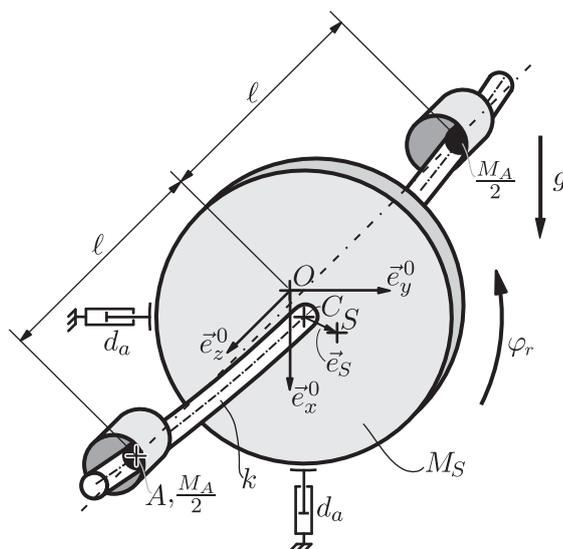


Abbildung 6.1: Skizze und kinematische Größen des Rotormodells mit biegeelastischer Welle.

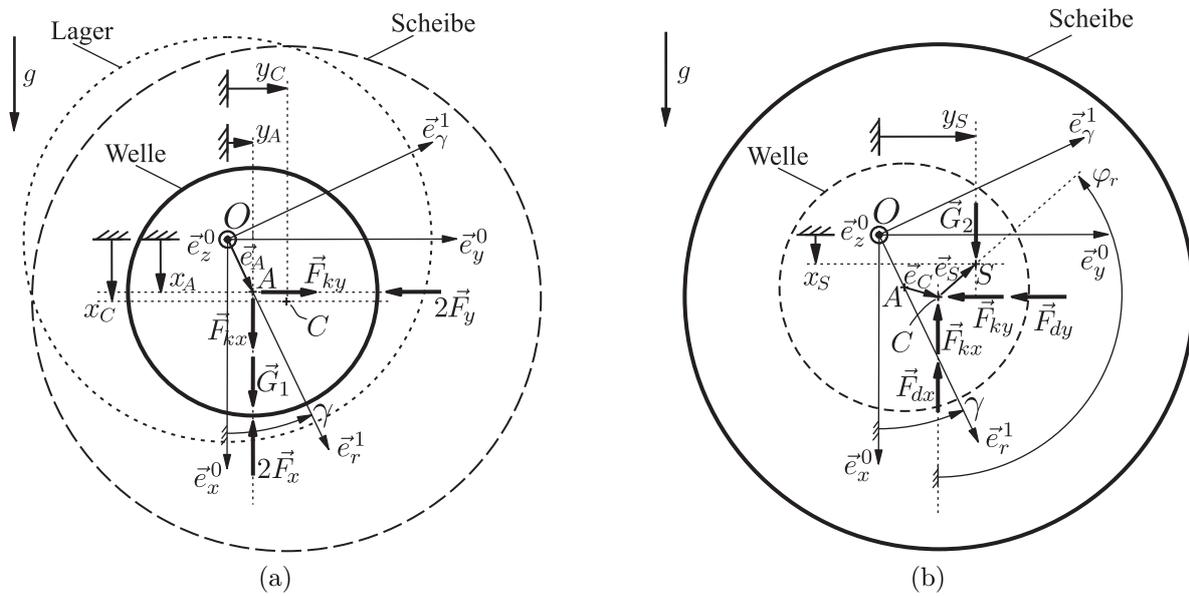


Abbildung 6.2: Freischnitt des Wellenzapfens (a) und der Scheibe (b) mit kinematischen Größen.

durch die raumfesten Basisvektoren \vec{e}_x^0 und \vec{e}_y^0 aufgespannten Ebene. Ein Verkippen der Scheibe wird nicht berücksichtigt. Die Masse der Welle wird durch zwei Massenpunkte, jeweils der Masse $M_A/2$, an den Positionen der Lager modelliert. An der Scheibe wirken zudem zwei viskose äußere Dämpfer mit der Proportionalitätskonstanten d_a .

Aufgrund der vorliegenden Symmetrie ist auch hier eine ebene Betrachtung möglich. Analog zum Rotormodell aus Kapitel 5 wird die Drehbewegung des Rotors durch die Winkelkoordinate φ_r vorgegeben. Das System weist folglich vier Freiheitsgrade auf. Die Beschreibung des Systemverhaltens erfolgt mittels den kartesischen Koordinaten x_A, y_A, x_C und y_C . Die Koordinaten des Schwerpunkts ergeben sich entsprechend den Beziehungen (5.1) und (5.2) über

$$x_S = x_C + e_S \cos \varphi_r, \quad (6.1)$$

$$y_S = y_C + e_S \sin \varphi_r \quad (6.2)$$

aus der Position des Scheibenmittelpunkts C und der Verdrehung φ_r .

Eine Bilanzierung der Kräfte für die in Abbildung 6.2a freigeschnittene Welle und die in Abbildung 6.2b freigeschnittene Scheibe führt auf die Gleichungen

$$M_A \ddot{x}_A - F_{kx} + 2F_x = M_A g, \quad (6.3)$$

$$M_A \ddot{y}_A - F_{ky} + 2F_y = 0, \quad (6.4)$$

$$M_S \ddot{x}_S + F_{dx} + F_{kx} = M_S g, \quad (6.5)$$

$$M_S \ddot{y}_S + F_{dy} + F_{ky} = 0. \quad (6.6)$$

Einsetzen der zweimaligen Zeitableitung von (6.1) und (6.2) sowie der Feder- und Dämpferkräfte

$$F_{kx} = k(x_C - x_A), \quad F_{ky} = k(y_C - y_A), \quad (6.7)$$

$$F_{dx} = d_a \dot{x}_C, \quad F_{dy} = d_a \dot{y}_C \quad (6.8)$$

liefert die Bewegungsgleichungen

$$M_A \ddot{x}_A + kx_A - kx_C + 2F_x = M_A g, \quad (6.9)$$

$$M_A \ddot{y}_A + ky_A - ky_C + 2F_y = 0, \quad (6.10)$$

$$M_S \ddot{x}_C + d_a \dot{x}_C - kx_A + kx_C = M_S e_S (\dot{\varphi}_r^2 \cos \varphi + \ddot{\varphi}_r \sin \varphi_r) + M_S g, \quad (6.11)$$

$$M_S \ddot{y}_C + d_a \dot{y}_C - ky_A + ky_C = M_S e_S (\dot{\varphi}_r^2 \sin \varphi - \ddot{\varphi}_r \cos \varphi_r). \quad (6.12)$$

Für die Lagerkräfte und die Drehung der Welle mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω gelten unverändert die Beziehungen (5.7) und (5.8), sodass sich dafür die Bewegungsgleichungen (6.9) – (6.12) zu

$$M_A \ddot{x}_A + kx_A - kx_C + 2F_x = M_A g, \quad (6.13)$$

$$M_A \ddot{y}_A + ky_A - ky_C + 2F_y = 0, \quad (6.14)$$

$$M_S \ddot{x}_C + d_a \dot{x}_C - kx_A + kx_C = M_S e_S \omega^2 \cos(\omega t) + M_S g, \quad (6.15)$$

$$M_S \ddot{y}_C + d_a \dot{y}_C - ky_A + ky_C = M_S e_S \omega^2 \sin(\omega t) \quad (6.16)$$

vereinfachen.

Dimensionslose Form des Rotormodells

Auch hier werden die Modellgleichungen in eine dimensionslose Form überführt. Die Koordinaten des Wellenzapfenmittelpunkts A werden wie gehabt über das Lagerspiel skaliert (vergleiche (3.111)). Die gleiche Bezugsgröße wird auch für die Koordinaten des Wellenzapfenmittelpunkts C gewählt:

$$X_C = \frac{x_C}{h_0}, \quad Y_C = \frac{y_C}{h_0}. \quad (6.17)$$

Die Transformationsvorschriften der Zeit (3.61), der Winkelgeschwindigkeit (3.107) und die Beziehung (3.133) zur Ermittlung der Lagerkraft gelten unverändert. Bei Annahme einer konstanten Winkelgeschwindigkeit gemäß (6.13) – (6.16) ergeben sich die entdimensionierten Modellgleichungen

$$X_A'' + \omega_1^2 X_A - \omega_1^2 X_C + \zeta f_X = \sigma, \quad (6.18)$$

$$Y_A'' + \omega_1^2 Y_A - \omega_1^2 Y_C + \zeta f_Y = 0, \quad (6.19)$$

$$X_C'' + 2\delta_a X_C' - \omega_2^2 X_A + \omega_2^2 X_C = \varepsilon_S \cos \tau + \sigma, \quad (6.20)$$

$$Y_C'' + 2\delta_a Y_C' - \omega_2^2 Y_A + \omega_2^2 Y_C = \varepsilon_S \sin \tau, \quad (6.21)$$

worin die auftretenden dimensionslosen Parameter gemäß

$$\omega_1^2 = \frac{k}{M_A \omega^2}, \quad \omega_2^2 = \frac{k}{M_S \omega^2}, \quad \delta_a = \frac{d_a}{2M_S \omega}, \quad \zeta = \frac{2RLp_0}{M_A h_0 \omega^2} \quad (6.22)$$

definiert sind. Der dimensionslose Lastparameter σ wurde bereits in (5.14), der dimensionslose Exzentrizitätsparameter des Schwerpunkts ε_S in (5.13) eingeführt. Die Parameter ω_1 und ω_2 sind dimensionslose Eigenfrequenzen, δ_a ein dimensionsloser Abklingkoeffizient und ζ ein dimensionsloser Parameter zur Skalierung der Lagerkräfte.

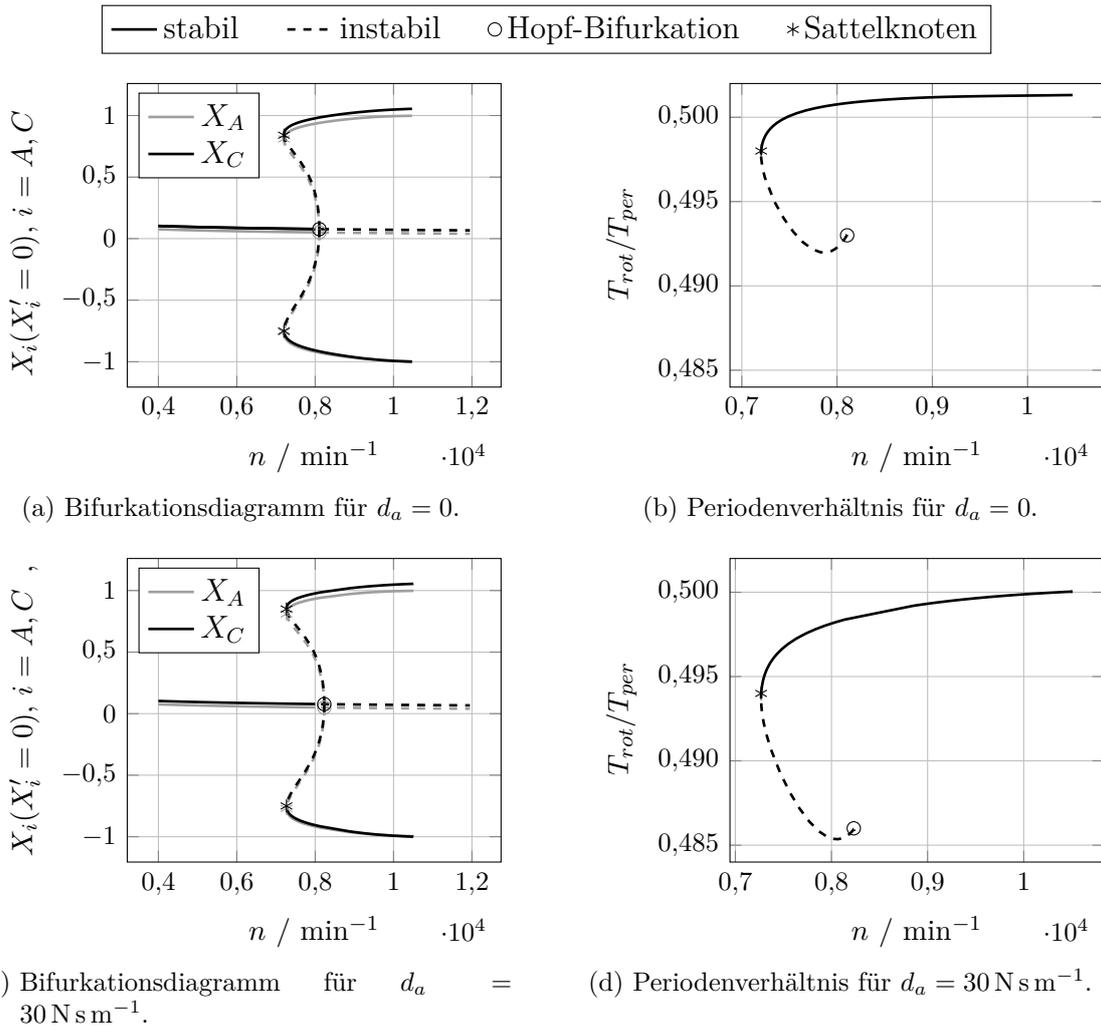


Abbildung 6.3: Vergleich des Verhaltens eines steifen Rotors mit und ohne äußere Dämpfung d_a in zylindrischen Starrlagern. Parameter $m_a = 1,4$; R, L, h_{01}, p_0, μ_L nach Tabelle 4.1, M_A, M_S, k_4 nach Tabelle 6.1.

Parameterwerte des Rotormodells

Die im Rotormodell mit Biegeelastizität auftretenden dimensionsbehafteten Parameter sind M_A, M_S, k, d_a, e_S . Im Sinne einer Vergleichbarkeit mit den Ergebnissen aus Kapitel 5 wird die Gesamtmasse des Rotors von dort übernommen (vergleiche Tabelle 5.1). Willkürlich wird eine gleiche Aufteilung der Gesamtmasse auf die Scheibe und die beiden die Wellenmasse repräsentierenden Massenpunkte vorgenommen. Folglich gilt $M_A = M_S = 0,5 \text{ kg}$. Auch die beiden bisher gewählten Parameterwerte für die Exzentrizität des Schwerpunkts $e_{S1} = 0,5 \mu\text{m}$ und $e_{S2} = 5 \mu\text{m}$ werden für den biegeelastischen Rotor beibehalten.

Die äußere Dämpfung des Läufers d_a bildet die Wechselwirkung mit dem umgebenden Medium ab. Bei gasförmigen Medien ist die dämpfende Wirkung sehr gering. Der lineare Dämpfungsparameter d_a wird deshalb ohne Kenntnis eines verifizierten Messwerts so gewählt, dass er die Interaktion des Lagers mit dem Wellenzapfen möglichst wenig beein-

Symbol	Bezeichnung	Wert
M_A	Masse der Welle	0,5 kg
M_S	Masse der Scheibe	0,5 kg
e_S	Schwerpunktexzentrizität	$e_{S1} = 0,5 \mu\text{m}$, $e_{S2} = 5 \mu\text{m}$
d_a	Konstante der äußeren Dämpfung	30 N s m^{-1}
k	Steifigkeit der Welle	$k_1 = 100 \text{ kN m}^{-1}$, $k_2 = 500 \text{ kN m}^{-1}$ $k_3 = 1000 \text{ kN m}^{-1}$, $k_4 = 5000 \text{ kN m}^{-1}$
Symbol	Definition	
ε	e_S/h_0	
σ	$g/h_0/\omega^2$	
ω_1	$\sqrt{k/M_A/\omega^2}$	
ω_2	$\sqrt{k/M_S/\omega^2}$	
δ_a	$d_a/2/M_S \omega$	
ζ	$2RLp_0/M_A/h_0/\omega^2$	

Tabelle 6.1: Modellparameter des biegeelastischen Rotors und typische, in der Arbeit verwendete numerische Werte.

flusst. In Anlehnung an die Arbeit von BOYACI [19] wird der Dämpfungsparameter auf $d_a = 30 \text{ N s m}^{-1}$ festgelegt. Zur Beurteilung des Einflusses der äußeren Dämpfung zeigt Abbildung 6.3 das Bifurkationsverhalten des biegeelastischen Rotors mit sehr hoher Steifigkeit ohne (Abbildung 6.3a und 6.3b) beziehungsweise mit (Abbildung 6.3c und 6.3d) der oben genannten äußeren Dämpfung. Das qualitative Lösungsverhalten ist in beiden Fällen identisch. Lediglich eine geringe Verschiebung der kritischen Drehzahl n^* ist zu erkennen. Die Dämpfung wirkt sich erwartungsgemäß stabilisierend aus, sodass die Hopf-Bifurkation jetzt bei einer leicht erhöhten Drehzahl auftritt. Gleichzeitig vergrößert sich die Periodendauer der periodischen Lösung geringfügig.

Ein Schwerpunkt dieser Arbeit liegt in der Identifizierung und Visualisierung grundlegender Effekte von in aerodynamischen Gaslagern betriebenen Rotoren. Die Wahl des Steifigkeitsparameters k erfolgt deshalb so ($k_1 = 500 \text{ kN m}^{-1}$ und $k_2 = 100 \text{ kN m}^{-1}$), dass sich bei Berücksichtigung der Elastizität der Welle das sich einstellende Verhalten gegenüber einem als starr modellierten Rotor sichtbar unterscheidet. Tabelle 6.1 fasst alle Parameter des Rotormodells zusammen.

6.2 Gekoppeltes Rotor-Lager-Modell

Die Methodik der Rotor-Lager-Kopplung wird entsprechend Abschnitt 5.2 auf das biegeelastische Rotormodell übertragen. Die Formulierung der Modellgleichungen (6.18) – (6.21) als Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\mathbf{x}'_{Re} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{Re}) \quad \mathbf{f} \in \mathbb{R}^8 \quad (6.23)$$

steht deshalb auch hier am Anfang. Im Zustandsvektor \mathbf{x}_{Re} stehen die dimensionslosen Lagekoordinaten der Punkte A und C sowie deren dimensionslose Geschwindigkeiten

$$\mathbf{x}_{Re} = [X_A, Y_A, X'_A, Y'_A, X_C, Y_C, X'_C, Y'_C]^T. \quad (6.24)$$

Mittels des Gesamtzustandsvektors

$$\mathbf{x}_{LRe} = [\mathbf{x}_{Re}^T, \mathbf{x}_{La}^T]^T, \quad \mathbf{x}_{LRe} \in \mathbb{R}^{2\ell x+8} \quad (6.25)$$

mit dem Lagermodell (4.96) ist auch hier die Formulierung des vollständigen Rotor-Lager-Modells über ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\mathbf{x}'_{LRe} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{LRe}), \quad \mathbf{f} \in \mathbb{R}^{2\ell x+8} \quad (6.26)$$

möglich.

6.3 Diskussion des biegeelastischen Rotors in Starrlagern

6.3.1 Unwuchtfreier Fall

Wie beim starren Rotor, der in zylindrischen Starrlagern betrieben wird, tritt auch für das biegeelastische Pendant im ideal ausgewuchteten Fall bei ansteigender Drehzahl ein Wechsel von stabilen zu instabilen Gleichgewichtslagen auf. Die Auswirkungen der Massenaufteilung zwischen M_A und M_S auf die kritische Drehzahl sind in Abbildung 6.4a dargestellt. Es zeigt sich, dass die Sensitivität gegenüber der Massenaufteilung mit geringer werdender Steifigkeit der Welle zunimmt. Gleichzeitig ist erkennbar, dass bei einer Konzentration der Gesamtmasse in den beiden Massenpunkten M_A ($\frac{M_A}{M_A+M_S} = 1$) die Steifigkeit der Welle keinen Einfluss auf die kritische Drehzahl hat. Mit zunehmender Konzentration der Gesamtmasse in der Scheibe steigt die Abhängigkeit der kritischen Drehzahl von der Wellensteifigkeit. Es besteht die Tendenz, dass mit abnehmender Steifigkeit die Stabilitätsgrenze sinkt.

Die Zusammenhang zwischen äußerer Dämpfung d_a und der Stabilitätsgrenze n^* ist in Abbildung 6.4b visualisiert. Es zeigt sich, dass die äußere Dämpfung stabilisierend wirkt, da für alle untersuchten Steifigkeiten die kritische Drehzahl mit größer werdender Dämpfung ansteigt. Die absolute und relative Zunahme ist dabei um so größer, je nachgiebiger die Welle ist.

Das Bifurkationsverhalten des biegeelastischen Rotors in zylindrischen Starrlagern zeigt Abbildung 6.5 und zwar in der linken Spalte für die Wellensteifigkeit k_1 , in der rechten Spalte für die Wellensteifigkeit k_2 . In der ersten Zeile ist die Lagerkoordinate X_A , in der zweiten Zeile die Scheibenkoordinaten X_C und in der dritten Zeile das Periodenverhältnis jeweils in Abhängigkeit der Drehzahl dargestellt. Zu Vergleichszwecken sind in allen Abbildungen die Ergebnisse des starren Rotors aus dem vorherigen Kapitel in grau eingezeichnet. Letzterer weist die gleiche Gesamtmasse, jedoch keine äußere Dämpfung auf. Da das Vergleichsmodell einen starren Rotor repräsentiert, gilt $X_C = X_A$. Wie in Kapitel 5 werden die Bifurkationsdiagramme der Abbildung 6.5 um die zugehörigen Wasserfalldiagramme in Abbildung 6.6 ergänzt. Das Vorgehen zur Ermittlung dieser Ergebnisse entspricht der

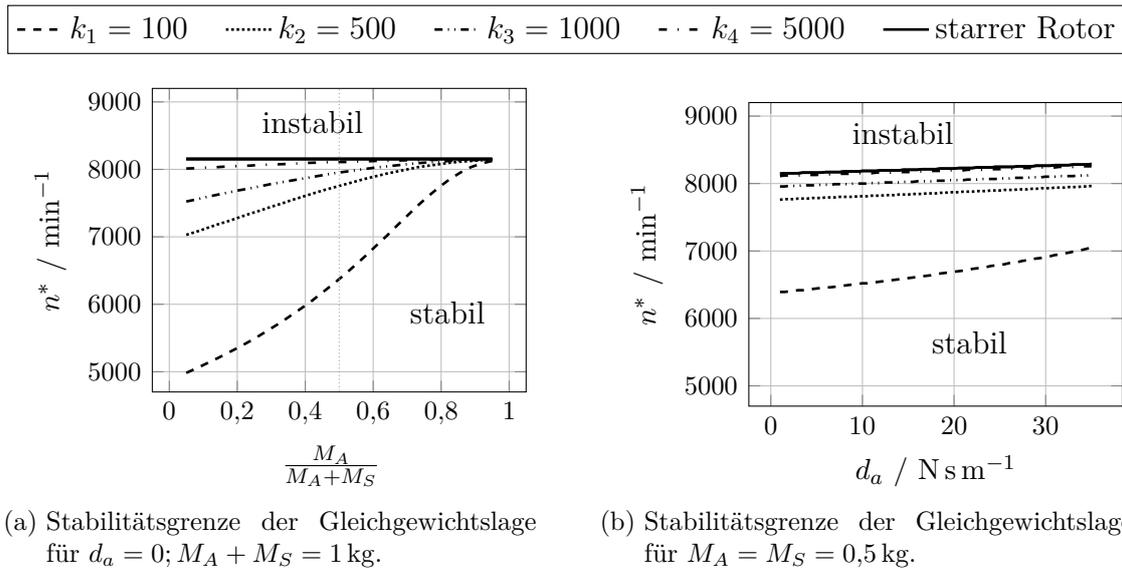


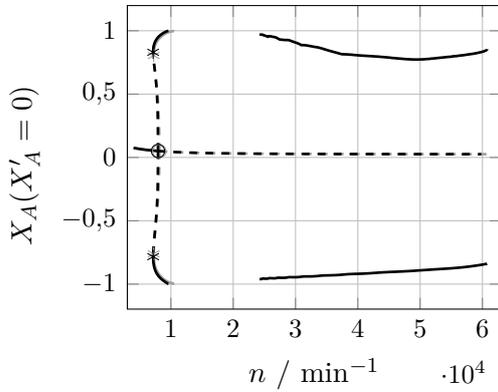
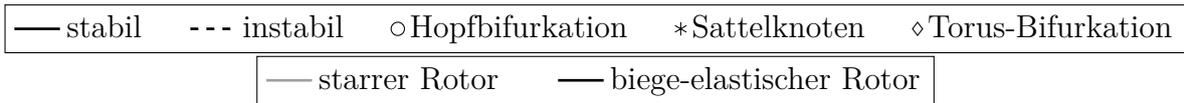
Abbildung 6.4: Stabilitätsgrenze des biegeelastischen unwuchtfreien Rotors in Starrlagern in Abhängigkeit der Massenverteilung (a) und der äußeren Dämpfung (b). Parameter $m_a = 1,4$; R, L, h_{01}, p_0, μ_L nach Tabelle 4.1, k in kN m^{-1} .

Beschreibung aus Abschnitt 5.3.1, wobei hier die Wellenumdrehungen des Einlaufvorgangs und des Auswertebereichs erhöht wurden.

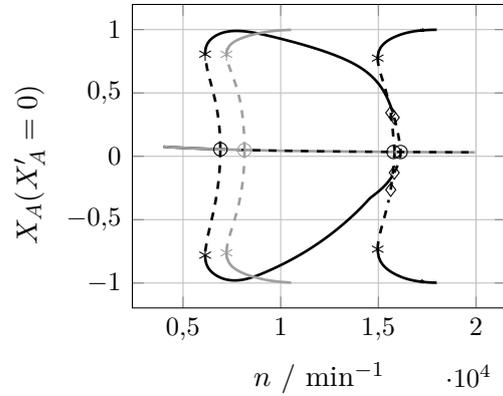
Anhand der Abbildung 6.5a ist zu erkennen, dass der Rotor mit der höheren Steifigkeit k_1 im unteren Drehzahlbereich bis ca. $n \approx 10\,000 \text{ min}^{-1}$ gleiches Verhalten wie der starre Rotor aufweist. Der Kontakt zwischen Lagerschale und Wellenzapfen tritt beim biegeelastischen Rotor bei einer geringfügig niedrigeren Drehzahl auf. Die Gleichgewichtslösungen sind nahezu identisch. Der entscheidende Unterschied ist bei hohen Drehzahlen zu erkennen. Im Gegensatz zu allen bisherigen Simulationsstudien des starren Rotors existieren jetzt oberhalb $n \approx 24\,220 \text{ min}^{-1}$ weitere stabile periodische Lösungen. Dabei nimmt die Amplitude der Wellenzapfenkoordinaten mit steigender Drehzahl tendenziell ab.

Bei der Scheibenkoordinate X_C tritt im Vergleich zum starren Rotor ein leichter Versatz der stationären Lösungen auf. Dieser ist durch die Verformung der elastischen Welle infolge der Gewichtskraft bedingt. Die Auslenkung der Scheibe der periodischen Lösungen bei niedrigen Drehzahlen liegt in der Größenordnung des Lagerspiels. Im zweiten Bereich dagegen liegen die Auslenkungen der Scheibe ungefähr bei einer Größenordnung höher.

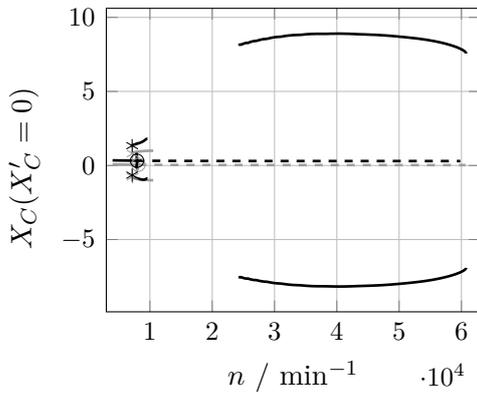
Auch beim Rotor mit flexibler Welle der Steifigkeit k_2 liegt die Dauer der periodischen Lösungen im niedrigen Drehzahlbereich bei etwa einer halben Wellenumdrehung. Im zweiten Abschnitt der höheren Drehzahlen trifft dies jedoch nicht mehr zu. Die Periodendauer bleibt hier drehzahlunabhängig, wie die Abbildungen 6.6a und 6.6c belegen. Die Grundschiwingung hat über den gesamten dargestellten Bereich eine Frequenz von ca. 152 Hz. Diese Frequenz stimmt gut mit der Eigenfrequenz der Scheibe $f_{\text{eig}} = \omega_{\text{eig}}/2/\pi = \sqrt{k_2/M_S}/2/\pi \approx 159 \text{ Hz}$ bei fixierter Wellenzapfenlage ($X_A = \text{konst.}$) überein. In Anlehnung an das Verhalten eines Rotors in ölgeschmierten Gleitlagern (vergleiche zum Beispiel [19]) kann dieses Verhalten als *air-whip* interpretiert werden. Bei der Analyse der Wellenzapfen-



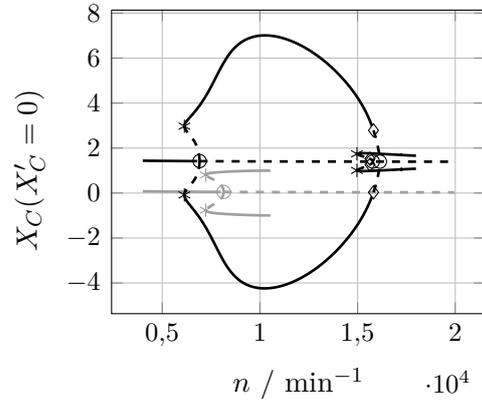
(a) Bifurkationsdiagramm von X_A für k_2 .



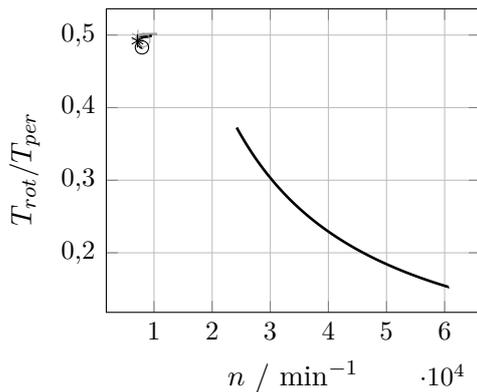
(b) Bifurkationsdiagramm von X_A für k_1 .



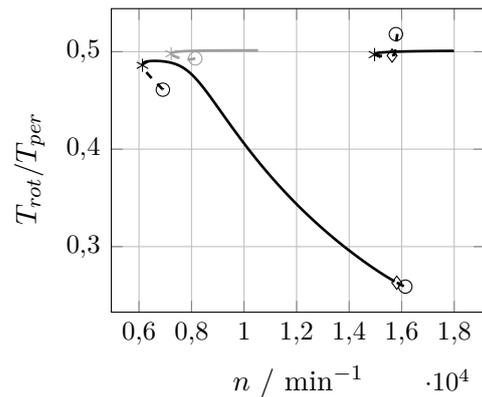
(c) Bifurkationsdiagramm von X_C für k_2 .



(d) Bifurkationsdiagramm von X_C für k_1 .



(e) Periodenverhältnis für k_2 .



(f) Periodenverhältnis für k_1 .

Abbildung 6.5: Bifurkationsverhalten und Periodendauer der periodischen Lösungen des biegeelastischen unwuchtfreien Rotors in Starrlagern für verschiedene Wellensteifigkeiten. Parameter $m_a = 1,4$; R, L, h_{01}, p_0, μ_L nach Tabelle 4.1, M_A, M_S, k_1, k_2, d_a nach Tabelle 6.1.

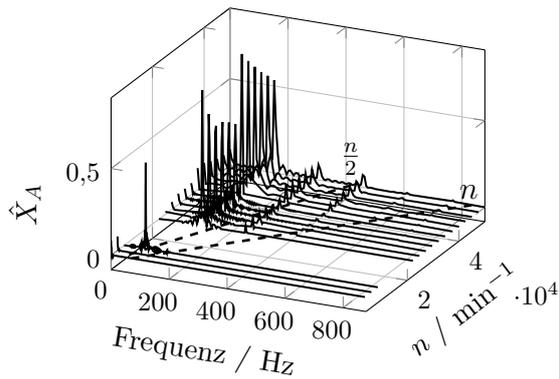
koordinate im Frequenzbereich treten dabei auch sichtbare Amplituden der doppelten und dreifachen Grundfrequenz auf (siehe Abbildung 6.6a). Im Unterschied dazu tritt bei der Scheibenkoordinate nur der Anteil der Grundschiwingung auf (vergleiche Abbildung 6.6c). Beim Rotor mit geringerer Steifigkeit k_1 tritt, wie bereits in Abbildung 6.4a gezeigt, die Hopf-Bifurkation bei einer niedrigeren Drehzahl auf. Auch hier verzweigen von den Gleichgewichtslösungen periodische Lösungen, die zunächst instabil sind. Beim Verfolgen dieses Lösungszweigs tritt ein Sattelknoten auf, bei dem ein Wechsel zu stabilen periodischen Lösungen stattfindet. Bei einer weiteren Erhöhung des Verzweigungsparameters n kommt es hier nicht zum Kontakt zwischen Wellenzapfen und Lagerschale. Die Amplituden der Wellenzapfenbewegung verringern sich nach einem anfänglich kurzen Anstieg mit größer werdender Rotordrehzahl, bis bei $n \approx 15\,820 \text{ min}^{-1}$ eine Torus-Bifurkation auftritt. Hier findet der Übergang zu instabilen Grenzyklen statt, die bei weiterer Verfolgung wieder in den Ast der Gleichgewichtslösungen übergehen. Abbildungen 6.6b, 6.6d und 6.5f deuten darauf hin, dass der Rotor bis $n \approx 8000 \text{ min}^{-1}$ zunächst den Halbfrequenzwirbel (air-whirl) ausführt, danach erfolgt der Übergang in den air-whip. Wie bei der Steifigkeit k_2 bleibt die Schwingfrequenz annähernd konstant. Sie liegt hier im Bereich von 60–70 Hz und stimmt mit der Eigenfrequenz der Scheibe $f_{\text{eig}} = \sqrt{k_1/M_S}/2/\pi \approx 71 \text{ Hz}$ bei konstanter Wellenzapfenlage ($X_A = \text{konst.}$) überein.

Beim Verfolgen der Gleichgewichtslösungen nach der Hopf-Bifurkation überquert bei $n \approx 15\,780 \text{ min}^{-1}$ ein weiteres konjugiert komplexes Eigenwertpaar die imaginäre Achse. Der verzweigende Ast periodischer Lösungen ist zunächst instabil. Bei dessen Verfolgung wird erst eine Torus-Bifurkation und anschließend ein Sattelknoten detektiert. Bei letzterem entstehen stabile Lösungen, deren Periodendauer recht genau dem Zeitintervall einer halben Wellenumdrehung entspricht (Halbfrequenzwirbel). Die Amplituden des Wellenzapfens sind im Bereich der maximal möglichen Exzentrizität, bevor es schließlich zum Kontakt zwischen Lagerschale und Wellenzapfen kommt. Die Amplituden der Scheibe hingegen sind sehr gering (siehe Abbildung 6.5d und auch 6.6d).

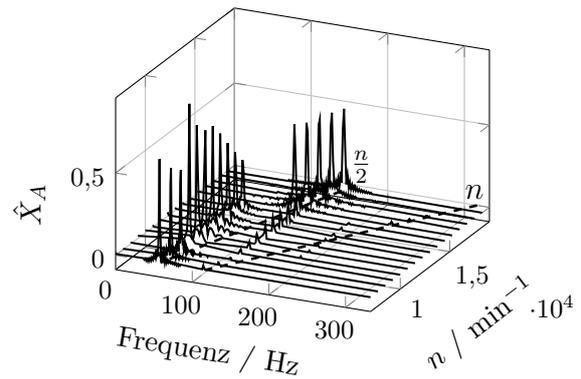
6.3.2 Rotor mit statischer Unwucht

Fallen der Mittelpunkt der Scheibe C und der Schwerpunkt des Rotors S nicht zusammen, findet neben möglichen Selbsterregungseffekten bedingt durch die Lagerkräfte eine harmonische Erregung der Scheibe statt (siehe (6.20) und (6.21)). Abbildungen 6.7 und 6.8 zeigen die ermittelten Ergebnisse des Rotorverhaltens für die beiden Schwerpunktexzentrizitäten e_{S1} und e_{S2} für die Wellensteifigkeit k_2 . In grau ist vergleichend der unwuchtfreie Fall skizziert.

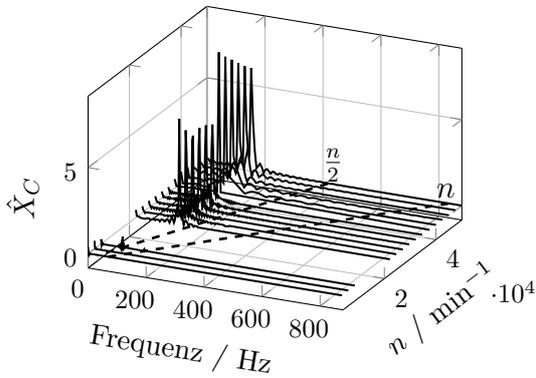
Die Simulationsergebnisse der kleineren der beiden Exzentrizitäten e_{S1} sind anhand der Koordinaten X_A und X_C in den Abbildungen 6.7a und 6.7b dargestellt. Anstelle der Hopf-Bifurkation im unwuchtfreien Fall lässt sich bei einer ähnlichen Drehzahl eine Torus-Bifurkation detektieren. Es verzweigen quasi-periodische Lösungen. Dieses Charakteristikum entspricht dem des starren Rotors (siehe Abbildung 5.6c). Die Auslenkungen der quasi-periodischen Lösungen werden, wie bereits in Abschnitt 5.3.2 beschrieben, mittels Zeitintegration nach einem Einlaufzeitraum von 400 Umdrehungen für die folgenden 400 Umdrehungen ausgewertet. Das Lösungsverhalten bleibt dem des unwuchtfreien Rotors



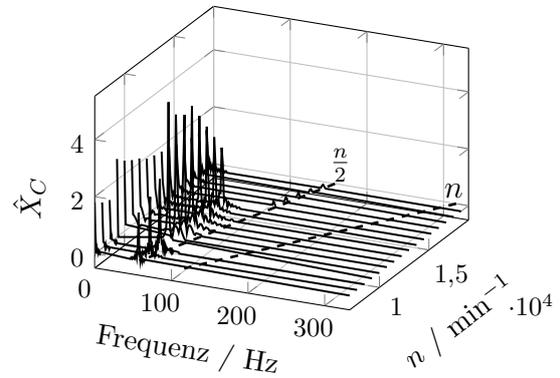
(a) Wasserfalldiagramm von X_A für k_2 .



(b) Wasserfalldiagramm von X_A für k_1 .



(c) Wasserfalldiagramm von X_C für k_2 .

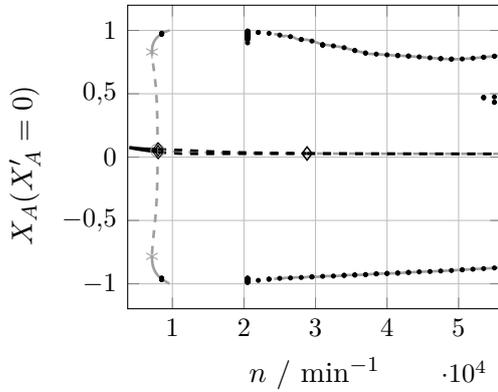
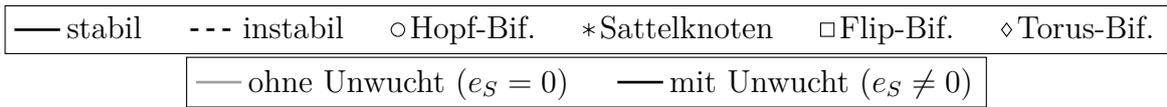


(d) Wasserfalldiagramm von X_C für k_1 .

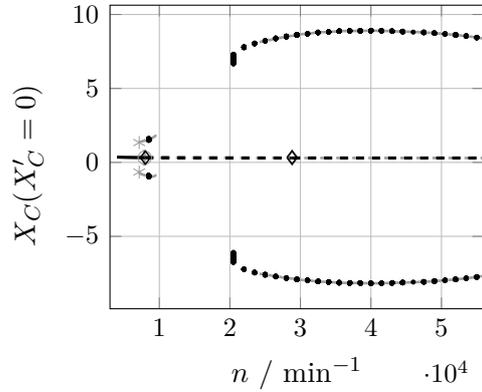
Abbildung 6.6: Wasserfalldiagramme des biegeelastischen unwuchtfreien Rotors in Starrlagern für verschiedene Wellensteifigkeiten. Parameter $m_a = 1,4$; R, L, h_{01}, p_0, μ_L nach Tabelle 4.1, M_A, M_S, k_1, k_2, d_a nach Tabelle 6.1.

vergleichbar. Lediglich im zweiten Bereich der jetzt quasi-periodischen Lösungen existieren diese auch bei niedrigeren Drehzahlen als im unwuchtfreien Fall. Die bei $n \approx 55\,000 \text{ min}^{-1}$ zusätzlich auftretenden Punkte im Bereich $X_A \approx 0,5$ sind in der Bahnkurve des Wellenzapfenmittelpunkts begründet und kennzeichnen keine neuen Phänomene.

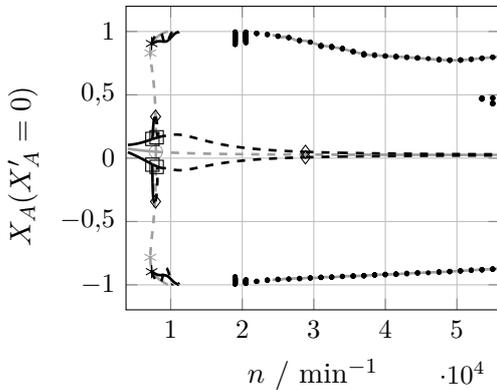
Für die größere der im Rahmen der Arbeit gewählten Unwucht e_{S2} ergibt sich für die Wellensteifigkeit k_2 im Bereich der Hopf-Bifurkation ein komplexeres Bifurkationsszenario (siehe Abbildungen 6.7c und 6.7d). Abbildungen 6.7e und 6.7f zeigen zur besseren Übersicht jeweils einen vergrößerten Ausschnitt der beiden Darstellungen. Zu erkennen sind auch hier die gegenüber e_{S1} jetzt größeren Amplituden der periodischen Lösungen um die stabilen Gleichgewichtslösungen bei niedrigen Drehzahlen. Bei Verfolgung des primären Lösungszweiges lassen sich zwei Flip-Bifurkationen detektieren. Ausgehend von der ersten entstehen stabile periodische Lösungen doppelter Periode, die bei deren Verfolgung infolge einer Torus-Bifurkation instabil werden. Die Amplituden nach der Torus-Bifurkation verringern sich mit zunehmender Drehzahl und gehen schließlich bei der zweiten Flip-Bifurkation in den primären Lösungszweig über. An der Torus-Bifurkation verzweigende



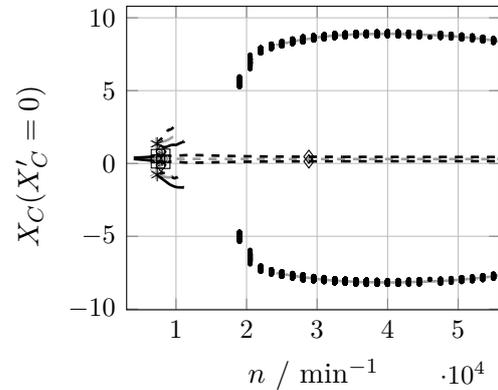
(a) Bifurkationsdiagramm von X_A für e_{S1} .



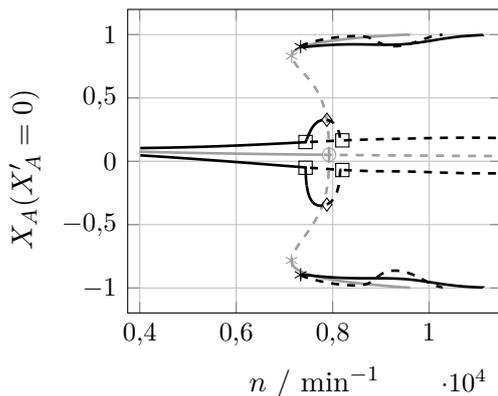
(b) Bifurkationsdiagramm von X_C für e_{S1} .



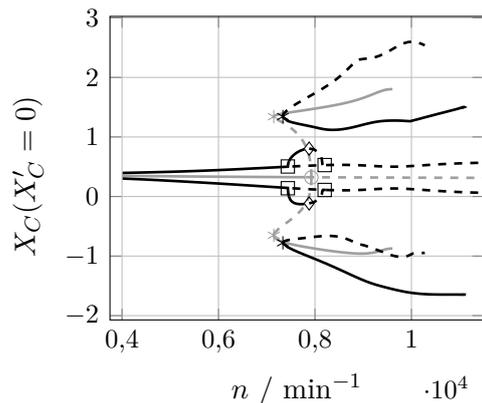
(c) Bifurkationsdiagramm von X_A für e_{S2} .



(d) Bifurkationsdiagramm von X_C für e_{S2} .

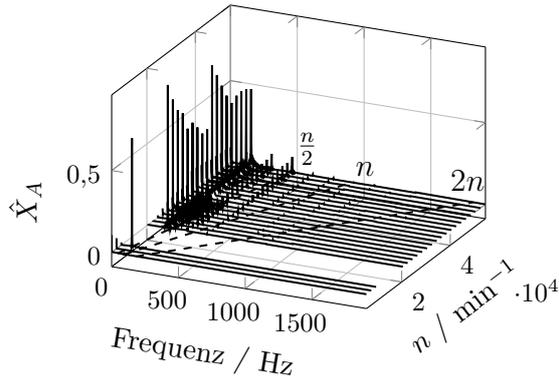


(e) Vergrößerter Ausschnitt des Bifurkationsdiagramms von X_A für e_{S2} .

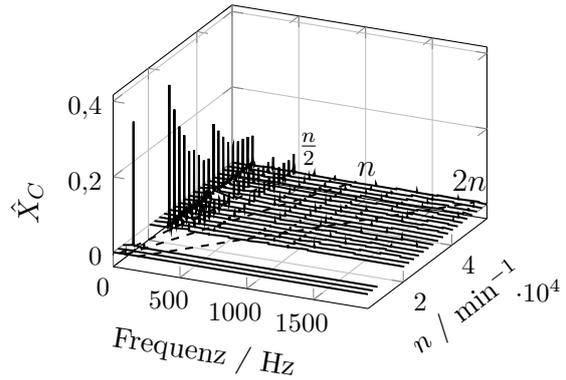


(f) Vergrößerter Ausschnitt des Bifurkationsdiagramms von X_C für e_{S2} .

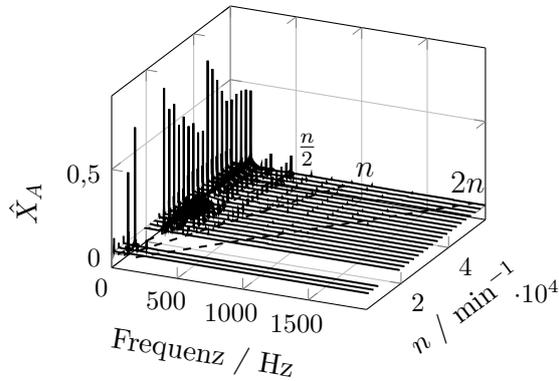
Abbildung 6.7: Bifurkationsverhalten des biegeelastischen Rotors der Steifigkeit k_2 mit verschiedenen Unwuchten in Starrlagern. Parameter $m_a = 1,4$; R, L, h_{01}, p_0, μ_L nach Tabelle 4.1, $M_A, M_S, k_2, d_a, e_{S1}, e_{S2}$ nach Tabelle 6.1.



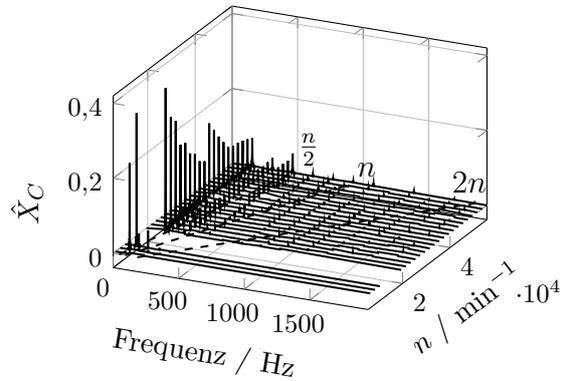
(a) Wasserfalldiagramm von X_A für e_{S1} .



(b) Wasserfalldiagramm von X_C für e_{S1} .



(c) Wasserfalldiagramm von X_A für e_{S2} .



(d) Wasserfalldiagramm von X_C für e_{S2} .

Abbildung 6.8: Wasserfalldiagramme des biegeelastischen Rotors mit Unwucht der Steifigkeit k_2 in Starrlagern. Parameter $m_a = 1,4$; R, L, h_{01}, p_0, μ_L nach Tabelle 4.1, $M_A, M_S, k_2, d_a, e_{S1}, e_{S2}$ nach Tabelle 6.1.

quasi-periodische Lösungen konnten nicht ermittelt werden. Ausgehend von der Torus-Bifurkation lassen sich keine quasi-periodischen Lösungen ermitteln. Vielmehr existiert ein weiterer Lösungsast von stabilen und instabilen periodischen Lösungen mit großen Amplituden $|X_A| \approx 1$. Die Periodendauer entspricht der Umlaufdauer einer Wellenumdrehung, was anhand der hier dargestellten Ergebnisse jedoch nicht erkennbar ist. Im weiteren Verlauf, oberhalb $n \approx 19\,500 \text{ min}^{-1}$, existieren wie im Fall der kleinen Unwucht e_{S1} quasi-periodische Lösungen, deren minimale und maximale Amplitude insbesondere bei der Scheibenkoordinate jedoch deutlicher variieren. Wie beim starren Rotor in zylindrischen Starrlagern führt die höhere Schwerpunktzentrizität e_{S2} zur Existenz stabiler Nichtgleichgewichtslösungen in größeren Drehzahlbereichen.

Beim Vergleich der Wasserfalldiagramme des biegeelastischen Rotors ohne und mit Unwucht (vergleiche Abbildungen 6.6a und 6.6c mit Abbildung 6.8) treten bei letzteren weitere Schwingungsanteile geringer Amplitude bei ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz auf. Diese sind für die große Unwucht e_{S2} stärker ausgebildet und über einen größeren

Frequenzbereich vorhanden. Die größten Amplituden treten wie im unwuchtfreien Fall bei ca. 150 Hz auf.

Das Bifurkationsverhalten des Systems mit der flexibleren Welle k_1 für beide Schwerpunktexzentrizitäten e_{S1} und e_{S2} ist in Abbildung 6.9 dargestellt und zwar in der oberen Zeile für die kleine, in der mittleren Zeile für die große Schwerpunktexzentrizität. Die untere Zeile zeigt zwei Vergrößerungen der Koordinate X_C . Die dargestellten Ergebnisse reihen sich konform in die bisher gezeigten Modellanalysen ein. An die Stelle von Gleichgewichtslösungen treten periodische Lösungen, deren Amplitude bei größerer Exzentrizität e_{S2} zunehmen. Anstatt der Hopf-Bifurkation tritt eine Tours-Bifurkation auf, hier auch bei der großen Unwucht e_{S2} . Die Amplituden der quasi-periodischen Schwingungen entsprechen in etwa jenen des unwuchtfreien Falls. Wie bei der Steifigkeit k_2 streuen die Amplituden der Scheibe bei e_{S2} stärker. Auch der Drehzahlbereich, innerhalb dessen stabile Nichtgleichgewichtslösungen existieren, ist mit Unwucht etwas größer.

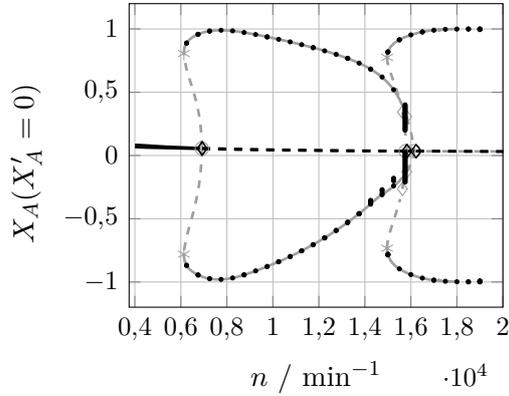
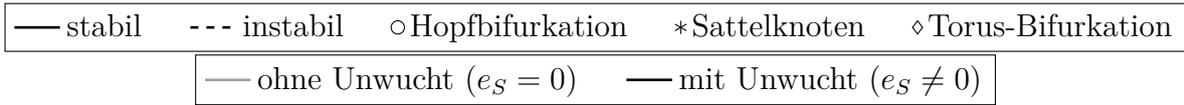
Entsprechend dem bisherigen Vorgehen zeigt Abbildung 6.10 ergänzend die Wasserfalldiagramme der Koordinaten X_A und X_C für die beiden Schwerpunktexzentrizitäten. Wie im Falle des Rotors mit höherer Steifigkeit k_2 treten dabei zusätzliche Anteile ganzzahliger Vielfacher der Grundfrequenz auf. Sie sind hier jedoch nicht so stark ausgeprägt wie bei höherer Steifigkeit (vergleiche Abbildung 6.8). Schwach erkennbar sind für e_{S2} auch geringe mit der Drehfrequenz der Welle zusammenfallende Schwingungsanteile. Die größten Amplituden sind weiterhin im Bereich von 60–70 Hz lokalisiert.

6.3.3 Fazit

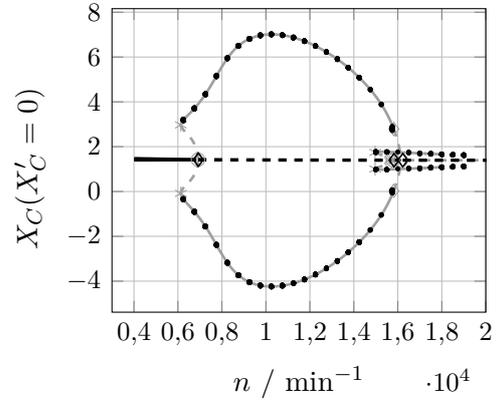
Die Veränderungen des biegeelastischen Rotormodells gegenüber dem starren Rotormodell sind die hinzugekommene Wellensteifigkeit k und die Aufteilung der Rotormasse. Ein Teil der Gesamtmasse repräsentiert die Welle und ist durch zwei Massenpunkte im Lager modelliert. Der andere Teil repräsentiert beispielsweise eine Scheibe, die mittig auf der Welle angeordnet ist. Zusätzlich wird eine äußere viskose Dämpfung der Scheibe gegenüber der Umgebung angenommen. Alle drei Merkmale beeinflussen das Verhalten des Rotors.

Die Stabilitätsgrenze der Gleichgewichtslage verschiebt sich für das hier diskutierte Lagerspiel mit geringerer Wellensteifigkeit zu niedrigeren Drehzahlen. Gleiches gilt für eine steigende Konzentration der Masse in der Scheibe bei unveränderter Gesamtmasse. Die äußere Dämpfung wirkt stabilisierend. Mit größer werdender Dämpfungskonstante erhöht sich die Grenzdrehzahl. Sie ist so gewählt, dass eine Verschiebung der Grenzdrehzahl nur sehr gering ausfällt.

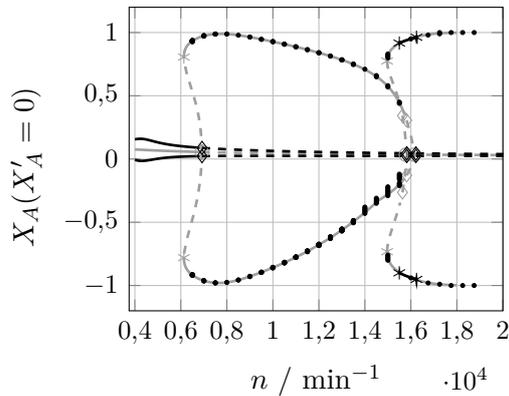
Bei der Auswertung des dynamischen Rotorverhaltens tritt, wie zuvor beim starren Rotor, der Halbfrequenzwirbel (air-whirl) auf. Zusätzlich ist ein neues Phänomen, der air-whip, ebenfalls in Form periodischer Lösungen zu beobachten. Er ist charakterisiert durch selbst-erregte Schwingungen der Scheibenmasse und der Massen, die die Welle repräsentieren. Die Frequenz der Schwingung entspricht der Eigenfrequenz der Scheibe bei festgehaltenem Wellenzapfen. Im Unterschied zum Halbfrequenzwirbel ist sie folglich nicht abhängig von der Wellendrehzahl. Die Amplitude der Scheibe ist deutlich größer als beim Halbfrequenzwirbel. Bei welcher Drehzahl der air-whip auftritt, hängt unter anderem von der Wellensteifigkeit ab. Für die gewählten Parameterwerte ist dieser beispielsweise im Fall einer kleinen



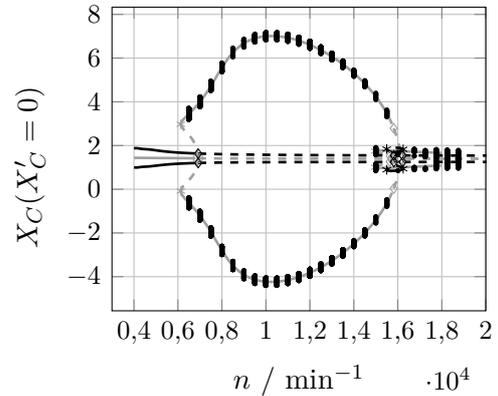
(a) Bifurkationsdiagramm von X_A für e_{S1} .



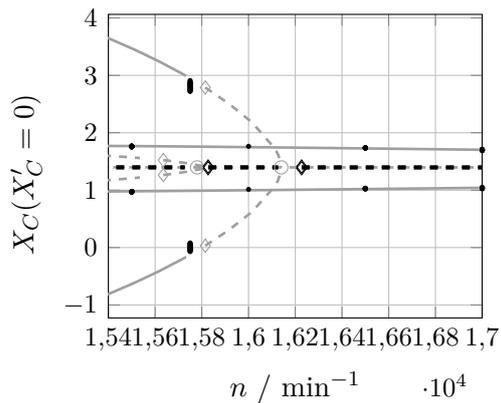
(b) Bifurkationsdiagramm von X_C für e_{S1} .



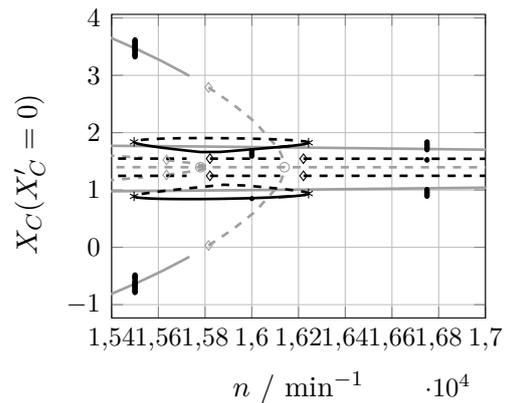
(c) Bifurkationsdiagramm von X_A für e_{S2} .



(d) Bifurkationsdiagramm von X_C für e_{S2} .



(e) Vergrößerter Ausschnitt des Bifurkationsdiagramms von X_C für e_{S1} .



(f) Vergrößerter Ausschnitt des Bifurkationsdiagramms von X_C für e_{S2} .

Abbildung 6.9: Bifurkationsverhalten des biegeelastischen Rotors der Steifigkeit k_1 mit verschiedenen Unwuchten in Starrlagern. Parameter $m_a = 1,4$; R, L, h_{01}, p_0, μ_L nach Tabelle 4.1, $M_A, M_S, k_1, d_a, e_{S1}, e_{S2}$ nach Tabelle 6.1.

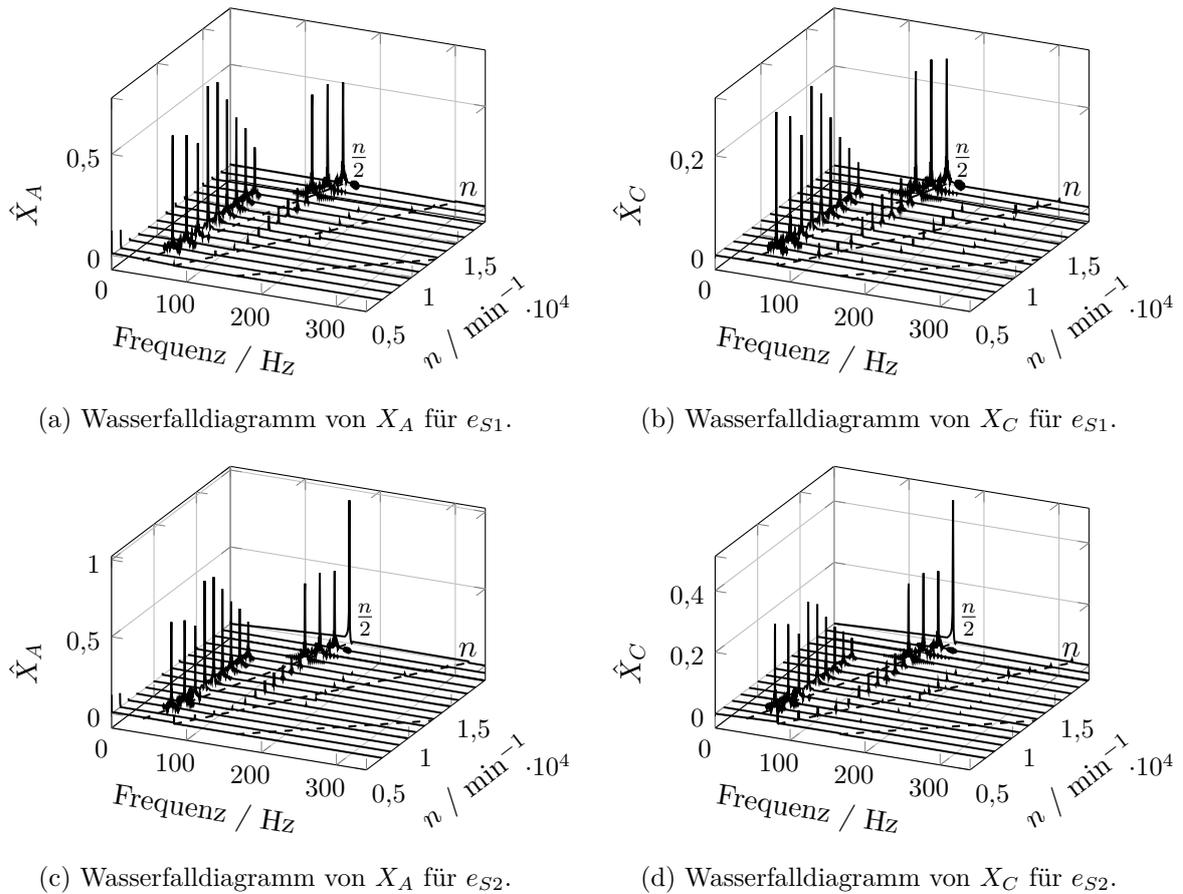
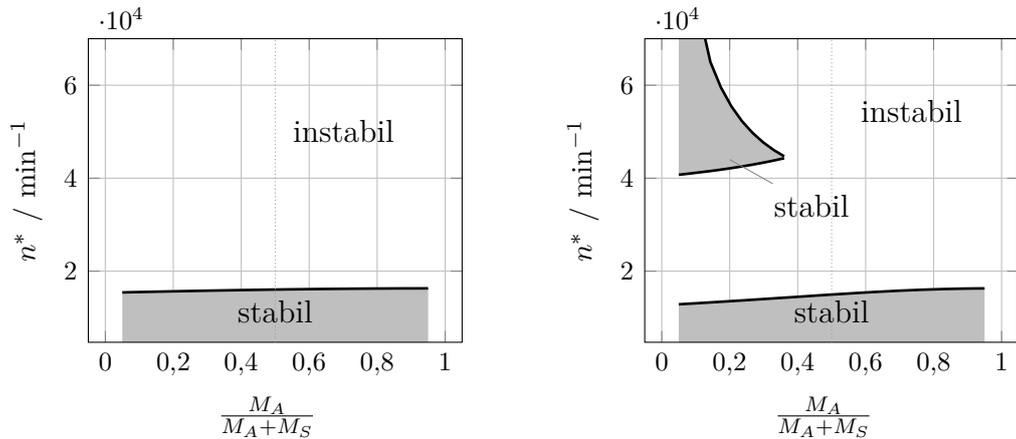


Abbildung 6.10: Wasserfalldiagramme des biegeelastischen Rotors mit Unwucht und Steifigkeit k_1 in Starrlagern. Parameter $m_a = 1,4$; R, L, h_{01}, p_0, μ_L nach Tabelle 4.1, $M_A, M_S, k_1, d_a, e_{S1}, e_{S2}$ nach Tabelle 6.1.

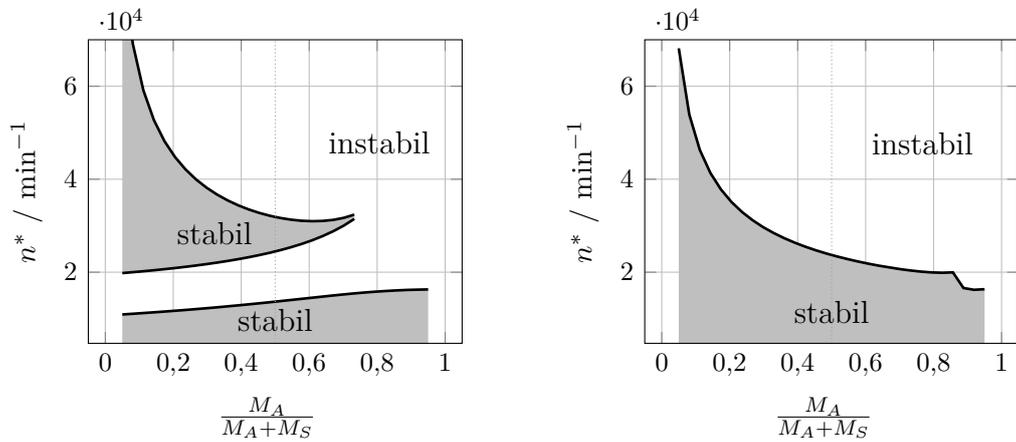
Steifigkeit bei niedrigeren Drehzahlen als der Halfrequenzwirbel zu identifizieren. Dort wachsen mit steigender Drehzahl die Schwingungsamplituden zunächst an und verringern sich bei weiterer Drehzahlerhöhung anschließend, bis sie schließlich ganz verschwinden. Im zweiten Fall einer größeren Wellensteifigkeit tritt der air-whip erst deutlich oberhalb der maximalen Drehzahlen auf, bei der periodische Lösungen (Halfrequenzwirbel) existieren.

Erfolgt eine zusätzliche harmonische Erregung der Scheibe, hier modelliert durch eine statische Unwucht, so ergeben sich, wie schon beim starren Rotor, keine gravierenden Änderungen des Lösungsverhaltens. An die Stelle der Gleichgewichtslösungen treten harmonische Schwingungen kleiner Amplitude um die Gleichgewichtslagen des unwuchtfreien Systems. Anstatt periodischen Lösungen ergeben sich zumeist quasi-periodische Lösungen, in seltenen Fällen auch periodische Lösungen. Die Schwingungsamplituden verändern sich nur sehr wenig gegenüber dem unwuchtfreien Modell. Wie zuvor beim starren Rotor führt eine statische Unwucht dazu, dass die Drehzahlbereiche, innerhalb derer stabile Nichtgleichgewichtslösungen existieren, vergrößert werden.



(a) Stabilitätskarte der Gleichgewichtslagen für k_4 .

(b) Stabilitätskarte der Gleichgewichtslagen für k_3 .



(c) Stabilitätskarte der Gleichgewichtslagen für k_2 .

(d) Stabilitätskarte der Gleichgewichtslagen für k_1 .

Abbildung 6.11: Analyse der Stabilitätseigenschaften der Gleichgewichtslagen des biegeelastischen unwuchtfreien Rotors in Folienlagern in Abhängigkeit der Massenverteilung für verschiedene Steifigkeiten k . Parameter $m_a = 1,4$; $R, L, h_{02}, \beta, d_f, p_0, \mu_L$ nach Tabelle 4.1, $M_A + M_S = 1 \text{ kg}$, k_1, k_2, k_3, k_4, d_a nach Tabelle 6.1.

6.4 Diskussion des biegeelastischen Rotors in Folienlagern

6.4.1 Unwuchtfreier Fall

In Anlehnung an die Studie des biegeelastischen Rotors in Starrlagern wird zunächst der Zusammenhang zwischen der Massenaufteilung des Rotors und der Stabilitätsgrenze der Gleichgewichtslösungen untersucht. Wie in Abschnitt 4.1.1 dargelegt, ist das Lagerspiel des Folienlagers aufgrund der verformbaren Struktur üblicherweise kleiner als das des zylindrischen Starrlagers. Im Folgenden wird deshalb vorrangig der Fall des kleineren Lagerspiels

$h_{02} = 9 \mu\text{m}$ diskutiert. Abbildung 6.11 zeigt die ermittelten Ergebnisse der stabilen und instabilen Gleichgewichtslösungen für die verschiedenen Steifigkeiten k_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Vergleichsergebnisse des Starrlagers sind in Abbildung 6.4a dargestellt.

Für die höchste hier angenommene Steifigkeit $k_4 = 5000 \text{ kN m}^{-1}$ ergeben sich keine Neuerungen gegenüber den bisherigen Erkenntnissen (vergleiche Abbildung 6.11a). Mit steigender Konzentration der Gesamtmasse in der Scheibe verschiebt sich die Stabilitätsgrenze zu geringfügig niedrigeren Drehzahlen (vergleiche Abbildung 6.4a). Auch die gegenüber der Kopplung mit einem Starrlagermodell absolut höheren kritischen Drehzahlen entsprechen den Ergebnissen des starren Rotors (siehe zum Beispiel Abbildung 5.7b und 5.8a). Bei Verringerung der Steifigkeit ($k_3 = 1000 \text{ kN m}^{-1}$ und $k_2 = 500 \text{ kN m}^{-1}$) tritt eine qualitative Änderung des Lösungsverhaltens auf (siehe Abbildung 6.11b und 6.11c). Hier existiert bei einem niedrigen Verhältnis der Lagermassen zur Gesamtmasse für Drehzahlen oberhalb der Hopf-Bifurkation ein weiterer Bereich stabiler Gleichgewichtslösungen. Für die hier gewählten Parameter vergrößert sich dieser stabile Bereich mit sinkender Steifigkeit k . Bei der niedrigsten hier angenommenen Steifigkeit $k_1 = 100 \text{ kN m}^{-1}$ ist nur noch ein, jedoch gegenüber der höchsten Steifigkeit k_4 erheblich vergrößerter Bereich stabiler Gleichgewichtslagen identifizierbar (vergleiche Abbildung 6.11d). Im Unterschied zum sehr steifen Rotor k_4 tritt hier ein umgekehrter Effekt auf. Mit abnehmender Konzentration der Gesamtmasse in der Scheibe steigt die kritische Drehzahl deutlich an.

Den Einfluss des Lagerspiels h_0 auf die Stabilität der Gleichgewichtslösungen für verschiedene Wellensteifigkeiten zeigt Abbildung 6.12. Für die höchste hier diskutierte Steifigkeit k_4 in Abbildung 6.12a stimmt der Trend mit dem Verhalten des starren Rotors überein (vergleiche Abbildung 5.7b). Verringert sich das Lagerspiel, so existieren stabile Gleichgewichtslösungen bei höheren Drehzahlen. Verringert sich die Steifigkeit des Rotors, erscheint für k_2 und k_3 ein weiterer Drehzahlbereich, innerhalb dessen stabile Gleichgewichtslösungen existieren. Für die niedrigste Steifigkeit k_1 existiert wie zuvor ein vergrößerter Bereich stabiler Gleichgewichtslösungen (siehe Abbildung 6.12d). Die Schlussfolgerung, die aus den Abbildungen 6.11 und 6.12 gezogen werden kann, ist, dass eine flexible Welle bei Folienlagern zur Stabilisierung des Rotorsystems führen kann.

Ergänzend zu den Stabilitätskarten der Gleichgewichtslösungen zeigt Abbildung 6.13 das Bifurkationsverhalten des in Folienlagern betriebenen biegeelastischen Rotors für die beiden Steifigkeiten k_1 und k_2 . Dargestellt sind jeweils die Koordinaten x_A und x_C sowie die Dauer der periodischen Lösungen im Verhältnis zu einer Wellenumdrehung. Die in grau dargestellten Vergleichsergebnisse zeigen das Verhalten des in Starrlagern betriebenen biegeelastischen Rotors. Als weitere Vergleichsmöglichkeit dient Abbildung 5.9a. Sie zeigt die Bifurkationsdiagramme des starren Rotors in Folienlagern.

Wie üblich lässt sich auch hier der Übergang von stabilen zu instabilen Gleichgewichtslösungen als Hopf-Bifurkation charakterisieren. Der bereits in Abbildung 6.12c identifizierte weitere Bereich stabiler Gleichgewichtslösungen für die Steifigkeit k_3 ist auch hier zu erkennen (siehe Abbildung 6.13a und 6.13c). In allen Bifurkationspunkten verzweigen instabile periodische Lösungen. Beim Verfolgen des Astes der niedrigsten Drehzahl kann noch eine Torus-Bifurkation detektiert werden. Da neben den Gleichgewichtslösungen ausschließlich instabile periodische Lösungen identifiziert werden können, hat Abbildung 6.13e beim Verhältnis der Zeit einer Wellenumdrehung zur Periodendauer keine praktische Re-

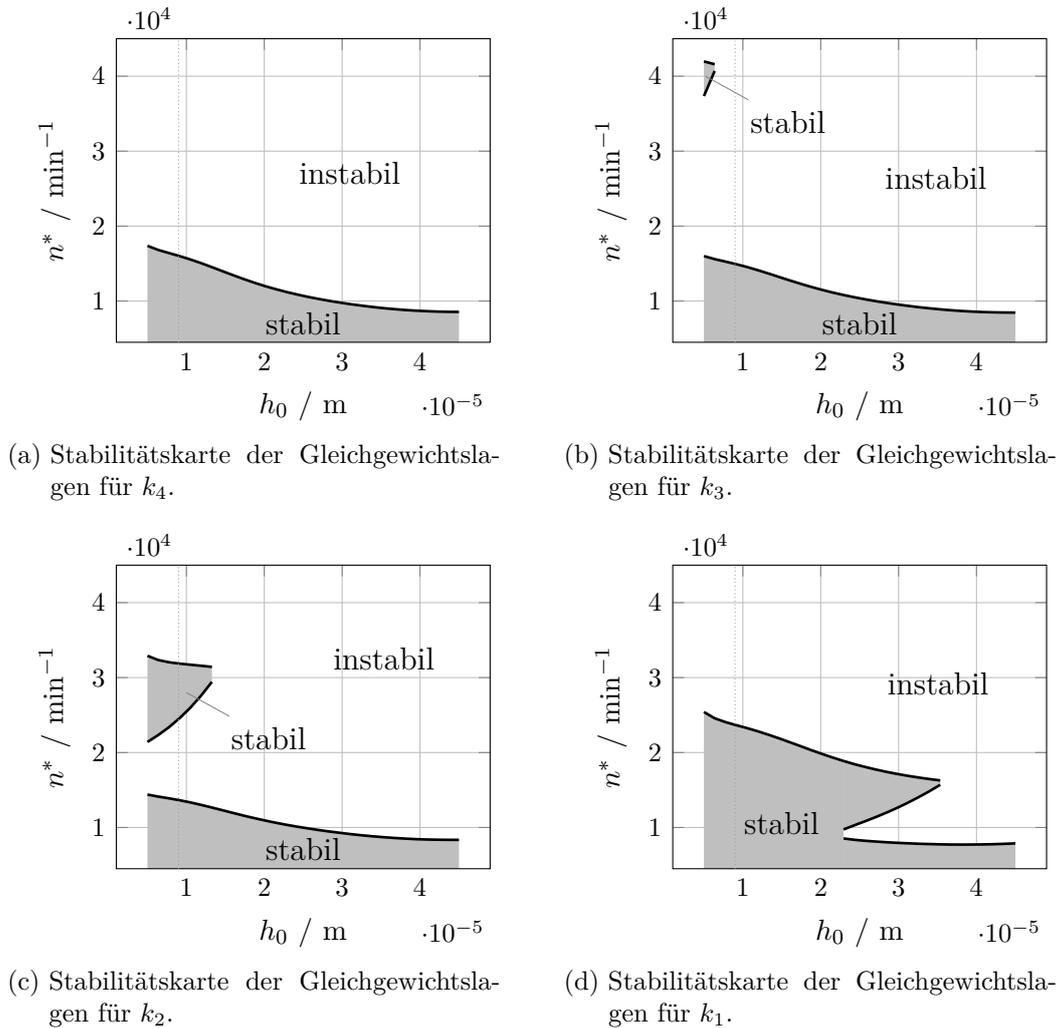
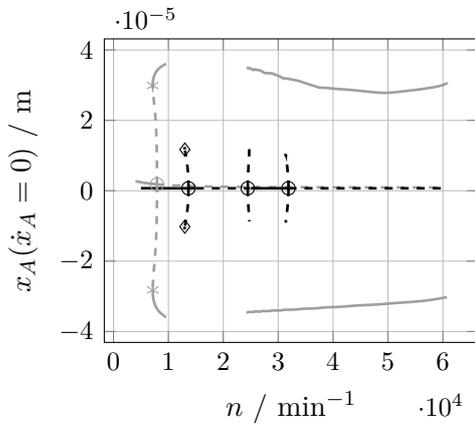


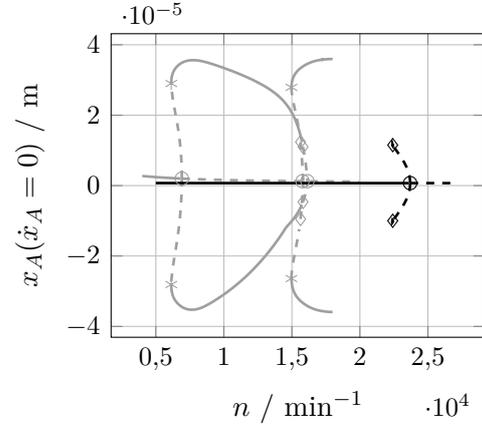
Abbildung 6.12: Analyse der Stabilitätseigenschaften der Gleichgewichtslagen des biegeelastischen unwuchtfreien Rotors in Folienlagern in Abhängigkeit des Lagerspiels für verschiedene Steifigkeiten k . Parameter $m_a = 1,4$; $R, L, \beta, d_f, p_0, \mu_L$ nach Tabelle 4.1, $M_A, M_S, k_1, k_2, k_3, k_4, d_a$ nach Tabelle 6.1.

levanz. Durch den Bezug zu den Ergebnissen des biegeelastischen Rotors in Starrlagern ist jedoch davon auszugehen, dass die instabilen periodischen Lösungen den air-whirl (Halbfrequenzwirbel) und den air-whip charakterisieren.

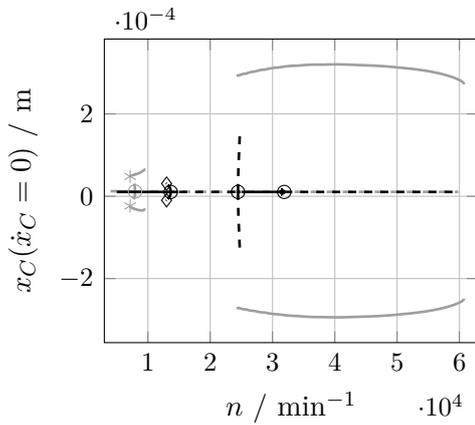
Die Ergebnisse des Rotors mit der niedrigsten Steifigkeit k_1 sind in der rechten Spalte der Abbildungen 6.13 dargestellt. Der Übergang von stabilen zu instabilen Gleichgewichtslagen findet in Form einer subkritischen Hopf-Bifurkation statt. Auch eine Torus-Bifurkation kann detektiert werden. Verglichen mit den Referenzlösungen des zylindrischen Starrlagers verschiebt sich der Hopf-Punkt deutlich von $n \approx 6910 \text{ min}^{-1}$ beziehungsweise $16\,140 \text{ min}^{-1}$ auf $n \approx 23\,690 \text{ min}^{-1}$. Weitere Bifurkationspunkte, stabile periodische Lösungen oder stabile Gleichgewichtslösungen konnten auch über den dargestellten Bereich hinaus nicht



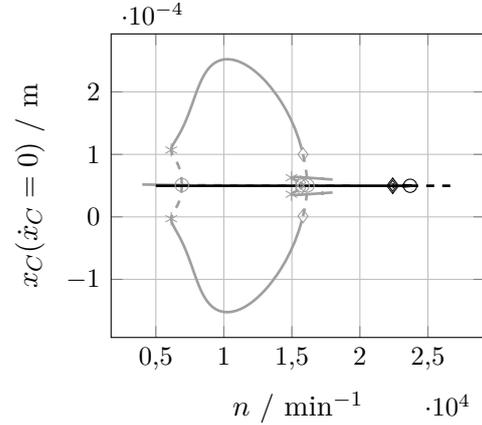
(a) Bifurkationsdiagramm von x_A für k_2 .



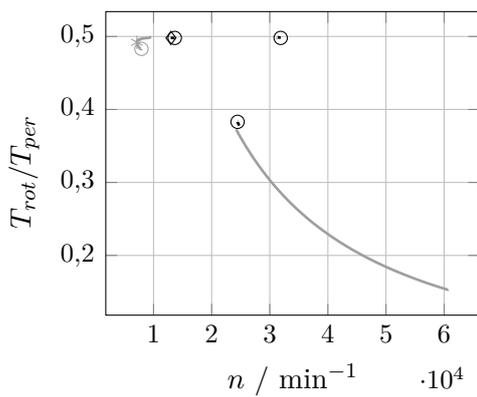
(b) Bifurkationsdiagramm von x_A für k_1 .



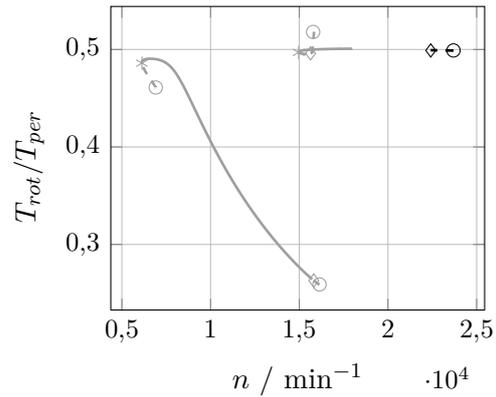
(c) Bifurkationsdiagramm von x_C für k_2 .



(d) Bifurkationsdiagramm von x_C für k_1 .

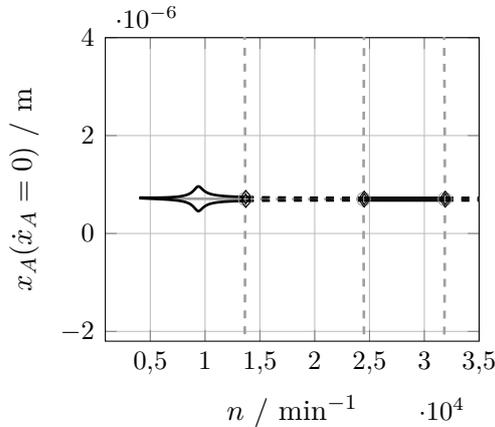
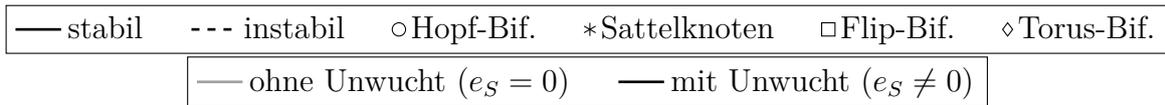


(e) Periodenverhältnis für k_2 .

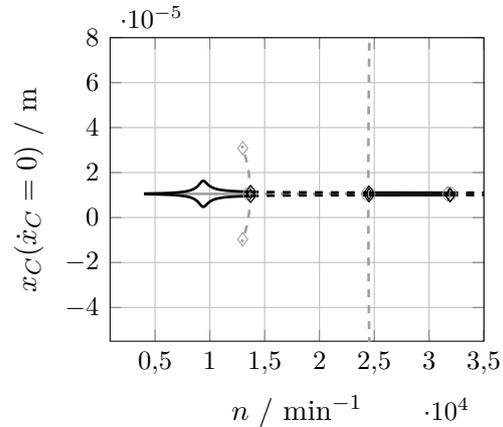


(f) Periodenverhältnis für k_1 .

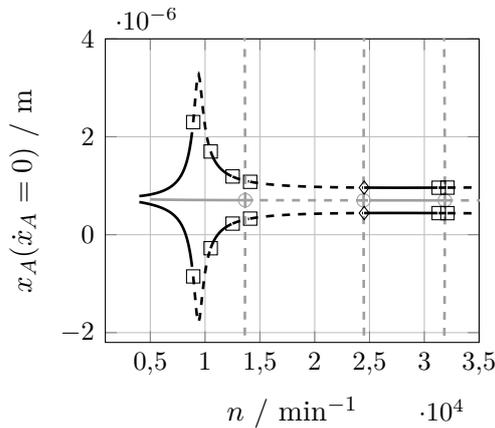
Abbildung 6.13: Bifurkationsverhalten und Periodendauer der periodischen Lösungen des biegeelastischen unwuchtfreien Rotors in Folienlagern für verschiedene Steifigkeiten. Parameter $m_a = 1,4$; $R, L, h_{02}, \beta, d_f, p_0, \mu_L$ nach Tabelle 4.1, $M_A, M_S, k_1, k_2, d_a, \chi$ nach Tabelle 6.1.



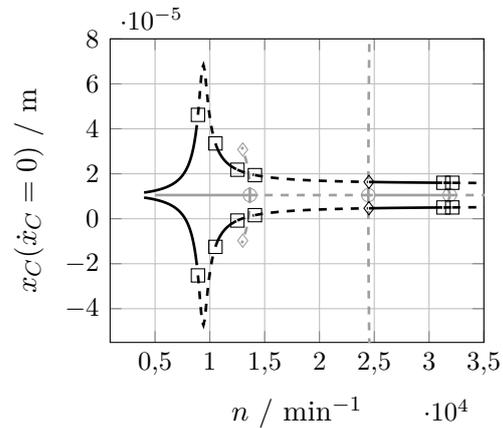
(a) Bifurkationsdiagramm von x_A für e_{S1} .



(b) Bifurkationsdiagramm von x_C für e_{S1} .



(c) Bifurkationsdiagramm von x_A für e_{S2} .



(d) Bifurkationsdiagramm von x_C für e_{S2} .

Abbildung 6.14: Bifurkationsverhalten des biegeelastischen Rotors der Steifigkeit k_2 mit verschiedenen Unwuchten in Folienlagern. Parameter $m_a = 1,4$; $R, L, h_{02}, \beta, d_f, p_0, \mu_L, \chi$ nach Tabelle 4.1, $M_A, M_S, k_2, d_a, e_{S1}, e_{S2}$ nach Tabelle 6.1.

ermittelt werden. Auf die Darstellung der Wasserfalldiagramme wird aufgrund der ausschließlich instabilen Nichtgleichgewichtslösungen für beide Wellensteifigkeiten verzichtet.

6.4.2 Rotor mit statischer Unwucht

Die abschließenden numerischen Studien widmen sich dem biegeelastischen Rotor mit statischer Unwucht, der mit dem Folienlagermodell gekoppelt wird. Wie bisher werden die beiden Schwerpunktexzentrizitäten nach Tabelle 5.1, beziehungsweise 6.1 diskutiert. Wie im unwuchtfreien Fall wird ausschließlich das Lagerspiel h_{02} (siehe auch Tabelle 6.1) betrachtet. Für den Rotor mit der höheren Steifigkeit k_2 und den beiden Schwerpunktexzentrizitäten e_{S1} und e_{S2} sind die ermittelten Bifurkationsdiagramme in den Koordinaten x_C

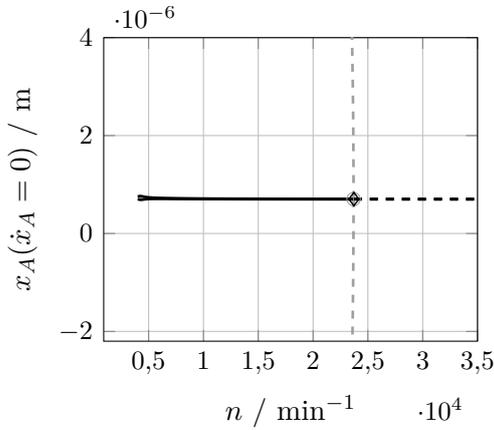
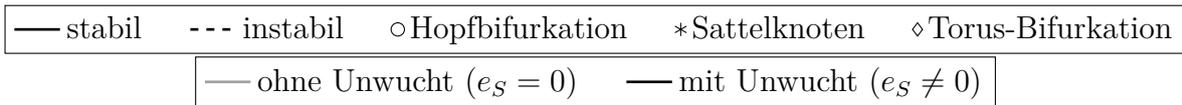
und x_A in Abbildung 6.14 dargestellt. Abbildungen 6.14a und 6.14b zeigen die Ergebnisse der kleinen Schwerpunktexzentrizität e_{S1} , Abbildungen 6.14c und 6.14d die Ergebnisse für e_{S2} . Jeweils in grau eingezeichnet sind die Ergebnisse ohne Unwucht.

Im Fall der kleinen Schwerpunktexzentrizität e_{S1} treten an die Stelle von Gleichgewichtslösungen periodische Lösungen. Die beiden Punkte A und C oszillieren um die Ruhelagen. Die Schwingungsamplituden der Scheibe sind ca. eine Größenordnung höher als die des Wellenzapfens. Die Drehzahlbereiche der sowohl stabilen als auch instabilen periodischen Lösungen stimmen gut mit den Bereichen der stabilen und instabilen Gleichgewichtslagen überein. Auffällig ist eine vergrößerte Schwingungsamplitude im ersten Abschnitt der stabilen periodischen Lösungen. Sie charakterisiert eine Resonanzanregung des Rotorsystems. Die um die Ruhelagen linearisierten Steifigkeitskoeffizienten des Schmierfilms bei Folienlagern sind um mehr als eine Größenordnung höher als die Steifigkeit der Welle k_2 , siehe zum Beispiel auch [28, 96]. Folglich kann die Resonanzfrequenz über $\omega_{\text{eig}} = \sqrt{k_2/M_S}$ abgeschätzt werden. Nach (3.57) treten die maximalen Amplituden bei einer Drehzahl von $n_{\text{eig}} = 30\sqrt{k_2/M_S}/\pi \approx 9550 \text{ min}^{-1}$ auf, was gut mit den numerischen Ergebnissen übereinstimmt. Beim Übergang vom stabilen zu instabilen periodischen Lösungen lassen sich jeweils Torus-Bifurkationen identifizieren. Quasi-periodische Lösungen konnten wie im unwuchtfreien Fall wider Erwarten nicht ermittelt werden.

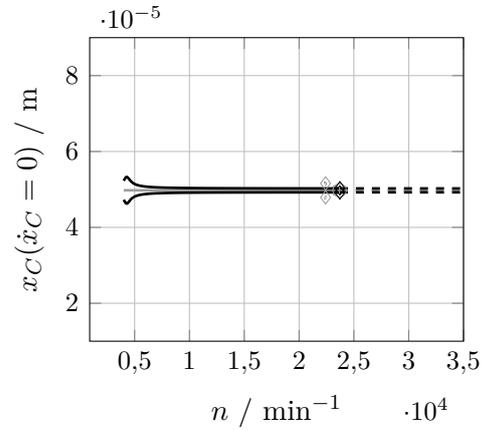
Wird die vergrößerte Schwerpunktexzentrizität e_{S2} nach Abbildungen 6.14c und 6.14d diskutiert, so sind übereinstimmende Tendenzen klar erkennbar. Aufgrund der jetzt größeren Anregungskraft sind die Schwingungsamplituden um die Gleichgewichtslösungen gegenüber e_{S1} stärker ausgeprägt. Die Drehzahl bei der die höchsten Amplituden auftreten ändert sich wie zu erwarten nicht. Allerdings sind die periodischen Lösungen im Bereich um die Resonanzdrehzahl jetzt instabil. Der Übergang der von stabilen zu instabilen periodischen Lösungen sowie umgekehrt erfolgt in Form einer Flip-Bifurkation. Derartige Bifurkationen lassen sich auch bei weiterer Erhöhung der Drehzahl mehrmals identifizieren, ebenso eine Torus-Bifurkation. Weitere an den Bifurkationspunkten verzweigende Lösungen konnten nicht detektiert werden. Grundsätzlich existieren keine stabilen Lösungen in Drehzahlbereichen, innerhalb derer Gleichgewichtslösungen des unwuchtfreien Systems instabil sind.

Die Periodendauer stabiler periodischer Lösungen entspricht in allen Fällen der Dauer einer Wellenumdrehung. Auf die Darstellung der Wasserfalldiagramme wird deshalb aufgrund der geringen Lösungsvielfalt verzichtet.

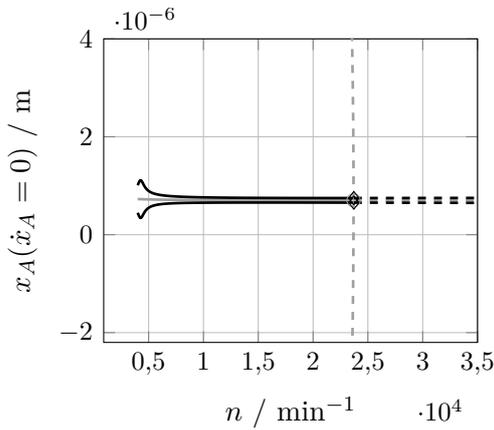
Die Simulationsergebnisse der biegeweichsten Welle der Steifigkeit k_1 in Folienlagern mit statischer Unwucht zeigt Abbildung 6.15, und zwar wie in Abbildung 6.14 in der oberen Zeile für die kleine Schwerpunktexzentrizität e_{S1} , in der unteren Zeile für die größere Schwerpunktexzentrizität e_{S2} . Gegenüber einem Rotor ohne Unwucherregung (in grau dargestellt) ergeben sich keine grundlegenden qualitativen Änderungen. Wie dort führt der Rotor Schwingungen um die Gleichgewichtslage aus. Diese fallen bei größerer Schwerpunktexzentrizität aufgrund der stärkeren Anregung größer aus. An die Stelle der Hopf-Bifurkation tritt für beide Schwerpunktexzentrizitäten e_{S1} und e_{S2} eine Torus-Bifurkation. Die Drehzahl, bei der die Bifurkationen auftreten, ist in beiden Fällen ähnlich. Im Bereich stabiler periodischer Lösungen sind wie für k_2 vergrößerte Schwingungsamplituden klar zu erkennen. Die Abschätzung der Resonanzdrehzahl über $n_{\text{eig}} = 30\sqrt{k_1/M_S}/\pi \approx 4270 \text{ min}^{-1}$



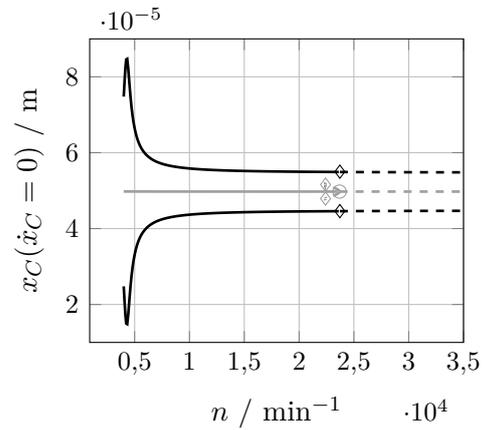
(a) Bifurkationsdiagramm von x_A für e_{S1} .



(b) Bifurkationsdiagramm von x_C für e_{S1} .



(c) Bifurkationsdiagramm von x_A für e_{S2} .



(d) Bifurkationsdiagramm von x_C für e_{S2} .

Abbildung 6.15: Bifurkationsverhalten des biegeelastischen Rotors der Steifigkeit k_1 mit verschiedenen Unwuchten in Folienlagern. Parameter $m_a = 1,4$; $R, L, h_{02}, \beta, d_f, p_0, \mu_L, \chi$ nach Tabelle 4.1, $M_A, M_S, k_1, d_a, e_{S1}, e_{S2}$ nach Tabelle 6.1.

erweist sich auch hier als valide. Das Resonanzphänomen konnte bereits beim zylindrischen Starrlager mit geringerer Ausprägung beobachtet werden (siehe Abbildung 6.9c).

Für den dargestellten Parametersatz kennzeichnet der Bifurkationspunkt zugleich die größtmögliche Drehzahl, bei der sich längerfristig ein tragender Schmierfilm aufbaut. Oberhalb des hier dargestellten Drehzahlbereichs konnten keine stabilen Lösungen identifiziert werden. Da die Periodendauer für alle Drehzahlen mit der Zeitspanne einer Wellenumdrehung übereinstimmt, wird auf die Darstellung der Wasserfalldiagramme verzichtet.

6.4.3 Fazit

Für den biegeelastischen Rotor in Folienlagern ergibt sich gegenüber den bisher untersuchten Kombinationen von Rotor- und Lagermodellen bei der Beurteilung der Gleichgewichtslösungen hinsichtlich ihrer Stabilität eine Neuerung. In Abhängigkeit der Massenaufteilung auf Scheibe und Welle und des Lagerspiels existieren teilweise für Drehzahlen oberhalb der Hopf-Bifurkation erneut stabile Gleichgewichtslösungen. Für eine sehr weiche Welle verschmelzen die beiden Bereiche, sodass das erste Gebiet der instabilen Gleichgewichtslösungen nicht mehr existiert. Folglich liegt die Stabilitätsgrenze verglichen mit einem starren Rotor bei einer höheren Drehzahl.

Für den ideal gewuchteten Rotor verzweigen an allen Bifurkationspunkten für die untersuchten Parameterkombinationen lediglich instabile periodische Lösungen. Stabile periodische Lösungen konnten nicht gefunden werden. Folglich ist weder der air-whirl (Halbfrequenzwirbel) noch der air-whip zu beobachten, wobei im Unterschied zum starren Rotor hier nur ein kleines Lagerspiel diskutiert wurde. Für dieses Lagerspiel treten auch beim starren Rotor keine stabilen periodischen Lösungen auf.

Wird eine statische Unwucht im Modell berücksichtigt, so können in den Drehzahlbereichen, innerhalb derer für den unwuchtfreien Fall nur instabile Gleichgewichtslösungen und instabile periodische Lösungen existieren, keine stabilen Lösungen identifiziert werden. Wie zuvor führt der Rotor harmonische Schwingungen um die Ruhelagen des unwuchtfreien Systems aus. Die Periodendauer entspricht einer Wellenumdrehung. Fällt die Anregungsfrequenz mit der Eigenfrequenz der Scheibe bei festgehaltenem Wellenzapfen zusammen, so steigen die Schwingungsamplituden im Sinne einer Resonanzanregung. Teilweise sind die Lösungen in der Umgebung der maximalen Schwingungsamplituden instabil. Wie im Fall ohne Unwucht ist für die untersuchten Parameterwerte weder der air-whirl noch der air-whip festzustellen.

7 Zusammenfassung und Ausblick

7.1 Zusammenfassung

Die Vorteile einer aerodynamischen Lagerung sind beachtlich. Minimale Reibungsverluste führen zu hohen Maschinenwirkungsgraden, und das gesamte Schmierstoffkonzept ist denkbar einfach. Allerdings sind bei der Systemauslegung Fragestellungen hinsichtlich der Tragfähigkeit des Lagers und des Schwingungsverhaltens des Rotors sorgfältig zu beantworten. Nur dann ist diese Lagertechnologie eine realisierbare Alternative zu flüssigkeitsgeschmierten Gleit- oder Wälzlagern. Die Kernaufgabe hinsichtlich der Anwendbarkeit der Technologie zielt deshalb auf eine optimale Lagergestaltung. Aus dem Blickwinkel der Schwingungsthematik motiviert sie die vorliegende Arbeit.

Eine gegenwärtig vielversprechende Variante ist das aerodynamische Gleitlager mit Pufferfolie. Die Vorzüge, insbesondere gegenüber zylindrischen, aerodynamischen Starrlagern, ergeben sich aus der selbstständigen Anpassung der Lagerinnenkontur. Sie führt zu größeren Toleranzen bei der Lagerfertigung und dem Montageprozess und einer geringen Empfindlichkeit gegenüber Wellenausdehnungen und -verformungen sowie Schmutzpartikeln. Außerdem ermöglicht das Pufferfoliendesign eine variable Gestaltung der Innengeometrie, des Verformungswiderstands und des Dissipationsmechanismus.

Bis heute werden diese aerodynamischen Gleitlager mit Pufferfolie allerdings nur sehr selten eingesetzt. Drei wesentliche Aspekte sind zu nennen, die im Hinblick auf eine weitere Verbreitung der Technologie optimiert werden müssen. Dies betrifft einerseits die Produktion, andererseits die Steigerung der Verschleiß Eigenschaften und der Widerstandsfähigkeit der Materialien sowie schließlich einen verbesserten Auslegungsprozess. Letzterer beinhaltet auch die hier thematisierte Lagergestaltung im Hinblick auf einen möglichst schwingungsarmen Rotorbetrieb.

Zur simulativen Untersuchung der aerodynamischen Gleitlager mit Pufferfolie und eines darin betriebenen Rotors sind viele Modelle publiziert. Auch die Möglichkeiten der Kopplung der Lagermodelle zur Beschreibung des Fluid- und Folienverhaltens, und den strukturellen Rotormodellen sind vielfältig. Beim Vergleich von Berechnungsergebnissen von in aerodynamischen Gleitlager mit Pufferfolie betriebenen Rotoren mit experimentell ermittelten Daten zeigt sich jedoch in den meisten Fällen keine zufriedenstellende Übereinstimmung.

Darauf nimmt die Arbeit Bezug und entwickelt ein modifiziertes Lagermodell. Es besteht aus einem gekoppelten Fluidmodell des Schmierfilms und einem Strukturmodell der Folien. Zur Abbildung des Fluidverhaltens werden die gängigen Annahmen der Schmierfilmtheorie getroffen. Sie führen auf die Reynoldsgleichung für ideale Gase. Das Strukturmodell bildet insbesondere die nichtlinearen Verformungseigenschaften der Folien in radialer Richtung ab. Kopplungen in Umfangsrichtung werden vernachlässigt. Die Energiedissipation wird

in Form einer viskosen Dämpfung modelliert. Das Lagermodell kommt somit mit einer minimalen Anzahl von zwei Parametern aus.

Auf Basis publizierter Messergebnisse erfolgt die Identifikation des Nachgiebigkeitsparameters und die Beurteilung der Modellgüte. Gegenüber üblichen linearen Folienmodell zeigt sich eine geringe Verbesserung der Approximation der Messergebnisse. Der bedeutendere Vorteil des im Rahmen der Arbeit entwickelten Strukturmodells ist jedoch bei einem gegenüber dem Umgebungsdruck vorherrschenden Unterdruck zu erwarten. Hier liegen allerdings keine Messergebnisse zur Modellvalidierung vor.

Die Diskussion des Lagermodells erfolgt vor dem Hintergrund einer Interaktion mit dem Wellenzapfen, wie sie bei der Kopplung von Lager- und Rotormodellen auftritt. Denkbare Bewegungen des Wellenzapfens werden strukturiert und isoliert vorgegeben, womit die Mechanismen des Druckaufbaus systematisch untersucht werden können. Insbesondere die Ursachen des unerwünschten Halbfrequenzwirbels können anhand analytischer Näherungen dargelegt und aufgezeigt werden. Außerdem werden Diskretisierungsfehler und die Einflüsse der Lagerparameter auf den sich einstellenden Schmierfilmdruck ermittelt. Darüber hinaus wird eine Modellreduktion mittels Galerkin-Verfahren durchgeführt. Folglich verringert sich die Anzahl der zu lösenden Modellgleichungen. Die Rechenzeit zur Ermittlung des Lagerdrucks reduziert sich um über 99% bei nur sehr geringen Genauigkeitsverlusten. Vergleichbar präzise und gleichzeitig effiziente Modelloptimierungen in diesem Kontext sind dem Autor der Arbeit nicht bekannt.

Im Detail werden zwei verschiedene Rotormodelle in Verbindung mit Luftlagermodellen diskutiert. Zum einen wird ein starrer, horizontal und symmetrisch in zwei identischen Lagern betriebener Rotor betrachtet. Zum anderen wird der Rotor mit biegeelastischer Welle untersucht, der ebenfalls horizontal und symmetrisch gelagert ist. Für beide Rotoren wird sowohl das Verhalten des ideal gewuchteten Rotors als auch des Rotors unter harmonischer Anregung infolge einer statischen Unwucht erörtert. Unter anderem zu Vergleichszwecken wird dem im Rahmen der Arbeit entwickelten Folienlagermodell das Modell eines zylindrischen Starrlagers gegenübergestellt.

Zur Analyse des Modellverhaltens wird vorrangig eine numerische Bifurkations- und Pfadverfolgungsmethode eingesetzt. Sie liefert einen Überblick über das qualitative Langzeitverhalten und einen Eindruck vom Lösungsumfang der Modelle. Erst die Modellreduktion erlaubt aus Konvergenzgründen der Algorithmen den Einsatz dieser modernen Analyseverfahren. Ergänzend werden Zeitsimulationen durchgeführt und die Ergebnisse in Form von Frequenzanalysen dargestellt.

Im Rahmen von Parameterstudien werden die Einflüsse des Lagerdesigns auf das Rotorverhalten untersucht. Dabei treten in Abhängigkeit der Parameterwerte und je nach Rotor- und Lagermodell verschiedenartige Schwingungsphänomene auf. Sie sind vorrangig durch die nichtlinearen Lagerkräfte verursacht. Eines dieser Phänomene ist der sog. Halbfrequenzwirbel (air-whirl), der durch einem Selbsterregungsmechanismus verursacht wird und den Rotor zu Schwingungen mit der halben Drehfrequenz anregt. Auch Schwingungen des Rotors über größere Drehzahlbereiche mit dessen Eigenfrequenz ohne äußere Erregung (air-whip) sowie Resonanzeffekte lassen sich beobachten.

Resümierend lässt sich festhalten, dass im Rahmen der Arbeit ein neues Modell eines aerodynamischen Gleitlagers mit Pufferfolie entwickelt und mit publizierten Messergeb-

nissen validiert wurde. Mittels einer erstmalig im Kontext aerodynamischer Gleitlager angewendeten Modellreduktion konnte die Rechenzeit des Lagermodells bei sehr geringen Genauigkeitsverlusten erheblich verringert werden. Diese Reduktionsmethode ermöglicht die systematische Untersuchung gekoppelter Lager-Rotormodelle mittels Stabilitäts- und Bifurkationsanalysen bei Anwendung von Pfadverfolgungsmethoden. Anhand dieser Untersuchungen können typische, in Experimenten auftretende Effekte wie der Halbfrequenzwirbel (air-whirl) und der air-whip modellbasiert abgebildet, untersucht und erklärt werden. Vergleichbar umfangreiche und systematische Untersuchungen von in Folienlagern betriebenen Rotoren sind nach Kenntnis des Autors der vorliegenden Arbeit bisher nicht veröffentlicht.

7.2 Ausblick

Einige in Messungen auftretende Effekte können durch die verwendeten Modelle abgebildet und reproduziert werden. Der Abgleich und die Validierung erfolgt jedoch ausschließlich mit publizierten experimentellen Ergebnissen. Eine Beurteilung hinsichtlich quantitativer Übereinstimmungen von Modell und Experiment erweist sich deshalb als schwierig. Dies liegt unter anderem an einer erschwerten Überprüfbarkeit der Modellannahmen und der Unsicherheit bezüglich der angenommenen Modellparameter. Auffallend ist die Diskrepanz zwischen den in Versuchen gefahrenen Drehzahlen und den im Modell maximal erreichten Drehzahlen, oberhalb denen es zum Kontakt zwischen Wellenzapfen und Lagerschale kommt.

Neben einem verbesserten Abgleich mit Versuchsdaten sind weitere Modellanpassungen und folglich deren Untersuchungen denkbar. Seitens der Fluidmodellierung ist insbesondere im Hinblick auf große Wellenzapfenexzentrizitäten eine Anpassung der Haftrandbedingungen des Fluids an den umgebenden Strukturen zu erwägen. Auch das Strukturmodell der Folien bietet Spielraum für Modifikationen. Die Annahme rein radial und ohne Kopplung in Umfangsrichtung wirkender Krafterelemente führt auf eine einfache Gleichungsstruktur, die sich rechenzeiteffizient lösen lässt. In der Realität hingegen interagieren die Puffer untereinander sowie die Puffer- mit der Deckfolie. Eine besondere Bedeutung kommt dabei der Abbildung der Reibung zwischen den Folien beziehungsweise der Pufferfolie und dem Lagergehäuse zu.

Das in der Arbeit verwendete Lagermodell basiert auf über dem Umfang als konstant angenommenen Folieneigenschaften. In der Praxis existieren mittlerweile verschiedene Generationen aerodynamischer Gleitlager mit Pufferfolie, siehe Abschnitt 2.1.3, die beispielsweise in Umfangs- und axialer Richtung variabel gestaltete Folien oder mehrfach unterteilte Deck- und Pufferfolien aufweisen. Eine Modellerweiterung in Richtung dieser Eigenschaften ist denkbar. Ebenso kann die Erweiterung auf nichtrunde Lagerkonturen, wie sie sich zum Beispiel durch den Einsatz von Abstandsblechen (shims) einstellen, siehe Abschnitt 2.1.3, erwogen werden.

Die in der Arbeit diskutierten Rotormodelle sind stark idealisiert. Sie ermöglichen eine Fokussierung auf den Einfluss der Lagereigenschaften auf das Rotorverhalten. Für reale Rotoren ist im Einzelfall zu prüfen, inwieweit die zugrunde liegenden Annahmen zulässig sind. Eine systematische Untersuchung von komplexeren Rotormodellen in den aerodynamischen Lagern erscheint sinnvoll.

Literaturverzeichnis

- [1] AGRAWAL, G. L. (1997): *Foil air/gas bearing technology—an overview*. In: *Proc. of ASME International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exhibition*. Orlando, Florida, USA.
- [2] AL-BENDER, F. (2009): *On the modelling of the dynamic characteristics of aerostatic bearing films: From stability analysis to active compensation*. In: *Precision Engineering*, **33**, 2: 117–126.
- [3] ALEXANDER, S. & JOHN, M. D. (1968): *Selectively pressurized foil bearing arrangements*. US Patent 3,366,427.
- [4] AUSMAN, J. S. (1956): *The fluid dynamic theory of gas-lubricated bearings*. In: *Proc. of ASME-ASLE Lubrication Conference*. Atlantic City, New Jersey, USA.
- [5] BAEHR, H. D. & SCHWIER, K. (1961): *Die thermodynamischen Eigenschaften der Luft im Temperaturbereich zwischen -210 Grad C und +1250 Grad ° C bis zu Drücken von 4500 bar*. Springer.
- [6] BALDUCCHI, F. (2013): *Analyse expérimentale des paliers et des butées aérodynamiques à feuilles*. Dissertation, Université de Poitiers.
- [7] BALDUCCHI, F., ARGHIR, M. & GAUDILLERE, S. (2014): *Experimental analysis of the unbalance response of rigid rotors supported on aerodynamic foil bearings*. In: *Proc. of ASME Turbo Expo: Turbine Technical Conference and Exposition*. Düsseldorf, Deutschland.
- [8] BARNETT, M. A. (1972): *Self-pressurizing bearings with resilient elements*. US Patent 3,635,534.
- [9] BARTZ, W. J. [Hrsg.] (1993): *Luftlagerungen : Grundlagen und Anwendungen*. 2. Aufl. Expert-Verl.
- [10] BAUM, C., HETZLER, H. & SEEMANN, W. (2014): *On the Dynamics of a Rigid Rotor in Air bearings with Linear Elastic Bearing Housings*. In: *Proc. of ISROMAC 15: International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery*. Honolulu, Hawaii, USA.
- [11] BAUM, C., HETZLER, H. & SEEMANN, W. (2015): *On the dynamics of a rigid rotor with static unbalance symmetrically mounted in compliant air bearings*. In: *Proc. of the 9th IFToMM International Conference on Rotor Dynamics*. Mailand, Italien.

- [12] BAUM, C., HETZLER, H. & SEEMANN, W. (2015): *On the stability of balanced rigid rotors in air foil bearings*. In: *Proc. der 11. SIRM - Internationale Tagung über Schwingungen in rotierenden Maschinen*. Magdeburg, Deutschland.
- [13] BAUM, C., LEISTER, T. & SEEMANN, W. (2015): *Foil air bearing rotor interaction-bifurcation analysis of a Laval rotor*. In: *Proc. of EUROMECH Colloquium 573: Coupling and Nonlinear Interactions in Rotating Machinery*. Lyon, Frankreich.
- [14] BHOORE, S. P. & DARPE, A. K. (2013): *Nonlinear dynamics of flexible rotor supported on the gas foil journal bearings*. In: *Journal of Sound and Vibration*, **332**, 20: 5135–5150.
- [15] BLOK, H. & VAN ROSSUM, J. (1953): *The foil bearing – a new departure in hydrodynamic lubrication*. In: *Lubrication Engineering*, **9**, 6: 316–320.
- [16] BONELLO, P. & PHAM, H. (2014): *The efficient computation of the nonlinear dynamic response of a foil–air bearing rotor system*. In: *Journal of Sound and Vibration*, **333**, 15: 3459–3478.
- [17] BONELLO, P. & PHAM, H. (2014): *Nonlinear dynamic analysis of high speed oil–free turbomachinery with focus on stability and self–excited vibration*. In: *Journal of Tribology*, **136**, 4: 041705.
- [18] BOU-SAID, B., GRAU, G. & IORDANOFF, I. (2008): *On nonlinear rotor dynamic effects of aerodynamic bearings with simple flexible rotors*. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **130**, 1: 012503.
- [19] BOYACI, A. (2011): *Zum Stabilitätsverhalten hochtouriger Rotoren in Gleitlagern*. Dissertation, Karlsruher Institut für Technologie (KIT).
- [20] BREUNIG, B. (1986): *Aerodynamische Federlager für hohe Drehzahlen und hohe Temperaturen*. Dissertation, Universität Karlsruhe.
- [21] BRONSTEIN, I. N., SEMENDJAJEW, K. A., MUSIOL, G. & MÜHLIG, H. (2008): *Taschenbuch der Mathematik*. 7. Aufl. Verlag Harri Deutsch.
- [22] BROOKS, A. N. & HUGHES, T. J. (1982): *Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations*. In: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **32**, 1: 199–259.
- [23] BROWN, W. R. (1996): *Shimmed three lobe compliant foil gas bearing*. US Patent 5,498,083.
- [24] CARPINO, M., MEDVETZ, L. A. & PENG, J.-P. (1994): *Effects of membrane stresses in the prediction of foil bearing performance*. In: *Tribology Transactions*, **37**, 1: 43–50.

-
- [25] CARPINO, M. & TALMAGE, G. (2003): *A fully coupled finite element formulation for elastically supported foil journal bearings*. In: Tribology Transactions, **46**, 4: 560–565.
- [26] CARPINO, M. & TALMAGE, G. (2006): *Prediction of rotor dynamic coefficients in gas lubricated foil journal bearings with corrugated sub-foils*. In: Tribology Transactions, **49**, 3: 400–409.
- [27] CARPINO, M. & TALMAGE, G. (2008): *Subfoil stiffness effects in gas-lubricated foil journal bearings*. In: Tribology Transactions, **51**, 5: 602–608.
- [28] CARPINO, M. & TALMAGE, G. (2010): *Minimum film thickness in a gas foil journal bearing with an unbalanced rotor*. In: Tribology Transactions, **53**, 3: 433–439.
- [29] CHEN, H. M., HOWARTH, R., SOYARS, W. M., THEILACKER, J. C. & BERNARD, G. (2001): *Application of foil bearings to helium turbocompressor*. In: *Proc. of the 30th Turbomachinery Symposium*. Houston, Texas, USA.
- [30] CHENG, H. S. & PAN, C. H. T. (1963): *Stability analysis of gas lubricated, self-acting, plain, cylindrical, journal bearings of finite length, using Galerkin's method*. Techn. Ber. MTI-63TR15, Mechanical Technology Incorporated.
- [31] CONLON, M., DADOUCHE, A., DMOCHOWSKI, W., PAYETTE, R., BÉDARD, J.-P. & LIKO, B. (2009): *Experimental evaluation of foil bearing performance: steady-state and dynamic results*. In: *Proc. of ASME Turbo Expo 2009: Power for Land, Sea, and Air*. Orlando, Florida, USA.
- [32] CROSBY, W. (1986): *The incompressible lubrication of a ridged foil bearing*. In: Wear, **113**, 2: 247–266.
- [33] DELLACORTE, C. (1998): *A new foil air bearing test rig for use to 700 C and 70,000 rpm*. In: Tribology Transactions, **41**, 3: 335–340.
- [34] DELLACORTE, C. & BRUCKNER, R. J. (2011): *Remaining technical challenges and future plans for oil-free turbomachinery*. In: Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, **133**, 4: 042502.
- [35] DELLACORTE, C., LUKASZEWICZ, V., VALCO, M. J., RADIL, K. & HESHMAT, H. (2000): *Performance and durability of high temperature foil air bearings for oil-free turbomachinery*. In: Tribology Transactions, **43**, 4: 774–780.
- [36] DELLACORTE, C., RADIL, K. C., BRUCKNER, R. J. & HOWARD, S. A. (2008): *Design, fabrication, and performance of open source generation I and II compliant hydrodynamic gas foil bearings*. In: Tribology Transactions, **51**, 3: 254–264.
- [37] DELLACORTE, C. & VALCO, M. J. (2000): *Load capacity estimation of foil air journal bearings for oil-free turbomachinery applications*. In: Tribology Transactions, **43**, 4: 795–801.

- [38] DHOOGHE, A., GOVAERTS, W. & KUZNETSOV, Y. A. (2003): *MATCONT: a MATLAB package for numerical bifurcation analysis of ODEs*. URL `matcont.ugent.be`.
- [39] DOEDEL, E., CHAMPNEYS, A., FAIRGRIEVE, T., KUZNETSOV, Y., SANDSTEDDE, B. & WANG, X. (1998): *AUTO 97: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations (with HomCont)*.
- [40] DOWSON, D. (1962): *A generalized Reynolds equation for fluid-film lubrication*. In: International Journal of Mechanical Sciences, **4**, 2: 159–170.
- [41] DOWSON, D. (1969): *Laboratory experiments and demonstrations in tribology: 6 - Self-acting gas lubricated journal bearings*. In: Tribology, **2**, 3: 172–174.
- [42] EHINGER, M. (1983): *Experimentelle Untersuchungen zur Schaffung von Auslegungsg Grundlagen für aerodynamische Federlager*. Dissertation, Universität Karlsruhe.
- [43] ERTAS, B., DREXEL, M., VAN DAM, J. & HALLMAN, D. (2009): *A general purpose test facility for evaluating gas lubricated journal bearings*. In: Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, **131**, 2: 022502.
- [44] ESHEL, A. (1975): *Quasi-static analysis of foil journal bearings for a Brayton cycle turboalternator*. In: Journal of Tribology, **97**, 3: 516–524.
- [45] FENG, K. & KANEKO, S. (2010): *Analytical model of bump-type foil bearings using a link-spring structure and a finite-element shell model*. In: Journal of Tribology, **132**, 2: 021706.
- [46] FENG, K. & KANEKO, S. (2010): *Parametric studies on static performance and nonlinear instability of bump-type foil bearings*. In: Journal of System Design and Dynamics, **4**, 6: 871–883.
- [47] FRIEDERICY, J. & SILVER, A. (1975): *Foil bearing arrangements*. US Patent 3,893,733.
- [48] FULLER, D. D. (1969): *A review of the state-of-the-art for the design of self-acting gas-lubricated bearings*. In: Journal of Tribology, **91**, 1: 1–16.
- [49] GAD, A. M. & KANEKO, S. (2014): *A new structural stiffness model for bump-type foil bearings: application to generation II gas lubricated foil thrust bearing*. In: Journal of Tribology, **136**, 4: 041701.
- [50] GILDING, B. H. & KERSNER, R. (2004): *Travelling waves in nonlinear diffusion-convection reaction*. Birkhäuser.
- [51] GLENDINNING, P. (1994): *Stability, instability and chaos: an introduction to the theory of nonlinear differential equations*. Cambridge University Press.
- [52] GRASSAM, N. S. H. [Hrsg.] (1964): *Gas lubricated bearings*. Butterworths.

- [53] GRAU, G., IORDANOFF, I., BOU SAID, B. & BERTHIER, Y. (2004): *An original definition of the profile of compliant foil journal gas bearings: static and dynamic analysis*. In: Tribology Transactions, **47**, 2: 248–256.
- [54] GROSS, W. A. (1969): *A review of developments in externally pressurized gas bearing technology since 1959*. In: Journal of Lubrication Technology, **91**, 1: 161–165.
- [55] GROSS, W. A., MATSCH, L., CASTELLI, V., ESHEL, A., VOHR, J. & WILDMANN, M. (1980): *Fluid film lubrication*. Wiley.
- [56] GROSS, W. A. & ZACHMANOGLU, E. C. (1961): *Perturbation solutions for gas-lubricating films*. In: Journal of Basic Engineering, 139–144.
- [57] GUCKENHEIMER, J. & HOLMES, P. (2002): *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. 7. Aufl. Springer.
- [58] HAGEMEISTER, K. (1987): *Aerodynamic radial bearing*. US Patent 4,699,523.
- [59] HAMROCK, B. J. (1994): *Fundamentals of fluid film lubrication*. McGraw-Hill.
- [60] HARRISON, W. J. (1913): *The hydrodynamical theory of lubrication with special reference to air as a lubricant*. In: Transactions of the Cambridge Philosophical Society, **22**: 39–54.
- [61] HERWIG, H. (2006): *Strömungsmechanik: eine Einführung in die Physik und die mathematische Modellierung von Strömungen*. 2. Aufl. Springer.
- [62] HESHMAT, H. (1994): *Advancements in the performance of aerodynamic foil journal bearings: high speed and load capability*. In: Journal of Tribology, **116**, 2: 287–294.
- [63] HESHMAT, H. (1999): *High load capacity compliant foil hydrodynamic journal bearing*. US Patent 5,902,049.
- [64] HESHMAT, H. (2000): *Operation of foil bearings beyond the bending critical mode*. In: Journal of Tribology, **122**, 1: 192–198.
- [65] HESHMAT, H. & KU, C.-P. R. (1994): *Structural damping of self-acting compliant foil journal bearings*. In: Journal of Tribology, **116**, 1: 76–82.
- [66] HESHMAT, H., SHAPIRO, W. & GRAY, S. (1982): *Development of foil journal bearings for high load capacity and high speed whirl stability*. In: Journal of Tribology, **104**, 2: 149–156.
- [67] HESHMAT, H., WALOWIT, J. & PINKUS, O. (1983): *Analysis of gas lubricated compliant thrust bearings*. In: Journal of Tribology, **105**, 4: 638–646.
- [68] HESHMAT, H., WALOWIT, J. & PINKUS, O. (1983): *Analysis of gas-lubricated foil journal bearings*. In: Journal of Lubrication Technology, **105**: 647.

- [69] HESHMAT, H., WALTON, J. F., DELLA CORTE, C. & VALCO, M. (2000): *Oil-free turbocharger demonstration paves way to gas turbine engine applications*. In: *Proc. of ASME Turbo Expo*. München, Deutschland.
- [70] HESHMAT, H., WALTON, J. F. & TOMASZEWSKI, M. J. (2005): *Demonstration of a turbojet engine using an air foil bearing*. In: *Proc. of ASME Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air*. Reno-Tahoe, Nevada, USA.
- [71] HOFFMANN, R., PRNOBIS, T. & LIEBICH, R. (2015): *Non-linear stability analysis of a modified gas foil bearing structure*. In: *Proc. of the 9th IFToMM International Conference on Rotor Dynamics*. Mailand, Italien.
- [72] HOFFMANN, R., PRNOBIS, T. & LIEBICH, R. (2015): *A numerical performance analysis of a gas foil bearing including structural modifications by applying metal shims*. In: *Proc. der 11. SIRM - Internationale Tagung über Schwingungen in rotierenden Maschinen*. Magdeburg, Deutschland.
- [73] HOU, Y., XIONG, L. & CHEN, C. (2004): *Experimental study of a new compliant foil air bearing with elastic support*. In: *Tribology Transactions*, **47**, 2: 308–311.
- [74] HOU, Y., ZHU, Z. & CHEN, C. (2004): *Comparative test on two kinds of new compliant foil bearing for small cryogenic turbo-expander*. In: *Cryogenics*, **44**, 1: 69–72.
- [75] HOWARD, S. A. (1999): *Rotordynamics and design methods of an oil-free turbocharger*. In: *Tribology Transactions*, **42**, 1: 174–179.
- [76] HOWARD, S. A. (2007): *A New High-Speed Oil-Free Turbine Engine Rotordynamic Simulator Test Rig*. Techn. Ber. NASA/TM—2007-214489, National Aeronautics and Space Administration.
- [77] HOWARD, S. A., DELLACORTE, C., VALCO, M. J., PRAHL, J. M. & HESHMAT, H. (2001): *Dynamic stiffness and damping characteristics of a high-temperature air foil journal bearing*. In: *Tribology Transactions*, **44**, 4: 657–663.
- [78] HOWARD, S. A., DELLACORTE, C., VALCO, M. J., PRAHL, J. M. & HESHMAT, H. (2001): *Steady-state stiffness of foil air journal bearings at elevated temperatures*. In: *Tribology Transactions*, **44**, 3: 489–493.
- [79] HRYNIEWICZ, P., WODTKE, M., OLSZEWSKI, A. & RZADKOWSKI, R. (2009): *Structural properties of foil bearings: A closed-form solution validated with finite element analysis*. In: *Tribology Transactions*, **52**, 4: 435–446.
- [80] HUNGER, H. (1982): *Berechnung der statischen und dynamischen Kennlinien aerodynamischer Federlager*. Dissertation, Universität Karlsruhe.
- [81] IORDANOFF, I. (1999): *Analysis of an aerodynamic compliant foil thrust bearing: method for a rapid design*. In: *Journal of Tribology*, **121**, 4: 816–822.

-
- [82] IORDANOFF, I., SAID, B. B., MEZIANNE, A. & BERTHIER, Y. (2008): *Effect of internal friction in the dynamic behavior of aerodynamic foil bearings*. In: *Tribology International*, **41**, 5: 387–395.
- [83] JENNINGS, S. (1988): *The mean free path in air*. In: *Journal of Aerosol Science*, **19**, 2: 159–166.
- [84] JORDAN, D. W. & SMITH, P. (1999): *Nonlinear ordinary differential equations: an introduction to dynamical systems*. 3. Aufl. Oxford University Press.
- [85] KANG, S. G. & SAVILLE, M. (2005): *Hydrodynamic journal foil bearing system*. US Patent 6,964,522.
- [86] KANTOROWITSCH, L. V. & KRYLOV, V. I. (1956): *Näherungsmethoden der höheren Analysis*. Dt. Verlag der Wissenschaften. Übersetzung der 4. Aufl. von 1952.
- [87] KAO, H.-C. (1963): *A theory of self-acting, gas-lubricated bearings with heat transfer through surfaces*. In: *Journal of Basic Engineering*, 324–328.
- [88] KESTIN, J. & LEIDENFROST, W. (1959): *An absolute determination of the viscosity of eleven gases over a range of pressures*. In: *Physica*, **25**, 7: 1033–1062.
- [89] KHONSARI, M. M. & BOOSER, E. R. (2008): *Applied tribology: Bearing design and lubrication*. 2. Aufl. Wiley.
- [90] KIM, D. (2007): *Parametric studies on static and dynamic performance of air foil bearings with different top foil geometries and bump stiffness distributions*. In: *Journal of Tribology*, **129**, 2: 354–364.
- [91] KIM, D., CREARY, A., CHANG, S. S. & KIM, J. H. (2009): *Mesoscale foil gas bearings for palm-sized turbomachinery: design, manufacturing, and modeling*. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **131**, 4: 042502.
- [92] KIM, K.-S. & LEE, I. (2007): *Vibration characteristics of a 75kW turbo machine with air foil bearings*. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **129**, 3: 843–849.
- [93] KIM, T. H., BREEDLOVE, A. W. & SAN ANDRÉS, L. (2008): *Characterization of foil bearing structure for increasing shaft temperatures: Part I—Static load performance*. In: *Proc. of ASME Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air*. Berlin, Deutschland.
- [94] KIM, T. H., LEE, J., KIM, C. H. & LEE, Y.-B. (2010): *Rotordynamic performance of an oil-free turbocharger supported on gas foil bearings: effects of an assembly radial clearance*. In: *Proc. of ASME Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air*. Glasgow, UK.

- [95] KIM, T. H. & SAN ANDRÉS, L. (2009): *Effect of side feed pressurization on the dynamic performance of gas foil bearings: a model anchored to test data*. In: Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, **131**, 1: 012501.
- [96] KIM, T. H. & SAN ANDRÉS, L. (2009): *Effects of a mechanical preload on the dynamic force response of gas foil bearings: measurements and model predictions*. In: Tribology Transactions, **52**, 4: 569–580.
- [97] KIM, T. H., SAN ANDRÉS, L. & BREEDLOVE, A. W. (2008): *Characterization of foil bearing structure for increasing shaft temperatures: Part II—Dynamic force performance*. In: *Proc. of ASME Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air*. Berlin, Deutschland.
- [98] KIM, Y.-C., LEE, D.-H. & KIM, K.-W. (2008): *Performance analysis of double-bump air foil bearings*. In: Tribology Transactions, **51**, 3: 285–295.
- [99] KLAASS, R. M. & DELLACORTE, C. (2006): *The quest for oil-free gas turbine engines*. In: *Proc. of Power Systems Conference*. New Orleans, Louisiana, USA.
- [100] KU, C.-P. R. & HESHMAT, H. (1992): *Compliant foil bearing structural stiffness analysis: part I—theoretical model including strip and variable bump foil geometry*. In: Journal of Tribology, **114**, 2: 394–400.
- [101] KU, C.-P. R. & HESHMAT, H. (1993): *Compliant foil bearing structural stiffness analysis—part II: experimental investigation*. In: Journal of Tribology, **115**, 3: 364–369.
- [102] KU, C.-P. R. & HESHMAT, H. (1994): *Structural stiffness and coulomb damping in compliant foil journal bearings: theoretical considerations*. In: Tribology Transactions, **37**, 3: 525–533.
- [103] KUZNETSOV, Y. A. (1995): *Elements of applied bifurcation theory*. Springer.
- [104] LARSEN, J. S., HANSEN, A. J. & SANTOS, I. F. (2014): *Experimental and theoretical analysis of a rigid rotor supported by air foil bearings*. In: Mechanics & Industry.
- [105] LARSEN, J. S. & SANTOS, I. F. (2015): *On the nonlinear steady-state response of rigid rotors supported by air foil bearings—Theory and experiments*. In: Journal of Sound and Vibration, **346**: 284–297.
- [106] LARSEN, J. S., VARELA, A. C. & SANTOS, I. F. (2014): *Numerical and experimental investigation of bump foil mechanical behaviour*. In: Tribology International, **74**: 46–56.
- [107] LARUE, G. D., KANG, S. G. & WICK, W. (2006): *Turbocharger with hydrodynamic foil bearings*. US Patent 7,108,488.
- [108] LAUTH, G. J. & KOWALCZYK, J. (2015): *Thermodynamik: Eine Einführung*. Springer Spektrum.

-
- [109] LE LEZ, S., ARGHIR, M. & FRENE, J. (2007): *A new bump-type foil bearing structure analytical model*. In: Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, **129**: 1047–1057.
- [110] LE LEZ, S., ARGHIR, M. & FRENE, J. (2008): *A dynamic model for dissipative structures used in bump-type foil bearings*. In: Tribology Transactions, **52**, 1: 36–46.
- [111] LE LEZ, S., ARGHIR, M. & FRENE, J. (2009): *Nonlinear numerical prediction of gas foil bearing stability and unbalanced response*. In: Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, **131**, 1: 012503.
- [112] LEE, D., KIM, Y. & KIM, K. (2004): *The static and dynamic performance analyses of air foil journal bearings for various bump foil stiffness*. In: Journal of the Korean Society of Tribologists and Lubrication Engineers, **20**, 5: 245–251.
- [113] LEE, D.-H., KIM, Y.-C. & KIM, K.-W. (2008): *The static performance analysis of foil journal bearings considering three-dimensional shape of the foil structure*. In: Journal of Tribology, **130**, 3: 031102.
- [114] LEE, D.-H., KIM, Y.-C. & KIM, K.-W. (2009): *The dynamic performance analysis of foil journal bearings considering coulomb friction: Rotating unbalance response*. In: Tribology Transactions, **52**, 2: 146–156.
- [115] LEE, N., CHOI, D., LEE, Y.-B., KIM, T. & KIM, C.-H. (2002): *The influence of the slip flow on steady-state load capacity, stiffness and damping coefficients of elastically supported gas foil bearings*. In: Tribology Transactions, **45**, 4: 478–484.
- [116] LEE, Y.-B., KIM, T., KIM, C.-H., LEE, N. & CHOI, D. (2004): *Unbalance response of a super-critical rotor supported by foil bearings—comparison with test results*. In: Tribology Transactions, **47**, 1: 54–60.
- [117] LEE, Y.-B., PARK, D.-J., KIM, C.-H. & RYU, K. (2007): *Rotordynamic characteristics of a micro turbo generator supported by air foil bearings*. In: Journal of Micromechanics and Microengineering, **17**, 2: 297.
- [118] LEE, Y.-B., PARK, D.-J., KIM, T. H. & SIM, K. (2012): *Development and performance measurement of oil-free turbocharger supported on gas foil bearings*. In: Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, **134**, 3: 032506.
- [119] LEISTER, T., BAUM, C. & SEEMANN, W. (2016): *Computational analysis of foil air journal bearings using a runtime-efficient segmented foil model*. In: Proc. of ISROMAC 16: International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery. Honolulu, Hawaii, USA.
- [120] LICHT, L. (1969): *An experimental study of high-speed rotors supported by air-lubricated foil bearings—part 1: Rotation in pressurized and self-acting foil bearings*. In: Journal of Tribology, **91**, 3: 477–493.

- [121] LICHT, L. (1978): *Foil bearings for axial and radial support of high speed rotors: design, development, and determination of operating characteristics*. Techn. Ber., NASA Contractor Report 2940.
- [122] LICHT, L., ANDERSON, W. & DOROFF, S. (1981): *Dynamic characteristics of a high-speed rotor with radial and axial foil-bearing supports*. In: Journal of Tribology, **103**, 3: 361–370.
- [123] LICHT, L. & BRANGER, M. (1973): *Design, Fabrication, and Performance of Foil Journal Bearing for the Brayton Rotating Unit*. Techn. Ber., NASA Contractor Report 2243 by Ampex Corp.
- [124] LICHT, L. & BRANGER, M. (1975): *Motion of a small high-speed rotor in 3 types of foil bearings*. In: Journal of Lubrication Technology, **97**, 2: 270–282.
- [125] LICHT, L., BRANGER, M. & ANDERSON, W. (1974): *Gas-lubricated foil bearings for high speed turboalternator—construction and performance*. In: Journal of Tribology, **96**, 2: 215–222.
- [126] LICHT, L. & ELROD, H. (1960): *A study of the stability of externally pressurized gas bearings*. In: Journal of Applied Mechanics, **27**, 2: 250–258.
- [127] MARX, B. & VOGT, W. (2011): *Dynamische Systeme : Theorie und Numerik*. Spektrum Akademischer Verlag.
- [128] MATTA, P., ARGHIR, M. & BONNEAU, O. (2010): *Experimental analysis of cylindrical air-bearing dynamic coefficients*. In: Tribology Transactions, **53**, 3: 329–339.
- [129] MATTA, P., RUDLOFF, L. & ARGHIR, M. (2010): *Experimental investigation of air bearings dynamic coefficients*. In: Mécanique & Industries, **11**, 06: 477–488.
- [130] MOES, H. (2000): *Lubrication and beyond*. University of Twente - lecture notes 115531.
- [131] OCONNOR, J. J. H. [Hrsg.] (1968): *Standard handbook of lubrication engineering*. McGraw-Hill.
- [132] PENG, J.-P. & CARPINO, M. (1993): *Calculation of stiffness and damping coefficients for elastically supported gas foil bearings*. In: Journal of Tribology, **115**, 1: 20–27.
- [133] PENG, J.-P. & CARPINO, M. (1994): *Coulomb friction damping effects in elastically supported gas foil bearings*. In: Tribology Transactions, **37**, 1: 91–98.
- [134] PENG, J.-P. & CARPINO, M. (1997): *Finite element approach to the prediction of foil bearing rotor dynamic coefficients*. In: Journal of Tribology, **119**, 1: 85–90.
- [135] PENG, Z.-C. & KHONSARI, M. (2004): *Hydrodynamic analysis of compliant foil bearings with compressible air flow*. In: Journal of Tribology, **126**, 3: 542–546.

- [136] PERKO, L. (1996): *Differential equations and dynamical systems*. 2. Aufl. Springer.
- [137] PHAM, H. & BONELLO, P. (2013): *Efficient techniques for the computation of the nonlinear dynamics of a foil-air bearing rotor system*. In: *ASME Turbo Expo: Turbine Technical Conference and Exposition*. San Antonio, Texas, USA.
- [138] RADIL, K., HOWARD, S. & DYKAS, B. (2002): *The role of radial clearance on the performance of foil air bearings*. In: *Tribology Transactions*, **45**, 4: 485–490.
- [139] RADIL, K. C. & DELLACORTE, C. (2009): *Foil Bearing Starting Considerations and Requirements for Rotorcraft Engine Applications*. Techn. Ber. ARL-TR-4873, Army Research Laboratory.
- [140] REYNOLDS, O. (1886): *On the Theory of Lubrication and Its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments, Including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil*. In: *Proceedings of the Royal Society of London*, **40**, 242-245: 191–203.
- [141] RIEMER, M., WAUER, J. & WEDIG, W. (2015): *Mathematische Methoden der Technischen Mechanik*. Springer.
- [142] RUBIO, D. & SAN ANDRÉS, L. (2003): *Bump-type foil bearing structural stiffness: experiments and predictions*. Research Progress Report - TRC Project: Identifikation of Structural Stiffness and Damping in Foil Bearings TRC-B&C-5-03, Texas A&M University, Turbomachinery Laboratory.
- [143] RUBIO, D. & SAN ANDRÉS, L. (2006): *Bump-type foil bearing structural stiffness: experiments and predictions*. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **128**, 3: 653–660.
- [144] RUBIO, D. & SAN ANDRÉS, L. (2007): *Structural stiffness, dry friction coefficient, and equivalent viscous damping in a bump-type foil gas bearing*. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **129**, 2: 494–502.
- [145] RUDLOFF, L., ARGHIR, M., BONNEAU, O. & MATTA, P. (2011): *Experimental analyses of a first generation foil bearing: startup torque and dynamic coefficients*. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **133**, 9: 092501.
- [146] RUIZ, R. O., DI LISCIA, M. H., MEDINA, L. U. & DÍAZ, S. E. (2008): *Asynchronous dynamic coefficients of a three-lobe air bearing*. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, **130**, 5: 052502.
- [147] RUSCITTO, D., MCCORMICK, J. & GRAY, S. (1978): *Hydrodynamic air lubricated compliant surface bearing for an automotive gas turbine engine. I - Journal bearing performance*. Techn. Ber., NASA Contractor Report 135368 by Mechanical Technology Inc.

- [148] RYU, K. & ASHTON, Z. (2016): *Bump-type foil bearings and flexure pivot tilting pad bearings for oil-free automotive turbochargers: highlights in rotordynamic performance*. In: Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, **138**, 4: 042501.
- [149] RYU, K. & SAN ANDRÉS, L. (2012): *Effect of cooling flow on the operation of a hot rotor-gas foil bearing system*. In: Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, **134**, 10: 102511.
- [150] RYU, K. & SAN ANDRÉS, L. (2013): *On the failure of a gas foil bearing: high temperature operation without cooling flow*. In: Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, **135**, 11: 112506.
- [151] SALEHI, M., HESHMAT, H., WALTON, J. F. & TOMASZEWSKI, M. (2007): *Operation of a mesoscopic gas turbine simulator at speeds in excess of 700,000 rpm on foil bearings*. In: Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, **129**, 1: 170–176.
- [152] SAN ANDRÉS, L. (2006): *Hybrid flexure pivot-tilting pad gas bearings: analysis and experimental validation*. In: Journal of Tribology, **128**, 3: 551–558.
- [153] SAN ANDRÉS, L. & CHIRATHADAM, T. A. (2012): *A metal mesh foil bearing and a bump-type foil bearing: comparison of performance for two similar size gas bearings*. In: Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, **134**, 10.
- [154] SAN ANDRÉS, L., CHIRATHADAM, T. A. & KIM, T.-H. (2010): *Measurement of structural stiffness and damping coefficients in a metal mesh foil bearing*. In: Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, **132**, 3: 032503.
- [155] SAN ANDRÉS, L. & KIM, T. H. (2007): *Improvements to the analysis of gas foil bearings: Integration of top foil 1D and 2D structural models*. In: *Proc. of ASME Turbo Expo: Power for Land, Sea, and Air*. Montreal, Québec, Kanada.
- [156] SAN ANDRÉS, L. & KIM, T. H. (2008): *Forced nonlinear response of gas foil bearing supported rotors*. In: Tribology International, **41**, 8: 704–715.
- [157] SAN ANDRÉS, L., RUBIO, D. & KIM, T. H. (2007): *Rotordynamic performance of a rotor supported on bump type foil gas bearings: experiments and predictions*. In: Journal of Engineering for Gas Turbines and Power, **129**, 3: 850–857.
- [158] SAN ANDRÉS, L. & RYU, K. (2011): *On the nonlinear dynamics of rotor-foil bearing systems: Effects of shaft acceleration, mass imbalance and bearing mechanical energy dissipation*. In: *Proc. of ASME 2011 Turbo Expo*. Vancouver, British Columbia, Canada.
- [159] SCHIFFMANN, J. & SPAKOVSKY, Z. (2013): *Foil bearing design guidelines for improved stability*. In: Journal of Tribology, **135**, 1: 011103.
- [160] SCHLICHTING, H. & GERSTEN, K. (2006): *Grenzschicht-Theorie*. 10. Aufl. Springer.
- [161] SILVER, A. (1976): *Shaped foil bearing*. US Patent 3,957,317.

- [162] SIM, K., LEE, Y.-B. & KIM, T. H. (2013): *Effects of mechanical preload and bearing clearance on rotordynamic performance of lobed gas foil bearings for oil-free turbochargers*. In: Tribology Transactions, **56**, 2: 224–235.
- [163] SIM, K., YONG-BOK, L., KIM, T. H. & LEE, J. (2012): *Rotordynamic performance of shimmed gas foil bearings for oil-free turbochargers*. In: Journal of Tribology, **134**, 3: 031102.
- [164] SONG, J.-H. & KIM, D. (2007): *Foil gas bearing with compression springs: analyses and experiments*. In: Journal of Tribology, **129**, 3: 628–639.
- [165] SPURK, J. H. & AKSEL, N. (2007): *Strömungslehre : Einführung in die Theorie der Strömungen*. 7. Aufl. Springer.
- [166] STAHLER, A. & HUCKABAY, A. (1966): *Analyzation, Design, Fabrication, and Testing of a Foil Bearing Rotor Support System*. Techn. Ber., NASA Contractor Report 66-21 by Ampex Corp.
- [167] STINGELIN, V. (1963): *Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Gaslagern*. Dissertation, ETH Zürich, Nr. 3312.
- [168] STOKES, G. G. (1849): *On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids*. In: Transactions of the Cambridge Philosophical Society, **8**: 287–319.
- [169] SZERI, A. Z. (2011): *Fluid film lubrication*. 2. Aufl. Cambridge University Press.
- [170] TIPEI, N. (1954): *Ecuatiile, lubrificatiei cu gaze*. In: Comunicarile Academiei Republicii Populare Romine, **4**: 599–704.
- [171] TIPEI, N. & GROSS, W. A. (1962): *Theory of lubrication*. Stanford University Press.
- [172] TOWER, B. (1883): *First report on friction experiments*. In: Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, **34**, 1: 632–659.
- [173] VAN DE VRANDE, B. L. (2001): *Nonlinear dynamics of elementary rotor systems with compliant plain journal bearings*. Dissertation, TU Eindhoven.
- [174] VDI - GESELLSCHAFT VERFAHRENSTECHNIK UND CHEMIEINGENIEURWESEN [Hrsg.] (2013): *VDI-Wärmeatlas*. 11. Aufl. Springer Vieweg.
- [175] VLEUGELS, P., WAUMANS, T., PEIRS, J., AL-BENDER, F. & REYNAERTS, D. (2006): *High-speed bearings for micro gas turbines: stability analysis of foil bearings*. In: Journal of Micromechanics and Microengineering, **16**, 9: S282.
- [176] WALOWIT, J. A. & ANNO, J. N. (1975): *Modern developments in lubrication mechanics*. Applied Science Publications.

- [177] WALTON, J. F., HESHMAT, H. & TOMASZEWSKI, M. J. (2004): *Testing of a Small Turbocharger/Turbojet Sized Simulator Rotor Supported on Foil Bearings*. In: *Proc of ASME Turbo Expo 2004: Power for Land, Sea, and Air*, 67–73.
- [178] WIGGINS, S. (2003): *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. 2. Aufl. Springer.