

Hocheffiziente und robuste finite Elemente niederer Ansatzordnung zur Simulation großer Deformationen von Festkörpern

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

von der Fakultät für

Bauingenieur-, Geo- und Umweltwissenschaften

des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Ing. Christoph Schmied
aus Gengenbach

Tag der mündlichen
Prüfung: 12.12.2017

Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. Karl Schweizerhof
Korreferenten: Prof. Dr.-Ing. habil. Manfred Bischoff
Prof. Dr.-Ing. Jože Korelc

Karlsruhe 2017

Kurzfassung

Schnelle und parallel einsetzbare Prozessoren ermöglichen die Berücksichtigung immer mehr relevanter Details in Finite-Elemente-Berechnungen von Anwendungen wie Crashesicherheitsanalysen oder Metallumformprozessen. Aufgrund ihrer einfachen Struktur, sind Elemente mit linearen Ansatzfunktionen gut für den Aufbau der meist schalenartigen Modelle geeignet, wobei die Details vermehrt mit Volumen- statt mit Schalenelementen abgebildet werden. Ohne entsprechende Modifikationen versteifen diese das Finite-Elemente-System und führen bei Biegung oder plastischem Fließen zu unrealistisch kleinen Verformungen, was mit der – im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit stehenden – Methodik inkompatibler Erweiterungen [186, 159] ausgeglichen werden kann. Die Idee: gezielt die Genauigkeit verbessernde Ansatzfunktionen aus Elementen höherer Ordnung mit internen Parametern verknüpfen, ohne dabei die Anzahl der Elementknoten zu erhöhen. Allerdings kann die Berechnung dieser internen Parameter die Rechendauer der Simulation deutlich verlängern, wenn für die Schritt-für-Schritt-Lösung des simulierten Zeitintervalls eine explizite Integrationsmethode gewählt wird, die sehr kleine Schrittweiten erfordert. Dann ist das Finite-Elemente-System so oft auszuwerten, dass die Elementoperationen – die Berechnung der internen Parameter eingeschlossen – deutlich aufwendiger als die Lösung der Systemgleichungen sind, die durch konzentrierte Massen an den Elementknoten sehr effizient ist. Zur Effizienzsteigerung wird daher ein Konzept mit künstlichen Massen der internen Parameter vorgestellt, die dann – analog zu den Verschiebungen an den Elementknoten – explizit berechnet werden. Sonst sind die internen Parameter masselos und somit „statisch“ zu berechnen, was, aufgrund der dann erforderlichen, oft mit Iterationen verbundenen impliziten Berechnung, deutlich aufwendiger ist. Verschiedene Strategien mit expliziter oder impliziter Berechnung sowie einer Kombination davon werden mit bis zu 30 inkompatiblen Freiheitsgraden ausführlich untersucht.

Ein weiterer zu untersuchender Aspekt sind infolge der Inkompatibilität auftretende Kinematiken [192, 163]. Die inkompatiblen Massen ermöglichen eine einfache Kontrolle, bei der die verursachenden Parameter identifiziert und abgefangen werden können. Allerdings erfordert die Kontrolle numerische Tests für jedes Beispiel, was bei komplexen Problemen eine deutliche Einschränkung darstellt. Darüber hinaus werden eine inkrementelle und eine ad hoc modifizierte inkompatible Elementformulierung untersucht, die zusätzlich – ohne weitere Maßnahmen – eine Volumenbedingung [121] erfüllen, die ähnlich zu den bekannten Orthogonalitätsbedingungen ist. Deren Auswirkung wird an einem analytischen Beispiel demonstriert und durch weitere numerische Untersuchungen gestützt.

Erste realistischere Beispiele bestätigen das Konzept der vorliegenden Arbeit.

Abstract

Fast and massively parallel usable processors allow considering a growing number of details in finite element simulations of car crash analysis or metal forming to name only two applications. Owing to their simple structure low order finite elements are well suited to model the mostly shell-like structures of which the details tend to be represented by solid and so called solid shell (or thick shell) elements instead of shell elements. These elements without any modification tend to lock the finite element system and lead in the case of bending or plastic flow to unrealistic small deformations which may be alleviated using – depicting the focus of this thesis – methods with incompatible enhancements [186, 159]. The idea: associate selected higher order shape functions, id est quadratic or cubic ones, with internal parameters as not to increase the number of nodes but improve accuracy. But – from the point of an explicit dynamic simulation – the computation of these internal parameters may significantly increase the runtime of the entire simulation since very small time step sizes are common. Those imply many times the evaluation of the element operations – including the internal parameters – leading to a domination of the costs compared to solve the system equations which are in the case of concentrated masses at the finite element nodes very efficient. In order to improve efficiency a concept which introduces artificial mass terms to the internal parameters designated to compute them explicitly analogous to the displacements at the nodes of the elements. Otherwise the internal parameters do not have a mass term and are computed as constraint conditions statically which is clearly more costly since the then used implicit computation often involves iterations. Different strategies employing a full explicit, a mixed explicit/implicit and a full implicit computation are studied with various enrichments including up to 30 internal parameters.

A further key aspect to be considered are the incompatibility-related kinematic modes [192, 163]. Due to the available incompatible mass the kinematics are easily detected and the responsible parameters may be intercepted. Unfortunately this entails doing numerical tests for each example and thus being a considerable restriction especially for rather complex problems. In addition, an incremental and an ad hoc modified incompatible element formulation are studied, which fulfill – without further actions – a volume constraint [121] similar to the well known orthogonality conditions. The effect of this modification is demonstrated on a simple analytical example and confirmed in further numerical examples.

Larger and more realistic examples confirm the concept presented in this thesis.

Danksagungen

Die Finite-Elemente-Methode und ihre vielfältigen Anwendungen im Bau- und Maschinenbauwesen – sie haben mich bereits früh im Studium interessiert und wurden mir durch Professor Schweizerhof und seine Mitarbeiter in Lehrveranstaltungen und als wissenschaftliche Hilfskraft näher gebracht, was nach seiner Anregung schließlich zur vorliegenden Arbeit geführt hat. Für die wissenschaftliche Arbeit schien mir das zu ihm entstandene vertrauensvolle Betreuungsverhältnis ideal und ich werde mich immer sehr gerne daran erinnern. Besonders geschätzt habe ich auch die mir gewährten großzügigen Freiheiten, seine Aktionen als erfahrener Berater und Fürsprecher und nicht zuletzt seine immer offene Tür, was mir ermöglichte diese Arbeit zu entwickeln.

Ich habe mich sehr gefreut, dass Professor Bischoff von der Universität Stuttgart und Professor Korelc von der Universität Ljubljana in Slowenien das Korreferat übernommen haben, wofür ich beiden neben den meist bei Kongressen geführten sehr hilfreichen Diskussionen danken möchte.

Außerdem danke ich den weiteren Mitgliedern der Prüfungskommission und für die Übernahme des Vorsitzes insbesondere Professor Betsch. Ihm und Professor Seelig sowie deren Mitarbeitern danke ich außerdem für die gute Zusammenarbeit am Institut nach dem Ausscheiden von Professor Schweizerhof.

Danken möchte ich auch Steffen Mattern, auf dessen exzellenter Vorarbeit ich aufbauen konnte. Ihm und allen anderen damaligen Kolleginnen und Kollegen am Institut, besonders Octavian Knoll, Philipp Hempel und Martin Helbig, danke ich für das vertrauensvolle und freundschaftliche Einvernehmen, das uns alle in einem produktiven Rahmen arbeiten ließ, was mir sehr gefallen hat.

Überaus dankbar bin ich meiner lieben Frau Olivia – zusammen mit unseren Kindern Chloé und Yoann hat sie mir bedingungslos den Rücken gestärkt und, falls erforderlich, mich in schwierigen Phasen aufgeheitert.

Karlsruhe, im August 2018

Christoph Schmied

Inhalt

Notation	xiii
1 Einleitung	1
2 Überblick zur Kontinuumsdiskretisierung in Raum und Zeit	7
2.1 Kontinuumsmechanik	7
2.1.1 Kinematische Beschreibung eines Festkörpers	7
2.1.2 Erhaltungssätze und Spannungen	13
2.1.3 Objektive Spannungsraten	14
2.1.4 Materialgesetze	15
2.2 Kontinuumsdiskretisierung mit finiten Elementen	19
2.2.1 Räumlich schwache Form des Gleichgewichts	19
2.2.2 Linearisierung der schwachen Form	21
2.2.3 Räumliche Diskretisierung	23
2.3 Lösung der Bewegungsgleichung mit einem expliziten Zeitintegrationsverfahren	26
2.3.1 Das zentrale Differenzenverfahren	26
2.3.2 Stabilität und die Effizienz beeinflussende Faktoren	29
2.3.3 Dämpfung und Behandlung von Schockwellen	30
2.3.4 Integration des Deformationsgradienten	31
2.3.5 Integration der Energiegleichungen	33
2.3.6 Massenskalierung	34
2.4 Das Newmarkverfahren als Beispiel eines impliziten Zeitintegrationsverfahrens	36
2.5 Anwendungsgebiete expliziter und impliziter Berechnungsverfahren	37
2.6 Vermeidung physikalisch nicht erklärbarer Versteifungseffekte in expliziten und impliziten Berechnungen	38
3 Stand der Methodik inkompatibler Erweiterungen	41
3.1 Entwicklung der Methodik inkompatibler Erweiterungen	41
3.1.1 Klassische Wilson-Formulierung inkompatibler Verschiebungen	42
3.1.2 Simo-Rifai-Formulierung der erweiterten Verzerrungen	44
3.1.3 Erweiterung für große Deformationen	46
3.1.4 Berechnung am Beispiel des impliziten Newmarkverfahrens	46
3.1.5 Inkompatible Freiheitsgrade in einem expliziten Verfahren	49

3.2	Wahl der Interpolation inkompatibler Freiheitsgrade	50
3.3	Numerische Robustheit	53
3.4	Volumen- und Volumenschalenelemente für Schalenprobleme	55
3.5	Zur Anzahl inkompatibler Freiheitsgrade	58
4	Zum Problem der effizienten und kinematik-freien Nutzung	61
4.1	Einfluss einer effizienten Berechnung inkompatibler Freiheitsgrade auf die Gesamtrechnzeit	61
4.1.1	Einfluss auf explizite und implizite Verfahren	61
4.1.2	Zur Kombination mit expliziten Verfahren	63
4.1.3	Zusammenfassung des Problems	65
4.1.4	Lösungsvorschläge im Schrifttum	65
4.1.5	Strategie zur Effizienzsteigerung	68
4.2	Kinematiken ausgehend von inkompatiblen Erweiterungen	69
4.2.1	Entdeckung und Nachweis	69
4.2.2	Vermeidung und Unvermeidbarkeit	69
4.2.3	Strategien zur Kinematik-Vermeidung	71
4.3	Zur Genauigkeit inkompatibel erweiterter Elementformulierungen . . .	72
4.3.1	Anforderungen an die Genauigkeit in expliziten Verfahren . . .	72
4.3.2	Verwendung einfacher Elemente aus dem Schrifttum	73
5	Ein Konzept zur expliziten Berechnung inkompatibler Freiheitsgrade .	75
5.1	Motivation	75
5.2	Variationelle Basis mit inkompatibler Trägheit	77
5.2.1	Um inkompatible Trägheit ergänzte Methodik inkompatibler Erweiterungen für explizite Zeitintegration	77
5.2.2	Entkopplung der Massen	77
5.2.3	Elimination der Spannungen	78
5.2.4	Behandlung der Lastterme	79
5.2.5	Resultierende schwache Form	80
5.2.6	Erweiterung für geometrisch nichtlineare Probleme	81
5.3	Beispiel mit 2 Freiheitsgraden	81
5.4	Berechnung inkompatibler Freiheitsgrade in einem expliziten Zeitintegrationsverfahren	84
5.4.1	Semidiskretes Gleichungssystem	84
5.4.2	Explizite Berechnung kompatibler Freiheitsgrade mit dem zentralen Differenzenverfahren	86
5.4.3	Explizite Berechnung inkompatibler Freiheitsgrade und Anpassung an die Standardzeitschrittgröße	88
5.4.4	Implizite Berechnung (statische Kondensation) inkompatibler Freiheitsgrade	91
5.5	Inkompatible Ansatzfunktionen und Massenmatrizen	93

5.5.1	Generierung inkompatibler Ansatzfunktionen	93
5.5.2	Inkompatible Massenmatrix	96
5.6	Generalisierte inkompatible Ansatzfunktionen	99
5.6.1	Idee	99
5.6.2	Zusammenhang mit erweiterter Verzerrungsinterpolation	100
5.6.3	Anwendung auf verschiedene Deformationsmaße	104
5.6.4	Die kompatible-inkompatible Massenkopplung	106
5.6.5	Die inkompatible Massenmatrix	108
5.6.6	Vereinfachte Berechnung der inkompatiblen Massenmatrix	110
5.6.7	Beispielhafte Umsetzung	111
5.6.8	Diskussion der Konsistenz der Dimensionen	112
5.7	Nutzenabschätzung für implizite Verfahren	114
5.8	Zusammenfassung	116
6	8-knotige Volumen- und Volumenschalen für inkompatible Erweiterungen	117
6.1	Auf Taylorreihen basierendes Wilson-Element mit inkompatiblen Massen	117
6.1.1	Variationelle Basis	117
6.1.2	Grundstruktur des 8-knotigen Hexaederelements	119
6.1.3	Gestaltung der Verzerrungen	121
6.1.4	Taylorreihenentwicklung der Ableitung der Ansatzfunktionen	124
6.1.5	Vereinfachung und Nähe zur Hourglassstabilisierung	125
6.1.6	Inkompatible Erweiterungen	129
6.1.7	Diskretisierung der schwachen Form mit inkompatiblen Massen	131
6.2	Volumenschalen mit inkompatiblen Erweiterungen	133
6.2.1	Anpassung der Verzerrungen nach dem MITC/ANS-Konzept	133
6.2.2	Konsistente Anpassung des Basisvektors in Dickenrichtung	134
6.2.3	Inkompatible Erweiterungen	137
6.3	Geometrisch lineare Benchmarkbeispiele	138
6.3.1	Vorbemerkung	138
6.3.2	Patchtest	138
6.3.3	Streifen mit trapezförmigen Elementen	140
6.3.4	Gegenseitig gedrückter Zylinder mit starren Endscheiben	145
6.3.5	Verdrehter Streifen	147
6.3.6	Verdrehter Streifen – sehr dünne Variante	151
6.3.7	Platte mit Netzverzerrung	153
6.3.8	Zusammenfassung der Ergebnisse	156
6.4	Inkrementelle Formulierung für geometrisch nichtlineare Probleme	157
6.4.1	Grundgerüst der inkrementellen Verschiebungsformulierung	157
6.4.2	Diskretisierte Gradientenoperatoren	158
6.4.3	Inkrementelle Spannungsberechnung	160

6.4.4	Integration des Deformationsgradienten	161
6.4.5	Residuum und Steifigkeitsberechnung	162
7	Effiziente Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade	163
7.1	Einfluss der inkompatiblen Massen	163
7.1.1	Zeitschrittgröße und Eigenfrequenzen	163
7.1.2	Uniforme und selektive Skalierung inkompatibler Massen	166
7.1.3	Eigenfrequenzen eines Ein-Element-Würfels	168
7.1.4	Effektive Skalierung inkompatibler Massen	171
7.1.5	Beurteilung der Auswirkung auf Genauigkeit und Effizienz	174
7.1.6	Zusammenfassende Beurteilung der Skalierung bei einer Anwendung auf verschiedene Elementformulierungen	176
7.2	Abschätzung der Skalierung	180
7.2.1	Gerschgorin-Kreise zur Abschätzung von Eigenfrequenzen	180
7.2.2	Berechnung der Skalierung	182
7.2.3	Bewertung der Abschätzung	183
7.3	Vereinfachte Berechnung der Skalierung	185
7.3.1	Uniforme, selektive und effektive Skalierung	185
7.3.2	Konservative und nicht konservative Zeitschrittschätzung	186
7.3.3	Bewertung der vereinfachten Schätzung	188
7.4	Berechnungsstrategien für die inkompatiblen Freiheitsgrade	190
7.5	Effizienzmessung an einem numerischen Beispiel	191
7.5.1	Impakt eines Kupferstabs	191
7.5.2	Bewertung der Genauigkeit	192
7.5.3	Bewertung der numerischen Effizienz	195
7.6	Automatisierte Implementierung mit ACEGEN	198
8	Robustheit gegenüber Kinematiken	201
8.1	Von inkompatiblen Moden ausgehende Kinematiken	201
8.1.1	Abgrenzung zu Kinematiken infolge reduzierter Integration	201
8.1.2	Zur Erkennung der Kinematiken	202
8.1.3	Strategien zur Kinematik-Vermeidung	203
8.2	Einfache Kontrolle der Kinematiken	204
8.2.1	Vorgehen bei reduzierter Integration	204
8.2.2	Erkennung einer möglichen Kinematik	205
8.2.3	Kontrolle der inkompatiblen Freiheitsgrade	206
8.2.4	Kompression eines Blocks mit kleinen Verzerrungen	206
8.2.5	Grenzen der einfachen Kontrolle	208
8.3	Veranschaulichung der Kinematiken	210
8.3.1	Herleitung eines Kinematik-Kriteriums	210
8.3.2	Erweiterung auf große hyperelastische Deformationen	217
8.4	Ad-hoc-Formulierung zur Vermeidung der Kinematik	221

8.4.1	Die Idee	221
8.4.2	Wiederholung der klassischen Formulierung	224
8.4.3	Beschreibung der vorgeschlagenen ad-hoc-Formulierung	226
8.4.4	Volumenbedingung nach Nagtegaal und Fox	229
8.4.5	Zur Erfüllung der Volumenbedingung mit der inkrementellen Verschiebungsformulierung	230
8.4.6	Erneute Betrachtung des Kinematik-Kriteriums	231
8.4.7	Objektivität der ad-hoc-Formulierung	235
8.5	Numerische Experimente	238
8.5.1	Biegesteifigkeit eines Elements	238
8.5.2	Kompression eines Blocks	242
8.5.3	Kompression eines hyperelastischen Würfels	246
8.5.4	Kompression eines hyperelastischen zylindrischen Stabs	249
8.6	Fazit	252
9	Numerische Experimente mit (dicken) Schalenstrukturen	255
9.1	Gekrümmtes Dach unter explosionsartiger Belastung	256
9.2	Beulen einer dünnen und geometrisch imperfekten zylindrischen Schale	259
9.3	Quadratrohr mit Doppelkammer	263
9.3.1	Motivation und Beschreibung des Beispiels	263
9.3.2	Bewertung der Qualität der Berechnung mit inkompatiblen Freiheitsgraden	265
10	Zusammenfassung	269
	Quellenverzeichnis	271
	Anhang	287
A	Implementierung mit ACEGEN	287
B	Totale Verschiebungsformulierung	297
C	Zur ad hoc berechneten Steifigkeit	301
D	Tabellarische Daten zu Abschnitt 6.3	303
E	Adjunkte und Inverse einer kleinen Matrix	307
	Abbildungsverzeichnis	309
	Tabellenverzeichnis	317

Notation

In der vorliegenden Arbeit wird, sofern nicht anders angegeben, nach den folgenden Regeln notiert. Die Einsteinsche Summenkonvention wird genutzt. Für Skalare wird Standardschrift, für Vektoren und Tensoren zweiter Stufe wird Fettschrift verwendet (zum Beispiel für die Cauchy-Spannungen σ) und für Tensoren vierter Stufe ein Doppelstrich (zum Beispiel für den Elastizitätstensor C). Um Tensorkomponenten in einem Vektor oder einer Matrix zu nutzen, wird der Tensor in geschweifte Klammern gesetzt (zum Beispiel $\{\sigma\}$), wobei die Anordnung der Matrix-Komponenten im Kontext angegeben werden.

Für die im Mittelpunkt der vorliegenden Arbeit stehenden inkompatiblen Größen werden die gleichen Bezeichnungen wie für die kompatiblen Größen genutzt, um zusätzliche Symbole zu vermeiden. Zur Unterscheidung werden einfach die Indizes *co* und *im* verwendet (zum Beispiel für die kompatible und die inkompatible Massenmatrix \mathbf{M}^{co} und \mathbf{M}^{im}).

Häufig verwendete Bezeichnungen sind in der folgenden Auflistung angegeben.

A	Gradienten-Matrix für unsymmetrische Deformationsgrößen
\mathcal{B}	Durch ein Kontinuum eingenommener Raum
$\partial\mathcal{B}^u, \partial\mathcal{B}^f$	Dirichlet- und Neumann-Rand auf \mathcal{B}
β	Matrix der Ableitungen der Ansatzfunktionen nach ξ, η und ζ
b	Matrix der Ableitungen der Ansatzfunktionen nach x, y und z Nur Kapitel 2: Volumenlast
B	Gradienten-Matrix für symmetrische Deformationsgrößen Nur Kapitel 2: Linker Cauchy-Green-Tensor
C	Rechter Cauchy-Green-Tensor
C, c	Materieller und räumlicher Elastizitätstensor
D	Verzerrungsgeschwindigkeit
d	Vektor der Elementfreiheitsgrade
E	Elastizitätsmodul
ε	Ingenieurverzerrungen
$\tilde{\varepsilon}_{ij}$	Auf kontravariante Basisvektoren bezogene Komponenten von ε
E	Greenscher Verzerrungstensor
\tilde{E}_{ij}	Auf kontravariante Basisvektoren bezogene Komponenten von E
e	Almansischer Verzerrungstensor

F	Deformationsgradient
$\mathbf{f}^{\text{int}}, \mathbf{f}^{\text{ext}}$	Vektor der inneren Kräfte und der äußeren Lasten
G	Schubmodul
$\mathbf{G}_i, \mathbf{G}^i$	Ko- und kontravariante Basisvektoren der Referenzkonfiguration
$\mathbf{g}_i, \mathbf{g}^i$	Ko- und kontravariante Basisvektoren der Momentankonfiguration
H, h	Materieller und räumlicher Verschiebungsgradient
J	Determinante des Deformationsgradienten
K	Steifigkeitsmatrix
\mathbf{K}^Δ	Tangentielle Steifigkeitsmatrix
λ, μ	Lamésche Parameter
L	Geschwindigkeitsgradient
M	Massenmatrix
ν	Poisson- bzw. Querdehnzahl
N_I	Lagrangesche Ansatzfunktion des I -ten Knotens eines finiten Elements
$\omega_i, \omega_{\text{max}}$	i -te und maximale Eigenfrequenz
P	1.-Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
Π	Gesamtpotential eines Systems
ρ_0, ρ	Rohdichte der Referenz- und Momentankonfiguration
S	2.-Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchy-Spannungstensor
s	Spannungsdeviator
t	Zeit
Δt	Zeitschrittgröße
T	Kinetische Energie
t	Spannungsvektor
$\boldsymbol{\tau}$	Kirchhoff-Spannungstensor
u	Verschiebungsvektor eines Punktes
V	Potentielle Energie
dV, dv	Volumenelement der Referenz- und Momentankonfiguration
W	Verzerrungsenergiefunktion
W	Spin- bzw. Drehgeschwindigkeitstensor
ξ, η, ζ	Koordinaten bezüglich eines finiten Elements
x, y, z	Kartesische Koordinaten
X, x	Ortsvektor eines Punktes der Referenz- und Momentankonfiguration

1 Einleitung

Die Finite-Elemente-Methode

Die Finite-Elemente-Methode (FEM) ist seit ihrer Einführung vor wenigen Jahrzehnten nicht mehr aus dem Ingenieurwesen wegzudenken. Als Ingenieure damit beginnen können, leistungsfähige Rechner als neues Werkzeug einzusetzen, werden neue technische Entwicklungen zunehmend verwissenschaftlicht, wobei die FEM eine zentrale Rolle spielt und große Fortschritte macht. Die FEM ist ein computergestütztes, numerisches Verfahren zur Ermittlung von Spannungen und Dehnungen an meist komplizierten, analytisch nicht berechenbaren, statisch oder dynamisch belasteten Bauteilen. Das Bauteil wird dabei durch eine Anzahl von Teilstücken (Elementen) endlicher (finiter) Größe (z. B. Stab-, Schalen- oder Volumenelementen) idealisiert. Das ursprünglich für den Flugzeugbau entwickelte Verfahren wird heute im gesamten ingenieurtechnischen Bereich eingesetzt. Für die Simulation mit der FEM ist eine räumliche und zeitliche Idealisierung der vorliegenden Fragestellung erforderlich. Um die räumliche Struktur eines Bauteils möglichst genau zu idealisieren, sind insbesondere Diskretisierungen des Kontinuums geeignet. Dabei werden im Gegensatz zu sogenannten Strukturelementen – beispielsweise Stab- oder Schalenelemente, bei denen nur die Stablänge oder die Schalenfläche diskret simuliert werden – keine Vereinfachungen hinsichtlich der Struktur getroffen. Die zu simulierende Zeitspanne wird durch aufeinanderfolgende diskrete Zeitschritte idealisiert. Die Simulation besteht also aus einer Abfolge von endlich vielen Momentaufnahmen der räumlichen Idealisierung.

Anwendungen und Anforderungen

Zu den zahlreichen Anwendungsgebieten zählen die Simulation von Metallumformprozessen oder Crashesicherheitsanalysen. In den meist schalenartigen Strukturen treten dabei große Deformationen in Kombination mit nichtlinearem Materialverhalten auf. Ein Beispiel sind mehrfach geschichtete Verbundwerkstoffe, die sich je nach Belastungsrichtung sehr unterschiedlich verhalten und aufwendig zu modellieren sind. Die dabei üblicherweise verwendeten Schalenelemente werden – aufgrund zunehmend höherer Anforderungen an die Genauigkeit und die detailgetreue Idealisierung der Strukturen – vermehrt durch Volumen- und Volumenschalenelemente (sogenannte *Solid Shells* oder *Thick Shells*) abgelöst. Der Grund liegt in der Natur des Strukturelements, das im Fall einer Schale keine diskrete Ober- und Unterseite besitzt. Das kann zu Schwierigkeiten führen, wenn geometrische Details wie Ecken oder Verschneidungen eines Bauteils genauer aufgelöst werden oder die Ober- und Unterseite der Schale in Kontakt mit

benachbarten Strukturen gerät. Zum Aufbau schwieriger Modelle, die zum Beispiel Komplexitäten in Form scharfer Kanten aufweisen, sind nach wie vor Elementformulierungen mit niedriger Ansatzordnung weit verbreitet. Da diese Elemente sehr einfach aufgebaut sind, ist die durchzuführende Simulation robust und effizient.

Anforderungen an die Elementformulierung

Zu den effektivsten Volumenelementen mit niedriger Ansatzordnung zählen 8-knotige Hexaederelemente mit linearen Lagrangeschen Ansatzfunktionen, die auch die Basis für Volumenschalenelemente bilden. Die 8 Knoten werden durch insgesamt 12 gerade Elementkanten miteinander verbunden und bilden das sehr einfache Grundgerüst des Elements. Ingenieure in Forschung und Praxis schätzen zwar diesen einfachen Aufbau wegen seiner Robustheit und guten Handhabung beim Zusammenbau schwieriger Strukturen oder der Erprobung neuer Methoden, doch er birgt auch Hürden bei der zuverlässigen und physikalisch sinnvollen Modellierung der Realität. Denn eine Elementformulierung, die mit diesem einfachen Aufbau direkt aus den Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik hergeleitet wird, führt in zahlreichen Anwendungsfällen zu nichtphysikalischen versteifenden Effekten, die ein realistisches Strukturverhalten blockieren und damit unzuverlässige Ergebnisgrößen zur Folge haben.

Um das Verhalten dieser Elemente zu verbessern, existieren unterschiedliche Ansätze und Methoden. In der vorliegenden Arbeit werden wesentliche Mängel mit der Methode inkompatibler Verschiebungen oder Verzerrungen, die auf Wilson et al. [186] im Jahr 1973 zurückgeht, kompensiert. Dazu werden die linearen Funktionen gezielt mit denen aus einem hierarchisch eine oder zwei Ordnungen höher liegenden Element angereichert, um die wesentlichen versteifenden Effekte zu vermeiden. Dabei sind Funktionen aus Elementen einer Ordnung höher meist ausreichend. Ein großer Vorteil ist, dass die einfache Struktur des 8-knotigen Hexaederelements und alle damit verbundenen Vorteile erhalten bleiben. Die Methodik inkompatibler Erweiterungen wies zunächst noch einige Defizite bezüglich einer konsistenten Herleitung auf, wurde aber schließlich nach einigen Verbesserungen im Jahr 1990 infolge einer Generalisierung mit inkompatiblen Verzerrungen von Simo und Rifai [159] in Wissenschaft und Praxis akzeptiert. Im Anschluss an diesen Meilenstein gewann die Methode zunehmend an Popularität und es erscheinen immer noch zahlreiche Publikationen dazu. Ein wesentlicher Grund dafür ist die vollständige Unabhängigkeit von der Materialformulierung, da direkt die Verschiebungen oder ein Deformationsmaß erweitert werden. Fast ebenso wichtig sind die damit gewonnenen Möglichkeiten, beispielsweise auch große Unterschiede in den Verhältnissen der Seitenlängen zuzulassen. Es bleibt zu erwähnen, dass die dünn besetzte Struktur der sogenannten B-Matrix des zugrundeliegenden 8-knotigen Hexaederelements erhalten bleibt, da das Element nur erweitert wird. Für die meisten anderen Formulierungen sind üblicherweise Modifikationen der B-Matrix erforderlich, die anschließend sehr viel dichter besetzt und damit numerisch weniger effizient sind. Die Methode und danach benannte Elementformulierungen

tragen bei Bezug auf die Originalformulierung mit inkompatiblen Verschiebungen häufig die Bezeichnung IM- oder ICM-Elemente, als Abkürzung für inkompatible Moden (*Incompatible Modes*). Bei Bezug auf die inkompatiblen Verzerrungen wird die Bezeichnung EAS-Elemente (*Enhanced Assumed Strains*) verwendet.

Das große Interesse an der Methode führte zu zahlreichen detaillierten Untersuchungen, bei denen auch Nachteile aufgedeckt wurden. Das ist zum einen der höhere Aufwand, der für die Behandlung der zusätzlich eingeführten höheren Terme aufgewendet werden muss und zu Konsequenzen für die allgemeine Nutzbarkeit, insbesondere in expliziten Verfahren, geführt hat. Ein anderer Nachteil sind Kinematiken, die durch die inkompatiblen Größen eingeführt werden und schon kurz nach der zentralen Publikation von Simo und Rifai von Reese und Wriggers [192] entdeckt wurden. Auch mit intensiven Bemühungen konnte bislang die Effizienz und Robustheit gegenüber Kinematiken nicht zufriedenstellend verbessert werden. Daher wird empfohlen, die Methode nur mit größter Vorsicht zu nutzen, siehe Sussman und Bathe [163], oder, wenn möglich, durch andere Methoden zu ersetzen.

Zu den Kernthemen der vorliegenden Arbeit zählen daher **(1) die Genauigkeit der inkompatibel erweiterten Elemente, (2) deren numerische Robustheit gegenüber Kinematiken sowie (3) die numerische Effizienz der Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade.** Diese drei Anforderungen sind direkt miteinander gekoppelt und aufgrund der unterschiedlichen Ziele schwierig zu erfüllen.

Auswirkungen der Elementformulierungen auf das Lösungsverfahren

Zudem spielt das für die Simulation gewählte Lösungsverfahren der zeitabhängigen Probleme eine wichtige Rolle. Es existieren implizite (indirekte) und explizite (direkte) Lösungsverfahren, deren wesentlicher Unterschied in der Größe der Schrittweite zwischen zwei Zeitpunkten der Lösung liegt. In impliziten Verfahren ist, aufgrund der vergleichsweise großen Schrittweiten, der Flaschenhals für eine numerisch effiziente Simulationen durch den hohen Aufwand für die direkte oder oft iterative Lösung des für das Modell zusammengefassten Gleichungssystems gegeben. Durch größere und damit weniger Elemente im Modell kann der Gleichungslöser entlastet werden und, um dabei auch eine ausreichende Qualität der Ergebnisse sicherzustellen, ist die Methode inkompatibler Verschiebungen oder Verzerrungen aufgrund ihrer Flexibilität sehr gut geeignet. Der zusätzliche Aufwand zur Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade fällt dabei nicht so sehr ins Gewicht, da der Flaschenhals impliziter Verfahren durch die Lösung des gesamten Gleichungssystems dominiert wird. Für die höhere Genauigkeit ist das Opfer aufwendigerer Elementoperationen und dadurch leicht längerer Rechenzeiten also vertretbar.

Dagegen sind bei expliziten Zeitintegrationsverfahren a priori nur sehr kleine Schrittweiten möglich, aber für die zusätzlichen inkompatiblen Freiheitsgrade ist eine direkte Gleichungslösung erforderlich. Der Flaschenhals für den numerischen Aufwand korreliert daher direkt mit dem Aufwand der Elementtechnologie, da diese Gleichungen

aufgrund der sehr kleinen Schrittweiten sehr häufig aufgerufen werden. Die Methode inkompatibler Verschiebungen ist daher schwieriger mit einem sinnvollen Kosten-Nutzen Verhältnis zu vereinbaren. Großen Erfolg haben daher aufgrund ihrer vereinfachenden Annahmen bislang Elemente mit Ein-Punkt-Integration und Stabilisierung. Diese werden häufig als *constant stress solids* bezeichnet, da aufgrund des einzelnen Integrationspunktes nur konstante Spannungszustände abgebildet werden können. Für die überwiegend von Trägheitskräften dominierten Anwendungen, spielen diese Vereinfachungen oft keine entscheidende Rolle, aber es treten doch häufig Kinematiken auf. Selektiv reduziert integrierte Elemente (siehe Hughes [69]) sind dann bislang das Mittel der Wahl, allerdings dann mit Einschränkungen bezüglich Elementgeometrie und Versteifungsartefakten sowie auch bezüglich Materialformulierungen.

Ziel und Aufbau der Arbeit

Um mit expliziten Zeitintegrationsverfahren in sehr großen und komplexen Modellen die genaue Abbildung von physikalisch nichtlinearem Verhalten ohne vereinfachende Annahmen im Stoffgesetz zu beherrschen, ist die Weiterentwicklung hoch effizienter Elementformulierungen, die von nichtphysikalischen Artefakten und Instabilitäten frei sind, von hohem Interesse. Ergo ist auch die weitere Entwicklung der Methode inkompatibler Verschiebungen oder Verzerrungen für die Nutzung innerhalb eines expliziten Zeitintegrationsverfahrens von Interesse. Die zentrale Fragestellung ist dabei, die inkompatiblen Freiheitsgrade effizient einzubetten und gleichzeitig das Auftreten von künstlichen Kinematiken zu vermeiden.

Diese wird in dieser Arbeit nach dem Schema in Abbildung 1.1 erarbeitet. In **Kapitel 2** werden die Grundlagen bereitgestellt, auf der die Inhalte dieser Arbeit basieren. In **Kapitel 3** folgt eine Übersicht zum Aufbau und der Entwicklung der Methodik inkompatibler Freiheitsgrade. Mit dieser Basis werden die zwei Kernthemen der effizienten Berechnung inkompatibler Freiheitsgrade in einer expliziten Berechnung und der numerischen Robustheit gegenüber Kinematiken, die von den inkompatiblen Freiheitsgraden ausgehen in **Kapitel 4** detailliert beschrieben und durch eine Literaturbetrachtung analysiert, inwiefern diese Fragen bereits beantwortet wurden. Um diese beiden Kernthemen zu erproben, wird die Erarbeitung geeigneter, universell einsetzbarer Elementformulierungen als drittes Thema aufgenommen. Die schrittweise Lösung, beginnend mit dem methodischen Ansatz, die inkompatiblen Freiheitsgrade ebenfalls mit einem expliziten Verfahren zu lösen, wird in **Kapitel 5** vorgestellt. In **Kapitel 6** folgt der eher technische Schritt, eine universell für geometrisch lineare und nichtlineare Probleme mit inkrementellen und totalen Verschiebungsformulierungen einsetzbare Elementformulierung auszuarbeiten und vergleichbaren Elementen aus der Literatur gegenüberzustellen. Dabei liegt das Augenmerk auf einer effizienten Programmierung, wofür das Spezialwerkzeug ACEGEN [85] genutzt wird, was die automatisierte Generierung von effizientem Quelltext auf Basis einer symbolischen Eingabe der benötigten Elementgleichungen erlaubt. Diese Elemente werden für die

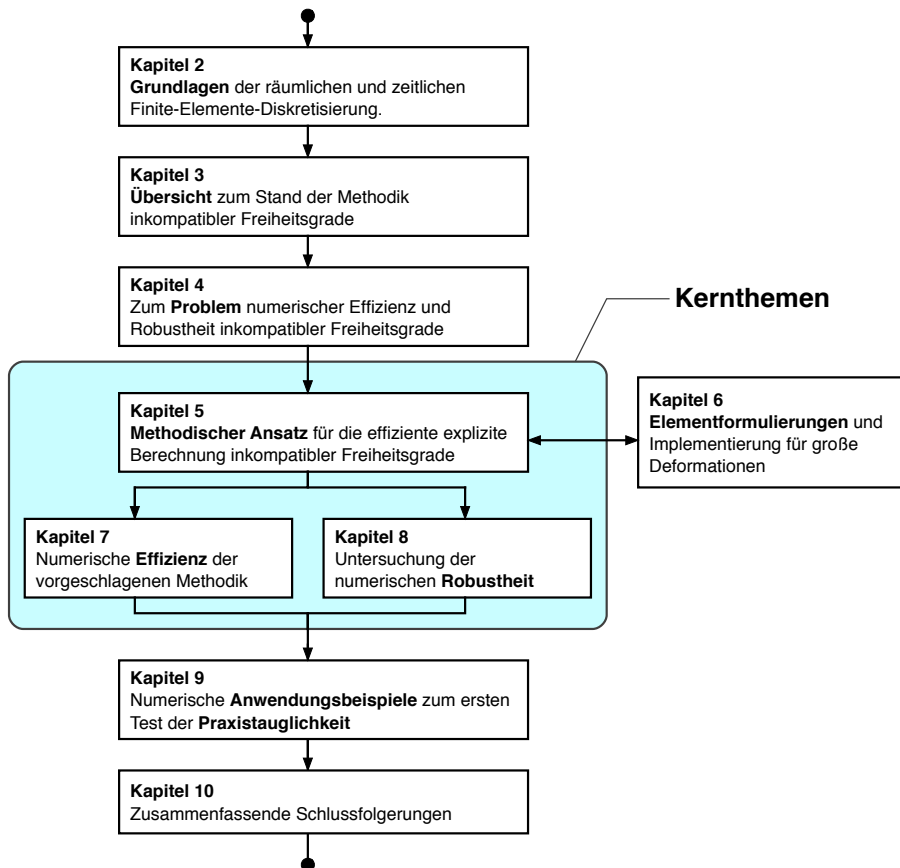


Abbildung 1.1: Aufbau der Dissertation.

Untersuchungen in den nächsten Schritten genutzt. Für die Analyse der numerischen Effizienz in **Kapitel 7** werden für das Konzept aus Kapitel 5 geeignete Berechnungsstrategien an einem numerischen Beispiel untersucht. Daran schließt **Kapitel 8** mit einer eingehenden Betrachtung der numerischen Robustheit an. Es werden zwei – an den methodischen Ansatz aus Kapitel 5 angepasste – numerisch robuste Strategien analytisch und numerisch an Beispielen untersucht. Abschließend werden, mit den Elementtechnologien aus Kapitel 6 und einer Kombination der numerisch effizienten Strategie aus Kapitel 7 sowie der numerisch robusten Strategie aus Kapitel 8, drei numerische Anwendungsbeispiele in **Kapitel 9** betrachtet. Die Schlussfolgerungen und ein Ausblick werden in **Kapitel 10** gezogen.

2 Überblick zur Kontinuumsdiskretisierung in Raum und Zeit

Das vorgestellte Konzept der vorliegenden Arbeit basiert auf den Grundlagen, die in diesem Kapitel knapp zusammengefasst werden: Aufbauend auf den benötigten mechanischen Grundlagen des Kontinuums, wird sowohl dessen räumliche Diskretisierung mit der Finite-Elemente-Methode sowie ein explizites und ein implizites Integrationsverfahren vorgestellt, um die Berechnung zeitlich zu diskretisieren und voranschreiten zu lassen. Dabei wird zum einen auf die typischen Anwendungsgebiete und zum anderen auf bevorzugt eingesetzte Elementformulierungen, für explizite und implizite Verfahren eingegangen. Für Details wird auf Zienkiewicz und Taylor [194, 195], Belytschko et al. [15], Cook et al. [37] und Crisfield [42, 41] verwiesen; sowie speziell für die Kontinuumsmechanik auf Holzapfel [67] und Jaunzemis [74]. Auf weitere genutzte Arbeiten wird an der betroffenen Stelle verwiesen.

2.1 Kontinuumsmechanik

2.1.1 Kinematische Beschreibung eines Festkörpers

Bewegung und Deformationsmaße

Die Bewegung χ eines Festkörpers aus einer undeformierten Referenzkonfiguration \mathcal{B}_0 in eine Momentankonfiguration \mathcal{B} ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Die folgende kinematische Beschreibung erfolgt auf der Basis eines raumfesten orthogonalen kartesischen Koordinatensystems. Die Abbildung eines beliebigen materiellen Punktes P mit den Koordinaten \mathbf{X} auf den Punkt P' mit den Koordinaten \mathbf{x} zu einem Zeitpunkt t sowie die Umkehrung dieser Bewegung werden durch

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t), \quad \mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (2.1)$$

ausgedrückt, wobei vorausgesetzt werden muss, dass die Bewegung eindeutig ist. Die Verschiebung von P nach P' wird durch

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \chi(\mathbf{X}, t) - \chi(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (2.2)$$

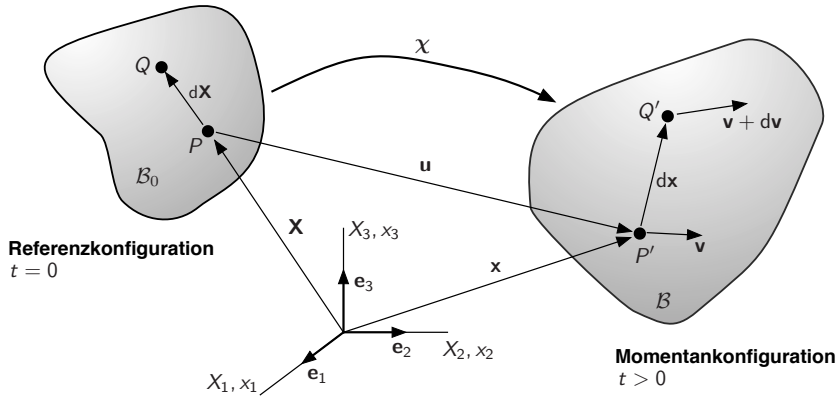


Abbildung 2.1: Kinematik der Deformation eines Festkörpers.

beschrieben. Die Abbildung und Verschiebung eines zu P benachbarten Punktes Q mit den Koordinaten $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$ auf den Punkt Q' mit den Koordinaten $\mathbf{x} + dx$ erfolgt analog. Um die Geschwindigkeit und Beschleunigung zu ermitteln, wird die Bewegung (2.1)₁ bei festgehaltenem \mathbf{X} nach der Zeit abgeleitet

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \dot{\mathbf{u}}, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial^2 \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \dot{\mathbf{v}}. \quad (2.4)$$

Diese Form der Zeitableitung wird als materielle Zeitableitung einer in Lagrangescher Form vorliegenden Größe $\mathbf{T}(\mathbf{X}, t)$ bezeichnet

$$\frac{d}{dt} \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} = \dot{\mathbf{T}}. \quad (2.5)$$

Liegt die abzuleitende Größe $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ in Abhängigkeit räumlicher Koordinaten \mathbf{x} vor, die wiederum selbst von der Zeit t abhängen, muss die Kettenregel angewandt werden. Hierfür wird auf die entsprechende Literatur verwiesen und daher nicht weiter ausgeführt.

Zur Beschreibung von Deformationen wird der Deformationsgradient durch die Ableitung der Bewegung nach den materiellen Koordinaten definiert

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \text{Grad} \mathbf{x}(\mathbf{X}, t). \quad (2.6)$$

Er verbindet Linienelemente der Referenz- mit der Momentankonfiguration, die zwischen den Punkten P und Q sowie P' und Q' dargestellt sind über

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}. \quad (2.7)$$

Die Änderung von Volumenelementen zwischen der Referenz- und Momentankonfiguration wird mit der Determinanten J des Deformationsgradienten beschrieben

$$dv = J(\mathbf{X}, t) dV, \quad (2.8)$$

wobei um negative Volumenelemente auszuschließen

$$J(\mathbf{X}, t) = \det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) > 0 \quad (2.9)$$

gelten muss. Für numerische Umsetzungen mit Bezug zur Momentankonfiguration ist die Beschreibung der Inversen des Deformationsgradienten in Abhängigkeit der räumlichen Koordinaten hilfreich

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{X}^{-1}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \text{grad} \mathbf{X}(\mathbf{x}, t). \quad (2.10)$$

Mit dem Greenschen Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{1}) \quad (2.11)$$

wird ein auf die Referenzkonfiguration bezogenes Verzerrungsmaß eingeführt, welches sich durch den rechten Cauchy-Green-Tensor $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ beschreiben lässt. Ein auf die Momentankonfiguration bezogenes Verzerrungsmaß ist der Almansische Verzerrungstensor

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2} (\mathbf{1} - \mathbf{B}^{-1}), \quad (2.12)$$

dessen Beschreibung gleichzeitig den linken Cauchy-Green-Tensor $\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$ einführt. Durch ein Verschieben in die Momentankonfiguration wird der Greensche in den Almansischen Verzerrungstensor

$$\mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1}, \quad (2.13)$$

und umgekehrt über ein Zurückziehen in die Referenzkonfiguration der Almansische in den Greenschen Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \mathbf{e} \mathbf{F} \quad (2.14)$$

transformiert. Der Gradient der Verschiebung (2.2) mit Bezug auf die materiellen Koordinaten

$$\mathbf{H} = \text{Grad} \mathbf{u} = \text{Grad} \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \text{Grad} \mathbf{X} = \mathbf{F} - \mathbf{1} \quad (2.15)$$

liefert eine Beziehung zum Deformationsgradienten. Wird die Verschiebung in Gleichung (2.2) mit (2.1)₂ in Abhängigkeit der räumlichen Koordinaten ausgedrückt und der Gradient mit Bezug auf die räumlichen Koordinaten bestimmt

$$\mathbf{h} = \text{grad} \mathbf{u} = \text{grad} \mathbf{x} - \text{grad} \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{1} - \mathbf{F}^{-1}, \quad (2.16)$$

erhält man eine Beziehung zur Inversen des Deformationsgradienten. Damit lässt sich zusammen mit Gleichung (2.15) die nützliche Beziehung

$$\text{gradu} = \text{Gradu} \mathbf{F}^{-1}, \quad \mathbf{h} = \mathbf{H} \mathbf{F}^{-1} \quad (2.17)$$

ableiten. Mit dem Verschiebungsgradienten \mathbf{H} kann der Greensche Verzerrungstensor in einen linearen und einen nichtlinearen Teil aufgespalten werden

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{H} + \mathbf{H}^T) + \frac{1}{2} (\mathbf{H}^T \mathbf{H}) . \quad (2.18)$$

Für hinreichend kleine Verschiebungsgradienten ($|H_{ij}| \ll 1$) kann die Ableitung nach den materiellen Koordinaten durch die Ableitung nach den räumlichen Koordinaten ersetzt werden ($\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{X} \approx \partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{x}$). Zudem wird dann das Produkt des Verschiebungsgradienten von höherer Ordnung klein und es ergeben sich die Ingenieurverzerrungen

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\text{gradu} + \text{grad}^T \mathbf{u}) = \text{sym}(\text{gradu}) . \quad (2.19)$$

Um Verzerrungsgeschwindigkeiten zu betrachten, wird zunächst der räumliche Geschwindigkeitsgradient

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} = \text{grad} \mathbf{v} \quad (2.20)$$

eingeführt. Die Zeitableitung des Deformationsgradienten

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{L} \mathbf{F} \quad (2.21)$$

liefert den Zusammenhang

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} . \quad (2.22)$$

Anschaulich beschreibt der Geschwindigkeitsgradient die Relativgeschwindigkeit $d\mathbf{v}$ zwischen den benachbarten Punkten P' und Q' , siehe Abbildung 2.1, bezogen auf das Linienelement $d\mathbf{x}$

$$d\mathbf{v} = \overline{d\dot{\mathbf{x}}} = \overline{\mathbf{F} d\dot{\mathbf{X}}} = \dot{\mathbf{F}} d\mathbf{X} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} = \mathbf{L} d\mathbf{x} . \quad (2.23)$$

Der Geschwindigkeitsgradient wird in den symmetrischen Tensor der Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} und den schiefsymmetrischen Spintensor oder auch Drehgeschwindigkeitstensor \mathbf{W} zerlegt

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}, \quad \mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) . \quad (2.24)$$

Analog zu den Transformationen (2.13) und (2.14) wird durch ein Verschieben die Zeitableitung des Greenschen Verzerrungstensors

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{F}) = \frac{\dot{\mathbf{C}}}{2} \quad (2.25)$$

in die Verzerrungsgeschwindigkeit

$$\mathbf{D} = \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} \quad (2.26)$$

transformiert und umgekehrt resultiert aus dem Zurückziehen der Verzerrungsgeschwindigkeit die Zeitableitung des Greenschen Verzerrungstensors

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F} = \frac{\dot{\mathbf{C}}}{2}. \quad (2.27)$$

Mit der Definition der Greenschen Verzerrungen (2.11) wurde gleichzeitig der Zusammenhang mit der Zeitableitung des rechten Cauchy-Greenschen Tensors beschrieben. Die Geschwindigkeit der Volumenänderung (2.9) kann mit der Kettenregel und Gleichung (2.21) nach einigen elementaren Umformungen durch

$$\dot{J} = J \operatorname{tr} \mathbf{L} = J \operatorname{tr} \mathbf{D} \quad (2.28)$$

ausgedrückt werden.

Parametrisierung der Koordinaten

Für die numerische Umsetzung wird es zweckmäßig sein, Verzerrungsmaße durch parametrisierte Koordinaten auszudrücken. Die Zeitableitung von Verzerrungen in kovarianten Komponenten wird zwar seltener verwendet, hier aber gezeigt, da diese im Rahmen der vorliegenden Arbeit genutzt wird.

Ausgehend von einer parametrisierten Beschreibung der Koordinaten $\mathbf{X}(\theta^i)$ und $\mathbf{x}(\theta^i)$ in Abhängigkeit der krummlinigen Koordinaten θ^i gilt für kovariante Basisvektoren mit der Kettenregel die Transformation

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta^i} = \mathbf{F} \mathbf{G}_i, \quad (2.29)$$

wobei \mathbf{G}_i und \mathbf{g}_i kovariante Basisvektoren in der Referenz- und Momentankonfiguration an den Punkten mit den Koordinaten \mathbf{X} und \mathbf{x} darstellen. Analog werden die kontravarianten Basisvektoren \mathbf{G}^i und \mathbf{g}^i der Referenz- und Momentankonfiguration an den Punkten mit den Koordinaten \mathbf{X} und \mathbf{x} mit der Inversen des Deformationsgradienten transformiert

$$\mathbf{g}^i = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{G}^i. \quad (2.30)$$

Die ko- und kontravarianten Basisvektoren werden, hier am Beispiel der Momentankonfiguration, mit

$$\mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j \quad g^{ij} = (g_{ij})^{-1} \quad g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad (2.31)$$

ineinander umgerechnet. Mit den ko- und kontravarianten Basisvektoren lauten der Deformationsgradient und seine Inverse

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i. \quad (2.32)$$

Mit Gleichung (2.32) ist die kovariante Darstellung der Komponenten des Greenschen Verzerrungstensors möglich

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2} \left((\mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i) (\mathbf{g}_j \otimes \mathbf{G}^j) - \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \right) \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j - \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = \frac{1}{2} (g_{ij} - G_{ij}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Ein Verschieben in die Momentankonfiguration, das sich nur auf die Basis auswirkt, führt auf die kovarianten Komponenten des Almansischen Verzerrungstensors

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{F}^{-T} \left(\frac{1}{2} (g_{ij} - G_{ij}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \right) \mathbf{F}^{-1} \\ &= \frac{1}{2} (g_{ij} - G_{ij}) \mathbf{F}^{-T} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{F}^{-T} \mathbf{G}^j = \frac{1}{2} (g_{ij} - G_{ij}) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j, \end{aligned} \quad (2.34)$$

die denen des Greenschen Verzerrungstensors entsprechen. Mit der Zeitableitung des Basisvektors

$$\dot{\mathbf{g}}_i = \overline{\dot{\mathbf{F}} \mathbf{G}_i} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{G}_i = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{g}_i = \mathbf{L} \mathbf{g}_i \quad (2.35)$$

wird die Zeitableitung des Deformationsgradienten dargestellt

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{G}^i, \quad (2.36)$$

über die sich die kovarianten Komponenten des Geschwindigkeitsgradienten darstellen lassen

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = (\dot{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{G}^i) (\mathbf{G}_j \otimes \mathbf{g}^j) \\ &= \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}_j \dot{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{g}^j = \delta_j^i \dot{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{g}^j = \dot{\mathbf{g}}_i \otimes \mathbf{g}^i = (\dot{\mathbf{g}}_i \cdot \mathbf{g}_j) \mathbf{g}^j \otimes \mathbf{g}^i. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Damit lauten die kovarianten Komponenten der Verzerrungsrate in einer kontravarianten Basis

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i \cdot \dot{\mathbf{g}}_j + \dot{\mathbf{g}}_i \cdot \mathbf{g}_j) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j, \quad (2.38)$$

die durch ein Zurückziehen in die Referenzkonfiguration auf die Zeitableitung des Greenschen Verzerrungstensors in einer kontravarianten Basis führen

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= \mathbf{F}^T \left(\frac{1}{2} (\mathbf{g}_i \cdot \dot{\mathbf{g}}_j + \dot{\mathbf{g}}_i \cdot \mathbf{g}_j) \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j \right) \mathbf{F} \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i \cdot \dot{\mathbf{g}}_j + \dot{\mathbf{g}}_i \cdot \mathbf{g}_j) \mathbf{F}^T \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{F}^T \mathbf{g}^j = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i \cdot \dot{\mathbf{g}}_j + \dot{\mathbf{g}}_i \cdot \mathbf{g}_j) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Dass die kovarianten Komponenten bezogen auf die Referenz- und die Momentankonfiguration in Gleichung (2.39) jeweils einander entsprechen, siehe auch Gleichung (2.34), ist bei später gezeigten Elementformulierungen wie der Methode der angenommenen Verzerrungen, die auf diese Komponenten angewendet werden, interessant.

2.1.2 Erhaltungssätze und Spannungen

Die Masse eines Festkörpers bleibt während der Deformation konstant, wird nicht in Energie umgewandelt und fließt nicht durch die Ränder ab, was zusammen mit der Volumentransformation (2.8) durch

$$m = \int_B \rho \, dv = \int_{B_0} \rho_0 \, dV, \quad \rho_0 = J\rho \quad (2.40)$$

beschrieben wird, und die einfache Beziehung für die Rohdichte der Referenz- in Abhängigkeit der Momentankonfiguration in Gleichung (2.40)₂ ergibt.

Die Impulserhaltung besagt, dass die zeitliche Änderung des Impulses gleich der Summe der am Festkörper angreifenden Kräfte sein muss, was in der Momentankonfiguration durch

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_B \rho \mathbf{v} \, dv = \int_B \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial B} \mathbf{t} \, da \quad (2.41)$$

beschrieben wird. Die auf den Körper wirkenden eingepprägten Volumenkräfte werden als \mathbf{f} bezeichnet. Der auf das Flächenelement da bezogene Spannungsvektor \mathbf{t} ist abhängig von der Flächennormalen \mathbf{n} und wird durch das Cauchy-Theorem

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (2.42)$$

mit dem Cauchy-Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ verknüpft. Zusammen mit dem Gaußschen Integralsatz folgt aus Gleichung (2.41) die für beliebige Volumina geltende lokale Form der Impulsbilanz bezogen auf die Momentankonfiguration

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{a}. \quad (2.43)$$

Der Ausdruck $\rho \mathbf{a}$ beschreibt Trägheitskräfte und wird für statische Analysen vernachlässigt.

Die Drehimpulserhaltung ist dadurch bestimmt, dass bezogen auf einen festen Punkt O mit dem Ortsvektor $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_O$, die Zeitableitung des Drehimpulses gleich der Summe der Momente aus allen äußeren Kräften ist

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_B \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} \, dv = \int_B \mathbf{r} \times \rho \mathbf{b} \, dv + \int_{\partial B} \mathbf{r} \times \mathbf{t} \, da, \quad (2.44)$$

woraus nach einigen Rechenschritten die Symmetrie

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (2.45)$$

des Cauchyschen Spannungstensors resultiert.

Für Energieerhaltung ist die zeitliche Änderung aus innerer Energie V und kinetischer Energie T gleich der mechanischen Leistung P der äußeren Kräfte, was durch

$$\frac{d}{dt} (T + V) = P \quad (2.46)$$

ausgedrückt wird. Diese Darstellung kann aus dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik unter Vernachlässigung der Wärmeleistung abgeleitet werden. Die einzelnen Größen werden mit

$$T = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, dv, \quad V = \int_{\mathcal{B}} \rho u \, dv \quad \text{und} \quad P = \int_{\mathcal{B}} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, da \quad (2.47)$$

beschrieben, wobei u die spezifische innere Energie darstellt. Die mechanische Leistung wird mit den eingepprägten Volumenkräften \mathbf{b} und dem Spannungsvektor \mathbf{t} aus Gleichung (2.41) in Kombination mit der Geschwindigkeit \mathbf{v} beschrieben. Mit einigen Umformungen kann die Spannungsleistung pro Volumen der Momentankonfiguration

$$\rho \frac{d}{dt} u = \rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{L} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} \quad (2.48)$$

dargestellt werden, wonach der Cauchysche Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ und die Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} zueinander arbeits- beziehungsweise leistungskonjugiert sind. Diese Darstellung kann, da Wärmeleistung und andere Energieformen nicht berücksichtigt werden, direkt aus der lokalen Form der Impulsbilanz (2.41) abgeleitet werden. Mit einer Transformation von Gleichung (2.48) kann die Spannungsleistung pro Volumen der Referenzkonfiguration angegeben werden

$$\rho_0 \dot{u} = J \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D}, \quad \boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma}, \quad (2.49)$$

bei der es zweckmäßig ist, die Kirchhoffschen Spannungen $\boldsymbol{\tau}$ einzuführen. Der Spannungsvektor \mathbf{t} , siehe Gleichung (2.42), wird mit der Nanson-Formel auf das Flächenelement dA der Referenzkonfiguration in Abhängigkeit der Flächennormalen \mathbf{n}_0 bezogen

$$\mathbf{t}_0 = \mathbf{P} \mathbf{n}_0, \quad \mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}, \quad (2.50)$$

wobei die 1. Piola-Kirchhoff-Spannungen definiert werden, für die $\mathbf{P} \neq \mathbf{P}^T$ gilt. Ein weiteres praktikables Spannungsmaß sind die 2. Piola-Kirchhoff-Spannungen

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} = J \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{-T}, \quad (2.51)$$

für die analog zu den Cauchyschen Spannungen in Gleichung (2.45) die Symmetrie $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$ gilt. Werden die 1. und 2. Piola-Kirchhoff-Spannungen aus den Gleichungen (2.50) und (2.51) in Gleichung (2.49)₁ eingesetzt, können die gleiche Spannungsleistung verrichtenden Paare

$$\rho_0 \dot{u} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{D} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} \quad (2.52)$$

angegeben werden.

2.1.3 Objektive Spannungsraten

Wesentlich bei der inkrementellen Berechnung von Spannungen und zur Beschreibung von Materialverhalten bei großen Deformationen ist, dass die Materialgleichungen

objektiv formuliert werden können. Da im Fall der Zeitableitung der Cauchyschen Spannungen, die auf die Momentankonfiguration bezogen sind, für Starrkörperdrehungen nichtphysikalische Terme entstehen, werden verschiedene objektive Spannungsrate definiert, siehe Belytschko et al. [15]. Häufig genutzt wird die Jaumannsche Spannungsrate der Cauchyschen Spannungen

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{W}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{W}^T, \quad \overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{W}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{W}^T, \quad (2.53)$$

die ebenso für die Kirchhoff-Spannungen gilt. Zudem wird die Oldroydsche Spannungsrate eingeführt

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}^T, \quad \overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{L}\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}\mathbf{L}^T, \quad (2.54)$$

die im Fall der Kirchhoff-Spannungen (2.54)₂ über den Zusammenhang

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T \quad (2.55)$$

mit der materiellen Zeitableitung der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungen verknüpft ist. Bei Betrachtung des gleichen Materials ergeben sich aus den unterschiedlichen objektiven Spannungsrate dann unterschiedliche Elastizitätstensoren, worauf in Abschnitt 2.1.4 noch näher eingegangen wird.

Die objektiven Spannungsrate unterscheiden sich in der Berechnung der Rotation der Spannungen. Im Jaumannschen Fall wird hierfür der Spintensor \mathbf{W} verwendet und die Oldroydsche Spannungsrate nutzt den Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{L} . Während beide Formulierungen für reine Starrkörperrotationen objektiv sind, ergeben sich beim Auftreten von Verzerrungen in Kombination mit Rotationen Unterschiede in den Spannungen. Für den Fall einfacher Scherung ergeben sich für die Jaumannsche Spannungsrate beispielsweise Spannungsoszillationen aufgrund des über die Zeit konstanten Spintensors. Trotzdem hat sich die Jaumannsche Spannungsrate für viele praktische Probleme bewährt und wird aufgrund ihrer Effizienz oft standardmäßig in expliziten Finite-Element-Programmen eingesetzt. Als Option sind weitere objektive Spannungsrate vorhanden, die dieses Defizit nicht enthalten, aber weniger effizient sind. Für weitere Details und andere Formulierungen von objektiven Spannungsrate wird auf Belytschko et al. [15] oder Benson [20] verwiesen.

2.1.4 Materialgesetze

Hyperelastizität

Für hyperelastisches Material ist die Spannung und die von ihr verrichtete Arbeit unabhängig von der Geschichte der Deformation. Dann gilt für die Spannungsleistung aus Gleichung (2.52) der folgende Zusammenhang

$$\rho_0 \dot{w} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} = \dot{w}(\mathbf{E}) = \frac{\partial w}{\partial \mathbf{E}} : \dot{\mathbf{E}} \quad (2.56)$$

mit einer Verzerrungsenergiefunktion $W = \rho_0 u$, die ein Potential für die Spannungen darstellt. Damit gilt für hyperelastische Materialien

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial W(\mathbf{E})}{\partial \mathbf{E}}, \quad (2.57)$$

wobei der Zusammenhang (2.25) zwischen den Greenschen Verzerrungen und dem rechten Cauchy-Greenschen Tensor verwendet wird. Für isotropes Materialverhalten ist die Verzerrungsenergie nur von den Invarianten des rechten Cauchy-Green-Tensors

$$I_C = \text{tr} \mathbf{C}, \quad II_C = \frac{1}{2} \left((\text{tr} \mathbf{C})^2 - \text{tr} \mathbf{C}^2 \right), \quad III_C = \det \mathbf{C} \quad (2.58)$$

abhängig. Da Eigenwerte und Invarianten des rechten und linken Cauchy-Green-Tensors \mathbf{C} und \mathbf{B} gleich sind, kann mit der Beziehung

$$\frac{\partial W(I_C, II_C, III_C)}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial W(I_B, II_B, III_B)}{\partial \mathbf{B}} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.59)$$

und Gleichung (2.51) folgende Vorschrift zur Berechnung der Cauchy-Spannungen

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1} \frac{\partial W(I_B, II_B, III_B)}{\partial \mathbf{B}} \mathbf{B} \quad (2.60)$$

angegeben werden.

Die hyperelastischen Materialgleichungen können in inkrementeller Form dargestellt werden. Dann gilt für die Zeitableitung der 2. Piola-Kirchhoff-Spannungen aus Gleichung (2.57)

$$\dot{\mathbf{S}} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} : \frac{\dot{\mathbf{C}}}{2} = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C} \partial \mathbf{C}} : \frac{\dot{\mathbf{C}}}{2} = \mathbf{C} : \frac{\dot{\mathbf{C}}}{2}, \quad (2.61)$$

wobei mit \mathbf{C} der 4-stufige Elastizitätstensor definiert wird. Zusammen mit Gleichung (2.27) kann die objektive Spannungsrate (2.55) durch

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{F} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \left(\mathbf{C} : \left(\mathbf{F}^T \mathbf{D} \mathbf{F} \right) \right) \mathbf{F}^T \quad (2.62)$$

ausgedrückt werden. In Indexnotation ist die Beschreibung in der Form

$$\overset{\circ}{\tau}_{ij} = F_{iL} F_{jJ} F_{kK} F_{lL} C_{IJKL} D_{kl} = J c_{ijkl} D_{kl} \quad (2.63)$$

möglich, wobei der räumliche Elastizitätstensor

$$c_{ijkl} = J^{-1} F_{iL} F_{jJ} F_{kK} F_{lL} C_{IJKL} \quad (2.64)$$

eingeführt wird, mit dem gilt

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} = J \mathbf{C} : \mathbf{D}. \quad (2.65)$$

Der St. Venant-Kirchhoff-Ansatz

Der klassische lineare Ansatz nach St. Venant-Kirchhoff stellt ein physikalisch lineares Materialgesetz als Verallgemeinerung der Hookeschen Elastizität dar. Es ist bei kleinen Verzerrungen aber großen Rotationen anwendbar. Mit der Funktion

$$W(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} (\text{tr}\mathbf{E})^2 + \mu \text{tr}\mathbf{E}^2 \quad (2.66)$$

kann der lineare Zusammenhang zwischen den 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungen und dem Greenschen Verzerrungstensor

$$\mathbf{S} = \lambda \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} = \mathbf{C} : \mathbf{E} \quad (2.67)$$

sowie der 4-stufige Elastizitätstensor

$$\mathbf{C} = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbb{I} \quad (2.68)$$

mit den Einheitstensoren zweiter und vierter Stufe \mathbf{I} und \mathbb{I} dargestellt werden. Die Laméschen Parameter λ und μ werden durch den Elastizitätsmodul E und die Poissonzahl ν ausgedrückt

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.69)$$

Hypoelastizität

Hypoelastische Materialgesetze verknüpfen objektive Spannungsrate über einen Elastizitätstensor mit der Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} . Somit werden im Gegensatz zur Hyperelastizität die Spannungen inkrementell über die Zeit ermittelt. Am Beispiel der Jaumannschen Spannungsrate

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{c}^{\sigma \nabla} : \mathbf{D} \quad (2.70)$$

wird der 4-stufige Elastizitätstensor $\mathbf{c}^{\sigma \nabla}$ eingeführt, der für eine andere objektive Spannungsrate noch zu transformieren ist. Wird beispielsweise die Oldroydsche durch die Jaumannsche Spannungsrate ausgedrückt, siehe die Gleichungen (2.53)₁ und (2.54)₁,

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{L}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{L}^T = \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{D}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{D}^T \quad (2.71)$$

kann die Transformationsbeziehung zwischen den Elastizitätstensoren $\mathbf{c}^{\sigma \nabla}$ und $\mathbf{c}^{\sigma \circ}$ für die Jaumannsche und die Oldroydsche Spannungsrate angegeben werden. Es ist aber auch möglich Elastizitätstensoren hyperelastischer Materialgesetze mit einer für Hypoelastizität üblichen objektiven Spannungsrate zu kombinieren, siehe die Gleichungen (2.62) bis (2.65).

Besonders für metallische Werkstoffe mit vergleichsweise geringen elastischen Deformationen werden oft hypoelastische Materialformulierungen genutzt, während beispielsweise bei vielen gummiartigen Werkstoffen mit großen elastischen Verformungen auf hyperelastische Formulierungen zurückgegriffen wird. Für die Handhabung von Hypo- und Hyperelastizität bei plastischen Deformationen wird im Folgenden eingegangen.

Elasto-Plastizität

Wird eine definierte Materialbeanspruchung überschritten, treten bleibende Verformungen auf, die auch nach Entlastung des Materials nicht verschwinden. Insbesondere bei metallischen Werkstoffen wird von plastischem Fließen gesprochen. Zur Beschreibung dieses elastisch-plastischen Materialverhaltens kann eine multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten in einen elastischen und plastischen Anteil

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p \quad (2.72)$$

durchgeführt werden, die es erlaubt, den elastischen linken Cauchy-Green-Tensor

$$\mathbf{B}^e = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^{eT} = \mathbf{F} \mathbf{C}^p \mathbf{F}^{-1}, \quad \mathbf{C}^p = \mathbf{F}^p T \mathbf{F}^p \quad (2.73)$$

in Abhängigkeit der Inversen des plastischen rechten Cauchy-Green-Tensors anzugeben. Für isotrope Hyperelastizität kann damit das Elastizitätsgesetz zur Berechnung der Spannungen in der Form

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \frac{\partial W(I_{B^e}, II_{B^e}, III_{B^e})}{\partial \mathbf{B}^e} \mathbf{B}^e \quad (2.74)$$

verwendet werden. Mit der Zeitableitung und Inversen des Deformationsgradienten

$$\dot{\mathbf{F}} = \dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^p + \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^p, \quad \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^p \mathbf{F}^{e-1} \quad (2.75)$$

kann der Geschwindigkeitsgradient mit

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} = \dot{\mathbf{F}}^e \mathbf{F}^{e-1} + \mathbf{F}^e \dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^p \mathbf{F}^{e-1} = \mathbf{L}^e + \mathbf{L}^p \quad (2.76)$$

durch eine additive Zerlegung in einen elastischen und plastischen Anteil ausgedrückt werden. Damit ist auch die Verzerrungsgeschwindigkeit additiv zerlegbar

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p \quad (2.77)$$

und ein hypoelastisches Materialgesetz kann zur Spannungsberechnung verwendet werden, beispielsweise mit der Jaumannschen Spannungsrate

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{c}^{\tau \nabla} : \mathbf{D}^e. \quad (2.78)$$

Sowohl der Ansatz einer multiplikativen Zerlegung (2.72) mit einem hyperelastischen Materialgesetz (2.74), als auch eine additive Zerlegung (2.77) mit einem hypoelastischen Materialgesetz (2.78) werden in der vorliegenden Arbeit verwendet. Die zweite Variante ist für praktische Berechnungen weit verbreitet und häufig wird für $\mathbf{c}^{\tau \nabla}$ der konstante Elastizitätstensor aus Gleichung (2.68) verwendet, was sich für praktische Berechnungen bewährt hat, siehe Doghri [46].

Der Zustand des plastischen Fließens wird durch eine Funktion

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \quad (2.79)$$

in Abhängigkeit der Spannungen σ bestimmt, die eine Fläche im Spannungsraum beschreibt. Für einen Zustand $F < 0$ liegt elastisches Verhalten vor, während für $F = 0$ gerade Fließen auftritt. Für die klassische von Mises Plastizität lautet die Fließbedingung beispielsweise

$$F = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s} : \mathbf{s}} - \sigma_F = 0, \quad (2.80)$$

wobei $\mathbf{s} = \sigma - 1/3 \text{tr}(\sigma) \mathbf{1}$ den deviatorischen Anteil der Spannungen σ , und σ_F die Fließspannung darstellt. Die Vorgeschichte des elastisch-plastischen Materialverhaltens hängt zusätzlich von inneren Variablen ab, deren zeitliche Entwicklung durch Evolutionsgleichungen beschrieben wird. Diese inneren Variablen können verwendet werden, um ein Verfestigungsgesetz für die Fließspannungen aufzustellen. Hier wird über diese rudimentäre Beschreibung hinaus nicht weiter auf elastisch-plastisches Materialverhalten eingegangen, da für die späteren numerischen Experimente ausschließlich bekannte Formulierungen verwendet werden, auf die an der entsprechenden Stelle im nötigen Umfang eingegangen wird.

2.2 Kontinuumsdiskretisierung mit finiten Elementen

2.2.1 Räumlich schwache Form des Gleichgewichts

Die Beschreibung der Kinematik anhand der Gleichungen (2.12) oder (2.24), die Gleichgewichtsbeziehung (2.43) sowie das hyperelastische Konstitutivgesetz (2.60) oder die hypoelastische Formulierung der Konstitutivbeziehungen gemäß den Gleichungen (2.53) und (2.70) werden wie folgt zusammengefasst

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Kinematik} & \mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T \quad \mathbf{D} = \text{sym}\mathbf{L} \\ \text{Gleichgewicht} & \text{div}\boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{b} = \rho\mathbf{a} \\ \text{Konstitutivgesetz} & \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{b}) \quad \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{D}) \end{array} \right\}. \quad (2.81)$$

Diese Beziehungen beschreiben in der Momentankonfiguration \mathcal{B} zusammen mit den Verschiebungs- und Spannungsrandbedingungen auf dem Dirichlet-Rand $\partial\mathcal{B}^u$ sowie dem Neumann-Rand $\partial\mathcal{B}^t$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \partial\mathcal{B}^u, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}\mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{auf } \partial\mathcal{B}^t \quad (2.82)$$

und den zum Zeitpunkt $t = 0$ geltenden Anfangsrandbedingungen

$$\mathbf{u}(t = 0) = \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{v}(t = 0) = \mathbf{v}_0 \quad (2.83)$$

die starke Form des Anfangsrandwertproblems (ARWP) der nichtlinearen Strukturmechanik. Da dieses häufig nicht analytisch gelöst werden kann, wird ein numerisches Verfahren wie die Finite-Elemente-Methode eingesetzt. Hierzu ist eine schwache Form

des oben beschriebenen ARWPs notwendig. Die lokale Impulsbilanz in Gleichung (2.81) wird mit einer Testfunktion \mathbf{w} , die auf dem Dirichlet-Rand $\partial\mathcal{B}^D$ gilt, gewichtet und anschließend über \mathcal{B} integriert

$$\int_{\mathcal{B}} (\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \rho\mathbf{b} - \rho\mathbf{a}) \cdot \mathbf{w} \, dv = 0. \quad (2.84)$$

Mit der Anwendung partieller Integration und des Cauchy-Theorems kann Gleichung (2.84) in die folgende schwache Form überführt werden

$$\int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \operatorname{grad}\mathbf{w} \, dv - \int_{\mathcal{B}} (\rho\mathbf{b} - \rho\mathbf{a}) \cdot \mathbf{w} \, dv - \int_{\partial\mathcal{B}^N} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} \, da = 0, \quad (2.85)$$

die in drei Teile aufgespalten wird

$$\delta P = \delta P^{\text{int}} + \delta P^{\text{dyn}} - \delta P^{\text{ext}} = 0. \quad (2.86)$$

Wird für \mathbf{w} die virtuelle Geschwindigkeit $\delta\mathbf{v}$ eingesetzt, kann die innere virtuelle Arbeit δP^{int} mit der Variation des Geschwindigkeitsgradienten beschrieben werden

$$\delta P^{\text{int}} = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \operatorname{grad}\delta\mathbf{v} \, dv = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\mathbf{L} \, dv. \quad (2.87)$$

Mit der Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ ist auch eine gleichwertige Darstellung mit der Variation der Verzerrungsgeschwindigkeit $\delta\mathbf{D}$ möglich

$$\delta P^{\text{int}} = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \operatorname{sym}(\operatorname{grad}\delta\mathbf{v}) \, dv = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\mathbf{D} \, dv. \quad (2.88)$$

Die Anteile für Trägheitskräfte und äußere Lasten sind

$$\delta P^{\text{dyn}} = \int_{\mathcal{B}} \rho\mathbf{a} \cdot \delta\mathbf{v} \, dv, \quad \delta P^{\text{ext}} = \int_{\mathcal{B}} \rho\mathbf{b} \cdot \delta\mathbf{v} \, dv + \int_{\partial\mathcal{B}^N} \mathbf{t} \cdot \delta\mathbf{v} \, da. \quad (2.89)$$

Die in Gleichung (2.86) dargestellte schwache Form wird zur Gruppe der mitgehenden oder fortgeschriebenen Lagrange-Formulierungen gezählt, da sie auf die Momentankonfiguration bezogen wird. In der vorliegenden Arbeit wird zudem die aus dem englischsprachigen Schrifttum bekannte Bezeichnung *Updated*-Lagrange-Formulierung oder die entsprechende Abkürzung UL-Formulierung genutzt. Für die entsprechende totale Lagrange-Formulierung werden die Ausdrücke in Gleichung (2.81) sowie die Randbedingungen (2.82) mit Bezug zur Referenzkonfiguration betrachtet und für die Testfunktion \mathbf{w} die virtuelle Verschiebung $\delta\mathbf{u}$ eingesetzt. Analog zur UL-Formulierung wird die Bezeichnung *Total*-Lagrange- und TL-Formulierung eingeführt.

Um zwischen den Formulierungen zu unterscheiden, wird die Bezeichnung δP für die resultierende schwache Form in allen Ausdrücken durch δW ersetzt

$$\delta W = \delta W^{\text{int}} + \delta W^{\text{dyn}} - \delta W^{\text{ext}} = 0. \quad (2.90)$$

Die innere virtuelle Arbeit kann mit den zueinander arbeitskonjugierten Paaren aus Gleichung (2.52) beschrieben werden

$$\delta W^{\text{int}} = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{F} \, dV = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{E} \, dV . \quad (2.91)$$

Für die übrigen Arbeitsausdrücke gilt bezogen auf die Referenzkonfiguration

$$\delta W^{\text{dyn}} = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV , \quad \delta W^{\text{ext}} = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial \mathcal{B}_0^N} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dA . \quad (2.92)$$

Wird im Vergleich zum Prinzip der virtuellen Arbeit ein konservatives System vorausgesetzt, in dem ein Potential für die Spannungen und die Belastung existieren, kann das Prinzip vom Stationärwert des Gesamtpotentials $\delta \Pi = 0$ angewendet werden, um eine schwache Form zu erhalten. Für hyperelastisches Material existiert nach Gleichung (2.56) mit $W = \rho_0 u$ ein inneres Potential für Spannungen. Wird es um die Arbeit von Trägheitskräften erweitert, kann das auf die Referenzkonfiguration bezogene Gesamtpotential eines Systems beschrieben werden

$$\Pi = \int_{\mathcal{B}_0} W(\mathbf{E}) \, dV + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \, dV - \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}_0^N} \mathbf{t}_0 \cdot \mathbf{u} \, dA . \quad (2.93)$$

Die Variation von Gleichung (2.93) liefert die schwache Form

$$\delta \Pi = \int_{\mathcal{B}_0} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} \cdot \delta \mathbf{E} \, dV - \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial \mathcal{B}_0^N} \mathbf{t}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dA + \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 \mathbf{a} \cdot \delta \mathbf{u} \, dV = 0 , \quad (2.94)$$

die mit der Beziehung $\partial w / \partial \mathbf{E} = \mathbf{S}$ der schwachen Form in Gleichung (2.90) entspricht.

2.2.2 Linearisierung der schwachen Form

Für die implizite Berechnung von finiten Elementen mit Verfahren des Newton-Typs wird die Richtungsableitung des Anteils der internen Leistung in der Variationsgleichung (2.88) benötigt, für den mit Berücksichtigung von $\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma}$ und $JdV = dv$ gilt

$$\delta P^{\text{int}} = \int_{\mathcal{B}} \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{D} \, dv = \int_{\mathcal{B}_0} \boldsymbol{\tau} : \delta \mathbf{D} \, dV . \quad (2.95)$$

Für die Linearisierung ist es üblich die Größen des Integranden aus Gleichung (2.95) in einem ersten Schritt auf die Referenzkonfiguration zu beziehen, im zweiten Schritt die Richtungsableitung zu berechnen und anschließend in einem dritten Schritt die linearisierten Größen wieder bezüglich der Momentankonfiguration darzustellen. Das Zurückziehen in die Referenz- und Verschieben in die Momentankonfiguration im ersten und dritten Schritt wird, wenn die Berechnung der Richtungsableitung direkt in der Momentankonfiguration erfolgt, vermieden. Dabei ist hilfreich, dass die materielle Zeitableitung einer räumlichen Größe formal äquivalent zu ihrer Richtungsableitung

in Richtung $\Delta \mathbf{u}$ ist, nachdem die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$ durch das Verschiebungsincrement $\Delta \mathbf{u}$ ersetzt wurde, siehe Holzapfel [67, S. 399 ff.] oder Crisfield [41, S. 49 ff.]. Die Zeitableitung der Variation der inneren Leistung (2.95) ist

$$\overline{\delta \dot{P}^{int}} = \int_{\mathcal{B}_0} \left(\overline{\delta \mathbf{D}} : \boldsymbol{\tau} + \delta \mathbf{D} : \dot{\boldsymbol{\tau}} \right) dV . \quad (2.96)$$

Für die Zeitableitung der Verzerrungsgeschwindigkeit gilt

$$\begin{aligned} \overline{\delta \mathbf{D}} &= \text{sym} \left(\overline{\text{grad} \delta \mathbf{v}} \right) = \text{sym} \left(\text{Grad} \delta \mathbf{v} \overline{\mathbf{F}^{-1}} \right) \\ &= \text{sym} \left(\text{Grad} \delta \mathbf{v} \left(-\mathbf{F}^{-1} \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \right) \right) = -\text{sym} \left(\text{grad} \delta \mathbf{v} \mathbf{L} \right) = -\text{sym} \left(\delta \mathbf{L} \mathbf{L} \right) , \end{aligned} \quad (2.97)$$

mit Berücksichtigung der Inversen des Deformationgradienten aus der Beziehung

$$\overline{\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1}} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F} \overline{\mathbf{F}^{-1}} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\mathbf{F}^{-1}} = -\mathbf{F}^{-1} \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} . \quad (2.98)$$

Mit der Oldroydschen Spannungsrate¹ aus Gleichung (2.54) und dem räumlichen Elastizitätstensor aus den Gleichungen (2.62) bis (2.65) gilt folgender Zusammenhang

$$\dot{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{J} \mathbf{C} : \mathbf{D} + \mathbf{L} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{L}^T . \quad (2.99)$$

Das Einsetzen der beiden Gleichungen (2.97) und (2.99) in (2.96) ergibt

$$\overline{\delta \dot{P}^{int}} = \int_{\mathcal{B}_0} \left(-\text{sym} \left(\delta \mathbf{L} \mathbf{L} \right) : \boldsymbol{\tau} + \delta \mathbf{D} : \mathbf{J} \mathbf{C} : \mathbf{D} + \delta \mathbf{D} : \left(\mathbf{L} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{L}^T \right) \right) dV . \quad (2.100)$$

Darin wird der letzte Term unter Verwendung der Symmetrie von $\boldsymbol{\tau}$, den Beziehungen $\mathbf{A} : \mathbf{B} \mathbf{C} = \left(\mathbf{B}^T \mathbf{A} \right) : \mathbf{C} = \left(\mathbf{A} \mathbf{C}^T \right) : \mathbf{B}$ und $\delta \mathbf{D} = \text{sym}(\delta \mathbf{L})$ umgestellt

$$\begin{aligned} \text{sym}(\delta \mathbf{L}) : \left(\mathbf{L} \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \mathbf{L}^T \right) &= \left(\mathbf{L}^T \text{sym}(\delta \mathbf{L}) + \text{sym}(\delta \mathbf{L}) \mathbf{L} \right) : \boldsymbol{\tau} \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(\mathbf{L}^T \delta \mathbf{L} + (\delta \mathbf{L} \mathbf{L})^T \right) + \left(\delta \mathbf{L} \mathbf{L} + \delta \mathbf{L}^T \mathbf{L} \right) \right) : \boldsymbol{\tau} \\ &= \text{sym}(\delta \mathbf{L}^T \mathbf{L}) : \boldsymbol{\tau} + \text{sym}(\delta \mathbf{L} \mathbf{L}) : \boldsymbol{\tau} . \end{aligned} \quad (2.101)$$

Wieder mit der Symmetrie von $\boldsymbol{\tau}$ sowie $\mathbf{J} dV = dv$ und $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J} \boldsymbol{\sigma}$ folgt schließlich

$$\overline{\delta \dot{P}^{int}} = \int_{\mathcal{B}_0} \left(\delta \mathbf{D} : \mathbf{J} \mathbf{C} : \mathbf{D} + \delta \mathbf{L}^T \mathbf{L} : \boldsymbol{\tau} \right) dV = \int_{\mathcal{B}} \left(\delta \mathbf{D} : \mathbf{C} : \mathbf{D} + \delta \mathbf{L}^T \mathbf{L} : \boldsymbol{\sigma} \right) dv . \quad (2.102)$$

Für den Zusammenhang der Materialtensoren verschiedener Spannungsraten wird auf die Übersicht bei Belytschko et al. [15, Box 5.1] verwiesen.

¹ In der Literatur existieren teilweise unterschiedliche Bezeichnungen: Hier werden die Begriffe von Holzapfel [67, S. 252 f.] oder Wriggers [189, S. 38 f.] übernommen. Bei Belytschko et al. [15, S. 237] wird die Bezeichnung „convected rate of Kirchhoff stress“ verwendet, und ebenfalls gezeigt, dass diese Spannungsrate einen natürlichen Bezug zur Hyperelastizität besitzt. Bei Crisfield [41, S. 50] wird dagegen der Begriff „Truesdell rate of Kirchhoff stress“ genutzt.

Zum Vergleich: Die Substitution der Variation der Geschwindigkeit $\delta \mathbf{v}$ durch die Verschiebung $\delta \mathbf{u}$ sowie der Geschwindigkeit \mathbf{v} durch das Verschiebungsinkrement $\Delta \mathbf{u}$ führt von der Zeitableitung (2.102) zur Richtungsableitung

$$\overline{\delta P^{int}} \rightarrow D_{\Delta \mathbf{u}} \delta w^{int} = \int_{\mathcal{B}} \left(\delta \mathbf{e} : \mathbf{c} : \Delta \mathbf{e} + \delta \mathbf{h}^T \Delta \mathbf{h} : \boldsymbol{\sigma} \right) dv \quad (2.103)$$

mit den Variationen und Inkrementen des Almansischen Verzerrungstensors und des Verschiebungsgradienten \mathbf{h} bezogen auf die Momentankonfiguration

$$\delta \mathbf{e} = \text{sym}(\text{grad} \delta \mathbf{u}) \quad \delta \mathbf{h} = \text{grad} \delta \mathbf{u} \quad (2.104)$$

$$\Delta \mathbf{e} = \text{sym}(\text{grad} \Delta \mathbf{u}) \quad \Delta \mathbf{h} = \text{grad} \Delta \mathbf{u} . \quad (2.105)$$

Die Richtungsableitung (2.103) kann aber auch ausgehend von der Variation

$$\delta w^{int} = \int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{e} : \boldsymbol{\sigma} dv , \quad (2.106)$$

berechnet werden. Diese wird dann zuerst mit den Transformationen $dv = JdV$, $\delta \mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T} \delta \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1}$ und $\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T$ in die Referenzkonfiguration gezogen, dort die Richtungsableitung berechnet und schließlich wieder nach vorne geschoben.

2.2.3 Räumliche Diskretisierung

Die Diskretisierung für Lagrangesche finite Elemente erfolgt ausgehend von einer Unterteilung des kontinuierlichen Körpers in endlich viele finite Elemente

$$\mathcal{B} \approx \mathcal{B}^h = \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathcal{B}^e . \quad (2.107)$$

Für die folgenden Größen wird stets der Bezug zum Raum \mathcal{B}^e betrachtet und daher ab hier auf den Index e verzichtet. Die Interpolation der Geometrie mit dem zeitabhängigen Ortsvektor $\mathbf{x}(t)$ erfolgt durch die zeitunabhängigen Ansatzfunktionen N_I und die Koordinaten $x_{iI}(t)$ der Elementknoten I

$$x_i(t) = N_I x_{iI}(t) , \quad X_i = N_I X_{iI} , \quad (2.108)$$

die zum Zeitpunkt $t = 0$ die Koordinaten X_i des Ortsvektors \mathbf{X} der Referenzkonfiguration beschreiben. Zur Interpolation der Verschiebungen werden die gleichen Ansatzfunktionen verwendet

$$u_i(t) = N_I u_{iI}(t) . \quad (2.109)$$

Deren Zeitableitung ergibt die Geschwindigkeit und die Beschleunigung

$$v_i(t) = \dot{u}_i(t) = N_I \dot{u}_{iI}(t) , \quad a_i(t) = \ddot{u}_i(t) = N_I \ddot{u}_{iI}(t) . \quad (2.110)$$

Die Testfunktion, hier am Beispiel der virtuellen Geschwindigkeit, ist zeitunabhängig und wird durch

$$\delta v_i = N_I \delta v_{iI} \quad (2.111)$$

beschrieben. Wird die Diskretisierung in die schwache Form (2.86) eingesetzt, erfolgt nach Gleichung (2.107) eine elementweise Unterteilung der virtuellen Arbeit

$$\delta P \approx \delta P^h = \delta P^{\text{int},h} + \delta P^{\text{dyn},h} - \delta P^{\text{ext},h} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \left(\delta P^{\text{int},e} + \delta P^{\text{dyn},e} - \delta P^{\text{ext},e} \right). \quad (2.112)$$

Auch hier wird für eine übersichtlichere Darstellung auf den Index e verzichtet. Für die innere Arbeit nach Gleichung (2.87) ergibt sich

$$\delta P^{\text{int}} = \int_{\mathcal{B}} \delta L_{ij} \sigma_{ij} \, dv = \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} \, dv = \delta v_{iI} \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \sigma_{ij} \, dv = \delta v_{iI} f_{iI}^{\text{int}} \quad (2.113)$$

mit dem Kraftvektor f_{iI}^{int} am Knoten I . Werden gezielt Modifikationen in der Beschreibung der Kinematik vorgenommen, bietet sich die Darstellung von δL_{ij} mit einem Gradientenoperator B_{ijkK} an, der linear mit den Knotenwerten δv_{kK} verknüpft wird

$$B_{ijkK} \delta v_{kK} = \delta L_{ij}, \quad B_{ijkK} = \frac{\partial \delta L_{ij}}{\partial \delta v_{kK}}. \quad (2.114)$$

Eingesetzt in Gleichung (2.113) ergibt sich

$$\delta P^{\text{int}} = \int_{\mathcal{B}} \delta L_{ij} \sigma_{ij} \, dv = \delta v_{kK} \int_{\mathcal{B}} B_{ijkK} \sigma_{ij} \, dv = \delta v_{kK} f_{kK}^{\text{int}}. \quad (2.115)$$

Für die Linearisierung aus Gleichung (2.102) folgt, mit Nutzung der Symmetrie des Materialtensors \mathbb{C} sowie der Symmetrie der Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} , der Übergang zur diskretisierten Darstellung

$$\begin{aligned} \overline{\delta P^{\text{int}}} &= \int_{\mathcal{B}} (\delta L_{kl} c_{klmn} L_{mn} + \delta L_{lk} L_{lm} \sigma_{km}) \, dv \\ &= \delta v_{iI} \left(\int_{\mathcal{B}} B_{kliI} c_{klmn} B_{nmjJ} \, dv + \int_{\mathcal{B}} B_{lkiI} c_{klmn} B_{lmjJ} \sigma_{km} \, dv \right) v_{jJ} \\ &= \delta v_{iI} \left(K_{iljJ}^{\text{mat}} + K_{iljJ}^{\text{geo}} \right) v_{jJ}, \end{aligned} \quad (2.116)$$

in der die materielle und geometrische Steifigkeitsmatrix enthalten sind.

Für eine kompakte Darstellung in Matrixnotation werden häufig die Komponenten der Tensoren $\delta \mathbf{D}$ und $\boldsymbol{\sigma}$ in Vektoren angeordnet

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \text{sym.} & & \sigma_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \{\boldsymbol{\sigma}\} \quad (2.117)$$

$$\delta\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \delta D_{11} & \delta D_{12} & \delta D_{13} \\ & \delta D_{22} & \delta D_{23} \\ \text{sym.} & & \delta D_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \delta D_{11} \\ \delta D_{22} \\ \delta D_{33} \\ 2\delta D_{12} \\ 2\delta D_{23} \\ 2\delta D_{13} \end{bmatrix} = \{\delta\mathbf{D}\}, \quad (2.118)$$

was in der vorliegenden Arbeit durchgängig mit geschweiften Klammern gekennzeichnet wird. Zusammen mit der Diskretisierung der virtuellen Geschwindigkeit $\delta\mathbf{v}$ wird eine sogenannte B-Matrix formuliert

$$\{\delta\mathbf{D}\} = \sum_I \mathbf{B}_I \delta\mathbf{v}_I = \sum_I \begin{bmatrix} N_{I,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{I,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{I,z} \\ N_{I,y} & N_{I,x} & 0 \\ 0 & N_{I,z} & N_{I,y} \\ N_{I,z} & 0 & N_{I,x} \end{bmatrix} \delta\mathbf{v}_I, \quad (2.119)$$

mit der die virtuelle innere Arbeit nach Gleichung (2.88) ausgehend von der Verwendung der Tensoren $\delta\mathbf{D}$ und $\boldsymbol{\sigma}$ dargestellt wird

$$\delta P^{\text{int}} = \int_{\mathcal{B}} \{\delta\mathbf{D}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dv = \delta\mathbf{v}_I^T \int_{\mathcal{B}} \mathbf{B}_I^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dv. \quad (2.120)$$

Auf die Matrixnotation der materiellen und geometrischen Steifigkeitsmatrix wird später in Abschnitt 6.4.5 eingegangen. Für die Arbeit der Trägheitskräfte aus Gleichung (2.89)₁ gilt nach Einsetzen der diskretisierten virtuellen Geschwindigkeit und der Beschleunigung aus den Gleichungen (2.110) und (2.111) in Matrixform

$$\begin{aligned} \delta P^{\text{dyn}} &= \int_{\mathcal{B}} \rho \delta\mathbf{v}^T \mathbf{a} dv = \int_{\mathcal{B}} \rho (N_I \delta\mathbf{v}_I)^T (N_J \mathbf{a}_J) dv \\ &= \delta\mathbf{v}_I^T \mathbf{1} \int_{\mathcal{B}} \rho N_I N_J dv \mathbf{a}_J = \delta\mathbf{v}_I^T \mathbf{M}_{IJ} \mathbf{a}_J = \delta\mathbf{v}_I^T \mathbf{f}_I^{\text{dyn}}, \end{aligned} \quad (2.121)$$

wobei mit der 3×3 Identitätsmatrix $\mathbf{1}$ die konsistente Massenmatrix \mathbf{M}_{IJ} eingeführt wurde, und $\mathbf{f}_I^{\text{dyn}}$ den Vektor der Trägheitskräfte am Knoten I darstellt. Mit Techniken zur Diagonalisierung und Skalierung wird die Massenmatrix \mathbf{M} üblicherweise modifiziert, um Einfluss auf die Eigenschaften der in den Abschnitten 2.3 und 2.4 beschriebenen Berechnungsverfahren zu nehmen. Die in dieser Arbeit angewandten Modifikationen der Massenmatrix werden in den entsprechenden Abschnitten eingeführt. Die äußeren Lasten in Gleichung (2.89)₂ werden analog diskretisiert

$$\begin{aligned} \delta P^{\text{ext}} &= \int_{\mathcal{B}} \rho \delta\mathbf{v}^T \mathbf{f} dv + \int_{\partial\mathcal{B}} \delta\mathbf{v}^T \mathbf{t} da = \delta\mathbf{v}_I^T \int_{\mathcal{B}} \rho N_I \mathbf{f} dv + \delta\mathbf{v}_I^T \int_{\partial\mathcal{B}} N_I \mathbf{t} da \\ &= \delta\mathbf{v}_I^T \left(\int_{\mathcal{B}} \rho N_I \mathbf{f} dv + \int_{\partial\mathcal{B}} N_I \mathbf{t} da \right) = \delta\mathbf{v}_I^T \mathbf{f}_I^{\text{ext}} \end{aligned} \quad (2.122)$$

und erlauben die Einführung des externen Lastvektors $\mathbf{f}_I^{\text{ext}}$ am Knoten I . Damit ist die Diskretisierung der auf die Momentankonfiguration bezogenen mitgehenden Lagrange-Formulierung vollständig. Für den Zusammenbau der Elementgrößen zum Gesamtsystem im Sinne von Gleichung (2.112) wird hier auf die Literatur verwiesen. Die Diskretisierung einer totalen Lagrange-Formulierung erfolgt analog.

2.3 Lösung der Bewegungsgleichung mit einem expliziten Zeitintegrationsverfahren

Aus der schwachen Form des Gleichgewichts, in der Trägheitskräfte berücksichtigt werden, lässt sich mit der räumlichen Diskretisierung aus den Gleichungen (2.120), (2.121) und (2.122) die semidiskrete Form der Bewegungsgleichung ableiten

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}}(t) + \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{d}(t)) = \mathbf{f}^{\text{ext}}(t) . \quad (2.123)$$

Zur Berücksichtigung von Dämpfungskräften wird die Matrix \mathbf{C} unter der Annahme eingeführt, dass sie, wie die Massenmatrix \mathbf{M} auch, zeitunabhängig ist. Die Verschiebungsfreiheitsgrade werden im zeitabhängigen Vektor $\mathbf{d}(t)$ zusammengefasst, aus dem durch Zeitableitung die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{d}}(t)$ und die Beschleunigungen $\ddot{\mathbf{d}}(t)$ folgen.

Die Berechnung der Freiheitsgrade zu diskreten Zeitpunkten wird mit einem Zeitintegrationsverfahren realisiert, was als explizites oder implizites Verfahren kategorisiert werden kann. Explizite Verfahren erlauben es die gesuchten Größen \mathbf{d}_{n+1} aus bereits durch die Deformationsgeschichte bekannten Größen von Verschiebungen und Zeitableitungen von Verschiebungen zum Zeitpunkt t_n zu berechnen

$$\mathbf{d}_{n+1} = f(\mathbf{d}_n, \dot{\mathbf{d}}_n, \ddot{\mathbf{d}}_n, \mathbf{d}_{n-1}, \dots) . \quad (2.124)$$

Implizite Zeitintegrationsverfahren haben dagegen die Form

$$\mathbf{d}_{n+1} = f(\dot{\mathbf{d}}_{n+1}, \ddot{\mathbf{d}}_{n+1}, \mathbf{d}_n, \dots) , \quad (2.125)$$

wofür die Kenntnis der unbekanntenen Zeitableitungen der Verschiebungen \mathbf{d}_{n+1} erforderlich ist.

2.3.1 Das zentrale Differenzenverfahren

Ein sehr stark verbreitetes und in numerischen Umgebungen implementiertes explizites Zeitintegrationsverfahren ist das zentrale Differenzenverfahren (ZDV), was unter verschiedenen Namen bekannt ist. Hairer et al. [58] fassen es als *Newton-Störmer-Verlet-Leapfrog*-Methode zusammen und zeigen, dass das ZDV Genauigkeit zweiter Ordnung besitzt, energie- und impuls- sowie dreimpulserhaltend ist.

Mit den Bezeichnungen \mathbf{a} für die Beschleunigung, \mathbf{v} für die Geschwindigkeit und \mathbf{f}^d für die Dämpfungskräfte werden ausgehend von der diskretisierten Bewegungsgleichung zum Zeitpunkt t_n

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_n + \mathbf{f}^d(\mathbf{v}_{n-1/2}) + \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{d}_n) = \mathbf{f}_n^{\text{ext}}. \quad (2.126)$$

die Beschleunigungen

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{M}^{-1} \left(\mathbf{f}_n^{\text{ext}} - \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{d}_n) - \mathbf{f}^d(\mathbf{v}_{n-1/2}) \right) \quad (2.127)$$

berechnet. Damit das ZDV vollständig explizit bleibt, werden die Geschwindigkeiten zur Berechnung der viskosen Dämpfungskräfte \mathbf{f}^d um einen halben Zeitschritt nachgezogen, siehe Belytschko et al. [15] oder Cook et al. [37]. Bei Verwendung einer diagonalisierten Massenmatrix, deren Inverse direkt berechnet werden kann, vereinfacht sich die Berechnung der Beschleunigungen erheblich hin zur einfachen Auswertung von Vektoroperationen.

Das Verfahren wird für variable Zeitschrittgrößen Δt beschrieben, deren Größenverhältnisse in Abbildung 2.2 veranschaulicht werden. Die Zeitpunkte und Zeitinkremente werden durch

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t_{n+1/2}, \quad t_{n+1/2} = \frac{1}{2}(t_{n+1} + t_n) \quad (2.128)$$

und

$$\Delta t_n = t_{n+1/2} - t_{n-1/2} = \frac{1}{2} \left(t_{n+1} + t_n - (t_{n-1} + t_n) \right) = \frac{1}{2} (\Delta t_{n-1/2} + \Delta t_{n+1/2}) \quad (2.129)$$

zueinander in Beziehung gesetzt. Zwischen den vollen Zeitpunkten sind die Abstände mit $\Delta t_{n-1/2}$ und $\Delta t_{n+1/2}$ definiert, zwischen den halben Zeitpunkten mit Δt_n . Damit werden die Differenzenformeln

$$\mathbf{a}_n = \frac{\mathbf{v}_{n+1/2} - \mathbf{v}_{n-1/2}}{\Delta t_n} \quad \mathbf{v}_{n+1/2} = \frac{\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_{n-1}}{\Delta t_{n+1/2}} \quad (2.130)$$

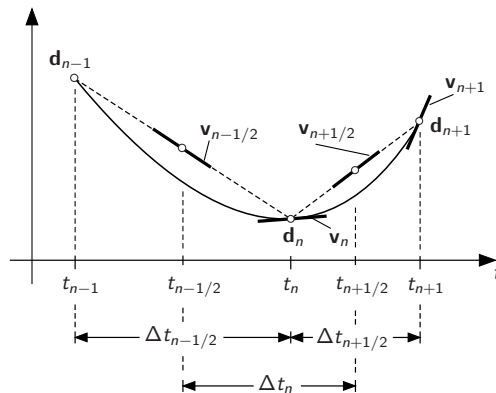


Abbildung 2.2: Zeitschrittweiten für das zentrale Differenzenverfahren im Intervall $\{t_{n-1}, t_{n+1}\}$.

aufgestellt, die durch einfaches Umstellen auf die Integrationsgleichungen für das ZDV führen

$$\mathbf{v}_{n+1/2} = \mathbf{v}_{n-1/2} + \Delta t_n \mathbf{a}_n \quad (2.131a)$$

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t_{n+1/2} \mathbf{v}_{n+1/2} . \quad (2.131b)$$

Die Geschwindigkeiten werden zu halben und die Verschiebungen zu ganzen Zeitpunkten abwechselnd berechnet, weshalb auch die Bezeichnung *Leapfrog*-(Bockspring)-Verfahren häufig zu finden ist, siehe Hairer et al. [58] oder Belytschko et al. [15]. Analog kann die Integration zwischen ganzen

$$\mathbf{v}_{n+1/2} = \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t_{n+1/2}}{2} \mathbf{a}_n \quad (2.132a)$$

$$(\mathbf{d}_n, \mathbf{v}_n) \mapsto (\mathbf{d}_{n+1}, \mathbf{v}_{n+1}) \quad \mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t_{n+1/2} \mathbf{v}_{n+1/2} \quad (2.132b)$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_{n+1/2} + \frac{\Delta t_{n+1/2}}{2} \mathbf{a}_{n+1} \quad (2.132c)$$

und halben Zeitpunkten angegeben werden

$$\mathbf{d}_n = \mathbf{d}_{n-1/2} + \frac{\Delta t_{n-1/2}}{2} \mathbf{v}_{n-1/2} \quad (2.133a)$$

$$(\mathbf{d}_{n-1/2}, \mathbf{v}_{n-1/2}) \mapsto (\mathbf{d}_{n+1/2}, \mathbf{v}_{n+1/2}) \quad \mathbf{v}_{n+1/2} = \mathbf{v}_{n-1/2} + \Delta t_n \mathbf{a}_n \quad (2.133b)$$

$$\mathbf{d}_{n+1/2} = \mathbf{d}_n + \frac{\Delta t_{n+1/2}}{2} \mathbf{v}_{n+1/2} . \quad (2.133c)$$

Dabei enthalten die Gleichungen (2.132b) und (2.133b) die Integrationsbeziehungen aus (2.131a) und (2.131b). Um das ZDV zu starten, können mit Gleichung (2.132a) alle für die Geschwindigkeit \mathbf{v}_0 erforderlichen Größen angegeben werden

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{v}_{+1/2} = \mathbf{v}_0 + \frac{1}{2} \Delta t_{1/2} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{v}_{-1/2} = \mathbf{v}_0 - \frac{1}{2} \Delta t_{1/2} \mathbf{a}_0 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{v}_0 = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_{-1/2} + \mathbf{v}_{+1/2}) . \quad (2.134)$$

Die numerische Umsetzung des zentralen Differenzenverfahrens wird mit folgenden Schritten realisiert:

1. Initialisierung $\mathbf{v}_0, \mathbf{d}_0$
2. Berechnung und Diagonalisierung der Massenmatrix \mathbf{M}
3. **Elementebene** Berechnung von \mathbf{f}^{int} und Zeitschritt $\Delta t_{n+1/2}$
4. Beschleunigung $\mathbf{a}_n = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{f}_n - \mathbf{C}\mathbf{v}_{n-1/2})$
5. Zeit anpassen $t_{n+1} = t_n + \Delta t_{n+1/2}, t_{n+1/2} = \frac{1}{2}(t_n + t_{n+1})$
6. Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{n+1/2} = \mathbf{v}_n + \frac{1}{2} \Delta t_{n+1/2} \mathbf{a}_n$
7. Geschwindigkeitsrandbedingungen $\mathbf{v}_{n+1/2}$ auf $\partial\mathcal{B}$ gleich $\frac{v_{n+1} + v_n}{2}$

8. Verschiebungsfortschreibung $\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t_{n+1/2} \mathbf{v}_{n+1/2}$
9. **Elementebene** $\mathbf{f}_{n+1}^{\text{int}}$ und Zeitschritt $\Delta t_{(n+1)+1/2}$
10. Kräfte $\mathbf{f}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}} - \mathbf{f}_{n+1}^{\text{int}}$
11. Beschleunigung \mathbf{a}_{n+1}
12. Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_{n+1/2} + \frac{1}{2} \Delta t_{n+1/2} \mathbf{a}_{n+1}$
13. Energiebilanz, Energieerhaltung zum Zeitpunkt $n + 1$ prüfen
14. Index anpassen $n \leftarrow n + 1$
15. Ausgabe schreiben
16. Simulationsende, falls nicht, wiederholen ab 5.

In den Schritten 6 und 12 wird eine Geschwindigkeitsberechnung zu ganzen Zeitschritten verwendet, um im 13. Schritt die Energiebilanz zu einem vollen Zeitschritt überprüfen zu können, siehe Belytschko et al. [15]. Alternativ kann die Berechnung der Geschwindigkeit im 6. Schritt wie in Gleichung (2.131a) nur zu halben Zeitschritten umgesetzt werden. Dann ist Schritt 12 zu streichen und die Überprüfung der Energieerhaltung wird entsprechend geändert, siehe hierzu Abschnitt 2.3.5.

2.3.2 Stabilität und die Effizienz beeinflussende Faktoren

Das ZDV ist bedingt stabil, siehe Benson [20] oder Cook et al. [37], und die erforderliche stabile beziehungsweise kritische Zeitschrittgröße ist von der maximalen Eigenfrequenz im System abhängig

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}^{\text{System}}} , \quad (2.135)$$

was durch eine spektrale Stabilitätsanalyse gezeigt werden kann. Wird diese stabile Zeitschrittgröße nur leicht überschritten, können Instabilitäten auftreten und die Berechnung *explodiert*. Klassischerweise wird die stabile Zeitschrittgröße durch zwei Begrenzungen ermittelt. Erstens ist die maximale Eigenfrequenz im System begrenzt durch die maximale Eigenfrequenz der individuellen Elemente

$$\omega_{\max}^{\text{System}} \leq \max_e(\omega_{\max}^e) . \quad (2.136)$$

Zweitens wird eine Beschränkung für die maximale Eigenfrequenz der Elemente angegeben. Häufig wird das Courant-Kriterium², abgekürzt CFL-Kriterium,

$$\Delta t^{e,\text{CFL}} \leq \min_e \frac{2}{\omega_{\max}^e} = \min_e \frac{l^e}{c^e} \quad (2.137)$$

² Benannt nach Courant, Friedrichs und Lewy [39] für Finite-Differenzen-Verfahren in der Zeit.

verwendet, was für den 1D-Fall einfach veranschaulicht werden kann. Eine Welle der Geschwindigkeit c^e durchläuft eine Strecke – hier ein Element der Länge l^e – in der Zeit $\Delta t^{e,\text{CFL}}$, die damit nach oben begrenzt ist. Für 2D- und 3D-Elemente wird näherungsweise, um die aufwendige Berechnung der höchsten Eigenfrequenz zu vermeiden, die Länge l^e durch eine effektive Länge l_{eff}^e ersetzt. Die Wellengeschwindigkeit ist abhängig vom Material, d. h. dem Elastizitätsmodul und der Querdehnzahl sowie der Viskosität, die bei der Berechnung von Impaktvorgängen und Schockwellen an Bedeutung gewinnt. Um Nichtlinearitäten in einfacher Weise gerecht zu werden, wird für die praktische Umsetzung empfohlen, die stabile Zeitschrittgröße um einem Sicherheitsfaktor $s^{\Delta t}$ zu verkleinern.

$$\Delta t = s^{\Delta t} \Delta t_{\text{crit}} \quad 0.8 \leq s^{\Delta t} \leq 0.98 . \quad (2.138)$$

Für anisotropes Materialverhalten ist die Orientierung mit der größten Steifigkeit für die Ermittlung der Zeitschrittgröße zu verwenden, da diese zur kleinsten Zeitschrittgröße führt. Tritt Schädigung auf, ist darauf zu achten, dass die Zeitschrittweite ausreichend gering ist, um das Auftreten und die zeitliche Evolution der Schädigung im Material mit der nötigen Genauigkeit erfassen zu können.

Bei der Nutzung expliziter Zeitintegration wird der numerische Aufwand entscheidend durch die Zeitschrittgröße bestimmt, die im Allgemeinen reduziert wird bei

- feineren Diskretisierungen (geringere effektive Längen),
- Elementen höherer Ansatzordnung (Anstieg der Elementfrequenz),
- sehr dünnen Dicken bei Kontinuumsschalen,
- steiferen Materialien,
- und dem Einsatz von Dämpfung, das heißt bei Viskosität.

Daher wird empfohlen, bereits bei der Erstellung des numerischen Modells die angegebenen Punkte zu beachten.

2.3.3 Dämpfung und Behandlung von Schockwellen

Um Dämpfung abzubilden wird häufig das Modell der Rayleigh-Dämpfung genutzt

$$\mathbf{C} = a_k \mathbf{K} + a_m \mathbf{M} . \quad (2.139)$$

Durch die Zusammensetzung aus der Massen- und Steifigkeitsmatrix ist die Dämpfung selbst abhängig von den Eigenfrequenzen des Systems. Der massenproportionale Anteil $a_m \mathbf{M}$ dämpft überwiegend die tieferen Frequenzen des betrachteten Modells, während der steifigkeitsproportionale Anteil $a_k \mathbf{K}$ vorrangig die höheren Frequenzen dämpft. So ist es möglich in einem expliziten Zeitintegrationsverfahren mit dem massenproportionalen Anteil quasi-statische Ergebnisse zu berechnen, was als dynamische Relaxation bezeichnet wird. Die dazu notwendige Bestimmung des Faktors a_m wird

zum Beispiel bei Papadrakakis [128] beschrieben. Eine Anwendung für den steifigkeitsproportionalen Anteil besteht beispielsweise in der Dämpfung nichtphysikalischer hochfrequenter Schwingungen, die häufig als *noise* (Rauschen) bezeichnet werden. Mit dem kritischen Dämpfungsfaktor

$$\xi = \frac{1}{2} \left(a_k \omega + \frac{a_m}{\omega} \right), \quad (2.140)$$

der ausgehend von einem System mit einem Freiheitsgrad abgeleitet wird (siehe Cook et al. [37]), kann mithilfe einer spektralen Stabilitätsanalyse die stabile Zeitschrittgröße zur maximalen Frequenz angegeben werden

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}} \left(\sqrt{1 + \xi^2} - \xi \right). \quad (2.141)$$

Die Zeitschrittgröße wird also infolge Dämpfung verringert.

Da für die Berechnung der viskosen Dämpfungskräfte $\mathbf{f}^d = \mathbf{C} \mathbf{v}_{n-1/2}$ aus Gleichung (2.126) die Geschwindigkeit um eine halbe Zeitschrittgröße nachgezogen wird, damit das Zeitintegrationsverfahren vollständig explizit bleibt, kann für das ZDV nur Genauigkeit erster Ordnung garantiert werden. Doch für die meisten Anwendungsfälle bleibt nach Cook et al. [37] die Genauigkeit zweiter Ordnung erhalten.

Um die numerische Simulation von Schock-Diskontinuitäten in Festkörpern durchzuführen, wird eine künstliche volumetrische Viskosität verwendet, die im englischsprachigen Schrifttum als *Bulk Viscosity* bezeichnet wird. Die Schockfront wird hierbei über mehrere Elemente verschmiert anstatt aufwendige Randbedingungen in der vernetzten Struktur einzuführen. Die klassische volumetrische Methode basiert auf Wilkins [183] mit dem künstlichen Druck

$$q = \begin{cases} c_0 \rho \ell^2 \text{sp}(\mathbf{d})^2 - c_1 \rho c_s \ell \text{sp}(\mathbf{d}) & \text{sp}(\mathbf{d}) < 0 \\ 0 & \text{sp}(\mathbf{d}) \geq 0 \end{cases}, \quad (2.142)$$

mit der Rohdichte ρ , der Wellengeschwindigkeit c_s , der Spur der Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} und einer charakteristischen Elementlänge ℓ . Der lineare und quadratische Anteil des künstlichen Druckes wird über die Konstanten c_0 und c_1 gesteuert, die beispielsweise in LS-DYNA [109] standardmäßig gleich $c_0 = 1.50$ und $c_1 = 0.06$ sind.

Eine Variante wurde von Lew et al. [98] für die Verwendung in unstrukturierten Netzen mit Tetraedern beliebiger Ansatzordnung entwickelt, deren wesentlicher Unterschied zur Methode nach Wilkins [183] in einer deviatorischen Formulierung liegt, aber die selben Schwierigkeiten wie Dämpfung in Bereichen ohne Schock aufweist.

2.3.4 Integration des Deformationsgradienten

In einer inkrementellen Formulierung, die oft für explizite Zeitintegrationsverfahren verwendet wird, werden Deformationen üblicherweise mit dem Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{L} beschrieben. Wird der Deformationsgradient \mathbf{F} benötigt, beispielsweise zur

Berechnung der Greenschen Verzerrungen $\mathbf{E} = 1/2(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1})$, kann dieser durch Integration über die Zeit fortgeschrieben werden. Das Vorgehen wird von van Hoogstraten et al. [177] beschrieben und in diesem Abschnitt zusammenfassend dargestellt. Zunächst wird der inkrementelle Deformationsgradient $\Delta \mathbf{F}_n$ mit der Beziehung

$$\mathbf{F}_{n+1} = \Delta \mathbf{F}_n \mathbf{F}_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{x}_n} \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.143)$$

eingeführt, wobei zum Zeitpunkt t_0 für den Ortsvektor $\mathbf{X} = \mathbf{x}_0$ gilt. Die Deformationsgradienten \mathbf{F}_{n+1} und \mathbf{F}_n beziehen sich jeweils auf die Referenzkonfiguration zum Zeitpunkt t_0 ; \mathbf{F}_{n+1} ausgehend von der Momentankonfiguration zum Zeitpunkt t_{n+1} und \mathbf{F}_n ausgehend von der Zwischenkonfiguration zum Zeitpunkt t_n . Der inkrementelle Deformationsgradient $\Delta \mathbf{F}_n$ bezieht sich ausgehend von der Momentan- auf die Zwischenkonfiguration zu den Zeitpunkten t_{n+1} und t_n . Für kleine Zeitschrittweiten $\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ wird der Ortsvektor eines Punktes im Intervall $t_n \leq t_{n+\alpha} \leq t_{n+1}$ durch eine lineare Interpolation approximiert

$$\mathbf{x}_{n+\alpha} \approx \alpha \mathbf{x}_{n+1} + (1 - \alpha) \mathbf{x}_n, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (2.144)$$

Damit gilt für den Deformationsgradienten zum Zeitpunkt $t_{n+\alpha}$

$$\mathbf{F}_{n+\alpha} = \alpha \frac{\partial \mathbf{x}_{n+1}}{\partial \mathbf{X}} + (1 - \alpha) \frac{\partial \mathbf{x}_n}{\partial \mathbf{X}} = \alpha \mathbf{F}_{n+1} + (1 - \alpha) \mathbf{F}_n = \left(\alpha \Delta \mathbf{F}_n + (1 - \alpha) \mathbf{1} \right) \mathbf{F}_n, \quad (2.145)$$

wobei im zweiten Rechenschritt Gleichung (2.143) eingesetzt wird.

Wird die Zeitableitung des Deformationsgradienten $\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \mathbf{F}$ aus Gleichung (2.21) über das Zeitintervall von t_n nach t_{n+1} integriert, ergibt sich zusammen mit \mathbf{F}_{n+1} aus Gleichung (2.143)

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{L} \mathbf{F} dt = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\mathbf{F}} dt = \mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{F}_n = \left(\Delta \mathbf{F} - \mathbf{1} \right) \mathbf{F}_n. \quad (2.146)$$

Für das gleiche Integral werden zwei Approximationen durchgeführt und $\mathbf{F}_{n+\alpha}$ aus Gleichung (2.145) eingesetzt

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{L} \mathbf{F} dt \approx \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{L} dt \mathbf{F}_{n+\alpha} \approx \Delta t_{n+1} \mathbf{L} \mathbf{F}_{n+\alpha} = \Delta t_{n+1} \mathbf{L} \left(\alpha \Delta \mathbf{F}_n + (1 - \alpha) \mathbf{1} \right) \mathbf{F}_n. \quad (2.147)$$

Für die erste Näherung in Gleichung (2.147) wird angenommen, dass der Deformationsgradient \mathbf{F} im betrachteten Zeitintervall konstant ist und durch den Deformationsgradienten $\mathbf{F}_{n+\alpha}$ aus dem betrachteten Zeitintervall ersetzt werden kann. In der zweiten Näherung wird angenommen, dass sich der Geschwindigkeitsgradient \mathbf{L} im betrachteten Zeitintervall Δt_{n+1} , was bereits für Approximation (2.144) als klein

vorausgesetzt wurde, nicht ändert. Der resultierende Ausdruck in Gleichung (2.147) wird dem resultierenden Ausdruck in Gleichung (2.146) gleichgesetzt und nach $\Delta \mathbf{F}_n$ aufgelöst folgt

$$\Delta \mathbf{F}_n = \left(\mathbf{1} - \alpha \Delta t_{n+1} \mathbf{L} \right)^{-1} \left(\mathbf{1} + (1 - \alpha) \Delta t_{n+1} \mathbf{L} \right) \quad (2.148)$$

Van Hoogstraten et al. [177] geben an, für $\alpha = 1/2$ die genauesten Resultate zu erzielen. Diesem Vorschlag wird gefolgt. Für das in Abschnitt 2.3.1 beschriebene zentrale Differenzenverfahren wird zudem davon ausgegangen, dass die Geschwindigkeiten zum Zeitpunkt $t_{n+1/2}$ vorliegen, und zur Berechnung des Geschwindigkeitsgradienten $\mathbf{L}(\mathbf{v}_{n+1/2})$ in Gleichung (2.148) verwendet werden. Damit folgt die in dieser Arbeit verwendete Gleichung

$$\Delta \mathbf{F}_n = \left(\mathbf{1} - \frac{\Delta t_{n+1}}{2} \mathbf{L}(\mathbf{v}_{n+1/2}) \right)^{-1} \left(\mathbf{1} + \frac{\Delta t_{n+1}}{2} \mathbf{L}(\mathbf{v}_{n+1/2}) \right), \quad (2.149)$$

die zusammen mit Gleichung (2.143)₁ die zeitliche Integration des Deformationsgradienten beschreibt. Diese Gleichung wird ebenfalls bei Benson [20] angegeben. In einer früher erschienenen Publikation von Benson [18] ist eine Variante enthalten, bei der in Gleichung (2.149) anstatt des Geschwindigkeitsgradienten die Verzerrungsgeschwindigkeit, also nur der symmetrische Anteil, genutzt wird. In einigen einfachen numerischen Untersuchungen wurden keine Unterschiede zwischen den beiden Varianten festgestellt und daher nicht näher untersucht.

In Abschnitt 6.4.4 wird näher auf die Umsetzung und Alternativen zur Berechnung des Deformationsgradienten, abgesehen von der direkten Berechnung ausgehend von $\mathbf{F} = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{X}$, eingegangen.

2.3.5 Integration der Energiegleichungen

Obgleich die Zeitschrittgröße anhand der Gleichungen (2.137) und (2.138) gewählt wird, können Instabilitäten bei hoch nichtlinearen Problemstellungen aus dem Ingenieurwesen, wie in Abschnitt 2.3.2 angesprochen, auftreten. Darum ist es einleuchtend, zum Ende jeden Zeitschrittes das folgende Kriterium der Energieerhaltung zu prüfen

$$\left| W^{\text{kin}} + W^{\text{int}} - W^{\text{ext}} \right| \leq \varepsilon \max\{W^{\text{ext}}, W^{\text{int}}, W^{\text{kin}}\}, \quad (2.150)$$

wobei die Toleranz ε im Bereich 10^{-2} liegt, siehe Belytschko et al. [15]. Die innere und äußere Energie werden mit der Trapezregel integriert

$$W_{n+1}^{\text{int}} = W_n^{\text{int}} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}^T (\mathbf{f}_n^{\text{int}} + \mathbf{f}_{n+1}^{\text{int}}) = W_n^{\text{int}} + \Delta W_{n+1}^{\text{int}} \quad (2.151)$$

$$W_{n+1}^{\text{ext}} = W_n^{\text{ext}} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{d}^T (\mathbf{f}_n^{\text{ext}} + \mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}}) = W_n^{\text{ext}} + \Delta W_{n+1}^{\text{ext}} \quad (2.152)$$

mit

$$\Delta \mathbf{d} = \Delta t_{n+1/2} \mathbf{v}_{n+1/2}. \quad (2.153)$$

Die kinetische Energie kann mit der Gleichung zur Berechnung der Geschwindigkeit zu vollen Zeitpunkten (2.133) direkt berechnet werden

$$W_{n+1}^{\text{kin}} = \frac{1}{2} \mathbf{v}_{n+1}^T \mathbf{M} \mathbf{v}_{n+1}. \quad (2.154)$$

Für Probleme mit Anfangsgeschwindigkeiten oder ohne externe Lasten, wird Energieerhaltung unter Berücksichtigung der Anfangswerte überprüft

$$\left| W_{n+1}^{\text{kin}} + W_{n+1}^{\text{int}} - W_0^{\text{kin}} - W_0^{\text{int}} - W_{n+1}^{\text{ext}} \right| \leq \epsilon \max\{W_{n+1}^{\text{kin}}, W_{n+1}^{\text{int}}, W_{n+1}^{\text{ext}}\}. \quad (2.155)$$

Zudem ist es möglich, zwischen zwei Zeitschritten die Änderung der inneren Energie gegenüber der Änderung der äußeren Energie zu vergleichen

$$\Delta W_{n+1}^{\text{kin}} + \Delta W_{n+1}^{\text{int}} \leq \Delta W_{n+1}^{\text{ext}}. \quad (2.156)$$

Sinnvoll ist auch die Kontrolle mit dem Energie-Quotienten

$$e = \frac{W_{n+1}^{\text{kin}} + W_{n+1}^{\text{int}}}{W_0^{\text{kin}} + W_0^{\text{int}} + W_{n+1}^{\text{ext}}}, \quad (2.157)$$

der als Kriterium für die adaptive Anpassung der Zeitschrittgröße verwendet werden kann, sobald die Toleranz $1 - \epsilon^- \leq e \leq 1 + \epsilon^+$ verletzt ist.

Ist die Geschwindigkeit, wie in Abschnitt 2.3.1 angesprochen, nur zu halben Zeitschritten bekannt, kann die Berechnung der kinetischen Energie in Gleichung (2.154) annähernd mit den Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_{n+1/2}$ durchgeführt werden, was für die meisten praktischen Anwendungen ausreichend ist. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, eine mittlere Geschwindigkeit $\bar{\mathbf{v}} = 1/2(\mathbf{v}_{n-1/2} + \mathbf{v}_{n+1/2})$ für die Ermittlung der Energiegrößen zu nutzen. Für Details und weitere Möglichkeiten, wie die Überprüfung der Impulserhaltung, wird auf Benson [20] verwiesen.

2.3.6 Massenskalierung

Die Zeitschrittgröße eines stabilen Berechnungsalgorithmus wird, wie bereits in Abschnitt 2.3.2 besprochen, beschränkt durch das Kriterium

$$\Delta t = \frac{2}{\omega_{\max}}. \quad (2.158)$$

Das Ziel der Massenskalierung ist die Vergrößerung der Zeitschritte durch die Reduktion von ω_{\max} . Hierzu werden die diskretisierten Massen um eine Massenmatrix $\tilde{\mathbf{M}}$ erhöht, die bestimmten Bedingungen genügen muss,

$$\mathbf{M}^S = \mathbf{M} + \lambda. \quad (2.159)$$

Die höheren Eigenfrequenzen sollen damit reduziert werden, und die tieferen Eigenfrequenzen, die für die Strukturantwort maßgeblich sind sollen weitgehend unbeeinflusst bleiben. Auf Starrkörperbewegungen darf die erhöhte Masse keinen Einfluss haben

$$\mathbf{M}^S \mathbf{a}^{\text{starr}} = \mathbf{M} \mathbf{a}^{\text{starr}} \quad \lambda \mathbf{a}^{\text{starr}} = \mathbf{0} \quad (2.160)$$

Falls die Massenmatrix keine Diagonalform besitzt wird die Gleichung

$$\mathbf{M}^S \mathbf{a}_n = (\mathbf{f}_n^{\text{ext}} - \mathbf{f}_n^{\text{int}} - \mathbf{C} \mathbf{v}_{n-1/2}) \quad (2.161)$$

gerne auch iterativ mit dem Verfahren der konjugierten Gradienten gelöst, siehe beispielsweise Olovsson und Simonsson [122].

Seit circa 1970 wird uniforme Massenskalierung in expliziten Zeitintegrationsverfahren genutzt. Seit 2004 gewann die selektive Massenskalierung (SMS) speziell für dünnwandige Strukturen, die entweder mit dünnen Volumen- oder mit Volumenschalenelementen untersucht werden, zunehmend an Bedeutung, siehe Olovsson et al. [124]. Aber auch bei nicht dünnwandigen Strukturen wird SMS für Volumenelemente genutzt, siehe Olovsson und Simonsson [122] und Olovsson et al. [123]. Eine Übersicht über die meist genutzten Skalierungsstrategien wird in der Dissertation von Tkachuk [172] dargestellt.

Selektive Massenskalierung für Volumenschalenelemente

Erste Vorschläge für eine selektive Massenskalierung von dünnwandigen Volumenelementen stammen von Olovsson et al. [124]. Die Beschleunigungen werden so gefiltert, dass eine selektive Massenskalierung möglich wird, mit der die zur Dickenrichtung gehörenden Eigenfrequenzen nicht länger die kritische Zeitschrittgröße dominieren. Einen ähnlichen Ansatz schlagen Cocchetti et al. [35] vor. Dabei wird im Vergleich zu Olovsson et al. [124] eine konsistente Transformation der Massenmatrix und des Kraftvektors durchgeführt, sodass eine analytische Berechnung der Eigenfrequenzen und somit eine Abschätzung eines optimalen Skalierungsfaktors möglich wird. Pagani et al. [126] führen die Nutzung dieser Skalierung mit einem Volumenschalenelement mit Ein-Punkt-Integration in Schalenebene fort. Später wird dieser Ansatz von Cocchetti et al. [36] noch für verzerrte Elementgeometrien erweitert. Die beschriebenen Vorgehensweisen stoßen an eine Grenze der Praktikabilität sobald mit Netzverfeinerung Details der Geometrie so aufgelöst werden, dass die Dickenrichtung nicht mehr deutlich die Abmessung in Schalenebene unterschreitet. Ein derartiges Beispiel einer dicken Schalenstruktur wird beispielsweise in Abschnitt 9.3 untersucht.

Variationelle Massenskalierung

Eine weitere Möglichkeit die Größe des Zeitschritts zu steuern bietet die variationelle Massenskalierung. Hierfür ist es notwendig eine Gleichungslösung für die Berechnung der Beschleunigungen durchzuführen, womit der Aufwand für große Probleme ansteigt, und es schwierig ist eine effektive Berechnung durchzuführen. Für Details wird auf die Arbeiten von Tkachuk und Bischoff [172, 173] verwiesen.

2.4 Das Newmarkverfahren als Beispiel eines impliziten Zeitintegrationsverfahrens

Der Ausgangspunkt des Newmark-Verfahrens³ ist die Erfüllung der Bewegungsgleichung zum Zeitpunkt $t_{n+1} = t_n + \Delta t$. Das Verfahren basiert auf Ansätzen für Verschiebung und Geschwindigkeit

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_{n+1}^P + \Delta t^2 \beta \ddot{\mathbf{d}}_{n+1} \quad \mathbf{d}_{n+1}^P = \mathbf{d}_n + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 (1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{d}}_n \quad (2.162)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+1} = \dot{\mathbf{d}}_{n+1}^P + \Delta t \gamma \ddot{\mathbf{d}}_{n+1} \quad \dot{\mathbf{d}}_{n+1}^P = \dot{\mathbf{d}}_n + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{d}}_n, \quad (2.163)$$

die hier mit den Prädiktoren \mathbf{d}_{n+1}^P und $\dot{\mathbf{d}}_{n+1}^P$ dargestellt sind. Die Prädiktoren fassen alle Werte zum Zeitpunkt t_n zusammen. Mit den Parametern β und γ werden die Eigenschaften des Verfahrens gesteuert. Für $2\beta \geq \gamma \geq 0.5$ ist das Verfahren unbedingt stabil. Typische Kombinationen der Parameter sind

$\beta = 0, \gamma = 1/2$ Explizites zentrales Differenzenverfahren,

$\beta = 1/4, \gamma = 1/2$ Trapezregel sowie

$\gamma > 1/2$ numerische Dämpfung proportional zu $\gamma - 1/2$.

Die Trapezregel ist demnach unbedingt stabil und besitzt quadratische Genauigkeit, womit sie ideal für lineare Problemstellungen geeignet ist.

Um die Verschiebungen \mathbf{d}_{n+1} zu berechnen, wird Gleichung (2.162)₁ nach $\ddot{\mathbf{d}}_{n+1}$ umgestellt und zusammen mit Gleichung (2.163)₁ in die Bewegungsgleichung zum Zeitpunkt t_{n+1} eingesetzt

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}_{n+1} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}}_{n+1} + \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{d}_{n+1}) = \mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}}, \quad (2.164)$$

was auf folgendes Gleichungssystem führt

$$\mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1}) = \frac{1}{\Delta t^2 \beta} \mathbf{M} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_{n+1}^P) + \mathbf{C} \left(\frac{\gamma}{\Delta t \beta} (\mathbf{d}_{n+1} - \mathbf{d}_{n+1}^P) + \dot{\mathbf{d}}_{n+1}^P \right) + \mathbf{f}^{\text{int}}(\mathbf{d}_{n+1}) - \mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}} = \mathbf{0}. \quad (2.165)$$

Mit dem Newtonverfahren erhält man schließlich den Iterationsalgorithmus

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2 \beta} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\Delta t \beta} \mathbf{C} + \mathbf{K}^\Delta(\mathbf{d}_{n+1}^i) \right) \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{i+1} = -\mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1}^i) \quad (2.166)$$

$$\mathbf{d}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{d}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{i+1}, \quad (2.167)$$

in dem die Tangentensteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}^\Delta(\mathbf{d}_{n+1}^i) = \left. \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{int}}}{\partial \mathbf{d}_{n+1}} \right|_{\mathbf{d}_{n+1}^i} \quad (2.168)$$

verwendet wird.

³ Für Details wird auf Cook et al. [37], Belytschko et al. [15] oder Hughes [70] verwiesen.

2.5 Anwendungsgebiete expliziter und impliziter Berechnungsverfahren

In einem expliziten Zeitintegrationsverfahren sind kombiniert mit einer diagonalen Massenmatrix keine Gleichungssysteme zu lösen, sondern nur eine Division je Freiheitsgrad erforderlich, um die Größen des nächsten diskretisierten Zeitpunkts direkt berechnen zu können. Dagegen muss in einem impliziten Verfahren in jedem Schritt das assemblierte Gleichungssystem gelöst werden, was im nichtlinearen Fall zusätzlich mehrere Iterationen erfordern kann. Der Vorteil impliziter Verfahren ist, dass deutlich größere Zeitschritte als in einem expliziten Verfahren möglich sind. Daher sind über einen längeren Zeitraum stattfindende Fragestellungen, die keine plötzlichen Änderungen erfahren, vorzugsweise mit einem impliziten Verfahren zu lösen und für Probleme mit sehr abrupt auftretenden Ereignissen sind explizite Verfahren vorzuziehen.

Es gibt zwar einen Bereich, in dem beide Verfahren gleichermaßen geeignet sind, doch sobald die Größe des Zeitschritts ohnehin sehr klein sein muss, sind explizite Verfahren effizienter. Das ist natürlicherweise für Wellenausbreitung sowie Crash- und Impaktvorgänge der Fall. Für diese nichtlinearen Anwendungen treten typischerweise Kontakt und Reibung in Kombination mit großen Deformationen sowie stark nichtlinearen Stoffgesetzen auf, die eine kleine Zeitschrittgröße erfordern, um die geforderte Genauigkeit einzuhalten. In impliziten Verfahren können kleinere Zeitschrittgrößen auch infolge von Konvergenz-Schwierigkeiten notwendig sein, um die Genauigkeit und die Stabilität des gewählten impliziten Verfahrens in Situationen mit geometrischer und materieller Nichtlinearität gewährleisten zu können.

Weitere Vorteile bieten explizite Verfahren bei zunehmender Größe der zu lösenden Probleme, da aufgrund der sehr einfachen Gleichungslösung der Aufwand nur linear ansteigt und nicht exponentiell wie in einem impliziten Verfahren. Erwähnenswert ist insbesondere, dass explizite Verfahren sehr einfach für parallele Berechnungen mit einer großen Anzahl an Rechenkernen genutzt werden können.

Für Simulationen mit Kontakt und beim Auftreten vieler Rotationen ist es besonders wichtig die Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltung zu überprüfen, die in der Regel, aufgrund der üblicherweise sehr kleinen Zeitschrittgrößen, mit expliziten Zeitintegrationsverfahren ohne weitere Maßnahmen erhalten werden. Bei längeren Simulationszeiten führen einige implizite Zeitintegrationsverfahren, darunter auch das implizite Newmarkverfahren, nach einer bestimmten Zeit, aufgrund größerer Zeitschrittweiten, zu einer quasi-„explodierenden“ Lösung, siehe Simo und Tarnow [160] oder Crisfield und Shi [40]. Um die 3 sogenannten strukturerhaltenden Eigenschaften der Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltung a priori zu erfüllen, ohne dabei die Zeitschrittweite für eine stabile Integration reduzieren zu müssen, werden angepasste Zeitintegrationsverfahren wie bei Simo und Tarnow [160] oder speziell für Schalenelemente bei Kuhl und Ramm [95] entwickelt. Für eine Übersicht über die Aktivitäten in diesem Bereich und die Bedeutung, die diese Verfahren insbesondere in

der Starrkörperdynamik gewonnen haben, wird auf die Arbeiten der Gruppe Betsch, zusammengefasst unter anderem in [22], verwiesen.

2.6 Vermeidung physikalisch nicht erklärbarer Versteifungseffekte in expliziten und impliziten Berechnungen

Versteifungseffekte

Seit den Anfängen der Finite-Elemente-Methode ist bekannt, dass bei der direkten Diskretisierung der kontinuumsmechanischen Grundgleichungen unrealistische Versteifungseffekte auftreten. Diese Effekte sind in einer Vielzahl an wissenschaftlichen Artikeln, Dissertationen und den in diesem Kapitel genannten Lehrbüchern beschrieben und werden häufig auch als *Locking* (Blockierung) bezeichnet. Eine gute Übersicht liefert etwa Bischoff [25] mit Blick auf Schalenformulierungen oder später Koschnick [92]. Für eine detaillierte Beschreibung und die Differenzierung in eine mathematische, numerische und mechanische Sichtweise wird auf die genannte Literatur verwiesen. Wichtig ist, dass die Effekte entweder von einem Materialparameter oder der Elementgeometrie abhängen, sodass von materiellem oder geometrischem *Locking* gesprochen wird. Der verantwortliche Materialparameter wird meist in Abhängigkeit der Poissonzahl ausgedrückt und von volumetrischem Versteifungseffekten gesprochen. Bei der Elementgeometrie entsteht durch schlechte Seitenverhältnisse Schublocking und für Elemente mit Trapezgeometrie sogenanntes Trapezlocking. Eine Besonderheit sind beliebig verzerrte Elementgeometrien, die nicht zu den klassischen Versteifungseffekten zählen, aber die Qualität der Ergebnisse oft deutlich verschlechtern.

Es gibt vereinfacht betrachtet Schwierigkeiten infolge der Poissonzahl, schlechter Seitenverhältnisse oder zu stark verzerrter Elementgeometrien. Um diesen Effekten entgegenzuwirken, wurden verschiedene Methoden entwickelt, die aus Sicht der numerischen Effizienz unterschiedlich aufwendig sind. Ob diese Methoden in expliziten oder impliziten Verfahren eingesetzt werden, korreliert direkt mit deren Aufwand.

Überwiegend in impliziten Verfahren genutzte Elementformulierungen

Für implizite Verfahren ist es vor dem Hintergrund eines Kosten-Nutzen-Verhältnis möglich, auch aufwendigere Elementformulierungen einzusetzen, da allgemein größere Zeitschritte verwendet werden können und der Aufwand der gesamten Simulation von der Lösung des assemblierten Gleichungssystems dominiert wird. So wurden Methoden mit zusätzlichen Freiheitsgraden, wie die Methode inkompatibler Verschiebungen (IM) oder erweiterter Verzerrungen (EAS), siehe Kapitel 3, aufgrund des Berechnungsaufwands für die zusätzlichen inkompatiblen Freiheitsgrade bislang fast ausschließlich in impliziten Verfahren verwendet. Das gilt analog für Methoden mit

angenommenen Verzerrungen, wie ANS (*Assumed Natural Strains*) und MITC (*Mixed Interpolation of Tensorial Components*), besprochen in Abschnitt 6.2.1, oder DSG (*Discrete-Strain-Gap*), siehe Bletzinger et al. [29] oder Koschnick et al. [93]. Diese kommen zwar ohne zusätzliche Freiheitsgrade aus, erfordern aber eine Modifikation bestehender Deformationsmaße, was meist mit zusätzlichem Aufwand verbunden ist und zudem zu einer dichter besetzten Struktur der B-Matrix führt.

Überwiegend in expliziten Verfahren genutzte Elementformulierungen

Für explizite Verfahren werden aufgrund der deutlich kleineren Schrittweite auch erheblich mehr Berechnungsschritte innerhalb eines Zeitraums durchlaufen. Der numerische Aufwand einer expliziten Simulation hängt damit direkt vom Aufwand in jedem Zeitschritt ab, da – wie oben erwähnt – keine aufwendige Gleichungslösung durchzuführen ist. Die für implizite Verfahren eingesetzten Elementformulierungen sind daher beispielsweise in kommerziellen Anwendungen expliziter Verfahren eher selten vorzufinden.

In expliziten Verfahren dominiert die Verwendung von Volumen- und Schalenelementen mit einer reduzierten Anzahl an Integrationspunkten. Damit lässt sich einerseits der numerische Aufwand so gering wie möglich halten und andererseits werden Versteifungseffekte durch diesen Fehler in der numerischen Integration passend kompensiert. Bei Volumenelementen wird meist ein einzelner Integrationspunkt in Elementmitte gewählt, wobei nur an diesem das Materialgesetz und somit die Spannung ausgewertet wird. Bei Schalenelementen werden statt eines einzelnen oft mehrere Integrationspunkte in Dickenrichtung verwendet, um innerhalb eines Elements mehr als nur einen konstanten Spannungszustand abbilden zu können, was für Biegedeformationen mit Plastizität (wie bei Metallumformung) zu genaueren Ergebnissen führt. Um den Wegfall der fehlenden Integrationspunkte zu kompensieren, wird die sogenannte Hourglassstabilisierung hinzugefügt, um insbesondere die Kinematiken in Form einer Sanduhr (*Hourglass*), zu vermeiden. Damit sich die Einsparung der Integrationspunkte gemessen am Aufwand lohnt, muss diese Hourglassstabilisierung so effizient wie möglich erfolgen, weshalb insbesondere für das zu berücksichtigende Materialgesetz meist stark vereinfachende Annahmen getroffen werden. Da explizite Verfahren häufig für sehr kurze Ereignisse mit einer Dominanz von Trägheitskräften angewandt wurden, sind diese Vereinfachungen meist nicht besonders auffällig. Für die anhaltend starke Verwendung expliziter Verfahren auch in quasi-statischen Fällen ist es aber wünschenswert, verbesserte Elementformulierungen im Vergleich zu den reduziert integrierten Elementen verwenden zu können.

Eine weitere Motivation für verbesserte Elementformulierungen ist die Schwierigkeit den optimalen Hourglasskoeffizienten zu wählen, mit dem die Größe und damit der Einfluss der Hourglassstabilisierung auf das Elementverhalten gesteuert wird. Wird der Hourglasskoeffizient zu gering gewählt ist ein Auftreten der oben beschriebenen Sanduhr-Kinematiken wahrscheinlich und bei einer Überschätzung ist das

Elementverhalten entweder zu steif oder die Ergebnisse folgen durch die Dominanz der Hourglassstabilisierung nicht mehr einer zu erwartenden physikalischen Antwort. Auch bei einer sorgfältigen Wahl des Hourglasskoeffizienten können nicht beherrschbare Kinematiken oder ein tendenziell zu weiches Elementverhalten nicht vollständig ausgeschlossen werden.

3 Stand der Methodik inkompatibler Erweiterungen

Um den aktuellen Stand inkompatibel erweiterter Elementformulierungen darzustellen, wird zuerst die Methode inkompatibler Verschiebungen (IM) ausgehend von Wilson et al. [186] und die Methode inkompatibler Verzerrungen (EAS) von Simo und Rifai [159] knapp zusammengefasst. Anschließend wird die Behandlung großer Deformationen beschrieben und wie die Gleichungen in einem expliziten oder impliziten Verfahren gelöst werden können. Es folgt ein Auszug der im Schrifttum vorgeschlagenen Varianten zur Formulierung von Volumenelementen inklusive der Behandlung von Kinematiken, die von inkompatiblen Erweiterungen verursacht werden. Nach einem Blick auf die Verwendung inkompatibler Erweiterungen in Volumenschalenelementen schließt das Kapitel mit einer Darstellung zur üblichen Anzahl inkompatibler Freiheitsgrade.

3.1 Entwicklung der Methodik inkompatibler Erweiterungen

Für eine Gesamtübersicht zur Methodik inkompatibler Erweiterungen wird auf Wriggers [189] verwiesen. Darin ist unter anderem eine Liste mit Eigenschaften enthalten, die Elementformulierungen mit inkompatiblen Anreicherungen erfüllen, und deren Verwendung motivieren:

1. Versteifungsfreies Verhalten bei Inkompressibilität,
2. gutes Verhalten bei Biegung und
3. dünnen Elementen,
4. geringe Empfindlichkeit gegenüber verzerrten Netzen,
5. gute Genauigkeit bei groben Netzen sowie
6. einfache Implementierung allgemeiner Materialformulierungen/-gesetze.

Diesbezüglich ist auch das Buch von Pian und Wu [130] zu erwähnen. Die klassischen Verfahren werden hier summarisch in einer einheitlichen Notation dargestellt, was für weiterführende Betrachtungen sehr vorteilhaft ist.

3.1.1 Klassische Wilson-Formulierung inkompatibler Verschiebungen

Als Zugang zur Methode inkompatibler Verschiebungen wird die von der Verschiebung \mathbf{u} abhängige schwache Form

$$\int_{\mathcal{B}} \delta \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma} \, dv + \int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{u} \cdot \rho \ddot{\mathbf{u}} \, dv - \int_{\mathcal{B}} \delta \mathbf{u} \cdot \rho \mathbf{b} \, dv - \int_{\partial \mathcal{B}^t} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \, da = 0 \quad (3.1)$$

verwendet, die aus der Gleichgewichtsbedingung

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.2)$$

gewonnen werden kann. Darin sind die Verzerrungen

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \operatorname{sym}(\operatorname{grad} \mathbf{u}) \quad (3.3)$$

eine Funktion der Verschiebungen und die Spannungen

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon \quad (3.4)$$

werden mit Konstitutivgleichungen als Funktion der Verzerrungen ermittelt. Die Beschleunigung wird durch $\ddot{\mathbf{u}}$, die Volumenkräfte durch \mathbf{b} und der auf das Flächenelement bezogene Spannungsvektor durch \mathbf{t} dargestellt. Der Rand $\partial \mathcal{B}$ wird für vorgebeschriebene Verschiebungen und Spannungen in die Anteile $\partial \mathcal{B}^u$ und $\partial \mathcal{B}^t$ zerlegt

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \partial \mathcal{B}^u \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{auf } \partial \mathcal{B}^t . \quad (3.5)$$

Mit den Verschiebungen \mathbf{u}_0 und den Geschwindigkeiten \mathbf{v}_0 werden die Anfangsrandbedingungen dargestellt

$$\mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 \quad \dot{\mathbf{u}}(t=0) = \mathbf{v}_0 . \quad (3.6)$$

Für eine Diskretisierung mit finiten Elementen $\mathcal{B} \approx \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathcal{B}_e$ werden die Verschiebungen mit Lagrangeschen Ansatzfunktionen, die in der Matrix \mathbf{N} angeordnet sind, und den kompatiblen Verschiebungsfreiheitsgraden \mathbf{d}^{co} approximiert

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{N} \mathbf{d}^{\text{co}} . \quad (3.7)$$

Die virtuellen Größen werden mit den gleichen Ansatzfunktionen approximiert

$$\delta \mathbf{u} \approx \mathbf{N} \delta \mathbf{d}^{\text{co}} . \quad (3.8)$$

Mit den Gleichungen (3.7) und (3.8) ist die Lösung von (3.1) abhängig von den Freiheitsgraden \mathbf{d}^{co} möglich.

Zur Verbesserung der Elementgenauigkeit addieren Wilson et al. [186] in Gleichung (3.7) eine Verschiebungsapproximation basierend auf inkompatiblen Ansatzfunktionen \mathbf{N}^{im} , bekannt als *Incompatible Modes* (IM), und zusätzlich eingeführten inkompatiblen Freiheitsgraden \mathbf{d}^{im}

$$\mathbf{u} \approx \mathbf{N} \mathbf{d}^{\text{co}} + \mathbf{N}^{\text{im}} \mathbf{d}^{\text{im}} . \quad (3.9)$$

Für die Berechnung der schwachen Form (3.1) wird die Verschiebungsapproximation (3.9) nur zur Beschreibung der Verzerrungen verwendet, die restlichen Anteile werden mit der Verschiebungsapproximation (3.7) beschrieben. Formal betrachtet wird das Verschiebungsfeld in einen kompatiblen Anteil \mathbf{u}^{co} und einen inkompatiblen Anteil \mathbf{u}^{im} aufgeteilt

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\text{co}} + \mathbf{u}^{\text{im}}, \quad (3.10)$$

der eingesetzt in Gleichung (3.3) auch die Verzerrungen in einen kompatiblen und einen inkompatiblen Anteil aufteilt

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{co}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{im}} = \text{sym}(\text{grad}\mathbf{u}^{\text{co}}) + \text{sym}(\text{grad}\mathbf{u}^{\text{im}}). \quad (3.11)$$

Mit der Verschiebungsapproximation (3.9) werden die diskretisierten Verzerrungen in Matrixnotation, dargestellt durch die geschweiften Klammern,

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{co}}\} = \mathbf{B}^{\text{co}} \mathbf{d}^{\text{co}}, \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{im}}\} = \mathbf{B}^{\text{im}} \mathbf{d}^{\text{im}} \quad (3.12)$$

mit den Matrizen \mathbf{B}^{co} und \mathbf{B}^{im} dargestellt. \mathbf{B}^{co} enthält die die Ableitungen von \mathbf{N} und \mathbf{B}^{im} die Ableitungen von \mathbf{N}^{im} . Damit ist die Lösung der schwachen Form (3.1) von den Freiheitsgraden \mathbf{d}^{co} und \mathbf{d}^{im} abhängig, und durch 2 Gleichungen beschreibbar

$$\bigcup_{e=1}^{n_e} (\mathbf{f}^{\text{co}} + \mathbf{M} \mathbf{d}^{\text{co}} - \mathbf{f}^{\text{ext}}) = \mathbf{0} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{f}^{\text{im}} = \mathbf{0} \quad \text{fr } e = 1, \dots, n_e \quad (3.14)$$

mit

$$\mathbf{f}^{\text{co}} = \int_{B_e} \mathbf{B}^T \{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{co}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{im}})\} dv \quad (3.15)$$

$$\mathbf{f}^{\text{im}} = \int_{B_e} \mathbf{B}^{\text{im}T} \{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{co}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{im}})\} dv \quad (3.16)$$

$$\mathbf{M} = \int_{B_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv \quad (3.17)$$

$$\mathbf{f}^{\text{ext}} = \int_{B_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{b} dv + \int_{\partial B_e^t} \mathbf{N}^T \mathbf{t} da. \quad (3.18)$$

Da die Freiheitsgrade \mathbf{d}^{im} inkompatibel zwischen den Elementen sind, ist deren Berechnung mit Gleichung (3.14) ohne Assemblierung direkt auf Elementebene möglich. Sobald ein nichtlineares Materialgesetz vorliegt, ist Gleichung (3.14) ebenfalls nichtlinear. Das bedeutet, dass für jedes Element ein nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden muss, auch dann wenn Gleichung (3.13) mit einem expliziten Zeitintegrationsverfahren gelöst wird.

Für die Abbildung von Starrkörperbewegungen und konstanten Spannungszuständen muss $\mathbf{f}^{\text{im}} = \mathbf{0}$ gelten. Mit einer konstanten Spannung $\boldsymbol{\sigma}^c$ kann aus Gleichung (3.16) direkt die sogenannte Orthogonalitätsbedingung abgeleitet werden

$$\int_{B_e} \mathbf{B}^{\text{im}T} \{\boldsymbol{\sigma}^c\} dv = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \int_{B_e} \mathbf{B}^{\text{im}} dv = \mathbf{0}. \quad (3.19)$$

Diese Bedingung lässt sich analog aus der Forderung, dass keine Energie aus Verzerrungen infolge inkompatibler Verschiebungen entstehen darf, ableiten

$$\int_{B_e} \{\boldsymbol{\sigma}^c\}^T \{\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{im}}\} dv = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \int_{B_e} \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{im}} dv = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \int_{B_e} \mathbf{B}^{\text{im}} dv = \mathbf{0}. \quad (3.20)$$

Zur Erfüllung von (3.19) oder (3.20) ist für verzerrte Elementgeometrien eine Modifikation von \mathbf{B}^{im} nötig. Taylor, Beresford und Wilson [169] schlagen zunächst vor, konstante, in Elementmitte ausgewertete, Transformationsbeziehungen zur Berechnung von \mathbf{B}^{im} zu verwenden. Wilson und Ibrahimbegovic [184, 185] variieren dies später mit der Verwendung einer konstanten Korrekturmatrix (*constant correction matrix*), für die formal eine Aufteilung der inkompatiblen Verzerrung in einen konstanten und einen von den Elementkoordinaten $\boldsymbol{\xi}$ abhängigen Anteil erfolgt

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{im}} = \boldsymbol{\varepsilon}_0^{\text{im}} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{\text{im}}(\boldsymbol{\xi}). \quad (3.21)$$

Einsetzen in Bedingung (3.20)

$$\int_{B_e} (\boldsymbol{\varepsilon}_0^{\text{im}} + \boldsymbol{\varepsilon}_1^{\text{im}}) dv = \boldsymbol{\varepsilon}_0^{\text{im}} v_e + \int_{B_e} \boldsymbol{\varepsilon}_1^{\text{im}} dv = \mathbf{0} \quad (3.22)$$

führt schließlich auf den Korrekturterm

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0^{\text{im}} = \frac{1}{v_e} \int_{B_e} \boldsymbol{\varepsilon}_1^{\text{im}} dv. \quad (3.23)$$

Zunächst waren inkompatible Freiheitsgrade mit den zugehörigen Modifikationen zur korrekten Abbildung von Starrkörperbewegungen und konstanten Spannungszuständen umstritten, bis 17 Jahre später die im nächsten Abschnitt vorgestellte Formulierung von Simo und Rifai [159] publiziert wurde, die den sogenannten Patchtest, und damit die oben geforderten Bedingungen erfüllt.

3.1.2 Simo-Rifai-Formulierung der erweiterten Verzerrungen

Die Basis der Simo-Rifai-Formulierung ist das Hu-Washizu Funktional, dass auf einer Wichtung der Gleichungen (3.1), (3.3) und (3.4) mit unabhängigen Größen \mathbf{u} , $\boldsymbol{\varepsilon}$ und $\boldsymbol{\sigma}$ basiert

$$\int_B \delta(\text{sym}(\text{grad}\mathbf{u})) \cdot \boldsymbol{\sigma} dv + \int_B \delta\mathbf{u} \cdot \rho\ddot{\mathbf{u}} dv - \int_B \delta\mathbf{u} \cdot \rho\mathbf{b} dv - \int_{\partial B^t} \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} da = 0 \quad (3.24)$$

$$\int_B \delta\boldsymbol{\sigma} \cdot (\text{sym}(\text{grad}\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}) dv = 0 \quad (3.25)$$

$$\int_B \delta\boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon - \boldsymbol{\sigma}) dv = 0. \quad (3.26)$$

Die letzten 3 Gleichungen werden häufig kompakt angegeben

$$\int_B \delta\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon dv + \int_B \delta(\boldsymbol{\sigma} \cdot (\text{sym}(\text{grad}\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon})) dv + \int_B \delta\mathbf{u} \cdot \rho\ddot{\mathbf{u}} dv - \int_B \delta\mathbf{u} \cdot \rho\mathbf{b} dv - \int_{\partial B^t} \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} da = 0. \quad (3.27)$$

Simo und Rifai [159] führen die Verzerrungen ε^{en} als unabhängige Größen ein und es entsteht das Verzerrungsfeld

$$\varepsilon = \varepsilon^{\text{en}}(\mathbf{u}^{\text{co}}) + \varepsilon^{\text{en}} = \text{sym}(\text{grad}\mathbf{u}^{\text{co}}) + \varepsilon^{\text{en}}. \quad (3.28)$$

Wird dieses in Gleichung (3.27) eingesetzt, ergibt sich mit $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\text{co}}$

$$\begin{aligned} \int_B \delta (\text{sym}(\text{grad}\mathbf{u}^{\text{co}}) + \varepsilon^{\text{en}}) \cdot \boldsymbol{\sigma}^\varepsilon dv + \int_B \delta (\boldsymbol{\sigma} \cdot (-\varepsilon^{\text{en}})) dv + \int_B \delta \mathbf{u}^{\text{co}} \cdot \rho \ddot{\mathbf{u}}^{\text{co}} dv \\ - \int_B \delta \mathbf{u}^{\text{co}} \cdot \rho \mathbf{b} dv - \int_{\partial B^t} \delta \mathbf{u}^{\text{co}} \cdot \mathbf{t} da = 0. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Für den Grenzfall, bei dem mit zunehmender Netzverfeinerung ein konstanter Spannungszustand $\boldsymbol{\sigma}^c$ in einem finiten Element vorliegt, liefert der zweite Teil von Gleichung (3.29), die für jedes Element einzeln zu erfüllende Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{B_e} \delta [\boldsymbol{\sigma}^c \cdot \varepsilon^{\text{en}}] dv = 0 \quad \rightarrow \quad \int_{B_e} \boldsymbol{\sigma}^c \cdot \varepsilon^{\text{en}} dv = 0 \quad \rightarrow \quad \int_{B_e} \varepsilon^{\text{en}} dv = 0. \quad (3.30)$$

Mit der Diskretisierung analog zum vorhergehenden Abschnitt

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}^{\text{co}} = \mathbf{N}\mathbf{d}^{\text{co}}, \quad \{\varepsilon^{\text{co}}\} = \mathbf{B}\mathbf{d}^{\text{co}} \quad (3.31)$$

und der Diskretisierung der erweiterten Verzerrungen

$$\{\varepsilon^{\text{en}}\} = \mathbf{B}^{\text{en}}\mathbf{d}^{\text{en}} \quad (3.32)$$

mit Verzerrungsfreiheitsgraden \mathbf{d}^{en} , ist die diskretisierte Orthogonalitätsbedingung

$$\int_{B_e} \mathbf{B}^{\text{en}} dv = 0. \quad (3.33)$$

Für Details zur Bedeutung der Orthogonalitätsbedingung wird auf Bischoff [27] verwiesen. Wichtig ist, dass eine Modifikation des Prinzips von Hu-Washizu sowie die Orthogonalitätsbedingung nur dann sinnvoll sind, wenn eine Diskretisierung stattfindet. Wenn aber bereits auf variationeller Ebene die volle Orthogonalität zu den Spannungen gefordert wird, führt das zur trivialen Lösung, dass die erweiterten Verzerrungen gleich Null sein müssen, was wieder einer reinen Verschiebungsformulierung entspricht. Um die Orthogonalitätsbedingung in einer Diskretisierung einzuhalten, wird die bereits erwähnte, einfache und effektive Idee von Taylor et al. [169] verwendet. Dabei werden die inkompatiblen Verzerrungen auf eine *konstante* Metrik bezogen und zusätzlich mit einem Faktor multipliziert, der eine *nicht konstante* Jakobideterminante eliminiert. Diese Idee ist beispielsweise in Gleichung (5.91) umgesetzt worden. Auf die Gestaltung von \mathbf{B}^{en} wird bei der Elementgestaltung näher eingegangen.

Das zu lösende Gleichungssystem ist dem der klassischen Wilson-Formulierung in den Gleichungen (3.13) und (3.14) sehr ähnlich

$$\bigcup_{e=1}^{n_e} (\mathbf{f}^{\text{co}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} - \mathbf{f}^{\text{ext}}) = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{f}^{\text{en}} = \mathbf{0} \quad \text{für } e = 1, \dots, n_e \quad (3.35)$$

mit

$$\mathbf{f}^{\text{co}} = \int_{\mathcal{B}_e} \mathbf{B}^T \{ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{co}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{en}}) \} dV \quad (3.36)$$

$$\mathbf{f}^{\text{en}} = \int_{\mathcal{B}_e} \mathbf{B}^{\text{en}T} \{ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{co}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{en}}) \} dV, \quad (3.37)$$

und \mathbf{M} und \mathbf{f}^{ext} aus den Gleichungen (3.17) und (3.18). Wird \mathbf{B}^{en} durch \mathbf{B}^{im} ersetzt, ist die klassische Wilson-Formulierung identisch zur Simo-Rifai-Formulierung und somit ebenfalls variationell konsistent, siehe auch Simo und Rifai [159].

So führt die Formulierung mit inkompatiblen Freiheitsgraden auf die zu lösenden Gleichungen (3.34) und (3.35), die in das genutzte, explizite oder implizite, Lösungsverfahren einzubetten sind. Dabei ist Gleichung (3.35) nur für das jeweils betrachtete Element zu erfüllen und kann dazu genutzt werden, die inkompatiblen Freiheitsgrade aus den Gleichungen zu eliminieren. Diese als Kondensation bezeichnete Eliminierung der inkompatiblen Freiheitsgrade wird in den Abschnitten 3.1.4 und 3.1.5 am Beispiel des impliziten Newmark- sowie des expliziten zentralen Differenzenverfahrens erläutert und die sich ergebenden Unterschiede diskutiert.

3.1.3 Erweiterung für große Deformationen

Ein Vorzug der EAS- und damit auch der IM-Elemente ist die Möglichkeit, diese einfach für große Deformationen zu erweitern. Dazu sind verschiedene Deformationsmaße geeignet und es existiert eine große Anzahl an Publikationen zu diesem Thema. Die wesentlichen Arbeiten wurden bereits bei Wriggers [189] zusammengefasst.

Zunächst wurde die Methode der erweiterten Verzerrungen von Simo und Armero [156] mit dem Deformationsgradienten für große Deformationen ergänzt. Anstatt des linearen Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$ wird der Deformationsgradient \mathbf{F} oder der Verschiebungsgradient \mathbf{H} erweitert und ebenfalls in eine Hu-Washizu Formulierung eingebettet. Auf diesen Deformationsgradienten ist dann die multiplikative Aufspaltung für Plastizität nach wie vor einfach anwendbar. Abgesehen vom Deformationsgradienten, ist auch die direkte Erweiterung anderer Deformationsmaße, die für große Deformationen geeignet sind, möglich. Li, Crook und Lyons [103] erweitern beispielsweise die Green'schen Verzerrungen \mathbf{E} und Crisfield et al. [43] den rechten Strecktensor $\mathbf{U}(= \mathbf{R}^T \mathbf{F})$. Möglich ist aber auch die bei Belytschko et al. [15] beschriebene Erweiterung der Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} , die von Puso [132] angewendet wird.

3.1.4 Berechnung am Beispiel des impliziten Newmarkverfahrens

Im Folgenden wird gezeigt, wie das implizite Newmarkverfahren aus Abschnitt 2.4 auf eine Elementformulierung mit inkompatiblen Freiheitsgraden angewandt werden

kann. Für die Fortschreibung hin zu einem Zeitpunkt $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$ werden zuerst die Gleichungen (3.34) und (3.35) nur für ein Element betrachtet

$$\mathbf{f}^{\text{co}}(\mathbf{d}_{n+1}^{\text{co}}, \mathbf{d}_{n+1}^{\text{en}}) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{co}} - \mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{f}^{\text{en}}(\mathbf{d}_{n+1}^{\text{co}}, \mathbf{d}_{n+1}^{\text{en}}) = \mathbf{0}, \quad (3.39)$$

wobei die Kraftvektoren \mathbf{f}^{co} und \mathbf{f}^{en} sowohl von den kompatiblen als auch den inkompatiblen Verschiebungen jeweils zum Zeitpunkt t_{n+1} abhängen. Dann werden die Ansätze des Newmarkverfahrens für die kompatiblen Verschiebungen und Geschwindigkeiten aus den Gleichungen (2.162) und (2.163) verwendet. Dazu wird Gleichung (2.162) nach den Beschleunigungen umgestellt und in Gleichung (3.38) eingesetzt. Es entsteht der mit $\mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1}^{\text{co}}, \mathbf{d}_{n+1}^{\text{en}})$ abgekürzte Ausdruck analog zu dem in Gleichung (2.165), dessen zusätzliche Abhängigkeit von den inkompatiblen Freiheitsgraden der einzige Unterschied ist. Die zu lösenden Gleichungen sind damit

$$\mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1}^{\text{co}}, \mathbf{d}_{n+1}^{\text{en}}) = \mathbf{0} \quad (3.40)$$

$$\mathbf{f}^{\text{en}}(\mathbf{d}_{n+1}^{\text{co}}, \mathbf{d}_{n+1}^{\text{en}}) = \mathbf{0}, \quad (3.41)$$

die bei der im vorhergehenden Abschnitt 3.1.3 beschriebenen Betrachtung großer Deformationen implizit von sowohl den kompatiblen als auch den inkompatiblen Freiheitsgraden $\mathbf{d}_{n+1}^{\text{co}}$ und $\mathbf{d}_{n+1}^{\text{en}}$ abhängen. Daher ist die Linearisierung von \mathbf{G} und \mathbf{f}^{en} bezüglich $\mathbf{d}_{n+1}^{\text{co}}$ und $\mathbf{d}_{n+1}^{\text{en}}$ erforderlich, was zu einem Iterationsalgorithmus analog zu dem in den Gleichungen (2.166) und (2.167) führt

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t_n^2} \mathbf{M} + \mathbf{K}_{n+1}^{\Delta, \text{co}(i)} & \mathbf{K}_{n+1}^{\Delta, \text{co}|\text{en}(i)} \\ \mathbf{K}_{n+1}^{\Delta, \text{en}|\text{co}(i)} & \mathbf{K}_{n+1}^{\Delta, \text{en}(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{\text{co}(i+1)} \\ \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{\text{en}(i+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{G}(\mathbf{d}_{n+1}^{\text{co}(i)}, \mathbf{d}_{n+1}^{\text{en}(i)}) \\ -\mathbf{f}^{\text{en}}(\mathbf{d}_{n+1}^{\text{co}(i)}, \mathbf{d}_{n+1}^{\text{en}(i)}) \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

mit dem Unterschied, dass jetzt auch die inkompatiblen Verschiebungen fortzuschreiben sind. Die Steifigkeitsmatrizen in Gleichung (3.42) sind in allgemeiner Form

$$\mathbf{K}_{n+1}^{\Delta, \text{co}(i)} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{co}}(\mathbf{d}^{\text{co}}, \mathbf{d}^{\text{en}})}{\partial \mathbf{d}^{\text{co}}} \right|_{\mathbf{d}_{n+1}^{\text{co}(i)}, \mathbf{d}_{n+1}^{\text{en}(i)}} \quad (3.43)$$

$$\mathbf{K}_{n+1}^{\Delta, \text{en}(i)} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{en}}(\mathbf{d}^{\text{co}}, \mathbf{d}^{\text{en}})}{\partial \mathbf{d}^{\text{en}}} \right|_{\mathbf{d}_{n+1}^{\text{co}(i)}, \mathbf{d}_{n+1}^{\text{en}(i)}} \quad (3.44)$$

$$\mathbf{K}_{n+1}^{\Delta, \text{co}|\text{en}(i)} = (\mathbf{K}_{n+1}^{\Delta, \text{en}|\text{co}(i)})^T = \left. \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{co}}(\mathbf{d}^{\text{co}}, \mathbf{d}^{\text{en}})}{\partial \mathbf{d}^{\text{en}}} \right|_{\mathbf{d}_{n+1}^{\text{co}(i)}, \mathbf{d}_{n+1}^{\text{en}(i)}}. \quad (3.45)$$

Die klassische Kondensation der inkompatiblen Freiheitsgrade nach Simo und Armero [156] erfolgt zunächst durch die Umstellung der unteren Zeile aus Gleichung (3.42) nach dem Inkrement $\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{\text{en}(i+1)}$

$$\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{\text{en}(i+1)} = -(\mathbf{K}_{n+1}^{\Delta, \text{en}(i)})^{-1} \left(\mathbf{K}_{n+1}^{\Delta, \text{en}|\text{co}(i)} \Delta \mathbf{d}_{n+1}^{\text{co}(i+1)} + \mathbf{f}^{\text{en}}(\mathbf{d}_{n+1}^{\text{co}(i)}, \mathbf{d}_{n+1}^{\text{en}(i)}) \right), \quad (3.46)$$

das anschließend in die erste Zeile in Gleichung (3.42) eingesetzt wird. Dieser Schritt führt zur ausschließlich von den kompatiblen Verschiebungen abhängigen Gleichung auf globaler Ebene

$$\mathbf{K}^{\text{global}(i)} \Delta \mathbf{d}^{\text{global,co}(i+1)} = \mathbf{f}^{\text{global}(i)} \quad (3.47)$$

mit

$$\mathbf{K}^{\text{global}(i)} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \left(\frac{1}{\Delta t_n^2} \mathbf{M} + \mathbf{K}_{n+1}^{\Delta, \text{co}(i)} - \mathbf{K}_{n+1}^{\Delta, \text{co|im}(i)} (\mathbf{K}_{n+1}^{\Delta, \text{en}(i)})^{-1} \mathbf{K}_{n+1}^{\Delta, \text{en|co}(i)} \right) \quad (3.48)$$

$$\mathbf{f}^{\text{global}(i)} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \left(-\mathbf{G}_{n+1}^{(i)} + \mathbf{K}_{n+1}^{\Delta, \text{co|im}(i)} (\mathbf{K}_{n+1}^{\Delta, \text{en}(i)})^{-1} \mathbf{f}^{\text{en}}(\mathbf{d}_{n+1}^{\text{co}(i)}, \mathbf{d}_{n+1}^{\text{en}(i)}) \right). \quad (3.49)$$

Sobald Gleichung (3.47) gelöst wurde, können die kompatiblen Verschiebungen auf globaler Ebene fortgeschrieben werden $\mathbf{d}_{n+1}^{\text{co,global}(i+1)} = \mathbf{d}_{n+1}^{\text{co,global}(i)} + \Delta \mathbf{d}^{\text{co,global}(i+1)}$. Die nun bekannten kompatiblen Verschiebungsinkremente $\Delta \mathbf{d}_{n+1}^{\text{co}(i+1)}$ werden dann auf Elementebene in Gleichung (3.46) eingesetzt um die inkompatiblen Freiheitsgrade fortzuschreiben $\mathbf{d}_{n+1}^{\text{en}(i+1)} = \mathbf{d}_{n+1}^{\text{en}(i)} + \Delta \mathbf{d}^{\text{en}(i+1)}$. Um dabei die erneute Berechnung der Größen $\mathbf{K}_{n+1}^{\Delta, \text{en}(i)}$, $\mathbf{K}_{n+1}^{\Delta, \text{en|co}(i)}$ und $\mathbf{f}_{n+1}^{\text{en}(i)}$ zu vermeiden, werden diese üblicherweise zusammen mit den inkompatiblen Freiheitsgraden sowie deren Inkrementen abgespeichert. Dieses Vorgehen führt somit einerseits durch die Kondensation nicht nur zu einem hohen numerischen Aufwand, sondern zusätzlich zu sehr hohen Speicheranforderungen, insbesondere bei dreidimensionalen Berechnungen mit feiner werdenden Vernetzungen.

Um diesen erhöhten Speicheraufwand zu vermeiden, schlagen Simo et al. [157] eine Variante vor, bei der nur die inkompatiblen Freiheitsgrade abzuspeichern sind. Dazu werden die kompatiblen Verschiebungen $\mathbf{d}_{n+1}^{\text{co}(i)}$ in ihrem aktuellen Iterationszustand festgehalten, sodass Gleichung (3.41) auf Elementebene in einer weiteren lokalen Iterationsschleife nur in Abhängigkeit von \mathbf{d}^{en} gelöst werden kann. Dieses Vorgehen ist ähnlich zur Lösung der inneren Variablen bei Plastizität.

Der zusätzliche numerische Aufwand für die Gleichungslösung auf Elementebene wird durch die deutliche Reduktion des Speicheraufwands gerechtfertigt. Zudem schlagen Simo et al. [157] für eine weitere Reduktion des Aufwands vor, die Anzahl lokaler Iterationen auf einen festen Wert zu begrenzen. Dann ist allerdings nicht garantiert, dass das Residuum tatsächlich klein genug ist, sodass die Kräfte wieder so wie in Gleichung (3.49) zu berechnen sind, was aus formaler Sicht eigentlich nicht mehr erforderlich gewesen wäre. Freischläger [54] schlägt außerdem vor, auch die Steifigkeit gemäß Gleichung (3.48) zu berechnen.

Beide Varianten der Behandlung inkompatibler Freiheitsgrade führen, ob mit oder ohne die Annahme nach Simo et al. [157], zu hohem numerischem Aufwand auf Elementebene. Da aber die Gleichungslösung auf globaler Ebene den Aufwand impliziter Verfahren dominiert, wird der hohe Mehraufwand auf Elementebene meist trotzdem akzeptiert, was im Detail in Abschnitt 4.1.1 beschrieben wird.

3.1.5 Inkompatible Freiheitsgrade in einem expliziten Verfahren

Der Ansatz des expliziten zentralen Differenzenverfahrens aus Abschnitt 2.3.1 wird hier für inkompatibel erweiterte Formulierung knapp beschrieben.

Das zentrale Differenzenverfahren geht von der Betrachtung der Gleichungen (3.34) und (3.35) zu einem Zeitpunkt t_n aus. Für ein Element ausgeschrieben gilt

$$\bigcup_{e=1}^{n_e} (\mathbf{f}^{\text{co}}(\mathbf{d}_n^{\text{co}}, \mathbf{d}_n^{\text{en}}) + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_n^{\text{co}} - \mathbf{f}_n^{\text{ext}}) = \mathbf{0} \quad (3.50)$$

$$\mathbf{f}^{\text{en}}(\mathbf{d}_n^{\text{co}}, \mathbf{d}_n^{\text{en}}) = \mathbf{0} \quad \text{fr } e = 1, \dots, n_e. \quad (3.51)$$

Darin besteht die Abhängigkeit der Kraftvektoren \mathbf{f}^{co} und \mathbf{f}^{en} von sowohl den kompatiblen als auch den inkompatiblen Freiheitsgraden \mathbf{d}_n^{co} und \mathbf{d}_n^{en} . Die Fortschreibung der kompatiblen Freiheitsgrade erfolgt nach Umstellen von Gleichung (3.50) nach den Beschleunigungen

$$\ddot{\mathbf{d}}_n^{\text{global,co}} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \left(\mathbf{M}^{-1} (\mathbf{f}_n^{\text{ext}} - \mathbf{f}^{\text{co}}(\mathbf{d}_n^{\text{co}}, \mathbf{d}_n^{\text{en}})) \right), \quad (3.52)$$

direkt mit den Gleichungen (2.131a) und (2.131b)

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+1/2}^{\text{global,co}} = \dot{\mathbf{d}}_{n-1/2}^{\text{global,co}} + \Delta t_n \ddot{\mathbf{d}}_n^{\text{global,co}} \quad \mathbf{d}_{n+1}^{\text{global,co}} = \mathbf{d}_n^{\text{global,co}} + \Delta t_{n+1/2} \dot{\mathbf{d}}_{n+1/2}^{\text{global,co}}, \quad (3.53)$$

siehe auch Abschnitt 2.3.1. Dabei wird in Gleichung (3.52) die Massenmatrix \mathbf{M} des jeweiligen Elements durch eine diagonale Massenmatrix ersetzt. So können die Beschleunigungen mit nur einer Rechenoperation, der Division der Kraft durch die jeweilige Masse, berechnet werden. Außerdem werden die Schritte in den Gleichungen (3.50), (3.52), (2.131a) und (2.131b) üblicherweise auf globaler Ebene ausgeführt. Das heißt die kompatiblen Freiheitsgrade \mathbf{d}_n^{co} sind zum Zeitpunkt t_n auf Elementebene vollständig bekannt. Daraus folgt, dass Gleichung (3.51) nur von den inkompatiblen Freiheitsgraden abhängig ist und auf Elementebene exakt gelöst werden kann. Das ist ähnlich zum Vorschlag von Simo et al. [157], in einem impliziten Verfahren einen Iterationszustand der kompatiblen Verschiebungen festzuhalten, mit dem Unterschied, dass diese hier tatsächlich vollständig bekannt sind.

Zur Lösung von Gleichung (3.51), wird diese bezüglich der inkompatiblen Freiheitsgrade \mathbf{d}_n^{en} linearisiert. Dabei entsteht die im nichtlinearen Fall anzuwendende Iterationsvorschrift

$$\mathbf{K}_n^{\Delta \text{en}(k)} \Delta \mathbf{d}_n^{\text{en}(k+1)} = -\mathbf{f}^{\text{en}}(\mathbf{d}_n^{\text{co}}, \mathbf{d}_n^{\text{en}(k)}) \quad (3.54)$$

$$\mathbf{d}_n^{\text{en}(k+1)} = \mathbf{d}_n^{\text{en}(k)} + \Delta \mathbf{d}_n^{\text{en}(k+1)}, \quad (3.55)$$

wobei als Startwert $\mathbf{d}_n^{\text{en}(k=0)} = \mathbf{d}_{n-1}^{\text{en}}$ genutzt wird. Aufgrund der kleinen Zeitschritte in einem expliziten Verfahren sind oft wenige Iterationsschritte ausreichend und, wenn

nur kleine Verschiebungsunterschiede zwischen zwei Zeitschritten auftreten, sogar eine direkte Berechnung ohne Iterationen genutzt werden

$$\mathbf{d}_n^{\text{en}} = - \left(\mathbf{K}^{\Delta \text{en}}(\mathbf{d}_n^{\text{co}}, \mathbf{d}_{n-1}^{\text{en}}) \right)^{-1} \mathbf{f}^{\text{en}}(\mathbf{d}_n^{\text{co}}, \mathbf{d}_{n-1}^{\text{en}}). \quad (3.56)$$

Es bestehen weitere Möglichkeiten den numerischen Aufwand zu reduzieren. Beispielsweise mit einer Diagonalstruktur der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_n^{\Delta \text{en}(k)}$ in Gleichung (3.54), siehe Mattern [112], oder mit einer nicht zu jedem Zeitschritt, sondern nur in festgelegten Intervallen, erfolgenden Fortschreibung der inkompatiblen Freiheitsgrade, siehe Pagani et al. [35].

Auf die Behandlung der inkompatiblen Freiheitsgrade in einem expliziten Verfahren wird, als eines der Kernthemen der vorliegenden Arbeit, umfassend in Kapitel 5 und Kapitel 7 eingegangen. Die zugehörigen Veröffentlichungen werden in Abschnitt 4.1 diskutiert.

3.2 Wahl der Interpolation inkompatibler Freiheitsgrade

Da inkompatibel angereicherte Elemente aufgrund der aufwendigen Kondensation überwiegend für implizite Verfahren eingesetzt wurden, stand im Mittelpunkt vieler Arbeiten die Optimierung der Genauigkeit bereits für grobe Vernetzungen, um die Gleichungslösung so effizient wie möglich zu gestalten.

In vielen Publikationen steht die optimale Wahl der Anzahl und die Interpolation der inkompatiblen Freiheitsgrade im Vordergrund. Mit den klassischen Wilson-Funktionen werden für 8-knotige Hexaederelemente üblicherweise 9 inkompatible Freiheitsgrade verwendet. In der Arbeit von Andelfinger und Ramm [8] werden im Vergleich dazu bis zu 30 inkompatible Freiheitsgrade vorgeschlagen. Deren Interpolation wird in der Matrix $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{And}}^{\text{en}} = (\tilde{\mathbf{B}}_{\text{And1}}^{\text{en}} \tilde{\mathbf{B}}_{\text{And2}}^{\text{en}} \tilde{\mathbf{B}}_{\text{And3}}^{\text{en}})$ zusammengefasst. Diese sind

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\text{And1}}^{\text{en}} = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & \zeta \end{pmatrix}, \quad (3.57a)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\text{And2}}^{\text{en}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & \xi\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & \eta\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\zeta & \eta\zeta \\ \xi\zeta & \eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi\eta & \xi\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta & \eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.57b)$$

und

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\text{And3}}^{\text{en}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \xi\eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta\zeta & 0 & 0 & 0 \\ \xi\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta\zeta & 0 & 0 \\ 0 & \eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta\zeta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta\zeta \end{pmatrix}. \quad (3.57c)$$

Freischläger und Schweizerhof [55] stellen eine effektive Variante mit bis zu 12 inkompatiblen Freiheitsgraden vor, bei der eine Aufteilung des Kraftvektors und der Steifigkeitsmatrix in einen konstanten und einen stabilisierenden Anteil erfolgt, um die vorgeschlagenen Modifikationen auf verzerrte Elementgeometrien anwenden zu können. Korelc und Wriggers [88] verbesserten die Elementgenauigkeit etwa bei dünnwandigen oder verzerrten Problemen mit nur 9 inkompatiblen Freiheitsgraden durch eine modifizierte Berechnung der Gradienten zur Berechnung der kompatiblen und inkompatiblen Verzerrungen auf Basis von Taylorreihen. Diese sehr gut funktionierenden Elemente werden in leicht modifizierter Form für das in dieser Arbeit vorgestellte Konzept verwendet, worauf in Kapitel 6 eingegangen wird.

Zwei Jahre nach der Veröffentlichung der konsistenten Simo-Rifai-Methode für erweiterte Verzerrungen greifen Li et al. [103] den für 2D Elemente vorgeschlagenen Ansatz von Simo und Rifai [159] auf, aus den Wilson-Funktionen eine Verzerrungserweiterung abzuleiten. Dazu werden ausgehend vom inkompatiblen Verschiebungsfeld

$$\mathbf{u}^{\text{im}} = (1 - \zeta^2)\mathbf{u}_1^{\text{im}} + (1 - \eta^2)\mathbf{u}_2^{\text{im}} + (1 - \zeta^2)\mathbf{u}_3^{\text{im}} \quad (3.58)$$

mit den von den lokalen Koordinaten abhängigen Basisvektoren $\mathbf{g}_i = \partial\mathbf{x}/\partial\zeta^i$ die kovarianten Verzerrungskomponenten

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{g}_i \cdot \frac{\partial\mathbf{u}^{\text{im}}}{\partial\zeta^j} + \frac{\partial\mathbf{u}^{\text{im}}}{\partial\zeta^i} \cdot \mathbf{g}_j \right) \quad (3.59)$$

formuliert. Diese werden nach mono-, bi- und trilinearem sowie analog mit quadratischen Termen gemischten Auftreten der lokalen Koordinaten sortiert und jedem dieser Terme wird ein Freiheitsgrad zugeordnet. Gemäß dem Vorschlag von Li et al. [103] resultiert die in zwei Anteile aufgespaltene Interpolationsmatrix $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{Li}}^{\text{en}} = (\tilde{\mathbf{B}}_{\text{Li1}}^{\text{en}}, \tilde{\mathbf{B}}_{\text{Li2}}^{\text{en}})$ mit

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\text{Li1}}^{\text{en}} \equiv \tilde{\mathbf{B}}_{\text{And1}}^{\text{en}} \quad \tilde{\mathbf{B}}_{\text{Li2}}^{\text{en}} = \begin{pmatrix} \xi\eta & & -\xi\zeta & 0 & 0 & 0 & \xi\eta\zeta & 0 & 0 \\ -\xi\eta & \eta\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta\zeta & 0 \\ 0 & -\eta\zeta & \xi\zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi\eta\zeta \\ \xi^2 - \eta^2 & 0 & 0 & \xi\zeta & \eta\zeta & 0 & \xi^2\zeta & \eta^2\zeta & 0 \\ 0 & \eta^2 - \zeta^2 & 0 & 0 & \xi\eta & \xi\zeta & 0 & \xi\eta^2 & \xi\zeta^2 \\ 0 & 0 & \zeta^2 - \xi^2 & \xi\eta & 0 & \eta\zeta & \xi^2\eta & 0 & \eta\zeta^2 \end{pmatrix}, \quad (3.60)$$

wobei die ersten 9 Ausdrücke identisch mit den jeweiligen Ausdrücken der Interpolation von Andelfinger und Ramm [8] sind. Anstatt der 9 inkompatiblen Verschiebungsfreiheitsgrade, die in \mathbf{u}_1^{im} , \mathbf{u}_2^{im} und \mathbf{u}_3^{im} enthalten sind, werden insgesamt 18 unabhängige Verzerrungsfreiheitsgrade α_A eingeführt. Die negativen Vorzeichen in der Interpolation der Erweiterung (3.60) entstehen durch eine von Simo und Rifai [159] vorgeschlagene Zusammenschieben einiger Spalten

$$\begin{pmatrix} \zeta\eta & 0 \\ 0 & \zeta\eta \\ 0 & 0 \\ \zeta^2 & \eta^2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \zeta\eta \\ -\zeta\eta \\ 0 \\ \zeta^2 - \eta^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.61)$$

die in den Verzerrungskomponenten aus Gleichung (3.59) enthalten sind. Dadurch wird das Bestehen des Patchtests erreicht.

Alves de Sousa et al. [6] erarbeiten auf Basis einer Unterraum-Analyse mit einer $2 \times 2 \times 2$ Gauß-Legendre-Integration die Interpolationsmatrix $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{Alv}}^{\text{en}} = (\tilde{\mathbf{B}}_{\text{Alv,vol}}^{\text{en}}, \tilde{\mathbf{B}}_{\text{Alv,shr}}^{\text{en}})$, die nach Normal- (vol) und Schubverzerrungen (shr) sortiert ist. Die Einträge, dargestellt mit der Funktion $N^* = 1/2(1 - \zeta^2)(1 - \eta^2)(1 - \zeta^2)$, sind

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\text{Alv,vol}}^{\text{en}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N^*}{\partial \zeta} & 0 & 0 & \frac{\partial^2 N^*}{\partial \zeta \partial \eta} & \frac{\partial^2 N^*}{\partial \zeta \partial \zeta} & \frac{\partial^2 N^*}{\partial \eta \partial \zeta} \\ 0 & \frac{\partial N^*}{\partial \eta} & 0 & \frac{\partial^2 N^*}{\partial \zeta \partial \eta} & \frac{\partial^2 N^*}{\partial \zeta \partial \zeta} & \frac{\partial^2 N^*}{\partial \eta \partial \zeta} \\ 0 & 0 & \frac{\partial N^*}{\partial \zeta} & \frac{\partial^2 N^*}{\partial \zeta \partial \eta} & \frac{\partial^2 N^*}{\partial \zeta \partial \zeta} & \frac{\partial^2 N^*}{\partial \eta \partial \zeta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.62a)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{\text{Alv,shr}}^{\text{en}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N^*}{\partial \zeta} & \frac{\partial N^*}{\partial \eta} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 N^*}{\partial \zeta \partial \zeta} & \frac{\partial^2 N^*}{\partial \eta \partial \zeta} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N^*}{\partial \eta} & \frac{\partial N^*}{\partial \zeta} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 N^*}{\partial \zeta \partial \eta} & \frac{\partial^2 N^*}{\partial \zeta \partial \zeta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N^*}{\partial \zeta} & \frac{\partial N^*}{\partial \zeta} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 N^*}{\partial \zeta \partial \eta} & \frac{\partial^2 N^*}{\partial \eta \partial \zeta} \end{pmatrix}. \quad (3.62b)$$

Diese Interpolationen stellen nur einen kleinen Auszug aus den zahlreichen Vorschlägen für Elementformulierungen in der Fachliteratur dar. Es wird daher auch nicht versucht, eine vollständige Liste der Elementformulierungen mit inkompatiblen Erweiterungen anzugeben. Die gezeigten, aus Sicht des Autors, wesentlichen Interpolationsvarianten werden im Rahmen der Arbeit genutzt und an entsprechender Stelle wird ausführlich auf Vor- und Nachteile eingegangen.

3.3 Numerische Robustheit

Inkompatibel erweiterte Elementformulierungen verlieren ab einer bestimmten homogenen Deformation ihre Biegesteifigkeit. Dabei können unkontrollierbare Kinematiken entstehen, die ähnlich zu denen in Formulierungen mit Ein-Punkt-Integration sind. Die Publikationen, die dieses Thema aufgreifen, werden im Folgenden, ohne Anspruch auf Vollständigkeit, soweit möglich in chronologischer Reihenfolge vorgestellt.

Bereits Simo und Armero [156] stellten Schwierigkeiten in elasto-plastischen Zugproben unter großen Verzerrungen in einer geometrisch nichtlinearen Formulierung fest. Später modifizieren Simo et al. [157] sowohl die numerische Integration als auch den Gradienten der kompatiblen und inkompatiblen Ansatzfunktionen, um die Schwierigkeiten zu vermeiden. Nagtegaal und Fox [121] schlagen eine zusätzliche sogenannte Volumenbedingung vor, die zur Verhinderung der Kinematiken fordert, dass inkompatible Freiheitsgrade während einer homogenen Deformation nicht das Volumen ändern dürfen. Diesem Vorschlag folgend existiert im Handbuch des CAE-Programms ABAQUS [44] ein Ansatz, der im Schriftum nicht weiter aufgegriffen wurde, da er wohl nicht besonders verständlich zu sein scheint – „(...) *it does not appear to be a comprehensive solution*“, so Nagtegaal und Fox [121]. Auf diese Bedingung wird in Kapitel 8 noch ausführlicher eingegangen.

Wriggers und Reese [192] weisen schließlich analytisch anhand einer Eigenwertanalyse an einem Einzelelement nach, dass Kinematiken auftreten. Basierend auf diesen Entdeckungen wurden fortan sowohl genauere als auch gegenüber den Kinematiken robustere Formulierungen entwickelt.

Ibrahimbegović und Kožar [94, 72] trennen in ihrem Ansatz Rotationen von den inkompatibel erweiterten Verschiebungen, nehmen aber keinen Bezug zur Frage der numerischen Robustheit. Ähnlich unklar diesbezüglich ist die von Moita und Crisfield [117] entwickelte mitrotierende (*corotational*) Formulierung. Deren Erweiterung führt in der Veröffentlichung von Crisfield et al. [43] zu einem numerisch robusten Element, das allerdings aufgrund seiner komplexen Formulierung wohl nicht weiter aufgegriffen wurde.

Pantuso und Bathe [127] dokumentieren ebenfalls die generell mangelnde numerische Robustheit gemischter Elemente, zu denen auch sogenannte Verschiebungs-/Druckformulierungen zählen, bei denen zusätzliche Freiheitsgrade für den Druck eingeführt werden und schachbrettartige Versagensmuster, bekannt als *Checkerboarding*, auftreten können.

Die Autoren Korelc und Wriggers [89, 191] formulieren mithilfe von Taylorreihen konsistente Gradienten der kompatiblen und inkompatiblen Ansatzfunktionen, die sowohl die Genauigkeit als auch die Robustheit gegenüber Kinematiken verbessert. Für die Implementierung der erforderlichen Rechenschritte eignet sich die von Korelc und Wriggers genutzte symbolische Programmierumgebung ACEGEN [85, 91]. Die Besonderheit der als CG9 bekannten Formulierung ist neben den konsistenten Gradienten, dass die klassische Interpolation des inkompatiblen Deformationsgradienten

schlicht transponiert wird und infolgedessen gegenüber Kinematiken weitaus weniger empfindlich ist. Das heißt die erweiterten Schubterme spielen eine entscheidende Rolle für die numerische Robustheit, da nur diese im Vergleich zu den volumetrischen Termen beim Transponieren geändert werden. Später verbessern Korelc et al. [86] die konsistente Gradientenformulierung mithilfe der Betrachtung von Eigenwerten und daraus abgeleiteten Bedingungen für die Interpolation der inkompatiblen Freiheitsgrade. Glaser und Armero [56] transponieren ähnlich zu Korelc und Wriggers [89] den erweiterten Deformationsgradienten und fügen dem Funktional noch einen Term hinzu, mit dem die Kinematiken vermieden werden. Doll et al. [47] verwenden zur Vermeidung von Kinematiken eine modifizierte Integration des volumetrischen Terms, was aber einen heuristischen Parameter erfordert. Armero [10] stellt ebenfalls eine eigene Variante zur Stabilisierung vor.

Im Gegensatz dazu sind in den Arbeiten von Reese et al. [141, 144] die inkompatiblen Erweiterungen in der *Hourglass*stabilisierung eines reduziert integrierten Elements enthalten. Letztere Formulierung wird von Reese und Wriggers [143] fortgeführt, anschließend im Übersichtsartikel von Reese [137] nochmals zusammenfassend diskutiert und schließlich von Reese [138, 139] noch durch einen Ansatz, der direkt auf der schwachen Form des Gleichgewichts aufbaut, allgemeiner formuliert.

Bei Kasper und Taylor [76, 77] wird eine gemischte Erweiterung aus erweiterten Verzerrungen und Spannungen verwendet, sodass eine variationell konsistente Spannungsberechnung möglich ist. Stärken und Schwächen dieses Elements, das frei von Kinematiken ist, werden in Abschnitt 4.2.2 diskutiert.

Wall et al. [181] stabilisieren gegenüber Kinematiken mit einer vom momentanen Deformationszustand abhängigen zusätzlichen Bedingung auf variationeller Ebene. Areias et al. [9] verwenden eine spezielle Interpolation, die sowohl für Schalen- und dreidimensionale Probleme geeignet ist. Die numerische Robustheit wird mit einem zusätzlichen Term im Potential gewährleistet. Bui et al. [32] analysieren mit einem um 15 inkompatible Freiheitsgrade erweiterten Deformationsgradienten Rücksprungefekte in der Metallumformung, wobei keine Probleme mit Kinematiken angegeben werden. Eine andere Vorgehensweise wird bei Müller-Hoppe et al. [120] vorgestellt, die den Deformationsgradienten in einen homogenen und einen inhomogenen Anteil zerlegen, was für die dort gezeigten Beispiele zu einem numerisch robusten Element ohne Kinematiken führt. Allerdings wird die Annahme linear elastischen Materials für den inhomogenen Anteil eingeführt. Wisniewski und Turska [187] stellen eine ebene Elementformulierung vor, die auf schiefen Koordinatenachsen basiert und für die dort gezeigten Beispiele numerisch robust ist. Auf der Basis von diskontinuierlichen Galerkin-Verfahren wird ein nochmals anderer Ansatz zur Vermeidung der Kinematiken von TenEyck und Lew [171] vorgeschlagen.

Alle genannten Veröffentlichungen stellen die Kinematiken bei großen Deformationen fest. In einer jüngeren Veröffentlichung erklären Sussman und Bathe [163], dass die Kinematiken bereits bei kleinen Deformationen auftreten und weisen dies nur

mit Steifigkeiten nach. Diese Vorgehensweise wird in der vorliegenden Arbeit in den Abschnitten 8.3 und 8.3.2 für die Betrachtung von Kräften und Steifigkeiten genutzt. Insgesamt gesehen haben sich viele Autoren intensiv mit dem Thema beschäftigt, ohne bislang eine allgemein nutzbare Berechnung gefunden zu haben. Die Ansätze werden in Abschnitt 4.2 zusammenfassend gruppiert und bewertet, um anschließend den im Rahmen der vorliegenden Arbeit verfolgten Ansatz vorzustellen.

3.4 Volumen- und Volumenschalenelemente für Schalenprobleme

Sowohl in dreidimensionalen als auch Schalenproblemen genaue Ergebnisse zu erzielen ist eines der wesentlichen Ziele einer guten Formulierung eines Volumenelements. So vergleichen Roehl und Ramm [145] und Wriggers et al. [190] Volumen- mit Schalenelementen – deren Fazit: Volumenelemente mit inkompatiblen Erweiterungen sind zur Berechnung dünner Schalenprobleme ebenfalls geeignet. Im Folgenden werden im Schriftum vorgeschlagene Formulierungen sogenannter Volumenschalen betrachtet, die auch als *Solid Shells* oder *Thick Shells* bekannt sind. Zudem werden nur inkompatibel erweiterte Formulierungen mit sogenannter „vollständiger“ Integration betrachtet, das heißt mit ausreichend Integrationspunkten zur exakten Berechnung der Elementgleichungen, zumindest für eine rechtwinklige Geometrie. Es wird angemerkt, dass viele Volumenschalen vorgeschlagen wurden, die in Schalenebene mit nur einem Integrationspunkt, aber mehreren über die Schalendicke, ausgewertet werden, für die auf Abschnitt 3.4 verwiesen wird.

Ein wichtiges Merkmal der Volumenschalen ist, dass es sich hierbei eigentlich um vollwertige Volumenelemente handelt, die allerdings durch eine Vorzugsrichtung entlang der Schalendicke nicht mehr zur Analyse vollständig dreidimensionaler Fragestellungen zu empfehlen sind. Während bei Volumenelementen meist der Deformationsgradient inkompatibel erweitert wird, sind dazu bei Volumenschalenelementen vielmehr die Greenschen Verzerrungen geeignet, da dann die Normal- und die Schubverzerrungen unabhängig voneinander behandelt werden können. Oft werden die inkompatiblen Erweiterungen mit modifizierten Verzerrungsverläufen der kompatiblen Querschub- und Dickenverzerrung kombiniert, siehe beispielsweise Hauptmann und Schweizerhof [65]. Zu diesen Modifikationen zählt die bekannte ANS-Methode, siehe Abschnitt 6.2.1, die nahezu in allen inkompatibel erweiterten Schalen- und Volumenschalenelementen verwendet wird. Um aus den so angepassten Greenschen Verzerrungen wieder einen Deformationsgradienten zu berechnen, der für viele Materialmodelle multiplikativ in einen elastischen und plastischen Teil zerlegt wird, sind Eigenwerte oder eine polare Zerlegung zu bestimmen, siehe Betsch und Stein [24].

So basieren viele der Entwicklungen auf der Arbeit von Hauptmann und Schweizerhof [65], in der die ANS-Methode und inkompatible Erweiterungen bereits erfolgreich kombiniert wurden. In weiteren Arbeiten von Hauptmann et al. [66, 64] wurden diese

Elemente erweitert und von Harnau und Schweizerhof [60, 59, 61] auch eine gegenüber Kinematiken robuste Formulierung infolge inkompatibler Erweiterungen vorgeschlagen. Weitere Formulierungen mit der Kombination aus ANS und inkompatiblen Erweiterungen liegen von den Autoren Wagner, Klinkel und Gruttmann [78, 180, 79] sowie Vu-Quoc und Tan [179, 178] vor. Bei den genannten Formulierungen wird eine unterschiedliche Anzahl an inkompatiblen Freiheitsgraden verwendet. Klinkel und Wagner [80] nutzen für Volumenelemente bis zu 30 inkompatible Freiheitsgrade, dann allerdings ohne ANS. Vu-Quoc und Tan [178] schlagen in Kombination mit ANS die folgende Interpolation vor

$$\tilde{\mathbf{B}}^{\text{en}} = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta & \zeta\xi & \zeta\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & \eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.63)$$

die von Tan und Vu-Quoc [165] auch in einem expliziten Zeitintegrationsverfahren verwendet wird, wobei die eigentliche Lösung für die inkompatiblen Freiheitsgrade unklar bleibt, siehe Abschnitt 4.1.4. Die Interpolationsmatrix in Gleichung (3.63) ist zwar in Interpolationen früherer Veröffentlichungen enthalten, zum Beispiel in Gleichung (3.57), wird aber erstmals bei Tan und Vu-Quoc auf diese „optimale“ Wahl begrenzt, wobei verbleibende volumetrische Versteifungseffekte als Kritik verbleiben. Auf der weiteren Suche nach der „optimalen“ Interpolation verbleiben Rah et al. [136] zwar bei sieben inkompatiblen Freiheitsgraden, schlagen aber zwei Interpolationsmatrizen vor, die von der in Gleichung (3.63) abweichen. Eine Interpolation davon beseitigt die verbleibende volumetrische Versteifung, weist ansonsten aber sowohl schlechtere als auch bessere Ergebnisse im Vergleich zu der in Gleichung (3.63) auf. Die andere Interpolation führt dagegen wieder zu einer größeren volumetrischen Versteifung, und nur etwas besseren Ergebnissen bei verzerrten Elementgeometrien. Demnach wäre es nur mit einer größeren Anzahl inkompatibler Freiheitsgrade möglich, sowohl die volumetrische Versteifung als auch die Genauigkeit bei verzerrten Elementgeometrien zu verbessern. Daher wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit als repräsentativer Kompromiss einer „optimalen“ Interpolation in Kombination mit ANS, ausschließlich die Interpolation in Gleichung (3.63) verwendet, siehe Abschnitt 6.2.

Eine interessante Volumenschale, die ohne ANS-Ansätze formuliert wird, stammt von Alves de Sousa et al. [6] und Fontes Valente et al. [53]. Die zugehörige Inter-

polationsmatrix $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{Alv}}^{\text{en}} = (\tilde{\mathbf{B}}_{\text{Alv,vol}}^{\text{en}}, \tilde{\mathbf{B}}_{\text{Alv,shr|vs}}^{\text{en}})$ wird mit der Matrix $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{Alv,vol}}^{\text{en}}$ aus Gleichung (3.62)₁ und der Erweiterung der Transversalschubterme

$$\mathbf{B}_{\text{Alv,shr|vs}}^{\text{en}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N^*}{\partial \xi} & \frac{\partial N^*}{\partial \eta} & \frac{\partial^2 N^*}{\partial \xi \partial \eta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N^*}{\partial \xi} & \frac{\partial N^*}{\partial \eta} & \frac{\partial^2 N^*}{\partial \xi \partial \eta} \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

zusammengesetzt. Moreira et al. [118] nutzen diese Erweiterungen für geschichtete Schalen und Parente et al. [129] für Metallumformprozesse. Auch Li et al. [100, 99] nutzen die genannten Erweiterungen in Kombination mit einem expliziten Zeitintegrationsverfahren, was die Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade im Vergleich zu impliziten Verfahren, ob statisch oder dynamisch, ändert. Darauf wird in Abschnitt 4.1.4 näher eingegangen.

Fiolka und Matzenmiller [51] sowie Quy und Matzenmiller [133] erweitern die Querschubverzerrungen mit quadratischen Interpolationen, um den Spannungsverlauf über die Schalendicke besser zu approximieren.

Ahmed und Sluys [2] nutzen *interne* Freiheitsgrade an sogenannten Phantomknoten in den Ecken der Schalenmittelfläche, was im Prinzip einer Formulierung mit inkompatiblen Freiheitsgraden entspricht. Die kompatiblen und die internen Freiheitsgrade werden mit einem impliziten oder expliziten Verfahren berechnet. Im letzten Fall werden die Massen selektiv skaliert, um sehr kleine Schrittweiten infolge höherer Frequenzen, die durch die internen Freiheitsgrade und die Schalendicke als kürzeste Elementseite entstehen, zu vermeiden. Die *internen* Freiheitsgrade werden damit sehr ähnlich zu den inkompatiblen Freiheitsgraden in der vorliegenden Arbeit behandelt, siehe Kapitel 5 und 7, die allerdings auf frühere Arbeiten von Mattern et al. [113] zurückgeht. Auf diesen Punkt wird nochmals in Abschnitt 4.1.4 eingegangen.

Irslinger [73] verwendet in seiner Dissertation ebenfalls die Interpolationsmatrix für 7 inkompatible Freiheitsgrade in Gleichung (3.63). Interessant in der Gestaltung dieser Formulierung sind die an die Vorzugsrichtung einer Volumenschale angepassten Basisvektoren, die sich positiv auf die Ergebnisse mit der ANS-Interpolation auswirkt.

Reduzierte Integration in Schalenebene

Um die numerische Effizienz zu steigern, werden die Volumenschalenelemente in Schalenebene an nur einem Integrationspunkt ausgewertet, also reduziert integriert, wobei analog zu den Volumenelementen wieder eine *Hourglass*-stabilisierung zu formulieren ist. Da die Dickenrichtung bekannt ist, können die Spannungen durch Verwendung mehrerer Integrationspunkte besser approximiert werden. Zu diesem Thema existieren Arbeiten von Alves de Sousa et al. [4, 5, 7], Reese [140], Cardoso et al. [34], von

Schwarze und Reese [151, 152] sowie Schwarze et al. [153, 154]. In den genannten Publikationen wird mit nur einem inkompatiblen Freiheitsgrad die Normalverzerrung in Dickenrichtung erweitert, während alle weiteren inkompatiblen Freiheitsgrade durch andere Verfahren ersetzt wurden.

Li et al. [101] formulieren aus den Erweiterungen von Alves de Sousa et al. [6] und Fontes Valente et al. [53] ein reduziert integriertes Volumenschalenelement, in dem neben den Schubverzerrungen wieder mit nur einem Freiheitsgrad die Normalverzerrung in Dickenrichtung erweitert wird, die Normalverzerrungen in Schalenebene aber nicht erweitert werden.

Mit hybriden Ansätzen, um sowohl Verzerrungen als auch Spannungen zu erweitern, formulieren Rah et al. [134, 135] mehrfach geschichtete Schalenelemente.

Pagani et al. [126] nutzen die von Schwarze und Reese [152] entwickelte Elementformulierung in Kombination mit selektiver Massenskalierung, sodass die Zeitschrittgröße nicht länger von der meist kleinen Schalendicke abhängig ist. Li et al. [102] formulieren ein Element sehr ähnlich zu Schwarze und Reese [152], das dennoch leicht verbesserte Resultate in manchen numerischen Testbeispielen aufweist.

Auf diese reduziert integrierten Volumenschalenelemente wird in der vorliegenden Arbeit nicht weiter eingegangen, da jeweils eine Stabilisierung zu formulieren ist, mit der das Materialmodell meist vereinfacht werden muss. Zudem sind Kinematiken infolge der reduzierten Integration nicht endgültig auszuschließen.

3.5 Zur Anzahl inkompatibler Freiheitsgrade

In Tabelle 3.1 ist eine Übersicht zur Anzahl inkompatibler Freiheitsgrade und deren Verteilung zur Erweiterung von Normal- (vol) oder Schubverzerrungen (shr) zusammengestellt. Werden in einer Spalte einer Interpolationsmatrix gleichzeitig Normal- und Schubverzerrungen erweitert, wie in den letzten 3 Spalten der Erweiterung von Li et al. [103] in Gleichung (3.60)₂, wird das mit vol | shr gekennzeichnet. Betrachtet wird ein Auszug der in den vorhergehenden Abschnitten angesprochenen Formulierungen des Schrifttums.

Die Volumenelemente werden mit 6 bis 30 inkompatiblen Freiheitsgraden erweitert, wobei mit 12 und weniger meist zusätzlich die kompatiblen Größen modifiziert werden müssen, um Versteifungseffekte zu beseitigen oder die Wirksamkeit der inkompatiblen Freiheitsgrade zu erhöhen. Das ist beispielsweise möglich, wenn die Ableitungen der kompatiblen Ansatzfunktionen wie bei Wriggers und Korelc [191] mit Taylorreihen approximiert werden. Die wenigsten inkompatiblen Freiheitsgrade weist die Formulierung von Puso [132] auf, der sogar eine Variante mit nur 3 inkompatiblen Freiheitsgraden vorschlägt. Dabei beseitigen die inkompatiblen Freiheitsgrade nur volumetrische Versteifungen, während anhand einer Ein-Punkt-Integration mit *Hourglass*stabilisierung Schubversteifungen vermieden werden. Ohne die kompatiblen Größen zu modifizieren, werden mindestens 9 inkompatible Freiheitsgrade – so bereits in der klassischen Wilson-Formulierung [186] – erforderlich, um Schub- und volumetri-

Tabelle 3.1: Anzahl inkompatibler Freiheitsgrade zur Erweiterung der Normal- (vol) und Schubverzerrungen (shr) oder einer Kombination (vol|shr) daraus. Explizit: kompatible Freiheitsgrade mit expliziter Zeitintegration berechnet. Zur Berechnung inkompatibler Freiheitsgrade, s. Abschn. 4.1.4.

Jahr	Autorenschaft	Anzahl ink. FHGe				Kommentar
		vol	vol shr	shr	Gesamt	
Volumenelemente						
1973	Wilson et al. [186]	3	0	6	9	Klassische Wilson-Funktionen, s. Glg. (3.58).
1993	Li et al. [103]	3	6	9	18	Basierend auf Wilson-Funktionen, s. Glg. (3.60).
1993	Andelfinger u. Ramm [8]	12	0	18	30	Varianten mit 9 bis 30 FHGen, s. Glg. (3.57).
2000	Puso [132]	6	0	0	6	Ein-Punkt-Integration, explizit.
2000	Kasper u. Taylor [77]	9	0	0	9	Spannungsansätze, zusätzliche Modifikationen.
2003	Alves de Sousa et al. [6]	6	0	12	18	Basierend auf Unterraum-Analyse, s. Glg. (3.62).
2010	Korelc et al. [86]	3	3	6	12	Taylorreihen für Gradienten, s. Abs. 6.1.4 und 6.1.6.
Volumenschalenelemente						
1998	Hauptmann et al. [65, 64]	8	0	3	11	Verschiedene Kombinationen, zusätzlich ANS.
2003	Alves de Sousa et al. [6]	6	0	6	12	Basierend auf Unterraum-Analyse, s. Glg. (3.64).
2005	Tan u. Vu-Quoc [165]	5	0	2	7	S. Glg. (3.63), zusätzlich ANS.
2008	Quy u. Matzenmiller [133]	4	0	8	12	Quadratische Interpolationen in Dickenrichtung.
2009	Schwarze u. Reese [151, 152]	1	0	0	1	Ein-Punkt-Integration in Schalenebene und ANS.
2012	Pagani et al. [125, 126]	1	0	0	1	Wie Schwarze und Reese [151, 152], aber explizit.
2010	Li et al. [99]	6	0	6	12	Wie Alves de Sousa et al. [6], explizit, s. Abs. 4.1.4.
2011	Li et al. [101]	1	0	6	7	Reduzierte Integration, explizit, s. Abs. 4.1.4.
2012	Rah et al. [136]	5	0	2	7	Varianten zu Tan und Vu-Quoc [165].

sche Versteifungseffekte zu vermeiden. Mit numerischen Testbeispielen werden einige der genannten Formulierungen, darunter die mit 30 inkompatiblen Freiheitsgraden, ausführlich in Abschnitt 6.3 untersucht.

Mit 1 bis 12 inkompatiblen Freiheitsgraden werden bei den Volumenschalenelementen vergleichsweise wenig inkompatible Freiheitsgrade eingesetzt, dafür aber üblicherweise mit der ANS-Methode und reduzierter Integration kombiniert. In Abschnitt 6.3 wird, ohne weitere Modifikationen, die mit 12 inkompatiblen Freiheitsgraden erweiterte Formulierung von Alves de Sousa et al. [6] einer ANS-Formulierung mit 7 inkompatiblen Freiheitsgraden, siehe Abschnitt 6.2.2, gegenübergestellt.

4 Zum Problem der effizienten und kinematik-freien Nutzung

Die Kernthemen, inkompatible Freiheitsgrade effizient zu berechnen und gleichzeitig die von diesen ausgehenden Kinematiken zu vermeiden, werden in diesem Kapitel detailliert beschrieben. Dazu werden zunächst die Ursachen und möglichen Stellschrauben, die Probleme anzugehen, näher betrachtet, um eine möglichst wirkungsvollen Ansatz entwickeln zu können. Dann erfolgt eine Diskussion, inwiefern die zum jeweiligen Thema veröffentlichten Arbeiten bereits die Fragestellung beantworten. Zur späteren Anwendung der vorgeschlagenen Konzepte wird ebenfalls die Erarbeitung geeigneter, universell einsetzbarer Elementformulierungen mit inkompatiblen Erweiterungen als drittes Thema aufgenommen.

4.1 Einfluss einer effizienten Berechnung inkompatibler Freiheitsgrade auf die Gesamtrechenzeit

4.1.1 Einfluss auf explizite und implizite Verfahren

Ursachen langer Rechenzeiten

Inkompatible Freiheitsgrade werden sowohl für die Methode inkompatibler Verschiebungen (IM) als auch die Methode erweiterter Verzerrungen (EAS) eingeführt und – quasi durch statische Kondensation – auf Elementebene berechnet. Der damit verbundene Aufwand wirkt sich sehr viel stärker auf die Rechenzeit einer expliziten Simulation aus, als auf die einer impliziten Simulation.

Diese verstärkte Auswirkung kann auf zwei wesentliche Unterschiede zwischen expliziten und impliziten Verfahren begründet werden, die in Abbildung 4.1 schematisch dargestellt sind.

1. Die Zeitschrittgröße ist für implizite Verfahren nahezu *beliebig* groß wählbar, so dass im Regelfall die gewünschte Genauigkeit von Ergebnisgrößen die sinnvolle Zeitschrittgröße bestimmt. Im Gegensatz dazu bestimmt die Stabilität expliziter Verfahren die Größe des Zeitschritts, die üblicherweise sehr klein ist. Der Zeitschritt eines impliziten Verfahrens ist meist größer als der 100 bis 1000fache Zeitschritt für explizite Verfahren.

2. Der Berechnungsaufwand für die Operationen auf Element- und Systemebene unterscheidet sich für implizite und explizite Verfahren. In einem impliziten Berechnungsschritt sind die Operationen auf Systemebene für die Gesamtrechenzeit entscheidend, da die Berechnungen der meist iterativen Gleichungslösung des gesamten Finite-Elemente-Modells meist deutlich aufwendiger als alle Operationen auf Elementebene sind. So wird auch mit vielen inkompatiblen Freiheitsgraden der Aufwand auf Systemebene entscheidend bleiben. Nur mit besonders kleinen Zeitschritten würden die Operationen auf Elementebene so oft durchlaufen, dass die Gesamtrechenzeit entscheidend beeinflusst wird, was aber unwahrscheinlich ist, da der Zeitschritt meist so groß wie möglich gewählt wird. Das Aufwandsverhältnis zwischen System- und Elementebene kehrt sich in einem expliziten Verfahren um, da in einem solchen die Operationen auf Systemebene sehr effizient sind. Es muss nicht iteriert werden und die Gleichungen des gesamten Finite-Elemente-Modells sind zudem sogar entkoppelt, wenn diagonale Massenmatrizen verwendet werden. Somit spielt die aus Stabilitätsgründen sehr kleine Zeitschrittgröße die entscheidende Rolle. Dieser erfordert nämlich, dass die Operationen auf Element- und Systemebene sehr oft ausgewertet werden müssen. Da die Operationen auf Systemebene effizient sind, sind für die Gesamtrechenzeit die Operationen auf Elementebene entscheidend. Das heißt, jede zusätzlich erforderliche Berechnung auf Elementebene, wie die der inkompatiblen Freiheitsgrade, kann sich unmittelbar auf die Gesamtrechenzeit auswirken.

In einem **impliziten Verfahren** beeinflusst die Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade also nicht maßgeblich die Gesamtrechenzeit, da diese von der Gleichungslösung auf Systemebene dominiert wird. Selbst mit einer effizienteren Berechnung inkompatibler Freiheitsgrade ist daher der Spielraum, um die Gesamtrechenzeit impliziter Verfahren zu optimieren, sehr begrenzt.

Daher wurden inkompatibel erweiterte Elemente bislang hauptsächlich für implizite Verfahren entwickelt, was auch im Überblick des vorhergehenden Kapitels deutlich wird. Dabei ist es das Ziel, den Aufwand auf Systemebene mit einem kleineren Gleichungssystem zu verringern, indem wenige – aber dafür inkompatibel erweiterte – Elemente verwendet werden, die trotzdem zu ausreichend genauen Ergebnisgrößen führen. Das heißt, die Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade wird in Kauf genommen, wenn sich die Gesamtrechenzeit mit weniger Elementen verkürzen lässt.

In einem **expliziten Verfahren** sind, aufgrund der sehr kleinen Zeitschrittgröße und den effizienten Operationen auf Systemebene, die Operationen auf Elementebene für die Gesamtrechenzeit entscheidend. Die Operationen auf Elementebene hängen wiederum von der Elementformulierung ab, die im Fall der Methode inkompatibler Erweiterungen die, für nichtlineare Materialgesetze meist iterative, Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade enthält. Daher würde sich eine effizientere Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade direkt die Berechnungszeit der Simulation verkürzen.

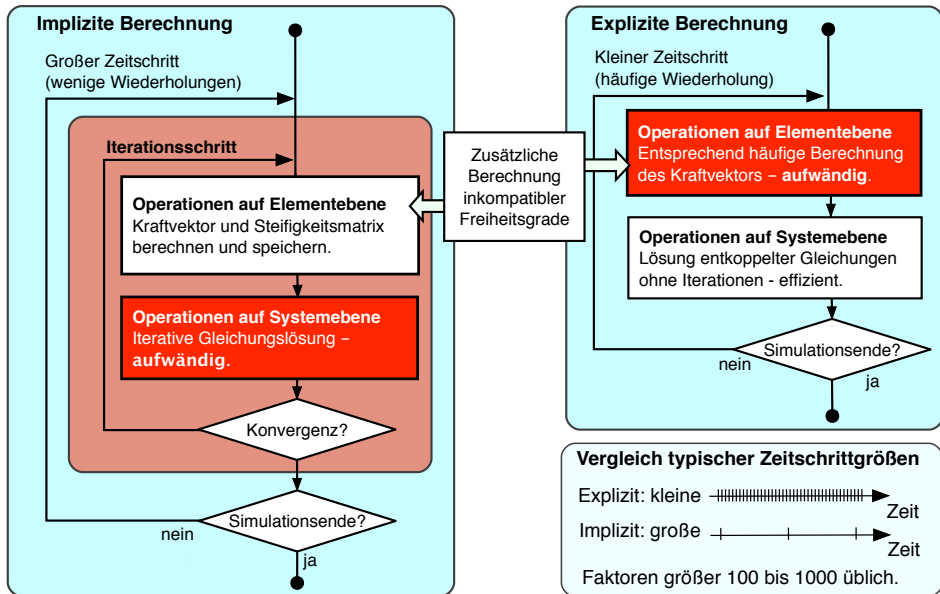


Abbildung 4.1: Schematischer Ablauf und Aufwand der Operationen eines impliziten und eines expliziten Verfahrens mit Vergleich der jeweils typischen Zeitschrittgrößen.

4.1.2 Zur Kombination mit expliziten Verfahren

Vorteile expliziter Verfahren

Wann explizite und implizite Verfahren eingesetzt werden, hängt von der zu simulierenden Anwendung ab und ist nicht für alle Szenarien eindeutig zu beantworten. Für Anwendungen wie Crashesicherheitsanalysen sind explizite Verfahren vorteilhaft, da die kurz aufeinander folgenden Ereignisse nur dann richtig erfasst werden, wenn die Simulation mit kleinen Zeitschritten fortschreitet – also die betrachtete Anwendung sowieso kleine Zeitschrittgrößen erfordert. Kleine Zeitschrittgrößen sind auch dann vorteilhaft, wenn Konvergenz mit impliziten Verfahren – auch bei quasistatischen Lastfällen – aufgrund starker materieller und geometrischer Nichtlinearität, nur schwer zu erreichen ist. Bei einem impliziten Verfahren besteht dagegen der Nachteil, dass es für kleiner werdende Zeitschrittgrößen schnell unwirtschaftlich wird.

Ein weiterer, wichtiger Aspekt ist, dass große Modelle mit zunehmender Anzahl an Elementen zu größeren Gleichungssystemen führen, deren Lösungsaufwand für ein implizites Verfahren überproportional ansteigt. Bei expliziten Verfahren hingegen sind mit diagonalen Massenmatrizen nur entkoppelte Gleichungen zu lösen, womit der Aufwand nur linear ansteigt – also deutlich weniger schnell. Zudem sind zwischen den Iterationen einer impliziten Berechnung viele Systemgrößen zu speichern, sodass bei

großen Modellen auch ausreichende Speicherkapazitäten zur Verfügung stehen müssen. Diese Speicheranforderungen sind bei expliziten Berechnungen deutlich geringer, da nicht iteriert werden muss und auch keine Steifigkeitsmatrix benötigt wird. Eine sehr stark parallel verteilte Berechnung auf vielen Prozessorkernen ermöglicht darüber hinaus, dass die Berechnungszeit relativ einfach skalierbar wird und deutlich gesenkt werden kann.

Vor dem Hintergrund, dass Simulationsmodelle mit zunehmender Rechenleistung auch mehr Details und Nichtlinearitäten beinhalten, ist es sinnvoll, möglichst genaue Elementformulierungen zu entwickeln, die trotzdem effizient mit expliziten Verfahren kombinierbar sind.

Abgrenzung zu reduziert integrierten Elementformulierungen

Reduziert integrierte Elementformulierungen sind besonders attraktiv für explizite Verfahren, da die Spannungen nur an einem oder einer reduzierten Anzahl an Punkten ausgewertet werden. Wegen dieser Einsparung sind die Elemente dann numerisch sehr effizient und besitzen gleichzeitig auch eine reduzierte Steifigkeit, wodurch Schub- und volumetrische Versteifungen vermieden werden. Ein Defizit der Einsparung ist aber die verlorene Steifigkeit gegenüber Sanduhr-Kinematiken (*Hourglassing*), die mit Stabilisierungskräften, der zusätzlich eingeführten *Hourglass Control*, ausgeglichen wird, siehe [15]). Deren Berechnung muss so effizient sein, dass der Vorteil der reduzierten Integration erhalten bleibt, was für beliebige Materialgesetze nur durch vereinfachende Annahmen bezüglich der Konstitutivgleichungen möglich ist. Gleichzeitig ist darauf zu achten, mit den Stabilisierungskräften nicht wieder Versteifungseffekte einzuführen.

Zahlreiche Publikationen und der erfolgreiche Einsatz in kommerziellen Programmen wie LS-DYNA [110], PAM-CRASH [50], RADIOSS [3] und ABAQUS [44] bestätigen, dass reduziert integrierte Elemente entsprechend formuliert und erfolgreich eingesetzt werden, obwohl die Voraussetzungen widersprüchlich klingen: Die Informationsdichte je Element wird reduziert – Spannungen sind nur an einem oder wenigen Punkten bekannt – und das Materialgesetz wird für die Stabilisierung vereinfacht. Daher wird dringend empfohlen, die Simulationsergebnisse kritisch zu prüfen und die Energie infolge der Kräfte der *Hourglass*-Stabilisierung zu überwachen.

Um numerische Berechnungen abzusichern und insbesondere die bekannten Schwächen der Stabilisierungsverfahren zu vermeiden, ist es vorteilhaft, eine geeignete Alternative zu entwickeln, für die weder vereinfachende Annahmen, noch eine Reduktion der Informationsdichte erforderlich ist. Elementformulierungen mit inkompatiblen Freiheitsgraden scheinen hierfür eine geeignete Alternative zu bieten; sie sind universell für jedes Material einsetzbar und die Qualität der Antwort basiert auf einer größeren Informationsdichte je Element.

4.1.3 Zusammenfassung des Problems

Die in den Abschnitten 4.1.1 bis 4.1.2 dargestellten Zusammenhänge können in den folgenden Punkten festgehalten werden:

1. Ob implizite Verfahren numerisch effizient sind, hängt nur indirekt vom Berechnungsaufwand inkompatibler Freiheitsgrade ab.
2. Der Berechnungsaufwand inkompatibler Freiheitsgrade beeinflusst direkt den Engpass der numerischen Effizienz expliziter Verfahren.
3. Eine effizientere Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade wirkt sich direkt auf die numerische Effizienz der expliziten Simulation aus.
4. Verbesserungen zu Elementen mit reduzierter Integration sind dringend erforderlich und die Methodik inkompatibler Erweiterungen erscheint dafür sehr gut geeignet.
5. Explizite Verfahren sind generell für schwierige, hoch nichtlineare Simulationsfragen bei gleichzeitig hoher Genauigkeit geeignet.

4.1.4 Lösungsvorschläge im Schrifttum

Verkürzung der Gesamtrechenzeit mit Massenskalierung

Insgesamt werden explizite Verfahren noch selten mit inkompatiblen Freiheitsgraden kombiniert. Ein Hauptgrund ist die angesprochene Problematik der numerischen Effizienz. Um diese in expliziten Verfahren generell zu verbessern, sind, insbesondere in jüngeren Veröffentlichungen, die folgenden Strategien zur Massenskalierung zu finden.

Das einfachste, schon lange bekannte Prinzip ist dabei die homogene Massenskalierung, die beispielsweise in LS-DYNA [109] genutzt wird: Dabei wird die Rohdichte der Elemente erhöht, die eine Zeitschrittweite unterhalb einer festgelegten Zielgröße aufweisen. Es ist allerdings zu beachten, dass dadurch alle Frequenzen eines Elements betroffen sein können und dass keine unphysikalische Antwort entsteht.

Um derartige Effekte zu vermeiden, wird gerne selektive Massenskalierung eingesetzt, die zuerst von Olovsson et al. [124, 122, 123] vorgeschlagen wurde. Interessant ist, dass dabei für Teilbereiche die diagonale Struktur einer Massenmatrix aufgegeben werden muss und damit eine klassische Gleichungslösung verwendet werden muss, die aber wegen des größeren Zeitschritts immer noch zu einer Verbesserung der Effizienz des gesamten Verfahrens beiträgt. Ein mechanisch konsistentes Vorgehen schlagen Tkachuk und Bischoff [172, 173] auf variationeller Basis für die selektive Massenskalierung vor. Cocchetti et al. [35, 36] entwickeln selektive Massenskalierung speziell für Volumenschalenelemente mit dem Ziel, die Größe des Zeitschritts unabhängig von der Dickenrichtung zu machen, die gegenüber den Abmessungen in Schalenebene üblicherweise viel kleiner ist. Dies erlaubt, nahezu die gleiche Zeitschrittgröße wie für

ein degeneriertes, 4-knotiges Schalenelement zu verwenden. Diese selektive Massenskalisierung wird von Pagani et al. [125, 126] in Kombination mit der unterintegrierten Volumenschalenformulierung von Schwarze und Reese [152] erfolgreich eingesetzt. In der Arbeit von Askes et al. [11] werden zur Vergrößerung der Zeitschrittweite ein Ansatz mit Mikro-Trägheiten, zusätzliche Trägheitsbedingungen durch Anwendung von Straffunktionen (*Penalties*) auf die Massenmatrix sowie Massenskalisierung durch Addition der elastischen Steifigkeitsmatrix zur Massenmatrix miteinander verglichen. Diese sehr ähnlichen Ansätze, die für lineare Elemente im 1D-Fall identisch sind, führen zu einer nicht-diagonalen Massenmatrix und erfordern daher, wie bei Olovsson [122], eine iterative Gleichungslösung. Bei de Frías et al. [45] wird eine orthogonale Zerlegung in tiefe und hohe Frequenzen durchgeführt, um durch Anwendung von selektiver Massenskalisierung auf den Bereich hoher Frequenzen den Zeitschritt zu vergrößern. Für die Zerlegung werden allerdings Informationen aus dem Anfangsstadium der Simulation ohne Massenskalisierung verwendet. Methoden zur Massenskalisierung und -diagonalisierung in Kombination mit isogeometrischen Formulierungen werden von Hartmann und Benson [62] vorgeschlagen. Allerdings ist festzuhalten, dass bei letzterem Vorgehen ein großer Einfluss auf das Frequenzspektrum sowie die Eigenformen gegeben ist.

Es ist festzuhalten, dass Massenskalisierung zu einem Standardverfahren in vielen Simulationsfragen geworden ist, um die Gesamtrechenzeit zu verkürzen. Unabhängig von der Massenskalisierung, führt eine effizientere Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade direkt zu einer kürzeren Gesamtrechenzeit, wenn überwiegend inkompatibel erweiterte Elemente im Modell verwendet werden. Daher wird das entwickelte Konzept zur effizienteren Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade so formuliert, dass es auch mit üblichen Verfahren zur Massenskalisierung kombiniert werden kann.

Effizientere Berechnung inkompatibler Freiheitsgrade

Die folgenden Veröffentlichungen enthalten unterschiedliche Ansätze zur effizienten Berechnung inkompatibler Freiheitsgrade in impliziten und expliziten Verfahren.

Puso [132] entwickelte bereits im Jahr 2000 ein reduziert integriertes Volumenelement mit inkompatiblen Freiheitsgraden für explizite Zeitintegration. Zur Optimierung der numerischen Effizienz werden dazu stark vereinfachende Annahmen getroffen, um die 3 bis 6 inkompatiblen Freiheitsgrade direkt innerhalb mit der Auswertung der Stabilisierungskräfte zu berechnen. Das resultierende Element ist effizient, weist aber die Vorteile einer reduziert integrierten Formulierung auf. Dazu gehört der Verlust der Generalität bezüglich Materialgesetzen, die Methoden mit inkompatiblen Freiheitsgraden ansonsten aufweisen.

Im Jahr 2005 stellten Tan und Vu-Quoc [165] eine Volumenschalenformulierung für explizite Dynamik vor. Die darin enthaltenen 7 inkompatiblen Freiheitsgrade werden implizit berechnet. Der für die explizite Simulation benötigte Kraftvektor wird allerdings auf Basis einer vollständigen Linearisierung bezüglich der kompatiblen

und inkompatiblen Freiheitsgrade berechnet. Dies ist irritierend, da der Aufwand bezüglich der kompatiblen Freiheitsgrade zu variieren, also letztendlich die Steifigkeit zu berechnen, in einem expliziten Verfahren nicht erforderlich ist, da die kompatiblen Verschiebungen in jedem Zeitschritt, bei Verwendung diagonaler Massenmatrizen, direkt ermittelt werden. Im Jahr 2010/11 verwenden Li et al. [99] die Volumenschalenformulierung mit 12 inkompatiblen Freiheitsgraden nach Alves de Sousa et al. [6] und führen die implizite Berechnung mit der Linearisierung nach den inkompatiblen Freiheitsgraden korrekt durch. Kurze Zeit später stellt die gleiche Gruppe [101] eine reduziert integrierte Volumenschalenformulierung mit 7 inkompatiblen Freiheitsgraden vor. Davon werden die 6 Schubweiterungen in die Hourglassstabilisierung mit einbezogen. Die Integration wird an 4, über das Element verteilten Integrationspunkten durchgeführt, was die Spannungsapproximation im Element zwar verbessert, zum Beispiel von Belytschko und Bindemann [13] für ein reduziert integriertes Volumenelement vorgeschlagen, aber für reduziert integrierte Volumenschalenelemente unüblich ist. Hierfür wird die Variante mit einer Ein-Punkt-Integration in Schalenebene und einer frei wählbaren Anzahl von mindestens 2 Integrationspunkten über die Dicke bevorzugt verwendet, um gezielt die Spannungsapproximation in Dickenrichtung verbessern zu können.

Zur selben Zeit entwickeln Mattern und Schweizerhof [115] und Mattern et al. [116] Volumenschalenelemente mit inkompatiblen Freiheitsgraden für explizite Zeitintegration. Dabei werden die inkompatiblen Freiheitsgrade zunächst implizit gelöst. In einem nächsten Schritt wird die Rechenzeit der inkompatiblen Freiheitsgrade stark reduziert, indem Massen für die inkompatiblen Freiheitsgrade eingeführt werden und damit auch für die Elementgleichungen ein explizites Zeitintegrationsverfahren einsetzbar wird [146, 155, 113], siehe auch die Dissertation von Mattern [112]. Da die eingeführten Massen Auswirkungen auf die Eigenfrequenzen des Elements haben, wird, zur Kontrolle und Anpassung, eine Skalierung der inkompatiblen Massen genutzt. In weiteren Beiträgen von Schmied et al. [149, 147, 148] wird, auf die Arbeit von Mattern [112] aufbauend, die explizite Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade weiterentwickelt und erste, verbesserte Resultate in [114] präsentiert. Unter anderem wird auch vorgeschlagen, die Rechenzeit für die implizite Berechnung inkompatibler Freiheitsgrade zu verkürzen, indem nur eine Gleichungslösung ohne weitere Iterationen für die inkompatiblen Freiheitsgrade je Zeitschritt erfolgt. Als Begründung dient die ohnehin sehr kleine Zeitschrittgröße bei expliziter Zeitintegration.

In einer Publikation von Pagani et al. [126] im Jahr 2014 werden ähnliche Varianten auf Basis der Linearisierung nach den inkompatiblen Freiheitsgraden diskutiert. Die inkompatiblen Freiheitsgrade werden entweder zu jedem Zeitschritt oder mit Pausen für eine bestimmte Anzahl an Zeitschritten zwar implizit berechnet, aber ohne Iterationen. Die Variante, auf Iterationen zu verzichten, die bereits bei Mattern [112] diskutiert wird, spart Berechnungszeit und stimmt aufgrund der kleinen Zeitschrittweiten gut mit der vollständig impliziten Lösung mit Iterationen überein. Für die Berechnung in Intervallen wird angegeben, dass diese nicht zu groß werden sollten, um nicht zu sehr

von der impliziten Lösung abzuweichen. Schon für einen inkompatiblen Freiheitsgrad wirken sich diese Strategien deutlich auf die Rechenzeit aus.

Sehr ähnlich zur Entwicklung von Mattern und Schweizerhof [115] und Mattern et al. [116] ist die Arbeit von Ahmed und Sluys [2], die eine Volumenschalenformulierung mit sogenannten Phantomknoten verwenden, deren Freiheitsgrade ähnlich zum Vorgehen bei Mattern et al. [114] Massen zugewiesen werden, die skaliert werden.

Insgesamt betrachtet besteht Interesse an der effizienten Berechnung inkompatibler Freiheitsgrade, wobei für die Kombination mit expliziten Verfahren die Anzahl der Publikationen überschaubar ist. Es kann bereits festgestellt werden, dass die in der Gruppe von Mattern, Schmied und Schweizerhof entwickelte explizite Berechnung inkompatibler Freiheitsgrade die größten Wirksamkeit aufweist und daher im Rahmen der vorliegenden Arbeit weiterentwickelt wurde.

4.1.5 Strategie zur Effizienzsteigerung

Die ersten Ansätze von Mattern [112] werden in **Kapitel 5** weiter zu einem allgemeinen Konzept ausgearbeitet. Dazu wird die Methodik inkompatibler Erweiterungen¹ um inkompatible Trägheitskräfte erweitert und eine allgemeine, variationelle Basis erarbeitet. Für große Deformationen werden schwache Formen bezüglich des Deformationsgradienten, der Greenschen Verzerrungen sowie der Verzerrungsgeschwindigkeit behandelt. Die Algorithmen zur impliziten und expliziten Lösung inkompatibler Freiheitsgrade werden detailliert beschrieben und die Berechnung der inkompatiblen Massenmatrizen anhand von Beispielen mit 9 bis 30 inkompatiblen Freiheitsgraden diskutiert.

Anhand ausgewählter Formulierungen aus der Literatur wird das in Kapitel 5 erarbeitete Konzept umgesetzt und es werden effiziente Elementformulierungen in **Kapitel 6** für kleine und große Deformationen entwickelt sowie implementierungsnah beschrieben. Ein Fokus liegt auf der Genauigkeit der Formulierungen, die anhand statischer, numerischer Testbeispiele im geometrisch linearen Bereich miteinander verglichen werden. Hierfür kann bereits anhand einfacher Konvergenzstudien die Genauigkeit der Elemente auch für große Deformationen abgeschätzt werden. Die ausgewählten Formulierungen der Volumen- und Volumenschalenelemente werden im Rahmen von sogenannten mitgehenden Lagrange-Formulierungen, die im englischsprachigen als *Updated-Lagrange-Formulierung* bekannt sind, mit (für explizite Verfahren üblichen) inkrementellen Verschiebungen auf große Deformationen erweitert. Für die Berechnung der Spannungen wird üblicherweise eine inkrementelle Verschiebung mit einem hypoelastischen Materialgesetz verwendet, es ist aber auch möglich,

¹ Der Begriff inkompatibler Erweiterungen umfasst stellvertretend die Methode inkompatibler Verschiebungen, die oft mit IM oder ICM bezeichnet wird sowie die Methode erweiterter Verzerrungen mit der üblichen Bezeichnung EAS. In beiden Fällen werden inkompatible Freiheitsgrade eingeführt, die im ersten Fall als Verschiebungen interpretiert werden und im zweiten Fall wird eine Verzerrungsgröße als Freiheitsgrade betrachtet.

ein hyperelastisches Materialgesetz zu nutzen, siehe Abschnitte 6.4.3 und 6.4.4. Ebenso wird auf totale Lagrange-Formulierungen mit totalen Verschiebungen eingegangen. Anschließend werden in **Kapitel 7** die Grenzen und Möglichkeiten der expliziten Berechnung inkompatibler Freiheitsgrade aufgezeigt. Dazu wird zunächst eine Eigenfrequenzanalyse an einem Element durchgeführt und, auf diesen Ergebnissen basierend, verschiedene Strategien zur expliziten, impliziten und kombinierten expliziten-impliziten Berechnung inkompatibler Freiheitsgrade erarbeitet. Darin ist ebenfalls die selektive Skalierung inkompatibler Massen enthalten. Anschließend werden an einem geometrisch und materiell nichtlinearen Beispiel die Auswirkungen der verschiedenen Strategien auf die numerische Effizienz und Genauigkeit hin untersucht.

4.2 Kinematiken ausgehend von inkompatiblen Erweiterungen

4.2.1 Entdeckung und Nachweis

Ist in einer expliziten Simulation gewährleistet, dass die Zeitschrittgröße unterhalb der Schranke liegt, für die das Zeitintegrationsverfahren stabil ist, sollten keine Kinematiken infolge inkompatibler Freiheitsgrade auftreten. Aus dem in Abschnitt 3.3 betrachteten Schrifttum geht hervor, dass Kinematiken nur in Formulierungen mit geometrisch nichtlinearen Deformationsmaßen auftreten. Der analytische Nachweis hierfür wurde zunächst von Reese und Wriggers [192] für große Deformationen mit einem hyperelastischen Materialgesetz erbracht und ca. 18 Jahre später von Sussman und Bathe [163] auch für kleine Deformationen mit einem linearen Stoffgesetz, aber einem geometrisch nichtlinearem Deformationsmaß, dem Greenschen Verzerrungstensor, bestätigt. Beide Nachweise wurden im üblichen Rahmen einer totalen Lagrange-Formulierung, in der alle Größen auf die Referenzkonfiguration bezogen werden, durchgeführt.

Die analytischen Nachweise werden durch zahlreiche Beispiele aus dem Schrifttum gestützt, in denen die erwarteten Kinematiken auftreten. Dazu wird meistens die Kompression eines Festkörpers wie eines hyperelastischen oder elasto-plastischen zylindrischen Stabs oder eine elasto-plastische Zugprobe verwendet, siehe Puso [132], Korelc et al., [86] oder Sussman und Bathe [163].

4.2.2 Vermeidung und Unvermeidbarkeit

Ansätze zur Kontrolle der Problematik kinematischer Moden sind bei Wriggers [189] zusammengefasst und werden hier in modifizierter Form und mit eigenen Anmerkungen ergänzt dargestellt. Generell lassen sich die Ansätze in 3 Gruppen einteilen: Es werden (a) analog zur Hourglassstabilisierung von unterintegrierten Elementen eine Stabilisierung formuliert, (b) eine spezielle Interpolation der Elementformulierung gewählt oder (c) eine Reihe verschiedener Ansätze, die teilweise eine Kombination

des Vorgehens der Gruppen (a) und (b) sind und zusätzliche Terme auf variationeller Ebene der Elementformulierung einführen, dargestellt.

Die unter (a) eingruppierte Kombination mit **Hourglassstabilisierung** wird in den Arbeiten von Reese et al. [141] begonnen und in weiteren Arbeiten von Reese [139] eingehend untersucht. Eine Variante dazu ist die ebenfalls auf reduzierter Integration basierende Formulierung von Puso [132]. Generell kann der Ansatz über die Hourglassstabilisierung nicht als allgemeine Lösung der Fragestellung betrachtet werden, da hierbei Vereinfachungen im Materialgesetz erforderlich sind, die bei großen Deformationen mit Komplexitäten wie Anisotropie eine nicht ausreichende Stabilisierung darstellen können.

Für Gruppe (b) gilt, dass **spezielle Interpolationen** der erweiterten Verzerrungen die Elementformulierungen stabilisieren. Dazu zählt der Ansatz von Korelc und Wriggers [89], der in Korelc et al. [86] weiter verfeinert wurde. Trotzdem ist das Element nicht vollständig resistent gegenüber Kinematiken. Korelc et al. [86] geben daher an, dass weitere Versuche, eine Vermeidung von Kinematiken auf Basis einer Eigenwertanalyse zu entwickeln, fraglich sind. Damit sind alle weiteren, in Abschnitt 3.3 genannten, Ansätze in dieser Richtung nur partiell als Korrektur anzusehen. Eine Ausnahme bildet das Element von Kasper und Taylor [76, 77], die eine gemischte Formulierung für Spannungen und Verzerrungen vorstellen, die gegenüber Kinematiken resistent ist. Im Vergleich zu einer Standardformulierung mit inkompatiblen Erweiterungen sind zusätzliche Operationen erforderlich, da eine modifizierte Interpolation der kompatiblen Freiheitsgrade in der Formulierung enthalten ist. Eine Besonderheit ist, dass ausschließlich volumetrische Terme zur Erweiterung der Verzerrungen oder des Deformationsgradienten verwendet werden. Die nicht vorhandene Erweiterung der Schubterme kann daher eine Erklärung dafür sein, dass keine Probleme mit numerischer Robustheit auftreten.

Zur Gruppe (c) gehören folgende Ansätze, die teilweise **Kombinationen** mit denen der Gruppen (a) und (b) darstellen: Crisfield et al. [43] verwenden eine mitrotierende (*corotational*) Formulierung mit Trennung von Rotation und Verschiebung, die allerdings sehr komplex ist. Dabei ist nicht klar, ob die erwünschte Flexibilität bei der Gestaltung von inkompatiblen Erweiterungen zur Beseitigung der Versteifungen erhalten bleibt. Glaser und Armero [56] verwenden eine modifizierte Interpolation der inkompatiblen Freiheitsgrade und addieren im Funktional einen Term, der unerwünschte Kinematiken verhindert. Dabei muss allerdings ein zusätzlicher Faktor manuell gewählt werden. Bei Wall, Bischoff und Ramm [181] wird eine vom Verschiebungszustand abhängige Stabilisierung ebenfalls auf variationeller Ebene eingeführt, die zunächst allerdings nur für rechtwinklige Elemente genutzt wird. Reese und Wriggers [143] schlagen vor, den stabilisierenden Term der zerlegten Elementformulierung abhängig von Eigenwertuntersuchungen während der Simulation anzupassen, wodurch zusätzlicher Aufwand entsteht. Letzteres ist für größere Modelle und viele Zeitschritte kaum nutzbar.

Insgesamt betrachtet sind die Vorgehensweisen zur Vermeidung kinematischer Formen entweder sehr aufwendig, da zusätzliche Größen zur Überwachung oder Stabilisierung berechnet werden müssen, oder es treten Beschränkungen für den generellen Einsatz der Methodik inkompatibler Erweiterungen auf: beispielsweise wird die Hourglassstabilisierung mit vereinfachten Materialgesetzen formuliert, siehe Gruppe (a). Insbesondere der Nachteil eines größeren Aufwands erschwert zusätzlich den Einsatz in expliziten Verfahren, bei dem der numerische Aufwand für die Operationen auf Elementebene eine entscheidende Rolle spielt. Die Kinematiken resultieren laut Sussman und Bathe [163] direkt aus der Inkompatibilität der Verschiebungserweiterung und sind somit untrennbar von den Vorzügen dieser Formulierung, Versteifungen generell zu vermeiden. Bei vorgegebenen Dirichlet-Randbedingungen kann die Kinematik analog zu einem Eulerschen Stabilitätsfall auftreten, da die Steifigkeit beim Erreichen einer kritischen Verschiebung Null wird. Mit dieser Schlussfolgerung geben Sussman und Bathe [163] die klare Empfehlung, eine Elementformulierung mit inkompatiblen Erweiterungen nur mit größter Vorsicht zu verwenden, da Kinematiken trotz aller Bemühungen unvermeidbar sind.

4.2.3 Strategien zur Kinematik-Vermeidung

Inkompatible Erweiterungen können in einem expliziten Verfahren nur dann sinnvoll genutzt werden, wenn neben einer numerisch effizienten Berechnung mit den Strategien aus Abschnitt 4.1.5 auch eine numerisch robuste Berechnung ohne künstliche Kinematiken möglich ist. Zur Vermeidung der künstlichen Kinematiken werden zwei Ansätze untersucht.

In einem ersten Ansatz werden die für die explizite Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade eingeführten Massen dazu genutzt, die Aktivität der inkompatiblen Freiheitsgrade in Form einer kinetischen Energie zu überwachen. Aufgrund der kleinen Zeitschrittweiten ist es dabei möglich, die Evolution der inkompatiblen kinetischen Energie als Kontrollgröße zu nutzen und zur Laufzeit sinnvoll auf Kinematiken zu reagieren. Da bei expliziter Zeitintegration die direkte Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade vorliegt, können die für die Kinematik verantwortlichen Terme auch zur Laufzeit sehr einfach deaktiviert werden. Dieser Ansatz wird in **Kapitel 8**, Abschnitt 8.2 untersucht.

Für einen weiteren Ansatz wird zunächst die analytische Erklärung zur Herleitung eines Kriteriums für die Kinematiken aus Sussman und Bathe [163] in **Kapitel 8**, Abschnitt 8.3 in einer totalen Verschiebungsformulierung reproduziert. An dieser für geometrische Nichtlinearität üblichen Formulierung inkompatibler Elemente ist klar zu sehen, dass sich die Kinematiken aus den geometrisch nichtlinearen Anteilen entwickeln, mit der die virtuellen Deformationen in einer schwachen Form beschrieben werden. Dagegen treten bei einer geometrisch linearen Formulierung keine nicht-linearen Anteile und damit auch keine künstliche Kinematiken auf. Dieser lineare Charakter liegt auch bei den virtuellen Almansi-Verzerrungen einer totalen Verschie-

bungsformulierung vor, wobei die geometrische Nichtlinearität durch deren Bezug auf die Momentankonfiguration entsteht. Um mit diesem linearen Charakter gezielt die Kinematiken zu vermeiden, wird in **Kapitel 8**, Abschnitt 8.4 – als entscheidende Maßnahme – eine *ad-hoc-Modifikation des virtuellen inkompatiblen Verschiebungsgradienten* vorgeschlagen. Dabei ist es vorteilhaft, die gesamte Formulierung auf die Momentankonfiguration zu beziehen, was üblicherweise nicht der Fall ist. Die oben erwähnte analytische Erklärung wird für die vorgeschlagene ad-hoc-Formulierung wiederholt, wobei keine Kinematiken mehr auftreten. Interessanterweise erfüllt diese ad hoc inkompatible Erweiterung die von Nagtegaal und Fox [121] vorgeschlagene Volumenbedingung. Zudem wird gezeigt, dass die sogenannte inkrementelle Formulierung ebenfalls diese Volumenbedingung erfüllt. Anschließend werden die klassische und die ad-hoc-Formulierung an numerischen Experimenten in Abschnitt 8.5 einander gegenübergestellt.

4.3 Zur Genauigkeit inkompatibel erweiterter Elementformulierungen

4.3.1 Anforderungen an die Genauigkeit in expliziten Verfahren

Oft werden Elemente speziell so konstruiert, um bereits bei groben Vernetzungen gute Genauigkeit zu erreichen. Damit wird in impliziten Verfahren primär der Aufwand für die Lösung des Gleichungssystems auf Systemebene reduziert, aber der Aufwand auf Elementebene erhöht. Ein typisches Beispiel hierfür sind Entwicklungen mit isogeometrischen Finite-Elementen, siehe beispielsweise Cottrell et al. [38]. Diese stellen aber weiterhin keine vollständige Ablösung von Elementen mit niedrigen Ansatzordnungen dar, da letztere für allgemeine Fragestellungen einfacher zu handhaben sind und für die Lösung vieler Fragestellungen meist ausreichen. Vor allem bei komplexen Geometrien mit Kanten, Falten und Schweißpunkten oder der Modellierung schwieriger Randbedingungen und hoher lokaler Gradienten sind Elemente niedrigerer Ansatzordnung oft vorteilhaft, da dann vor allem eine Netzverfeinerung (h-Verfeinerung) und weniger höhere Ansatzordnungen effektiv sind.

Bei der Wahl inkompatibler Erweiterungen ist es analog in expliziten Verfahren wichtig, abzuwägen, ob sich der Aufwand lohnt, viele inkompatible Freiheitsgrade zu verwenden, die zwar bei einer groben Vernetzung ein genaues Ergebnis liefern können, das sich aber mit einer feineren Elementdichte und weniger inkompatiblen Freiheitsgraden ebenfalls einstellt.

Diese Abwägung ist wichtig, da insbesondere Anwendungsfälle, für die eine explizite Simulation genutzt wird, häufig sowieso feiner aufgelöste Elementvernetzungen benötigen, um alle geometrischen Details des Modells auch bei schwierigen Anforderungen zu idealisieren. Eine schwierige Anforderung stellt beispielsweise der Kontakt

an gekrümmten Oberflächen einer sich faltenden Struktur dar, für deren genaue Abbildung eine feine Vernetzung erforderlich ist.

Somit sollte für explizite Verfahren unbedingt abgewogen werden, ob ein zusätzlicher Aufwand der Elementformulierung, der zum Beispiel mit mehr inkompatiblen Freiheitsgraden entsteht, nicht einfach durch eine feinere Vernetzung mit einer weniger aufwendigen Elementformulierung bereits kompensiert werden kann, was in Abschnitt 6.3 diskutiert wird.

4.3.2 Verwendung einfacher Elemente aus dem Schrifttum

Wie bereits erwähnt existieren sehr viele Elementformulierungen zur Erweiterung unterschiedlicher Verzerrungsmaße. In einer großen Zahl an Publikationen werden Vorschläge für inkompatible Erweiterungen für Volumen- oder speziell für Volumenschalenelemente angepasst. Davon sind einige in den Abschnitten 3.2 und 3.4 zusammengestellt. Viele der inkompatiblen Erweiterungen werden häufig mit der ANS/MITC-Methode kombiniert. Damit können zwar inkompatible Freiheitsgrade eingespart werden, dann kann aber der Aufwand der ANS/MITC-Methode wiederum die Effizienz beeinträchtigen.

Gerade für explizite Verfahren werden Elemente mit reduzierter Integration und Hourglassstabilisierung sehr erfolgreich in hochdynamischen Crash- und Impakt-simulationen verwendet, wo Trägheitskräfte dominieren. Zur Integration wird für Volumenelemente oft nur der Elementmittelpunkt verwendet, während für Volumenschalenelemente eine Punktreihe über die Schalendicke genutzt wird, die durch den Mittelpunkt der Schalenmittelfläche führt. Mit diesem Fehler in der Integrationsordnung wird gerade passend die Steifigkeit der Elemente so reduziert, dass damit Schub- und volumetrische Versteifungen vermieden werden. Ein Defizit dieser Einsparung an Integrationspunkten ist die dabei ebenfalls verlorene Steifigkeit gegenüber *Hourglassing*, was durch Stabilisierungskräfte ausgeglichen werden muss. Damit sich die reduzierte Anzahl an Integrationspunkten lohnt, muss die Berechnung der Stabilisierungskräfte so effizient wie möglich sein, was nur durch zusätzliche Annahmen im Materialgesetz möglich ist. Es klingt zunächst widersprüchlich: Trotz der reduzierten Informationsdichte je Element sowie einiger Annahmen bezüglich der Konstitutivgleichungen werden für viele Fälle – für die die Annahmen keine Einschränkungen darstellen – genauere Ergebnisse erzielt. Puso [132] kombiniert dieses Vorgehen mit inkompatiblen Freiheitsgraden, die mit vereinfachenden Annahmen im Materialgesetz in die Stabilisierungskräfte eingebettet werden, wodurch der Reiz der Generalität inkompatibler Erweiterungen aber verloren geht.

Um das in der vorliegenden Arbeit vorgestellte Konzept inkompatible Freiheitsgrade effizient zu berechnen bestmöglich auszunutzen, wird weitgehend auf eine Kombination mit anderen Methoden zur Vermeidung von Versteifungen verzichtet. Es werden möglichst einfache Formulierungen effektiver 8-knotiger Volumen- und Volumenschalenelemente aus dem Schrifttum verwendet und, wo erforderlich ange-

passt. Angesichts der großen verfügbaren Zahl verschiedenster Erweiterungen, ist der Bedarf, eine „neue“ Variante zu kreieren, nicht mehr gegeben. Die gewählten Formulierungen werden in **Kapitel 6** für geometrisch lineare Probleme beschrieben und an einigen gängigen numerischen Testbeispielen untersucht. Anschließend folgt die Beschreibung der Erweiterung für nichtlineare Formulierungen in einer totalen und mitgehenden Lagrange-Formulierung. Weitere Untersuchungen folgen in den darauffolgenden Kapiteln.

5 Ein Konzept zur expliziten Berechnung inkompatibler Freiheitsgrade

Dieses Kernkapitel der vorliegenden Arbeit stellt die inkompatiblen Massen und die damit verbundenen inkompatiblen Trägheitskräfte – zur effizienten Berechnung inkompatibler Freiheitsgrade – auf eine variationelle Basis. Das vorgestellte Konzept wird motiviert und anschließend analog zur klassischen Methode inkompatibler Erweiterungen, die in Kapitel 3 besprochen wurde, mit allen relevanten Neuerungen ausführlich besprochen. Mit einem einfachen Beispiel, das einen kompatiblen und einen inkompatiblen Freiheitsgrad enthält, werden die Auswirkungen der eingeführten inkompatiblen Trägheit prinzipiell erklärt. Darauf folgt die ausführliche Beschreibung, wie die inkompatiblen Freiheitsgrade sowohl mit als auch ohne die inkompatible Masse nun innerhalb eines expliziten Zeitintegrationsverfahrens zu berechnen sind. Wie die inkompatiblen Ansatzfunktionen aus Elementen quadratischer Ordnung herzuleiten sind und daraus inkompatible Massenmatrizen berechnet werden, wird anschließend ausgeführt. Darauf wird die Idee der Verallgemeinerung der Methode inkompatibler Moden von Bischoff und Romero [28] vorgestellt, mit der nahezu beliebige inkompatible Verzerrungs- durch Verschiebungsinterpolationen ersetzt werden können. Basierend auf der Arbeit von Mattern [112] und Mattern et al. [114] wird diese Idee hier fortgeführt und die entstehenden inkompatiblen Massenmatrizen detailliert untersucht. Außerdem wird abgeschätzt, ob die inkompatiblen Massen auch innerhalb eines impliziten Verfahrens vorteilhaft genutzt werden können. Das Kapitel schließt mit einer knappen Zusammenfassung der wesentlichen Punkte ab.

5.1 Motivation

Eine erfolgreiche, zu aussagekräftigen Ergebnissen führende Simulation stellt höchste Anforderungen an die Elementformulierungen für explizite Berechnungen, die genau, kinematikfrei und insbesondere effizient sein müssen. Eine Verbesserung der existierenden 8-knotigen Volumenelemente in kommerziellen Finite-Element-Programmen hinsichtlich der 3 genannten Punkte ist wünschenswert. Inkompatibel angereicherte Elementformulierungen sind zwar genau, führen jedoch, wegen der aufwendigen im-

pliziten Berechnung der benötigten inneren Freiheitsgrade je Element und Zeitschritt, innerhalb eines expliziten Verfahrens zu nicht praxistauglichen, langen Rechenzeiten. Zudem ist die Beseitigung der Kinematiken, die infolge der inkompatiblen Freiheitsgrade auftauchen, noch offen und wird ausführlich in Kapitel 8 behandelt.

Die schnellere, effiziente Berechnung wird mit den eingeführten inkompatiblen Massen ermöglicht. Doch zunächst wird das Gleichungssystem betrachtet, das die Ausgangslage für das Standardvorgehen, siehe auch Kapitel 3, mit inkompatibel erweiterten Elementen zu einem Zeitpunkt n darstellt

$$\mathbf{M}^{\text{co}} \ddot{\mathbf{d}}_n^{\text{co}} + \mathbf{f}^{\text{co}}(\mathbf{d}_n^{\text{co}}, \mathbf{d}_n^{\text{im}}) = \mathbf{f}_n^{\text{ext}} \quad \longrightarrow \quad \text{explizite Berechnung: } \mathbf{d}_n^{\text{co}} \rightarrow \mathbf{d}_{n+1}^{\text{co}} \quad (5.1)$$

(auf Systemebene)

$$\mathbf{f}^{\text{im}}(\mathbf{d}_{n+1}^{\text{co}}, \mathbf{d}_{n+1}^{\text{im}}) = \mathbf{0} \quad \longrightarrow \quad \text{implizite Berechnung: } \mathbf{d}_{n+1}^{\text{im}} \quad (5.2)$$

(auf Elementebene).

Dazu zählt die semidiskrete Bewegungsgleichung mit dem inneren Kraftvektor \mathbf{f}^{co} und die mit dem inkompatiblen Kraftvektor \mathbf{f}^{im} einhergehende statische Bedingung. In beide Kraftvektoren gehen sowohl die kompatiblen Freiheitsgrade \mathbf{d}^{co} als auch die inkompatiblen Freiheitsgrade \mathbf{d}^{im} ein. Während die Freiheitsgrade \mathbf{d}^{co} explizit berechnet werden, sind die Freiheitsgrade \mathbf{d}^{im} zwingend implizit zu berechnen, da diese ohne eine Masse nicht explizit in der Zeit fortgeschrieben werden können. Daher ist der Kraftvektor \mathbf{f}^{im} zu linearisieren und das so auf Elementebene entstandene Gleichungssystem zu lösen, was die Rechenzeit eines expliziten Verfahrens empfindlich erhöhen kann und den zu bemängelnden Effizienzverlust darstellt. Der Aufwand hängt zum einen von der je Element vorliegenden Anzahl inkompatibler Freiheitsgrade ab und zum anderen von der Komplexität des Materialgesetzes, in das die inkompatiblen Freiheitsgrade mit eingehen. Es ist anzumerken, dass zwar aufgrund der üblicherweise sehr kleinen Zeitschrittgröße bereits eine einzige Iteration in vielen Fällen genügt, aber selbst dann der Nutzen vor dem Hintergrund der aufwendigen, zusätzlichen Operationen fraglich ist.

Das Ziel, Gleichung (5.2) vollständig explizit zu lösen, wird mit einer für die inkompatiblen Freiheitsgrade eingeführten Massenmatrix erreicht

$$\mathbf{M}^{\text{im}} \ddot{\mathbf{d}}^{\text{im}} + \mathbf{f}^{\text{im}}(\mathbf{d}_n^{\text{co}}, \mathbf{d}_n^{\text{im}}) = \mathbf{0} \quad \longrightarrow \quad \text{explizite Berechnung: } \mathbf{d}_n^{\text{im}} \rightarrow \mathbf{d}_{n+1}^{\text{im}} \quad (5.3)$$

(auf Elementebene).

Im Vergleich zur impliziten Berechnung ist dieses Vorgehen prinzipiell deutlich effizienter. Zu beachten ist, dass die inkompatible Masse Einfluss auf die Zeitschrittgröße und die Wirksamkeit der inkompatiblen Parameter hat. Damit ist die Möglichkeit gegeben über eine sorgfältig gewählte Skalierung Wirksamkeit und Effizienz mit einer Aktion zu erreichen.

Die variationelle Basis im Zusammenhang mit den eingeführten inkompatiblen Massen, die Wahl geeigneter inkompatibler Ansatzfunktionen und die anschließende Konstruktion inkompatibler Massenmatrizen sind die Ziele der folgenden Unterkapitel.

5.2 Variationelle Basis mit inkompatibler Trägheit

5.2.1 Um inkompatible Trägheit ergänzte Methodik inkompatibler Erweiterungen für explizite Zeitintegration

Die folgenden Ausführungen basieren auf den beiden Abschnitten 3.1.1 und 3.1.2. Der Ausgangspunkt der neuen Formulierung ist das bereits um *kompatible* Trägheitsterme erweiterte Hu-Washizu-Funktional aus Gleichung (3.27), zusammen mit einem erweiterten Verschiebungsfeld

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\text{co}} + \mathbf{u}^{\text{im}} . \quad (5.4)$$

Die erste Zeitableitung liefert ein Geschwindigkeitsfeld bestehend aus kompatiblen und inkompatiblen Geschwindigkeiten

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}^{\text{co}} + \dot{\mathbf{u}}^{\text{im}} , \quad (5.5)$$

und eine nochmalige Ableitung nach der Zeit schließlich ein Beschleunigungsfeld

$$\ddot{\mathbf{u}} = \ddot{\mathbf{u}}^{\text{co}} + \ddot{\mathbf{u}}^{\text{im}} , \quad (5.6)$$

das zur Berechnung von Trägheitskräften genutzt werden kann. Im weiteren wird ein Verzerrungsfeld gewählt

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{co}}(\mathbf{u}^{\text{co}}) + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{im}}(\mathbf{u}^{\text{im}}) + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{en}} , \quad (5.7)$$

das sowohl die erweiterten Verschiebungen \mathbf{u}^{im} enthält, als auch unabhängige erweiterte Verzerrungen $\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{en}}$. Damit ist eine flexible Basis gegeben, mit der inkompatible Freiheitsgrade sowohl mit als auch ohne Trägheitstermen genutzt werden können. Einsetzen von (5.4), (5.6) und (5.7) in (3.27) liefert

$$\int_{\mathcal{B}} \delta \left[\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{co}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{im}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{en}} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon} dv \quad (5.8a)$$

$$+ \int_{\mathcal{B}} \delta \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\text{sym}(\text{grad}(\mathbf{u}^{\text{co}} + \mathbf{u}^{\text{im}}) - (\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{co}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{im}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{en}})) \right) \right] dv \quad (5.8b)$$

$$+ \int_{\mathcal{B}} \delta(\mathbf{u}^{\text{co}} + \mathbf{u}^{\text{im}}) \cdot \rho(\ddot{\mathbf{u}}^{\text{co}} + \ddot{\mathbf{u}}^{\text{im}}) dv \quad (5.8c)$$

$$- \int_{\mathcal{B}} \delta(\mathbf{u}^{\text{co}} + \mathbf{u}^{\text{im}}) \cdot \rho \mathbf{b} dv \quad (5.8d)$$

$$- \int_{\partial \mathcal{B}^t} \delta(\mathbf{u}^{\text{co}} + \mathbf{u}^{\text{im}}) \cdot \mathbf{t} da = 0 , \quad (5.8e)$$

wobei die Bezeichnung der noch nicht vorgestellten Größen bei der Einführung von Gleichung (3.27) erläutert wird.

5.2.2 Entkopplung der Massen

Um für die angestrebte explizite Berechnung den Vorteil entkoppelter Gleichungen zu erzielen, ist eine Diagonalstruktur der Massenmatrix erforderlich. Mit den erweiterten Trägheitstermen in (5.8c) ist dies nur gewährleistet, wenn für jedes Element

L_2 -Orthogonalität zwischen $\delta \mathbf{u}^{\text{co}}$ und $\dot{\mathbf{u}}^{\text{im}}$ oder zwischen $\delta \mathbf{u}^{\text{im}}$ und $\dot{\mathbf{u}}^{\text{co}}$ gefordert wird. Bei einer klassischen Bubnov-Galerkin-Approximation der einfachen und virtuellen Verschiebungen mit gleichen Ansatzfunktionen erfordert dies

$$\int_B \delta \mathbf{u}^{\text{co}} \cdot \rho \dot{\mathbf{u}}^{\text{im}} dv = 0 \quad \text{bzw.} \quad \int_B \delta \mathbf{u}^{\text{im}} \cdot \rho \dot{\mathbf{u}}^{\text{co}} dv = 0, \quad (5.9)$$

wonach die gewünschte Entkopplung der Gleichungen bezüglich der Massenmatrix erfolgt. Die Forderung (5.9)₁ kann bereits als Orthogonalitätsbedingung betrachtet werden. In den Abschnitten 5.5.2 und 5.6.4 werden die verwendeten inkompatiblen Ansatzfunktionen auf diese Bedingung hin untersucht.

5.2.3 Elimination der Spannungen

Die Spannungen werden aus der Variationsformulierung eliminiert, wenn der Ausdruck (5.8b) gleich Null ist. Die dafür benötigte Orthogonalität zwischen den Spannungen und den Verzerrungen wird dem Ansatz von Simo und Rifai [159] folgend nur im Grenzfall der Netzverfeinerung, für den ein konstanter Spannungszustand σ^c im Element angenommen¹ wird, entsprechend Gleichung (3.30) in der Form

$$\int_{B_e} \delta [\sigma^c \cdot (\dots)] dv = 0 \quad \rightarrow \quad \int_{B_e} \sigma^c \cdot (\dots) dv = 0 \quad \rightarrow \quad \int_{B_e} (\dots) dv = 0 \quad (5.10)$$

gefordert. Wird Gleichung (5.10) auf den Ausdruck (5.8b), der Null werden soll, angewandt, können die folgenden drei Bedingungen formuliert werden

$$\int_{B_e} (\text{sym}(\text{grad} \mathbf{u}^{\text{co}}) - \varepsilon^{\text{co}}) dv = 0 \quad (5.11)$$

$$\int_{B_e} (\text{sym}(\text{grad} \mathbf{u}^{\text{im}}) - \varepsilon^{\text{im}}) dv = 0 \quad (5.12)$$

$$\int_{B_e} \varepsilon^{\text{en}} dv = 0. \quad (5.13)$$

Die Bedingung (5.11) wird für $\varepsilon^{\text{co}} = \text{sym}(\text{grad} \mathbf{u}^{\text{co}})$ erfüllt, kann aber auch dazu genutzt werden, die kompatiblen Verzerrungen ε^{co} zu modifizieren, was in Abschnitt 6.1.3 beschrieben wird. Forderung (5.13) taucht bereits bei der Simo-Rifai-Formulierung [159] in Gleichung (3.30) auf, und wird durch die entsprechende Gestaltung von ε^{en} eingehalten.

¹ Es existieren Ansätze zur Interpolation von Spannungsfeldern, die über konstante Zustände hinaus die Orthogonalität erfüllen. Die daraus resultierenden Spannungen werden allerdings nur zur Spannungsdarstellung während der Nachlaufrechnung (*Postprocessing*) verwendet, was beispielsweise bei Kasper und Taylor [76] verwendet und bei Korelc et al. [86] angesprochen wird. Auf eine weitere Diskussion wird an dieser Stelle verzichtet und für weitere Details auf Piltner et al. [131], Bischoff und Ramm [26] sowie die darin enthaltenen Quellen verwiesen.

Interessant ist die erstmals auftauchende Forderung (5.12), die zunächst als Differenz der Verzerrung und des symmetrischen Gradienten der inkompatiblen Verschiebungen formuliert wird. Diese ist für die einfache Wahl $\varepsilon^{\text{im}} = \text{sym}(\text{grad}\mathbf{u}^{\text{im}})$ zwar eingehalten, doch damit wäre nicht garantiert, dass der Patchtest erfüllt wird. Hierzu muss auch die virtuelle Arbeit der Oberflächenbelastung \mathbf{t} entlang der virtuellen Verschiebungen \mathbf{u}^{im} aus (5.8e) Null werden²

$$\int_{\partial B^t} \delta \mathbf{u}^{\text{im}} \cdot \mathbf{t} \, da = \int_{\partial B^t} \delta \mathbf{u}^{\text{im}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \, da = 0, \quad (5.14)$$

da zur Abbildung eines konstanten Spannungszustandes keine inkompatiblen Verschiebungen benötigt werden. Dabei ist \mathbf{n} der Normalenvektor der betrachteten Körperoberfläche. Pian und Wu [130, Abschnitt 2.5] leiten daraus im Grenzfall der Netzverfeinerung, also für einen konstanten Spannungszustand, die Forderung

$$\int_{\partial B_e^t} \delta \mathbf{u}^{\text{im}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^c \mathbf{n} \, da = 0 \quad \rightarrow \quad \int_{\partial B_e^t} \delta \mathbf{u}^{\text{im}} \cdot \mathbf{n} \, da = 0 \quad (5.15)$$

her und stellen fest, dass diese äquivalent zur Bedingung ist, dass keine Energie aus Verzerrungen infolge inkompatibler Verschiebungen entstehen darf

$$\int_{B_e} \boldsymbol{\sigma}^c \cdot \varepsilon^{\text{im}} \, dv = 0 \quad \rightarrow \quad \int_{B_e} \varepsilon^{\text{im}} \, dv = 0. \quad (5.16)$$

Demnach wird die Forderung (5.15) automatisch mit Gleichung (5.16) erfüllt, die daher zum Bestehen des Patchtests unbedingt einzuhalten ist. Daher ist es sinnvoll, Gleichung (5.12) in zwei Forderungen aufzuspalten

$$\int_{B_e} \varepsilon^{\text{im}} \, dv = 0 \quad \int_{B_e} \text{sym}(\text{grad}\mathbf{u}^{\text{im}}) \, dv = 0, \quad (5.17)$$

die gleichzeitig abgedeckt werden können, wenn $\varepsilon^{\text{im}} = \text{sym}(\text{grad}\mathbf{u}^{\text{im}})$ gewählt wird. Um Gleichung (5.17)₂ einzuhalten, etwa für eine beliebige Geometrie des Elements, wird schlichtweg der Gradient modifiziert, was im Prinzip wieder der Bedingung (3.20) aus der klassischen Wilson-Formulierung entspricht. Auf Details wird in den Abschnitten 6.1.3, 6.1.5 und 6.1.6 noch eingegangen.

5.2.4 Behandlung der Lastterme

Bislang wurden Volumenlasten, wie sie im Anteil (5.8d) des Funktionals vorkommen, noch nicht in Betracht gezogen. Nach Pian und Wu [130, Abschnitt 2.9] dürfen in die Kraftberechnung aus bekannten Volumen- und Oberflächenlasten keine Effekte inkompatibler Verschiebungen \mathbf{u}^{im} eingehen, da ansonsten kein Gleichgewicht zwischen

² Diese Forderung wird bei Taylor et al. [170] und Zienkiewicz und Taylor [194, Abschn. 10.9] zur Konstruktion von inkompatiblen Ansatzfunktionen, die den Patchtest erfüllen, genutzt, was in Abschnitt 5.5 ausführlicher betrachtet wird.

resultierenden Knotenkräften und den tatsächlich aufgebrachten Lasten besteht. Damit die virtuelle Arbeit der Volumenlasten entlang inkompatibler Verschiebungen aus dem Anteil (5.8d) des Funktionals verschwindet, muss der inkompatible Anteil aus (5.8d) verschwinden, was mit (5.10) zur Bedingung

$$\int_{B_e} \delta \mathbf{u}^{\text{im}} \cdot \rho \mathbf{b} \, dv = 0 \quad \rightarrow \quad \int_{B_e} \mathbf{u}^{\text{im}} \, dv = 0 \quad (5.18)$$

führt, wenn für den Grenzfall der Netzverfeinerung angenommen wird, dass die verteilte Volumenlast für ein Element konstant ist. Taylor et al. [170, S. 56] schreiben: “(...) which implies (as originally suggested by Wilson) that boundary loads from the incompatible displacements must vanish or be ignored. On the other hand, nodal forces from body forces (i.e. q) should be computed using both the conforming and nonconforming parts of the displacements.” Danach soll die virtuelle Arbeit aus Oberflächenlasten entlang inkompatibler Verschiebungen verschwinden oder ignoriert werden, aber inkompatible Verschiebungen in die Berechnung von Volumenlasten einbezogen werden. Im später erschienenen Buch von Zienkiewicz und Taylor [194, Abschnitt 10.9], die beide Autoren des zuletzt genannten Artikels sind, wird schließlich ausgeführt: “(...) which implies (as originally suggested by Wilson et al.) that the effects of boundary loads (and loads q) from the incompatible displacements must vanish or be ignored.” Das heißt der Einfluss von Oberflächen- als auch Volumenlasten aus inkompatiblen Verschiebungen sollte verschwinden oder sonst ignoriert werden, was mit der Aussage von Pian und Wu von oben übereinstimmt. Bei Netzverfeinerung ist das physikalisch auch gegeben, da \mathbf{b} dann kaum einen Gradienten aufweist.

5.2.5 Resultierende schwache Form

Zusammengefasst werden folgende Forderungen gestellt: Zur Elimination der Spannungen aus der schwachen Form bei gleichzeitiger Erfüllung des Patchtests, sind die Gleichungen (5.11), (5.13) sowie (5.17) einzuhalten. Die konkrete Erfüllung dieser Forderungen wird für die später entwickelten Elemente in den Abschnitten 6.1.3 und 6.1.6 gezeigt. Die Forderung zur Entkopplung der kompatiblen und inkompatiblen Trägheitsterme (5.9) wird in den Abschnitten 5.5.2 und 5.6.4 zusammen mit der optionalen Forderung (5.18), die garantiert, dass keine Arbeit infolge von Volumenlasten entlang inkompatibler Verschiebungen verrichtet wird, betrachtet. Werden alle Bedingungen in die schwache Form (5.8) eingesetzt, reduziert sich diese auf

$$\int_B \delta \left[\epsilon^{\text{co}} + \epsilon^{\text{im}} + \epsilon^{\text{en}} \right] \cdot \sigma^\epsilon \, dv + \int_B \delta \mathbf{u}^{\text{co}} \cdot \rho \ddot{\mathbf{u}}^{\text{co}} \, dv + \underbrace{\int_B \delta \mathbf{u}^{\text{im}} \cdot \rho \ddot{\mathbf{u}}^{\text{im}} \, dv}_{\text{---}} - \int_B \delta \mathbf{u}^{\text{co}} \cdot \rho \mathbf{f} \, dv - \int_{\partial B^t} \delta \mathbf{u}^{\text{co}} \cdot \mathbf{t} \, da = 0. \quad (5.19)$$

Die wesentliche Neuerung ist der inkompatible Trägheitsterm, der unterstrichen ist.

5.2.6 Erweiterung für geometrisch nichtlineare Probleme

Die bislang vorgestellten Gleichungen beziehen sich auf eine geometrisch lineare Formulierung mit den Ingenieurverzerrungen $\varepsilon = \text{sym}(\text{grad}\mathbf{u})$. Eine Erweiterung der im letzten Abschnitt vorgestellten Methodik auf geometrisch nichtlineare Probleme innerhalb einer totalen oder inkrementellen Verschiebungsformulierung ist einfach umsetzbar. Ob eine inkompatible Masse genutzt wird oder nicht hat dabei keinen Einfluss auf die Erweiterung. Die in der Literatur häufig verwendeten Deformationsgrößen mit inkompatiblen Freiheitsgraden, die auch in dieser Arbeit verwendet werden, sind

- für eine inkrementelle Verschiebungsformulierung die Dehnrates $\dot{\varepsilon}$ beziehungsweise die Deformationsgeschwindigkeit \mathbf{D} ,
- und für die totale Verschiebungsformulierung der Deformationsgradient \mathbf{F} oder der Greensche Verzerrungstensor \mathbf{E} .

Üblicherweise werden inkrementelle Verschiebungsformulierungen in eine mitgehende Lagrange-Formulierung eingebunden und totale Verschiebungsformulierungen in eine totale Lagrange-Formulierung. Beides wird in den Abschnitten 6.4 und B, mit Beachtung einiger Besonderheiten für explizite Verfahren beschrieben. In einer totalen Verschiebungsformulierung ist es zudem üblich, den Deformationsgradienten \mathbf{F} für Volumenelemente und den Greenschen Verzerrungstensor \mathbf{E} für Volumenschalenelemente zu verwenden.

5.3 Beispiel mit 2 Freiheitsgraden

Mit einem illustrativen Beispiel wird das Prinzip, inkompatible Parameter mit expliziter Zeitintegration zu berechnen, veranschaulicht. Dazu wird im 2D-Fall ein rechtwinkliges Element mit einem Biegemoment belastet. Dieses Beispiel wurde für die Untersuchung von Kinematiken bei Sussman und Bathe [163] verwendet und wird zum selben Thema in Kapitel 8 noch eingehend analysiert.

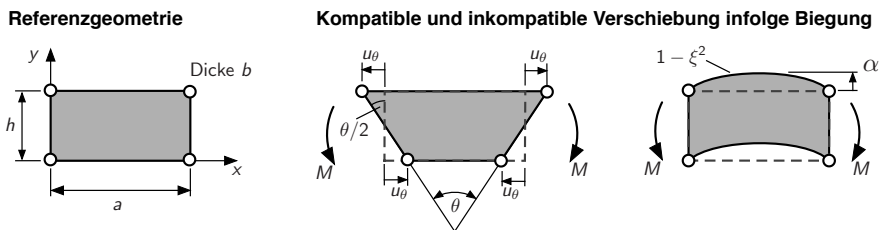


Abbildung 5.1: Referenzgeometrie, Einheitsselement sowie kompatible und inkompatible Verschiebungsform eines einfachen Blocks im Biegezustand.

Es werden vereinfachende Annahmen getroffen und die Diskretisierung erfolgt mit den Standard Lagrange-Ansatzfunktionen für ebene 4-Knoten-Elemente. Es wird ein

einzigster inkompatibler Verschiebungsfreiheitsgrad eingeführt, der mit einer der Wilson Funktionen diskretisiert wird. Die Referenzkonfiguration, das zugehörige Einheitselement sowie die kompatible und inkompatible Verschiebungsform sind in Abbildung 5.1 dargestellt. Für die Annahme kleiner Verzerrungen kann das Verschiebungsfeld mit der Rotation θ durch $u_\theta = \theta h/4$ an den 4 Eckknoten ausgedrückt werden. Die inkompatible Verschiebung wird mit dem inkompatiblen Freiheitsgrad α beschrieben. Die Verschiebungsinterpolation

$$u = \sum_I^4 N_I^{\text{co}} u_I = \zeta \eta u_\theta = \zeta \eta \theta \frac{h}{4} \quad (5.20)$$

$$v = (1 - \zeta^2) \alpha \quad (5.21)$$

ist somit ausschließlich von den 2 Freiheitsgraden θ und α abhängig. Für linear-elastisches Materialverhalten und die Annahme, dass keine Querkontraktion auftritt, können die Spannungen vereinfacht durch

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \varepsilon_{11} \\ E \varepsilon_{22} \\ 2G \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

beschrieben werden. Darin sind E und G der Elastizitäts- und Schubmodul. Mit der üblichen Vorschrift bei isoparametrischen Elementen zur Ableitung der Verzerrungsgrößen nach ζ und η , diese durch Ableitungen nach x und y auszudrücken, ergibt sich für die Komponenten des Verschiebungsgradienten

$$u_{,x} = -\frac{\eta h}{2a} \theta \quad u_{,y} = \frac{\zeta}{2} \theta \quad (5.23)$$

$$v_{,x} = -\frac{4\zeta}{a} \alpha \theta \quad v_{,y} = 0. \quad (5.24)$$

Damit sind die linearen Verzerrungen $\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{i,j} + u_{j,i})$ einfach bestimmbar. Werden die Spannungen und Verzerrungen zusammen mit der Verschiebungsinterpolation nun in die schwache Form eingesetzt und alle Bedingungen in Abschnitt 5.2.3 berücksichtigt, ergibt sich³

$$\delta P = \int_v (\text{sym}(\nabla \delta \mathbf{u}) : \boldsymbol{\sigma} + \delta \mathbf{u} : \rho \ddot{\mathbf{u}}) dv - \delta P^{\text{ext}} \quad (5.25)$$

$$= [\delta \theta \quad \delta \alpha] \begin{bmatrix} k^{\theta\theta} & k^{\theta\alpha} \\ k^{\alpha\theta} & k^{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \end{bmatrix} + [\delta \theta \quad \delta \alpha] \begin{bmatrix} m^\theta & 0 \\ 0 & m^\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} - \delta \theta M = 0. \quad (5.26)$$

³ Die Bezeichnung erfolgt konsistent zur eingeführten Notation in Abschnitt 2.2.1 mit δP , da die Größen einer mitgehenden Lagrange-Formulierung verwendet werden.

Darin sind nach Ausführung des Integrals und Sortieren der Ausdrücke die Kraftgrößen direkt über die Steifigkeiten darstellbar. Letztere sind

$$\begin{aligned} k^{\theta\theta} &= \left(E + G \left(\frac{a}{h} \right)^2 \right) \frac{bh^3}{12} \frac{1}{a} \\ k^{\theta\alpha} &= k^{\alpha\theta} = -\frac{2}{3} G bh \\ k^{\alpha\alpha} &= \frac{16}{3} G \frac{bh}{a} . \end{aligned} \quad (5.27)$$

Die sogenannte Schubversteifung ist an der Steifigkeit $k^{\theta\theta}$ gut ablesbar. Darin ist der Einfluss des Schubs enthalten, der im Fall reiner Biegung nicht auftreten dürfte. Zusätzlich ist dieser Einfluss vom Quadrat des Verhältnisses der Seitenlängen abhängig, was das Element mit einem steigenden Verhältnis von a/h steifer werden lässt. Damit ist klar, dass ohne inkompatible Formen eine Schubversteifung auftreten würde.

Die externe Belastung ist durch das Biegemoment M gegeben. Für die Massen ergibt sich bei Beachtung einer Entkopplung

$$m^\theta = \frac{abh^3}{144} \rho \quad m^\alpha = \frac{8}{15} abh\rho . \quad (5.28)$$

Nun ist die explizite Fortschreibung in der Zeit beider Freiheitsgrade einfach möglich. Für den kompatiblen Freiheitsgrad gilt mit dem zentralen Differenzenverfahren

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_{n+1/2} &= \dot{\theta}_{n-1/2} + \Delta t \frac{M(t_n) - (k^{\theta\theta}\theta + k^{\theta\alpha}\alpha)}{m^\theta} \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \Delta t \dot{\theta}_{n+1/2} , \end{aligned} \quad (5.29)$$

und für den inkompatiblen Freiheitsgrad entsprechend

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_{n+1/2} &= \dot{\alpha}_{n-1/2} + \Delta t \frac{-(k^{\alpha\theta}\theta + k^{\alpha\alpha}\alpha)}{m^\alpha} \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n + \Delta t \dot{\alpha}_{n+1/2} . \end{aligned} \quad (5.30)$$

Die Zeitschrittgröße korreliert mit der Eigenfrequenz des Elements $\Delta t = 2\omega_{\max}$. Die Eigenfrequenz wird durch den inkompatiblen Freiheitsgrad signifikant beeinflusst. Die Quadrate der beiden Eigenfrequenzen sind in geschlossener Form gegeben durch

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{k^{\theta\theta}m^\alpha + k^{\alpha\alpha}m^\theta \mp \sqrt{4m^\alpha m^\theta (k^{\theta\alpha})^2 + (k^{\theta\theta}m^\alpha - m^\theta k^{\alpha\alpha})^2}}{2m^\theta m^\alpha} , \quad (5.31)$$

sodass der Einfluss der inkompatiblen Masse m^α hier direkt analytisch untersucht werden kann. Eindeutig erkennbar ist, dass die ursprüngliche Eigenfrequenz $\omega_{\theta\theta}^2 = k^{\theta\theta}/m^\theta$ deutlich verringert wird und auch eine zweite höhere Eigenfrequenz entsteht. Um nun den Einfluss einer Skalierung der Masse des inkompatiblen Freiheitsgrads, das heißt der inkompatiblen Form abzuschätzen, werden Grenzwerte betrachtet.

Für den Grenzwert der inkompatiblen Masse gegen Null ergibt sich

$$\lim_{m^\alpha \rightarrow 0} \omega_1^2 = \frac{k^{\theta\theta} - (k^{\theta\alpha})^2 (k^{\alpha\alpha})^{-1}}{m^\theta} = \frac{EI/a}{m^\theta} \quad (5.32)$$

$$\lim_{m^\alpha \rightarrow 0} \omega_2^2 = \infty .$$

Mit Berücksichtigung der Abkürzung für das Flächenträgheitsmoment $I = bh^3/12$ ist einfach zu sehen, dass einer der Grenzwerte die analytische Biegesteifigkeit im Fall reiner Biegung enthält, siehe Gross et al. [57]. Der andere Grenzwert wird dagegen unendlich groß. Das heißt für sehr kleine Werte der inkompatiblen Masse wird das Schublocking zwar vollständig eliminiert, aber die sehr große zweite Eigenfrequenz macht eine sehr kleine Zeitschrittgröße erforderlich. Im Prinzip entspricht der erste Wert der statischen Kondensation für den Fall, in dem keine inkompatible Masse vorhanden ist.

Für den Grenzwert gegen unendlich, also eine sehr große inkompatible Masse, folgt

$$\lim_{m^\alpha \rightarrow \infty} \omega_1 = 0$$

$$\lim_{m^\alpha \rightarrow \infty} \omega_2 = \frac{k^{\theta\theta}}{m^\theta} . \quad (5.33)$$

In diesem Fall wird eine der Frequenzen gleich Null und die andere entspricht dem Wert, der sich auch für eine Formulierung ohne einen inkompatiblen Freiheitsgrad ergibt. Das bedeutet der inkompatible Freiheitsgrad verliert für eine sehr große inkompatible Masse seine Wirksamkeit.

An diesem einfachen Beispiel lässt sich bereits feststellen:

1. Je größer die inkompatible Masse, desto kleiner ist die Wirksamkeit des zugehörigen Freiheitsgrades auf die Beseitigung der Versteifungen.
2. Die Zeitschrittgröße für eine stabile Zeitintegration wird durch kleine inkompatible Massen stark reduziert.

Die Schwierigkeit liegt demnach darin, einen sinnvollen Wert für die inkompatible Masse zu finden, sodass die üblicherweise verwendeten Abschätzungen zur Ermittlung der Zeitschrittgröße beibehalten werden können und die inkompatiblen Parameter eine bestmögliche Wirksamkeit bezüglich Versteifungsreduktion erreichen.

5.4 Berechnung inkompatibler Freiheitsgrade in einem expliziten Zeitintegrationsverfahren

5.4.1 Semidiskretes Gleichungssystem

Basierend auf der Diskretisierung in den Abschnitten 3.1.1 und 3.1.2 werden das Verschiebungsfeld

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d}^{\text{co}} + \mathbf{N}^{\text{im}}\mathbf{d}^{\text{im}} \quad (5.34)$$

und die Verzerrungen

$$\{\varepsilon^{\text{co}}\} = \mathbf{B}^{\text{co}} \mathbf{d}^{\text{co}}, \quad \{\varepsilon^{\text{im}}\} = \mathbf{B}^{\text{im}} \mathbf{d}^{\text{im}}, \quad \{\varepsilon^{\text{en}}\} = \mathbf{B}^{\text{en}} \mathbf{d}^{\text{en}}. \quad (5.35)$$

definiert. Einsetzen in die reduzierte schwache Form (5.19) ergibt zum Zeitpunkt n das zu lösende Gleichungssystem

$$\bigcup_{e=1}^{n_e} \left(\mathbf{f}^{\text{co}}(\mathbf{d}_n^{\text{co}}, \mathbf{d}_n^{\text{im}}, \mathbf{d}_n^{\text{en}}) + \mathbf{M}^{\text{co}|d} \ddot{\mathbf{d}}_n - \mathbf{f}_n^{\text{ext}} \right) = \mathbf{0} \quad (5.36a)$$

$$\mathbf{f}^{\text{im}}(\mathbf{d}_n^{\text{co}}, \mathbf{d}_n^{\text{im}}, \mathbf{d}_n^{\text{en}}) + \mathbf{M}^{\text{im}} \ddot{\mathbf{d}}_n^{\text{im}} = \mathbf{0} \quad \text{fr } e = 1, \dots, n_e \quad (5.36b)$$

$$\mathbf{f}^{\text{en}}(\mathbf{d}_n^{\text{co}}, \mathbf{d}_n^{\text{im}}, \mathbf{d}_n^{\text{en}}) = \mathbf{0} \quad \text{fr } e = 1, \dots, n_e. \quad (5.36c)$$

Die Massenmatrix \mathbf{M}^{co} wird durch die diagonalisierte Massenmatrix $\mathbf{M}^{\text{co}|d}$ ersetzt. Der Übersicht halber wird die Abhängigkeit von den kompatiblen Freiheitsgraden \mathbf{d}_n^{co} und den inkompatiblen Freiheitsgraden \mathbf{d}_n^{im} und \mathbf{d}_n^{en} im Folgenden nicht mehr ausgeschrieben sondern abgekürzt wie folgt dargestellt:

$$\mathbf{f}_n^{\text{co}} = \mathbf{f}^{\text{co}}(\mathbf{d}_n^{\text{co}}, \mathbf{d}_n^{\text{im}}, \mathbf{d}_n^{\text{en}}), \quad \mathbf{f}_n^{\text{im}} = \mathbf{f}^{\text{im}}(\mathbf{d}_n^{\text{co}}, \mathbf{d}_n^{\text{im}}, \mathbf{d}_n^{\text{en}}), \quad \mathbf{f}_n^{\text{en}} = \mathbf{f}^{\text{en}}(\mathbf{d}_n^{\text{co}}, \mathbf{d}_n^{\text{im}}, \mathbf{d}_n^{\text{en}}). \quad (5.37)$$

Das Gleichungssystem (5.36) besitzt dann auf Elementebene die kompakte Form

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_n^{\text{co}} \\ \mathbf{f}_n^{\text{im}} \\ \mathbf{f}_n^{\text{en}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{\text{co}|d} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{\text{im}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{d}}_n^{\text{co}} \\ \ddot{\mathbf{d}}_n^{\text{im}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_n^{\text{ext}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.38)$$

die deutlich macht, dass die Freiheitsgrade \mathbf{d}^{co} , \mathbf{d}^{im} und \mathbf{d}^{en} nicht durch Trägheitskräfte, sondern nur durch Steifigkeiten in Form der Kraftvektoren miteinander gekoppelt sind. Die inkompatiblen Freiheitsgrade \mathbf{d}^{im} besitzen eine Masse, die in der diagonalen Massenmatrix \mathbf{M}^{im} angeordnet werden. Daraus folgt, dass inkompatible Trägheitskräfte $\mathbf{M}^{\text{im}} \ddot{\mathbf{d}}^{\text{im}}$ existieren. Das ändert die Berechnung grundlegend gegenüber den inkompatiblen Parametern \mathbf{d}^{en} , die keine Masse besitzen. Die Gestalt der inkompatiblen Massenmatrix wird ausführlich in Abschnitt 5.5.2 diskutiert.

Das erste Ziel, eine inkompatible Masse einzuführen, ist erreicht. Die Lösung des neuen Gleichungssystem wird im folgenden Abschnitt behandelt.

Zur Interpretation der Freiheitsgrade

Beide eingeführten inkompatiblen Freiheitsgrade \mathbf{d}^{im} und \mathbf{d}^{en} sind als interne Elementgrößen zu betrachten, die das Elementverhalten durch Beeinflussung der Steifigkeit (Reduktion von Versteifungseffekten) verbessern sollen. Aufgrund dieses isolierten internen Charakters dieser Größen, werden diese nach Lösung des Gleichungssystems (5.36) in der betrachteten Struktur üblicherweise nicht sichtbar dargestellt, sondern lediglich die an den Elementknoten vorliegenden kompatiblen Freiheitsgrade \mathbf{d}^{co}

werden sichtbar dargestellt. Die inkompatiblen Verschiebungsfreiheitsgrade \mathbf{d}^{im} sind als Teil des erweiterten Verschiebungsfelds in Gleichung (5.4) noch als tatsächliche Verschiebungen interpretierbar, siehe Gleichung (5.34) für die diskretisierte Form davon. Für die in der Simo-Rifai-Methode erst auf Verzerrungsebene eingeführten Parameter α ist eine Interpretation als Verschiebung aber nicht direkt möglich. Erst mit einem Ansatz von Bischoff und Romero [28] können die Verzerrungsparameter α auch als inkompatible Verschiebungsfreiheitsgrade \mathbf{d}^{en} interpretiert werden, was in Abschnitt 5.6 noch detailliert betrachtet wird.

5.4.2 Berechnung kompatibler Freiheitsgrade mit dem zentralen Differenzenverfahren

Als explizites Zeitintegrationsverfahren wird das in Abschnitt 2.3.1 vorgestellte zentrale Differenzenverfahren gewählt. Die für einen Schritt vorwärts in der Zeit $n \rightarrow n + 1$ wichtigsten Operationen sind im Zyklus in Abbildung 5.2 dargestellt. Die Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade wird vollständig in die Elementverarbeitung eingebettet. Das ist aufgrund der Inkompatibilität der Größen möglich, und hat den Vorteil, dass für deren Implementierung keine Manipulation außerhalb der Elementverarbeitung nötig ist. Bei gleichzeitig vorhandenen inkompatiblen Freiheitsgraden \mathbf{d}^{im} und \mathbf{d}^{en} werden die implizit zu berechnenden Freiheitsgrade \mathbf{d}^{en} (en-FHGe) in den Algorithmus der explizit zu berechnenden Freiheitsgrade \mathbf{d}^{im} (im-FHGe) eingebettet, was in Abschnitt 5.4.3 erklärt wird.

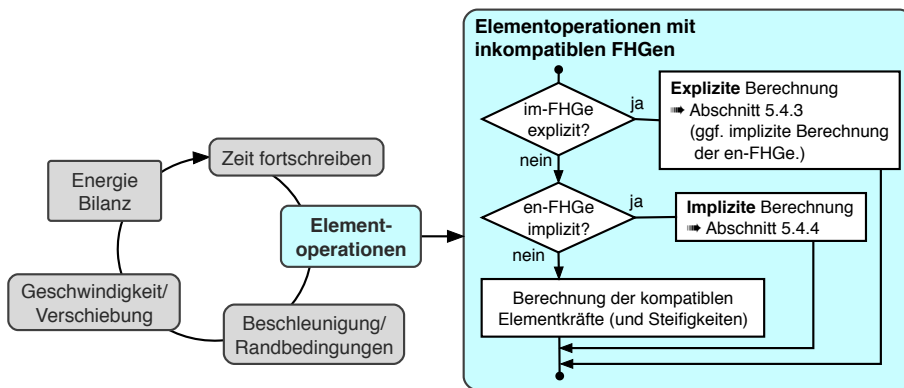


Abbildung 5.2: Typischer expliziter Zeitintegrations-Zyklus und Berechnungsablauf der explizit (im-FHGe) und implizit (en-FHGe) zu berechnenden inkompatiblen Freiheitsgrade auf Elementebene.

Die in die Elementverarbeitung eingebettete lokale explizite und implizite Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade \mathbf{d}^{im} und \mathbf{d}^{en} erfolgt durch die Berechnung der

Gleichungen (5.36b) und (5.36c). Diese ist isoliert von einer Assemblierung für das Gesamtsystem, die für Gleichung (5.36a) notwendig ist. Die Kraftvektoren

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}^{\text{co}} \\ \mathbf{f}^{\text{im}} \\ \mathbf{f}^{\text{en}} \end{bmatrix} = \int_{B_e} \begin{bmatrix} (\mathbf{B}^{\text{co}})^T \\ (\mathbf{B}^{\text{im}})^T \\ (\mathbf{B}^{\text{en}})^T \end{bmatrix} \{ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{co}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{im}} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{en}}) \} dV \quad (5.39)$$

unterscheiden sich nur durch die jeweilige B-Matrix. Eine entscheidende neue Größe ist die Massenmatrix

$$\mathbf{M}^{\text{im}} = \int_{B_e} \rho \mathbf{N}^{\text{im}T} \mathbf{N}^{\text{im}} dV, \quad (5.40)$$

die mit den inkompatiblen Ansatzfunktionen gebildet wird. Die Eigenschaften der inkompatiblen Massenmatrix werden in den Abschnitten 5.6.4, 5.6.5 und 5.6.7 ausführlicher besprochen. Die Massenmatrix $\mathbf{M}^{\text{co}d}$ und der externe Kraftvektor \mathbf{f}^{ext} bleiben unverändert wie in den Gleichungen (3.17) und (3.18) angegeben.

Sind alle Freiheitsgrade zum Zeitpunkt n bekannt, werden der Kraftvektor und die Massenmatrix aus Gleichung (5.36a) assembliert

$$\mathbf{f}_n^{\text{sys}} = \bigcup_{e=1}^{n_e} (\mathbf{f}_n^{\text{ext}} - \mathbf{f}_n^{\text{co}}) \quad \mathbf{M}^{\text{sys}} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathbf{M}^{\text{co}d} \quad (5.41)$$

und daraus die Beschleunigungen auf globaler Ebene berechnet

$$\mathbf{a}_n = (\mathbf{M}^{\text{sys}})^{-1} \mathbf{f}_n^{\text{sys}}. \quad (5.42)$$

Die Assemblierung der Massenmatrix erfolgt dabei üblicherweise nur einmal zu Beginn der Simulation. Damit werden ebenfalls auf globaler Ebene die Geschwindigkeiten nach $n + 1/2$ und die Verschiebungen nach $n + 1$ fortgeschrieben

$$\mathbf{v}_{n+1/2} = \mathbf{v}_{n-1/2} + \Delta t_n \mathbf{a}_n \quad (5.43)$$

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \Delta t_{n+1/2} \mathbf{v}_{n+1/2}, \quad (5.44)$$

wobei für den neuen Zeitpunkt $n + 1$ die Zeitschrittgröße $\Delta t_{n+1/2}$ und bei sich ändernden Größen des Zeitschritts Δt_n durch, siehe Abschnitt 2.3.1,

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t_{n+1/2} \quad \Delta t_n = \frac{1}{2} (\Delta t_{n-1/2} + \Delta t_{n+1/2}). \quad (5.45)$$

bestimmt werden. Danach wird der Zähler zurückgesetzt auf $n \leftarrow n + 1$. Die Zeitschrittgröße wird durch die maximale Frequenz des Systems beschränkt, die selbst durch die maximale Frequenz der Elemente nach oben beschränkt ist

$$\omega_{\text{max}}^{\text{sys}} \leq \max_{e=1, n_e} \omega_{\text{max}}^e. \quad (5.46)$$

Diese Berechnung wird für finite Elemente mit linearen Ansatzfunktionen üblicherweise durch das einfach zu berechnende Courant-Kriterium abgeschätzt⁴

$$\Delta t^e \leq \Delta t_{\text{crit}} = \frac{2}{\omega_{\text{max}}^e} = \frac{l_e}{c}. \quad (5.47)$$

Darin sind l_e eine charakteristischen Elementlänge und c_e die Geschwindigkeit, mit der sich eine Primärwelle in einem elastischen Medium ausbreitet. Um Nichtlinearitäten zu berücksichtigen, wird der Wert Δt_{crit} in Gleichung (5.47) mit einem Faktor $s^{\Delta t} < 1$ abgemindert. Infolge Dämpfung und der für Anwendungsanalysen vorgeschlagenen Behandlung von Schockwellen muss dieser Wert noch angepasst werden, worauf an dieser Stelle nicht eingegangen wird. Siehe hierzu Abschnitt 2.3.2 und 2.3.3 oder zum Beispiel Belytschko et al. [15].

Da die Zeitschrittgröße üblicherweise sehr klein ist und eine diagonale Massenmatrix verwendet wird, ist der Engpass für die Simulationszeit die in Abbildung 5.2 hervorgehobene Elementverarbeitung, in die die Berechnung für die inkompatiblen Größen daher sinnvoll eingebettet werden muss.

5.4.3 Explizite Berechnung inkompatibler Freiheitsgrade und Anpassung an die Standardzeitschrittgröße

Explizite Berechnung

Aufgrund der vorhandenen Massenmatrix \mathbf{M}^{im} kann Gleichung (5.36b) für die inkompatiblen Verschiebungen \mathbf{d}^{im} analog zum Vorgehen in den Gleichungen (5.42) bis (5.44) mit den inkompatiblen Beschleunigungen

$$\ddot{\mathbf{d}}_n^{\text{im}} = \mathbf{M}^{\text{im}-1} \mathbf{f}_n^{\text{im}} \quad (5.48)$$

in der Zeit fortgeschrieben werden

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+1/2}^{\text{im}} = \dot{\mathbf{d}}_{n-1/2}^{\text{im}} + \Delta t_n \ddot{\mathbf{d}}_n^{\text{im}} \quad (5.49)$$

$$\mathbf{d}_{n+1}^{\text{im}} = \mathbf{d}_n^{\text{im}} + \Delta t_{n+1/2} \dot{\mathbf{d}}_{n+1/2}^{\text{im}}. \quad (5.50)$$

Die inkompatible Massenmatrix \mathbf{M}^{im} ist in vielen Fällen diagonal und wird andernfalls diagonalisiert, siehe Abschnitte 5.6.5 und 5.6.7. Damit sind die inkompatiblen Freiheitsgrade \mathbf{d}^{im} explizit einfach ermittelbar. Der generelle Ablauf einer Berechnung wird in Abbildung 5.3 dargestellt. Die Kombination mit implizit zu berechnenden inkompatiblen Freiheitsgraden wird ebenfalls in Abbildung 5.3 gezeigt und in Abschnitt 5.4.4 ausführlicher beschrieben.

⁴ Genauere aber meist deutlich aufwendigere Verfahren existieren, siehe Lin [104, 105], Erhart [49] oder Flanagan und Belytschko [52]. Mit der als *Power iteration* bezeichneten Methode von Benson [19] lässt sich die Zeitschrittgröße auch direkt für das Gesamtsystem (anstatt für ein Element) abschätzen.

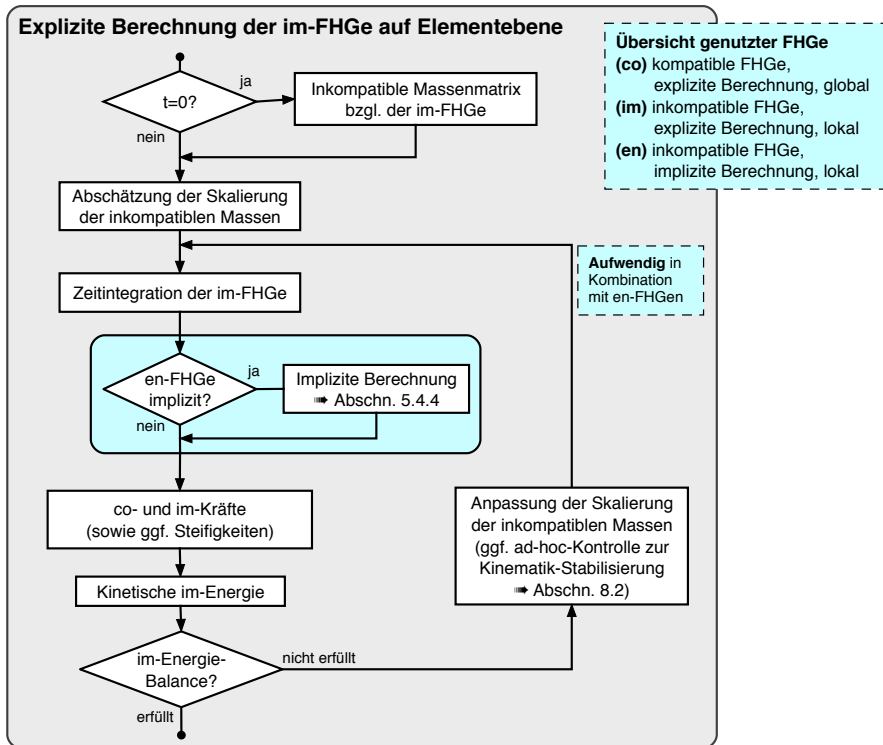


Abbildung 5.3: Programmfluss der expliziten Berechnung inkompatibler im-Freiheitsgrade auf Elementebene; ggf. mit en-FHGen.

Anpassung an Standardzeitschrittgröße

Die Ansatzfunktionen N^{im} sind mindestens von quadratischer Ordnung, um ein Standard 8-Knoten-Hexaederelement verbessern zu können. Damit sind diese Elemente, wie im einfachen Beispiel in Abschnitt 5.3 gezeigt, auch mit höheren Frequenzen verbunden, und es ist möglich, dass die kritische Zeitschrittgröße für die kompatiblen Freiheitsgrade in Gleichung (5.47) für einzelne inkompatible Freiheitsgrade unterschritten wird, was wiederum zu einer instabilen Zeitintegration führen könnte. Um trotz der hohen Frequenz infolge der inkompatiblen Erweiterungen eine stabile Zeitintegration zu gewährleisten, ist daher eine Abminderung der Zeitschrittgröße nötig, was zu einer Erhöhung des Aufwands für die Simulation führt, da global mehr Zyklen durchlaufen werden müssen. Um diesen unerwünschten Effekt zu vermeiden, sind die zwei folgenden Möglichkeiten denkbar.

1. Selektive Skalierung der inkompatiblen Massen: Die Massen der einzelnen inkompatiblen Freiheitsgrade werden skaliert, bis die höheren Frequenzen dem benötigten Wert aus Gleichung (5.47) angepasst sind.

2. Mehrschritt-Berechnung (*Subcycling*): Es erfolgt eine ebenfalls innerhalb der Verarbeitung der Elementoperationen stattfindende Mehrschritt-Berechnung der inkompatiblen Parameter mit expliziter Zeitintegration.

Beide Möglichkeiten erlauben die Beibehaltung der ursprünglichen, mit dem Courant-Kriterium ermittelten Zeitschrittgröße.

Eine selektive Skalierung der inkompatiblen Massen ist aus numerischer Sicht einfacher zu implementieren und benötigt weniger Operationen als eine Mehrschritt-Berechnung, wenn die Abschätzung der benötigten Skalierung einfach zu berechnen ist. Eine Umsetzung in bereits existierende Programme ist auch deutlich einfacher als eine Mehrschritt-Berechnung. Möglich ist auch eine homogene Skalierung, bei der alle inkompatiblen Massen in einem Element mit dem gleichen Faktor skaliert werden. Hierfür sind allerdings weniger genaue Ergebnisse zu erwarten, da die Effektivität von inkompatiblen Moden mit niedriger Frequenz (üblicherweise für Schubterme) dadurch zu stark beeinflusst wird. Die Schwierigkeit liegt nun darin, bei minimalem Aufwand optimale Werte für die Skalierung zu finden.

Die Mehrschritt-Berechnung ist weniger effizient, da eine wiederholte Berechnung der inkompatiblen Kraftvektoren und damit auch der Spannungen und der gesamten Konstitutivbeziehungen, nötig wird. Diese Berechnung wird daher deutlich aufwendiger und auch schwieriger zu implementieren. Eine Mehrschritt-Berechnung wird eventuell benötigt, wenn eine zu hohe Skalierung erforderlich wird, sodass die Genauigkeit zu stark eingeschränkt wäre. Dann ist allerdings zu überlegen, ob nicht eine Absenkung des globalen Zeitschritts oder eine statische Kondensation, also implizite Berechnung, der inkompatiblen Freiheitsgrade vor dem Hintergrund einer Kosten-Nutzen-Relation sinnvoller wäre.

Theoretisch können beide Möglichkeiten auch kombiniert werden, was die Komplexität einer Implementierung wiederum zusätzlich erhöht. In der vorliegenden Arbeit wird daher nur die Skalierung der inkompatiblen Massen verfolgt, die in den allgemeinen Programmfluss in Abbildung 5.3 eingebettet ist.

Eine detaillierte Diskussion einer wirksamen Skalierung folgt in den Abschnitten 7.1.2 und 7.1.4. Die ausführliche Beschreibung der genauen sowie einer vereinfachten, sehr effizienten Berechnung erfolgt in den Abschnitten 7.2 und 7.3. Verschiedene Strategien zur Kombination der vollständig expliziten Berechnung mit der impliziten Berechnung inkompatibler Freiheitsgrade werden in Abschnitt 7.4 präsentiert.

Kontrolle inkompatibler kinetischer Energie

In Abbildung 5.3 ist die Kontrolle einer Energiebilanz für die inkompatiblen Freiheitsgrade (im-Energie-Balance) aufgeführt. Durch den Algorithmus (5.49)–(5.50) sind inkompatible Geschwindigkeiten bekannt. Zusammen mit der inkompatiblen Massenmatrix ist dann in jedem Element je inkompatiblen Freiheitsgrad eine inkompatible kinetische Energie berechenbar. Die inkompatible kinetische Energie ist nur größer Null, wenn die inkompatiblen Freiheitsgrade aktiv sind. Um eine Kontrolle zu ermög-

lichen, ist eine sinnvolle Größenordnung für diese Energie abzuschätzen. Das ist durch Beachtung der folgenden Wirkungsweise möglich: Inkompatible Freiheitsgrade sollen Versteifungseffekte in Strukturen reduzieren. Eine Struktur, in der Locking vermieden werden soll, muss also zunächst eine innere Verzerrungsenergie aufweisen, die ohne inkompatible Freiheitsgrade zu groß wäre. Eine Reduktion der inneren Energie durch Einführung von inkompatiblen Freiheitsgraden ist also erwünscht. Die inkompatiblen Freiheitsgrade werden zunächst die Verschiebungen, danach die Verzerrungen und schließlich die resultierenden Spannungen und somit die Verzerrungsenergie beeinflussen. Das bedeutet, dass die innere Verzerrungsenergie nur dann inkompatible Anteile enthält, wenn diese zur Vermeidung von Locking aktiviert wurden. Daher darf die Evolution der inkompatiblen kinetischen Energie sich nur relativ zur inneren Verzerrungsenergie entwickeln. Das heißt der Zeitpunkt der Entstehung und die Geschwindigkeit des Wachstums der inkompatiblen kinetischen Energie ist an die Entstehung und das Wachstum der inneren Verzerrungsenergie gekoppelt.

Sollte nun zum Beispiel durch inkompatible Freiheitsgrade die Standardzeitschrittgröße überschritten werden und die inkompatible Massenskalierung nicht ausreichend hoch sein, wird ein unkontrolliertes Anwachsen der inkompatiblen kinetischen Energie erwartet. Damit kann beispielsweise der Vergleich von Energieraten innerer und inkompatibler kinetischer Energie als Kriterium genutzt werden. Interessanterweise ist diese Energiekontrolle somit auch für die Überwachung und Kontrolle eventuell auftretender Kinematiken in Form einer Sanduhr, also *Hourglassing*, möglich, was genauer in Abschnitt 8.2 untersucht wird. Die Schwierigkeit bei diesem Ansatz liegt dann darin, ein sinnvolles Maß für den Vergleich der Energieraten zu finden, da die Evolution der inneren Verzerrungsenergie durch mehrere Einflüsse gesteuert wird, und somit nicht in einer direkten Relation zur inkompatiblen kinetischen Energie steht.

5.4.4 Implizite Berechnung (statische Kondensation) inkompatibler Freiheitsgrade

Zur Ermittlung der Parameter \mathbf{d}_n^{en} muss die Berechnung von Gleichung (5.36c) durchgeführt werden, was in jedem Zyklus die Lösung eines unter Umständen nichtlinearen Gleichungssystems erfordert. Da die Größen \mathbf{d}_n^{co} und \mathbf{d}_n^{im} zum Zeitpunkt n bekannt sind, sind die einzigen Unbekannten in diesem Gleichungssystem die Größen \mathbf{d}_n^{en} . Deren Berechnung hat nach wie vor den Charakter der klassischen Kondensation aus impliziten Verfahren. Üblicherweise ist Gleichung (5.36c) für nichtlineare Konstitutivgesetze nichtlinear für \mathbf{d}^{en} und erfordert eine Linearisierung für eine implizite Berechnung. Die entsprechend benötigten Steifigkeitsmatrizen werden in den Abschnitten 6.1.7, 6.4.5 und B.4 beschrieben. Die Berechnung von \mathbf{d}^{en} wird auf Elementebene effizient umgesetzt; die erforderlichen Schritte fasst der Programmfluss in Abbildung 5.4 zusammen. Hierbei werden die Berechnung der kompatiblen Kraft sowie der inkompatiblen Kraft und Steifigkeit in einer Aktion erledigt. Damit wird vermieden,

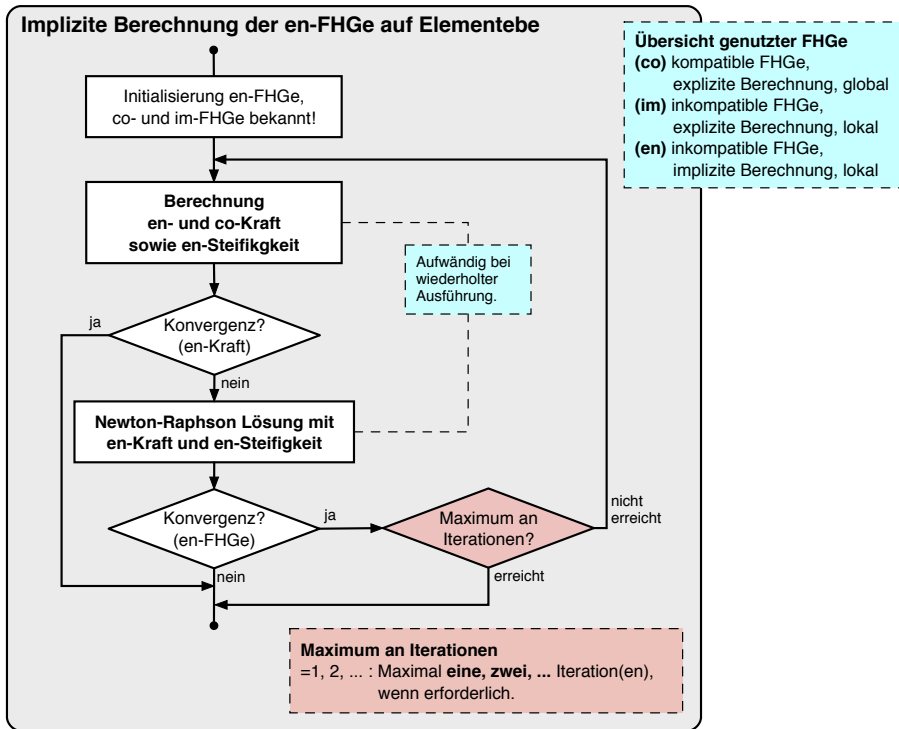


Abbildung 5.4: Programmfluss der impliziten Berechnung inkompatibler en-Freiheitsgrade auf Elementebene mit Begrenzung der maximalen Anzahl an Iterationen. Hinweis: Explizit berechnete inkompatible Freiheitsgrade (im-FHGe) sind aus dem vorherigen Zeitschritt bekannt.

dass für einen Iterationsschritt die gleiche numerische Integration und Auswertung der Konstitutivgleichungen mehrfach ausgeführt werden muss.

Zudem wird eine Iterationsschranke eingeführt, mit der gesteuert wird, wie oft die für einen Iterationsschritt notwendigen Operationen maximal durchlaufen werden. Wird das Maximum an Iterationen auf 1 begrenzt, wird die Berechnung der Kraft- und Steifigkeitsgrößen nur ein einziges Mal ausgeführt und das Gleichungssystem ebenfalls, falls erforderlich, nur ein einziges Mal gelöst. Diese Variante ist zwar die Effizienteste, birgt aber das Risiko ungenauer oder nicht robuster Ergebnisse. Sie ist für den Fall gedacht, dass nur unwesentliche Änderungen in \mathbf{d}^{en} zwischen zwei Zeitschritten erwartet werden, was für die in der Regel sehr kleinen Zeitschrittgrößen meist sinnvoll ist. Hochdynamische Vorgänge mit nicht unerheblichen Unterschieden in den Verschiebungen zwischen zwei Zeitschritten erfordern allerdings mehr als eine Iteration. Generell ist aber die statische Kondensation innerhalb eines expliziten Verfahrens nur für eine geringe Anzahl an inkompatiblen Freiheitsgraden auf Element-

ebene empfehlenswert, da die Rechenzeit stark an die Größe der jeweils zu lösenden Gleichungssysteme gekoppelt ist.

5.5 Inkompatible Ansatzfunktionen und Massenmatrizen

5.5.1 Generierung inkompatibler Ansatzfunktionen

Inkompatible Ansatzfunktionen können allgemein mit Anteilen von Ansätzen aus Elementen höherer Ordnung gewonnen werden, siehe hierzu auch Zienkiewicz und Taylor [194] und Hassani und Tavakkoli [63]. Als Beispiel wird hier im 2D-Fall gezeigt, wie die klassischen Wilson-Funktionen aus quadratischen Ansatzfunktionen des 8-knotigen Serendipity-Elements gewonnen werden können. Das Verschiebungsfeld enthält wie in Gleichung (5.4) eine kompatible und eine inkompatible Verschiebungsapproximation

$$u = \sum_{I=1}^4 N_I^{\text{co}} u_I^{\text{co}} + \sum_{I=1}^4 N_I^* u_I^{\text{im}} \quad v = \sum_{I=1}^4 N_I^{\text{co}} v_I^{\text{co}} + \sum_{I=1}^4 N_I^* v_I^{\text{im}}. \quad (5.51)$$

Darin sind N_I^{co} die linearen Ansatzfunktionen eines 4-knotigen Scheibenelements, die die kompatible Basis bilden und auch zur isoparametrischen Interpolation der Geometrie des Elements verwendet werden. Die inkompatiblen Verschiebungen werden mit den Ansatzfunktionen N_I^* der Seitenmittenknoten eines 8-knotigen Serendipity-Scheibenelements interpoliert. Alle verwendeten Ansatzfunktionen sind in Abbildung 5.5 dargestellt.

In Bedingung (5.15) wird der inkompatible Anteil aus Gleichung (5.51) eingesetzt

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} \delta \mathbf{u}^{\text{im}} \cdot \mathbf{n} da &= \int_{\partial B} \sum_J N_J^{\text{im}} \begin{pmatrix} \delta u_{1J}^{\text{im}} \\ \delta u_{2J}^{\text{im}} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{n} da = 0 \\ &\Leftrightarrow \int_{\partial B} N_J^{\text{im}} \mathbf{n} da = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

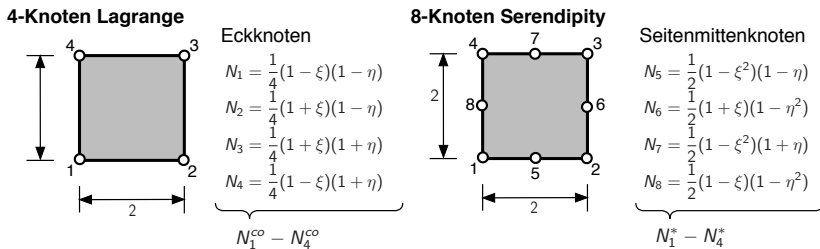


Abbildung 5.5: Ansatzfunktionen des linearen 4-Knoten und des quadratischen 8-Knoten Serendipity Elements. Hinweis: Die Ansatzfunktionen der Eckknoten des Serendipity Elements sind ebenfalls quadratisch, werden hier aber nicht verwendet und daher nicht gezeigt.

An der Ober- und Unterseite des Elements ($\eta = \pm 1$) gilt für dessen Rand \mathbf{nda}

$$\begin{pmatrix} x_{,\xi} \\ y_{,\xi} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\xi = \begin{pmatrix} y_{,\xi} \\ -x_{,\xi} \\ 0 \end{pmatrix} d\xi \quad \text{für } \eta = -1, +1. \quad (5.53)$$

Entsprechend erhält man die linke und die rechte Elementseite, indem ξ und η in Gleichung (5.53) vertauscht werden. Wird alles in Gleichung (5.52) eingesetzt, ergeben sich je nichtkonformer Ansatzfunktion N_j^* insgesamt 4 Gleichungen

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} N_j^* y_{,\xi} d\xi &= 0 \quad \text{für } \eta = -1, +1 \\ \int_{-1}^{+1} -N_j^* x_{,\xi} d\xi &= 0 \quad \text{für } \eta = -1, +1 \\ \int_{-1}^{+1} N_j^* y_{,\eta} d\eta &= 0 \quad \text{für } \xi = -1, +1 \\ \int_{-1}^{+1} -N_j^* x_{,\eta} d\eta &= 0 \quad \text{für } \xi = -1, +1, \end{aligned} \quad (5.54)$$

aus denen durch Betrachtung von ξ und η an den Stellen -1 und $+1$ insgesamt 8 Bedingungen je betrachteter Ansatzfunktion N_I^* abgeleitet werden. Die Bedingungen sind für alle Ansatzfunktionen N_I^* erfüllt, ausgenommen die Fälle, die in Tabelle 5.1 zusammengestellt sind.

Damit der jeweilige Ausdruck an der betrachteten Elementseite ($\xi = \pm 1, \eta = \pm 1$) und der Ansatzfunktion $I = 1, 2, 3$ oder 4 erfüllt ist, muss eine Zusatzbedingung eingehalten werden. Werden diese Zusatzbedingungen mit den jeweiligen inkompatiblen Freiheitsgraden zusammengefasst, muss gelten

$$\begin{aligned} (y_2 - y_1)u_{x1}^{im} + (y_3 - y_2)u_{x2}^{im} + (y_4 - y_3)u_{x3}^{im} + (y_1 - y_4)u_{x4}^{im} &= 0 \\ (x_1 - x_2)u_{x1}^{im} + (x_2 - x_3)u_{x2}^{im} + (x_3 - x_4)u_{x3}^{im} + (x_4 - x_1)u_{x4}^{im} &= 0. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Tabelle 5.1: Zusammenstellung der Zusatzbedingungen um die Bedingung zur Abbildung konstanter Spannungszustände zu erfüllen.

Bedingung	Unten/ Oben	Funktion ^a	Zusatz- bedingung	Bedingung	Links/ Rechts	Funktion ^a	Zusatz- bedingung
$\int_{-1}^{+1} N_I^* y_{,\xi} d\xi = 0$	$\eta = -1$	$I = 1$	$y_2 - y_4 = 0$	$\int_{-1}^{+1} N_I^* y_{,\eta} d\eta = 0$	$\xi = -1$	$I = 4$	$y_1 - y_4 = 0$
	$\eta = +1$	$I = 3$	$y_4 - y_3 = 0$		$\xi = +1$	$I = 2$	$y_3 - y_2 = 0$
$\int_{-1}^{+1} N_I^* (-x_{,\xi}) d\xi = 0$	$\eta = -1$	$I = 1$	$x_1 - x_2 = 0$	$\int_{-1}^{+1} N_I^* (-x_{,\eta}) d\eta = 0$	$\xi = -1$	$I = 4$	$x_4 - x_1 = 0$
	$\eta = +1$	$I = 3$	$x_3 - x_4 = 0$		$\xi = +1$	$I = 2$	$x_2 - x_3 = 0$

^a Für die nicht aufgeführten Funktionen sind die Bedingungen immer erfüllt.

Die beiden Ausdrücke in Gleichung (5.55) können so umgeformt werden, dass sich 2 der insgesamt 4 inkompatiblen Verschiebungen durch die jeweils verbleibenden Verschiebungen ausdrücken lassen

$$u_2^{\text{im}} = -\frac{1}{c_1} \left(u_3^{\text{im}} c_2 + u_4^{\text{im}} c_3 \right) \quad u_1^{\text{im}} = -\frac{1}{x_1 - x_2} \left(u_3^{\text{im}} c_4 + u_4^{\text{im}} c_5 \right), \quad (5.56)$$

wobei folgende Abkürzungen eingeführt wurden

$$\begin{aligned} c_1 &= y_{32} - y_{21} \frac{x_{23}}{x_{12}} & c_2 &= y_{43} - y_{21} \frac{x_{34}}{x_{12}} & c_3 &= y_{14} - y_{21} \frac{x_{41}}{x_{12}} \\ c_4 &= x_{34} - x_{23} \frac{c_2}{c_1} & c_5 &= x_{41} - x_{23} \frac{c_3}{c_1}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Für die Abkürzungen gilt die Notation $x_{ij} = x_i - x_j$ und $y_{ij} = y_i - y_j$. Damit ist das inkompatible Verschiebungsfeld in horizontaler Richtung definiert

$$\begin{aligned} u^{\text{im}} &= \sum_{I=1}^4 N_I^* u_I^{\text{im}} \\ &= \underbrace{\left(N_3^* - N_1^* \frac{c_4}{x_1 - x_2} - N_2^* \frac{c_2}{c_1} \right)}_{N_1^{\text{im}}} u_3^{\text{im}} + \underbrace{\left(N_4^* - N_1^* \frac{c_5}{x_1 - x_2} - N_2^* \frac{c_3}{c_1} \right)}_{N_2^{\text{im}}} u_4^{\text{im}}, \end{aligned} \quad (5.58)$$

in dem die die inkompatiblen Ansatzfunktionen N_1^{im} und N_2^{im} erscheinen. Da die ermittelten Bedingungen in Gleichung (5.54) unabhängig davon sind, ob die horizontale oder vertikale inkompatible Verschiebung betrachtet wird, ergibt sich für die vertikale Richtung die analoge Interpolation

$$v^{\text{im}} = \sum_{I=1}^4 N_I^* v_I^{\text{im}} = N_1^{\text{im}} v_3^{\text{im}} + N_2^{\text{im}} v_4^{\text{im}}. \quad (5.59)$$

Die Anzahl der inkompatiblen Freiheitsgrade reduziert sich somit von 8 auf 4. Werden die Koordinaten des Einheitselements aus Abbildung 5.5 eingesetzt, ergibt sich die klassische Wilsonsche Interpolation

$$\begin{aligned} u^{\text{im}} &= (1 - \zeta^2) u_1^{\text{im}} + (1 - \eta^2) u_2^{\text{im}} \\ v^{\text{im}} &= (1 - \zeta^2) v_1^{\text{im}} + (1 - \eta^2) v_2^{\text{im}}, \end{aligned} \quad (5.60)$$

wobei für die inkompatiblen Freiheitsgrade gilt

$$u_1^{\text{im}} = u_3^{\text{im}}, \quad u_2^{\text{im}} = u_4^{\text{im}}, \quad v_1^{\text{im}} = v_3^{\text{im}}, \quad v_2^{\text{im}} = v_4^{\text{im}}. \quad (5.61)$$

Sich gegenüberliegende Seitenmittenknoten verschieben sich also für ein unverzerrtes Element identisch.

Es ist möglich, inkompatible Ansatzfunktionen mit noch höherer Ordnung herzuleiten. Dieser Schritt wird bei Hassani und Tavakkoli [63] beschrieben, führt aber zu

keiner signifikanten Verbesserung der Elemente. Im Rahmen dieser Arbeit werden daher vorwiegend die klassischen Wilson-Funktionen eingesetzt, da diese sehr effizient und wirksam sind und mit nur geringfügigen Modifikationen auch konstante Spannungszustände abbilden, was später gezeigt wird. Für den dreidimensionalen Fall ergeben sich analog zu den obigen Betrachtungen die klassischen Wilson-Funktionen

$$N_1^{\text{im}} = 1 - \zeta^2 \quad N_2^{\text{im}} = 1 - \eta^2 \quad N_3^{\text{im}} = 1 - \zeta^2, \quad (5.62)$$

die in dieser Arbeit verwendet werden.

5.5.2 Inkompatible Massenmatrix

Aufbau der inkompatiblen Massenmatrix

Die inkompatiblen Trägheitsterme tauchen als entscheidende Erweiterung in der variationellen Basis (5.19) auf. Die damit verbundene inkompatible Massenmatrix erscheint schließlich im diskretisierten Gleichungssystem (5.36) und kann mit der Diskretisierung der Verschiebungen aus Gleichung (5.34) aufgebaut werden. Die Massenmatrix wird für den dreidimensionalen Fall gezeigt, da dieser in den später entwickelten Elementformulierungen verwendet wird. Die Interpolation des inkompatiblen Anteils der Verschiebungsdiskretisierung aus Gleichung (5.34) erfolgt in Matrixnotation durch $\mathbf{u}^{\text{im}} = \mathbf{N}^{\text{im}} \mathbf{d}^{\text{im}}$. Die Wilson-Funktionen werden dabei in einer Matrix angeordnet

$$\mathbf{N}^{\text{im}} = \begin{pmatrix} N_1^{\text{im}} & 0 & 0 & N_2^{\text{im}} & 0 & 0 & N_3^{\text{im}} & 0 & 0 \\ 0 & N_1^{\text{im}} & 0 & 0 & N_2^{\text{im}} & 0 & 0 & N_3^{\text{im}} & 0 \\ 0 & 0 & N_1^{\text{im}} & 0 & 0 & N_2^{\text{im}} & 0 & 0 & N_3^{\text{im}} \end{pmatrix} \quad (5.63)$$

und die inkompatiblen Verschiebungsfreiheitsgrade – sowie auch die virtuellen inkompatiblen Verschiebungen – in einem Vektor

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{\text{im}} &= (u_1^{\text{im}} \quad v_1^{\text{im}} \quad w_1^{\text{im}} \quad u_2^{\text{im}} \quad v_2^{\text{im}} \quad w_2^{\text{im}} \quad u_3^{\text{im}} \quad v_3^{\text{im}} \quad w_3^{\text{im}})^T \\ \delta \mathbf{d}^{\text{im}} &= (\delta u_1^{\text{im}} \quad \delta v_1^{\text{im}} \quad \delta w_1^{\text{im}} \quad \delta u_2^{\text{im}} \quad \delta v_2^{\text{im}} \quad \delta w_2^{\text{im}} \quad \delta u_3^{\text{im}} \quad \delta v_3^{\text{im}} \quad \delta w_3^{\text{im}})^T. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Zusammen mit den inkompatiblen Verschiebungen sind die Zeitableitungen $\dot{\mathbf{d}}^{\text{im}}$ und $\ddot{\mathbf{d}}^{\text{im}}$, d. h. die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sowie die virtuellen inkompatiblen Verschiebungen einfach zu diskretisieren. Damit kann die inkompatible Massenmatrix direkt aus der virtuellen Arbeit inkompatibler Trägheitskräfte in Gleichung (5.19), dargestellt in Matrixnotation, abgeleitet werden

$$\int_v \rho (\delta \mathbf{u}^{\text{im}})^T \mathbf{u}^{\text{im}} dv = (\delta \mathbf{d}^{\text{im}})^T \int_v \rho (\mathbf{N}^{\text{im}})^T \mathbf{N}^{\text{im}} dv \mathbf{d}^{\text{im}} = (\delta \mathbf{d}^{\text{im}})^T \mathbf{M}^{\text{im}} \mathbf{d}^{\text{im}}. \quad (5.65)$$

In einer Standard Lagrange-Elementformulierung wird üblicherweise ein Basiselement der Kantenlänge 2 mit den Koordinaten ξ, η und ζ im Intervall ξ, η und ζ aus $\{-1, +1\}$ auszuführen ist.. Die Determinante der Jakobimatrix $j = \det \mathbf{j}$ wird für die Abbildung

des Elementvolumens auf das Basiselement genutzt. Mit der abkürzenden Schreibweise $dv = j d\xi d\eta d\zeta = j d\Omega$ gilt für die inkompatible Massenmatrix

$$\mathbf{M}^{\text{im}} = \int_{\Omega} \rho (\mathbf{N}^{\text{im}})^T \mathbf{N}^{\text{im}} j d\Omega. \quad (5.66)$$

Um die Berechnung zu vereinfachen und direkt die Komponenten der Massenmatrix angeben zu können, wird die Volumentransformation mit der Determinanten der Jakobimatrix j durch einen Faktor $v/8$ ersetzt⁵, wobei das Volumen mit $v = \int_{\Omega} j d\Omega$ berechnet wird. Dieser Faktor wird in Abschnitt 6.1.3 nochmals aufgegriffen und erläutert. Damit reduziert sich die Berechnung auf

$$\mathbf{M}^{\text{im}} \approx \rho \frac{v}{8} \int_{\Omega} (\mathbf{N}^{\text{im}})^T \mathbf{N}^{\text{im}} d\Omega, \quad (5.67)$$

was für Parallelepipede aufgrund einer konstanten Determinante der Jakobimatrix, zu einer identischen Massenmatrix wie in Gleichung (5.66) führt. Es ergibt sich für die Wilson-Funktionen aus Gleichung (5.62)

$$\mathbf{M}^{\text{im, Wil}} = \frac{8}{15} v \rho \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 & 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{6} & 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 & 0 & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.68)$$

Die Massenmatrix ist klar nicht ausschließlich diagonal besetzt, wie es für die explizite Berechnung wünschenswert ist, um den numerischen Aufwand so gering wie möglich zu halten. Mit den Wilson-Funktionen ist also eine diagonale inkompatible Massenmatrix nicht erreichbar, da diese nicht orthogonal zueinander sind.

Diagonale inkompatible Massenmatrix

Um mit den Wilson-Funktionen eine diagonale inkompatible Massenmatrix zu erhalten können die Summen aller Einträge jeweils einer Zeile auf der Diagonalen der Massenmatrix platziert werden, was als *Row-sum Lumping* bezeichnet wird, siehe Hughes [70].

⁵ Mit dieser Vereinfachung wird die Konsistenz der beherrschenden Gleichungen prinzipiell verletzt. Dieser Schritt wirkt sich jedoch nicht auf numerische Ergebnisse aus, da die inkompatiblen Massen meist noch skaliert werden, um die Standardzeitschrittgröße beibehalten zu können. Das heißt mit einer konsistenten Massenberechnung müsste nur der Skalierungsfaktor geändert werden.

Die Diagonaleinträge der so diagonalisierten inkompatiblen Massenmatrix werden im folgenden Vektor angeordnet

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{row-sum}^{im,Wil} &= \frac{8}{3} \cdot \frac{8}{15} v\rho (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) \\ &= \frac{8}{3} \cdot \text{diag} \left(\mathbf{M}^{im,Wil} \right) , \end{aligned} \quad (5.69)$$

wobei für jede Zeile die gleiche Summe $1 + 5/6 + 5/6 = 8/3$ resultiert, da sämtliche Nebendiagonaleinträge in Gleichung (5.68) die gleiche Größe haben. Der konstante Faktor $8/3$ kann damit als Skalierung einer diagonalen Massenmatrix aufgefasst werden, die einfach aus Einträgen auf der Diagonalen von $\mathbf{M}^{im,Wil}$ besteht, die im folgenden Vektor platziert sind

$$\mathbf{m}^{im,Wil} = \frac{8}{15} v\rho (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) . \quad (5.70)$$

Es liegt nahe, diese aus der effizienteren Variante resultierenden Massen zu verwenden, da die inkompatiblen Massen ohnehin skaliert werden sollen, um eine Anpassung an die Zeitschrittgröße der kompatiblen Freiheitsgrade zu erreichen (siehe Abschnitt 5.4.3).

Zum Vergleich: Es ist einfach einen Ersatz für die Wilson-Funktionen zu finden, mit dem die inkompatible Massenmatrix vollständig diagonal wird. Hierzu werden die Wilson-Funktionen aus Gleichung (5.62) durch die folgenden Legendre-Polynome zweiter Ordnung ersetzt

$$N_1^{im,Leg} = \frac{1}{2}(3\zeta^2 - 1) \quad N_2^{im,Leg} = \frac{1}{2}(3\eta^2 - 1) \quad N_3^{im,Leg} = \frac{1}{2}(3\zeta^2 - 1) , \quad (5.71)$$

was eingesetzt in Gleichung (5.67) auf eine vollständig diagonale inkompatible Massenmatrix führt, die dargestellt mit den Einträgen des Vektors $\mathbf{m}^{im,Wil}$ aus Gleichung (5.70), zu folgenden Einträgen führt

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^{im,Leg} &= \frac{3}{8} \cdot \frac{8}{15} v\rho (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1) \\ &= \frac{3}{8} \cdot \mathbf{m}^{im,Wil} , \end{aligned} \quad (5.72)$$

die sich ebenfalls nur um einen konstanten Skalierungsfaktor unterscheiden.

Die Gewinnung einer diagonalen inkompatiblen Massenmatrix wird anhand generalisierter inkompatibler Ansatzfunktionen, die in Abschnitt 5.6 eingeführt werden und auch auf Basis von Legendre-Polynomen konstruiert werden, in Abschnitt 5.6.5 umfänglich diskutiert. Bei Mattern [112] und Mattern et al. [114] wird bereits ein ähnliches Element mit den in Abschnitt 5.6 beschriebenen generalisierten inkompatiblen Ansatzfunktionen untersucht, bei dem die inkompatible Massenmatrix für bestimmte Voraussetzungen a priori Diagonalform besitzt, was ebenfalls in den Betrachtungen in Abschnitt 5.6.5 enthalten ist.

Zur Kopplung mit kompatiblen Massen

Es entsteht im allgemeinen Fall auch eine Kopplung zwischen der kompatiblen und der inkompatiblen Massenmatrix, die mithilfe der Diskretisierung von Gleichung (5.9) gewonnen wird

$$\int_v \rho (\delta \mathbf{u}^{\text{co}})^T \ddot{\mathbf{u}}^{\text{im}} dv = (\delta \mathbf{d}^{\text{co}})^T \int_v \rho (\mathbf{N}^{\text{co}})^T \mathbf{N}^{\text{im}} dv \ddot{\mathbf{d}}^{\text{im}} = (\delta \mathbf{d}^{\text{co}})^T \mathbf{M}^{\text{co|im}} \ddot{\mathbf{d}}^{\text{im}}. \quad (5.73)$$

Die kompatiblen Ansatzfunktionen und Freiheitsgrade werden dazu analog zu den Gleichungen (5.63) und (5.64) in der folgenden Matrixnotation genutzt

$$\mathbf{N}^{\text{co}} = \begin{pmatrix} N_1^{\text{co}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & N_8^{\text{co}} & 0 & 0 \\ 0 & N_1^{\text{co}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & N_8^{\text{co}} & 0 \\ 0 & 0 & N_1^{\text{co}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & N_8^{\text{co}} \end{pmatrix}, \quad (5.74)$$

$$\mathbf{d}^{\text{co}} = (u_1^{\text{co}} \quad v_1^{\text{co}} \quad w_1^{\text{co}} \quad \dots \quad u_{24}^{\text{co}} \quad v_{24}^{\text{co}} \quad w_{24}^{\text{co}})^T. \quad (5.75)$$

Die kompatible-inkompatible Massenmatrix $\mathbf{M}^{\text{co|im}}$ wird aber, wie in Abschnitt 5.2.2 besprochen, nicht berücksichtigt, da generell versucht wird, Funktionen zu finden, die diese Entkopplung aufweisen.

Werden die Wilson-Funktionen durch Legendre-Polynome ersetzt, siehe oben, wird nicht nur die inkompatible Massenmatrix vollständig diagonal, es besteht auch keine Kopplung mit der kompatiblen Massenmatrix. In Abschnitt 6.1.6 wird gezeigt, dass sich die Gradienten der Wilson- und Legendre-Funktionen, die zur Berechnung der inkompatiblen Verzerrungen verwendet werden, ebenfalls nur um einen konstanten Faktor unterscheiden. Einige numerische Beispiele haben gezeigt, dass die Ergebnisse beider Formulierungen sich nicht erkennbar voneinander unterscheiden.

Daher scheint es für eine sinnvolle Approximation der inkompatiblen Freiheitsgrade keine notwendige Voraussetzung zu sein, dass die gewählten Ansatzfunktionen a priori auf eine diagonale Massenmatrix sowie eine Entkopplung mit der kompatiblen Massenmatrix führen. Weitere Betrachtungen zur Kopplung mit der kompatiblen Massenmatrix werden mit den angesprochenen generalisierten inkompatiblen Ansatzfunktionen in Abschnitt 5.6.4 angestellt.

5.6 Generalisierte inkompatible Ansatzfunktionen

5.6.1 Idee

Eine Generalisierung inkompatibler Ansatzfunktionen und deren Äquivalenz zu inkompatiblen Verzerrungsinterpolationen, also klassischen EAS-Elementen, wird bei Bischoff und Romero [28] untersucht. Mit derartig erzeugten inkompatiblen Ansatzfunktionen sind die üblichen Interpolationen von Verzerrungsfreiheitsgraden der

EAS-Elemente reproduzierbar. In der Dissertation von Mattern [112] und bei Mattern et al. [114] wird dieser Ansatz aufgegriffen, um die explizite Berechnung inkompatibler Verschiebungen, für die in Abschnitt 5.2 eine variationelle Basis hergeleitet wurde, für nahezu beliebige EAS-Elemente auszuführen. Der Ansatz von Bischoff und Romero wurde hierfür von Mattern [112] auf 8-knotige Hexaederelemente erweitert. Die Diskussion der damit berechneten Massenmatrizen für verschiedene EAS-Elemente aus der Literatur erfolgt im Folgenden ausführlich und wird zudem auf quadratische Verzerrungsinterpolationen erweitert.

5.6.2 Zusammenhang mit erweiterter Verzerrungsinterpolation

Einführung generalisierter inkompatibler Verschiebungen

Im Folgenden wird das Prinzip der generalisierten inkompatiblen Ansatzfunktionen nach Bischoff und Romero [28] beschrieben. Für EAS-Elemente wird die inkompatible Verzerrungsinterpolation üblicherweise auf eine kontravariante Basis \mathbf{g}_0^i in Elementmitte⁶ bezogen. Auf diese Basis werden daher auch die generalisierten inkompatiblen Verschiebungen bezogen

$$\mathbf{u}^{\text{gim}} = \tilde{u}_1^{\text{gim}} \mathbf{g}_0^1 + \tilde{u}_2^{\text{gim}} \mathbf{g}_0^2 + \tilde{u}_3^{\text{gim}} \mathbf{g}_0^3. \quad (5.76)$$

Dabei werden die auf die kontravariante Basis bezogenen Komponenten im Folgenden mit einer Tilde gekennzeichnet. Für die Interpolation wird für jede der Komponenten eine andere Ansatzfunktion, aber der gleiche Freiheitsgrad eingeführt

$$\tilde{u}_1^{\text{gim}} = \sum_A \tilde{N}_{1A}^{\text{gim}} d_A^{\text{gim}}, \quad \tilde{u}_2^{\text{gim}} = \sum_A \tilde{N}_{2A}^{\text{gim}} d_A^{\text{gim}}, \quad \tilde{u}_3^{\text{gim}} = \sum_A \tilde{N}_{3A}^{\text{gim}} d_A^{\text{gim}}, \quad (5.77)$$

wobei der Index A über die Anzahl der inkompatiblen Freiheitsgrade läuft. Werden diese diskretisierten Komponenten in Gleichung (5.76) eingesetzt, kann diese so umgestellt werden, dass mit der später noch nützlichen Notation

$$\mathbf{N}_A^{\text{gim}} = \tilde{N}_{1A}^{\text{gim}} \mathbf{g}_0^1 + \tilde{N}_{2A}^{\text{gim}} \mathbf{g}_0^2 + \tilde{N}_{3A}^{\text{gim}} \mathbf{g}_0^3 \quad (5.78)$$

die kompakte Darstellung $\mathbf{u}^{\text{gim}} = \sum_A \mathbf{N}_A^{\text{gim}} d_A^{\text{gim}}$ möglich ist. Zum Vergleich wird die diskretisierte Form des kompatiblen Verschiebungsfeldes gezeigt, das üblicherweise auf die kartesischen Einheitsvektoren \mathbf{e}^i bezogen wird

$$\mathbf{u}^{\text{co}} = u_1^{\text{co}} \mathbf{e}^1 + u_2^{\text{co}} \mathbf{e}^2 + u_3^{\text{co}} \mathbf{e}^3. \quad (5.79)$$

⁶ Die kovarianten Basisvektoren $\mathbf{g}_i = \partial \mathbf{x} / \partial \zeta^i$ werden in einer üblichen Lagrange-Diskretisierung, siehe Abschnitt 6.1.2, zeilenweise in der Jakobimatrix $\mathbf{j} = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)^T$ und spaltenweise in der inversen Jakobimatrix $\mathbf{j}^{-1} = (\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3)$ angeordnet.

Im Gegensatz zur Interpolation der generalisierten inkompatiblen Verschiebungen in den Gleichungen (5.76) und (5.77), bei der für jede Komponente eine eigene Ansatzfunktion definiert wird, werden für die kompatiblen Verschiebungskomponenten jeweils die gleichen Ansatzfunktionen N_I^{co} verwendet

$$u_1^{\text{co}} = \sum_I N_I^{\text{co}} u_{1I}^{\text{co}}, \quad u_2^{\text{co}} = \sum_I N_I^{\text{co}} u_{2I}^{\text{co}}, \quad u_3^{\text{co}} = \sum_I N_I^{\text{co}} u_{3I}^{\text{co}}. \quad (5.80)$$

Aus dem generalisierten inkompatiblen Verschiebungsfeld (5.76) resultieren die Verzerrungen, dargestellt mit ihren kovarianten Komponenten

$$\varepsilon_{ij}^{\text{gim}} = \tilde{\varepsilon}_{ij}^{\text{gim}} \mathbf{g}_0^i \otimes \mathbf{g}_0^j = \frac{1}{2} \left(\mathbf{g}_i^0 \cdot \mathbf{u}_{,j}^{\text{gim}} + \mathbf{u}_{,i}^{\text{gim}} \cdot \mathbf{g}_j^0 \right) \mathbf{g}_0^i \otimes \mathbf{g}_0^j. \quad (5.81)$$

Unter Berücksichtigung der Orthogonalität $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j$ zwischen den ko- und kontravarianten Basisvektoren gilt

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{ij}^{\text{gim}} &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{g}_i^0 (\tilde{N}_{1A,j}^{\text{gim}} d_A^{\text{gim}} \mathbf{g}_0^1 + \tilde{N}_{2A,j}^{\text{gim}} d_A^{\text{gim}} \mathbf{g}_0^2 + \tilde{N}_{3A,j}^{\text{gim}} d_A^{\text{gim}} \mathbf{g}_0^3) \right. \\ &\quad \left. + (\tilde{N}_{1A,i}^{\text{gim}} d_A^{\text{gim}} \mathbf{g}_0^1 + \tilde{N}_{2A,i}^{\text{gim}} d_A^{\text{gim}} \mathbf{g}_0^2 + \tilde{N}_{3A,i}^{\text{gim}} d_A^{\text{gim}} \mathbf{g}_0^3) \mathbf{g}_j^0 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\tilde{N}_{1A,j}^{\text{gim}} \delta_i^1 + \tilde{N}_{2A,j}^{\text{gim}} \delta_i^2 + \tilde{N}_{3A,j}^{\text{gim}} \delta_i^3 + \tilde{N}_{1A,i}^{\text{gim}} \delta_j^1 + \tilde{N}_{2A,i}^{\text{gim}} \delta_j^2 + \tilde{N}_{3A,i}^{\text{gim}} \delta_j^3 \right) d_A^{\text{gim}}, \end{aligned} \quad (5.82)$$

wobei die Summation über A vorausgesetzt wurde. Der inkompatible Freiheitsgrad d_A^{gim} kann also so isoliert werden, dass die sechs voneinander verschiedenen Verzerrungskomponenten in einer üblichen Notation mit einer B-Matrix dargestellt werden können

$$\begin{bmatrix} \tilde{\varepsilon}_{11}^{\text{gim}} \\ \tilde{\varepsilon}_{22}^{\text{gim}} \\ \tilde{\varepsilon}_{33}^{\text{gim}} \\ 2 \tilde{\varepsilon}_{12}^{\text{gim}} \\ 2 \tilde{\varepsilon}_{23}^{\text{gim}} \\ 2 \tilde{\varepsilon}_{13}^{\text{gim}} \end{bmatrix} = \sum_A \begin{bmatrix} \tilde{N}_{1A,1}^{\text{gim}} \\ \tilde{N}_{2A,2}^{\text{gim}} \\ \tilde{N}_{3A,3}^{\text{gim}} \\ \tilde{N}_{1A,2}^{\text{gim}} + \tilde{N}_{2A,1}^{\text{gim}} \\ \tilde{N}_{2A,3}^{\text{gim}} + \tilde{N}_{3A,2}^{\text{gim}} \\ \tilde{N}_{1A,3}^{\text{gim}} + \tilde{N}_{3A,1}^{\text{gim}} \end{bmatrix} d_A^{\text{gim}} = \sum_A \tilde{\mathbf{B}}_A^{\text{gim}} d_A^{\text{gim}}. \quad (5.83)$$

Für jede Spalte der B-Matrix $\tilde{\mathbf{B}}_A^{\text{gim}}$ können nun Ansatzfunktionen aufgestellt werden, um erweiterte Verzerrungsinterpolationen ausgehend von einer inkompatiblen Verschiebungsinterpolation zu ermitteln. Die übliche Transformation, der in einer kontravarianten Basis vorliegenden Verzerrungskomponenten in Gleichung (5.83), wird in Gleichung (5.91) gezeigt und ansonsten auf Bischoff und Romero [28] verwiesen.

Entscheidend ist, dass insgesamt drei Ansatzfunktionen $\tilde{N}_{iA}^{\text{gim}}$ ($i = 1, 2, 3$), aber nur ein einzelner Freiheitsgrad d_A^{gim} , zur Interpolation der drei Verschiebungskomponenten \tilde{u}_i^{gim} ($i = 1, 2, 3$) in Gleichung (5.77) genutzt werden. Somit ist es möglich, wie im nächsten Schritt gezeigt wird, nahezu beliebige EAS-Interpolationen zu reproduzieren.

Reproduktion von EAS-Interpolationen

Für EAS-Elemente wird üblicherweise eine Interpolationsmatrix, hier dargestellt für bis zu trilineare Erweiterungen, verwendet

$$\tilde{\mathbf{B}}_A^{\text{en}} = \begin{Bmatrix} a_{100} \xi + a_{010} \eta + a_{001} \zeta + a_{110} \xi \eta + a_{101} \xi \zeta + a_{011} \eta \zeta + a_{111} \xi \eta \zeta \\ b_{100} \xi + b_{010} \eta + b_{001} \zeta + b_{110} \xi \eta + b_{101} \xi \zeta + b_{011} \eta \zeta + b_{111} \xi \eta \zeta \\ c_{100} \xi + c_{010} \eta + c_{001} \zeta + c_{110} \xi \eta + c_{101} \xi \zeta + c_{011} \eta \zeta + c_{111} \xi \eta \zeta \\ d_{100} \xi + d_{010} \eta + d_{001} \zeta + d_{110} \xi \eta + d_{101} \xi \zeta + d_{011} \eta \zeta + d_{111} \xi \eta \zeta \\ e_{100} \xi + e_{010} \eta + e_{001} \zeta + e_{110} \xi \eta + e_{101} \xi \zeta + e_{011} \eta \zeta + e_{111} \xi \eta \zeta \\ f_{100} \xi + f_{010} \eta + f_{001} \zeta + f_{110} \xi \eta + f_{101} \xi \zeta + f_{011} \eta \zeta + f_{111} \xi \eta \zeta \end{Bmatrix}_A, \quad (5.84)$$

und die Diskretisierung mit einem Verzerrungsfreiheitsgrad d_A^{en} durchgeführt

$$[\tilde{\varepsilon}_{11}^{\text{en}} \quad \tilde{\varepsilon}_{22}^{\text{en}} \quad \tilde{\varepsilon}_{33}^{\text{en}} \quad 2\tilde{\varepsilon}_{12}^{\text{en}} \quad 2\tilde{\varepsilon}_{23}^{\text{en}} \quad 2\tilde{\varepsilon}_{13}^{\text{en}}]^T = \sum_A \tilde{\mathbf{B}}_A^{\text{en}} d_A^{\text{en}}. \quad (5.85)$$

Für eine übersichtlichere Darstellung wird auf den Index A bei den Parametern a_{ijk} bis f_{ijk} verzichtet. Um diese Verzerrungsinterpolation mit generalisierten inkompatiblen Verschiebungen zu reproduzieren, muss

$$\tilde{\mathbf{B}}^{\text{gim}} = \tilde{\mathbf{B}}^{\text{en}} \quad (5.86)$$

erfüllt werden. Bei Bischoff und Romero [28] wurden mit Legendre-Polynomen Funktionen für den 2D-Fall konstruiert, die diese Eigenschaft besitzen. Die Legendre-Polynome sind für die lokale Koordinate ξ definiert durch

$$P_0(\xi) = 1, \quad P_1(\xi) = \xi, \quad P_2(\xi) = \frac{1}{2}(3\xi^2 - 1), \quad \dots, \quad P_n(\xi) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(\xi^2 - 1)^n}{d\xi^n}. \quad (5.87)$$

Mattern [112] präsentiert für den 3D-Fall eine Erweiterung, die die lineare Verzerrungsinterpolation aus Gleichung (5.84) mit den folgenden Funktionen reproduziert

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{1A}^{\text{gim}} = \frac{1}{6} & \left[2a_{100} P_2(\xi) + 6a_{010} P_1(\xi) P_1(\eta) + 6a_{001} P_1(\xi) P_1(\zeta) + \right. \\ & 2a_{110} P_2(\xi) P_1(\eta) + 2a_{101} P_2(\xi) P_1(\zeta) + 6a_{011} P_1(\xi) P_1(\eta) P_1(\zeta) + \\ & 2a_{111} P_2(\xi) P_1(\eta) P_1(\zeta) + 2(d_{010} - b_{100}) P_2(\eta) + 2(f_{001} - c_{100}) P_2(\zeta) + \\ & 3(d_{001} + f_{010} - e_{100}) P_1(\eta) P_1(\zeta) + d_{110} P_1(\xi) P_2(\eta) + f_{101} P_1(\xi) P_2(\zeta) + \\ & 2(d_{011} - b_{101}) P_2(\eta) P_1(\zeta) + 2(f_{011} - c_{110}) P_1(\eta) P_2(\zeta) + \\ & \left. d_{111} P_1(\xi) P_2(\eta) P_1(\zeta) + f_{111} P_1(\xi) P_1(\eta) P_2(\zeta) \right], \quad (5.88) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_{2A}^{\text{gim}} = \frac{1}{6} & \left[6 b_{100} P_1(\xi) P_1(\eta) + 2 b_{010} P_2(\eta) + 6 b_{001} P_1(\eta) P_1(\zeta) + \right. \\
& 2 b_{110} P_1(\xi) P_2(\eta) + 6 b_{101} P_1(\xi) P_1(\eta) P_1(\zeta) + 2 b_{011} P_2(\eta) P_1(\zeta) + \\
& 2 b_{111} P_1(\xi) P_2(\eta) P_1(\zeta) + 2 (d_{100} - a_{010}) P_2(\xi) + 2 (e_{001} - c_{010}) P_2(\zeta) + \\
& 3 (d_{001} + e_{100} - f_{010}) P_1(\xi) P_1(\zeta) + d_{110} P_2(\xi) P_1(\eta) + e_{011} P_1(\eta) P_2(\zeta) + \\
& 2 (d_{101} - a_{011}) P_2(\xi) P_1(\zeta) + 2 (e_{101} - c_{110}) P_1(\xi) P_2(\zeta) + \\
& \left. d_{111} P_2(\xi) P_1(\eta) P_1(\zeta) + e_{111} P_1(\xi) P_1(\eta) P_2(\zeta) \right], \tag{5.89}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{N}_{3A}^{\text{gim}} = \frac{1}{6} & \left[6 c_{100} P_1(\xi) P_1(\zeta) + 6 c_{010} P_1(\eta) P_1(\zeta) + 2 c_{001} P_2(\zeta) + \right. \\
& 6 c_{110} P_1(\xi) P_1(\eta) P_1(\zeta) + 2 c_{101} P_1(\xi) P_2(\zeta) + 2 c_{011} P_1(\eta) P_2(\zeta) + \\
& 2 c_{111} P_1(\xi) P_1(\eta) P_2(\zeta) + 2 (e_{010} - b_{001}) P_2(\eta) + 2 (f_{100} - a_{001}) P_2(\xi) + \\
& 3 (e_{100} + f_{010} - d_{001}) P_1(\xi) P_1(\eta) + e_{011} P_2(\eta) P_1(\zeta) + f_{101} P_2(\xi) P_1(\zeta) + \\
& 2 (e_{110} - b_{101}) P_1(\xi) P_2(\eta) + 2 (f_{110} - a_{011}) P_2(\xi) P_1(\eta) + \\
& \left. e_{111} P_1(\xi) P_2(\eta) P_1(\zeta) + f_{111} P_2(\xi) P_1(\eta) P_1(\zeta) \right]. \tag{5.90}
\end{aligned}$$

Eine Erweiterung auf quadratische und noch höhere Terme ist analog möglich, wird aber aufgrund der unübersichtlichen Darstellung der Gleichungen hier nicht gezeigt. Mit diesen Funktionen⁷ ist die Matrix $\tilde{\mathbf{B}}^{\text{gim}}$ an den Integrationspunkten $\xi_{IP} = \pm 1/\sqrt{3}$ identisch mit der Matrix $\tilde{\mathbf{B}}^{\text{en}}$, siehe Bischoff und Romero [28]. Die Eingrenzung auf diese Integrationspunkte, die einer für 8-knotige Hexaederelemente üblichen numerischen Gauß-Legendre-Integration mit $2 \times 2 \times 2$ Integrationspunkten entspricht, beschränkt damit die Möglichkeiten der Anwendung generalisierter Ansatzfunktionen nicht oder nur minimal, beispielsweise für den Fall , dass ein Volumenelement eine spezielle Integrationsregel erfordert.

Damit existieren für den trilinearen Fall insgesamt 42 unterschiedliche Parameter $a_{ijk} - f_{ijk}$. Wenn für jeden inkompatiblen Freiheitsgrad nur ein Parameter ungleich Null zugelassen wird, ergeben sich 42 unterschiedliche Möglichkeiten für eine Spalte der Interpolationsmatrix $\mathbf{B}_A^{\text{gim}}$ oder \mathbf{B}_A^{en} . Für Kombinationen, wie eine Erweiterung einer Normal- und Schubverzerrung mit einem inkompatiblen Freiheitsgrad, existieren weitaus mehr Möglichkeiten. Eine beispielhafte Anwendung der Funktionen aus den Gleichungen (5.88) bis (5.90) für eine solche Kombination wird in Abschnitt 5.6.7 diskutiert.

⁷ Es gibt nur sehr wenige Vorschläge mit Termen höherer Ordnung, zum Beispiel bei Quay und Matzenmiller [133] oder Alves de Sousa et al. [6]. Für diese werden die generalisierten Ansatzfunktionen bis zu kubischer Ordnung im Einzelfall konstruiert oder analog zu den Gleichungen (5.88) bis (5.90) hergeleitet.

5.6.3 Anwendung auf verschiedene Deformationsmaße

Erweiterung der Ingenieurverzerrungen (EAS)

Die erweiterten Ingenieurverzerrungen sind definiert durch die Transformation (siehe Simo und Rifai [159])

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{en}} = \frac{j_0}{j} \mathbf{j}_0^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{\text{en}} \mathbf{j}_0^{-T} . \quad (5.91)$$

Darin sind die Inverse der Jakobimatrix in Elementmitte \mathbf{j}_0^{-1} sowie die Determinante der Jakobimatrix j und deren Wert in Elementmitte j_0 nötig, um den Patchtest zu erfüllen. Charakteristisch ist die Interpolationsmatrix $\tilde{\mathbf{B}}^{\text{en}}$, mit der die kovarianten Verzerrungskomponenten in Matrixnotation wie folgt berechnet werden

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{en}}\} = \tilde{\mathbf{B}}^{\text{en}} \mathbf{d}^{\text{en}} . \quad (5.92)$$

Dabei ist jedem Verzerrungsfreiheitsgrad aus dem Vektor $\mathbf{d}^{\text{en}} = (\dots d_A^{\text{en}} \dots)^T$ eine Spalte der Matrix $\tilde{\mathbf{B}}^{\text{en}} = (\dots \tilde{\mathbf{B}}_A^{\text{en}} \dots)$ zugeordnet. Die Verzerrungskomponenten in Gleichung (5.92) werden mithilfe der generalisierten inkompatiblen Verschiebungen nach Bischoff und Romero [28], siehe Abschnitt 5.6.2, reproduziert. Die Interpolation der generalisierten inkompatiblen Verschiebungen wird durch die Gleichungen (5.76), (5.77) und (5.78) beschrieben, die zusammengefasst auf die folgende kompakte Form führen

$$\mathbf{u}^{\text{gim}} = \sum_A \mathbf{N}_A^{\text{gim}} d_A^{\text{gim}} , \quad (5.93)$$

in der die generalisierten Ansatzfunktionen aus Gleichung (5.78), mit Zusammenführen der kontravarianten Basisvektoren in der inversen Jakobimatrix $\mathbf{j}_0^{-1} = (\mathbf{g}_0^1, \mathbf{g}_0^2, \mathbf{g}_0^3)$, wie folgt dargestellt werden

$$\mathbf{N}_A^{\text{gim}} = \mathbf{j}_0^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{N}_{1A}^{\text{gim}} \\ \tilde{N}_{2A}^{\text{gim}} \\ \tilde{N}_{3A}^{\text{gim}} \end{bmatrix} = \mathbf{j}_0^{-1} \tilde{\mathbf{N}}_A^{\text{gim}} , \quad (5.94)$$

wobei die generalisierten Ansatzfunktionen im Vektor $\tilde{\mathbf{N}}_A^{\text{gim}}$ angeordnet werden.

Für eine Reproduktion der Interpolationsmatrix $\tilde{\mathbf{B}}^{\text{en}}$ werden in einem ersten Schritt die generalisierten Ansatzfunktionen mit den Gleichungen (5.88) bis (5.90) für jeden Freiheitsgrad A spaltenweise bestimmt. Im zweiten Schritt werden, dem Freiheitsgrad A zugeordnete, Spalten der Matrix $\tilde{\mathbf{B}}_A^{\text{gim}} = (\dots \tilde{\mathbf{B}}_A^{\text{gim}} \dots)$ nach Gleichung (5.83) berechnet, die mindestens an den Integrationspunkten einer numerischen $2 \times 2 \times 2$

⁸ Eine beliebige Spalte mit bis zu trilinearen Erweiterungen ist in Gleichung (5.84) dargestellt. Beispiele verschiedener Formulierungen, die über eine trilineare Interpolation in Gleichung (5.84) hinausgehen, sind in den Abschnitten 3.2 und 3.4 dargestellt.

Gauß-Legendre-Integration mit den Spalten der zu reproduzierenden Matrix \mathbf{B}_A^{en} übereinstimmen, siehe Bischoff und Romero [28]. Für die Berechnung der kovarianten Verzerrungskomponenten gilt analog zu Gleichung (5.92) in Matrixnotation

$$\{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{gim}}\} = \mathbf{B}^{\text{gim}} \mathbf{d}^{\text{gim}}, \quad (5.95)$$

sowie für die Transformation entsprechend Gleichung (5.91)

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{gim}} = \frac{J_0}{J} \mathbf{J}_0^{-1} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{gim}} \mathbf{J}_0^{-T}. \quad (5.96)$$

Gleichung (5.65) oder (5.66) können zur Berechnung der konsistenten inkompatiblen Massenmatrix mit den generalisierten Funktionen aus Gleichung (5.94) analog genutzt werden

$$\mathbf{M}^{\text{gim}} = \int_v \rho (\mathbf{N}^{\text{gim}})^T (\mathbf{N}^{\text{gim}}) j \, dv. \quad (5.97)$$

Darin ist neben der Rohdichte ρ und der Determinanten der Jakobimatrix j zusätzlich die Inverse der Jakobimatrix enthalten, die in den generalisierten Ansatzfunktionen aus Gleichung (5.94) auftaucht.

Weicht die Geometrie eines Elements von der eines Parallelepipedes ab, ist j nicht mehr konstant, sondern ein Polynom in Abhängigkeit von ξ , η und ζ , was es erschwert a priori anzugeben, ob die inkompatible Massenmatrix diagonal sein wird, was in Abschnitt 5.6.5 genau untersucht wird.

Zudem kann eine Kopplung mit der kompatiblen Massenmatrix auftreten, was in Abschnitt 5.6.4 ausführlich untersucht wird.

Für spezielle Interpolationen und Vereinfachungen, siehe Mattern [112] und Mattern et al. [114], kann vorab eine diagonale Massenmatrix erreicht werden.

Erweiterung der Greenschen Verzerrungen (EAGS)

Die Erweiterung der Greenschen Verzerrungen erfolgt vollständig analog zur Erweiterung der Ingenieurverzerrungen. Der einzige Unterschied besteht darin, dass sämtliche Größen dann auf die Referenzkonfiguration zu beziehen sind. D. h. die Basisvektoren und damit die Jakobimatrix sowie deren Determinante und Inverse werden bei Bezug auf die Referenzkonfiguration zur besseren Unterscheidung großgeschrieben. Analog zu Gleichung (5.91) gilt

$$\mathbf{E}^{\text{en}} = \frac{J_0}{J} \mathbf{J}_0^{-1} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{en}} \mathbf{J}_0^{-T}. \quad (5.98)$$

Da die Interpolation der kovarianten Komponenten unabhängig von einer Bezugs-konfiguration ist, werden in Gleichung (5.98) weiterhin die kovarianten Verzerrungskomponenten $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{en}}$ eingesetzt. Nach Mattern [112] und Mattern et al. [114] gilt für die Erweiterung der Greenschen Verzerrungen infolge generalisierter inkompatibler Ansatzfunktionen analog zu Gleichung (5.96)

$$\mathbf{E}^{\text{gim}} = \frac{J_0}{J} \mathbf{J}_0^{-1} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{gim}} \mathbf{J}_0^{-T}. \quad (5.99)$$

Die generalisierten Ansatzfunktionen aus den Gleichungen (5.88) bis (5.90) wurden zwar im Hinblick auf die Berechnung der Ingenieurverzerrungen in Gleichung (5.81) entwickelt, können aber ohne Schwierigkeiten für die Greenschen Verzerrungen übernommen werden, da die damit berechnete Interpolationsmatrix von einer Bezugskonfiguration unabhängig ist. Und obgleich die kovarianten Komponenten der Ingenieurverzerrungen aus Gleichung (5.81) nicht den kovarianten Komponenten entsprechen, die sich für Greensche Verzerrungen ergeben, siehe Gleichung (2.33), können trotzdem die generalisierten Ansatzfunktionen verwendet werden. Der Grund dafür ist, dass letztendlich die Interpolationsmatrix $\tilde{\mathbf{B}}^{\text{en}}$ und nicht die eigentliche Berechnungsvorschrift der kovarianten Komponenten $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{en}}$ reproduziert werden soll. Bei Mattern et al. [114] wird zudem mit der Annahme kleiner inkompatibler Verschiebungen die Verwendung des Vorgehens für Greensche Verzerrungen gerechtfertigt.

Erweiterung weiterer Deformationsmaße

Für eine inkompatibel erweiterte Interpolation der Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} kann analog zu den Ingenieurverzerrungen verfahren werden. Der einzige Unterschied besteht in den Freiheitsgraden, die dann anstatt von Verschiebungen, Geschwindigkeiten sind.

Es ist grundsätzlich auch die Erweiterung des Deformations- beziehungsweise des Verschiebungsgradienten möglich, wofür die Funktionen aus den Gleichungen (5.88) bis (5.90), die an die Reproduktion symmetrischer Verzerrungen angepasst sind, siehe Gleichungen (5.81) und (5.83), dann an einen im Allgemeinen nicht symmetrischen Verschiebungs- oder Deformationsgradienten anzupassen sind.

5.6.4 Die kompatible-inkompatible Massenkopplung

Die kompatible-inkompatible Massenmatrix $\mathbf{M}^{\text{co-gim}}$ aus Gleichung (5.73) wird für die folgende Untersuchung komponentenweise betrachtet. Damit die gesamte Massenmatrix nur auf der Diagonalen besetzt ist, muss gelten

$$\mathbf{M}_{IJ}^{\text{co|gim}} = \int_{\square} N_I \rho \mathbf{N}_J^{\text{gim}} j d\square = \int_{\square} \rho N_I \tilde{N}_{ij}^{\text{gim}} j d\square \mathbf{g}_0^i. \quad (5.100)$$

Ist die Determinante der Jakobimatrix j konstant, sind die Einträge der Matrix gleich Null, sobald folgender Ausdruck gilt

$$\mathbf{M}_{IJ}^{\text{co|gim}} = 0 \text{ wenn } \int_{\square} N_I \tilde{N}_{ij}^{\text{gim}} d\square = 0, \quad i = \{1, 2, 3\} \text{ und } j = \text{konstant}, \quad (5.101)$$

oder wenn die kompatible Ansatzfunktion orthogonal zur inkompatiblen Ansatzfunktion ist. Der Bezug der generalisierten inkompatiblen Ansatzfunktion zur kontravarianten Basis \mathbf{g}_0^i spielt hier keine Rolle, da der Basisvektor konstant ist und somit

hinter das Integral geschoben werden kann, siehe Gleichung (5.100). Die kompatiblen Ansatzfunktionen lassen sich mit Legendre-Polynomen in die Form

$$\begin{aligned}
 N_I &= \frac{1}{8}(1 + \xi_I \xi)(1 + \eta_I \eta)(1 + \zeta_I \zeta) \\
 &= \frac{1}{8}(1 + \xi_I \xi + \eta_I \eta + \zeta_I \zeta + \xi_I \eta_I \xi \eta + \xi_I \zeta_I \xi \zeta + \eta_I \zeta_I \eta \zeta + \xi_I \eta_I \zeta_I \xi \eta \zeta) \\
 &= \frac{1}{8}(P_0(\xi) + \xi_I P_1(\xi) + \eta_I P_1(\eta) + \zeta_I P_1(\zeta) + \xi_I \eta_I P_1(\xi)P_1(\eta) + \xi_I \zeta_I P_1(\xi)P_1(\zeta) \\
 &\quad + \eta_I \zeta_I P_1(\eta)P_1(\zeta) + \xi_I \eta_I \zeta_I P_1(\xi)P_1(\eta)P_1(\zeta)) \tag{5.102}
 \end{aligned}$$

überführen. Die Koordinaten (ξ_I, η_I, ζ_I) stellen standardmäßig die Eckknoten eines 8-Knoten-Hexaeders der Kantenlänge 2 dar. Damit ist es möglich, mithilfe der Orthogonalitätseigenschaft für Legendre-Polynome

$$\int_{-1}^{+1} P_m(\xi)P_n(\xi) d\xi = \frac{2}{2m+1} \delta_{mn}, \tag{5.103}$$

die Erweiterungen zu identifizieren, die zu Einträgen ungleich Null führen. In Tabelle 5.2 stehen in Spalte 2 die in den Ansatzfunktionen enthaltenen Kombinationen von Legendre-Polynomen. In den Spalten 3 bis 6 stehen die maßgeblichen Faktoren mit denen diese auftauchen. Vorzeichen und Zahlen sind für die Beurteilung nicht erforderlich. Für die Untersuchung von $\mathbf{M}^{\text{colgim}}$ sind die Zeilen 5 bis 8 relevant, da sonst keine Kopplung mit N_I auftritt. Enthält eine Verzerrungserweiterung beispielsweise den Eintrag a_{010} , steht im Kriterium (5.101) der Ausdruck

$$\int_{\square} \underbrace{(\dots + \xi_I \eta_I P_1(\xi)P_1(\eta) \dots)}_{N_I} \underbrace{(\dots + a_{010} P_1(\xi) P_1(\eta) \dots)}_{\tilde{N}_{1j}^{\text{gim}}} d\square \neq 0, \tag{5.104}$$

der ungleich Null ist, da die Orthogonalitätsrelation (5.103) zu einem Wert ungleich Null führt. Somit folgt aus Tabelle 5.2, dass Erweiterungen mit den Koeffizienten

$$\{a_{010}, a_{001}, a_{011}, b_{100}, b_{001}, b_{101}, c_{100}, c_{010}, c_{110}, d_{001}, e_{100}, f_{010}\} \Rightarrow \mathbf{M}^{u\alpha} \neq \mathbf{0} \tag{5.105}$$

zu Einträgen ungleich Null in $\mathbf{M}^{\text{colgim}}$ führen. Es verbleiben abzüglich der Koeffizienten aus Gleichung (5.105) 30 Parameter, für die die Massenmatrix $\mathbf{M}^{\text{colgim}}$ gleich Null ist.

Es ist zu beachten: Für Elementgeometrien mit $j \neq$ konstant wird eine Untersuchung, wie sie eben dargestellt wurde, deutlich erschwert. Abhilfe kann dann eine Approximation der Elementgeometrie schaffen, indem eine Auswertung der Determinanten j in Elementmitte erfolgt $j|_{\xi=0}$. Dann ist Tabelle 5.2 analog uneingeschränkt anwendbar. Die Zeilen 9–20 in Tabelle 5.2 werden im folgenden Abschnitt 5.6.5 erklärt.

Tabelle 5.2: Übersicht der Kombinationen von Legendre-Polynomen und maßgeblicher Faktoren, s. Glg. (5.88) bis (5.90), mit denen diese in den kompatiblen und inkompatiblen Interpolationsfunktionen auftauchen. Die Faktoren einer Zeile führen für eine konstante Jakobideterminante j zu Einträgen ungleich Null in $\mathbf{M}^{\text{col gim}}$ und \mathbf{M}^{gim} .

		N_I	$\tilde{N}_{1I}^{\text{gim}}$	$\tilde{N}_{2I}^{\text{gim}}$	$\tilde{N}_{3I}^{\text{gim}}$	Zeile
$\mathbf{M}^{\text{col gim}}$	$P_1(\xi)$	1	0	0	0	2
	$P_1(\eta)$	1	0	0	0	3
	$P_1(\zeta)$	1	0	0	0	4
	$P_1(\xi)P_1(\eta)$	1	a_{010}	b_{100}	$e_{100}, f_{010}, d_{001}$	5
	$P_1(\xi)P_1(\zeta)$	1	a_{001}	$d_{001}, e_{100}, f_{010}$	c_{100}	6
	$P_1(\eta)P_1(\zeta)$	1	$d_{001}, f_{010}, e_{100}$	b_{001}	c_{010}	7
	$P_1(\xi)P_1(\eta)P_1(\zeta)$	1	a_{011}	b_{101}	c_{110}	8
	\mathbf{M}^{gim}	$P_2(\xi)$	0	a_{100}	$d_{100}, (a_{010})$	$f_{100}, (a_{001})$
$P_1(\eta)P_2(\xi)$		0	a_{110}	\underline{d}_{110}	$f_{110}, (a_{011})$	10
$P_1(\zeta)P_2(\xi)$		0	a_{101}	$\underline{d}_{101}, (a_{011})$	\underline{f}_{101}	11
$P_1(\eta)P_1(\zeta)P_2(\xi)$		0	a_{111}	\underline{d}_{111}	\underline{f}_{111}	12
$P_2(\eta)$		0	$d_{010}, (b_{100})$	b_{010}	$e_{010}, (b_{001})$	13
$P_1(\xi)P_2(\eta)$		0	\underline{d}_{110}	b_{110}	$e_{110}, (b_{101})$	14
$P_1(\zeta)P_2(\eta)$		0	$\underline{d}_{011}, (b_{101})$	b_{011}	\underline{e}_{011}	15
$P_1(\xi)P_1(\zeta)P_2(\eta)$		0	\underline{d}_{111}	b_{111}	\underline{e}_{111}	16
$P_2(\zeta)$		0	$f_{001}, (c_{100})$	$e_{001}, (c_{010})$	c_{001}	17
$P_1(\xi)P_2(\zeta)$		0	\underline{f}_{101}	$e_{101}, (c_{110})$	c_{101}	18
$P_1(\eta)P_2(\zeta)$		0	$\underline{f}_{011}, (c_{110})$	\underline{e}_{011}	c_{011}	19
$P_1(\xi)P_1(\eta)P_2(\zeta)$		0	\underline{f}_{111}	\underline{e}_{111}	c_{111}	20

Zeile 9–20: Eingeklammerte Koeffizienten führen auch in $\mathbf{M}^{\text{col gim}}$ zu Einträgen ungleich Null.
 Unterstrichene Koeffizienten treten paarweise auf.

5.6.5 Die inkompatible Massenmatrix

Mit den generalisierten inkompatiblen Ansatzfunktionen wird die folgende inkompatible Massenmatrix definiert

$$\mathbf{M}_{IJ}^{\text{gim}} = \int_{\square} \mathbf{N}_I^{\text{gim}} \rho \mathbf{N}_J^{\text{gim}} j d\square. \quad (5.106)$$

Wie im vorherigen Abschnitt gezeigt, kann aufgrund der Zusammensetzung der Ansatzfunktionen aus Legendre-Polynomen, die Wahl der inkompatiblen Erweiterungen prinzipiell bereits zu einer diagonalen Massenmatrix führen. Schreibt man die generalisierten Ansatzfunktionen aus Gleichung (5.78) in ihrer kontravarianten Basis aus, lautet die Massenmatrix

$$\mathbf{M}_{IJ}^{\text{gim}} = \int_{\square} (\tilde{N}_{iI}^{\text{gim}} \mathbf{g}_0^i) \rho (\tilde{N}_{jJ}^{\text{gim}} \mathbf{g}_0^j) j d\square = \int_{\square} \rho \tilde{N}_{iI}^{\text{gim}} \tilde{N}_{jJ}^{\text{gim}} j d\square \mathbf{g}_0^i \mathbf{g}_0^j. \quad (5.107)$$

Aufgrund der Orthogonalitätsrelation (5.103) ist sofort ersichtlich, dass die Einträge auf der Diagonalen ($I = J$) immer ungleich Null sind, da nur gleiche Kombinationen aus Legendre-Polynomen miteinander multipliziert werden. Für Einträge, die nicht auf der Diagonalen stehen ($I \neq J$) können zwei Kriterien angegeben werden, für die ein Eintrag verschwindet.

Kriterium 1

Es wird vorausgesetzt, dass für die Elementgeometrie $j = \text{konstant}$ gilt, oder durch die Approximation $j|_{\xi=0}$ erzwungen wird. Dann gilt

$$\mathbf{M}_{IJ}^{\text{gim}} = 0 \text{ wenn } \int_{\square} \tilde{N}_{iI}^{\text{gim}} \tilde{N}_{jJ}^{\text{gim}} d\square = 0, \quad i, j = \{1, 2, 3\} \text{ und } j = \text{konstant}. \quad (5.108)$$

Aus Tabelle 5.2 folgt bei Betrachtung der Spalten $\tilde{N}_{1I}^{\text{gim}}$ bis $\tilde{N}_{3I}^{\text{gim}}$, dass Erweiterungen, deren Koeffizienten in der gleichen Zeile auftauchen, zu einem Eintrag ungleich Null führen. Wird beispielsweise eine Erweiterung mit a_{010}^L und d_{100}^L gewählt, beide stehen in Zeile 9, führt Kriterium (5.108) zu einem Eintrag ungleich Null

$$\int_{\square} \underbrace{\left(-\frac{1}{3}a_{010}^L P_2(\xi)\right)}_{\tilde{N}_{2I}^{\text{gim}}} \underbrace{\left(+\frac{1}{3}d_{100}^L P_2(\xi)\right)}_{\tilde{N}_{2J}^{\text{gim}}} d\square \neq 0 \stackrel{(5.103)}{\implies} \mathbf{M}_{IJ}^{\text{gim}} \neq 0. \quad (5.109)$$

Daraus folgt, dass nur eine der beiden Erweiterungen gewählt werden kann, wenn keine Einträge ungleich Null auftauchen sollen. Die Parameter des gewählten Falls aus Gleichung (5.109) tauchen in der gleichen Spalte $\tilde{N}_{2I}^{\text{gim}}$ auf. Diese Art von Kombination tritt auch nur für Koeffizienten auf, die im vorherigen Abschnitt in $\mathbf{M}^{\text{colgim}}$ bereits zu Einträgen ungleich Null geführt haben. Da $\mathbf{M}^{\text{colgim}}$ aber gleich Null sein soll, wird im Weiteren davon ausgegangen, dass diese Koeffizienten, siehe Gleichung (5.105), ausgeschlossen werden. Um das zu verdeutlichen, sind diese in den folgenden Zeilen eingeklammert, sodass in den Zeilen 9 bis 20 nur noch in unterschiedlichen Spalten Kombinationen der Ansatzfunktionen auftreten.

Eine weitere Besonderheit zeigt das nächste Beispiel. Wird die Erweiterung mit dem Koeffizient d_{110} aus Zeile 10 gewählt, dürfen die Koeffizienten a_{110} und $f_{110}(, a_{011})$ der gleichen Zeile nicht kombiniert werden. Da d_{110} paarweise nochmals in Zeile 14 auftaucht, ist eine Kombination mit den Koeffizienten b_{110} und $e_{110}(, b_{101})$ ebenfalls auszuschließen. Insgesamt gibt es sechs Koeffizienten die paarweise auftreten $\{d_{110}, d_{111}, e_{011}, e_{111}, f_{101}, f_{111}\}$. Diese sind unterstrichen dargestellt.

Zusammenfassend ist demnach eine Diagonalmatrix mit maximal 12 Parameter möglich, deren zulässige Kombinationsmöglichkeiten Tabelle 5.2 entnommen werden können. Zwei Beispiele für zulässige Erweiterungen mit 12 Koeffizienten sind

$$\{a_{100}, a_{101}, a_{110}, a_{111}, b_{100}, b_{101}, b_{110}, b_{111}, c_{100}, c_{101}, c_{110}, c_{111}\} \quad (5.110)$$

$$\{f_{100}, f_{110}, d_{101}, a_{111}, e_{010}, e_{110}, d_{011}, b_{111}, e_{001}, e_{101}, f_{011}, c_{111}\}. \quad (5.111)$$

Beim ersten Beispiel, also Gleichung (5.110), wurden ausschließlich Normalverzerrungen erweitert und im zweiten Beispiel in Gleichung (5.111) Normal- und Schubverzerrungen. Sobald ein paarweise auftretender Koeffizient verwendet wird, also ein unterstrichener Koeffizient, der bedingt durch die Konstruktion der Funktionen (5.88) bis (5.90), automatisch an 2 Stellen (paarweise) in Tabelle 5.2 auftritt, sind nur weniger als 12 Erweiterungen möglich.

Es ist zu beachten: Für die Erweiterung von Normal- und Schubverzerrungen mit jeweils der gleichen Koordinate gilt quasi folgende Regel. In den Zeilen 9 bis 12 stehen nur Koeffizienten a_{jkl} die mindestens eine Koordinate ξ enthalten. Der erste Index ist also immer gleich 1, und der Koeffizient somit a_{1kl} , $\{kl\} = \{00, 01, 10, 11\}$. In der selben Zeile tauchen exakt die gleichen Indizes bei den jeweils beiden anderen Koeffizienten auf, also d_{1kl} und f_{1kl} . Zudem korrelieren alle Koeffizienten mit einer Verzerrung, die ebenfalls mindestens einmal die Koordinate ξ enthält. Das sind für den Koeffizienten a die Normalverzerrung $\tilde{\varepsilon}_{\xi\xi}$, und für c und f die Schubverzerrungen $\tilde{\varepsilon}_{12}^{\text{gim}}$ und $\tilde{\varepsilon}_{13}^{\text{gim}}$. Die gleiche Regel lässt sich für die Koordinate η in den Zeilen 13 bis 16, sowie für ζ in den Zeilen 17 bis 20 angeben.

Kriterium 2

Ist zusätzlich zur Annahme $j = \text{konstant}$ das Paar der Basisvektoren $\mathbf{g}_0^i \mathbf{g}_0^j$ für $i \neq j$ orthogonal zueinander, gilt in einer Verallgemeinerung des 1. Kriteriums

$$\mathbf{M}_{IJ}^{\text{gim}} = 0 \text{ wenn } \mathbf{g}_0^i \perp \mathbf{g}_0^j, j = \text{konstant} \Rightarrow \int_{\square} \tilde{N}_{iI}^{\text{gim}} \tilde{N}_{jJ}^{\text{gim}} d\square = 0, i = \{1, 2, 3\}. \quad (5.112)$$

Damit sind in Tabelle 5.2 die Spalten $\tilde{N}_{1I}^{\text{gim}}$, $\tilde{N}_{2I}^{\text{gim}}$ und $\tilde{N}_{3I}^{\text{gim}}$ entkoppelt. Das heißt es können alle Koeffizienten der Zeilen 9 bis 20, die eingeklammerten ausgeschlossen, genutzt werden, was zu insgesamt 30 möglichen Verzerrungserweiterungen führt.

5.6.6 Vereinfachte Berechnung der inkompatiblen Massenmatrix

Die theoretischen Überlegungen aus den Abschnitten 5.6.4 und 5.6.5 zeigen, dass sich anhand der Kopplung der Massen bereits eine Tendenz zu einer wirksamen Wahl von Parametern abzeichnet.

Aufgrund einer einfacheren Implementierung wird auch für die generalisierten inkompatiblen Ansatzfunktionen die Massenmatrix analog zu Abschnitt 5.5.2 mit dem Faktor $v/8$ anstatt der Jakobideterminanten j berechnet. Es wird zudem angenommen, dass das Element die Geometrie des Basiselements einnimmt, sodass anstatt der Funktionen \mathbf{N}^{gim} , siehe Gleichung (5.78), die Funktionen $\tilde{\mathbf{N}}^{\text{gim}}$ zur Berechnung verwendet werden können

$$\mathbf{M}^{\text{gim}} = v/8 \int_{\square} \rho (\tilde{\mathbf{N}}^{\text{gim}})^T (\tilde{\mathbf{N}}^{\text{gim}}) d\square. \quad (5.113)$$

Um die Dimension der inkompatiblen Massenmatrix \mathbf{M}^{gim} trotzdem beibehalten zu können, wird bei deren Berechnung für die Ansatzfunktionen $\tilde{\mathbf{N}}^{\text{gim}}$ die Dimension der Basisvektoren \mathbf{g}_0^i angenommen. Damit ist die Herleitung von \mathbf{M}^{gim} nicht mehr ganz widerspruchsfrei. Das ist aber für numerische Berechnungen irrelevant, da die inkompatiblen Massen zur Frequenzregulierung noch skaliert werden, siehe Abschnitt 5.4.3, wobei die Dimension des Skalierungsfaktors geändert werden kann. Das heißt, die für die vereinfachte Berechnung vernachlässigte tatsächliche Elementgeometrie könnte mit dem Skalierungsfaktor ausgeglichen werden, Stattdessen wird aber hier die Skalierung auf die Einhaltung der Standardzeitschrittgröße ausgerichtet, siehe Abschnitt 7.

5.6.7 Beispielhafte Umsetzung

Am Beispiel einer EAS-Formulierung wird die Berechnung der generalisierten Ansatzfunktionen und der daraus resultierenden diagonalen Massenmatrix dargestellt. Als Basis dient die Interpolationsmatrix von Li et al. [103], siehe Gleichung (3.60), die in Gleichung (5.114) zerlegt in 3 Gruppen dargestellt wird

$$\mathbf{B}^{\text{en}} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \eta & \zeta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & \zeta & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}_1^{\text{en}}} & \underbrace{\begin{pmatrix} \eta\xi & 0 & -\zeta\xi & 0 & 0 & 0 & \zeta\eta\xi & 0 & 0 \\ -\eta\xi & \zeta\eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta\eta\xi & 0 \\ 0 & -\zeta\eta & \zeta\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \zeta\eta\xi \\ \xi^2 - \eta^2 & 0 & 0 & \zeta\xi & \zeta\eta & 0 & \zeta\xi^2 & \zeta\eta^2 & 0 \\ 0 & \eta^2 - \zeta^2 & 0 & 0 & \eta\xi & \zeta\xi & 0 & \eta^2\xi & \zeta^2\xi \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}_2^{\text{en}}} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}_3^{\text{en}}} \end{pmatrix}. \quad (5.114)$$

Die ersten 9 Parameter entsprechen denen der Interpolationsmatrix von Andelfinger und Ramm [8]. Mit den weiteren Interpolationen werden sowohl Normalverzerrungen als auch Schubverzerrungen erweitert, die ohne Schwierigkeiten auch von den generalisierten Ansatzfunktionen reproduziert werden können. Zudem sind auch quadratische Terme in der Interpolation enthalten, für die mit einfachen Überlegungen die passenden generalisierten Ansatzfunktionen konstruiert werden. Die den 3 Gruppen zugehörigen generalisierten Ansatzfunktionen, zusammengefasst in $\mathbf{N}^{\text{gim}} = (\mathbf{N}_1^{\text{gim}} \mathbf{N}_2^{\text{gim}} \mathbf{N}_3^{\text{gim}})$, sind

$$\mathbf{N}_1^{\text{gim}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} P_2(\xi) & 0 & 0 & 0 & P_2(\eta) & 0 & 0 & 0 & P_2(\zeta) \\ 0 & P_2(\eta) & 0 & P_2(\xi) & 0 & 0 & P_2(\zeta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_2(\zeta) & 0 & 0 & P_2(\eta) & 0 & P_2(\xi) & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.115)$$

$$\mathbf{N}_2^{\text{gim}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} (P_2(\xi) - P_2(\eta))\eta & 0 & (P_2(\zeta) - P_2(\xi))\zeta \\ (P_2(\xi) - P_2(\eta))\xi & (P_2(\eta) - P_2(\zeta))\zeta & 0 \\ 0 & (P_2(\eta) - P_2(\zeta))\eta & (P_2(\zeta) - P_2(\xi))\xi \end{pmatrix} \quad (5.116)$$

und

$$\mathbf{N}_3^{\text{gim}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & P_2(\eta)\zeta & P_2(\zeta)\eta & P_2(\xi)\zeta\eta & P_2(\eta)\zeta\eta & P_2(\zeta)\zeta\eta \\ P_2(\xi)\zeta & 0 & P_2(\zeta)\xi & P_2(\xi)\zeta\xi & P_2(\eta)\zeta\xi & P_2(\zeta)\zeta\xi \\ P_2(\xi)\eta & P_2(\eta)\xi & 0 & P_2(\xi)\eta\xi & P_2(\eta)\eta\xi & P_2(\zeta)\eta\xi \end{pmatrix}. \quad (5.117)$$

Die Berechnung der inkompatiblen Massenmatrix ergibt sich mit Gleichung (5.97) oder (5.106) und der entsprechenden Vereinfachung aus Abschnitt 5.6.6 zu

$$\mathbf{M}^{\text{gim}} = \frac{v\rho}{45} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{9 \times 9} & \mathbf{0}_{9 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ & \frac{12}{7} \mathbf{1}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ & & \frac{2}{3} \mathbf{1}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ & & & \frac{29}{63} \frac{4}{45} \frac{4}{45} \\ \text{sym.} & & & \frac{29}{63} \frac{4}{45} \frac{29}{63} \end{pmatrix}, \quad (5.118)$$

wobei $\mathbf{1}_{n \times n}$ eine quadratische Einheitsmatrix der Dimension n und $\mathbf{0}_{m \times n}$ eine Nullmatrix der Dimension $m \times n$ darstellen. Darin sind lediglich die letzten 3 Freiheitsgrade miteinander gekoppelt, da diesen eine Interpolation mit quadratischen Ausdrücken und einer Kombination aus der Erweiterung der Normal- und Schubverzerrungen zugrunde liegt.

Für die Ermittlung weiterer generalisierter Ansatzfunktionen ist die hier gezeigte beispielhafte Umsetzung einfach zu wiederholen.

5.6.8 Diskussion der Konsistenz der Dimensionen

Für die Einheiten der Interpolation der generalisierten inkompatiblen Verschiebungen und den im Zusammenhang damit stehenden Größen wie der inkompatiblen Masse ergeben sich, aufgrund des Bezugs zu einer krummlinigen Basis, Unterschiede zu den klassischen inkompatiblen oder kompatiblen Ansätzen. Die Basiseinheiten werden im Folgenden durch die Länge L , Masse M und Zeit T ausgedrückt, mit denen beispielsweise eine Krafteinheit durch $F = MLT^{-2}$ ausgedrückt werden kann.

Für die folgende Überlegung ist zu beachten, dass die kovarianten Basisvektoren \mathbf{g}_i in einer Längeneinheit L und entsprechend die kontravarianten Basisvektoren \mathbf{g}^i dann in L^{-1} gegeben sind. Außerdem sind die generalisierten Ansatzfunktionen \tilde{N}^{gim} aus Gleichung (5.78) beziehungsweise den Gleichungen (5.88) bis (5.90) dimensionslos, da die lokalen Koordinaten ξ , η und ζ dimensionslos sind. Um zu gewährleisten, dass die generalisierte inkompatible Verschiebungsinterpolation in einer Längeneinheit L gegeben ist, folgt aus der Betrachtung der Einheiten nach Einsetzen von Gleichung (5.77) in (5.76)

$$\underbrace{\mathbf{u}}_L^{\text{gim}} = \sum_i \sum_A \underbrace{\tilde{N}_{iA}^{\text{gim}}}_{-} \underbrace{d_A^{\text{gim}}}_{L^2} \underbrace{\mathbf{g}_0^i}_{L^{-1}}, \quad (5.119)$$

dass die inkompatiblen Verschiebungsfreiheitsgrade d_A^{gim} in der, physikalisch nicht korrekten, Dimension L^2 gegeben sein müssen. D. h. die Dimension der Verschiebung \mathbf{u}^{gim} steht teils in der Komponente und teils in der Basis, was jedoch für Tensoren bzgl. krummliniger Basisvektoren, im Vergleich zu normierten Einheitsvektoren \mathbf{e}^i , üblich ist⁹, siehe Jaunzemis [74]. Diese nicht physikalischen Dimensionen können bei Bedarf, beispielsweise für die Ausgabe als Ergebnisgröße, auf Dimensionen einer sogenannten physikalischen Basis und Komponente transformiert werden¹⁰, was in der vorliegenden Arbeit nicht erforderlich war, da später betrachtete Ergebnisgrößen wie die Eigenfrequenzen in Kapitel 7, sich bereits in einer physikalischen Basis ergeben.

Für die Massenmatrix aus Gleichung (5.113) resultiert

$$\underbrace{\mathbf{M}^{\text{gim}}}_{M/L^2} = \underbrace{v/8}_{L^3} \int_{\square} \underbrace{\rho}_{M/L^3} \underbrace{(\tilde{\mathbf{N}}^{\text{gim}})^T (\tilde{\mathbf{N}}^{\text{gim}})}_{1/L^2} \underbrace{d\square}_{-}, \quad (5.120)$$

wobei in den Funktionen $\tilde{\mathbf{N}}^{\text{gim}}$ die Dimension $1/L$ der kontravarianten Basisvektoren \mathbf{g}_0^i verwendet wurde, siehe Abschnitt 5.6.6. Analog zu dieser Betrachtung tauchen in allen Größen, die mit den generalisierten inkompatiblen Ansatzfunktionen berechnet werden, jeweils zusätzlich die Dimension $1/L$ auf. In Gleichung (5.120) also durch zweimaliges Auftreten von $\tilde{\mathbf{N}}^{\text{gim}}$ dann $1/L^2$, was zur nicht physikalischen Dimension M/L^2 der inkompatiblen Masse \mathbf{M}^{gim} führt.

In der gleichen Weise ergibt sich für einen inkompatiblen Kraftvektor F/L , für eine inkompatible Steifigkeitsmatrix F/L^3 sowie eine gemischte kompatible-inkompatible Steifigkeitsmatrix F/L^2 als Dimension. Diese Größen werden aufgrund ihrer nicht physikalischen Dimension als Arbeitsgrößen bezeichnet, die in der vorliegenden Arbeit nicht ausgegeben werden. Dagegen verbleiben im Zusammenhang mit der Dimension der inkompatiblen Freiheitsgrade d^{gim} Verzerrungen und Spannungen, Eigenwerte sowie Energie- und Arbeitswerte physikalisch richtig. Beispielsweise gilt für die in diesem Kapitel eingeführte Arbeit infolge inkompatibler Trägheitskräfte

$$\underbrace{W^{\text{kin,gim}}}_{FL} = \frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{d}^{\text{gim}})^T}_{L^2} \underbrace{\mathbf{M}^{\text{gim}}}_{M/L^2} \underbrace{\mathbf{d}^{\text{gim}}}_{L^2}, \quad (5.121)$$

woraus die korrekte physikalische Dimension FL , also Kraft mal Länge, folgt.

Für die Verwendung der Standardformulierung inkompatibler Verschiebungen aus Abschnitt 5.5 sind die in diesem Abschnitt angestellten Betrachtungen nicht erforder-

⁹ Ein bekanntes Beispiel hierfür sind die kovarianten Verzerrungskomponenten, die in einer kontravarianten Basis dargestellt sind, siehe Gleichung (2.33) oder (2.34). Die Verzerrung selbst ist dimensionslos, woraus mit der Dimension $1/L^2$ der kontravarianten Basis die Dimension L^2 für die kovarianten Komponenten geschlossen wird. Damit können die generalisierten inkompatiblen Freiheitsgrade d_A^{gim} , aufgrund ihrer Dimension L^2 , direkt als kovariante Verzerrungskomponenten interpretiert werden.

¹⁰ Bei der Einführung einer physikalischen Basis bleibt allerdings die Orthogonalität zwischen den Basisvektoren nicht erhalten und die Berechnungen werden aufwendiger, siehe Jaunzemis [74].

derlich, da dann die gleichen Dimensionen wie im Fall kompatibler Verschiebungen verwendet werden.

5.7 Nutzenabschätzung für implizite Verfahren

Zum Vergleich zwischen einem expliziten und impliziten Zeitintegrationsverfahren wird das in Abschnitt 2.4 beschriebene implizite Newmarkverfahren auf die in Abschnitt 5.2 vorgeschlagene Formulierung angewandt. Für die Umsetzung werden die Ansätze für Geschwindigkeit und Verschiebung sowohl auf die kompatiblen

$$\ddot{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{co}} = \frac{\mathbf{d}_{n+1}^{\text{co}} - \mathbf{d}_{n+1}^{\text{co,P}}}{\Delta t^2 \beta} \quad \mathbf{d}_{n+1}^{\text{co,P}} = \mathbf{d}_n^{\text{co}} + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_n^{\text{co}} + \frac{1}{2} \Delta t^2 (1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{d}}_n^{\text{co}} \quad (5.122)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{co}} = \dot{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{co,P}} + \Delta t \gamma \ddot{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{co}} \quad \dot{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{co,P}} = \dot{\mathbf{d}}_n^{\text{co}} + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{d}}_n^{\text{co}}, \quad (5.123)$$

als auch die inkompatiblen Größen angewandt

$$\ddot{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{im}} = \frac{\mathbf{d}_{n+1}^{\text{im}} - \mathbf{d}_{n+1}^{\text{im,P}}}{\Delta t^2 \beta} \quad \mathbf{d}_{n+1}^{\text{im,P}} = \mathbf{d}_n^{\text{im}} + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_n^{\text{im}} + \frac{1}{2} \Delta t^2 (1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{d}}_n^{\text{im}} \quad (5.124)$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{im}} = \dot{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{im,P}} + \Delta t \gamma \ddot{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{im}} \quad \dot{\mathbf{d}}_{n+1}^{\text{im,P}} = \dot{\mathbf{d}}_n^{\text{im}} + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{d}}_n^{\text{im}}. \quad (5.125)$$

Die Ansätze (5.122)₁ und (5.124)₁ werden in das semidiscrete Gleichungssystem (5.38) zum Zeitpunkt $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ eingesetzt¹¹, wobei die letzte Zeile in (5.38) bzgl. der Freiheitsgrade \mathbf{d}^{en} hier nicht betrachtet wird, da dies zum Standardfall der statischen Kondensation inkompatibler Erweiterungen führt, siehe Kuhl und Ramm [96]. Zudem werden die Kräfte werden für einen linearen Fall mithilfe der Steifigkeiten wie folgt ausgedrückt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_{n+1}^{\text{co}} \\ \mathbf{f}_{n+1}^{\text{im}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\text{co}} & \mathbf{K}^{\text{co|im}} \\ \mathbf{K}^{\text{co|im}} & \mathbf{K}^{\text{im}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{n+1}^{\text{co}} \\ \mathbf{d}_{n+1}^{\text{im}} \end{bmatrix} \quad (5.126)$$

und das Gleichungssystem (5.38) erhält die Form

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2 \beta} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{\text{co}} & \mathbf{M}^{\text{co|im}} \\ \mathbf{M}^{\text{co|im}} & \mathbf{M}^{\text{im}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\text{co}} & \mathbf{K}^{\text{co|im}} \\ \mathbf{K}^{\text{co|im}} & \mathbf{K}^{\text{im}} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{n+1}^{\text{co}} \\ \mathbf{d}_{n+1}^{\text{im}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta t^2 \beta} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{\text{co}} & \mathbf{M}^{\text{co|im}} \\ \mathbf{M}^{\text{im|co}} & \mathbf{M}^{\text{im}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{n+1}^{\text{co,P}} \\ \mathbf{d}_{n+1}^{\text{im,P}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5.127)$$

¹¹ Die diagonale kompatible Massenmatrix $\mathbf{M}^{\text{co|d}}$ in Gleichung (5.38) wird durch die konsistente Massenmatrix \mathbf{M}^{co} , die in Gleichung (2.121) beschrieben wird, ersetzt. Durch diese Abstimmung von Zeitintegrationsverfahren und Struktur der Massenmatrix, was als *matched methods* bekannt ist, wird erreicht, dass bestimmte Defizite kompensiert werden, siehe Hughes [70].

Die inkompatiblen Verschiebungen $\mathbf{d}_{n+1}^{\text{im}}$ werden durch statische Kondensation aus dem Gleichungssystem (5.127), das in den nachfolgenden Ausführungen auf Elementebene betrachtet wird, eliminiert. Zunächst werden die folgenden Größen eingeführt

$$\begin{bmatrix} \Gamma^{\text{co}} & \Gamma^{\text{co|im}} \\ \Gamma^{\text{co|im}} & \Gamma^{\text{im}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta t^2 \beta} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{\text{co}} & \mathbf{M}^{\text{co|im}} \\ \mathbf{M}^{\text{co|im}} & \mathbf{M}^{\text{im}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\text{co}} & \mathbf{K}^{\text{co|im}} \\ \mathbf{K}^{\text{co|im}} & \mathbf{K}^{\text{im}} \end{bmatrix} \quad (5.128)$$

$$\mathbf{r}^{\text{co}} = \frac{1}{\Delta t^2 \beta} (\mathbf{M}^{\text{co}} \mathbf{d}_{n+1}^{\text{co,P}} + \mathbf{M}^{\text{co|im}} \mathbf{d}_{n+1}^{\text{co,P}}) + \mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}} \quad (5.129)$$

$$\mathbf{r}^{\text{im}} = \frac{1}{\Delta t^2 \beta} (\mathbf{M}^{\text{im|co}} \mathbf{d}_{n+1}^{\text{co,P}} + \mathbf{M}^{\text{im}} \mathbf{d}_{n+1}^{\text{im,P}}), \quad (5.130)$$

die für eine kompaktere Darstellung von Gleichung (5.127) genutzt werden

$$\begin{bmatrix} \Gamma^{\text{co}} & \Gamma^{\text{co|im}} \\ \Gamma^{\text{co|im}} & \Gamma^{\text{im}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{n+1}^{\text{co}} \\ \mathbf{d}_{n+1}^{\text{im}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^{\text{co}} \\ \mathbf{r}^{\text{im}} \end{bmatrix}. \quad (5.131)$$

Die zweite Zeile des Gleichungssystems (5.131) wird nach $\mathbf{d}_{n+1}^{\text{im}}$ aufgelöst

$$\mathbf{d}_{n+1}^{\text{im}} = (\Gamma^{\text{im}})^{-1} (\mathbf{r}^{\text{im}} - \Gamma^{\text{im|co}} \mathbf{d}_{n+1}^{\text{co}}), \quad (5.132)$$

und anschließend in die erste Gleichung eingesetzt

$$\underbrace{(\Gamma^{\text{co}} - \Gamma^{\text{co|im}} (\Gamma^{\text{im}})^{-1} \Gamma^{\text{im|co}})}_{\mathbf{K}^{\text{cnd}} \text{ (Kondensation)}} \mathbf{d}_{n+1}^{\text{co}} = \underbrace{\mathbf{r}^{\text{co}} - \Gamma^{\text{co|im}} (\Gamma^{\text{im}})^{-1} \mathbf{r}^{\text{im}}}_{\mathbf{r}^{\text{cnd}} \text{ (Kondensation)}}. \quad (5.133)$$

Die kondensierten Matrizen werden für die gesamte Struktur assembliert, und das Gleichungssystem auf globaler Ebene gelöst. Die Zeitintegration der inkompatiblen Größen erfolgt damit nur auf Elementebene. Die Unbekannten $\mathbf{d}_{n+1}^{\text{co}}$ und $\mathbf{d}_{n+1}^{\text{im}}$ sind durch \mathbf{L}^{ik} miteinander gekoppelt. Diese Kopplung besteht auch für den Fall einer Entkopplung der kompatiblen und inkompatiblen Massenmatrizen (also $\mathbf{M}^{\text{im|co}} = (\mathbf{M}^{\text{co|im}})^T = \mathbf{0}$), da in diesem Fall $\Gamma^{\text{co|im}} = \mathbf{K}^{\text{im|co}}$ gilt. Eine vollständige Entkopplung ist damit nur für $\mathbf{K}^{\text{im|co}} = \mathbf{0}$ möglich. Letzteres ist *nicht sinnvoll*, da dann die inkompatiblen Parameter *keinen Einfluss* mehr auf die Verschiebungen haben.

Für den Fall, dass keine inkompatiblen Massen existieren, gilt mit $\mathbf{M}^{ik} = (\mathbf{M}^{ki})^T = \mathbf{0}$ sowie $\mathbf{M}^{ii} = \mathbf{0}$

$$\Gamma^{\text{co|im}} = (\Gamma^{\text{im|co}})^T = \mathbf{K}^{\text{co|im}} \quad \Gamma^{\text{im}} = \mathbf{K}^{\text{im}} \quad (5.134)$$

$$\mathbf{r}^{\text{co}} = \mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}} + \frac{1}{\Delta t^2 \beta} \mathbf{M}^{\text{co}} \mathbf{d}_{n+1}^{\text{co,P}} \quad \mathbf{r}^{\text{im}} = \mathbf{0} \quad (5.135)$$

und das Gleichungssystem (5.131) vereinfacht sich zu

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta t^2 \beta} \mathbf{M}^{\text{co}} + \mathbf{K}^{\text{co}} & \mathbf{K}^{\text{co|im}} \\ \mathbf{K}^{\text{im|co}} & \mathbf{K}^{\text{im}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{n+1}^{\text{co}} \\ \mathbf{d}_{n+1}^{\text{im}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{n+1}^{\text{ext}} + \frac{1}{\Delta t^2 \beta} \mathbf{M}^{\text{co}} \mathbf{d}_{n+1}^{\text{co,P}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5.136)$$

Dann führt die Statische Kondensation der Freiheitsgrade $\mathbf{d}_{n+1}^{\text{im}}$ auf die Standard EAS-Methode

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\Delta t^2 \beta} \mathbf{M}^{\text{co}} + \mathbf{K}^{\text{co}} - \mathbf{K}^{\text{co|im}} (\mathbf{K}^{\text{im}})^{-1} \mathbf{K}^{\text{im|co}}\right)}_{\mathbf{K}^{\text{cnd}} \text{ (effektive Steifigkeitsmatrix)}} \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{r}^{\text{co}}, \quad (5.137)$$

wie sie auch bei Kuhl und Ramm [96] beschrieben wird.

Es kann festgehalten werden, dass

1. für das Newmarkverfahren kompatible und inkompatible Freiheitsgrade immer gekoppelt bleiben und
2. daher für inkompatible Freiheitsgrade auf Elementebene immer eine implizite Berechnung erforderlich ist.
3. Das heißt, es wäre auch mit effizienteren Operationen auf globaler Ebene keine Steigerung der numerischen Effizienz der Simulation zu erwarten.

Diese Feststellungen gelten uneingeschränkt in nichtlinearen Fällen, die eine Linearisierung erfordern, um das Gleichungssystem (5.127) zu lösen.

5.8 Zusammenfassung

Die wichtigsten in diesem Kapitel erarbeiteten Punkte sind in der folgenden Aufzählung zusammengefasst. Es wurde

1. eine variationelle Basis für die Formulierung von Elementen mit inkompatiblen Massen entwickelt,
2. die explizite und implizite Berechnung der erforderlichen Gleichungen zur Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade algorithmisch aufbereitet,
3. sowohl die Herleitung der inkompatiblen Ansatzfunktionen als auch die Diskretisierung der inkompatiblen Massenmatrix bereitgestellt und
4. durch generalisierte inkompatible Ansatzfunktionen eine Anwendung des vorgestellten Konzepts auf nahezu beliebiger EAS-Formulierungen gezeigt.

6 8-knotige Volumen- und Volumenschalen für inkompatible Erweiterungen

Zur Analyse der numerischen Effizienz und Robustheit der vorgeschlagenen Methodik werden zunächst, auch im Rahmen von Vergleichen, geeignete Elementformulierungen benötigt. Dazu wird angelehnt an Entwicklungen von Korelc und Wriggers [88], in weiterentwickelter Form bei Korelc et al. [86], ein vereinfachter Vorschlag für ein effektives Element gemacht, das die klassischen Wilson-Funktionen enthält. Zum weiteren Vergleich und zur Diskussion der Anzahl der Parameter wird eine Serie von weiteren 8-knotigen Volumenelementen mit 9 bis 30 inkompatiblen Freiheitsgraden sowie 8-knotige Volumenschalenelemente mit 7 bis 12 inkompatiblen Freiheitsgraden betrachtet und anhand bekannter geometrisch linearer Benchmarks einander gegenübergestellt. Die technische Umsetzung für geometrisch nichtlineare Probleme in einer mitgehenden und totalen Lagrange-Formulierung für inkrementelle und totale Verschiebungen wird ebenfalls gezeigt. Dabei wird auf einige Besonderheiten bei der Implementierung in explizite Verfahren näher eingegangen. Die Implementierung der Elemente erfolgt mit ACEGEN [85], siehe auch Anhang A für Details.

6.1 Auf Taylorreihen basierendes Wilson-Element mit inkompatiblen Massen

6.1.1 Variationelle Basis

Die variationelle Basis stellt die in Kapitel 5 neu eingeführte, um inkompatible Trägheiten erweiterte, schwache Form (5.19) dar

$$\int_{B_e} \delta \left[\epsilon^{\text{co}} + \epsilon^{\text{im}} + \epsilon^{\text{en}} \right] \cdot \sigma^\epsilon \, dv + \int_{B_e} \delta \mathbf{u}^{\text{co}} \cdot \rho \ddot{\mathbf{u}}^{\text{co}} \, dv + \int_{B_e} \delta \mathbf{u}^{\text{im}} \cdot \rho \ddot{\mathbf{u}}^{\text{im}} \, dv - \int_{B_e} \delta \mathbf{u}^{\text{co}} \cdot \rho \mathbf{b} \, dv - \int_{\partial B_e^t} \delta \mathbf{u}^{\text{co}} \cdot \mathbf{t} \, da = 0. \quad (6.1)$$

Darin sind die kompatiblen und inkompatiblen Verschiebungen \mathbf{u}^{co} und \mathbf{u}^{im} sowie die kompatiblen und inkompatiblen Verzerrungen ϵ^{co} und ϵ^{im} enthalten. Zusammen mit den erweiterten Verzerrungen ϵ^{en} wird das gesamte Verschiebungs- und Verzerrungsfeld definiert

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\text{co}} + \mathbf{u}^{\text{im}} \tag{6.2}$$

$$\epsilon = \epsilon^{\text{co}} + \epsilon^{\text{im}} + \epsilon^{\text{en}} , \tag{6.3}$$

in dessen Abhängigkeit die Spannungen σ^ϵ berechnet werden. \mathbf{b} und \mathbf{t} stellen die Volumen- und Oberflächenbelastung dar. Die Bedingungen zur Realisierung des Patchtests sind

$$\int_{\mathcal{B}_e} (\text{sym}(\text{grad}\mathbf{u}^{\text{co}}) - \epsilon^{\text{co}}) dv = 0 \tag{6.4}$$

$$\int_{\mathcal{B}_e} \epsilon^{\text{im}} dv = 0 \quad \text{mit } \epsilon^{\text{im}} = \text{sym}(\text{grad}\mathbf{u}^{\text{im}}) \tag{6.5}$$

$$\int_{\mathcal{B}_e} \epsilon^{\text{en}} dv = 0 , \tag{6.6}$$

und diese sollen über die Gestaltung der Elementgrößen direkt erfüllt werden. Nicht dargestellt sind die bereits in den Abschnitten 5.2.2 und 5.2.4 abgehandelten Forderungen an die inkompatiblen Ansatzfunktionen zur Entkopplung der Massenmatrix sowie die optionale Bedingung, die Arbeit aus Volumenlasten entlang inkompatibler Verschiebungen zu eliminieren. Die Unterteilung des kontinuierlichen Körpers in endlich viele finite Elemente $\mathcal{B} \approx \mathcal{B}_e = \bigcup_{e=1}^{n_e} v_e$ mit dem Volumen v_e erfolgt auf Basis des 8-knotigen Hexaederelements in Abbildung 6.1. In den nachfolgenden Ausführungen wird, falls nicht anders angegeben, der Bezug zu einem Element angenommen und der Übersicht zuliebe auf den Index e für Elementgrößen verzichtet.

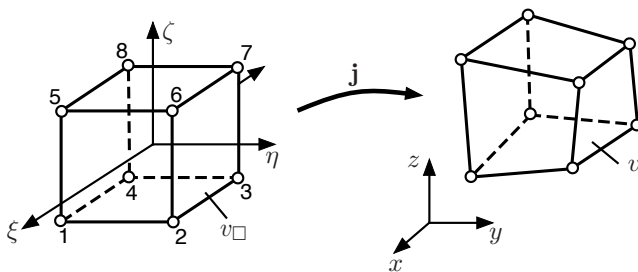


Abbildung 6.1: Basiselement mit dem Volumen v_{\square} und Transformationsbeziehung mit der Jakobimatrix \mathbf{j} auf die tatsächliche Geometrie eines Elements mit dem Volumen v .

6.1.2 Grundstruktur des 8-knotigen Hexaederelements

Die Geometrie, dargestellt durch den zeitabhängigen Ortsvektor $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ mit den globalen Koordinaten $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T = (x, y, z)^T$, wird mit den Ansatzfunktionen N_I und den Koordinaten x_{iI} des Elementknotens I interpoliert

$$x_i = \sum_I N_I x_{iI} , \quad (6.7)$$

und beschreibt zum Zeitpunkt $t = 0$ die Koordinaten der Referenzkonfiguration X_i . In einem isoparametrischen Element kann damit die Interpolation der kompatiblen Verschiebungen $\mathbf{u}^{co} = (u_1^{co}, u_2^{co}, u_3^{co})^T = (u^{co}, v^{co}, w^{co})^T$ angegeben werden

$$u_i^{co} = x_i - X_i = \sum_I N_I (x_{iI} - X_{iI}) = \sum_I N_I u_{iI}^{co} . \quad (6.8)$$

Ein kleingeschriebener Index bezieht sich auf die Dimension im Raum im Bereich $i = 1, 2, 3$ und ein großgeschriebener Index auf die Eckkoordinaten im Bereich $I = 1, \dots, 8$. Die Ansatzfunktionen

$$N_I = \frac{1}{8} (1 + \xi_I^\square \xi) (1 + \eta_I^\square \eta) (1 + \zeta_I^\square \zeta) \quad (6.9)$$

sind abhängig von den lokalen Koordinaten $\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)^T \equiv (\xi, \eta, \zeta)^T$, die am I -ten Knoten des Basiselements die Koordinaten $\xi_I^\square, \eta_I^\square, \zeta_I^\square$ einnehmen

$$\begin{aligned} \xi^\square &= (-1, +1, +1, -1, -1, +1, +1, -1)^T \\ \eta^\square &= (-1, -1, +1, +1, -1, -1, +1, +1)^T \\ \zeta^\square &= (-1, -1, -1, -1, +1, +1, +1, +1)^T . \end{aligned} \quad (6.10)$$

Für die Darstellung von Verzerrungen nimmt die Berechnung der Ableitung nach den globalen Koordinaten eine zentrale Rolle ein. Die Vorschrift zu ihrer Berechnung wird konventionell über die Kettenregel gewonnen, die die gesuchten Ableitungen, hier für die Ableitung nach ξ dargestellt, enthält

$$\frac{\partial N_I}{\partial \xi} = \frac{\partial N_I}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_I}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_I}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} . \quad (6.11)$$

Die analoge Ausführung für η und ζ generiert die Transformationsbeziehung zwischen den Ableitungen nach lokalen und globalen Koordinaten

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_I}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_I}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial x} \\ \frac{\partial N_I}{\partial y} \\ \frac{\partial N_I}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{j} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_I}{\partial x} \\ \frac{\partial N_I}{\partial y} \\ \frac{\partial N_I}{\partial z} \end{bmatrix} , \quad (6.12)$$

die die Jakobimatrix definieren

$$\mathbf{j} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right)^T \quad j_{\alpha i} = \sum_I \frac{\partial N_I}{\partial \xi^\alpha} x_{iI} . \quad (6.13)$$

Die Inverse ist eine rationale Funktion, die direkt als Quotient aus der Adjunkten $\text{adj } \mathbf{j}$ und der Determinanten $j = \det \mathbf{j}$ berechnet wird (siehe Anhang E)

$$\mathbf{j}^{-1} = \frac{\text{adj}(\mathbf{j})}{j} , \quad (6.14)$$

und ermöglicht die im Folgenden häufig verwendete umgekehrte Transformation

$$\frac{\partial N_I}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{j}^{-1} \frac{\partial N_I}{\partial \boldsymbol{\xi}} . \quad (6.15)$$

Die Matrizen \mathbf{b} und $\boldsymbol{\beta}$ sind definiert¹ durch

$$\mathbf{b} = \mathbf{j}^{-1} \boldsymbol{\beta} \quad (6.16)$$

und enthalten die Ableitung der Ansatzfunktionen nach den globalen und lokalen Koordinaten. Die mit der Ansatzfunktion I korrespondierenden Einträge in $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_I \dots \mathbf{b}_8)$ und $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1 \dots \beta_I \dots \beta_8)$ sind

$$\mathbf{b}_I = \mathbf{j}^{-1} \boldsymbol{\beta}_I \quad (6.17)$$

mit den Komponenten $\mathbf{b}_I = (b_{xI}, b_{yI}, b_{zI})^T$ und $\boldsymbol{\beta}_I = (\beta_{\xi I}, \beta_{\eta I}, \beta_{\zeta I})^T$, definiert durch

$$b_{iI} = N_{I,i} = \frac{\partial N_I}{\partial x_i} \quad \beta_{\alpha I} = N_{I,\alpha} = \frac{\partial N_I}{\partial \xi^\alpha} . \quad (6.18)$$

Die Abbildung des Elementvolumens auf das Basiselement erfolgt durch die Determinante $j = dv/d\Box$, die den Quotienten der beiden Volumina beschreibt,

$$\int_{\mathcal{B}} f(\mathbf{x}) dv = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\boldsymbol{\xi}) j d\xi d\eta d\zeta = \int_{\Box} f(\boldsymbol{\xi}) j d\Box . \quad (6.19)$$

Da j ein Polynom in den Variablen ξ, η, ζ ist, kann die Berechnung des Elementvolumens v durch eine geschlossene Vorschrift mit ausschließlicher Abhängigkeit der Elementkoordinaten berechnet werden, bevor eine numerische Integrationschleife beginnt. Somit gilt für die Integration über eine konstante Funktion f^c

$$\int_{\Box} f^c j d\Box = f^c v . \quad (6.20)$$

¹ Das Symbol \mathbf{b} ist nicht mit der Volumenbelastung aus Gleichung (6.1) zu verwechseln. Da diese in diesem Kapitel nicht auftaucht, wird hier auf ein zusätzliches Symbol verzichtet.

6.1.3 Gestaltung der Verzerrungen

Das kompatible Verzerrungsfeld ε^{co} wird in einen konstanten Anteil ε^m und einen von den Elementkoordinaten abhängigen Anteil $\varepsilon^a(\xi)$ aufgeteilt

$$\varepsilon^{\text{co}} = \varepsilon^m + \varepsilon^a(\xi) . \quad (6.21)$$

Nach dem Einsetzen in Gleichung (6.4) ergeben sich zwei weitere Bedingungen

$$\int_v (\text{sym}(\text{gradu}^{\text{co}}) - \varepsilon^m) \, dv = \mathbf{0} \quad (6.22)$$

$$\int_v \varepsilon^a(\xi) \, dv = \mathbf{0} . \quad (6.23)$$

Die erste Bedingung (6.22) wird mit den Gleichungen (6.19) und (6.20) nach der konstanten Verzerrung ε^m umgestellt, die somit eine mittlere Verzerrung bezogen auf das Elementvolumen repräsentiert

$$\varepsilon^m = \frac{1}{v} \int_{\square} \text{sym}(\text{gradu}^{\text{co}}) \, jd \square . \quad (6.24)$$

Anhand der Matrixnotation von Gleichung (6.24)

$$\{\varepsilon^m\} = \frac{1}{v} \int_{\square} \left(\sum_I \begin{bmatrix} N_{I,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{I,y} & 0 \\ 0 & 0 & N_{I,z} \\ N_{I,y} & N_{I,x} & 0 \\ 0 & N_{I,z} & N_{I,y} \\ N_{I,z} & 0 & N_{I,x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_I^{\text{co}} \\ v_I^{\text{co}} \\ w_I^{\text{co}} \end{bmatrix} \right) \, jd \square \quad (6.25)$$

lässt sich folgern, dass nur die Mittelung der Ableitung nach den Koordinaten x , y und z benötigt wird. Mit Gleichung (6.14) vereinfacht sich die Berechnung

$$\mathbf{b}_I^m = \frac{1}{v} \int_{\square} \frac{\partial N_I}{\partial \mathbf{x}} \, j \, d \square = \frac{1}{v} \int_{\square} \frac{\text{adj}(\mathbf{j})}{j} \frac{\partial N_I}{\partial \xi} \, j \, d \square = \frac{1}{v} \int_{\square} \text{adj}(\mathbf{j}) \frac{\partial N_I}{\partial \xi} \, d \square \quad (6.26)$$

durch die Elimination der Determinante j , sodass im Integranden anstatt einer rationalen Funktion ein Polynom verbleibt. Damit ist eine analytische Berechnung der Komponenten von \mathbf{b}_I^m möglich, womit die Verzerrungen ε^m unabhängig von einer numerischen Integrationsschleife ermittelt werden können. Die Definition der Matrix \mathbf{B}^m erfolgt durch

$$\{\varepsilon^m\} = \mathbf{B}^m \mathbf{d}^{\text{co}} \quad \{\delta \varepsilon^m\} = \mathbf{B}^m \delta \mathbf{d}^{\text{co}} \quad (6.27)$$

mit gleichzeitiger Einführung des Vektors der Verschiebungsfreiheitsgrade

$$\mathbf{d}^{\text{co}} = [\dots \quad u_I^{\text{co}} \quad v_I^{\text{co}} \quad w_I^{\text{co}} \quad \dots]^T \quad (6.28)$$

und der in $\mathbf{B}^m = (\mathbf{B}_1^m \dots \mathbf{B}_I^m \dots \mathbf{B}_8^m)$ enthaltenen Interpolationsmatrix eines Knotens I

$$\mathbf{B}_I^m = \begin{bmatrix} b_{xI}^m & 0 & 0 \\ 0 & b_{yI}^m & 0 \\ 0 & 0 & b_{zI}^m \\ b_{yI}^m & b_{xI}^m & 0 \\ 0 & b_{zI}^m & b_{yI}^m \\ b_{zI}^m & 0 & b_{xI}^m \end{bmatrix}. \quad (6.29)$$

Der verbleibende Anteil $\varepsilon^a(\boldsymbol{\xi})$ ist eine angenommene Verzerrung, daher der Index a , und ist so zu gestalten, dass Gleichung (6.23) eingehalten wird. Das kann durch eine Interpolation in den lokalen Koordinaten ζ , η und ζ erreicht werden

$$\varepsilon^a(\boldsymbol{\xi}) = \varepsilon_{\zeta}^a \zeta + \varepsilon_{\eta}^a \eta + \varepsilon_{\zeta}^a \zeta + \varepsilon_{\zeta\eta}^a \zeta\eta + \varepsilon_{\eta\zeta}^a \eta\zeta + \varepsilon_{\zeta\zeta}^a \zeta\zeta, \quad (6.30)$$

die durch einen Ausschnitt der Taylorreihenentwicklung des symmetrischen Verschiebungsgradienten um die Elementmitte ermittelt werden kann. Ein konstanter Anteil wird hier nicht aufgeführt, da das Verzerrungsfeld bereits mit ε^m einen konstanten Anteil besitzt. Die Details werden im folgenden Abschnitt beschrieben.

Modifikation der Volumenabbildung

Für die allgemeine Einhaltung von Gleichung (6.23) wird anstatt $dv = j(\boldsymbol{\xi})d\Box$ eine modifizierte Abbildung des Elementvolumens $dv = j^c d\Box$ mit einem konstanten Volumenquotienten j^c benötigt, da nur dann die linearen und bilinearen Terme der Interpolation (6.30) mit

$$\int_{\Box} \zeta^i d\Box = 0 \quad \int_{\Box} \zeta^i \zeta^j d\Box = 0 \quad (i \neq j) \quad (6.31)$$

verschwinden. Ergo ersetzt der modifizierte Volumenquotient j^c zur Berechnung aller weiteren Volumenintegrale den nicht modifizierten Volumenquotienten j . Dadurch darf aber keine Unverträglichkeit mit der Einhaltung von Bedingung (6.22), und damit des Patchtests, entstehen. Die mittleren Verzerrungen ε^m resultieren zwar direkt aus Bedingung (6.22), setzen aber zu deren Einhaltung die Verwendung des nicht modifizierten Volumenquotienten j aus der Abbildung in Gleichung (6.19) voraus².

Daher müssen, egal ob j oder j^c zur Abbildung des Volumens verwendet wird, sich identische Ausdrücke für Kraft und Steifigkeit ergeben, wenn diese aus ε^m berechnet

² Eine alternative Berechnung von ε^m wird nicht in Betracht gezogen, da ansonsten die vereinfachte Berechnung der Mittelung in Gleichung (6.26), die durch das Kürzen des Volumenquotienten j analytisch möglich ist, geopfert werden müsste.

werden und ein konstanter Spannungszustand vorliegt. Diese Forderung liefert den modifizierten Volumenquotienten j^c

$$\begin{aligned} \int_{\square} \mathbf{B}^{mT} \{\boldsymbol{\sigma}^c\} j d\square &= \int_{\square} \mathbf{B}^{mT} \{\boldsymbol{\sigma}^c\} j^c d\square \quad \rightarrow \quad \int_{\square} j d\square = j^c \int_{\square} d\square \\ &\rightarrow \quad j^c = \frac{v}{8}, \end{aligned} \quad (6.32)$$

der j für die Abbildung des Volumens ersetzt, sodass die aus Bedingung (6.22) resultierende Verzerrung $\boldsymbol{\varepsilon}^m$ weiterhin mit den Gleichungen (6.24) bis (6.29) berechnet werden kann und dabei Bedingung (6.23) nicht verletzt wird.

Modifikationen dieser Art liegen insbesondere für die Formulierung reduziert integrierter Elementansätze beispielsweise bei Puso [132] vor, werden aber auch für Elemente mit numerischer Integration angewandt, siehe Korelc und Wriggers [88] oder Korelc et al. [86].

Abgrenzung zwischen inkompatiblen Verschiebungs- und Verzerrungsfreiheitsgraden

Generell können mit den in Kapitel 5 beschriebenen Verfahren alle inkompatiblen Anreicherungen entweder mit einer zugeordneten Masse explizit über die Zeit gelöst oder statisch kondensiert werden. Die inkompatiblen Freiheitsgrade und ihre zugehörigen Größen, die explizit über die Zeit gelöst werden, sind mit *im* oder, falls aus einer direkten Verzerrungserweiterung zunächst Ansatzfunktionen generiert werden müssen, mit *gim* gekennzeichnet. Die Bezeichnung *en* erhalten entsprechend alle inkompatiblen Freiheitsgrade und zugehörige Größen, die keine Masse besitzen und statisch kondensiert werden. In der hier beschriebenen Elementformulierung sollen ausschließlich die inkompatiblen Erweiterungen auf Basis der inkompatiblen Verschiebungsinterpolation, siehe Gleichung (6.60), verwendet werden. Die verwendete Bezeichnung *im* deutet also an, dass eine explizite Berechnung erfolgt.

Um die Genauigkeitsverbesserungen infolge verschiedener inkompatibler Erweiterungen zu vergleichen, ist es sinnvoll, gerade im geometrisch linearen Bereich, die inkompatiblen Freiheitsgrade statisch zu kondensieren. Für diesen Fall werden die Freiheitsgrade und die Matrizen zur Berechnung der Verzerrungen einfach in die Notation für reine Verzerrungserweiterungen überführt

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{en}}\} = \sum_A \mathbf{B}_A^{\text{en}} d_A^{\text{en}}, \quad (6.33)$$

wobei mit A die jeweiligen Spalten bezeichnet werden.

6.1.4 Taylorreihenentwicklung der Ableitung der Ansatzfunktionen

Vorschlag von Korelc und Wriggers

Um Verzerrungen in der Form nach Gleichung (6.30) zu erhalten, schlagen Korelc und Wriggers [88] eine Taylorreihenentwicklung der Ableitung der Ansatzfunktionen um den Elementmittelpunkt vor. Zunächst werden hierfür die Funktionen

$$T_1(f(\boldsymbol{\xi})) = \left. \frac{\partial f}{\partial \xi} \right|_0 \xi + \left. \frac{\partial f}{\partial \eta} \right|_0 \eta + \left. \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right|_0 \zeta \quad (6.34)$$

$$T_2(f(\boldsymbol{\xi})) = \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} \right|_0 \xi \eta + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \zeta} \right|_0 \eta \zeta + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \zeta} \right|_0 \xi \zeta \quad (6.35)$$

mit linearen und bilinearen Taylorpolynomen definiert, wobei für die Auswertung in Elementmitte die folgende Abkürzung verwendet wird

$$(\cdot)|_0 = (\cdot)|_{\xi=0, \eta=0, \zeta=0} \cdot \quad (6.36)$$

Nach Korelc et al. [86] werden die Normalanteile der angenommenen Verzerrung $\boldsymbol{\varepsilon}^a$ mit den beiden Funktionen T_1 und T_2 linear und bilinear approximiert, während es für die Schubanteile ausreichend ist, eine lineare Approximation mit T_1 durchzuführen

$$\mathbf{b}_I^1 = T_1 \left(\mathbf{j}^{-1} \frac{\partial N_I}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right) \quad \mathbf{b}_I^2 = T_2 \left(\mathbf{j}^{-1} \frac{\partial N_I}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right) \cdot \quad (6.37)$$

Die angenommenen Verzerrungen sind damit darstellbar durch

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}^a\} = \mathbf{B}^a \mathbf{d}^{\text{co}} \quad (6.38)$$

mit den zum Knoten I zugehörigen Einträgen von $\mathbf{B}^a = (\mathbf{B}_1^a \dots \mathbf{B}_I^a \dots \mathbf{B}_8^a)$

$$\mathbf{B}_I^a = \begin{bmatrix} b_{xI}^1 + b_{xI}^2 & 0 & 0 \\ 0 & b_{yI}^1 + b_{yI}^2 & 0 \\ 0 & 0 & b_{zI}^1 + b_{zI}^2 \\ b_{yI}^1 & b_{xI}^1 & 0 \\ 0 & b_{zI}^1 & b_{yI}^1 \\ b_{zI}^1 & 0 & b_{xI}^1 \end{bmatrix} \cdot \quad (6.39)$$

Diese Formulierung erfüllt den Patchtest. Die Berechnung der Taylorreihenentwicklung der Ableitung der Ansatzfunktionen wird ohne Vereinfachungen durchgeführt und erfolgt automatisiert nach dem Konzept von Korelc und Wriggers [91]. Ein Vorteil dieser Formulierung ist, dass alle in den Taylorreihengliedern enthaltenen Anteile unabhängig und damit noch vor Beginn einer numerischen Integrationsschleife berechnet werden können. Somit entfällt die wiederholte Berechnung beim Durchlaufen der Integrationsschleife.

Das Prinzip, Elementformulierungen mit Taylorreihen zu formulieren, wurde bereits bei Liu et al.[108] verwendet, um Stabilisierungskräfte für Elemente mit Ein-Punkt-Integration zu erhalten. Mit den im nächsten Abschnitt gezeigten Vereinfachungen wird die Nähe zu reduziert integrierten Elementformulierungen deutlich. So haben Korelc und Wriggers die Methodik aus der Welt reduziert integrierter Elemente quasi übernommen und für die Entwicklung von Elementen mit inkompatiblen Erweiterungen umgesetzt. Dabei führen die Taylorreihen zu stabileren Elementen während die inkompatiblen Erweiterungen effektiv Versteifungseffekte vermeiden.

6.1.5 Vereinfachung und Nähe zur Hourglasstabilisierung

Die Ableitung der Ansatzfunktionen $\mathbf{b}_I = \partial N_I / \partial \mathbf{x}$ wird in die Anteile \mathbf{b}_I^m und \mathbf{b}_I^q aufgeteilt. Mit \mathbf{b}_I^m und \mathbf{b}_I^q werden die Verzerrungen ε^m und ε^a basierend auf Gleichung (6.22) und (6.23) berechnet. Zunächst gilt offensichtlich

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_I(\boldsymbol{\xi}) &= \mathbf{b}_I^m + \mathbf{b}_I(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{b}_I^m = \mathbf{b}_I^m + \mathbf{j}^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \left(\beta_I(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{j}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{b}_I^m \right) \\ &= \mathbf{b}_I^m + \mathbf{b}_I^q(\boldsymbol{\xi}), \end{aligned} \quad (6.40)$$

mit Beachtung von $\beta_I = \partial N_I / \partial \boldsymbol{\xi}$ und $\mathbf{b}_I = \mathbf{j}^{-1} \beta_I$. Eine Approximation von \mathbf{b}_I^q mit den Funktionen T_1 und T_2 aus den Gleichungen (6.34) und (6.35)

$$\mathbf{b}_I^q \approx \sum_{n=1}^2 T_n \left(\mathbf{j}^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \left(\beta_I(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{j}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{b}_I^m \right) \right) = \sum_{n=1}^2 T_n \left(\mathbf{j}^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \beta_I(\boldsymbol{\xi}) \right) \quad (6.41)$$

führt zu identischen Ausdrücken wie in der Approximation (6.38), da der in Gleichung (6.40) subtrahierte Ausdruck \mathbf{b}_I^m konstant ist, und somit in den linearen und bilinearen Funktionen T_1 und T_2 nicht auftaucht. Gleichung (6.40) stellt damit eine sinnvolle Basis für die Approximation (6.38) dar.

Eine substantielle Vereinfachung der Approximation in Gleichung (6.41) wird erreicht, wenn die inverse Jakobimatrix \mathbf{j}^{-1} , die eine rationale Funktion ist, durch eine konstante Transformationsmatrix \mathbf{t}^c ersetzt wird. Damit gilt

$$\mathbf{b}_I^q \approx \mathbf{t}^c \left(\sum_{n=1}^2 T_n \left(\beta_I(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{j}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{b}_I^m \right) \right) = \mathbf{t}^c \beta_I^q(\boldsymbol{\xi}) \quad (6.42)$$

$$= \mathbf{t}^c \left(\beta_I^{a\zeta} \zeta + \beta_I^{a\eta} \eta + \beta_I^{a\zeta} \zeta + \beta_I^{a\zeta\eta} \zeta\eta + \beta_I^{a\eta\zeta} \eta\zeta + \beta_I^{a\zeta\zeta} \zeta\zeta \right), \quad (6.43)$$

mit den kompakt dargestellten Anteilen

$$\beta_I^{a\alpha} = \left(\beta_I(\boldsymbol{\xi}) - \mathbf{j}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{b}_I^m \right)_{,\alpha} \Big|_0 \quad \alpha = \zeta, \eta, \zeta, \zeta\eta, \eta\zeta, \zeta\zeta. \quad (6.44)$$

Im Argument der Funktionen T_1 und T_2 verbleibt zwar der zusätzliche Term $\mathbf{j}(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{b}_I^m$, der aber wie $\beta_I(\boldsymbol{\xi})$ lediglich ein Polynom mit linearen und bilinearen Anteilen in den

lokalen Koordinaten ξ , η und ζ darstellt. Demnach ist keine Berechnung, sondern nur die Einsortierung der linearen und bilinearen Anteile von $\beta_I(\xi)$ und $\mathbf{j}(\xi)$ in die in Gleichung (6.43) gezeigten Anteile von β_I^q erforderlich, und im Vergleich zur rationalen Funktion \mathbf{j}^{-1} werden keine weiteren Berechnungsschritte benötigt. Diese Approximation führt ebenfalls zur Erfüllung des Patchtests, wofür der zusätzliche Term $\mathbf{j}(\xi) \mathbf{b}_{x_I}^m$ in Gleichung (6.42) erforderlich ist. Daraus kann geschlossen werden, dass die zunächst, eher zufällig erscheinende, identische Darstellung der Ableitung der Ansatzfunktionen nach den globalen Koordinaten in Gleichung (6.40) unbedingt erforderlich ist.

Zur Ermittlung der expliziten Ausdrücke werden zunächst die Ansatzfunktionen (6.9) in Faktoren zerlegt dargestellt

$$N_I = \frac{1}{8} (r_I + s_{1I}\xi + s_{2I}\eta + s_{3I}\zeta + h_{1I}\xi\eta + h_{2I}\eta\zeta + h_{3I}\xi\zeta + h_{4I}\xi\eta\zeta) . \quad (6.45)$$

Darin werden Starrkörperbewegungen durch die Einträge des Vektors r_I , Schubformen durch s_{1I} , s_{2I} und s_{3I} und Biegeformen (bekannt als *hourglass modes*) durch h_{1I} , h_{2I} , h_{3I} und h_{4I} abgebildet. Mit den Knotenkoordinaten des Basiselements (6.10) gilt

$$\begin{aligned} r_I &= 1 & s_{1I} &= \xi_I^\square & s_{2I} &= \eta_I^\square & s_{3I} &= \zeta_I^\square \\ h_{1I} &= \xi_I^\square \eta_I^\square & h_{2I} &= \eta_I^\square \zeta_I^\square & h_{3I} &= \xi_I^\square \zeta_I^\square & h_{4I} &= \xi_I^\square \eta_I^\square \zeta_I^\square . \end{aligned} \quad (6.46)$$

Mit Gleichung (6.45) ist die in Faktoren zerlegte Ableitung der Ansatzfunktionen bezüglich ξ , η und ζ

$$\beta_I = \begin{bmatrix} \beta_{\xi I} \\ \beta_{\eta I} \\ \beta_{\zeta I} \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} s_{1I} + h_{1I} \eta + h_{3I} \zeta + h_{4I} \eta \zeta \\ s_{2I} + h_{1I} \xi + h_{2I} \zeta + h_{4I} \xi \zeta \\ s_{3I} + h_{2I} \eta + h_{3I} \xi + h_{4I} \xi \eta \end{bmatrix} , \quad (6.47)$$

die direkt auf die Jakobimatrix \mathbf{j} aus Gleichung (6.13) übertragen werden kann. Wird die Notation (6.18)₂ auf Gleichung (6.13)₂ angewendet, sind mit Beachtung von $\mathbf{x}_I = (x_I, y_I, z_I)^T$ die Einträge der Zeile α der Jakobimatrix im Vektor $\mathbf{j}_\alpha = \sum_I \beta_{\alpha I} \mathbf{x}_I$ enthalten und es gilt

$$\mathbf{j} = \begin{bmatrix} \sum_I \beta_{\xi I} \mathbf{x}_I^T \\ \sum_I \beta_{\eta I} \mathbf{x}_I^T \\ \sum_I \beta_{\zeta I} \mathbf{x}_I^T \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \sum_I (s_{1I} + h_{1I} \eta + h_{3I} \zeta + h_{4I} \eta \zeta) \mathbf{x}_I^T \\ \sum_I (s_{2I} + h_{1I} \xi + h_{2I} \zeta + h_{4I} \xi \zeta) \mathbf{x}_I^T \\ \sum_I (s_{3I} + h_{2I} \eta + h_{3I} \xi + h_{4I} \xi \eta) \mathbf{x}_I^T \end{bmatrix} . \quad (6.48)$$

Die Anordnung der Anteile aus den Gleichungen (6.47) und (6.48) liefert die explizite Darstellung der Faktoren aus Gleichung (6.43)

$$\beta_I^{a\xi} = \frac{1}{8} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ h_{1I} \\ h_{3I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_J h_{1J} \mathbf{x}_J^T \\ \sum_J h_{3J} \mathbf{x}_J^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{x_I}^m \\ b_{y_I}^m \\ b_{z_I}^m \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_{1I}^m \\ \gamma_{3I}^m \end{bmatrix} , \quad (6.49)$$

$$\beta_I^{a\eta} = \frac{1}{8} \left(\begin{bmatrix} h_{1I} \\ 0 \\ h_{2I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_J h_{1J} \mathbf{x}_J^T \\ 0 \\ \sum_J h_{2J} \mathbf{x}_J^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{xI}^m \\ b_{yI}^m \\ b_{zI}^m \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \gamma_{1I}^m \\ 0 \\ \gamma_{2I}^m \end{bmatrix}, \quad (6.50)$$

$$\beta_I^{a\zeta} = \frac{1}{8} \left(\begin{bmatrix} h_{3I} \\ h_{2I} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_J h_{3J} \mathbf{x}_J^T \\ \sum_J h_{2J} \mathbf{x}_J^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{xI}^m \\ b_{yI}^m \\ b_{zI}^m \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \gamma_{3I}^m \\ \gamma_{2I}^m \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.51)$$

$$\beta_I^{a\zeta\eta} = \frac{1}{8} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h_{4I} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_J h_{4J} \mathbf{x}_J^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{xI}^m \\ b_{yI}^m \\ b_{zI}^m \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_{4I}^m \end{bmatrix}, \quad (6.52)$$

$$\beta_I^{a\eta\zeta} = \frac{1}{8} \left(\begin{bmatrix} h_{4I} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sum_J h_{4J} \mathbf{x}_J^T \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{xI}^m \\ b_{yI}^m \\ b_{zI}^m \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \gamma_{4I}^m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (6.53)$$

$$\beta_I^{a\zeta\zeta} = \frac{1}{8} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ h_{4I} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \sum_J h_{4J} \mathbf{x}_J^T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{xI}^m \\ b_{yI}^m \\ b_{zI}^m \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_{4I}^m \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (6.54)$$

Die wiederholt auftretenden Ausdrücke in den Gleichungen (6.49) bis (6.54), die als γ_{1I}^m , γ_{2I}^m , γ_{3I}^m und γ_{4I}^m bezeichnet werden, sind die sogenannten mittleren Stabilisierungsvektoren, die vornehmlich in Elementformulierungen mit reduzierter Integration zur Berechnung der Hourglassstabilisierung verwendet werden. Bei der klassischen Herleitung³ fehlt die Verwendung der mittleren Ableitungen \mathbf{b}_I^m , die hier direkt einbezogen sind. Die Einträge der Stabilisierungsvektoren können zusammengefasst mit der expliziten Formel

$$\gamma_{\alpha I}^m = \frac{1}{8} \left(h_{\alpha I} - \sum_J (h_{\alpha J} \mathbf{x}_J^T) \mathbf{b}_I^m \right) \quad (6.55)$$

bestimmt werden. Aus der hier erfolgten Konstruktion kann folgende, besonders für eine symbolische Implementierung, effiziente Notation abgeleitet werden

$$\gamma_{\alpha I}^m = (N_I - \mathbf{x}^T \mathbf{b}_I^m)_{,h_\alpha} \Big|_0, \quad (6.56)$$

bei der vorab nur die Ansatzfunktionen, die Verschiebungsinterpolation sowie die über das Element gemittelten Ableitungen \mathbf{b}_I^m bekannt sein müssen.

³ Bei Hutter und Niederer [71] ist eine Übersicht zur Herleitung und den Unterschieden der klassischen reduziert integrierten Elementformulierungen zu finden, die auch bei Benson [20] oder Belytschko et al. [15] beschrieben werden.

Zusammenfassende Darstellung im Vergleich zum Vorschlag von Korelc et al.

Die resultierende globale Ableitung der Ansatzfunktionen⁴

$$\mathbf{b}_I = \mathbf{b}_I^m + \mathbf{b}_I^\gamma \quad (6.57)$$

enthält zum einen die gemittelten Verzerrungen \mathbf{b}_I^m aus Gleichung (6.26) und zum anderen den angenommenen Anteil

$$\mathbf{b}_I^\gamma = \mathbf{t}^c \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_{1I}^m \\ \gamma_{3I}^m \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} \gamma_{1I}^m \\ 0 \\ \gamma_{2I}^m \end{bmatrix} \eta + \begin{bmatrix} \gamma_{3I}^m \\ \gamma_{2I}^m \\ 0 \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_{4I}^m \end{bmatrix} \xi\eta + \begin{bmatrix} \gamma_{4I}^m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \eta\zeta + \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma_{4I}^m \\ 0 \end{bmatrix} \xi\zeta \right), \quad (6.58)$$

der nur über die die gemittelten Stabilisierungsvektoren aus Gleichung (6.55) oder (6.56) berechnet wird. Im Vergleich zur konsistenten Taylorreihenentwicklung von Korelc et al. [86] hat sich dieser Anteil substantiell vereinfacht. Diese Vereinfachung resultiert anschaulich aus dem Ersetzen der inversen Jakobimatrix durch eine konstante Transformationsmatrix. Die Voraussetzung für die Berechnung sind die gemittelten Ableitungen der Ansatzfunktionen \mathbf{b}_I^m (3×8 Größen), die konstanten Transformationsmatrix \mathbf{t} (3×3 Größen) und die Stabilisierungsvektoren $\gamma_{\alpha I}$ (4×8 Größen). Diese insgesamt 65 Größen können vorab in einer numerischen Integrationschleife berechnet werden, sind also nur einmal für jedes Element pro Zeitschritt zu ermitteln, was dazu führt, dass am Integrationspunkt nur wenige Operationen zur Bestimmung der Verzerrungen nötig sind. Zudem ist es nicht erforderlich, ein in kovarianten Komponenten angenommenes Verzerrungsfeld mit einer Tensortransformation in eine kartesische Basis zu transformieren. Ein ähnliches Vorgehen wird von Liu et al. [107] vorgeschlagen.

Das Verzerrungsfeld wird in seinen Anteilen bzgl. ξ , η und ζ analog zu den Verzerrungen in Gleichung (6.38) gewählt

$$\{\varepsilon^a\} = \sum_I \begin{bmatrix} b_{1I}^\gamma & 0 & 0 \\ 0 & b_{2I}^\gamma & 0 \\ 0 & 0 & b_{3I}^\gamma \\ b_{2I}^\gamma & b_{1I}^\gamma & 0 \\ 0 & b_{3I}^\gamma & b_{2I}^\gamma \\ b_{3I}^\gamma & 0 & b_{1I}^\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_I \\ v_I \\ w_I \end{bmatrix} \quad (6.59)$$

Um aus dieser Darstellung heraus auch Versteifungseffekte zu eliminieren, können Ansätze aus reduziert integrierten Elementformulierungen verwendet werden. Dazu zählen die Streichung einzelner Anteile aus der Verzerrungsinterpolation, oder die

⁴ Für ein inkompatibel erweitertes Element wurden bereits die gleichen Approximationen bei Simo et al. [157] verwendet. Allerdings wurde anstatt \mathbf{b}_I^m die Auswertung in Elementmitte $\mathbf{b}_I(0)$ verwendet. Dies führte, wie später auch von Wriggers und Korelc [191] festgestellt, zu Problemen.

Verwendung einer nur diagonal besetzten Transformationsmatrix \mathbf{t}^c . Damit können Formulierungen erzielt werden, die nach wie vor ausreichende Vollständigkeit besitzen, um den Patchtest zu erfüllen. Allerdings bergen diese Ansätze die Gefahr unerwünschter Begleiterscheinungen wie Null-Energie-Formen oder ein zu nachgiebiges Steifigkeitsverhalten in besonderen Lastfällen, was bei der Stabilisierung reduziert integrierter Elementformulierungen beobachtet und kontrolliert werden muss. Gerade für beliebige Materialien mit Inelastizität oder Anisotropie ist es eine anspruchsvolle Herausforderung, mit reduziert integrierten Elementen sowohl robuste als auch genaue Ergebnisse zu erzielen.

In der vorliegenden Formulierung sollen die kompatiblen Verzerrungen so effizient und gleichzeitig robust wie möglich berechnet werden, weshalb auf weitere Approximationen verzichtet wird. Im nächsten Schritt werden inkompatible Erweiterungen gewählt, die das Verzerrungsfeld so anreichern, dass unerwünschte Versteifungseffekte eliminiert werden. Die Methoden inkompatibler Erweiterungen erfordern – wie später gezeigt wird – keine weiteren Approximationen, wie es beispielsweise bei reduziert integrierten Elementen der Fall ist. In Kombination mit der effizienten Berechnung der Gleichungen zur Ermittlung der inkompatiblen Freiheitsgrade in Kapitel 7 sowie der Vermeidung der Instabilitäten infolge inkompatibler Freiheitsgrade in Kapitel 8 sollen die entwickelten Elemente eine robuste, genaue und bezüglich Materialien universell einsetzbare Grundlage für weitere Ansätze bilden.

6.1.6 Inkompatible Erweiterungen

Inkompatible Verschiebungsformen und Verzerrungen

Im Gegensatz zu den kompatiblen Verschiebungen aus Gleichung (6.8) existieren für die inkompatiblen Verschiebungen $\mathbf{u}^{\text{im}} = (u_1^{\text{im}}, u_2^{\text{im}}, u_3^{\text{im}})^T = (u^{\text{im}}, v^{\text{im}}, w^{\text{im}})^T$ keine Koordinaten und diese sind als über das Element verteilte Größen zu betrachten. Die Gestalt dieser verteilten Größe wird durch die inkompatiblen Formfunktionen N_A^{im} bestimmt, mit der die Interpolation erfolgt

$$u_i^{\text{im}} = \sum_A N_A^{\text{im}} u_{iA}^{\text{im}}, \quad (6.60)$$

wobei u_{iA}^{im} als Faktor für die Größe der inkompatiblen Form zu betrachten ist. Die Inkompatibilität sagt aus, dass in einem Element die Werte u_{iA}^{im} an keiner Stelle, also weder an den Elementknoten noch an den Elementkanten, mit Größen aus einem Nachbarelement übereinstimmen muss. Der Index A läuft über die Anzahl der inkompatiblen Ansatzfunktionen.

Die inkompatiblen Ansatzfunktionen nach Wilson et al. werden, nach entsprechender Diskussion der Unterschiede in Kapitel 5 gewählt

$$N_1^{\text{im}} = 1 - \zeta^2 \quad N_2^{\text{im}} = 1 - \eta^2 \quad N_3^{\text{im}} = 1 - \zeta^2. \quad (6.61)$$

Zusätzlich wird die von Wriggers und Korelc [191] vorgeschlagene inkompatible Ansatzfunktion addiert

$$N_4^{\text{im}} = \zeta^2(\eta + \zeta) + \eta^2(\xi + \zeta) + \zeta^2(\xi + \eta) . \quad (6.62)$$

Zum Vergleich ein entsprechender Satz aus Legendre-Polynomen

$$N_1^{\text{im}} = L_2(\xi) \quad N_2^{\text{im}} = L_2(\eta) \quad N_3^{\text{im}} = L_2(\zeta) \quad (6.63)$$

und

$$N_4^{\text{im}} = L_2(\xi)(\eta + \zeta) + L_2(\eta)(\xi + \zeta) + L_2(\zeta)(\xi + \eta) . \quad (6.64)$$

Für die Berechnung der Ableitung nach den globalen Koordinaten wird die gleiche konstante Transformationsmatrix \mathbf{t}^c aus Gleichung (6.58) verwendet. Damit wird die in Abschnitt 5.2.3 angesprochene Modifizierung des Gradienten der inkompatiblen Verschiebungen erreicht. Mit Übertragung der Notation aus Gleichung (6.18) gilt

$$\mathbf{b}_A^{\text{im}} = \mathbf{t}^c \beta_A^{\text{im}} = \mathbf{t}^c \frac{\partial N_A^{\text{im}}}{\partial \xi} . \quad (6.65)$$

Damit sind im Vergleich zu reinen Verzerrungserweiterungen keine Tensortransformationen (siehe Abschnitt 5.6.3) zur Berechnung der Verzerrungen nötig, wodurch ein Effizienzgewinn entsteht, der neben weniger auszuführenden Operationen auch in der nur zur Hälfte besetzten Matrix \mathbf{B}^{im} liegt. Die inkompatiblen Verzerrungen sind darstellbar durch

$$\{\varepsilon^{\text{im}}\} = \mathbf{B}^{\text{im}} \mathbf{d}^{\text{im}} \quad (6.66)$$

mit dem Vektor der inkompatiblen Verschiebungsfreiheitsgrade

$$\mathbf{d}^{\text{im}} = [u_1^{\text{im}} \ v_1^{\text{im}} \ w_1^{\text{im}} \ u_2^{\text{im}} \ v_2^{\text{im}} \ w_2^{\text{im}} \ u_3^{\text{im}} \ v_3^{\text{im}} \ w_3^{\text{im}} \ u_4^{\text{im}} \ v_4^{\text{im}} \ w_4^{\text{im}}]^T \quad (6.67)$$

und einem zur inkompatiblen Verschiebungsform A zugehörigen Matrix

$$\mathbf{B}_A^{\text{im}} = \begin{bmatrix} b_{xA}^{\text{im}} & 0 & 0 \\ 0 & b_{yA}^{\text{im}} & 0 \\ 0 & 0 & b_{zA}^{\text{im}} \\ b_{yA}^{\text{im}} & b_{xA}^{\text{im}} & 0 \\ 0 & b_{zA}^{\text{im}} & b_{yA}^{\text{im}} \\ b_{zA}^{\text{im}} & 0 & b_{xA}^{\text{im}} \end{bmatrix} , \quad (6.68)$$

die einen Ausschnitt von $\mathbf{B}^{\text{im}} = (\mathbf{B}_1^{\text{im}}, \mathbf{B}_2^{\text{im}}, \mathbf{B}_3^{\text{im}}, \mathbf{B}_4^{\text{im}})$ beschreibt. Zur Kontrolle, ob Bedingung (6.5) eingehalten wird, genügt es zu überprüfen, ob die Ableitung der inkompatiblen Ansatzfunktionen nach den lokalen Koordinaten bei Integration über das Basiselement gleich Null wird, da der modifizierte Gradient (6.65) mit der konstanten Transformationsmatrix \mathbf{t}^c berechnet und der modifizierte Volumenquotient aus Gleichung (6.32) verwendet wird

$$\frac{v}{8} \mathbf{t}^c \int_{\square} \beta_A^{\text{im}} \, d\square = 0 \quad \rightarrow \quad \int_{\square} \beta_A^{\text{im}} \, d\square = 0 . \quad (6.69)$$

Vergleich der Wilson-Funktionen mit den Legendre-Polynomen

Analog zum Vergleich der inkompatiblen Massenmatrix in Abschnitt 5.5.2 werden die Wilson-Funktionen und die Legendre-Polynome bzgl. ihrer Ableitung nach den lokalen Koordinaten ξ , η und ζ verglichen. Für die ersten 3 inkompatiblen Funktionen nach Wilson aus Gleichung (6.61) ergibt sich, den Ableitungen der Legendre-Polynome aus Gleichung (6.63) gegenübergestellt

$$\beta_{A=1,2,3}^{\text{im, Wil}} = -2 \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \end{bmatrix} \quad \beta_{A=1,2,3}^{\text{im, Leg}} = 3 \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \zeta \end{bmatrix}. \quad (6.70)$$

Die Gradienten unterscheiden sich, analog zu den Massenmatrizen aus Abschnitt 5.5.2 nur um einen konstanten Faktor, der aufgrund der Inkompatibilität der inkompatiblen Verschiebungen keinen Einfluss auf das Ergebnis hat, siehe Bischoff und Romero [28]. Bei den Funktionen aus den Gleichungen (6.62) und (6.64)

$$\beta_4^{\text{im, Wil}} = \begin{bmatrix} 2\xi(\eta + \zeta) + \eta^2 + \zeta^2 \\ \xi^2 + 2\eta(\xi + \zeta) + \zeta^2 \\ \xi^2 + \eta^2 + 2\zeta(\xi + \eta) \end{bmatrix} \quad \beta_4^{\text{im, Leg}} = \begin{bmatrix} 3\xi(\eta + \zeta) + L_2(\eta) + L_2(\zeta) \\ L_2(\xi) + 3\eta(\xi + \zeta) + L_2(\zeta) \\ L_2(\xi) + L_2(\eta) + 3\zeta(\xi + \eta) \end{bmatrix}. \quad (6.71)$$

unterscheiden sich die entstehenden bilinearen Faktoren erneut nur durch einen konstanten Faktor. Ohne eine zusätzliche Modifikation erfüllen die quadratischen Anteile in Gleichung (6.71)₁ nicht Bedingung (6.5), und die Legendre Polynome in Gleichung (6.71)₁ diese nur für die Gauß-Legendre-Integrationspunkte $\xi_i^{IP} = \pm 1/\sqrt{3}$. Um die Bedingung (6.5) in jedem Fall einzuhalten, wird die Funktion T_2 aus Gleichung (6.35) verwendet, die ausschließlich bilineare Taylorpolynome enthält, und sowohl im Fall der Wilson-Funktionen als auch für die Legendre-Polynome die quadratischen Ausdrücke eliminiert. Damit ist wie für Gleichung (6.63) der einzige Unterschied ein konstanter Faktor.

In der vorliegenden Arbeit werden, siehe auch Abschnitt 5.5.2, die Wilson-Funktionen genutzt, deren Ableitung nach den lokalen Koordinaten wie folgt verwendet wird

$$\beta^{\text{im}} = -2 \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & -(\xi\eta + \xi\zeta) \\ 0 & \eta & 0 & -(\xi\eta + \eta\zeta) \\ 0 & 0 & \zeta & -(\xi\zeta + \eta\zeta) \end{bmatrix}. \quad (6.72)$$

6.1.7 Diskretisierung der schwachen Form mit inkompatiblen Massen

Zur abschließenden Beschreibung des Volumenelements wird die diskretisierte schwache Form angegeben. Für den Fall, dass im-Freiheitsgrade aus dem Vektor \mathbf{d}^{im} keine inkompatiblen Massen erhalten sollen, werden die zugehörigen Einträge für eine Behandlung mit statischer Kondensation in den Vektor \mathbf{d}^{en} verschoben und die zugehörigen Spalten aus \mathbf{B}^{im} nach \mathbf{B}^{en} .

Die diskretisierten Größen werden in die Variationsformulierung (6.1) eingesetzt

$$\begin{aligned} \delta w &= (\delta \mathbf{d}^{\text{co}})^T (\mathbf{m}^{\text{co}} \ddot{\mathbf{d}}^{\text{co}} + \mathbf{f}^{\text{co}} - \mathbf{f}^{\text{ext}}) \\ &+ (\delta \mathbf{d}^{\text{im}})^T (\mathbf{m}^{\text{im}} \ddot{\mathbf{d}}^{\text{im}} + \mathbf{f}^{\text{im}}) \\ &+ (\delta \mathbf{d}^{\text{en}})^T \mathbf{f}^{\text{en}} = 0, \end{aligned} \quad (6.73)$$

woraus mit der Inkompatibilität⁵ von \mathbf{d}^{im} und \mathbf{d}^{en} , das Gleichungssystem

$$\bigcup_{e=1}^{n_e} (\mathbf{M}^{\text{co}} \ddot{\mathbf{d}}^{\text{co}} + \mathbf{f}^{\text{co}} - \mathbf{f}^{\text{ext}})_e = \mathbf{0} \quad (6.74)$$

$$(\mathbf{M}^{\text{im}} \ddot{\mathbf{d}}^{\text{im}} + \mathbf{f}^{\text{im}})_e = \mathbf{0} \quad e = 1, \dots, n_e \quad (6.75)$$

$$(\mathbf{f}^{\text{en}})_e = \mathbf{0} \quad e = 1, \dots, n_e \quad (6.76)$$

resultiert. Die Kraftvektoren werden mit den B-Matrizen berechnet

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{\text{co}} \\ \mathbf{f}^{\text{im}} \\ \mathbf{f}^{\text{en}} \end{bmatrix} = \frac{v}{8} \int_{\square} \begin{bmatrix} (\mathbf{B}^{\text{co}})^T \\ (\mathbf{B}^{\text{im}})^T \\ (\mathbf{B}^{\text{en}})^T \end{bmatrix} \{\boldsymbol{\sigma}^\varepsilon\} d\square, \quad (6.77)$$

und die mit zeilenweiser Summation diagonalisierte Massenmatrix der kompatiblen Freiheitsgrade wird mit der 3×3 Einheitsmatrix $\mathbf{1}$ dargestellt

$$\mathbf{M}_{II}^{\text{co}} = \mathbf{1} \int_{\square} \rho N_I^{\text{co}} j d\square \quad (I = 1, \dots, 8). \quad (6.78)$$

Die Einträge der Massenmatrix \mathbf{M}^{im} werden entsprechend Abschnitt 5.5.2 mit dem Volumenquotienten aus Gleichung (6.32) berechnet, und Nebendiagonaleinträge, sofern vorhanden, ignoriert, sodass die berücksichtigten Einträge auf der Diagonalen der Massenmatrix gegeben sind durch

$$\mathbf{M}_{AA}^{\text{im}} = \frac{8}{15} \rho v \mathbf{1} \approx 0.533 \rho v \mathbf{1} \quad A = 1, 2, 3 \quad (6.79)$$

$$\mathbf{M}_{AA}^{\text{im}} = \frac{28}{45} \rho v \mathbf{1} \approx 0.622 \rho v \mathbf{1} \quad A = 4. \quad (6.80)$$

Dabei treten für die Funktion N_4^{im} aus Gleichung (6.62) bei der Berechnung keine Nebendiagonaleinträge auf. Sind en-Freiheitsgrade vorhanden, wird gemäß Abschnitt 5.4.4 für die Linearisierung der Gleichung (6.76) die materielle Steifigkeit

$$\mathbf{K}^{\text{en}} = \frac{v}{8} \int_{\square} (\mathbf{B}^{\text{en}})^T \{\mathbf{C}\} \mathbf{B}^{\text{en}} d\square \quad (6.81)$$

⁵ Die Inkompatibilität bedeutet, dass die Gleichungen zur Berechnung der Größen \mathbf{d}^{im} oder \mathbf{d}^{en} in jedem Element unabhängig von den Nachbarelementen gelöst werden, da für diese Größen zwischen benachbarten Elementen keine Verknüpfung besteht. Im Gegensatz dazu müssen die Gleichungen zur Berechnung der kompatiblen Freiheitsgrade \mathbf{d}^{co} assembliert werden, um die Kompatibilität zwischen den Elementen zu gewährleisten.

benötigt, die mit der 6×6 Matrixdarstellung der Materialtangente \mathbf{c} berechnet wird. Im geometrisch linearen Bereich entfällt ein Anteil geometrischer Steifigkeit.

6.2 Volumenschalen mit inkompatiblen Erweiterungen

6.2.1 Anpassung der Verzerrungen nach dem MITC/ANS-Konzept

Insbesondere für meist dicke Schalenstrukturen werden verstärkt Volumenschalenelemente eingesetzt, wobei oft das MITC- beziehungsweise ANS-Konzept eingesetzt wird, siehe Hauptmann und Schweizerhof [65]. Die Abkürzung MITC steht für *Mixed Interpolation of Tensorial Components* und ANS für *Assumed Natural Strains*. Die Umsetzung wurde bereits in vielen Varianten im Schrifttum erschöpfend beschrieben und auch in der Praxis angewandt, siehe die Anfänge bei Bathe und Dvorkin [48], die bis heute, zum Beispiel bei Ko et al. [81], weiterentwickelt werden. Ein üblicherweise damit kombinierter Ansatz stammt von Betsch und Stein [23], bei dem sogenanntes Trapezlocking vermieden wird, das bei in Dickenrichtung trapezförmig verzerrten Elementgeometrien auftritt. Eine ausführliche Beschreibung ist beispielsweise in der Dissertation von Mattern [112] enthalten, in der auch ein Ansatz zur Formulierung der ANS-Methode auf Basis von Verschiebungsinterpolationen untersucht wird. Die grundlegende Idee in [48] ist, die Verzerrungen in kovarianten Komponenten so zu interpolieren, dass unerwünschte Elementantworten ausbleiben. Angewendet wird die Methode bei Schalen- und Volumenschalenelementen. Für eine erfolgreiche Anwendung in einer 8-knotigen Volumenschalenformulierung, die auf dem 8-knotigen Lagrangeschen Standardelement basiert, ist es zentral, eine konsistente Transformationsmatrix aufzustellen, was hier anhand zweier Beispiele aus dem Schrifttum aufgegriffen wird.

Die kovarianten Komponenten der Verzerrungen sind mit den Basisvektoren

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \bar{\zeta}^i} \quad (6.82)$$

und den Ableitungen der Verschiebungsinterpolation

$$\mathbf{u}_i = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \bar{\zeta}^i} \quad (6.83)$$

gegeben durch

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^{DI} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{u}_j + \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{g}_j) . \quad (6.84)$$

Zum Vergleich mit parametrischen Koordinaten in einer nicht diskretisierten Formulierung wird auf Abschnitt 2.1.1 verwiesen. Zur Unterscheidung wird im Folgenden eine direkt aus der Diskretisierung folgende Verzerrung mit dem Index DI markiert, und modifizierte Verzerrungen mit dem Index AS .

Um Schublocking in schalenartigen Strukturen zu vermeiden, werden die Komponenten $\tilde{\varepsilon}_{13}$ und $\tilde{\varepsilon}_{23}$ jeweils an den Seitenmitten in einem Schnitt der Elementebene ausgewertet. Mit diesen Stützpunkten wird ein neuer Verzerrungsverlauf über das Element interpoliert

$$\tilde{\varepsilon}_{13}^{AS} = \frac{1}{2} (1 - \eta) \varepsilon_{13}^{DI} \Big|_{(0,-1,0)} + \frac{1}{2} (1 + \eta) \varepsilon_{13}^{DI} \Big|_{(0,+1,0)} \quad (6.85)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{23}^{AS} = \frac{1}{2} (1 - \zeta) \varepsilon_{23}^{DI} \Big|_{(-1,0,0)} + \frac{1}{2} (1 + \zeta) \varepsilon_{23}^{DI} \Big|_{(+1,0,0)} . \quad (6.86)$$

Für reduziert integrierte Elementformulierungen ist eine Interpolation mit 4 Punkten zu verwenden, da bei der Berechnung der Stabilisierung ansonsten Terme fehlen. Siehe auch die jeweilige Diskussion bei Mattern [112], Schwarze und Reese [151] oder Cardoso et al. [34]. Um Trapezlocking zu vermeiden, wird der Vorschlag von Betsch und Stein [23] aufgenommen, der zur folgenden Interpolation führt

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33}^{AS} = & \frac{1}{4} (1 - \zeta) (1 - \eta) \varepsilon_{33}^{DI} \Big|_{(-1,-1,0)} + \frac{1}{4} (1 + \zeta) (1 - \eta) \varepsilon_{33}^{DI} \Big|_{(+1,-1,0)} + \\ & \frac{1}{4} (1 + \zeta) (1 + \eta) \varepsilon_{33}^{DI} \Big|_{(+1,+1,0)} + \frac{1}{4} (1 - \zeta) (1 + \eta) \varepsilon_{33}^{DI} \Big|_{(-1,+1,0)} . \end{aligned} \quad (6.87)$$

Um die modifizierten Verzerrungen (6.85) bis (6.87), die in einer kontravarianten Basis bezüglich der lokalen Koordinaten stehen, in eine kartesische Basis zu transformieren, wird üblicherweise die Transformation mit den unmodifizierten kontravarianten Basisvektoren, die in der inversen Jakobimatrix (siehe Gleichung (6.14)) angeordnet sind, durchgeführt

$$\varepsilon_{ij} = j_{ik}^{-1} j_{jl}^{-1} \tilde{\varepsilon}_{kl} . \quad (6.88)$$

Ist die Elementgeometrie in Dickenrichtung verzerrt, beispielsweise aufgrund trapezförmiger Elemente, wirkt sich die Transformation in Gleichung (6.88) negativ auf die Wirksamkeit der Modifikation in Gleichung (6.87) aus. Um Abhilfe zu schaffen, ist eine Anpassung der Transformationsmatrix nötig, was im nächsten Abschnitt näher betrachtet wird.

6.2.2 Konsistente Anpassung des Basisvektors in Dickenrichtung

Für Elemente, die über die Schalendicke nicht oder nur leicht verzerrt sind, ist die im vorhergehenden Abschnitt beschriebene Vorgehensweise ausreichend, um die entsprechenden Versteifungen zu vermeiden. Für andere Fälle, wie zum Beispiel die Trapezelemente aus dem MacNeal Balken in Abbildung 6.3, sind die Basisvektoren für die Transformation in Gleichung (6.88) anzupassen. In der Dissertation von Irslinger [73] wird dazu der in Dickenrichtung zeigende Basisvektor, oft als Normalenvektor bezeichnet, senkrecht auf die Schalenmittelfläche gestellt, um so in Kombination mit der modifizierten Dickenverzerrung in Gleichung (6.87) die Trapezversteifung zu

vermeiden. Ein vergleichbares Vorgehen ist bei Sze und Yao [164] zu finden. Allerdings ist zu beachten, dass diese Annahme bezüglich des Normalenvektors nicht mehr vollständig gültig ist, sobald die Biegeradien in stark, meist plastisch deformierten Strukturen sehr klein werden – ähnlich zur in der Schalentheorie verwendeten Bernoulli-Hypothese eben bleibender Querschnitte. Als Ausgangsformulierung dient ein 8-knotiges Hexaederelement. Unter anderem wird ein Vorschlag von Sussman und Bathe [162], der für ein dreidimensionales Schalenelement mit 4 Knoten und 2 Richtungsvektoren je Knoten gemacht wurde, hier aufgenommen und auf die 8-knotige Volumenschalenformulierung angewandt. Zur Erläuterung dieses Vorschlags werden geometrisch nichtlineare Deformationsmaße verwendet, anschließend kann die Formulierung aber auch für den geometrisch linearen Fall genutzt werden.

Zunächst wird zwischen den Koordinaten der Referenz- und Momentankonfiguration X_i und x_i unterschieden und die Verschiebungen als deren Differenz $u_i = x_i - X_i$ eingeführt. Bezogen auf die parametrischen Koordinaten ζ^i gelten mit dem Deformationsgradienten \mathbf{F} für die Basisvektoren die Beziehungen

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \zeta^i} = \mathbf{F} \mathbf{G}_i = \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \zeta^i} \quad \mathbf{g}^i = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{G}^i . \quad (6.89)$$

Die kovarianten Basisvektoren \mathbf{g}_i sind in der Jakobimatrix aus Gleichung (6.13) zeilenweise angeordnet; in der Inversen der Jakobimatrix liegen die kontravarianten Basisvektoren \mathbf{g}^i spaltenweise vor

$$\mathbf{j} = (\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3)^T \quad \mathbf{j}^{-1} = (\mathbf{g}^1, \mathbf{g}^2, \mathbf{g}^3) . \quad (6.90)$$

Die kovarianten Komponenten des Greenschen Verzerrungstensors werden mit den Metriken beschrieben

$$\tilde{E}_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} - G_{ij}) , \quad (6.91)$$

wobei gilt

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j \quad G_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j . \quad (6.92)$$

Wieder werden direkt aus der Diskretisierung folgende Ausdrücke ohne Modifikationen mit DI und angenommene Verzerrungsverläufe mit AS gekennzeichnet. Die angenommenen Querschubverzerrungen \tilde{E}_{13}^{AS} und \tilde{E}_{23}^{AS} werden, analog zum geometrisch linearen Fall in den Gleichungen (6.85) und (6.86), interpoliert

$$\tilde{E}_{13}^{AS} = \frac{1}{2} (1 - \eta) E_{13}^{DI} \Big|_{(0,-1,0)} + \frac{1}{2} (1 + \eta) E_{13}^{DI} \Big|_{(0,+1,0)} \quad (6.93)$$

$$\tilde{E}_{23}^{AS} = \frac{1}{2} (1 - \zeta) E_{23}^{DI} \Big|_{(-1,0,0)} + \frac{1}{2} (1 + \zeta) E_{23}^{DI} \Big|_{(+1,0,0)} . \quad (6.94)$$

Für alle weiteren Verzerrungskomponenten gilt $E_{ij}^{AS} = E_{ij}^{DI}$. Die Interpolation aus den Gleichungen (6.93) und (6.94) führt – analog auf die Metrik angewandt – auf die Ausdrücke

$$g_{13}^{AS} = \frac{1}{2} (1 - \eta) g_{13}^{DI} \Big|_{(0,-1,0)} + \frac{1}{2} (1 + \eta) g_{13}^{DI} \Big|_{(0,+1,0)} \quad (6.95)$$

$$g_{23}^{AS} = \frac{1}{2} (1 - \zeta) g_{23}^{DI} \Big|_{(-1,0,0)} + \frac{1}{2} (1 + \zeta) g_{23}^{DI} \Big|_{(+1,0,0)} \quad (6.96)$$

und mit den Gleichungen (6.91) und (6.92) auch auf die modifizierten Verzerrungen \tilde{E}_{13}^{AS} und \tilde{E}_{23}^{AS} . Die Komponenten G_{13}^{AS} und G_{23}^{AS} werden auf die gleiche Weise bestimmt. Für die restlichen Komponenten gilt $g_{ij}^{AS} = g_{ij}^{DI}$ sowie $G_{ij}^{AS} = G_{ij}^{DI}$. Damit können die modifizierten Verzerrungskomponenten allein in Abhängigkeit von einem modifizierten Basisvektor \mathbf{g}_3^{AS} ausgedrückt werden mit

$$g_{13}^{AS} = \mathbf{g}_1 \cdot \mathbf{g}_3^{AS} \quad g_{23}^{AS} = \mathbf{g}_2 \cdot \mathbf{g}_3^{AS} , \quad (6.97)$$

was analog für die Komponenten bezogen auf die Ausgangskonfiguration gilt. Die Verzerrungskomponenten der Schalenebene \tilde{E}_{11} , \tilde{E}_{22} und \tilde{E}_{12} ändern sich damit nicht. Auf die Berechnung von \tilde{E}_{33} wird später noch eingegangen.

Die Gleichungen (6.95) und (6.96) liefern mit Einbezug von (6.97) zwei Gleichungen, um die drei Komponenten des modifizierten Basisvektors \mathbf{g}_3^{AS} zu bestimmen. Eine dritte Gleichung wird mit einer weiteren Annahme eingeführt

$$\det \mathbf{g} = \det \mathbf{g}^{AS} , \quad (6.98)$$

die äquivalent für die Determinante der Jakobimatrix aus Gleichung (6.13) gilt

$$\det \mathbf{j} = \det \mathbf{j}^{AS} . \quad (6.99)$$

Auch hierfür gelten die Gleichungen analog für den Bezug zur Ausgangskonfiguration. Da die Determinante der Jakobimatrix durch $\det \mathbf{j} = (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_3^{DI}$ ausgedrückt werden kann, gilt für die Determinante der Jakobimatrix, die den modifizierten Basisvektor \mathbf{g}_3^{AS} enthält $\det \mathbf{j} = (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_3^{AS}$. Damit kann die folgende Bedingung formuliert werden

$$(\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_3^{AS} = \det \mathbf{j}^{DI} . \quad (6.100)$$

Mit (6.97) und (6.100) sind somit 3 Gleichungen für die drei Komponenten des modifizierten Basisvektors \mathbf{g}_3^{AS} gegeben. Da die darin enthaltenen modifizierten Komponenten g_{13}^{AS} und g_{23}^{AS} sich auf die Schalenmittelfläche beziehen, werden die Basisvektoren \mathbf{g}_1 und \mathbf{g}_2 sowie die Determinante $\det \mathbf{j}^{DI}$ ebenfalls auf die Schalenmittelfläche bezogen. Zusammengefasst ergibt sich das Gleichungssystem

$$\mathbf{g}_1 \Big|_{\zeta=0} \cdot \mathbf{g}_3^{AS} = g_{13}^{AS} \quad (6.101)$$

$$\mathbf{g}_2 \Big|_{\zeta=0} \cdot \mathbf{g}_3^{AS} = g_{23}^{AS} \quad (6.102)$$

$$(\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \Big|_{\zeta=0} \cdot \mathbf{g}_3^{AS} = \det \mathbf{j}^{DI} \Big|_{\zeta=0} . \quad (6.103)$$

Das Gleichungssystem ist lösbar, da die dritte Zeile der Matrix einen Vektor enthält, der senkrecht auf den beiden ersten Vektoren $\mathbf{g}_1|_{\zeta=0}$, $\mathbf{g}_2|_{\zeta=0}$ steht, und diese ohnehin nicht parallel sind. Sobald die Determinante der Jakobimatrix $\det \mathbf{j}^{DI}$ und die Ausdrücke g_{13}^{AS} und g_{23}^{AS} bekannt sind, kann der Basisvektor \mathbf{g}_3^{AS} ermittelt werden.

Bei Sussman und Bathe [162] wird die oben geschilderte Berechnung des modifizierten Basisvektors physikalisch interpretiert. Demnach ist in einem Biegezustand der Basisvektor \mathbf{g}_3^{DI} in der Schale geneigt, während der modifizierte Basisvektor \mathbf{g}_3^{AS} in diesem Fall senkrecht auf der momentan betrachteten Schalenebene steht. Das heißt für die Berechnung der modifizierten Normalverzerrung in Dickenrichtung \tilde{E}_{33}^{AS} steht \mathbf{g}_3^{AS} senkrecht auf der Schalenmittelfläche, in deren Ecken die Auswertung stattfindet. Das würde dazu führen, dass eine Verzerrung \tilde{E}_{33} , die in Abhängigkeit von \mathbf{g}_3^{AS} berechnet wird, an jedem Ort der Schalenmittelfläche senkrecht auf derselben steht und damit ungeeignet für die Vermeidung der Versteifung ist. Aus diesem Grund wird – der Argumentation von Irslinger [73] folgend – eine Berechnung der modifizierten Normalverzerrung in Dickenrichtung \tilde{E}_{33}^{AS} mit dem direkt interpolierten Basisvektor \mathbf{g}_3^{DI} durchgeführt. Dann ist die modifizierte Verzerrung in Dickenrichtung, wie im Standardfall für die Ingenieurverzerrungen aus Gleichung (6.84), gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{33}^{AS} = & \frac{1}{4} (1 - \zeta) (1 - \eta) \tilde{E}_{33}^{DI} \Big|_{(-1,-1,0)} + \frac{1}{4} (1 + \zeta) (1 - \eta) \tilde{E}_{33}^{DI} \Big|_{(+1,-1,0)} + \\ & \frac{1}{4} (1 + \zeta) (1 + \eta) \tilde{E}_{33}^{DI} \Big|_{(+1,+1,0)} + \frac{1}{4} (1 - \zeta) (1 + \eta) \tilde{E}_{33}^{DI} \Big|_{(-1,+1,0)}. \end{aligned} \quad (6.104)$$

Die Transformation der Komponenten \tilde{E}_{ij} in kartesische Koordinaten erfolgt mit der modifizierten Basis. Für die Transformationsmatrix und die kartesischen Komponenten gilt damit

$$\mathbf{T} = (\mathbf{j}^{AS})^{-1} \quad \mathbf{E}^{AS} = \mathbf{T} \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{T}^T. \quad (6.105)$$

6.2.3 Inkompatible Erweiterungen

Die inkompatiblen Erweiterungen in einer Volumenschale werden ebenfalls an die Orientierung angepasst. Die meisten Solid-Shell Elemente in der Literatur nutzen das ANS Konzept in ähnlicher Form und ergänzen inkompatible Erweiterungen. Es existiert eine Volumenschale, die nur mit inkompatiblen Erweiterungen auf Basis der standardmäßigen 8-knotigen Volumenschale ohne ANS auskommt. Diese wurde von Alves de Sousa et al. [6] vorgeschlagen und enthält 12 inkompatible Erweiterungen, die sich nur wenig von der Volumenformulierung der gleichen Publikation unterscheiden. Ansonsten wird eine unterschiedliche Anzahl an inkompatiblen Freiheitsgraden für eine Kombination mit der ANS Methodik vorgeschlagen. Viele Arbeiten empfehlen 7 inkompatible Freiheitsgrade, die bereits als Teil einer Interpolation von Hauptmann et al. [66] genutzt wurden und in verschiedenen Arbeiten wie bei Tan und Vu-Quoc [165]

oder der Dissertation von Irslinger [73] ebenfalls verwendet werden. Die Interpolation der gewählten 7 Parameter erfolgt mit der folgenden B-Matrix

$$\tilde{\mathbf{B}}^{\text{en}} = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta & \zeta\xi & \zeta\eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & \eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.106)$$

6.3 Geometrisch lineare Benchmarkbeispiele

6.3.1 Vorbemerkung

Hier werden zunächst geometrische lineare Benchmarkbeispiele untersucht, da diese bereits grundlegende Defizite im Elementverhalten aufdecken. Dazu wird bei Verwendung inkompatibler Freiheitsgrade ausschließlich die statische Kondensation genutzt. Nur die Elementformulierungen, die hier einigermaßen erfolgreich abschneiden, werden für die weiteren Untersuchungen in dieser Arbeit in Betracht gezogen.

Zusätzlich betrachtete Formulierungen

In diesem Abschnitt werden weitere Erweiterungen von bekannten EAS-Elementen aufgegriffen, um die vorgeschlagene Elementformulierung gegen diese abzuwägen. Dazu werden die Elemente in der gleichen Weise zunächst in einer geometrisch linearen Formulierung in FEAP⁶ implementiert. Für die erweiterte Verzerrungsinterpolation dieser EAS-Elemente werden mit der in Kapitel 5 vorgestellten Methodik generalisierte inkompatible Ansatzfunktionen generiert. Die betrachteten Elementformulierungen sind in Tabelle 6.1 zusammengestellt.

6.3.2 Patchtest

Dieses grundlegende Benchmarkbeispiel wird entsprechend dem Vorschlag von MacNeal und Harder [111] mit der in Abbildung 6.2 gezeigten Elementierung und den gezeigten Materialparametern, die für dieses Beispiel üblicherweise dimensionslos gewählt werden, durchgeführt. Es existieren zahlreiche weitere Varianten des Patchtests für bestimmte Eigenschaften von Elementen, die hier nicht von Bedeutung sind. Innerhalb eines Würfels der Kantenlänge 1 ist das allseitig verzerrte Patchelement,

⁶ Das in der vorliegenden Arbeit genutzte Finite-Elemente-Programm FEAP basiert auf einer Version von Taylor [168] aus dem Jahr 1991, das aber seither in einer stark modifizierten Fassung, zuletzt insbesondere durch die Nutzung der im Anhang A beschriebenen symbolischen Programmierung auf Basis von Mattern [112], verwendet wird.

Tabelle 6.1: Übersicht der Volumen- und Volumenschalenelemente, die in die modifizierte Version von FEAP implementiert wurden, siehe Anhang A.

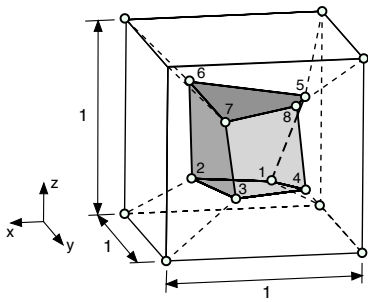
Akronym ^a	Beschreibung	Basierend auf
Volumenelemente		
Disp	8-knotiges Hexaederelement nach Abschn. 6.1.2.	—
B-Bar	Volumetrische Verzerrung wird durch ihren Mittelwert ersetzt, um volumetrische Versteifung zu vermeiden.	Hughes [69]
Bor	Wie B-Bar-Formulierung. Zudem heuristische Modifikationen zur Vermeidung von Schubversteifungen.	Borrvall [30]
Wil9	Klassische Wilson-Ansatzfunktionen, s. Glg. (6.61). Erfüllung des Patchtests mit Glg. (6.65).	Wilson et al. [186]
Wil9ts	Approximation der Ableitung kompatibler Ansatzfunktionen in einer Taylorreihe (<i>ts</i>), s. Glg. (6.57). Erweiterung mit klassischen Wilson-Funktionen, s. Glg. (6.61).	Korelc und Wriggers [88]
Wil12ts	Wie Wil9ts-Formulierung mit weiterer inkompatibler Ansatzfunktion, s. Glg.(6.62).	Wriggers und Korelc[191]
Li18	Erweiterung abgeleitet aus Wilson-Funktionen, s. Glg. (3.60)	Li et al. [103]
Alv18	Erweiterung abgeleitet aus Unterraum-Analyse, s. Glg. (3.62).	Alves de Sousa et al. [6]
And30	Vollständig trilineare Erweiterung, s. Glg. (3.57).	Andelfinger und Ramm [8]
Volumenschalenelemente		
ANSnat	Modifikation kompatibler Größen zur Vermeidung von Querschub- und Trapezversteifung , s. Abschn. 6.2.1.	Bathe und Dvorkin [48],
ANSsus	Wie ANSnat-Formulierung. Zudem Anpassung des Basisvektors in Dickenrichtung für verzerrte Geometrien, s. Abschn. 6.2.2.	Sussman und Bathe [162]
Alv12	Wie Alv18-Formulierung. Erweiterung optimiert für Querschub, s. Glg. (3.64).	Alves de Sousa et al. [6].
Vu7ANSnat	Wie ANSnat-Formulierung. Erweitert zur Vermeidung von volumetrischer und Schubversteifung, s. Glg. (3.63).	Tan und Vu-Quoc [166]
Vu7ANSsus	Wie Vu7ANSnat-Formulierung. Zudem Anpassung des Basisvektors wie in ANSus-Formulierung.	—

^a Die Ziffer im Akronym gibt die Anzahl inkompatibler Freiheitsgrade an.

dessen 6 Nachbarlemente ebenfalls verzerrt sind, aber jeweils mindestens eine quadratische Seitenfläche besitzen. Die folgenden Funktionen der Verschiebungen in x -, y - und z -Richtung werden als Dirchlet-Randbedingungen auf die Eckknoten aufgebracht

$$\begin{aligned}
 u &= 10^{-3}(2x + y + z)/2 \\
 v &= 10^{-3}(x + 2y + z)/2 \\
 w &= 10^{-3}(x + y + 2z)/2 .
 \end{aligned}
 \tag{6.107}$$

Auf die Knoten 1 bis 8 des inneren Elements (dem sogenannten *Patch*) werden keine Randbedingungen aufgebracht. An diesen *Patch*knoten müssen dann die mit Gleichung (6.107) analytisch berechneten Verschiebungen für eine korrekt funktionierende



Knotenkoordinaten des inneren (Patch-)Elements			
	x	y	z
1	0.249	0.342	0.192
2	0.826	0.288	0.288
3	0.850	0.649	0.263
4	0.273	0.750	0.230
5	0.320	0.186	0.643
6	0.677	0.305	0.683
7	0.788	0.693	0.644
8	0.165	0.745	0.702

Materialparameter
 $E = 1.0 \cdot 10^6$
 $\nu = 0.3$

Abbildung 6.2: Geometrie und Materialparameter des Patchtests für Volumenelemente. Auf die Randknoten werden die Verschiebungen aus Glg. (6.107) aufgebracht.

Elementformulierung mit den numerischen Finite-Element-Ergebnissen übereinstimmen. Zudem sollen die analytisch berechneten Werte für die Verzerrungen $\epsilon_{ij} = 10^{-3}$ sowie die Normal- und Schubspannungen $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 2000$ und $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 400$ im gesamten Element konstant sein.

Als einziges Volumenelement besteht die Bor-Formulierung nicht den Patchtest, allerdings sind die Abweichungen mit einem maximalen Fehler von 2.6% in den Verschiebungen und einem maximalen Fehler von 3.0% in den Spannungen nur geringfügig. In den weiteren numerischen Beispielen dieser Arbeit liefert es aber durchaus zufriedenstellende Ergebnisse. Auf die Ausnahmen wird beim jeweiligen numerischen Beispiel eingegangen.

Für die Volumenschalenelemente ist ein Bestehen des Patchtests wegen der Anwendung des MITC/ANS-Konzepts zur Anpassung der Verzerrungen aus Abschnitt 6.2.1 a priori nicht möglich. Daher werden häufig auf dicke Schalenprobleme ausgerichtete Varianten des Patchtests eingesetzt, wie den ebenfalls bei MacNeal und Harder [111] beschriebenen sogenannten Biege-Patchtest, auf die hier nicht weiter eingegangen wird. Das Element Alv12, in dessen Formulierung das MITC/ANS-Konzept nicht verwendet wird, besteht wie die anderen inkompatibel erweiterten Elemente den Patchtest und bildet so die einzige Ausnahme im Rahmen der betrachteten Volumenschalenelemente aus Tabelle 6.1.

6.3.3 Streifen mit trapezförmigen Elementen

Originalversion mit sechs finiten Elementen

In diesem Beispiel von MacNeal und Harder [111] wird ein einfacher Balken untersucht, dessen Geometrie und Materialparameter in Abbildung 6.3 gezeigt werden. Um das in Abschnitt 6.2.2 angesprochene mögliche Defizit einiger Elementformulierungen bei trapezförmigen Elementen zu untersuchen, werden die vertikalen Elementkanten alternierend um 45° geneigt. Abweichend von der Originalversion wird – wie im

Schrifttum üblich – eine Breite von 1.0 in und ein Elastizitätsmodul von $1.0 \cdot 10^6$ psi anstatt 0.1 in und ein Elastizitätsmodul von $1.0 \cdot 10^7$ psi verwendet. Beide Werte führen für die untersuchte Biegedeformation zur gleichen Absenkung. Die Absenkung wird für $\nu = 0.0$ und $\nu = 0.3$ berechnet, um möglicherweise auftretendes volumetrisches Locking zu veranschaulichen.

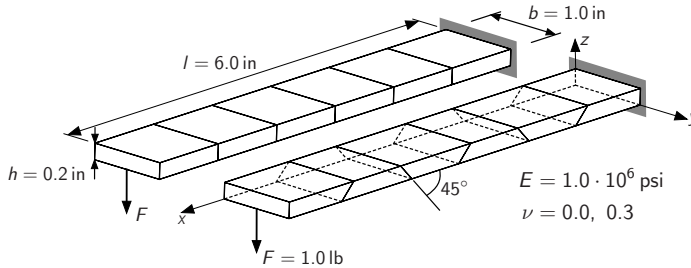


Abbildung 6.3: Geometrie und Randbedingungen des geraden MacNeal-Balkens, der links mit rechteckigen und rechts mit trapezförmigen Elementen vernetzt ist, um die Empfindlichkeit gegenüber Versteifungen infolge über die Dickenrichtung schiefgestellter Elementkanten (sogenannte Trapezversteifungen) zu untersuchen.

Tabelle 6.2: Absenkung des Streifenendes, normiert auf Referenzlösung 0.1081 in von MacNeal und Harder [111]. Vergleich von Rechteck- oder Trapezgeometrie im MacNeal-Balken aus Abbildung 6.3.

	Volumenelemente									Volumenschalenelemente				
	Disp	B-Bar	Bor	W19	W19ts	W112ts	L18	Alv18	And30	ANSnat	ANSsus	Alv12	Vu7ANSnat	Vu7ANSsus
Rechteck														
$\nu = 0$	0.074	0.076	0.926	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993	0.993
$\nu = 0.3$	0.091	0.099	1.204	0.988	0.992	0.992	0.992	0.992	0.992	0.992	0.902	0.902	0.992	0.992
Trapez														
$\nu = 0$	0.024	0.026	0.173	0.215	0.216	0.216	0.215	0.215	0.215	0.156	0.548	0.893	0.596	0.905
$\nu = 0.3$	0.026	0.033	0.223	0.205	0.210	0.210	0.209	0.209	0.210	0.163	0.497	0.807	0.655	0.924

Tabelle 6.2 zeigt die bzgl. der Referenzlösung normierte Absenkung am vorderen Ende des Balkens. Darin wird eine Unterteilung in Volumen- und Volumenschalenelemente vorgenommen. Der Effekt der Versteifung wegen der schiefen Elementkanten ist deutlich erkennbar. Wie zu erwarten, ergibt sich für die Disp- und B-Bar-Formulierung schon bei Rechtecken nur ein geringer Bruchteil der Referenzlösung, der für die Vernetzung mit trapezförmigen Elementen weiter abnimmt. Alle weiteren Volumenelemente zeigen für rechteckige Elementgeometrien akzeptable Ergebnisse, für trapezförmige Elementgeometrien aber sehr stark von der Referenzlösung abweichende Werte. Die Bor-Formulierung überschreitet für $\nu = 0.3$ bereits für Rechteckformen den Referenzwert um mehr als 20%. Eine Begründung könnte so aussehen: Die in diesem Element

vorgenommene Kompensation schlechter Verhältnisse von Seitenlängen durch eine Skalierung der Elementbasisvektoren führt bei sehr dünnen Elementen zu über- oder unterschätzten Größen in den Basisvektoren. Diese bewirken wiederum, dass die Gradienten verfälscht werden, was sich direkt auf die Steifigkeit des Elements auswirkt. Interessanterweise sind die Unterschiede bei Trapezform geringer.

Alle Volumenschalenformulierungen zeigen in den beiden Spalten für Rechtecke in Tabelle 6.2 gute Übereinstimmungen mit der Referenzlösung. Bei der ANSnat- und ANSsus-Formulierung zeigt sich der erwartete Einfluss volumetrischer Versteifung, der in der Formulierung dieser Elemente nicht berücksichtigt wird. Für die trapezförmigen Elementgeometrien macht sich die Schiefstellung der Elementkanten deutlich bemerkbar. Die Formulierung Alv12 weicht sogar noch stärker von der Referenzlösung ab als die meisten Volumenformulierungen. Alle weiteren Volumenschalenelemente enthalten das MITC/ANS-Konzept, mit dessen Hilfe die Ergebnisse deutlich näher an der Referenzlösung liegen. Ohne eine zusätzliche Modifikation der Basisvektoren wie in Abschnitt 6.2.2 beschrieben, weichen entsprechend die Elemente ANSnat und Vu7ANSnat noch deutlich von der Referenzlösung ab. Die erwähnte Modifikation des Basisvektors in Dickenrichtung erzeugt einen Anstieg von circa 30 % von ANSnat auf ANSsus, der analog auch zwischen den Ergebnissen der Formulierungen Vu7ANSnat und Vu7ANSsus zu sehen ist. Außerdem treten noch Schwankungen für die unterschiedlichen Poissonzahlen auf, die aber mit einer feineren Netzauflösung verschwinden sollten. Die Abweichungen von weniger als 10 % liegen bei der betrachteten Netzauflösung für das Element Vu7ANSsus bereits in einem akzeptablen Bereich.

Wünschenswert wäre allerdings eine noch größere Übereinstimmung, wie sie mit weniger als 1 % Abweichung beispielsweise bei Harnau und Schweizerhof [60] oder bei Irlinger [73] enthalten sind. In den genannten Publikationen werden die Integrale zur Berechnung der Elementgrößen entweder vollständig in lokalen Elementkoordinaten ausgewertet (hierzu ist das Materialgesetz ebenfalls in das lokale Koordinatensystem zu transformieren) oder weitere Modifikationen am Elementkoordinatensystem vorgenommen. Da der Fokus dieser Arbeit insbesondere auf numerischer Effizienz liegt, wird so wenig Aufwand wie möglich in die Elementformulierung investiert und von einem Vorgehen nach [60] oder [73] abgesehen.

Erhöhung der Netzauflösung

Eine Verbesserung der Ergebnisse ist über eine *ad-hoc-Erhöhung der Netzauflösung* erreichbar. So werden ausgehend von den trapezförmig deformierten Elementen drei weitere uniform verfeinerte Vernetzungen mit der Poissonzahl $\nu = 0.3$ untersucht. Die zugehörigen Finite-Element-Netze sind in Abbildung 6.4 dargestellt. Die schiefgestellten Kanten des Ausgangsnetzes sind für alle Diskretisierungen hervorgehoben. Somit ist die Beibehaltung der Neigung aus der Ausgangslage besser nachvollziehbar. Als Folge dieses Schritts werden die Ergebnisse erwartungsgemäß besser. Dabei ist

zu beachten, dass nicht die Qualität der Elemente verbessert wird, sondern nur die Qualität der Vernetzung.

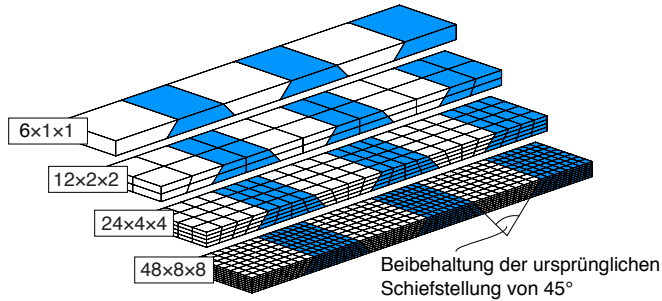


Abbildung 6.4: Uniforme Erhöhung der Netzauflösung für den geraden MacNeal-Balken mit trapezförmigen Elementen. Beibehaltung der Schiefstellung der Elementkanten aus Originalversion mit 6 Elementen, s. Abb. 6.3.

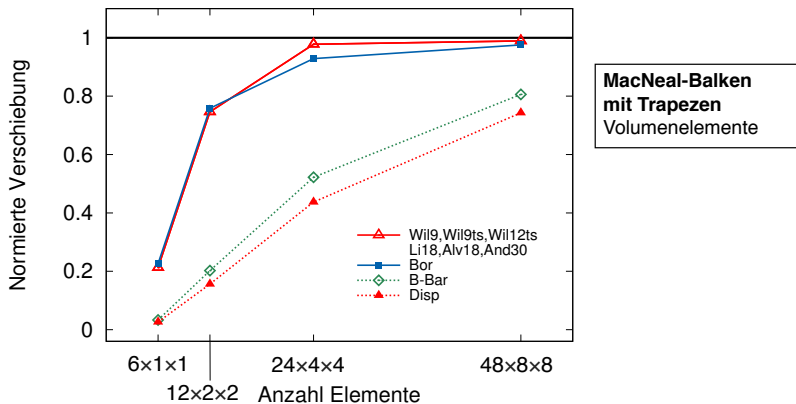


Abbildung 6.5: Normierte Verschiebung der Volumenelemente für $\nu = 0.3$ über uniform erhöhte Netzauflösung mit trapezförmigen Elementen, s. Abb. 6.4 und Abb. 6.3 für die Randbedingungen.

Abbildung 6.5 zeigt die normierten Verschiebungen der **Volumenformulierungen**. Das Disp- und B-Bar-Element liegen deutlich unter den Ergebnissen der übrigen Elemente, erreichen in der letzten Stufe der Netzverfeinerung aber immerhin 74.3 % und 80.6 % der Referenzlösung. Bereits für $6 \times 1 \times 1$ Netze, siehe Tabelle 6.2, weisen die mit inkompatiblen Freiheitsgraden erweiterten Formulierungen Wil9, Wil9ts, Wil12ts, Li18, Alv18 und And30 nur geringfügige Unterschiede von maximal 0.5 % auf. Daher werden diese Formulierungen in einer Kurve zusammengefasst. Der Fehler in den Ergebnissen reduziert sich für $24 \times 4 \times 4$ Elemente von ungefähr 80 % auf 2.2 % und

für die finale Vernetzung auf lediglich 1.1 %. Das Bor-Element verhält sich sehr ähnlich, weist aber für $24 \times 4 \times 4$ Elemente immer noch einen Fehler von 7.7 % und für die finale Vernetzung den allerdings akzeptablen Wert von 2.4 % auf. Die Schiefstellung kann mit den Volumenformulierungen also auch gut durch eine uniforme Netzverfeinerung kompensiert werden. Aus praktischer Sicht ist das ein wichtiger Aspekt, da selbst, wenn das für die Berechnung verwendete Element aufgrund zu starker Plausibilitätsdefizite ausgetauscht werden muss, eine Netzverfeinerung als Standardvorgehen vorzuschlagen ist.

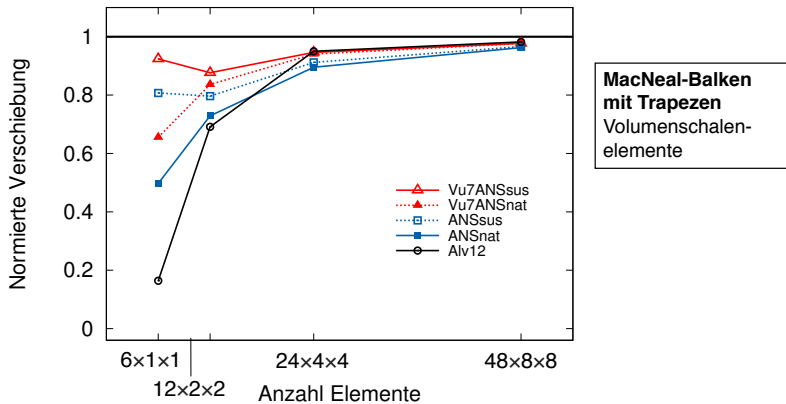


Abbildung 6.6: Normierte Verschiebung der Volumenschalenelemente für $\nu = 0.3$ über uniform erhöhte Netzauflösung mit trapezförmigen Elementen, s. Abb. 6.4 und Abb. 6.3 für die Randbedingungen.

Für die **Volumenschalenelemente** sind die normierten Verschiebungen in Abbildung 6.6 dargestellt. Die Formulierung Alv12, die außer der Anreicherung mit inkompatiblen Freiheitsgraden keine Modifikationen enthält, verhält sich analog zu den Volumenformulierungen Wil9 und Weiteren. Bei der Formulierung Vu7ANSsus verschwindet der Einfluss des modifizierten Basisvektors wie erwartet für die zunehmende Netzdichte. Bereits für die erste Verfeinerung unterscheidet sich der Fehler im Vergleich zum Vu7ANSnat-Element nur noch um 4 % und für weitere Verfeinerungen um weniger als 1 %. Für die ANS-Formulierungen ohne inkompatible Freiheitsgrade ist das Verhalten ähnlich. Für die Formulierungen Vu7ANSsus und ANSsus mit dem modifizierten Basisvektor in Dickenrichtung stellt sich zunächst ein geringer Abfall beim Übergang von $6 \times 1 \times 1$ auf $12 \times 2 \times 2$ Elementen ein. Die Ursache kann mit der immer noch relativ unscharfen Netzdichte zusammenhängen.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass das Testbeispiel von MacNeal und Harder in seiner Originalversion mit 6 verzerrten Elementen nur von der Formulierung Vu7ANSsus mit Modifikation des Basisvektors in Dickenrichtung voll bestanden wird. Alle weiteren Formulierungen benötigen eine Abschwächung des Effekts der Netzverzerrung, die mit einer uniformen Verfeinerung der Netzdichte aber sehr einfach zu

erreichen ist. Bei der durch Netzverfeinerung modifizierten Variante des Testbeispiels schneiden sowohl alle Volumen- als auch Volumenschalenformulierungen, die mit inkompatiblen Freiheitsgraden erweitert wurden, mit einem akzeptablen Fehlermaß ab.

Es ist wie bereits erwähnt zu beachten, dass die Erhöhung der Netzauflösung nicht die Qualität der Elementformulierungen verbessert. Dieser Schritt zeigt vielmehr, dass es oftmals möglich ist, mit einfacheren Elementformulierungen sehr gute Ergebnisse zu erzielen, wenn die Netzauflösung in einem sinnvollen Rahmen erhöht wird. Für praktische Anwendungen ist es oftmals wegen der Geometrie des Problems ohnehin unvermeidbar, erhöhte Netzdichten zu verwenden, um die untersuchten Bauteile und Effekte sinnvoll modellieren zu können.

6.3.4 Gegenseitig gedrückter Zylinder mit starren Endscheiben

Dieses Beispiel stammt aus dem *shell obstacle course* (Hindernisparkours für Schalenelemente) von Belytschko et al. [16] und gilt als einer der schwierigeren Tests für die Überprüfung, ob eine Elementformulierung die Überlagerung aus Schub- und Membranversteifung gut meistern kann. Abbildung 6.7a zeigt die Geometrie und die Materialparameter des Beispiels.

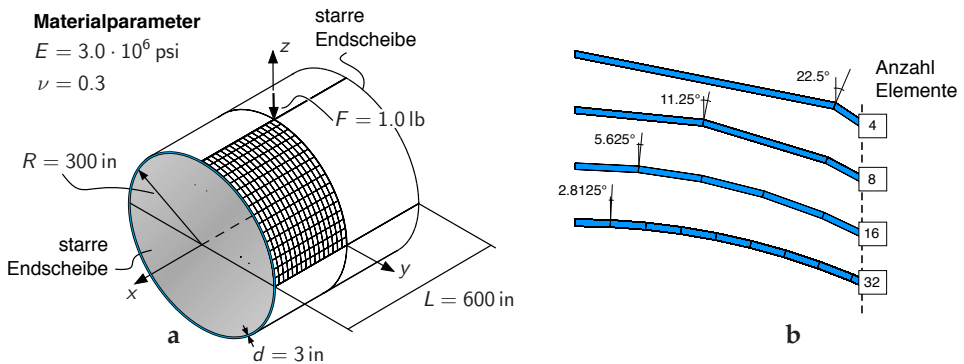


Abbildung 6.7: (a) Geometrie und Materialparameter des Gegenseitig gedrückten Zylinders aus dem *shell obstacle course* (Hindernisparkours für Schalenelemente) von Belytschko et al. [16]. (b) Winkel zwischen den Elementkanten in einem Schnitt durch den Zylinder

An den beiden Enden werden die Verschiebungen in der yz -Ebene festgehalten, was wie eine starre Endscheibe interpretiert werden kann. Bei Beachtung der Symmetrie genügt die Diskretisierung eines Achtels der Geometrie. Über die Dicke wird ein Element verwendet und in der Schalenebene werden 4 bis 32 Elemente je Seite verwendet. In Abbildung 6.7 besteht das Netz aus 16×16 Elementen. Von Interesse ist die Verschiebung unterhalb der Belastung, die von oben und entgegengesetzt von der unteren Seite auf den Zylinder einwirkt. Abbildung 6.7b veranschaulicht die zu

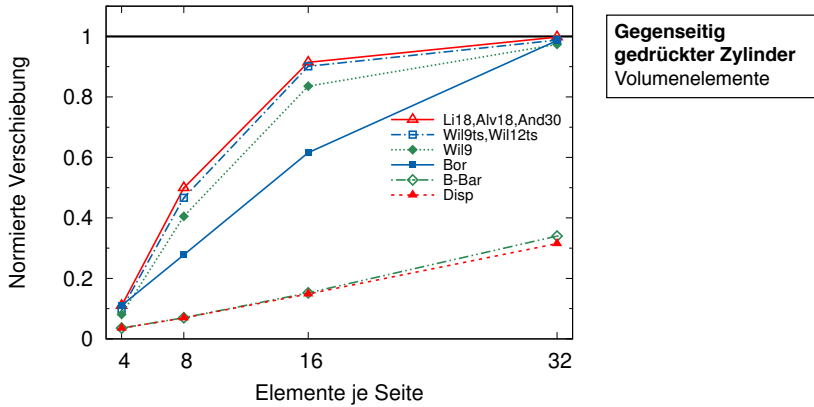


Abbildung 6.8: Normierte Verschiebung (Referenzlösung $-1.8248 \cdot 10^{-5}$ in) über zunehmende Anzahl an Elementen mit Volumenelementen für den gegenseitig gedrückten Zylinder aus Abb. 6.7.

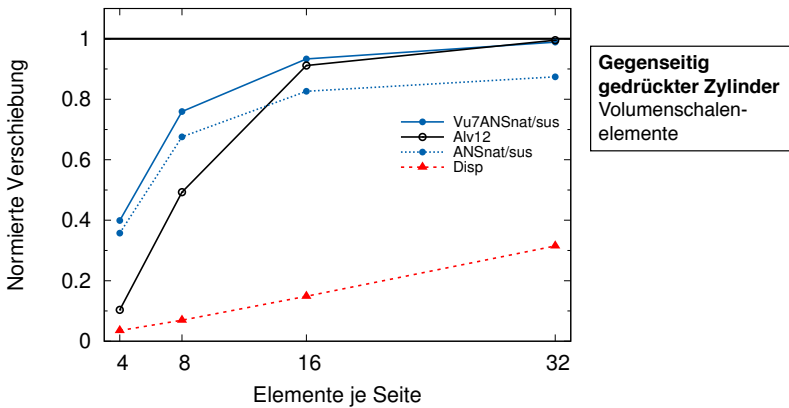


Abbildung 6.9: Normierte Verschiebung (Referenzlösung $-1.8248 \cdot 10^{-5}$ in) über zunehmende Anzahl an Elementen mit Volumenschalenelementen für den gegenseitig gedrückten Zylinder aus Abb. 6.7.

trapezförmigen Elementgeometrien föhrende Schiefstellung der Elementkanten, die mit zunehmender Netzdicthe abnimmt. Trapezförmige Elementgeometrien wurden auch beim geraden MacNeal-Balken aus Abschnitt 6.3.3 untersucht.

Die normierten Verschiebungen der verschiedenen Volumen- und Volumenschalenelemente sind auf den Abbildungen 6.8 und 6.9 dargestellt. Zu den **Volumenelementen**: Die Disp- und B-Bar-Elemente erreichen für die feinste Netzauföslung circa 34 % der Referenzlösung. Dagegen ist der Fehler aller anderen Volumenformulierungen für die feinste Netzauföslung geringer als 2%, mit der nicht ins Gewicht fallenden Ausnah-

me der Wil9-Formulierung mit einem Fehler von 2.7%. Trotz zunehmender Netzdichte konvergiert das Bor-Element langsamer als die mit inkompatiblen Freiheitsgraden erweiterten Formulierungen, was auf eine direkte Abhängigkeit von der Schiefstellung der Elementkanten hindeutet und durch die Beobachtungen aus Abschnitt 6.3.3, wo ein gerader Balken mit alternierender Schiefstellung der Elementkanten untersucht wurde, gestützt wird. Allerdings kommt es nicht zu einer Überschätzung der Referenzlösung, da die Elementkanten eine vergleichsweise geringe Schiefstellung einnehmen.

Das Element Wil9 weist für alle Netzdichten einen etwas größeren Fehler als die modifizierte Fassung Wil9ts auf. Die Ergebnisse der Elemente Wil9ts und Wil12ts unterscheiden sich hingegen maximal um 0.1%, da in diesem Beispiel kein volumetrisches Locking auftritt. Nur geringfügig bessere Ergebnisse weisen die Formulierungen Li18, Alv18 und And30 auf, die zusammengefasst dargestellt werden, da hier ebenfalls nur Unterschiede von maximal 0.1% zwischen deren Ergebnissen festgestellt werden.

Die **Volumenschalenelemente** erreichen für die feinste Vernetzung ebenfalls einen Fehler unterhalb von 2%. Als einzige Ausnahme weist das Element ANSSus noch einen Fehler von 12.6% auf, da die inkompatiblen Freiheitsgrade, die unter anderem zur Vermeidung von Membranversteifungen eingesetzt werden, noch fehlen. Die ANSnat-Formulierung, die ohne Modifikation des Basisvektors eingesetzt wird, weicht für alle Netzdichten um maximal 0.4% von der ANSSus-Formulierung ab. Das heißt der Einfluss der Modifikation des Basisvektors in Dickenrichtung ist hier, selbst für die maximale Schiefstellung der Elementkanten um 22.5° , vernachlässigbar gering. Das Element Alv12 verhält sich fast identisch wie die Volumenelemente um Li18.

6.3.5 Verdrehter Streifen

Der verdrehte Streifen von MacNeal und Harder [111] ist ebenfalls ein Standard-Testbeispiel für Schalenelemente. Geometrie, Materialparameter und Belastung werden in Abbildung 6.10 gezeigt. Darin ist ebenfalls bereits die sehr dünne Variante des Streifens enthalten, die erst in Abschnitt 6.3.6 untersucht wird. Die in der Konvergenzstudie verwendeten Netzauflösungen werden in Abbildung 6.11 einander gegenübergestellt. Bereits ab der Vernetzung mit $24 \times 4 \times 1$ Elementen müssten mehrere Elemente über die Dicke verwendet werden, um zu gewährleisten, dass die Abmessungen in Schalebene zu deutlich von der Schalendicke abweichen. Für Volumenelemente, die alle Normal- und Schubverzerrungen gleichermaßen zur Vermeidung von Versteifungseffekten behandeln, sollte die Umkehr des Seitenverhältnisses keine Schwierigkeiten bereiten. Bei Volumenschalenelementen beeinflusst die Umkehr der Seitenverhältnisse die wirksame Vermeidung von Versteifungseffekten, da diese abhängig von der a priori definierten Dickenrichtung bevorzugt für die Normalverzerrung in Dickenrichtung und die Querschubverzerrungen formuliert werden.

An einem Ende sind alle Freiheitsgrade festgehalten, während das andere Ende entweder in Richtung der Schalebene durch F^{IP} oder senkrecht dazu durch die Kraft F^{OP} belastet wird. Die Kraft wird auf die Knoten entlang der y-Achse an der

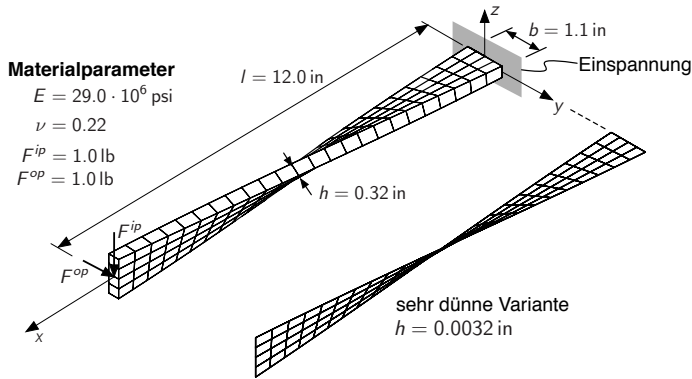


Abbildung 6.10: Geometrie und Materialparameter des verdrehten Kragarms. (Links) Originaldicke nach MacNeal und Harder [111], (rechts) 100fach dünnere Variante nach Belytschko et al. [17], s. Abschn. 6.3.6.

Stelle $z = h/2$ verteilt. Die Herausforderung bezüglich des Elementverhaltens liegt darin, die durch die Verdrillung angesprochene Kopplung zwischen den Schubverzerrungen in Schalenebene und den Querschubverzerrungen über die Schalendicke korrekt abzubilden.

Alle Elemente sind nicht mehr eben, sondern verdrillt. In Abbildung 6.11 zeigt die Projektion am Ende des Balkens jeweils ein einzelnes Element, woran deutlich zu erkennen ist, dass für eine zunehmende Netzdichte die kürzere Seite der Schalenebene auf die Dicke reduziert wird und diese auch unterschreitet. Beispielsweise ist für die Vernetzung $24 \times 4 \times 1$ der Unterschied mit dem Verhältnis von Schalenebene zu Dicke von 0.86 noch nicht so ausgeprägt wie in der Vernetzung $48 \times 8 \times 1$ mit 0.43. Bei der während der Netzverfeinerung einmaligen Unterteilung in Dickenrichtung wird für die größte Netzdichte $96 \times 8 \times 2$ das Verhältnis aber wieder besser, da es sich dann der Geometrie eines Würfels annähert.

In den Abbildungen 6.12 und 6.13 wird die normierte Verschiebung für beide Lastfälle dargestellt, wobei jeweils die Verschiebungen in Belastungsrichtung genutzt wurde. Zur **Belastung senkrecht zur Schalenebene** mit F^{op} : Wie erwartet weist das Element Disp eine langsame Konvergenz auf, schafft es aber für die feinste Vernetzung nur noch einen akzeptablen Fehler von 5.8% aufzuweisen. Das B-Bar-Element nähert sich zunächst der Lösung an und überschätzt diese für die Vernetzung $48 \times 8 \times 1$ um mehr als 30%. Für die feinste Elementierung wird die Lösung um 1.7% überschätzt. Das heißt, sobald sich das Seitenverhältnis von Schalenebene zu Schalendicke deutlich umkehrt, macht sich dies bei der B-Bar-Formulierung negativ bemerkbar. Das Bor-Element, das die B-Bar-Formulierung enthält, zeigt analoges Verhalten und überschätzt für alle Vernetzungen die Lösung. Das heißt, die B-Bar-Formulierung kann bei unzureichender Auflösung über die Dicke die verdrillte Geometrie nicht mehr korrekt abbilden. Dieser Effekt verstärkt sich für die Bor-Formulierung als Folge der

darin vorgenommenen Skalierung der Basisvektoren. Die Ursache hierfür ist, dass zunächst wegen der unzureichenden Vernetzung über die Dicke die, über das Element gemittelten, Normalverzerrungen falsch eingeschätzt werden und sich so die, wegen der verdrehten Geometrie besonders ausgeprägte, Kopplung negativ auf die Schubverzerrungen auswirkt. In der Bor-Formulierung werden diese Schubanteile als Folge der skalierten Basisvektoren noch verstärkt.

Alle übrigen Elemente konvergieren monoton und schnell zur korrekten Lösung. Bereits nach der ersten Netzverfeinerung liegt der Fehler unter 2%. Nur die ANS-Formulierungen ANSnat und ANSus gelangen aufgrund fehlender inkompatibler Erweiterungen erst mit zunehmender Netzdichte in diesen Bereich. Beide Formulierungen unterscheiden sich wieder nur im Promillebereich, was bedeutet, dass auch in diesem Beispiel die Modifikation des Basisvektors in Dickenrichtung ohne Einfluss bleibt. Das gilt analog für die Formulierungen Vu7ANSnat und Vu7ANSsus.

Bei der **Belastung in Schalenebene** mit F^{ip} , siehe Abbildung 6.13, beträgt für die Disp-Formulierung in der feinsten Diskretisierung der Fehler noch 7.4%. Die B-Bar- und Bor-Formulierung zeigen analoges Verhalten zum Lastfall senkrecht zur Schalenebene. Alle weiteren Volumenelemente unterscheiden sich bereits nach der ersten Verfeinerung der Netzdichte praktisch nicht mehr und treffen die Referenzlösung mit einem Fehler von weniger als 1%.

Interessant ist das ähnliche Ausscheren bei den Volumenschalenformulierungen. Die Verschiebungskurve der Elemente ANSnat und ANSus knickt nach der Umkehr der Seitenverhältnisse ein. Die Werte und das weitere Konvergenzverhalten unterscheidet sich dann nur noch minimal von der Disp-Formulierung. Der Grund ist, dass in den

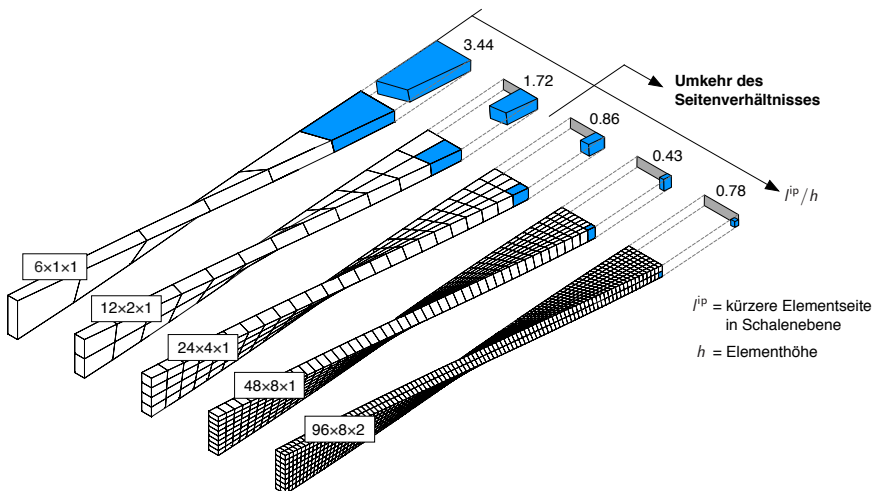


Abbildung 6.11: Vergleich Seitenverhältnis aus Schalendicke zu kürzester Länge in Schalenebene für Vernetzungen des verdrehten Streifens aus Abschn. 6.3.5, Abb. 6.10.

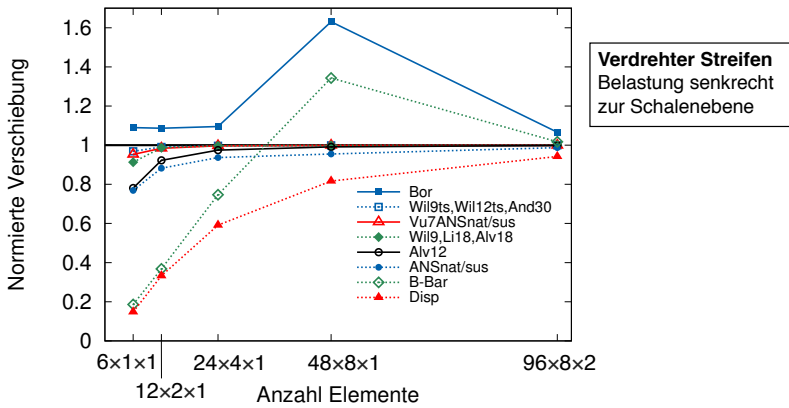


Abbildung 6.12: Normierte Verschiebung (Referenzlösung 0.001754 in) über Anzahl der Elemente, s. Abb. 6.11 für verdrehten Streifen aus Abb. 6.10. Belastung senkrecht zur Schalenebene (F^{OP}).

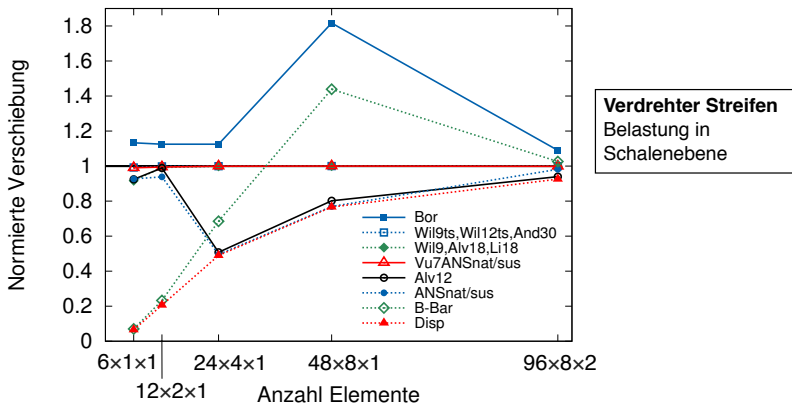


Abbildung 6.13: Normierte Verschiebung (Referenzlösung 0.005424 in) über Anzahl der Elemente, s. Abb. 6.11 für verdrehten Streifen aus Abb. 6.10. Belastung in Schalenebene (F^{IP}).

Elementen ANSnat und ANSus nur Maßnahmen zur Vermeidung von Querschublocking enthalten sind, die ab der Umkehr der Seitenverhältnisse fast wirkungslos sind. Das gleiche Verhalten weist die Formulierung Alv12 auf, die ebenfalls nur inkompatible Freiheitsgrade zur Beseitigung von volumetrischen Versteifungen und Querschubversteifungen enthält. Dieses relativ kleine Testbeispiel zeigt damit Defizite auf, die bei einer anisotropen Orientierung der Elementgeometrie auftreten können und bei größeren Modellen beachtet werden sollen.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass bei Belastung senkrecht zur Schalenebene alle Elemente gute Ergebnisse aufweisen und die Umkehr des Seitenverhältnisses keine Auswirkungen auf die Konvergenz hat. Die Ausnahme stellen die Elemente B-Bar und Bor bei verdrehten Elementnetzen dar. Dieser Zustand verschlechtert sich bei die Umkehr des Seitenverhältnisses zusätzlich. Dieses Defizit tritt analog bei Belastung in Schalenebene auf. In diesem Lastfall wird ebenfalls deutlich, dass für die reinen ANS-Formulierungen ANSNat und ANSus sowie die Formulierung Alv12 keine Modifikationen zur Vermeidung von Schublocking in Schalenebene vorhanden sind. Das führt zu dem leicht irritierenden Verhalten, da nach einer ersten Verbesserung der Lösung, diese bei Umkehr des Seitenverhältnisses deutlich auf die Genauigkeit der unmodifizierten reinen Verschiebungsformulierung Disp abfällt.

6.3.6 Verdrehter Streifen – sehr dünne Variante

Der verdrehte Streifen aus Abschnitt 6.3.5 wird von Simo et al. [158] durch eine Reduktion der Dicke von 0.32 in auf 0.05 in, also um das 6.4fache, modifiziert. Belytschko et al. [17] reduzieren die Dicke nochmals auf $h = 0.0032$ in – den 100fach kleineren Wert. Beides stellt eine deutliche Verschärfung des ursprünglichen Testbeispiels dar. In diesem sehr dünnen hier betrachteten Testfall wird die Belastung auf den Wert $F^{ip} = F^{op} = 1.0 \cdot 10^{-6}$ lb reduziert. Die Abbildungen 6.14 und 6.15 zeigen die normierten Verschiebungen für beide Lastfälle mit den angepassten Referenzlösungen, die von Belytschko et al. [17] übernommen wurden. Die geringe Dicke wird für keine der gewählten Diskretisierungen von einer Länge der Schalenebene unterschritten, weshalb für die feinste Vernetzung auch nur jeweils ein Element über die Dicke gewählt wird.

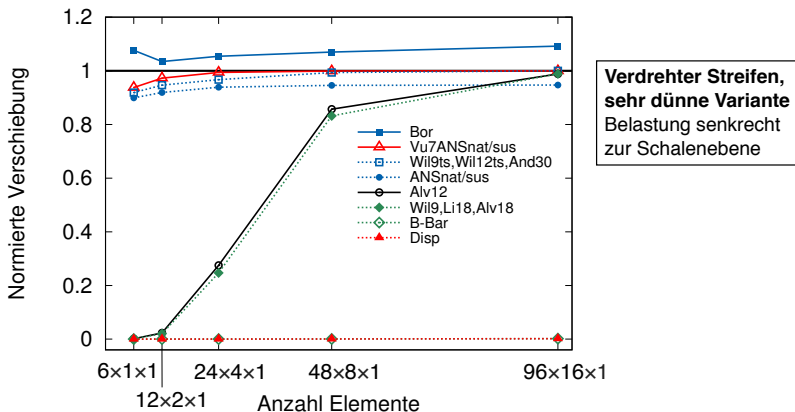


Abbildung 6.14: Normierte Verschiebung (angepasster Referenzlösung 0.001 294 in) für sehr dünne Variante des verdrehten Streifens. Belastung senkrecht zur Schalenebene (F^{op}).

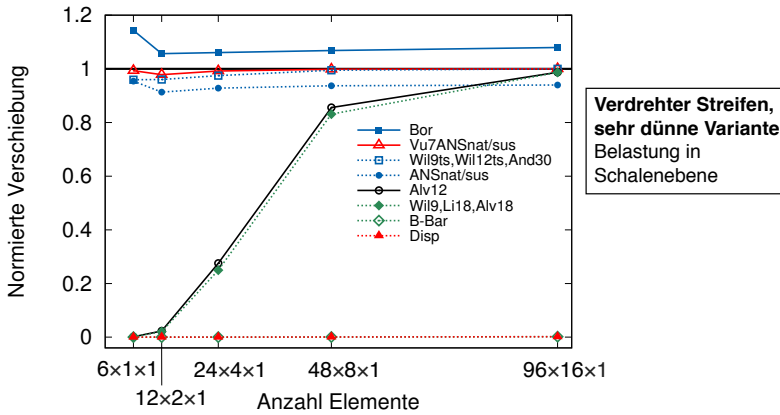


Abbildung 6.15: Normierte Verschiebung (angepasster Referenzlösung 0.005 256 in) für sehr dünne Variante des verdrehten Streifens. Belastung in Schalenebene (F^{ip}).

In beiden Lastfällen sind die Ergebnisse der Elemente ähnlich und es treten keine Ausreißer wie in der Standardvariante des Beispiels auf. Die Formulierungen Disp und B-Bar erreichen jeweils maximal 0.16 % der Referenzlösung in der feinsten Vernetzung, da hier keinerlei Anteile zur Beseitigung der auftretenden Versteifungseffekte enthalten sind. Die übrigen Elemente lassen sich für beide Lastfälle aufgrund minimaler Abweichungen untereinander in folgende Gruppen zusammenfassen: Die Elemente Wil9, Li18 und Alv18 konvergieren langsam und erreichen erst mit der feinsten Vernetzung einen akzeptablen Fehler von ungefähr 1 % in beiden Lastfällen. Im Vergleich dazu erzielt das Volumenschalenelement Alv12 für die mittleren Netzdichten nur geringfügig bessere Werte. Deutlich besser sind die Elemente ANSnat und ANSsus, die aber aufgrund fehlender inkompatibler Erweiterungen zur Vermeidung von Versteifungen in Schalenebene noch circa 5 % bis 6 % von der Referenzlösung abweichen. Besser schneiden die Formulierungen Wil9ts, Wil12ts und And30 ab, die maximal einen Fehler von unter 1 % aufweisen. Für die geringeren Netzdichten werden diese Elemente noch von der Vu7ANSnat- und der Vu7ANSsus-Formulierung leicht übertroffen. Das Bor-Element überschreitet durchgängig die Referenzlösung. Für die Belastung F^{op} liegt der Fehler zwischen 5.4 % und 9.2 % und für die Belastung F^{ip} steigt dieser auf 5.6 % bis 14.3 %. Bei der Belastung in Schalenebene ist dabei der Knick nach der Netzauflösung $6 \times 1 \times 1$ auffällig, der analog für die ANS-Formulierungen auftritt. Eine mögliche Begründung hierfür könnte im Nicht-Bestehen des in Abbildung 6.2 gezeigten Patchtests liegen.

Zusammenfassend ist feststellbar, dass die sehr dünne Variante des verdrehten Streifens größere Anforderungen an die Elemente stellt. Vom Lastfall unabhängig, erzielen nur die Elemente mit modifizierten kompatiblen Anteilen bereits für geringe Netzdichten sehr kleine Fehlerwerte. Zu diesen Modifikationen zählt die Taylorreihen-

entwicklung der Ableitung der Ansatzfunktionen in den Elementen Wil9ts und Wil12ts sowie die ANS-Formulierung in den Elementen Vu7ANSnat und Vu7ANSsus. Diese Modifikationen sind demnach für dicke und dünne Schalenprobleme geeignet. Nur das Element mit 30 inkompatiblen Freiheitsgraden And30 zeigt ohne zusätzliche Modifikationen eine vergleichbare Qualität in den Ergebnissen. Der reine ANS-Ansatz in den Elementen ANSnat und ANSsus genügt auch in der feinsten Netzauflösung nicht, um die Referenzlösung zu erreichen. Die Elemente Alv12, Wil9, Li18 und Alv18 kommen der Referenzlösung nur für die feinste Netzauflösung sehr nahe. Das Bor Element hat auch in der sehr dünnen Variante Schwierigkeiten eine verdrehte Elementgeometrie abzubilden. Ausreißer wie im Originalbeispiel bleiben erwartungsgemäß in der sehr dünnen Variante aber aus, da die Elementorientierung für alle Netzdichten gleich bleibt, sodass sich bei keiner der Vernetzungen die Seitenverhältnisse verschlechtern.

6.3.7 Platte mit Netzverzerrung

Dieses Beispiel wird zur Überprüfung der Netzverzerrungsempfindlichkeit in einer Ebene senkrecht zur Belastungsrichtung verwendet. Abbildung 6.16 zeigt die Geometrie und die Materialparameter der allseitig eingespannten Platte, die mit einer Einzellast in der Mitte belastet wird.

Bei Nutzung der Symmetrie ist nur ein Viertel der Platte zu diskretisieren. Es werden 2×2 und eine verfeinerte Diskretisierung mit 4×4 Elementen verwendet. Der Netzverzerrungsparameter a wird zwischen 0 mm und 12 mm variiert und ist für beide Netzdichten schematisch in Abbildung 6.16 dargestellt. Es ist zu beachten, dass bei einer feineren Vernetzung bei einem gleichen Netzverzerrungsparameter die

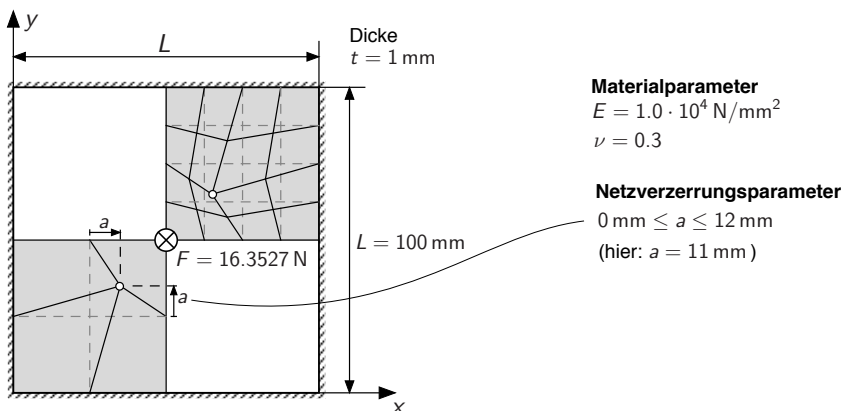


Abbildung 6.16: Geometrie, Material- und Netzverzerrungsparameter a einer eingespannten Platte. Untersuchung der Netzverzerrungsempfindlichkeit für Variation von a mit 2×2 und 4×4 Elementen.

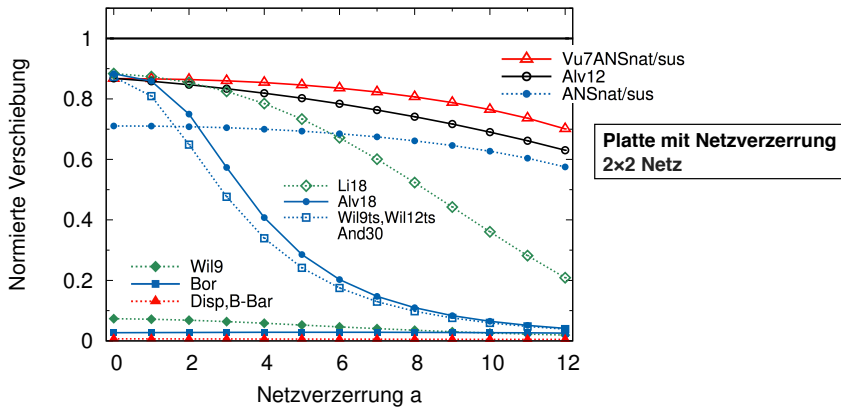


Abbildung 6.17: Normierte Verschiebung (Referenzlösung -1 mm) über zunehmende Netzverzerrung der mit 2×2 Elementen vernetzten Platte aus Abb. 6.16.

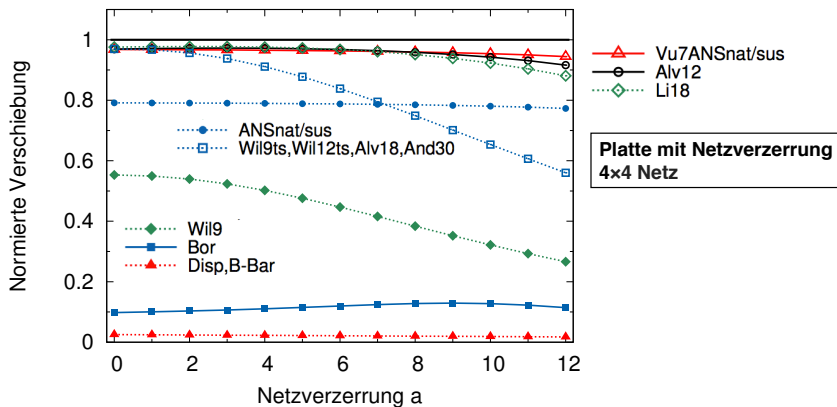


Abbildung 6.18: Normierte Verschiebung (Referenzlösung -1 mm) über zunehmende Netzverzerrung der mit 4×4 Elementen vernetzten Platte aus Abb. 6.16.

einzelnen Elemente weniger stark verzerrt werden. Die Referenzlösung kann für die Last $F = 16.3527$ N analytisch bestimmt werden und beträgt -1 mm.

In den Abbildungen 6.17 und 6.18 sind die normierten Verschiebungen über die Netzverzerrung für beide Netzdichten und unterschiedliche Elementvarianten dargestellt. In beiden Netzdichten stimmen die Ergebnisse für die Elemente B-Bar und Disp überein und erreichen aufgrund fehlender Modifikationen zur Beseitigung von Schubversteifungen nur wenige Prozente der Referenzlösung. Auch das Element Bor erreicht ebenfalls nur einen Bruchteil der Referenzlösung. Selbst für ein unverzerrtes

Netz sind aufgrund der schlechten Seitenverhältnisse, die ohnehin generell nicht zu empfehlen sind, nur 2.7% für das Netz mit 2×2 Elementen und 9.8% für das Netz mit 4×4 Elementen zu erreichen. Die Ergebnisse der Wil9-Formulierung sind für die feinere Diskretisierung deutlich besser. Die Elemente Wil9ts, Wil12ts, And30 und Alv18 erscheinen bei 2×2 Elementen für geringe Netzverzerrungen noch brauchbar. Für die Vernetzung mit 4×4 Elementen sind dann durchgängig Verbesserungen bemerkbar, das heißt für das rechtwinklige Netz ist der Fehler bereits deutlich geringer als bei den vorherigen Elementen, aber alle vier Formulierungen weisen eine stark ausgeprägte Abhängigkeit von der Netzverzerrung auf. Deutlich unempfindlicher gegenüber Netzverzerrung reagieren die ANS-Formulierungen ANSnat und ANSus, die aber durchgängig zu steif sind. Das Element Li18 hebt sich durch eine viel geringere Netzverzerrungsempfindlichkeit deutlich von den anderen Volumenformulierungen ab. Der Grund dafür ist die unterschiedliche Wahl der inkompatiblen Freiheitsgrade, die sich besonders in der Interpolation der letzten 3 Freiheitsgrade zeigt. Die Netzverfeinerung wirkt sich außerordentlich verbessernd auf das Elementverhalten aus. In diesem Testbeispiel zeigen die Volumenschalenelemente Alv12, Vu7ANSnat und Vu7ANSsus ihre speziell guten Eigenschaften. Wie erwartet, bewirkt die Modifikation des Basisvektors in Dickenrichtung nur geringfügige Änderungen, die als vernachlässigbar betrachtet werden können. Die Formulierung Alv12 zeigt für ein nur mit inkompatiblen Freiheitsgraden erweitertes Element, das ohne eine Modifikation der kompatiblen Verzerrungen und Verschiebungen auskommt, das beste Verhalten. Der Grund ist die Wahl der Erweiterung in den transversalen Schubverzerrungen. Eine noch geringere Empfindlichkeit gegenüber Netzverzerrung weisen nur die Formulierungen Vu7ANSnat und Vu7ANSsus auf. Deren Ergebnisse werden aber bei einer Verfeinerung der Vernetzung auch nahezu mit dem Element Alv12 erreicht.

Insgesamt betrachtet können bei Plattenbiegung die Volumenschalenelemente den Verzerrungszustand in Schalenebene auch bei zunehmender Netzverzerrung deutlich besser als Volumenelemente abbilden. Eine Ausnahme stellt hier das Element Li18 dar, das für die höhere Netzauflösung sehr gute Ergebnisse erzielt. Die Elemente mit der Taylorreihenentwicklung der Ableitung der Ansatzfunktionen sowie die Elemente Alv18 und And30 schneiden nur für weniger verzerrte Elementgeometrien gut ab. Bei höherer Netzauflösung verbessert sich dieses Verhalten erwartungsgemäß, da dann die Netzverzerrung der einzelnen Elemente abnimmt. Anzumerken ist der deutliche Sprung des Elements Wil9 in Richtung der richtigen Lösung, sodass für weitere Netzverdichtung mit besseren Resultaten gerechnet werden kann. Die Elemente Bor, B-Bar und Disp weisen auch bei der verfeinerten Vernetzung nur eine geringfügige Verbesserung der Ergebnisse auf.

Tabelle 6.3: Zusammenstellung normierter Verschiebungen der jeweils feinsten Diskretisierung aus den geometrisch linearen Testbeispielen.

	Volumenelemente									Volumenschalenelemente				
	Disp	B-Bar	Bor	Wil9	Wil9ts	Wil12ts	L18	Alv18	And30	ANSnat	ANSsus	Alv12	Vu7ANSnat	Vu7ANSsus
Patchtest														
Erfüllt?	Ja	Ja	Nein	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja	Ja	Nein	Nein	Ja	Nein	Nein
Streifen mit Trapezelementen														
6 × 1 × 1	0.026	0.033	0.226	0.207	0.212	0.213	0.212	0.212	0.213	0.497	0.807	0.164	0.655	0.924
48 × 8 × 1	0.743	0.806	0.976	0.989	0.989	0.989	0.990	0.989	0.989	0.963	0.966	0.982	0.977	0.977
Gegenseitig gedrückter Zylinder														
32 × 32 × 1	0.315	0.340	0.986	0.973	0.988	0.988	0.998	0.989	0.989	0.873	0.874	0.995	0.989	0.989
Verdrehter Streifen^a														
Last senkrecht zur Schalenebene														
48 × 8 × 1	0.816	1.343	1.631	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.955	0.956	0.991	0.999	0.999
96 × 8 × 2	0.942	1.017	1.066	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.987	0.988	0.998	0.999	0.999
Last in Schalenebene														
48 × 8 × 1	0.766	1.439	1.817	1.000	1.000	1.000	1.001	1.000	1.000	0.769	0.769	0.802	1.000	1.000
96 × 8 × 2	0.926	1.026	1.090	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.982	0.982	0.940	0.999	0.999
Verdrehter Streifen – sehr dünne Variante^a														
Last senkrecht zur Schalenebene														
48 × 8 × 1	0.000	0.000	1.070	0.832	0.994	0.995	0.840	0.859	0.994	0.946	0.947	0.857	0.999	0.997
96 × 8 × 2	0.002	0.002	1.092	0.989	1.000	1.001	0.989	0.991	1.000	0.947	0.949	0.988	0.999	0.999
Last in Schalenebene														
48 × 8 × 1	0.000	0.000	1.068	0.831	0.995	0.997	0.842	0.858	0.995	0.937	0.940	0.856	0.998	0.999
96 × 8 × 2	0.002	0.002	1.079	0.987	1.000	1.001	0.990	0.991	0.999	0.940	0.943	0.987	1.000	0.999
Platte mit Netzverzerrung^b														
2 × 2 × 1														
a = 0	0.007	0.007	0.027	0.073	0.873	0.878	0.884	0.883	0.887	0.711	0.711	0.868	0.867	0.867
a = 12 mm	0.005	0.005	0.026	0.019	0.039	0.039	0.209	0.041	0.040	0.575	0.575	0.630	0.701	0.701
4 × 4 × 1														
a = 0	0.025	0.026	0.098	0.553	0.970	0.971	0.976	0.973	0.975	0.791	0.791	0.969	0.968	0.968
a = 12 mm	0.017	0.018	0.114	0.266	0.560	0.562	0.881	0.560	0.561	0.773	0.773	0.916	0.944	0.944

^a Zum Vergleich wird beim verdrehen (sehr dünnen) Streifen jeweils noch die Vernetzung mit zwei Elementen über die Streifendicke gezeigt.

^b Bei der Platte mit Netzverzerrung wird der Start- ($a = 0$) und Endwert ($a = 12$ mm) gezeigt.

6.3.8 Zusammenfassung der Ergebnisse

Die Ergebnisse der geometrisch linearen Studie werden nochmals zusammenfassend in Tabelle 6.3 betrachtet. Die numerischen Tests und ihre Lastfälle werden dazu jeweils separat in einer Zeile angegeben.

Aufgrund der vorliegenden Ergebnisse – und der Tatsache, dass erhöhte Netzauflösung mit in die Bewertung einbezogen werden sollte – erscheinen die Elemente Wil9 und Wil9ts als gut geeignete Formulierungen für große Simulationsaufgaben, da diese zum einen den Patchtest erfüllen und zum anderen die selbe Genauigkeit erreichen, wie die Elemente, die mehr inkompatible Freiheitsgrade nutzen. Nur für stark verzerrte

Elementgeometrien, sofern diese nicht vermieden werden können, sind die Elemente Alv12, Vu7ANSnat oder Vu7ANSsus zu bevorzugen. Bei diesen Elementen ist jedoch die Bindung an eine Schalenorientierung zu beachten. Im Fall von Alv12 werden zudem mehr inkompatible Freiheitsgrade als bei der Wil9- oder Wil9ts-Formulierung genutzt und bei den Formulierungen Vu7ANSnat oder Vu7ANSsus wegen des MITC/ANS-Konzepts der Patchtest nicht mehr erfüllt.

6.4 Inkrementelle Formulierung für geometrisch nichtlineare Probleme

Die Elementformulierung in den vorhergehenden Abschnitten basiert auf einer Darstellung in Ingenieurverzerrungen, die im geometrisch linearen Bereich zulässig sind. Die sehr facettenreiche Formulierung finiter Elemente im geometrisch nichtlinearen Bereich⁷ wurde bewusst nicht tangiert, um die wesentlichen Schritte nicht zu verkomplizieren. Im Folgenden wird die Implementierung der vorgeschlagenen Elementformulierung für geometrisch nichtlineare Probleme innerhalb einer inkrementellen Verschiebungsformulierung vorgestellt. Eine zugehörige totale Verschiebungsformulierung ist ebenfalls möglich und im Anhang B beschrieben, da dieser Ansatz in der vorliegenden Arbeit nicht verwendet wird. Nur in Kapitel 8 wird eine totale Verschiebungsformulierung genutzt und im nötigen Umfang auch beschrieben.

6.4.1 Grundgerüst der inkrementellen Verschiebungsformulierung

Die in den Abschnitten 6.1 und 6.2 vorgestellten Elementformulierungen werden im Wesentlichen durch die Ersetzung der Ingenieurverzerrungen durch die Verzerrungsgeschwindigkeit in eine im geometrisch nichtlinearen Bereich unbeschränkt gültige, inkrementelle Formulierung übertragen. Die Verzerrungsgeschwindigkeit, häufig auch als Verzerrungsrate $\dot{\epsilon}$ bezeichnet, wird mit dem Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{L} berechnet, der in die Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} und den Spintensor \mathbf{W} aufgespalten wird

$$\mathbf{L} = \text{grad} \mathbf{v} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad \mathbf{D} = \text{sym} \mathbf{L} \quad \mathbf{W} = \text{skw} \mathbf{L} . \quad (6.108)$$

Mit den zur Verzerrungsgeschwindigkeit arbeitskonjugierten Cauchyschen Spannungen gilt analog zu Gleichung (6.1) die schwache Form

$$\begin{aligned} \delta P = \int_B \delta \left(\mathbf{D}^{\text{co}} + \mathbf{D}^{\text{im}} + \mathbf{D}^{\text{en}} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma}^D dv + \int_B \delta \mathbf{v}^{\text{co}} \cdot \rho \dot{\mathbf{v}}^{\text{co}} dv + \int_B \delta \mathbf{v}^{\text{im}} \cdot \rho \dot{\mathbf{v}}^{\text{im}} dv \\ - \int_B \delta \mathbf{v}^{\text{co}} \cdot \rho \mathbf{b} dv - \int_{\partial B^t} \delta \mathbf{v}^{\text{co}} \cdot \mathbf{t} da = 0 . \end{aligned} \quad (6.109)$$

⁷ Zur Thematik wird auf Zienkiewicz und Taylor [195], Bathe [12], Crisfield [41], Belytschko et al. [15] und Wriggers [189] verwiesen.

Wie in den Gleichungen (6.2) und (6.3) beschrieben gilt für Geschwindigkeiten und Verzerrungsgeschwindigkeiten eine Aufteilung in kompatible Anteile und inkompatible Anteile, deren Freiheitsgrade entweder explizit (im) oder implizit (en) zusammen mit einer statischen Kondensation berechnet werden

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^{\text{co}} + \mathbf{v}^{\text{im}} \quad (6.110)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^{\text{co}} + \mathbf{D}^{\text{im}} + \mathbf{D}^{\text{en}} . \quad (6.111)$$

Damit sind die Patchtest-Bedingungen entsprechend den Gleichungen (6.4), (6.5) und (6.6) gegeben durch

$$\int_{B_e} (\text{sym}(\text{grad} \mathbf{v}^{\text{co}}) - \mathbf{D}^{\text{co}}) dv = 0 \quad (6.112)$$

$$\int_{B_e} \mathbf{D}^{\text{im}} dv = 0 , \quad \text{mit } \mathbf{D}^{\text{im}} = \text{sym}(\text{grad} \mathbf{v}^{\text{im}}) \quad (6.113)$$

$$\int_{B_e} \mathbf{D}^{\text{en}} dv = 0 . \quad (6.114)$$

Für die in Abschnitt 6.4.3 beschriebene inkrementelle Fortschreibung der Spannungen wird der Spintensor \mathbf{W} benötigt, für den keine inkompatiblen Freiheitsgrade berücksichtigt werden

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}^{\text{co}} \quad \mathbf{W}^{\text{im}} = \mathbf{0} , \quad \mathbf{W}^{\text{en}} = \mathbf{0} . \quad (6.115)$$

Von der Möglichkeit einen Spintensor \mathbf{W}^{im} mit den inkompatiblen Geschwindigkeiten \mathbf{v}^{im} zu berechnen, wird nicht Gebrauch gemacht, da angenommen wird, dass eine Beseitigung von Versteifungen auf der Basis der Verzerrungsgeschwindigkeiten ausreichend ist. Die Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D}^{en} ist im Sinne der Simo-Rifai Formulierung direkt als symmetrische Größe konstruiert, und eine separate Konstruktion von \mathbf{W}^{en} wird wie bereits für die inkompatiblen Geschwindigkeiten nicht als Verbesserung betrachtet. Damit setzt sich der im Folgenden benötigte gesamte Geschwindigkeitsgradient mit den Gleichungen (6.111) und (6.115) zusammen

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \mathbf{D} + \mathbf{W} \\ &= (\mathbf{D}^{\text{co}} + \mathbf{W}^{\text{co}}) + \mathbf{D}^{\text{im}} + \mathbf{D}^{\text{en}} \\ &= \mathbf{L}^{\text{co}} + \mathbf{L}^{\text{im}} + \mathbf{L}^{\text{en}} , \end{aligned} \quad (6.116)$$

wobei $\mathbf{L}^{\text{im}} = \mathbf{D}^{\text{im}} = (\mathbf{L}^{\text{im}})^T$ und $\mathbf{L}^{\text{en}} = \mathbf{D}^{\text{en}} = (\mathbf{L}^{\text{en}})^T$ gilt.

6.4.2 Diskretisierte Gradientenoperatoren

Die Interpolation und Notation für Koordinaten und Verschiebungen aus den Gleichungen (6.7) und (6.8) wird analog auf die kompatiblen Geschwindigkeiten, bezeichnet mit $\mathbf{v}^{\text{co}} = \dot{\mathbf{u}}^{\text{co}} = (\dot{u}_1^{\text{co}}, \dot{u}_2^{\text{co}}, \dot{u}_3^{\text{co}})^T = (\dot{u}^{\text{co}}, \dot{v}^{\text{co}}, \dot{w}^{\text{co}})^T$, angewandt

$$v_i^{\text{co}} = \sum_I N_I \dot{u}_{iI}^{\text{co}} . \quad (6.117)$$

Mit $\Delta \mathbf{u}^{\text{co}} = (\Delta u_1^{\text{co}}, \Delta u_2^{\text{co}}, \Delta u_3^{\text{co}})^T$ werden die Verschiebungsinkremente zwischen zwei Zeitschritten bezeichnet. Für die inkompatiblen Verschiebungen gilt die Bezeichnung $\mathbf{v}^{\text{im}} = \dot{\mathbf{u}}^{\text{im}} = (\dot{u}_1^{\text{im}}, \dot{u}_2^{\text{im}}, \dot{u}_3^{\text{im}})^T = (\dot{u}^{\text{im}}, \dot{v}^{\text{im}}, \dot{w}^{\text{im}})^T$ und mit den inkompatiblen Formfunktionen N_A^{im} die Interpolation

$$v_i^{\text{im}} = \sum_A N_A^{\text{im}} \dot{u}_{iA}^{\text{im}}. \quad (6.118)$$

Infolgedessen resultieren die Anteile für Massen und externe Lasten⁸ aus Gleichung (6.109) in identisch diskretisierten Größen, die in den Gleichungen (2.121) und (2.122) oder Abschnitt 6.1.7 beschrieben sind. Für den verbleibenden inneren Anteil werden die Verzerrungsgeschwindigkeiten und deren Variation mit den B-Matrizen aus den Gleichungen (6.29), (6.39), (6.68) und (6.33) diskretisiert

$$\mathbf{D}^{\text{co}} = (\mathbf{B}^m + \mathbf{B}^a) \dot{\mathbf{d}}^{\text{co}} \quad \mathbf{D}^{\text{im}} = \mathbf{B}^{\text{im}} \dot{\mathbf{d}}^{\text{im}} \quad \mathbf{D}^{\text{en}} = \mathbf{B}^{\text{en}} \dot{\mathbf{d}}^{\text{en}}. \quad (6.119)$$

Dadurch werden die Bedingungen (6.112) bis 6.114) erfüllt. Der Spintensor \mathbf{W}^{co} wird entsprechend der modifizierten Approximation der Ableitung der Ansatzfunktionen \mathbf{b}_I^m und \mathbf{b}_I^a oder \mathbf{b}_I^γ aus Gleichung (6.57) berechnet. Die drei schiefsymmetrischen Komponenten sind

$$\begin{bmatrix} W_{12}^{\text{co}} \\ W_{23}^{\text{co}} \\ W_{13}^{\text{co}} \end{bmatrix} = \sum_I \begin{bmatrix} (b_{yI}^m + b_{yI}^a) & -(b_{xI}^m + b_{xI}^a) & 0 \\ 0 & (b_{zI}^m + b_{zI}^a) & -(b_{yI}^m + b_{yI}^a) \\ (b_{zI}^m + b_{zI}^a) & 0 & -(b_{xI}^m + b_{xI}^a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_I \\ \dot{v}_I \\ \dot{w}_I \end{bmatrix} \quad (6.120)$$

und werden in den Spintensor einsortiert

$$\mathbf{W}^{\text{co}} = \begin{bmatrix} 0 & W_{12}^{\text{co}} & W_{13}^{\text{co}} \\ -W_{12}^{\text{co}} & 0 & W_{23}^{\text{co}} \\ -W_{13}^{\text{co}} & -W_{23}^{\text{co}} & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.121)$$

Der Geschwindigkeitsgradient in Matrixnotation ist definiert durch

$$\{\mathbf{L}\} = \mathbf{A}^{\text{co}} \dot{\mathbf{d}}^{\text{co}} + \mathbf{A}^{\text{im}} \dot{\mathbf{d}}^{\text{im}} + \mathbf{A}^{\text{en}} \dot{\mathbf{d}}^{\text{en}} \quad (6.122)$$

mit der Anordnung der Komponenten

$$\{\mathbf{L}\} = [L_{11} \quad L_{12} \quad L_{13} \quad L_{21} \quad L_{22} \quad L_{23} \quad L_{31} \quad L_{32} \quad L_{33}]^T. \quad (6.123)$$

⁸ Die Massenmatrix ist unabhängig von der Zeit, siehe Abschnitt 2.1.2 oder auch Belytschko et al. [15].

6.4.4 Integration des Deformationsgradienten

Wird der Deformationsgradient benötigt, wird die Beziehung $\mathbf{F} = \mathbf{L}\mathbf{F}$ wie in Abschnitt 2.3.4 beschrieben integriert und der Deformationsgradient in der Zeit fortgeschrieben

$$\mathbf{F}_{n+1} = \left(\mathbf{1} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{L}_{n+1/2} \right)^{-1} \left(\mathbf{1} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{L}_{n+1/2} \right) \mathbf{F}_n. \quad (6.127)$$

Die Implementierung ist in einem zentralen Differenzenverfahren einfach durchzuführen, da die Geschwindigkeiten nach einem halben Zeitschritt, also zur Zeit $t_{n+1/2}$ bekannt sind. Für eine effiziente Implementierung wird Gleichung (6.127) noch vereinfacht. Indem die 3×3 Einheitsmatrix im zweiten Klammerausdruck in Gleichung (6.127) durch $2\mathbf{1} - \mathbf{1}$ ersetzt wird, kann dieser mit dem ersten Klammerausdruck dargestellt werden

$$\mathbf{1} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{L}_{n+1/2} = (2\mathbf{1} - \mathbf{1}) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{L}_{n+1/2} = 2\mathbf{1} - \left(\mathbf{1} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{L}_{n+1/2} \right). \quad (6.128)$$

Einsetzen in Gleichung (6.127) resultiert in

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{n+1} &= \left(\mathbf{1} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{L}_{n+1/2} \right)^{-1} \left(2\mathbf{1} - \left(\mathbf{1} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{L}_{n+1/2} \right) \right) \mathbf{F}_n \\ &= \left(2 \left(\mathbf{1} - \frac{\Delta t}{2} \mathbf{L}_{n+1/2} \right)^{-1} - \mathbf{1} \right) \mathbf{F}_n. \end{aligned} \quad (6.129)$$

Im Vergleich zu Gleichung (6.127) wird bei der Implementierung von Gleichung (6.129) eine Matrixmultiplikation gespart. Der Deformationsgradient steht anschließend zur Berechnung der Spannungen zur Verfügung.

In einer inkrementellen Formulierung existieren verschiedene Alternativen zur Bestimmung des Deformationsgradienten, siehe Benson [18, 20]. Eine direkte Berechnung des Deformationsgradienten $\mathbf{F} = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{X}$ erfordert die Berechnung der Ableitungen der Ansatzfunktionen mit Bezug zu den Koordinaten der Referenzkonfiguration \mathbf{X} . Aus numerischer Sicht ist diese Option ineffizient, da in der inkrementellen Formulierung bereits die Ableitungen bzgl. der Koordinaten der Momentankonfiguration \mathbf{x} für die Ermittlung der Verzerrungsgeschwindigkeit $\mathbf{D} = \text{sym}(\partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{x})$ benötigt werden. Diese Variante bleibt hier daher der totalen Lagrange-Formulierung in Abschnitt B vorbehalten.

Eine weitere Alternative ist, zunächst die Inverse des Deformationsgradienten $\mathbf{F}^{-1} = \partial \mathbf{X} / \partial \mathbf{x}$ wie in Gleichung (2.10) abhängig von den Koordinaten der Referenzkonfiguration zu berechnen. Dazu wird die A-Matrix, die die Ableitungen der Ansatzfunktionen bzgl. der Koordinaten \mathbf{x} zur Berechnung des Geschwindigkeitsgradienten $\mathbf{L} = \partial \mathbf{v} / \partial \mathbf{x}$ enthält, anstatt mit den Geschwindigkeiten \mathbf{v} mit den Koordinaten der Referenzkonfiguration \mathbf{X} multipliziert. Die anschließende Invertierung liefert den gesuchten Deformationsgradienten. Im hier vorgeschlagenen Element führt diese Überlegung zu

$$\{\mathbf{L}\} = \mathbf{A}^{\text{co}} \dot{\mathbf{d}}^{\text{co}} + \mathbf{A}^{\text{im}} \dot{\mathbf{d}}^{\text{im}} \quad \rightarrow \quad \{\mathbf{F}^{-1}\} = \mathbf{A}^{\text{co}} \{\mathbf{X}\} + \mathbf{A}^{\text{im}} \{\mathbf{X}^{\text{im}}\}. \quad (6.130)$$

Da die Koordinaten \mathbf{X}^{im} nicht existieren, ist diese Variante nur für Elemente ohne inkompatible Freiheitsgrade nutzbar. Eine Alternative ist die Berechnung der Inversen des Deformationsgradienten mit dem räumlichen Verschiebungsgradienten \mathbf{h} durch $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{1} - \mathbf{h}$, siehe Gleichung (2.16). Dazu werden allerdings die totalen Verschiebungsgrößen zur Bestimmung von \mathbf{h} benötigt und die Berechnung erfolgt durch

$$\{\mathbf{F}^{-1}\} = \{\mathbf{1}\} - \mathbf{A}^{\text{co}}\{\mathbf{d}^{\text{co}}\} + \mathbf{A}^{\text{im}}\{\mathbf{d}^{\text{im}}\}. \quad (6.131)$$

6.4.5 Residuum und Steifigkeitsberechnung

Das Residuum wird mit den Spannungen berechnet

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{\text{co}} \\ \mathbf{f}^{\text{im}} \end{bmatrix} = \frac{v}{8} \int_{\square} \begin{bmatrix} (\mathbf{B}^{\text{co}})^T \\ (\mathbf{B}^{\text{im}})^T \end{bmatrix} \{\boldsymbol{\sigma}^D\} d\square. \quad (6.132)$$

Falls inkompatible Freiheitsgrade zu kondensieren sind, wird das Residuum und die zugehörige Steifigkeitsmatrix benötigt

$$\mathbf{f}^{\text{en}} = \frac{v}{8} \int_{\square} (\mathbf{B}^{\text{en}})^T \{\boldsymbol{\sigma}^D\} d\square \quad (6.133)$$

$$\mathbf{K}^{\text{en}} = \frac{v}{8} \int_{\square} \left(\underbrace{(\mathbf{B}^{\text{en}})^T \{\mathbf{C}\} \mathbf{B}^{\text{en}}}_{\text{materiell}} + \underbrace{(\mathbf{A}^{\text{en}})^T \boldsymbol{\Sigma}^D \mathbf{A}^{\text{en}}}_{\text{geometrisch}} \right) d\square. \quad (6.134)$$

Mit der in der Kontinuumsmechanik üblichen Linearisierung, die in Abschnitt 2.2.2 zusammengefasst ist, wird der materielle und geometrische Anteil der Steifigkeitsmatrix berechnet. Für den geometrischen Anteil werden die Gradientenoperatoren aus den Gleichungen (6.119) und (6.124) sowie die folgende 9×9 Matrix der Spannungen verwendet

$$\boldsymbol{\Sigma}^D = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^D & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma}^D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\sigma}^D \end{bmatrix}. \quad (6.135)$$

Um die Formulierung ganzheitlich darzustellen, wird die mit den Kräften (6.132) korrespondierende Steifigkeitsmatrix ebenfalls dargestellt

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\text{co}} & \mathbf{K}^{\text{co,im}} \\ \text{sym.} & \mathbf{K}^{\text{im}} \end{bmatrix} = \frac{v}{8} \int_{\square} \left(\begin{bmatrix} (\mathbf{B}^{\text{co}})^T \\ (\mathbf{B}^{\text{im}})^T \end{bmatrix} \{\mathbf{C}\} \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{\text{co}} & \mathbf{B}^{\text{im}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (\mathbf{A}^{\text{co}})^T \\ (\mathbf{A}^{\text{im}})^T \end{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}^D \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\text{co}} & \mathbf{A}^{\text{im}} \end{bmatrix} \right) d\square. \quad (6.136)$$

7 Effiziente Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade

Die numerische Effizienz des in Kapitel 5 vorgestellten Konzepts wird mit den in Kapitel 6 erarbeiteten Elementformulierungen in einer inkrementellen Verschiebungsformulierung nach Abschnitt 6.4 untersucht.

Werden die inkompatiblen Verschiebungsfreiheitsgrade nicht kondensiert, entstehen infolge der inkompatiblen Massenmatrix in Kombination mit den zugehörigen Steifigkeiten zusätzliche Eigenfrequenzen. Da die inkompatiblen Ansatzfunktionen generell höherer Ordnung sind, kann insbesondere die höchste Element-Eigenfrequenz betroffen sein, die im zentralen Differenzenverfahren die Zeitschrittgröße beschränkt. Meist sind aber nur die inkompatiblen Freiheitsgrade maßgeblich, mit denen überwiegend volumetrische Versteifungen vermieden werden. Um die Standardzeitschrittgröße, die ohne inkompatible Freiheitsgrade ermittelt wird, beibehalten zu können, werden die inkompatiblen Massen skaliert, die zu einer Reduktion der Zeitschrittgröße führen. Dazu wird in diesem Kapitel zuerst der Einfluss der inkompatiblen Massen sowie deren Skalierung mit einer Eigenfrequenzanalyse untersucht. Dabei veranschaulicht der Vergleich mit den Eigenfrequenzen, die aus einer Formulierung mit statisch kondensierten inkompatiblen Freiheitsgraden resultieren, den Fehler infolge der inkompatiblen Massenskalierung. Damit dieser Fehler so klein wie möglich bleibt und gleichzeitig die Standardzeitschrittgröße beibehalten werden kann, werden verschiedene Skalierungsstrategien und entsprechende Abschätzungen der Skalierungsfaktoren untersucht. Abschließend wird anhand eines numerischen Experiments die erreichbare numerische Effizienz an Elementvarianten mit bis zu 30 inkompatiblen Freiheitsgraden miteinander verglichen.

7.1 Einfluss der inkompatiblen Massen

7.1.1 Zeitschrittgröße und Eigenfrequenzen

Die kritische Zeitschrittgröße Δt^{crit} des zentralen Differenzenverfahrens (ZDV) basiert, ohne Berücksichtigung von Dämpfung, nach Courant et al. [39] auf der Beziehung

$$\Delta t^{\text{crit}} \leq \frac{2}{\omega_{\text{max}}} \quad (7.1)$$

mit der maximalen Eigenfrequenz ω_{\max} in einem System aus finiten Elementen. Die Berechnung ist durch die Betrachtung einzelner Elemente nach oben beschränkt, siehe Hughes [70], sodass gilt

$$\omega_{\max} \leq \max_{e=1, \dots, n_e} \omega_{\max, e} . \quad (7.2)$$

Damit kann für jedes Element eine kritische Zeitschrittgröße $\Delta t_e^{\text{crit}} = 2/\omega_{\max, e}$, wobei das Element mit der geringsten Zeitschrittgröße kritisch ist und Δt^{crit} bestimmt. Eine direkte globale Berechnung ist ebenfalls einigermaßen effizient möglich, siehe Benson [19], wird hier aber nicht betrachtet. Im Folgenden wird für die maximale Eigenfrequenz auf Elementebene ω_{\max} der Index e nicht mehr geschrieben. Die Anzahl der Zeitschritte dominiert zusammen mit den Berechnungen auf Elementebene den Aufwand einer expliziten Simulation, für die diagonale Massenmatrizen verwendet werden. Damit der Aufwand mit einem größtmöglichen Zeitschritt minimiert werden kann, sollte die maximale Eigenfrequenz so klein wie möglich sein.

Zusätzliche Eigenfrequenzen infolge inkompatibler Massen

Die Ausgangslage zur Ermittlung der maximalen Eigenfrequenz für Elementformulierungen mit inkompatiblen Massen ist die Bewegungsgleichung aus Abschnitt 5.4.1, die auf Elementebene angegeben wurde. Zunächst werden nur kompatible und inkompatible Verschiebungsfreiheitsgrade betrachtet

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}^{\text{co}} \\ \mathbf{f}^{\text{im}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{\text{co}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{\text{im}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}^{\text{co}} \\ \mathbf{d}^{\text{im}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{\text{ext}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} . \quad (7.3)$$

Für die explizite Berechnung mit dem zentralen Differenzenverfahren besitzen die Massenmatrizen \mathbf{M}^{co} und \mathbf{M}^{im} jeweils Diagonalstruktur. Bei Beschränkung auf lineares Material sind die Kraftvektoren direkt durch die Steifigkeiten aus Abschnitt 6.4.5 gegeben

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}^{\text{co}} \\ \mathbf{f}^{\text{im}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\text{co}} & \mathbf{K}^{\text{co|im}} \\ \mathbf{K}^{\text{im|co}} & \mathbf{K}^{\text{im}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}^{\text{co}} \\ \mathbf{d}^{\text{im}} \end{bmatrix} , \quad (7.4)$$

wobei die Kopplung der kompatiblen und inkompatiblen Freiheitsgrade anhand der gemischten Steifigkeiten $\mathbf{K}^{\text{im|co}} = (\mathbf{K}^{\text{co|im}})^T$ sichtbar wird. Um die maximale Eigenfrequenz zu ermitteln, führt das Gleichungssystem (7.3) in einem unbelasteten System ohne Randbedingungen auf das Eigenwertproblem

$$\left(\mathbf{K}^{\text{tot}} - (\omega_i^{\text{tot}})^2 \mathbf{M}^{\text{tot}} \right) \phi_i^{\text{tot}} = \mathbf{0} , \quad i = 1, \dots, n^{\text{tot}} \quad (7.5)$$

mit den Abkürzungen

$$\mathbf{K}^{\text{tot}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\text{co}} & \mathbf{K}^{\text{co|im}} \\ \mathbf{K}^{\text{im|co}} & \mathbf{K}^{\text{im}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}^{\text{tot}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{\text{co}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{\text{im}} \end{bmatrix} . \quad (7.6)$$

Darin ist n^{tot} die Summe aus der Anzahl kompatibler Freiheitsgrade n^{co} und inkompatibler Freiheitsgrade n^{im} . Mit den inkompatiblen Freiheitsgraden wurden also n^{im} Eigenfrequenzen generiert. Es ist zu erwarten, dass die bisherige maximale Eigenfrequenz der kompatiblen Freiheitsgrade durch einen zusätzlich eingeführten inkompatiblen Freiheitsgrad noch überschritten wird.

Eigenfrequenzen infolge statischer Kondensation

Nun wird der Fall ohne inkompatible Massen betrachtet. Dabei werden die inkompatiblen Freiheitsgrade in Gleichung (7.3), nach Einsetzen von Gleichung (7.4), kondensiert und es gilt

$$\left(\mathbf{K}^{\text{eff}} - (\omega_i^{\text{eff}})^2 \mathbf{M}^{\text{co}} \right) \phi_i^{\text{eff}} = \mathbf{0}, \quad (7.7)$$

wobei die effektive Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}^{\text{eff}} = \mathbf{K}^{\text{co}} - \mathbf{K}^{\text{co|im}} (\mathbf{K}^{\text{im}})^{-1} (\mathbf{K}^{\text{co|im}})^T \quad (7.8)$$

verwendet wird und die resultierenden Eigenfrequenzen ω_i^{eff} und Eigenvektoren ϕ_i^{eff} mit dem Index *eff* gekennzeichnet werden.

Die Einführung der inkompatiblen Freiheitsgrade dient der Vermeidung von Versteifungseffekten, das heißt einige Eigenfrequenzen werden kleiner, siehe hierzu die statischen Beispiele in Abschnitt 6.3. Für ein Standard 8-Knoten-Element mit 3 Freiheitsgraden je Knoten existieren insgesamt 24 Eigenfrequenzen. Ohne Randbedingungen sind die ersten 6 Eigenfrequenzen gleich Null und beziehen sich auf Starrkörperbewegungen. Die maximale Eigenfrequenz bezieht sich auf eine volumetrische Gestaltsänderung. Diese 7 Eigenfrequenzen sind gleich denen eines Systems ohne inkompatible Freiheitsgrade

$$\left(\mathbf{K}^{\text{co}} - (\omega_i^{\text{co}})^2 \mathbf{M}^{\text{co}} \right) \phi_i^{\text{co}} = \mathbf{0}. \quad (7.9)$$

Die maximalen Eigenfrequenzen der Eigenwertprobleme (7.7) und (7.9) sind also gleich

$$\omega_{\text{max}}^{\text{eff}} = \omega_{\text{max}}^{\text{co}} \quad \rightarrow \quad \Delta t^{\text{eff}} = \Delta t^{\text{co}} = \frac{2}{\omega_{\text{max}}^{\text{co}}} \quad (7.10)$$

und führen daher auch zur gleichen Zeitschrittgröße. Für den Zeitschritt Δt^{co} gibt es verschiedene Abschätzungen, auf die in Abschnitt 7.2 noch eingegangen wird.

Die Eigenfrequenzen 7 bis 23 beziehen sich auf Schub- und Biegedeformationen, die mit den inkompatiblen Freiheitsgraden zur Vermeidung von Versteifungseffekten reduziert werden. Es gilt also

$$\omega_i^{\text{eff}} \leq \omega_i^{\text{co}}, \quad i = 7, \dots, 23. \quad (7.11)$$

Anforderungen an die zusätzlichen Eigenfrequenzen

Zusammenfassend gilt für die Eigenfrequenzen ω_i^{tot} eines Systems mit zusätzlichen Massen für die inkompatiblen Freiheitsgrade, dass die ersten 6 Eigenfrequenzen gleich Null sind und die maximale Eigenfrequenz $\omega_{\text{max}}^{\text{co}}$, die nicht von den inkompatiblen Freiheitsgraden beeinflusst wird, enthalten ist. Wenn die Eigenfrequenzen ω_i^{tot} und ω_i^{eff} im Bereich 7 bis 23 übereinstimmen, reproduziert die Elementformulierung mit den inkompatiblen Massen das Verhalten der Elementformulierung mit den statisch kondensierten inkompatiblen Freiheitsgraden. Die übrigen n^{im} Eigenfrequenzen sollten kleiner oder gleich $\omega_{\text{max}}^{\text{co}}$ sein, damit die Zeitschrittgröße nicht reduziert werden muss. Zusammengefasst soll also gelten:

$$\omega_i^{\text{tot}} = 0 \quad i = 1, \dots, 6 \quad (7.12a)$$

$$\omega_i^{\text{tot}} = \omega_i^{\text{eff}} \quad i = 7, \dots, 23 \quad (7.12b)$$

$$\omega_i^{\text{tot}} \leq \omega_{\text{max}}^{\text{co}} \quad i = 24, \dots, (n^{\text{tot}} - 1) \quad (7.12c)$$

$$\omega_i^{\text{tot}} = \omega_{\text{max}}^{\text{co}} \equiv \omega_{\text{max}}^{\text{eff}} \quad i = n^{\text{tot}}. \quad (7.12d)$$

Aus den Erfahrungen mit dem 2-Freiheitsgrad-Beispiel aus Abschnitt 5.3 geht hervor, dass die Werte der Eigenfrequenzen über die Größe der inkompatiblen Masse gesteuert werden können. Aus diesem Grund wird im Folgenden die inkompatible Massenskalierung diskutiert.

7.1.2 Uniforme und selektive Skalierung inkompatibler Massen

Das Ziel der Massenskalierung ist es, eine Reduktion der Größe des Standardzeitschritts zu vermeiden, ohne dabei die Wirksamkeit der inkompatiblen Freiheitsgrade einzuschränken. Als Basis dient die inkompatible Massenmatrix, wie sie in Abschnitt 5.5.2 für Wilson-Funktionen und Abschnitt 5.6 für generalisierte inkompatible Ansatzfunktionen vorgestellt wurde. Die generalisierten inkompatiblen Ansatzfunktionen werden im Vergleich zu den Wilson-Funktionen auf eine kontravariante Basis bezogen, für die aber vereinfachende Annahmen¹ gemacht werden, sodass immer die gleiche Vorgehensweise für die inkompatible Massenskalierung genutzt werden kann.

In beiden Fällen wird eine diagonale Massenmatrix \mathbf{M}^{im} betrachtet, die ausschließlich die Einträge m_i^{im} auf der Diagonalen enthält

$$\mathbf{M}^{\text{im}} = \begin{pmatrix} m_1^{\text{im}} & & \\ & \ddots & \\ & & m_n^{\text{im}} \end{pmatrix}. \quad (7.13)$$

¹ Die Vereinfachung besteht darin, die Basis- durch Einheitsvektoren zu ersetzen, sodass sich die Größe der inkompatiblen Masse nicht mehr infolge der Elementgeometrie, die sich in den Basisvektoren widerspiegelt, ändert. Bei Bedarf kann der Einfluss der Geometrie in der Skalierung berücksichtigt werden, worauf in der vorliegenden Arbeit jedoch verzichtet wird, siehe hierzu auch Abschnitt 5.6.6.

Uniforme Skalierung

Analog zur uniformen Massenskalierung kompatibler Massen, siehe Abschnitt 2.3.6, wird bei einer uniformen Skalierung der inkompatiblen Massen die Rohdichte für die Berechnung der inkompatiblen Massenmatrix mit dem Faktor f^{ums} skaliert. Somit werden alle Einträge der inkompatiblen Massenmatrix uniform skaliert. Zur Kennzeichnung wird der Index *ums* als Abkürzung für *uniform mass scaling* eingeführt. Da die Rohdichte bereits in den Einträgen m_i^{im} enthalten ist, kann der Faktor f^{ums} vor die Einträge gezogen werden

$$\mathbf{M}^{\text{im,ums}} = f^{\text{ums}} \mathbf{M}^{\text{im}} = \begin{pmatrix} f^{\text{ums}} \cdot m_1^{\text{im}} & & \\ & \ddots & \\ & & f^{\text{ums}} \cdot m_n^{\text{im}} \end{pmatrix}. \quad (7.14)$$

Dieser einfache Ansatz wurde bei Mattern [112] und Mattern et al. [114] verfolgt. Darin wird die skalierte Rohdichte als *special density* eingeführt. Damit ist lediglich der inkompatible Freiheitsgrad, der zur maximalen Frequenz führt, zu identifizieren. Nach Bestimmung der erforderlichen Skalierung f^{ums} werden dann alle inkompatiblen Massen uniform skaliert. Ein Nachteil dieses Vorgehens ist, dass die Skalierung der Masse einiger inkompatiblen Frequenzen so hoch werden kann, dass die zugehörigen inkompatiblen Verschiebungsformen ihre Wirksamkeit verlieren.

Selektive Skalierung

Bei einer **selektiven Skalierung** besteht hingegen die Freiheit, jeden Eintrag m_i^{im} der inkompatiblen Massenmatrix mit einem eigenen Faktor f_i^{sms} zu multiplizieren

$$\mathbf{M}^{\text{im,sms}} = \begin{pmatrix} f_1^{\text{sms}} \cdot m_1^{\text{im}} & & \\ & \ddots & \\ & & f_n^{\text{sms}} \cdot m_n^{\text{im}} \end{pmatrix}. \quad (7.15)$$

Das ist prinzipiell möglich, aber schwierig umzusetzen, da dann jeder Skalierungsfaktor einzeln bestimmt werden muss. Sinnvoller ist, die Massen der inkompatiblen Erweiterungen in N Gruppen einzuteilen, für deren resultierende Eigenfrequenzen eine ähnliche Größe oder ein ähnliches Verhalten bezüglich der Skalierung abzusehen ist. Es hat sich als sinnvoll erwiesen, die Massen der Normal- und der Schubereweiterungen jeweils einer eigenen Gruppe zuzuordnen. So werden alle inkompatiblen Massen in einer ersten Gruppe

$$\text{Gruppe 1} \quad \mathbf{m}^{\text{grp1}} = \begin{pmatrix} m_1^{\text{grp1}} & & \\ & \ddots & \\ & & m_{n_1}^{\text{grp1}} \end{pmatrix} \quad (7.16)$$

bis zu einer N -ten Gruppe

$$\text{Gruppe } N \quad \mathbf{m}^{\text{grp}N} = \begin{pmatrix} m_1^{\text{grp}N} & & \\ & \ddots & \\ & & m_{n_N}^{\text{grp}N} \end{pmatrix}. \quad (7.17)$$

verteilt. Und anstatt für jeden Masseneintrag, ist nur noch für jede Gruppe ein Skalierungsfaktor $f_{\text{grp}1}^{\text{sms}}$ zu bestimmen. Daraus resultiert die gesamte selektiv skalierte inkompatible Massenmatrix

$$\mathbf{M}^{\text{im,sms}} = \begin{pmatrix} f_{\text{grp}1}^{\text{sms}} \mathbf{m}^{\text{grp}1} & & \\ & \ddots & \\ & & f_{\text{grp}N}^{\text{sms}} \mathbf{m}^{\text{grp}N} \end{pmatrix}. \quad (7.18)$$

Die entscheidende Schwierigkeit sowohl bei der uniformen als auch der selektiven Massenskalierung ist die Bestimmung der Skalierungsfaktoren, auf die detailliert in den folgenden Abschnitten eingegangen wird.

7.1.3 Eigenfrequenzen eines Ein-Element-Würfels

Mit dem folgenden Beispiel wird der Einfluss der Skalierung veranschaulicht. Ein Element mit der Geometrie eines Würfels der Kantenlänge $s = 10 \text{ mm}$ und dem Elastizitätsmodul $E = 2.0 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ wird betrachtet. Als Poissonzahl wird zunächst $\nu = 0.499999$ gewählt, um die Unterschiede zwischen Eigenfrequenzen, die durch inkompatible Erweiterungen der Normal- und Schubverzerrungen beeinflusst werden, deutlicher darzustellen. Kleinere Poissonzahlen führen zu analogen Beobachtungen. Für die Veranschaulichung hat sich das Alv18-Element² als besonders geeignet erwiesen, das es zum einen genügend Erweiterungen enthält, um volumetrische Versteifungen zu beseitigen, und zum anderen komplex genug ist, um die Grenzen der Skalierung zu zeigen. Gleichung (3.62) enthält die Verzerrungsinterpolationsmatrix; die zugehörigen generalisierten Ansatzfunktionen können mit den Gleichungen in Abschnitt 5.6.2 berechnet werden. Für eine kompaktere Schreibweise werden im Zusammenhang mit der Erweiterung der Normal- und Schubverzerrungen im Folgenden die Abkürzungen *vol* und *shr* verwendet. Der Vektor der inkompatiblen Freiheitsgrade enthält somit vol- und shr-Freiheitsgrade und ist gegeben durch

$$\mathbf{d}^{\text{im}} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}^{\text{vol}} \\ \mathbf{d}^{\text{shr}} \end{bmatrix}. \quad (7.19)$$

Der Vorschlag von Alves de Sousa [6] beinhaltet $n^{\text{vol}} = 6$ inkompatible Freiheitsgrade für die Erweiterung von Normalverzerrungen und $n^{\text{shr}} = 12$ für die Erweiterung

² Enthält inkompatible Interpolationen nach Alves de Sousa [6], siehe Tabelle 6.1 oder Tabelle 3.1.

der Schubverzerrungen. Die Gesamtanzahl ist $n^{\text{im}} = n^{\text{vol}} + n^{\text{shr}}$. Diese Aufteilung gilt ebenso für die inkompatible Kraft \mathbf{f}^{im} , die Steifigkeiten \mathbf{K}^{im} und $\mathbf{K}^{\text{co|im}}$ sowie die Masse \mathbf{M}^{im} in den Gleichungen (7.3) bis (7.6) und führt auf folgende Darstellung der inkompatiblen Anteile

$$\mathbf{K}^{\text{im}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\text{vol}} & \mathbf{K}^{\text{vol|shr}} \\ \mathbf{K}^{\text{shr|vol}} & \mathbf{K}^{\text{shr}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}^{\text{im}} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{\text{vol}} \\ \mathbf{f}^{\text{shr}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^{\text{im}} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{\text{vol}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{\text{shr}} \end{bmatrix} \quad (7.20)$$

sowie der kompatiblen-inkompatiblen Kopplung

$$\mathbf{K}^{\text{co|im}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\text{co|vol}} & \mathbf{K}^{\text{co|shr}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}^{\text{im|co}} = (\mathbf{K}^{\text{co|im}})^T. \quad (7.21)$$

Die Aufteilung der Massen in die Diagonalmatrizen \mathbf{M}^{vol} und \mathbf{M}^{shr} stellt die benötigte Gruppen-Aufteilung für die selektive Massenskalierung dar.

Abbildung 7.1 zeigt das Beispiel einer großen und einer kleinen Skalierung. Die ersten 6 Eigenfrequenzen der Starrkörperbewegungen sind wie erwartet jeweils Null und werden nicht angezeigt, sodass die Nummerierung bei der 7. Eigenfrequenz beginnt. Gezeigt werden die Eigenfrequenzen ω^{co} , ω^{eff} und ω^{tot} . Die Differenz zwischen den Eigenfrequenzen ω^{co} und ω^{eff} gibt die Abnahme der Steifigkeit bestimmter Deformationsformen wieder, die für eine Versteifungsreduktion stehen. Der Wert der Skalierung bezieht sich auf die Eigenfrequenzen ω^{tot} .

Alle Abbildungen enthalten eine gerade Linie, die den Wert der maximalen Eigenfrequenz $\omega_{\text{max}}^{\text{co}}$ darstellt. Das Ziel der Skalierung ist es, dass alle Eigenfrequenzen ω_i^{tot} unterhalb dieser Linie liegen, da ansonsten die Zeitschrittgröße der Simulation reduziert werden muss. Auf der anderen Seite sollte der Unterschied zwischen den Eigenfrequenzen ω_i^{tot} und ω_i^{eff} im Bereich 7 bis 23 so klein wie möglich sein, damit die Wirksamkeit der inkompatiblen Freiheitsgrade zur Versteifungsreduktion nicht abgeschwächt wird.

Grenzfälle der uniformen Skalierung

Abbildung 7.1a zeigt das Beispiel einer **kleinen uniformen Skalierung** (kleiner Skalierungswert), das heißt mit kleinen Werten. Diese ist so gewählt, dass der Unterschied zwischen den Eigenfrequenzen ω_7^{tot} bis ω_{23}^{tot} und ω_7^{eff} bis ω_{23}^{eff} gering ist. Für die dargestellte Skalierung $f^{\text{ums}} = 1.0 \cdot 10^{-3}$ beträgt die maximale Abweichung 0.14 %. Für kleinere Werte der Skalierung ist diese Abweichung weiter reduzierbar und beträgt beispielsweise für $f^{\text{ums}} = 1.0 \cdot 10^{-6}$ nur noch 0.000 042 %.

Die verbleibenden zusätzlichen Eigenfrequenzen lassen sich in 2 Gruppen und den Wert der sich auf Volumenänderungen ($\omega_{\text{max}}^{\text{co}}$) bezieht einteilen. Die Eigenfrequenzen der ersten shr-Gruppe beziehen sich auf die 12 Freiheitsgrade zur Erweiterung der Schubverzerrungen und die 6 Freiheitsgrade der zweiten vol-Gruppe auf die Erweiterung der Normalverzerrungen. Offensichtlich ist für die shr-Gruppe keine Skalierung der zugehörigen Massen nötig, da diese bereits weit unterhalb der Grenze liegen, für die eine Änderung der Zeitschrittgröße erforderlich wäre.

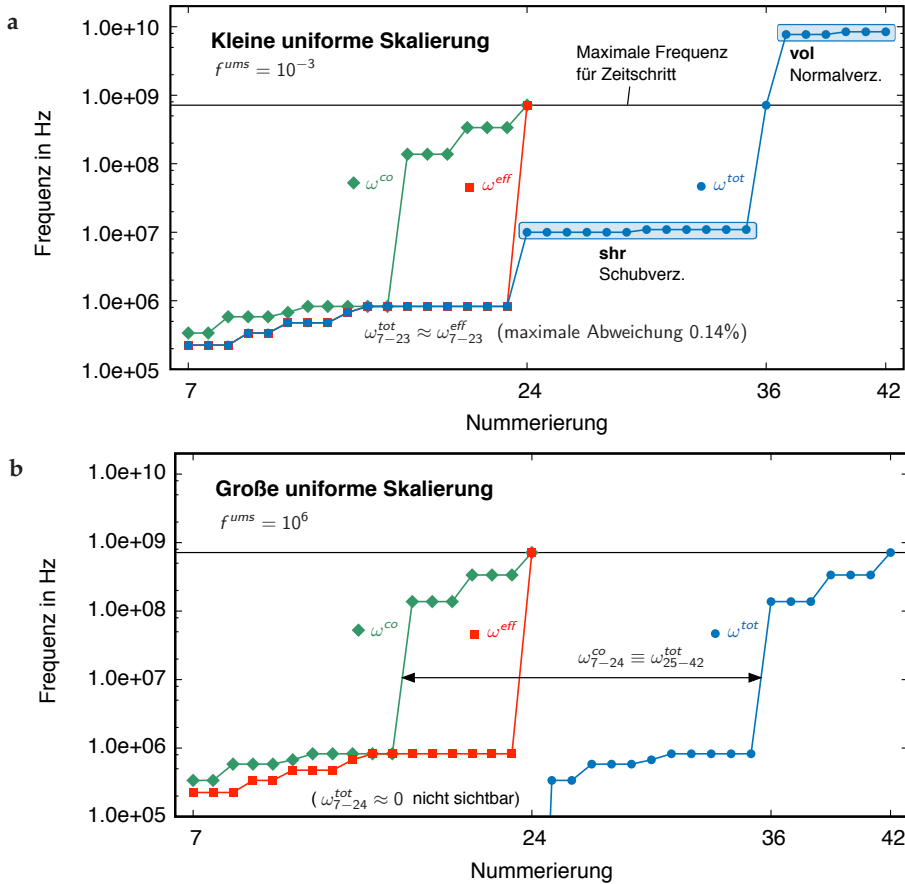


Abbildung 7.1: Logarithmische Darstellung der Eigenfrequenzen für den Ein-Element-Würfel aus Abschnitt 7.1.3 mit einer (a) kleinen und (b) großen uniformen Skalierung der inkompatiblen Massen des Elements Alv18 (s. Tab. 6.1). Die inkompatiblen FHGe, 6 für Normal- (vol) und 12 für Schubverzerrungen (shr), werden kondensiert (eff) oder beibehalten (tot) und einer Verschiebungsformulierung (co) gegenübergestellt.

Wie erwartet, sind es die Erweiterungen der Normalverzerrungen, die zu besonders hohen Eigenfrequenzen führen. In diesem Fall ist die maximale Frequenz der inkompatiblen Freiheitsgrade ω_{42}^{tot} ungefähr 11.8 mal so groß wie ω_{24}^{co} . So muss ohne Massenskalierung eine Zeitschrittgröße verwendet werden, der nur 8.5% des Standardzeitschritts Δt^{co} beträgt.

Verglichen mit der Beobachtung aus dem 2-Freiheitsgrad-Beispiel in Abschnitt 5.3, tritt für den betrachteten Skalierungsfaktor $f^{ums} = 1.0 \cdot 10^{-3}$, das erwartete, gerade beschriebene, Verhalten auf.

Das Beispiel einer **großen uniformen Skalierung** (großer Skalierungswert) ist in Abbildung 7.1b dargestellt. Keine der Eigenfrequenzen ω_i^{tot} überschreitet noch die Grenze, für die eine Änderung der Zeitschrittgröße nötig wäre. Die Eigenfrequenzen ω_{25}^{tot} bis ω_{42}^{tot} entsprechen sehr genau den Eigenfrequenzen ω_7^{co} bis ω_{24}^{co} . Dies gilt auch für die Eigenformen. Die verbleibenden Eigenfrequenzen ω_7^{tot} bis ω_{25}^{tot} sind nahe Null. Das Element verhält sich in diesem Fall wie die co-Formulierung ohne inkompatible Freiheitsgrade, die für diese große Skalierung alle ihre Wirksamkeit verloren haben.

Optimale uniforme und selektive Skalierung

Der optimale Wert einer Skalierung ist den demnach gerade so hoch, dass der ursprüngliche Zeitschritt Δt^{co} nicht reduziert werden muss, aber die inkompatiblen Freiheitsgrade noch nicht ihre Wirksamkeit verloren haben, das heißt immer noch versteifungsreduzierend wirken. Der Skalierungsfaktor f , für den $\omega_{\text{max}}^{\text{tot}}(f)$ gerade die Grenze trifft, wird vereinfacht innerhalb einer iterativen Schleife (nach dem *Trial-and-Error*-Verfahren) ermittelt, in der das Eigenwertproblem mit schrittweise ansteigender Skalierung f^{ums} so oft wiederholt wird, bis die Grenze getroffen wird. Es resultiert der Wert $f^{\text{ums}} = 0.1786$. Die zugehörigen Eigenfrequenzen sind in Abbildung 7.2a dargestellt. Die drei höchsten Eigenfrequenzen ω_{39}^{tot} bis ω_{41}^{tot} sind gerade so groß wie ω_{24}^{co} . Einige der tieferen Frequenzen 7 bis 9 und 12 bis 18 der tot-Formulierung weichen nun von denen der eff-Formulierung etwas nach oben ab, was einen Abfall in deren Wirksamkeit darstellt.

Die Abweichungen zwischen ω^{tot} und ω^{eff} werden bei einer optimalen uniformen Skalierung durch selektive Skalierung abgemindert. Dazu werden die Massen der shr-Gruppe mit dem Faktor f^{shr} und die der vol-Gruppe mit f^{vol} skaliert. Der Wert der optimalen uniformen Skalierung wird beibehalten, sodass $f^{\text{vol}} = f^{\text{ums}} = 0.1786$ gilt. Ausgehend von dieser Situation wird nun der selektive Skalierungsfaktor f^{shr} der shr-Gruppe so lange geändert, bis die maximale Eigenfrequenz der shr-Gruppe die Grenze ω_{24}^{co} trifft. Die resultierenden Eigenfrequenzen werden in Abbildung 7.2b gezeigt. Die maximale Abweichung zwischen ω^{tot} und ω^{eff} reduziert sich im Vergleich zur optimalen uniformen Skalierung auf 11.8 %, was aber keine befriedigende Genauigkeit darstellt. Diese Abweichung kann nur reduziert werden, indem die Skalierung der vol-Gruppe weiter reduziert wird, was nun direkt mit einer Reduktion der Zeitschrittgröße einhergehen würde. Daher werden in einem nächsten Schritt verschiedene Berechnungen für die Freiheitsgrade der vol- und shr-Gruppe in Betracht gezogen.

7.1.4 Effektive Skalierung inkompatibler Massen

Am Beispiel aus Abschnitt 7.1.3 zu sehen, dass es auch mit einer selektiven Skalierung nicht möglich ist, die Standardzeitschrittgröße beizubehalten und gleichzeitig noch den Unterschied zwischen den Eigenfrequenzen zu minimieren. Als Folge wird bei einzelnen inkompatiblen Freiheitsgraden die Wirksamkeit der Versteifungsreduktion abgemindert, was zu einer steiferen Systemantwort führt. Es hat sich gezeigt, dass

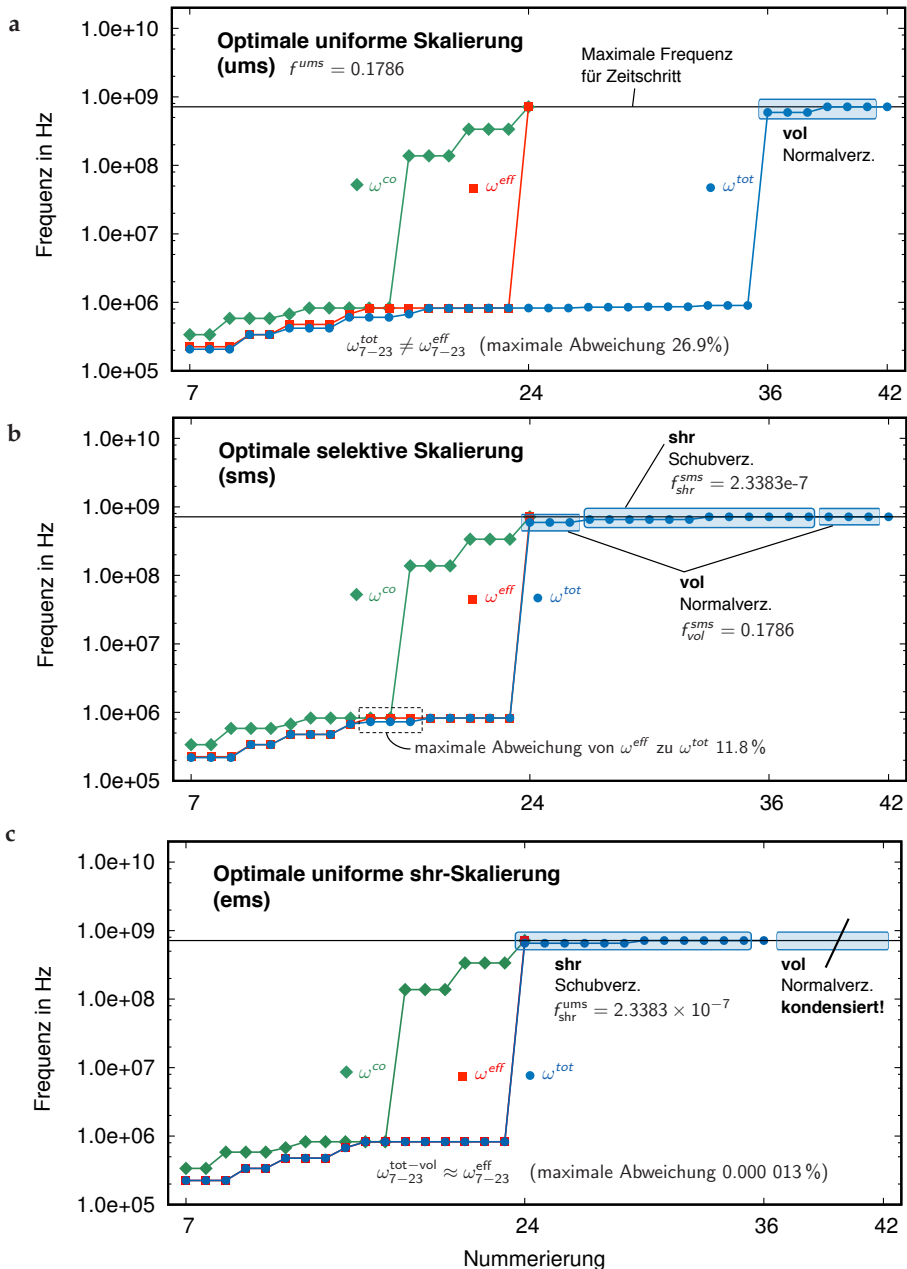


Abbildung 7.2: Logarithmische Darstellung der Eigenfrequenzen für den Ein-Element-Würfel aus Abschn. 7.1.3 mit einer (a) optimalen uniformen (ums), (b) optimalen selektiven (sms) und (c) optimalen uniformen shr-Skalierung (ems) der inkompatiblen Massen des Elements Al_v18, s. Tab. 6.1. Die inkompatiblen FHGe, 6 für Normal- (vol) und 12 für Schubverzerrungen (shr), werden beibehalten (tot) oder verschoben (eff) und einer Verschiebungsformulierung (co) gegenübergestellt.

dieser Effekt bei einer überwiegend statischen Beanspruchung weniger ausgeprägt ist als bei einer dynamischen Beanspruchung, da bei dieser auch höhere Eigenformen angesprochen werden.

Um die volle Wirksamkeit zu erhalten, ohne die Zeitschrittgröße zu reduzieren, ist es sinnvoll die inkompatiblen Freiheitsgrade \mathbf{d}^{vol} zur Erweiterung der Normalverzerrungen „abzuschneiden“ und implizit zu berechnen. Das Vorgehen für diese Kombination wurde bereits in Abschnitt 5.4 beschrieben. Die Steifigkeits- und Massenmatrix \mathbf{K}^{im} und \mathbf{M}^{im} werden dazu zusätzlich bezüglich der Freiheitsgrade \mathbf{d}^{vol} und \mathbf{d}^{shr} aufgespalten. Da die Freiheitsgrade \mathbf{d}^{vol} implizit berechnet werden sollen, wird deren Masse gleich Null angenommen und deren Beschleunigung innerhalb der Gleichung (7.6) nicht weiter berücksichtigt. Dann ergibt sich daraus das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\text{co}} & \mathbf{K}^{\text{co|vol}} & \mathbf{K}^{\text{co|shr}} \\ \mathbf{K}^{\text{vol|co}} & \mathbf{K}^{\text{vol}} & \mathbf{K}^{\text{vol|shr}} \\ \mathbf{K}^{\text{shr|co}} & \mathbf{K}^{\text{shr|vol}} & \mathbf{K}^{\text{shr}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}^{\text{co}} \\ \mathbf{d}^{\text{vol}} \\ \mathbf{d}^{\text{shr}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{\text{co}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{\text{shr}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{d}}^{\text{co}} \\ \mathbf{0} \\ \ddot{\mathbf{d}}^{\text{shr}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{\text{ext}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (7.22)$$

in dem \mathbf{d}^{vol} zu kondensieren ist

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\text{eff,co}} & \mathbf{K}^{\text{eff,co|shr}} \\ \mathbf{K}^{\text{eff,shr|co}} & \mathbf{K}^{\text{eff,shr}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}^{\text{co}} \\ \mathbf{d}^{\text{shr}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{\text{co}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{\text{shr}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{d}}^{\text{co}} \\ \ddot{\mathbf{d}}^{\text{shr}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{\text{ext}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (7.23)$$

Die bei der Kondensation entstandenen 3 effektiven Steifigkeitsmatrizen sind

$$\mathbf{K}^{\text{eff,co}} = \mathbf{K}^{\text{co}} - \mathbf{K}^{\text{co|vol}}(\mathbf{K}^{\text{vol}})^{-1}\mathbf{K}^{\text{vol|co}} \quad (7.24)$$

$$\mathbf{K}^{\text{eff,co|shr}} = \mathbf{K}^{\text{co|shr}} - \mathbf{K}^{\text{co|vol}}(\mathbf{K}^{\text{vol}})^{-1}\mathbf{K}^{\text{vol|shr}} = (\mathbf{K}^{\text{eff,shr|co}})^T \quad (7.25)$$

$$\mathbf{K}^{\text{eff,shr}} = \mathbf{K}^{\text{shr}} - \mathbf{K}^{\text{shr|vol}}(\mathbf{K}^{\text{vol}})^{-1}\mathbf{K}^{\text{vol|shr}}. \quad (7.26)$$

Die Ermittlung der Eigenfrequenzen erfolgt somit ausgehend von folgendem System

$$\left(\mathbf{K}^{\text{tot,vol}} - (\omega_i^{\text{tot,vol}})^2 \mathbf{M}^{\text{tot,vol}} \right) \phi_i^{\text{tot,vol}} = \mathbf{0}, \quad (7.27)$$

in dem wie gewünscht nur die Eigenfrequenzen der shr-Gruppe durch inkompatible Massenskalierung gesteuert werden. Damit liegt wieder der Fall einer uniformen Massenskalierung vor. Der Faktor $f_{\text{shr}}^{\text{ums}}$ für die optimale Skalierung der Massen der shr-Gruppe wird erneut innerhalb einer iterativen Schleife ermittelt. Dazu wird der Faktor $f_{\text{shr}}^{\text{ums}}$ so lange verändert, bis die maximale Eigenfrequenz $\omega_{\text{max}}^{\text{tot}}$ wieder gleich $\omega_{\text{max}}^{\text{co}}$ ist. Der resultierende Wert ist exakt gleich wie für die optimale selektive Skalierung der shr-Gruppe $f_{\text{shr}}^{\text{sms}}$ aus Abbildung 7.2b. Abbildung 7.2c zeigt die Eigenfrequenzen $\omega_i^{\text{tot|vol}}$ im Vergleich zu den Eigenfrequenzen ω_i^{co} und ω_i^{eff} .

Die „abgeschnittenen“, also kondensierten, Eigenfrequenzen der vol-Gruppe tauchen nicht mehr auf. Insgesamt weisen die Eigenfrequenzen $\omega_i^{\text{tot|vol}}$ im Bereich 7 bis 23 eine maximale Abweichung von 0.000 013 % zu ω_i^{eff} auf. Damit verhält sich das Element so, als ob alle Freiheitsgrade kondensiert wären, obwohl die 12 inkompatiblen Freiheitsgrade der shr-Gruppe noch eine inkompatible Masse besitzen.

Tabelle 7.1: Gegenüberstellung des Fehlers in den Eigenfrequenzen und die zugehörige Reduktion $r^{\Delta t} = \Delta t^{\text{crit}} / \Delta t^{\text{co}}$ der Zeitschrittgröße für variierende Skalierungen am Beispiel des Ein-Element-Würfels aus Abschn. 7.1.3 mit Elementformulierung Alv18, die 6 inkompatible FHGe für Normal-(vol) und 12 für Schubverzerrungen (shr) enthält.

Beschreibung	Skalierung ^a	f^{vol}	f^{shr}	Maximaler Fehler in %	$r^{\Delta t}$	Abb.
shr- und vol-Massen vorhanden.	uniform (ums)	$1.00 \cdot 10^{-6}$	—	<0.01	0.003	—
		$1.00 \cdot 10^{-3}$	—	0.1	0.085	—
	selektiv (sms)	0.18	—	26.9	1.000	7.2a
		$1.00 \cdot 10^6$	—	—	1.000	—
		0.18	$2.34 \cdot 10^{-7}$	11.8	1.000	7.2b
		0.18	$1.00 \cdot 10^{-8}$	11.8	0.207	—
shr-Massen vorhanden, Kondensation der vol-FHGe.	effektiv (ems)	0.10	$2.34 \cdot 10^{-7}$	7.2	0.788	—
		$1.00 \cdot 10^{-3}$	$2.34 \cdot 10^{-7}$	0.8	0.085	—
shr-Massen vorhanden, Kondensation der vol-FHGe.	effektiv (ems)	—	$2.34 \cdot 10^{-7}$	<0.01	1.000	7.2c
		—	$1.00 \cdot 10^{-6}$	<0.01	1.000	—
		—	$1.00 \cdot 10^{-3}$	0.06	1.000	—

^a Die Massen der inkompatiblen Freiheitsgrade werden mit folgenden Strategien skaliert:
 (ums) shr- und vol-Massen werden uniform skaliert,
 (sms) shr- und vol-Massen werden selektiv skaliert oder
 (ems) nur shr-Massen werden uniform skaliert und die vol-FHGe kondensiert.

Betrachtet man hingegen den zu Beginn für die vol- und shr-Gruppe verwendeten uniformen Skalierungswert $f_{\text{tot}}^{\text{ums}} = 1.0 \cdot 10^{-3}$ hier nur für die shr-Gruppe, da die vol-Gruppe kondensiert wird, beträgt in den Frequenzen 7 bis 23 der maximale Fehler 0.00057%. Die Genauigkeit also in einem ausreichend genauen Bereich, obwohl die Skalierung den dazu genannten optimalen Wert um circa 4 Größenordnungen übertrifft. Daraus lässt sich folgern, dass die Ergebnisse recht robust gegenüber der Skalierung sind, was für eine spätere praxistaugliche Abschätzung der Skalierung sehr vorteilhaft ist. Dann ist eine Skalierung möglich, die größer als die optimale ist.

Es bleibt also ausreichend Spielraum für eine Skalierung, mit der die Genauigkeit nur minimal beeinträchtigt und gleichzeitig die Standardzeitschrittgröße beibehalten werden kann.

7.1.5 Beurteilung der Auswirkung auf Genauigkeit und Effizienz

Die Ergebnisse der vorhergehenden Abschnitte sind in Tabelle 7.1 zusammengestellt. Diese enthält die Werte der inkompatiblen Massenskalierung, den maximalen Fehler ϵ_{max} im Bereich 7 bis 23 der Eigenfrequenzen gegenüber der Referenzlösung sowie die Auswirkung auf die Zeitschrittgröße. Als Referenzlösung wird in allen Fällen die Formulierung genutzt, in der alle inkompatiblen Freiheitsgrade kondensiert werden. Für eine anschaulich Darstellung der Auswirkungen auf die Zeitschrittgröße wird die kritische Zeitschrittgröße definiert durch

$$\Delta t^{\text{crit}} = \min(\Delta t^{\text{co}}, \Delta t^{\text{tot}}) . \tag{7.28}$$

Damit kann das Verhältnis $r^{\Delta t}$, um das die Zeitschrittgröße verkleinert werden muss, eingeführt werden

$$r^{\Delta t} = \Delta t^{\text{crit}} / \Delta t^{\text{co}} = \frac{\min(\Delta t^{\text{co}}, \Delta t^{\text{tot}})}{\Delta t^{\text{co}}} \leq 1.0, \quad (7.29)$$

wobei $r^{\Delta t}$ immer kleiner oder gleich 1.0 ist. Das Verhältnis $r^{\Delta t}$ gibt also an, wie stark der üblicherweise für die Simulation verwendete kritische Zeitschritt Δt^{co} aufgrund höherer Eigenfrequenzen infolge inkompatibler Freiheitsgrade noch reduziert werden müsste. In praktischen Simulationen wird Δt^{co} durch effiziente Abschätzungen ermittelt, auf die später noch eingegangen wird.

Die letzte Spalte verweist auf die jeweilige Abbildung, in der alle Eigenfrequenzen der betrachteten Skalierung dargestellt sind. Die Tabelle hat den Zweck, das Wechselspiel zwischen Genauigkeit und Effizienz in Abhängigkeit der Skalierung zu veranschaulichen. Dabei wird die Effizienz des Vorgehens daran gemessen, wie stark die Zeitschrittgröße reduziert werden muss. Dabei ist Folgendes zu beachten: Die in Abschnitt 5.4.3 beschriebene explizite Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade erfordert gegenüber einer impliziten Berechnung weniger Operationen. Muss die Zeitschrittgröße aber sehr stark reduziert werden, trägt dieser Vorteil nicht weiter. Als Folge wird hier, gegenüber einer Berechnung für ausschließlich kompatible Freiheitsgrade, der ideale Zustand, dass keine Reduktion der Zeitschrittgröße nötig ist angestrebt, da diese vor dem Hintergrund einer Kosten-Nutzen Relation die am meisten wünschenswerte Variante darstellen.

Die erste Gruppe der Tabelle zeigt die uniforme Skalierung aller inkompatiblen Masseneinträge. Darin werden kleine und große Werte genutzt, um die Grenzen der Genauigkeit und der Effizienz zu veranschaulichen. Mit den ersten beiden Werten gelingt mit einem Fehler im Bereich von ungefähr 0.1 % bis zu einem Wert kleiner als 0.01 % eine sehr gute Übereinstimmung mit der Referenzlösung. Doch muss dabei die Zeitschrittgröße so stark reduziert werden, dass circa 12 bis 333mal mehr Zeitschritte berechnet werden müssten. Ab dem optimalen Wert der Skalierung ist hingegen keine Reduktion der Zeitschrittgröße mehr erforderlich, aber es muss ein höherer Fehler in Kauf genommen werden. Dieser steigt mit der Höhe der Skalierung immer weiter an, bis der Einfluss der inkompatiblen Freiheitsgrade vollständig eliminiert ist und nur noch die Eigenfrequenzen der Verschiebungsformulierung maßgebend sind. *Damit bestätigt sich wie eingangs am Beispiel mit 2 Freiheitsgraden aufgezeigt, dass eine Elementformulierung mit inkompatiblen Massen sich zwischen der Formulierung ohne inkompatible Freiheitsgrade und der Formulierung mit kondensierten inkompatiblen Freiheitsgraden bewegt.*

Eine gleichmäßige Reduktion des Fehlers wird durch eine selektive Skalierung der vol- und shr-Gruppen erreicht. Der verbliebene Fehler von 11.8 % ließe sich nur durch eine kleinere Skalierung der vol-Massen senken, die wieder eine Reduktion der Zeitschrittgröße bewirken würde, sodass im folgenden Schritt eine weitere Alternative in Betracht gezogen wird.

Mit der ems-Strategie werden die vol-Freiheitsgrade kondensiert, womit eine Beibehaltung des Zeitschritts mit deutlich kleineren Skalierungen möglich wird. Umgekehrt

wird auch bei einer deutlich größeren Skalierung für die Freiheitsgrade der shr-Gruppe die Genauigkeit nicht oder nur geringfügig beeinträchtigt. Das bedeutet, dass die Genauigkeit sehr robust gegenüber einer Skalierung ist, was wichtig für die in den nächsten Abschnitten vorgeschlagenen Abschätzungen der Eigenfrequenzen ist, die nämlich üblicherweise konservativ sind. Es wird also oft ein zu großer Wert für die Skalierung verwendet, da die Eigenfrequenzen zum einen nicht genau abgeschätzt werden können und zum anderen, um ein unerwartetes Unterschreiten der vorgegebenen Zeitschrittgröße abzusichern. Aufgrund der soeben beschriebenen Robustheit wirkt sich eine größere Skalierung aber nur geringfügig auf die Genauigkeit aus.

7.1.6 Zusammenfassende Beurteilung der Skalierung bei einer Anwendung auf verschiedene Elementformulierungen

Betrachtung des maximalen Fehlers für optimale Skalierungsfaktoren

Die Faktoren zur Skalierung der inkompatiblen Massen sind idealerweise so zu wählen, dass die Eigenfrequenzen 7 bis 23 nicht oder nur minimal voneinander abweichen, und keine Abminderung der Zeitschrittgröße erforderlich ist. Für die Elementformulierung Alv18 (siehe Tabelle 6.1) zeigen die Werte der fett gedruckten Zeilen in Tabelle 7.1 die maximal erzielbare Übereinstimmung der Eigenfrequenzen, bei gleichzeitiger Beibehaltung der Zeitschrittgröße für die folgenden drei Strategien: Die Skalierung der inkompatiblen Massen erfolgt

1. uniform (**ums**) für shr- und vol-Freiheitsgrade,
2. selektiv (**sms**) für shr- und vol-Freiheitsgrade oder
3. effektiv (**ems**) ausschließlich für shr-Freiheitsgrade, während die vol-Freiheitsgrade ohne inkompatible Masse kondensiert werden.

Die erzielbare Übereinstimmung wird mit dem maximalen Fehler in den für das Elementverhalten entscheidenden Frequenzen 7 bis 23 verglichen, der befür die sms-Strategie in Abbildung 7.2b in der maximalen Abweichung in den Eigenfrequenzen 16 bis 18 auftritt.

Im Folgenden werden nur optimale Faktoren der Skalierung betrachtet, da nur für diese die Zeitschrittgröße nicht abgesenkt werden muss, was gerade im Hinblick auf die Praxistauglichkeit sinnvoll ist.

Die in Tabelle 6.1 zusammengestellten inkompatibel erweiterten Elementformulierungen werden miteinander verglichen. Von den Elementen mit MITC/ANS-Konzept wird nur die Formulierung Vu7ANSnat betrachtet, da diese für den hier betrachteten Ein-Element-Würfel aus Abschnitt 7.1.3 identische Ergebnisse wie die Formulierung Vu7ANSsus liefert. Eine Gruppierung in vol- und shr-Freiheitsgrade ist bei den Formulierungen möglich, sofern beide Gruppen vorhanden sind. Mit einigen inkompatiblen Freiheitsgraden der gezeigten Formulierungen wird sowohl eine Normal-(vol) als auch eine Schubverzerrung (shr) interpoliert. Diese werden zu den vol-Freiheitsgraden gezählt, da wegen des Normalanteils auch größere Eigenfrequenzen entstehen.

Einfluss der Skalierungsstrategien ums, sms und ems

Der maximale Fehler wird für einen kompressiblen ($\nu = 0.3$) und nahezu inkompressiblen ($\nu = 0.499999$) Fall in Abbildung 7.3 gezeigt. In beiden Fällen gilt für alle Elementvarianten, dass der maximale Fehler mit der ums-Strategie am größten ist und bei Verwendung der sms- und ems-Strategien wie erwartet reduziert wird. Im nahezu inkompressiblen Fall ist der Fehler der ems-Strategie, die eine explizite und eine implizite Berechnung vorsieht, nicht mehr zu erkennen. Der Grund ist, dass die vol-Freiheitsgrade durch ihre Kondensation keinen Einfluss mehr auf den Fehler haben, der sich somit nur noch auf die Skalierung der shr-Massen bezieht. Selbst für sehr kleine Skalierungsfaktoren kann dabei noch gewährleistet werden, dass die Zeitschrittgröße nicht verkleinert werden muss, sodass $r^{\Delta t} = 1.0$ gilt, siehe Gleichung (7.29). Im kompressiblen Fall ist der Fehler für die ems-Strategie im Vergleich zum nahezu inkompressiblen Fall aber deutlich erkennbar. Das liegt einerseits daran, dass der Schub und damit die inkompatiblen shr-Freiheitsgrade mehr Einfluss haben, und andererseits daran, dass die von der Poissonzahl abhängige zu unterschreitende Eigenfrequenz zur Erfüllung der Bedingung $r^{\Delta t} = 1.0$ in diesem Fall deutlich kleiner ist.

In nahezu allen Fällen betrifft der maximale Fehler nur einige wenige Eigenfrequenzen, siehe beispielhaft Abbildung 7.2b für das Alv18-Element mit sms-Skalierung.

Einfluss der Elementformulierung auf die ums-Strategie

Die betrachteten Elementformulierungen weisen einen unterschiedlich großen maximalen Fehler auf, was von der Anzahl der vol-, vol|shr- und shr-Freiheitsgrade sowie der Ordnung und Kopplung der Interpolation abhängig ist. Für die ums-Skalierungsstrategie wurden folgende Zusammenhänge festgestellt.

- Im kompressiblen Fall weisen die Elemente Wil9 und Wil9ts aufgrund identischer inkompatibler Freiheitsgrade den gleichen maximalen Fehler auf, der für die Hinzunahme von 3 weiteren vol-Freiheitsgraden im Element Wil12ts ansteigt. Für das Element Li18 mit 3 zusätzlichen vol- und shr-Freiheitsgraden steigt der maximale Fehler weiter an, fällt aber für das Element Alv18, obgleich es auch 18 inkompatible Freiheitsgrade enthält, wieder deutlich ab und liegt sogar unterhalb des Niveaus der Wil12ts-Formulierung. Der Grund für den geringeren Fehler des Elements Alv18 liegt im Vergleich zum Li18-Element darin, dass zum einen keine kombinierten vol|shr-Erweiterungen auftreten und zum anderen insgesamt weniger vol- und vol|shr-Freiheitsgrade enthalten sind, die generell eine höhere Massenskalierung zur Einhaltung von $r^{\Delta t} = 1.0$ erfordern, was zu größeren Abweichungen in den Eigenfrequenzen führt. Die minimale Verbesserung der Alv18- im Vergleich zur Wil12ts-Formulierung, liegt ebenfalls in den kombinierten vol|shr-Freiheitsgraden, was in diesem Fall trotzdem beachtlich ist, da die Formulierung Wil12ts nur die Hälfte an shr-Freiheitsgraden verwendet.

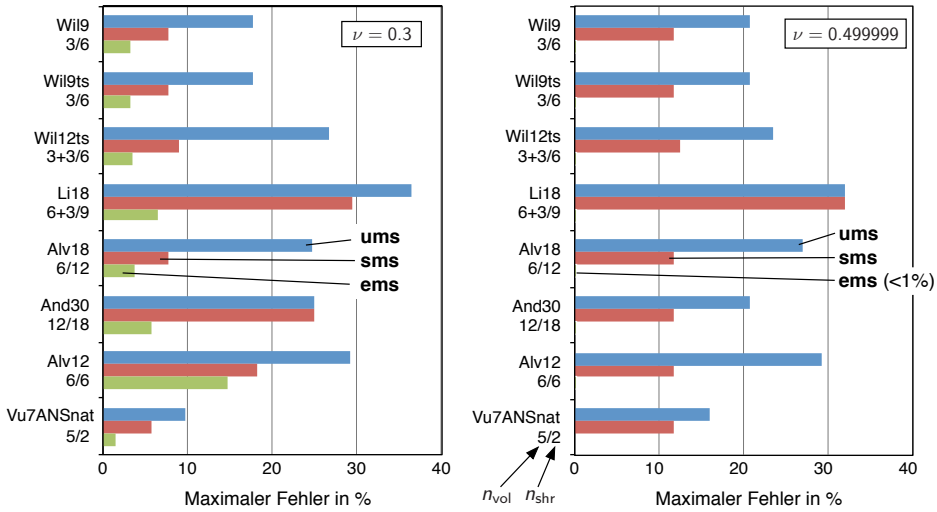


Abbildung 7.3: Vergleich des jeweils maximalen Fehlers für folgende Skalierungsstrategien: (ums) shr- und vol-Massen werden uniform skaliert, (sms) shr- und vol-Massen werden selektiv skaliert oder (ems) nur shr-Massen werden uniform skaliert und die vol-FHGe kondensiert. Ein-Element-Würfel aus Abschn. 7.1.3 bei kompressiblem ($\nu = 0.3$) und nahezu inkompressiblem ($\nu = 0.499999$) Materialverhalten. Vergleich der Elementformulierungen aus Tab. 6.1 mit erweiterten Normal- (vol), Normal- und Schub- (vol|shr) und Schubverzerrungen (shr). Die Anzahl inkompatibler Freiheitsgrade n_{vol} , $n_{vol|shr}$ und n_{shr} ist gegeben durch $n_{vol} + n_{vol|shr} / n_{shr}$. (Beispiel: Formulierung Li18 mit 6 vol-, 3 vol|shr- und 9 shr-FHGen = 6+3/9, s. auch Tab. 3.1). Hinweis: Anzahl und Interpolationsordnung der Erweiterungen sind entscheidend für den maximalen Fehler.

- Im And30-Element ist der maximale Fehler auch mit 12 vol-Freiheitsgraden kleiner als für die Elemente Wil12ts und Li18 mit den kombinierten vol|shr-Freiheitsgraden. Aufgrund der großen Anzahl an bis zu trilinear interpolierten shr-Freiheitsgraden, siehe Gleichung (3.57), reduziert sich auch für die sms-Strategie der maximale Fehler der And30-Formulierung nicht.
- Das Alv12-Element weist trotz identischer Anzahl und Interpolation der vol-Freiheitsgrade, siehe Gleichungen (3.62) und (3.64), einen größeren maximalen Fehler als das Element Alv18 auf, was auf die speziellen Interpolationen des Querschubs mit bis zu biquadratischen Termen zurückzuführen ist.
- Das Element Vu7ANSnat weist einen vergleichsweise kleinen maximalen Fehler auf, da insgesamt weniger inkompatible Freiheitsgrade genutzt werden, insbesondere für die Beseitigung von Schubversteifungen, die bereits durch das ANS-Konzept behandelt werden.

Wird die ums-Strategie genutzt, ist der maximale Fehler im nahezu inkompressiblen und kompressiblen Fall analog über die Elementvarianten verteilt.

Einfluss der Elementformulierung auf die sms-Strategie

Ob und in welchem Umfang der maximale Fehler infolge der sms-Strategie reduziert wird, hängt ähnlich zur ums-Strategie von der Anzahl der shr-Freiheitsgrade und deren Interpolation ab. Für das And30-Element bleibt der maximale Fehler beim Übergang von der ums- auf die sms-Strategie im kompressiblen Fall gleich und wird erst für nahezu inkompressibles Verhalten kleiner. Dann kann nämlich wegen der insgesamt höheren Eigenfrequenz zur Einhaltung von $r^{\Delta t} = 1.0$ eine kleinere Skalierung der shr-Massen erfolgen.

Einfluss der Elementformulierung auf die ems-Strategie

Bei der ems-Strategie resultiert der maximale Fehler nur aus der Skalierung der shr-Massen. Im nahezu inkompressiblen Fall führt das dazu, dass für alle betrachteten Elementvarianten die Skalierungsfaktoren und damit die inkompatiblen Massen so klein gewählt werden können, dass nahezu keine Abweichungen mehr zu den Eigenfrequenzen der Referenzlösung, bei der die inkompatiblen Freiheitsgrade statisch kondensiert werden, erkennbar sind. Der Grund ist die aus der Fast-Inkompressibilität folgende – im Vergleich zur Kompressibilität – hohe Eigenfrequenz zur Bestimmung des gewünschten Zeitschritts. Diese wird auch mit größer werdenden Eigenfrequenzen die infolge der kleinen inkompatiblen Skalierung auftreten, nicht überschritten, sodass $r^{\Delta t} = 1.0$ stets erfüllt ist.

Im kompressiblen Fall ist der maximale Fehler dagegen sichtbar, da dann die shr-Massen stärker als für die Fast-Inkompressibilität skaliert werden müssen. Für den maximalen Fehler ist analog zur obigen Beobachtung die Anzahl der shr-Freiheitsgrade und deren Interpolationsordnung maßgebend. Im Einzelnen wurde folgendes Verhalten beobachtet:

- Der maximale Fehler ist für die Elemente Wil9, Wil9ts und Wil12ts aufgrund der identischen shr-Erweiterung gleich.
- Obwohl für das Li18-Element nur 3 und für das Alv18-Element 6 zusätzliche shr-Freiheitsgrade verwendet werden, weist das Element Alv18 einen kleineren maximalen Fehler auf. Die Ursache sind die in der Li18 Formulierung zusätzlich miteinander gekoppelten shr-Interpolationen, bei der zwei verschiedene Schubverzerrungen mit dem gleichen shr-Freiheitsgrad erweitert werden, siehe zum Beispiel Spalte 4 (zwei Einträge) in Gleichung (3.60).
- Für die Elemente And30 und Vu7ANSnat tritt jeweils der zu erwartende maximale Fehler aufgrund der entsprechenden Anzahl der shr-Freiheitsgrade auf.
- Das Element Alv12 weist mit der ems-Strategie den größten Fehler im kompressiblen Fall auf, was an der bereits oben angesprochenen speziellen Interpolation der shr-Freiheitsgrade liegt, die wie erwähnt anstatt des ANS-Konzepts zur Kompensation von Schubversteifungen genutzt wird.

Anmerkung

Zusammenfassend sind für die Qualität der Ergebnisgrößen, wie Verschiebungen und Spannungen, nur dann Auswirkungen zu erwarten, wenn der inkompatible Freiheitsgrad, auf den sich der maximale Fehler in der Eigenfrequenz bezieht, auch tatsächlich durch die Deformation/Belastung angesprochen wird. In den meisten Modellen ist darüber hinaus immer eine Kombination aus Versteifungsproblematiken vorhanden, sodass meist nicht ausschließlich die inkompatiblen Freiheitsgrade, auf die der größte Fehler in den Eigenfrequenzen zutrifft, angesprochen werden. Daher sind keine große Auswirkungen auf die Ergebnisgrößen infolge einer sinnvollen inkompatiblen Massenskalierung mit einer der angesprochenen Strategien zu erwarten.

7.2 Abschätzung der Skalierung**7.2.1 Gerschgorin-Kreise zur Abschätzung von Eigenfrequenzen**

Für die Praxistauglichkeit und Simulationen von großen Problemen mit vielen Elementen ist eine effiziente Abschätzung der hier gezeigten optimalen Skalierung nötig. Die in den vorhergehenden Abschnitten beschriebene *Trial-and-Error-Methode* zur Bestimmung der optimalen Skalierung ist zwar sehr genau, aber durch mehrfaches Bestimmen von Eigenfrequenzen auch sehr aufwendig und damit für große Probleme nicht tauglich.

Die Herleitung der Abschätzung einer optimalen Skalierung beginnt mit der Forderung, dass die Zeitschrittgröße infolge inkompatibler Erweiterungen nicht verkleinert werden darf. Mit $r^{\Delta t}$ aus Gleichung (7.29) ist also folgende Bedingung zu erfüllen

$$\begin{aligned} r^{\Delta t} = 1.0 & \Leftrightarrow \Delta t^{\text{tot}}(f) = \Delta t^{\text{co}} \\ & \Leftrightarrow 2/\omega_{\text{max}}^{\text{tot}}(f) = \Delta t^{\text{co}}. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Der zu bestimmende Skalierungsfaktor f kann in der vorliegenden Form nur indirekt, beispielsweise mit dem oben vorgeschlagenen iterativen Verfahren, berechnet werden. Effizienter ist eine Abschätzung der Eigenfrequenz, die direkt von f abhängt. Dazu eignen sich Gerschgorin Kreise, die auch bei Cook et al. [37] beschrieben werden, und zu konservativen Abschätzungen führen. Der Vorteil ist, dass in der Abschätzung direkt ein Skalierungsfaktor f mit den inkompatiblen Massen innerhalb der Massenmatrix eingebaut werden kann

$$(\omega_{\text{max}}^{\text{tot}})^2 \leq \max_i \left\{ \frac{1}{M_{ii}(f)} \left(K_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n^{\text{tot}}} |K_{ij}| \right) \right\}, \quad i = (n^{\text{co}} + 1), \dots, n^{\text{tot}}. \quad (7.31)$$

Da die Abschätzung nur für die inkompatiblen Freiheitsgrade genutzt werden soll, ist der Index i in Gleichung (7.31) nur auf Zeilen unterhalb der kompatiblen Steifigkeits-

matrix anzuwenden, also $i > 24$. In den Zeilen 1 bis 24 taucht der Skalierungsfaktor f nicht auf.

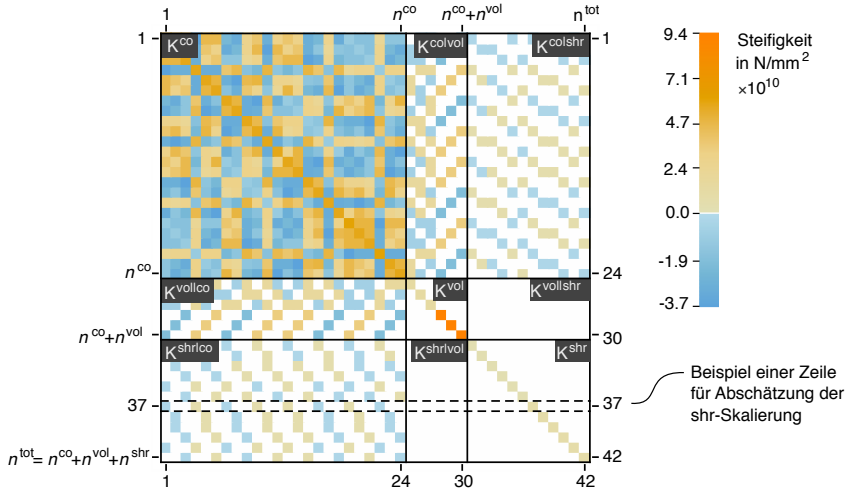


Abbildung 7.4: Besetzung der totalen Steifigkeitsmatrix, aufgeteilt in kompatiblen (co) Anteil sowie inkompatiblen Normal- (vol) und Schubanteil (shr) auf der Diagonalen und den entsprechenden co|vol-, vol|shr- und co|shr-Kopplungsmatrizen des Elements Alv18 (siehe Tab. 6.1) für den Ein-Element-Würfel aus Abschn. 7.1.3 im nahezu inkompressiblen Fall ($\nu = 0.499999$).

Um die durchzuführende Berechnung zu veranschaulichen, ist in Abbildung 7.4 die totale Steifigkeitsmatrix aus dem numerischen Beispiel in Abschnitt 7.1.3 grafisch dargestellt. Darin ist Zeile 37 als Beispiel einer für die Abschätzung relevanten Zeile hervorgehoben. Zudem werden links und oberhalb der Matrixdarstellung die jeweilige Anzahl n^{co} , n^{vol} und n^{shr} anschaulich zueinander bezogen. Es wird angemerkt, dass die dargestellte Steifigkeitsmatrix symmetrisch ist und somit $K^{vol|co} = (K^{co|vol})^T$, $K^{shr|co} = (K^{co|shr})^T$ und $K^{shr|vol} = (K^{vol|shr})^T$ gilt. Für die Würfelgeometrie des betrachteten Beispiels ist die Kopplungsmatrix zwischen den inkompatiblen Freiheitsgraden $K^{shr|vol} = 0$. Auf die Abbildung der Massenmatrix wird verzichtet, da diese nur auf der Diagonalen besetzt ist. Die Zeilen 1 bis 24 enthalten die kompatible Massenmatrix und die Zeilen 25 bis 42 enthalten in diesem Fall die inkompatible Massenmatrix, die unterteilt in vol- und shr-Anteile dargestellt ist.

Die Steifigkeitsmatrix K^{co} ist voll besetzt, während die Kopplungsmatrizen $K^{co|shr}$ und $K^{co|vol}$ nur teilweise besetzt sind. Die Matrizen K^{vol} und K^{shr} sind für den hier untersuchten Würfel nur auf der Diagonalen besetzt und untereinander entkoppelt, da $K^{co|shr}$ nicht besetzt ist. Diese Struktur ändert sich für eine verzerrte Elementgeometrie, worauf später eingegangen wird.

7.2.2 Berechnung der Skalierung

Uniforme inkompatible Massenskalierung (ums)

Die Abschätzung des Faktors f^{ums} der uniformen Massenskalierung erfolgt auf Basis von Gleichung (7.31). Die Eigenfrequenzen die sich auf die Zeilen $i \geq 25$ beziehen werden zur einfacheren Unterscheidung mit ω^{im} bezeichnet. So gilt

$$(\omega_{\text{max}}^{\text{im}})^2 \leq \max_i \left\{ \frac{k_i^{\text{im}} + k_i^{\text{im|co}}}{f^{\text{ums}} \cdot m_i^{\text{im}}} \right\}, \quad i = 1, \dots, n^{\text{im}}. \quad (7.32)$$

mit den Abkürzungen

$$k_i^{\text{im}} = K_{ii}^{\text{im}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n^{\text{im}}} |K_{ij}^{\text{im}}|, \quad k_i^{\text{im-co}} = \sum_{j=1}^{n^{\text{co}}} |K_{ij}^{\text{im|co}}|, \quad m_i^{\text{im}} = M_{ii}^{\text{im}}. \quad (7.33)$$

Wird Gleichung (7.32) in die Forderung (7.30) eingesetzt, ist der Faktor f^{ums} durch einfaches Umstellen ermittelbar. Wird beachtet, dass inkompatible vol-Freiheitsgrade zu höheren Eigenfrequenzen als die shr-Freiheitsgrade führen, wird die Auswertung der Zeilen mit den shr-Freiheitsgraden ausgespart. Bei einer bekannten Sortierung der vol- und shr-Freiheitsgrade in Matrizen, wie im vorliegenden Fall, gilt

$$f^{\text{ums}} = f^{\text{vol}} \geq \frac{1}{4} (\Delta t^{\text{co}})^2 \cdot \max_i \left\{ \frac{k_i^{\text{vol}} + k_i^{\text{vol|shr}} + k_i^{\text{vol|co}}}{m_i^{\text{vol}}} \right\}, \quad i = 1, \dots, n^{\text{vol}}. \quad (7.34)$$

Hierbei sind analog zu Gleichung (7.33) die Abkürzung für die Massen der vol-Freiheitsgrade

$$m_i^{\text{vol}} = M_{ii}^{\text{im}}, \quad i = 1, \dots, n^{\text{vol}}, \quad (7.35)$$

sowie die folgenden Abkürzungen bezogen auf die Steifigkeiten

$$k_i^{\text{vol}} = K_{ii}^{\text{vol}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n^{\text{vol}}} |K_{ij}^{\text{vol}}|, \quad k_i^{\text{vol|shr}} = \sum_{j=1}^{n^{\text{shr}}} |K_{ij}^{\text{vol|shr}}|, \quad k_i^{\text{vol|co}} = \sum_{j=1}^{n^{\text{co}}} |K_{ij}^{\text{vol|co}}|. \quad (7.36)$$

Aus Abbildung 7.4 geht hervor, dass die Kopplungsmatrix $\mathbf{K}^{\text{vol|shr}}$ nicht besetzt ist, und für den 1-Element-Würfel des hier betrachteten Beispiels die entsprechenden Terme in Gleichung (7.34) entfallen.

Selektive inkompatible Massenskalierung (sms)

In einer uniformen Skalierung kann der Nachteil auftreten, dass die shr-Massen mit einem zu großen Faktor f^{ums} skaliert werden, was sich negativ auf die Vermeidung von

Versteifungen im Vergleich zur Formulierung mit kondensierten shr-Freiheitsgraden auswirkt. Abhilfe bietet eine selektive Bestimmung einer Skalierung für die shr-Massen, die meist deutlich kleiner als für die vol-Massen ausfallen kann.

Für die selektive Skalierung wird der Faktor für die vol-Freiheitsgrade so abgeschätzt wie bei der uniformen Skalierung. Der Wert für die shr-Größen wird analog zu Gleichung (7.34) berechnet. Bezogen auf die Zeilen der shr-Freiheitsgrade in der Steifigkeitsmatrix lautet die Abschätzung

$$f^{\text{shr}} \geq \frac{1}{4} (\Delta t^{\text{co}})^2 \cdot \max_i \left\{ \frac{k_i^{\text{shr}} + k_i^{\text{shr|vol}} + k_i^{\text{shr|co}}}{m_i^{\text{shr}}} \right\}, \quad i = 1, \dots, n^{\text{shr}}, \quad (7.37)$$

wozu die shr-Massen die folgende Bezeichnung erhalten

$$m_i^{\text{shr}} = M_{ii}^{\text{im}}, \quad i = (n^{\text{vol}} + 1), \dots, (n^{\text{vol}} + n^{\text{im}}), \quad (7.38)$$

und die Berechnungen mit den Steifigkeiten dargestellt werden durch

$$k_i^{\text{shr}} = K_{ii}^{\text{shr}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n^{\text{shr}}} |K_{ij}^{\text{shr}}|, \quad k_i^{\text{shr|vol}} = \sum_{j=1}^{n^{\text{vol}}} |K_{ij}^{\text{shr|vol}}|, \quad k_i^{\text{shr|co}} = \sum_{j=1}^{n^{\text{co}}} |K_{ij}^{\text{shr|co}}|. \quad (7.39)$$

Effektive inkompatible Massenskalierung (ems)

Werden die vol-Freiheitsgrade kondensiert, siehe Gleichung (7.23), sind für die Abschätzung der Skalierung der shr-Massen die effektiven Steifigkeitsmatrizen aus den Gleichungen (7.25) und (7.26) zu verwenden. Da nur die shr-Massen skaliert werden, liegt wieder eine uniforme Skalierung vor. Zur Unterscheidung wird der Faktor mit $f^{\text{eff,shr}}$ bezeichnet. Die Abschätzung (7.37) wird dann ersetzt durch

$$f^{\text{eff,shr}} \geq \frac{1}{4} (\Delta t^{\text{co}})^2 \cdot \max_i \left\{ \frac{k_i^{\text{eff,shr}} + k_i^{\text{eff,shr-co}}}{m_i^{\text{shr}}} \right\}, \quad i = 1, \dots, n^{\text{shr}}, \quad (7.40)$$

mit den Definitionen

$$k_i^{\text{eff,shr}} = K_{ii}^{\text{eff,shr}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n^{\text{shr}}} |K_{ij}^{\text{eff,shr}}|, \quad k_i^{\text{eff,shr-co}} = \sum_{j=1}^{n^{\text{co}}} |K_{ij}^{\text{eff,shr-co}}|. \quad (7.41)$$

7.2.3 Bewertung der Abschätzung

Für eine vergleichende Bewertung der unterschiedlichen Skalierungen werden die Kriterien Genauigkeit und Effizienz verwendet. Zuerst wird der inkompatible Skalierungsfaktor für die uniforme, selektive und effektive Skalierung anhand der Gleichungen (7.34), (7.37) und (7.40) berechnet. Damit wird die Skalierung der inkompatiblen

Massen durchgeführt und zur Berechnung der Eigenfrequenzen in Gleichung (7.5) oder (7.27) eingesetzt.

Die Genauigkeit wird daran gemessen, wie groß der maximale Fehler der Eigenfrequenzen 7 bis 23 im Vergleich zu den Eigenfrequenzen ω^{eff} ist³, für deren Berechnung alle inkompatiblen Freiheitsgrade kondensiert werden. Für die Effizienz ist die maximale Eigenfrequenz entscheidend, mit der die Reduktion des ursprünglichen Zeitschritts $r^{\Delta t}$ ermittelt wird. Als Referenzlösung werden die Skalierungen der *Trial-and-Error*-Methode verwendet.

Tabelle 7.2: Vergleich (1) der Skalierungsfaktoren f^{vol} und f^{shr} , (2) der Größe des maximalen Fehlers e_{max} in den Eigenfrequenzen sowie (3) der Reduktion des Zeitschritts $r^{\Delta t}$ für den 1-Element-Würfels, s. Abschn. 7.1.3, bei Kompressibilität ($\nu = 0.3$) und Fast-Inkompressibilität ($\nu = 0.499999$) anhand des Alv18-Elements, s. Tab. 6.1. Variation uniformer (ums), selektiver (sms) und effektiver (ems) Skalierungsstrategie, s. Abschn. 7.1.6.

Skalierungsstrategie		$\nu = 0.3$				$\nu = 0.499999$			
		f^{vol}	f^{shr}	e_{max} in % ^c	$r^{\Delta t}$	f^{vol}	f^{shr}	e_{max} in %	$r^{\Delta t}$
uniform (ums)	Referenz ^a	0.25	—	24.8	1.00	0.18	—	26.9	1.00
	Schätzung ^b	2.61	—	73.7	1.00	3.40	—	77.3	1.00
selektiv (sms)	Referenz ^a	0.25	0.06	7.6	1.00	0.18	$2.3 \cdot 10^{-7}$	11.8	1.00
	Schätzung ^b	2.61	0.60	54.5	1.00	3.40	$2.6 \cdot 10^{-6}$	42.3	1.00
effektiv (ems)	Referenz ^a	—	0.06	3.8	1.00	—	$2.3 \cdot 10^{-7}$	<0.001	1.00
	Schätzung ^b	—	0.56	46.4	1.00	—	$2.6 \cdot 10^{-6}$	<0.001	1.00

^a Berechnet mit der *Trial-and-Error*-Methode.

^b Berechnet mit dem Gerschgorin-Verfahren nach Abschnitt 7.2.2.

^c Maximaler Fehler für kompressiblen Fall → Säulendiagramm in Abb. 7.5.

Tabelle 7.2 zeigt, dass für den kompressiblen Fall die geschätzte Skalierung circa 10mal so groß wie die exakte Skalierung (Referenz) ist. Im nahezu inkompressiblen Fall ist der Unterschied mit einem Faktor 18 nochmals deutlich größer. Diese höhere Skalierung führt wie erwartet auch zu deutlichen Abweichungen in den Eigenfrequenzen. Der Fehler ist für die uniforme Skalierung am höchsten und die effektive Skalierung am kleinsten. Selbst für letztere Skalierung ist dieser dennoch erheblich größer als bei der Referenzlösung. Das Säulendiagramm in Abbildung 7.5 verdeutlicht nochmals den Unterschied des maximalen Fehlers zwischen der exakten und der abgeschätzten Lösung. Wie stark dieser Fehler sich auf die Antwort in einem numerischen Beispiel auswirkt, wird später untersucht. Mit den größeren Skalierungsfaktoren aus

³ Die Eigenfrequenz 24 bezieht sich meist auf die von den inkompatiblen Freiheitsgraden nicht beeinflusste Eigenform für volumetrische Ausdehnung und wird daher nicht für die Messung der Genauigkeit genutzt. So gilt sowohl für die kleine Skalierung in Abbildung 7.1a $\omega_{24}^{\text{co}} \equiv \omega_{24}^{\text{eff}} \equiv \omega_{36}^{\text{tot}}$ als auch für die große Skalierung in Abbildung 7.1b $\omega_{24}^{\text{co}} \equiv \omega_{24}^{\text{eff}} \equiv \omega_{42}^{\text{tot}}$.

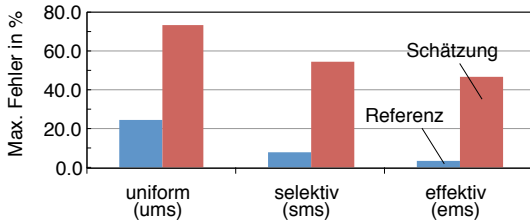


Abbildung 7.5: Maximaler Fehler zwischen den Eigenfrequenzen des Ein-Element-Würfels aus Abschn. 7.1.3 für $\nu = 0.3$. Die Daten stammen aus Tab. 7.2.

der Schätzung wird jedoch die maximale Eigenfrequenz so klein, dass mit jeder der Skalierungen $r^{\Delta t} = 1$ gilt, womit die Effizienz aller Verfahren gleich „gut“ ist. Zusammengefasst ist zu bemerken, dass die Gerschgorin-Kreise zu sehr konservativen Abschätzungen der Skalierung führen. Neben den Ungenauigkeiten ist ein weiterer Nachteil der numerische Aufwand zur Berechnung der Abschätzung. Insbesondere die Berechnung der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}^{\text{im|co}}$, die die inkompatiblen mit den kompatiblen Freiheitsgraden verknüpft, ist aufwendig, da es die größte der benötigten Matrizen ist. Im Folgenden wird daher nach einer effizienteren Variante für eine Schätzung gesucht, die zum einen weniger aufwendig zu berechnen ist und zum anderen eine weniger konservative Abschätzung liefert.

7.3 Vereinfachte Berechnung der Skalierung

7.3.1 Uniforme, selektive und effektive Skalierung

Generell ist es ein deutlicher Mehraufwand die Steifigkeitsmatrizen, die die inkompatiblen und kompatiblen Freiheitsgrade miteinander verknüpfen, aufzustellen. Um zu vermeiden, dass für die uniforme Massenskalierung aus Gleichung (7.34) die Matrizen $\mathbf{K}^{\text{vol|co}}$ und $\mathbf{K}^{\text{vol|shr}}$ zu berechnen sind, wird angenommen, dass für die Abschätzung die Verwendung der Matrix \mathbf{K}^{vol} alleine genügt. Die vereinfachte Abschätzung ist dann gegeben durch

$$f^{\text{ums}} = f^{\text{vol}*} \geq \frac{1}{4} (\Delta t^{\text{co}})^2 \cdot \max_i \left\{ \frac{k_i^{\text{vol}}}{m_i^{\text{vol}}} \right\}, \quad i = 1, \dots, n^{\text{vol}}. \quad (7.42)$$

Bei der selektiven Skalierung wird für die vol-Freiheitsgrade der soeben gezeigte Skalierungsfaktor für die uniforme Skalierung verwendet. Die vereinfachte Berechnung von Gleichung (7.37) für die shr-Freiheitsgrade erfolgt analog zu den vol-Freiheitsgraden mit der Annahme, dass die alleinige Nutzung der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}^{shr} genügt

$$f^{\text{shr}} \geq \frac{1}{4} (\Delta t^{\text{co}})^2 \cdot \max_i \left\{ \frac{k_i^{\text{shr}}}{m_i^{\text{shr}}} \right\}, \quad i = 1, \dots, n^{\text{shr}}. \quad (7.43)$$

Für die effektive Skalierung werden die effektiven Steifigkeitsmatrizen benötigt. Für das Beispiel des 1-Element-Würfels aus Abschnitt 7.1.3 sind die in Abbildung 7.4 dargestellten Einträge der Matrix $\mathbf{K}^{\text{shr|vol}}$ ohnehin gleich Null, woraus mit Gleichung (7.26) folgt, dass die effektive Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}^{\text{eff,shr}}$ sich gegenüber \mathbf{K}^{shr} nicht ändert. Damit reduziert sich der Berechnungsaufwand, weshalb in die vereinfachte Abschätzung generell die zusätzliche Annahme einfließt, dass die Berechnung der effektiven Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}^{\text{eff,shr}}$ nicht benötigt wird. Die vereinfachte Abschätzung entspricht somit der Abschätzung aus Gleichung (7.43) und es gilt

$$f^{\text{eff,shr}} \approx f^{\text{shr}} . \quad (7.44)$$

Im Folgenden werden nur noch diese vereinfachten Vorschriften zur Berechnung der Skalierungen verwendet. Sollte eine der konservativeren Skalierungen aus Abschnitt 7.2 genutzt werden, wird ausdrücklich darauf hingewiesen. Die Skalierungen lassen sich kompakt für die Varianten $s = \{\text{vol, shr, eff}\}$ in folgender Form schreiben

$$f^s(\Delta t) \geq \frac{1}{4} \Delta t^2 \cdot \max_i \left\{ \frac{k_i^s}{m_i^s} \right\}, \quad i = 1, \dots, n^s . \quad (7.45)$$

7.3.2 Konservative und nicht konservative Zeitschrittschätzung

In allen bisherigen Abschätzungen wurde als Zielgröße der Zeitschritt Δt^{co} verwendet, der mit einer Eigenwertanalyse exakte bestimmt wurde. Üblicherweise wird aus Effizienzgründen in einer expliziten Simulation keine Eigenwertanalyse durchgeführt, sondern Δt^{co} anhand der maximalen Eigenfrequenz $\omega_{\text{max}}^{\text{co}}$ geschätzt. In diesem Abschnitt werden drei dieser Schätzungen miteinander verglichen und deren Auswirkungen auf die Skalierung untersucht.

Die einfachste Abschätzung ist mit dem Courant-Kriterium aus Gleichung (2.137) möglich. Die Größe des Zeitschritts entspricht der Zeit, die eine Druckwelle, oft auch als p- oder Primärwelle bezeichnet, für das Durchlaufen des Elements an der kürzesten Seite benötigt. Für die Länge der kürzesten Seite wird üblicherweise eine effektive Länge l^{cfl} bestimmt, deren Index *cfl* die Abkürzung der Autoren Courant, Friedrichs und Lewy [39] angibt. Mit der Geschwindigkeit der p-Welle, beschrieben mit den beiden Lamé-Konstanten⁴ λ und μ ,

$$c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (7.46)$$

und der Länge l^{cfl} ergibt sich die Größe des Zeitschritts und mit Gleichung (7.1) auch die maximale Frequenz

$$\Delta t^{\text{cfl}} = \frac{l^{\text{cfl}}}{c}, \quad \omega_{\text{max}}^{\text{cfl}} \leq \frac{2c}{l^{\text{cfl}}} . \quad (7.47)$$

⁴ Mit Elastizitätsmodul und Poissonzahl gilt $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ und $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Bei Flanagan und Belytschko [52] wird eine detailliertere Betrachtung der Elementmatrizen durchgeführt, was für einen Quader zu folgender Abschätzung führt

$$\left(\omega_{\max}^{\text{flan}}\right)^2 = \frac{4}{\rho} \left(\lambda \left(\frac{1}{s_1^2} + \frac{1}{s_2^2} + \frac{1}{s_3^2} \right) + \frac{2\mu}{s_1^2} \right). \quad (7.48)$$

Darin gilt für ungleiche Seitenlängen des Quaders die Sortierung $s_1 \leq s_2 \leq s_3$. Im gleichen Beitrag wird zudem eine vereinfachte Variante vorgeschlagen

$$\left(\omega_{\max}^{\text{simp}}\right)^2 = \frac{4(\lambda + 2\mu)}{\rho} \left(\frac{1}{s_1^2} + \frac{1}{s_2^2} + \frac{1}{s_3^2} \right). \quad (7.49)$$

Für das hier betrachtete Beispiel des Würfels der Kantenlänge $s_1 = s_2 = s_3 = s$ ergibt sich eine einfache Größenabstufung der Werte

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\max}^{\text{cfl}} &= \frac{2}{s} \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \\ \omega_{\max}^{\text{flan}} &= \frac{2}{s} \sqrt{\frac{3\lambda + 2\mu}{\rho}} \\ \omega_{\max}^{\text{simp}} &= \frac{2}{s} \sqrt{\frac{3\lambda + 6\mu}{\rho}} \end{aligned} \right\} \rightarrow \omega_{\max}^{\text{cfl}} \leq \omega_{\max}^{\text{flan}} \leq \omega_{\max}^{\text{simp}}. \quad (7.50)$$

Daraus folgt mit der Stabilitätsbedingung (7.1), dass der cfl-Zeitschritt am größten ist.

Das Diagramm in Abbildung 7.6 zeigt die normierten Werte bezogen auf den exakten Wert Δt^{co} , der mit der Berechnung der Eigenfrequenzen über eine Eigenwertanalyse bestimmt wird. Daraus geht hervor, dass der cfl-Zeitschritt für $\nu = 0$ mit dem exakten Wert übereinstimmt, aber für größere Poissonzahlen nicht mehr konservativ ist, was mit den Beobachtungen von Flanagan und Belytschko [52] übereinstimmt. Der cfl-Zeitschritt wird trotzdem sehr erfolgreich in Praxis-Simulationen eingesetzt, allerdings wird er dafür um einem heuristischen verkleinert.

Es ist dabei zu beachten, dass die maximale Eigenfrequenz eines Elements selbst nur eine obere Schranke, siehe Gleichung (7.2), für die maximale Eigenfrequenz des Gesamtmodells darstellt⁵. Die flan-Berechnung stimmt für den Spezialfall des Würfels für alle Poissonzahlen mit dem genauen Wert überein und die vereinfachte simp-Berechnung liefert einen konservativen Wert, der analog zur cfl-Abschätzung für zunehmende Poissonzahlen zwar ansteigt, aber im Gegensatz zum cfl-Zeitschritt die exakte Lösung nicht überschreitet und damit in jedem Fall auf der sicheren Seite bleibt.

⁵ Der kritische Wert wird durch einen Sicherheitsfaktor um üblicherweise 10% abgemindert. Für hochdynamische Beanspruchungen findet zudem eine weitere Abminderung durch die Verwendung der *Bulk-Viscosity* statt, siehe Beschreibung in Abschnitt 2.3.3

Abbildung 7.6: Vergleich der auf Δt^{co} normierten Zeitschrittsschätzung mit Eigenfrequenzen $\omega_{\text{max}}^{\text{cfl}}$, $\omega_{\text{max}}^{\text{flan}}$ und $\omega_{\text{max}}^{\text{simp}}$ für den Ein-Element-Würfel aus Abschn. 7.1.3.

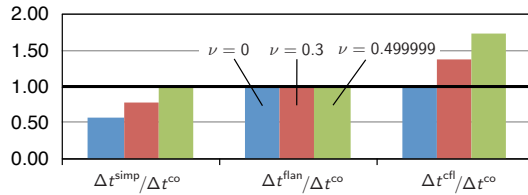


Tabelle 7.3: (a) Skalierungsfaktoren f^{vol} und f^{shr} , s. Abschn. 7.3, (b) maximaler Fehler e_{max} zwischen Eigenfrequenzen sowie (c) Reduktion $r^{\Delta t}$ des Originalzeitschritts für (Spalte 1) ums-, sms- und ems-Skalierungsstrategie kombiniert mit (Spalte 2) Referenz (Δt^{co}) und Schätzungen (Δt^{simp} , Δt^{flan} und Δt^{cfl}) des Zeitschritts. Betrachtetes Beispiel: 1-Element-Würfel aus Abschn. 7.1.3 mit dem Alv18-Element, s. Tab. 6.1, bei Variation der Skalierungsstrategie, s. Abschn. 7.1.6.

		$\nu = 0.3$				$\nu = 0.499999$				
		f^{vol}	f^{shr}	e_{max} in % ^a	$r^{\Delta t}$	f^{vol}	f^{shr}	e_{max} in %	$r^{\Delta t}$	
uniform (ums)	Referenz	Δt^{co}	0.25	—	24.8	1.00	0.18	—	26.9	1.00
	Schätzung	Δt^{simp}	0.14	—	13.3	0.77	0.14	—	21.2	0.90
		Δt^{flan}	0.22	—	22.6	0.96	0.14	—	21.2	0.90
		Δt^{cfl}	0.42	—	38.1	1.00	0.42	—	48.1	1.00
selektiv (sms)	Referenz	Δt^{co}	0.25	0.06	7.6	0.99	0.18	$2.3 \cdot 10^{-7}$	11.8	1.00
	Schätzung	Δt^{simp}	0.14	0.03	4.2	0.77	0.14	$2.3 \cdot 10^{-7}$	9.5	0.90
		Δt^{flan}	0.22	0.05	7.0	0.95	0.14	$2.3 \cdot 10^{-7}$	9.5	0.90
		Δt^{cfl}	0.42	0.10	13.4	1.00	0.42	$7.0 \cdot 10^{-7}$	22.5	1.00
effektiv (ems)	Referenz	Δt^{co}	—	0.06	3.8	1.00	—	$2.3 \cdot 10^{-7}$	<0.001	1.00
	Schätzung	Δt^{simp}	—	0.03	2.1	0.78	—	$2.3 \cdot 10^{-7}$	<0.001	1.00
		Δt^{flan}	—	0.05	3.7	0.98	—	$2.3 \cdot 10^{-7}$	<0.001	1.00
		Δt^{cfl}	—	0.10	7.9	1.00	—	$7.0 \cdot 10^{-7}$	<0.001	1.00

^a Grafische Darstellung von e_{max} und $r^{\Delta t}$ für $\nu = 0.3$ mit $\Delta t^{\text{flan}} \rightarrow$ Säulendiagramm in Abb. 7.7.

7.3.3 Bewertung der vereinfachten Schätzung

Im Gegensatz zur Bewertung der konservativen Abschätzung in Abschnitt 7.2.3 wird hier zusätzlich die für die Berechnung der Skalierung verwendete Zeitschrittgröße variiert. Danach soll beurteilt werden, ob eine nach Abschnitt 7.3.2 gewählte Zeitschrittgröße auch zur Bestimmung der Skalierung verwendet werden kann.

Tabelle 7.3 zeigt eine Übersicht für kompressibles und nahezu inkompressibles Materialverhalten des 1-Element-Würfels aus Abschnitt 7.1.3. Der nahezu inkompressible Fall weicht, verglichen mit dem kompressiblen Fall, nicht besonders stark von den mit der exakten Zeitschrittgröße ermittelten Ergebnissen ab. Auch der Fehler für die ems-Strategie ist dann sehr klein, da wie in den vorherigen Untersuchungen (siehe Tabelle 7.2) die Eigenfrequenz zur Einhaltung von $r^{\Delta t} \leq 1.0$ so groß ist, dass für die Schubterme auch sehr kleine Skalierungen möglich sind.

Im Vergleich zur exakt berechneten Referenz, zeigt sich, dass die Skalierung sehr stark von der gewählten Zeitschrittgröße abhängig ist. Für die konservative Schätzung

mit Δt^{simp} ergeben sich stets zu kleine Skalierungen, für die genauere Abschätzung mit Δt^{flan} wird die Referenzskalierung immer minimal unterschritten und für die eher großzügige Abschätzung Δt^{cfl} ergibt sich eine zu große Skalierung. Dieses Verhalten kann bereits aus der in Abbildung 7.6 sichtbaren Tendenz, dass der Zeitschritt Δt^{simp} eher zu klein und Δt^{cfl} eher zu groß ist, abgeleitet werden.

Für die unterschiedlichen Schätzungen gilt:

- Der **konservative Zeitschritt** Δt^{simp} reduziert mit der zu kleinen Skalierung erfreulicherweise zwar den Fehler, wirkt sich aber negativ auf die Zeitschrittgröße aus. Die Begründung ist einfach anzugeben. Die zu großen Eigenfrequenzen infolge inkompatibler Freiheitsgrade sollen durch Skalierung der zugehörigen inkompatiblen Massen auf eine kleinere Ziel-Eigenfrequenz reduziert werden. Diese Ziel-Eigenfrequenz wird aber größer, wenn sie mit der meist zu konservativen (also zu kleinen) Zeitschrittgröße Δt^{simp} berechnet wird, siehe zum Beispiel Gleichung (7.1). Somit ist bereits eine kleinere Skalierung der inkompatiblen Massen ausreichend, damit die Eigenfrequenzen infolge der inkompatiblen Freiheitsgrade kleiner oder gleich dieser Ziel-Eigenfrequenz sind. Das bedeutet, dass die Skalierung einer inkompatiblen Masse auf Basis des Zeitschritts Δt^{simp} kleiner als für den etwas größeren Zeitschritt Δt^{tot} sein kann. Für die uniforme Skalierung im kompressiblen Fall hat dieser kleinere Wert zur Folge, dass nur 77 % des exakten Zeitschritts möglich sind. Das ist deutlich weniger als die üblicherweise angesetzten 90 % und daher nicht mehr akzeptabel.
- Für den **genauer geschätzten Zeitschritt** Δt^{flan} ergibt sich ein günstigeres Bild. Mit der resultierenden Skalierung wird zwar die exakte Lösung unterschritten, dafür können aber mehr als 90 % des exakten Zeitschrittgröße genutzt werden. Für die effektive Skalierung, die bezüglich des Fehlers positiv abschneidet, können sogar 98 % des Zeitschritts verwendet werden.
- Mit dem **großzügigen Zeitschritt** Δt^{cfl} kann zwar für alle Skalierungsstrategien die ursprüngliche Zeitschrittgröße genutzt werden, allerdings kompensiert dieser Vorteil nicht die sehr großen maximalen Fehler in den Eigenfrequenzen.

Daraus wird geschlossen, dass die Abschätzung Δt^{flan} für eine praktische Implementierung gewählt werden sollte, da diese zu einem minimalen Fehler bei gleichzeitig minimaler Absenkung der Zeitschrittgröße führt.

Abbildung 7.7 stellt den Fehler der uniformen, selektiven und effektiven Skalierung für den kompressiblen Fall dar. Die dafür verwendeten Daten werden ausschließlich mit der vorgeschlagenen Abschätzung durch Δt^{flan} ermittelt.

Eine Reduktion der Zeitschrittgröße liegt für alle Elemente deutlich unterhalb von 10 %. Den einzigen Ausreißer stellt das Element Wil12ts dar, für das die Zeitschrittgröße mit uniformer und selektiver Skalierung um 17 %, für die selektive Skalierung aber nur um 3 % reduziert werden muss. Bei diesem Element muss im inkompressiblen Fall die Zeitschrittgröße für die uniforme und selektive Skalierung um 15 %, für die effektive Skalierung aber nicht reduziert werden. Für das Element Wil12ts kann daher

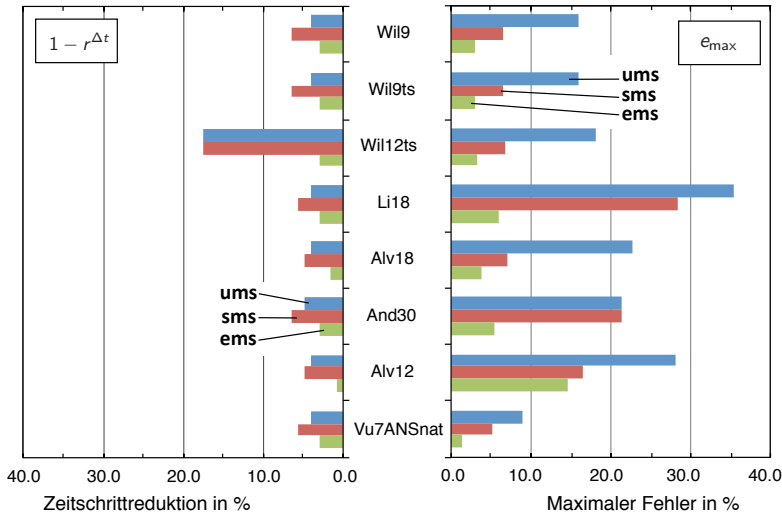


Abbildung 7.7: (Links) Zeitschrittreduktion $1 - r^{\Delta t}$ (0 % = Originalzeitschritt, 10 % = 90 % davon usw.), (rechts) maximaler Fehler in Eigenfrequenzen. Vergleich der Elementformulierungen aus Tab. 6.1 für (ums) uniforme, (sms) selektive und (ems) effektive Skalierungsstrategie, s. Abschn. 7.3, mit Δt^{flan} . Erstellt am Beispiel des kompressiblen ($\nu = 0.3$) Ein-Element-Würfels, s. Abschn. 7.1.3.

nur die effektive Skalierung empfohlen werden. Ein Grund für diese relativ starke Zeitschrittreduktion im Vergleich zu den anderen Elementvarianten ist, dass die vol- und shr-Interpolationen sehr stark miteinander verknüpft sind.

Es ist zu beachten, dass sich der dargestellte maximale Fehler nur auf die Abweichung zur Berechnung mit einer Kondensation aller inkompatiblen Freiheitsgrade bezieht. Da es sich dabei nur um den maximalen Fehler von meist einigen wenigen Eigenfrequenzen handelt, ist damit kein Vergleich dazu enthalten, wie wirksam Versteifungseffekte vermieden werden. Diese Diskussion wird mit statischen Beispielen und differenzierter Betrachtung der Versteifungseffekte in Abschnitt 6.3 geführt.

7.4 Berechnungsstrategien für die inkompatiblen Freiheitsgrade

Zur vollständig expliziten und kombinierten expliziten-impliziten Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade stehen die in Abschnitt 7.3 besprochenen Skalierungsvarianten zur Verfügung. Diese werden in der folgenden Liste noch um die vollständig implizite Berechnung ergänzt.

1. Für die **sms**-Strategie werden shr- und vol-Freiheitsgrade mit dem Algorithmus in Abbildung 5.3 explizit berechnet. Mit Gleichung (7.45) werden die Skalierungen f^{vol} und f^{shr} mit dem Zeitschritt Δt^{flan} aus Gleichung (7.48) abgeschätzt.
2. Für die **ems**-Strategie werden die Gleichungen der vol-Freiheitsgrade gemäß dem Algorithmus in Abbildung 5.4 implizit gelöst und die der shr-Freiheitsgrade analog zur sms-Strategie explizit gelöst. Um den Aufwand für die implizite Berechnung zu begrenzen, werden maximal 10 Iterationen zugelassen. Numerische Tests mit dem hier betrachteten Beispiel haben gezeigt, dass mit einer Toleranzgrenze von $n^{\text{vol}} \cdot \sqrt{\epsilon}$ auch mehr als 10 Iterationen erforderlich werden können, obwohl die Zeitschrittgröße für explizite Verfahren bereits sehr klein ist. Dabei ist n^{vol} die Anzahl der vol-Freiheitsgrade und ϵ die Maschinengenauigkeit. Bei den betrachteten Beispielen konnten aber infolge der Begrenzung keine Unterschiede in den Resultaten beobachtet werden.
3. Um das Einsparpotenzial weiter zu erhöhen, wird die **ems1**-Strategie mit maximal *einer* Berechnung der Steifigkeitsmatrix zur Kondensation der vol-Freiheitsgrade untersucht. Ohne zu iterieren, wird einfach der Wert des letzten Zeitschritts als „konvergierte“ Lösung betrachtet und damit die Berechnung fortgeführt.
4. Auf die uniforme Skalierung (ums) wird aufgrund des zu größeren Fehlern tendierenden Verhaltens für die Schuberweiterungen verzichtet. Dagegen wird die **imp**-Strategie genutzt, mit der alle inkompatiblen Freiheitsgrade mit maximal 10 Iterationen implizit berechnet werden.
5. Analog zur ems1-Strategie wird ebenfalls eine entsprechende **imp1**-Strategie mit einem einzigen impliziten Berechnungsschritt ohne Iteration betrachtet.

7.5 Effizienzmessung an einem numerischen Beispiel

7.5.1 Impakt eines Kupferstabs

Die Auswirkungen der inkompatiblen Massenskalierung auf die numerische Genauigkeit und die numerische Effizienz werden anhand des Impakts eines Kupferstabes auf eine starre Wand untersucht. Der transiente Vorgang mit einer hohen Anfangsgeschwindigkeit des Stabes beinhaltet zahlreiche Nichtlinearitäten wie große plastische Deformationen, die auftreten, da die Fließgrenze des betrachteten Materials überschritten wird. Dieses Testbeispiel wurde bereits früh von Taylor [167] für numerische Untersuchungen oder experimentell von Whiffin [182] betrachtet und wird heute in verschiedenen Varianten als numerisches Testbeispiel verwendet. Der in der vorliegenden Arbeit verwendete Aufbau ist in Abbildung 7.8 dargestellt. Der Stab trifft mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 227 m s^{-1} auf eine starre Wand. Der Vorgang, bis der Kupferstab vollständig abgebremst ist, dauert ungefähr $80 \mu\text{s}$, was als Simulationszeit übernommen wird. Im Finite-Elemente-Modell wird der Kupferstab durch Ausnutzung von Symmetrie nur zu einem Viertel vernetzt. Es wird vereinfachend davon

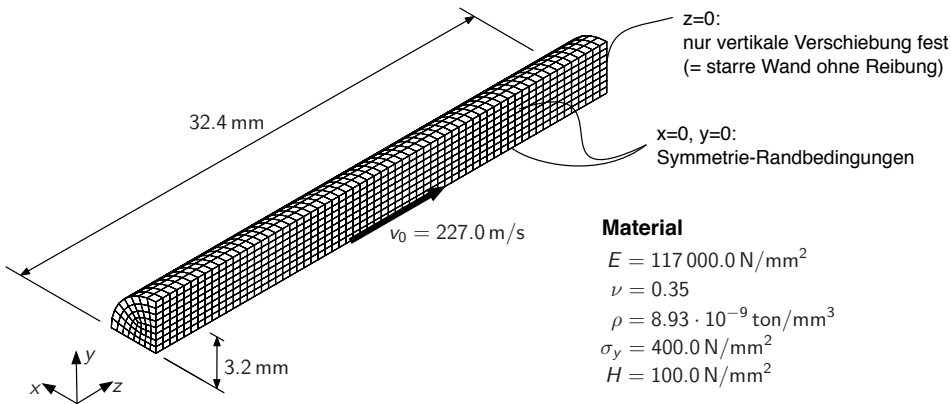


Abbildung 7.8: Finite-Element-Verzierung der Geometrie und Materialparameter für den Impact eines Kupferstabs auf eine starre Wand mit einer Initialgeschwindigkeit v_0 .

ausgegangen, dass keine Reibung auftritt, sodass die starre Wand als Dirichlet-Rand modelliert werden kann. In dieser Form ist das Beispiel auch bei Erhart et al. [49] oder Camacho und Ortiz [33] zu finden. Die gezeigte Netzaufösung mit 3072 Volumenelementen wird als ausreichend betrachtet, um die numerische Effizienz zu testen. Mit diesem Test kann insbesondere auch die Wirksamkeit bewertet werden, mit der die inkompatiblen Freiheitsgrade volumetrische Versteifungseffekte beseitigen.

Damit die numerische Effizienz der verschiedenen Formulierungen bei Verwendung aller fünf Berechnungsstrategien aus Abschnitt 7.4 beurteilt werden kann, wird für die gesamte Simulation die Zeitschrittgröße $\Delta t^{\text{sim}} = 0.004 \mu\text{s}$ verwendet, was für alle inkompatiblen Elemente eine konservative Zeitschrittgröße darstellt. Damit durchläuft jedes Element bei einer Simulationszeit von $80 \mu\text{s}$ genau 20 000 Zeitschritte.

7.5.2 Bewertung der Genauigkeit

Die Bewertung der Genauigkeit am Beispiel des Kupferstab-Impakts erfolgt zum Zeitpunkt $t = 80 \mu\text{s}$ anhand (1) der Endlänge des Kupferstabs, (2) des Pilzradius, der sich an der Auftrittsfläche bildet und (3) der maximalen äquivalenten plastischen Verzerrung. Diese Parameter sind in der Deformationssequenz in Abbildung 7.9 zum Zeitpunkt $t = 80 \mu\text{s}$ dargestellt. Zur deutlicheren Darstellung der maximalen äquivalenten plastischen Verzerrung, wird zusätzlich das Finite-Elemente-Modell ohne Elementgitter an der Unterseite des Viertelzylinders gespiegelt.

Tabelle 7.4 enthält als Ergebnisgrößen die Endlänge, den Pilzradius und die maximale äquivalente plastische Verzerrung der verschiedenen Elementformulierungen. Das Verschiebungselement Disp zeigt erwartungsgemäß ein deutlich steiferes Verhalten als alle weiteren betrachteten Elementformulierungen. Das B-Bar-Element korreliert sehr gut mit den Ergebnissen der unter dem Begriff *im-Elemente* zusammengefassten

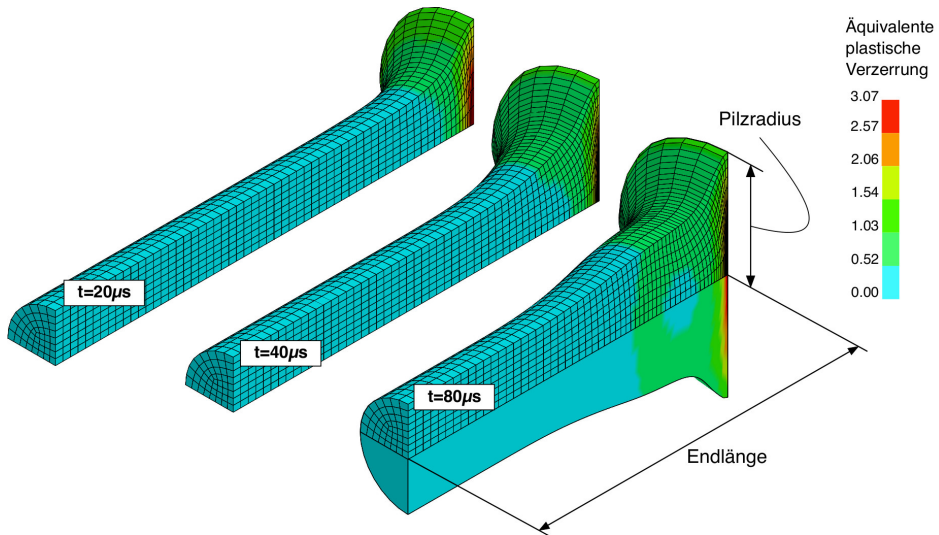


Abbildung 7.9: Kupferstab-Impaktvorgang und Darstellung der Ergebnisgrößen zum Vergleich der verschiedenen Elemente.

Formulierungen Wil9, Wil9ts, Wil12ts, Alv18, Li18 und And30, deren Ergebnisse sich für alle fünf zur Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade vorgeschlagenen Berechnungsstrategien aus Abschnitt 7.4 maximal um 1 % voneinander unterscheiden. Daher wird auf eine große Tabelle oder ein Diagramm mit einer Aneinanderreihung nahezu identischer Ergebnisse der genannten sechs im-Elementformulierungen in Kombination mit den fünf Strategien verzichtet. Es gibt lediglich zwei Fälle mit kleineren und einen Fall mit größeren Ausreißern, die im Folgenden beschrieben werden.

Größere Ausreißer und Anpassung der Skalierung

Die größeren Ausreißer gehen vom Alv18-Element aus, das in Kombination mit der sms-Strategie die Endlänge um circa 3 %, den Pilzradius um circa 18 % und die maximale äquivalente plastische Verzerrung um circa 57 % unterschreitet. Die Ursache ist, dass bei diesem Element die Skalierungsfaktoren einiger inkompatibler Freiheitsgrade unterschätzt wurden, sodass deren Zeitintegration instabil war. Im Gegensatz zu den anderen im-Elementen enthält die Alv18-Formulierung viele quadratische Terme in der Interpolationsmatrix der inkompatiblen Verzerrungen, was sowohl zu einer stärkeren Kopplung zwischen den inkompatiblen als auch zwischen den inkompatiblen und den kompatiblen Freiheitsgraden führt. Somit lässt sich die unterschätzte Skalierung damit erklären, dass diese Kopplungen bei der vereinfachten Berechnung der Ska-

Tabelle 7.4: Ergebnisgrößen (Endlänge, Pilzradius und max. äquivalente plastische Verzerrung ε_{\max}^p), s. Kupferstab-Impakt in Abb. 7.9. Vergleich der im-Elemente Wil9, Wil9ts, Wil12ts, Alv18, Li18 und And30, s. Tab. 6.1, mit Werten aus der Fachliteratur, darunter auch achsensymmetrische Elemente u. a. mit reduzierter Integration.

	Endlänge in mm	Pilzradius in mm	ε_{\max}^p
Disp	20.80	5.7	1.59
B-Bar	21.46	7.17	3.1
im-Elemente	21.43	7.14	3.07
Erhart et al. [49] ^a	21.40 – 21.45	7.03 – 7.20	1.98 – 2.99
Kamoulakos [75]	21.47 – 21.66	7.02 – 7.13	2.47 – 3.24
Zhu und Cescotto [193]	21.26 – 21.49	6.89 – 7.18	2.75 – 3.03
Camacho und Ortiz [33] ^a	21.42 – 21.44	7.21 – 7.24	2.97 – 3.25
Liu et al. [106] ^b	21.42 – 21.53	6.87 – 7.15	–

^a Verwendung adaptiver Neuvernetzung.

^b Verwendung einer beliebig gekoppelten Lagrange- und Euler-Formulierung (*Arbitrary-Lagrangian-Eulerian-* oder kurz ALE-Methode).

lierungsfaktoren vernachlässigt werden, siehe Abschnitt 7.3, da eine rechtwinklige Elementgeometrie für eine schnelle Berechnung der Skalierung angenommen wird.

Da die Skalierungsfaktoren der inkompatiblen Massen direkt von der Zeitschrittgröße abhängig sind, siehe Gleichung (7.45), ist deren Vergrößerung durch die Erhöhung von Δt^{flan} steuerbar. Um die notwendige Größe der Skalierungsfaktoren nicht zu unterschreiten, wird daher der Zeitschritt Δt^{flan} für die Schätzung des Skalierungsfaktors um den Faktor 10 erhöht. Der Faktor wird vereinfachend für die shr- und vol-Freiheitsgrade genutzt. Eine Wiederholung der Berechnung mit dieser Modifikation führt auf eine sehr gute Übereinstimmung der Ergebnisse für die drei betrachteten Ergebnisparameter mit einer Abweichung von weniger als 1 % im Vergleich zu den in Tabelle 7.4 angegebenen Werten. Da – wie bereits erwähnt – einige Vereinfachungen bei der Berechnung der Skalierungsfaktoren gemacht werden, siehe Abschnitt 7.3, ist die Einführung einer zusätzlichen Erhöhung der Skalierung ein sinnvoller Schritt.

Kleinere Ausreißer

Bei den beiden gemischten ems- und ems1-Berechnungsstrategien ergeben sich für das Wil9ts-Element kleinere Ausreißer, wobei die drei genannten Ergebnisparameter jeweils bei beiden Strategien identisch sind. Der Ausreißer besteht in einer Unterschreitung der maximalen äquivalenten plastischen Verzerrung um 10 %, die Endlänge und der Pilzradius weichen nicht von den Ergebnissen der anderen im-Elemente ab. Diese Ergebnisse ändern sich auch dann nicht, wenn ein größerer Skalierungsfaktor mit dem 10fachen Zeitschritt Δt^{flan} , also so wie bei den größeren Ausreißern, berechnet wird. Zudem stimmen alle drei Ergebnisgrößen für die sms-, imp- und imp1-Strategie mit

den anderen im-Elementen überein. Somit kann davon ausgegangen werden, dass das Wil9ts-Element in Kombination mit der ems- und ems1-Strategie Ungenauigkeiten aufweist und nicht die gleichen Ergebnisse erzielbar sind.

Zusammenfassend betrachtet führen alle Berechnungsstrategien, abgesehen von den angegebenen Ausnahmen, zu Ergebnissen, die sehr gut mit den Informationen aus der Fachliteratur übereinstimmen. Die Skalierungsfaktoren der inkompatiblen Massen werden bei Bedarf vergrößert, wie im Fall der sms-Strategie für das Alv18-Element, um die Vereinfachungen bei der Berechnung in Abschnitt 7.3 auszugleichen. Eine solche Vergrößerung wird über die Zeitschrittgröße gesteuert und bei ihrer Anwendung in weiteren Untersuchungen angekündigt.

7.5.3 Bewertung der numerischen Effizienz

Am Beispiel des Kupferstab-Impakts wird die numerische Effizienz der verwendeten Elementformulierungen bei Variation aller fünf Berechnungsstrategien aus Abschnitt 7.4 bewertet. Das Bewertungsmaß ist die für eine Berechnung benötigte CPU-Zeit. Das ohne inkompatible Freiheitsgrade formulierte B-Bar-Element wird als Bezugsgröße genutzt. Es ist zu beachten, dass durch die Bewertung der CPU-Zeiten am betrachteten Beispiel die numerische Effizienz der Berechnungsstrategien und der jeweiligen Elementformulierungen nur abgeschätzt werden kann. Dennoch wird mit diesem Vorgehen ein guter Eindruck eventueller Einsparpotenziale gewonnen. Die Ergebnisse werden für die sms-, ems- und imp-Strategien grafisch in Abbildung 7.10 einander gegenübergestellt, während Tabelle 7.5 zusätzlich die Ergebnisse der ems1- und imp1-Strategien enthält, die für eine übersichtlichere Darstellung in Abbildung 7.10 ausgelassen wurden. Es wird erwartet, dass der numerische Aufwand für eine zunehmende Anzahl inkompatibler Freiheitsgrade abhängig von der Berechnungsstrategie ansteigt.

Tabelle 7.5: Normierte CPU-Zeiten aller Berechnungsstrategien auf Rechenzeit des B-Bar-Elements am Beispiel des Kupferstab-Impakts, s. Abschn. 7.5.1. Anzahl und Typ der inkompatiblen Freiheitsgrade sind unterhalb der Elementbezeichnung in der Form $n_{\text{vol}} + n_{\text{vol|shr}}/n_{\text{shr}}$ gegeben; Vor dem Schrägstrich steht die Anzahl zu kondensierender Freiheitsgrade in den ems1- und ems-Strategien. In den imp1- und imp-Strategien Kondensation aller inkompatiblen Freiheitsgrade.

Berechnungsstrategie		Wil9	Wil9ts	Wil12ts	Alv18	Li18	And30
siehe Abschnitt 7.4		3/6	3/6	3+3/6	6/12	6+3/9	12/18
sms ^a	vol- u. shr-FHGe explizit	1.01	1.06	1.09	1.62	1.38	1.83
ems1	vol-FHGe kondensiert, shr-FHGe explizit	1.15	1.21	1.38	2.36	2.48	3.22
imp1	vol- u. shr-FHGe kondensiert	1.24	1.28	1.61	3.75	3.89	7.18
ems ^a	vol-FHGe kondensiert, shr-FHGe explizit	3.36	3.69	4.40	7.70	11.04	13.58
imp ^a	vol- u. shr-FHGe kondensiert	5.07	5.06	6.85	17.84	19.70	41.74

^a Grafische Darstellung für die Berechnungsstrategien sms, ems und imp → Abb. 7.10

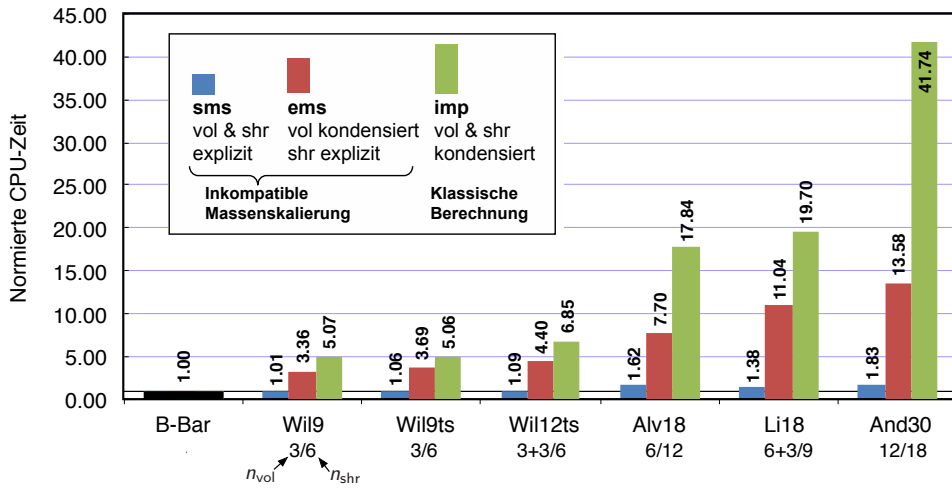


Abbildung 7.10: Normierte CPU-Zeiten der sms-, ems- und imp-Berechnungsstrategien aus Abschn. 7.4. Normierung auf Rechenzeit des B-Bar-Elements, alle am Beispiel des Kupferstab-Impakts, s. Abschn. 7.5.1. Anzahl und Typ der inkompatiblen Freiheitsgrade sind unterhalb der Elementbezeichnung in der Form $n_{vol} + n_{vol|shr} / n_{shr}$ gegeben; Vor dem Schrägstrich steht die Anzahl zu kondensierender Freiheitsgrade in den ems1- und ems-Strategien. In den imp1- und imp-Strategien werden alle inkompatiblen Freiheitsgrade kondensiert.

imp- und imp1-Strategie – Implizite Berechnung aller im-FHGe

Für die imp-Strategie wächst der Aufwand schnell und führt für das And30-Element zu einem mehr als 40fachen Aufwand gemessen an der Referenz-Rechenzeit. Mit der Ein-Schritt-Berechnung der imp1-Strategie kann der Aufwand auf den circa 7fachen Aufwand – eine immer noch deutlich erhöhte Rechenzeit – reduziert werden.

Trotz gleicher Anzahl an inkompatiblen Freiheitsgraden ist das Alv18-Element etwas effizienter als das Li18-Element. Die Erklärung für diesen Unterschied liefert ein Blick auf die Interpolationsmatrizen in den Gleichungen (3.60) und (3.62). Diese zeigen, dass das Li18-Element mit 33 Einträgen gegenüber dem Alv18-Element mit 24 Einträgen dichter besetzt ist, was somit zu mehr Elementoperationen und einem entsprechend erhöhten numerischen Aufwand führt. Mit der imp1-Strategie wird für die Elemente Li18 und Alv18 die Rechenzeit gegenüber dem And30-Element ungefähr halbiert. Die Elemente Wil12ts, Wil9ts und Wil9 werden mit abnehmender Anzahl an inkompatiblen Freiheitsgraden entsprechend effizienter. Für die Elemente Wil9 und Wil9ts ist der Aufwand nahezu identisch und steigt mit der imp1-Strategie nur um moderate 24 % an, während mit der imp-Strategie der etwa 5fache Aufwand entsteht. Es ist hier anzumerken, dass mit der imp-Berechnung die festgesetzte Anzahl von 10 erlaubten Iterationen nur selten erreicht oder bei einer unbeschränkten Anzahl an Iterationen nur selten überschritten wird.

ems- und ems1-Strategie – Implizite Berechnung der vol- und vol|shr-FHGe

Der Aufwand für die ems-Strategie fällt insbesondere für das And30-Element mit circa einem Drittel gegenüber der imp-Strategie bereits deutlich kleiner aus. Bei der ems-Strategie ist zu beachten, dass nur die vol-Freiheitsgrade kondensiert werden, die allerdings den Hauptanteil des numerischen Aufwands ausmachen. Deren Anzahl n_{vol} ist in Abbildung 7.10 unter den Elementbezeichnungen angegeben. Für das Wil12ts- und Li18-Element steht der zweite Summand für die Anzahl gemischter vol|shr-Freiheitsgrade, in deren Interpolationsmatrix sowohl Einträge in den Normal- als auch Schubverzerrungen enthalten sind. So sinkt für die Elemente And30, Li18 und Alv18 der Aufwand mit jeweils 12, 9 (6+3) und 6 zu kondensierenden Freiheitsgraden erwartungsgemäß. Das Verhältnis zwischen dem Aufwand der Elemente bleibt beim Übergang zur Ein-Schritt-Berechnung mit der ems1-Strategie ähnlich.

Das Wil12ts-Element ist mit 6 (3+3) zu kondensierenden inkompatiblen Freiheitsgraden mit 40 % weniger Aufwand deutlich effizienter als das Alv18-Element, obwohl dieses die gleiche Anzahl von 6 zu kondensierenden inkompatiblen Freiheitsgraden aufweist. Der Grund ist die allgemein deutlich effizientere Formulierung von inkompatiblen Verschiebungs- gegenüber Verzerrungsinterpolationen. Dazu wird zunächst die B-Matrix eines Standard-Verschiebungselements betrachtet, die üblicherweise dünn besetzt ist. Der Grund ist, dass die benötigten Ableitungen der Ansatzfunktionen nach den globalen Koordinaten einfach mit einer Vektortransformation berechnet werden können, siehe Gleichung (6.38). Die B-Matrix bleibt auch dann dünn besetzt, wenn die in Kapitel 6 vorgeschlagene Taylorreihenentwicklung der Ableitung der Ansatzfunktionen verwendet wird. Das ist auf die inkompatible Verschiebungsinterpolation mit den drei Wilson-Funktionen und auch mit der vierten Funktion nach Wriggers und Korelc [191] aus Abschnitt 6.1.6 übertragbar. Die Ableitungen nach den globalen Koordinaten können ebenfalls mit einer Vektortransformation berechnet werden und die B-Matrix bleibt wie in Gleichung (6.68) dünn besetzt. Im Gegensatz dazu wird für eine inkompatible Verzerrungsinterpolation wie beim Alv18-Element eine vollständige Tensortransformation benötigt, um die inkompatiblen Verzerrungen auf die globalen Koordinaten zu beziehen, siehe Abschnitt 5.6.2 und auch Abschnitt 5.6.3. Infolge dieser bereits aufwendigeren Transformation entsteht zudem eine voll besetzte B-Matrix für die inkompatiblen Freiheitsgrade, was zu mehr Operationen und damit einem größeren Aufwand führt. Dieser Unterschied zwischen der inkompatiblen Verschiebungs- und Verzerrungsinterpolation wird in dieser Form auch bereits von Korelc und Wriggers [89] beschrieben.

Die Elemente Wil9ts und Wil9 sind wie erwartet weniger aufwendig.

sms-Strategie – Explizite Berechnung aller im-FHGe

Die mit Abstand effizienteste Berechnung erfolgt mit der sms-Strategie. Hier wird beim And30-Element gegenüber der imp-Strategie mehr als 95 % der CPU-Zeit eingespart.

Sogar für das Wil9ts-Element, das den geringsten Aufwand bei Verwendung der imp-Strategie aufweist, werden noch 80 % der CPU-Zeit eingespart.

Für die Elemente Alv18 und Li18 dreht sich das Verhältnis des numerischen Aufwands für die sms-Strategie zugunsten des Li18-Elements um. Ein möglicher Grund liegt in der für die sms-Strategie vollständig expliziten Berechnung aller inkompatiblen Freiheitsgrade. Damit entfällt nämlich für die stark gekoppelten inkompatiblen Freiheitsgrade des Li18-Elements die aufwendigere Kondensation (mit dichter besetzten Elementmatrizen) gegenüber den im Vergleich dazu weniger stark gekoppelten inkompatiblen Freiheitsgrade des Alv18-Elements, siehe die Gleichungen (3.60) und (3.62). Das heißt die Operationen infolge der deutlich größeren Anzahl an quadratischen Ausdrücken in der Verzerrungsinterpolation des Alv18-Elements sind dann entscheidend.

Die Elemente Wil12ts, Wil9ts und Wil9 weisen gegenüber dem B-Bar-Element nur einen geringen Mehraufwand von bis zu 9 % auf, der beim Wil9-Element mit nur 1 % kaum merkbar ist.

Abschließend wird nochmals darauf hingewiesen, dass die hier beschriebenen Zahlen nur eine spezielle Betrachtung für dieses Beispiel darstellen. Da die Versteifungen bereits mit der B-Bar-Formulierung zufriedenstellend eliminiert werden kann, wird das Beispiel mit einer noch überschaubaren Anzahl von 3072 Elementen und elasto-plastischem Materialverhalten als geeignet betrachtet, den reinen numerischen Aufwand zu beurteilen.

7.6 Automatisierte Implementierung mit ACEGEN

Die Implementierung mit dem Computeralgebrasystem MATHEMATICA [188] in Kombination mit dem Spezialwerkzeug ACEGEN [85] ermöglicht die symbolische Programmierung von Finite-Element-Größen in einer an die Befehlssyntax von MATHEMATICA angelehnten symbolischen Skriptsprache. Zum Standardumfang von ACEGEN zählen sowohl die automatisierte Berechnung der Ableitungen von Tensoren als auch die automatisierte Generierung von Quelltext in verschiedenen Programmiersprachen wie FORTRAN und C oder der MATLAB-Skriptsprache. Zu den bedeutendsten Merkmalen zählt aber, dass symbolisch eingegebene Gleichungen simultan zur Eingabe vereinfacht und durch automatisiert gewählte Hilfsausdrücke, auch aus früher eingegebenen Gleichungen, ersetzt werden. Die Gleichungen, die durch diesen von Korelc [83] vorgeschlagenen trivial erscheinenden Vorgang optimiert wurden, nehmen nicht unkontrolliert an Umfang zu, was ansonsten beim Standardvorgehen in Computeralgebrasystemen zu sehr großen und ineffizienten bis hin zu nicht verwendbaren Programmen führen kann, siehe Korelc und Wriggers [91]. Für diesen Vorgang, der auch als *automatic expression swell control* bekannt ist, entstehen für kompliziertere Algorithmen enorme Einsparpotenziale hinsichtlich der Größe und der Effizienz des resultierenden Programms. Auf weitere Vorzüge der automatisierten Implementierung wird in Anhang A eingegangen. Speziell für die Implementierung

von Finite-Element-Größen für explizite Zeitintegration sind weitere Details in der Dissertation von Mattern [112] zu finden.

Ein großer Vorteil bei der Verwendung von ACEGEN besteht in der vereinfachten Möglichkeit, eine große Anzahl an Elementvarianten zu implementieren. Diese sind zudem numerisch sehr gut miteinander vergleichbar, da alle Varianten sehr einfach im gleichen Programmierstil implementiert werden können. Dieser Vorteil konnte speziell für den Effizienzvergleich in Abschnitt 7.5 genutzt werden. Für die Untersuchungen in diesem Kapitel wurden die in Abschnitt 7.4 vorgestellten Berechnungsstrategien für die inkompatiblen Freiheitsgrade sowie die betrachteten Elementformulierungen, siehe auch Tabelle 6.1, in einer modifizierten Version von FEAP [168] implementiert. Für die explizite Zeitintegration mit dem zentralen Differenzenverfahren wurde dafür ein eigenes, auf der Arbeit von Mattern [112] basierendes, Makro verwendet. Nach den erfolgreichen Tests mit FEAP wurden die Elemente mit einer bestmöglichen Übereinstimmung der Effizienz, siehe die Betrachtung in Abschnitt 7.5, sowie der Genauigkeit, siehe Abschnitt 6.3, für weitere Untersuchungen in das kommerzielle CAE-Programm LS-DYNA [110] implementiert. Dazu wurde die spezielle Anwenderschnittstelle verwendet, was näher in Anhang A beschrieben ist. Dort ist auch die symbolische Eingabe für ein elastisches Material des B-Bar- und Wil9ts-Elements dargestellt, um einen repräsentativen Einblick in die hier genutzte Programmierung zu geben.

In den folgenden Kapiteln werden zur Berechnung entweder FEAP oder LS-DYNA verwendet, was entsprechend angegeben wird.

8 Robustheit gegenüber Kinematiken

Inkompatibel erweiterte Elementformulierungen sind neben reduzierter Integration längst für künstliche Kinematiken bekannt. Treten diese als *Hourglassing* bekannten Kinematiken auf, sind die Ergebnisse meist nicht weiter verwertbar und die gesamte Simulation muss wiederholt werden. Zuerst werden die von inkompatiblen Freiheitsgraden ausgehenden Kinematiken von denen infolge reduzierter Integration abgegrenzt. Anschließend werden die Details um die Entstehung der Kinematiken betrachtet und zwei Strategien zu deren Vermeidung vorgestellt. Die erste nutzt die inkompatible Masse, um eine inkompatible kinetische Energie – für jedes Element und jeden inkompatiblen Freiheitsgrad – zu berechnen. Damit kann der für die Kinematik verantwortliche inkompatible Freiheitsgrad identifiziert und kontrolliert werden. In einem zweiten Ansatz werden die Kinematiken zunächst analytisch betrachtet. Anschließend wird eine ad-hoc-Modifikation des auf die Momentankonfiguration bezogenen Verschiebungsgradienten vorgeschlagen, die auf Beobachtungen einer kinematik-freien geometrisch linearen Formulierung basieren und gleichzeitig auch die sogenannte Volumenbedingung nach Nagtegaal und Fox [121] erfüllen. Diese wird in verschiedenen numerischen Experimenten, einschließlich einer Prüfung der Objektivität, der klassischen Formulierung gegenübergestellt.

8.1 Von inkompatiblen Moden ausgehende Kinematiken

8.1.1 Abgrenzung zu Kinematiken infolge reduzierter Integration

Für explizite Zeitintegrationsverfahren sind Kinematiken aus trilinearen Volumenelementen mit sogenannter reduzierter Integration bekannt. Das Ziel derartiger Elementformulierungen ist neben der Beseitigung von Versteifungen eine effiziente Simulation, die durch die reduzierte Anzahl an Integrationspunkten – oft wird nur eine Ein-Punkt-Integration verwendet – erreicht wird. Die bekannten Versteifungen einer Verschiebungsformulierung können durch reduzierte Integration vermieden werden, wenn die nicht genaue Auswertung der Finite-Element-Matrizen (durch den Fehler in der numerischen Integration) passend die versteifenden Anteile kompensiert. Zum Vergleich: Bei versteifenden Verschiebungsformulierungen mit „voller“ Integration, bei trilinearen Volumenelementen üblicherweise mit $2 \times 2 \times 2$ Gauß-Integrationspunkten, werden die Finite-Element-Matrizen von geometrisch unverzerrten Elementen exakt und von geometrisch verzerrten Elementen hinreichend genau ausgewertet, siehe

Bathe [12]. In der Konsequenz verschwindet bei reduzierter Integration die Steifigkeit gegenüber Biegedeformationen, deren Form, die ähnlich einer Sanduhr ist, ohne entsprechende äußere Einwirkung von Elementen eingenommen wird. Im englischsprachigen Schrifttum ist der entsprechende Begriff des Stundenglases *Hourglassing* bekannt, häufig wird aber auch von falschen Moden (*spurious modes*) oder Null-Energie-Formen (*zero energy modes*) gesprochen. Diese unerwünschten Sanduhr-Kinematiken werden durch die Hinzunahme einer sogenannten *Hourglass*-Stabilisierung vermieden, siehe Belytschko et al. [15] oder Benson [20]. Um damit das eigentliche Ziel einer effizienteren Simulation nicht zu beeinträchtigen, werden zur Formulierung der Stabilisierung zahlreiche, häufig auch heuristische, Annahmen unter anderem für das Material getroffen. Demzufolge ist eine Qualitätsprüfung der Ergebnisse unerlässlich.

8.1.2 Zur Erkennung der Kinematiken

In Elementen mit inkompatiblen Erweiterungen können ebenfalls Kinematiken auftreten. Nachdem sich diese 1973 zunächst kritisierte Methode durch den Patchtest erfüllende Modifikationen bewährt hatte, und mit der wichtigen Publikation von Simo und Rifai 1990 auch eine belastbare Grundlage erhielt, beobachteten Wriggers und Reese [191] auch für diese Technologie eine Sensitivität für Kinematiken. Dabei ist für große homogene Deformationen, neben dem in den Ergebnissen visuell zu beobachtenden Sanduhrmuster, das Auftreten von Eigenwerten der Elementsteifigkeitsmatrix zu beobachten, die kleiner oder gleich Null sind. Interessanterweise wurde der Effekt zuerst nur für große Deformationen beobachtet und in vielen weiteren Veröffentlichungen bestätigt. Auf die Literaturstellen hierzu wird in Abschnitt 3.3 eingegangen und hier nur für die hier betrachtete Entwicklung wesentliche Arbeiten angesprochen. Trotz vieler Anstrengungen, unter anderem auch mithilfe von Eigenwertuntersuchungen, wurde versucht, eine Reperatur der Kinematiken zu ermöglichen, aber nach Schlussfolgerungen in der Arbeit von Korelc et al. [86]: *“This puts into doubt any further attempts to completely suppress the hourglassing behavior of EAS elements by a technique that is based solely on an analysis of eigenvalues of the element tangent matrix.”* erscheinen alle diese Versuche als nicht allgemein ausreichend.

Sussman und Bathe [163] entwickelten mehr als 20 Jahre nach der Beobachtung der Kinematiken von Wriggers und Reese [191] eine Erklärung bei ausschließlicher Betrachtung von Steifigkeiten. Die Steifigkeit gegenüber Biegedeformationen verschwindet in einem mit inkompatiblen Verschiebungen angereicherten Element, sobald ein kritischer homogener Deformationszustand eintritt. Dieser kritische Wert ist stark vom Seitenverhältnis des Elements abhängig, das heißt er nimmt für schlechtere Seitenverhältnisse ab. Demnach treten die Kinematiken in inkompatibel erweiterten Elementen nur in geometrisch nichtlinearen Formulierungen auf, allerdings auch bei kleinen Deformationen. Nach Sussman und Bathe sind die Kinematiken und die erwünschte Eigenschaft, mit den inkompatiblen Verschiebungen Schubversteifungen zu eliminieren, untrennbar, und somit nicht zu vermeiden.

Sowohl die Beobachtungen von Wriggers und Reese [191] für große Deformationen als die von Sussman und Bathe [163] für kleine Deformationen erfolgen mit einer totalen, klassischen Formulierung inkompatibler Erweiterungen auf der Basis von Steifigkeitsmatrizen oder Eigenwerten davon.

Zu den Veröffentlichungen, in denen keine Sensitivität gegenüber Kinematiken beobachtet wird, gehört die von Crisfield et al. [43], in der eine sehr komplexe mitrotierende Formulierung vorgeschlagen wird, bei der nicht klar ist, ob bevorzugte Eigenschaften der Standardformulierung inkompatibler Erweiterungen, wie die Flexibilität in der Gestaltung der Interpolation der inkompatiblen Freiheitsgrade oder die Generalität bezüglich Materialgesetzen erhalten bleiben. Die Autoren Ibrahimbegović und Kožar [94, 72] verwenden ähnlich zu Crisfield et al. eine Trennung von Rotation und Verschiebung, gehen aber nicht auf die Frage der numerischen Robustheit ein. Nagtegaal und Fox [121] stellen eine separate Bedingung vor, die sie durch eine inkrementelle Formulierung des Deformationsgradienten erfüllen, und damit keine Kinematiken feststellen. Auf diese Bedingung wird ausführlich in Abschnitt 8.4.3 eingegangen. Kasper und Taylor [77] erweitern lediglich volumetrische Terme, in diesem Fall die Diagonale des Deformationsgradienten, mit inkompatiblen Freiheitsgraden und stellen keine Kinematiken fest, was zur Beobachtung von Sussman und Bathe [163] passt, die die Kinematik mit einem inkompatiblen Freiheitsgrad erklären, der mit der Beseitigung von Schubversteifungen korreliert. Die Frage, ob Kinematiken auch von inkompatiblen Freiheitsgraden zur Erweiterung volumetrischer Größen ausgehen können, bleibt dabei noch offen. So lassen auch Kasper und Taylor die Frage nach einer generellen Vermeidung der Kinematiken, sodass wie bei Wilson et al. [186] ursprünglich vorgesehen auch Schubversteifungen mit inkompatiblen Freiheitsgraden beseitigt werden können, offen.

Es existieren weitere Ansätze zur Vermeidung der Kinematiken, die aber nicht als allgemeine Lösungen betrachtet werden können, siehe die Diskussion in Abschnitt 4.2.2.

Neben möglichen Kinematiken ist mit der Technologie inkompatibler Erweiterungen der bereits in Kapitel 7 behandelte zusätzliche Aufwand zur Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade verbunden. Die Kinematiken und der Berechnungsaufwand sind wohl die Gründe, weshalb diese Methode bis auf jüngere Vorgängerarbeiten, siehe Mattern [112] und Mattern et al. [114], kaum Einzug in explizite Verfahren gefunden hat. In den dazu vereinzelt existierenden Veröffentlichungen von Puso [132], Tan und Vu-Quoc [165], Li et al. [99, 101], Pagani et al. [126], und Ahmed und Sluys [2], wird, mit Ausnahme von Puso, weder auf die angesprochenen Probleme der numerischen Effizienz noch auf die der numerischen Robustheit eingegangen. Für eine Diskussion der genannten Veröffentlichungen wird auf Abschnitt 4.1.4 verwiesen.

8.1.3 Strategien zur Kinematik-Vermeidung

Explizite Verfahren weisen im Vergleich mit impliziten Verfahren üblicherweise sehr kleine Zeitschrittweiten auf. Diese Besonderheit hat sich für die Simulation nichtlinearer

Probleme mit Kontakt und Reibung als vorteilhaft erwiesen. Daher ist für die in expliziten Verfahren meist genutzten kompatiblen Elemente mit reduzierter Integration, insbesondere wegen deren Schwächen, eine Erweiterung wünschenswert.

Zur Vermeidung von Kinematiken infolge inkompatibler Freiheitsgrade werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit die beiden folgenden wichtigen Unterschiede zwischen expliziten und impliziten Verfahren untersucht. Diese werden gleichzeitig als Strategien zur Erzielung einer robusten Nutzung von Elementformulierungen mit inkompatiblen Freiheitsgraden verfolgt.

1. Die Verwendung eines expliziten Verfahrens zur Berechnung von sowohl kompatiblen als auch inkompatiblen Freiheitsgraden bietet die Möglichkeit, die zeitliche, in meist sehr kleinen Schritten erfolgende, Evolution dieser Freiheitsgrade vollständig zu kontrollieren. Die Kontrolle der zeitlichen Evolution der inkompatiblen Freiheitsgrade ist einfach durch die Berechnung einer kinetischen Energie quantifizierbar, auf deren Basis, die für die Kinematiken verantwortlichen Freiheitsgrade zur Laufzeit „ausgeschaltet“ werden können.
2. Mit dem Vorschlag einer ad-hoc-Formulierung können die Kinematiken in den untersuchten numerischen Experimenten der vorliegenden Arbeit vermieden werden. Die ad-hoc-Formulierung, die interessanterweise auch die Volumenbedingung nach Nagtegaal und Fox [121] erfüllt, wird der klassischen Formulierung gegenübergestellt, die bei Wriggers und Reese [192] sowie Sussman und Bathe [163] verwendet wird. Zudem wird festgestellt, dass die inkrementelle Formulierung aus Abschnitt 6.4 auch die erwähnte Volumenbedingung erfüllt.

8.2 Einfache Kontrolle der Kinematiken

8.2.1 Vorgehen bei reduzierter Integration

Elementformulierungen mit reduzierter Integration werden häufig durch Addition sogenannter Hourglass-Kräfte oder -Steifigkeiten stabilisiert. Die für die physikalische Antwort maßgeblichen Größen müssen daher aus dem Anteil des Elements resultieren, der an dem verbleibenden Integrationspunkt oder in alternativen Fällen an mehreren Integrationspunkten berechnet wird. Im Umkehrschluss darf die Antwort des Elements also nicht durch die Hourglassstabilisierung dominiert werden. Für letztere sind insbesondere für Simulationen mit nichtlinearen Materialien sinnvolle Annahmen erforderlich, um eine effiziente Berechnung zu gewährleisten. Zur Überprüfung wird die durch die Hourglassstabilisierung produzierte Energie überwacht. Steigt diese Hourglassenergie über einen kritischen – sehr kleinen – Wert im Vergleich zur restlichen Energie des Systems, ist davon auszugehen, dass die Antwort der Simulation überwiegend von den stabilisierenden Anteilen geprägt ist, und damit das physikalische Verhalten nicht korrekt wiedergibt.

8.2.2 Erkennung einer möglichen Kinematik

Die Grundlage für die Erkennung von Kinematiken infolge inkompatibler Erweiterungen liegt in der Evolution der Ergebnisgrößen für die kompatiblen und inkompatiblen Freiheitsgrade. Die Kontrolle erfolgt demnach nicht a priori sondern zur Laufzeit der Simulation. Verglichen werden die inkompatible kinetische Energie T^{im} mit der kompatiblen inneren Energie V^{co} .

Wird eine Struktur deformiert, steigt die innere Energie V^{co} . Treten während der Deformation Versteifungen auf, welche durch die gewählten inkompatiblen Erweiterungen reduziert werden sollen, werden die inkompatiblen Freiheitsgrade aktiviert. Die dabei auftretende inkompatible kinetische Energie spiegelt diese Aktivierung der inkompatiblen Freiheitsgrade. Der Zuwachs der inkompatiblen kinetischen Energie T^{im} muss daher in seiner Evolution über die Zeit dem Zuwachs der kompatiblen inneren Energie V^{co} folgen. Die inkompatiblen Erweiterungen werden zwischen den Elementen inkompatibel, also ohne Verbindung zu Nachbarelementen, formuliert. Somit ist auch die inkompatible kinetische Energie T^{im} je Element separat zu betrachten. Auch die innere Energie eines Elements V^{co} ist direkt ermittelbar und wird in manchen Programmen ohnehin berechnet, um die gesamte innere Energie zu ermitteln. Damit ist eine effiziente Beobachtung der Zuwächse der für eine Beurteilung benötigten Energien einfach möglich.

Als Kriterium für eine sinnvolle, noch immer Versteifungen vermeidende Evolution der inkompatiblen Freiheitsgrade wird zwischen zwei Schritten gefordert, dass folgende Bedingung zwischen den Zeipunkten n und $n + 1$ für das betrachtete Element eingehalten wird

$$\frac{\Delta T^{\text{im}}}{T_n^{\text{im}}} < s^{\text{robust}} \cdot \frac{\Delta V^{\text{co}}}{V_n^{\text{co}}}, \quad 10 \leq s \leq 100. \quad (8.1)$$

Darin werden die Zuwächse der inkompatiblen kinetischen Energie $\Delta T^{\text{im}} = T_{n+1}^{\text{im}} - T_n^{\text{im}}$ und der kompatiblen inneren Energie $\Delta V^{\text{co}} = V_{n+1}^{\text{co}} - V_n^{\text{co}}$ zwischen zwei Zeitschritten genutzt. Diese Zuwächse werden in Kriterium (8.1) auf die Größen T_n^{im} und V_n^{co} des vorhergehenden Zeitschritts bezogen, um das Kriterium unabhängig von den absoluten Zahlen eines Beispiels zu formulieren. Das für den Wert s^{robust} vorgeschlagene Intervall in Kriterium (8.1) gibt an, dass der relative Zuwachs der inkompatiblen kinetischen Energie nicht größer als 1 % bis 10 % des relativen Zuwachses der kompatiblen inneren Energie sein darf. Um überhaupt eine Angabe zu diesem relativen Zuwachs machen zu können, müssen die Werte T_n^{im} und V_n^{co} größer als Null sein. Aus numerischer Sicht ist hier jeweils ein sinnvoller Mindestwert, auf Basis der Maschinengenauigkeit ϵ zu wählen. D. h. bevor Kriterium (8.1) ausgewertet wird, muss das folgende Kriterium überprüft werden

$$\min \left\{ T_n^{\text{im}}, V_n^{\text{co}} \right\} \geq f^{\text{robust}}(\epsilon). \quad (8.2)$$

Die Funktion $f^{\text{robust}}(\epsilon)$ definiert den zu wählenden Mindestwert abhängig von der Maschinengenauigkeit.

8.2.3 Kontrolle der inkompatiblen Freiheitsgrade

Ausschalten der inkompatiblen Freiheitsgrade

Innerhalb der expliziten Berechnung ist es einfach möglich, sobald Kriterium (8.1) eintritt, die Größen der betroffenen inkompatiblen Freiheitsgrades zu manipulieren. Auf Basis der Untersuchungen aus Abschnitt 5.3 und Kapitel 7 ist es einfach möglich, mithilfe einer sehr hohen Skalierung der inkompatiblen Masse einen betroffenen inkompatiblen Freiheitsgrad auszuschalten, was prinzipiell einer selektiven Massenskalierung von Einzelmassen entspricht.

Ein brauchbarer Wert für die Skalierung ist $f^{\text{rob}} = 1/\epsilon$, mit der Maschinengenauigkeit ϵ . Damit ist sichergestellt, dass sich über die übliche hohe Anzahl von Zeitschritten in expliziten Verfahren bei sich nicht wesentlich ändernden Beanspruchungen keine Kinematiken einstellen. Dann ist die betroffene inkompatible Masse sehr groß und der zugehörige Wert für den inkompatiblen Freiheitsgrad sehr klein. Das heißt die resultierende inkompatible kinetische Energie wird bereits für kleine inkompatible Geschwindigkeiten, durch die Multiplikation mit der großen Masse, groß. Eine auf diese Weise berechnete kinetische Energie besitzt keine Aussagekraft mehr, um das Auftreten von Kinematiken beurteilen zu können. Zur Umgehung wird statt der Skalierung mit einer großen Masse, der betroffene Freiheitsgrad durch einfaches Überschreiben mit einer Null ausgeschaltet, womit auch die inkompatible kinetische Energie T^{im} gleich Null ist.

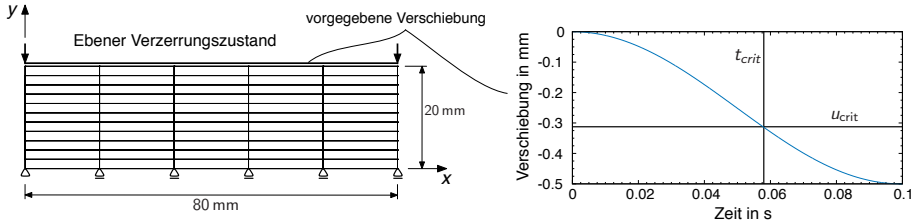
Dämpfung als weitere Möglichkeit

In den Algorithmus der der Zeitintegration der inkompatiblen Freiheitsgrade kann, wie für kompatible Freiheitsgrade auch, eine viskose Dämpfung eingebracht werden. Durch diese Dämpfung, so die Idee, soll der inkompatible Freiheitsgrad von dem eine auftretende Kinematik ausgeht, eine gutmütigeres, also ein die Kinematik hinauszögerndes Verhalten, aufweisen, oder das Auftreten vollständig unterbinden.

Numerische Experimente mit verschiedenen Werten für die viskose Dämpfung haben aber gezeigt, dass dieser Ansatz nicht zur gewünschten Wirkung führt. Der Grund ist, dass die inkompatiblen Parameter ausschließlich infolge einer Aktivität der kompatiblen Größen angesprochen werden. Das heißt um das gewünschte gutmütiger Verhalten bezüglich der Kinematiken zu erhalten, wäre ebenfalls eine Dämpfung der kompatiblen Freiheitsgrade erforderlich.

8.2.4 Kompression eines Blocks mit kleinen Verzerrungen

Anhand eines numerischen Beispiels von Sussman und Bathe [163] wird die erläuterte einfache Kontrolle demonstriert. Das Beispiel besteht aus einem Block, der mit 5×10 Elementen vernetzt ist. Die Geometrie, Randbedingungen und Materialparameter sind in Abbildung 8.1 dargestellt. Der Block wird mit Verschiebungsrandbedingungen

**Materialparameter**

$$E = 1.0 \cdot 10^6 \text{ N/mm}^2 \quad \nu = 0.0, 0.3 \quad \rho = 5.0 \cdot 10^{-9} \text{ ton/mm}^3$$

Abbildung 8.1: (Links) Geometrie und Materialparameter des Elementblocks nach Sussman und Bathe [163] mit den vertikalen Verschiebungsrandbedingungen. (Rechts) Zeitverlauf der Verschiebung mit kritischer Verschiebung u_{crit} , s. Glg. (8.3), und zugehörigem Zeitpunkt t_{crit} .

vertikal komprimiert. Für die explizite Berechnung wird hier eine Kompressionsgeschwindigkeit von 5 mm/s gewählt, die, wie in Abbildung 8.1 gezeigt wird, durch einen sinusförmigen Verlauf der Verschiebung über die Zeit aufgebracht wird um numerische Artefakte zu reduzieren.

Sussman und Bathe [163] sagen in Abhängigkeit des Seitenverhältnisses der Elemente den Deformationszustand vorher, ab dem falsche Moden in Form von *Hourglassing* auftreten. Für die Berechnung dieser kritischen Deformation wird für ein rechtwinkliges Element ohne Querkontraktion die folgende Gleichung genutzt

$$\varepsilon_{crit} = - \left(\frac{H}{L} \right)^2 . \quad (8.3)$$

Darin wird die kritische Verzerrung ε_{crit} mit dem Verhältnis der Höhe H und der Länge L des betrachteten Elements ermittelt. Für das hier gewählte Beispiel ist das Seitenverhältnis der Elemente $1/8$, sodass die kritische Verzerrung den Wert $\varepsilon_{crit} = -1/64$ annimmt. Dieser resultiert in eine kritische Verschiebung von $u_{crit} = \varepsilon_{crit} \cdot 20 \text{ mm} = -0.3125 \text{ mm}$. Die kritische Verschiebung und der zugehörige kritische Zeitpunkt sind in Abbildung 8.1 enthalten. Sussman und Bathe führen eine implizit-statische Analyse mit einer totalen Lagrange-Formulierung durch und verwenden dazu die gleichen inkompatiblen Ansatzfunktionen, die in der vorliegenden Arbeit in der Formulierung des Wil9-Elements verwendet werden. Daher wird bei der Durchführung des numerischen Experiments erwartet, dass die Kinematiken wie vorhergesagt auftreten. Daher wird eine explizite Berechnung mit dem Wil9-Element durchgeführt, dass entsprechend Abschnitt B oder dem in diesem Kapitel noch folgenden Abschnitt 8.4.2 implementiert wurde.

Ohne die einfache Kontrolle tritt zum vorhergesagten Verschiebungszustand die Kinematik anhand der kompatiblen Verschiebungen auf. Demnach ist – wie erwartet

– das numerische Experiment auch mit einer expliziten Berechnung wiederholbar. Abbildung 8.2 zeigt das sich einstellende Sanduhr-Muster. Um den Effekt näher zu erläutern, sind den kompatiblen Verschiebungen überlagert die inkompatiblen Verschiebungen einer horizontalen und einer vertikalen Elementgruppe überhöht dargestellt. Der quadratische Verlauf wird durch Ansatzfunktionen wie $1 - \zeta^2$ erzeugt. Anhand der vertikalen Reihe wird der Begriff inkompatibler Verschiebungen an der Überschneidung und der Lücke zwischen den Elementkanten deutlich erkennbar. Mit der Geschwindigkeit der inkompatiblen Verschiebung und der inkompatiblen Masse wird die inkompatible kinetische Energie T^{im} für den gesamten Zeitraum berechnet und für ein beliebiges Element auf dem oberen Diagramm in Abbildung 8.3 für den Fall ohne Kontrolle dargestellt. Ab der vorhergesagten Verschiebung beziehungsweise Verzerrung zum Zeitpunkt t_{crit} zeigt die kinetische Energie T^{im} deutliche Ausschläge, die auf das einspringende Sanduhr-Muster zurückzuführen sind. Eine einfache Stabilisierung wird auf Basis von Gleichung (8.1) eingebracht. Für dieses Beispiel wird für die Größen T_n^{im} und V_n^{im} die Maschinengenauigkeit ϵ verwendet, die bei der Verwendung doppelter Genauigkeit (*double precision*) etwa $5 \cdot 10^{-16}$ beträgt. An den Ordinatenwerten des unteren Diagramms in Abbildung 8.3 ist ersichtlich, dass die Kinematiken, d. h. die kinetische Energie in dieser Größenordnung erfasst wird. Der angesprochene inkompatible Freiheitsgrad ist, wie bereits in Abbildung 8.2 dargestellt, in der Interpolation der vertikalen Verschiebung durch $v^{im} = (1 - \zeta^2)\alpha$ enthalten und wird mit α bezeichnet. Für die weitere Berechnung wird α , wie in Abschnitt 8.2.3 beschrieben, durch Überschreiben mit einer Null wirkungslos („ausgeschaltet“). Mit Hilfe dieser frühen Erkennung und folgenden Eliminierung ist während der gesamten Berechnung keine Kinematik mehr erkennbar und es tritt auch keine Versteifung auf.

8.2.5 Grenzen der einfachen Kontrolle

Die Kontrolle und die damit erzielte numerische Robustheit erwies sich in allen untersuchten Testbeispielen als zuverlässig. Ein Nachteil ist, dass ab dem Zeitpunkt zu dem das Kriterium (8.1) erstmals nicht mehr eingehalten wird, der betroffene inkompatible Freiheitsgrad vollständig wirkungslos – im Sinne einer Beseitigung von Versteifung – wird. Ändert sich nun eventuell die homogene Belastung zum Beispiel in eine Biegebe-

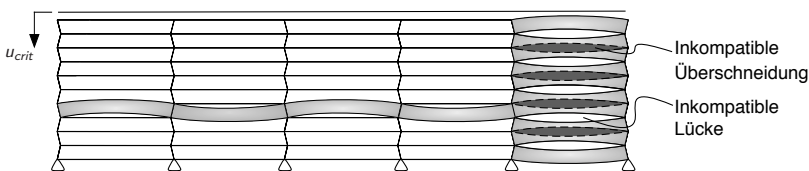


Abbildung 8.2: Elementblock aus Abb. 8.1 mit Kinematik nachdem kritischer Zustand erreicht ist. Zusätzliche Darstellung der inkompatiblen Verschiebungsformen am Beispiel einer Zeile und Spalte des Elementblocks.

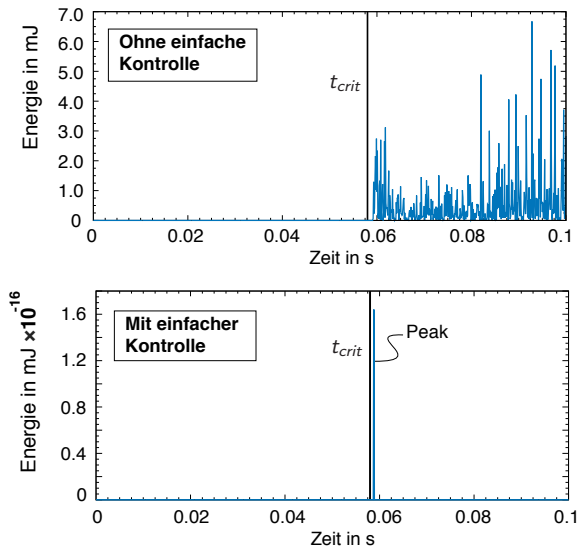


Abbildung 8.3: Inkompatible kinetische Energie (oben) ohne einfache Kontrolle und (unten, deutlich kleiner) mit einfacher Kontrolle der inkompatiblen Freiheitsgrade nach Glg. (8.1): Mindestwert von T_n^{im} und V_n^{im} gleich der Maschinengenauigkeit ϵ .

anspruchung, steht dieser inkompatible Freiheitsgrad nicht mehr für die Beseitigung der möglicherweise vorhandenen Schubversteifungen zur Verfügung. Das heißt im allgemeinen Fall muss die Beanspruchung aller Elemente immer genau beobachtet werden. Dies ist für beliebige Formulierungen und Geometrien von Elementen kaum durchführbar.

Dem soeben beschriebenen Nachteil kann entgegengesetzt werden, dass ein Auftreten der Kinematiken im Fall kleiner Deformationen – Sussman und Bathe [163] folgend – auf Elemente mit schlechten Seitenverhältnissen beschränkt ist, was durch eine sorgfältige Vernetzung vermieden werden kann. Allerdings ist dieses Argument für große Deformationen nicht mehr haltbar, siehe Wriggers und Reese [192]. Numerische Experimente mit den in Gleichung (8.1) vorgeschlagenen Schranken des Parameters s^{robust} sowie dem Mindestwert $f^{\text{robust}}(\epsilon)$ in Gleichung (8.2) haben aufgezeigt, dass deren Wahl vom betrachteten Beispiel und zusätzlich von der damit zusammenhängenden Belastungsgeschwindigkeit abhängig sind. Diese Sensitivität macht es besonders schwierig, a priori sowohl die Schranken des Parameters s^{robust} in Gleichung (8.1) als auch des Mindestwerts $f^{\text{robust}}(\epsilon)$ in Gleichung (8.2) festzulegen.

Hieraus ergibt sich, dass die hier vorgeschlagene einfache Kontrolle aus zwei Gründen sehr stark limitiert ist. Zum einen sind vom untersuchten Beispiel abhängige Parameter erforderlich, die möglicherweise erst nach numerischem Experimentieren festgelegt werden können. Zum anderen stehen die zu kontrollierenden inkompatiblen Freiheitsgrade nicht mehr zur Versteifungsreduktion zur Verfügung.

8.3 Veranschaulichung der Kinematiken

Sussman und Bathe [163] untersuchen die von inkompatiblen Freiheitsgraden ausgehende Kinematiken in einer geometrisch nichtlinearen, totalen Lagrange-Formulierung. Dazu wird die für implizite Verfahren benötigte Steifigkeitsmatrix betrachtet, die in der Diskretisierung des Inkrements der virtuellen Arbeit enthalten ist. Dabei wird festgestellt, dass die Steifigkeit für eine homogene Vordehnung im Fall reiner Biegung gleich Null werden kann. Um diesen Fall zu untersuchen, wird zunächst in Abschnitt 8.3.1 das Prinzip der virtuellen Arbeit diskretisiert, was ohne Linearisierung ausreichend für die Berechnung eines in expliziten Verfahren erforderlichen Kraftvektors ist. Mit dieser Betrachtung ist es möglich die oben erwähnte Feststellung von Sussman und Bathe [163] zu reproduzieren. In einem weiteren Schritt wird dieses Vorgehen in Abschnitt 8.3.2 auf große hyperelastische Deformationen am Beispiel eines Neo-Hooke-Materialgesetzes erweitert und in Abschnitt 8.5 an numerischen Beispielen überprüft.

8.3.1 Herleitung eines Kinematik-Kriteriums

Zur Vorhersage möglicher Kinematiken wird das Beispiel zur Entwicklung des *element critical strain criterion* aus der Publikation von Sussman und Bathe [163] verwendet. Dieses Beispiel eignet sich besonders, da es genau den "Widerstand" gegenüber den Kinematiken beschreibt und gleichzeitig die erwünschte Elimination von Schubversteifungen durch die inkompatiblen Verschiebungen aufzeigt. Der Unterschied zur Analyse bei Sussman und Bathe [163] liegt darin, dass anstatt des Inkrements der virtuellen Arbeit zunächst nur die virtuelle Arbeit einer totalen Lagrange-Formulierung betrachtet wird. Diese stellt den Ausgangspunkt zur Ermittlung des in einem expliziten Verfahren benötigten Kraftvektors dar. Wichtig ist hierbei, dass Kinematiken ausgehend von inkompatiblen Erweiterungen nur für geometrisch nichtlineare Formulierungen beobachtet wurden. Trotz der Nichtlinearität ist es möglich, innerhalb der geometrisch nichtlinearen Formulierung für den Bereich kleiner Verschiebungen vereinfachende Annahmen zu treffen, die einen guten Einblick in die Problematik ermöglichen.

Die Grundgleichungen der totalen Lagrange-Formulierung

Zunächst wird das Prinzip der virtuellen Arbeit in einer totalen Lagrange-Formulierung betrachtet

$$\delta W = \int_V \delta E_{ij} S_{ij} dV + \int_V \delta u_i \rho_0 \ddot{u}_i dV - \delta u_i f_i^{\text{ext}}, \quad (8.4)$$

wobei die Einsteinsche Summenkonvention angewandt wird. Darin sind δE_{ij} die Komponenten der virtuellen Greenschen Verzerrungen, S_{ij} die 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungen. Das Volumen der Referenzkonfiguration wird durch V ausgedrückt.

Ausgehend von einem quasi-ebenen Problem mit einer Deformation in der x_1 - x_2 -Ebene und mit der Symmetrie von sowohl δE_{ij} als auch S_{ij} ergibt sich für Gleichung (8.4)

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_V (\delta E_{11} S_{11} + \delta E_{22} S_{22} + 2\delta E_{12} S_{12}) dV \\ & + \int_V \rho_0 (\delta u_1 \ddot{u}_1 + \delta u_2 \ddot{u}_2) dV - (\delta u_1 f_1^{\text{ext}} + \delta u_2 f_2^{\text{ext}}). \end{aligned} \quad (8.5)$$

Bei Annahme linear isotroper Elastizität gilt für die Spannung das sogenannte verallgemeinerte Hookesche Gesetz

$$S_{ij} = C_{ijkl} E_{kl} \quad C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (8.6)$$

mit den Komponenten E_{ij} des Greenschen Verzerrungstensors und dem Elastizitätstensor C_{ijkl} , der mit den Laméschen Parametern¹ λ und μ beschrieben wird. Die Greenschen Verzerrungen sind definiert durch

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (H_{ij} + H_{ji} + H_{ki} H_{kj}) \quad H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}, \quad (8.7)$$

wobei u_i die Verschiebungskomponenten und X_i die materiellen Koordinaten darstellen. Im Bereich kleiner Verzerrungen gilt die Annahme

$$E_{ij} \approx \frac{1}{2} (H_{ij} + H_{ji}). \quad (8.8)$$

Wird zudem davon ausgegangen, dass keine Querkontraktion vorliegt ($\nu = 0 \rightarrow \lambda = 0, \mu = E/2$) sind die Spannungskomponenten

$$S_{11} = EE_{11} \approx EH_{11}, \quad S_{22} = EE_{22} \approx EH_{22}, \quad S_{12} = 2GE_{12} \approx G(H_{12} + H_{21}), \quad (8.9)$$

wobei zur besseren Unterscheidung die Normalspannungen mit dem Elastizitätsmodul E und die Schubspannung durch den Schubmodul G , anstatt dem zweiten Laméschen Parameter μ , ausgedrückt werden. Für die virtuellen Greenschen Verzerrungen gilt

$$\delta E_{ij} = \frac{1}{2} (\delta H_{ij} + \delta H_{ji} + \delta H_{ki} H_{kj} + H_{ki} \delta H_{kj}) \quad \delta H_{ij} = \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j}, \quad (8.10)$$

mit δu_i als virtuelle Verschiebungskomponenten. Die benötigten Komponenten sind

$$\begin{aligned} \delta E_{11} = & \delta H_{11} + \delta H_{11} H_{11} + \delta H_{21} H_{21}, \quad \delta E_{22} = \delta H_{22} + \delta H_{12} H_{12} + \delta H_{22} H_{22} \\ \delta E_{12} = & \frac{1}{2} (\delta H_{12} + \delta H_{21} + \delta H_{11} H_{12} + \delta H_{21} H_{22} + H_{11} \delta H_{12} + H_{21} \delta H_{22}). \end{aligned} \quad (8.11)$$

¹ Die Umrechnung ausgehend vom Elastizitätsmodul E und der Poissonzahl ν in die Laméschen Parameter λ und μ erfolgt durch $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ und $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Diskretisierung mit zwei Freiheitsgraden

In einer Diskretisierung wird das 4-knotige Element betrachtet, dass in Abbildung 8.4a in der Referenzkonfiguration dargestellt ist. Dabei wird in einem ersten Schritt die homogene Deformation durch Knotenverschiebungen der Größe u_{1h} und u_{2h} jeweils in x_1 - und x_2 -Richtung, siehe Abbildung 8.4b, aufgebracht. Danach erfolgt eine Biegebeanspruchung durch horizontale Verschiebungen u_θ , siehe Abbildung 8.4c. Für die Annahme kleiner Verschiebungen vereinfacht sich der Zusammenhang mit der Rotation θ

$$u_\theta = \frac{h}{2} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx \frac{H\theta}{4}, \quad (8.12)$$

wobei die deformierte Höhe h durch die Ausgangshöhe H approximiert wird. Um die Biegedeformation besser darstellen zu können, wird der klassische Wilson-Mode 1 – ζ^2 mit der inkompatiblen Verschiebung α entsprechend Abbildung 8.4d hinzugefügt.

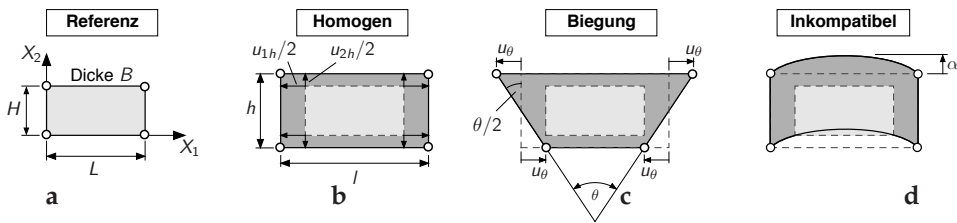


Abbildung 8.4: (a) Referenzkonfiguration, (b) Aufbringung der homogenen Deformation, dann (c) Aufbringung des Biegezustands mit gleichzeitiger (d) Aktivierung des inkompatiblen Modes.

Zusammen mit den homogenen Verschiebungen u_{1h} und u_{2h} lautet die Verschiebungsinterpolation

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{u_{1h}}{2} (-N_1 + N_2 + N_3 - N_4) + u_\theta (N_1 - N_2 + N_3 - N_4) \\ &= \frac{u_{1h}}{2} \zeta + \frac{H\theta}{4} \zeta \eta \end{aligned} \quad (8.13)$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{u_{2h}}{2} (-N_1 - N_2 + N_3 + N_4) + (1 - \zeta)^2 \alpha \\ &= \frac{u_{2h}}{2} \eta + (1 - \zeta^2) \alpha. \end{aligned} \quad (8.14)$$

N_1 bis N_4 sind die von den lokalen Koordinaten ζ und η abhängigen Lagrangeschen Ansatzfunktionen $N_I = 1/4(1 - \zeta_I \zeta)(1 - \eta_I \eta)$, die auf ein Einheitsselement der Dimension 2×2 bezogen sind. Da die homogene Deformation als bereits aufgebracht betrachtet wird, liegen nur der Rotationswinkel θ und die inkompatible Verschiebung α

als Freiheitsgrade vor. Dann sind die virtuellen Verschiebungen mit der virtuellen Rotation $\delta\theta$ und der virtuellen inkompatiblen Verschiebung $\delta\alpha$

$$\delta u_1 = \frac{H\delta\theta}{4}\zeta\eta \quad \delta u_2 = (1 - \zeta^2)\delta\alpha. \quad (8.15)$$

Für die Volumentransformation und die Berechnung der Ableitungen nach den Koordinaten X_i werden die Determinante j sowie die Inverse j_{ij}^{-1} der Jakobimatrix $j_{ij} = \sum_I N_{I,\xi_i} X_{jI}$ benötigt, die sich beide für ein rechtwinkliges Element einfach angeben lassen

$$j_{11}^{-1} = \frac{2}{L} \quad j_{22}^{-1} = \frac{2}{H} \quad j_{12}^{-1} = j_{21}^{-1} = 0 \quad j = \frac{LH}{4}. \quad (8.16)$$

Da die Nebendiagonalen verschwinden, ist die Ableitung der Verschiebung nach X_1 durch $u_{i,1} = j_{11}^{-1}u_{i,\xi}$ und nach X_2 durch $u_{i,2} = j_{22}^{-1}u_{i,\eta}$ gegeben. Damit gilt

$$H_{11} = \frac{u_{1h}}{L} + \frac{H\eta}{2L}\theta = E_{11}^h + \frac{H\eta}{2L}\theta, \quad H_{12} = \frac{\zeta}{2}\theta \quad (8.17)$$

$$H_{21} = -\frac{4\zeta}{L}\alpha, \quad H_{22} = \frac{u_{2h}}{H} = E_{22}^h, \quad (8.18)$$

wobei der Gradient infolge der homogenen Deformation durch die homogenen Verzerrungen E_{11}^h und E_{22}^h dargestellt wird. Da diese Betrachtung im geometrisch linearen Bereich erfolgt, werden die homogenen Verzerrungen wie folgt bezeichnet

$$E_{11}^h = \varepsilon_{11}^h, \quad E_{22}^h = \varepsilon_{22}^h. \quad (8.19)$$

Mit der bereits aufgebrauchten homogenen Deformation sind die virtuellen Anteile analog zu Gleichung (8.15) gegeben durch

$$\delta H_{11} = \frac{H\eta}{2L}\delta\theta, \quad \delta H_{12} = \frac{\zeta}{2}\delta\theta \quad (8.20)$$

$$\delta H_{21} = -\frac{4\zeta}{L}\delta\alpha, \quad \delta H_{22} = 0. \quad (8.21)$$

Die Verwendung der Gleichungen (8.17) und (8.18) in (8.9) zusammen mit (8.20) und (8.21) in (8.11) führt mit Beachtung einer konstanten Breite B des Elements im Ausdruck für die virtuelle Arbeit (8.5) zu

$$\begin{aligned} \delta W &= B \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\delta E_{11} S_{11} + \delta E_{22} S_{22} + 2\delta E_{12} S_{12}) \frac{LH}{4} d\zeta d\eta \\ &\quad + \int_V \rho (\delta u_1 \dot{u}_1 + \delta u_2 \dot{u}_2) dV - (\delta u_1 f_1^{\text{ext}} + \delta u_2 f_2^{\text{ext}}) \\ &= [\delta\theta \quad \delta\alpha] \begin{bmatrix} f_\theta \\ f_\alpha \end{bmatrix} + [\delta\theta \quad \delta\alpha] \begin{bmatrix} m_\theta & 0 \\ 0 & m_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} - \delta\theta M^{\text{ext}} \end{aligned} \quad (8.22)$$

mit den Kräften

$$\begin{bmatrix} f_\theta \\ f_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{\theta\theta} & K_{\theta\alpha} \\ K_{\alpha\theta} & K_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \end{bmatrix}, \quad (8.23)$$

die mit den folgenden Steifigkeiten ermittelt werden

$$K_{\theta\theta} = \frac{BH^3}{12L}(E + E\varepsilon_{11}^h) + \frac{BLH}{12}(G + E\varepsilon_{22}^h) \quad (8.24)$$

$$K_{\theta\alpha} = K_{\alpha\theta} = -\frac{2}{3}B GH \quad (8.25)$$

$$K_{\alpha\alpha} = B \frac{16H}{3L}(G + E\varepsilon_{11}^h). \quad (8.26)$$

Um die weitere Herleitung so klar wie möglich zu gestalten, werden die homogenen Deformationen E_{11}^h und E_{22}^h aus den Gleichungen (8.17)₁ und (8.18)₂ nicht in den virtuellen Greenschen Verzerrungen in Gleichung (8.22) berücksichtigt, was zu deutlich einfacheren Steifigkeitsausdrücken führt. Entsprechend der Beschreibung in Abschnitt 5.3 gilt, dass die externe Last als Biegemoment M^{ext} aufzufassen ist, nur die Massen m^θ und m^α auf der Diagonalen zu berücksichtigen sind sowie die virtuelle Arbeit infolge inkompatibler Verschiebungen zu vernachlässigen ist.

Einfluss der inkompatiblen Erweiterung auf die (Biege-)Steifigkeit

Für beliebige virtuelle Größen resultiert aus Gleichung (8.22) zu einem Zeitpunkt n das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} f_{\theta,n} \\ f_{\alpha,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_\theta & 0 \\ 0 & m_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_n \\ \ddot{\alpha}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_n^{\text{ext}} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.27)$$

Die Kraftgröße $F_{\theta,n}$ ist hier ebenfalls als Biegemoment anzusehen. In einem expliziten Verfahren, hier dem zentralen Differenzenverfahren, gilt für den Freiheitsgrad θ in einem Schritt $n \rightarrow n + 1$

$$\dot{\theta}_{n+1/2} = \dot{\theta}_{n-1/2} + \Delta t_n \frac{F_n^{\text{ext}} - F_{\theta,n}}{m^\theta}, \quad \theta_{n+1} = \theta_n + \Delta t_{n+1/2} \dot{\theta}_{n+1/2}. \quad (8.28)$$

Dabei werden die angepassten Zeitschrittweiten Δt_n und $\Delta t_{n+1/2}$ genutzt, siehe Abbildung 2.2 Der inkompatible Freiheitsgrad α kann mithilfe der Masse m^α ebenfalls mit dem zentralen Differenzenverfahren in der Zeit fortgeschrieben werden, siehe Abschnitt 5.4.3.

Die Masse m^α wird gemäß dem Vorgehen in Abschnitt 5.4.4 vernachlässigt und der inkompatible Freiheitsgrad α aus dem Gleichungssystem (8.27) kondensiert, um zu beurteilen, wie die inkompatible Erweiterung sich auf die Biegesteifigkeit auswirkt. Dieser Schritt ist aufgrund der linearen Gleichungen direkt möglich. Die zugehörige Forderung $F_n^\alpha = 0$, siehe Gleichung (8.27), führt auf

$$K_{\alpha\theta}\theta_n + K_{\alpha\alpha}\alpha_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_n = -\frac{K_{\alpha\theta}}{K_{\alpha\alpha}}\theta_n \quad (8.29)$$

und ergibt eingesetzt in die Definition der Kraftgröße F_n^θ , siehe Gleichung (8.23),

$$f_{\theta,n} = \left(K_{\theta\theta} - \frac{(K_{\theta\alpha})^2}{K_{\alpha\alpha}} \right) \theta_n = K^{\text{cnd}} \theta_n \quad (8.30)$$

mit der infolge der Kondensation entstandenen Steifigkeit K^{cnd} .

Der Widerstand gegenüber einer Biegebeanspruchung wird nach Gleichung (8.30) also allein durch die Steifigkeit K^{cnd} definiert, die, durch Einführung des inkompatiblen Freiheitsgrads, zusätzlich vom Ausdruck $(K^{\theta\alpha})^2/K^{\alpha\alpha}$ abhängt. Im Folgenden wird gezeigt, dass dieser Ausdruck die Anteile der Steifigkeit $K^{\theta\theta}$ kompensiert, die infolge einer Schubversteifung auftreten. Allerdings verbleiben bei einer homogenen Deformation zusätzliche Anteile, die zu einer Verfälschung der Ergebnisse führen können. Daher muss die Frage gestellt werden, ob die Technologie inkompatibler Erweiterungen in dieser speziellen Situation überhaupt zu sinnvollen Ergebnissen führt, was in Abschnitt 8.5.1 nochmals aufgegriffen wird.

Zunächst werden die Größen aus den Gleichungen (8.24), (8.25) und (8.26) in die Definition der Steifigkeit K^{cnd} aus Gleichung (8.30) eingesetzt und mithilfe einiger elementarer Umformungen in die folgende Form gebracht

$$K^{\text{cnd}} = \underbrace{\frac{BH^3}{12L} (E + E\varepsilon_{11}^h)}_{= K_{\theta\theta}} + \overbrace{\frac{BH^3}{12L} \left(\frac{L}{H}\right)^2 (G + E\varepsilon_{22}^h)}^{\text{„versteifend“}} - \underbrace{\frac{BH^3}{12L} \left(\frac{L}{H}\right)^2 G \frac{G}{G + E\varepsilon_{11}^h}}_{= (K_{\theta\alpha})^2 / K_{\alpha\alpha}}^{\text{„kompensierend“}}. \quad (8.31)$$

Darin sollen die „versteifenden“ Anteile, die für ungünstige Verhältnisse der Seitenlängen zu einer klaren Erhöhung der Steifigkeit führen, durch die zusätzlichen „kompensierenden“ Anteile eliminiert werden. Wird der letzte Ausdruck des „kompensierenden“ Anteils mithilfe einer Taylorreihe für die hier betrachteten kleinen Verzerrungen linear approximiert²

$$G \frac{G}{G + E\varepsilon_{11}^h} = G \frac{1}{1 + \frac{E}{G}\varepsilon_{11}^h} \approx G \left(1 - \frac{E}{G}\varepsilon_{11}^h \right) = G - E\varepsilon_{11}^h, \quad (8.32)$$

ist die Elimination anschaulich darstellbar

$$\begin{aligned} K^{\text{cnd}} &= \frac{BH^3}{12L} \left(E + E\varepsilon_{11}^h + \overbrace{(G + E\varepsilon_{22}^h)}^{\text{„versteifend“}} - \overbrace{(G - E\varepsilon_{11}^h)}^{\text{„kompensierend“}} \right) \left(\frac{L}{H} \right)^2 \\ &= E \frac{BH^3}{12L} \left(1 + \varepsilon_{11}^h + (\varepsilon_{22}^h + \varepsilon_{11}^h) \left(\frac{L}{H} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (8.33)$$

² Für $x = E\varepsilon_{11}^h/G$ gilt die folgende Taylorreihenentwicklung $1/(1+x) \approx 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$, wobei hier im Fall kleiner Verzerrungen ein Abbruch nach dem linearen Glied ausreichend genau ist.

Darin werden alle Schubanteile vollständig eliminiert. Es verbleiben die Normalverzerrung ε_{22}^h und ε_{11}^h aus dem „kompensierenden“ und dem „versteifenden“ Anteil, die beide mit dem quadrierten Seitenlängenverhältnis $(L/H)^2$ multipliziert werden.

Bevor der Einfluss der Normalverzerrungen in Gleichung (8.33) debattiert wird, ist es nützlich, das Flächenträgheitsmoment $I = BH^3/12$ sowie den proportionalen Zusammenhang zwischen dem wirkenden Moment und der Rotationsänderung über die betrachtete Länge

$$M = EI \frac{d\theta_n}{dx} \quad (8.34)$$

einzuführen. Darin wird M durch die als Biegemoment aufzufassende Kraftgröße $F_n^\theta = K^{\text{cnd}} \theta_n$ aus Gleichung (8.30) ersetzt. Durch die erneute Annahme kleiner Verzerrungen, wird mit der Approximation $d\theta_n/dx \approx \theta_n/L$ die Definition einer von homogenen Deformationen abhängigen Biegesteifigkeit eingeführt

$$(EI)^{\text{h|cnd}} = \frac{f_{\theta,n}}{\frac{\theta_n}{L}} = K^{\text{cnd}} L = EI \left(1 + \varepsilon_{11}^h + (\varepsilon_{22}^h + \varepsilon_{11}^h) \left(\frac{L}{H} \right)^2 \right). \quad (8.35)$$

Zum Vergleich wird die Biegesteifigkeit ohne eine Erweiterung mit inkompatiblen Freiheitsgraden betrachtet, die sich ergibt, wenn $K^{\theta\theta}$ aus Gleichung (8.24) die Steifigkeit K^{eff} in Gleichung (8.35) ersetzt

$$(EI)^{\text{h}} = K_{\theta\theta} L = EI \left(1 + \varepsilon_{11}^h + \left(\frac{G}{E} + \varepsilon_{22}^h \right) \left(\frac{L}{H} \right)^2 \right). \quad (8.36)$$

Darin verursacht der Schub für schlechte, also größere Seitenlängenverhältnisse L/H , ein versteifendes Verhalten, wegen der klaren Erhöhung der Biegesteifigkeit.

In der Biegesteifigkeit in Gleichung (8.35) werden durch die inkompatible Verschiebung die Schubanteile und damit die versteifenden Effekte eliminiert, siehe Gleichung (8.33). Allerdings ist zu beobachten, dass die Biegesteifigkeit $(EI)^{\text{h}}$ zu Null wird, sobald mit der zuvor aufgebrachten homogenen Deformation der folgende kritische Zustand erreicht wird, für dessen Herleitung erneut die Annahme kleiner Verzerrungen $(1 + \varepsilon_{11}^h) \approx 1$ gemacht wird,

$$\varepsilon_{11}^h + \varepsilon_{22}^h = - \left(\frac{H}{L} \right)^2. \quad (8.37)$$

In diesem Fall wird der Widerstand gegenüber Biegung, also der typischen *Hourglass*-Form, zu Null und es kommt zu einem Versagen der Simulation durch Kinematiken in Form von nicht physikalischen unkontrollierbaren Deformationen. Der kritische Wert gilt im Bereich kleiner Verzerrungen allerdings ausschließlich für sehr schlechte Seitenlängenverhältnisse, die nur für $L \gg H$ erfüllt sind. Sussman und Bathe [163] belegen dieses Kriterium mit numerischen Beispielen, die analog mit expliziten Berechnungen reproduziert werden können.

Es wird angemerkt, dass die Normalverzerrung ε_{22}^h ursprünglich aus dem „versteifenden“ Anteil der Steifigkeit $K^{\theta\theta}$ kommt, siehe Gleichung (8.33), was für die Herleitung des Kriteriums (8.37) aber bedeutungslos ist. Die Normalverzerrung ε_{22}^h wird zwar auch in der Biegesteifigkeit $(EI)^h$ in Gleichung (8.36) mit $(L/H)^2$ multipliziert, was aber im Verhältnis zu G/E ohne spürbaren Einfluss auf die Biegesteifigkeit bleibt. Diese würde nur verschwinden, ebenfalls bei Annahme von $(1 + \varepsilon_{11}^h) \approx 1$, wenn $\varepsilon_{22}^h = -((H/L)^2 + G/E)$ gilt, was beispielsweise für $\nu = 0$ mit $G/E = 0.5$ mindestens -50% Dehnung erfordern würde.

Anmerkung zur totalen und mitgehenden Lagrange-Formulierung

Die Kinematiken treten auch auf, wenn die gesamte schwache Form in die Momentankonfiguration vor geschoben wird

$$\delta W^{\text{int}} = \int_V \delta E_{ij} S_{ij} \, dV = \int_V \underbrace{F_{ki} \delta e_{kl} F_{lj}}_{=\delta E_{ij}} \underbrace{F_{ki}^{-1} \sigma_{kl} F_{lj}^{-1} J}_{=S_{ij}} \, dV = \int_v \delta e_{ij} \sigma_{ij} \, dv = \delta w^{\text{int}}, \quad (8.38)$$

wobei mit dem Deformationsgradienten $F_{ij} = \delta_{ij} + H_{ij}$ die Größen der Referenz- in die Momentankonfiguration transformiert werden

$$dv = \det(F_{ij}) \, dV$$

$$\delta h_{ij} = \delta H_{ik} F_{kj}^{-1} \quad \rightarrow \quad \delta e_{ij} = \frac{1}{2} (\delta h_{ij} + \delta h_{ji}) .$$

Da diese Größen sich tatsächlich auf die Referenzkonfiguration beziehen, handelt es sich lediglich um eine pseudo-mitgehende Beschreibung. Wie erwartet, kann einfach nachgewiesen werden, dass die pseudo-mitgehende Lagrange-Formulierung sich nicht von der totalen Lagrange-Formulierung unterscheidet und ebenfalls zu Kinematiken führt. Eine ähnliche Interpretation wurde bereits von Crisfield et al. [43] vorgestellt.

8.3.2 Erweiterung auf große hyperelastische Deformationen

In den letzten Abschnitten wurde die Vorhersage und das Ausbleiben von Kinematiken infolge inkompatibler Verschiebungen exemplarisch für explizite und implizite Analysen an einem Beispiel für kleine Deformationen gezeigt und numerisch validiert. Zur Vorhersage, ob Kinematiken auftreten, wird im Bereich großer Deformationen im das gleiche Beispiel genutzt.

Neo-Hooke-Materialgesetz

Das Materialverhalten wird durch ein hyperelastisches Neo-Hookesches Konstitutivgesetz beschrieben. Die Verzerrungsenergiefunktion

$$w = \frac{\lambda}{2} (\ln J)^2 - \mu \ln J + \frac{\mu}{2} (C_{kk} - 3), \quad (8.39)$$

führt auf die 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungen

$$S_{ij} = \lambda \ln J C_{ij}^{-1} + \mu (\delta_{ij} - C_{ij}^{-1}) . \quad (8.40)$$

Dabei ist J die Determinante des Deformationsgradienten F_{ij} , der zur Berechnung der Inversen des rechten Cauchyschen Tensors $C_{ij}^{-1} = F_{ik}^{-1} F_{jk}^{-1}$ verwendet wird. Der zugehörige Elastizitätstensor der Referenzkonfiguration ist

$$C_{ijkl} = \lambda C_{ij}^{-1} C_{kl}^{-1} + (\mu - \lambda \ln J) (C_{ik}^{-1} C_{jl}^{-1} + C_{il}^{-1} C_{kj}^{-1}) \quad (8.41)$$

Für kleine Deformationen gilt $F_{ij} \approx \delta_{ij}$ und der Elastizitätstensor fällt auf das lineare Hookesche Gesetz zurück. Daher wird erwartet, dass die Aussage für kleine Deformationen ebenfalls in der Aussage für große Deformationen enthalten sein sollte.

Beschreibung der Deformation

Um die Betrachtung so einfach wie möglich zu gestalten, wird davon ausgegangen, dass die homogene Deformation nur in x_2 -Richtung aufgebracht wird. Die Beschreibung erfolgt unabhängig von Momentan- oder Referenzkonfiguration durch die Streckung $\lambda_2 = h/H$ in x_2 -Richtung. Die Höhenänderung entspricht der gegenseitigen Verschiebung u_{2h} , die an der Ober- und der Unterseite jeweils mit dem halben Wert $u_{2h}/2$ aufgebracht wird, siehe Abbildung 8.4, und durch die deformierte Höhe h oder durch die undeformierte Höhe H ausgedrückt werden kann

$$2 \frac{u_{2h}}{2} = h - H = H(\lambda_2 - 1) = h \left(1 - \frac{1}{\lambda_2}\right) . \quad (8.42)$$

Wie für kleine Deformationen soll auch hier Querkontraktion vernachlässigt werden, sodass keine Verschiebung in x_1 -Richtung auftritt. λ_1 ist in diesem Fall gleich Null. Mit den Lagrangeschen Ansatzfunktionen ergibt sich für die interpolierte Verschiebung

$$u_1^h = 0 , \quad u_2^h = (-N_1 - N_2 + N_3 + N_4) \frac{u_{2h}}{2} = \frac{1}{2} H (\lambda_2 - 1) \eta . \quad (8.43)$$

Mit den üblichen Regeln zur Transformation der Ableitungen gilt mit den Einträgen der inversen Jakobimatrix aus Gleichung (8.16) für die Komponenten des Verschiebungsgradienten bezogen auf die Referenzkonfiguration

$$H_{11}^h = H_{12}^h = H_{21}^h = 0 , \quad H_{22}^h = \lambda_2 - 1 . \quad (8.44)$$

Der Verschiebungsgradient wird noch ergänzt durch die in Abbildung 8.4 gezeigte Biegedeformation infolge kompatibler und inkompatibler Verschiebungen

$$u_1^b = \frac{\lambda_2 H}{4} \xi \eta \theta , \quad u_2^b = (1 - \xi^2) \alpha , \quad (8.45)$$

wobei hier für die Knotenverschiebung infolge Biegung wieder angenommen wurde, dass kleine Rotationen auftreten

$$u_\theta = \frac{h}{2} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx \frac{h\theta}{4}. \quad (8.46)$$

Verglichen mit Gleichung (8.12) wird die tatsächliche, deformierte Höhe h verwendet. Es folgt der zugehörige Verschiebungsgradient

$$H_{11}^b = \frac{\lambda_2 H \eta \theta}{2L}, \quad H_{12}^b = \frac{\xi \lambda_2 \theta}{2} \quad (8.47)$$

$$H_{21}^b = -\frac{4\xi \alpha}{L}, \quad H_{22}^b = 0 \quad (8.48)$$

Der Deformationsgradient $F_{ij} = \delta_{ij} + H_{ij}^h + H_{ij}^b$ setzt sich aus der homogenen und infolge Biegung vorgegebenen Deformation zusammen. Die Komponenten sind

$$F_{11} = 1 + \frac{\lambda_2 H \eta \theta}{2L}, \quad F_{12} = \frac{\xi \lambda_2 \theta}{2} \quad (8.49)$$

$$F_{21} = -\frac{4\xi \alpha}{L}, \quad F_{22} = \lambda_2 \quad (8.50)$$

Um Objektivität infolge Starrkörperbewegungen zu gewährleisten wird üblicherweise der rein inkompatible Anteil mit dem in Elementmitte ausgewerteten Deformationsgradienten multipliziert, also bei einer Aufspaltung in einen kompatiblen und inkompatiblen Anteil $F_{ij} = \delta_{ij} + H_{ij}^{\text{co}} + F_{ik}^0 H_{kj}^{\text{im}}$. Da eine solche Deformation in diesem Beispiel nicht auftritt, kann hier, so wie bei Sussman und Bathe [163], auf diesen Schritt verzichtet werden. Für einen Vergleich wurde dieser trotzdem durchgeführt. Es ist lediglich die Komponente F_{21} mit λ_2 zu multiplizieren, wofür die resultierende Steifigkeit später angegeben wird.

Für die Variation des Deformationsgradienten ergibt sich

$$\delta F_{11} = \frac{\lambda_2 H \eta \delta \theta}{2L}, \quad \delta F_{12} = \frac{\xi \lambda_2 \delta \theta}{2} \quad (8.51)$$

$$\delta F_{21} = -\frac{4\lambda_2 \xi \delta \alpha}{L}, \quad \delta F_{22} = 0. \quad (8.52)$$

Dabei gilt $\delta F_{ij} = \delta H_{ij}$, was genutzt werden kann, um die virtuellen Greenschen Verzerrungen anzugeben

$$\delta E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\delta H_{ij} + \delta H_{ji} + \delta H_{ki} H_{kj} + H_{ki} \delta H_{kj} \right). \quad (8.53)$$

Resultierende Steifigkeitsgrößen

Die 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungen aus Gleichung (8.40) werden mit dem rechten Cauchy-Tensor $C_{ij} = F_{ki} F_{kj}$ berechnet. Dieser ist noch zu invertierten und es entstehen deutlich umfangreichere Ausdrücke verglichen mit der Annahme linearer Elastizität in

Gleichung (8.9). Um die länglichen Zwischenschritte zu sparen und die Herleitung so einfach wie möglich zu halten, wird die schwache Form mit einem Computeralgebrasystem ausgewertet. Die daraus resultierenden Steifigkeiten werden mithilfe einer Taylorreihenentwicklung linear in θ und α angegeben. Es ergeben sich für die virtuelle Arbeit in der totalen Lagrange-Formulierung

$$\delta w^{\text{int}} = B \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\delta E_{11} S_{11} + \delta E_{22} S_{22} + \delta E_{12} S_{12}) \frac{LH}{4} d\xi d\eta = [\delta\theta \quad \delta\alpha] \begin{bmatrix} f_\theta \\ f_\alpha \end{bmatrix} \quad (8.54)$$

die Kräfte

$$\begin{bmatrix} f_\theta \\ f_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{\theta\theta} & K_{\theta\alpha} \\ K_{\alpha\theta} & K_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta \\ \Delta\alpha \end{bmatrix}, \quad (8.55)$$

die mit diesen Steifigkeiten berechnet werden

$$K_{\theta\theta} = \lambda_2^2 \frac{BH^3}{12L} \left(E + \mu \left(\frac{L}{H} \right)^2 \right) \quad (8.56)$$

$$K_{\theta\alpha} = K_{\alpha\theta} = -\frac{2}{3} \mu BH \quad \equiv \frac{K_{\theta\alpha}^{F_0}}{\lambda_2} = \frac{K_{\alpha\theta}^{F_0}}{\lambda_2} \quad (8.57)$$

$$K_{\alpha\alpha} = \frac{16}{3L} \mu BH \quad \equiv \frac{K_{\alpha\alpha}^{F_0}}{\lambda_2^2}. \quad (8.58)$$

Mit einfachen Umformungen kann gezeigt werden, dass $K^{\theta\theta}$ das für Biegebalken bekannte Flächenträgheitsmoment $BH^3/12$ enthält. Die mit F_0 gekennzeichneten Steifigkeiten ergeben sich, wenn F_0 in den Gleichungen (8.49) und (8.50) für die Objektivität berücksichtigt wird. Es zeigt sich aber schnell, dass sich die Änderungen in Gleichung (8.59), gegenseitig eliminieren, was für dieses Beispiel auch so erwartet wird, da keine Starrkörperbewegungen enthalten sind. Die Kraftgrößen f_θ und f_α werden in einem expliziten Verfahren analog zum Vorgehen in Abschnitt 8.3.1 behandelt und es folgt nach der Kondensation der inkompatiblen Verschiebung

$$f_\theta = \left(K^{\theta\theta} - \frac{(K_{\theta\alpha})^2}{K_{\alpha\alpha}} \right) \Delta\theta = K_{\text{cnd}} \Delta\theta \quad (8.59)$$

mit

$$K^{\text{cnd}} = E \frac{BH^3}{12L} \left(\lambda_2^2 + \frac{1}{2} (\lambda_2^2 - 1) \left(\frac{L}{H} \right)^2 \right), \quad (8.60)$$

wobei ohne Querkontraktion ($\nu = 0$) $\mu = E/2$ gilt. Wie in Gleichung (8.35) ist es möglich, eine Biegesteifigkeit $(EI)^{h|\text{cnd}}$ infolge homogener Deformation zu definieren

$$(EI)^{h|\text{cnd}} = \frac{f_\theta}{\frac{\theta}{L}} = EI \left(\lambda_2^2 + \frac{1}{2} (\lambda_2^2 - 1) \left(\frac{L}{H} \right)^2 \right). \quad (8.61)$$

Darin ist $I = BH^3/12$. Die Steifigkeit gegenüber einer Biegebeanspruchung wird Null, sobald $(EI)^h$ zu Null wird

$$(EI)^{h|\text{cnd}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \left(\frac{H}{L}\right)^2}}. \quad (8.62)$$

Werden die Komponenten des Greenschen Verzerrungstensors in Hauptstreckungen ausgedrückt $E_{ii} = 1/2(\lambda_i^2 - 1)$, kann das Kriterium für das Verschwinden von $(EI)^h$ mit $H = h/\lambda_2$ durch

$$E_{22} = -\lambda_2^2 \left(\frac{H}{L}\right)^2 = -\left(\frac{h}{L}\right)^2 \quad (8.63)$$

ausgedrückt werden. Die äußere Form entspricht damit dem Versagenskriterium aus Gleichung (8.37), welches für kleine Deformationen aufgestellt wurde. Allerdings kann Gleichung (8.63) nicht direkt zur Vorhersage einer Kinematik im Bereich großer Deformationen verwendet werden, da sowohl E_{22} als auch h noch von der Streckung λ_2 abhängen. Wird angenommen, dass nur kleine Deformationen vorliegen, ist $E_{22} \approx \varepsilon_{22}$ und $h \approx H$. Einsetzen dieser Ausdrücke in Gleichung (8.63) liefert das Kriterium aus Gleichung (8.37) für den Bereich kleiner Deformationen. Damit ist gezeigt, dass die Vorhersage von Kinematiken im Bereich kleiner Deformationen in dieser Betrachtung enthalten ist. Der Grund hierfür ist das gewählte Neo-Hookesche Materialgesetz, das für kleine Deformationen auf das lineare Hookesche Gesetz zurückfällt. Werden die Werte $L = 5$ und $H = 0.5$ aus dem numerischen Testbeispiel in Abschnitt 8.5.1 in Gleichung (8.63) mit den Vereinfachungen für kleine Verzerrungen eingesetzt, resultiert der Wert $\lambda_2 = 0.99$, was einer Verzerrung von $\varepsilon_{22} = 0.01$ im Bereich kleiner Deformationen entspricht.

In einer mitgehenden (*updated*) Lagrange-Formulierung ergeben sich analog die gleichen diskretisierten Größen und somit auch identische Aussagen zur Entwicklung der Kinematiken. Daher wird hier auf eine Darstellung verzichtet.

8.4 Ad-hoc-Formulierung zur Vermeidung der Kinematik

8.4.1 Die Idee

Um die von inkompatiblen Freiheitsgraden ausgehenden Kinematiken zu vermeiden, wird eine Elementformulierung vorgeschlagen, die sich von den klassischen, auf Simo und Armero [156] basierenden Formulierungen, unterscheidet: Primär durch eine ad-hoc gewählte Testfunktion $\delta \mathbf{h}^{\text{ad}}$, die auch die sogenannte Volumenbedingung nach Nagtegaal und Fox [121] erfüllt, mit der die Sensitivität gegenüber Kinematiken reduziert werden soll. Diese in der Momentankonfiguration stehende Volumenbedingung ist einfacher zu erfüllen, wenn die ad-hoc-Testfunktion auch in der Momentankonfiguration steht. Daraus ergibt sich sekundär, dass die gesamte Formulierung vollständig

auf die Momentankonfiguration bezogen wird. Das heißt, die Diskretisierung des Verschiebungsgradienten $\mathbf{h} = \partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{x}$ und dessen Variation $\delta \mathbf{h} = \partial \delta \mathbf{u} / \partial \mathbf{x}$ sollen auf \mathbf{x} bezogen werden – und *nicht* wie bei der klassischen Formulierung auf \mathbf{X} .

Im Folgenden wird die klassische Formulierung zuerst wiederholt, um die anschließend entwickelte ad-hoc Formulierung klar von dieser abgrenzen zu können. Davor wird noch gezeigt, dass die um inkompatible Verschiebungen erweiterten Elementformulierungen sich unterscheiden, je nachdem ob der Deformationsgradient auf \mathbf{x} oder \mathbf{X} bezogen wird.

Zum relativen Bezug inkompatibler Verschiebungen

Die kompatiblen Verschiebungen \mathbf{u}^{co} werden mit den inkompatiblen Freiheitsgraden \mathbf{u}^{im} erweitert

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\text{co}} + \mathbf{u}^{\text{im}} . \tag{8.64}$$

Dabei werden die inkompatiblen Freiheitsgrade \mathbf{u}^{im} auf die aktuelle Lage des Elements bezogen, wohingegen die kompatiblen Verschiebungen \mathbf{u}^{co} fest auf die Koordinaten \mathbf{x} und \mathbf{X} bezogen werden

$$\mathbf{u}^{\text{co}} = \mathbf{x} - \mathbf{X} . \tag{8.65}$$

Abbildung 8.5 veranschaulicht diesen Zusammenhang mit einer überhöht dargestellten Biegedeformation eines Elements, das mit einem inkompatiblen Freiheitsgrad erweitert wurde.

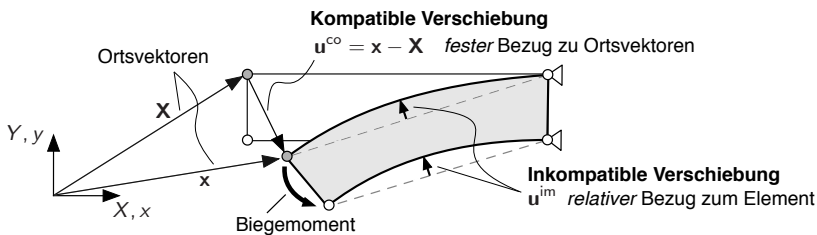


Abbildung 8.5: Überhöht dargestellte Biegebeanspruchung eines Elements mit inkompatiblen Verschiebungserweiterung. Veranschaulichung des *relativen* Bezugs der inkompatiblen Verschiebung zum Element und des *festen* Bezugs der kompatiblen Verschiebung zu den Ortsvektoren \mathbf{x} und \mathbf{X} .

Üblicherweise fließt die inkompatible Verschiebung \mathbf{u}^{im} in den Verschiebungsgradienten $\mathbf{H} = \partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{X}$ ein. Das hier vorgeschlagene ad-hoc-Element soll aber, wie zu Beginn des Abschnitts angeführt, bezogen auf die Momentankonfiguration formuliert werden, wobei die inkompatiblen Verschiebungen in den Verschiebungsgradienten $\mathbf{h} = \partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{x}$

einfließen. Mit Gleichung (8.64) gilt für beide Ansätze zur Berechnung des Deformationsgradienten

$$\mathbf{H}^{cl} = \frac{\partial (\mathbf{u}^{co} + \mathbf{u}^{im})}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{H}^{cl|co} + \mathbf{H}^{cl|im} \rightarrow \mathbf{F}^{cl} = \mathbf{1} + \mathbf{H}^{cl} \quad \text{klassisch} \quad (8.66)$$

$$\mathbf{h}^{ad} = \frac{\partial (\mathbf{u}^{co} + \mathbf{u}^{im})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{h}^{ad|co} + \mathbf{h}^{ad|im} \rightarrow \mathbf{F}^{ad} = (\mathbf{1} - \mathbf{h}^{ad})^{-1} \quad \text{ad-hoc} . \quad (8.67)$$

Zur Unterscheidung werden im folgenden die Indizes *cl* und *ad* verwendet.

Der Gradient bezüglich der inkompatiblen Verschiebungen wird für eine Finite-Element-Implementierung weiter modifiziert, um die auftretenden Orthogonalitätsbedingungen in Gleichung (8.88) und (8.89) zu erfüllen, worauf später bei der Diskretisierung eingegangen wird. Zur folgenden Erläuterung der Unterschiede zwischen den Ansätzen ist dies *aber nicht* erforderlich. Der Unterschied kann mit den Deformationsgradienten wie folgt gezeigt werden. Wird in Gleichung (8.66) noch (8.65), eingesetzt ergibt sich

$$\mathbf{F}^{cl} = \mathbf{1} + \frac{\partial (\mathbf{x} - \mathbf{X} + \mathbf{u}^{im})}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{1} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} - \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}^{im}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}^{im}}{\partial \mathbf{X}} \quad (8.68)$$

und analog gilt mit (8.67)

$$(\mathbf{F}^{ad})^{-1} = \mathbf{1} - \frac{\partial (\mathbf{x} - \mathbf{X} + \mathbf{u}^{im})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{1} - \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{u}^{im}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{u}^{im}}{\partial \mathbf{x}} . \quad (8.69)$$

Als Produkt sollte sich die Einheitsmatrix ergeben

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{cl}(\mathbf{F}^{ad})^{-1} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{u}^{im}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{u}^{im}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{u}^{im}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{u}^{im}}{\partial \mathbf{x}} \\ &= \mathbf{1} - \underbrace{\frac{\partial \mathbf{u}^{im}}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{u}^{im}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{u}^{im}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \mathbf{u}^{im}}{\partial \mathbf{x}}}_{\text{sollte gleich Null sein}} . \end{aligned} \quad (8.70)$$

Das heißt, dass die beiden Deformationsgradienten \mathbf{F}^{cl} und \mathbf{F}^{ad} nur für $\mathbf{u}^{im} = \mathbf{0}$ identisch sind. Daraus kann sofort gefolgert werden, dass die beiden Ansätze nicht in einer Elementformulierung kombiniert werden dürfen.

Die ad-hoc-Formulierung wird also nach dieser Betrachtung noch von einer vollständig auf die Koordinate \mathbf{x} bezogenen Formulierung begleitet, da sonst die soeben gezeigte Unverträglichkeit (8.70) entsteht. Werden die Ableitungen nach \mathbf{X} und \mathbf{x} für eine Elementformulierung kombiniert, wäre diese zum einen weniger effizient, da dann die Operationen zur Berechnung beider Ableitungen benötigt werden, und zum anderen könnten möglicherweise die Versteifungseffekte nicht wie erwartet beseitigt werden.

Die klassische und die ad-hoc-Formulierung werden in den beiden folgenden Abschnitten beschrieben.

8.4.2 Wiederholung der klassischen Formulierung

Variationelle Beschreibung

Als klassische Formulierung wird die bei Simo und Armero [156] vorgestellte inkompatible Erweiterung für geometrisch nichtlineare Probleme bezeichnet. Mit *klassisch* ist in diesem Kontext gemeint, dass sich die überwiegende Anzahl an Beiträgen in der Fachliteratur auf diese Formulierung bezieht. So wird auch hier von der klassischen Formulierung ausgegangen und mit dem Hu-Washizu-Funktional beschrieben, das für Hyperelastizität folgende Form hat

$$\Pi = \underbrace{\int_V (W(\mathbf{H}) + \mathbf{P} \cdot (\text{Grad} \mathbf{u} - \mathbf{H})) \, dV}_{\Pi^{\text{int}}} + \Pi^{\text{kin}} - \Pi^{\text{ext}} \quad (8.71)$$

und mit den Spannungen $\mathbf{P}^W = 2\mathbf{F} \partial W / \partial \mathbf{C}$, die aus der Verzerrungsenergiefunktion gewonnen werden, auf die Variation des inneren Anteils führen

$$\delta \Pi^{\text{int}} = \int_V \left(\delta \mathbf{H} \cdot \mathbf{P}^W + \mathbf{P} \cdot (\text{Grad} \delta \mathbf{u} - \delta \mathbf{H}) + \delta \mathbf{P} \cdot (\text{Grad} \mathbf{u} - \mathbf{H}) \right) dV. \quad (8.72)$$

Darin wird für die Verschiebung $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\text{co}}$ eingesetzt, also nur der kompatible Anteil berücksichtigt. Die erweiterten Verschiebungen aus Gleichung (8.64) werden nur zur Erweiterung der Gradienten in den Gleichungen (8.66) und (8.67) genutzt³. Außerdem wird \mathbf{H} durch \mathbf{H}^{cl} aus (8.66) sowie entsprechend die Testfunktion $\delta \mathbf{H}$ durch die Variation

$$\delta \mathbf{H}^{\text{cl}} = \text{Grad} \delta \mathbf{u}^{\text{co}} + \delta \mathbf{H}^{\text{cl|im}} \quad (8.73)$$

ersetzt. Dann wird Gleichung (8.72) zu

$$\delta \Pi^{\text{int}} = \int_V \delta \mathbf{H}^{\text{cl}} \cdot \mathbf{P}^W \, dV - \int_V \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{H}^{\text{cl|im}} \, dV - \int_V \delta \mathbf{P} \cdot \mathbf{H}^{\text{cl|im}} \, dV. \quad (8.74)$$

Im nächsten Schritt werden die freien Spannungen eliminiert, indem gefordert wird, dass diese orthogonal zum erweiterten Verschiebungsgradienten sind. Der Grenzfall bereichsweise konstanter Spannungen \mathbf{P}_0 führt auf die Orthogonalitätsbedingung

$$\int_V \delta \mathbf{H}^{\text{cl|im}} \, dV = 0 \quad (8.75)$$

und analog dazu für beliebige Variationen $\delta \mathbf{P}$

$$\int_V \mathbf{H}^{\text{cl|im}} \, dV = 0. \quad (8.76)$$

³ Ob die inkompatiblen Verschiebungen nur auf die inneren Größen zur Beschreibung der Deformation anzuwenden sind, konform zum Vorschlag von Wilson et al. [186], wird separat in den Abschnitten 5.2.3 und 5.2.4 behandelt.

Beide Bedingungen sind dann erfüllt, wenn die Orthogonalitätsbedingung (8.76) erfüllt ist, siehe Simo und Armero [156] für Details. Dann reduziert sich der innere Anteil der schwachen Form auf

$$\delta \Pi^{\text{int}} = \int_V \delta \mathbf{H}^{\text{cl}} \cdot \mathbf{P}^W \, dV . \quad (8.77)$$

Die Orthogonalitätsbedingung wird mit der klassischen Diskretisierung erfüllt. Der benötigte Verschiebungsgradient wird analog zu den Gleichungen (B.9) bis (B.15) berechnet und im Folgenden kurz zusammengefasst.

Diskretisierung

Die kompatiblen Verschiebungen u_{iI}^{co} eines Knotens I sind direkt mit dessen Koordinaten der Referenz- und Momentankonfiguration verknüpft

$$u_{iI}^{\text{co}} = x_i - X_i = \sum_I N_I (x_{iI} - X_{iI}) = \sum_I N_I u_{iI}^{\text{co}} , \quad (8.78)$$

wobei die üblichen Lagrangeschen Ansatzfunktionen genutzt werden. Deren Ableitung bezüglich der Referenzkoordinaten

$$\mathbf{b}_I^{\text{cl|co}} = \frac{\partial N_I}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial N_I}{\partial \boldsymbol{\xi}} \quad J_{\alpha i} = \sum_I \frac{\partial N_I}{\partial \xi^\alpha} X_{iI} , \quad (8.79)$$

wird mit der Inversen der Jakobimatrix \mathbf{J} berechnet. Für die entsprechende Ableitung der inkompatiblen Ansatzfunktionen $N_1^{\text{im}} = 1 - \zeta^2$, $N_2^{\text{im}} = 1 - \eta^2$ und $N_3^{\text{im}} = 1 - \zeta^2$ gilt

$$\mathbf{b}_A^{\text{cl|im}} = \frac{\partial N_A^{\text{im}}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\det \mathbf{J}_0}{\det \mathbf{J}} \mathbf{J}_0^{-1} \frac{\partial N_A^{\text{im}}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \quad \mathbf{J}_0 = \mathbf{J}|_{\boldsymbol{\xi}=0} , \quad (8.80)$$

wobei die in Elementmitte ausgewertete Jakobimatrix \mathbf{J}_0 und der angegebene Quotient der Determinanten verwendet werden, um die Orthogonalitätsbedingung (8.75) zu erfüllen. Mit den angegebenen Rechenschritten kann nun der klassische inkompatibel erweiterte Verschiebungsgradient angegeben werden

$$\mathbf{H}^{\text{cl}} = \mathbf{H}^{\text{cl|co}} + \mathbf{H}^{\text{cl|im}} = \sum_I \mathbf{H}_I^{\text{cl|co}} + \mathbf{F}_0 \sum_A \mathbf{H}_A^{\text{cl|im}} . \quad (8.81)$$

Der inkompatible Anteil wird dabei mit dem in Elementmitte ausgewerteten Deformationsgradienten \mathbf{F}_0 multipliziert, um Objektivität gegenüber Starrkörperrotationen zu gewährleisten, siehe Glaser und Armero [56]. Wie das überprüft werden kann, wird in Abschnitt 8.4.7 behandelt. Die diskretisierten Verschiebungsgradienten in Gleichung (8.81) sind

$$\mathbf{H}_I^{\text{cl|co}} = \mathbf{u}_I^{\text{co}} (\mathbf{b}_I^{\text{cl|co}})^T \quad \mathbf{H}_A^{\text{cl|im}} = \mathbf{u}_A^{\text{im}} (\mathbf{b}_A^{\text{cl|im}})^T . \quad (8.82)$$

Wird eine Finite-Element-Implementierung mit direkter Ableitung der Verzerrungsenergiefunktion gewählt, siehe Korelc und Wriggers [91], sind damit alle Kinematik-Größen bereits vorhanden. Soll eine schwache Form wie in Gleichung (8.72) genutzt werden, sind die Testfunktionen anzugeben

$$\delta \mathbf{H}_I^{\text{cl|co}} = \delta \mathbf{u}_I^{\text{co}} (\mathbf{b}_I^{\text{cl|co}})^T \quad \delta \mathbf{H}_A^{\text{cl|im}} = \delta \mathbf{u}_A^{\text{im}} (\mathbf{b}_A^{\text{cl|im}})^T, \quad (8.83)$$

für die einfach die Knotenverschiebungen durch die virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{u}$ ersetzt werden.

8.4.3 Beschreibung der vorgeschlagenen ad-hoc-Formulierung

Variationelle Beschreibung

Die ad-hoc-Formulierung soll ebenfalls auf dem Hu-Washizu-Funktional (8.71) basieren. Dieses wird analog zu Gleichung (8.72) variiert und, um den Verschiebungsgradienten \mathbf{h}^{ad} aus Gleichung (8.67) direkt nutzen zu können, mit den Beziehungen $dv = \det \mathbf{F} dV$, $\mathbf{P} = \det \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}$ und $\delta \mathbf{P} = \det \mathbf{F} \delta \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}$ entsprechend auf die Momentankonfiguration bezogen⁴

$$\delta \Pi^{\text{int}} = \int_v \left(\delta \mathbf{h}^{\text{ad}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^W + \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\text{grad} \delta \mathbf{u} - \delta \mathbf{h}^{\text{ad}} \right) + \delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\text{grad} \mathbf{u} - \mathbf{h}^{\text{ad}} \right) \right) dv, \quad (8.84)$$

siehe auch Simo und Armero [156]. Die entscheidende ad-hoc-Annahme besteht darin, den virtuellen Verschiebungsgradienten direkt abhängig von den virtuellen Verschiebungen und der Koordinate \mathbf{x} zu diskretisieren

$$\delta \mathbf{h} = \delta \mathbf{h}(\delta \mathbf{u}, \mathbf{x}) = \text{grad} \delta \mathbf{u}^{\text{co}}(\delta \mathbf{u}^{\text{co}}, \mathbf{x}) + \delta \mathbf{h}^{\text{ad|im}}(\delta \mathbf{u}^{\text{im}}, \mathbf{x}), \quad (8.85)$$

was in der folgenden Diskretisierung noch gezeigt wird. Dieser scheinbar geradlinige Schritt ist aber eine Annahme. Korrekt wäre, die Variation von \mathbf{H} oder \mathbf{F} zu transformieren

$$\delta \mathbf{h} = \delta \mathbf{H} \mathbf{F}^{-1} \quad \text{oder} \quad \delta \mathbf{h} = \delta \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1}, \quad (8.86)$$

was aber zur Folge hat, dass die in [121] angesprochene Volumenerhaltung nicht gewährt ist.

Mit der Annahme (8.85) folgt nun für die schwache Form

$$\delta \Pi^{\text{int}} = \int_v \left(\delta \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\sigma}^W - \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{h}^{\text{im}} - \delta \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{h}^{\text{im}} \right) dv, \quad (8.87)$$

⁴ Aufgrund der Symmetrie der Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ könnte der innere Anteil auch über den virtuellen Almansischen Verzerrungstensor $\delta \mathbf{e} = \text{sym} \delta \mathbf{h}$ ausgedrückt werden.

aus der analog zu den Gleichungen (8.75) und (8.76) wieder zwei Orthogonalitätsbedingungen entstehen

$$\int_v \delta \mathbf{h}^{\text{ad|im}} dV = 0 \quad (8.88)$$

und für beliebige Variationen $\delta \sigma$

$$\int_v \mathbf{h}^{\text{ad|im}} dV = 0. \quad (8.89)$$

Mit der Annahme in Gleichung (8.85) können diese mit der folgenden Diskretisierung erfüllt werden. Die vorgeschlagene ad-hoc-Annahme hat insbesondere zur Folge, dass die von Nagtegaal und Fox [121] vorgeschlagene Volumenbedingung zur Vermeidung von Kinematiken erfüllt wird. Diese wird im Detail im folgenden Abschnitt 8.4.4 besprochen.

Diskretisierung

Die kompatiblen Verschiebungen u_{iI}^{co} eines Knotens I entsprechen denen in Gleichung (8.78) und es werden auch die gleichen Ansatzfunktionen für die kompatiblen und die inkompatiblen Freiheitsgrade genutzt. Der Unterschied ergibt sich in der Ableitung bezüglich der Koordinaten der Momentankonfiguration

$$\mathbf{b}_I^{\text{ad|co}} = \frac{\partial N_I}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{j}^{-1} \frac{\partial N_I}{\partial \xi} \quad j_{\alpha i} = \sum_I \frac{\partial N_I}{\partial \xi^\alpha} x_{iI}, \quad (8.90)$$

mit der Jakobimatrix \mathbf{j} . Im Algorithmus werden die Koordinaten der Momentankonfiguration x_{iI} mit den totalen Verschiebungen u_{iI} durch $x_{iI} = X_{iI} + u_{iI}$ oder, bei Verwendung von Verschiebungsinkrementen Δu_{iI} zwischen zwei Zeitpunkten n und $n+1$, mit $x_{iI}^{n+1} = x_{iI}^n + \Delta u_{iI}$ berechnet. Für die inkompatiblen Ansatzfunktionen gilt

$$\mathbf{b}_A^{\text{ad|im}} = \frac{\partial N_A^{\text{im}}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\det \mathbf{j}_0}{\det \mathbf{j}} \mathbf{j}_0^{-1} \frac{\partial N_A^{\text{im}}}{\partial \xi} \quad \mathbf{j}_0 = \mathbf{J}|_{\xi=0}. \quad (8.91)$$

Der erweiterte Verschiebungsgradient ist damit

$$\mathbf{h}^{\text{ad}} = \mathbf{h}^{\text{ad|co}} + \mathbf{h}^{\text{ad|im}} = \sum_I \mathbf{h}_I^{\text{ad|co}} + \sum_A \mathbf{h}_A^{\text{ad|im}}. \quad (8.92)$$

Der inkompatible Anteil müsste hier zusätzlich zur Erzielung der Objektivität mit dem in Elementmitte ausgewerteten Deformationsgradienten \mathbf{F}_0 multipliziert werden. Die numerische Überprüfung der Objektivität in Abschnitt 8.4.7 hat jedoch gezeigt, dass sich für das in dieser Arbeit genutzte, von kleinen Schritten geprägte, explizite Zeitintegrationsverfahren kein numerisch merkbarer Unterschied ergibt. Für größere Schrittweiten, und damit größere Rotationen je Schritt, ist \mathbf{F}_0 wohl erforderlich. Dazu ist die hier vorgeschlagene Formulierung aber noch weiter zu untersuchen.

Für Gleichung (8.92) werden noch benötigt

$$\mathbf{h}_I^{\text{ad|co}} = \mathbf{u}_I^{\text{co}} (\mathbf{b}_I^{\text{ad|co}})^T \quad \mathbf{h}_A^{\text{ad|im}} = \mathbf{u}_A^{\text{im}} (\mathbf{b}_A^{\text{ad|im}})^T. \quad (8.93)$$

Aufgrund der ad-hoc gewählten Testfunktion ist eine Finite-Element-Implementierung mit direkter Ableitung der Verzerrungsenergiefunktion wie bei Korelc und Wriggers [91] nicht mehr möglich. Für die Testfunktionen soll gelten

$$\delta \mathbf{h}_I^{\text{ad|co}} = \delta \mathbf{u}_I^{\text{co}} (\mathbf{b}_I^{\text{ad|co}})^T \quad \delta \mathbf{h}_A^{\text{ad|im}} = \delta \mathbf{u}_A^{\text{im}} (\mathbf{b}_A^{\text{ad|im}})^T, \quad (8.94)$$

wobei wieder die Knotenverschiebungen, durch die virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{u}$ ersetzt werden.

Anmerkungen

1. Auf eine Multiplikation mit dem in Elementmitte ausgewerteten Deformationsgradienten \mathbf{F}_0 wird im Vergleich zur klassischen Formulierung verzichtet. Beim numerischen Objektivitätstest nach Glaser und Armero [56], siehe Abschnitt 8.4.7, hat sich gezeigt, dass dieser Schritt in einer von sehr kleinen Zeitschrittgrößen dominierten expliziten Berechnung für die Objektivität nicht zwingend erforderlich ist.
2. Durch die vorgeschlagenen ad-hoc-Annahme und den Bezug auf die Momentankonfiguration weicht die vorgeschlagene Formulierung sehr stark von der klassischen Formulierung ab. Die modifizierte Testfunktion $\delta \mathbf{h}^{\text{ad}}$ führt zudem zu einer nicht-symmetrischen Steifigkeitsmatrix. Wie diese die Frequenzen und damit die Skalierungsstrategien der inkompatiblen Massen beeinflusst ist noch analog zur Massenberechnung in Abschnitt 5.5 und zur Frequenzuntersuchung in Kapitel 7 zu untersuchen. Daher wird, um verlässlich zu beurteilen, ob die vorgeschlagene Formulierung die Kinematiken wie gewünscht vermeidet, nur eine implizite Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade in den folgenden numerischen Experimenten in den Abschnitten 8.5 und 8.4.7 genutzt. So sind Effekte einer skalierten inkompatiblen Masse ausgeschlossen. Ansonsten könnten diese entweder mögliche Kinematiken durch eine zu große Skalierung kaschieren oder durch eine zu kleine Skalierung deutlich erschweren, verlässlich zu beurteilen ob eine mögliche Instabilität infolge der Zeitintegration oder einer Kinematik entsteht. Würde im Fall einer zu kleinen Skalierung der Verdacht bestehen, dass die inkompatiblen Freiheitsgrade nicht stabil in der Zeit integriert werden, würde die Masse erhöht werden, was wiederum wegen der erhöhten Trägheit robuster gegenüber Kinematiken erscheint. Dieses Abwägen zwischen stabiler Zeitintegration und Kinematik wird mit der impliziten Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade vermieden. Zur Berechnung der Steifigkeitsgrößen, die zur impliziten Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade benötigt werden, eignet sich aufgrund der stark modifizierten Formulierung ein symbolisches Implementierungskonzept mit ACEGEN besonders gut, da nur die

Kraft abgeleitet werden muss. Wird das Element manuell programmiert, ist die ad-hoc-Annahme insbesondere bei der Linearisierung der virtuellen Arbeit zu beachten, siehe Anhang C für Details.

8.4.4 Volumenbedingung nach Nagtegaal und Fox

Nagtegaal und Fox formulieren in [121] eine sogenannte Volumenbedingung, die in der Fachliteratur meist nicht bei der Formulierung inkompatibel erweiterter Elemente überprüft wird. Diese Volumenbedingung soll sicherstellen, dass die inkompatiblen Freiheitsgrade bei einer homogenen Deformation nicht das Volumen ändern. Die Volumenbedingung wird aus der bestehenden Orthogonalitätsbedingung (8.88) hergeleitet, wozu die Cauchy-Spannungen $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{s} - p\mathbf{1}$ aufgespalten werden – in den hydrostatischen (Volumen ändernden) Druck $p = -1/3\sigma_{ii}$ und die deviatorischen (die Gestalt ändernden) Spannungen $s_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}$. Wird diese Zerlegung in Gleichung (8.88) eingesetzt, ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_v \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{h}^{\text{ad|im}} dv &= \int_v (\mathbf{s} - p\mathbf{1}) \cdot \delta \mathbf{h}^{\text{ad|im}} dv = \int_v \mathbf{s} \cdot \delta \mathbf{h}^{\text{ad|im}} dv - \int_v p\mathbf{1} \cdot \delta \mathbf{h}^{\text{ad|im}} dv \\ &= \int_v \mathbf{s} \cdot \delta \mathbf{h}^{\text{ad|im}} dv - \int_v p \operatorname{tr}(\delta \mathbf{h}^{\text{ad|im}}) dv \end{aligned} \quad (8.95)$$

Wird nun gefordert, dass die inkompatible Erweiterung orthogonal zu bereichsweise konstantem Druck p_0 ist, muss das zugehörige Integral gleich Null sein. Dies führt auf die weitere Bedingung

$$\boxed{\int_v \operatorname{tr}(\delta \mathbf{h}^{\text{ad|im}}) dv = 0}, \quad (8.96)$$

die in der Momentankonfiguration steht und nicht nur für die ad-hoc-Formulierung hergeleitet werden kann, sondern analog auch für die klassische Formulierung.

Mit der getroffenen Annahme für die Testfunktion der ad-hoc-Formulierung wird interessanterweise die Volumenbedingung (8.96) ohne weitere Aktionen erfüllt, was durch Einsetzen der Diskretisierung aus Gleichung (8.94) einfach nachgeprüft werden kann. Es wird angemerkt, dass die Volumenbedingung dabei unabhängig vom vorliegenden Deformationszustand erfüllt wird. Das heißt, es spielt keine Rolle, ob eine homogene Deformation, eine Schub- oder Biegebeanspruchung oder eine Kombination aus verschiedenen Zuständen vorliegt.

Im Gegensatz dazu, ist der inkompatible Verschiebungsgradient $\delta \mathbf{h}^{\text{cl|im}}$ der klassischen Formulierung durch folgende Transformation zu ermitteln

$$\delta \mathbf{h}^{\text{cl|im}} = \delta \mathbf{F}^{\text{cl|im}} (\mathbf{F}^{\text{cl}})^{-1}. \quad (8.97)$$

Wie bereits bei Nagtegaal und Fox [121] festgestellt, wird klar, dass im Fall der klassischen Formulierung die analoge Volumenbedingung zu einer nichtlinearen Beziehung führt

$$\int_v \operatorname{tr}(\delta \mathbf{F}^{\text{cl|im}} (\mathbf{F}^{\text{cl}})^{-1}) dv = 0. \quad (8.98)$$

Hierfür ist es schwierig eine inkompatible Erweiterung zu formulieren, die diese Bedingung erfüllt. Nagtegaal und Fox [121] nutzen eine inkrementelle Beschreibung des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F}_{n+1} = \delta\mathbf{F}_{n+1}\delta\mathbf{F}_n \dots \delta\mathbf{F}_1, \quad (8.99)$$

für ihre Elementformulierung. Damit ist die Volumenbedingung nach [121] nur für homogene Deformationszustände einhaltbar, was eine deutliche Einschränkung darstellt.

8.4.5 Zur Erfüllung der Volumenbedingung mit der inkrementellen Verschiebungsformulierung

Die Volumenbedingung nach Nagtegaal und Fox [121] wird interessanterweise auch für die in Abschnitt 6.4 beschriebene inkrementelle Formulierung erfüllt, die für hypoelastische Materialbeschreibungen mit einer inkrementellen Spannungsberechnung geeignet ist. Dagegen sind die in diesem Kapitel beschriebenen Formulierungen mit totalen Verschiebungen, siehe die Abschnitte 8.4.2 und 8.4.3, auch für hyperelastische Materialformulierungen geeignet.

Bei der inkrementellen und der totalen Formulierung ist die Beschreibung der schwachen Form ähnlich

$$\text{Total} \quad \int_v \delta\mathbf{h}^{\text{ad}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{h}^{\text{ad}}) \, dv = \int_v \delta\mathbf{e}^{\text{ad}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{h}^{\text{ad}}) \, dv \quad (8.100)$$

$$\text{Inkrementell} \quad \int_v \delta\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{D}) \, dv = \int_v \delta\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{D}) \, dv, \quad (8.101)$$

wobei jeweils über die Symmetrie der Cauchy-Spannungen gilt, dass für die totale Formulierung der virtuelle Verschiebungsgradient $\delta\mathbf{h}^{\text{ad}}$ oder die virtuellen Almansi'schen Verzerrungen $\delta\mathbf{e}^{\text{ad}} = \text{sym } \delta\mathbf{h}^{\text{ad}}$ verwendet werden können und für die inkrementelle Formulierung der virtuelle Geschwindigkeitsgradient $\delta\mathbf{L}$ oder die virtuelle Verzerrungsgeschwindigkeit $\delta\mathbf{D} = \text{sym } \mathbf{L}$. Da statt der Geschwindigkeit aber nur die Inkremente über einen Zeitschritt betrachtet werden, wird von einer inkrementellen Formulierung gesprochen. Für die inkrementelle Formulierung wird bei der Erweiterung mit inkompatiblen Freiheitsgraden allerdings nur die Verzerrungsgeschwindigkeit genutzt, also $\delta\mathbf{D} = \delta\mathbf{D}^{\text{co}} + \delta\mathbf{D}^{\text{im}}$, da der schiefsymmetrische Spintensor \mathbf{W} nicht inkompatibel erweitert wird, siehe Abschnitt 6.4. Für die ad-hoc Formulierung in Abschnitt 8.4.3 können $\delta\mathbf{e}^{\text{ad}}$ und $\delta\mathbf{D}$ aufgrund des jeweiligen Bezugs zur Momentan-konfiguration mit der identischen B-Matrix diskretisiert werden, da sich dann nur die Freiheitsgrade – als Inkrement oder totale Verschiebung – unterscheiden. Das heißt, die ad-hoc-Formulierung des virtuellen Verschiebungsgradienten entspricht bis auf die inkrementellen Freiheitsgrade der virtuellen Verzerrungsgeschwindigkeit. Somit wird auch für die inkrementelle Formulierung die Volumenbedingung erfüllt. Um diese

zu beschreiben, ist in Gleichung (8.95) nur $\delta \mathbf{h}^{\text{ad|im}}$ durch $\delta \mathbf{D}^{\text{im}}$ aus Abschnitt 6.4 zu ersetzen, was schließlich auf die folgende Bedingung führt

$$\boxed{\int_v \text{tr} \left(\delta \mathbf{D}^{\text{im}} \right) dv = 0} . \quad (8.102)$$

Es sei angemerkt, dass für die inkrementelle Formulierung keine ad-hoc-Annahme erforderlich ist. In allen untersuchten Beispielen wurden auch keine Kinematiken festgestellt. Weder für das Beispiel des Kupferstab-Impakts in Abschnitt 7.5.1, für den die inkrementelle Formulierung in FEAP⁵ implementiert wurde, noch für die Beispiele in Kapitel 9, für die die Anwenderschnittstelle von LS-DYNA⁶ genutzt wurde.

Ein großer Unterschied zwischen der inkrementellen und der totalen Formulierung besteht in der Berechnung der Spannungen. Mit totalen Verschiebungen werden diese üblicherweise mit dem Deformationsgradienten \mathbf{F} berechnet, der für die ad-hoc-Formulierung einfach über den Verschiebungsgradienten \mathbf{h}^{ad} bestimmt werden kann. Für inkrementelle Verschiebungen hingegen wird oft das mit der Verzerrungsgeschwindigkeit \mathbf{D} berechnete Spannungsinkrement mit der Jaumannschen Spannungsrate in der Zeit fortgeschrieben. Eine *Brücke* zwischen der inkrementellen und der totalen Kinematik kann über den Zusammenhang $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}$ hergestellt werden, siehe dazu auch die Gleichungen (2.20) bis (2.28). Dann kann ausgehend von einer klassischen Formulierung zunächst der Deformationsgradient \mathbf{F}^{cl} , anschließend dessen Inverse $(\mathbf{F}^{\text{cl}})^{-1}$ und zusätzlich mit den inkrementellen Freiheitsgraden auch $\dot{\mathbf{F}}^{\text{cl}}$ bestimmt werden, um schließlich

$$\mathbf{D}^{\text{cl}} = \text{sym} \mathbf{L}^{\text{cl}} = \text{sym} \dot{\mathbf{F}}^{\text{cl}} (\mathbf{F}^{\text{cl}})^{-1} \quad (8.103)$$

zu ermitteln. Es ist nun direkt zu sehen, dass es schwierig ist, mit diesem nichtlinearen Ausdruck die Bedingung (8.102) zu erfüllen – wie bereits in Gleichung (8.98). Eine ähnliche *Brücke* nutzen Adam und Ponthot [1], um ihr klassisch aufgebautes inkompatibel erweitertes Element zu formulieren. Adam und Ponthot [1] stellen keine Schwierigkeiten mit Kinematiken fest, was möglicherweise damit zusammenhängt, dass für die Integration über einen Zeitschritt eine konstante Verzerrungsgeschwindigkeit

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \frac{\ln \left(\mathbf{F}_{n+1}^T \mathbf{F}_{n+1} \right)}{\Delta t} \quad (8.104)$$

angenommen wird.

8.4.6 Erneute Betrachtung des Kinematik-Kriteriums

Das in Abschnitt 8.3.2 hergeleitete Kriterium wird mit der vorgeschlagenen ad-hoc-Formulierung erneut betrachtet. Da die ad-hoc-Formulierung auf die Momentankonfi-

⁵ Zur verwendeten Version von FEAP, siehe Fußnote 6 auf Seite 138.

⁶ Siehe Anhang A.2

guration bezogen ist, wird als Ausgangspunkt die Beschreibung der virtuellen Arbeit durch

$$\delta w = \int_v \delta e_{ij} \sigma_{ij} dv + \int_v \delta u_i \rho \ddot{u}_i dv - \delta u_i f_i^{\text{ext}}, \quad (8.105)$$

genutzt, siehe auch Gleichung 8.38. Darin stellen δe_{ij} die virtuellen Almansischen Verzerrungen dar, σ_{ij} die Cauchyschen Spannungen und das Integral wird über das Volumen v der Momentankonfiguration ausgeführt. Für die oben angenommene ebene Deformation ist der innere Anteil

$$\delta w^{\text{int}} = \int_v (\delta e_{11} \sigma_{11} + \delta e_{22} \sigma_{22} + 2\delta e_{12} \sigma_{12}) dv. \quad (8.106)$$

Die virtuellen Almansischen Verzerrungen sind

$$\delta e_{ij} = (\delta h_{ij} + \delta h_{ji}). \quad (8.107)$$

Neo-Hooke-Materialgesetz

Um das verallgemeinerte Hookesche Gesetz aus Gleichung (2.67) auf die Größen der ad-hoc-Formulierung anzuwenden, müssen die Cauchyschen Spannungen durch eine Transformation der 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungen mithilfe des Deformationsgradienten ermittelt werden. Dadurch entstehen umfängliche Ausdrücke, die nachvollziehbare Schlussfolgerungen deutlich erschweren. Auf die Betrachtung wird daher hier verzichtet. Stattdessen wird analog zu Abschnitt 8.3.2 eine Neo-Hooke-Materialformulierung betrachtet und die resultierenden Steifigkeitsgrößen angegeben. Die zu den 2. Piola-Kirchhoff-Spannungen aus Gleichung (8.40) gehörigen Cauchy-Spannungen sind

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{J} (\lambda \ln J \delta_{ij} + \mu (b_{ij} - \delta_{ij})). \quad (8.108)$$

Beschreibung der Deformation

Erneut wird das 4-knotige Element aus Abbildung 8.4 betrachtet – hier mit Bezug zum homogen deformierten Element in Abbildung 8.4b, also zur Momentankonfiguration. Daher sind die Komponenten zur Transformation zwischen der Ableitung nach den lokalen und globalen Koordinaten ζ_i und x_i sowie der Ausdruck zur Abbildung des Elementvolumens

$$j_{11}^{-1} = \frac{2}{L} \quad j_{22}^{-1} = \frac{2}{h} \quad j_{12}^{-1} = j_{21}^{-1} = 0 \quad j = \frac{Lh}{4}, \quad (8.109)$$

wobei die Länge L erhalten bleibt, da keine Querkontraktion angenommen wird. Alle anderen Deformationen sind identisch zur klassischen Formulierung und werden

hier nochmals zusammengefasst. So ist die horizontale Knotenverschiebung u_θ aus Abbildung 8.4c

$$u_\theta = \frac{h}{2} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx \frac{h\theta}{4}, \quad (8.110)$$

die Verschiebungen infolge der homogenen Deformation sind

$$u_1^h = 0 \quad u_2^h = \frac{1}{2}H(\lambda_2 - 1)\eta \quad (8.111)$$

und die Verschiebungen infolge Biegung und des inkompatiblen Anteils sind

$$u_1^b = \frac{h}{4}\zeta\eta\theta \quad u_2^b = (1 - \zeta^2)\alpha. \quad (8.112)$$

Zum Vergleich, siehe die Gleichungen (8.46), (8.43) und (8.45), wobei $h = \lambda_2 H$ gilt. Aus der Summe der homogenen Deformation und der Biegedeformation ergibt sich mit Gleichung (8.109) der Verschiebungsgradient bezogen auf die Momentankonfiguration

$$h_{11}^{\text{ad}} = \frac{h}{2L}\eta\theta \quad h_{12}^{\text{ad}} = \frac{1}{2}\zeta\theta \quad (8.113)$$

$$h_{21}^{\text{ad}} = -\frac{4}{L}\zeta\alpha \quad h_{22}^{\text{ad}} = 1 - \frac{1}{\lambda_2}. \quad (8.114)$$

Mit der Beziehung $F_{ij}^{-1} = \delta_{ij} - h_{ij}$ kann die Inverse des Deformationsgradienten und damit auch der Deformationsgradient berechnet werden. So können der linke Cauchy-Green-Tensor $b_{ij} = F_{ik}F_{jk}$ und damit die Cauchy-Spannungen nach Gleichung (8.108) berechnet werden.

Es kann gezeigt werden, dass der hier berechnete Deformationsgradient nur ohne den inkompatiblen Freiheitsgrad ($\alpha = 0$) identisch zu dem in Gleichung (8.49) ist, für Details wird auf Abschnitt 8.4.1 verwiesen.

Ad-hoc-Beschreibung des virtuellen Verschiebungsgradienten

Mit den virtuellen Verschiebungen

$$\delta u_1 = \frac{h}{4}\zeta\eta\delta\theta \quad \delta u_2 = (1 - \zeta^2)\delta\alpha. \quad (8.115)$$

gilt mit der ad-hoc-Beschreibung aus Gleichung (8.85) für den virtuellen Verschiebungsgradienten

$$\delta h_{11}^{\text{ad}} = \frac{h\eta}{2L}\delta\theta, \quad \delta h_{12}^{\text{ad}} = \frac{\zeta}{2}\delta\theta \quad (8.116)$$

$$\delta h_{21}^{\text{ad}} = -\frac{4\zeta}{L}\delta\alpha, \quad \delta h_{22}^{\text{ad}} = 0. \quad (8.117)$$

Resultierende Steifigkeitsausdrücke

Mit den Komponenten des Verschiebungsgradienten in den Gleichungen (8.113) und (8.114) wird der Deformationsgradient berechnet und dazu verwendet, den linken Cauchy-Green-Tensor b_{ij} , die Determinante $J = \det \mathbf{F}$ und schließlich die Cauchyschen Spannungen σ_{ij} in Gleichung (8.108) zu berechnen.

Werden alle Ausdrücke (8.116), (8.117), (8.113) und (8.114) entsprechend in die Gleichungen (8.107) sowie (8.108) eingesetzt, ergibt sich mit der konstanten Breite B aus Gleichung (8.106) der Ausdruck

$$\delta w^{\text{int}} = B \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\delta e_{11} \sigma_{11} + \delta e_{22} \sigma_{22} + 2\delta e_{12} \sigma_{12}) \frac{Lh}{4} d\zeta d\eta = [\delta\theta \quad \delta\alpha] \begin{bmatrix} f_{\theta}^{\text{ad}} \\ f_{\alpha}^{\text{ad}} \end{bmatrix} \quad (8.118)$$

mit den Kräften

$$\begin{bmatrix} f_{\theta}^{\text{ad}} \\ f_{\alpha}^{\text{ad}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{\theta\theta}^{\text{ad}} & K_{\theta\alpha}^{\text{ad}} \\ K_{\alpha\theta}^{\text{ad}} & K_{\alpha\alpha}^{\text{ad}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \end{bmatrix}. \quad (8.119)$$

Die Steifigkeiten zur Berechnung der Kräfte sind

$$K_{\theta\theta}^{\text{ad}} = \lambda_2^2 \frac{BH^3}{12L} \left(E + \mu \left(\frac{L}{H} \right)^2 \right) \equiv K_{\theta\theta}^{\text{cl}} \quad (8.120)$$

$$K_{\theta\alpha}^{\text{ad}} = -\frac{2}{3} \mu \lambda_2 BH \equiv \lambda_2 K_{\theta\alpha}^{\text{cl}} \quad (8.121)$$

$$K_{\alpha\theta}^{\text{ad}} = -\frac{2}{3} \mu \lambda_2^2 BH \equiv \lambda_2^2 K_{\alpha\theta}^{\text{cl}} \quad (8.122)$$

$$K_{\alpha\alpha}^{\text{ad}} = \frac{16}{3L} \mu \lambda_2 BH \equiv \lambda_2 K_{\alpha\alpha}^{\text{cl}}, \quad (8.123)$$

die direkt mit den Steifigkeiten der klassischen Formulierung verglichen werden, siehe die Gleichungen (8.56) bis (8.58). Zur besseren Unterscheidung wird die Bezeichnung *cl* den Steifigkeiten der klassischen Formulierung hier nachträglich hinzugefügt. Der kompatible Anteil ist für die klassische und die ad-hoc-Formulierung *identisch*. Nur die inkompatiblen Anteile unterscheiden sich und führen zur kinematik-freien ad-hoc-Formulierung.

Ohne weitere Herleitung resultiert für beliebige virtuelle Größen das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} f_{\theta}^{\text{ad}} \\ f_{\alpha}^{\text{ad}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_{\theta} & 0 \\ 0 & m_{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^{\text{ext}} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (8.124)$$

Der Freiheitsgrad θ wird analog zu Gleichung (8.29) gelöst und die Kondensation von α führt mit der Forderung $f^{\alpha} = 0$ auf

$$K_{\alpha\theta}^{\text{ad}} \theta + K_{\alpha\alpha}^{\text{ad}} \alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = -\frac{K_{\alpha\theta}^{\text{ad}}}{K_{\alpha\alpha}^{\text{ad}}} \theta, \quad (8.125)$$

und ergibt eingesetzt in f_{θ}^{ad}

$$f_{\theta}^{\text{ad}} = \left(K_{\theta\theta}^{\text{ad}} - \frac{K_{\theta\alpha}^{\text{ad}} K_{\alpha\theta}^{\text{ad}}}{K_{\alpha\alpha}^{\text{ad}}} \right) \theta = K^{\text{ad|cnd}} \theta \quad (8.126)$$

mit

$$K^{\text{ad|cnd}} = \lambda_2^2 E \frac{BH^3}{12L}. \quad (8.127)$$

Daraus ergibt sich mit Betrachtung der Rotation über die Länge L die auf eine homogene Deformation sich ändernde Biegesteifigkeit

$$(EI)^{\text{h|cnd}} = \frac{f_{\theta}^{\text{ad}}}{\frac{\theta}{L}} = K^{\text{ad|cnd}} L = \lambda_2^2 E \frac{BH^3}{12}, \quad (8.128)$$

die verglichen mit der analytischen Biegesteifigkeit EI mit λ_2^2 skaliert wird.

8.4.7 Objektivität der ad-hoc-Formulierung

Bei einem beidseitig eingespannten Biegebalken nach Glaser und Armero [56] wird an einem Ende eine Verschiebung aufgebracht, die zu einer Normal-, Schub- und Drehbeanspruchung führt, siehe Abbildung 8.6. Für die numerische Simulation wird das Neo-Hookesche Materialgesetz aus Gleichung (8.39) verwendet.

Nachdem die Verschiebung vollständig aufgebracht wurde, werden die Knoten an beiden Enden festgehalten und der Biegebalken ausschließlich rotiert, was durch

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_L &= \mathbf{Q} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_L - \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_L & \quad \mathbf{Q} &= \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}_R &= \mathbf{Q} \left(\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_R + \begin{bmatrix} 0 \\ 2H \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}_R \end{aligned} \quad (8.129)$$

beschrieben wird. Dabei ist \mathbf{Q} die Rotationsmatrix und mit L und R werden die Knotenverschiebungen und am linken Ende (L) und am rechten Ende (R) bezeichnet. Da die Sinus-Kurve für $\phi = 0^\circ$ direkt eine Steigung aufweist, wird sich beim gewählten expliziten Zeitintegrationsverfahren ein dynamischer Effekt einstellen. Dieser wird mit einer massenabhängigen Dämpfung nach Abschnitt 2.3.3 in eine quasi-statische Lösung überführt.

Als Ergebnisgrößen werden die Normalkraft, die Querkraft und das Biegemoment betrachtet. Der Test wird erfüllt, wenn alle drei Größen invariant gegenüber der Starrkörperrotation sind. Abbildung 8.7 zeigt die ermittelten Größen jeweils über die Zeit aufgetragen. Dabei ist die zu Beginn quasistatische Belastung gefolgt von der Starrkörperrotation gekennzeichnet.

Zu Beginn der Rotation ist jeweils noch eine kleinere Oszillation zu erkennen, die trotz der Dämpfung noch erkennbar ist. Diese entsteht genau zu Beginn der

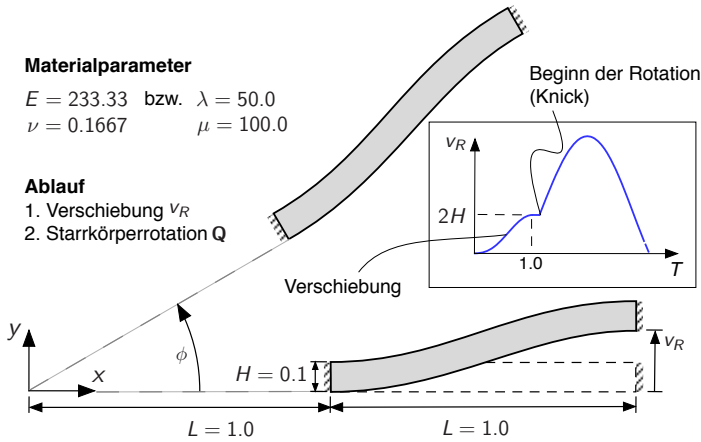


Abbildung 8.6: Deformierter Biegebalken mit anschließender Starrkörperrotation.

Rotationsbewegung durch die Sinuskurve verursacht, die zu einem Knick in der Verschiebungskurve und damit zu einem Sprung in der vorgegebenen Geschwindigkeit führt. Für alle Elementformulierungen sind zudem noch leichte Wellen über eine Länge von ungefähr 180° zu erkennen. Dabei handelt es sich um einen reinen Effekt der dynamischen Betrachtung.

Wie bei Glaser und Armero [56] unterscheiden sich die Ergebnisse der betrachteten Elementformulierungen. Wird eine Netzverfeinerung vorgenommen, konvergieren aber die klassische und die ad-hoc-Formulierung zu den selben Werten, siehe Tabelle 8.1. Die Werte der klassischen Formulierung stimmen hierbei mit ihrem Pendant $Q1/E4$ bei Glaser und Armero [56] überein.

Tabelle 8.1: Konvergenzverhalten der Schnittgrößen des Biegebalkens beim Objektivitätstest.

Vernetzungsdichte	Normalkraft N			Querkraft S			Biegemoment M		
	Disp	Wil9 cl	Wil9 ad	Disp	Wil9 cl	Wil9 ad	Disp	Wil9 cl	Wil9 ad
6x1	0.490	0.510	0.488	0.213	0.166	0.159	0.058	0.032	0.031
12x2	0.500	0.503	0.498	0.175	0.162	0.161	0.037	0.031	0.031
24x4	0.500	0.500	0.499	0.164	0.161	0.160	0.032	0.030	0.030
48x8	0.499	0.500	0.499	0.161	0.160	0.160	0.031	0.030	0.030

Anmerkung zur Objektivität

Beim Element Wil9|cl wurde die Formulierung so modifiziert

$$\mathbf{H}^{cl} = \mathbf{H}^{cl|co} + \mathbf{F}_0^{cl} \mathbf{H}^{cl|im}, \quad (8.130)$$

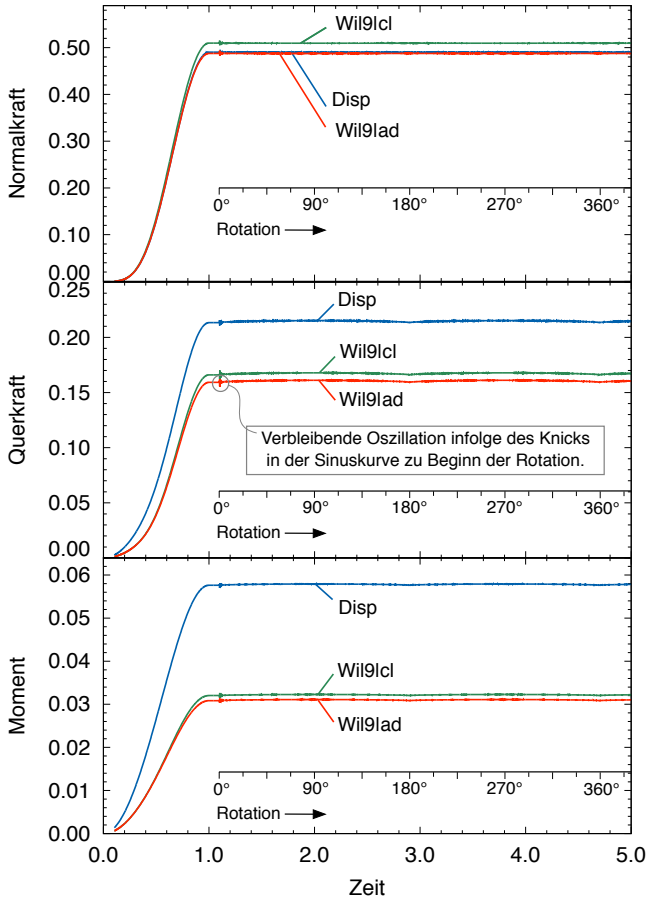


Abbildung 8.7: Darstellung der Normkraft, der Querkraft und des Biegemoments über die Zeit und den Rotationswinkel der Starrkörperrotation, die beginnt, nachdem der Biegebalken vollständig deformiert wurde.

dass nicht mehr mit F_0^{cl} multipliziert wird. Für diese Modifikationen sind die Resultate aber nahezu identisch mit denen der ursprünglich beschriebenen Formulierung.

Die Multiplikation mit F_0 wurde von Glaser und Armero [56] vorgeschlagen, damit die inkompatiblen Erweiterungen objektiv gegenüber Starrkörperbewegungen sind. Allerdings sind bei expliziten Simulationen – wie in der vorliegenden Arbeit – die Zeitschritte üblicherweise so klein, dass zwischen zwei Schritten auf diese Maßnahme verzichtet werden kann. In diesem Beispiel beträgt die Zeitschrittgröße während der Rotation ungefähr $\Delta t = 1.7 \cdot 10^{-5}$, woraus sich eine Rotation von 0.0017° pro Zeitschritt ergibt. Für größere Schrittweiten, wie sie in impliziten Simulationen üblich sind, ist aber die Multiplikation mit F_0 nach Glaser und Armero [56] unverzichtbar. Dann wäre auch eine Modifikation in der Form

$$\mathbf{h}^{\text{ad}} = \mathbf{h}^{\text{ad|co}} + \mathbf{F}_0^{\text{ad}} \mathbf{h}^{\text{ad|im}} \quad (8.131)$$

für die ad-hoc-Formulierung vorzunehmen.

8.5 Numerische Experimente

8.5.1 Biegesteifigkeit eines Elements

Aufbau des Beispiels

In diesem Abschnitt werden die klassische und die ad-hoc-Formulierung für ein einfaches numerisches Experiment miteinander verglichen, um die Aussagen der Abschnitte 8.3 und 8.4 zu überprüfen. Wie bei Sussman und Bathe [163] wird ein rechtwinkliges Element der Länge $L = 5$, Höhe $H = 0.5$ und Einheitsbreite $B = 1$ zunächst homogen deformiert und anschliessend durch Knotenverschiebungen eine reine Biegedeformation aufgebracht. Der Elastizitätsmodul ist $E = 1 \cdot 10^6$ und die Querkontraktion $\nu = 0$.

Hier werden drei Varianten von Randbedingungen untersucht

- Bei der ersten Variante wird die homogene Kompression vernachlässigt und die Knoten weder festgehalten noch verschoben sodass $\varepsilon_{22} = \mathbf{frei}$ ist. In diesem Fall ist für die gegebenen Materialparameter nach Gleichung (8.34) mit einer Biegesteifigkeit von $EI = 10416.0$ das erwartete Biegemoment $M = EI\theta/L = 2.08333$, wenn als Rotation $\theta = 0.001$ gewählt wird. Damit ist nach Gleichung (8.12) die Biegebeanspruchung $u_\theta = H\theta/4 = 0.5 \cdot 0.001/4 = 0.000125$.
- In der zweiten Variante werden die Knoten in vertikaler Richtung festgehalten, sodass $\varepsilon_{22} = \mathbf{0}$ gilt. Damit wird ein deutlich steiferes Elementverhalten mit größerem Biegemoment erzeugt, da das Element so keine vertikale Verschiebung erfahren kann. Für das Element mit der inkompatiblen Erweiterung wird für ein einzelnes Element aber die gleiche Lösung wie im ersten Fall erwartet. Der Grund ist, dass die Verschiebung des inkompatiblen Freiheitsgrads weder an den Elementknoten noch im Elementfeld durch Randbedingungen festgehalten wird.
- In einer dritten Variante werden die Knoten – um zu überprüfen, ob die Steifigkeit Null wird – vertikal zusammengeschoben, sodass sich entsprechend Gleichung (8.37) die kritische Verzerrung

$$\varepsilon_{22} = -\left(\frac{H}{L}\right)^2 = -\left(\frac{0.5}{5}\right)^2 = -0.01 \quad (8.132)$$

ergibt, bei der Kinematiken für die klassische Formulierung erwartet werden. Daraus resultiert die Knotenverschiebung $u_{2h} = -0.0025$ an der Ober- und Unterseite. Der zeitliche Verlauf und die zugehörige Deformation sind für diesen Fall in Abbildung 8.8 dargestellt. Wie für die zweite Variante, müssen die aufgebrachten Zwänge dieses Falls ebenfalls zu einer steiferen Antwort der Elemente führen, für die aber jeweils keine Referenzlösung vorliegt.

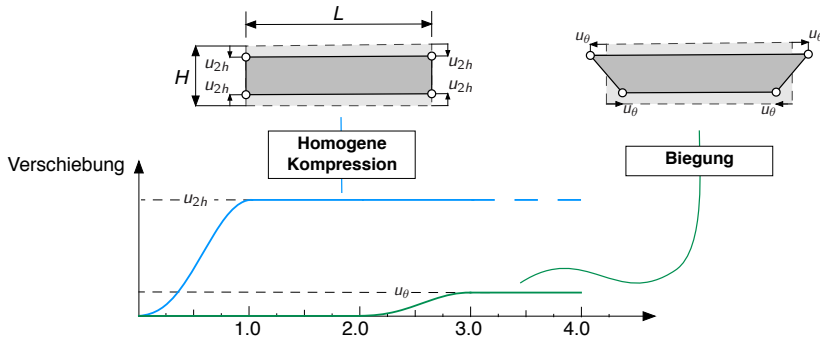


Abbildung 8.8: Zeitlicher Verlauf der aufgetragenen homogenen Kompression und folgenden Biegedeformation für die exemplarische Berechnung der Biegesteifigkeit in Abschnitt 8.5.1.

Da die Rotation kein Freiheitsgrad des Elements ist, müssen die inneren Knotenkräfte an der Ober- und Unterseite des Elements mit

$$M = (F^{\text{oben}} + F^{\text{unten}}) \frac{H}{2} \quad (8.133)$$

in ein Biegemoment M transformiert werden, siehe Abbildung 8.9. Dann kann ausgehend von Gleichung (8.34) eine Biegesteifigkeit mit $EI = ML/\theta$ bestimmt werden.

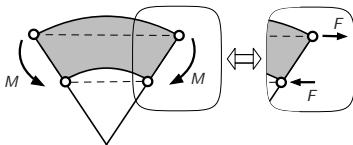


Abbildung 8.9: Zusammenhang zwischen Biegemoment und dazu äquivalentem Kräftepaar, s. Gl. (8.133).

Die klassische und die ad-hoc-Formulierung des Wil9-Elements werden ohne die in den vorhergehenden Abschnitten 8.3.1 und 8.4.6 angegebenen Annahmen mit einem generalisierten Hookeschen Material verwendet, siehe Beschreibung in den Abschnitten 8.4.2 und 8.4.3. Die inkompatiblen Freiheitsgrade werden zu jedem expliziten Schritt statisch kondensiert, siehe Abschnitt 5.4.4. So können die klassische und die ad-hoc-Formulierung miteinander verglichen werden, ohne deren Verhalten durch die inkompatible Massenskalierung zu beeinflussen.

Diskussion der Ergebnisse

Die Ergebnisse der drei Fälle sind in Tabelle 8.2 zusammengefasst. Darin werden die klassische und die ad-hoc-Formulierung mit dem Standard-Verschiebungselement verglichen. Die resultierenden Biegemomente sind auf die analytische Lösung des Falls $\varepsilon_{22} = \text{frei}$ normiert.

Tabelle 8.2: Normiertes Biegemoment, berechnet nach zunächst homogener Beanspruchung (linke Spalte, von oben nach unten) $\varepsilon_{22} = \text{frei}$ $\varepsilon_{22} = 0$ und $\varepsilon_{22} = -0.01$ und danach aufgebrachtter Biegedeformation, s. Abb. 8.8. Normierung aller Fälle auf analytische Referenzlösung mit $\varepsilon_{22} = \text{frei}$, s. Abschn. 8.5.1.

Netzdichte	$L/H = 10$ Kritisch ^a		$L/H = 10$ Nicht mehr kritisch ^c				$L/H = 1$ Optimal ^d			
	1×1	$(1 \times 1)^b$	2×2	4×4	8×8	16×16	10×1	20×2	40×4	80×8
$\varepsilon_{22} = \text{frei}$										
Disp	51.00	(50.50)	13.51	4.12	1.78	1.20	1.50	1.13	1.03	1.01
Wil9 cl	1.00	(1.00)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
Wil9 ad	1.00	(1.00)	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
$\varepsilon_{22} = 0$										
Disp	51.00	(6.04)	50.45	24.22	14.85	10.70	15.00	10.99	9.11	8.45
Wil9 cl	1.00	(0.12)	37.94	13.29	10.54	9.34	12.25	10.01	8.77	8.34
Wil9 ad	1.00	(0.12)	37.95	13.29	10.54	9.34	12.25	10.01	8.77	8.34
$\varepsilon_{22} = -0.01$										
Disp	50.98	(6.12)	50.45	24.18	14.78	10.62	14.95	10.90	8.99	8.33
Wil9 cl	0.01	(0.001)	36.95	12.82	10.29	9.15	12.06	9.84	8.62	8.20
Wil9 ad	1.01	(0.12)	36.85	13.04	10.42	9.24	12.13	9.90	8.69	8.28

^a Ein Element mit kritischem Seitenverhältnis nach Glg. (8.37).

^b In Klammern (1×1), Normierung auf jeweils feinste Diskretisierung mit 80×8 Elementen.

^c Trotz $L/H = 10$ nicht mehr kritisch, da mit Verfeinerung das Seitenverhältnis je Element abnimmt.

^d Netzverfeinerung für optimalen Wert $L/H = 1$.

- Wie erwartet erhält man für den Fall $\varepsilon_{22} = \text{frei}$ mit einem einzelnen Element sowohl mit der klassischen als auch der ad-hoc-Formulierung die exakte Lösung. In Abbildung 8.10 wird beispielhaft die zeitliche Evolution des Biegemoments, das direkt in die Biegesteifigkeit umgerechnet werden kann, dargestellt. Für die Abbildung reiner Biegung mit einem linearen Element ist die Methode inkompatibler Verschiebungen in diesem Fall ideal geeignet. Die reine Verschiebungsformulierung ist dagegen viel zu steif. Wird die Netzdichte erhöht, nähert sich das Disp-Ergebnis erwartungsgemäß der exakten Lösung, Für die Wil9-Elemente ändert sich das Ergebnis nicht.
- Im Fall $\varepsilon_{22} = 0$ treten für die Betrachtung eines einzelnen Elements wieder exakt die gleichen Zahlen auf. Erwartet wird aber ein steiferes Verhalten, da die klassische Biegedeformation durch die Bedingung $\varepsilon_{22} = 0$ behindert wird. Mit erhöhter Netzdichte konvergiert das Disp-Element dann auch wie erwartet gegen einen deutlich größeren Wert als im ersten Fall. Wie oben erwähnt soll hier aber nicht die Biegung für bestimmte Randbedingungen, sondern nur die Charakteristik der betrachteten Elemente, eingehend analysiert werden. Daher wird es als ausreichend betrachtet, feststellen zu können, dass die Konvergenz auch der inkompatiblen Elemente gegen einen höheren Wert als im ersten Fall erfolgt. In Abbildung ?? werden zur Erklärung die Randbedingungen für inkompatible Ver-

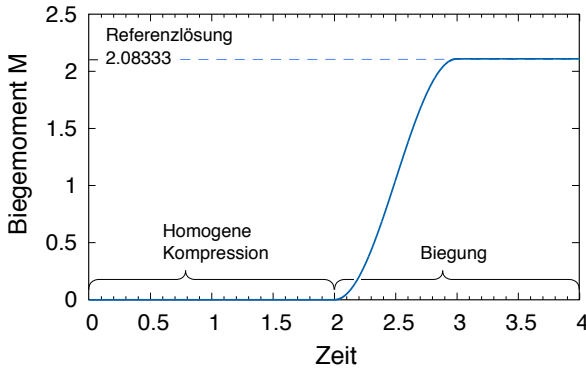


Abbildung 8.10: Berechnetes Biegemoment über die Zeit für ein Element, s. Beanspruchung in Abb. 8.8. Hier: $\varepsilon_{22} = -0.01$ für Formulierung Wil9|ad, s. Tab. 8.2.

schiebungen an einem einzelnen Element und für zwei nebeneinander liegende Elemente dargestellt. Aufgrund der Inkompatibilität können die Randbedingungen somit nur für eine zunehmende Erhöhung der Netzdichte besser abgebildet werden. Für die zunehmende Netzdichte konvergieren die Wil9-Elemente dann ebenfalls analog zur Disp-Formulierung. Die Wil9-Formulierung ist nur noch geringfügig weicher als das Disp-Element. Das heißt, dass inkompatible Verschiebungen bei zu groben Netzen in Bereichen mit vielen Randbedingungen durchaus auch unvorteilhaft sein können oder zumindest keinen Vorteil bieten.

- Der letzte Fall mit $\varepsilon_{22} = -0.01$ ist in der Betrachtung des Rands analog zum vorhergehenden Fall und der Erläuterung in Abbildung ???. Die Disp-Formulierung führt auf etwas kleinere Werte, also ein weiches Ergebnis im Vergleich zu $\varepsilon_{22} = 0$. Das ist plausibel, da mit der minimalen Reduktion der Höhe auch eine Reduktion des Flächenmoments einhergeht. Für die anschließende Verschiebung der Knoten in die Biegeform ist ein weiches Ergebnis daher ebenfalls plausibel. Wie erwartet, wird die Biegesteifigkeit der klassischen Formulierung sehr klein (quasi gleich Null) während die der ad-hoc-Formulierung erhalten bleibt. Der Wert 1.01 ist trotzdem kein korrektes Ergebnis, da aufgrund der Randbedingungen wieder ein steiferes Verhalten vorliegen müsste. Mit erhöhter Netzdichte nähern sich sowohl die klassische als auch die ad-hoc-Formulierung mit kleinen Unterschieden wieder dem Verhalten des Falls $\varepsilon_{22} = 0$ an.

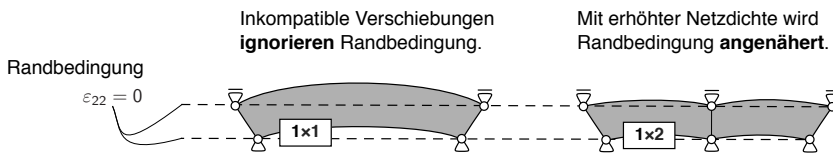


Abbildung 8.11: An Elementknoten aufgebraachte Dirichlet-Randbedingungen, die für die inkompatiblen Freiheitsgrade des Elements nur für zunehmende Netzdichte eingehalten werden.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass mit diesem einfachen Beispiel, anhand der Wirkungsweise inkompatibler Freiheitsgrade, gezeigt werden kann, wie die Kinematik infolge homogener Vordehnung entsteht. Die numerischen Ergebnisse der klassischen Formulierung decken sich mit denen von Sussman und Bathe [163], die dieses Beispiel auch mit einer klassischen Formulierung untersuchen. Für die vorgeschlagene ad-hoc-Formulierung bleibt die Steifigkeit interessanterweise erhalten, das heißt es treten keine Kinematiken auf.

8.5.2 Kompression eines Blocks

Aufbau des Beispiels

Dieses von Sussman und Bathe [163] stammende Beispiel, siehe Abbildung 8.12 für Geometrie, Randbedingungen und Materialparameter, wird durch einige die explizite Simulation bedingende Besonderheiten noch modifiziert. Der Block wird durch eine gleichmäßige über die gesamte obere Kante aufgebrauchte Verschiebung komprimiert. Für das Seitenverhältnis von 1/8 aller Elemente resultiert mit Gleichung (8.37) für die klassische Formulierung eine kritische Verzerrung von $\varepsilon_{crit} = -1/64$ in Richtung der aufgebrauchten Verschiebung. Bei einer Höhe des Blocks von 20 mm ergibt sich dann eine kritische Verschiebung von $v_{crit} = -0.3125$ mm, bei der die Steifigkeit gegenüber Biegung gleich Null wird. Die kompressive Verschiebung wird in allen Fällen mindestens bis zu ihrem doppelten Wert aufgebracht, um eventuell verzögert auftretende Kinematiken nicht zu übersehen. Dabei ist zu beachten, dass der geometrisch lineare Bereich, auf dem das Kriterium (8.37) basiert, bereits überschritten ist.

Für die transiente, explizite Simulation wurde beobachtet, dass die Kinematiken abhängig von der Kompressionsrate verzögert oder sogar verhindert wurden. Der Grund sind die, im Gegensatz zu einer implizit-statischen Simulation, auftretenden Trägheitskräfte. Je schneller ein Knoten verschoben wird, desto größer ist seine in Verschiebungsrichtung wirkende Trägheitskraft, die überwunden werden muss, um die Kinematik-Form einzunehmen. Ansonsten ist keine weitere Energie erforderlich, um in die kinematische Form zu springen, daher auch der Name Null-Energie-Form. Dieser Effekt wurde ver-

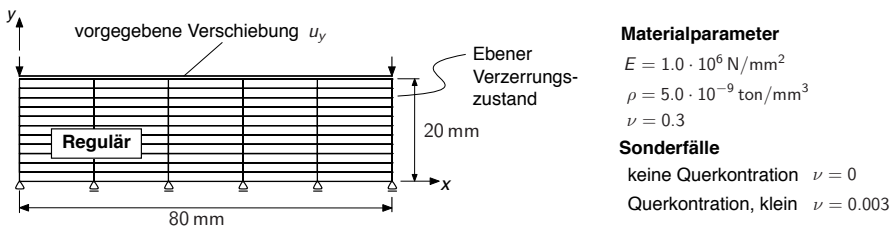


Abbildung 8.12: Vernetzungen und Materialparameter des komprimierten Blocks im ebenen Verformungszustand, s. Abschn. 8.5.2.

stärkt für die Vernachlässigung von Querkontraktion beobachtet, bei der keine Kräfte in horizontaler Richtung entstehen. Um trotzdem den für $\nu = 0$ hergeleiteten Wert der kritischen Verschiebung mit dem dieser Simulation zu vergleichen, wurde eine sehr kleine Querdehnzahl von $\nu = 0.003$ verwendet, um Aktivität in horizontaler Richtung und damit auch die Kinematiken auszulösen. Der Zusammenhang zwischen den Kinematiken und der Trägheit wird mit den Kompressionsraten 5000 mm/s, 500 mm/s, 50 mm/s und 5 mm/s untersucht.

Zudem wurde ein Kraft-Impuls sowie zwei modifizierte Vernetzungen betrachtet, auf die am Ende dieses Abschnitts eingegangen wird.

Wie die Kinematiken erkannt werden

Abbildung 8.13 zeigt einen typischen Fall einer Kinematik, bei der die horizontale Verschiebung in einem diagonal verlaufenden Streifenmuster über das Modell verteilt ist. Dem wird die kinematik-freie Verschiebungsverteilung, die gleichmäßig in horizontaler Richtung wächst gegenübergestellt. Diese visuelle Beurteilung wird durch die zusätzliche Betrachtung der Vertikalkraft an der Oberkante des Blocks gestützt, die dann trotz zunehmender Kompression nicht mehr wächst sobald die Elemente nach einem Biegesteifigkeitsverlust in die zugehörige *Hourglass*-Form springen.

Als weiterer Indikator für die Kinematiken könnten beispielsweise auch die Normalspannung in horizontaler Richtung oder die Schubspannungen der xy-Ebene betrachtet werden. Diese sind ohne Querkontraktion gleich Null und steigen mit Querkontraktion gleichmäßig an. Im Fall einer Kinematik wurden im Gegensatz dazu Oszillationen beobachtet.

Untersuchungen auf Kinematik für die klassische und die ad-hoc-Formulierung

Sowohl die klassische als auch die ad-hoc-Formulierung des Wil9-Elements werden untersucht und mit den Bezeichnungen Wil9|cl und Wil9|ad voneinander unterschieden, wobei cl für die klassische und ad für die ad-hoc-Formulierung stehen. Die

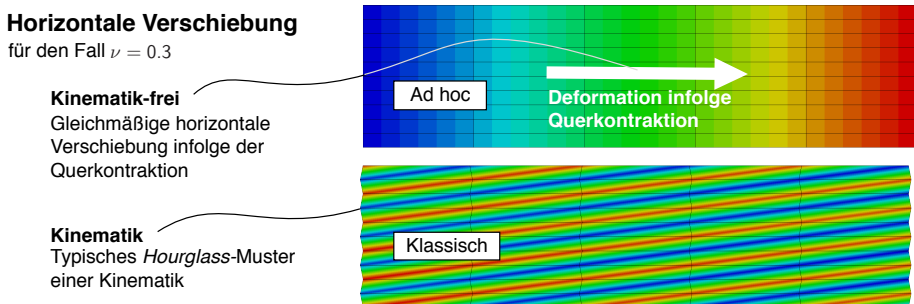


Abbildung 8.13: Horizontale Verschiebungsverteilung für die Vernetzung aus Abb. 8.12.

inkompatiblen Freiheitsgrade werden jeweils gemäß Abschnitt 5.4.4 in jedem expliziten Schritt kondensiert. Damit wird die bestmögliche Vergleichbarkeit zwischen den Formulierungen sichergestellt, da dann keine die Kinematiken verzögernden Effekte infolge einer inkompatiblen Massenskalierung auftreten können, wie bei der einfachen Kontrolle nach Abschnitt 8.2. Die explizite Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade mit einer der Strategien aus Abschnitt 7.4 wird also nicht genutzt, da für die ad-hoc-Formulierung zudem noch eine entsprechende Untersuchung zur verlässlichen Abschätzung der inkompatiblen Massen durchzuführen ist.

Tabelle 8.3 enthält die Werte der kritischen Verschiebung, bei der die Kinematik ausgelöst wird. Tritt keine Kinematik auf, wird das durch einen horizontalen Strich (—) gekennzeichnet. Die Ergebnisse werden im Folgenden diskutiert.

Mit der klassischen Formulierung $Wil9|cl$ tritt wie erwartet *Hourglassing* auf. Die zugehörige kritische Verschiebungsgröße überschreitet den mit vereinfachenden Annahmen vorhergesagten Wert von -0.3125 mm bei höheren Kompressionsraten, konvergiert aber für abnehmende Kompressionsraten in dessen Richtung, siehe Tabelle 8.3. Die Kinematik tritt bei Vernachlässigung der Querkontraktion für alle Kompressionsgeschwindigkeiten unerwarteterweise zunächst nicht auf. In diesen Fällen fehlt scheinbar ein numerischer Auslöser. Wird eine sehr kleine Querkontraktion ($\nu = 0.003$) berücksichtigt, tritt dann die Kinematik auf und konvergiert (bei langsamer werdender Kompression) zum kritischen Wert, der im analytischen Beispiel unter Vernachlässigung von Querkontraktion ermittelt wurde. Bei größerer Querkontraktionszahl von $\nu = 0.3$ konvergiert die kritische Verschiebung zu einem etwas erhöhten Wert, was zu erwarten ist, da infolge der größeren Querdehnung auch bei der gleichen Kompression größere Kräfte entstehen.

Tabelle 8.3: Auslösen der Kinematik bei Erreichen eines kritischen Verschiebungswertes (— $\hat{=}$ kein krit. Wert). Theoretisch kritischer Wert: 0.3125 mm, s. Glg. (8.37). Gegenüberstellung der kompressiven Verschiebung in mm der klassischen cl und der ad-hoc-Formulierung ad bei einer regulären Vernetzung mit Variation der Querdehnzahl, s. Abb. 8.12.

	Kompressionsrate in mm/sec				Kommentar
	5000	500	50	5	
$\nu = 0$					
$Wil9 cl$	—	—	—	—	Kinematik tritt ohne Querkontraktion unerwarteterweise nicht auf.
$Wil9 ad$	—	—	—	—	Robust, wie durch Erfüllung der Volumenbedingung erwartet.
$\nu = 0.003$					
$Wil9 cl$	0.410	0.335	0.320	0.315	Konvergenz zu kritischem Wert, s. Glg. (8.37)
$Wil9 ad$	—	—	—	—	Robust, siehe $\nu = 0$
$\nu = 0.3$					
$Wil9 cl$	0.370	0.350	0.340	0.340	Konvergenz zu höherem kritischem Wert, da $\nu > 0$.
$Wil9 ad$	—	—	—	—	Robust.

Die Untersuchung aus Abschnitt 8.3.1 wird hier bestätigt. Die klassische Formulierung Wil9|cl ist nicht robust gegenüber Kinematiken. Dagegen tritt mit der ad-hoc-Formulierung Wil9|ad zu keinem Zeitpunkt eine Kinematik auf, womit die Vorhersage aus Abschnitt 8.4.6 ebenfalls bestätigt wird.

Netz-Modifikationen – Kraft-Störungen

Es werden zwei Modifikationen der Vernetzung sowie die Störung durch eine Kraft jeweils für $\nu = 0.003$ betrachtet, siehe Abbildung 8.14. Damit wird auch geprüft, ob für die ad-hoc-Formulierung eventuell eine Kinematik übersehen wurde.

Für den Geometrie-Trigger werden in dem regulär vernetzten Block einige Elemente so modifiziert, dass diese bereits die Form einer Kinematik einnehmen. Der auf das reguläre Netz wirkende Kraft-Trigger wird so gesteuert, dass der maximale Wert genau zum kritischen Zeitpunkt erreicht wird, bei dem die Biegesteifigkeit für die klassische Formulierung theoretisch gleich Null ist. Für die klassische Formulierung springt dabei analog zu den bereits dargestellten Ergebnissen in Tabelle 8.3 wie erwartet für beide Störungen die Kinematik ein. Die ad-hoc-Formulierung bleibt hingegen für beide Fälle weiterhin robust. Bei letzterem werden lediglich sehr geringe Schubspannungswerte von weniger als 1 MPa im Bereich der Elemente um den geometrischen Trigger beobachtet, die durch diesen angeregt werden und auch für die sehr steife Disp-Formulierung entstehen. Sie stellen also, da auch kein *Hourglassing* auftritt keinen Hinweis auf eine Kinematik dar.

Interessant ist die Auswirkung einer beliebigen Vernetzung, bei der sich die klassische Formulierung deutlich unempfindlicher gegenüber Kinematiken erweist. Tritt

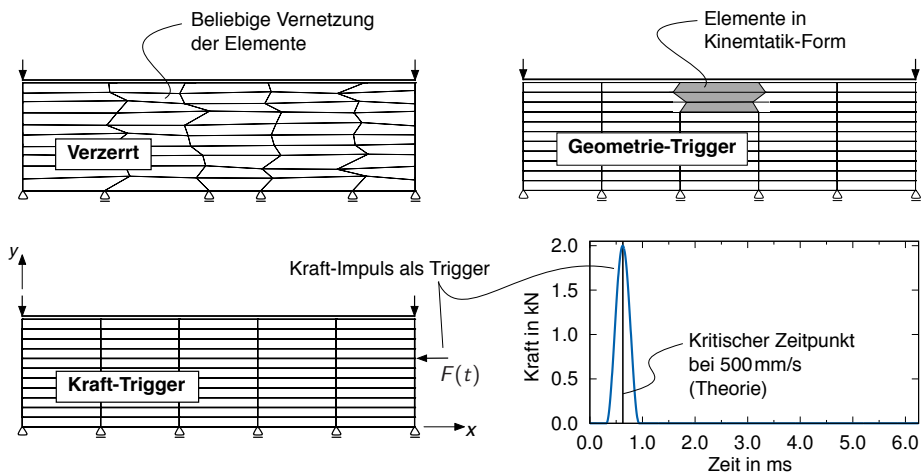


Abbildung 8.14: Geometrische Modifikationen der regulären Vernetzung aus Abb. 8.12.

doch eine Kinematik auf, liegt die zugehörige Kompression dann deutlich außerhalb des Bereichs kleiner Deformationen, und wird hier deshalb nicht weiter untersucht.

8.5.3 Kompression eines hyperelastischen Würfels

Aufbau des Beispiels und theoretischer Wert der kritischen Verschiebung

Dieses numerische Testbeispiel wird von Korelc et al. [86] übernommen. Dabei wird mit speziellen Formulierungen versucht, die Kinematiken infolge inkompatibler Freiheitsgrade zu vermeiden. Der Block ist in Abbildung 8.15 mit einer Auflösung von $4 \times 4 \times 4$ Elementen zusammen mit den Geometrie- und Materialparametern dargestellt. Der Würfel wird an der gesamten Oberseite mit einer Geschwindigkeit von $v_z = 5 \text{ mm/s}$ komprimiert, bis ein kritischer Versagenszustand eintritt. An der Oberseite sind die Verschiebungen in x - und y -Richtung frei. An allen Seiten sind alle Verschiebungen frei. Die Randbedingungen an der Würfelunterseite sind mit der Behinderung der Verschiebung in x -Richtung entlang der Linie in y -Richtung so gewählt, dass sich ein kritischer Versagenszustand in der yz -Ebene einstellt. Für die Berechnungen werden Elementdichten mit 2, 4, 8 und 16 Elementen je Elementkante gewählt.

Abweichend von Korelc et al. [86] wird das hyperelastische Materialgesetz nach Neo-Hooke aus Gleichung (8.39) gewählt. Damit kann das hergeleitete Kinematik-Kriterium nach Gleichung (8.62) überprüft werden. Für die hier gewählte uniforme Erhöhung der Netzauflösung hat das Seitenverhältnis für alle Netzdichten konstant den Wert 1. Eingesetzt in Gleichung (8.62) oder (8.63) ergibt sich der kritische Wert der

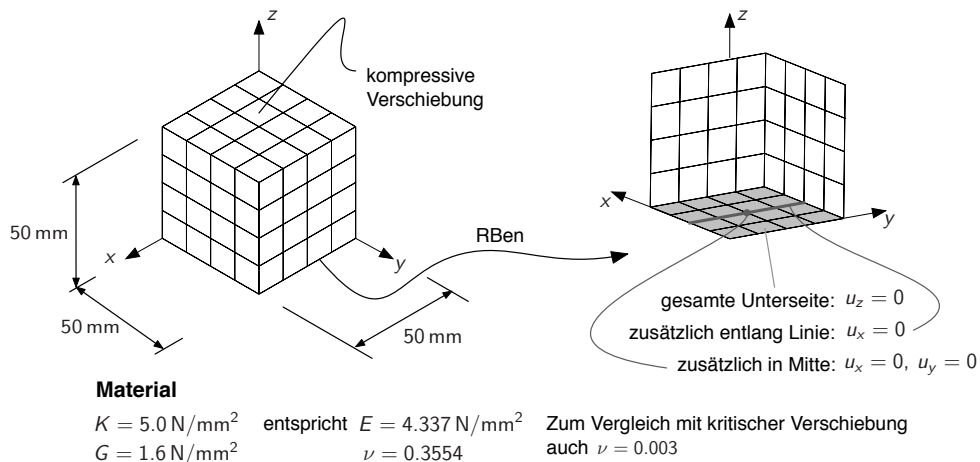


Abbildung 8.15: Geometrie, Randbedingungen und Materialparameter eines hyperelastischen Würfels. An der Oberseite wird die kompressive Verschiebung aufgebracht; die Unterseite wird in z -Richtung komplett und in x - und y -Richtung teilweise festgehalten.

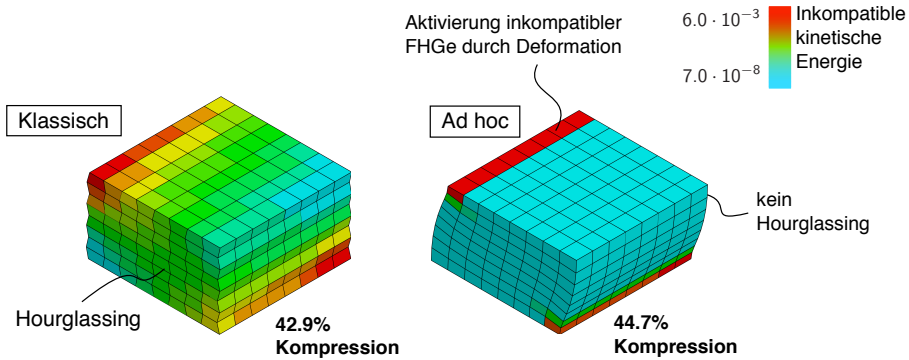


Abbildung 8.16: Deformation bei Erreichen eines kritischen Verschiebungswertes. Klassische Formulierung mit Kinematik; Ad-hoc-Formulierung mit physikalisch sinnvoller Instabilität, die nicht von inkompatiblen Freiheitsgraden ausgelöst wird.

Streckung zu $\lambda_2 = 1/\sqrt{3}$. Für die Kantenlänge von 50 mm führt das auf die kritische Verschiebung

$$w^{\text{crit}} = 50 \text{ mm} (\lambda_2 - 1) = 50 \text{ mm} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 1 \right) = -21.1325 \text{ mm} , \quad (8.134)$$

die einer kritischen Kompression von 42.3% entspricht. Da für die Herleitung dieser Gleichungen die laterale Kontraktion vernachlässigt wurde, wird das Beispiel sowohl mit den Originalparametern als auch mit einer sehr kleinen Poissonzahl ($\nu = 0.003$) simuliert.

Kinematik oder physikalisches Stabilitätsversagen – Beobachtung mit inkompatiblen Massen

Das Wil9-Element wird wieder in der klassischen und der ad-hoc-Formulierung verwendet, wobei wieder die in Abschnitt 5.4.4 beschriebene implizite Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade verwendet wird. Die Berechnung wurde aber auch mit inkompatiblen Massen durchgeführt, allerdings nur um zu veranschaulichen, wie sich die inkompatiblen Freiheitsgrade bei einem kritischen Deformationszustand verhalten. Dies lässt sich veranschaulichen, indem die nur mit inkompatiblen Massen berechenbare kinetische Energie infolge der Aktivität der inkompatiblen Freiheitsgrade T^{im} aus Abschnitt 8.2 über das Modell aufgetragen wird. Für eine Poissonzahl gleich Null veranschaulicht Abbildung 8.16 diesen Wert für einen typischen kritischen Deformationszustand beider Formulierungen.

Wie erwartet zeigt die klassische Formulierung eine Kinematik mit dem typischen *Hourglass*muster. Aufgrund der Biegeform werden dabei die inkompatiblen Freiheitsgrade aktiviert und führen zu Energieanteilen. Die erreichte Kompression liegt nahe

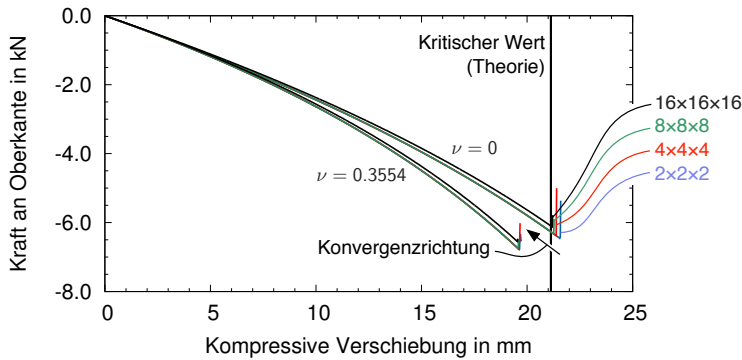


Abbildung 8.17: Kompressive Deformation über die Reaktionskraft an der Oberseite des Blocks für die klassische Formulierung. → Kinematiken bei kritischen Verschiebungswerten.

dem kritischen Wert, der mit der impliziten Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade erreicht wurde, siehe Abbildung 8.17. Bei der ad-hoc-Formulierung ergibt sich auch eine Kinematik, die allerdings nicht auf eine künstliche Kinematik infolge der inkompatiblen Freiheitsgrade zurückzuführen ist. Für diesen Zustand ist gut erkennbar, dass anstatt der Kinematik mit *Hourglass*-Muster eine Eigenform auftritt, das heißt es tritt globales Stabilitätsversagen auf und eine nicht homogene Deformation wird beobachtet. Bei dieser stellen sich deformierte Elementgeometrien ein und die inkompatiblen Freiheitsgrade werden damit auch aktiviert, womit deren inkompatible kinetische Energie größer Null zu erklären ist.

Konvergenz zum theoretischen Wert der kritischen Verschiebung

Für die Beurteilung des Versagens wird die Gesamtkraft an der Würfeloberkante über die kompressive Verschiebung ermittelt. Die Fälle $\nu = 0.003$ und $\nu = 0.3554$ sind mit allen Netzdichten für die klassische Formulierung in Abbildung 8.17 angegeben. Der in Abschnitt 8.3.2 hergeleitete theoretische kritische Wert ist mit einer vertikalen Linie markiert. Die Serie mit $\nu = 0.003$ konvergiert zu diesem Wert, die Serie mit $\nu = 0.3554$ zu einem etwas geringeren Wert. Diese Beobachtung ist plausibel, da mit $\nu = 0.3554$ für die gleiche Kompression mehr Kraft als mit $\nu = 0.003$ aufgenommen werden kann. Die ad-hoc-Formulierung erreicht eine geringfügig größere kritische Verschiebung und führt zu einem physikalisch sinnvollen Versagen infolge Strukturstabilität.

Untersuchungen von Korelc et al. bestätigt

Die kritischen Verschiebungen liegen sehr nahe an den Werten des klassischen Pendants H1E9, das in der implizit-statischen Untersuchung von Korelc et al. [86] verwendet wird. Mit $16 \times 16 \times 16$ Elementen erreicht dieses für $\nu = 0.3554$ die kritische

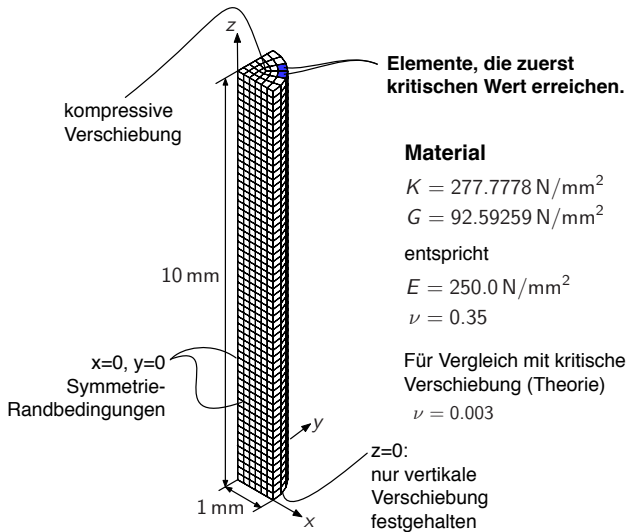


Abbildung 8.18: Geometrie und Materialparameter des zylindrischen Stabs, Modellierung als Viertelsystem mit Symmetriestandbedingungen. Markierung der Elemente, die zuerst einen kritischen Deformationswert nach Glg. (8.135) erreichen.

Verschiebung 17.72 mm im Vergleich zu den hier erreichten circa 19.5 mm der klassischen Formulierung Wil9|cl, siehe Abbildung 8.17. Das robuste TSCG12-Element [86] und das bekannte CG9-Element weisen dagegen bei der Verschiebung 21.81 mm einen Stabilitätspunkt auf – für die ad-hoc-Formulierung Wil9|ad sind es ungefähr 22.4 mm. Die Unterschiede in den Ergebnissen von Korelc et al. und denen der vorliegenden Arbeit liegen bei maximal 10 %. Sie sind gut erklärbar, da zum einen eine transiente Untersuchung einer implizit-statischen Berechnung gegenübersteht und zum anderen dadurch, dass in der Arbeit von Korelc et al. ein komplexeres hyperelastisches Materialgesetz verwendet wurde.

8.5.4 Kompression eines hyperelastischen zylindrischen Stabs

Aufbau des Beispiels und theoretischer Wert der kritischen Verschiebung

Korelc et al. [86] verwenden mit dem Ziel Strukturstabilitätsversagen zu simulieren einen zylindrischen Stab mit einer am oberen Ende aufgetragenen kompressiven Verschiebung. Wieder geht es auch darum zu überprüfen, ob eventuell künstliche Kinematiken auftreten oder ob diese vermieden werden können. Ein Viertel des Zylinders wird mit 60 Elementen über die Höhe und in der Ebene durch drei Felder mit je 3×3 Elementen, also insgesamt 1620 Elementen, vernetzt. Die Geometrie des Modells ist in Abbildung 8.18 zusammen mit den Materialparametern dargestellt. Die an der Oberseite aufgetragene Geschwindigkeit entspricht $v_z = 50 \text{ mm/s}$. Um einen Vergleich mit dem in Abschnitt 8.3.2 hergeleiteten Kinematik-Kriterium zu erhalten, wird die Simulation zusätzlich mit einer sehr kleinen Querkontraktionszahl ($\nu = 0.003$) durchgeführt.

Um den theoretischen Wert der kritischen Verschiebung für eine mögliche Kinematik abzuschätzen, werden aufgrund der unterschiedlichen Elementgeometrien die Elemente mit dem schlechtesten Seitenverhältnis verwendet. Diese liegen am äußeren Rand des Stabes und sind in Abbildung 8.18 speziell gekennzeichnet. Mit einer Höhe von 0.1667 mm und der kleineren Seite der Grundfläche des Elements von 0.1905 mm ergibt sich nach Gleichung (8.62) die kritische Streckung zu

$$\lambda_3 = \left(\sqrt{1 + 2 \frac{0.1667}{0.1905}} \right)^{-1} = 0.629 . \quad (8.135)$$

Daraus resultiert für die Gesamthöhe des Stabes die kritische Verschiebung von

$$w^{\text{crit}} = 10 \text{ mm} (\lambda_3 - 1) = -3.71 \text{ mm} , \quad (8.136)$$

was einer kritischen Kompression von 37.1 % entspricht. Als Indikator für einen kritischen Punkt wird die Kraft an der Oberkante des Stabes ermittelt. Sobald diese Kraft nicht weiter ansteigt, ist ein kritischer Punkt erreicht. Dabei wird die Untersuchung mit der klassischen und der ad-hoc-Formulierung des Wil9-Elements durchgeführt.

Kinematik oder physikalisches Stabilitätsversagen – Beobachtung mit inkompatiblen Massen

Die Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade erfolgt zwar implizit, siehe Abschnitt 5.4.4, aber um die Aktivität der inkompatiblen Freiheitsgrade kurz nachdem der kritische Wert erreicht wurde zu veranschaulichen, wird wie bei der Kompression des hyperelastischen Würfels auch eine Berechnung mit inkompatiblen Massen durchgeführt. Dann kann die mit den inkompatiblen Freiheitsgraden korrelierende kinetische Energie T^{im} analog zu Abschnitt 8.2 angegeben werden. Diese wird in Abbildung 8.19 farblich über die Modelle aufgetragen. Damit wird sofort erkennbar, an welcher Stelle der Struktur die größte Aktivität der inkompatiblen Freiheitsgrade vorliegt. Für die klassische Formulierung sind das wie erwartet die in Abbildung 8.18 markierten Elemente am äußeren Rand, die auch zuerst den kritischen Wert erreichen. Zu den Schnittflächen sowie zum Kern des Querschnitts hin nimmt die Aktivität ab. Eine Erklärung dafür ist, dass das Seitenverhältnis der Elemente im Kern weniger kritisch ist, da die Elemente dort mehr würfelförmig sind, das heißt ihr Seitenverhältnis ist größer. Abbildung 8.19 (links) zeigt für den Fall $v = 0$ bei der klassischen Formulierung die Konfiguration unmittelbar nach dem Zeitpunkt, bei dem eine kritische Verschiebung für das Auftreten von Kinematiken erreicht wird. Die vorhergesagte kritische Kompression von 37.1 % stimmt trotz der Verwendung der inkompatiblen Massen sehr gut mit dem numerisch ermittelten Wert von 37.7 % überein.

Bei ad-hoc-Formulierung tritt mit einer Kompression von 52.8 % erst deutlich später ein kritischer Punkt auf, bei dem die Elemente aber nicht in ein *Hourglass*-muster, sondern in eine einer Eigenform ähnliche Verformung übergehen. Bei Sussman und

Bathe [161] und Reese und Wriggers [142] wird ein ähnliches Beispiel mit diesem Verhalten untersucht. Diese Form deutet auf einen physikalischen realen kritischen Punkt typisch für ein Stabilitätsversagen hin, wobei hier von sogenanntem Oberflächenbeulen (*Surface Buckling*) gesprochen wird. Das heißt das beobachtete Verhalten ist keine Folge einer Kinematik bedingt durch die inkompatiblen Freiheitsgrade, was für die Beurteilung der Robustheit der Elementformulierung genügt. Aufgrund des sich einstellenden Deformationsmusters während der Kompression werden für diesen Stabilitätsfall infolge der inhomogenen Verformung nach der Verzweigung in einen anderen Lastverformungspfad auch inkompatible Freiheitsgrade aktiviert, was deutlich an den einschnürenden Stellen mit der größten Elementverformung zu erkennen ist.

Reaktionskraft an der Oberseite des Stabs

In Abbildung 8.20 sind die Kraftverschiebungskurven für die Simulationen mit und ohne Querkontraktion dargestellt. Wie bereits visuell festgestellt, tritt mit der klassischen Formulierung der kritische Punkt für eine Kinematik sowohl mit als auch nahezu ohne Querkontraktion nahe des theoretischen Wertes auf. Für die Simulationen mit größerer Querkontraktion tritt der kritische Punkt nach ungefähr 33 % Kompression erwartungsgemäß schon etwas früher auf, da für ein System mit Querkontraktion die innere Kraft bei gleicher Kompression bereits größer ist. Der Struktur-Stabilitätspunkt der ad-hoc-Formulierung tritt für $\nu = 0.35$ deutlich später, nämlich erst bei einer Kompression um circa 57 % auf.

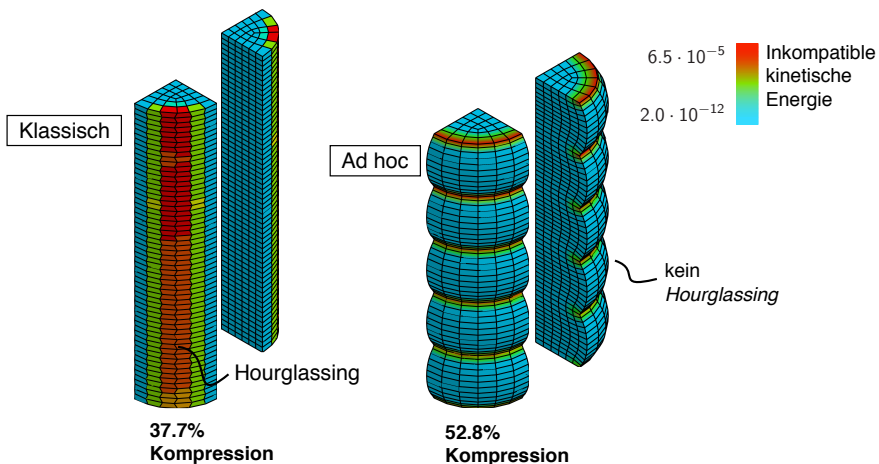


Abbildung 8.19: Deformation bei kritischer Deformation für (links) klassische und (rechts) ad-hoc-Formulierung. Frontal- und Seitansicht zur visuellen Kontrolle innerhalb liegender Elemente. Die klassische Formulierung zeigt eindeutig Kinematiken; die ad-hoc-Formulierung typisches Stabilitätsversagen mit Oberflächenwellen.

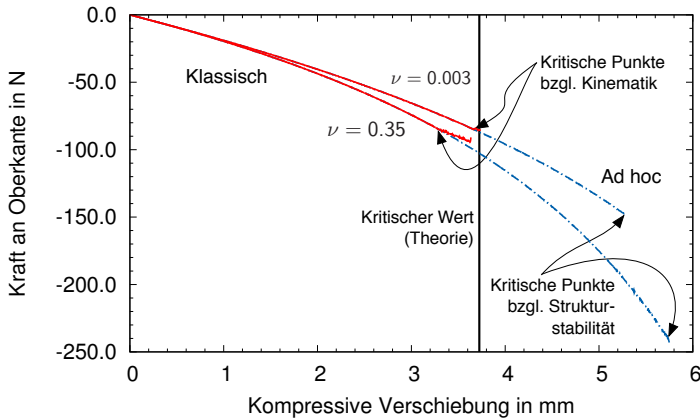


Abbildung 8.20: Reaktionskraft an Staboberkante über komprimierende Verschiebung. Durchgezogene Linien zeigen die klassische Formulierung und gestrichelten Linien die ad-hoc-Formulierung.

Untersuchungen von Korelc et al. bestätigt

Der Vergleich mit den Ergebnissen von Korelc et al. [86] ist ähnlich zu dem in Abschnitt 8.5, allerdings werden bei Korelc et al. 1250 bis 10 000 Elemente verwendet, während hier 1620 Elemente genutzt wurden. Die Kinematiken treten bei Korelc et al. [86] für das Element H1E9 zwischen 3.15 mm (mit 1250 Elementen) und 3.06 mm (mit 10 000 Elementen) auf, hier mit dem Wil9|cl-Element ungefähr bei 3.3 mm. Der physikalisch korrekte Stabilitätspunkt ohne Kinematiken tritt bei Korelc et al. mit dem Element TSCG12 oder CG9 zwischen 5.10 mm mit 4 Oberflächenwellen (1250 Elemente) und 4.83 mm mit 4.5 Oberflächenwellen (10 000 Elemente) auf, in der vorliegenden Untersuchung sind es ungefähr 5.8 mm mit 5 Oberflächenwellen. Als Ursache für die Abweichungen sind neben der unterschiedlichen Vernetzung wieder die bereits in Abschnitt 8.5 genannten Modellunterschiede verantwortlich.

Insgesamt betrachtet, wird die Vorhersage der kritischen homogenen Deformation sowohl für künstliche Kinematiken als auch für physikalische Stabilitätspunkte auch mit diesem Beispiel bestätigt.

8.6 Fazit

Zusammenfassend können einige wesentlichen Punkte zur numerischen Robustheit festgehalten werden.

- Zum einen ermöglicht die explizite Berechnung inkompatibler Freiheitsgrade eine einfache Kontrolle der inkompatiblen kinetischen Energie, um ein nicht robustes Verhalten zur Laufzeit zu erkennen und die betroffenen inkompatiblen

Freiheitsgrade eventuell zu deaktivieren. Das ist in einer expliziten Berechnung einfach möglich. Dieses Vorgehen ist allerdings nur eingeschränkt anwendbar, da die Sensitivität mit der ein nicht robustes Verhalten erkannt werden soll, auch stark vom betrachteten Problem selbst, wie zum Beispiel der Belastungsgeschwindigkeit, abhängen. Das heißt, es sind numerische Tests mit Varianten durchzuführen, bis ein sinnvoller Wert gefunden ist. Dieses Vorgehen erscheint für allgemeine Fragestellungen kaum praktikabel.

- Wird zum anderen die sogenannte Volumenbedingung erfüllt, wie mit der vorgeschlagenen ad-hoc-Formulierung, treten sowohl in einem analytischen Beispiel als auch in numerischen Experimenten mit kleinen und hyperelastischen Deformationen keine Kinematiken auf. Diese Formulierung eignet sich zur Simulation von hyperelastischen Materialien, da der Deformationsgradient direkt berechnet werden kann.
- Mit der ebenfalls die Volumenbedingung erfüllenden inkrementellen Verschiebungsformulierung, siehe die Abschnitte 6.4 und 8.4.5, wurden bei den numerischen Experimenten in den Kapiteln 7 und 9, die auch große Deformationen kombiniert mit Elasto-Plastizität und Kontakt enthalten, keine Kinematiken beobachtet. Diese Formulierung ist für Berechnungen geeignet, die die Jaumannsche Spannungsrate mit einem hypoelastisch-plastischen Materialmodell nutzen.

9 Numerische Experimente mit (dicken) Schalenstrukturen

Für die folgenden numerischen Experimente werden die in der Anwenderschnittstelle von LS-DYNA implementierten Elementformulierungen Wil9 und Wil9ts verwendet. Aufgrund des einfachen Aufbaus und der überschaubaren Anzahl inkompatibler Freiheitsgrade ist die Skalierung der inkompatiblen Massen einfach zu kontrollieren. Die inkompatiblen Freiheitsgrade werden alle explizit gelöst, da diese Strategie aus numerischer Sicht am effizientesten und auch mit der Schnittstelle in LS-DYNA umsetzbar ist. Die Skalierung der inkompatiblen Massen wird mit der vereinfachten Berechnung aus Abschnitt 7.3 bestimmt, für die der Zeitschritt Δt^{flan} und die volumetrische und Schubverweigerungen selektiv skalierende sms-Strategie aus Abschnitt 7.4 eingesetzt werden. Unter keinen Umständen soll der vom Programm vorgegebene Zeitschritt, basierend auf den kompatiblen Elementformulierungen, aufgrund der inkompatiblen Freiheitsgrade reduziert werden. Für die dabei notwendige Skalierung der inkompatiblen Massen wird der Zeitschritt Δt^{flan} daher mit dem Sicherheitsfaktor 10 künstlich vergrößert und damit auch die inkompatiblen Massen vergrößert. Mit dieser Maßnahme soll möglichen Kinematiken infolge auftretender Nichtlinearitäten, kurzzeitig größeren Änderungen der Geometrie infolge Deformationen und insbesondere Instabilitäten bei der Zeitintegration der inkompatiblen Freiheitsgrade, die wegen einer Unterschätzung der inkompatiblen Masse zu einer zu großen Zeitschrittgröße führen könnten, vorgebeugt werden.

Für einen Vergleich wird LS-DYNA mit den darin vorliegenden Elementen Bor- und B-Bar verwendet, die bereits in Kapitel 6 zur Lösung von geometrisch linearen Problemen in einer in FEAP implementierten Version betrachtet wurden. Die in FEAP implementierten Varianten inkompatibler Elemente wurden soweit in den Kapiteln 5 bis 8 genutzt. Für alle folgenden Beispiele werden die innerhalb dieser Arbeit in LS-DYNA implementierten Versionen der inkompatiblen Elemente eingesetzt. Die Implementierung folgt der inkrementellen Beschreibung aus Abschnitt 6.4. Auf weitere Aspekte der Implementierung wird im Anhang A eingegangen.

9.1 Gekrümmtes Dach unter explosionsartiger Belastung

Diese Beispiel basiert auf einem Experiment von Morino et al. [119]. Im numerischen Modell wird die einfach gekrümmte zylindrische Schale in Abbildung 9.1 im markierten Bereich normal zur Oberfläche durch eine die explosionsartige Belastung idealisierende Anfangsgeschwindigkeit abgebildet. In der gleichen Abbildung sind auch Geometrie- und Materialparameter angegeben. Das Beispiel wurde von Belytschko et al. [14] mit einer reduziert integrierten Schalenformulierung und später von Benson et al. [21] mit einer isogeometrischen Schalenformulierung analysiert.

Um die gelenkige Lagerung an den beiden Enden mit Volumenelementen abzubilden, werden zwei Elemente in Dickenrichtung verwendet, bei denen die mittlere Knotenreihe festgehalten wird. Es werden keine Symmetriebedingungen angenommen, das heißt mit dem vollständigen Modell gerechnet. Mit zwei Elementen über die Dicke stehen bei $2 \times 2 \times 2$ Integrationspunkten der Volumenelementformulierung insgesamt 4 Integrationspunkte in Dickenrichtung zur Verfügung. Es zwei Vernetzungen der Schalenfläche verwendet: Die erste nutzt 44 Elementen über den Kreisbogen und 100 Elementen in Längsrichtung, das heißt mit zwei Elementen über die Dicke insgesamt 8800 Elemente. Eine Netzverfeinerung erfolgt mit 66 Elementen über den Kreisbogen und 150 Elementen in Längsrichtung, also mit insgesamt 19 800 Elementen.

Abbildung 9.2 zeigt Schnappschüsse der Deformationssequenz bis zur finalen Deformation. Etwa zur Zeit $t = 0.4 \text{ ms}$ wird die maximale Durchbiegung erreicht und es

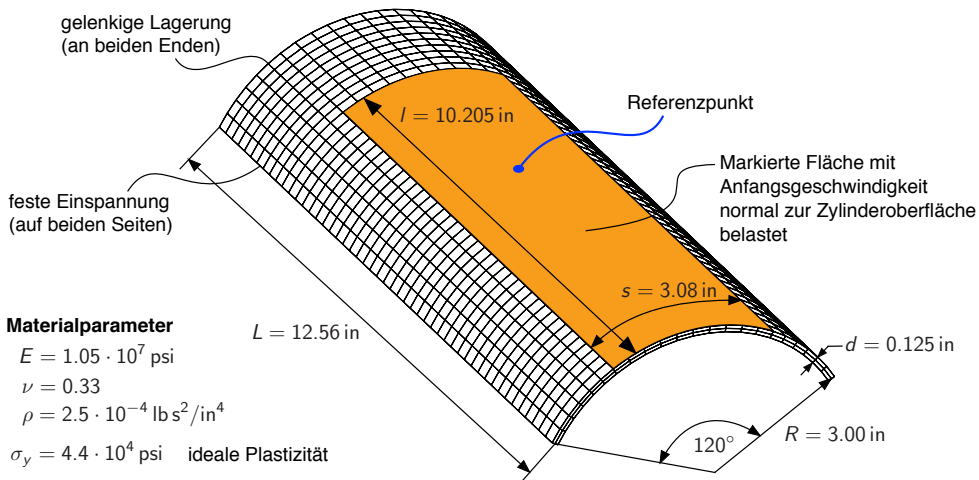


Abbildung 9.1: Zylindrische Schale unter Einwirkung einer Anfangsgeschwindigkeit; Geometrie und Materialparameter.

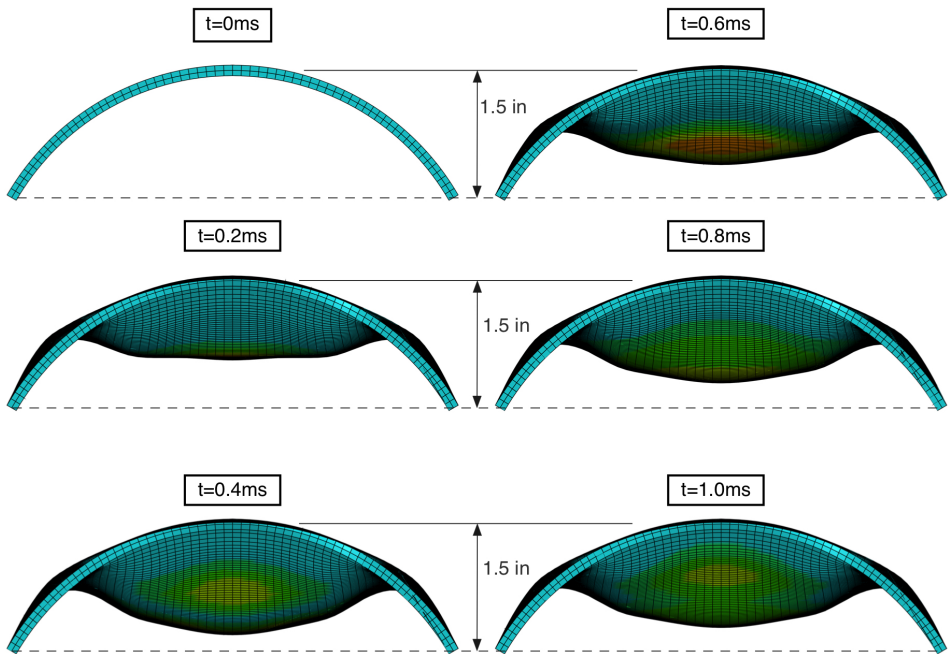


Abbildung 9.2: Deformationssequenz der impulsartig belasteten zylindrischen Schale aus Abbildung 9.1. Ansicht in Längsrichtung der Vernetzung mit $2 \times 44 \times 100$ Elementen.

beginnt anschließend eine Schwingung um einen bleibenden Deformationszustand wie die weiteren Schnappschüsse zeigen.

In den Abbildung 9.3 und 9.4 werden die erzielten numerischen Ergebnisse mit den experimentellen Daten und der numerischen Referenzlösung verglichen. Als numerische Referenzlösung wird die isogeometrische Schale aus [21] mit quartischen NURBS-Ansätzen und drei Integrationspunkten über die Dicke verwendet. Da es sich um eine Schale handelt sind die gelenkigen Randbedingungen an Vorder- und Rückseite direkt modellierbar. In der vorliegenden Simulation mit zwei Volumenelementen über die Dicke steht somit ein Integrationspunkt mehr in Dickenrichtung zur Verfügung. Die Auswertung erfolgt zum Vergleich mit der Schalenformulierung auf der Mittelfläche mit dem Radius $R = 3.0$ in. Verglichen wird die vertikale Verschiebung des in Abbildung 9.1 markierten Punkts. Morino et al. [119] werten die Durchbiegung am Punkt mit dem Abstand 6.28 in aus, während Benson et al. [21] den Punkt an der Stelle 6.00 in nutzen. Die eigenen Untersuchungen haben gezeigt, dass sich die Durchbiegungen an beiden Punkten aber nur sehr geringfügig unterscheiden. Daher wird ohne den Vergleich einzuschränken für sowohl die hier gewählte grobe als auch

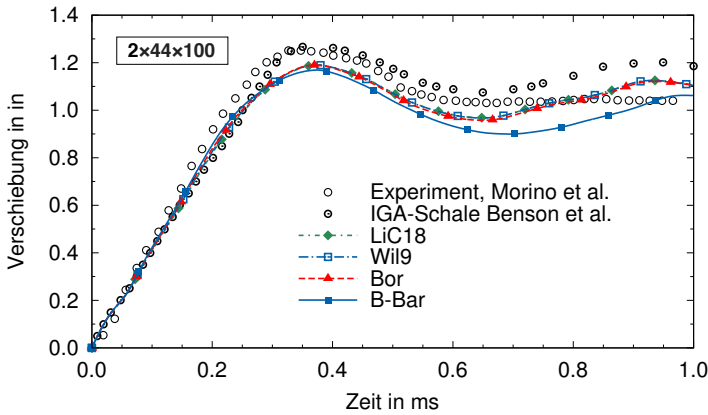


Abbildung 9.3: Darstellung der Durchbiegung des Referenzpunkts über die Zeit für die zylindrische Schale aus Abbildung 9.1 mit $2 \times 44 \times 100$ Elementen.

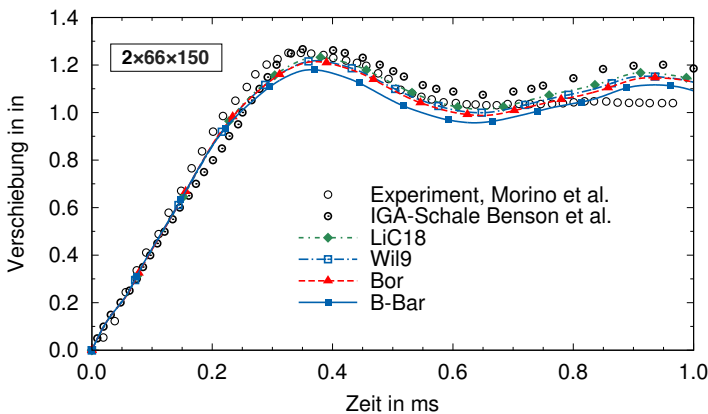


Abbildung 9.4: Darstellung der Durchbiegung des Referenzpunkts über die Zeit für die zylindrische Schale aus Abbildung 9.1 mit $2 \times 66 \times 150$ Elementen.

die verfeinerte Netzauflösung der Punkt an der Stelle 6.123 in verwendet. Dieser Punkt ergibt sich aus der gewählten Elementkantenlänge.

In Abbildung 9.3 liegt für die Vernetzung $2 \times 44 \times 100$ die Kurve für die B-Bar-Formulierung unterhalb der sich kaum unterscheidenden Kurven für die Elemente Bor, Wil9 und Li18. Das Li18-Element mit 18 inkompatiblen Freiheitsgraden ist bei Betrachtung der vorliegenden Ergebnisse wegen des nicht erforderlichen hohen numerischen Aufwands in Frage zu stellen. Das hier nicht aufgeführte Wil9ts-Element

zeigt nur geringe Abweichungen zum Wil9-Element, was bei der vorliegenden fast würfelförmige Elementgeometrie zu erwarten ist.

Für die höhere Netzauflösung, in Abbildung 9.4 dargestellt, rücken alle Kurven näher an die experimentelle Referenzlösung, speziell die für die Elemente Bor, Wil9 und Li18. Die B-Bar-Formulierung verhält sich etwas steifer.

Alle numerischen Berechnungen unterscheiden sich von den experimentellen Ergebnissen darin, dass nach Erreichen der maximalen Durchbiegung eine Schwingung mit deutlich größerer Amplitude als im Experiment erfolgt. Ursachen können in der nicht exakt reproduzierten Initialgeschwindigkeit, der Modellierung der Randbedingungen sowie der Modellierung des Materials verglichen zum Experiment liegen.

9.2 Beulen einer dünnen und geometrisch imperfekten zylindrischen Schale

Um große Krümmungen und plastische Deformationen in einer dünnen Schalenstruktur zu simulieren, schlagen Sussman und Bathe [162] vor, ein plastisches Gelenk in einer Zylinderschale durch einen Beulvorgang zu erzeugen. Die übernommenen Geometrie- und Materialparameter sind in Abbildung 9.5 dargestellt. Bei Überschreitung der Fließspannung wird ideal plastisches Materialverhalten angenommen. Das Verhältnis von Dicke zu Radius beträgt $1/100$, das heißt es liegt eine dünne Schale vor. Um den Beulvorgang zu kontrollieren, wird als Trigger die in Abbildung 9.5 gezeigte geometrische Imperfektion genutzt. Der sinusförmige Verlauf ist durch eine analytische Funktion definiert, die in [162] detailliert beschrieben ist. Die aufgebrachte Verschiebung in Längsrichtung am Zylinderende ist als Bewegung einer starren Endscheibe zu interpretieren, die den Zylinder zusammendrückt. Um den quasi-statischen Vorgang abzubilden, wird als Belastungsgeschwindigkeit 50 mm/sec gewählt. Unter Ausnutzung der Symmetrie ist nur ein Achtel der Zylinderschale diskretisiert.

Sussman und Bathe [162] verwenden das in ihrer Publikation vorgeschlagene 3D-Schalenelement, das nach wie vor eine degenerierte Schalenformulierung ist, mit Netzen von 50×75 sowie 100×150 Elementen in Schalenebene und drei Integrationspunkten in Dickenrichtung. Die Ergebnisse am feineren Netz werden hier als Referenzlösung genutzt. Um möglichst würfelförmige Elementgeometrien in Schalenebene zu erhalten, werden Netze mit 50×100 und 100×150 Elementen in Schalenebene mit je einem Element in Dickenrichtung verwendet. Für die Berechnung werden die Elemente Wil9, Wil9ts und Li18 sowie die bereits in LS-DYNA vorhandenen Elemente Bor und B-Bar eingesetzt. Für die in die Anwenderschnittstelle von LS-DYNA implementierten Elemente Wil9, Wil9ts und Li18 kann die Zahl der Integrationspunkte in beliebiger Richtung vorgegeben werden, sodass die Berechnungen mit zwei und drei Integrationspunkten in Dickenrichtung durchgeführt werden. Für die Elemente B-Bar und Bor ist keine Modifikation der Integrationsordnung möglich, sodass die Integration mit $2 \times 2 \times 2$ Integrationspunkten erfolgt. Für einen besseren Vergleich mit

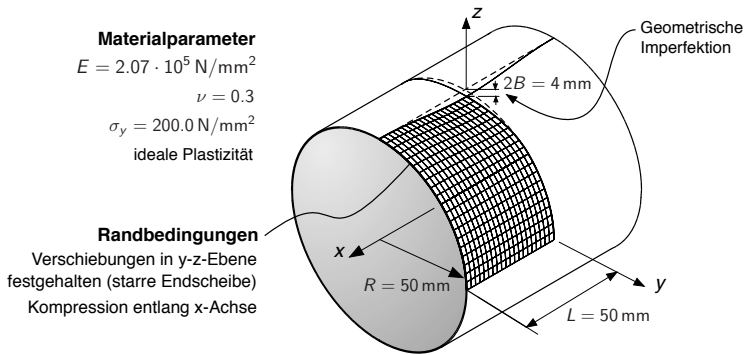


Abbildung 9.5: Geometrie und Materialparameter der zylindrischen Schale. Die geometrische Imperfektion wird entlang der Zylinderachse und senkrecht dazu über den Kreisbogen aufgebracht.

den Formulierungen, die drei Integrationspunkte in Dickenrichtung verwenden, wird für die Elemente Bor und B-Bar eine zusätzliche Berechnung mit zwei Elementen über die Dicke durchgeführt.

Abbildung 9.6 zeigt die Deformationsequenz anhand von drei charakteristischen Schnappschüssen für das Netz mit $100 \times 150 \times 1$ Elementen. Dabei werden die Elemente Wil9 und Bor bewusst am Netz mit einem Element über die Dicke einander gegenübergestellt, da sich so die Unterschiede der Elementformulierungen besser herausstellen lassen. In den Abbildungen 9.7 und 9.8 sind die Kraftverschiebungsverläufe von beiden Netzen dargestellt. In den Kurven mit der feineren Netzauflösung, die auch in Abbildung 9.6 dargestellt ist, sind die Zeitpunkte zweier Schnappschüsse markiert. Der Deformationsvorgang wird unter Berücksichtigung der jeweiligen Elementeneigenschaften im Folgenden detailliert erläutert.

Für die **Verschiebung 0.4 mm** bildet sich für das Bor-Element bereits der Ansatz einer Falte mit einem am oberen Ende stark gespreizten V-förmigen Abschluss aus, siehe Punkt (a) in Abbildung 9.6. Dieser V-förmige Abschluss ist für die Wil9-Formulierung zu dieser Verschiebung nicht zu beobachten, dafür aber eine, im Vergleich zum Bor-Element, ausgeprägtere Beule am linken Rand des Zylinders, siehe Punkt (b) in Abbildung 9.6. Die Erklärung dafür ist, dass für das Bor-Element, aufgrund der flacheren Beule in Punkt (b), mehr Kraft in Längsrichtung zur Zylindermitte hin übertragen werden kann, was dann zu einer stärker gekrümmten Falte mit dem gespreizten V-förmigen Abschluss in Punkt (a) führt. Diese stärkere Faltenbildung in Zylindermitte führt zu einem, bei dieser Verschiebung zu beobachtenden, deutlichen Abfall der Kraftverschiebungskurve gegenüber allen anderen Elementformulierungen mit Ausnahme des B-Bar-Elements, siehe Abbildung 9.8. Dieses weichere Verhalten gegenüber den anderen betrachteten Elementformulierungen ist dadurch zu erklären, dass die Bor-Formulierung bei Verwendung eines Elements über die Dicke nur eine sehr flache Beule in Punkt (b) ausbilden kann. Werden zwei Elemente in Dickenrich-

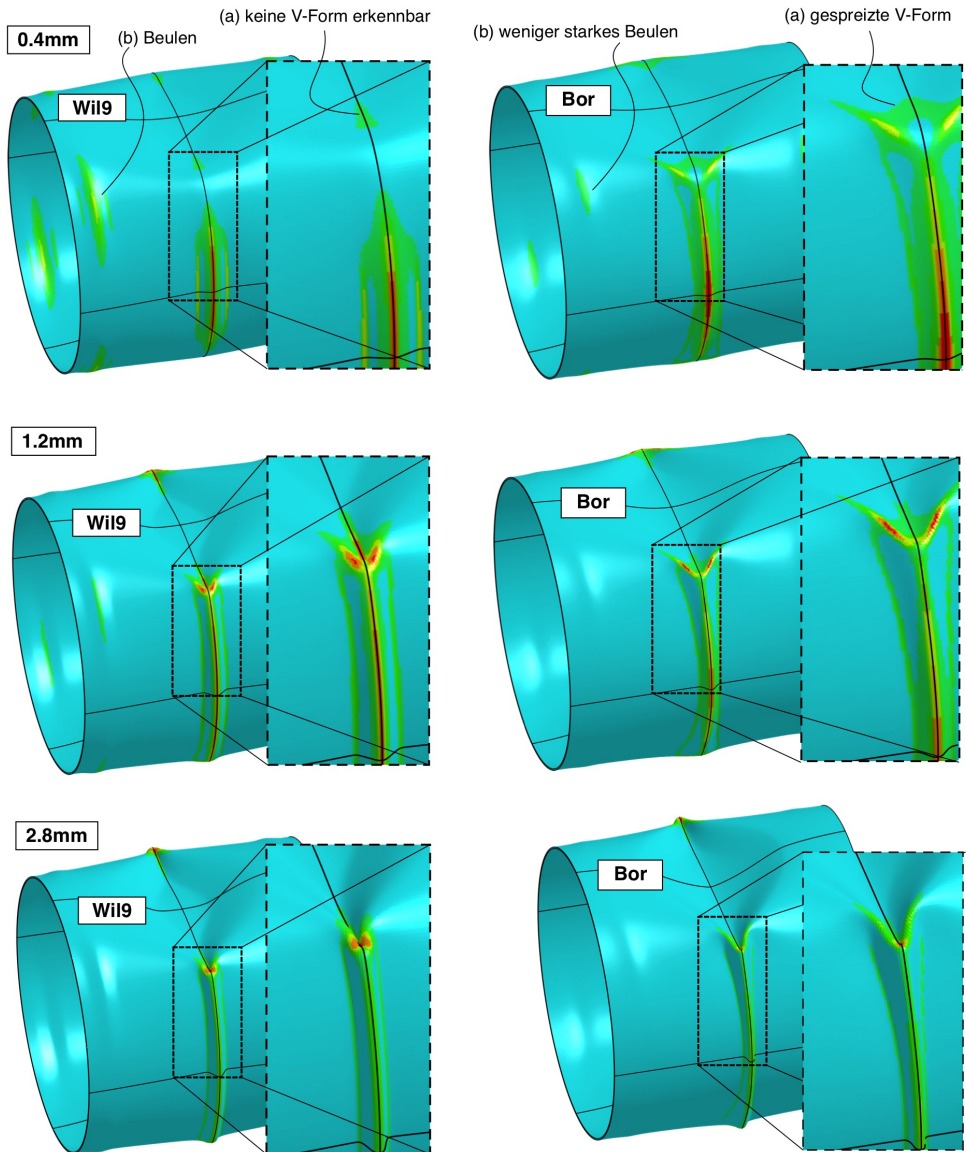


Abbildung 9.6: Schnappschüsse der Ausbildung der plastischen Falte mit äquivalenter plastischer Verzerrung ohne Elementnetz für das Wil9- und Bor-Element. Der Bereich um die in Zylindermitte auftretende Falte wird vergrößert dargestellt. Jeweilige Markierung der Orte mit der sich bildenden (a) V-förmigen Falte und (b) Beule.

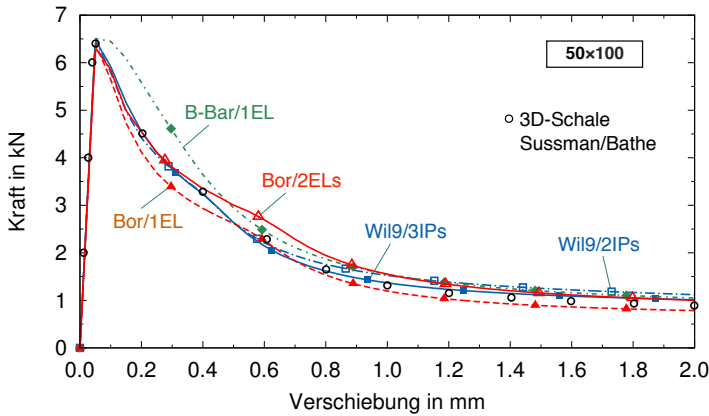


Abbildung 9.7: Reaktionskraft über die Verschiebung für verschiedene Elementvariationen; Zylinderschale mit $50 \times 75 \times 1$ Elementnetz. Berechnung erfolgt in Dickenrichtung mit einem Element (1EL) oder zwei Elementen (2ELs), jeweils mit 2 Integrationspunkten über die Dicke, sowie zwei (2IPs) oder drei (3IPs) Integrationspunkten, jeweils mit einem Element in Dickenrichtung.

tion verwendet, stimmen die Kraftverschiebungskurven des Bor-Elements und der Wil9-Formulierung überein. Das B-Bar-Element verhält sich analog zum Bor-Element, allerdings ist ein deutlich kleinerer Abfall der Kraftverschiebungskurve zu beobachten, was am steiferen Verhalten des B-Bar-Elements bezüglich einer Faltenbildung in Zylindermitte liegt. Die Wil9-Formulierung korreliert für beide Diskretisierungen bis zu diesem Zeitpunkt sehr gut mit der Referenzlösung von Sussman und Bathe. Zu den Elementen Wil9ts und Li18 sind nur kleinere Unterschiede festzustellen.

Im nächsten Schnappschuss mit der **Verschiebung 1.2 mm** ist die senkrecht zur Zylinderachse verlaufende Falte, mit einem nur leicht gespreizten V-förmigen Abschluss am oberen Ende, für die Wil9-Formulierung bereits ausgebildet. Beim Bor-Element bildet sich die stärker gespreizte Falte weiter aus und verläuft somit nicht senkrecht zur Zylinderachse. In der Kraft-Verschiebungskurve stimmt zu diesem Zeitpunkt die Lösung des Wil9-Elements mit drei Integrationspunkten über die Dicke sehr gut mit der Referenzlösung überein, während für zwei Integrationspunkte über die Dicke ein versteifendes Verhalten beobachtet wird. Die Kurve des Bor-Elements verläuft an dieser Stelle unterhalb der Referenzlösung, was auf den oben beschriebenen, zu Beginn der Simulation auftretenden, Mechanismus ausgehend von der flacheren Beule in Punkt (b) zurückzuführen ist, der bereits durch die Verwendung von zwei Elementen in Dickenrichtung ausgeglichen werden kann.

Beim Vergleich mit den Kurven der geringeren Netzdichte in Abbildung 9.7 ist die B-Bar-Formulierung deutlich zu steif. Das Element Wil9 folgt der Referenzkurve bis zur Verschiebung 0.8 mm und ist anschließend für zwei Dickenintegrationspunkte ebenfalls noch zu steif, weicht aber für drei Dickenintegrationspunkte kaum noch von

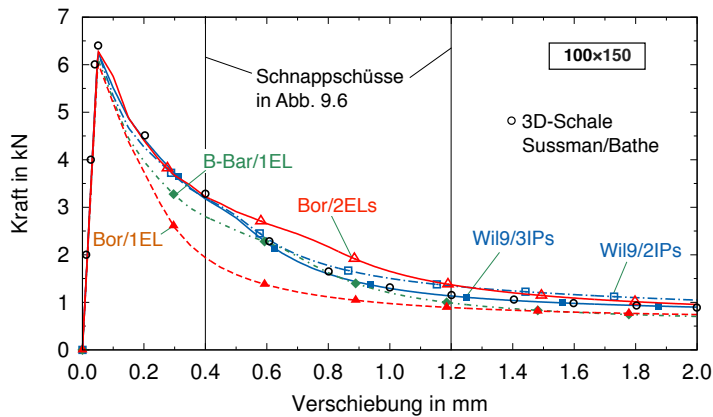


Abbildung 9.8: Reaktionskraft über die Verschiebung für verschiedene Elementvariationen; Zylinderschale mit $100 \times 150 \times 1$ Elementnetz. Berechnung erfolgt in Dickenrichtung mit einem Element (1EL) oder zwei Elementen (2ELs), jeweils mit 2 Integrationspunkten über die Dicke, sowie zwei (2IPs) oder drei (3IPs) Integrationspunkten, jeweils mit einem Element in Dickenrichtung.

der Referenzlösung ab. Das Bor-Element weist sowohl mit zwei als auch drei Elementen über die Dicke ein ähnliches Verhalten wie für die feinere Vernetzung auf. Dabei fällt auf, dass die B-Bar-Kurve des feineren Netzes ungefähr der Bor-Kurve bei der groben Vernetzung entspricht, woraus gefolgert werden kann, dass die B-Bar-Formulierung zum Verhalten der Bor-Formulierung konvergiert.

Der letzte Schnappschuss mit der Verschiebung **Verschiebung 2.8 mm** zeigt die noch weiter geschlossene Falte. Beim Wil9-Element weist der obere Abschluss durch die sehr starke Krümmung die maximale plastische Verzerrung auf. Beim Bor-Element ist der V-förmige Verlauf über beinahe die gesamte Länge der Falte zu erkennen und zeigt eine weniger starke Krümmung im Vergleich zum Wil9-Element. In Abbildung 9.8 wird die Darstellung an der Stelle 2.0 mm abgebrochen, da alle Kurven für die weitere Verschiebung etwa auf diesem Niveau verbleiben.

9.3 Quadratrohr mit Doppelkammer

9.3.1 Motivation und Beschreibung des Beispiels

Profile, die bei axialer Kompression in eine akkordeonartige Faltenstruktur beulen, sind in Simulationen zur Beurteilung der Crashesicherheit in der Automobilindustrie häufig anzutreffen. Im folgend beschriebenen Beispiel treten große Deformationen sowie Nichtlinearitäten in Form von Kontakt und elastoplastischem Materialverhalten, wie in praktischen Simulationen üblich, auf. Daher stellt dieses Beispiel einen brauchbaren

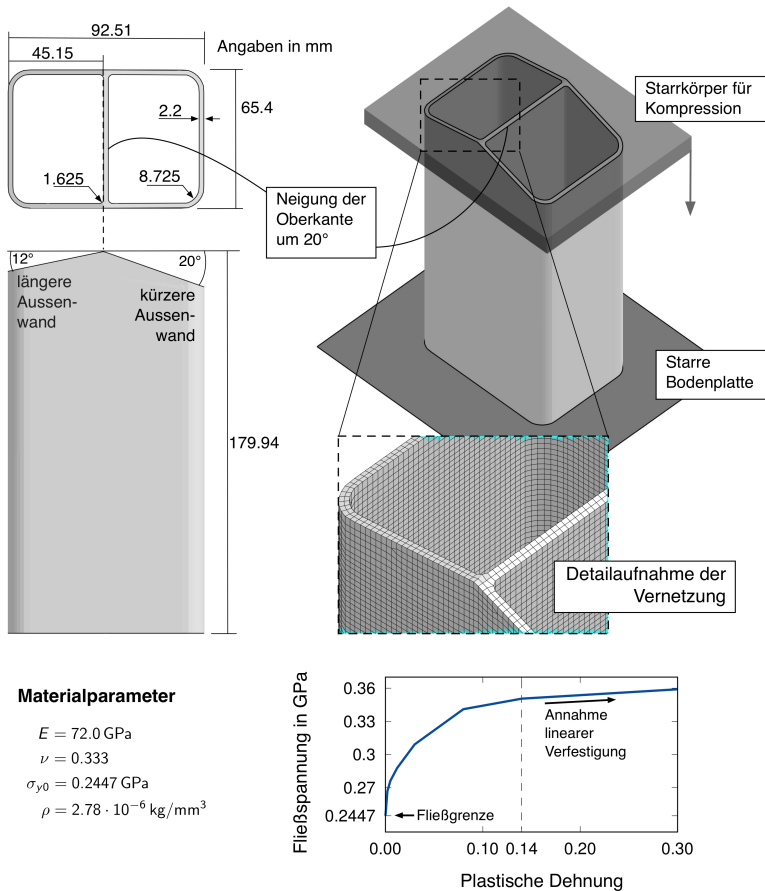


Abbildung 9.9: Aufbau des kurzen Doppelkammer-Profils. (Links) Seiten- und Querschnittsansicht, Abmessungen und Anschnittwinkel. (Rechts) Perspektivische Darstellung des Kompressionsvorgangs, Detailaufnahme der Vernetzung. (Unten) Materialbeschreibung.

Test für die Leistungsfähigkeit sowie die Robustheit der vorgeschlagenen Elemente im Zusammenspiel mit diesen Nichtlinearitäten dar.

Tryland [174, 175] analysiert experimentell und numerisch ein Rechteckhohlprofil mit zwei Kammern. Die Abmessungen des Querschnitts sind in Abbildung 9.9 zusammen mit dem numerischen Versuchsaufbau dargestellt. Die Kammern weisen jeweils die Form eines Rechtecks mit einem Seitenverhältnis von ungefähr 0.7 sowie eine durchgängige Wanddicke von 2.2 mm auf. Das Profil wird durch den abgebildeten Starrkörper in Längsrichtung komprimiert; die ebenfalls als Starrkörper modellierte Bodenplatte ist fixiert. Damit zuerst die innen liegende Wand mit dem komprimie-

renden Werkzeug in Kontakt kommt, ist das obere Ende des Profils in einem Winkel von 12° und 20° angeschnitten, wobei die Oberkante der Innenwand in den Anschnitt um 20° eingeschlossen wird. Damit wird erwartet, dass die Innenwand in Richtung der kürzeren Aussenwand beult, die durch den Anschnitt um 20° entstanden ist. Diese durch die Geometrie erzeugte Robustheit hinsichtlich der Richtung, in die sich die erste Falte ausbildet, womit die Reihenfolge der weiteren Faltenbildung vorgegeben ist, erhöht den Grad der Reproduzierbarkeit der Ergebnisse des Experiments und auch der numerischen Simulation, siehe Tryland [175]. In [174] gibt Tryland an, dass in einer Serie von acht parallelen Experimenten mit dem hier gezeigten Aufbau die Innenwand nur einmal in Richtung der höheren Aussenwand beult. In diesem Fall treten im Vergleich zu den anderen Experimenten vermehrt Risse im Profil auf. In den hier durchgeführten numerischen Experimenten beult die Innenwand immer in Richtung der kürzeren Aussenwand.

In Abbildung 9.9 ist eine Detailaufnahme der Vernetzung des oberen Endes des Profils gegeben. Die Detailaufnahme zeigt die durchgängige Verwendung von zwei Elementen über die 2.2 mm starke Wanddicke, was zu einer Elementkantenlänge von 1.1 mm in dieser Richtung führt. Das Seitenverhältnis der Elemente variiert zwischen 1.15 und 2.00 – bei einer durchschnittlichen Elementkantenlänge von 1.5 mm in den Richtungen senkrecht zur Wanddicke. Insgesamt werden 53 940 Volumenelemente verwendet, wovon einige wenige der Hexaederelemente durch die Überlagerung von Elementknoten zu Pentaederelementen degeneriert sind. Für diese Elemente kann in LS-DYNA automatisiert die Wahl einer 6-knotiger Pentaederelemente erfolgen, worauf hier aber verzichtet wurde, um zu überprüfen, ob die Ergebnisse mit den Elementen mit inkompatiblen Freiheitsgraden durch die Degeneration beeinflusst werden. In sämtlichen durchgeführten Berechnungen sind wohl wegen der geringen Anzahl der degenerierten Elemente keine merkbaren Auswirkungen auf die beobachteten globalen Ergebnisgrößen aufgetreten.

Der elasto-plastische Werkstoff wird in LS-DYNA mit dem Materialmodell *Piecewise Linear Plasticity* abgebildet, für das bei überschrittener Fließgrenze eine stückweise lineare Beziehung zwischen plastischer Verzerrung und Spannung, in Abbildung 9.9 mit den übrigen Materialparametern gegeben, verwendet wird. Für den Selbstkontakt des Profils wird Coulombsche Reibung mit $\mu_c = 0.4$ angenommen und die zum Standard gehörende *Single-Surface*-Kontaktformulierung verwendet. Sowohl für den Kontakt des Quadratrohrs zwischen der starren Bodenplatte als auch dem Starrkörper wird angenommen, dass keine Reibung auftritt.

9.3.2 Bewertung der Qualität der Berechnung mit inkompatiblen Freiheitsgraden

Eine Bewertung der numerischen Genauigkeit und Plausibilität der Ergebnisse erfolgt einerseits quantitativ und auch visuell. Abbildung 9.10 zeigt die Entwicklung der typischen Faltenbildung. Die Fließgrenze wird wie erwartet in den Ecken des Pro-

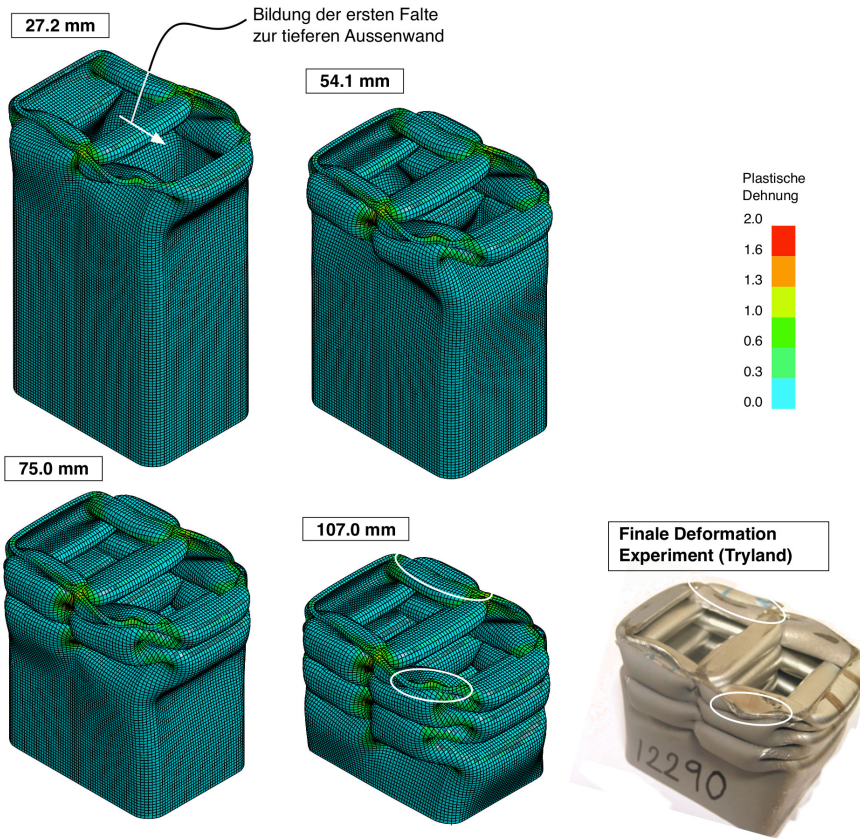


Abbildung 9.10: Typische Sequenz der Faltenbildung bei Kompression des Doppelkammerprofils. Der letzte Schnappschuss bei 107 mm wird visuell mit dem finalen Zustand des Versuchskörpers von Tryland [175] verglichen.

films überschritten, was durch die auf das Profil aufgetragene plastische Verzerrung dargestellt ist. Nach 27.2 mm ist die Bildung der ersten Falte der Innenwand bereits abgeschlossen. Das in Abbildung 9.10 sichtbare Falten – mit Pfeil markiert – erfolgt wie erwartet in Richtung der kürzeren Aussenwand. Bei einer Kompression von 107 mm ist die finale Deformation erreicht. Das experimentelle Ergebnis von Tryland [174, 175] wird in der finalen Deformation, für einen visuellen Vergleich, dem numerischen Resultat gegenübergestellt. Die Anzahl und Orientierung der gebildeten Falten sowie die Deformationen der oberen Kante des Profils, die an besonders markanten Stellen markiert ist, stimmt überein. Nicht vollständig übereinstimmende Merkmale sind (a) die im numerischen Modell erkennbaren Ansätze für eine weitere Faltenbildung am unteren Ende, die auf dem experimentellen Profil nicht auftreten, sowie (b) die etwas schärfere Faltenausprägung im Experiment.

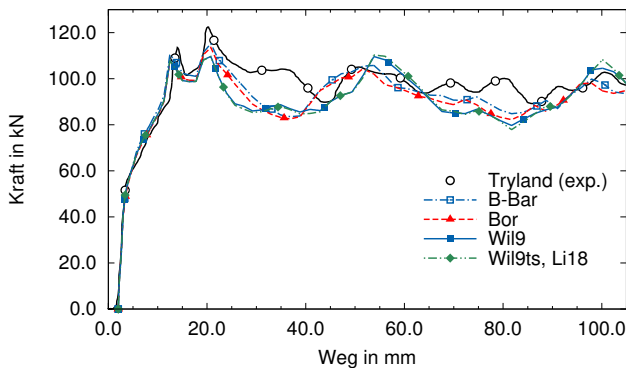


Abbildung 9.11: Kompression des Rechteckrohrprofils. Kontaktkraft über Weg der starren Platte.

Zur quantitativen Bewertung wird der Verlauf der Reaktionskraft über die Kompression betrachtet. In Abbildung 9.11 werden zum Vergleich mit den numerischen Ergebnissen die experimentellen Werte des in Abbildung 9.10 enthaltenen Versuchskörpers genutzt. Um den sich zu Beginn der experimentellen Kurve erst aufbauenden Kontakt zwischen Werkzeug und Profil auszugleichen, werden die numerischen Daten um 2 mm verschoben. Der erste Anstieg bis zu einem Kraftniveau von etwa 50 kN stimmt für alle Kurven sehr gut überein. Danach folgt eine geringfügige Abweichung bis zur ersten Spitze, die im Experiment ungefähr 5 kN höher liegt. Der Zeitpunkt beziehungsweise die Kompression, zu der die nächste Spitze auftritt, stimmt ebenfalls gut mit dem Experiment überein. Das Niveau der Reaktionskraft korreliert ab dieser Kompression im Durchschnitt noch gut, weist aber an einigen Stellen, beispielsweise bei 30 mm und 80 mm größere Abweichungen von circa 20 kN auf. Die Ursachen hierfür liegen wohl einerseits in Streuungen sowohl des Materials als auch im genutzten Materialmodell, die vom numerischen Versuch nicht genau abgebildet werden. Das können etwa Änderungen des Elastizitätsmoduls oder eine nicht an jeder Stelle des Materials vorliegende Isotropie sein. Generell sind den Materialgesetzen wegen der in numerischen Simulationen oft sehr einfachen Modellierung Grenzen gesetzt. Beispielsweise wird in der Untersuchung der Faltung von dickwandigen Rohren von Tryland [176] mit einem Detailschnitt durch den experimentellen Versuchskörper gezeigt, wie komplex das Materialverhalten gegenüber der numerischen Materialmodellierung ist. Abgesehen von den genannten Nichtlinearitäten ist die Korrelation zwischen den experimentellen und numerischen Ergebnissen ebenfalls gut.

Zur Unterscheidung in den numerischen Kurven: Die Ergebnisse des Wil9-Elements stimmen nahezu mit denen der Elemente Wil9ts und Li18 überein. Die Ergebnisse für die Elemente B-Bar und Bor stimmen ebenfalls gut miteinander überein, was auf die gute Qualität der Finite-Element-Vernetzung mit fast quaderförmigen Elementen zurückzuführen ist. Diese bedingt, dass nur moderate Korrekturen bei der Bor-Formulierung anfallen. Die Elemente Wil9 und Wil9ts stimmen im Verlauf der Kurven sehr gut mit dem Bor-Element überein.

10 Zusammenfassung

Folgende Fragestellungen wurden in der vorliegenden Arbeit behandelt:

Effiziente Berechnung inkompatibler Freiheitsgrade

1. Das von Mattern [112] sowie Mattern, Schmied und Schweizerhof [114] vorgestellte Konzept inkompatible Freiheitsgrade mit expliziter Zeitintegration zu berechnen wurde weiter ausgearbeitet. Wichtig für eine effiziente Berechnung ist hierbei eine sinnvolle Skalierung der Massen für die inkompatiblen Freiheitsgrade, die abhängig von der inkompatiblen Erweiterung deutlich höhere Eigenfrequenzen als die kompatiblen Elemente aufweisen.
2. Das effiziente Konzept, ermöglicht durch die eingeführten inkompatiblen Massen, wird mit einer vollständig expliziten oder kombiniert impliziten/expliciten Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade umgesetzt. Durch die Kombination mit einer impliziten Berechnung – das heißt einer Kondensation einiger (der volumetrischen) inkompatiblen Freiheitsgrade – können zu große Skalierungswerte vermieden werden, was gleichzeitig die Genauigkeit des Verfahrens erhöht.
3. An einer repräsentativen Auswahl an Volumenformulierungen wird die allgemeine Verwendbarkeit des Konzepts demonstriert. Dazu wird die explizite Lösung für die inkompatiblen Freiheitsgrade der impliziten Lösung gegenübergestellt. Abhängig von der Anzahl der inkompatiblen Freiheitsgrade werden deutliche Effizienzsteigerungen für die explizite Berechnung beobachtet.

Robustheit gegenüber Kinematiken ausgehend von inkompatiblen Freiheitsgraden

1. Die mit den inkompatiblen Moden assoziierten Massen ermöglichen es, mit der damit einfach zu berechnenden kinetischen Energie, die Entstehung von Kinematiken frühzeitig zu entdecken. Mit einer Deaktivierung der betroffenen auffälligen inkompatiblen Freiheitsgrade gelingt es, Simulationen ohne Kinematiken durchzuführen. Für komplexe Probleme mit wechselnder Beanspruchung der einzelnen Elemente ist dieses Vorgehen aber nicht praktikabel, da die deaktivierten Freiheitsgrade ihren eigentlichen Zweck, die Genauigkeit zu verbessern, nicht mehr erfüllen. Zudem sind die numerischen Schranken für die Deaktivierung abhängig vom betrachteten Problem.

2. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde eine ad-hoc-Formulierung für die inkompatiblen Elementerweiterungen entwickelt. Diese erfüllt interessanterweise die Volumenbedingung nach Nagtegaal und Fox [121] und es werden künstliche Kinematiken vermieden. Diese Volumenbedingung wird ebenfalls von der inkrementellen Formulierung erfüllt. Im Vergleich dazu sind die Kinematiken in einer klassischen totalen Verschiebungsformulierung enthalten. Die mit diesen Formulierungen untersuchten größeren Beispiele bestätigen die theoretischen Überlegungen der ad-hoc-Formulierung und der oben erwähnten inkrementellen Formulierung auch für große Deformationen, für die durchweg gute Lösungen ohne das Auftreten von Kinematiken erzielt werden.
3. Die ad-hoc-Formulierung wurden die inkompatiblen Freiheitsgrade impliziten berechnet. Die für eine explizite Berechnung erforderlichen Untersuchungen, um eine sinnvolle Konstruktion der inkompatiblen Massen und deren Skalierung zu erhalten, wurden aus Zeitgründen am Ende der Bearbeitungszeit der vorliegenden Arbeit nicht durchgeführt.
4. Für vollständig implizite Verfahren sollte die vorgeschlagene ad-hoc-Formulierung ebenfalls nicht zu Kinematiken führen.

Verschiedene Formulierungen inkompatibler Erweiterungen; Was ist gut, zu viel und brauchbar für spezielle Probleme?

1. Die Untersuchung verschiedener, im Schrifttum etablierter, Interpolationen inkompatibler Erweiterungen des Verschiebungselements zeigen, dass außer für spezielle Probleme, meist eine geringe Anzahl inkompatibler Freiheitsgrade bereits zu Beseitigung wesentlicher Defizite ausreicht.
2. Die Wirksamkeit inkompatibler Erweiterungen wird für spezielle Probleme auf Basis der Taylorreihenentwicklung der Ableitung der kompatiblen Ansatzfunktionen den Arbeiten von Korelc und Wriggers [88, 86] folgend für spezielle Probleme erhöht. Durch zusätzliche Vereinfachungen ist das Element sehr effizient, ähnlich zu Formulierungen mit reduzierter Integration aufgebaut und überzeugend in vielen numerischen Tests.
3. Erste erfolgreiche Untersuchung der Praxistauglichkeit mit realistischeren Beispielen erfolgten durch die Implementierung einiger der untersuchten Elemente in die Anwenderschnittstelle von LS-DYNA [110], siehe auch [150].

Insgesamt betrachtet wurde, die für lineare Lagrange-Elemente sehr erfolgreiche Methode inkompatibler Verschiebungen für explizite Simulationen umgesetzt. Defizite wie die fehlende numerische Robustheit gegenüber Kinematiken und zu lange Simulationszeiten, die beide die Verwendung der Methode ursprünglich deutlich hemmten, konnten erfolgreich kompensiert werden.

Quellenverzeichnis

- [1] L. Adam and J.-P. Ponthot. Thermomechanical modeling of metals at finite strains: First and mixed order finite elements. *International Journal of Solids and Structures*, 2005.
- [2] A. Ahmed and L.J. Sluys. Implicit/explicit elastodynamics of isotropic and anisotropic plates and shells using a solid-like shell element. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 43:118–132, 2014.
- [3] Altair Engineering, Inc. RADIOSS. <http://www.altairhyperworks.com>, 2017.
- [4] R.J. Alves de Sousa, R.P.R. Cardoso, R.A. Fontes Valente, J.-W. Yoon, J.J. Grácio, and R.M. Natal Jorge. A new one-point quadrature enhanced assumed strain (EAS) solid-shell element with multiple integration points along thickness: Part I—geometrically linear applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62(7):952–977, 2005.
- [5] R.J. Alves de Sousa, R.P.R. Cardoso, R.A. Fontes Valente, J.-W. Yoon, J.J. Grácio, and R.M. Natal Jorge. A new one-point quadrature enhanced assumed strain (EAS) solid-shell element with multiple integration points along thickness—part II: nonlinear applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 67(2):160–188, 2006.
- [6] R.J. Alves de Sousa, R.M. Natal Jorge, R.A. Fontes Valente, and J.M.A. César de Sá. A new volumetric and shear locking-free 3D enhanced strain element. *Engineering Computations*, 20(7):896–925, 2003.
- [7] R.J. Alves de Sousa, J.W. Yoon, R.P.R. Cardoso, R.A. Fontes Valente, and J.J. Grácio. On the use of a reduced enhanced solid-shell (RESS) element for sheet forming simulations. *International Journal of Plasticity*, 23(3):490–515, 2007.
- [8] U. Andelfinger and E. Ramm. EAS-elements for two-dimensional, three-dimensional, plate and shell structures and their equivalence to HR-elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 36:1311–1337, 1993.
- [9] P.M.A. Areias, J.M.A. César de Sá, C.A. Conceição António, and A.A. Fernandes. Analysis of 3D problems using a new enhanced strain hexahedral element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58(11):1637–1682, 2003.

- [10] F. Armero. On the locking and stability of finite elements in finite deformation plane strain problems. *Computers & Structures*, 75:261–290, 2000.
- [11] H. Askes, D.C.D. Nguyen, and A. Tyas. Increasing the critical time step: micro-inertia, inertia penalties and mass scaling. *Computational Mechanics*, 47(6):657–667, 2011.
- [12] K.-J. Bathe. *Finite-Elemente-Methoden*. Springer, 2. Auflage, 2002.
- [13] T. Belytschko and L.P. Bindeman. Assumed strain stabilization of the eight node hexahedral element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 105:225–260, 1993.
- [14] T. Belytschko, J.I. Lin, and C.-S. Tsay. Explicit algorithms for the nonlinear dynamics of shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 42:225–251, 1984.
- [15] T. Belytschko, W.K. Liu, and B. Moran. *Nonlinear finite elements for continua and structures*. Wiley, 2009.
- [16] T. Belytschko, H. Stolarski, W.K. Liu, N. Carpenter, and J.S.-J. Ong. Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 51(1-3):221–258, 1985.
- [17] T. Belytschko, B.L. Wong, and H. Stolarski. Assumed strain stabilization procedure for the 9-node Lagrange shell element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28(2):385–414, 1989.
- [18] D.J. Benson. Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 99(2-3):235–394, 1992.
- [19] D.J. Benson. Stable time step estimates for multi-material Eulerian hydrocodes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 167:191–205, 1998.
- [20] D.J. Benson. Explicit Finite Element Methods for Large Deformation Problems in Solid Mechanics. In E. Stein, R. de Borst, and T.J.R. Hughes, editors, *Encyclopedia of Computational Mechanics*, volume 2: Solids and Structures, chapter 25. Wiley, 2004.
- [21] D.J. Benson, Y. Bazilevs, M.C. Hsu, and T.J.R. Hughes. Isogeometric shell analysis: The Reissner-Mindlin shell. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(5-8):276–289, 2010.
- [22] P. Betsch. Energy-momentum integrators for elastic cosserat points, rigid bodies and multibody systems. In P. Betsch, editor, *Structure-preserving integrators in nonlinear structural dynamics and multibody dynamics*, Series: CISM Courses and Lectures, volume 565, pages 31–89. Springer, 2016.

- [23] P. Betsch and E. Stein. An assumed strain approach avoiding artificial thickness straining for a non-linear 4-node shell element. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 11:899–909, 1995.
- [24] P. Betsch and E. Stein. Numerical implementation of multiplicative elasto-plasticity into assumed strain elements with application to shells at large strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 179(3-4):215–245, 1999.
- [25] M. Bischoff. *Theorie und Numerik einer dreidimensionalen Schalenformulierung*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1999.
- [26] M. Bischoff and E. Ramm. Shear deformable shell elements for large strains and rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(23):4427–4449, 1997.
- [27] M. Bischoff, E. Ramm, and D. Braess. A class of equivalent enhanced assumed strain and hybrid stress finite elements. *Computational Mechanics*, 22(6):443–449, 1999.
- [28] M. Bischoff and I. Romero. A generalization of the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69:1851–1868, 2007.
- [29] K.-U. Bletzinger, M. Bischoff, and E. Ramm. A unified approach for shear-locking-free triangular and rectangular shell finite elements. *Computers & Structures*, 75(3):321–334, 2000.
- [30] T. Borrvall. A heuristic attempt to reduce transverse shear locking in fully integrated hexahedra with poor aspect ratio. *7th European LS-DYNA Conference, Salzburg, Austria*, 2009.
- [31] B. Brank, J. Korelc, and A. Ibrahimbegović. Nonlinear shell problem formulation accounting for through-the-thickness stretching and its finite element implementation. *Computers & Structures*, 80:699–717, 2002.
- [32] Q.V. Bui, L. Papeleux, and J.P. Ponthot. Numerical simulation of springback using enhanced assumed strain elements. *Journal of Materials Processing Technology*, 153-154:314–318, 2004.
- [33] G.T. Camacho and M. Ortiz. Adaptive Lagrangian modelling of ballistic penetration of metallic targets. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 142(3-4):269–301, 1997.
- [34] R.P.R. Cardoso, J.-W. Yoon, M. Mahardika, S. Choudhry, R.J. Alves de Sousa, and R.A. Fontes Valente. Enhanced assumed strain (EAS) and assumed natural strain (ANS) methods for one-point quadrature solid-shell elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75:156–187, 2008.

- [35] G. Cocchetti, M. Pagani, and U. Perego. Selective mass scaling and critical time-step estimate for explicit dynamics analyses with solid-shell elements. *Computers & Structures*, 127:39–52, 2013.
- [36] G. Cocchetti, M. Pagani, and U. Perego. Selective mass scaling for distorted solid-shell elements in explicit dynamics: optimal scaling factor and stable time step estimate. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 101(9):700–731, 2015.
- [37] R.D. Cook, D.S. Malkus, and M.E. Plesha. *Concepts and applications of finite element analysis*. Wiley, 3rd edition, 1989.
- [38] J.A. Cottrell, T.J.R. Hughes, and Y. Bazilevs. *Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA*. John Wiley & Sons, 2009.
- [39] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy. Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, 100(1):32–74, 1928.
- [40] M. A. Crisfield and J. Shi. An energy conserving co-rotational procedure for non-linear dynamics with finite elements. *Nonlinear Dynamics*, 9(1):37–52, 1996.
- [41] M.A. Crisfield. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, volume 2: Advanced Topics. John Wiley & Sons, Ltd, 2001.
- [42] M.A. Crisfield. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, volume 1: Essentials. John Wiley & Sons, Ltd, 2003.
- [43] M.A. Crisfield, G.F. Moita, G. Jelenić, and L.P.R. Lyons. Enhanced lower-order element formulations for large strains. *Computational Mechanics*, 17:62–73, 1995.
- [44] Dassault Systèmes. ABAQUS. <http://www.3ds.com>, 2017.
- [45] G. J. de Frías, W. Aquino, K. H. Pierson, M. W. Heinstein, and B. W. Spencer. A multiscale mass scaling approach for explicit time integration using proper orthogonal decomposition. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 97(11):799–818, 2014.
- [46] Issam Doghri. *Mechanics of deformable solids: linear, nonlinear, analytical and computational aspects*. Engineering online library. Springer, 2000.
- [47] S. Doll, K. Schweizerhof, R. Hauptmann, and C. Freischläger. On volumetric locking of low-order solid and solid-shell elements for finite elastoviscoplastic deformations and selective reduced integration. *Engineering Computations*, 17(7):874–902, 2000.
- [48] E.N. Dvorkin and K.-J. Bathe. A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis. *Engineering Computations*, 1(1):77–88, 1984.

- [49] T. Erhart, W.A. Wall, and E. Ramm. Robust adaptive remeshing strategy for large deformation, transient impact simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65(13):2139–2166, 2006.
- [50] ESI-Group. PAM-CRASH. <http://www.esi-group.com>, 2017.
- [51] M. Fiolka and A. Matzenmiller. On the resolution of transverse stresses in solid-shells with a multi-layer formulation. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 23(4):313–326, 2006.
- [52] D.P. Flanagan and T. Belytschko. Eigenvalues and Stable Time Steps for the Uniform Strain Hexahedron and Quadrilateral. *Journal of Applied Mechanics*, 51(1):35, 1984.
- [53] R.A. Fontes Valente, R.J. Alves de Sousa, and R.M. Natal Jorge. An enhanced strain 3D element for large deformation elastoplastic thin-shell applications. *Computational Mechanics*, 34(1):38–52, 2004.
- [54] C. Freischläger. *Konzepte zur Formulierung versteifungsfreier Volumenelemente*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 2000.
- [55] C. Freischläger and K. Schweizerhof. On a systematic development of trilinear three-dimensional solid elements based on Simo’s enhanced strain formulation. *International Journal of Solids and Structures*, 33(20-22):2993–3017, 1996.
- [56] S. Glaser and F. Armero. On the formulation of enhanced strain finite elements in finite deformations. *Engineering Computations*, 14(7):759–791, 1997.
- [57] D. Gross, W. Hauger, J. Schröder, and W.A. Wall. *Technische Mechanik 2 - Elastostatik*. Springer Vieweg, 12. Auflage, 2014.
- [58] E. Hairer, C. Lubich, and G. Wanner. Geometric numerical integration illustrated by the Störmer-Verlet method. *Acta Numerica*, 12:399–450, 2003.
- [59] M. Harnau, A. Konyukhov, and K. Schweizerhof. Algorithmic aspects in large deformation contact analysis using ‘Solid-Shell’ elements. *Computers & Structures*, 83(21-22):1804–1823, 2005.
- [60] M. Harnau and K. Schweizerhof. About linear and quadratic ‘Solid-Shell’ elements at large deformations. *Computers & Structures*, 80(9-10):805–817, 2002.
- [61] M. Harnau and K. Schweizerhof. Artificial kinematics and simple stabilization of solid-shell elements occurring in highly constrained situations and applications in composite sheet forming simulation. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42(12):1097–1111, 2006.

- [62] S. Hartmann and D.J. Benson. Mass scaling and stable time step estimates for isogeometric analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 102(3-4):671–687, 2015.
- [63] B. Hassani and S.M. Tavakkoli. Derivation of incompatible modes in non-conforming finite elements using hierarchical shape functions. *Asian Journal of Civil Engineering (Building and Housing)*, 6(3):153–165, 2005.
- [64] R. Hauptmann, S. Doll, M. Harnau, and K. Schweizerhof. ‘Solid-shell’ elements with linear and quadratic shape functions at large deformations with nearly incompressible materials. *Computers & Structures*, 79(18):1671–1685, 2001.
- [65] R. Hauptmann and K. Schweizerhof. A systematic development of ‘solid-shell’ element formulations for linear and non-linear analyses employing only displacement degrees of freedom. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42:49–69, 1998.
- [66] R. Hauptmann, K. Schweizerhof, and S. Doll. Extension of the ‘solid-shell’ concept for application to large elastic and large elastoplastic deformations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49:1121–1141, 2000.
- [67] G.A. Holzapfel. *Nonlinear solid mechanics: a continuum approach for engineering*. Wiley, 2008.
- [68] B. Hudobivnik and J. Korelc. Closed-form representation of matrix functions in the formulation of nonlinear material models. *Finite Elements in Analysis and Design*, 111:19–32, 2016.
- [69] T.J.R. Hughes. Generalization of selective integration procedures to anisotropic and nonlinear media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15(9):1413–1418, 1980.
- [70] T.J.R. Hughes. *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice-Hall, international edition, 1987.
- [71] R. Hutter and P. Niederer. Total Hourglass Control - A Robust Finite Element Formulation for the Calculation of Organ Deformations. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 4(3):189–208, 2001.
- [72] A. Ibrahimbegović and I. Kožar. Non-linear Wilson’s brick element for finite elastic deformations of three-dimensional solids. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 11(8):655–664, 1995.
- [73] J. Irslinger. *Mechanische Grundlagen und Numerik dreidimensionaler Schalenelemente*. Dissertation, Universität Stuttgart, 2013.
- [74] W. Jaunzemis. *Continuum mechanics*. MacMillan, 1967.

- [75] A. Kamoulakos. A simple benchmark for impact. *Bench Mark*, pages 31–35, 1990.
- [76] E.P. Kasper and R.L. Taylor. A mixed-enhanced strain method: Part I: Geometrically linear problems. *Computers & Structures*, 75:237–250, 2000.
- [77] E.P. Kasper and R.L. Taylor. A mixed-enhanced strain method: Part II: Geometrically nonlinear problems. *Computers & Structures*, 75:251–260, 2000.
- [78] S. Klinkel, F. Gruttmann, and W. Wagner. A continuum based three-dimensional shell element for laminated structures. *Computers & Structures*, 71(1):43–62, 1999.
- [79] S. Klinkel, F. Gruttmann, and W. Wagner. A robust non-linear solid shell element based on a mixed variational formulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(1-3):179–201, 2006.
- [80] S. Klinkel and W. Wagner. A geometrical non-linear brick element based on the EAS-method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40:4529–4545, 1997.
- [81] Y. Ko, P.-S. Lee, and K.-J. Bathe. A new MITC4+ shell element. *Computers & Structures*, 182:404–418, 2017.
- [82] J. Korelc. *Symbolic approach in computational mechanics and its application to the enhanced strain method*. Dissertation, TH Darmstadt, 1996.
- [83] J. Korelc. Automatic generation of finite-element code by simultaneous optimization of expressions. *Theoretical Computer Science*, 187(1-2):231–248, 1997.
- [84] J. Korelc. Automation of primal and sensitivity analysis of transient coupled problems. *Computational Mechanics*, 44(5):631–649, 2009.
- [85] J. Korelc. AceGen and AceFEM, Version 6.813. <http://symech.fgg.uni-lj.si>, 2017.
- [86] J. Korelc, U. Šolinc, and P. Wriggers. An improved EAS brick element for finite deformation. *Computational Mechanics*, 46(4):641–659, 2010.
- [87] J. Korelc and S. Stupkiewicz. Closed-form matrix exponential and its application in finite-strain plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 98(13):960–987, 2014.
- [88] J. Korelc and P. Wriggers. An efficient 3D enhanced strain element with Taylor expansion of the shape functions. *Computational Mechanics*, 19(2):30–40, 1996.
- [89] J. Korelc and P. Wriggers. Consistent gradient formulation for a stable enhanced strain method for large deformations. *Engineering Computations*, 13(1):103–123, 1996.

- [90] J. Korelc and P. Wriggers. Improved Enhanced Strain Four-Node Element With Taylor Expansion Of The Shape Functions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(3):407–421, 1997.
- [91] J. Korelc and P. Wriggers. *Automation of Finite Element Methods*. Springer, 2016.
- [92] F. Koschnick. *Geometrische Locking-Effekte bei Finiten Elementen und ein allgemeines Konzept zu ihrer Vermeidung*. Dissertation, TU München, 2004.
- [93] F. Koschnick, M. Bischoff, N. Camprubí, and K.-U. Bletzinger. The discrete strain gap method and membrane locking. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(21–24):2444–2463, 2005.
- [94] I. Kožar and A. Ibrahimbegović. Finite element formulation of the finite rotation solid element. *Finite Elements in Analysis and Design*, 20(2):101–126, 1995.
- [95] D. Kuhl and E. Ramm. Constraint energy momentum algorithm and its application to non-linear dynamics of shells. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 136:293–315, 1996.
- [96] D. Kuhl and E. Ramm. Time integration in the context of energy control and locking free finite elements. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 7(3):299–332, 2000.
- [97] J. Lengiewicz, J. Korelc, and S. Stupkiewicz. Automation of finite element formulations for large deformation contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 85(10):1252–1279, 2011.
- [98] A. Lew, R. Radovitzky, and M. Ortiz. An artificial-viscosity method for the Lagrangian analysis of shocks in solids with strength on unstructured, arbitrary-order tetrahedral meshes. *Journal of Computer-Aided Materials Design*, 8:213–231, 2001.
- [99] L.M. Li, D.Y. Li, and Y.H. Peng. The simulation of sheet metal forming processes via integrating solid-shell element with explicit finite element method. *Engineering with Computers*, 27(3):273–284, 2010.
- [100] L.M. Li, Y.H. Peng, and D.Y. Li. Explicit Simulation of Roll Forming Process with EAS Solid-shell Elements. *AIP Conference Proceedings*, 1223(1):1223–1230, 2010.
- [101] L.M. Li, Y.H. Peng, and D.Y. Li. A stabilized underintegrated enhanced assumed strain solid-shell element for geometrically nonlinear plate/shell analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, 47(5):511–518, 2011.
- [102] Qiaomin Li, Yuqi Liu, Zhibing Zhang, and Wen Zhong. A new reduced integration solid-shell element based on eas and ans with hourglass stabilization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 104(8):805–826, 2015.

- [103] X. Li, A.J.L. Crook, and L.P.R. Lyons. Mixed Strain Elements For Non-Linear Analysis. *Engineering Computations*, 10(3):223–242, 1993.
- [104] J.I. Lin. An Element Eigenvalue Theorem And Its Application For Stable Time Steps. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 73:283–294, 1989.
- [105] J.I. Lin. Bounds on eigenvalues of finite element systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32:957–967, 1991.
- [106] W.K. Liu, H. Chang, J.-S. Chen, and T. Belytschko. Arbitrary Lagrangian-Eulerian Petrov-Galerkin finite elements for nonlinear continua. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 68(3):259 – 310, 1988.
- [107] W.K. Liu, Y.-K. Hu, and T. Belytschko. Multiple quadrature underintegrated finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:3263–3289, 1994.
- [108] W.K. Liu, J.S.-J. Ong, and R.A. Uras. Finite element stabilization matrices-a unification approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 53(1):13–46, 1985.
- [109] Livermore Software Technology Corporation (LSTC). LS-DYNA Keyword and Theory Manual. <http://www.lstc.com>, 2017.
- [110] Livermore Software Technology Corporation (LSTC). LS-DYNA, Version R7.1.2. <http://www.lstc.com>, 2017.
- [111] R.H. MacNeal and R.L. Harder. A proposed standard set of problems to test finite element accuracy. *Finite elements in Analysis and Design*, 1:3–20, 1985.
- [112] S. Mattern. *Hocheffiziente Formulierung und Implementierung finiter Elemente für transiente Analysen mit expliziter Zeitintegration*. Dissertation, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), 2012.
- [113] S. Mattern, C. Schmied, and K. Schweizerhof. Incompatible Modes for Volumetric Shell Elements in Explicit Time Integration. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (PAMM)*, 12(1):181–182, 2012.
- [114] S. Mattern, C. Schmied, and K. Schweizerhof. Highly efficient solid and solid-shell finite elements with mixed strain–displacement assumptions specifically set up for explicit dynamic simulations using symbolic programming. *Computers & Structures*, 154:210–225, 2015.
- [115] S. Mattern and K. Schweizerhof. Entwicklung hoch effizienter Schalenelemente mit quadratischer Ansatzordnung in Schalenebene für transiente Analysen – Aufbau einer Systematik zur programmunterstützten Entwicklung von Schalenelementen. Abschlussbericht zum DFG-Forschungsvorhaben SCHW307/20-1, Deutsche Forschungsgemeinschaft, 2011.

- [116] S. Mattern and K. Schweizerhof. Highly Efficient Solid-Shell Finite Elements for Dynamic Applications - an Implementation Concept using Symbolic Programming. *Presented at 8th International Conference on Structural Dynamics (EURO-DYN)*, 2011.
- [117] G.F. Moita and M.A. Crisfield. A Finite Element Formulation For 3-D Continua Using the Co-Rotational Technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39(22):3775–3792, 1996.
- [118] R.A.S. Moreira, R.J. Alves de Sousa, and R.A. Fontes Valente. A solid-shell layerwise finite element for non-linear geometric and material analysis. *Composite Structures*, 92(6):1517–1523, 2010.
- [119] L. Morino, J.W. Leech, and E.A. Wittmer. An improved numerical calculation technique for large elastic–plastic transient deformations of thin shells: Part 2 – Evaluation and applications. *Journal of Applied Mechanics*, 38(2):429–436, 1971.
- [120] D.S. Mueller-Hoeppe, S. Loehnert, and P. Wriggers. A finite deformation brick element with inhomogeneous mode enhancement. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 78:1164–1187, 2009.
- [121] J.C. Nagtegaal and D.D. Fox. Using assumed enhanced strain elements for large compressive deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 33(20-22):3151–3159, 1996.
- [122] L. Olovsson and K. Simonsson. Iterative solution technique in selective mass scaling. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 22(1):77–82, 2005.
- [123] L. Olovsson, K. Simonsson, and M. Unosson. Selective mass scaling for explicit finite element analyses. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63(10):1436–1445, 2005.
- [124] L. Olovsson, M. Unosson, and K. Simonsson. Selective mass scaling for thin walled structures modeled with tri-linear solid elements. *Computational Mechanics*, 34(2):134–136, 2004.
- [125] M. Pagani, S. Reese, and U. Perego. Explicit simulation of forming processes using a novel solid-shell concept based on reduced integration. *Key Engineering Materials*, 504-506:425–430, 2012.
- [126] M. Pagani, S. Reese, and U. Perego. Computationally efficient explicit nonlinear analyses using reduced integration-based solid-shell finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 268:141–159, 2014.
- [127] D. Pantuso and K.-J. Bathe. On the Stability of Mixed Finite Elements in Large Strain Analysis of Incompressible Solids. *Finite elements in analysis and design*, 28:83–104, 1997.

- [128] M. Papadrakakis. A method for the automatic evaluation of the dynamic relaxation parameters. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 25(1):35–48, 1981.
- [129] M.P.L. Parente, R.A. Fontes Valente, R.M. Natal Jorge, R.P.R. Cardoso, and R.J. Alves de Sousa. Sheet metal forming simulation using EAS solid-shell finite elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, 42(13):1137–1149, 2006.
- [130] T.H.H. Pian and C.C. Wu. *Hybrid and Incompatible Finite Element Methods*. Modern Mechanics and Mathematics. CRC Press, 2005.
- [131] R. Piltner and R.L. Taylor. A quadrilateral mixed finite element with two enhanced strain modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(11):1783–1808, 1995.
- [132] M.A. Puso. A highly efficient enhanced assumed strain physically stabilized hexahedral element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49:1029–1064, 2000.
- [133] N.D. Quyn and A. Matzenmiller. A solid-shell element with enhanced assumed strains for higher order shear deformations in laminates. *Technische Mechanik*, 28(3-4):334–355, 2008.
- [134] K. Rah, W. Van Paepegem, and J. Degrieck. A novel versatile multilayer hybrid stress solid-shell element. *Computational Mechanics*, 51(6):825–841, 2012.
- [135] K. Rah, W. Van Paepegem, A.M. Habraken, and J. Degrieck. A mixed solid-shell element for the analysis of laminated composites. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 89:805–828, 2012.
- [136] K. Rah, W. Van Paepegem, A.M. Habraken, J. Degrieck, R.J. Alves de Sousa, and R.A. Fontes Valente. Optimal low-order fully integrated solid-shell elements. *Computational Mechanics*, 51(3):309–326, 2012.
- [137] S. Reese. On the Equivalence of Mixed Element Formulations and the Concept of Reduced Integration in Large Deformation Problems. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulations*, 3:1–33, 2002.
- [138] S. Reese. On a consistent hourglass stabilization technique to treat large inelastic deformations and thermo-mechanical coupling in plane strain problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(8):1095–1127, 2003.
- [139] S. Reese. On a physically stabilized one point finite element formulation for three-dimensional finite elasto-plasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(45-47):4685–4715, 2005.

- [140] S. Reese. A large deformation solid-shell concept based on reduced integration with hourglass stabilization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69:1671–1716, 2007.
- [141] S. Reese, M. Küssner, and B.D. Reddy. A new stabilization technique for finite elements in non-linear elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44:1617–1652, 1999.
- [142] S. Reese and P. Wriggers. A finite element method for stability problems in finite elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(7):1171–1200, 1995.
- [143] S. Reese and P. Wriggers. A stabilization technique to avoid hourglassing in finite elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48:79–109, 2000.
- [144] S. Reese, P. Wriggers, and B.D. Reddy. A new locking-free brick element technique for large deformation problems in elasticity. *Computers & Structures*, 75(3):291–304, 2000.
- [145] D. Roehl and E. Ramm. Large elasto-plastic finite element analysis of solids and shells with the enhanced assumed strain concept. *International Journal of Solids and Structures*, 33(20-22):3215–3237, 1996.
- [146] C. Schmied, S. Mattern, and K. Schweizerhof. Comparison of the numerical efficiency for variations of solid-shell finite elements using symbolic programming in explicit time integration. *Presented at the 6th European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS), Vienna, 2012.*
- [147] C. Schmied, S. Mattern, and K. Schweizerhof. Improving the numerical efficiency for 3d enhanced assumed strain finite elements in explicit time integration. *PAMM*, 13(1):105–106, 2013.
- [148] C. Schmied, S. Mattern, and K. Schweizerhof. Enhanced low-order displacement finite elements using incompatible mass scaling and static condensation in explicit time integration. *PAMM*, 14(1):221–222, 2014.
- [149] C. Schmied, K. Schweizerhof, and S. Mattern. Enhanced displacement mode finite elements for explicit transient analysis focussing on efficiency. *Shell Structures: Theory and Applications - Proceedings of the 10th SSTA 2013 Conference*, 3:437–440, 2013.
- [150] C. Schmied, K. Schweizerhof, and S. Mattern. Improved robust low order solid and solid-shell finite elements with incompatible modes / Enhanced assumed strains for explicit time integration. 14. *Deutsches LS-DYNA Forum, Bamberg, Deutschland, 2016.*

- [151] M. Schwarze and S. Reese. A reduced integration solid-shell finite element based on the EAS and the ANS concept–Geometrically linear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 80(10):1322–1355, 2009.
- [152] M. Schwarze and S. Reese. A reduced integration solid-shell finite element based on the EAS and the ANS concept–Large deformation problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 85:289–329, 2011.
- [153] M. Schwarze, I.N. Vladimirov, and S. Reese. On the implementation of the EAS and ANS concept into a reduced integration continuum shell element and applications to sheet forming. *International Journal of Material Forming*, 2(S1):919–922, 2009.
- [154] M. Schwarze, I.N. Vladimirov, and S. Reese. Sheet metal forming and springback simulation by means of a new reduced integration solid-shell finite element technology. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(5-8):454–476, 2011.
- [155] K. Schweizerhof, S. Mattern, and C. Schmied. Highly Efficient Solid-Shell Finite Elements for Explicit Dynamic Analysis using Symbolic Programming. *Proceedings of 7th International Conference on Computational Mechanics for Spatial Structures (IASS-IACM)*, 2012.
- [156] J.C. Simo and F. Armero. Geometrically Non-Linear Enhanced Strain Mixed Methods And The Method Of Incompatible Modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(7):1413–1449, 1992.
- [157] J.C. Simo, F. Armero, and R.L. Taylor. Improved versions of assumed enhanced strain tri-linear elements for 3D finite deformation problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 110:359–386, 1993.
- [158] J.C. Simo, D.D. Fox, and M.S. Rifai. On a stress resultant geometrically exact shell model. Part II: The linear theory; Computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 73(1):53–92, 1989.
- [159] J.C. Simo and M.S. Rifai. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 29:1595–1638, 1990.
- [160] J.C. Simo and N. Tarnow. The discrete energy-momentum method. Conserving algorithms for nonlinear elastodynamics. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 43:757–792, 1992.
- [161] T. Sussman and K.-J. Bathe. A finite element formulation for nonlinear incompressible elastic and inelastic analysis. *Computers & Structures*, 26(1-2):357–409, 1987.

- [162] T. Sussman and K.-J. Bathe. 3D-shell elements for structures in large strains. *Computers & Structures*, 122:2–12, 2013.
- [163] T. Sussman and K.-J. Bathe. Spurious modes in geometrically nonlinear small displacement finite elements with incompatible modes. *Computers & Structures*, 140:14–22, 2014.
- [164] K.Y. Sze and L.Q. Yao. A hybrid stress ANS solid-shell element and its generalization for smart structure modelling. Part I - solid-shell element formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48(4):545–564, 2000.
- [165] X.G. Tan and L. Vu-Quoc. Efficient and accurate multilayer solid-shell element: non-linear materials at finite strain. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63(15):2124–2170, 2005.
- [166] X.G. Tan and L. Vu-Quoc. Optimal solid shell element for large deformable composite structures with piezoelectric layers and active vibration control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(15):1981–2013, 2005.
- [167] G. Taylor. The use of flat-ended projectiles for determining dynamic yield stress. I. Theoretical considerations. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 194(1038):289–299, 1948.
- [168] R.L. Taylor. *FEAP - Finite Element Analysis Program*. University of California, Berkeley, 1991.
- [169] R.L. Taylor, P.J. Beresford, and E.L. Wilson. A non-conforming element for stress analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10(6):1211–1219, 1976.
- [170] R.L. Taylor, J.C. Simo, O.C. Zienkiewicz, and A.C.H. Chan. The Patch Test–A Condition For Assessing FEM Convergence. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22(1):39–62, 1986.
- [171] A. Ten Eyck and A. Lew. An adaptive stabilization strategy for enhanced strain methods in non-linear elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81:1387–1416, 2010.
- [172] A. Tkachuk and M. Bischoff. Variational methods for selective mass scaling. *Computational Mechanics*, 52(3):563–570, 2013.
- [173] A. Tkachuk and M. Bischoff. Local and global strategies for optimal selective mass scaling. *Computational Mechanics*, 53(6):1197–1207, 2014.
- [174] T. Tryland. A Simple Compression Test to Evaluate Ductility. *9th Nordic LS-DYNA Users Forum, Göteborg, Sweden*, 2008.

- [175] T. Tryland. Combinations of Meshes and Elements that Seems Able to Predict the Correct Deformation Mode. 13. *Deutsches LS-DYNA Forum, Bamberg, Deutschland*, 2014.
- [176] T. Tryland. Tests with a Sensitive Specimen Geometry confirm solid elements when the Aspect Ratio is below four. 14. *Deutsches LS-DYNA Forum, Bamberg, Deutschland*, 2016.
- [177] P.A.A. van Hoogstraten, P.M.A. Slaats, and F.P.T. Baaijens. A Eulerian approach to the finite element modelling of neo-Hookean rubber material. *Applied Scientific Research*, 48:193–210, 1991.
- [178] L. Vu-Quoc and X.G. Tan. Optimal solid shells for non-linear analyses of multilayer composites. I. Statics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(9-10):975–1016, 2003.
- [179] L. Vu-Quoc and X.G. Tan. Optimal solid shells for non-linear analyses of multilayer composites. II. Dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192(9-10):1017–1059, 2003.
- [180] W. Wagner, S. Klinkel, and F. Gruttmann. Elastic and plastic analysis of thin-walled structures using improved hexahedral elements. *Computers & Structures*, 80(9-10):857–869, 2002.
- [181] W.A. Wall, M. Bischoff, and E. Ramm. A deformation dependent stabilization technique, exemplified by EAS elements at large strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188:859–871, 2000.
- [182] A.C. Whiffin. The Use of Flat-Ended Projectiles for Determining Dynamic Yield Stress. II. Tests on Various Metallic Materials. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 194(1038):300–322, 1948.
- [183] M.L. Wilkins. Use of artificial viscosity in multidimensional fluid dynamic calculations. *Journal of Computational Physics*, 36:281–303, 1980.
- [184] E.L. Wilson and A. Ibrahimbegović. Use of incompatible displacement modes for the calculation of element stiffnesses or stresses. *Finite Elements in Analysis and Design*, 7(3):229–241, 1990.
- [185] E.L. Wilson and A. Ibrahimbegović. A modified method of incompatible modes. *Communications in Applied Numerical Methods*, 7(3):187–194, 1991.
- [186] E.L. Wilson, R.L. Taylor, W.P. Doherty, and J. Ghaboussi. Incompatible Displacement Models. In S.J. Fenves, N. Perrone, and A.R. Robinson, editors, *Numerical and Computer Models in Structural Mechanics*, pages 43–57. Academic Press, 1973.
- [187] K. Wisniewski and E. Turska. Improved 4-node Hu-Washizu elements based on skew coordinates. *Computers & Structures*, 87(7-8):407–424, 2009.

- [188] Wolfram Research, Inc. Mathematica, Version 11.1. <http://www.wolfram.com>, 2017.
- [189] P. Wriggers. *Nonlinear finite element methods*. Springer, Berlin, 2008.
- [190] P. Wriggers, R. Eberlein, and S. Reese. A comparison of three-dimensional continuum and shell elements for finite plasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 33(20-22):3309–3326, 1996.
- [191] P. Wriggers and J. Korelc. On enhanced strain methods for small and finite deformations of solids. *Computational Mechanics*, 18(6):413–428, 1996.
- [192] P. Wriggers and S. Reese. A note on enhanced strain methods for large deformations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 135:201–209, 1996.
- [193] Y.Y. Zhu and S. Cescotto. Unified and mixed formulation of the 4-node quadrilateral elements by assumed strain method: Application to thermomechanical problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38:685–716, 1995.
- [194] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The finite element method*, volume 1: The basis. Butterworth-Heinemann, fifth edition, 2000.
- [195] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. *The finite element method*, volume 2: Solid mechanics. Butterworth-Heinemann, fifth edition, 2000.

A Implementierung mit ACEGEN

A.1 Das Werkzeug ACEGEN

ACEGEN [85, 91] ist ein eigenständiges Werkzeug, das in das Computeralgebrasystems MATHEMATICA [188] eingebettet ist. Die Idee hinter ACEGEN ist die Automatisierung der Entwicklung und Berechnung von Finite-Elementen, was über die Kopplung mit dem ebenfalls in MATHEMATICA eingebetteten Finite-Elemente-Programm ACEFEM erreicht wird. Sämtliche Operationen werden symbolisch programmiert und gesteuert. Speziell für den Bereich von Finite-Elementen wurde ACEGEN erstmals in der Dissertation von Korelc [82] vorgestellt und seither in seiner Arbeitsgruppe für verschiedene Problemstellungen genutzt weiterentwickelt. Dazu zählen neben der Entwicklung der eigentlichen Entwicklung der Automatisierung von Korelc [83] unter anderem Elemente mit inkompatiblen Erweiterungen der Autoren Wriggers und Korelc [191, 88, 89, 90] sowie Korelc et al. [86], die Formulierung von nichtlinearen Schalenelementen von Brank et al. [31], zudem Kontaktformulierungen für große Deformationen, siehe Lengiewicz et al. [97], auch Sensitivitätsanalysen, siehe Korelc [84], und außerdem endliche Plastizitätsformulierungen mit geschlossenen Matrixfunktionen, siehe Korelc und Stupkiewicz [87] und Hudobivnik und Korelc [68].

```
v(36)=v(33)*((v(112)-v(113))*v(32)+(v(110)-v(111))*v(34))+((-v
& (108)+v(109))*v(32)+(-v(106)+v(107))*v(34))*v(35)
v(37)=1d0+v(2)
v(118)=v(31)*v(37)
v(64)=(v(37)*v(37))
v(38)=v(31)*((v(102)-v(105))*v(33)+v(35)*(v(101)-v(98)))+v(37
& )*((-v(103)+v(104))*v(33)+v(35)*(-v(100)+v(99)))
v(39)=v(31)*((v(110)-v(113))*v(33)+(-v(106)+v(109))*v(35))+((
& -v(111)+v(112))*v(33)+(v(107)-v(108))*v(35))*v(37)
v(40)=v(33)*((v(104)-v(105))*v(32)+(v(102)-v(103))*v(34))+v(35
& )*((-v(100)+v(101))*v(32)+v(34)*(-v(98)+v(99)))
v(41)=v(37)*v(35)*v(91)-v(92))+v(33)*(-v(95)+v(96))+v(31)*
& (v(35)*(-v(90)+v(93))+v(33)*v(94)-v(97)))
v(42)=v(35)*v(34)*(-v(90)+v(91))+v(32)*(-v(92)+v(93))+v(33)*
& (v(34)*v(94)-v(95))+v(32)*v(96)-v(97)))
v(51)=(qparr(i1+3*int(nqp))*rho*((v(31)*((v(109)-v(113))*v(32)
& +(-v(106)+v(110))*v(34))+((-v(108)+v(112))*v(32)+(v(107)-v(111
& ))*v(34))*v(37))*v(40)*v(41)-v(38)*v(42))+v(36)*v(38)-v(39
& )*v(40))*v(37)*v(34)*v(91)-v(95))+v(32)*(-v(92)+v(96))+v
& (31)*v(34)*(-v(90)+v(94))+v(32)*v(93)-v(97)))-v(36)*v(41)
& -v(39)*v(42))*v(31)*((v(101)-v(105))*v(32)+v(34)*v(102)-v(98
& ))+v(37)*((-v(100)+v(104))*v(32)+v(34)*(-v(103)+v(99))))))
& /32768d0
```

Abbildung A.1: Typischer Ausschnitt aus einem mit ACEGEN generierten FORTRAN-Quelltext.

Zwei der wichtigsten Funktionen sind die bereits in Abschnitt 7.6 angesprochene *automatic expression swell control* sowie die automatisierte Berechnung der Ableitung von Tensoren. Zusammen mit der Möglichkeit, den entwickelten Algorithmus in Programmiersprachen wie FORTRAN oder C zu exportieren, stellt ACEGEN eine große Entlastung für die Entwicklung von Finite-Elemente-Programmen dar. Damit werden typische Fehler, wie das Verwechseln von Schleifen und Indizes ausgeschlossen, wodurch die Aufmerksamkeit auf die Algorithmen selbst gerichtet werden kann. Abbildung A.1 zeigt einen typischen Ausschnitt von FORTRAN-Quelltext, der mit ACEGEN erzeugt wurde. Die Les- und Interpretierbarkeit ist allerdings erkennbar nicht mehr gegeben und beim Programmieren muss ausschließlich auf die symbolische Umgebung gesetzt werden.

Für weitere Details und Beispiele wird auf die Beschreibungen von Mattern [115] sowie das große Übersichtswerk von Korelc und Wriggers [91] verwiesen.

A.2 Monolithischer und modularer Aufbau von finiten Elementen für FEAP und LS-DYNA

Die in Kapitel 5 beschriebene Methodik für die explizite und implizite Berechnung inkompatibler Freiheitsgrade wurde in eine eigenständig auch für explizite Berechnungen weiterentwickelte Version von FEAP [168], siehe Fußnote 6 auf Seite 138, sowie über die Anwenderschnittstelle in LS-DYNA [110] implementiert. Alle rechenintensiven Operationen wurden – wie oben angesprochen – symbolisch mithilfe von ACEGEN programmiert. In Abbildung A.2 wird die Unterscheidung beispielhaft zwischen einem modular und einem monolithisch programmierten Finite-Element dargestellt, die im Folgenden erläutert wird.

Monolithische Struktur

Eine monolithische Programmierung zeichnet sich dadurch aus, dass sämtliche Operationen zur Berechnung des Kraftvektors eines Elements, bei Bedarf auch der Steifigkeitsmatrix, in nur einem Unterprogramm – für FORTRAN ist das eine *Subroutine* – zusammengefasst werden. Das ist für eine symbolische Programmierung mit ACEGEN vorteilhaft, da dann die angesprochene Möglichkeit auch komplexe Operationen kompakt darzustellen (*automatic expression swell control*) genutzt werden kann. Abbildung A.2 zeigt schematisch, wie sämtliche Schritte von der Initialisierung über die Berechnung der Verzerrungen, der Spannungen sowie der Elementkräfte inklusive der numerischen Integrationsschleife in einem monolithischen Block mit ACEGEN symbolisch programmiert werden. Dabei werden die zusätzlichen Operationen, die für die Einbettung der inkompatiblen Freiheitsgrade (im-FHGe) erforderlich sind, ebenfalls in den monolithischen Programmblock einbezogen. Das Ergebnis ist ein einziges zusammenhängendes Unterprogramm, das den Elementkraftvektor sowie den inkompatiblen Elementkraftvektor, bei Bedarf auch der inkompatiblen Steifigkeitsmatrix,

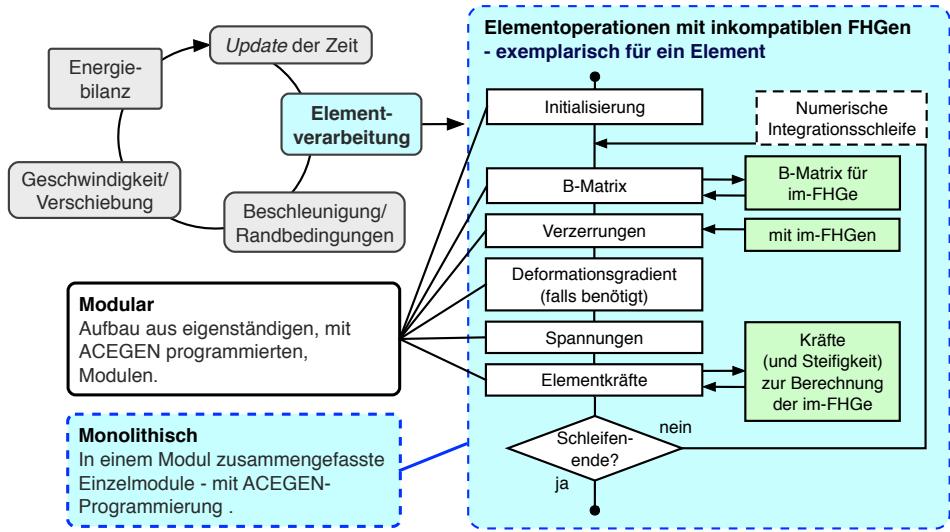


Abbildung A.2: Darstellung der typischen modularen Struktur der Operationen auf Elementebene innerhalb eines expliziten Verfahrens. Die Module stehen entweder als eigenständige Unterprogramme für sich oder können in einem zusammenhängenden Unterprogramm zusammengefasst werden. (im-FHGe = inkompatible Freiheitsgrade).

ausgibt. Da alle Module in einem Unterprogramm zusammengefasst sind, besteht für ACEGEN die Möglichkeit, die Anzahl der Operationen in diesem Unterprogramm zu optimieren. Der entscheidende Nachteil ist, dass damit nun die Modularität verloren geht. Das heißt, soll ein anderes Materialgesetz mit derselben Elementformulierung genutzt werden, ist für jeden Elementtyp, mit dem dieses Materialgesetz genutzt werden soll, eine *Subroutine* zu generieren. Jede dieser Kombinationen kann nun zwar einfach erstellt werden, da innerhalb der symbolischen Programmierumgebung ebenfalls nur die entsprechenden symbolischen Module ersetzt werden müssen, aber für Programme mit großen Materialbibliotheken wie LS-DYNA müsste für jede Element-Material-Kombination jeweils eine monolithische *Subroutine* generiert werden. Dies erscheint zwar mittels einer guten technischen Organisation effizient umsetzbar, würde den Programmumfang aber enorm erhöhen.

Eine monolithische Implementierung erfolgte zunächst für alle betrachteten Elementformulierungen in FEAP. Nach deren erfolgreicher Erprobung an verschiedenen Testbeispielen wurde die Möglichkeit genutzt, diese in der Anwenderschnittstelle von LS-DYNA jeweils als sogenanntes *resultant element* ebenfalls monolithisch zu implementieren. Die Rechenzeit dieser monolithischen Implementierung wird mit der, der im folgenden beschriebenen modularen Struktur verglichen, siehe Abbildung A.3.

Modulare Struktur

Im Gegensatz zur monolithischen Struktur wird für jedes Modul, das die Operationen zur Berechnung eines Teilschritts wie den Verzerrungen enthält, jeweils ein Unterprogramm verwendet. So werden bei der Verarbeitung der Operationen auf Elementebene die Unterprogramme der Module in der in Abbildung A.2 gezeigten Reihenfolge in einem Finite-Element-Programm aufgerufen. Das hat den Vorteil, dass die Module jeweils unabhängig ausgetauscht werden können, ohne andere Module ändern zu müssen. Ein Beispiel hierfür ist die Berechnung der Spannungen, die für verschiedene Stoffgesetze angepasst werden kann, ohne die Berechnung der Verzerrungen oder der Elementkräfte ändern zu müssen. So können schnell vielfältige Kombinationen aus Materialgesetzen und Elementformulierungen mit unterschiedlicher Verzerrungsgegestaltung zusammengestellt werden. Die dazu erforderlichen eigenständigen Module können jeweils auch mit ACEGEN generiert werden.

In FEAP hat der Programmierer völlige Freiheit, in welcher Weise die in Abbildung A.2 gezeigten Module implementiert werden. Auch innerhalb der Anwenderschnittstelle von LS-DYNA findet sich die in Abbildung A.2 gezeigte Struktur wieder. So ist es beispielsweise sehr einfach, einen eigenen Elementtyp über die Definition einer neuen B-Matrix einzubauen. Auch der Einbau inkompatibler Freiheitsgrade, wie in Kapitel 5 beschrieben, ist analog möglich. Dazu ist die in Abbildung A.2 gezeigte Einbettung der Zusatzmodule dargestellt.

Beim Einbau in ein großes Programmsystem besteht der Vorteil unter anderem darin, einen großen Teil der Materialbibliothek von LS-DYNA oder auch verschiedene Kontaktformulierungen nutzen zu können. Davon wird in Kapitel 9 zur Untersuchung realistischer Beispiele Gebrauch gemacht.

Es wird angemerkt, dass eine gemischte explizite/implizite oder vollständig implizite Berechnung der inkompatiblen Freiheitsgrade, siehe Abschnitt 5.4.4, modular nicht ohne Weiteres umzusetzen ist, da für die eventuell erforderlichen Iterationsschritte weitere Eingriffe in Module außerhalb der Anwenderschnittstelle erforderlich werden.

Effizienzvergleich zwischen der modularen und monolithischen Struktur einer Formulierung in LS-DYNA

In Kapitel 7 sind zur Validierung der expliziten Berechnung inkompatibler Freiheitsgrade zahlreiche Vergleiche der numerischen Effizienz zu finden. Dabei erfolgte die Abschätzung der Wettbewerbsfähigkeit der vorgeschlagenen expliziten Berechnung im Vergleich mit dem sogenannten B-Bar-Element. Für das Beispiel des Impakts eines Kupferstabs aus Abschnitt 7.5 wird nun ein Vergleich zwischen (a) der innerhalb der Anwenderschnittstelle eingebauten modularen Struktur, (b) der ebenfalls in die Anwenderschnittstelle eingebauten monolithischen Struktur sowie (c) dem Hauptprogramm LS-DYNA vorgenommen. Für die Simulation plastischen Verhaltens wird das Materialmodell *MAT_PIECEWISE_LINEAR_PLASTICITY, siehe LS-DYNA-Benutzerhandbuch [109], verwendet. Innerhalb der aus einem Unterprogramm bestehenden

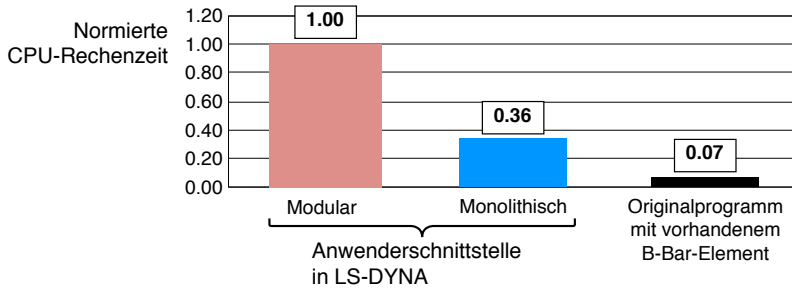


Abbildung A.3: Vergleich der normierten CPU-Rechenzeiten für das B-Bar-Element: Modulare gegen monolithische Umsetzung in der Anwenderschnittstelle in LS-DYNA gegenüber dem im Originalprogramm LS-DYNA vorhandenen B-Bar-Element.

monolithischen Programmierung, die wie oben beschrieben, nicht den Aufruf weiterer Unterprogramme vorsieht, wird dieses Materialmodell mit ACEGEN umgesetzt.

Abbildung A.3 zeigt die normierte CPU-Zeit der verglichenen Implementierungen. Als Vergleichswert wird die modulare Formulierung verwendet. Im Vergleich zu dieser modularen Programmierung ist das monolithische (*resultant*) Element nahezu um das 3fache schneller, was auf die Optimierung der Operationen mit ACEGEN zurückzuführen ist. Der Vergleich ist allerdings nicht völlig objektiv, da die Anwenderschnittstelle größtmögliche Nutzfremdlichkeit bereitstellen soll und daher nicht so sehr auf Geschwindigkeit optimiert ist.

Die mit ACEGEN generierten Programmteile sind elegant durch symbolische Programmierung generiert und zudem numerisch effizient, wie insbesondere die monolithische Programmierung zeigt.

A.3 Symbolische Eingabe: B-Matrix des B-Bar-Elements

```

Get["AceGen`"]; initname = "usld_b_bbar"; moduname = initname;
SMSInitialize[initname, "Language" -> "Fortran", "Mode" -> "Optimal"];
SMSModule[moduname,
  Integer[lft$$, llt$$],
  Real[bmtrx$$[nlq$$, 3, 3, "+", gjac$$[nlq$$], voln$$[nlq$$], xi$$, eta$$, zeta$$,
    n1$$, n2$$, n3$$, n4$$, n5$$, n6$$, n7$$, n8$$,
    dn1dxi$$, dn2dxi$$, dn3dxi$$, dn4dxi$$, dn5dxi$$, dn6dxi$$, dn7dxi$$, dn8dxi$$,
    dn1deta$$, dn2deta$$, dn3deta$$, dn4deta$$, dn5deta$$, dn6deta$$, dn7deta$$,
    dn8deta$$, dn1dzeta$$, dn2dzeta$$, dn3dzeta$$, dn4dzeta$$, dn5dzeta$$, dn6dzeta$$,
    dn7dzeta$$, dn8dzeta$$, x1$$[nlq$$], x2$$[nlq$$], x3$$[nlq$$], x4$$[nlq$$],
    x5$$[nlq$$], x6$$[nlq$$], x7$$[nlq$$], x8$$[nlq$$], y1$$[nlq$$], y2$$[nlq$$],
    y3$$[nlq$$], y4$$[nlq$$], y5$$[nlq$$], y6$$[nlq$$], y7$$[nlq$$], y8$$[nlq$$],
    z1$$[nlq$$], z2$$[nlq$$], z3$$[nlq$$], z4$$[nlq$$], z5$$[nlq$$], z6$$[nlq$$],
    z7$$[nlq$$], z8$$[nlq$$]]];

SMSDo[i, SMSInteger[lft$$], SMSInteger[llt$$]];
v = SMSReal[voln$$[i]];
{ξ, η, ζ} = SMSReal[{xi$$, eta$$, zeta$$}];
{xI, yI, zI} =
  SMSReal[{x1$$[i], x2$$[i], x3$$[i], x4$$[i], x5$$[i], x6$$[i], x7$$[i], x8$$[i]},
    {y1$$[i], y2$$[i], y3$$[i], y4$$[i], y5$$[i], y6$$[i], y7$$[i], y8$$[i]},
    {z1$$[i], z2$$[i], z3$$[i], z4$$[i], z5$$[i], z6$$[i], z7$$[i], z8$$[i]}}];
Nip = SMSReal[{n1$$, n2$$, n3$$, n4$$, n5$$, n6$$, n7$$, n8$$}];
βip =
  SMSReal[{dn1dxi$$, dn2dxi$$, dn3dxi$$, dn4dxi$$, dn5dxi$$, dn6dxi$$, dn7dxi$$, dn8dxi$$},
    {dn1deta$$, dn2deta$$, dn3deta$$, dn4deta$$, dn5deta$$, dn6deta$$, dn7deta$$, dn8deta$$},
    {dn1dzeta$$, dn2dzeta$$, dn3dzeta$$, dn4dzeta$$, dn5dzeta$$, dn6dzeta$$, dn7dzeta$$,
    dn8dzeta$$}];
jmtrxip = βip.{xI, yI, zI}^T;
detjip = Det[jmtrxip];
adjjmtrxip = Map[Reverse, Minors[Transpose[jmtrxip], Length[jmtrxip] - 1], {0, 1}]
  Table[(-1)^(i + j), {i, Length[jmtrxip]}, {j, Length[jmtrxip]}];
invjmtrxip = adjjmtrxip/detjip;
βip = Table[invjmtrxip.βip'[I], {I, 8}]^T;
{ΔuI, ΔvI, ΔwI} = Table[SMSFictive[], {3}, {8}];
Lco = {ΔuI, ΔvI, ΔwI}.βip^T;

```

Abbildung A.4: B-Matrix - B-Bar-Element - Teil 1/3. **Standardoperationen.** Kopf mit Initialisierungsanweisungen und Eingabe der bereits vorab an den Integrationspunkten berechneten Größen. Symbolische Berechnungen: Jakobi-Matrix, Inverse und Determinante sowie Ableitung der Ansatzfunktionen.


```

{ξI, ηI, ζI} = {{-1, +1, +1, -1, -1, +1, +1, -1}, {-1, -1, +1, +1, -1, -1, +1, +1},
{-1, -1, -1, -1, +1, +1, +1, +1}};
Nco = Table[1 / 8 (1 + ξ ξI[[I]]) (1 + η ηI[[I]]) (1 + ζ ζI[[I]]), {I, 1, 8}];
β = Table[{D[Nco[[i]], ξ], D[Nco[[i]], η], D[Nco[[i]], ζ]}, {i, 8}]^T;
jmtrx = Transpose[{xI, yI, zI}.β^T];
adjjmtrx = Map[Reverse, Minors[Transpose[jmtrx], Length[jmtrx] - 1], {0, 1}] *
Table[(-1)^(i + j), {i, Length[jmtrx]}, {j, Length[jmtrx]}];
invjmtrx = adjjmtrx / JX[ξ, η, ζ];
{Nx, Ny, Nz} = Transpose[Table[invjmtrx.β^T[[i]], {i, 8}]];
polyint[f_] :=
Total[
Together[
MapIndexed[# (1 + (-1)^(#2[[3]]-1) (1 + (-1)^(#2[[1]]-1) (1 + (-1)^(#2[[2]]-1) / (#2[[1]] #2[[2]] #2[[3]])) &,
CoefficientList[Expand[f], {ξ, η, ζ}], {3}], 3];
{Nxm, Nym, Nz} =
Transpose[
Table[FullSimplify[{polyint[JX[ξ, η, ζ] Nx[[i]], polyint[JX[ξ, η, ζ] Ny[[i]],
polyint[JX[ξ, η, ζ] Nz[[i]]}], {i, 8}]] / v;
Lm = {ΔuI, ΔvI, ΔwI}.{Nxm, Nym, Nz}^T;
Lbar = Lco + 1 / 3 (Tr[Lm] - Tr[Lco]) IdentityMatrix[3];

```

Abbildung A.5: B-Matrix - B-Bar-Element - Teil 2/3. **Elementspezifische Operationen.** Austausch dieses Teils, um andere Elemente zu formulieren. Gemittelte Ableitung der Ansatzfunktionen und (letzte Zeile) Verwendung der B-Bar-Methodik.

```

{b11K, b22K, b33K, b12K, b21K, b23K, b32K, b13K, b31K} = SMSD[
Extract[Lbar, {{1, 1}, {2, 2}, {3, 3}, {1, 2}, {2, 1}, {2, 3}, {3, 2}, {1, 3}, {3, 1}}],
Flatten[{ΔuI, ΔvI, ΔwI}^T]];
SMSEXP[detjip, gjac$$[i]];
SMSEXP[{b11K, b22K, b33K, b12K, b21K, b23K, b32K, b13K, b31K},
Transpose[Table[
{bmtrx$$[i, 1, 1, idof], bmtrx$$[i, 2, 2, idof], bmtrx$$[i, 3, 3, idof],
bmtrx$$[i, 1, 2, idof], bmtrx$$[i, 2, 1, idof], bmtrx$$[i, 2, 3, idof],
bmtrx$$[i, 3, 2, idof], bmtrx$$[i, 1, 3, idof], bmtrx$$[i, 3, 1, idof]}, {idof, 24}]]];
SMSEXP[ ];
SMSWRITE["LocalAuxiliaryVariables" → True, "IncludeHeaders" → {"nlqparm"}];

```

Abbildung A.6: B-Matrix - B-Bar-Element - Teil 3/3. **Standardoperationen.** Berechnung der B-Matrix und Anweisung zur Ausgabe des Quelltextes.

A.4 Symbolische Eingabe: Monolithisches B-Bar-Element

```

Get["AceGen`"]; initname = "usld_e_bbar_jaumann"; moduname = initname;
SMSInitialize[initname, "Language" → "Fortran", "Mode" → "Optimal"];
SMSModule[moduname, Real[ptot$$[24], d$$["*"], cxe$$[3, 8], due$$[3, 8], crtvolm$$,
  hsupd$$["6*nqp"], qparr$$["4*nqp"], Integer[nqp$$]];
SMSDo[iqp, 1, SMSInteger[nqp$$]];
{ξ, η, ζ, wgt} = SMSRealList[Array["qparr", 4], qparr$$[#] &, "Length" → SMSInteger[nqp$$],
  "Index" → iqp];
ohsupd = SMSRealList[Array["hsupd", 6], hsupd$$[#] &, "Length" → SMSInteger[nqp$$], "Index" → iqp];
oHIS = TNSRσ[ohsupd];
{xI, yI, zI} = SMSReal[Table[cxe$$[i, I], {i, 3}, {I, 8}]];
{ΔuI, ΔvI, ΔwI} = SMSReal[Table[due$$[i, I], {i, 3}, {I, 8}]];
dco = Flatten[{ΔuI, ΔvI, ΔwI}];
{em, ν} = SMSReal[Table[d$$[i], {i, 2}]]; {λ, μ} = SMSHookeToLame[em, ν];
v = SMSReal[crtvolm$$];
MTRXe[TNSR_] := ({#[1, 1], #[2, 2], #[3, 3], 2#[1, 2], 2#[2, 3], 2#[1, 3]} & /@ {TNSR})[[1]];
TNSRe[MTRX_] :=
  ({#[[1], #[[4] / 2, #[[6] / 2], {#[[4] / 2, #[[2], #[[5] / 2], {#[[6] / 2, #[[5] / 2, #[[3]]} & /@ {MTRX}}] [[1]];
MTRXσ[TNSR_] := ({#[[1, 1], #[[2, 2], #[[3, 3], #[[1, 2], #[[2, 3], #[[1, 3]] & /@ {TNSR}}] [[1]];
TNSRσ[MTRX_] := ({#{[1], #[[4], #[[6]], {#[[4], #[[2], #[[5]], {#[[6], #[[5], #[[3]]} & /@ {MTRX}}] [[1]];
MTRX[TNSR_] :=
  ({#[[1, 1], #[[2, 2], #[[3, 3], #[[1, 2], #[[2, 3], #[[1, 3], #[[2, 1], #[[3, 2], #[[3, 1]] & /@ {TNSR}}] [[1]];
TNSR[MTRX_] := ({#{[1], #[[4], #[[6]], {#[[7], #[[2], #[[5]], {#[[9], #[[8], #[[3]]} & /@ {MTRX}}] [[1]];
{ξI, ηI, ζI} = {{-1, +1, +1, -1, -1, +1, +1, -1}, {-1, -1, +1, +1, -1, -1, +1, +1},
  {-1, -1, -1, -1, +1, +1, +1, +1}};
NI = Table[1 / 8 (1 + ξ ξI[[I]) (1 + η ηI[[I]) (1 + ζ ζI[[I])), {I, 1, 8}];
{NIξ, NIη, NIζ} = Table[{D[NI[[i], ξ], D[NI[[i], η], D[NI[[i], ζ]], {i, 8}}];
jmtrx = Transpose[{xI, yI, zI} . {NIξ, NIη, NIζ}];
detj = Det[jmtrx];
adjjmtrx = Map[Reverse, Minors[Transpose[jmtrx], Length[jmtrx] - 1], {0, 1}] *
  Table[(-1)^(i + j), {i, Length[jmtrx]}, {j, Length[jmtrx]}];
invjmtrx = adjjmtrx / JX[ξ, η, ζ];
{NIx, NIy, NIz} = Transpose[Table[invjmtrx . {D[NI[[i], ξ], D[NI[[i], η], D[NI[[i], ζ]], {i, 8}}];

```

Abbildung A.7: Kraftvektor (monolithisch) - B-Bar-Element - Teil 1/3. **Standardoperationen.** Kopf mit Initialisierungsanweisungen und Eingabe der bereits vorab an den Integrationspunkten berechneten Größen. Symbolische Berechnungen: Jacobi-Matrix, Inverse und Determinante sowie Ableitung der Ansatzfunktionen.

```

polyint[f_] :=
  Total[
    Together[
      MapIndexed[# (1 + (-1)^(#2[[3]]-1) (1 + (-1)^(#2[[1]]-1) (1 + (-1)^(#2[[2]]-1) / (#2[[1]] #2[[2]] #2[[3]])) &,
        CoefficientList[Expand[f], {ξ, η, ζ}], {3}]], 3];
  {NIXm, NIym, NIZm} = Transpose[Table[{
    FullSimplify[polyint[JX[ξ, η, ζ] NIX[[i]]],
    FullSimplify[polyint[JX[ξ, η, ζ] NIY[[i]]],
    FullSimplify[polyint[JX[ξ, η, ζ] NIZ[[i]]]], {i, 8}]] / v;
  bm = {NIXm, NIym, NIZm};
  Lm = {ΔuI, ΔvI, ΔwI}.bm^T;
  invjmtx = adjjmtx / detj;
  {NIX, NIY, NIZ} = Transpose[Table[invjmtx.{D[NI[[i]], ξ], D[NI[[i]], η], D[NI[[i]], ζ]}, {i, 8}]];
  bco = {NIX, NIY, NIZ};
  Lco = {ΔuI, ΔvI, ΔwI}.bco^T;
  Lbar = Lco + 1 / 3 (Tr[Lm] - Tr[Lco]) IdentityMatrix[3];
  Dbar = 1 / 2 (Lbar + Lbar^T);
  Wbar = 1 / 2 (Lbar - Lbar^T);
  SMSFreeze[Dstrn, Dbar, "Symmetric" → True, "IgnoreNumbers" → True];
  W = Wbar;

```

Abbildung A.8: Kraftvektor (monolithisch) - B-Bar-Element - Teil 2/3. **Elementspezifische Operationen.** Gemittelte Ableitung der Ansatzfunktionen und (letzte Zeile) Verwendung der B-Bar-Methodik.

```

CJAU = {{λ + 2 μ, λ, λ, 0, 0, 0}, {λ, λ + 2 μ, λ, 0, 0, 0}, {λ, λ, λ + 2 μ, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, μ, 0, 0},
  {0, 0, 0, 0, μ, 0}, {0, 0, 0, 0, 0, μ}};
σJAU = TNSRσ[CJAU.MTRXε[Dstrn]];
σ = σHIS + σJAU + W.σHIS + σHIS.W^T;
σmtrx = MTRXσ[σ];
SMSExport[σmtrx, SMSRealList["hsupd"[_], "Export"]];
vmap = Det[jmtrx];
d = Join[dco];
bmtrx = Simplify[SMSD[MTRXε[Dstrn], d]];
p = vmap wgt bmtrx^T.σmtrx;
SMSExport[-p, ptot$$, "AddIn" → True];
SMSEndDo[];
SMSWrite["LocalAuxiliaryVariables" → True];

```

Abbildung A.9: Kraftvektor (monolithisch) - B-Bar-Element - Teil 3/3. **Standardoperationen.** Berechnung des Kraftvektors samt aller Konstitutivgleichungen inklusive der inkrementellen Spannungsrechnung und Anweisung zur Ausgabe des Quelltextes.

B Totale Verschiebungsformulierung

B.1 Grundgerüst der totalen Lagrange-Formulierung

Um die Elementformulierungen aus den Abschnitten 6.1 und 6.2 in eine totale Formulierung zu überführen, werden alle Größen auf die Referenzkonfiguration bezogen. Die zugehörige schwache Form ist

$$\delta W = \int_V \delta \mathbf{F} : \mathbf{P}^F dV + \int_V \delta \mathbf{u}^{\text{co}} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}^{\text{co}} dV + \int_V \delta \mathbf{u}^{\text{im}} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}^{\text{im}} dV - \delta w^{\text{ext}}. \quad (\text{B.1})$$

Darin ist \mathbf{F} der Deformationsgradient, der alle Erweiterungen, hier bezogen auf den Verschiebungsgradienten, enthält

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \mathbf{H} = \mathbf{1} + \mathbf{H}^{\text{co}} + \mathbf{F}_0(\mathbf{H}^{\text{im}} + \mathbf{H}^{\text{en}}) \quad (\text{B.2})$$

Um Objektivität für Starrkörperbewegungen zu garantieren, werden die inkompatiblen Verschiebungsgradienten mit dem kompatiblen Deformationsgradienten \mathbf{F}_0 , der in Elementmitte ausgewertet ist, multipliziert. Das Verschiebungsfeld $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{\text{co}} + \mathbf{u}^{\text{im}}$ ist durch einen kompatiblen und inkompatiblen Anteil definiert, deren Variation und zweimalige Zeitableitung zur Beschreibung der virtuellen Arbeit von kompatiblen und inkompatiblen Trägheitskräften genutzt wird. Mit dem Satz der Massenerhaltung gilt für die Rohdichte $\rho_0 = J\rho$. Die Beschreibung der Arbeit externer Lasten entspricht den Standardgrößen für finite Elemente, siehe Abschnitt 2.2.3. Die Orthogonalitätsbedingungen in den Gleichungen (6.4) bis (6.6) entsprechen

$$\int_{B_e} (\text{Grad} \mathbf{u}^{\text{co}} - \mathbf{H}^{\text{co}}) dv = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\int_{B_e} \mathbf{H}^{\text{im}} dv = 0 \quad \text{mit } \mathbf{H}^{\text{im}} = \text{Grad} \mathbf{u}^{\text{im}} \quad (\text{B.4})$$

$$\int_{B_e} \mathbf{H}^{\text{en}} dv = 0. \quad (\text{B.5})$$

Existiert eine Verzerrungsenergiefunktion der Spannungen $w(\mathbf{F})$, kann die hier gezeigte schwache Form auch aus dem Potential

$$\Pi = \int_V (w(\mathbf{F}) + \mathbf{P} : (\text{Grad} \mathbf{u} - \mathbf{H}) + \mathbf{u} \cdot \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}) dV - \Pi^{\text{ext}} \quad (\text{B.6})$$

gewonnen werden. Die Orthogonalitätsbedingungen, siehe die Gleichungen (B.3) bis (B.5), gelten gleichermaßen und eliminieren die unabhängigen Spannungen \mathbf{P} , sodass die verbleibende Form

$$\Pi = \int_V (w(\mathbf{F}) + \mathbf{u} \cdot \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}) dV - \Pi^{\text{ext}} \quad (\text{B.7})$$

für eine automatisierte Formulierung finiter Elemente, siehe insbesondere Korelc et al. [86, 91], eine ideale Grundlage darstellt. Diese spezielle Ausgangslage wird von Mattern et al. [112, 114] zur Formulierung finiter Elemente mit generalisierten inkompatiblen Ansatzfunktionen für Greensche Verzerrungen eingesetzt.

B.2 Hinweis für eine inkrementelle Beschreibung

Die schwache Form der mitgehenden und der totalen Lagrange-Formulierung sind ineinander umrechenbar und daher identisch. Die in diesem Abschnitt beschriebene totale Verschiebungsformulierung unterscheidet sich von der in Abschnitt 6.4 beschriebenen inkrementellen Verschiebungsformulierung. Das ist beispielsweise erkennbar, wenn das Grundgerüst der totalen Verschiebungsformulierung für eine inkrementelle Beschreibung genutzt wird, siehe Adam und Ponthot [1]. Dann wird die Verzerrungsrate und ihre Variation wie folgt berechnet

$$\mathbf{D} = \text{sym} \left(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \right) \quad \delta\mathbf{D} = \text{sym} \left(\delta\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \right) \quad (\text{B.8})$$

B.3 Differentialoperatoren

Wie für die inkrementelle Formulierung gelten die Gleichungen (6.7) und (6.8), wobei insbesondere zur Berechnung der Gradientenoperatoren der Bezug zu den Referenzkoordinaten benötigt wird

$$X_i = \sum_I N_I X_{iI} . \quad (\text{B.9})$$

Für die inkompatiblen Verschiebungen gilt die Bezeichnung $\mathbf{u}^{\text{im}} = (u_1^{\text{im}}, u_2^{\text{im}}, u_3^{\text{im}})^T = (u^{\text{im}}, v^{\text{im}}, w^{\text{im}})^T$ und mit den inkompatiblen Formfunktionen N_A^{im} die Interpolation

$$u_i^{\text{im}} = \sum_A N_A^{\text{im}} u_{iA}^{\text{im}} . \quad (\text{B.10})$$

Externe Lasten, Volumenkräfte und Massen sind damit identisch zu den Größen in den Gleichungen (2.121) und (2.122). Allein die Ableitung der Ansatzfunktionen nach den globalen Koordinaten ändert sich. Um den Bezug zur Referenzkonfiguration deutlich zu machen, siehe auch Abbildung B.1, die den Vergleich mit der Momentankonfiguration zeigt, wird die Jakobimatrix

$$\mathbf{J} = \left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right)^T \quad J_{\alpha i} = \sum_I \frac{\partial N_I}{\partial \xi^\alpha} X_{iI} \quad (\text{B.11})$$

verwendet, um die Ableitungen nach den Koordinaten X , Y und Z zu definieren

$$\mathbf{b} = \mathbf{J}^{-1} \boldsymbol{\beta} . \quad (\text{B.12})$$

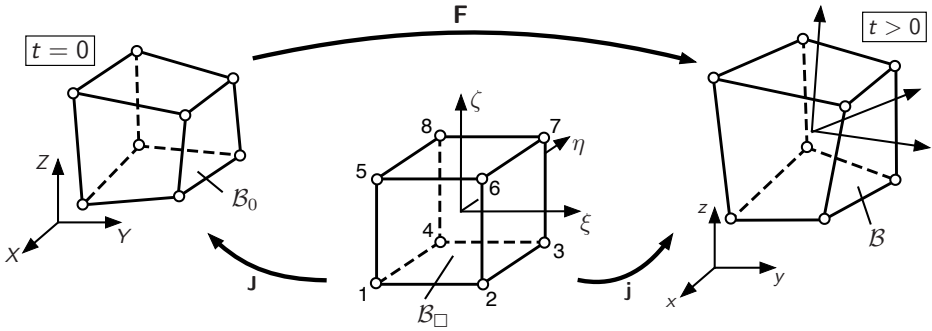


Abbildung B.1: Einheits- und Elementkonfigurationen.

Mit dieser Definition werden die daraus abgeleiteten Größen \mathbf{b}^m nach Vorschrift (6.26) sowie \mathbf{b}^γ entsprechend Gleichung (6.58) berechnet. Mit der Aufspaltung von \mathbf{b}^γ in lineare Anteile $\mathbf{b}^{1\gamma}$ und bilineare Anteile $\mathbf{b}^{2\gamma}$ und der Matrix der Ableitung der inkompatiblen Ansätze \mathbf{b}^{im} aus Gleichung (6.65) kann der Verschiebungsgradient

$$\mathbf{H}^{\text{co}} = \sum_I \mathbf{H}_I^{\text{co}} \quad \mathbf{H}^{\text{im}} = \mathbf{F}_0 \sum_I \mathbf{H}_I^{\text{im}} \quad (\text{B.13})$$

durch die zur Funktion I gehörende Teile

$$\mathbf{H}_I^{\text{co}} = \mathbf{u}_I^{\text{co}} (\mathbf{b}_I^m + \mathbf{b}_I^{1\gamma})^T + \begin{bmatrix} b_{xI}^{2\gamma} u_I^{\text{co}} & & \\ & b_{yI}^{2\gamma} v_I^{\text{co}} & \\ & & b_{zI}^{2\gamma} w_I^{\text{co}} \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

und

$$\mathbf{H}_I^{\text{im}} = \mathbf{u}_I^{\text{im}} (\mathbf{b}_I^{\text{im}})^T \quad (\text{B.15})$$

zusammengesetzt werden.

B.4 Residuum und Steifigkeitsmatrix

Ausgehend von einer Funktion w für die Spannungen wird mit Gleichung (B.7) das Residuum symbolisch definiert

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{\text{co}} \\ \mathbf{f}^{\text{im}} \end{bmatrix} = \frac{V}{8} \int_{\square} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{d}^{\text{co}}} \\ \frac{\partial w}{\partial \mathbf{d}^{\text{im}}} \end{bmatrix} d\square. \quad (\text{B.16})$$

Sofern zu kondensierende Freiheitsgrade vorliegen, sind das Residuum und die Steifigkeitsmatrix entsprechend

$$\mathbf{f}^{\text{en}} = \frac{V}{8} \int_{\square} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{d}^{\text{en}}} d\square \quad \mathbf{K}^{\text{en}} = \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{en}}}{\partial \mathbf{d}^{\text{en}}} \quad (\text{B.17})$$

zu berechnen. Für die ganzheitliche Darstellung sind die mit den Kräften (B.17) korrespondierenden Steifigkeiten

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{\text{co}} & \mathbf{K}^{\text{co|im}} \\ \mathbf{K}^{\text{im|co}} & \mathbf{K}^{\text{en}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{co}}}{\partial \mathbf{d}^{\text{co}}} & \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{co}}}{\partial \mathbf{d}^{\text{im}}} \\ \text{sym.} & \frac{\partial \mathbf{f}^{\text{im}}}{\partial \mathbf{d}^{\text{im}}} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.18})$$

Für eine implizite dynamische oder statische Berechnung sind die inkompatiblen Massen gleich Null und eine statische Kondensation wird für die inkompatiblen Freiheitsgrade durchgeführt

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{\text{eff}} &= \mathbf{K}^{\text{co}} - \mathbf{K}^{\text{co|im}} (\mathbf{K}^{\text{im}})^{-1} \mathbf{K}^{\text{im,co}} \\ \mathbf{f}^{\text{eff}} &= \mathbf{f}^{\text{co}} - \mathbf{K}^{\text{co|im}} (\mathbf{K}^{\text{im}})^{-1} \mathbf{f}^{\text{im}} \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

B.5 Besonderheiten für das MITC/ANS-Konzept

Im Bereich großer Deformationen wird das MITC/ANS-Konzept, wie in Abschnitt 6.2.2 bereits angedeutet, auf die Greenschen Verzerrungen angewandt. Wird der Deformationsgradient beispielsweise für Konstitutivgleichungen benötigt, ist eine zu den Greenschen Verzerrungen konsistente Berechnung erforderlich. Dazu existieren einige Vorschläge, die meist auf der Betrachtung von Eigenwerten basieren. Bei Betsch und Stein [24] wird eine Übersicht präsentiert, wie eine konsistente Transformation durchzuführen ist. Mattern [112] hat um die Berechnung von Eigenwerten zu umgehen, eine Rückführung auf eine Verschiebungsinterpolation durchgeführt, die jedoch Einschränkungen beinhaltet und vergleichsweise aufwendig ist.

Mit dem bereits in Abschnitt (6.2.2) beschriebenen Vorgehen von Sussman und Bathe [162] ist es möglich, mithilfe des modifizierten Basisvektors \mathbf{g}_3^{AS} direkt den Deformationsgradienten zu berechnen. Dabei ist es nicht möglich, den Ansatz von Betsch und Stein [23], bei dem eine Modifikation der Verzerrungen in Dickenrichtung durchgeführt wird, noch in den Basisvektor \mathbf{g}_3^{AS} mit aufzunehmen, ohne diesen zu verfälschen.

Mit der inkrementellen Formulierung ist es andererseits möglich, den Deformationsgradienten, falls er benötigt wird, durch die Integration über die Zeit, wie in Abschnitt 6.4.4 gezeigt, zu verwenden.

C Zur ad hoc berechneten Steifigkeit

Für die ad-hoc-Formulierung aus Abschnitt 8.4.3 wurden Modifikationen gemacht, die in der schwachen Form und insbesondere deren Linearisierung zu beachten sind. Für eine übersichtlichere Darstellung wird die Bezeichnung *ad* nicht ausgeschrieben, sondern für alle folgenden Größen angenommen. Der Ausgangspunkt ist die mit Indexnotation ausgedrückte schwache Form

$$\delta w^{\text{int}} = \int_v \delta e_{ij} \sigma_{ij} \, dv = \int_V \delta e_{ij} \tau_{ij} \, dV \quad (\text{C.1})$$

und deren Linearisierung

$$\Delta \delta w^{\text{int}} = \int_V (\Delta \delta e_{ij} \tau_{ij} + \delta e_{ij} \Delta \tau_{ij}) \, dV \quad (\text{C.2})$$

$$= \int_V (\Delta \delta e_{ij} \tau_{ij} + \delta e_{ij} c_{ijkl}^{\tau} \Delta e_{kl}) \, dV \quad (\text{C.3})$$

$$= \int_v (\Delta \delta e_{ij} \sigma_{ij} + \delta e_{ij} c_{ijkl} \Delta e_{kl}) \, dv \quad (\text{C.4})$$

mit dem Inkrement der Kirchhoff-Spannungen $\Delta \tau_{ij}$, dass durch folgende Transformation des Inkrements der 2.-Piola-Kirchhoff-Spannungen und damit des Elastizitätstensors ausgedrückt wird

$$\Delta \tau_{ij} = F_{ik} \Delta S_{kl} F_{jl} = F_{ik} C_{klmn} \Delta E_{mn} F_{jl} = F_{ik} C_{klmn} F_{rm} \Delta e_{rs} F_{sn} F_{jl} = c_{ijrs}^{\tau} \Delta e_{rs} = J c_{ijrs} \delta e_{rs} . \quad (\text{C.5})$$

Die ad-hoc-Modifikation ist bei der Berechnung der virtuellen Almansi-Verzerrungen δe und deren Linearisierung $\Delta \delta e$ jeweils zu beachten. Diese Größen basieren auf dem ad hoc modifizierten virtuellen Verschiebungsgradienten

$$\delta \mathbf{h} = \text{grad } \delta \mathbf{u} , \quad (\text{C.6})$$

der die kompatiblen und inkompatiblen Freiheitsgrade enthält. Diese sind auch im ebenfalls benötigten Inkrement der Almansi-Verzerrungen Δe enthalten, das aber mit dem nicht modifizierten Verschiebungsgradienten

$$\mathbf{h} = \text{grad } \mathbf{u} \quad \rightarrow \quad \mathbf{F} = (\mathbf{1} - \mathbf{h})^{-1} \quad (\text{C.7})$$

berechnet wird, der auch zur Berechnung des Deformationsgradienten genutzt wird.

Für die virtuellen Almansi-Verzerrungen gilt trotz der ad-hoc-Modifikation die übliche Vorschrift

$$\delta \mathbf{e} = \text{sym } \delta \mathbf{h} . \quad (\text{C.8})$$

Darauf aufbauend wird das Inkrement $\Delta \delta \mathbf{e}$ berechnet. Dabei ist es wichtig zu beachten, dass $\delta \mathbf{e}$ aufgrund der ad-hoc-Modifikation von $\delta \mathbf{h}$ nicht mehr transformiert werden darf, wie es in den nächsten Schritten gezeigt wird. Dazu wird zuerst die übliche Berechnungsvorschrift

$$\Delta \delta \mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T} \Delta \left[\mathbf{F}^T \delta \mathbf{e} \mathbf{F} \right] \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{C.9})$$

betrachtet, wobei $\delta \mathbf{e}$ zunächst in die Referenzkonfiguration gezogen wird, dann das Inkrement berechnet wird und schließlich wieder zurück in die Momentankonfiguration geschoben wird. Mit Gleichung (C.8) und vorausgesetzt, dass $\Delta (\delta \mathbf{h}) = 0$ gilt, ergibt sich

$$\Delta \delta \mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T} \Delta \left[\text{sym} \left(\mathbf{F}^T \delta \mathbf{h} \mathbf{F} \right) \right] \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{C.10})$$

$$= \mathbf{F}^{-T} \text{sym} \left(\Delta \mathbf{F}^T \delta \mathbf{h} \mathbf{F} + \mathbf{F} \delta \mathbf{h} \delta \mathbf{F} \right) \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{C.11})$$

$$= \mathbf{F}^{-T} 2 \text{sym} \left(\mathbf{F}^T \text{sym}(\delta \mathbf{h}) \delta \mathbf{F} \right) \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{C.12})$$

$$= 2 \text{sym} \left(\text{sym}(\delta \mathbf{h}) \Delta \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \right) , \quad (\text{C.13})$$

wobei die virtuelle Größe $\delta \mathbf{h}$ nicht transformiert wurde.

Das Inkrement $\Delta \mathbf{e}$ ist nicht ad hoc modifiziert und kann daher wie gewohnt über

$$\Delta \mathbf{e} = \text{sym} \left(\Delta \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \right) \quad (\text{C.14})$$

angegeben werden, was erneut eine nichtlineare Größe darstellt, im Vergleich zu $\delta \mathbf{e}$ in Gleichung (C.8).

Damit liegen alle Größen zur Berechnung der Steifigkeit über die linearisierte virtuelle Arbeit in Gleichung (C.4) vor. Es wird noch darauf hingewiesen, dass der Ausdruck $\Delta \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1}$ einfach zu berechnen ist, wenn die Beziehung

$$\Delta(\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1}) = \Delta \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F} \Delta \mathbf{F}^{-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta \mathbf{F} = -\mathbf{F} \Delta \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F} \quad (\text{C.15})$$

verwendet wird und $\Delta \mathbf{F}^{-1}$ ausgehend von der Beziehung $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{1} - \mathbf{h}$ berechnet wird.

D Tabellarische Daten

zu Abschnitt 6.3

Tabelle D.1: Mac-Neal-Balken mit Trapezen. Daten für Abb. 6.5 auf S. 143 und Abb. 6.6 auf S. 144.

	Disp	B-Bar	Bor	Wil9	Wil9ts	Wil12ts	L18	Alv18	And30	Kas9	ANSnat	ANSsus	Alv12	Vu7ANSnat	Vu7ANSsus
$6 \times 1 \times 1$	0.026	0.033	0.226	0.207	0.212	0.213	0.212	0.212	0.213	0.063	0.497	0.807	0.164	0.655	0.924
$12 \times 2 \times 2$	0.156	0.202	0.759	0.745	0.746	0.746	0.750	0.750	0.747	0.264	0.729	0.797	0.691	0.836	0.877
$24 \times 4 \times 4$	0.437	0.522	0.929	0.978	0.978	0.978	0.979	0.979	0.978	0.577	0.895	0.912	0.950	0.941	0.946
$48 \times 8 \times 8$	0.743	0.806	0.976	0.989	0.989	0.989	0.990	0.989	0.989	0.808	0.963	0.966	0.982	0.977	0.977

Tabelle D.2: Gegenseitig gedrückter Zylinder. Daten für Abb. 6.8 auf S. 146 und Abb. 6.9 auf S. 146.

	Disp	B-Bar	Bor	Wil9	Wil9ts	Wil12ts	L18	Alv18	And30	Kas9	ANSnat	ANSsus	Alv12	Vu7ANSnat	Vu7ANSsus
$4 \times 4 \times 1$	0.035	0.036	0.110	0.081	0.098	0.098	0.110	0.108	0.107	0.107	0.353	0.357	0.104	0.396	0.399
$8 \times 8 \times 1$	0.069	0.070	0.278	0.405	0.466	0.467	0.499	0.497	0.496	0.496	0.673	0.676	0.493	0.758	0.760
$16 \times 16 \times 1$	0.149	0.152	0.616	0.836	0.901	0.902	0.914	0.911	0.911	0.911	0.825	0.826	0.912	0.933	0.933
$32 \times 32 \times 1$	0.315	0.340	0.986	0.973	0.988	0.988	0.998	0.989	0.989	0.989	0.873	0.874	0.995	0.989	0.989

Tabelle D.3: Verdrehter Streifen mit Belastung senkrecht zur Schalenebene. Daten für Abb. 6.12 auf S. 150.

	Disp	B-Bar	Bor	Wil9	Wil9ts	Wil12ts	L18	Alv18	And30	Kas9	ANSnat	ANSsus	Alv12	Vu7ANSnat	Vu7ANSsus
$6 \times 1 \times 1$	0.148	0.186	1.090	0.913	0.968	0.969	0.917	0.930	0.969	0.969	0.769	0.770	0.781	0.952	0.954
$12 \times 2 \times 1$	0.332	0.368	1.087	0.987	0.991	0.991	0.987	0.988	0.991	0.977	0.882	0.884	0.923	0.984	0.986
$24 \times 4 \times 1$	0.591	0.747	1.095	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.997	0.989	0.937	0.938	0.975	0.997	0.997
$48 \times 8 \times 1$	0.816	1.343	1.631	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.999	0.993	0.955	0.956	0.991	0.999	0.999
$96 \times 8 \times 2$	0.942	1.017	1.066	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.987	0.988	0.998	0.999	0.999

Tabelle D.4: Verdrehter sehr dünner Streifen mit Belastung senkrecht zur Schalenebene.
Daten für Abb. 6.14 auf S. 151.

	Disp	B-Bar	Bor	Wil9	Wil9ts	Wil12ts	L18	Alv18	And30	Kas9	ANSnat	ANSsus	Alv12	Vu7ANSnat	Vu7ANSsus
6 × 1 × 1	0.000	0.000	1.076	0.001	0.919	0.921	0.002	0.001	0.932	0.923	0.899	0.902	0.001	0.938	0.948
12 × 2 × 1	0.000	0.000	1.035	0.020	0.947	0.943	0.020	0.023	0.956	0.008	0.919	0.919	0.023	0.973	0.975
24 × 4 × 1	0.000	0.000	1.054	0.247	0.967	0.965	0.249	0.275	0.968	0.024	0.939	0.940	0.275	0.994	0.993
48 × 8 × 1	0.000	0.000	1.070	0.832	0.994	0.995	0.840	0.859	0.994	0.084	0.946	0.947	0.857	0.999	0.997
96 × 16 × 1	0.002	0.002	1.092	0.989	1.000	1.001	0.989	0.991	1.000	0.265	0.947	0.949	0.988	0.999	0.999

Tabelle D.5: Verdrehter Streifen mit Belastung in Schalenebene. Daten für Abb. 6.13 auf S. 150.

	Disp	B-Bar	Bor	Wil9	Wil9ts	Wil12ts	L18	Alv18	And30	Kas9	ANSnat	ANSsus	Alv12	Vu7ANSnat	Vu7ANSsus
6 × 1 × 1	0.065	0.070	1.133	0.916	0.992	0.993	0.924	0.937	0.994	0.994	0.927	0.927	0.925	0.990	0.990
12 × 2 × 1	0.206	0.233	1.125	0.992	0.998	0.999	0.994	0.995	0.999	0.981	0.938	0.938	0.989	0.995	0.995
24 × 4 × 1	0.490	0.685	1.125	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.990	0.495	0.495	0.508	0.999	0.999
48 × 8 × 1	0.766	1.439	1.817	1.000	1.000	1.000	1.001	1.000	1.000	0.993	0.769	0.769	0.802	1.000	1.000
96 × 8 × 2	0.926	1.026	1.090	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.982	0.982	0.940	0.999	0.999

Tabelle D.6: Verdrehter sehr dünner Streifen mit Belastung in Schalenebene.
Daten für Abb. 6.15 auf S. 152.

	Disp	B-Bar	Bor	Wil9	Wil9ts	Wil12ts	L18	Alv18	And30	Kas9	ANSnat	ANSsus	Alv12	Vu7ANSnat	Vu7ANSsus
6 × 1 × 1	0.000	0.000	1.143	0.001	0.959	0.956	0.001	0.001	0.974	0.962	0.954	0.957	0.001	0.993	1.005
12 × 2 × 1	0.000	0.000	1.057	0.021	0.960	0.957	0.021	0.023	0.978	0.008	0.913	0.912	0.023	0.978	0.983
24 × 4 × 1	0.000	0.000	1.061	0.250	0.975	0.973	0.251	0.276	0.975	0.024	0.928	0.930	0.275	0.992	0.992
48 × 8 × 1	0.000	0.000	1.068	0.831	0.995	0.997	0.842	0.858	0.995	0.084	0.937	0.940	0.856	0.998	0.999
96 × 16 × 1	0.002	0.002	1.079	0.987	1.000	1.001	0.990	0.991	0.999	0.267	0.940	0.943	0.987	1.000	0.999

Tabelle D.7: Platte mit zunehmender Netzverzerrung und 2×2 Elementen.
Daten für Abb. 6.17 auf S. 154.

a	Disp	B-Bar	Bor	Wil9	Wil9ts	Will2ts	L18	Alv18	And30	Kas9	ANSnat	ANSsus	Alv12	Vu7ANSnat	Vu7ANSsus
0	0.007	0.007	0.027	0.073	0.873	0.878	0.884	0.883	0.887	0.887	0.711	0.711	0.868	0.867	0.867
1	0.007	0.007	0.027	0.072	0.809	0.814	0.874	0.859	0.826	0.841	0.710	0.710	0.858	0.866	0.866
2	0.006	0.006	0.028	0.068	0.649	0.652	0.855	0.750	0.670	0.740	0.708	0.708	0.847	0.864	0.864
3	0.006	0.006	0.028	0.064	0.477	0.478	0.825	0.573	0.497	0.617	0.705	0.705	0.834	0.860	0.860
4	0.006	0.006	0.028	0.058	0.339	0.340	0.785	0.408	0.356	0.501	0.700	0.700	0.819	0.854	0.854
5	0.006	0.006	0.028	0.052	0.242	0.242	0.733	0.286	0.255	0.403	0.693	0.693	0.802	0.846	0.846
6	0.006	0.006	0.028	0.046	0.175	0.175	0.672	0.203	0.185	0.324	0.685	0.685	0.784	0.836	0.836
7	0.006	0.006	0.028	0.041	0.130	0.130	0.601	0.147	0.137	0.263	0.674	0.674	0.763	0.823	0.823
8	0.005	0.005	0.028	0.035	0.098	0.098	0.524	0.110	0.103	0.215	0.662	0.662	0.741	0.807	0.807
9	0.005	0.005	0.028	0.030	0.076	0.076	0.442	0.083	0.080	0.178	0.646	0.646	0.717	0.788	0.788
10	0.005	0.005	0.027	0.026	0.060	0.060	0.361	0.065	0.062	0.149	0.627	0.627	0.690	0.765	0.765
11	0.005	0.005	0.027	0.022	0.048	0.048	0.282	0.051	0.050	0.126	0.604	0.604	0.662	0.736	0.736
12	0.005	0.005	0.026	0.019	0.039	0.039	0.209	0.041	0.040	0.107	0.575	0.575	0.630	0.701	0.701

Tabelle D.8: Platte mit zunehmender Netzverzerrung und 4×4 Elementen.
Daten für Abb. 6.18 auf S. 154.

a	Disp	B-Bar	Bor	Wil9	Wil9ts	Will2ts	L18	Alv18	And30	Kas9	ANSnat	ANSsus	Alv12	Vu7ANSnat	Vu7ANSsus
0	0.025	0.026	0.098	0.553	0.970	0.971	0.976	0.973	0.975	0.975	0.791	0.791	0.969	0.968	0.968
1	0.025	0.025	0.100	0.549	0.967	0.969	0.977	0.971	0.972	0.948	0.791	0.791	0.971	0.967	0.967
2	0.024	0.024	0.103	0.539	0.957	0.958	0.978	0.960	0.962	0.871	0.791	0.791	0.972	0.967	0.967
3	0.023	0.024	0.107	0.523	0.938	0.939	0.977	0.941	0.942	0.760	0.790	0.790	0.972	0.966	0.966
4	0.023	0.023	0.111	0.502	0.911	0.913	0.976	0.914	0.915	0.638	0.790	0.790	0.972	0.965	0.965
5	0.022	0.022	0.115	0.476	0.878	0.879	0.973	0.880	0.881	0.523	0.789	0.789	0.970	0.964	0.964
6	0.021	0.022	0.120	0.447	0.838	0.840	0.968	0.840	0.841	0.425	0.788	0.788	0.968	0.963	0.963
7	0.021	0.021	0.124	0.416	0.795	0.797	0.961	0.796	0.797	0.346	0.786	0.786	0.964	0.961	0.961
8	0.020	0.020	0.128	0.384	0.749	0.751	0.951	0.749	0.750	0.283	0.785	0.785	0.959	0.960	0.960
9	0.019	0.020	0.129	0.352	0.701	0.703	0.939	0.701	0.702	0.233	0.783	0.783	0.951	0.957	0.957
10	0.019	0.019	0.128	0.322	0.654	0.655	0.923	0.653	0.654	0.194	0.780	0.780	0.942	0.954	0.954
11	0.018	0.018	0.122	0.293	0.606	0.608	0.904	0.606	0.607	0.163	0.777	0.777	0.931	0.950	0.950
12	0.017	0.018	0.114	0.266	0.560	0.562	0.881	0.560	0.561	0.138	0.773	0.773	0.916	0.944	0.944

E Adjunkte und Inverse einer kleinen Matrix

Die Inverse einer beliebigen 3×3 Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{E.1})$$

kann durch ihre Adjunkte

$$\begin{aligned} \text{adj}(\mathbf{A}) &= \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{21} & A_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32} & A_{13}A_{32} - A_{12}A_{33} & A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22} \\ A_{23}A_{31} - A_{21}A_{33} & A_{11}A_{33} - A_{13}A_{31} & A_{13}A_{21} - A_{11}A_{23} \\ A_{21}A_{32} - A_{22}A_{31} & A_{12}A_{31} - A_{11}A_{32} & A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

und Division mit der Determinante $\det \mathbf{A}$ berechnet werden

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \text{adj}(\mathbf{A}) . \quad (\text{E.3})$$

Abbildungsverzeichnis

1.1	Aufbau der Dissertation.	5
2.1	Kinematik der Deformation eines Festkörpers.	8
2.2	Zeitschrittweiten für das zentrale Differenzenverfahren	27
4.1	Schematischer Ablauf und Aufwand der Operationen eines impliziten und eines expliziten Verfahrens mit Vergleich der jeweils typischen Zeitschrittgrößen.	63
5.1	Referenzgeometrie, Einheitselement sowie kompatible und inkompatible Verschiebungsform eines einfachen Blocks im Biegezustand.	81
5.2	Typischer expliziter Zeitintegrations-Zyklus und Berechnungsablauf der explizit (im-FHGe) und implizit (en-FHGe) zu berechnenden inkompatiblen Freiheitsgrade auf Elementebene.	86
5.3	Programmfluss der expliziten Berechnung inkompatibler im-Freiheitsgrade auf Elementebene; ggf. mit en-FHGen.	89
5.4	Programmfluss der impliziten Berechnung inkompatibler en-Freiheitsgrade auf Elementebene mit Begrenzung der maximalen Anzahl an Iterationen. Hinweis: Explizit berechnete inkompatible Freiheitsgrade (im-FHGe) sind aus dem vorherigen Zeitschritt bekannt.	92
5.5	Ansatzfunktionen des linearen 4-Knoten und des quadratischen 8-Knoten Serendipity Elements. Hinweis: Die Ansatzfunktionen der Eckknoten des Serendipity Elements sind ebenfalls quadratisch, werden hier aber nicht verwendet und daher nicht gezeigt.	93
6.1	Basiselement mit dem Volumen v_{\square} und Transformationsbeziehung mit der Jakobimatrix \mathbf{j} auf die tatsächliche Geometrie eines Elements mit dem Volumen v	118
6.2	Geometrie und Materialparameter des Patchtests für Volumenelemente. Auf die Randknoten werden die Verschiebungen aus Glg. (6.107) aufgebracht.	140
6.3	Geometrie und Randbedingungen des geraden MacNeal-Balkens, der links mit rechteckigen und rechts mit trapezförmigen Elementen vernetzt ist, um die Empfindlichkeit gegenüber Versteifungen infolge über die Dickenrichtung schiefgestellter Elementkanten (sogenannte Trapezversteifungen) zu untersuchen.	141

6.4	Uniforme Erhöhung der Netzauflösung für den geraden MacNeal-Balken mit trapezförmigen Elementen. Beibehaltung der Schiefstellung der Elementkanten aus Originalversion mit 6 Elementen, s. Abb. 6.3.	143
6.5	Normierte Verschiebung der Volumenelemente für $\nu = 0.3$ über uniform erhöhte Netzauflösung mit trapezförmigen Elementen, s. Abb. 6.4 und Abb. 6.3 für die Randbedingungen.	143
6.6	Normierte Verschiebung der Volumenschalenelemente für $\nu = 0.3$ über uniform erhöhte Netzauflösung mit trapezförmigen Elementen, s. Abb. 6.4 und Abb. 6.3 für die Randbedingungen.	144
6.7	(a) Geometrie und Materialparameter des Gegenseitig gedrückten Zylinders aus dem <i>shell obstacle course</i> (Hindernisparscours für Schalenelemente) von Belytschko et al. [16]. (b) Winkel zwischen den Elementkanten in einem Schnitt durch den Zylinder	145
6.8	Normierte Verschiebung (Referenzlösung $-1.8248 \cdot 10^{-5}$ in) über zunehmende Anzahl an Elementen mit Volumenelementen für den gegenseitig gedrückten Zylinder aus Abb. 6.7.	146
6.9	Normierte Verschiebung (Referenzlösung $-1.8248 \cdot 10^{-5}$ in) über zunehmende Anzahl an Elementen mit Volumenschalenelementen für den gegenseitig gedrückten Zylinder aus Abb. 6.7.	146
6.10	Geometrie und Materialparameter des verdrehten Kragarms. (Links) Originaldicke nach MacNeal und Harder [111], (rechts) 100fach dünnere Variante nach Belytschko et al. [17], s. Abschn. 6.3.6.	148
6.11	Vergleich Seitenverhältnis aus Schalendicke zu kürzester Länge in Schalenebene für Vernetzungen des verdrehten Streifens aus Abschn. 6.3.5, Abb. 6.10.	149
6.12	Normierte Verschiebung (Referenzlösung 0.001 754 in) über Anzahl der Elemente, s. Abb. 6.11 für verdrehten Streifen aus Abb. 6.10. Belastung senkrecht zur Schalenebene (F^{OP}).	150
6.13	Normierte Verschiebung (Referenzlösung 0.005 424 in) über Anzahl der Elemente, s. Abb. 6.11 für verdrehten Streifen aus Abb. 6.10. Belastung in Schalenebene (F^{iP}).	150
6.14	Normierte Verschiebung (angepasster Referenzlösung 0.001 294 in) für sehr dünne Variante des verdrehten Streifens. Belastung senkrecht zur Schalenebene (F^{OP}).	151
6.15	Normierte Verschiebung (angepasster Referenzlösung 0.005 256 in) für sehr dünne Variante des verdrehten Streifens. Belastung in Schalenebene (F^{iP}).	152
6.16	Geometrie, Material- und Netzverzerrungsparameter a einer eingespannten Platte. Untersuchung der Netzverzerrungsempfindlichkeit für Variation von a mit 2×2 und 4×4 Elementen.	153
6.17	Normierte Verschiebung (Referenzlösung -1 mm) über zunehmende Netzverzerrung der mit 2×2 Elementen vernetzten Platte aus Abb. 6.16.	154

6.18	Normierte Verschiebung (Referenzlösung -1 mm) über zunehmende Netzverzerrung der mit 4×4 Elementen vernetzten Platte aus Abb. 6.16.	154
7.1	Logarithmische Darstellung der Eigenfrequenzen für den Ein-Element-Würfel aus Abschnitt 7.1.3 mit einer (a) kleinen und (b) großen uniformen Skalierung der inkompatiblen Massen des Elements Alv18 (s. Tab. 6.1). Die inkompatiblen FHGe, 6 für Normal- (vol) und 12 für Schubverzerrungen (shr), werden kondensiert (eff) oder beibehalten (tot) und einer Verschiebungsformulierung (co) gegenübergestellt.	170
7.2	Logarithmische Darstellung der Eigenfrequenzen für den Ein-Element-Würfel aus Abschn. 7.1.3 mit einer (a) optimalen uniformen (ums), (b) optimalen selektiven (sms) und (c) optimalen uniformen shr-Skalierung (ems) der inkompatiblen Massen des Elements Alv18, s. Tab. 6.1. Die inkompatiblen FHGe, 6 für Normal- (vol) und 12 für Schubverzerrungen (shr), werden beibehalten (tot) oder kondensiert (eff) und einer Verschiebungsformulierung (co) gegenübergestellt.	172
7.3	Vergleich des jeweils maximalen Fehlers für folgende Skalierungsstrategien: (ums) shr- und vol-Massen werden uniform skaliert, (sms) shr- und vol-Massen werden selektiv skaliert oder (ems) nur shr-Massen werden uniform skaliert und die vol-FHGe kondensiert. Ein-Element-Würfel aus Abschn. 7.1.3 bei kompressiblem ($\nu = 0.3$) und nahezu inkompressiblem ($\nu = 0.499999$) Materialverhalten. Vergleich der Elementformulierungen aus Tab. 6.1 mit erweiterten Normal- (vol), Normal- und Schub- (vol shr) und Schubverzerrungen (shr). Die Anzahl inkompatibler Freiheitsgrade n_{vol} , $n_{\text{vol shr}}$ und n_{shr} ist gegeben durch $n_{\text{vol}} + n_{\text{vol shr}}/n_{\text{shr}}$. (Beispiel: Formulierung Li18 mit 6 vol-, 3 vol shr- und 9 shr-FHGen = $6+3/9$, s. auch Tab. 3.1). Hinweis: Anzahl und Interpolationsordnung der Erweiterungen sind entscheidend für den maximalen Fehler.	178
7.4	Besetzung der totalen Steifigkeitsmatrix, aufgeteilt in kompatiblen (co) Anteil sowie inkompatiblen Normal- (vol) und Schubanteil (shr) auf der Diagonalen und den entsprechenden co vol-, vol shr- und co shr-Kopplungsmatrizen des Elements Alv18 (siehe Tab. 6.1) für den Ein-Element-Würfel aus Abschn. 7.1.3 im nahezu inkompressiblen Fall ($\nu = 0.499999$).	181
7.5	Maximaler Fehler zwischen den Eigenfrequenzen des Ein-Element-Würfels aus Abschn. 7.1.3 für $\nu = 0.3$. Die Daten stammen aus Tab. 7.2.	185
7.6	Vergleich der auf Δt^{co} normierten Zeitschrittschätzung mit Eigenfrequenzen $\omega_{\text{max}}^{\text{cfl}}$, $\omega_{\text{max}}^{\text{flan}}$ und $\omega_{\text{max}}^{\text{simp}}$ für den Ein-Element-Würfel aus Abschn. 7.1.3. . . .	188

7.7	(Links) Zeitschrittreduktion $1 - r^{\Delta t}$ (0% = Originalzeitschritt, 10% = 90% davon usw.), (rechts) maximaler Fehler in Eigenfrequenzen. Vergleich der Elementformulierungen aus Tab. 6.1 für (ums) uniforme, (sms) selektive und (ems) effektive Skalierungsstrategie, s. Abschn. 7.3, mit Δt^{flan} . Erstellt am Beispiel des kompressiblen ($\nu = 0.3$) Ein-Element-Würfels, s. Abschn. 7.1.3.	190
7.8	Finite-Element-Vernetzung der Geometrie und Materialparameter für den Impakt eines Kupferstabs auf eine starre Wand mit einer Initialgeschwindigkeit v_0 .	192
7.9	Kupferstab-Impaktvorgang und Darstellung der Ergebnisgrößen zum Vergleich der verschiedenen Elemente.	193
7.10	Normierte CPU-Zeiten der sms-, ems- und imp-Berechnungsstrategien aus Abschn. 7.4. Normierung auf Rechenzeit des B-Bar-Elements, alle am Beispiel des Kupferstab-Impakts, s. Abschn. 7.5.1. Anzahl und Typ der inkompatiblen Freiheitsgrade sind unterhalb der Elementbezeichnung in der Form $n_{\text{vol}} + n_{\text{vol shr}}/n_{\text{shr}}$ gegeben; Vor dem Schrägstrich steht die Anzahl zu kondensierender Freiheitsgrade in den ems1- und ems-Strategien. In den imp1- und imp-Strategien werden alle inkompatiblen Freiheitsgrade kondensiert.	196
8.1	(Links) Geometrie und Materialparameter des Elementblocks nach Sussman und Bathe [163] mit den vertikalen Verschiebungsrandbedingungen. (Rechts) Zeitverlauf der Verschiebung mit kritischer Verschiebung u_{crit} , s. Glg. (8.3), und zugehörigem Zeitpunkt t_{crit} .	207
8.2	Elementblock aus Abb. 8.1 mit Kinematik nachdem kritischer Zustand erreicht ist. Zusätzliche Darstellung der inkompatiblen Verschiebungsformen am Beispiel einer Zeile und Spalte des Elementblocks.	208
8.3	Inkompatible kinetische Energie (oben) ohne einfache Kontrolle und (unten, deutlich kleiner) mit einfacher Kontrolle der inkompatiblen Freiheitsgrade nach Glg. (8.1): Mindestwert von T_n^{im} und V_n^{im} gleich der Maschinengenauigkeit ϵ .	209
8.4	(a) Referenzkonfiguration, (b) Aufbringung der homogenen Deformation, dann (c) Aufbringung des Biegezustands mit gleichzeitiger (d) Aktivierung des inkompatiblen Modes.	212
8.5	Überhöht dargestellte Biegebeanspruchung eines Elements mit inkompatiblen Verschiebungserweiterung. Veranschaulichung des <i>relativen</i> Bezugs der inkompatiblen Verschiebung zum Element und des <i>festen</i> Bezugs der kompatiblen Verschiebung zu den Ortsvektoren \mathbf{x} und \mathbf{X} .	222
8.6	Deformierter Biegebalken mit anschließender Starrkörperrotation.	236
8.7	Darstellung der Normalkraft, der Querkraft und des Biegemoments über die Zeit und den Rotationswinkel der Starrkörperrotation, die beginnt, nachdem der Biegebalken vollständig deformiert wurde.	237

8.8	Zeitlicher Verlauf der aufgebrauchten homogenen Kompression und folgenden Biegedeformation für die exemplarische Berechnung der Biegesteifigkeit in Abschnitt 8.5.1.	239
8.9	Zusammenhang zwischen Biegemoment und dazu äquivalentem Kräftepaar, s. Glg. (8.133).	239
8.10	Berechnetes Biegemoment über die Zeit für ein Element, s. Beanspruchung in Abb. 8.8. Hier: $\varepsilon_{22} = -0.01$ für Formulierung Wil9 ad, s. Tab. 8.2.	241
8.11	An Elementknoten aufgebrauchte Dirichlet-Randbedingungen, die für die inkompatiblen Freiheitsgrade des Elements nur für zunehmende Netzdicke eingehalten werden.	241
8.12	Vernetzungen und Materialparameter des komprimierten Blocks im ebenen Verzerrungszustand, s. Abschn. 8.5.2.	242
8.13	Horizontale Verschiebungsverteilung für die Vernetzung aus Abb. 8.12.	243
8.14	Geometrische Modifikationen der regulären Vernetzung aus Abb. 8.12.	245
8.15	Geometrie, Randbedingungen und Materialparameter eines hyperelastischen Würfels. An der Oberseite wird die kompressive Verschiebung aufgebracht; die Unterseite wird in z -Richtung komplett und in x - und y -Richtung teilweise festgehalten.	246
8.16	Deformation bei Erreichen eines kritischen Verschiebungswertes. Klassische Formulierung mit Kinematik; Ad-hoc-Formulierung mit physikalisch sinnvoller Instabilität, die nicht von inkompatiblen Freiheitsgraden ausgelöst wird.	247
8.17	Kompressive Deformation über die Reaktionskraft an der Oberseite des Blocks für die klassische Formulierung. \rightarrow Kinematiken bei kritischen Verschiebungswerten.	248
8.18	Geometrie und Materialparameter des zylindrischen Stabs, Modellierung als Viertelsystem mit Symmetrierandbedingungen. Markierung der Elemente, die zuerst einen kritischen Deformationswert nach Glg. (8.135) erreichen.	249
8.19	Deformation bei kritischer Deformation für (links) klassische und (rechts) ad-hoc-Formulierung. Frontal- und Seitansicht zur visuellen Kontrolle innerhalb liegender Elemente. Die klassische Formulierung zeigt eindeutig Kinematiken; die ad-hoc-Formulierung typisches Stabilitätsversagen mit Oberflächenwellen.	251
8.20	Reaktionskraft an Staboberkante über komprimierende Verschiebung. Durchgezogene Linien zeigen die klassische Formulierung und gestrichelten Linien die ad-hoc-Formulierung.	252
9.1	Zylindrische Schale unter Einwirkung einer Anfangsgeschwindigkeit; Geometrie und Materialparameter.	256

9.2	Deformationssequenz der impulsartig belasteten zylindrischen Schale aus Abbildung 9.1. Ansicht in Längsrichtung der Vernetzung mit $2 \times 44 \times 100$ Elementen.	257
9.3	Darstellung der Durchbiegung des Referenzpunkts über die Zeit für die zylindrische Schale aus Abbildung 9.1 mit $2 \times 44 \times 100$ Elementen.	258
9.4	Darstellung der Durchbiegung des Referenzpunkts über die Zeit für die zylindrische Schale aus Abbildung 9.1 mit $2 \times 66 \times 150$ Elementen.	258
9.5	Geometrie und Materialparameter der zylindrischen Schale. Die geometrische Imperfektion wird entlang der Zylinderachse und senkrecht dazu über den Kreisbogen aufgebracht.	260
9.6	Schnappschüsse der Ausbildung der plastischen Falte mit äquivalenter plastischer Verzerrung ohne Elementnetz für das Wil9- und Bor-Element. Der Bereich um die in Zylindermitte auftretende Falte wird vergrößert dargestellt. Jeweilige Markierung der Orte mit der sich bildenden (a) V-förmigen Falte und (b) Beule.	261
9.7	Reaktionskraft über die Verschiebung für verschiedene Elementvariationen; Zylinderschale mit $50 \times 75 \times 1$ Elementnetz. Berechnung erfolgt in Dickenrichtung mit einem Element (1EL) oder zwei Elementen (2ELs), jeweils mit 2 Integrationspunkten über die Dicke, sowie zwei (2IPs) oder drei (3IPs) Integrationspunkten, jeweils mit einem Element in Dickenrichtung.	262
9.8	Reaktionskraft über die Verschiebung für verschiedene Elementvariationen; Zylinderschale mit $100 \times 150 \times 1$ Elementnetz. Berechnung erfolgt in Dickenrichtung mit einem Element (1EL) oder zwei Elementen (2ELs), jeweils mit 2 Integrationspunkten über die Dicke, sowie zwei (2IPs) oder drei (3IPs) Integrationspunkten, jeweils mit einem Element in Dickenrichtung.	263
9.9	Aufbau des kurzen Doppelkammer-Profiles. (Links) Seiten- und Querschnittsansicht, Abmessungen und Anschnittwinkel. (Rechts) Perspektivische Darstellung des Kompressionsvorgangs, Detailaufnahme der Vernetzung. (Unten) Materialbeschreibung.	264
9.10	Typische Sequenz der Faltenbildung bei Kompression des Doppelkammerprofils. Der letzte Schnappschuss bei 107 mm wird visuell mit dem finalen Zustand des Versuchskörpers von Tryland [175] verglichen.	266
9.11	Kompression des Rechteckrohrprofils. Kontaktkraft über Weg der starren Platte.	267
A.1	Typischer Ausschnitt aus einem mit ACEGEN generierten FORTRAN-Quelltext.	287
A.2	Darstellung der typischen modularen Struktur der Operationen auf Elementebene innerhalb eines expliziten Verfahrens. Die Module stehen entweder als eigenständige Unterprogramme für sich oder können in einem zusammenhängenden Unterprogramm zusammengefasst werden. (im-FHGe = inkompatible Freiheitsgrade).	289

A.3	Vergleich der normierten CPU-Rechenzeiten für das B-Bar-Element: Modulare gegen monolithische Umsetzung in der Anwenderschnittstelle in LS-DYNA gegenüber dem im Originalprogramm LS-DYNA vorhandenen B-Bar-Element.	291
A.4	B-Matrix - B-Bar-Element - Teil 1/3. Standardoperationen. Kopf mit Initialisierungsanweisungen und Eingabe der bereits vorab an den Integrationspunkten berechneten Größen. Symbolische Berechnungen: Jakobi-Matrix, Inverse und Determinante sowie Ableitung der Ansatzfunktionen.	292
A.5	B-Matrix - B-Bar-Element - Teil 2/3. Elementspezifische Operationen. Austausch dieses Teils, um andere Elemente zu formulieren. Gemittelte Ableitung der Ansatzfunktionen und (letzte Zeile) Verwendung der B-Bar-Methodik.	293
A.6	B-Matrix - B-Bar-Element - Teil 3/3. Standardoperationen. Berechnung der B-Matrix und Anweisung zur Ausgabe des Quelltextes.	293
A.7	Kraftvektor (monolithisch) - B-Bar-Element - Teil 1/3. Standardoperationen. Kopf mit Initialisierungsanweisungen und Eingabe der bereits vorab an den Integrationspunkten berechneten Größen. Symbolische Berechnungen: Jakobi-Matrix, Inverse und Determinante sowie Ableitung der Ansatzfunktionen.	294
A.8	Kraftvektor (monolithisch) - B-Bar-Element - Teil 2/3. Elementspezifische Operationen. Gemittelte Ableitung der Ansatzfunktionen und (letzte Zeile) Verwendung der B-Bar-Methodik.	295
A.9	Kraftvektor (monolithisch) - B-Bar-Element - Teil 3/3. Standardoperationen. Berechnung des Kraftvektors samt aller Konstitutivgleichungen inklusive der inkrementellen Spannungsberechnung und Anweisung zur Ausgabe des Quelltextes.	295
B.1	Einheitselement \mathcal{B}_\square und Elemente \mathcal{B}_0 und \mathcal{B} in der Referenz- und Momentankonfiguration.	299

Tabellenverzeichnis

3.1	Anzahl inkompatibler Freiheitsgrade zur Erweiterung der Normal- (vol) und Schubverzerrungen (shr) oder einer Kombination (vol shr) daraus. Explizit: kompatible Freiheitsgrade mit expliziter Zeitintegration berechnet. Zur Berechnung inkompatibler Freiheitsgrade, s. Abschn. 4.1.4.	59
5.1	Zusammenstellung der Zusatzbedingungen um die Bedingung zur Abbildung konstanter Spannungszustände zu erfüllen.	94
5.2	Übersicht der Kombinationen von Legendre-Polynomen und maßgeblicher Faktoren, s. Glg. (5.88) bis (5.90), mit denen diese in den kompatiblen und inkompatiblen Interpolationsfunktionen auftauchen. Die Faktoren einer Zeile führen für eine konstante Jakobideterminante j zu Einträgen ungleich Null in $\mathbf{M}^{\text{colgim}}$ und \mathbf{M}^{gim}	108
6.1	Übersicht der Volumen- und Volumenschalenelemente, die in die modifizierte Version von FEAP implementiert wurden, siehe Anhang A.	139
6.2	Absenkung des Streifenendes, normiert auf Referenzlösung 0.1081 in von MacNeal und Harder [111]. Vergleich von Rechteck- oder Trapezgeometrie im MacNeal-Balken aus Abbildung 6.3.	141
6.3	Zusammenstellung normierter Verschiebungen der jeweils feinsten Diskretisierung aus den geometrisch linearen Testbeispielen.	156
7.1	Gegenüberstellung des Fehlers in den Eigenfrequenzen und die zugehörige Reduktion $r^{\Delta t} = \Delta t^{\text{crit}} / \Delta t^{\text{co}}$ der Zeitschrittgröße für variierende Skalierungen am Beispiel des Ein-Element-Würfels aus Abschn. 7.1.3 mit Elementformulierung Alv18, die 6 inkompatible FHGe für Normal-(vol) und 12 für Schubverzerrungen (shr) enthält.	174
7.2	Vergleich (1) der Skalierungsfaktoren f^{vol} und f^{shr} , (2) der Größe des maximalen Fehlers e_{max} in den Eigenfrequenzen sowie (3) der Reduktion des Zeitschritts $r^{\Delta t}$ für den 1-Element-Würfels, s. Abschn. 7.1.3, bei Kompressibilität ($\nu = 0.3$) und Fast-Inkompressibilität ($\nu = 0.499999$) anhand des Alv18-Elements, s. Tab. 6.1. Variation uniformer (ums), selektiver (sms) und effektiver (ems) Skalierungsstrategie, s. Abschn. 7.1.6.	184

7.3	(a) Skalierungsfaktoren f^{vol} und f^{shr} , s. Abschn. 7.3, (b) maximaler Fehler e_{max} zwischen Eigenfrequenzen sowie (c) Reduktion $r^{\Delta t}$ des Originalzeitschritts für (Spalte 1) ums-, sms- und ems-Skalierungsstrategie kombiniert mit (Spalte 2) Referenz (Δt^{co}) und Schätzungen (Δt^{simp} , Δt^{flan} und Δt^{cfl}) des Zeitschritts. Betrachtetes Beispiel: 1-Element-Würfel aus Abschn. 7.1.3 mit dem Alv18-Element, s. Tab. 6.1, bei Variation der Skalierungsstrategie, s. Abschn. 7.1.6.	188
7.4	Ergebnisgrößen (Endlänge, Pilzradius und max. äquivalente plastische Verzerrung ϵ_{max}^p), s. Kupferstab-Impakt in Abb. 7.9. Vergleich der im-Elemente Wil9, Wil9ts, Wil12ts, Alv18, Li18 und And30, s. Tab. 6.1, mit Werten aus der Fachliteratur, darunter auch achsensymmetrische Elemente u. a. mit reduzierter Integration.	194
7.5	Normierte CPU-Zeiten aller Berechnungsstrategien auf Rechenzeit des B-Bar-Elements am Beispiel des Kupferstab-Impakts, s. Abschn. 7.5.1. Anzahl und Typ der inkompatiblen Freiheitsgrade sind unterhalb der Elementbezeichnung in der Form $n_{\text{vol}} + n_{\text{vol shr}}/n_{\text{shr}}$ gegeben; Vor dem Schrägstrich steht die Anzahl zu kondensierender Freiheitsgrade in den ems1- und ems-Strategien. In den imp1- und imp-Strategien Kondensation aller inkompatiblen Freiheitsgrade.	195
8.1	Konvergenzverhalten der Schnittgrößen des Biegebalkens beim Objektivitätstest.	236
8.2	Normiertes Biegemoment, berechnet nach zunächst homogener Beanspruchung (linke Spalte, von oben nach unten) $\epsilon_{22} = \text{frei}$ $\epsilon_{22} = 0$ und $\epsilon_{22} = -0.01$ und danach aufgebrachter Biegedeformation, s. Abb. 8.8. Normierung aller Fälle auf analytische Referenzlösung mit $\epsilon_{22} = \text{frei}$, s. Abschn. 8.5.1.	240
8.3	Auslösen der Kinematik bei Erreichen eines kritischen Verschiebungswertes ($- \hat{=}$ kein krit. Wert). Theoretisch kritischer Wert: 0.3125 mm, s. Glg. (8.37). Gegenüberstellung der kompressiven Verschiebung in mm der klassischen cl und der ad-hoc-Formulierung ad bei einer regulären Vernetzung mit Variation der Querdehnzahl, s. Abb. 8.12.	244
D.1	Mac-Neal-Balken mit Trapezen. Daten für Abb. 6.5 auf S. 143 und Abb. 6.6 auf S. 144.	303
D.2	Gegenseitig gedrückter Zylinder. Daten für Abb. 6.8 auf S. 146 und Abb. 6.9 auf S. 146.	303
D.3	Verdrehter Streifen mit Belastung senkrecht zur Schalenebene. Daten für Abb. 6.12 auf S. 150.	303
D.4	Verdrehter sehr dünner Streifen mit Belastung senkrecht zur Schalenebene. Daten für Abb. 6.14 auf S. 151.	304

D.5	Verdrehter Streifen mit Belastung in Schalenebene.	
	Daten für Abb. 6.13 auf S. 150.	304
D.6	Verdrehter sehr dünner Streifen mit Belastung in Schalenebene.	
	Daten für Abb. 6.15 auf S. 152.	304
D.7	Platte mit zunehmender Netzverzerrung und 2×2 Elementen.	
	Daten für Abb. 6.17 auf S. 154.	305
D.8	Platte mit zunehmender Netzverzerrung und 4×4 Elementen.	
	Daten für Abb. 6.18 auf S. 154.	305