

# **Analyse des Stabilitätsverhaltens magnetohydrodynamischer Kanalströmungen**

Zur Erlangung des akademischen Grades

**Doktor der Ingenieurwissenschaften**

der Fakultät für Maschinenbau  
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

genehmigte  
**Dissertation**

von

Dipl.-Phys. Thomas Arlt

Tag der mündlichen Prüfung: 12.07.2018

Hauptreferent: apl.Prof. Dr.-Ing. Leo Bühler

Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Robert Stieglitz



Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung -  
Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz (CC BY-SA 4.0):  
<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.de>

## Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung magnetohydrodynamischer Strömungen in Rechteckkanälen mit realistisch elektrisch leitfähigen Wänden im Übergangsbereich vom laminaren zum zeitabhängigen Strömungszustand. Strömungen solcher Art können in den Blankets von Fusionsreaktoren auftreten und beeinflussen insbesondere im wandnahen Bereich den Wärme- und Stofftransport im Flüssigmetall.

Der Fokus dieser Arbeit wird auf der Hunt-Strömung liegen, weil der Einfluss der leitenden Wände auf das Stabilitätsverhalten der Strömung hier am deutlichsten ausgeprägt ist. Erstmals wird der Einfluss der Wandleitfähigkeit, der Magnetfeldstärke sowie der Strömungsgeschwindigkeit auf die Stabilität der Strömung systematisch theoretisch untersucht. Die Stabilitätszustände werden u.a. mit Hilfe der kritischen Reynolds-Zahl  $Re_c$ , der kritischen Wellenlänge  $\lambda_c$  und der turbulenten kinetischen Energie charakterisiert.

Zur Untersuchung werden lineare Stabilitätsanalysen und numerische Simulationen durchgeführt. Für die lineare Stabilitätsanalyse wird der von Priede *et al.* (2010) vorgestellte Code erweitert. Der Code ist nun in der Lage, die Stabilität von MHD-Strömungen in Rechteckkanälen mit dünnen Wänden und realistischer elektrischer Wandleitfähigkeit zu berechnen. Numerische Simulationen werden mit dem von (Mistrangelo & Bühler, 2011) entwickelten MHD-Solver in OpenFoam durchgeführt.

Die erzielten Ergebnisse zeigen, dass die Wandleitfähigkeit bei schwachen und mittleren Magnetfeldern einen erheblichen Einfluss auf die Stabilität der Strömung hat. Für extrem starke Magnetfelder nimmt dieser Einfluss ab und die kritische Reynolds-Zahl zeigt ein asymptotisches Verhalten. Die Resultate der linearen Stabilitätsanalyse können durch die numerischen Simulationen bestätigt werden, sodass sich beide Verfahren gegenseitig bestätigen. Durch weitere numerische Simulationen, bei denen die Strömungsgeschwindigkeit sukzessive erhöht wurde, konnten zwei Strömungsregime gefunden werden, in denen zeitabhängige Strömungszustände vorliegen. Vergleiche mit experimentellen Daten aus Chowdhury (2016), in denen die selben Parameter verwendet werden, zeigen eine Übereinstimmung im Auftreten des zweiten Regimes. Weiterhin lassen sich wesentliche Übereinstimmungen in den numerisch und experimentell ermittelten Wandsignalen des elektrischen Potentials finden.

Aus den Ergebnissen können wichtige neue Erkenntnisse für die Durchführung zukünftiger Experimente gewonnen werden. Durch Messung von  $\partial\phi'/\partial x$  anstatt von  $\partial\phi'/\partial y$  können Instabilitäten besser detektiert werden. Weiterhin weisen die Störungen bei schwachen Magnetfeldern Frequenzen unterhalb von 1Hz auf.



## Danksagung

Mein besonderer Dank gilt meinem Hauptreferenten apl. Prof. Dr.-Ing. Leo Bühler für die hervorragende Betreuung meiner Arbeit. Er war stets für fachliche Diskussion ansprechbar und konnte immer gute Ratschläge und Hinweise geben.

Für die Übernahme des Korreferats und die vielen Anregungen zum Manuskript möchte ich Prof. Dr.-Ing. Robert Stieglitz danken.

Weiterhin möchte ich Dr.-Ing. Chiara Mistrangelo und Dr.-Ing. Sebastian Ehrhard für die vielen Tipps und Hinweise zu dem verwendeten numerischen Lösungsverfahren und OpenFOAM danken.

Danken möchte ich außerdem meinen vielen Doktorandenkollegen, allen voran Dr.-Ing. Victor Chowdhury und Dr.-Ing. Stephan Gabriel, für die vielen kleinen Ratschläge, Hinweise und Diskussionen rund um die MHD und den beruflichen Alltag.

Für stete Unterstützung möchte ich auch meiner Familie danken, insbesondere Katharina Wellmann.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen magnetohydrodynamischer Kanalströmungen</b>	<b>4</b>
2.1	Magnetohydrodynamische Gleichungen . . . . .	4
2.2	Stationäre magnetohydrodynamische Kanalströmungen . . . . .	7
2.2.1	Plattenströmung . . . . .	7
2.2.2	Rechteckkanalströmung . . . . .	8
2.3	Zeitabhängige MHD-Strömungen . . . . .	12
2.3.1	Bisherige Untersuchungen . . . . .	12
2.3.2	Eigenschaften wirbelbehafteter MHD-Strömungen . . . . .	14
2.3.3	Identifizierung von Wirbelstrukturen . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Lineare Stabilitätsanalyse magnetohydrodynamischer Kanalströmungen</b>	<b>18</b>
3.1	Mathematische Vorgehensweise . . . . .	18
3.2	Numerische Betrachtung . . . . .	20
3.3	Validierung und Konvergenzverhalten . . . . .	23
3.4	Lineare Stabilität der Hunt-Strömung . . . . .	24
3.4.1	Grundströmung . . . . .	24
3.4.2	Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse . . . . .	25
3.5	Lineare Stabilität der Walker-Strömung . . . . .	39
3.5.1	Grundströmung . . . . .	39
3.5.2	Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse und Vergleich mit der Hunt-Strömung . . . . .	40
3.6	Wesentliche Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Numerische Simulation magnetohydrodynamischer Kanalströmungen</b>	<b>45</b>
4.1	Numerisches Verfahren . . . . .	45
4.1.1	Grundlagen . . . . .	45
4.1.2	Verwendete Lösungsverfahren . . . . .	46
4.1.3	Grundkonfiguration und Randbedingungen . . . . .	47
4.1.4	Die Software OpenFoam . . . . .	49
4.2	Validierung des numerischen Verfahrens für MHD-Rechteckkanalströmungen	50
4.2.1	Zweidimensionale Strömungen . . . . .	50
4.2.1.1	Grundkonfiguration . . . . .	50
4.2.1.2	Shercliff-Strömung . . . . .	50
4.2.1.3	Hunt-Strömung . . . . .	53
4.2.2	Validierung für dreidimensionale stationäre Strömungen . . . . .	57
4.2.2.1	Randbedingungen und numerisches Setup . . . . .	58
4.2.2.2	Ergebnisse . . . . .	58
4.2.3	Zusammenfassung der Validierungsergebnisse . . . . .	61

4.3	Untersuchung von zeitabhängigen magnetohydrodynamischen Kanalströmungen . . . . .	62
4.3.1	Numerisches Setup . . . . .	62
4.3.2	Geschwindigkeits- und Potentialprofile für verschiedene $Re$ und $Ha$ . . . . .	63
4.3.3	Eigenschaften der Instabilitäten . . . . .	68
4.3.4	Räumliche Struktur der instabilen Strömungen . . . . .	72
4.3.4.1	Potentialstörungen auf den Kanalwänden . . . . .	72
4.3.4.2	Störungsverteilungen in der MHD-Strömung . . . . .	76
4.3.5	Zeitsignale vollentwickelter, instabiler Strömungen . . . . .	87
4.3.6	Turbulente kinetische Energie und Reynolds-Spannungen . . . . .	90
4.3.7	Transitionsverhalten . . . . .	96
4.3.8	Einfluss des Aspektverhältnisses auf das Stabilitätsverhalten . . . . .	99
4.4	Zusammenfassung . . . . .	107
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>109</b>
<b>6</b>	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>113</b>
<b>7</b>	<b>Anhang</b>	<b>115</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>129</b>



# 1 Einleitung

Strömungen elektrisch leitender Fluide (z.B. Flüssigmetalle), auf die Magnetfelder wirken, werden magnetohydrodynamische (MHD) Strömungen genannt. Solche Strömungen treten zum einen in der Astrophysik auf, werden andererseits aber auch technisch, bspw. zum Heizen und Abscheiden der Schlacke in der Schmelze bei der Stahlherstellung verwendet.

Eine weitere technische Anwendung solcher MHD-Strömungen ist in den so genannten Blankets von Fusionsreaktoren vorgesehen (Malang *et al.*, 1988; Bühler, 2007), wie sie z.B. in Abbildung 1.1 rot dargestellt sind. Die Blankets sind dort um die Plasmakammer angeordnet, in der der Fusionsprozess stattfindet. Sie sollen u. a. folgende Aufgaben übernehmen:

- Erbrütung des für die Fusion notwendigen Tritiums,
- Abtransport der Fusionswärme zur Stromerzeugung und
- Abschirmung der Neutronenstrahlung

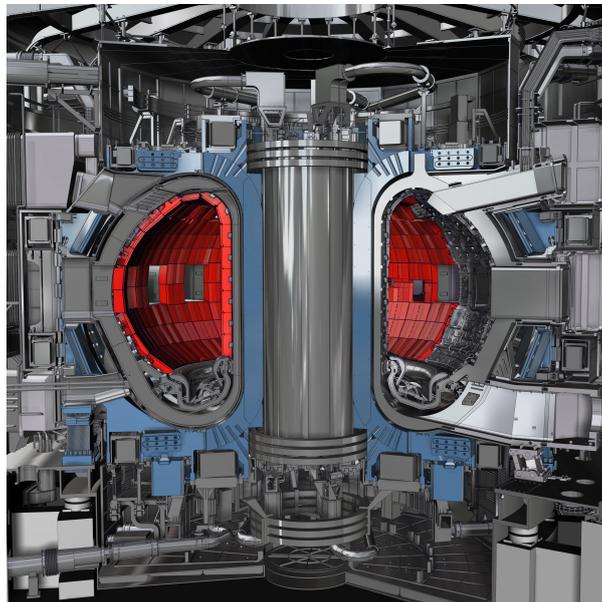


Abbildung 1.1: Design der Fusionstestanlage ITER. Die Blankets sind rot dargestellt.  
(Quelle: <https://phys.org/news/2013-04-iter-blanket-technology.html> )

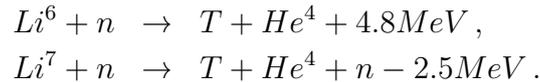
Es werden verschiedene Flüssigmetall-Blanket-Konzepte erforscht. Hierzu zählen u.a. das Helium-Cooled-Lithium-Lead-Konzept (HCLL) (Mistrangelo & Bühler, 2014) und das Dual-Coolant-Lead-Lithium-Konzept (DCLL) (Smolentsev *et al.*, 2015). Die Blankets haben einen komplizierten dreidimensionalen Aufbau. Sie bestehen aber überwiegend aus Kanälen mit einem rechteckigen Querschnittsprofil, in denen eine eutektische Flüssig-

## 1 Einleitung

metalllegierung aus Blei und Lithium (PbLi) fließt. Durch den Fusionsprozess zwischen Deuterium und Tritium



werden diese in Helium, Neutronenstrahlung und Energie umgewandelt. Deuterium ist als natürliche Ressource in Form von halbschweren oder schweren Wassers reichlich vorhanden. Das natürliche Vorkommen von Tritium hingegen ist vernachlässigbar, sodass es im Reaktor erbrütet werden muss. Als Brutmaterial dient hierbei das Lithium. Durch folgende Reaktion wird im Blanket unter Neutronenbeschuss Tritium erzeugt:



Durch seine guten Wärmeleiteigenschaften ist PbLi in der Lage die im Blanket erzeugte Wärme abzuführen, um sie zur Stromerzeugung zu nutzen. Durch die Absorption von Neutronen dienen die Blankets als Strahlungsschutz, insbesondere für die supraleitenden Magnetfeldspulen, welche sich hinter den Blankets befinden und die Magnetfelder zum Einschluss des Fusionsplasmas erzeugen.

Aufgrund dieser Konstruktionsweise sind die Blankets den starken Magnetfeldern der Spulen ausgesetzt, sodass wegen seiner guten elektrischen Leitfähigkeit das strömende Blei-Lithium mit den Magnetfeldern wechselwirkt und nicht zu vernachlässigende magneto-hydrodynamische Effekte auftreten. Die durch die Strömung erzeugten Lorentz-Kräfte verursachen eine Zunahme des Druckgradienten verglichen mit dem hydrodynamischen Fall und verändern das Geschwindigkeitsprofil. Während die Strömung im Kanalzentrum abgebremst wird, treten in den Randbereichen parallel zum Magnetfeld, im Fall von elektrisch leitenden Wänden, große Geschwindigkeitsüberhöhungen auf. Diese Geschwindigkeitsüberhöhungen können die Quelle für Instabilitäten der MHD-Strömung sein. Solche Instabilitäten sind von besonderem Interesse, weil sie die Strömung und den Wärmetransport beeinflussen. Im Unterschied zu hydrodynamischen Instabilitäten werden MHD-Instabilitäten nicht nur durch die Strömungsgeschwindigkeit und das Aspektverhältnis des Kanals beeinflusst, sondern auch die elektrische Leitfähigkeit der Kanalwände sowie die Stärke des äußeren Magnetfeldes beeinflussen die Stabilität der Strömung. Die Folge ist ein gänzlich anderes Verhalten von MHD-Instabilitäten, bspw. eine starke anisotrope Verteilung aller Strömungsgrößen.

Das Ziel dieser Arbeit ist, den Einfluss von Magnetfeldstärke, Strömungsgeschwindigkeit und Wandleitfähigkeit auf die Stabilität einer MHD-Strömung zu untersuchen. Unter Berücksichtigung dieser Einflussgrößen wird zunächst eine lineare Stabilitätsanalyse durchgeführt, um zu ermitteln, wann ein Umschlag einer laminaren in eine zeitabhängige Strömung, die im Weiteren als instabile Strömung bezeichnet wird, erfolgt. Allgemein zeigt sich, dass die so theoretisch ermittelte kritische Reynolds-Zahl an der Stabilitätsgrenze um ca. eine Größenordnung kleiner als die entsprechende experimentell ermittelte Stabilitätsgrenze sein kann. Aufbauend auf den Ergebnissen der linearen Stabilitätsanalyse werden daher numerische Simulationen durchgeführt. Diese sollen insbesondere den Parameterbereich zwischen zuvor ermittelten theoretischen Stabilitätsgrenzen und experimentell gemessenen Stabilitätsgrenzen untersuchen. Numerische Simulationen sind für diesen Parameterbereich besonders geeignet, weil zum einen die auftretenden Störungssignale experimentell nahezu nicht messbar sind. Zum anderen ist der Parameterbereich

nach dem Auftreten von Instabilitäten für eine lineare Stabilitätsanalyse nicht mehr zugänglich.

Zum Erreichen dieses Ziels werden zunächst im Kapitel 2 Grundlagen zu MHD - Kanalströmungen behandelt. Im Kapitel 3 wird das benutzte Verfahren zur linearen Stabilitätsanalyse vorgestellt und die damit erzielten Ergebnisse ausführlich dargestellt. Im anschließenden Kapitel 4 werden die Resultate der numerischen Simulationen präsentiert und diskutiert. Abschließend erfolgt eine Zusammenfassung der vorliegenden Arbeit und ein Ausblick in Kapitel 5.

# 2 Grundlagen magnetohydrodynamischer Kanalströmungen

Erstmalig wurden magnetohydrodynamische Strömungen in den 1930er Jahren von Hartmann sowohl experimentell als auch theoretisch untersucht (Hartmann, 1937; Hartmann & Lazarus, 1937). In diesen Versuchen wurden MHD-Strömungen in isolierten Rechteckkanälen mit verschiedenen Seitenverhältnissen untersucht. Sowohl ein Anstieg des Druckgradienten im Vergleich zu hydrodynamischen Strömungen, als auch der Übergang zu turbulenten Strömungen konnte beobachtet werden. Analytische Lösungen für MHD-Kanalströmungen in isolierten Kanälen hat erstmals Shercliff (1953) gezeigt. Er führte zusätzlich asymptotische Betrachtungen durch und konnte so u.a. die Beiträge verschiedener Strömungsbereiche zur mittleren Geschwindigkeit bei sehr starken Magnetfeldern zeigen. Für eine MHD-Strömung zwischen zwei parallelen, elektrisch leitenden Platten, die senkrecht zum Magnetfeld orientiert sind, formulierten Chang & Lundgren (1961) Randbedingungen für beliebige Wandleitfähigkeiten und konnten die bisherigen analytischen Lösungen erweitern. Eine Strömung zwischen zwei parallel Platten wird mittlerweile Hartmann-Strömung genannt. Hunt (1965) leitete analytische Lösungen für Rechteckkanäle mit elektrisch leitenden Wänden her. Dabei führte er Fallunterscheidungen für die verschiedenen Möglichkeiten der Wandleitfähigkeit durch, weil sich dadurch die entsprechenden Randbedingungen zur Lösung der analytischen Gleichungen vereinfachen lassen. Walker (1981) hat eine allgemeine Randbedingung für das elektrische Potential bei elektrisch leitenden Wänden hergeleitet, unabhängig davon, ob diese senkrecht oder parallel zum Magnetfeld sind. Dies erreichte er, indem er eine Bilanzgleichung aller in eine dünne Wand ein- und austretenden Ströme aufstellte und das elektrische Potential anstelle des induzierten Magnetfeldes zur mathematischen Beschreibung nutzte.

## 2.1 Magnetohydrodynamische Gleichungen

Strömungen elektrisch leitfähiger Fluide lassen sich aus einer Kombination von Gleichungen aus der Fluidodynamik und der Elektrodynamik mathematisch beschreiben. Als Grundannahmen wird im Weiteren angenommen, dass die betrachteten Fluide inkompressibel und isotherm sind. Das verwendete Koordinatensystem ist in Abbildung 2.1 abgebildet. Die  $x$ -Achse ist in Strömungsrichtung, die  $y$ -Achse in Magnetfeldrichtung und die  $z$ -Achse entsprechend in transverser Richtung orientiert.

Die grundlegenden Gleichungen der Fluidodynamik für inkompressible Strömungen sind die Impulsgleichung, welche in dimensionsloser Form lautet

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p(\mathbf{x}, t) + Re^{-1} \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad (2.1)$$

und die Massenerhaltung

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (2.2)$$

$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t)\hat{\mathbf{x}} + v(\mathbf{x}, t)\hat{\mathbf{y}} + w(\mathbf{x}, t)\hat{\mathbf{z}}$  beschreibt den Geschwindigkeitsvektor,  $t$  die Zeit,  $p$  den Druck,  $\nabla$  den Nabla-Operator und  $\mathbf{f}$  Volumenkräfte. Die linke Seite von (2.1) beschreibt Trägheitskräfte, der erste Term auf der rechten Seite Druckkräfte und der mittlere Term viskose Kräfte. Auf dem Rand  $\Gamma$  gilt stets die hydrodynamischen Haftbedingung

$$\mathbf{v}(\Gamma) = \mathbf{0}. \quad (2.3)$$

Zur Entdimensionierung wurde  $\mathbf{v}^* \rightarrow u_0 \mathbf{v}$ ,  $x^* \rightarrow Lx$ ,  $t^* \rightarrow L/u_0 t$ ,  $p^* \rightarrow \rho u_0^2 p$  und  $\mathbf{f}^* \rightarrow u_0^2 \rho L^{-1} \mathbf{f}$  verwendet. Hierbei stellen  $u_0$  und  $L$  eine charakteristische Geschwindigkeit bzw. Länge dar und  $\rho$  die Dichte des Fluids. Aus dieser Art der Entdimensionierung ergibt sich die Reynolds-Zahl  $Re = u_0 L / \nu$  als dimensionslose Kennzahl der Strömung, welche das Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften angibt.

Bewegt sich ein elektrisch leitfähiges Fluid in einem Magnetfeld  $\mathbf{B}$ , müssen zusätzlich Gesetze der Elektrodynamik berücksichtigt werden:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = R_m \mathbf{j}(\mathbf{x}, t), \quad (2.5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, t), \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (2.8)$$

Hierbei ist  $\mathbf{E}$  das dimensionslose elektrische Feld,  $\mathbf{B}$  das dimensionslose Magnetfeld,  $\mathbf{j}$  die dimensionslose Stromdichte. Zur Entdimensionierung wird  $\mathbf{E}^* \rightarrow u_0 B_0 \mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}^* \rightarrow B_0 \mathbf{e}_y$  verwendet, wobei  $B_0$  der Betrag der magnetischen Flussdichte ist und  $\mathbf{e}_y$  der Einheitsvektor in  $y$ -Richtung. Mit  $R_m$  wird die magnetische Reynolds-Zahl  $R_m = Lu_0 / \eta = \mu \sigma u_0 L$  bezeichnet, wobei  $\eta = (\mu \sigma)^{-1}$  die magnetische Diffusivität beschreibt. Durch  $\mu$  wird die magnetische Permeabilität und durch  $\sigma$  die elektrische Leitfähigkeit des Fluids berücksichtigt.  $R_m$  beschreibt das Verhältnis von Advektion zu Diffusion des Magnetfeldes. (2.4) wird Farady'sches Induktionsgesetz, (2.5) Ampère'sches Gesetz und (2.7) Ohm'sches Gesetz genannt. Bei letzterem wird durch  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  die Erzeugung elektrischer Felder durch die Bewegung des elektrisch leitenden Fluids in einem Magnetfeld berücksichtigt. Die Gleichung (2.8) stellt in analoger Form zu (2.2) die Ladungserhaltung dar.

Die in (2.1) eingeführte Impulsgleichung nimmt dadurch die Form

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + Re^{-1} \nabla^2 \mathbf{v} + N \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.9)$$

an, wobei der letzte Term auf der rechten Seite

$$\mathbf{f}_L = N \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.10)$$

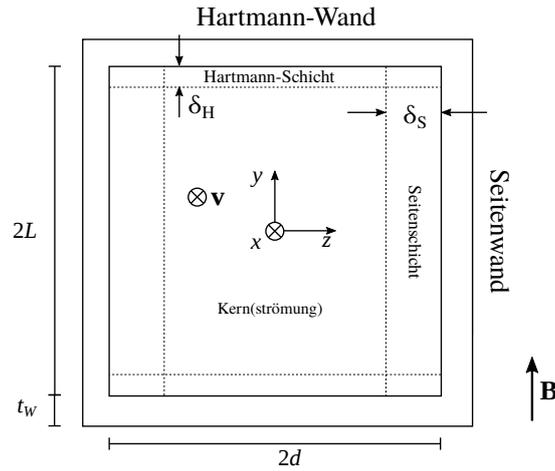


Abbildung 2.1: Rechteckkanal im homogenen, stationären  $\mathbf{B}$ -Feld mit dem Koordinatenursprung in der Mitte des Kanals.  $x$ -Achse und Geschwindigkeit zeigen in den Kanal hinein.

die Lorentz-Kraft mit dem Interaktionsparameter  $N = \sigma L B^2 (\rho u_0)^{-1}$  darstellt. Dieser beschreibt das Verhältnis von elektromagnetischen Kräften zu Trägheitskräften. Die in (2.10) eingeführte Lorentz-Kraft ist eine Volumenkraft und wird durch die Wechselwirkung von elektrischer Stromdichte  $\mathbf{j}$  und Magnetfeld  $\mathbf{B}$  erzeugt.

Die Kombination aus  $Re$  und  $N$  liefert das Verhältnis von elektromagnetischen zu viskosen Kräften  $ReN = Ha^2$ . Die Hartmann-Zahl

$$Ha = LB\sqrt{\sigma/(\rho\nu)} \quad (2.11)$$

kann auch als dimensionslose Kennzahl für die Stärke des angelegten Magnetfeldes angesehen werden. Weiterhin kann mit  $Ha$  die Dicke  $\delta$  der Grenzschichten, wie sie in Abbildung 2.1 zu sehen sind, abgeschätzt werden zu  $\delta_H \sim Ha^{-1}$  für die Hartmann-Schicht und  $\delta_S \sim Ha^{-1/2}$  für die Seitenschicht (Hunt, 1965).

Gemäß (2.5) wird durch den induzierten Strom ein induziertes Magnetfeld erzeugt, welches sich mit der Induktionsgleichung mathematisch beschreiben lässt. Dazu wird  $\nabla \times$  auf (2.7) angewendet, sodass mit Hilfe des Ampère'schen Gesetzes (2.5), des Farady'schen Gesetzes (2.4) und (2.6), sowie einigen Vektoridentitäten folgt:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \frac{1}{R_m} \nabla^2 \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v}. \quad (2.12)$$

Der erste Term beschreibt die zeitliche Entwicklung von  $\mathbf{B}$ , der zweite die Advektion, der dritte die Diffusion und der letzte Term die Produktion durch Änderungen im Geschwindigkeitsfeld. Anhand von  $Re_m$  können zwei Grenzfälle unterschieden werden: Zum einen  $Re_m \ll 1$ , was bedeutet, dass das Magnetfeld durch den Diffusionsterm dominiert wird und die strömungsinduzierte magnetische Induktion vernachlässigt werden kann. Dieser Fall wird deshalb induktionsfreie Approximation genannt. Zum anderen  $Re_m \gg 1$ , in diesem Fall spielt der Diffusionsterm keine Rolle, sondern die Bewegung des Fluids beeinflusst das Magnetfeld. Für Laborversuche gilt meistens  $L \sim O(10^{-1})$ ,  $u_0 \sim O(10^{-3}) - O(10^{-1})$  und  $\sigma \sim O(10^6)$ . Wegen  $\mu \sim O(10^{-6})$  folgt somit, dass  $Re_m \ll 1$

ist. Im Rahmen dieser Arbeit werden MHD-Strömungen betrachtet, für die  $Re_m \ll 1$  gilt, sodass die induktionsfreie Approximation angewendet werden kann.

Durch Anwendung der induktionsfreien Approximation und der Annahme, dass  $\mathbf{B}$  stationär ist, lässt sich  $\mathbf{E}$  mit Hilfe des elektrischen Potentials  $\phi(\mathbf{x}, t)$  durch  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$  ausdrücken. Mit dieser Formulierung wird (2.4) identisch erfüllt. Die zur Erzeugung von  $\mathbf{f}_L$  benötigte Stromdichte  $\mathbf{j}$  folgt aus (2.7), worin nun  $\mathbf{E}$  durch  $\phi$  dargestellt werden kann, sodass (2.7) die Form

$$\mathbf{j} = -\nabla\phi + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.13)$$

annimmt. Wird auf (2.13) die Divergenz angewendet, so ergibt sich

$$\nabla^2\phi = \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (2.14)$$

Dies ist eine Poisson-Gleichung für das elektrische Potential  $\phi$ .

## 2.2 Stationäre magnetohydrodynamische Kanalströmungen

Die Eigenschaften und Besonderheiten von stationären Strömungen im homogenen Magnetfeld sollen im Folgenden anhand verschiedener Kanalkonfigurationen erläutert werden.

### 2.2.1 Plattenströmung

Der einfachste Fall stellt eine MHD-Strömung zwischen zwei parallelen Platten mit gegebenem Wandleitparameter  $c = \frac{t_W \sigma_W}{L\sigma}$  dar, wobei  $t_W$  die Dicke der Wände und  $\sigma_W$  deren elektrische Leitfähigkeit ist. Die Platten sind senkrecht zum Magnetfeld orientiert. Eine analytische Lösung dieses Problems wurde erstmals von Chang & Lundgren (1961) hergeleitet und lautet

$$u(y) = \hat{u} \left( 1 - \frac{\cosh(Ha y)}{\cosh(Ha)} \right), \quad (2.15)$$

$$\text{mit } \hat{u} = \frac{1}{Ha c Ha + \tanh(Ha)}. \quad (2.16)$$

Basierend auf dieser Lösung lassen sich folgende Eigenschaften ableiten:

- Für  $Ha \rightarrow 0$  geht die Strömung in die hydrodynamische Poiseuille-Strömung über.
- Für  $Ha \gg 1$  flacht das Geschwindigkeitsprofil in der Kernströmung stark ab und es bilden sich dünne Grenzschichten an den Hartmann-Wänden, deren Dicke mit  $\delta_H \sim Ha^{-1}$  skaliert.
- Für  $Ha = const$  und gegebenem Druckgradienten ist für  $c = 0$  der Volumenstrom am größten, für  $c \rightarrow \infty$  hingegen am kleinsten.

## 2.2.2 Rechteckkanalströmung

Werden noch Seitenwände hinzugefügt, ergibt sich eine MHD-Rechteckkanalströmung mit Seitenverhältnis  $A = d/L$ , wie sie in Abbildung 2.1 gezeigt ist. In der Literatur werden drei verschiedene Rechteckkanalströmung unterschieden, welche durch die Wandleitfähigkeit bestimmt werden.

### Shercliff-Strömung

Der Fall eines isolierten Kanals mit  $c = 0$  wurde erstmals von Shercliff (1953) untersucht und soll daher Shercliff-Strömung genannt werden. Er wird in Abschnitt 4.2.1.2 zur Validierung des numerischen Verfahrens benutzt und soll deshalb kurz beschrieben werden.

Abbildung 2.2 (a) zeigt diese Strömung. Weil die Wände nicht elektrisch leitend sind, muss sich der elektrische Strom im Fluid schließen. Anhand der dargestellten elektrischen Stromlinien lassen sich Regionen mit verschiedenen stark ausgeprägten Lorentz-Kräften  $\mathbf{f}_L$  charakterisieren. Im Kernbereich fließt der Strom senkrecht zu  $\mathbf{B}$  und  $\mathbf{v}$ , sodass eine der Strömung entgegen gerichtete Lorentz-Kraft erzeugt wird und der axiale Druckgradient zunimmt. In der Seitenschicht fließt  $\mathbf{j}$  parallel zu  $\mathbf{B}$  und damit ergibt sich  $\mathbf{f}_L = 0$ . Die Dicke  $\delta_S$  der Seitenschicht skaliert mit  $\delta_S \sim Ha^{-1/2}$ .

Im Vergleich zur Kernströmung fließt  $\mathbf{j}$  in der Hartmann-Schicht in entgegengesetzte Richtung, sodass hier  $\mathbf{f}_L$  antreibend auf das Fluid wirkt. Für den Stromfluss ist die Dicke der Hartmann-Schicht der limitierende Faktor, die mit  $\delta_H \sim Ha^{-1}$  skaliert und für  $Ha \gg 1$  sehr dünn wird. Die von Shercliff (1953) gefundene Lösung für die Geschwindigkeit  $u$  ist in Abbildung 2.3 exemplarisch für  $Ha = 100$  gezeigt: In der Kanalmitte ist das Profil im Vergleich zum hydrodynamischen Fall mit seinem parabelartigen Profil stark abgeflacht. Erst in der Seitenschicht mit Dicke  $\delta_S \sim Ha^{-1/2}$  fällt  $u$  ab, um am Rand die Haftbedingung  $u(y, z = \pm A) = 0$  zu erfüllen. Auch in Magnetfeldrichtung ist die Geschwindigkeit im Kernbereich abgeflacht (Abbildung 2.3 (b)) und erst in der sehr dünnen Hartmann-Schicht fällt  $u$  auf  $u(y = \pm 1, z) = 0$  ab.

Das elektrische Potential  $\phi$  wird gemäß Moreau (1990) in Abbildung 2.4 (a) in  $z$ -Richtung gezeigt. Es steigt im Kernbereich zunächst linear an, dieser Anstieg nimmt aber in der Seitenschicht ab, sodass an der Wand  $\partial\phi/\partial n = 0$  gilt. In der Abbildung 2.4 (b) ist der Druckgradient  $Re dp/dx$  gegen  $Ha$  aufgetragen. Es ist erkennbar, dass  $Re dp/dx$  linear mit  $Ha$  ansteigt.

### Walker-Strömung

Als nächstes soll ein Kanal betrachtet werden, bei dem alle Wände elektrisch leitend sind ( $c_H = c_S = c \neq 0$ ). Solch ein Kanal wurde zu erst von Hunt (1965) betrachtet, jedoch mit der Einschränkung, dass die Hartmann-Wand perfekt leitend sein muss. Walker (1981) konnte hingegen eine Randbedingung für  $\phi$  für dünne Wände mit realistischer elektrischer Leitfähigkeit für diese Art Kanal ableiten, bei der prinzipiell jede Wand ein anderes  $c$  haben kann. Daher soll diese Art Strömung Walker-Strömung genannt werden. In Abbildung 2.2 (b) ist ein entsprechender Kanal mit vier elektrisch leitenden Wänden

## 2.2 Stationäre magnetohydrodynamische Kanalströmungen

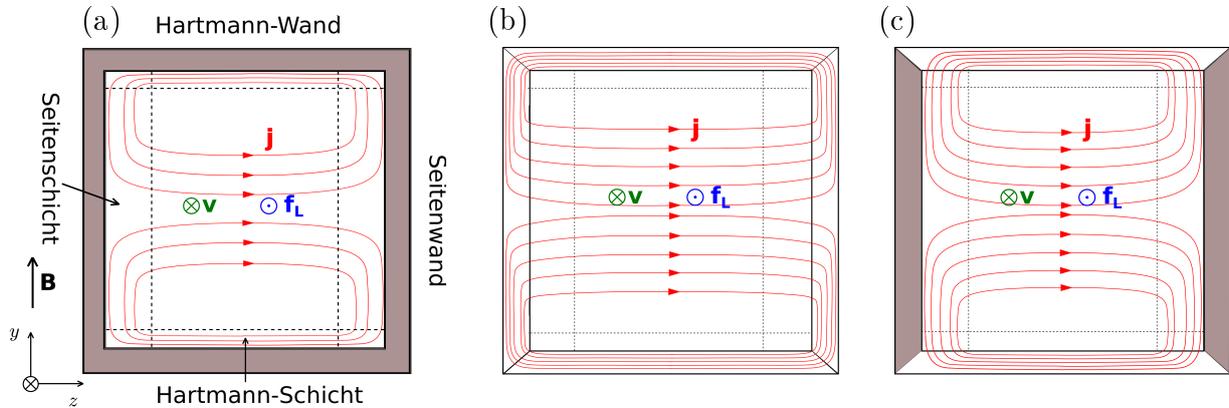


Abbildung 2.2: Skizzen der elektrischen Ströme für die betrachteten Kanalkonfigurationen: (a) Shercliff-Strömung, (b) Walker-Strömung und (c) Hunt-Strömung. Farblich ausgefüllte Wände sind elektrisch isolierend, weiße leitend.

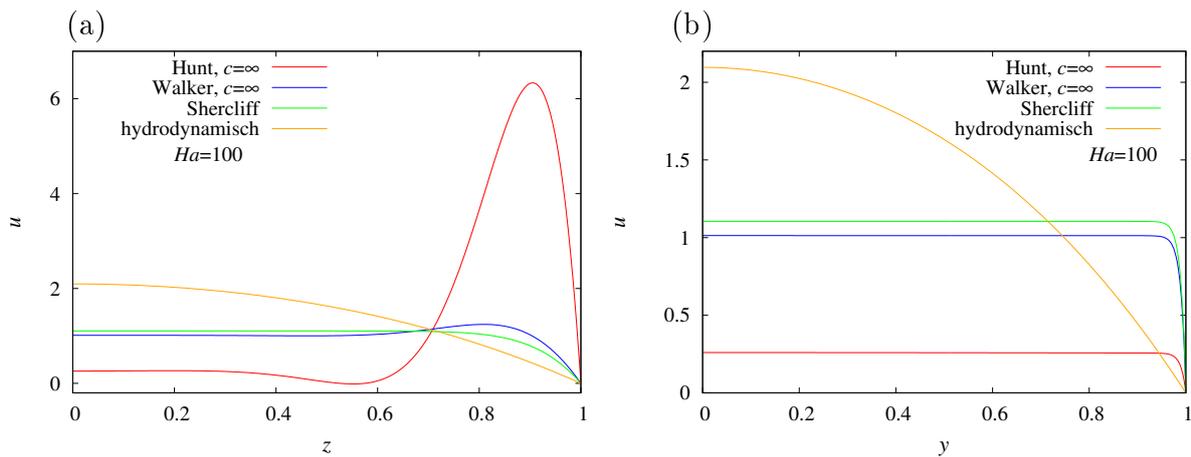


Abbildung 2.3: Vergleich von Geschwindigkeitsprofilen exemplarisch für  $Ha = 100$  für (a) entlang der  $z$ -Achse bei  $y = 0$  und (b) entlang der  $y$ -Achse bei  $z = 0$  für die drei betrachteten Konfigurationen zur hydrodynamischen Strömung.

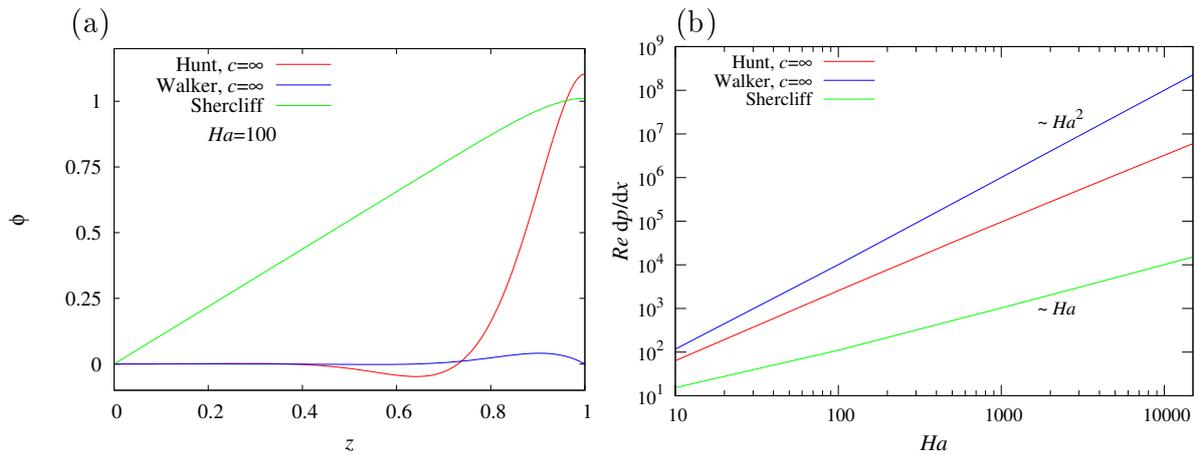


Abbildung 2.4: Darstellung (a) des elektrischen Potentials entlang der  $z$ -Achse exemplarisch für  $Ha = 100$  und (b) des Druckgradientens für die drei betrachteten Konfigurationen.

gezeigt.

Durch Aufstellen einer Bilanzgleichung des Stromes in einem Volumenelement der Wand lässt sich eine Randbedingung für  $\phi$  herleiten. Dabei werden die tangentialen und normalen Stromflüsse bezüglich der Wand berücksichtigt. Walker (1981) konnte die Randbedingung für eine dünne und beliebig leitfähige Wand angeben als:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \phi}{\partial n} = \nabla_{\tau} \cdot (c \nabla_{\tau} \phi), \quad (2.17)$$

mit der Flächennormalen  $\mathbf{n}$  und dem Wandleitparameter

$$c = \frac{t_W \sigma_W}{L \sigma}, \quad (2.18)$$

der das elektrische Leitfähigkeitsvermögen der Wand mit Dicke  $t_W$  und elektrischer Leitfähigkeit  $\sigma_W$  zu dem des Fluids ins Verhältnis setzt. Der Index  $\tau$  in (2.17) steht für die tangentialen Ableitungen entlang der Wand. Für die Wanddicke  $t_W$  gilt  $t_w \ll L$ . Diese Einschränkung auf dünne Wände bedeutet, dass das elektrische Potential über die Wanddicke hinweg konstant ist, sodass  $\phi_W = \phi|_{\Gamma}$  und eine Bestimmung von  $\phi_W$  nicht notwendig ist.

Für eine isolierte Wand ist  $c = 0$  und aus (2.17) folgt

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{j} = -\mathbf{n} \cdot \nabla \phi = -\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \text{ auf } \Gamma, \quad (2.19)$$

was der Randbedingung der Shercliff-Strömung entspricht.

Für den Fall elektrisch perfekt leitfähiger Wände gleicht sich eine Potentialdifferenz entlang der Wand instantan aus und es gilt  $\phi = const.$  Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann daher

$$\phi = 0 \quad (2.20)$$

auf  $\Gamma$  gesetzt werden.

Aufgrund der elektrisch leitenden Wände kann sich der Strom zusätzlich über Seitenwand und Hartmann-Wand schließen, wie in Abbildung 2.2 (b) dargestellt. Damit ist nicht mehr  $\delta_H$  sondern  $c$  der limitierende Faktor für den Stromfluss. Von allen betrachteten Fällen ist in der Walker-Strömung der Stromfluss am größten. Als Folge davon kann die im Vergleich größte Lorentz-Kraft der Strömung entgegen wirken und es ergibt sich der größte Druckgradient, für den nach Abbildung 2.4 (b)  $Re dp/dx \sim Ha^2$  gilt.

Das Geschwindigkeitsprofil für  $c = \infty$  in Abbildung 2.3 (a) zeigt eine etwas niedrigere Geschwindigkeit im Kernbereich und eine Geschwindigkeitsüberhöhung in der Seitenschicht im Vergleich zur Shercliff-Strömung. Der Jet wird durch eine Abnahme der Lorentz-Kraft in den Seitenschichten verursacht, weil  $\mathbf{j}$  hier nicht mehr vollständig senkrecht auf  $\mathbf{B}$  steht. Im gezeigten Beispiel sind alle Wände perfekt leitend und eine Potentialdifferenz entlang der Wand gleicht sich instantan aus.

### Hunt-Strömung

Als letzter Fall wird ein Kanal betrachtet, bei dem nur die Hartmann-Wände elektrisch leitend, die Seitenwände hingegen isoliert sind ( $c_H = c > 0$ ,  $c_S = 0$ ). Solch ein Kanal ist in Abbildung 2.2 (c) gezeigt und die entsprechende Strömung soll Hunt-Strömung genannt werden (Hunt, 1965). Sie wird als idealisierte Hunt-Strömung bezeichnet, wenn die Hartmann-Wände eine perfekte elektrische Leitfähigkeit ( $c = \infty$ ) haben.

Analog zur Shercliff-Strömung ist  $\mathbf{j}$  in der Seitenschicht parallel zu  $\mathbf{B}$  und es wirkt in ihr keine Lorentz-Kraft. Allerdings kann sich der Strom, wie bei der Walker-Strömung, in der leitenden Hartmann-Wand schließen, was zu einer größeren Stromdichte und damit größeren Lorentz-Kraft im Strömungskern im Vergleich zur Shercliff-Strömung führt. Als Folge davon steigt der Druckgradient, wie es in Abbildung 2.4 für  $c = \infty$  dargestellt ist. Er bleibt allerdings kleiner als bei der Walker-Strömung. Damit einhergehend ist im Vergleich die Geschwindigkeit der Kernströmung deutlich reduziert (siehe Abbildung 2.3 (a)). Durch die fehlende Lorentz-Kraft in den Seitenschichten und die Zunahme des Druckgradienten bilden sich in den Seitenschichten starke Geschwindigkeitsüberhöhungen aus, wie sie im Profil in Abbildung 2.3 (a) zu sehen sind (Hunt, 1965). Häufig werden diese Geschwindigkeitsüberhöhungen Jets und das komplette Geschwindigkeitsprofil entlang der  $z$ -Achse M-Profil genannt. Im gezeigten Beispiel für  $Ha = 100$  wird  $u(y = 0, z)$  bei  $z \approx 0.55$  negativ. Gemäß Hunt (1965) weist  $u$  ein lokales Minimum auf, welches für  $Ha > 89$  negativ wird. Zur Verdeutlichung ist in Abbildung 2.5 (a) das dreidimensionale Geschwindigkeitsprofil für die Hunt-Strömung und in Abbildung 2.5 (b) für die Walker-Strömung dargestellt. Die ausgeprägteren Geschwindigkeitsüberhöhungen der Hunt-Strömung werden sehr deutlich.

Die Jets neigen aufgrund von Wendepunkten im Geschwindigkeitsprofil zu Instabilitäten (Tollmien, 1929). Für die Stabilitätsuntersuchungen liegt der Fokus der vorliegenden Arbeit deshalb auf der Hunt-Strömung, wobei der Wandleitparameter  $c$  der Hartmann-Wand im Bereich  $0.01 < c < 1$  liegen soll. Hierbei handelt es sich nicht nur um realistische Werte für  $c$ , sondern auch um relevante Werte für die Fusions- bzw. Blanketforschung (Bühler & Mistrangelo, 2014).

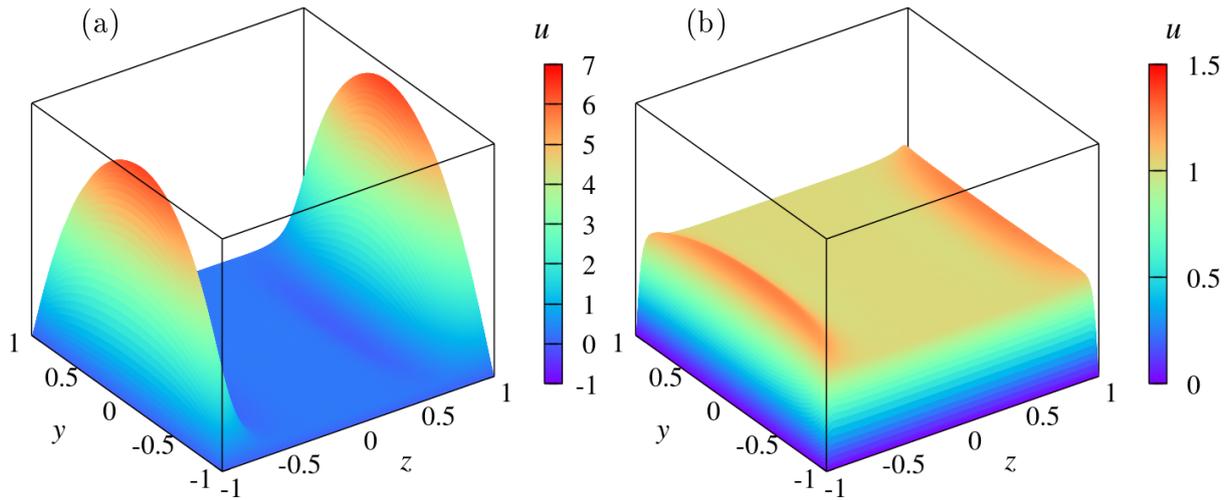


Abbildung 2.5: Räumliche Verteilung der axialen Geschwindigkeit  $u(y, z)$  bei  $Ha = 100$ ,  $c = \infty$  für (a) die Hunt-Strömung und (b) die Walker-Strömung.

## 2.3 Zeitabhängige MHD-Strömungen

### 2.3.1 Bisherige Untersuchungen

Bereits Hartmann konnte in seinen Versuchen turbulente MHD-Strömungen beobachten, welche seitdem Gegenstand der Forschung sind. Eine Übersicht zu frühen experimentellen und theoretischen Arbeiten findet sich bspw. in Lielausis (1975) und Branover (1978).

Weitere experimentelle Untersuchungen zu instabilen MHD-Strömungen fanden u.a. am Argonne National Laboratory in den USA statt (Reed & Picologlou, 1989). In diesen Versuchen wurde in einem elektrisch leitfähigen Kanal mit  $c = 0.07$  das Turbulenzverhalten der Seitenschichten für  $2700 < Ha < 5400$  untersucht. Der Übergang von laminarer zu instabiler Strömung wird durch die kritische Reynolds-Zahl  $Re_c$  angegeben. Reed & Picologlou (1989) stellten fest, dass bei ausreichend starken Magnetfeldern  $Re_c$  unabhängig vom Magnetfeld wird und zwischen  $1325 < Re_c < 2550$  bei der in dieser Arbeit verwendeten Skalierung liegt.

Burr *et al.* (1998) fanden im Bereich  $3300 \leq Re \leq 10^5$  und  $600 \leq Ha \leq 4800$  eine Abhängigkeit der kritischen Reynolds-Zahl von  $Re_c \sim Ha^{-1/4}$ . Die Instabilitäten waren in den Seitenschichten entlang der Magnetfeldlinien orientiert. Experimentell konnten Bühler & Horanyi (2009) für einen flachen Rechteckkanal zwei Instabilitätsregime im untersuchten Bereich von  $0 < Re < 16000$  und  $120 < Ha \leq 1250$  finden. Die entsprechenden Instabilitäten befanden sich ebenfalls im Bereich der Seitenschicht. Beim Übergang vom laminaren zum ersten instabilen Regime ist  $1000 < Re_c < 2000$  und zeigt nur eine schwache Abhängigkeit von  $Ha$ . Die Geschwindigkeit im Jet reduziert sich signifikant und der Jet wird deutlich breiter, sodass es zu einer Wechselwirkung mit der Kernströmung kommt. Bei den gemessenen Potentialdifferenzen  $\Delta\phi$  konnte eine Zeitabhängigkeit festgestellt werden. Das zweite gefundene Instabilitätsregime unterscheidet sich hier deutlich vom ersten.  $\Delta\phi$  zeigt nun ein intermittierendes zeitliches Signal und ist etwa eine Größenordnung größer als im ersten Instabilitätsregime. Ein weiterer wesentlicher Unterschied ist, dass  $Re_c$  im zweiten Instabilitätsregime stark mit wachsendem  $Ha$  zunimmt.

Chowdhury (2016) führte erstmalig experimentelle Untersuchungen zu turbulenten MHD-Strömungen in Kanälen mit leitfähigen Hartmann-Wänden ( $c = 0.03$ ) und isolierten Seitenwänden für  $Re \leq 6 \cdot 10^4$  und  $Ha \leq 2700$  durch. Dabei wurden drei Instabilitätsregime gefunden, die für ein Seitenverhältnis  $A = 1$  im Anhang in Abbildung 7.2 gezeigt sind. Die dabei gewonnen Erkenntnisse dienen als Vergleichswerte für die theoretischen Untersuchungen dieser Arbeit, weswegen Chowdhury's Ergebnisse im Anhang ausführlicher dargestellt werden.

Zusätzlich zu Experimenten lassen sich lineare Stabilitätsanalysen zur Bestimmung der kritischen Reynolds-Zahl durchführen. Für die von Reed & Picologlou (1989) angegebenen Kennzahlen führten Ting *et al.* (1991) eine solche Analyse durch, welche eine kritische Reynolds-Zahl von  $Re_c = 313$  lieferte. Diese ist ebenfalls unabhängig von  $Ha$ , allerdings ist der Wert deutlich kleiner als im Experiment. Die gefundenen Instabilitäten sind Wirbel, die entlang des Magnetfeldes orientiert und auf die Seitenschicht begrenzt sind. Die Breite der Jets und die Strömungsgeschwindigkeit in ihnen wird hingegen nicht signifikant beeinflusst und eine Wechselwirkung mit der Kernströmung findet nicht statt. Wirbel, die diese Eigenschaften aufweisen, werden auch Ting-Walker-Wirbel (TW-Wirbel) genannt.

In der linearen Stabilitätsanalyse lassen sich verschiedene Störungsmoden unterscheiden, die getrennt voneinander betrachtet werden können. Ting *et al.* (1991) haben in ihrer Betrachtung allerdings nur den Mode berücksichtigt, der symmetrisch in Magnetfeldrichtung orientiert ist. Unter Berücksichtigung aller vier möglichen Moden, die in einem Rechteckkanal auftreten können, haben Priede *et al.* (2010) für eine idealisierte Hunt-Strömung hingegen gezeigt, dass Instabilitäten, welche bei kleinen Hartmann-Zahlen auftreten, nicht entlang von Magnetfeldlinien orientiert sind und eine komplexe dreidimensionale Struktur aufweisen. Die kritischen Reynolds-Zahlen, bei denen diese Instabilitäten einsetzen, steigen allerdings sehr schnell mit wachsendem  $Ha$  an, sodass die Instabilitäten zunehmend vom Magnetfeld gedämpft werden. Wenn  $Ha \gg 1$  ist, finden Priede *et al.* (2010) ebenfalls Instabilitäten, die sich als TW-Wirbel charakterisieren lassen und deren  $Re_c$  unabhängig von  $Ha$  wird. Für die Hunt-Strömung wurde für  $Ha \gg 1$   $Re_c \approx 112$  gefunden. In Kanälen, in denen alle Wände perfekt leitend sind, wurde hingegen für  $Ha \gg 1$   $Re_c \approx 519Ha^{1/2}$  gefunden (Priede *et al.*, 2012). Dieser Unterschied kommt aus der deutlich unterschiedlichen Geschwindigkeitsverteilung dieser beiden MHD-Strömungstypen (siehe Abbildung 2.5). Während in der Hunt-Strömung der Volumenstrom durch die Strömung im Jet dominiert wird und er in der Kernströmung relativ klein ist, wird der Volumenstrom in der Walker-Strömung mit perfekt leitenden Wänden durch die Kernströmung realisiert. Der Volumenstrom durch die Seitenschichten verschwindet bei perfekt leitenden Wänden. Da Ting *et al.* (1991) eine endliche Wandleitfähigkeit betrachtet haben, stellt ihr Ergebnis eine Art Zwischenzustand zwischen den idealisierten Fällen in Priede *et al.* (2010) und Priede *et al.* (2012) dar. Sowohl Kernströmung, als auch Seitenschicht tragen hier zum Volumenstrom bei.

Während MHD-Experimente Einschränkungen bezüglich der Versuchsdurchführung und der Messung von Instabilitäten haben (Flüssigmetalle sind nicht transparent und können sehr reaktiv sein), sind lineare Stabilitätsanalysen auf den Übergang von laminarer zu instabiler Strömung beschränkt, weil nur hier die Störungen klein sind. Eine weitere Möglichkeit zur Analyse von MHD-Instabilitäten stellen deshalb numerische Simulationen dar. So konnte Mück (2000) für  $Ha = 1200$  und  $Re = 2 \cdot 10^4$  die Ergebnisse von Burr *et al.* (1998) bestätigen.

Weiterhin haben Kinet *et al.* (2009) die Existenz eines weiteren Instabilitätsregimes in Rechteckkanälen mit  $c = 0.5$  bei  $Ha = 200$  zeigen können, in das die Strömung übergeht, wenn die Reynolds-Zahl  $Re \gtrsim 3700$  übersteigt und damit oberhalb der linearen Instabilität zwischen  $2500 \leq Re \leq 3500$  liegt. Dieses zweite Instabilitätsregime zeichnet sich dadurch aus, dass die TW-Wirbel durch großskalige Störungsmuster abgelöst werden, bei denen partielle Jetablösungen auftreten. Damit verbunden ist eine Verbreiterung der Jets sowie eine Reduktion der maximalen Geschwindigkeit im mittleren Geschwindigkeitsprofil. Als Folge kommt es zu einer Wechselwirkung des Jets mit der Kernströmung. Diese Ergebnisse bestätigen damit die Messergebnisse von Bühler & Horanyi (2009). Weiterhin zeigte sich, dass die turbulente kinetische Energie beim Übergang von TW-Instabilitäten zu diesem zweiten Instabilitätsregime um zwei Größenordnungen anwächst.

Krasnov *et al.* (2012) konnten zeigen, dass in einem isolierten Kanal bei  $Re = 10^5$  und  $0 < Ha < 400$  ein Strömungsregime favorisiert wird, bei dem die Strömung in den Seitenschichten starke Instabilitäten aufweist, die Kernströmung hingegen quasi-laminar ist. Für den Fall der idealen Hunt-Strömung konnten Krasnov *et al.* (2016) für  $Ha = 1000$  die partielle Jetablösung zwischen  $1000 < Re < 2 \cdot 10^4$  bestätigen, wie sie Kinet *et al.* (2009) gefunden haben. Diese partiellen Jetablösungen bilden verhältnismäßig große Strukturen und eine weitere Erhöhung von  $Re$  führt dazu, dass die Störungen in den Seitenschichten wieder deutlich kleiner werden. Braiden *et al.* (2016) konnten weiterhin zeigen, dass Remanenzeffekte beim Übergang von turbulenter zu laminarer Strömung auftreten können.

### 2.3.2 Eigenschaften wirbelbehafteter MHD-Strömungen

In einer hydrodynamischen Strömung wird das Strömungsverhalten maßgeblich aus dem Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften bestimmt, das durch die Reynolds-Zahl  $Re$  ausgedrückt wird. In MHD-Strömungen wirken zusätzliche elektromagnetische Kräfte in der Form der Lorentz-Kraft, deren Verhältnis zu Zähigkeitskräften durch das Quadrat der Hartmann-Zahl  $Ha$  ausgedrückt wird. Weiterhin hat der Wandleitparameter  $c$  einen wesentlichen Einfluss auf das Profil der Grundströmung, weil er das Vektorfeld der Lorentz-Kraft beeinflusst, und damit auch die Stabilität der Strömung

Mit dem Verlust der Stabilität geht die stationäre, laminare Strömung in einen zeitabhängigen und wirbelbehafteten Zustand über. Im Gegensatz zur isotropen Turbulenz hydrodynamischer Störungen entwickeln MHD-Instabilitäten eine starke Anisotropie. Das bedeutet, dass Wirbel nicht zufällig orientiert sind, sondern eine Vorzugsrichtung aufweisen. Die Vorzugsrichtung ist bei MHD-Instabilitäten parallel zum angelegten Magnetfeld, sodass für die Wirbelstärke  $\boldsymbol{\omega}$  gilt:  $\boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{B}$ . Anteile von  $\boldsymbol{\omega}$  senkrecht zum Magnetfeld werden hingegen unterdrückt. In Abbildung 2.6 wird dies verdeutlicht. Wenn  $\boldsymbol{\omega} \parallel \mathbf{B}$ , dann wird ein Strom induziert, der radial nach außen zeigt, was eine Lorentz-Kraft erzeugt, die abbremsend auf den Wirbel wirkt. Allerdings schließt sich der Strom an den Enden des Wirbels, was dazu führt, dass dort eine antreibende Lorentz-Kraft wirkt. Der Drehimpuls bleibt erhalten, weil die Abnahme von  $\boldsymbol{\omega}$  durch eine Zunahme der rotierenden Masse ausgeglichen wird. Ist hingegen  $\boldsymbol{\omega} \perp \mathbf{B}$ , wirkt nur eine abbremsende Lorentz-Kraft, weil sich der Strom an den Wirbelenden ausschließlich parallel zu  $\mathbf{B}$  schließt und keine antreibende Lorentz-Kraft induziert werden kann. Wirbel, die nicht parallel zu  $\mathbf{B}$  orientiert sind, werden deshalb stark gebremst und verschwinden schnell. Aufgrund der endlichen elektri-

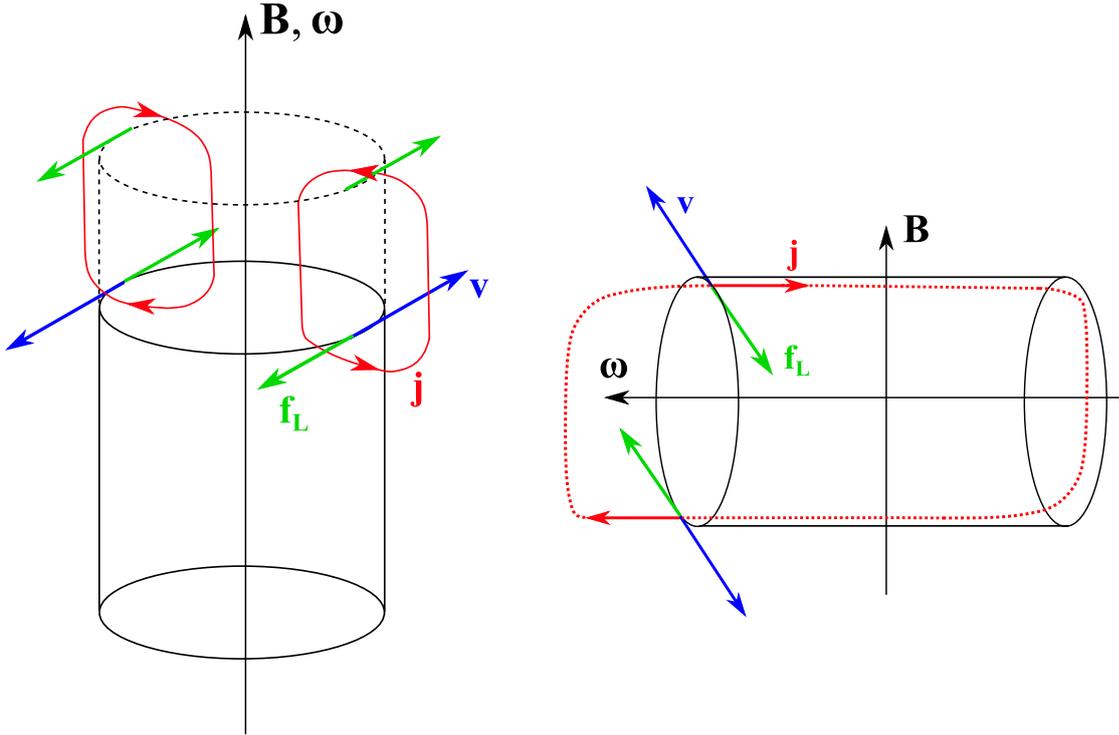


Abbildung 2.6: Ausprägung von quasi-zweidimensionalen MHD-Wirbelstrukturen. Wenn  $\omega \parallel \mathbf{B}$  ist, schließt sich  $\mathbf{j}$  so, dass es ein antreibendes  $\mathbf{f}_L$  gibt. Bei  $\omega \perp \mathbf{B}$  kann sich  $\mathbf{j}$  nur parallel zu  $\mathbf{B}$  schließen.

schen Leitfähigkeit des Fluids wird die kinetische Energie dieser Wirbel durch Joule'sche Dissipation in Wärme umgesetzt. Die verbleibenden Wirbel bilden innerhalb kürzester Zeit eine quasi-zweidimensionale Struktur.

Die Joule'sche Dissipation hat eine charakteristische Zeitskala  $\tau_J = \rho/\sigma B_0^2$  (Davidson, 1995).  $\tau_J$  lässt sich mit der charakteristischen Umdrehungszeit eines Wirbels  $\tau_T = l/u'$  skalieren:

$$\frac{\tau_J}{\tau_T} = \frac{\rho/\sigma B_0^2}{l/u'} = \frac{1}{N_l} \quad (2.21)$$

Hierbei beschreiben  $l$  und  $u'$  eine charakteristische Länge bzw. Geschwindigkeit des Wirbels.  $N_l$  ist der Interaktionsparameter bezogen auf dieses  $l$ . Bei starken elektromagnetischen Kräften ist  $N_l \gg 1$  und die quasi-zweidimensionale Wirbelstruktur bildet sich sehr schnell aus.

Analog zur Hydrodynamik wirkt die Viskosität  $\nu$  mit der Zeitskala  $\tau_\nu = l^2/\nu$  dämpfend auf die Instabilitäten. Hierbei ergibt sich aus

$$\frac{\tau_\nu}{\tau_T} = \frac{lu'}{\nu} = Re_l \quad (2.22)$$

eine mit  $l$  gebildete Reynolds-Zahl. Ist  $Re_l \gg 1$  kann die viskose Dämpfung vernachlässigt werden. Unter diesen Voraussetzungen ( $Re_m \ll 1, N_l \gg 1$  und  $Re_l \gg 1$ ), wie sie im Labormaßstab realistisch sind, wirkt nach Sommeria & Moreau (1982) die Lorentz-Kraft wie ein Diffusionsterm in Magnetfeldrichtung. Dafür wird ein Diffusionsparameter

$$\alpha_D = \frac{\sigma B_0^2 l^2}{\rho} \quad (2.23)$$

angegeben. Aus diesem ergibt sich die Diffusionszeit  $\tau_D = \alpha_D a$  mit dem Abstand  $a$  zwischen zwei Hartmann-Wänden. Geschwindigkeitsunterschiede werden dann durch die Lorentz-Kraft innerhalb der Zeitskala

$$\frac{\tau_D}{\tau_T} \approx \frac{\rho}{\sigma B_0^2} \frac{a^2 u'}{l^3} = \frac{a^2}{l^2} \frac{Re_l}{Ha^2} \quad (2.24)$$

ausgeglichen und eine quasi-zweidimensionale Strömung wird erreicht. Dies geschieht  $Ha^2$ -mal schneller als auf der viskosen Zeitskala. Für  $Ha \gg 1$  ist dieser Effekt damit dominierend und die viskose Dämpfung vernachlässigbar. Die Folge davon ist, dass Energie nicht zu kleineren Skalen hin transportiert wird, sondern Wirbel tendenziell sogar größer werden.

An den Wänden muss weiterhin die Haftbedingung  $\mathbf{v} = 0$  gelten, was zur Ausbildung der Hartmann-Schichten führt, in denen viskose Dämpfung wirkt. Weiterhin findet in der Hartmann-Schicht und im Falle  $c > 0$  in der Hartmann-Wand die größte Joule'sche Dissipation statt, welche ausschlaggebend für den maximalen Wert von  $\mathbf{j}$  im Kanal ist. Ist  $c = \infty$ , findet hingegen die Joule'sche Dissipation im endlich leitfähigen Fluid statt.

Durch  $\mathbf{j}$  ist die Kernströmung mit der Hartmann-Schicht verbunden, sodass kinetische Energie aus der Kernströmung in die Hartmann-Schicht transportiert und dort dissipiert werden kann. Dieser Effekt wurde erstmalig von Platnieks & Freiberg (1972) und Kolesnikov (1972) untersucht und wird Hartmann-Braking genannt. Sommeria & Moreau (1982) leiten eine mathematische Beschreibung des Effektes für isolierte Kanäle ab, die von Bühler (1996) für dünne Hartmann-Wände mit  $c_H \geq 0$  erweitert wurde. Das Hartmann-Braking  $\tau_H$  erfolgt mit der charakteristischen Zeitskala

$$\frac{\tau_H}{\tau_T} = \frac{u' \sigma B_0^2}{l \rho} \left( \sqrt{\frac{\rho \nu}{\sigma}} B_0 L - \frac{\sigma_w t_w}{\sigma L (1 + \frac{\sigma_w t_w}{\sigma L})} \right)^{-1} \quad (2.25)$$

$$= \left( \frac{N_l}{Ha} - \frac{c_H N_l}{1 + c_H} \right)^{-1}. \quad (2.26)$$

Weitere Details finden sich u.a. in Davidson (2001).

### 2.3.3 Identifizierung von Wirbelstrukturen

Instabile Strukturen in einem Geschwindigkeitsfeld zeichnen sich durch räumlich zusammenhängende Strukturen mit zeitabhängigen wirbelartigen Bewegungen aus (Jeong & Hussain, 1995). Zur mathematischen Identifizierung solcher Wirbelstrukturen in einem Strömungsfeld gibt es verschiedene Verfahren. Am bekanntesten ist die bereits erwähnte Wirbelstärke  $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$ , die mittels Anwendung der Rotation auf das Geschwindigkeitsfeld berechnet wird. Im Falle von laminaren Scherströmungen, wie sie bspw. in Wandnähe auftreten, ist allerdings  $\omega = \nabla \times \mathbf{v} \neq 0$  obwohl keine wirbelbehaftete Strömung vorliegt. Die Wirbelstärke liefert in solchen Fällen keine zuverlässige Aussage über die Existenz von Wirbelstrukturen.

Eine genauere Analyse des Geschwindigkeitsfeldes ist mit Hilfe des Geschwindigkeitsgradiententensors  $\nabla \otimes \mathbf{v}$  möglich, wobei  $\otimes$  das dyadische Produkt darstellt. Eine Strömung

ist dann wirbelbehaftet, wenn  $\nabla \otimes \mathbf{v}$  komplexe Eigenwerte besitzt (Chong *et al.*, 1990). Die Eigenwerte ergeben sich aus dem charakteristischen Polynom von  $\nabla \otimes \mathbf{v}$ :

$$\lambda^3 + P\lambda^2 + Q\lambda + R = 0. \quad (2.27)$$

Dabei ist  $P = -\text{Sp}(\nabla \otimes \mathbf{v})$ , woraus für inkompressible Fluide  $P = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  folgt. Für  $Q$  ergibt sich

$$Q = \frac{1}{2} (\text{Sp} [\nabla \otimes \mathbf{v}]^2 - \text{Sp} [(\nabla \otimes \mathbf{v})^2]) \quad (2.28)$$

und  $R = -\det(\nabla \otimes \mathbf{v})$ . Durch Zerlegung von  $\nabla \otimes \mathbf{v}$  in einen symmetrischen Anteil  $\mathbf{S}$  und antisymmetrischen Anteil  $\mathbf{\Omega}$  mit

$$\nabla \otimes \mathbf{v} = \mathbf{S} + \mathbf{\Omega} \quad (2.29)$$

ergibt sich der Drehgeschwindigkeitstensor  $\mathbf{\Omega} = 1/2 (\nabla \otimes \mathbf{v} - (\nabla \otimes \mathbf{v})^T)$  und der Verzerrungstensor  $\mathbf{S} = 1/2 (\nabla \otimes \mathbf{v} + (\nabla \otimes \mathbf{v})^T)$  (Spurk & Aksel, 2007). Durch diese Zerlegung kann  $Q$  umgeschrieben werden zu

$$Q = \frac{1}{2} (|\mathbf{\Omega}|^2 - |\mathbf{S}|^2),$$

wobei  $|\mathbf{\Omega}|^2 = (\text{Sp} [\mathbf{\Omega}\mathbf{\Omega}^T])$  und  $|\mathbf{S}|^2 = (\text{Sp} [\mathbf{S}\mathbf{S}^T])$  ist.  $Q$  ist daher besser als  $\omega$  zur Identifizierung von Wirbelstrukturen geeignet, da Scherungen im Strömungsfeld berücksichtigt werden. Weiterhin sind zusammenhängende Bereiche mit  $Q > 0$  Wirbelstrukturen um ein lokales Druckminimum.

Aufgrund dieser Eigenschaften soll  $Q$  in dieser Arbeit zur Identifizierung von Wirbelstrukturen verwendet werden.

# 3 Lineare Stabilitätsanalyse magnetohydrodynamischer Kanalströmungen

Zur Untersuchung des Stabilitätsverhaltens einer MHD-Strömung mit endlich elektrisch leitfähigen Wänden wird eine lineare Stabilitätsanalyse durchgeführt. Dazu ist die in Abschnitt 2.3.1 vorgestellte Methode von Priede *et al.* (2010) erweitert worden. Ursprünglich kann das dort beschriebene Verfahren nur zur Analyse von MHD-Strömungen mit idealisierten Randbedingungen ( $c = 0$  oder  $c = \infty$ ) benutzt werden. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit ist die Randbedingung (2.17) für endlich leitfähige dünne Wände in einer Kooperation zwischen dem Karlsruher Institut für Technologie und der Coventry University (UK) in den Code von Priede *et al.* (2010) implementiert worden. Dadurch ist es nun möglich, MHD-Kanalströmungen mit realistischen Wandleitfähigkeiten auf ihr lineares Stabilitätsverhalten hin zu untersuchen. Der Fokus der linearen Stabilitätsanalyse liegt auf der Hunt-Strömung, die nun erstmals mit realistischen Wandleitfähigkeiten untersucht werden kann. Hierbei werden für die Kernfusion relevante Wandleitparameter im Bereich von  $0.01 \leq c \leq 1$  und relevante Magnetfeldstärken im Bereich  $Ha \sim O(10^1 - 10^4)$  untersucht. Insbesondere soll auch  $c = 0.03$  betrachtet werden, um zusätzlich das lineare Stabilitätsverhalten des Vergleichsexperimentes zu untersuchen. Dabei wurde das Stabilitätsverhalten der Hunt-Strömung von Chowdhury (2016) am KIT experimentell untersucht (siehe Anhang 7) Ergänzend werden Ergebnisse für die Walker-Strömung präsentiert und mit denen der Hunt-Strömung verglichen.

## 3.1 Mathematische Vorgehensweise

Die mathematische Vorgehensweise ist detailliert in Priede, Arlt, & Bühler (2016) beschrieben und soll daher nur kurz skizziert werden. Die Grundströmung wird entsprechend nach Moreau (1990) bestimmt.

Durch Anwenden der Rotation auf (2.9) lässt sich der Druck eliminieren. Mit Hilfe der Wirbelstärke  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$  wird aus (2.9)

$$Re \left( \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{g} \right) = \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + Ha^2 \mathbf{h} \quad (3.1)$$

mit  $\mathbf{g} = \nabla \times (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$  und  $\mathbf{h} = \nabla \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B})$ . Aus  $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$  folgt, dass  $\boldsymbol{\omega}$  nur zwei unabhängige Komponenten hat. Die Kontinuitätsgleichung  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  lässt sich durch Einführen einer Vektorstromfunktion  $\boldsymbol{\psi}$  mit  $\mathbf{v} = \nabla \times \boldsymbol{\psi}$  erfüllen.  $\boldsymbol{\psi}$  ist mathematisch das Vektorpotential der Geschwindigkeit für das Eichinvarianz gilt. Daher

kann die Coulomb-Eichung  $\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0$  verwendet werden. Daraus folgt, dass  $\boldsymbol{\psi}$  ebenfalls nur zwei unabhängige Komponenten besitzt. Aus der Definition von  $\boldsymbol{\omega}$  folgt dann,

$$0 = \nabla^2 \boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\omega}. \quad (3.2)$$

Mit  $\boldsymbol{\omega}$  lässt sich die Poisson-Gleichung (2.14) für das elektrische Potential  $\phi$  umschreiben zu

$$\nabla^2 \phi = \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (3.3)$$

Charakteristisch für eine lineare Stabilitätsanalyse ist, die Strömung mathematisch in zwei Anteile aufzuspalten. Dabei wird zunächst die laminare stationäre Grundströmung betrachtet, die die stationären Grundgleichungen identisch erfüllt. Dieser Grundströmung werden nun kleine Störungen hinzugefügt. Die Strömung wird dann stabil genannt, wenn sie unter dem Einfluss dieser Störungen wieder in die Grundströmung zurückkehrt. Ansonsten heißt sie instabil.

Für  $\boldsymbol{\psi}$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  und  $\phi$  wird entsprechend folgende Zerlegung vorgenommen:

$$\{\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\omega}, \phi\}(x, y, z, t) = \{\bar{\boldsymbol{\psi}}, \bar{\boldsymbol{\omega}}, \bar{\phi}\}(y, z) + \epsilon \{\boldsymbol{\psi}', \boldsymbol{\omega}', \phi'\}(y, z) e^{i(kx - \gamma t)} \quad (3.4)$$

Die laminare stationäre Grundströmung wird mittels  $\{\bar{\boldsymbol{\psi}}, \bar{\boldsymbol{\omega}}, \bar{\phi}\}$  beschrieben. Der letzte Term in (3.4) beschreibt den Störungsansatz in Form eines Wellenansatzes. Durch die Bedingung  $\epsilon \ll 1$  wird garantiert, dass die Störungen mit den Amplituden  $\epsilon \{\boldsymbol{\psi}', \boldsymbol{\omega}', \phi'\}$  klein sind. Im Exponenten stellt  $k$  die Wellenzahl dar. Bei  $\gamma$  handelt es sich um eine komplexe Größe, für die gilt:

$$\gamma = \gamma_r + i\gamma_i. \quad (3.5)$$

Der Realteil  $\gamma_r$  entspricht der Kreisfrequenz der Welle und  $\gamma_i$  der Anfachungsrate. Ist  $\gamma_i < 0$ , wird die Störung gedämpft und die Strömung kehrt in den Grundzustand zurück; sie ist stabil. Ist hingegen  $\gamma_i > 0$ , treten Störungen in Form von Wellen auf und die Strömung wird instabil.

Zur Durchführung der linearen Stabilitätsanalyse wird der Störungsansatz (3.4) in die Gleichungen (3.1), (3.2) und (3.3) eingesetzt. Da die Störungen klein sind, können quadratische Terme der Störungsgrößen vernachlässigt werden. Durch diese Linearisierung und unter Berücksichtigung, dass die ungestörte Grundlösung die stationären Gleichungen erfüllt, folgt aus (3.1), (3.2) und (3.3) das Eigenwertproblem

$$Re\gamma \boldsymbol{\omega}' = \nabla_k^2 \boldsymbol{\omega}' - Re\mathbf{g}' + Ha^2 \mathbf{h}', \quad (3.6)$$

$$0 = \nabla_k^2 \boldsymbol{\psi}' + \boldsymbol{\omega}', \quad (3.7)$$

$$0 = \nabla_k^2 \phi' - \omega'_y, \quad (3.8)$$

mit  $\nabla_k = ik\hat{\mathbf{e}}_x + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z}$ . Weil es nur zwei unabhängige Komponenten von  $\boldsymbol{\omega}$  gibt, reicht es, die  $y$ - und  $z$ -Komponente von (3.6) zu betrachten, mit

$$h'_y = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi' \quad (3.9)$$

$$h'_z = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \phi' + \frac{\partial}{\partial y} u', \quad (3.10)$$

und

$$g'_z = k^2 v' \bar{u} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (v' \bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} (w' \bar{u}) + i2k \frac{\partial}{\partial y} (u' \bar{u}), \quad (3.11)$$

$$g'_y = -k^2 w' \bar{u} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} (w' \bar{u}) - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} (v' \bar{u}) - i2k \frac{\partial}{\partial z} (u' \bar{u}), \quad (3.12)$$

mit

$$u' = \frac{\partial}{\partial y} \psi'_z - \frac{\partial}{\partial z} \psi'_y, \quad v' = -ik^{-1} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi'_z - k^2 \psi'_z + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \psi'_y \right),$$

$$w' = ik^{-1} \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} \psi'_y - k^2 \psi'_y + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} \psi'_z \right).$$

Aus der hydrodynamischen Randbedingung  $\mathbf{v} = 0$  auf dem Rand bzw. der Wand folgen für  $\psi$  und  $\omega$  als Randbedingungen

$$\omega'_z = 0, \quad \psi'_y = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \psi'_z = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \psi'_y - \frac{\partial}{\partial y} \psi'_z = 0 \quad \text{bei } z = \pm A, \quad (3.13)$$

sowie

$$\omega'_y = 0, \quad \psi'_z = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \psi'_y = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \psi'_y - \frac{\partial}{\partial y} \psi'_z = 0 \quad \text{bei } y = \pm 1. \quad (3.14)$$

Die Randbedingung (2.17), die die endliche Leitfähigkeit der Wand berücksichtigt, nimmt die Form

$$c \left( \frac{\partial^2}{\partial y^2} \phi' - k^2 \phi' \right) \pm \frac{\partial}{\partial z} \phi' = 0 \quad \text{bei } z = \pm A, \quad (3.15)$$

$$c \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi' - k^2 \phi' \right) \pm \frac{\partial}{\partial y} \phi' = 0 \quad \text{bei } y = \pm 1 \quad (3.16)$$

an.

## 3.2 Numerische Betrachtung

Wegen der Symmetrie des Kanals bezüglich der  $y = 0$  und  $z = 0$  Ebenen, ergeben sich vier unabhängige Moden, die anhand ihrer Symmetrieeigenschaften für  $\psi'_z$ , wie sie in Tabelle 3.1 gezeigt sind, klassifiziert werden. Als Folge dieser unterschiedlichen Symmetrieeigenschaften unterscheiden sich die Moden in ihrem Stabilitätsverhalten.

Eine Veranschaulichung der Moden ist anhand einer Konturdarstellung für die axiale Geschwindigkeitsstörung in Abbildung 3.1 gezeigt. Die Moden I und III (Abbildung 3.1 (a) und (c)) haben eine gerade Symmetrie in  $y$ - bzw. Magnetfeldrichtung. Diese Moden entsprechen daher Wirbel, die sich über die  $xz$ -Ebene bei  $y = 0$  erstrecken. Die Störungen der axialen Geschwindigkeit  $u'$  von Mode I ist antisymmetrisch in  $z$ -Richtung, was bedeutet, dass die zum Mode I gehörenden Wirbel in den Seitenschichten in die gleiche

	I	II	III	IV
$\psi'_z, \omega', v'$	(o,o)	(e,o)	(o,e)	(e,e)
$u'$	(e,o)	(o,o)	(e,e)	(o,e)
$\psi'_x, \omega'_x$	(o,e)	(e,e)	(o,o)	(e,o)
$\psi'_y, \omega'_y, w', \phi'$	(e,e)	(o,e)	(e,o)	(o,o)

Tabelle 3.1: (y,z) Paritäten der verschiedenen Variablen für Symmetrien I,II,III,IV, e - gerade (even), o - ungerade (odd) (Klassifizierung nach Tatsumi & Yoshimura (1990))

Richtung orientiert sind. Die zu Mode III gehörenden Wirbel sind hingegen antiparallel. Die Geschwindigkeitsstörungen der Moden II und IV (Abbildung 3.1 (b) und (d) ) sind hingegen antisymmetrisch in  $y$ -Richtung, was zwei übereinander liegenden, in entgegengesetzte Richtung rotierenden Wirbeln entspricht. In  $z$ -Richtung verhalten sie sich analog zu den Moden I und III.

Wegen dieser Symmetrieeigenschaften lässt sich das Problem in vier unabhängige Teile zerlegen, weshalb es ausreichend ist, für die Lösung nur ein Viertelkanalquerschnitt zu betrachten. Der numerische Aufwand reduziert sich dadurch um den Faktor 16.

Die Grundströmung und (3.6), (3.7) sowie (3.8) werden mit den zugehörigen Randbedingungen mit einem spektralen Kollokationsverfahren auf einem Chebyshev-Lobatto-Gitter gelöst. Dabei wird das Rechengebiet in  $(2N_y + 2) \times (2N_z + 2)$  Gitterpunkte in  $y$ - und  $z$ -Richtung aufgeteilt. Aufgrund der Symmetrieeigenschaften muss nur in einem Viertel des Gitters die Rechnung durchgeführt werden, für den Rest des Gitters ergeben sich die Werte auf den Gitterpunkten durch Beachtung der Symmetrie automatisch. Das aus den Gleichungen (3.6) bis (3.14) resultierende komplexe Matrixeigenwertproblem ist in Priede *et al.* (2010) dargestellt und wird mit der in Fortran implementierten LAPACK-Bibliothek gelöst. Neu hinzugekommen sind Anteile aus (3.15) und (3.16) aufgrund der endlichen Leitfähigkeit der Kanalwände.

Zur Durchführung der linearen Stabilitätsanalyse werden für vorgegebenes  $Ha$ , Wellenzahl  $k$  und  $Re$  die Eigenwerte  $\gamma$  des numerisch approximierten Problems bestimmt. Sind die Imaginärteile aller  $\gamma < 0$ , so ist die Strömung stabil. Nun wird  $Re$  erhöht, bis der Imaginärteil eines Eigenwertes sein Vorzeichen ändert, d.h. bis zur Stabilitätsgrenze  $Re_{min}(k, Ha)$ . Anschließend wird  $k$  variiert, woraus sich der in Abbildung 3.2 gezeigte exemplarische Verlauf von  $Re_{min}(k)$  für  $c = 1$ ,  $Ha = 100$  für die verschiedenen Moden ergibt. Unterhalb der Grenzkurve ist die Strömung stabil, oberhalb instabil. Das Minimum der Grenzkurve, gegeben durch  $\partial Re_{min}/\partial k = 0$ , definiert die kritische Wellenzahl  $k_c$  bei der die Strömung zum ersten mal instabil wird, wobei  $Re_{min}(k_c, Ha) = Re_c(Ha)$ .  $Re_c$  heißt kritische Reynolds-Zahl. Für Mode II ist das Minimum laut Abbildung 3.2 (a) bei  $k = k_c = 0.95$  und  $Re_{min} = Re_c = 3980$  und für Mode IV bei  $k_c = 0.67$  und  $Re_c = 3336$ . Mode I und Mode III haben dasselbe Minimum mit  $k_c = 4.7$  und  $Re_c = 254$ . In Abbildung 3.2 (b) ist weiterhin zu erkennen, dass beide Moden für  $k \gtrsim 4.6$  zwei instabile Bereiche aufweisen. Für  $k = 5$  ergibt sich daher eine instabile Strömung zwischen  $263 < Re < 630$  und ab  $Re > 2110$ . Zwischen  $630 < Re < 2110$  ist die Strömung stabil.

Ist ein  $Re_c(Ha)$  gefunden, wird  $Ha$  variiert, um die Abhängigkeit von  $Re_c$  als Funktion von  $Ha$  zu bestimmen. Diese Ergebnisse sind in Abschnitt 3.4.2 dargestellt.

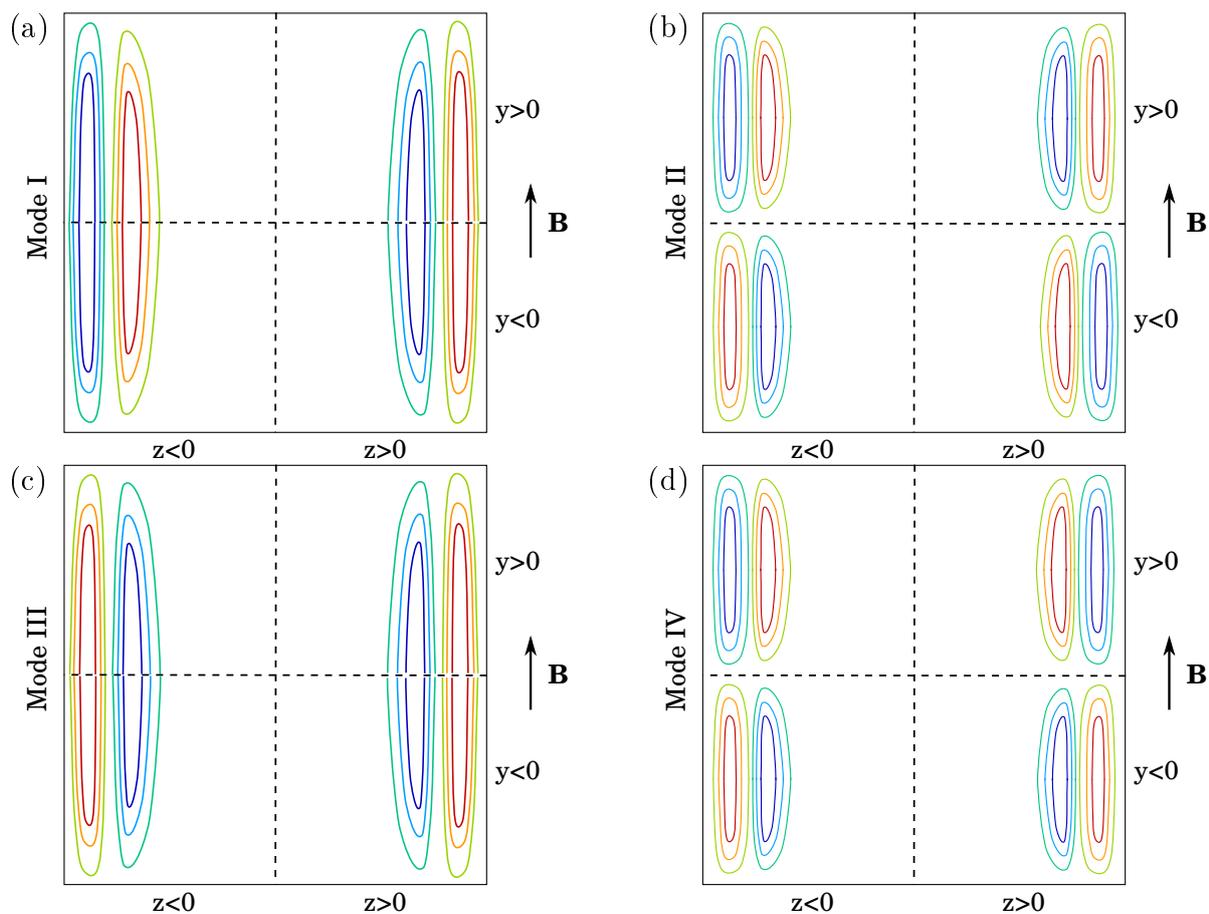


Abbildung 3.1: Konturdarstellung der vier Symmetriemoden für die axialen Geschwindigkeitsstörungen  $u'$

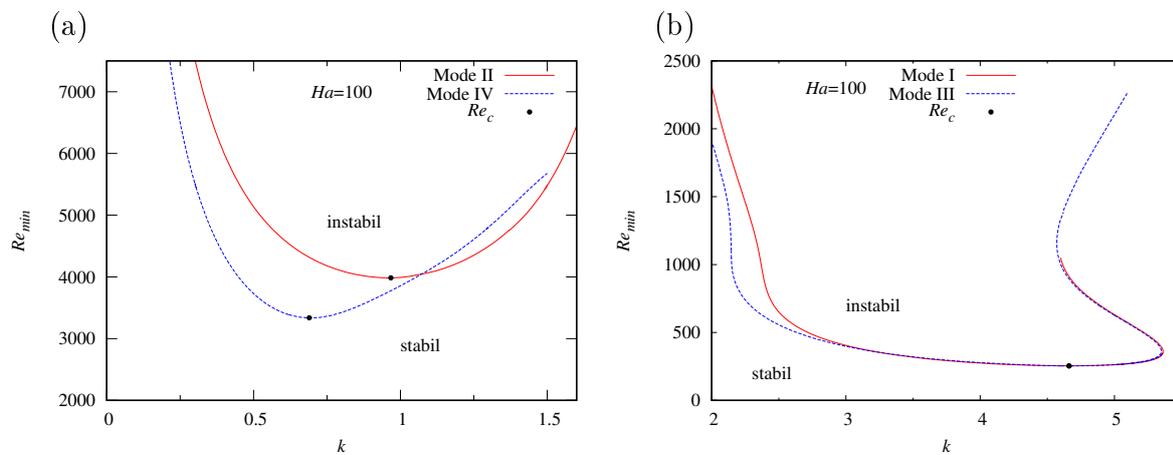


Abbildung 3.2: Minimale Reynolds-Zahl für die Moden II, IV (a) und I, III (b) für  $c = 1$  bei  $Ha = 100$

### 3.3 Validierung und Konvergenzverhalten

Die Erweiterung des Codes um die Randbedingung (2.17) für endlich leitfähige Wände erfordert eine erneute Validierung. Anhand von Walker-Strömungen soll gezeigt werden, dass der Code weiterhin korrekte Ergebnisse liefert. In Tabelle 3.2 sind dazu die verschiedenen betrachteten Gitter, sowie ihre Eigenschaften dargestellt. Leere Zeilen geben an, dass für dieses Gitter kein  $\gamma_i = 0$  gefunden werden konnte.

Gitter	$Ha$	$c$	$N_y$	$N_z$	$k_c$	$Re_c$	$f$
1	100	0.1	20	20	-	-	-
2	100	0.1	30	30	3.73	2803.9	0.41
3	100	0.1	40	40	3.84	2758.6	0.422
4	100	0.1	50	50	3.84	2757.2	0.423
5	1000	0.1	20	20	-	-	-
6	1000	0.1	35	35	15.84	258.7	1.25
7	1000	0.1	45	45	15.96	256.13	1.2584
8	1000	0.1	50	50	15.96	256.19	1.2582
9	1000	0.1	55	55	15.96	256.2	1.2581
10	200	0.01	30	30	-	-	-
11	200	0.01	40	40	5.34	19671.3	0.752
12	200	0.01	45	45	5.33	19633.6	0.751
13	200	0.01	50	50	5.32	19656.4	0.7498
14	200	0.01	55	55	5.32	19655.1	0.7499
15	1000	0.01	35	35	8.91	3683.6	0.959
16	1000	0.01	45	45	9.73	3260.9	1.039
17	1000	0.01	55	55	9.69	3271.4	1.0349
18	1000	0.01	60	60	9.69	3271.3	1.035

Tabelle 3.2: Konvergenzverhalten bei verschiedenen Gittern für Walker-Strömungen;  $N_y, N_z$  : nicht äquidistante Gitterpunkte in  $y$ - bzw.  $z$ -Richtung,  $k_c$ : kritische Wellenzahl,  $Re_c$ : kritische Reynolds-Zahl,  $f = \gamma_r/2\pi$ : Frequenz

Für einen Teil der Gitter sind in Abbildung 3.3 (a) numerische Ergebnisse und asymptotische Lösungen nach Walker (1981) für die axiale Geschwindigkeitskomponente  $\bar{u}$  der Grundströmung in Richtung senkrecht zum Magnetfeld und in Abbildung 3.3 (b) parallel zum Magnetfeld dargestellt. In Abbildung 3.3 (a) ist für G1 noch eine sehr große Abweichung zu erkennen, welche aber mit steigender Auflösung sehr schnell kleiner wird und für G3 und G4 bei nur rund 0.1% liegt. Für  $c = 0.01$  und  $Ha = 200$  zeigt sich ebenfalls eine sehr gute Übereinstimmung zwischen numerischen Ergebnissen und der asymptotischen Lösung. Hier ist bereits für G11 die Abweichung bei 0.2% und sie reduziert sich mit Verfeinerung des Gitters auf 0.05%. In Abbildung 3.3 (b) zeigt sich ebenfalls eine sehr gute Übereinstimmung zwischen asymptotischer Lösung und den numerischen Ergebnissen sowohl für  $c = 0.1$  als auch für  $c = 0.01$ . Außer für G1 ergibt sich somit für die Grundströmung bereits eine gute Übereinstimmung zwischen asymptotischer Lösung und numerischen Ergebnissen.

Anders verhält es sich jedoch mit den in der Tabelle 3.2 gezeigten Werten für die kritische Wellenzahl  $k_c$  und die kritische Reynolds-Zahl  $Re_c$ . Von G2 zu G3 ändert sich  $k_c$  um ca. 3% und von G15 zu G16 um ca. 8%. Zwischen G3 und G4 bzw. G17 und G18 sind die

### 3 Lineare Stabilitätsanalyse magnetohydrodynamischer Kanalströmungen

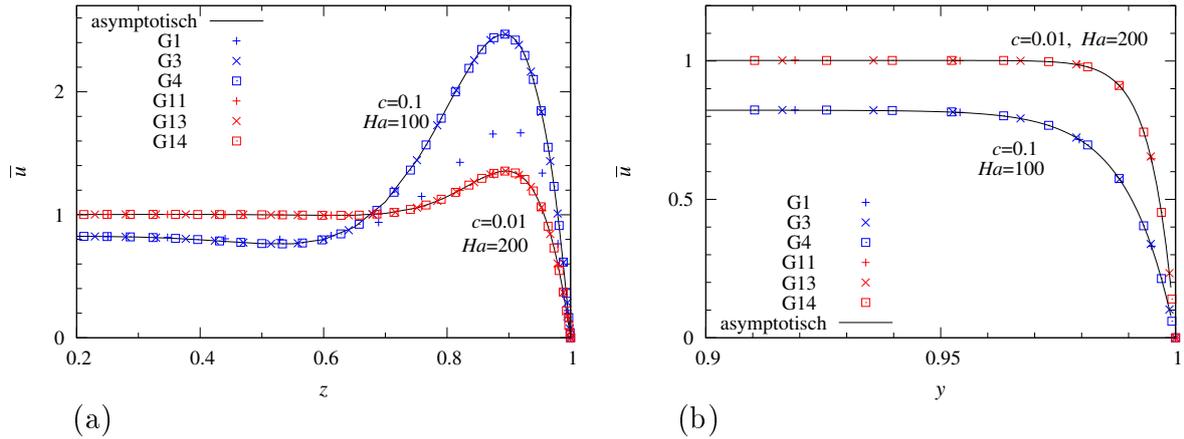


Abbildung 3.3: Vergleich zwischen numerischer und asymptotischer Lösung für die axiale Geschwindigkeitskomponente (a)  $\bar{u}(y = 0, z)$  und (b)  $\bar{u}(y, z = 0)$  für einen Teil der Gitter aus Tabelle 3.2

Abweichung hingegen vernachlässigbar. Analog verhält es sich für  $Re_c$ . Mit zunehmend feinerem Gitter ist demnach ein sehr gutes Konvergenzverhalten für die in Tabelle 3.2 dargestellten Größen festzustellen.

Abschließend lässt sich feststellen, dass mit dem erweiterten Code nun erstmals Rechnungen mit realistischen physikalischen Parametern durchgeführt werden können, welche auch im Labor realisiert werden können. Die Validierung zeigt, dass bei ausreichender numerischer Auflösung stationäre Lösungen erreicht werden, die in Übereinstimmung mit asymptotischen Lösungen sind. Ein sehr gutes Konvergenzverhalten von  $k_c$  und  $Re_c$  konnte ebenfalls gezeigt werden.

## 3.4 Lineare Stabilität der Hunt-Strömung

### 3.4.1 Grundströmung

Die Grundströmung wird nach Moreau (1990) auf einem hinreichend feinem Gitter berechnet. Die Geschwindigkeitsverteilung wurde bereits in Kapitel 2.2.2 behandelt und im vorhergehenden Abschnitt zur Validierung wurde gezeigt, dass numerische und asymptotische Lösung eine sehr gute Übereinstimmung haben.  $\bar{u}$  soll hier daher nicht weiter betrachtet werden.

Für den Gesamtvolumenstrom  $Q$  in einem Viertelkanal gilt in der verwendeten Skalierung  $Q = A$ . Typisch für die Hunt-Strömung sind die Geschwindigkeitsjets in den Seitenschichten, sodass zunächst der damit verbundene Volumenstrom  $Q_S$  betrachtet wird. Dabei gilt

$$Q_S = Q - Q_C = (\bar{u} - u_c) A, \quad (3.17)$$

bzw.

$$\frac{Q_S}{Q} = 1 - \frac{u_c}{\bar{u}} \quad (3.18)$$

Hierbei sind  $u_c$  die Kerngeschwindigkeit mit  $u_c = \bar{u}(y = 0, z = 0)$  und  $A$  das Seitenverhältnis. Diese Definition ist nur für große Hartmann-Zahlen geeignet, wenn sich eine

konstante Kerngeschwindigkeit  $u_c$  herausgebildet hat. Weiterhin wird in dieser Betrachtung der Beitrag der Hartmann-Schicht zum Volumenstrom vernachlässigt. Der daraus resultierende Fehler ist  $O(cHa^{-1})$  und für  $Ha \gg 1$  vernachlässigbar.

In Abbildung 3.4 (a) ist der relative Volumenstrom in der Seitenschicht  $Q_S/Q$  in Abhängigkeit von  $Ha$  für verschiedene  $c$  dargestellt. Mit zunehmendem  $Ha$  wächst  $Q_S/Q$  für die betrachteten  $c$  prinzipiell an. Bei konstantem  $Ha$  und abnehmendem Wandleitparameter reduziert sich  $Q_S/Q$ . Es bilden sich folglich kleinere Geschwindigkeitsjets in den Seitenschichten aus. Für  $Ha \gg 1$  und  $c = 1$  geht  $Q_S/Q \rightarrow 1$ , sodass fast der gesamte Volumenstrom durch die Jets in den Seitenschichten transportiert wird. Arlt *et al.* (2017) konnten zeigen, dass als Voraussetzung für dieses asymptotische Verhalten  $c^2 Ha \gg 1$  erfüllt sein muss, was erklärt, warum für  $c = 0.01$  bei  $Ha = 10000$   $Q_S/Q$  erst bei  $Q_S/Q \approx 0.25$  ist.

Der Druckgradient  $Re dp/dx$  in Abhängigkeit von  $Ha$  ist in Abbildung 3.4 (b) für verschiedene  $c$  gezeigt. Zusätzlich ist  $Re dp/dx(Ha)$  für  $c = 0$  (Shercliff-Strömung) und  $c = \infty$  (ideale Hunt-Strömung) gemäß der analytischen Lösung gezeigt (Hunt, 1965). Im Fall  $Ha = 0$  liegt eine hydrodynamische Strömung mit  $Re dp/dx = 7.1$  vor. Bei schwachen Magnetfeldern mit  $Ha \lesssim 1$  zeigt sich, dass die Wandleitfähigkeit fast keinen Einfluss auf  $Re dp/dx$  hat, weil nur schwache Lorentz-Kräfte induziert werden. Steigt das Magnetfeld bzw.  $Ha$  an, wird deutlich, dass kleinere  $c$  bei konstantem  $Ha > 0$  einen kleineren Druckgradienten verursachen. Für  $c = 0$  (Shercliff-Strömung) gilt bei  $Ha \gg 1$   $Re dp/dx \sim Ha$ . Ist hingegen  $c > 0$  ergibt sich für  $Ha \gg 1$  ein Potenzgesetz für den Zusammenhang zwischen  $Re dp/dx$  und  $Ha$ . Für  $c \rightarrow \infty$  gilt dabei  $Re dp/dx \sim Ha^{3/2}$  als Grenzfall für die ideale Hunt-Strömung.

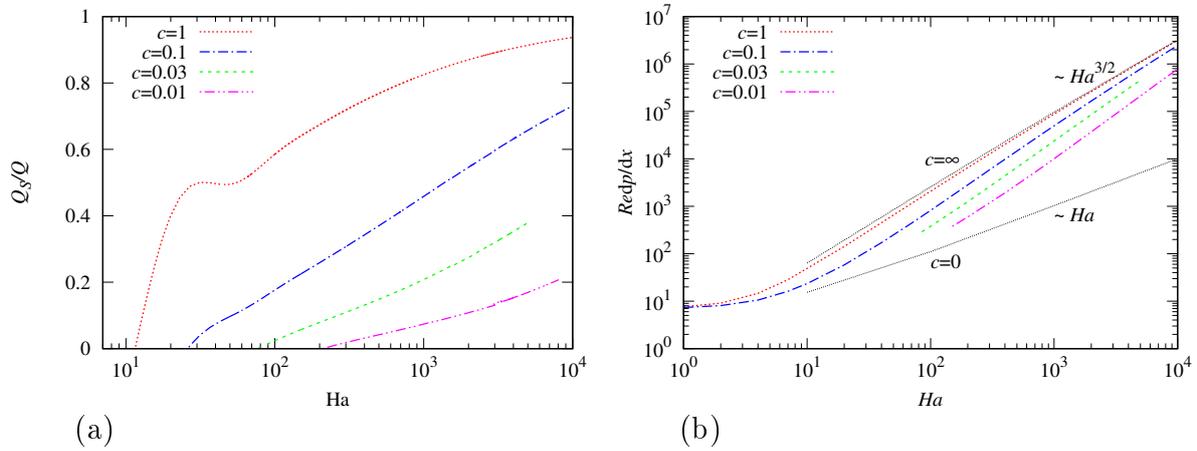


Abbildung 3.4: Hunt-Strömung im quadratischen Kanal: (a) Relativer Volumenstrom  $Q_S/Q$  durch die Seitenschicht in einem Viertelkanal und (b) dimensionsloser Druckgradient  $Re dp/dx$  in Abhängigkeit von  $Ha$  für verschiedene  $c$

### 3.4.2 Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse

Wird die lineare Stabilitätsanalyse entsprechend Abschnitt 3.2 durchgeführt, kann der Zusammenhang  $Re_c(Ha)$  in einer Stabilitätskarte dargestellt werden, wie sie in Abbil-

### 3 Lineare Stabilitätsanalyse magnetohydrodynamischer Kanalströmungen

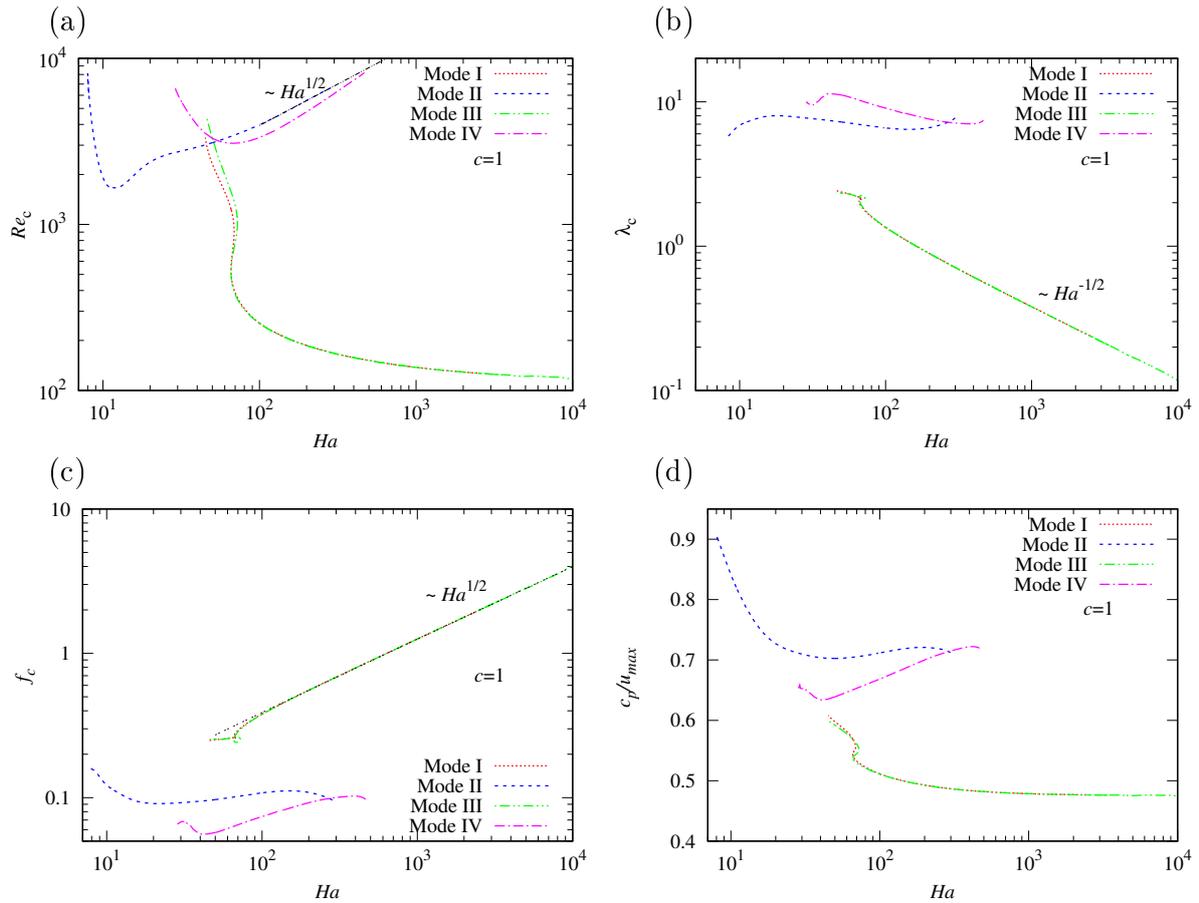


Abbildung 3.5: Hunt-Strömung im quadratischen Kanal: (a) Kritische Reynolds-Zahl  $Re_c$ , (b) kritische Wellenlänge  $\lambda_c$ , (c) kritische Frequenz  $f_c$  und (d) relative Phasengeschwindigkeit  $c_p/u_{max}$  bezogen auf die maximale Geschwindigkeit  $u_{max}$  in Abhängigkeit von  $Ha$  für die vier Moden bei  $c = 1$

dung 3.5 (a) für  $c = 1$  und alle vier Moden gezeigt ist. Unterhalb der dargestellten Kurven ist die Strömung für den jeweiligen Mode stabil, oberhalb hingegen instabil.

Für  $Ha = 0$  ist die Strömung stabil (Tatsumi & Yoshimura, 1990). Bei Anlegen eines Magnetfeldes wird die Strömung durch Auftreten von Jets destabilisiert. Die ersten Instabilitäten sind vom Typ Mode II. Bei  $Ha \approx 11$  erreicht die kritische Reynolds-Zahl von Mode II ein Minimum mit  $Re_c \approx 1600$ . Mit weiter ansteigendem  $Ha$  nimmt  $Re_c$  für Mode II zu und für  $Ha \gg 1$  ist  $Re_c \sim Ha^{1/2}$ . Wegen der Antisymmetrie in Magnetfeldrichtung von Mode II nimmt  $Re_c$  aufgrund zunehmender Dämpfung bei steigender Magnetfeldstärke zu. Ähnlich verhält es sich mit Mode IV, welcher dieselbe Symmetrie in Magnetfeldrichtung hat wie Mode II. Er wird bei  $Ha \approx 29$  erstmalig instabil. Bei  $Ha \approx 70$  hat seine kritische Reynolds-Zahl ein Minimum und für  $Ha > 70$  wird Mode IV vom stärker werdenden Magnetfeld zunehmend gedämpft.

Ab  $Ha \approx 45$  tritt die Instabilität von Mode I auf, welche bei  $Ha \approx 46$  Mode II als instabilsten Mode ablöst. Für Mode I fällt  $Re_c$  zwischen  $45 \lesssim Ha \lesssim 70$  sehr schnell ab und geht dann in ein asymptotisches Verhalten über, bei dem die Abhängigkeit der kritischen Reynolds-Zahl von  $Ha$  nahezu verschwindet, wobei sich für  $Ha \gg 1$   $Re_c \approx 120$  einstellt. In dem Bereich zwischen  $45 \lesssim Ha \lesssim 70$  entwickelt sich die Störungsverteilung der zu

Mode I gehörenden Instabilitäten erst, während sie im Fall  $Ha \gg 1$  voll ausgeprägt sind, da  $Re_c$  gegen eine Konstante geht. Der Bereich des steilen Abfalls von  $Re_c$  soll daher Entwicklungsbereich der Instabilitäten (von Mode I) genannt werden. Mode III wird bei  $Ha \approx 46$  erstmals instabil. Ab  $Ha \approx 70$  ist seine kritische Reynolds-Zahl nicht mehr von der des Mode I zu unterscheiden. Weil Mode I und III symmetrisch in Magnetfeldrichtung sind, erfahren sie eine deutlich schwächere Dämpfung durch das Magnetfeld (Sommeria & Moreau, 1982). Weil die Moden I und II antisymmetrisch in transverser Richtung sind, können sich die an den gegenüberliegenden Seitenwänden liegenden Instabilitäten verstärken, sodass diese Moden bereits bei kleineren  $Ha$  auftreten, als die in Magnetfeldrichtung analog symmetrischen Moden III und IV.

Im Entwicklungsbereich der Instabilitäten von Mode I zwischen  $65 \lesssim Ha \lesssim 70$  fällt auf, dass hier für ein gegebenes  $Ha$  nicht nur ein  $Re_c$  vorliegt, sondern drei verschiedene Werte, wie es schon für Abbildung 3.2 beschrieben wurde. Bspw. ist bei  $Ha = 67$  die Strömung zwischen  $450 \lesssim Re \lesssim 650$  instabil, zwischen  $650 \lesssim Re \lesssim 1160$  wieder stabil und jenseits von  $Re \approx 1160$  instabil. Dieses Verhalten war schon für die ideale Hunt-Strömung zu beobachten (Priede *et al.*, 2010).

Abbildung 3.5 (b) zeigt die kritische Wellenlänge  $\lambda_c = 2\pi/k_c$  der jeweiligen Moden in Abhängigkeit von  $Ha$ .  $\lambda_c$  für die Moden II und IV zeigt nur eine geringe Abhängigkeit von  $Ha$ , wobei für beide gilt  $\lambda_c \sim O(10)$ . Bei Instabilitäten dieser Moden handelt es sich folglich um großskalige Strukturen, die wegen ihrer Antisymmetrie in Magnetfeldrichtung stark gedämpft werden. Für die Moden I und III zeigt  $\lambda_c$  hingegen eine starke Abhängigkeit von  $Ha$  und es gilt für  $Ha > 10^2$   $\lambda_c \sim Ha^{-1/2}$ . Dies bedeutet, dass die kritische Wellenlänge für die Moden I und III wie die Dicke der Seitenschicht  $\delta_S$  skaliert, was daran liegt, dass sich diese Moden in der Seitenschicht befinden.

Die kritische Frequenz  $f_c = \gamma_r/2\pi$  der Störungen wird in Abbildung 3.5 (c) dargestellt. Ähnlich wie bei  $\lambda_c$  zeigt  $f_c$  der Moden II und IV nur eine geringe Abhängigkeit von  $Ha$ . Für die Moden I und III gilt hingegen für  $Ha \gg 1$   $f_c \sim Ha^{1/2}$ ; sie skaliert also wie  $1/\lambda_c$  bzw.  $1/\delta_S$ . Mittels der Phasengeschwindigkeit  $c_p = \lambda_c f_c$  lässt sich ermitteln, wie schnell sich die Instabilitäten fortbewegen. Dazu ist in Abbildung 3.5 (d)  $c_p/u_{max}$  als relative Phasengeschwindigkeit in Abhängigkeit von  $Ha$  gezeigt, wobei  $u_{max}$  die maximale Geschwindigkeit der Strömung ist, welche im Jet vorliegt. Im Grenzfall  $Ha \gg 1$  bewegen sich die Instabilitäten von Mode II und IV mit  $c_p/u_{max} = 0.72$  voran, während jene für Mode I und III  $c_p/u_{max} = 0.47$  erreichen. Die Instabilitäten aller Moden erreichen demnach für hinreichend große  $Ha$  eine Phasengeschwindigkeit, die im selben Maße wächst wie  $u_{max}$  durch das stärker werdende Magnetfeld.

Als nächstes wird der Einfluss des Wandleitparameters  $c$  auf die Stabilität der Strömung untersucht. Dazu ist in Abbildung 3.6  $Re_c$ ,  $\lambda_c$ ,  $f_c$  sowie  $c_p/u_{max}$  als Funktion von  $Ha$  für verschiedene  $c$  dargestellt. Da physikalisch nur die kleinste kritische Reynolds-Zahl bei gegebener Hartmann-Zahl interessant ist, sind in den Teilabbildungen von Abbildung 3.6 nicht mehr alle Moden gezeigt, sondern nur noch diejenigen mit dem jeweils kleinsten  $Re_c$ , was den Moden I und II entspricht. Die Unstetigkeitsstellen (z.B. bei  $Ha \approx 46$ ,  $Re_c \approx 3000$  für  $c = 1$ ) in den Teilabbildungen von Abbildung 3.6 stellen den Übergang von Mode II zu Mode I dar.

In der Abbildung 3.6 (a) ist deutlich erkennbar, dass ein abnehmendes  $c$  eine stabilisierende Wirkung auf die Strömung hat, denn mit abnehmendem  $c$  nimmt bei gleichem  $Ha$

$Re_c$  zu. Ursache hierfür ist ein geringerer Stromfluss in der Hartmann-Wand und damit einhergehend schwächer ausgeprägte Geschwindigkeitsjets in den Seitenschichten (siehe Abbildung 3.4). Der Entwicklungsbereich der Instabilitäten von Mode I erstreckt sich durch die Abnahme von  $c$  über einen zunehmend größeren Bereich von  $Ha$  und es ist nur noch ein  $Re_c$  pro  $Ha$  vorhanden. Sowohl der Stabilisierungseffekt durch ein kleineres  $c$  als auch die Abhängigkeit der kritischen Reynolds-Zahl von  $Ha$  lässt mit größer werdendem  $Ha$  nach. Für  $cHa \gg 1$  geht  $Re_c$  in ein asymptotisches Verhalten über und strebt gegen einen konstanten Wert. Für  $c = 1$  konnte  $Re_c \approx 120$  ermittelt werden, was nur geringfügig über  $Re_c \approx 112$  für  $Ha \rightarrow \infty$ ,  $c \rightarrow \infty$  liegt (Priede *et al.*, 2010). Für kleinere  $c$  konnten die asymptotischen Werte der zugehörigen  $Re_c$  aufgrund der großen notwendigen Hartmann-Zahlen nicht mehr mit vertretbarem numerischen Aufwand ermittelt werden. Bei kleineren  $c$  nimmt  $\lambda_c$  für kleine Hartmann-Zahlen im Vergleich zu  $c = 1$  leicht ab, wie in Abbildung 3.6 (b) zu sehen ist. Die Abhängigkeit von  $Ha$  ist aber weiterhin nur gering. Für  $Ha \gg 1$  ist hingegen in Abbildung 3.6 (b) zu erkennen, dass  $\lambda_c \sim Ha^{-1/2}$  ist und damit die Störungen weiterhin in den Seitenschichten liegen. Die in Abbildung 3.6 (c) gezeigte kritische Frequenz  $f_c$  nimmt im Bereich kleiner  $Ha$  mit abnehmendem  $c$  zu, zeigt aber keine starke Abhängigkeit von  $Ha$ . Für  $cHa \gg 1$  liegt auch hier ein asymptotisches Verhalten mit  $f_c \sim Ha^{1/2}$  vor. Auch die in Abbildung 3.6 (d) gezeigte relative Phasengeschwindigkeit geht asymptotisch gegen  $c_p/u_{max} \approx 0.47$ , wenn  $cHa \gg 1$  ist, was dem Wert der idealen Hunt-Strömung entspricht (Priede *et al.*, 2010).

Der Einfluss des Wandleitparameters  $c$  auf  $Re_c$  bei konstanter Hartmann-Zahl ist in Abbildung 3.7 (a) für den instabilsten Mode (Mode I) dargestellt. Erkennbar ist, dass für kleine  $c$  bei konstantem  $Ha$   $Re_c$  sehr groß wird. Dies liegt daran, dass für  $c \ll \delta_H \sim Ha^{-1}$  die Leitfähigkeit der Hartmann-Wände im Vergleich zu der der Hartmann-Schichten vernachlässigbar klein ist. Elektrische Ströme schließen sich dadurch fast ausschließlich in den Hartmann-Schichten. Die Jets, welche die Instabilitäten verursachen, verschwinden und im Fall  $c \rightarrow 0$  ergibt sich die Shercliff-Strömung, welche keine Jets aufweist und bei der  $Re_c \approx 48 \cdot 10^3 Ha^{1/2}$  ist (Pothérat, 2007). Nimmt  $c$  zu, kann sich der Strom durch die Hartmann-Wand schließen und der Einfluss der Hartmann-Schicht wird zunehmend geringer. Damit einher geht die Ausprägung der Jets. Wenn  $c \gg \delta_H \sim Ha^{-1}$  gilt, ist der Einfluss der Hartmann-Schichten vernachlässigbar und die Kernströmung wird von der Hartmann-Zahl unabhängig. Die Geschwindigkeitsjets sind voll ausgeprägt und ein asymptotisches Verhalten von  $Re_c$  tritt ein, wobei der Grenzwert von  $Re_c$  dem der idealen Hunt-Strömung für die jeweilige Hartmann-Zahl entspricht (bspw.  $Re_c \rightarrow 133$  für  $Ha = 500$ ). Mit größer werdendem  $Ha$  nähert sich dabei die kritische Reynolds-Zahl dem asymptotischen Wert  $Re_c \approx 112$  der idealen Hunt-Strömung mit  $Ha \rightarrow \infty$ ,  $c \rightarrow \infty$  an (Priede *et al.* (2010)).

Abbildung 3.7 (b) zeigt  $\lambda_c(c)$  für den instabilsten Mode bei verschiedenen  $Ha$ . Mit steigendem  $c$  nimmt  $\lambda_c$  zunächst zu und erreicht ein Maximum. Wird  $c$  weiter erhöht fällt  $\lambda_c$  ab und strebt gegen eine Konstante, die von der Hartmann-Zahl abhängt. Das jeweilige Maximum entsteht, weil die instabilen Strukturen bis zu dieser Parameterkombination aus  $c$  und  $Ha$  noch in ihrem bereits beschriebenen Entwicklungsbereich sind, also noch keine Q2D-Struktur angenommen haben. Sobald  $cHa \gg 1$ , ist die Q2D-Struktur ausgebildet und es gilt  $\lambda_c(c, Ha) \rightarrow \lambda_c(Ha)$ .

Einen wesentlichen Einfluss auf die Stabilität der Strömung hat das Seitenverhältnis  $A$ . Abbildung 3.8 (a) stellt die Abhängigkeit von  $Re_c$  als Funktion von  $A$  für die Moden I

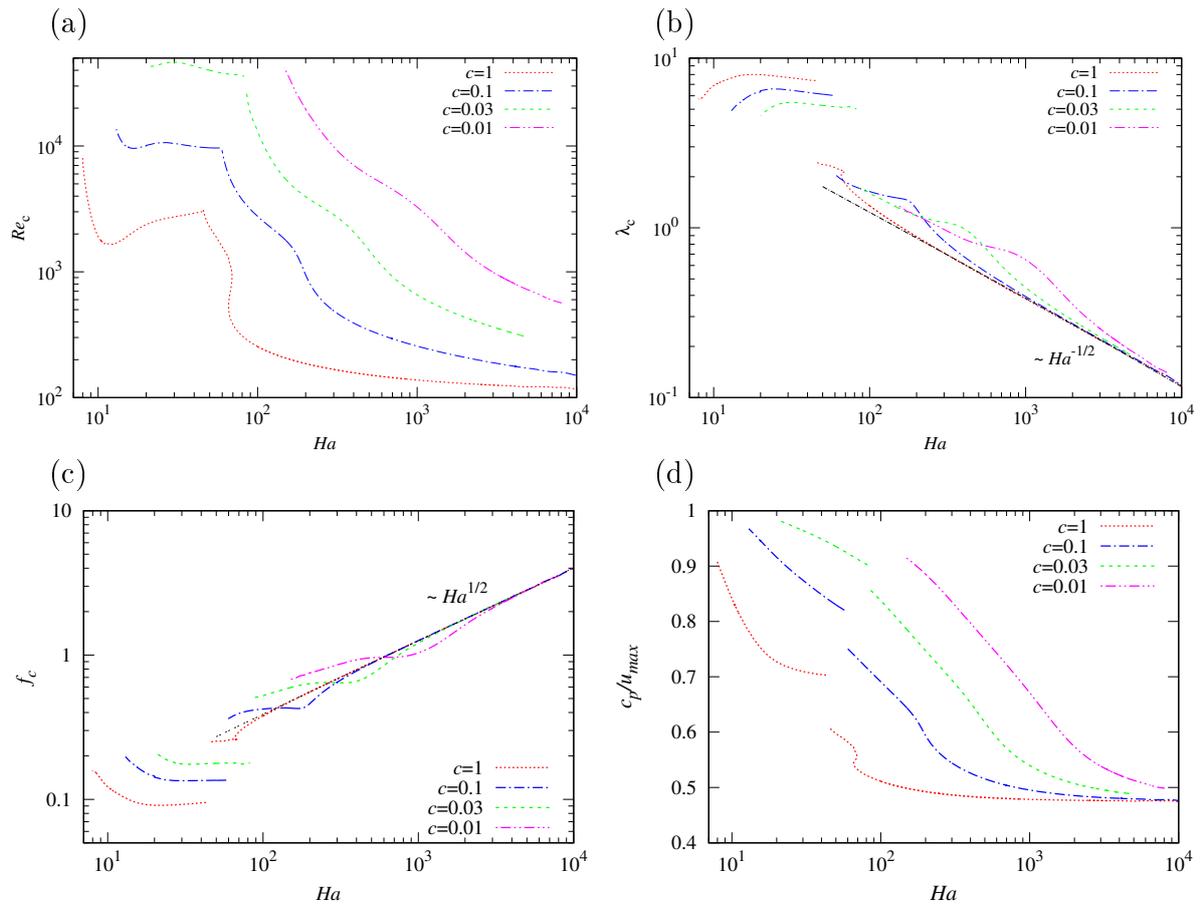


Abbildung 3.6: Hunt-Strömung im quadratischen Kanal: (a) Kritische Reynolds-Zahl  $Re_c$ , (b) kritische Wellenlänge  $\lambda_c$ , kritische Frequenz  $f_c$  sowie (d) relative Phasengeschwindigkeit  $c_p/u_{max}$  in Abhängigkeit von  $Ha$  für verschiedene  $c$  für den jeweils kritischsten Mode

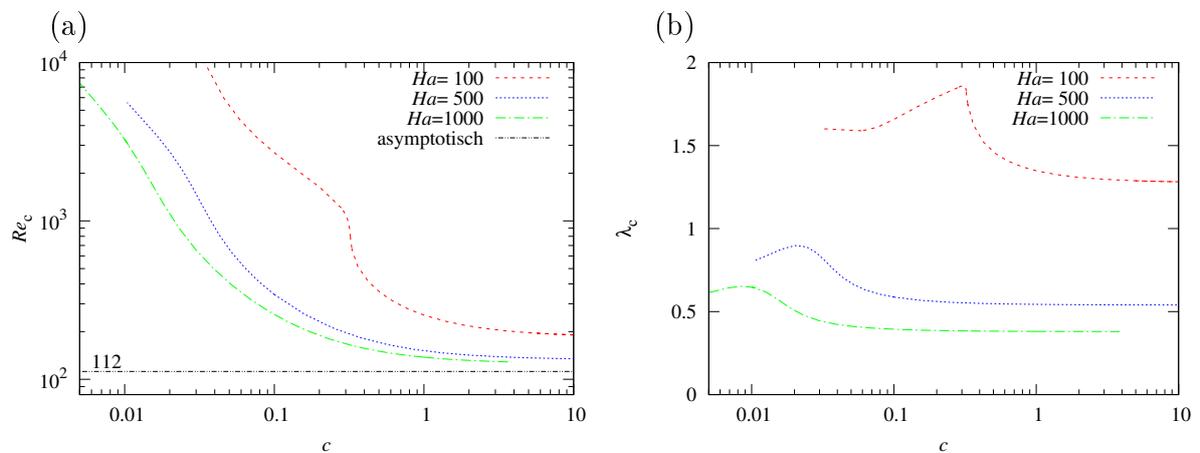


Abbildung 3.7: (a) Kritische Reynolds-Zahl  $Re_c$  und (b) kritische Wellenlänge  $\lambda_c$  als Funktion von  $c$  des instabilsten Modes I für verschiedene  $Ha$ .

und III für verschiedene  $Ha$  und  $c$  dar. Ausgehend von den größten gezeigten Werten für  $A$ , also breiten Kanälen, lässt sich zunächst eine schwache Zunahme von  $Re_c \approx 2550$  bei  $A = 1.5$  zu  $Re_c \approx 2750$  bei  $A = 1$  für  $Ha = 100$  und  $c = 0.1$  beobachten, was sich damit erklären lässt, dass allgemein ein breiter Kanal eine niedrigere kritische Reynolds-Zahl als ein eher quadratischer Kanal hat (Tatsumi & Yoshimura, 1990). Für  $A = 1$  stimmen die Werte von  $Re_c$  mit denen in Abbildung 3.6 überein. Ab  $A \approx 0.9$  lässt sich für  $Ha = 100$  und  $c = 0.1$  für Mode I eine Abnahme von  $Re_c$  feststellen, die in einem Minimum bei  $A \approx 0.34$  mit  $Re_c \approx 840$  endet. Anschließend steigt  $Re_c$  mit weiter abnehmendem  $A$  steil an. Dieses Verhalten lässt sich mit den Symmetrieeigenschaften von Mode I erklären. Die Störungen dieses Modes in den gegenüberliegenden Seitenschichten können sich gegenseitig verstärken, sodass sich die kritische Reynolds-Zahl verringert. Allerdings ist dies nur möglich, wenn der Kanal nicht zu schmal ist und die Seitenschichten sich nicht gegenseitig überlagern. Für  $Ha = 100$  ist dies im Minimum von  $Re_c$  bei  $A \approx 0.34$  der Fall, weil ein einzelner Jet ungefähr die Dicke  $2\delta_S$  hat, sodass sich  $4\delta_S \sim 4Ha^{-1/2} = 0.4$  ergibt. Wenn der Kanal noch schmaler wird, unterdrücken sich die Instabilitäten und  $Re_c$  steigt steil an. Unterhalb von  $A \approx 0.21$  ist die Strömung für  $Ha = 100$  stabil und ähnelt in ihrem Geschwindigkeitsprofil der Poiseuille-Strömung.

Kritische Reynolds-Zahlen von Mode III sind physikalisch nur relevant, wenn  $A \gtrsim 1$  ist, da sie nur hier gleich denen von Mode I sind. Für  $A < 1$  steigt  $Re_c$  von Mode III hingegen stark an, weil sich die Instabilitäten in den gegenüberliegenden Seitenschichten aufgrund der Symmetrieeigenschaften gegenseitig unterdrücken. In schmalen Kanälen ist folglich  $Re_c$  von Mode I ausschlaggebend für den Einsatz von realen Instabilitäten.

Für  $Ha = 100$  ist weiterhin  $Re_c$  für  $c = 0.03$  gezeigt. Das Verhalten ist prinzipiell vergleichbar mit dem von  $c = 0.1$ , allerdings ist der Effekt der Destabilisierung von Mode I bei kleinen  $A$  deutlich stärker ausgeprägt. Bei  $A \approx 1.1$  ist  $Re_c \approx 12800$ . Das Minimum wird bei  $A \approx 0.35$  mit  $Re_c \approx 2500$  erreicht. Bei  $c = 0.1$  nimmt  $Re_c$  im Minimum auf ungefähr ein Drittel des Wertes bei  $A = 0.9$  ab, bei  $c = 0.03$  reduziert sich  $Re_c$  hingegen auf etwa ein Fünftel. Die Abnahme von  $Re_c$  für  $c = 0.03$  beginnt weiterhin schon bei einem geringfügig größerem  $A$ .

Zusätzlich ist  $Re_c$  für  $Ha = 500$  und  $c = 0.03$  gezeigt. Zwischen  $1.5 \gtrsim A \gtrsim 0.4$  ist nur ein minimaler Anstieg von  $Re_c$  und kein Unterschied zwischen Mode I und III erkennbar. Das Minimum von Mode I wird erst bei  $A \approx 0.15$  erreicht, was ebenfalls knapp dem Vierfachen von  $\delta_S$  für  $Ha = 500$  entspricht, analog zu  $Ha = 100$ . Dies bestätigt die vorhergehende Betrachtung, dass  $A$  nur dann einen nennenswerten Einfluss auf die Stabilität der Strömung hat, wenn der Kanal so schmal wird, dass die Seitenschichten miteinander wechselwirken können.

Der Einfluss auf die zugehörigen kritischen Wellenlängen  $\lambda_c$  ist in Abbildung 3.8 (b) dargestellt. In Übereinstimmung mit  $Re_c$  ist erkennbar, dass  $\lambda_c$  sich erst dann signifikant ändert, wenn eine Wechselwirkung zwischen den Seitenschichten eintritt. Für Mode I gilt  $\lambda_c \sim A$ , wobei eine Steigung  $m \approx 4.7$  ermittelt werden konnte, die für alle gezeigten Fälle nahezu gleich ist.  $\lambda_c$  nimmt daher schneller ab als die Kanalbreite. Bei  $A \approx 0.21$  brechen die Kurven von  $\lambda_c$  für  $Ha = 100$  ab, weil für schmalere Kanäle bei dieser Hartmann-Zahl keine Instabilitäten mehr existieren. Bei Mode III nimmt  $\lambda_c$  zunächst wegen seiner Symmetrieeigenschaften zu, wenn die Seitenschichten anfangen zu wechselwirken. Allerdings ist für  $Ha = 500$  erkennbar, dass bei  $A \approx 0.28$   $\lambda_c$  ebenfalls leicht abnimmt, wenn  $A$  weiter reduziert wird.

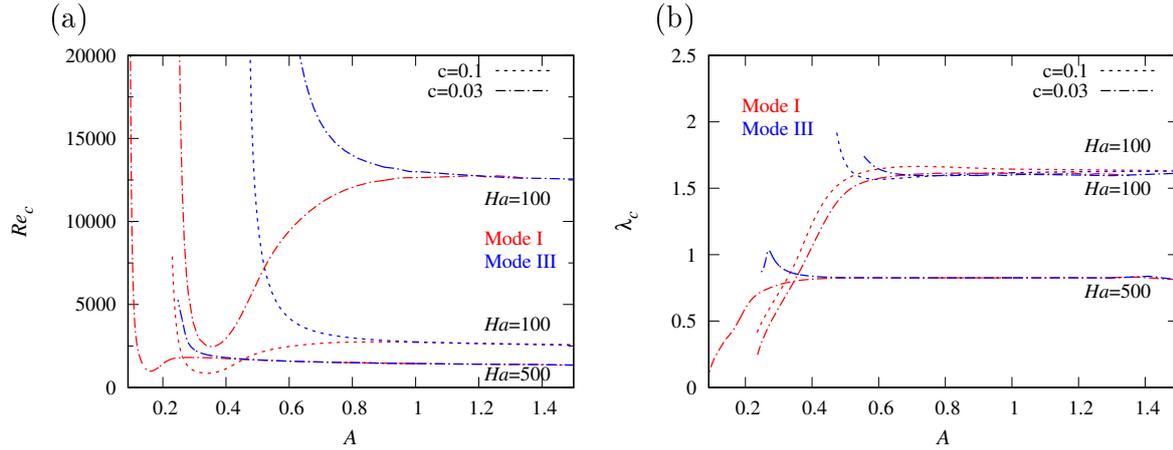


Abbildung 3.8: (a) Kritische Reynolds-Zahl  $Re_c$  in Abhängigkeit des Seitenverhältnisses  $A$  und (b) kritische Wellenlänge  $\lambda_c$  für die Moden I und III

Das Verhalten der Moden I und III bei Änderung von  $A$  hängt also im Wesentlichen von ihren Symmetrieeigenschaften in  $z$ -Richtung ab. Dies trifft auch auf die Moden II und IV zu, deren Abhängigkeit von  $A$  für  $Ha = 100$  und verschiedene  $c$  in Abbildung 3.9 dargestellt ist. Da Mode II dieselbe Symmetrie in  $z$ -Richtung hat wie Mode I (siehe Tabelle 3.1), verhält er sich analog zu diesem Mode. Daher finden sich ebenfalls entsprechende Minima bei  $A \sim 4\delta_S$  für die jeweilige Hartmann-Zahl im Verlauf von  $Re_c(A)$  für Mode II in Abbildung 3.9 (a). Im Gegensatz zu  $Re_c$  von Mode III nimmt  $Re_c$  von Mode IV für abnehmende  $A$  bis  $A \approx 0.8$  zunächst ebenfalls leicht ab. Bei weiterer Reduktion von  $A$  steigt  $Re_c$  anschließend steil an.

Die in Abbildung 3.9 (b) gezeigten  $\lambda_c(A)$  für die Moden II und IV verhalten sich zu denen von Mode I und III etwas anders. Da die kritischen Wellenlängen dieser Moden größer sind als bei Mode I und III, ist über den gesamten dargestellten Bereich von  $A$  ein Einfluss auf  $\lambda_c$  zu erkennen. Die zu Mode II gehörenden Kurven nehmen kontinuierlich, aber nicht linear mit  $A$ , ab, bis der Kanal zu schmal wird und keine Instabilitäten mehr auftreten (bspw. bei  $Ha = 100$ ,  $c = 0.1$  und  $A = 0.21$ ). Für Mode IV steigt  $\lambda_c$  hingegen, analog zu Mode III in Abbildung 3.8 (b), zunächst mit abnehmendem  $A$  an. Bei  $A \approx 0.52$  hat  $\lambda_c$  für  $Ha = 100$  und  $c = 0.03$  allerdings ein Maximum und fällt anschließend ab. Verglichen mit dem Kurvenverlauf von  $Re_c(A)$  von Mode I und III sind die kritischen Reynolds-Zahlen von Mode II und IV für  $Ha = 100$  bei allen betrachteten  $A$  deutlich größer. Folglich treten die Instabilitäten von Mode II und IV erst später auf und sind physikalisch auch bei sich änderndem  $A$  nicht relevant.

In Abschnitt 2.3.2 wurde ausgeführt, dass MHD-Instabilitäten eine anisotrope Verteilung aufweisen, wobei sich MHD-Wirbel bevorzugt parallel zum angelegten Magnetfeld ausrichten. Diese Anisotropie kann durch eine Analyse der kinetischen Energien  $E$  der Schwankungen in  $x$ ,  $y$ ,  $z$ -Richtung mit

$$E_x \sim \frac{1}{V} \int u'^2 dV, \quad E_y \sim \frac{1}{V} \int v'^2 dV, \quad E_w \sim \frac{1}{V} \int w'^2 dV \quad (3.19)$$

quantifiziert werden. Hierbei steht  $V$  für das Volumen, welches sich aus einer axialen Wellenlänge und dem Querschnitt ergibt, über das die kinetische Energie gemittelt wird. Weil infinitesimal kleine Störungen untersucht werden und die lineare Stabilitätsanalyse keine

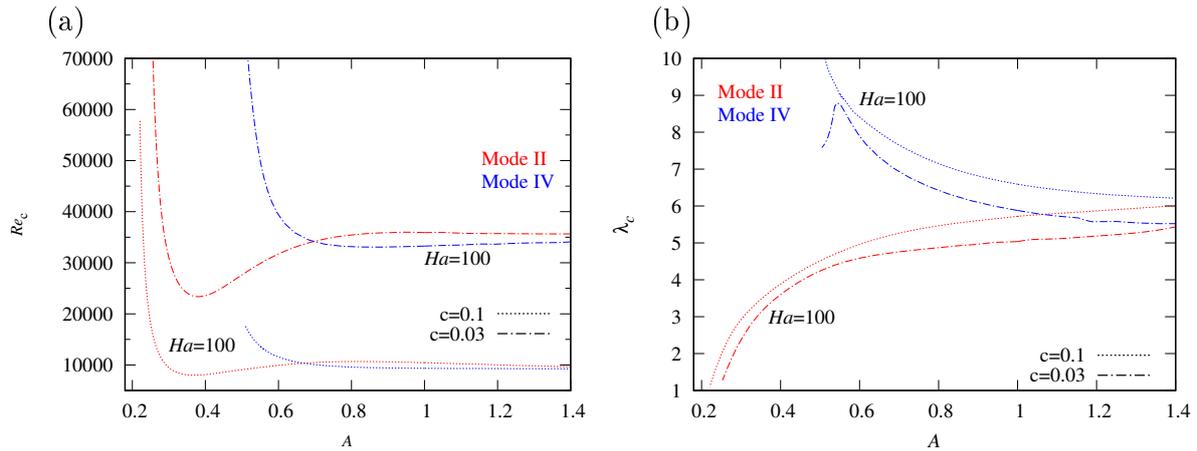


Abbildung 3.9: (a) Kritische Reynolds-Zahl  $Re_c$  in Abhängigkeit des Seitenverhältnisses  $A$  und (b) kritische Wellenlänge  $\lambda_c$  für die Moden II und IV.

Informationen über deren Amplituden liefert, ist es sinnvoll, die relative Energieverteilung zu betrachten. Diese ergibt sich aus  $E_i/(E_x + E_y + E_z) = E_i/E$  mit  $i = x, y, z$ .

Die relative Verteilung der kinetischen Störungsenergie an der Stabilitätsgrenze ist in Tabelle 3.3 exemplarisch für die Moden I und II für  $c = 1$ ,  $c = 0.1$  und  $c = 0.03$  gezeigt.

Für Mode II sind bei  $Ha = 20$  und  $c = 1$  ungefähr 87% der kinetischen Energie in der longitudinalen Geschwindigkeitsstörung  $u'$  enthalten, während nur 11%  $v'$  bzw. 2%  $w'$  zugeordnet werden können. Eine Erhöhung von  $Ha$  führt zu keiner signifikanten Änderung in dieser Verteilung, was daran ersichtlich ist, dass  $E_x/E$  bei  $Ha = 400$  ca. 90% der kinetischen Energie enthält. Rund 2/3 der Energie entfallen bei Mode I bei  $Ha = 50$  und  $c = 1$  auf  $E_x/E$  und 28% auf  $E_y/E$ , sodass  $E_z/E$  sehr klein ist. Eine Zunahme von  $Ha$  ändert am Anteil für  $E_x/E$  nur wenig, allerdings fällt der Anteil für  $E_y/E$  fast auf 0 ab und wird zu  $E_z/E$  transferiert. Das bedeutet, dass für moderate  $Ha$  Q2D-Wirbel in der  $xy$ -Ebene vorliegen, deren Rotationsachsen in  $z$ -Richtung orientiert sind und damit senkrecht zum Magnetfeld stehen. Es existieren demnach für moderate  $Ha$  zunächst MHD-Instabilitäten, die nicht parallel zum Magnetfeld ausgerichtet sind.

Mit zunehmendem  $Ha$  ändert sich die Verteilung der Störungsgeschwindigkeiten, sodass eine Umverteilung der turbulenten kinetischen Energie erfolgt. Dieser Vorgang ist abgeschlossen, wenn  $E_y/E \ll 1$  ist. Die resultierende Energieverteilung zeigt, dass die Störungsgeschwindigkeiten nun primär in der  $xz$ -Ebene sind, was Q2D-Wirbeln entspricht, deren Rotationsachse in Magnetfeldrichtung orientiert ist. Solche Wirbel erfahren in Magnetfeldern die geringste Dämpfung, sodass  $Re_c$  bis zum Erreichen dieses Q2D-Zustandes stark abfällt (siehe Abbildung 3.6 (a)). Mode II hat im Vergleich dazu einen deutlich kleineren Anteil in  $E_z/E$ , weil hier wegen der Symmetrie zwei übereinander angeordnete, in gegensätzliche Richtung rotierende Wirbel in Magnetfeldrichtung vorhanden sind, was eine Q2D-Struktur ausschließt.

Der Vergleich zwischen den Ergebnissen für  $c = 1$ ,  $c = 0.1$  und  $c = 0.03$  in Tabelle 3.3 zeigt, dass für kleinere  $c$  größere  $Ha$  notwendig sind, um die gleiche relative Energieverteilung wie für  $c = 1$  zu erhalten. Wird zusätzlich die Stabilitätskarte in Abbildung 3.6 hinzugezogen, fällt für  $c < 1$  auf, dass sich die Entwicklung der quasi-zweidimensionalen Wirbel, welche parallel zum Magnetfeld orientiert sind, über einen größeren Hartmann-

$Ha$	$c$	Mode	$E_x/E$	$E_y/E$	$E_z/E$
20	1	II	0.87	0.11	0.02
100	1	II	0.84	0.15	0.01
400	1	II	0.903	0.094	0.003
50	1	I	0.68	0.28	0.04
100	1	I	0.72	0.07	0.21
400	1	I	0.69	0.02	0.29
1000	1	I	0.68	0.01	0.31
20	0.1	II	0.86	0.12	0.02
100	0.1	II	0.81	0.18	0.01
400	0.1	II	0.86	0.13	0.01
100	0.1	I	0.61	0.3	0.09
400	0.1	I	0.73	0.02	0.25
1000	0.1	I	0.70	0.01	0.29
20	0.03	II	0.85	0.12	0.03
100	0.03	II	0.80	0.19	0.01
400	0.03	II	0.90	0.06	0.04
100	0.03	I	0.60	0.33	0.07
400	0.03	I	0.78	0.07	0.15
1000	0.03	I	0.76	0.01	0.23

Tabelle 3.3: Relative Verteilung der turbulenten kinetischen Energie von Mode I und II an der Stabilitätsgrenze für verschiedene  $c$  und  $Ha$ . Der Index gibt die Komponente der Geschwindigkeitsstörung an, zu welcher die Energie gehört.

Zahlbereich erstreckt. Im Umkehrschluss bedeutet dies, dass Wirbel, welche in  $z$ -Richtung orientiert sind, für  $Ha \sim O(100)$ , je nach  $c$ , noch nicht vollständig gedämpft wurden.

Im Folgenden werden Isoflächen verschiedener Strömungsgrößen betrachtet. Da die Störungen von infinitesimaler Größe sind, ist die Angabe einer konkreten Skala nicht sinnvoll. Es wird lediglich angegeben, wo Störungen größer bzw. kleiner Null sind.

In der Abbildung 3.10 sind die Isoflächen der axialen Geschwindigkeitsstörung  $u'$  bei  $Ha \approx 56$ ,  $Re_c \approx 9500$  und  $c = 0.1$  für die Moden I und II im unteren rechten Kanalviertel ( $z > 0$ ,  $y < 0$ ) dargestellt. Laut Abbildung 3.6 entspricht dies den Werten, bei denen Mode II von Mode I als instabiler Mode abgelöst wird. In beiden Fällen ist zu erkennen, dass die Instabilitäten in der Seitenschicht lokalisiert sind. Deutlich ist weiterhin das unterschiedliche Symmetrieverhalten in  $y$ -Richtung zu erkennen. Weil Mode II antisymmetrisch in  $y$ -Richtung ist, sind die Isoflächen in dieser Richtung im gezeigten Kanalviertel abgeschlossen, während sie für Mode I in das Kanalviertel mit  $z > 0$ ,  $y > 0$  reichen. Die Unterschiede in der kritischen Wellenlänge der beiden Moden sind ebenfalls zu erkennen. Während in Abbildung 3.10 (a)  $\lambda_c \approx 6.5$  beträgt, ist in Abbildung 3.10 (b)  $\lambda_c \approx 2.1$ . Dieser Sprung in der kritischen Wellenlänge ist bereits in Abbildung 3.6 (b) sichtbar geworden und verdeutlicht das unterschiedliche physikalische Verhalten der verschiedenen Moden. Aus der Verteilung der turbulenten kinetischen Energie in Mode II in Tabelle 3.3 und der Geschwindigkeitsverteilung, wie sie in Abbildung 3.10 (a) gezeigt ist, folgt, dass hier Wirbelstrukturen vorliegen, die senkrecht zum Magnetfeld orientiert sind und daher mit wachsendem Magnetfeld zunehmend unterdrückt werden. Dadurch steigt  $Re_c$ , was in prinzipieller Übereinstimmung mit Abbildung 3.5 (a) für Mode II ist.

Die in Abbildung 3.10 (b) gezeigten Geschwindigkeitsstörungen  $u'$  zeigen eine komplexe dreidimensionale Struktur. Erkennbar ist u. a., dass sich  $u'$  in  $y$ -Richtung ändert, was auf Wirbel hinweist, die senkrecht zum Magnetfeld orientiert sind. Unter Berücksichtigung von Tabelle 3.3 lässt sich schlussfolgern, dass bei der gegebenen Parameterkombination die Wirbel von Mode I noch nicht den Q2D-Zustand in  $y$ -Richtung eingenommen haben.

Die zu den gezeigten Geschwindigkeitsstörungen zugehörigen Potentialstörungen  $\phi'$  sind in Abbildung 3.11 (a) für Mode II und (b) Mode I gezeigt. Im Gegensatz zu  $u'$  wird deutlich, dass  $\phi'$  über die Seitenschicht hinausragt und sowohl für Mode I als auch Mode II für  $Ha = 56$  den gesamten Kanalbereich einnimmt. Da die Seitenwand isoliert ist, stehen die Isoflächen auf dieser senkrecht. Auf der Hartmann-Wand sind die Isoflächen hingegen geneigt, damit es einen Stromfluss in die Wand geben kann. Die unterschiedlichen Symmetrieeigenschaften der Moden werden sehr deutlich. Bei Mode II ist  $\phi'$  auf den gezeigten Kanalbereich beschränkt, während sich  $\phi'$  von Mode I deutlich in den Bereich mit  $y > 0$  erstreckt. Da  $\phi'$  große Änderungen in alle Raumrichtungen aufweist, ist davon auszugehen, dass eine komplexere Wirbelstruktur als nur eine Q2D-Struktur vorliegt.

Im Folgenden sind weitere Isoflächen von Störungen der axialen Geschwindigkeitskomponente  $u'$  und des elektrischen Potentials  $\phi'$  für verschiedene  $Ha$  und  $A$  an der entsprechenden Stabilitätsgrenze von Mode I dargestellt, um den Einfluss dieser Parameter auf die Verteilung der Störungen darzustellen. Abbildungen 3.12 (a) und 3.13 (a) veranschaulichen für  $c = 0.1$  und  $A = 1$  den Einfluss von  $Ha$  auf  $u'$ . Abgesehen von der Lokalisierung in den unterschiedlich dicken Seitenschichten fällt weiterhin auf, dass die Verteilung von  $u'$  leicht verschieden ist. In Abbildung 3.12 (a) ist zu erkennen, dass die Störungen, verglichen mit 3.13 (a), sich nicht bis zur Hartmann-Wand erstrecken und die Isoflächen nicht

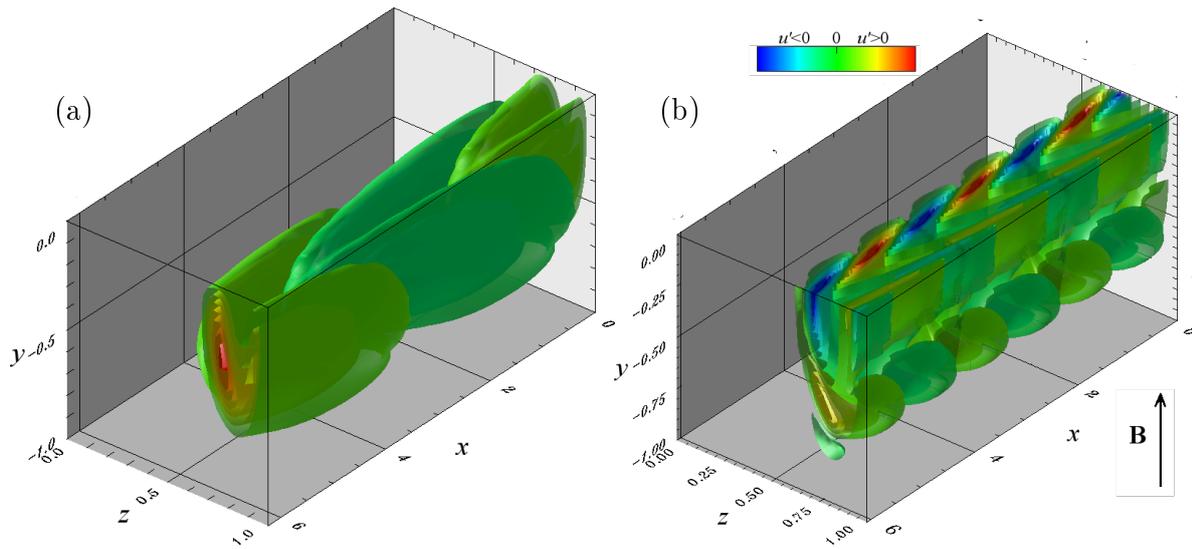


Abbildung 3.10: Isoflächen infinitesimaler Störungen der Geschwindigkeit in axialer Richtung  $u'$  bei  $Ha \approx 56$ ,  $Re_c \approx 9500$  und  $c = 0.1$  für (a) Mode II und (b) Mode I

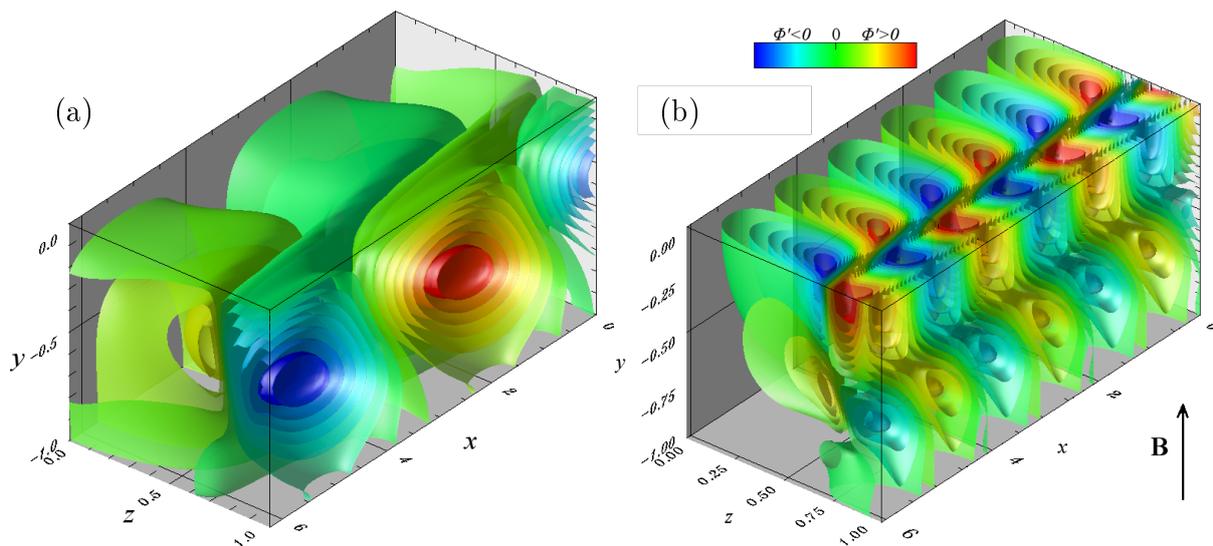


Abbildung 3.11: Isoflächen infinitesimaler Störungen des elektrischen Potentials  $\phi'$  bei  $Ha \approx 56$ ,  $Re_c \approx 9500$  und  $c = 0.1$  für (a) Mode II und (b) Mode I

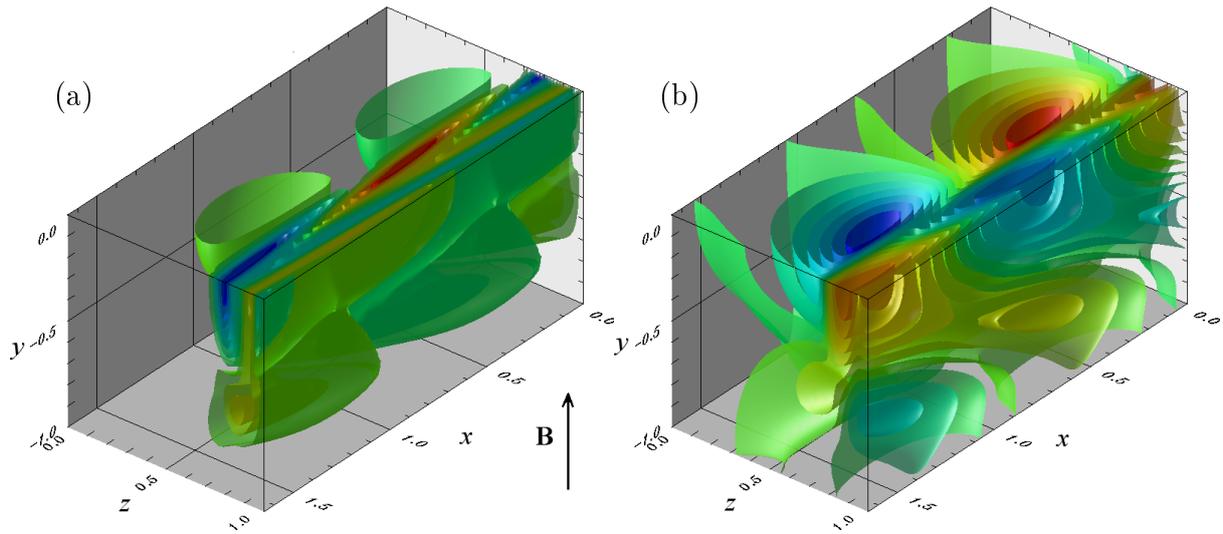


Abbildung 3.12: Isoflächen infinitesimaler Störungen für (a) die Geschwindigkeit in axialer Richtung  $u'$  und (b) das elektrische Potential  $\phi'$  für  $Ha = 100$ ,  $Re_c \approx 2700$ ,  $c = 0.1$  und  $A = 1$  für Mode I

nur parallel zum Magnetfeld sind. Anhand der in Tabelle 3.3 dargestellten relativen Energieverteilung lassen sich diese Unterschiede damit erklären, dass bei  $Ha = 100$ ,  $c = 0.1$  für Mode I die bereits beschriebene Q2D-Wirbelstruktur vorliegt, die in  $z$ -Richtung orientiert ist. Denn bei dieser Parameterkombination lässt sich ungefähr ein Drittel der turbulenten kinetischen Energie der  $y$ -Komponente der Geschwindigkeitsstörungen zuordnen. Erst bei  $Ha = 400$  ist die magnetische Dämpfung stark genug, dass  $E_y/E \ll 1$  und nur noch die Q2D-Wirbelstruktur parallel zum Magnetfeld existieren kann. Das zugehörige  $\phi'$  ist in den Abbildungen 3.12 (b) und 3.13 (b) gezeigt. Bei  $Ha = 100$  zeigt sich, dass bei der in  $z$ -Richtung orientierten Wirbelstruktur die Störungen des elektrischen Potentials zum einen weit in die Kernströmung hineinreichen und zum anderen Isoflächen von  $\phi'$  senkrecht auf der Seitenwand stehen. Weiterhin ist, analog zu  $Ha = 56$ , eine starke Änderung von  $\phi'$  in alle Richtungen erkennbar. Für  $Ha = 400$  ist hingegen die Q2D-Wirbelstruktur in  $y$ -Richtung voll ausgeprägt, sodass  $\phi'$  auf die Seitenschicht beschränkt ist und die Isoflächen parallel zur Seitenwand sind, wie Abbildung 3.13 (b) zu entnehmen ist. In  $y$ -Richtung hat sich der Gradient im Vergleich zu den anderen beiden Richtungen deutlich verringert.

Der Einfluss des Aspektverhältnisses  $A$  lässt sich in Abbildung 3.14 (a) für  $Ha = 500$ ,  $c = 0.1$  und  $A = 0.16$  erkennen. Bei diesem  $A$  erstreckt sich die Seitenschicht und damit  $u'$  über die gesamte Kanalbreite. Nach Abbildung 3.8 liegt genau hier das Minimum der kritischen Reynolds-Zahl für diese Parameter von Mode I. Bei einer weiteren Reduktion von  $A$  werden die Seitenschichten immer mehr zwischen den Seitenwänden eingeeengt und die Strömung stabilisiert sich. Aus Abbildung 3.14 (b) geht hervor, dass die bereits bei Abbildung 3.8 diskutierte Wechselwirkung durch ein Verbinden der Potentialstörungen der gegenüberliegenden Seitenschichten realisiert wird.

Der Grund für den Anstieg von  $Re_c$  für Mode III in Abbildung 3.8 lässt sich mittels Abbildung 3.15 verdeutlichen. Dort sind die Isoflächen der Störungen von (a)  $u'$  und (b)  $\phi'$  für  $Ha = 500$ ,  $c = 0.1$  und  $A = 0.3$  gezeigt. Deutlich erkennbar ist, dass die Seitenschichtdicke bei  $Ha = 500$  und  $A = 0.3$  noch kleiner als die Kanalbreite ist und dementsprechend die in den Seitenschichten gegenüberliegenden Geschwindigkeitsstörun-

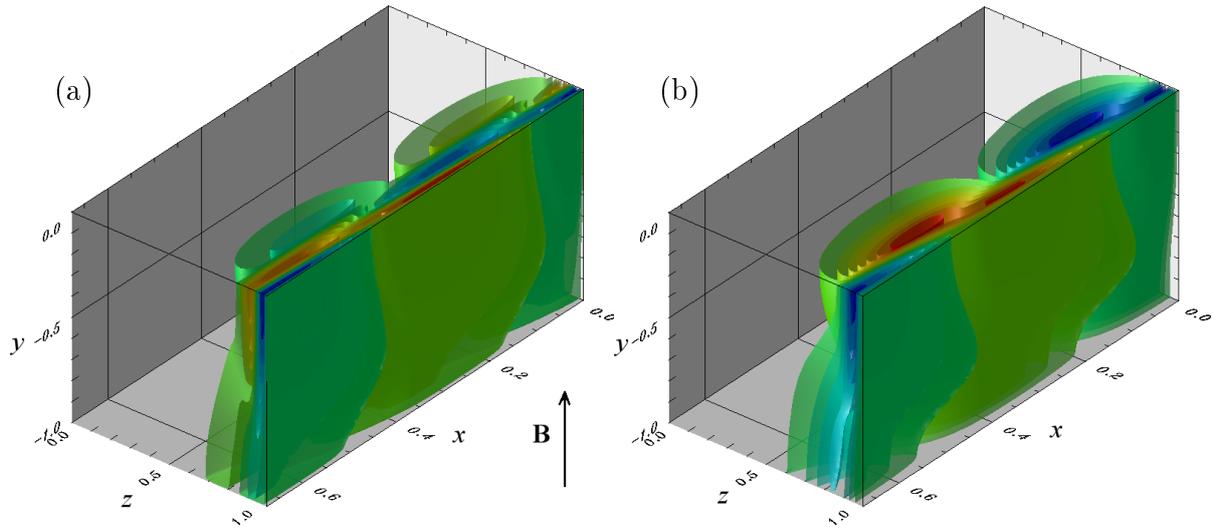


Abbildung 3.13: Isoflächen infinitesimaler Störungen für (a) die Geschwindigkeit in axialer Richtung  $u'$  und (b) das elektrische Potential  $\phi'$  für  $Ha = 400$ ,  $Re_c \approx 390$ ,  $c = 0.1$  und  $A = 1$  für Mode I

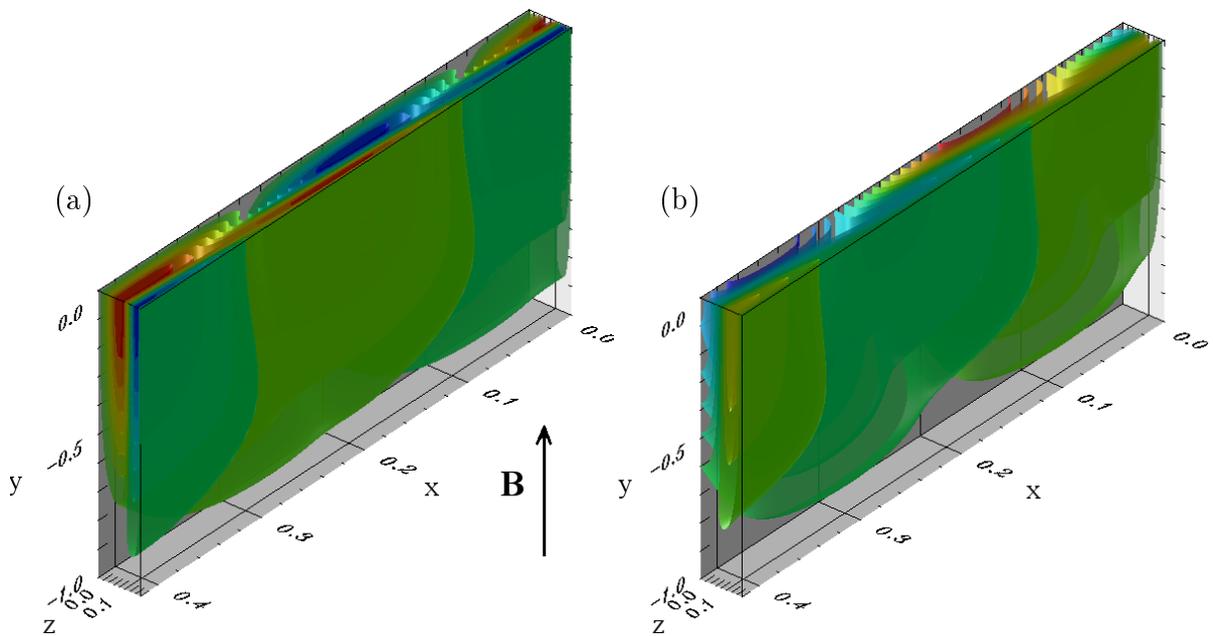


Abbildung 3.14: Isoflächen infinitesimaler Störungen  $u'$  für (a) die Geschwindigkeit in axialer Richtung und (b) das elektrische Potential  $\phi'$  für  $Ha = 500$ ,  $Re_c = 977$ ,  $c = 0.1$  und  $A = 0.16$  für Mode I

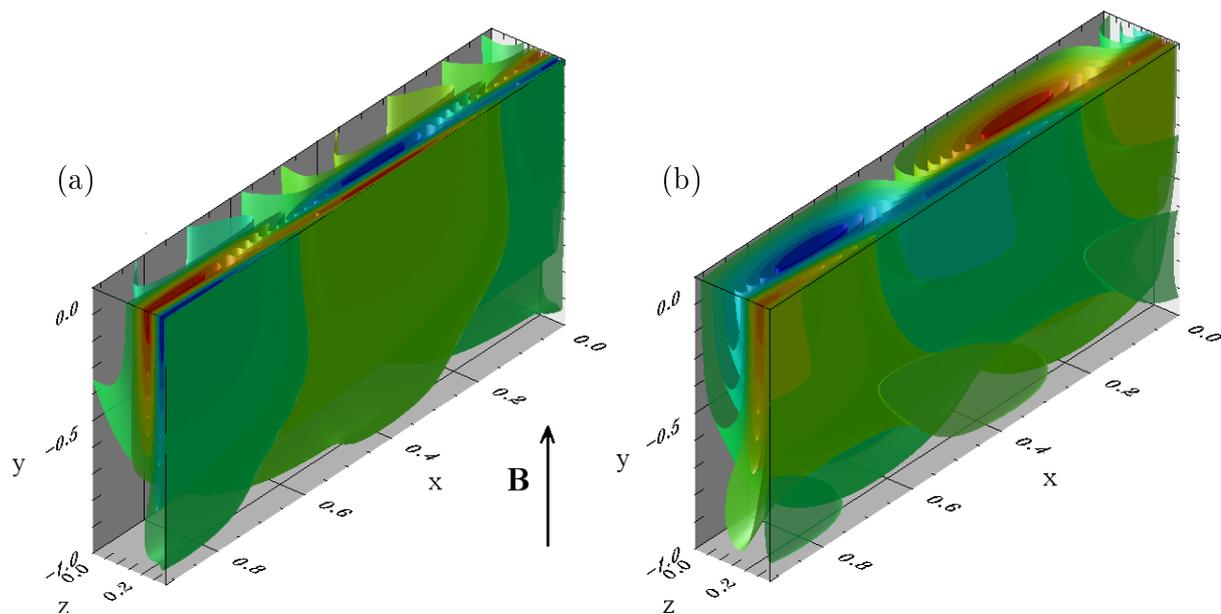


Abbildung 3.15: Isoflächen infinitesimaler Störungen für (a) die Geschwindigkeit in axialer Richtung  $u'$  und (b) das elektrische Potential  $\phi'$  für  $Ha = 500$ ,  $Re_c = 2265$ ,  $c = 0.1$  und  $A = 0.3$  für Mode III

gen nicht intensiv miteinander wechselwirken. Allerdings ist erkennbar, dass  $\phi'$  bereits die gesamte Kanalbreite ausfüllt und es aufgrund der Antisymmetrie von  $\phi'$  bei Mode III zu einer dämpfenden Wechselwirkung der Potentialstörungen in den gegenüberliegenden Seitenschichten kommt, weshalb  $Re_c$  ansteigt.

## 3.5 Lineare Stabilität der Walker-Strömung

Zusätzlich zur Hunt-Strömung wurde eine lineare Stabilitätsanalyse für einen Kanal mit vier elektrisch leitenden Wänden (Walker-Strömung) durchgeführt. Das methodische Vorgehen ist analog zur Hunt-Strömung und zusammen mit detaillierten Ergebnissen in Priede, Arlt, & Bühler (2016) dargestellt. Im Folgenden sollen nur die wesentlichen Ergebnisse vorgestellt und ein Vergleich mit der Hunt-Strömung vorgenommen werden.

### 3.5.1 Grundströmung

Die Geschwindigkeits- und Potentialverteilung für eine eingelaufene laminare Strömung wurde bereits in Kapitel 2.2.2 behandelt, weshalb sie hier nicht weiter beschrieben werden sollen.

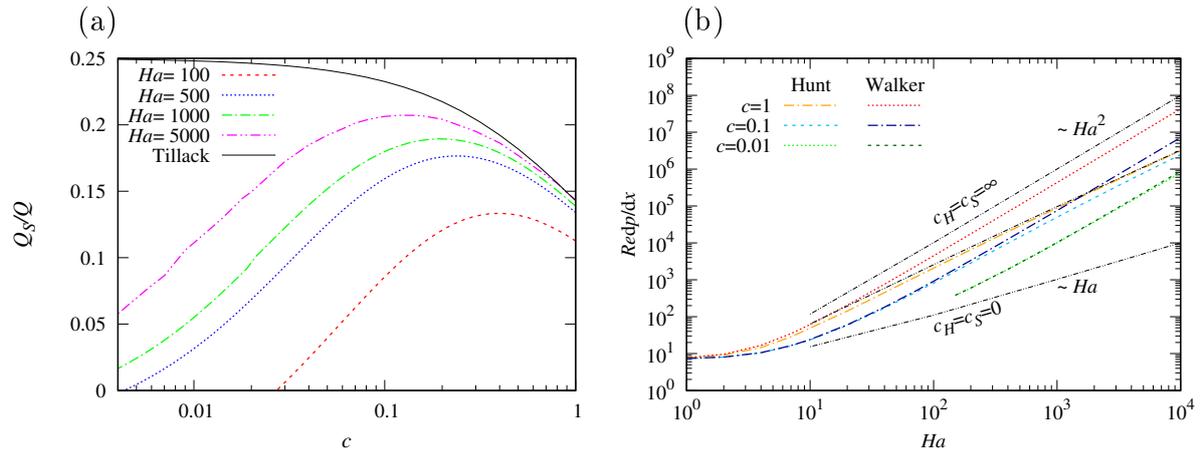
Zunächst wird wieder der relative Volumenstrom  $Q_S/Q$  durch die Seitenschicht betrachtet, der in Abbildung 3.16 (a) in Abhängigkeit von  $Ha$  für verschiedene  $c$  gezeigt ist.  $Q_S/Q$  steigt zunächst mit steigendem  $Ha$  für alle  $c$  an, allerdings ist für  $c = 1$  und  $c = 0.1$  ein asymptotisches Verhalten erkennbar. Nach Tillack & McCarthy (1989) gilt:

$$Q_S/Q = 1 - Q_c/Q = 1 - \frac{c+1}{c+4/3}, \quad (3.20)$$

wenn  $Ha^{-1/2} \ll c$  ist. In Abbildung 3.16 (a) ist der Verlauf von  $Q_S/Q$  in Abhängigkeit von  $c$  gemäß (3.20) und der linearen Stabilitätsanalyse für verschiedene  $Ha$  dargestellt. Nach Tillack & McCarthy (1989) ist  $Q_S/Q \leq 0.25$ , sodass höchstens ein Viertel des Volumenstroms durch die Seitenschicht fließt. Mit steigendem  $c$  nimmt  $Q_S/Q$  ab, weil sich mit zunehmend besser leitender Seitenwand mehr Strompfade durch die Seitenwand schließen, was zu einer Abnahme der Geschwindigkeitsjets führt. Die Ergebnisse für  $Q_S/Q$  aus der linearen Stabilitätsanalyse zeigen, dass  $Q_S/Q$  zunächst mit steigendem  $c$  zunimmt und für  $c \approx Ha^{-1/4}$  ein Maximum erreicht (Priede *et al.*, 2016). Das bedeutet, dass für diese Kombination von  $Ha$  und  $c$  die größten Geschwindigkeiten in den Jets auftreten. Mit weiter steigendem  $c$  fällt  $Q_S/Q$  wieder ab.

Insbesondere für  $c \ll 1$  ist ein großer Unterschied zur asymptotischen Betrachtung von Tillack & McCarthy (1989) erkennbar. Zum einen ist die Bedingung  $Ha^{-1/2} \ll c$  bei den betrachteten Hartmann-Zahlen für  $c \lesssim 0.02$  nicht mehr erfüllt. Zum anderen zeigt sich zusätzlich, dass  $Ha^{-1/2} \ll c$  sehr strikt erfüllt sein muss, um (3.20) anwenden zu können. Dementsprechend zeigt Abbildung 3.16 (a), dass sich  $Q_S/Q$  dem asymptotischen Verlauf gemäß Tillack & McCarthy (1989) mit steigendem  $Ha$  annähert. Erst ab  $c \approx 0.7$  ist eine gute Übereinstimmung für  $Ha = 5000$  im Vergleich zur Asymptotik erkennbar. Für  $c = 1$  ergibt sich nach (3.20)  $Q_S/Q \approx 0.14$ , was gut mit dem in Abbildung 3.16 (a) gezeigten Ergebnis für  $Ha = 5000$  überein.

Verglichen mit der Hunt-Strömung, bei der  $Q_S/Q \rightarrow 1$  für  $c^2 Ha \gg 1$  gilt (siehe Abbildung 3.4 a), wird  $Q_S/Q$  bei der Walker-Strömung am größten, wenn  $c^4 Ha \gg 1$  ist. Maximal kann bei der Walker-Strömung theoretisch nur ein Viertel des Gesamtvolumenstroms durch die Seitenschicht transportiert werden, wobei dafür  $c \ll 1$  sein muss, sodass extrem große Werte von  $Ha$  notwendig sind. Im Gegensatz zur Hunt-Strömung wird der Großteil des Volumenstroms folglich durch die Kernströmung und nicht durch die Seitenschichten realisiert.



Abbildungung 3.16: (a) Relativer Volumenstrom  $Q_S/Q$  in Abhängigkeit von  $Ha$  als Funktion von  $c$ . (b) Druckgradient  $Re dp/dx$  in Abhängigkeit von  $Ha$  für verschiedene  $c$

Der Druckgradient  $Re dp/dx$  ist in Abbildung 3.16 (b) in Abhängigkeit von  $Ha$  für verschiedene  $c$  gezeigt. Zum Vergleich ist zusätzlich der Druckgradient für die Hunt-Strömung dargestellt. Für  $Ha \rightarrow 0$  ergibt sich wieder der hydrodynamische Fall mit  $Re dp/dx = 7.1$ . Steigt  $Ha$  an, ergibt sich erneut ein Potenzgesetz zwischen  $Re dp/dx$  und  $Ha$  und es gilt für  $Ha \gg 1$ ,  $Re dp/dx \sim Ha^2$ . Je nach  $c$  stellt sich für hinreichend große  $Ha$  folglich ein größerer Druckgradient als für die ideale Hunt-Strömung ein. Wird ein konstantes  $Ha > 0$  betrachtet, wächst  $Re dp/dx$  monoton mit zunehmendem  $c$ . Im Vergleich zur Hunt-Strömung ist erkennbar, dass bis  $c \approx Ha^{-1/2}$  der Druckgradient für beide Strömungstypen fast nicht unterscheidbar ist. Erst ab  $c > Ha^{-1/2}$  steigt  $Re dp/dx$  der Walker-Strömung zunehmend stärker an, weil die Seitenwand nun besser elektrisch leitend ist als die Seitenschicht. Für den Druckgradienten stellt sich ein asymptotisches Verhalten mit  $Re dp/dx \sim Ha^2$  ein. Ein weiterer Unterschied zwischen den beiden Strömungstypen ist, dass bei der Hunt-Strömung  $Re dp/dx$  für  $c \gg Ha^{-1}$  sich dem Kurvenverlauf der idealen Hunt-Strömung annähert, weil die Hartmann-Wand viel besser leitend wird als die Hartmann-Schicht. Bei der Walker-Strömung werden hingegen die Werte des Druckgradienten für perfekt leitende Wände nur für  $c \rightarrow \infty$  erreicht. Ein asymptotisches Verhalten  $Re dp/dx \sim Ha^2$  stellt sich aber für alle  $c > 0$  für  $Ha \gg 1$  ein.

### 3.5.2 Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse und Vergleich mit der Hunt-Strömung

Das erhaltene Stabilitätsdiagramm für die Walker-Strömung ist in Abbildung 3.17 (a) für verschiedene  $c$  gezeigt.

Für  $Ha = 0$  ist die Strömung stabil. Analog zur Hunt-Strömung fällt mit anwachsender Hartmann-Zahl die kritische Reynolds-Zahl zunächst stark ab. Bei  $Ha \approx 12$  erreicht  $Re_c$  für  $c = 1$  ein lokales Minimum mit  $Re_c \approx 4800$ . Danach steigt  $Re_c$  bis  $Ha \approx 30$  an, fällt aber für weiter steigende  $Ha$  wieder ab und wird für  $Ha \gg 1$  nahezu unabhängig von  $Ha$  mit  $Re_c \approx 870$ . Der Knick im Verlauf von  $Re_c$  bei  $Ha \approx 30$  ergibt sich durch den Wechsel von Mode II zu Mode I als instabilsten Mode.

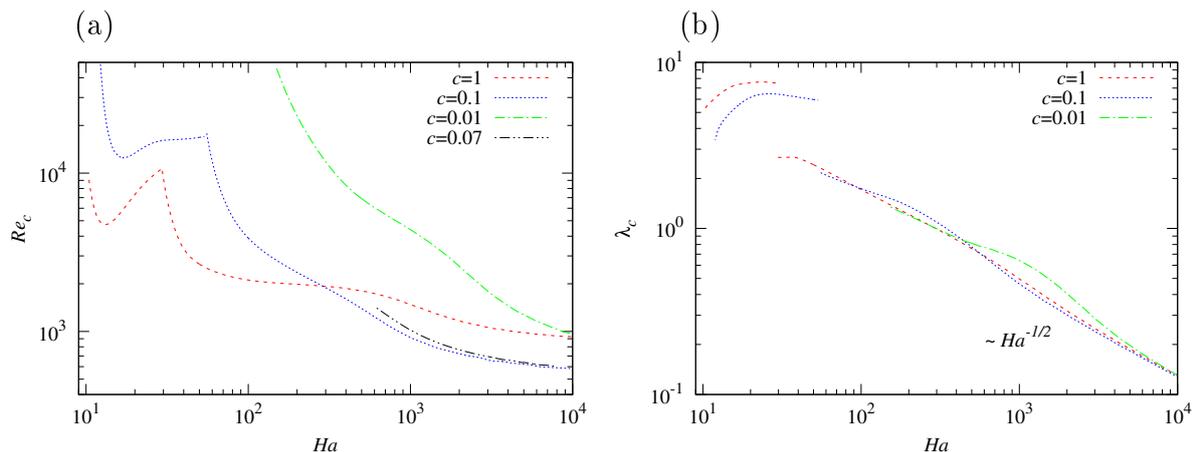


Abbildung 3.17: Kritische Reynolds-Zahl  $Re_c$  (a) und kritische Wellenlänge  $\lambda_c$  (b) des instabilsten Modes als Funktion der Hartmann-Zahl für verschiedene Wandleitfähigkeitsparameter  $c$  für die Walker-Strömung.

Die zusätzlich gezeigten Kurven für  $c = 0.1$  und  $c = 0.01$  verhalten sich prinzipiell ähnlich, erreichen aber andere Grenzwerte für  $Ha \gg 1$ . Für  $c = 0.1$  liegt dieser bei  $Re_c \approx 540$ , für  $c = 0.01$  konnte er mit vertretbarem numerischen Aufwand nicht mehr berechnet werden. Auffällig ist, dass mit steigendem  $Ha$  die Kurve für  $c = 0.1$  kleinere  $Re_c$  erreicht, als diejenige für  $c = 1$ . Dieses Verhalten lässt sich mittels Abbildung 3.16 (a) erklären. Beispielsweise ist bei  $Ha = 500$   $Q_S/Q \approx 0.16$  für  $c = 0.1$  und  $Q_S/Q \approx 0.13$  für  $c = 1$ . Daraus folgt, dass der Jet in der Seitenschicht für  $c = 0.1$  stärker ausgeprägt ist als der für  $c = 1$  und er damit eine kleinere kritische Reynolds-Zahl bei  $Ha = 500$  hat. Folglich ist entscheidend, welches Produkt aus  $cHa$  den größten Volumenstrom in der Seitenschicht verursacht, woraus eine kleinere kritische Reynolds-Zahl folgt. Es ergibt sich ein wesentlicher Unterschied zur Hunt-Strömung, denn dort ist  $Re_c(c_1) \geq Re_c(c_2)$  wenn bei gleicher Hartmann-Zahl für die Wandleitparameter  $c_1 < c_2$  gilt.

Zum Vergleich der kritischen Reynolds-Zahlen der Walker-Strömung kann die lineare Stabilitätsanalyse von Ting *et al.* (1991) herangezogen werden. Für das dort betrachtete  $c = 0.07$  sind in Abbildung 3.17 (a) ebenfalls Ergebnisse für  $Re_c(Ha)$  gezeigt. Im Grenzfall  $Ha \gg 1$  ist  $Re_c \approx 550$ . Ting *et al.* (1991) finden hingegen  $Re_c \approx 313$  für  $Ha \gg 1$ . Beide Werte sind von der selben Größenordnung, unterscheiden sich aber dennoch um einen Faktor 1.7. Ursache hierfür kann das unterschiedliche Vorgehen sein. Ting *et al.* (1991) betrachten wegen der Kanalsymmetrie nur eine Seitenschicht mit relativ wenigen Rechenpunkten für ihre lineare Stabilitätsanalyse. Dadurch kann die Dämpfung zu niedrig sein. In der vorliegenden Arbeit wird hingegen der gesamte Kanalquerschnitt für die Stabilität der Strömung betrachtet, welcher zusätzlich durch mehr Rechenpunkte deutlich genauer aufgelöst wird.

Verglichen mit der Hunt-Strömung weist die Walker-Strömung größere kritische Reynolds-Zahlen auf. Strömungen dieses Typs sind folglich stabiler. Der Grund liegt darin, dass die Geschwindigkeitsjets der Walker-Strömung schwächer ausgeprägt sind als die der Hunt-Strömung. Für letztere ist beispielsweise bei  $c = 0.1$  und  $Ha = 100$   $Re_c \approx 2760$ . Bei denselben Parametern einer Walker-Strömung gilt hingegen  $Re_c \approx 3900$ .

Abbildung 3.17 (b) zeigt die kritische Wellenlänge  $\lambda_c$  in Abhängigkeit von der Hartmann-Zahl für die gleichen  $c$  wie in 3.17 (a). Die Sprünge in  $\lambda_c$  bei  $Ha \approx 30$  für  $c = 1$  bzw.

$Ha \approx 50$  für  $c = 0.1$  ergeben sich durch den Wechsel von Mode II zu Mode I, welche verschiedene Wellenzahlen haben. Bei Anlegen eines schwachen Magnetfeldes wächst  $\lambda_c$  zunächst an, zeigt aber schnell nur noch geringe Änderungen mit steigendem  $Ha$  und es gilt  $\lambda_c \sim O(10)$ . Nach dem Wechsel zu Mode I fällt  $\lambda_c$  und für  $Ha \gg 1$  gilt  $\lambda_c \sim Ha^{-1/2}$ . Analog zur Hunt-Strömung skalieren die Abmessungen der zu Mode I gehörenden Instabilitäten wie die Seitenschichtdicke  $\delta_S$ , weil die Instabilitäten dort lokalisiert sind. Weiterhin unterscheiden sich Werte der kritischen Wellenlängen nur geringfügig von denen der Hunt-Strömung.

In Abbildung 3.18 (a) ist  $Re_c(c)$  für verschiedene  $Ha$  gezeigt. Im Vergleich zur Hunt-Strömung in Abbildung 3.7 ist als wesentlicher Unterschied erkennbar, dass  $Re_c(c)$  ein Minimum hat, welches bspw. für  $Ha = 1000$  bei  $c \approx 0.2$  liegt. Dieses Minimum fällt mit dem Maximum von  $Q_S/Q$  in der Seitenschicht zusammen, wie Abbildung 3.16 (a) zeigt. Die Strömung hat folglich dann die kleinste kritische Reynolds-Zahl, wenn in der Seitenschicht der größte Volumenstrom transportiert wird. Nach Priede, Arlt, & Bühler (2016) ist dies der Fall, wenn  $c \approx Ha^{-1/4}$  ist. Für  $c \rightarrow 0$  steigt  $Re_c$  stark an und im Grenzfall  $c = 0$  entwickelt sich die Shercliff-Strömung für die  $Re_c \gtrsim 48 \cdot 10^3 Ha^{1/2}$  gilt (Pothérat, 2007). Wenn  $c > Ha^{-1/4}$ , steigt  $Re_c$  wieder an, weil  $Q_S/Q$  abnimmt. Für die Hunt-Strömung streben die kritischen Reynolds-Zahlen für  $c \gg 1$  asymptotisch gegen einen festen Wert (siehe Abbildung 3.7 (a)). Im untersuchten Parameterbereich konnte dieses Verhalten für die Walker-Strömung nicht gefunden werden.

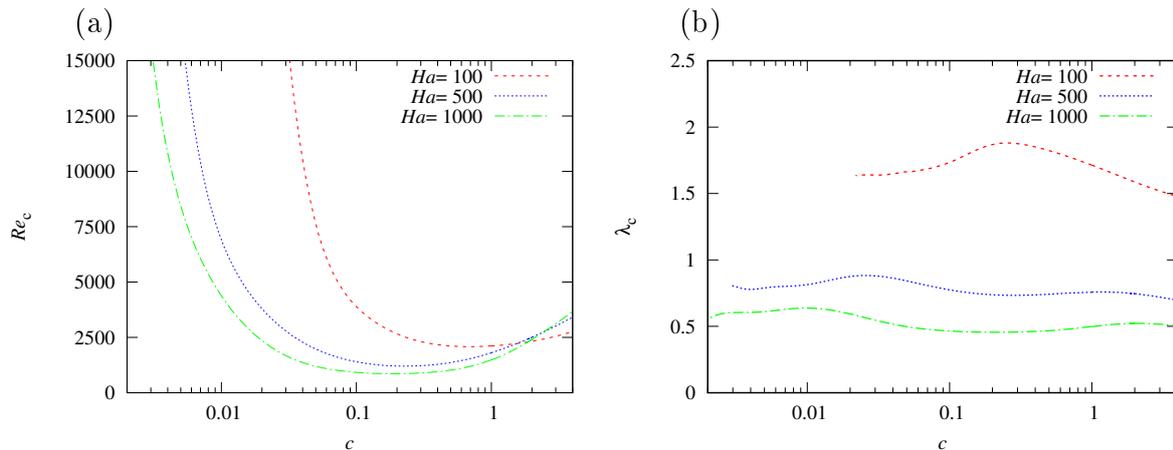


Abbildung 3.18: Kritische Reynolds-Zahl  $Re_c$  (a) und kritische Wellenlänge  $\lambda_c$  (b) in Abhängigkeit des Wandleitparameters  $c$  für verschiedene  $Ha$

Der in Abbildung 3.18 (b) gezeigte Verlauf  $\lambda_c(c)$  weist einen geringen Einfluss von  $c$  auf  $\lambda_c$  auf, der mit steigender Hartmann-Zahl monoton fällt. Es ist der bereits diskutierte Einfluss der Hartmann-Zahl auf  $\lambda_c$  erkennbar (siehe Abbildungen 3.17 (b)). Im Vergleich zwischen Walker- und Hunt-Strömung (siehe Abbildung 3.7 (b)) fällt auf, dass  $\lambda_{c,Walker} \gtrsim \lambda_{c,Hunt}$  ist. Bei der Hunt-Strömung geht  $\lambda_c$  mit steigendem  $c$  gegen einen konstanten Wert, der nur von  $Ha$  abhängt, was bei der Walker-Strömung hingegen nicht der Fall ist. Diese Unterschiede dürften auf das bereits beschriebene verschiedene Verhalten der Geschwindigkeitsjets dieser beiden Strömungstypen zurückzuführen sein.

Der Einfluss des Aspektverhältnisses auf die Stabilität der Strömung wurde ebenfalls untersucht. Entsprechende Ergebnisse für  $Ha = 100$  und  $c = 0.1$  für alle vier Moden sind in Abbildung 3.19 (a) für  $Re_c$  und (b) für  $\lambda_c$  dargestellt. Das Verhalten von  $Re_c(A)$  ist

für alle Moden prinzipiell gleich zu dem der Hunt-Strömung, lediglich die Werte von  $Re_c$  unterscheiden sich. Für  $A \approx 0.34$  ist ein Minimum von  $Re_c$  mit  $Re_c = 1214$  für Mode I und  $Re_c = 17300$  für Mode II erkennbar. Bei der betrachteten Hartmann-Zahl wirkt das Aspektverhältnis  $A$  stabilisierend auf die Strömung, wenn  $A \lesssim 4\delta_S$  ist. Wenn hingegen  $A \gg \delta_S$ , ist nur ein schwacher Einfluss von  $A$  auf  $Re_c$  der Moden I und II erkennbar. Entsprechend zeigt  $\lambda_c(A)$  in Abbildung 3.19 (b) nur eine geringe Abhängigkeit von  $A$  wenn  $A \gg \delta_S$  ist. Im schmalen Kanal mit  $A < 1$  nimmt hingegen  $\lambda_c$  mit  $A$  ab. Wegen der größeren Wellenlängen des Modes II tritt dieser Effekt dort schon bei größeren  $A$  als bei Mode I auf.

Für  $Re_c$  von Mode III ist in Abbildung 3.19 (a) erkennbar, dass  $Re_c$ , aufgrund der Symmetrieeigenschaften von Mode III, für  $A < 1$  kontinuierlich zunimmt. Die kritische Reynolds-Zahl von Mode IV bildet mit abnehmendem  $A$  bei  $A \approx 0.7$  ein schwaches Minimum aus, bevor  $Re_c$  analog zu  $Re_c$  von Mode III bei weiter abnehmendem  $A$  ansteigt.

Für die relative Energieverteilung konnte ebenfalls für Mode I gezeigt werden, dass sich bei moderaten  $Ha$  zunächst Wirbelstrukturen entwickeln, deren Rotationsachsen senkrecht zum Magnetfeld stehen. Mit größer werdendem  $Ha$  steigt die magnetische Dämpfung, sodass der Großteil der turbulenten kinetischen Energie in den  $x$ - und  $z$ -Komponenten der Geschwindigkeitsstörung enthalten ist. Die resultierenden Wirbel sind dann parallel zum Magnetfeld orientiert.

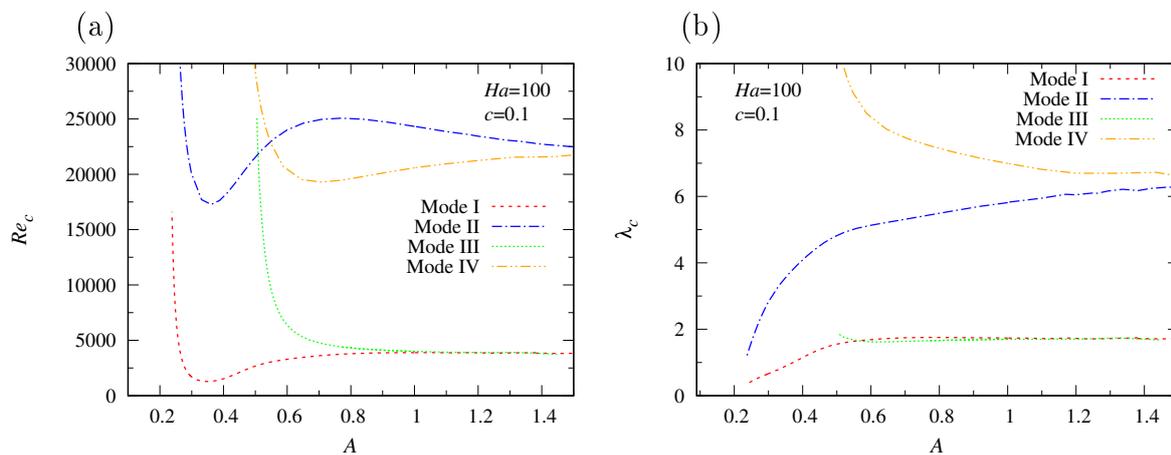


Abbildung 3.19: Kritische Reynolds-Zahl  $Re_c$  (a) und kritische Wellenlänge  $\lambda_c$  (b) in Abhängigkeit vom Aspektverhältnis  $A$  für verschiedene  $Ha$

## 3.6 Wesentliche Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse

Erstmalig konnte das lineare Stabilitätsverhalten von MHD-Strömungen in Rechteckkanälen mit dünnen und realistisch leitfähigen Wänden untersucht werden. Dazu wurde die Randbedingung (2.17) in das von Priede *et al.* (2010) entwickelte Verfahren implementiert. Die Untersuchung der linearen Stabilität der Hunt-Strömung mit beliebig leitfähigen Hartmann-Wänden und elektrisch isolierten Seitenwänden stellt eine Erweiterung früherer Arbeiten dar. Es zeigt sich, dass die Leitfähigkeit der Hartmann-Wand einen wesentlichen Einfluss auf die Stabilität der Strömung hat. Ein abnehmendes  $c$  hat eine Zunahme von  $Re_c$  bei konstantem  $Ha$  zur Folge. Im Grenzfall  $c \ll \delta_H \sim Ha^{-1}$  geht die Strömung in die Shercliff-Strömung über. Für  $c \gg \delta_H \sim Ha^{-1}$  ergibt sich hingegen die ideale Hunt-Strömung. Entsprechend nimmt in diesem Grenzfall mit  $cHa \gg 1$  die Abhängigkeit der kritischen Reynolds-Zahl von  $Ha$  kontinuierlich ab. Für  $c = 1$  konnte  $Re_c \approx 120$  für  $Ha \gg 1$  ermittelt werden.

Die instabilen Strömungsmuster sind in den Seitenschichten lokalisiert und ihre kritische Wellenlänge  $\lambda_c$  skaliert mit der Dicke der Seitenschicht  $\delta_S \sim Ha^{-1/2}$ . Weiterhin bewegen sich die Instabilitäten mit  $0.47u_{max}$  in Hauptströmungsrichtung. Deutlich wurde, dass die Geschwindigkeitsstörungen anisotrop verteilt sind und diejenigen Komponenten der Geschwindigkeitsstörungen mit den größten Energieanteilen Wirbelstrukturen ausbilden, die in Magnetfeldrichtung orientiert sind.

Das Aspektverhältnis  $A$  wirkt sich auf die Stabilität der Strömung aus, wenn der Kanal hinreichend schmal ist und die Störungen der gegenüberliegenden Seitenschichten miteinander wechselwirken können. Je nach Mode hat dies eine Stabilisierung (Mode III,IV) oder Destabilisierung (Mode I, II) der Strömung zur Folge. Die Destabilisierung der Moden I und II erfolgt in einem Bereich  $4\delta_S < A$ . Bei kleineren  $A$  erfolgt eine Zunahme von  $Re_c$  dieser Moden, weil sich die Seitenschichten überlagern und sich die Instabilitäten gegenseitig behindern.

In der Hunt-Strömung bilden sich deutlich größere Geschwindigkeitsjets in den Seitenschichten aus als bei der Walker-Strömung. Das hat zur Folge, dass  $Re_c$  bei gleichem  $c$  und  $Ha$  in der Hunt-Strömung kleiner ist. Da in dieser Strömung die Jets mit zunehmendem  $c$  und  $Ha$  anwachsen, nimmt  $Re_c$  bei  $Ha \gg 1$  kontinuierlich ab, bis sich ein asymptotisches Verhalten eingestellt hat. Im Gegensatz dazu sind in der Walker-Strömung die Jets dann maximal, wenn  $c \approx Ha^{-1/4}$  erfüllt ist. Bei entsprechender Parameterkombination ist es demnach möglich, dass  $Re_c(c_1) < Re_c(c_2)$  mit  $c_1 < c_2$  bei konstantem  $Ha \gg 1$ . Bei der Hunt-Strömung ist dies nicht möglich.

# 4 Numerische Simulation magnetohydrodynamischer Kanalströmungen

Im vorangegangenen Kapitel wurde mit Hilfe der linearen Stabilitätsanalyse die Transition einer laminaren zu einer zeitabhängigen MHD-Strömungen als Funktion der Parameter  $Ha$ ,  $c$ , und  $A$  untersucht. Diese Untersuchungen sind aber auf die unmittelbare lineare Stabilitätsgrenze der MHD-Strömung mit  $Re_c$ ,  $\lambda_c$  und  $f_c^*$  begrenzt. Basierend auf den Ergebnissen der linearen Stabilitätsanalyse werden deshalb numerische Simulationen durchgeführt, wobei die Reynolds-Zahl über die kritische Reynolds-Zahl der linearen Stabilitätsanalyse hinaus erhöht wird. Dadurch kann das Verhalten der instabilen MHD-Strömung oberhalb der linearen Stabilitätsgrenze untersucht werden. Für die numerischen Simulationen werden Hunt-Strömungen betrachtet, bei denen  $Ha$ ,  $Re$  und  $A$  variiert werden. Der Wandleitparameter wird auf  $c = 0.03$  fixiert, um Vergleiche mit experimentellen Daten vornehmen zu können (siehe Anhang 7).

## 4.1 Numerisches Verfahren

### 4.1.1 Grundlagen

Um allgemein eine Strömung numerisch berechnen zu können, müssen zunächst die betrachteten mathematischen Gleichungen und das betrachtete Rechenggebiet diskretisiert werden. Gemeint ist damit die Darstellung des Rechenggebietes durch endlich viele Rechenpunkte und Überführung der Differentialgleichungen in algebraische Gleichungen, deren Lösung auf den Rechenpunkten erfolgt. In dieser Arbeit wird hierfür die Finite-Volumen-Methode (FVM) verwendet. Dabei wird das betrachtete Rechenggebiet in eine finite Anzahl nicht überlappender Volumenelemente  $V_i$  zerlegt. In den Mittelpunkten dieser Volumenelemente werden die algebraischen Gleichungen gelöst. Dabei werden für gewöhnlich Gleichungen für eine Erhaltungsgröße  $\psi(\mathbf{x}, t)$  betrachtet, die die Form:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_i} \psi(\mathbf{x}, t) dV + \int_{A_i} \mathbf{f}(\psi(\mathbf{x}, t)) \cdot d\mathbf{A} = \sum q(\mathbf{x}, t), \quad (4.1)$$

annehmen. Gleichung (4.1) drückt aus, dass die zeitliche Änderung der Größe  $\psi$  in  $V_i$  dem Fluss  $\mathbf{f}(\psi(\mathbf{x}, t))$  durch die Oberfläche  $A_i$  von  $V_i$  entspricht. Mit  $\sum q$  wird die Summe zusätzlicher Quellterme von  $\psi$  bezeichnet. Wichtig ist, dass die Erhaltungsgleichungen in integraler Form ausgedrückt und für jedes  $V_i$  berechnet werden.

Für die Herleitung der Massenerhaltung wird bspw.  $\psi = \rho$  gesetzt. Der Fluss durch die Oberfläche ergibt sich aus  $\rho \mathbf{v}$  und  $q = 0$ , da keine weiteren Quellen oder Senken im Volumenelement auftreten. Es gilt daher:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_i} \rho dV + \int_{A_i} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = 0. \quad (4.2)$$

Mit Hilfe des Gauß'schen Satzes ergibt sich daraus

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (4.3)$$

Wird hingegen der Impuls betrachtet, werden durch  $q$  weitere Oberflächenkräfte (Druckgradient und Reibung) und Volumenkräfte (Schwerkraft, Lorentz-Kraft) berücksichtigt und in entsprechender integraler Form ausgedrückt.

Werte von  $\psi$  werden im Volumenmittelpunkt gespeichert. Zur Lösung der Gleichungen, müssen die Werte für die Volumen- und die Oberflächenintegrale mittels verschiedener Verfahren approximiert werden. Je nach Verfahren ist es dann notwendig, Werte von benachbarten Volumenmittelpunkten in die Approximation des Integrals mittels Interpolation mit einzubeziehen.

Der große Vorteil von FVM ist, dass die Betrachtung jedes Teilvolumens konservativ ist und damit das numerische Verfahren für das gesamte Rechengebiet automatisch konservativ ist und somit inhärent die Erhaltungsgleichungen erfüllt sind. Weiterhin kann es für alle Arten von Gittern angewendet werden.

Für die in dieser Arbeit vorgenommenen numerischen Berechnung von MHD-Strömungen werden die Gleichungen (2.9) und (2.14) auf einem strukturierten, orthogonalen Rechteckgitter gelöst.

### 4.1.2 Verwendete Lösungsalgorithmen

Zur numerischen Lösung eines konkreten Strömungsproblems müssen die relevanten physikalischen Gleichungen in ein Programm bzw. eine Programmbibliothek implementiert werden. Diese Programmbibliothek wird Solver genannt.

Um eine MHD-Strömung berechnen zu können, muss in der Impulsgleichung (2.9) die Lorentz-Kraft bestimmt werden. Ausgangspunkt des in dieser Arbeit verwendeten Solvers ist der frei verfügbare Solver `conjugatedHeatFoam`, der Teil des frei verfügbaren Programms `foam-extend` ist (`foam-extend project`, 2015). Dieses Programm wird für die numerischen Simulationen verwendet und in Abschnitt 4.1.4 näher beschrieben.

Basierend auf dem Solver `conjugatedHeatFoam` wurde in der Arbeitsgruppe ein eigener Solver für MHD-Probleme entwickelt und für diese Arbeit verwendet (Mistrangelo & Bühler, 2011). Anlehnend an `conjugatedHeatFoam` wird der MHD-Solver `conjugatedMHDfoam` genannt. Er basiert auf der Idee der induktionsfreien Approximation, wie sie in Kapitel 2 erläutert wurde. Dementsprechend wird nicht das induzierte Magnetfeld, wie in `mhdFoam`, sondern das erzeugte elektrische Potential  $\phi$  berechnet. Dadurch ist es möglich, das elektrische Potential sowohl im Fluid, als auch in der Wand zu berechnen, also in Regionen mit unterschiedlichen physikalischen Eigenschaften.

Das Besondere am conjugated-Verfahren ist, dass der Solver Lösungen für mehrere Regionen gleichzeitig berechnet. Zu lösen sind die Gleichungen:

$$\Delta(\sigma_{fl}\phi_{fl}) - \nabla \cdot (\sigma_{fl}\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (4.4)$$

und

$$\Delta(\sigma_w\phi_w) = 0, \quad (4.5)$$

wobei  $\phi_{fl}$  das elektrische Potential im Fluid mit der elektrischen Leitfähigkeit  $\sigma_{fl}$  und  $\phi_w$  das Potential in der Wand mit der Leitfähigkeit  $\sigma_w$  beschreiben. Bei der Diskretisierung werden (4.4) und (4.5) in einem zu lösenden Gleichungssystem ausgedrückt. Die aneinander grenzenden Ränder der Regionen werden mit der regionCouple-Randbedingung gekoppelt, sodass ein Informationsaustausch über den Rand hinweg erfolgen kann. Mit dieser Methode können daher Kanäle mit endlich elektrisch leitfähigen Wänden untersucht werden, was für diese Arbeit wesentlich ist. Die von Walker (1981) eingeführte Dünne-Wand-Approximation ist deshalb nicht erforderlich.

Durch Implementierung des Ohm'schen Gesetzes für bewegte Leiter (2.13) lässt sich die Stromdichte  $\mathbf{j}$  berechnen, welche nach Ni *et al.* (2007) in einer konservativen Form ausgedrückt wird. Dadurch wird der numerische Fehler reduziert, weil keine künstlichen Quellen oder Senken für elektrische Ladungen auftreten können (Ferziger & Peric, 2002). Gemäß Gleichung (2.10) lässt sich aus  $\mathbf{j}$  die Lorentz-Kraft bestimmen.

Insgesamt werden mit conjugatedMHDfoam die Differentialgleichungen (2.1) und (2.14), unter Verwendung von (2.13) und (2.10), gelöst.

Als Lösungsalgorithmus wird das Pressure-Implicit-with-Splitting-of-Operator-Verfahren (PISO) verwendet. Dabei werden zur numerischen Lösung der Impulsgleichung pro Zeitschritt entweder Startwerte oder Werte des vorhergehenden Zeitschrittes verwendet. Das daraus resultierende Geschwindigkeitsfeld erfüllt allerdings nicht die Kontinuitätsgleichung. Deswegen wird eine Druckkorrekturgleichung gelöst, mit deren Hilfe das Geschwindigkeitsfeld korrigiert wird. Dies wird iterativ solange wiederholt, bis Impuls- und Kontinuitätsgleichung erfüllt sind. Anschließend erfolgt der nächste Zeitschritt und das Verfahren beginnt von vorn. (Ferziger & Peric, 2002).

Die räumlichen Ableitungen des numerischen Verfahrens haben eine Genauigkeit zweiter Ordnung, während die zeitlichen Ableitungen eine Genauigkeit erster Ordnung haben.

In einer zweiten Version wurde der Solver für periodische Randbedingungen angepasst. Für instabile Strömungen bedeutet das, dass der Kanal mindestens so lang sein muss, wie eine Wellenlänge der Störung.

### 4.1.3 Grundkonfiguration und Randbedingungen

Zur Simulation der in dieser Arbeit betrachteten Kanalströmungen werden strukturierte, orthogonale Rechteckgitter verwendet. Ein Gitter besteht dabei aus einer Vielzahl einzelner Gitterzellen bzw. Volumenelementen, welche die Diskretisierung des Rechengebietes realisieren. Die Rand- bzw. Grenzflächen des Gitters werden Patches genannt. Von diesen gibt es unterschiedliche Typen, um verschiedene physikalische Randbedingungen realisieren zu können.

Wie im Kapitel 2 ausgeführt, skalieren die Grenzschichtdicken in MHD-Kanälen mit  $\delta_{Ha} \sim Ha^{-1}$  an den Hartmann-Wänden, bzw. mit  $\delta_S \sim Ha^{-1/2}$  an den Seitenwänden. Für Anwendungen in der Kernfusion ist  $Ha \sim O(10^4)$ , sodass sich extrem dünne Grenzschichten ergeben, deren Auflösung zur korrekten Darstellung der Physik essentiell ist. Im Kernströmungsbereich ist die Geschwindigkeit hingegen meistens räumlich konstant, sodass hier eine deutlich geringere Auflösung als in den Grenzschichten ausreichend ist. Diese beiden unterschiedlichen Anforderungen lassen sich mittels nicht-äquidistanten Gittern effizient erfüllen. Für deren Erzeugung wird eine geometrische Reihe verwendet (OpenFOAM OpenFOAM Foundation, 2014). Dabei wird das Verhältnis aus kleinstem zu größtem Teilvolumen als Gradingfaktor bezeichnet. Die Diskretisierung des Rechengbietes erfolgt mit dem Programm blockMesh.

Eine Übersicht über alle verwendeten Randbedingungen ist in Tabelle 4.1 zusammengestellt. In Strömungsrichtung werden für die Validierung der laminaren, voll eingelaufenen Strömungen in Abschnitt 4.2.1 und die anschließenden numerischen Simulationen von instabilen MHD-Strömungen in Abschnitt 4.3 periodische Randbedingungen benutzt. Dabei wird eine konstante mittlere Geschwindigkeit vorgegeben. Im Abschnitt 4.2.2 wird hingegen ein nicht periodisches Problem betrachtet. Hier werden am Einlass für die Geschwindigkeit und das elektrische Potential die Lösungen für die laminare, voll eingelaufene Strömung als Dirichlet-Randbedingung, also konstante Einlasswerte (fixedValue), vorgegeben. Am Auslass müssen die Ableitungen in Strömungsrichtung verschwinden, sodass Neumann-Randbedingung mit  $\partial \mathbf{v} / \partial n = 0$  bzw.  $\partial \phi / \partial n = 0$  vorgegeben werden, wobei  $n$  die Koordinate senkrecht zur Auslassfläche ist. Eine Normalenableitung die verschwindet, wird im Folgenden als zeroGradient bezeichnet.

Für den Druck wird am Einlass die Neumann-Randbedingung  $\partial p / \partial n = 0$  vorgegeben, was aufgrund des PISO-Verfahrens notwendig ist, wenn eine Einlassgeschwindigkeit vorgegeben wird. Am Auslass lässt sich ein beliebiger Referenzdruck wählen, sodass ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $p = 0$  gesetzt werden kann.

An den Wänden gilt für die Geschwindigkeit die hydrodynamische Randbedingung  $\mathbf{v} = 0$ . Für das elektrische Potential  $\phi$  gibt es, je nach physikalischem Problem, verschiedene Randbedingungen. Im Falle von idealisierten Randbedingungen, also isolierten oder perfekt leitfähigen Wänden, ist eine Kopplung mit der Wand nicht nötig, weil die Randbedingungen (2.19) bzw. (2.20) verwendet werden können. Weist die Wand eine endliche elektrische Leitfähigkeit auf, wird eine numerische Kopplung zur numerisch aufgelösten Wand (regionCouple) an der Fluid-Wand-Grenzfläche gesetzt.

Aufgrund der Symmetrie von Rechteckkanalströmungen ist es ausreichend, nur ein Viertel des Kanalquerschnittes bei zweidimensionalen, stationären Strömungen zu betrachten. An der Symmetrieebene entspricht dies für die Geschwindigkeit einer reibungsfreien Strömung, was mit der Option slip realisiert wird.

Bei der Diskretisierung der Wand muss beachtet werden, dass die aneinander angrenzenden Grenzflächen vom Fluid und Wand in ihrer Diskretisierung identisch sind, also Zellenanzahl und Gitterweite in tangentialer Richtung übereinstimmen. Andernfalls können sich numerische Instabilitäten ausprägen. Die aneinander angrenzenden Patches sind vom Typ „regionCouple“, welcher einen Informationsaustausch zwischen den benachbarten Gittern zulässt. Im Falle einer Zerteilung des Rechengbietes zur Parallelisierung muss darauf geachtet werden, dass die einander zugeordneten Zellen aus Fluid und Wand

	Einlass	Auslass	Wand $\perp$ $\mathbf{B}$	Wand $\parallel$ $\mathbf{B}$	Symmetrie $\perp$ $\mathbf{B}$	Symmetrie $\parallel$ $\mathbf{B}$
$\mathbf{v}$	fV/cyclic	zG/cyclic	0	0	slip	slip
$\phi$	zG/cyclic	zG/cyclic	zG/0/rC	zG/0/rC	zG	0
$p$	zG/cyclic	0/cyclic	zG	zG	zG	zG

Tabelle 4.1: Randbedingungen für Geschwindigkeit, elektrisches Potential  $\phi$  und Druck  $p$ . fV: fixedValue, zG: zeroGradient, rC: regionCouple

dem selben Prozessor zugeordnet werden. Andernfalls kann es zu numerischen Fehlern kommen.

#### 4.1.4 Die Software OpenFoam

Zur Strömungssimulation wird eine erweiterte Version des quelloffenen, auf dem Finite-Volumen-Verfahren basierenden Programms OpenFoam (Open Source Field Operation and Manipulation) verwendet (Weller *et al.*, 1998, <http://openfoam.org>). OpenFoam ist zur Untersuchung für eine Vielzahl von kontinuumsmechanischen Problemen, wie Wärmetransport, Turbulenz oder Mehrphasenströmungen geeignet. Aufgrund der freien Zugänglichkeit des Quellcodes bietet es gegenüber anderen CFD-Programmen den Vorteil, dass der Nutzer volle Kontrolle über das mathematisch-numerische Verfahren hat und es selbst erweitern bzw. ändern kann. Dies wird durch die Verwendung von C++ als Programmiersprache für OpenFoam vereinfacht, weil sich dadurch eine relativ starke Abstraktion der Syntax durch Objektorientierung verwirklichen lässt. Gleichungen können so sehr ähnlich ihrer mathematischen Schreibweise programmiert werden und der Programmieraufwand für den Nutzer wird reduziert. Die Diskretisierungen der Gleichungen werden von OpenFoam durchgeführt, der Nutzer muss hierfür nur die gewünschten numerischen Verfahren angeben. Zur Diskretisierung des Rechengebietes stehen blockMesh und andere Hilfsprogramme zur Verfügung. Eine Parallelisierung von Simulationen ist mittels OpenMPI möglich. Zusätzlich werden diverse Hilfsprogramme zum Pre- und Postprocessing mitgeliefert.

In OpenFoam ist bereits ein MHD-Solver, mhdFoam, enthalten, welcher mit Hilfe des induzierten Magnetfeldes nach (2.12) die Lorentz-Kraft berechnet. Allerdings muss ein numerischer Korrekturterm eingeführt werden, um Diskretisierungsfehler zu vermeiden und um die Divergenzfreiheit des Magnetfeldes überall zu gewährleisten. Dieses Verfahren funktioniert aber nicht hinreichend gut und es treten mit zunehmender Hartmann-Zahl deutlich sichtbare Abweichungen zwischen numerischen und analytischen Lösungen auf (OpenFOAM Foundation, 2008; mhdFoam, 2012).

Deshalb wird der in Abschnitt 4.1.2 vorgestellte Solver verwendet, der auf dem elektrischen Potential  $\phi$  anstatt dem induzierten Magnetfeldes basiert. In foam-extend ist das bereits beschriebene conjugated-Verfahren verfügbar, mit dem es möglich ist, verschiedene Rechenregionen direkt miteinander zu koppeln, die unterschiedliche physikalische Eigenschaften haben. Dies ermöglicht die numerische Betrachtung von Kanälen mit endlich leitfähigen Wänden.

Weiterhin bietet foam-extend Unterstützung für Finite-Elemente-Verfahren, dynamische Gitter und Berechnungen auf GPUs (foam-extend project, 2015).

## 4.2 Validierung des numerischen Verfahrens für MHD-Rechteckkanalströmungen

### 4.2.1 Zweidimensionale Strömungen

Zunächst soll der Solver für stationäre, zweidimensionale Strömungen mit idealisierten Randbedingungen anhand analytischer Lösungen validiert werden (Shercliff, 1953; Hunt, 1965). Für perfekt elektrisch leitende oder isolierte Wände gelten für  $\phi$  die Randbedingungen (2.19) und (2.20). Eine Berechnung des elektrischen Potentials in der Wand ist nicht notwendig.

#### 4.2.1.1 Grundkonfiguration

Aufgrund der Symmetrie des Kanals ist es ausreichend, lediglich für ein Viertel des Kanalquerschnittes die numerischen Berechnungen durchzuführen, hier von  $0 \leq x \leq 0.1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , was dem oberen rechten Quadranten bei Blickrichtung in Strömungsrichtung entspricht (siehe Abbildung 2.1). Das externe Magnetfeld ist in  $y$ -Richtung orientiert und konstant. Zur Simulation des Kanalviertels wurden verschiedene Gitter verwendet, nämlich mit  $3 \times 50 \times 50$  Zellen und  $3 \times 100 \times 100$  Zellen in  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Richtung. Zusätzlich wurden die Gradingfaktoren variiert. Einlass und Auslass des Kanals sind über periodische Randbedingungen miteinander verbunden, wobei drei Zellen in  $x$ -Richtung aufgrund der laminaren, voll eingelaufenen Strömung ausreichend sind. Die Strömung hat eine Reynolds-Zahl von  $Re = 100$ . Die lineare Stabilitätstheorie liefert für die ideale Hunt-Strömung, welche die kleinsten kritischen  $Re_c$  aufweist,  $Re_c \approx 112$  bzw.  $\lambda_c \approx 1.2$  für  $Ha \gg 1$  (Priede *et al.*, 2010). Die Strömung kann daher als stabil angenommen werden.

#### 4.2.1.2 Shercliff-Strömung

Die numerischen Ergebnisse werden mit der analytischen Lösung von Shercliff (1953) verglichen. In Abbildung 4.1 sind Geschwindigkeitsprofile in den Grenzschichten entlang der  $z$ -Achse (a) und  $y$ -Achse (b) für verschiedene Hartmann-Zahlen  $Ha$  und  $Re = 100$  dargestellt. Durchgezogene Linien entsprechen den analytischen Lösungen, die Punkte den numerischen Ergebnissen. Bis  $Ha \leq 20000$  liegt eine nahezu perfekte Übereinstimmung vor. Weiterhin ist die Abweichung zwischen numerischen und analytischen Lösungen für die Druckgradienten  $\Delta \partial p / \partial x$  dargestellt, welche stets unter 1% liegt. In Abbildung 4.1 (b) wird noch einmal deutlich wie dünn die Hartmann-Schicht für  $Ha \gg 1$  wird, sodass ein erheblicher Aufwand zur Diskretisierung des Rechengebietes nötig ist. Abbildung 4.2 zeigt den Verlauf des elektrischen Potentials  $\phi$  entlang der  $z$ -Achse. Es wächst im Bereich der Kernströmung linear mit  $z$  an. In der Seitenschicht flacht der Verlauf von  $\phi$  ab, wobei an der Wand  $\partial \phi / \partial n = 0$  gilt, weil kein Strom in die isolierte Wand eintritt. Die Übereinstimmung zwischen numerischer und analytischer Lösung ist hervorragend. In  $y$ -Richtung ist  $\phi$  konstant und wird daher nicht gezeigt.

Bemerkenswert ist, dass die dargestellten Ergebnisse bereits mit dem gröberen 50x50-Gitter erzielt werden konnten.

Wie bereits erwähnt, ist eine gute Auflösung der Grenzschichten notwendig, um gute nu-

## 4.2 Validierung des numerischen Verfahrens für MHD-Rechteckkanalströmungen

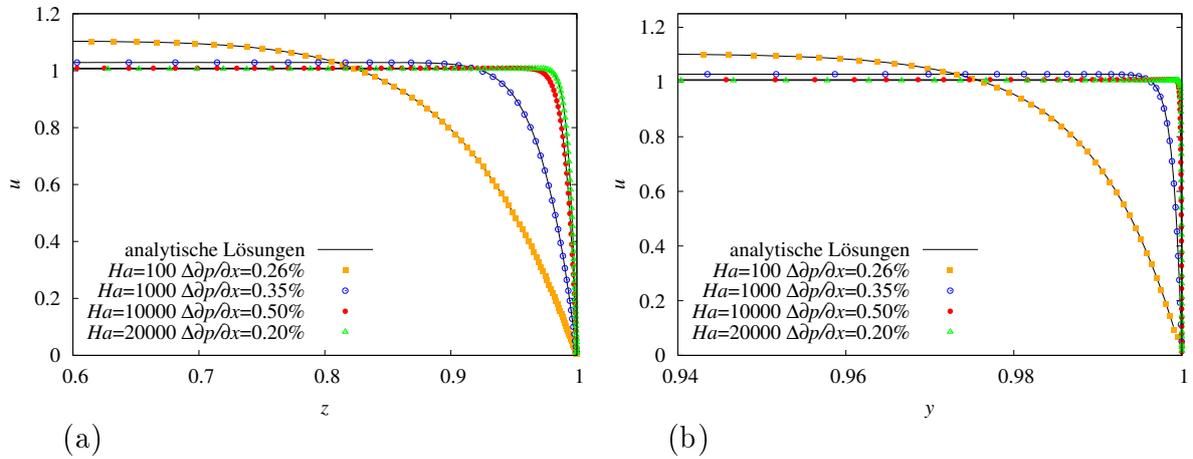


Abbildung 4.1: Geschwindigkeitsprofile in den Grenzschichten (a)  $u(y = 0, z)$  und (b)  $u(y, z = 0)$  für verschiedene Hartmann-Zahlen bei elektrisch isolierten Kanalwänden

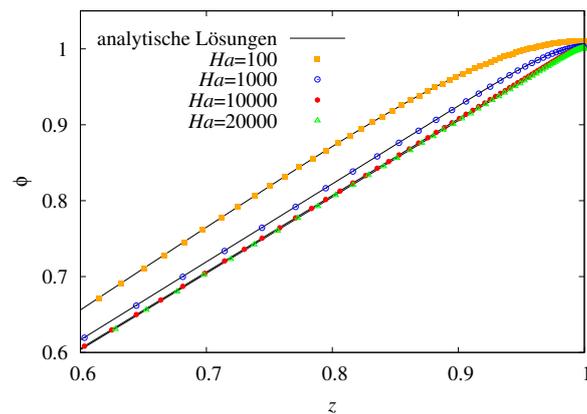


Abbildung 4.2: Elektrisches Potential  $\phi(y = 0, z)$  für verschiedene Hartmann-Zahlen bei elektrisch isolierten Kanalwänden

merische Ergebnisse zu erzielen. Dies gilt insbesondere für den Shercliff-Fall, weil sich hier der elektrische Strom in der dünnen Hartmann-Schicht schließt. Eine detaillierte Untersuchung des Einflusses der Auflösung der Grenzschichten ist in Tabelle 4.2 für unterschiedliche 50x50-Gitter und  $Ha = 1000$  zu sehen. Die Anzahl der Zellen in der Hartmann-Schicht wurde für M1 bis M5 verändert, während sie in der Seitenschicht konstant gelassen wurde.  $\Delta\partial p/\partial x$  verringert sich mit zunehmender Zellenzahl in der Hartmann-Schicht stark. Insbesondere von M1 zu M3 nimmt der relative Fehler von  $\partial p/\partial x$  von rund 9% bei M1 auf unter 1% bei M3 ab. Eine weitere Verfeinerung der Auflösung in der Hartmann-Schicht reduziert den Fehler von  $\Delta\partial p/\partial x$  nicht mehr so stark, er fällt aber noch auf 0.34% ab. Bei dem gewählten Gitter sind also rund 10% der Zellen in  $y$ -Richtung in der Hartmann-Schicht notwendig, um einen relativen Fehler kleiner 1% zu erreichen. Der relative Fehler kann durch eine weitere Erhöhung der Auflösung weiter reduziert werden, allerdings verlangsamt sich die Fehlerreduktion dabei, sodass der numerische Mehraufwand im Verhältnis stärker zunimmt. Anhand von M4 und M6 bis M8 ist in Tabelle 4.2 der Einfluss der Auflösung der Seitenschicht auf  $\Delta\partial p/\partial x$  gezeigt, wobei die Hartmann-Schicht für alle Fälle mit 7 Zellen in  $y$ -Richtung aufgelöst wird. Es zeigt sich, dass die Auflösung der Seitenschicht auf  $\Delta\partial p/\partial x$  im Vergleich zu der der Hartmann-Schicht einen deutlich geringeren Einfluss hat. Sofern die Hartmann-Schicht hinreichend gut aufgelöst ist (hier mindestens 5 Zellen in  $y$ -Richtung), und die Gitterauflösung in  $y$ - und  $z$ -Richtung ähnlich ist, ist davon auszugehen, dass die Seitenschicht hinreichend gut aufgelöst ist, insbesondere weil sie mit  $O(Ha^{-1/2})$  dicker als die Hartmann-Schicht ist.

50x50	$\frac{\Delta y_{min}}{\Delta y_{max}}$	#Ha	$\frac{\Delta z_{min}}{\Delta z_{max}}$	#S	$\Delta\partial p/\partial x$ [%]
M1	0.01	1	0.005	19	9.04
M2	0.0045	2	0.005	19	3.04
M3	0.001	5	0.005	19	0.54
M4	0.0005	7	0.005	19	0.34
M5	0.00025	10	0.005	19	0.27
M6	0.0005	7	0.5	2	0.45
M7	0.0005	7	0.05	8	0.34
M8	0.0005	7	0.001	25	0.34

Tabelle 4.2: Einfluss verschiedener Gradingfaktoren  $\frac{\Delta y_{min}}{\Delta y_{max}}$  auf den relativen Fehler im Druckgradienten  $\partial p/\partial x$  für  $Ha = 1000$ . #Ha bezeichnet die Anzahl der Zellen in der Hartmann-Schicht in  $y$ -Richtung, #S die in der Seitenschicht in  $z$ -Richtung.

In Abbildung 4.3 ist der relative Fehler  $\Delta u$  der axialen Geschwindigkeit in Abhängigkeit von  $z$  für die in Tabelle 4.2 aufgeführten Gitter M1 bis M5 dargestellt. Es zeigt sich deutlich, wie die Auflösung der Hartmann-Schicht den relativen Fehler der Geschwindigkeit beeinflusst. Auffällig ist insbesondere, dass der relative Fehler in der Seitenschicht, je nach Auflösung der Hartmann-Schicht, deutlich größer ist, als der in der Kernströmung. In dieser wird die Geschwindigkeit eher überschätzt, während sie in der Seitenschicht eher unterschätzt wird, was zu den positiven, bzw. negativen relativen Fehlern führt. Genau wie beim Druckgradienten, ist für die Geschwindigkeit der relative Fehler für M1 am größten und nimmt mit kleiner werdendem Gradingfaktor ab. Allerdings sind die relativen Fehler der Geschwindigkeit geringer als die des Druckgradienten, beispielsweise liegt  $\Delta u$  für M2 bereits unter 1%, während  $\Delta\partial p/\partial x$  noch bei 3% liegt. Eine alleinige Berücksich-

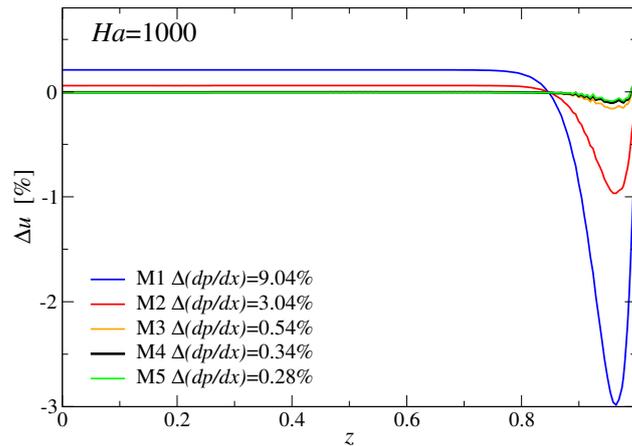


Abbildung 4.3: Relativer Fehler der axialen Geschwindigkeit in  $z$ -Richtung bei unterschiedlicher Auflösung der Hartmann-Schicht für die in Tabelle 4.2 aufgeführten Gitter M1 bis M5.

tigung des relativen Fehlers der Geschwindigkeit reicht demnach als Kriterium nicht aus, um ausreichend gute numerische Ergebnisse zu garantieren.

Die Validierung zeigt, dass bei der betrachteten Shercliff-Strömung die Hartmann-Schicht mit mindestens 5 Punkten in  $y$ -Richtung aufgelöst werden sollte. Wird die Seitenschicht mit ähnlich vielen Zellen aufgelöst, so ist  $\Delta\partial p/\partial x < 1\%$  zu erwarten.

#### 4.2.1.3 Hunt-Strömung

Zur Validierung des numerischen Verfahrens für MHD-Kanalströmungen wurden sowohl Kanäle mit perfekt elektrisch leitender Hartmann-Wand als auch mit endlicher elektrischer Leitfähigkeit betrachtet. Zunächst sollen die Ergebnisse für den idealisierten Kanal betrachtet werden. Zur Validierung werden die analytischen Lösungen von Hunt (1965) verwendet.

In Abbildung 4.4 sind numerische (Symbole) und analytische (durchgezogene Linien) Lösungen für  $u(y=0, z)$  (a) und  $u(y, z=0)$  (b) dargestellt. Das charakteristische Geschwindigkeitsprofil einer Hunt-Strömung mit sehr niedriger Kerngeschwindigkeit und starken Geschwindigkeitsüberhöhungen in der Seitenschicht ist deutlich erkennbar.

Numerische Berechnungen wurden für  $Re = 100$  bis  $Ha \leq 20000$  erfolgreich durchgeführt. Bis  $Ha \leq 10000$  ist  $\Delta\partial p/\partial x < 0.2\%$  und für  $Ha = 20000$  ist  $\Delta\partial p/\partial x = 0.54\%$ . Dies ist in Anbetracht des relativ groben Gitters eine bemerkenswert gute Übereinstimmung. Abbildung 4.5 zeigt  $\phi(y=0, z)$  für verschiedene  $Ha$ . Ebenfalls ist der charakteristische Verlauf von  $\phi$  für eine ideale Hunt-Strömung erkennbar: Wegen der perfekt leitenden Wände gleichen sich Potentialunterschiede instantan aus und in der Kernströmung ist  $\phi = const$ . In den Seitenschichten findet ein Stromfluss parallel zum Magnetfeld statt, sodass hier  $\phi$  stark ansteigt. Auf der Seitenwand gilt wieder  $\partial\phi/\partial n = 0$ . Es zeigt sich eine gute Übereinstimmung zwischen numerischer und analytischer Lösung.

Der Einfluss der Auflösung der Grenzschichten wurden ebenfalls untersucht und ist in Tabelle 4.3 dargestellt. Sowohl die Gesamtzahl der Gitterzellen wurde variiert, als auch die

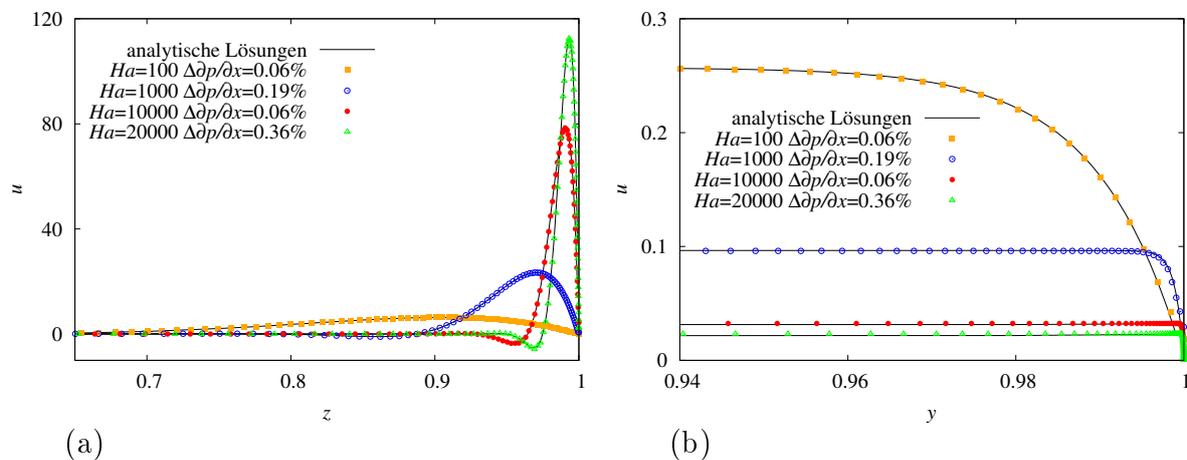


Abbildung 4.4: Geschwindigkeiten (a)  $u(y = 0, z)$  und (b)  $u(y, z = 0)$  für verschiedene Hartmann-Zahlen für perfekt leitende Hartmann-Wände und isolierte Seitenwände. Das Gitter hat  $50 \times 50$  Zellen in  $y$ - und  $z$ -Richtung.

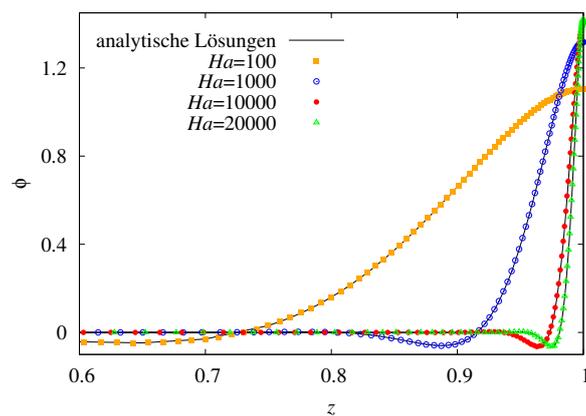


Abbildung 4.5: Elektrisches Potential  $\phi(y = 0, z)$  für verschiedene Hartmann-Zahlen und perfekt leitende Hartmann-Wände und isolierte Seitenwände.

## 4.2 Validierung des numerischen Verfahrens für MHD-Rechteckkanalströmungen

	Gitter	$\#Ha$	$\#S$	$\Delta\partial p/\partial x[\%]$
1	50x50	2	15	0.21
2	50x50	2	25	0.70
3	50x50	5	15	0.12
4	50x50	5	25	0.74
5	50x50	7	15	0.09
6	50x50	7	25	0.57
7	100x100	2	15	0.06
8	100x100	2	25	0.03
9	100x100	5	15	0.07
10	100x100	5	25	0.02
11	100x100	7	15	0.08
12	100x100	7	25	0.04

Tabelle 4.3: Einfluss von Gittergröße und Anzahl der Zellen in der Hartmann-Schicht ( $\#Ha$ ) und in der Seitenschicht ( $\#S$ ) für  $Ha = 1000$  auf den relativen Fehler  $\Delta\partial p/\partial x$  im Druckgradienten  $\partial p/\partial x$ .

Anzahl der Zellen in den Grenzschichten. Der Gradingfaktor wurde so gewählt, dass die aufgeführte Zellenzahl in den Grenzschichten erreicht wurde. Für das 50x50-Gitter gilt stets  $\Delta\partial p/\partial x < 1\%$  und für das 100x100-Gitter gilt sogar  $\Delta\partial p/\partial x < 0.1\%$ . Im Vergleich zu Tabelle 4.2 fällt auf, dass die Auflösung der Hartmann-Schicht keinen so großen Einfluss mehr auf  $\Delta\partial p/\partial x$  hat, weil sich der Strom in der besser leitenden Hartmann-Wand schließen kann. Für das 50x50-Gitter ist  $\Delta\partial p/\partial x$  stets deutlich größer, wenn 25 statt 15 Zellen in der Seitenschicht liegen, beim 100x100-Gitter tritt dieser Effekt hingegen nicht auf, sondern der relative Fehler nimmt weiter ab. Daraus lässt sich schließen, dass nicht zu viele Zellen im Verhältnis zur Gesamtzahl in der Seitenschicht liegen dürfen, weil ansonsten die Auflösung des restlichen Rechengebietes zu gering und die numerische Lösung ungenauer wird.

Laut Tabelle werden die geringsten relativen Fehler erreicht, wenn 15 von 50 bzw. 25 von 100 Zellen in der Seitenschicht liegen, also ungefähr ein Viertel der Zellen in  $z$ -Richtung.

Neben den Fällen mit idealisierten Hartmann-Wänden wurden zusätzlich welche mit endlicher Leitfähigkeit untersucht. In Tabelle 4.4 sind numerische und analytische Ergebnisse für Hartmann-Zahlen  $Ha = 5000$  und  $Ha = 15000$  für  $c = 0.1$  und  $c = 0.01$  gezeigt. Es wurden Rechnungen sowohl für ein 50x50-Gitter (bezogen auf ein Viertelkanalquerschnitt), als auch für ein feineres Gitter mit 100x100-Zellen vorgenommen. Die Gradingfaktoren sind für die Nummern 1-3 und 5-7 gleich, bei 4 und 8 war eine Reduzierung des Gradingfaktors um den Faktor 2 in  $y$ -Richtung notwendig, da ansonsten keine Konvergenz erzielt werden konnte. Trotzdem ist die Auflösung in der Hartmann- und Seitenschicht bei den 100x100-Gittern stets höher. Es zeigt sich, dass bereits bei den 50x50-Gittern die Abweichung zwischen numerischer und analytischer Lösung unter einem Prozent liegt. Eine Erhöhung der Auflösung auf das 100x100-Gitter führt nur zu geringfügigen Änderungen im relativen Fehler des Druckgradienten.

Im verwendeten numerischen Verfahren werden die endlich elektrisch leitenden Wände numerisch aufgelöst, um das elektrische Potential und die Stromdichte in der Wand berechnen zu können. Daher muss der Einfluss des Wandgitters auf die numerische Lösung

	Ha	c	Gitter	#Ha	#S	$\Delta\partial p/\partial x[\%]$
1	5000	0.1	50x50	4	13	0.56
2	5000	0.1	100x100	8	25	0.53
3	15000	0.1	50x50	1	9	0.74
4	15000	0.1	100x100	2	18	0.77
5	5000	0.01	50x50	4	13	0.02
6	5000	0.01	100x100	8	25	0.05
7	15000	0.01	50x50	1	9	0.26
8	15000	0.01	100x100	2	18	0.08

Tabelle 4.4: Vergleich zwischen numerischer und analytischer Lösung für  $Ha = 5000$  und  $Ha = 15000$  für verschiedene  $c$  und Auflösungen in  $y$ - und  $z$ -Richtung. #Ha bezeichnet die Anzahl der Zellen in der Hartmann-Schicht in  $y$ -Richtung, #S die in der Seitenschicht in  $z$ -Richtung. Die Wand ist mit 5 Zellen in  $y$ -Richtung aufgelöst.

Ha	c	Gitter	#Ha	#S	$\Delta\partial p/\partial x[\%]$
5000	0.1	50x50	4	13	0.41
5000	0.1	100x100	8	25	0.47
15000	0.1	100x100	2	18	0.59

Tabelle 4.5: Vergleich zwischen numerischer und analytischer Lösung für  $Ha = 5000$  und  $Ha = 15000$  für  $c = 0.1$  bei verschiedener Auflösungen in  $y$ - und  $z$ -Richtung bei einer Auflösung von 10 Zellen in Wandnormalenrichtung. #Ha: Anzahl Zellen in der Hartmann-Schicht, #S Anzahl Zellen in der Seitenschicht

ebenfalls berücksichtigt werden. Bei den in Tabelle 4.4 aufgeführten Gittern wird die Wanddicke mit nur 5 Zellen aufgelöst. In Tabelle 4.5 sind Ergebnisse für  $c = 0.1$  bei einer Wandauflösung von 10 Zellen dargestellt. Alle übrigen Gittereigenschaften entsprechen denen in Tabelle 4.4. Es zeigt sich, dass die Verdoppelung der Wandauflösung eine Reduktion des Fehlers im Druckgradienten, je nach Gitter, um ca. 12-25% bewirkt. Bei der Gittergenerierung der Wand muss beachtet werden, dass die benachbarten Gitterzellen von Fluid- und Wandbereich in Wandnormalenrichtung ähnliche Abmessungen haben, andernfalls kann es zu unphysikalischen Effekten kommen und die Rechnung konvergiert nicht.

### 4.2.2 Validierung für dreidimensionale stationäre Strömungen

Die Validierung für stationäre, dreidimensionale MHD-Strömungen wurde anhand von experimentellen Daten durchgeführt, die im Argonne-Liquid-Metal-Engineering Experiment (ALEX) des Argonne National Laboratory (ANL) gemessen wurden (Picologlou & Reed, 1989; Reed *et al.*, 1987).

Zur experimentellen Untersuchung von dreidimensionalen MHD-Effekten wurden Strömungen in Rechteckkanälen untersucht, welche einem stationärem, senkrecht zur Strömungsrichtung orientierten inhomogenen Magnetfeld ausgesetzt waren. Die Kanalwände sind alle elektrisch leitend und haben einen Wandleitparameter von  $c = 0.07$ . Eine Skizze des Aufbaus und eine Darstellung der Messergebnisse ist in Abbildung 4.6 zu sehen.

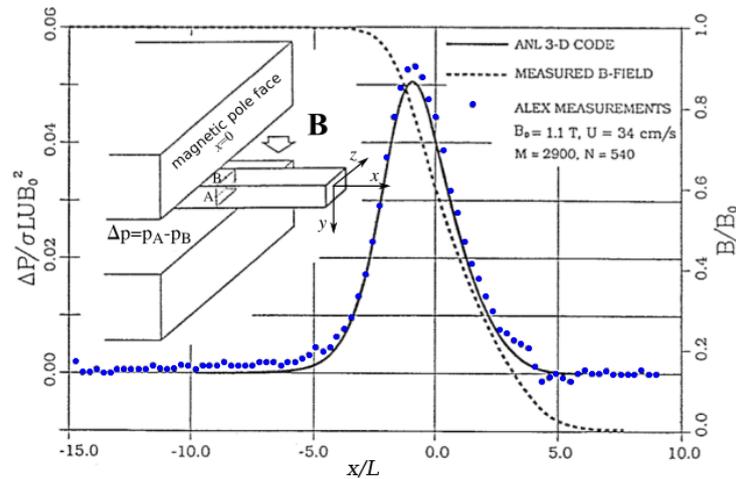


Abbildung 4.6: Prinzipieller experimenteller Aufbau und Verlauf der dimensionslosen transversalen Druckdifferenz für  $\mathbf{B}_0 = 1.1\text{T}$ ,  $Ha = 2900$ ,  $N = 540$  (Picologlou & Reed, 1989)

Darin ist erkennbar, dass das inhomogene Magnetfeld durch ein Herausragen des Kanals aus dem Magneten erzeugt wurde. Potential- und Druckmessungen wurden entlang der Kanalwände durchgeführt. Die dazu notwendigen Bohrungen in den Seitenwänden wurden im Abstand  $\Delta x = 1.73$  bei  $y = 0$  vorgenommen. Geschwindigkeitsmessungen in der Strömung erfolgten mit einer Potentialdifferenzsonde. Durch den Magnetfeldabfall wird entlang der Seitenwände eine axiale Potentialdifferenz verursacht, die zusätzliche Stromflüsse und damit Lorentz-Kräfte verursacht. Damit einher geht eine Zunahme des axialen Druckgradienten in diesem Bereich. Folglich ändert sich das Geschwindigkeitsprofil im Bereich des inhomogenen Magnetfeldes und ein dreidimensionales Strömungsverhalten wird erzeugt. Wie in Abbildung 4.6 zu sehen ist, führt dies unter anderem dazu, dass es zu einer zusätzlichen transversalen Druckdifferenz  $\Delta p$  kommt.

$L$ [m]	$u_0$ [ $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ]	$Ha$	$N$	$\sigma$ [S/m]	$t_w$ [m]	$\sigma_w$ [S/m]
0.044	$5.8 \cdot 10^{-3}$	5800	128000	$2.83 \cdot 10^6$	0.0066	$1.32 \cdot 10^6$

Tabelle 4.6: Relevante experimentelle Parameter des untersuchten Rechteckkanals mit  $c = 0.07$

Die Experimente wurden bei verschiedenen Hartmann-Zahlen und Interaktionsparame-

tern durchgeführt, wobei die für diese Arbeit relevanten Versuchsparameter in Tabelle 4.6 aufgeführt sind. Aus den Werten für  $Ha$  und  $N$  ergibt sich eine Reynolds-Zahl von  $Re = Ha^2/N = 267$ . Der Wandleitparameter ergibt sich zu  $c = 0.07$ . Aus Abbildung 3.17 kann entnommen werden, dass  $Re_c \approx 625$  für  $Ha = 5900$  ist, sodass die Strömung zumindest im homogenen Magnetfeldbereich stabil ist.

### 4.2.2.1 Randbedingungen und numerisches Setup

Die Berechnung wurde mit foam-extend 3.2 durchgeführt. Der Kanal ist in Abbildung 4.7 dargestellt und hat die Abmessungen  $30 \times 2 \times 2$  und ist mit  $250 \times 140 \times 140$  Zellen in  $x$ -,  $y$ -,  $z$ -Richtung diskretisiert. Für die notwendige Parallelisierung wurde darauf geachtet, dass einander zugeordnete Ränder von Fluid- und Wandregion bei der Aufteilung des Rechengebietes den selben Prozessoren zugeordnet werden. Anderfalls stellen sich numerische Fehler aufgrund der regionCouple-Randbedingung ein.

Am Einlass wurde ein konstantes Strömungsprofil mittels fixedValue für  $u$  und  $\phi$  vorgegeben. Dieses Profil wurde aus einer stationären, zweidimensionalen Lösung einer Simulation mit den entsprechenden Parametern des Experiments aus einer zweidimensionalen Rechnung gewonnen. Dabei muss beachtet werden, dass das Gitter im Querschnitt die selbe Konfiguration hat, wie in der anschließend durchzuführenden dreidimensionalen Simulation. Da der Kanal ringsum mit einer elektrisch leitfähigen Wand umgeben ist, muss diese ebenfalls diskretisiert werden. Dort wurde allerdings am Einlass zur Verbesserung der numerischen Stabilität des Verfahrens für  $\phi$  zeroGradient gesetzt. Am Auslass wurde für  $u$  und  $\phi$  zeroGradient benutzt. Die übrigen Randbedingungen wurden entsprechend nach Tabelle 4.1 gesetzt.

Der Verlauf des inhomogenen Magnetfeldes in  $x$ -Richtung wurde im Rahmen des Experiments gemessen. Mittels (4.6) wurde das Magnetfeld für  $Ha = 5800$  für die numerische Simulation durch eine analytische Funktion approximiert:

$$B_y = 2.26((0.5964 - 0.3876 \tanh(0.4964x/L - 0.0477)) \cdot (0.5 - 0.5 \tanh(x/L - 0.3)) + (0.4577 - 0.4616 \tanh(0.3572x/L - 0.3239)) \cdot (0.5 + 0.5 \tanh(x/L - 0.3))) \quad (4.6)$$

Abbildung 4.8 zeigt die gemessenen und gefitteten Magnetfeldverläufe in Strömungsrichtung in der Mitte des Kanals, welche insgesamt eine gute Übereinstimmung zeigen. Bei genauerer Betrachtung wird aber deutlich, dass  $B$  bereits ab  $x = -15$  eine abnehmende Tendenz hat, also nicht mehr ganz homogen ist. Im Fit wird ein inhomogener Verlauf erst ab  $x \approx -5$  erkennbar. Bei  $x \approx 5$  wird hingegen sichtbar, dass das experimentelle Magnetfeld schneller abfällt, als das nach (4.6). Daher ist damit zu rechnen, dass außerhalb von  $-5 \lesssim x \lesssim 5$  Abweichungen zwischen numerischen und experimentellen Ergebnissen sichtbar sein können.

### 4.2.2.2 Ergebnisse

In Abbildung 4.9 ist ein Vergleich experimenteller und numerischer Ergebnisse für (a) die Potentialdifferenz  $\Delta\phi$  und (b) die Druckänderung  $-\Delta p/\Delta x$  entlang der Seitenwand für  $Ha = 5800$  dargestellt. Die Potentialdifferenz ergibt sich dabei aus den Potentialwerten im Abstand  $\Delta x = 1.73$  auf der Seitenwand bei  $y = 0$ . Zusätzlich ist jeweils noch der Verlauf des Magnetfeldes gezeigt.

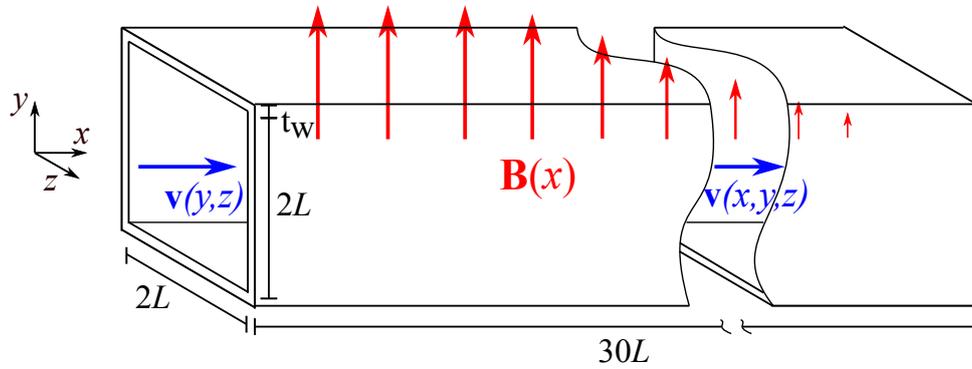


Abbildung 4.7: Veranschaulichung des Rechengebietes für einen Kanal mit nicht konstantem Magnetfeld  $\mathbf{B}(x)$  entsprechend des ALEX-Experiments.

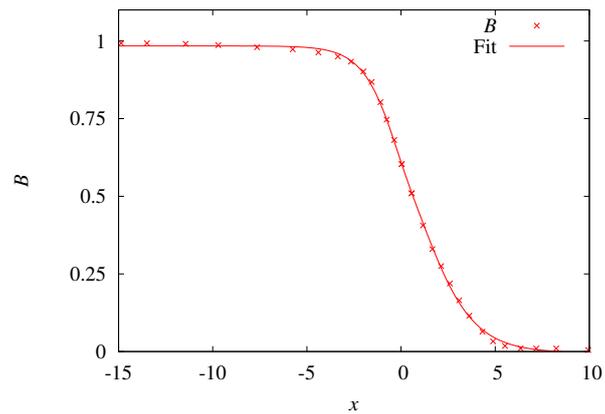


Abbildung 4.8: Gemessener und gefitteter Magnetfeldverlauf für ALEX-Experiment (Reed *et al.*, 1986)

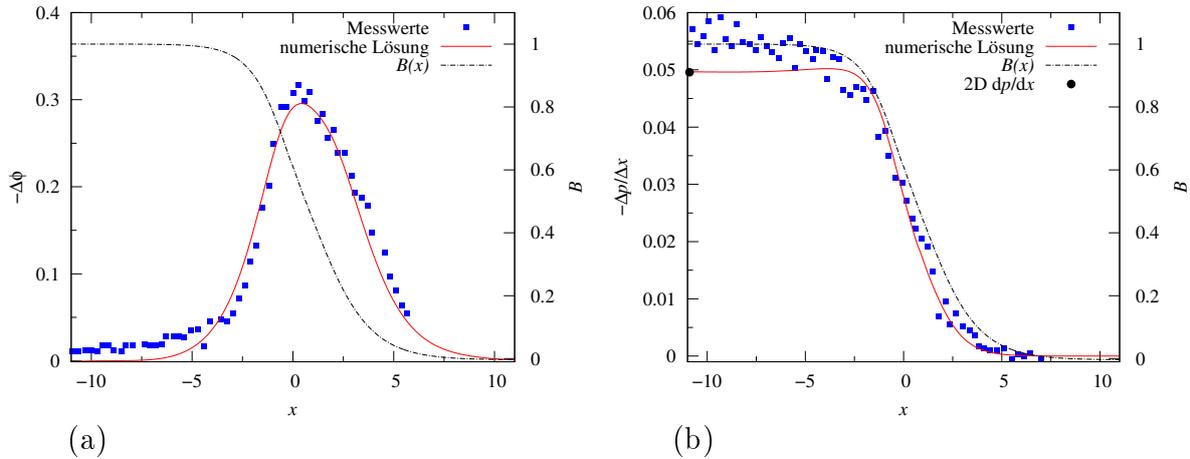


Abbildung 4.9: (a) Potentialdifferenzen  $\Delta\phi$  und (b) Druckdifferenzen  $-\Delta p/\Delta x$  für  $Ha = 5800$ ,  $N = 128000$  entlang der Seitenwand und Magnetfeld  $B$ . Messwerte aus Reed *et al.* (1987). Die Druckskalierung entspricht der in Reed *et al.* (1987) mit  $-\Delta p/\Delta x \sigma u_0 B^2$ .

Das experimentelle  $\Delta\phi_{exp}$  ist bei  $x < -5$  bereits ungleich Null aber über eine Größenordnung kleiner als der Maximalwert von  $\Delta\phi_{exp} = 0.31$  und somit noch verhältnismäßig klein. Das zeigt, dass das experimentelle Magnetfeld bereits an dieser Stelle schwach inhomogen ist. Ab  $x > -5$  steigt  $\Delta\phi_{exp}$  steil bis  $x = 0$  an und fällt mit weiter zunehmendem  $x$  wieder ab. Dieses Verhalten lässt sich auf das steil abfallende Magnetfeld in diesem Bereich zurückführen. Bei  $x = 0$  ist  $B$  auf den halben Wert von  $B_0$  abgefallen. Seine Änderung in  $x$ -Richtung reduziert sich und daher nimmt auch  $\Delta\phi$  ab  $x = 0$  ab. Das numerische  $\Delta\phi_{num}$  reproduziert diesen Verlauf insgesamt gut. Zwischen  $-2 < x < 3$  beträgt die Abweichung zwischen  $\Delta\phi_{num}$  und  $\Delta\phi_{exp}$  maximal 8% und nimmt, wie erwartet, zu den Rändern hin zu, insbesondere bei  $x < -2$ . Für  $x > 6$  liegen keine Daten für  $\Delta\phi_{exp}$  vor. Bei  $x < -7$  ist  $\Delta\phi_{num} = 0$ , weil das numerisch vorgegebene Magnetfeld konstant ist. (siehe Abbildung 4.8).

Der in Abbildung 4.9 (b) gezeigte experimentelle Verlauf von  $(-\Delta p/\Delta x)_{exp}$  zeigt für  $x < -5$  zunächst nur eine geringe Abnahme. Mit wachsendem  $x$  fällt  $(-\Delta p/\Delta x)_{exp}$  immer steiler ab und erreicht bei  $x = 0$  einen Wendepunkt. Bei  $x = 5$  ist  $(-\Delta p/\Delta x)_{exp}$  sehr klein. Zur Durchführung der Druckmessung befinden sich Bohrungen in der Wand. Dadurch entstehen 3D-Ströme, welche zusätzliche Lorentz-Kräfte in den Messleitungen induzieren, die die Druckmessung beeinflussen (Hua *et al.*, 1988). Dieser Effekt wurde nach Stieglitz *et al.* (1996) korrigiert.

Bei  $x = -11$  ist zum Vergleich der Druckgradient einer entsprechenden zweidimensionalen Strömung eingetragen. Die Abweichung zu  $(-\Delta p/\Delta x)_{num}$  bis  $x < -5$  beträgt 0.2%, sodass numerische und zweidimensionale Lösung sehr gut übereinstimmen. Die Abweichung zwischen  $(-\Delta p/\Delta x)_{num}$  und  $(-\Delta p/\Delta x)_{exp}$  liegt hingegen in diesem Bereich zwischen 10%-20%. Ab  $x \gtrsim -4$  stimmen numerische und experimentelle Lösung gut überein. Zwischen  $-4 < x < 1.5$  beträgt die Abweichung zwischen  $(-\Delta p/\Delta x)_{exp}$  und  $(-\Delta p/\Delta x)_{num}$  maximal 8%. Anzumerken ist hierbei, dass Druckdifferenzen bei starken Magnetfeldern sehr präzise gemessen werden können. Es ist daher eher wahrscheinlich,

dass das Magnetfeld in  $z$ -Richtung nicht absolut konstant ist. Dadurch kann es zu dreidimensionalen Effekten kommen, die die Strömung zusätzlich beeinflussen und den Unterschied zwischen numerischen und experimentellen Ergebnissen verursachen.

### 4.2.3 Zusammenfassung der Validierungsergebnisse

Der Solver `conjugatedmhdFoam` wurde unter Berücksichtigung des Einflusses von  $Ha$ ,  $Re$ ,  $c$  und unterschiedlicher Gitterauflösungen umfangreich getestet. Für MHD-Strömungen in idealisierten Kanälen mit isolierten oder perfekt leitenden Wänden betragen die Abweichungen für Hartmann-Zahlen bis  $Ha = 20000$  zwischen analytischen und numerischen Lösungen für  $u$  und  $\phi$  unter 1%. Bei der numerischen Simulation ist insbesondere auf den Fehler im Druckgradienten zu achten, da dieser empfindlicher auf die Auflösung von Hartmann-Schicht und Seitenschicht reagiert als der Fehler von Geschwindigkeit oder Potential. Bei Kanälen mit  $0 < c < \infty$  wurde die Validierung bis  $Ha = 15000$  durchgeführt, wobei ebenfalls Abweichungen unter 1% erreicht werden konnten. Hierbei muss auch die Wandauflösung berücksichtigt werden. Weiterhin konnte gezeigt werden, dass Gitter mit nur einigen tausend Zellen bereits sehr gute numerische Ergebnisse für stationäre MHD-Strömungen liefern, sofern Hartmann- und Seitenschicht hinreichend gut aufgelöst sind, d.h., ca. 5 Punkte in der Hartmann-Schicht und ca. 25% der Punkte der transversalen Richtung in der Seitenschicht.

Stationäre dreidimensionale MHD-Strömungen konnten ebenfalls korrekt berechnet werden, wie durch einen Vergleich mit experimentellen Daten gezeigt werden konnte. Die Abweichungen zwischen numerischen und experimentellen Daten sind dann klein, wenn das experimentelle mit dem numerischen Setup gut übereinstimmt. Bei größeren Abweichungen kann die Ursache auf Unterschiede im numerisch vorgegebenem Magnetfeld im Vergleich zum experimentellen zurückgeführt werden.

Das verwendete numerische Verfahren ist somit in der Lage, zwei- und dreidimensionale MHD-Kanalströmungen mit verschiedenen Wandleitfähigkeiten bis zu sehr großen Hartmann-Zahlen korrekt zu beschreiben.

### 4.3 Untersuchung von zeitabhängigen magnetohydrodynamischen Kanalströmungen

Um die Entstehung und Entwicklung von realistischen, instationären Hunt-Strömungen zu untersuchen, werden numerische Simulationen durchgeführt. Ausgangspunkt für die Untersuchung soll die in Kapitel 3 durchgeführte lineare Stabilitätsanalyse sein. Die verwendeten Parameter entsprechen denen aus Chowdhury (2016), um experimentelle Vergleichsdaten nutzen zu können (siehe Abschnitt 7 im Anhang). Die Simulationen befassen sich dabei insbesondere mit der Lücke zwischen  $Re_c$  der linearen Stabilitätsanalyse und dem experimentell ermittelten  $Re_c$ . In diesem Bereich ist die Nutzung von numerischen Simulationen besonders sinnvoll, weil er experimentell nur schwer zugänglich ist. Rechnungen werden für die in Tabelle 4.7 gezeigten Hartmann-Zahlen und einen Wandleitparameter von  $c = 0.03$  durchgeführt. Die zugehörigen Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse sind ebenfalls in der Tabelle 4.7 dargestellt. Die betrachteten Reynolds-Zahlen liegen zwischen  $300 \leq Re \leq 12000$ . Der Fokus der Auswertung liegt bei  $Ha = 2000$ , weil hier die Stabilitätsgrenzen aus linearer Theorie und Experiment ( $Re_c \approx 1360$ ) relativ dicht beieinander liegen, sodass mit vertretbarem numerischem Aufwand der Reynolds-Zahl-Bereich zwischen den beiden Werten untersucht werden kann.

#### 4.3.1 Numerisches Setup

Die numerische Grundkonfigurationen gleicht weitestgehend der im Abschnitt 4.1.3 für eine Hunt-Strömung mit endlich leitenden Hartmann-Wänden. Geändert wurden die axiale Länge des Kanals, die axiale Auflösung und die der Grenzschichten. Eine entsprechende Zusammenfassung findet sich in Tabelle 4.8. Da die kritische Wellenlänge  $\lambda_c$  aus der linearen Stabilitätstheorie bekannt ist, wurden für Simulationen nahe  $Re_c$  Rechnungen mit einem Kanal der Länge  $2L$  durchgeführt, der somit mindestens doppelt so lang wie die kritische Wellenlänge ist. Für größere  $Re$  wurde eine Kanallänge von  $5L$  verwendet. Da die Wellenlänge der instabilen Strukturen mit zunehmendem  $Re$  ansteigt, bietet diese Vorgehensweise den Vorteil, dass die Instabilitäten eine gewisse räumliche Reserve zum ausbreiten haben, wenn  $Re$  erhöht wird. Denn der genaue Zusammenhang zwischen  $Re$  und  $\lambda$  ist nicht bekannt. Weil aber nur ganzzahlige Vielfache von  $\lambda$  in einem Kanal mit periodischen Randbedingungen auftreten können, ist die physikalisch exakte kritische Wellenlänge nicht genau ermittelbar.

Neben den periodischen Randbedingungen in Strömungsrichtung gelten als weitere Rand-

$Ha$	$Re_c$	$\lambda_c$	$f^*$	$c_P/u_{max}$
500	1474	0.84	2.74	0.61
1000	655	0.45	7.49	0.54
2000	434	0.28	19.33	0.51

Tabelle 4.7: Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse für kritische Reynolds-Zahl  $Re_c$ , dimensionslose kritische Wellenlänge  $\lambda_c$ , dimensionslose kritische Frequenz  $f^* = f_c L/u_0$  und Phasengeschwindigkeit  $c_P$  bezogen auf die maximale Geschwindigkeit  $u_{max}$  für  $c = 0.03$

### 4.3 Untersuchung von zeitabhängigen magnetohydrodynamischen Kanalströmungen

$Ha$	$Re$	Länge	#x	#y	#z	#Ha	#S
500	$< 1900$	$2L$	75	100	50	4	18
500	$\geq 2000$	$5L$	300	75	75	8	28
1000	$\leq 800$	$2L$	90	100	70	4	17
1000	$\geq 1000$	$5L$	300	100	70	1	17
2000	$\leq 600$	$2L$	100	100	70	4	13
2000	$\geq 1000$	$5L$	300	100	70	2	13

Tabelle 4.8: Verwendete Gitter. #x, #y und #z geben die Anzahl der Zellen in die jeweilige Richtung an. #y und #z beziehen sich auf einen Viertelkanalquerschnitt. #Ha und #S bezeichnen die Anzahl der Zellen in der Hartmann-Schicht bzw. Seitenschicht

bedingungen für  $\mathbf{v}$ ,  $p$  und  $\phi$  die in Tabelle 4.1 genannten für endlich leitende Hartmann-Wände und isolierte Seitenwände.

Zur Simulation wurde der in Abschnitt 4.1.2 vorgestellte Solver conjugatedMHDfoam verwendet. Ist eine Strömung für gegebenes  $Ha$  und  $Re$  in den zeitabhängigen instationären Zustand übergegangen, wird die Simulation weitergeführt bis eine konvergierte Statistik der Lösung gefunden wurde, bei der die Reynolds-Zerlegung bspw. für  $u(\mathbf{x}, t) = \bar{u}(\mathbf{x}) + u'(\mathbf{x}, t)$  konstante Werte für die zeitlich gemittelte Geschwindigkeit  $\bar{u}(\mathbf{x})$  liefert. Die Strömung soll dann quasi-stationär genannt werden. Mit  $u'(\mathbf{x}, t)$  werden Abweichungen vom zeitlichen Mittel bezeichnet.

#### 4.3.2 Geschwindigkeits- und Potentialprofile für verschiedene $Re$ und $Ha$

Zunächst sollen Profile von  $u$ ,  $\bar{u}$  und  $\phi$ ,  $\bar{\phi}$  exemplarisch für  $Ha = 2000$  und verschiedene  $Re$  betrachtet werden, um zu zeigen, wie sich der Übergang von einer laminaren zu einer instabilen Strömung auf diese auswirkt. Die Profile für  $Ha = 500$  und  $Ha = 1000$  befinden sich im Anhang, zeigen aber prinzipiell ein ähnliches Strömungsverhalten.

In Abbildung 4.10 sind dazu Ergebnisse für verschiedene Reynolds-Zahlen bei  $Ha = 2000$  für (a) die zeitlich gemittelte Geschwindigkeit  $\bar{u}$  entlang der  $z$ -Achse bei  $y = 0$  und (b) die momentane Geschwindigkeit  $u(x, y = 0, z = 0.96)$  entlang der  $x$ -Achse dargestellt. Die Differenz zwischen den Maxima der laminaren Geschwindigkeit und der zeitlich gemittelten Geschwindigkeit wird als  $\Delta\bar{u}$  bezeichnet. Die Differenz zwischen Maximum und Minimum von  $u$  wird  $\Delta u$  bezeichnet.

Laut Tabelle 4.7 ist  $Re_c = 434$ . Dies wird durch die Simulationen dahingehend bestätigt, als für  $Re = 300$  in der numerischen Lösung der Strömung keinerlei Schwankungen sichtbar sind. Die Abweichung zur analytischen Lösung beträgt maximal 0.3%. Die Strömung bei  $Re = 600$  ist hingegen überkritisch und es zeigen sich gleichmäßig periodische Schwankungen mit konstanter Amplitude in axialer Richtung, wobei  $\Delta u = 0.88$  bzw. 9% ist.  $\bar{u}$  für  $Re = 600$  zeigt in Abbildung 4.10 (a) nur eine minimale Änderung von  $\Delta\bar{u} = 0.12$  im Vergleich zu  $Re = 300$ . Es handelt sich hierbei um ein Instabilitätsverhalten, welche als Regime 1 bezeichnet werden soll.

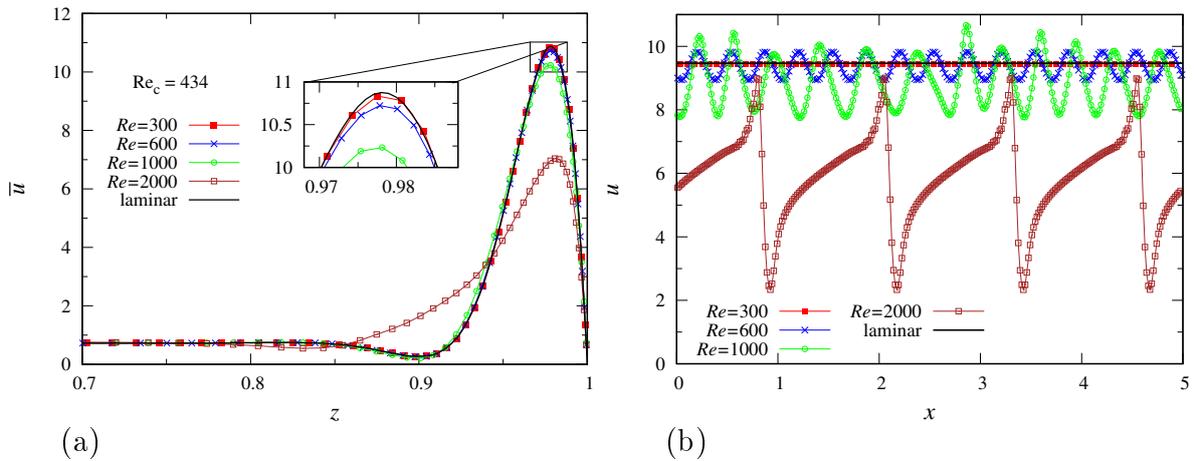


Abbildung 4.10: Simulationsergebnisse für (a) zeitlich gemittelte axiale Geschwindigkeit  $\bar{u}(y = 0, z)$  entlang der  $z$ -Achse und (b)  $u(x, y = 0, z = 0.96)$  entlang der  $x$ -Achse für  $Ha = 2000$ ,  $c = 0.03$  für verschiedene Reynolds-Zahlen.

Wird die Reynolds-Zahl weiter erhöht, wird für  $Re = 1000$  eine weitere Abnahme von  $\bar{u}$  in Abbildung 4.10 (a) mit  $\Delta\bar{u} = 0.6$  sichtbar, verglichen mit  $Re = 300$ . Weiterhin ist bereits eine schwache Jetverbreiterung erkennbar. In Abbildung 4.10 (b) zeigt sich weiterhin eine periodische Struktur der Instabilitäten und eine Zunahme ihrer Amplituden im Vergleich zu  $Re = 600$ . Allerdings sind die Amplituden nicht mehr alle gleich groß, sondern schwanken (Vergleiche  $\Delta u = 2.8$  bei  $x \approx 2.8$  zu  $\Delta u = 1.8$  bei  $x \approx 0.9$ ). Da die Simulation in einem quasi-stationären Zustand ist, kann davon ausgegangen werden, dass sich dieses Verhalten nicht mehr ändert.

Bei  $Re = 2000$  in Abbildung 4.10 (a) zeigt sich, dass sich der Jet stark reduziert hat. Die maximale Geschwindigkeit hat um  $\Delta\bar{u} = 3.7$  verglichen mit  $Re = 300$  abgenommen. Damit einher geht eine Verbreiterung des Geschwindigkeitsjets. Lag sein Minimum bei den niedrigeren  $Re$ , in Übereinstimmung mit der analytischen Lösung, noch bei  $z = 0.9$  hat es sich für  $Re = 2000$  zu  $z = 0.83$  verschoben. Dies bedeutet, dass eine Wechselwirkung mit der Kernströmung stattfindet. Solch ein Verhalten ergibt sich durch Ablösungen des Jets aus der Seitenschicht und Transport der Störungen in Richtung Kernströmung (Kinet *et al.*, 2009; Braiden *et al.*, 2016). Entlang der  $x$ -Achse wird deutlich sichtbar, dass sich der zuvor beobachtete sinusartige Verlauf der Schwankungen zu einem eher sägezahnartigem Muster mit deutlich größerer Wellenlänge  $\lambda = 1.25$  verändert hat. Im Gegensatz zu  $Re = 1000$  liegt aber wieder eine konstante Amplitude vor, wobei  $\Delta u = 7.3$  bzw. 77% beträgt. Instabilitäten, die diese Eigenschaften aufweisen, sollen als Regime 2 bezeichnet werden.

Für  $Re = 1000$  scheint die Strömung in einer Art Übergangszustand von Regime 1 zu Regime 2 zu sein.

Die zeitlich gemittelten Geschwindigkeitsprofile  $\bar{u}(y, z = 0)$  für verschiedene Reynolds-Zahlen sind in Abbildung 4.11 (a) dargestellt. Deutlich wird die dünne Hartmann-Schicht und ihre gute numerische Auflösung. Für  $Re \leq 1000$  ist eine hervorragende Übereinstimmung mit der laminaren Lösung sichtbar. Bei  $Re = 2000$  nimmt die Kerngeschwindigkeit

### 4.3 Untersuchung von zeitabhängigen magnetohydrodynamischen Kanalströmungen

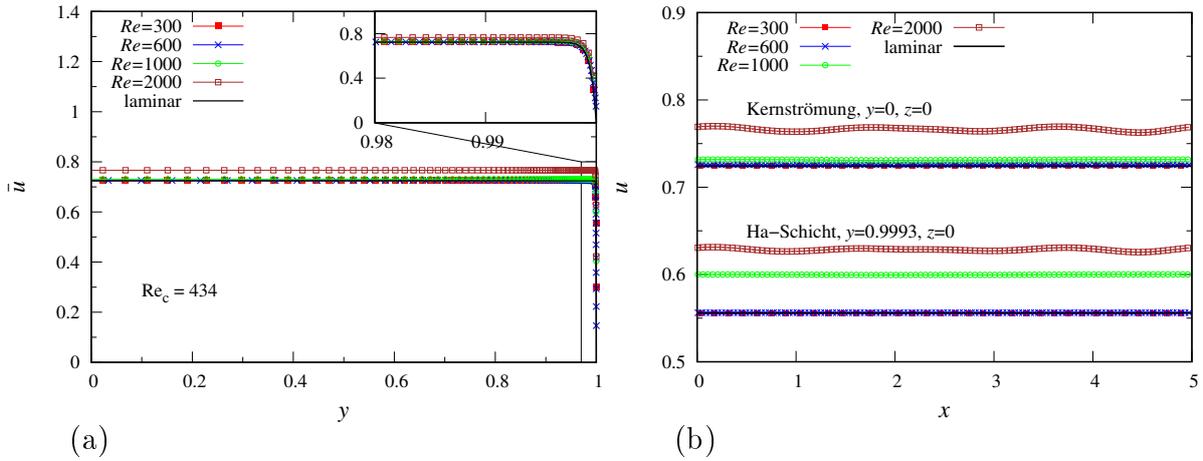


Abbildung 4.11: Simulationsergebnisse für (a) zeitlich gemittelte axiale Geschwindigkeit  $\bar{u}(y = 0, y)$  entlang der  $y$ -Achse und (b)  $u(x, y, z = 0)$  in der Kernströmung und in der Hartmann-Schicht entlang der  $x$ -Achse für  $Ha = 2000$ ,  $c = 0.03$  für verschiedene Reynolds-Zahlen.

im Vergleich zur laminaren Lösung um  $\Delta\bar{u} = 6\%$  zu. Der Grund dafür ist die starke Abnahme von  $\bar{u}$  in der Seitenschicht und damit einhergehend eine Abnahme des dortigen Volumenstroms (siehe Abbildung 4.10 (a)). Da der Gesamtvolumenstrom konstant ist, muss der Volumenstrom im Kern, also die Kerngeschwindigkeit, zunehmen. Abbildung 4.11 (b) zeigt die Geschwindigkeit in der Kernströmung ( $u(x, y = 0, z = 0)$ ) und in der dünnen Hartmann-Schicht ( $u(x, y = 0.9993, z = 0)$ ). Für  $Re \leq 1000$  sind keine Schwankungen in der Kernströmung oder in der Hartmann-Schicht erkennbar. Die in der Seitenschicht beobachteten Störungen im Geschwindigkeitsprofil bei  $Re = 600$  und  $Re = 1000$  sind demnach nicht auf die Kernströmung oder Hartmann-Schicht ausgeht. Die Strömung in diesen Bereichen verhält sich weiterhin laminar, während die Seitenschichten ein instabiles Verhalten aufweisen. Im Regime 1 finden sich Störungen daher ausschließlich in der Seitenschicht.

Für die Strömung bei  $Re = 2000$  sind Schwankungen sowohl im Kern als auch in der Hartmann-Schicht erkennbar. Die Amplituden sind mit  $\Delta u < 0.01$  mehr als zwei Größenordnungen kleiner als in der Seitenschicht. Dies bedeutet, dass durch den Übergang in Regime 2 auch die Kernströmung und die Strömung in der Hartmann-Schicht instabil werden.

Die zugehörigen Potentialprofile  $\bar{\phi}$  und  $\phi$  sind in Abbildung 4.12 (a) entlang der  $z$ -Achse bei  $y = 0$  und in (b) entlang der  $x$ -Achse bei  $z = 0.96$  und  $y = 0$  gezeigt. Im Gegensatz zum  $\phi$ -Profil entlang der  $z$ -Achse in der idealen Hunt'schen Strömung in Abbildung 4.5 wächst hier  $\bar{\phi}$  in der Kernströmung linear an, weil die Hartmann-Wände eine endliche Leitfähigkeit haben. Bis  $Re = 1000$  stimmen analytische und numerische Lösungen für  $\bar{\phi}$  nahezu perfekt überein. Erst bei  $Re = 2000$  sind für  $\bar{\phi}$  Unterschiede zur laminaren Lösung erkennbar. Innerhalb der Kernströmung ist eine Zunahme von  $\partial\bar{\phi}/\partial z$  erkennbar. Ursache hierfür ist die bereits diskutierte Zunahme der Geschwindigkeit in der Kernströmung, wegen der Abnahme des Volumenstroms in der Seitenschicht. Dadurch steigt auch  $\partial\bar{\phi}/\partial z$ . Richtung Seitenschicht weitet sich das Profil von  $\bar{\phi}$  verglichen mit denen der niedrigeren

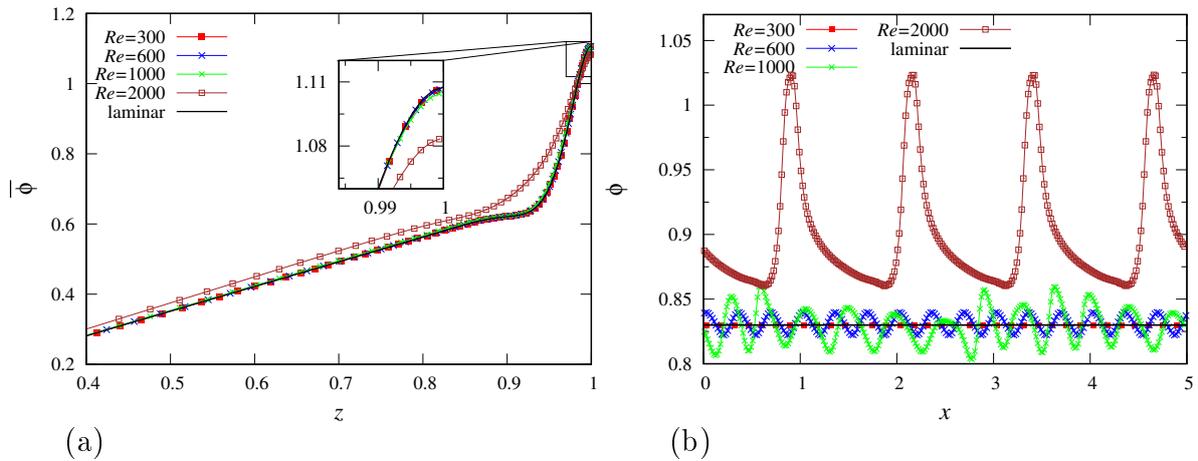


Abbildung 4.12: Simulationsergebnisse für (a) zeitlich gemitteltes  $\bar{\phi}(y = 0, z)$  entlang der  $z$ -Achse und (b)  $\phi(x, y = 0, z = 0.96)$  entlang der  $x$ -Achse für  $Ha = 2000$ ,  $c = 0.03$  für verschiedene Reynolds-Zahlen.

$Re$  auf. Dies ist in Übereinstimmung mit der Verbreiterung des Geschwindigkeitsjets in Abbildung 4.10 (a). In Abbildung 4.12 (b) sind für  $Re = 300$  keine Schwankungen, für  $Re = 600$  gleichmäßig periodische Schwankungen und für  $Re = 1000$  periodische Schwankungen mit sich ändernder Amplitude erkennbar. Dieses Verhalten ist analog zu dem in Abbildung 4.10 (b). Zu beachten ist, dass  $\partial\phi/\partial x$  der Geschwindigkeitskomponente  $w$  entspricht. Für  $Re = 2000$  ist ein zackenartiger Verlauf von  $\phi$  erkennbar, der deutlich größere Amplituden und Wellenlängen aufweist als bei den niedrigeren Reynolds-Zahlen. Die in den Geschwindigkeitsprofilen gefundenen unterschiedlichen Regime lassen sich somit ebenfalls in den Potentialprofilen eindeutig wiederfinden.

Tabelle 4.9 zeigt eine Übersicht von  $\Delta\bar{u}$  und  $\Delta u$  aller betrachteter  $Ha$  bei verschiedenen  $Re$ .  $\Delta\bar{u}$  bezieht sich dabei analog zu Abbildung 4.10 (a) auf den Maximalwert bei  $y = 0$ ,  $\Delta u$  entsprechend Abbildung 4.10 (b) auf  $z = 0.96$  und  $y = 0$ . Für  $Ha = 500$  konnte ebenfalls Regime 1 und 2 gefunden werden. Deutlich zu erkennen ist die starke Zunahme sowohl von  $\Delta\bar{u}$  als auch  $\Delta u$  beim Übergang von Regime 1 zu Regime 2. Dabei wächst  $\Delta\bar{u}$  von  $\Delta\bar{u} = 0.01$  zu  $\Delta\bar{u} = 0.25$  um über eine Größenordnung. Bei  $\Delta u$  fällt der Anstieg noch größer aus, weil hier keine Mittelung vorgenommen wird.

Für  $Ha = 1000$  konnte im untersuchten Reynolds-Zahl-Bereich nur Regime 1 und der Übergangszustand von Regime 1 nach 2 gefunden werden. Mit steigender Reynolds-Zahl nehmen  $\Delta\bar{u}$  und  $\Delta u$  innerhalb des Regimes 1 kontinuierlich zu. Im Übergangszustand bei  $Re = 12000$  sind  $\Delta\bar{u}$  und  $\Delta u$  kleiner als bei  $Re = 2000$ . Schwankungen von  $\Delta u$  sind nicht gleichmäßig, sondern finden im Bereich einer ganzen Größenordnung statt. Bei  $Ha = 2000$  ist im Übergangszustand bei  $Re = 1000$   $\Delta\bar{u}$  und  $\Delta u$  größer als im Regime 1 bei  $Re = 600$ . Beim Wechsel von Regime 1 zu Regime 2 steigen  $\Delta\bar{u}$  und  $\Delta u$  um über eine Größenordnung, analog zu  $Ha = 500$ .

Deutlich wird, wie bei gleicher Reynolds-Zahl mit steigender Hartmann-Zahl  $\Delta\bar{u}$  ansteigt. Für  $Re = 2000$  ist bspw. bei  $Ha = 500$   $\Delta\bar{u} = 0.25$ , bei  $Ha = 1000$  ist hingegen  $\Delta\bar{u} = 0.68$ , obwohl bei  $Ha = 500$  Regime 2 und bei  $Ha = 1000$  Regime 1 vorliegt. Ursache hierfür ist

### 4.3 Untersuchung von zeitabhängigen magnetohydrodynamischen Kanalströmungen

$Ha$	$Re$	Regime	$\Delta\bar{u}$	$\Delta u$
500	1400	stabil	-	-
500	1750	1	0.01	0.04
500	2000	2	0.25	2.08
500	10540	2	1.35	1.68
1000	600	stabil	-	-
1000	800	1	0.01	0.1
1000	1000	1	0.1	0.5
1000	2000	1	0.68	0.82
1000	12000	1-2	0.32	0.04-0.38
2000	300	stabil	-	-
2000	600	1	0.12	0.88
2000	1000	1-2	0.6	1.8-2.8
2000	1500	2	2.3	6.5
2000	2000	2	3.7	7.3

Tabelle 4.9: Abweichung  $\Delta\bar{u}$  von  $\bar{u}$  der jeweiligen stationären Lösung und Schwankungen  $\Delta u$  für verschiedene  $Ha$  und  $Re$

die Zunahme der Jetgeschwindigkeit mit steigendem  $Ha$ , sodass auftretende Instabilitäten ebenfalls höhere Geschwindigkeitsschwankungen aufweisen.

Aus den bisherigen Ergebnissen und unter Berücksichtigung weiterer numerischer Ergebnisse für  $Ha = 500$ ,  $Ha = 1000$  und  $Ha = 2000$  lässt sich eine Stabilitätskarte erstellen, wie sie in Abbildung 4.13 gezeigt ist. Die eingetragenen Punkte geben an, welcher Strömungszustand sich in der entsprechenden Simulation als statistisch voll entwickelter Zustand eingestellt hat. Zum Vergleich ist das Ergebnis der linearen Stabilitätsanalyse für  $c = 0.03$  eingetragen. Zwischen Simulationen und linearer Stabilitätsanalyse findet sich eine gute Übereinstimmung, wodurch sich beide Verfahren gegenseitig bestätigen.

Unterhalb der Kurve der linearen Stabilitätsgrenze finden sich nur stationäre, stabile Strömungen, oberhalb hingegen nur instabile Strömungen, zunächst im Regime 1. Bei einer weiteren Zunahme von  $Re$  findet sich der Übergangszustand von Regime 1 zu 2, der, je nach  $Ha$ , bei sehr unterschiedlichen  $Re$  liegen kann. (Vergleiche  $Ha = 500$ ,  $Re = 1900 \leftrightarrow Ha = 1000$ ,  $Re = 12000$ ). Durch einen weiteren Anstieg von  $Re$  geht die Strömung in Regime 2 über. Auffällig dabei ist, dass sich Regime 2 für  $Ha = 500$  bei  $Re \simeq 2000$  bzw. für  $Ha = 2000$  bei  $Re \simeq 1500$  entwickelt, für  $Ha = 1000$  hat es sich selbst für  $Re = 12000$  noch nicht voll ausgebildet. Der Übergang von Regime 1 zu Regime 2 wird folglich deutlich stärker von  $Ha$  beeinflusst als der Übergang von der laminaren Strömung zu Regime 1. Einflüsse des Gitters können an dieser Stelle ausgeschlossen werden, da die Länge und die Auflösung in  $x$ -Richtung für alle  $Ha$  in diesem Reynolds-Zahl-Bereich gleich ist.

Im Experiment wurde  $Re_c \approx 1360$  bei  $Ha = 2000$  gefunden und das zugehörige Strömungsregime erstreckt sich bis  $Re \approx 12500$ . Im gemessenen Geschwindigkeitsprofil von  $Re = 3000$  ist eine Verbreiterung des Geschwindigkeitsjets erkennbar, sodass es berechtigt ist anzunehmen, dass die Strömung sich im Regime 2 befand. Daraus folgt, dass numerische Simulation und Experiment in ihren kritische Reynolds-Zahlen für das Auftreten von Regime 2 bei  $Ha = 2000$  eine sehr gute Übereinstimmung zeigen.

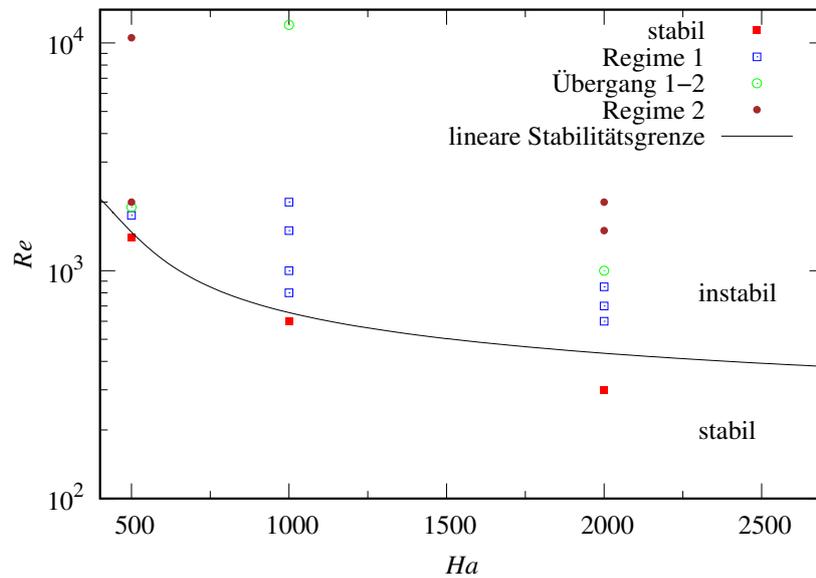


Abbildung 4.13: Stabilitätskarte für verschiedene  $Re$  in Abhängigkeit von  $Ha$

### 4.3.3 Eigenschaften der Instabilitäten

Eine Analyse von Wellenlängen  $\lambda$ , Frequenzen  $f^*$  und Phasengeschwindigkeiten  $c_P/u_{max}$  lässt sich mit Hilfe von Abbildung 4.14 (a) - (c) vornehmen. In schwarz sind die jeweiligen Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse (siehe Abbildung 3.6) zusätzlich dargestellt. In Übereinstimmung mit der linearen Stabilitätsanalyse wird in Abbildung 4.14 (a) deutlich, dass mit steigendem  $Ha$  im Regime 1  $\lambda$  abnimmt und die Instabilitäten bei niedrigeren  $Re$  einsetzen. Bei  $Ha = 1000$  und  $Ha = 2000$  ist ein Zusammenhang von  $\lambda \sim Re^{1/2}$  für Regime 1 erkennbar. Bei  $Ha = 500$  ist dieser Zusammenhang nicht zuverlässig ermittelbar, weil die betrachteten  $Re$  sehr nah beieinander liegen und die Störungen, verglichen mit denen der anderen  $Ha$ , relativ klein sind.

Im Regime 2 ist  $\lambda$  deutlich größer als in Regime 1. So ist für  $Ha = 2000$   $\lambda = 0.42$  bei  $Re = 1000$  und bei  $Re = 1500$  gilt hingegen  $\lambda = 1.25$ . Das für  $Re = 2000$  ebenfalls  $\lambda = 1.25$  vorliegt, bedeutet, dass sich die Anzahl der instabilen Strukturen nicht geändert hat.

Wie für  $Ha = 500$  deutlich wird, erfolgt der Übergang innerhalb eines kleinen Reynolds-Zahl-Bereiches und bereits bei  $Re = 2000$  ist die Strömung in das Regime 2 übergegangen. Mit einer Wellenlänge von  $\lambda = 5$ , bildet sich die Störungsstruktur über die gesamte Länge des Kanals aus. Größere Wellenlängen können daher mit der genutzten Geometrie nicht mehr gefunden werden. Für  $Re = 10540$  stellt sich deswegen ebenfalls  $\lambda = 5$  als Wellenlänge ein.

Bei  $Ha = 500$  ist der Anstieg von  $\lambda$  beim Übergang von Regime 1 zu Regime 2 deutlich größer, als bei  $Ha = 2000$ . Daraus lässt sich schlussfolgern, dass im Regime 2, genauso wie im Regime 1,  $\lambda$  mit steigendem  $Ha$  abnimmt.

### 4.3 Untersuchung von zeitabhängigen magnetohydrodynamischen Kanalströmungen

In Abbildung 4.14 (b) ist die Abhängigkeit der dimensionslosen Frequenz  $f^* = fL/u_0$  von  $Re$  für die betrachteten  $Ha$  dargestellt. Wie aus der linearen Stabilitätstheorie erwartet, nimmt  $f^*$  mit steigender Hartmann-Zahl im Regime 1 zu (siehe Abbildung 3.6). Nimmt  $Re$  bei fixem  $Ha$  zu, ergibt sich im Regime 1  $f^* \sim Re^{-1/2}$ . Deutlich ist ebenfalls der Übergang von Regime 1 zu Regime 2 zu sehen, die Frequenz ändert sich um fast eine Größenordnung. Für die Transport- bzw. Phasengeschwindigkeit  $c_P = \lambda f^*$  ergibt sich daraus, dass diese konstante Werte bei der jeweiligen Hartmann-Zahl im Regime 1 annimmt, welche in Tabelle 4.10 dargestellt sind. Aus ihr ergibt sich  $c_P \sim Ha$ , sodass  $c_P$  linear mit steigendem  $Ha$  wächst. Weiterhin ist  $c_P$  im Regime 2 gezeigt. Im Vergleich zu Regime 1 hat sich  $c_P$  bei den untersuchten  $Re$  für  $Ha = 2000$  und ungefähr halbiert.

Da sich die Instabilitäten im Jet entwickeln und mit ihm fortbewegen, ist in Abbildung 4.14 (c)  $c_P/u_{max}$  in Abhängigkeit von  $Re$  dargestellt. Zunächst ist erkennbar, dass mit steigendem  $Ha$   $c_P/u_{max}$  an der Stabilitätsgrenze abnimmt ( $c_P/u_{max} \rightarrow 0.47$  für  $Ha \rightarrow \infty$  laut linearer Stabilitätsanalyse). Wird  $Re$  erhöht, steigt  $c_P/u_{max}$  an, weil  $u_{max}$  aufgrund wachsender Störungsamplituden abnimmt. Folglich bewegen sich die Störungsmuster relativ zum Jet mit steigendem  $Re$  zunehmend schneller. Nach dem Übergang zu Regime 2 fällt  $c_P/u_{max}$  zunächst stark ab, weil sich die großen Störungsstrukturen des Regimes 2 langsamer voran bewegen. Mit weiter steigendem  $Re$  nimmt allerdings  $u_{max}$  ab, sodass die Störungsmuster relativ zu  $u_{max}$  wieder schneller werden.

Abbildung 4.15 zeigt den Anteil des Volumenstroms  $Q_S$  in der Seitenschicht relativ zum Gesamtvolumenstrom  $Q$  für verschiedene  $Ha$  und  $Re$ . Da der Strom  $\mathbf{j}(z, y)$  aus der Numerik ebenfalls bekannt ist, lässt sich der in Gleichung (3.17) vernachlässigte Einfluss der Hartmann-Schicht auf den Volumenstrom berücksichtigen. Dadurch lässt sich der, wenn auch kleine, Fehler in der Größenordnung  $O(cHa^{-1})$  bei der Berechnung von  $Q$  vermeiden. In guter Übereinstimmung mit Abbildung 3.4 für  $c = 0.03$  wird  $Q_S/Q$  im stabilen Strömungsregime und Regime 1 mit steigendem  $Ha$  größer. Für Regime 1 ist weiterhin zu erkennen, dass  $Q_S/Q$  nur geringfügig mit steigendem  $Re$  abnimmt. Erst mit Einsetzen von Regime 2 fällt  $Q_S/Q$  deutlich aufgrund der starken Reduktion der maximalen Geschwindigkeit im Jet ab. So ist für  $Ha = 500$  zu erkennen, dass sich bei  $Re = 2000$   $Q_S/Q$  um ca. 14% und bei  $Re = 10540$  um ca. 43% im Vergleich zum laminaren Fall reduziert. Da der Gesamtvolumenstrom konstant ist, bedeutet dies, dass im Regime 2 die Kernströmung einen größeren Anteil am Gesamtvolumenstrom hat, als im Regime 1. Dies ist in Übereinstimmung mit der Zunahme von  $\partial\bar{\phi}/\partial z$  wie sie zu Abbildung 4.12 (a) diskutiert wurde.

Der Verlauf des Druckgradienten  $\overline{dp/dx}$  ist in Abbildung 4.16 (a) in Abhängigkeit von  $Re$  für verschiedene  $Ha$  gezeigt. Im Gegensatz zu Abbildung 4.14 sind auch Ergebnisse von stationären Strömungen eingetragen. Weiterhin sind die von Chowdhury (2016) er-

Regime 1		Regime 2		
$Ha$	$c_P$	$Ha$	$Re$	$c_P$
500	2.3	500	2000	1.6
1000	3.4	2000	1500	2.9
2000	5.5	2000	2000	2.7

Tabelle 4.10: Phasengeschwindigkeit  $c_P$  bei verschiedenen  $Ha$  im Regime 1 und bei verschiedenen  $Ha$  und  $Re$  im Regime 2

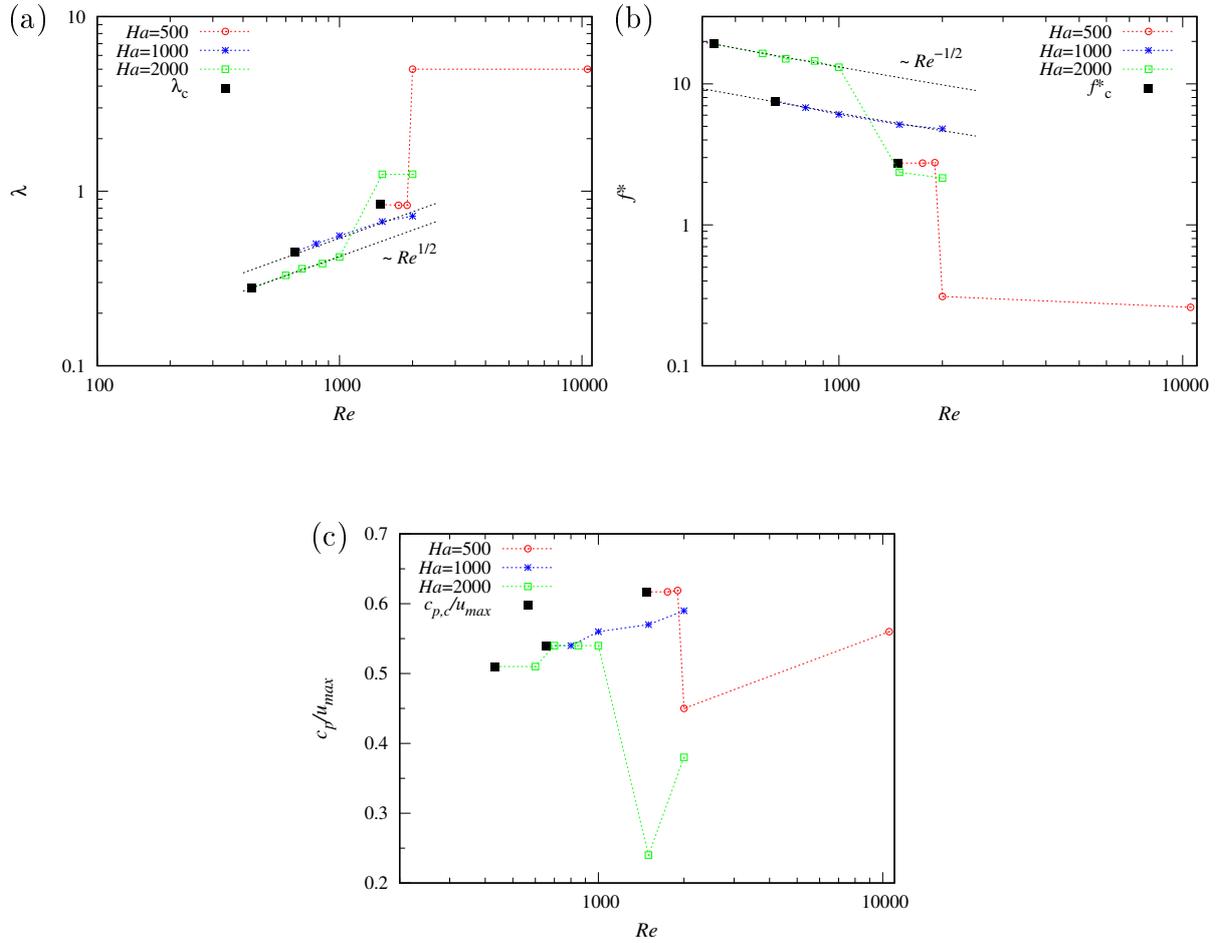


Abbildung 4.14: Ergebnisse für (a) die Wellenlänge  $\lambda$ , (b) die dimensionslose Frequenz  $f^*$  und (c) die Phasengeschwindigkeit  $c_P$  bezogen auf die maximale Geschwindigkeit  $u_{max}$  in Abhängigkeit von  $Re$  und für verschiedene  $Ha$ . Schwarz markiert sind die Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse.

zielte Messergebnisse und die entsprechenden laminaren Verläufe des Druckgradienten in Abbildung 4.16 (a) dargestellt. Für alle drei gezeigten Werte von  $Ha$  ist zwischen numerischen und laminaren Werten eine sehr gute Übereinstimmung zu erkennen, ebenso zu den experimentellen Ergebnissen. Einerseits steigt mit anwachsender Hartmann-Zahl der Druckgradient aufgrund stärker werdender Lorentz-Kräfte, andererseits nimmt er mit wachsendem  $Re$  linear ab. Instabile Strömungszustände sind für alle gezeigten  $Re$  nicht am Verlauf des Druckgradienten zu erkennen. Dies liegt daran, dass dieser Druckgradient sich aus dem Gleichgewicht zwischen Druckkraft und Lorentz-Kraft in der Kernströmung einstellt, also  $\nabla p = N\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ , was aus Gleichung (2.9) folgt. Die Kernströmung wird aber im Regime 1 nicht instabil und zeigt im Regime 2 nur sehr kleine Störungen, sodass keine nennenswerte Änderung von  $d\bar{p}/dx$  aufgrund von Instabilitäten zu beobachten ist.

Abbildung 4.16 (b) zeigt hingegen für  $Ha = 2000$  den Druck  $p(x, y = 0, z = 0.96)$  in der Seitenschicht für verschiedene  $Re$ . Im laminaren Fall von  $Re = 300$  ist kein Unterschied zwischen dem mittleren Druckverlauf  $\bar{p}$ , der sich auf die Gesamtkanallänge bezieht, und

### 4.3 Untersuchung von zeitabhängigen magnetohydrodynamischen Kanalströmungen

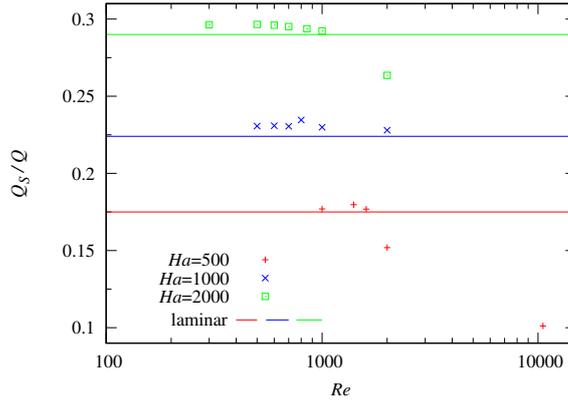


Abbildung 4.15: Anteil des Volumenstroms der Seitenschicht  $Q_S$  am Gesamtvolumenstrom  $Q$  für verschiedene  $Ha$  und  $Re$

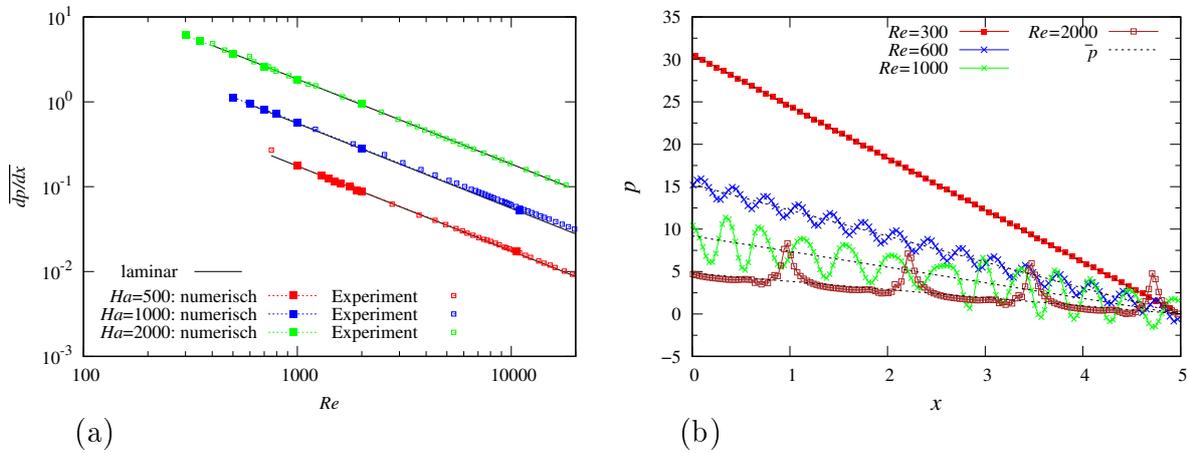


Abbildung 4.16: (a) Mittlerer Druckgradient  $\overline{dp/dx}$  für verschiedene  $Ha$  und  $Re$ . (b) Druck  $p(x, y = 0, z = 0.96)$  in der Seitenschicht bei  $Ha = 2000$  für verschiedene  $Re$ . Experimentelle Daten aus Chowdhury (2016)

dem Druck  $p$  am Ort  $x$  festzustellen. Mit steigendem  $Re$  nimmt der Druckgradient ab, was in Übereinstimmung mit Abbildung 4.16 (a) ist. Zusätzlich werden Druckschwankungen sichtbar, deren Amplitude mit  $Re$  zunimmt. Da Druck und Geschwindigkeit durch die Bernoulli-Gleichung in der Form

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = const \quad (4.7)$$

verknüpft sind, können die Druckschwankungen ebenfalls Regime 1 ( $Re = 600$ ), dem Übergang zu Regime 2 ( $Re = 1000$ ) und Regime 2 ( $Re = 2000$ ) zugeordnet werden. Wird Abbildung 4.16 (b) mit Abbildung 4.10 (b) verglichen, so zeigt sich, dass Druckminima und Geschwindigkeitsmaxima zusammenfallen.

Anhand des Druckgradienten  $\overline{dp/dx}$  lässt sich im untersuchten Parameterraum nicht feststellen, ob die Strömung instabil ist. Dies ist in sehr guter Übereinstimmung mit experimentellen Daten. Die numerischen Simulationen zeigen zusätzlich, dass bei Betrachtung des Drucks in der Seitenschicht die Instabilitätsregime 1 und 2 eindeutig identifiziert werden können.

Für experimentelle Messungen sei hier angemerkt, dass die betrachteten Druckschwankungen  $\Delta p \approx 1\text{Pa}$  in SI-Einheiten bei  $Re = 600$  und  $\Delta p \approx 20\text{Pa}$  bei  $Re = 2000$  betragen.

### 4.3.4 Räumliche Struktur der instabilen Strömungen

Im Folgenden wird die räumliche Struktur bzw. Verteilung der Instabilitäten im quasi-stationären Zustand untersucht. Dazu werden zunächst Komponenten von  $\nabla\phi'$  auf der Seitenwand und Hartmann-Wand betrachtet. Anschließend werden die dazugehörigen dreidimensionalen Strukturen innerhalb der Strömung betrachtet. Dieses Vorgehen ist zum Vergleich mit Experimenten sinnvoll, weil Potentialmessungen an den Wänden einige der wenigen experimentellen Untersuchungsmöglichkeiten für MHD-Instabilitäten darstellen und so eine Verbindung zwischen räumlicher Struktur innerhalb der Strömung und den Wandsignalen hergestellt wird. Da im Experiment nur Potentialdifferenzen gemessen werden können, wird  $\nabla\phi'$  anstelle von  $\phi'$  betrachtet. Außerdem lassen sich den Komponenten von  $\nabla\phi'$  die jeweiligen Komponenten der Geschwindigkeitsstörungen direkt zuordnen. Im Vergleichsexperiment wurden die Wandsignale bei deutlich größeren Reynolds-Zahlen analysiert, welche numerisch nur mit erheblichem Mehraufwand hätten untersucht werden können. Daher ist nur ein prinzipieller Vergleich möglich.

Die Diskussion soll sich auf  $Ha = 2000$  beschränken, ist aber leicht auf  $Ha = 500$  und  $Ha = 1000$  übertragbar. Die entsprechenden Darstellungen finden sich im Anhang.

#### 4.3.4.1 Potentialstörungen auf den Kanalwänden

In Abbildung 4.17 sind Konturen von  $\partial\phi'/\partial x$  und  $\partial\phi'/\partial y$  quasi-stationärer Strömungen mit verschiedenen  $Re$  bei  $Ha = 2000$  auf der Seitenwand bei  $z = 1$  dargestellt.

Für  $Re = 600$  in Abbildung 4.17 (a) ist  $\partial\phi'/\partial x$  sehr gleichmäßig periodisch in Strömungsrichtung. In Magnetfeldrichtung ist hingegen nur eine geringe Änderung von  $\partial\phi'/\partial x$  erkennbar, welche sich in einer Art Wölbung in Strömungsrichtung äußert. Diese entsteht durch Bewegung des Fluids und überträgt sich auf die Wand. Im Vergleich dazu fällt für  $\partial\phi'/\partial y$  auf, dass es zwar auch die periodische Struktur in Strömungsrichtung hat, die Amplituden jenseits des Bereiches der Hartmann-Schicht aber deutlich kleiner ausfallen. In der Hartmann-Schicht sind die Amplituden etwas größer als die von  $\partial\phi'/\partial x$ . In Magnetfeldrichtung gibt es einen Vorzeichenwechsel von  $\partial\phi'/\partial y$  bei  $y = 0$ . Dieser entspricht einer symmetrischen Verteilung von  $\phi'$  um  $y = 0$ , die sich von  $y = -1$  bis  $y = 1$  erstreckt und dem Mode I bzw. III entspricht.

Abbildung 4.17 (b) für  $Re = 1000$  zeigt, dass die bereits bei Abbildung 4.10 diskutierte Zunahme von Wellenlänge und Amplitude der Störungen ebenfalls auf der Seitenwand sichtbar ist und die prinzipielle Struktur von  $\partial\phi'/\partial x$  auf der Seitenwand im Vergleich zu  $Re = 600$  zunächst gleich bleibt. Zusätzlich wird die inhomogene Amplitudenverteilung sichtbar, die den Übergang vom Regime 1 zum Regime 2 auszeichnet. Zwischen  $-0.5 < y < 0.5$  ist erkennbar, dass sich die vertikalen Strukturen von  $\partial\phi'/\partial x$  teilweise zusammenschließen. Dies geschieht bspw. bei  $x \approx 2.8$ , genau an der Stelle, an der auch in Abbildung 4.10 (b) eine große Amplitude sichtbar ist. Bei  $\partial\phi'/\partial y$  haben entsprechend ebenfalls Wellenlänge und Amplitude zugenommen. Die stärksten Amplituden sind weiterhin im Bereich der Hartmann-Schicht zu sehen.

### 4.3 Untersuchung von zeitabhängigen magnetohydrodynamischen Kanalströmungen

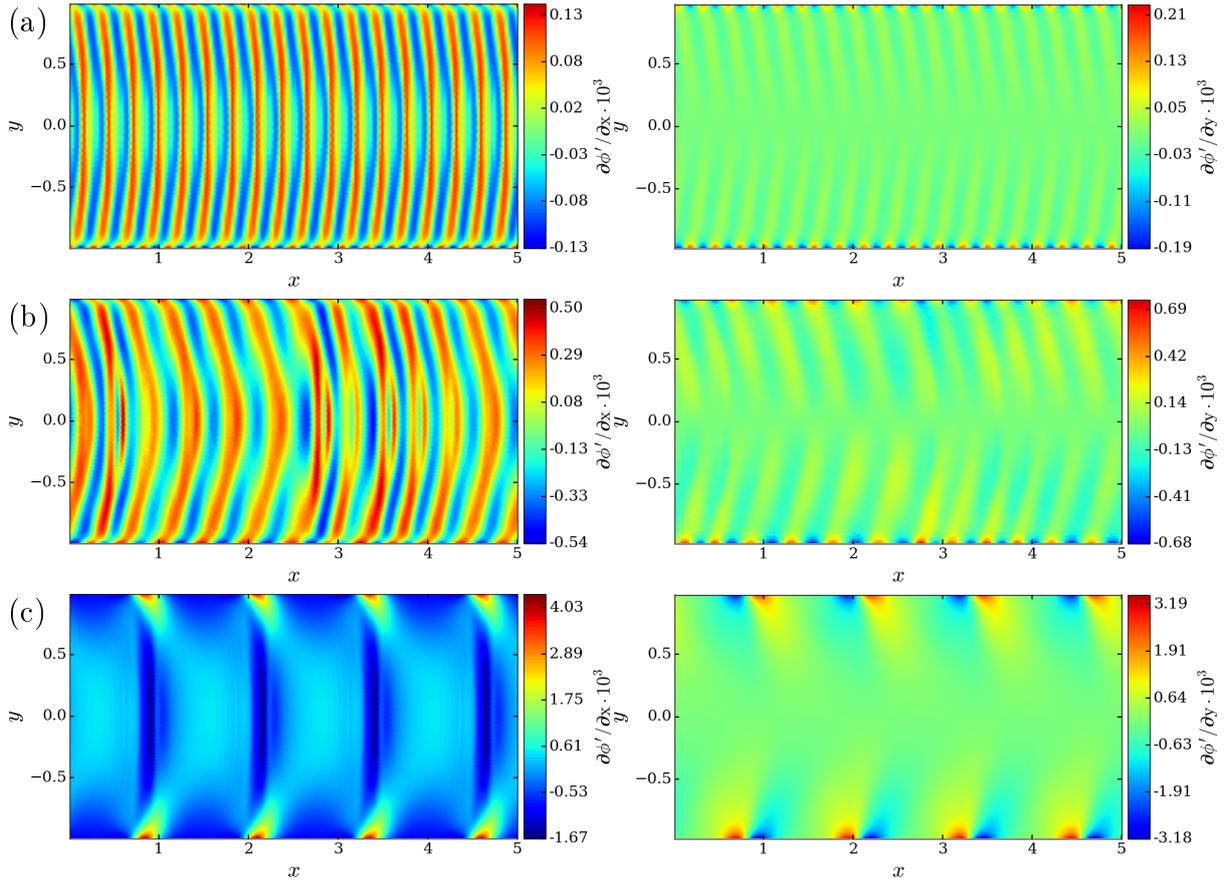


Abbildung 4.17: Seitenwandsignale für  $\partial\phi'/\partial x$  und  $\partial\phi'/\partial y$  für (a)  $Re = 600$ , (b)  $Re = 1000$  und (c)  $Re = 2000$  bei  $Ha = 2000$  und  $z = 1$

Für  $Re = 2000$  in Abbildung 4.17 (c) ist der Wechsel in Regime 2 an der Verteilung von  $\partial\phi'/\partial x$  deutlich erkennbar. Zwar gibt es weiterhin eine periodische Struktur in Strömungsrichtung, die Wellenlänge hat allerdings um den Faktor drei zugenommen. In Magnetfeldrichtung treten deutliche Änderungen in der Verteilung von  $\partial\phi'/\partial x$  auf. Die Maxima von  $\partial\phi'/\partial x$  liegen nahe  $y = \pm 1$ , während die kleinsten Werte bei  $y = 0$  liegen. Im Vergleich zu  $Re = 1000$  sind die Amplituden hier um ca. eine Größenordnung gewachsen. Bei  $\partial\phi'/\partial y$  ist ebenfalls die Zunahme der Wellenlänge und der Amplituden der Störungen sichtbar. Die prinzipielle räumliche Verteilung von  $\partial\phi'/\partial y$  hat sich im Vergleich zu  $Re = 1000$  ansonsten nicht wesentlich geändert. Dies bedeutet, dass nach wie vor eine instabile Struktur vorliegt, die sich von der unteren bis zur oberen Hartmann-Wand erstreckt.

In den Experimenten von Chowdhury (2016) wurde  $\partial\phi'/\partial y$  zwischen  $-0.7 < y < 0.7$  gemessen. Motivation hiervon war, dass Messungen von  $\phi(y, z \pm 1)$  einerseits direkte Rückschlüsse auf den Volumenstrom in den Seitenschichten liefern. Andererseits wurden die größten Schwankungen in der Nähe der maximalen Jetgeschwindigkeit erwartet. Messungen näher an den Hartmann-Wänden  $0.7 < |y| < 1$  waren aus geometrischen Gründen nicht möglich. Messbare Potentialschwankungen wie in Abbildung 4.17 findet Chowdhury (2016) daher erst bei größeren Reynolds-Zahlen. Ursache hierfür könnte sein, dass die Amplituden von  $\partial\phi'/\partial y$  im untersuchten  $y$ -Bereich sehr klein sind, was sich mit dem quasi-zweidimensionalen Verhalten ( $\partial/\partial y \ll 1$ ) der Potentialstörungen in  $y$ -Richtung er-

klären ließe. Eine Betrachtung in SI-Einheiten von  $\partial\phi'/\partial y$  zeigt jedoch, dass bereits für  $Re = 600$   $\partial\phi'/\partial y \sim O(1\mu V)$  ist, was im Bereich des messbaren liegt. Der Grund dafür, dass Chowdhury (2016) keine Störungen messen konnte, könnte daher an der verwendeten Teststrecke liegen. Im Gegensatz zu numerischen Simulationen sind dort keine periodischen Randbedingungen in Strömungsrichtung möglich. Am Einlass der Teststrecke (Länge  $20L$ ) muss deshalb eine nicht voll entwickelte MHD-Strömung vorgegeben werden, welche sich erst in der Teststrecke voll entwickeln kann. Die Potentialmessungen wurden ungefähr im Bereich  $14L$  durchgeführt. Daher ist es möglich, dass Potentialschwankungen an diesem Ort noch deutlich kleiner als  $O(1\mu V)$  waren und damit unterhalb der Messgrenze.

Die vorliegenden numerischen Simulationen zeigen weiterhin, dass axiale Gradienten  $\partial\phi'/\partial x$  immer zu deutlich stärkeren Signalen zwischen  $-0.7 < y < 0.7$  im Vergleich zu  $\partial\phi'/\partial y$  führen. Im Bereich der Hartmann-Wände sind  $\partial\phi'/\partial x$  und  $\partial\phi'/\partial y$  von der selben Größenordnung. Für Regime 2 ist es ebenfalls ratsam  $\partial\phi'/\partial x$  zu betrachten, auch wenn die Amplitudenverteilung nicht mehr so gleichmäßig entlang der  $y$ -Richtung ist. In zukünftigen Experimenten sollte deshalb darauf geachtet werden, dass die MHD-Strömung am Messort möglichst voll entwickelt ist und auch  $\partial\phi'/\partial x$  gemessen wird.

In Abbildung 4.18 sind die zu Abbildung 4.17 gehörigen Hartmann-Wandsignale für  $\partial\phi'/\partial x$  und  $\partial\phi'/\partial z$  für die gleichen  $Re$  und  $Ha = 2000$  als Konturabbildung dargestellt. Es wird die Hartmann-Wand bei  $y = -1$  betrachtet. Bei  $Re = 600$  ist für  $\partial\phi'/\partial x$  deutlich erkennbar, dass die Störungen auf die Seitenschicht begrenzt und in Übereinstimmung mit Abbildung 4.17 (a) periodisch hintereinander angeordnet sind. Die Begrenzung auf die Seitenschicht wird auch bei  $\partial\phi'/\partial z$  sichtbar. Zusätzlich ist erkennbar, dass die Verteilung von  $\partial\phi'/\partial z$  mit zunehmendem Abstand von der Seitenwand in Strömungsrichtung verformt wird, auch wenn auf der Hartmann-Wand  $u = 0$  ist. Dies bedeutet, dass die Instabilitäten sich in Strömungsrichtung verformen. Dieser Effekt tritt bei  $Re = 1000$  für  $\partial\phi'/\partial x$  und  $\partial\phi'/\partial z$  stärker hervor, wie in Abbildung 4.18 (b) sichtbar ist, weil die Wellenlänge im Vergleich zu  $Re = 600$  zugenommen hat. Die Amplitudenverteilung ist daher bei  $Re = 1000$  prinzipiell gleich zu der bei  $Re = 600$ . Allerdings haben sich die Amplituden knapp vervierfacht.

Für Regime 2 bei  $Re = 2000$  sind in Abbildung 4.18 (c) mehrere Unterschiede zum Regime 1 sichtbar. Neben der auch auf der Seitenschicht sichtbaren Zunahme der Wellenlänge der Instabilitäten und ihrer Amplituden ist weiterhin sichtbar, dass Störungen von  $\partial\phi'/\partial x$  und  $\partial\phi'/\partial z$  in die Kernströmung hineinreichen. Besonders ist, dass für  $z < 0$  drei periodische Strukturen auftreten, für  $z > 0$  hingegen vier. Bei den kleineren  $Re$  sind hingegen jeweils gleich viele Perioden in den gegenüberliegenden Seitenschichten zu erkennen. Die Folge davon ist, dass Regime 2 in den gegenüberliegenden Seitenschichten unterschiedlich ausgeprägt ist, was zu einem unsymmetrischen mittleren Geschwindigkeitsprofil entlang der  $z$ -Achse bei  $y = 0$  führt, wie es Chowdhury (2016) auch gemessen hat. Prinzipiell gleich mit dem Experiment ist auch die Verteilung von  $\partial\phi'/\partial x$  und  $\partial\phi'/\partial z$  auf der Hartmann-Wand.

Aufgrund der bisherigen Ergebnisse, die prinzipiell auch experimentell gewonnen werden können, ist es möglich, die nichtlinearen Strömungszustände im Regime 1 bei  $Re = 600$  als Ting-Walker-Wirbel zu identifizieren. Denn es ist keine signifikante Änderung im mittleren Geschwindigkeitsprofil in Abbildung 4.10 (a) sichtbar und insbesondere keine Verbreiterung des Jets. Weiterhin zeigen die Seitenwandsignale, dass es sich um Strukturen handelt, die von der unteren bis zur oberen Hartmann-Wand reichen. Und schlussendlich

### 4.3 Untersuchung von zeitabhängigen magnetohydrodynamischen Kanalströmungen

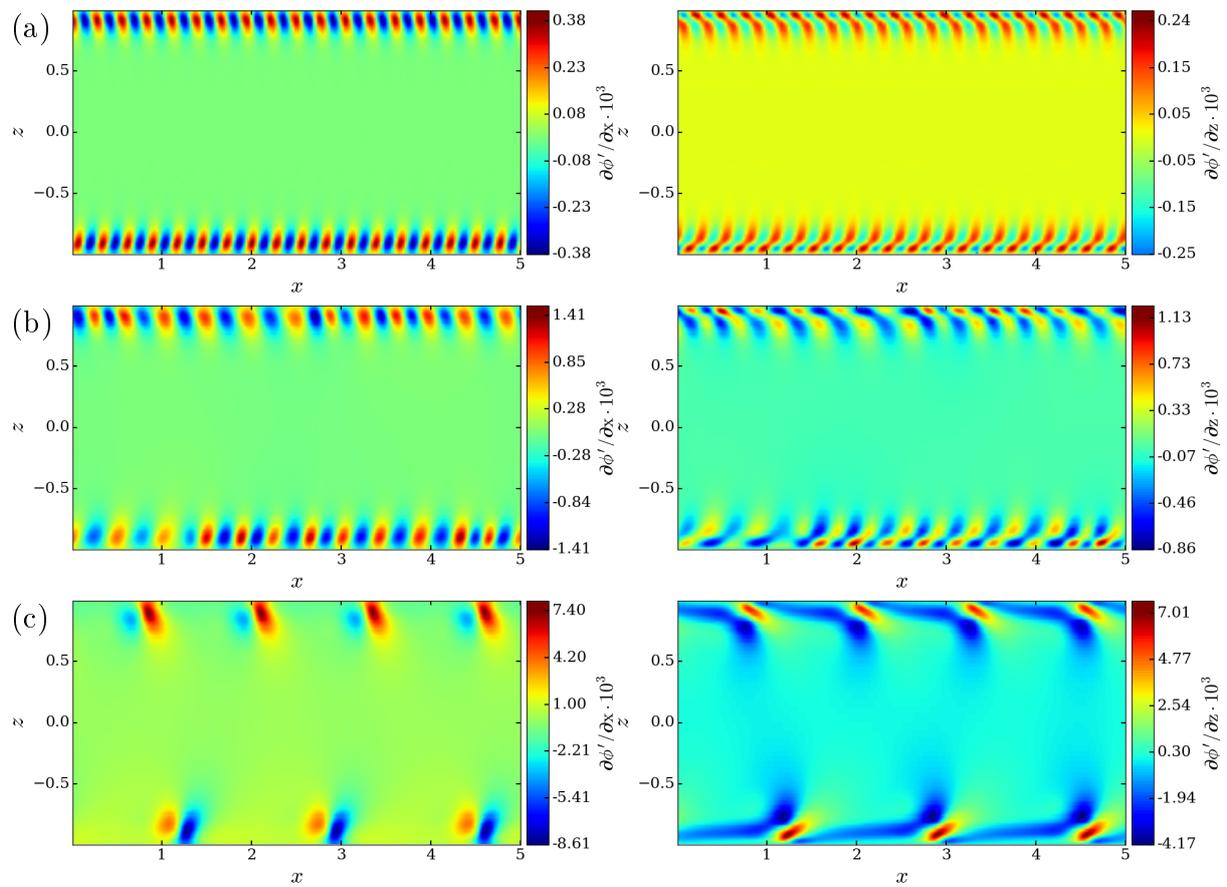


Abbildung 4.18: Hartmann-Wandsignale für  $\partial\phi'/\partial x$  und  $\partial\phi'/\partial z$  für (a)  $Re = 600$ , (b)  $Re = 1000$  und (c)  $Re = 2000$  bei  $Ha = 2000$  bei  $y = -1$

zeigen die Signale auf der Hartmann-Wand, dass sich die Störungen auf die Seitenschicht beschränken. Bei  $Re = 1000$  handelt es sich prinzipiell ebenfalls um TW-Wirbel, allerdings ist erkennbar, dass die periodische Struktur unregelmäßiger wird, was den bereits beschriebenen Übergangszustand von Regime 1 zu Regime 2 kennzeichnet. Dieses ist für  $Re = 2000$  erkennbar und zeichnet sich durch eine signifikante Änderung des mittleren Geschwindigkeitsprofils in Abbildung 4.10 (a) aus, sowie einer starken Wechselwirkung mit der Kernströmung.

### 4.3.4.2 Störungsverteilungen in der MHD-Strömung

Nachdem bisher Ergebnisse betrachtet wurden, die von außen auf der Fluid-Wand-Grenzfläche beobachtet werden können, wird im Folgenden die zugehörige interne Struktur der instabilen Strömungsmuster betrachtet. Auf diese Art lässt sich nachvollziehen, welche räumliche Struktur die an den Wänden gemessenen Potentialstörungen tatsächlich haben.

Zunächst lässt sich dazu  $u$  in der  $xz$ -Ebene bei  $y = 0$  für  $Ha = 2000$  und verschiedene  $Re$  in Abbildung 4.19 betrachten. Für  $Re = 600$  in Abbildung 4.19 (a) sind nur kleine, wellenartige Störungen von  $u$  in den Seitenschichten für Regime 1 erkennbar, die fast keine Auswirkungen auf das zeitlich gemittelte Geschwindigkeitsprofil haben (siehe Abbildung 4.10 (a)). Im Gegensatz dazu sind bei  $Re = 1000$  die wellenartigen Strukturen unregelmäßiger, aber weiterhin auf die dünne Seitenschicht begrenzt. Für  $Re = 2000$  ist in Regime 2 erkennbar, dass sich die vielen wellenartigen Störungen mit kurzer Wellenlänge zu wenigen großskaligen Störungen zusammengeschlossen haben. Insbesondere ist auffällig, dass sich die Jets in regelmäßigen Abständen von  $\Delta x \approx 1.2$  bei  $z > 0$  bzw.  $\Delta x \approx 1.6$  bei  $z < 0$  von den Wänden ablösen. Diese partiellen Jetablösungen sind bis  $z \approx \pm 0.65$  in den Kernbereich ausgedehnt. Zwischen  $0.78 < z < 0.85$  können sogar Rückströmungen mit  $u < -1$  auftreten (bspw. bei  $x \approx 2$ ). Im zeitlich gemittelten Geschwindigkeitsprofil solch einer instabilen Strömung ist die maximale Geschwindigkeit deutlich reduziert und der Jetbereich verbreitert, wie bereits bei Abbildung 4.10 (a) diskutiert. Zu beachten ist, dass die Rückströmungen im mittleren Profil überhaupt nicht sichtbar sind. Solche Jetablösungen stimmen prinzipiell mit denen von Kinet *et al.* (2009) überein. Dort wurde allerdings eine Walker-Strömung betrachtet, bei der keine Rückströmungen in der Kernströmung beobachtet werden konnten. Weiterhin war die betrachtete Hartmann-Zahl eine Größenordnung kleiner als in dieser Arbeit.

Ein wesentlicher Unterschied ist, dass Kinet *et al.* (2009) in beiden Seitenschichten gleich viele Jetablösungen gefunden haben (jeweils drei), hier aber unterschiedlich viele in den Seitenschichten vorhanden sind (drei und vier). Bereits bei der Auswertung der Hartmann-Wand-Signale für  $Re = 2000$  konnte eine unterschiedliche Verteilung der Potentialstörungen in den Seitenschichten beobachtet werden. Aufgrund von Abbildung 4.19 (c) können diese Störungen nun eindeutig als in den Seitenschichten unterschiedlich oft vorkommende partielle Jetablösungen identifiziert werden. Braiden *et al.* (2016) hat für eine ideale Hunt-Strömung für  $Ha = 100$  ebenfalls Jetablösungen gefunden. Dort variieren die Jetablösungen im Laufe der Zeit in den jeweiligen Seitenschichten. Allerdings ist die Seitenschicht aufgrund der kleineren Hartmann-Zahl größer und es kommt zu Wechselwirkungen zwischen den gegenüberliegenden Jetablösungen durch die Kernströmung hindurch. Diese Wechselwirkung ist für  $Ha = 2000$  und  $Re = 2000$  in Abbildung 4.19 (c) nicht erkennbar.

4.3 Untersuchung von zeitabhängigen magnetohydrodynamischen Kanalströmungen

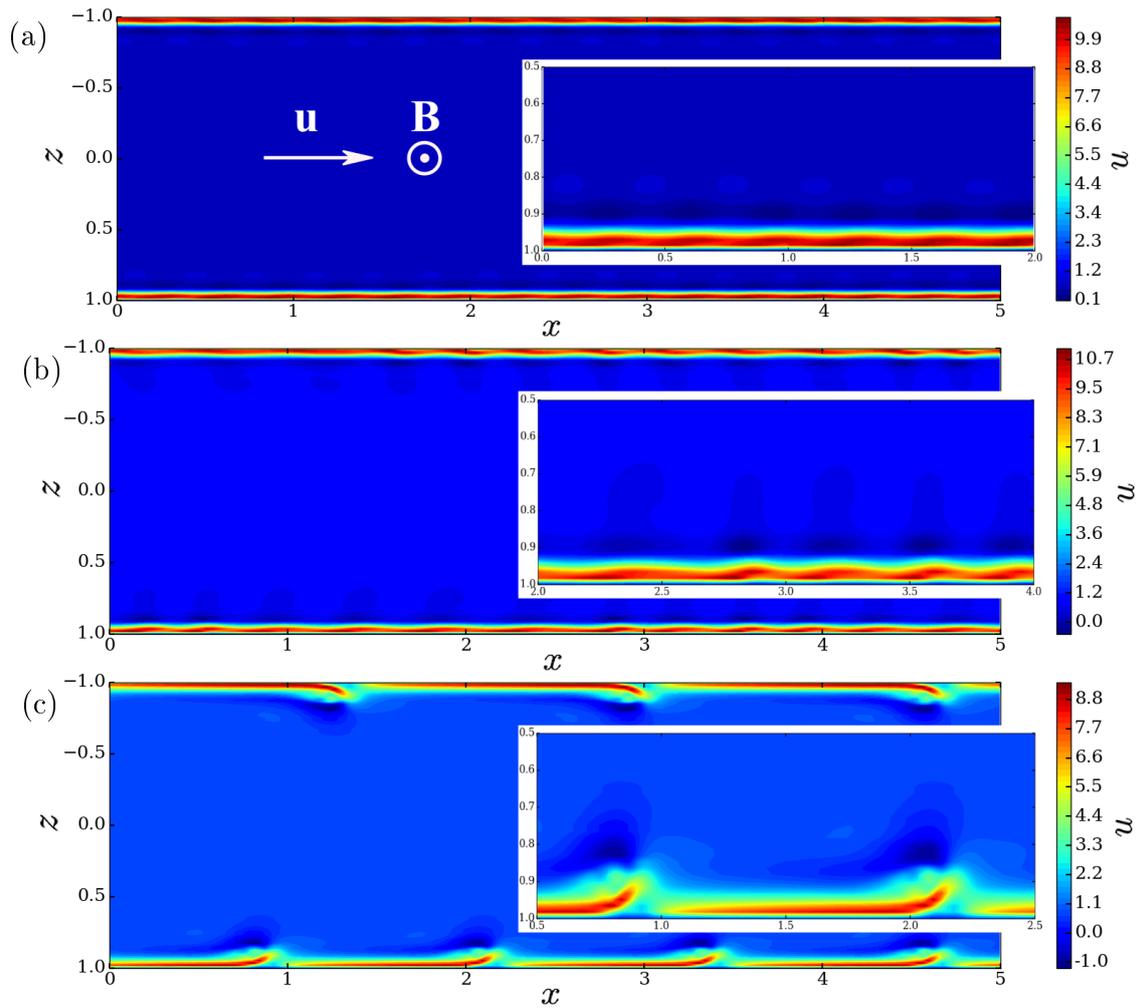


Abbildung 4.19:  $u$  in der  $xz$ -Ebene bei  $y = 0$  für  $Ha = 2000$  und (a)  $Re = 600$ , (b)  $Re = 1000$  und (c)  $Re = 2000$

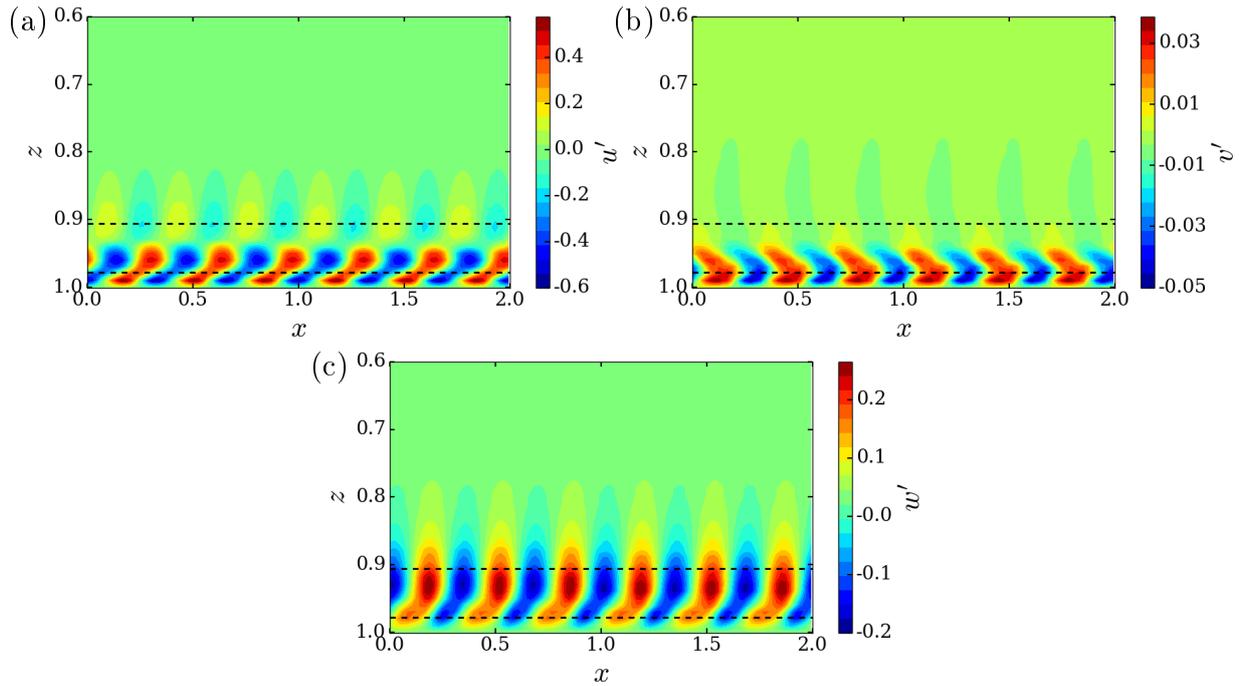


Abbildung 4.20: Störungen der Geschwindigkeit für  $Re = 600$  bei  $Ha = 2000$ : (a)  $u'(x, y = 0, z)$ , (b)  $v'(x, y = 0.5, z)$  und (c)  $w'(x, y = 0, z)$

Detailliertere Analysen der Störungen lassen sich anhand der Geschwindigkeitskomponenten der vornehmen. Dazu sind die Geschwindigkeitsstörungen  $u'(x, y = 0, z)$ ,  $v'(x, y = 0.5, z)$  und  $w'(x, y = 0, z)$  als Konturen in Abbildung 4.20 für  $Re = 600$  und  $Ha = 2000$  gezeigt. Da  $v'$  symmetrisch um  $y = 0$  ist und bei  $y = 0$  verschwindet, wird es in der  $xz$ -Ebene bei  $y = 0.5$  gezeigt. In den Darstellungen sind zusätzlich die  $z$ -Positionen des Geschwindigkeitsmaximums ( $z = 0.977$ ) und -minimums ( $z = 0.905$ ) der Grundströmung markiert. Bei  $u'$  in Abbildung 4.20 (a) zeigt sich, dass die bereits auf der Seiten- und Hartmann-Wand sichtbare periodische und in Strömungsrichtung verformte Struktur der instabilen Strömung sich innerhalb der Strömung fortsetzt und dort jedoch auf die Seitenschicht begrenzt ist. Dabei können sechs Perioden von  $u'$  in der Seitenschicht ausgemacht werden. Bei Betrachtung eines Bereiches  $u' > 0$  innerhalb einer Periode, sind zwei Maxima erkennbar, welche knapp vor und hinter dem Geschwindigkeitsmaximum bei  $z = 0.977$  liegen, wobei  $\max(u') \approx 0.5$  ist. Damit ist  $u'$  weitestgehend auf den Bereich der Geschwindigkeitsüberhöhung beschränkt. Geschwindigkeitsstörungen mit wesentlich kleineren Amplituden finden sich noch in der Nähe von  $z = 0.905$ . Verglichen mit dem zeitlich gemittelten Geschwindigkeitsprofil in Abbildung 4.10 (a) wird deutlich, dass im Jetbereich  $u' \ll \bar{u}$  ist und sich deshalb für  $\bar{u}$  nur kleine Änderungen im Vergleich mit der stabilen laminaren Strömung ergeben.

Störungen von  $v'$  sind ebenfalls auf die Seitenschicht begrenzt und ihre Maxima befinden sich zwischen Seitenwand und Jetmaximum, wie Abbildung 4.20 (b) zeigt. Daraus resultieren Störungsmuster, die senkrecht zum Magnetfeld orientiert sind. Da die Amplituden von  $v'$  rund eine Größenordnung kleiner als die von  $u'$  sind, sind diese Störungsmuster sehr klein.

Abbildung 4.20 (c) kann entnommen werden, dass  $w'$  maximal etwa halb so groß wie  $u'$  ist. Für einen Bereich mit  $w' > 0$  ist erkennbar, dass die Extremwerte von  $w'$  zwi-

### 4.3 Untersuchung von zeitabhängigen magnetohydrodynamischen Kanalströmungen

schen Jetmaximum und -minimum, also auf der Jetflanke, liegen.  $w'$  ist dabei räumlich über die gesamte Jetbreite ausgedehnt und reicht bis an die Kernströmung heran. Im Übergangsbereich zur Kernströmung gilt dabei  $u' \approx w'$ .

Die Kombination aus  $u'$  und  $w'$  ergibt Wirbelstrukturen, deren Rotationsachsen in Magnetfeldrichtung orientiert sind. Zur Quantifizierung von Wirbelstrukturen soll das  $Q$ -Kriterium verwendet werden, wie es in Abschnitt 2.3.3 vorgestellt wurde.

Die Kontur von  $Q$  ist in Abbildung 4.21 (a) zur Visualisierung von Wirbelstrukturen für den selben Zeitpunkt wie die Geschwindigkeitsstörungen in Abbildung 4.20 gezeigt. Deutlich zu sehen sind Wirbelstrukturen, die über die gesamte Jetbreite ausgedehnt sind und sich in axialer Richtung periodisch wiederholen. Zur Wand hin verschwindet  $Q$ . Die Wirbelstrukturen sind um das Geschwindigkeitsmaximum bei  $z = 0.977$  paarweise angeordnet. Dies bedeutet, dass sich in beiden Jetflanken jeweils in  $x$ -Richtung periodische Wirbel befinden. Dabei sind die Wirbelstrukturen zwischen Jet und Wand sowohl räumlich als auch in ihrer Amplitude kleiner ausgeprägt als die Wirbelstrukturen zwischen Jet und Kernströmung. Letztere dehnen sich bis zum Minimum der mittleren Geschwindigkeit bei  $z = 0.905$  aus. Die Wirbelstrukturen sind damit eindeutig auf die Seitenschicht begrenzt. Weiterhin sind diese Wirbelstrukturen in axialer Richtung ineinander verschoben.

Abbildung 4.21 (b) zeigt die Verteilung von  $Q$  in der  $xy$ -Ebene bei  $z = 0.96$ . Deutlich wird, dass die Wirbelstrukturen fast über die gesamte Höhe des Kanals ausgedehnt sind. Die Extremwerte von  $Q$  befinden sich bei  $y = 0$ , also dem Ort der größten Geschwindigkeiten. Zusätzlich weisen die Wirbelstrukturen eine schwache Wölbung in Strömungsrichtung auf. Bei  $Q$  handelt es sich um eine skalare Größe, allerdings kann die Orientierung der Wirbelstrukturen anhand der Störungen der Geschwindigkeiten abgeleitet werden, da von letzteren die Richtungen bekannt sind (siehe Abbildung 4.20). Es lässt sich schlussfolgern, dass bei Wirbelbereichen mit  $Q > 0$  eine Rotation parallel zum Magnetfeld dominiert, während bei Wirbelbereichen mit  $Q < 0$  eine antiparallele Rotation zum Magnetfeld vorherrscht. Der Vergleich mit dem Druckverlauf in Abbildung 4.16 (b) zeigt, dass Bereiche mit  $Q > 0$  mit einem lokalen Druckminimum und Bereiche mit  $Q < 0$  mit einem lokalen Druckmaximum zusammenfallen (bspw. bei  $x = 1.1$  mit  $Q < 0$ ).

Daraus folgt, dass die TW-Wirbel paarweise um das Geschwindigkeitsmaximum auftreten und eine gleichförmig, periodische Wirbelstruktur aufweisen, die entlang von Magnetfeldlinien orientiert ist. In Abbildung 4.22 sind die zugehörigen Isoflächen von  $Q$  für einen Teil des Kanals zwischen  $-1 \leq y \leq 0$ ,  $0 \leq z \leq 1$  über eine Länge von  $x = 2$  gezeigt. Die beschriebene Wirbelverteilung wird darin verdeutlicht und die Q2D-Struktur veranschaulicht. TW-Wirbel gleicher Orientierung werden durch die TW-Wirbel entgegengesetzter Orientierung effektiv voneinander getrennt.

Die Zunahme der Reynolds-Zahl auf  $Re = 1000$  führt zu keiner strukturellen Änderung der Geschwindigkeitsstörungen, wie Abbildung 4.23 zu entnehmen ist. Allerdings ist die periodische Struktur, vor allem zwischen  $2 < x < 3$ , für  $u'$  und  $w'$  ungleichmäßiger. Im Vergleich zu  $Re = 600$  haben sich die Störungsamplituden für  $u'$ ,  $v'$  und  $w'$  ungefähr verdreifacht. Daraus folgt, dass die Störungsamplitude etwa quadratisch mit der Reynolds-Zahl wächst. Die Ausnahme von diesem Zuwachs stellt der Bereich um  $2 \lesssim x \lesssim 2.5$  dar. Hier hat sich die Amplitude im Vergleich zu  $Re = 600$  fast nicht verändert.

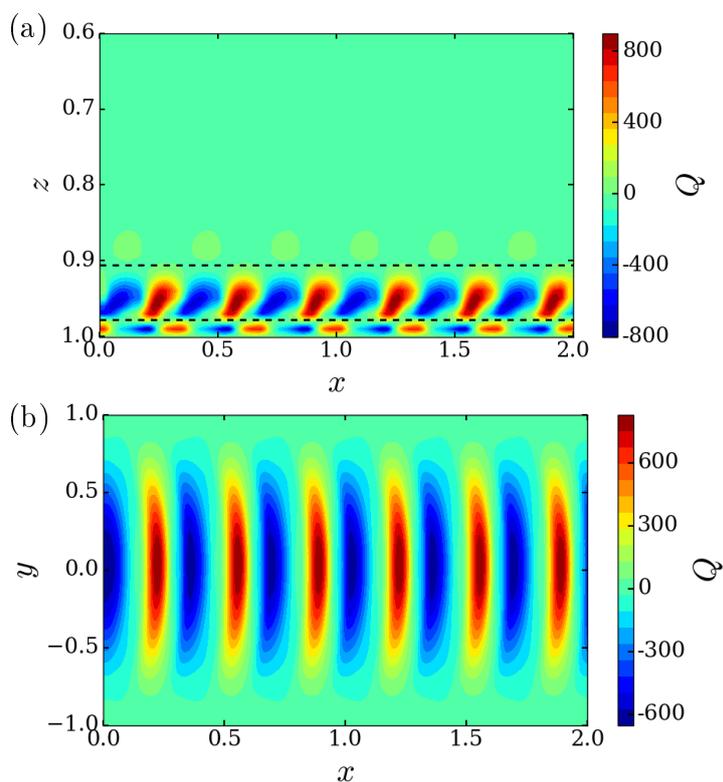


Abbildung 4.21:  $Q$  für  $Re = 600$  bei  $Ha = 2000$ : (a) in der  $xz$ -Ebene bei  $y = 0$  und (b) in der  $xy$ -Ebene bei  $z = 0.96$

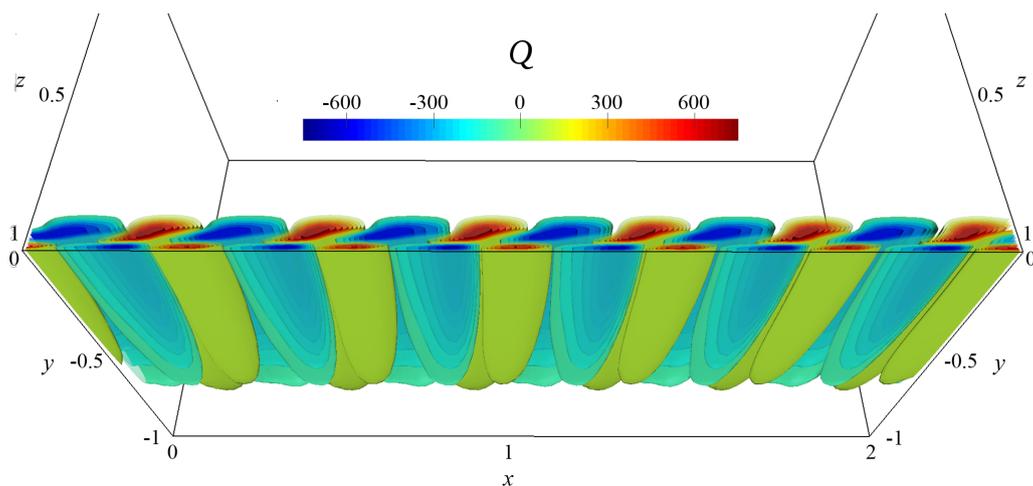


Abbildung 4.22: Isoflächen von  $Q$  bei  $Re = 600$  und  $Ha = 2000$  im Bereich  $0 < x < 2$ ,  $-1 < y < 1$ ,  $z < 1$

### 4.3 Untersuchung von zeitabhängigen magnetohydrodynamischen Kanalströmungen

In Abbildung 4.24 (a) ist  $Q$  für  $Re = 1000$  gezeigt. Es treten weiterhin periodische Wirbelstrukturen entlang des Geschwindigkeitsmaximums auf, deren Verteilung und Amplituden aber weniger gleichmäßig als bei  $Re = 600$  sind. Die Amplituden von  $Q$  haben bei den Wirbelstrukturen in Wandnähe am stärksten zugenommen und sind ca. viermal größer als bei  $Re = 600$ . Zwischen  $0.905 < z < 0.977$  hat sich  $Q$  ungefähr verdoppelt. Ausnahme hiervon ist der Bereich bei  $x \approx 2.4$ . Dort ist fast keine Änderung der Amplitude zu erkennen, was auch in Abbildung 4.24 (b) für  $Q$  in der  $xy$ -Ebene bei  $z = 0.96$  deutlich wird. Die Abbildung 4.24 (b) zeigt weiterhin, dass die Wirbelstrukturen, wie bei  $Re = 600$ , weiterhin entlang der Magnetfeldlinien ausgerichtet sind.

Durch Betrachtung der Isoflächen von  $Q$  in Abbildung 4.25 wird deutlich, dass bei  $x \approx 2.4$  die periodische Wirbelverteilung unterbrochen ist. Insgesamt betrachtet wird bei  $Re = 1000$  deutlich, dass weiterhin TW-Wirbel auftreten, deren Verteilung und Struktur allerdings komplexer sind als bei  $Re = 600$ . Der Übergang zu einem anderen Strömungsregime ist folglich klar in der Wirbelverteilung erkennbar.

Es konnte bereits gezeigt werden, dass bei  $Re = 2000$  die Strömung im Regime 2 ist, in welchem Jetablösungen auftreten. Abbildung 4.26 zeigt die verschiedenen Komponenten der Geschwindigkeitsstörung. Ein sich wiederholendes Muster der Störungen ist weiterhin erkennbar. Die Verteilung der Störungen hat sich im Vergleich zu Regime 1 deutlich geändert. Im Gegensatz zu den TW-Wirbeln sind hier Bereiche mit vorwärtsgerichteter Geschwindigkeitsstörung  $u' > 0$  etwa fünfmal länger als solche mit rückwärtsgerichteten Störungen  $u' < 0$ . Dort wo Jetablösungen stattfinden, bspw. bei  $x \approx 2$ , reichen die Störungen bis in die Kernströmung hinein. Bei den Jetablösungen treten die größten Amplituden von  $u'$  auf, welche eine Größenordnung größer sind als bei  $Re = 600$  und ungefähr noch dreieinhalb mal größer als bei  $Re = 1000$ . Erkennbar ist weiterhin, dass die Geschwindigkeitsstörungen zwischen den Jetablösungen nicht völlig verschwinden, so ist bspw. der Bereich  $u' < 0$  bei  $x \approx 2$ ,  $z \approx 0.82$  bis  $x \approx 0.9$  ausgedehnt. Dadurch kann es zu einer Wechselwirkung zwischen den einzelnen Jetablösungsbereichen kommen, die zu einer Gleichverteilung der Störungen führt.

Verglichen mit  $u'$  ist  $v'$  in Abbildung 4.26 (b) weiterhin rund eine Größenordnung kleiner. Trotzdem ist eine bogenartige Verteilung von  $v'$  im Bereich der Jetablösungen erkennbar, die ebenfalls in die Kernströmung hineinreicht.  $v'$  ändert sich demnach ebenfalls beim Regimewechsel. Die größten Werte von  $w'$  finden sich, wie bei  $u'$ , bei der Jetablösung, da dort Fluid in die Kernströmung hinein transportiert wird, wie Abbildung 4.26 (c) zeigt. Zwischen den einzelnen Jetablösungen verschwindet  $w'$ . Somit zeigt auch  $w'$  ein strukturell anderes Verhalten im Regime 2 als im Regime 1.

Werden die Verhältnisse der Amplituden von  $w'$  und  $u'$  gebildet, so ergibt sich im Regime 1 für  $w'/u' \approx 0.42$ , während sich im Regime 2  $w'/u' \approx 0.67$  ergibt. Das bedeutet, dass  $w'$  beim Übergang zu Regime 2 im Verhältnis stärker anwächst als  $u'$ .

Die zu  $Re = 2000$  gehörige Verteilung von  $Q$  ist in Abbildung 4.27 dargestellt und spiegelt den Wechsel zu Regime 2 durch eine gänzlich andere Verteilung im Vergleich zu kleineren Reynolds-Zahlen wieder. Zwei komplexe, einzelne Wirbelstrukturen bzw. Jetablösungen können bei  $x \approx 0.8$  und  $x \approx 2.1$  identifiziert werden, welche in die Kernströmung hineinreichen. Beide weisen die gleiche Verteilung von  $Q$  auf, sodass  $Q$  auch im Regime 2 periodisch in Strömungsrichtung ist. Bei Betrachtung einer einzelnen Jetablösung, zeigt sich, dass Bereiche mit  $Q > 0$  und  $Q < 0$  eine ineinander greifende komplexe Verteilung

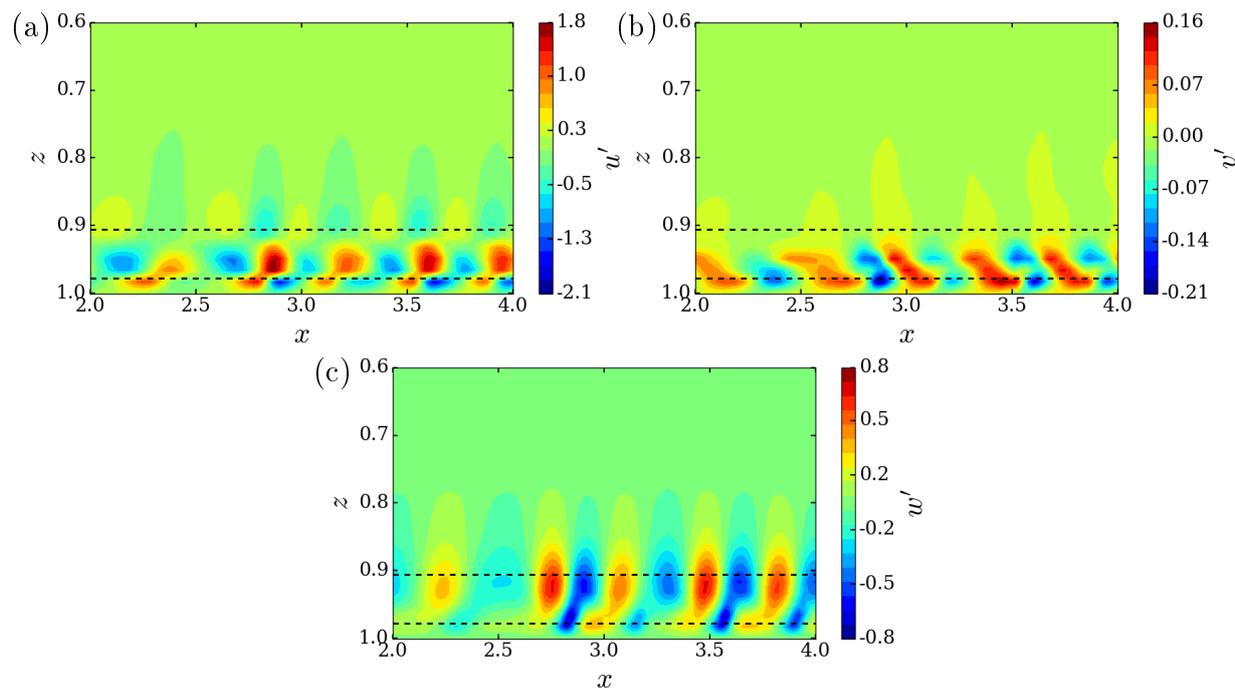


Abbildung 4.23: Störungen der Geschwindigkeit für  $Re = 1000$  bei  $Ha = 2000$ : (a)  $u'(x, y = 0, z)$ , (b)  $v'(x, y = 0.5, z)$  und (c)  $w'(x, y = 0, z)$

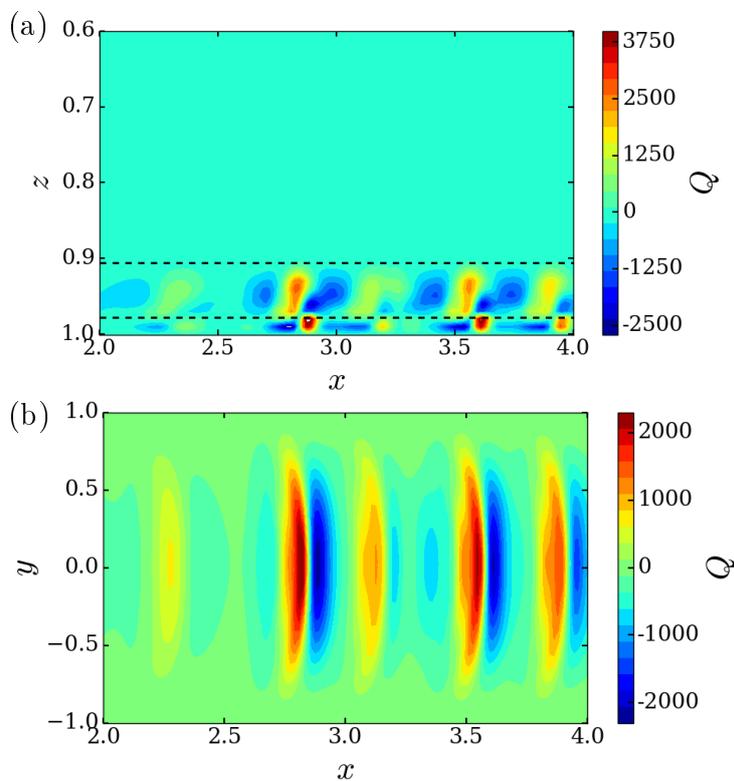


Abbildung 4.24:  $Q$  für  $Re = 1000$  bei  $Ha = 2000$ : (a) in der  $xz$ -Ebene bei  $y = 0$  und (b) in der  $xy$ -Ebene bei  $z = 0.96$

### 4.3 Untersuchung von zeitabhängigen magnetohydrodynamischen Kanalströmungen

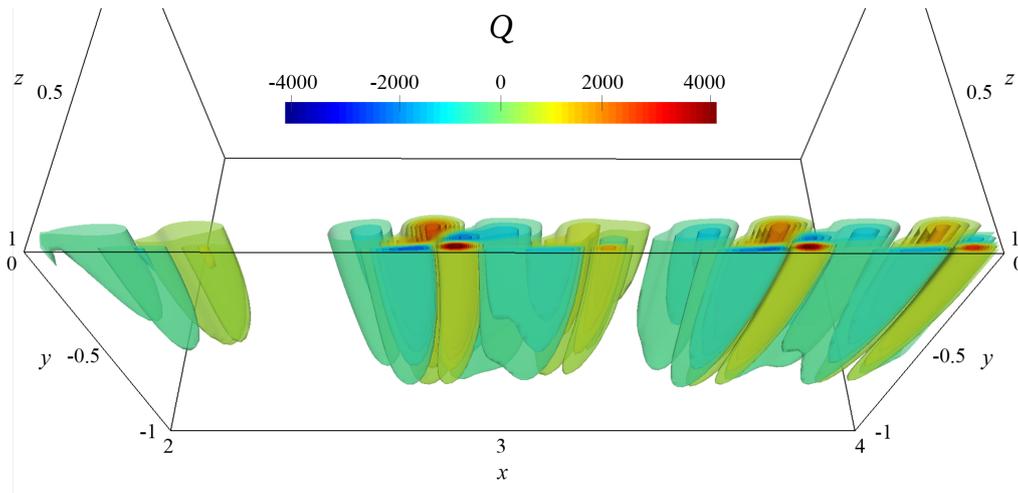


Abbildung 4.25: Isoflächen von  $Q$  bei  $Re = 1000$  und  $Ha = 2000$  im Bereich  $2 < x < 4$ ,  $-1 < y < 0$ ,  $z < 1$

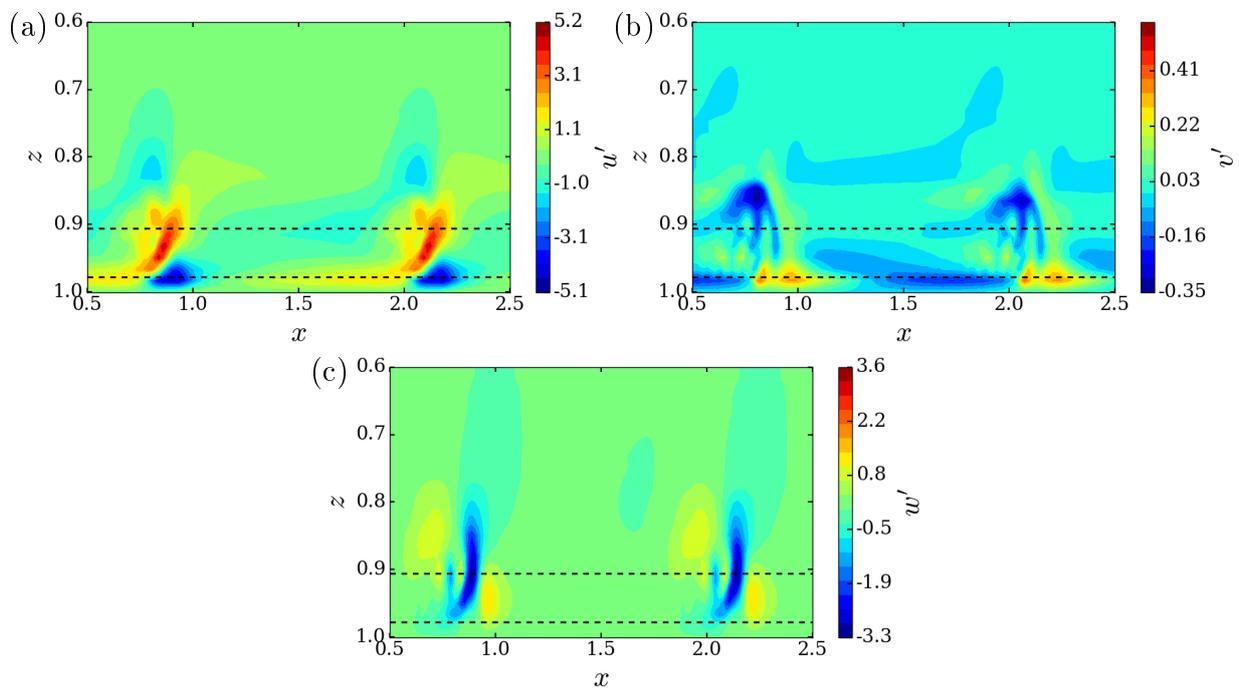


Abbildung 4.26: Störungen der Geschwindigkeit für  $Re = 2000$  bei  $Ha = 2000$ : (a)  $u'(x, y = 0, z)$ , (b)  $v'(x, y = 0.5, z)$  und (c)  $w'(x, y = 0, z)$

aufweisen, die sich deutlich von der im Regime 1 unterscheidet.

Ausgehend von (1) in Abbildung 4.27 (a) treten zunächst um das Jetmaximum kleinere Wirbelstrukturen auf, die noch innerhalb der Seitenschicht lokalisiert sind. Anschließend folgen bei (2) zwei entgegengesetzt rotierende Wirbelbereiche, welche sehr stark ausgeprägt sind. Bei  $x \approx 0.8$  findet dabei die eigentliche Jetablösung statt, wie es auch anhand von  $w'$  in Abbildung 4.26 gut zu erkennen ist. Der Bereich mit  $Q < 0$  erstreckt sich in einer bogenartigen Struktur von der Seitenwand bis in die Kernströmung, sodass ein unmittelbarer Impulstransport aus dem Bereich des Geschwindigkeitsmaximums bis in den Kern erfolgen kann. Der Bereich mit  $Q > 0$  bei (2) stellt eine grob elliptische Struktur dar, in der  $Q$  im Bereich der Jetablösung und bei  $x \approx 0.75$  größere Werte annimmt. Aufgrund dieser Struktur müssen im Inneren kleinere Bereiche mit  $Q < 0$  auftreten. Bei (3) ist ein Nachlauf der Jetablösung in Form von kleineren Wirbelstrukturen zu erkennen.

Im Vergleich zu  $Re = 1000$  nehmen die Extremwerte von  $Q$  um ca. 66% zu, womit die Zunahme geringer ist als beim Übergang von  $Re = 600$  zu  $Re = 1000$ . Während allerdings bei  $Re = 1000$  diese Extremwerte  $Q_{extrem}$  eher punktuell in der Mitte einer Wirbelstruktur auftreten und zum Rand hin  $Q$  schnell  $Q$  gegen Null geht, sind bei  $Re = 2000$  Bereiche mit großen Werten von  $Q$  räumlich deutlich ausgedehnter, sodass die Instabilitäten mehr turbulente kinetische Energie aufweisen.

Die Verteilung von  $Q$  für  $Re = 2000$  und  $Ha = 2000$  in der  $xy$ -Ebene bei  $z = 0.96$  ist in Abbildung 4.27 (b) gezeigt. Deutlich erkennbar ist die weiterhin dominierende Korrelation von  $Q$  in Magnetfeldrichtung, wobei die Variation von  $Q$  in Magnetfeldrichtung im Vergleich zu Regime 1 zugenommen hat. So ist bei (1) erkennbar, dass die Wirbelstrukturen sich auf  $-0.5 \lesssim y \lesssim 0.5$  beschränken, während sie bei (2) im Bereich  $-0.9 \lesssim y \lesssim 0.9$  liegen. Für (3) ist der beschriebene Nachlauf erkennbar.

Abbildung 4.28 zeigt in einer dreidimensionalen Ansicht die zugehörigen Isoflächen von  $Q$ , die die bereits beschriebene komplizierte Verteilung von  $Q$  im Regime 2 veranschaulicht.

Abschließend wird für  $Ha = 2000$  und  $Re = 2000$  die Wandschubspannung betrachtet. Denn Orte an denen sich Geschwindigkeitsstörungen von Wänden ablösen, zeichnen sich in der Hydrodynamik durch das Verschwinden der Wandschubspannung  $\tau_W = \partial u / \partial n = \partial u / \partial z$  aus (Oertel, 2002). Eine Folge davon ist, dass Rückströmungen in Wandnähe auftreten. Abbildung 4.29 zeigt den Verlauf von  $\tau_W(x, y = 0, z = 1)$  für  $Ha = 2000$ ,  $Re = 2000$ . Sichtbar ist ein deutlicher Anstieg von  $\tau_W$  genau an den  $x$ -Positionen, an denen auch Jetablösungen auftreten (siehe Abbildung 4.19). Allerdings wird  $\tau_W = 0$  nicht erreicht. Obwohl offensichtlich Strömungsablösungen der Jets erfolgen, die weit in die Kernströmung hinein reichen, führt die Strömungsablösung an der Wand zu keiner Rückströmung in Wandnähe. Daher kann die klassische Bedingung der Hydrodynamik,  $\tau_W = 0$ , hier nicht als Ablösekriterium herangezogen werden. Für MHD-Strömungen muss daher die hydrodynamische Bedingung  $\tau_W(x_0, y_0) = 0$  am Ort  $x_0, y_0$  zu  $|\tau_W(x_0, y_0)| < |\tau_W(x, y)|$  als Indikator für Geschwindigkeitsablösungen geändert werden.

In Abbildung 4.30 ist die zugehörige Kontur von  $\tau_W(x, y, z = 1)$  dargestellt. Gut erkennbar ist die Orientierung der Bereiche mit größtem  $\tau_W$  entlang der Magnetfeldlinien. In den Ecken wird der Betrag von  $\tau_W$  sehr klein, da hier aufgrund der stärker werdenden Wandreibung sowohl Geschwindigkeit als auch Geschwindigkeitsänderung abnehmen.

### 4.3 Untersuchung von zeitabhängigen magnetohydrodynamischen Kanalströmungen

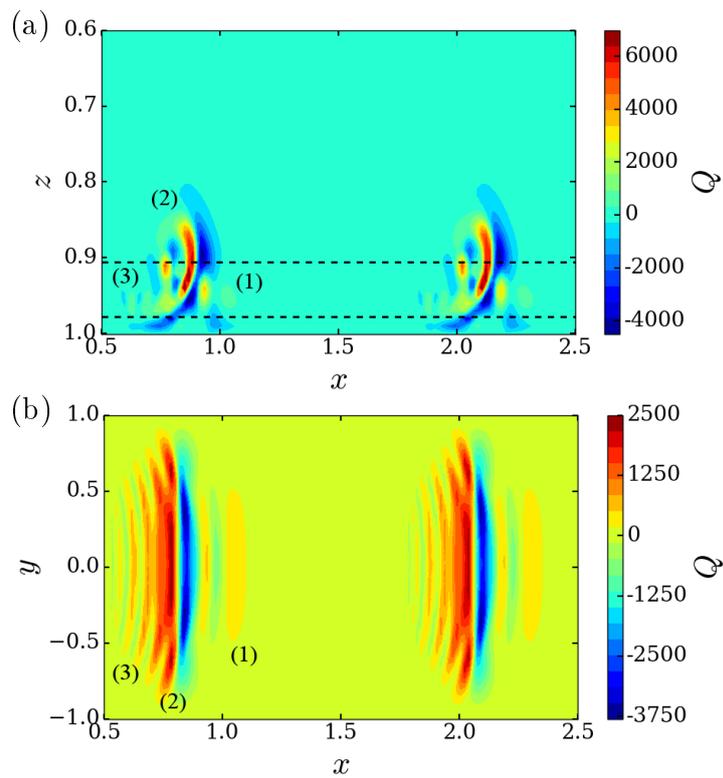


Abbildung 4.27:  $Q$  für  $Re = 2000$  bei  $Ha = 2000$ : (a) in der  $xz$ -Ebene bei  $y = 0$  und (b) in der  $xy$ -Ebene bei  $z = 0.96$

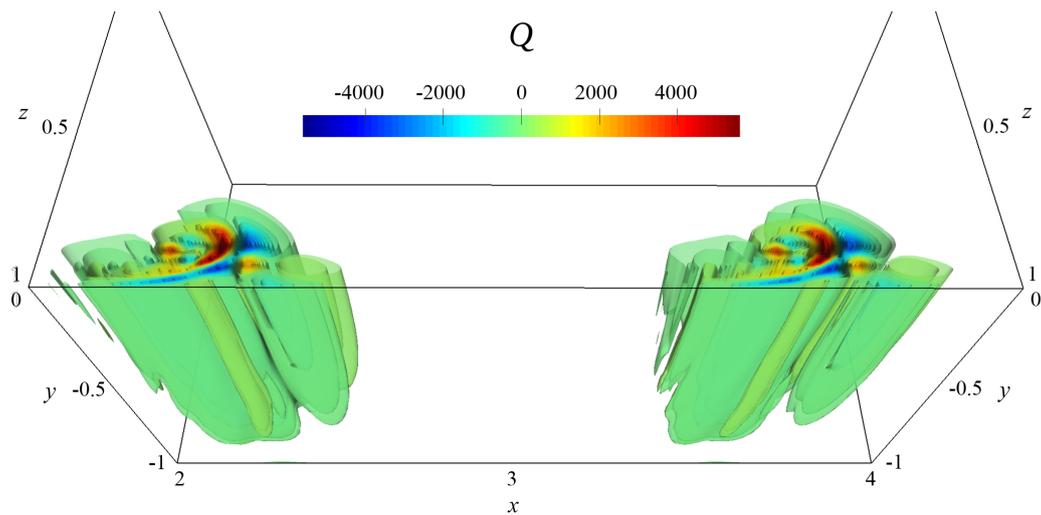


Abbildung 4.28: Isoflächen von  $Q$  bei  $Re = 2000$  und  $Ha = 2000$  im Bereich  $0.5 < x < 2.5$ ,  $-1 < y < 0$ ,  $z < 1$

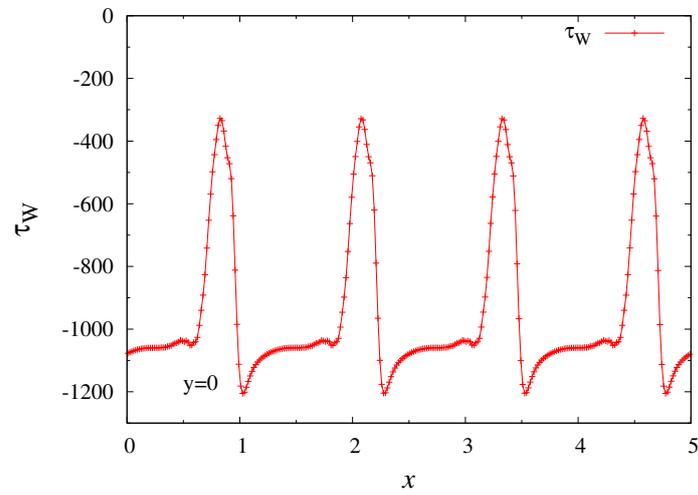


Abbildung 4.29: Wandschubspannung  $\tau_W(x, y = 0, z = 1)$  für  $Ha = 2000$  und  $Re = 2000$

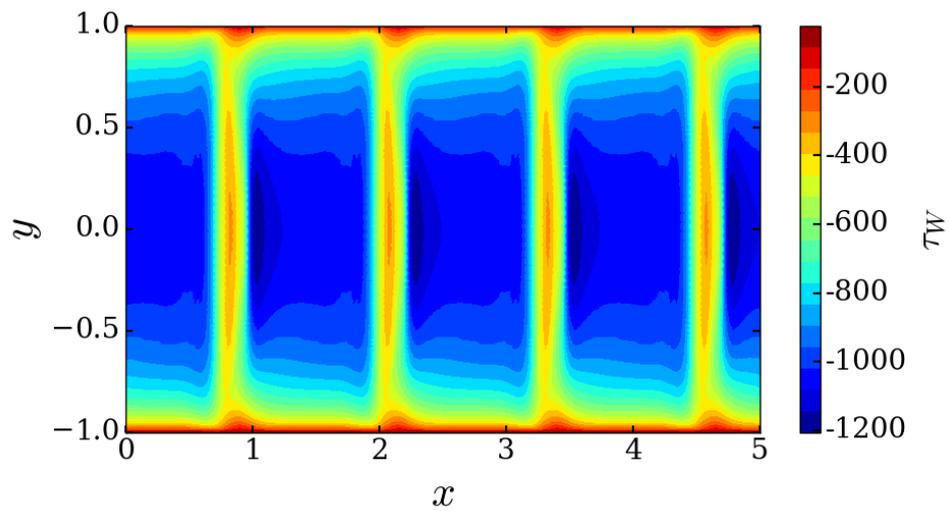


Abbildung 4.30: Kontur von  $\tau_W(x, y, z = 1)$  für  $Ha = 2000$  und  $Re = 2000$

### 4.3.5 Zeitsignale vollentwickelter, instabiler Strömungen

Zur Aufzeichnung und Untersuchung der Zeitsignale für  $\phi'$  bzw.  $u'$  lassen sich im Rechengebiet sogenannte Sonden setzen, analog zu experimentellen Sondenmessungen. In Abbildung 4.31 (a-f) sind solche Signale für  $u'$ , welches über das Ohm'sche Gesetz mit  $\phi'$  verknüpft ist, in Abhängigkeit von der dimensionslosen Zeit  $\tau = t u_0/L$  an verschiedenen  $z$ -Positionen bei  $x = 3.3, y = 0$  für  $Ha = 2000$  und  $Re = 600, Re = 1000$  sowie  $Re = 2000$  aufgetragen. Im gezeigten Zeitraum ist die jeweilige Strömung statistisch voll entwickelt.

Bei  $Re = 600$  befindet sich die Strömung im Regime 1. In der Kanalmitte, dargestellt in Abbildung 4.31 (a), sind keine Störungen zu erkennen, ebenso wenig bei  $z = 0.8$ . Erst ab  $z = 0.9$  sind Störungen für diese Reynolds-Zahl erkennbar, deren Amplitude zum Jetmaximum hin zunimmt. Die Störungen haben eine periodische und sinusartige Struktur mit zeitlich konstanter Amplitude.

Wird die Reynolds-Zahl auf  $Re = 1000$  erhöht, so sind bereits bei  $z = 0.8$  minimale Störungen erkennbar. Werte für Frequenz und Wellenlänge sind in Abbildung 4.14 gezeigt und wurden dort bereits diskutiert. Obwohl eine zeitlich voll entwickelte Strömung betrachtet wird, sind bei  $Re = 1000$  Schwankungen der Amplituden an den Sondenpositionen  $z \leq 0.9$  sichtbar. Im Vergleich zu  $Re = 600$  sind die Amplituden damit nicht mehr zeitlich konstant und im Jet bis zu dreimal größer (siehe Abbildung 4.31 (e)).

Für Regime 2 bei  $Re = 2000$  sind bereits bei  $z = 0.8$  deutliche Schwankungen von  $u'$  sichtbar. Bei  $z = 0.9$  ist das Maximum von  $u' \approx 3$  und bei  $z = 0.94$  werden die betragsmäßig größten Amplituden mit  $u' \approx 4.2$  erreicht. Durch diese weitreichenden, großen Störungen wird die Jetablösung und die damit einhergehende Beeinflussung der Kerströmung deutlich. Die Störungen treten weiterhin periodisch auf, wobei sich ihre Frequenz auf  $f^* = 2.2$  reduziert hat (siehe Abbildung 4.14). Statt der wellenartigen Struktur von Regime 1 sind nun deutlich einzelne Peaks von  $u'$  sichtbar, die, je nach  $z$ -Position, entweder positiv oder negativ sind. Ursache dafür sind die auftretenden Jetablösungen und die damit einhergehenden deutlich größeren Strukturen in Regime 2. Bei  $z = 0.967$  hat  $u'$  eine sägezahnartige Form und die Amplitudenschwankungen sind hier am größten. Der Übergang vom Maximum zum Minimum von  $u'$  erfolgt langsamer als der Übergang von Minimum zu Maximum. Dieses Verhalten liegt daran, dass die Jetablösung abrupt einsetzt und anschließend einen Schweif mit  $u' > 0$  in der Seitenschicht hinter sich herzieht.

Die Zeitsignale aus Abbildung 4.31 (a-f) lassen sich mit Hilfe einer Kontourdarstellung von  $u'$  veranschaulichen. Dazu ist  $u'$  in Abbildung 4.32 (a) für  $Re = 1000$  und (b) für  $Re = 2000$  zum Zeitpunkt  $\tau = 33.7$  in einem Ausschnitt der  $xz$ -Ebene bei  $y = 0$  dargestellt. Wird beispielsweise für  $Re = 1000$  die Linie entlang  $z = 0.94$  verfolgt, so ändert sich  $u'$  sehr gleichmäßig periodisch, wobei die Amplituden nicht konstant sind. Dies ist in Übereinstimmung mit Abbildung 4.31 (d). Analog lassen sich die anderen, in Abbildung 4.31, gezeigten Signale nachvollziehen. Insgesamt ergibt sich daraus die gezeigte Kontur von  $u'$ . Damit ist gezeigt, dass die Störungen im Wesentlichen aus orts- und zeitperiodischen Strukturen bestehen, die auf den Bereich der Seitenschicht begrenzt sind. Die in Abbildung 4.32 (b) gezeigte Konturdarstellung für  $Re = 2000$  zeigt eine prinzipiell andere Verteilung von  $u'$ , da die Strömung in das Regime 2 übergegangen ist. Wird ebenfalls die Linie entlang von  $z = 0.94$  verfolgt, so ist zwischen  $1.2 \lesssim x \lesssim 1.4$  ein sehr steiler Anstieg und Abfall von  $u'$  erkennbar, wobei  $u'$  in diesem Bereich positiv ist. Anschließend wird  $u'$  negativ und zeigt nur eine schwache Abhängigkeit von  $x$ , bevor es bei  $x \approx 2.5$  erneut

#### 4 Numerische Simulation magneto hydrodynamischer Kanalströmungen

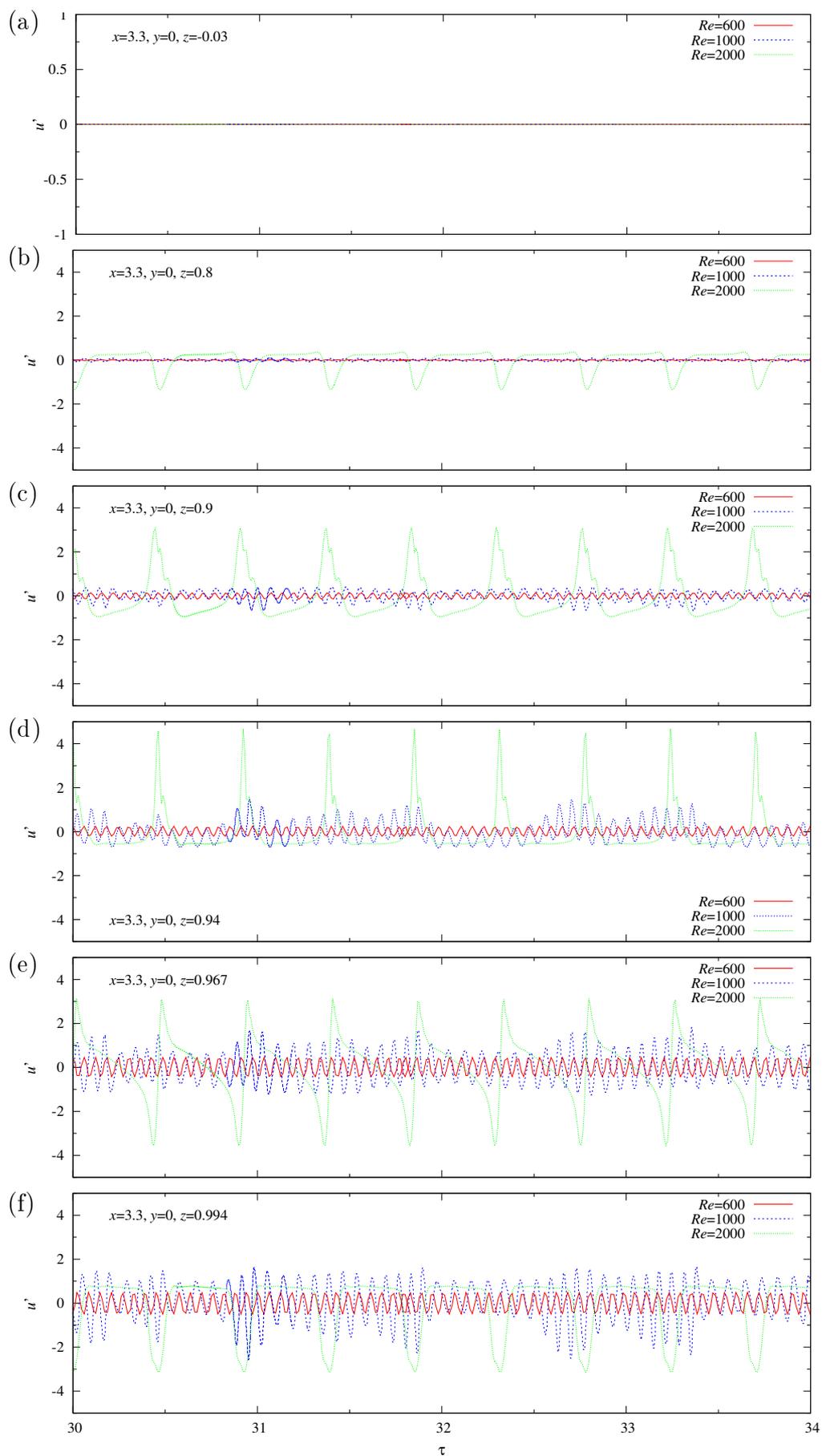


Abbildung 4.31: Geschwindigkeitsschwankungen  $u'$  im Laufe der dimensionslosen Zeit  $\tau$  an verschiedenen  $z$ -Positionen für  $Ha = 2000$  und  $Re = 1000$  sowie  $Re = 2000$

### 4.3 Untersuchung von zeitabhängigen magnetohydrodynamischen Kanalströmungen

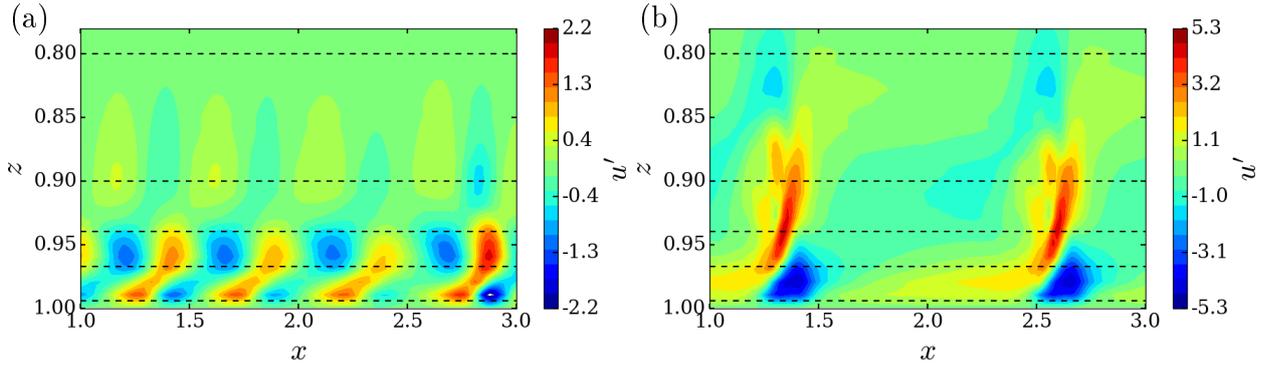


Abbildung 4.32: Konturdarstellung von  $u'$  bei  $Re = 2000$  in der  $xz$ -Ebene und  $y = 0$  für (a)  $Ha = 1000$  bei  $\tau = 40.8$  und (b)  $Ha = 2000$  bei  $\tau = 33.7$ . Gestrichelte Linien markieren die  $z$ -Position der Sonden.

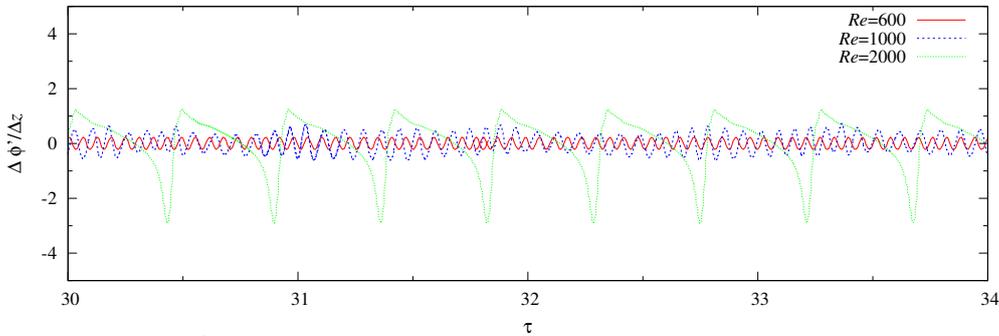


Abbildung 4.33:  $\Delta\phi'/\Delta z$  in Abhängigkeit von  $\tau$  zwischen den Sondenköpfen bei  $z_1 = 0.94$  und  $z_2 = 0.994$  und  $x = 3.3$ ,  $y = 0$  für  $Re = 600$ ,  $Re = 1000$  und  $Re = 2000$  bei  $Ha = 2000$

positiv wird, steil ansteigt und sich das Muster wiederholt.

Die in Chowdhury (2016) gezeigten Zeitsignale weisen nur wenige Peaks auf, die zwar ähnlich zu denen in Abbildung 4.31 (e) sind, insgesamt ist ein Vergleich aber schwierig. Stattdessen weisen von Burr (1998) gemessene Zeitsignale von  $u'$  an verschiedenen  $z$ -Positionen eine sehr gute prinzipielle Übereinstimmung mit denen in Abbildung 4.31 (a-f) auf.

In der experimentellen Arbeit von Chowdhury (2016) war die Potentialsonde bei  $z_S = 0.967$  positioniert (entspricht Abbildung 4.31 (e) ), sodass sich die Messelektroden bei  $z_1 = 0.94$  und  $z_2 = 0.994$  befanden. An diesen Punkten wurden auch numerische Potentialsonden gesetzt (siehe Abbildung 4.31 (d) und (f) ). Das sich daraus ergebende  $\Delta\phi'/\Delta z$  ist in Abbildung 4.33 gezeigt. Dabei wird im Vergleich zu Abbildung 4.31 (e) deutlich, dass aufgrund der Sondengeometrie bei den gegebenen Parametern  $\Delta\phi'/\Delta z$  ca. 33% schwächer ist als  $u'$ . Dieser theoretische Wert für  $\Delta\phi'/\Delta z$  kann im Experiment durch weitere Störeinflüsse (bspw. Rauschen) oder eine nicht voll entwickelte Strömung noch kleiner ausfallen.

### 4.3.6 Turbulente kinetische Energie und Reynolds-Spannungen

Im Folgenden wird der Reynolds'sche-Schubspannungstensor betrachtet, welcher Auskunft über den turbulenten Impulsaustausch zwischen den einzelnen Komponenten der Geschwindigkeitsstörungen liefert. Dazu wurde zunächst die Simulation solange durchgeführt, bis sich eine voll entwickelte Strömung eingestellt hat. Die zeitlichen Mittelwerte der Strömungsgrößen wurden anschließend durch Fortführen der Simulation ermittelt (siehe bspw. Abbildung 7.5 im Anhang). Die zeitliche Mittelung wurde gestoppt, wenn innerhalb der Durchflusszeit  $t_D$   $\Delta\bar{u} < 0.1\%$  erreicht war, wobei  $t_D = L/u_0$  ist.

Aus den Diagonalelementen des Reynolds'schen-Schubspannungstensors lässt sich die mittlere turbulente kinetische Energie

$$\bar{E}_{turb} = \frac{1}{V} \int_V (\overline{u'u'} + \overline{v'v'} + \overline{w'w'}) dV \quad (4.8)$$

über das Gesamtvolumen  $V$  des betrachteten Kanals bestimmen. Ergebnisse für  $\bar{E}_{turb}$  in Abhängigkeit von  $Re$  sind in Abbildung 4.34 für verschiedene  $Ha$  dargestellt. Für  $Ha = 1000$  lässt sich dabei zunächst ein Anstieg von  $\bar{E}_{turb}$  mit steigender Reynolds-Zahl  $Re$  erkennen, wobei der Anstieg mit steigendem  $Re$  abflacht. Insgesamt ähnelt der Verlauf dem einer Wurzelfunktion. Aus dem Verlauf von  $\bar{E}_{turb}(Re)$  lässt sich der Schnittpunkt mit der Abszisse abschätzen. Da dort  $\bar{E}_{turb} = 0$  ist, entspricht dies der kritischen Reynolds-Zahl, bei der der Übergang der laminaren Strömung zu Regime 1 stattfindet. Laut Abbildung 4.34 ergibt sich für  $Ha = 1000$  eine kritische Reynolds-Zahl von  $Re_c \approx 790$ . Dieser Wert liegt rund 20% oberhalb dem der linearen Stabilitätsanalyse (siehe Tabelle 4.7). Der Grund dafür ist numerische Diffusion, deren Einfluss sich mit einem feineren Gitter theoretisch weiter reduzieren ließe. Aufgrund des damit verbundenen numerischen Aufwandes ließ sich dies im Rahmen dieser Arbeit leider nicht realisieren. Es ist auch nicht das wesentliche Ziel dieser Arbeit, die Stabilitätsgrenze der linearen Stabilitätsanalyse exakt zu treffen, sondern den Reynolds-Zahl-Bereich zwischen linearer und experimenteller Stabilitätsgrenze numerisch zu untersuchen, weil er sich anderen Untersuchungsmethoden entzieht.

Für  $Ha = 2000$  ist ein prinzipiell ähnlicher Verlauf von  $\bar{E}_{turb}(Re)$  bis  $Re = 1000$  zu erkennen wie bei  $Ha = 1000$ . Bei  $Re = 1500$  hat  $\bar{E}_{turb}$  stark zugenommen. Mit Ansteigen der Reynolds-Zahl auf  $Re = 2000$  nimmt  $\bar{E}_{turb}$  nur noch langsam zu. Die kritische Reynolds-Zahl lässt sich mit  $Re_c \approx 520$  abschätzen, was 19% oberhalb der kritischen Reynolds-Zahl liegt, welche die lineare Stabilitätsanalyse für  $Ha = 2000$  liefert.

Ein Vergleich von  $\bar{E}_{turb}$  bei  $Ha = 1000$  und  $Ha = 2000$  zeigt, dass  $\bar{E}_{turb}$  mit wachsendem  $Ha$  stark anwächst. Bei  $Re = 1000$  ergibt sich für  $Ha = 1000$  ein Wert von  $\bar{E}_{turb} = 2.5 \cdot 10^{-3}$ , während  $\bar{E}_{turb}$  für  $Ha = 2000$  mit  $\bar{E}_{turb} = 22 \cdot 10^{-3}$  wesentlich größer ist. Werden die entsprechenden Amplituden von  $u$  in Tabelle 4.9 miteinander verglichen, ergibt sich, dass sich  $\Delta u$  bei  $Re = 1000$  von  $Ha = 1000$  zu  $Ha = 2000$  etwas mehr als verdreifacht. Da  $\bar{E}_{turb}$  proportional zum Amplitudenquadrat ist, folgt daraus eine Zunahme von  $\bar{E}_{turb}$  um etwa eine Größenordnung. Für  $Re = 2000$  ist dieser direkte Vergleich zwischen  $Ha = 1000$  und  $Ha = 2000$  nicht mehr möglich, da bei  $Ha = 2000$  die Strömung im Regime 2 vorliegt, bei  $Ha = 1000$  befindet sie sich hingegen im Regime 1.

Für  $Ha = 2000$  lassen sich turbulenten kinetischen Energien von  $Re = 1000$  und  $Re = 1500$  vergleichen. Die Zunahme von  $\bar{E}_{turb}$  gegenüber dem Wert bei  $Re = 1000$  beträgt

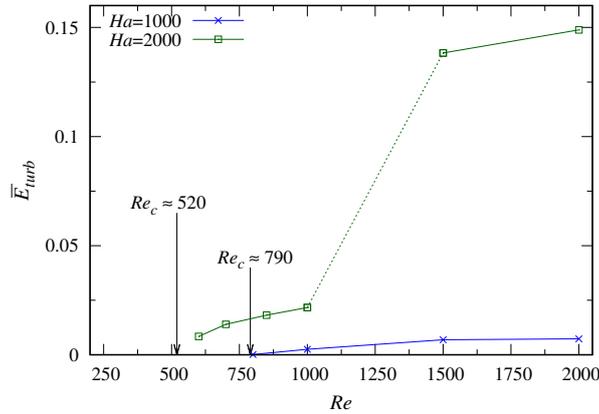


Abbildung 4.34: Mittlere turbulente kinetische Energie  $\bar{E}_{turb}$  in Abhängigkeit von  $Re$  für verschiedene  $Ha$  und damit abgeschätzte kritische Reynolds-Zahlen.

fast eine Größenordnung. Mit dem Wechsel von Regime 1 zu Regime 2 geht daher ein signifikanter Anstieg von  $\bar{E}_{turb}$  einher.

Die Abbildungen 4.35 und 4.36 zeigen verschiedene Komponenten des Reynolds'schen Schubspannungstensors entlang der  $z$ - bzw.  $y$ -Achse für verschiedenen Reynolds-Zahlen bei  $Ha = 2000$ . Zunächst werden die Komponenten betrachtet, die die Normalspannungen beschreiben. In Abbildung 4.35 (a) ist  $\overline{u'u'}$  entlang von  $z$  bei  $y = 0$  für verschiedene  $Re$  aufgetragen.  $\overline{u'u'}$  kann als der Anteil von  $\bar{E}_{turb}$  interpretiert werden, welchen die Störungen in  $x$ -Richtung beitragen. In Übereinstimmung mit den bisherigen Ergebnissen ist  $\overline{u'u'}$  für  $Re \leq 1000$  in der Seitenschicht lokalisiert, da nur hier die Störungen auftreten. Drei Maxima sind für  $Re \leq 1000$  erkennbar, welche mit steigendem  $Re$  zunehmen und dort auftreten, wo  $u'$  lokal am stärksten ausgeprägt ist (siehe Abbildungen 4.23 (a) und 4.26 (a)). Die markierte  $z$ -Position der maximalen mittleren Geschwindigkeit  $\bar{u}_{max}$  für  $Re \leq 1000$  befindet sich zwischen zwei Maxima von  $\overline{u'u'}$ , womit erneut deutlich wird, dass sich im Regime 1 die Zentren der Wirbelstrukturen am Ort von  $\bar{u}_{max}$  befinden.

Bei  $Re = 2000$  ist für  $\overline{u'u'}$  eine Verbreiterung in die Kernströmung hinein erkennbar, einhergehend mit einer starken Zunahme der Amplitude. Ebenfalls sind drei lokale Maxima erkennbar, die an den Orten der größten Geschwindigkeitsstörungen (siehe Abbildung 4.20 (a)) liegen. Im Gegensatz zu den niedrigeren Reynolds-Zahlen befindet sich  $\bar{u}_{max}$  nicht mehr zwischen zwei Maxima von  $\overline{u'u'}$ , sondern nahe des globalen Maximums. Hieran wird erneut die Verschiebung der Wirbelstrukturen Richtung Kernströmung im Regime 2 erkennbar, obwohl sich die Position von  $\bar{u}_{max}$  nahezu nicht verändert.

Während  $\overline{u'u'}$  für  $Re = 600$  und  $Re = 1000$  symmetrisch um  $z = 0$  ist, zeigen sich für  $Re = 2000$  leichte Unterschiede in den Maximalwerten. Bei  $z \approx -0.97$  ist  $\overline{u'u'} \approx 4.1$  während bei  $z \approx 0.97$   $\overline{u'u'} \approx 4.0$  ist. Beim zweiten Maximum verhält es sich umgekehrt, sodass bei  $z \approx -0.91$   $\overline{u'u'} \approx 1.3$  und bei  $z \approx 0.91$   $\overline{u'u'} \approx 1.4$ . Dies liegt an der asymmetrischen Verteilung der Jetablösungen in den gegenüberliegenden Seitenschichten. Abbildung 4.35 (b) zeigt  $\overline{u'u'}$  entlang der  $y$ -Achse für alle drei betrachteten  $Re$ . Deutlich wird, dass  $\overline{u'u'}$  symmetrisch um  $y = 0$  ist und dort maximal wird, weil hier die größten Geschwindigkeiten und Störungsamplituden auftreten. Dabei steigt  $\overline{u'u'}$  mit steigender Reynolds-Zahl an. Die

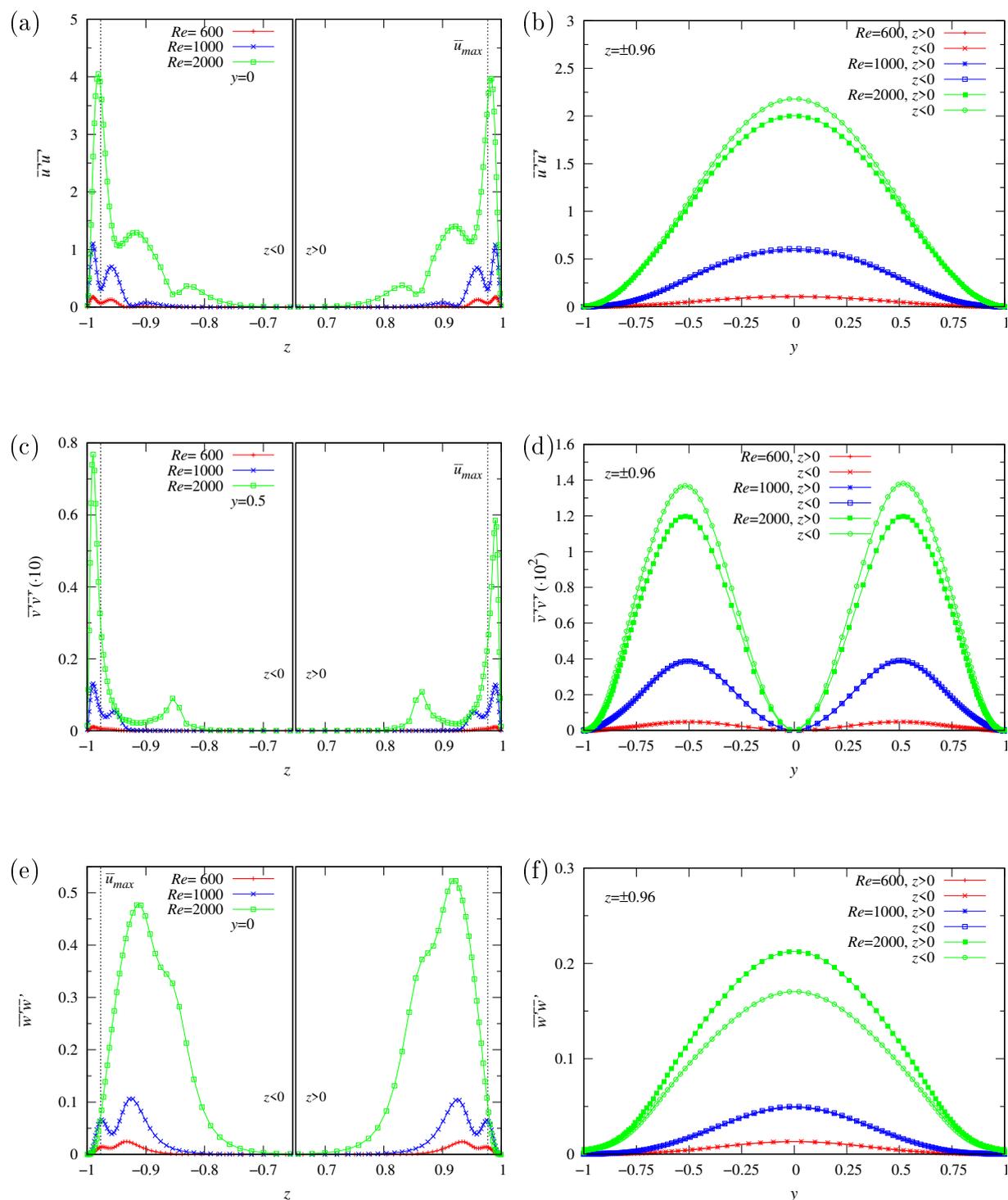


Abbildung 4.35: Verschiedene Komponenten des Reynolds'schen-Schubspannungstensors für  $Ha = 2000$  bei verschiedenen  $Re$ . Zusätzlich ist die  $z$ -Position von  $\overline{u}_{max}$  eingetragen.

### 4.3 Untersuchung von zeitabhängigen magnetohydrodynamischen Kanalströmungen

asymmetrische Verteilung der Jetablösungen kann hier ebenfalls anhand verschiedener Maxima von  $\overline{u'u'}$  in den Seitenschichten beobachtet werden.

Da  $\overline{v'v'}$  bei  $y = 0$  verschwindet, ist es in Abbildung 4.35 (c) bei  $y = 0.5$  entlang der  $z$ -Achse dargestellt. Für  $Re \leq 1000$  ist  $\overline{v'v'}$  auf die Seitenschichten begrenzt und weist zwei lokale Maxima auf, die sich fast symmetrisch rechts und links um  $\bar{u}_{max}$  befinden. Dies ist ein weiterer Beleg dafür, dass Wirbelstrukturen um  $\bar{u}_{max}$  angeordnet sind. Im Vergleich zu  $\overline{u'u'}$  sind die Amplituden bei  $\overline{v'v'}$  rund zwei Größenordnung kleiner, da  $v'$  parallel zum Magnetfeld orientiert ist und stark gedämpft wird. Mit dem Wechsel in Regime 2 bei  $Re = 2000$  reicht  $\overline{v'v'}$  bis in die Kernströmung hinein und weist weiterhin zwei Maxima auf. Dabei wird  $\overline{v'v'}$  für  $z < 0$  bis zu siebenmal größer als bei  $Re = 1000$ , bei  $z > 0$  verfünffacht es sich ungefähr. Die Asymmetrie in  $\overline{v'v'}$  durch die unterschiedlich häufigen Jetablösungen in den Seitenschichten ist somit stärker ausgeprägt als bei  $\overline{u'u'}$ . Aus den Maxima bei  $z \approx \pm 0.86$  lässt sich schließen, dass durch die Jetablösung auch Fluid in Magnetfeldrichtung transportiert wird, auch wenn weiterhin  $\overline{v'v'}$  rund zwei Größenordnungen kleiner ist als  $\overline{u'u'}$ . Im Vergleich zu  $\overline{u'u'}$  fällt weiterhin auf, dass  $\overline{v'v'}$ , relativ betrachtet, stärker beim Übergang zu Regime 2 zugenommen hat als  $\overline{u'u'}$ . Anhand des in Abbildung 4.35 (d) gezeigten Verlaufs von  $\overline{v'v'}$  entlang der  $y$ -Achse bei  $z = \pm 0.96$  wird das Verschwinden von  $\overline{v'v'}$  bei  $y = 0$  aus Symmetriegründen deutlich. Für alle betrachteten  $Re$  ist bei  $y = \pm 0.5$   $\overline{v'v'}$  maximal. Daraus resultieren übereinander angeordnete Wirbelstrukturen, deren Rotationsachsen nicht parallel zum Magnetfeld orientiert sind. Für  $Re = 2000$  ist die Asymmetrie deutlich erkennbar.

Der entsprechende Verlauf von  $\overline{w'w'}$  entlang der  $z$ -Achse ist in Abbildung 4.35 (e) dargestellt. Für  $Re \leq 1000$  sind zwei Maxima gut zu erkennen, wobei eines genau bei  $\bar{u}_{max}$  liegt. Zusammen mit dem Verlauf von  $\overline{u'u'}$  aus Abbildung 4.35 (a) wird dadurch die Störungsverteilung um  $\bar{u}_{max}$  geschlossen, sodass auch hieran deutlich wird, dass es sich bei den Störungen um eine zweidimensionale Wirbelstruktur in Magnetfeldrichtung handelt. Aufgrund des zweiten Maximums kann geschlossen werden, dass die Wirbelstruktur eine komplizierte Verteilung aufweist, wie bereits bei den Abbildungen 4.20 und 4.23 diskutiert. Die Amplituden von  $\overline{w'w'}$  sind ungefähr eine Größenordnung kleiner als bei  $\overline{u'u'}$ .

Mit dem Übergang zu  $Re = 2000$  ändert sich der Verlauf von  $\overline{w'w'}$ . Statt der zwei lokalen Maxima tritt nur noch eines auf, das einen ca. fünffach größeren Wert im Vergleich zu  $Re = 1000$  aufweist. Im Gegensatz zu  $\overline{u'u'}$  und  $\overline{v'v'}$  liegt dieses Maximum nicht nahe bei  $\bar{u}_{max}$ , sondern bei  $z \approx 0.9$  und damit nahe der Kernströmung. Daraus ergibt sich, dass für den Fluidtransport in die Kernströmung  $\overline{w'w'}/\overline{u'u'} \approx 1/3$  gilt. Im Vergleich zu Regime 1 hat damit der Anteil von  $\overline{w'w'}$  an der Störungsverteilung stärker zugenommen.

Zwischen der Seitenschicht bei  $z < 0$  und der bei  $z > 0$  ist dabei ein Unterschied im Maximalwert von  $\overline{w'w'}$ , wegen der asymmetrischen Jetablösung, sichtbar. Diese spiegelt sich auch im Verlauf von  $\overline{w'w'}$  entlang der  $y$ -Achse in Abbildung 4.35 (f) für  $Re = 2000$  wieder. Wegen der asymmetrischen Jetablösung ist  $\overline{w'w'}|_{z<0} < \overline{w'w'}|_{z>0}$ , während  $\overline{u'u'}|_{z<0} > \overline{u'u'}|_{z>0}$ .

Die Schubspannungs- bzw. Transportterme zwischen den verschiedenen Störungskomponenten sind in Abbildung 4.36 (a-f) gezeigt. Anhand von Abbildung 4.36 (a) lässt sich der Impulstransport zwischen  $u'$  und  $w'$  entlang der  $z$ -Achse quantifizieren, der für  $Re \leq 1000$  auf die Seitenschicht begrenzt ist. Wie bereits bei den vorhergehenden Abbildungen beobachtet, reicht auch hier  $\overline{u'w'}$  bei  $Re = 2000$  weit in den Kern hinein.  $\overline{u'w'}$  ist von der selben Größenordnung wie  $\overline{w'w'}$ . Da  $u'$  parallel zur Hauptströmung ist, aus der die

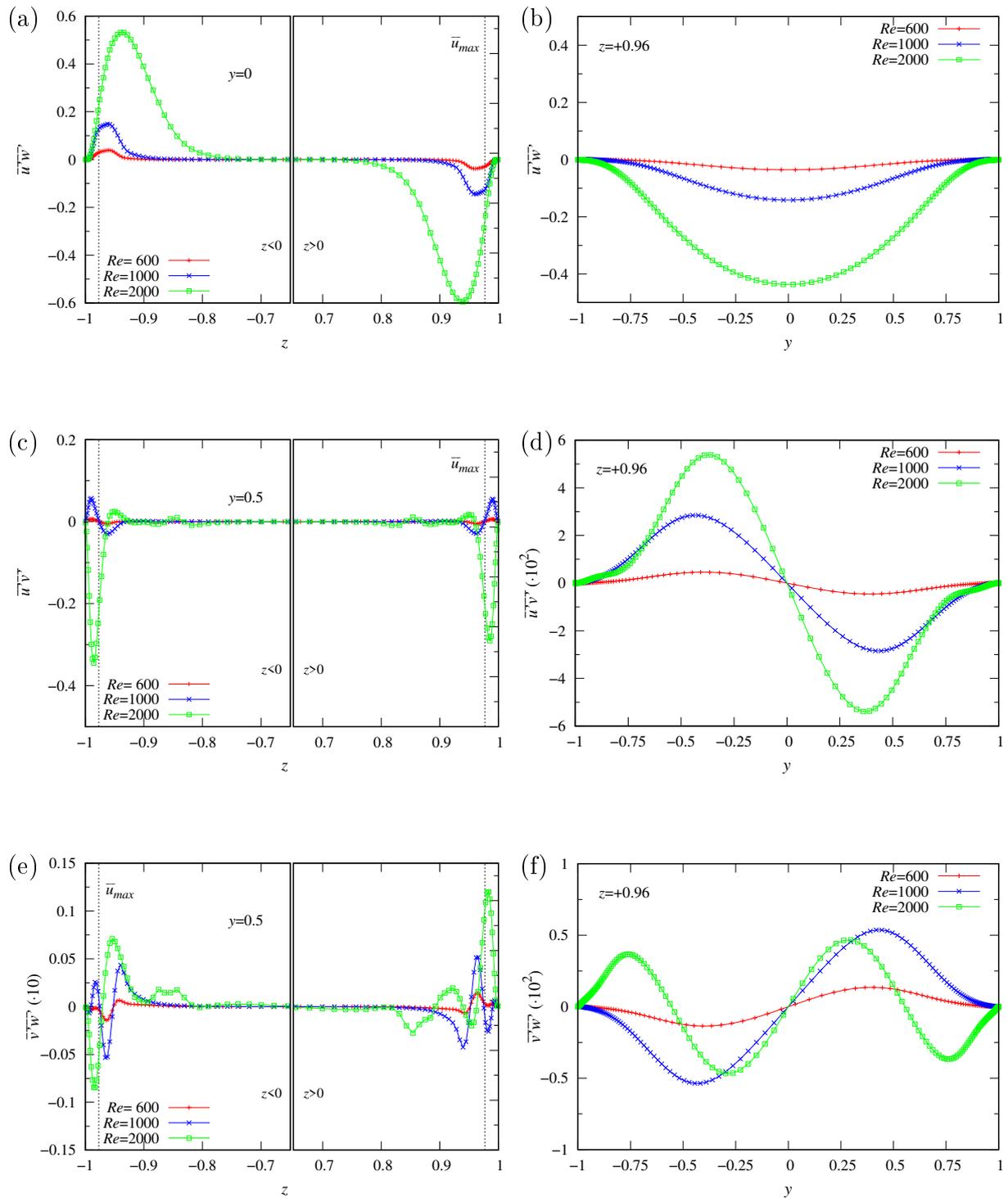


Abbildung 4.36: Verschiedene Komponenten des Reynolds'schen-Schubspannungstensors für  $Ha = 2000$  bei verschiedenen  $Re$ . Zusätzlich ist die  $z$ -Position von  $\overline{u}_{max}$  eingetragen.

### 4.3 Untersuchung von zeitabhängigen magnetohydrodynamischen Kanalströmungen

Störungsenergie kommt, folgt daraus, dass  $w'$  im Wesentlichen seine Energie aus  $u'$  bezieht. Der Wechsel im Vorzeichen resultiert daraus, dass der Impulstransport einmal in  $z$ -Richtung, und einmal entgegen der  $z$ -Richtung erfolgt. Deshalb ist  $\overline{u'w'}$  in  $y$ -Richtung bei  $z = 0.96$  negativ, wie Abbildung 4.36 (b) zeigt. Der Verlauf  $\overline{u'w'}$  ist, analog zu  $\overline{u'u'}$  und  $\overline{w'w'}$ , entlang der  $y$ -Achse symmetrisch mit einem Maximum bei  $y = 0$ .

Die Komponente  $\overline{u'v'}$  entlang von  $z$  für  $y = 0.5$  wird in Abbildung 4.36 (c) dargestellt. Für  $Re \leq 1000$  hat  $\overline{u'v'}$  seinen Nulldurchgang bei  $\bar{u}_{max}$ , wobei  $\overline{u'v'} > 0$  unmittelbar vor der jeweiligen Seitenwand ist. Bei  $Re = 2000$  dreht sich das Vorzeichen von  $\overline{u'v'}$  um und der Nulldurchgang verschiebt sich in Richtung Kernströmung. Zusammen mit dem Verlauf von  $\overline{u'v'}$  entlang der  $y$ -Achse in Abbildung 4.36 (d) lässt sich erkennen, dass es jeweils oberhalb und unterhalb von  $y = 0$  Wirbel mit Rotationsachse in  $z$ -Richtung gibt.

Für  $\overline{v'w'}$  ergeben sich laut Abbildung 4.36 (e) und (f) nur sehr kleine Amplituden im Vergleich zu den anderen Wechselwirkungstermen. Aus den Darstellungen kann auf Wirbelstrukturen geschlossen werden, die jeweils oberhalb und unterhalb von  $y = 0$  lokalisiert sind und deren Rotationsachse in  $x$ -Richtung zeigt.

Technisch relevant sind diese Ergebnisse im Hinblick auf den Wärmetransport in Blankets. Da in instabilen Strömungen eine Durchmischung des Fluids stattfindet, kann dadurch der Wärmetransport gesteigert werden. Die vorliegenden Ergebnisse zeigen, dass im Regime 1 nur innerhalb der Seitenschicht Durchmischungen auftreten. In Blankets gilt  $Ha \sim O(10^4)$ , sodass die Seitenschichtdicke mit  $\delta_S \sim Ha^{-1/2}$  sehr dünn ist und der Wärmetransport kaum beeinflusst wird. Erst im Regime 2 ist durch die Jetablösungen eine Durchmischung mit der Kernströmung möglich, wodurch der Wärmetransport gesteigert werden kann.

### 4.3.7 Transitionsverhalten

Im Folgenden wird die Transition von Regime 1 zu Regime 2 bei  $Re = 2000$  und  $Ha = 2000$  untersucht. Ausgangspunkt bei  $\tau = 0$  ist die quasi-stationäre Lösung für  $Re = 1000$  und  $Ha = 2000$ . Damit der Volumenstrom für  $Re = 1000$  und  $Re = 2000$  gleich ist, wurde die Reynolds-Zahl durch Verringerung der kinematischen Viskosität erhöht. Da sich der Strömungszustand in der Transition kontinuierlich ändert, wurde nicht das zeitliche Mittel  $\bar{u}$ , sondern das räumliche Mittel  $\hat{u}$  des jeweiligen Zeitpunktes verwendet, um die Geschwindigkeitsstörung  $u'$ , gemäß  $u' = u - \hat{u}$ , zu berechnen. In den folgenden Darstellungen werden die Geschwindigkeitsstörungen betrachtet, weil diese durch  $u' \sim \partial\phi'/\partial z$  und  $w' \sim -\partial\phi'/\partial x$  mit den Gradienten der Störungen des elektrischen Potentials  $\phi'$  zusammenhängen, was experimentell zugängliche Größen sind.

Abbildung 4.37 (a-h) zeigt  $u'$  für verschiedene Zeitpunkte im Bereich der Seitenschicht in der  $xz$ -Ebene bei  $y = 0$ . Unmittelbar nach dem Start der Simulation bei  $\tau = 0.04$  ist noch die periodische Struktur von  $u'$  in  $x$ -Richtung in der Seitenschicht erkennbar, wie sie Regime 1 entspricht. Die Amplituden von  $u'$  sind im Bereich  $-2 \lesssim u' \lesssim 2$ . Bei  $\tau = 0.4$  wird zum einen sichtbar, dass sich sechs Bereiche herausbilden, in denen  $u'$  zunimmt. Diese Bereiche sind mit den Ziffern 1 bis 6 in den Abbildungen markiert, wobei die Bereiche 1 und 2, 3 und 4, sowie 5 und 6 jeweils unmittelbar aneinander grenzen. Zum anderen ist bspw. bei  $x \approx 1$  erkennbar, dass sich vormals einzelne Gebiete mit  $u' > 0$  bzw.  $u' < 0$  zu jeweils größeren, zusammenhängenden Gebieten zusammenschließen und zunehmend in  $x$ -Richtung ausgedehnt sind. In Abbildung 4.37 (c) bei  $\tau = 0.5$  setzen sich diese zwei Prozesse fort. Zusätzlich ist erkennbar, dass zwischen 5 und 6 eine Wechselwirkung eingesetzt hat, weil sich Gebiete mit  $u' > 0$  zusammengeschlossen haben. Die Störung  $u'$  reicht bei 6 bis  $z \approx 0.76$  in die Kernströmung hinein. Insgesamt weist der Geschwindigkeitsjet nun Bereiche (1-6) auf, in denen starke Störungen  $u'$  auftreten, bzw. bei 6 eine erste Jetablösung stattfindet. Die Amplituden liegen im Bereich  $-6 \lesssim u' \lesssim 6$ . In den Gebieten zwischen den Bereichen 1-6 ist hingegen die periodische Struktur von  $u'$  nahezu verschwunden, was zwischen  $0 < x < 2$  besonders deutlich ist. Dort sind Gebiete mit gleicher Amplitude von  $u'$  zunehmend ausschließlich in Strömungsrichtung orientiert.

Zum Zeitpunkt  $\tau = 0.6$  in Abbildung 4.37 (d) ist erkennbar, dass sich die Bereiche 5 und 6 zu einem Bereich zusammengeschlossen haben. Damit einher entsteht ein Gebiet mit  $u' < 0$  zwischen  $4.8 \lesssim x \lesssim 2.2$  (periodische Randbedingungen). Dadurch sind 5 und 1 durch einen ununterbrochenes Gebiet mit  $u' < 0$  verbunden und eine Wechselwirkung zwischen 5 und 1 kann stattfinden. Bei  $\tau = 0.7$  sind die Gebiete mit  $u' < 0$  der Bereiche 4 und 5 ebenfalls verbunden und es ist erkennbar, dass damit einhergehend die Störungen bei 4 gewachsen sind, während sie bei 5 abgenommen haben, folglich hier ebenfalls eine Wechselwirkung zwischen 4 und 5 auftritt. Im Bereich 1 ist eine zweite Jetablösung aufgetreten, was daran erkennbar ist, dass bei 1  $u'$  weit in die Kernströmung hineinreicht. Eine weitere Wechselwirkung tritt bei  $\tau = 0.8$  zwischen 3 und 4 auf, was dazu führt, dass der Bereich 4 verschwindet, wie bei  $\tau = 1$  sichtbar ist.

Im weiteren Zeitverlauf stellt sich eine Art Gleichgewichtszustand zwischen den 4 verbliebenen Bereichen, in denen Jetablösungen auftreten, ein, wie Abbildung 4.37 (h) mit  $\tau = 14$  zeigt. Die Amplituden und räumlichen Ausdehnungen von  $u'$  sind für alle vier Bereiche gleich. Regime 2 ist nun voll ausgeprägt. Es ist zusätzlich erkennbar, dass Gebiete mit  $u' < 0$  immer zwei Bereiche miteinander verbinden (bspw. zwischen 2 und 3

### 4.3 Untersuchung von zeitabhängigen magnetohydrodynamischen Kanalströmungen

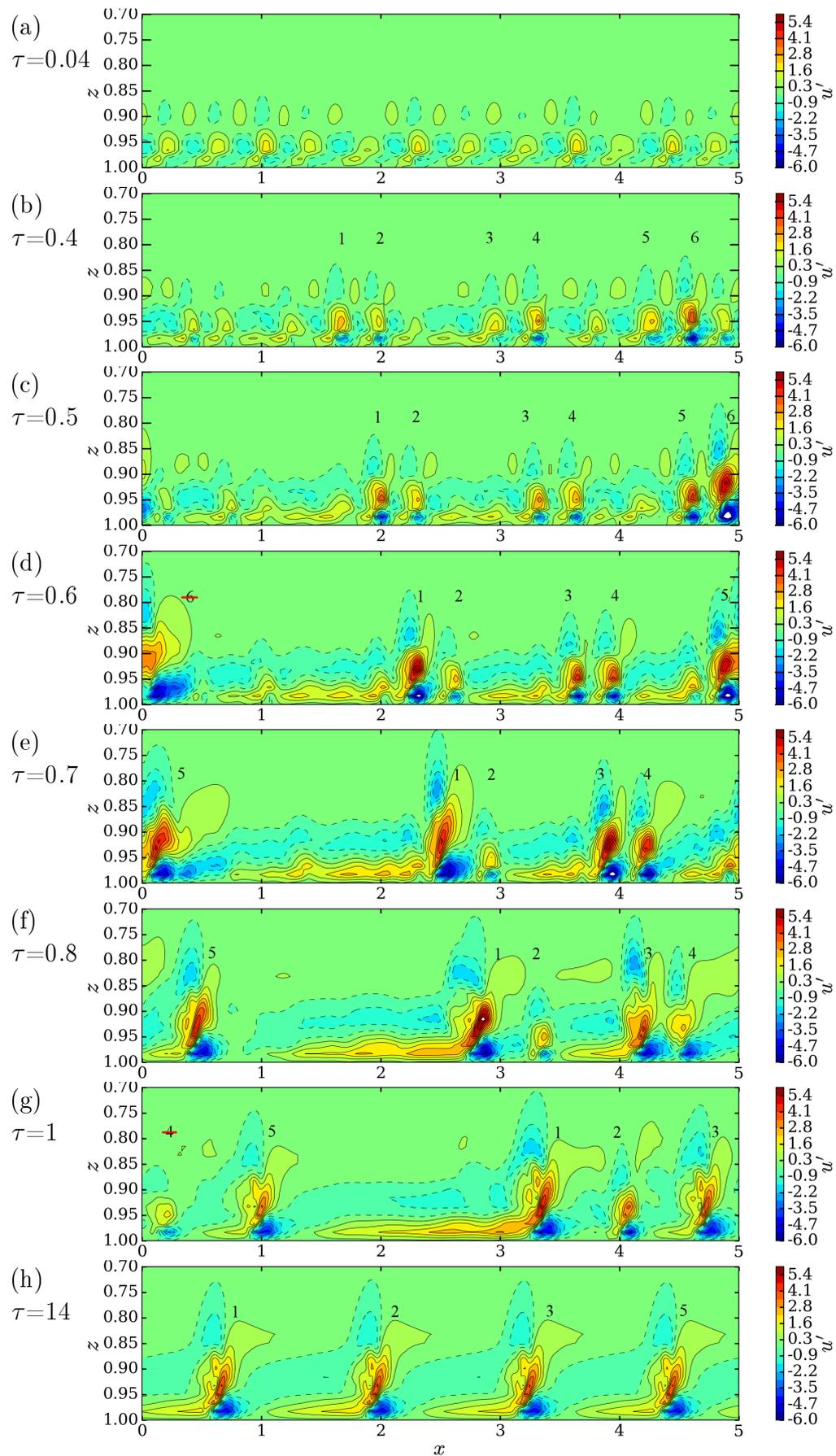


Abbildung 4.37: Störungen  $u' \sim \partial\phi/\partial z$  in der  $xz$ -Ebene bei  $y = 0$  beim Übergang von Regime 1 zu Regime 2 für  $Ha = 2000$  und  $Re = 2000$  zu den Zeitpunkten  $\tau = 0.04$  bis  $\tau = 14$ .

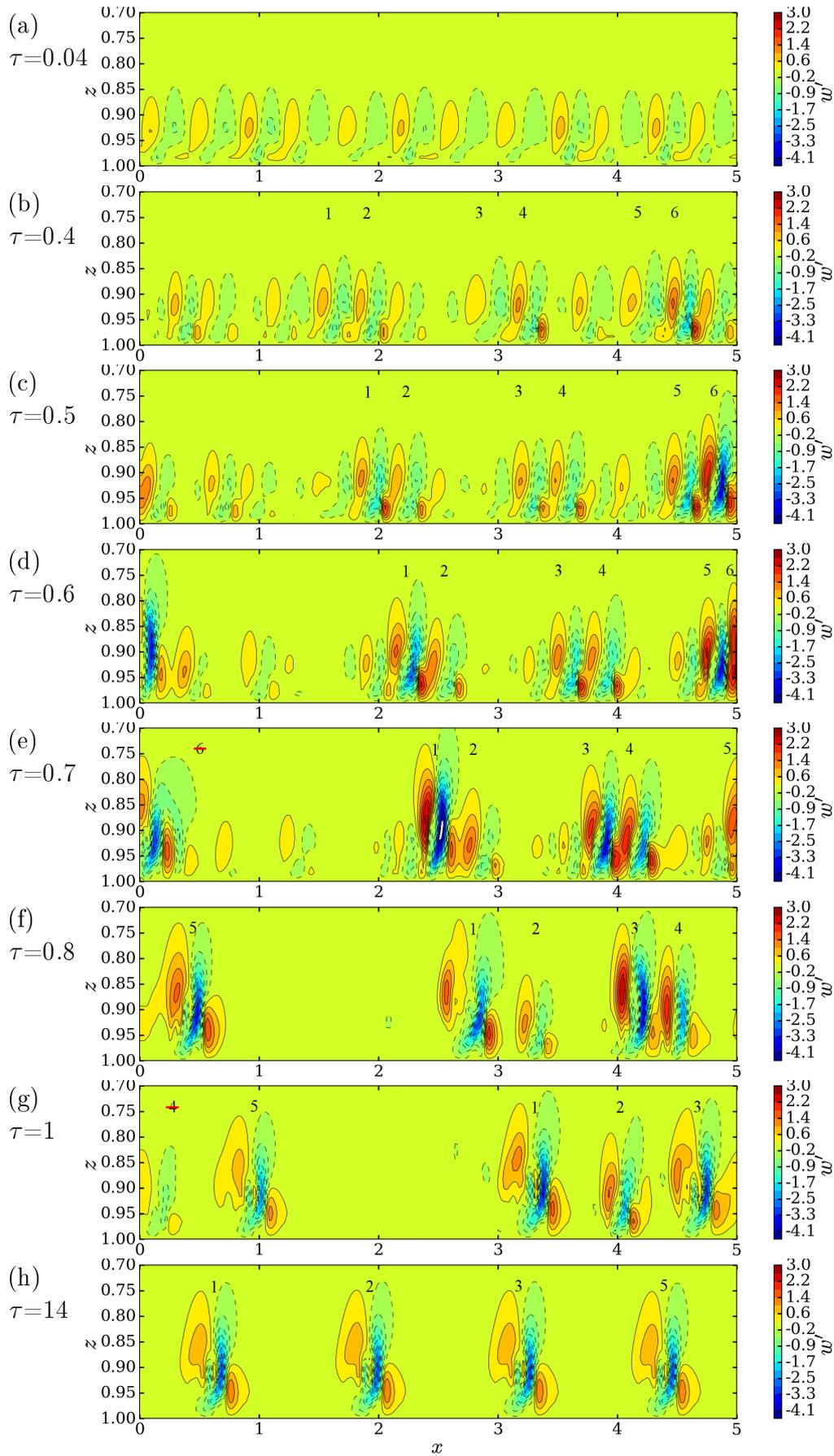


Abbildung 4.38: Störungen  $w' \sim -\partial\phi/\partial x$  in der  $xz$ -Ebene bei  $y = 0$  beim Übergang von Regime 1 zu Regime 2 für  $Ha = 2000$  und  $Re = 2000$  zu den Zeitpunkten  $\tau = 0.04$  bis  $\tau = 14$ .

bei  $2 \lesssim x \lesssim 3$ ), wodurch die Wechselwirkung zwischen den Jetablösungen realisiert wird. Bei  $\tau = 14$  liegen die Störungsamplituden zwischen  $-4 \lesssim u' \lesssim 4$ , sodass  $u'$  in der Transition teils größere Amplituden erreicht als im voll entwickelten Regime 2. Im Vergleich zu  $\tau = 0.7$  fällt auf, dass Störungen während der Transition weiter und mit größerer Amplitude in den Kern hineinreichen als bei  $\tau = 14$  (siehe bspw. jeweils Bereich 1). Über die gesamte Transition hinweg reichen die Störungen nie weiter als bis  $z = 0.7$ , sodass keine Wechselwirkung mit Instabilitäten der gegenüberliegenden Seitenschicht stattfinden kann. Beide Seitenschichten werden auch in der Transition effektiv durch die Kernströmung getrennt.

Abbildung 4.38 (a-h) zeigt, analog zu Abbildung 4.37 (a-h),  $w'$  im Transitionsbereich von Regime 1 zu Regime 2 bei den selben Parametern. Wie für  $u'$  bei  $\tau = 0.04$  ist auch für  $w'$  zu diesem Zeitpunkt die periodische Struktur der Störungen in der Seitenschicht noch deutlich erkennbar. Ab  $\tau = 0.4$  wird die Herausbildung der sechs markierten Bereiche deutlich, deren Amplituden zunächst zunehmen. Bei  $\tau = 0.5$  ist die Jetablösung bei 6 sehr gut erkennbar. Die Amplitude von  $w'$  ist  $w' \approx -4$  und hat sich damit zum vorhergehenden Zeitpunkt mehr als verdoppelt. Zwischen Bereich 6 und 1 nimmt  $w'$  hingegen ab. Ab  $\tau = 0.6$  befinden sich zwischen diesen beiden Bereichen räumlich ausgedehnte Gebiete mit  $w' = 0$ , sodass  $w'$  von 1 und 6 räumlich getrennt sind und nicht wechselwirken können. Zum Zeitpunkt  $\tau = 0.7$  wird das Verschwinden des Bereiches 6 und die Jetablösung in 1 deutlich. Für  $\tau = 0.8$  wird eine zusätzliche Jetablösung im Bereich 3 deutlich, während  $w'$  bei 4 abnimmt und bei  $\tau = 1$  verschwindet.

Für das vollentwickelte Regime 2 bei  $\tau = 14$  lässt sich daher feststellen, dass die Amplituden und Verteilung von  $w'$  für alle vier Bereiche gleich ist. Die Störungsgebiete sind allerdings durch Gebiete mit  $w' = 0$  getrennt, sodass die Wechselwirkung zwischen den einzelnen Bereichen 1,2,3 und 5 nur durch  $u'$  erfolgt.

#### 4.3.8 Einfluss des Aspektverhältnisses auf das Stabilitätsverhalten

Analog zur linearen Stabilitätsanalyse soll ebenfalls der Einfluss des Seitenverhältnisses  $A$  auf das Stabilitätsverhalten einer MHD-Strömung numerisch untersucht werden. Laut linearer Stabilitätsanalyse ist  $Re_c = 931$  bei  $Ha = 1000$ ,  $c = 0.03$  für  $A = 1/3$ . Bei  $A = 1$  ist  $Re_c = 655$ , sodass die Strömung im schmalen Kanal stabiler ist. Im Bereich der Stabilitätsgrenze ist daher nicht mit einer Wechselwirkung zwischen den Seitenschichten zu rechnen, da nur dann die Strömung im schmaleren Kanal eine niedrigere kritische Reynolds-Zahl hätte.

Das mittlere Geschwindigkeitsprofil  $\bar{u}$  für verschiedene  $Re$  bei  $Ha = 1000$  entlang  $z$  bei  $y = 0$  ist in Abbildung 4.39 (a) dargestellt. Für  $Re = 850$  und  $Re = 1100$  ist quasi kein Unterschied zwischen numerischer und analytischer Lösung feststellbar. Erst ab  $Re = 2000$  ist eine Abnahme von  $\bar{u}$  im Vergleich zur laminaren Lösung im Jet erkennbar. Genauso für  $Re = 3500$ . Bei  $Re = 10000$  ist eine deutliche Reduktion von  $\bar{u}$  im Vergleich zur laminaren Lösung sichtbar und zusätzlich ist der Jet verbreitert, sodass eine Interaktion mit der Kernströmung stattfindet. Abbildung 4.39 (b) zeigt die Geschwindigkeit  $u(x, y = 0, z = 0.288)$  entlang der  $x$ -Achse. Erkennbar ist, dass für  $Re = 850$  die Strömung laminar ist und die Abweichung zur analytischen Lösung beträgt  $\Delta u = 0.3\%$ . Ab  $Re = 1100$  werden periodische Störungen in  $u$  sichtbar. Dies ist in prinzipieller Übereinstimmung mit der linearen Stabilitätsanalyse, bei der  $Re_c = 931$  gefunden wurde.

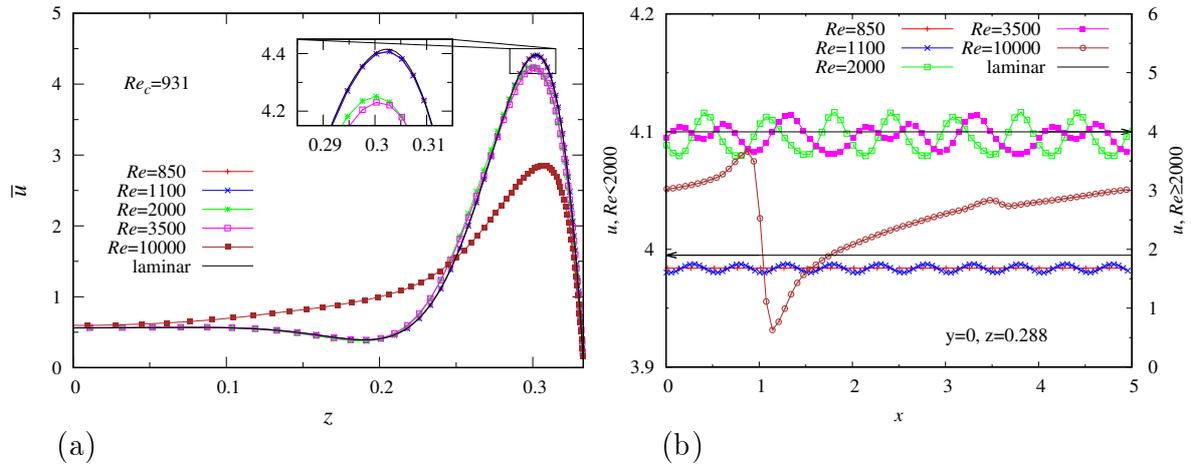


Abbildung 4.39: Simulationsergebnisse für (a) zeitlich gemitteltes  $\bar{u}$  entlang der  $z$ -Achse und (b)  $u$  entlang der  $x$ -Achse für  $Ha = 1000$ ,  $c = 0.03$  und  $A = 1/3$  für verschiedene Reynolds-Zahlen

Die kritische Wellenlänge ist mit  $\lambda_c = 0.45$  ermittelt worden, was ebenfalls gut mit der numerischen Lösung von  $\lambda = 0.5$  bei  $Re = 1100$  übereinstimmt. Es liegen also Störungen im Regime 1 vor. Bei weiterer Zunahme von  $Re$  nehmen die Störungen von  $u$  zu und die Wellenlängen wachsen an, was auch im quadratischen Kanal zu beobachten war. Allerdings werden die Amplituden bei  $Re = 3500$  ungleichmäßig, sodass hier davon ausgegangen werden kann, dass sich die Strömung im Übergangsbereich von Regime 1 zu Regime 2 befindet. Im Experiment wurde eine kritische Reynolds-Zahl von  $Re_c \approx 3300$  für  $Ha = 1000$  bei  $A = 1/3$  gefunden (Chowdhury, 2016). Experiment und numerische Simulation zeigen somit beide bei fast gleichen Reynolds-Zahlen eine instabile Strömung. Damit wird weiterhin deutlich, dass im Experiment die räumlich weniger ausgedehnten Störungen des Regime 1 ebenfalls gemessen werden können.

Eine großskalige Störung von  $u$  ist bei  $Re = 10000$  erkennbar, welche sich über die gesamte Kanallänge erstreckt. Die Schwankungsamplitude hat sich von  $\Delta u \approx 1$  bei  $Re = 3500$  auf  $\Delta u \approx 4$  vergrößert. Diese Störung entspricht den bereits für  $A = 1$  gefundenen Instabilitäten im Regime 2.

Der Verlauf des gemittelten elektrischen Potentials  $\bar{\phi}$  für verschiedene  $Re$  bei  $Ha = 1000$  entlang  $z$  bei  $y = 0$  ist in Abbildung 4.40 (a) gezeigt. Die maximale Abweichung im Verlauf von  $\bar{\phi}$  von  $Re = 850$  zur analytischen Lösung ist in unmittelbarer Nähe zur Wand und beträgt  $\Delta\phi = 1\%$ . In Normalenrichtung zur Wand nimmt die Abweichung weiter ab. Zwischen dem Verlauf von  $\bar{\phi}$  für die laminare Strömung bei  $Re = 850$  und der instabilen Strömung bei  $Re = 1100$  ist kein Unterschied erkennbar. Ab  $Re = 3500$  tritt eine Reduktion von  $\bar{\phi}$  in der Seitenschicht im Vergleich zu den niedrigeren  $Re$  ein, die im Regime 2 bei  $Re = 10000$  noch stärker ausfällt. Das elektrische Potential  $\phi$  entlang der  $x$ -Achse ist in Abbildung 4.40 (b) gezeigt. Es verhält sich analog zur Geschwindigkeit  $u$  in  $x$ -Richtung in Abbildung 4.39 (b).

Ein Vergleich zu  $A = 1$  ist in Abbildung 4.41 für  $Ha = 1000$  und verschiedene  $Re$  gezeigt. Zunächst soll die laminare Grundströmung diskutiert werden. In beiden Fällen ist die

### 4.3 Untersuchung von zeitabhängigen magnetohydrodynamischen Kanalströmungen

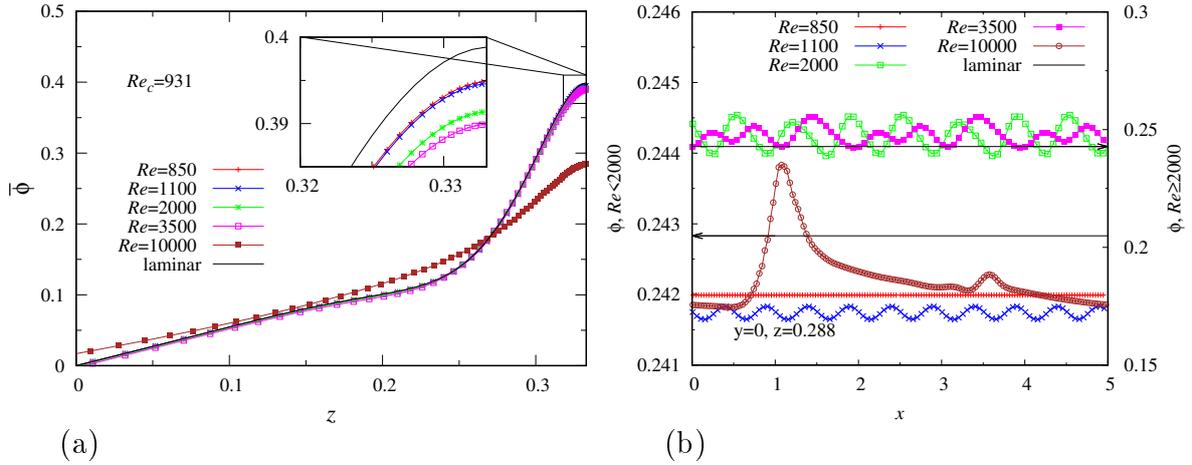


Abbildung 4.40: Simulationsergebnisse für (a) zeitlich gemitteltes  $\bar{\phi}$  entlang der  $z$ -Achse und (b)  $\phi$  entlang der  $x$ -Achse für  $Ha = 1000$ ,  $c = 0.03$  und  $A = 1/3$  für verschiedene Reynolds-Zahlen

mittlere Geschwindigkeit gleich, sodass sich für  $A = 1/3$  ein kleinerer Volumenstrom als für  $A = 1$  ergibt. Die Seitenschicht wird jedoch nicht von  $A$  beeinflusst und ist in beiden Fällen gleich dick, wie Abbildung 4.41 veranschaulicht. Folglich ist der Anteil der Seitenschicht am Gesamtvolumenstrom bei  $A = 1/3$  größer. Laut Tabelle 4.11 beträgt  $Q_S = 0.15$  für  $A = 1/3$  und damit rund  $Q/2$ , während  $Q_S = 0.21$  für  $A = 1$ , also rund  $Q/5$  ist. Wegen des größeren Anteils von  $Q_S$  an  $Q$  bei  $A = 1/3$  ist die Kerngeschwindigkeit  $u_c$  reduziert.

Die Ergebnisse der numerischen Simulationen stimmen mit diesen laminaren Strömungsverhalten überein. Für  $A = 1$  ist  $Re_c = 655$  bei  $Ha = 1000$  laut linearer Stabilitätsanalyse, wohingegen  $Re_c = 931$  für  $A = 1/3$  ist. Dieser Unterschied folgt aus dem deutlich stärker ausgeprägten Geschwindigkeitsjet bei  $A = 1$ , der daher eher zu instabilen Verhalten neigt. Deshalb ist davon auszugehen, dass bei  $A = 1$  stärkere Störungen der Geschwindigkeit vorhanden sind als bei  $A = 1/3$ . Die numerischen Simulationen bestätigen diese Vermutung für  $Re = 2000$ , denn es zeigt sich bei  $A = 1$  eine Abweichung zur laminaren Lösung von  $\Delta u_{max} \approx 13\%$  und bei  $A = 1/3$  hingegen nur eine Abweichung von  $\Delta u_{max} \approx 4\%$ . In beiden Fällen befindet sich die Strömung in Regime 1, wie einerseits aus der nicht vorhandenen Aufweitung des Jets geschlossen werden kann und andererseits aus den gleichmäßig periodischen Störungen von  $u$  in Abbildung 4.39 (b) und Abbildung 7.11 (b) (im Anhang). Mit der Reduktion des Aspektverhältnisses geht eine Reduktion von Wellenlänge  $\lambda$  und Frequenz  $f^*$  einher, wie Tabelle 4.11 zeigt, weil die Jetgeschwindigkeit abnimmt und damit die Störungen langsamer transportiert werden. Bei der betrachteten Parameterkombination hat folglich eine Reduktion von  $A$  eine stabilisierende Wirkung auf die MHD-Strömung. Dies gilt nicht nur für die lineare Stabilitätsgrenze, sondern auch darüber hinaus im Regime 1.

Abbildung 4.41 zeigt weiterhin Ergebnisse für  $Re = 10000$  bei  $A = 1/3$  und für  $Re = 12000$  bei  $A = 1$ . Wie bereits bei Abbildung 4.39 diskutiert, befindet sich die Strömung im Fall mit  $A = 1/3$  im Regime 2. Bei  $A = 1$  ist hingegen der Jet nur minimal verbreitert und die mittlere Geschwindigkeit erreicht im Jet sogar einen leicht höheren Wert als

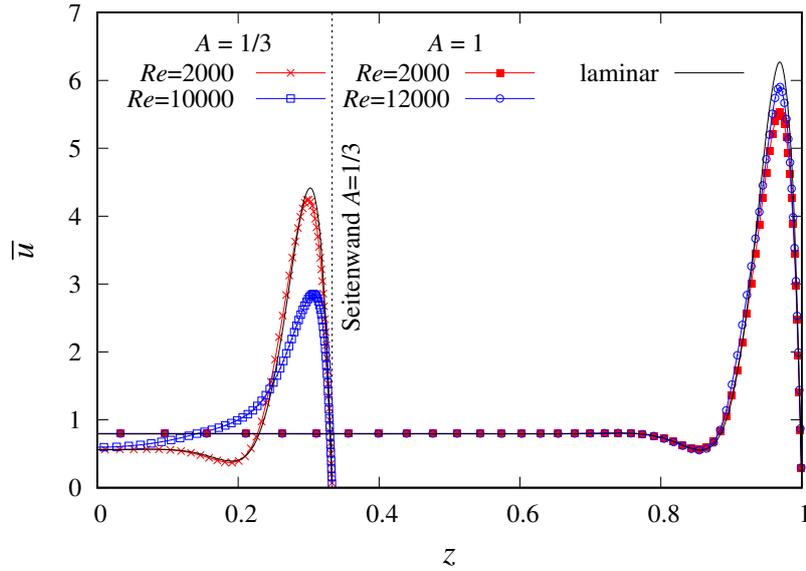


Abbildung 4.41: Mittlere Geschwindigkeit  $\bar{u}$  in  $z$ -Richtung für  $Ha = 1000$  und  $Re = 2000$  für verschiedene  $A$

$A$	$u_c$	$Q$	$Q_S$	$\lambda$	$f^*$
1	0.79	1	0.21	0.71	4.0
1/3	0.56	1/3	0.15	0.66	3.6

Tabelle 4.11: Einfluss von  $A$  auf Hunt-Strömungen bei  $Ha = 1000$  und  $Re = 2000$

bei  $Re = 2000$ . Letzteres liegt daran, dass sich die Strömung im Transitionsbereich von Regime 1 zu Regime 2 befindet und die Geschwindigkeitsamplituden stark schwanken (siehe Abbildung 4.13 und Abbildung 7.11 (b)). Da bei  $A = 1$  auch bei niedrigeren  $Re$  kein Regime 2 gefunden wurde, ist die Annahme gerechtfertigt, dass bis mindestens  $Re = 12000$  die Strömung nicht in Regime 2 für  $Ha = 1000$  und  $A = 1$  übergeht. Die Reduktion von  $A$  zu  $A = 1/3$  führt folglich zu einer Destabilisierung der Strömung bei  $Re = 10000$ . Für  $Re = 10000$  und  $A = 1/3$  in Abbildung 4.41 wird eine starke Verbreiterung des Jets in die Kernströmung hinein deutlich. Diese reicht soweit in den Kern hinein, dass es zu einer Wechselwirkung zwischen den beiden Seitenschichten kommen kann, was zu einer zusätzlichen Destabilisierung der Strömung und dem Übergang zu Regime 2 führt.

Abbildung 4.42 (a) zeigt die Stabilitätskarte für  $A = 1/3$ . Zum einen ist die lineare Stabilitätsgrenze gezeigt, zum anderen für  $Ha = 1000$  Ergebnisse numerischer Simulationen. Die numerischen Simulationen bestätigen die Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse für  $Ha = 1000$  insofern, als die Strömung für  $Re = 850$  stabil ist, bei  $Re = 1100$  befindet sie sich hingegen im Regime 1. Mit weiterer Zunahme von  $Re$  bildet sich ab  $Re = 2000$  der Übergangszustand von Regime 1 zu Regime 2 aus. Bei den untersuchten Reynolds-Zahlen tritt Regime 2 ab  $Re = 10000$  auf.

Die mittlere turbulente kinetische Energie  $\bar{E}_{turb}$  ist in Abhängigkeit von  $Re$  für  $Ha = 1000$  und  $A = 1/3$  in Abbildung 4.42 (b) gezeigt. Im Regime 1 steigt  $\bar{E}_{turb}$  nur langsam mit steigender Reynolds-Zahl an. Wechselt der Strömungszustand von Regime 1 zu Regime 2 steigt  $\bar{E}_{turb}$  sprunghaft von  $\bar{E}_{turb} = 8.7 \cdot 10^{-3}$  auf  $\bar{E}_{turb} = 110 \cdot 10^{-3}$  an. Dieses Verhalten entspricht dem für  $A = 1$ . Im Vergleich ist bei gleicher Reynolds-Zahl allerdings  $\bar{E}_{turb}$  bei

### 4.3 Untersuchung von zeitabhängigen magnetohydrodynamischen Kanalströmungen

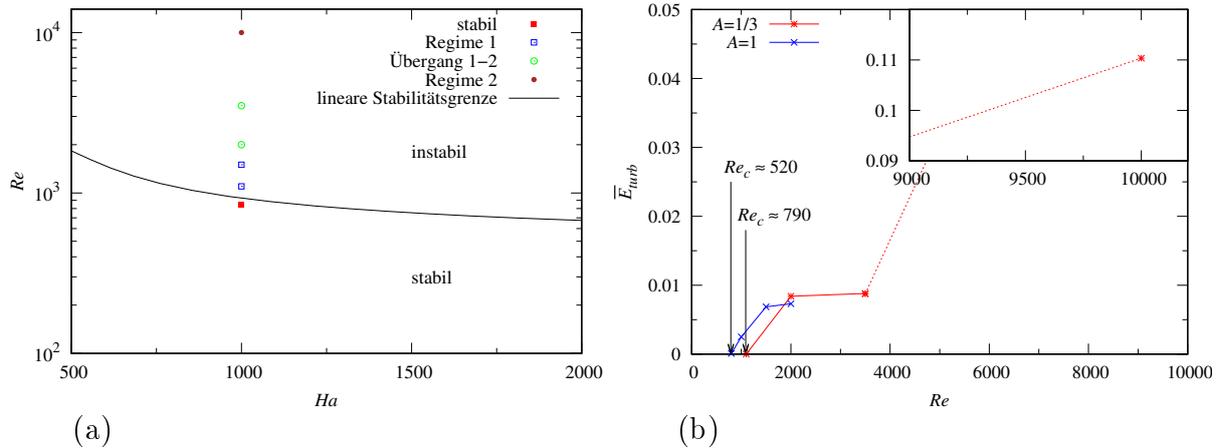


Abbildung 4.42: (a) Stabilitätskarte für  $A = 1/3$  und (b) mittlere turbulente kinetische Energie  $\bar{E}_{turb}$  für  $Ha = 1000$ . Separate Skalierung für  $\bar{E}_{turb}$  bei  $Re = 10000$

$A = 1$  größer als  $\bar{E}_{turb}$  von  $A = 1/3$  (bspw. für  $Re = 2000$  :  $\bar{E}_{turb} = 7.3 \cdot 10^{-3}$  bei  $A = 1$  und  $\bar{E}_{turb} = 5.6 \cdot 10^{-3}$  bei  $A = 1/3$ ).

Aus dem Verlauf von  $\bar{E}_{turb}$  im Regime 1 lässt sich der Schnittpunkt mit der Abszisse bestimmen, wodurch sich die kritische Reynolds-Zahl abschätzen lässt. Es ergibt sich  $Re_c \approx 1090$ , was rund 15% oberhalb des Wertes der linearen Stabilitätsanalyse mit  $Re_c = 931$  liegt. An der geringeren Abweichung im Vergleich zu  $A = 1$  wird der Einfluss der Auflösung deutlich, denn die Anzahl der Zellen in  $z$ -Richtung ist für  $A = 1$  und  $A = 1/3$  gleich. Dadurch erhöht sich die Auflösung für  $A = 1/3$ , sodass die Abweichung zwischen dem Ergebnis der linearen Stabilitätsanalyse und den numerischen Simulationen abnimmt. Somit lässt sich erahnen, was für ein numerischer Aufwand nötig wäre, um die Abweichung weiter zu reduzieren.

Abbildung 4.43 zeigt  $u(x, y = 0, z)$  für  $Re = 10000$  bei  $Ha = 1000$  und  $A = 1/3$  im statistisch voll-entwickelten Zustand. Deutlich erkennbar sind die Jetablösungen in beiden Seitenschichten, welche um eine halbe Kanallänge gegeneinander versetzt auftreten. Die Strömung befindet sich daher im Regime 2. Bemerkenswert ist, dass die Jetablösungen Auswirkungen bis zur gegenüberliegenden Seitenschicht verursachen. Folglich wird hier die Kernströmung sehr stark von den Jetablösungen beeinflusst. Dieses Verhalten ist bereits in Abbildung 4.39 (a) für  $Re = 10000$  erkennbar, da  $\bar{u}$  selbst bei  $z = 0$  um rund 6% von der laminaren Lösung abweicht.

Genauer lässt sich das Transitionsverhalten für  $Re = 10000$  bei  $Ha = 1000$  in Abbildung 4.44 (a-d) betrachten. Dort ist die Geschwindigkeitsstörung  $u'$  in der Mittelebene bei  $y = 0$  für verschiedene Zeitpunkte  $\tau$  dargestellt. Analog zum Vorgehen im Abschnitt 4.3.7 wird  $u'$  mit dem räumlichen Mittel  $\hat{u}$  des jeweiligen Zeitpunktes gebildet. Ausgangspunkt war eine Strömung mit  $Re = 2000$ .

Zunächst ist für  $\tau = 2$  nur in der Seitenschicht bei  $z > 0$  eine Jetablösung zwischen  $2.5 \lesssim x \lesssim 3$  erkennbar. Die Störungen  $u'$  erstrecken sich dabei quer durch die Kernströmung bis zur gegenüberliegenden Seitenschicht, sodass eine Wechselwirkung zwischen beiden Jets

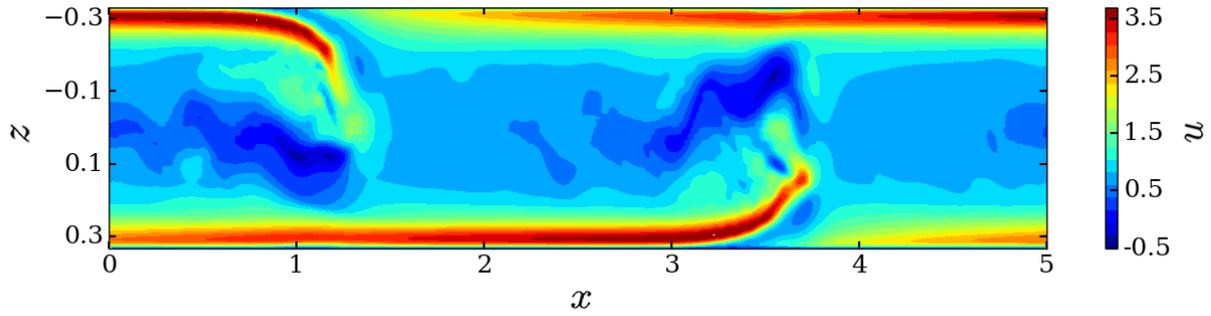


Abbildung 4.43: Geschwindigkeitsverteilung  $u$  in der  $xz$ -Ebene bei  $y = 0$  für  $Ha = 1000$  und  $Re = 10000$

erfolgen kann. In der Seitenschicht mit  $z < 0$  ist hingegen noch eine teilweise periodische Struktur mit kleineren Amplituden von  $u'$ , ähnlich zu Abbildung 4.37 (b), erkennbar. Demzufolge ist die Strömung im Bereich dieses Jets noch im Regime 1. Eine Konsequenz daraus ist, dass die Jetgeschwindigkeit in diesem Jet höher ist, als in dem bei  $z \approx 0.3$ , woraus sich ein unsymmetrisches Geschwindigkeitsprofil entlang der  $z$ -Achse ergibt.

Im weiteren Zeitverlauf verschwindet die periodische Struktur von  $u'$  bei  $z \approx -0.3$  zunehmend und die Störungen reichen auch hier immer weiter in den Kern hinein, wie bei  $\tau = 40$  erkennbar ist. Abbildung 4.44 (c) zeigt für  $\tau = 46$  Jetablösungen in beiden Seitenschichten, sodass die Strömung im Regime 2 ist. Wie bereits im Abschnitt 4.3.7 beobachtet, treten während der Entwicklung einer Jetablösung größere Amplituden von  $u'$  auf, als wenn sie voll entwickelt ist. Dies wird daran deutlich, dass  $u'$  in der Jetablösung bei  $x \approx 2$ ,  $z < 0$  Werte oberhalb der dargestellten einheitlichen Farbskala annimmt.

Deutlich sichtbar ist die Wechselwirkung zwischen beiden Seitenschichten anhand der negativen Geschwindigkeitsstörung  $u'$ , die sich zwischen  $3.5 \lesssim x \lesssim 1$  (periodische Randbedingungen) und damit beiden Jetablösungen erstreckt. Weiterhin werden durch die Jetablösung bei  $x \approx 2$  zusätzliche Störungen in der gegenüberliegenden Seitenschicht mit  $z > 0$  induziert. Im statistisch voll entwickelten Zustand bei  $\tau = 156$  verschwinden diese allerdings wieder. Die Jetablösungen bewegen sich gleichmäßig im Abstand einer halben Kanallänge fort. Die zugehörigen Störungen  $w'$  befinden sich im Anhang (Abbildung 7.17).

Wie bereits in der Diskussion der Ergebnisse zur Abbildung 4.44 erwähnt, führen unterschiedliche Strömungszustände in den Seitenschichten zu einem unsymmetrischen mittleren Geschwindigkeitsprofil entlang der  $z$ -Achse. Das wird in Abbildung 4.45 verdeutlicht. Dargestellt sind die mittleren Geschwindigkeiten  $\hat{u}(y = 0, z)$  für die gleichen Zeitpunkte wie in Abbildung 4.44. Während bei  $z < 0$  für  $\tau = 2$  und  $\tau = 40$  das mittlere Profil noch sehr ähnlich zur laminaren Lösung ist, ist  $\hat{u}$  bei  $z > 0$  bereits deutlich abgeflacht, sodass sich ein unsymmetrisches Geschwindigkeitsprofil ergibt. Die Strömung ist also zu diesen Zeitpunkten bei  $z < 0$  im Regime 1 und bei  $z > 0$  im Regime 2. Erst ab  $\tau = 46$  ist ein signifikanter Rückgang im Maximum von  $\hat{u}$  bei  $z < 0$  sichtbar. Bei  $\tau = 156$  ist das Geschwindigkeitsprofil symmetrisch. Der Übergang von Regime 1 zu Regime 2 findet daher zeitlich versetzt in den Seitenschichten statt. Asymmetrisches Verhalten konnte experimentell für  $A = 1/3$  und  $Ha = 2000$  ebenfalls beobachtet werden (Chowdhury, 2016).

Da der Ausgangspunkt der numerischen Simulation eine Strömung war, die sich im Re-

### 4.3 Untersuchung von zeitabhängigen magnetohydrodynamischen Kanalströmungen

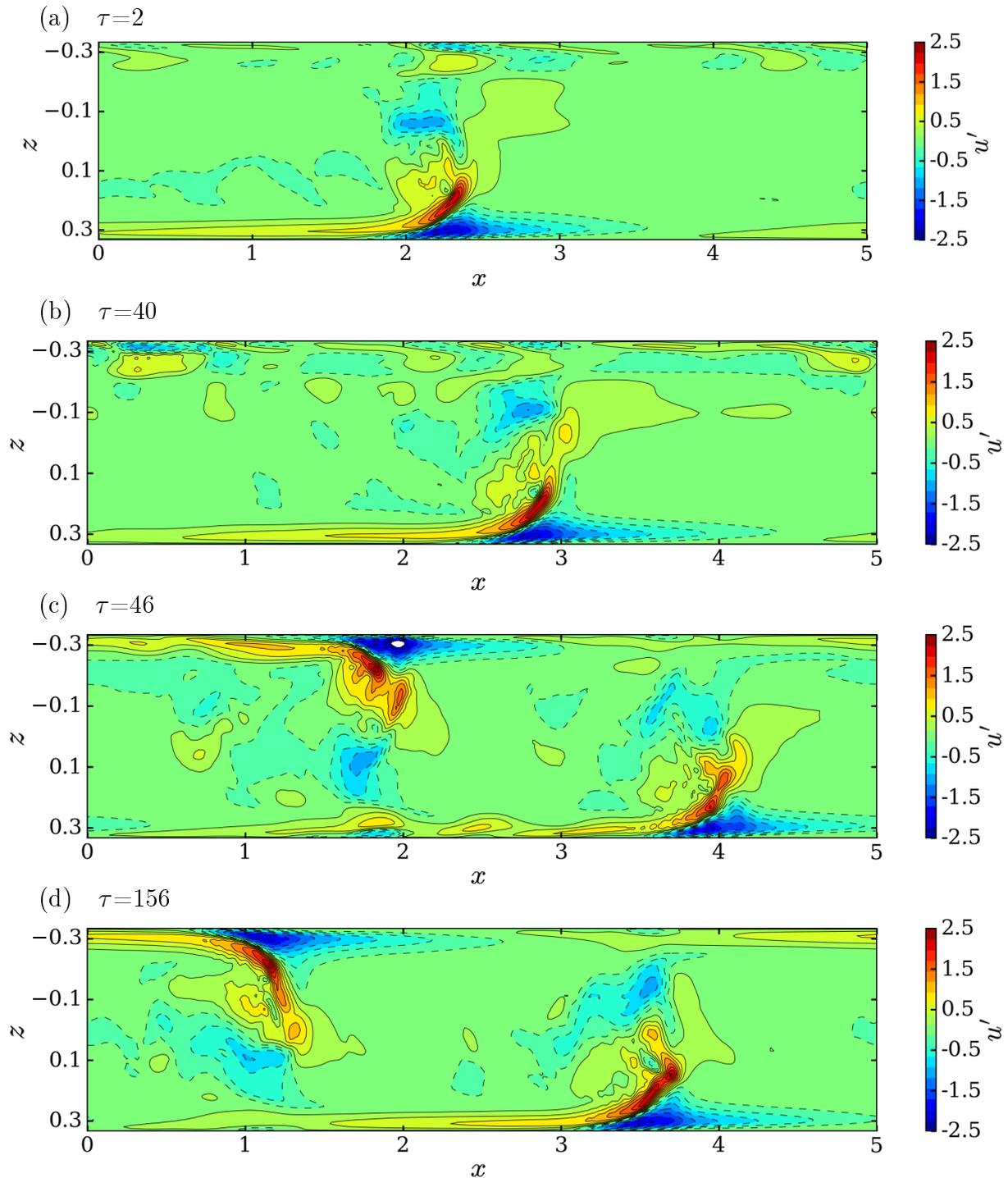


Abbildung 4.44:  $u'$  in der  $xz$ -Ebene bei  $y = 0$  für  $Ha = 1000$  und  $Re = 10000$

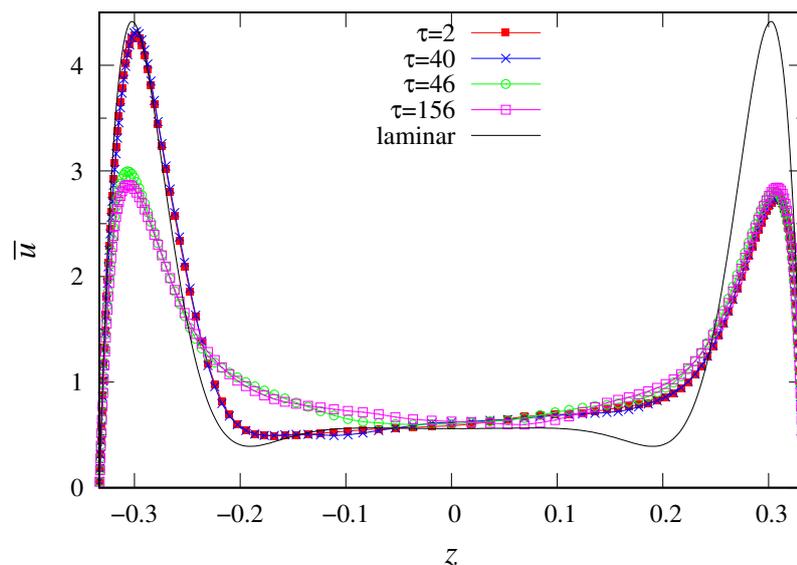


Abbildung 4.45: Räumlich gemittelt Geschwindigkeitsprofil  $\hat{u}$  entlang der  $z$ -Achse bei  $y = 0$  für  $Ha = 1000$ ,  $Re = 10000$  und  $A = 1/3$

gime 1 befand, wird deutlich, dass die Übergänge von Regime 1 zu Regime 2 in den beiden Seitenschichten mit deutlichem zeitlichen Abstand erfolgen können. Deshalb sollte bei zukünftigen numerischen Simulationen als auch bei Experimenten darauf geachtet werden, dass die Strömung einen statistisch voll entwickelten Zustand eingenommen hat.

Abschließend kann festgehalten werden, dass ein unsymmetrisches Geschwindigkeitsprofil einerseits Folge von unterschiedlich vielen Jetablösungen in den jeweiligen Seitenschichten sein kann, wie im Abschnitt für  $Ha = 2000, Re = 2000$  und  $A = 1$  sichtbar wurde. Andererseits kann ein unsymmetrisches Geschwindigkeitsprofil auch durch Auftreten verschiedener Stabilitätsregime in den Seitenschichten hervorgerufen werden.

## 4.4 Zusammenfassung

Zunächst konnte das verwendete numerische Verfahren für MHD-Strömungen sowohl in Kanälen mit idealisierten als auch realistischen Wandleitfähigkeiten erfolgreich anhand analytischer Lösungen und experimenteller Daten validiert werden. Abweichungen zwischen analytischen Lösungen und Simulationsergebnissen für zweidimensionale stationäre Strömungen liegen deutlich unterhalb von einem 1%. Sehr gute Übereinstimmungen konnten zwischen experimentellen Daten und dreidimensionalen Strömungen gefunden werden, bzw. größere Abweichungen durch Unterschiede im experimentellen und numerischen Setup erklärt werden.

Ausgehend von den Ergebnissen der linearen Stabilitätsanalyse wurden anschließend numerische Simulationen für verschiedene Hartmann- und Reynolds-Zahlen mit  $c = 0.03$  durchgeführt. Die aus diesen numerischen Simulationen ermittelten kritischen Reynolds-Zahlen für verschiedene  $Ha$  sind 19% größer als die entsprechenden kritischen Reynolds-Zahlen aus der linearen Stabilitätsanalyse. Beide Verfahren liefern damit verhältnismäßig gut übereinstimmende Ergebnisse.

Nach dem Überschreiten der Stabilitätsgrenze wurden zwei Strömungsregime identifiziert. Regime 1 zeichnet sich durch gleichmäßig periodische Störungen mit konstanter Amplitude aus. Die Störungen sind auf die Seitenschicht begrenzt und reduzieren die maximale Jetgeschwindigkeit mit zunehmender Reynolds-Zahl. Bei den dominierenden Störungen handelt es sich um Wirbelstrukturen, die abwechselnd parallel und antiparallel zum Magnetfeld orientiert sind und sich über die gesamte Kanalhöhe erstrecken. Wirbelstrukturen, die Anteile senkrecht zum Magnetfeld haben, sind deutlich schwächer ausgeprägt.

Für die Wellenlänge im Regime 1 ergab sich  $\lambda \sim Re^{1/2}$ , während für die Frequenz  $f^* \sim Re^{-1/2}$  gefunden wurde. Weiterhin nimmt  $\lambda$  mit steigendem  $Ha$  ab, während  $f^*$  zunimmt. Daraus ergibt sich eine konstante Phasengeschwindigkeit  $c_P$ . Bezogen auf die maximale Jetgeschwindigkeit zeigt sich, dass die instabilen Strukturen zunehmend schneller werden, weil die maximale Jetgeschwindigkeit aufgrund des Anwachsens der Wirbelstrukturen sinkt.

Durch eine weitere Erhöhung von  $Re$  geht die MHD-Strömung in das Regime 2 über. Charakteristisch für Regime 2 sind großskalige Störungen mit partiellen Jetablösungen, wodurch eine Wechselwirkung mit der Kernströmung eintritt. Die Jetablösungen können in den jeweiligen Seitenschichten unterschiedlich häufig auftreten, woraus sich ein unsymmetrisches mittleres Geschwindigkeitsprofil entlang der  $z$ -Achse ergeben kann. Die gleichmäßig periodische Wirbelstruktur aus Regime 1 verschwindet. Allerdings sind die dominierenden Wirbel weiterhin parallel zum Magnetfeld orientiert. Mit dem Wechsel zu Regime 2 treten zusätzlich Störungen in der Kernströmung und in der Hartmann-Schicht auf, die aber rund zwei Größenordnungen kleiner sind als die in der Seitenschicht.

Der Übergang von Regime 1 zu Regime 2 erfolgt zunächst durch eine Zunahme der Störungsamplituden in einzelnen Bereichen innerhalb der Seitenschicht. Außerhalb dieser Bereiche verschwindet die periodische Struktur aus Regime 1 und Störungen gleicher Amplitude sind zunehmend in Strömungsrichtung orientiert. Mit dem Auftreten von Jetablösungen kommt es zu einer starken Wechselwirkung zwischen den Störungsbereichen mit größter Amplitude, die zu einer teilweisen Vereinigung dieser Bereiche führt. Durch

die Wechselwirkung zwischen den Jetablösungen stellt sich im Laufe der Zeit eine gleichmäßige räumliche Störungs- und Amplitudenverteilung der Jetablösungen ein. Während der Transition erreichen die Amplituden größere Werte und die Störungen eine größere räumliche Ausdehnung als im statistisch voll entwickelten Zustand des Regime 2.

Anhand der Seitenwandssignale der Potentialstörungen bzw. deren Ableitungen lässt sich feststellen, dass  $\partial\phi'/\partial x$  über die gesamte Höhe der Seitenwand gleichmäßig große Amplituden aufweist, während  $\partial\phi'/\partial y$  jenseits des Bereiches der Hartmann-Schichten deutlich abnimmt.

Durch Berechnen der mittleren turbulenten kinetischen Energien  $\bar{E}_{turb}$  konnten für  $Ha = 1000$  und  $Ha = 2000$  die kritischen Reynolds-Zahlen aus der Stabilitätsanalyse bis auf ca. 20% Genauigkeit bestätigt werden. Diese Abweichung ergibt sich aufgrund numerischer Diffusion, die durch eine Verbesserung der Auflösung des Gitters mit erheblichem numerischen Mehraufwand reduziert werden könnte. Die Analyse von  $\bar{E}_{turb}$  ergab auch, dass beim Wechsel von Regime 1 zu Regime 2  $\bar{E}_{turb}$  um ungefähr eine Größenordnung zunimmt.

Bei Änderung des Aspektverhältnisses auf  $A = 1/3$  konnte zunächst für  $Ha = 1000$  das Ergebnis der linearen Stabilitätstheorie bestätigt werden. Bei weiterer Erhöhung der Reynolds-Zahl geht die Strömung ebenfalls in Regime 1 bzw. Regime 2 über. Im Vergleich zu einem Kanal mit  $A = 1$ , ist bei einem Kanal mit  $A = 1/3$  die die Seitenschichten trennende Kernströmung in ihrer räumlichen Ausdehnung deutlich verringert, sodass es zu starken Wechselwirkungen zwischen den gegenüberliegenden Seitenschichten kommen kann. Der Übergang von Regime 1 zu Regime 2 tritt dabei zeitlich versetzt in den jeweiligen Seitenschichten auf, sodass sich zunächst ein unsymmetrisches mittleres Geschwindigkeitsprofil in  $z$ -Richtung ausbildet.

Aus technischer Sicht lässt sich der Wärmetransport steigern, wenn sich die MHD-Strömung im Regime 2 befindet. Durch die Wechselwirkung von Seitenschicht und Kernströmung lässt sich Wärme effizienter von der Kanalwand hin zur Kanalmitte transportieren als bei reiner Wärmeleitung. Hierbei muss berücksichtigt werden, dass der axiale Druckgradient bei MHD-Strömungen mit steigender elektrischer Leitfähigkeit der Wand steigt (siehe Abbildung 3.16 (b)), sodass der technische Aufwand zum Bau eines entsprechenden Kanals steigt. In den Blankets wird deshalb  $c \ll 1$  angestrebt.

# 5 Zusammenfassung und Ausblick

Ziel dieser Arbeit ist es, den Einfluss verschiedener Parameter wie Magnetfeldstärke, Strömungsgeschwindigkeit und endlicher Wandleitfähigkeit auf die Stabilität einer MHD-Strömung mittels theoretischer Methoden zu untersuchen. Der Schwerpunkt der Untersuchung liegt dabei auf dem Übergangsverhalten vom laminaren stationären zum instabilen instationären Strömungszustand der Hunt-Strömung. Für die Untersuchung wurden zwei Ansätze verfolgt:

Zunächst wurden lineare Stabilitätsanalysen durchgeführt, bei denen erstmals Hunt-Strömungen mit realistischen Wandleitparametern untersucht wurden. Als wesentliche Ergebnisse lassen sich hierbei festhalten:

- Einfluss auf die kritische Reynolds-Zahl  $Re_c$  der Hunt-Strömung haben sowohl die Hartmann-Zahl  $Ha$  als auch der Wandleitparameter  $c$ . Dies gilt insbesondere für kleine und mittelgroße  $Ha$ . Ist hingegen  $cHa \gg 1$ , tritt ein asymptotisches Verhalten ein, bei dem  $Re_c$  nur noch schwach mit  $Ha$  variiert. Im untersuchten Parameterbereich von  $c$  gilt dabei  $Re_c \sim O(100)$ , wobei  $Re_c \searrow 112$  für  $c \rightarrow \infty$ .
- Bei kleinen  $Ha \sim O(10^0 - 10^1)$  treten zunächst großskalige Instabilitäten auf, die nicht entlang des Magnetfeldes ausgerichtet sind. Sie werden mit stärker werdendem Magnetfeld gedämpft. Bei mittelgroßen  $Ha \sim O(10^1 - 10^2)$  werden Instabilitäten dominant, die entlang des Magnetfeldes orientiert sind. Deren Wellenlänge skaliert mit der Seitenschichtdicke  $\delta_S$ , sodass die Abmessungen der Instabilitäten mit steigendem  $Ha$  immer kleiner werden. Für die Phasengeschwindigkeit gilt  $c_P/u_{max} \approx 0.47$  wenn  $cHa \gg 1$ , sodass sich die Instabilitäten ungefähr mit der Hälfte der maximalen Jetgeschwindigkeit fortbewegen.
- Das Seitenverhältnis  $A$  des Kanals beeinflusst die Stabilität der Strömung, wenn  $A$  klein genug ist, sodass sich die in den gegenüberliegenden Seitenschichten lokalisierten Instabilitäten gegenseitig beeinflussen können. Die kritische Reynolds-Zahl fällt dadurch ab. Wird  $A \lesssim 4\delta_S$ , können sich keine Instabilitäten mehr ausprägen und  $Re_c$  steigt.
- Im Vergleich zur Hunt-Strömung zeigt sich bei der Walker-Strömung ebenfalls für  $Re_c$  eine starke Abhängigkeit von  $c$  und  $Ha$ . Allerdings liegt für  $Ha \gg 1$  ein komplexeres Verhalten von  $Re_c$  als bei der Hunt-Strömung vor, weil der Geschwindigkeitsjet, und damit die Anfälligkeit für Instabilitäten, bei  $c \approx Ha^{-1/4}$  maximal wird. Für ein konstantes  $Ha \gg 1$  hat dies zur Folge, dass beim Vergleich zweier verschiedener  $c$  der kleinere Wandleitparameter eine niedrigere kritische Reynolds-Zahl verursachen kann, also  $Re_c(c_1) < Re_c(c_2)$  mit  $c_1 < c_2$ . Dies ist bei der Hunt-Strömung nicht möglich. Dort wächst der Geschwindigkeitsjet mit steigendem  $c$  und  $Ha$  stets an. Aufgrund der stärker ausgeprägten Jets in der Hunt-Strömung, hat diese stets kleinere kritische Reynolds-Zahlen als die Walker-Strömung mit gleichen Parametern.

Aufbauend auf der linearen Stabilitätsanalyse wurden als zweiter Untersuchungsansatz numerische Simulationen für Hunt-Strömungen mit konstantem  $c = 0.03$  durchgeführt, um die instabile MHD-Strömung auch jenseits der linearen Stabilitätsgrenze zu untersuchen. Die betrachteten Reynolds-Zahlen liegen dabei hauptsächlich unterhalb der experimentell ermittelten Stabilitätsgrenze, sodass instabile realistische Hunt-Strömungen erstmals in der „Reynolds-Zahl-Lücke“ zwischen der Stabilitätsgrenze aus der linearen Stabilitätsanalyse und der experimentell ermittelten Stabilitätsgrenze systematisch untersucht worden sind. Die Untersuchungen ergaben:

- Zwei Instabilitätsregime konnten numerisch gefunden werden. Regime 1 zeichnet sich dabei durch gleichmäßig periodische Störungen mit konstanter Amplitude in der Seitenschicht aus. Diese Störungen können den Moden I und III aus dem Kapitel zur linearen Stabilitätsanalyse zugeordnet werden. Die kritische Reynolds-Zahl dieser beiden Moden konnte durch Extrapolation der turbulenten kinetischen Energien verschiedener MHD-Strömungssimulationen bei den entsprechenden Parametern gut bestätigt werden. Ebenso stimmten kritische Wellenlänge und kritische Frequenz an der Stabilitätsgrenze in beiden Verfahren gut überein. Damit bestätigen sich numerische Simulation und lineare Stabilitätstheorie gegenseitig an der Stabilitätsgrenze.

Regime 1 tritt jenseits der linearen Stabilitätsgrenze noch für einen gewissen Bereich von  $Re$  auf, wobei  $\lambda \sim Re^{1/2}$  und  $f^* \sim Re^{-1/2}$  wenn  $Ha = const.$  ist. Die Größe dieses Bereiches variiert stark mit  $Ha$ . Die auftretenden Frequenzen steigen mit wachsender Hartmann-Zahl. Bei Hartmann-Zahlen  $Ha \sim O(10^2)$  ist dabei mit kleinen Frequenzen zu rechnen, was bei entsprechenden Messungen berücksichtigt werden muss.

Regime 2 weist partielle Jetablösungen auf, die mit der Kernströmung wechselwirken. Die maximale Jetgeschwindigkeit ist dadurch deutlich reduziert und das mittlere Geschwindigkeitsprofil des Jets in  $z$ -Richtung verbreitert. Die Wellenlängen dieser Störungen sind deutlich länger als im Regime 1, während ihre Phasengeschwindigkeit deutlich abnimmt. Zwischen hintereinander angeordneten partiellen Jetablösungen im Regime 2 findet ein Impulsaustausch statt. Aufgrund dieser Wechselwirkung stellt sich eine Gleichverteilung der Störungen und Amplituden der Jetablösungen innerhalb einer Seitenschicht ein. Für Walker-Strömungen mit endlicher Wandleitfähigkeit wurden diese partiellen Jetablösungen im Regime 2 erstmals von Kinet *et al.* (2009) gefunden. Sie konnten dabei zeigen, dass beim Übergang zum Regime 2 die turbulente kinetische Energie um mehrere Größenordnungen steigt. In dieser Arbeit konnten die partiellen Jetablösungen erstmals mittels numerischer Simulationen für eine Hunt-Strömung mit endlicher Wandleitfähigkeit nachgewiesen werden. Dabei wurde ein Anstieg von  $E_{turb}$  um eine Größenordnung beim Übergang zum Regime 2 festgestellt.

- Die experimentell ermittelte kritische Reynolds-Zahl für  $Ha = 2000$  stimmt sehr gut mit der Reynolds-Zahl überein, bei der in den numerischen Simulationen das Regime 2 erstmals für diese Hartmann-Zahl beobachtet wurde. Weitere experimentelle Daten zeigen, dass im Experiment die Strömung höchstwahrscheinlich ebenfalls im Regime 2 gewesen ist, sodass auch eine Übereinstimmung in der Art des Regimes zwischen Experiment und Simulation für diese Reynolds-Zahlen gefunden wurde.
- Der numerisch ermittelte Druckgradient über den gesamten Kanal stimmt gut mit

analytischen Ergebnissen für die laminare Strömung und experimentellen Werten überein. Obwohl die Strömung nachweislich in Regime 1 oder Regime 2 instationär ist, hat dies auf den Gesamtdruckgradienten keine Auswirkung. Allerdings lassen sich Druckschwankungen innerhalb der Seitenschicht im Regime 1 und Regime 2 finden. Aufgrund der Bernoulli-Gleichung geht ein Druckminimum mit einem Maximum der Geschwindigkeit einher. Lokal kann somit ebenfalls ein instabiles Strömungsverhalten mittels des Druckes festgestellt werden.

- Ergebnisse für  $\nabla\phi'$  auf den Kanalwänden zeigen eine prinzipielle Übereinstimmung mit experimentell ermittelten Werten (Chowdhury, 2016). Die numerischen Simulationen konnten dabei zeigen, dass Messungen von  $\partial\phi'/\partial x$  auf der Seitenwand deutlich besser zum Detektieren von Instabilitäten geeignet sind als die von  $\partial\phi'/\partial y$ . Während  $\partial/\partial y$  bereits in geringer Entfernung zu den Hartmann-Wänden nur noch sehr kleine Signale liefert, weist  $\partial\phi'/\partial x$  entlang der  $y$ -Richtung nahezu keine Änderung auf. Werte von  $\partial\phi'/\partial x$  sind deshalb entlang der Seitenwand fast überall wesentlich größer als die von  $\partial\phi'/\partial y$  und wären somit für Experimente besser zugänglich.

Regime 1 und Regime 2 können anhand unterschiedlicher Strukturen auf der Seitenwand als auch auf der Hartmann-Wand klar unterschieden werden. Außerdem nehmen die maximalen Amplituden im Regime 2 auf der Seitenwand um rund eine Größenordnung zu. Aus der Verteilung von  $\partial\phi'/\partial x$  und  $\partial\phi'/\partial y$  geht weiterhin hervor, dass sich die Störungen von der unteren bis zur oberen Hartmann-Wand erstrecken. Andernfalls müssten in  $y$ -Richtung Orte mit  $\partial\phi'/\partial x = 0$  auftreten und  $\partial\phi'/\partial y = 0$  an mehr Stellen als nur  $y = 0$  vorhanden sein. Die Störungen im Regime 1 konnten als Ting-Walker-Wirbel identifiziert werden.

Auf der Hartmann-Wand wird im Regime 2 die Ausdehnung der Instabilitäten in die Kernströmung hinein deutlich. Gleichzeitig ist für  $A = 1$  erkennbar, dass die gegenüberliegenden Seitenschichten effektiv durch die Kernströmung getrennt bleiben. Die Art der auftretenden Verteilung von  $\partial\phi'/\partial x$  und  $\partial\phi'/\partial z$  entspricht dabei derjenigen die Chowdhury (2016) auf der Hartmann-Wand messen konnte.

Da die numerischen Simulationen die komplette dreidimensionale Störungsverteilung liefern, können experimentellen Messdaten von Wandsignalen nun die entsprechenden dreidimensionalen Störungsstrukturen zugeordnet werden.

- Durch die Änderung des Aspektverhältnisses von  $A = 1$  zu  $A = 1/3$  steigt die kritische Reynolds-Zahl der betrachteten Strömung von  $Re_c(A = 1) \approx 790$  auf  $Re_c(A = 1/3) \approx 1090$ . Diese Werte liegen ca. 15% bis 20% oberhalb der entsprechenden Ergebnisse der linearen Stabilitätsanalyse. Das Stabilitätsverhalten ist damit in prinzipieller Übereinstimmung mit dem aus der linearen Stabilitätsanalyse, die zeigt, dass erst bei einer Wechselwirkung der gegenüberliegenden Seitenschichten eine Abnahme von  $Re_c$  eintritt. Obwohl für  $Ha = 1000$  eine Seitenschicht schmäler als  $1/3$  ist, zeigen die numerischen Simulationen, dass es trotzdem zu einer Wechselwirkung der Seitenschichten kommen kann, wenn die Reynolds-Zahl hinreichend groß ist. Im untersuchten Fall wird gezeigt, dass sich die Strömung bei  $Re = 12000$  und  $A = 1$  noch im Regime 1 befindet, während bei  $Re = 10000$  und  $A = 1/3$  starke Wechselwirkungen der Jets im Regime 2 zu beobachten sind. Durch die Wechselwirkung kommt es folglich zu einer weiteren Destabilisierung der Strömung. Entscheidend ist dabei nicht allein das geometrische Verhältnis von  $\delta_S$  zu  $A$ , wie es die lineare Stabilitätstheorie suggeriert, sondern zusätzlich, wie weit

die Geschwindigkeitsstörungen bei gegebener Reynolds-Zahl in die Kernströmung hineinreichen.

Bei  $A = 1$  erfolgt der Übergang von Regime 1 zu Regime 2 in beiden Seitenschichten immer nahezu zeitgleich. Bei den Untersuchungen zu  $A = 1/3$  und  $Re = 10000$  erfolgt der Übergang von Regime 1 zu Regime 2 in den Seitenschichten mit einem erheblichen Zeitversatz, dessen Folge ein unsymmetrisches mittleres Geschwindigkeitsprofil in  $z$ -Richtung ist. Erst wenn im weiteren Zeitverlauf in beiden Seitenschichten die MHD-Strömung Regime 2 erreicht, verschwindet diese Asymmetrie. Eine mögliche Begründung für dieses Verhalten könnte sein, dass beim betrachteten  $Re$  bereits im Regime 1 eine schwache Wechselwirkung zwischen den Seitenschichten existiert, die als zusätzliche Störung fungiert. Dadurch kommt es in einer der beiden Seitenschichten zu einem Übergang zu Regime 2. Durch partielle Jetablösungen wird die Wechselwirkung zwischen den Seitenschichten erheblich verstärkt. Die erste auftretende Jetablösung kann daher auch Impuls aus dem gegenüberliegenden Geschwindigkeitsjet abziehen. Dadurch würde in diesem der Übergang zu Regime 2 solange verzögert, bis es sich im ersten Geschwindigkeitsjet voll entwickelt hat.

In einer zukünftigen Arbeit ließe sich zum einen das Strömungsverhalten innerhalb des Regimes 2 genauer analysieren. Zum anderen könnte die Transition zu weiteren Strömungsregimen und deren Eigenschaften durch weitere Erhöhung der Reynolds-Zahl untersucht werden.

Weiterhin sollte untersucht werden, welche Einlaufänge eine nicht voll entwickelte MHD-Strömung braucht, bis sie voll entwickelt ist. Insbesondere für das Galinka-Experiment und für den Vergleich mit dieser Arbeit ist eine solche Untersuchung lohnenswert.

Untersuchenswert sind auch Instabilitäten, die unterhalb von  $Ha \lesssim 60$  auftreten. Denn die lineare Stabilitätsanalyse hat gezeigt, dass diese Instabilitäten nicht entlang des Magnetfeldes orientiert sind und daher eine andere räumliche Struktur aufweisen. Ein dabei betrachtetes  $c$  sollte aber im Bereich  $c \gtrsim 0.1$  liegen, da für kleinere  $c$   $Re_c \sim O(10^4)$  gilt, also  $Re_c$  sehr groß wird. Für das in dieser Arbeit verwendete numerische Verfahren ist für  $Re \gtrsim 10000$  ein sehr hoher numerischer Aufwand nötig, sodass für zukünftige Rechnungen entweder dessen Effizienz gesteigert, andere numerische Verfahren angewendet werden oder die verfügbare Rechenleistung signifikant größer werden müsste.

## 6 Symbolverzeichnis

Symbol	Bedeutung	Einheit
$A$	Seitenverhältnis	
$\mathbf{B}$	dimensionsloses externes Magnetfeld	
$B_0$	charakteristisches Magnetfeld	T
$c$	Wandleitparameter	
$c_p$	dimensionslose Phasengeschwindigkeit	
$\mathbf{E}$	dimensionsloses elektrisches Feld	
$E_{turb}$	dimensionslose turbulente kinetische Energie	
$f$	Frequenz	Hz
$\mathbf{f}$	beliebige dimensionslose Volumenkraft	
$f^*$	dimensionslose Frequenz	
$f_C$	dimensionslose kritische Frequenz	
$\mathbf{f}_L$	dimensionslose Lorentz-Kraft	
$Ha$	Hartmann-Zahl	
$\mathbf{j}$	dimensionslose elektrische Stromdichte	
$\mathbf{k}$	dimensionsloser Wellenvektor	
$k$	dimensionslose Wellenzahl	
$N$	Interaktionsparameter	
$\mathbf{n}$	Normalenvektor	
$L$	charakteristische Länge	m
$p$	dimensionsloser Druck	
$Q$	dimensionsloser Volumenstrom	
$Q_S$	dimensionsloser Volumenstrom der Seitenschicht	
$Q_C$	dimensionsloser Volumenstrom der Kernströmung	
$Q_H$	dimensionsloser Volumenstrom der Hartmann-Schicht	
$Re$	Reynolds-Zahl	
$Re_c$	kritische Reynolds-Zahl	
$Re_m$	magnetische Reynolds-Zahl	
$t$	Zeit	s
$t_W$	Wanddicke	m
$u$	dimensionslose Geschwindigkeitskomponente $x$ -Richtung	
$\bar{u}$	zeitlich gemitteltes $u$	
$\hat{u}$	räumlich gemitteltes $u$	
$u_0$	charakteristische Geschwindigkeit $x$ -Richtung	m/s
$\mathbf{v}$	dimensionsloser Geschwindigkeitsvektor	
$v$	dimensionslose Geschwindigkeitskomponente $y$ -Richtung	
$w$	dimensionslose Geschwindigkeitskomponente $z$ -Richtung	
$x, y, z$	kartesische Koordinaten	

## 6 Symbolverzeichnis

Symbol	Bedeutung	Einheit
$\gamma$	komplexe Wellenzahl	
$\Gamma$	Rand eines Gebietes	
$\delta_H$	Dicke der Hartmann-Schicht	
$\delta_S$	Dicke der Seitenschicht	
$\lambda$	dimensionslose Wellenlänge	
$\lambda_C$	dimensionslose kritische Wellenlänge	
$\mu$	magnetische Permeabilität	Vs/Am
$\nu$	kinematische Viskosität	m <sup>2</sup> /s
$\rho$	Dichte	kg/m <sup>3</sup>
$\sigma$	elektrische Leitfähigkeit Fluid	1/Ωm
$\sigma_W$	elektrische Leitfähigkeit Wand	1/Ωm
$\tau$	dimensionslose Zeit	
$\phi$	dimensionsloses elektrisches Potential	
$\bar{\phi}$	zeitlich gemittelt $\phi$	
$\Psi$	Vektorstromfunktion	
$\psi_i$	$i$ -te-Komponente $\Psi$ , $i = x, y, z$	
$\omega$	dimensionslose Wirbelstärke/Vorticity	
$\omega_i$	$i$ -te-Komponente Vorticity, $i = x, y, z$	

Größen mit ' bezeichnen Störungen der jeweiligen Größe, z.B.  $u'$ : Störungen der Geschwindigkeitskomponente in  $x$ -Richtung

# 7 Anhang

## Experimentelle Vergleichsarbeit

Im Folgenden sollen kurz der Gallium-Indium-Zinn-Kreislauf-Karlsruhe (Galinka) und die damit durchgeführte Versuchsreihe beschrieben werden, weil sie das experimentelle Pendant zur vorliegenden numerischen Arbeit darstellt. Die Versuche wurde im Zuge der Promotion von Chowdhury (2016) durchgeführt. Die erzielten Messergebnisse dienen als Vergleichsdaten für die numerischen Stabilitätsuntersuchungen.

Im Galinka-Experiment, welches im Mekka-Labor des Karlsruher Instituts für Technologie durchgeführt wurde, sind Messungen zur Untersuchung von Instabilitäten in MHD-Strömungen durchgeführt worden. Es ist das erste Experiment, bei dem die Seitenwände elektrisch isoliert und nur die Hartmann-Wände leitend sind (Chowdhury *et al.*, 2015). Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 7.1 dargestellt. Er besteht aus drei parallelen, miteinander verbundenen Kanälen, welche aus elektrisch isolierendem Kunststoff gefertigt sind. In den beiden äußeren Kanälen sind elektromagnetische Pumpen eingebaut, die die Strömung antreiben. Im mittleren Kanal befindet sich die Teststrecke. Dieser symmetrische Aufbau dient dazu, ein möglichst homogenes Geschwindigkeitsprofil am Einlass der Teststrecke zu erhalten. Dazu befindet sich dort zusätzlich ein Strömungsgleichrichter. Als Versuchsfluid wird eutektisches Gallium-Indium-Zinn verwendet, welches bei  $10.5\text{ }^\circ\text{C}$  flüssig wird, sodass Versuche bei Raumtemperatur durchgeführt werden können.

In der Teststrecke sind die obere und untere Wand jeweils mit einer dünnen Kupferfolie versehen, um die leitfähigen Hartmann-Wände zu realisieren. Als Wandleitparameter ergibt sich dadurch  $c = 0.03$ . Druck- und Potentialmessungen wurden zum einen mit-

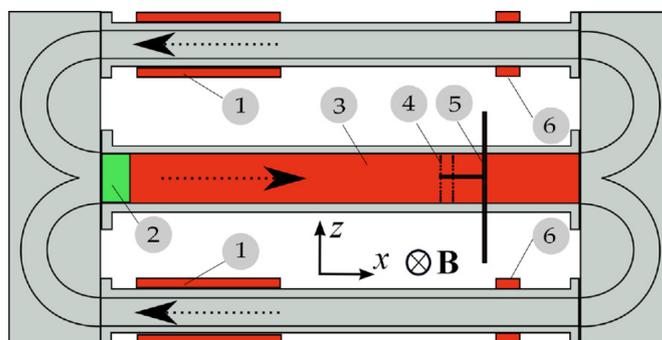


Abbildung 7.1: Aufbau Galinka-Experiment: (1) Elektromagnetische Pumpen, (2) Strömungsgleichrichter, (3) Teststrecke mit leitenden Hartmann Wänden, (4) Potentialsonden auf der unteren Hartmann Wand, (5) traversierbare Sonde und (6) Durchflussmesser (Chowdhury *et al.*, 2015)

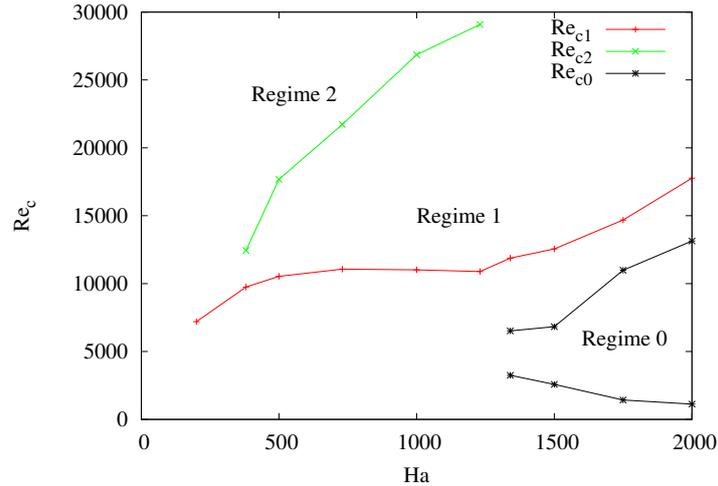


Abbildung 7.2: Experimentell ermittelte Stabilitätskarte zum Galinka-Experiment (Chowdhury, 2016)

tels Sensoren in den Kanalwänden durchgeführt, zum anderen wurde eine traversierbare Potentialsonde in den Kanal eingebaut, sodass auch Messungen in der Strömung selbst durchgeführt werden konnten. Die Sonde ist so gebaut, dass sie Potentialdifferenzen in alle drei Raumrichtungen messen kann. Damit können mit Hilfe des Ohm'schen Gesetzes die Geschwindigkeitskomponenten  $u$  und  $w$  bestimmt werden. Der gesamte Aufbau befindet sich in einem homogenen Magnetfeld, welches eine maximale Flussdichte von 2.1T erreichen kann, sodass für dieses Experiment Hartmann-Zahlen von bis zu  $Ha = 2700$  realisiert werden können. Die im Versuch maximal mögliche Reynolds-Zahl beträgt  $Re = 60 \cdot 10^3$  (Chowdhury *et al.*, 2015).

In Abbildung 7.2 ist als Teilergebnis der Arbeit die aus den Messungen erstellte Stabilitätskarte abgebildet. Es konnten drei Instabilitätsregime gefunden werden. Im Regime 1 wurden Instabilitäten gefunden, die im Bereich der Seitenschicht lokalisiert sind. Das zweite Regime zeichnet sich durch Störungsmuster aus, die in die Kernströmung hineinreichen, und damit eine deutlich größere räumliche Ausdehnung haben. Regime 0 ist besonders, weil es sowohl eine untere kritische Reynolds-Zahl aufweist, bei der die Strömung instabil wird, als auch eine obere kritische Reynolds-Zahl, bei der die Strömung anscheinend wieder in den laminaren Zustand übergeht. Weiterhin wurden u.a. Frequenzen und die räumliche Struktur bzw. Verteilung der Instabilitäten untersucht. Diese Messungen wurden für einen Kanal mit Seitenverhältnis  $A = 1$  und  $A = 1/3$  durchgeführt.

Die entsprechenden Ergebnisse der numerischen Simulationen werden ab Kapitel 4.3.2 behandelt und diskutiert.

# Lineare Stabilitätsanalyse magnetohydrodynamischer Kanalströmungen

Herleitung von  $\mathbf{h}'$  in Gleichung (3.6):

$$\begin{aligned}\mathbf{h}' &= \nabla \times \mathbf{f} \\ &= \nabla \times (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \\ &= (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{j} - (\mathbf{j} \cdot \nabla) \mathbf{B}\end{aligned}$$

$\mathbf{B}$  ist konstant, daher verschwindet der zweite Term auf der rechten Seite. Mit dem Ohm'schen Gesetz

$$\mathbf{j} = -\nabla\phi + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

folgt:

$$\begin{aligned}\mathbf{h}' &= \partial_y (-\nabla\phi' + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ &= -\partial_y \nabla\phi' + \partial_y (\mathbf{v} \times \mathbf{B})\end{aligned}$$

Da  $\mathbf{B}$  nur einen  $y$ -Anteil hat, folgt für  $h'_y = -\partial_y^2 \phi'$  und  $h'_z = -\partial_y \partial_z \phi' + \partial_y u'$ .  $\square$

Herleitung der Randbedingungen (3.13) und (3.14):

Es gilt auf dem Rand  $\mathbf{v} = 0$ , daher gilt für ein Flächenstück  $S$  mit der Flächennormalen  $\mathbf{n}$  auf dem Rand:

$$\begin{aligned}\int_s \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} &= 0 \\ &= \int_s \nabla \times \boldsymbol{\psi} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\partial s} \boldsymbol{\psi} \cdot d\mathbf{l}.\end{aligned}\tag{7.1}$$

Daraus, folgt, dass die jeweiligen Tangentialkomponenten von  $\boldsymbol{\psi}$  auf dem Rand verschwinden, also  $\psi'_y = 0$  bei  $z = \pm A$  bzw.  $\psi'_z = 0$  bei  $y = \pm 1$ .

Wegen  $\nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0$  folgt damit auf dem Rand  $\frac{\partial}{\partial z} \psi'_z = 0$  bei  $z = \pm A$  bzw.  $\frac{\partial}{\partial y} \psi'_y = 0$  bei  $y = \pm 1$ .

Für die Wirbelstärke  $\boldsymbol{\omega}$  gilt:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial s} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l} &= 0 \\ &= \int_s \nabla \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_s \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{s}.\end{aligned}\tag{7.2}$$

Daraus folgt, dass  $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0$ , sodass die Komponenten von  $\boldsymbol{\omega}$  senkrecht zur Wand verschwinden. Es ergibt sich  $\omega'_z = 0$  bei  $z = \pm A$  bzw.  $\omega'_y = 0$  bei  $y = \pm 1$ .

# Numerische Simulation magnetohydrodynamischer Kanalströmungen

## Zeitliche Entwicklung instabiler Strömungen

Um zuverlässige Aussagen über die Zustände der betrachteten MHD-Strömungen treffen zu können, ist es notwendig, dass diese im statistisch voll entwickelten Zustand sind. Dies wird anhand von Sondensignalen für Geschwindigkeiten der betrachteten MHD-Strömungen im Folgenden gezeigt. Um zu zeigen, dass die zeitliche Mittelung hinreichend lang erfolgte, ist weiterhin bei instationären Strömungen die mittlere Geschwindigkeit  $\bar{u}$  dargestellt.

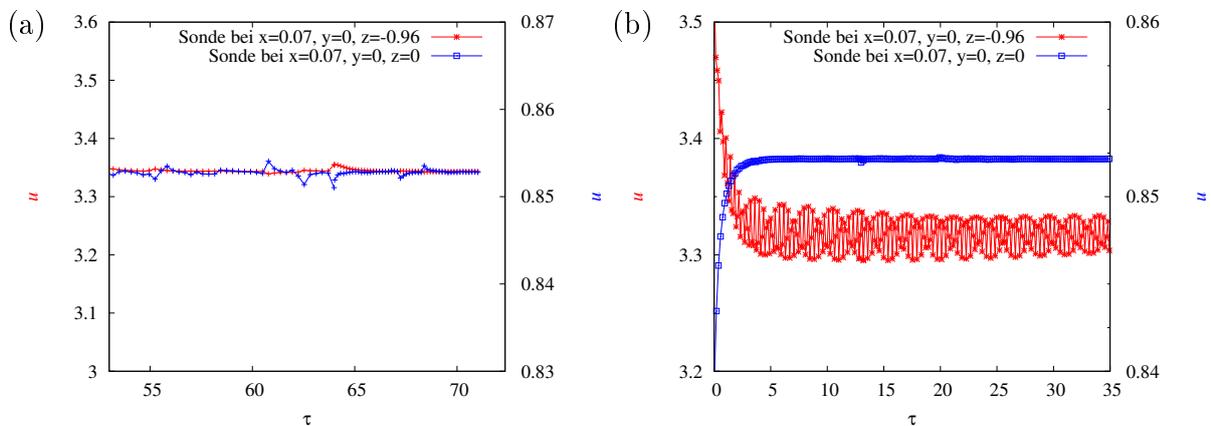


Abbildung 7.3: Sondensignale von  $u$  für  $Ha = 500$  und für (a)  $Re = 1400$  und (b)  $Re = 1750$

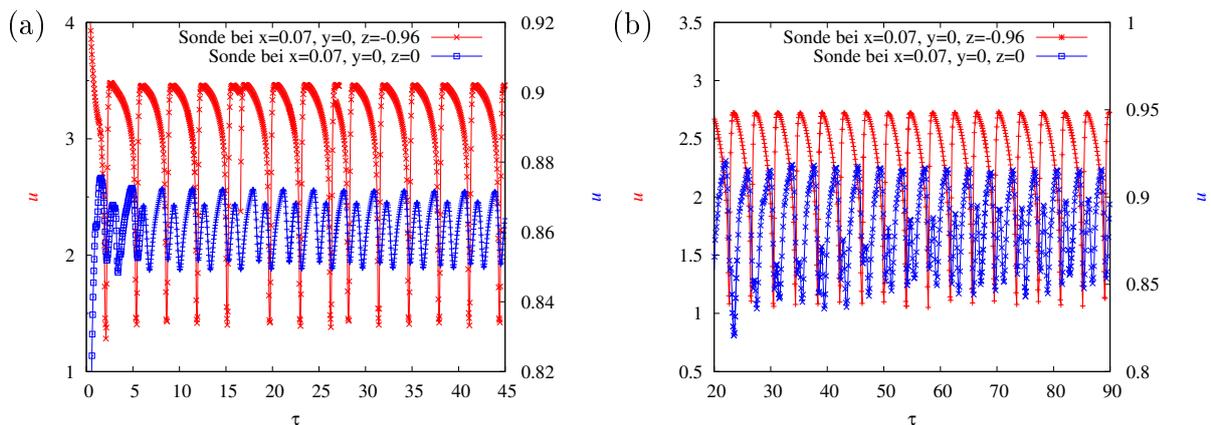


Abbildung 7.4: Sondensignale von  $u$  für  $Ha = 500$  und für (a)  $Re = 2000$  und (b)  $Re = 10540$

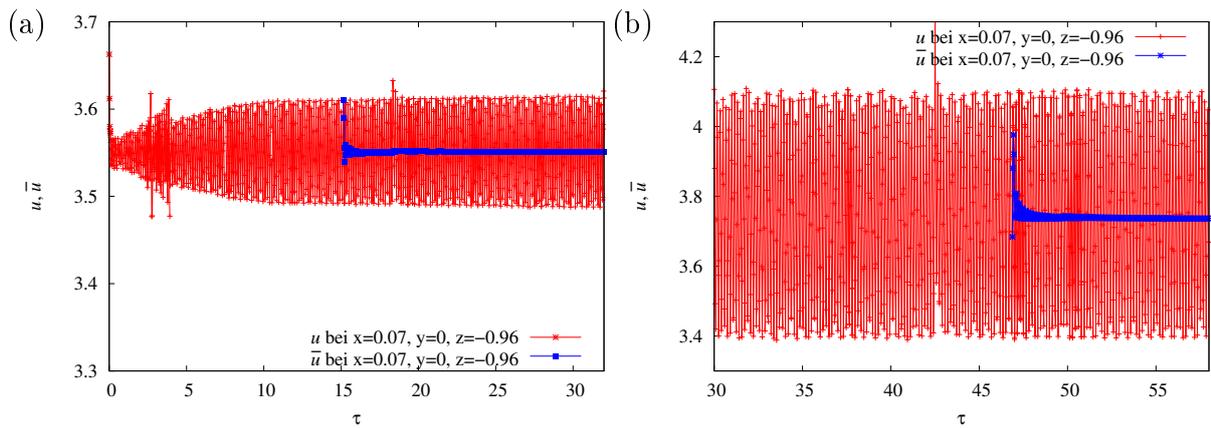


Abbildung 7.5: Sondensignale von  $u$  und  $\bar{u}$  für  $Ha = 1000$  und für (a)  $Re = 800$  und (b)  $Re = 1000$

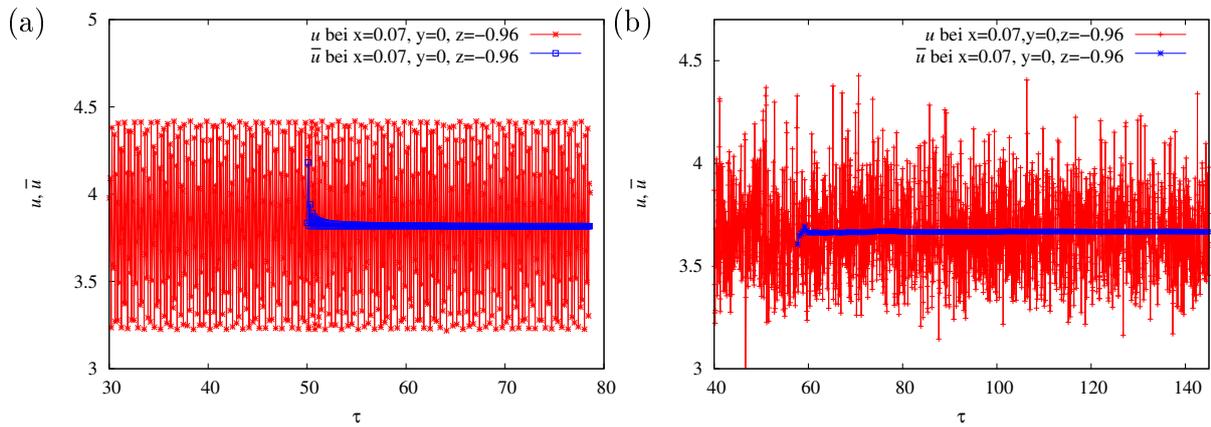


Abbildung 7.6: Sondensignale von  $u$  und  $\bar{u}$  für  $Ha = 1000$  und für (a)  $Re = 2000$  und (b)  $Re = 12000$

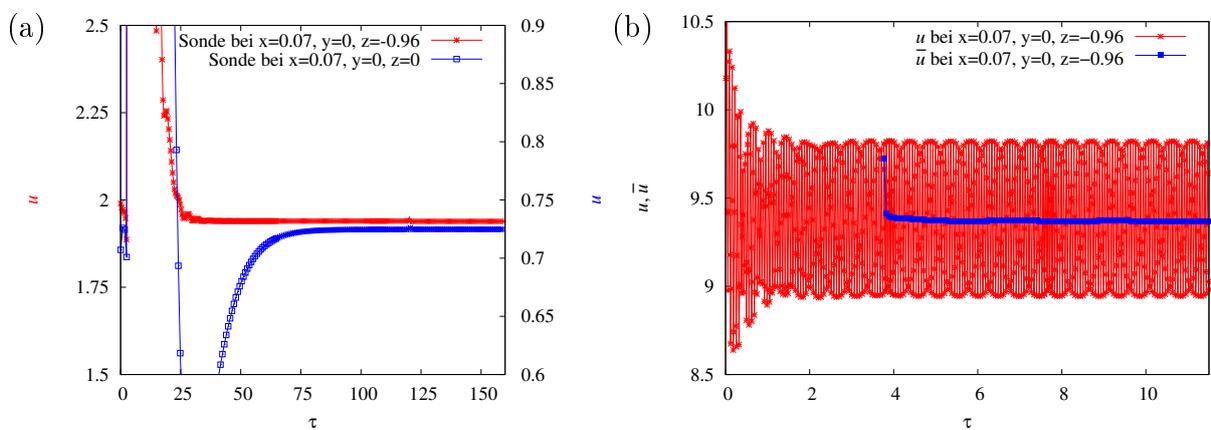


Abbildung 7.7: Sondensignale von  $u$  für  $Ha = 2000$  und für (a)  $Re = 300$  und (b)  $Re = 600$ . In (b) ist zusätzlich  $\bar{u}$  dargestellt.

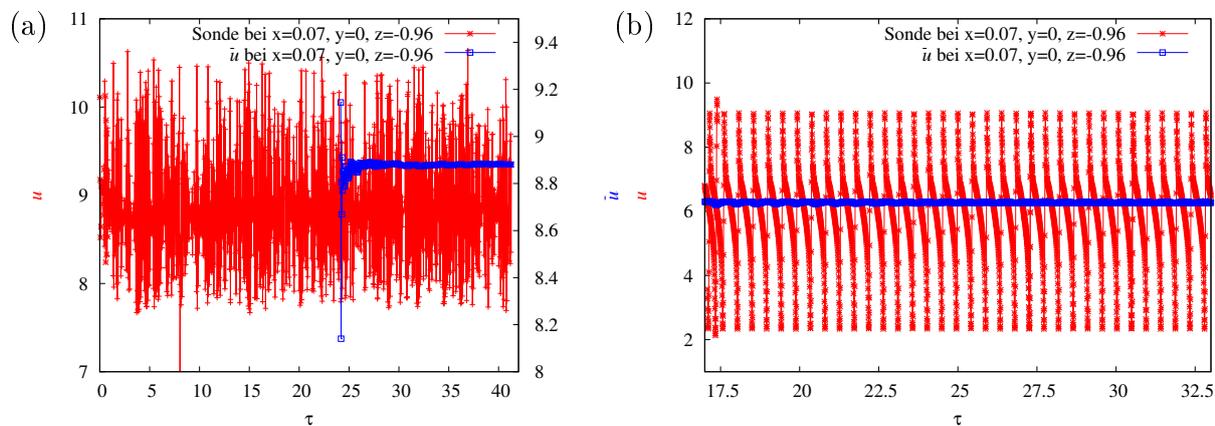


Abbildung 7.8: Sondensignale von  $u$  und  $\bar{u}$  für  $Ha = 2000$  und für (a)  $Re = 1000$  und (b)  $Re = 2000$

### Geschwindigkeits- und Potentialprofile für verschiedene $Re$ und $Ha$

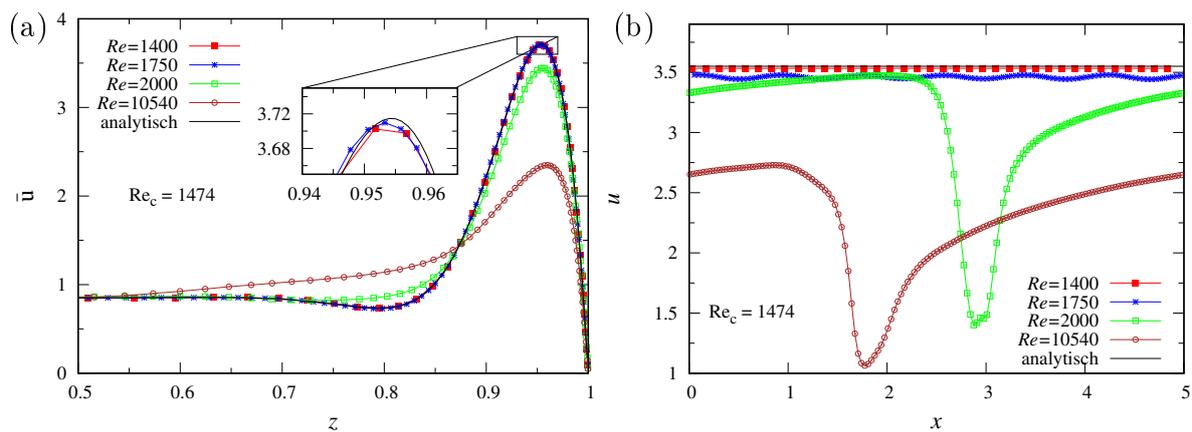


Abbildung 7.9: DNS-Ergebnisse für (a) zeitlich gemittelte axiale Geschwindigkeit  $\bar{u}(y = 0, z)$  entlang der  $z$ -Achse und (b)  $u(x, y = 0, z = 0.96)$  entlang der  $x$ -Achse für  $Ha = 500, c = 0.03$  für verschiedene Reynolds-Zahlen

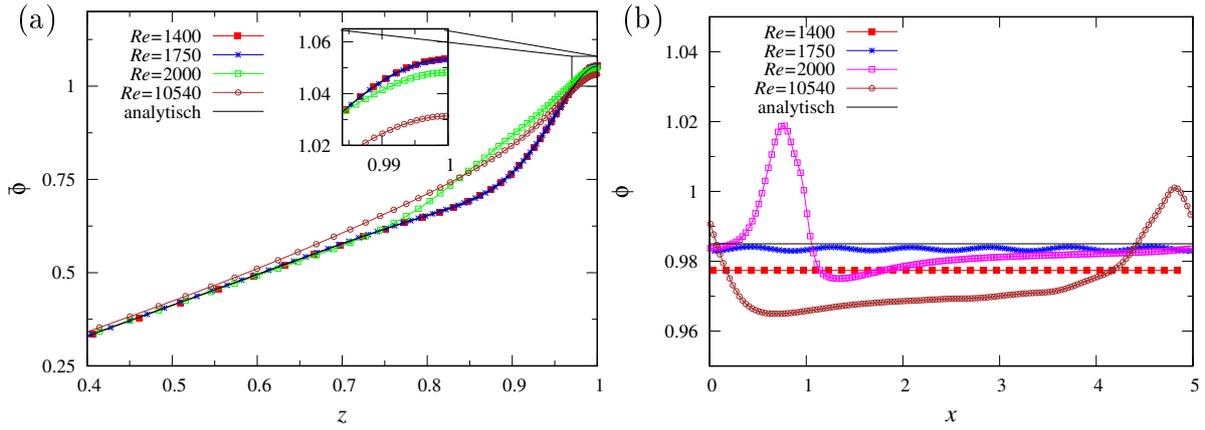


Abbildung 7.10: DNS-Ergebnisse für (a) zeitlich gemittelt  $\bar{\phi}(y = 0, z)$  entlang der  $z$ -Achse und (b)  $\phi(x, y = 0, z = 0.96)$  entlang der  $x$ -Achse für  $Ha = 500$ ,  $c = 0.03$  für verschiedene Reynolds-Zahlen

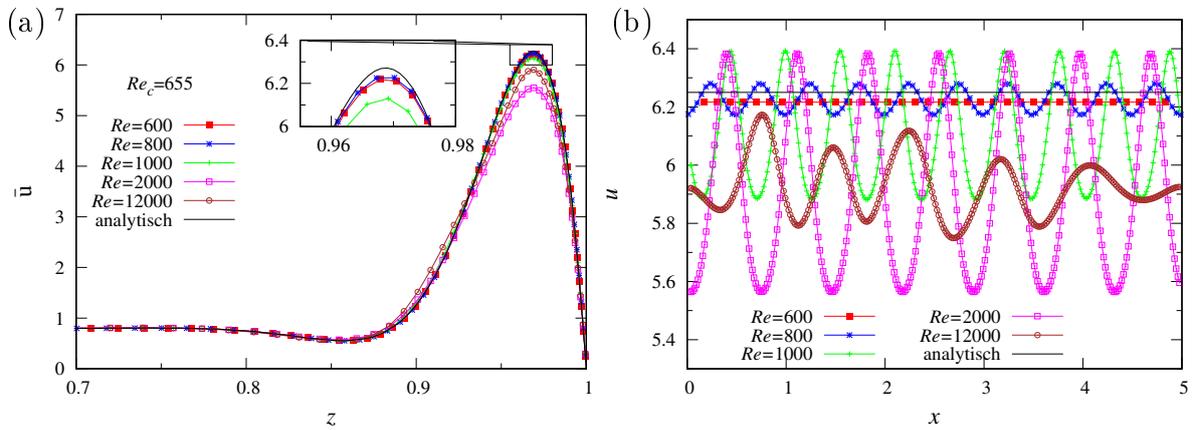


Abbildung 7.11: DNS-Ergebnisse für (a) zeitlich gemittelte axiale Geschwindigkeit  $\bar{u}(y = 0, z)$  entlang der  $z$ -Achse und (b)  $u(x, y = 0, z = 0.96)$  entlang der  $x$ -Achse für  $Ha = 1000$ ,  $c = 0.03$  für verschiedene Reynolds-Zahlen

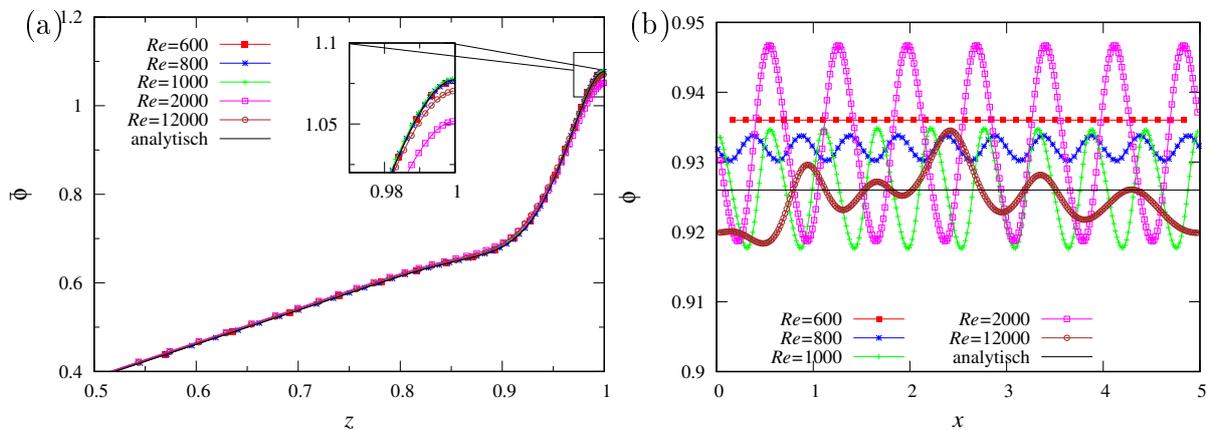


Abbildung 7.12: DNS-Ergebnisse für (a) zeitlich gemittelt  $\bar{\phi}(y = 0, z)$  entlang der  $z$ -Achse und (b)  $\phi(x, y = 0, z = 0.96)$  entlang der  $x$ -Achse für  $Ha = 1000$ ,  $c = 0.03$  für verschiedene Reynolds-Zahlen

## Räumliche Struktur der Instabilitäten

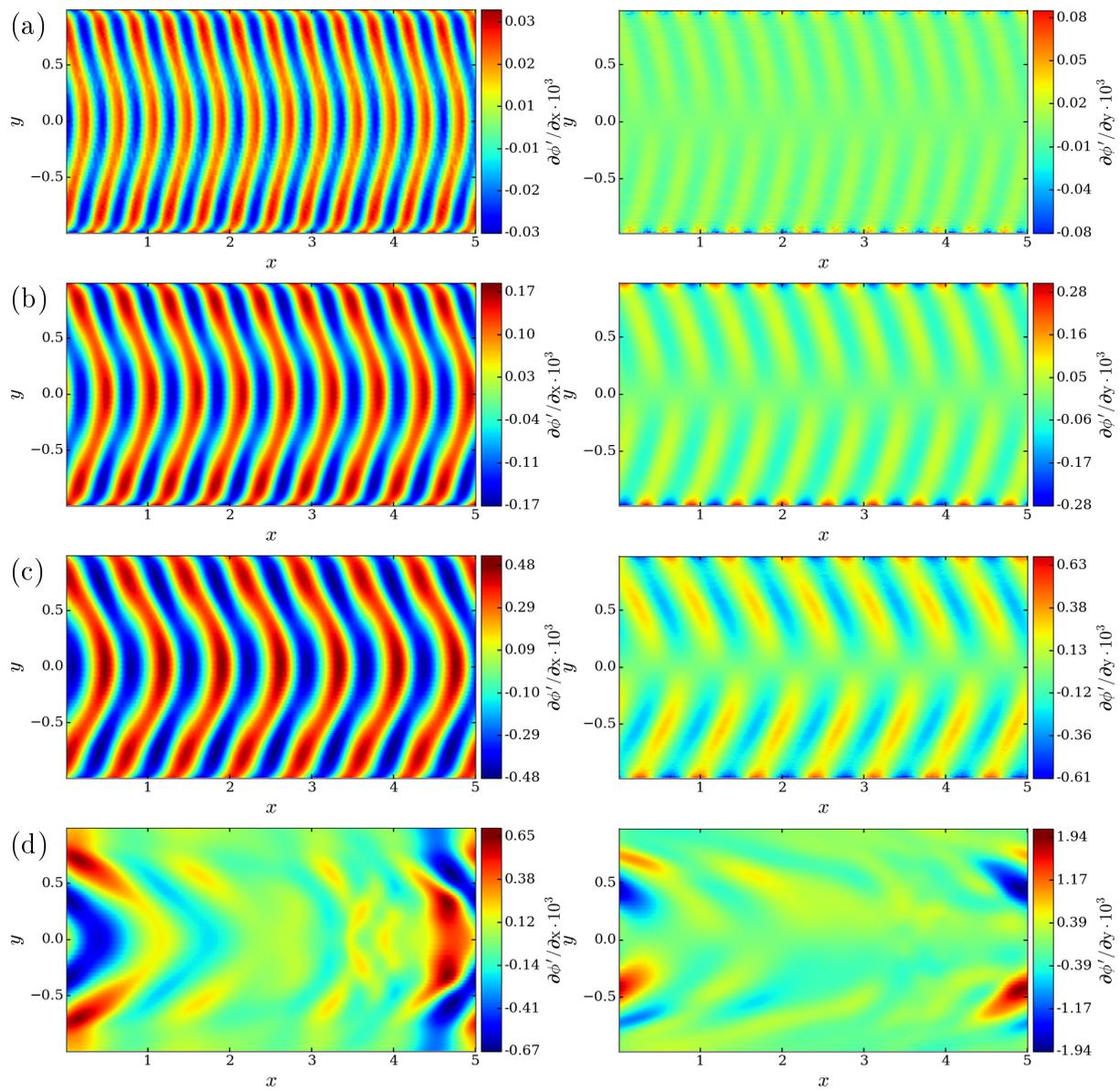


Abbildung 7.13: Seitenwandensignale für  $\partial\phi'/\partial x$  und  $\partial\phi'/\partial y$  für (a)  $Re = 800$ , (b)  $Re = 1000$ , (c)  $Re = 2000$  und (d)  $Re = 12000$  bei  $Ha = 1000$

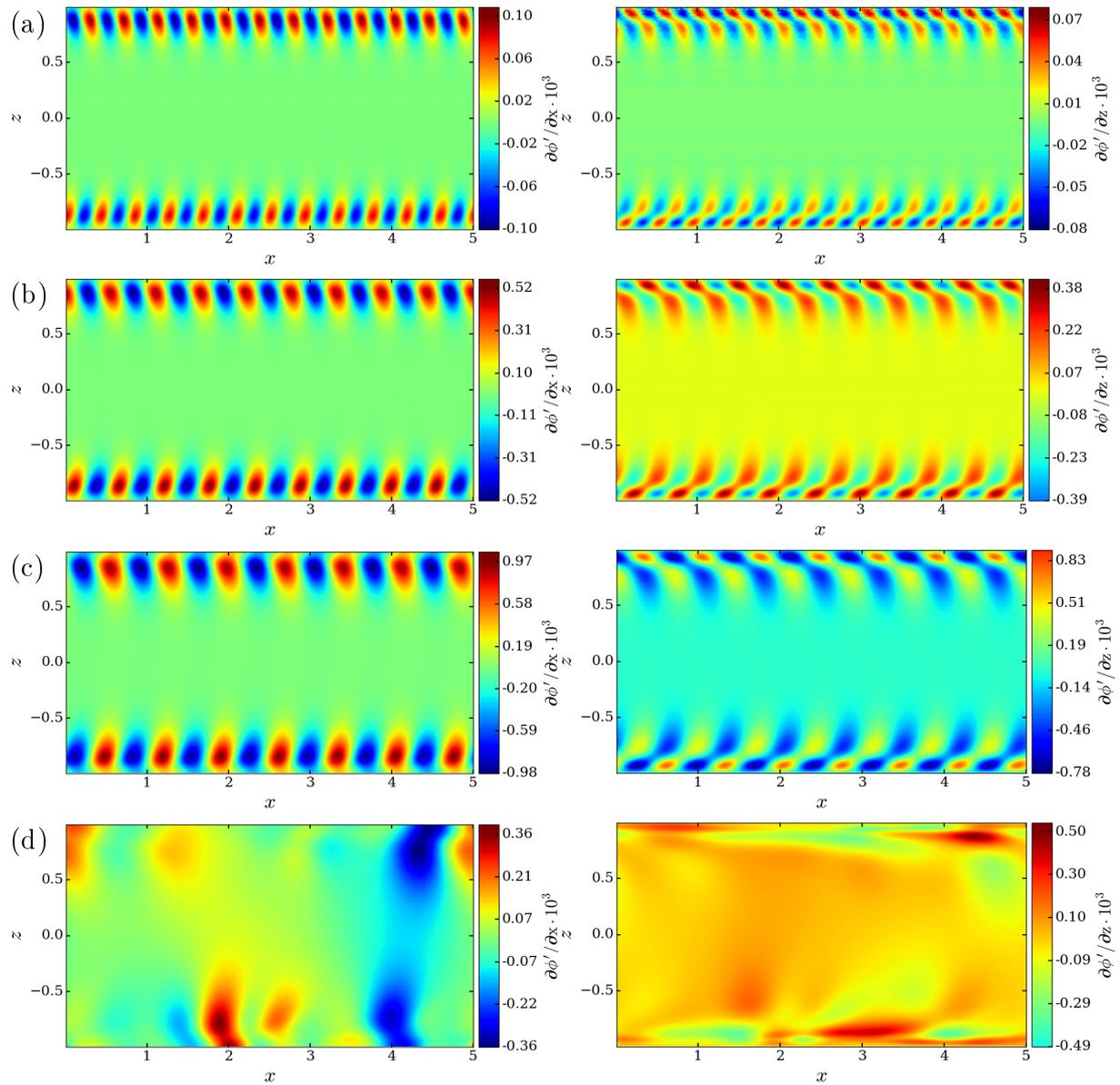


Abbildung 7.14: Hartmann-Wandsignale für  $\partial\phi'/\partial x$  und  $\partial\phi'/\partial y$  für (a)  $Re = 600$ , (b)  $Re = 1000$ , (c)  $Re = 2000$  und (d)  $Re = 12000$  bei  $Ha = 1000$

## Reynolds-Schub-Spannungen

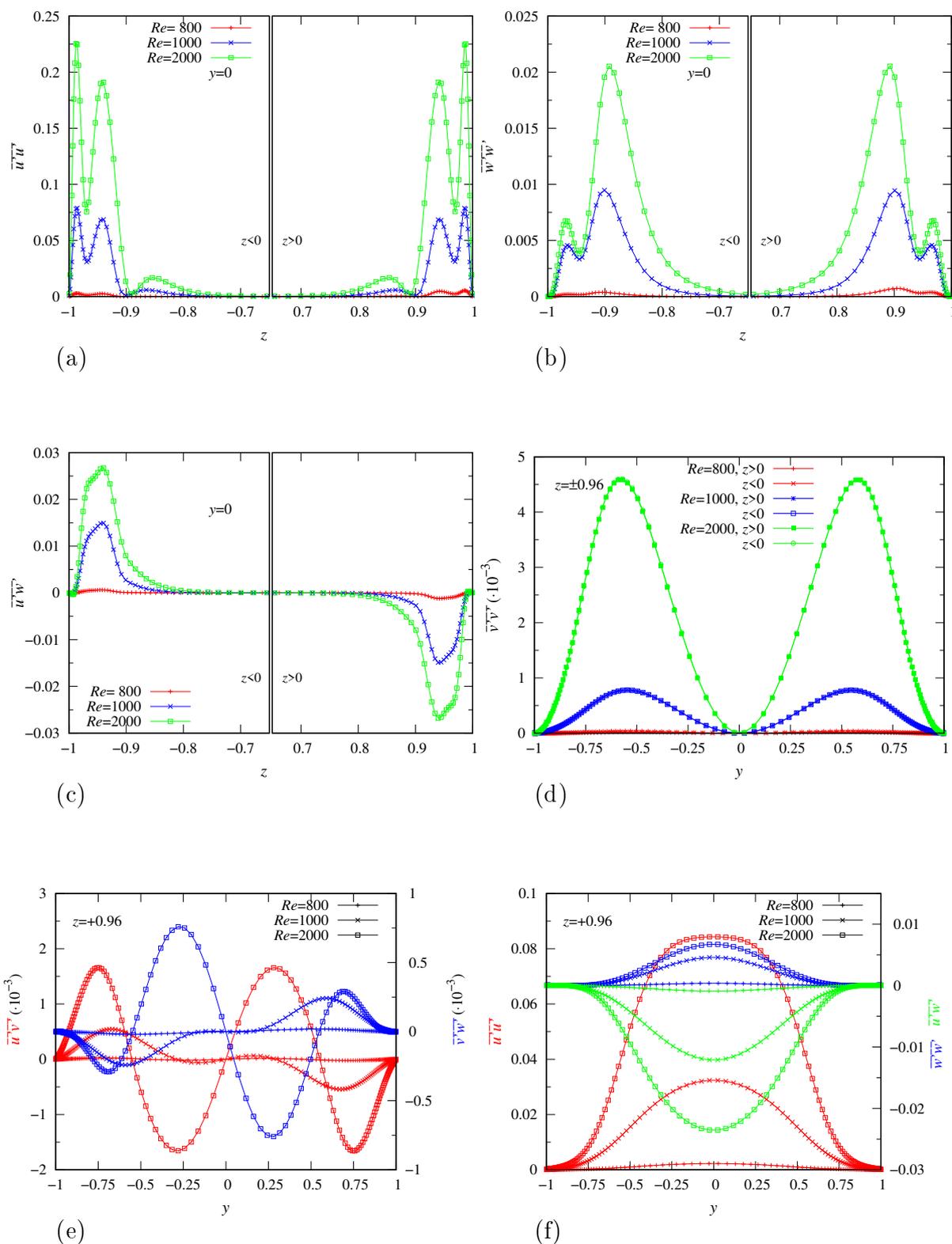


Abbildung 7.15: Verschiedene Komponenten des Reynolds'schen-Schubspannungstensors für  $Ha = 1000$  bei verschiedenen  $Re$

# Seitenverhältnis $A = 1/3$

## Zeitliche Entwicklung instabiler Strömungen

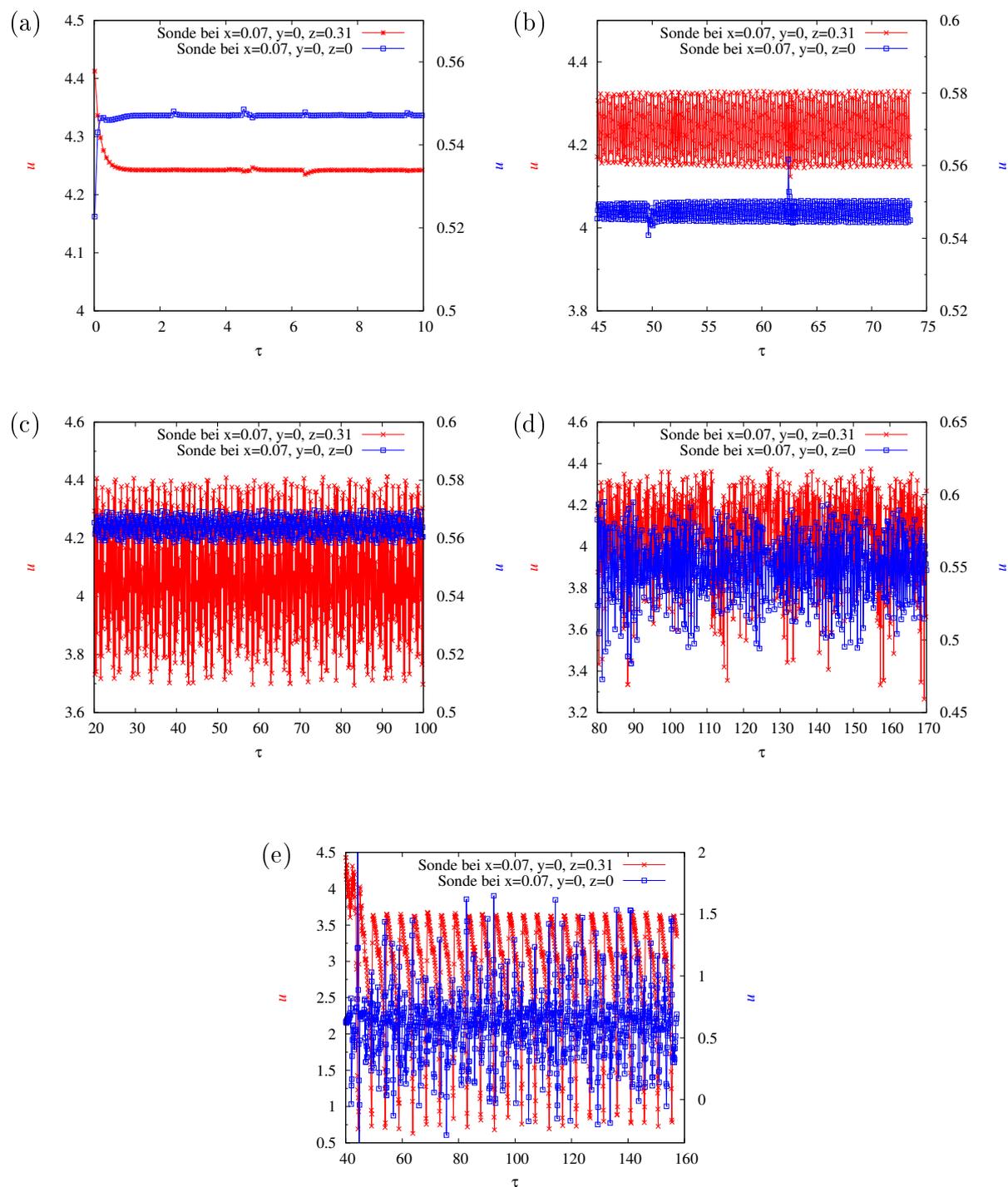
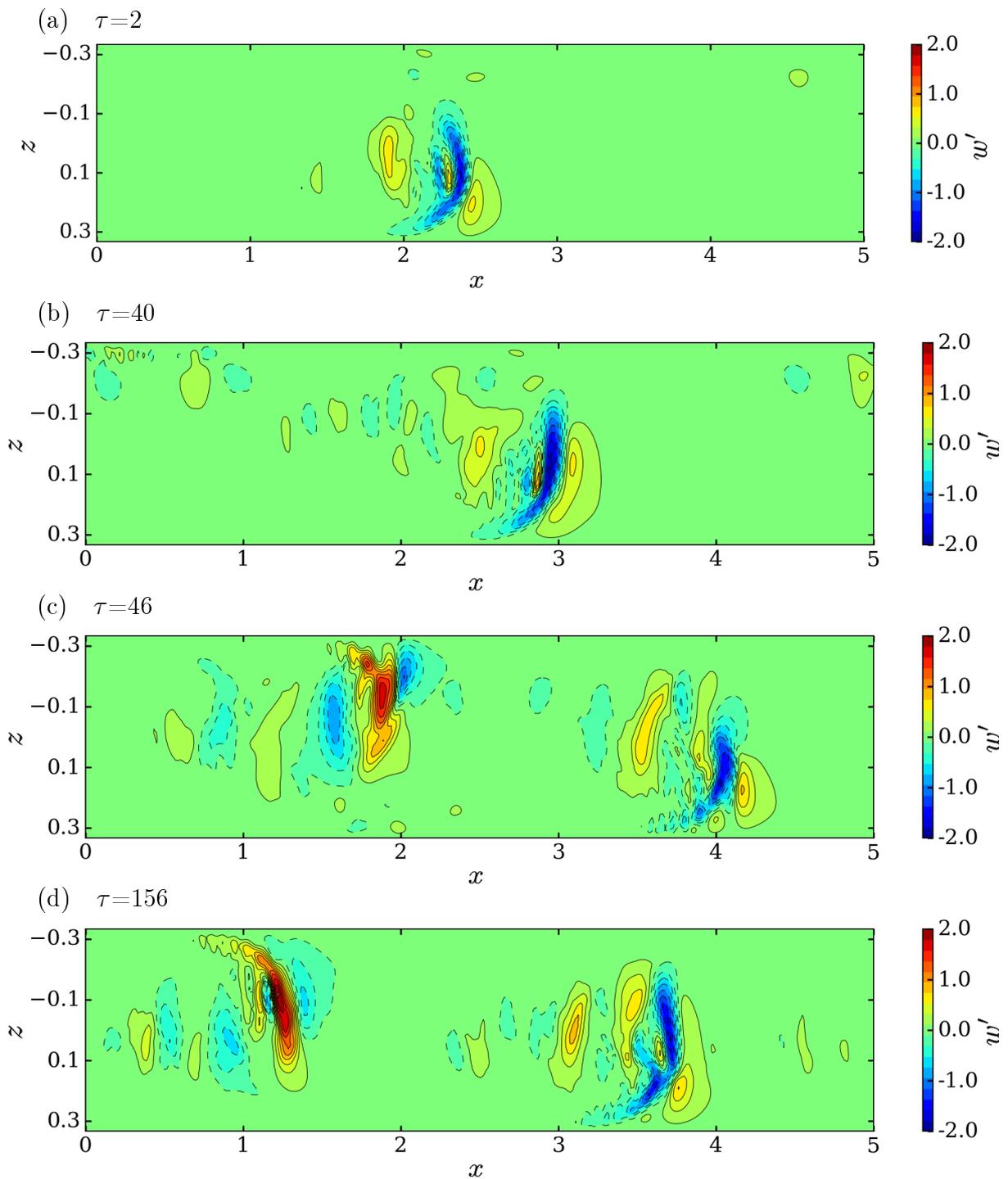


Abbildung 7.16: Sondensignale von  $u$  für  $Ha = 1000$  bei  $A = 1/3$  und für (a)  $Re = 850$ , (b)  $Re = 1100$ , (c)  $Re = 2000$ , (d)  $Re = 3500$  und (e)  $Re = 10000$

Geschwindigkeitsstörungen  $w'$ Abbildung 7.17:  $w'$  in der  $xz$ -Ebene bei  $y = 0$  für  $Ha = 1000$  und  $Re = 10000$

## Veröffentlichungen

- Priede, J., Arlt, T., and Bühler, L., "Linear stability of magnetohydrodynamic flow in a square duct with thin conducting walls", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol 788 (2016), pp. 120-146.
- T. Arlt, J. Priede, L. Bühler: The effect of finite-conductivity Hartmann walls on the linear stability of Hunt's flow, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 822 (2017), pp. 880- 891
- T. Arlt, J. Priede, L. Bühler : Influence of thin finite conducting walls on the linear stability of magnetohydrodynamic duct flow , *Magnetohydrodynamics*, Vol. 53 (2017), No. 1, pp. 3–12
- Bühler, L., Arlt, T., Boeck, T., Braiden, L., Chowdhury, V., Krasnov, D., Mistrangelo, C., Molokov, S., & Priede, J.: Magnetically induced instabilities in duct flows, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* , 228, (2017), 012003.



# Literaturverzeichnis

- Arlt, T., Priede, J., & Bühler, L.: The effect of finite-conductivity Hartmann walls on the linear stability of Hunt's flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 822, (2017), 880–891.
- Braiden, L., Krasnov, D., Molokov, S., Boeck, T., & Bühler, L.: Transition to turbulence in Hunt's flow in a moderate magnetic field, *Europhysics Letters*, 115(4), (2016), 44002.
- Branover, H.: *Magnetohydrodynamic flow in ducts*, John Wiley & Sons, New York, Toronto, 1978.
- Bühler, L.: Instabilities in quasi-two-dimensional magnetohydrodynamic flows, *Journal of Fluid Mechanics*, 326, (1996), 125–150.
- Bühler, L.: Liquid metal magnetohydrodynamics for fusion blankets, in S. Molokov, R. Moreau, & H. K. Moffatt (Eds.), *Magnetohydrodynamics Historical Evolution and Trends*, vol. 80 of *Fluid Mechanics and Its Applications*, (pp. 171–194), Dordrecht: Springer, 2007.
- Bühler, L., & Horanyi, S.: Measurements of time-dependent liquid metal magnetohydrodynamic flows in a flat rectangular duct, *Fusion Engineering and Design*, 84, (2009), 518–521.
- Bühler, L., & Mistrangelo, C.: Liquid metal MHD flows near non-insulated gaps between flow channel inserts in DCLL blankets, *IEEE Transactions on Plasma Science*, 42(3), (2014), 510–515.
- Burr, U.: *Turbulente Transportvorgänge in magnetohydrodynamischen Kanalströmungen*, Ph.D. thesis, Universität Karlsruhe, 1998, Tech. Rep. FZKA 6038, Forschungszentrum Karlsruhe.
- Burr, U., Barleon, L., & Stieglitz, R.: Turbulent heat transfer in magnetohydrodynamic rectangular duct, in *Proceedings of the 11th International Heat Transfer Conference, Kyongju, Korea, 23-28 August, 1998*.
- Chang, C., & Lundgren, S.: Duct flow in magnetohydrodynamics, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, XII, (1961), 100–114.
- Chong, M. S., Perry, A. E., & Cantwell, B. J.: A general classification of three-dimensional flow fields, *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 2(5), (1990), 765–777.
- Chowdhury, V.: *Experimentelle Untersuchungen von magnetisch induzierten Instabilitäten in MHD Kanalströmungen*, Ph.D. thesis, Karlsruher Institut für Technologie, 2016.
- Chowdhury, V., Bühler, L., Mistrangelo, C., & Brinkmann, H.-J.: Experimental study of instabilities in magnetohydrodynamic boundary layers, *Fusion Engineering and Design*, 98-99, (2015), 1751–1754.
- Davidson, P. A.: Magnetic damping of jets and vortices, *Journal of Fluid Mechanics*, 299,

- (1995), 153–186.
- Davidson, P. A.: *An Introduction to Magnetohydrodynamics*, Cambridge University Press, 2001.
- Ferziger, J., & Peric, M.: *Computational Methods for Fluid Dynamics*, vol. 3, Springer, 2002.
- foam-extend project: <http://foam-extend.org>, 2015.
- Hartmann, J.: Hg-dynamics I, Theory of the laminar flow of an electrically conductive liquid in a homogeneous magnetic field, *K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Medd.*, 15(6), (1937), 1–28.
- Hartmann, J., & Lazarus, F.: Hg-dynamics II: Experimental investigations on the flow of mercury in a homogeneous magnetic field, *K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat. Fys. Medd.*, 15(7), (1937), 1–45.
- Hua, T. Q., Walker, J. S., Picologlou, B. F., & Reed, C. B.: Three-dimensional magnetohydrodynamic flows in rectangular ducts of liquid-metal-cooled blankets, *Fusion Technology*, 14, (1988), 1389–1398.
- Hunt, J. C. R.: Magnetohydrodynamic flow in rectangular ducts, *Journal of Fluid Mechanics*, 21, (1965), 577–590.
- Jeong, J., & Hussain, F.: On the identification of a vortex, *Journal of Fluid Mechanics*, 285, (1995), 69–94.
- Kinet, M., Knaepen, B., & Molokov, S.: Instabilities and transition in magnetohydrodynamic flows in ducts with electrically conducting walls, *Physical Review Letters*, 103, (2009), 154501.
- Kolesnikov, Y. B.: Two-dimensional turbulent flow in a channel with inhomogeneous electrical conductivity, *Magnetohydrodynamics*, 8(3), (1972), 308–312.
- Krasnov, D., Boeck, T., Braiden, L., Molokov, S., & Bühler, L.: Numerical simulations of MHD flow transition in ducts with conducting hartmann walls, Tech. Rep. KIT-SR 7713, Karlsruhe Institute of Technology, 2016.
- Krasnov, D., Zikanov, O., & Boeck, T.: Numerical study of magnetohydrodynamic duct flow at high reynolds and hartmann numbers, *Journal of Fluid Mechanics*, (p. submitted).
- Lielausis, O.: Liquid-metal magnetohydrodynamics, *Atomic Energy Review*, 13(3), (1975), 527–581.
- Malang, S., Arheidt, K., Barleon, L., Borgstedt, H. U., Casal, V., Fischer, U., Link, W., Reimann, J., Rust, K., & Schmidt, G.: Self-cooled liquid-metal blanket concept, *Fusion Technology*, 14, (1988), 1343–1356.
- mhdFoam: <http://openfoamwiki.net/index.php/mhdfoam>, 2012.
- Mistrangelo, C., & Bühler, L.: Development of a numerical tool to simulate magnetohydrodynamic interactions of liquid metals with strong applied magnetic fields, *Fusion Science and Technology*, 60(2), (2011), 798–803.

- Mistrangelo, C., & Bühler, L.: Magnetoconvection in HCLL blankets, Tech. Rep. KIT-SR 7672, Karlsruhe Institute of Technology, 2014.
- Moreau, R.: *Magnetohydrodynamics*, Kluwer Academic Publisher, 1990.
- Mück, B.: Three dimensional simulation of MHD side-layer instabilities, in *Fourth International PAMIR Conference on Magnetohydrodynamic at Dawn of Third Millennium*, vol. 1, Giens, France: PAMIR, 2000, (pp. 297–302).
- Ni, M.-J., Munipalli, R., Huang, P., Morley, N. B., & Abdou, M. A.: A current density conservative scheme for incompressible MHD flows at a low magnetic Reynolds number. Part II: On an arbitrary collocated mesh, *Journal of Computational Physics*, 227(1), (2007), 205–228.
- Oertel, H.: *Prandtl - Führer durch die Strömungslehre : Grundlagen und Phänomene*, vol. 11, Vieweg, 2002.
- OpenFOAM Foundation: *OpenFOAM Programmers Guide*, OpenFOAM Foundation, 1.5 edn., 2008.
- OpenFOAM Foundation: *OpenFOAM User Guide*, OpenFOAM Foundation, 2.3.0 edn., 2014.
- Picologlou, B. F., & Reed, C. B.: Experimental investigation of 3-D MHD flows at high Hartmann number and interaction parameter, in J. Lielpetris, & R. Moreau (Eds.), *Liquid Metal Magnetohydrodynamics*, (pp. 71–77), Dordrecht: Kluwer, 1989.
- Platnieks, I. A., & Freiberg, Y. Z.: Turbulence and some problems in the stability of flows with M-shaped velocity profiles, *Magnetohydrodynamics*, 8(2), (1972), 164–168.
- Pothérat, A.: Quasi-two-dimensional perturbations in duct flows under transverse magnetic field, *Physics of Fluids*, 19(7), (2007), 074104–1 074104–12.
- Priede, J., Aleksandrova, S., & Molokov, S.: Linear stability of Hunt’s flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 649, (2010), 115–134.
- Priede, J., Aleksandrova, S., & Molokov, S.: Linear stability of magnetohydrodynamic flow in a perfectly conducting rectangular duct, *Journal of Fluid Mechanics*, 708, (2012), 111–127.
- Priede, J., Arlt, T., & Bühler, L.: Linear stability of magnetohydrodynamic flow in a square duct with thin conducting walls, *Journal of Fluid Mechanics*, 788, (2016), 120–146.
- Reed, C. B., & Picologlou, B. F.: Side wall flow instabilities in liquid metal MHD flow under blanket relevant conditions, *Fusion Technology*, 15, (1989), 705–715.
- Reed, C. B., Picologlou, B. F., Dauzvardis, P. V., & Bailey, J. L.: Techniques for measurement of velocity in liquid-metal MHD flows, *Fusion Technology*, 10, (1986), 813–821.
- Reed, C. B., Picologlou, B. F., Hua, T. Q., & Walker, J. S.: Alex results - A comparison of measurements from a round and a rectangular duct with 3-D code predictions, in *12th Symposium on Fusion Engineering, Monterey, California, October 13-16*, (pp. 1267–1270), IEEE, 1987.
- Shercliff, J. A.: Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic

- fields, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 49, (1953), 136–144.
- Smolentsev, S., Morley, N. B., Abdou, M. A., & Malang, S.: Dual-coolant lead-lithium (DCLL) blanket status and R&D needs, *Fusion Engineering and Design*, 100(0), (2015), 44–54.
- Sommeria, J., & Moreau, R.: Why, how, and when MHD turbulence becomes two-dimensional, *Journal of Fluid Mechanics*, 118, (1982), 507–518.
- Spurk, J. H., & Aksel, N.: *Strömungslehre*, Berlin Heidelberg: Springer, 2007.
- Stieglitz, R., Barleon, L., Bühler, L., & Molokov, S.: Magnetohydrodynamic flow through a right-angle bend in a strong magnetic field, *Journal of Fluid Mechanics*, 326, (1996), 91–123.
- Tatsumi, T., & Yoshimura, T.: Stability of the laminar flow in a rectangular duct, *J. Fluid Mech.*, 212, (1990), 437–449.
- Tillack, M. S., & McCarthy, K.: Flow quantity in side layers for MHD flow in conducting rectangular ducts, Tech. Rep. UCLA-IFNT-89-01, University of California, Los Angeles, 1989.
- Ting, A. L., Walker, J. S., Moon, T. J., Reed, C. B., & Picologlou, B. F.: Linear stability analysis for high-velocity boundary layers in liquid-metal magnetohydrodynamic flows, *Int. J. Engng. Sci.*, 29(8), (1991), 939–948.
- Tollmien, W.: Über die entstehung der turbulenz, *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*.
- Walker, J. S.: Magnetohydrodynamic flows in rectangular ducts with thin conducting walls, *Journal de Mécanique*, 20(1), (1981), 79–112.
- Weller, H. G., Tabor, G., Jasak, H., & Fureby, C.: A tensorial approach to computational continuum mechanics using object-oriented techniques, *Computers in Physics*, 12(6), (1998), 620–631.