KITopen (2018), 2 pp.
DOI: 10.5445/IR/1000082202

Bemerkungen zu einem Ergebnis von Karol Baron und Jürg Rätz

Peter Volkmann

Meiner Tochter Ursula zum 50. Geburtstag

Es sei G eine Gruppe und E ein reeller Skalarproduktraum mit

$$\mathrm{dim} E \geq 2. \tag{1}$$

Für Funktionen $f : E \to G$ mit der Eigenschaft

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad (x, y \in E,\ x \perp y) \tag{2}$$

gilt im Falle, dass G kommutativ ist, nach K. Baron und J. Rätz [1] das Folgende: Es gibt $a : \mathbb{R} \to G,\ b : E \to G$ mit

$$a(\xi+\eta) = a(\xi)a(\eta) \qquad (\xi, \eta \in \mathbb{R}), \tag{3}$$
$$b(x+y) = b(x)b(y) \qquad (x, y \in E), \tag{4}$$
$$a(\xi)b(x) = b(x)a(\xi) \qquad (\xi \in \mathbb{R},\ x \in E), \tag{5}$$
$$f(x) = a(\|x\|^2)b(x) \qquad (x \in E). \tag{6}$$

((5) ist wegen der Kommutativität von G trivial.)

Hier werden nun (2) erfüllende $f : E \to G$ betrachtet, ohne dass G abelsch vorausgesetzt wird. Unter Mitverwendung der nachfolgend zu den Sätzen 1, 2 führenden Untersuchungen hat dann Imke Toborg [2] gezeigt, dass die hier betrachteten $f : E \to G$ bereits Werte in einer kommutativen Untergruppe von G haben; damit gilt auch für sie das oben beschriebene Ergebnis von Baron und Rätz.

Satz 1. *Für $f : E \to G$ sind äquivalent*:
I) *Die Werte von f liegen in einer kommutativen Untergruppe von G, und es gilt* (2).
II) *Es gibt $a : \mathbb{R} \to G,\ b : E \to G$, so dass* (3), (4), (5), (6) *gelten.*

Beweis. I) $\Rightarrow$ II): Gilt in I) $f : E \to H$ mit einer abelschen Untergruppe H von G, so gibt es nach [1] Funktionen $a : \mathbb{R} \to H,\ b : E \to H$, welche (3), (4), (5), (6) erfüllen.

Typoskript: Marion Ewald

II) $\Rightarrow$ I): Es gelte II). $(\mathbb{R},+)$ und $(E,+)$ sind abelsche Gruppen, also sind wegen (3), (4) die Mengen $G_1 = \{a(\xi) \mid \xi \in \mathbb{R}\}$ und $G_2 = \{b(x) \mid x \in E\}$ kommutative Untergruppen von G, und gemäß (5) trifft das auch auf $H = G_1G_2$ zu. Wegen (6) ist $f : E \to H$, und für $x, y \in E$ mit $x \perp y$ ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} f(x+y) &= a(\|x+y\|^2)b(x+y) = a(\|x\|^2 + \|y\|^2)b(x)b(y) \\ &= a(\|x\|^2)a(\|y\|^2)b(x)b(y) = f(x)f(y). \end{aligned} \tag{7}$$

Satz 2. *$f : E \to G$ erfülle* (2)*, und es seien $a : \mathbb{R} \to G,\ b : E \to G$ Funktionen mit den Eigenschaften* (3), (4), (6). *Dann liegen die Werte von f in einer abelschen Untergruppe von G.*

Beweis. Wegen Satz 1 genügt der Nachweis von (5). Für $x, y \in E$ mit $x \perp y$ erhalten wir zunächst

$$a(\|x\|^2)b(x)a(\|y\|^2)b(y) = f(x)f(y) = f(x+y).$$

Wieder gelten die ersten drei Gleichheiten in (7), also wird

$$a(\|x\|^2)b(x)a(\|y\|^2)b(y) = a(\|x\|^2)a(\|y\|^2)b(x)b(y),$$

und wir bekommen

$$b(x)a(\|y\|^2) = a(\|y\|^2)b(x) \quad (x, y \in E,\ y \perp y). \tag{8}$$

Nun seien $x \in E,\ \xi \in \mathbb{R},\ \xi \geq 0$. Wegen (1) gibt es

$$y \in E,\ y \perp x,\ \|y\|^2 = \xi,$$

und dann folgt aus (8)

$$b(x)a(\xi) = a(\xi)b(x) \qquad (x \in E,\ \xi \in \mathbb{R},\ \xi \geq 0). \tag{9}$$

Im Falle $\xi < 0$ ist folglich

$$b(x)a(-\xi) = a(-\xi)b(x),$$

also

$$b(x)a(\xi)^{-1} = a(\xi)^{-1}b(x),$$

$$a(\xi)b(x) = b(x)a(\xi) \quad (x \in E,\ \xi \in \mathbb{R},\ \xi < 0).$$

Hieraus und aus (9) folgt (5).

Literatur

1. Karol Baron, Jürg Rätz, *On orthogonally additive mappings on inner product spaces.* Bull. Polish Acad. Sci., Math. **43**, 187-189 (1995).

2. Imke Toborg, *The images of orthogonally additive mappings from inner product spaces to groups.* Erscheint in Aequationes Math.

Adresse des Autors: Institut für Analysis, KIT, 76128 Karlsruhe, Deutschland