

# Eine vollständige Klassifikation von Condorcet Domains für kleine Alternativenmengen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Doktors der Wirtschaftswissenschaften**  
(**Doctor rerum politicarum**)

an der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften  
des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

genehmigte

**Dissertation**

von

Tobias Dittrich, M.Sc.

Tag der mündlichen Prüfung:	20. März 2018
Referent:	Prof. Dr. Clemens Puppe
Korreferent:	Prof. Dr. Oliver Stein



## Kurzfassung

In der Social Choice Theorie beschäftigt man sich mit Verfahren, um individuelle Präferenzen, Meinungen oder Entscheidungen zu einer gemeinschaftlichen Entscheidung zu aggregieren. Dabei kann es sich um Entscheidungsprozesse innerhalb von Gruppen verschiedenster Größen handeln, wie z.B. die Suche nach einem gemeinsamen Urlaubsziel unter Freunden, die Wahl eines Vorstandes innerhalb eines Gremiums oder die Wahl von Parteien für ein nationales Parlament.

Ein intuitiver Ansatz zur Aggregation von Präferenzen und Meinungen ist der paarweise Mehrheitsvergleich. Dazu werden alle zur Wahl stehenden Alternativen anhand der Präferenzen der Wähler miteinander verglichen. Bevorzugt eine Mehrheit der Wähler Alternative A vor Alternative B, so wird diese Alternative auch im Ergebnis bevorzugt werden. Dieses Verfahren erfüllt sehr viele wünschenswerte Eigenschaften, welche man im Allgemeinen als fair und demokratisch bezeichnet.

Ein zentraler Nachteil des paarweisen Mehrheitsvergleichs besteht allerdings darin, dass das Ergebnis zyklisch sein kann. So lassen sich Beispiele finden, in denen eine Mehrheit Alternative A gegenüber Alternative B, eine andere Mehrheit B gegenüber einer dritten Alternative C und gleichzeitig eine Mehrheit C gegenüber A bevorzugt. Solche intransitiven Ergebnisse werden Condorcet-Zyklen genannt. In realen Anwendungsfällen sind diese Zyklen nicht wünschenswert, da sie kein eindeutiges Ergebnis für die gemeinschaftliche Entscheidung liefern. Unter gewissen Einschränkungen auf dem Raum der zulässigen Präferenzen kann man jedoch garantieren, dass der paarweise Mehrheitsvergleich zu keinen Zyklen führt. Diese Einschränkungen des Präferenzraums nennt man Condorcet Domains, welche das zentrale Untersuchungsobjekt der Arbeit sind.

Nachdem im ersten Teil der Arbeit die theoretischen Grundlagen sowie Erkenntnisse aus der Literatur vorgestellt und zum Teil erweitert werden, ist das Ziel des zweiten Teils die Entwicklung von Algorithmen zum Berechnen von Condorcet Domains. Dabei werden mithilfe von drei unterschiedlichen Ansätzen - erstmals in der Literatur - alle Condorcet Domains für den strikten Präferenzraum mit drei, vier und fünf Alternativen, alle Condorcet Domains für den schwachen Präferenzraum mit drei und vier Alternativen sowie alle Condorcet Domains für den quasitransitiven Präferenzraum mit drei Alternativen bestimmt. Im dritten Teil der Dissertation werden die gefundenen Domains durch Isomorphieklassen - sogenannte Condorcet-Domain-Strukturen (CDS) - vollständig klassifiziert. In der folgenden Tabelle sind diese Ergebnisse zusammengefasst.

Anzahl der Alternativen Präferenzraum	$m = 3$ strikt	$m = 4$ strikt	$m = 5$ strikt	$m = 3$ schwach	$m = 4$ schwach	$m = 3$ quasitr.
# Präferenzen im Präferenzraum	6	24	120	13	75	19
# maximaler Condorcet Domains	9	495	140.475	29	3.001	100
# maximaler CDS	2	18	688	6	96	13

Die ermittelten Condorcet-Domain-Strukturen werden für die untersuchten Präferenzräume anhand ihrer verschiedenen Eigenschaften beschrieben und klassifiziert. Das Ende der Arbeit bildet eine Diskussion über die Implikationen der gefundenen Strukturen sowie deren Vorkommen bzw. Anwendbarkeit in realen Abstimmungssituationen.



## Danksagung

Ich möchte diese Arbeit meinen beiden Großvätern Fritz Dittrich und Rudolf Heinze widmen, welche in meiner Kindheit und Jugend in mir das Interesse für wissenschaftliche und politische Fragestellungen geweckt haben. Sowohl die Nachmittage in Dorfbibliotheken als auch die regelmäßigen Gespräche über politische Systeme während gemeinsamer Autofahrten mit ihnen haben einen nicht unerheblichen Einfluss auf den Weg genommen, den ich bis zum Beginn der Arbeit an meiner Dissertation eingeschlagen habe.

Während meiner Promotion haben mich viele wunderbare, interessante und nette Menschen begleitet und unterstützt, denen ich an dieser Stelle danken möchte. Zunächst möchte ich meinem Doktorvater Prof. Dr. Clemens Puppe meinen Dank aussprechen, der mich bereits seit dem Beginn meines Studiums begleitet und während meiner Promotion viel Unterstützung geboten, aber auch viele Freiheiten gelassen hat. Des Weiteren möchte ich mich bei Prof. Dr. Oliver Stein und Prof. Dr. Dr. Andranik Tangian bedanken, die mir als Korreferent und Prüfer viele hilfreiche Kommentare und Anmerkungen zu meiner Dissertation gegeben haben. Für die interessanten und ergebnisreichen Gespräche und E-Mail-Konversationen über Condorcet Domains gebührt außerdem Gleb Koshevoy, Arkadii Slinko und Klaus Nehring mein Dank.

Ohne die Unterstützung meiner Familie und Freunde wäre es mir nicht möglich gewesen, diese Arbeit zu vollenden. Insbesondere möchte ich mich bei Jana Rollmann bedanken, welche gerade in der letzten Phase der Dissertation mir immer wieder Kraft gegeben und unermüdlich Korrektur gelesen hat. Über die vielen interessanten Gespräche und die wunderbare Stimmung am Lehrstuhl möchte ich mich bei meinen Kollegen Michael Müller, Anselma Wörner, Veronica Bauer, Caren Söhner und Marten Hillebrand recht herzlich bedanken.

Karlsruhe, im März 2018

*Tobias Dittrich*



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Aggregationsverfahren in der Social Choice Theorie</b>	<b>5</b>
2.1	Historische Entwicklung	5
2.2	Eigenschaften und zentrale Theoreme	6
<b>3</b>	<b>Condorcet Domains in der Social Choice Theorie</b>	<b>13</b>
3.1	Notation und theoretische Grundlagen	13
3.2	Bekannte Klassen von Condorcet Domains	21
3.3	Charakterisierungen für Condorcet Domains	27
3.4	Verfahren zum Erzeugen von (großen) Condorcet Domains	41
3.4.1	Alternating und Replacement Struktur nach Fishburn	42
3.4.2	Bruhat-Relation nach Abello, Chameni-Nembua und Galambos und Reiner	43
3.4.3	Condorcet Domains vom Tiling Typ nach Danilov, Karzanov und Koshevoy	45
3.4.4	Danilov-Koshevoy-4-Punkt-Domain	51
3.4.5	Ein weiteres maximales 4-Punkt-Domain	52
<b>4</b>	<b>Algorithmen und Programme zur Berechnung von Condorcet Domains</b>	<b>55</b>
4.1	Value-restriction-Algorithmus	55
4.2	Modellierung als AllSAT-Problem	59
4.3	Mediagraph-Algorithmus	63
4.4	Programme zur Visualisierung, Verifizierung und Klassifikation von Condorcet Domains	64
4.4.1	Programm: Visualize CDs	64
4.4.2	Programm: Domain Properties	65
4.4.3	Programm: Domain Operations	67
<b>5</b>	<b>Klassifikation von Condorcet Domains für kleine Alternativenmengen</b>	<b>69</b>
5.1	Isomorphieklassen und Condorcet-Domain-Strukturen	69
5.2	Eigenschaften von Condorcet Domains	72
5.3	Klassifikation für den strikten Präferenzraum	81
5.3.1	Drei Alternativen	81
5.3.2	Vier Alternativen	84
5.3.3	Fünf Alternativen	97
5.4	Klassifikation für den schwachen Präferenzraum	102
5.4.1	Drei Alternativen	103
5.4.2	Vier Alternativen	107
5.5	Klassifikation für den quasitransitiven Präferenzraum	118
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>125</b>
<b>A</b>	<b>Inkonsistenz-Tripel</b>	<b>127</b>

A.1	Inkonsistenz-Tripel für den schwachen Präferenzraum . . . . .	127
A.2	Inkonsistenz-Tripel für den quasitransitiven Präferenzraum . . . . .	128
<b>B</b>	<b>Programmcode Value Restriction . . . . .</b>	<b>131</b>
<b>C</b>	<b>Maximale Condorcet-Domain-Strukturen . . . . .</b>	<b>135</b>
C.1	Maximale Condorcet-Domain-Strukturen für den strikten Präferenzraum . . . . .	135
C.2	Maximale Condorcet-Domain-Strukturen für den schwachen Präferenzraum . . . . .	174
C.3	Maximale Condorcet-Domain-Strukturen für den quasitransitiven Präferenzraum . . . . .	180
<b>D</b>	<b>Pendants im schwachen Präferenzraum . . . . .</b>	<b>181</b>

## Abbildungsverzeichnis

3.1	Strikter Präferenzraum für drei Alternativen . . . . .	15
3.2	Strikter Präferenzraum für vier Alternativen . . . . .	15
3.3	Schwacher Präferenzraum für drei Alternativen . . . . .	17
3.4	Schwacher Präferenzraum für vier Alternativen . . . . .	17
3.5	Quasitransitiver Präferenzraum für drei Alternativen . . . . .	19
3.6	Darstellung eines single-peaked Domains aus dem strikten Präferenzraum . . . . .	21
3.7	Darstellung eines single-peaked Domains aus dem schwachen Präferenzraum . . . . .	23
3.8	Darstellung eines single-dipped Domains aus dem schwachen Präferenzraum . . . . .	24
3.9	Darstellung eines order-restricted Profils mit fünf Wählern . . . . .	26
3.10	Darstellung eines maximalen single-crossing Domains aus dem schwachen Präferenzraum für drei Alternativen . . . . .	27
3.11	Betweenness-Intervalle auf dem strikten Präferenzraum für drei Alternativen . . . . .	33
3.12	Inkonsistenz-Tripel auf dem strikten Präferenzraum für drei Alternativen . . . . .	34
3.13	Betweenness-Intervalle auf dem schwachen Präferenzraum für drei Alternativen . . . . .	35
3.14	Betweenness-Intervalle auf dem schwachen Präferenzraum für drei Alternativen, Fortsetzung .	35
3.15	Inkonsistenz-Tripel-Strukturen auf dem schwachen Präferenzraum für drei Alternativen . . .	36
3.16	Betweenness-Intervalle auf dem quasitransitiven Präferenzraum für drei Alternativen . . . . .	37
3.17	Inkonsistenz-Tripel-Strukturen auf dem quasitransitiven Präferenzraum für drei Alternativen	37
3.18	Gerichteter Bruhat-Graph für drei Alternativen . . . . .	44
3.19	Beispiel Tiling-Vektoren für fünf Alternativen . . . . .	46
3.20	10-gon $Z_5$ für fünf Alternativen . . . . .	46
3.21	Beispiel Tiling für fünf Alternativen . . . . .	46
3.22	Mögliche Zonogons für das Domain $\mathcal{D} = \{abc, bac, cab, cba\}$ . . . . .	47
3.23	Mögliche Aufteilungen des Zonogons für das Domain $\mathcal{D} = \{abc, bac, cab, cba\}$ . . . . .	47
3.24	Alle Tilings für drei Alternativen . . . . .	48
3.25	Konstruktion des Tilings mit voll besetztem Ursprung und fünf Alternativen . . . . .	49
3.26	Tilings für vier Alternativen . . . . .	50
3.27	Repräsentative Tilings aller Tiling-Strukturen für vier Alternativen . . . . .	50
3.28	Repräsentative Tilings aller Tiling-Strukturen für fünf Alternativen . . . . .	51
4.1	Input AllSat-Solver, strikter Präferenzraum mit drei Alternativen . . . . .	61
4.2	Auszug Output AllSat-Solver, quasitransitiver Präferenzraum mit drei Alternativen . . . . .	62
4.3	Screenshot Programm Visualize CD . . . . .	65
4.4	Screenshot Programm Domain Properties, Startansicht . . . . .	65
4.5	Screenshot Programm Domain Properties, Beispiel nicht maximales Domain . . . . .	66
4.6	Screenshot Programm Domain Properties, Beispiel maximales Domain aus dem schwachen Präferenzraum . . . . .	67
5.1	Zwei isomorphe Graphen aus dem schwachen Präferenzraum mit drei Alternativen . . . . .	70
5.2	Zwei isomorphe Domains aus dem strikten Präferenzraum mit drei Alternativen . . . . .	70

5.3	Beispiele nicht semi-zusammenhängender und semi-zusammenhängender Domains . . . . .	75
5.4	Beispiele symmetrischer Domains . . . . .	77
5.5	Zwei zusammenhängende maximale Condorcet Domains aus dem strikten Präferenzraum mit drei Alternativen . . . . .	82
5.6	Zwei nicht zusammenhängende maximale Condorcet Domains aus dem strikten Präferenzraum mit drei Alternativen . . . . .	82
5.7	Single-crossing Domain aus dem strikten Präferenzraum mit drei Alternativen . . . . .	83
5.8	Mediagraphen zweier nicht zusammenhängender maximaler Condorcet Domains für den strikten Präferenzraum mit drei Alternativen . . . . .	84
5.9	Sechseck aus Permutaeder des strikten Präferenzraums mit vier Alternativen . . . . .	85
5.10	Quadrat aus Permutaeder des strikten Präferenzraums mit vier Alternativen . . . . .	85
5.11	Danilov-Koshevoy-4-Punkt-Domain . . . . .	86
5.12	Die Schlangenstrukturen . . . . .	86
5.13	Single-crossing Domain aus dem strikten Präferenzraum mit vier Alternativen mit Grenzen . . . . .	86
5.14	Repräsentatives Tiling für die CD-Struktur Schlange . . . . .	87
5.15	Single-peaked Domain . . . . .	87
5.16	Repräsentatives Tiling für die CD-Struktur Single-peaked Domain . . . . .	88
5.17	Drei zusammenhängende und nicht semi-zusammenhängende Strukturen . . . . .	89
5.18	Domain-Produkt-Strukturen . . . . .	90
5.19	Sonstige I-VII Strukturen . . . . .	92
5.20	Maximum Domain . . . . .	93
5.21	Repräsentatives Tiling für die CD-Struktur Maximum Domain . . . . .	93
5.22	Klassifikation der maximalen CDS für den strikten Präferenzraum mit vier Alternativen . . . . .	95
5.23	Mediagraphen aller CDS für den strikten Präferenzraum mit vier Alternativen . . . . .	96
5.24	Tiling für das Single-peaked Domain $\mathcal{D}_{569}$ . . . . .	99
5.25	Tiling für das 19-elementige maximale Condorcet Domain $\mathcal{D}_{687}$ . . . . .	100
5.26	Tiling für das Maximum Condorcet Domain $\mathcal{D}_{688}$ . . . . .	100
5.27	Klassifikation der maximalen CDS für den strikten Präferenzraum mit fünf Alternativen . . . . .	102
5.28	Alle maximalen CDS für den schwachen Präferenzraum mit drei Alternativen . . . . .	103
5.29	Single-crossing-Darstellung für die Z-Struktur . . . . .	104
5.30	Klassifikation der maximalen CDS für den schwachen Präferenzraum mit drei Alternativen . . . . .	107
5.31	Maximale CDS mit fünf Elementen, $m = 4$ , schwacher Präferenzraum . . . . .	110
5.32	Maximale CDS mit sechs Elementen, $m = 4$ , schwacher Präferenzraum . . . . .	112
5.33	Maximum CDS, $m = 4$ , schwacher Präferenzraum . . . . .	113
5.34	Maximale CDS mit 15 Elementen, $m = 4$ , schwache Präferenzordnung (ohne Pendants im strikten Präferenzraum) . . . . .	113
5.35	Maximale CDS mit 14 Elementen, $m = 4$ , schwache Präferenzordnung (ohne Pendants im strikten Präferenzraum und nicht zusammenhängend) . . . . .	114
5.36	Voll besetzte, nicht zusammenhängende maximale CDS, $m = 4$ , schwacher Präferenzraum . . . . .	115
5.37	Pendant zur maximalen Condorcet-Domain-Struktur „Vier Paare“ . . . . .	115
5.38	Drei symmetrische maximale CD-Strukturen, $m = 4$ , schwacher Präferenzraum . . . . .	116
5.39	Alle maximalen single-crossing CD-Strukturen, $m = 4$ , schwacher Präferenzraum . . . . .	117
5.40	Klassifikation der maximalen CDS für den schwachen Präferenzraum mit vier Alternativen . . . . .	118
5.41	Alle nicht zusammenhängenden maximalen CDS auf dem quasitransitiven Präferenzraum mit drei Alternativen . . . . .	120

---

5.42	Alle semi-zusammenhängenden maximalen CDS auf dem quasitransitiven Präferenzraum mit drei Alternativen . . . . .	121
5.43	Alle zusammenhängenden maximalen CDS ohne maximale Weite auf dem quasitransitiven Präferenzraum mit drei Alternativen . . . . .	122
5.44	Klassifikation der maximalen CDS für den quasitransitiven Präferenzraum mit drei Alternativen	123
D.1	Alle Pendants zu CD-Strukturen aus dem strikten Präferenzraum, $m = 4$ , schwache Präferenzordnung . . . . .	182



## Tabellenverzeichnis

2.1	Profil mit fünf Wählern und drei Alternativen . . . . .	7
2.2	Profil mit drei Wählern und fünf Alternativen . . . . .	9
3.1	Binäre Entscheidungen für die Präferenzordnungen $abc$ , $(ab)c$ und $(abc)$ aus $\mathcal{R}_w(X = \{a, b, c\})$	16
3.2	Präferenzstrukturen und Anzahlen der Präferenzen für den schwachen Präferenzraum mit vier Alternativen . . . . .	17
3.3	Binäre Entscheidungen für die Präferenzrelationen $(ab)(bc)d$ , $(abc)(bd)$ und $(abc)(abd)$ aus $\mathcal{R}_{qt}(\{a, b, c, d\})$ . . . . .	18
3.4	Größe der strikten, schwachen und quasitransitiven Präferenzräume für $m \leq 6$ . . . . .	19
3.5	Lateinische Quadrate für drei Alternativen nach Ward . . . . .	28
3.6	Beispiele für inkonsistente Mehrheitsabstimmungen auf dem schwachen Präferenzraum mit vier Alternativen . . . . .	36
3.7	Beispiel einer inkonsistenten Mehrheitsabstimmung auf dem quasitransitiven Präferenzraum mit vier Alternativen . . . . .	37
3.8	Größen für Alternating Struktur, Replacement Struktur und Maximum Domains . . . . .	43
4.1	Vergleich Anzahl Domains und Anzahl NC-Tripel-Kombinationen für $m \leq 6$ . . . . .	58
4.2	Benötigte Ressourcen zur Berechnung der Rohdaten mithilfe des NC-Algorithmus' für $m \leq 6$	58
4.3	Übersicht Anzahl Präferenzen und Disjunktionsterme für alle untersuchten Präferenzräume .	62
5.1	Übersicht Größe Präferenzraum, Größe Potenzmenge, Anzahl maximaler CDs und Anzahl maximaler CD-Strukturen aller untersuchten Präferenzräume . . . . .	72
5.2	Beispiel zweier inverser Präferenzpaare ohne maximale Weite und mit maximaler Weite . . .	73
5.3	Zusammenfassung aller maximalen CDS für $m = 3$ im strikten Präferenzraum . . . . .	84
5.4	Zusammenfassung aller maximalen CDS für $m = 4$ im strikten Präferenzraum . . . . .	94
5.5	Zusammenfassung aller maximalen CDS für $m = 3$ im schwachen Präferenzraum . . . . .	105
5.6	Zusammenfassung ausgewählter maximaler CDS für $m = 4$ im schwachen Präferenzraum . . .	110
5.7	Zusammenfassung aller maximalen CDS für $m = 3$ im quasitransitiven Präferenzraum . . . .	119
A.1	Alle Inkonsistenz-Tripel für $m = 3$ im schwachen Präferenzraum . . . . .	128
A.2	Alle Inkonsistenz-Tripel für $m = 3$ im quasitransitiven Präferenzraum . . . . .	129
C.1	Zusammenfassung ausgewählter maximaler CDS für $m = 5$ im strikten Präferenzraum . . . .	156
C.2	Repräsentative Domains aller maximalen CDS für $m = 5$ im strikten Präferenzraum . . . . .	173
C.3	Zusammenfassung aller maximalen CDS für $m = 4$ im schwachen Präferenzraum . . . . .	177
C.4	Repräsentative Domains aller maximalen Condorcet-Domain-Strukturen für $m = 4$ im schwachen Präferenzraum . . . . .	179
C.5	Repräsentative Domains aller maximalen Condorcet-Domain-Strukturen für $m = 3$ im quasitransitiven Präferenzraum . . . . .	180



# 1 Einführung

Menschen sind soziale Wesen, die in einer Gesellschaft leben, welche von gemeinsamen Entscheidungen geprägt ist. Es gibt täglich Situationen im privaten, beruflichen oder gesellschaftlichen Umfeld, in denen wir unsere Meinung kundtun, um Einfluss auf das Ergebnis eines gemeinsamen Entschlusses einer Gruppe zu nehmen. Dabei kann es sich um profane Dinge handeln, wie die Entscheidung über ein geeignetes Lokal für die Weihnachtsfeier im Freundeskreis, aber auch um Entscheidungen mit weitreichenden Folgen, wie die Wahl eines neuen Vorstandsvorsitzenden einer Firma. In all diesen Situationen machen wir uns bewusst oder unbewusst Gedanken über die Aggregation von individuellen Präferenzen zu einer Gruppenentscheidung. Aber wer hat nicht schon einmal erlebt, dass er nach einer gemeinsamen Entscheidung unzufrieden mit dem Ergebnis war - und dies nicht am Ergebnis, sondern am Entscheidungsprozess selbst lag? „Warum gehen wir in ein Steakhouse, obwohl ein Drittel der Freunde im Freundeskreis kein Fleisch isst?“ oder „Wieso wurde Herr Müller gewählt, obwohl eine Mehrheit Frau Meier besser findet als Herrn Müller?“. In solchen Situationen kommt häufig die Frage auf, warum das benutzte Verfahren zur Aggregation der einzelnen Stimmen diese Dinge nicht berücksichtigt oder warum nicht ein Verfahren verwendet wurde, welches solche unerwünschten Eigenschaften ex ante ausschließt.

Die Social Choice Theorie, als Teilgebiet der Wirtschaftstheorie, beschäftigt sich genau mit solchen Fragestellungen. Sie stellt Verfahren zur Verfügung, um individuelle Präferenzen, Meinungen, Entscheidungen oder Nutzen zu aggregieren und untersucht diese Methoden hinsichtlich ihrer Eigenschaften. Eine der grundlegenden Fragestellungen dabei ist, wie man von einer Liste von Präferenzen einzelner Wähler über eine Menge an Alternativen (einem sogenannten Profil) zu einer sozialen Rangordnung der Alternativen gelangt. Dahinter steckt die Frage, wie sich der Wille einer Gruppe bestimmen lässt. Dies ist eine sehr komplexe Fragestellung, auf die es leider keine einfachen Antworten gibt. Was versteht man überhaupt unter dem Gruppenwillen? Wie ist dieser messbar und welche Bedingungen werden an ihn gestellt? Alle bekannten Verfahren zur Ermittlung einer Gruppenentscheidung weisen Eigenschaften auf, welche unter gewissen Umständen zu paradoxen oder nicht wünschenswerten Ergebnissen führen. Dies ist der Grund für unser in manchen Situationen auftretendes, seltsames Bauchgefühl im Anschluss an gemeinschaftliche Beschlüsse: Hat das Verfahren die Stimmen fair zu einem Ergebnis zusammengeführt? Wurden alle wichtigen Aspekte berücksichtigt? Die Situation ist sogar noch schlimmer. Man kann nachweisen, dass es kein allgemeingültiges Verfahren geben kann, welches in allen Situationen „gute“ Ergebnisse liefert und einen für alle Seiten „fairen“ Wahlprozess garantiert. Die Frage, was gut und fair in diesem Kontext bedeutet, ist individuell sehr unterschiedlich und stellt an sich schon ein sehr komplexes Problem dar.

**Condorcet Domains** Einer der einfachsten und intuitivsten Ansätze, um individuelle Präferenzen zu aggregieren, ist der paarweise Mehrheitsvergleich. Wenn über die Hälfte der Wähler eine Alternative gegenüber einer anderen Alternative bevorzugt, so sollte die erste Alternative auch den Vorzug in der endgültigen Rangordnung bekommen. Um eine solche soziale Rangordnung zu erzeugen, muss man also alle Alternativenpaare bilden und die Alternativen paarweise miteinander vergleichen. Dieses Verfahren erfüllt viele wünschenswerte Eigenschaften und wird wahrscheinlich von den meisten Wählern als gutes und faires Verfahren bewertet. So lässt sich unter anderem das Ergebnis nicht durch taktisches Verhalten der Wähler manipulieren, es ist einfach zu verstehen und es entspricht einem gewissen Grundverständnis der modernen Demokratie, in welcher gewinnende Kandidaten, Alternativen oder Entscheidungen

von einer Mehrheit der Wähler unterstützt werden sollten. Es umgeht außerdem zwei sehr fundamentale Unmöglichkeitstheoreme der Social Choice Theorie, auf die wir in späteren Abschnitten noch eingehen werden. Gäbe es nicht ein grundlegendes Problem dieses Verfahrens, könnten wir die Ausführungen an dieser Stelle bereits beenden. Der paarweise Mehrheitsvergleich ist nicht immer transitiv, d.h. es kann zu Zyklen in der sozialen Rangordnung der Alternativen kommen. Dies lässt sich anhand eines einfachen Beispiels illustrieren: Nehmen wir an, die drei Freunde Eva, Leo und Jakob möchten gemeinsam über ihre Wochenendgestaltung entscheiden. Sie haben die zur Wahl stehenden Alternativen bereits auf die drei Aktivitäten Kite-Surfen (K), Wandern (W) und Schach spielen (S) reduziert. Alle drei schreiben ihre individuellen Präferenzen auf einen Zettel. Dabei sortieren sie die Alternativen in absteigender Reihenfolge:

Eva	Leo	Jakob
K	W	S
S	K	W
W	S	K

Wenden die Freunde den paarweisen Mehrheitsvergleich an, so kommen sie zu dem Ergebnis, dass eine Mehrheit Kite-Surfen gegenüber Schach spielen bevorzugt (Eva und Leo), eine Mehrheit Schach spielen gegenüber Wandern bevorzugt (Eva und Jakob) und eine Mehrheit Wandern gegenüber Kite-Surfen bevorzugt (Jakob und Leo). Dies führt zu einem Zyklus in der sozialen Rangordnung, welcher nach dem französischen Philosophen und Mathematiker Marie Jean Antoine Nicolas Caritat, Marquis de Condorcet als Condorcet-Zyklus oder Condorcet-Paradoxon bezeichnet wird.

Ein Verfahren, welches zyklische soziale Rangordnungen der Alternativen zulässt, ist in den meisten Anwendungsfällen nicht akzeptabel und kommt somit als Aggregationsverfahren individueller Präferenzen nicht in Frage. Es gibt allerdings Situationen, in denen Condorcet-Zyklen nicht auftreten können. Dies kann in der besonderen Struktur des Problems und den daraus resultierenden Präferenzen begründet sein. Nehmen wir z.B. an, bei den Alternativen handelt es sich um politische Parteien und diese lassen sich anhand eines Links-Rechts-Spektrums eindeutig sortieren. Wir können davon ausgehen, dass die Präferenzen der meisten Wähler eine ganz spezielle Struktur aufweisen: Für jeden Wähler existiert eine Partei, die er am meisten bevorzugt. Alle Parteien, die links und rechts von der bevorzugten Partei des Wählers liegen, wird er schlechter finden. Insbesondere wird er eine Partei umso schlechter finden, je weiter sie links bzw. rechts von seiner präferierten Partei entfernt ist. In einem solchen Kontext kann man zeigen, dass der paarweise Mehrheitsvergleich nie zu einer zyklischen Rangfolge führen wird - also keine Condorcet-Zyklen auftreten können. Einschränkungen des Präferenzraums, sogenannte *Domains*, welche garantieren, dass der paarweise Mehrheitsvergleich zu keinen Condorcet-Zyklen führt, nennt man *Condorcet Domains*.

**Aufbau und Zielsetzung** In der vorliegenden Arbeit werden wir uns mit der Analyse von Condorcet Domains beschäftigen. In der Literatur existieren auf der einen Seite bereits Beschreibungen von speziellen Condorcet-Domain-Klassen wie z.B. die im Beispiel mit den Parteien beschriebenen Präferenzen. Diese bekannten, beschriebenen Klassen stellen jedoch keine abschließende Beschreibung aller Condorcet-Domain-Strukturen dar, sondern sind nur eine Teilmenge aller Condorcet Domains. Auf der anderen Seite sind bereits mehrere, vollständige Charakterisierungen für Condorcet Domains bekannt. Diese gehen allerdings nicht auf die unterschiedlichen Strukturen und Eigenschaften verschiedener Condorcet Domains ein.

---

Wir werden durch eine vollständige Klassifikation aller Condorcet Domains für kleine Alternativenmengen und verschiedene Präferenzräume (strikte, schwache und quasitransitive Präferenzräume) diese Lücke schließen und eine Übersicht über alle Strukturen sowie deren Eigenschaften schaffen. Im Rahmen der Arbeit sollen folgende Fragestellungen untersucht und Zielsetzungen erreicht werden:

1. Es soll eine vollständige Klassifikation von Condorcet Domains für kleine Alternativenmengen anhand von Isomorphieklassen erstellt werden.
2. Auf Basis der Klassifikation sollen Condorcet-Domain-Strukturen beschrieben und untersucht werden. Welche der gefundenen Strukturen lassen sich bekannten Condorcet-Domain-Klassen zuordnen und welche Strukturen wurden bisher noch nicht in der Literatur beschrieben? Existieren Strukturen, welche für beliebige Alternativenmengen Gültigkeit besitzen?
3. Des Weiteren sollen Zusammenhänge zwischen den verschiedenen, untersuchten Präferenzräumen (strikte, schwache und quasitransitive Präferenzräume) aufgedeckt werden. Findet man innerhalb der unterschiedlichen Präferenzräume ähnliche Strukturen? Falls ja, lassen sich diese Zusammenhänge verallgemeinern?

Diese Arbeit gliedert sich in drei Teile. Die Kapitel 2 und 3 bilden die theoretischen Grundlagen der Arbeit. Wir werden zunächst eine historische Einführung in das Themengebiet der Präferenzaggregation geben und wichtige Eigenschaften und Bedingungen an Aggregationsverfahren darstellen. Darüber hinaus betrachten wir die dabei auftretenden Probleme und Unmöglichkeitsergebnisse. Anschließend beschreiben wir Condorcet Domains in der Social Choice Theorie. Im Zuge dessen gehen wir auf spezielle Klassen von Condorcet Domains, Verfahren zum Erzeugen solcher Domains und verschiedene Charakterisierungen ein. Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit Programmen, die für die Berechnung, Aufarbeitung und Visualisierung der Condorcet Domains entwickelt wurden. Dabei gehen wir auf die verwendeten theoretischen Ansätze und die algorithmische Umsetzung dieser ein. Im dritten Teil der Arbeit verwenden wir die Ergebnisse aus Teil 2 und klassifizieren die Condorcet-Domain-Strukturen für die untersuchten Fälle. Wir setzen die gefundenen Strukturen in Bezug zur Literatur und beschreiben neu gefundene Strukturen und Zusammenhänge zwischen diesen. Abschließend geben wir eine Übersicht über die Resultate und einen Ausblick auf mögliche Erweiterungen.



## 2 Aggregationsverfahren in der Social Choice Theorie

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über die wichtigsten Ansätze und Eigenschaften von Aggregationsverfahren in der Social Choice Theorie. Dazu betrachten wir zunächst einige historische Entwicklungen im Bereich der Wahlverfahren. Anschließend gehen wir auf grundlegende Eigenschaften sowie zentrale Resultate zu diesen Methoden ein. Wir beschränken uns an dieser Stelle auf eine nicht-formale Beschreibung der Verfahren und Eigenschaften und werden erst im nächsten Kapitel auf den mathematischen Modellrahmen eingehen.

### 2.1 Historische Entwicklung

Eine Herausforderung, der sich Menschen schon seit langer Zeit gegenübersehen, ist das Füllen von gemeinsamen Entscheidungen in einer Gruppe. Die dabei verwendeten Verfahren stellen eine grundlegende Charakterisierung der Gesellschaft dar, da sich anhand der benutzten Verfahren Rückschlüsse auf die sozialen Strukturen ziehen lassen. In frühen und auch einigen heutigen Kulturen ist es die Stimme des Stärksten oder Mächtigsten, die ausschlaggebend für Entscheidungen in einer Gesellschaft ist. Die Stimme dieses Diktators überwiegt alle anderen Stimmen in der Gemeinschaft und hat als einzige direkte Auswirkungen auf den Entscheidungsprozess. Aus unserer heutigen Sicht wird ein solches Verfahren nicht als fair angesehen, selbst wenn der Diktator hehre Ziele verfolgt (ein sogenannter wohlwollender Diktator). Damit ziehen wir die Diktatur nicht als mögliches Aggregationsverfahren für individuelle Präferenzen in Betracht.

Wenn Entscheidungen nicht durch einen Diktator getroffen werden, so stellt sich die Frage, wie man Meinungen und Präferenzen einzelner Individuen aggregieren und diese zu einer gemeinsamen Entscheidung zusammenführen kann. Zwei grundlegende Gedanken, welche sich in vielen historischen Quellen wiederfinden, sind zum einen der paarweise Vergleich von Kandidaten bzw. Alternativen untereinander und zum anderen die Bewertung der Kandidaten bzw. Alternativen mithilfe von Punktwerten. In seinem Artikel „Auf den Schultern von Riesen: Lull, Cusanus, Borda, Condorcet et al.“<sup>1</sup> [Puk02] gibt Friedrich Pukelsheimer einen sehr umfassenden historischen Überblick über die Anfänge der Wahltheorie, welche in den nächsten drei Absätzen kurz zusammenfasst werden.

Als eines der ersten, schriftlich festgehaltenen Wahlverfahren, welches sich mit dem paarweisen Vergleich von Alternativen beschäftigt, gilt das „System zur Personenwahl“ des mallorquinischen Philosophen, Theologen, Schriftsteller und Logiker Ramon Llull. In seinen drei Werken „Artifitium electionis personarum“ (vor 1280 n.Chr.), „Blaquerna, Chapter 24: En qual manera Natana fo eleta a abadessa“ (etwa 1283 n.Chr.) und „De arte eleccionis“ (1299 n.Chr.) beschreibt er unter anderem ein Wahlverfahren zur Bestimmung eines Prälaten - einem Würdenträger in der christlichen Kirche. Dafür wird nacheinander über alle Kandidaten paarweise abgestimmt. Der Gewinner eines solchen Vergleichs (der Kandidat mit der Mehrheit der Stimmen) erhält einen Punkt, der Verlierer erhält keinen Punkt. Bei gleicher Stimmzahl erhalten beide Kandidaten einen Punkt. Wenn über alle Kandidatenpaare eine Abstimmung durchgeführt wurde, werden die Punkte der Kandidaten addiert und der Kandidat mit der höchsten Punktzahl zum Sieger erklärt. Bei einem Gleichstand wird erneut zwischen diesen beiden oder mehreren Kandidaten abgestimmt. Falls dies wieder zu keinem eindeutigen Ergebnis führt, wird ein Los gezogen.

<sup>1</sup> Pukelsheimer verwendet die eingedeutschte Version von Lulls Namen.

Nikolaus von Kues (oder Nicolaus Cusanus) schlägt 1433 in seinem Werk „De concordantia catholica“ für die Wahl des deutschen Königs bzw. später auch für Kirchenämter ein System mit einem anderen Ansatz vor. Dazu wird zunächst die Anzahl der zur Wahl stehenden Kandidaten  $m$  ermittelt. Die Wähler erhalten nun jeweils  $m$  Stimmzettel, auf denen der Name eines Kandidaten und die Zahlen 1 bis  $m$  notiert sind. Jeder Wähler soll anschließend die Kandidaten in eine Rangfolge bringen und bei dem aus individueller Wählersicht schlechtesten Kandidaten die „Eins“ auf dem Stimmzettel markieren, bei dem zweitschlechtesten Kandidaten die „Zwei“ markieren, usw. Alle Stimmzettel werden anschließend in eine Urne geworfen und die Ränge bzw. Punkte der Kandidaten addiert. Der Kandidat mit der höchsten Punktzahl gewinnt die Wahl.

Im 18. Jahrhundert wurden diese beiden Ansätze von den beiden Wissenschaftlern Jean-Charles Chevalier de Borda [Bor81] und Marie Jean Antoine Nicolas Caritat, Marquis de Condorcet [Con76] (im Weiteren einfach Borda und Condorcet) wieder aufgegriffen. Beide waren Mitglieder der Akademie der Wissenschaften und fochten einen erbitterten Streit über „ihre“ Wahlsysteme aus. Dabei bedienten sie sich den bereits von Cusanus und Llull entworfenen Systemen. In der modernen Literatur findet sich jedoch die Borda-Regel und nicht die Cusanus-Regel und es ist die Rede von der Condorcet-Regel und nicht der Llull-Regel. Auch beschäftigt sich diese Arbeit demnach eigentlich mit Llull Domains, jedoch werden wir diese im Einklang mit der aktuellen Wissenschaftsliteratur als Condorcet Domains bezeichnen. Pukelsheimer vergleicht die beiden Systeme anhand der Bestimmung des deutschen Meisters in der Fußball-Bundesliga folgendermaßen:

„Beim System Cusanus/Borda wird deutscher Meister, wer in der Saison die meisten Tore schießt, beim System Llull/Condorcet, wer die meisten Spiele gewinnt.“ [Puk02]

Diese Analogie verdeutlicht die beiden Sichtweisen der unterschiedlichen Ansätze sehr gut. Bordas System legt den Fokus auf die Intensität der Vergleiche, also im Beispiel wie hoch ein Spiel gewonnen oder verloren wurde, wohingegen Condorcets System ausschließlich die Information über Sieg, Unentschieden oder Niederlage im paarweisen Vergleich verwendet.

Diese beiden verschiedenen Ansätze zur Aggregation von individuellen Präferenzen weisen teilweise sehr unterschiedliche Eigenschaften auf, wodurch man sich die Frage stellen muss, welche der im nachfolgenden Kapitel beschriebenen Eigenschaften wünschenswerter sind als andere. Daraus resultiert ebenfalls direkt die Frage bzgl. Zweck und Ziel einer demokratischen Wahl. Zwei der bekanntesten Interpretationen diesbezüglich sind die beiden von William Riker beschriebenen Konzepte des liberalen Standpunkts und des populistischen Standpunkts (vgl. [Rik82]) Der liberale Standpunkt besagt, dass die einzige Funktion einer Wahl die Kontrolle der zur Wahl stehenden Kandidaten darstellt. Die Wähler haben die Macht die Kandidaten abzuwählen und daraus leite sich der Zweck demokratischer Wahlen ab. Der populistische Standpunkt betrachtet die Wahl als Mittel zur Partizipation der Wähler, indem der Willen der Wähler durch die Hand der gewählten Kandidaten umgesetzt wird. Wir werden im nächsten Absatz darauf eingehen, ob und wie man den Willen der Wähler bestimmen kann.

## 2.2 Eigenschaften und zentrale Theoreme

Betrachten wir zur Veranschaulichung der beiden Ansätze (von Condorcet und Borda) aus dem vorherigen Abschnitt folgendes Beispiel. Fünf Wähler sollen darüber abstimmen, welcher von drei zur Wahl stehenden Kandidaten zum Sieger erklärt wird. Wir bezeichnen die Kandidaten mit den Buchstaben A, B und C und die Wähler mit den Zahlen 1 bis 5. In Tabelle 2.1 sind die Präferenzen der Wähler aufgelistet. Die Kandidaten sind vertikal in absteigender Reihenfolge angeordnet. Wähler 1 bevorzugt also Kandidat A vor Kandidat B vor Kandidat C. Widmen wir uns zunächst dem Verfahren von Condorcet, indem wir

Wähler 1	Wähler 2	Wähler 3	Wähler 4	Wähler 5
A	A	B	A	B
B	B	C	B	C
C	C	A	C	A

Tabelle 2.1: Profil mit fünf Wählern und drei Alternativen

die Alternativen paarweise miteinander vergleichen. Drei Wähler (1, 2 und 4) bevorzugen Kandidat A vor Kandidat B und drei Wähler (1, 2 und 4) bevorzugen Kandidat A vor Kandidat C. Somit gewinnt A den paarweisen Mehrheitsvergleich gegen B und C. Zudem wird B von allen fünf Wählern gegenüber C bevorzugt. Das Ergebnis der Wahl sollte nach Condorcet also lauten: A wird zum Sieger erklärt, B zum Zweitplatzierten und C zum Verlierer. Kommen wir nun zum System Bordas. Die Wähler geben jedem Kandidaten Punkte in Abhängigkeit vom Rang, den der Kandidat in der Präferenz des Wählers einnimmt. Wähler 1 gibt Kandidat A drei Punkte, Kandidat B zwei Punkte und Kandidat C einen Punkt. Addiert man die Punktzahlen der Kandidaten über alle Wähler, so erreicht Kandidat A elf Punkte ( $3 + 3 + 1 + 3 + 1 = 11$ ), Kandidat B zwölf Punkte ( $2 + 2 + 3 + 2 + 3 = 12$ ) und Kandidat C sieben Punkte ( $1 + 1 + 2 + 1 + 2 = 7$ ). B hat in diesem Fall die höchste Punktzahl und wird vor A und C zum Sieger erklärt. Man erkennt, dass beide Systeme unterschiedliche Ergebnisse liefern. Dies liegt an dem zugrundeliegenden Dissens der beiden Verfahren. Während das Condorcet-Verfahren sich ausschließlich für die Positionierung zweier Alternativen zueinander interessiert (unabhängig von deren Rang innerhalb der Präferenz), liegt beim Borda-Verfahren der Fokus auf den Rängen der Kandidaten und ein paarweiser Vergleich erfolgt nur kumulativ. Beide Ansätze haben ihre Vor- und Nachteile und erfüllen teilweise unterschiedliche Eigenschaften, auf welche wir im Detail eingehen werden.

Seit dem Streit zwischen Borda und Condorcet wurden viele Verfahren in der Social Choice Theorie entwickelt, die sich der Aggregation von individuellen Präferenzen angenommen haben. Man unterscheidet dabei zwischen Verfahren, welche aus einer Liste an Präferenzen lediglich einen Sieger bestimmen (Social Choice Funktionen) und Verfahren, die eine gesamte Rangordnung der Alternativen erzeugen (Social Welfare Funktionen). Die meisten Verfahren basieren auf den beiden Grundkonzepten Condorcets (dem paarweisen Vergleich der Alternativen) und Bordas (der Bewertung anhand von Punkten). Dabei berücksichtigen Condorcet-Verfahren für den paarweisen Vergleich zweier Alternativen immer nur die relative Anordnung dieser beiden Alternativen zueinander. Borda-Verfahren (oder auch allgemeiner Scoring-Verfahren genannt) verteilen Punktzahlen für Ränge der Alternativen innerhalb der Präferenzen und addieren diese zu einer Gesamtpunktzahl. Die Punktzahlen müssen monoton fallend in den Rängen sein. Dies bedeutet, die Punktzahl für Platz 1 muss mindestens so groß sein wie die Punktzahl für Platz 2, diese muss mindestens so groß sein wie die Punktzahl für Platz 3, usw.

Arrow leitet in seinen bahnbrechenden Arbeiten [Arr50] und [Arr51] einen Zusammenhang zwischen verschiedenen Eigenschaften von Social Welfare Funktionen (SWF) her und zeigt, dass keine Social Welfare Funktion existiert, die einige grundlegende Eigenschaften gleichzeitig erfüllt. Im Folgenden gehen wir kurz auf Arrows Bedingungen ein und präsentieren sein zentrales Resultat.

Eine Bedingung, die Arrow aufstellt, beschäftigt sich mit den zulässigen Profilen einer Social Welfare Funktion - also die zulässigen Listen der Präferenzen, für die ein Wahlverfahren ein konsistentes Ergebnis liefern soll:

**Definition 1** (Unbeschränktes Domain (UD)). *Eine SWF erfüllt die Eigenschaft Unbeschränktes Domain, wenn sie alle logisch möglichen Präferenzprofile zulässt.*

Unter der Bedingung UD versteht man die Eigenschaft einer Social Welfare Funktion, alle möglichen Präferenzprofile zu akzeptieren und für jedes Präferenzprofil ein Ergebnis berechnen zu können, welches in sich logisch konsistent ist. Die Anzahl der möglichen Profile wächst exponentiell mit der Anzahl der Wähler und faktoriell in der Anzahl der Alternativen (vgl. z.B. Tabelle 7.7 in [Tan14]). Dadurch erhält man bereits bei kleinen Alternativen- und Wählermengen eine sehr hohe Zahl möglicher Profile. Die in der Arbeit untersuchten Condorcet Domains verletzen genau diese Bedingung, da sie nicht alle möglichen Präferenzprofile zulassen, sondern bestimmte Einschränkungen vornehmen. Eine weitere von Arrow eingeführte Eigenschaft, ist das schwache Pareto Prinzip. Sind alle Wähler der Meinung, dass ein Kandidat besser als ein anderer Kandidat ist, so sollte sich dies auch im Ergebnis der Wahl widerspiegeln.

**Definition 2** (Schwaches Pareto Prinzip (WP)). *Wenn alle Wähler einen Kandidaten  $A$  gegenüber einem anderen Kandidaten  $B$  bevorzugen, dann muss im Ergebnis einer SWF, welche das Schwache Pareto Prinzip erfüllt, auch  $A$  vor  $B$  im sozialen Ranking auftreten.*

Diese Eigenschaft hat eine sehr intuitive Erklärung. Wenn alle Wähler einstimmig in ihrer Präferenz einen Kandidaten besser als einen anderen Kandidaten bewerten, so gibt es im Normalfall keine Rechtfertigung, diesem paarweisen Vergleich zu widersprechen. Arrows dritte Bedingung der Unabhängigkeit irrelevanter Alternativen wird häufig kritisiert, da sie die Informationen einer Präferenz ausschließlich auf die Anordnung von zwei Kandidaten zueinander reduziert - also ein rein ordinales Nutzenkonzept unterstellt:

**Definition 3** (Unabhängigkeit irrelevanter Alternativen (IIA)). *Eine SWF erfüllt die Bedingung Unabhängigkeit irrelevanter Alternativen, wenn für das soziale Ranking zweier Alternativen ausschließlich die Anordnung dieser beiden Alternativen in den Präferenzen der Wähler berücksichtigt werden.*

Bei der Bewertung zweier Alternativen spielen die anderen Alternativen keine Rolle und können aus den individuellen Präferenzen gestrichen werden. Somit unterscheidet Arrow nicht, wie weit entfernt zwei Alternativen innerhalb der Präferenzen auftauchen. Die letzte der Bedingungen, die Arrow an eine SWF stellt, ist die Nicht-Diktatur, welche eine Grundvoraussetzung für einen Entscheidungsprozess darstellen sollte.

**Definition 4** (Nicht-Diktatur (ND)). *Wenn kein Wähler existiert, sodass die soziale Rangordnung der SWF immer mit der individuellen Präferenz dieses Wählers übereinstimmt, so erfüllt die SWF die Bedingung Nicht-Diktatur.*

Wenn ein Diktator existieren sollte, so muss man sich keine weiteren Gedanken über andere Eigenschaften und Bedingungen der SWF machen, da der gesamte Wahlprozess obsolet wäre. Arrow kann zeigen, dass die oben getroffenen Bedingungen an eine SWF nicht gleichzeitig erfüllt werden können - also keine SWF existiert, welche alle, seiner Meinung nach grundlegenden, Eigenschaften erfüllt:

**Theorem 1** (Arrows Unmöglichkeitstheorem [Arr51]). *Für eine endliche Anzahl an Wählern und mindestens drei Alternativen existiert keine SWF, die gleichzeitig die Bedingungen UD, WP, IIA und ND erfüllt.*

Diese Erkenntnis hat weitreichende Folgen für die Social Choice Theorie. Das Theorem besagt, dass die Suche nach einem „guten“ und „fairen“ Verfahren zur Aggregation von individuellen Präferenzen aussichtslos ist, wenn man die von Arrow aufgestellten Bedingungen einhalten möchte. Weder ein Verfahren, welches auf Condorcets Ansatz beruht, noch ein Verfahren basierend auf Bordas Ansatz kann alle aufgestellten Bedingungen gleichzeitig erfüllen. Doch welche Bedingungen werden erfüllt und welche nicht? Offensichtlich erfüllt der paarweise Mehrheitsvergleich die drei Bedingungen WP, IIA und ND. Die

Bedingung UD wird jedoch verletzt, da der paarweise Mehrheitsvergleich nicht mehr transitiv ist (und damit keine SWF mehr ist), wenn wir Profile zulassen, die zu Zyklen führen. Lassen wir nur Profile aus einem Condorcet Domain zu (und verletzen damit UD), so erfüllt der paarweise Mehrheitsvergleich die Bedingungen WP, IIA, ND und ist eine Social Welfare Funktion (da keine intransitiven Ergebnisse mehr auftreten können).

Borda-Verfahren erfüllen die Eigenschaften UD und ND, da man für jedes Profil Punktwerte für die Alternativen berechnen und daraus ein soziales Ranking erstellen kann (UD). Dieses Ranking kann unterschiedliche Formen annehmen und muss nicht immer der individuellen Präferenz eines Wählers entsprechen (ND). Für streng monotone Punktwerte gilt auch die Bedingung WP, da ein Kandidat, der von allen Wählern besser als ein anderer Kandidat bewertet wird, auch eine echt größere Gesamtpunktzahl erhalten muss. Gilt nur Monotonie für die Punktwerte, so erhält der individuell besser bewertete Kandidat eine Punktzahl, die mindestens so groß ist wie die Punktzahl des anderen Kandidaten. Alle Borda-Verfahren verletzen jedoch die Bedingung IIA, da der Unterschied in der Gesamtpunktzahl von zwei Kandidaten davon abhängt, ob und wie viele andere Kandidaten in den individuellen Präferenzen zwischen den beiden Kandidaten stehen. Demnach sind die Gesamtpunktzahlen und somit die relative Anordnung der beiden Kandidaten im sozialen Ranking nicht unabhängig von der Positionierung der anderen Kandidaten.

Eine weiteres wichtiges Resultat der Social Choice Theorie entwickelten Gibbard [Gib73] und Satterthwaite [Sat75] bzgl. Social Choice Funktionen - also Verfahren, welche einen einzelnen Sieger bestimmen. Sie bewiesen unabhängig voneinander die von Dummett und Farquharson [DF61] aufgestellte Vermutung, dass für jede SCF mit mehr als drei Alternativen taktisches Verhalten für die Wähler vorteilhaft sein kann. Was bedeutet in diesem Zusammenhang taktisches Verhalten?

**Definition 5** (Manipulierbarkeit (M)). *Falls es für einen Wähler vorteilhaft sein kann, bei einer Abstimmung nicht seine wahre Präferenz anzugeben, so ist das Verfahren manipulierbar.*

Ein Wähler kann das Ergebnis manipulieren bzw. sich einen taktischen Vorteil verschaffen, indem er durch die Angabe einer unwahren Präferenz (also eine Präferenz, die nicht seiner wahren Präferenz entspricht) einem für ihn besseren Kandidaten zum Sieg verhilft. Der neue Sieger muss in der wahren Präferenz des Wählers vor dem Kandidaten stehen, der bei der Angabe seiner wahren Präferenz zum Sieger erklärt worden wäre. Betrachten wir dazu ein kleines Beispiel mit drei Wählern, vier Alternativen und dem Borda-Verfahren zum Bestimmen des Siegers. Tabelle 2.2 listet die Präferenzen auf.

Wähler 1	Wähler 2	Wähler 3
A	E	D
B	A	C
C	B	E
D	C	B
E	D	A

Tabelle 2.2: Profil mit drei Wählern und fünf Alternativen

Die Gesamtpunktzahlen der Kandidaten lauten für A zehn ( $5 + 4 + 1$ ), für B neun ( $4 + 3 + 2$ ), für C neun ( $3 + 2 + 4$ ), für D acht ( $2 + 1 + 5 = 8$ ) und für E neun ( $1 + 5 + 3$ ). Somit ist Kandidat A der Sieger nach dem Borda-Verfahren. Wähler 3 hat in dieser Situation die Möglichkeit, das Ergebnis zu manipulieren. Da sein meist präferierter Kandidat D keine Chance auf den Sieg hat, könnte er z.B. den Kandidaten E zum eindeutigen Sieger machen, indem er auf seinem Stimmzettel die Alternativen D und E vertauscht. Dadurch erhöht sich die Gesamtpunktzahl von E um zwei Punkte auf elf und verringert sich

die Gesamtpunktzahl von D um zwei Punkte auf sechs. Die restlichen Punktzahlen bleiben unberührt, wodurch nun Kandidat E zum Sieger der Wahl erklärt wird. Da Wähler 3 E gegenüber A in seiner wahren Präferenz bevorzugt, hat diese unwahre Stimmabgabe zu einer Verbesserung des Ergebnisses für ihn geführt.

Wir sehen also, dass das Borda-Verfahren manipulierbar ist. Gibbard und Satterthwaite zeigen, dass dies nicht nur für das Borda-Verfahren gilt. Sie kommen zu folgendem zentralen Theorem der Social Choice Theorie:

**Theorem 2** (Gibbard-Satterthwaite-Theorem [Gib73] [Sat75]). *Für drei oder mehr Alternativen erfüllt jede SCF auf dem unbeschränkten Domain mindestens eine der drei Bedingungen:*

1. *Die SCF ist diktatorisch.*
2. *Die SCF ist nicht surjektiv - eine der Alternativen kann nie gewinnen.*
3. *Die SCF ist manipulierbar.*

Interessanterweise fällt die paarweise Mehrheitsabstimmung auch nicht unter dieses Theorem. Da sie nicht immer konsistente Ergebnisse auf dem unbegrenzten Domain erzeugt, fällt sie in dem Theorem erst gar nicht unter den Begriff SCF. Betrachten wir die Eigenschaften einzeln für die paarweise Mehrheitsabstimmung. Offensichtlich ist diese nicht diktatorisch. Des Weiteren ist sie surjektiv, da jede Alternative als Gewinner in Frage kommt. Das Verfahren ist nicht manipulierbar, da für die Entscheidung zwischen zwei Alternativen immer nur diese Alternativen in den Präferenzen der Wähler betrachtet werden. Bevorzugt ein Wähler den Kandidaten A gegenüber Kandidat B, so kann er durch eine Misrepräsentation seiner Präferenz (Angabe einer Präferenz, in der B vor A erscheint) höchstens eine Änderung in der Form herbeirufen, dass nun statt Kandidat A der Kandidat B die paarweise Mehrheitsabstimmung unter den Kandidaten gewinnt und somit das Ergebnis der SCF aus seiner Sicht verschlechtert. Andere Einflussnahmen sind durch den Wähler nicht möglich.

Finden wir also Domäneinschränkungen, welche die Konsistenz von paarweisen Mehrheitsabstimmungen garantieren, so umgehen wir zusätzlich zu Arrows Unmöglichkeitstheorem auch das Gibbard-Satterthwaite-Theorem.

Einen weiteren stichhaltigen Grund, weshalb die paarweise Mehrheitsabstimmung eine sehr interessante, gute und faire Methode der Präferenzaggregation ist, liefert uns Mays Theorem [May52]. May betrachtet in lediglich die Entscheidung über zwei Alternativen, da er davon ausgeht, dass ein Verfahren zur Präferenzaggregation lediglich auf den paarweisen Vergleichen aller Alternativenpaare untereinander beruhen sollte (also die Bedingung IIA erfüllen sollte):

**Theorem 3** (Mays Theorem [May52]). *Eine SCF über zwei Alternativen ist die paarweise Mehrheitsabstimmung genau dann, wenn sie die Bedingungen Unbeschränktes Domain, Anonymität, Neutralität und Positive Änderungssensitivität erfüllt.*

Unter Anonymität versteht man, dass alle Wähler gleich behandelt werden. Es soll für das Ergebnis der Abstimmungsregel somit irrelevant sein, von wem welche Stimme abgegeben wurde, solange sie von einem zugelassenen Wähler stammt. Neutralität bezieht sich auf die Kandidaten. Auch diese sollen gleich behandelt werden. Vertauscht man zwei Kandidaten in allen individuellen Präferenzen, so soll sich für eine neutrale SCF im sozialen Ranking auch die Position dieser beiden Alternativen vertauschen. Die Positive Änderungssensitivität besagt, dass das Verfahren auf eine Änderung in einer individuellen Präferenz nur in die Richtung der Änderung sensitiv reagieren sollte. Nehmen wir an, beim paarweisen Vergleich zwischen den Kandidaten A und B gewinnt A und Wähler 1 hat auf seinem Stimmzettel Kandidat B vor Kandidat

A gesetzt. Ändert Wähler 1 seine Stimme derart, dass Kandidat A nun vor Kandidat B erscheint, so darf ein Verfahren, welches positive Änderungssensitivität erfüllt, im neuen sozialen Ranking nicht Kandidat B vor A listen. Zusammengefasst sagt diese Bedingung aus, dass eine Verbesserung für einen Kandidaten im Ranking eines Wählers nicht zu einer Verschlechterung dieses Kandidaten im sozialen Ranking führen darf. Mays Theorem sagt aus, dass die paarweise Mehrheitsabstimmung die einzige SCF ist, welche all diese Eigenschaften erfüllt.

Abschließend können wir feststellen, dass die paarweise Mehrheitsabstimmung die Bedingungen Schwaches Pareto Prinzip, Unabhängigkeit irrelevanter Alternativen, Nicht-Diktatur, Surjektivität<sup>2</sup>, Nicht-Manipulierbarkeit, Anonymität, Neutralität und Positive Änderungssensitivität erfüllt. Dies ist eine Kombination und Vielfalt von erstrebenswerten Eigenschaften, welche keine andere Aggregationsmethode für individuelle Präferenzen aufweisen kann. Der entscheidende Nachteil und sozusagen der Preis, den man für diese Eigenschaften zahlen muss, ist die Möglichkeit der Intransitivität des sozialen Rankings. Dieser kann man durch eine Einschränkung des Präferenzraums in Form von Condorcet Domains entgegenentretten. Aufgrund der vielfältigen Eigenschaften des Verfahrens ist das Finden solcher Domains von großem Interesse.

---

<sup>2</sup> Die Bedingung Surjektivität wird erfüllt, wenn das eingeschränkte Domain minimale Vielfalt aufweist (vgl. Kapitel 5.2).



### 3 Condorcet Domains in der Social Choice Theorie

In diesem Kapitel werden wir zunächst auf die in der Arbeit verwendete Notation für die Beschreibung von Alternativen, Präferenzräumen und den damit zusammenhängenden Konzepten eingehen. Anschließend definieren wir formal Condorcet Domains und untersuchen, welche Typen von Zyklen durch die paarweise Mehrheitsentscheidung induziert werden können. Daraufhin betrachten wir in einer historischen Abfolge einige bekannte Condorcet-Domain-Klassen, welche in der Literatur beschrieben werden. Dazu zählen single-peaked, single-dipped, separierbare und single-crossing Präferenzdomains. Diese bilden Teilmengen der Menge aller Condorcet Domains. Im darauffolgenden Abschnitt konzentrieren wir uns auf Beschreibungen der gesamten Klasse von Condorcet Domains mithilfe verschiedener Ansätze. Je nach untersuchtem Präferenzraum (strikt, schwach oder quasitransitiv) existieren unterschiedliche, äquivalente Charakterisierungen. Diese bekannten Charakterisierungen erweitern wir soweit möglich und stellen die Ergebnisse in je einem Theorem für jeden Präferenzordnungstyp kompakt zusammen. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels gehen wir auf spezielle Verfahren ein, mit denen sich sehr große oder auch sehr kleine Condorcet Domains erzeugen lassen. Die Verfahren aus der Literatur werden abschließend um eine eigens entwickelte Bildungsvorschrift für sehr kleine Condorcet Domains (Domains mit wenigen Präferenzen) ergänzt.

#### 3.1 Notation und theoretische Grundlagen

In dieser Arbeit bezeichne  $X$  eine endliche Menge an Alternativen (Kandidaten, soziale Zustände o.ä., über die abgestimmt werden soll) mit den typischen Elementen  $a, b, c, \dots, m$  oder auch  $1, 2, 3, \dots, m$ . Die Anzahl der Alternativen sei  $m$ .  $R$  bezeichne eine binäre Relation auf  $X$  und somit eine Teilmenge geordneter Paare des kartesischen Produkts  $X \times X$ .  $R$  repräsentiert eine Präferenzrelation (oder kurz: Präferenz) und stellt die Alternativen der Alternativenmenge paarweise zueinander in Beziehung. Enthält  $R$  z.B. das Paar  $(i, j) \in X \times X$ , so interpretieren wir dies als „ $i$  ist mindestens so gut wie  $j$ “ und schreiben  $i \succeq j$  oder  $iRj$ . Ist das Paar  $(i, j)$  nicht in  $R$  enthalten, so schreiben wir  $i \not\succeq j$  oder  $\neg iRj$ . Sind sowohl  $(i, j)$  als auch  $(j, i)$  in  $R$  enthalten und gilt  $i \neq j$ , so ist dies gleichzusetzen mit der Aussage „ $i$  ist genauso gut wie  $j$ “ (Indifferenz zwischen  $i$  und  $j$ ) - wir schreiben  $i \sim j$ . Gilt  $iRj$  und  $\neg jRi$  mit  $i \neq j$ , so interpretiert man dies als „ $i$  ist echt besser als  $j$ “ und schreibt  $i \succ j$ .

$N = \{1, 2, \dots, n\}$  bezeichne die endliche Menge der Wähler, welche Präferenzen über die Alternativen besitzen. Wir nehmen an, dass jeder Wähler bei einer Wahl seine Präferenz wahrheitsgemäß angibt.<sup>1</sup> Die Wähler ordnen die Alternativen absteigend nach ihrem persönlichen Nutzen in ihrer Präferenz an. Dabei spielt die Größe der Nutzenunterschiede zwischen zwei Alternativen keine Rolle und kann auch nicht mit diesem Konzept abgebildet werden - es handelt sich somit um ein rein ordinales Nutzenkonzept.<sup>2</sup>

Eine Präferenzrelation wird als *reflexiv* bezeichnet, wenn für alle  $i \in X$  gilt  $iRi$ . Für eine *vollständige* Präferenzrelation muss gelten:  $\forall i, j \in X, i \neq j : iRj \vee jRi$ . Unter einer *antisymmetrischen* Relation versteht man eine Relation, welche für  $i \neq j$  nicht gleichzeitig  $(i, j)$  und  $(j, i)$  enthalten darf. Somit gilt

<sup>1</sup> Gibt ein Kandidat bei einer Wahl nicht seine wahre Präferenz an, um das Ergebnis für ihn positiv zu beeinflussen, so sprechen wir von einer Manipulation. Da das in dieser Arbeit betrachtete Verfahren der paarweisen Mehrheitsabstimmung jedoch keinen Anreiz einer solchen Manipulation bietet, gehen wir nicht genauer auf diese Thematik ein.

<sup>2</sup> Ein kardinales Nutzenkonzept, welches die Intensität einer Präferenz eines Wählers berücksichtigt, stößt in der Realität sehr schnell an seine Grenzen. Es stellen sich die Fragen nach der Messbarkeit der Intensität sowie der Realisierbarkeit eines interpersonellen Nutzenvergleichs.

für eine antisymmetrische Relation  $\forall i, j \in X : (iRj \wedge jRi) \Rightarrow (i = j)$ . Eine Relation ist *transitiv*, wenn gilt  $\forall i, j, k \in X : (iRj \wedge jRk) \Rightarrow iRk$ . Eine vollständige und transitive Präferenzrelation bezeichnet man auch als Präferenzordnung (oder kurz: Ordnung).

Mithilfe dieser Bedingungen lassen sich unterschiedliche Präferenzräume  $\mathcal{R}(X)$  definieren. Ein Präferenzraum enthält alle zulässigen Präferenzen, die die geforderten Bedingungen an die Relation erfüllen. In dieser Arbeit untersuchen wir Condorcet Domains auf drei verschiedenen Präferenzräumen:

- Strikter Präferenzraum  $\mathcal{R}_s(X)$ : Enthält alle reflexiven, antisymmetrischen, transitiven und vollständigen binären Relationen auf  $X$ .
- Schwacher Präferenzraum  $\mathcal{R}_w(X)$ : Enthält alle reflexiven, transitiven und vollständigen binären Relationen auf  $X$ .
- Quasitransitiver Präferenzraum  $\mathcal{R}_{qt}(X)$ : Enthält alle reflexiven und vollständigen binären Relationen auf  $X$ , deren strikter Teil der Relation transitiv ist:

$$\forall i, j, k \in X : (iRj \wedge \neg jRi \wedge jRk \wedge \neg kRj) \Rightarrow (iRk \wedge \neg kRi).$$

Eine Präferenz(ordnung)  $R, R'$  oder  $R_1, R_2$  etc. ist also ein Element des jeweiligen Präferenzraums  $\mathcal{R}(X)$ .<sup>3</sup> Für die drei untersuchten Präferenzräume gilt für  $m \geq 3$ :  $\mathcal{R}_s(X) \subset \mathcal{R}_w(X) \subset \mathcal{R}_{qt}(X)$ . Eine Teilmenge eines Präferenzraums wird als *Domain*  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}(X)$  bezeichnet. Ein Profil mit  $n$  Präferenzen bezeichnen wir als  $p = (R_1, R_2, \dots, R_n) \in \mathcal{R}(X)^n$ . Die korrekte Unterscheidung zwischen einem Profil und einem Domain ist sehr wichtig. Ein Domain ist eine Teilmenge des Präferenzraums, d.h. jede Präferenz kann nur einmal darin vorkommen. Im Gegensatz dazu können Profile die gleiche Präferenz mehrfach enthalten. Viele Resultate und Ergebnisse in der Literatur beschreiben spezielle Präferenzprofile und keine Domains. Jedes Domain induziert automatisch ein Profil (je ein Wähler für jede im Domain enthaltene Präferenz). Um aus einem Profil ein Domain zu erhalten, müssen mehrfach enthaltene Präferenzen entfernt werden.

Präferenzen kann man alternativ auch mithilfe eines binären Entscheidungsvektors aus dem  $\{0, 1\}^k$  mit  $k = 2 \binom{m}{2}$  darstellen. Jeder Eintrag des Vektors repräsentiert eine binäre („ja/nein“) Entscheidung über ein Alternativenpaar  $(i, j) \in X \times X$  mit  $i \neq j$  bzgl. der Aussage „i ist mindestens so gut wie j“ bzw. „(i, j) ist Element  $R$ “.

**Strikter Präferenzraum** Im strikten Präferenzraum muss für jedes Alternativenpaar  $(i, j) \in X \times X$  mit  $i \neq j$  aufgrund der Antisymmetrie und der Vollständigkeit der Relation entweder  $i \succ j$  oder  $j \succ i$  gelten. Aus diesem Grund folgt direkt aus  $(i \succ j) \Rightarrow \neg(j \succ i)$  und aus  $\neg(i \succ j) \Rightarrow (j \succ i)$ . Präferenzen des strikten Präferenzraums bezeichnen wir als strikte Präferenzen. Als Kurzschreibweise ordnen wir die Alternativen absteigend anhand ihrer paarweisen Vergleiche an. So schreiben wir für  $a \succ b, a \succ c, b \succ c$  kurz  $a \succ b \succ c$  oder noch kürzer  $abc$ . Der Präferenzraum besteht aus allen Permutationen der Alternativen und hat die Größe  $m!$ . In der Gruppentheorie bezeichnet man die Gruppe, welche aus allen Permutationen einer Menge mit  $m$  Elementen besteht, als symmetrische Gruppe  $S_m$  (vgl. z.B. [KM10]). Wir werden auf diesen Zusammenhang in Kapitel 5.1 genauer eingehen. Der Präferenzraum mit drei Alternativen  $X = \{a, b, c\}$  beinhaltet demnach die sechs Präferenzen

$$\mathcal{R}_s(X = \{a, b, c\}) = \{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}$$

<sup>3</sup> Elemente aus dem quasitransitiven Präferenzraum sind im strengen Sinne keine Präferenzordnungen sondern „nur“ Präferenzrelationen, da nur für den strikten Teil der Relation Transitivität gefordert wird. In der Arbeit werden wir, wenn wir spezifisch über den quasitransitiven Präferenzraum sprechen, den Begriff Präferenzrelationen verwenden und, wenn wir allgemein über alle Präferenzräume sprechen, den Begriff Präferenzordnungen verwenden, wobei dann auch die quasitransitiven Präferenzrelationen mit beinhaltet sind.

und der Präferenzraum mit vier Alternativen  $X = \{a, b, c, d\}$  die 24 Präferenzen

$$\mathcal{R}_s(X = \{a, b, c, d\}) = \{abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb, bacd, badc, bcad, bcda, bdac, bdca, cabd, cadb, cbad, cbda, cdab, cdba, dabc, dacb, dbac, dbca, dcab, dcba\}.$$

Die beiden Präferenzräume sind in den Abbildungen 3.1 und 3.2 grafisch dargestellt.

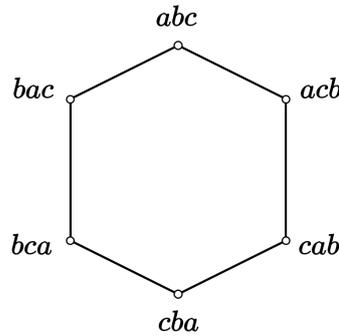


Abbildung 3.1: Strikter Präferenzraum für  $X = \{a, b, c\}$

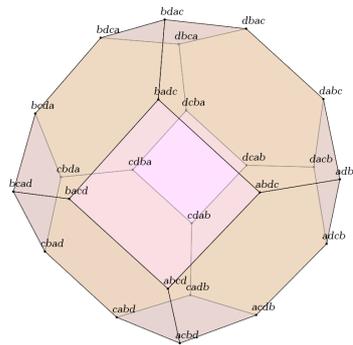


Abbildung 3.2: Strikter Präferenzraum für  $X = \{a, b, c, d\}$

Diese Illustration der symmetrischen Gruppe  $S_m$  durch ein  $(m - 1)$ -dimensionales Politop, dessen Ecken die Elemente in  $S_m$  repräsentieren, bezeichnet man als Permutaeder der Ordnung  $m$  (vgl. z.B. [KM10]). Zwei Präferenzen sind benachbart und durch eine Linie verbunden, wenn sie sich lediglich durch eine paarweise Vertauschung zweier benachbarter Alternativen in der Präferenz unterscheiden.

**Schwacher Präferenzraum** Der schwache Präferenzraum beinhaltet neben den Elementen des strikten Präferenzraums zusätzlich Präferenzen, welche Indifferenzen ( $\sim$ ) zwischen den Alternativen aufweisen. Für jedes Alternativenpaar  $(i, j) \in X \times X$  mit  $i \neq j$  existieren somit drei Fälle des paarweisen Vergleichs:

$$(i \succ j), (i \sim j) \text{ oder } (j \succ i).$$

Beispiele solcher Präferenzen aus dem Präferenzraum mit vier Alternativen sind

$$\begin{aligned}
 a \succ b, a \succ c, a \succ d, b \sim c, b \succ d, c \succ d & \quad (\text{Kurzformen: } a \succ b \sim c \succ d \text{ oder } a(bc)d), \\
 a \sim b, a \succ c, a \succ d, b \succ c, b \succ d, c \sim d & \quad (\text{Kurzformen: } a \sim b \succ c \sim d \text{ oder } (ab)(cd)), \\
 a \sim b, a \sim c, a \succ d, b \sim c, b \succ d, c \succ d & \quad (\text{Kurzformen: } a \sim b \sim c \succ d \text{ oder } (abc)d).
 \end{aligned}$$

Tabelle 3.1 zeigt die binären Entscheidungsvektoren für drei Beispiele aus dem schwachen Präferenzraum  $\mathcal{R}_w(X = \{a, b, c\})$ . Die schwache Präferenz  $(ab)c$  wird z.B. durch den binären Entscheidungsvektor  $(1, 1, 1, 0, 1, 0)$  repräsentiert. Dies bedeutet, ein Wähler mit dieser Präferenz findet „a mindestens so gut wie b“ und „b mindestens so gut wie a“, ist also indifferent zwischen den beiden Alternativen. Der Wähler findet „a mindestens so gut wie c“ und nicht „c mindestens so gut wie a“, bevorzugt also a strikt gegenüber c. Ebenso bevorzugt er b strikt gegenüber c.

Präferenz	$a \succeq b$	$b \succeq a$	$a \succeq c$	$c \succeq a$	$b \succeq c$	$c \succeq b$
$abc$	1	0	1	0	1	0
$(ab)c$	1	1	1	0	1	0
$(abc)$	1	1	1	1	1	1

Tabelle 3.1: Binäre Entscheidungen für die Präferenzordnungen  $abc$ ,  $(ab)c$  und  $(abc)$  aus  $\mathcal{R}_w(X = \{a, b, c\})$

Innerhalb einer Präferenz bezeichnen wir die Menge aller paarweise verschiedener Alternativen, zwischen denen ein Individuum paarweise indifferent ist, als Indifferenzmenge und kennzeichnen diese durch eine umschließende Klammer. Zum Beispiel enthält die Präferenz  $a(bc)(def)$  zwei Indifferenzmengen  $\{b, c\}$  und  $\{d, e, f\}$ . Als eine Präferenzstruktur bezeichnen wir eine spezifische Anordnung von einzelnen Alternativen und disjunkten Indifferenzmengen, deren Vereinigung die gesamte Alternativmenge erzeugt. Ein Beispiel einer Präferenzstruktur für  $m = 5$  ist eine einzelne Alternative gefolgt von einer Indifferenzmenge der Größe vier. Die fünf Präferenzen, die dieser Struktur entsprechen, sind  $a(bcde), b(acde), c(abde), d(abce), e(abcd)$ . Eine Präferenzstruktur besteht aus  $s$  Indifferenzmengen mit  $s \leq \frac{m}{2}$  und ganzzahlig. Die Größen der Indifferenzmengen bezeichnen wir als  $m_i \in \{2, \dots, m\}$  mit  $i \in \{1, \dots, s\}$ . Die Größe des Präferenzraums  $\mathcal{R}_w(X)$  lässt sich aus folgenden kombinatorischen Überlegungen herleiten:

- Die Anzahl der verschiedenen Präferenzen einer Präferenzstruktur ist

$$(m - \sum m_i)! \cdot \binom{m}{m_1} \cdot \binom{m - m_1}{m_2} \cdot \dots \cdot \binom{m - m_1 - m_2 - \dots - m_{s-1}}{m_s}.$$

- Die Summe über alle möglichen Präferenzstrukturen ergibt die Anzahl der Präferenzen in  $\mathcal{R}_w(X)$ .

Für drei Alternativen  $X = \{a, b, c\}$  erhält man  $m! = 3! = 6$  Präferenzen ohne Indifferenzmengen der Form  $ijk$ :  $abc, acb, bac, bca, cab, cba$ ;  $1! \cdot \binom{3}{2} = 3$  Präferenzen mit einer zweielementigen Indifferenzmenge der Form  $i(jk)$ :  $a(bc), b(ac), c(ab)$ ;  $1! \cdot \binom{3}{2} = 3$  Präferenzen mit einer zweielementigen Indifferenzmenge der Form  $(ij)k$ :  $(bc)a, (ac)b, (ab)c$  sowie  $0! \cdot \binom{3}{3} = 1$  Präferenz mit einer dreielementigen Indifferenzmenge der Form  $(ijk)$ :  $(abc)$ . Der Präferenzraum besteht somit aus 13 Präferenzen, welche in Abbildung 3.3 dargestellt sind. Zwei Präferenzen sind benachbart und mit einer Kante verbunden, wenn „grob gesprochen“ keine Präferenz zwischen ihnen existiert. Wir werden in Kapitel 3.3 genauer auf die Nachbarschaftsbeziehungen zwischen Präferenzen eingehen.

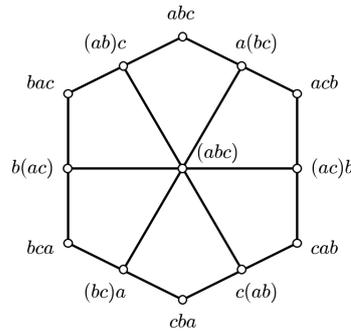


Abbildung 3.3: Schwacher Präferenzraum für  $X = \{a, b, c\}$

Für vier Alternativen  $X = \{a, b, c, d\}$  lassen sich die Präferenzstrukturen und deren Anzahl gemäß Tabelle 3.2 bestimmen. Addiert man alle Präferenzen über alle Präferenzstrukturen, erhält man ins-

Struktur	Formel	Anzahl
$ijkl$	$4!$	24
$(ij)kl$	$(2!) \cdot \binom{4}{2}$	12
$i(jk)l$	$(2!) \cdot \binom{4}{2}$	12
$ij(kl)$	$(2!) \cdot \binom{4}{2}$	12
$(ij)(kl)$	$(0!) \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}$	6
$(ijk)l$	$(1!) \cdot \binom{4}{3}$	4
$i(jkl)$	$(1!) \cdot \binom{4}{3}$	4
$(ijkl)$	$(0!) \cdot \binom{4}{4}$	1

Tabelle 3.2: Präferenzstrukturen und Anzahlen der Präferenzen für den schwachen Präferenzraum mit vier Alternativen

gesamt 75 verschiedene Präferenzen für den Präferenzraum  $\mathcal{R}_w(X = \{a, b, c, d\})$ . Der Präferenzraum ist in Abbildung 3.4 dargestellt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die Präferenzen hier lediglich

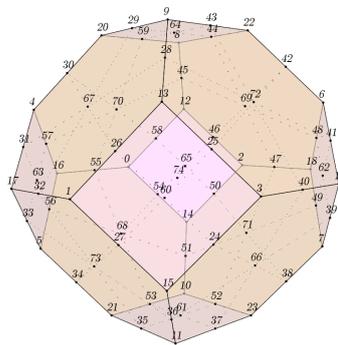


Abbildung 3.4: Schwacher Präferenzraum für vier Alternativen

durchnummeriert und benachbarte Präferenzen im „Inneren“ des Permutaeders durch gepunktete Linien verbunden. Die Überlegungen bzgl. der Anzahl der Präferenzen in  $\mathcal{R}_w(X)$  lassen sich auf beliebige  $m$  übertragen.

**Quasitransitiver Präferenzraum** Für Präferenzrelationen aus dem quasitransitiven Präferenzraum wird im Gegensatz zu den Präferenzrelationen aus den beiden anderen Präferenzräumen keine vollständige Transitivität gefordert. Nur der strikte Teil der Relation muss transitiv sein. So ist eine Präferenzrelation folgender Art zulässig:

$$a \sim b, b \sim c, a \succ c.$$

Man erkennt, dass die Transitivität für die Indifferenz hier nicht erfüllt ist. Eine solche Präferenz ist im schwachen Präferenzraum nicht zulässig. Jedoch gilt auch für quasitransitive Präferenzen, dass der strikte Teil der Ordnung transitiv sein muss: aus  $i \succ j$  und  $j \succ k$  folgt  $i \succ k$ . Als Kurzschreibweise für quasitransitive Präferenzen verwenden wir folgende Form:

$$(a \sim b, b \sim c, a \succ c) \Leftrightarrow (ab)(bc).$$

Wir notieren alle Alternativen, zwischen denen ein Wähler paarweise indifferent ist, in einer Indifferenzmenge, die durch umschließende Klammern dargestellt wird. Eine Alternative kann in mehreren Indifferenzmengen gleichzeitig auftauchen. Die Indifferenzmengen werden anhand der strikten Teile der Präferenzrelation angeordnet. Für zwei innerhalb einer Präferenz angrenzende Indifferenzmengen gilt: Wenn zwei Alternativen  $i$  und  $j$  gleichzeitig in einer Indifferenzmenge vorkommen, dann folgt daraus  $i \sim j$ . Wenn eine Alternative  $i$  nur in der einen Indifferenzmenge vorkommt und die andere Alternative  $j$  nur in der anderen Indifferenzmenge vorkommt, dann folgt daraus  $i \succ j$  oder  $j \succ i$  (je nach Anordnung der Indifferenzmengen). Einige Beispiele solcher Präferenzrelation sind zusammen mit dem binären Entscheidungsvektor in Tabelle 3.3 aufgeführt.

Präferenz	$a \succeq b$	$b \succeq a$	$a \succeq c$	$c \succeq a$	$a \succeq d$	$d \succeq a$	$b \succeq c$	$c \succeq b$	$b \succeq d$	$d \succeq b$	$c \succeq d$	$d \succeq c$
$(ab)(bc)d$	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0
$(abc)(bd)$	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0
$(abc)(abd)$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0

Tabelle 3.3: Binäre Entscheidungen für die Präferenzrelationen  $(ab)(bc)d$ ,  $(abc)(bd)$  und  $(abc)(abd)$  aus  $\mathcal{R}_{qt}(\{a, b, c, d\})$

Für den Präferenzraum der quasitransitiven Präferenzrelationen hat dies zur Folge, dass bei gleicher Alternativenmenge  $X$  neben den Präferenzen aus dem schwachen Präferenzraum  $\mathcal{R}_w(X)$  auch alle Präferenzen zulässig sind, welche die Transitivität der Indifferenz verletzen. Für drei Alternativen  $X = \{a, b, c\}$  ergibt sich der Präferenzraum

$$\mathcal{R}_{qt}(X) = \mathcal{R}_w(X) \cup \{(ab)(bc), (ac)(bc), (ac)(ab), (bc)(ab), (bc)(ac), (ab)(ac)\}$$

und somit insgesamt 19 Präferenzen. Diese sind in Abbildung 3.5 dargestellt. Zwei Präferenzen sind benachbart und mit einer Kante verbunden, wenn sie sich nur in einer binären Entscheidung ( $i \succeq j$ ) unterscheiden.

**Zusammenfassung** Tabelle 3.4 fasst für  $m \leq 6$  die Größen der Präferenzräume zusammen (für  $|\mathcal{R}_w(X)|$  und  $m \geq 5$  vgl. z.B. [Mur09], für  $|\mathcal{R}_{qt}(X)|$  und  $m \geq 4$  vgl. [BM02]). Neben diesen drei Typen an Präferenzrelationen (strikt, schwach und quasitransitiv) existieren noch andere Konzepte, welche wir jedoch in dieser Arbeit nicht weiter untersuchen werden. Mit dem Konzept der unvollständigen Präferenzrelationen beschäftigt sich im Zusammenhang mit Condorcet Domains z.B. Ponick [Pon06].

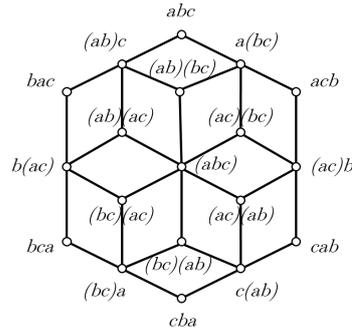


Abbildung 3.5: Quasitransitiver Präferenzraum für drei Alternativen

$m$	$ \mathcal{R}_s(X) $	$ \mathcal{R}_w(X) $	$ \mathcal{R}_{qt}(X) $
3	6	13	19
4	24	75	219
5	120	541	4.231
6	720	4.683	130.023

 Tabelle 3.4: Größe der strikten, schwachen und quasitransitiven Präferenzräume für  $m \leq 6$ 

**Condorcet Domains** Nach der Definition der drei in der Arbeit untersuchten Präferenzräume können wir uns der Frage widmen, wie ein Condorcet Domain in den jeweiligen Präferenzräumen definiert ist. Wir wissen bereits, dass es bei der paarweisen Mehrheitsabstimmung zu inkonsistenten Ergebnissen - im Speziellen zu Condorcet-Zyklen - kommen kann. Diese Zyklen können jedoch auf verschiedenen Präferenzräumen unterschiedlicher Natur sein. Zunächst definieren wir dazu formal die paarweise Mehrheitsrelation auf den verschiedenen Präferenzräumen.

Die durch ein Profil  $p$  mit  $n$  Wählern induzierte binäre Relation  $R_p^{maj}$  auf  $X$  bezeichnen wir als paarweise Mehrheitsrelation. Sie ist definiert durch:

$$\forall (i, j) \in X \times X, i \neq j : iR_p^{maj}j \Leftrightarrow |\{R \in p \mid iRj\}| > \frac{n}{2}.$$

Wenn mehr als die Hälfte der Wähler  $i$  „mindestens so gut wie“  $j$  bewerten, so gilt dies auch für die paarweise Mehrheitsrelation. Für den strikten Präferenzraum muss aufgrund der Antisymmetrie der Präferenzrelation gelten:  $iR_p^{maj}j \Leftrightarrow \neg jR_p^{maj}i$ . Für alle Präferenzräume gilt, dass die Mehrheitsrelation eine nicht vollständige (partielle) Relation erzeugen kann, da für gerade  $n$  sowohl  $|\{R \in \mathcal{R}(X) \mid iRj\}| = \frac{n}{2}$  als auch  $|\{R \in \mathcal{R}(X) \mid jRi\}| = \frac{n}{2}$  gelten kann und damit weder  $iR_p^{maj}j$  noch  $jR_p^{maj}i$  gilt. Für ungerade  $n$  ist die Vollständigkeit der Mehrheitsrelation allerdings sichergestellt. Im schwachen und quasitransitiven Präferenzraum kann durch die zulässigen Indifferenzen sowohl  $|\{R \in \mathcal{R}(X) \mid iRj\}| > \frac{n}{2}$  als auch  $|\{R \in \mathcal{R}(X) \mid jRi\}| > \frac{n}{2}$  und somit  $iR_p^{maj}j$  und gleichzeitig  $jR_p^{maj}i$  gelten. In diesem Fall gilt für die Mehrheitsrelation  $i \sim_p^{maj} j$ . Die Mehrheitsrelation muss im Allgemeinen nicht konsistent sein - es können Zyklen verschiedener Arten auftreten. Wir unterscheiden im Folgenden zwischen drei verschiedenen Typen von Zyklen, die wir in ihrer Gesamtheit in der Arbeit als Condorcet-Zyklen bezeichnen werden:

1. Strikt-strikter Zyklus: Ein Zyklus der Präferenzrelation, der ausschließlich aus strikten paarweisen Vergleichen besteht und somit die Transitivität des strikten Teils der Präferenzordnung verletzt. Diese Zyklen haben die Form  $a \succ b \succ \dots \succ \ell \succ a$  mit  $a, b, \dots, \ell \in X$ .

2. Strikt-schwacher Zyklus: Ein Zyklus der Präferenzrelation, der aus strikten paarweisen Vergleichen und aus einer Indifferenz besteht. Auch dieser Zyklus verletzt die Transitivität des strikten Teils der Präferenzordnung. Diese Zyklen haben die Form  $a \succ b \succ \dots \succ \ell \sim a$  mit  $a, b, \dots, \ell \in X$ .
3. Schwach-strikter Zyklus: Ein Zyklus der Präferenzrelation, der aus Indifferenzen und aus einem strikten paarweisen Vergleich besteht. Dieser Zyklus verletzt die Transitivität des schwachen Teils der Präferenzordnung. Die Zyklen haben die Form  $a \sim b \sim \dots \sim \ell \succ a$  mit  $a, b, \dots, \ell \in X$ .

Kombinationen dieser Zyklen z.B. der Form  $a \succ b \succ \dots \succ i \sim j \sim \dots \sim \ell \sim a$  sind zwar möglich, lassen sich jedoch immer auf einen der drei oben beschriebenen Zyklen-Typen reduzieren:  $a \succ b \succ \dots \succ i \sim j \sim \dots \sim \ell \sim a$  enthält die beiden reduzierten Zyklen  $a \succ b \succ \dots \succ \ell \sim a$  und  $a \succ i \sim j \sim \dots \sim \ell \sim a$  - einen strikt-schwachen und einen schwach-strikten Zyklus. Die Länge eines Zyklus' entspricht der Anzahl der Elemente, die diesen Zyklus bilden. Die drei beschriebenen Typen stellen alle möglichen Inkonsistenzen dar, welche durch die Mehrheitsrelation erzeugt werden können. Betrachten wir nur Präferenzen aus dem strikten Präferenzraum, so können offensichtlich aufgrund der Asymmetrie nur Zyklen vom ersten Typ auftreten. Bei Präferenzen aus dem schwachen Präferenzraum können Zyklen aller drei Typen auftreten, da die Transitivität des strikten Teils der Präferenzordnung sowohl durch einen strikten paarweisen Vergleich (Typ strikt-strikt) als auch durch eine Indifferenz (Typ strikt-schwach) und die Transitivität des schwachen Teils der Präferenzordnung durch einen strikten paarweisen Vergleich (Typ schwach-strikt) verletzt werden kann. Für Präferenzrelationen aus dem quasitransitiven Präferenzraum können Zyklen der ersten beiden Typen auftreten. Da für die Indifferenz keine Transitivität gefordert wird, stellt ein Zyklus des Typs schwach-strikt keine Inkonsistenz dar und ist für quasitransitive Präferenzrelationen zulässig. Wir bezeichnen eine Präferenzrelation im Weiteren als zyklensfrei, wenn für den jeweiligen Typ der Präferenzrelation (strikt, schwach oder quasitransitiv) kein Zyklus der oben beschriebenen Art existiert.

Nachdem wir die verschiedenen Arten von Zyklen für die Präferenzrelationen aus den drei untersuchten Präferenzräumen dargestellt haben, können wir zu einer formalen und allgemeingültigen Definition für Condorcet Domains kommen:

**Definition 6** (Condorcet Domain). *Für eine endliche Alternativenmenge  $X$  und dem zugehörigen Präferenzraum  $\mathcal{R}(X)$  bezeichnen wir eine Teilmenge  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}(X)$  als Condorcet Domain, wenn für alle Profile  $p \in \mathcal{D}^n$  gilt, dass die induzierte Mehrheitsrelation  $R_p^{maj}$  zyklensfrei ist. Ein Condorcet Domain ist maximal, wenn keine Präferenzrelation  $R \in \mathcal{R}(X) \setminus \mathcal{D}$  existiert, sodass  $\mathcal{D} \cup R$  ein Condorcet Domain ist.*

Diese Definition ist für alle in der Arbeit betrachteten Präferenzräume (strikt, schwach und quasitransitiv) gültig. Für Profile, welche nur Präferenzen aus einem Condorcet Domain enthalten, kann man garantieren, dass die paarweise Mehrheitsrelation zu zyklensfreien und damit konsistenten Ergebnissen führt. Dies stellt die Grundlage unserer weiteren Untersuchungen und Ausführungen dar.

Tangian [Tan14] zeigt, dass auch eine große Anzahl von Wählern einen Schutz gegen zyklische Mehrheitsentscheidungen liefert. So wird die Wahrscheinlichkeit, dass ein Condorcet-Zyklus entsteht, umso geringer, je größer die Anzahl der Wähler ist (und umso „kompetenter“ [Tan14] die Wähler sind). Demnach treten in Situationen, in denen wir eine große Anzahl von gut informierten Wählern vorfinden, Condorcet-Zyklen selten auf. Man kann somit zu der Überzeugung gelangen, dass in solchen Situation die paarweise Mehrheitsabstimmung auch dann anwendbar ist, wenn das Profil der Wähler kein Tupel eines Condorcet Domains ist.

Wir werden uns im Folgenden zunächst mit einigen speziellen in der Literatur beschriebenen Klassen von Condorcet Domains auseinandersetzen, bevor wir zu verschiedenen Definitionen bzw. Beschreibungen der Klasse aller Condorcet Domains kommen.

### 3.2 Bekannte Klassen von Condorcet Domains

Bereits bevor eine umfassende Beschreibung der Klasse aller Condorcet Domains existierte, beschäftigten sich Ökonomen mit speziellen Condorcet-Domain-Klassen, auf die wir im Folgenden eingehen werden.

#### Single-peaked Präferenzen

Duncan Black [Bla48] [Bla58] betrachtete als einer der ersten Wissenschaftler mögliche Auswege aus dem Condorcet-Paradoxon. Dabei zeigt er auf, dass für bestimmte Strukturen innerhalb einer Wählerschaft bzw. der Präferenzen allgemein, ein Auftreten von Condorcet-Zyklen ausgeschlossen werden kann.

Klassische, praktische Entscheidungsprobleme, unter denen solche speziellen Präferenzstrukturen auftreten können, sind nach Black die Bestimmung eines Verkaufspreises für ein Produkt einer Firma, die Produktionsrate für eine zukünftige Periode oder die Höhe einer bestimmten Steuer (vgl. [Bla48]). „In solchen Fällen [...] versuchen die Wähler häufig zunächst eine Einschätzung über den für sie optimalen Wert zu finden. Wenn sie diesen Wert für sich gefunden haben, dann gilt, je weiter eine andere Alternative von ihrem ermittelten Optimum entfernt ist, umso schlechter bewerten sie diese Alternative.“

Black beschreibt damit eine Präferenzstruktur innerhalb der Wählerschaft, die auf einer unter allen Wählern akzeptierten „inneren Ordnung“ der Alternativen beruht. Solch eine innere Ordnung kann aus der Sortierung der Alternativen anhand ihrer Größe (Verkaufspreis, Produktionsrate, Steuerhöhe) oder einer anderen extern vorgegebenen Ordnung (Sortierung von Parteien anhand des politischen Spektrums von links nach rechts) resultieren. Black stellt Präferenzen dieser Struktur grafisch dar, indem er die innere Ordnung der Alternativen auf der x-Achse und den Nutzen dieser Alternativen für jeden Wähler auf der y-Achse abträgt. Die Punkte für einen Wähler verbindet er mit Geraden. Abbildung 3.6 illustriert diese Darstellung für fünf Alternativen  $X = \{a, b, c, d, e\}$ , drei Wähler mit den Präferenzen  $R_1 = cbdea$ ,  $R_2 = bcdea$  und  $R_3 = edcba$  sowie der inneren Ordnung  $a - b - c - d - e$ . Die Präferenz von Wähler eins

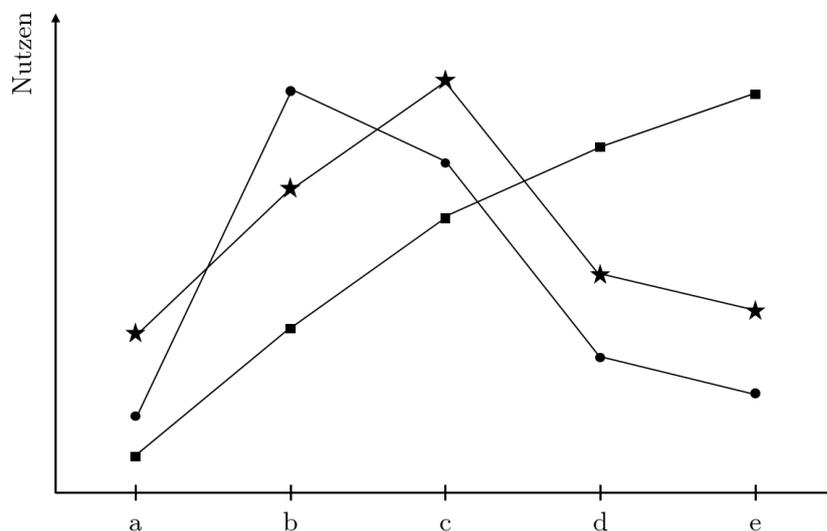


Abbildung 3.6: Darstellung eines single-peaked Domains aus dem strikten Präferenzraum nach Black [Bla48]

wird durch Sterne, die von Wähler zwei durch Kreise und die von Wähler drei durch Quadrate dargestellt. Man erkennt, dass jeder Wähler eine eindeutige Topalternative (sein Optimum) hat, der Nutzen entlang der inneren Ordnung monoton bis zum Optimum steigt und nach dem Optimum wieder monoton fällt. Aus diesem Grund werden diese Präferenzen single-peaked (eingipflig) genannt.

Wenn alle Wähler Präferenzen dieser Klasse bzgl. einer gemeinsamen inneren Ordnung aufweisen, weist Black nach, dass die paarweise Mehrheitsrelation immer den Median der Topalternativen aller Wähler als Sieger auswählt. Dieses Ergebnis ist in der Literatur unter dem Begriff Medianwählertheorem bekannt. Für eine ungerade Anzahl an Wählern ist der Median eindeutig. Bei einer geraden Anzahl muss die Medianalternative nicht eindeutig bestimmt sein und man solle in diesem Fall „eine zusätzliche Person als Vorsitzenden heranziehen, die das Recht hat, bei einem Unentschieden eine entscheidende Stimme abzugeben.“ [Bla48] Des Weiteren zeigt Black, dass keine Zyklen (beliebiger Länge) innerhalb der paarweisen Mehrheitsvergleiche auftreten können und somit das Ergebnis transitiv sein muss.

Black erwähnt in seiner Arbeit auch die Möglichkeit sogenannter „truncated top“ single-peaked Präferenzen, d.h. Präferenzen, die bzgl. einer inneren Ordnung single-peaked sind, das Optimum jedoch aus mehreren zueinander indifferenten Alternativen bestehen kann. Er zeigt allerdings nicht, dass auch diese Domains, welche Präferenzen aus dem schwachen Präferenzraum enthalten, zu einem zyklensfreien Ergebnis beim paarweisen Mehrheitsvergleich führen. Aus diesem Grund beschränken sich seine Aussagen lediglich auf Domains aus dem strikten Präferenzraum.

Kenneth Arrow greift dieses Konzept in seiner Arbeit „Social Choice and Individual Values“ [Arr51] auf und weitet es auch auf Präferenzen des schwachen Präferenzraums (ohne die allgemeine Indifferenz  $a \sim b \sim \dots \sim m$ ) aus. Er beweist, dass für die Einschränkung des Präferenzraums auf single-peaked Präferenzen sein zuvor definiertes Unmöglichkeitstheorem (siehe Theorem 1) für den paarweisen Mehrheitsvergleich nicht gilt. Somit ist diese Abstimmungsregel für single-peaked Präferenzen konsistent und erfüllt die Eigenschaften Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen, schwaches Pareto-Prinzip, Surjektivität und Nicht-Diktatur.

**Theorem 4** (Möglichkeitstheorem für single-peaked Präferenzen (vgl. [Arr51])). *Die Methode der paarweisen Mehrheitsabstimmung erfüllt alle Bedingungen von Arrows Unmöglichkeitstheorem und ist konsistent für jede Anzahl von Alternativen, wenn die Präferenzen der Wähler single-peaked bzgl. derselben inneren Ordnung sind und die Anzahl der Wähler ungerade ist.*

Das Theorem besagt, dass die paarweise Mehrheitsabstimmung unter den genannten Bedingungen konsistent ist und somit keine Zyklen aufweist. Dies gilt für alle Profile, welche aus einem auf single-peaked Präferenzen beschränkten Domain stammen. Diese Domains müssen somit Condorcet Domains sein. An dieser Stelle ist es erneut essenziell, zwischen einem Profil der Wähler und dem Präferenzdomain zu differenzieren. Ein Profil ist eine Liste mit Präferenzen für eine gewisse Gruppe von Wählern. Präferenzen können mehrfach auftreten und einige zulässige Präferenzen treten unter Umständen gar nicht auf. Im Gegensatz dazu stellt ein Präferenzdomain die zulässigen bzw. beobachteten Präferenzen dar. Hier ist es unwichtig, wie oft eine Präferenz auftritt. Für strikte und schwache Präferenzen bezeichnen wir die Domains, welche alle single-peaked Präferenzen bzgl. einer Ordnung enthalten, als single-peaked Domains. Für strikte Präferenzen enthält das single-peaked Domain  $2^{m-1}$  Präferenzen (vgl. z.B. [Mon09]).

$\mathcal{D} = \{c(ab)de, (bc)dea, (cde)ba\}$  ist ein Beispiel für ein single-peaked Domain aus dem schwachen Präferenzraum (ohne die allgemeine Indifferenz), welches in Abbildung 3.7 dargestellt ist. In jeder Präferenz existieren eine oder mehrere Topalternativen. Der Nutzen entlang der inneren Ordnung steigt schwach monoton bis zum Optimum an und fällt schwach monoton nach dieser Alternative ab.

Inada [Ina64] zeigt in einer späteren Arbeit, dass es ausreicht, die single-peaked Eigenschaft lediglich auf allen Tripeln der Alternativen zu fordern, um eine konsistente, paarweise Mehrheitsentscheidung zu erhalten. Betrachtet man jede Präferenz für jedes Tripel an Alternativen separat und ignoriert die anderen Alternativen, so reicht es aus, dass die daraus resultierenden Präferenzen auf den Tripeln single-peaked bzgl. einer gemeinsamen inneren Ordnung auf diesen Präferenzen sind.

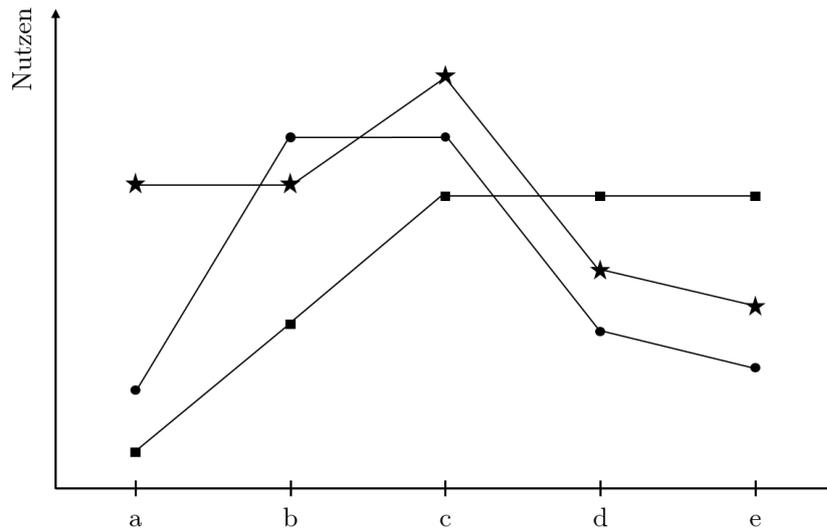


Abbildung 3.7: Darstellung eines single-peaked Domains aus dem schwachen Präferenzraum nach Black [Bla48]

Peters und Lackner [PL17] erweitern das Konzept der single-peaked Präferenzen auf eine kreisförmige Anordnung der Alternativen. Auch in diesem Modell besitzen Wähler mit single-peaked Präferenzen auf einem Kreis eine (oder mehrere nebeneinander liegende) am meisten bevorzugte Alternative(n) und ihr Nutzen sinkt (schwach) monoton, wenn man sich von dieser (diesen) Alternative(n) entfernt. Tangian [Tan15] weist z.B. nach, dass für das deutsche Parteiensystem ein kreisförmiges links-rechts-Spektrum der politischen Meinungen angenommen werden kann. Die Parteien linksaußen sind mit denen rechtsaußen verbunden, da sie sich bzgl. ihrer politischen Forderungen sehr ähnlich sind. Für die paarweise Mehrheitsabstimmung kann jedoch keine Zyklensfreiheit mehr in diesem Modell garantiert werden. Aus diesem Grund werden wir uns nicht weiter mit dem Konzept auseinandersetzen.

### Single-dipped Präferenzen

Neben den beschriebenen Präferenzen mit der single-peaked Eigenschaft lassen sich auch Präferenzen beschreiben, welche anstelle eines „Gipfels“ eine „Senke“ aufweisen. Diese Präferenzen nennt man single-dipped.<sup>4</sup> Die Präferenz eines Wählers mit der single-dipped Eigenschaft bzgl. einer vorgegebenen inneren Ordnung weist eine oder mehrere in der inneren Ordnung nebeneinander liegende Alternativen auf, die für den Wähler den minimalen Nutzen haben. Entfernt man sich von diesem Minimum bzw. diesen Minima, so steigt der Nutzen monoton in beide Richtungen an. In folgender Situation könnten Wähler z.B. single-dipped Präferenzen aufweisen:

**Beispiel 1.** In einer Stadtratsitzung muss über die Verteilung eines öffentlichen Budgets von 100 Euro auf zwei Projekte entschieden werden. Für die vollständige Umsetzung beider Projekte wäre jeweils das komplette Budget erforderlich. Eine Aufteilung des Budgets führt dazu, dass die Projekte nur teilweise oder gar nicht umgesetzt werden können. Darüber, inwieweit ein Projekt nur teilweise oder gar nicht umgesetzt werden kann, herrscht keine einstimmige Meinung. Stadträtin A ist der Meinung, wenn das Budget 40/60, 50/50 oder 60/40 aufgeteilt wird, werden beide Projekte scheitern und keines auch nur teilweise umgesetzt werden können - das investierte Geld ist somit „verschwendet“. Bei einer Aufteilung 30/70 (70/30) ist sie der Meinung, dass Teile von Projekt B (A) umgesetzt werden können. Ihre Präferenz lässt sich wie in Abbildung 3.8 darstellen, wobei die Quadrate den Nutzen der Stadträtin für die jeweilige

<sup>4</sup> Andere Bezeichnungen in der Literatur lauten single-troughed [Vic60] und single-caved [Ina64].

Aufteilung des Budgets auf die beiden Projekte repräsentieren. Eine zweite Präferenz ist mithilfe der Sterne

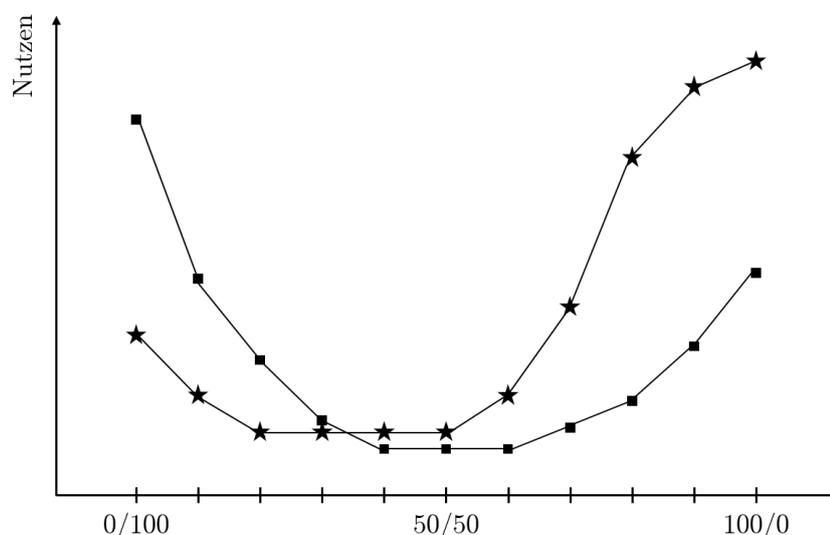


Abbildung 3.8: Darstellung eines single-dipped Domains aus dem schwachen Präferenzraum nach Black [Bla48]

illustriert und entspreche der Präferenz eines weiteren Stadtratsmitglieds. Beide Präferenzen weisen nur eine zusammenhängende Senke auf und sind somit single-dipped bzgl. der inneren Ordnung „Prozentuale Aufteilung des Budgets auf die beiden Projekte“.

Inada [Ina64] zeigt, dass sich die Resultate für single-peaked Präferenzen auch auf single-dipped Präferenzen übertragen lassen und die paarweise Mehrheitsabstimmung zu zyklensfreien Ergebnissen führt:

**Theorem 5** (Möglichkeitstheorem für single-dipped Präferenzen (vgl. [Ina64])). *Die Methode der paarweisen Mehrheitsabstimmung erfüllt alle Bedingungen von Arrows Unmöglichkeitstheorem und ist konsistent für jede Anzahl von Alternativen, wenn die Präferenzen der Wähler auf jedem Tripel single-dipped sind und die Anzahl der Wähler ungerade ist.*

Somit sind Domains, welche nur single-dipped Präferenzen bzgl. der gleichen inneren Ordnung aufweisen, auch Condorcet Domains.

### Separierbare Präferenzen

Inada definiert in seiner Arbeit „A Note on the Simple Majority Decision Rule“ [Ina64] eine weitere Klasse von Domains, welche sowohl für strikte als auch für schwache Ordnungen die Transitivität bei einer paarweisen Mehrheitsabstimmung sicherstellt. Die Grundidee dieses Konzepts ist, dass sich alle Teilmengen der Alternativen gegeben der Präferenzen der Wähler in zwei Gruppen aufteilen lassen. Jeder Wähler bevorzugt alle Alternativen aus der einen Gruppe gegenüber allen Alternativen aus der anderen Gruppe oder umgekehrt. Eine solche Teilmenge nennt Inada *separierbar in zwei Gruppen*.

**Theorem 6** (Möglichkeitstheorem für separierbare Präferenzen (vgl. [Ina64])). *Ist jede Teilmenge der Alternativen  $A \subseteq X$  mit mehr als zwei Alternativen separierbar in zwei Gruppen, dann erfüllt die Methode der paarweisen Mehrheitsabstimmung alle Bedingungen von Arrows Unmöglichkeitstheorem und ist konsistent für jede Anzahl von Alternativen, wenn die Anzahl der Wähler ungerade ist.*

Präferenzen dieser Art lassen sich häufig dann finden, wenn sich die Alternativen in klar definierte Gruppen aufteilen lassen und die Wähler zwischen diesen Gruppen strikte Präferenzen aufweisen.

**Beispiel 2.** Betrachten wir die Präferenzen von Personen bzgl. zweier verschiedener Teesorten und einer Kaffeesorte. Die meisten Menschen lassen sich als „Kaffeetrinker“ oder „Teetrinker“ identifizieren und würden somit als Kaffeetrinker die Kaffeesorte strikt ggü. jeder Teesorte bevorzugen und als Teetrinker jede Teesorte strikt ggü. der Kaffeesorte bevorzugen.

Die Klasse der separierbaren Präferenzen stellt eine weitere Klasse innerhalb der Condorcet Domains dar.

### Order-restrictions und single-crossing preferences

Rothstein [Rot90] stellt in Anlehnung an die single-peaked Präferenzen und das von Black postulierte Medianwählertheorem ein Konzept vor, welches es ermöglicht, nicht die Alternativen sondern die Präferenzen anzuordnen, um einen repräsentativen Wähler zu bestimmen („representative voter“). Bei Profilen mit single-peaked Präferenzen existiert eine gemeinsame, innere Ordnung der Alternativen, welche es ermöglicht, die Präferenzen anhand ihrer Optima zu sortieren. Diese Ordnung muss jedoch nicht eindeutig sein, da Wähler mit unterschiedlichen single-peaked Präferenzen das gleiche Optimum aufweisen können. Die Ordnungsvorschrift, welche Rothstein einführt, induziert im Gegensatz dazu eine eindeutige Anordnung der Präferenzen eines Profils, wenn diese existiert. Die Präferenzen innerhalb eines Profils werden zunächst beliebig von 1 bis  $n$  durchnummeriert. Rothstein definiert nun die Eigenschaft „order-restricted“ folgendermaßen:

**Definition 7** (Order restriction (vgl. [Rot90])). Gegeben sei ein Profil  $p = \{R_1, R_2 \dots R_n\} \in \mathcal{R}(X)^n$  mit  $n$  Wählern aus dem strikten oder schwachen Präferenzraum. Existiert eine Permutation  $\sigma(t) : N \rightarrow N$  derart, dass  $\forall (i, j) \in X \times X, \forall t \in \{1, \dots, n\}$  eine Grenze  $\sigma(\tilde{t})$  mit  $\tilde{t} \in \{1, \dots, n\}$  existiert, für die entweder

$$iR_{\sigma(t)}j \Leftrightarrow \sigma(\tilde{t}) \leq \sigma(t)$$

oder

$$jR_{\sigma(t)}i \Leftrightarrow \sigma(\tilde{t}) \leq \sigma(t)$$

gilt, so ist das Profil  $p$  order-restricted.

Die Präferenzen eines order-restricted Profils lassen sich entlang einer Geraden sortieren, sodass für jeden Vergleich zwischen zwei Alternativen  $(i, j)$  aus der Alternativenmenge zwei Grenzen existieren. Wir bezeichnen diese Grenzen  $(ij)$  und  $(ji)$ . Für jede Präferenz, die auf der einen Seite der Grenze  $(ij)$  liegt, gilt  $i \succeq j$  und für jede Präferenz auf der anderen Seite gilt  $\neg(i \succeq j)$ . Außerdem gilt für jede Präferenz auf der einen Seite der zweiten Grenze  $(ji)$   $j \succeq i$  und für jede Präferenz auf der anderen Seite der zweiten Grenze  $\neg(j \succeq i)$ . Für Profile mit Präferenzen aus dem strikten Präferenzraum fallen beide Grenzen zusammen, da hier aus  $\neg(i \succeq j)$  automatisch  $j \succeq i$  folgt. Rothstein zeigt, dass für Profile, welche diese Eigenschaft erfüllen, ein repräsentativer Wähler  $k^*$  existiert, dessen Präferenz exakt der paarweisen Mehrheitsentscheidung über alle Alternativen entspricht. Daraus folgt sofort, dass ein order-restricted Domain (ein order-restricted Profil ohne mehrfach auftretende Präferenzen) auch ein Condorcet Domain sein muss. Für eine ungerade Anzahl an Wählern gilt  $k^* = \frac{n+1}{2}$ , für eine gerade Anzahl an Wählern gilt  $k^* = \frac{n}{2}$ .

**Theorem 7** (Representative Voter Theorem nach Rothstein [Rot90]). Wenn ein Profil order-restricted ist, so ist  $k^*$  der repräsentative Wähler.

Ein Beispiel für ein order-restricted Profil ist in Abbildung 3.9 dargestellt. Das Profil enthält fünf

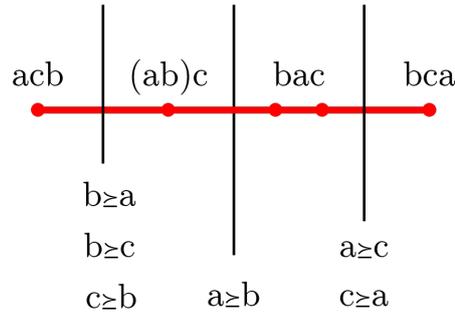


Abbildung 3.9: Darstellung eines order-restricted Profils mit fünf Wählern

Präferenzen aus dem schwachen Präferenzraum mit drei Alternativen:

$$p = \{(ab)c, acb, bac, bac, bca\}.$$

In der Abbildung sind die Grenzen für alle binären Entscheidungen  $i \succeq j$  durch senkrechte Linien dargestellt, wobei hier entweder für alle Präferenzen, die links der Grenze liegen,  $i \succeq j$  gilt und für alle Präferenzen rechts dieser Grenze  $\neg(i \succeq j)$  oder  $i \succeq j$  für alle Präferenzen rechts der Grenze und  $\neg(i \succeq j)$  für alle Präferenzen links der Grenze. Die Präferenz  $bac$  taucht im Profil doppelt auf, was durch zwei rote Punkte gekennzeichnet ist. Der repräsentative Wähler  $k^*$  ist in diesem Fall der dritte Wähler auf der Achse mit der Präferenz  $bac$ . Dies ist auch das Resultat, welches die paarweise Mehrheitsrelation als Ergebnis hervorbringt.

Eine solche Anordnung der Präferenzen muss nicht immer existieren. Domains, welche order-restricted sind, weisen eine ganz bestimmte Struktur auf. Profile bzw. Domains dieses Typs wurden unter verschiedenen Bezeichnungen unter anderem von Gans und Smart [GS96], Saporiti [Sap09], Austen-Smith, Banks und Jeffrey [ASB99] und Puppe und Slinko [PS18] untersucht. In der jüngeren Literatur hat sich der Begriff single-crossing Domains durchgesetzt, den wir auch in den nachfolgenden Teilen der Arbeit verwenden werden.

Saporiti [Sap09] beschreibt als erster maximale single-crossing Domains. Fügt man einem maximalen single-crossing Domain eine weitere Präferenz aus dem Präferenzraum hinzu, so verliert es seine single-crossing Eigenschaft. Es existiert also keine Anordnung der Präferenzen mehr, welche den Bedingungen der single-crossing Domain entspricht. Die Größe des maximalen single-crossing Domains beträgt  $\frac{m(m-1)}{2} + 1$  für den strikten Präferenzraum, da man insgesamt  $\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$  paarweise Vergleiche und somit Grenzen aufstellen kann. Für das maximale single-crossing Domain liegen keine Grenzen aufeinander und zwischen zwei benachbarten Grenzen liegt immer exakt eine Präferenz. Zwischen den  $\frac{m(m-1)}{2}$  Grenzen liegen demnach  $\frac{m(m-1)}{2} - 1$  Präferenzen. Zusätzlich kommt noch jeweils eine Präferenz ganz links und ganz rechts auf der Achse hinzu. Somit erhält man insgesamt  $\frac{m(m-1)}{2} + 1$  Präferenzen. Für den schwachen Präferenzraum verdoppelt sich die Anzahl der Grenzen, wodurch wir auf eine maximale Größe der Domains von  $2 \cdot \frac{m(m-1)}{2} + 1$  kommen. Für  $m = 3$  und den schwachen Präferenzraum lautet ein mögliches maximales single-crossing Domain

$$\mathcal{D}_{SC} = \{abc, (ab)c, bac, b(ac), bca, (bc)a, cba\}.$$

Dieses Domain ist mit seinen Grenzen in Abbildung 3.10 illustriert. Es hat  $2 \cdot \frac{m(m-1)}{2} + 1 = 2 \cdot \frac{3 \cdot 2}{2} + 1 = 7$  Elemente und ist somit maximal.

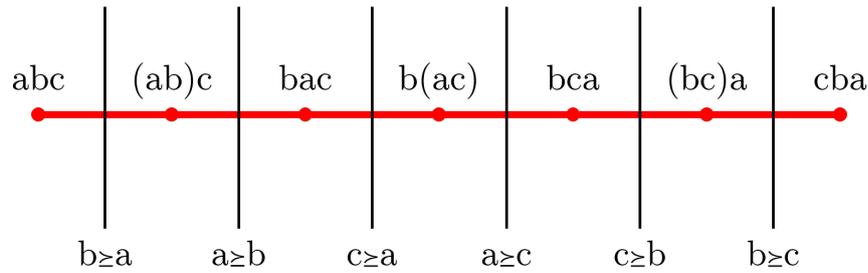


Abbildung 3.10: Darstellung eines maximalen single-crossing Domains aus dem schwachen Präferenzraum für drei Alternativen

Puppe und Slinko [PS18] zeigen, dass der Graph jedes single-crossing Domains im strikten Präferenzraum eine Kette auf dem Permutaeder ist. Des Weiteren weisen sie nach, dass ein maximales single-crossing Domain im strikten Präferenzraum genau dann ein maximales Condorcet Domain ist, wenn es die sogenannte *concatenation* Bedingung. Diese Bedingung beschreibt eine spezielle Struktur des Pfades zwischen den beiden „äußeren Präferenzen“ des maximalen single-crossing Domains. Dabei müssen alle benachbarten Grenzen  $(ij)$  und  $(xy)$  genau eine Alternative gemeinsam haben  $\{i, j\} \cap \{x, y\} \neq \emptyset$ . Durch die zwei äußeren Präferenzen und die *concatenation* Bedingung ist dieses spezielle maximale single-crossing Domain eindeutig beschrieben.

### 3.3 Charakterisierungen für Condorcet Domains

Nachdem wir uns im Abschnitt zuvor mit speziellen Klassen von Condorcet Domains beschäftigt haben, widmen wir uns in den folgenden Absätzen verschiedenen Charakterisierungen und Ansätzen, wie Condorcet Domains beschrieben werden können. Dabei beginnen wir mit der Definition strikter Condorcet Domains über sogenannte lateinische Quadrate („latin squares“) von Ward [War65]. Anschließend betrachten wir die Charakterisierung von Condorcet Domains von Sen ([Sen66], [SP69]) im strikten und schwachen Präferenzraum mithilfe von value-restrictions. Abschließend setzen wir uns mit der Charakterisierung von Puppe und Slinko [PS18] auseinander, welche ein sehr allgemeingültiges Resultat zu sogenannten Median-Räumen von Nehring und Puppe [NP02] zur Hilfe nehmen, um eine allgemeine Definition für Condorcet Domains für alle drei in dieser Arbeit untersuchten Präferenzräume (strikt, schwach und quasitransitiv) zu liefern.

#### Latin-square-Präferenzen

Im Rahmen seiner Arbeit über die Entscheidungsfindung in Gremien von Firmen stellt Ward [War65] eine Charakterisierung von Condorcet Domains für strikte Ordnungen auf, welche alle bisher beschriebenen speziellen Condorcet-Domain-Klassen (single-peaked, single-dipped, separierbare und single-crossing Präferenzen) umfasst. Dazu führt er den Begriff der „latin-squarelessness“ ein. Ein lateinisches Quadrat (latin square) beschreibt in der Kombinatorik eine  $n \times n$ -Matrix, welche  $n$  unterschiedliche Symbole enthält und jedes dieser Symbole exakt einmal in jeder Zeile und einmal in jeder Spalte auftritt. In Wards Modell repräsentieren die Spalten einer Matrix eine Präferenz. Die Zeilen entsprechen den Rängen der Alternativen in den Präferenzen. Unter diesen Annahmen und dem Fakt, dass die Anordnung der Wähler und damit der Spalten der Matrix aufgrund der Gleichbehandlung über alle Wähler irrelevant ist, kann man genau zwei verschiedene lateinische Quadrate für drei Alternativen finden, welche in Tabelle 3.5 dargestellt sind. Die Präferenzen, welche die beiden lateinischen Quadrate darstellen, sind  $\{ijk, jki, kij\}$  und  $\{ikj, jik, kji\}$ .

		Präferenz				Präferenz		
		i	j	k		i	j	k
		j	k	i		k	i	j
		k	i	j		j	k	i
Rang								

Tabelle 3.5: Lateinische Quadrate für drei Alternativen nach Ward

Für jedes Tripel aus der Alternativenmenge untersucht Ward, ob eines der beiden lateinischen Quadrate enthalten ist, wenn man die Präferenzen aus dem untersuchten Profil auf die drei Alternativen aus dem Tripel beschränkt. Enthält das Profil oder Domain für keines der Tripel ein lateinisches Quadrat, so erfüllt das Profil bzw. das Domain die Eigenschaft der *latin-squarelessness*. Ward zeigt, dass ein Profil genau dann unter der paarweisen Mehrheitsabstimmung zu konsistenten Ergebnissen führt und somit keine Zyklen auftreten können, wenn das Profil die Eigenschaft latin-squarelessness erfüllt. Somit gilt, dass die Klasse der Condorcet Domains und die Klasse der Domains, die die Eigenschaft latin-squarelessness erfüllen, äquivalent sind. Neben dieser zentralen Erkenntnis bzgl. Condorcet Domains auf dem strikten Präferenzraum zeigt er außerdem, dass ein Zyklus einer beliebigen Länge auf einem Domain immer auch einen Zyklus der Länge 3 enthalten muss. Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass aus der Abwesenheit von Zyklen der Länge 3 die Zyklensfreiheit für das gesamte Domain gefolgert werden kann. Alle in Abschnitt 3.2 beschriebenen Domains (mit single-peaked, single-dipped, separierbaren oder single-crossing Präferenzen) fallen natürlich auch unter diese Charakterisierung und enthalten demnach keine lateinischen Quadrate.

### Value-restrictions

Eine andere Charakterisierung für Condorcet Domains im strikten Präferenzraum und eine hinreichende Bedingung für Profile aus dem schwachen Präferenzraum, für welche die paarweise Mehrheitsabstimmung zyklensfrei ist, liefert Amartya Sen 1966 (vgl. [Sen66] und [SP69]). Er weist nach, dass alle bisher beschriebenen Condorcet-Domain-Klassen im strikten Präferenzraum auf einem gemeinsamen Konzept, welches er *value-restriction* nennt, basieren. Gleichzeitig wendet er dieses Konzept auch für den schwachen Präferenzraum an. Man sagt, dass eine Präferenz bzw. ein Domain auf ein Alternativentripel beschränkt bzw. projiziert wird, wenn man alle Alternativen aus den Präferenzen herausstreicht, welche nicht in dem jeweiligen Tripel enthalten sind. Für eine Alternativenmenge  $X$ , einen Präferenzraum  $\mathcal{R}(X)$ , ein Domain  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}(X)$  und ein Tripel  $T = \{i, j, k\}$  paarweise verschiedener Elemente aus  $X$  definiert man

$$R_{/ \{i, j, k\}} := \{(a, b) \in R \mid (a \in T) \wedge (b \in T)\}$$

als Präferenzbeschränkung bzw. Präferenzprojektion auf das Tripel  $T$  und

$$\mathcal{D}_{/ \{i, j, k\}} := \{R \in \mathcal{R}(T) \mid \exists R' \in \mathcal{D} \text{ mit } R = R'_{/ T}\}$$

als Domainbeschränkung bzw. Domain-Projektion auf das Tripel  $T$ .

**Beispiel 3.** Gegeben sei das Domain  $\mathcal{D} = \{abcd, abdc, cabd, cbad\}$ . Beschränkt man das Domain z.B. auf das Tripel  $\{a, b, d\}$ , wird die Alternative  $c$  aus allen Präferenzen gestrichen und eventuell auftretende, redundante Präferenzen werden entfernt. Daraus ergibt sich das auf das Tripel  $\{a, b, d\}$  beschränkte Domain  $\mathcal{D}_{/ \{a, b, d\}} = \{abd, bad\}$ .

Sen definiert die Bedingung value-restriction mit Hilfe von Domainbeschränkungen über alle möglichen Tripel über  $X$  wie folgt.

**Definition 8** (Value-restriction nach Sen [Sen66]). *Ein Domain  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}(X)$  ist value-restricted, wenn für jedes Tripel  $\{i, j, k\}$  paarweise verschiedener Elemente aus  $X$  und deren Domainbeschränkungen  $\mathcal{D}_{/\{i,j,k\}}$  ein Element  $\ell \in \{i, j, k\}$  existiert, sodass  $\ell$  entweder in keiner Präferenz in  $\mathcal{D}_{/\{i,j,k\}}$  an erster oder in keiner Präferenz an zweiter oder in keiner Präferenz an letzter Stelle steht.*

Sen definiert diese Bedingung nicht nur für strikte, sondern auch für schwache Präferenzräume. Alternativen, die in Präferenzrelationen aus dem schwachen Präferenzraum auftreten, können innerhalb einer Präferenz mehrere Stellen bzw. Ränge gleichzeitig einnehmen. So gilt z.B. für die Präferenz  $(ab)c$ , dass die Alternativen  $a$  und  $b$  gleichzeitig auf Rang 1 und 2 sind und die Alternative  $c$  auf Rang 3 ist. Sen trifft eine Unterscheidung zwischen sogenannten concerned (besorgten) und unconcerned (unbesorgten) Individuen. Wenn ein Wähler bzgl. aller Alternativen einer Alternativenmenge indifferent ist (jede Alternative also jeden Rang gleichzeitig einnimmt), so nennt Sen diesen Wähler unconcerned (ansonsten concerned). Im Weiteren wird die Präferenz eines solchen unconcerned Individuums als allgemeine Indifferenz bezeichnet. Enthält eine Domain die allgemeine Indifferenz, so kann die Domain nie value-restricted sein, da für die allgemeine Indifferenz in jedem Tripel jede Alternative gleichzeitig auf jedem Rang ist.

Die für die value-restriction benötigten Bedingungen lassen sich mithilfe von *never conditions* kompakt beschreiben (vgl. Fishburn [Fis96]). Für ein gegebenes Domain  $\mathcal{D} \in \mathcal{R}(X)$  und ein Tripel  $\{i, j, k\}$  paarweise verschiedener Elemente aus  $X$  besagt die never condition  $\ell N_{\{i,j,k\}} r$ , dass  $\ell \in \{i, j, k\}$  auf dem beschränkten Domain  $\mathcal{D}_{/\{i,j,k\}}$  nie den Rang  $r \in \{1, 2, 3\}$  annimmt. Für jedes Tripel existieren neun verschiedene never conditions ( $iN_{\{i,j,k\}}1, iN_{\{i,j,k\}}2, \dots, kN_{\{i,j,k\}}3$ ). Somit ist ein Domain  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}(X)$  value-restricted, wenn jedes Tripel  $\{i, j, k\}$  paarweise verschiedener Elemente aus  $X$  mindestens eine never condition erfüllt. Die Anzahl der zu untersuchenden Tripel einer Alternativenmenge  $X$  ist  $\binom{m}{3}$ . Beispiel 4 verdeutlicht das Konzept für ein gegebenes maximales Condorcet Domain durch die Bestimmung aller never conditions, die durch das Domain erfüllt werden.

**Beispiel 4.** *Gegeben sei die Alternativenmenge  $X = \{a, b, c, d\}$ , der strikte Präferenzraum  $\mathcal{R}(X)$  sowie das maximale Condorcet Domain  $\mathcal{D} = \{abcd, abdc, acbd, adbc, bacd, badc, bcad, bdac\}$ . Es existieren insgesamt vier zu untersuchende Tripel über die Alternativenmenge. Man bildet zunächst die Projektion des Domains auf jedes Tripel  $\mathcal{D}_{/\{i,j,k\}}$  und überprüft anschließend, welche der neun möglichen never conditions  $\ell N_{\{i,j,k\}} r$  erfüllt werden. Die folgende Tabelle fasst die Ergebnisse für dieses Beispiel zusammen.*

$\{i, j, k\}$	$\mathcal{D}_{/\{i,j,k\}}$	$\ell N_{\{i,j,k\}} r$
$\{a, b, c\}$	$\{abc, acb, bac, bca\}$	$cN_{\{a,b,c\}}1$
$\{a, b, d\}$	$\{abd, adb, bad, bda\}$	$dN_{\{a,b,d\}}1$
$\{a, c, d\}$	$\{acd, adc, cad, dac\}$	$aN_{\{a,c,d\}}3$
$\{b, c, d\}$	$\{bcd, bdc, cbd, dbc\}$	$bN_{\{b,c,d\}}3$

*Es kann für jedes Tripel eine never condition gefunden werden und somit ist das Domain value-restricted.*

Sen zeigt in seiner Arbeit, dass die paarweise Mehrheitsabstimmung für bestimmte Profile auf value-restricted Domains für den strikten und schwachen Präferenzraum zu konsistenten und damit zyklensfreien Ergebnissen führt.

**Theorem 8** (Möglichkeitstheorem value-restricted Präferenzen (vgl. [Sen66])). *Die Methode der paarweisen Mehrheitsabstimmung erfüllt alle Bedingungen von Arrows Unmöglichkeitstheorem und ist konsistent für jede Anzahl von Alternativen, wenn die Präferenzen der concerned Wähler über jedes Tripel von Alternativen value-restricted sind und die Anzahl der concerned Wähler für jedes Tripel ungerade ist.*

Für den strikten Präferenzraum spielt die Einschränkung auf concerned Wähler keine Rolle, da keine Indifferenzen zulässig sind und somit alle Wähler concerned sind. Die Beschränkung auf eine ungerade Anzahl von Wählern wählt Sen, damit die paarweise Mehrheitsrelation vollständig ist. Da wir dies für Condorcet Domains nicht fordern, sind alle value-restricted Domains auf dem strikten Präferenzraum auch Condorcet Domains. Sen und Pattanaik [SP69] zeigen weiterhin, dass die value-restriction Bedingung über alle Tripel eines Domains eine notwendige Bedingung ist und somit eine Äquivalenzbeziehung zwischen Condorcet Domains und value-restricted Domains existiert. Die Klasse der single-peaked Domains entspricht z.B. der Klasse der value-restricted Domains, für die auf alle Tripel die never condition  $jN_{\{i,j,k\}}3$  gilt, wobei  $i, j$  und  $k$  anhand der inneren Ordnung des single-peaked Domains sortiert sein müssen.

Auf dem schwachen Präferenzraum stellt das Möglichkeitstheorem Sens lediglich eine hinreichende Bedingung für die Konsistenz der Mehrheitsabstimmung dar. Es gibt auch andere Profile, für welche die paarweise Mehrheitsabstimmung konsistent und vollständig ist. Da die Anzahl der Wähler im schwachen Präferenzraum nicht nur für die Vollständigkeit der Präferenzrelation, sondern auch für die Konsistenz von Bedeutung ist, können wir lediglich die Schlussfolgerung ziehen, dass alle value-restricted Domains (ohne Unterscheidung zwischen concerned und unconcerned) im schwachen Präferenzraum auch Condorcet Domains sind. Wir werden in Abschnitt 5.4 sehen, dass diese Condorcet Domains jedoch nicht maximal sind und weitere Condorcet Domains existieren, welche keine Obermengen einer value-restricted Domain sind.

### Median Domains und Condorcet Domains

Puppe und Slinko weisen in der Arbeit „Condorcet Domains, Median Graphs and the Single-Crossing Property“ [PS18] nach, dass jedes (abgeschlossene) Condorcet Domain mit einem sogenannten Median Domain verknüpft ist. Diese zentrale Erkenntnis werden wir für die zwei der drei entwickelten Algorithmen in Abschnitt 4.2 und 4.3 verwenden. Sie erweitern damit die Ergebnisse zu sogenannten Intermediate Präferenzen von Demange [Dem12]. Um das Mediagraph-Konzept zu beschreiben, führen wir zunächst die Betweenness-Relation ein und untersuchen diese für die verschiedenen Präferenzräume. Anschließend betrachten wir die Definition des Mediagraphen und leiten für unsere untersuchten Fälle sogenannte „Inkonsistenz-Tripel“ her. Dies sind Präferenztripel, die nicht in einem Mediagraphen auftreten können. Für die weiteren Untersuchungen benötigen wir ein Konzept, welches uns ermöglicht, den Abstand zwischen zwei Präferenzen  $R$  und  $R'$  zu bestimmen. Eine intuitive Herangehensweise liefert Kemeny, der folgende Anforderungen an ein Distanzmaß  $d(R, R')$  stellt (vgl. [Kem59]):

1.  $d(R, R') \geq 0$  mit  $(d(R, R') = 0) \Leftrightarrow (R = R')$
2.  $d(R, R') = d(R', R)$
3.  $d(R, R') + d(R', R'') \geq d(R, R'')$  mit  $(d(R, R') + d(R', R'') = d(R, R'')) \Leftrightarrow (R' \text{ liegt zwischen } R \text{ und } R'')$
4.  $d(R, R')$  ist unabhängig von der Bezeichnung der Alternativen.
5. Stimmen die Präferenzordnungen  $R$  und  $R'$  auf den ersten und letzten Rängen vollständig überein, so bleibt die Distanz  $d(R, R')$  gleich groß, wenn man die übereinstimmenden Alternativen herausstreicht.<sup>5</sup>

<sup>5</sup> Diese Bedingungen müssen wir für Präferenzrelationen aus dem quasitransitiven Präferenzraum verallgemeinern und damit stärker formulieren, da Ränge in diesem Kontext nicht definiert sind. Wir fordern im quasitransitiven Präferenzraum, dass die Distanz zwischen zwei Präferenzrelationen  $R, R'$  gleich groß bleiben muss, wenn man alle Alternativen  $i \in X$  herausstreicht, für die gilt:  $\forall j \in X \setminus i : (iRj \Leftrightarrow iR'j) \wedge (jRi \Leftrightarrow jR'i)$ .

6. Die kleinste, positive Distanz sei 1.

Die in Punkt 3 verwendete Definition von „liegt zwischen“ beschreibt Kemeny wie folgt. Eine Präferenz  $R'$  liegt zwischen zwei anderen Präferenzen  $R$  und  $R''$ , wenn für alle paarweisen Vergleiche der Alternativen  $R'$  mit  $R$  übereinstimmt oder  $R'$  mit  $R''$  übereinstimmt oder (im Fall schwacher Ordnungen), falls  $R$  und  $R''$  im paarweisen Vergleich nicht übereinstimmen,  $R'$  indifferent zwischen den beiden Alternativen sei. Wir werden später noch eine formalere Definition dieser „Betweenness“-Relation geben. Kemeny zeigt, dass nur ein Distanzmaß alle obigen Bedingungen erfüllt:

$$d(R, R') := \sum_{i \in X} \sum_{j \in X} d_{ij}(R, R') \quad \text{mit } d_{ij}(R, R') = \begin{cases} 0 & , \text{ wenn } (iRj \text{ und } iR'j) \text{ oder } (\neg iRj \text{ und } \neg iR'j) \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Puppe und Slinko [PS18] nutzen das Konzept Kemenys, um eine Median-Ordnung auf dem Präferenzraum zu definieren. Dazu führen sie zunächst formal Kemenys Betweenness-Relation und das damit verbundene Betweenness-Intervall ein:

**Definition 9** (Betweenness-Relation und Betweenness-Intervall (vgl. [PS18])). *Eine Präferenzrelation  $R' \in \mathcal{R}(X)$  liegt zwischen zwei Präferenzrelationen  $R, R'' \in \mathcal{R}(X)$  genau dann, wenn  $R' \supseteq R \cap R''$ , d.h. wenn  $R'$  mit den binären Entscheidungen in  $R$  und  $R''$  übereinstimmt, in denen diese beiden untereinander übereinstimmen.*

*Die Menge aller Präferenzrelationen, die zwischen den beiden Präferenzrelationen  $R$  und  $R''$  liegen, nennen wir Betweenness-Intervall und bezeichnen sie mit  $[R, R'']$ .*

Es ist wichtig, zwischen einem paarweisen Vergleich zwischen zwei Alternativen und den binären Entscheidungen über zwei Alternativen zu differenzieren. Unter einem paarweisen Vergleich verstehen wir im Allgemeinen die Entscheidung eines Individuums bzgl. zweier Alternativen  $i, j \in X$  mit  $i \neq j$ . Das Individuum kann in unseren untersuchten Fällen entweder  $i$  strikt gegenüber  $j$  bevorzugen,  $j$  strikt gegenüber  $i$  bevorzugen oder indifferent zwischen beiden Alternativen sein. Eine binäre Entscheidung ist im Gegensatz dazu immer eine Entscheidung zwischen „ja“ und „nein“ bezogen auf die Aussagen „ $i$  ist mindestens so gut wie  $j$ “ oder „ $j$  ist mindestens so gut wie  $i$ “.

Mithilfe des Betweenness-Intervalls definieren Puppe und Slinko eine Median-Ordnung<sup>6</sup> als Schnittmenge der drei Betweenness-Intervalle dreier Ordnungen aus  $\mathcal{R}(X)$ :

$$R^{\text{med}}(R_1, R_2, R_3) = [R_1, R_2] \cap [R_1, R_3] \cap [R_2, R_3] \text{ mit } R_1, R_2, R_3 \in \mathcal{R}(X).$$

Wenn eine Median-Ordnung existiert, so ist sie eindeutig [PS18]. Dies lässt sich sowohl für strikte, schwache als auch quasitransitive Präferenzrelationen zeigen. Folgendes Beispiel soll die Beweisidee verdeutlichen.

**Beispiel 5.** *Sei  $X = \{1, 2, \dots, 10\}$  die Menge der Alternativen. Wir betrachten die drei quasitransitiven Präferenzrelationen  $R_1, R_2$  und  $R_3 \in \mathcal{R}_{\text{qt}}(X)$ , wobei  $R_1$  und  $R_2$  in den binären Entscheidungen bezüglich der Alternativen 2 und 3,  $R_1$  und  $R_3$  in den binären Entscheidungen bezüglich der Alternativen 4 und 5 und  $R_2$  und  $R_3$  in den binären Entscheidungen bezüglich der Alternativen 6 und 7 übereinstimmen. Wenn ein Median  $R^{\text{med}}(R_1, R_2, R_3)$  existiert, so muss dieser in den binären Entscheidungen aller Alternativenpaare bzgl. der Alternativen 2 und 3, 4 und 5 sowie 6 und 7 übereinstimmen. Angenommen es existiert ein zweiter Median  $\tilde{R}^{\text{med}}(R_1, R_2, R_3)$ . Dieser müsste in einem anderen Alternativenpaar,*

<sup>6</sup> Auch hier müssten wir im Fall quasitransitiver Präferenzrelationen von einer Median-Relation sprechen. Wir werden jedoch aus Konsistenzgründen im Folgenden den Begriff Median-Ordnung von Puppe und Slinko weiterverwenden.

z.B. (8, 9), mit mindestens einer binären Entscheidung von  $R^{med}(R_1, R_2, R_3)$  über dieses Alternativenpaar nicht übereinstimmen. Aus diesem Grund können nicht alle drei Präferenzrelationen die gleichen binären Entscheidungen bzgl. den Alternativen 8 und 9 aufweisen. Dadurch müssen exakt zwei Ordnungen (o.B.d.A.  $R_1$  und  $R_2$ ) mit der Entscheidung von  $\tilde{R}^{med}(R_1, R_2, R_3)$  bzgl. 8 und 9 übereinstimmen. Daraus folgt jedoch, dass entweder  $R^{med}$  oder  $\tilde{R}^{med}$  nicht zwischen  $R_1$  und  $R_2$  liegen kann, was einen Widerspruch darstellt.

Puppe und Slinko nennen Domains  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}(X)$ , für die gilt  $R^{med}(R_1, R_2, R_3) \in \mathcal{D}, \forall R_1, R_2, R_3 \in \mathcal{D}$  Median-stabil oder *Median Domain*. Basierend auf dem fundamentalen Resultat von Nehring und Puppe (vgl. [NP02]) zeigen Puppe und Slinko [PS18], dass die Klasse der Median Domains äquivalent zur Klasse der abgeschlossenen Condorcet Domains<sup>7</sup> ist. Des Weiteren können sie nachweisen, dass für jedes Condorcet Domain  $\mathcal{D}$  ein abgeschlossenes Condorcet Domain  $\mathcal{D}'$  existiert, sodass  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'$ . Daraus resultiert auch sofort, dass jedes maximale Condorcet Domain ein abgeschlossenes Condorcet Domain sein muss. Dies lässt sich sowohl für den strikten als auch für den schwachen und quasitransitiven Präferenzraum zeigen. Wir werden diese zentrale Eigenschaft nutzen, um maximale Condorcet Domains zu bestimmen.

Puppe und Slinko [PS18] ordnen jedem Domain  $\mathcal{D}$  einen ungerichteten Graphen  $G_{\mathcal{D}}$  zu, dessen Knoten den Präferenzen in  $\mathcal{D}$  entsprechen. Für die Menge der Kanten  $E$  gilt

$$E = \{(R_1, R_2) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}, R_1 \neq R_2 \mid [R_1, R_2] \cap \mathcal{D} = \{R_1, R_2\}\}.$$

Zwei Knoten (Präferenzen) in diesem Graphen sind durch eine Kante miteinander verbunden, wenn keine Präferenz im Domain existiert, welche zwischen den beiden liegt. Somit sind alle Präferenzen die im Präferenzraum benachbart sind, sofern sie Elemente des Domains sind, auch automatisch im Domain benachbart (miteinander verbunden). Die Umkehrung gilt offensichtlich nicht. Die beiden Autoren zeigen, dass für jedes abgeschlossene Condorcet Domain  $\mathcal{D}$  (und damit insbesondere für jedes maximale Condorcet Domain), der assoziierte Graph  $G_{\mathcal{D}}$  ein Mediagraph<sup>8</sup> ist. Wir werden in Abschnitt 5 die Mediagraphen der maximalen Condorcet Domains darstellen und untersuchen.

Um alle Condorcet Domains zu bestimmen, genügt es somit zu untersuchen, welche Domains  $\mathcal{D} \in \mathcal{R}(X)$  Median Domains sind bzw. für welche Domains der assoziierte Graph ein Mediagraph ist. Für diese Untersuchung ist es notwendig zu bestimmen, welche Präferenztripel nicht zusammen in einem Domain auftreten dürfen - welche Tripel also zu Inkonsistenzen führen können. Im Folgenden werden wir diese Präferenztripel als Inkonsistenz-Tripel bezeichnen.

**Definition 10** (Inkonsistenz-Tripel). *Drei Präferenzrelationen  $R_1, R_2, R_3 \in \mathcal{R}(X)$  bezeichnet man als Inkonsistenz-Tripel auf dem Präferenzraum  $\mathcal{R}(X)$ , wenn keine Median-Ordnung existiert:*

$$R^{med}(R_1, R_2, R_3) = [R_1, R_2] \cap [R_1, R_3] \cap [R_2, R_3] = \emptyset.$$

Ward [War65] zeigt, dass für den strikten Präferenzraum Zyklentreiheit auf allen Alternativentripeln auch Zyklentreiheit auf dem gesamten Domain garantiert. Wir werden in Abschnitt 3.3 sehen, dass man dies auch auf den schwachen und quasitransitiven Präferenzraum übertragen kann. Dies kann bei den hier untersuchten Medianräumen angewendet werden. Statt das Gesamtdomain zu untersuchen, genügt es, die Domains auf allen Alternativentripeln hinsichtlich ihrer Median-Stabilität zu analysieren. Aus

<sup>7</sup> Ein Condorcet Domain  $\mathcal{D}$  ist nach Puppe und Slinko abgeschlossen, wenn die Mehrheitsrelation für jedes ungerade Profil  $p \in D^n$  in  $\mathcal{D}$  liegt.

<sup>8</sup> In der Graphentheorie bezeichnet man einen ungerichteten Graphen als Mediagraphen, wenn für drei beliebige, paarweise verschiedene Knoten  $a, b, c$  des Graphen genau ein Medianknoten im Graphen existiert. Dieser Medianknoten muss gleichzeitig Element eines kürzesten Pfades zwischen  $a$  und  $b$ , eines kürzesten Pfades zwischen  $a$  und  $c$  und eines kürzesten Pfades zwischen  $b$  und  $c$  sein (vgl. z.B. [KM99]).

diesem Grund leiten wir im folgenden Abschnitt alle Inkonsistenz-Tripel für den strikten, schwachen und quasitransitiven Präferenzraum mit drei Alternativen her.

**Inkonsistenz-Tripel** Um die Inkonsistenz-Tripel für die unterschiedlichen Präferenzräume zu bestimmen, ist es hilfreich, sich zunächst die Betweenness-Relation für repräsentative Präferenzpaare zu verdeutlichen. Anschließend kann man daraus ableiten, für welche Tripel keine Median-Ordnung existiert. Die

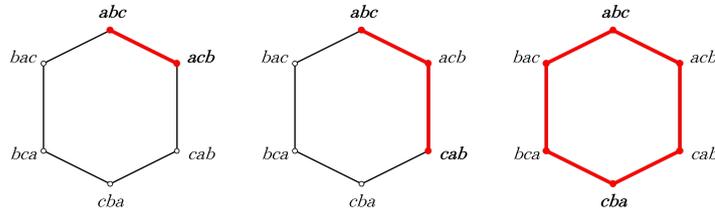


Abbildung 3.11: Betweenness-Intervalle auf dem strikten Präferenzraum für drei Alternativen

Betweenness-Relation für den strikten Präferenzraum über  $X = \{a, b, c\}$  ist in Abbildung 3.11 dargestellt. Dabei repräsentieren jeweils die beiden fett gedruckten Präferenzen die Grenzen des Betweenness-Intervalls und die rot markierten Präferenzen die Elemente des jeweiligen Intervalls. Die roten Verbindungslinien stellen alle kürzesten Pfade zwischen den beiden Intervallgrenzen dar. Die linke Abbildung zeigt das Intervall  $[abc, acb] = \{abc, acb\}$ . Man erkennt, dass keine weitere Präferenz zwischen den beiden Präferenzen liegt - sie somit auch benachbart sind. Die mittlere Abbildung zeigt das Betweenness-Intervall  $[abc, cab] = \{abc, acb, cab\}$ , welches neben den Intervallgrenzen zusätzlich die Präferenz  $acb$  enthält. Rechts ist das Intervall  $[abc, cba] = \mathcal{R}(X)$  dargestellt. Da  $abc$  und  $cba$  invers zueinander sind, also in keiner binären Entscheidung übereinstimmen, liegen alle Präferenzen in  $\mathcal{R}(X)$  zwischen den beiden Präferenzen. Diese drei Fälle repräsentieren alle möglichen Betweenness-Intervall-Strukturen auf dem gegebenen Präferenzraum.

Fügt man nun zu diesen Paaren eine dritte Präferenz hinzu, lässt sich überprüfen, ob ein Median existiert und somit alle Inkonsistenz-Tripel bestimmen. Für das Präferenzpaar  $(abc, acb)$  führt das Hinzufügen einer dritten Präferenz zu folgenden (eindeutigen) Median-Ordnungen:

- $R^{med}(abc, acb, \mathbf{cab}) = acb$
- $R^{med}(abc, acb, \mathbf{cba}) = acb$
- $R^{med}(abc, acb, \mathbf{bca}) = abc$
- $R^{med}(abc, acb, \mathbf{bac}) = abc$

Somit ergibt sich für diese Fälle kein Inkonsistenz-Tripel. Betrachten wir den Fall auf der rechten Seite in Abbildung 3.11. Da für das Präferenzpaar  $(abc, cba)$  gilt, dass das Betweenness-Intervall dem gesamten Präferenzraum  $\mathcal{R}(X)$  entspricht, muss der Median aus diesen beiden Präferenzen und einer dritten Präferenz immer der hinzugefügten Präferenz entsprechen:

$$R^{med}(abc, cba, \mathbf{R}) = R \text{ für alle } R \in \mathcal{R}(X).$$

Somit erhalten wir auch hier keine Inkonsistenz-Tripel. Für den mittleren Fall in Abbildung 3.11 können wir jedoch ein solches Tripel erzeugen. Betrachten wir zunächst alle möglichen Fälle:

- $R^{med}(abc, cab, \mathbf{acb}) = acb$

- $R^{med}(abc, cab, \mathbf{cba}) = cab$
- $R^{med}(abc, cab, \mathbf{bca}) = \emptyset$
- $R^{med}(abc, cab, \mathbf{bac}) = abc$

Man erkennt, dass für das Tripel  $(abc, cab, bca)$  kein Median existiert. Genau dieses Tripel erzeugt auch den Condorcet-Zyklus  $a \succ b \succ c \succ a$ , wenn man den paarweisen Mehrheitsvergleich anwendet. Ein Domain, welches diese drei Präferenzen enthält, ist somit weder ein Condorcet Domain noch ein Median Domain. Dies deckt sich mit der zentralen Aussage, dass die Klasse der abgeschlossenen Condorcet Domains äquivalent zur Klasse der Median Domains ist. Das einzige weitere Inkonsistenz-Tripel für  $m = 3$  im strikten Präferenzraum ist das Tripel  $(acb, cba, bac)$ , welches strukturell gleich zum ersten Tripel ist und dem Condorcet-Zyklus  $c \succ b \succ a \succ c$  entspricht. Wir nennen die Menge, welche alle Inkonsistenz-Tripel für den strikten Präferenzraum und drei Alternativen enthält,  $IT_s = \{(abc, cab, bca), (acb, cba, bac)\}$ . Abbildung 3.12 zeigt beide Inkonsistenz-Tripel.

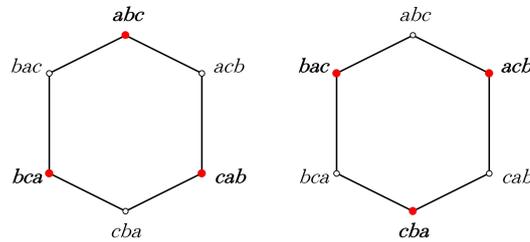


Abbildung 3.12: Inkonsistenz-Tripel auf dem strikten Präferenzraum für drei Alternativen

Mithilfe dieser beiden Tripel lässt sich sofort bestimmen, ob ein Domain  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}(\{a, b, c\})$  ein Condorcet Domain bzw. ein Median Domain ist:

$$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}(\{a, b, c\}) \text{ ist ein abgeschlossenes Condorcet Domain} \Leftrightarrow \nexists (R_1, R_2, R_3) \in IT_s : R_1, R_2, R_3 \in \mathcal{D}.$$

Betrachten wir nun den Fall  $m = 3$  für den schwachen Präferenzraum. Hier gilt es zu berücksichtigen, dass zwei benachbarte Präferenzen nicht immer die gleiche Kemeny-Distanz aufweisen müssen. Einige benachbarte Präferenzen, wie z.B.  $abc$  und  $(ab)c$ , unterscheiden sich nur in einer binären Entscheidung und haben somit die Distanz eins. Es existieren jedoch auch benachbarte Paare, wie z.B.  $(ab)c$  und  $(abc)$ , die eine Kemeny-Distanz von zwei aufweisen, da sich die Präferenzen in den beiden binären Entscheidungen bzgl.  $c \succeq a$  und  $c \succeq b$  unterscheiden. Die beiden Präferenzen sind dennoch benachbart, da keine Präferenz aus dem Präferenzraum zwischen ihnen liegt:  $[(ab)c, (abc)] = \{(ab)c, (abc)\}$ . Die Betweenness-Relation ist für den schwachen Präferenzraum über  $X = \{a, b, c\}$  und Paare, welche die Präferenz  $abc$  enthalten (ohne das Paar  $(abc, (abc))$ ), in Abbildung 3.13 dargestellt. Dabei stellen die rot markierten Präferenzen, wie bereits oben erklärt, die Elemente des Betweenness-Intervalls und die roten Linien zwischen den Intervallgrenzen die kürzesten Pfade zwischen diesen beiden Präferenzen dar. Die Länge des Pfades entspricht den aufsummierten Kemeny-Distanzen aller Präferenzen auf dem Pfad. Man erkennt, dass für die Paare  $(abc, a(bc)), (abc, acb), (abc, (ac)b)$  und  $(abc, cab)$  der kürzeste Pfad jeweils eindeutig ist und graphentheoretisch eine Kette darstellt. Für die Paare  $(abc, c(ab))$  und  $(abc, cba)$  trifft dies nicht zu. Hier existieren mehrere kürzeste Pfade. Das Präferenzpaar rechts unten  $(abc, cba)$  erzeugt, wie bereits im Fall der strikten Präferenzordnung, den gesamten Präferenzraum als Betweenness-Intervall  $[abc, cba] = \mathcal{R}(X)$ . In Abbildung 3.14 sind die restlichen fünf repräsentativen Betweenness-Intervalle dargestellt. Nachdem

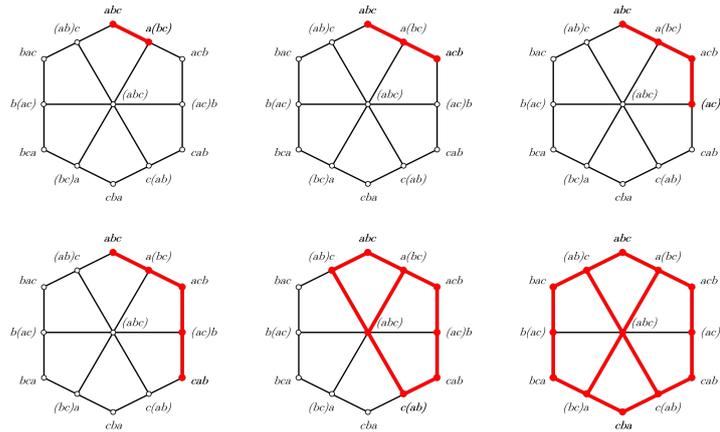


Abbildung 3.13: Betweenness-Intervalle auf dem schwachen Präferenzraum für drei Alternativen

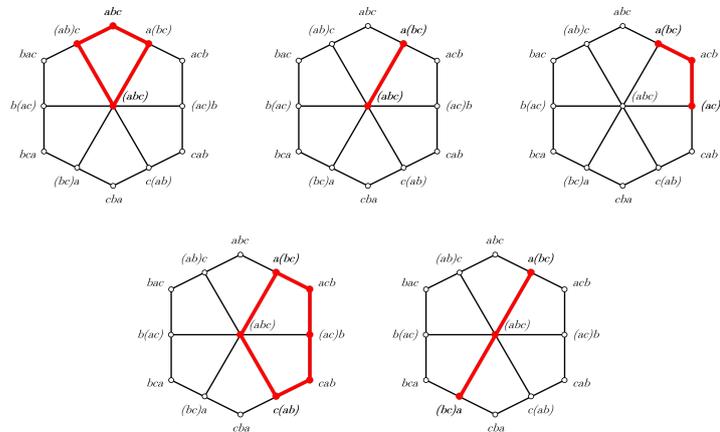


Abbildung 3.14: Betweenness-Intervalle auf dem schwachen Präferenzraum für drei Alternativen, Fortsetzung

wir nun die Betweenness-Intervalle kennen, können wir erneut zu den Präferenzpaaren eine dritte Präferenz hinzufügen und überprüfen, ob eine Median-Ordnung existiert. Da diese Untersuchung sehr viele Fälle umfasst und die Vorgehensweise der für den strikten Präferenzraum entspricht, betrachten wir an dieser Stelle nur das Ergebnis. Es lassen sich insgesamt neun Inkonsistenz-Tripel-Strukturen identifizieren. Abbildung 3.15 zeigt diese Strukturen. Wie bereits in Abschnitt 3.1 beschrieben, existieren bei schwachen Präferenzordnungen neben dem „klassischen“ Condorcet-Zyklus  $i \succ j \succ k \succ i$  (strikt-strikter Zyklus) weitere Zyklen der paarweisen Mehrheitsentscheidung, welche sich in die beiden Gruppen  $i \succ j, j \succ k, i \sim k$  (strikt-schwacher Zyklus) und  $i \sim j, j \sim k, i \succ k$  (schwach-strikter Zyklus) unterteilen lassen. Betrachten wir die erste Struktur (links oben) in der Abbildung, so erkennen wir, dass eine Mehrheitsabstimmung über die binären Entscheidungen zum Ergebnis  $(a \sim c, c \sim b, a \succ b)$  führt - also einem schwach-strikten Zyklus. Dieses Beispiel ist oben in Tabelle 3.6 ausgeführt. Alle sechs Inkonsistenz-Tripel-Strukturen in der oberen und unteren Reihe aus Abbildung 3.15 erzeugen jeweils einen Zyklus dieses Typs. In der mittleren Reihe führt das Tripel  $(abc, cab, bca)$  zu dem bereits aus dem Fall der strikten Präferenzordnung bekannten strikt-strikten Zyklus. Das Beispiel ist in der Mitte der Tabelle 3.6 beschrieben. Die beiden anderen Tripel in der mittleren Reihe erzeugen einen strikt-schwachen Zyklus. Tabelle 3.6 (unten) führt dies am Beispiel  $((abc), (ac)b, bca)$  aus.

Die in Abbildung 3.15 dargestellten Inkonsistenz-Tripel sind nur Repräsentanten der jeweiligen Struktur. Für jede Struktur lassen sich 2, 6 oder 12 verschiedene Tripel finden. Insgesamt existieren 64

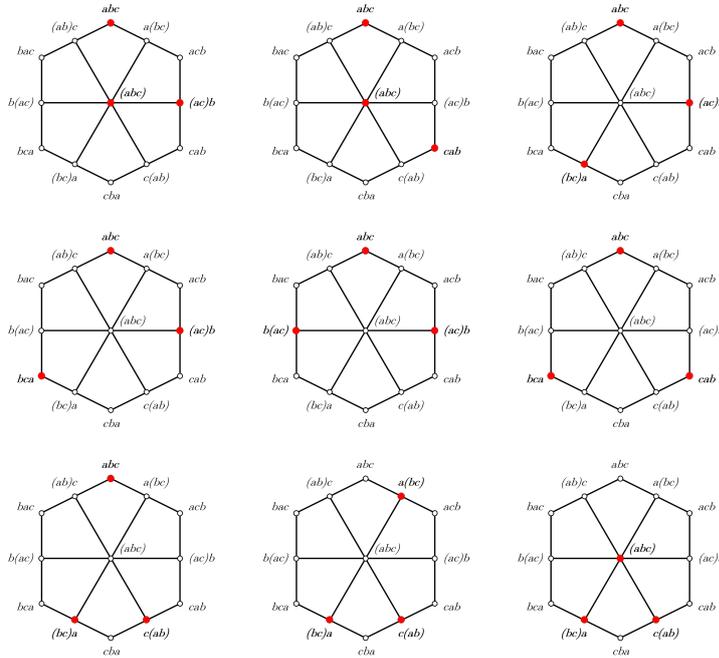


Abbildung 3.15: Inkonsistenz-Tripel-Strukturen auf dem schwachen Präferenzraum für drei Alternativen

Präferenz	$a \succeq b$	$b \succeq a$	$a \succeq c$	$c \succeq a$	$b \succeq c$	$c \succeq b$
$abc$	1	0	1	0	1	0
$(abc)$	1	1	1	1	1	1
$(ac)b$	1	0	1	1	0	1
$(a \sim c), (c \sim b), (a \succ b)$	1	0	1	1	1	1
Präferenz	$a \succeq b$	$b \succeq a$	$a \succeq c$	$c \succeq a$	$b \succeq c$	$c \succeq b$
$abc$	1	0	1	0	1	0
$cab$	1	0	0	1	0	1
$bca$	0	1	0	1	1	0
$(a \succ b), (b \succ c), (c \succ a)$	1	0	0	1	1	0
Präferenz	$a \succeq b$	$b \succeq a$	$a \succeq c$	$c \succeq a$	$b \succeq c$	$c \succeq b$
$abc$	1	0	1	0	1	0
$(ac)b$	1	0	1	1	0	1
$bca$	0	1	0	1	1	0
$(a \succ b), (b \succ c), (a \sim c)$	1	0	1	1	1	0

Tabelle 3.6: Beispiele für inkonsistente Mehrheitsabstimmungen der Formen  $(i \sim j, j \sim k, i \succ k)$ ,  $(i \succ j \succ k \succ i)$  und  $(i \succ j, j \succ k, i \sim k)$  auf dem schwachen Präferenzraum mit vier Alternativen

Inkonsistenz-Tripel. Diese sind in Anhang A.1 aufgelistet. Im Folgenden bezeichnen wir die Menge, welche alle Inkonsistenz-Tripel für den schwachen Präferenzraum mit drei Alternativen enthält,  $IT_w$ .

Abschließend betrachten wir den Fall  $m = 3$  für den quasitransitive Präferenzraum. Im Unterschied zum schwachen Präferenzraum gilt hier wieder, dass die Kemeny-Distanz zweier benachbarter Präferenzen konstant ist (wie bereits bei der strikten Präferenzordnung) und eins beträgt. Abbildung 3.16 zeigt

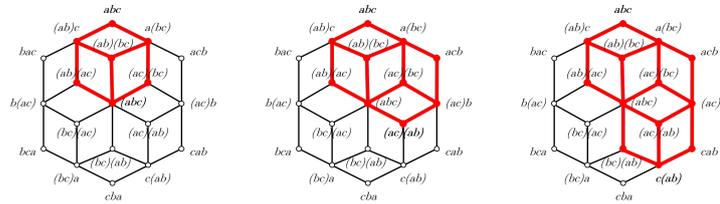


Abbildung 3.16: Betweenness-Intervalle auf dem quasitransitiven Präferenzraum für drei Alternativen

beispielhaft drei Betweenness-Intervalle für die quasitransitive Präferenzordnung. Nach dem gleichen Prinzip wie für den strikten und den schwachen Präferenzraum lassen sich auch hier die Inkonsistenz-Tripel-Strukturen bestimmen. Im Unterschied zum schwachen Präferenzraum existieren für den quasitransitiven Präferenzraum nur zwei Zyklustypen (strikt-strikt und strikt-schwach), da für die Indifferenzrelation keine Transitivität gefordert wird. Dies hat zur Folge, dass obwohl der quasitransitive Präferenzraum eine Obermenge des schwachen Präferenzraums ist ( $\mathcal{R}_{qt}(\{a, b, c\}) \supset \mathcal{R}_w(\{a, b, c\})$ ), die Anzahl der Inkonsistenz-Tripel-Strukturen kleiner ist und nur sechs solcher Strukturen identifiziert werden können. Diese Strukturen sind in Abbildung 3.17 illustriert. Ein Beispiel für einen strikt-schwachen Zyklus mit quasitransitiven

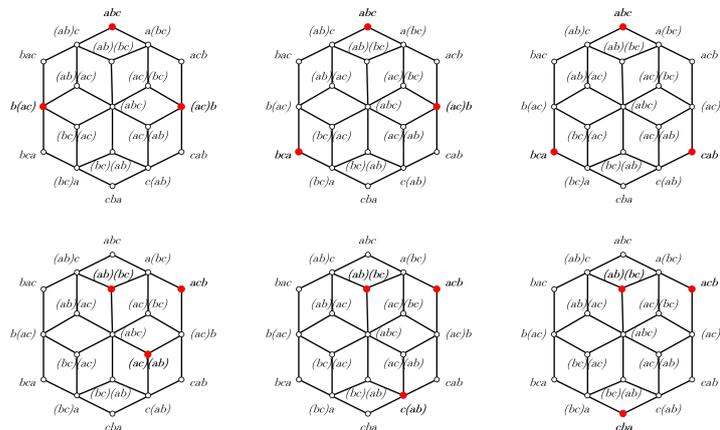


Abbildung 3.17: Inkonsistenz-Tripel-Strukturen auf dem quasitransitiven Präferenzraum für drei Alternativen

Präferenzen ist in Tabelle 3.7 aufgezeigt. Die Struktur oben rechts bildet einen strikt-strikten Zyklus und

Präferenz	$a \succeq b$	$b \succeq a$	$a \succeq c$	$c \succeq a$	$b \succeq c$	$c \succeq b$
$(ab)(bc)$	1	1	1	0	1	1
$acb$	1	0	1	0	0	1
$(ac)(ab)$	1	1	1	1	0	1
$(a \succ c), (c \succ b), (a \sim b)$	1	1	1	0	0	1

Tabelle 3.7: Beispiel einer inkonsistenten Mehrheitsabstimmung der Form  $(i \succ j, j \succ k, i \sim k)$  auf dem quasitransitiven Präferenzraum mit vier Alternativen

die restlichen fünf Strukturen einen strikt-schwachen Zyklus. Auch hier stellen die Tripel aus Abbildung

3.17 nur Repräsentanten ihrer jeweiligen Struktur dar, für welche man jeweils 2, 6 oder 12 unterschiedliche Inkonsistenz-Tripel finden kann. Insgesamt existieren 44 unterschiedliche Inkonsistenz-Tripel, welche im Anhang A.2 aufgelistet sind. Die Menge, welche alle diese Tripel enthält, bezeichnen wir im Folgenden mit  $IT_{qt}$ .

Die hier ermittelten Inkonsistenz-Tripel-Strukturen dienen uns später in den verschiedenen Algorithmen zur Bestimmung der Median Domains und damit der Condorcet Domains für die verschiedenen Präferenzräume. Wir werden in Abschnitt 4 nochmals genauer auf diese Strukturen eingehen.

## Übersicht Condorcet Domain Charakterisierungen

Nachdem wir uns mit den unterschiedlichen Charakterisierungen für Condorcet Domains beschäftigt haben, wollen wir im Folgenden diese Ergebnisse zusammenfassen. Monjardet erstellt in seiner Arbeit „Acyclic domains of linear orders: a survey“ [Mon09] eine Übersicht für den strikten Präferenzraum. Wir werden im Folgenden diese Ergebnisse für den schwachen und quasitransitiven Präferenzraum erweitern und dabei die Ergebnisse aus der Literatur bzgl. dieser Präferenzräume einarbeiten.

**Strikter Präferenzraum** Für den strikten Präferenzraum betrachten wir zunächst Monjardets Übersicht und erweitern diese um die Charakterisierung von Puppe und Slinko sowie unsere Überlegungen bzgl. der Inkonsistenz-Tripel:

**Theorem 9.** *Sei  $\mathcal{D}$  eine Teilmenge des Präferenzraums  $\mathcal{R}(X)$  der strikten Präferenzrelationen über eine Menge von Alternativen  $X$ . Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1.  $\mathcal{D}$  ist zyklensfrei für alle Profile  $p \in \mathcal{D}^n$  bezüglich der Mehrheitsrelation  $R_p^{maj}$ .
2. Für jedes Profil  $p \in \mathcal{D}^n$  ist die Mehrheitsrelation  $R_p^{maj}$  eine reflexive, antisymmetrische und transitive binäre Relation auf  $X$ .
3. Für eine ungerade Anzahl an Wählern  $n$  ist die Mehrheitsrelation  $R_p^{maj}$  bzgl. jedem Profil  $p \in \mathcal{D}^n$  eine reflexive, antisymmetrische, transitive und vollständige binäre Relation auf  $X$ .
4. Kein Profil auf  $\mathcal{D}$  erzeugt einen strikt-strikten Zyklus der Länge  $\ell \geq 3$ .
5. Kein Profil auf  $\mathcal{D}$  erzeugt einen strikt-strikten Zyklus der Länge  $\ell = 3$ .
6.  $\mathcal{D}$  ist value-restricted.
7.  $\mathcal{D}$  ist ein Median Domain.
8. Für jedes Tripel  $\{i, j, k\}$  paarweise verschiedener Elemente aus  $X$  enthält die Domain-Projektion  $\mathcal{D}_{/\{i, j, k\}}$  keines der Inkonsistenz-Tripel aus  $IT_s$ .

Aussage 1 entspricht unserer Definition für Condorcet Domains. Aussage 2 besagt, dass für ein beliebiges Profil aus einem Condorcet Domain die Mehrheitsrelation eine strikte (partielle) Ordnung (reflexive, antisymmetrische und transitive binäre Relation auf  $X$ ) erzeugt. Dies folgt direkt aus der Definition der Mehrheitsrelation und dem Fakt, dass aus der Transitivität der Mehrheitsrelation die Zyklensfreiheit folgt. Die Relation muss nicht vollständig sein, da bei einem Profil  $p$  mit einer geraden Anzahl an Wählern  $i, j \in X, i \neq j$  existieren können, für die gilt  $|\{R \in \mathcal{R}(X) | iRj\}| = \frac{n}{2}$  und somit weder  $iR_p^{maj}j$  noch  $jR_p^{maj}i$  gilt. Die Relation  $R_p^{maj}$  ist dann unvollständig auf  $X$ . Wenn jedoch die Anzahl der Wähler ungerade ist, so muss immer entweder  $|\{R \in \mathcal{R}(X) | iRj\}| > \frac{n}{2}$  oder  $|\{R \in \mathcal{R}(X) | jRi\}| > \frac{n}{2}$  gelten und aufgrund der Zyklensfreiheit muss die Relation  $R_p^{maj}$  eine strikte, vollständige Ordnung auf  $X$  induzieren.

Daraus folgt die Äquivalenz der Aussagen 1, 2 und 3. Die Äquivalenz der drei Aussagen 1, 4 und 5 liefert Ward mithilfe seiner latin-squarelessness Bedingung. Er zeigt, dass wenn ein Zyklus der Länge  $\ell \geq 3$  existiert, auch ein Zyklus der Länge 3 existieren muss (Aussagen 4 und 5). Da man einen Zyklus der Länge drei immer mit nur drei Präferenzen bzw. Wählern konstruieren kann, folgt auch automatisch die Äquivalenz der Aussagen 1 und 5. Die Äquivalenz zu Aussage 6 folgt aus Sens value-restriction Definition und Äquivalenz zu Aussage 7 folgt aus den Ergebnissen von Puppe und Slinko bzgl. Median Domains und Condorcet Domains. In Abschnitt 3.3 haben wir gezeigt, dass das Domain genau dann ein Median Domain ist, wenn es keines der Tripel aus  $IT_s$  enthält, was die Äquivalenz der Aussagen 7 und 8 erzeugt.

Diese Charakterisierungen für Condorcet Domains auf dem strikten Präferenzraum werden wir an verschiedenen Stellen der Arbeit verwenden - insbesondere bei der Bestimmung der Condorcet Domains in Kapitel 4.

**Schwacher Präferenzraum** Wir stellen in Anlehnung an Monjardets Theorem zu Condorcet Domains im strikten Präferenzraum eine Übersicht der Charakterisierungen für den schwachen Präferenzraum auf. Dabei machen wir erneut Gebrauch von den Ergebnissen von Puppe und Slinko [PS18], welche auch für den schwachen Präferenzraum definiert sind. Außerdem erweitern wir die Definition Wards [War65] auf den schwachen Präferenzraum und schließen das Theorem mit unserer Herleitung der Inkonsistenz-Tripel für den schwachen Präferenzraum.

**Theorem 10.** *Sei  $\mathcal{D}$  eine Teilmenge des Präferenzraums  $\mathcal{R}(X)$  der schwachen Präferenzrelationen über eine Menge von Alternativen  $X$ . Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1.  $\mathcal{D}$  ist zyklensfrei für alle Profile  $p \in \mathcal{D}^n$  bezüglich der Mehrheitsrelation  $R_p^{maj}$ .
2. Für jedes Profil  $p \in \mathcal{D}^n$  ist die Mehrheitsrelation  $R_p^{maj}$  eine reflexive und transitive binäre Relation auf  $X$ .
3. Für eine ungerade Anzahl an Wählern  $n$  ist die Mehrheitsrelation  $R_p^{maj}$  bzgl. jedem Profil  $p \in \mathcal{D}^n$  eine reflexive, transitive und vollständige binäre Relation auf  $X$ .
4. Kein Profil auf  $\mathcal{D}$  erzeugt einen strikt-strikten, einen strikt-schwachen oder einen schwach-strikten Zyklus der Länge  $\ell \geq 3$ .
5. Kein Profil auf  $\mathcal{D}$  erzeugt einen strikt-strikten, einen strikt-schwachen oder einen schwach-strikten Zyklus der Länge  $\ell = 3$ .
6.  $\mathcal{D}$  ist ein Median Domain.
7. Für jedes Tripel  $\{i, j, k\}$  paarweise verschiedener Elemente aus  $X$  enthält die Domain-Projektion  $\mathcal{D}_{/\{i, j, k\}}$  keines der Inkonsistenz-Tripel aus  $IT_w$ .

Die Aussagen 1, 2 und 3 sind analog zum Theorem für den strikten Präferenzraum. Aussage 1 ist unsere Definition für ein Condorcet Domain und die Äquivalenzen der Aussagen 2 und 3 folgen direkt aus der Definition der Mehrheitsrelation und der Unterscheidung zwischen einer geraden und ungeraden Anzahl an Wählern. Die Äquivalenz der Aussagen 4 und 5 und deren Äquivalenz zu Aussage 1 lässt sich zeigen, indem wir Wards Ansatz auf den schwachen Präferenzraum erweitern:

*Beweis.* Trivial ist die Implikation, dass aus Aussage 4 die Aussage 5 folgt, weshalb wir nur die Implikation in die andere Richtung betrachten.

- Angenommen ein Profil auf  $\mathcal{D}$  erzeugt einen strikt-strikten Zyklus der Länge  $\ell \geq 3$ . Hier können wir der Argumentation Wards folgen. Dieser Zyklus laute o.B.d.A.  $a \succ b \succ c \succ \dots \succ (\ell - 1) \succ \ell \succ a$ . Für die drei Alternativen  $a, (\ell - 1)$  und  $\ell$  gilt also  $(\ell - 1) \succ \ell$  und  $\ell \succ a$ . Zwischen  $a$  und  $(\ell - 1)$  kann entweder  $a \succ (\ell - 1)$  oder  $(\ell - 1) \succ a$  gelten. Für den ersten Fall erhalten wir direkt einen Zyklus der Länge 3:  $a \succ (\ell - 1) \succ \ell \succ a$ . Für den zweiten Fall erhalten wir einen neuen Zyklus der Länge  $(\ell - 1)$ :  $a \succ b \succ c \succ \dots \succ (\ell - 1) \succ a$ . Für den neuen Zyklus können wir die gleichen Überlegungen solange treffen, bis wir einen Zyklus der Länge drei erhalten müssen. Daraus folgt, dass wenn ein Profil einen strikt-strikten Zyklus der Länge  $\ell \geq 3$  erzeugt, es auch immer einen strikt-strikten Zyklus der Länge 3 erzeugt - und somit: Wenn kein Profil auf  $\mathcal{D}$  einen strikt-strikten Zyklus der Länge 3 erzeugt, dann kann auch kein Profil auf  $\mathcal{D}$  einen strikt-strikten Zyklus der Länge  $\ell \geq 3$  erzeugen.
- Angenommen ein Profil auf  $\mathcal{D}$  erzeugt einen strikt-schwachen Zyklus der Länge  $\ell \geq 3$ . An dieser Stelle müssen wir Wards Ausführungen erweitern, da dieser sich auf strikte Präferenzen beschränkt. Der Zyklus laute o.B.d.A.  $a \succ b \succ c \succ \dots \succ (\ell - 1) \succ \ell \sim a$ . Für die drei Alternativen  $a, (\ell - 1)$  und  $\ell$  gilt also  $(\ell - 1) \succ \ell$  und  $\ell \sim a$ . Zwischen  $a$  und  $(\ell - 1)$  muss entweder  $a \succ (\ell - 1)$ ,  $(\ell - 1) \succ a$  oder  $(\ell - 1) \sim a$  gelten. Für den ersten Fall erhalten wir einen strikt-schwachen Zyklus der Länge 3:  $a \succ (\ell - 1) \succ \ell \sim a$ . Für den zweiten Fall erhalten wir einen neuen strikt-strikten Zyklus der Länge  $(\ell - 1)$ :  $a \succ b \succ c \succ \dots \succ (\ell - 1) \succ a$ . Dieser muss, wie wir bereits wissen, auch einen strikt-strikten Zyklus der Länge 3 enthalten. Für den dritten Fall erhalten wir einen schwach-strikten Zyklus der Länge 3:  $\ell \sim a \sim (\ell - 1) \succ \ell$ . Daraus folgt, dass wenn ein Profil einen strikt-schwachen Zyklus der Länge  $\ell \geq 3$  erzeugt, es auch immer einen strikt-schwachen, strikt-strikten oder schwach-strikten Zyklus der Länge 3 erzeugt - und somit: Wenn kein Profil auf  $\mathcal{D}$  einen strikt-strikten, einen strikt-schwachen oder einen schwach-strikten Zyklus der Länge 3 erzeugt, dann kann auch kein Profil auf  $\mathcal{D}$  einen strikt-schwachen Zyklus der Länge  $\ell \geq 3$  erzeugen.
- Angenommen ein Profil auf  $\mathcal{D}$  erzeugt einen schwach-strikten Zyklus der Länge  $\ell \geq 3$ . Der Zyklus laute o.B.d.A.  $a \sim b \sim c \sim \dots \sim (\ell - 1) \sim \ell \succ a$ . Für die drei Alternativen  $a, (\ell - 1)$  und  $\ell$  gilt also  $(\ell - 1) \sim \ell$  und  $\ell \succ a$ . Zwischen  $a$  und  $(\ell - 1)$  muss entweder  $a \succ (\ell - 1)$ ,  $(\ell - 1) \succ a$  oder  $(\ell - 1) \sim a$  gelten. Für den ersten Fall erhalten wir einen strikt-schwachen Zyklus der Länge 3:  $\ell \succ a \succ (\ell - 1) \sim \ell$ . Für den zweiten Fall erhalten wir einen neuen schwach-strikten Zyklus der Länge  $\ell - 1$ :  $a \sim b \sim c \sim \dots \sim (\ell - 1) \succ a$ . Dieser muss, wie wir bereits wissen, auch einen strikt-strikten Zyklus der Länge 3 enthalten. Für den dritten Fall erhalten wir einen schwach-strikten Zyklus der Länge 3:  $a \sim (\ell - 1) \sim \ell \succ a$ . Daraus folgt, dass wenn ein Profil einen schwach-strikten Zyklus der Länge  $\ell \geq 3$  erzeugt, es auch immer einen strikt-schwachen oder schwach-strikten Zyklus der Länge 3 erzeugt - und somit: Wenn kein Profil auf  $\mathcal{D}$  einen strikt-schwachen oder einen schwach-strikten Zyklus der Länge 3 erzeugt, dann kann auch kein Profil auf  $\mathcal{D}$  einen schwach-strikten Zyklus der Länge  $\ell \geq 3$  erzeugen.

Die drei oben beschriebenen Fälle lassen sich zu folgender Implikation zusammenfassen: Wenn kein Profil auf  $\mathcal{D}$  einen strikt-strikten, einen strikt-schwachen oder einen schwach-strikten Zyklus der Länge 3 erzeugt, dann kann auch kein Profil auf  $\mathcal{D}$  einen strikt-strikten, einen strikt-schwachen oder einen schwach-strikten Zyklus der Länge  $\ell \geq 3$  erzeugen (Aussage 5  $\Rightarrow$  Aussage 4.). Aussage 1 und 4 müssen ebenfalls äquivalent sein, da auch für den schwachen Präferenzraum gelten muss, dass die Zyklenfreiheit garantiert ist, wenn keine Zyklen der Länge  $\ell \geq 3$  auftreten.  $\square$

Die Äquivalenz der Aussagen 1 und 6 folgt aus den Ergebnissen von Puppe und Slinko bzgl. Median Domains und Condorcet Domains. Die in Abschnitt 3.3 beschriebenen Inkonsistenz-Tripel und ihre Ver-

bindung zu den Median Domains erzeugen auch für den schwachen Präferenzraum die Äquivalenz der Aussagen 6 und 7.

**Quasitransitiver Präferenzraum** Für den quasitransitiven Präferenzraum sind die Ergebnisse von Puppe und Slinko weiterhin gültig. Die Definition Wards muss ähnlich zum schwachen Präferenzraum angepasst werden. Wir orientieren uns strukturell erneut am Theorem Monjardets:

**Theorem 11.** *Sei  $\mathcal{D}$  eine Teilmenge des Präferenzraums  $\mathcal{R}(X)$  der quasitransitiven Präferenzrelationen über eine Menge von Alternativen  $X$ . Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1.  $\mathcal{D}$  ist zyklensfrei für alle Profile  $p \in \mathcal{D}^n$  bezüglich der Mehrheitsrelation  $R_p^{maj}$ .
2. Für jedes Profil  $p \in \mathcal{D}^n$  ist die Mehrheitsrelation  $R_p^{maj}$  eine reflexive binäre Relation auf  $X$ , deren strikter Teil transitiv ist.
3. Für eine ungerade Anzahl an Wählern  $n$  ist die Mehrheitsrelation  $R_p^{maj}$  bzgl. jedem Profil  $p \in \mathcal{D}^n$  eine reflexive und vollständige binäre Relation auf  $X$ , deren strikter Teil transitiv ist.
4. Kein Profil auf  $\mathcal{D}$  erzeugt einen strikt-strikten oder einen strikt-schwachen Zyklus der Länge  $\ell \geq 3$ .
5. Kein Profil auf  $\mathcal{D}$  erzeugt einen strikt-strikten oder einen strikt-schwachen Zyklus der Länge  $\ell = 3$ .
6.  $\mathcal{D}$  ist ein Median Domain.
7. Für jedes Tripel  $\{i, j, k\}$  paarweise verschiedener Elemente aus  $X$  enthält die Domain-Projektion  $\mathcal{D}_{/\{i, j, k\}}$  keines der Inkonsistenz-Tripel aus  $IT_{qt}$ .

Die Aussagen 1, 2 und 3 sind identisch zu den Aussagen für strikte und schwache Präferenzräume und nur dementsprechend angepasst. Der Nachweis der Äquivalenz der Aussagen 1, 4 und 5 erfolgt analog zum schwachen Präferenzraum mit dem einzigen Unterschied, dass für quasitransitive Präferenzrelationen keine schwach-strikten Zyklen existieren (da für den schwachen Teil der Relation keine Transitivität gefordert wird) und somit nur dieser Fall im Beweis wegfällt. Der restliche Beweis ist identisch zum Fall im schwachen Präferenzraum, weshalb an dieser Stelle auf eine Ausführung verzichtet wird. Die Äquivalenzen der Aussagen 1, 6 und 7 resultieren wieder aus den Ergebnissen von Puppe und Slinko zu Medianräumen und den in diesem Zusammenhang in dieser Arbeit definierten Inkonsistenz-Tripeln.

Nachdem wir uns einen Überblick über die verschiedenen Charakterisierungen für Condorcet Domains in strikten, schwachen und quasitransitiven Präferenzräumen verschafft haben, beschäftigten wir uns zunächst mit verschiedenen Verfahren zum Erzeugen bestimmter (großer) Condorcet Domains. Danach benutzen wir die gewonnenen Kenntnisse, um sie in verschiedenen Algorithmen anzuwenden und Condorcet Domains zu berechnen.

### 3.4 Verfahren zum Erzeugen von (großen) Condorcet Domains

Ein Forschungsgebiet im Bereich der Condorcet Domains beschäftigt sich mit der Suche nach großen Condorcet Domains. Dabei spielen insbesondere Verfahren zur Konstruktion der Domains sowie Abschätzungen der maximalen Größe von CDs bei gegebener Größe der Alternativenmenge mithilfe von Ober- und Unterschranken eine Rolle. Im Folgenden werden wir einige der bekanntesten Verfahren kurz vorstellen.

### 3.4.1 Alternating und Replacement Struktur nach Fishburn

Fishburn definiert in seinen Arbeiten „Acyclic sets of linear orders“ und „Acyclic sets of linear orders: A progress report“ ([Fis96], [Fis02]) zwei Methoden, um Condorcet Domains zu erzeugen - die Alternating und die Replacement Struktur. Beide Methoden sind nur für den strikten Präferenzraum anwendbar. Ziel der Alternating Struktur ist das Erzeugen von sehr großen Condorcet Domains. Zur Beschreibung der Struktur verwendet er never conditions und kombiniert single-peaked- und single-dipped-never conditions<sup>9</sup> wie folgt:

**Definition 11** (Alternating Struktur (vgl. [Fis96])). *Ein Domain  $\mathcal{D}$  erfüllt die Alternating Struktur, wenn eine lineare Ordnung  $x_1x_2 \dots x_m$  über alle Alternativen existiert, sodass für alle  $R \in \mathcal{D}$  und für alle  $1 \leq i < j < k \leq m$  gilt, entweder*

$$(x_j N_{\{x_i, x_j, x_k\}} 1 \text{ für gerade } j) \text{ und } (x_j N_{\{x_i, x_j, x_k\}} 3 \text{ für ungerade } j)$$

oder

$$(x_j N_{\{x_i, x_j, x_k\}} 3 \text{ für gerade } j) \text{ und } (x_j N_{\{x_i, x_j, x_k\}} 1 \text{ für ungerade } j).$$

Für vier Alternativen und die lineare Ordnung  $abcd$  können wir folgendes Domain mithilfe der Alternating Struktur erzeugen:

$$\mathcal{D}_4 = \{abcd, acbd, acdb, cabd, cadb, cdab, cdab, dcab, dcba\}.$$

Wenn wir dieses Domain analysieren, erkennen wir, dass für das Tripel  $\{a, b, c\}$  die Alternative  $b$  niemals an Platz 1, für das Tripel  $\{a, b, d\}$  die Alternative  $b$  niemals an Platz 1, für das Tripel  $\{a, c, d\}$  die Alternative  $c$  niemals an Platz 3 und für das Tripel  $\{b, c, d\}$  die Alternative  $c$  niemals an Platz 3 ist. Fishburn berechnet für  $m \leq 25$  die Größen dieser Domains. Eine geschlossene Formel für die Größe  $AS(m)$  dieser Domains mit  $m > 2$  findet sich bei Galambos und Reiner [GR08]:

$$2^{m-3}(m+3) - \binom{m-2}{\frac{m}{2}-1} \left(m - \frac{3}{2}\right), \text{ für gerade } m$$

$$2^{m-3}(m+3) - \binom{m-1}{\frac{m-1}{2}} \left(\frac{m-1}{2}\right), \text{ für ungerade } m$$

Des Weiteren zeigt er, dass diese Domains für  $m \in \{4, 5, 6\}$  die Maximum Domains darstellen mit den Größen 9, 20 und 45. Unter Maximum Domains verstehen wir maximale Condorcet Domains, welche für einen bestimmten Präferenzraum unter allen maximalen Domains die größte Anzahl an Elementen aufweisen. Für  $m \geq 16$  weist Fishburn nach, dass ein Verfahren existiert, welches noch größere Condorcet Domains konstruiert. Die von ihm entwickelte Replacement Struktur verwendet zwei Condorcet Domains auf disjunkten Alternativenmengen und kombiniert diese, sodass ein neues Condorcet Domain auf der Vereinigung der Alternativenmengen entsteht:

**Definition 12** (Replacement Struktur (vgl. [Fis96])). *Gegeben seien die beiden disjunkten Alternativenmengen  $X_1$  und  $X_2$  mit  $|X_1| = r + 1$  und  $|X_2| = s$  sowie die beiden Condorcet Domains  $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{R}(X_1)$  und  $\mathcal{D}_2 \subseteq \mathcal{R}(X_2)$ . Wähle eine Alternative  $j \in X_1$  und ersetze diese in  $\mathcal{D}_1$  durch jede Präferenz in  $\mathcal{D}_2$ .*

<sup>9</sup> Single-peaked Domains lassen sich mithilfe von never conditions beschreiben (vgl. z.B. [Mon09]). Nehmen wir o.B.d.A. an, dass die innere Ordnung des single-peaked Domains  $a \succ b \succ c \succ \dots \succ m$  lautet. Für die Projektion auf ein Tripel mit den alphabetisch aufsteigend sortierten Alternativen  $i, j, k$  kann  $j$  niemals an letzter Stelle auftreten. Daraus folgt, dass im single-peaked Domain für alle alphabetisch sortierten Tripel  $\{i, j, k\} \subseteq X$  die never condition  $j N_{\{i, j, k\}} 3$  gelten muss. Für single-dipped Domains gilt die Überlegung analog und es resultieren die never conditions  $j N_{\{i, j, k\}} 1$ .

Die daraus resultierenden Präferenzen bilden ein Condorcet Domain  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}(X)$  mit  $X = (X_1 \setminus j) \cup X_2$ , welches die Replacement Struktur nach Fishburn erfüllt.

Die Größe  $RS(m)$  dieser Domains erhält man durch Multiplikation der Größen der ursprünglichen Domains  $RS(m) = |\mathcal{D}_1| \cdot |\mathcal{D}_2|$ . Möglichst große Domains dieser Struktur lassen sich erzeugen durch die Kombination von Maximum Domains bzw. der größten bekannten Domains auf  $\mathcal{R}(X_1)$  und  $\mathcal{R}(X_2)$ . Tabelle 3.8 listet eine Übersicht über die maximalen Größen der Domains auf, die mithilfe dieser Strukturen erzeugt werden können.  $AS(m)$  erhalten wir aus der oben beschriebenen Formel.  $RS(m)_{max}$  ist davon abhängig,

$m$	$AS(m)$	$RS(m)_{max}$	$max D $
3	4	4	4
4	9	8	9
5	20	16	20
6	45	36	45
7	100	81	?
8	222	180	?
9	488	400	?
...	...	...	...
15	49.704	49.284	?
16	105.884	108.336	?

Tabelle 3.8: Größen für Alternating Struktur, Replacement Struktur und Maximum Domains (vgl. [Mon09])

wie groß die größten bekannten Domains sind, aus denen man das neue Domain zusammensetzt. Betrachten wir z.B.  $RS(m)_{max}$  für neun Alternativen. Ein Replacement Struktur Domain mit neun Alternativen basiert auf zwei Condorcet Domains mit fünf Alternativen. Um das größtmögliche Domain zu erzeugen, verwenden wir die größten bekannten Domains auf dem Präferenzraum mit fünf Alternativen. Diese haben eine Größe von 20, wodurch sich eine maximale Größe eines Replacement Struktur Domains mit neun Alternativen von  $20 \cdot 20 = 400$  ergibt. Da die Maximum Condorcet Domains nur bis  $m = 6$  bekannt sind, muss man sich für größere  $m$  an den größten bekannten Domains bedienen. Dies sind für  $7 \leq m \leq 16$  die Alternating Struktur Domains. Für die Konstruktion von  $RS(m)_{max}$  mit  $m = 15$  bzw.  $m = 16$  verwenden wir somit Alternating Struktur Domains:  $RS(15)_{max} = AS(8) \cdot AS(8) = 222 \cdot 222 = 49.284$  und  $RS(16)_{max} = AS(8) \cdot AS(9) = 222 \cdot 488 = 108.336$ . Ab  $m = 16$  erkennt man, dass  $RS(m)_{max}$  größer ist als  $AS(m)$ . Wir werden uns in Abschnitt 5.2 mit einer speziellen Form des Replacement Schemas auseinander setzen.

### 3.4.2 Bruhat-Relation nach Abello, Chameni-Nembua und Galambos und Reiner

Abello [Abe85] [Abe91], Chameni-Nembua [CN89]<sup>10</sup>, Galambos und Reiner [GR08] untersuchen in ihren Arbeiten ebenfalls Condorcet Domains für den strikten Präferenzraum hinsichtlich ihrer maximalen Größe. Dazu bedienen sie sich Werkzeugen aus der Mengenlehre und Kombinatorik. Sie definieren zunächst ein neutrales Element, welches o.B.d.A. als  $R_\alpha = abc \dots m$  bezeichnet wird. Für jede Präferenz  $R$  in

<sup>10</sup> Da das Originalwerk nur in französischer Sprache verfügbar ist, beruhen die Ausführungen in dieser Arbeit auf Sekundärliteratur von Monjardet [Mon09] und Galambos und Reiner [GR08] und Danilov et al. [DKK12].

$\mathcal{R}(X)$  ist die *Inversionsmenge* dieser Präferenz die Menge aller Paare  $(i, j) \in X \times X, i \neq j$ , für die  $R$  und  $R_\alpha$  nicht übereinstimmen:

$$inv(R) := \{(i, j) \in X \times X, i \neq j : iR_\alpha j \wedge jRi\}.$$

Betrachten wir ein Beispiel mit vier Alternativen. Das neutrale Element lautet  $R_\alpha = abcd$ . Für die Präferenz  $R = cbad$  lautet die Inversionsmenge  $inv(R) = \{(a, b), (a, c), (b, c)\}$ . Für diese Paare stimmt die Präferenz  $R$  nicht mit dem neutralen Element  $R_\alpha$  überein. Die Inversionsmenge des neutralen Elements ist die leere Menge und die Inversionsmenge des invertierten neutralen Elements ( $R_\omega$ ) ist die Menge aller geordneter Paare  $(i, j) \in X \times X, i \neq j$ . Dies muss auch die Inversionsmenge mit den eindeutig meisten Paaren sein.  $B(\mathcal{R}(X), 1)$  sei die Menge der Inversionsmengen aller Präferenzen aus  $\mathcal{R}(X)$ :

$$B(\mathcal{R}(X), 1) := \{inv(R) : R \in \mathcal{R}(X)\}.$$

Mithilfe dieser Menge lässt sich eine sogenannte Bruhat-Halbordnung definieren.

**Definition 13** (Schwache Bruhat-Relation, Bruhat-Halbordnung und Bruhat-Graph (vgl. z.B. [DKK12])).  
 Für die Relation  $\ll$  und alle  $R, R' \in \mathcal{R}(X)$  gilt,

$$R \ll R' \Leftrightarrow inv(R) \subseteq inv(R').$$

Die Relation  $\ll$  auf  $\mathcal{R}(X)$  bezeichnen wir als *schwache Bruhat-Ordnung*, die Halbordnung  $(\ll, \mathcal{R}(X))$  als *Bruhat-Halbordnung*. Eine Präferenz  $R$  überdeckt eine andere Präferenz  $R'$ , wenn die Inversionsmenge von  $R'$  eine echte Teilmenge der Inversionsmenge von  $R$  ist und genau ein Element weniger beinhaltet. Den gerichteten Bruhat-Graph erhält man, indem man zwei Knoten (Präferenzen) dann mit einer gerichteten Kante verbindet, wenn die zweite Präferenz die erste Präferenz überdeckt. Der zugrunde liegende ungerichtete Graph wird als *Bruhat-Graph* bezeichnet.

Der Bruhat-Graph entspricht unserer Darstellung des Präferenzraums für strikte Ordnungen, welche wir bereits zu Beginn des Abschnitts 3.1 illustriert haben. Lediglich die mathematische Beschreibung dieser Graphen (hier als halbgeordnete Menge statt als symmetrische Gruppe) unterscheidet sich, bietet allerdings neue Möglichkeiten zum Identifizieren von Condorcet Domains. Abbildung 3.18 zeigt den gerichteten Bruhat-Graphen für drei Alternativen. Das neutrale Element  $R_\alpha = abc$  wird in der Abbildung

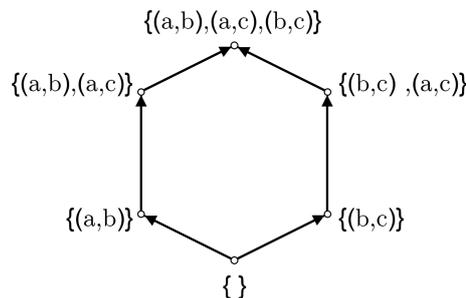


Abbildung 3.18: Gerichteter Bruhat-Graph für drei Alternativen

durch die Inversionsmenge  $inv(abc) = \{ \}$  dargestellt. Dieses ist verbunden mit den beiden Präferenzen  $bac$  und  $acb$ , da diese  $abc$  überdecken. In der Abbildung werden sie durch die beiden Inversionsmengen  $inv(bac) = \{(a, b)\}$  und  $inv(acb) = \{(b, c)\}$  repräsentiert. Nach diesem Schema kann man den gesamten gerichteten Bruhat-Graphen erzeugen.

Wir haben bereits gesehen, dass die Bruhat-Halbordnung auf dem strikten Präferenzraum ein eindeutiges minimales und ein eindeutiges maximales Element besitzt ( $R_\alpha$  und  $R_\omega$  sind minimal und maximal in dem Sinne, dass die Inversionsmengen der beiden Präferenzen die minimale bzw. maximale Anzahl an Elementen aufweist: 0 und  $\frac{m(m-1)}{2}$ ). Eine totalgeordnete Untermenge einer Halbordnung nennt sich Kette. Sie ist maximal, wenn man ihr kein Element aus der Halbordnung hinzufügen kann, ohne die totale Ordnung zu zerstören. In unserem Fall der Bruhat-Halbordnung ist jeder Pfad, der entlang des gerichteten Bruhat-Graphen verläuft, eine solche Kette. Eine maximale Kette einer Bruhat-Ordnung muss demnach die Elemente  $R_\alpha$  und  $R_\omega$  enthalten. Betrachten wir erneut den gerichteten Bruhat-Graphen aus Abbildung 3.18. Die beiden maximalen Ketten für diese Bruhat-Halbordnung lauten  $(abc, bac, bca, cba)$  und  $(abc, acb, cab, cba)$ .

Abello [Abe85] [Abe91] weist nach, dass jede maximale Kette in der Bruhat-Halbordnung ein maximales Condorcet Domain darstellt. Des Weiteren müssen diese Condorcet Domains zusammenhängend sein. Es muss also zwischen jedem Präferenzpaar ein Pfad aus benachbarten Präferenzen existieren, der innerhalb des Domains liegt.<sup>11</sup> Abello entwickelt Algorithmen zum Erzeugen von maximalen Ketten in der Bruhat-Halbordnung und findet damit gleichzeitig Unterschranken für die maximale Größe eines zusammenhängenden maximalen Condorcet Domains. Galambos und Reiner [GR08] beziehen sich auf diese Ergebnisse und definieren Äquivalenzklassen dieser maximalen Ketten, welche die gleichen Domains implizieren. Diese Äquivalenzklassen lassen sich durch Transpositionssequenzen (sogenannte maximal reduced decomposition) beschreiben. Chameni-Nembua [CN89] zeigt, dass die Bruhat-Halbordnung ein distributiver Verband ist<sup>12</sup> und distributive, überdeckende Teilverbände der Bruhat-Halbordnung ein Condorcet Domain bilden. Da Danilov, Karzanov und Koshevoy [DKK12] zeigen können, dass all diese Condorcet-Domain-Klassen äquivalent sind und sich insbesondere als sogenannte Tiling Domains darstellen lassen, werden wir nicht weiter auf die Beschreibung mithilfe der Bruhat-Halbordnung eingehen und uns im nächsten Abschnitt auf die von ihnen beschriebenen Tiling Domains konzentrieren.

### 3.4.3 Condorcet Domains vom Tiling Typ nach Danilov, Karzanov und Koshevoy

Danilov, Karzanov und Koshevoy nutzen in ihrer Arbeit „Condorcet domains of tiling type“ [DKK12] das Konzept der sogenannten *Rhombus-Parkettierung* (im Weiteren: *Tiling*), um Condorcet Domains zu konstruieren. Sie können mit Hilfe dieses Konzepts verschiedene Eigenschaften und Bedingungen herleiten, auf die wir im Folgenden genauer eingehen möchten. Die Idee basiert auf den grundlegenden Gedanken der Bruhat-Halbordnung, ermöglicht jedoch eine anschaulichere und intuitivere Konstruktion solcher Condorcet Domains.

Danilov, Karzanov und Koshevoy definieren zunächst  $m$  Vektoren  $\xi_1, \dots, \xi_m$  der gleichen Länge im  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Jeder Vektor repräsentiert dabei eine Alternative. Die Vektoren sind im Uhrzeigersinn um den Nullpunkt  $(0, 0)$  angeordnet. Abbildung 3.19 zeigt eine mögliche Darstellung der Vektoren für fünf Alternativen. Die Winkel zwischen den Vektoren sind dabei nicht entscheidend, sie müssen lediglich größer als  $0^\circ$  und in Summe kleiner als  $180^\circ$  sein. Zur besseren Veranschaulichung wählen wir im Folgenden jedoch gleich große Winkel zwischen den Vektoren, sodass symmetrische Figuren entstehen. Mithilfe dieser Vektoren lässt sich ein sogenanntes Zonogon  $Z$  konstruieren. Dazu setzt man die Vektoren ausgehend vom Nullpunkt in der Reihenfolge  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  sowie in umgekehrter Reihenfolge  $\xi_m, \xi_{m-1}, \dots, \xi_1$  aneinander und erhält ein symmetrisches  $2m$ -gon  $Z_m$ . Abbildung 3.20 zeigt ein 10-gon für fünf Alternativen. Wir bezeichnen den Punkt  $b(Z) := (0, 0)$  als Ursprung oder Nullpunkt und  $t(Z) := \xi_1 + \dots + \xi_m$  als Spitze des Zonogons. Danilov et al. definieren eine Aufteilung eines Zonogons als Tiling  $T$  von  $Z$ , wenn die

<sup>11</sup> Eine genaue Definition dieser Eigenschaft findet sich in Abschnitt 5.2.

<sup>12</sup> Halbordnungen mit einem minimalen und einem maximalen Element nennt man Verbände. Da auf diesem Verband der Schnitt und die Vereinigung zweier Inversionsmengen gültig sind, ist der Verband ein sogenannter distributiver Verband.

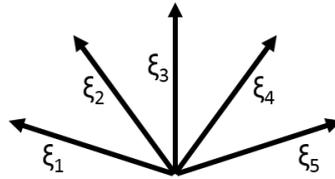


Abbildung 3.19: Beispiel Tiling-Vektoren für fünf Alternativen

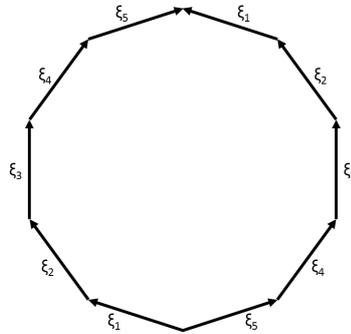


Abbildung 3.20: 10-gon  $Z_5$  für fünf Alternativen

gesamte Fläche des Zonogons vollständig in Rhomben aufgeteilt werden kann, wobei als Kanten nur die Vektoren  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  zulässig sind und jeder Vektor innerhalb des Zonogons Element von genau zwei Rhomben ist. Ein mögliches Tiling des Zonogons aus Abbildung 3.20 ist in Abbildung 3.21 dargestellt. Die Autoren können nachweisen, dass jedes mögliche Tiling eines Zonogons ein maximales Condorcet

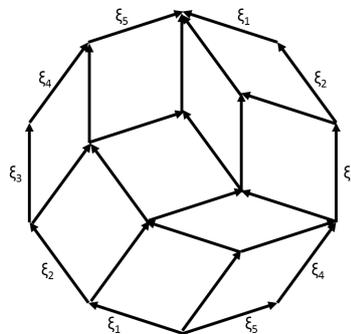


Abbildung 3.21: Beispiel Tiling für fünf Alternativen

Domain repräsentiert. Dazu steht jeder Vektor stellvertretend für eine Alternative aus  $X$  und eine strikte Präferenz wird durch einen (gerichteten) Pfad von  $b(Z)$  nach  $t(Z)$  dargestellt. Die Reihenfolge der Vektoren innerhalb des Pfades bestimmt die Reihenfolge der Alternativen in der strikten Präferenz.

Betrachten wir das Beispiel aus Abbildung 3.21. Die Menge der Alternativen sei  $X = \{a, b, c, d, e\}$ , wobei  $\xi_1$  für Alternative  $a$  stehe,  $\xi_2$  für Alternative  $b$  usw. Nehmen wir z.B. den Pfad  $(\xi_1, \xi_4, \xi_2, \xi_5, \xi_3)$ . Dieser steht für die Präferenz  $adbec$ . Wenn wir alle möglichen Pfade vom Ursprung zur Spitze des Zonogons zusammenfassen, erhalten wir das maximale Condorcet Domain:

$$\mathcal{D} = \{abcde, abdce, abdec, adbce, adbec, adebc, adecb, dabce, dabec, daebc, daecb, deabc, deacb, edabc, edacb, edcab, edcba\}.$$

Wie man anhand der Konstruktion des Tilings erkennt, muss das resultierende Domain immer zwei zueinander inverse Präferenzen (im Beispiel  $abcde$  und  $edcba$ ) enthalten - diese Eigenschaft des Domains ist für den strikten Präferenzraum äquivalent zur Eigenschaft „maximale Weite“<sup>13</sup>. Da nicht alle maximalen Condorcet Domains zwei zueinander inverse Präferenzen enthalten, lässt sich direkt schlussfolgern, dass sich nicht alle Condorcet Domains als Tiling eines Zonogons darstellen lassen. Man kann anhand des folgenden Beispiels erkennen, dass sich auch nicht jedes maximale Condorcet Domain mit maximaler Weite als Tiling eines Zonogons darstellen lässt.

**Beispiel 6.** Gegeben sei die Menge der Alternativen  $X = \{a, b, c\}$  sowie das maximale Condorcet Domain  $\mathcal{D} = \{abc, bac, cab, cba\}$ . Die Präferenzpaare  $\{abc, cba\}$  und  $\{bac, cab\}$  sind jeweils invers zueinander, wodurch das Domain die Eigenschaft maximale Weite erfüllt. Gesucht ist ein Tiling, welches dieses Condorcet Domain mit maximaler Weite repräsentiert. Für die Konstruktion des Zonogons bezeichnet der Index der Vektoren in diesem Beispiel direkt die Alternative, welche der jeweilige Vektor repräsentiert. Durch die zwei Paare inverser Präferenzen ergeben sich zwei Möglichkeiten zur Konstruktion des Zonogons, welche in Abbildung 3.22 dargestellt sind. In der linken Grafik bildet der Pfad aus den Vektoren  $(\xi_a, \xi_b, \xi_c)$

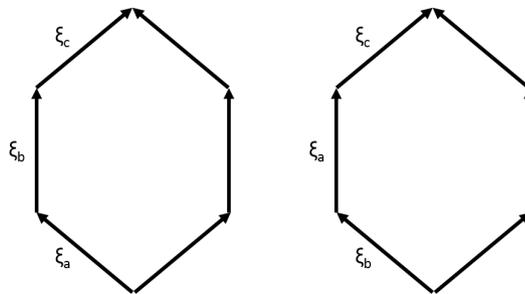


Abbildung 3.22: Mögliche Zonogons für das Domain  $\mathcal{D} = \{abc, bac, cab, cba\}$

die linke Seite des Zonogons (repräsentiert die Präferenz  $abc$ ) und der inverse Pfad aus den Vektoren  $(\xi_c, \xi_b, \xi_a)$  die rechte Seite des Zonogons (repräsentiert die Präferenz  $cba$ ). Für die rechte Grafik in Abbildung 3.22 bilden die Pfade aus den Vektoren  $(\xi_b, \xi_a, \xi_c)$  und  $(\xi_c, \xi_a, \xi_b)$  die Außenseiten des Zonogons. Versucht man die jeweils verbliebenen beiden Präferenzen ( $bac, cab$  für das linke Zonogon und  $abc, cba$  für das rechte Zonogon) einzufügen, so erhält man die Grafiken in Abbildung 3.23. Man erkennt, dass diese

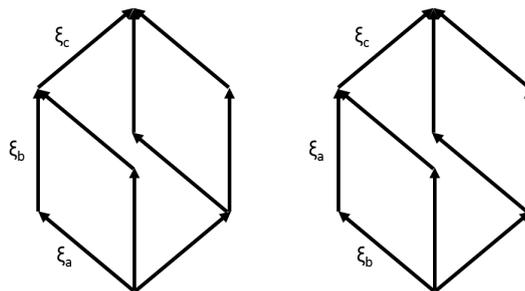


Abbildung 3.23: Mögliche Aufteilungen des Zonogons für das Domain  $\mathcal{D} = \{abc, bac, cab, cba\}$

Aufteilungen der Zonogons nicht einem Tiling nach Danilov, Karzanov und Koshevoy entsprechen, da die Zonogons nicht vollständig in Rhomben aufgeteilt sind und die inneren Vektoren jeweils nur Element eines Rhombus' sind. Somit können wir für das maximale Condorcet Domain  $\mathcal{D} = \{abc, bac, cab, cba\}$  kein Tiling finden.

<sup>13</sup> Eine genauere Erklärung dieser und weiterer Eigenschaften erfolgt in Kapitel 5.2.

Dieses einfache Beispiel verdeutlicht, dass die maximalen Condorcet Domains, welche sich durch Tilings darstellen lassen, sehr spezielle Condorcet Domains sind und nicht alle Condorcet-Domain-Strukturen abbilden können.

Danilov et al. können nachweisen, dass jedes Domain, welches sich als Tiling darstellen lässt, ein sogenanntes *peak-pit Domain* ist und jedes peak-pit Domain sich als Tiling darstellen lässt. Diese Domains entsprechen einer speziellen Klasse der im Abschnitt 3.3 beschriebenen value-restriction.

**Definition 14** (Peak-pit Domain [DKK12]). *Das Domain  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}(X)$  ist ein peak-pit Domain, wenn für jedes Tripel  $\{i, j, k\}$  paarweise verschiedener Elemente aus  $X$  gilt, es existiert ein  $\ell \in \{i, j, k\}$ , sodass  $\ell N_{\{i,j,k\}}1$  oder  $\ell N_{\{i,j,k\}}3$ .*

Somit sind auch alle single-peaked Domains peak-pit Domains<sup>14</sup> und als Tiling darstellbar. Für den Präferenzraum mit drei Alternativen existieren nur zwei mögliche Tilings, die in Abbildung 3.24 dargestellt sind. Diese Tilings repräsentieren das single-peaked Domain (links) und das single-dipped Domain

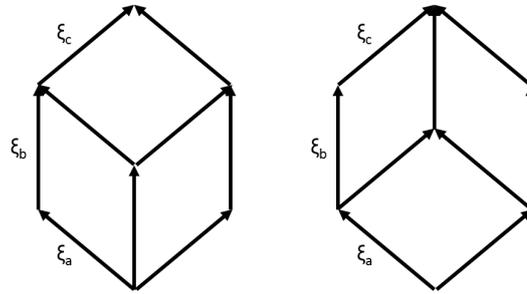


Abbildung 3.24: Alle Tilings für drei Alternativen

(rechts). Sie sind strukturell sehr ähnlich und unterscheiden sich lediglich darin, dass die Tilings um 180 Grad gegeneinander verdreht sich. Man kann außerdem ein Domain auf das andere abbilden, indem man alle Präferenzen eines Domains invertiert. Somit erzeugt man aus dem single-peaked das single-dipped und aus dem single-dipped das single-peaked Domain. Im Weiteren betrachten wir solche ähnlichen Strukturen als eine gemeinsame Condorcet-Domain-Struktur.

Diese Überlegungen lassen sich auf Domains mit mehr Alternativen übertragen. Dabei spielt die Bezeichnung der Vektoren (Welcher Vektor repräsentiert welche Alternative.) für uns im Weiteren ebenfalls keine Rolle, da keine strukturellen Unterschiede zwischen Domains entstehen, wenn man lediglich die Bezeichnung der Alternativen ändert. Auch diese Domains gehören in dieselbe Condorcet-Domain-Struktur, mit denen wir uns in Abschnitt 5.1 genauer auseinandersetzen werden. An dieser Stelle sei es nur wichtig zu verstehen, dass lediglich die Aufteilung des Zonogons eine Rolle spielt und nicht die Benennung der Vektoren oder die Drehung des Zonogons um 180 Grad. Auf dieser Basis lässt sich ebenfalls erkennen, dass zwei Tilings, welche spiegelsymmetrisch zur  $b(Z)$ - $t(Z)$ -Achse sind, zur gleichen Condorcet-Domain-Struktur gehören müssen.

Im Folgenden werden wir auf Grundlage dieser Überlegungen alle Tilings und damit alle maximalen peak-pit Domains für vier und fünf Alternativen herleiten. Wie bereits oben ausgeführt, sind alle Tilings begrenzt durch ein Zonogon mit den Pfaden  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$  und  $\xi_m, \xi_{m-1}, \dots, \xi_1$  als Außenseiten. Dies bedeutet, dass in  $b(Z)$  die beiden Vektoren  $\xi_1$  und  $\xi_m$  ansetzen. Im nächsten Schritt kann man das Tiling vom Ursprung ausgehend Ebene für Ebene aufbauen. Als erste Ebene bezeichnen wir hier die Vektoren, welche vom Ursprung ausgehen. Die zweite Ebene sind die Vektoren, die an die Vektoren der ersten Ebene

<sup>14</sup> Für single-peaked Domains gilt für alle Tripel die never condition  $j N_{\{i,j,k\}}3$ , wenn  $i, j$  und  $k$  anhand der inneren Ordnung sortiert sind.

ansetzen und so weiter. Dabei muss man Fallunterscheidungen auf den Ebenen 1 bis  $(m - 1)$  treffen.<sup>15</sup> Wie viele und welche Vektoren der nächsten Ebene setzen an die Vektoren der aktuellen Ebene an? Ein Fall, welcher für alle  $m$  leicht herzuleiten ist, ist die „volle Besetzung“ des Ursprungs mit allen Vektoren. In diesem speziellen Fall ist auf jeder Ebene eindeutig, welche Vektoren eingefügt werden müssen - es sind keine weiteren Fallunterscheidungen auf den Ebenen notwendig. In Abbildung 3.25 ist von links nach rechts die Vorgehensweise auf jeder Ebene abgebildet, wobei die hinzugefügten Vektoren jeweils rot eingefärbt sind. Dieser deterministische Fall lässt sich auf alle  $m$  übertragen und erzeugt immer das

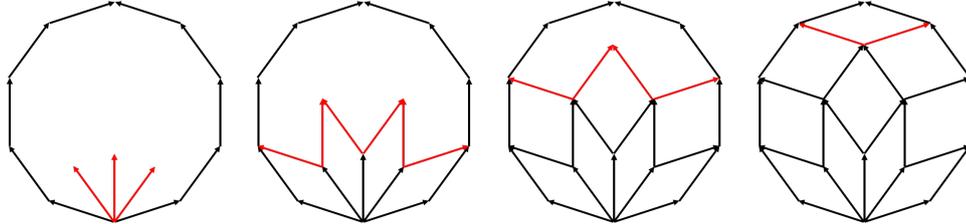


Abbildung 3.25: Konstruktion des Tilings mit voll besetztem Ursprung und fünf Alternativen

single-peaked Domain. Abgesehen von diesem Spezialfall muss man allerdings im Allgemeinen auf den Ebenen 2 bis  $(m - 1)$  weitere Fallunterscheidungen treffen, da es verschiedene Möglichkeiten gibt, Vektoren hinzuzufügen.

Für vier Alternativen lassen sich auf der ersten Ebene drei Fälle unterscheiden:

1. Hinzufügen der beiden Vektoren  $\xi_2$  und  $\xi_3$ : Der Ursprung ist voll besetzt und es ergibt sich das single-peaked Domain.
2. Hinzufügen entweder des Vektors  $\xi_2$  oder des Vektors  $\xi_3$ : O.B.d.A. betrachten wir nur den Fall  $\xi_2$ , da sich der andere Fall als Spiegelung des (Teil)Tilings an der  $b(Z)$ - $t(Z)$ -Achse darstellen lässt.
3. Hinzufügen keines Vektors.

Der erste Fall ist bereits eindeutig bestimmt. Somit müssen wir für die Entscheidung auf der zweiten Ebene nur noch die Fälle 2. und 3. untersuchen. Wir bezeichnen folgend einen Punkt innerhalb des Zonogons mit  $z_{ij\dots m}$ , wobei der Index die aufaddierten Vektoren bezeichnet und somit die Position des Punktes repräsentiert. Den Punkt  $z_{13}$  erhält man z.B., indem man die beiden Vektoren  $\xi_1$  und  $\xi_3$  auf den Ursprung des Zonogons addiert. Mithilfe dieser Beschreibung können wir nun die Fälle für die weiteren Ebenen untersuchen. Für den 2. Fall ist ein Teil der zweiten Ebene durch die geforderte Rhombenparkettierung eindeutig bestimmt: Füge an den Punkt  $z_2$  die Vektoren  $\xi_1$  und  $\xi_4$  sowie an den Punkt  $z_4$  den Vektor  $\xi_2$  hinzu. Eine Fallunterscheidung verbleibt jedoch:

- 2.a Füge an den Punkt  $z_2$  den Vektor  $\xi_3$  hinzu.
- 2.b Füge an den Punkt  $z_2$  den Vektor  $\xi_3$  nicht hinzu.

Diese Fallunterscheidung ist hinreichend, um den Rest des Tilings eindeutig zu bestimmen. In Abbildung 3.26 sind die beiden vollständigen Tilings dargestellt. Der Fall 3. erfordert auf der zweiten Ebene ebenfalls eine Fallunterscheidung:

- 3.a Füge an den Punkt  $z_1$  den Vektor  $\xi_4$  sowie an den Punkt  $z_4$  den Vektor  $\xi_1$  hinzu.
- 3.b Füge an den Punkt  $z_1$  die Vektoren  $\xi_3$  und  $\xi_4$  sowie an den Punkt  $z_4$  den Vektor  $\xi_1$  hinzu.

<sup>15</sup> Die Entscheidungen auf den Ebenen 1 bis  $(m - 1)$  determinieren die Entscheidung auf Ebene  $m$ .

3.c Füge an den Punkt  $z_1$  den Vektor  $\xi_4$  sowie an den Punkt  $z_4$  die Vektoren  $\xi_1$  und  $\xi_2$  hinzu.

Der Fall 3.c ist spiegelsymmetrisch zum Fall 3.b und wird deshalb nicht weiter betrachtet. Für die Fälle 3.a und 3.b sind auf allen weiteren Ebenen (drei und vier) die hinzuzufügenden Vektoren eindeutig bestimmt. Die beiden Tilings sind in Abbildung 3.26 dargestellt. Betrachten wir das Ergebnis der Fallunterschei-

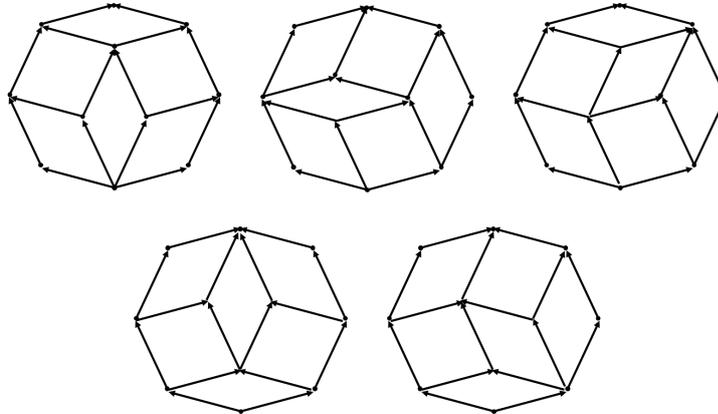


Abbildung 3.26: Tilings für vier Alternativen: Fall 1. (oben links), Fall 2.a (oben mitte), Fall 2.b (oben rechts), Fall 3.a (unten links), Fall 3.b (unten rechts)

dungen für  $m = 4$  in Abbildung 3.26, so erkennt man, dass die Tilings der Fälle 1. und 3.a sowie der Fälle 2.b und 3.b strukturell gleich sind und durch Drehung bzw. Spiegelung ineinander überführbar sind. Eine Drehung des Tilings erreicht man, wie bereits oben beschrieben, indem man die Präferenzen des Domains invertiert - also die Alternativen in allen Präferenzen in umgekehrter Reihenfolge notiert. Somit können wir jeweils eines der beiden Tilings streichen (hier: die Fälle 3.a und 3.b). Für vier Alternativen lassen sich demnach die drei Tilings aus Abbildung 3.27 bestimmen, welche drei verschiedene maximale Condorcet-Domain-Strukturen beschreiben. Diese stehen repräsentativ für alle maximalen peak-pit Domains mit vier

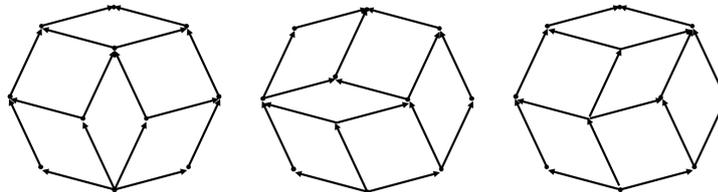


Abbildung 3.27: Repräsentative Tilings aller Tiling-Strukturen für vier Alternativen: Fall 1. (links), Fall 2.a (mitte), Fall 2.b (rechts)

Alternativen. Für fünf Alternativen kann man mit der gleichen Herangehensweise insgesamt 17 solcher Tiling-Strukturen finden, welche alle Isomorphieklassen für peak-pit Domains darstellen. Diese sind in Abbildung 3.28 dargestellt. Die gleiche Vorgehensweise lässt sich auf beliebige  $m$  übertragen. Wir werden in Kapitel 5.3 erneut auf die Klasse der peak-pit Domains bzw. der Tiling Domains eingehen und diese für die Beschreibung der verschiedenen Condorcet-Domain-Strukturen für drei, vier und fünf Alternativen für den strikten Präferenzraum heranziehen.

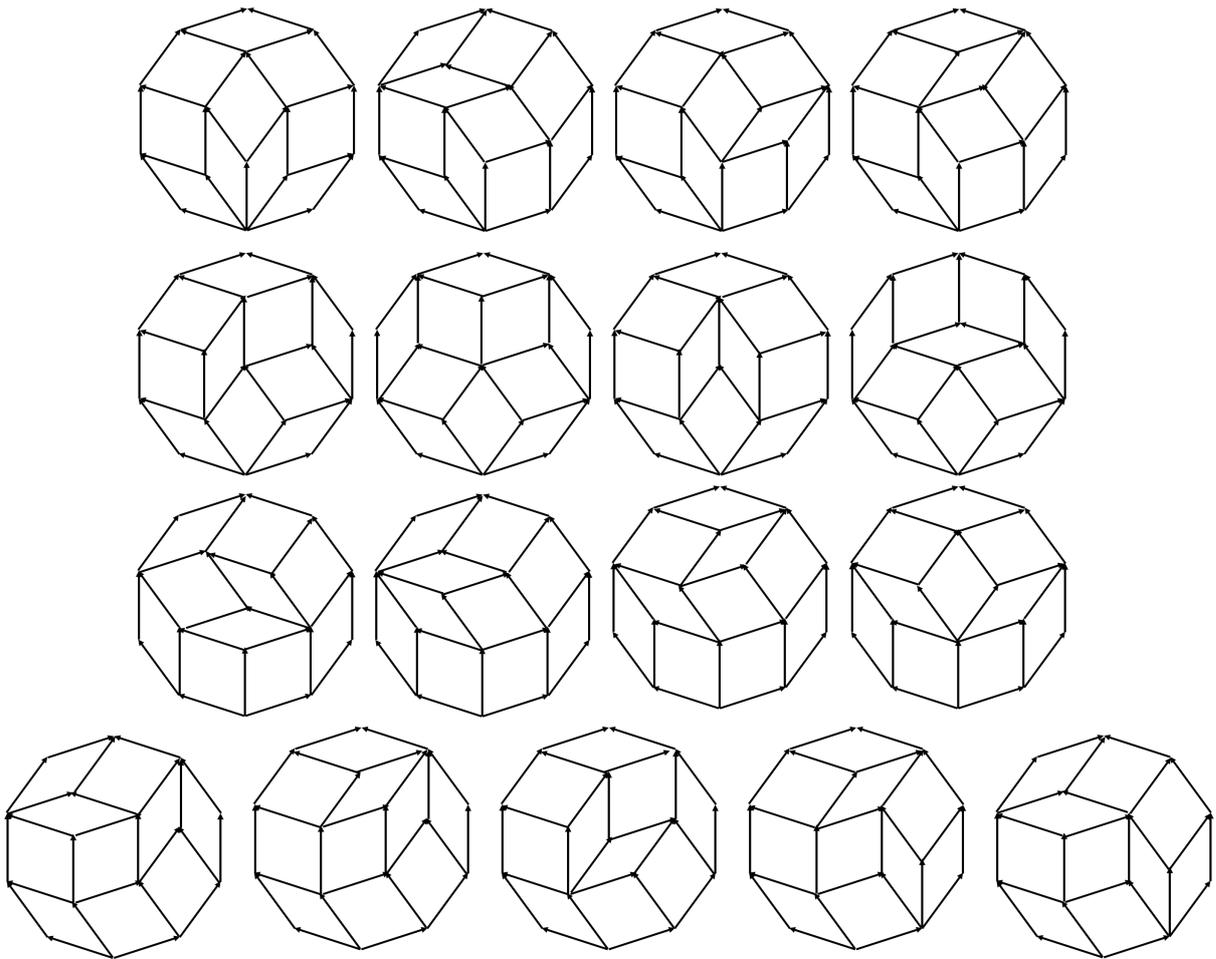


Abbildung 3.28: Repräsentative Tilings aller Tiling-Strukturen für fünf Alternativen

### 3.4.4 Danilov-Koshevoy-4-Punkt-Domain

In ihrer Arbeit „Maximal Condorcet Domains“ [DK13] widmen sich Danilov und Koshevoy unter anderem der Frage nach möglichst kleinen maximalen Condorcet Domains. Dabei können sie eine sehr spezielle Struktur maximaler Condorcet Domains für strikte Präferenzordnungen identifizieren, welche für alle  $m$  aus nur vier Präferenzen besteht. In diesem Abschnitt werden wir statt der üblichen Bezeichnung der Alternativen in Form von Buchstaben die Alternativen durch Zahlen  $1, 2, \dots, m$  beschreiben, da wir zwischen „geraden“ und „ungeraden“ Alternativen unterscheiden müssen. Die vier Präferenzen des *Danilov-Koshevoy-4-Punkt-Domains* ( $DK_4D$ ) haben folgende Form:  $\alpha$  ist eine beliebige Präferenz aus  $\mathcal{R}(X)$  und es gilt o.B.d.A.  $\alpha = 123 \dots m$ . Das zweite Element  $\omega$  des Domains ist die zu  $\alpha$  inverse Präferenz (hier:  $\omega = m(m-1) \dots 1$ ). Die Präferenzen  $\delta$  und  $\delta^\circ$  sind ebenfalls invers zueinander mit  $\delta = 24 \dots (m-1)1m \dots 53$  für ungerade  $m$  und  $\delta = 24 \dots (m)1(m-1) \dots 53$  für gerade  $m$ . Die Präferenz besteht aus allen geraden Alternativen in aufsteigender Reihenfolge, gefolgt von der ersten Alternative und den ungeraden Alternativen in absteigender Reihenfolge.

**Proposition 1** (DK4D nach [DK13]). *Für alle  $m \geq 3$  ist das Domain  $\mathcal{D} = \{\alpha, \omega, \delta, \delta^\circ\}$  ein maximales Condorcet Domain.*

Danilov und Koshevoy zeigen, dass dieses Domain für alle  $m$  ein maximales Condorcet Domain ist. Gleichzeitig muss das Domain auch immer die minimale Anzahl an Präferenzen aller maximalen Condorcet Domains aufweisen (Es existieren keine maximalen Condorcet Domains mit nur drei oder weniger

Präferenzen für  $m \geq 3$ ). Für sechs und sieben Alternativen können wir z.B. folgende Danilov-Koshevoy-4-Punkt-Domains erzeugen:

**Beispiel 7.** *Ein Danilov-Koshevoy-4-Punkt-Domain für  $m = 6$  lautet*

$$\mathcal{D}_{DK4D} = \{123456, 654321, 246153, 351642\}.$$

*Ein DK4D für  $m = 7$  lautet*

$$\mathcal{D}_{DK4D} = \{1234567, 7654321, 2461753, 3571642\}.$$

### 3.4.5 Ein weiteres maximales 4-Punkt-Domain

Neben dem zuvor beschriebenen und von Danilov und Koshevoy untersuchten Domain können wir für eine ungerade Anzahl an Alternativen eine weitere Domainstruktur identifizieren, welche maximale Condorcet Domains mit nur vier Präferenzen erzeugt. Das DK4D bildet die Grundlage für diese Domainstruktur. Man nehme ein DK4D für gerade  $m$  und füge in die Mitte von  $\alpha$  und  $\omega$  eine zusätzliche Alternative  $z$  ein:

$$\begin{aligned}\alpha' &= 123 \dots \frac{m}{2} z \left(\frac{m}{2} + 1\right) \dots (m-1)m \\ \omega' &= m(m-1) \dots \left(\frac{m}{2} + 1\right) z \frac{m}{2} \dots 321.\end{aligned}$$

Wenn wir die Alternativen weiter durchnummerieren gilt also  $z = m + 1$  und die Präferenzen enthalten  $(m+1)$  Alternativen. Die beiden Präferenzen  $\delta$  und  $\delta^\circ$  werden ebenso modifiziert, man fügt die zusätzliche Alternative  $z$  genau in die Mitte der Präferenzen ein. Die neu entstandenen Präferenzen  $\delta'$  und  $\delta'^\circ$  sind ebenfalls zueinander invers. Für sie gilt

$$\begin{aligned}\delta' &= 246 \dots m z 1(m-1)(m-3) \dots 53 \\ \delta'^\circ &= 35 \dots (m-3)(m-1) 1 z m \dots 642.\end{aligned}$$

Wir können zeigen, dass das so konstruierte Domain ein maximales Condorcet Domain der Größe vier ist und es für alle ungeraden Anzahlen an Alternativen existiert:

**Proposition 2** (Weiteres maximales 4-Punkt-Condorcet-Domain (4P2)). *Für alle  $X' = \{1, 2, 3, \dots, m, z\}$  mit  $m = 2k$  und  $k \geq 2$  ist das Domain  $\mathcal{D}' = \{\alpha', \omega', \delta', \delta'^\circ\}$  ein maximales Condorcet Domain.*

*Beweis.* Um zu zeigen, dass  $\mathcal{D}'$  ein maximales CD ist, stellen wir zunächst den Zusammenhang zwischen dieser Domainstruktur und dem DK4D formal her. Wir wissen, dass die Projektion  $\mathcal{D} = \mathcal{D}'_{/X}$  von  $\mathcal{D}'$  auf  $X = \{1, 2, 3, \dots, m\}$  ein DK4D und somit ein maximales Condorcet Domain der Größe vier ist.

1.  $\mathcal{D}'$  ist ein CD: Wenn für alle Tripel  $\{i, j, k\}$  paarweise verschiedener Elemente aus  $X'$  die Projektion  $\mathcal{D}'_{/\{i,j,k\}}$  ein CD ist, so ist auch  $\mathcal{D}'$  ein Condorcet Domain. Da  $\mathcal{D} = \mathcal{D}'_{/X}$  ein CD ist, muss auch für alle Tripel  $\{i, j, k\}$  paarweise verschiedener Elemente aus  $X$  die Projektion  $\mathcal{D} = \mathcal{D}'_{/X}$  ein Condorcet Domain sein. Somit bleiben noch die Tripel  $\{i, j, k\} \subseteq X'$  paarweise verschiedener Alternativen, welche  $z$  enthalten. Um diese zu untersuchen, unterteilen wir  $\delta'$  in verschiedene Bereiche mit geraden und ungeraden Alternativen:  $\delta' = Gz1U$  mit  $G = 246 \dots m = g_1 g_2 g_3 \dots g_{m/2}$  und  $U = (m-1)(m-3) \dots 53 = u_1 u_2 \dots u_{(m/2-1)} u_{(m/2)}$ . Basierend auf dieser Einteilung lassen sich fünf verschiedene Typen an Tripeln identifizieren, welche  $z$  enthalten:

- a)  $\{z, 1, g_i\}$  mit  $g_i \in G$  und  $1 \leq i \leq \frac{m}{2}$

- b)  $\{z, 1, u_i\}$  mit  $u_i \in U$  und  $1 \leq i \leq \frac{m}{2}$   
 c)  $\{z, g_i, g_j\}$  mit  $g_i, g_j \in G$  und  $1 \leq i < j \leq \frac{m}{2}$   
 d)  $\{z, u_i, u_j\}$  mit  $u_i, u_j \in U$  und  $1 \leq i < j \leq \frac{m}{2}$   
 e)  $\{z, g_i, u_j\}$  mit  $g_i \in G, u_j \in U, 1 \leq i \leq \frac{m}{2}$  und  $1 \leq j \leq \frac{m}{2}$ .

Die Projektionen von  $\mathcal{D}' = \{\alpha', \omega', \delta', \delta^\circ\}$  auf diese fünf Tripel erzeugen folgende Domains, welche alle Condorcet Domains sind:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_{/\{z,1,g_i\}} &= \begin{cases} \{1g_iz, zg_i1, g_iz1, 1zg_i\} & , \text{ wenn } g_i \leq \frac{m}{2} \\ \{1zg_i, g_iz1, g_iz1, 1zg_i\} & , \text{ sonst.} \end{cases} \\ \mathcal{D}'_{/\{z,1,u_i\}} &= \begin{cases} \{1u_iz, zu_i1, 1zu_i, u_iz1\} & , \text{ wenn } u_i \leq \frac{m}{2} \\ \{1zu_i, u_iz1, 1zu_i, u_iz1\} & , \text{ sonst.} \end{cases} \\ \mathcal{D}'_{/\{z,g_i,g_j\}} &= \begin{cases} \{g_ig_jz, zg_jg_i, g_ig_jz, zg_jg_i\} & , \text{ wenn } g_j \leq \frac{m}{2} \\ \{g_izg_j, g_jzg_i, g_ig_jz, zg_jg_i\} & , \text{ wenn } g_i \leq \frac{m}{2} < g_j \\ \{zg_ig_j, g_jg_iz, g_ig_jz, zg_jg_i\} & , \text{ sonst.} \end{cases} \\ \mathcal{D}'_{/\{z,u_i,u_j\}} &= \begin{cases} \{u_iu_jz, zu_ju_i, zu_iu_j, u_ju_iz\} & , \text{ wenn } u_j \leq \frac{m}{2} \\ \{u_iz u_j, u_jz u_i, zu_iu_j, u_ju_iz\} & , \text{ wenn } u_i \leq \frac{m}{2} < u_j \\ \{zu_iu_j, u_ju_iz, zu_iu_j, u_ju_iz\} & , \text{ sonst.} \end{cases} \\ \mathcal{D}'_{/\{z,g_i,u_j\}} &= \begin{cases} \{g_iu_jz, zu_jg_i, g_iz u_j, u_jz g_i\} & , \text{ wenn } g_i < u_j \leq \frac{m}{2} \\ \{u_jg_iz, zg_ig_j, g_iz u_j, u_jz g_i\} & , \text{ wenn } u_j < g_i \leq \frac{m}{2} \\ \{g_iz u_j, u_jz g_i, g_iz u_j, u_jz g_i\} & , \text{ wenn } g_i \leq \frac{m}{2} < u_j \\ \{u_jz g_i, g_iz u_j, g_iz u_j, u_jz g_i\} & , \text{ wenn } u_j \leq \frac{m}{2} < g_i \\ \{zg_ig_j, u_jg_iz, g_iz u_j, u_jz g_i\} & , \text{ wenn } \frac{m}{2} < g_i < u_j \\ \{zu_jg_i, g_iz u_j, g_iz u_j, u_jz g_i\} & , \text{ wenn } \frac{m}{2} < u_j < g_i. \end{cases} \end{aligned}$$

Somit konnten wir zeigen, dass für alle Tripel  $\{i, j, k\}$  paarweise verschiedener Elemente aus  $X'$  die Projektion  $\mathcal{D}'_{/\{i,j,k\}}$  ein Condorcet Domain ist und demnach auch  $\mathcal{D}'$  ein Condorcet Domain ist.

2.  $\mathcal{D}'$  ist maximal: Um die Maximalität nachzuweisen, zeigen wir, dass für alle  $R \in \mathcal{R}(X') \setminus \mathcal{D}'$  gilt:  $\mathcal{D}' \cup R$  ist kein Condorcet Domain.

- a)  $R_{/X} \notin \mathcal{D}'_{/X}$ : Die Projektion von  $R$  auf  $X$  liegt nicht in  $\mathcal{D}$ , ist also kein Element des zugrunde liegenden Danilov-Koshevoy-4-Punkt-Domains. Da das DK4D ein maximales Condorcet Domain ist, ist  $\mathcal{D}'_{/X} \cup R_{/X}$  kein Condorcet Domain und somit ist auch  $\mathcal{D}' \cup R$  kein Condorcet Domain.  
 b)  $R_{/X} \in \mathcal{D}'_{/X}$ : Die Projektion von  $R$  auf  $X$  liegt in  $\mathcal{D} = \{\alpha, \omega, \delta, \delta^\circ\}$ .

- i.  $R_{/X} = \alpha$ :  $R$  kann in diesem Fall die beiden Formen  $R' = 12 \dots z \dots \frac{m}{2}(\frac{m}{2} + 1) \dots m$  und  $R'' = 12 \dots \frac{m}{2}(\frac{m}{2} + 1) \dots z \dots m$  annehmen. Aus Symmetriegründen genügt es jedoch, den Fall  $R'$  zu betrachten. Ist  $\frac{m}{2}$  gerade, so erzeugt die Projektion  $(\mathcal{D}' \cup R')_{/\{z, \frac{m}{2}, m\}}$  das Domain  $\{\frac{m}{2}zm, mz\frac{m}{2}, \frac{m}{2}mz, zm\frac{m}{2}, z\frac{m}{2}m\}$ , welches das Inkonsistenz-Tripel  $\{mz\frac{m}{2}, \frac{m}{2}mz, z\frac{m}{2}m\}$  enthält. Nehmen wir an, dass  $\frac{m}{2}$  ungerade ist, so erzeugt die Projektion  $(\mathcal{D}' \cup R')_{/\{1, z, \frac{m}{2}\}}$  das Domain  $\{1\frac{m}{2}z, z\frac{m}{2}1, z1\frac{m}{2}, \frac{m}{2}1z, 1z\frac{m}{2}\}$ . Dieses enthält das Inkonsistenz-Tripel  $\{z\frac{m}{2}1, \frac{m}{2}1z, 1z\frac{m}{2}\}$ . Daraus folgt, dass  $\mathcal{D}' \cup R'$  kein Condorcet Domain ist.

- ii.  $R_{/X} = \omega$ : aus Symmetriegründen analog zu  $R_{/X} = \alpha$

iii.  $R_{/X} = \delta$ :  $R$  kann in diesem Fall die beiden Formen  $R' = 246 \dots z \dots m1(m-1)(m-3) \dots 53$  und  $R'' = 246 \dots m1(m-1)(m-3) \dots z \dots 53$  annehmen. Aus Symmetriegründen genügt es auch hier, den Fall  $R'$  zu betrachten. Die Projektion  $(\mathcal{D}' \cup R')_{/\{z, (m-1), m\}}$  erzeugt das Domain  $\{z(m-1)m, m(m-1)z, mz(m-1), (m-1)zm, zm(m-1)\}$ , welches das Inkonsistenz-Tripel  $\{m(m-1)z, (m-1)zm, zm(m-1)\}$  enthält. Daraus folgt, dass  $\mathcal{D}' \cup R'$  kein Condorcet Domain ist.

iv.  $R_{/X} = \delta^\circ$ : aus Symmetriegründen analog zu  $R_{/X} = \delta$ .

Demnach gilt, dass für alle  $R \in \mathcal{R}(X') \setminus \mathcal{D}'$  mit  $R_{/X} \in \mathcal{D}'_{/X}$  das Domain  $\mathcal{D}' \cup R$  kein Condorcet Domain ist.

□

Es zeigt sich somit, dass das von Koshevoy und Danilov beschriebene DK4D nicht das einzige maximale Condorcet Domain mit der minimalen Präferenzanzahl von vier ist. Das neu entdeckte 4-Punkt-Domain (4P2) existiert für alle strikten Präferenzräume mit einer ungeraden Anzahl an Alternativen.

**Beispiel 8.** *Weiteres maximales 4-Punkt-Domain für sieben Alternativen*

$$\mathcal{D}_{4P2} = \{1237456, 6547321, 2467153, 3517642\}$$

und für neun Alternativen

$$\mathcal{D}_{4P2} = \{123495678, 876594321, 246891753, 357198642\}.$$

Man kann diese Domains noch in dem Sinne normalisieren (42PN), dass die Präferenz  $123 \dots m$  enthalten ist. Wir bilden also isomorphe Domains zu den beiden obigen Beispielen, indem wir folgende Permutation über die Alternativen durchführen. Für das Beispiel mit sieben Alternativen gilt  $\sigma_7(1) = 1$ ,  $\sigma_7(2) = 2$ ,  $\sigma_7(3) = 3$ ,  $\sigma_7(4) = 5$ ,  $\sigma_7(5) = 6$ ,  $\sigma_7(6) = 7$  und  $\sigma_7(7) = 4$ . Für das Beispiel mit neun Alternativen gilt  $\sigma_9(1) = 1$ ,  $\sigma_9(2) = 2$ ,  $\sigma_9(3) = 3$ ,  $\sigma_9(4) = 4$ ,  $\sigma_9(5) = 6$ ,  $\sigma_9(6) = 7$ ,  $\sigma_9(7) = 8$ ,  $\sigma_9(8) = 9$  und  $\sigma_9(9) = 5$ .

**Beispiel 9.** *Die beiden zu dem obigen Beispiel isomorphen Domains, welche man durch die Normalisierung erhält, lauten*

$$\mathcal{D}_{4P2N} = \{1234567, 7654321, 2574163, 3614752\}$$

für sieben Alternativen und

$$\mathcal{D}_{4P2N} = \{123456789, 987654321, 247951863, 368159742\}$$

für neun Alternativen.

## 4 Algorithmen und Programme zur Berechnung von Condorcet Domains

Nachdem wir die theoretischen Grundlagen, den Stand der Wissenschaft sowie einige Erweiterungen betrachten haben, werden wir in diesem Kapitel auf drei unterschiedliche algorithmische Ansätze und deren Umsetzung zur Berechnung von Condorcet Domains eingehen. Zunächst beschreiben wir in Abschnitt 4.1 ein für diese Arbeit entwickeltes Programm, welches das Konzept der value-restrictions (vgl. Kapitel 3.3) anwendet, um Condorcet Domains zu berechnen. Der Vorteil dieses Programms liegt in seiner Kompaktheit. Der Ansatz über die value-restrictions ist allerdings nur im strikten Präferenzraum uneingeschränkt nutzbar.<sup>1</sup>

Ein zweiter Ansatz, welcher sich auch auf schwache und quasitransitive Ordnungen anwenden lässt, wird in Abschnitt 4.2 beschrieben. Für diesen Algorithmus machen wir uns die in Kapitel 3.3 beschriebenen Inkonsistenz-Tripel zunutze und verwenden diese, um die Berechnung von Condorcet Domains in ein sehr bekanntes Problem der Informatik, das SAT-Problem, zu übersetzen. Wir verwenden schließlich einen bereits für diese Problemklasse existierenden und optimierten SAT-Lösungsalgorithmus. Der Vorteil dieses Ansatzes ist die Anwendbarkeit auf alle Präferenzräume.

Der letzte und allgemeinste Ansatz zur Bestimmung von Condorcet Domains wird in Abschnitt 4.3 beschrieben. Hier verwenden wir die in Kapitel 3.3 beschriebene Mediagrapheneigenschaft von Condorcet Domains und können damit ein Programm entwickeln, das sich auf alle Probleme anwenden lässt, welche sich mithilfe des Judgement Aggregation Frameworks beschreiben lassen. Ein weiterer, großer Vorteil des Algorithmus' besteht darin, dass er es ermöglicht, direkt maximale Condorcet Domains zu ermitteln. Dies ist mit den ersten beiden Programmen nicht möglich, wodurch bei diesen Ansätzen zunächst noch eine teilweise sehr aufwändige Untersuchung bezüglich der Maximalität der ermittelten Domains notwendig ist.

Allen drei Algorithmen ist gemeinsam, dass sie sehr viele isomorphe Domains erzeugen und somit eine Nachuntersuchung der Domains notwendig ist. Unter isomorphen Domains versteht man Teilmengen des Präferenzraums, welche sich strukturell gleichen und sich beispielsweise nur in der Bezeichnung der Alternativen unterscheiden. Ein präziser Isomorphiebegriff wird in Kapitel 5.1 eingeführt. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels gehen wir noch auf einige entwickelte Programme zur Visualisierung und Verifizierung sowie zur Aufbereitung und Bestimmung einiger Eigenschaften der Condorcet Domains ein. Der Quellcode aller Programme sowie die Ergebnisse und Auswertungen der Berechnungen sind auf Nachfrage beim Autor der Arbeit erhältlich.<sup>2</sup>

### 4.1 Value-restriction-Algorithmus

Die Beschreibung von Condorcet Domains mit Hilfe von value-restrictions nach Sen [Sen66] bietet uns einen Ansatz für die Berechnung von Condorcet Domains. Zwar wäre es möglich, alle Domains des Präferenzraums zu erzeugen und jedes bezüglich seiner value-restrictions zu überprüfen, jedoch führt dies bereits für sehr kleine  $m$  zu einer sehr großen Anzahl an zu untersuchenden Domains. Dazu müsste

<sup>1</sup> Im schwachen Präferenzraum wäre eine zusätzliche Betrachtung und Unterscheidung zwischen concerned und unconcerned Präferenzen notwendig.

<sup>2</sup> tobias.dittrich@outlook.com

man alle Teilmengen des Präferenzraums erzeugen (die Potenzmenge), wodurch die Anzahl möglicher Domains

$$|P(\mathcal{R}(X))| = 2^{m!}$$

ist. Somit erhalten wir bereits für  $m = 4$  Alternativen  $2^{24} = 16.777.216$  mögliche Domains. Statt alle Teilmengen des Domainraums zu untersuchen, kann man versuchen, alle möglichen Kombinationen der never conditions zu erzeugen und darauf basierend die Domains zu berechnen. Dieser Ansatz stellt sich als deutlich effizienter heraus, wobei wir auch hier bereits bei sechs Alternativen an die Grenzen der Berechenbarkeit stoßen. Da dieser Ansatz nicht nur maximale Condorcet Domains liefert und das „Heraussuchen“ der maximalen Domains aus der Menge aller gefundener Domains sich ebenfalls als sehr komplex herausstellt, beschränkt sich die Auswertung der Ergebnisse auf  $m = 5$  Alternativen. Das Programm wurde in Java (Java SE Development Kit 8) mithilfe des Editors Eclipse entwickelt. Die Berechnungen erfolgten auf einem Desktop-PC mit Intel Core i7-4770K Prozessor mit einer maximalen Single-Core Leistung von 3,50 Ghz.

**Beschreibung Programm und Variablen** Wir gehen zunächst genauer auf den entwickelten Algorithmus und anschließend auf die Input- und Outputvariablen ein. Die grobe Struktur des Programms ist in Algorithmus 1 dargestellt. Der erste Schritt besteht in der Bestimmung aller möglichen never conditions

---

**Algorithm 1** Algorithmus zur Berechnung von Condorcet Domains mithilfe der value-restriction

---

<i>neverConditions</i>	▷ Feld aller neun never conditions auf Tripeln
Wähle <i>m</i>	▷ Anzahl der Alternativen $ X $
<b>procedure</b> CALCCD( <i>neverConditions</i> , <i>m</i> )	
<i>neverCondBelegung</i> = {0, 0, 0, ..., 0}	▷ Feld aller gewählten never conditions für alle Tripel auf <i>X</i>
<b>for</b> alle Belegungen von <i>neverCondBelegung</i> <b>do</b>	
Erzeuge <i>domain</i>	▷ Präferenzraum auf <i>X</i>
<b>for</b> alle Stellen <i>i</i> des Feldes <i>neverCondBelegung</i> <b>do</b>	
<b>for</b> alle Elemente <i>j</i> in <i>domain</i> <b>do</b>	
<b>if</b> <i>j</i> erfüllt <u>nicht</u> never condition an der Stelle <i>i</i> <b>then</b> lösche <i>j</i> aus <i>domain</i>	
<b>end if</b>	
<b>end for</b>	
<b>end for</b>	
<b>if</b> <i>domain</i> ist nichtleer <b>then</b> <i>domain</i> ist ein CD	
<b>end if</b>	
<b>end for</b>	
<b>end procedure</b>	

---

auf einem Tripel und die Übergabe dieser als statische Variable an das Programm. Die never conditions sind in diesem Schritt noch allgemein gehalten, d.h. sie repräsentieren die möglichen Restriktionen auf einem beliebigen Tripel an Alternativen. Wie wir bereits wissen, existieren für drei Alternativen insgesamt sechs verschiedene Präferenzen im strikten Präferenzraum. Jede never condition auf einem solchen Tripel schließt zwei der sechs Alternativen aus. Im Programm stellen wir die never conditions mit Hilfe dieser unzulässigen und zulässigen Tripel dar. Die ersten beiden Tripel beschreiben dabei die durch die jeweilige never condition verbotene Reihenfolge der drei Alternativen; die vier weiteren Tripel beschreiben die zulässigen Permutationen der Alternativen.

Betrachten wir z.B. die never condition  $iN1$ , welche besagt, dass Alternative  $i$  niemals an erster Position stehen darf. Die Codierung im Programm lautet 0 für Alternative  $i$ , 1 für  $j$  und 2 für  $k$ . Somit ergeben sich die unzulässigen Permutationen

$$(0, 1, 2) \text{ und } (0, 2, 1) \text{ für } (i, j, k) \text{ und } (i, k, j)$$

sowie die zulässigen Permutationen

$$(1, 0, 2), (2, 0, 1), (1, 2, 0) \text{ und } (2, 1, 0) \text{ für } (j, i, k), (k, i, j), (j, k, i) \text{ und } (k, j, i).$$

Diese Tripel werden für alle neun never conditions ( $iN1, iN2, iN3, jN1, jN2, jN3, kN1, kN2, kN3$ ) im Feld *neverConditions* gespeichert. Als einziger weiterer Inputfaktor wird die Anzahl der Alternativen  $m = |X|$  benötigt. Damit ein Domain ein Condorcet Domain ist, muss für jedes Tripel über die Alternativenmenge mindestens eine never condition gültig sein. Das Programm erzeugt nun alle möglichen Kombinationen dieser never-condition-Tripel-Belegungen. Dazu wird zunächst das Feld *neverCondBelegung* der Länge  $\binom{m}{3}$  erzeugt. Jede Stelle des Feldes repräsentiert die Belegung eines Tripels über  $X$  mit einer never condition.

**Beispiel 10.** Sei  $X = \{a, b, c, d\}$  die Menge der Alternativen. Es existieren  $\binom{m}{3} = 4$  Tripel paarweise verschiedener Alternativen über  $X$ :

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}.$$

Das Feld *neverConditions* hat somit vier Stellen, wobei die erste Stelle die never condition des Tripels  $\{a, b, c\}$  repräsentiert, die zweite Stelle die never condition des Tripels  $\{a, b, d\}$  repräsentiert usw. Die Reihenfolge der never conditions definieren wir, wie bereits weiter oben ausgeführt

$$iN1, iN2, iN3, jN1, jN2, jN3, kN1, kN2, kN3.$$

Eine „0“ im Feld *neverConditions* steht für  $iN1$ , eine „1“ für  $iN2$ , ... und eine „8“ für  $kN3$ . Eine mögliche Belegung des Feldes und die daraus resultierenden never conditions lautet

$$\text{neverConditions} = \{2, 3, 1, 8\} \Rightarrow aN_{\{a,b,c\}}3, bN_{\{a,b,d\}}1, aN_{\{a,c,d\}}2, dN_{\{b,c,d\}}3.$$

Da für jedes Alternativentripel  $\{i, j, k\}$  paarweise verschiedener Alternativen über  $X$  neun verschiedene never conditions gewählt werden können und insgesamt  $\binom{m}{3}$  verschiedene Tripel über die Alternativenmenge existieren, erhalten wir für die Anzahl der zu untersuchenden never-condition-Tripel-Belegungen

$$9^{\binom{m}{3}}.$$

Diese müssen alle durch das Programm getestet werden.<sup>3</sup> In Tabelle 4.1 sind die beiden unterschiedlichen Herangehensweisen dargestellt. Man erkennt, dass für die Untersuchung der möglichen never-condition-Tripel-Belegungen deutlich weniger Fälle untersucht werden müssen. Bereits für fünf Alternativen ist das Testen aller möglichen Domains mit  $1,3 \cdot 10^{36}$  aussichtslos und für sechs Alternativen sogar unmöglich

<sup>3</sup> Aus Isomorphie- und Transitivitätsüberlegungen ließen sich einige Fälle ausschließen bzw. zusammenfassen, wodurch die Anzahl der zu untersuchenden Kombinationen reduziert werden könnte. Dies würde jedoch zusätzliche Abfragen und Überprüfungen im Programmablauf erfordern, wodurch mögliche Effizienzgewinne wieder verringert werden. Dieser Ansatz wurde aus diesem Grund in der Arbeit nicht weiter untersucht.

Anzahl Alternativen	Anzahl Präferenzen	Anzahl Domains	Anzahl NC-Tripel-Kombinationen
3	6	64	9
4	24	16.777.216	6.561
5	120	$1,3 \cdot 10^{36}$	3.486.784.401
6	720	$5,5 \cdot 10^{216}$	$1,2 \cdot 10^{19}$

Tabelle 4.1: Vergleich Anzahl Domains und Anzahl NC-Tripel-Kombinationen für  $m \leq 6$ 

(zum Vergleich: Das Universum besteht schätzungsweise aus  $10^{78}$  Atomen. Aber auch über den Ansatz der never-condition-Tripel-Belegungen gelangen wir sehr schnell an die Grenze der Berechenbarkeit.

Im Programmverlauf wird jede Belegung getestet, indem zunächst der Variablen *domain* der gesamte Präferenzraum über  $X$  übergeben wird und anschließend für jede Präferenz in *domain* überprüft wird, ob diese alle never conditions der aktuellen never-condition-Tripel-Belegung erfüllt. Erfüllt eine Präferenz nicht alle never conditions, so wird sie aus *domain* gelöscht. Nach Überprüfung aller Präferenzen enthält *domain* nur noch Präferenzen, welche alle never conditions der aktuellen Belegung erfüllen und ist somit ein Condorcet Domain. Nachdem das Programm alle never-condition-Tripel-Belegung durchlaufen hat, werden die gefundenen Condorcet Domains in einer Datei gespeichert und müssen anschließend noch weiterverarbeitet werden. Generell erzeugt jede Belegung ein Condorcet Domain, jedoch wird in vielen Fällen ein leeres Domain erzeugt bzw. Domains mit weniger als vier Elementen. Diese können nicht maximal sein und werden gelöscht. Des Weiteren befinden sich unter den Domains Duplikate und nicht maximale Domains, welche zusätzlich herausgefiltert werden müssen. Abschließend müssen, wie bei allen entwickelten Programmen zur Bestimmung von Condorcet Domains, Isomorphieklassen gebildet werden. Das Vorgehen diesbezüglich wird für alle Programme in Abschnitt 4.4 beschrieben. Der gesamte Programmcode ist in Anhang B dargestellt. Die Rechenzeiten sowie der benötigte Speicherplatz für die verschiedenen Fälle sind in Abbildung 4.2 aufgelistet. Man erkennt, dass der Sprung von vier auf fünf Alternativen bereits

Anzahl Alternativen	benötigte Rechenzeit	Größe Rohdaten als txt-Datei
3	< 1 sek	1 KB
4	< 1 sek	196 KB
5	7h	54 GB
6	-	-

Tabelle 4.2: Benötigte Ressourcen zur Berechnung der Rohdaten mithilfe des NC-Algorithmus' für  $m \leq 6$ 

einen enormen Anstieg an Rechenzeit und Speicherressourcen verursacht. Eine Untersuchung von sechs Alternativen konnte aus diesem Grund mithilfe dieses Algorithmus' nicht durchgeführt werden, da die zu untersuchenden Belegungen um den Faktor  $9^{10}$  steigen und somit eine Berechnung nicht realisierbar scheint.

## 4.2 Modellierung als ALLSAT-Problem

Ein weiterer Ansatz zur Berechnung von Condorcet Domains ist die Codierung der Domains als aussagenlogische Ausdrücke und die Darstellung des Condorcet-Domain-Such-Problems als sogenanntes SAT-Problem durch die Anwendung der in Kapitel 3.3 beschriebenen Inkonsistenz-Tripel-Strukturen.

Dazu betrachten wir zunächst die für das Modell notwendige Notation (vgl. z.B. [CLRS01]). Jeder Präferenzrelation  $R_i$  im jeweiligen Präferenzraum wird eine boolesche Variable  $x_i$  zugeteilt, die der atomaren Aussage „ $R_i$  ist im Domain enthalten“ entspricht. Unter einem Literal versteht man eine boolesche Variable oder ihre Negation. Literale kann man durch Konjunktionen (UND-Verknüpfung) und Disjunktionen (ODER-Verknüpfung) miteinander kombinieren. Verknüpfungen dieser Art bezeichnen wir als aussagenlogische Formeln, boolesche Ausdrücke oder boolesche Funktionen. Ein Disjunktionsterm ist eine boolesche Funktion, die nur aus Disjunktionen verschiedener Literale besteht. Ein Konjunktionsterm ist eine boolesche Funktion, die nur aus Konjunktionen verschiedener Literale besteht. Verknüpft man Disjunktionsterme durch Konjunktionen erhält man eine Formel in konjunktiver Normalform (KNF). Eine Formel in disjunktiver Normalform (DNF) erhält man durch eine Verknüpfung von Konjunktionstermen durch Disjunktionen.

Ein Domain als Teilmenge des Präferenzraums lässt sich durch eine sogenannten Vollkonjunktion darstellen. Dies ist ein Konjunktionsterm, der exakt ein Literal für jede boolesche Variable (jede Präferenz im Präferenzraum) enthält. Betrachten wir z.B. das Domain  $\mathcal{D} = \{abc, bac, cba\}$  aus dem strikten Präferenzraum mit drei Alternativen. Der Präferenzraum enthält insgesamt sechs Präferenzen (alle Permutationen der drei Alternativen), wodurch wir die sechs booleschen Variablen  $x_{abc}, x_{acb}, x_{bac}, x_{bca}, x_{cab}, x_{cba}$  erhalten. Das Domain  $\mathcal{D}$  lässt sich nun durch den booleschen Ausdruck

$$x_{abc} \wedge \neg x_{acb} \wedge x_{bac} \wedge \neg x_{bca} \wedge \neg x_{cab} \wedge x_{cba}$$

darstellen. Wir können allerdings nicht nur Domains mit Hilfe von aussagenlogischen Formeln darstellen, sondern die gesamte Problematik der Suche nach Condorcet Domains in einem einzigen booleschen Ausdruck kondensieren. Dazu aggregieren wir alle Inkonsistenz-Tripel für den jeweiligen Präferenzraum. Für jedes Condorcet Domain muss gelten, dass keines der Inkonsistenz-Tripel enthalten sein darf. Wir wissen aus Abschnitt 3.3, dass die Inkonsistenz-Tripel für den strikten Präferenzraum mit drei Alternativen

$$IT_s = \{(abc, cab, bca), (acb, cba, bac)\}$$

lauten. Demnach muss jedes Condorcet Domain für diesen Präferenzraum folgenden logischen Term erfüllen

$$\neg(abc \wedge cab \wedge bca) \wedge \neg(acb \wedge cba \wedge bac).$$

Dies ist die aussagenlogische Darstellung der Aussage 8 in Theorem 9 (Kapitel 3.3). Obige Formel lässt sich mithilfe der De Morganschen Gesetze in eine KNF umformen:

$$(\neg abc \vee \neg cab \vee \neg bca) \wedge (\neg acb \vee \neg cba \vee \neg bac).$$

Die Menge aller Belegungen, die diese konjunktive Normalform erfüllen (durch die Verknüpfung der Terme erhält man eine wahre Aussage), entspricht allen (nicht notwendigerweise maximalen) Condorcet Domains. Unter anderem erfüllen alle Terme mit nur einer oder zwei nicht-negierten Variablen die KNF, da Domains mit einem oder zwei Elementen immer Condorcet Domains sind. Außerdem erfüllen alle

Terme, die drei nicht-negierte Variablen ohne die Inkonsistenz-Tripel enthalten, die KNF. Neben diesen trivialen Termen ergeben sich des Weiteren die Terme

$$\begin{aligned}
& x_{abc} \wedge x_{acb} \wedge \neg x_{bac} \wedge \neg x_{bca} \wedge x_{cab} \wedge x_{cba}, \\
& \neg x_{abc} \wedge x_{acb} \wedge \neg x_{bac} \wedge x_{bca} \wedge x_{cab} \wedge x_{cba}, \\
& \neg x_{abc} \wedge \neg x_{acb} \wedge x_{bac} \wedge x_{bca} \wedge x_{cab} \wedge x_{cba}, \\
& x_{abc} \wedge \neg x_{acb} \wedge x_{bac} \wedge x_{bca} \wedge \neg x_{cab} \wedge x_{cba}, \\
& x_{abc} \wedge x_{acb} \wedge x_{bac} \wedge x_{bca} \wedge \neg x_{cab} \wedge \neg x_{cba}, \\
& x_{abc} \wedge x_{acb} \wedge x_{bac} \wedge \neg x_{bca} \wedge x_{cab} \wedge \neg x_{cba}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& x_{abc} \wedge x_{acb} \wedge \neg x_{bac} \wedge x_{bca} \wedge \neg x_{cab} \wedge x_{cba}, \\
& \neg x_{abc} \wedge x_{acb} \wedge x_{bac} \wedge x_{bca} \wedge x_{cab} \wedge \neg x_{cba}, \\
& x_{abc} \wedge \neg x_{acb} \wedge x_{bac} \wedge \neg x_{bca} \wedge x_{cab} \wedge x_{cba}.
\end{aligned}$$

Die ersten sechs Terme (und damit Condorcet Domains) entsprechen der gleichen Condorcet-Domain-Struktur und die letzten drei einer anderen Condorcet-Domain-Struktur. Wir werden in Abschnitt 5.1 noch genauer auf die Definition von Condorcet-Domain-Strukturen sowie auf zueinander isomorphe Domains eingehen. Terme mit nur einer oder keiner negierten Variablen existieren nicht. Die gefundenen Belegungen repräsentieren alle Condorcet Domains für den strikten Präferenzraum und drei Alternativen.

Für Präferenzräume mit mehr als sechs Präferenzrelationen und mehr als zwei Inkonsistenz-Tripeln ist eine händische Berechnen der Belegungen, welche die entsprechenden KNFs erfüllen, nicht mehr möglich. In der Informatik beschreibt man das Problem, ob aussagenlogische Terme erfüllbar sind oder nicht, als „Boolean satisfiability problem“ oder kurz SAT-Problem. Die Lösung dieses Problems liegt in der Komplexitätsklasse NP-vollständig. Lösungen für Probleme dieses Typs lassen sich leicht (in polynomieller Zeit) verifizieren. Es ist allerdings sehr schwer, eine solche Lösung zu finden. Insbesondere steigt der Aufwand mit zunehmender Größe des Problems sehr schnell an. Es sind derzeit keine effizienten Algorithmen zur Lösung solcher Probleme bekannt. In der Literatur gibt es jedoch sogenannte SAT-Solver, die unter den gegebenen Bedingungen effizient Lösungen des SAT-Problems berechnen können. Für unser Problem der Suche aller Condorcet Domains ist es jedoch nicht ausreichend zu überprüfen, ob eine Lösung existiert. Vielmehr wissen wir bereits, dass triviale Lösungen, wie z.B. nur eine oder zwei nicht-negierte Variablen die KNF erfüllen. Uns interessieren alle möglichen Lösungen des SAT-Problems. Algorithmen, die dieses sogenannte AllSAT-Problem lösen, wurden bisher wenig in der Literatur betrachtet. Eine Übersicht über bekannte, frei verfügbare AllSAT-Solver und ein Vergleich dieser Solver liefern Toda und Soh [TS16]. Die untersuchten Solver wandeln eine konjunktive Normalform in eine logisch äquivalente disjunktive Normalform um. Diese Konjunktionsterme der DNF repräsentieren die gesuchten Condorcet Domains. Toda und Soh unterscheiden drei Typen von AllSAT-Solvern:

1. **Blocking solver:** Der Ansatz dieser Solver besteht darin, wiederholt SAT-Solver zu verwenden, um immer neue Belegungen zu finden, welche die KNF erfüllen. Wenn eine solche Belegung gefunden wurde, wird sie umgeformt und der KNF als sogenannter „blocking term“ hinzugefügt. Anschließend wird erneut ein SAT-Solver ausgeführt bis keine Belegung mehr gefunden werden kann, welche die modifizierte KNF erfüllen kann.

2. **Non-blocking solver:** Solver dieser Art verwenden keine „blocking terms“ sondern chronologisches Backtracking. Wenn eine Lösung gefunden wurde, wird der Algorithmus um einige Schritte zurückgesetzt und versucht, eine andere Lösung zu finden. Dies hat den Vorteil, dass gewisse Zwischenergebnisse nicht immer neu berechnet werden müssen.
3. **Formula-BDD caching solver:** Diese Solver gehen noch einen Schritt weiter und speichern Zwischenergebnisse nicht nur chronologisch, sondern auf verschiedenen Ebenen. BDD steht für „binary decision diagrams“. Das Gesamtproblem enthält häufig kleinere Teilprobleme der gleichen Form bzw. immer wieder auftretende Probleme in Form von BDDs. Solver dieses Typs können solche häufig vorkommenden Teilprobleme erkennen und Lösungen der Teilprobleme im Cache abspeichern, um sie später schnell aufrufen zu können.

Die beiden Autoren kommen durch verschiedene Simulationsstudien zu dem Ergebnis, dass formula-BDD caching solver insbesondere bei Problemen mit vielen Lösungen die geeignetsten AllSAT-Solver sind. Wir werden im Folgenden den Solver „bdd\_minisat\_all version 1.0.1“ von Takahisa Toda (als Freeware unter <http://www.sd.is.uec.ac.jp/toda/code/cnf2obdd.html> verfügbar, zuletzt aufgerufen am 20.12.2017) benutzen, um alle Lösungen des Problems der Condorcet-Domain-Suche zu finden. Dieser Solver verlangt den Input, der unter anderem die zu untersuchende boolesche Formel in KNF enthält, im sogenannten DIMACS-CNF-Format. Für den strikten Präferenzraum mit drei Alternativen ist der Input in Abbildung 4.1 dargestellt. Die erste Zeile dient als Kommentarzeile. In der zweiten Zeile signa-

```
c drei Alternativen, strikter Präferenzraum
p cnf 6 2
-1 -3 -5 0
-2 -4 -6 0
```

Abbildung 4.1: Input im DIMACS-Format für den AllSAT-Solver bdd\_minisat\_all, strikter Präferenzraum mit drei Alternativen

liert „p“ den Beginn des Inputs, „cnf“ die Formatierung des Problems in KNF und die beiden folgenden Zahlen die Anzahl der Variablen und die Anzahl der Disjunktionsterme der KNF. Die darauffolgenden Zeilen repräsentieren die Disjunktionsterme, jeweils mit einer „0“ als Indikator für das Zeilenende. Ein Minus vor der Ziffer in einer Zeile bedeutet, dass die Variable mit diesem Index negiert im Disjunktionsterm vorkommt. Somit stellen die beiden Zeilen die Disjunktionsterme  $\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_5$  und  $\neg x_2 \vee \neg x_4 \vee \neg x_6$  dar, welche mit einer Konjunktion verknüpft die KNF bilden. Es ist nötig die Variablen durchnummerieren und eine entsprechende Zuordnung vornehmen. Im obigen Beispiel lautet diese  $x_1 = x_{abc}, x_2 = x_{bac}, x_3 = x_{bca}, x_4 = x_{cba}, x_5 = x_{cab}, x_6 = x_{acb}$ . Für den Fall des schwachen Präferenzraums und drei Alternativen existieren 13 Variablen und insgesamt 64 Disjunktionsterme in der KNF (vgl. Abschnitt 3.3). Im quasitransitiven Präferenzraum benötigt man 19 Variablen und 44 Disjunktionsterme für die KNF (vgl. Abschnitt 3.3). Die in Abschnitt 3.3 gefundenen Tripel können verwendet werden, um die Inkonsistenz-Tripel für Präferenzräume mit  $m > 3$  zu berechnen. Betrachten wir dies am Beispiel  $m = 4$  im strikten Präferenzraum.

**Beispiel 11.** Sei die Alternativenmenge  $X = \{a, b, c, d\}$  und das Domain  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}_s(X)$  im strikten Präferenzraum. Damit das Domain ein Condorcet Domain ist, muss für alle Domain-Projektionen  $\mathcal{D}_{/\{i,j,k\}}$  gelten, dass kein Inkonsistenz-Tripel auf der Projektion existiert. Betrachten wir z.B. die Domain-Projektion auf das Alternativentripel  $\{a, b, c\}$ . Die Inkonsistenz-Tripel für dieses Alternativentripel lauten  $\{abc, bca, cab\}$  und  $\{acb, bac, cba\}$ . Sucht man nun die Inkonsistenz-Tripel auf dem Gesamtdomain (nicht nur der Projektion), so erweitert man das Inkonsistenz-Tripel auf der Projektion um die fehlende(n) Alternative(n). In diesem Beispiel lassen sich für das erste Inkonsistenz-Tripel z.B. folgende Erweiterungen

vornehmen:  $\{dabc, dbca, dcab\}$ ,  $\{dabc, dbca, cdab\}$ ,  $\{dabc, dbca, cadb\}$ ,  $\{dabc, dbca, cabd\}$ ,  $\{dabc, bdca, dcab\}$ , usw. In diesem Beispiel kann man die Alternative  $d$  an alle Positionen der Präferenzen in den Inkonsistenz-Tripeln einfügen, solange die Anordnung der Alternativen  $a, b, c$  für dieses Tripel konstant gehalten wird. Diese Erweiterungen kann man für das zweite Inkonsistenz-Tripel der Domain-Projektion auf das Alternativentripel  $\{a, b, c\}$  auf identische Weise vornehmen. Außerdem kann man die Erweiterungen auch für die Domain-Projektionen auf die anderen Alternativentripel erzeugen. Dadurch ergeben sich alle Inkonsistenz-Tripel auf dem strikten Präferenzraum für vier Alternativen.

Es lassen sich insgesamt  $4^4 = 256$  inkonsistente Tripel für vier Alternativen im strikten Präferenzraum auf diese Weise erzeugen. Die KNF beinhaltet demnach auch 256 Disjunktionsterme. Tabelle 4.3 gibt eine Übersicht über die Anzahl der Disjunktionsterme für alle untersuchten Präferenzräume.

	strikt, 3	strikt, 4	strikt, 5	schwach, 3	schwach, 4	qt, 3
# Präferenzen	6	24	120	13	75	19
# Disj.-Terme	2	256	160.000	64	29.300	44

Tabelle 4.3: Übersicht Anzahl Präferenzen und Disjunktionsterme für alle untersuchten Präferenzräume

Benutzen wir den `bdd_minisat_all` Solver mit den beschriebenen Input-Files im DIMACS-Format, so erzeugt uns der Solver alle möglichen Belegungen, die die KNF erfüllen, in Form einer disjunktiven Normalform. Die Konjunktionsterme der DNF sind Vollkonjunktionen und stellen damit unsere gesuchten Condorcet Domains dar. Abbildung 4.2 zeigt einen Ausschnitt des Outputs für den Fall quasitransitiver

```

-1  2  3  4  -5  -6  -7  -8  -9  -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18 -19  0
-1 -2  3  4  5  -6  -7  -8  -9  -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18 -19  0
-1  2 -3  4  5  -6  -7  -8  -9  -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18 -19  0
-1  2  3 -4  5  -6  -7  -8  -9  -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18 -19  0
-1  2  3  4  5  -6  -7  -8  -9  -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18 -19  0
-1  2  3 -4 -5  6  -7  -8  -9  -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18 -19  0
-1 -2  3 -4  5  6  -7  -8  -9  -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18 -19  0
-1  2 -3 -4  5  6  -7  -8  -9  -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18 -19  0
-1  2  3 -4  5  6  -7  -8  -9  -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18 -19  0
-1  2 -3  4 -5  6  -7  -8  -9  -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18 -19  0
-1 -2 -3  4  5  6  -7  -8  -9  -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18 -19  0
-1  2 -3  4  5  6  -7  -8  -9  -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18 -19  0
-1 -2  3  4  5  6  -7  -8  -9  -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18 -19  0
-1  2  3  4 -5  6  -7  -8  -9  -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18 -19  0
-1  2  3  4  5  6  -7  -8  -9  -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18 -19  0
-1  2  3  4  5  6  -7  -8  -9  -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18 -19  0
-1  2  3 -4 -5 -6  7  -8  -9  -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18 -19  0
-1 -2  3  4 -5 -6  7  -8  -9  -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18 -19  0

```

Abbildung 4.2: Auszug Output AllSAT-Solver `bdd_minisat_all`, quasitransitiver Präferenzraum mit drei Alternativen

Präferenzen und drei Alternativen. Jede Zeile entspricht einer Vollkonjunktion über alle 19 booleschen Variablen und repräsentiert ein Condorcet Domain. Das Domain in der ersten Zeile enthält die Präferenzen, welche durch die Variablen  $x_2, x_3$  und  $x_4$  repräsentiert werden. Im Unterschied zum value-restriction-Algorithmus aus Abschnitt 4.1 enthält die Lösung zwar keine Duplikate, jedoch sind auch für diesen Algorithmus die ermittelten Condorcet Domains nicht alle maximal. Genauer gesagt, enthält die Lösung sogar alle Teilmengen der maximalen Condorcet Domains. Dies führt zu sehr großen Output-Files, welche für diesen Algorithmus auch die Beschränkung nach oben darstellen. So erreichen wir für den strikten und schwachen Präferenzraum bei fünf Alternativen die programminterne Größenbeschränkung und für den quasitransitiven Präferenzraum diese Schranke bereits bei vier Alternativen. Die gefundenen Lösungen für kleine Anzahlen an Alternativen müssen zunächst auf Maximalität überprüft werden, bevor man sie einzelnen Condorcet-Domain-Strukturen zuordnen kann. Darauf werden wir kurz in Abschnitt 4.4.3 eingehen.

### 4.3 Mediangraph-Algorithmus

Der dritte entwickelte Algorithmus, den wir in dieser Arbeit vorstellen, basiert wie der ALLSAT-Algorithmus auf der Mediangrapheigenschaft von Condorcet Domains. Dabei werden allerdings nicht die Inkonsistenz-Tripel benutzt, sondern lokal die Median-Ordnungen der Präferenzen berechnet. Das entwickelte Programm ist nicht nur zur Untersuchung von Medianräumen bei der Präferenzaggregation geeignet, sondern lässt sich universell für alle Probleme anwenden, welche sich in einem Judgment Aggregation Framework beschreiben lassen. Dies sind alle Gebiete der Social Choice Theorie, welche sich durch binäre Entscheidungen modellieren lassen. Eine sehr gute Übersicht über die untersuchten Probleme in der Judgment Aggregation geben List und Puppe [LP09] oder auch Grossi und Pigozzi [GP14].

Im Unterschied zum value-restriction-Algorithmus ist der Mediangraph-Algorithmus konstruktiv. Dies bedeutet, er versucht einem bestehenden Condorcet Domain Präferenzen hinzuzufügen bis es maximal ist. Die allgemeine Struktur des entwickelten Programms ist in Algorithmus 2 dargestellt. Für eine gegebene

---

**Algorithm 2** Algorithmus zur Berechnung von maximalen Condorcet Domains mithilfe der Mediangrapheigenschaft

---

Erzeuge die Menge $perm$ (Menge $\mathcal{R}(X)$ )	$\triangleright$ Erzeugt alle Präferenzrelationen für eine gegebene Menge $X$ von Alternativen
Wähle einen beliebigen Startknoten $v_0$ Erzeuge den Graphen $medGraph(v_0)$	$\triangleright$ Erzeugt einen initialen, einelementigen Mediangraphen
Erzeuge die Menge $residuals(perm - v_0)$	$\triangleright$ Erzeugt die initiale Menge $residuals$ , welche alle Präferenzrelation ohne $v_0$ enthält

```

procedure CDMEDIAN( $medGraph$ ,  $residual$ )
  for alle Elemente  $v$  in  $residual$  do
    if ( $medGraph + v$ ) ist kein Mediangraph then lösche  $v$  aus  $residual$ 
    end if
  end for
  if  $residual$  ist leer then speicher  $medGraph$  in einer Datei
  else
    for alle Elemente  $w$  in  $residual$  do
      CDMedian( $medGraph + w$ ,  $residual - w$ )
    end for
  end if
end procedure

```

---

Menge an Alternativen  $X$  beginnt das Programm mit der Erzeugung des Präferenzraums (je nach Auswahl strikter, schwacher oder quasitransitiver Präferenzraum) und des zugehörigen Graphen, welcher die Nachbarschaftsbeziehungen der Präferenzrelationen repräsentiert. Anschließend wählt der Algorithmus einen beliebigen Startknoten und erzeugt einen initialen Mediangraphen  $medGraph$ , welcher nur aus dem Startknoten besteht. Für den schwachen und quasitransitiven Präferenzraum ist zu beachten, dass man den Algorithmus mehrfach mit unterschiedlichen Startknoten beginnen muss, um alle Fälle abzudecken. Der Grund dafür besteht darin, dass es in diesen beiden Präferenzräumen unterschiedliche Präferenzstrukturen gibt, welche nicht durch Permutation der Alternativen oder Invertierung der Präferenzrelation ineinander überführt werden können. Dies ist im strikten Präferenzraum nicht der Fall, weshalb man o.B.d.A. den Startknoten  $ab \dots m$  wählen kann. Im schwachen und quasitransitiven Präferenzraum kann man die Präferenzrelationen anhand der Anzahl und Position der Indifferenzen klassifizieren. Für die untersuchten Fälle wurden folgende Startknoten verwendet:

- strikter Präferenzraum,  $m = 3$ :  $abc$
- strikter Präferenzraum,  $m = 4$ :  $abcd$

- strikter Präferenzraum,  $m = 5$ :  $abcde$
- schwacher Präferenzraum,  $m = 3$ :  $abc, (ab)c, (abc)$
- schwacher Präferenzraum,  $m = 4$ :  $abcd, (ab)cd, (ab)(cd), (abc)d, (abcd)$
- quasitransitiver Präferenzraum,  $m = 3$ :  $abc, (ab)c, (ab)(bc), (abc)$ .

Anschließend erzeugt das Programm die Menge *residuals*, welche alle Präferenzrelationen enthält, für die noch zu überprüfen ist, ob sie dem Mediagraphen hinzugefügt werden können, ohne dass die Mediagrapheneigenschaft verloren geht. Die Menge enthält zu Beginn alle Präferenzrelationen des Präferenzraums ohne den Startknoten.<sup>4</sup> Der Algorithmus ruft anschließend die Methode *CDMedian* mit den Inputs *medGraph* und *residuals* auf. Diese überprüft, welche Präferenzrelationen in *residuals* dem Mediagraphen *medGraph* einzeln hinzugefügt werden können, sodass der neue Graph ein Mediagraph bleibt. Präferenzen, die nicht hinzugefügt werden können, werden aus *residuals* gelöscht. Ist anschließend *residuals* eine leere Menge, so ist *medGraph* ein Mediagraph, der ein maximales Condorcet Domain repräsentiert und wird abgespeichert. Enthält *residuals* noch Elemente, so ruft der Algorithmus für jedes Element  $w$  in *residuals* die Methode *CDMedian* erneut auf mit den Inputs *medGraph* +  $w$  und *residuals* -  $w$ . Nachdem der Algorithmus beendet ist, sind alle maximalen Condorcet Domains, die den Startknoten enthalten, abgespeichert. Ein zentraler Unterschied zu den beiden anderen Programmen besteht darin, dass der Mediagraph-Algorithmus als Output nur maximale Condorcet Domains erzeugt. Dies erleichtert die Auswertung der Daten, da es lediglich eines Entfernens der isomorphen Condorcet Domains bedarf.

#### 4.4 Programme zur Visualisierung, Verifizierung und Klassifikation von Condorcet Domains

Im Zuge der Arbeit mit Condorcet Domains wurden noch weitere Programme entwickelt, um die gewonnenen Daten aufzuarbeiten und zu visualisieren. Drei dieser Programme sollen hier kurz vorgestellt werden, da sie auch für spätere Untersuchungen zum Thema Condorcet Domains sehr nützlich sein können.

##### 4.4.1 Programm: Visualize CDs

Da die Visualisierung der Condorcet Domains für vier Alternativen händisch nur noch sehr schwierig zeichnerisch umzusetzen ist, haben wir ein Programm entwickelt, welches es ermöglicht, den strikten und schwachen Präferenzraum für vier Alternativen grafisch darzustellen. Das Programm basiert auf einem Java Applet von David McCooley, der seinen Code dankenswerter Weise zur Verfügung gestellt hat, sodass wir ihn auf unsere Bedürfnisse anpassen konnten. Mithilfe des Programms kann der Präferenzraum in Form eines Oktaederstumpfes, welcher frei beweglich und rotierbar ist, visualisiert werden. Des Weiteren können Domains in das Programm geladen werden, welche dann im Präferenzraum hervorgehoben werden. Abbildung 4.3 zeigt einen Screenshot des Programms. Das Java Applet ist in der Lage, Bilder der Domains zu machen, zwischen verschiedenen geladenen Domains hin- und herzuschalten sowie die Bezeichnungen an den Knoten des Graphen zu verändern. Alle Grafiken in Kapitel 5 für die Präferenzräume mit vier Alternativen wurden mittels dieses Applets erstellt. Um Domains darzustellen, muss lediglich

---

<sup>4</sup> Für den schwachen und quasitransitiven Präferenzraum enthält *residuals* nur für den ersten untersuchten Startknoten alle Präferenzrelationen des Präferenzraums. Für den zweiten Startknoten enthält *residuals* nach der Initialisierung nur noch die Präferenzrelationen der Präferenzstrukturen, welche nicht bereits vorher als Startknoten untersucht wurden. Wenn z.B. zuvor bereits für den Fall des schwachen Präferenzraums mit drei Alternativen der Startknoten  $abc$  untersucht wurde und somit schon alle maximalen Condorcet Domains gefunden wurden, welche die Präferenz  $abc$  enthalten, so genügt es, dass beim nächsten Startknoten (z.B.  $(ab)c$ ) die Menge *residuals* nur noch alle Präferenzrelationen des Präferenzraums ohne die strikten Präferenzrelationen, wie z.B.  $abc$ , enthält. Die Menge *residuals* enthält dann zu Beginn die Präferenzrelationen  $(ac)b, (bc)a, c(ab), b(ac), a(bc)$  und  $(abc)$ .

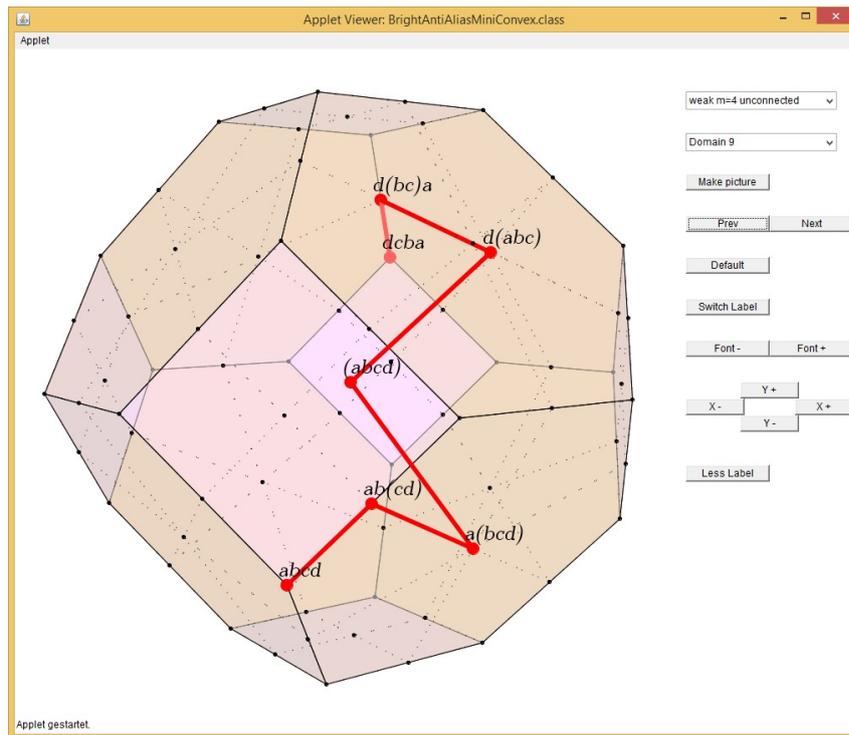


Abbildung 4.3: Screenshot Programm Visualize CD

eine Textdatei mit den Präferenzen in das Programm geladen werden und der gewünschte Präferenzraum (strikt oder schwach) gewählt werden.

#### 4.4.2 Programm: Domain Properties

Das Programm Domain Properties wurde entwickelt, um die Eigenschaften einzelner Domains zu bestimmen. Abbildung 4.4 zeigt einen Screenshot der Eingabemaske. In der Auswahl oben rechts kann man

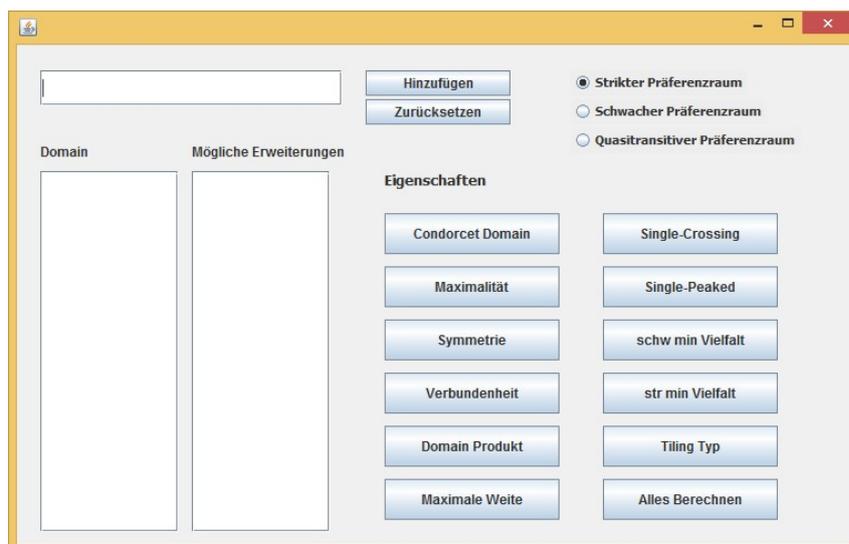


Abbildung 4.4: Screenshot Programm Domain Properties, Startansicht

zunächst den gewünschten Präferenzraum (strikt, schwach oder quasitransitiv) auswählen. Anschließend ist es möglich, Präferenzrelationen über das Textfeld links oben hinzuzufügen, welche in der Liste links

dargestellt werden. Es ist möglich, mehrere Präferenzen gleichzeitig durch Leerzeichen oder Komma getrennt einzufügen. Hat man das gewünschte Domain eingegeben, kann man entweder über die Schaltflächen auf der rechten Seite einzelne Eigenschaften überprüfen oder über die Schaltfläche unten rechts alle zur Verfügung stehenden Merkmale gleichzeitig überprüfen lassen. Nachdem man auf den jeweiligen Button geklickt hat, verfärben sich die Schaltflächen mit den entsprechenden Eigenschaften grün, gelb oder rot. Dabei steht rot dafür, dass das Domain die Eigenschaft nicht erfüllt und grün dafür, dass es die Eigenschaft erfüllt. Bei einigen Merkmalen kann man noch zwischen verschiedenen Graden unterscheiden. Ein Domain kann z.B. minimale Vielfalt bzgl. entweder der besten oder der schlechtesten Alternative oder minimale Vielfalt bzgl. sowohl der besten als auch der schlechtesten Alternative aufweisen. Der erste Fall wird dadurch gekennzeichnet, dass sich der entsprechende Button gelb färbt, der zweite Fall dadurch, dass er sich grün färbt. Auf die verschiedenen Eigenschaften der Domains gehen wir im Detail in Abschnitt 5.2 ein. Falls das Domain ein nicht maximales Condorcet Domain ist, werden in der Liste „Mögliche Erweiterungen“ alle Präferenzen angezeigt, welche man einzeln dem Domain hinzufügen kann, sodass es ein Condorcet Domain bleibt. Dies bietet die Möglichkeit, ohne großen Aufwand händisch maximale Condorcet Domains zu erzeugen. Abbildung 4.5 zeigt einen Screenshot für das Domain  $\{bacd, dbca, bdca, dcab, dcba\}$  aus dem strikten Präferenzraum mit vier Alternativen. Man kann erkennen,

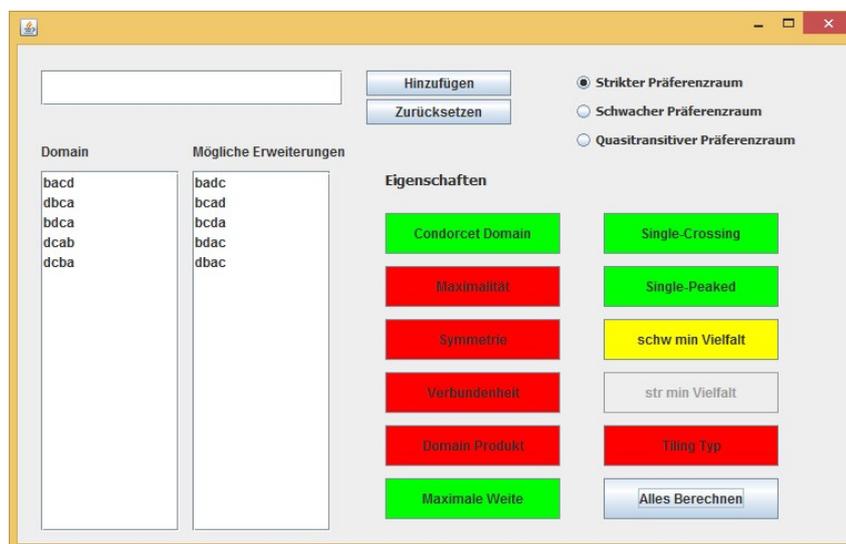


Abbildung 4.5: Screenshot Programm Domain Properties, Beispiel nicht maximales Domain

dass dieses Domain ein Condorcet Domain ist und es nicht maximal ist. Mögliche Erweiterungen dieses Domains sind entweder  $badc$ ,  $bcad$ ,  $bdca$ ,  $bdac$  oder  $dbac$ .<sup>5</sup>

Abbildung 4.6 zeigt einen Screenshot für ein maximales Condorcet Domain aus dem schwachen Präferenzraum mit vier Alternativen. Die Liste „Mögliche Erweiterungen“ ist in diesem Fall leer, da das Domain maximal ist. Die Eigenschaft „Tiling Typ“ ist ausgegraut, da sie für Condorcet Domains aus dem schwachen Präferenzraum nicht definiert ist.

Das entwickelte Programm ermöglicht es, schnell und unkompliziert Domains mit bis zu elf Alternativen hinsichtlich ihrer Eigenschaften zu überprüfen und mögliche Strukturen und Vermutungen zu validieren bzw. zu widerlegen.

<sup>5</sup> Man kann immer nur eine dieser Präferenzen hinzufügen, wenn man sicher gehen will, dass das daraus resultierende Domain ein Condorcet Domain ist.

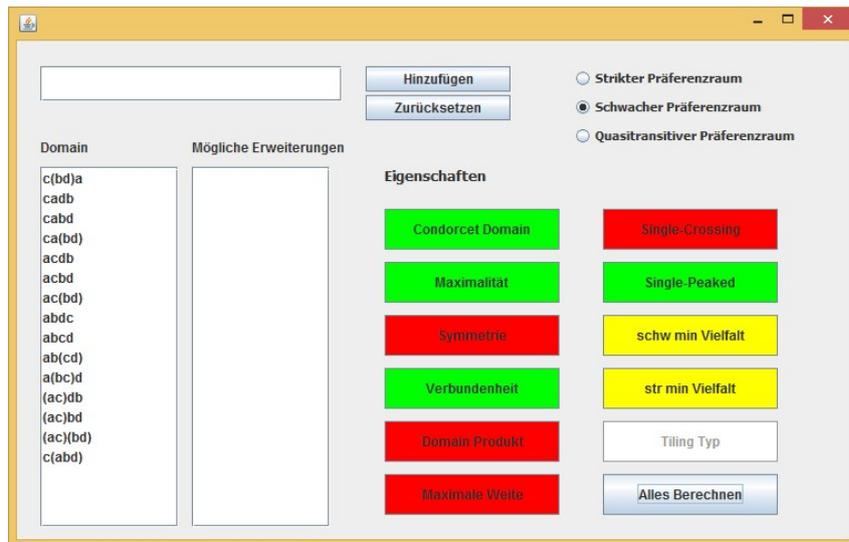


Abbildung 4.6: Screenshot Programm Domain Properties, Beispiel maximales Domain aus dem schwachen Präferenzraum

#### 4.4.3 Programm: Domain Operations

Das Programm Domain Operations, welches ebenfalls in Java programmiert wurde, besteht aus einer Sammlung von etwa 15 Methoden zur Aufarbeitung der Daten aus den am Anfang des Kapitels beschriebenen Programmen zur Berechnung von Condorcet Domains. Diese Methoden ermöglichen es, die großen Datenmengen auf redundante Daten zu untersuchen und zu strukturieren. Es existieren Methoden, um aus einer Datei mit maximalen und nicht maximalen Condorcet Domains, die nicht maximalen zu löschen sowie vorhandene Duplikate zu eliminieren. Des Weiteren sind Methoden implementiert, welche alle isomorphen Domains eines gegebenen Domains berechnen können. Anschließend können diese genutzt werden, um isomorphe Domains in den Daten zu löschen. Neben diesen strukturierenden Methoden sind außerdem Methoden implementiert, welche die Domains auf verschiedene Eigenschaften hin untersuchen können.



## 5 Klassifikation von Condorcet Domains für kleine Alternativenmengen

Nachdem wir uns mit verschiedenen Ansätzen und Implementierungen für die Suche nach Condorcet Domains auseinandergesetzt haben, betrachten wir in diesem Kapitel die Ergebnisse der Algorithmen und beschreiben diese. Zunächst führen wir einen Isomorphiebegriff für Präferenzdomains ein, der es uns erlaubt, eine vollständige Klassifikation der maximalen Condorcet Domains für die untersuchten Präferenzräume durchzuführen. Wann entsprechen sich zwei Domains strukturell, d.h. wann gehören sie der gleichen Isomorphieklasse bzw. Domain-Struktur an? Mit welchen Eigenschaften können wir die Domain-Struktur beschreiben? Nachdem wir diese Fragen beantwortet haben, werden wir für die untersuchten Präferenzräume die gefundenen Strukturen anhand ausgewählter Merkmale beschreiben, klassifizieren sowie in den Kontext der aktuellen Forschung einbetten.

### 5.1 Isomorphieklassen und Condorcet-Domain-Strukturen

Betrachten wir zunächst die Frage nach einem passenden Isomorphiebegriff für Präferenzdomains. Ein erster intuitiver Ansatz ist, die Domain-Isomorphie mithilfe der Graphenisomorphie zu beschreiben: Zwei Domains sind isomorph zueinander, wenn ihre Graphen isomorph zueinander sind. Dazu können wir jedem Domain einen ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$  zuordnen, wobei wir  $V$  als die Menge der Knoten und  $E$  als die Menge der Kanten bezeichnen. Dabei entspricht  $V = \mathcal{D}$  (die Präferenzrelationen des Domains sind die Knoten des Graphen) und  $E = \{\{R_1, R_2\} \subseteq \mathcal{D}, R_1 \neq R_2 | [R_1, R_2] = \{R_1, R_2\}\}$  (die Kanten des Graphen sind Paare aus  $\mathcal{D}$ , welche benachbart in  $\mathcal{R}(X)$  sind). In der Graphentheorie wird die Isomorphie zweier Graphen wie folgt definiert:

**Definition 15** (Graphenisomorphismus (vgl. z.B. [Die00])). *Zwei ungerichtete Graphen  $G_1 = (V_1, E_1)$  und  $G_2 = (V_2, E_2)$  ohne Mehrfachkanten sind isomorph zueinander, wenn eine bijektive Abbildung  $p : V_1 \rightarrow V_2$  existiert, sodass*

$$(\{R_1, R_2\} \in E_1) \Leftrightarrow (\{p(R_1), p(R_2)\} \in E_2).$$

Es zeigt sich jedoch, dass diese Definition für den Domain-Isomorphismus nicht geeignet ist. Wir können Domains konstruieren, deren Graphen isomorph zueinander sind, die jedoch strukturell deutliche Unterschiede aufweisen. Betrachten wir die beiden Domains aus Abbildung 5.1. Das linke Domain  $\mathcal{D}_\ell = \{abc, a(bc), acb, (ac)b\}$  erzeugt den Graphen  $G_\ell = (\mathcal{D}_\ell, E_\ell)$  mit den Kanten  $E_\ell = \{\{abc, a(bc)\}, \{a(bc), acb\}, \{acb, (ac)b\}\}$ , das rechte Domain  $\mathcal{D}_r = \{abc, (ab)c, (abc), c(ab)\}$  den Graphen  $G_r = (\mathcal{D}_r, E_r)$

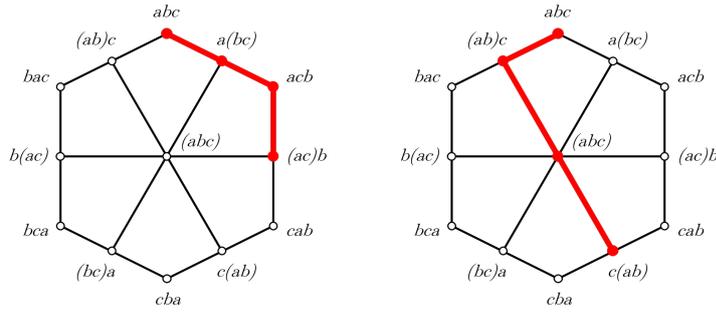


Abbildung 5.1: Zwei isomorphe Graphen aus dem schwachen Präferenzraum mit drei Alternativen

mit den Kanten  $E_r = \{\{abc, (ab)c\}, \{(ab)c, a(bc)\}, \{(abc), c(ab)\}\}$ . Wir können eine bijektive Abbildung finden, welche die Bedingungen des Graphenisomorphismus<sup>1</sup> erfüllt:

$$p : \mathcal{R}(X) \rightarrow \mathcal{R}(X) : \begin{cases} p(abc) &= abc \\ p(a(bc)) &= (ab)c \\ p(acb) &= (abc) \\ p((ac)b) &= c(ab) \\ p(R) &= R \text{ für alle } R \in \mathcal{R}(X) \setminus \{abc, a(bc), acb, (ac)b\}. \end{cases}$$

Somit sind die Graphen aus graphentheoretischer Sicht isomorph zueinander. Die Domains sind jedoch offensichtlich strukturell sehr unterschiedlich. So enthält  $\mathcal{D}_r$  im Unterschied zu  $\mathcal{D}_\ell$  die allgemeine Indifferenz. Des Weiteren gilt für alle Präferenzen in  $\mathcal{D}_\ell$ , dass eine Alternative (hier  $a$ ) immer an (geteilter) erster Position steht. Dies gilt nicht für  $\mathcal{D}_r$ . Das Ziel unseres Isomorphiebegriffs für Domains ist es jedoch, genau solche strukturellen Eigenschaften beizubehalten. Die Graphenisomorphie scheint somit ungeeignet, um Domain-Isomorphismen zu beschreiben.

Abbildung 5.2 zeigt zwei Domains aus dem strikten Präferenzraum, die der gesuchte Isomorphiebegriff als isomorph bezeichnen soll. Wir erkennen, dass die Domains zwar nicht identisch sind, sich in ihrer Struktur jedoch sehr ähneln. Die Eigenschaften der Domains sind identisch, so bestehen beide aus vier strikten Präferenzordnungen, sind zusammenhängend und erfüllen die Eigenschaften „Maximale Weite“, „Minimale Vielfalt“, „Single-peakedness“ bzw. „Single-dippedness“ und „Single-crossingness“.<sup>1</sup> Zwei Fak-

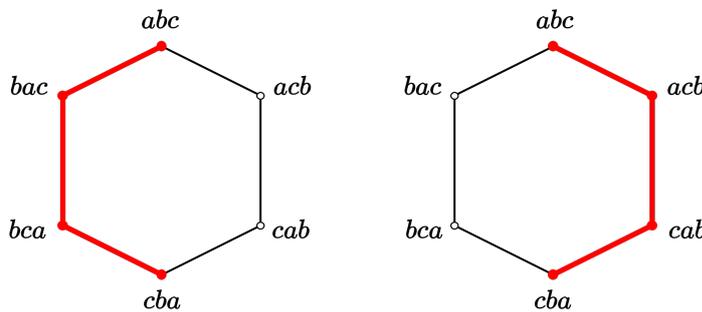


Abbildung 5.2: Zwei isomorphe Domains aus dem strikten Präferenzraum mit drei Alternativen

toren spielen für unsere Überlegungen bzgl. eines Isomorphiebegriffs eine zentrale Rolle: Zum einen soll es für die strukturellen Eigenschaften der Domains keinen Unterschied machen, wie wir die Alternativen

<sup>1</sup> Für eine genaue Beschreibung der Eigenschaften vgl. Abschnitt 5.2.

bezeichnen.<sup>2</sup> Dies bedeutet, man kann die Bezeichnungen der Alternativen untereinander vertauschen (in allen Präferenzrelationen des Domains gleichzeitig). Diese Operation bezeichnen wir als *Permutation der Alternativen*. Zum anderen sollten die Eigenschaften des Domains erhalten bleiben, wenn man alle Präferenzen „umdreht“.<sup>3</sup> Dies bedeutet, aus der Präferenzrelation  $abcd$  wird die inverse Präferenzrelation  $dcb$ , aus der Präferenzrelation  $(cd)ba$  wird die inverse Präferenzrelation  $ab(cd)$  usw. Wir drehen das Relationszeichen aller binären Entscheidungen um. Aus „ $i \succeq j$ “ wird „ $i \preceq j$ “ für alle binären Entscheidungen im Präferenzraum.

**Definition 16** (Inverse Präferenz). *Sei  $R$  eine Präferenzrelation aus dem Präferenzraum  $\mathcal{R}(X)$ . Die Präferenz  $R^{inv}$  heißt invers zu  $R$ , wenn gilt:*

$$\forall i, j \in X, i \neq j : (iRj) \Leftrightarrow (jR^{inv}i).$$

Bilden wir für alle Präferenzrelationen eines Domains die inversen Präferenzrelationen, so nennen wir diese Operation *Inversion des Domains*. Alle Domains, welche wir durch diese beiden Operationen oder die Kombination der beiden Operationen erzeugen, können gehören in die gleiche Isomorphieklasse bzw. der gleichen Domain-Struktur an. Die Domains in dieser Klasse bezeichnen wir als isomorph zueinander.

**Definition 17** (Isomorphe Domains). *Ein Domain  $\mathcal{D}_1$  ist isomorph zu einem anderen Domain  $\mathcal{D}_2$ , falls mithilfe der beiden Operationen „Permutation der Alternativen“ und „Inversion des Domains“  $\mathcal{D}_1$  zu  $\mathcal{D}_2$  umgeformt werden kann.*

Betrachten wir erneut Abbildung 5.2. Wir können das linke Domain in das rechte Domain überführen, indem wir die Bezeichnungen für die beiden Alternativen  $a$  und  $c$  vertauschen ( $a$  wird in allen Präferenzen durch  $c$  ersetzt,  $b$  bleibt überall erhalten und  $c$  wird in allen Präferenzen durch  $a$  ersetzt) und anschließend die Inversion des neuen Domains bilden:

- $abc \Rightarrow cba \Rightarrow abc$
- $bac \Rightarrow bca \Rightarrow acb$
- $bca \Rightarrow bac \Rightarrow cab$
- $cba \Rightarrow abc \Rightarrow cba$ .

Eine weitere Möglichkeit, die Domain-Isomorphie zu beschreiben, kann mithilfe von Pfaden umgesetzt werden. Für den strikten Präferenzraum kann man die Isomorphieklassen allgemein folgendermaßen beschreiben: Man nehme ein beliebiges Domain  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}(X)$  sowie ein beliebiges Element  $R_0 \in \mathcal{R}(X)$  (Referenzelement). Nun ermitteln wir für alle Elemente des Domains  $R_i \in \mathcal{D}$  einen (nicht eindeutigen) Pfad  $(R_0, \dots, R_j, R_{j+1}, \dots, R_i)$  von  $R_0$  nach  $R_i$ , sodass für alle  $j$  die beiden Präferenzen  $R_j$  und  $R_{j+1}$  benachbart sind. Nehmen wir als Beispiel die beiden Präferenzen  $abcd$  und  $dabc$ . Ein möglicher Pfad zwischen diesen beiden Ordnungen ist  $abcd$  - tausche Stelle 3 und 4 -  $abdc$  - tausche Stelle 2 und 3 -  $adbc$  - tausche Stelle 1 und 2 -  $dabc$ . Der Pfad kann somit entweder durch die Zwischenelemente (Präferenzen) oder durch die paarweisen, benachbarten Tauschvorgänge (Transpositionen) beschrieben werden. Wir können jedes Element aus  $\mathcal{D}$  mithilfe des Referenzelements  $R_0$  und eines Pfades beschreiben. Die Menge aller isomorphen Domains eines gegebenen Domains  $\mathcal{D}$  lässt sich folgendermaßen beschreiben:

1. Alle Domains, die sich erzeugen lassen, indem man  $R_0$  durch eine beliebige andere Präferenz ersetzt, die Pfade (paarweise benachbarte Tauschvorgänge) jedoch beibehält.

<sup>2</sup> Dies basiert auf dem Neutralitätsgedanken: Alle Alternativen/Kandidaten sollten gleich behandelt werden.

<sup>3</sup> Einige Eigenschaften der Domains werden durch diese Operation durch ihre dualen Eigenschaften ersetzt. So wird z.B. aus einem single-peaked Domain ein single-dipped Domain. Strukturell stellt dies jedoch für uns keinen Unterschied dar.

2. Alle Domains, die sich erzeugen lassen, indem man  $R_0$  durch eine beliebige andere Präferenz ersetzt und die Pfade (paarweise benachbarte Tauschvorgänge) invertiert.

Die Invertierung eines Pfades bedeutet nicht, den Pfad in umgekehrter Reihenfolge zu verfolgen, sondern dass die Stellen beim Tausch invertiert werden. Wenn der Originaltausch zwischen den Stellen  $j$  und  $j+1$  stattfindet, so bezeichnen wir den Tausch zwischen  $(m-j+1)$  und  $(m-(j+1)+1)$  als invertierten Tausch. Den Pfad bezeichnen wir als invertiert, falls man alle Originaltausche invertiert. Diese Vorgehensweise erzeugt dieselben isomorphen Domains wie die Kombination der beiden Operationen „Permutation der Alternativen“ und „Inversion des Domains“. Die Beschreibung mithilfe der Pfade lässt sich auch auf den schwachen und quasitransitiven Präferenzraum erweitern.

Mithilfe der Definition zueinander isomorpher Domains können wir für die untersuchten Präferenzräume alle maximalen Condorcet Domains vollständig klassifizieren. Alle zueinander isomorphen Condorcet Domains gehören der gleichen Isomorphieklasse (Condorcet-Domain-Struktur) an. Die gefundenen Strukturen können anschließend zusätzlich anhand verschiedener Eigenschaften der Strukturen klassifiziert werden. Tabelle 5.1 zeigt eine Übersicht über die Größe des Präferenzraums (Anzahl Präferenzen), die Größe der Potenzmenge (alle möglichen Domains eines Präferenzraums), die Anzahl der maximalen Condorcet Domains sowie die Anzahl der maximalen Condorcet-Domain-Strukturen für alle untersuchten Präferenzräume.

	$m = 3$ strikt	$m = 4$ strikt	$m = 5$ strikt	$m = 3$ schwach	$m = 4$ schwach	$m = 3$ quasitr.
$ \mathcal{R}(X) $	6	24	120	13	75	19
$ \mathcal{P}(\mathcal{R}(X)) $	64	16.777.216	$1,3 \cdot 10^{36}$	8.192	$3,7 \cdot 10^{22}$	524.288
Anzahl maximaler CD	9	495	140.475	29	3.001	100
Anzahl maximaler CD-Strukturen	2	18	688	6	96	13

Tabelle 5.1: Übersicht Größe Präferenzraum, Größe Potenzmenge, Anzahl maximaler CDs und Anzahl maximaler CD-Strukturen aller untersuchten Präferenzräume

Man erkennt, dass die Anzahl der maximalen Condorcet-Domain-Strukturen deutlich geringer ist als die Anzahl der maximalen Condorcet Domains. Mithilfe dieser Klassifikation ermöglicht die Arbeit erstmals eine umfassende Beschreibung aller Condorcet Domains durch die Beschreibung der Condorcet-Domain-Strukturen anhand ihrer Eigenschaften. Zur genaueren Untersuchung der Condorcet-Domain-Strukturen werden wir im nächsten Abschnitt zunächst auf verschiedene Eigenschaften von (Condorcet) Domains eingehen.

## 5.2 Eigenschaften von Condorcet Domains

Neben den zuvor beschriebenen Klassen von Condorcet Domains wie Tiling Domains, single-crossing Domains und single-peaked Domains (bzw. single-dipped Domains), werden wir uns in diesem Abschnitt mit verschiedenen Eigenschaften von Domains auseinandersetzen und deren Bedeutung analysieren. Nicht alle Eigenschaften lassen sich direkt auf alle untersuchten Präferenzräume anwenden bzw. benötigen unterschiedliche Interpretationen und Definitionen. Mithilfe der Eigenschaften können wir die gefundenen maximalen Condorcet Domains im nächsten Abschnitt besser beschreiben und analysieren.

**Maximale Weite** Domains mit dieser Eigenschaft, welche auch unter den Begriffen „maximal width domains“ und „normal domains“ bekannt sind, enthalten mindestens ein Präferenzpaar, welches den maximal möglichen Abstand (bezogen auf die Kemeny-Distanz) innerhalb des Präferenzraums aufweist.

Interpretiert man ein Domain als Beschreibung einer Gesellschaft, so besagt diese Eigenschaft, dass die Gesellschaft gegensätzliche und sehr extreme Meinungen zumindest bezüglich einer Dimension zulässt (vgl. [Pup16]). Eine Dimension kann z.B. die politische Einstellung oder die Einstellung zu Umweltschutzthemen darstellen.

Für den strikten Präferenzraum weisen alle Domains maximale Weite auf, die mindestens zwei zueinander inverse Präferenzen enthalten (z.B.  $abcde$  und  $edcba$ ). Da diese in allen binären Entscheidungen voneinander abweichen, müssen sie den maximalen Abstand (Kemeny-Distanz =  $2 \cdot \binom{n}{2}$ ) aufweisen. Im schwachen und quasitransitiven Präferenzraum haben nicht alle Präferenzpaare  $(R, R^{inv})$  den maximalen Abstand innerhalb des Präferenzraums. Betrachten wir z.B. das Paar  $(a(bc), (bc)a)$ . Zwar sind die Präferenzen invers zueinander, jedoch unterscheiden sie sich nicht in allen binären Entscheidungen. Dies liegt an der enthaltenen Indifferenz zwischen  $b$  und  $c$ , welche bei der Invertierung erhalten bleibt. Die Kemeny-Distanz zwischen diesen beiden Präferenzen ist vier, wohingegen die maximale Kemeny-Distanz sechs beträgt (z.B. zwischen den beiden Präferenzen  $abc$  und  $cba$ ), dargestellt in Tabelle 5.2.

	$a \succeq b$	$b \succeq a$	$a \succeq c$	$c \succeq a$	$b \succeq c$	$c \succeq b$	
$a(bc)$	1	0	1	0	1	1	
$(bc)a$	0	1	0	1	1	1	
$d(a(bc), (bc)a)$	0	1	0	1	1	0	$\Sigma = 4$
$abc$	1	0	1	0	1	0	
$cba$	0	1	0	1	0	1	
$d(abc, cba)$	1	1	1	1	1	1	$\Sigma = 6$

Tabelle 5.2: Beispiel zweier inverser Präferenzpaare ohne maximale Weite (oben) und mit maximaler Weite (unten)

Wir sagen aus diesem Grund, dass ein Domain maximale Weite hat, wenn es ein Präferenzpaar enthält, welches nur strikte paarweise Vergleiche beinhaltet und die Präferenzen invers zueinander sind. Allgemein lässt sich diese Eigenschaft wie folgt definieren:

**Definition 18** (Maximale Weite). *Ein Domain  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}(X)$  erfüllt die Eigenschaft maximale Weite, wenn es ein Präferenzpaar  $(R, R')$  enthält, sodass  $d(R, R') = \max_{R_i, R_j \in \mathcal{R}(X)} d(R_i, R_j)$  gilt.*

**Minimale Vielfalt** Minimale Vielfalt eines Domains erfordert, dass jede Alternative bzw. jeder Kandidat mindestens in einer Präferenz an erster Stelle auftaucht. Dahinter steckt die Intuition, dass keine zur Wahl stehenden Alternativen a priori als beste Alternative in den Präferenzen der Wähler ausgeschlossen werden sollte. Werden aufgrund von Domäneinschränkungen alle Präferenzen gestrichen, die eine gewisse Alternative an erster Stelle haben, so ist das durch diese Eigenschaft geforderte Minimum an Vielfalt innerhalb des Domains nicht mehr gegeben. Diese Eigenschaft lässt sich auch dual bezüglich der Alternative an der letzten Stelle definieren. Jeder Wähler sollte demnach die Möglichkeit haben, jede zur Wahl stehende Alternative bzw. jeden Kandidaten als schlechteste Alternative zu kennzeichnen. Aus diesem Grund unterscheiden wir zwischen den beiden Eigenschaften Minimale Vielfalt bzgl. der besten Alternative und Minimale Vielfalt bzgl. der schlechtesten Alternative.

Für den schwachen und quasitransitiven Präferenzraum stellt sich noch eine weitere Frage: Ist eine Alternative an erster (letzter) Stelle, wenn sie sich diese Position mit einer oder mehreren anderen Alternativen teilt - also eine Indifferenz an der Spitze (am Ende) der Präferenz steht? Hier unterscheiden wir

nochmals zwischen zwei verschiedenen Fällen: Ist jede Alternative mindestens einmal alleine an erster (letzter) Position in einer Präferenz, sprechen wir von strikter minimaler Vielfalt bzgl. der ersten (letzten) Position; ist jede Alternative mindestens einmal an erster (letzter) Position (alleinig oder durch eine Indifferenz), so sprechen wir von schwacher minimaler Vielfalt bzgl. der ersten (letzten) Position.

Betrachten wir z.B. das Domain  $\mathcal{D} = \{abcd, (ac)db, bdca, dbac\}$ . Jede Alternative steht mindestens einmal an erster Position. Allerdings tritt  $c$  nur gemeinsam mit  $a$  an erster Position auf. Aus diesem Grund erfüllt dieses Domain die Eigenschaft der schwachen minimalen Vielfalt bzgl. der besten Alternative. Gleichzeitig kommt jede Alternative einmal alleinig an letzter Position vor. Somit erfüllt das Domain zusätzlich die Eigenschaft der strikten minimalen Vielfalt bzgl. der letzten Position (und damit natürlich automatisch der schwachen minimalen Vielfalt bzgl. der letzten Position).

**Definition 19** (Strikte minimale Vielfalt (vgl. [Pup16])). *Ein Domain  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}(X)$  erfüllt die Eigenschaft der strikten minimalen Vielfalt bzgl. der besten Alternative, wenn für alle  $i \in X$  gilt:*

$$\exists R \in \mathcal{D}, \forall j \in X \setminus \{i\} : (iRj) \wedge (\neg jRi).$$

*Es erfüllt die Eigenschaft der strikten minimalen Vielfalt bzgl. der schlechtesten Alternative, wenn für alle  $i \in X$  gilt:*

$$\exists R \in \mathcal{D}, \forall j \in X \setminus \{i\} : (jRi) \wedge (\neg iRj).$$

**Definition 20** (Schwache minimale Vielfalt (vgl. [Pup16])). *Ein Domain  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}(X)$  erfüllt die Eigenschaft der schwachen minimalen Vielfalt bzgl. der besten Alternative, wenn für alle  $i \in X$  gilt:*

$$\exists R \in \mathcal{D}, \forall j \in X \setminus \{i\} : iRj.$$

*Es erfüllt die Eigenschaft der schwachen minimalen Vielfalt bzgl. der schlechtesten Alternative, wenn für alle  $i \in X$  gilt:*

$$\exists R \in \mathcal{D}, \forall j \in X \setminus \{i\} : jRi.$$

Jedes Domain, welches die allgemeine Indifferenz  $a \sim b \sim c \sim \dots \sim m$  enthält, erfüllt immer die Eigenschaft der schwachen minimalen Vielfalt bzgl. sowohl der besten als auch der schlechtesten Alternative. Dies liegt darin begründet, dass für die allgemeine Indifferenz alle Alternativen an allen Positionen gleichzeitig sind und somit auch an der ersten und letzten Position.

**Zusammenhängende Domains** Wir bezeichnen Domains als zusammenhängend, wenn es möglich ist, jede Präferenz im Domain von jeder anderen Präferenz aus dem Domain über einen Pfad zu erreichen, welcher nur benachbarte Präferenzen innerhalb des Domains umfasst. Diese Eigenschaft eines Domains soll zum Ausdruck bringen, dass das Domain keine „Lücken“ enthält - man also von einer Präferenz aus dem Domain zu einer anderen Präferenz aus dem Domain gelangen kann, indem man eine Serie an minimalen Veränderungen (Annäherungen) durchführt. Interpretiert man das Domain erneut als Abbild einer Gesellschaft, so stellt diese eine gewisse Gleichförmigkeit der Präferenzen dar. Die Präferenzen dürfen sich nicht um einige, wenige Meinungen konzentrieren (vgl. [Pup16]).

In Abschnitt 3.3 wurde bereits kurz angesprochen, wann zwei Präferenzen benachbart sind. Dies ist der Fall, wenn das Betweenness-Intervall nur die beiden Präferenzen selbst enthält und somit keine dritte Präferenz zwischen den beiden liegt. Reihen wir nun mehrere benachbarte Präferenzen aneinander  $\{R_1, R_2, \dots, R_k\}$ , wobei für alle  $j \in \{1 \dots (k-1)\}$  gelten muss, dass  $R_j$  und  $R_{j+1}$  benachbart sind, so nennen wir  $\{R_1, R_2, \dots, R_k\}$  einen Pfad.

**Definition 21** (Zusammenhängendes Domain (vgl. [Pup16])). *Ein Domain  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}(X)$  ist ein zusammenhängendes Domain, wenn für alle  $\{R, R'\} \subseteq \mathcal{R}(X)$  ein Pfad  $\{R_1, R_2, \dots, R_k\} \subseteq \mathcal{R}(X)$  mit  $R_1 = R$  und  $R_k = R'$  existiert, der komplett in  $\mathcal{D}$  liegt.*

**Semi-zusammenhängende Domains** Ein Domain, welches ein Paar zueinander inverser, strikter Präferenzen (also mit maximaler Kemeny-Distanz im Präferenzraum) sowie einen Pfad zwischen diesen beiden Präferenzen enthält, bezeichnet man als semi-zusammenhängendes Domain. Ein solches Domain lässt bestimmte diametrale Präferenzen zu, fordert aber gleichzeitig die Möglichkeit der schrittweisen Annäherung innerhalb des Domains. In einer Gesellschaft, welche durch solch ein Domain repräsentiert wird, ist es möglich, von einer Präferenz zu einer komplett konträren Präferenz durch eine Reihe minimaler Annäherungen zu gelangen, ohne das Domain zu verlassen (vgl. [Pup16]).

**Definition 22** (Semi-zusammenhängende Domains (vgl. [DKK12] und [Pup16])). *Ein Domain  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}(X)$  ist semi-zusammenhängend, wenn es ein Paar zueinander inverser, strikter Präferenzen  $(R, R')$  enthält sowie ein Pfad  $\{R_1, R_2, \dots, R_k\} \subseteq \mathcal{R}(X)$  mit  $R_1 = R$  und  $R_k = R'$  existiert, der komplett in  $\mathcal{D}$  liegt.*

Da zusammenhängende Domains Pfade zwischen allen Präferenzpaaren enthalten, muss jedes zusammenhängende und maximale Domain semi-zusammenhängend sein. Die Umkehrung gilt offensichtlich nicht. Abbildung 5.3 zeigt vier verschiedene Domains aus dem schwachen Präferenzraum. Das Domain

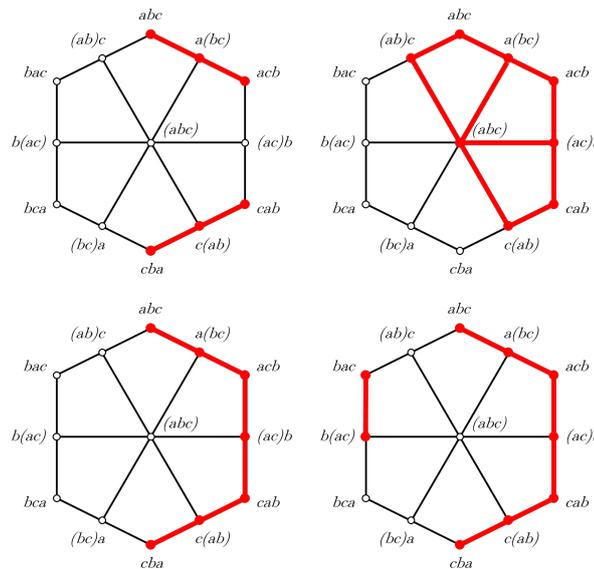


Abbildung 5.3: Beispiele nicht semi-zusammenhängender und semi-zusammenhängender Domains

links oben ist ein nicht maximales Condorcet Domain, links unten ein maximales Condorcet Domain und die beiden Domains auf der rechten Seite sind keine Condorcet Domains. Das Domain links oben hat maximale Weite (Präferenzpaar  $(abc, cba)$ ), enthält allerdings keinen vollständigen Pfad zwischen den beiden Präferenzen  $acb$  und  $cab$  und ist somit nicht semi-zusammenhängend. Das Domain rechts oben in der Abbildung ist zusammenhängend (und enthält somit Pfade zwischen allen Präferenzpaaren), hat allerdings keine maximale Weite. Zwar sind die beiden Präferenzen  $(ab)c$  und  $c(ab)$  invers zueinander, sie haben jedoch nicht den maximalen Abstand innerhalb des Präferenzraums. Demnach ist auch dieses Domain nicht semi-zusammenhängend. Die beiden unteren Domains sind semi-zusammenhängend, da sie das strikte, zueinander inverse Präferenzpaar  $(abc, cba)$  sowie einen Pfad zwischen diesen beiden Präferenzen enthalten. Das Domain links unten ist im Gegensatz zum Domain rechts unten zusätzlich noch zusammenhängend.

Für Condorcet Domains weisen Danilov et al. [DKK12] jedoch im strikten Präferenzraum nach, dass semi-zusammenhängende Condorcet Domains immer Teilmengen eines Domains vom Tiling Typ sein müssen. Somit muss jedes maximale, semi-zusammenhängende CD ein Domain vom Tiling Typ sein und da diese immer zusammenhängend sind, muss jedes maximale semi-zusammenhängende Condorcet Domain auch zusammenhängend sein.

Des Weiteren können wir zur Anzahl der Präferenzen in einem Domain aus dem strikten Präferenzraum folgende Beobachtung festhalten.

**Beobachtung 1.** *Ein semi-zusammenhängendes Domain im strikten Präferenzraum enthält mindestens  $\binom{m}{2} + 1$  Präferenzordnungen.*

Da ein semi-zusammenhängendes Domain ein paar zueinander inverser, strikter Präferenzordnungen enthält und diese sich in allen  $\binom{m}{2}$  paarweisen Vergleichen zwischen zwei Alternativen unterscheiden, benötigt man einen Pfad benachbarter Präferenzen innerhalb des Domains, der mindestens die Länge  $\binom{m}{2} + 1$  hat.

**Single-peakedness** Wir haben bereits in Abschnitt 3.2 beschrieben, wie man single-peaked Präferenzen für den strikten Präferenzraum definieren und nach Ward [War65] grafisch darstellen kann. Für den schwachen Präferenzraum haben Arrow [Arr51] und Inada [Ina64] diese Definition erweitert. Auch hier ist eine intuitive grafische Darstellung wie z.B. in Abbildung 3.7 noch möglich. Im quasitransitiven Präferenzraum stellt uns die Veranschaulichung von single-peaked Präferenzen jedoch vor ein Problem. So lässt sich z.B. die Präferenz  $(ab)(ac)$  nicht sinnvoll in einem Diagramm nach Ward darstellen. Außerdem ist die bisherige, grafische Umschreibung für die analytische Untersuchung der gefundenen Domains nicht dienlich. Wir führen aus diesen beiden Gründen eine single-peaked-Definition über sogenannte „upper contour sets“ („Oberhalb-Mengen“) ein.

**Definition 23** (Single-peakedness (vgl. z.B. Puppe [Pup16])). *Ein Domain  $\mathcal{D} \in \mathcal{R}(X)$  ist single-peaked, falls eine lineare Ordnung  $> \in \mathcal{R}_s(X)$  über die Alternativen  $X$  existiert, sodass für alle  $R \in \mathcal{D}$  und alle  $w \in X$  die upper contour sets  $U_R(w) = \{j \in X : jRw\}$  konvex über  $>$  sind; also aus  $\{i, k\} \subseteq U_R(w)$  und  $i < j < k$  folgt  $j \in U_R(w)$ .*

Diese Definition ist äquivalent zu den Definitionen Wards, Arrows und Inadas für den strikten bzw. schwachen Präferenzraum. Wenn  $R$  eine quasitransitive Präferenzrelation ist, kann die obige Definition jedoch auch angewendet werden und verliert dabei nichts an ihrer Bedeutung. Das upper contour set der allgemeinen Indifferenz ist im schwachen und quasitransitiven Präferenzraum für alle Alternativen immer die gesamte Alternativenmenge. Für single-dipped Präferenzen lässt sich eine duale Definition über „lower contour sets“ („Unterhalb-Mengen“) herleiten.

**Definition 24** (Single-dippedness (vgl. z.B. Puppe [Pup16])). *Ein Domain  $\mathcal{D} \in \mathcal{R}(X)$  ist single-dipped, falls eine lineare Ordnung  $> \in \mathcal{R}_s(X)$  über die Alternativen  $X$  existiert, sodass für alle  $R \in \mathcal{D}$  und alle  $w \in X$  die lower contour sets  $L_R(w) = \{j \in X : wRj\}$  konvex über  $>$  sind; also aus  $\{i, k\} \subseteq L_R(w)$  und  $i < j < k$  folgt  $j \in L_R(w)$ .*

Im schwachen und quasitransitiven Präferenzraum bezeichnen wir die Domains als schwache single-peaked (bzw. schwache single-dipped) Domains.

**Symmetrie** Ein Domain ist symmetrisch, wenn für jede Präferenz im Domain auch die inverse Präferenz enthalten ist (vgl. [DK13]). Im Unterschied zur Eigenschaft maximale Weite muss das Domain nicht nur ein Paar inverser Präferenzen (bzw. genauer gesagt, Präferenzen mit maximalem Abstand im

Präferenzraum) enthalten, sondern das gesamte Domain darf nur aus solchen Paaren bestehen. Für den schwachen und quasitransitiven Präferenzraum müssen wir erneut überlegen, ob wir uns auf Paare mit maximalem Abstand oder auf Paare zueinander inverser Präferenzen festlegen. Da die Eigenschaft auf die Symmetrie des Domains und nicht auf einen maximalen Abstand der Präferenzen abzielt, definieren wir diese Eigenschaften über die inversen Präferenzpaare.

**Definition 25** (Symmetrie). *Ein Domain  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}(X)$  erfüllt die Eigenschaft der Symmetrie genau dann, wenn*

$$\forall R \in \mathcal{D}, \exists R' \in \mathcal{D} : R' = R^{inv}.$$

Dies führt dazu, dass Domains existieren können, die symmetrisch sind, aber keine maximale Weite aufweisen. In Abbildung 5.4 sind zwei symmetrische Domains dargestellt. Das Domain auf der linken

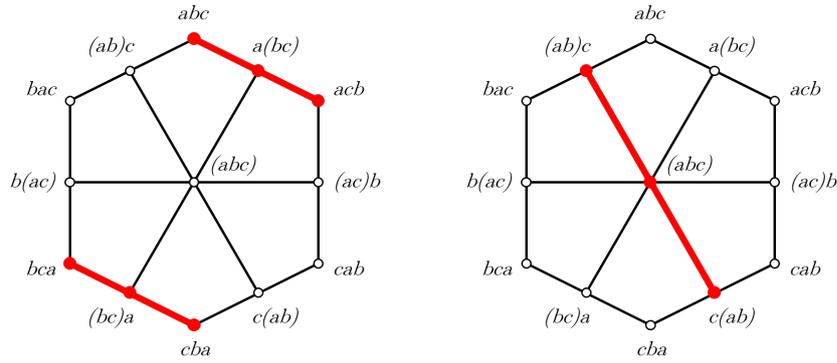


Abbildung 5.4: Beispiele symmetrischer Domains

Seite  $\mathcal{D}_l = \{abc, a(bc), acb, cba, (bc)a, bca\}$  besteht aus den drei zueinander inversen Präferenzpaaren  $\{abc, cba\}$ ,  $\{acb, bca\}$  und  $\{a(bc), (bc)a\}$ . Die beiden ersten Paare haben maximalen Abstand zueinander, wodurch das Domain die Eigenschaft maximale Weite erfüllt. Das Domain auf der rechten Seite der Abbildung  $\mathcal{D}_r = \{(ab)c, (abc), c(ab)\}$  besteht aus zwei zueinander inversen Präferenzpaaren  $\{(ab)c, c(ab)\}$  und  $\{(abc), (abc)\}$  (da  $(abc)$  zu sich selbst invers ist), jedoch hat keines dieser Paare maximalen Abstand, weshalb das Domain die Eigenschaft maximale Weite nicht erfüllt.

**Domain-Produkt** Wir definieren im Folgenden ein Domain-Produkt als eine Kombination zweier Domains zu einem neuen Domain. Dabei handelt es sich um einen Spezialfall der Replacement Struktur Fishburns ([Fis96] und [Fis02]).

**Definition 26** (Domain-Produkt). *Gegeben seien zwei Domains  $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{R}(X')$  und  $\mathcal{D}'' \subseteq \mathcal{R}(X'')$  mit  $X' \cap X'' = \emptyset$ . Die Verkettung zweier Präferenzen  $R = R'R''$  mit  $R' \in \mathcal{R}(X')$  und  $R'' \in \mathcal{R}(X'')$  bezeichne eine Präferenz, sodass*

$$\begin{aligned} \forall i, j \in X' : iR'j &\Leftrightarrow iR''j \\ \forall i, j \in X'' : iR''j &\Leftrightarrow iR'j \\ \forall i \in X', \forall j \in X'' : iR'j &\wedge \neg jR'i. \end{aligned}$$

Ein Domain  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}(X)$  mit  $X = X' \cup X''$  ist ein Domain-Produkt aus  $\mathcal{D}'$  und  $\mathcal{D}''$ , wenn gilt

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}' \star \mathcal{D}'' := \{R \in \mathcal{R}(X) : \exists R' \in \mathcal{D}', \exists R'' \in \mathcal{D}'' \text{ mit } R = R'R'' \text{ oder } R = R''R'\}.$$

Jede Präferenz des einen Domains wird mit jeder Präferenz des anderen Domains kombiniert, indem man sie „hintereinander“ schreibt. Folgendes Beispiel verdeutlicht die Vorgehensweise.

**Beispiel 12.** Seien  $X' = \{a, b, c\}$ ,  $X'' = \{d, e\}$  zwei Alternativenmengen und  $\mathcal{D}' = \{abc, bac\}$  sowie  $\mathcal{D}'' = \{de, ed\}$  zwei Domains der Präferenzräume auf diesen Alternativenmengen. Das Domain-Produkt der beiden Domains lautet

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}' \star \mathcal{D}'' = \{abcde, deabc, abced, edabc, bacde, debac, baced, edbac\}.$$

Das Domain-Produkt enthält  $2 \cdot |X'| \cdot |X''|$  Elemente und ist kommutativ ( $\mathcal{D} = \mathcal{D}' \star \mathcal{D}'' = \mathcal{D}'' \star \mathcal{D}'$ ). Sind  $\mathcal{D}'$  und  $\mathcal{D}''$  Condorcet Domains, so muss das resultierende Domain ebenfalls ein Condorcet Domain sein. Diese Überlegung folgt direkt aus der Replacement Struktur Fishburns. Danilov und Koshevoy definieren in [DK13] ein ähnliches Produkt, bei dem sie sich allerdings ausschließlich auf symmetrische Condorcet Domains mit maximaler Weite beschränken. Sie zeigen, dass das Produkt zweier maximaler Condorcet Domains mit maximaler Weite ebenfalls ein maximales Condorcet Domain maximaler Weite sein muss. Außerdem weisen sie nach, dass das Produkt zweier symmetrischer Condorcet Domains auch symmetrisch ist und dass sich alle symmetrischen Condorcet Domains des strikten Präferenzraums der Größe  $2^{m-1}$  als (Mehrfach-)Produkt kleinerer symmetrischer Domains darstellen lassen. Folgende Beobachtung lässt sich aus diesen Erkenntnissen ableiten.

**Beobachtung 2.** Ein Domain  $\mathcal{D}$ , welches sich als Domain-Produkt zweier Domains  $\mathcal{D}'$  und  $\mathcal{D}''$  darstellen lässt, erfüllt minimale Vielfalt bzgl. der besten (schlechtesten) Alternative genau dann, wenn beide Domains  $\mathcal{D}'$  und  $\mathcal{D}''$  minimale Vielfalt bzgl. der besten (schlechtesten) Alternative aufweisen.

Für den schwachen und quasitransitiven Präferenzraum ist weder die Replacement Struktur Fishburns noch das Domain-Produkt von Danilov und Koshevoy definiert. Die hier entwickelte Definition kann man jedoch auch für diese Präferenzräume übernehmen. Wir treffen an dieser Stelle die Festlegung, dass bei der Verkettung zweier Präferenzen  $R', R''$  aus dem schwachen oder quasitransitiven Präferenzraum die Grenze zwischen diesen Präferenzen strikt ist. Demnach entsteht z.B. aus der Verkettung  $R' = a(bc)$  und  $R'' = (de)f$  die Präferenz  $R = R'R'' = a(bc)(de)f$ .

**Domain-Projektionen auf Tripel der Alternativenmenge** Betrachten wir Domains mit mehr als drei Alternativen, so kann man sich die Frage stellen, wie Beschränkungen der Domains auf alle Tripel aus der Alternativenmenge aussehen. Diese Domain-Projektionen auf Tripel haben wir bereits in Abschnitt 3.3 im Zusammenhang mit der Definition von value-restrictions beschrieben. Die Menge der Domain-Projektionen eines Domains auf alle Alternativentripel bezeichnen wir mit  $\mathcal{D}/_3$ .

**Definition 27** (Menge aller Domain-Projektionen auf Tripel). Für ein Domain  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}(X)$  ist die Menge aller Domain-Projektionen auf alle Tripel

$$\mathcal{D}/_3 := \{\mathcal{D}/_{\{i,j,k\}} | \{i, j, k\} \subseteq X, i \neq j, i \neq k, j \neq k\}.$$

Für maximale Condorcet Domains ist zu erwarten, dass deren Projektionen auf Tripel mehr Elemente enthalten als nicht maximale Condorcet Domains. Des Weiteren kann man verschiedene Zusammenhänge zwischen einem Domain und seinen Tripelprojektionen herleiten (für den Fall strikter Präferenzen und 1., 2., 4.-6. vgl. [Pup16])

**Beobachtung 3.** Sei  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}(X)$  ein Domain aus dem strikten, schwachen oder quasitransitiven Präferenzraum, so gelten für die Menge aller Domain-Projektionen auf Tripel  $\{i, j, k\}$  paarweise verschiedener Elemente der Alternativenmenge  $\mathcal{D}_{/3}$  folgende Eigenschaften.

1.  $\mathcal{D}$  ist ein Condorcet Domain genau dann, wenn  $\mathcal{D}_{/3}$  nur Condorcet Domains enthält.
2. Wenn  $\mathcal{D}$  maximale Weite hat, so haben alle Domains in  $\mathcal{D}_{/3}$  maximale Weite.
3. Wenn  $\mathcal{D}$  symmetrisch ist, so sind alle Domains in  $\mathcal{D}_{/3}$  symmetrisch.
4. Wenn  $\mathcal{D}$  strikte minimale Vielfalt aufweist, so weisen alle Domains in  $\mathcal{D}_{/3}$  strikte minimale Vielfalt auf.
5. Wenn  $\mathcal{D}$  schwache minimale Vielfalt aufweist, so weisen alle Domains in  $\mathcal{D}_{/3}$  schwache minimale Vielfalt auf.
6. Wenn  $\mathcal{D}$  ein zusammenhängendes Domain ist, so sind alle Domains in  $\mathcal{D}_{/3}$  zusammenhängende Domains.
7. Wenn  $\mathcal{D}$  ein semi-zusammenhängendes Domain ist, so sind alle Domains in  $\mathcal{D}_{/3}$  semi-zusammenhängende Domains.
8. Wenn  $\mathcal{D}$  ein semi-zusammenhängendes maximales Condorcet Domain aus dem strikten oder schwachen Präferenzraum ist, so sind alle Domains in  $\mathcal{D}_{/3}$  semi-zusammenhängende maximale Condorcet Domains.
9. Aus der Maximalität eines Condorcet Domains  $\mathcal{D}$  folgt nicht die Maximalität aller Condorcet Domains in  $\mathcal{D}_{/3}$ .

Beobachtung 3.1. folgt direkt aus den Theoremen 9, 10 und 11. Wäre  $\mathcal{D}$  ein Condorcet Domain und würde ein Tripel  $\{i, j, k\}$  paarweise verschiedener Elemente aus  $X$  existieren, sodass die Domain-Projektion  $\mathcal{D}_{/\{i,j,k\}}$  kein Condorcet Domain ist, so könnte man einen (strikt-strikten, strikt-schwachen oder schwach-strikten) Zyklus auf dem Tripel erzeugen. Dies bedeutet allerdings im Umkehrschluss, dass man diesen Zyklus auch auf dem Gesamtdomain  $\mathcal{D}$  erzeugen kann und  $\mathcal{D}$  folglich kein Condorcet Domain sein kann.

Beobachtung 3.2. erhält man aus folgender Überlegung: Wenn  $\mathcal{D}$  maximale Weite aufweist, so muss es zwei strikte Präferenzen  $R$  und  $R'$  enthalten, welche invers zueinander sind. Die Projektionen der beiden Präferenzen auf ein beliebiges Tripel  $\{i, j, k\}$  paarweise verschiedener Elemente aus  $X$  müssen demnach auch invers zueinander sein, wodurch auch  $\mathcal{D}_{/\{i,j,k\}}$  maximale Weite aufweist.

Für die Beobachtung 3.3. gelten die gleichen Überlegungen wie für Beobachtung 3.2. Bei der Domain-Projektionen auf ein beliebiges Tripel  $\{i, j, k\}$  paarweise verschiedener Elemente aus  $X$  bleiben die inversen Präferenzpaare erhalten, woraus die Symmetrie der Domain-Projektionen resultiert.

Die Erhaltung der schwachen und strikten minimalen Vielfalt bei der Domain-Projektion (Beobachtungen 3.4. und 3.5) resultiert daraus, dass für die (strikte) schwache minimale Vielfalt für jede Alternative  $i \in X$  mindestens eine Präferenz in  $\mathcal{D}$  enthalten sein muss, die  $i$  (alleinig) an erster Position aufweist. Somit existieren auch insbesondere für jedes Tripel  $\{i, j, k\}$  paarweise verschiedener Elemente aus  $X$  drei Präferenzen, welche jeweils  $i, j$  oder  $k$  (alleinig) an erster Position enthalten. Analog gilt die Aussage für die (strikte) schwache minimale Vielfalt bzgl. der letzten Alternative. An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen, dass ein Domain, welches die allgemeine Indifferenz  $a \sim b \sim c \sim \dots \sim m$  enthält, immer schwache minimale Vielfalt bzgl. sowohl der ersten als auch der letzten Alternative aufweist.

Beobachtung 3.6. lässt sich mithilfe der Definition von zusammenhängenden Domains zeigen. Für alle  $\{R, R'\} \subseteq \mathcal{R}(X)$  muss ein Pfad paarweise benachbarter Präferenzen  $\{R_1, R_2, \dots, R_t\} \subseteq \mathcal{R}(X)$  existieren mit  $R_1 = R$  und  $R_t = R'$ , welcher komplett in  $\mathcal{D}$  liegt. Für jede Domain-Projektion auf Tripel  $\{i, j, k\}$  paarweise verschiedener Elemente aus  $X$  müssen die Projektionen dieser beiden Präferenzen  $R_{/\{i,j,k\}}, R'_{/\{i,j,k\}}$  auch durch den Pfad benachbarter (oder identischer) Präferenzen

$$\{R_{1/\{i,j,k\}}, R_{2/\{i,j,k\}}, \dots, R_{t/\{i,j,k\}}\}$$

verbunden sein und somit die Domain-Projektionen aller Tripel  $\mathcal{D}_{/\{i,j,k\}}$  zusammenhängende Domains sein.

Beobachtung 3.7. lässt sich analog zu den beiden Beobachtungen 3.2. und 3.6 herleiten. Wenn  $\mathcal{D}$  ein Paar strikter, zueinander inverser Präferenzen enthält und diese durch einen Pfad miteinander verbunden sind, so muss dies auch für die Domain-Projektionen auf alle Tripel gelten.

Beobachtung 3.8. können wir für den strikten und schwachen Präferenzraum direkt aus Beobachtung 3.7. und der Eigenschaft herleiten, dass alle semi-zusammenhängenden Condorcet Domains für drei Alternativen maximal sind (siehe dazu Abbildungen 5.5 und 5.28 in den Abschnitten 5.3.1 und 5.4.1). Diese Begründung gilt nicht für quasitransitive Präferenzräume. Für drei Alternativen existieren semi-zusammenhängende nicht maximale Condorcet Domains. Betrachten wir z.B. das Condorcet Domain

$$\mathcal{D} = \{abc, (ab)c, (ab)(ac), b(ac), (bc)(ac), (bc)a, cba\}.$$

Das Domain hat maximale Weite aufgrund des Präferenzpaares  $\{abc, cba\}$  und ist zusammenhängend, da man zwischen allen Präferenzen einen Pfad finden kann, der im Domain liegt. Somit ist  $\mathcal{D}$  semi-zusammenhängend. Das Domain ist allerdings nicht maximal, da z.B. die Vereinigung von  $\mathcal{D}$  und der Präferenz  $a(bc)$  auch ein Condorcet Domain ist.

Beobachtung 3.9. ist sehr interessant, da sie besagt, dass trotz der Maximalität des Condorcet Domains Domain-Projektionen von Tripeln  $\{i, j, k\}$  paarweise verschiedener Elemente aus  $X$  existieren, die keine maximalen Condorcet Domains für  $m = 3$  sind. Für das Domain

$$\mathcal{D}' = \{abcde, abced, abecd, acebd, aecbd, eachd, ecabd, ecbad, edacb, edcab, edcba\}$$

aus dem strikten Präferenzraum mit  $m = 5$  ist dies z.B. für die Domain-Projektion  $\mathcal{D}'_{/\{b,c,d\}} = \{bcd, cbd, dcb\}$  der Fall. Die Projektion enthält nur drei Elemente und kann demnach nicht maximal sein. Alle anderen Domain-Projektionen dieses Domains sind maximal. Auch für Condorcet Domains aus dem schwachen und quasitransitiven Präferenzraum lassen sich solche Beispiele finden, auf die wir in den Kapiteln 5.4.1 und 5.5 noch genauer eingehen werden. Wir werden im Folgenden Domains, deren Domain-Projektionen auf alle Tripel maximale Condorcet Domains sind, als *voll besetzt* bezeichnen.

**Definition 28.** Ein Domain  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}(X)$  ist voll besetzt genau dann, wenn die Domain-Projektionen aller Tripel  $\mathcal{D}_{/\{i,j,k\}}$  maximale Condorcet Domains auf  $\mathcal{R}(\{i, j, k\})$  sind.

Ein voll besetztes Condorcet Domain muss nicht immer maximal sein. Betrachten wir z.B. das Maximum Condorcet Domain aus dem strikten Präferenzraum mit vier Alternativen

$$\mathcal{D}_{max} = \{abcd, abdc, bacd, badc, bdac, bdca, dbac, dbca, dcba\}.$$

Dieses maximale Condorcet Domain ist voll besetzt. Entfernt man aus dem Domain die Präferenz  $bacd$ , so ist das Condorcet Domain nicht mehr maximal. Man kann jedoch überprüfen, dass das verbliebene

Domain immer noch voll besetzt ist. Somit ist das Condorcet Domain  $\mathcal{D}_{max} \setminus \{bacd\}$  voll besetzt und nicht maximal.

Wir definieren im Folgenden eine Art Umkehrfunktion der Domain-Projektion. Man kann aus einer Menge von Domains auf Alternativentripeln ein Domain auf der Vereinigungsmenge der Alternativentripel erzeugen, welches alle Präferenzen aus dem Präferenzraum der Vereinigungsmenge enthält, deren Domain-Projektionen auf die Alternativentripel der ursprüngliche Domains in den Domains enthalten sind. Oder anders ausgedrückt, überprüfe für alle Kombinationen von Präferenzen (Präferenztuple aus dem kartesischen Produkt der Domains), ob die Vereinigung der Präferenzrelation auf dem untersuchten Präferenzraum zulässig ist - bilde also alle zulässigen Präferenzrelationen aus den gegebenen Domains auf dem neuen Präferenzraum. Wir nennen das daraus resultierende Domain *Kombinationsprodukt*.

**Definition 29** (Kombinationsprodukt). Sei  $\{X_1, X_2, \dots, X_\ell\}$  eine Menge paarweise voneinander verschiedener, dreielementiger Alternativmengen und  $\mathcal{M} = \{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_\ell\}$  eine Menge von Domains mit  $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{R}(X_1)$ ,  $\mathcal{D}_2 \subseteq \mathcal{R}(X_2)$ ,  $\dots$ ,  $\mathcal{D}_\ell \subseteq \mathcal{R}(X_\ell)$ , wobei die Präferenzräume entweder alle strikt oder alle schwach oder alle quasitransitiv sind. Das Kombinationsprodukt von  $\mathcal{M}$  ist ein Domain auf dem Präferenzraum der Vereinigungsmenge  $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_\ell$ , für das gilt

$$\mathcal{K}(\mathcal{M}) := \{R \in \mathcal{R}(X) \mid \forall s \in \{1, 2, \dots, \ell\}, R_{/X_s} \in \mathcal{D}_s\}.$$

**Beispiel 13.** Gegeben seien die drei Domains  $\mathcal{D}_1 = \{abc\}$ ,  $\mathcal{D}_2 = \{abd, adb, dab\}$  und  $\mathcal{D}_3 = \{bcd, bdc\}$  auf den strikten Präferenzräumen  $\mathcal{R}_1(\{a, b, c\})$ ,  $\mathcal{R}_2(\{a, b, d\})$  und  $\mathcal{R}_3(\{b, c, d\})$ . Das Kombinationsprodukt von  $\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3\}$  auf dem Präferenzraum der Vereinigungsmenge  $X = \{a, b, c\} \cup \{a, b, d\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$  lautet

$$\mathcal{K}(\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3\}) = \{abcd, abdc\}.$$

Für alle Präferenzen  $R$ , die nicht Element des Kombinationsprodukts sind, muss gelten  $R_{/\{a,b,c\}} \notin \mathcal{D}_1$  oder  $R_{/\{a,b,d\}} \notin \mathcal{D}_2$  oder  $R_{/\{b,c,d\}} \notin \mathcal{D}_3$ . So gilt z.B. für die Präferenz  $R = dabc$ , dass die Projektionen der Präferenz auf  $\{a, b, c\}$  und  $\{a, b, d\}$  in  $\mathcal{D}_1$  bzw.  $\mathcal{D}_2$  liegen, die Projektion  $R_{/\{b,c,d\}} = dbc$  jedoch nicht in  $\mathcal{D}_3$  enthalten ist und somit  $dabc$  nicht zum Kombinationsprodukt gehört.

## 5.3 Klassifikation für den strikten Präferenzraum

In diesem Abschnitt gehen wir auf die Ergebnisse der entwickelten Algorithmen für den strikten Präferenzraum mit drei, vier und fünf Alternativen ein. Für drei und vier Alternativen beschreiben wir zunächst alle maximalen Condorcet-Domain-Strukturen und klassifizieren diese anschließend anhand der Eigenschaften Zusammenhang, Semi-Zusammenhang und Domain-Produkt-Struktur. Für fünf Alternativen beschreiben wir nur einige ausgewählte Condorcet-Domain-Strukturen. Teile der Ergebnisse bzgl.  $m = 3$  und  $m = 4$  wurden bereits in dem Working Paper „All Condorcet Domains of Strict and Weak Orders on Four Alternatives“ [Dit16] beschrieben.

### 5.3.1 Drei Alternativen

Bevor wir uns den Ergebnissen der Computersimulationen zuwenden, betrachten wir zunächst den noch leicht überschaubaren Fall mit drei Alternativen. Für die sechs Präferenzen des Präferenzraums lassen sich schnell alle maximalen Condorcet Domains (CDs) bestimmen. Die Abbildung 5.5 zeigt zwei zusammenhängende und die Abbildung 5.6 zwei nicht zusammenhängende maximale Condorcet Domains, welche jeweils isomorph zueinander sind. Alle maximalen Condorcet Domains für den strikten Präferenzraum mit drei Alternativen gehören entweder zur Klasse der zusammenhängenden Domains mit vier

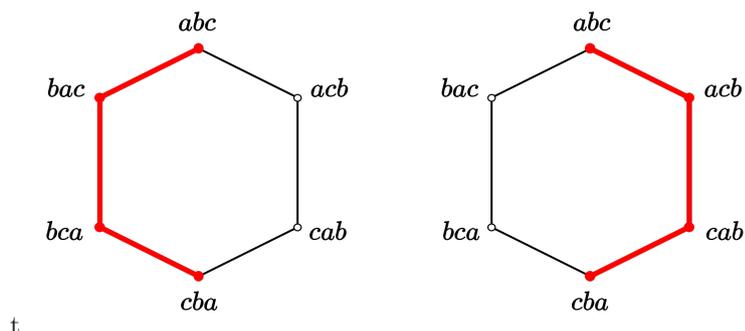


Abbildung 5.5: Zwei zusammenhängende maximale Condorcet Domains aus dem strikten Präferenzraum mit drei Alternativen

benachbarten Präferenzen oder zur Klasse der nicht zusammenhängenden Domains mit zwei jeweils zueinander inversen Präferenzpaaren. Es existieren somit nur zwei maximale Condorcet-Domain-Strukturen für diesen Präferenzraum. Sowohl die zusammenhängenden als auch die nicht zusammenhängenden ma-

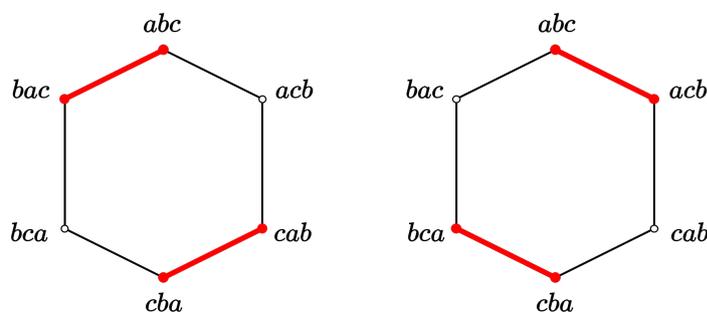


Abbildung 5.6: Zwei nicht zusammenhängende maximale Condorcet Domains aus dem strikten Präferenzraum mit drei Alternativen

ximalen CDs erfüllen die Eigenschaft maximale Weite, da sie immer mindestens ein Präferenzpaar mit maximalem Abstand innerhalb des Präferenzraums enthalten. Bei den zusammenhängenden maximalen CDs handelt es sich hierbei um die beiden „äußeren“ Präferenzen. Bei den nicht zusammenhängenden maximalen CDs existieren zwei Präferenzpaare mit maximalem Abstand, was man in Abbildung 5.6 gut erkennen kann. Dadurch sind diese Condorcet Domains auch symmetrisch im Gegensatz zu den Domains aus der zusammenhängenden Condorcet-Domain-Struktur.

Alle zusammenhängenden maximalen CDs auf diesem Präferenzraum erfüllen entweder die Eigenschaften single-peakedness und minimale Vielfalt bezüglich der besten Alternative oder die dazu dualen Eigenschaften single-dippedness und minimale Vielfalt bezüglich der schlechtesten Alternative. Dies lässt sich anhand folgender Beobachtung erklären: Aus der single-peakedness folgt, dass eine Alternative nie an der letzten Position stehen darf.<sup>4</sup> Nehmen wir o.B.d.A an, dass es sich um Alternative  $b$  handelt. Da das CD vier Präferenzen enthält, müssen die verbliebenen Präferenzen zweimal  $b$  an der Spitze mit  $a$  und  $c$  am Ende und jeweils einmal  $a$  an der Spitze (mit  $c$  am Ende) und einmal  $c$  an der Spitze (mit  $a$  am Ende) enthalten. Somit folgt aus der single-peakedness bei einem Domain mit vier Präferenzen aus dem strikten Präferenzraum mit drei Alternativen die minimale Vielfalt bezüglich der besten Alternative. Die gleiche Schlussfolgerung gilt vice versa für den Zusammenhang zwischen single-dippedness und minimale Vielfalt bezüglich der schlechtesten Alternative.

<sup>4</sup> Vgl. dazu die Beschreibung von single-peakedness über value-restrictions in Abschnitt 3.3.

**Beobachtung 4.** Enthält ein Domain aus dem strikten Präferenzraum mit drei Alternativen vier Präferenzen und ist single-peaked (single-dipped), so erfüllt das Domain minimale Vielfalt bzgl. der besten (schlechtesten) Alternative.

Betrachtet man die Eigenschaft single-crossingness, so erkennt man, dass nur die zusammenhängenden Domains unter den maximalen CDs diese Eigenschaft erfüllen. Da für den strikten Präferenzraum für alle  $i, j \in X, i \neq j$  die Grenzen  $(ij)$  und  $(ji)$  zusammenfallen, stellen wir nur die drei Grenzen  $(ab)$ ,  $(ac)$  und  $(bc)$  dar. In Abbildung 5.7 sind die Grenzen beispielhaft für das zusammenhängende maximale Condorcet Domain  $\mathcal{D} = \{abc, bac, bca, cba\}$  dargestellt.

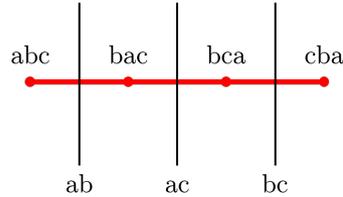


Abbildung 5.7: Single-crossing Domain aus dem strikten Präferenzraum mit drei Alternativen

Die zusammenhängenden maximalen CDs entsprechen außerdem den in Abschnitt 3.4.3 beschriebenen Tiling Domains. Die entsprechenden Tilings für diese Domains sind bereits in Abbildung 3.24 dargestellt.

Die nicht zusammenhängenden maximalen CDs erfüllen im Gegensatz zu den zusammenhängenden maximalen CDs gleichzeitig minimale Vielfalt bezüglich der besten und der schlechtesten Alternative. Dies folgt auch direkt aus folgender trivialen Beobachtung.

**Beobachtung 5.** Ist ein Domain aus dem strikten Präferenzraum symmetrisch und erfüllt minimale Vielfalt bzgl. der besten (schlechtesten) Alternative, so muss das Domain gleichzeitig auch minimale Vielfalt bzgl. der schlechtesten (besten) Alternative erfüllen.

Des Weiteren besitzen die nicht zusammenhängenden maximalen Condorcet Domains die in Abschnitt 5.2 beschriebene Domain-Produkt-Struktur. Betrachten wir z.B. das linke Domain aus Abbildung 5.6  $\mathcal{D} = \{abc, bac, cba, cab\}$ . Man kann zwei disjunkte Mengen  $\{a, b\}$  und  $\{c\}$  sowie die dazugehörigen maximalen Condorcet Domains  $\mathcal{D}_1 = \{ab, ba\}$  und  $\mathcal{D}_2 = \{c\}$  finden<sup>5</sup>, sodass  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \star \mathcal{D}_2$  gilt.

Tabelle 5.3 fasst die beschriebenen Eigenschaften für die beiden maximalen Condorcet-Domain-Strukturen zusammen. Ein „x“ in einer Zelle bedeutet, dass Domains dieser Struktur die entsprechende Eigenschaft erfüllen, kein „x“ in einer Zelle, dass sie die Eigenschaft nicht erfüllen. In der Spalte „Minimale Vielfalt“ gibt „xx“ an, dass die CDs dieser Struktur minimale Vielfalt bezüglich sowohl der besten als auch der schlechtesten Alternative erfüllen. In der ersten Spalte (# Präferenzen) sind die Größen der Condorcet Domains der beiden Strukturen vermerkt. Die letzte Spalte (# isom Domains) gibt die Anzahl der zueinander isomorphen Domains an, die der entsprechenden Condorcet-Domain-Struktur zugeordnet werden können. Es existieren sechs zusammenhängende maximale Condorcet Domains, welche alle paarweise isomorph zueinander sind und drei nicht zusammenhängende maximale Condorcet Domains, welche ebenfalls alle paarweise isomorph zueinander sind. Abbildung 5.8 stellt die Mediagraphen der beiden nicht zusammenhängenden maximalen CDs aus Abbildung 5.6 dar. Die Mediagraphen der zusammenhängenden maximalen CDs entsprechen (wie bei allen zusammenhängenden CDs) den Graphen im Permutaeder selbst.

<sup>5</sup> Auf strikten, schwachen und quasitransitiven Präferenzräumen mit weniger als drei Alternativen muss die paarweise Mehrheitsrelation immer zyklensfrei sein, da ein Zyklus per Definition aus mindestens drei Alternativen besteht. Dadurch sind alle Domains aus diesen Präferenzräumen Condorcet Domains und für das einzige maximale Condorcet Domain  $\mathcal{D}$  gilt  $\mathcal{D} = \mathcal{R}(X)$ .

CD-Struktur	# Präferenzen	Maximale Weite	Minimale Vielfalt	Zusammenhängend	Symmetrie	Domain-Produkt	Tiling Typ	Single-peakedness	Single-crossingness	# isom Domains
Zusammenhängende CDs	4	x	x	x			x	x	x	6
Nicht zusammenhängende CDs	4	x	xx		x	x				3

Tabelle 5.3: Zusammenfassung aller maximalen Condorcet-Domain-Strukturen für  $m = 3$  im strikten Präferenzraum

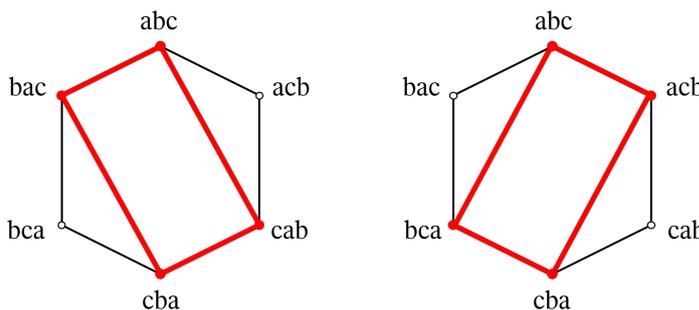


Abbildung 5.8: Mediagraphen zweier nicht zusammenhängender maximaler Condorcet Domains für den strikten Präferenzraum mit drei Alternativen

### 5.3.2 Vier Alternativen

Nachdem wir uns mit den maximalen Condorcet Domains für den strikten Präferenzraum mit drei Alternativen auseinandergesetzt haben, betrachten wir nun den weitaus komplexeren Fall mit vier Alternativen. Mithilfe der verwendeten Algorithmen konnten insgesamt 18 verschiedene Isomorphieklassen bzw. Condorcet-Domain-Strukturen ermittelt werden, welche im Folgenden genauer analysiert werden. Wie bereits in Kapitel 3.1 beschrieben, existieren für vier Alternativen insgesamt 24 verschiedene Präferenzordnungen, welche sich durch ein Permutaeder der Ordnung vier dreidimensional darstellen lassen. Jeder Knoten des Permutaeders repräsentiert eine Präferenzordnung des Präferenzraums, wobei zwei Knoten benachbart und durch eine Kante verbunden sind, wenn sie sich lediglich durch einen paarweisen Vergleich unterscheiden (das Betweenness-Intervall der beiden Präferenzordnungen nur die Präferenzordnungen selbst enthält). Ein solches Permutaeder besteht aus acht Sechsecken und sechs Quadraten. Innerhalb der Sechsecke ist jeweils eine Alternative konstant an erster oder letzter Stelle in jeder Präferenzordnung. Die verbliebenen drei Alternativen sind entsprechend des Falls mit drei Alternativen angeordnet. Dabei repräsentiert ein Sechseck jeweils eines der möglichen vier Tripel ( $\binom{4}{3} = 4$ ) mit der vierten Alternative entweder fix an erster oder fix an letzter Position - somit erhält man acht verschiedene Sechsecke. Abbildung 5.9 zeigt beispielhaft eines der Sechsecke mit dem Tripel  $\{a, b, c\}$  und der Alternative  $d$  fix an letzter Position. Die Quadrate des Permutaeders bestehen aus zwei Alternativenpaaren. Die Alternativen können innerhalb der Paare die Position tauschen, die Position der Paare zueinander bleibt jedoch konstant für alle vier Präferenzordnungen eines Quadrats. Es existieren insgesamt ( $\binom{4}{2} = 6$ ) verschiedene Möglichkeiten, zwei Alternativenpaare so zu bilden und somit sechs unterschiedliche Quadrate. Abbildung 5.10 zeigt ein solches Quadrat, bei dem in jeder Präferenzordnung die Elemente des Alternativenpaars  $\{a, b\}$  immer vor den Elementen des Alternativenpaars  $\{c, d\}$  auftreten.

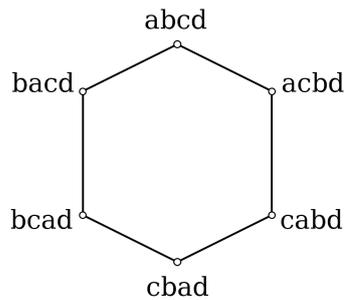


Abbildung 5.9: Sechseck aus Permutaeder des strikten Präferenzraums mit vier Alternativen

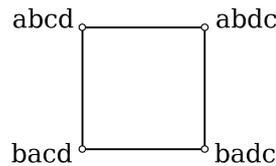


Abbildung 5.10: Quadrat aus Permutaeder des strikten Präferenzraums mit vier Alternativen

Die Sortierung und Klassifikation der nachfolgenden Condorcet-Domain-Strukturen erfolgt anhand der Anzahl der enthaltenen Präferenzen sowie der gemeinsamen Eigenschaften oder Besonderheiten. Dabei werden wir sowohl auf die Form der verschiedenen Strukturen als auch auf deren Eigenschaften und Alleinstellungsmerkmale eingehen. Um dem Leser eine bessere Intuition und Übersicht über die verschiedenen Strukturen zu verschaffen, wurden anstelle einer Durchnummerierung bildhafte Bezeichnungen der Strukturen gewählt. Nach der Beschreibung der einzelnen Strukturen betrachten wir die Mediagraphen sowie zusammenfassend eine Übersicht aller Condorcet-Domain-Strukturen. Abschließend nehmen wir eine Klassifikation anhand der drei Merkmale Zusammenhang, Semi-Zusammenhang und Domain-Produkt-Struktur vor.

### Danilov-Koshevoy-4-Punkt-Domain

In Abbildung 5.11 ist ein maximales Condorcet Domain aus der CD-Struktur Danilov-Koshevoy-4-Punkt-Domain mit der minimalen Anzahl an Präferenzen unter allen maximalen Condorcet Domains dargestellt. Dieses Domain entspricht der in Kapitel 3.4.4 beschriebenen Danilov-Koshevoy-4-Punkt-Domain-Struktur (DK4D). Da die Anzahl der Alternativen gerade ist ( $m = 4$ ), existiert keine weitere maximale Condorcet-Domain-Struktur mit nur vier Präferenzordnungen.<sup>6</sup> Alle Domains dieser Struktur haben maximale Weite und erfüllen die Eigenschaft der minimalen Vielfalt sowohl bezüglich der besten als auch der schlechtesten Alternative. Wie bereits in Abschnitt 3.4.4 beschrieben, sind Domains dieses Typs immer symmetrisch und nicht zusammenhängend. Aufgrund dieser speziellen Struktur existieren lediglich sechs verschiedene, zueinander isomorphe Condorcet Domains innerhalb dieser Isomorphieklasse.

### Schlange und Zerteilte Schlange

Domains der nächsten beiden maximalen CD-Strukturen enthalten jeweils sieben Präferenzen. Wir unterscheiden zwischen der „Schlange“ in Abbildung 5.12a und der „zerteilten Schlange“ in Abbildung 5.12b. Die „Schlange“ ist die einzige zusammenhängende maximale CD-Struktur mit sieben Elementen und ist ein maximales single-crossing Domain. Domains dieser Struktur haben maximale Weite und gehört zur

<sup>6</sup> Für ungerade  $m$  existieren die Domains der in Abschnitt 3.4.5 beschriebenen Condorcet-Domain-Struktur 4P2.

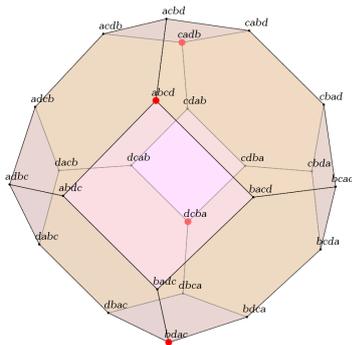


Abbildung 5.11: Danilov-Koshevoy-4-Punkt-Domain

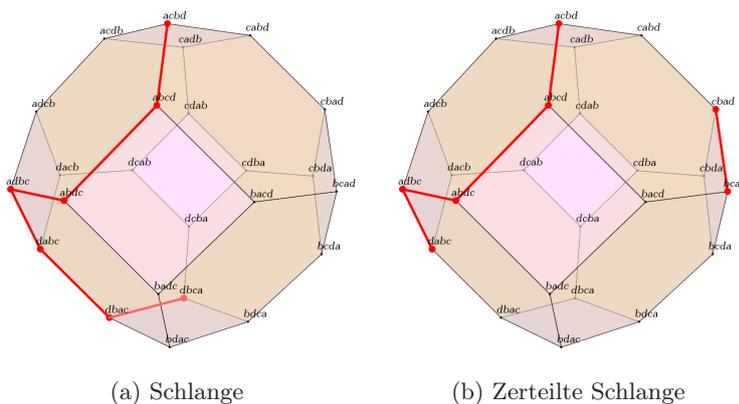


Abbildung 5.12: Die Schlangenstrukturen

Gruppe der Tiling Domains. Sie erfüllen weder minimale Vielfalt noch sind sie symmetrisch. Betrachten wir diese Eigenschaften genauer am Domain aus Abbildung 5.12a

$$\mathcal{D}_{Schl} = \{abcd, abdc, acbd, adbc, dabc, dbac, dbca\}.$$

Man erkennt, dass genau ein Paar zueinander inverser Präferenzen enthalten ist  $(acbd, dbca)$ , woraus wir die maximale Weite und die fehlende Symmetrie ableiten können. Des Weiteren erkennt man, dass die Alternativen  $b$  und  $c$  niemals an erster und die Alternative  $b$  niemals an letzter Position in einer Präferenzordnung des Domains auftritt. Wenn man die Präferenzen gemäß Abbildung 5.13 anordnet, so

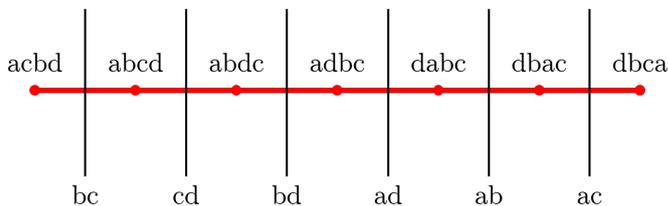


Abbildung 5.13: Single-crossing Domain aus dem strikten Präferenzraum mit vier Alternativen mit Grenzen

erkennt man die single-crossing Eigenschaft des Domains mit den jeweiligen Grenzen. Dass das Domain in die Gruppe der Tiling Domains gehört, lässt sich anhand von Abbildung 5.14 feststellen. Wichtig ist hier zu beachten, dass die Vektoren in der Reihenfolge  $(a - c - b - d)$  gewählt werden müssen, um das

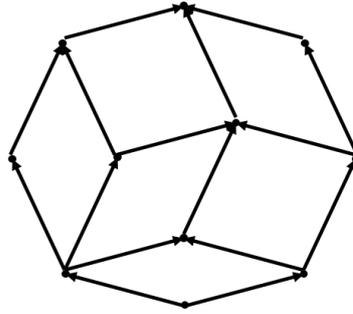


Abbildung 5.14: Repräsentatives Tiling für die CD-Struktur Schlange

Domain aus der obigen Abbildung zu erzeugen. Der CD-Struktur lassen sich insgesamt 48 verschiedene, zueinander isomorphe Domains zuordnen.

Betrachten wir die zweite maximale CD-Struktur mit sieben Präferenzen, so lässt sich feststellen, dass auch diese maximale Weite erfüllt, jedoch die Eigenschaften single-crossing und Tiling Typ verloren gehen. Außerdem sind Domains dieser Struktur nicht zusammenhängend. Im Gegensatz zur CD-Struktur „Schlange“ erfüllen Domains der Struktur „Zerteilte Schlange“ die Eigenschaft minimale Vielfalt bzgl. entweder der ersten oder der letzten Alternative. Im Beispiel aus der Abbildung 5.12b

$$\mathcal{D}_{ZSchl} = \{abcd, abdc, acbd, adbc, bcad, cbad, dabc\}$$

hat das Domain minimale Vielfalt bzgl. der ersten Alternative, da jede Alternative zumindest einmal an der ersten Stelle einer Präferenzordnung des Domains auftritt. Es erfüllt jedoch nicht die Eigenschaft minimale Vielfalt bzgl. der letzten Stelle, da die beiden Alternativen  $a$  und  $b$  niemals an letzter Stelle einer Präferenz auftreten. Die Struktur besteht aus einer zusammenhängenden Kette von fünf benachbarten Präferenzen (ähnlich der CD-Struktur „Schlange“) und einem Paar zueinander benachbarter Präferenzen, welches nicht mit der Fünfer-Kette benachbart ist. Auch dieser CD-Struktur lassen sich insgesamt 48 verschiedene, zueinander isomorphe Domains zuordnen.

### Single-peaked Domain

Abbildung 5.15 zeigt ein Domain der maximalen CD-Struktur „Single-peaked Domain“. Diese Struktur

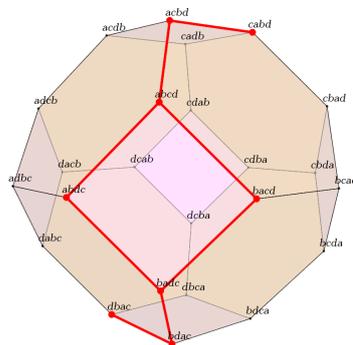


Abbildung 5.15: Single-peaked Domain

ist einzigartig unter allen maximalen Condorcet-Domain-Strukturen. Sie ist die einzige Struktur, welche gleichzeitig semi-zusammenhängend ist (damit auch maximale Weite erfüllt und zusammenhängend ist) sowie minimale Vielfalt bzgl. entweder der ersten oder letzten Alternative erfüllt. Puppe [Pup16] zeigt,

dass dies für alle  $m$  sowohl für den strikten als auch für schwachen Präferenzraum gilt. Die Struktur besteht aus einem Quadrat des Permutaeders sowie zwei mit dem Quadrat verbundenen, gegenüberliegenden „Armen“ aus jeweils zwei Präferenzen. Aufgrund unserer Definition bzgl. isomorpher Domains beinhaltet diese CD-Struktur neben den single-peaked Domains auch die single-dipped Domains, da diese sich strukturell sehr ähnlich sind (die Implikationen in der Realität sind jedoch sehr unterschiedlich). Die single-peaked Domains dieser Struktur weisen immer minimale Vielfalt bezüglich der ersten Alternative auf, wohingegen die single-dipped Domains dieser Struktur immer minimale Vielfalt bezüglich der letzten Alternative aufweisen. Das Domain in Abbildung 5.15

$$\mathcal{D}_{SP} = \{abcd, abdc, acbd, bacd, badc, bdac, cabd, dbac\}$$

ist ein single-peaked Domain bzgl. der Alternativenanordnung  $c - a - b - d$ . Maximale single-peaked Domains lassen sich immer durch ein Tiling beschreiben (vgl. Abschnitt 3.4.3). Abbildung 5.16 illustriert das Tiling des single-peaked Domains für vier Alternativen.

Um das Domain zu erzeugen, müssen die Vektoren in der Reihenfolge  $(c - a - b - d)$  gewählt werden. Es

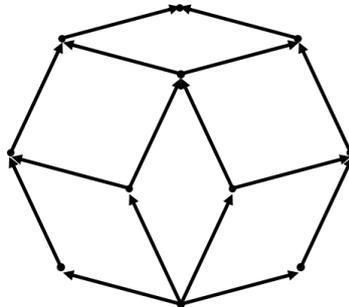


Abbildung 5.16: Repräsentatives Tiling für die CD-Struktur Single-peaked Domain

existieren 24 verschiedene, zueinander isomorphe Domains, welche sich dieser Struktur zuordnen lassen - zwölf single-peaked Domains und zwölf single-dipped Domains (jeweils ein Domain für jede mögliche Reihenfolge der Alternativen, wobei zueinander inverse Reihenfolgen das gleiche Domain erzeugen).

### Krabbe, Sonne und Sonnenkrabbe

Die folgenden drei maximalen CD-Strukturen zeichnen sich durch ihre speziellen, gemeinsamen Eigenschaften aus. Alle drei CD-Strukturen, welche in Abbildung 5.17 dargestellt sind, enthalten acht Präferenzen, sind zusammenhängend und haben keine maximale Weite. Wir bezeichnen diese Strukturen als „Krabbe“ (Abbildung 5.17a), „Sonne“ (Abbildung 5.17b) und den Hybrid aus beiden „Sonnenkrabbe“ (Abbildung 5.17c). Sie sind die einzigen Strukturen, die zusammenhängend sind, aber keine maximale Weite aufweisen und somit nicht semi-zusammenhängend sind. Alle anderen zusammenhängenden CD-Strukturen („Schlange“, „Single-peaked Domain“ und das weiter unten beschriebene „Maximum Domain“) sind gleichzeitig auch semi-zusammenhängend.

**Beobachtung 6.** *Die Domains der CD-Strukturen „Krabbe“, „Sonne“ und „Sonnenkrabbe“ sind die einzigen maximalen Condorcet Domains für vier Alternativen, welche zusammenhängend, aber nicht semi-zusammenhängend sind.*

Die drei abgebildeten Strukturen enthalten alle ein Quadrat und zwei, drei bzw. vier mit dem Quadrat verbundene Arme. Domains der Struktur „Krabbe“ weisen im Gegensatz zu Domains der beiden anderen Strukturen minimale Vielfalt bzgl. entweder der ersten oder der letzten Alternative auf.

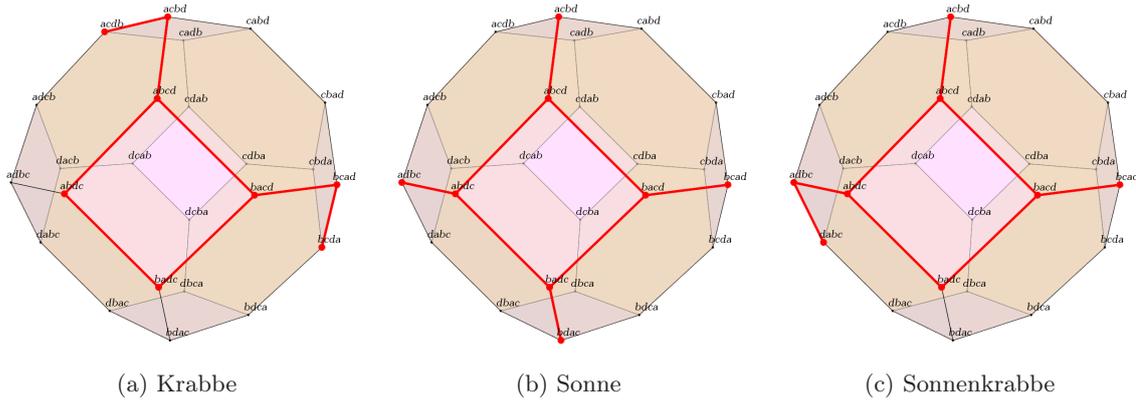


Abbildung 5.17: Drei zusammenhängende und nicht semi-zusammenhängende Strukturen

**Beobachtung 7.** Die Domains der CD-Struktur „Krabbe“ sind die einzigen maximalen Condorcet Domains für vier Alternativen, welche zusammenhängend sind, minimale Vielfalt, aber keine maximale Weite aufweisen.

Jedes im Permutaeder enthaltene Quadrat kann vier verschiedene Ausprägungen der Struktur „Krabbe“ aufweisen, wodurch sich  $6 \cdot 4 = 24$  zueinander isomorphe Domains dieser Struktur ergeben. Aufgrund der Symmetrie der Struktur „Sonne“ existiert für jedes Quadrat nur ein Domain, wodurch für diese CD-Struktur nur sechs unterschiedliche, zueinander isomorphe Domains konstruiert werden können. Für die Struktur „Sonnenkrabbe“ können wir insgesamt 48 verschiedene Domains identifizieren. Den Unterschied bzgl. der minimalen Vielfalt kann man anhand von Abbildung 5.17 sehr gut nachvollziehen. Dazu betrachten wir die drei Domains:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{Kra} &= \{abcd, abdc, bacd, badc, acbd, bcad, \mathbf{acdb}, \mathbf{bcda}\} \\ \mathcal{D}_{Son} &= \{abcd, abdc, bacd, badc, acbd, bcad, \mathbf{adb}, \mathbf{bdac}\} \\ \mathcal{D}_{SonKra} &= \{abcd, abdc, bacd, badc, acbd, bcad, \mathbf{adb}, \mathbf{dabc}\}. \end{aligned}$$

Das maximale CD  $\mathcal{D}_{Kra}$  hat minimale Vielfalt bezüglich der letzten Alternative. Dabei spielen die beiden „äußeren“ Präferenzen  $acdb$  und  $bcda$  eine entscheidende Rolle. Die übrigen sechs Präferenzen weisen immer nur entweder  $c$  oder  $d$  an letzter Stelle auf. Nach Entfernen einer der beiden äußeren Präferenzen, müsste man diese durch eine andere Präferenz ersetzen, welche die entsprechende Alternative an letzter Position aufweist, um die minimale Vielfalt aufrechtzuerhalten. Entfernen wir o.B.d.A. (aufgrund der Symmetrie) die Präferenz  $bcda$ , so ist die einzige andere Präferenzordnung, welche die Transitivität der paarweisen Mehrheitsrelation aufrechterhält und mit einer der Präferenzen aus dem verbliebenen Domain benachbart ist, die Präferenz  $bdac$ . Diese hat jedoch  $c$  an letzter Position und das resultierende maximale Domain weist keine minimale Vielfalt mehr auf - es ist ein Domain aus der Struktur „Sonnenkrabbe“ und ist somit isomorph zu  $\mathcal{D}_{SonKra}$ . Entfernen wir beide Präferenzen  $bcda$  und  $acdb$  aus dem Domain  $\mathcal{D}_{Kra}$ , so existieren drei Möglichkeiten, Präferenzen hinzuzufügen, die zum Restdomain benachbart sind und welche die Transitivität der paarweisen Mehrheitsrelation aufrechterhalten:

1. Hinzufügen des Präferenzpaares  $(adb, dabc)$  erzeugt das maximale CD  $\mathcal{D}_{SonKra}$ .
2. Hinzufügen des Präferenzpaares  $(bdac, dbac)$  erzeugt ein maximales CD der Struktur „Sonnenkrabbe“.
3. Hinzufügen des Präferenzpaares  $(adb, bdac)$  erzeugt ein maximales CD der Struktur „Sonne“.

Wir können daraus schlussfolgern, dass die sechs Präferenzen  $\mathcal{D}_{Kern} = \{abcd, abdc, bacd, badc, acbd, bcad\}$  eine Art gemeinsamen Kern der drei Strukturen bilden. Zum einen verhindert dieser Kern eine Erweiterung um benachbarte Präferenzen, sodass ein Condorcet Domain entsteht, welches maximale Weite aufweist. Zum anderen lässt der Kern nur eine einzige Erweiterung zu (zur Struktur „Krabbe“), sodass das resultierende Condorcet Domain minimale Vielfalt aufweist.

**Zwei Quadrate, Zwei Halbe und Vier Paare**

Die nächste Gruppe von maximalen CD-Strukturen zeichnet sich nicht durch einen gemeinsamen Kern im Sinne von gemeinsamen Präferenzen aus, sondern hinsichtlich der Eigenschaft Domain-Produkt-Struktur und dem damit verbundenen ähnlichen Aufbau. Die Domains aller drei Strukturen in Abbildung 5.18 bestehen aus zwei bzw. vier gleichförmigen, nicht miteinander verbundenen und sich gegenüberliegenden Teilen auf dem Permutaeder. Dies resultiert aus der Eigenschaft, dass diese Domains sich alle als Produkt zweier anderer Domains beschreiben lassen - sie also die Domain-Produkt-Struktur aufweisen. Domains der drei abgebildeten Strukturen bestehen aus acht Präferenzen, sind alle nicht zusammen-

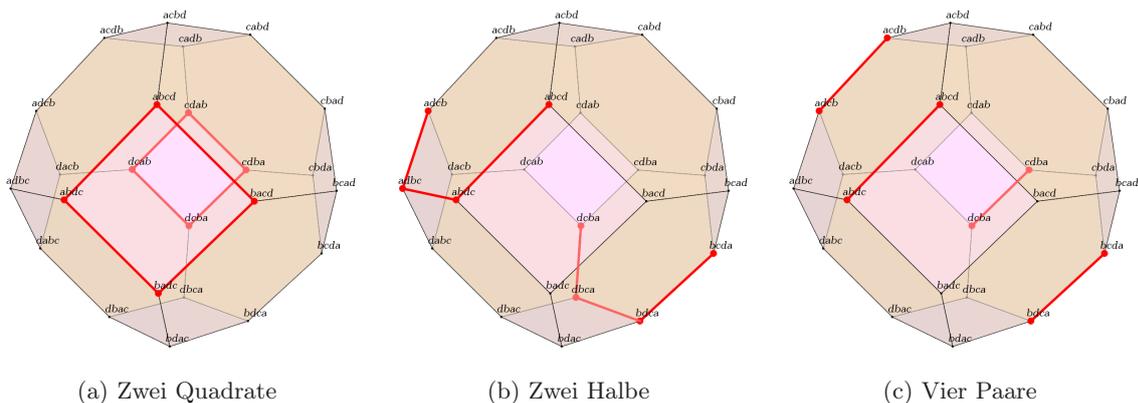


Abbildung 5.18: Domain-Produkt-Strukturen

hängend und haben maximale Weite. Alle Domains dieser Strukturen weisen minimale Vielfalt auf. Das Domain der Domain-Struktur „Zwei Quadrate“ in Abbildung 5.18a besteht aus zwei sich im Permutaeder gegenüberliegenden Quadraten. Es lässt sich als Domain-Produkt zweier symmetrischer maximaler Condorcet Domains aus dem strikten Präferenzraum mit zwei Alternativen  $\mathcal{D}' = \{ab, ba\}$  und  $\mathcal{D}'' = \{cd, dc\}$  darstellen:

$$\mathcal{D}_{ZQ} = \mathcal{D}' \star \mathcal{D}'' = \{abcd, bacd, abdc, badc, cdab, cdba, dcab, dcba\}.$$

Daraus folgt direkt, dass Domains dieser Struktur symmetrisch sein müssen (vgl. Abschnitt 5.2). Auch die minimale Vielfalt bzgl. der ersten und letzten Alternative folgt direkt aus der Tatsache, dass  $\mathcal{D}'$  und  $\mathcal{D}''$  diese Eigenschaft erfüllen (vgl. Beobachtung 2). Die CD-Strukturen „Zwei Halbe“ und „Vier Paare“, welche durch die Domains in den Abbildungen 5.18b und 5.18c repräsentiert werden, lassen sich als Domain-Produkte aus einem maximalen Condorcet Domain aus dem strikten Präferenzraum mit einer Alternative  $X' = \{a\}$  und einem maximalen Condorcet Domain aus dem strikten Präferenzraum mit drei Alternativen  $X'' = \{b, c, d\}$  erzeugen. Für den Präferenzraum mit einer Alternative existiert nur das triviale Condorcet Domain  $\mathcal{D}' = \{a\}$ . Für  $m = 3$  existieren, wie wir bereits aus Abschnitt 5.3.1 wissen,

zwei verschiedene maximale CD-Strukturen. Diese beiden Strukturen erzeugen gemeinsam mit  $\mathcal{D}' = \{a\}$  die beiden unterschiedlichen CD-Strukturen für  $m = 4$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}'' = \{bcd, bdc, dbc, dc b\} &\Rightarrow \mathcal{D}_{ZH} = \mathcal{D}' \star \mathcal{D}'' = \{abcd, bcda, abdc, bdca, adbc, dbca, adcb, dcba\} \\ \tilde{\mathcal{D}}'' = \{bcd, bdc, cdb, dc b\} &\Rightarrow \mathcal{D}_{VP} = \mathcal{D}' \star \tilde{\mathcal{D}}'' = \{abcd, bcda, abdc, bdca, acdb, cdba, adcb, dcba\}.\end{aligned}$$

Im ersten Fall ist  $\mathcal{D}''$  ein Domain der zusammenhängenden CD-Struktur aus dem Fall  $m = 3$  und erzeugt in Kombination mit  $\mathcal{D}' = \{a\}$  die Struktur „Zwei Halbe“ für  $m = 4$ , welche aus zwei sich im Permutaaeder gegenüberliegenden halben Sechsecken besteht. Da  $\mathcal{D}''$  nicht symmetrisch ist und minimale Vielfalt bzgl. der letzten Alternative aufweist, ist auch das Domain-Produkt nicht symmetrisch und weist minimale Vielfalt bzgl. der letzten Alternative auf. Im zweiten Fall ist  $\tilde{\mathcal{D}}''$  ein Domain der nicht zusammenhängenden CD-Struktur aus dem Fall  $m = 3$  und erzeugt in Kombination mit  $\mathcal{D}' = \{a\}$  die Struktur „Vier Paare“ für  $m = 4$ , welche aus zweimal zwei Präferenzpaaren besteht, die sich im Permutaaeder gegenüber liegen. Domains der nicht zusammenhängende CD-Struktur für  $m = 3$  (und damit auch  $\tilde{\mathcal{D}}''$ ) sind symmetrisch und weisen minimale Vielfalt bzgl. der ersten und der letzten Alternative auf. Da  $\mathcal{D}' = \{a\}$  diese beiden Eigenschaften trivialerweise auch erfüllt, weist auch das Domain-Produkt „Vier Paare“ beide Eigenschaften auf. Die Domain-Strukturen „Vier Paare“ und „Zwei Quadrate“ beschreiben mit dem „Danilov-Koshevoy-4-Punkt-Domain“ alle symmetrischen maximalen Condorcet Domains für vier Alternativen. Für die CD-Struktur „Zwei Quadrate“ existieren lediglich drei verschiedene, zueinander isomorphe Domains, da das Permutaaeder nur drei Paare gegenüberliegender Quadrate enthält. Der CD-Struktur „Zwei Halbe“ lassen sich 24 unterschiedliche, zueinander isomorphe Domains zuordnen. Dies resultiert aus der Überlegung, dass das Permutaaeder insgesamt vier Paare gegenüberliegender Sechsecke enthält und innerhalb dieser Sechsecke sechs verschiedene, zueinander isomorphe „halbe“ Sechsecke erzeugt werden können. Für die CD-Struktur „Vier Paare“ existieren zwölf Domains - vier Paare gegenüberliegender Sechsecke multipliziert mit drei unterschiedlichen, zueinander isomorphen Teilsechsecken.

### Sonstige I-VII

Die Abbildungen 5.19a bis 5.19g zeigen sieben maximale CD-Strukturen mit acht Elementen. Domains dieser Strukturen sind alle nicht zusammenhängend, lassen sich nicht als Domain-Produkt darstellen und sind nicht symmetrisch. Sie haben weder eine minimale noch eine maximale Anzahl an Elementen (unter allen maximalen Condorcet Domains). Allen Strukturen ist gemeinsam, dass sie ein vollständiges Quadrat im Permutaaeder besetzen (in den Abbildungen jeweils das Quadrat aus den Präferenzen  $\{abcd, abdc, bacd, badc\}$ ). In einigen Strukturen ist dieses Quadrat mit anderen Präferenzen der Domains verbunden (Abbildungen 5.19a, 5.19b und 5.19g). Domains der restlichen Strukturen enthalten neben dem Quadrat dazu unverbundene halbe Sechsecke (Abbildungen 5.19c und 5.19d) oder jeweils zwei Paare benachbarter Präferenzen (Abbildungen 5.19e und 5.19f). Bis auf die CD-Strukturen „Sonstige V“ und „Sonstige VII“ erfüllen die Strukturen die Eigenschaft maximale Weite. Domains der Strukturen „Sonstige I“, „Sonstige IV“, „Sonstige V“ und „Sonstige VI“ haben minimale Vielfalt bzgl. entweder der ersten oder der letzten Alternative.

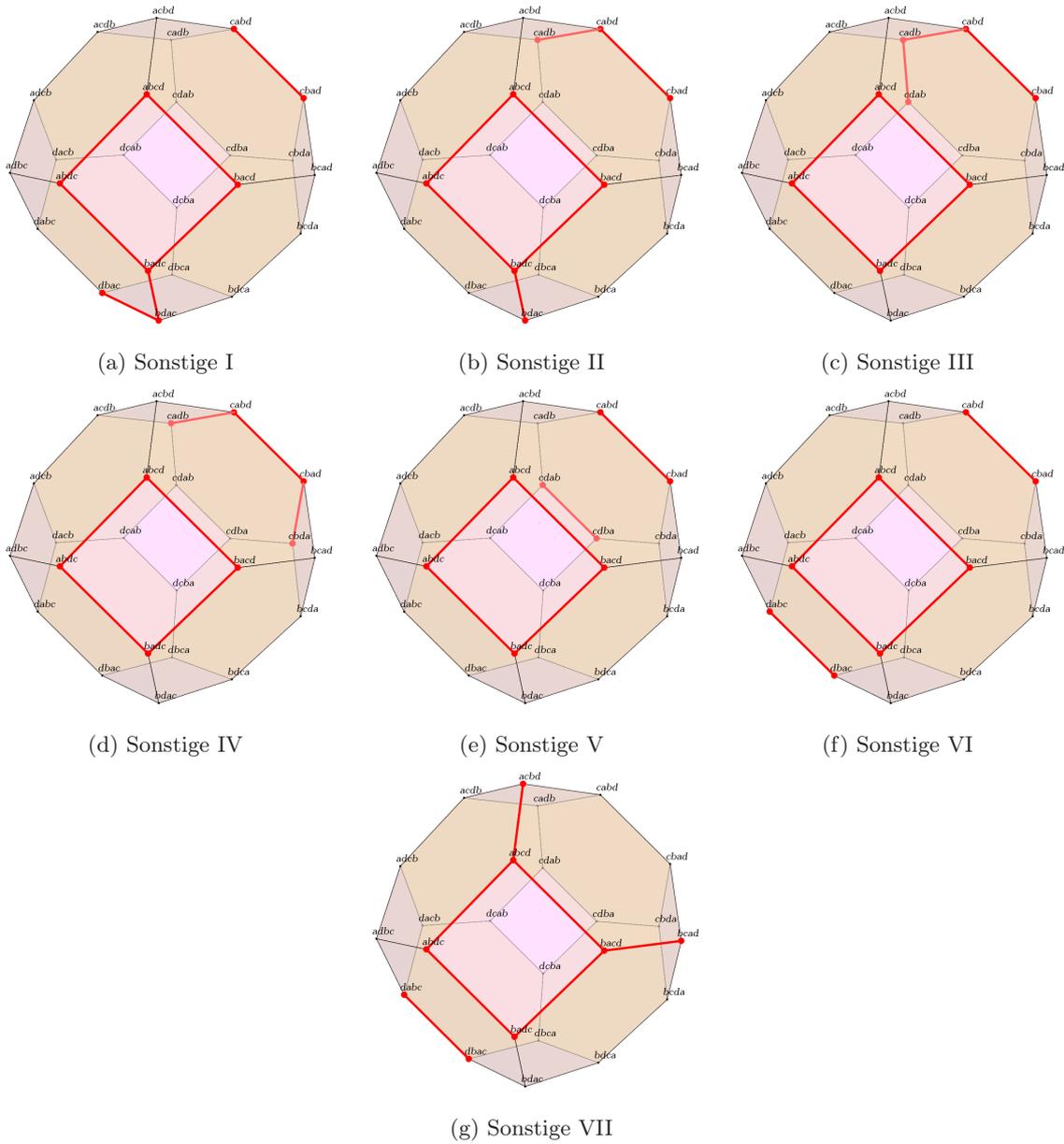


Abbildung 5.19: Sonstige I-VII Strukturen

**Maximum Domain**

Die letzte maximale CD-Struktur für den Präferenzraum mit vier Alternativen ist das „Maximum Domain“. Domains dieser Struktur weisen die maximale Anzahl an Elementen unter allen maximalen Condorcet Domains auf. Für den Fall  $m = 4$  haben diese Domains neun Elemente. Abbildung 5.20 zeigt ein Domain dieser maximalen Condorcet-Domain-Struktur, welche aufgrund ihrer Maximalität bereits intensiv untersucht wurde (vgl. z.B. [Fis96], [Fis02], [Mon09]). Die Struktur weist maximale Weite auf,

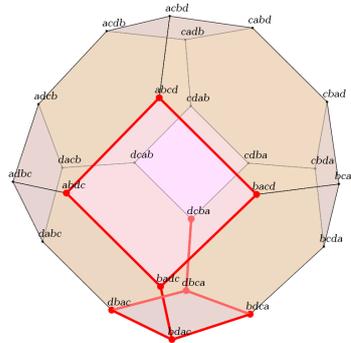


Abbildung 5.20: Maximum Domain

jedoch keine minimale Vielfalt. Dies ist überraschend, da man aufgrund der hohen Anzahl an Präferenzen erwarten könnte, dass jede Alternative zumindest in einer Präferenz einmal an erster bzw. jede Alternative mindestens einmal an letzter Stelle auftritt. Die CD-Struktur ist vom Tiling Typ (vgl. Abbildung 5.21 mit den Vektoren  $a - b - c - d$ ).

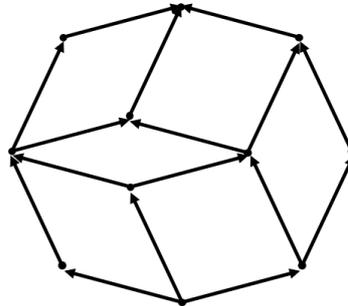


Abbildung 5.21: Repräsentatives Tiling für die CD-Struktur Maximum Domain

in Abschnitt 3.4.1 beschrieben, mithilfe der Alternating Struktur von Fishburn erzeugen. Im Permutaeder dargestellt, besetzen Domains dieser Struktur zwei benachbarte Quadrate und eine zusätzliche mit einem der beiden Quadrate verbundene Präferenz. Da man im Permutaeder zwölf verschiedene Paare benachbarter Quadrate finden kann und die neunte Präferenz immer an eine der beiden Seiten des Quadratepaars angehängt werden kann, erhalten wir 24 unterschiedliche, zueinander isomorphe Domains in dieser Struktur.

**Zusammenfassung**

Tabelle 5.4 fasst die zuvor beschriebenen Ergebnisse bzgl. der verschiedenen Eigenschaften der CD-Strukturen zusammen. Ein „x“ in einer Zelle bedeutet, dass die Eigenschaft erfüllt wird. In der Spalte „Min Vielfalt“ ist ein „xx“ vermerkt, falls die CD-Struktur minimale Vielfalt bzgl. sowohl der ersten als auch der letzten Alternative (gleichzeitig) aufweist. Auf die Eigenschaft in der vorletzten Spalte „Voll besetzt“

sind wir in den Ausführungen bisher nicht genauer eingegangen, da alle maximalen Condorcet Domains im strikten Präferenzraum mit vier Alternativen voll besetzt sind. Wir werden jedoch im Abschnitt 5.3.3 sehen, dass dies nicht für beliebige  $m$  gilt. Zusammenfassend können wir feststellen, dass im strikten

CD-Struktur	# Präferenzen	Maximale Weite	Minimale Vielfalt	Zusammenhängend	Symmetrie	Domain-Produkt	Tiling Typ	Single-peakedness	Single-crossingness	Voll besetzt	# isom Domains
DK4D	4	x	xx		x					x	6
Schlange	7	x		x			x		x	x	48
Zerteilte Schlange	7	x	x							x	48
Single-peaked Domain	8	x	x	x			x	x		x	24
Krabbe	8		x	x						x	24
Sonne	8			x						x	6
Sonnenkrabbe	8			x						x	48
Zwei Quadrate	8	x	xx		x	x				x	3
Zwei Halbe	8	x	x			x				x	24
Vier Paare	8	x	xx		x	x				x	12
Sonstige I	8	x	x							x	48
Sonstige II	8	x								x	48
Sonstige III	8	x								x	48
Sonstige IV	8		x							x	24
Sonstige V	8	x	x							x	24
Sonstige VI	8	x	x							x	12
Sonstige VII	8									x	24
Maximum Domain	9	x		x			x			x	24

Tabelle 5.4: Zusammenfassung aller maximalen Condorcet-Domain-Strukturen für  $m = 4$  im strikten Präferenzraum

Präferenzraum mit vier Alternativen maximale Condorcet Domains der Größen vier, sieben, acht und neun existieren. Unter den 18 CD-Strukturen sind sechs zusammenhängend und zwölf nicht zusammenhängend. Unter den zusammenhängenden Domains befinden sich die bekannten Strukturen „Schlange“ (single-crossing Domain), „Single-peaked Domain“ (beinhaltet auch alle maximalen single-dipped Domains) und das „Maximum Domain“ (erhält man aus Fishburns Alternating Struktur [Fis96]). Diese drei Strukturen sind auch die einzigen, welche dem Tiling Typ entsprechen (vgl. [DKK12]) und unter den zusammenhängenden Strukturen die einzigen mit maximaler Weite. Die drei anderen zusammenhängenden Strukturen („Krabbe“, „Sonne“ und „Sonnenkrabbe“) weisen keine maximale Weite auf.

Unter den zwölf nicht zusammenhängenden Strukturen befinden sich neben der schon bekannten Struktur „Danilov-Koshevoy-4-Punkt-Domain“ einige wenig bekannte bzw. bisher noch nicht untersuchte Strukturen. Insbesondere die CD-Strukturen „Zwei Quadrate“, „Zwei Halbe“ und „Vier Paare“ sind aufgrund

ihrer Domain-Produkt-Struktur und des damit zusammenhängenden symmetrischen Aufbaus<sup>7</sup> interessant. Unter den nicht zusammenhängenden Strukturen finden sich auch alle Domains, welche minimale Vielfalt bzgl. sowohl der ersten als auch der letzten Alternative aufweisen. Dies sind genau die drei symmetrischen Domains („Danilov-Koshevoy-4-Punkt-Domain“, „Zwei Quadrate“ und „Vier Paare“).

Anhand der drei Eigenschaften „Zusammenhängend“, „Semi-zusammenhängend“ und „Domain-Produkt-Struktur“ lässt sich eine Klassifikation der Strukturen durchführen. Da im strikten Präferenzraum alle semi-zusammenhängenden maximalen Condorcet Domains auch zusammenhängend sind und alle Domains der Domain-Produkt-Struktur nicht zusammenhängend sind, kann man zunächst eine Unterteilung bzgl. „Zusammenhängend“ vornehmen und auf der zweiten Ebene die Unterteilung anhand der Eigenschaft „Semi-zusammenhängend“ für die zusammenhängenden Domains und anhand der Eigenschaft „Domain-Produkt-Struktur“ für die nicht zusammenhängenden Domains durchführen. Diese Klassifikation ist in Abbildung 5.22 dargestellt.

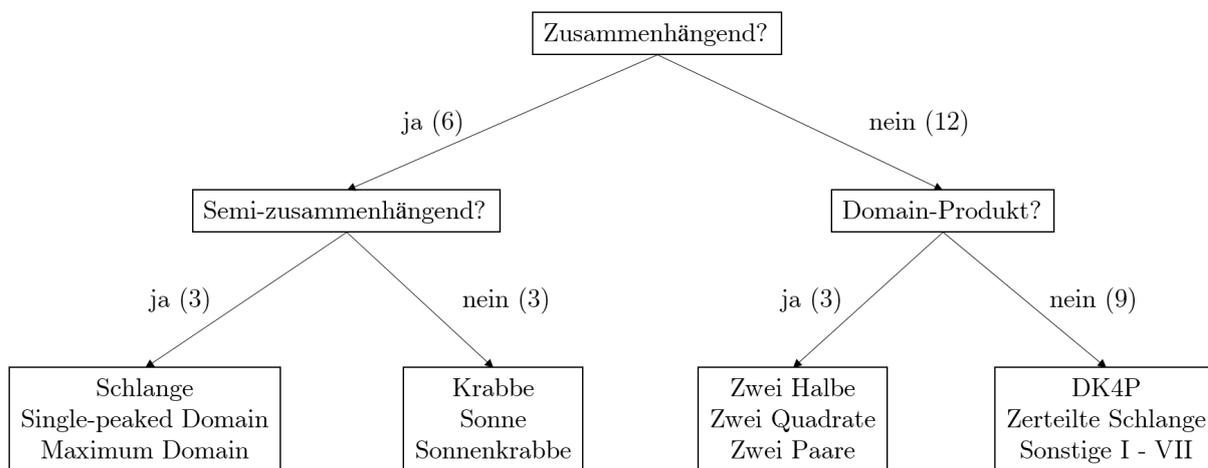


Abbildung 5.22: Klassifikation der maximalen Condorcet-Domain-Strukturen für den strikten Präferenzraum mit vier Alternativen

### Mediagraphen der Condorcet-Domain-Strukturen

Nachdem wir alle CD-Strukturen mit ihren Eigenschaften beschrieben und klassifiziert haben, blicken wir abschließend noch auf die assoziierten Mediagraphen der Condorcet Domains. In Abbildung 5.23 sind diese für alle 18 CD-Strukturen als gewichtete Graphen illustriert. Das Gewicht der Kanten entspricht dem Abstand der Knoten im Permutaeder (die Anzahl der unterschiedlichen paarweisen Vergleiche). Enthält ein Graph nur Kanten mit dem Gewicht eins, so muss das entsprechende Condorcet Domain zusammenhängend sein, da in diesem Fall der Mediagraph und der Graph auf dem Permutaeder identisch sind. Betrachtet man die Mediagraphen mit den gewichteten Kanten, so erkennt man, dass die Graphen eindeutig sind - jede CD-Struktur erzeugt einen anderen Mediagraphen.

**Beobachtung 8.** Für den strikten Präferenzraum mit vier Alternativen erzeugt jede maximale Condorcet-Domain-Struktur einen anderen (gewichteten) Mediagraphen.

<sup>7</sup> Gemeint ist der Aufbau der Struktur und nicht die Symmetrie-Eigenschaft bzgl. Domains. Lediglich die Strukturen „Zwei Quadrate“ und „Vier Paare“ beinhalten symmetrische Domains, also Domains, in denen zu jeder Präferenz eine inverse Präferenz im Domain existiert.

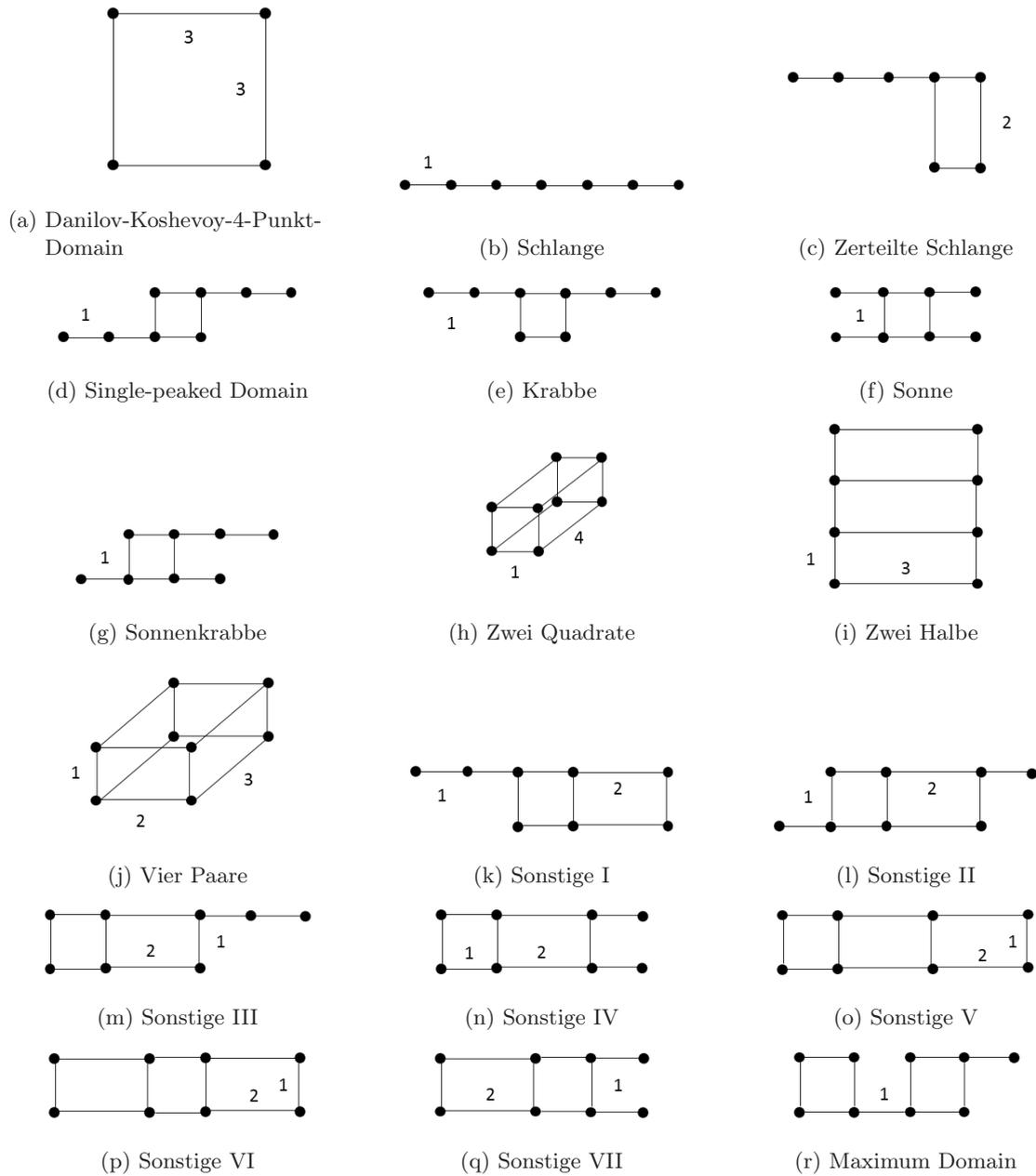


Abbildung 5.23: Mediagraphen aller Condorcet-Domain-Strukturen für den strikten Präferenzraum mit vier Alternativen

### 5.3.3 Fünf Alternativen

Mithilfe der Programme in Abschnitt 4 konnten alle maximalen Condorcet-Domain-Strukturen für fünf Alternativen im strikten Präferenzraum berechnet werden. Der Präferenzraum für  $m = 5$  lässt sich anhand eines Permutaeders der Ordnung fünf aufgrund dessen Vierdimensionalität nicht mehr grafisch darstellen. Angesichts der hohen Anzahl an CD-Strukturen werden wir in diesem Kapitel lediglich auf einige ausgewählte Domains eingehen. Eine komplette Auflistung aller CD-Strukturen sowie derer Eigenschaften ist in Anhang C.1 zu finden. Insgesamt existieren 688 maximale Condorcet-Domain-Strukturen für den strikten Präferenzraum mit fünf Alternativen. Die Domains haben die Größen 4, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 und 20. Im Unterschied zum Präferenzraum mit vier Alternativen existieren für fünf Alternativen maximale Condorcet Domains, welche nicht voll besetzt sind. Man kann beobachten, dass alle zusammenhängenden Domains für  $m = 5$  voll besetzt sind, was uns zu folgender Vermutung bringt.

**Vermutung 1.** *Alle verbundenen maximalen Condorcet Domains im strikten Präferenzraum sind voll besetzt.*

Für die semi-verbundenen Condorcet Domains lässt sich dieser Zusammenhang einfach zeigen.

**Beobachtung 9.** *Alle semi-verbundenen Condorcet Domains im strikten Präferenzraum sind voll besetzt.*

Aus Beobachtung 3 folgt direkt, dass alle Domain-Projektionen auf beliebige Tripel paarweise verschiedener Alternativen eines semi-verbundenen Domains auch semi-verbunden sind. Da im strikten Präferenzraum mit drei Alternativen alle semi-verbundenen Condorcet Domains maximal sind (und der zusammenhängenden CD-Struktur zuzuordnen sind), muss ein semi-verbundenes Condorcet Domain immer voll besetzt sein.

Wir werden im Folgenden bei der Beschreibung der Strukturen auf Domains mit sehr wenigen Präferenzen, mit sehr vielen Präferenzen und mit besonderen Eigenschaften eingehen.

Es existieren zwei maximale Condorcet-Domain-Strukturen, welche Domains mit nur vier Präferenzen enthalten. Dies ist die minimale Größe für maximale Condorcet Domains in diesem Präferenzraum. Allgemein bezeichnen wir die Menge der maximalen CD-Strukturen, welche die minimale Anzahl an Präferenzrelationen unter allen maximalen CD-Strukturen aufweisen, als Minimum Domains. Für den strikten Präferenzraum mit vier Alternativen gehören die beiden folgenden Domains zu je einer der beiden maximalen CD-Strukturen aus den Minimum Domains

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_1 &= \{abcde, edcba, bdaec, ceadb\} \\ \mathcal{D}_2 &= \{abcde, edcba, becad, daceb\}.\end{aligned}$$

Das erste Domain entspricht der in Abschnitt 3.4.4 beschriebenen Danilov-Koshevoy-4-Punkt-Domain-Struktur. Das Domain  $\mathcal{D}_2$  ist der in Abschnitt 3.4.5 hergeleiteten Struktur (4P2) zuzuordnen. Domains beider Strukturen sind symmetrisch und bestehen aus zwei Paaren inverser Präferenzen. Aus diesem Grund können sie nicht zusammenhängend sein (semi-zusammenhängende Domains mit fünf Alternativen müssen mindestens  $\binom{5}{2} + 1 = 11$  Präferenzen enthalten, vgl. Beobachtung 1). Condorcet Domains dieser Strukturen können offensichtlich keine minimale Vielfalt aufweisen, da die Alternativenmenge fünf Elemente enthält, die Domains allerdings nur vier Präferenzen aufweisen. Den beiden maximalen Condorcet-Domain-Strukturen lassen sich 60 bzw. 30 isomorphe Domains zuordnen.

Unter den sieben verschiedenen Strukturen der 8-elementigen maximalen Condorcet Domains befinden sich einige interessante Strukturen. Zum einen ist die Condorcet-Domain-Struktur, die durch das Domain  $\mathcal{D}_9 = \{abcde, bcdea, adbec, dbeca, acebd, cebda, aedcb, edcba\}$  repräsentiert wird, erwähnenswert.

Dieses maximale Condorcet Domain ist ein Domain-Produkt aus den beiden maximalen Condorcet Domains  $\mathcal{D} = \{a\}$  aus dem strikten Präferenzraum mit einer Alternative und dem maximalen Condorcet Domain  $\mathcal{D}' = \{bcde, edcb, dbec, cebd\}$  aus dem strikten Präferenzraum mit vier Alternativen.  $\mathcal{D}'$  ist ein Domain der Danilov-Koshevoy-4-Punkt-Domain-Struktur für den Präferenzraum mit vier Alternativen. Wir können festhalten, dass für alle  $m \geq 5$  ein solches 8-Punkt-Domain existieren muss.

**Beobachtung 10.** *Für alle  $m \geq 5$  ist das Domain  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{DK4D,m-1} \star \{m\}$  im strikten Präferenzraum ein maximales Condorcet Domain mit acht Elementen.*

Die Beobachtung lässt sich sofort zeigen, indem man, wie oben bereits angedeutet, ein Domain der DK4D-Struktur  $\mathcal{D}_{DK4D,m-1}$  aus dem strikten Präferenzraum mit  $(m-1)$  Alternativen mit dem ein-elementigen maximalen Condorcet Domain  $\{m\}$  aus dem strikten Präferenzraum mit einer Alternative mithilfe des Domain-Produkts kombiniert. Da  $\mathcal{D}_{DK4D,4}$  minimale Vielfalt bzgl. der besten und schlechtesten Alternative aufweist, erfüllt auch das Domain  $\mathcal{D}_9$  und alle Domains dieser Struktur die Bedingung. Für  $m \geq 6$  kann diese 8-Punkt-Domain-Struktur die Bedingung nicht mehr erfüllen, da Domains der DK4D-Struktur keine minimale Vielfalt in Präferenzräumen mit echt mehr als vier Alternativen erfüllen können. Für  $m = 5$  existieren 30 isomorphe maximale Condorcet Domains mit dieser Struktur.

Als einzige weitere 8-elementige maximale Condorcet-Domain-Struktur mit der Eigenschaft minimale Vielfalt bzgl. sowohl der besten als auch der schlechtesten Alternative ist die durch das Domain  $\mathcal{D}_8 = \{abcde, edcba, bacde, edcab, dabec, cebad, ceabd, dbaec\}$  repräsentierte Struktur zu nennen. Domains dieser Struktur sind neben den Domains der zuvor beschriebenen Struktur (mit dem Domain  $\mathcal{D}_9$ ) die einzigen symmetrischen, 8-elementigen maximale Condorcet Domains für  $m = 5$ . Des Weiteren sind dies die einzigen symmetrischen Condorcet Domains, welche minimale Vielfalt aufweisen und nicht der Domain-Produkt-Struktur entsprechen. Diese CD-Struktur beinhaltet insgesamt 60 verschiedene, zueinander isomorphe maximale Condorcet Domains.

Das maximale Condorcet Domain mit der single-crossing Eigenschaft hat für  $m = 5$  die Größe elf, da im strikten Präferenzraum insgesamt zehn paarweise Vergleiche existieren (vgl. Abschnitt 3.2). Das repräsentative Condorcet Domain dieser Struktur  $\mathcal{D}_{17} = \{decba, debca, dbeca, dbcea, dbcae, dbace, dabce, adbce, abdce, abced, abcde\}$  ist wie alle maximalen Condorcet Domains mit der single-crossing Eigenschaft vom Tiling Typ (hat dadurch maximale Weite und ist zusammenhängend) und damit semi-zusammenhängend. Auch für  $m = 5$  ist diese maximale CD-Struktur die zusammenhängende Struktur mit den wenigsten Elementen.

**Beobachtung 11.** *Für  $m \leq 5$  hat im strikten Präferenzraum die maximale CD-Struktur, welche single-crossing ist, unter allen zusammenhängenden maximalen Condorcet-Domain-Strukturen die kleinste Anzahl an Elementen (vier, sieben und elf Elemente).*

Dieser Zusammenhang lässt sich auf beliebige  $m$  erweitern unter der Bedingung, dass man nur die zusammenhängenden maximalen CDs mit maximaler Weite (also die maximalen semi-verbundenen Condorcet Domains) betrachtet.

**Proposition 3.** *Für beliebige  $m$  hat im strikten Präferenzraum die maximale CD-Struktur, welche single-crossing ist, unter allen semi-zusammenhängenden maximalen Condorcet-Domain-Strukturen die eindeutig kleinste Anzahl an Elementen  $\left(\binom{m}{2} + 1\right)$ .*

*Beweis.* Ein semi-zusammenhängendes maximales Condorcet Domain beinhaltet ein Paar zueinander inverser Präferenzen sowie einen Pfad aus zueinander benachbarten Präferenzen, welcher die beiden inversen Präferenzen miteinander verbindet. Die Länge des Pfades muss mindestens  $\left(\binom{m}{2} + 1\right)$  betragen, da die inversen Präferenzen sich in  $\binom{m}{2}$  paarweisen Vergleichen unterscheiden und für jeden Schritt auf

dem Pfad maximal ein paarweiser Vergleich umgedreht werden kann. Wählt man den Pfad so, dass jeder paarweise Vergleich genau einmal umgedreht wird, so erhält man den kürzesten Pfad. Dies entspricht der Definition eines single-crossing Domains. Ist das durch diesen Pfad repräsentierte Condorcet Domain noch nicht maximal, so verliert es seine single-crossing Eigenschaft, wenn man ein Element hinzufügt. Somit müssen alle maximalen Condorcet Domains, welche die single-crossing Eigenschaft erfüllen, die eindeutig minimale Anzahl an Elementen unter allen semi-zusammenhängenden maximalen Condorcet Domains haben.  $\square$

Für  $m = 5$  existieren insgesamt 240 verschiedene, zueinander isomorphe maximale Condorcet Domains dieser Struktur.

Die maximale single-peaked-Domain-Struktur für  $m = 5$  umfasst 16 Präferenzen. Ein maximales Condorcet Domain dieser Struktur lautet

$$\mathcal{D}_{569} = \{cdeba, cdeab, cdaeb, cdabe, cadeb, cadbe, cabed, cabde, acdeb, acdbe, acbed, acbde, abedc, abecd, abced, abcde\}.$$

Domains dieser Struktur sind, wie von Puppe [Pup16] allgemein gezeigt, die einzigen maximalen Condorcet Domains, welche gleichzeitig semi-zusammenhängend sind und minimale Vielfalt aufweisen. Des Weiteren sind diese Domains vom Tiling Typ. Abbildung 5.24 zeigt das zugehörige Tiling. Es existie-

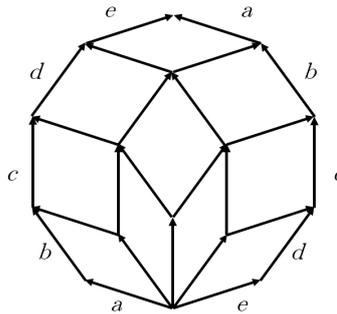


Abbildung 5.24: Tiling für das Single-peaked Domain  $\mathcal{D}_{569}$

ren 120 verschiedene, isomorphe Condorcet Domains dieser Struktur (60 single-peaked Domains und 60 single-dipped Domains).

Wenden wir uns den sehr großen maximalen Condorcet Domains zu. Unter den sechs verschiedenen, 19-elementigen maximalen Condorcet-Domain-Strukturen existiert lediglich eine Struktur, die semi-zusammenhängend ist. Das repräsentative Condorcet Domain dieser Struktur ist vom Tiling Typ und lautet

$$\mathcal{D}_{687} = \{edcba, edbca, edbac, ebdca, ebdac, ebadc, ebadc, ebadc, abcde, abced, abedc, abecd, bacde, baced, baedc, baecd, bedca, bedac, beadc, beacd\}.$$

Das zugehörige Tiling ist in Abbildung 5.25 dargestellt. Alle anderen 19-elementigen maximalen Condorcet-Domain-Strukturen sind entweder zusammenhängend ( $\mathcal{D}_{682}, \mathcal{D}_{683}, \mathcal{D}_{684}$ ) oder haben maximale Weite ( $\mathcal{D}_{685}, \mathcal{D}_{686}$ ). Keine der 19-elementigen Domain-Strukturen hat minimale Vielfalt und für alle Strukturen existieren jeweils 240 isomorphe maximale Condorcet Domains.

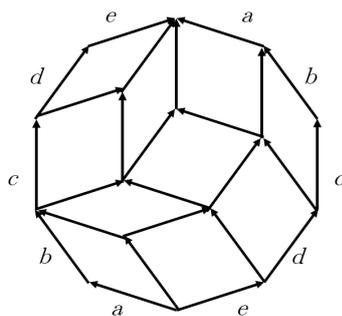


Abbildung 5.25: Tiling für das 19-elementige maximale Condorcet Domain  $\mathcal{D}_{687}$

Das Maximum Domain für  $m = 5$ , also das Condorcet Domain mit den meisten enthaltenen Präferenzen, ist das Domain

$$\mathcal{D}_{688} = \{abcde, abced, acbde, acbed, acebd, acedb, edcba, edcab, ecdba, ecadb, ecabd, ecadb, cedba, cedab, ceabd, ceadb, cabde, cabed, caebd, caedb\}.$$

Dieses Domain entspricht der Alternating Struktur Fishburns und ist vom Tiling Typ. In Abbildung 5.26 ist das Tiling für das Domain illustriert. Wie jedes Tiling Domain ist auch dieses Domain semi-

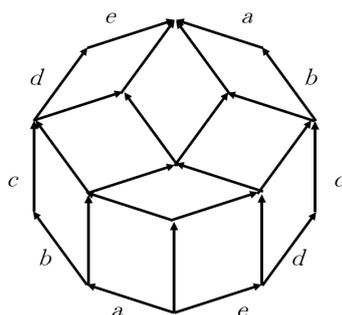


Abbildung 5.26: Tiling für das Maximum Condorcet Domain  $\mathcal{D}_{688}$

zusammenhängend. Trotz der Maximalität hat es keine minimale Vielfalt. Insgesamt lassen sich 120 zueinander isomorphe maximale Condorcet Domains dieser Struktur zuordnen.

Es existieren sieben verschiedene symmetrische maximale Condorcet-Domain-Strukturen ( $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_8, \mathcal{D}_9, \mathcal{D}_{384}, \mathcal{D}_{605}, \mathcal{D}_{606}$ ) mit vier, acht bzw. 16 Präferenzen. Alle Domains dieser Strukturen sind nicht zusammenhängend. Dies lässt sich allgemein für beliebige  $m$  zeigen.

**Beobachtung 12.** *Alle symmetrischen Condorcet Domains im strikten Präferenzraum sind nicht zusammenhängend.*

Nehmen wir an, ein Condorcet Domain wäre gleichzeitig symmetrisch und zusammenhängend. Aufgrund der Beobachtungen 3.1., 3.3. und 3.6. müssten die Domain-Projektionen auf alle Tripel paarweise verschiedener Alternativen aus  $X$  auch symmetrische, zusammenhängende Condorcet Domains sein. Solche Condorcet Domains existieren jedoch nicht auf dem strikten Präferenzraum mit drei Alternativen, weshalb die Annahme falsch sein muss und Beobachtung 12 für alle  $m$  gilt.

Unter den symmetrischen maximalen CD-Strukturen finden sich für den strikten Präferenzraum mit fünf Alternativen außerdem alle Domains mit minimaler Vielfalt bzgl. sowohl der ersten als auch der letzten Alternative ( $\mathcal{D}_9, \mathcal{D}_{384}, \mathcal{D}_{605}, \mathcal{D}_{606}$ ).

**Beobachtung 13.** *Für  $m \in \{3, 4, 5\}$  sind alle maximalen Condorcet Domains mit minimaler Vielfalt bzgl. sowohl der ersten als auch der letzten Alternative symmetrische Domains.*

Die Domain-Produkt-Struktur erfüllen 20 verschiedene maximale Condorcet-Domain-Strukturen aus dem strikten Präferenzraum mit fünf Alternativen. Dies lässt sich aus den Ergebnissen für  $m = 3$  und  $m = 4$  herleiten. Da sich ein Domain mit Domain-Produkt-Struktur aus zwei Domains mit disjunkten Alternativenmengen zusammensetzt, bleiben für den Fall  $m = 5$  die beiden Möglichkeiten  $|X_1| = 1$  und  $|X_2| = 4$  oder  $|X'_1| = 2$  und  $|X'_2| = 3$ , da die Summe der Anzahl der Alternativen gleich fünf sein muss. Für  $m = 4$  wissen wir aus dem vorherigen Abschnitt, dass 18 verschiedene maximale Condorcet-Domain-Strukturen existieren. Kombinieren wir diese 18 Domains jeweils mit dem einelementigen maximalen Condorcet Domain aus  $\mathcal{R}(X_1)$ , erhalten wir 18 verschiedene maximale Condorcet-Domain-Strukturen aus  $\mathcal{R}(X)$  mit  $|X| = 5$ . Die Domains dieser Strukturen müssen jeweils die doppelte Anzahl an Präferenzen verglichen mit der Anzahl der Präferenzen des zugehörigen maximalen CDs für  $m = 4$  enthalten, da man die Alternative aus  $X_1$  einmal an die erste Position und einmal an die letzte Position jeder Präferenz des Domains aus  $\mathcal{R}(X_2)$  setzt. Neben diesen 18 Domain-Strukturen existieren noch zwei weitere Strukturen, welche sich aus der Kombination aller maximalen Condorcet-Domain-Strukturen aus  $\mathcal{R}(X'_1)$  und  $\mathcal{R}(X'_2)$  ergeben. Für  $m = 2$  existiert genau ein maximales Condorcet Domain:  $\mathcal{D} = \mathcal{R}(X'_1)$ . Für  $m = 3$  haben wir in Abschnitt 5.3.1 hergeleitet, dass zwei maximale Condorcet-Domain-Strukturen mit jeweils vier Präferenzen existieren (die zusammenhängende und die nicht zusammenhängende Condorcet-Domain-Struktur). Aufgrund kombinatorischer Überlegungen kann man schlussfolgern, dass das Domain-Produkt deshalb Domains mit 16 Präferenzen erzeugen muss - dies sind die Domains  $\mathcal{D}_{604}$  und  $\mathcal{D}_{605}$ . Somit ergeben sich insgesamt 20 verschiedene maximale Condorcet-Domain-Strukturen mit Domain-Produkt-Struktur.

Von den insgesamt 688 Condorcet-Domain-Strukturen enthalten 35 Strukturen nicht voll besetzte Domains. Diese Domains sind alle nicht zusammenhängend. Die beiden Minimum CD-Strukturen zählen ebenfalls zu den Strukturen, die nicht voll besetzt sind. Unter den restlichen nicht voll besetzten Domains befinden sich ansonsten keine besonders erwähnenswerten Strukturen (weder andere symmetrische Strukturen, noch Single-peaked-, Single-dipped-, Single-crossing- oder Tiling-Typ-Strukturen).

Analog zum Fall mit vier Alternativen nehmen wir abschließend eine Klassifikation anhand der drei Eigenschaften „Zusammenhängend“, „Semi-zusammenhängend“ und „Domain-Produkt-Struktur“ vor. Abbildung 5.27 stellt die Klassifikation grafisch dar. Von den insgesamt 688 Condorcet-Domain-Strukturen (CDS) sind 91 zusammenhängend, wovon wiederum 18 Strukturen semi-zusammenhängend sind. Diese entsprechen den Tiling-Domain-Strukturen (vgl. Abschnitt 5.2 bzgl. der Äquivalenz der Tiling Domains und semi-zusammenhängenden maximalen Condorcet Domains im strikten Präferenzraum) und beinhalten die Single-crossing-Domain-Struktur, die Single-peaked-Domain-Struktur, die Maximum-Domain-Struktur sowie die Domainstrukturen der verbleibenden 15 Tiling-Domain-Strukturen. Unter den 73 zusammenhängenden und nicht semi-zusammenhängenden CD-Strukturen befinden sich Domains mit zwölf bis 19 Präferenzen. Unter den 597 nicht zusammenhängenden CD-Strukturen befinden sich 20 mit Domain-Produkt-Struktur, welche Kombinationen aus maximalen Condorcet-Domain-Strukturen für  $m = 1$  und  $m = 4$  (insgesamt 18 der 20 Strukturen) sowie für  $m = 2$  und  $m = 3$  (insgesamt 2 der 20 Strukturen) sind. Die 577 nicht zusammenhängenden CD-Strukturen ohne Domain-Produkt-Struktur enthalten die beiden Minimum-CD-Strukturen DK4P und 4P2.

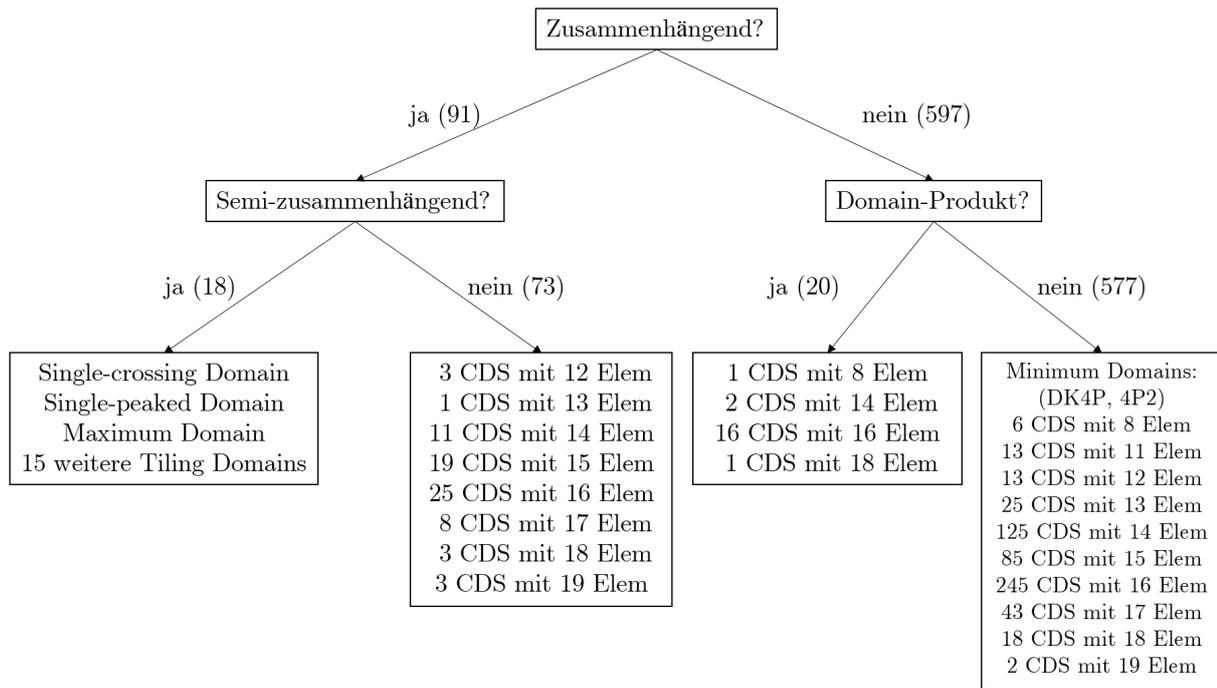


Abbildung 5.27: Klassifikation der maximalen Condorcet-Domain-Strukturen für den strikten Präferenzraum mit fünf Alternativen

### 5.4 Klassifikation für den schwachen Präferenzraum

Nachdem wir die Klassifikation der Condorcet-Domain-Strukturen für den strikten Präferenzraum mit drei, vier und fünf Alternativen durchgeführt haben, wenden wir uns dem schwachen Präferenzraum zu. Einige der Strukturen aus dem strikten Präferenzraum finden wir im schwachen Präferenzraum in ähnlicher Form wieder. Wir nennen diese ähnlichen Strukturen, welche alle strikten Präferenzen einer maximalen CD-Struktur aus dem strikten Präferenzraum enthalten, *Pendants*.

**Definition 30** (Pendant). *Eine maximale Condorcet-Domain-Struktur im schwachen Präferenzraum ist ein Pendant zu einer maximalen Condorcet-Domain-Struktur aus dem strikten Präferenzraum der gleichen Alternativenmenge  $X$ , wenn je ein repräsentatives Domain aus dem schwachen und strikten Präferenzraum dieser Strukturen  $\mathcal{D}_w \subseteq \mathcal{R}_w(X), \mathcal{D}_s \subseteq \mathcal{R}_s(X)$  existiert, sodass  $\mathcal{D}_s \subseteq \mathcal{D}_w$ .*

*Ein maximales Condorcet Domain aus dem schwachen Präferenzraum  $\mathcal{D}_w \subseteq \mathcal{R}_w(X)$  ist ein Pendant zu einem maximalen Condorcet Domain aus dem strikten Präferenzraum  $\mathcal{D}_s \subseteq \mathcal{R}_s(X)$  der gleichen Alternativenmenge  $X$ , wenn  $\mathcal{D}_s \subseteq \mathcal{D}_w$  gilt.*

Mithilfe der CD-Strukturen des schwachen Präferenzraums mit drei Alternativen werden wir in Abschnitt 5.4.1 zeigen, dass zu jeder voll besetzten maximalen CD-Struktur aus dem strikten Präferenzraum ein eindeutiges Pendant im schwachen Präferenzraum existiert. Für Domains aus dem schwachen Präferenzraum muss man, wie bereits in Abschnitt 5.2 ausgeführt, zwischen der schwachen und der strikten minimalen Vielfalt unterscheiden. Des Weiteren sind für diesen Präferenzraum keine Tiling Domains definiert.

Für den schwachen Präferenzraum werden wir in dieser Arbeit CD-Strukturen für drei und vier Alternativen beschreiben und klassifizieren.

### 5.4.1 Drei Alternativen

Wie auch für den strikten Präferenzraum widmen wir uns für den schwachen Präferenzraum zunächst der Untersuchung der Condorcet Domains für drei Alternativen. Aufgrund der gestiegenen Größe des Präferenzraums (13 im Vergleich zu sechs) sind die maximalen CDs jedoch nicht mehr so einfach zu identifizieren. Abbildung 5.28 illustriert alle sechs maximalen Condorcet-Domain-Strukturen für drei Alternativen im schwachen Präferenzraum. Man erkennt, dass die beiden Strukturen in Abbildung 5.28a und

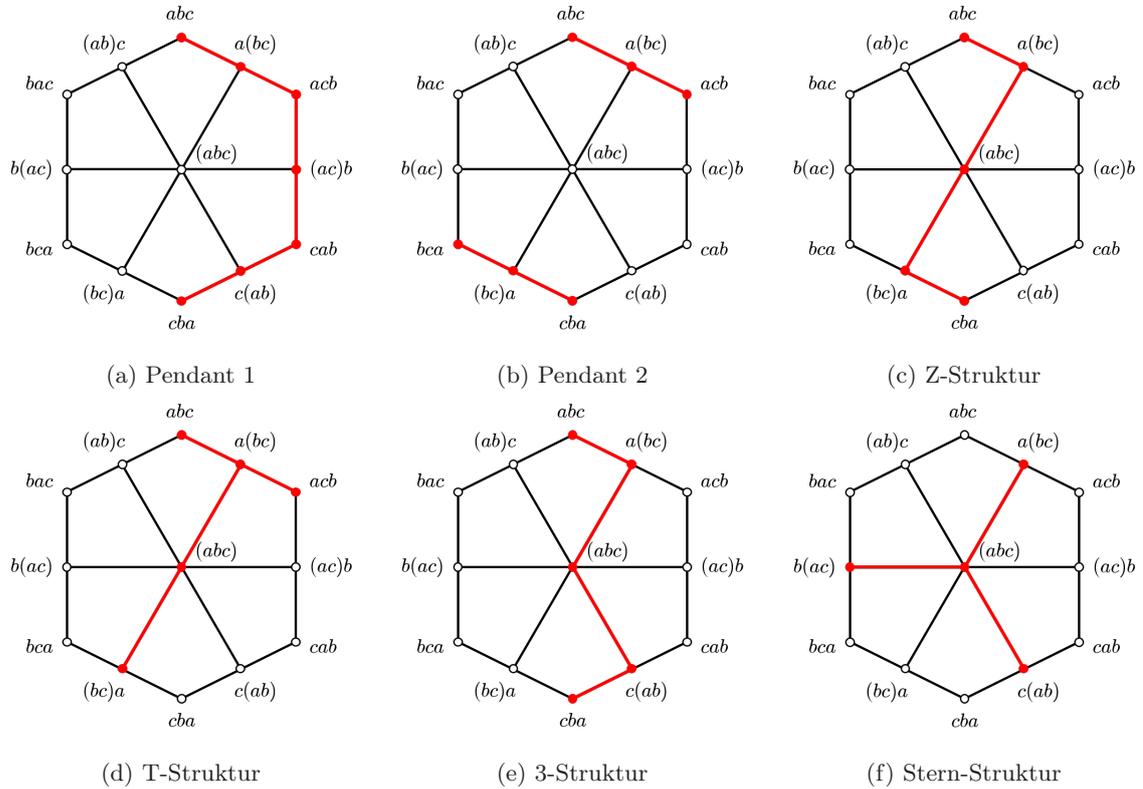


Abbildung 5.28: Alle maximalen CDS für den schwachen Präferenzraum mit drei Alternativen

5.28b den Condorcet-Domain-Strukturen für drei Alternativen im strikten Präferenzraum entsprechen, sie sind deren Pendants im schwachen Präferenzraum. Dies sind auch die einzigen beiden Strukturen, welche nicht die allgemeine Indifferenz  $(abc)$  enthalten. Pendant 1 ist das Maximum Condorcet Domain, also das Condorcet Domain mit der größten Anzahl enthaltener Präferenzordnungen. Es existieren insgesamt sechs verschiedene, zueinander isomorphe Domains dieser Struktur. Diese erfüllen maximale Weite, sind zusammenhängend (und somit semi-zusammenhängend), sind single-crossing und entweder schwach single-peaked oder schwach single-dipped.

Pendant 2 ist die einzige nicht zusammenhängende Struktur im schwachen Präferenzraum. Es existieren drei verschiedene, zueinander isomorphe Domains dieser Struktur. Die Domains sind symmetrisch und erfüllen die strikte (und damit auch schwache) minimale Vielfalt bzgl. sowohl der besten als auch der letzten Alternative. Diese maximale Condorcet-Domain-Struktur ist die einzige Domain-Produkt-Struktur im schwachen Präferenzraum mit drei Alternativen. Das Domain in Abbildung 5.28b besteht aus den beiden maximalen Condorcet Domains  $\mathcal{D}' = \{a\}$  und  $\mathcal{D}'' = \{bc, (bc), cb\}$  aus den schwachen Präferenzräumen  $\mathcal{R}(X' = \{a\})$  und  $\mathcal{R}(X'' = \{b, c\})$ :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}' \star \mathcal{D}'' = \{abc, a(bc), (abc), (bc)a, cba\}.$$

Domains der Z-Struktur und 3-Struktur enthalten fünf Präferenzordnungen, sind zusammenhängend, haben maximale Weite (sind somit semi-zusammenhängend), erfüllen gleichzeitig schwache single-peakedness und schwache single-dippedness und sind single-crossing. Abbildung 5.29 stellt ein Domain der Z-Struktur inklusive der Grenzen für die single-crossing Eigenschaft dar. Beiden Struktu-

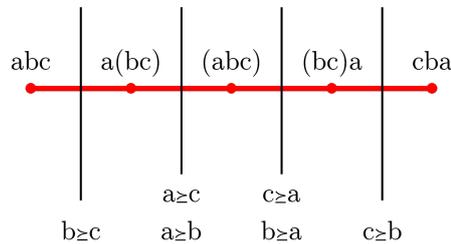


Abbildung 5.29: Single-crossing-Darstellung für die Z-Struktur

ren lassen sich jeweils sechs verschiedene, zueinander isomorphe Domains zuordnen. Die Domains der Z-Struktur sind außerdem noch symmetrisch. So besteht zum Beispiel das maximale Condorcet Domain  $\mathcal{D} = \{abc, a(bc), (abc), (bc)a, cba\}$  aus den drei zueinander inversen Präferenzpaaren  $(abc, cba)$ ,  $(a(bc), (bc)a)$  und  $((abc))$ . Das dritte Präferenzpaar besteht nur aus der allgemeinen Indifferenz, da diese invers zu sich selbst ist.

Die T-Struktur enthält fünf Elemente, ist zusammenhängend und hat keine maximale Weite - ist somit nicht semi-zusammenhängend. Domains dieser Struktur enthalten die allgemeine Indifferenz, wodurch sie schwache minimale Vielfalt bzgl. sowohl der besten als auch der letzten Alternative aufweisen. Des Weiteren sind diese Domains entweder schwach single-peaked oder schwach single-dipped. Es existieren sechs verschiedene, zueinander isomorphe Condorcet Domains dieser Struktur.

Die Stern-Struktur ist die eindeutige Minimum-Domain-Struktur für den schwachen Präferenzraum mit drei Alternativen. Domains dieser Struktur enthalten nur vier Präferenzen, wovon keine eine strikte Präferenzordnung ist. Diese Domains haben strikte minimale Vielfalt bzgl. entweder der ersten oder der letzten Alternative, sie sind entweder schwach single-peaked oder schwach single-dipped, sind zusammenhängend und erfüllen, da sie die allgemeine Indifferenz enthalten, die schwache minimale Vielfalt bzgl. sowohl der besten als auch der schlechtesten Alternative. Es existieren lediglich zwei zueinander isomorphe Domains  $\mathcal{D} = \{a(bc), b(ac), c(ab), (abc)\}$  und  $\mathcal{D}' = \{(bc)a, (ac)b, (ab)c, (abc)\}$  dieser Struktur.

Man kann festhalten, dass alle drei CD-Strukturen, deren Graph eine Kette darstellt (Pendant 1, Z-Struktur und 3-Struktur) die single-crossing Eigenschaft erfüllen. Die Anordnung der Präferenzen entspricht dabei der Reihenfolge in der Kette.

In Tabelle 5.5 sind alle besprochenen Eigenschaften der CD-Strukturen sowie die Anzahl der unterschiedlichen, zueinander isomorphen Domains dieser Strukturen zusammengestellt. Für die aufgeführten Eigenschaften gilt, wenn ein „x“ in der Zelle vermerkt ist, so erfüllen die Domains der Struktur die Eigenschaft, wenn kein „x“ vermerkt ist, erfüllen sie die Eigenschaft nicht. In den Spalten „Schw min Vielfalt“ und „Str min Vielfalt“ besagt der Eintrag „xx“, dass die Domains dieser Strukturen sowohl schwache bzw. strikte minimale Vielfalt bzgl. der besten als auch der schlechtesten Alternative aufweisen. In Spalte „Schw single-peaked“ zeigt der Eintrag „xx“ an, dass die Domains sowohl schwach single-peaked als auch schwach single-dipped sind.

Eine interessante Beobachtung ergibt sich aus folgender Überlegung: Lassen wir die allgemeine Indifferenz nicht zu (wie in Sens Möglichkeitstheorem bzgl. value-restricted Domains (vgl. Abschnitt 3.3)) und entfernen sie aus den obigen CD-Strukturen, so sind die Z-Struktur, die T-Struktur und die 3-Struktur lediglich Teilmengen der Strukturen Pendant 1 und Pendant 2 (die T-Struktur ist eine Teilmenge von

CD-Struktur	# Präferenzen	Maximale Weite	Schw min Vielfalt	Str min Vielfalt	Domain-Produkt	Schw single-peaked	Zusammenhängend	Symmetrie	Single-crossing	Pendant zu strikt	# isom Domains
Pendant 1	7	x	x	x		x	x		x	x	6
Pendant 2	6	x	xx	xx	x			x		x	3
Z-Struktur	5	x	xx			xx	x	x	x		6
T-Struktur	5		xx			x	x				6
3-Struktur	5	x	xx			xx	x		x		6
Stern-Struktur	4		xx	x		x	x				2

Tabelle 5.5: Zusammenfassung aller maximalen Condorcet-Domain-Strukturen für  $m = 3$  im schwachen Präferenzraum

Pendant 2, die Z-Struktur und die 3-Struktur sind jeweils Teilmengen von Pendant 1). Lediglich die Stern-Struktur erzeugt eine „neue Struktur“ und ist keine Teilmenge von Struktur Pendant 1 oder Pendant 2. Durch das Entfernen der totalen Indifferenz ist das Condorcet Domain entweder nicht mehr abgeschlossen ( $R^{med}(a(bc), b(ac), c(ab)) = (abc) \notin \mathcal{D}$ ) oder, wenn wir die allgemeine Indifferenz komplett aus dem Präferenzraum entfernen, das verbliebene Domain der Stern-Struktur ist kein Condorcet Domain:

$$\begin{aligned}
R^{med}(a(bc), b(ac), c(ab)) &= [a(bc), b(ac)] \cap [a(bc), c(ab)] \cap [b(ac), c(ab)] \\
&= \{a(bc), abc, (ab)c, bac, b(ac)\} \cap \{a(bc), acb, (ac)b, cab, c(ab)\} \\
&\quad \cap \{b(ac), bca, (bc)a, cba, c(ab)\} \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

Da die drei Präferenzordnungen im schwachen Präferenzraum ohne die allgemeine Indifferenz keinen Median aufweisen, kann das Domain kein Condorcet Domain sein. Wir erinnern uns, dass Sen in seinem Möglichkeitstheorem für schwache Präferenzordnungen nur die Präferenzen der Wähler betrachtet hat, welche „concerned“ über alle Tripel von Alternativen sind (vgl. Abschnitt 3.3); also genau die Wähler, die keine allgemeine Indifferenz auf einem Alternativentripel aufweisen. Im Unterschied zu unserer vorherigen Überlegung lässt Sen die allgemeine Indifferenz jedoch als Ergebnis der paarweisen Mehrheitsabstimmung zu. Demnach wäre Sens Möglichkeitsresultat für die Stern-Struktur ohne die allgemeine Indifferenz gültig.

**Beobachtung 14.** *Restringsiert man für drei Alternativen den Präferenzraum auf den schwachen Präferenzraum ohne die allgemeine Indifferenz, so sind die einzigen maximalen Condorcet Domains die Pendants der maximalen Condorcet-Domain-Strukturen aus dem strikten Präferenzraum.*

Nachdem wir die maximalen CD-Strukturen für den schwachen Präferenzraum mit drei Alternativen kennen, können wir folgende Aussage bzgl. der Pendants herleiten.

**Proposition 4.** *Für eine beliebige Alternativenmenge  $X$  existiert zu jedem Domain aus einer voll besetzten maximalen Condorcet-Domain-Struktur aus dem strikten Präferenzraum  $\mathcal{D}_s \subseteq \mathcal{R}_s(X)$  ein eindeutiges Pendant im schwachen Präferenzraum  $\mathcal{D}_w \subseteq \mathcal{R}_w(X)$ .*

*Beweis.* Da das Domain  $\mathcal{D}_s$  voll besetzt ist, besteht die Menge der Domain-Projektionen aller Tripel  $\mathcal{D}_s/3$  aus maximalen Condorcet Domains auf dem strikten Präferenzraum mit drei Alternativen. Die Domain-

Projektionen sind somit entweder der zusammenhängenden CD-Struktur oder der nicht zusammenhängenden CD-Struktur zuzuordnen. Wir können die Domains in  $\mathcal{D}_{s/3}$  auf maximale Condorcet Domains des schwachen Präferenzraum übertragen, indem wir jedes Domain in  $\mathcal{D}_{s/3}$  erweitern, sodass es einer maximalen CD-Struktur im schwachen Präferenzraum zuzuordnen ist. Da Domains der zusammenhängenden Struktur aus dem strikten Präferenzraum nur Teilmengen von Domains der maximalen CD-Struktur Pendant 1 aus dem schwachen Präferenzraum sein können und Domains der nicht zusammenhängenden Struktur aus dem strikten Präferenzraum nur Teilmengen von Domains der maximalen CD-Struktur Pendant 2 aus dem schwachen Präferenzraum sein können, ist diese Erweiterung der Domains in  $\mathcal{D}_{s/3}$  eindeutig. Die Menge der erweiterten Domains bezeichnen wir als  $E(\mathcal{D}_{s/3})$ . Das Pendant  $\mathcal{D}_w$  des voll besetzten maximalen Condorcet Domains aus dem strikten Präferenzraum im schwachen Präferenzraum ist dann das Kombinationsprodukt der erweiterten Domains  $\mathcal{K}(E(\mathcal{D}_{s/3})) = \mathcal{D}_w$ . Das Domain  $\mathcal{D}_w$  muss aufgrund von Beobachtung 3.1. ein Condorcet Domain sein und aufgrund der Maximalität der Domains in  $E(\mathcal{D}_{s/3})$  und der Definition des Kombinationsprodukts ein maximales Condorcet Domains sein. Es muss außerdem  $\mathcal{D}_s \subseteq \mathcal{D}_w$  gelten, da für die Domain-Projektionen aller Tripel  $\{i, j, k\}$  paarweise verschiedener Alternativen gilt  $\mathcal{D}_{s/\{i,j,k\}} \subseteq \mathcal{D}_w/\{i,j,k\}$ . Zudem muss  $\mathcal{D}_w$  eindeutig sein, da die Erweiterungen eindeutig sind und das Kombinationsprodukt eindeutig ist.  $\square$

Da alle CD-Strukturen im strikten Präferenzraum mit vier Alternativen voll besetzt sind, können wir für jede maximale Condorcet-Domain-Struktur ein Pendant im schwachen Präferenzraum finden. Es bleibt jedoch anzumerken, dass die Erweiterungen  $E(\mathcal{D}_{s/3})$  der Domains in  $\mathcal{D}_{s/3}$  eines maximalen Condorcet Domains  $\mathcal{D}_s$  aus dem strikten Präferenzraum nicht identisch zur Menge der Domain-Projektionen aller Tripel auf das Pendant zu  $\mathcal{D}_s$  sein müssen. Für alle voll besetzten maximalen Condorcet Domains  $\mathcal{D}_s$  aus dem strikten Präferenzraum gilt

$$\forall \mathcal{D} \in \mathcal{K}(E(\mathcal{D}_{s/3}))_{/3} \exists \mathcal{D}'' \in E(\mathcal{D}_{s/3}) : \mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}''$$

und es existieren  $\mathcal{D}_s$ , für die zusätzlich gilt

$$\exists \mathcal{D}' \in \mathcal{K}(E(\mathcal{D}_{s/3}))_{/3} \exists \mathcal{D}'' \in E(\mathcal{D}_{s/3}) : \mathcal{D}' \subset \mathcal{D}''.$$

Die beiden Mengen unterscheiden sich z.B. für Domains der DK4P-Struktur im strikten Präferenzraum mit vier Alternativen:

**Beispiel 14.** Gegeben sei das maximale Condorcet Domain  $\mathcal{D}_s = \{abcd, dcba, bdac, cadb\}$  aus dem strikten Präferenzraum mit vier Alternativen. Die Domain-Projektionen dieses Domains auf alle Tripel paarweise verschiedener Alternativen lauten  $\mathcal{D}_{s/\{a,b,c\}} = \{abc, cba, bac, cab\}$ ,  $\mathcal{D}_{s/\{a,b,d\}} = \{abd, dba, bda, adb\}$ ,  $\mathcal{D}_{s/\{a,c,d\}} = \{acd, dca, dac, cad\}$  und  $\mathcal{D}_{s/\{b,c,d\}} = \{bcd, dcb, bdc, cdb\}$ . Man erkennt, dass  $\mathcal{D}_s$  voll besetzt ist und alle Domain-Projektionen maximale Condorcet Domains der verbundenen CD-Struktur sind. Nun lässt sich die Menge der Erweiterungen der Domains in  $\mathcal{D}_{s/3}$  bestimmen:

$$E(\mathcal{D}_{s/3}) = \{\{abc, cba, bac, cab, (ab)c, c(ab)\}, \{abd, dba, bda, adb, a(bd), (bd)a\}, \\ \{acd, dca, dac, cad, (ac)d, d(ac)\}, \{bcd, dcb, bdc, cdb, b(cd), (cd)b\}\}.$$

Das Kombinationsprodukt von  $E(\mathcal{D}_{s/3})$  erzeugt jedoch wieder das ursprüngliche Domain

$$\mathcal{K}(E(\mathcal{D}_{s/3})) = \mathcal{D}_w = \{abcd, dcba, bdac, cadb\} = \mathcal{D}_s$$

und somit sind die Domain-Projektionen von  $\mathcal{D}_w$  auf Alternativentripel echte Teilmengen der Erweiterungen der Domains in  $\mathcal{D}_{s/3}$ :

$$\forall \mathcal{D} \in \mathcal{K}(E(\mathcal{D}_{s/3}))_{/3} \exists \mathcal{D}' \in E(\mathcal{D}_{s/3}) : \mathcal{D} \subset \mathcal{D}'.$$

Das maximale Condorcet Domain im strikten Präferenzraum mit vier Alternativen ist demnach identisch zu einem maximalen Condorcet Domain im schwachen Präferenzraum mit vier Alternativen. Man kann trotz der Erweiterung des Präferenzraums keine Präferenzordnung hinzufügen.

Die Klassifikation der maximalen CD-Strukturen für den schwachen Präferenzraum mit drei Alternativen ist in Abbildung 5.30 dargestellt. Dabei verwenden wir die gleichen Eigenschaften wie im Fall der

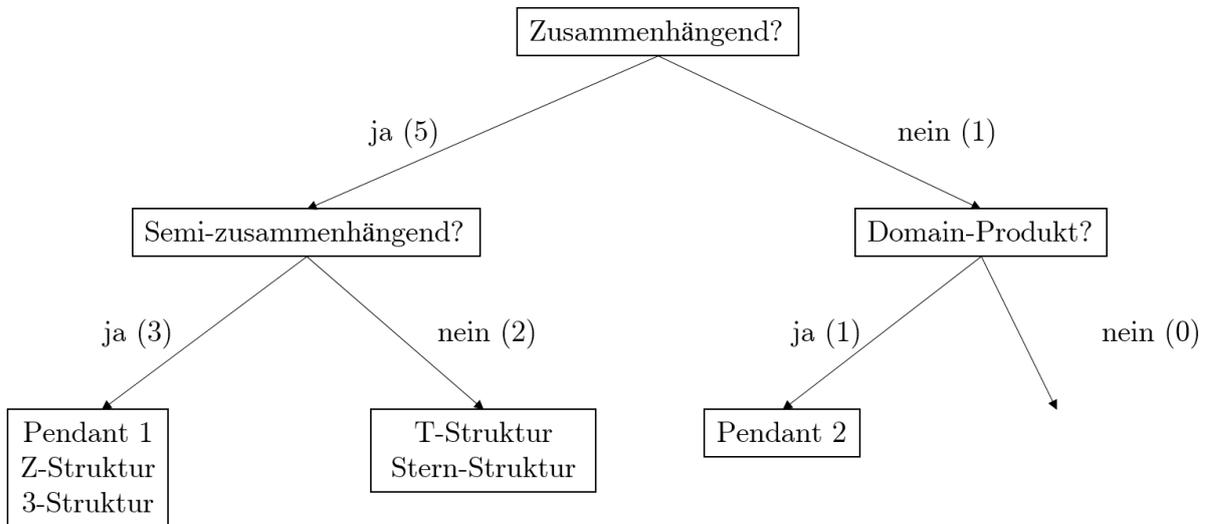


Abbildung 5.30: Klassifikation der maximalen Condorcet-Domain-Strukturen für den schwachen Präferenzraum mit drei Alternativen

strikten Präferenzräume. Von den sechs Strukturen ist nur eine Struktur nicht zusammenhängend. Diese erfüllt die Domain-Produkt-Struktur und ist das Pendant zur nicht zusammenhängenden Struktur aus dem strikten Präferenzraum. Die fünf zusammenhängenden maximalen Condorcet-Domain-Strukturen teilen sich in drei semi-zusammenhängende Strukturen (Pendant zur zusammenhängenden Struktur aus dem strikten Präferenzraum, Z-Struktur und 3-Struktur) und zwei nicht semi-zusammenhängende Strukturen (T-Struktur und Stern-Struktur) auf.

#### 5.4.2 Vier Alternativen

Für vier Alternativen existieren im schwachen Präferenzraum 96 maximale Condorcet-Domain-Strukturen. In Tabelle 5.6 sind die Eigenschaften der Domain-Strukturen, auf welche wir in diesem Abschnitt eingehen werden, dargestellt. Eine vollständige Auflistung aller Strukturen ist in Tabelle C.3 im Anhang C.2 zu finden. Die repräsentativen Domains für die Strukturen sind in Tabelle C.4 im Anhang C.2 aufgeführt. Eine Zuordnung zwischen den Tabellen ist mithilfe des Schlüssels „Dom Index“ möglich. Die verwendeten Abkürzungen in den Spaltenüberschriften der Tabelle stehen für folgende Begriffe:

Dom Index	=	Domain Index
Anz Elem	=	Anzahl der Präferenzen im Domain
Max Weit	=	Maximale Weite
Stri MV	=	Strikte minimale Vielfalt
Schw MV	=	Schwache minimale Vielfalt
Voll bes	=	Voll besetztes Domain
Dom Prod	=	Domain-Produkt-Struktur
SP/SD	=	Schwache single-peakedness bzw. schwache single-dippedness
SC	=	Single-crossingness
Symm	=	Symmetrie
Verb	=	Zusammenhängendes Domain
Stri Pend	=	Pendant zu einem maximalen CD aus dem strikten Präferenzraum
Anz Isom	=	Anzahl der verschiedenen, zueinander isomorphen Domains

Für die aufgeführten Eigenschaften gilt, wenn ein „x“ in der Zelle vermerkt ist, so erfüllen die Domains der Struktur die Eigenschaft, wenn kein „x“ vermerkt ist, erfüllen sie die Eigenschaft nicht. In den Spalten „Schw MV“ und „Stri MV“ besagt der Eintrag „xx“, dass die Domains dieser Strukturen sowohl schwache bzw. strikte minimale Vielfalt bzgl. der besten als auch bzgl. der schlechtesten Alternative aufweisen. In Spalte „SP/SD“ zeigt der Eintrag „xx“ an, dass die Domains sowohl schwach single-peaked als auch schwach single-dipped sind. Zusätzlich existiert die Spalte „Stri Pend“, welche markiert, wenn eine Struktur ein Pendant zu einer maximalen CD-Struktur aus dem strikten Präferenzraum ist.

Dom Index	Anz Elem	Max Weit	Stri MV	Schw MV	Voll bes	Dom Prod	SP/SD	SC	Symm	Verb	Stri Pend	Anz Isom
1	4	x	xx	xx					x		x	6
2	5		x	xx	x		x			x		2
3	5			xx			x			x		24
4	6		x	xx	x		x			x		8
5	6			xx	x		x			x		24
6	6			xx	x					x		24
7	6			xx	x		x			x		24
8	6			xx	x					x		24
9	6		x	xx	x		x			x		12
10	6			xx	x					x		8
11	7		x	xx	x		x			x		6
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
14	7			xx	x		x			x		24

Dom Index	Anz Elem	Max Weit	Stri MV	Schw MV	Voll bes	Dom Prod	SP/SD	SC	Symm	Verb	Stri Pend	Anz Isom
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
31	8	x		xx	x		xx			x		48
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
33	9	x		x	x		x	x		x		48
34	9	x		x	x		x	x		x		48
35	9	x		x	x		x	x		x		24
36	9	x		x	x		x	x		x		48
37	9			x	x		x			x		48
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
54	11	x			x			x		x		48
55	11	x		x	x		x	x		x		48
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
60	11	x		x			x					48
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
63	11	x		x								48
64	11			x	x		x			x		48
65	11			x	x		x			x		48
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
74	13	x			x					x		48
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
78	14	x	x	x	x	x					x	24
79	14		x	x								24
80	14			x								24
81	15	x			x					x		48
82	15		x	x	x		x			x		48
83	15				x					x		24
84	15	x	x	x							x	24
85	15	x	x	x							x	12
86	16	x									x	48
87	16	x	x	x							x	48
88	16										x	24
89	16	x									x	48
90	16		x	x							x	24

Dom Index	Anz Elem	Max Weit	Stri MV	Schw MV	Voll bes	Dom Prod	SP/SD	SC	Symm	Verb	Stri Pend	Anz Isom
91	17	x	x	x	x		x			x	x	24
92	17				x					x	x	48
93	17		x	x	x					x	x	24
94	17				x					x	x	6
95	18	x	xx	xx	x	x			x		x	3
96	21	x			x					x	x	24

Tabelle 5.6: Zusammenfassung ausgewählter maximaler Condorcet-Domain-Strukturen für  $m = 4$  im schwachen Präferenzraum

Aufgrund der großen Anzahl der maximalen CD-Strukturen werden wir nur auf einige, wichtige Beobachtungen eingehen und auf eine komplette Beschreibung aller Strukturen verzichten. Dabei analysieren wir zunächst CD-Strukturen mit sehr wenigen und sehr vielen Elementen. Anschließend gruppieren wir die Domains anhand einiger Eigenschaften und identifizieren Gemeinsamkeiten und Unterschiede innerhalb dieser Gruppen. Abschließend nehmen wir eine Klassifikation analog zu den zuvor betrachteten Präferenzräumen vor.

Im schwachen Präferenzraum mit vier Alternativen existieren maximale Condorcet-Domain-Strukturen mit 4, 5, 6, ..., 16, 17, 18 und 21 Elementen. Das eindeutige Minimum Domain ist auch für den schwachen Präferenzraum das in 3.4.4 und 5.3.2 beschriebene Danilov-Koshevoy-4-Punkt-Domain. Die Eigenschaften der Domain-Struktur bleiben auch im schwachen Präferenzraum erhalten: Domains dieser Struktur haben maximale Weite, sind nicht zusammenhängend, weisen strikte (und damit auch schwache) minimale Vielfalt sowohl für die erste als auch für die letzte Alternative auf und sind symmetrisch. Der einzige Unterschied zur Struktur aus dem strikten Präferenzraum besteht darin, dass das Domain nicht mehr voll besetzt sind. Da die Domains dieser Struktur nur strikte Präferenzen enthalten, können die Domain-Projektionen auf Alternativentripel im schwachen Präferenzraum nicht voll besetzt sein. Es existieren sechs unterschiedliche, zueinander isomorphe Domains dieser Struktur.

In den Ergebnissen finden wir genau zwei Domain-Strukturen, welche fünf Präferenzen enthalten. Diese sind in Abbildung 5.31 dargestellt.

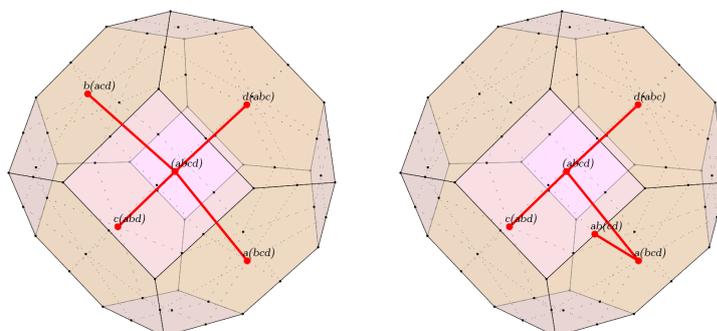


Abbildung 5.31: Maximale Condorcet-Domain-Strukturen mit fünf Elementen,  $m = 4$ , schwacher Präferenzraum

Beide Strukturen enthalten keine strikten Präferenzordnungen und weisen die allgemeine Indifferenz für vier Alternativen  $(abcd)$  auf, wodurch sie automatisch schwache minimale Vielfalt bzgl. sowohl der ersten als auch letzten Alternative besitzen. Domains beider Strukturen sind zusammenhängend und haben keine maximale Weite<sup>8</sup>. Im Gegensatz zur linken Struktur, ist die rechte Struktur nicht voll besetzt. Für die linke Struktur existieren lediglich zwei unterschiedliche, zueinander isomorphe Domains - für die rechte Struktur 24. Domains der linken CD-Struktur weisen zusätzlich strikte minimale Vielfalt bzgl. entweder der ersten oder der letzten Alternative auf. Diese Domain-Struktur zeigt starke Ähnlichkeiten zur Stern-Struktur für den Fall  $m = 3$  auf. Man kann zeigen, dass eine solche maximale CD-Struktur für alle  $m$  existieren muss:

**Proposition 5.** *Für alle Alternativenmengen  $X = \{a, b, \dots, m\}$  sind die beiden Domains*

$$\mathcal{D}_0 = \{a(bcd \dots m), b(acd \dots m), c(abd \dots m), \dots, m(abc \dots m - 1), (abc \dots m)\}$$

und

$$\mathcal{D}'_0 = \{(bcd \dots m)a, (acd \dots m)b, (abd \dots m)c, \dots, (abc \dots m - 1)m, (abc \dots m)\}$$

maximale Condorcet Domains für den schwachen Präferenzraum auf  $X$ . Die Domains sind voll besetzt. Wir bezeichnen diese maximale CD-Struktur als Indifferenz-Domain-Struktur.

*Beweis.* Zunächst zeigen wir, dass

$$\mathcal{D}_0 = \{a(bcd \dots m), b(acd \dots m), c(abd \dots m), \dots, m(abc \dots m - 1), (abc \dots m)\}$$

immer ein Condorcet Domain ist. Anschließend weisen wir die Maximalität der Indifferenz-Domain-Struktur nach. Für alle Tripel  $\{i, j, k\} \subseteq X$  paarweise verschiedener Alternativen gilt, dass die Projektion auf alle Tripel  $\mathcal{D}_{0/\{i,j,k\}} = \{i(jk), j(ik), k(ij), (ijk)\}$  ist und damit ein maximales Condorcet Domain auf  $X = \{i, j, k\}$  für den schwachen Präferenzraum. Aus Abschnitt 3.3 wissen wir, dass daraus direkt folgt, dass auch das Gesamtdomain ein Condorcet Domain sein muss. Außerdem kann man daraus schlussfolgern, dass die Domains der Indifferenz-Domain-Struktur voll besetzt sind. Um die Maximalität nachzuweisen, nehmen wir zunächst an, es existiere eine Präferenz  $R$ , sodass  $\mathcal{D}_0 \cup R$  ein Condorcet Domain ist. Da  $\mathcal{D}_0$  bereits die allgemeine Indifferenz und alle Präferenzen, der Form  $i(jkl \dots m)$  beinhaltet, kann  $R$  entweder die Präferenzstruktur  $(jkl \dots m)i$  haben oder eine Präferenzstruktur mit mindestens einer Indifferenzmenge, die weniger als  $(m - 1)$  Elementen beinhaltet, aufweisen. Im ersten Fall lautet die Projektion des neuen Gesamtdomains auf das Tripel  $\{i, j, k\}$

$$\{i(jk), j(ik), k(ij), (ijk), (jk)i\}.$$

Dies ist offensichtlich kein CD mehr. Für den zweiten Fall muss für mindestens ein Alternativentripel  $\{i, j, k\}$  auf  $R$  gelten, dass  $i \succ j \succ k$ . Dies führt allerdings erneut dazu, dass die Projektion des neuen Gesamtdomains auf dieses Tripel kein Condorcet Domain mehr ist:  $\{i(jk), j(ik), k(ij), (ijk), ijk\}$ . Somit muss  $\mathcal{D}_0$  bereits maximal sein. Der Nachweis für  $\mathcal{D}'_0$  kann analog geführt werden.  $\square$

Die maximalen CD-Strukturen mit sechs Elementen sind alle zusammenhängend, voll besetzt, enthalten die allgemeine Indifferenz und keine strikte Präferenz. Repräsentative Domains dieser Strukturen sind in Abbildung 5.32 illustriert. Kein Domain dieser Strukturen hat maximale Weite. Lediglich die ersten beiden Strukturen weisen strikte minimale Vielfalt bzgl. entweder der ersten oder der letzten Alternative auf. Betrachtet man die Graphen der Domains, so erkennt man, dass kein Graph eine Kette bildet. Die

<sup>8</sup> Da sie keine strikten Präferenzordnungen enthalten, können sie keine maximale Weite aufweisen.

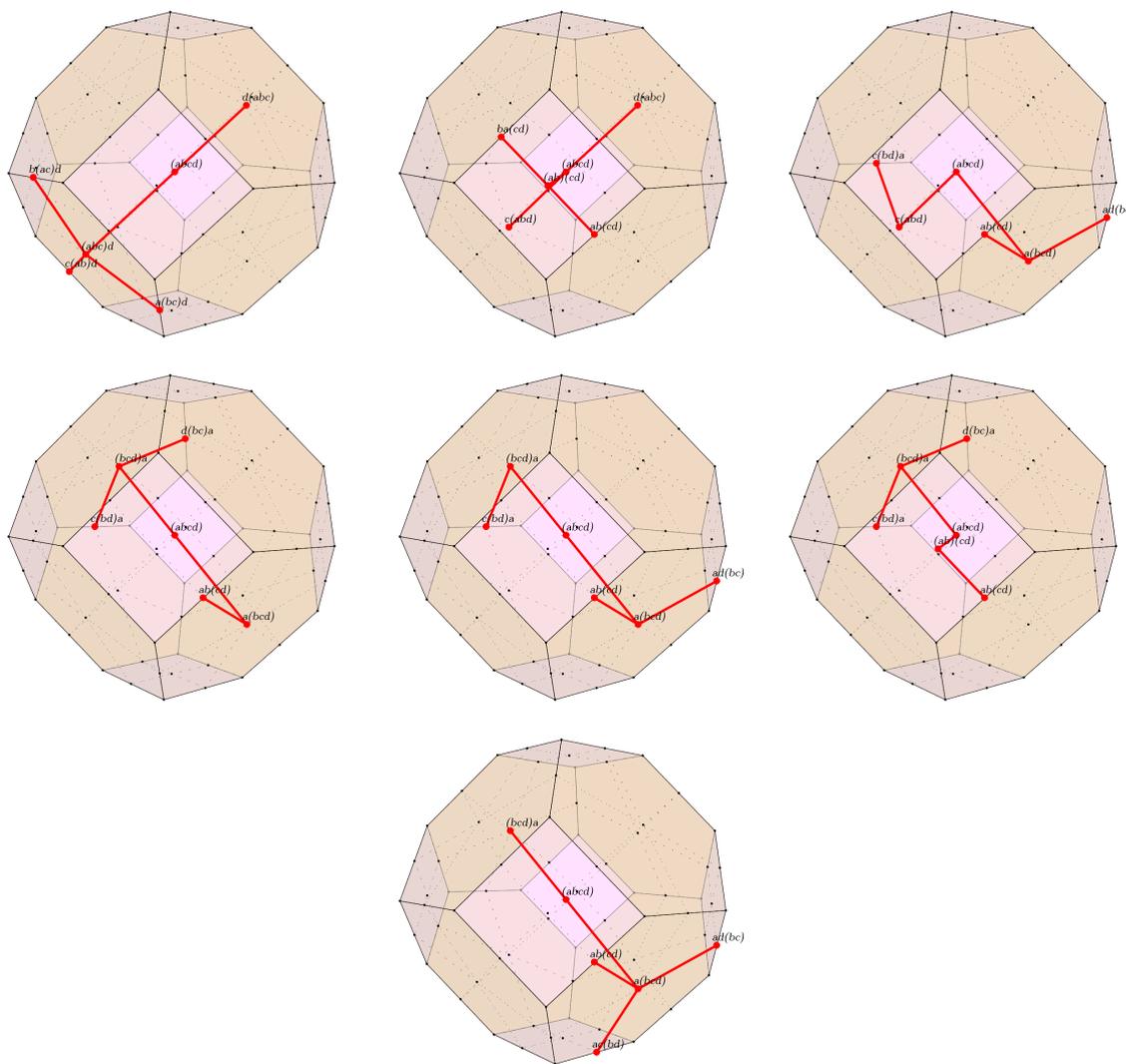


Abbildung 5.32: Maximale Condorcet-Domain-Strukturen mit sechs Elementen,  $m = 4$ , schwacher Präferenzraum

allgemeine Indifferenz ist außer für die ersten beiden Strukturen immer mit zwei Präferenzen der Form  $i(jkl)$  bzw.  $(ijk)l$  verbunden und „verzweigt“ sich anschließend in mindestens einem dieser Punkte.

Nachdem wir die CD-Strukturen mit wenigen Elementen betrachten haben, wenden wir uns nun den sehr großen Condorcet Domains zu. Das eindeutige Maximum Condorcet Domain mit der größten Anzahl an Elementen ist in Abbildung 5.33 dargestellt. Diese CD-Struktur ist das Pendant zur Maximum Struktur für strikte Präferenzen. Domains dieser Struktur sind zusammenhängend, voll besetzt, haben maximale Weite und keine schwache minimale Vielfalt. Sie sind weder single-peaked noch single-crossing. Es existieren insgesamt 24 unterschiedliche, zueinander isomorphe Domains mit dieser Struktur.

Die CD-Struktur mit der nächstkleineren Anzahl an Elementen ist das Pendant zur Struktur „Zwei Quadrate“ aus dem strikten Präferenzraum. Domains dieser Struktur haben 18 Elemente, weisen maximale Weite, strikte minimale Vielfalt bzgl. sowohl der ersten als auch der letzten Alternative auf, sind symmetrisch, voll besetzt und nicht zusammenhängend. Diese Domains lassen sich als Produkt zweier

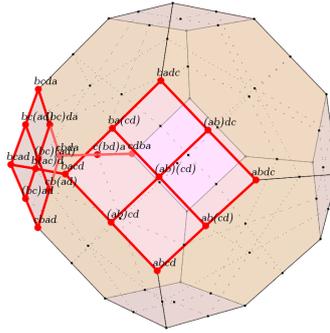


Abbildung 5.33: Maximum Condorcet-Domain-Struktur,  $m = 4$ , schwacher Präferenzraum

maximaler Condorcet Domains mit jeweils zwei Alternativen im schwachen Präferenzraum darstellen. Ein Domain dieser Struktur lautet

$$\mathcal{D}_{95} = \{abcd, (ab)cd, bacd, ab(cd), (ab)(cd), ba(cd), abdc, (ab)dc, badc, cdab, cd(ab), cdba, (cd)ab, (cd)(ab), (cd)ba, dcab, dc(ab), dcba\}.$$

Das Domain lässt sich als Domain-Produkt aus den beiden maximalen CDs  $\mathcal{D}' = \{ab, (ab), ba\}$  und  $\mathcal{D}'' = \{cd, (cd), dc\}$  erzeugen. Da das Permutaeder lediglich drei Paare gegenüberliegender Quadrate besitzt, existieren auch nur drei unterschiedliche, zueinander isomorphe Domains dieser Struktur.

Wir können genau vier verschiedene maximale CD-Strukturen mit 17 Elementen identifizieren. Diese sind alle Pendants zu Strukturen aus dem strikten Präferenzraum („Sonne“, „Krabbe“, „Sonnenkrabbe“ und „Single-peaked Domain“). An dieser Stelle sei nur das Pendant zum „Single-peaked Domain“ hervorgehoben. Dieses ist auch im schwachen Präferenzraum die einzige Struktur, welche gleichzeitig semi-zusammenhängend ist und strikte minimale Vielfalt aufweist. Puppe [Pup16] zeigt, dass dies ein allgemeines Resultat für alle  $m$  ist.

Unter den zehn CD-Strukturen mit 15 und 16 Elementen finden wir alle Pendants zu den Strukturen Sonstige I-VII aus dem strikten Präferenzraum wieder. Die drei anderen Strukturen stellen die größten CD-Strukturen aus dem schwachen Präferenzraum dar, welche keine Pendants zu Strukturen aus dem strikten Präferenzraum sind. Repräsentanten dieser Strukturen sind in Abbildung 5.34 illustriert. Alle drei CD-Strukturen sind zusammenhängend und voll besetzt. Die linke Struktur besteht aus zwei

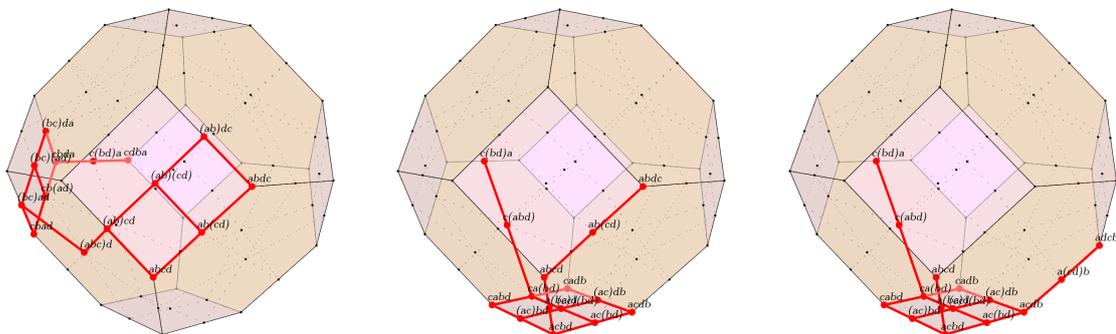


Abbildung 5.34: Maximale Condorcet-Domain-Strukturen mit 15 Elementen,  $m = 4$ , schwache Präferenzordnung (ohne Pendants im strikten Präferenzraum)

halben Quadraten, welche durch eine Kette auf dem Permutaeder miteinander verbunden sind. Diese

CD-Struktur hat als einzige der drei Strukturen maximale Weite und ist somit semi-zusammenhängend. Domains der beiden anderen Strukturen besitzen ein voll besetztes Quadrat und zwei respektive drei „Arme“, die mit dem Quadrat verbunden sind. Die mittlere Struktur hat als einzige der drei Strukturen strikte minimale Vielfalt (und auch als einzige schwache minimale Vielfalt). Domains dieser Struktur sind außerdem schwach single-peaked. Die rechte Struktur in Abbildung 5.34 weist keine weiteren besonderen Eigenschaften auf.

Es existieren genau drei Condorcet-Domain-Strukturen mit 14 Elementen. Eine der Strukturen ist das Pendant zur strikten Struktur „Zwei Halbe“. Die anderen beiden Strukturen sind die größten nicht zusammenhängenden Strukturen, welche keine Pendants zu Strukturen aus dem strikten Präferenzraum sind. Zwei repräsentative Domains dieser Strukturen sind in Abbildung 5.35 dargestellt. Beide Domains weisen

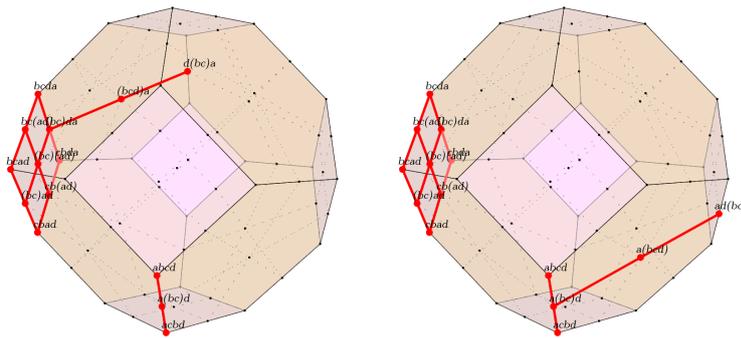


Abbildung 5.35: Maximale Condorcet-Domain-Strukturen mit 14 Elementen,  $m = 4$ , schwache Präferenzordnung (ohne Pendants im strikten Präferenzraum und nicht zusammenhängend)

ein voll besetztes Quadrat auf und haben keine maximale Weite. Die linke CD-Struktur hat außerdem strikte minimale Vielfalt bzgl. entweder der ersten oder der letzten Alternative. Beide Strukturen sind nicht voll besetzt.

Im Folgenden gruppieren wir die CD-Strukturen anhand ihrer Eigenschaften und versuchen so, Zusammenhänge zwischen diesen Eigenschaften herzuleiten. Man findet unter den 96 Strukturen 71 zusammenhängende Strukturen. Alle zusammenhängenden Domains sind voll besetzt. Jedoch existieren auch sechs nicht zusammenhängende Strukturen, welche voll besetzt sind. Diese sechs CD-Strukturen sind in Abbildung 5.36 dargestellt. Wie man sehr gut erkennen kann, haben diese Strukturen alle gemeinsam, dass sie aus zwei gegenüberliegenden, gleichförmigen Mustern bestehen. Die Muster der ersten fünf Strukturen entsprechen den CD-Strukturen Pendant 1, Z-Struktur, T-Struktur, 3-Struktur und Stern-Struktur für den Fall schwacher Präferenzen mit  $m = 3$ . Dies ist darin begründet, dass diese Strukturen das Domain-Produkt aus einem Domain der entsprechenden CD-Struktur für  $m = 3$  und einem einelementigen maximalen Condorcet Domain einer einelementigen Alternativenmenge sind. Betrachten wir z.B. das Domain links oben in der Abbildung 5.36. Dieses Domain ist das Produkt aus  $\mathcal{D}' = \{a\}$  und  $\mathcal{D}'' = \{b(cd), c(bd), d(bc), (bcd)\}$ :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}' \star \mathcal{D}'' = \{ab(cd), ac(bd), ad(bc), a(bcd), b(cd)a, c(bd)a, d(bc)a, (bcd)a\}.$$

Die CD-Struktur rechts unten ist auch ein Domain-Produkt, welches wir bereits weiter oben beschrieben haben. Wir können daraus zwei Beobachtungen ableiten.

**Beobachtung 15.** Für den schwachen Präferenzraum und vier Alternativen sind alle zusammenhängenden maximalen Condorcet Domains voll besetzt.

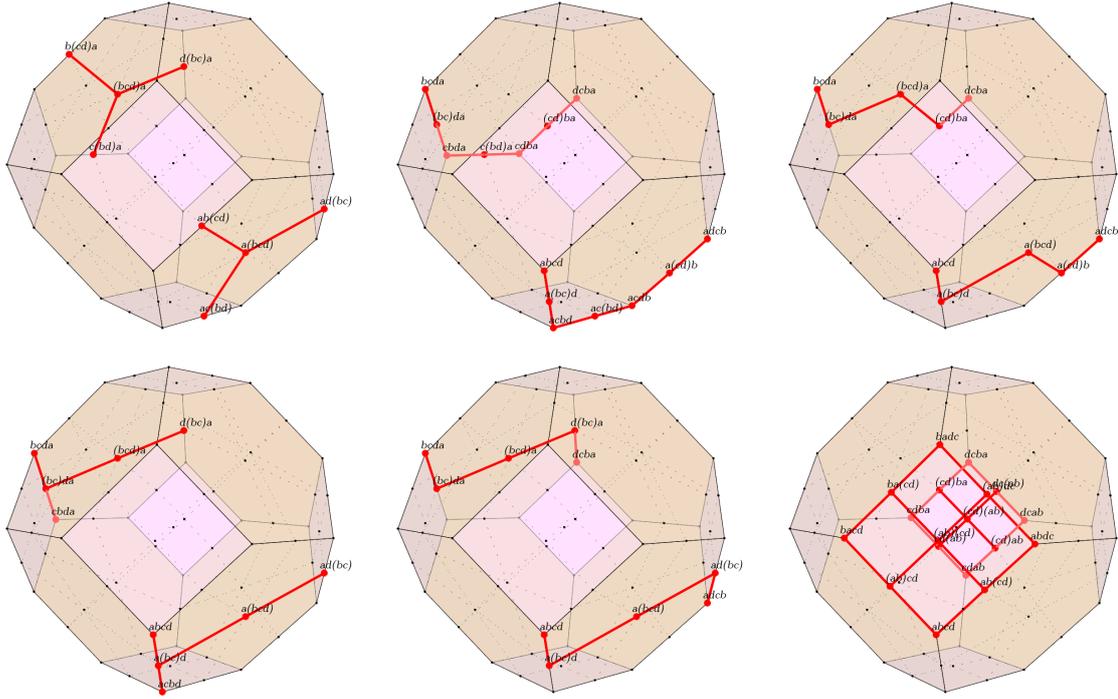


Abbildung 5.36: Voll besetzte, nicht zusammenhängende maximale CD-Strukturen,  $m = 4$ , schwacher Präferenzraum

**Beobachtung 16.** Für den schwachen Präferenzraum und vier Alternativen sind alle voll besetzten maximalen Condorcet Domains entweder zusammenhängend oder haben die Domain-Produkt-Struktur.

Es existiert genau eine CD-Struktur mit Domain-Produkt-Struktur, die nicht voll besetzt ist. Dies ist das Pendant zur strikten CD-Struktur „Vier Paare“ und ist in Abbildung 5.37 illustriert. Da bereits

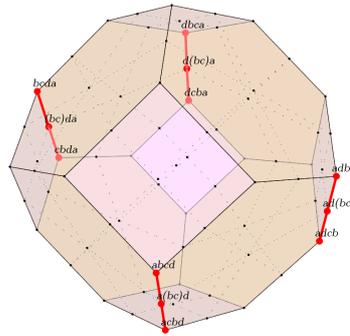


Abbildung 5.37: Pendant zur maximalen Condorcet-Domain-Struktur „Vier Paare“

das maximale Condorcet Domain, welches in das Domain-Produkt für diese Struktur einfließt, nicht zusammenhängend ist und das Domain-Produkt generell nicht zusammenhängende Domains für  $m \geq 3$  erzeugt, ist das Resultat hier noch „weniger zusammenhängend“ als die sechs anderen Domain-Produkt-Strukturen oben.

Bei Betrachtung aller symmetrischer CD-Strukturen, ist festzustellen, dass neben drei Domain-Produkt-Strukturen (in Abbildung 5.36 unten mitte und unten rechts sowie in Abbildung 5.37) und dem Pendant zum DK4D (Abbildung 5.11 im strikten Präferenzraum) noch drei weitere CD-Strukturen in dieser Gruppe enthalten sind. Diese drei Strukturen sind in Abbildung 5.38 veranschaulicht. Die Domains aller

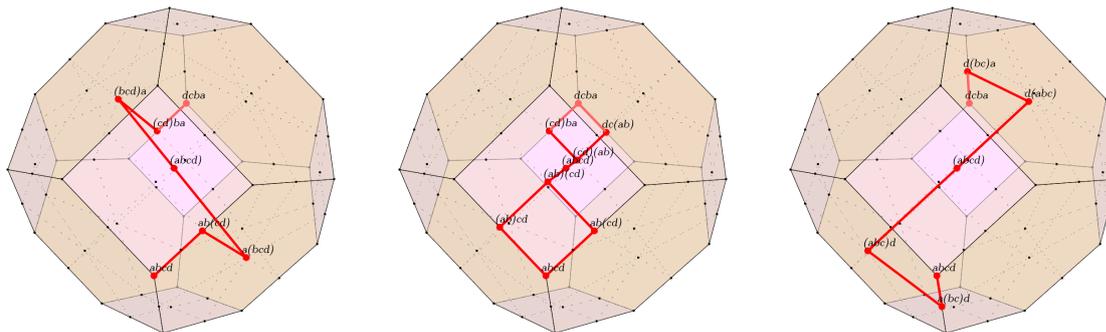


Abbildung 5.38: Drei symmetrische maximale CD-Strukturen,  $m = 4$ , schwacher Präferenzraum

drei Strukturen sind semi-zusammenhängend und enthalten die allgemeine Indifferenz. Damit weisen sie schwache minimale Vielfalt bzgl. sowohl der ersten als auch der letzten Alternative auf. Des Weiteren sind alle Domains dieser Strukturen gleichzeitig schwach single-peaked und single-dipped. Da der Graph in der linken und rechten Struktur in der Abbildung eine Kette bildet, erfüllen diese beiden CD-Strukturen die single-crossing Eigenschaft.

Eine Übersicht über alle 15 single-crossing CD-Strukturen gibt Abbildung 5.39. Die Graphen dieser Domains bilden alle Ketten auf dem Permutaeder. Die ersten neun Strukturen verlaufen dabei auf dem „Rand“ des Permutaeders. Die letzten sechs verlaufen durch die Mitte (durch die allgemeine Indifferenz). Die Umkehrung dieser Aussage, d.h. alle maximalen CDs, deren Graphen auf dem Permutaeder eine Kette bilden, sind single-crossing, gilt auch. Daraus lässt sich folgende Beobachtung ableiten.

**Beobachtung 17.** *Für den schwachen Präferenzraum mit drei und vier Alternativen ist die Klasse der maximalen Condorcet Domains, die single-crossing sind, äquivalent zur Klasse der maximalen Condorcet Domains, deren Graph eine Kette auf dem Permutaeder bildet.*

Alle Strukturen haben maximale Weite und sind damit semi-zusammenhängend. Die sechs CD-Strukturen, welche die allgemeine Indifferenz enthalten, weisen automatisch schwache minimale Vielfalt bzgl. sowohl der ersten als auch der letzten Alternative auf. Unter den verbleibenden neun Strukturen haben sieben minimale Vielfalt bzgl. entweder der ersten oder der letzten Alternative. Nur die erste Struktur (links oben) und die fünfte Struktur (zweite Reihe Mitte) in Abbildung 5.39 weisen keine minimale Vielfalt auf. Die fünfte Struktur ist das Pendant zur strikten CD-Struktur „Schlange“. Diese beiden Strukturen sind auch die einzigen unter den single-crossing Strukturen, die nicht schwach single-peaked oder schwach single-dipped sind.

Wie wir in Abschnitt 5.4.1 gezeigt haben, existiert für jede maximale CD-Struktur aus dem strikten Präferenzraum ein Pendant im schwachen Präferenzraum. Die repräsentativen Domains dieser Strukturen sind in Abbildung D.1 im Anhang D dargestellt.

Abschließend nehmen wir eine Klassifikation der gefundenen maximalen Condorcet-Domain-Strukturen (CDS) vor, welche in Abbildung 5.40 dargestellt ist. Unter den 96 maximalen Condorcet-Domain-Strukturen für den schwachen Präferenzraum mit vier Alternativen sind 71 Strukturen zusammenhängend, wovon wiederum 27 Strukturen auch semi-zusammenhängend sind. Unter den semi-zusammenhängenden Strukturen finden sich die Pendants zu den Strukturen „Schlange“, „Single-peaked Domain“ sowie „Maximum Domain“ aus dem strikten Präferenzraum. Zudem fallen alle weiteren 14 CD-Strukturen, welche die single-crossing Eigenschaft erfüllen, in diese Klasse sowie zwölf weitere CD-Strukturen. Unter den 44 zusammenhängenden, nicht semi-zusammenhängenden Strukturen findet man die drei Pendants zu den Strukturen „Krabbe“, „Sonne“ und „Sonnenkrabbe“ aus dem strikten Präferenzraum, die Indifferenz-

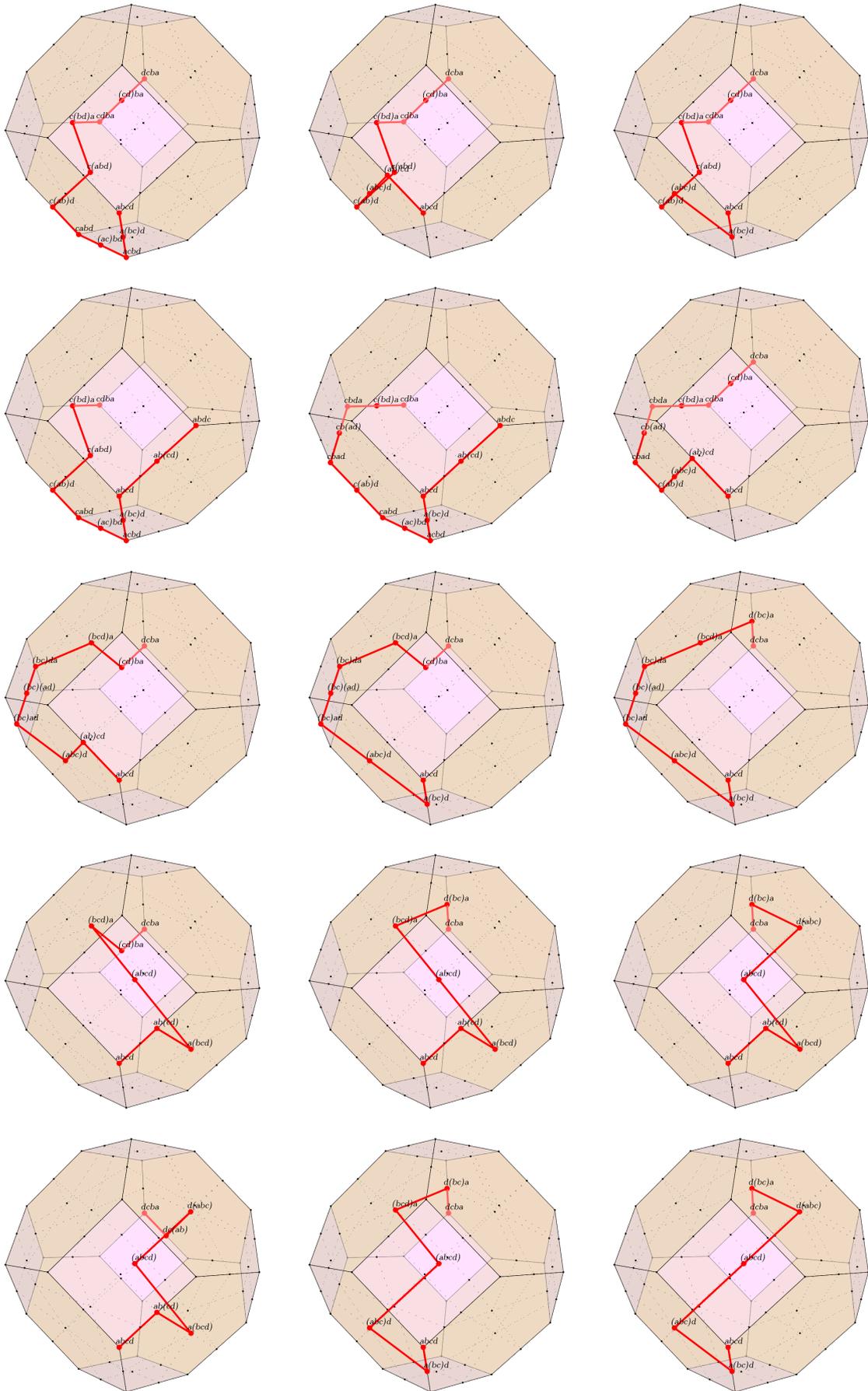


Abbildung 5.39: Alle maximalen single-crossing CD-Strukturen,  $m = 4$ , schwacher Präferenzraum

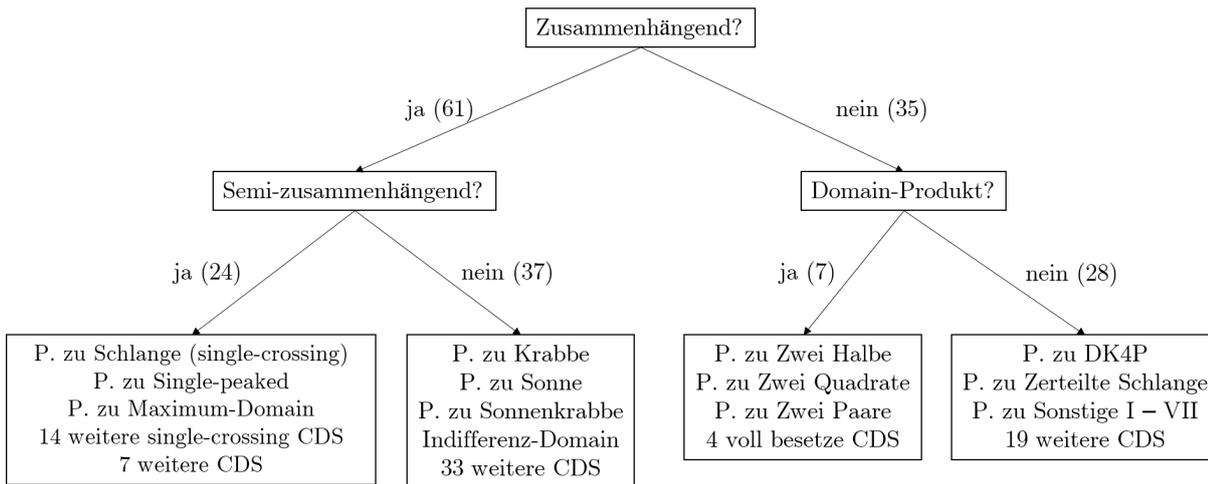


Abbildung 5.40: Klassifikation der maximalen Condorcet-Domain-Strukturen für den schwachen Präferenzraum mit vier Alternativen

Domain-Struktur sowie 40 weitere maximale CD-Strukturen. In der Klasse der nicht zusammenhängenden Domain-Strukturen unterscheiden wir erneut anhand der Eigenschaft Domain-Produkt-Struktur. Sieben CD-Strukturen erfüllen diese Eigenschaft, wobei die Domains von sechs der Strukturen voll besetzt sind (darunter die Pendants zu „Zwei Halbe“ und „Zwei Quadrate“). Die einzige maximale Condorcet-Domain-Struktur, die nicht voll besetzt ist, ist das Pendant zur Struktur „Vier Paare“ aus dem strikten Präferenzraum. Die Klasse der nicht zusammenhängenden CD-Strukturen, die keine Domain-Produkt-Struktur aufweisen, beinhaltet die Pendants zu den Strukturen „DK4P“, „Zerteilte Schlange“, „Sonstige I-VII“ sowie 9 weitere maximale Condorcet-Domain-Strukturen.

Damit schließen wir die Beschreibung der Condorcet Domains für den schwachen Präferenzraum und widmen uns im nächsten Abschnitt dem quasitransitiven Präferenzraum.

### 5.5 Klassifikation für den quasitransitiven Präferenzraum

Aufgrund der im Vergleich zu den anderen Präferenzräumen deutlich höheren Anzahl an Präferenzrelationen im quasitransitiven Präferenzraum (vgl. Tabelle 3.4), können wir lediglich den Fall  $m = 3$  untersuchen. Bereits bei vier Alternativen besteht der Präferenzraum aus 219 Präferenzrelationen, wodurch es mit unseren Mitteln unmöglich ist, eine umfassende Untersuchung durchzuführen und alle maximalen Condorcet Domains zu ermitteln.

Auch für den Fall quasitransitiver CD-Strukturen kann man Pendants zu den CD-Strukturen aus dem strikten und schwachen Präferenzraum identifizieren. Die Definition für die Pendants ist dabei identisch zum schwachen Präferenzraum: Eine maximale Condorcet-Domain-Struktur im quasitransitiven Präferenzraum ist ein *Pendant* zu einer maximalen Condorcet-Domain-Struktur aus dem strikten oder schwachen Präferenzraum, wenn je ein repräsentatives Domain aus dem quasitransitiven und strikten (oder schwachen) Präferenzraum dieser Strukturen  $\mathcal{D}_{qt}, \mathcal{D}_{s/w}$  existiert, sodass  $\mathcal{D}_{s/w} \subseteq \mathcal{D}_{qt}$ . Wir können am Ende dieses Abschnittes analog zum Fall des schwachen Präferenzraums zeigen, dass zu jeder CD-Struktur aus dem schwachen Präferenzraum ein eindeutiges Pendant im quasitransitiven Präferenzraum existiert. Für Domains aus dem quasitransitiven Präferenzraum muss man, wie bereits im schwachen Präferenzraum, zwischen der schwachen und der strikten minimalen Vielfalt unterscheiden. Des Weiteren sind auch für diesen Präferenzraum keine Tiling Domains definiert.

Tabelle 5.7 listet die Eigenschaften aller maximalen Condorcet-Domain-Strukturen für den quasitransitiven Präferenzraum auf. Die repräsentativen Domains für diese Strukturen sind in Tabelle C.5 im Anhang C.3 aufgeführt. Eine Zuordnung zwischen den Tabellen ist mithilfe des Schlüssels „Dom Index“ möglich. Die verwendeten Abkürzungen in den Spaltenüberschriften der Tabelle sind bereits in Abschnitt 5.4 erklärt. Es gelten auch die gleichen Erklärungen für die Einträge in der Tabelle. Zusätzlich existiert die Spalte „Schw Pend“, welche analog zur Spalte „Schw Pend“ markiert, wenn eine Struktur ein Pendant zu einer maximalen CD-Struktur aus dem schwachen Präferenzraum ist.

Dom Index	Anz Elem	Max Weit	stri MV	schw MV	Dom Prod	SP / SD	SC	Symm	Verb	Stri Pend	Schw Pend	Anz Isom
1	9	x	xx	xx	x			x		x	x	3
2	10	x	x	xx								12
3	10			xx					x			12
4	10	x	x	xx		x			x	x	x	6
5	11		x	xx					x			12
6	11	x	x	xx		x			x			12
7	11		xx	xx								6
8	11	x		xx				x	x		x	6
9	11		x	xx					x		x	6
10	11			xx					x			6
11	12		x	xx					x			12
12	12	x	x	xx		x			x		x	6
13	13		xx	xx				x	x		x	1

Tabelle 5.7: Zusammenfassung aller maximalen Condorcet-Domain-Strukturen für  $m = 3$  im quasitransitiven Präferenzraum

Für den quasitransitiven Präferenzraum mit drei Alternativen existieren 13 maximale Condorcet-Domain-Strukturen. Diese enthalten Domains mit 9, 10, 11, 12 oder 13 Präferenzrelationen. Alle Strukturen beinhalten die allgemeine Indifferenz  $a \sim b \sim c$  und haben damit automatisch schwache minimale Vielfalt bzgl. sowohl der ersten als auch der letzten Alternative. Daraus kann man sofort ableiten, dass die allgemeine Indifferenz für alle  $m$  in allen maximalen Condorcet Domains des quasitransitiven Präferenzraums enthalten sein muss.

**Beobachtung 18.** Für alle Alternativenmengen  $X = \{a, b, \dots, m\}$  und alle Domains  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}_{qt}(X)$  auf dem quasitransitiven Präferenzraum gilt: Wenn  $\mathcal{D}$  ein maximales Condorcet Domain ist, dann enthält es die allgemeine Indifferenz ( $a \sim b \sim \dots \sim m$ ).

Ist die allgemeine Indifferenz in einem Condorcet Domain nicht enthalten, so kann man diese immer hinzufügen, da für alle Tripel paarweise verschiedener Alternativen die Projektion der allgemeinen Indifferenz auf das Tripel die allgemeine Indifferenz auf dem Präferenzraum mit drei Alternativen ist und diese in allen maximalen Condorcet-Domain-Strukturen für drei Alternativen enthalten ist.

Da für drei Alternativen ein single-crossing Domain maximal sieben Elemente enthalten kann (sechs verschiedene Grenzen  $i \succeq j$ ), kann keine der gefundenen maximalen Condorcet-Domain-Strukturen die single-crossing Eigenschaft erfüllen. Natürlich können single-crossing Domains im quasitransitiven Präferenzraum existieren, welche Condorcet Domains sind. Diese sind jedoch dann nicht maximal.

Unter den 13 Strukturen finden sich drei nicht zusammenhängende Strukturen. Repräsentative Domains dieser Strukturen sind in Abbildung 5.41 dargestellt. Die CD-Struktur links ist das Pendant zur

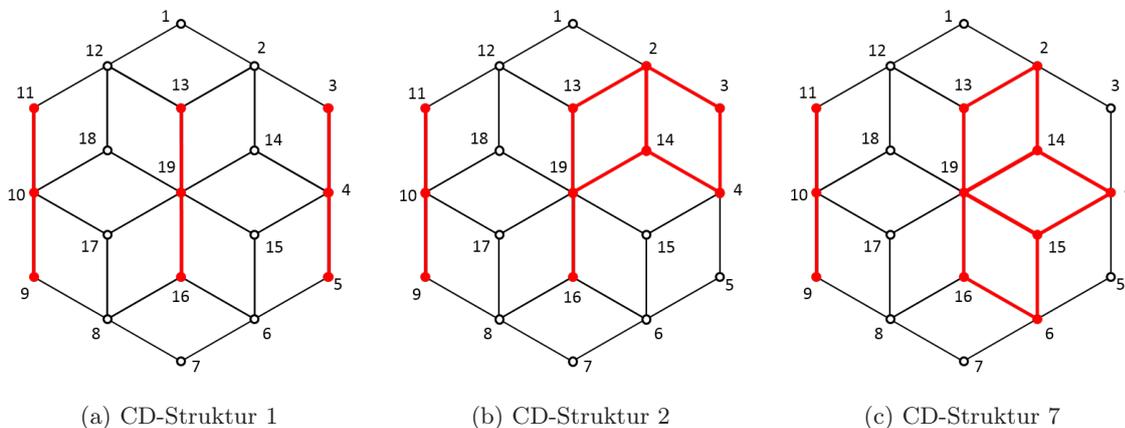


Abbildung 5.41: Alle nicht zusammenhängenden maximalen Condorcet-Domain-Strukturen auf dem quasitransitiven Präferenzraum mit drei Alternativen

nicht zusammenhängenden Struktur aus dem strikten Präferenzraum bzw. auch zur Struktur Pendant 2 aus dem schwachen Präferenzraum. Domains dieser Struktur sind symmetrisch, haben strikte minimale Vielfalt bzgl. sowohl der ersten als auch der letzten Alternative und weisen maximale Weite auf. Sie sind die einzigen Domains mit Domain-Produkt-Struktur<sup>9</sup>. Diese Domains haben neun Elemente, welche in Form von drei parallelen Linien im Permutaeder verteilt sind. Aus diesem Grund existieren nur drei unterschiedliche, zueinander isomorphe Domains dieser Struktur. Die mittlere Struktur in der Abbildung 5.41 hat auch maximale Weite, ist jedoch nicht symmetrisch und hat „nur“ strikte minimale Vielfalt bzgl. entweder der ersten oder der letzten Alternative. Domains dieser Struktur enthalten 10 Elemente und es existieren 12 verschiedene, zueinander isomorphe Domains. Die Struktur rechts hat keine maximale Weite und weist strikte minimale Vielfalt bzgl. sowohl der ersten als auch der letzten Alternative auf. Es existieren sechs verschiedene, zueinander isomorphe Domains dieser Struktur. Allen drei Strukturen ist gemeinsam, dass sie mindestens zwei parallele Linien aus jeweils drei Präferenzrelationen enthalten - eine am Rand des Permutaeders und eine in der Mitte, welche auch die allgemeine Indifferenz beinhaltet. Kein Domain dieser Strukturen ist schwach single-peaked.

Unter den 10 zusammenhängenden CD-Strukturen existieren vier mit maximaler Weite, welche somit semi-zusammenhängend sind. Diese sind in Abbildung 5.42 grafisch dargestellt. Domains dieser Struktur enthalten 10, 11 bzw. 12 Präferenzen. CD-Struktur 4 ist das Pendant zur zusammenhängenden CD-Struktur aus dem strikten Präferenzraum und zur Struktur Pendant 1 aus dem schwachen Präferenzraum. Die CD-Strukturen 8 und 12 aus dem quasitransitiven Präferenzraum sind die Pendants zu der Z-Struktur und 3-Struktur aus dem schwachen Präferenzraum. Unter den vier semi-zusammenhängenden CD-Strukturen ist die CD-Struktur 8 die einzige symmetrische Struktur. Sie ist nicht schwach single-

<sup>9</sup> Genauer gesagt ist diese Struktur eine Obermenge eines Domain-Produkts. Domain-Produkte maximaler Condorcet Domains erzeugen im quasitransitiven Präferenzraum zwar weiterhin Condorcet Domains, diese sind jedoch nicht mehr maximal. Da man das Domain-Produkt zweier maximaler Condorcet Domains jedoch eindeutig auf ein maximales Condorcet Domain erweitern kann, halten wir an dem Begriff Domain-Produkt-Struktur fest und lockern die Definition ein wenig: Ein maximales Condorcet Domain erfüllt die Domain-Produkt-Struktur, wenn es die eindeutige Obermenge aus dem Produkt zweier maximaler Condorcet Domains ist.

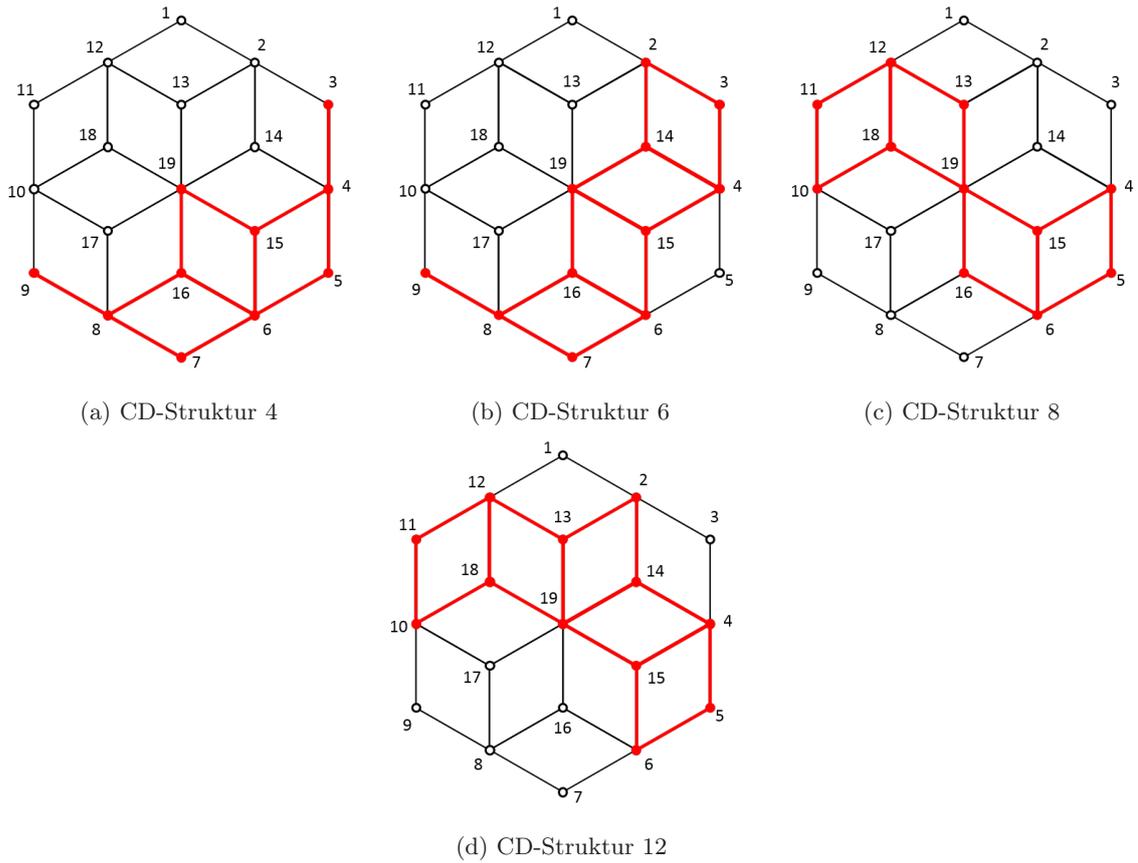


Abbildung 5.42: Alle semi-zusammenhängenden maximalen Condorcet-Domain-Strukturen auf dem quasitransitiven Präferenzraum mit drei Alternativen

peaked und weist keine strikte minimale Vielfalt bzgl. der ersten oder der letzten Alternative auf. Es existieren zwölf unterschiedliche, zueinander isomorphe Domains dieser Struktur. Die drei anderen Strukturen sind die einzigen Strukturen unter allen quasitransitiven maximalen Strukturen, die schwach single-peaked sind. Sie sind auch die einzigen Strukturen unter den semi-zusammenhängenden Strukturen, welche strikte minimale Vielfalt bzgl. der ersten oder der letzten Alternative aufweisen. Somit gilt auch für den Fall quasitransitiver Präferenzordnungen mit  $m = 3$  der von Puppe [Pup16] für strikte und schwache Präferenzräume und beliebige  $m$  postulierte Zusammenhang:

**Beobachtung 19.** *Ein maximales Condorcet Domain im quasitransitiven Präferenzraum mit drei Alternativen ist genau dann ein schwaches single-peaked Domain, wenn das Domain strikte minimale Vielfalt aufweist und semi-zusammenhängend ist.*

Für den Fall  $m > 3$  ist, wie im Fall des schwachen Präferenzraums, zu erwarten, dass aus der Äquivalenz eine Implikation wird: Ist ein maximales Condorcet Domain semi-zusammenhängend und hat strikte minimale Vielfalt, so ist das Domain single-peaked. Für alle drei schwachen single-peaked CD-Strukturen existieren je sechs verschiedene, zueinander isomorphe Domains.

Unter den noch verbliebenen sechs zusammenhängenden CD-Strukturen, die in Abbildung 5.43 illustriert sind, existieren zwei Pendants zu Strukturen aus dem schwachen Präferenzraum. CD-Struktur 9 ist das Pendant zur T-Struktur aus dem schwachen Präferenzraum und CD-Struktur 13 ist das Pendant zur Stern-Struktur aus dem schwachen Präferenzraum. Somit existiert zu jeder CD-Struktur aus dem strikten und schwachen Präferenzraum ein Pendant im quasitransitiven Präferenzraum.

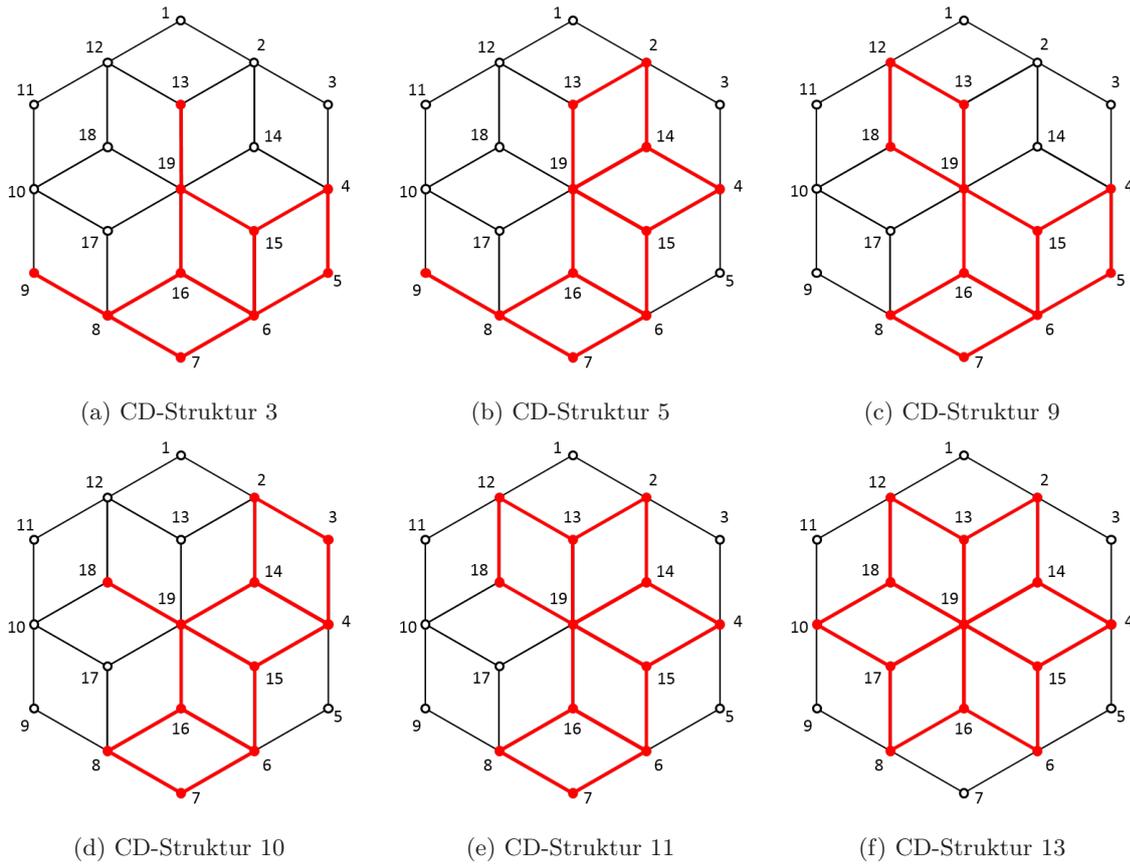


Abbildung 5.43: Alle zusammenhängenden maximalen Condorcet-Domain-Strukturen ohne maximale Weite auf dem quasitransitiven Präferenzraum mit drei Alternativen

**Beobachtung 20.** Für drei Alternativen hat jede maximale CD-Struktur aus dem strikten und schwachen Präferenzraum ein Pendant im quasitransitiven Präferenzraum.

Aus dieser Beobachtung lässt sich folgendes, allgemeines Ergebnis herleiten.

**Proposition 6.** Für eine beliebige Alternativenmenge  $X$  existiert zu jedem Domain aus einer voll besetzten maximalen Condorcet-Domain-Struktur aus dem schwachen Präferenzraum  $\mathcal{D}_w \subseteq \mathcal{R}_w(X)$  ein eindeutiges Pendant im quasitransitiven Präferenzraum  $\mathcal{D}_{qt} \subseteq \mathcal{R}_{qt}(X)$ .

*Beweis.* Der Beweis erfolgt analog zum Fall der Pendants aus dem schwachen Präferenzraum und wird aus diesem Grund nur grob umrissen. Da das Domain  $\mathcal{D}_w$  voll besetzt ist, besteht die Menge der Domain-Projektionen aller Tripel  $\mathcal{D}_{w/3}$  aus maximalen Condorcet Domains auf dem schwachen Präferenzraum mit drei Alternativen. Die Projektionen sind somit einer der sechs maximalen CD-Strukturen zuzuordnen. Wir können die Domains in  $\mathcal{D}_{w/3}$  auf maximale Condorcet Domains des quasitransitiven Präferenzraums übertragen, indem wir jedes Domain in  $\mathcal{D}_{w/3}$  erweitern, sodass es einer maximalen CD-Struktur im quasitransitiven Präferenzraum zuzuordnen ist. Diese Erweiterungen der Domains in  $\mathcal{D}_{w/3}$  sind auch im quasitransitiven Fall eindeutig. Die Menge der erweiterten Domains bezeichnen wir als  $E(\mathcal{D}_{w/3})$ . Das Pendant  $\mathcal{D}_{qt}$  des voll besetzten maximalen CDs aus dem schwachen Präferenzraum im quasitransitiven Präferenzraum ist das Kombinationsprodukt der erweiterten Domains  $\mathcal{K}(E(\mathcal{D}_{w/3})) = \mathcal{D}_{qt}$ . Das Domain  $\mathcal{D}_{qt}$  muss aufgrund von Beobachtung 3.1. ein Condorcet Domain sein und aufgrund der Maximalität der Domains in  $E(\mathcal{D}_{w/3})$  und der Definition des Kombinationsprodukts ein maximales Condorcet Domain sein. Weiterhin gilt  $\mathcal{D}_w \subseteq \mathcal{D}_{qt}$ , da für die Domain-Projektionen aller Tripel  $\{i, j, k\}$  paarweise verschie-

dener Alternativen gilt  $\mathcal{D}_{w/\{i,j,k\}} \subseteq \mathcal{D}_{qt/\{i,j,k\}}$ . Das Pendant muss eindeutig sein, da die Erweiterungen eindeutig sind und das Kombinationsprodukt eindeutig ist.  $\square$

Die CD-Strukturen 5, 9 und 11 weisen strikte minimale Vielfalt bzgl. entweder der ersten oder der letzten Alternative auf - Struktur 13 sogar bzgl. sowohl der ersten als auch der letzten Alternative. CD-Struktur 13 ist die einzige symmetrische Struktur unter den sechs Strukturen in Abbildung 5.43. Aufgrund des speziellen Aufbaus existiert lediglich ein Domain dieser Struktur. Dieses Domain ist außerdem das eindeutige Maximum Domain mit 13 Elementen. Dies ist überraschend, da es das Pendant zur Stern-Struktur aus dem schwachen Präferenzraum ist, welches für diesen Präferenzraum das Minimum Domain darstellt. Für die anderen fünf Strukturen existieren entweder je sechs oder zwölf unterschiedliche, zueinander isomorphe Domains.

Die Klassifikation der maximalen Condorcet-Domain-Strukturen (CDS) anhand der soeben besprochenen Eigenschaften für den quasitransitiven Präferenzraum mit drei Alternativen ist in Abbildung 5.44 dargestellt.

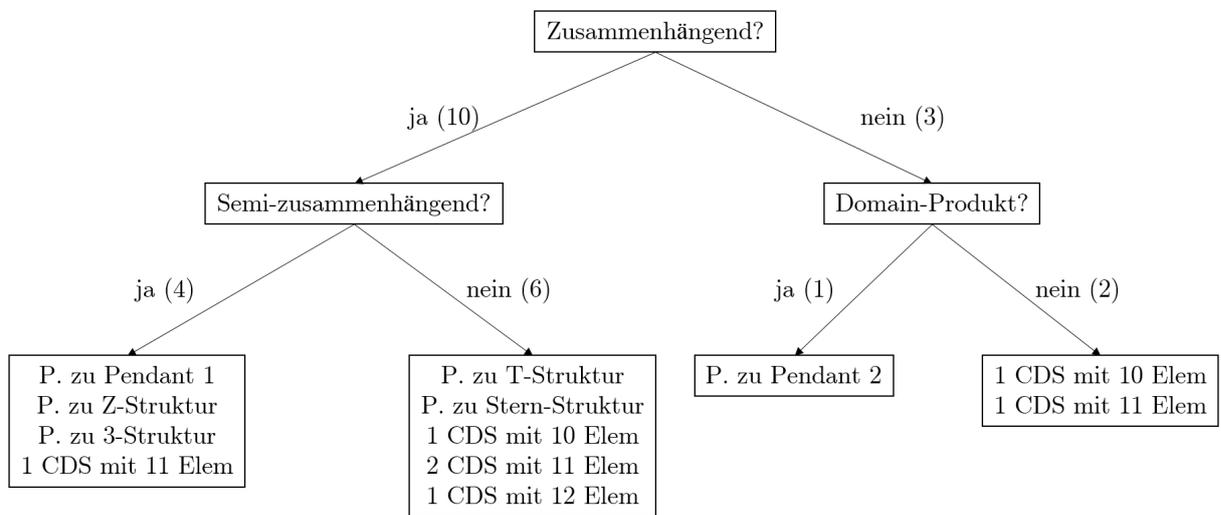


Abbildung 5.44: Klassifikation der maximalen Condorcet-Domain-Strukturen für den quasitransitiven Präferenzraum mit drei Alternativen



## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Welchen Schluss können wir aus den gefundenen und untersuchten Condorcet-Domain-Strukturen ziehen? Es ist uns gelungen, eine vollständige Klassifikation für Condorcet Domains auf kleinen Alternativenmengen zu generieren. Dabei haben wir viele unterschiedliche und bisher noch nicht in der Literatur beschriebene Strukturen beschrieben. Die Anzahl der Strukturen nimmt mit der Anzahl der Alternativen stark zu. Existieren für den strikten Präferenzraum und drei Alternativen lediglich zwei unterschiedliche maximale Condorcet-Domain-Strukturen, so sehen wir, dass die Anzahl für vier Alternativen bereits auf 18 steigt und bei fünf Alternativen sehr stark auf 688 anwächst. Gleichzeitig mussten wir allerdings feststellen, dass sich unter den neuen Strukturen sehr viele Domains befinden, welche kaum eine ökonomische Interpretation zulassen. Einige Domains mögen zwar mathematisch interessante Strukturen aufweisen, wie z.B. die symmetrischen Domains oder die Minimum Condorcet Domains mit nur vier Elementen, sie entziehen sich jedoch jeglicher praktischer Anwendung. Neben diesen zumindest noch strukturell interessanten Strukturen existieren hingegen jedoch auch sehr viele Condorcet Domains, die weder eine ökonomische noch eine mathematische Relevanz aufweisen. So sind z.B. fast die Hälfte (320 von 688) aller maximalen Condorcet-Domain-Strukturen für fünf Alternativen weder zusammenhängend, noch weisen sie maximale Weite oder minimale Vielfalt auf. Die ökonomisch interessanten Strukturen, wie die single-peaked, die single-crossing und die Tiling Typ Domains, wurden bereits in der Literatur beschrieben und sind von großer Bedeutung. Wir konnten mithilfe der vollständigen Klassifikation zeigen, dass diese Domains durch ihre herausstechenden Eigenschaften eine besondere Rolle unter den Condorcet Domains einnehmen.

Die Anzahl der maximalen Condorcet-Domain-Strukturen nimmt auch für den schwachen Präferenzraum mit steigender Anzahl an Alternativen stark zu. Für drei Alternativen existieren bereits sechs verschiedene Strukturen, für vier Alternativen sind es 96 Strukturen. Es ist zu erwarten, dass für fünf und mehr Alternativen die Anzahl der Strukturen ebenso rapide ansteigt wie im Fall des strikten Präferenzraums. Wir konnten zeigen, dass jedes voll besetzte Condorcet Domain im strikten Präferenzraum ein Pendant im schwachen Präferenzraum aufweist. Des Weiteren haben wir Condorcet-Domain-Strukturen identifiziert, welche keine strikten Präferenzen aufweisen (z.B. das Indifferenz-Domain) und somit eine gewisse Sonderrolle unter den Condorcet Domains einnehmen. Auch für den schwachen Präferenzraum fallen alle ökonomisch interessanten Condorcet-Domain-Strukturen in die Klasse der zusammenhängenden maximalen Condorcet-Domain-Strukturen mit maximaler Weite (Semi-zusammenhängende CDS). Darunter fallen die maximalen single-crossing Domains, das single-peaked Domain und das Maximum Domain

Die Untersuchung des quasitransitiven Präferenzraums zeigte, dass bereits bei drei Alternativen sehr viele Condorcet-Domain-Strukturen existieren. Auch hier konnten wir Pendants der Strukturen aus dem strikten und schwachen Präferenzraum wiederfinden und nachweisen, dass diese unter gewissen Voraussetzungen für alle  $m$  existieren müssen.

**Bringen mehr Alternativen mehr Erkenntnisse?** Sollten wir nun also versuchen, die Programme weiter zu optimieren, um die Condorcet Domains für größere Alternativenmengen zu berechnen? Dies könnte natürlich eine mathematisch und algorithmisch sehr interessante Aufgabe sein, jedoch wird sie wahrscheinlich aus ökonomischer Sicht keinen weiteren Mehrwert bringen. Es ist gut möglich, dass wir durch die Berechnung noch größerer Strukturen und weitere Maximum Domains finden können oder interessante

mathematische Strukturen aufdecken. Neue, noch unbekannte Condorcet-Domain-Strukturen bzw. ganze Präferenzklassen (wie z.B. single-peaked Domains oder single-crossing Domains) sind jedoch eher nicht zu erwarten. Eine Erweiterung der Analyse für den quasitransitiven Präferenzraum auf vier Alternativen könnte noch einige weitere Einblicke hinsichtlich der Zusammenhänge zwischen strikten, schwachen und quasitransitiven Condorcet Domains geben. Jedoch stößt das in dieser Arbeit entwickelte Programm aufgrund der kombinatorischen Explosion (der quasitransitive Präferenzraum für vier Alternativen beinhaltet bereits 219 Präferenzen) dabei an seine Grenzen.

**Können wir die gefundenen Strukturen in der Realität wiederfinden?** Eine interessante Frage, die sich im Anschluss dieser Arbeit stellen lässt, ist die Frage nach dem Vorkommen von Condorcet-Domain-Strukturen in realen Anwendungsszenarien. Insbesondere stellt sich die Frage, ob überhaupt Strukturen außerhalb des single-peaked und single-crossing Rahmens beobachtet werden. Dazu könnte man die in der Arbeit verwendeten Strukturen benutzen und in Daten von realen Abstimmungen mit bis zu fünf (bzw. vier für den schwachen Präferenzraum) Alternativen nach ähnlichen Mustern suchen. Außerdem könnte man mithilfe ökonomischer Experimente versuchen die Präferenzen von Wählergruppen auf gewisse Strukturen zu testen. Falls sich ähnliche Strukturen aufdecken lassen, wäre eine genauere Analyse dieser speziellen Strukturen von Interesse. Des Weiteren könnte man auch reale Abstimmungen mit mehr als fünf (bzw. vier für den schwachen Präferenzraum) Alternativen dahingehend untersuchen, ob die auftretenden Präferenzen ein Condorcet Domain bilden. Dazu könnten die in der Arbeit entwickelten Tools verwendet werden, um die Domains hinsichtlich ihrer verschiedenen Eigenschaften zu untersuchen.

**Schlusswort** Condorcet Domains bieten uns durch den Ausschluss von Zyklen eine Möglichkeit, die Aggregationsregel des paarweisen Mehrheitsvergleiches anzuwenden. Da dieses Verfahren sehr positive Eigenschaften aufweist, sollte man, wann immer es die Situation erlaubt, den Einsatz der Regel in Erwägung ziehen. Die Arbeit hat uns gezeigt, dass viele solcher Condorcet-Domain-Strukturen existieren, auch wenn diese nicht immer eine ökonomische Interpretation zulassen. Aus diesem Grund sollte man jedoch den paarweisen Mehrheitsvergleich nicht kategorisch als Aggregationsverfahren ausschließen, sondern immer ein offenes Auge für mögliche Anwendungsszenarien haben.

## A Inkonsistenz-Tripel

### A.1 Inkonsistenz-Tripel für den schwachen Präferenzraum

Tripel	Präferenzen	
Tripel 1	abc, (ac)b, (abc) abc, b(ac), (abc) acb, ab(c), (abc) acb, c(ab), (abc) cab, a(bc), (abc) cab, (bc)a, (abc)	cba, (ac)b, (abc) cba, b(ac), (abc) bca, c(ab), (abc) bca, (ab)c, (abc) bac, (bc)a, (abc) bac, a(bc), (abc)
Tripel 2	abc, cab, (abc) abc, bca, (abc) acb, cba, (abc)	acb, bac, (abc) bca, cab, (abc) bac, cba, (abc)
Tripel 3	abc, (ac)b, (bc)a abc, b(ac), c(ab) acb, c(ab), b(ac) acb, (ab)c, (bc)a cab, (bc)a, (ab)c cab, a(bc), b(ac)	cba, b(ac), a(bc) cba, (ac)b, (ab)c bca, (ab)c, (ac)b bca, c(ab), a(bc) bac, a(bc), c(ab) bac, (bc)a, (ac)b
Tripel 4	abc, bca, (ac)b abc, cab, b(ac) acb, bac, c(ab) acb, cba, (ab)c cab, bca, a(bc) cab, abc, (bc)a	cba, bac, (ac)b cba, acb, b(ac) bca, abc, c(ab) bca, cab, (ab)c bac, acb, (bc)a bac, cba, a(bc)
Tripel 5	abc, b(ac), (ac)b acb, (ab)c, c(ab) cab, (bc)a, a(bc)	cba, b(ac), (ac)b bca, (ab)c, c(ab) bac, (bc)a, a(bc)
Tripel 6	abc, cab, bca	acb, cba, bac
Tripel 7	abc, c(ab), (bc)a acb, (bc)a, b(ac) cab, b(ac), (ab)c	cba, (ab)c, a(bc) bca, a(bc), (ac)b bac, (ac)b, c(ab)

Tripel	Präferenzen	
Tripel 8	a(bc), (bc)a, c(ab)	(bc)a, a(bc), (ab)c
	a(bc), (bc)a, b(ac)	(bc)a, a(bc), (ac)b
	(ac)b, b(ac), (bc)a	b(ac), (ac)b, a(bc)
	(ac)b, b(ac), (ab)c	b(ac), (ac)b, c(ab)
	c(ab), (ab)c, b(ac)	(ab)c, c(ab), (ac)b
	c(ab), (ab)c, a(bc)	(ab)c, c(ab), (bc)a
Tripel 9	c(ab), (bc)a, (abc)	(ab)c, a(bc), (abc)
	(bc)a, b(ac), (abc)	a(bc), (ac)b, (abc)
	b(ac), (ab)c, (abc)	(ac)b, c(ab), (abc)

Tabelle A.1: Alle Inkonsistenz-Tripel für  $m = 3$  im schwachen Präferenzraum

## A.2 Inkonsistenz-Tripel für den quasitransitiven Präferenzraum

Tripel	Präferenzen	
Tripel 1	abc, (ac)b, b(ac)	cba, (ac)b, b(ac)
	acb, c(ab), (ab)c	bca, c(ab), (ab)c
	cab, (bc)a, a(bc)	bac, (bc)a, a(bc)
Tripel 2	abc, bca, (ac)b	acb, cba, (ab)c
	abc, bca, c(ab)	acb, cba, b(ac)
	bac, acb, c(ab)	cab, bca, (ab)c
	bac, acb, (bc)a	cab, bca, a(bc)
	abc, cab, (bc)a	cba, bac, a(bc)
	abc, cab, b(ac)	cba, bac, (ac)b
Tripel 3	abc, cab, bca	acb, cba, bac
Tripel 4	acb, (ab)(bc), (ac)(ab)	bca, (bc)(ab), (ab)(ac)
	cad, (bc)(ab), (ac)(bc)	bac, (bc)(ac), (ab)(bc)
	cba, (ac)(ab), (bc)(ac)	abc, (ab)(ac), (ac)(bc)
Tripel 5	acb, c(ab), (ab)(bc)	bca, (ab)c, (bc)(ab)
	acb, (ab)c, (ac)(ab)	bca, c(ab), (ab)(ac)
	cab, (bc)a, (ac)(bc)	bac, a(bc), (bc)(ac)
	cab, a(bc), (bc)(ab)	bac, (bc)a, (ab)(bc)
	cba, b(ac), (ac)(ab)	abc, b(ac), (ac)(bc)
	cba, (ac)b, (bc)(ac)	abc, (ac)b, (ab)(ac)

Tripel	Präferenzen	
Tripel 6	acb, cba, (bc)(ac)	bca, abc, (ac)(bc)
	acb, bac, (bc)(ac)	bca, cab, (ac)(bc)
	cab, bca, (ab)(ac)	bac, acb, (ac)(ab)
	cab, abc, (ab)(ac)	bac, cba, (ac)(ab)
	cba, acb, (ab)(bc)	abc, bca, (bc)(ab)
	cba, bac, (ab)(bc)	abc, cab, (bc)(ab)

Tabelle A.2: Alle Inkonsistenz-Tripel für  $m = 3$  im quasitransitiven Präferenzraum



## B Programcode Value Restriction

Listing B.1: AlgoValRestr.java

```
1 import java.io.*;
2 import java.util.ArrayList;
3
4 public class AlgoValRestr {
5
6     final static byte[][][][] neverConditions = new byte[][][][]{
7         {{{0,1,2}, {0,2,1}}, {{1,0,2},{2,0,1},{1,2,0},{2,1,0}}},
8         {{{1,0,2}, {2,0,1}}, {{0,1,2},{0,2,1},{1,2,0},{2,1,0}}},
9         {{{1,2,0}, {2,1,0}}, {{0,1,2},{0,2,1},{1,0,2},{2,0,1}}},
10        {{{1,0,2}, {1,2,0}}, {{0,1,2},{0,2,1},{2,0,1},{2,1,0}}},
11        {{{0,1,2}, {2,1,0}}, {{1,0,2},{2,0,1},{1,2,0},{0,2,1}}},
12        {{{2,0,1}, {0,2,1}}, {{1,0,2},{0,1,2},{1,2,0},{2,1,0}}},
13        {{{2,0,1}, {2,1,0}}, {{0,1,2},{0,2,1},{1,0,2},{1,2,0}}},
14        {{{0,2,1}, {1,2,0}}, {{1,0,2},{2,0,1},{0,1,2},{2,1,0}}},
15        {{{0,1,2}, {1,0,2}}, {{0,2,1},{2,0,1},{1,2,0},{2,1,0}}
16    };
17    static byte[][] triple = null;
18    static int m = 4;
19    static String dateiname = "Output_" + m;
20
21    public static void main(String[] args) {
22
23        final long timeStart = System.currentTimeMillis();
24
25        calculateCDs();
26
27        final long timeEnd = System.currentTimeMillis();
28        System.out.println("Time:␣" + (timeEnd - timeStart)/1000.0 + "␣s");
29
30    }
31
32    private static void calculateCDs() {
33
34        triple = new byte[(m)*(m-1)*(m-2)/6][3];
35        System.out.println((m)*(m-1)*(m-2)/6);
36        int tripleIndex = 0;
37        for (int i = 0; i < m; i++){
38            for (int j = i + 1; j < m; j++){
39                for (int k = j + 1; k < m; k++){
40                    triple[tripleIndex++] = new byte[] {(byte) i, (byte) j, (byte) k};
41                }
42            }
43        }
44
45        for (int i = 0; i < triple.length; i++){
46            System.out.print("(");
47            for (int j = 0; j < triple[i].length; j++) System.out.print("␣" + triple[i][j] +
48                "␣");
```

```

48     System.out.println("");
49     System.out.println();
50
51 }
52
53 byte[] counter = new byte[triple.length];
54 for (int i = 0; i < counter.length; i++) counter[i] = (byte) Math.round(Math.random
    ()*8);
55
56 File file = new File(dateiname + ".txt");
57 FileOutputStream dataus;
58 OutputStreamWriter oAus;
59 PrintWriter pAus = null;
60 try {
61     dataus = new FileOutputStream(file);
62     oAus = new OutputStreamWriter(dataus);
63     pAus = new PrintWriter(oAus, true);
64 } catch (FileNotFoundException e) {
65     e.printStackTrace();
66 }
67
68 for (int i = 0; i < 9; i++){
69     System.gc();
70     byte[] counterhelp = counter.clone();
71     counterhelp[0] = (byte) i;
72     ArrayList<byte[]> possiblePref = createPossiblePref(counterhelp, m);
73     System.out.println(possiblePref.size());
74     ArrayList<ArrayList<byte[]>> CDs = checkForNeverConditions(possiblePref,
        counterhelp, m, pAus);
75     System.out.println("NeverConditionsIndex:␣" + i);
76 }
77 System.out.println("Ready");
78 pAus.close();
79 }
80
81 private static ArrayList<byte[]> createPossiblePref(byte[] counter, int m) {
82     ArrayList<byte[]> possiblePref = new ArrayList<byte[]>();
83     for (int i = 0; i < 4; i++){
84         byte[] pref = new byte[m];
85         for (int k = 0; k < pref.length; k++) pref[k] = -1;
86         for (int j = 0; j < 3; j++){
87             pref[triple[0][j]] = neverConditions[counter[0]][1][i][j];
88         }
89         int altToAdd = m - 3;
90         int altAdded = 3;
91         byte[] positions = new byte[altToAdd];
92         rekInsertion(pref, positions, altAdded, m, possiblePref);
93     }
94     return possiblePref;
95 }
96
97 private static void rekInsertion(byte[] pref, byte[] positions, int altAdded, int m,
    ArrayList<byte[]> possiblePref) {
98     if (altAdded == m) createPref(pref.clone(), positions.clone(), possiblePref);
99     else {
100         for (int i = 0; i < altAdded + 1; i++){
101             positions[altAdded - 3 + i] = (byte) i;

```

```

102         rekInsertion(pref.clone(), positions.clone(), altAdded + 1, m, possiblePref);
103     }
104 }
105 }
106
107 private static void createPref(byte[] pref, byte[] positions, ArrayList<byte[]>
    possiblePref) {
108     for (int i = 0; i < positions.length; i++){
109         for (int j = 0; j < pref.length; j++){
110             if (pref[j] >= positions[i])
111                 pref[j]++;
112         }
113         pref[pref.length - positions.length + i] = positions[i];
114     }
115     possiblePref.add(pref);
116 }
117
118 private static ArrayList<ArrayList<byte[]>> checkForNeverConditions(ArrayList<byte[]>
    possiblePref, byte[] counter, int m, PrintWriter pAus) {
119     int maxSize = 0;
120     int intcount = 0;
121     boolean finished = false;
122     while (!finished){
123         boolean empty = false;
124         ArrayList<byte[]> possiblePrefHelp = (ArrayList<byte[]>) possiblePref.clone();
125         checkNCs:
126         for (int i = 1; i < counter.length; i++){
127             for (int j = 0; j < possiblePrefHelp.size();){
128                 if (!satisfiesNC(possiblePrefHelp.get(j), neverConditions[counter[i]
                    ][0], triple[i])) possiblePrefHelp.remove(j);
129                 else j++;
130             }
131             if (possiblePrefHelp.size() == 0){
132                 empty = true;
133                 break checkNCs;
134             }
135         }
136         if (!empty){
137             saveInFile(possiblePrefHelp, pAus);
138         }
139         if (possiblePrefHelp.size() > maxSize){
140             maxSize = possiblePrefHelp.size();
141             System.out.println("New maxSize: " + maxSize);
142         }
143
144         for (int i = counter.length - 1; i > 0; i--){
145             if (counter[i] < 8){
146                 counter[i]++;
147                 break;
148             }
149             if ((i == 1) && (counter[i] == 8)) finished = true;
150             if (counter[i] == 8){
151                 for (int j = i; j < counter.length; j++) counter[j] = 0;
152             }
153         }
154     }

```

```
155         if ((intcount % 1000000) == 0) System.out.println("Count:␣" + (intcount /
156             1000000));
157         intcount++;
158     }
159     return null;
160 }
161 private static void saveInFile(ArrayList<byte[]> prefs, PrintWriter pAus) {
162     for (int i = 0; i < prefs.size(); i++){
163         int [] pref = new int [prefs.get(0).length];
164         for (int j = 0; j < prefs.get(i).length; j++) pref[j] = prefs.get(i)[j]+1;
165         for (int j = 0; j < pref.length; j++) pAus.print(pref[j]);
166         pAus.print("␣");
167     }
168     pAus.println();
169 }
170 }
171 private static boolean satisfiesNC(byte[] pref, byte[][] NC, byte[] singleTriple) {
172     byte[] valTrip = {pref[singleTriple[0]], pref[singleTriple[1]], pref[singleTriple
173         [2]]};
174     if (((valTrip[NC[0][0]] < valTrip[NC[0][1]]) && (valTrip[NC[0][1]] < valTrip[NC
175         [0][2]])) ||
176         ((valTrip[NC[1][0]] < valTrip[NC[1][1]]) && (valTrip[NC[1][1]] < valTrip[NC
177         [1][2]])))
178         return false;
179     else return true;
180 }
```

## C Maximale Condorcet-Domain-Strukturen

### C.1 Maximale Condorcet-Domain-Strukturen für den strikten Präferenzraum

In der folgenden Tabelle C.1 sind die Eigenschaften aller maximalen Condorcet-Domain-Strukturen für den strikten Präferenzraum und fünf Alternativen aufgelistet. Die repräsentativen Domains für diese Strukturen sind in Tabelle C.2 aufgeführt. Eine Zuordnung zwischen den Tabellen ist mithilfe des Schlüssels „Dom Index“ möglich. Die verwendeten Abkürzungen in den Spaltenüberschriften der Tabelle stehen für folgende Begriffe:

Dom Index	=	Domain Index
Anz Elem	=	Anzahl der Präferenzen im Domain
Max Weite	=	Maximale Weite
Min Vielf	=	Minimale Vielfalt
Voll bes	=	Voll besetztes Domain
Tiling Typ	=	Domain vom Tiling Typ
Dom Prod	=	Domain-Produkt-Struktur
SP/SD	=	Single-peaked bzw. single-dipped Domain
SC	=	Single-crossing Domain
Symm	=	Symmetrisches Domain
Zus	=	Zusammenhängendes Domain
Anz Isom	=	Anzahl der verschiedenen, zueinander isomorphen Domains

Für die aufgeführten Eigenschaften gilt, wenn ein „x“ in der Zelle vermerkt ist, so erfüllt die Domain-Struktur die Eigenschaft, wenn kein „x“ vermerkt ist, erfüllt sie die Eigenschaft nicht. In der Spalte „Min Vielf“ besagt der Eintrag „xx“, dass die Domain-Struktur sowohl minimale Vielfalt bzgl. der besten als auch bzgl. der schlechtesten Alternative aufweist.

Dom Index	Anz Elem	Max Weite	Min Vielf	Voll bes	Tiling Typ	Dom Prod	SP/SD	SC	Symm	Zus	Anz Isom
1	4	x							x		60
2	4	x							x		30
3	8	x	x	x							240
4	8			x							240
5	8		x	x							60
6	8	x		x							240

C Maximale Condorcet-Domain-Strukturen

Dom Index	Anz Elem	Max Weite	Min Vielf	Voll bes	Tiling Typ	Dom Prod	SP/SD	SC	Symm	Zus	Anz Isom
7	8	x		x							120
8	8	x	xx	x					x		60
9	8	x	xx	x	x				x		30
10	11	x		x							240
11	11		x	x							240
12	11			x							240
13	11	x		x							240
14	11	x		x							240
15	11	x									240
16	11	x		x							240
17	11	x		x		x		x		x	240
18	11	x		x							240
19	11	x	x	x							240
20	11			x							240
21	11			x							240
22	11	x		x							240
23	11			x							240
24	12	x		x							240
25	12	x		x							240
26	12	x		x							240
27	12	x		x							240
28	12	x		x		x				x	240
29	12	x		x		x				x	240
30	12	x		x		x				x	120
31	12	x									240
32	12	x		x		x				x	240
33	12			x						x	240
34	12			x						x	240
35	12			x						x	240
36	12	x		x		x				x	240
37	12										60
38	12	x		x							240
39	12			x							240

Dom Index	Anz Elem	Max Weite	Min Vielf	Voll bes	Tiling Typ	Dom Prod	SP/SD	SC	Symm	Zus	Anz Isom
40	12	x		x							240
41	12	x									240
42	12	x	x	x							120
43	12	x	x	x							240
44	12	x		x							240
45	13	x		x							240
46	13	x		x							240
47	13	x		x							240
48	13	x	x								240
49	13	x	x	x							240
50	13	x		x							240
51	13			x							240
52	13	x		x							240
53	13	x		x							240
54	13	x	x	x							240
55	13			x							240
56	13	x		x							240
57	13	x									240
58	13	x		x							240
59	13	x									240
60	13			x							240
61	13		x	x							240
62	13			x							240
63	13	x									240
64	13			x							240
65	13		x	x							240
66	13		x	x							240
67	13			x						x	240
68	13	x		x							240
69	13			x							240
70	13	x		x							240
71	14			x						x	240
72	14			x						x	240

C Maximale Condorcet-Domain-Strukturen

Dom Index	Anz Elem	Max Weite	Min Vielf	Voll bes	Tiling Typ	Dom Prod	SP/SD	SC	Symm	Zus	Anz Isom
73	14		x	x							240
74	14		x	x							240
75	14	x		x							240
76	14	x		x							240
77	14			x							240
78	14			x							240
79	14			x							240
80	14	x	x	x							240
81	14										240
82	14	x	x	x	x						240
83	14			x							120
84	14			x							240
85	14			x							240
86	14	x	x	x							120
87	14	x		x							120
88	14	x		x							240
89	14	x									240
90	14	x		x							240
91	14	x		x							240
92	14	x									240
93	14	x		x							240
94	14	x		x							240
95	14	x		x							240
96	14			x						x	240
97	14			x							240
98	14			x							240
99	14			x							240
100	14		x	x							240
101	14										240
102	14			x							240
103	14			x							240
104	14			x							240
105	14			x							240

Dom Index	Anz Elem	Max Weite	Min Vielf	Voll bes	Tiling Typ	Dom Prod	SP/SD	SC	Symm	Zus	Anz Isom
106	14	x		x	x						240
107	14		x	x							120
108	14	x		x							240
109	14			x							240
110	14			x							240
111	14			x							240
112	14	x	x	x							240
113	14	x		x							120
114	14			x							120
115	14	x									240
116	14	x									240
117	14		x								240
118	14										240
119	14			x						x	240
120	14	x		x		x				x	240
121	14			x							240
122	14			x						x	240
123	14	x		x							240
124	14			x							240
125	14	x		x							240
126	14		x	x							240
127	14	x									240
128	14										240
129	14	x		x							240
130	14	x		x							240
131	14			x							240
132	14		x	x							120
133	14	x									240
134	14	x									240
135	14	x									240
136	14	x									240
137	14		x								240
138	14										240

Dom Index	Anz Elem	Max Weite	Min Vielf	Voll bes	Tiling Typ	Dom Prod	SP/SD	SC	Symm	Zus	Anz Isom
139	14										240
140	14	x									240
141	14	x									240
142	14	x									240
143	14										120
144	14	x		x							240
145	14			x							240
146	14			x							240
147	14	x		x							240
148	14	x		x							120
149	14	x		x							240
150	14		x	x							240
151	14	x		x							240
152	14	x		x							240
153	14	x		x							120
154	14			x							120
155	14			x							120
156	14	x		x							240
157	14			x							120
158	14	x		x							240
159	14	x									240
160	14	x		x							240
161	14			x							240
162	14		x	x							120
163	14			x						x	240
164	14	x		x		x				x	120
165	14			x						x	240
166	14			x						x	120
167	14		x	x							120
168	14			x							120
169	14			x							120
170	14			x						x	240
171	14	x		x							240

Dom Index	Anz Elem	Max Weite	Min Vielf	Voll bes	Tiling Typ	Dom Prod	SP/SD	SC	Symm	Zus	Anz Isom
172	14	x		x							240
173	14			x							240
174	14			x							240
175	14			x							240
176	14			x							240
177	14	x		x							240
178	14		x	x							120
179	14			x							240
180	14	x	x	x							120
181	14			x							240
182	14			x							240
183	14			x							240
184	14			x							240
185	14			x							240
186	14			x							240
187	14		x	x							240
188	14			x							240
189	14			x							120
190	14			x							240
191	14			x							240
192	14			x							120
193	14			x							240
194	14			x						x	120
195	14			x						x	120
196	14	x	x	x							240
197	14			x							120
198	14	x	x	x							240
199	14	x	x	x							240
200	14	x	x	x							240
201	14			x							240
202	14			x							240
203	14			x							120
204	14			x							120

C Maximale Condorcet-Domain-Strukturen

Dom Index	Anz Elem	Max Weite	Min Vielf	Voll bes	Tiling Typ	Dom Prod	SP/SD	SC	Symm	Zus	Anz Isom
205	14	x		x							240
206	14	x		x							120
207	14	x		x							120
208	14	x	x	x							120
209	14	x		x							120
210	14	x	x	x							120
211	15	x		x							240
212	15		x	x							240
213	15			x							240
214	15			x						x	240
215	15			x							240
216	15	x		x							240
217	15			x							240
218	15			x						x	240
219	15			x						x	240
220	15			x							240
221	15	x		x							240
222	15	x		x							240
223	15	x		x							240
224	15			x							240
225	15			x							240
226	15	x		x							240
227	15	x		x							240
228	15			x							240
229	15			x							240
230	15			x							240
231	15			x							240
232	15			x							240
233	15			x							240
234	15			x							240
235	15	x		x							240
236	15			x							240
237	15			x						x	240

Dom Index	Anz Elem	Max Weite	Min Vielf	Voll bes	Tiling Typ	Dom Prod	SP/SD	SC	Symm	Zus	Anz Isom
238	15			x						x	240
239	15			x							240
240	15			x							240
241	15			x							240
242	15			x							240
243	15			x						x	240
244	15	x		x							240
245	15	x	x	x							240
246	15			x							240
247	15			x						x	240
248	15			x							240
249	15			x							240
250	15		x	x							240
251	15			x							240
252	15			x							240
253	15			x							240
254	15			x							240
255	15			x							240
256	15			x							240
257	15	x		x							240
258	15			x							240
259	15	x									240
260	15	x		x							240
261	15			x						x	240
262	15	x		x		x				x	240
263	15			x						x	240
264	15	x		x							240
265	15			x							240
266	15	x		x							240
267	15			x							240
268	15			x							240
269	15	x		x							240
270	15			x							240

C Maximale Condorcet-Domain-Strukturen

Dom Index	Anz Elem	Max Weite	Min Vielf	Voll bes	Tiling Typ	Dom Prod	SP/SD	SC	Symm	Zus	Anz Isom
271	15	x		x							240
272	15	x		x		x				x	240
273	15	x									240
274	15	x		x							240
275	15	x		x							240
276	15	x	x	x							240
277	15		x	x							240
278	15			x							240
279	15			x							240
280	15			x							240
281	15			x						x	240
282	15			x							240
283	15			x							240
284	15			x							240
285	15			x						x	240
286	15			x							240
287	15			x							240
288	15			x						x	240
289	15			x							240
290	15			x							240
291	15			x						x	240
292	15	x		x							240
293	15			x							240
294	15			x							240
295	15			x							240
296	15	x	x	x							240
297	15			x							240
298	15			x							240
299	15	x		x							240
300	15			x							240
301	15	x		x							240
302	15			x							240
303	15			x						x	240

Dom Index	Anz Elem	Max Weite	Min Vielf	Voll bes	Tiling Typ	Dom Prod	SP/SD	SC	Symm	Zus	Anz Isom
304	15			x						x	240
305	15	x		x							240
306	15			x							240
307	15			x							240
308	15			x							240
309	15			x						x	240
310	15			x						x	240
311	15			x							240
312	15			x							240
313	15			x							240
314	15			x						x	240
315	15			x						x	240
316	15	x		x							240
317	16			x							240
318	16			x							240
319	16		x	x							240
320	16			x							240
321	16			x							240
322	16			x							120
323	16			x							240
324	16			x							240
325	16			x							240
326	16		x	x							240
327	16		x	x							120
328	16			x							240
329	16			x							120
330	16			x							240
331	16			x							240
332	16										60
333	16	x		x							240
334	16	x		x							240
335	16			x							240
336	16			x							240

C Maximale Condorcet-Domain-Strukturen

Dom Index	Anz Elem	Max Weite	Min Vielf	Voll bes	Tiling Typ	Dom Prod	SP/SD	SC	Symm	Zus	Anz Isom
337	16			x							120
338	16	x		x							240
339	16			x							240
340	16			x							240
341	16			x							240
342	16			x							240
343	16		x	x							120
344	16			x							240
345	16			x							240
346	16			x							60
347	16			x							240
348	16			x							60
349	16			x							240
350	16			x							120
351	16			x							240
352	16			x							240
353	16			x							120
354	16			x							240
355	16			x							120
356	16			x							120
357	16		x	x							240
358	16		x	x							120
359	16			x							120
360	16			x							240
361	16			x							240
362	16	x		x							240
363	16			x							120
364	16	x		x							240
365	16			x							240
366	16			x							240
367	16			x							240
368	16			x							120
369	16	x		x							240

C.1 Maximale Condorcet-Domain-Strukturen für den strikten Präferenzraum

Dom Index	Anz Elem	Max Weite	Min Vielf	Voll bes	Tiling Typ	Dom Prod	SP/SD	SC	Symm	Zus	Anz Isom
370	16			x						x	240
371	16			x							240
372	16			x							240
373	16			x						x	240
374	16			x							240
375	16			x	x						240
376	16			x							240
377	16			x							120
378	16			x	x						30
379	16	x		x	x						240
380	16	x	x	x							120
381	16	x		x							120
382	16	x		x							240
383	16	x	x	x	x						240
384	16	x	xx	x	x				x		60
385	16	x	x	x	x						60
386	16			x							120
387	16			x							240
388	16			x							120
389	16		x	x							120
390	16			x							240
391	16			x							120
392	16			x							120
393	16			x							240
394	16			x							240
395	16			x							240
396	16			x							120
397	16	x		x							240
398	16	x	x	x							120
399	16	x		x							60
400	16		x	x						x	120
401	16		x	x							240
402	16			x							240

C Maximale Condorcet-Domain-Strukturen

Dom Index	Anz Elem	Max Weite	Min Vielf	Voll bes	Tiling Typ	Dom Prod	SP/SD	SC	Symm	Zus	Anz Isom
403	16			x							240
404	16			x						x	240
405	16			x						x	240
406	16		x	x							240
407	16			x	x						120
408	16		x	x	x						120
409	16		x	x							240
410	16			x							120
411	16			x							240
412	16	x	x	x							240
413	16	x		x							240
414	16	x		x	x						240
415	16			x							240
416	16			x							120
417	16	x		x							240
418	16			x							120
419	16			x							240
420	16			x							120
421	16	x	x	x							120
422	16	x		x							120
423	16		x	x	x						120
424	16	x	x	x	x						120
425	16	x		x							120
426	16	x		x							240
427	16	x		x							120
428	16	x	x	x							120
429	16			x							240
430	16		x	x							120
431	16			x							240
432	16	x		x							240
433	16			x							120
434	16	x	x	x							60
435	16		x	x							120

Dom Index	Anz Elem	Max Weite	Min Vielf	Voll bes	Tiling Typ	Dom Prod	SP/SD	SC	Symm	Zus	Anz Isom
436	16			x							240
437	16			x							120
438	16	x	x	x	x						120
439	16			x							120
440	16			x							240
441	16			x							120
442	16		x	x							60
443	16			x							240
444	16		x	x							240
445	16		x	x							60
446	16		x	x							120
447	16	x		x							240
448	16			x							240
449	16		x	x						x	240
450	16	x		x		x				x	240
451	16	x		x							240
452	16	x		x							240
453	16	x		x							240
454	16			x							240
455	16		x	x							240
456	16			x							240
457	16	x		x							120
458	16	x		x							240
459	16	x		x							240
460	16	x		x							240
461	16	x		x		x				x	120
462	16	x		x		x				x	240
463	16			x						x	240
464	16	x		x							240
465	16	x	x	x							240
466	16	x	x	x	x						120
467	16	x	x	x							240
468	16	x	x	x							120

C Maximale Condorcet-Domain-Strukturen

Dom Index	Anz Elem	Max Weite	Min Vielf	Voll bes	Tiling Typ	Dom Prod	SP/SD	SC	Symm	Zus	Anz Isom
469	16	x	x	x							240
470	16			x							240
471	16	x		x							240
472	16			x							240
473	16			x						x	120
474	16			x							240
475	16			x							60
476	16			x						x	240
477	16			x						x	240
478	16			x							120
479	16			x							240
480	16			x							240
481	16			x						x	240
482	16			x						x	240
483	16			x						x	120
484	16			x							120
485	16	x	x	x							240
486	16			x						x	240
487	16		x	x						x	120
488	16			x							240
489	16		x	x							240
490	16		x	x						x	240
491	16		x	x							240
492	16		x	x							120
493	16			x							240
494	16			x							120
495	16	x		x							120
496	16	x	x	x							60
497	16	x	x	x							120
498	16			x							120
499	16			x							240
500	16			x							120
501	16			x							240

Dom Index	Anz Elem	Max Weite	Min Vielf	Voll bes	Tiling Typ	Dom Prod	SP/SD	SC	Symm	Zus	Anz Isom
502	16			x							60
503	16			x							120
504	16			x							240
505	16			x							120
506	16			x							240
507	16			x							240
508	16			x							120
509	16	x		x							240
510	16			x							120
511	16			x							240
512	16			x							240
513	16			x							240
514	16			x							120
515	16			x							240
516	16			x							120
517	16			x							240
518	16	x		x							120
519	16	x		x							240
520	16	x		x							240
521	16			x							240
522	16	x		x							240
523	16			x							240
524	16			x							120
525	16			x							240
526	16			x							240
527	16			x							240
528	16			x							240
529	16			x							120
530	16			x							240
531	16		x	x							240
532	16			x							240
533	16			x							240
534	16		x	x							120

Dom Index	Anz Elem	Max Weite	Min Vielf	Voll bes	Tiling Typ	Dom Prod	SP/SD	SC	Symm	Zus	Anz Isom
535	16			x							120
536	16		x	x							60
537	16			x							240
538	16		x	x							120
539	16			x							240
540	16			x							240
541	16	x		x							120
542	16			x							120
543	16		x	x							60
544	16		x	x							240
545	16		x	x							120
546	16		x	x						x	120
547	16			x						x	240
548	16		x	x							120
549	16			x							240
550	16			x							240
551	16			x							240
552	16			x							120
553	16	x		x							240
554	16		x	x							120
555	16			x						x	120
556	16			x							60
557	16			x							240
558	16			x							120
559	16			x							120
560	16			x							240
561	16			x							120
562	16			x							240
563	16			x							240
564	16			x							120
565	16			x							240
566	16			x							240
567	16			x						x	120

Dom Index	Anz Elem	Max Weite	Min Vielf	Voll bes	Tiling Typ	Dom Prod	SP/SD	SC	Symm	Zus	Anz Isom
568	16			x						x	240
569	16	x	x	x		x	x			x	120
570	16			x							240
571	16			x							120
572	16			x							240
573	16			x							120
574	16			x							120
575	16			x							60
576	16			x							120
577	16			x							60
578	16			x							60
579	16			x							240
580	16			x							240
581	16			x							120
582	16		x	x							120
583	16			x							240
584	16	x	x	x							120
585	16			x							120
586	16	x	x	x							120
587	16		x	x							120
588	16	x		x							120
589	16			x						x	60
590	16			x						x	240
591	16			x						x	120
592	16			x						x	60
593	16		x	x							60
594	16			x							120
595	16		x	x							30
596	16	x		x							240
597	16	x	x	x							120
598	16		x	x							120
599	16			x							60
600	16	x		x							120

C Maximale Condorcet-Domain-Strukturen

Dom Index	Anz Elem	Max Weite	Min Vielf	Voll bes	Tiling Typ	Dom Prod	SP/SD	SC	Symm	Zus	Anz Isom
601	16	x		x							120
602	16	x	x	x							60
603	16	x	x	x							30
604	16	x	x	x							60
605	16	x	xx	x					x		30
606	16	x	xx	x	x				x		15
607	17			x							240
608	17			x							240
609	17			x							240
610	17			x							240
611	17			x							240
612	17			x							240
613	17			x							240
614	17			x							240
615	17			x							240
616	17			x							240
617	17			x							240
618	17			x							240
619	17	x		x							240
620	17	x		x							240
621	17	x		x							240
622	17			x							240
623	17			x							240
624	17	x		x							240
625	17	x		x							240
626	17			x							240
627	17	x		x							240
628	17	x		x							240
629	17			x							240
630	17	x		x		x				x	240
631	17			x						x	240
632	17			x						x	240
633	17	x		x							240

Dom Index	Anz Elem	Max Weite	Min Vielf	Voll bes	Tiling Typ	Dom Prod	SP/SD	SC	Symm	Zus	Anz Isom
634	17			x							240
635	17			x							240
636	17	x		x							240
637	17			x							240
638	17	x		x		x				x	240
639	17			x						x	240
640	17			x							240
641	17	x		x							240
642	17			x							240
643	17			x						x	240
644	17			x							240
645	17			x							240
646	17	x		x							240
647	17			x							240
648	17	x		x							240
649	17	x		x							240
650	17			x							240
651	17	x		x							240
652	17			x							240
653	17			x							240
654	17			x							240
655	17			x						x	240
656	17	x		x							240
657	17			x						x	240
658	17			x						x	240
659	17			x						x	240
660	18			x						x	240
661	18	x		x							240
662	18	x		x							240
663	18			x							240
664	18	x		x							240
665	18			x							120
666	18			x							240

Dom Index	Anz Elem	Max Weite	Min Vielf	Voll bes	Tiling Typ	Dom Prod	SP/SD	SC	Symm	Zus	Anz Isom
667	18			x							120
668	18			x							240
669	18			x							240
670	18			x							120
671	18	x		x	x						120
672	18	x		x							240
673	18			x							120
674	18	x		x							120
675	18	x		x							240
676	18	x		x							120
677	18	x		x							240
678	18	x		x							120
679	18			x							120
680	18			x						x	120
681	18			x						x	120
682	19			x						x	240
683	19			x						x	240
684	19			x						x	240
685	19	x		x							240
686	19	x		x							240
687	19	x		x		x				x	240
688	20	x		x		x				x	120

Tabelle C.1: Zusammenfassung ausgewählter maximaler Condorcet-Domain-Strukturen für  $m = 5$  im strikten Präferenzraum

Dom Index	Repräsentatives Domain
1	abcde, caebd, dbeac, edcba
2	abcde, becad, daceb, edcba
3	abcde, bdace, cadbe, cadeb, caedb, ceadb, dcbae, ecadb
4	abcde, abced, abecd, bdace, cadbe, cadeb, dcbae, dcbea
5	abcde, abced, bdace, bdaec, cadbe, cadeb, dcbae, dcbea
6	abcde, bdace, bdaec, bdeac, bedac, cadbe, cadeb, dcbae
7	abcde, bdace, bdaec, bdeac, cadbe, cadeb, caedb, dcbae

Dom Index	Repräsentatives Domain
8	abcde, abced, bdeac, bedac, cadeb, caedb, decba, edcba
9	abcde, bdace, cadbe, dcbae, eabcd, ebdac, ecadb, edcba
10	abcde, abced, abdce, abecd, acebd, aecbd, eacbd, ecabd, ecbad, ecdab, ecdba
11	abcde, abced, abecd, abedc, acebd, aecbd, eacbd, ecabd, ecbad, ecdab, ecdba
12	abcde, abced, abecd, abedc, acebd, aecbd, eacbd, ecabd, ecbad, ecbda, ecdba
13	abcde, abced, abdce, abecd, acebd, adbce, aecbd, eacbd, ecabd, ecbad, ecbda
14	abcde, abced, abdce, abecd, acebd, aecbd, eacbd, ecabd, ecbad, ecbda, ecdba
15	abcde, abced, abecd, acebd, aecbd, eacbd, ecabd, ecbad, edacb, edcab, edcba
16	abcde, abced, abecd, acebd, aecbd, eacbd, ecabd, ecbad, ecbda, ecdab, edcba
17	abcde, abced, abdce, adbce, dabce, dbace, dbcae, dbcea, dbeca, debca, decba
18	abcde, abced, abdce, abecd, acebd, adbce, aecbd, dabce, dbace, dbcae, dbcea
19	abcde, bacde, cabde, cadbe, cadeb, caedb, cbade, cdeab, cedab, decab, edcab
20	abcde, bacde, cabde, cadbe, cadeb, caedb, cbade, cdeab, cedab, dceab, decab
21	abcde, abced, abdce, abecd, aebcd, eabcd, ebacd, ecabd, ecadb, ecbad, ecdab
22	abcde, abced, abdce, abecd, aebcd, eabcd, ebacd, ecabd, ecbad, ecdab, ecdba
23	abcde, abced, abecd, aebcd, eabcd, ebacd, ecabd, ecadb, ecbad, ecdab, edcab
24	abcde, abced, abdce, abecd, aebcd, aecbd, eabcd, eacbd, ecabd, ecbad, ecdab, ecdba
25	abcde, abced, abecd, acebd, aecbd, eacbd, ecabd, ecbad, ecdab, ecdba, edcab, edcba
26	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acebd, aecbd, eacbd, ecabd, ecbad, ecdab, ecdba
27	abcde, abced, abdce, abecd, adbce, aebcd, aecbd, dabce, eabcd, eacbd, ebcad, ecbad
28	abcde, abced, abdce, abecd, adbce, aebcd, aecbd, eabcd, eacbd, ecabd, ecbad, ecbda
29	abcde, abced, abdce, abecd, adbce, aebcd, aecbd, dabce, eabcd, eacbd, ecabd, ecbad
30	abcde, abced, abdce, abecd, aebcd, aecbd, eabcd, eacbd, ecabd, ecbad, ecbda, ecdba
31	abcde, abced, acbde, acbed, acebd, aecbd, eacbd, ecabd, ecbad, edacb, edcab, edcba
32	abcde, abced, acbde, acbed, acebd, aecbd, eacbd, ecabd, ecbad, ecbda, ecdab, edcba
33	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, adcbe, aecbd, eacbd, ecabd, ecbad, ecbda
34	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, adcbe, aecbd, dacbe, eacbd, ecabd, ecbad
35	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acdbe, acebd, aecbd, eacbd, ecabd, ecbad, ecbda
36	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acebd, aecbd, eacbd, ecabd, ecbad, ecbda, ecdba
37	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acdbe, aebcd, aecbd, eabcd, eacbd, ebacd, ecabd
38	abcde, abdce, acbde, bacde, badce, dabce, dbace, dbcae, dbcea, dbeca, debca, edbca
39	abcde, abdce, bacde, badce, dabce, dacbe, dbace, dbcae, dbcea, dbeca, debca, edbca
40	abcde, acbde, bacde, bcade, dabce, dacbe, dbace, dbcae, dbcea, dbeca, debca, edbca
41	abcde, acbde, bacde, dabce, dabec, dacbe, dbace, dbaec, dbcea, dbeca, debca, edbca
42	abcde, bacde, cabde, cadbe, cadeb, cbade, cdabe, cdaeb, cdeab, cedab, decab, edcab
43	abcde, abdce, abecd, abedc, acdeb, adceb, aecdb, aedcb, cadeb, cdaeb, cdeab, cdeba
44	abcde, abced, abecd, aebcd, eabcd, ebacd, ecabd, ecbad, ecdab, ecdba, edcab, edcba
45	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, aebcd, aecbd, eabcd, eacbd, ecabd, ecbad, ecdab, ecdba
46	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, eabcd, eacbd, ecabd, ecbad, ecdab, ecdba, edcab, edcba
47	abcde, abced, acbde, acbed, acebd, aecbd, eacbd, ecabd, ecbad, ecdab, ecdba, edcab, edcba
48	abcde, abdce, acbde, aebcd, aebdc, aecbd, eabcd, eabdc, eacbd, ecabd, ecbad, ecdab, ecdba
49	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, eabcd, eacbd, ebcad, ecbad, edabc, edacb, edbca, edcba
50	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, eabcd, eacbd, ebcad, ebcda, ecbad, ecbda, edbca, edcba
51	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, eabcd, eacbd, ebcad, ebcda, ebdca, ecbad, ecbda, edbca
52	abcde, abced, abdce, abecd, adbce, aebcd, aecbd, eabcd, eacbd, ebcad, ebcda, ecbad, ecbda

Dom Index	Repräsentatives Domain
53	abcde, abced, abdce, abecd, aebcd, aecbd, eabcd, eacbd, ebcad, ebcda, ecbad, ecbda, ecdba
54	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, eabcd, eacbd, ecabd, ecbad, edabc, edacb, edcab, edcba
55	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, eabcd, eacbd, ebcad, ebcda, ebdca, ecbad, ecbda, ecdba
56	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, eabcd, eacbd, ebcad, ebcda, ecbad, ecbda, ecdba, edcba
57	abcde, abdce, acbde, aebcd, aebdc, aecbd, eabcd, eabdc, eacbd, ecabd, ecbad, ecbda, ecdba
58	abcde, abced, abecd, bacde, baced, baecd, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ebacd, ecadb, edcab
59	abcde, abced, acbde, acbed, bacde, baced, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ebacd, ecadb, edcab
60	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, eabcd, eacbd, ebacd, ebcad, ebdac, ebdca, edbac, edbca
61	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, eabcd, eacbd, ebacd, ebcad, edabc, edacb, edbac, edbca
62	abcde, abced, abecd, bacde, baced, baecd, eabcd, eacbd, ebacd, ebcad, ebcda, ebdca, edbca
63	abcde, abced, acbde, acbed, cabde, cabed, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ecabd, edabc, edbac
64	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acdbe, acebd, aecbd, bcdae, bdcae, cbdae, cdbae, eabcd
65	abcde, acbde, acdbe, acebd, acedb, adcbe, aecbd, aecdb, bcade, cbade, dacbe, eacbd, eacdb
66	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, adcbe, aecbd, bacde, baced, cdabe, dcabe, eabcd
67	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, adcbe, aecbd, bacde, baced, dacbe, dcabe, eabcd
68	abcde, abced, abecd, bacde, baced, baecd, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ebacd, edacb, edcab
69	abcde, abced, abecd, bacde, baced, baecd, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ebacd, ebcad, ebcda
70	abcde, abced, abecd, bacde, baced, baecd, eabcd, ebacd, ecabd, ecadb, ecbad, ecadb, edcab
71	abcde, abced, abdce, abecd, aebcd, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecadb
72	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecadb, edcab
73	abcde, abced, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, eabcd, eabdc, eacbd, ecabd, ecbad, ecadb, ecdba
74	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aebdc, aecbd, eabcd, eabdc, eacbd, ecabd, ecbad, ecadb, ecdba
75	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, eabcd, eacbd, ecabd, ecbad, ecadb, ecdba, edcab, edcba
76	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acebd, cabde, cabed, caebd, eacbd, ecabd, ecbad, ecadb, ecdba
77	abcde, abced, abdce, abecd, acebd, acedb, aecbd, aecdb, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecadb
78	abcde, abced, abecd, abedc, acebd, acedb, aecbd, aecdb, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecadb
79	abcde, abced, abecd, acebd, acedb, aecbd, aecdb, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecadb, edcab
80	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, eabcd, eabdc, eacbd, ecabd, ecbad, ecadb, ecdba
81	abcde, acbde, acdbe, aebcd, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecadb, edcab
82	abcde, abdce, acbde, cabde, cbade, cdabe, cdbae, eabcd, eabdc, eacbd, ecabd, ecbad, ecadb, ecdba
83	abcde, acbde, acdbe, acebd, acedb, adcbe, aecbd, aecdb, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecadb
84	abcde, abdce, acbde, acdbe, acebd, acedb, aecbd, aecdb, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecadb
85	abcde, acbde, acdbe, acebd, acedb, aecbd, aecdb, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecadb, edcab
86	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, eabcd, eacbd, ebcad, ecbad, edabc, edacb, edbca, edcba
87	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, eabcd, eacbd, ebcad, ebcda, ecbad, ecbda, edbca, edcba
88	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, eabcd, eacbd, ebcad, ebcda, ebdca, ecbad, ecbda, edbca
89	abcde, abced, acbde, acbed, acebd, cabde, cabed, caebd, eacbd, ecabd, ecbad, edacb, edcab, edcba
90	abcde, abced, acbde, acbed, acebd, cabde, cabed, caebd, eacbd, ecabd, ecbad, ecbda, ecdba, edcba
91	abcde, abced, acbde, acbed, acebd, adbce, adcbe, cabde, cabed, caebd, eacbd, ecabd, ecbad, ecbda
92	abcde, abced, acbde, acbed, acebd, cabde, cabed, caebd, dabce, dacbe, dcabe, eacbd, ecabd, ecbad
93	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acebd, adbce, cabde, cabed, caebd, eacbd, ecabd, ecbad, ecbda
94	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acebd, adbce, cabde, cabed, caebd, dabce, eacbd, ecabd, ecbad
95	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acebd, cabde, cabed, caebd, eacbd, ecabd, ecbad, ecbda, ecdba
96	abcde, abced, abdce, abecd, aebcd, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecbda
97	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, edacb, edcab

Dom Index	Repräsentatives Domain
98	abcde, abced, abdce, abecd, acebd, acedb, aecbd, aecdb, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecdba
99	abcde, abced, abecd, acebd, acedb, aecbd, aecdb, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, edacb, edcab
100	abcde, abced, abecd, abedc, acebd, acedb, aecbd, aecdb, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecdba
101	abcde, acbde, acdbe, aebcd, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, edacb, edcab
102	abcde, acbde, acdbe, acebd, acedb, aecbd, aecdb, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, edacb, edcab
103	abcde, acbde, acdbe, acebd, acedb, adcbe, aecbd, aecdb, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecdba
104	abcde, acbde, acdbe, acebd, acedb, adcbe, aecbd, aecdb, dacbe, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad
105	abcde, abdce, acbde, acdbe, acebd, acedb, aecbd, aecdb, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecdba
106	abcde, abdce, acbde, cabde, cbade, cbdae, cdbae, eabcd, eabdc, eacbd, ecabd, ecbad, ecdba, ecdba
107	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, aedbc, aedcb, eabcd, eacbd, eadbc, eadcb, ecabd, ecbad, ecdba
108	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, eabcd, eabdc, eacbd, ecabd, ecbad, ecdba, ecdba
109	abcde, abced, abdce, abecd, aebcd, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ebcad, ebcda, ecbad, ecdba
110	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, aecdb, aedcb, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ebcad, ecbad, edacb
111	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ebcad, ebcda, ebdca, ecbad, ecdba
112	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, eabcd, eacbd, ecabd, ecbad, edabc, edacb, edcab, edcba
113	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, aebcd, aecbd, eabcd, eacbd, ebcad, ebcda, ecbad, ecdba, ecdba
114	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, eabcd, eacbd, ebcad, ebcda, ebdca, ecbad, ecdba, ecdba
115	abcde, abdce, acbde, aebcd, aebdc, aecbd, eabcd, eabdc, eacbd, ebcad, ebcda, ecbad, ecdba, ecdba
116	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, cabde, cabed, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab, ecdba
117	abcde, abced, acbde, acbed, cabde, cabed, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab, ecdba
118	abcde, abced, acbde, acbed, cabde, cabed, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ecabd, ecadb, ecdab, ecdba
119	abcde, abced, abdce, abecd, aebcd, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ebacd, ecabd, ecadb, ecdab
120	abcde, abced, abdce, abecd, aebcd, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab, ecdba
121	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, aecdb, aedcb, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ebacd, ecdab, edcab
122	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ebacd, ecabd, ecadb, ecdab, edcab
123	abcde, abced, abecd, bacde, baced, baecd, eabcd, eacbd, eacdb, ebacd, ecabd, ecadb, ecdab, edcab
124	abcde, abced, abecd, bacde, baced, baecd, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ebacd, ecabd, ecadb, ecdab
125	abcde, abced, abdce, abecd, acebd, acedb, aecbd, aecdb, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab, ecdba
126	abcde, abced, abecd, abedc, acebd, acedb, aecbd, aecdb, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab, ecdba
127	abcde, acbde, acdbe, aebcd, aecbd, aecdb, bacde, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab, edcab
128	abcde, acbde, acdbe, aebcd, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ebacd, ecabd, ecadb, ecdab, edcab
129	abcde, acbde, acdbe, acebd, acedb, aecbd, aecdb, bacde, eabcd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab, edcab
130	abcde, abdce, acbde, acdbe, acebd, acedb, aecbd, aecdb, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab, ecdba
131	abcde, abced, abecd, bacde, baced, baecd, eabcd, eacbd, ebacd, ebcad, ebdac, ebdca, edbac, edbca
132	abcde, abced, abecd, bacde, baced, baecd, eabcd, eacbd, ebacd, ebcad, edabc, edacb, edbac, edbca
133	abcde, abced, acbde, acbed, bacde, baced, eabcd, eabdc, eacbd, ebacd, ebadc, edabc, edbac, edbca
134	abcde, abced, acbde, acbed, bacde, baced, eabcd, eabdc, eacbd, ebacd, ebadc, ebcda, ebdca, edbca
135	abcde, abdce, acbde, aebcd, aebdc, aecbd, eabcd, eabdc, eacbd, ebacd, ebadc, edabc, edbac, edbca
136	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, cabde, cabed, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbda, ecdba
137	abcde, abced, acbde, acbed, cabde, cabed, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbda, ecdba
138	abcde, abced, acbde, acbed, cabde, cabed, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ecabd, ecadb, ecbda, ecdba
139	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acdbe, cabde, cabed, cadbe, cbdae, cdbae, eabcd, eacbd, ecabd
140	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, cabde, cabed, cadbe, cbdae, cdbae, eabcd, eabdc, eacbd, ecabd
141	abcde, abced, acbde, acbed, cabde, cabed, eabcd, eacbd, eadbc, eadcb, ecabd, edabc, edacb, edbac
142	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, cabde, cabed, eabcd, eacbd, ebacd, edabc, edacb, edbac

Dom Index	Repräsentatives Domain
143	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aecdb, cabde, cabed, eabcd, eacbd, eacdb, ebacd
144	abcde, abced, abecd, bacde, baced, baecd, eabcd, eacbd, eacdb, ebacd, ecabd, ecadb, edacb, edcab
145	abcde, abced, abecd, bacde, baced, baecd, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ebacd, ecabd, ecadb, edacb
146	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ebacd, ecabd, ecadb, edacb, edcab
147	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, edacb, edcab, edcba
148	abcde, abced, abecd, acebd, acedb, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, edacb, edcab, edcba
149	abcde, abced, abecd, acebd, acedb, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbda, ecdba, edcba
150	abcde, abced, abecd, abedc, acebd, acedb, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbda, ecdba
151	abcde, abced, abdce, abecd, acebd, acedb, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbda, ecdba
152	abcde, acbde, acdbe, acebd, acedb, aecbd, aecdb, bacde, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, edacb, edcab
153	abcde, acbde, acdbe, acebd, acedb, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbda, ecdba, edcba
154	abcde, acbde, acdbe, acebd, acedb, adcbe, aecbd, aecdb, bacde, dacbe, eabcd, eacbd, ecabd, ecadb
155	abcde, acbde, acdbe, acebd, acedb, adcbe, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbda, ecdba
156	abcde, abdce, acbde, acdbe, acebd, acedb, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbda, ecdba
157	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acdbe, aebcd, aecbd, bcdae, bdcae, cbdae, cdbae, eabcd, eacbd
158	abcde, abdce, acbde, acdbe, acebd, acedb, aecbd, aecdb, bcdae, bdcae, cbdae, cdbae, eabcd, eacbd
159	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acebd, acedb, aecbd, aecdb, bcdae, bdcae, cbdae, eabcd, eacbd
160	abcde, acbde, acdbe, acebd, acedb, aecbd, aecdb, bcade, bcdae, bdcae, cbade, cbdae, eabcd, eacbd
161	abcde, abdce, acbde, acdbe, acebd, acedb, aecbd, aecdb, bcade, bcdae, cbade, cbdae, eabcd, eacbd
162	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, adcbe, aecbd, bcade, bcaed, cbade, cbaed, dacbe, eabcd
163	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, aecbd, bacde, baced, bcade, bcaed, bcdae, bdcae, eabcd
164	abcde, abced, acbde, acbed, acebd, aecbd, bacde, baced, bcade, bcaed, bcdae, bdcae, dbcae, eabcd
165	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, adcbe, aecbd, bacde, baced, bcade, bcaed, bcdae, eabcd
166	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, adcbe, aecbd, bacde, baced, bcade, bcaed, dacbe, eabcd
167	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, dabce, dacbe, daceb, dbace, dbcae, dbcea
168	abcde, abdce, abdec, abedc, adbce, adbec, dabce, dabec, dbace, dbaec, dbcea, dbeca, dceba, decba
169	abcde, abdce, abdec, abedc, acbde, adbce, adbec, aebdc, dabce, dabec, dbace, dbaec, dbcea, dbeca
170	abcde, abdce, abdec, abedc, acbde, adbce, adbec, aebdc, dabce, dabec, dbace, dbaec, dbcae, dbcea
171	abcde, abced, abdce, abdec, adbce, adbec, dabce, dabec, dbace, dbaec, dbcea, dbeca, dceba, decba
172	abcde, abdce, abdec, adbce, adbec, dabce, dabec, dbace, dbaec, dbcea, dbeca, dceba, decba, edcba
173	abcde, abdce, abdec, acbde, adbce, adbec, aebdc, aedbc, dabce, dabec, dbace, dbaec, dbcea, dbeca
174	abcde, abdce, abdec, adbce, adbec, aebdc, aedbc, aedcb, dabce, dabec, dbace, dbaec, dbcea, dbeca
175	abcde, abdce, abdec, acbde, adbce, adbec, aebdc, aedbc, dabce, dabec, dbace, dbaec, dbcae, dbcea
176	abcde, abdce, abdec, adbce, adbec, aebdc, aedbc, aedcb, dabce, dabec, dbace, dbaec, dbcae, dbcea
177	abcde, abced, bacde, baced, cabde, cabed, cadeb, caedb, cbade, cbaed, cdeab, cedab, ecadb, edcab
178	abcde, abced, bacde, baced, cabde, cabed, cadeb, caedb, cbade, cbaed, cdeab, cedab, dceab, ecadb
179	abcde, acbde, acdbe, acdeb, adcbe, adceb, adceb, cabde, cadbe, cadeb, cbade, cbdae, cbead, cbeda
180	abcde, abced, bacde, baced, cabde, cabed, cadeb, caedb, cbade, cbaed, cdeab, cedab, decab, edcab
181	abcde, abdce, acbde, acdbe, acdeb, acedb, cabde, cadbe, cadeb, caedb, cbdae, cdbae, ceadb, ecadb
182	abcde, acbde, acdbe, acdeb, acedb, cabde, cadbe, cadeb, caedb, cbdae, cdbae, ceadb, dcbae, ecadb
183	abcde, abced, abdce, abecd, acdbe, acdeb, adcbe, adceb, cadbe, cadeb, cdabe, cdaeb, cdbae, cdeab
184	abcde, abced, abdce, abecd, acdbe, acdeb, adcbe, adceb, cadbe, cadeb, cdabe, cdaeb, cdbae, cdbea
185	abcde, abced, abdce, acdbe, acdeb, adcbe, adceb, adceb, cadbe, cadeb, cdabe, cdaeb, cdbae, cdeab
186	abcde, abdce, abecd, abedc, acdbe, acdeb, adcbe, adceb, cadbe, cadeb, cdabe, cdaeb, cdbae, cdeab
187	abcde, abdce, abecd, abedc, acdbe, acdeb, adcbe, adceb, cadbe, cadeb, cdabe, cdaeb, cdbae, cdbea

Dom Index	Repräsentatives Domain
188	abcde, abdce, abecd, abedc, acbde, acdbe, acdeb, cabde, cadbe, cadeb, cdabe, cdaeb, cdbae, cdeab
189	abcde, acbde, acdbe, acdeb, acedb, adecb, aedcb, cabde, cadbe, cadeb, caedb, cbdae, cdbae, ceadb
190	abcde, abdce, acbde, acdbe, acdeb, acedb, aecdb, cabde, cadbe, cadeb, caedb, cbdae, cdbae, ceadb
191	abcde, acbde, acdbe, acdeb, acedb, aecdb, aedcb, cabde, cadbe, cadeb, caedb, cbdae, cdbae, ceadb
192	abcde, abdce, acbde, acdeb, adcbe, adceb, aecdb, aedcb, cabde, cadbe, cadeb, cdabe, cdaeb, cdbae, cdeab
193	abcde, abdce, acbde, acdeb, adcbe, adceb, aecdb, aedcb, cabde, cadeb, cdabe, cdaeb, cdbae, cdbea
194	abcde, abdce, acbde, acdbe, acdeb, acedb, aecdb, cabde, cadbe, cadeb, caedb, cbade, cbdae, ceadb
195	abcde, acbde, acdbe, acdeb, acedb, aecdb, aedcb, cabde, cadbe, cadeb, caedb, cbade, cbdae, ceadb
196	abcde, bacde, cabde, cadbe, cadeb, cbade, cdabe, cdaeb, cdeab, dcabe, dcaeb, dceab, decab, edcab
197	abcde, acbde, acdbe, acdeb, acedb, cabde, cadbe, cadeb, caedb, cbade, deacb, decab, edacb, edcab
198	abcde, abdce, abecd, abedc, acbde, acdeb, adcbe, adceb, cabde, cadeb, cdabe, cdaeb, cdbea, cdeba
199	abcde, abdce, abecd, abedc, acbde, acdeb, adcbe, adceb, cabde, cadeb, cdabe, cdaeb, cdeab, cdeba
200	abcde, acbde, acdbe, acdeb, acedb, bacde, cabde, cadbe, cadeb, caedb, deacb, decab, edacb, edcab
201	abcde, abced, abdce, abecd, acbde, acdeb, adcbe, adceb, cabde, cadeb, cdabe, cdaeb, cdeab, cdeba
202	abcde, abced, abdce, abecd, acbde, acdeb, adcbe, adceb, cabde, cadeb, cdabe, cdaeb, cdbea, cdeba
203	abcde, abdce, acbde, acdeb, adcbe, adceb, aecdb, aedcb, cabde, cadeb, cdabe, cdaeb, cdbea, cdeba
204	abcde, abdce, abdec, abedc, bacde, badce, badec, baedc, eabdc, ebadc, edabc, edacb, edbac, edbca
205	abcde, abdce, abdec, abedc, bacde, badce, badec, baedc, eabdc, ebadc, edabc, edbac, edbca, edcba
206	abcde, abdce, abdec, abedc, bacde, badce, badec, baedc, cabde, cbade, cdabe, cdbae, eabdc, ebadc
207	abcde, abdce, abdec, abedc, bacde, badce, badec, baedc, cabde, cbade, cdabe, cdbae, cdeab, cdeba
208	abcde, abdce, abdec, abedc, bacde, badce, badec, baedc, cdabe, cdbae, dcabe, dcbae, eabdc, ebadc
209	abcde, abced, abecd, bacde, baced, baecd, eabcd, ebacd, ecabd, ecbad, ecdab, ecdba, edcab, edcba
210	abcde, abced, abecd, bacde, baced, baecd, eabcd, ebacd, ecabd, ecbad, edabc, edbac, edcab, edcba
211	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, cabde, cabed, cbade, cbaed, eabcd, eacbd, ecabd, ecbad, ecdab, ecdba
212	abcde, abced, acbde, acbed, cabde, cabed, cbade, cbaed, eabcd, eabdc, eacbd, ecabd, ecbad, ecdab, ecdba
213	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecdab
214	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, aecdb, aedcb, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ecabd, ecadb, ecbad, ecdab
215	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecdab, edcab
216	abcde, abced, acbde, acbed, acebd, cabde, cabed, caebd, eacbd, ecabd, ecbad, ecdab, ecdba, edcab, edcba
217	abcde, abced, abecd, acebd, acedb, aecbd, aecdb, aedcb, eabcd, eacbd, eadcb, ecabd, ecadb, ecbad, ecdab
218	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acebd, acedb, aecbd, aecdb, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecdab
219	abcde, abced, acbde, acbed, acebd, acedb, aecbd, aecdb, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecdab, edcab
220	abcde, acbde, acdbe, acebd, acedb, aecbd, aecdb, aedcb, eabcd, eacbd, eadcb, ecabd, ecadb, ecbad, ecdab
221	abcde, abced, acbde, acbed, cabde, cabed, cbade, cbaed, cbdae, cdbae, dcbae, eabcd, eacbd, ecabd, ecbad
222	abcde, abced, acbde, acbed, cabde, cabed, cbade, cbaed, cbdae, cdbae, eabcd, eabdc, eacbd, ecabd, ecbad
223	abcde, abced, acbde, acbed, cabde, cabed, cbade, cbaed, cdabe, cdbae, eabcd, eabdc, eacbd, ecabd, ecbad
224	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, cabde, cabed, cbade, cbaed, cbdae, cdbae, eabcd, eacbd, ecabd, ecbad
225	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, cabde, cabed, cbade, cbaed, cdabe, cdbae, eabcd, eacbd, ecabd, ecbad
226	abcde, abced, acbde, acbed, cabde, cabed, cbade, cbaed, cbdae, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ecabd, ecbad
227	abcde, abced, acbde, acbed, cabde, cabed, cbade, cbaed, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ecabd, ecbad, edabc
228	abcde, abced, acbde, acbed, cabde, cabed, cbade, cbaed, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ecabd, ecbad, ecbda
229	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, cabde, cabed, cadbe, caebd, cdabe, dcabe, eacbd, ecabd, ecbad
230	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, cabde, cabed, cadbe, caebd, dacbe, dcabe, eacbd, ecabd, ecbad
231	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acdbe, acebd, cabde, cabed, cadbe, caebd, cdabe, eacbd, ecabd, ecbad
232	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acdbe, acebd, cabde, cabed, cadbe, caebd, eacbd, ecabd, ecbad, ecbda

Dom Index	Repräsentatives Domain
233	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, adcbe, cabde, cabed, cadbe, caebd, eacbd, ecabd, ecbad, ecdba
234	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, adcbe, cabde, cabed, cadbe, caebd, dacbe, eacbd, ecabd, ecbad
235	abcde, abced, acbde, acbed, acebd, adbce, adcbe, cabde, cabed, caebd, dabce, dacbe, eacbd, ecabd, ecbad
236	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecdba
237	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, aecdb, aedcb, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ecabd, ecadb, ecbad, ecdba
238	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, aecdb, aedcb, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ecabd, ecadb, ecbad, edacb
239	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, edacb, edcab
240	abcde, abced, abecd, acebd, aecdb, aecbd, aecdb, aedcb, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ecabd, ecadb, ecbad, edacb
241	abcde, abced, abecd, acebd, aecdb, aecbd, aecdb, aedcb, eabcd, eacdb, eadcb, ecabd, ecadb, ecbad, ecdba
242	abcde, abced, acbde, acbed, acebd, aecdb, aecbd, aecdb, eabcd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, edacb, edcab
243	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acebd, aecdb, aecbd, aecdb, eabcd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecdba
244	abcde, abced, acbde, acbed, bcade, bcaed, cbade, cbaed, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ebcad, ecbad, edacb
245	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, adcbe, bcade, bcaed, cbade, cbaed, dacbe, eabcd, eacbd, ebcad, ecbad
246	abcde, abced, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aedbc, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ebcad, ecbad, edabc
247	abcde, abced, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aedbc, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ecabd, ecbad, edabc
248	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, aedbc, aedcb, eabcd, eacbd, eadbc, eadcb, ebcad, ecbad, edabc, edacb
249	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, aedbc, aedcb, eabcd, eacbd, eadbc, eadcb, ecabd, ecbad, edabc, edacb
250	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, aedbc, aedcb, eabcd, eacbd, eadbc, eadcb, ebcad, ebcda, ecbad, ecdba
251	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aebdc, aecbd, aedbc, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ebcad, ecbad, edabc
252	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aebdc, aecbd, aedbc, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ecabd, ecbad, edabc
253	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aebdc, aecbd, aedbc, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ecabd, ecbad, ecdba
254	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aedbc, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ebcad, ecbad, edabc
255	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aedbc, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ecabd, ecbad, edabc
256	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aedbc, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ecabd, ecbad, ecdba
257	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, eabcd, eabdc, eacbd, ebcad, ebcda, ecbad, ecdba, ecdba
258	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aebdc, aecbd, eabcd, eabdc, eacbd, ebcad, ebcda, ecbad, ecdba, ecdba
259	abcde, abced, acbde, acbed, cabde, cabed, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab, ecdba, edcab, edcba
260	abcde, abced, abdce, abecd, bacde, baced, badce, baecd, eabcd, eacbd, eacdb, ebacd, ecabd, ecadb, ecdab
261	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, aecdb, aedcb, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ebacd, ecabd, ecadb, ecdab
262	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab, ecdba, edcab, edcba
263	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, aecdb, aedcb, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ecabd, ecadb, ecdab, ecdba
264	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, aecdb, aedcb, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ecdab, ecdba, edcab, edcba
265	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ebacd, ecabd, ecadb, ecdab
266	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab, ecdba
267	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ebacd, ecabd, ecadb, ecdab, edcab
268	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aecdb, aedcb, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ebacd, ecdab, edcab
269	abcde, abced, abecd, acebd, aecdb, aecbd, aecdb, eabcd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab, ecdba, edcab, edcba
270	abcde, abced, abecd, acebd, aecdb, aecbd, aecdb, aedcb, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ecabd, ecadb, ecdab, ecdba
271	abcde, abced, abecd, acebd, aecdb, aecbd, aecdb, aedcb, eabcd, eacdb, eadcb, ecdab, ecdba, edcab, edcba
272	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acebd, aecdb, aecbd, aecdb, eabcd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab, ecdba
273	abcde, acbde, acdbe, aebcd, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab, ecdba, edcab, edcba
274	abcde, acbde, acdbe, acebd, aecdb, aecbd, aecdb, eabcd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab, ecdba, edcab, edcba
275	abcde, abdce, acbde, acdbe, acebd, aecdb, aecbd, aecdb, bacde, badce, eabcd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab
276	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, aedbc, aedcb, eabcd, eacbd, eadbc, eadcb, edabc, edacb, edbca, edcba
277	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, aedbc, aedcb, eabcd, eacbd, eadbc, eadcb, edabc, edacb, edbac, edbca

Dom Index	Repräsentatives Domain
278	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, eabcd, eabdc, eachd, ebacd, ebadc, edabc, edbac, edbca
279	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acdbe, aebcd, aecbd, cabde, cabed, cadbe, cbdae, cdbae, eabcd, eachd
280	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acdbe, acebd, aecbd, cabde, cabed, cadbe, caebd, cbdae, cdbae, eachd
281	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acdbe, acebd, aecbd, cabde, cabed, cadbe, caebd, cdabe, cdbae, eachd
282	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acdbe, acebd, cabde, cabed, cadbe, caebd, cbdae, cdbae, eabcd, ecabd
283	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acdbe, acebd, cabde, cabed, cadbe, caebd, cdabe, cdbae, eachd, ecabd
284	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, adcbe, aecbd, cabde, cabed, cadbe, caebd, cbdae, cdbae, eachd
285	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, adcbe, aecbd, cabde, cabed, cadbe, caebd, cdabe, cdbae, eachd
286	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, adcbe, cabde, cabed, cadbe, caebd, cbdae, cdbae, eachd, ecabd
287	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, adcbe, cabde, cabed, cadbe, caebd, cdabe, cdbae, eachd, ecabd
288	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acebd, aecbd, cabde, cabed, caebd, cbade, cbaed, cbdae, cdbae, eachd
289	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acebd, aecbd, cabde, cabed, caebd, cbade, cbaed, cdabe, cdbae, eachd
290	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, aebcd, aecbd, cabde, cabed, cbade, cbaed, cbdae, cdbae, eabcd, eachd
291	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, aecdb, aedcb, eabcd, eachd, eacdb, eadcb, ebacd, ecabd, ecadb, edacb
292	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acebd, acedb, aecbd, aecdb, eachd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdba, ecdba
293	abcde, abced, acbde, acbed, acebd, aecbd, bcade, bcaed, bcdae, bdcae, cbade, cbaed, cbdae, cdbae, eachd
294	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acebd, aecbd, bcade, bcaed, bcdae, cbade, cbaed, cbdae, cdbae, eachd
295	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, aecbd, bcade, bcaed, bcdae, bdcae, cbade, cbaed, cbdae, eachd
296	abcde, abced, acbde, acbed, acebd, aecbd, bcade, bcaed, bcdae, bdcae, cbade, cbaed, cbdae, dbcae, eachd
297	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acdbe, acebd, aecbd, bcade, bcaed, bcdae, cbade, cbaed, cbdae, eachd
298	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, adcbe, aecbd, bcade, bcaed, bcdae, cbade, cbaed, cbdae, eachd
299	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, dabce, dbace, dbcae, dbcea, dcbae, dceba, dceba
300	abcde, abdce, abecd, abedc, acbde, aebcd, aebdc, bacde, badce, baecd, baedc, dabce, dbace, dbcae, dbcea
301	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, bacde, badce, baecd, baedc, dabce, dbace, dbcae, dbcea
302	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, bacde, badce, baecd, baedc, dabce, dacbe, dbace, dbcae, dbcea
303	abcde, abdce, abdec, acbde, adbce, adbec, adebc, aedbc, dabce, dabec, daebc, dbace, dbaec, dbcae, dbcea
304	abcde, abdce, abdec, abedc, acbde, adbce, adbec, adebc, dabce, dabec, daebc, dbace, dbaec, dbcae, dbcea
305	abcde, abdce, abdec, bacde, badce, badec, dabce, dabec, dbace, dbaec, dbcea, dbeba, dceba, decba, edcba
306	abcde, acbde, acdbe, acdeb, acedb, adcbe, adceb, cabde, cadbe, cadeb, caedb, cbdae, cdbae, ceadb, ecadb
307	abcde, acbde, acdbe, acdeb, acedb, adcbe, adceb, adceb, cabde, cadbe, cadeb, caedb, cbdae, cdbae, ceadb
308	abcde, acbde, acdbe, acdeb, acedb, adcbe, adceb, aecdb, cabde, cadbe, cadeb, caedb, cbdae, cdbae, ceadb
309	abcde, acbde, acdbe, acdeb, adcbe, adceb, adceb, cabde, cadbe, cadeb, cdabe, cdaeb, cdbae, cdeab, cedab
310	abcde, acbde, acdbe, acdeb, adcbe, adceb, adceb, aedcb, cabde, cadbe, cadeb, cdabe, cdaeb, cdbae, cdeab
311	abcde, abdce, acdbe, acdeb, acedb, adcbe, adceb, aecdb, cadbe, cadeb, caedb, cdabe, cdaeb, cdbae, cdbea
312	abcde, abdce, acdbe, acdeb, acedb, adcbe, adceb, aecdb, cadbe, cadeb, caedb, cdabe, cdaeb, cdbae, cdeab
313	abcde, abdce, acdbe, acdeb, acedb, adcbe, adceb, aecdb, cadbe, cadeb, caedb, cdabe, cdaeb, cdbae, ceadb
314	abcde, abdce, acbde, acdbe, acdeb, acedb, aecdb, cabde, cadbe, cadeb, caedb, cdabe, cdaeb, cdbae, cdeab
315	abcde, acbde, acdbe, acdeb, acedb, adcbe, adceb, aecdb, cabde, cadbe, cadeb, caedb, cbade, cbdae, ceadb
316	abcde, acbde, acdbe, acdeb, acedb, cabde, cadbe, cadeb, caedb, deacb, decab, decba, edacb, edcab, edcba
317	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eachd, ebacd, ebadc, edabc, edbac, edbca
318	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eachd, eacdb, ebacd, ebadc, ebdac, ebdca
319	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eachd, eacdb, ebacd, ebadc, ebdac, ebdca
320	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eachd, eacdb, ebacd, ebadc, ebcad, ebdac
321	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eachd, eadbc, ebacd, ebadc, ebdac, ebdca
322	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eachd, eadbc, ebacd, ebadc, ebcad, ebdac

Dom Index	Repräsentatives Domain
323	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ebacd, ebadc, ebdac, ecabd
324	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, ebacd, ebadc, ebcad, ebdac, edbac
325	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, ebacd, ebadc, ebdac, ecabd, edbac
326	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ebacd, ebadc, ebcda, ebdca
327	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ebacd, ebadc, ebcad, ebcda
328	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ebacd, ebadc, ecabd, edabc
329	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, ebacd, ebadc, ebcad, edabc, edbac
330	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, ebacd, ebadc, ecabd, edabc, edbac
331	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ebacd, ebadc, ebcda, ebdca
332	abcde, abced, abecd, abedc, acebd, acedb, aecbd, aecdb, bacde, baced, baecd, baedc, caebd, caedb, eacbd, eacdb
333	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, bcdae, bdcae, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ebacd, ebadc
334	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, bdace, bdcae, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ebacd, ebadc
335	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, bdace, bdcae, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ebacd, ebadc
336	abcde, abdce, abecd, abedc, adbce, bacde, badce, baecd, baedc, bdace, bdcae, eabcd, eabdc, eacbd, ebacd, ebadc
337	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, bcdae, bdcae, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ebacd, ebadc
338	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, bcdae, bdcae, dbcae, eabcd, eabdc, eacbd, ebacd, ebadc
339	abcde, abdce, abecd, abedc, adbce, bacde, badce, baecd, baedc, bcdae, bdcae, eabcd, eabdc, eacbd, ebacd, ebadc
340	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, ebacd, ebadc, edabc, edbac, edbca
341	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, ebacd, ebadc, ebcda, ebdca, edbca
342	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, bcade, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ebacd, ebadc, ebdac
343	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ebacd, ebadc, ebdac, ebdca
344	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ebacd, ebadc, ebcad, ebdac
345	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, bcade, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ebacd, ebadc, ebdac
346	abcde, abdce, abecd, abedc, adbce, bacde, badce, baecd, baedc, bcade, eabcd, eabdc, eacbd, ebacd, ebadc, ebdac
347	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, bcade, eabcd, eabdc, eacbd, ebacd, ebadc, ebdac, edbac
348	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ebacd, ebadc, ebcad, ebdac
349	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ebacd, ebadc, ebdac, ecabd
350	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, ebacd, ebadc, ebdac, ecabd, edbac
351	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, bcade, bdace, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ebacd, ebadc
352	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, bdace, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ebacd, ebadc, ebcad
353	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, bcade, bdace, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ebacd, ebadc
354	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, bcade, bcdae, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ebacd, ebadc
355	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ebacd, ebadc, ecabd, edabc
356	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ebacd, ebadc, ebcda, ebdca
357	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ebacd, ebadc, ebcda, ebdca
358	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ebacd, ebadc, ebcad, ebcda
359	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, ebacd, ebadc, ebcad, edabc, edbac
360	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, ebacd, ebadc, ecabd, edabc, edbac
361	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, bcade, dabce, dbace, eabcd, eabdc, eacbd, ebacd, ebadc
362	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, dabce, dbace, dbcae, eabcd, eabdc, eacbd, ebacd, ebadc
363	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, dabce, dbace, eabcd, eabdc, eacbd, ebacd, ebadc, ebcad
364	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, dabce, dbace, eabcd, eabdc, eacbd, ebacd, ebadc, ecabd
365	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, cabde, cabed, cbade, cbaed, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecdab
366	abcde, abced, acbde, acbed, cabde, cabed, cbade, cbaed, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecdab
367	abcde, abced, acbde, acbed, cabde, cabed, cbade, cbaed, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecdab, edcab

Dom Index	Repräsentatives Domain
368	abcde, abced, acbde, acbed, cabde, cabed, cbade, cbaed, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ecabd, ecadb, ecbad, ecdab
369	abcde, abced, acbde, acbed, cabde, cabed, cbade, cbaed, eabcd, eacbd, ecabd, ecbad, ecdab, ecdba, edcab, edcba
370	abcde, abced, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aecdb, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecdab
371	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aebdc, aecbd, aecdb, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecdab
372	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aecdb, aedcb, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ecabd, ecadb, ecbad, ecdab
373	abcde, abced, acbde, acbed, acebd, acedb, aecbd, aecdb, aedcb, eabcd, eacdb, eadcb, ecabd, ecadb, ecbad, ecdab
374	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aecdb, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecdab
375	abcde, acbde, acdbe, cabde, cadbe, cbade, cdabe, dcabe, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecdab, edcab
376	abcde, abdce, acbde, acdbe, aebcd, aebdc, aecbd, aecdb, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecdab
377	abcde, acbde, acdbe, adcbe, aebcd, aecbd, aecdb, aedcb, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ecabd, ecadb, ecbad, ecdab
378	abcde, acbde, acdbe, adcbe, cabde, cadbe, cbade, cdabe, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ecabd, ecadb, ecbad, ecdab
379	abcde, acbde, cabde, cbade, cdabe, cdbae, dcabe, dcbae, eabcd, eacbd, ecabd, ecbad, ecdab, ecdba, edcab, edcba
380	abcde, abced, acbde, acbed, bcade, bcaed, cbade, cbaed, eabcd, eacbd, ebcad, ecbad, edabc, edacb, edbca, edcba
381	abcde, abced, acbde, acbed, bcade, bcaed, cbade, cbaed, eabcd, eacbd, ebcad, ebcda, ecbad, ecbda, edbca, edcba
382	abcde, abced, acbde, acbed, bcade, bcaed, cbade, cbaed, eabcd, eacbd, ebcad, ebcda, ebdca, ecbad, ecbda, edbca
383	abcde, acbde, bcade, bcdae, bdcae, cbade, cbdae, dbcae, eabcd, eacbd, ebcad, ebcda, ebdca, ecbad, ecbda, edbca
384	abcde, acbde, bcade, cbade, dabce, dacbe, dbcae, dcbae, eabcd, eacbd, ebcad, ecbad, edabc, edacb, edbca, edcba
385	abcde, acbde, bcade, bcdae, cbade, cbdae, dbcae, dcbae, eabcd, eacbd, ebcad, ebcda, ecbad, ecbda, edbca, edcba
386	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, cabde, cabed, cbade, cbaed, cbdae, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad
387	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, cabde, cabed, cbade, cbaed, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecbda
388	abcde, abced, acbde, acbed, cabde, cabed, cbade, cbaed, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, edacb, edcab
389	abcde, abced, acbde, acbed, cabde, cabed, cbade, cbaed, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecbda
390	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, cabde, cabed, cadbe, cbade, cbaed, cdabe, dcabe, eabcd, eacbd, ecabd, ecbad
391	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, cabde, cabed, cadbe, cbade, cbaed, dacbe, dcabe, eabcd, eacbd, ecabd, ecbad
392	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acdbe, cabde, cabed, cadbe, cbade, cbaed, cbdae, eabcd, eacbd, ecabd, ecbad
393	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acdbe, cabde, cabed, cadbe, cbade, cbaed, cdabe, eabcd, eacbd, ecabd, ecbad
394	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acdbe, cabde, cabed, cadbe, cbade, cbaed, eabcd, eacbd, ecabd, ecbad, ecbda
395	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, adcbe, cabde, cabed, cadbe, cbade, cbaed, eabcd, eacbd, ecabd, ecbad, ecbda
396	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, cabde, cabed, cadbe, cbade, cbaed, eabcd, eabdc, eacbd, ecabd, ecbad, ecbda
397	abcde, abced, acbde, acbed, cabde, cabed, cbade, cbaed, cdabe, cdbae, dcabe, dcbae, eabcd, eacbd, ecabd, ecbad
398	abcde, abced, acbde, acbed, cabde, cabed, cbade, cbaed, eabcd, eacbd, ecabd, ecbad, edabc, edacb, edcab, edcba
399	abcde, abced, acbde, acbed, cabde, cabed, cbade, cbaed, dabce, dacbe, dcabe, dcbae, eabcd, eacbd, ecabd, ecbad
400	abcde, abced, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aecdb, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecbda
401	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aebdc, aecbd, aecdb, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecbda
402	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aecdb, aedcb, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ecabd, ecadb, ecbad, edacb
403	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aecdb, aedcb, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ecabd, ecadb, ecbad, ecbda
404	abcde, abced, acbde, acbed, acebd, acedb, aecbd, aecdb, aedcb, eabcd, eacdb, eadcb, ecabd, ecadb, ecbad, edacb
405	abcde, abced, acbde, acbed, acebd, acedb, aecbd, aecdb, aedcb, eabcd, eacdb, eadcb, ecabd, ecadb, ecbad, ecbda
406	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aecdb, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecbda
407	abcde, acbde, acdbe, cabde, cadbe, cbade, dacbe, dcabe, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, edacb, edcab
408	abcde, abdce, acbde, acdbe, cabde, cadbe, cbade, cbdae, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecbda
409	abcde, abdce, acbde, acdbe, aebcd, aebdc, aecbd, aecdb, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecbad, ecbda
410	abcde, abced, acbde, acbed, bcade, bcaed, bcdae, bdcae, cbade, cbaed, cbdae, cdbae, eabcd, eacbd, ebcad, ecbad
411	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, bcade, bcaed, bcdae, cbade, cbaed, cbdae, cdbae, eabcd, eacbd, ebcad, ecbad
412	abcde, abced, acbde, acbed, bcade, bcaed, bcdae, cbade, cbaed, cbdae, cdbae, dcbae, eabcd, eacbd, ebcad, ecbad

Dom Index	Repräsentatives Domain
413	abcde, abced, acbde, acbed, bcade, bcaed, bcdae, cbade, cbaed, cbdae, cdbae, eabcd, eabdc, eacbd, ebcad, ecbad
414	abcde, abdce, acbde, bcade, bcdae, cbade, cbdae, cdbae, eabcd, eabdc, eacbd, ebcad, ebcda, ecbad, ecbda, ecdba
415	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, bcade, bcaed, bcdae, cbade, cbaed, cbdae, eabcd, eacbd, eacdb, ebcad, ecbad
416	abcde, abced, acbde, acbed, bcade, bcaed, bcdae, cbade, cbaed, cbdae, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ebcad, ecbad
417	abcde, abced, acbde, acbed, bcade, bcaed, bcdae, cbade, cbaed, cbdae, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ebcad, ecbad
418	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acdbe, bcade, bcaed, bcdae, cbade, cbaed, cbdae, eabcd, eacbd, ebcad, ecbad
419	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, adbce, bcade, bcaed, bcdae, cbade, cbaed, cbdae, eabcd, eacbd, ebcad, ecbad
420	abcde, abced, acbde, acbed, adbce, adcbe, bcade, bcaed, bcdae, cbade, cbaed, cbdae, eabcd, eacbd, ebcad, ecbad
421	abcde, abced, acbde, acbed, bcade, bcaed, bcdae, cbade, cbaed, cbdae, dbcae, dcbae, eabcd, eacbd, ebcad, ecbad
422	abcde, abced, acbde, acbed, bcade, bcaed, bcdae, cbade, cbaed, cbdae, eabcd, eacbd, eadbc, eadcb, ebcad, ecbad
423	abcde, abdce, acbde, acdbe, bcade, bcdae, cbade, cbdae, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ebcad, ebcda, ecbad, ecbda
424	abcde, acbde, adbce, adcbe, bcade, bcdae, cbade, cbdae, eabcd, eacbd, eadbc, eadcb, ebcad, ebcda, ecbad, ecbda
425	abcde, abced, acbde, acbed, bcade, bcaed, cbade, cbaed, eabcd, eacbd, eadbc, eadcb, ebcad, ecbad, edabc, edacb
426	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, adcbe, bcade, bcaed, cbade, cbaed, eabcd, eacbd, ebcad, ebcda, ecbad, ecbda
427	abcde, abced, acbde, acbed, adbce, adcbe, bcade, bcaed, cbade, cbaed, eabcd, eacbd, ebcad, ebcda, ecbad, ecbda
428	abcde, abced, acbde, acbed, adbce, adcbe, bcade, bcaed, cbade, cbaed, dabce, dacbe, eabcd, eacbd, ebcad, ecbad
429	abcde, abced, acbde, acbed, bcade, bcaed, cbade, cbaed, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ebcad, ebcda, ecbad, ecbda
430	abcde, abced, acbde, acbed, bcade, bcaed, cbade, cbaed, eabcd, eacbd, eadbc, eadcb, ebcad, ebcda, ecbad, ecbda
431	abcde, abced, acbde, acbed, bcade, bcaed, cbade, cbaed, eabcd, eabdc, eacbd, ebcad, ebcda, ecbad, ecbda, ecdba
432	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, bcade, bcaed, cbade, cbaed, eabcd, eacbd, ebcad, ebcda, ecbad, ecbda, ecdba
433	abcde, abced, acbde, acbed, bcade, bcaed, cbade, cbaed, eabcd, eacbd, ebcad, ebcda, ebdca, ecbad, ecbda, ecdba
434	abcde, abced, acbde, acbed, bcade, bcaed, cbade, cbaed, dabce, dacbe, dbcae, dcbae, eabcd, eacbd, ebcad, ecbad
435	abcde, abced, acbde, acbed, bcade, bcaed, cbade, cbaed, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ebcad, ebcda, ecbad, ecbda
436	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, bcade, bcaed, cbade, cbaed, eabcd, eacbd, eacdb, ebcad, ebcda, ecbad, ecbda
437	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acdbe, bcade, bcaed, cbade, cbaed, eabcd, eacbd, ebcad, ebcda, ecbad, ecbda
438	abcde, acbde, cabde, cbade, dabce, dacbe, dcabe, dcbae, eabcd, eacbd, ecabd, ecbad, edabc, edacb, edcab, edcba
439	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aedbc, aedcb, eabcd, eacbd, eadbc, eadcb, ebcad, ecbad, edabc, edacb
440	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aedbc, aedcb, eabcd, eacbd, eadbc, eadcb, ecabd, ecbad, edabc, edacb
441	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aebdc, aecbd, aedbc, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ebcad, ebcda, ecbad, ecbda
442	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aedbc, aedcb, eabcd, eacbd, eadbc, eadcb, ebcad, ebcda, ecbad, ecbda
443	abcde, abdce, abced, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aedbc, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ebcad, ebcda, ecbad, ecbda
444	abcde, abdce, abced, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aecdb, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ebcad, ebcda, ecbad, ecbda
445	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aebdc, aecbd, aecdb, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ebcad, ebcda, ecbad, ecbda
446	abcde, abdce, acbde, acdbe, aebcd, aebdc, aecbd, aecdb, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ebcad, ebcda, ecbad, ecbda
447	abcde, abced, acbde, acbed, bacde, baced, cabde, cabed, eabcd, eacbd, eacdb, ebacd, ecabd, ecadb, ecadb, edcab
448	abcde, abced, acbde, acbed, bacde, baced, cabde, cabed, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ebacd, ecabd, ecadb, ecadb
449	abcde, abced, abced, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aecdb, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecadb, ecdba
450	abcde, abced, abced, aebcd, aecbd, aecdb, bacde, baced, baecd, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecadb, edcab
451	abcde, abced, abced, aebcd, aecbd, aecdb, aedcb, bacde, baced, baecd, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ecadb, edcab
452	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aecdb, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecadb, ecdba, edcab, edcba
453	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aecdb, bacde, baced, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecadb, edcab
454	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aecdb, aedcb, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ebacd, ecabd, ecadb, ecadb
455	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aebdc, aecbd, aecdb, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecadb, ecdba
456	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aecdb, aedcb, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ecabd, ecadb, ecadb, ecdba
457	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aecdb, aedcb, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ecadb, ecdba, edcab, edcba

Dom Index	Repräsentatives Domain
458	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aecdb, aedcb, bacde, baced, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ecdab, edcab
459	abcde, abced, abecd, acebd, acedb, aebcd, aecdb, bacde, baced, baecd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab, edcab
460	abcde, abced, abecd, acebd, acedb, aebcd, aecdb, aedcb, bacde, baced, baecd, eacbd, eacdb, eadcb, ecdab, edcab
461	abcde, abced, acbde, acbed, acebd, acedb, aebcd, aecdb, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab, ecdba, edcab, edcba
462	abcde, abced, acbde, acbed, acebd, acedb, aebcd, aecdb, bacde, baced, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab, edcab
463	abcde, abced, acbde, acbed, acebd, acedb, aebcd, aecdb, aedcb, eacbd, eacdb, eadcb, ecabd, ecadb, ecdab, ecdba
464	abcde, abced, acbde, acbed, acebd, acedb, aebcd, aecdb, aedcb, bacde, baced, eacbd, eacdb, eadcb, ecdab, edcab
465	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aecdb, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab, ecdba
466	abcde, acbde, acdbe, bacde, cabde, cadbe, cdabe, dcabe, eabcd, eacbd, eacdb, ebacd, ecabd, ecadb, ecdab, edcab
467	abcde, abdce, acbde, acdbe, aebcd, aebdc, aecbd, aecdb, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab, ecdba
468	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aedbc, aedcb, eabcd, eacbd, eadbc, eadcb, edabc, edacb, edbca, edcba
469	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aedbc, aedcb, eabcd, eacbd, eadbc, eadcb, edabc, edacb, edbac, edbca
470	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, eabcd, eabdc, eacbd, ebacd, ebadc, ebdac, ebdca, edbac, edbca
471	abcde, abced, acbde, acbed, bacde, baced, cabde, cabed, eabcd, eacbd, eacdb, ebacd, ecabd, ecadb, edacb, edcab
472	abcde, abced, acbde, acbed, bacde, baced, cabde, cabed, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ebacd, ecabd, ecadb, edacb
473	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, aecbd, cabde, cabed, cadbe, caebd, cbade, cbaed, cdabe, dcabe, eacbd
474	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, aecbd, cabde, cabed, cadbe, caebd, cbade, cbaed, dacbe, dcabe, eacbd
475	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, cabde, cabed, cadbe, caebd, cbade, cbaed, dacbe, dcabe, eacbd, ecabd
476	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acdbe, acebd, aecbd, cabde, cabed, cadbe, caebd, cbade, cbaed, cbdae, eacbd
477	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acdbe, acebd, aecbd, cabde, cabed, cadbe, caebd, cbade, cbaed, cdabe, eacbd
478	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acdbe, acebd, cabde, cabed, cadbe, caebd, cbade, cbaed, cbdae, eacbd, ecabd
479	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acdbe, acebd, cabde, cabed, cadbe, caebd, cbade, cbaed, cdabe, eacbd, ecabd
480	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acdbe, aebcd, aecbd, cabde, cabed, cadbe, cbade, cbaed, cbdae, eabcd, eacbd
481	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, adcbe, aecbd, cabde, cabed, cadbe, caebd, cbade, cbaed, cbdae, eacbd
482	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, adcbe, aecbd, cabde, cabed, cadbe, caebd, cbade, cbaed, cdabe, eacbd
483	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, adcbe, aecbd, cabde, cabed, cadbe, caebd, cbade, cbaed, dacbe, eacbd
484	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, adcbe, cabde, cabed, cadbe, caebd, cbade, cbaed, cdabe, eacbd, ecabd
485	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, bacde, baced, cabde, cabed, cadbe, dacbe, dcabe, eabcd, eacbd, ebacd, ecabd
486	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, adcbe, aecbd, bacde, baced, cabde, cabed, cadbe, caebd, cdabe, eacbd
487	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, adcbe, aecbd, bacde, baced, cabde, cabed, cadbe, caebd, dacbe, eacbd
488	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, adcbe, bacde, baced, cabde, cabed, cadbe, caebd, cdabe, eacbd, ecabd
489	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, adcbe, bacde, baced, cabde, cabed, cadbe, caebd, dacbe, eacbd, ecabd
490	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, aecbd, bacde, baced, cabde, cabed, cadbe, caebd, cdabe, dcabe, eacbd
491	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, bacde, baced, cabde, cabed, cadbe, caebd, cdabe, dcabe, eacbd, ecabd
492	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acebd, bacde, baced, cabde, cabed, cadbe, caebd, dacbe, dcabe, eacbd, ecabd
493	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aecdb, cabde, cabed, cbade, cbaed, cbdae, eabcd, eacbd, eacdb
494	abcde, abced, acbde, acbed, bacde, baced, cabde, cabed, eabcd, eacbd, eadbc, eadcb, ebacd, ecabd, edabc, edacb
495	abcde, abced, acbde, acbed, bacde, baced, cabde, cabed, eabcd, eacbd, ebacd, ecabd, edabc, edacb, edbac, edcab
496	abcde, abced, acbde, acbed, bacde, baced, cabde, cabed, dabce, dacbe, dbace, dcabe, eabcd, eacbd, ebacd, ecabd
497	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acebd, bacde, baced, badce, cabde, cabed, caebd, dabce, dbace, eacbd, ecabd
498	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, bcade, bcaed, bcdae, bdcae, cbade, cbaed, cbdae, cdbae, eabcd, eacbd
499	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, aebcd, aecbd, bcade, bcaed, bcdae, cbade, cbaed, cbdae, cdbae, eabcd, eacbd
500	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acdbe, aebcd, aecbd, bcade, bcaed, bcdae, cbade, cbaed, cbdae, eabcd, eacbd
501	abcde, abdce, abdec, abedc, bacde, badce, badec, baedc, dabce, dabec, daceb, daech, dbace, dbaec, dbcae, dbcea
502	abcde, abdce, abdec, abedc, bacde, badce, badec, baedc, dabce, dabec, daceb, daech, dbace, dbaec, dbcea, dbea

Dom Index	Repräsentatives Domain
503	abcde, abdce, abdec, abedc, bacde, badce, badec, baedc, dabce, dabec, dacbe, daceb, dbace, dbaec, dbcae, dbcea
504	abcde, abdce, abdec, abedc, bacde, badce, badec, baedc, dabce, dabec, dbace, dbaec, dbcea, dbeca, debca, decba
505	abcde, abdce, abdec, abedc, bacde, badce, badec, baedc, dabce, dabec, dbace, dbaec, dbcea, dbeca, dcbea, debca
506	abcde, abdce, abdec, abedc, acbde, bacde, badce, badec, baedc, dabce, dabec, dbace, dbaec, dbcea, dbeca, debca
507	abcde, abdce, abdec, abedc, bacde, badce, badec, baedc, dabce, dabec, dacbe, dbace, dbaec, dbcea, dbeca, debca
508	abcde, abdce, abdec, abedc, bacde, badce, badec, baedc, dabce, dabec, dbace, dbaec, dbcea, dbeca, dceba, decba
509	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, bacde, badce, baecd, baedc, dabce, dbace, dbcae, dbcea, dcbae, dcbea
510	abcde, abdce, abdec, abedc, bacde, badce, badec, baedc, dabce, dabec, daebc, daecb, dbace, dbaec, dbcae, dbcea
511	abcde, abdce, abdec, abedc, acbde, bacde, badce, badec, baedc, dabce, dabec, daebc, dbace, dbaec, dbcae, dbcea
512	abcde, abdce, abdec, abedc, acbde, bacde, badce, badec, baedc, dabce, dabec, daebc, dbace, dbaec, dbcea, dbeca
513	abcde, abdce, abdec, abedc, bacde, badce, badec, baedc, dabce, dabec, dacbe, daebc, dbace, dbaec, dbcae, dbcea
514	abcde, abdce, abdec, abedc, bacde, badce, badec, baedc, dabce, dabec, dacbe, daebc, dbace, dbaec, dbcea, dbeca
515	abcde, abdce, abdec, abedc, acbde, aebdc, bacde, badce, badec, baedc, dabce, dabec, dbace, dbaec, dbcae, dbcea
516	abcde, abdce, abdec, abedc, acbde, aebdc, bacde, badce, badec, baedc, dabce, dabec, dbace, dbaec, dbcea, dbeca
517	abcde, abdce, abdec, abedc, aebdc, bacde, badce, badec, baedc, dabce, dabec, dacbe, dbace, dbaec, dbcae, dbcea
518	abcde, abced, acbde, acbed, bcade, bcaed, bcdea, bcda, cbade, cbaed, cbdea, cbeda, dbcea, dcbea, debca, decba
519	abcde, abced, bacde, baced, bcade, bcaed, bcdea, bcda, cbade, cbaed, cbdea, cbeda, dbcea, dcbea, debca, decba
520	abcde, abced, acbde, acbed, bcade, bcaed, bcdea, bcda, cbade, cbaed, cbdea, cbeda, dbcea, dbeca, dcbea, debca
521	abcde, abced, bacde, baced, bcade, bcaed, bcdea, bcda, cbade, cbaed, cbdea, cbeda, dbcea, dbeca, dcbea, debca
522	abcde, abced, abdce, abdec, bacde, baced, badce, badec, dabce, dabec, dbace, dbaec, dbcea, dbeca, debca, decba
523	abcde, abced, abdce, abdec, bacde, baced, badce, badec, dabce, dabec, dbace, dbaec, dbcea, dbeca, dcbea, debca
524	abcde, acbde, bcade, bcdae, bcdea, bcda, cbade, cbdae, cbdea, cbeda, dbcae, dbcea, dcbae, dcbea, debca, decba
525	abcde, bacde, bcade, bcdae, bcdea, bcda, cbade, cbdae, cbdea, cbeda, dbcae, dbcea, dcbae, dcbea, debca, decba
526	abcde, acbde, bcade, bcdae, bcdea, bcda, cbade, cbdae, cbdea, cbeda, dbcae, dbcea, dbeca, dcbae, dcbea, debca
527	abcde, bacde, bcade, bcdae, bcdea, bcda, cbade, cbdae, cbdea, cbeda, dbcae, dbcea, dbeca, dcbae, dcbea, debca
528	abcde, bacde, bcade, bcdae, bcdea, bcda, cbade, cbdae, cbdea, cbeda, dbcae, dbcea, dcbae, dcbea, dceba, decba
529	abcde, acbde, bcade, bcdae, bcdea, bcda, cbade, cbdae, cbdea, cbeda, cebda, dbcae, dbcea, dcbae, dcbea
530	abcde, acbde, bcade, bcdae, bcdea, bcda, becda, cbade, cbdae, cbdea, cbeda, dbcae, dbcea, dcbae, dcbea, dceba
531	abcde, acbde, bcade, bcdae, bcdea, bcda, becda, cbade, cbdae, cbdea, cbeda, dbcae, dbcea, dcbae, dcbea, ebcda
532	abcde, bacde, bcade, bcdae, bcdea, bcda, becda, cbade, cbdae, cbdea, cbeda, cebda, dbcae, dbcea, dcbae, dcbea
533	abcde, bacde, bcade, bcdae, bcdea, bcda, becda, cbade, cbdae, cbdea, cbeda, dbcae, dbcea, dcbae, dcbea, dceba
534	abcde, bacde, bcade, bcdae, bcdea, bcda, becda, cbade, cbdae, cbdea, cbeda, dbcae, dbcea, dcbae, dcbea, ebcda
535	abcde, acbde, bcade, bcdae, bcdea, bcda, cbade, cbdae, cbdea, cbeda, dbcae, dbcea, dbeca, dcbae, dcbea, dceba
536	abcde, acbde, bcade, bcdae, bcdea, bcda, cbade, cbdae, cbdea, cbeda, dbcae, dbcea, dcbae, dcbea, ebcda, ecbda
537	abcde, bacde, bcade, bcdae, bcdea, bcda, cbade, cbdae, cbdea, cbeda, cebda, dbcae, dbcea, dbeca, dcbae, dcbea
538	abcde, bacde, bcade, bcdae, bcdea, bcda, cbade, cbdae, cbdea, cbeda, cebda, dbcae, dbcea, dcbae, dcbea, ecbda
539	abcde, bacde, bcade, bcdae, bcdea, bcda, cbade, cbdae, cbdea, cbeda, dbcae, dbcea, dbeca, dcbae, dcbea, dceba
540	abcde, abced, abdce, abdec, bacde, baced, badce, badec, dabce, dabec, daebc, dbace, dbaec, dbcea, dbeca, dcbea
541	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aebdc, bacde, bcaed, bcdea, bcda, cbade, cbaed, cbdea, cbeda, dbcea, dcbea
542	abcde, abced, acbde, acbed, bcade, bcaed, bcdea, bcda, cbade, cbaed, cbdea, cbeda, dbcea, dbeca, dcbea, dceba
543	abcde, abced, acbde, acbed, bcade, bcaed, bcdea, bcda, cbade, cbaed, cbdea, cbeda, dbcea, dcbea, ebcda, ecbda
544	abcde, abced, bacde, baced, bcade, bcaed, bcdea, bcda, cbade, cbaed, cbdea, cbeda, cebda, dbcea, dcbea, ecbda
545	abcde, abced, bacde, baced, bcade, bcaed, bcdea, bcda, cbade, cbaed, cbdea, cbeda, dbcea, dcbea, ebcda, ecbda
546	abcde, abced, abdce, abdec, adbce, adbec, adebc, adecb, dabce, dabec, daebc, daecb, dbace, dbaec, dbcae, dbcea
547	abcde, abdce, abdec, abedc, adbce, adbec, adebc, adecb, dabce, dabec, daebc, daecb, dbace, dbaec, dbcae, dbcea

Dom Index	Repräsentatives Domain
548	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, cabde, cabed, cadbe, cadeb, cbade, cbaed, cbdae, cbdea
549	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acdeb, acedb, cabde, cabed, cadeb, caedb, cbade, cbaed, cdeab, cedab, ecdab
550	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, adceb, cabde, cabed, cadeb, caedb, cbade, cbaed, cdeab, cedab, ecdab
551	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, cabde, cabed, cadeb, caedb, cbade, cbaed, cdeab, cedab, ecdab, edcab
552	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, cabde, cabed, cadeb, caedb, cbade, cbaed, cdeab, cedab, dceab, ecdab
553	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, bacde, baced, cabde, cabed, cadeb, caedb, cdeab, cedab, ecdab, edcab
554	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, bacde, baced, cabde, cabed, cadeb, caedb, cdeab, cedab, dceab, ecdab
555	abcde, abced, abdce, abecd, acbde, acbed, acdbe, acdeb, cabde, cabed, cadbe, cadeb, cbade, cbaed, cbdae, cbead
556	abcde, abced, abdce, abecd, acbde, acbed, acdeb, acedb, cabde, cabed, cadeb, caedb, cbade, cbaed, cbdae, cbead
557	abcde, abced, abecd, acbde, acbed, acdeb, acedb, adceb, cabde, cabed, cadeb, caedb, cbade, cbaed, cbdae, cbead
558	abcde, abced, abecd, acbde, acbed, acdeb, acedb, adceb, cabde, cabed, cadeb, caedb, cbade, cbaed, cbead, cdae
559	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, adceb, aedcb, cabde, cabed, cadeb, caedb, cbade, cbaed, cbdae, cbead
560	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, adceb, adceb, cabde, cabed, cadeb, caedb, cbade, cbaed, cbdae, cbead
561	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, adceb, aedcb, cabde, cabed, cadeb, caedb, cbade, cbaed, cbdae, cbead
562	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, adceb, aedcb, cabde, cabed, cadeb, caedb, cbade, cbaed, cbead, cdae
563	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, adceb, adceb, cabde, cabed, cadeb, caedb, cbade, cbaed, cbead, cdae
564	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acdeb, acedb, aedcb, cabde, cabed, cadeb, caedb, cbade, cbaed, cbead, cdae
565	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, adceb, aedcb, cabde, cabed, cadeb, caedb, cbade, cbaed, cbead, cdae
566	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, aedcb, aedcb, cabde, cabed, cadeb, caedb, cbade, cbaed, cbead, cdae
567	abcde, abced, abdce, abecd, acbde, acbed, acdbe, acdeb, cabde, cabed, cadbe, cadeb, cdabe, cdae, cdbae, cdeab
568	abcde, abced, abecd, abedc, acbde, acbed, acdbe, acdeb, cabde, cabed, cadbe, cadeb, cdabe, cdae, cdbae, cdeab
569	abcde, abced, abecd, abedc, acbde, acbed, acdbe, acdeb, cabde, cabed, cadbe, cadeb, cdabe, cdae, cdeab, cdeba
570	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, adceb, aedcb, cabde, cabed, cadeb, caedb, cbade, cbaed, cdae, cdeab
571	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, adceb, adceb, cabde, cabed, cadeb, caedb, cbade, cbaed, cdae, cdeab
572	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, adceb, aedcb, cabde, cabed, cadeb, caedb, cbade, cbaed, cdae, cdeab
573	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, aedcb, aedcb, cabde, cabed, cadeb, caedb, cbade, cbaed, cdae, cdeab
574	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, adceb, aedcb, cabde, cabed, cadeb, caedb, cbade, cbaed, cdae, ceadb
575	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, adceb, aedcb, cabde, cabed, cadeb, caedb, cbade, cbaed, cdae, ceadb
576	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, adceb, aedcb, cabde, cabed, cadeb, caedb, cbade, cbaed, deacb, edacb
577	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, cabde, cabed, cadeb, caedb, cbade, cbaed, deacb, decab, edacb, edcab
578	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, adceb, aedcb, cabde, cabed, cadeb, caedb, cbade, cbaed, cdeab, cedab
579	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, adceb, aedcb, bacde, baced, cabde, cabed, cadeb, caedb, cdae, cdeab
580	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, adceb, aedcb, bacde, baced, cabde, cabed, cadeb, caedb, cdae, eadcb
581	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, adceb, aedcb, bacde, baced, cabde, cabed, cadeb, caedb, cdae, ceadb
582	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, adceb, aedcb, bacde, baced, cabde, cabed, cadeb, caedb, deacb, edacb
583	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, adceb, aedcb, bacde, baced, cabde, cabed, cadeb, caedb, eadcb, edacb
584	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, bacde, baced, cabde, cabed, cadeb, caedb, deacb, decab, edacb, edcab
585	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, adceb, aedcb, bacde, baced, cabde, cabed, cadeb, caedb, cdeab, cedab
586	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, bacde, baced, cabde, cabed, cadeb, caedb, cdeab, cedab, decab, edcab
587	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, adceb, aedcb, bacde, baced, cabde, cabed, cadeb, caedb, daecb, eadcb
588	abcde, abced, acbde, acbed, acdeb, acedb, cabde, cabed, cadeb, caedb, deacb, decab, decba, edacb, edcab, edcba
589	abcde, acbde, acdbe, acdeb, acedb, adcbe, adceb, adceb, cabde, cadbe, cadeb, caedb, cdabe, cdae, cdbae, ceadb
590	abcde, acbde, acdbe, acdeb, acedb, adcbe, adceb, adceb, cabde, cadbe, cadeb, caedb, cdabe, cdae, cdbae, cdeab
591	abcde, acbde, acdbe, acdeb, acedb, adcbe, adceb, aedcb, cabde, cadbe, cadeb, caedb, cdabe, cdae, cdbae, cdeab
592	abcde, acbde, acdbe, acdeb, acedb, adcbe, adceb, aedcb, cabde, cadbe, cadeb, caedb, cbade, cdabe, cdae, ceadb

Dom Index	Repräsentatives Domain
593	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, ceabd, cebad, cedab, cedba, ecabd, ecbad, ecdab, ecdba
594	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, ceabd, ceadb, cebad, cedab, ecabd, ecadb, ecbad, ecdab
595	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, ceabd, ceadb, cebad, cebda, ecabd, ecadb, ecbad, ecdba
596	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, eabcd, eabdc, ebacd, ebadc, ecabd, ecadb, ecbad, ecdab
597	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, eabcd, eabdc, ebacd, ebadc, ecabd, ecbad, ecdab, ecdba
598	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, eabcd, eabdc, ebacd, ebadc, ecabd, ecadb, ecbad, ecdba
599	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, eabcd, eabdc, ebacd, ebadc, ecabd, ecbad, edabc, edbac
600	abcde, abced, abdec, abedc, bacde, baced, badec, baedc, deabc, debac, debca, decba, edabc, edbac, edbca, edcba
601	abcde, abdce, abdec, abedc, bacde, badce, badec, baedc, deabc, debac, debca, decba, edabc, edbac, edbca, edcba
602	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, cdabe, cdbae, dcabe, dcbae, eabcd, eabdc, ebacd, ebadc
603	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, cdabe, cdbae, cdeab, cdeba, dcabe, dcbae, dceab, dceba
604	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, cdeab, cdeba, cedab, cedba, ecdab, ecdba, edcab, edcba
605	abcde, abced, abdec, abedc, bacde, baced, badec, baedc, cdeab, cdeba, cedab, cedba, decab, decba, edcab, edcba
606	abcde, abced, acbde, acbed, adebc, adceb, aedbc, aedcb, bcdea, bceda, cbdea, cbeda, debca, decba, edbca, edcba
607	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ebacd, ebadc, ecabd, ecadb, ecdab
608	abcde, abced, abecd, abedc, acebd, acedb, aecbd, aecdb, bacde, baced, baecd, baedc, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab
609	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, ebacd, ebadc, ebdac, ebdca, edbac, edbca
610	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ebacd, ebadc, ebdac, ecabd, ecadb
611	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, bcade, bcaed, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ebacd, ebadc, ebdac
612	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, bcade, bcaed, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ebacd, ebadc, ebdac
613	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, bcade, bcaed, eabcd, eabdc, eacbd, ebacd, ebadc, ebdac, edbac
614	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, bcade, bcaed, bcdae, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ebacd, ebadc
615	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, bcade, bcaed, bcdae, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ebacd, ebadc
616	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, bcade, bcaed, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, ebacd, ebadc, edabc
617	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, bcade, bcaed, eabcd, eabdc, eacbd, ebacd, ebadc, edabc, edbac
618	abcde, abced, abecd, abedc, acebd, acedb, aecbd, aecdb, bacde, baced, baecd, baedc, bcade, bcaed, bcdae, eacbd, eacdb
619	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ebacd, ebadc, ecabd, ecadb, ecdab
620	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, bdace, bdcae, dbace, dbcae, eabcd, eabdc, eacbd, ebacd, ebadc
621	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, bacde, badce, baecd, baedc, bcdae, bdcae, dbcae, eabcd, eabdc, eacbd
622	abcde, abdce, abecd, abedc, bacde, badce, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, ebacd, ebadc, ebdac, ebdca, edbac, edbca
623	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, bacde, badce, baecd, baedc, bcade, bdace, dbace, eabcd, eabdc, eacbd
624	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, bacde, badce, baecd, baedc, bdace, dbace, eabcd, eabdc, eacbd, ecabd

Dom Index	Repräsentatives Domain
625	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, bacde, badce, baecd, baedc, dabce, dbace, dbcae, eabcd, eabdc, eacbd
626	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, bacde, badce, baecd, baedc, bcade, dabce, dbace, eabcd, eabdc, eacbd
627	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, bacde, badce, baecd, baedc, dabce, dbace, eabcd, eabdc, eacbd, ecabd
628	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, bacde, baced, badce, cabde, cabed, eabcd, eacbd, eacdb, ebacd, ecabd, ecadb, ecdab
629	abcde, abced, acbde, acbed, bacde, baced, cabde, cabed, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ebacd, ebadc, ecabd, ecadb, ecdab
630	abcde, abced, abdce, abecd, aebcd, aecbd, aecdb, bacde, baced, badce, baecd, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab
631	abcde, abced, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aecdb, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ebacd, ebadc, ecabd, ecadb, ecdab
632	abcde, abced, abecd, aebcd, aecbd, aecdb, aedcb, bacde, baced, baecd, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ecabd, ecadb, ecdab
633	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aecdb, bacde, baced, badce, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab
634	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aecdb, aedcb, bacde, baced, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb, ecabd, ecadb, ecdab
635	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aebdc, aecbd, aecdb, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ebacd, ebadc, ecabd, ecadb, ecdab
636	abcde, abced, abdce, abecd, acebd, acedb, aecbd, aecdb, bacde, baced, badce, baecd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab
637	abcde, abced, abecd, acebd, acedb, aecbd, aecdb, aedcb, bacde, baced, baecd, eacbd, eacdb, eadcb, ecabd, ecadb, ecdab
638	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acebd, acedb, aecbd, aecdb, bacde, baced, badce, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab
639	abcde, abced, acbde, acbed, acebd, acedb, aecbd, aecdb, aedcb, bacde, baced, eacbd, eacdb, eadcb, ecabd, ecadb, ecdab
640	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aecdb, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ebacd, ebadc, ecabd, ecadb, ecdab
641	abcde, abdce, acbde, acdbe, aebcd, aebdc, aecbd, aecdb, bacde, badce, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab
642	abcde, abdce, acbde, acdbe, aebcd, aebdc, aecbd, aecdb, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ebacd, ebadc, ecabd, ecadb, ecdab
643	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acdbe, acebd, aecbd, bacde, baced, badce, cabde, cabed, cadbe, caebd, cdabe, eacbd
644	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acdbe, acebd, bacde, baced, badce, cabde, cabed, cadbe, caebd, cdabe, eabcd, ecabd
645	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aecdb, aedcb, cabde, cabed, cbade, cbaed, cbdae, eabcd, eacbd, eacdb, eadcb
646	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aedbc, aedcb, cabde, cabed, cbade, cbaed, cbdae, eabcd, eacbd, eadbc, eadcb
647	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aedbc, aedcb, cabde, cabed, eabcd, eacbd, eadbc, eadcb, ebacd, edabc, edacb
648	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aedbc, aedcb, cabde, cabed, eabcd, eacbd, eadbc, eadcb, edabc, edacb, edbac
649	abcde, abced, acbde, acbed, acebd, acedb, aecbd, aecdb, bcade, bcaed, bcdae, bdcae, cbade, cbaed, cbdae, eabcd, eacdb
650	abcde, abced, abdce, acbde, acbed, acebd, acedb, aecbd, aecdb, bcade, bcaed, bcdae, cbade, cbaed, cbdae, eabcd, eacdb

Dom Index	Repräsentatives Domain
651	abcde, abced, acbde, acbed, acebd, acedb, aecbd, aecdb, aedcb, bcade, bcaed, cbade, cbaed, eachd, eacdb, eadcb, edacb
652	abcde, abdce, abdec, abedc, bacde, badce, badec, baedc, dabce, dabec, daebc, dbace, dbaec, dbcae, dbcea, dcbae, dcbea
653	abcde, abdce, abdec, abedc, aebdc, bacde, badce, badec, baedc, dabce, dabec, dbace, dbaec, dbcae, dbcea, dcbae, dcbea
654	abcde, abdce, abdec, abedc, bacde, badce, badec, baedc, dabce, dabec, dbace, dbaec, dbcae, dbcea, dcbae, dcbea, dceba
655	abcde, abdce, abdec, adbce, adbec, adebc, adecb, aedbc, aedcb, dabce, dabec, daebc, daecb, dbace, dbaec, dbcae, dbcea
656	abcde, abced, abecd, abedc, bacde, baced, baecd, baedc, cabde, cabed, cadbe, cadeb, cbade, cbaed, cdabe, cdaeb, cdeab
657	abcde, abced, abdce, abecd, acbde, acbed, acdbe, acdeb, cabde, cabed, cadbe, cadeb, cbade, cbaed, cbead, cdabe, cdaeb
658	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acdeb, adcbe, adceb, adecb, cabde, cabed, cadbe, cadeb, cbade, cbaed, cbdae, cbead
659	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acdeb, adcbe, adceb, adecb, cabde, cabed, cadbe, cadeb, cbade, cbaed, cbead, cbeda
660	abcde, abced, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aedbc, bacde, baced, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eachd, eadbc, ecabd, edabc
661	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aecdb, bacde, badce, baecd, baedc, bcdae, bdcae, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb
662	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aecdb, bacde, badce, baecd, baedc, bdace, bdcae, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb
663	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aedbc, bacde, badce, baecd, baedc, bdace, bdcae, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc
664	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, bacde, badce, baecd, baedc, bdace, bdcae, dbace, dbcae, eabcd, eabdc, eacbd
665	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aedbc, bacde, badce, baecd, baedc, bcdae, bdcae, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc
666	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aecdb, bacde, badce, baecd, baedc, bcade, bdace, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb
667	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aedbc, bacde, badce, baecd, baedc, bcade, bdace, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc
668	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aedbc, bacde, badce, baecd, baedc, bdace, eabcd, eabdc, eachd, eadbc, ecabd
669	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aecdb, bacde, badce, baecd, baedc, bcade, bcdae, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb
670	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aedbc, bacde, badce, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eachd, eadbc, ecabd, edabc
671	abcde, acbde, acdbe, cabde, cadbe, cdabe, cdbae, dcabe, dcbae, eabcd, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab, ecdba, edcab, edcba
672	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aedbc, aedcb, cabde, cabed, cbade, cbaed, eabcd, eacbd, eadbc, eadcb, edabc, edacb
673	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aedbc, aedcb, bacde, baced, cabde, cabed, eabcd, eacbd, eadbc, eadcb, edabc, edacb
674	abcde, abced, acbde, acbed, aebcd, aecbd, aedbc, aedcb, bcade, bcaed, bcdae, cbade, cbaed, cbdae, eabcd, eacbd, eadbc, eadcb
675	abcde, abced, acbde, acbed, acebd, acedb, aecbd, aecdb, aedcb, bcade, bcaed, bcdae, cbade, cbaed, cbdae, eabcd, eacdb, eadcb
676	abcde, abced, acbde, acbed, bcade, bcaed, bcdae, bcdea, cbade, cbaed, cbdae, cbdea, dbcae, dbcea, dcbae, dcbea, debca, decba

Dom Index	Repräsentatives Domain
677	abcde, abced, acbde, acbed, bcade, bcaed, bcdae, bcdea, cbade, cbaed, cbdae, cbdea, dbcae, dbcea, dbcea, dcbae, dcbea, debca
678	abcde, abced, abecd, acbde, acbed, bcade, bcaed, bcdae, bcdea, cbade, cbaed, cbdae, cbdea, dbcae, dbcea, dcbae, dcbea, dceba
679	abcde, abced, abecd, acbde, acbed, acebd, bcade, bcaed, bcdae, bcdea, cbade, cbaed, cbdae, cbdea, dbcae, dbcea, dcbae, dcbea
680	abcde, abced, abecd, acbde, acbed, acdbe, acdeb, adcbe, adceb, cabde, cabed, cadbe, cadeb, cbade, cbaed, cbead, cdabe, cdaeb
681	abcde, abced, acbde, acbed, acdbe, acdeb, adcbe, adceb, adceb, cabde, cabed, cadbe, cadeb, cbade, cbaed, cbead, cdabe, cdaeb
682	abcde, abced, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aecdb, bacde, baced, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab
683	abcde, abced, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aedbc, bacde, baced, baecd, baedc, bcade, bcaed, bcdae, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc
684	abcde, abced, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aedbc, bacde, baced, baecd, baedc, bcade, bcaed, eabcd, eabdc, eacbd, eadbc, edabc
685	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aecdb, bacde, badce, baecd, baedc, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb, ecdab
686	abcde, abdce, abecd, abedc, aebcd, aebdc, aecbd, aecdb, bacde, badce, baecd, baedc, bdace, eabcd, eabdc, eacbd, eacdb, ecabd, ecadb
687	abcde, abced, abecd, abedc, acbde, acbed, acdbe, acdeb, bacde, baced, baecd, baedc, beacd, beadc, bedac, cabde, cabed, cadbe, cadeb
688	abcde, abced, abecd, abedc, acbde, acbed, acdbe, acdeb, bacde, baced, baecd, baedc, beacd, beadc, cabde, cabed, cadbe, cadeb, cdabe, cdaeb

Tabelle C.2: Repräsentative Domains aller maximalen Condorcet-Domain-Strukturen für  $m = 5$  im strikten Präferenzraum

## C.2 Maximale Condorcet-Domain-Strukturen für den schwachen Präferenzraum

Die verwendeten Abkürzungen in den Spaltenüberschriften der Tabelle stehen für folgende Begriffe:

Dom Index	=	Domain Index
Anz Elem	=	Anzahl der Präferenzen im Domain
Max Weit	=	Maximale Weite
Stri MV	=	Strikte minimale Vielfalt
Schw MV	=	Schwache minimale Vielfalt
Voll bes	=	Voll besetztes Domain
Dom Prod	=	Domain-Produkt-Struktur
SP/SD	=	Schwache single-peakedness bzw. schwache single-dippedness
SC	=	Single-crossingness
Symm	=	Symmetrie
Verb	=	Zusammenhängendes Domain
Stri Pend	=	Pendant zu einem maximalen CD aus dem strikten Präferenzraum
Anz Isom	=	Anzahl der verschiedenen, zueinander isomorphen Domains

Dom Index	Anz Elem	Max Weit	stri MV	schw MV	voll bes	Dom Prod	SP / SD	SC	Symm	Verb	Stri Pend	Anz Isom
1	4	x	xx	xx					x		x	6
2	5		x	xx	x		x			x		2
3	5			xx			x			x		24
4	6		x	xx	x		x			x		8
5	6			xx	x		x			x		24
6	6			xx	x					x		24
7	6			xx	x		x			x		24
8	6			xx	x					x		24
9	6		x	xx	x		x			x		12
10	6			xx	x					x		8
11	7		x	xx	x		x			x		6
12	7	x		xx	x		xx	x	x	x		24
13	7			xx	x		x			x		24
14	7			xx	x		x			x		24
15	7			xx	x		x			x		48
16	7	x		xx	x		xx	x		x		48

Dom Index	Anz Elem	Max Weit	stri MV	schw MV	voll bes	Dom Prod	SP / SD	SC	Symm	Verb	Stri Pend	Anz Isom
17	7		x	xx	x		x			x		24
18	7			xx	x		x			x		24
19	7	x		xx	x		xx	x		x		48
20	7	x		xx	x		xx	x		x		24
21	7			xx	x		x			x		24
22	7	x		xx	x		xx	x		x		24
23	7			xx	x					x		24
24	7			xx	x					x		24
25	7			xx	x					x		24
26	7	x		xx	x		xx	x	x	x		24
27	8		x	x	x		x			x		24
28	8			x	x					x		24
29	8		x	xx	x	x						8
30	8	x		xx	x		xx			x		48
31	8	x		xx	x		xx			x		48
32	9	x		x								48
33	9	x		x	x		x	x		x		48
34	9	x		x	x		x	x		x		48
35	9	x		x	x		x	x		x		24
36	9	x		x	x		x	x		x		48
37	9			x	x		x			x		48
38	9			x	x		x			x		48
39	9			x	x					x		24
40	9	x		x	x		x	x		x		24
41	9			x	x					x		24
42	9			x	x					x		48
43	9		x	x	x		x			x		24
44	9			xx	x		x			x		24
45	9			xx	x		x			x		24
46	9	x		xx	x		xx		x	x		12
47	10		x	x	x					x		8
48	10		x	x								24
49	10	x		xx	x	x						24

Dom Index	Anz Elem	Max Weit	stri MV	schw MV	voll bes	Dom Prod	SP / SD	SC	Symm	Verb	Stri Pend	Anz Isom
50	10		x	xx	x	x						24
51	10	x		xx	x	x			x			24
52	11	x		x			x					48
53	11	x		x	x		x			x		48
54	11	x			x			x		x		48
55	11	x		x	x		x	x		x		48
56	11	x		x	x		x	x		x		48
57	11		x	x	x					x		24
58	11				x					x		48
59	11	x		x			x					48
60	11	x		x			x					48
61	11	x		x			x					48
62	11			x	x					x		48
63	11	x		x								48
64	11			x	x		x			x		48
65	11			x	x		x			x		48
66	11			x	x					x		48
67	11	x		x	x		x			x		48
68	11			xx	x					x		6
69	12	x	x	x							x	48
70	12	x	xx	xx		x			x		x	12
71	13	x			x					x		48
72	13	x		x	x		x			x		48
73	13	x		x	x		x			x		48
74	13	x			x					x		48
75	13	x			x			x		x	x	48
76	13			x	x					x		24
77	13		x	x	x		x			x		12
78	14	x	x	x	x	x					x	24
79	14		x	x								24
80	14			x								24
81	15	x			x					x		48
82	15		x	x	x		x			x		48

Dom Index	Anz Elem	Max Weit	stri MV	schw MV	voll bes	Dom Prod	SP / SD	SC	Symm	Verb	Stri Pend	Anz Isom
83	15				x					x		24
84	15	x	x	x							x	24
85	15	x	x	x							x	12
86	16	x									x	48
87	16	x	x	x							x	48
88	16										x	24
89	16	x									x	48
90	16		x	x							x	24
91	17	x	x	x	x		x			x	x	24
92	17				x					x	x	48
93	17		x	x	x					x	x	24
94	17				x					x	x	6
95	18	x	xx	xx	x	x			x		x	3
96	21	x			x					x	x	24

Tabelle C.3: Zusammenfassung aller maximalen Condorcet-Domain-Strukturen für  $m = 4$  im schwachen Präferenzraum

Dom Index	Repräsentatives Domain
1	abcd, bdac, cadb, dcba
2	a(bcd), b(acd), c(abd), d(abc), (abcd)
3	ab(cd), a(bcd), c(abd), d(abc), (abcd)
4	a(bc)d, b(ac)d, c(ab)d, d(abc), (abcd), (abc)d
5	ab(cd), c(bd)a, d(bc)a, (abcd), (ab)(cd), (bcd)a
6	ab(cd), ad(bc), a(bcd), c(abd), c(bd)a, (abcd)
7	ab(cd), a(bcd), c(bd)a, d(bc)a, (abcd), (bcd)a
8	ab(cd), ad(bc), a(bcd), c(bd)a, (abcd), (bcd)a
9	ab(cd), ba(cd), c(abd), d(abc), (abcd), (ab)(cd)
10	ab(cd), ac(bd), ad(bc), a(bcd), (abcd), (bcd)a
11	ab(cd), ba(cd), cd(ab), dc(ab), (abcd), (ab)(cd), (cd)(ab)
12	abcd, ab(cd), a(bcd), dcba, (abcd), (bcd)a, (cd)ba
13	abcd, abdc, ab(cd), a(bcd), (abcd), (bcd)a, (cd)ba
14	abcd, ab(cd), adcb, ad(bc), a(bcd), (abcd), (bcd)a
15	abcd, ab(cd), adcb, a(bcd), a(cd)b, (abcd), (bcd)a
16	abcd, ab(cd), a(bcd), dcba, d(bc)a, (abcd), (bcd)a
17	abcd, abdc, ab(cd), a(bcd), a(cd)b, (abcd), (bcd)a
18	abcd, abdc, ab(cd), a(bcd), (abcd), (cd)ba, (cd)(ab)

Dom Index	Repräsentatives Domain
19	abcd, ab(cd), a(bcd), dcba, d(abc), d(bc)a, (abcd)
20	abcd, ab(cd), a(bcd), dcba, dc(ab), d(abc), (abcd)
21	abcd, a(bc)d, cbad, c(ab)d, d(abc), (abcd), (abc)d
22	abcd, a(bc)d, dcba, d(bc)a, (abcd), (abc)d, (bcd)a
23	abcd, acbd, a(bc)d, d(bc)a, (abcd), (abc)d, (bcd)a
24	abcd, acbd, a(bc)d, d(abc), d(bc)a, (abcd), (abc)d
25	abcd, acbd, a(bc)d, d(abc), (abcd), (abc)d, (bc)ad
26	abcd, a(bc)d, dcba, d(abc), d(bc)a, (abcd), (abc)d
27	ab(cd), ba(cd), b(acd), b(cd)a, c(bd)a, d(bc)a, (ab)(cd), (bcd)a
28	ab(cd), ac(bd), ad(bc), a(bcd), ca(bd), c(abd), c(bd)a, (ac)(bd)
29	ab(cd), ac(bd), ad(bc), a(bcd), b(cd)a, c(bd)a, d(bc)a, (bcd)a
30	abcd, ab(cd), dcba, (abcd), (ab)cd, (ab)(cd), (bcd)a, (cd)ba
31	abcd, ab(cd), dcba, d(bc)a, (abcd), (ab)cd, (ab)(cd), (bcd)a
32	abcd, cabd, cdba, c(abd), c(ab)d, c(bd)a, dcba, (ab)cd, (cd)ba
33	abcd, cdba, c(abd), c(ab)d, c(bd)a, dcba, (abc)d, (ab)cd, (cd)ba
34	abcd, a(bc)d, cdba, c(abd), c(ab)d, c(bd)a, dcba, (abc)d, (cd)ba
35	abcd, dcba, (abc)d, (ab)cd, (bcd)a, (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad), (cd)ba
36	abcd, a(bc)d, dcba, (abc)d, (bcd)a, (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad), (cd)ba
37	abcd, adcb, ad(bc), a(bcd), a(bc)d, (abc)d, (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad)
38	abcd, adcb, a(bcd), a(bc)d, a(cd)b, (abc)d, (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad)
39	abcd, acbd, ad(bc), a(bcd), a(bc)d, (abc)d, (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad)
40	abcd, a(bc)d, dcba, d(bc)a, (abc)d, (bcd)a, (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad)
41	abcd, acbd, a(bc)d, d(bc)a, (abc)d, (bcd)a, (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad)
42	abcd, bacd, bdca, b(acd), b(ac)d, b(cd)a, (ab)cd, (bcd)a, (cd)ba
43	abcd, bacd, cd(ab), c(abd), c(ab)d, dc(ab), (abc)d, (ab)cd, (cd)(ab)
44	abcd, ab(cd), bacd, ba(cd), dc(ab), d(abc), (abcd), (ab)cd, (ab)(cd)
45	abcd, ab(cd), bacd, ba(cd), dc(ab), (abcd), (ab)cd, (ab)(cd), (cd)(ab)
46	abcd, ab(cd), dcba, dc(ab), (abcd), (ab)cd, (ab)(cd), (cd)ba, (cd)(ab)
47	ab(cd), ba(cd), bc(ad), bd(ac), b(acd), cb(ad), db(ac), (ab)(cd), (bc)(ad), (bd)(ac)
48	abcd, acbd, adbc, adcb, ad(bc), a(bc)d, (abc)d, (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad)
49	abcd, adcb, a(bcd), a(bc)d, a(cd)b, bcda, dcba, (bcd)a, (bc)da, (cd)ba
50	abcd, acbd, ad(bc), a(bcd), a(bc)d, bcda, cbda, d(bc)a, (bcd)a, (bc)da
51	abcd, adcb, ad(bc), a(bcd), a(bc)d, bcda, dcba, d(bc)a, (bcd)a, (bc)da
52	abcd, abdc, ab(cd), cabd, cdba, c(abd), c(ab)d, c(bd)a, (ab)cd, (ab)dc, (ab)(cd)
53	abcd, abdc, ab(cd), cdba, c(abd), c(ab)d, c(bd)a, (abc)d, (ab)cd, (ab)dc, (ab)(cd)
54	abcd, acbd, a(bc)d, cabd, cdba, c(abd), c(ab)d, c(bd)a, dcba, (ac)bd, (cd)ba
55	abcd, abdc, ab(cd), acbd, a(bc)d, cabd, cdba, c(abd), c(ab)d, c(bd)a, (ac)bd
56	abcd, cbad, cbda, cb(ad), cdba, c(ab)d, c(bd)a, dcba, (abc)d, (ab)cd, (cd)ba
57	abcd, abdc, ab(cd), acbd, acdb, ac(bd), a(bc)d, (abc)d, (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad)
58	abcd, acbd, acdb, ac(bd), adcb, a(bc)d, a(cd)b, (abc)d, (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad)
59	abcd, a(bc)d, bcad, bcda, bc(ad), dcba, (bcd)a, (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad), (cd)ba
60	abcd, a(bc)d, bcad, bcda, bc(ad), dcba, d(bc)a, (bcd)a, (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad)
61	abcd, adcb, ad(bc), a(bcd), a(bc)d, bcad, bcda, bc(ad), (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad)
62	abcd, ad(bc), a(bcd), a(bc)d, cbad, cbda, cb(ad), (abc)d, (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad)
63	abcd, adbc, ad(bc), a(bc)d, cbad, cbda, cb(ad), (abc)d, (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad)

Dom Index	Repräsentatives Domain
64	abcd, a(bc)d, cbad, cbda, cb(ad), d(bc)a, (abc)d, (bcd)a, (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad)
65	abcd, cbad, cbda, cb(ad), d(bc)a, (abc)d, (ab)cd, (bcd)a, (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad)
66	abcd, acbd, acdb, ac(bd), a(bc)d, bacd, bcad, bd(ac), b(acd), b(ac)d, (ab)cd
67	abcd, ab(cd), bacd, ba(cd), b(acd), b(cd)a, dcba, (ab)cd, (ab)(cd), (bcd)a, (cd)ba
68	abcd, abdc, ab(cd), bacd, badc, ba(cd), (abcd), (ab)cd, (ab)dc, (ab)(cd), (cd)(ab)
69	abcd, bacd, cabd, cbad, cbda, cb(ad), cdba, c(ab)d, c(bd)a, dcba, (ab)cd, (cd)ba
70	abcd, acbd, adbc, adcb, ad(bc), a(bc)d, bcda, cbda, dbca, dcba, d(bc)a, (bc)da
71	abcd, abdc, ab(cd), a(bc)d, cbad, cbda, cb(ad), cdba, c(bd)a, (abc)d, (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad)
72	abcd, cbad, cbda, cb(ad), cdba, c(bd)a, dcba, (abc)d, (ab)cd, (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad), (cd)ba
73	abcd, a(bc)d, cbad, cbda, cb(ad), cdba, c(bd)a, dcba, (abc)d, (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad), (cd)ba
74	abcd, abdc, ab(cd), cbad, cbda, cb(ad), cdba, c(ab)d, c(bd)a, (abc)d, (ab)cd, (ab)dc, (ab)(cd)
75	abcd, abdc, ab(cd), acbd, a(bc)d, cabd, cbad, cbda, cb(ad), cdba, c(ab)d, c(bd)a, (ac)bd
76	abcd, abdc, ab(cd), bacd, badc, ba(cd), b(acd), b(cd)a, (ab)cd, (ab)dc, (ab)(cd), (bcd)a, (cd)ba
77	abcd, abdc, ab(cd), a(bcd), a(cd)b, bacd, badc, ba(cd), b(acd), b(cd)a, (ab)cd, (ab)dc, (ab)(cd)
78	abcd, acbd, acdb, ac(bd), adcb, a(bc)d, a(cd)b, bcda, cbda, cdba, c(bd)a, dcba, (bc)da, (cd)ba
79	abcd, acbd, a(bc)d, bcad, bcda, bc(ad), cbad, cbda, cb(ad), d(bc)a, (bcd)a, (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad)
80	abcd, acbd, ad(bc), a(bcd), a(bc)d, bcad, bcda, bc(ad), cbad, cbda, cb(ad), (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad)
81	abcd, abdc, ab(cd), cbad, cbda, cb(ad), cdba, c(bd)a, (abc)d, (ab)cd, (ab)dc, (ab)(cd), (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad)
82	abcd, abdc, ab(cd), acbd, acdb, ac(bd), a(bc)d, cabd, cadb, ca(bd), c(abd), c(bd)a, (ac)bd, (ac)db, (ac)(bd)
83	abcd, acbd, acdb, ac(bd), adcb, a(bc)d, a(cd)b, cabd, cadb, ca(bd), c(abd), c(bd)a, (ac)bd, (ac)db, (ac)(bd)
84	abcd, acbd, adbc, adcb, ad(bc), a(bc)d, bcad, bcda, bc(ad), cbad, cbda, cb(ad), (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad)
85	abcd, acbd, a(bc)d, bcad, bcda, bc(ad), cbad, cbda, cb(ad), dbca, dcba, d(bc)a, (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad)
86	abcd, abdc, ab(cd), bacd, badc, ba(cd), bcda, bdca, b(cd)a, cbda, cdba, c(bd)a, (ab)cd, (ab)dc, (ab)(cd), (bc)da
87	abcd, acbd, a(bc)d, bcad, bcda, bc(ad), cbad, cbda, cb(ad), cdba, c(bd)a, dcba, (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad), (cd)ba
88	abcd, acbd, a(bc)d, bcad, bcda, bc(ad), bdca, b(cd)a, cbad, cbda, cb(ad), cdba, c(bd)a, (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad)
89	abcd, abdc, ab(cd), acbd, a(bc)d, bcad, bcda, bc(ad), cbad, cbda, cb(ad), cdba, c(bd)a, (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad)
90	abcd, abdc, ab(cd), acbd, acdb, ac(bd), a(bc)d, bcad, bcda, bc(ad), cbad, cbda, cb(ad), (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad)
91	abcd, bacd, bcad, bcda, bc(ad), b(ac)d, cbad, cbda, cb(ad), cdba, c(bd)a, dcba, (ab)cd, (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad), (cd)ba
92	abcd, bacd, bcad, bcda, bc(ad), bdca, b(ac)d, b(cd)a, cbad, cbda, cb(ad), cdba, c(bd)a, (ab)cd, (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad)
93	abcd, bacd, bcad, bcda, bc(ad), bdca, b(ac)d, b(cd)a, cbad, cbda, cb(ad), dbca, (ab)cd, (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad), (bd)ca
94	abcd, abdc, ab(cd), acbd, adbc, a(bc)d, a(bd)c, bacd, badc, ba(cd), bcad, bdac, b(ac)d, b(ad)c, (ab)cd, (ab)dc, (ab)(cd)
95	abcd, abdc, ab(cd), bacd, badc, ba(cd), cdab, cdba, cd(ab), dcab, dcba, dc(ab), (ab)cd, (ab)dc, (ab)(cd), (cd)ab, (cd)ba, (cd)(ab)
96	abcd, abdc, ab(cd), bacd, badc, ba(cd), bcad, bcda, bc(ad), b(ac)d, cbad, cbda, cb(ad), cdba, c(bd)a, (ab)cd, (ab)dc, (ab)(cd), (bc)ad, (bc)da, (bc)(ad)

Tabelle C.4: Repräsentative Domains aller maximalen Condorcet-Domain-Strukturen für  $m = 4$  im schwachen Präferenzraum

### C.3 Maximale Condorcet-Domain-Strukturen für den quasitransitiven Präferenzraum

Dom Index	Repräsentatives Domain
1	acb, bac, bca, b(ac), cab, (abc), (ab)(bc), (ac)b, (bc)(ab)
2	acb, bac, b(ac), cab, (abc), (ab)c, (ab)(ac), (ab)(bc), (ac)b, (bc)(ab)
3	bca, b(ac), cab, cba, c(ab), (abc), (ab)(bc), (bc)a, (bc)(ab), (bc)(ac)
4	bac, bca, b(ac), cab, cba, c(ab), (abc), (bc)a, (bc)(ab), (bc)(ac)
5	b(ac), cab, cba, c(ab), (abc), (ab)c, (ab)(ac), (ab)(bc), (bc)a, (bc)(ab), (bc)(ac)
6	bac, b(ac), cab, cba, c(ab), (abc), (ab)c, (ab)(ac), (bc)a, (bc)(ab), (bc)(ac)
7	acb, b(ac), cab, (abc), (ab)c, (ab)(ac), (ab)(bc), (ac)b, (bc)a, (bc)(ab), (bc)(ac)
8	acb, a(bc), bca, b(ac), (abc), (ab)(bc), (ac)b, (ac)(bc), (bc)a, (bc)(ab), (bc)(ac)
9	a(bc), bca, b(ac), cba, c(ab), (abc), (ab)(bc), (ac)(bc), (bc)a, (bc)(ab), (bc)(ac)
10	bac, b(ac), cba, c(ab), (abc), (ab)c, (ab)(ac), (ac)(bc), (bc)a, (bc)(ab), (bc)(ac)
11	a(bc), b(ac), cba, c(ab), (abc), (ab)c, (ab)(ac), (ab)(bc), (ac)(bc), (bc)a, (bc)(ab), (bc)(ac)
12	acb, a(bc), bca, b(ac), (abc), (ab)c, (ab)(ac), (ab)(bc), (ac)b, (ac)(bc), (bc)a, (bc)(ac)
13	a(bc), b(ac), c(ab), (abc), (ab)c, (ab)(ac), (ab)(bc), (ac)b, (ac)(ab), (ac)(bc), (bc)a, (bc)(ab), (bc)(ac)

Tabelle C.5: Repräsentative Domains aller maximalen Condorcet-Domain-Strukturen für  $m = 3$  im quasitransitiven Präferenzraum

## D Pendants im schwachen Präferenzraum

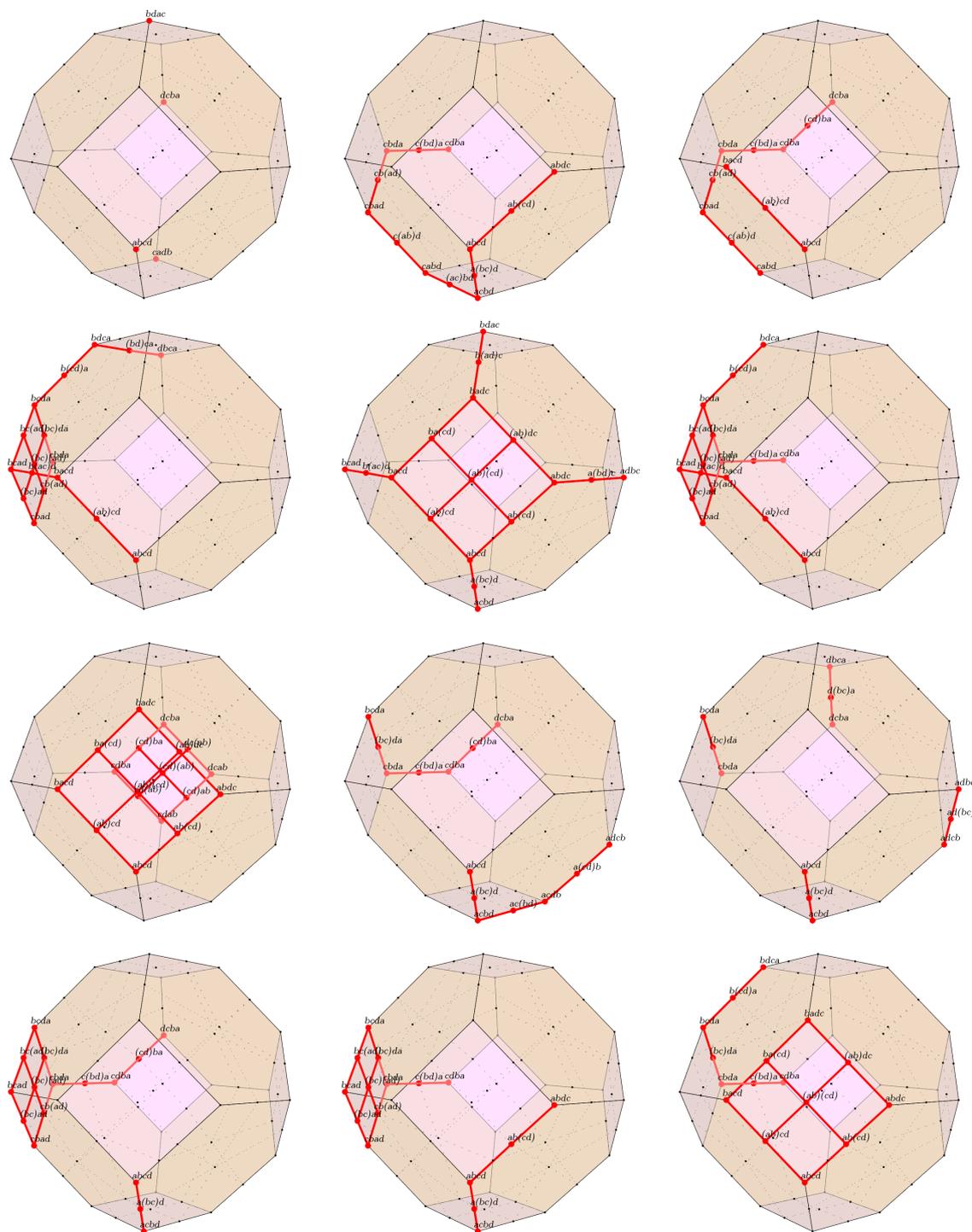


Abbildung D.1: Alle Pendants zu CD-Strukturen aus dem strikten Präferenzraum,  $m = 4$ , schwacher Präferenzraum

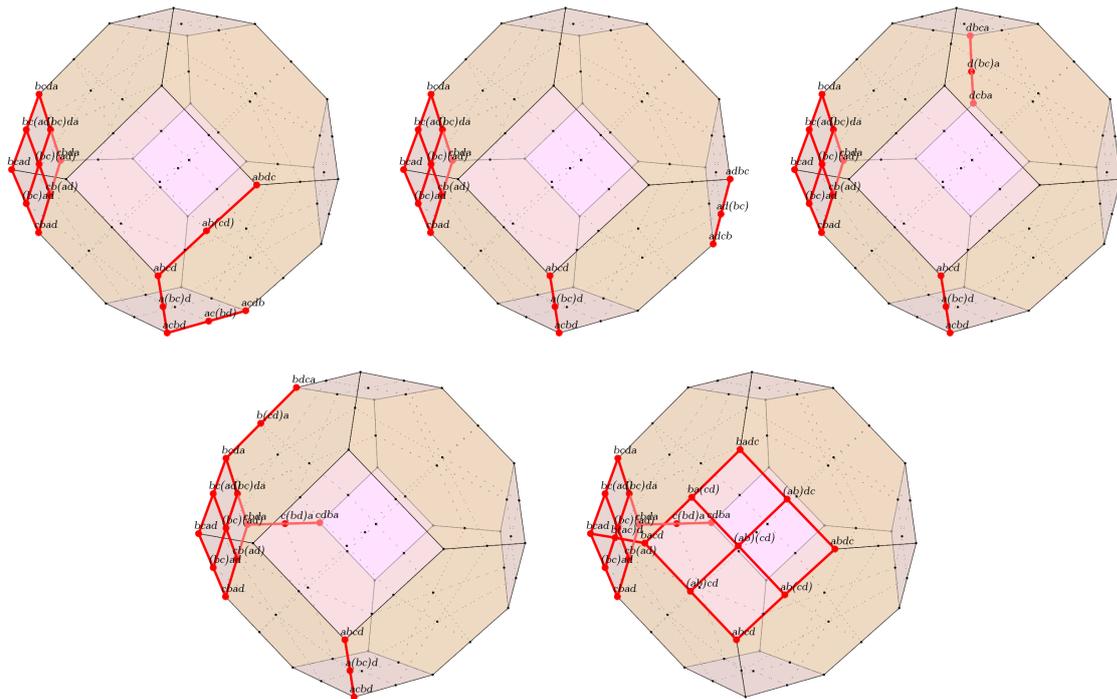


Abbildung D.1: Alle Pendants zu CD-Strukturen aus dem strikten Präferenzraum,  $m = 4$ , schwache Präferenzordnung, Fortsetzung

## Literaturverzeichnis

- [Abe85] Abello, James M: *A Study of an Independence System Arising in Group Choice via the Weak Bruhat Order*. Dissertation, University of California, San Diego, CA, 1985.
- [Abe91] Abello, James M: *The Weak Bruhat Order of  $S_\Sigma$ , Consistent Sets, and Catalan Numbers*. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 4(1):1–16, 1991.
- [Arr50] Arrow, Kenneth J: *A Difficulty in the Concept of Social Welfare*. The Journal of Political Economy, 58(4):328–346, 1950.
- [Arr51] Arrow, Kenneth J: *Social Choice and Individual Values*, 1951.
- [ASB99] Austen-Smith, David und Banks, Jeffrey S: *Positive Political Theory*, Band 2. University of Michigan Press, 1999.
- [Bla48] Black, Duncan: *On the Rationale of Group Decision-making*. Journal of Political Economy, 56(1):23–34, 1948.
- [Bla58] Black, Duncan: *The Theory of Committees and Elections*. Cambridge: Cambridge University Press, 1958.
- [BM02] Brinkmann, Gunnar und McKay, Brendan D: *Posets on up to 16 Points*. Order, 19(2):147–179, 2002.
- [Bor81] Borda, Jean Charles de: *Mémoire sur les élections au scrutin*. Histoire de l'Académie Royale des Sciences (Übersetzung von [Gra53]), 1781.
- [CLRS01] Cormen, Thomas H, Leiserson, Charles E, Rivest, Ronald L und Stein, Clifford: *Introduction to Algorithms 2nd Edition*, 2001.
- [CN89] Chameni-Nembua, Célestin: *Règle majoritaire et distributivité dans le permutoèdre*. Mathématiques Informatique et Sciences humaines, 108:5–22, 1989.
- [Con76] Condorcet, Marquis de: *Essay on the Application of Mathematics to the Theory of Decision-Making*. Neuauflage in Condorcet: Selected Writings, Keith Michael Baker (ed), 33, 1976.
- [Dem12] Demange, Gabrielle: *Majority relation and median representative ordering*. SERIES, 3(1-2):95–109, 2012.
- [DF61] Dummett, Michael und Farquharson, Robin: *Stability in Voting*. Econometrica, 29(1):33–43, 1961.
- [Die00] Diestel, Reinhard: *Graphentheorie*. Springer, 2000.
- [Dit16] Dittrich, Tobias: *All Condorcet Domains of Strict and Weak Orders on Four Alternatives*. Working Paper, 2016.
- [DK13] Danilov, Vladimir I und Koshevoy, Gleb A: *Maximal Condorcet Domains*. Order, 30(1):181–194, 2013.

- [DKK12] Danilov, Vladimir I, Karzanov, Alexander V und Koshevoy, Gleb: *Condorcet domains of tiling type*. Discrete Applied Mathematics, 160(7):933–940, 2012.
- [Fis96] Fishburn, Peter C: *Acyclic sets of linear orders*. Social Choice and Welfare, 14(1):113–124, 1996.
- [Fis02] Fishburn, Peter C: *Acyclic sets of linear orders: A progress report*. Social Choice and Welfare, 19(2):431–447, 2002.
- [Gib73] Gibbard, Allan: *Manipulation of Voting Schemes: A General Result*. Econometrica, 41(4):587–601, 1973.
- [GP14] Grossi, Davide und Pigozzi, Gabriella: *Judgment Aggregation: A Primer*. Synthesis Lectures on Artificial Intelligence and Machine Learning, 8(2):1–151, 2014.
- [GR08] Galambos, Adám und Reiner, Victor: *Acyclic sets of linear orders via the Bruhat orders*. Social Choice and Welfare, 30(2):245–264, 2008.
- [Gra53] Grazia, Alfred De: *Mathematical Derivation of an Election System*. Isis, 44(1/2):42–51, 1953.
- [GS96] Gans, Joshua S und Smart, Michael: *Majority voting with single-crossing preferences*. Journal of Public Economics, 59(2):219–237, 1996.
- [Ina64] Inada, Ken-Ichi: *A Note on the Simple Majority Decision Rule*. Econometrica, 32(4):525–531, 1964.
- [Kem59] Kemeny, John G: *Mathematics without Numbers*. Daedalus, 88(4):577–591, 1959.
- [KM99] Klavzar, Sandi und Mulder, Henry M: *Median graphs: characterizations, location theory and related structures*. Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, 30:103–128, 1999.
- [KM10] Karpfinger, Christian und Meyberg, Kurt: *Algebra*. Spektrum Akademischer Verlag, 2010.
- [LP09] List, Christian und Puppe, Clemens: *Judgment Aggregation: A Survey*. In: List, Christian und Puppe, Clemens (Herausgeber): *Handbook of Rational and Social Choice*. Oxford University Press, 2009.
- [May52] May, Kenneth O: *A Set of Independent Necessary and Sufficient Conditions for Simple Majority Decision*. Econometrica, 20(4):680–684, 1952.
- [Mon09] Monjardet, Bernard: *Acyclic Domains of Linear Orders: A Survey*. In: *The Mathematics of Preference, Choice and Order: Essays in Honor of Peter C. Fishburn*, Seiten 139–160. Springer, 2009.
- [Mur09] Muresan, Marian: *A Concrete Approach to Classical Analysis*, Band 14. Springer, 2009.
- [NP02] Nehring, Klaus und Puppe, Clemens: *Strategy-Proof Social Choice on Single-Peaked Domains: Possibility, Impossibility and the Space Between*. Unpublished manuscript, Universität Bonn, 2002.
- [PL17] Peters, Dominik und Lackner, Martin: *Preferences Single-Peaked on a Circle*. In: *AAAI*, Band 17, Seiten 649–655, 2017.
- [Pon06] Ponick, Eva: *Gremienentscheidungen unter Beachtung nicht vergleichbarer Alternativen*. Dissertation, Technische Universität Clausthal, 2006.

- 
- [PS18] Puppe, Clemens und Slinko, Arkadii: *Condorcet domains, median graphs and the single-crossing property*. Economic Theory, im Erscheinen, 2018.
- [Puk02] Pukelsheim, Friedrich: *Auf den Schultern von Riesen: Lull, Cusanus, Borda, Condorcet et al.* Litterae Cusanae, 2(1):3–15, 2002.
- [Pup16] Puppe, Clemens: *The Single-Peaked Domain Revisited: A Simple Global Characterization*. Working Paper Series in Economics, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Working Paper, 2016.
- [Rik82] Riker, William H: *Liberalism Against Populism: A Confrontation Between the Theory of Democracy and the Theory of Social Choice*. Waveland Press, 1982.
- [Rot90] Rothstein, Paul: *Order restricted preferences and majority rule*. Social Choice and Welfare, 7(4):331–342, 1990.
- [Sap09] Saporiti, Alejandro: *Strategy-proofness and single-crossing*. Theoretical Economics, 4(2):127–163, 2009.
- [Sat75] Satterthwaite, Mark A: *Strategy-Proofness and Arrow's conditions: Existence and Correspondence Theorems for Voting Procedures and Social Welfare Functions*. Journal of Economic Theory, 10(2):187–217, 1975.
- [Sen66] Sen, Amartya K: *A Possibility Theorem on Majority Decisions*. Econometrica, 34(2):491–499, 1966.
- [SP69] Sen, Amartya K und Pattanaik, Prasanta K: *Necessary and Sufficient Conditions for Rational Choice under Majority Decision*. Journal of Economic Theory, 1(2):178–202, 1969.
- [Tan14] Tangian, Andranik: *Mathematical Theory of Democracy*. Springer, 2014.
- [Tan15] Tangian, Andranik: *Decision making in politics and economics: 6. Empirically constructing the German political spectrum*. Working Paper Series in Economics, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Working Paper, 2015.
- [TS16] Toda, Takahisa und Soh, Takehide: *Implementing Efficient All Solutions SAT Solvers*. Journal of Experimental Algorithmics (JEA), 21(1), 2016.
- [Vic60] Vickrey, William: *Utility, Strategy, and Social Decision Rules*. The Quarterly Journal of Economics, 74(4):507–535, 1960.
- [War65] Ward, Benjamin: *Majority Voting and Alternative Forms of Public Enterprise*. In: Margolis, J. (Herausgeber): *The Public Economy of Urban Communities*, Seiten 112–126. 1965.