

Stefan Krebs

# Intervallbeobachter für lineare parametervariante Systeme und deren Anwendung auf die Asynchronmaschine



Stefan Krebs

**Intervallbeobachter für lineare  
parametervariante Systeme und deren  
Anwendung auf die Asynchronmaschine**

Karlsruher Beiträge zur  
Regelungs- und Steuerungstechnik  
Karlsruher Institut für Technologie

Band 04

# **Intervallbeobachter für lineare parametervariante Systeme und deren Anwendung auf die Asynchronmaschine**

von  
Stefan Krebs

Dissertation, Karlsruher Institut für Technologie  
KIT-Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik

Tag der mündlichen Prüfung: 20. Juli 2018

Referenten: Prof. Dr.-Ing. Sören Hohmann, Prof. Dr.-Ing. Jan Lunze

### Impressum



Karlsruher Institut für Technologie (KIT)  
KIT Scientific Publishing  
Straße am Forum 2  
D-76131 Karlsruhe

KIT Scientific Publishing is a registered trademark  
of Karlsruhe Institute of Technology.

Reprint using the book cover is not allowed.

[www.ksp.kit.edu](http://www.ksp.kit.edu)



*This document – excluding the cover, pictures and graphs – is licensed  
under a Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International License  
(CC BY-SA 4.0): <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.en>*



*The cover page is licensed under a Creative Commons  
Attribution-No Derivatives 4.0 International License (CC BY-ND 4.0):  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/deed.en>*

Print on Demand 2019 – Gedruckt auf FSC-zertifiziertem Papier

ISSN 2511-6312

ISBN 978-3-7315-0857-1

DOI 10.5445/KSP/1000086503





# Intervallbeobachter für lineare parametervariante Systeme und deren Anwendung auf die Asynchronmaschine

Zur Erlangung des akademischen Grades eines  
DOKTOR-INGENIEURS  
von der Fakultät für  
Elektrotechnik und Informationstechnik  
des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)  
genehmigte

DISSERTATION

von  
Stefan Krebs, M.Sc.  
geb. in Herbolzheim

Tag der mündlichen Prüfung:	20. Juli 2018
Hauptreferent:	Prof. Dr.-Ing. Sören Hohmann
Korreferent:	Prof. Dr.-Ing. Jan Lunze



# Vorwort

Diese Dissertation entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme (IRS) am Karlsruher Institut für Technologie (KIT).

Mein besonderer Dank gilt dem Hauptreferenten dieser Arbeit, Herrn Prof. Dr.-Ing. Sören Hohmann, für die sehr gute Betreuung während der letzten Jahre. Die intensiven fachlichen und teils amüsanten Gespräche in unseren Regelterminen haben mir in jeder Phase der Arbeit sehr weitergeholfen und einen wertvollen Beitrag zu dieser Arbeit geliefert.

Danken möchte ich ebenfalls Herrn Prof. Dr.-Ing. Jan Lunze von der Ruhr-Universität Bochum für die Übernahme des Korreferats und das damit verbundene Interesse an meiner Arbeit.

Weiterhin richtet sich mein Dank an die Mitarbeiter der Daimler AG, die mir bei der praktischen Erprobung der Methoden am Prüfstand mit Rat und Tat zur Seite standen und mir immer wieder wertvolle praktische Hinweise gaben, allen voran Herr Dr.-Ing. Jörg Weigold.

Zum Gelingen dieser Arbeit haben zahlreiche Studierende mit ihren Abschlussarbeiten beigetragen, weswegen ich mich an dieser Stelle auch bei ihnen bedanken möchte. Besonders hervorzuheben sind dabei meine Arbeitskollegen Martin Pfeifer und Christoph Schnurr, die nicht nur mit ihren sehr guten Masterarbeiten einen Beitrag geleistet haben, sondern auch durch die kritische Durchsicht der ersten Version dieser Arbeit ihren Anteil daran haben, dass die Arbeit in der jetzigen Form vorliegt. Darüber hinaus gilt mein Dank allen Mitarbeitern des IRS für das tolle Arbeitsumfeld, das ich während meiner Jahre als Doktorand genießen durfte.

Meinen Eltern danke ich dafür, dass sie meine Neugier von Beginn an unterstützt haben und so den Weg, der mich zu dieser Arbeit brachte, ein Stück weit bereitet haben.

Dir, Eva-Maria, danke ich von ganzem Herzen für den Rückhalt, den du mir während der Höhen und Tiefen, die so eine Arbeit mit sich bringt, stets gegeben hast. Und bei dir, Aaron, der du das letzte Jahr dieser Arbeit begleiten durftest, bedanke ich mich dafür, dass du unbewusst immer wieder dabei geholfen hast, die Wichtigkeit dieses Schriftstücks richtig einzuordnen.

Bad Schönborn, im Juli 2018

*Vielleicht geht es gar nicht darum, der Beste zu sein, sondern darum, im Alltag irgendwelche positiven Kleinigkeiten zu entdecken. Ob das die Unterstützung durch geliebte Menschen ist, oder man sich erlaubt, sich in was reinzusteigern - wenigstens für einen Moment.*

John Dorian

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Stand der Wissenschaft</b>	<b>3</b>
2.1	Verfahren zur garantierten Zustandsschätzung von LPV-Systemen	3
2.1.1	Zustandsmengenbeobachter	3
2.1.2	Intervallbeobachter	6
2.2	Zustandsschätzverfahren für Asynchronmaschinen	12
2.2.1	Deterministische Zustandsschätzverfahren ohne Berücksichtigung von Unsicherheiten	12
2.2.2	Deterministische Zustandsschätzverfahren mit Berücksichtigung von Unsicherheiten	15
2.2.3	Stochastische Zustandsschätzverfahren	15
2.2.4	Bewertung	16
2.3	Forschungslücke	17
<b>3</b>	<b>Grenzverkoppelte Intervallbeobachter für LPV-Systeme</b>	<b>19</b>
3.1	Grundidee	19
3.2	Grenzverkoppelter Intervallbeobachter für LTI-Systeme unter Berücksichtigung von Ein-/Ausgangsunsicherheiten	21
3.3	Grenzverkoppelter Intervallbeobachter für LPV-Systeme unter Berücksichtigung von Ein-/Ausgangsunsicherheiten	26
3.3.1	Vollständiger Intervallbeobachter	27
3.3.2	Reduzierter Intervallbeobachter	32
3.4	Grenzverkoppelter Intervallbeobachter für LPV-Systeme unter Berücksichtigung von Eingangs-, Ausgangs- und Parameterunsicherheiten	38
3.5	Zusammenfassung	53
<b>4</b>	<b>Transformationsbasierte Intervallbeobachter für LPV-Systeme</b>	<b>55</b>
4.1	Grundidee	55
4.2	Transformationsbasierter Intervallbeobachter zur Berücksichtigung von Ein-/Ausgangsunsicherheiten	57
4.2.1	Auslegung der Transformationsmatrixdynamik durch Erzeugung eines grenzstabilen Verhaltens	57
4.2.2	Auslegung der Transformationsmatrixdynamik durch Nutzung der Systemstruktur	63

4.3	Transformationsbasierter Intervallbeobachter zur Berücksichtigung von Eingangs-, Ausgangs- und Parameterunsicherheiten . . . . .	69
4.3.1	Beobachterentwurf . . . . .	70
4.3.2	Bemerkungen zur Stabilitätsbedingung des transformationsbasierten Intervallbeobachters zur Berücksichtigung von Eingangs-, Ausgangs- und Parameterunsicherheiten . . . . .	80
4.4	Bemerkungen zur Vorgabe einer zeitinvarianten Dynamikmatrix . . . . .	81
4.5	Zusammenfassung . . . . .	83
<b>5</b>	<b>Gegenüberstellung der Intervallbeobachteransätze . . . . .</b>	<b>85</b>
5.1	Vergleich der getroffenen Annahmen . . . . .	85
5.1.1	Auflistung der getroffenen Annahmen . . . . .	85
5.1.2	Bewertender Vergleich der Annahmen . . . . .	88
5.2	Vergleich des Rechenaufwandes . . . . .	89
5.3	Zusammenfassung . . . . .	90
<b>6</b>	<b>Modellbildung . . . . .</b>	<b>91</b>
6.1	Intervall-Modellierung der Asynchronmaschine . . . . .	92
6.1.1	Abgrenzung und Wahl des Koordinatensystems . . . . .	92
6.1.2	Zustandsraummodell der Asynchronmaschine . . . . .	94
6.1.3	Definition der Modellunsicherheiten . . . . .	95
6.2	Modellierung des Wechselrichters . . . . .	96
6.2.1	Stand der Forschung der Wechselrichtermodellierung . . . . .	96
6.2.2	Abgrenzung des Systems . . . . .	99
6.2.3	Nicht-intervallarithmetisches Wechselrichtermodell . . . . .	102
6.2.4	Wechselrichter-Intervallmodell . . . . .	106
6.2.5	Parametrierung des Wechselrichter-Intervallmodells . . . . .	110
6.2.6	Simulative Ergebnisse . . . . .	115
6.2.7	Validierung . . . . .	116
6.3	Zusammenfassung . . . . .	120
<b>7</b>	<b>Garantierte Zustandsschätzung für Asynchronmaschinen . . . . .</b>	<b>123</b>
7.1	Wahl eines Intervallbeobachteransatzes . . . . .	123
7.2	Struktur des Gesamtsystems . . . . .	123
7.3	Auslegung eines transformationsbasierten Intervallbeobachters zur Berücksichtigung von Ein-/Ausgangsunsicherheiten für die Asynchronmaschine . . . . .	125
7.4	Auslegung eines transformationsbasierten Intervallbeobachters zur Berücksichtigung von Eingangs-, Ausgangs- und Parameterunsicherheiten für die Asynchronmaschine . . . . .	128
<b>8</b>	<b>Simulationen . . . . .</b>	<b>131</b>
8.1	Simulationsdesign . . . . .	131
8.2	Simulation . . . . .	132
8.3	Ergebnisse . . . . .	134
8.4	Bewertung . . . . .	139

8.4.1	Notwendige Eigenschaften	139
8.4.2	Konvergenzgeschwindigkeit	139
8.4.3	Erzielte Intervallbreiten	140
8.4.4	Vergleich der verschiedenen Konfigurationen	140
8.5	Zusammenfassung	144
<b>9</b>	<b>Messungen</b>	<b>145</b>
9.1	Experimentdesign	145
9.2	Experiment	146
9.3	Ergebnisse	147
9.4	Bewertung	151
9.4.1	Notwendige Eigenschaften	152
9.4.2	Konvergenzgeschwindigkeit	152
9.5	Zusammenfassung	153
<b>10</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>155</b>
<b>A</b>	<b>Intervallarithmetik</b>	<b>XIX</b>
<b>B</b>	<b>Ergänzende Beweise</b>	<b>XXV</b>
B.1	Beweis der Positivität eines Metzler-Systems	XXV
B.2	Transformation von Phasenspannungen zu Sternpunktspannungen	XXVI
B.3	Ergänzungen zum Beweis des vollständigen grenzverkoppelten Intervallbeobachters für LPV-Systeme zur Berücksichtigung von Eingangs-, Ausgangs- und Parameterunsicherheiten	XXVIII
B.4	Ergänzungen zum Beweis des transformationsbasierten Intervallbeobachters zur Berücksichtigung von Eingangs-, Ausgangs- und Parameterunsicherheiten	XXXVIII
<b>C</b>	<b>Müllers Theorem</b>	<b>XLI</b>
<b>D</b>	<b>Stabilitätsdefinitionen</b>	<b>XLIII</b>
<b>E</b>	<b>Maschinenmodellierung</b>	<b>XLV</b>
E.1	Wahl des Koordinatensystems	XLV
E.2	Herleitung der Maschinengleichungen	XLVI
E.3	Datenblattangaben der Prüfstands-Asynchronmaschine	XLVIII
<b>F</b>	<b>Ergänzende Kennlinien des Wechselrichter-Intervallmodells</b>	<b>XLIX</b>
F.1	Kennlinien der Vorwärtsspannung	XLIX
F.2	Kennlinien der äquivalenten Einschaltzeit	LII
<b>G</b>	<b>Ergänzende Ergebnisse der Intervallschätzung für die Asynchronmaschine</b>	<b>LV</b>
G.1	Simulationen	LV
G.2	Messungen	LXVIII
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>LXXI</b>



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Grundprinzip der ZMB (ohne Darstellung der Eingangsmenge) . . . . .	4
2.2	Schematische Abbildung des Ergebnisses eines Intervallbeobachters . . . . .	8
2.3	Luenberger-Beobachter zur Zustandsschätzung einer ASM . . . . .	14
3.1	Erzeugung eines dynamischen Systems zur Abschätzung einer Obergrenze basierend auf Müllers Theorem . . . . .	20
3.2	Beispiel 3.1: Ergebnis der Intervallschätzung des grenzverkoppelten Intervallbeobachters für LTI-Systeme mit Ein-/Ausgangsunsicherheiten . . . . .	25
3.3	Beispiel 3.2: Ergebnis der Intervallschätzung des grenzverkoppelten Intervallbeobachters für LPV-Systeme mit Ein-/Ausgangsunsicherheiten . . . . .	31
3.4	Beispiel 3.3: Ergebnis der Intervallschätzung des reduzierten grenzverkoppelten Intervallbeobachters für LPV-Systeme mit Ein-/Ausgangsunsicherheiten . . . . .	37
3.5	Beispiel 3.4: Eingangsgröße zur Simulation des grenzverkoppelten Intervallbeobachters für LPV-Systeme mit Eingangs-, Ausgangs- und Parameterunsicherheiten . . . . .	52
3.6	Beispiel 3.4: Ergebnis der Intervallschätzung des grenzverkoppelten Intervallbeobachters für LPV-Systeme mit Eingangs-, Ausgangs- und Parameterunsicherheiten . . . . .	52
4.1	Beispiel 4.1: Ergebnis der Intervallschätzung des transformationsbasierten Intervallbeobachters mit grenzstabiler Transformationsmatrixdynamik für LPV-Systeme mit Ein-/Ausgangsunsicherheiten . . . . .	62
4.2	Beispiel 4.1: Zeitverläufe von $w_{23}(t)$ und $w_{41}(t)$ für $\kappa(t) = \kappa_1(t)$ bei der grenzstabilen Auslegung der Transformationsmatrixdynamik . . . . .	62
4.3	Beispiel 4.1: Zeitverläufe von $w_{23}(t)$ und $w_{41}(t)$ für $\kappa(t) = \kappa_2(t)$ bei der grenzstabilen Auslegung der Transformationsmatrixdynamik . . . . .	62
4.4	Beispiel 4.2: Ergebnis der Intervallschätzung des transformationsbasierten Intervallbeobachters mit stabiler Transformationsmatrixdynamik für LPV-Systeme mit Ein-/Ausgangsunsicherheiten . . . . .	68
4.5	Beispiel 4.2: Zeitverläufe von $w_{23}(t)$ und $w_{41}(t)$ bei der stabilen Auslegung der Transformationsmatrixdynamik . . . . .	69
4.6	Beispiel 4.3: Verlauf von $-2 \cdot \ \mathbf{P}(t) \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \cdot \mathbf{W}(t)\ _2$ für das gewählte Szenario des transformationsbasierten Intervallbeobachters für LPV-Systeme mit Eingangs-, Ausgangs- und Parameterunsicherheiten . . . . .	79

4.7	Beispiel 4.3: Ergebnis der Intervallschätzung des transformationsbasierten Intervallbeobachters mit stabiler Transformationsmatrixdynamik für LPV-Systeme mit Eingangs-, Ausgangs- und Parameterunsicherheiten . . . . .	80
6.1	Vereinfachte Struktur des Regelsystems der ASM . . . . .	91
6.2	Koordinatensysteme zur Beschreibung des Maschinenverhaltens . . . . .	93
6.3	Überabschätzung der tatsächlichen Menge im $\alpha$ - $\beta$ -Koordinatensystem durch einen Intervallvektor . . . . .	94
6.4	Topologie des zu modellierenden Wechselrichters . . . . .	97
6.5	Struktur des betrachteten Gesamtsystems bei der Wechselrichtermodellierung ohne eingezeichnete Sensorik . . . . .	100
6.6	Skizze der Wechselrichterausgangsspannung einer Phase während einer Taktperiode $T_{pulse}$ bei nichtnegativem Phasenstrom . . . . .	102
6.7	Skizze der Wechselrichterausgangsspannung einer Phase während einer Taktperiode $T_{pulse}$ bei negativem Phasenstrom . . . . .	102
6.8	Struktur des Wechselrichtermodells . . . . .	103
6.9	Beispiel einer ICC und einer einschließenden Funktion der ICC . . . . .	109
6.10	Skizze des Messaufbaus . . . . .	111
6.11	Identifizierte Vorwärtsspannung der unteren Diode in Phase 1 . . . . .	112
6.12	Identifizierte Vorwärtsspannung des oberen Transistors in Phase 3 . . . . .	113
6.13	Identifizierte äquivalente Einschaltzeit der unteren Diode in Phase 1 . . . . .	114
6.14	Identifizierte äquivalente Einschaltzeit des oberen Transistors in Phase 3 . . . . .	114
6.15	Auswirkungen von Parameter- und Messunsicherheiten auf die Ausgangsspannungsintervallbreite . . . . .	116
6.16	Ergebnisse bei der Validierung von intervallarithmetischen Ansätzen . . . . .	117
6.17	Validierung des Wechselrichter-Intervallmodells anhand von Messungen der Phase 1 . . . . .	118
6.18	Hilfskurven zur Validierung des Wechselrichter-Intervallmodells . . . . .	119
6.19	Intervallbreite der Ausgangsspannung des Wechselrichter-Intervallmodells . . . . .	120
6.20	Statorstrommesswert der ersten Phase . . . . .	120
7.1	Struktur des Gesamtsystems zur garantierten Zustandsschätzung einer ASM (ohne Regelung, mit Intervallbeobachter) . . . . .	124
8.1	Drehmomentprofil (Simulation) . . . . .	132
8.2	Winkelgeschwindigkeitsprofil (Simulation) . . . . .	133
8.3	Simulation (Konfiguration 1): Zeitlicher Verlauf von $i_{s,\alpha}(t)$ für das gesamte Szenario . . . . .	135
8.4	Simulation (Konfiguration 1): Zeitlicher Verlauf von $\bar{e}_{s,\alpha}(t)$ und $e_{s,\alpha}(t)$ für das gesamte Szenario . . . . .	136
8.5	Simulation (Konfiguration 1): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von $i_{s,\alpha}(t)$ . . . . .	136
8.6	Simulation (Konfiguration 1): Zeitlicher Verlauf von $i_{\mu,\alpha}(t)$ für das gesamte Szenario . . . . .	136

8.7	Simulation (Konfiguration 1): Zeitlicher Verlauf von $\bar{e}_{\mu,\alpha}(t)$ und $\underline{e}_{\mu,\alpha}(t)$ für das gesamte Szenario . . . . .	137
8.8	Simulation (Konfiguration 1): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von $i_{\mu,\alpha}(t)$ . . . . .	137
8.9	Simulation: Anstieg der relativen Intervallbreite bei Erzeugung des Statorspannungsraumzeigerintervalls durch das Wechselrichter-Intervallmodell verglichen mit einer einprozentigen Messunsicherheit . . . . .	141
8.10	Simulation: Anstieg der relativen Intervallbreite bei Berücksichtigung einer einprozentigen Unsicherheit des Rotorwiderstands . . . . .	143
9.1	Prüfstand mit ASM, PMSM und Echtzeitsystem . . . . .	145
9.2	Drehmomentprofil (Messung) . . . . .	147
9.3	Winkelgeschwindigkeitsprofil (Messung) . . . . .	147
9.4	Experiment: Zeitlicher Verlauf des Intervallmittelwertes der aus der Statorstrommessung bestimmten Größe $[i_{s,\alpha}(t)]$ für das gesamte Szenario . . . . .	149
9.5	Experiment: Zeitlicher Verlauf der Intervallbreite der Schätzung $\bar{i}_{s,\alpha}(t) - \underline{i}_{s,\alpha}(t)$ . . . . .	149
9.6	Experiment: Einschwingvorgang der Intervallschätzung von $i_{s,\alpha}(t)$ . . . . .	149
9.7	Experiment: Zeitlicher Verlauf des Intervallmittelwertes der aus der Magnetisierungsstromintervallschätzung bestimmten Größe $[i_{\mu,\alpha}(t)]$ für das gesamte Szenario . . . . .	150
9.8	Experiment: Zeitlicher Verlauf der Intervallbreite der Schätzung $\bar{i}_{\mu,\alpha}(t) - \underline{i}_{\mu,\alpha}(t)$ . . . . .	150
9.9	Experiment: Einschwingvorgang der Intervallschätzung von $i_{\mu,\alpha}(t)$ . . . . .	150
9.10	Experiment: Zeitlicher Verlauf der Intervallschätzung der Validierungsfunktion $f_{val}$ für $i_{s,\alpha}$ für das gesamte Szenario . . . . .	151
9.11	Experiment: Zeitlicher Verlauf der Intervallschätzung der Validierungsfunktion $f_{val}$ für $i_{s,\beta}$ für das gesamte Szenario . . . . .	151
B.1	Definition der Spannungen an der Last . . . . .	XXVI
E.1	Projektion eines Intervallvektors in das $\alpha$ - $\beta$ -Koordinatensystem durch die Clarke-Transformation . . . . .	XLVI
F.1	Identifizierte Vorwärtsspannung der oberen Diode in Phase 1 . . . . .	XLIX
F.2	Identifizierte Vorwärtsspannung des unteren Transistors in Phase 1 . . . . .	XLIX
F.3	Identifizierte Vorwärtsspannung des oberen Transistors in Phase 1 . . . . .	L
F.4	Identifizierte Vorwärtsspannung der unteren Diode in Phase 2 . . . . .	L
F.5	Identifizierte Vorwärtsspannung der oberen Diode in Phase 2 . . . . .	L
F.6	Identifizierte Vorwärtsspannung des unteren Transistors in Phase 2 . . . . .	L
F.7	Identifizierte Vorwärtsspannung des oberen Transistors in Phase 2 . . . . .	LI
F.8	Identifizierte Vorwärtsspannung der unteren Diode in Phase 3 . . . . .	LI
F.9	Identifizierte Vorwärtsspannung der oberen Diode in Phase 3 . . . . .	LI
F.10	Identifizierte Vorwärtsspannung des unteren Transistors in Phase 3 . . . . .	LI
F.11	Identifizierte äquivalente Einschaltzeit der oberen Diode in Phase 1 . . . . .	LII

F.12	Identifizierte äquivalente Einschaltzeit des unteren Transistors in Phase 1	LII
F.13	Identifizierte äquivalente Einschaltzeit des oberen Transistors in Phase 1	LII
F.14	Identifizierte äquivalente Einschaltzeit der unteren Diode in Phase 2	LIII
F.15	Identifizierte äquivalente Einschaltzeit der oberen Diode in Phase 2	LIII
F.16	Identifizierte äquivalente Einschaltzeit des unteren Transistors in Phase 2	LIII
F.17	Identifizierte äquivalente Einschaltzeit des oberen Transistors in Phase 2	LIII
F.18	Identifizierte äquivalente Einschaltzeit der unteren Diode in Phase 3	LIV
F.19	Identifizierte äquivalente Einschaltzeit der oberen Diode in Phase 3	LIV
F.20	Identifizierte äquivalente Einschaltzeit des unteren Transistors in Phase 3	LIV
G.1	Simulation (Konfiguration 1): Zeitlicher Verlauf von $i_{s,\beta}(t)$ für das gesamte Szenario	LV
G.2	Simulation (Konfiguration 1): Zeitlicher Verlauf von $\bar{e}_{s,\beta}(t)$ und $\underline{e}_{s,\beta}(t)$ für das gesamte Szenario	LVI
G.3	Simulation (Konfiguration 1): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von $i_{s,\beta}(t)$	LVI
G.4	Simulation (Konfiguration 1): Zeitlicher Verlauf von $i_{\mu,\beta}(t)$ für das gesamte Szenario	LVI
G.5	Simulation (Konfiguration 1): Zeitlicher Verlauf von $\bar{e}_{\mu,\beta}(t)$ und $\underline{e}_{\mu,\beta}(t)$ für das gesamte Szenario	LVII
G.6	Simulation (Konfiguration 1): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von $i_{\mu,\beta}(t)$	LVII
G.7	Simulation (Konfiguration 2): Zeitlicher Verlauf von $\bar{e}_{s,\alpha}(t)$ und $\underline{e}_{s,\alpha}(t)$ für das gesamte Szenario	LVIII
G.8	Simulation (Konfiguration 2): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von $i_{s,\alpha}(t)$	LVIII
G.9	Simulation (Konfiguration 2): Zeitlicher Verlauf von $\bar{e}_{s,\beta}(t)$ und $\underline{e}_{s,\beta}(t)$ für das gesamte Szenario	LVIII
G.10	Simulation (Konfiguration 2): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von $i_{s,\beta}(t)$	LIX
G.11	Simulation (Konfiguration 2): Zeitlicher Verlauf von $\bar{e}_{\mu,\alpha}(t)$ und $\underline{e}_{\mu,\alpha}(t)$ für das gesamte Szenario	LIX
G.12	Simulation (Konfiguration 2): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von $i_{\mu,\alpha}(t)$	LIX
G.13	Simulation (Konfiguration 2): Zeitlicher Verlauf von $\bar{e}_{\mu,\beta}(t)$ und $\underline{e}_{\mu,\beta}(t)$ für das gesamte Szenario	LX
G.14	Simulation (Konfiguration 2): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von $i_{\mu,\beta}(t)$	LX
G.15	Simulation (Konfiguration 3): Zeitlicher Verlauf von $\bar{e}_{s,\alpha}(t)$ und $\underline{e}_{s,\alpha}(t)$ für das gesamte Szenario	LXI

G.16 Simulation (Konfiguration 3): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von $i_{s,\alpha}(t)$ . . . . .	LXI
G.17 Simulation (Konfiguration 3): Zeitlicher Verlauf von $\bar{e}_{s,\beta}(t)$ und $e_{s,\beta}(t)$ für das gesamte Szenario . . . . .	LXI
G.18 Simulation (Konfiguration 3): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von $i_{s,\beta}(t)$ . . . . .	LXII
G.19 Simulation (Konfiguration 3): Zeitlicher Verlauf von $\bar{e}_{\mu,\alpha}(t)$ und $e_{\mu,\alpha}(t)$ für das gesamte Szenario . . . . .	LXII
G.20 Simulation (Konfiguration 3): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von $i_{\mu,\alpha}(t)$ . . . . .	LXII
G.21 Simulation (Konfiguration 3): Zeitlicher Verlauf von $\bar{e}_{\mu,\beta}(t)$ und $e_{\mu,\beta}(t)$ für das gesamte Szenario . . . . .	LXIII
G.22 Simulation (Konfiguration 3): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von $i_{\mu,\beta}(t)$ . . . . .	LXIII
G.23 Simulation (Konfiguration 4): Zeitlicher Verlauf von $\bar{e}_{s,\alpha}(t)$ und $e_{s,\alpha}(t)$ für das gesamte Szenario . . . . .	LXIV
G.24 Simulation (Konfiguration 4): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von $i_{s,\alpha}(t)$ . . . . .	LXIV
G.25 Simulation (Konfiguration 4): Zeitlicher Verlauf von $\bar{e}_{s,\beta}(t)$ und $e_{s,\beta}(t)$ für das gesamte Szenario . . . . .	LXIV
G.26 Simulation (Konfiguration 4): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von $i_{s,\beta}(t)$ . . . . .	LXV
G.27 Simulation (Konfiguration 4): Zeitlicher Verlauf von $\bar{e}_{\mu,\alpha}(t)$ und $e_{\mu,\alpha}(t)$ für das gesamte Szenario . . . . .	LXV
G.28 Simulation (Konfiguration 4): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von $i_{\mu,\alpha}(t)$ . . . . .	LXV
G.29 Simulation (Konfiguration 4): Zeitlicher Verlauf von $\bar{e}_{\mu,\beta}(t)$ und $e_{\mu,\beta}(t)$ für das gesamte Szenario . . . . .	LXVI
G.30 Simulation (Konfiguration 4): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von $i_{\mu,\beta}(t)$ . . . . .	LXVI
G.31 Experiment: Zeitlicher Verlauf des Intervallmittelwertes der aus der Statorstrommessung bestimmten Größe $[i_{s,\beta}(t)]$ für das gesamte Szenario . . . . .	LXVIII
G.32 Experiment: Zeitlicher Verlauf der Intervallbreite der Schätzung $\bar{i}_{s,\beta}(t) - \underline{i}_{s,\beta}(t)$ . . . . .	LXVIII
G.33 Experiment: Einschwingvorgang der Intervallschätzung von $i_{s,\beta}(t)$ . . . . .	LXVIII
G.34 Experiment: Zeitlicher Verlauf des Intervallmittelwertes der aus der Magnetisierungsstromintervallschätzung bestimmten Größe $[i_{\mu,\beta}(t)]$ für das gesamte Szenario . . . . .	LXIX
G.35 Experiment: Zeitlicher Verlauf der Intervallbreite der Schätzung $\bar{i}_{\mu,\beta}(t) - \underline{i}_{\mu,\beta}(t)$ . . . . .	LXIX
G.36 Experiment: Einschwingvorgang der Intervallschätzung von $i_{\mu,\beta}(t)$ . . . . .	LXIX



# Tabellenverzeichnis

6.1	Definition der unsicherheitsbehafteten Größen bei der Wechselrichtermmodellierung . . . . .	106
7.1	Parametrierung der ASM . . . . .	125
8.1	Simulation: Quotient der Mittelwerte der Intervallbreite von $[i_{s,\alpha}(t)]$ aus Tabelle G.1 und der entsprechenden mittleren Amplitude von $i_{s,\alpha}(t)$ aus Tabelle G.5 in Abhängigkeit der Konfiguration und des betrachteten Zeitintervalls . . . . .	138
8.2	Simulation: Quotient der Mittelwerte der Intervallbreite von $[i_{s,\beta}(t)]$ aus Tabelle G.2 und der entsprechenden mittleren Amplitude von $i_{s,\beta}(t)$ aus Tabelle G.5 in Abhängigkeit der Konfiguration und des betrachteten Zeitintervalls . . . . .	138
8.3	Simulation: Quotient der Mittelwerte der Intervallbreite von $[i_{\mu,\alpha}(t)]$ aus Tabelle G.3 und der entsprechenden mittleren Amplitude von $i_{\mu,\alpha}(t)$ aus Tabelle G.5 in Abhängigkeit der Konfiguration und des betrachteten Zeitintervalls . . . . .	138
8.4	Simulation: Quotient der Mittelwerte der Intervallbreite von $[i_{\mu,\beta}(t)]$ aus Tabelle G.4 und der entsprechenden mittleren Amplitude von $i_{\mu,\beta}(t)$ aus Tabelle G.5 in Abhängigkeit der Konfiguration und des betrachteten Zeitintervalls . . . . .	138
E.1	Extremwerte der Clarke-Transformation . . . . .	XLV
G.1	Simulation: Mittelwerte der Intervallbreite von $[i_{s,\alpha}(t)]$ in Abhängigkeit der Konfiguration und des betrachteten Zeitintervalls . . . . .	LXVI
G.2	Simulation: Mittelwerte der Intervallbreite von $[i_{s,\beta}(t)]$ in Abhängigkeit der Konfiguration und des betrachteten Zeitintervalls . . . . .	LXVII
G.3	Simulation: Mittelwerte der Intervallbreite von $[i_{\mu,\alpha}(t)]$ in Abhängigkeit der Konfiguration und des betrachteten Zeitintervalls . . . . .	LXVII
G.4	Simulation: Mittelwerte der Intervallbreite von $[i_{\mu,\beta}(t)]$ in Abhängigkeit der Konfiguration und des betrachteten Zeitintervalls . . . . .	LXVII
G.5	Simulation: Mittelwerte der Amplituden der Zustandsgrößen in Abhängigkeit des betrachteten Zeitintervalls . . . . .	LXVII



# Abkürzungen und Symbole

## Abkürzungen

Abkürzung	Beschreibung
ASM	Asynchronmaschine
BIBO	Bounded Input Bounded Output
EKF	Erweitertes Kalman-Filter
ELO	Erweiterter Luenberger-Beobachter
FM	Fehlermodell
ICC	Intervall-Kennlinie
ICT	Intervall-Clarke-Transformation
IHO	Intervall-Hermite-Obreschkoff
LPV-Systeme	Lineare parametervariante Systeme
LTI-Systeme	Lineare zeitinvariante Systeme
LTV-Systeme	Lineare zeitvariante Systeme
PMSM	Permanentmagneterregte Synchronmaschine
PWM	Pulsweitenmodulation
UKF	Unscented Kalman-Filter
ZMB	Zustandsmengenbeobachter
ZPWR	Zweipunkt-Wechselrichter

## Symbole

Symbol	Beschreibung
$\mathbf{A}$	Dynamikmatrix
$a_{ij}$	Element von $\mathbf{A}$ in der $i$ -ten Zeile und $j$ -ten Spalte
$\alpha$	Hilfsvariable, reelle Achse im statorfesten Koordinatensystem
$\mathbf{B}$	Eingangsmatrix
$\beta$	Hilfsvariable, imaginäre Achse im statorfesten Koordinatensystem
$b_{ij}$	Element von $\mathbf{b}$ in der $i$ -ten Zeile und $j$ -ten Spalte
$\mathbf{B}$	Hilfs-Eingangsmatrix
$\mathbf{C}$	Ausgangsmatrix
$\chi$	Hilfsmatrix
$\chi$	Hilfsvariable

Symbol	Beschreibung
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\delta$	Tastverhältnis
$\Delta\delta_d$	Tastverhältnis-Abweichungen aufgrund der Verriegelungstotzeit
$\Delta\delta_f$	Tastverhältnis-Abweichungen aufgrund der Vorwärtsspannungen
$\delta_{ni}$	Tastverhältnis unter Berücksichtigung nichtidealer Effekte
$\Delta\delta_s$	Tastverhältnis-Abweichungen aufgrund nichtidealen Schaltverhaltens
$\Delta\mathbf{x}$	Intervallbreitenvektor
$\mathbf{e}$	Beobachterfehlervektor
$\bar{\mathbf{e}}$	Oberer Beobachterfehlervektor
$\underline{\mathbf{e}}$	Unterer Beobachterfehlervektor
$\mathcal{E}$	Hilfs-Fehlervektor
$\epsilon$	Hilfsmatrix
$\epsilon$	Hilfsvariable
$\eta$	Hilfsvariable
$\mathbf{F}$	Beobachterdynamikmatrix
$\mathcal{F}$	Hilfs-Beobachtersystemmatrix
$\mathbf{G}$	Messvektorverstärkungsmatrix des reduzierten Beobachters
$\mathbf{H}$	Eingangsmatrix des reduzierten Beobachters
$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix
$i$	Hilfsvariable, Strom
$j$	Hilfsvariable, Imaginärzahl
$i_\mu$	Magnetisierungsstromraumzeiger
$i_{\mu,\alpha}$	$\alpha$ -Komponente des Magnetisierungsstromraumzeigers
$i_{\mu,\beta}$	$\beta$ -Komponente des Magnetisierungsstromraumzeigers
$l$	Hilfsvariable
$\mathbb{I}\mathbb{R}$	Menge der reellen Intervalle
$\mathbf{i}_s$	Statorstromraumzeiger
$\mathbf{i}_{s,123}$	Vektor mit Statorphasenströmen
$i_{s,\alpha}$	$\alpha$ -Komponente des Statorstromraumzeigers
$i_{s,\beta}$	$\beta$ -Komponente des Statorstromraumzeigers
$k$	Hilfsvariable
$\mathbf{K}$	Fehlerterm durch Abweichungen der Dynamikmatrix
$\kappa$	Hilfsmatrix
$\kappa$	Hilfsvariable
$\mathbf{L}$	Beobachtermatrix
$\lambda$	Eigenwert
$L_h$	Hauptinduktivität
$\mathcal{L}$	Hilfs-Beobachtermatrix
$L_{\sigma,s}$	Statorseitige Streuinduktivität
$\mathbf{M}$	Hilfsmatrix
$m$	Hilfsvariable

Symbol	Beschreibung
$n$	Dimension des Zustandsraums, Drehzahl
$\nu$	Hilfsmatrix
$\nu$	Hilfsvariable
$\omega_l$	Elektrische Winkelgeschwindigkeit
$\omega_m$	Mechanische Winkelgeschwindigkeit
$\mathcal{O}$	Mengenbasierte Ausgangsfunktion
$P$	Transformationsmatrix
$p$	Dimension des Eingangsraums
$\varphi_m$	Mechanischer Lagewinkel
$\varphi_\mu$	Magnetisierungsstrom-Feldwinkel
$\Psi$	Flussverkeftung
$P_{SP}$	Transformationsmatrix (Phasenspannungen $\rightarrow$ Sternspannungen)
$Q_w$	Kovarianzmatrix des Systemrauschens
$q$	Dimension des Ausgangsraums
$q$	Parametervektor der vollständigen modalen Synthese
$Q_v$	Kovarianzmatrix des Messrauschens
$r$	Nicht messbare Zustandsgrößen
$\rho$	Hilfzustandsvektor des reduzierten Zustandsbeobachters
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_+$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen
$R_r$	Rotorwiderstand
$R_s$	Statorwiderstand
$S$	Hilfsmatrix
$s_{wr}$	Ansteuersignale des Wechselrichters
$T$	Abtastzeit
$t$	Zeit
$T_d$	Verriegelungstotzeit
$\Delta U_f$	Vektor der verriegelungstotzeitkompensierten Vorwärtsspannungen
$\theta$	Parametervektor
$t_{i,j,k,on}$	Äquivalente Einschaltzeit
$t_{off,e}$	Ende des Schaltvorgangs high $\rightarrow$ low
$t_{off,s}$	Beginn des Schaltvorgangs high $\rightarrow$ low
$t_{on,e}$	Ende des Schaltvorgangs low $\rightarrow$ high
$t_{on,s}$	Beginn des Schaltvorgangs low $\rightarrow$ high
$T_{pulse}$	Taktperiode
$U_{i,j,k}$	Vorwärtsspannungen
$\mathbf{u}$	Eingangsvektor
$\bar{\mathbf{u}}$	Obere Schranke von $\mathbf{u}$
$\underline{\mathbf{u}}$	Untere Schranke von $\mathbf{u}$
$U_{DC}$	Zwischenkreisspannung
$u_{i-,av}$	Mittelwert über eine Taktperiode der Wechselrichterausgangsspannung bezogen auf negatives Zwischenkreispotential

Symbol	Beschreibung
$u_{l-}$	Wechselrichterausgangsspannung bezogen auf negatives Zwischenkreispotential
$\mathcal{U}$	Hilfs-Eingangsgröße
$\mathbf{u}_{pn,123,av}$	Vektor mit Mittelwert der Statorsternspannungen
$v$	Hilfsvariable
$\mathbf{u}_s$	Statorspannungsraumzeiger
$\mathbf{u}_{s,w}$	Sollstatorspannungsraumzeiger
$V$	Lyapunov-Funktion
$v$	Messrauschen
$\mathcal{V}$	Eingangsmenge
$\mathbf{W}$	Inverse Transformationsmatrix
$w$	Systemrauschen
$\mathbf{x}$	Zustandsvektor
$\bar{\mathbf{x}}$	Obere Schranke von $\mathbf{x}$
$\underline{\mathbf{x}}$	Untere Schranke von $\mathbf{x}$
$\hat{\mathbf{x}}$	Schätzwertvektor
$x_i$	$i$ -te Zustandsgröße
$\Xi$	Mengenbasierte Systemfunktion
$\mathcal{X}$	Zustandsmenge
$\mathbf{y}$	Ausgangsvektor
$\bar{\mathbf{y}}$	Obere Schranke von $\mathbf{y}$
$\underline{\mathbf{y}}$	Untere Schranke von $\mathbf{y}$
$\mathcal{Y}$	Hilfs-Ausgangsgröße
$\Upsilon$	Ausgangsmenge
$z$	Transformierter Zustandsvektor
$\zeta$	Hilfsvariable
$z_p$	Polpaarzahl

# 1 Einleitung

Für den verlässlichen Betrieb sicherheitskritischer Systeme spielt die Kenntnis des aktuellen Systemzustands eine entscheidende Rolle. Vor dem Hintergrund, dass dieser Systemzustand in der Regel nicht vollständig messtechnisch zu erfassen ist, kommen zur Ermittlung des Systemzustands üblicherweise Methoden zur Zustandsschätzung zum Einsatz. Alle diese Verfahren stehen jedoch vor der Herausforderung, dass die messtechnisch erfassten Größen sowie die Modellbildung realer Systeme Unsicherheiten unterworfen sind.

Klassische Zustandsschätzverfahren gehen allerdings von exakt bekannten Messgrößen aus oder berücksichtigen Unsicherheiten unter Annahme stochastischer Eigenschaften. Ersteres Vorgehen weist jedoch im Hinblick auf eine robuste Schätzung aufgrund der beschriebenen Unsicherheiten Nachteile auf. Die Methoden der zweiten Klasse, die ebenfalls etabliert sind, weisen zwar eine größere Robustheit auf, die a priori Kenntnis der stochastischen Eigenschaften ist jedoch häufig nicht gegeben. Stattdessen ist bei der praktischen Anwendung durch „iteratives Ausprobieren“ ([Ada09, S. 312]) ein „befriedigende[s] Entwurfsergebnis“ ([Ada09, S. 312]) zu erzielen.

Eine Alternative hierzu ist das unter anderem in [LSA<sup>+</sup>13] vorgestellte deterministische Vorgehen nur die Beschränktheit der Unsicherheiten anzunehmen. Weitere Eigenschaften werden nicht als bekannt vorausgesetzt, was motiviert ist durch die übliche Angabe von Fehlerschranken in Sensordatenblättern. Diese Art der Unsicherheitsmodellierung ist jedoch nicht nur aufgrund ihrer direkten Applizierbarkeit von Vorteil. Vielmehr bietet sie auch die Möglichkeit Schätzverfahren zu entwerfen, welche basierend auf diesen unbekanntem, aber beschränkten Unsicherheiten, Zustandsmengen berechnen, welche den tatsächlichen Zustand garantiert enthalten. Gerade für sicherheitskritische Systeme sind solche mengenbasierten Ansätze besonders geeignet, wie in [RKAH06] und [WBR15] dargelegt wird. Da sie garantierte Informationen bezüglich der Zustandsgrößen liefern, kann auch in Anwesenheit von Unsicherheiten so ein bestimmungsgemäßer Betrieb gewährleistet werden.

Ein Beispiel für solch ein sicherheitskritisches System stellt eine Asynchronmaschine (ASM) dar, welche als Traktionsantrieb eingesetzt wird. Dass es sich bei einer ASM um ein sicherheitskritisches System handelt, kann man sich leicht anhand des Szenarios des Überquerens eines Bahnübergangs deutlich machen. Hierbei muss zu jedem Zeitpunkt eine verlässliche Information über das verfügbare Drehmoment vorliegen. Nur dies ermöglicht die Abgabe einer Handlungsempfehlung an die Fahrzeuginsassen, beispielsweise falls aufgrund eines Fehlers nur ein zu geringes Drehmoment zur Verfügung steht, um den Bahnübergang garantiert in der erforderlichen Zeit zu überqueren.

Nach heutigem Stand der Forschung existiert keine Methode, die eine echtzeitfähige, mengenbasierte Schätzung des Zustandsraummodells einer ASM, welches klassisch in

Form eines linearen parametervarianten Systems (LPV-Systems)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t)) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}(t)) \cdot \mathbf{u}(t), \quad (1.1a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}(t)) \cdot \mathbf{x}(t) \quad (1.1b)$$

angegeben werden kann ([RFDH12, S. 106]), ermöglicht. Hierin stellt  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  den Zustandsvektor,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$  den Eingangsvektor und  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$  den Ausgangsvektor dar. Die Dynamikmatrix  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , die Eingangsmatrix  $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}(t)) \in \mathbb{R}^{n \times p}$  und die Ausgangsmatrix  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}(t)) \in \mathbb{R}^{q \times n}$  sind in Abhängigkeit eines a priori unbekanntes und zeitvarianten Parametervektors  $\boldsymbol{\theta}(t) \in \mathbb{R}^v$  dargestellt.

In dieser Arbeit werden daher zwei Ziele verfolgt:

- Entwicklung von Methoden zur echtzeitfähigen, garantierten Zustandsschätzung von LPV-Systemen mit Zeitkonstanten im Millisekunden-Bereich
- Entwicklung eines durchgängigen Verfahrens zur garantierten Zustandsschätzung von Traktions-ASM

Um das erste Ziel zu erreichen, werden in den Kapiteln 3 und 4 zwei neuartige Intervallbeobachteransätze für LPV-Systeme vorgestellt. Diese tragen erheblich zur Erhöhung der Anwendbarkeit dieser Form garantierter Zustandsschätzverfahren auf diese Systemklasse bei. Um zu diesem theoretischen Schwerpunkt der Arbeit hinzuführen, wird zunächst der Stand der Forschung bezüglich der Methoden zur garantierten Zustandsschätzung für LPV-Systeme und der Zustandsschätzung von ASM in Kapitel 2 präsentiert. Den Abschluss des Kapitels bildet eine Bewertung der Tauglichkeit der Methoden zum Erreichen des ersten Forschungsziels. Basierend auf diesen Erkenntnissen werden beide Forschungsziele weiter konkretisiert. Nachdem in Kapitel 5 die entwickelten Intervallbeobachteransätze gegenübergestellt wurden, widmen sich die folgenden Kapitel der Beschreibung des Vorgehens, um das zweite Ziel zu erreichen. Hierzu wird zunächst in Kapitel 6 das gewählte ASM-Modell vorgestellt und anschließend auf die Modellierung des Stellglieds eingegangen. Hervorzuheben ist dabei, dass in diesem Zusammenhang ein neuartiges Modell leistungselektronischer Stellglieder vorgestellt wird, welches garantierte Aussagen bezüglich der Ausgangsspannungen ermöglicht. Anschließend erfolgt die Anwendung der Methoden auf die ASM in Kapitel 7, gefolgt von simulativen und experimentellen Ergebnissen in den Kapiteln 8 und 9. Ein abschließendes Fazit dient der Zusammenfassung und Bewertung der Ergebnisse.

## 2 Stand der Wissenschaft

Im letzten Kapitel wurde die Notwendigkeit garantierter Zustandsschätzverfahren für sicherheitskritische Systeme im Allgemeinen und im Speziellen für solche, die durch LPV-Systeme beschrieben werden, dargelegt. Dieses Kapitel soll nun klären, inwieweit der Stand der Forschung hierzu beitragen kann. Dazu werden detailliert Ansätze zur garantierten Zustandsschätzung für LPV-Systeme vorgestellt. Im Anschluss wird beleuchtet, ob gängige Methoden zur Zustandsschätzung für ASM bereits zur Schließung der theoretischen Lücke dienen. Basierend auf diesen Ausführungen wird die Forschungslücke detaillierter als in der Einleitung herausgearbeitet.

### 2.1 Verfahren zur garantierten Zustandsschätzung von LPV-Systemen

Betrachtet und bewertet werden sollen in diesem Abschnitt alle Verfahren, die eine garantierte Zustandsschätzung für zeitkontinuierliche LPV-Systeme ermöglichen. Dazu werden auch Verfahren herangezogen, die ursprünglich für andere Systemklassen entwickelt wurden, sich jedoch auf LPV-Systeme übertragen lassen. Zur Strukturierung werden diese Verfahren in zwei Gruppen unterteilt: Zustandsmengenbeobachter (ZMB) und Intervallbeobachter. Diese Unterteilung wurde bereits in [KW04] und [GDRZ14] vorgeschlagen und rührt von der unterschiedlichen Berechnung der Zustandseinschließungen. Während Zustandsmengenbeobachter auf einer Prädiktor-Korrektor-Struktur beruhen und die tatsächliche Zustandsmenge mit diversen Geometrien einschließen, wie in Abschnitt 2.1.1 näher erläutert werden wird, weisen Intervallbeobachter die klassische Beobachterstruktur auf und schließen die tatsächliche Zustandsmenge mit Hyperrechtecken ein, was in Abschnitt 2.1.2 näher erläutert werden wird. Neben den Ansätzen, die vielversprechend für eine Anwendung zur garantierten Zustandsschätzung für LPV-Systeme sind, werden im Falle der vorgestellten Intervallbeobachter solche einbezogen, die verwandt zu den in dieser Arbeit neu entwickelten Ansätzen sind. Für die notwendigen Grundlagen der Intervallarithmetik, welche für die weiteren Abschnitte benötigt werden, sei auf Anhang A verwiesen.

#### 2.1.1 Zustandsmengenbeobachter

Wenngleich die meisten Verfahren der Zustandsmengenbeobachter zeitdiskrete Ansätze darstellen und der Fokus dieser Arbeit auf zeitkontinuierlichen Systemen liegt, soll die Grundidee dieser Ansätze vorgestellt werden und die Anwendbarkeit anhand konkreter Ausprägungen bewertet werden.

## Grundprinzip

Gemein ist diesen Ansätzen, dass folgende drei Schritte den Kern der Methoden darstellen, die jedoch unterschiedlich ausgestaltet und erweitert werden:

### 1. Initialisierung

Bestimmung einer Zustandsmenge  $\mathcal{X}_0$ , welche den Anfangszustand des Systems  $\mathbf{x}(0)$  enthält.

### 2. Prädiktion

Bestimmung der Zustandsmenge im Schritt  $k + 1$ , basierend auf der Zustandsmenge im Schritt  $k$ , dargestellt durch  $\mathcal{X}_k$ , der unsicheren Eingangsmenge zum Zeitpunkt  $k$ , beschrieben durch  $\mathbf{v}_k$ , den Systemparametern  $\theta$  und der mengenbasierten Systemfunktion  $\Xi$ , d. h.  $\mathcal{X}_{k+1}^* = \Xi(\mathcal{X}_k, \mathbf{v}_k, \theta)$ .

### 3. Korrektur

Verkleinerung der prädizierten Zustandsmenge  $\mathcal{X}_{k+1}^*$  durch die Messmenge zum Zeitpunkt  $k + 1$  gegeben durch  $\Upsilon_{k+1}$  und die inverse Ausgangsfunktion  $\mathcal{O}^{-1}$ , d. h.  $\mathcal{X}_{k+1} = \mathcal{X}_{k+1}^* \cap \mathcal{O}^{-1}(\Upsilon_{k+1}, \mathbf{v}_k, \theta)$ .

Abbildung 2.1 zeigt den Prädiktions- und Korrekturschritt graphisch. Während Schritt 1 nur einmalig zur Initialisierung ausgeführt wird, werden die Schritte 2 und 3 in jedem Zeitschritt wiederholt.

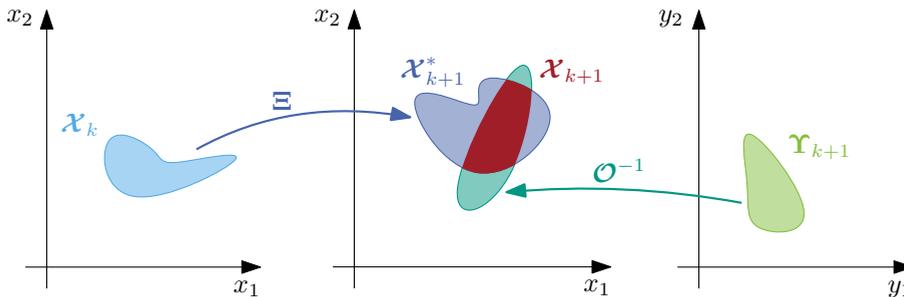


Abbildung 2.1: Grundprinzip der ZMB (ohne Darstellung der Eingangsmenge)

## Bewertung der Zustandsmengenbeobachter im Hinblick auf die Zielstellung der Arbeit

Mit Ausnahme der Verfahren aus [Wol10] ist den ZMB gemein, dass sie auf zeitdiskreten Systemmodellen beruhen und damit keine Zustandsschätzung für zeitkontinuierliche Modelle, wie in dieser Arbeit behandelt, ermöglichen. Dieses Problem wird besonders in [DLSZ99] deutlich, wo ein ZMB mit Ellipsoiden zur Unsicherheitsbeschreibung verwendet wird, ebenfalls mit dem Ziel einer garantierten Zustandsschätzung für ASM, dort allerdings direkt mit der Absicht diese zur Fehlerdiagnose anzuwenden. In dieser Veröffentlichung werden die zeitdiskrete Dynamikmatrix und die zeitdiskrete Eingangsmatrix durch eine Reihenentwicklung bis zur zweiten Ordnung approximiert.

Eine systematische Abschätzung des Diskretisierungsfehlers erfolgt nicht, wodurch keine garantierte Aussage mehr für das zeitkontinuierliche System gegeben werden kann. Mit den in [DLSZ99] verwendeten Ellipsoiden ist die Schätzung nur mit einer vergleichsweise großen Intervallbreite der geschätzten Größen möglich. So beträgt dort die maximale Intervallbreite ca. 0,6 A bei einem Zustandsgrößenwert zwischen ca.  $-2$  A und ca. 4 A. Aufgrund dieser schlechten Einschließungsgenauigkeit ist die Fehlerdetektion selbst bei großen Fehlern nicht immer möglich. Neben der nicht systematischen Bestimmung des Diskretisierungsfehlers führt dies dazu, dass dieser Ansatz nicht auf die Fragestellung dieser Arbeit angewendet werden kann.

Ein zentrales Problem der Mengenbeschreibung durch Ellipsoide ist, dass die Schnittmenge zweier Ellipsoide kein Ellipsoid darstellt, was nach jedem Korrekturschritt die Bestimmung eines einschließenden Ellipsoids, beispielsweise durch Lösung eines Optimierungsproblems, nötig macht.

Eine zur Unsicherheitsbeschreibung bei ZMB ebenfalls verbreitete Beschreibung, die diese Problematik umgeht, sind Zonotope, welche eine Minkowski-Summe von Liniensegmenten darstellen ([Com03], [LSA<sup>+</sup>13], [LSD<sup>+</sup>11], [TS13], [ABC05]). Ein praktisches Problem dieser Beschreibung ist, dass sich in jedem Prädiktionsschritt die Anzahl an Liniensegmenten zur Beschreibung des resultierenden Zonotopes um die Systemordnung  $n$  erhöht ([Com03]). Aufgrund dessen muss bei der praktischen Anwendung im Rahmen eines ZMB die Anzahl der Liniensegmente ebenfalls durch eine äußere Einschließung reduziert werden, wodurch der theoretische Vorteil der Zonotope wieder entfällt. Im Gegensatz zur komplexeren Bestimmung der äußeren Einschließung bei Ellipsoiden kann diese jedoch wie in [Com03] gezeigt, mit einer einfachen Heuristik ermittelt werden. Angaben zur Rechenzeit solcher ZMB finden sich in [LSD<sup>+</sup>11] und [LSA<sup>+</sup>13]. Für ein fiktives Beispielsystem zweiter Ordnung kann dabei lediglich eine Abtastzeit von ca.  $T = 624 \mu\text{s}$  erreicht werden, was selbst bei diesem gegenüber ASM-Modellen einfachen System deutlich über den Abtastzeiten von ASM-Regelungen liegt ([GLM15, S. 43]). Aufgrund der eingangs erwähnten Problematik bei der Diskretisierung und der zu hohen Rechenzeit ist auch dieser Ansatz nicht geeignet.

Als nächstes soll mit dem IHO-Verfahren ein Verfahren bewertet werden, welches ebenfalls ein spezielles Polytop zur Mengendarstellung verwendet. In [Sie14] konnte gezeigt werden, dass eine echtzeitfähige Ausführung des ZMB selbst für ein Modell einer Gleichstrommaschine mit zwei Zuständen (Ankerstrom und mechanische Winkelgeschwindigkeit) nicht möglich ist, wobei mit  $T = 100 \mu\text{s}$  und  $T = 10 \mu\text{s}$  realistische Abtastzeiten verwendet wurden.

In der Arbeit [Cie14] wurde untersucht, ob sich der zweite in [Wol10] veröffentlichte Ansatz, der auf Taylormodellen basiert, für eine kombinierte Zustands- und Parameterschätzung einer ASM anwenden lässt, wobei der zu schätzende Rotorwiderstand im Szenario mit der niedrigsten Rechenzeit als konstanter Parameter eingeführt wurde. Trotz der vergleichsweise hohen Abtastzeit von  $T = 1$  ms benötigte die Berechnung einer Simulation von 10 s auf einem Desktop-PC mit einem Intel Core i7-2600 Prozessor, welcher mit 3,4 GHz getaktet wurde und über 8 GB Arbeitsspeicher verfügte, 36 min, was eine Anwendung für die hier gegebene Problemstellung ausschließt. In [KRHA06], wo ebenfalls Taylormodelle zur Berücksichtigung unsicherer Größen verwendet werden, wird eine Zustandsschätzung für chemische Prozesse in einem Rührkesselreaktor prä-

sentiert. Auf Aspekte der Echtzeitfähigkeit wird dort zwar nicht explizit eingegangen, jedoch weisen Abtastzeiten von 2,5 s auf eine Eignung für langsame Prozesse hin. Auch [LS07] bestätigt dies. Der taylormodellbasierte ZMB wird dort unter anderem zur Zustandsschätzung für das Räuber-Beute-Modell nach Lotka und Volterra angewendet. Für eine zehneckündige Simulation werden für die Schätzung der beiden Zustandsgrößen 12,9 s benötigt.

Ein ZMB basierend auf Subpavings, welche als Menge nicht überlappender Intervallvektoren definiert sind, wurde in [ZV10] zur Zustandsschätzung einer permanentmagnetenerregten Synchronmaschine (PMSM) eingesetzt. Die gezeigten Ergebnisse sind zufriedenstellend, jedoch werden drei Punkte angegeben, die aus Sicht der Autoren der Veröffentlichung eine praktische Anwendung des Algorithmus verhindern: Erstens konnten diese Ergebnisse nur unter der Annahme einer langsam veränderlichen mechanischen Winkelgeschwindigkeit erzielt werden, zweitens fällt durch die hohe Anzahl an Intervallvektoren der Subpavings eine große Datenmenge an und drittens ist der Rechenaufwand zu hoch. Die Aussage zum Rechenaufwand deckt sich mit den Aussagen aus [KJW98] und [KW04], dass die Hauptursache, welche die Einsatzfähigkeit dieses ZMB einschränkt, der Rechenaufwand ist. Abschließend sei noch auf eine Mischform aus taylormodellbasiertem ZMB und ZMB basierend auf Subpavings, veröffentlicht in [RRC04], hingewiesen. Die Prädiktion wird hierbei ähnlich wie in [Wol10] mithilfe von Taylormodellen durchgeführt, während der Korrekturschritt mithilfe von Subpavings durchgeführt wird. Am Beispiel des Räuber-Beute-Modells nach Lotka und Volterra zeigt sich jedoch auch hier eine hohe Rechenzeit.

Zusammenfassend kann daher gesagt werden, dass sich ZMB nicht zur echtzeitfähigen, garantierten Zustandsschätzung zeitkontinuierlicher LPV-Systeme mit Zeitkonstanten im Millisekunden-Bereich eignen.

### 2.1.2 Intervallbeobachter

Unter dem Übergriff Intervallbeobachter werden verschiedene Ansätze zusammengefasst, die basierend auf der klassischen Beobachterstruktur unter Berücksichtigung unsicherer Einflussgrößen eine Einschließung der tatsächlichen Systemtrajektorie erzeugen. Es ist häufig die falsche Angabe zu finden, dass Intervallbeobachter erstmals in [GRHS00] vorgestellt wurden (siehe z. B. [AM14], [CLZ12], [ELH<sup>+</sup>15], [LARA16], [MDN13], [MRC10], [MRC08], [MR11], [ARJS10]). Tatsächlich wurde der Ansatz jedoch bereits in [HSG98b] und [HSG98a] nahezu zeitgleich am Beispiel der garantierten Zustandsschätzung für einen Schmutzwasseraufbereitungsprozess veröffentlicht. Generell sind biologische Prozesse die am häufigsten anzutreffenden Anwendungsbeispiele für Intervallbeobachter. Neben der zuvor erwähnten Zustandsschätzung für Schmutzwasseraufbereitungsprozesse ([AGGH<sup>+</sup>99], [BS11], [MB05], [MBG09]) ist dabei beispielsweise auch die Schätzung infizierter roter Blutkörperchen bei Malaria-Patienten zu nennen ([DEI16]). Da der Entwurf von Intervallbeobachtern den theoretischen Kern dieser Arbeit darstellt, soll der Stand der Wissenschaft ausführlich beschrieben werden. Ausgangspunkt dafür wird eine allgemeine Einführung in die Theorie der Intervallbeobachter sein. Anschließend wird ein Überblick über Intervallbeobachteransätze für Systeme mit zeitinvarianter Dynamikmatrix und LPV-Systeme gegeben. Bei letzteren

werden auch Ansätze für lineare zeitvariante Systeme (LTV-Systeme) betrachtet, da deren Struktur der von LPV-Systemen gleicht. Der Unterschied ist hierbei, dass bei LTV-Systemen angenommen wird, dass sich die Änderung der Systemparameter als Funktion der Zeit angeben lässt. Für die gezeigte Zielstellung relevante nichtlineare Ansätze runden die Beschreibung des Stands der Forschung ab. In jedem dieser Unterabschnitte wird zudem bewertet, ob sich mit den vorgestellten Ansätzen die genannte Zielstellung erfüllen lässt.

## Grundlagen

Nachfolgende Ungleichungen mit mehrdimensionalen Größen sind stets elementweise zu verstehen.

### Definition 2.1 (Intervallbeobachter)

Gegeben sei ein System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\theta}(t), t), \quad (2.1a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\theta}(t), t), \quad (2.1b)$$

für welches nur unsichere Informationen über die Eingangsgrößen  $\mathbf{u}(t)$ , die Ausgangsgrößen  $\mathbf{y}(t)$  und die Parameter  $\boldsymbol{\theta}(t)$  vorliegen und von denen bekannt ist, dass

$$\mathbf{u}(t) \in [\underline{\mathbf{u}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t)], \quad (2.2)$$

$$\mathbf{y}(t) \in [\underline{\mathbf{y}}(t), \bar{\mathbf{y}}(t)], \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\theta}(t) \in [\underline{\boldsymbol{\theta}}(t), \bar{\boldsymbol{\theta}}(t)]. \quad (2.4)$$

Ein Intervallbeobachter für (2.1) ist ein dynamisches System

$$\dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{x}}(t), \underline{\mathbf{u}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t), \underline{\mathbf{y}}(t), \bar{\mathbf{y}}(t), \underline{\boldsymbol{\theta}}(t), \bar{\boldsymbol{\theta}}(t), t), \quad (2.5a)$$

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \bar{\mathbf{f}}(\underline{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{x}}(t), \underline{\mathbf{u}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t), \underline{\mathbf{y}}(t), \bar{\mathbf{y}}(t), \underline{\boldsymbol{\theta}}(t), \bar{\boldsymbol{\theta}}(t), t), \quad (2.5b)$$

welches eine Untergrenze  $\underline{\mathbf{x}}(t)$  und eine Obergrenze  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  generiert, sodass stets

$$\underline{\mathbf{x}}(t) \leq \mathbf{x}(t) \leq \bar{\mathbf{x}}(t) \quad \forall t \geq 0, \quad (2.6a)$$

$$\max\{\mathbf{x}(t) - \underline{\mathbf{x}}(t), \bar{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t)\} < \epsilon \quad \forall t \geq 0 \wedge \epsilon \in \mathbb{R} \quad (2.6b)$$

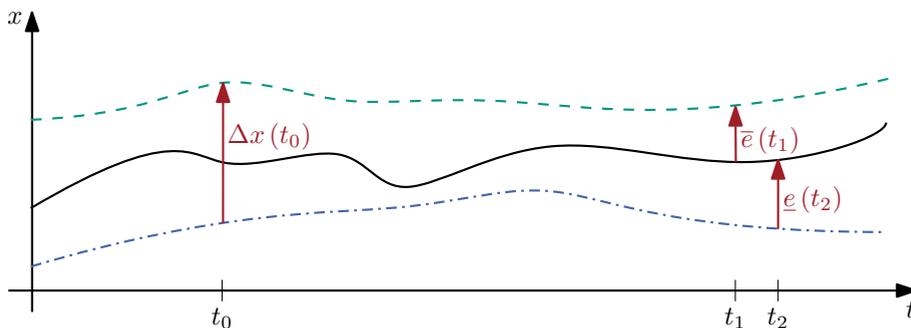
gilt.

Für dynamische Systeme, welche die Systemzustände unter Berücksichtigung unsicherer Information zwar einschließen, bei denen jedoch eine Beschränktheit der Intervallbreite nicht mathematisch nachgewiesen werden kann, d. h. (2.6b) nicht sichergestellt werden kann, wird in [MBG09] der Begriff Framer verwendet. Die formale Definition dieser Systeme ist in Definition 2.2 gegeben.

**Definition 2.2 (Framer)**

Für ein System (2.1), für welches nur unsichere Informationen in der Form (2.2), (2.3) und (2.4) vorliegen, ist ein Framer ein dynamisches System (2.5), welches eine Untergrenze  $\underline{\boldsymbol{x}}(t)$  und eine Obergrenze  $\overline{\boldsymbol{x}}(t)$  generiert, sodass (2.6a) gilt.

Das Ergebnis der garantierten Schätzung durch einen Intervallbeobachter ist schematisch anhand einer Zustandsgröße in Abbildung 2.2 dargestellt. Die Referenzkurve wird dabei durch die beiden Schranken mit einer beschränkten Intervallbreite eingeschlossen, wie in (2.6) definiert.



**Abbildung 2.2:** Schematische Abbildung des Ergebnisses eines Intervallbeobachters (grün gestrichelt: Obergrenze der Intervallschätzung, blau strichpunktiiert: Untergrenze der Intervallschätzung, schwarz: tatsächliche Zustandsgröße)

Um die Entwurfsziele zu formalisieren, werden üblicherweise der untere Beobachterfehlervektor  $\underline{\boldsymbol{e}}(t)$ , der obere Beobachterfehlervektor  $\overline{\boldsymbol{e}}(t)$  und der Intervallbreitenvektor  $\Delta \boldsymbol{x}(t)$  wie folgt eingeführt:

$$\underline{\boldsymbol{e}}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \underline{\boldsymbol{x}}(t), \quad (2.7a)$$

$$\overline{\boldsymbol{e}}(t) = \overline{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{x}(t), \quad (2.7b)$$

$$\Delta \boldsymbol{x}(t) = \overline{\boldsymbol{x}}(t) - \underline{\boldsymbol{x}}(t) = \underline{\boldsymbol{e}}(t) + \overline{\boldsymbol{e}}(t). \quad (2.8)$$

Damit die in (2.6b) geforderte Beschränktheit der Intervallbreite gewährleistet ist, muss die Dynamik der Intervallbreite  $\frac{d}{dt} \Delta \boldsymbol{x}(t)$  stabil sein. Zum Entwurf einer stabilen Dynamik der Intervallbreite bzw. dem Beweis der Stabilität, werden verschiedene Methoden verwendet, die in der Arbeit an den entsprechenden Stellen erläutert werden. Das zweite, in (2.6a) definierte Ziel der Einschließung des tatsächlichen Zustandsvektors  $\boldsymbol{x}(t)$  durch die beiden Schranken  $\underline{\boldsymbol{x}}(t)$  und  $\overline{\boldsymbol{x}}(t)$  ist erfüllt, wenn die beiden Beobachterfehlervektoren  $\underline{\boldsymbol{e}}(t)$  und  $\overline{\boldsymbol{e}}(t)$  ausschließlich nichtnegative Einträge haben. Dies ist erfüllt, wenn (2.7a) und (2.7b) sogenannte positive Systeme sind ([AS03]). Die Definition für positive, lineare zeitvariante bzw. parametervariante Systeme, die Gegenstand dieser Arbeit sind, ist in Definition 2.3 gegeben.

**Definition 2.3 (Positives lineares zeitvariantes System)**

Ein lineares zeitvariantes System

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{u}(t) \quad (2.9)$$

ist positiv, wenn der positive Quadrant  $\mathbb{R}_+^n$  bei nichtnegativen Eingangsgrößen  $\mathbf{u}(0) \geq \mathbf{0}$  für dieses System eine positiv invariante Menge darstellt ([AS03]). Der positive Quadrant  $\mathbb{R}_+^n$  ist durch  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$  definiert.

Um Kriterien für die Positivität eines Systems zu definieren, sei zunächst ein Metzler-System definiert.

**Definition 2.4 (Metzler-System)**

System (2.9) ist ein Metzler-System, wenn für alle  $t$  seine Dynamikmatrix  $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Metzler-Matrix ist und seine Eingangsmatrix  $\mathbf{B}(t) = (b_{ij}(t)) \in \mathbb{R}^{n \times p}$  nichtnegativ ist, d. h.

$$a_{ij}(t) \geq 0 \quad \forall i \neq j, \quad (2.10)$$

$$b_{ij}(t) \geq 0 \quad \forall i, j. \quad (2.11)$$

Basierend hierauf gibt Lemma 2.1 eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Positivität von LTV-Systemen und LPV-Systemen an.

**Lemma 2.1 (Bedingung für die Positivität von LTV-Systemen)**

Sei System (2.9) ein Metzler-System, dann folgt hieraus, dass es ein positives System ist.

Der Beweis dieses Lemmas basierend auf den Ausführungen in [AS03] ist in Anhang B.1 gezeigt. Auf den ersten Blick mag es verwunderlich erscheinen, wieso von den Einträgen der Matrizen  $(\mathbf{x}(0), \mathbf{B}(t), \mathbf{u}(t))$  des Systems (2.9) verlangt wird, dass sie nichtnegativ sind, um zu garantieren, dass  $\mathbf{x}(t)$  nichtnegativ ist und diese Bedingung für die Hauptdiagonale von  $\mathbf{A}(t)$  nicht notwendig ist. Als Ergänzung zu dem zuvor erwähnten Beweis soll an dieser Stelle hierfür eine anschauliche Begründung geliefert werden. Hierzu soll der Zeitpunkt  $t_z$  betrachtet werden, bei dem sich eine Zustandsgröße  $x_i$  gerade am Rand des positiven Quadranten befindet, d. h.  $x_i(t_z) = 0$  gilt. Damit diese Zustandsgröße nun nichtnegativ bleibt, muss die Ungleichung  $\dot{x}_i(t_z) \geq 0$  gelten, da ansonsten  $x_i(t)$  weiter reduziert würde und den positiven Quadranten verlassen würde. Durch die nichtnegativen Einträge von  $\mathbf{B}(t)$  und  $\mathbf{u}(t)$  ist gewährleistet, dass die Eingangsgrößen nicht zu einer Verletzung dieser Bedingung führen. Ebenso erfüllt die

Summe der Produkte der positiven Nebendiagonalelemente von  $\mathbf{A}(t)$  mit den übrigen, nichtnegativen Zustandsgrößen diese Bedingung. Dadurch, dass  $x_i(t_z) = 0$  ist, hat nun jedoch das mit  $x_i$  multiplizierte Hauptdiagonalelement von  $\mathbf{A}(t)$  keinen Einfluss auf  $\dot{x}_i(t_z)$ , sein Vorzeichen ist also in diesem Zusammenhang irrelevant.

Nachfolgend sollen nun die eingangs erwähnten Ansätze zum Stand der Forschung präsentiert werden.

### **Intervallbeobachteransätze für Systeme mit zeitinvarianter Dynamikmatrix**

Auch wenn [GRHS00], wie bereits beschrieben, nicht allgemein die erste Veröffentlichung zu Intervallbeobachtern ist, so wird hier erstmals ein Intervallbeobachter mit zeitinvarianter Dynamikmatrix vorgestellt. Die hierin enthaltene Forderung, dass die Beobachtermatrix  $\mathbf{L}$ , über welche die Differenz zwischen gemessenem und geschätztem Systemausgang zurückgeführt wird, ausreicht, damit die Beobachterdynamikmatrix eine Metzler-Matrix ist, ist im Allgemeinen jedoch nicht erfüllt. Die gleiche, den Entwurf stark vereinfachende Forderung, wird in [BRH11] gestellt. Methoden für LTI-Systeme, die diese harte Anforderung durch Anwendung einer Zustandstransformation umgehen, können allerdings ebenfalls nicht auf LPV-Systeme übertragen werden. Zu nennen sind in diesem Zuge die Veröffentlichungen [CR11] und [MB10b] bzw. [MB11]. Den Ansätzen ist gemein, dass auf Basis der bekannten, zeitinvarianten Eigenwerte der Dynamikmatrix des Systems eine Transformationsmatrixfunktion in Abhängigkeit der Zeit bestimmt wird. Das Vorgehen ist aufgrund der Zeitveränderlichkeit der Eigenwerte der Dynamikmatrix von LPV-Systemen jedoch nicht für eine Anwendung auf diese geeignet, da aufgrund dieser Zeitveränderlichkeit weder Stabilität noch Positivität der Beobachterfehler weiter gewährleistet wären.

Weitere Veröffentlichungen widmen sich der Erweiterung klassischer Methoden zu Intervallbeobachtern. In [GDRZ14] und [GDRZ16] werden Ansätze zur kombinierten Zustands- und Eingangsschätzung vorgestellt. Dabei wird auf ein bekanntes Verfahren zurückgegriffen und dieses auf unbekannte, aber beschränkte Unsicherheiten erweitert. Ähnlich hierzu wird in [DER16] ein Beobachteransatz für hybride Systeme auf diese Unsicherheitsbeschreibung erweitert. Da jedoch solche Erweiterungen stark auf den Ansätzen der klassischen Beobachtertheorie beruhen, die schlicht mit intervallarithmetischen Methoden zu Intervallbeobachtern erweitert werden, soll mit Intervallbeobachtern für LPV-Systeme und LTV-Systeme fortgefahren werden.

### **Intervallbeobachteransätze für LPV-Systeme**

Die wichtigsten Ansätze, die sich direkt dem Intervallbeobachterentwurf der in dieser Arbeit betrachteten LPV-Systeme widmen, sind in [WBR15] und [TRCZ13] publiziert worden. Allerdings wird in [WBR15] die bereits im Zusammenhang mit LTI-Systemen erwähnte, restriktive Forderung, dass die Beobachtermatrix ausreichend ist, damit die Beobachterdynamikmatrix eine Metzler-Matrix ist, gestellt. Daher ist dieser Ansatz

nur für sehr wenige LPV-Systeme anwendbar. Eine ähnlich einschränkende Forderung wird in [TRCZ13] gestellt. So wird hier angenommen, dass sich die Dynamikmatrix des zu schätzenden Systems in eine Summe zerlegen lässt, bei der ein Summand nicht von den zeitvarianten Parametern abhängig ist. Dieser Summand und die Systemausgangsmatrix müssen ein detektierbares Paar bilden. Auch hier verhindert diese starke Forderung eine breite Anwendbarkeit. Neben diesen Ansätzen gibt es mit [CK13], [CERZ13], [CERZ15], [ERZ11], [EFR<sup>+</sup>12] und [ERZ13] auch solche, die unter der Annahme erfolgen, dass zur Laufzeit nur zeitinvariante Extremwerte des zeitvarianten Parametervektors  $\boldsymbol{\theta}(t)$  bekannt sind. Darauf aufbauend wird die vom zeitvarianten Parameter  $\boldsymbol{\theta}(t)$  abhängige Dynamikmatrix  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))$  durch eine zeitinvariante Intervallmatrix  $[\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}]$  eingeschlossen. Basierend auf diesen Extremwerten wird ein Intervallbeobachter mit zeitinvarianter Dynamikmatrix entworfen. Wie auch in [WBR15] erwähnt, führt dieses Vorgehen jedoch prinzipbedingt zu einer sehr konservativen Einschließung, wenn zur Laufzeit nicht nur Extremwerte von  $\boldsymbol{\theta}(t)$  bekannt sind, was beispielsweise im Fall der zeitvarianten Winkelgeschwindigkeit einer ASM gegeben ist. Auch der in [RCJ<sup>+</sup>17] vorgestellte Ansatz, der basierend auf der oben erwähnten Veröffentlichung [CERZ13] versucht, diese prinzipbedingte große Überabschätzung zu reduzieren, leistet dies nur unter Vernachlässigung von Ein-/Ausgangsunsicherheiten und hat daher keine praktische Relevanz für diese Arbeit.

Ebenfalls ist der in [TRC<sup>+</sup>14] vorgestellte Ansatz für LTV-Systeme nicht für eine garantierte Zustandsschätzung für LPV-Systeme einsetzbar. Zur Auslegung des Intervallbeobachters ist die mehrfache Differentiation der Systemparameter nötig, was bei LPV-Systemen ein Problem darstellt, da Zeitverläufe der Parameter bei messtechnischer Erfassung in der Regel verrauscht sind. Die Ansätze aus [LARA16], [ERPZ13] und [NPOS09] wurden bei dieser Auflistung nicht berücksichtigt, da zeitdiskrete LPV-Systeme betrachtet werden und hierbei andere Anforderungen an Stabilität und Positivität der Beobachterfehler gestellt werden.

## Intervallbeobachter für nichtlineare Systeme

In diesem Abschnitt sollen mit [REZ12] und [MR11] zwei Intervallbeobachteransätze für nichtlineare System kurz vorgestellt werden. Diese beruhen auf den gleichen Grundideen wie die in dieser Arbeit neu vorgestellten Ansätze. Der Kern der ersten Veröffentlichung ist die Einführung einer zeitinvarianten Transformationsmatrix für ein durch Ein-/Ausgangslinearisierung erhaltenes LTI-System. Die Besonderheit hieran ist, dass sich dieser Ansatz auf alle beobachtbaren LTI-Systeme anwenden lässt, weswegen er Ausgangspunkt einiger weiterer Intervallbeobachteransätze (z. B. [CERZ15], [GDRZ16], [EFR<sup>+</sup>12]) ist. In [ERCZ13] wurde versucht, diese zeitinvariante Transformationsmatrix zum Intervallbeobachterentwurf für nichtlineare Systeme sowie LPV-Systeme anzuwenden, indem die Transformationsmatrix für ein Nominalsystem ausgelegt wird. Das Vorgehen hat jedoch zwei entscheidende Schwachpunkte ([TRC<sup>+</sup>14]). Zum einen ist das Verfahren nur bei sehr kleinen Änderungen der Elemente der Beobachterdynamikmatrix möglich, wobei der zulässige Maximalwert dieser Änderungen proportional zur Inversen der Systemordnung ist, und zum anderen wird kein konstruktives Entwurfsvorgehen gezeigt. Letzteres liegt daran, dass die Beobachtermatrix sowohl in die Definition

der zeitinvarianten Transformationsmatrix für das Nominalsystem eingeht, als auch in den Stabilitätsbeweis des zeitvarianten Gesamtsystems. Eine Systematik zur Nutzung der Freiheitsgrade der Beobachtermatrix, die beim Entwurf der Transformationsmatrix vorliegen, existiert im Rahmen des Stabilitätsbeweises nicht. Während den bisher beschriebenen Intervallbeobachteransätzen gemein war, dass die dynamischen Systeme der Intervalluntergrenze und der Intervallobergrenze entkoppelt voneinander sind, ist dies bei dem in [MR11] vorgestellten Verfahren nicht der Fall. Diese Verkopplung rührt von der Anwendung von „Müllers Theorem“ (siehe Anhang C). Dieses wird verwendet, um ein einschließendes System für ein Differentialgleichungssystem mit unsicheren, durch Intervalle beschriebenen Variablen zu bestimmen. Durch Anwendung von Müllers Theorem erhält man hierbei ein Differentialgleichungssystem mit der doppelten Ordnung des ursprünglichen, welches keine Unsicherheiten mehr aufweist. Während der in [MR11] vorgestellte nichtlineare Intervallbeobachteransatz sich auch aufgrund eines fehlerhaften Stabilitätsbeweises nicht auf LPV-Systeme übertragen lässt, ist die Berechnung eines einschließenden Differentialgleichungssystems/eines Framers durch Müllers Theorem möglich.

Zusammenfassend ist damit festzuhalten, dass keine Intervallbeobachteransätze existieren, die für eine breite Klasse von LPV-Systemen anwendbar sind. Insbesondere existieren keine Methoden, die für das LPV-System typischer ASM-Modelle anwendbar sind.

Im nächsten Abschnitt soll diskutiert werden, welche Aussagen mit bereits existierenden Zustandsschätzverfahren für ASM getroffen werden können.

## 2.2 Zustandsschätzverfahren für Asynchronmaschinen

### 2.2.1 Deterministische Zustandsschätzverfahren ohne Berücksichtigung von Unsicherheiten

Eine weit verbreitete Methodik zur Bestimmung der zur feldorientierten Regelung notwendigen Flussgrößen ist die Auswertung verschiedener Maschinengleichungen. Im Folgenden sollen zunächst drei verbreitete Vertreter dieser sogenannten Maschinenmodelle ([Nuß10, S. 90]) kurz vorgestellt werden. Für eine detaillierte, formale Beschreibung sei hier auf [Sch15a] und [Nuß10] verwiesen, wobei sich die Bezeichnung der Modelle hier auf die erstgenannte Quelle bezieht.

Im Anschluss sollen Luenberger-Beobachter betrachtet werden, die nicht nur Maschinengleichungen auswerten, sondern basierend auf einem Fehlerterm die Schätzgrößen korrigieren.

## Statorfestes Strommodell

Wie der Name des Modells schon andeutet, wird seine Berechnung im statorfesten Koordinatensystem durchgeführt. Die Eingangsgrößen bilden hierbei der gemessene und in das statorfeste Raumzeigersystem transformierte Statorstromraumzeiger und die durch Differentiation des gemessenen Lagewinkels erhaltene mechanische Winkelgeschwindigkeit. Basierend auf diesen Größen werden der nicht messbare Magnetisierungsstromraumzeiger bestimmt. Der Nachteil des statorfesten Strommodells ist die geringe Güte der Nachbildung bei niedrigen Drehzahlen, die von der hier üblicherweise ungenauen numerischen Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit aus der Pulsfolge des Drehgebers resultiert ([Sch15a, S. 543]).

## Rotorflussfestes Strommodell

Die Problematik der ungenauen Winkelgeschwindigkeit bei kleinen Drehzahlen des statorflussfesten Strommodells entfällt, wenn die Maschinengleichungen im rotorflussfesten Koordinatensystem ausgewertet werden. Die Eingangsgrößen dieses Modells bilden die transformierten Statorströme sowie der Lagewinkel. In der Literatur werden zwei Probleme dieses Modells thematisiert: Zum einen nimmt die Güte der Schätzung bei kleinen Magnetisierungsstromraumzeigerbeträgen ab, was gerade bei kleinen Drehmomenten gegeben ist, und zum anderen ist das Modell von der Rotorzeitkonstanten abhängig, die aufgrund der Temperatur- und Stromabhängigkeit nachgeführt werden muss.

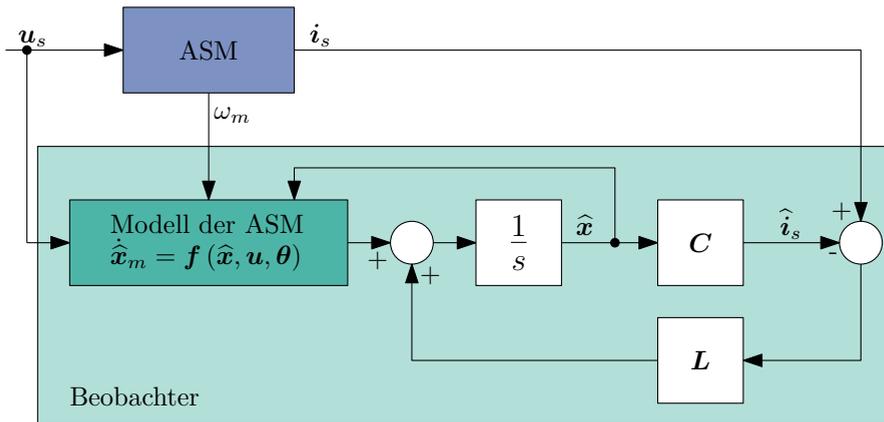
## Statorfestes Spannungsmodell

Das statorfeste Spannungsmodell verzichtet gänzlich auf die Nutzung der Lagewinkelinformation und berechnet den Magnetisierungsstromraumzeiger auf Basis der transformierten Statorspannungen und Statorströme. Darüber hinaus ist das Modell auch unabhängig von der Rotorzeitkonstanten. Aufgrund der Tatsache, dass das Modell einen nicht zurückgekoppelten Integrator beinhaltet, führen selbst kleine numerische Fehler hierbei mit der Zeit zu nicht vernachlässigbaren Schätzfehlern. Auch Versuche diese offene Integration zu umgehen, liefern nur für höhere Statorfrequenzen brauchbare Ergebnisse, sodass dieses Modell in der Regel nur in Kombination mit einem der genannten Strommodelle eingesetzt wird ([Nuß10, S. 95]).

## Luenberger-Beobachter

Luenberger-Beobachter haben gegenüber Maschinenmodellen den Vorteil, dass sie durch die Korrektur der Schätzwerte basierend auf der Differenz zwischen diesen und gemessenen Referenzwerten über eine höhere Konvergenzgeschwindigkeit und geringere Sensitivität bezüglich Modellierungsfehlern verfügen ([VS88]). Die grundsätzliche Struktur dieser Klasse von Verfahren ist in Abbildung 2.3 dargestellt. Parallel zur Maschine wird

ein Modell geschaltet, welches basierend auf den Eingangsspannungen  $u_s$ , dem aktuellen Schätzwert der Zustandsgrößen  $\hat{x}$  und den Systemparametern  $\theta$  (einschließlich der mechanischen Winkelgeschwindigkeit  $\omega_m$ ) das Systemverhalten nachbildet. Anhand der Differenz zwischen gemessenem und geschätztem Statorstrom wird über die Beobachtermatrix  $L$  die ASM-Modelldynamik  $\hat{x}_m$  korrigiert. An dieser Abbildung kann auch der Bezug zu den zuvor beschriebenen Maschinenmodellen hergestellt werden. Wird  $L = \mathbf{0}$  gesetzt, entfällt die Rückkopplung und man erhält eine reine Online-Simulation der Maschine mit den zuvor beschriebenen Eigenschaften.



**Abbildung 2.3:** Luenberger-Beobachter zur Zustandsschätzung einer ASM

In dieser Form wird der Luenberger-Beobachter zur Zustandsschätzung bei der ASM jedoch in der Regel nicht angewendet. Üblicherweise wird der Zustandsvektor um weitere Größen, wie Parameter, erweitert, um diese ebenfalls zu schätzen. Das zugrundeliegende, lineare Modell wird hierdurch nichtlinear und der erweiterte Luenberger-Beobachter (ELO) wird angewendet. Als Dynamik wird hierbei häufig angenommen, dass sich die zusätzlich eingefügten Zustände nicht ändern, mit der Begründung, dass die Dynamik der erweiterten Größen deutlich langsamer ist als die der ursprünglichen Zustände. Anschließend wird das nichtlineare System in jedem Rechenschritt um den aktuellen Schätzwert linearisiert, um die Grundgleichungen des linearen Luenberger-Beobachters anwenden zu können. Beispielsweise wird in [DB93] dieser Ansatz verwendet, um eine kombinierte Schätzung der Zustandsgrößen, der mechanischen Winkelgeschwindigkeit und des Lastmomentes sowie eine kombinierte Schätzung der Zustandsgrößen und der inversen Rotorzeitkonstanten durchzuführen. Insbesondere bei den experimentellen Ergebnissen in [DB93] zeigt sich, dass sich Messfehler bei dieser Art der Zustandsschätzung deutlich auf die Güte der Schätzung auswirken, sodass hier sogar eine nachträgliche Filterung der Schätzwerte erforderlich ist.

## 2.2.2 Deterministische Zustandsschätzverfahren mit Berücksichtigung von Unsicherheiten

In [DLSZ99] wurde bislang das einzige Mal ein deterministisches Verfahren, welches unbekannte, aber beschränkte Unsicherheiten berücksichtigt, zur Zustandsschätzung einer ASM angewendet. Da dieses Verfahren zur Klasse der bereits vorgestellten ZMB gehört, soll an dieser Stelle nur kurz auf die Eigenschaften eingegangen werden, die eine Anwendung auf die vorliegende Problemstellung verhindern. Da die Methodik auf einem zeitdiskreten Systemmodell beruht, wird eine Diskretisierung ohne systematische Abschätzung des Diskretisierungsfehlers durchgeführt. Wie in [Wol10] dargelegt, gehen damit die Garantien der Schätzung verloren. Des Weiteren sind auch die mit Ellipsoiden erzielten Einschließungen von geringer Güte, was sich in der Veröffentlichung dadurch zeigt, dass bei der Anwendung zur Diagnose selbst sehr große Fehler nicht verlässlich detektiert werden können.

## 2.2.3 Stochastische Zustandsschätzverfahren

Als Alternative zu der rein deterministischen Betrachtung der ASM wurden Verfahren entwickelt, die Modellungenauigkeiten und Messungenauigkeiten in Form von stochastischen Störungen auf die Systemdynamik und die Ausgangsgröße berücksichtigen, wie in (2.12a) und (2.12b) gezeigt. Der bekannteste Vertreter dieser Verfahren ist das Kalman-Filter mit seinen verschiedenen Erweiterungen. Die Grundstruktur gleicht hierbei der des in Abbildung 2.3 dargestellten Luenberger-Beobachters. Der entscheidende Unterschied ist, dass, basierend auf den als a priori bekannt angenommenen stochastischen Eigenschaften des Systemrauschens  $\mathbf{w}$ , definiert in (2.12c), und des Messrauschens  $\mathbf{v}$ , definiert in (2.12d), die optimale, zeitvariante Beobachtermatrix  $\mathbf{L}(t)$  berechnet wird, welche den quadratischen Schätzfehler minimiert. Die stochastischen Störungen  $\mathbf{w}$  und  $\mathbf{v}$  werden hierbei als weißes gaußsches Rauschen mit dem Erwartungswert  $\mathbf{0}$  und den Kovarianzmatrizen  $\mathbf{Q}_w$  und  $\mathbf{Q}_v$  modelliert.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{w} \quad (2.12a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{v} \quad (2.12b)$$

$$\mathbf{w} \sim (\mathbf{0}, \mathbf{Q}_w) \quad (2.12c)$$

$$\mathbf{v} \sim (\mathbf{0}, \mathbf{Q}_v) \quad (2.12d)$$

Wie der Luenberger-Beobachter wird auch das Kalman-Filter üblicherweise nicht ausschließlich zur Zustandsbestimmung angewendet, sondern zur kombinierten Zustands- und Parameterschätzung der ASM genutzt. Dazu wird der Zustandsvektor um die zu schätzenden Parameter erweitert, wodurch man ein nichtlineares System erhält. Hierbei wird ein Modell für die Parameteränderungen angenommen, wobei wie beim ELO die Parameter häufig als konstant modelliert werden. Im Gegensatz zu dem bereits vorgestellten deterministischen Vorgehen, gibt es hier nun jedoch zwei Vorgehen, um mit diesem Umstand umzugehen. Die erste Möglichkeit ist, gleich der Grundidee beim ELO, eine Linearisierung durchzuführen, was auf das erweiterte Kalman-Filter (EKF)

führt. In [EMGSM99] werden hiermit die Zustandsgrößen, die mechanische Winkelgeschwindigkeit und der Rotorwiderstand geschätzt, während in [ZDL92] neben den Zustandsgrößen die inverse Rotorzeitkonstante geschätzt wird. Auf die übliche Problematik, dass bei einer praktischen Anwendung der Methodik die Rauscheigenschaften nicht bekannt sind, wird in [ZDL92] nicht eingegangen beziehungsweise es werden keine Angaben zu den Unsicherheitsannahmen getroffen. In [EMGSM99] wird hierauf konkret eingegangen. Die Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_v$  wurde als Diagonalmatrix mit Einträgen, welche 5 % der Statornennspannung betragen, gewählt. Die Varianz der Ausgangswerte wurde also gleich einem absoluten Fehler gesetzt, der jedoch heuristisch festgelegt wurde, da die Messgröße nicht der Statorspannung entspricht. Die Einträge der Kovarianzmatrix  $\mathbf{Q}_w$  wurden in Simulationen durch „trial and error“ mit dem Ziel ermittelt, ein gewünschtes stationäres und transientes Verhalten des Schätzalgorithmus zu erzielen.

Eine Alternative zum EKF stellt das Unscented Kalman-Filter (UKF) dar. Es umgeht die in [JUDW95] beschriebenen Probleme des EKF in Form von instabilem Verhalten durch die Linearisierung und hohem Rechenaufwand bei der Berechnung der Jakobimatrizen in jedem Abtastschritt. Wie in [WVDM00] beschrieben, werden hierzu der korrekte Mittelwert und die korrekte Kovarianzmatrix mithilfe einer endlichen Anzahl an Punkten der Zustandsverteilung dargestellt. Nur an diesen speziellen Punkten muss anschließend die nichtlineare Systemfunktion ausgewertet werden, um das tatsächliche Verhalten zu beschreiben. Im Kontext der kombinierten Zustands- und Parameterschätzung für ASM findet das Verfahren in [LVS<sup>+</sup>12] Anwendung zur Schätzung der Zustände und von vier Ersatzparametern für fünf Maschinenparameter. In [AOE03] wird neben den Zustandsgrößen die mechanische Winkelgeschwindigkeit geschätzt. Die Notwendigkeit der Kenntnis der stochastischen Eigenschaften von  $\mathbf{w}$  und  $\mathbf{v}$  bleibt jedoch bestehen. In [AOE03] werden diese stochastischen Eigenschaften nicht als bekannt vorausgesetzt, sondern zur Optimierung des stationären oder transienten Verhaltens genutzt, wobei in [LVS<sup>+</sup>12] ergänzt wird, dass bei diesem Vorgehen gerade bei der experimentellen Erprobung ein intensives Parametertuning notwendig ist. Nichtsdestotrotz konnte am Beispiel der ASM in [AOE03] gezeigt werden, dass das UKF dem EKF hinsichtlich der Schätzungsgüte überlegen ist, obgleich eine stationäre Abweichung des Schätzwertes vom Referenzwert auch beim UKF vorliegt.

## 2.2.4 Bewertung

Nachdem nun die wichtigsten Verfahren zur Zustandsschätzung bei ASM vorgestellt wurden, soll deren Tauglichkeit zur Angabe von Garantien bezüglich der Zustandsschätzung untersucht werden. Bei den in Abschnitt 2.2.1 vorgestellten deterministischen Verfahren werden Unsicherheiten gänzlich vernachlässigt, wodurch eine Angabe von Garantien keinesfalls möglich ist, da Messunsicherheiten bei jeder praktischen Anwendung vorliegen ([Kre95]). Lediglich eine Veröffentlichung berücksichtigt unbekanntes, aber beschränkte Unsicherheiten bei einer deterministischen Methode, jedoch wie beschrieben ohne eine garantierte Einschließung. Abseits dieser Methoden sind keine anderen deterministischen Methoden bekannt, die unbekanntes, aber beschränkte Unsicherheiten bei der Zustandsschätzung für ASM berücksichtigen.

Auch die Anwendung der in Abschnitt 2.2.3 vorgestellten stochastischen Methoden ist zur garantierten Zustandsschätzung unter Berücksichtigung unbekannter, aber beschränkter Störungen nicht möglich. Wie dargestellt wurde, werden die Parameter zur Unsicherheitsbeschreibung bei diesen Verfahren üblicherweise vielmehr als Tuningparameter verwendet.

Der Stand der Wissenschaft zur Zustandsschätzung von ASM hinsichtlich aktuell eingesetzter Methoden bietet zusammengefasst daher keine Antwort auf die Frage nach einer garantierten Zustandsschätzung für ASM.

## 2.3 Forschungslücke

Mit dem Bestreben die in der Einleitung formulierte Zielstellung der Entwicklung von Methoden zur echtzeitfähigen, garantierten Zustandsschätzung von LPV-Systemen mit Zeitkonstanten im Millisekunden-Bereich weiter zu detaillieren, wurde dieses Kapitel motiviert. Die Ausführungen lieferten jedoch auch Anhaltspunkte zur weiteren Präzisierung des zweiten Ziels der Entwicklung eines durchgängigen Verfahrens zur garantierten Zustandsschätzung von Traktions-ASM.

Eine Recherche zum Stand der Forschung von Methoden zur garantierten Zustandsschätzung, welche auf den ersten Blick vielversprechend hinsichtlich einer Anwendung auf LPV-Systeme wirken (Abschnitt 2.1), hat ergeben, dass ZMB für die betrachteten zeitkontinuierlichen Systemmodelle keine garantierte Aussage ermöglichen oder deren Rechenaufwand eine echtzeitfähige Implementierung verhindert. Intervallbeobachter hingegen stellen aufgrund des geringeren Rechenaufwandes einen geeigneten Ansatz für die garantierte Zustandsschätzung dar. Allerdings konnte herausgearbeitet werden, dass die existierenden Ansätze zum Entwurf von Intervallbeobachtern für LPV-Systeme aufgrund zu strikter Entwurfsvoraussetzungen nicht anwendbar sind. Dies wirft die Forschungsfrage nach der Möglichkeit der Entwicklung eines auf eine breite Klasse von LPV-Systemen anwendbaren Intervallbeobachterentwurfs auf.

Auch die Untersuchung auf die ASM angepasster Zustandsschätzverfahren konnte keine Verfahren, welche diese Lücke schließen können, hervorbringen. Wie herausgearbeitet wurde, besteht der häufigste Ansatz darin keine Unsicherheiten zu berücksichtigen. Falls diese Berücksichtigung finden, dann in Form stochastischer Unsicherheiten. Dies stellt den Anwender jedoch zum einen vor die Problematik, dass diese Eigenschaften in der Regel nicht bekannt sind ([Ada09, S. 312]) und zum anderen werden mit diesen Methoden keine garantierten Schranken für Zustandsgrößen bestimmt, die bei sicherheitskritischen Anwendungen wünschenswert wären. Lediglich eine Veröffentlichung beschäftigte sich bislang im Zusammenhang mit ASM mit den in dieser Arbeit behandelten deterministischen Unsicherheiten, jedoch wie in Abschnitt 2.2.2 dargestellt mit dem Ergebnis einer geringen Schätzgüte und einem der angewandten Methodik geschuldeten Verlust der garantierten Aussage.

Basierend auf dieser Analyse können die in der Einleitung aufgeworfenen Zielstellungen zu folgenden konkreten Forschungsfragen ausformuliert werden:

- Wie können Methoden zur echtzeitfähigen, garantierten Zustandsschätzung von LPV-Systemen mit Zeitkonstanten im Millisekunden-Bereich entwickelt werden?
  - Wie kann ein Intervallbeobachter formuliert werden, welcher für eine breite Klasse von LPV-Systemen, einschließlich derer zur Beschreibung einer ASM, anwendbar ist?
  - Wie kann zur weiteren Reduzierung des Rechenaufwandes erstmals ein reduzierter Intervallbeobachter für LPV-Systeme entworfen werden?
- Wie sieht ein durchgängiges Verfahren zur garantierten Zustandsschätzung von Traktions-ASM aus?
  - Welches LPV-Modell einer ASM ist zu wählen bzw. in welchem Koordinatensystem sind die Gleichungen anzugeben?
  - Wie kann für das gewählte Modell die für jeden Intervallbeobachterentwurf notwendige Bedingung, dass beschränkte Intervalle für die Ein- und Ausgangsgrößen vorliegen, erfüllt werden?
  - Wie kann eine Validierung unter Berücksichtigung unsicherer Messgrößen erfolgen?

# 3 Grenzverkoppelte Intervallbeobachter für LPV-Systeme

Im vorherigen Kapitel wurde aufgezeigt, dass Intervallbeobachter eine vielversprechende Möglichkeit, eine echtzeitfähige, garantierte Zustandsschätzung für LPV-Systeme durchzuführen, darstellen. Daher beschäftigt sich dieses Kapitel mit dem Entwurf von Intervallbeobachtern für LPV-Systeme, deren dynamische Systeme zur Erzeugung der den Zustandsvektor einschließenden Untergrenze und Obergrenze verkoppelt sind.

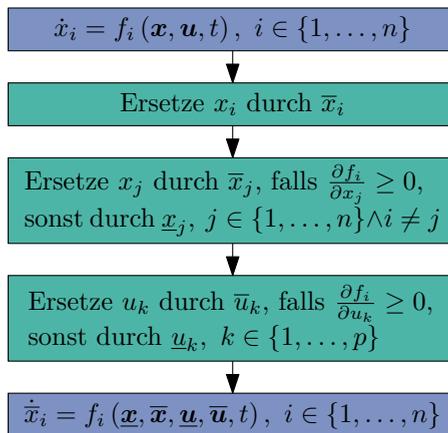
## 3.1 Grundidee

Der Ansatz beruht auf der Erzeugung eines Framers basierend auf Müllers Theorem (siehe Anhang C). Wie bereits in Abschnitt 2.1.2 dargestellt, beruht auch der Intervallbeobachterentwurf in [MR11] auf diesem Theorem. Die dortige Vorgehensweise muss jedoch deutlich erweitert werden, da insbesondere die Stabilitätsbeweise nicht übertragbar sind.

Da die zugrundeliegende Übertragung von Müllers Theorem auf den Entwurf des Intervallbeobachters bei der in diesem Kapitel formalisiert dargestellten Entwurfsprozedur nicht mehr zu erkennen sein wird, soll an dieser Stelle kurz die Prozedur an der Herleitung eines dynamischen Systems, dessen Lösung stets größer ist als die von  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  mit dem unsicheren Anfangswert  $\mathbf{x}_0 \in [\underline{\mathbf{x}}_0, \bar{\mathbf{x}}_0]$  und der unsicheren Eingangsgröße  $\mathbf{u}(t) \in [\underline{\mathbf{u}}(t), \bar{\mathbf{u}}(t)]$ , gezeigt werden. Grafisch ist das Vorgehen in Abbildung 3.1 dargestellt. Es wird dabei jede Zeile der Systemfunktion einzeln betrachtet. Da das in Lemma C.1 definierte Gebiet  $\bar{\mathbb{T}}_i(t)$ , in dem die Ungleichungen hinsichtlich der Zeilen der Systemfunktion des einzuschließenden Systems und der Zeilen der Systemfunktion des einschließenden Systems gelten müssen, die Gleichheit  $x_i(t) = \bar{x}_i(t)$  beinhaltet, wird im ersten Schritt  $x_i(t)$  durch  $\bar{x}_i(t)$  in jeder Zeile  $f_i$  der Systemfunktion  $\mathbf{f}$  ersetzt. Für die übrigen Zustandsgrößen  $x_j$  mit  $j \neq i$  gilt diese Gleichheit nicht, weswegen  $x_j$  in  $f_i$  durch  $\underline{x}_j$  oder  $\bar{x}_j$  derart ersetzt werden muss, dass  $\bar{x}_i$  im ganzen Gebiet größer gleich  $\dot{x}_i$  ist. Dies geschieht durch Bildung der partiellen Ableitung von  $f_i$  nach  $x_j$ . Ist diese nichtnegativ, wird  $x_j$  durch  $\bar{x}_j$  ersetzt, um die Maximierung von  $\bar{x}_i$  zu erreichen, andernfalls durch  $\underline{x}_j$ . Die gleiche Auswertung der partiellen Ableitungen wird für die Wahl der Grenzen der unsicheren Eingangsgröße getroffen. Eine anschauliche Erklärung, warum im Fall von  $x_i$  keine Fallunterscheidung gemacht werden muss und daher auch bei einer negativen partiellen Ableitung von  $f_i$  nach  $x_i$ ,  $x_i$  durch  $\bar{x}_i$  ersetzt wird, wurde bereits im Kontext positiver Systeme im Anschluss an Lemma 2.1 in Abschnitt 2.1.2 dargestellt. Um ein dynamisches System zur Abschätzung einer Untergrenze zu erhalten, sind lediglich die in Abbildung 3.1 angegebenen Grenzen zu

vertauschen. Charakteristisch für dieses Vorgehen ist, dass die dynamischen Systeme zur Bestimmung der Unter- und Obergrenze keine zwei dynamischen Systeme darstellen, sondern durch die offensichtliche Verkopplung der Grenzen ein dynamisches System darstellen. Um diese Eigenschaft, die der resultierende Intervallbeobachter im Gegensatz zu den übrigen Intervallbeobachteransätzen für LPV-Systeme ebenfalls aufweist, hervorzuheben, wird dieser Typ als grenzverkoppelter Intervallbeobachter bezeichnet. Basierend auf dieser Grundidee zur Definition eines Framers für ein beliebiges dynamisches System soll nachfolgend zunächst ein Intervallbeobachter für LTI-Systeme unter Berücksichtigung von Ein-/Ausgangsunsicherheiten vorgestellt werden, um das prinzipielle Entwurfsvorgehen an einer einfachen Systemklasse zu schildern. Anschließend wird der Ansatz auf LPV-Systeme und auf die zusätzliche Berücksichtigung unsicherer Parameter erweitert.

Nachfolgend wird von stabilen Systemen mit beschränkten Ein- und Ausgangsgrößen ausgegangen.



**Abbildung 3.1:** Erzeugung eines dynamischen Systems zur Abschätzung einer Obergrenze basierend auf Müllers Theorem

Zur kompakten Darstellung der eigenen Ansätze werden in Definition 3.1 einige Matrixoperatoren definiert. Im Falle des in (3.2a) definierten Operators erfolgt hierbei eine Betragsbildung spezieller Matrixelemente rein aufgrund ihrer Platzierung in der Matrix. Im Gegensatz dazu werden bei den in den Gleichungen (3.3a) bis (3.4b) definierten Operatoren spezielle Matrixelemente basierend auf ihrer Platzierung sowie ihres Vorzeichens zu null gesetzt, während die zu null zu setzenden Elemente in (3.1a) und (3.1b) rein aufgrund ihres Vorzeichens ausgewählt werden. Die Auswertungen in (3.1a) und (3.1b) sind elementweise zu verstehen.

**Definition 3.1 (Matrix-Operatoren<sup>1</sup>)**

Betrachtet sei eine Matrix  $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  sowie eine quadratische Matrix  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

$$\mathcal{P}^+ \{M\} := M^+ = \max(\mathbf{0}, M) \quad (3.1a)$$

$$\mathcal{P}^- \{M\} := M - M^+ = M^- = \min(\mathbf{0}, M) \quad (3.1b)$$

$$\mathcal{M} \{S = (s_{ij})\} := \tilde{S} = (\tilde{s}_{ij}) \quad (3.2a)$$

mit

$$\tilde{s}_{ij} = \begin{cases} s_{ij} & , \text{ falls } (i = j) \\ \tilde{s}_{ij} = |s_{ij}| & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (3.2b)$$

$$\tilde{\mathcal{P}}^+ \{S = (s_{ij})\} := \tilde{S}^+ = (\tilde{s}_{ij}^+) \quad (3.3a)$$

mit

$$\tilde{s}_{ij}^+ = \begin{cases} s_{ij} & , \text{ falls } (i = j \vee (i \neq j \wedge s_{ij} \geq 0)) \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (3.3b)$$

$$\tilde{\mathcal{P}}^- \{S = (s_{ij})\} := \tilde{S}^- = (\tilde{s}_{ij}^-) \quad (3.4a)$$

mit

$$\tilde{s}_{ij}^- = \begin{cases} s_{ij} & , \text{ falls } (i \neq j \wedge s_{ij} < 0) \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (3.4b)$$

## 3.2 Grenzverkoppelter Intervallbeobachter für LTI-Systeme unter Berücksichtigung von Ein-/Ausgangsunsicherheiten

Einführend soll in diesem Abschnitt der Entwurf eines grenzverkoppelten Intervallbeobachters für LTI-Systeme ohne Durchgriff, welche in der Standardform

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t), \quad (3.5a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) \quad (3.5b)$$

<sup>1</sup> An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die eingeführten Operatoren ohne Einschränkungen zu jedem Zeitpunkt  $t$  auch auf zeitvariante Matrizen angewendet werden können.

mit  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$  und  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$  vorliegen, präsentiert werden. Wird auf den klassischen Luenberger-Beobachter

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t) + \mathbf{L} \cdot \mathbf{y}(t) \quad (3.6)$$

mit der Beobachtdynamikmatrix

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{L} \cdot \mathbf{C} \quad (3.7)$$

das zuvor erwähnte Vorgehen zur Bestimmung eines Framers angewendet und zusätzlich ein Stabilitätskriterium zur Sicherstellung einer beschränkten Intervallbreite ergänzt, folgt der in Satz 3.2 definierte grenzverkoppelte Intervallbeobachter für LTI-Systeme. Das System (3.5) muss zur Erfüllung des Stabilitätskriteriums Annahme 3.1 erfüllen. Ferner müssen, wie in Annahme 3.2 vermerkt, die Einträge der Systemmatrizen beschränkt sein. Letztere Annahme ist bei realen Systemen immer erfüllt und stellt daher keine strenge Bedingung dar.

### Annahme 3.1

Es existiert eine konstante Beobachtermatrix  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times q}$ , sodass

$$\tilde{\mathbf{F}} := \mathcal{M}(\mathbf{F}) \quad (3.8)$$

unter Berücksichtigung von (3.7) und Definition 3.1 eine Hurwitz-Matrix ist.

Eine notwendige Bedingung, damit Annahme 3.1 erfüllt ist, ist in Satz 3.1 gegeben. Für den Fall, dass die Dynamikmatrix  $\mathbf{A}$  des Systems für das der Intervallbeobachter entworfen werden soll, nichtnegative Hauptdiagonalelemente hat, muss daher das zugehörige Hauptdiagonalelement der Matrix  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{C}$  positiv sein.

### Satz 3.1 (Notwendige Bedingung für negative Eigenwerte einer zeitvarianten Metzler-Matrix ([Šil78, S. 404]))

Eine Metzler-Matrix  $\chi$  ist dann und nur dann eine Hurwitz-Matrix, wenn sie quasidominant diagonal<sup>2</sup> ist und ausschließlich negative Hauptdiagonalelemente hat.

<sup>2</sup> Eine Matrix  $\mathbf{S} = (s_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist quasidominant diagonal, wenn für  $\kappa_k > 0$  mit  $k \in \{1, \dots, n\}$  die Ungleichung  $\kappa_i \cdot |s_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \kappa_j \cdot |s_{ij}|$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  oder die Ungleichung  $\kappa_j \cdot |s_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \kappa_i \cdot |s_{ij}|$  für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$  gilt.

**Annahme 3.2**

Die Elemente von  $\mathbf{A} = (a_{ij})$ , die Elemente von  $\mathbf{B} = (b_{\kappa\iota})$  und die Elemente von  $\mathbf{C} = (c_{\nu k})$  sind beschränkt, d. h.

$$|a_{ij}| < \infty \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, n\}, \quad (3.9a)$$

$$|b_{\kappa\iota}| < \infty \quad \forall \kappa \in \{1, \dots, n\}, \iota \in \{1, \dots, p\}, \quad (3.9b)$$

$$|c_{\nu\kappa}| < \infty \quad \forall \nu \in \{1, \dots, q\}, \kappa \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.9c)$$

**Satz 3.2 (Grenzverkoppelter Intervallbeobachter für LTI-Systeme)**

Sind die Annahmen 3.1 und 3.2 erfüllt, dann ist ein Intervallbeobachter für (3.5) zur Berücksichtigung unsicherer Eingangsgrößen nach (2.2) und unsicherer Ausgangsgrößen nach (2.3) durch

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) \\ \dot{\overline{\mathbf{x}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}^+ & \tilde{\mathbf{F}}^- \\ \tilde{\mathbf{F}}^- & \tilde{\mathbf{F}}^+ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}(t) \\ \overline{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}^+ & \mathbf{B}^- \\ \mathbf{B}^- & \mathbf{B}^+ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}(t) \\ \overline{\mathbf{u}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{L}^+ & \mathbf{L}^- \\ \mathbf{L}^- & \mathbf{L}^+ \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{y}}(t) \\ \overline{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{F}}^+ := \tilde{\mathcal{P}}^+ \{\mathbf{F}\}, \quad \tilde{\mathbf{F}}^- := \tilde{\mathcal{P}}^- \{\mathbf{F}\}, \quad (3.11a)$$

$$\mathbf{B}^+ := \mathcal{P}^+ \{\mathbf{B}\}, \quad \mathbf{B}^- := \mathcal{P}^- \{\mathbf{B}\}, \quad (3.11b)$$

$$\mathbf{L}^+ := \mathcal{P}^+ \{\mathbf{L}\}, \quad \mathbf{L}^- := \mathcal{P}^- \{\mathbf{L}\} \quad (3.11c)$$

gegeben. Die Anfangswerte der Lösung von (3.10) sind dabei so zu wählen, dass sie den tatsächlichen Systemzustand einschließen, d. h.

$$\underline{\mathbf{x}}(0) \leq \mathbf{x}(0) \leq \overline{\mathbf{x}}(0). \quad (3.12)$$

**Beweis:**

Der Beweis, dass das in Satz 3.2 eingeführte dynamische System ein Intervallbeobachter für (3.5) darstellt, gliedert sich in zwei Teile auf. Zunächst wird gezeigt, dass die in (2.7) eingeführten Beobachterfehlerdynamiken positive Systeme darstellen, woraus die Einschließung des realen Systemzustands und daher die Tatsache, dass (3.10) ein Frammer für (3.5) ist, folgt. Im zweiten Schritt wird bewiesen, dass die Dynamik der in (2.8) eingeführten Intervallbreite stabil, die Intervallbreite daher beschränkt und (3.10) deshalb ein Intervallbeobachter für (3.5) ist.

Durch die Kombination von  $\dot{\underline{\mathbf{e}}}(t)$  und  $\dot{\overline{\mathbf{e}}}(t)$  zu einem Differentialgleichungssystem ergibt

sich unter Berücksichtigung von  $\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}}^+ + \tilde{\mathbf{F}}^-$ ,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^+ + \mathbf{B}^-$  und  $\mathbf{L} = \mathbf{L}^+ + \mathbf{L}^-$

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{e}}}(t) \\ \dot{\underline{\mathbf{e}}}(t) \end{bmatrix}}_{=\dot{\mathbf{e}}(t)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}^+ & -\tilde{\mathbf{F}}^- \\ -\tilde{\mathbf{F}}^- & \tilde{\mathbf{F}}^+ \end{bmatrix}}_{=\mathcal{F}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}(t) \\ \underline{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix}}_{=\mathbf{e}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}^+ & -\mathbf{B}^- \\ -\mathbf{B}^- & \mathbf{B}^+ \end{bmatrix}}_{=\mathcal{B}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{u}(t) - \underline{\mathbf{u}}(t) \end{bmatrix}}_{=\mathbf{u}(t)} \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{L}^+ & -\mathbf{L}^- \\ -\mathbf{L}^- & \mathbf{L}^+ \end{bmatrix}}_{=\mathcal{L}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t) - \underline{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix}}_{=\mathbf{y}(t)}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Aufgrund der Tatsache, dass es sich bei  $\mathcal{F}$  um eine Metzler-Matrix handelt, bei  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{L}$  um nicht nichtnegative Matrizen und auch  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{y}$  nichtnegative Vektoren darstellen, handelt es sich nach Definition 2.4 um ein Metzler-System mit nichtnegativem Eingang und aufgrund von (3.12) nichtnegativen Anfangswerten. Damit ist nach Lemma 2.1 und Definition 2.3 die Positivität der Beobachterfehler garantiert.

Die für den zweiten Schritt notwendige Dynamik der Intervallbreite ist durch

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) - \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) &= \tilde{\mathbf{F}} \cdot [\bar{\mathbf{x}}(t) - \underline{\mathbf{x}}(t)] + [\mathbf{B}^+ - \mathbf{B}^-] \cdot [\bar{\mathbf{u}}(t) - \underline{\mathbf{u}}(t)] \\ &+ [\mathbf{L}^+ - \mathbf{L}^-] \cdot [\bar{\mathbf{y}}(t) - \underline{\mathbf{y}}(t)] \end{aligned} \quad (3.14)$$

gegeben. Aufgrund der Wahl von  $\mathbf{L}$  derart, dass die Metzler-Matrix  $\tilde{\mathbf{F}}$  auch eine Hurwitz-Matrix ist, stellt (3.14) ein BIBO-stabiles System (siehe Definition D.2 und Lemma D.1 in Anhang D) dar, woraus aufgrund der beschränkten Anregung eine beschränkte Intervallbreite folgt.  $\square$

An dieser Stelle sei angemerkt, dass die Intervallbreite im Falle einer nicht verschwindenden Ein-/Ausgangsunsicherheit aufgrund der nicht verschwindenden Anregung des Systems (3.14) nicht gegen null konvergiert.

**Beispiel 3.1:** Gegeben sei das System

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -9 \\ 3 & -10 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{B}} \cdot u(t), \quad (3.15a)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{C}} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = x_1(t) \quad (3.15b)$$

für das ein grenzverkoppelter Intervallbeobachter entworfen werden soll.

Mit  $\mathbf{L}^\top = [l_1 \quad l_2]$  ergibt sich  $\mathbf{F}$  nach (3.7) zu

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 2 - l_1 & -9 \\ 3 - l_2 & -10 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

und daraus folgt die Dynamikmatrix der Intervallbreitendynamik

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 2 - l_1 & 9 \\ |3 - l_2| & -10 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Damit diese Matrix eine Hurwitz-Matrix ist, folgt aus ihrem charakteristischen Polynom die Bedingung  $l_1 > 2 + \frac{9}{10} \cdot |3 - l_2|$ , welche offensichtlich die Bedingung einer negativen Hauptdiagonale nach Satz 3.1 erfüllt. Exemplarisch wird  $\mathbf{L}^\top = \begin{bmatrix} 9 & 5 \end{bmatrix}$  gewählt.

Nach Satz 3.2 ist

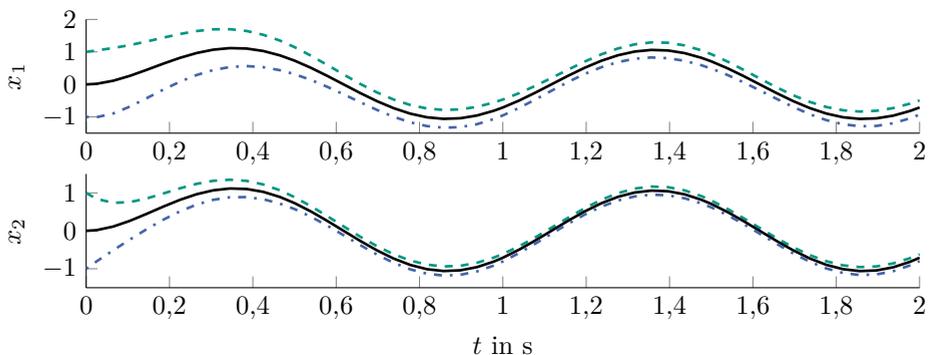
$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \\ \dot{\underline{x}}_1(t) \\ \dot{\underline{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & -10 & -2 & 0 \\ 0 & -9 & -7 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ \underline{x}_1(t) \\ \underline{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{u}(t) \\ \underline{u}(t) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$+ \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 5 & 0 \\ 0 & 9 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{y}(t) \\ \underline{y}(t) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

ein Intervallbeobachter für (3.15).

Als Startwerte für die Simulation wird für das System  $\mathbf{x}^\top(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$  und für den Intervallbeobachter  $\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}^\top(0) & \underline{\mathbf{x}}^\top(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$  gewählt. Die Eingangsgröße wird zu  $u(t) = 10 \cdot \sin(2\pi \cdot t)$  gewählt. Die Ein- und Ausgangsunsicherheit wird zu  $\pm 5\%$  der tatsächlichen Größe festgelegt und symmetrisch um die tatsächliche Größe gelegt.

Mit diesem Simulationsszenario werden die in Abbildung 3.2 wiedergegebenen Ergebnisse erzielt<sup>3</sup>. In schwarz ist jeweils der Verlauf der Zustandsgröße abgebildet, in grün die geschätzte Obergrenze und in blau die geschätzte Untergrenze. Wie zu erkennen ist, schließt das Ergebnis des Intervallbeobachters die Zustandsgröße zu jedem Zeitpunkt mit einer beschränkten Intervallbreite ein. Damit ist das gewünschte Ergebnis erreicht.



**Abbildung 3.2:** Beispiel 3.1: Ergebnis der Intervallschätzung des grenzverkoppelten Intervallbeobachters für LTI-Systeme mit Ein-/Ausgangsunsicherheiten (Untergrenze: blau strichpunktiert, Obergrenze: grün gestrichelt, tatsächliche Zustandsgröße: schwarz)

<sup>3</sup> Die Simulationen innerhalb sämtlicher Beispiele wurden in Simulink mit MATLAB R2012b durchgeführt. Als Solver zur numerischen Lösung der Differentialgleichungen wurde ode45 verwendet.

### 3.3 Grenzverkoppelter Intervallbeobachter für LPV-Systeme unter Berücksichtigung von Ein-/Ausgangsunsicherheiten

Das Ziel dieses Abschnittes ist die Erweiterung des im vorherigen Abschnitt vorgestellten grenzverkoppelten Intervallbeobachters für LTI-Systeme auf LPV-Systeme. Während die Definition eines Framers für LPV-Systeme analog verläuft, muss die Stabilitätsuntersuchung nun auf zeitvariante Systeme angepasst werden. Dazu seien zunächst Lemma 3.1 und Lemma 3.2 eingeführt. Darüber hinaus sei die für alle Ansätze dieses Abschnittes zu erfüllende Annahme, dass die Parameter zu jedem Zeitpunkt exakt bekannt sein müssen, definiert.

**Lemma 3.1 (BIBO Stabilität von LPV-Systemen ([Rug96, S. 206]))**

System (1.1) ist BIBO-stabil<sup>4</sup> (Definition D.2), wenn es für  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$  gleichmäßig exponentiell stabil (Definition D.4) ist und zwei endliche Konstanten  $\kappa$  und  $\iota$  existieren, sodass

$$\|\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}(t))\|_2 \leq \kappa, \quad (3.20a)$$

$$\|\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}(t))\|_2 \leq \iota \quad (3.20b)$$

gilt.

**Lemma 3.2 (Gleichmäßige exponentielle Stabilität von autonomen LPV-Systemen ([Rug96, S. 117]))**

Das Differentialgleichungssystem (1.1a) mit  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$  ist gleichmäßig exponentiell stabil, wenn eine symmetrische und stetig differenzierbare Matrixfunktion  $\boldsymbol{\chi}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  sowie drei endliche positive Konstanten  $\nu, \zeta, \eta$  existieren, sodass

$$\nu \cdot \mathbf{I} \preceq \boldsymbol{\chi}(t) \preceq \zeta \cdot \mathbf{I}, \quad (3.21a)$$

$$\mathbf{A}^\top(\boldsymbol{\theta}(t)) \cdot \boldsymbol{\chi}(t) + \boldsymbol{\chi}(t) \cdot \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t)) + \dot{\boldsymbol{\chi}}(t) \preceq -\eta \cdot \mathbf{I} \quad (3.21b)$$

für alle  $t$  gilt.

Zur Erläuterung des verwendeten Symbols  $\preceq$  sei auf [Rug96, S. 115] verwiesen. Dort ist die Äquivalenz von  $\boldsymbol{\chi}(t) \succeq \iota \cdot \mathbf{I}$  und  $\boldsymbol{\kappa}^\top \cdot \boldsymbol{\chi}(t) \cdot \boldsymbol{\kappa} \geq \iota \cdot \|\boldsymbol{\kappa}\|_2^2$  mit  $\iota > 0$  beschrieben. Damit definiert (3.21a) die Matrixfunktion  $\boldsymbol{\chi}(t)$  als beschränkt und positiv definit und (3.21b) die linke Seite des Ausdrucks als negativ definit.

<sup>4</sup> In [Rug96, S. 206] lautet es „uniform bounded-input, bounded-output“-stabil, also *gleichmäßig* BIBO-stabil. Wie an der Definition in selbiger Quelle auf S. 204 zu erkennen ist, ist ein System, das gleichmäßig BIBO-stabil ist, auch BIBO-stabil nach Definition D.2.

**Annahme 3.3**

Die Einträge von  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))$ ,  $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}(t))$ ,  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}(t))$  in (1.1) seien zur Laufzeit des zu entwerfenden Beobachters bekannt für alle  $t$  (z. B. durch Messung).

**3.3.1 Vollständiger Intervallbeobachter**

Bevor ein vollständiger grenzverkoppelter Intervallbeobachter für (1.1) angegeben werden kann, muss mit Annahme 3.4 eine letzte zu erfüllende Voraussetzung definiert werden.

**Annahme 3.4**

Es existieren eine Beobachtermatrix  $\mathbf{L}(t) \in \mathbb{R}^{n \times q}$  und eine symmetrische, beschränkte, stetig differenzierbare und positiv definite Matrixfunktion  $\boldsymbol{\chi}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , sodass

$$\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\theta}(t), t) = \tilde{\mathbf{F}}^\top(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \boldsymbol{\chi}(t) + \boldsymbol{\chi}(t) \cdot \tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\theta}(t), t) + \dot{\boldsymbol{\chi}}(t) \quad (3.22)$$

unter Berücksichtigung von

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t)) - \mathbf{L}(t) \cdot \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}(t)) \quad (3.23)$$

und

$$\tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\theta}(t), t) := \mathcal{M}(\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t)) \quad (3.24)$$

für alle  $t$  negativ definit ist<sup>5</sup>.

Analog zum in Satz 3.2 definierten grenzverkoppelten Intervallbeobachter für LTI-Systeme ist ein grenzverkoppelter Intervallbeobachter für LPV-Systeme durch das in Satz 3.3 definierte dynamische System gegeben.

<sup>5</sup> Die Beobachtermatrix wird an dieser Stelle allgemein als zeitvariant angegeben, was nicht ausschließt, dass sie eine Abhängigkeit vom Parametervektor aufweist.

**Satz 3.3 (Vollständiger grenzverkoppelter Intervallbeobachter für LPV-Systeme)**

Sind die Annahmen 3.2, 3.3 und 3.4 für zeitvariante Systemmatrizen erfüllt, dann ist ein Intervallbeobachter für (1.1) zur Berücksichtigung unsicherer Eingangsgrößen nach (2.2) und unsicherer Ausgangsgrößen nach (2.3) durch

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) \\ \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}^+(\boldsymbol{\theta}(t), t) & \tilde{\mathbf{F}}^-(\boldsymbol{\theta}(t), t) \\ \tilde{\mathbf{F}}^-(\boldsymbol{\theta}(t), t) & \tilde{\mathbf{F}}^+(\boldsymbol{\theta}(t), t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}(t) \\ \underline{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}^+(\boldsymbol{\theta}(t)) & \mathbf{B}^-(\boldsymbol{\theta}(t)) \\ \mathbf{B}^-(\boldsymbol{\theta}(t)) & \mathbf{B}^+(\boldsymbol{\theta}(t)) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}(t) \\ \underline{\mathbf{u}}(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{L}^+(t) & \mathbf{L}^-(t) \\ \mathbf{L}^-(t) & \mathbf{L}^+(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{y}}(t) \\ \underline{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.25)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{F}}^+(\boldsymbol{\theta}(t), t) := \tilde{\mathcal{P}}^+ \{ \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \}, \quad \tilde{\mathbf{F}}^-(\boldsymbol{\theta}(t), t) := \tilde{\mathcal{P}}^- \{ \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \}, \quad (3.26a)$$

$$\mathbf{B}^+(\boldsymbol{\theta}(t)) := \mathcal{P}^+ \{ \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}(t)) \}, \quad \mathbf{B}^-(\boldsymbol{\theta}(t)) := \mathcal{P}^- \{ \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}(t)) \}, \quad (3.26b)$$

$$\mathbf{L}^+(t) := \mathcal{P}^+ \{ \mathbf{L}(t) \}, \quad \mathbf{L}^-(t) := \mathcal{P}^- \{ \mathbf{L}(t) \} \quad (3.26c)$$

und der Definition der Beobachterdynamikmatrix (3.23) gegeben. Die Anfangswerte der Lösung von (3.25) sind dabei so zu wählen, dass (3.12) gilt.

**Beweis:**

Da der Beweis analog zu dem für grenzverkoppelte Intervallbeobachter für LTI-Systeme verläuft, sollen hier nur die Kernpunkte dargestellt werden. Für die Beobachterfehlerdynamik erhält man das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\underline{\mathbf{e}}}(t) \\ \dot{\underline{\mathbf{e}}}(t) \end{bmatrix} &= \overbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}^+(\boldsymbol{\theta}(t), t) & -\tilde{\mathbf{F}}^-(\boldsymbol{\theta}(t), t) \\ -\tilde{\mathbf{F}}^-(\boldsymbol{\theta}(t), t) & \tilde{\mathbf{F}}^+(\boldsymbol{\theta}(t), t) \end{bmatrix}}^{=\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t)} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{e}}(t) \\ \underline{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix}}^{=\mathcal{E}(t)} \\ &+ \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B}^+(\boldsymbol{\theta}(t)) & -\mathbf{B}^-(\boldsymbol{\theta}(t)) \\ -\mathbf{B}^-(\boldsymbol{\theta}(t)) & \mathbf{B}^+(\boldsymbol{\theta}(t)) \end{bmatrix}}^{=\mathcal{B}(\boldsymbol{\theta}(t))} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}(t) - \underline{\mathbf{u}}(t) \\ \underline{\mathbf{u}}(t) - \underline{\mathbf{u}}(t) \end{bmatrix}}^{=\mathcal{U}(t)} \\ &+ \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{L}^+(t) & -\mathbf{L}^-(t) \\ -\mathbf{L}^-(t) & \mathbf{L}^+(t) \end{bmatrix}}^{=\mathcal{L}(t)} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{y}}(t) - \underline{\mathbf{y}}(t) \\ \underline{\mathbf{y}}(t) - \underline{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix}}^{=\mathcal{Y}(t)}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

welches (3.13), bis auf die Tatsache, dass die Systemmatrizen zeitvariant sind, gleicht. Daher stellt auch dieses System ein positives System mit positiven Eingangsgrößen und Anfangswerten dar, wodurch die Positivität der Beobachterfehler garantiert ist.

Die Dynamik der Intervallbreite ist durch

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) - \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) &= \tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot [\bar{\mathbf{x}}(t) - \underline{\mathbf{x}}(t)] \\ &\quad + [\mathbf{B}^+(\boldsymbol{\theta}(t)) - \mathbf{B}^-(\boldsymbol{\theta}(t))] \cdot [\bar{\mathbf{u}}(t) - \underline{\mathbf{u}}(t)] \\ &\quad + [\mathbf{L}^+(t) - \mathbf{L}^-(t)] \cdot [\bar{\mathbf{y}}(t) - \underline{\mathbf{y}}(t)] \end{aligned} \quad (3.28)$$

gegeben. Aufgrund der Wahl von  $\mathbf{L}(t)$  derart, dass Annahme 3.4 gilt, ist die Lösung von (3.28) beschränkt.  $\square$

Eine notwendige Bedingung, damit dieses stabile Verhalten von (3.28) im Falle des Intervallbeobachters erzielt werden kann, ist durch Satz 3.4 gegeben.

**Satz 3.4 (Notwendige Stabilitätsbedingung eines linear zeitvarianten Metzler-Systems mit positiven Anfangswerten)**

Ein lineares zeitvariantes Metzler-System (2.9), wobei für die Dynamik jeder Zustandsgröße  $x_i$  nicht für alle  $t$  die Beziehungen  $a_{ij}(t) = 0$  für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$  und  $b_{ik}(t) = 0$  für alle  $k \in \{1, \dots, p\}$  gelten dürfen<sup>6</sup>, ist für positive Anfangswerte  $\mathbf{x}(0)$  dann und nur dann stabil, wenn die Hauptdiagonalelemente von  $\mathbf{A}(t) = (a_{ij}(t))$  zeitweise negativ sind.

**Beweis:**

Gezeigt werden soll, dass  $|x_i(t)| < \infty$  für alle  $t \in [t_0, \infty)$  gilt. Betrachtet man eine Zeile  $i$  von (2.9), so ergibt sich

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) \cdot x_j(t) + \sum_{k=1}^p b_{ik}(t) \cdot u_k(t). \quad (3.29)$$

Hiermit gilt für  $x_i(t)$ :

$$\begin{aligned} x_i(t) &= x_i(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{x}_i(\tau) d\tau \\ &= x_i(t_0) + \int_{t_0}^t \underbrace{\left[ \sum_{j=1}^n a_{ij}(\tau) \cdot x_j(\tau) + \sum_{k=1}^p b_{ik}(\tau) \cdot u_k(\tau) - a_{ii}(\tau) \cdot x_i(\tau) \right]}_{=\zeta_i(\tau)} d\tau \\ &\quad + \int_{t_0}^t \underbrace{a_{ii}(\tau) \cdot x_i(\tau)}_{=:\iota_i(\tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Damit ist  $\zeta_i(\tau)$  eine Summe der Produkte der nichtnegativen Nebendiagonalelemente der Metzler-Matrix  $\mathbf{A}(t)$  und den positiven  $x_j(t)$  und der Produkte der nichtnegativen

<sup>6</sup> Dies wäre gleichbedeutend mit  $\dot{x}_i = 0$ .

Elemente von  $\mathbf{B}(t)$  und den nichtnegativen  $u_k(t)$ , woraus folgt, dass

$$\zeta_i(\tau) \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, \infty), i \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.31)$$

Aufgrund der positiven Anfangswerte gilt des Weiteren  $x_i(t_0) > 0$ . Der letzte Beweisschritt erfolgt nun durch Widerspruch. Für  $a_{ii}(\tau) \geq 0$  für alle  $t_0 < \tau < t$  wäre  $\iota(\tau) \geq 0$  für alle  $t_0 < \tau < t$ , was schließlich unter Berücksichtigung der Annahme des Einflusses von  $\mathbf{x}(t)$  bzw.  $\mathbf{u}(t)$  auf  $\dot{x}_i(t)$  wiederum auf  $\dot{x}_i(\tau) > 0$  für alle  $t_0 < \tau < t$  führt<sup>7</sup>. In diesem Fall würde die Grenzwertbetrachtung  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = \infty$  ergeben.  $\square$

Für lineare zeitinvariante Metzler-Systeme folgt aus Satz 3.4, dass die Hauptdiagonale der Dynamikmatrix für ein stabiles Verhalten negative Einträge besitzen muss. Dies wird bestätigt durch Satz 3.1.

Im Falle des grenzverkoppelten Intervallbeobachters für LPV-Systeme folgt hieraus, dass falls die Dynamikmatrix  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))$  des Systems für das der Intervallbeobachter entworfen werden soll, nichtnegative Hauptdiagonalelemente für alle  $t$  hat, das zugehörige Hauptdiagonalelement der Matrix  $\mathbf{L}(t) \cdot \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}(t))$  zumindest zeitweise positiv sein muss.

**Beispiel 3.2:** Gegeben sei das parametervariante System

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \kappa(t) & 2 \\ -11 & -3 \end{bmatrix}}{=\mathbf{A}(\kappa(t))} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}}{=\mathbf{B}} \cdot u(t), \quad (3.32a)$$

$$y(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}{=\mathbf{C}} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = x_2(t). \quad (3.32b)$$

Von dem zur Laufzeit exakt bekannten Parameter  $\kappa(t)$  sei a priori nur bekannt, dass  $-15 \leq \kappa(t) \leq -2$ . Um für dieses LPV-System einen grenzverkoppelten Intervallbeobachter zu entwerfen, wird zunächst die in (3.22) eingeführte Matrix  $\boldsymbol{\chi}(t)$  als zeitinvariante Einheitsmatrix gewählt. Die Wahl einer zeitinvarianten Matrix ist aus zwei Gründen sinnvoll. Erstens ist der zeitliche Verlauf von  $\kappa(t)$  ohnehin a priori unbekannt und zweitens ist  $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  mit  $\dot{\boldsymbol{\chi}}(t) = \mathbf{0}$  aufgrund der Tatsache, dass  $\boldsymbol{\chi}(t)$  symmetrisch ist, ebenfalls symmetrisch. Daraus folgt, dass die Eigenwerte von  $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  als Kriterium für die Definitheit herangezogen werden können.

Zur Bestimmung einer Beobachtermatrix, sodass Annahme 3.4 erfüllt ist, kann nun wie in Beispiel 3.1 eine analytische Funktion der Beobachtermatrix in Abhängigkeit der (zeitvarianten) Parameter basierend auf dem charakteristischen Polynom von  $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  hergeleitet werden. Diese Methode ist besonders dann sinnvoll, wenn a priori keine Schranken der zeitvarianten Parameter bekannt sind. Eine in diesem Beispiel verwendete Vorgehensweise, die insbesondere auch bei höherdimensionalen Problemen herangezogen werden kann, ist die Suche einer zeitinvarianten Beobachtermatrix unter Verwendung eines Computeralgebrasystems. Für dieses Beispiel

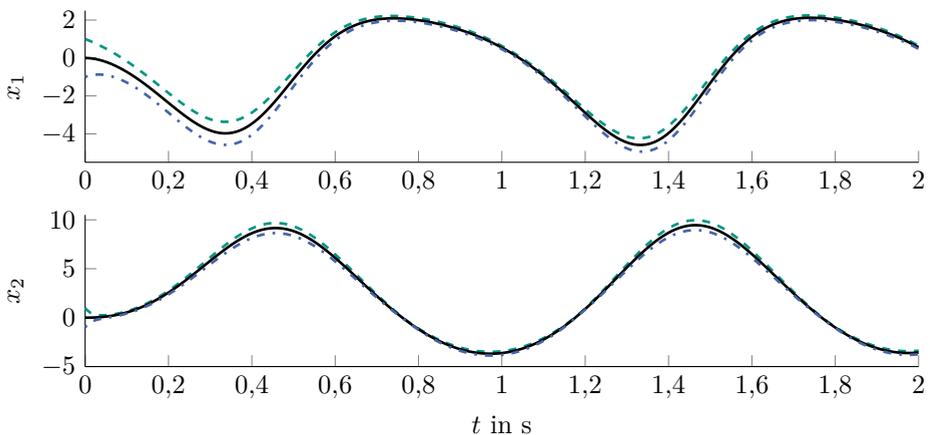
<sup>7</sup> Aufgrund der Forderung, dass für die Dynamik einer Zustandsgröße  $x_i$  nicht  $a_{ij} = 0$  für alle  $j \in \{1, \dots, n\} \wedge b_{ik} = 0$  für alle  $k \in \{1, \dots, p\}$  gelten darf, kann nicht zeitgleich  $\iota_i(\tau) = 0$  und  $\zeta_i(\tau) = 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  gelten.

wird die Funktion „FindInstance“ des Computeralgebrasystems *Mathematica* verwendet. Damit wird die konstante Beobachtermatrix  $\mathbf{L}^\top = [2 \ 70]$  bestimmt, die sicherstellt, dass die Eigenwerte von  $\nu(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  für den betrachteten Wertebereich des zeitvarianten Parameters negativ sind. Eine optimierungsbasierte Alternative hierzu wurde am Beispiel der ASM in [KGH17] vorgestellt.

Damit ergibt sich der Intervallbeobachter für (3.32) zu

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}_1(t) \\ \dot{\bar{x}}_2(t) \\ \dot{\underline{x}}_1(t) \\ \dot{\underline{x}}_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \kappa(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -73 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa(t) & 0 \\ -11 & 0 & 0 & -73 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ \underline{x}_1(t) \\ \underline{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \\ -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{u}(t) \\ \underline{u}(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 70 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 70 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{y}(t) \\ \underline{y}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Zur Simulation wird  $u(t) = 10 \cdot \sin(2\pi \cdot t)$  als Eingangsgröße gewählt und  $\kappa(t) = -8,5 + 6,5 \cdot \sin(2\pi \cdot t)$  für den Parameter, der jedoch erst zur Laufzeit für die Ausführung des Intervallbeobachters zur Verfügung steht. Die Startwerte der Integratoren des Systemmodells werden mit  $\mathbf{x}^\top(0) = [0 \ 0]$  initialisiert und die des Intervallbeobachters mit  $[\bar{\mathbf{x}}^\top(0) \ \underline{\mathbf{x}}^\top(0)] = [1 \ 1 \ -1 \ -1]$ . Die Ein-/Ausgangsunsicherheit beträgt  $\pm 5\%$  und wird symmetrisch um die tatsächliche Größe gelegt. Hiermit werden die in Abbildung 3.3 dargestellten Ergebnisse erzielt. In schwarz ist jeweils der Verlauf der Zustandsgröße abgebildet, in grün die geschätzte Obergrenze und in blau die geschätzte Untergrenze. Die tatsächliche Zustandsgröße wird zu jedem Zeitpunkt eingeschlossen, wobei die Intervallbreite beschränkt bleibt. Das Beispiel bestätigt damit die Funktion des Intervallbeobachters.



**Abbildung 3.3:** Beispiel 3.2: Ergebnis der Intervallschätzung des grenzverkoppelten Intervallbeobachters für LPV-Systeme mit Ein-/Ausgangsunsicherheiten (Untergrenze: blau strichpunktiert, Obergrenze: grün gestrichelt, tatsächliche Zustandsgröße: schwarz)

### 3.3.2 Reduzierter Intervallbeobachter

Wie in den bisherigen Ausführungen zu erkennen war, wird bei den entwickelten grenzverkoppelten Intervallbeobachtern zur Zustandsschätzung eines Systems der Ordnung  $n$  ein dynamisches System der Ordnung  $2n$  verwendet. Aus diesem Grund scheint gerade bei Intervallbeobachtern der Einsatz eines reduzierten Ansatzes, der nur die Schätzung der nicht messbaren Zustandsgrößen realisiert, hinsichtlich des Rechenaufwandes sinnvoll. Die zweite Tatsache, die für den Entwurf reduzierter grenzverkoppelter Intervallbeobachter spricht, ist, dass für diesen die Entwurfsvorschriften leichter zu erfüllen sind. Da diese durch die Betragsbildung der Nebendiagonalelemente der Intervallbreitendynamikmatrix strenger sind als jene beim Entwurf eines gewöhnlichen Luenberger-Beobachters, stellt dies einen großen Vorteil dar. Dies soll, sowohl in der durch diese beiden Tatsachen motivierten Herleitung, als auch an einem numerischen Beispiel verdeutlicht werden. Seinen Ursprung hat der Ansatz in der Masterarbeit [Sch13b] und wurde anschließend zur Berücksichtigung einer zeitvarianten Beobachtermatrix erweitert.

Damit der reduzierte grenzverkoppelte Intervallbeobachter entworfen werden kann, muss sich der Zustandsvektor  $\mathbf{x}(t)$  nach Annahme 3.5 zerlegen lassen.

#### Annahme 3.5

Der Zustandsvektor  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  besteht aus den messbaren Zustandsgrößen  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$  und den nicht messbaren Zustandsgrößen  $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^{n-q}$  in der Form

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{r}(t) \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Ist die Annahme 3.5 nicht direkt erfüllt, lässt sich nach [Lun13, S. 353] jedoch stets eine Untermenge der Zustandsgrößen finden, mit denen man unter Zuhilfenahme des Messvektors  $\mathbf{y}(t)$  die übrigen Zustandsgrößen rekonstruieren kann, weswegen nur für diese Untermenge ein reduzierter Zustandsbeobachter entworfen werden muss.

Unter Berücksichtigung von (3.34) lässt sich (1.1a) damit durch

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}(\boldsymbol{\theta}(t)) & \mathbf{A}_{12}(\boldsymbol{\theta}(t)) \\ \mathbf{A}_{21}(\boldsymbol{\theta}(t)) & \mathbf{A}_{22}(\boldsymbol{\theta}(t)) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1(\boldsymbol{\theta}(t)) \\ \mathbf{B}_2(\boldsymbol{\theta}(t)) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}(t) \quad (3.35)$$

mit den Matrizen  $\mathbf{A}_{11}(\boldsymbol{\theta}(t)) \in \mathbb{R}^{q \times q}$ ,  $\mathbf{A}_{12}(\boldsymbol{\theta}(t)) \in \mathbb{R}^{q \times (n-q)}$ ,  $\mathbf{A}_{21}(\boldsymbol{\theta}(t)) \in \mathbb{R}^{(n-q) \times q}$ ,  $\mathbf{A}_{22}(\boldsymbol{\theta}(t)) \in \mathbb{R}^{(n-q) \times (n-q)}$ ,  $\mathbf{B}_1(\boldsymbol{\theta}(t)) \in \mathbb{R}^{q \times p}$  und  $\mathbf{B}_2(\boldsymbol{\theta}(t)) \in \mathbb{R}^{(n-q) \times p}$  darstellen. Ferner kann unter Verwendung des reduzierten Hilfszustandsvektors  $\boldsymbol{\rho}(t) \in \mathbb{R}^{n-q}$  und der Beobachtermatrix  $\mathbf{L}(t) \in \mathbb{R}^{(n-q) \times q}$  die Koordinatentransformation

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{L}(t) \cdot \mathbf{y}(t) \quad (3.36)$$

eingeführt werden, welche nach [Lun13, S. 354 f.] die in der Praxis unerwünschte Differentiation des Messvektors, die bei direkter Schätzung von  $\mathbf{r}(t)$  auftritt, umgeht. Im Hinblick auf die nachfolgenden Herleitungen sei darauf hingewiesen, dass im Gegensatz

zu der in der Literatur zu findenden Standardformulierung der Koordinatentransformation (3.36) eine zeitvariante Beobachtermatrix angesetzt wurde. Damit ergibt sich die Dynamik des reduzierten Hilfszustandsvektors  $\boldsymbol{\rho}(t)$  zu

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}(t) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \boldsymbol{\rho}(t) + \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \mathbf{u}(t) + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \mathbf{y}(t) \quad (3.37)$$

mit

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t) = \mathbf{A}_{22}(\boldsymbol{\theta}(t)) - \mathbf{L}(t) \cdot \mathbf{A}_{12}(\boldsymbol{\theta}(t)), \quad (3.38a)$$

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}(t), t) = \mathbf{B}_2(\boldsymbol{\theta}(t)) - \mathbf{L}(t) \cdot \mathbf{B}_1(\boldsymbol{\theta}(t)), \quad (3.38b)$$

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}(t), t) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t)) \cdot \mathbf{L}(t) + \mathbf{A}_{21}(\boldsymbol{\theta}(t)) - \mathbf{L}(t) \cdot \mathbf{A}_{11}(\boldsymbol{\theta}(t)) - \dot{\mathbf{L}}(t). \quad (3.38c)$$

Basierend auf diesem dynamischen System und der Grundidee des Entwurfs eines grenzverkoppelten Intervallbeobachters soll nun ein dynamisches System entworfen werden, das ein beschränktes Intervall  $[\boldsymbol{\rho}(t)]$  bestimmt für das  $\boldsymbol{\rho}(t) \in [\boldsymbol{\rho}(t)]$  gilt. Anschließend soll dieser reduzierte Hilfszustandsintervallvektor in das ursprüngliche Koordinatensystem zurücktransformiert werden, um eine garantierte Information über die nicht messbaren Zustandsgrößen im Originalkoordinatensystem zu erhalten. Dieses dynamische System sowie die intervallararithmetische Rücktransformation sind in Satz 3.5 unter Berücksichtigung der Annahmen 3.2 und 3.6 formuliert.

### Annahme 3.6

Es existieren eine stetig differenzierbare Beobachtermatrix  $\mathbf{L}(t) \in \mathbb{R}^{(n-q) \times q}$  und eine symmetrische, beschränkte, stetig differenzierbare und positiv definite Matrixfunktion  $\boldsymbol{\chi}(t) \in \mathbb{R}^{(n-q) \times (n-q)}$ , sodass

$$\boldsymbol{\nu}(t) = \tilde{\mathbf{F}}^T(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \boldsymbol{\chi}(t) + \boldsymbol{\chi}(t) \cdot \tilde{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\theta}(t), t) + \dot{\boldsymbol{\chi}}(t) \quad (3.39)$$

unter Berücksichtigung von (3.38a) und (3.24) für alle  $t$  negativ definit ist.

**Satz 3.5 (Reduzierter grenzverkoppelter Intervallbeobachter für LPV-Systeme)**

Ist die Annahme 3.2 für zeitvariante Systemmatrizen erfüllt und sind die Annahmen 3.3 und 3.6 erfüllt, dann ist ein reduzierter Intervallbeobachter für (1.1) zur Berücksichtigung unsicherer Eingangsgrößen nach (2.2) und unsicherer Ausgangsgrößen nach (2.3) durch

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\underline{\rho}}(t) \\ \dot{\bar{\rho}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}^+(\boldsymbol{\theta}(t), t) & \tilde{\mathbf{F}}^-(\boldsymbol{\theta}(t), t) \\ \tilde{\mathbf{F}}^-(\boldsymbol{\theta}(t), t) & \tilde{\mathbf{F}}^+(\boldsymbol{\theta}(t), t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\rho}(t) \\ \bar{\rho}(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{H}^+(\boldsymbol{\theta}(t), t) & \mathbf{H}^-(\boldsymbol{\theta}(t), t) \\ \mathbf{H}^-(\boldsymbol{\theta}(t), t) & \mathbf{H}^+(\boldsymbol{\theta}(t), t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}(t) \\ \bar{\mathbf{u}}(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \mathbf{G}^+(\boldsymbol{\theta}(t), t) & \mathbf{G}^-(\boldsymbol{\theta}(t), t) \\ \mathbf{G}^-(\boldsymbol{\theta}(t), t) & \mathbf{G}^+(\boldsymbol{\theta}(t), t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{y}}(t) \\ \bar{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.40)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{F}}^+(t) := \tilde{\mathcal{P}}^+ \{ \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \}, \quad \tilde{\mathbf{F}}^-(t) := \tilde{\mathcal{P}}^- \{ \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \}, \quad (3.41a)$$

$$\mathbf{B}^+(t) := \mathcal{P}^+ \{ \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \}, \quad \mathbf{B}^-(t) := \mathcal{P}^- \{ \mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \}, \quad (3.41b)$$

$$\mathbf{L}^+(t) := \mathcal{P}^+ \{ \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \}, \quad \mathbf{L}^-(t) := \mathcal{P}^- \{ \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \} \quad (3.41c)$$

und den Definitionen der Beobachtersystemmatrizen (3.38) sowie der inversen Intervalltransformation

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{r}}(t) \\ \underline{\mathbf{r}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{\rho}}(t) \\ \underline{\boldsymbol{\rho}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{L}^+(t) & \mathbf{L}^-(t) \\ \mathbf{L}^-(t) & \mathbf{L}^+(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}}(t) \\ \underline{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

gegeben. Die Anfangswerte der Lösung von (3.40) sind dabei so zu wählen, dass

$$\underline{\boldsymbol{\rho}}(0) \leq \boldsymbol{\rho}(0) \leq \bar{\boldsymbol{\rho}}(0) \quad (3.43)$$

gilt.

**Beweis:**

Zunächst wird gezeigt, dass das dynamische System (3.40) im  $\rho$ -Koordinatensystem einen Intervallbeobachter darstellt. Auch hier orientiert sich die Vorgehensweise an der für grenzverkoppelte Intervallbeobachter für LTI-Systeme, weswegen nur die Kernpunkte dargestellt werden. Anschließend wird die Gültigkeit der inversen Intervalltransformation gezeigt.

Man erhält für die verkoppelten Beobachterfehlerdynamiken  $\dot{\underline{\tilde{e}}}(t) = \dot{\underline{\tilde{\rho}}}(t) - \dot{\underline{\rho}}(t)$  und  $\dot{\underline{e}}(t) = \dot{\underline{\rho}}(t) - \dot{\underline{\rho}}(t)$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{\underline{\tilde{e}}}(t) \\ \dot{\underline{e}}(t) \end{bmatrix} &= \overbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}^+(\boldsymbol{\theta}(t), t) & -\tilde{\mathbf{F}}^-(\boldsymbol{\theta}(t), t) \\ -\tilde{\mathbf{F}}^-(\boldsymbol{\theta}(t), t) & \tilde{\mathbf{F}}^+(\boldsymbol{\theta}(t), t) \end{bmatrix}}^{=\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t)} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} \underline{\tilde{e}}(t) \\ \underline{e}(t) \end{bmatrix}}^{=\mathcal{E}(t)} \\
 &+ \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}^+(\boldsymbol{\theta}(t), t) & -\mathbf{H}^-(\boldsymbol{\theta}(t), t) \\ -\mathbf{H}^-(\boldsymbol{\theta}(t), t) & \mathbf{H}^+(\boldsymbol{\theta}(t), t) \end{bmatrix}}^{=\mathcal{H}(\boldsymbol{\theta}(t), t)} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} \underline{\bar{u}}(t) - \underline{\mathbf{u}}(t) \\ \underline{\mathbf{u}}(t) - \underline{\mathbf{u}}(t) \end{bmatrix}}^{=\mathcal{U}(t)} \\
 &+ \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{G}^+(\boldsymbol{\theta}(t), t) & -\mathbf{G}^-(\boldsymbol{\theta}(t), t) \\ -\mathbf{G}^-(\boldsymbol{\theta}(t), t) & \mathbf{G}^+(\boldsymbol{\theta}(t), t) \end{bmatrix}}^{=\mathcal{G}(\boldsymbol{\theta}(t), t)} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} \underline{\bar{y}}(t) - \underline{\mathbf{y}}(t) \\ \underline{\mathbf{y}}(t) - \underline{\mathbf{y}}(t) \end{bmatrix}}^{=\mathcal{Y}(t)}. \quad (3.44)
 \end{aligned}$$

Bei korrekten Unsicherheitsannahmen stellt dieses System ein positives System mit positiven Eingangsgrößen und Anfangswerten dar, wodurch die Positivität der Beobachterfehler garantiert ist. Die Dynamik der Intervallbreite ist durch

$$\begin{aligned}
 \dot{\underline{\tilde{\rho}}}(t) - \dot{\underline{\rho}}(t) &= \tilde{\mathbf{F}}^-(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot [\underline{\tilde{\rho}}(t) - \underline{\rho}(t)] \\
 &+ [\mathbf{H}^+(\boldsymbol{\theta}(t), t) - \mathbf{H}^-(\boldsymbol{\theta}(t), t)] \cdot [\underline{\bar{u}}(t) - \underline{\mathbf{u}}(t)] \\
 &+ [\mathbf{G}^+(\boldsymbol{\theta}(t), t) - \mathbf{G}^-(\boldsymbol{\theta}(t), t)] \cdot [\underline{\bar{y}}(t) - \underline{\mathbf{y}}(t)] \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

gegeben. Aufgrund der Wahl von  $\mathbf{L}(t)$  derart, dass Annahme 3.6 gilt, ist die Lösung von (3.45) beschränkt. Da die inverse Intervalltransformation (3.43) eine unter Anwendung intervallarithmetischer Grundoperationen erzielte Erweiterung der Punktintervalltransformation (3.36) ist, schließt ihre Lösung  $\mathbf{r}(t)$  ein, falls  $\boldsymbol{\rho}(t) \in [\underline{\rho}(t)]$  gilt, was gezeigt wurde und  $\mathbf{y}(t) \in [\underline{\mathbf{y}}(t)]$  gilt, was bei korrekten Unsicherheitsannahmen ebenfalls der Fall ist.  $\square$

Nachfolgend soll nun ein Sonderfall vorgestellt werden, bei dem sich der Entwurf des reduzierten grenzverkoppelten Intervallbeobachters vereinfacht. Dieser kann auch für die ASM Anwendung finden, wie am numerischen Beispiel 3.3 gezeigt wird. Das in diesem Beispiel verwendete Systems weist die gleiche Struktur wie das ASM-Modell, welches in Kapitel 6 vorgestellt werden wird, auf. Eine hinreichende Bedingung für das Vorliegen dieses Sonderfalls ist in Annahme 3.7 gegeben. Diese stellt sicher, dass die Beobachterdynamikmatrix des reduzierten Intervallbeobachters zum einen zeitinvariant ausgelegt werden kann und zum anderen, dass sie als Diagonalmatrix gewählt werden kann.

### Annahme 3.7

Es gilt  $n - q \leq q$ , Nulleinträge der Nebendiagonale von  $\mathbf{L}(t) \cdot \mathbf{A}_{12}(\boldsymbol{\theta}(t))$  befinden sich an der gleichen Position wie Nulleinträge von  $\mathbf{A}_{22}(\boldsymbol{\theta}(t))$  und  $\mathbf{L}(t) \cdot \mathbf{A}_{12}(\boldsymbol{\theta}(t))$  hat keine Nulleinträge auf der Hauptdiagonalen.

**Lemma 3.3 (Zeitinvarianter reduzierter grenzverkoppelter Intervallbeobachter für LPV-Systeme)**

Ist neben den Annahmen 3.2 und 3.3 für zeitvariante Systemmatrizen auch Annahme 3.7 erfüllt, so kann  $\mathbf{L}(t)$  offensichtlich derart gewählt werden, dass (3.38a) zeitinvariant ist. Ist die hieraus abgeleitete zeitinvariante Matrix  $\tilde{\mathbf{F}} = \mathcal{M}(\mathbf{F})$  Hurwitz, dann ist (3.40) mit (3.42) unter Berücksichtigung von (3.43) ein reduzierter grenzverkoppelter Intervallbeobachter für (1.1).

**Beweis:**

Der Beweis gleicht dem für Satz 3.5 bis auf die Tatsache, dass in (3.45) die Dynamikmatrix zeitinvariant ist. Für die BIBO-Stabilität dieses Systems und damit die Beschränktheit der Intervallbreite genügt, dass die zeitinvariante Dynamikmatrix eine Hurwitz-Matrix ist (siehe Definition D.2 und Lemma D.1).  $\square$

Es ist leicht einzusehen, dass Annahme 3.7 sehr strikt ist und wie zuvor angemerkt keinesfalls eine notwendige Bedingung darstellt. Sie berücksichtigt beispielsweise nicht, dass Elemente von  $\mathbf{A}_{22}(\boldsymbol{\theta}(t))$  bereits zeitinvariant sein können, sodass auch Nulleinträge von  $\mathbf{L}(t) \cdot \mathbf{A}_{12}(\boldsymbol{\theta}(t))$  sich an der gleichen Position befinden können, bei gleichzeitiger Sicherstellung einer zeitinvarianten Dynamikmatrix. Daher ist im Einzelfall anhand der Struktur von  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))$  zu prüfen, ob  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t) = \mathbf{A}_{22}(\boldsymbol{\theta}(t)) - \mathbf{L}(t) \cdot \mathbf{A}_{12}(\boldsymbol{\theta}(t))$  zeitinvariant gewählt werden kann, sodass die abgeleitete, zeitinvariante Matrix  $\tilde{\mathbf{F}} = \mathcal{M}(\mathbf{F})$  Hurwitz ist.

**Beispiel 3.3:** Betrachtet sei das System (3.35) mit

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad (3.46a)$$

$$\mathbf{A}_{12}(\kappa(t)) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \cdot \kappa(t) \\ -2 \cdot \kappa(t) & 3 \end{bmatrix}, \quad (3.46b)$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.46c)$$

$$\mathbf{A}_{22}(\kappa(t)) = \begin{bmatrix} -1 & -\kappa(t) \\ \kappa(t) & -1 \end{bmatrix}, \quad (3.46d)$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad (3.46e)$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.46f)$$

sowie der Ausgangsgleichung

$$y(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{=\mathbf{C}} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

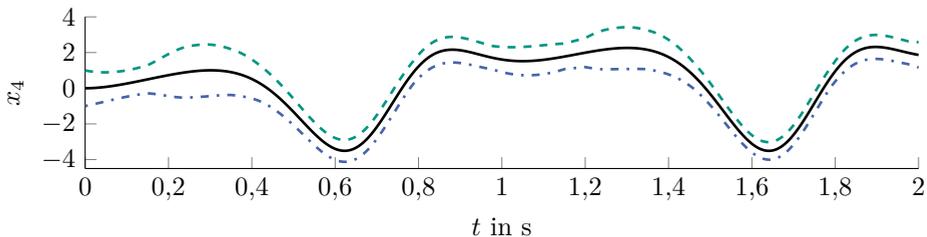
Hinsichtlich des zeitvarianten Parameters  $\kappa(t)$ , dessen Zeitverlauf a priori unbekannt ist, sei lediglich angenommen, dass er stetig differenzierbar und beschränkt ist, d. h.  $|\kappa(t)| < \infty$ , um die Annahmen 3.2 und 3.6 nicht zu verletzen. An dieser Stelle sei angemerkt, dass die Struktur dieses Beispielsystems dem des gewählten ASM-Modells (siehe Abschnitt 6.1.2) gleicht. Wie leicht zu überprüfen ist, ist für dieses System Annahme 3.7 erfüllt, woraus folgt, dass  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  in (3.38a) zeitinvariant gewählt werden kann. In diesem Beispiel wird  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  zu

$$\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

gewählt. Damit ergibt sich  $\mathbf{L}(t)$  mithilfe einfacher Umformungen zu

$$\mathbf{L}(t) = \begin{bmatrix} \frac{21-2\cdot\kappa^2(t)}{9+4\cdot\kappa^2(t)} & -\frac{17\cdot\kappa(t)}{9+4\cdot\kappa^2(t)} \\ \frac{17\cdot\kappa(t)}{9+4\cdot\kappa^2(t)} & \frac{21-2\cdot\kappa^2(t)}{9+4\cdot\kappa^2(t)} \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Aufgrund der Gültigkeit von Annahme 3.3 kann diese Matrix zur Laufzeit numerisch ausgewertet werden. Damit sind auch die übrigen Systemmatrizen  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  und  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  nach (3.38b) und (3.38c) definiert. Bei Betrachtung von (3.49) wird im Hinblick auf den in  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  enthaltenen Ausdruck  $\dot{\mathbf{L}}(t)$  und auf die Einhaltung von Annahme 3.6 ersichtlich, weshalb die stetige Differenzierbarkeit von  $\kappa(t)$  notwendig ist. Um die Präsentation des Beispiels kompakt zu halten, sollen  $\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  und  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  ebenso wenig wie die Anwendung der eingeführten Matrixoperatoren in (3.41) explizit gezeigt werden. Die Anwendung letzterer wurde bereits in den vorherigen Beispielen demonstriert. Anzumerken ist jedoch, dass aufgrund der gewählten Diagonalf orm von  $\mathbf{F}$  die Beobachtdynamikmatrix in (3.40) die Diagonalf orm aufweist und damit die Dynamik der Obergrenze von der der Untergrenze entkoppelt ist. Zur Simulation wird  $\mathbf{u}^\top(t) = [10 \cdot \sin(2\pi \cdot t) \quad 10 \cdot \sin(2\pi \cdot t + \frac{\pi}{2})]$ ,  $\kappa(t) = -8,5 + 6,5 \cdot \sin(2\pi \cdot t)$ ,  $\mathbf{x}^\top(0) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$  und  $[\underline{\boldsymbol{\rho}}^\top(0) \quad \overline{\boldsymbol{\rho}}^\top(0)] = [1 \quad 1 \quad -1 \quad -1]$  gewählt. Bei den Ein-/Ausgangsgrößen wird eine symmetrisch um den tatsächlichen Wert gelegte Unsicherheit von  $\pm 5\%$  gewählt. Zur Bestimmung der nach (3.38c) notwendigen Ableitung von  $\mathbf{L}(t)$  wird der Rückwärtsdifferenzenquotient genutzt. Das resultierende Ergebnis ist exemplarisch am Beispiel von  $x_4(t)$  in Abbildung 3.4 dargestellt und zeigt die erforderliche Einschließung des tatsächlichen Zustands mit einer beschränkten Intervallbreite.



**Abbildung 3.4:** Beispiel 3.3: Ergebnis der Intervallschätzung des reduzierten grenzverkoppelten Intervallbeobachters für LPV-Systeme mit Ein-/Ausgangsunsicherheiten (Untergrenze: blau strichpunktiert, Obergrenze: grün gestrichelt, tatsächliche Zustandsgröße: schwarz)

Abschließend soll an dieser Stelle angemerkt werden, dass sich die Einführung der zeitvarianten Koordinatenverschiebung (3.36), die den Kern des reduzierten grenzverkoppelten Intervallbeobachters darstellt, auch auf alle folgenden Ansätze übertragen lässt, was insbesondere bei der Erweiterung des grenzverkoppelten Intervallbeobachters im folgenden Abschnitt leicht ersichtlich ist. Um den Fokus weiterhin auf die neuen Methoden zu richten, wird diese Koordinatentransformation bei den weiteren Ansätzen jedoch nicht thematisiert.

### 3.4 Grenzverkoppelter Intervallbeobachter für LPV-Systeme unter Berücksichtigung von Eingangs-, Ausgangs- und Parameterunsicherheiten

In den vorherigen Abschnitten wurden beim Entwurf von grenzverkoppelten Intervallbeobachtern für LPV-Systeme lediglich unsichere Ein- und Ausgangsgrößen berücksichtigt. Gerade bei LPV-Systemen erscheint jedoch die Einbeziehung einer Parameterunsicherheit sinnvoll, da für die zeitvarianten Parameter im Gegensatz zu LTV-Systemen a priori kein Zeitverlauf dieser Parameter vorliegt, weswegen sie in der Regel messtechnisch erfasst werden. Diese messtechnische Erfassung mit der einhergehenden Unsicherheit motiviert die Erweiterung des grenzverkoppelten Intervallbeobachters in diesem Abschnitt. Bevor diese Erweiterung vorgestellt wird, seien zunächst einige Definitionen und Hilfssätze eingeführt, die im Verlauf der mathematischen Formulierung und des Beweises des Ansatzes benötigt werden. Voraussetzung für den Entwurf ist, dass beschränkte Intervalle für die Systemmatrizen beziehungsweise die Systemparameter vorliegen.

#### **Annahme 3.8**

*Für die Einträge von  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))$ ,  $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}(t))$ ,  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}(t))$  in (1.1) beziehungsweise die Systemparameter  $\boldsymbol{\theta}(t)$ , seien zur Laufzeit des zu entwerfenden Systems beschränkte Intervalle  $[\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))]$ ,  $[\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}(t))]$ ,  $[\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}(t))]$  und  $[\boldsymbol{\theta}(t)]$  für alle  $t$  bekannt (z. B. durch eine unsicherheitsbehaftete Messung).*

Motiviert durch die unsicheren und durch Intervalle beschriebenen Systemmatrizen werden zunächst in Definition 3.2 die in Definition 3.1 eingeführten Matrixoperatoren erweitert, wobei es zwei wesentliche Unterschiede gibt. Erstens werden in Definition 3.2 quadratische Intervallmatrizen  $[\mathbf{S}] = ([s_{ij}]) \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  betrachtet. Zweitens werden die Elemente ungleich null nicht nur basierend auf der Intervallmatrix  $[\mathbf{S}]$  selbst gewählt, sondern basierend auf der Auswertung spezieller multiplikativer Kombinationen von  $[s_{ij}]$  und  $[x_j]$ , wobei  $[x_j]$  das  $j$ -te Element eines Intervallvektors  $[\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^n$  ist. Diese Auswertungen sind definiert in (3.51). Für ein numerisches Beispiel zur Anwendung dieser Operatoren sei auf Beispiel B.1 in Anhang B verwiesen.

**Definition 3.2 (Intervall-Matrix-Operatoren<sup>8</sup>)**

In den nachfolgenden Definitionen ist  $[\mathbf{S}] = ([s_{ij}])$  eine quadratische Intervallmatrix mit  $[\mathbf{S}] \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  und  $[\mathbf{x}] = ([x_j])$  ein Intervallvektor mit  $[\mathbf{x}] \in \mathbb{IR}^n$ .

$$[\nu_{ij,1} \quad \nu_{ij,2}] = [\underline{s}_{ij} \cdot \bar{x}_j \quad \bar{s}_{ij} \cdot \bar{x}_j] \quad (3.50a)$$

$$[\kappa_{ij,1} \quad \kappa_{ij,2}] = [\underline{s}_{ij} \cdot \underline{x}_j \quad \bar{s}_{ij} \cdot \underline{x}_j] \quad (3.50b)$$

$$\alpha_{ij} = \max(\nu_{ij,1}, \nu_{ij,2}) \quad (3.51a)$$

$$\beta_{ij} = \max(\kappa_{ij,1}, \kappa_{ij,2}) \quad (3.51b)$$

$$\gamma_{ij} = \min(\nu_{ij,1}, \nu_{ij,2}) \quad (3.51c)$$

$$\delta_{ij} = \min(\kappa_{ij,1}, \kappa_{ij,2}) \quad (3.51d)$$

$$\tilde{\mathcal{T}}_{u,[\mathbf{x}]}^+ \{[\mathbf{S}]\} := \tilde{\mathbf{S}}_u^+ = (\tilde{s}_{u,ij}^+) \quad (3.52a)$$

$$\tilde{s}_{u,ij}^+ = \begin{cases} \underline{s}_{ij} & , \text{ falls } (i = j \vee \alpha_{ij} \geq \beta_{ij}) \wedge \nu_{ij,1} \geq \nu_{ij,2} \\ \bar{s}_{ij} & , \text{ falls } (i = j \vee \alpha_{ij} \geq \beta_{ij}) \wedge \nu_{ij,1} < \nu_{ij,2} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (3.52b)$$

$$\tilde{\mathcal{T}}_{u,[\mathbf{x}]}^- \{[\mathbf{S}]\} := \tilde{\mathbf{S}}_u^- = (\tilde{s}_{u,ij}^-) \quad (3.53a)$$

$$\tilde{s}_{u,ij}^- = \begin{cases} \underline{s}_{ij} & , \text{ falls } i \neq j \wedge \alpha_{ij} < \beta_{ij} \wedge \kappa_{ij,1} \geq \kappa_{ij,2} \\ \bar{s}_{ij} & , \text{ falls } i \neq j \wedge \alpha_{ij} < \beta_{ij} \wedge \kappa_{ij,1} < \kappa_{ij,2} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (3.53b)$$

$$\tilde{\mathcal{T}}_{l,[\mathbf{x}]}^- \{[\mathbf{S}]\} := \tilde{\mathbf{S}}_l^- = (\tilde{s}_{l,ij}^-) \quad (3.54a)$$

$$\tilde{s}_{l,ij}^- = \begin{cases} \underline{s}_{ij} & , \text{ falls } i \neq j \wedge \gamma_{ij} < \delta_{ij} \wedge \nu_{ij,1} \leq \nu_{ij,2} \\ \bar{s}_{ij} & , \text{ falls } i \neq j \wedge \gamma_{ij} < \delta_{ij} \wedge \nu_{ij,1} > \nu_{ij,2} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (3.54b)$$

$$\tilde{\mathcal{T}}_{l,[\mathbf{x}]}^+ \{[\mathbf{S}]\} := \tilde{\mathbf{S}}_l^+ = (\tilde{s}_{l,ij}^+) \quad (3.55a)$$

$$\tilde{s}_{l,ij}^+ = \begin{cases} \underline{s}_{ij} & , \text{ falls } (i = j \vee \gamma_{ij} \geq \delta_{ij}) \wedge \kappa_{ij,1} \leq \kappa_{ij,2} \\ \bar{s}_{ij} & , \text{ falls } (i = j \vee \gamma_{ij} \geq \delta_{ij}) \wedge \kappa_{ij,1} > \kappa_{ij,2} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (3.55b)$$

<sup>8</sup> An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die eingeführten Operatoren ohne Einschränkungen zu jedem Zeitpunkt  $t$  auch auf zeitvariante Intervallmatrizen angewendet werden können.

Damit ermöglichen die in Definition 3.2 eingeführten Matrixoperationen eine Abwandlung der in Lemma A.13 definierten Multiplikation einer Intervallmatrix mit einem Intervallvektor. Die abweichende Behandlung der Hauptdiagonalelemente der Intervallmatrix ist, wie auch im Fall von den in den vorherigen Abschnitten vernachlässigten Parameterunsicherheiten, durch Müllers Theorem motiviert.

Die nachfolgend eingeführten Lemmata dienen der Vereinfachung der Beobachterausslegung, was im Rahmen des verwendeten Ansatzes zum Nachweis der Systemstabilität ersichtlich werden wird. Lemma 3.4 zeigt hierbei die Möglichkeit, die Spektralnorm einer Matrix durch die Frobeniusnorm überabzuschätzen. Dies ist vorteilhaft, da die Frobeniusnorm durch die Maximierung der Elemente der Matrix, von welcher die Norm bestimmt wird, maximiert werden kann. Dies gilt für die Spektralnorm nicht (Vergleiche (3.57) und (3.58)).

**Lemma 3.4 (Überabschätzung der Spektralnorm)**

Für eine Matrix  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ist die Beziehung

$$\|\mathbf{S}\|_2 \leq \|\mathbf{S}\|_F \quad (3.56)$$

gültig ([GVL96, S. 56]). Hierbei stellt die Spektralnorm  $\|\mathbf{S}\|_2$  die von der euklidischen Norm  $\|\mathbf{s}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n s_i^2}$  mit  $\mathbf{s} = (s_i) \in \mathbb{R}^n$  abgeleitete natürliche Matrixnorm dar, welche durch

$$\|\mathbf{S}\|_2 := \sqrt{\lambda_{\max}(\mathbf{S}^\top \cdot \mathbf{S})} \quad (3.57)$$

gegeben ist ([Rug96, S. 6]). Die enthaltene Funktion  $\lambda_{\max}(\cdot)$  bestimmt den größten Eigenwert der auszuwertenden Matrix.

Der in (3.56) enthaltene Ausdruck  $\|\mathbf{S}\|_F$  ist die Frobeniusnorm der Matrix  $\mathbf{S}$ , welche nach [Lie15, S. 169] zu

$$\|\mathbf{S}\|_F := \sqrt{\text{spur}(\mathbf{S}^\top \cdot \mathbf{S})} = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |S_{ij}|^2} \quad (3.58)$$

definiert ist.

Durch Lemma 3.5 wird es im Verlauf des Stabilitätsbeweises möglich sein, eine Stabilitätsaussage basierend auf dem maximalen Eigenwert einer speziellen Matrix zu treffen. Diese Forderung tritt an Stelle einer schwerer zu überprüfenden Bedingung und dient damit ebenfalls der Vereinfachung der Beobachterausslegung.

**Lemma 3.5 (Abschätzung spezieller Matrixmultiplikationen)**

Gegeben sei eine quadratische, symmetrische Matrix  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und ein Vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Damit gilt nach [Rug96, S. 8]

$$\lambda_{\min}(\mathbf{S}) \cdot \|\mathbf{x}\|_2^2 \leq \mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{x} \leq \lambda_{\max}(\mathbf{S}) \cdot \|\mathbf{x}\|_2^2. \quad (3.59)$$

Die enthaltende Funktion  $\lambda_{\min}(\cdot)$  bestimmt den kleinsten Eigenwert der auszuwertenden Matrix.

Der letzte im Zusammenhang mit symmetrischen Matrizen stehende Hilfssatz ist nachfolgend gegeben und stellt einen Zusammenhang zwischen der positiven Definitheit einer Matrix und der aus ihr abgeleiteten symmetrischen Matrix her.

**Lemma 3.6 (Äquivalenz der Definitheit einer Matrix und der aus ihr abgeleiteten symmetrischen Matrix)**

Die Definitheit einer Matrix  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist gleich der Definitheit der aus ihr abgeleiteten symmetrischen Matrix  $\mathbf{S}_{sym} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{S} + \mathbf{S}^\top)$ .

**Beweis:**

Der Beweis zu diesem Lemma, welches eine Verallgemeinerung des in der Masterarbeit [Bäc16, S. 8] für die positive Definitheit eingeführten Theorems 2 ist, ist in selbiger zu finden ([Bäc16, S. 95]) und wird kurz skizziert, da die Quelle nicht öffentlich zugänglich ist.

Da das Ergebnis aus  $\mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{x}$  skalar ist und jede eindimensionale Matrix symmetrisch ist, gilt  $\mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{x} = (\mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{x})^\top = \mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{S}^\top \cdot \mathbf{x}$ . Mit dieser Gleichung kann  $\mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{x}$  als Summe  $\frac{1}{2} \cdot \mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{S}^\top \cdot \mathbf{x}$  dargestellt werden, woraus

$$\mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{S}_{sym} \cdot \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (3.60)$$

folgt. Aufgrund der Gleichheit der Ergebnisse von  $\mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{x}$  und  $\mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{S}_{sym} \cdot \mathbf{x}$  ist die Definitheit von  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{S}_{sym}$  gleich.  $\square$

Zum Nachweis der Stabilität des Intervallbeobachters wird das nachfolgend eingeführte Lemma 3.7 herangezogen werden.

**Lemma 3.7 (Gleichmäßige Beschränktheit dynamischer Systeme)**

Gegeben sei das System  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$ . Wenn eine stetig differenzierbare Funktion  $V : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und zwei Klasse- $\mathcal{K}_\infty$ -Funktionen<sup>9</sup>  $\iota(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  und  $\zeta(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , eine Klasse- $\mathcal{K}$ -Funktion  $v(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  und ein  $\eta > 0$  existieren, sodass für alle  $t \in \mathbb{R}$  und für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\iota(\|\mathbf{x}\|_2) \leq V(\mathbf{x}, t) \leq \zeta(\|\mathbf{x}\|_2) \quad (3.61)$$

sowie für alle  $t \in \mathbb{R}$  und für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial V(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t) \leq -v(\|\mathbf{x}\|_2) \quad (3.62)$$

mit  $\|\mathbf{x}\|_2 > \eta$  gültig ist, dann ist das System nach [PAS00] gleichmäßig ultimativ beschränkt (siehe Definition D.3).

Als letzter Schritt bevor die Erweiterung des grenzverkoppelten Intervallbeobachters zur Berücksichtigung von Parameterunsicherheiten formuliert werden kann, sei die aus den vorherigen Lemmata abgeleitete Annahme 3.9 genannt, welche ein hinreichendes Kriterium für die Stabilität des Intervallbeobachters beinhaltet.

<sup>9</sup> Eine für  $\chi \in [0, \nu)$  definierte Funktion  $\kappa(\chi)$  wird Klasse- $\mathcal{K}$ -Funktion genannt, wenn sie streng monoton steigend ist und  $\kappa(0) = 0$  gilt.  $\kappa(\chi)$  wird Klasse- $\mathcal{K}_\infty$ -Funktion genannt, wenn sie für alle  $\chi \geq 0$  definiert ist und  $\kappa(\chi) \rightarrow \infty$  für  $\chi \rightarrow \infty$  gilt ([Kha15, S. 88]).

**Annahme 3.9**

Es existiert eine Beobachtermatrix  $\mathbf{L}(t) \in \mathbb{R}^{n \times q}$ , sodass der größte Eigenwert von

$$\mathcal{F}_{c, \text{sym}}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = \frac{1}{2} \cdot (\mathcal{F}_c^\top([\boldsymbol{\theta}(t)], t) + \mathcal{F}_c([\boldsymbol{\theta}(t)], t)) \quad (3.63)$$

mit

$$\mathcal{F}_c([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t) & -\tilde{\mathbf{F}}^-([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \\ -\tilde{\mathbf{F}}^-([\boldsymbol{\theta}(t)], t) & \tilde{\mathbf{F}}^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \end{bmatrix}, \quad (3.64)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t) := \tilde{\mathcal{P}}^+ \{ \underline{\mathbf{F}}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \}, \quad (3.65a)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}^-([\boldsymbol{\theta}(t)], t) := \tilde{\mathcal{P}}^- \{ \underline{\mathbf{F}}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \}, \quad (3.65b)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)] &= [\underline{\mathbf{F}}([\boldsymbol{\theta}(t)], t), \overline{\mathbf{F}}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)] \\ &= \left( [f_{ij}([\boldsymbol{\theta}(t)], t), \bar{f}_{ij}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)] \right) \\ &= [\mathbf{A}([\boldsymbol{\theta}(t)])] - \mathbf{L}(t) \cdot [\mathbf{C}([\boldsymbol{\theta}(t)])] \end{aligned} \quad (3.66)$$

die Bedingung

$$\lambda_{\max}(\mathcal{F}_{c, \text{sym}}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)) < -\|\Delta \mathcal{F}_{\max}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)\|_{\mathbf{F}} \quad (3.67)$$

mit  $\Delta \mathcal{F}_{\max}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  gegeben durch

$$\Delta \mathcal{F}_{\max}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta \mathbf{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

und

$$\Delta \mathbf{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = \overline{\mathbf{F}}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) - \underline{\mathbf{F}}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \quad (3.69)$$

erfüllt.

Für ein numerisches Beispiel zur Berechnung von  $\mathcal{F}_c([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  und  $\Delta \mathcal{F}_{\max}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  sei erneut auf Beispiel B.1 hingewiesen. Damit kann nun in Satz 3.6 der Intervallbeobachter formuliert werden.

**Satz 3.6 (Vollständiger grenzverkoppelter Intervallbeobachter für LPV-Systeme zur Berücksichtigung von Eingangs-, Ausgangs- und Parameterunsicherheiten)**

Ist die Annahme 3.2 für zeitvariante Systemmatrizen erfüllt und ist die Annahme 3.8 erfüllt, ist nachfolgendes System ein Intervallbeobachter für (1.1) mit (2.2), (2.3) und (2.4). Seine Dynamikgleichung lautet

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) \\ \dot{\underline{\mathbf{x}}}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{F}}_u^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t) & \tilde{\mathbf{F}}_u^-([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \\ \tilde{\mathbf{F}}_l^-([\boldsymbol{\theta}(t)], t) & \tilde{\mathbf{F}}_l^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}(t) \\ \underline{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{L}}_y(t) \\ \underline{\mathbf{L}}_y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_u([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \\ \underline{\mathbf{B}}_u([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.70)$$

mit

$$[\mathbf{L}_y(t)] = \mathbf{L}(t) \cdot [\mathbf{y}(t)] \quad (3.71)$$

und

$$[\mathbf{B}_u([\boldsymbol{\theta}(t)], t)] = [\mathbf{B}([\boldsymbol{\theta}(t)])] \cdot [\mathbf{u}(t)] \quad (3.72)$$

sowie

$$\tilde{\mathbf{F}}_u^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t) := \tilde{\mathcal{T}}_{u, [\mathbf{x}]}^+ \{[\mathbf{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)]\}, \quad (3.73a)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_u^-([\boldsymbol{\theta}(t)], t) := \tilde{\mathcal{T}}_{u, [\mathbf{x}]}^- \{[\mathbf{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)]\}, \quad (3.73b)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_l^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t) := \tilde{\mathcal{T}}_{l, [\mathbf{x}]}^+ \{[\mathbf{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)]\}, \quad (3.73c)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_l^-([\boldsymbol{\theta}(t)], t) := \tilde{\mathcal{T}}_{l, [\mathbf{x}]}^- \{[\mathbf{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)]\} \quad (3.73d)$$

unter Berücksichtigung von (3.66) und unter Verwendung einer Beobachtermatrix  $\mathbf{L}(t)$ , welche Annahme 3.9 erfüllt. Die Anfangswerte müssen die Beziehung  $\mathbf{x}(0) \in [\mathbf{x}(0)]$  erfüllen.

**Beweis:**

Wie bei den in den vorherigen Abschnitten präsentierten Intervallbeobachteransätzen wird der Beweis, dass (3.70) einen Intervallbeobachter für (1.1) darstellt in zwei große Abschnitte unterteilt. Zunächst wird die Positivität der Beobachterfehler (2.7) gezeigt und anschließend die Stabilität der Beobachterfehlerdynamik und nicht die der Intervallbreitendynamik, welche jedoch hieraus folgt, nachgewiesen.

Durch Einsetzen von (3.70) und (1.1a) in die nach der Zeit abgeleiteten Ausdrücke (2.7) sowie unter Berücksichtigung von Lemma A.1 und Erweitern der Gleichungen

mit  $\mathbf{L}(t) \cdot \mathbf{y}(t) - \mathbf{L}(t) \cdot \mathbf{y}(t)$  erhält man

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{e}}}(t) &= \tilde{\mathbf{F}}_u^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \cdot \bar{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{F}}_u^-([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \cdot \underline{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \mathbf{x}(t) \\ &\quad + \underbrace{\bar{\mathbf{B}}_u([\boldsymbol{\theta}(t)], t) - \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}(t)) \cdot \mathbf{u}(t)}_{\geq \mathbf{0} \ \forall \mathbf{u}(t) \in [\mathbf{u}(t)], \ \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}(t)) \in [\mathbf{B}([\boldsymbol{\theta}(t)])]} \\ &\quad + \underbrace{\mathbf{L}^+(t) \cdot \bar{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{L}^-(t) \cdot \underline{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{L}(t) \cdot \mathbf{y}(t)}_{\geq \mathbf{0} \ \forall \mathbf{y}(t) \in [\mathbf{y}(t)]} \end{aligned} \quad (3.74a)$$

$$\begin{aligned} &= \tilde{\mathbf{F}}_u^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \cdot \bar{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{F}}_u^-([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \cdot \underline{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \mathbf{x}(t) \\ &\quad + \underbrace{\boldsymbol{\chi}_u(t)}_{\geq \mathbf{0}} \end{aligned} \quad (3.74b)$$

und

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\mathbf{e}}}(t) &= \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{F}}_l^-([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \cdot \bar{\mathbf{x}}(t) - \tilde{\mathbf{F}}_l^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \cdot \underline{\mathbf{x}}(t) \\ &\quad + \underbrace{\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}(t)) \cdot \mathbf{u}(t) - \underline{\mathbf{B}}_u([\boldsymbol{\theta}(t)], t)}_{\geq \mathbf{0} \ \forall \mathbf{u}(t) \in [\mathbf{u}(t)], \ \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}(t)) \in [\mathbf{B}([\boldsymbol{\theta}(t)])]} \\ &\quad + \underbrace{\mathbf{L}(t) \cdot \mathbf{y}(t) - \mathbf{L}^-(t) \cdot \bar{\mathbf{y}}(t) - \mathbf{L}^+(t) \cdot \underline{\mathbf{y}}(t)}_{\geq \mathbf{0} \ \forall \mathbf{y}(t) \in [\mathbf{y}(t)]} \end{aligned} \quad (3.75a)$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{F}}_l^-([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \cdot \bar{\mathbf{x}}(t) - \tilde{\mathbf{F}}_l^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \cdot \underline{\mathbf{x}}(t) \\ &\quad + \underbrace{\boldsymbol{\chi}_l(t)}_{\geq \mathbf{0}} \end{aligned} \quad (3.75b)$$

mit (3.23).

Wie bereits in den Gleichungen (3.74) und (3.75) angegeben, sind die aus den Unsicherheiten in  $\mathbf{B}(t)$ ,  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{L}(t)$  und  $\mathbf{y}(t)$  resultierenden Ausdrücke  $\boldsymbol{\chi}_u(t)$  und  $\boldsymbol{\chi}_l(t)$  für alle  $t \geq t_0$  nichtnegativ. Daher sollen nun die Terme, welche von Abwandlungen der Beobachterdynamikmatrix  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t) = (f_{ij}(\boldsymbol{\theta}(t), t))$  beziehungsweise ihr selbst, dem tatsächlichen Zustand und dem geschätzten Zustandsintervall abhängen, untersucht werden. Auch diese Untersuchung wird zweigeteilt, indem zunächst der Einfluss der Hauptdiagonalelement der Beobachterdynamikmatrix analysiert wird.

Um die Übersichtlichkeit zu wahren, werden die Parameterabhängigkeiten in diesem Schritt nicht explizit angegeben. Zur Analyse werden die aus dem für die Hauptdiagonale geltenden Sonderfall  $i = j$  definiert in (3.52) und (3.55) abgeleiteten Ausdrücke

$$\max \left( \underline{f}_{ii}(t) \cdot \bar{x}_i(t), \bar{f}_{ii}(t) \cdot \bar{x}_i(t) \right) - f_{ii}(t) \cdot x_i(t), \quad (3.76a)$$

$$f_{ii}(t) \cdot x_i(t) - \min \left( \underline{f}_{ii}(t) \cdot \underline{x}_i(t), \bar{f}_{ii}(t) \cdot \underline{x}_i(t) \right) \quad (3.76b)$$

herangezogen. Mit  $\left[ \underline{f}_{ii}(t), \bar{f}_{ii}(t) \right] = [f_{ii}(t) - \Delta f_{ii,l}(t), f_{ii}(t) + \Delta f_{ii,u}(t)]$  unter Berücksichtigung von  $\Delta f_{ii,l}(t) \geq 0$  und  $\Delta f_{ii,u}(t) \geq 0$  folgt

$$\begin{aligned}
& \max \left( \underline{f}_{ii}(t) \cdot \bar{x}_i(t), \bar{f}_{ii}(t) \cdot \bar{x}_i(t) \right) - f_{ii}(t) \cdot x_i(t) \\
&= f_{ii}(t) \cdot \bar{x}_i(t) - f_{ii}(t) \cdot x_i(t) + \begin{cases} \Delta f_{ii,u}(t) \cdot \bar{x}_i(t) & , \text{ falls } \bar{x}_i(t) \geq 0 \\ -\Delta f_{ii,l}(t) \cdot \bar{x}_i(t) & , \text{ falls } \bar{x}_i(t) < 0 \end{cases} \\
&= f_{ii}(t) \cdot \bar{e}_i(t) + \underbrace{\epsilon_{u,i}(t)}_{\geq 0}, \tag{3.77a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f_{ii}(t) \cdot x_i(t) - \min \left( \underline{f}_{ii}(t) \cdot \underline{x}_i(t), \bar{f}_{ii}(t) \cdot \underline{x}_i(t) \right) \\
&= f_{ii}(t) \cdot x_i(t) - f_{ii}(t) \cdot \underline{x}_i(t) + \begin{cases} -\Delta f_{ii,u}(t) \cdot \underline{x}_i(t) & , \text{ falls } \underline{x}_i(t) < 0 \\ \Delta f_{ii,l}(t) \cdot \underline{x}_i(t) & , \text{ falls } \underline{x}_i(t) \geq 0 \end{cases} \\
&= f_{ii}(t) \cdot \underline{e}_i(t) + \underbrace{\epsilon_{l,i}(t)}_{\geq 0}. \tag{3.77b}
\end{aligned}$$

Setzt man die so erhaltenen Beziehungen in (3.74) und (3.75) ein und kombiniert die beiden Fehlerdifferentialgleichungen, so folgt

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{\bar{e}}(t) \\ \dot{\underline{e}}(t) \end{bmatrix} &= \overbrace{\begin{bmatrix} f_{11}(t) & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & f_{nn}(t) & & & \vdots \\ \vdots & & & f_{11}(t) & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & f_{nn}(t) \end{bmatrix}}^{=\mathcal{F}_e(t)} \cdot \begin{bmatrix} \bar{e}(t) \\ \underline{e}(t) \end{bmatrix} \\
&+ \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n \max([f_{1j}(t)] \cdot [x_j(t)]) - f_{1j}(t) \cdot x_j(t) \\ \vdots \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^n \max([f_{nj}(t)] \cdot [x_j(t)]) - f_{nj}(t) \cdot x_j(t) \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^n f_{1j}(t) \cdot x_j(t) - \min([f_{1j}(t)] \cdot [x_j(t)]) \\ \vdots \\ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^n f_{nj}(t) \cdot x_j(t) - \min([f_{nj}(t)] \cdot [x_j(t)]) \end{bmatrix}}_{=\mathcal{B}_{e,x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \epsilon_{u,1}(t) \\ \vdots \\ \epsilon_{u,n}(t) \\ \epsilon_{l,1}(t) \\ \vdots \\ \epsilon_{l,n}(t) \end{bmatrix}}_{=\mathcal{B}_{e,p}(t)} + \begin{bmatrix} \chi_u(t) \\ \chi_l(t) \end{bmatrix}. \tag{3.78}
\end{aligned}$$

Aufgrund der Tatsache, dass  $\mathcal{F}_e(t)$  eine Metzler-Matrix ist, der Vektor  $\mathcal{B}_{e,p}(t)$  nicht-negativ für alle  $t \geq t_0$  ist und  $\mathcal{B}_{e,x}(t) \geq \mathbf{0}$  aufgrund der Wahl von  $[x_0]$  ebenfalls gültig

ist für  $t = t_0$ , ist (3.78) nach Lemma 2.1 ein positives System zum Zeitpunkt  $t = t_0$ . Damit ist (3.78) auch ein positives System für  $t \geq t_0$ , was wiederum zu positiven Beobachterfehlern führt und damit zur Einschließung des tatsächlichen Systemzustandes. Der nächste Schritt ist die Stabilität der Beobachterfehlerdynamik nachzuweisen. Hierzu soll nicht, was prinzipiell möglich wäre, (3.78) herangezogen werden, sondern eine der Zielstellung des Beweises angepasste Systembeschreibung gewählt werden. Um diese zu erlangen, wird (3.74b) mit  $\mathbf{F}_u([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \cdot \mathbf{x}(t) - \mathbf{F}_u([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \cdot \mathbf{x}(t)$  und (3.75b) mit  $\mathbf{F}_l([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \cdot \mathbf{x}(t) - \mathbf{F}_l([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \cdot \mathbf{x}(t)$  unter Berücksichtigung der Definition

$$\mathbf{F}_u([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = \widetilde{\mathbf{F}}_u^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t) + \widetilde{\mathbf{F}}_u^-([\boldsymbol{\theta}(t)], t), \quad (3.79a)$$

$$\mathbf{F}_l([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = \widetilde{\mathbf{F}}_l^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t) + \widetilde{\mathbf{F}}_l^-([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \quad (3.79b)$$

erweitert, woraus die alternative Darstellung der Beobachterfehlerdynamik

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{e}}}(t) \\ \dot{\underline{\mathbf{e}}}(t) \end{bmatrix}}_{=\dot{\mathbf{e}}(t)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{F}}_u^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t) & -\widetilde{\mathbf{F}}_u^-([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \\ -\widetilde{\mathbf{F}}_l^-([\boldsymbol{\theta}(t)], t) & \widetilde{\mathbf{F}}_l^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \end{bmatrix}}_{=[\mathbf{x}]\mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}(t) \\ \underline{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix}}_{=\mathbf{e}(t)} \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} (\mathbf{F}_u([\boldsymbol{\theta}(t)], t) - \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t)) \cdot \mathbf{x}(t) \\ (\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t) - \mathbf{F}_l([\boldsymbol{\theta}(t)], t)) \cdot \mathbf{x}(t) \end{bmatrix}}_{=[\mathbf{x}]\mathcal{U}_{\theta, x}(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\chi}_u(t) \\ \boldsymbol{\chi}_l(t) \end{bmatrix}}_{=\mathcal{U}_{\theta, u, y}(t)} \end{aligned} \quad (3.80)$$

resultiert. Bevor nun der Stabilitätsbeweis mithilfe dieser Gleichung weitergeführt wird, sollen zunächst zwei Punkte diskutiert werden. Zum einen ist dies die Nomenklatur von (3.80) und zum anderen der Vorteil von (3.80) gegenüber (3.78). Dazu sei zunächst die Bedeutung der eingeführten kalligraphischen Matrizen erläutert. Während  $[\mathbf{x}]\mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  schlicht die Beobachterfehlerdynamikmatrix darstellt, kann  $[\mathbf{x}]\mathcal{U}_{\theta, x}(t)$  als beschränkter Eingang von  $\dot{\mathbf{e}}(t)$  interpretiert werden, welcher von den tatsächlichen Systemparametern, den Parameterintervallen und dem Systemzustand abhängt. Der Ausdruck  $\mathcal{U}_{\theta, u, y}(t)$  wiederum kann ebenfalls als beschränkter Eingang für  $\dot{\mathbf{e}}(t)$  interpretiert werden, welcher ebenfalls von den tatsächlichen Systemparametern und den Parameterintervallen abhängt, zusätzlich jedoch eine Abhängigkeit von den Eingangsgrößen, den Ausgangsgrößen sowie deren Intervalleinschließung aufweist. Der linksseitige Index  $[\mathbf{x}]$  in  $[\mathbf{x}]\mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  und  $[\mathbf{x}]\mathcal{U}_{\theta, x}(t)$  soll dabei andeuten, dass die Werte der Elemente der jeweiligen Matrix zwar keine Funktion von  $[\mathbf{x}(t)]$  darstellen, jedoch ihre Platzierung durch die Verwendung der in Definition 3.2 definierten Operatoren von  $[\mathbf{x}(t)]$  abhängt. Zugunsten einer kompakten Darstellung wurde auf die explizite Nennung der Zeitabhängigkeit des Zustandsintervalls verzichtet. Ferner wurden nur bei  $[\mathbf{x}]\mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  die Argumente der Funktion explizit angegeben, was darin begründet ist, dass das Hauptaugenmerk der folgenden Ausführungen auf dieser Matrix liegen wird.

Der Vorteil von (3.80) gegenüber (3.78) liegt in der Tatsache begründet, dass in (3.78) durch die Abhängigkeit von  $\mathcal{B}_{e, p}(t)$  und  $\mathcal{B}_{e, x}(t)$  vom geschätzten Zustandsintervall implizit eine Abhängigkeit von  $\mathbf{e}(t)$  vorhanden ist, welche bei den Hilfeingangsgrößen  $[\mathbf{x}]\mathcal{U}_{\theta, x}(t)$  und  $\mathcal{U}_{\theta, u, y}(t)$  in (3.80) nicht vorhanden ist.

Unter Verwendung von Lemma 3.7 soll nun gezeigt werden, dass (3.80) für die in Satz 3.6 getroffenen Annahmen ein stabiles System ist. Als Lyapunov-Funktion wird hierbei

$$V(\mathbf{e}, t) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{e}^\top(t) \cdot \mathbf{e}(t) = \frac{1}{2} \cdot \|\mathbf{e}(t)\|_2^2 \quad (3.81)$$

angesetzt. Sie erfüllt (3.61) beispielsweise mit  $\iota(\|\mathbf{x}\|_2) = \frac{1}{4} \cdot \|\mathbf{e}(t)\|_2^2$  und  $\zeta(\|\mathbf{x}\|_2) = \|\mathbf{e}(t)\|_2^2$ . Mit dieser Wahl folgt für die linke Seite von (3.62)

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \overbrace{\frac{\partial V(\mathbf{e}, t)}{\partial t}}^{=0} + \frac{\partial V(\mathbf{e}, t)}{\partial \mathbf{e}} \cdot \dot{\mathbf{e}}(t) = \mathbf{e}^\top(t) \cdot \dot{\mathbf{e}}(t) \\ &= \mathbf{e}^\top(t) \cdot \underset{[\mathbf{x}]}{\mathcal{F}}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \cdot \mathbf{e}(t) + \mathbf{e}^\top(t) \cdot \underset{[\mathbf{x}]}{\mathcal{U}}_{\theta, x}(t) + \mathbf{e}^\top(t) \cdot \mathcal{U}_{\theta, u, y}(t). \end{aligned} \quad (3.82)$$

Um nachfolgend Lemma 3.5 heranziehen zu können, wird der erste Term dieser Gleichung mithilfe von (3.60) umgeformt, woraus

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \frac{1}{2} \cdot \mathbf{e}^\top(t) \cdot \left( \underset{[\mathbf{x}]}{\mathcal{F}}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)^\top + \underset{[\mathbf{x}]}{\mathcal{F}}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \right) \cdot \mathbf{e}(t) \\ &\quad + \mathbf{e}^\top(t) \cdot \underset{[\mathbf{x}]}{\mathcal{U}}_{\theta, x}(t) + \mathbf{e}^\top(t) \cdot \mathcal{U}_{\theta, u, y}(t) \end{aligned} \quad (3.83)$$

folgt. Hiermit wäre nun die Abschätzung (3.59) prinzipiell direkt anwendbar. Bei der Bestimmung von  $\underset{[\mathbf{x}]}{\mathcal{F}}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  über die in Definition 3.2 eingeführten  $\tilde{\mathcal{T}}$ -Operatoren entsteht jedoch das praktische Problem, dass a priori keine Aussage über die Eigenwerte dieser Matrix getroffen werden kann, da die Platzierung ihrer Elemente zur Laufzeit vom aktuellen Zustandsschätzwert abhängt. Das Ziel der nächsten Schritte ist es daher diese Abhängigkeit durch eine Überabschätzung von  $\dot{V}(t)$  zu eliminieren. Dazu wird  $\underset{[\mathbf{x}]}{\mathcal{F}}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  zunächst durch

$$\underset{[\mathbf{x}]}{\mathcal{F}}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = \mathcal{F}_c([\boldsymbol{\theta}(t)], t) + \underset{[\mathbf{x}]}{\Delta\mathcal{F}}([\boldsymbol{\theta}(t)], t), \quad (3.84)$$

mit  $\mathcal{F}_c([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  wie in (3.64), dargestellt. Die Matrix  $\mathcal{F}_c([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  hängt dabei nicht von den  $\tilde{\mathcal{T}}$ -Operatoren ab, während die Matrix  $\underset{[\mathbf{x}]}{\Delta\mathcal{F}}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$ , welche lediglich die Abweichung der beiden ersten Matrizen in (3.84) darstellt (und deren Elemente keine Intervallbreiten darstellen), weiterhin von ihnen abhängig bleibt<sup>10</sup>.

Eingesetzt in (3.83) erhält man

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \mathbf{e}^\top(t) \cdot \mathcal{F}_{c, sym}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \cdot \mathbf{e}(t) + \mathbf{e}^\top(t) \cdot \underset{[\mathbf{x}]}{\Delta\mathcal{F}}_{sym}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \cdot \mathbf{e}(t) \\ &\quad + \mathbf{e}^\top(t) \cdot \underset{[\mathbf{x}]}{\mathcal{U}}_{\theta, x}(t) + \mathbf{e}^\top(t) \cdot \mathcal{U}_{\theta, u, y}(t) \end{aligned} \quad (3.85)$$

<sup>10</sup> Zwei Punkte sind zu Gleichung (3.84) anzumerken. Zum einen ist die konkrete Wahl von  $\mathcal{F}_c([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  zunächst völlig willkürlich. Man hätte sie ebenso basierend auf der Obergrenze der unsicheren Beobachterdynamikmatrix (3.66) oder komplett willkürlich wählen können. Letzteres wäre jedoch im Hinblick auf die nächste Anmerkung nicht sinnvoll. Auf den ersten Blick mag die Aufspaltung sinnlos erscheinen, da weiterhin eine der beiden erhaltenen Matrizen von den  $\tilde{\mathcal{T}}$ -Operatoren abhängig ist und damit nicht a priori bestimmt werden kann. Wie in den nachfolgenden Ausführungen gezeigt werden wird, lässt sich diese Matrix jedoch sehr gut mithilfe der Intervallbreiten der Parameter abschätzen.

unter Berücksichtigung von (3.63) und

$${}_{[x]}\Delta\mathcal{F}_{sym}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = \frac{1}{2} \cdot \left( {}_{[x]}\Delta\mathcal{F}^\top([\boldsymbol{\theta}(t)], t) + {}_{[x]}\Delta\mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \right). \quad (3.86)$$

Wendet man nun Lemma 3.5 für den ersten Term an und berücksichtigt, dass die euklidische Norm  $\|\nu\|_2$  eines Skalars  $\nu$  gerade sein Betrag ist und damit eine obere Abschätzung  $\|\nu\|_2 \geq \nu$  darstellt, folgt

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \lambda_{max}(\mathcal{F}_{c,sym}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)) \cdot \|\mathbf{e}(t)\|_2^2 + \|\mathbf{e}^\top(t) \cdot {}_{[x]}\Delta\mathcal{F}_{sym}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \cdot \mathbf{e}(t)\|_2 \\ & + \|\mathbf{e}^\top(t) \cdot {}_{[x]}\mathbf{U}_{\theta,x}(t)\|_2 + \|\mathbf{e}^\top(t) \cdot \mathbf{U}_{\theta,u,y}(t)\|_2. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Aus der Submultiplikativität der Matrixnormen ([GVL96, S. 55]) und  $\|\nu\|_2 = \|\nu^\top\|_2$  kann für (3.87) eine weitere obere Abschätzung mit

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \left( \lambda_{max}(\mathcal{F}_{c,sym}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)) + \|{}_{[x]}\Delta\mathcal{F}_{sym}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)\|_2 \right) \cdot \|\mathbf{e}(t)\|_2^2 \\ & + \left( \|{}_{[x]}\mathbf{U}_{\theta,x}(t)\|_2 + \|\mathbf{U}_{\theta,u,y}(t)\|_2 \right) \cdot \|\mathbf{e}(t)\|_2 \end{aligned} \quad (3.88)$$

angegeben werden. Der nächste Beweisschritt besteht darin zu zeigen, dass der Vorfaktor der quadrierten euklidischen Norm des Beobachterfehlers  $\|\mathbf{e}(t)\|_2^2$  für den vorgeschlagenen Beobachterentwurf negativ ist, woraus folgt, dass ein  $\eta < \|\mathbf{e}(t)\|_2$  existiert, für das der quadratische Term den linearen Term dominiert und somit eine Klasse- $\mathcal{K}$ -Funktion  $v(\|\mathbf{e}\|_2)$  gefunden werden kann, sodass (3.62) mit  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}(t)$  gilt. Eine Aussage, wie negativ der größte Eigenwert von  $\mathcal{F}_{c,sym}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  hierzu zu wählen ist, ist anhand von (3.88) nicht möglich. Der Grund hierfür ist, dass durch die bereits erwähnte Abhängigkeit von  $\|{}_{[x]}\Delta\mathcal{F}_{sym}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)\|_2$  vom aktuellen Schätzwert, welcher die Platzierung der Elemente in der Matrix, nicht die Elemente selbst beeinflusst, keine Angabe zu den Eigenwerten von  ${}_{[x]}\Delta\mathcal{F}_{sym}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  ohne Kenntnis des Schätzwertes gemacht werden kann.

Die Idee ist nun, in einem ersten Zwischenschritt zu bestimmen, welchen maximalen Wert diese Norm annehmen kann, indem sämtliche möglichen Konfigurationen berücksichtigt werden. Vereinfacht werden soll diese Analyse durch Anwendung von (3.56), da bei Betrachtung von (3.57) und (3.58) deutlich wird, dass die Frobeniusnorm gegenüber der Spektralnorm den Vorteil hat, dass sie durch Maximierung der Elemente der enthaltenen Matrix maximiert wird, was für die Spektralnorm nicht gilt. Hieraus folgt die obere Abschätzung für (3.88):

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \left( \lambda_{max}(\mathcal{F}_{c,sym}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)) + \|{}_{[x]}\Delta\mathcal{F}_{sym}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)\|_F \right) \cdot \|\mathbf{e}(t)\|_2^2 \\ & + \left( \|{}_{[x]}\mathbf{U}_{\theta,x}(t)\|_2 + \|\mathbf{U}_{\theta,u,y}(t)\|_2 \right) \cdot \|\mathbf{e}(t)\|_2. \end{aligned} \quad (3.89)$$

Der Beweis, dass die Frobeniusnorm von  $\Delta\mathcal{F}_{max}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$ , definiert in (3.68), eine obere Abschätzung für die Frobeniusnorm von  ${}_{[x]}\Delta\mathcal{F}_{sym}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  ist, ist in Anhang B.3 zu finden. Somit kann eine letzte obere Abschätzung für (3.82) durch

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & (\lambda_{max}(\mathcal{F}_{c,sym}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)) + \|\Delta\mathcal{F}_{max}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)\|_F) \cdot \|\mathbf{e}(t)\|_2^2 \\ & + \left( \|{}_{[x]}\mathbf{U}_{\theta,x}(t)\|_2 + \|\mathbf{U}_{\theta,u,y}(t)\|_2 \right) \cdot \|\mathbf{e}(t)\|_2 \end{aligned} \quad (3.90)$$

angegeben werden. Gilt nun wie gefordert (3.67), dann stellt

$$v(\|e(t)\|_2) = -\frac{1}{2} \cdot (\lambda_{\max}(\mathcal{F}_{c, \text{sym}}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)) + \|\Delta \mathcal{F}_{\text{max}}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)\|_{\text{F}}) \cdot \|e(t)\|_2^2 \quad (3.91)$$

eine Klasse- $\mathcal{K}$ -Funktion  $v(\|e(t)\|_2)$  dar, für welche ein  $\eta < \|e(t)\|_2$  existiert, sodass (3.62) mit  $\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{e}(t)$  gilt. Damit ist gezeigt, dass der Beobachterfehler beschränkt ist.  $\square$

### Beispiel 3.4:

Gegeben sei das bereits in Beispiel 3.2 verwendete LPV-System (3.32). Von diesem System seien nun jedoch nur unsicherheitsbehaftete Informationen zu den Systemmatrizen  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))$  und  $\mathbf{B}$  vorhanden, welche sich durch

$$[\mathbf{A}([\boldsymbol{\theta}(t)])] = \begin{bmatrix} \kappa(t) + [-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}] & 2 \\ [-\frac{23}{2}, -\frac{21}{2}] & [-\frac{16}{5}, -\frac{14}{5}] \end{bmatrix}, \quad (3.92a)$$

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} [-\frac{31}{10}, -\frac{29}{10}] \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.92b)$$

beschreiben lassen. Von dem zeitvarianten Parameter  $\kappa(t)$  sei wie in Beispiel 3.2 a priori nur bekannt, dass  $-15 \leq \kappa(t) \leq -2$  gilt.

Der erste Schritt zum Entwurf des grenzverkoppelten Intervallbeobachters für dieses System ist die unsicherheitsbehaftete Beobachterdynamikmatrix  $[\mathbf{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)] = [\mathbf{A}([\boldsymbol{\theta}(t)])] - \mathbf{L}(t) \cdot \mathbf{C}$  aufzustellen. Für dieses Beispiel erhält man

$$[\mathbf{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)] = \begin{bmatrix} \kappa(t) + [-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}] & 2 - l_1(t) \\ [-\frac{23}{2}, -\frac{21}{2}] & [-\frac{16}{5}, -\frac{14}{5}] - l_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.93)$$

mit  $\mathbf{L}(t) = [l_1(t) \quad l_2(t)]^\top$ . Hiermit folgt wiederum

$$\underline{\mathbf{F}}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = \begin{bmatrix} \kappa(t) - \frac{1}{5} & 2 - l_1(t) \\ -\frac{23}{2} & -\frac{16}{5} - l_2(t) \end{bmatrix}. \quad (3.94)$$

Fordert man zur Vereinfachung des Entwurfs  $l_1(t) \geq 2$ , gilt nach (3.65a)

$$\widetilde{\underline{\mathbf{F}}}^+([\boldsymbol{\theta}(t)]) = \begin{bmatrix} \kappa(t) - \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{16}{5} - l_2(t) \end{bmatrix}, \quad (3.95a)$$

$$\widetilde{\underline{\mathbf{F}}}^-([\boldsymbol{\theta}(t)]) = \begin{bmatrix} 0 & 2 - l_1(t) \\ -\frac{23}{2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.95b)$$

Aus diesen Matrizen kann im nächsten Schritt nach (3.64) die Matrix  $\mathcal{F}_c([\boldsymbol{\theta}(t)])$  bestimmt werden, welche in (3.96) dargestellt ist.

$$\mathcal{F}_c([\boldsymbol{\theta}(t)]) = \begin{bmatrix} \kappa(t) - \frac{1}{5} & 0 & 0 & -2 + l_1(t) \\ 0 & -\frac{16}{5} - l_2(t) & \frac{23}{2} & 0 \\ 0 & -2 + l_1(t) & \kappa(t) - \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{23}{2} & 0 & 0 & -\frac{16}{5} - l_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

Die nach (3.67) zum Stabilitätsnachweis heranzuziehende Matrix, welche damit auch für die Beobachterausslegung genutzt werden kann, ist die aus (3.96) abgeleitete Matrix

$$\mathcal{F}_{c,sym}([\boldsymbol{\theta}(t)]) = \begin{bmatrix} \kappa(t) - \frac{1}{5} & 0 & 0 & \frac{19}{4} + \frac{l_1(t)}{2} \\ 0 & -\frac{16}{5} - l_2(t) & \frac{19}{4} + \frac{l_1(t)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{19}{4} + \frac{l_1(t)}{2} & \kappa(t) - \frac{1}{5} & 0 \\ \frac{19}{4} + \frac{l_1(t)}{2} & 0 & 0 & -\frac{16}{5} - l_2(t) \end{bmatrix}. \quad (3.97)$$

Der maximale Eigenwert dieser Matrix muss folglich kleiner sein, als die negative Frobeniusnorm von

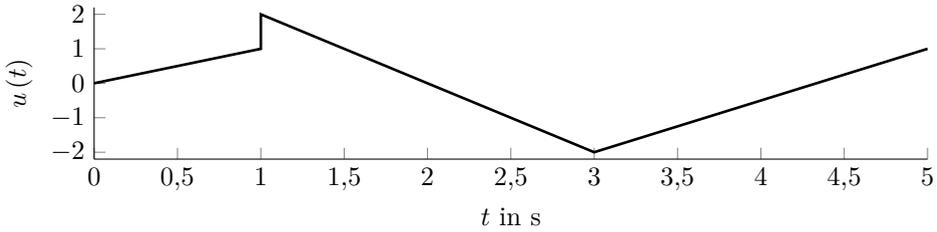
$$\Delta\mathcal{F}_{max}([\boldsymbol{\theta}(t)]) = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

für welche  $\|\Delta\mathcal{F}_{max}([\boldsymbol{\theta}(t)])\|_F < 1,7$  gilt.

Nachfolgend soll eine Möglichkeit zur Bestimmung einer Beobachtermatrix, welche diese Bedingung erfüllt, erläutert werden. Anschließend wird auf eine weitere Möglichkeit eingegangen. Zur Bestimmung der Beobachtermatrix werden zunächst die Eigenwerte  $\lambda_{i,sym}(l_1(t), l_2(t), \kappa(t))$  mit  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  von  $\mathcal{F}_{c,sym}([\boldsymbol{\theta}(t)])$  in Abhängigkeit des Parameters  $\kappa(t)$  mithilfe des Computeralgebrasystems Mathematica bestimmt. Basierend hierauf kann das Ungleichungssystem

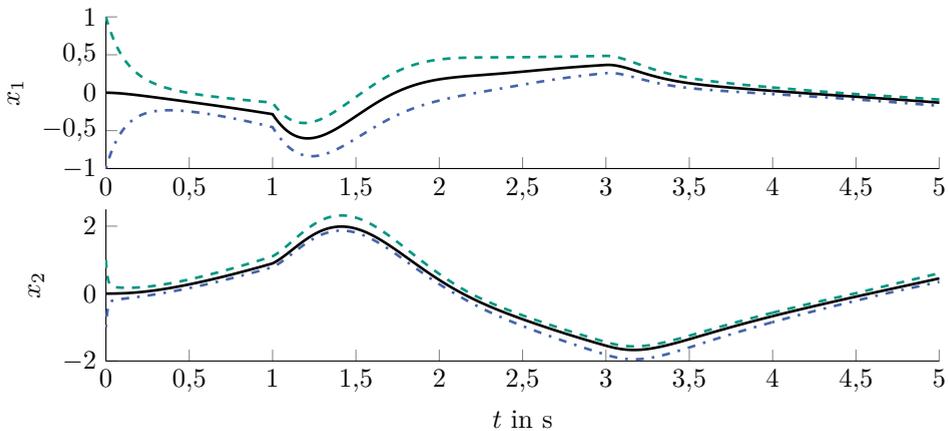
$$\lambda_{i,sym}(l_1(t), l_2(t), \kappa(t)) < -1,7 \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (3.99)$$

mit der Nebenbedingung  $l_1(t) \geq 2$  aufgestellt werden. An diesem Punkt wären nun zwei Vorgehensweisen denkbar. Die erste und hier verfolgte ist es, eine konstante Beobachtermatrix zu ermitteln (was beispielsweise durch die in Mathematica implementierte Funktion „FindInstance“ erfolgen kann), welche das Ungleichungssystem für alle  $\kappa(t) \in [-15, -2]$  erfüllt. Für dieses Beispiel ergibt sich auf diesem Weg  $\mathbf{L}^\top = [2 \quad 110]$ . Sollte das Ungleichungssystem nicht mit einer konstanten Beobachtermatrix zu lösen sein, bietet sich aufgrund der allgemeinen Einführung der Beobachtermatrix als zeitvariante Matrix auch das Vorgehen an, die Eigenwerte  $\lambda_{i,sym}(l_1(t), l_2(t), \kappa(t))$  kleiner  $-\|\Delta\mathcal{F}_{max}([\boldsymbol{\theta}(t)])\|_F$  vorzugeben und die Beobachtermatrix entsprechend nachzuführen. Der Vorteil des zweiten Vorgehens wäre, dass a priori keine Information über den Bereich der zeitvarianten Parameter vorliegen müsste, sondern nur dessen Beschränktheit vorausgesetzt werden muss. Für die Simulation wird die in Abbildung 3.5 dargestellte, nicht stetig differenzierbare Systemeingangsgröße gewählt.



**Abbildung 3.5:** Beispiel 3.4: Eingangsgroesse zur Simulation des grenzverkoppelten Intervallbeobachters für LPV-Systeme mit Eingangs-, Ausgangs- und Parameterunsicherheiten

Sowohl die Unsicherheit der Eingangsgroesse als auch die der Ausgangsgroesse wird in diesem Beispiel zeitinvariant gewählt mit  $[\mathbf{v}_u] = [\mathbf{v}_y] = [-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}]$  (siehe (6.4)). Die übrigen Größen werden wie im vorherigen Beispiel zu  $\kappa(t) = -8, 5 + 6, 5 \cdot \sin(2\pi \cdot t)$ ,  $\mathbf{x}^\top(0) = [0 \ 0]$  und  $[\bar{\mathbf{x}}^\top(0) \ \underline{\mathbf{x}}^\top(0)] = [1 \ 1 \ -1 \ -1]$  gewählt. Das Simulationsergebnis des Intervallbeobachters ist in Abbildung 3.6 gezeigt. Für beide Zustandsgrößen wird die tatsächliche Zustandsgröße mit einem Intervall, dessen Intervallbreite beschränkt ist, eingeschlossen. Darüber hinaus ist auch erkennbar, dass nach einem Einschwingvorgang von etwa 3s die Intervallbreite des nicht messbaren Zustands deutlich reduziert wird. Damit zeigt der Intervallbeobachter das gewünschte Verhalten einer Einschließung der tatsächlichen Systemzustände mit einer beschränkten Intervallbreite.



**Abbildung 3.6:** Beispiel 3.4: Ergebnis der Intervallschätzung des grenzverkoppelten Intervallbeobachters für LPV-Systeme mit Eingangs-, Ausgangs- und Parameterunsicherheiten (Untergrenze: blau strichpunktiriert, Obergrenze: grün gestrichelt, tatsächliche Zustandsgröße: schwarz)

## 3.5 Zusammenfassung

Das Hauptaugenmerk dieses Kapitels lag auf der Übertragung von Müllers Theorem zur Bestimmung eines Framers mit dem Ziel einen Intervallbeobachter für LPV-Systeme zur Berücksichtigung von Eingangs-, Ausgangs- und Parameterunsicherheiten zu entwickeln. Hierzu wurden ausgehend von LTI-Systemen Stabilitätskriterien eingeführt, um nicht nur einen Framer, sondern einen Intervallbeobachter zu erhalten. Bei LTI-Systemen konnte hierzu noch gefordert werden, dass die Dynamikmatrix der Beobachterfehlerdynamik, welche sich aus der Beobachterdynamikmatrix durch Betragsbildung der Nebendiagonalelemente ergibt, eine Hurwitz-Matrix sein muss. Da diese Eigenschaft bei LPV-Systemen keine Aussagen über das Stabilitätsverhalten zulässt, wurden bei Anwendung auf LPV-Systeme spezielle Stabilitätskriterien für LTV-Systeme verwendet. In diesem Zuge wurde eine notwendige Bedingung für die Stabilität eines Framers für LPV-Systeme bestimmt. Damit wurde erstmals ein Intervallbeobachter für LPV-Systeme, dessen dynamische Systeme zur Erzeugung der Ober- und Untergrenze verkoppelt sind, vorgestellt.

Ferner thematisierte dieses Kapitel die Übertragung des in der Literatur bekannten, klassischen Vorgehens zum Entwurf reduzierter Zustandsbeobachter auf die in dieser Arbeit entwickelten Ansätze. Dabei konnte gezeigt werden, dass die Einbindung der zur Reduktion der Beobachterordnung etablierten Koordinatentransformation möglich ist. Im Fall einer zeitvarianten Beobachtermatrix konnte gezeigt werden, dass auch deren zeitliche Ableitung berücksichtigt werden muss, um weiterhin eine garantierte Einschließung des tatsächlichen Systemzustands zu erhalten. An dieser Stelle soll erneut hervorgehoben werden, dass der Einsatz eines reduzierten Intervallbeobachters im Kontext der garantierten Zustandsschätzung durch Intervallbeobachter besonders sinnig ist, da für ein System der Ordnung  $n$  die Beobachtersystemordnung  $2n$  beträgt. Numerische Beispiele zu jedem Entwurfsverfahren runden durch die Veranschaulichung des jeweiligen Entwurfes das Kapitel ab.



# 4 Transformationsbasierte Intervallbeobachter für LPV-Systeme

Im letzten Kapitel wurde bereits ein Intervallbeobachteransatz vorgestellt, welcher sich, wie an den numerischen Beispielen gezeigt, zur garantierten Zustandsschätzung von ASM einsetzen lässt. Allerdings gestaltet sich bei einer praktischen Anwendung für LPV-Systeme bereits bei Berücksichtigung von Ein-/Ausgangsunsicherheiten die Beobachterauflegung aufgrund der Betragsbildung der Nebendiagonalelemente der Beobachterdynamikmatrix  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$ , welche aus der gekoppelten Dynamik der beiden Grenzen resultiert, komplexer als bei einem gewöhnlichen Beobachter. Daher soll in diesem Kapitel eine Methodik vorgestellt werden, diese Verkopplung durch eine Zustandstransformation zu umgehen. Dazu wird eine neu entwickelte Transformationsvorschrift für LPV-Systeme im Allgemeinen und für LPV-Systeme mit besonderen Struktureigenschaften vorgestellt. Dies ist notwendig, da alle bisher betrachteten Transformationsvorschriften aus der Literatur zu einschränkend sind und insbesondere nicht für das Zustandsraummodell einer ASM geeignet sind.

## 4.1 Grundidee

Die Grundidee besteht darin eine Zustandstransformation

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{x}(t) \quad (4.1)$$

mit  $\mathbf{P}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  einzuführen und in dem transformierten Koordinatensystem einen Intervallbeobachter zu entwerfen. Dieses Vorgehen wurde erstmals in [REZ12] für LTI-Systeme auf Basis einer zeitinvarianten Zustandstransformation vorgestellt.

Da eine zeitinvariante Transformationsmatrix im Allgemeinen nicht ausreicht, um eine Beobachterdynamikmatrix zu erhalten, die eine Metzler-Matrix, eine Hurwitz-Matrix und zeitinvariant ist, bietet es sich bei LPV-Systemen an, eine zeitvariante Transformationsmatrix anzusetzen, die aufgrund der a priori unbekannt Parameterverläufe zur Laufzeit bestimmt wird. Diese Grundidee wurde zeitgleich in [TRC<sup>+</sup>14] und in der Masterarbeit [Pfe14] entwickelt. Wird (4.1) auf den klassischen Luenberger-Beobachter, der in (3.6) für LTI-Systeme eingeführt wurde, und nun auf LPV-Systeme nach (1.1) erweitert wird, angewendet, erhält man

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}(t) = \mathbf{F}_z(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \hat{\mathbf{z}}(t) + \underbrace{\mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}(t))}_{=\hat{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}(t), t)} \cdot \mathbf{u}(t) + \underbrace{\mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{L}(t)}_{=\hat{\mathbf{L}}(t)} \cdot \mathbf{y}(t) \quad (4.2)$$

mit

$$\mathbf{F}_z(\boldsymbol{\theta}(t), t) = \mathbf{P}(t) \cdot \underbrace{\{\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t)) - \mathbf{L}(t) \cdot \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}(t))\}}_{=\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t)} \cdot \mathbf{P}^{-1}(t) - \mathbf{P}(t) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{P}^{-1}(t). \quad (4.3)$$

An (4.3) ist deutlich zu erkennen, dass  $\mathbf{P}(t)$  Auswirkung auf die Gestalt von  $\mathbf{F}_z(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  hat, was die Möglichkeiten diese als Metzler-Matrix zu erhalten, erweitert. Übertragen auf den Entwurf eines Intervallbeobachters, welcher nur einen unsicheren Anfangszustand

$$[\mathbf{z}(0)] = \mathbf{P}(0) \cdot [\mathbf{x}(0)] \quad (4.4)$$

berücksichtigt, erhält man

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}}(t) = \mathbf{F}_z(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \bar{\mathbf{z}}(t) + \check{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \mathbf{u}(t) + \check{\mathbf{L}}(t) \cdot \mathbf{y}(t), \quad (4.5a)$$

$$\dot{\underline{\mathbf{z}}}(t) = \mathbf{F}_z(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \underline{\mathbf{z}}(t) + \check{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \mathbf{u}(t) + \check{\mathbf{L}}(t) \cdot \mathbf{y}(t) \quad (4.5b)$$

und analog zum Stabilitätsbeweis des klassischen Luenberger-Beobachters

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}}_z(t) = \frac{d}{dt} (\bar{\mathbf{z}}(t) - \mathbf{z}(t)) = \mathbf{F}_z(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \bar{\mathbf{e}}_z, \quad (4.6a)$$

$$\dot{\underline{\mathbf{e}}}_z(t) = \frac{d}{dt} (\mathbf{z}(t) - \underline{\mathbf{z}}(t)) = \mathbf{F}_z(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \underline{\mathbf{e}}_z. \quad (4.6b)$$

Damit (4.5) in Kombination mit

$$[\mathbf{x}(t)] = \mathbf{P}^{-1}(t) \cdot [\mathbf{z}(t)] \quad (4.7)$$

ein Intervallbeobachter für (1.1) darstellt, muss

1.  $\mathbf{F}_z(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  derart festgelegt werden, dass (4.6) ein stabiles System und positives System ist, wobei aus letzterem direkt folgt, dass  $\mathbf{F}_z(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  eine Metzler-Matrix sein muss;
2. das aus (4.3) folgende dynamische System

$$\frac{d}{dt} \mathbf{P}^{-1}(t) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \mathbf{P}^{-1}(t) - \mathbf{P}^{-1}(t) \cdot \mathbf{F}_z(\boldsymbol{\theta}(t), t), \quad (4.8)$$

welches die Dynamik der inversen Transformationsmatrix beschreibt, stabil und dessen Lösung nicht singular sein, um eine beschränkte Transformation sowie Rücktransformation zu erhalten.

Wie leicht an (4.8) zu erkennen ist, können diese beiden Punkte nicht getrennt voneinander betrachtet werden. Die nachfolgenden Abschnitte dieses Kapitels sind daher der Fragestellung gewidmet, wie sich die Freiheitsgrade, welche in der Wahl von  $\mathbf{L}(t)$ ,  $\mathbf{F}_z(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  und dem implizit in (4.8) auftauchenden Freiheitsgrad der Wahl von  $\mathbf{P}^{-1}(0)$  bestehen, genutzt werden können, um diese Ziele zu erreichen.

## 4.2 Transformationsbasierter Intervallbeobachter zur Berücksichtigung von Ein-/Ausgangsunsicherheiten

### 4.2.1 Auslegung der Transformationsmatrixdynamik durch Erzeugung eines grenzstabilen Verhaltens

Bevor in diesem Abschnitt ein erstes Vorgehen zur Wahl von  $\mathbf{L}(t)$ ,  $\mathbf{F}_z(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  und  $\mathbf{P}^{-1}(0)$ , welches im Rahmen der Masterarbeit [Pfe14] entstanden ist, vorgestellt wird, sollen zunächst zwei erforderliche Annahmen getroffen werden. Annahme 4.2 ist dabei noch eine weiche und unpräzise Aussage und wird im weiteren Verlauf untersucht.

**Annahme 4.1**

Die Eigenwerte von  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  definiert in (3.23) sind durch  $\mathbf{L}(t)$  frei vorgebar für alle  $t$ .<sup>11</sup>

**Annahme 4.2**

Die zeitliche Änderung der zeitvarianten Parameter  $\boldsymbol{\theta}(t)$  ist hinreichend klein und langsam.

---

<sup>11</sup> Für LTI-Systeme ist diese Forderung gleichbedeutend mit der Forderung nach Beobachtbarkeit ([Unb07, S. 83]).

**Satz 4.1 (Vollständiger transformationsbasierter Intervallbeobachter mit grenzstabiler Transformationsmatrixdynamik für LPV-Systeme unter Berücksichtigung von Ein-/Ausgangsunsicherheiten)**

Ist die Annahme 3.2 für zeitvariante Systemmatrizen erfüllt und sind die Annahmen 3.3, 4.1 und 4.2 erfüllt, dann ist ein Intervallbeobachter für (1.1) mit (2.2) und (2.3) durch

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{z}}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_z & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{z}(t) \\ z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{\check{\mathbf{B}}}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \\ \mathbf{u}_{\check{\mathbf{B}}}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}}_{\check{\mathbf{L}}}(t) \\ \mathbf{y}_{\check{\mathbf{L}}}(t) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

mit

$$[\mathbf{u}_{\check{\mathbf{B}}}(\boldsymbol{\theta}(t), t)] = [\underline{\mathbf{u}}_{\check{\mathbf{B}}}(\boldsymbol{\theta}(t), t), \bar{\mathbf{u}}_{\check{\mathbf{B}}}(\boldsymbol{\theta}(t), t)] = \check{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot [\mathbf{u}(t)], \quad (4.10)$$

$$[\mathbf{y}_{\check{\mathbf{L}}}(t)] = [\underline{\mathbf{y}}_{\check{\mathbf{L}}}(t), \bar{\mathbf{y}}_{\check{\mathbf{L}}}(t)] = \check{\mathbf{L}}(t) \cdot [\mathbf{y}(t)] \quad (4.11)$$

und der konstanten Matrix

$$\mathbf{F}_z = \eta \cdot \mathbf{I} \quad (4.12)$$

mit  $\eta < 0$  gegeben. Die Dynamik der beinhalteten Transformationsmatrix ist unter Berücksichtigung der Wahl von  $\mathbf{F}_z$  in (4.12) durch (4.8) gegeben, wobei über  $\mathbf{L}(t)$  die Eigenwerte von  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \in \mathbb{R}^n$  so zu wählen sind, dass

$$\lambda_{(2i-1)} = \eta + j\nu_i \quad (4.13a)$$

$$\lambda_{(2i)} = \eta - j\nu_i \quad (4.13b)$$

mit beliebigen  $\nu_i \in \mathbb{R}_{\neq 0}$  und  $i \in \{1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$  im Fall einer geraden Systemordnung  $n$  gilt. Im Falle einer ungerade Systemordnung  $n$  ist zusätzlich ein Eigenwert gleich  $\eta$  zu wählen.

$\mathbf{P}^{-1}(0)$  ist als Einheitsmatrix zu wählen. Ferner müssen die Startwerte von (4.9) die Beziehung

$$\mathbf{P}(0) \cdot \mathbf{x}(0) \in [\underline{z}(0), \bar{z}(0)] \quad (4.14)$$

erfüllen. Die Rücktransformation erfolgt mit (4.7).

**Beweis:**

Gemäß den Ausführungen in Abschnitt 4.1 gliedert sich der Beweis von Satz 4.1 in zwei Unterbeweise. Zuerst wird nachgewiesen, dass die Fehlerdynamiken

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}}_z(t) = \dot{\bar{z}}(t) - \dot{z}(t), \quad (4.15a)$$

$$\dot{\underline{\mathbf{e}}}_z(t) = \dot{z}(t) - \dot{\underline{z}}(t) \quad (4.15b)$$

stabile und positive Systeme darstellen, da hieraus folgt, dass zum einen  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{P}^{-1}(t) \cdot [\underline{z}(t), \bar{z}(t)]$  und zum anderen  $\bar{z}(t) - z(t) < \infty$  gilt.

In einem zweiten Schritt wird anschließend nachgewiesen, dass  $\frac{d}{dt} \mathbf{P}^{-1}(t)$  stabil ist und die Lösung dieses Differentialgleichungssystems nicht singular ist.

Für den ersten Schritt soll zunächst (4.15a) ausgewertet werden. Dazu wird zunächst unter Verwendung von (4.1) und (1.1a) die Systemdynamik in das  $z$ -Koordinatensystem mit  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}^{-1}(t) \cdot \mathbf{z}(t)$  übertragen woraus

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \frac{d}{dt} \mathbf{P}^{-1}(t) \cdot \mathbf{z}(t) + \mathbf{P}^{-1}(t) \cdot \dot{\mathbf{z}}(t), \\ \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t)) \cdot \mathbf{P}^{-1}(t) \cdot \mathbf{z}(t) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}(t)) \cdot \mathbf{u}(t) &= \frac{d}{dt} \mathbf{P}^{-1}(t) \cdot \mathbf{z}(t) + \mathbf{P}^{-1}(t) \cdot \dot{\mathbf{z}}(t) \end{aligned} \quad (4.16)$$

und schließlich

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \left( \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t)) \cdot \mathbf{P}^{-1}(t) - \mathbf{P}(t) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{P}^{-1}(t) \right) \cdot \mathbf{z}(t) \\ &\quad + \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}(t)) \cdot \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (4.17)$$

folgt. Unter Berücksichtigung von (4.9) und durch Addition des Ausdrucks  $\check{\mathbf{L}}(t) \cdot \mathbf{y}(t) - \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{L}(t) \cdot \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}(t)) \cdot \mathbf{P}^{-1}(t) \cdot \mathbf{z}(t)$ , der null ergibt, erhält man

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{e}}}_z(t) &= \mathbf{F}_z \cdot \bar{\mathbf{z}}(t) + \bar{\mathbf{u}}_{\check{\mathbf{B}}} + \bar{\mathbf{y}}_{\check{\mathbf{L}}} \\ &\quad - \left( \mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \mathbf{P}^{-1}(t) - \mathbf{P}(t) \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{P}^{-1}(t) \right) \cdot \mathbf{z}(t) \\ &\quad - \check{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \mathbf{u}(t) - \check{\mathbf{L}}(t) \cdot \mathbf{y}(t). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Nutzt man die bekannte Dynamik der inversen Transformationsmatrix (4.8) aus, vereinfacht sich diese Gleichung zu

$$\dot{\bar{\mathbf{e}}}_z(t) = \mathbf{F}_z \cdot \bar{\mathbf{e}}_z + \overbrace{\bar{\mathbf{u}}_{\check{\mathbf{B}}}(\boldsymbol{\theta}(t), t) - \check{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \mathbf{u}(t)}^{=\mathbf{u}_u^*(\boldsymbol{\theta}(t), t)} + \overbrace{\bar{\mathbf{y}}_{\check{\mathbf{L}}}(t) - \check{\mathbf{L}}(t) \cdot \mathbf{y}(t)}^{=\mathbf{y}_u^*(t)}. \quad (4.19)$$

Durch analoge Umformungen erhält man für die Dynamik des unteren Beobachterfehlers

$$\dot{\underline{\mathbf{e}}}_z(t) = \mathbf{F}_z \cdot \underline{\mathbf{e}}_z + \overbrace{\check{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \mathbf{u}(t) - \underline{\mathbf{u}}_{\check{\mathbf{B}}}(\boldsymbol{\theta}(t), t)}^{=\mathbf{u}_l^*(\boldsymbol{\theta}(t), t)} + \overbrace{\check{\mathbf{L}}(t) \cdot \mathbf{y}(t) - \underline{\mathbf{y}}_{\check{\mathbf{L}}}(t)}^{=\mathbf{y}_l^*(t)}. \quad (4.20)$$

Entsprechend den Definitionen 2.3 und 2.4 sowie Lemma 2.1 muss für einen nichtnegativen Beobachterfehler und damit für eine Einschließung des transformierten Systemzustands zum einen  $\bar{\mathbf{e}}(0) > \mathbf{0}$  und  $\underline{\mathbf{e}}(0) > \mathbf{0}$  gelten, was durch die Anforderung (4.14) gegeben ist. Zum anderen muss  $\mathbf{F}_z$  eine Metzler-Matrix sein, was sie durch die in (4.12) festgelegte Wahl ist. Ferner müssen  $\mathbf{u}_u^*(\boldsymbol{\theta}(t), t)$ ,  $\mathbf{y}_u^*(t)$ ,  $\mathbf{u}_l^*(\boldsymbol{\theta}(t), t)$ ,  $\mathbf{y}_l^*(t)$  nichtnegativ sein, was im nächsten Schritt gezeigt werden soll. Stellt man diese Ausdrücke ohne die eingeführten Abkürzungen dar, erhält man

$$\mathbf{u}_u^*(\boldsymbol{\theta}(t), t) = \text{ub} \left( \check{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot [\mathbf{u}(t)] \right) - \check{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \mathbf{u}(t), \quad (4.21a)$$

$$\mathbf{u}_l^*(\boldsymbol{\theta}(t), t) = \check{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \mathbf{u}(t) - \text{lb} \left( \check{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot [\mathbf{u}(t)] \right), \quad (4.21b)$$

$$\mathbf{y}_u^*(t) = \text{ub} \left( \check{\mathbf{L}}(t) \cdot [\mathbf{y}(t)] \right) - \check{\mathbf{L}}(t) \cdot \mathbf{y}(t), \quad (4.21c)$$

$$\mathbf{y}_l^*(t) = \check{\mathbf{L}}(t) \cdot \mathbf{y}(t) - \text{lb} \left( \check{\mathbf{L}}(t) \cdot [\mathbf{y}(t)] \right). \quad (4.21d)$$

Aufgrund der Gültigkeit von (2.2) und (2.3) sind all diese Ausdrücke nichtnegativ, woraus die Einschließung des transformierten Systemzustands folgt. Da die in (4.12) gewählte Matrix  $\mathbf{F}_z$  eine zeitinvariante Hurwitz-Matrix ist und die Fehlerdynamiken damit BIBO-stabil sind (siehe Definition D.2 und Lemma D.1), ist durch die allgemein in dieser Arbeit getroffene Annahme beschränkter Eingangsgrößen, Ausgangsgrößen und Systemparameter ebenfalls die Beschränktheit des einschließenden Intervallvektors sichergestellt, falls die Einträge der Transformationsmatrix sowie ihrer Inversen beschränkt sind.

Daher wird im zweiten Schritt (4.8) hinsichtlich der Stabilität der inversen Transformationsmatrix untersucht. Zur vereinfachten Darstellung wird

$$\mathbf{W}(t) := \mathbf{P}^{-1}(t) \quad (4.22)$$

definiert, womit sich (4.8) zu

$$\dot{\mathbf{W}}(t) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \mathbf{W}(t) - \mathbf{W}(t) \cdot \mathbf{F}_z(\boldsymbol{\theta}(t), t) \quad (4.23)$$

ergibt. Berücksichtigt man die konkrete Wahl von  $\mathbf{F}_z$  gegeben in (4.12) folgt

$$\dot{\mathbf{W}}(t) = \overbrace{\{\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t) - \eta \cdot \mathbf{I}\}}^{=\chi(\boldsymbol{\theta}(t), t)} \cdot \mathbf{W}(t). \quad (4.24)$$

Für die Eigenwerte  $\lambda_\chi(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  der Matrix  $\chi(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  gilt

$$0 = |\lambda_\chi(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \mathbf{I} - \chi(\boldsymbol{\theta}(t), t)| = |\overbrace{(\lambda_\chi(\boldsymbol{\theta}(t), t) + \eta) \cdot \mathbf{I} - \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t)}^{=\lambda_F}|, \quad (4.25)$$

womit leicht zu sehen ist, dass die Eigenwerte von  $\chi(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  gerade die entlang der reellen Achse um  $-\eta$  verschobenen Eigenwerte der Beobachterdynamikmatrix  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  sind. Entsprechend der Vorgabe in Satz 4.1 ist der Realteil der Eigenwerte von  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  gleich  $\eta$  zu wählen, weswegen der Realteil der Eigenwerte von  $\chi(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  null ist. Da für kleine und langsame Änderungen der zeitvarianten Parameter die Stabilitätsbedingungen von LPV-Systemen denen von LTI-Systemen gleichen ([Zhu93]), ist  $\dot{\mathbf{W}}(t)$  damit nach [Lue79, S. 158 f.] grenzstabil und als Ergebnis ist eine Dauerschwingung zu erwarten. Damit ist sichergestellt, dass die Elemente von  $\mathbf{W}(t)$  beschränkt sind. Im nächsten Schritt soll die Gültigkeit der Forderung, dass  $\mathbf{W}(t)$  im betrachteten Zeitraum der Zustandsschätzung  $t \in [0, t_e]$  mit  $t_e < \infty$  nicht singular ist, um die Transformationsmatrix  $\mathbf{P}(t) = \mathbf{W}^{-1}(t)$  bestimmen zu können, betrachtet werden. Nach [Bel70, S. 171] ist dies gegeben, wenn das Integral  $\int_0^{t_e} \|\chi(\boldsymbol{\theta}(t), t)\|_1 dt$  mit  $\|\chi(\boldsymbol{\theta}(t), t)\|_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\chi_{ij}(\boldsymbol{\theta}(t), t)|$  existiert, d. h. beschränkt ist. Aufgrund von Annahme 3.2 und  $t_e < \infty$  ist diese Bedingung erfüllt.  $\square$

Als nächstes soll ein numerisches Beispiel zum einen die Funktionsfähigkeit, aber auch die Grenzen des Verfahrens bei sich schnell ändernden Parametern aufzeigen. Zuvor soll jedoch die Annahme, dass die Parameter sich nur gering und langsam ändern

kurz diskutiert werden. Aufgrund dieser unpräzisen Forderung an den Entwurf muss zumindest eine simulative Untersuchung des Stabilitätsverhaltens auf Basis des zu erwartenden Szenarios durchgeführt werden. Hierin ist zu überprüfen, ob die Einträge der Transformationsmatrix  $\mathbf{P}(t)$  und ihrer Inversen  $\mathbf{W}(t)$  beschränkt bleiben<sup>12</sup>.

**Beispiel 4.1:** Gegeben sei das dynamische System aus Beispiel 3.3, wobei hinsichtlich des zeitvarianten Parameters  $\kappa(t)$  nur dessen Beschränktheit angenommen sei. An dieser Stelle sei angemerkt, dass das Kalman-Kriterium für alle  $\kappa(t)$  erfüllt ist und damit die Beobachtereigenwerte frei vorgebar sind. Zum Entwurf des Intervallbeobachters nach (4.1) wird zunächst  $\mathbf{F}_z = -7 \cdot \mathbf{I}$  gewählt. Die Eigenwerte der Beobachterdynamikmatrix  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$ , deren Realteil nach (4.13) den gleichen Wert wie die Einträge von  $\mathbf{F}_z$  aufweisen müssen, werden zu  $\lambda_{1/2} = -7 \pm j3$  und  $\lambda_{3/4} = -7 \pm j5$  festgelegt. Zur Bestimmung der von  $\kappa(t)$  abhängigen Beobachtermatrix  $\mathbf{L}(t)$  wird die vollständige modale Synthese ([Rop86]) angewendet.

$$\mathbf{L}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^\top \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A}(\kappa(t)) - \lambda_1 \cdot \mathbf{I})^{-1} \\ \mathbf{q}_2^\top \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A}(\kappa(t)) - \lambda_2 \cdot \mathbf{I})^{-1} \\ \mathbf{q}_3^\top \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A}(\kappa(t)) - \lambda_3 \cdot \mathbf{I})^{-1} \\ \mathbf{q}_4^\top \cdot \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A}(\kappa(t)) - \lambda_4 \cdot \mathbf{I})^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^\top \\ \mathbf{q}_2^\top \\ \mathbf{q}_3^\top \\ \mathbf{q}_4^\top \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Die in (4.26) enthaltenen Parametervektoren werden willkürlich zu

$$\mathbf{q}_1^\top = [0 \quad 1 + j2], \quad (4.27a)$$

$$\mathbf{q}_2^\top = [0 \quad 1 - j2], \quad (4.27b)$$

$$\mathbf{q}_3^\top = [3 + j4 \quad 0], \quad (4.27c)$$

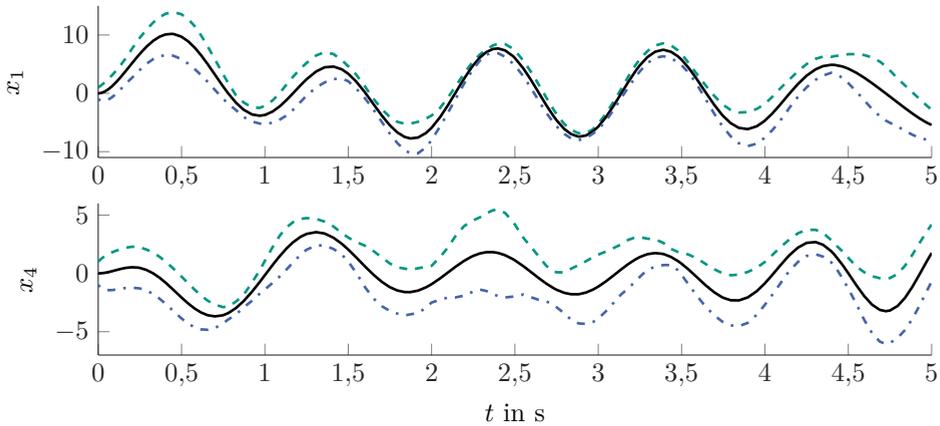
$$\mathbf{q}_4^\top = [3 - j4 \quad 0] \quad (4.27d)$$

gewählt, wobei die Einträge von je zwei Parametervektoren konjugiert komplex zueinander sind, um eine reelle Beobachtermatrix zu erhalten.

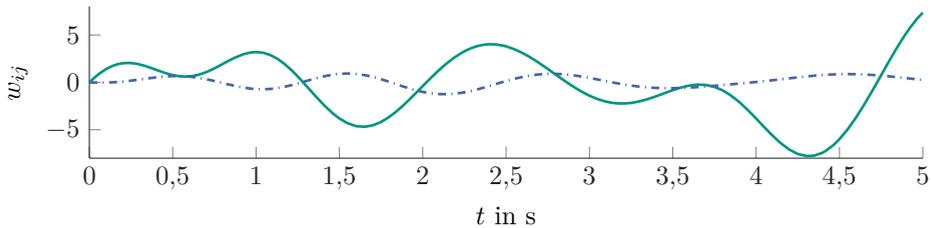
Zur Durchführung der Simulation soll analog zu Beispiel 3.3 die Eingangsgröße zu  $\mathbf{u}^\top(t) = [10 \cdot \sin(2\pi \cdot t) \quad 10 \cdot \sin(2\pi \cdot t + \frac{\pi}{2})]$  gewählt werden. Bezüglich des Parameters  $\kappa(t)$  werden zwei Szenarien betrachtet. In dem ersten Szenario gilt  $\kappa_1(t) = -8, 5 + 6, 5 \cdot \sin(0, 2\pi \cdot t)$ , was der Sinusschwingung aus Beispiel 3.3 entspricht, deren Frequenz um den Faktor 10 reduziert ist, während im zweiten Szenario die gleiche Sinusfunktion mit  $\kappa_2(t) = -8, 5 + 6, 5 \cdot \sin(2\pi \cdot t)$  genutzt wird. Als Startwerte werden  $\mathbf{x}^\top(0) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$  und  $[\bar{\mathbf{x}}^\top(0) \quad \underline{\mathbf{x}}^\top(0)] = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1]$  gewählt. Bei den Ein- und Ausgangsgrößen wird eine symmetrisch um den tatsächlichen Wert gelegte Unsicherheit von  $\pm 1\%$  genutzt.

<sup>12</sup> Um die dennoch im realen Betrieb aufgrund des a priori nicht bekannten zeitlichen Verhaltens der Parameter vorhandene Möglichkeit einer Divergenz der Elemente von  $\mathbf{W}(t)$  abzufangen, wurde in [KPF<sup>+</sup>16] eine Reinitialisierungsstrategie vorgeschlagen. Dort wird gezeigt, wie das Differentialgleichungssystem zur Bestimmung der inversen Transformationsmatrix sowie der Zustandsgrenzen reinitialisiert werden kann, ohne die Bedingungen zur Einschließung der tatsächlichen Systemzustände zu verletzen. Als mögliche Auslöser der Reinitialisierung ist neben einer Schranke, welche das betragsmäßig größte Element von  $\mathbf{W}(t)$  nicht überschreiten darf, auch eine Schranke für den Betrag der Determinante von  $\mathbf{W}(t)$  denkbar.

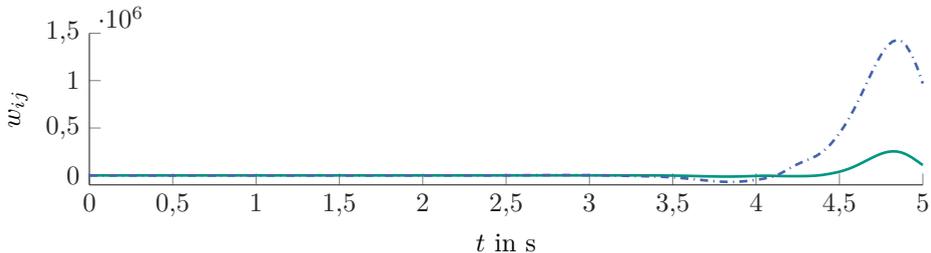
Die mit  $\kappa(t) = \kappa_1(t)$  erzielten Ergebnisse für die erste und die vierte Zustandsgröße sind in Abbildung 4.1 dargestellt, während in Abbildung 4.2 exemplarisch zwei Elemente von  $\mathbf{W}(t)$  für  $\kappa(t) = \kappa_1(t)$  abgebildet sind. Wird stattdessen  $\kappa(t) = \kappa_2(t)$  gewählt, erhält man für diese Elemente die in Abbildung 4.3 dargestellten Verläufe.



**Abbildung 4.1:** Beispiel 4.1: Ergebnis der Intervallschätzung des transformationsbasierten Intervallbeobachters mit grenzstabiler Transformationsmatrixdynamik für LPV-Systeme mit Ein-/ Ausgangsunsicherheiten (Untergrenze: blau strichpunktiert, Obergrenze: grün gestrichelt, tatsächliche Zustandsgröße: schwarz)



**Abbildung 4.2:** Beispiel 4.1: Zeitverläufe von  $w_{23}(t)$  (grün) und  $w_{41}(t)$  (blau strichpunktiert) für  $\kappa(t) = \kappa_1(t)$  bei der grenzstabiler Auslegung der Transformationsmatrixdynamik



**Abbildung 4.3:** Beispiel 4.1: Zeitverläufe von  $w_{23}(t)$  (grün) und  $w_{41}(t)$  (blau strichpunktiert) für  $\kappa(t) = \kappa_2(t)$  bei der grenzstabiler Auslegung der Transformationsmatrixdynamik

Wie am Beispiel von  $x_1(t)$  und  $x_4(t)$  zu erkennen ist, schließt der vorgestellte Intervallbeobachter für das erste Szenario  $\kappa(t) = \kappa_1(t)$  den tatsächlichen Systemzustand jeweils wie gefordert mit einer beschränkten Intervallbreite ein. Ferner kann für dieses Szenario anhand der beiden Elemente  $w_{23}(t)$  und  $w_{24}(t)$  der Matrix  $\mathbf{W}(t)$  erkannt werden, dass sie beschränkt sind und im Falle dieses Szenarios eine Art Schwingung ausführen.

Anders stellen sich die Verhältnisse für  $\kappa(t) = \kappa_2(t)$  dar. Hier sieht man, dass die Zeitverläufe der beiden Matricelemente  $w_{23}(t)$  und  $w_{24}(t)$  ein aufklingendes Verhalten zeigen. Damit wird deutlich, dass die Beschränktheit der Elemente der Matrix  $\mathbf{W}(t)$  für schnelle Parameteränderungen nicht mehr gegeben ist.

### 4.2.2 Auslegung der Transformationsmatrixdynamik durch Nutzung der Systemstruktur

Der Hauptschwachpunkt der im letzten Abschnitt beschriebenen Methodik zur Bestimmung des dynamischen Systems der inversen Transformationsmatrix  $\mathbf{W}(t)$  war, dass die Stabilität dieser Dynamik nicht garantiert werden kann. Um diesen Nachteil zu überwinden, soll in diesem Abschnitt ein alternativer Ansatz vorgestellt werden. Dieser in der Masterarbeit [Fug16] entstandene Ansatz nutzt bei der Auslegung auf Kosten der Allgemeinheit Wissen hinsichtlich der Systemstruktur.

Die Struktur der dynamischen Gleichung zur Beschreibung der Dynamik der Obergrenze und Untergrenze im transformierten Koordinatensystem gegeben in (4.9) wird dabei erhalten bleiben.

Auch in diesem Abschnitt sollen zunächst speziell für diesen Ansatz zu erfüllende Annahmen angegeben werden, welche aufgrund der erwähnten Ausnutzung der Struktur des zu schätzenden System speziell auf dieselbige abzielen. Darüber hinaus werden Lemmata angegeben, die im Verlauf des Stabilitätsbeweises für das dynamische System der Transformationsmatrix benötigt werden.

Da mehrfach Gebrauch von der Einheitsmatrix gemacht wird, soll in diesem Abschnitt jede Einheitsmatrix mit einem Index versehen werden, welcher ihre Dimension angibt. Außerdem sei angemerkt, dass Größen, die in diesem Kapitel mit einer Tilde gekennzeichnet werden, Hilfsgrößen darstellen und in keinem Zusammenhang mit den für den grenzverkopplten Intervallbeobachter eingeführten Definitionen 3.1 und 3.2 stehen.

#### Annahme 4.3

Für die in (3.23) eingeführte Beobachterdynamikmatrix  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  dargestellt durch

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{11}(\boldsymbol{\theta}(t), t) & \mathbf{F}_{12}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \\ \mathbf{F}_{21}(\boldsymbol{\theta}(t), t) & \mathbf{F}_{22}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

mit  $\mathbf{F}_{11}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \in \mathbb{R}^{q \times q}$ ,  $\mathbf{F}_{12}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \in \mathbb{R}^{q \times (n-q)}$ ,  $\mathbf{F}_{21}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \in \mathbb{R}^{(n-q) \times q}$  und  $\mathbf{F}_{22}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \in \mathbb{R}^{(n-q) \times (n-q)}$  und  $q \leq n$  existiert eine negative Konstante  $\iota$ , sodass  $\mathbf{F}_{22}(\boldsymbol{\theta}(t), t) - \iota \cdot \mathbf{I}_{n-q}$  eine schiefsymmetrische Matrix ist. Ferner können  $\mathbf{F}_{11}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  und  $\mathbf{F}_{21}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  über eine endliche Beobachtermatrix frei vorgegeben werden.

Nachfolgend wird Lemma 4.1 eingeführt, mit welchem sich eine Sylvester-Gleichung umformulieren lässt, was im Verlaufe des Beweises zur Umformulierung des Differentialgleichungssystems zur Beschreibung der Dynamik der Transformationsmatrix genutzt wird.

**Lemma 4.1 (Umformung einer Sylvester-Gleichung nach [Sim16])**

Die Sylvester-Gleichung

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{X} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} \quad (4.29)$$

mit den reellen Matrizen  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  lässt sich umformulieren zu

$$\underbrace{(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{A} + \mathbf{B}^\top \otimes \mathbf{I}_n)}_{=\tilde{\mathbf{D}}} \cdot \underbrace{\text{vec}(\mathbf{X})}_{=\tilde{\mathbf{x}}} = \underbrace{\text{vec}(\mathbf{C})}_{=\tilde{\mathbf{c}}} \quad (4.30)$$

mit  $\tilde{\mathbf{D}} \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ ,  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n^2}$  und  $\tilde{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^{n^2}$ . Der Operator  $\text{vec}(\cdot)$  stapelt die Spalten einer Matrix übereinander, wodurch ein Spaltenvektor entsteht, an dessen erster Stelle der Eintrag der ersten Spalte und ersten Zeile der ursprünglichen Matrix steht und an dessen letzter Stelle der Eintrag der letzten Zeile und letzten Spalte der ursprünglichen Matrix steht. Der Operator  $\otimes$  steht für das Kronecker-Produkt.

Neben dieser Umformulierung des Differentialgleichungssystems zur Beschreibung der Dynamik der inversen Transformationsmatrix lässt sich nachfolgendes Lemma 4.2 zum Nachweis der Stabilität dieses umgeformten Systems einsetzen.

**Lemma 4.2 (Abschätzung der Lösung linearer, autonomer dynamischer Systeme mit normaler Dynamikmatrix nach [MZ78])**

Für die Lösung eines autonomen zeitvarianten dynamischen Systems

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t), \quad (4.31)$$

dessen Dynamikmatrix  $\mathbf{A}(t)$  normal ist, gilt die Abschätzung

$$\|\mathbf{x}(t_0)\|_2 \cdot e^{\int_{t_0}^t \lambda_{Re,min}(\tau) d\tau} \leq \|\mathbf{x}(t)\|_2 \leq \|\mathbf{x}(t_0)\|_2 \cdot e^{\int_{t_0}^t \lambda_{Re,max}(\tau) d\tau}, \quad (4.32)$$

wobei  $\lambda_{Re,min}$  und  $\lambda_{Re,max}$  den kleinsten beziehungsweise größten Realteil der Eigenwerte von  $\mathbf{A}(t)$  darstellen.

**Satz 4.2 (Vollständiger transformationsbasierter Intervallbeobachter mit stabiler Transformationsmatrixdynamik für LPV-Systeme unter Berücksichtigung von Ein-/Ausgangsunsicherheiten)**

Ist die Annahme 3.2 für zeitvariante Systemmatrizen erfüllt und sind die Annahmen 3.3 und 4.3 erfüllt, dann ist ein Intervallbeobachter für (1.1) mit (2.2) und (2.3) durch (4.9) mit (4.10), (4.11) und der konstanten Matrix

$$\mathbf{F}_z = \begin{bmatrix} \epsilon \cdot \mathbf{I}_q & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \iota \cdot \mathbf{I}_{n-q} \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

wobei die negative Konstante  $\iota$  so gewählt werden muss, dass  $\mathbf{F}_{22}(\boldsymbol{\theta}(t), t) - \iota \cdot \mathbf{I}_{n-q}$  schiefsymmetrisch ist und  $\epsilon$  derart, dass  $\epsilon < \iota$  gilt, gegeben. Die Dynamik der beinhalteten Transformationsmatrix ist durch (4.8) gegeben, wobei über  $\mathbf{L}(t)$  die Matrix  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \in \mathbb{R}^n$  so zu wählen ist, dass

$$\mathbf{F}_{11}(\boldsymbol{\theta}(t), t) = \epsilon \cdot \mathbf{I}_q, \quad (4.34a)$$

$$\mathbf{F}_{21}(\boldsymbol{\theta}(t), t) = \mathbf{0} \quad (4.34b)$$

gilt. Die Elemente der Matrizen  $\mathbf{F}_{12}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  und  $\mathbf{F}_{22}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  gleichen den entsprechenden Einträgen der Dynamikmatrix  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))$ .

$\mathbf{P}^{-1}(0)$  ist als Einheitsmatrix zu wählen. Ferner müssen die Startwerte von (4.9) die Beziehung (4.14) erfüllen Die Rücktransformation erfolgt mit (4.7).

**Beweis:**

Analog zum Beweis von Satz 4.1 gliedert sich der Beweis von Satz 4.2 in zwei Teile. Zum einen in den Beweis, dass die Fehlerdynamiken (4.15) stabile und positive Systeme darstellen und zum anderen, dass die Einträge der Transformationsmatrix sowie ihrer Inversen beschränkt sind.

Da die Dynamiken  $\dot{\tilde{\mathbf{z}}}(t)$  und  $\dot{\mathbf{z}}(t)$  strukturell denen aus Satz 4.1 gleichen und  $\mathbf{F}_z$  auch hier als zeitinvariante Hurwitz- und Metzler-Matrix gewählt wurde, gleicht der erste Teil des Beweises dem aus dem vorherigen Abschnitt, weswegen er hier nicht mehr aufgeführt werden soll.

Wendet man nun für den zweiten Teil des Beweises Lemma 4.1 auf (4.23) mit  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  statt  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{W}(t)$  statt  $\mathbf{X}$ ,  $-\mathbf{F}_z$  statt  $\mathbf{B}$  und  $\tilde{\mathbf{W}}(t)$  statt  $\mathbf{C}$ , so erhält man zunächst das autonome System

$$\underbrace{\text{vec}(\tilde{\mathbf{W}}(t))}_{=\tilde{\mathbf{w}}(t)} = \underbrace{(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t) - \mathbf{F}_z^T \otimes \mathbf{I}_n)}_{=\tilde{\nu}(\boldsymbol{\theta}(t), t)} \cdot \underbrace{\text{vec}(\mathbf{W}(t))}_{=\tilde{\mathbf{w}}(t)} \quad (4.35)$$

mit dem Hilfszustandsvektor der inversen Transformationsmatrix  $\tilde{\mathbf{w}}(t) \in \mathbb{R}^{n^2}$  und der Dynamikmatrix  $\tilde{\nu}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ . Aufgrund der Tatsache, dass der erste Faktor bei den Kroneckerprodukten in (4.35) jeweils einer Diagonalmatrix entspricht, ist

$\tilde{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  eine Blockdiagonalmatrix der Form

$$\tilde{\mathbf{v}}(\boldsymbol{\theta}(t), t) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_1(\boldsymbol{\theta}(t), t) & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \tilde{\mathbf{v}}_q(\boldsymbol{\theta}(t), t) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{v}}_{q+1}(\boldsymbol{\theta}(t), t) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \tilde{\mathbf{v}}_n(\boldsymbol{\theta}(t), t) \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Die beinhalteten Matrizen sind durch

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}_i(\boldsymbol{\theta}(t), t) &= \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t) - \epsilon \cdot \mathbf{I}_n \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{F}_{12}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{22}(\boldsymbol{\theta}(t), t) - \epsilon \cdot \mathbf{I}_{n-q} \end{bmatrix} \quad \forall i \in \{1, \dots, q\}, \end{aligned} \quad (4.37a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{v}}_i(\boldsymbol{\theta}(t), t) &= \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t) - \iota \cdot \mathbf{I}_n \\ &= \begin{bmatrix} (\epsilon - \iota) \cdot \mathbf{I}_q & \mathbf{F}_{12}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{22}(\boldsymbol{\theta}(t), t) - \iota \cdot \mathbf{I}_{n-q} \end{bmatrix} \quad \forall i \in \{q+1, \dots, n\} \end{aligned} \quad (4.37b)$$

gegeben.

Aufgrund der Blockdiagonalform von (4.36) sind die einzelnen Teilsysteme  $\tilde{\mathbf{w}}_i(t) \in \mathbb{R}^n$ , welche die Dynamik der jeweiligen Spalten von  $\mathbf{W}(t)$  beschreiben, voneinander entkoppelt. Diese entkoppelten Teilsysteme

$$\dot{\tilde{\mathbf{w}}}_i(t) = \tilde{\mathbf{v}}_i(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \tilde{\mathbf{w}}_i(t) \quad (4.38)$$

sollen nun im Hinblick auf ihre Stabilitätseigenschaften untersucht werden.

Zunächst sei diese Gleichung für  $i \in \{1, \dots, q\}$  dargestellt:

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{1i}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{2i}(t) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{F}_{12}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{22}(\boldsymbol{\theta}(t), t) - \epsilon \cdot \mathbf{I}_{n-q} \end{bmatrix}}^{=\tilde{\mathbf{v}}_i(\boldsymbol{\theta}(t), t)} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_{1i}(t) \\ \tilde{\mathbf{w}}_{2i}(t) \end{bmatrix}}^{=\tilde{\mathbf{w}}_i(t)} \quad \forall i \in \{1, \dots, q\}. \quad (4.39)$$

Für die enthaltenen Vektoren  $\tilde{\mathbf{w}}_{1i}(t)$  und  $\tilde{\mathbf{w}}_{2i}(t)$  gilt  $\tilde{\mathbf{w}}_{1i}(t) \in \mathbb{R}^q$  und  $\tilde{\mathbf{w}}_{2i}(t) \in \mathbb{R}^{n-q}$ . Offensichtlich befindet sich dieses System aufgrund der Nullspalten der Dynamikmatrix für beliebige  $\tilde{\mathbf{w}}_{1i}(t)$  in der Ruhelage, falls  $\tilde{\mathbf{w}}_{2i}(t) = \mathbf{0}$  gilt. An dieser Stelle ist nun die Wahl des Anfangswertes  $\mathbf{W}(0) = \mathbf{I}_n$  einzubeziehen. Stellt man diesen Anfangswert spaltenweise dar, folgt

$$\tilde{\mathbf{w}}_i(0) = \begin{bmatrix} w_1(0) \\ \vdots \\ w_j(0) \\ \vdots \\ w_n(0) \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad w_j(0) = \begin{cases} 1 & , \text{ falls } i = j \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}. \quad (4.40)$$

Hieraus kann direkt abgelesen werden, dass für alle  $i \in \{1, \dots, q\}$   $\tilde{\mathbf{w}}_{2i}(0) = \mathbf{0}$  gilt und damit  $\dot{\tilde{\mathbf{w}}}_i(t) = \tilde{\mathbf{w}}_i(0)$ . Die ersten  $q$  Spalten der zeitvarianten inversen Transformationsmatrix  $\mathbf{W}(t)$  sind folglich zeitinvariant und beschränkt.

Für die Dynamik der übrigen Spalten gilt mit  $i \in \{q+1, \dots, n\}$  gemäß den vorherigen Ausführungen

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{1i}(t) \\ \dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{2i}(t) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} (\epsilon - \iota) \cdot \mathbf{I}_q & \mathbf{F}_{12}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{22}(\boldsymbol{\theta}(t), t) - \iota \cdot \mathbf{I}_{n-q} \end{bmatrix}}^{=\tilde{\nu}_i(\boldsymbol{\theta}(t), t)} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_{1i}(t) \\ \tilde{\mathbf{w}}_{2i}(t) \end{bmatrix}}^{=\tilde{\mathbf{w}}_i(t)} \quad \forall i \in \{q+1, \dots, n\}. \quad (4.41)$$

Wie an der in der Dynamikmatrix enthaltenen Nullmatrix zu erkennen ist, ist bei diesem Differentialgleichungssystem die Dynamik  $\dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{2i}(t)$  von  $\tilde{\mathbf{w}}_{1i}(t)$  entkoppelt. Daher soll diese durch

$$\dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{2i}(t) = \overbrace{(\mathbf{F}_{22}(\boldsymbol{\theta}(t), t) - \iota \cdot \mathbf{I}_{n-q})}^{=\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\theta}(t), t)} \cdot \tilde{\mathbf{w}}_{2i}(t) \quad \forall i \in \{q+1, \dots, n\} \quad (4.42)$$

gegebene Dynamik zunächst untersucht werden. Nach Satz 4.2 ist die Dynamikmatrix schiefsymmetrisch, d. h.  $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\theta}(t), t) = -\boldsymbol{\chi}^\top(\boldsymbol{\theta}(t), t)$ . Da aufgrund der Beziehung  $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \boldsymbol{\chi}^\top(\boldsymbol{\theta}(t), t) = (-\boldsymbol{\chi}^\top(\boldsymbol{\theta}(t), t)) \cdot (-\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\theta}(t), t)) = \boldsymbol{\chi}^\top(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  jede schiefsymmetrische Matrix auch normal ist, kann zur Untersuchung der Stabilitätseigenschaften von (4.42) Lemma 4.2 herangezogen werden. Hiermit ergibt sich

$$\|\tilde{\mathbf{w}}_{2i}(0)\|_2 \cdot e^{\int_0^t \lambda_{Re, \min}(\tau) d\tau} \leq \|\tilde{\mathbf{w}}_{2i}(t)\|_2 \leq \|\tilde{\mathbf{w}}_{2i}(0)\|_2 \cdot e^{\int_0^t \lambda_{Re, \max}(\tau) d\tau}, \quad (4.43)$$

wobei  $\lambda_{Re, \min}$  und  $\lambda_{Re, \max}$  den minimalen und maximalen Realteil der Eigenwerte von  $\boldsymbol{\chi}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  bezeichnen. Bezieht man zusätzlich die Eigenschaft schiefsymmetrischer Matrizen ein, dass der Realteil ihrer Eigenwerte null ist ([VA07, S. 78]), folgt schließlich

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{w}}_{2i}(0)\|_2 \cdot e^{\int_0^t 0 d\tau} &\leq \|\tilde{\mathbf{w}}_{2i}(t)\|_2 \leq \|\tilde{\mathbf{w}}_{2i}(0)\|_2 \cdot e^{\int_0^t 0 d\tau} \\ \Leftrightarrow \|\tilde{\mathbf{w}}_{2i}(t)\|_2 &= \|\tilde{\mathbf{w}}_{2i}(0)\|_2. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Aufgrund der konstanten Norm des Zustandsvektors  $\tilde{\mathbf{w}}_{2i}(t)$  ist die Lösung des Systems (4.42) damit beschränkt. Daher soll im nächsten Schritt die in (4.41) gegebene und noch zur Stabilitätsuntersuchung verbleibende Dynamik

$$\dot{\tilde{\mathbf{w}}}_{1i}(t) = (\epsilon - \iota) \cdot \mathbf{I}_q \cdot \tilde{\mathbf{w}}_{1i}(t) + \mathbf{F}_{12}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \tilde{\mathbf{w}}_{2i}(t) \quad (4.45)$$

untersucht werden. Es handelt sich hierbei also um ein LTI-System mit dem zusammengefassten Eingang  $\mathbf{F}_{12}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \tilde{\mathbf{w}}_{2i}(t)$ . Dieses System ist daher BIBO-stabil (siehe Definition D.2), wenn die Realteile der Eigenwerte der Dynamikmatrix über einen negativen Realteil verfügen (siehe Lemma D.1). Aufgrund der in Satz 4.2 formulierten Forderung  $\epsilon < \iota < 0$  ist diese Bedingung erfüllt. Darüber hinaus ist aufgrund der Beschränktheit von  $\mathbf{F}_{12}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  und der im vorherigen Schritt ebenfalls nachgewiesenen Beschränktheit von  $\tilde{\mathbf{w}}_{2i}(t)$  die Systemanregung beschränkt.

Hinsichtlich des Nachweises der Invertierbarkeit der Lösung des Differentialgleichungssystems  $\mathbf{W}(t)$  kann die gleiche Begründung wie im Zusammenhang mit Satz 4.1 dargestellt, angeführt werden.  $\square$

Zum Abschluss soll der präsentierte Beobachterentwurf anhand des Systems aus Beispiel 4.1 gezeigt werden. Hierbei wird direkt das Szenario mit dem schnell veränderlichen Parameter verwendet, um den Vorteil dieser Methode herauszustellen.

**Beispiel 4.2:** Gegeben seien das System aus Beispiel 3.3 sowie das Szenario aus Beispiel 4.1 mit  $\kappa(t) = \kappa_2(t)$ . Mit

$$\mathbf{L}^\top(t) = \begin{bmatrix} l_{11}(t) & l_{21}(t) & l_{31}(t) & l_{41}(t) \\ l_{12}(t) & l_{22}(t) & l_{32}(t) & l_{42}(t) \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

ergibt sich  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  zu

$$\begin{bmatrix} -5 - l_{11}(t) & -l_{12}(t) & 3 & 2 \cdot \kappa(t) \\ -l_{21}(t) & -5 - l_{22}(t) & -2 \cdot \kappa(t) & 3 \\ 1 - l_{31}(t) & -l_{32}(t) & -1 & -\kappa(t) \\ -l_{41}(t) & 1 - l_{42}(t) & \kappa(t) & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

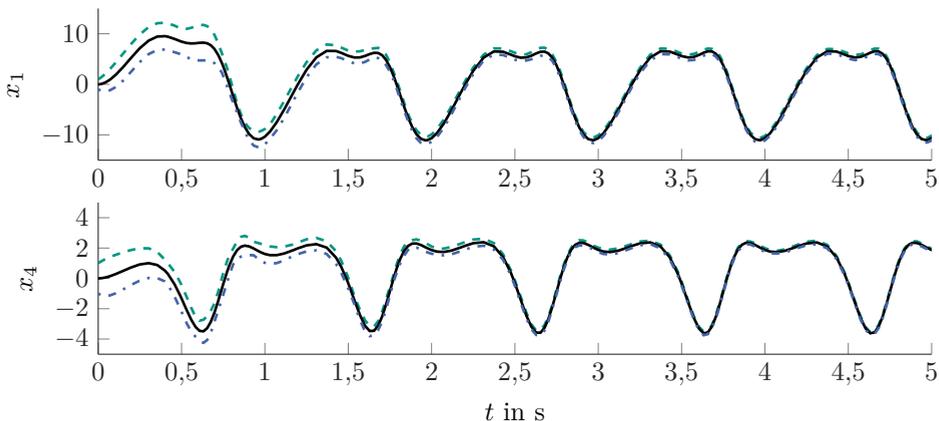
Wie an der in (4.47) rot markierten Matrix  $\mathbf{F}_{22}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  zu erkennen ist, existiert mit  $\iota = -1$  eine negative Konstante, sodass  $\mathbf{F}_{22}(\boldsymbol{\theta}(t), t) - \iota \cdot \mathbf{I}_2$  schiefsymmetrisch ist. Als Konstante  $\epsilon$ , welche die Bedingung  $\epsilon < \iota$  erfüllt, wird  $\epsilon = -2$  gewählt.

Wie direkt aus (4.47) ablesbar, können die Entwurfsvorschriften  $\mathbf{F}_{11}(\boldsymbol{\theta}(t), t) = -2 \cdot \mathbf{I}_2$  (in (4.47) grün dargestellt) und  $\mathbf{F}_{11}(\boldsymbol{\theta}(t), t) = \mathbf{0}$  (in (4.47) blau dargestellt) durch die konstante Beobachtermatrix

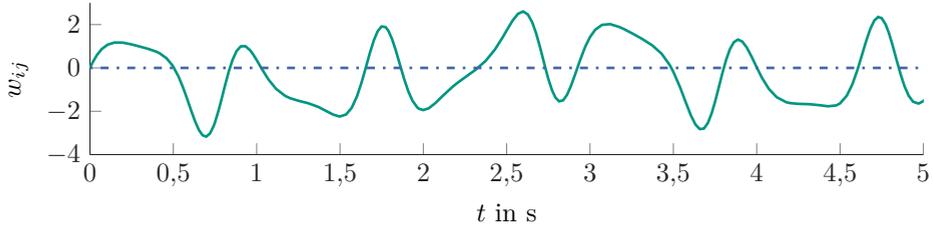
$$\mathbf{L}^\top = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

erfüllt werden. Das resultierende Ergebnis der garantierten Zustandsschätzung ist in Abbildung 4.4 für die erste und die vierte Zustandsgröße gezeigt.

Wie in Beispiel 4.1 soll das Verhalten der inversen Transformationsmatrix am Beispiel des Elementes in der zweiten Zeile und dritten Spalte  $w_{23}(t)$  und des Elementes in der vierten Zeile und ersten Spalte  $w_{41}(t)$  veranschaulicht werden.



**Abbildung 4.4:** Beispiel 4.2: Ergebnis der Intervallschätzung des transformationsbasierten Intervallbeobachters mit stabiler Transformationsmatrixdynamik für LPV-Systeme mit Ein-/Ausgangsunsicherheiten (Untergrenze: blau strichpunktiert, Obergrenze: grün gestrichelt, tatsächliche Zustandsgröße: schwarz)



**Abbildung 4.5:** Beispiel 4.2: Zeitverläufe von  $w_{23}(t)$  (grün) und  $w_{41}(t)$  (blau strichpunktiert) bei der stabilen Auslegung der Transformationsmatrixdynamik

Hinsichtlich der Zustandsschätzung kann festgehalten werden, dass die Anforderung, dass die tatsächliche Zustandsgröße mit einem beschränkten Intervall eingeschlossen wird, erfüllt ist. Außerdem ist zu erkennen, dass obwohl der freie Entwurfparameter  $\epsilon$  unter Berücksichtigung der definierten Randbedingung willkürlich gewählt wurde, eine nach dem Einschwingvorgang enge Einschließung der tatsächlichen Zustandsgrößen erzielt werden kann.

Besonders im Vergleich mit Abbildung 4.3 ist in Abbildung 4.5 zu erkennen, dass der in diesem Abschnitt vorgestellte Beobachterentwurf auch bei schnelleren Parameteränderungen eine in ihren Einträgen beschränkte inverse Transformationsmatrix liefert. Außerdem ist anhand von  $w_{41}(t)$  das im Verlauf des Beweises von Satz 4.2 verdeutlichte Verhalten, dass die ersten  $q$  Spalten von  $\mathbf{W}(t)$  zeitinvariant sind, zu erkennen.

### 4.3 Transformationsbasierter Intervallbeobachter zur Berücksichtigung von Eingangs-, Ausgangs- und Parameterunsicherheiten

Um die Anwendbarkeit der im vorherigen Abschnitt vorgestellten Methoden zu erhöhen, sollen diese zur Berücksichtigung von Parameterunsicherheiten erweitert werden. Seinen Ursprung hat diese Erweiterung in der Masterarbeit [Bäc16]. Der Fokus der nachfolgenden Ausführungen liegt hierbei auf der Untersuchung der Positivität als auch der Stabilität der Beobachterfehlerdynamiken. Daher wird in diesem Abschnitt die Beschränktheit der Einträge von  $\mathbf{P}(t)$  als auch von  $\mathbf{P}^{-1}(t)$  vorausgesetzt<sup>13</sup>.

Auch wird angenommen, dass sich die Parameterunsicherheit nur auf die Dynamikmatrix  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))$  auswirkt. Dies hat im Wesentlichen zwei Gründe: Erstens kann eine Unsicherheit der Ausgangsmatrix  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}(t))$  auf gleiche Art und Weise wie eine von  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))$  berücksichtigt werden, da diese Matrix ebenso Einfluss auf die Beobachterdynamikmatrix  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  hat (siehe (3.23)). Zweitens würde eine Unsicherheit in der

<sup>13</sup> Die Bedingungen hierfür gleichen im Fall von berücksichtigten Parameterunsicherheiten denen aus den Abschnitten 4.2.1 bzw. 4.2.2 für ein Nominalsystem. Dieses kann, wie erläutert werden wird, frei innerhalb der Intervallranken der Systemmatrizen gewählt werden. Auf die Wiederholung der Bedingungen wird daher verzichtet.

Eingangsmatrix  $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}(t))$  genauso berücksichtigt werden wie im Fall des grenzverkopelten Intervallbeobachters in Satz 3.6. Auch dort ist in Gleichung (3.72) zu erkennen, dass es rein systematisch keinen Unterschied macht, ob nur die Eingangsmatrix  $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}(t))$ , nur die Eingangsgrößen  $\mathbf{u}(t)$  oder beide durch eine Intervallmatrix bzw. einen Intervallvektor beschrieben sind. Um die Ausführungen insbesondere während des Beweises übersichtlich zu halten, werden diese Fälle nicht ausführlich behandelt. In beiden Beweisschritten (Nachweis der Positivität und Nachweis der Stabilität) wird in einer Fußnote kurz auf diese Fälle eingegangen.

Im Unterschied zu den vorherigen Abschnitten wird in diesem Abschnitt die Beobachtermatrix nicht mehr nur in Abhängigkeit der Zeit angegeben, sondern auch in Abhängigkeit der Parametervektoren. Der Grund hierfür ist die oben beschriebene Annahme, dass nur die Parameter der Dynamikmatrix unsicher sind, weshalb durch die Erweiterung der Argumente klargestellt werden soll, welche Größen zur Auslegung der Beobachtermatrix herangezogen werden können.

### 4.3.1 Beobachterentwurf

Die Betrachtung macht die Beschreibung eines LPV-Systems ohne Durchgriff in anderer Notation als in (1.1) erforderlich:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A(t)) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_B(t)) \cdot \mathbf{u}(t), \quad (4.49a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_C(t)) \cdot \mathbf{x}(t). \quad (4.49b)$$

Das beschränkte Intervall zur Beschreibung der unsicheren Dynamikmatrix soll nachfolgend mit

$$[\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A(t))] = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t)) + [\Delta\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)])] \quad (4.50)$$

dargestellt werden, wobei  $\boldsymbol{\theta}_A^*(t)$  ein zunächst frei wählbarer Nominalparametervektor ist und  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t))$  die resultierende Dynamikmatrix. Der Ausdruck  $\Delta\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)])$  stellt die Abweichung zwischen der tatsächlichen Dynamikmatrix  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A(t))$  und der frei gewählten  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t))$  dar. Aufgrund der Parameterunsicherheit kann diese Abweichung nur mithilfe von  $[\boldsymbol{\theta}_A(t)]$  in der Form abgeschätzt werden, dass  $\Delta\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \in [\Delta\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)])]$  gilt.

Zunächst ist die in Kapitel 3 eingeführte Annahme 3.8 auf diese neuen Randbedingungen anzupassen.

#### **Annahme 4.4**

*Für die Einträge von  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A(t))$  beziehungsweise die Systemparameter  $\boldsymbol{\theta}_A(t)$  seien zur Laufzeit beschränkte Intervalle  $[\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A(t))]$  beziehungsweise  $[\boldsymbol{\theta}_A(t)]$  bekannt. Die Einträge von  $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_B(t))$  und  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_C(t))$  seien zur Laufzeit exakt bekannt.*

Um die nachfolgenden Berechnungen zu vereinfachen, soll außerdem die Annahme getroffen werden, dass das Intervall  $[\Delta\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)])]$  symmetrisch ist oder anders ausgedrückt, dass die Einträge von  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t))$  die Mittelpunkte der Einträge von

$[\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A(t))]$  sind. Dass diese Annahme keinerlei Einschränkung darstellt, kann leicht anhand der freien Wählbarkeit von  $\boldsymbol{\theta}_A^*(t)$  gesehen werden.

**Annahme 4.5**

Die Intervallmatrix  $[\underline{\Delta\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)])]$  in (4.50) sei symmetrisch, d. h.  $\underline{\Delta\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) = -\overline{\Delta\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)])$ .

Nachdem die zusätzlichen Annahmen für die zu berücksichtigenden Unsicherheiten getroffen sind, soll nun, wie eingangs erwähnt, die Annahme zur Sicherstellung der Beschränktheit der Transformationsmatrix und deren Inversen getroffen werden.

**Annahme 4.6**

Auf Basis der beiden Parametervektoren  $\boldsymbol{\theta}_A^*(t)$  und  $\boldsymbol{\theta}_C(t)$  können gemäß den Vorgehen aus den Abschnitten 4.2.1 oder 4.2.2 die Matrix  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_C(t)) = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t)) - \mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_C(t)) \cdot \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_C(t))$  und die zeitinvariante Metzler- und Hurwitz-Matrix  $\mathbf{F}_z$ , eingeführt in (4.3), derart gewählt werden, dass die Lösung von (4.23) beschränkt und nicht singulär ist.

Eine letzte Annahme ist erforderlich, um eine Bedingung für die Stabilität der Beobachterfehler zu formulieren.

**Annahme 4.7**

Der maximale Eigenwert der Matrix

$$\mathcal{F}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_z & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_z \end{bmatrix}, \quad (4.51)$$

wobei in (4.3) zur Bestimmung der zeitinvarianten Metzler- und Hurwitz-Matrix  $\mathbf{F}_z$  die Dynamikmatrix  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))$  durch  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t))$  ersetzt werden muss, erfüllt die Bedingung

$$\lambda_{\max}(\mathcal{F}_T) < -2 \cdot \|\mathbf{P}(t) \cdot \overline{\Delta\mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \cdot \mathbf{W}(t)\|_2. \quad (4.52)$$

Wie diese Bedingung erfüllt werden kann beziehungsweise wie mit der Tatsache, dass der zeitliche Verlauf von  $\mathbf{P}(t)$  a priori unbekannt ist, umgegangen werden kann, soll am Ende dieses Abschnittes an einem numerischen Beispiel verdeutlicht werden.

**Satz 4.3 (Vollständiger transformationsbasierter Intervallbeobachter für LPV-Systeme unter Berücksichtigung von Eingangs-/Ausgangs- und Parameterunsicherheiten)**

Ist die Annahme 3.2 für zeitvariante Systemmatrizen erfüllt und sind die Annahmen 4.4, 4.5, 4.6 und 4.7 für das System (4.49) erfüllt und liegen zur Beschreibung der Ein-/Ausgangsunsicherheiten beschränkte Intervalle nach (2.2) und (2.3) vor, dann ist

$$\dot{\bar{\mathbf{z}}}(t) = \mathbf{F}_z \cdot \bar{\mathbf{z}}(t) + \bar{\mathbf{u}}_{\bar{\mathbf{B}}}(\boldsymbol{\theta}_B(t), t) + \bar{\mathbf{y}}_{\bar{\mathbf{L}}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_C(t), t) + \bar{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t), \quad (4.53a)$$

$$\dot{\underline{\mathbf{z}}}(t) = \mathbf{F}_z \cdot \underline{\mathbf{z}}(t) + \underline{\mathbf{u}}_{\bar{\mathbf{B}}}(\boldsymbol{\theta}_B(t), t) + \underline{\mathbf{y}}_{\bar{\mathbf{L}}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_C(t), t) + \underline{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t) \quad (4.53b)$$

mit

$$[\mathbf{u}_{\bar{\mathbf{B}}}(\boldsymbol{\theta}_B(t))] = \overbrace{\mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_B(t), t)}^{=\bar{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_B(t), t)} \cdot [\mathbf{u}(t)], \quad (4.54)$$

$$[\mathbf{y}_{\bar{\mathbf{L}}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_C(t), t)] = \overbrace{\mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_C(t))}^{=\bar{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_C(t), t)} \cdot [\mathbf{y}(t)] \quad (4.55)$$

und

$$[\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t)] = \overbrace{\mathbf{P}(t) \cdot [\Delta \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t)]}^{=[\check{\Delta} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t)]} \cdot \overbrace{\mathbf{P}^{-1}(t) \cdot [\mathbf{z}(t)]}^{=[\mathbf{x}(t)]} \quad (4.56)$$

ein Intervallbeobachter für dieses System<sup>14</sup>.

Die Startwerte von (4.53) müssen dabei (4.14) erfüllen und die Rücktransformation wird, wie in (4.56) bereits angedeutet, mit (4.7) durchgeführt.

**Beweis:**

Wie in den vorherigen Abschnitten gliedert sich auch der Beweis zu diesem Satz in zwei Teile. Zunächst wird gezeigt, dass sich mit der vorgestellten Methoden die Fehlerdifferentialgleichungssysteme (4.15) zu positiven Systemen ergeben und in einem zweiten Schritt wird deren Stabilität nachgewiesen.

Für den ersten Schritt werden zunächst (4.53) sowie (4.49) unter Berücksichtigung von (4.1), (4.17) (wobei in dieser Gleichung die Nomenklatur hinsichtlich der Parameter

<sup>14</sup> Anstelle in  $[\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t)]$  den Schätzwert  $[\mathbf{x}(t)]$  zurückzukoppeln, könnte für diese Abschätzung auch maximale Zustandsgrenzen, die durch physikalisches Vorwissen bekannt sind, verwendet werden. Der Vorteil hiervon wäre, dass sich, wie später zu sehen ist, der Stabilitätsbeweis zum einen deutlich vereinfachen würde und zum anderen die Stabilität auch leichter sicherzustellen ist. Nachteilig ist jedoch, dass die Abschätzung sehr pessimistisch wäre. Daher soll diese Möglichkeit nicht betrachtet werden.

angepasst werden muss) und (4.50) in (4.15) eingesetzt, womit sich

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\mathbf{e}}}_z(t) &= \mathbf{F}_z \cdot \bar{\mathbf{e}}_z(t) \\
&+ \underbrace{\bar{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t) - \mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Delta} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_A(t)) \cdot \mathbf{P}^{-1}(t) \cdot \mathbf{z}(t)}_{\geq \mathbf{0}} \\
&+ \underbrace{\text{ub} \left( \check{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_B(t), t) \cdot [\mathbf{u}(t)] \right) - \check{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_B(t), t) \cdot \mathbf{u}(t)}_{\geq \mathbf{0}} \\
&+ \underbrace{\text{ub} \left( \check{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_C(t), t) \cdot [\mathbf{y}(t)] \right) - \check{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_C(t), t) \cdot \mathbf{y}(t)}_{\geq \mathbf{0}}, \quad (4.57a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{\mathbf{e}}}_z(t) &= \mathbf{F}_z \cdot \underline{\mathbf{e}}_z(t) \\
&+ \underbrace{\mathbf{P}(t) \cdot \boldsymbol{\Delta} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_A(t)) \cdot \mathbf{P}^{-1}(t) \cdot \mathbf{z}(t) - \underline{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t)}_{\geq \mathbf{0}} \\
&+ \underbrace{\check{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_B(t), t) \cdot \mathbf{u}(t) - \text{lb} \left( \check{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_B(t), t) \cdot [\mathbf{u}(t)] \right)}_{\geq \mathbf{0}} \\
&+ \underbrace{\check{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_C(t), t) \cdot \mathbf{y}(t) - \text{lb} \left( \check{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_C(t), t) \cdot [\mathbf{y}(t)] \right)}_{\geq \mathbf{0}} \quad (4.57b)
\end{aligned}$$

ergibt<sup>15</sup>. Bevor auf die weiteren Eigenschaften dieser Differentialgleichungssysteme eingegangen werden wird, sei zunächst darauf hingewiesen, dass sich die jeweils erste Differenz auch in Abhängigkeit des Beobachterfehlers darstellen ließe, da in (4.57a) der Minuend eine Abhängigkeit von  $[\mathbf{z}(t)]$  aufweist und in (4.57b) der Subtrahend. Für die folgende Stabilitätsbetrachtung spielt diese Tatsache auch eine Rolle, im Falle des Nachweises der Positivität kann die erste Differenz jedoch ebenfalls als Systemanregung verstanden werden, die nichtnegativ sein muss. Durch die Wahl von  $[\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t)]$  in (4.56) ist dies für beide Differentialgleichungssysteme gegeben. Ferner sind auch die jeweils beiden anderen Differenzen, die sich aus der Eingangsmatrix, den unsicherheitsbehafteten und sicheren Eingangsgrößen, der Beobachtermatrix sowie den unsicherheitsbehafteten und sicheren Ausgangsgrößen ergeben, nichtnegativ. Da zusätzlich  $\mathbf{F}_z$  eine Metzler-Matrix ist, stellen die Differentialgleichungssysteme (4.57a) und (4.57b) nach Lemma 2.1 positive Systeme mit nichtnegativen Eingangsgrößen dar, woraus aufgrund der Positivität der Fehler für  $t_0$ , welche sich aus (4.14) ergibt, eine Einschließung der tatsächlichen Zustandsgrößen folgt.

Nun gilt es, die Stabilität von (4.57) zu zeigen. Dazu soll (4.57) zunächst in eine hierzu

<sup>15</sup> Eine Berücksichtigung einer unsicheren Eingangsmatrix hätte in diesen beiden Differentialgleichungssystemen lediglich dazu geführt, dass die Intervallmultiplikation  $\check{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_B(t), t) \cdot [\mathbf{u}(t)]$  durch  $[\check{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_B(t), t)] \cdot [\mathbf{u}(t)]$  ersetzt werden müsste, wobei offensichtlich ist, dass die Positivität weiterhin gewährleistet wäre. Eine Unsicherheit in der Ausgangsmatrix, welche sich analog zur Dynamikmatrix durch  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_C^*(t)) + \boldsymbol{\Delta} \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_C^*(t), \boldsymbol{\theta}_C(t))$  darstellen ließe, würde in den Fehlerdifferentialgleichungen auf einen Term  $\mathbf{P}(t) \cdot \mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_C^*(t)) \cdot \boldsymbol{\Delta} \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_C^*(t), \boldsymbol{\theta}_C(t)) \cdot \mathbf{P}^{-1}(t) \cdot \mathbf{z}(t)$  führen, der sich wie für die Dynamikmatrix mit einem Term, der analog zu  $[\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t)]$  aufgebaut ist, abschätzen lässt.

geeignete Darstellung gebracht werden. Dazu werden die nicht von  $\mathbf{z}(t)$  oder  $[\mathbf{z}(t)]$  abhängigen Terme zu

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{v,u}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_B(t), \boldsymbol{\theta}_C(t), t) = & \text{ub} \left( \check{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_B(t), t) \cdot [\mathbf{u}(t)] \right) - \check{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_B(t), t) \cdot \mathbf{u}(t) \\ & + \text{ub} \left( \check{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_C(t), t) \cdot [\mathbf{y}(t)] \right) \\ & - \check{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_C(t), t) \cdot \mathbf{y}(t), \end{aligned} \quad (4.58a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{v,l}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_B(t), \boldsymbol{\theta}_C(t), t) = & \check{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_B(t), t) \cdot \mathbf{u}(t) - \text{lb} \left( \check{\mathbf{B}}(\boldsymbol{\theta}_B(t), t) \cdot [\mathbf{u}(t)] \right) \\ & + \check{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_C(t), t) \cdot \mathbf{y}(t) \\ & - \text{lb} \left( \check{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_C(t), t) \cdot [\mathbf{y}(t)] \right) \end{aligned} \quad (4.58b)$$

zusammengefasst. Um eine noch kompaktere Darstellung zu erhalten, sollen die einzelnen Parameterabhängigkeiten dieser Ausdrücke nicht mehr explizit angegeben werden, sondern die Darstellungen  $\mathbf{u}_{v,u}(t)$  und  $\mathbf{u}_{v,l}(t)$  genutzt werden.

Bevor das Fehlerdifferentialgleichungssystem aufgestellt wird, soll zunächst  $[\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t)]$ , definiert in (4.56), derart unter Zuhilfenahme der Symmetrie der Intervallmatrix  $[\Delta \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)])]$  umgeformt werden, dass die Abhängigkeit von den Beobachterfehlern deutlich wird. Dazu wird zunächst gezeigt, dass die Intervallmatrix  $[\check{\Delta} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t)]$  ebenfalls symmetrisch ist. Man erhält unter Verwendung von Lemma A.2 und Berücksichtigung von Annahme 4.5

$$\left[ \check{\Delta} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t) \right] = \mathbf{P}(t) \cdot [-\overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]), \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)])], \quad (4.59a)$$

woraus wiederum

$$\begin{aligned} & \check{\Delta} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t) \\ & = -\mathbf{P}^+(t) \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) + \mathbf{P}^-(t) \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]), \end{aligned} \quad (4.59b)$$

$$\begin{aligned} & \overline{\check{\Delta} \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t) \\ & = -\mathbf{P}^-(t) \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) + \mathbf{P}^+(t) \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \end{aligned} \quad (4.59c)$$

folgt. Das Ergebnis dieser Multiplikation ist also eine symmetrische Intervallmatrix. Daraus folgt, dass (4.56) die Multiplikation einer symmetrischen Intervallmatrix mit einem Intervallvektor darstellt. Daher kann zur weiteren Umformung dieser Gleichung Lemma A.4 eingesetzt werden, womit man unter Beachtung von (4.22)

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t) \\ \underline{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t) \\ \underline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t) \end{bmatrix} \cdot (\overline{\mathbf{x}}^+ - \underline{\mathbf{x}}^-) \\
&= \begin{bmatrix} \overbrace{(\mathbf{P}^+(t) - \mathbf{P}^-(t)) \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)])}^{=|\mathbf{P}(t)|} \\ \underbrace{-(\mathbf{P}^+(t) - \mathbf{P}^-(t)) \cdot \underline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)])}_{=-|\mathbf{P}(t)|} \end{bmatrix} \\
&\quad \cdot \left( (\mathbf{W}^+(t) \cdot \overline{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{W}^-(t) \cdot \underline{\mathbf{z}}(t))^+ - (\mathbf{W}^-(t) \cdot \overline{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{W}^+(t) \cdot \underline{\mathbf{z}}(t))^- \right) \quad (4.60)
\end{aligned}$$

erhält. Stellt man die hierin enthaltenen Schätzwerte im  $z$ -Koordinatensystem durch die tatsächlichen Systemgrößen und den Schätzfehler dar, erhält man (4.61).

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t) \\ \underline{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} |\mathbf{P}(t)| \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \\ -|\mathbf{P}(t)| \cdot \underline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \end{bmatrix} \cdot \left( \left( [\mathbf{W}^+(t) \quad \mathbf{W}^-(t)] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) + \overline{\mathbf{e}}_z(t) \\ \mathbf{z}(t) - \underline{\mathbf{e}}_z(t) \end{bmatrix} \right)^+ \right. \\
&\quad \left. - \left( [\mathbf{W}^-(t) \quad \mathbf{W}^+(t)] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{z}(t) + \overline{\mathbf{e}}_z(t) \\ \mathbf{z}(t) - \underline{\mathbf{e}}_z(t) \end{bmatrix} \right)^- \right) \\
&= \begin{bmatrix} |\mathbf{P}(t)| \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \\ -|\mathbf{P}(t)| \cdot \underline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \end{bmatrix} \cdot \left( \left( (\mathbf{W}^+(t) + \mathbf{W}^-(t)) \cdot \mathbf{z}(t) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + [\mathbf{W}^+(t) \quad -\mathbf{W}^-(t)] \cdot \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{e}}_z(t) \\ \underline{\mathbf{e}}_z(t) \end{bmatrix} \right)^+ - \left( (\mathbf{W}^+(t) + \mathbf{W}^-(t)) \cdot \mathbf{z}(t) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + [\mathbf{W}^-(t) \quad -\mathbf{W}^+(t)] \cdot \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{e}}_z(t) \\ \underline{\mathbf{e}}_z(t) \end{bmatrix} \right)^- \right) \quad (4.61)
\end{aligned}$$

Vereinfacht man diese Gleichung mit  $\mathbf{W}^+(t) + \mathbf{W}^-(t) = \mathbf{W}(t)$  und der nach  $\mathbf{x}(t)$  umgestellten Gleichung (4.1), erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t) \\ \underline{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} |\mathbf{P}(t)| \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \\ -|\mathbf{P}(t)| \cdot \underline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \end{bmatrix} \cdot \left( \left( \mathbf{x}(t) + [\mathbf{W}^+(t) \quad -\mathbf{W}^-(t)] \cdot \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{e}}_z(t) \\ \underline{\mathbf{e}}_z(t) \end{bmatrix} \right)^+ \right. \\
&\quad \left. - \left( \mathbf{x}(t) + [\mathbf{W}^-(t) \quad -\mathbf{W}^+(t)] \cdot \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{e}}_z(t) \\ \underline{\mathbf{e}}_z(t) \end{bmatrix} \right)^- \right). \quad (4.62)
\end{aligned}$$

Setzt man diese Beziehungen sowie die Vereinfachung (4.58) in (4.57) ein, ergeben sich die Fehlerdynamiken zu

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{e}}}_z(t) \\ \dot{\underline{\mathbf{e}}}_z(t) \end{bmatrix} &= \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F}_z & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_z \end{bmatrix}}^{=\mathcal{F}_T} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_z(t) \\ \underline{\mathbf{e}}_z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{v,u}(t) \\ \mathbf{u}_{v,l}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{P}(t) \cdot \Delta \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_A(t)) \cdot \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{P}(t) \cdot \Delta \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_A(t)) \cdot \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} |\mathbf{P}(t)| \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \\ |\mathbf{P}(t)| \cdot \underline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \end{bmatrix} \\
&\cdot \left( \left( \mathbf{x}(t) + [\mathbf{W}^+(t) \quad -\mathbf{W}^-(t)] \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_z(t) \\ \underline{\mathbf{e}}_z(t) \end{bmatrix} \right)^+ \right. \\
&\left. - \left( \mathbf{x}(t) + [\mathbf{W}^-(t) \quad -\mathbf{W}^+(t)] \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_z(t) \\ \underline{\mathbf{e}}_z(t) \end{bmatrix} \right)^- \right). \tag{4.63}
\end{aligned}$$

Nachfolgend soll die gleichmäßige Stabilität dieses Systems auf Basis von Lemma 3.7 nachgewiesen werden. Dazu wird die die Lyapunov-Funktion

$$V(\mathbf{e}_z, t) = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{e}_z^\top(t) \cdot \mathbf{e}_z(t) = \frac{1}{2} \cdot \|\mathbf{e}_z(t)\|_2^2, \tag{4.64}$$

welche den Vektor

$$\mathbf{e}_z(t) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_z(t) \\ \underline{\mathbf{e}}_z(t) \end{bmatrix} \tag{4.65}$$

beinhaltet und (3.61) mit  $\iota(\|\mathbf{x}\|_2) = \frac{1}{4} \cdot \|\mathbf{e}_z(t)\|_2^2$  und  $\zeta(\|\mathbf{x}\|_2) = \|\mathbf{e}_z(t)\|_2^2$  erfüllt, verwendet. Aus dieser Lyapunov-Funktion und (4.63) ergibt sich für die linke Seite der Ungleichung (3.62)

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t) &= \overbrace{\frac{\partial V(\mathbf{e}_z, t)}{\partial t}}^{=0} + \frac{\partial V(\mathbf{e}_z, t)}{\partial \mathbf{e}_z} \cdot \dot{\mathbf{e}}_z(t) = \mathbf{e}_z^\top(t) \cdot \dot{\mathbf{e}}_z(t) \\
&= \mathbf{e}_z^\top(t) \cdot \mathcal{F}_T \cdot \mathbf{e}_z(t) + \mathbf{e}_z^\top(t) \cdot \begin{bmatrix} |\mathbf{P}(t)| \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \\ |\mathbf{P}(t)| \cdot \underline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \end{bmatrix} \\
&\cdot \left( \left( \mathbf{x}(t) + [\mathbf{W}^+(t) \quad -\mathbf{W}^-(t)] \cdot \mathbf{e}_z(t) \right)^+ \right. \\
&\left. - \left( \mathbf{x}(t) + [\mathbf{W}^-(t) \quad -\mathbf{W}^+(t)] \cdot \mathbf{e}_z(t) \right)^- \right) \\
&+ \mathbf{e}_z^\top(t) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{v,u}(t) - \mathbf{P}(t) \cdot \Delta \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_A(t)) \cdot \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}_{v,l}(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \Delta \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_A(t)) \cdot \mathbf{x}(t) \end{bmatrix}. \tag{4.66}
\end{aligned}$$

In dieser Darstellung sind die Ausdrücke  $(\cdot)^+$  und  $(\cdot)^-$  noch für die weiteren Umformungen hinderlich. Daher sollen diese unter Verwendung von Lemma B.2 abgeschätzt

werden. Hieraus ergibt sich mit

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \mathbf{e}_z^\top(t) \cdot \mathcal{F}_T \cdot \mathbf{e}_z(t) + \mathbf{e}_z^\top(t) \cdot \begin{bmatrix} |\mathbf{P}(t)| \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \\ |\mathbf{P}(t)| \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \end{bmatrix} \\ & \cdot (\mathbf{x}^+(t) + ([\mathbf{W}^+(t) \quad -\mathbf{W}^-(t)] \cdot \mathbf{e}_z(t))^+ \\ & - \mathbf{x}^-(t) - ([\mathbf{W}^-(t) \quad -\mathbf{W}^+(t)] \cdot \mathbf{e}_z(t))^-) \\ & + \mathbf{e}_z^\top(t) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{v,u}(t) - \mathbf{P}(t) \cdot \Delta \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_A(t)) \cdot \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}_{v,l}(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \Delta \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_A(t)) \cdot \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.67)$$

eine obere Abschätzung für (4.66). Wie im ersten Schritt des Beweises bereits gezeigt wurde, ist der in (4.67) enthaltene Vektor  $\mathbf{e}_z(t)$  nichtnegativ. Per Definition gilt darüber hinaus, dass  $\mathbf{W}^+(t)$  nichtnegativ ist und  $\mathbf{W}^-(t)$  nichtpositiv. Damit ist der in dieser Gleichung grün markierte Vektor ebenfalls nichtnegativ und der blau markierte nichtpositiv, woraus folgt, dass

$$([\mathbf{W}^+(t) \quad -\mathbf{W}^-(t)] \cdot \mathbf{e}_z(t))^+ = [\mathbf{W}^+(t) \quad -\mathbf{W}^-(t)] \cdot \mathbf{e}_z(t), \quad (4.68a)$$

$$([\mathbf{W}^-(t) \quad -\mathbf{W}^+(t)] \cdot \mathbf{e}_z(t))^- = [\mathbf{W}^-(t) \quad -\mathbf{W}^+(t)] \cdot \mathbf{e}_z(t) \quad (4.68b)$$

gilt. Unter Berücksichtigung von  $|\mathbf{x}(t)| = \mathbf{x}^+(t) - \mathbf{x}^-(t)$  und  $|\mathbf{W}(t)| = \mathbf{W}^+(t) - \mathbf{W}^-(t)$  vereinfacht sich (4.67) damit zu

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \mathbf{e}_z^\top(t) \cdot \mathcal{F}_T \cdot \mathbf{e}_z(t) + \mathbf{e}_z^\top(t) \cdot \begin{bmatrix} |\mathbf{P}(t)| \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \\ |\mathbf{P}(t)| \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \end{bmatrix} \\ & \cdot (|\mathbf{x}(t)| + [|\mathbf{W}(t)| \quad |\mathbf{W}(t)|] \cdot \mathbf{e}_z(t)) \\ & + \mathbf{e}_z^\top(t) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{v,u}(t) - \mathbf{P}(t) \cdot \Delta \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_A(t)) \cdot \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}_{v,l}(t) + \mathbf{P}(t) \cdot \Delta \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_A(t)) \cdot \mathbf{x}(t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

Trennt man in dieser Gleichung Ausdrücke mit quadratischer Abhängigkeit des Beobachterfehlers von denen mit linearer Abhängigkeit und verwendet man ferner den Zusammenhang

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} |\mathbf{P}(t)| \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \cdot |\mathbf{W}(t)| & |\mathbf{P}(t)| \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \cdot |\mathbf{W}(t)| \\ |\mathbf{P}(t)| \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \cdot |\mathbf{W}(t)| & |\mathbf{P}(t)| \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \cdot |\mathbf{W}(t)| \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot |\mathbf{P}(t)| \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \cdot |\mathbf{W}(t)| \cdot [\mathbf{I} \quad \mathbf{I}] \end{aligned} \quad (4.70)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & \mathbf{e}_z^\top(t) \cdot \mathcal{F}_T \cdot \mathbf{e}_z(t) \\ & + \mathbf{e}_z^\top(t) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot |\mathbf{P}(t)| \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \cdot |\mathbf{W}(t)| \cdot [\mathbf{I} \quad \mathbf{I}] \cdot \mathbf{e}_z(t) \\ & + \mathbf{e}_z^\top(t) \cdot \boldsymbol{\kappa}(t). \end{aligned} \quad (4.71)$$

Der hierin enthaltene Vektor  $\boldsymbol{\kappa}(t)$ , der zur Vereinfachung der Darstellung nur die Zeit  $t$  als Argument trägt, lautet vollständig

$$\boldsymbol{\kappa}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\kappa}_1(t) \\ \boldsymbol{\kappa}_2(t) \end{bmatrix} \quad (4.72)$$

mit

$$\begin{aligned} \kappa_1(t) &= |\mathbf{P}(t)| \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \cdot |\mathbf{x}(t)| \\ &\quad - \mathbf{P}(t) \cdot \Delta \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_A(t)) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_{v,u}(t), \end{aligned} \quad (4.73a)$$

$$\begin{aligned} \kappa_2(t) &= |\mathbf{P}(t)| \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \cdot |\mathbf{x}(t)| \\ &\quad + \mathbf{P}(t) \cdot \Delta \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_A(t)) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}_{v,l}(t). \end{aligned} \quad (4.73b)$$

Um dem Ziel näherzukommen, ein  $v(\|\mathbf{e}_z(t)\|_2)$  zu erhalten, das (3.62) mit  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}_z(t)$  erfüllt, werden die Summanden in (4.71) durch ihre euklidische Norm ersetzt, was für die skalaren Summanden eine obere Abschätzung darstellt. Berücksichtigt man zudem die Submultiplikativität der Matrixnormen ([GVL96, S. 55]), Lemma 3.5 und  $\|\mathbf{e}_z(t)\|_2 = \|\mathbf{e}_z^\top(t)\|_2$  ergibt sich

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \lambda_{max}(\mathcal{F}_T) \cdot \|\mathbf{e}_z(t)\|_2^2 \\ &\quad + \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \right\|_2 \cdot \left\| |\mathbf{P}(t)| \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \cdot \mathbf{W}(t) \right\|_2 \cdot \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right\|_2 \cdot \|\mathbf{e}_z(t)\|_2^2 \\ &\quad + \|\mathbf{e}_z^\top(t)\|_2 \cdot \|\boldsymbol{\kappa}(t)\|_2. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Berücksichtigt man (B.47a) und (B.47b) erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq (\lambda_{max}(\mathcal{F}_T) + 2 \cdot \left\| |\mathbf{P}(t)| \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \cdot \mathbf{W}(t) \right\|_2) \cdot \|\mathbf{e}_z(t)\|_2^2 \\ &\quad + \|\boldsymbol{\kappa}(t)\|_2 \cdot \|\mathbf{e}_z(t)\|_2. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Da nach Annahme 4.7 der Vorfaktor des quadratischen Terms negativ ist, existiert ein  $\|\mathbf{e}_z(t)\|_2 > \eta$ , sodass der quadratische Term den linearen Term dominiert und damit (3.62) mit

$$v(\|\mathbf{e}_z(t)\|_2) = -\frac{1}{2} \cdot (\lambda_{max}(\mathcal{F}_T) + 2 \cdot \left\| |\mathbf{P}(t)| \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \cdot \mathbf{W}(t) \right\|_2) \quad (4.76)$$

erfüllt ist.  $\square$

Wie in den vorhergehenden Abschnitten soll auch für diesen Ansatz die praktische Auslegung an einem Beispiel verdeutlicht werden.

**Beispiel 4.3:** Gegeben sei das System aus Beispiel 3.3 mit dem einzigen Unterschied, dass für  $\mathbf{A}_{11}$  lediglich

$$[\mathbf{A}_{11}] = \begin{bmatrix} [-5, 05, -4, 95] & 0 \\ 0 & [-5, 05, -4, 95] \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

bekannt ist, was einer Unsicherheit von  $\pm 1\%$  entspricht. Als Szenario wird erneut jenes aus Beispiel 4.1 mit  $\kappa(t) = \kappa_2(t)$  herangezogen.

Gemäß (4.50) lässt sich die Intervallmatrix  $[\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A(t))]$  als Summe der Nominalmatrix

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t)) = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 3 & 2 \cdot \kappa(t) \\ 0 & -5 & -2 \cdot \kappa(t) & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -\kappa(t) \\ 0 & 1 & \kappa(t) & -1 \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

und

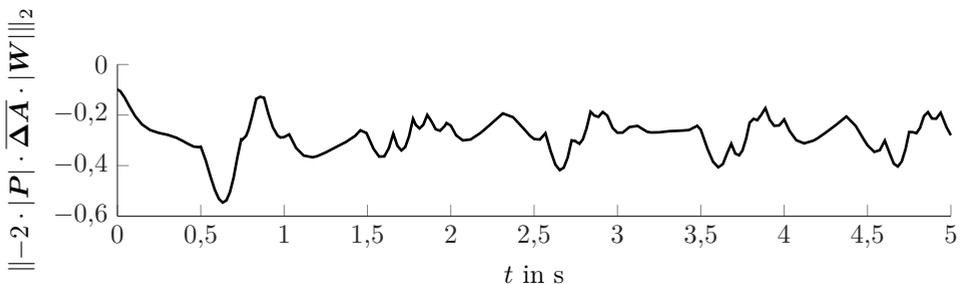
$$[\Delta \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)])] = \begin{bmatrix} [-0,05, 0,05] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [-0,05, 0,05] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

beschreiben. Da die Nominaldynamikmatrix damit der aus Beispiel 4.2 entspricht, kann zur Sicherstellung von Annahme 4.6 die Auslegung von  $\mathbf{F}_z$  und  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_C(t))$  und damit auch von  $\frac{d}{dt}\mathbf{P}^{-1}$  analog zu dem Vorgehen aus Beispiel 4.2 erfolgen.

Für die Matrix  $\mathbf{F}_z$ , definiert in (4.33), erhält man mit diesem Vorgehen

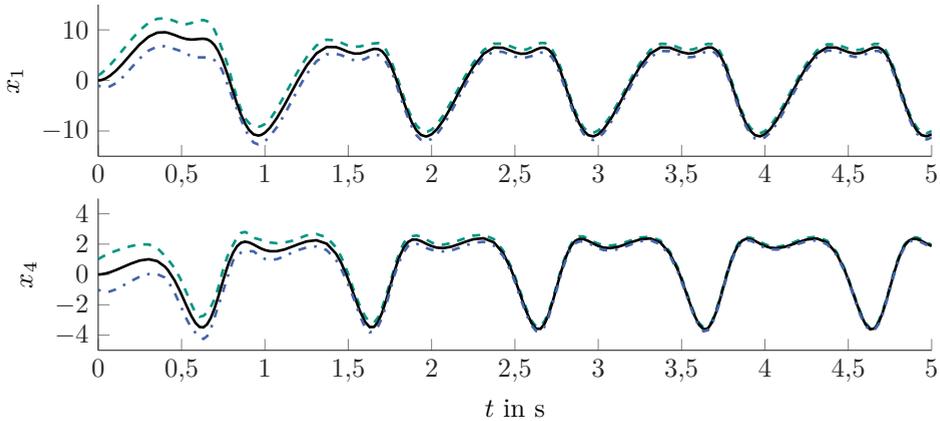
$$\mathbf{F}_z = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.80)$$

womit sofort ersichtlich ist, dass für  $\mathcal{F}_T$ , eingeführt in (4.51),  $\lambda_{max} = -1$  gilt. Zur Überprüfung der Gültigkeit von Annahme 4.7 ist in Abbildung 4.6 das Ergebnis von  $-2 \cdot \|\mathbf{P}(t) \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \cdot \mathbf{W}(t)\|_2$  für das gewählte Szenario dargestellt.



**Abbildung 4.6:** Beispiel 4.3: Verlauf von  $-2 \cdot \|\mathbf{P}(t) \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \cdot \mathbf{W}(t)\|_2$  für das gewählte Szenario des transformationsbasierten Intervallbeobachters für LPV-Systeme mit Eingangs-, Ausgangs- und Parameterunsicherheiten

Wie gut zu erkennen ist, ist die Ungleichung (4.52) für dieses Szenario erfüllt. Daher kann ein Intervallbeobachter nach Satz 4.3 angesetzt werden, der für die erste und die vierte Zustandsgröße die in Abbildung 4.7 dargestellten Ergebnisse liefert.



**Abbildung 4.7:** Beispiel 4.3: Ergebnis der Intervallschätzung des transformationsbasierten Intervallbeobachters mit stabiler Transformationsmatrixdynamik für LPV-Systeme mit Eingangs-, Ausgangs- und Parameterunsicherheiten (Untergrenze: blau strichpunktiert, Obergrenze: grün gestrichelt, tatsächliche Zustandsgröße: schwarz)

Die tatsächlichen Zustandsgrößen werden durch den Intervallbeobachter mit einer beschränkten Intervallbreite eingeschlossen. Vergleicht man die Ergebnisse mit den Ergebnissen mit denen im Fall ohne Parameterunsicherheiten erzielten, dargestellt in Abbildung 4.4, ist für die erste Zustandsgröße eine leichte Verbreiterung des Schätzintervalls zu erkennen. Zusammenfassend kann jedoch festgehalten werden, dass der Intervallbeobachter eine garantierte Einschließung liefert.

### 4.3.2 Bemerkungen zur Stabilitätsbedingung des transformationsbasierten Intervallbeobachters zur Berücksichtigung von Eingangs-, Ausgangs- und Parameterunsicherheiten

Um Annahme 4.7 beziehungsweise die hierin enthaltene Ungleichung (4.52) zu erfüllen, sollte während des Beobachterentwurfes darauf geachtet werden, dass der maximale Eigenwert der Diagonalmatrix  $\mathbf{F}_z$ , welcher ebenfalls der maximale Eigenwert der Matrix  $\mathcal{F}_T$  ist, möglichst negativ ist und gleichzeitig  $2 \cdot \|\mathbf{P}(t) \cdot \Delta \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \cdot \mathbf{W}(t)\|_2$  möglichst klein ist. Wie an (4.3) abgelesen werden kann, können diese beiden Zielstellungen jedoch nicht getrennt voneinander betrachtet werden, da die Wahl von  $\mathbf{F}_z$  Auswirkungen auf das zeitliche Verhalten von  $\mathbf{P}(t)$  hat. Da man auf die aus der Parameterunsicherheit folgende Matrix  $\overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)])$  keinerlei Einfluss während des Entwurfes hat, soll mithilfe der Submultiplikativität der Matrixnormen ([GVL96, S. 55])

$$\begin{aligned} & 2 \cdot \|\mathbf{P}(t) \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \cdot \mathbf{W}(t)\|_2 \\ & \leq 2 \cdot \|\mathbf{P}(t)\|_2 \cdot \|\overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)])\|_2 \cdot \|\mathbf{W}(t)\|_2 \end{aligned} \quad (4.81)$$

analysiert werden. Man erkennt, dass es wünschenswert wäre, den Ausdruck  $\|\mathbf{P}(t)\|_2 \cdot \|\mathbf{W}(t)\|_2$  zu minimieren. Beiden Intervallbeobachterentwürfen, dem aus Abschnitt 4.2.1 und dem aus Abschnitt 4.2.2, ist jedoch gemein, dass aufgrund des im Vorfeld unbekanntem zeitlichen Verlaufes der zeitvarianten Parameter a priori keine Aussage über  $\|\mathbf{P}(t)\|_2 \cdot \|\mathbf{W}(t)\|_2$  getroffen werden kann, weswegen dem eigentlichen Entwurf eine Simulation vorangestellt werden muss, wie in Beispiel 4.3 demonstriert. Betrachtet man die Möglichkeiten den maximalen Eigenwert von  $\mathbf{F}_z$  zu beeinflussen, so wird schnell deutlich, dass im Falle des Entwurfes aus Abschnitt 4.2.2 eine untere Schranke für den maximalen Eigenwert existiert, da der Eintrag  $\iota$  in  $\mathbf{F}_z$ , definiert in (4.33), so gewählt werden muss, dass  $\mathbf{F}_{22}(\boldsymbol{\theta}(t), t) - \iota \cdot \mathbf{I}_{n-q}$  schiefsymmetrisch ist. Da, wie im Zuge des Satzes 4.2 hergeleitet,  $\mathbf{F}_{22}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  den Einträgen der Dynamikmatrix des zu schätzenden Systems entspricht, ist die untere Schranke für den maximalen Eigenwert bereits durch das System selbst festgelegt. Damit bleibt lediglich der Einfluss der übrigen Diagonaleinträge von  $\mathbf{F}_z$  auf das Verhalten von  $\|\mathbf{P}(t)\|_2 \cdot \|\mathbf{W}(t)\|_2$ . Bei dem in Abschnitt 4.2.1 vorgestellten Entwurfsverfahren hat man hingegen freie Wahl des maximalen Eigenwertes von  $\mathbf{F}_z$ . Wie jedoch in Abbildung 4.3 des Beispiels 4.1 deutlich gemacht wurde, kann es bei diesem Entwurfsverfahren bei sich schnell ändernden Parametern zu einem starken Anstieg der Einträge von  $\mathbf{W}(t)$  kommen (im gezeigten Beispiel um sechs Zehnerpotenzen höher als bei dem zweiten Verfahren), womit  $\|\mathbf{P}(t)\|_2 \cdot \|\mathbf{W}(t)\|_2$  wiederum hohe Werte annehmen würde.

## 4.4 Bemerkungen zur Vorgabe einer zeitinvarianten Dynamikmatrix

In diesem Abschnitt soll kurz die in (4.12) und (4.33) getroffene Wahl, die Dynamikmatrix  $\mathbf{F}_z$  der dynamischen Systeme  $\dot{\mathbf{z}}(t)$  und  $\ddot{\mathbf{z}}(t)$  zeitinvariant vorzugeben, diskutiert werden. Hierbei kann direkt festgehalten werden, dass dies bei dem in Abschnitt 4.2.1 vorgestellten Ansatz ohne Weiteres bei sämtlichen LPV-Systemen möglich ist, falls die Entwurfsbedingungen erfüllt sind. Dies schließt insbesondere auch den Fall ein, dass sämtliche Einträge der Systemmatrizen der linearen parametervarianten Systembeschreibung zeitveränderlich sind.

Solche Systeme deckt der in Abschnitt 4.2.2 präsentierte Ansatz nicht ab, da nach Annahme 4.3 eine Konstante  $\iota$  existieren muss, sodass  $\mathbf{F}_{22}(\boldsymbol{\theta}(t), t) - \iota \cdot \mathbf{I}_{n-q}$  eine schiefsymmetrische Matrix ist. Zur Erinnerung sei hier erwähnt, dass die Einträge von  $\mathbf{F}_{22}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  denen der Dynamikmatrix des zu schätzenden Systems an den entsprechenden Stellen gleicht. Das bedeutet daher, dass die Hauptdiagonalelemente dieser Matrix konstant sein müssen. Dass diese Forderung, falls nötig (was bei der in Kapitel 6.1 festgelegten Abgrenzung im Hinblick auf die Anwendung auf die ASM nicht nötig sein wird), verworfen werden kann, soll nachfolgend kurz gezeigt werden.

Fasst man die Fehlerdynamiken (4.19) und (4.20) zu einem Differentialgleichungssystem zusammen und berücksichtigt allgemein eine parametervariante und zeitvariante

Matrix  $\mathbf{F}_z(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  in Diagonalform, erhält man

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{e}}}_z(t) \\ \dot{\mathbf{e}}_z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_z(\boldsymbol{\theta}(t), t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_z(\boldsymbol{\theta}(t), t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_z(t) \\ \mathbf{e}_z(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{u}_u^*(\boldsymbol{\theta}(t), t) \\ \mathbf{u}_l^*(\boldsymbol{\theta}(t), t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{y}_u^*(\boldsymbol{\theta}(t), t) \\ \mathbf{y}_l^*(\boldsymbol{\theta}(t), t) \end{bmatrix}. \quad (4.82)$$

Nach Lemma 3.1 ist dieses System aufgrund der Beschränktheit von  $\mathbf{u}_u^*(\boldsymbol{\theta}(t), t)$ ,  $\mathbf{u}_l^*(\boldsymbol{\theta}(t), t)$ ,  $\mathbf{y}_u^*(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  und  $\mathbf{y}_l^*(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  BIBO-stabil, wenn

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{e}}}_z(t) \\ \dot{\mathbf{e}}_z(t) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F}_z(\boldsymbol{\theta}(t), t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_z(\boldsymbol{\theta}(t), t) \end{bmatrix}}^{=\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t)} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{e}}_z(t) \\ \mathbf{e}_z(t) \end{bmatrix}}{=\mathbf{e}_z(t)} \quad (4.83)$$

gleichmäßig exponentiell stabil ist.

Für diesen Nachweis wird zunächst  $\frac{d}{dt}\|\mathbf{e}_z(t)\|_2^2 = \dot{\mathbf{e}}_z^\top(t) \cdot \mathbf{e}_z(t) + \mathbf{e}_z^\top(t) \cdot \dot{\mathbf{e}}_z(t)$  untersucht. Hierfür ergibt sich mit (4.83) unter Berücksichtigung, dass aufgrund der Diagonalform von  $\mathbf{F}_z(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  die Gleichung  $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t) = \mathcal{F}^\top(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  folgt, die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\mathbf{e}_z(t)\|_2^2 &= 2 \cdot \mathbf{e}_z^\top(t) \cdot \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \mathbf{e}_z(t) \\ \Leftrightarrow \mathbf{e}_z^\top(t) \cdot \mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \cdot \mathbf{e}_z(t) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt}\|\mathbf{e}_z(t)\|_2^2. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Setzt man diese Beziehung in die in Lemma 3.5 eingeführte Abschätzung ein, folgt

$$\lambda_{\min}(\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t)) \cdot \|\mathbf{e}_z(t)\|_2^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt}\|\mathbf{e}_z(t)\|_2^2 \leq \lambda_{\max}(\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t)) \cdot \|\mathbf{e}_z(t)\|_2^2. \quad (4.85)$$

Da gemäß Definition D.4 für die gleichmäßige exponentielle Stabilität  $\|\mathbf{e}_z(t)\|_2$  nach oben abgeschätzt werden muss, wird nachfolgend nur die rechte Ungleichung in (4.85) betrachtet. Die linke Seite dieser rechten Ungleichung wird zunächst durch Anwendung der Kettenregel, woraus  $\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt}\|\mathbf{e}_z(t)\|_2^2 = \|\mathbf{e}_z(t)\|_2 \cdot \frac{d(\|\mathbf{e}_z(t)\|_2)}{dt}$  folgt, umgeformt. Man erhält damit

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_z(t)\|_2 \cdot \frac{d(\|\mathbf{e}_z(t)\|_2)}{dt} &\leq \lambda_{\max}(\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t)) \cdot \|\mathbf{e}_z(t)\|_2^2 \\ \Leftrightarrow \frac{d(\|\mathbf{e}_z(t)\|_2)}{\|\mathbf{e}_z(t)\|_2} &\leq \lambda_{\max}(\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t)) dt. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Integriert man diese Beziehung erhält man schließlich

$$\|\mathbf{e}_z(t)\|_2 \leq \|\mathbf{e}_z(t_0)\|_2 \cdot e^{\int_{t_0}^t \lambda_{\max}(\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}(\tau), \tau)) d\tau}, \quad (4.87)$$

womit aufgrund der zeitvarianten bzw. parametervarianten und negativen Hauptdiagonalelemente von  $\mathcal{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  die gleichmäßige exponentielle Stabilität nachgewiesen ist.

Ebenso ist für den Fall einer nicht konstanten Matrix  $\mathbf{F}_z(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  die Stabilität der inversen Transformationsmatrixdynamik, welche in Abschnitt 4.2.2 vorgestellt wurde,

weiterhin gegeben. Dies wird bei Betrachtung des Stabilitätsbeweises von (4.42) sofort deutlich, da die enthaltene Dynamikmatrix  $\chi(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  ohnehin bereits nicht konstant war und der Stabilitätsbeweis rein auf ihrer Schiefsymmetrie beruht, die weiterhin gegeben ist und für das System (4.45) die gleichen Betrachtungen wie oben durchgeführt werden können.

## 4.5 Zusammenfassung

Der Fokus dieses Kapitels war auf die Entwicklung eines transformationsbasierten Intervallbeobachters für LPV-Systeme gerichtet, welcher die bei der Darstellung des Stands der Wissenschaft in Abschnitt 2.1.2 beschriebenen Nachteile existierender Verfahren hinsichtlich der Anwendung zur Zustandsschätzung für LPV-Systeme im Allgemeinen zur Zustandsschätzung für ein LPV-Modell einer ASM im Speziellen überwindet. Konkret wurde hierbei dem Entwurf keine pessimistische Einschließung der zeitvarianten Parameter in ein zeitinvariantes Intervall zugrunde gelegt und es wurde nicht angenommen, dass die Beobachtermatrix ausreicht, um die Beobachterdynamikmatrix als Metzler-Matrix auszulegen.

Ausgangspunkt war dazu die Einführung einer zeitvarianten Zustandstransformation, welche zum Ziel hat, dass die Beobachterfehlerdynamik im transformierten Koordinatensystem ein stabiles und positives System darstellt.

Basierend auf dieser allgemeinen Darstellung wurde zur Berücksichtigung von Ein-/Ausgangsunsicherheiten zunächst eine Berechnungsvorschrift für die Transformationsmatrix für LPV-Systeme, deren Parameter sich hinreichend langsam und gering ändern, eingeführt. Die einzige weitere Bedingung an die Systeme bei diesem Entwurf ist, dass sie ein Kriterium, welches der Beobachtbarkeit bei LTI-Systemen gleicht, erfüllen müssen. Dies macht dieses Vorgehen für eine breite Klasse von LPV-Systemen anwendbar. Des Weiteren wurde in diesem Kapitel eine Berechnungsvorschrift für die Transformationsmatrix vorgestellt, welche die Struktur des Systemmodells ausnutzt, um damit auch für schnelle und große Parameteränderungen ein stabiles Verhalten zu garantieren. Damit wurde erstmals gezeigt, wie die Einbeziehung von Systemwissen das Schätzergebnis bei Intervallbeobachtern verbessern kann.

Die abschließende Erweiterung dieser Ansätze zur zusätzlichen Berücksichtigung von Parameterunsicherheiten trägt zur Erhöhung der Anwendbarkeit bei.



# 5 Gegenüberstellung der Intervallbeobachteransätze

Nachdem in den beiden vorhergehenden Kapiteln zwei neue Intervallbeobachteransätze mathematisch beschrieben und anhand von numerischen Beispielen und Simulationen veranschaulicht wurden, soll dieses Kapitel dazu dienen, diese Intervallbeobachteransätze systematisch zu vergleichen.

## 5.1 Vergleich der getroffenen Annahmen

Der erste Schritt des Vergleiches der Intervallbeobachteransätze für LPV-Systeme stellt eine Untersuchung dar, wie restriktiv die jeweils zu erfüllenden Annahmen sind. Dazu werden die Annahmen jeweils zunächst kurz beschrieben und anschließend bewertet. Bevor hierbei auf die spezifischen Annahmen der Ansätze eingegangen wird, wird die Annahme 3.2 bewertet, die allen Ansätzen gemein ist. Da diese Annahme fordert, dass die Systemparameter des zu schätzenden Systems beschränkt sind, was bei den üblicherweise behandelten realen Systemen der Fall ist, stellt diese Annahme keine Einschränkung dar.

### 5.1.1 Auflistung der getroffenen Annahmen

#### Grenzverkoppelter Intervallbeobachter zur Berücksichtigung von Ein-/Ausgangsunsicherheiten

- **Annahme 3.3: Die Einträge der Systemmatrizen seien zur Laufzeit exakt bekannt.** Diese Annahme ist dann erfüllt, wenn die zeitveränderlichen Systemparameter messtechnisch ohne Messfehler erfasst werden können oder der funktionale Zusammenhang zwischen den Parameterwerten und der Zeit exakt bekannt ist und somit eine Nachführung stattfinden kann. Streng genommen ist insbesondere der erste Fall nie erfüllt, da für eine garantierte Einschließung der tatsächlichen Zustandsgröße auch kleinste Parameterabweichungen berücksichtigt werden müssen. Im Hinblick auf eine praktische Umsetzung spielen diese jedoch aufgrund des Pessimismus von Intervallbeobachtern keine Rolle.
- **Annahme 3.4: Die Beobachterfehlerdynamik muss eine Standard-Stabilitätsbedingung für LPV-Systeme aus [Rug96] erfüllen.** Auf den ersten Blick erscheint diese Annahme nicht sonderlich restriktiv. Die Gewährleistung

der Gültigkeit für die Beobachterfehlerdynamik gestaltet sich gegenüber gewöhnlichen LPV-Systemen jedoch schwieriger, da auf die Dynamikmatrix der Beobachterfehlerdynamik der  $\mathcal{M}$ -Operator (siehe Definition 3.1) angewendet wird. Dies hat zur Folge, dass von den Nebendiagonalelementen der Dynamikmatrix der Betrag gebildet wird und man so Freiheitsgrade, die bei gewöhnlichen LPV-Systemen vorhanden sind, verliert. Hieraus resultiert die in Satz 3.4 aufgeführte Bedingung, dass die Hauptdiagonale der Beobachterfehlerdynamikmatrix zumindest zeitweise negativ sein muss, was jedoch nicht in jedem Fall über die Beobachtermatrix sichergestellt werden kann.

Entschärft wird diese Annahme durch den in Satz 3.5 eingeführten reduzierten grenzverkoppelten Intervallbeobachter bei dem durch die Ordnungsreduktion auch die Beeinflussbarkeit der Elemente der Beobachterfehlerdynamikmatrix über die Beobachtermatrix erhöht wird. Nachteilig ist hierbei jedoch die dadurch notwendige numerische Ableitung der Beobachtermatrix.

### **Transformationsbasierter Intervallbeobachter mit grenzstabiler Transformationsmatrixdynamik zur Berücksichtigung von Ein-/Ausgangsunsicherheiten**

- **Annahme 3.3: Die Einträge der Systemmatrizen seien zur Laufzeit exakt bekannt.** Diese Annahme wurde im vorherigen Unterabschnitt bereits thematisiert.
- **Annahme 4.1: Die Eigenwerte der Beobachterdynamikmatrix können über die Beobachtermatrix frei gewählt werden.** Die Gültigkeit dieser Annahme stellt keine harte Anforderung an das zu schätzende System dar, da sie für LTI-Systeme schlicht der Beobachtbarkeit entspricht.
- **Annahme 4.2: Die Änderungen der Systemparameter sind hinreichend klein und langsam.** Zunächst ist zu dieser Annahme anzumerken, dass ihre Gültigkeit aufgrund des Fehlens quantitativer Angaben nicht a priori überprüfbar ist. Darüber hinaus ist diese Annahme im Hinblick auf die Anwendung des Beobachteransatzes auf reale Problemstellungen recht restriktiv. Dies wird besonders am Beispiel der ASM in den folgenden Kapiteln deutlich werden, da der zeitveränderliche Parameter des LPV-Modells der ASM dort die mechanische Winkelgeschwindigkeit ist.

### **Transformationsbasierter Intervallbeobachter mit stabiler Transformationsmatrixdynamik zur Berücksichtigung von Ein-/Ausgangsunsicherheiten**

- **Annahme 3.3: Die Einträge der Systemmatrizen seien zur Laufzeit exakt bekannt.** Diese Annahme wurde im ersten Unterabschnitt bereits thematisiert.

- **Annahme 4.3:** Diese Annahme fordert eine spezielle Struktur der Beobachterdynamikmatrix, aus welcher folgt, dass ein bestimmter Teil dieser Matrix schiefssymmetrisch beim Addieren einer gewichteten Einheitsmatrix wird. Diese Annahme ist sehr restriktiv und nur in Sonderfällen erfüllt. Mit dieser Annahme wird deutlich, dass der zugehörige Ansatz speziell für die ASM entwickelt wurde.

### Grenzverkoppelter Intervallbeobachter zur Berücksichtigung von Eingangs-, Ausgangs- und Parameterunsicherheiten

- **Annahme 3.8:** Für die Systemmatrizen sind zur Laufzeit beschränkte Intervallmatrizen bekannt. Diese Annahme ist deutlich weniger restriktiv als die zuvor geforderte Annahme 3.3. Betrachtet man diese Annahme separat, ohne die Auswirkung großer Intervallbreiten auf die Stabilität zu betrachten, ist sie im einfachsten Fall durch Kenntnis von Grenzwerten der zeitvarianten Parameter leicht sicherzustellen.
- **Annahme 3.9:** Es existiert eine Beobachtermatrix, sodass die Eigenwerte einer aus der unsicherheitsbehafteten Beobachterdynamikmatrix abgeleiteten Matrix kleiner sind als die negative Frobeniusnorm einer Matrix, die aus den Intervallbreiten der unsicherheitsbehafteten Einträge der Beobachterdynamikmatrix abgeleitet wird. Obgleich diese Annahme aus einem Standard-Stabilitätskriterium abgeleitet wurde, erschwert auch hier die gleiche Randbedingung wie beim grenzverkoppelten Intervallbeobachter zur Berücksichtigung von Ein-/Ausgangsunsicherheiten die Erfüllung. Da die Matrix, deren Eigenwerte die in (3.67) definierte Ungleichung erfüllen müssen, durch Betragsbildung der negativen Nebendiagonalelemente ebenfalls nur nichtnegative Nebendiagonalelemente besitzt, sind die Freiheitsgrade bei der Eigenwertplatzierung reduziert.

### Transformationsbasierter Intervallbeobachter zur Berücksichtigung von Eingangs-, Ausgangs- und Parameterunsicherheiten

- **Annahme 4.4:** Für die Dynamikmatrix  $A(\theta(t))$  ist zur Laufzeit eine beschränkte Intervallmatrix bekannt, während  $B(\theta(t))$  und  $C(\theta(t))$  zur Laufzeit bekannt sind. Diese Annahme ist härter als Annahme 3.8. Jedoch wurde sie lediglich für eine kompaktere Herleitung getroffen und kann, wie in Fußnote 15 auf Seite 73 erläutert, zu Annahme 3.8 relaxiert werden.
- **Annahme 4.5:** Die Intervallmatrix, die die unsicherheitsbehaftete Abweichung der Nominaldynamikmatrix von der tatsächlichen Dynamikmatrix beschreibt, ist symmetrisch. Aufgrund der freien Wählbarkeit der Nominaldynamikmatrix  $A(\theta_A^*(t))$  kann diese immer so gewählt werden, dass

für eine bekannte, unsicherheitsbehaftete Dynamikmatrix  $[A(\theta_A(t))]$  die resultierende Intervallmatrix zur Beschreibung der Differenz dieser beiden Matrizen symmetrisch ist. Diese Annahme stellt daher keine Einschränkung dar.

- **Annahme 4.6: Die verwendete Zustandstransformation ist beschränkt.** Damit diese Annahme gültig ist, müssen für das Nominalsystem entweder Annahme 4.1 und Annahme 4.2 oder Annahme 4.3 gelten. Die Einschätzung dieser Annahmen erfolgte bereits im Zusammenhang mit dem transformationsbasierten Intervallbeobachter zur Berücksichtigung von Ein-/Ausgangsunsicherheiten.
- **Annahme 4.7: Die Eigenwerte der Beobachterfehlersystemmatrix  $\mathcal{F}_T$  müssen kleiner sein als ein durch die Transformationsmatrix und die Parameterunsicherheit in (4.52) bestimmter Term sein.** Zur Bewertung, wie restriktiv diese Annahme ist, muss zwischen den beiden vorgestellten Ansätzen zur Bestimmung der Transformationsmatrixdynamik unterschieden werden. Während bei der in Abschnitt 4.2.1 vorgestellten Methodik die Eigenwerte frei platziert werden können, sind bei dem in Abschnitt 4.2.2 gezeigten Ansatz  $n - q$  Eigenwerte durch das System bereits festgelegt. Damit stellt insbesondere bei diesem Ansatz die Annahme eine restriktive Randbedingung dar, die in erster Linie bei großen Parameterunsicherheiten unter Umständen nicht zu erfüllen ist.

## 5.1.2 Bewertender Vergleich der Annahmen

Der Fokus beim Vergleich der Annahmen soll auf den Intervallbeobachtern zur Berücksichtigung von Ein-/Ausgangsunsicherheiten liegen. Grund hierfür ist, dass der Neuheitsgehalt bei einer zusätzlichen Analyse der aus diesen Ansätzen abgeleiteten Verfahren, welche zusätzlich Parameterunsicherheiten berücksichtigen, gering wäre.

Die Bewertung der Intervallbeobachter zur Berücksichtigung von Ein-/Ausgangsunsicherheiten muss zweigeteilt werden. Zunächst soll bewertet werden, wie restriktiv die Annahmen für beliebige LPV-Systeme sind und anschließend soll die Bewertung mit Bezug zur ASM ausgeführt werden. Annahme 3.3, welche für alle Ansätze erfüllt sein muss, und die eingangs erwähnte Annahme 3.2 werden nicht in den Vergleich einbezogen.

Für beliebige LPV-Systeme lässt sich auf Basis der vorherigen Ausführungen festhalten, dass die Annahmen des grenzverkoppelten Intervallbeobachters am wenigsten restriktiv sind, da keine direkte Anforderungen an das zeitliche Verhalten der Parameter gestellt werden und die im Vergleich mit den nachfolgenden Anforderungen an die Struktur gestellten Anforderungen schwächer sind. Hier ist die einzige notwendige Bedingung, wie in Satz 3.4 festgehalten, dass die Hauptdiagonale der Beobachterfehlerdynamikmatrix zeitweise negativ ist. Demgegenüber ist die Forderung nach langsamen und geringen Änderungen der Systemparameter beim transformationsbasierten Ansatz basierend auf einer grenzstabilen Transformationsmatrixdynamik für beliebige LPV-Systeme eine restriktivere Forderung, welche sich darüber hinaus nicht vorab analytisch überprüfen lässt. Hinsichtlich der Struktur stellt dieser Ansatz die geringsten Anforderungen in Form einer der Beobachtbarkeit für LTI-Systeme ähnlichen Bedingung. Aufgrund der

speziellen Anforderungen an die Struktur der Dynamikmatrix des zu schätzenden Systems stellt der zweite vorstellte transformationsbasierte Intervallbeobachteransatz für beliebige LPV-Systeme die strengsten Anforderungen an das System.

Da es nicht überraschend ist, dass die Bewertung mit Bezug zur ASM diametral ausfällt, soll dies nur kurz thematisiert werden. Aufgrund der direkten Entwicklung für die ASM stellt der transformationsbasierte Intervallbeobachter, welcher spezielle Struktureigenschaften miteinbezieht, den am wenigsten restriktiven Ansatz dar. Wie an einem numerischen Beispiel gezeigt wurde, ist auch der reduzierte, grenzverkoppelte Intervallbeobachter ohne Einschränkungen für die ASM anwendbar, da das Beispielsystem strukturell dem des im folgenden Kapitel vorgestellten ASM-Modells entspricht. Einzig der Transformationsansatz mit grenzstabiler Transformationsmatrixdynamik stößt bei einem dynamischen Betrieb der ASM an seine Grenzen.

Nach dieser kritischen Betrachtung der Annahmen bleibt jedoch festzuhalten, dass die numerischen Beispiele in dieser Arbeit, die bereits veröffentlichten Anwendungen der Verfahren zur Zustandsschätzung von ASM sowie die folgenden Kapitel zeigen, dass sich die Ansätze auf eine reale Problemstellung anwenden lassen.

## 5.2 Vergleich des Rechenaufwandes

Beim Vergleich des Rechenaufwandes des grenzverkoppelten und des transformationsbasierten Intervallbeobachters sollen nur die vollständigen Intervallbeobachter berücksichtigt werden. Aussagen zur Reduzierung des Rechenaufwandes beim Einsatz eines reduzierten Intervallbeobachters wurden bereits in vorherigen Abschnitten getroffen. Mit der gleichen Begründung wie zuvor soll der Fokus auf Intervallbeobachter zur Berücksichtigung von Ein-/Ausgangsunsicherheiten gelegt werden. Betrachtet werden soll jeweils ein zu schätzendes System der Ordnung  $n$ .

Im Falle des grenzverkoppelten Intervallbeobachters wird zur Schätzung dieses Systems ein dynamisches System der Ordnung  $2n$  benötigt, was für den Fall von nicht berücksichtigten und berücksichtigten Parameterunsicherheiten gilt.

Für das dynamische System zur Einschließung des transformierten Systemzustandes ist die Systemordnung für die transformationsbasierten Ansätze ebenfalls  $2n$ , wie direkt an (4.5) gesehen werden kann. Hinzu treten jedoch weitere  $n^2$  Integratoren zur Bestimmung der Transformationsmatrix (siehe (4.8)).

Neben dieser deutlich höheren Anzahl an numerischen Integrationen, treten beim Transformationsansatz weitere zusätzliche Operationen auf, wie beim Vergleich von (3.25) mit (4.9) deutlich wird. Während beim grenzverkoppelten Intervallbeobachter lediglich die Intervall-Matrix-Multiplikationen  $\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}(t)) \cdot [\mathbf{u}(t)]$  und  $\mathbf{L}(t) \cdot [\mathbf{y}(t)]$  berechnet werden müssen, wird bei den Transformationsmatrizen dieses Ergebnis von links zusätzlich mit der Transformationsmatrix multipliziert. Auch die Tatsache, dass die Beobachterdynamikmatrix beim Transformationsansatz, wie in (4.9) zu sehen, Nullmatrizen enthält, was den Rechenaufwand an dieser Stelle reduziert, kann den zusätzlichen Rechenaufwand nicht aufwiegen. Es muss berücksichtigt werden, dass für die Rücktransformation eine Intervall-Matrix-Multiplikation mit der doppelten Anzahl der hierdurch

eingesparten Multiplikationen benötigt wird. Auch die Tatsache, dass beim grenzverkoppelten Intervallbeobachter die in Definition 3.1 eingeführten Matrixoperationen auf die Systemmatrizen angewendet werden müssen, hat nur einen geringen Einfluss auf die Bewertung des Rechenaufwandes, da diese lediglich  $2 \cdot (n^2 - n)$  Vorzeichenabfragen entsprechen.

Zusammenfassend ist also festzuhalten, dass der grenzverkoppelte Intervallbeobachter recheneffizienter als der transformationsbasierte Intervallbeobachter ist.

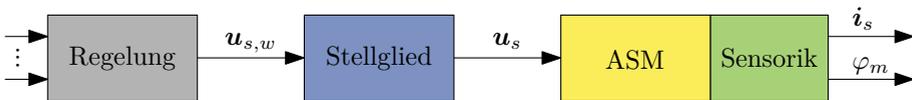
### 5.3 Zusammenfassung

Der Vergleich der Ansätze hinsichtlich der zu erfüllenden Annahmen und des Rechenaufwandes hat zwei Erkenntnisse hervorgebracht. Zum einen sind für beliebige LPV-Systeme die Annahmen der vorgestellten transformationsbasierten Intervallbeobachter restriktiver als die des grenzverkoppelten Intervallbeobachters, wobei diese Aussage aufgrund der konkret für das in dieser Arbeit angenommene Maschinenmodell angepassten Transformationsmatrixdynamik im Speziellen für die ASM nicht gilt.

Ferner konnte herausgestellt werden, dass der Rechenaufwand für den transformationsbasierten Intervallbeobachter insbesondere aufgrund der Bestimmung der Transformationsmatrix durch numerische Lösung eines Differentialgleichungssystems zur Laufzeit höher ist als im Fall des grenzverkoppelten Intervallbeobachters.

## 6 Modellbildung

Die drei vorherigen Kapitel thematisierten zwei neue Intervallbeobachteransätze für LPV-Systeme. Um diese Ansätze zur Zustandsschätzung einer ASM einsetzen zu können, muss zunächst das Gesamtsystem modelliert werden. Ein Überblick über dieses Gesamtsystem ist in Abbildung 6.1 gegeben.



**Abbildung 6.1:** Vereinfachte Struktur des Regelsystems der ASM

Links ist die Regelung der ASM, welche nicht Teil dieser Arbeit ist, durch den grauen Block dargestellt. Ihr Ausgang sind die Statorsollspannungen  $\mathbf{u}_{s,w}$ . Das Stellglied, welches in dieser Arbeit ein Zweipunkt-Wechselrichter (ZPWR) darstellt, generiert diese und legt an die Eingangsklemmen der Maschine die Statorspannungen  $\mathbf{u}_s$  an, die üblicherweise nicht gemessen werden ([CPV12]). Gemessen werden an der Maschine lediglich, wie dargestellt, die Statorströme  $\mathbf{i}_s$  sowie der mechanische Lagewinkel  $\varphi_m$ . Hieraus leiten sich zwei Zielstellungen für dieses Kapitel ab. Zunächst soll für den modellbasierten Ansatz zur garantierten Zustandsbestimmung der ASM die Auswahl eines geeigneten mathematischen Modells getroffen werden. Diese basiert auf einer Abgrenzung, um die betrachteten Effekte zu definieren. Ein Augenmerk liegt hierbei auch auf der Wahl eines geeigneten Koordinatensystems. Das Ergebnis dieses Unterkapitels ist ein qualitatives Modell der ASM.

Um das in der Einleitung festgehaltene Ziel der Entwicklung eines durchgängigen Verfahrens zur garantierten Zustandsschätzung der ASM zu erreichen, ist auch eine Modellierung des Wechselrichters erforderlich. Das zweite Unterkapitel behandelt daher die neuartige Modellierung von Wechselrichtern unter Berücksichtigung unbekannter, aber beschränkter Unsicherheiten während Parametrierung und Ausführung des Modells. Auch hier ist der Ausgangspunkt eine Abgrenzung, auf welche anschließend zunächst die Herleitung eines qualitativen Modells folgt und abschließend ein Weg zur Parametrierung des Modells aufgezeigt wird.

## 6.1 Intervall-Modellierung der Asynchronmaschine

### 6.1.1 Abgrenzung und Wahl des Koordinatensystems

Wie beschrieben, ist es ein Ziel dieser Arbeit, die aufgrund ihrer erwähnten Eigenschaften in den letzten Jahren vermehrt in den Fokus der Forschung gerückten Intervallbeobachter auf das wichtige Anwendungsfeld der elektrischen Antriebe zu übertragen. Daher soll eine etablierte Modellierung der ASM gewählt werden, welche die Anwendbarkeit aufzeigt, ohne jedoch in die Detailmodellierung eines speziellen Anwendungsfalles zu gehen. Da Grundwellenmodelle der ASM im Kontext der Regelung elektrischer Antriebe häufig verwendet werden, wird ein solches verwendet ([Ger15, S. 136], [Sch15a, S. 461]). Die weiteren Abgrenzungen, von welchen sich die ersten beiden ebenfalls an [Sch15a, S. 461 f.] orientieren, lauten:

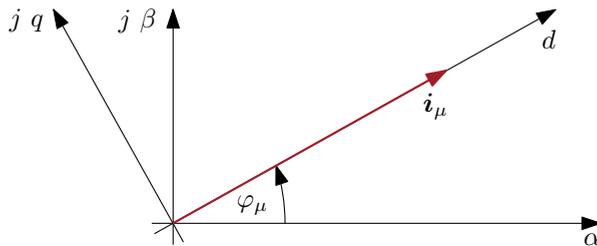
- Mit Ausnahme der mechanischen Winkelgeschwindigkeit werden alle Parameter als zeitinvariant angenommen.
- Nichtideale Effekte, wie Stromverdrängungseffekte oder Eisenverluste, werden vernachlässigt.
- Die Maschine ist symmetrisch, d. h. die Parameterwerte in allen drei Phasen sind identisch.
- Es werden nur Käfigläufer betrachtet.
- Der Sternpunkt der Maschine ist nicht angeschlossen.

Da besonders die Zeitinvarianz der Parameter eine sehr harte Abgrenzung bedeutet, soll sie an dieser Stelle kurz diskutiert werden. Im realen Betrieb sind sowohl die Induktivitäten Sättigungseffekten ausgesetzt, als auch die Widerstände Temperatur- und Sättigungseffekten. Da durch die mechanische Winkelgeschwindigkeit jedoch ein zeitvarianter Parameter berücksichtigt wird, ist ersichtlich, dass die entwickelte Methodik auch auf weitere zeitvariante Parameter übertragbar ist, was an entsprechender Stelle kurz kommentiert wird (siehe Abschnitt 9.2). Um den Fokus auf den eigentlichen Intervallbeobachterentwurf für elektrische Maschinen und nicht auf die Parameternachführung zu richten, werden diese Effekte jedoch nicht berücksichtigt.

Mit diesen Annahmen und der Berücksichtigung der Raumzeigerdarstellung ([Nuß10, S. 1 ff.]) folgt das gängige T-Ersatzschaltbild ([Sch13a, S. 334]), welches seinen Namen der T-förmigen Anordnung der drei enthaltenen Induktivitäten verdankt. Ferner werden je ein Widerstand für die Stator- und die Rotorwicklungen berücksichtigt. Aus diesem Modell wiederum kann ein Invers- $\Gamma$ -Ersatzschaltbild abgeleitet werden, das mit lediglich zwei Induktivitäten und zwei Widerständen bezogen auf die Klemmen gleiches Verhalten wie das T-Ersatzschaltbild zeigt [Sch15a, S. 571] und damit aufgrund der geringeren Komplexität zu bevorzugen ist ([Sle89], [LZDL08])<sup>16</sup>.

<sup>16</sup> An dieser Stelle ist anzumerken, dass die erwähnten Ersatzschaltbilder üblicherweise unter Annahme konstanter Flussgrößen, also im stationären Zustand, dargestellt werden. Diese Annahme wird in der vorliegenden Arbeit nicht getroffen.

Bevor das verwendete Zustandsraummodell präsentiert werden kann, muss noch festgelegt werden, welches Koordinatensystem zu wählen ist. Prinzipiell kommen hierbei zwei Koordinatensysteme in Frage: Zum einen das statorfeste  $\alpha$ - $\beta$ -Koordinatensystem, dessen  $\alpha$ -Achse mit einer Achse des Statorwicklungssystems zusammenfällt und zum anderen das rotorflussfeste d-q-Koordinatensystem, das sich am nicht messbaren Magnetisierungsstromraumzeiger  $\mathbf{i}_\mu$  orientiert und gegenüber erstem eine Rotation mit dem Magnetisierungsstrom-Feldwinkel  $\varphi_\mu$  aufweist (siehe Abbildung 6.2).



**Abbildung 6.2:** Koordinatensysteme zur Beschreibung des Maschinenverhaltens

Für die Maschinenregelung weist das d-q-Koordinatensystem mehrere entscheidende Vorteile auf ([Nuß10, S. 88]). Der erste große Vorteil besteht darin, dass sich das Drehmoment bei gegebenem Rotorflussraumzeigerbetrag, welcher mit der d-Komponente des Statorstromraumzeigers einstellbar ist, über die q-Komponente des Statorstromraumzeigers direkt einstellen lässt. Die Beziehungen zwischen den Statorstromraumzeigerkomponenten und dem Drehmoment sind bei der Darstellung im statorfesten  $\alpha$ - $\beta$ -Koordinatensystem komplizierter. Der zweite Vorteil einer Darstellung im rotierenden Koordinatensystem ist, dass die Regelgrößen im stationären Zustand Gleichgrößen sind. Insbesondere der erste Punkt, jedoch auch der zweite, dass die Regelung von Gleichgrößen einfacher gestaltet werden kann, ist jedoch nicht von Belang im Kontext der garantierten Zustandsschätzung, speziell aufgrund der Tatsache, dass eine ideale Feldorientierung aufgrund der Systemunsicherheiten nicht möglich ist. Gleichwohl hätte eine fehlerhafte Feldorientierung auch keine negativen Auswirkungen, im Sinne des Verlustes der garantierten Aussagen über der Schätzergebnis, wenn keine Vereinfachungen auf Basis der Annahme einer idealen Feldorientierung durchgeführt würden. Daraus folgt, dass für das in dieser Arbeit verfolgte Ziel beide Koordinatensysteme zunächst gleichwertig zu betrachten sind. Daher soll nun untersucht werden, ob im Kontext einer garantierten Zustandsschätzung ein Vorteil durch die Darstellung im  $\alpha$ - $\beta$ -Koordinatensystem erzielt werden kann.

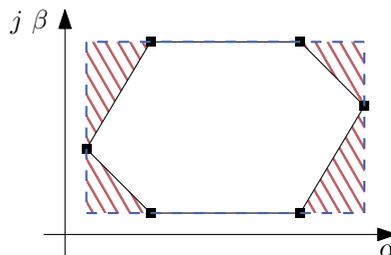
Dazu soll die durch den Intervallvektor eingeschlossene Fläche bei Anwendung der Clarke-Transformation ([Nuß10, S. 9])

$$\begin{bmatrix} \zeta_\alpha(t) \\ \zeta_\beta(t) \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}}^{=T_c} \cdot \begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \\ \zeta_3(t) \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

und der Park-Transformation ([Nuß10, S. 13])

$$\begin{bmatrix} \zeta_d(t) \\ \zeta_q(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_\mu) & \sin(\varphi_\mu) \\ -\sin(\varphi_\mu) & \cos(\varphi_\mu) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{T}_c \cdot \begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \zeta_2(t) \\ \zeta_3(t) \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

unter Berücksichtigung unbekannter, aber beschränkter Phasengrößen  $\zeta_1(t)$ ,  $\zeta_2(t)$  und  $\zeta_3(t)$ , dargestellt durch die Intervalle  $[\zeta_1(t)]$ ,  $[\zeta_2(t)]$  und  $[\zeta_3(t)]$ , untersucht werden. Die aus der Clarke-Transformation resultierende Menge im  $\alpha$ - $\beta$ -Koordinatensystem wurde unter Anwendung intervallarithmetischer Methoden bestimmt und ist exemplarisch in Abbildung 6.3 dargestellt. Hierin sind die sechs Eckpunkte der durch einen Quader beschriebenen Menge im dreidimensionalen Phasenkoordinatensystem, welche die in schwarz gezeichnete, engste Einschließung festlegen, hervorgehoben. Darüber hinaus ist die Einschließung durch einen Intervallvektor mit einer blau gestrichelten Linie dargestellt. Die Berechnung der exakten Einschließung ist in Anhang E.1 zu finden. Die Überabschätzung durch den Intervallvektor ist mit den rot schraffierten Flächen gekennzeichnet. Wie gut zu sehen ist, spielt der Wrapping Effect (siehe Anhang A) aufgrund der Tatsache, dass die  $\alpha$ -Achse mit der Achse von  $\zeta_1$  zusammenfällt, in der  $\beta$ -Koordinate keine Rolle. Im Falle des rotierenden d-q-Koordinatensystems liegt diese positive Eigenschaft nur in den Augenblicken vor, in denen die Koordinatenachsen parallel zu den Kanten des einschließenden Rechtecks sind.



**Abbildung 6.3:** Überabschätzung der tatsächlichen Menge (schwarze Linien) im  $\alpha$ - $\beta$ -Koordinatensystem durch einen Intervallvektor (blau gestrichelte Linien)

Ein weiterer Vorteil des  $\alpha$ - $\beta$ -Koordinatensystems ist, dass basierend auf den Ergebnissen der Intervallschätzung analog zum Vorgehen beim statorfesten Strommodell (Kapitel 2.2.1) aus dem Intervall des Magnetisierungsstromraumzeigers ein Intervall für den Feldwinkel berechnet werden kann.

Aufgrund dieser Vorteile und der Tatsache, dass das d-q-Koordinatensystem keine Vorteile im Kontext der Intervallschätzung birgt, wird die Maschinenmodellierung in dieser Arbeit im  $\alpha$ - $\beta$ -Koordinatensystem durchgeführt.

### 6.1.2 Zustandsraummodell der Asynchronmaschine

Nachdem nun sowohl Grundstruktur (Invers- $\Gamma$ -Ersatzschaltbild) als auch Koordinatensystem ( $\alpha$ - $\beta$ -Koordinatensystem) festgelegt sind, kann das Zustandsraummodell ange-

geben werden. Als Zustandsgrößen werden die  $\alpha$ -Komponente und die  $\beta$ -Komponente des Statorstromraumzeigers und des Magnetisierungsstromraumzeigers gewählt und als Eingangsgrößen die  $\alpha$ -Komponente und die  $\beta$ -Komponente des Statorspannungsraumzeigers. Wie bereits erwähnt, beinhaltet das Modell vier zeitinvariante elektrische Parameter, nämlich die Hauptinduktivität  $L_h$ , die statorseitige Streuinduktivität  $L_{\sigma,s}$ , den Rotorwiderstand  $R_r$  und den Statorwiderstand  $R_s$ . Die zwei weiteren Parameter sind die zeitinvariante Polpaarzahl  $z_p$  und die zeitvariante mechanische Winkelgeschwindigkeit  $\omega_m(t)$ . Mit der allgemeinen Darstellung eines LPV-Systems (1.1) folgt

$$\mathbf{x}(t) = [i_{s,\alpha}(t) \quad i_{s,\beta}(t) \quad i_{\mu,\alpha}(t) \quad i_{\mu,\beta}(t)]^\top = [\mathbf{i}_s^\top(t) \quad \mathbf{i}_\mu^\top(t)]^\top, \quad (6.3a)$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_{s,\alpha}(t) \\ u_{s,\beta}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{u}_s(t), \quad (6.3b)$$

$$\boldsymbol{\theta}(t) = [L_h \quad L_{\sigma,s} \quad R_r \quad R_s \quad z_p \quad \omega_m(t)], \quad (6.3c)$$

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t)) = \begin{bmatrix} -\frac{R_r+R_s}{L_{\sigma,s}} & 0 & \frac{R_r}{L_{\sigma,s}} & \omega_l(t) \cdot \frac{L_h}{L_{\sigma,s}} \\ 0 & -\frac{R_r+R_s}{L_{\sigma,s}} & -\omega_l(t) \cdot \frac{L_h}{L_{\sigma,s}} & \frac{R_r}{L_{\sigma,s}} \\ \frac{R_r}{L_h} & 0 & -\frac{R_r}{L_h} & -\omega_l(t) \\ 0 & \frac{R_r}{L_h} & \omega_l(t) & -\frac{R_r}{L_h} \end{bmatrix}, \quad (6.3d)$$

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}(t)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{\sigma,s}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{\sigma,s}} & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top, \quad (6.3e)$$

$$\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}(t)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.3f)$$

mit der elektrischen Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_l(t) = z_p \cdot \omega_m(t). \quad (6.3g)$$

Die Wahl der Magnetisierungsstromraumzeigerkomponenten als Zustandsgrößen weicht von der gängigen Praxis ab. Daher wird in Anhang E.2 der Zusammenhang zwischen dem hier verwendeten Zustandsraummodell und einem Standardmodell hergestellt<sup>17</sup>. Als Ausgangsgrößen wurden die Statorstromraumzeigerkomponenten gewählt, da sich diese mit (6.1) aus den üblicherweise gemessenen Statorströmen berechnen lassen.

### 6.1.3 Definition der Modellunsicherheiten

Die unsichere Information hinsichtlich der Eingangsgrößen, der Ausgangsgrößen und der Parameter wird durch die Intervalle  $[\mathbf{u}(t)]$ ,  $[\mathbf{y}(t)]$  und  $[\boldsymbol{\theta}(t)]$ , definiert zu

$$[\mathbf{u}(t)] = \mathbf{u}(t) + [\boldsymbol{\nu}_u(t)], \quad (6.4a)$$

$$[\mathbf{y}(t)] = \mathbf{y}(t) + [\boldsymbol{\nu}_y(t)], \quad (6.4b)$$

$$[\boldsymbol{\theta}(t)] = \boldsymbol{\theta}(t) + [\boldsymbol{\nu}_\theta(t)], \quad (6.4c)$$

<sup>17</sup> Diese vom Standard abweichende Wahl ist nicht mathematisch motiviert, sondern wurde zur einheitlichen Modellbildung innerhalb eines größeren Projektes verwendet.

berücksichtigt. Die enthaltenen Unsicherheiten  $[\nu_u(t)]$ ,  $[\nu_y(t)]$  und  $[\nu_\theta(t)]$  erfüllen die Bedingung  $\underline{\nu}_\kappa(t) \leq \mathbf{0} \leq \overline{\nu}_\kappa(t)$ ,  $\kappa \in \{u, y, \theta\}$ . Da  $\mathbf{u}(t)$ ,  $\mathbf{y}(t)$  und  $\boldsymbol{\theta}(t)$  im Betrieb nicht bekannt sind, werden die Intervallvektoren  $[\mathbf{u}(t)]$ ,  $[\mathbf{y}(t)]$  und  $[\boldsymbol{\theta}(t)]$  basierend auf Messwerten und Sensorfehlerangaben beziehungsweise einem Modell des Wechselrichters bestimmt, wie in den Kapiteln 8 und 9 ausgeführt wird.

Man erhält somit ein Intervallmodell der ASM durch Ersetzen aller Zustände, Eingangsgrößen und Parameter in (6.3) durch die zugehörigen Intervalle.

## 6.2 Modellierung des Wechselrichters

Bei der Modellierung der ASM wurde gezeigt, dass die Kenntnis von Intervallen, welche die tatsächlichen Statorspannungen einschließen, erforderlich ist. Wie in der Einleitung dieses Kapitels erläutert wurde, steht eine messtechnische Erfassung dieser üblicherweise nicht zur Verfügung. Daher wird in dieser Arbeit die Nachbildung der Statorspannungen durch ein Modell des Wechselrichters vorgeschlagen. Konkret stellen sich bei der Modellierung hierbei folgende zwei Fragen:

- Wie muss die Struktur eines echtzeitfähigen Wechselrichtermodells aussehen, welches unsichere Parameter sowie unbekanntes, aber beschränkte Messungen zur Laufzeit berücksichtigt und die tatsächlichen Ausgangsspannungen garantiert einschließt?
- Wie können unbekanntes, aber beschränkte Messfehler bei der Parametrierung eines solchen Wechselrichtermodells systematisch berücksichtigt werden?

Ausgangspunkt der Beantwortung dieser Frage ist eine Analyse des Stands der Forschung. Anschließend erfolgt eine Abgrenzung des Systems mit der Definition betrachteter Einflussgrößen. Gefolgt wird diese Abgrenzung von der Entwicklung eines neuen Modellierungsansatzes für Wechselrichter zur Berücksichtigung von Unsicherheiten, welche durch Intervalle beschrieben werden. Zum besseren Verständnis wird dabei das Modell zunächst ohne Unsicherheiten eingeführt.

### 6.2.1 Stand der Forschung der Wechselrichtermodellierung

Bevor verschiedene Ansätze zur Modellierung von Wechselrichtern dargestellt werden, soll zunächst die Wechselrichtertopologie näher erläutert werden. Dabei handelt es sich um den dreiphasigen selbstgeführten Zweipunkt-Wechselrichter, der in Abbildung 6.4 dargestellt ist.

### Überblick und Bewertung von Ansätzen zur Wechselrichtermodellierung

In diesem Abschnitt sollen Methoden zur Berechnung der Ausgangsspannungen von Wechselrichtern dargestellt und dabei deren Berücksichtigung von Unsicherheiten genauer betrachtet werden.

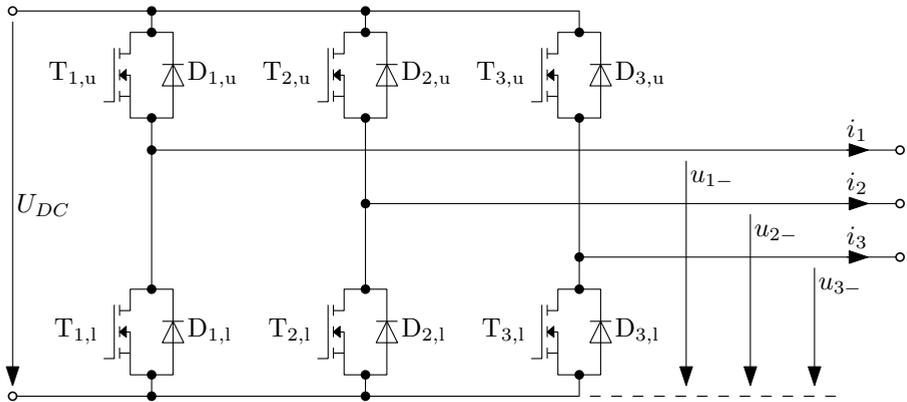


Abbildung 6.4: Topologie des zu modellierenden Wechselrichters

Eine Möglichkeit diese Nachbildung zu realisieren, bilden Black-Box-Modelle. In [VLB<sup>+</sup>10] und [VLB<sup>+</sup>12] wird ein Black-Box-Modell vorgestellt, das aus verkoppelten LTI-Modellen und Wiener-Modellen besteht. Jedes dieser Teilmodelle stellt dabei eine spezifische, physikalisch interpretierbare Ein-/Ausgangsbeziehung dar, wie beispielsweise die Abhängigkeit der Ausgangsspannungen von der Eingangsspannung. Die Ordnung der LTI-Modelle ist hingegen nicht physikalisch interpretierbar und wird so niedrig wie möglich gewählt, bei gleichzeitiger Sicherstellung einer zufriedenstellenden Nachbildung. LTI-Modelle werden gewählt, wenn das Systemverhalten nicht vom Betriebspunkt abhängig ist; ansonsten kommen Wiener-Modelle zum Einsatz. Die Entscheidung, welche Modellform eingesetzt wird, erfolgt hierbei durch Betrachtung des Signalverhaltens. Bei der Parameteridentifikation der gewählten Modelle wird eine Störung in Form von weißem Rauschen am Systemausgang berücksichtigt. Die Auswirkung von Eingangsfehlern wird ebenso wenig untersucht, wie eine Abschätzung der im Betrieb auftretenden Fehler.

Eine weitere Möglichkeit der Black-Box-Modellierung der nichtlinearen Effekte wird in [QLZ<sup>+</sup>10] vorgestellt. Verwendet wird ein neuronales Netz mit einer Eingangsschicht, keiner verdeckten Schicht und einer Ausgangsschicht, wobei die Aktivierungsfunktionen lineare Funktionen darstellen. Die Berücksichtigung von Messunsicherheiten erfolgt weder beim Training des Netzes noch im Betrieb.

Aufgrund des im Falle bei der Modellierung von Wechselrichtern vorhandenen physikalischen Wissens stellt die Mehrzahl der Ansätze jedoch White-Box-Ansätze oder Grey-Box-Ansätze dar. Der einfachste White-Box-Modellansatz ist die Modellierung des Wechselrichters als idealer Schalter, wie beispielsweise in [PJ05] gezeigt. Im Kontext einer Stromregelung einer elektrischen Maschine werden dort die acht erlaubten Schaltzustände des Wechselrichters als Stellen eines Petri-Netzes modelliert; die Schaltbedingungen der Transitionen sind sowohl vom Sollstromraumzeiger als auch vom aktuellen Stromfehler abhängig modelliert. Eine Abweichung vom idealen Schaltverhalten oder eine Berücksichtigung unsicherer Messwerte erfolgt nicht.

Ein Ansatz mit einer hohen zeitlichen Auflösung der Spannungsnachbildung stellen die Switching-Function-Modelle dar. Diese beruhen, wie der Name schon sagt, auf

Switching-Functions, welche multipliziert mit der aktuellen Zwischenkreisspannung die Ausgangsspannungen des Wechselrichters ergeben ([ZWS85]). Bestimmt werden diese Switching-Functions daher direkt aus den Ansteuersignalen der Leistungshalbleiter ([LE01]). Eine Methodik dieses Verfahren auf Verriegelungstotzeiten zu erweitern, wird in [IL08] gezeigt. Aufgrund der Tatsache, dass durch diesen Ansatz zum einen eine gute Nachbildung der Ausgangsspannungen auch innerhalb einer Taktperiode des Wechselrichters möglich ist, dies zum anderen aber auch zu einem erhöhten Berechnungsaufwand führt, wird dieser Ansatz vornehmlich zu Simulationen zum Zweck des Inverterdesigns und der Systemanalyse eingesetzt und weniger zum Online-Betrieb ([ZWS85], [LE01], [IL08]). Auch bei diesem Ansatz erfolgt keine Berücksichtigung von Messunsicherheiten.

Die letzte große Modellklasse stellen die Average-Modelle dar, die hauptsächlich zur Kompensation nichtidealer Effekte realer Wechselrichter eingesetzt werden ([SWP11], [ABWB10], [WSH06]). Im Gegensatz zu den zuvor beschriebenen Switching-Function-Modellen beschreiben diese Modelle nur den Mittelwert der Ausgangsspannung über eine Taktperiode des Wechselrichters. In den zuvor genannten Quellen werden hierbei minimale Einschaltzeiten und Verriegelungstotzeiten zum Schutz der Halbleiter, nichtideale Schaltverhalten und Spannungsabfälle über den Halbleitern eingeführt. Messunsicherheiten bei der Parametrierung und im Betrieb werden vernachlässigt.

All diesen Ansätzen ist gemein, dass keiner davon zum Erreichen des Ziels der garantierten Einschließung der tatsächlichen Ausgangsspannung des Wechselrichters herangezogen werden kann. Der Grund hierfür ist, dass, wie dargestellt, keines der Verfahren beschränkte Unsicherheiten zur Bestimmung von Ausgangsspannungsmengen berücksichtigt, um Fehlerschranken der Nachbildung anzugeben.

Damit kann ein weiteres Ziel dieser Arbeit, welches die Entwicklung eines Wechselrichtermodells darstellt, das während der Modellierung, der Parametrierung und dem Betrieb des Modells unbekannte, aber beschränkte Störungen zur garantierten Einschließung der Wechselrichterausgangsspannungen berücksichtigt, angegeben werden.

Bei der Auswahl eines geeigneten Grundansatzes, der in dieser Arbeit derart erweitert werden soll, dass garantierte Aussagen bezüglich der Ausgangsspannungen möglich sind, gibt es im Wesentlichen zwei Aspekte zu berücksichtigen. Zum einen soll der Rechenaufwand so gering sein, dass eine echtzeitfähige Ausführung möglich ist und zum anderen sollen auch nichtideale Effekte realer Halbleiter berücksichtigt werden können.

Vor dem Hintergrund des vorhandenen Einblicks in die Struktur des Wechselrichters erscheint ein Black-Box-Modell nicht sinnvoll. Gleichermaßen fehlt aber auch der nötige Einblick in jede Komponente des Wechselrichters, um ein White-Box-Modell, welches nicht von der starken Vereinfachung eines idealen Schaltverhaltens ausgeht, aufzustellen. Daher wird in dieser Arbeit ein Grey-Box-Modell entwickelt, welches die Struktur des Wechselrichters berücksichtigt, die einzelnen Effekte jedoch mittels experimentell ermittelter Kennlinien nachbildet, was der Grundidee aus [SWP11] entspricht. Ein erster Vorschlag für ein solches Wechselrichter-Intervallmodell wurde in der Bachelorarbeit [Köh15] formuliert. An dieser Stelle soll bereits verdeutlicht werden, dass durch die Wahl eines Average-Modells als Ausgangsbasis auch das entwickelte Wechselrichter-Average-Intervallmodell nur garantierte Aussagen hinsichtlich des Mittelwertes der Aus-

gangsspannungen treffen kann. Die Vernachlässigung hochfrequenter Anteile ist jedoch konsistent mit der Verwendung eines Grundwellenmodells der ASM. Nachfolgend soll nun zunächst eine Abgrenzung des Systems erfolgen und anschließend der Modellansatz ohne Unsicherheiten vorgestellt werden, um diesen anschließend auf die definierten Unsicherheiten zu erweitern.

## Grundlagen der Average-Modelle

Das Ziel eines Average-Modells ist es, den Mittelwert der Ausgangsspannungen der drei Phasen 1, 2, 3 bezeichnet durch  $u_{\iota-}$  mit  $\iota \in \{1, 2, 3\}$  über eine Taktperiode zu bestimmen. Die Berechnung basiert auf den relativen Einschaltzeiten pro Taktperiode  $T_{pulse}$  der oberen, schaltbaren Leistungshalbleiter  $T_{1,u}$ ,  $T_{2,u}$  und  $T_{3,u}$ , welche auch als Tastverhältnisse  $\delta_{\iota,id}$  bezeichnet werden und definiert sind durch

$$\delta_{\iota,id} = \frac{t_{\iota,high}}{T_{pulse}} \in [0, 1], \quad \iota \in \{1, 2, 3\} \quad (6.5)$$

und der Zwischenkreisspannung  $U_{DC}$ . Nach [Sil09, S. 647] können unter Annahme idealer Schalter daraus mit

$$\boldsymbol{\delta}_{id} = [\delta_{1,id} \quad \delta_{2,id} \quad \delta_{3,id}]^T \quad (6.6)$$

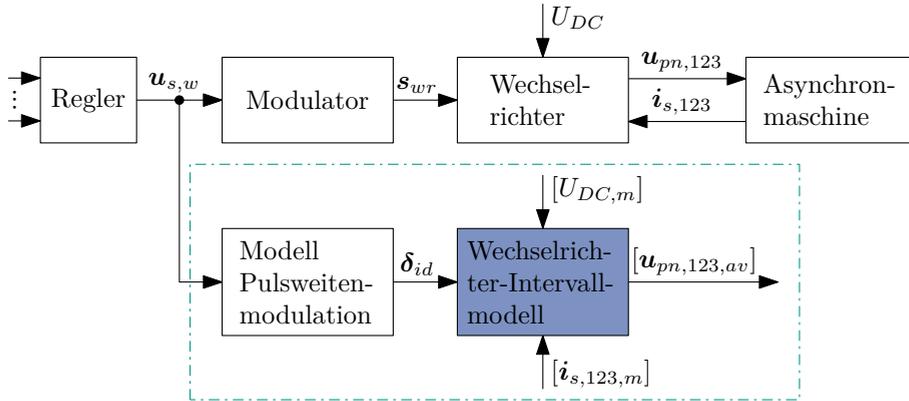
die idealen getakteten Mittelwerte der Ausgangsspannungen  $u_{\iota-,av,id}$  mit  $\iota \in \{1, 2, 3\}$  durch

$$\mathbf{u}_{-,av,id} = [u_{1-,av,id} \quad u_{2-,av,id} \quad u_{3-,av,id}]^T = \boldsymbol{\delta}_{id} \cdot U_{DC} \quad (6.7)$$

berechnet werden. Wie in [SWP11] vorgestellt, kann eine Abweichung von diesem idealen Schaltverhalten aufgrund der Verriegelungstotzeit, der nichtidealen Schaltverhalten und der Vorwärtsspannungen durch Abweichungen der Tastverhältnisse  $\Delta\boldsymbol{\delta}_d$ ,  $\Delta\boldsymbol{\delta}_s$ ,  $\Delta\boldsymbol{\delta}_f$  modelliert werden, wobei die beiden letztgenannten als Kennlinien in Abhängigkeit des Laststroms modelliert werden. Ein Ansatz wie diese zu bestimmen sind, wird im Zuge des in dieser Arbeit erzeugten Wechselrichter-Intervallmodells in Abschnitt 6.2 vorgestellt.

## 6.2.2 Abgrenzung des Systems

Das Gesamtsystem, in welches der zu modellierende Wechselrichter eingebettet ist, ist in Abbildung 6.5 dargestellt. Dieses besteht aus dem Maschinenregler, dem Modulator zur Umsetzung der Pulsweitenmodulation (PWM), welche dazu dient, die Stator-sollspannung  $\mathbf{u}_{s,w}$  in die Ansteuersignale des Wechselrichters  $\mathbf{s}_{wr}$  umzuwandeln, dem Wechselrichter selbst und der ASM. Das Ziel des zu erstellenden Modells ist die Bestimmung eines Intervalls für den Mittelwert der Statorsternspannung  $\mathbf{u}_{pn,123,av}$  in jeder Taktperiode des Wechselrichters, welches den tatsächlichen Statorsternspannungsmittelwert garantiert enthält. Als Eingangsgrößen des Gesamtmodells, das in Abbildung 6.5 durch den grün strichpunktierten Kasten dargestellt ist, werden die Statorsollspannung  $\mathbf{u}_{s,w}$ , das Intervall der gemessenen Statorströme in den drei Phasen  $[\mathbf{i}_{s,123,m}]$



**Abbildung 6.5:** Struktur des betrachteten Gesamtsystems bei der Wechselrichtermodellierung ohne eingezeichnete Sensorik

und das Intervall der gemessenen Zwischenkreisspannung  $[U_{DC,m}]$  definiert. Da der Fokus in dieser Arbeit auf der Modellierung des Wechselrichters liegen soll, wird angenommen, dass ein Modell der PWM vorhanden ist. Exemplarisch wird in dieser Arbeit eine PWM mit einer Nullkomponentenkorrektur der Steuerspannungen verwendet ([Nuß10, S.202 f.]). Die Randbedingungen, welche das konkrete Modulationsverfahren erfüllen muss, werden in der nachfolgenden Auflistung angegeben. Die Abgrenzung des Wechselrichter-Intervallmodells umfasst folgende Punkte:

- Die Eingangsgrößen des Modells bilden die Intervallgrößen  $[\mathbf{i}_{s,123,m}(t)]$  und  $[U_{DC,m}]$ , welche die Phasenströme  $\mathbf{i}_{s,123}(t) = [i_{s,1}(t) \ i_{s,2}(t) \ i_{s,3}(t)]^\top$  und die Zwischenkreisspannung  $U_{DC}$  einschließen, d. h.  $\mathbf{i}_{s,123}(t) \in [\mathbf{i}_{s,123,m}(t)]$  und  $U_{DC} \in [U_{DC,m}]$  sowie die Tastverhältnisse  $\delta_{id}$ , die das ideale Wechselrichterverhalten nachbilden.
- Die Ausgangsgröße des Modells stellt ein Intervallvektor

$$[\mathbf{u}_{pn,123,av}(t)] = [u_{pn,1,av}(t) \ u_{pn,2,av}(t) \ u_{pn,3,av}(t)]^\top \quad (6.8)$$

dar, welche die getakteten Mittelwerte der Statorsternspannungen über die  $\eta$ -ten Taktperiode

$$u_{pn,\iota,av}(\eta) = \frac{1}{T_{pulse}} \cdot \int_{\eta \cdot T_{pulse}}^{(\eta+1) \cdot T_{pulse}} u_{pn,\iota}(t) dt, \quad \iota \in \{1, 2, 3\} \quad (6.9)$$

einschließt.

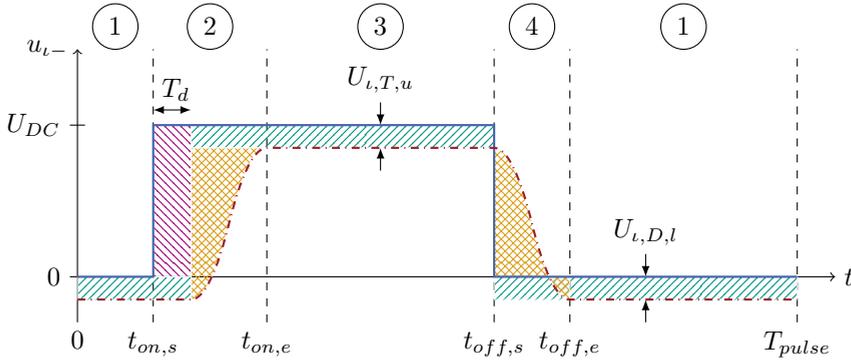
- Das Modell wird mit der Taktfrequenz des Wechselrichters ausgeführt.
- In Anlehnung an [SWP11] wird angenommen, dass als nichtideale Effekte nur die Verriegelungstotzeit, ein nichtideales Schaltverhalten und die Vorwärtsspannungen der Halbleiter auftreten.

- Die hersteller- oder anwenderseitig vorgegebene Verriegelungstotzeit  $T_d$  ist exakt bekannt.
- Alterungs- und Temperatureffekte werden vernachlässigt.
- Das gewählte Modulationsverfahren basiert auf einer konstanten Taktperiode  $T_{pulse}$  und triggert keine oder zwei Schaltaktionen je Taktperiode<sup>18</sup>.
- Die ASM sei symmetrisch (gleiche Impedanzen in allen drei Phasen). Der Sternpunkt der ASM sei nicht angeschlossen und es handelt sich um einen Kurzschlussläufer<sup>19</sup>.

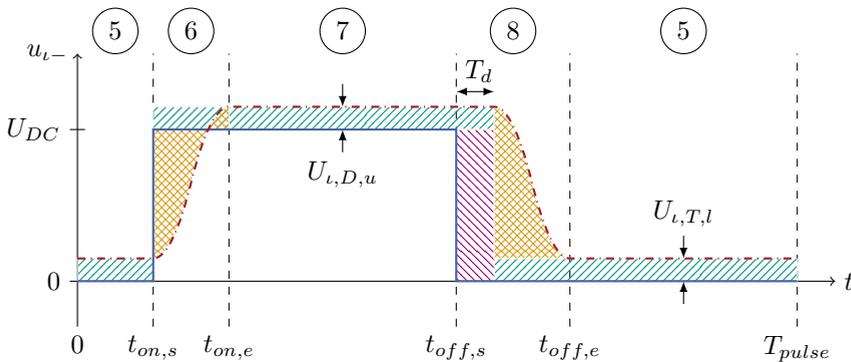
Bevor mit der Modellierung des Systems begonnen wird, soll an dieser Stelle kurz die Abweichung zwischen dem idealen Spannungsverlauf, welcher aus dem Tastverhältnis  $\delta_{id}$  resultiert, und dem realen Spannungsverlauf aufgrund der angenommenen nicht-idealen Effekte skizziert werden. In Anlehnung an die in [SWP11] einzeln skizzierten Effekte sind in Abbildung 6.6 die Verläufe im Falle eines nichtnegativen Phasenstroms dargestellt und in Abbildung 6.7 die Verläufe im Falle eines negativen Phasenstroms gezeigt. Die blaue Kurve stellt hierin den idealen Spannungsverlauf dar und die rot strichpunktierte Kurve den durch nichtideale Effekte hervorgerufenen realen Spannungsverlauf. Auch wenn die Markierungen der Flächen bereits passend für die spätere Parametrierung gewählt wurde, sollen Sie bereits an dieser Stelle erläutert werden, ohne auf die konkrete Wahl (insbesondere bei den grün schraffierten Flächen) einzugehen. In den Abschnitten 1, 3, 5 und 7 ist gut zu erkennen, dass mit den grün schraffierten Flächen die Änderung der Spannungs-Zeit-Fläche durch die Vorwärtsspannungen der Transistoren ( $U_{l,T,u}$  und  $U_{l,T,l}$ ) bzw. durch die Vorwärtsspannungen der Dioden ( $U_{l,D,u}$  und  $U_{l,D,l}$ ) visualisiert wird. Die Änderung durch die Verriegelungstotzeit ist durch die violett schraffierte Fläche in den Abschnitten 2 und 8 gezeigt und die Änderung durch das nichtideale (im Sinne von nicht instantane) Schalten ist durch die orange kreuzschraffierten Flächen hervorgehoben. Beginn und Ende eines Wechsels vom niedrigen Spannungslevel zum hohen werden mit  $t_{on,s}$  und  $t_{on,e}$  und Beginn und Ende eines Wechsels vom hohen zum niedrigen Spannungslevel mit  $t_{off,s}$  und  $t_{off,e}$  bezeichnet.

<sup>18</sup> Die zweite Bedingung entstammt dem in dieser Arbeit verwendeten Modulationsverfahren (PWM). Wie bei der Modellierung des nichtidealen Schaltverhaltens deutlich wird, kann das Vorgehen jedoch einfach auf Modulationsverfahren, die diese Bedingung nicht erfüllen, erweitert werden.

<sup>19</sup> Diese Bedingung wird nur für die Umrechnung der Intervallphasenspannungen zu Intervallsternpunktspannungen benötigt und nicht für die Modellierung der physikalischen Effekte selbst.



**Abbildung 6.6:** Skizze der Wechselrichterausgangsspannung einer Phase während einer Taktperiode  $T_{pulse}$  bei nichtnegativem Phasenstrom (blau: idealer Spannungsverlauf, rot strichpunktiert: nichtidealer Spannungsverlauf, nicht maßstabsgetreu)



**Abbildung 6.7:** Skizze der Wechselrichterausgangsspannung einer Phase während einer Taktperiode  $T_{pulse}$  bei negativem Phasenstrom (blau: idealer Spannungsverlauf, rot strichpunktiert: nichtidealer Spannungsverlauf, nicht maßstabsgetreu)

### 6.2.3 Nicht-intervallarithmetisches Wechselrichtermodell

Die Grundstruktur des in dieser Arbeit entwickelten Modells ist durch die Parallelschaltung in Abbildung 6.8 gegeben. Wie bereits im Abschnitt 6.2.1 vorgestellt, werden die nichtidealen Effekte durch Abweichungen vom idealen Tastverhältnis modelliert. Mit (6.7) folgt mit der angenommenen Parallelstruktur

$$\mathbf{u}_{-,av} = [u_{1-,av} \quad u_{2-,av} \quad u_{3-,av}]^T = \boldsymbol{\delta}_{ni} \cdot U_{DC,m} \quad (6.10)$$

unter Berücksichtigung von

$$\boldsymbol{\delta}_{ni} = \text{sat}_{0,1}(\boldsymbol{\delta}_{id} + \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\delta}_d + \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\delta}_s) + \boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{\delta}_f \quad (6.11)$$

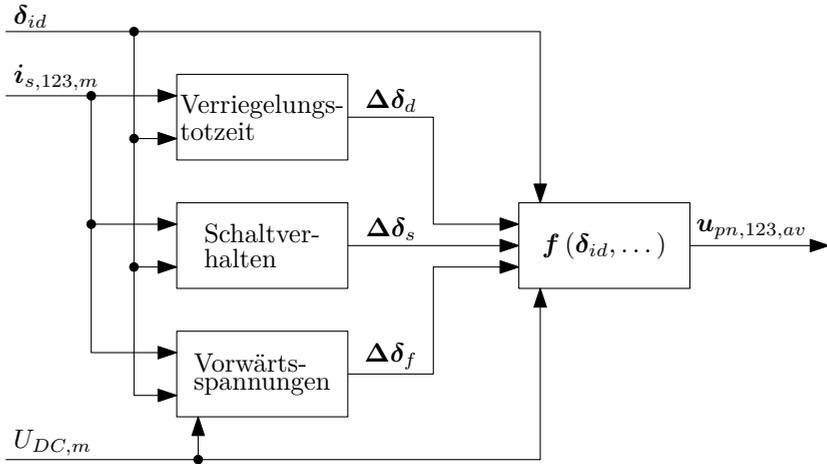


Abbildung 6.8: Struktur des Wechselrichtermodells

und Definition 6.1. Wie in den Abbildungen 6.6 und 6.7 zu erkennen ist, können lediglich Vorwärtsspannungseffekte zu einer Phasenspannung, welche höher als die Zwischenkreisspannung oder kleiner null ist, führen. Daher wurde in (6.11) die Sättigungsfunktion  $\mathit{sat}_{0,1}$  eingeführt, um dieses physikalische Wissen in das mathematische Modell einfließen zu lassen<sup>20</sup>. Aus den derart modellierten Phasenspannungen können unter Berücksichtigung von Satz B.1 in Anhang B.2 die gesuchten getakteten Mittelwerte der Sternspannungen mit

$$\mathbf{u}_{pn,123,av}(t) = \frac{1}{3} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}}{=P_{SP}} \cdot \mathbf{u}_{-,av} \quad (6.12)$$

berechnet werden.

Nachfolgend soll nun die Modellierung der einzelnen nichtidealen Effekte kurz skizziert werden. Zugunsten einer kompakten Präsentation wird auf die Beschreibung der Identifikation der Kennlinien an dieser Stelle verzichtet. Diese wird im Abschnitt zur Erweiterung des Modells auf unsichere Ein-/Ausgangsgrößen ausführlich behandelt und kann mit Punktintervallen auch im Falle von vernachlässigten Unsicherheiten angewendet werden.

<sup>20</sup> Im Fall einer idealen Identifikation der Kennlinien wäre diese Sättigung nicht notwendig. Durch Messfehler und durch den im weiteren Verlauf der Erweiterung zum Intervallmodell auftretenden Pessimismus der Intervallarithmetik ist sie jedoch der Steigerung der Modellgüte dienlich.

**Definition 6.1 (Sättigungsfunktion)**

Die Sättigungsfunktion  $\mathit{sat}_{0,1}(\boldsymbol{\nu}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist definiert zu

$$\mathit{sat}_{0,1}(\boldsymbol{\nu}) = \begin{bmatrix} \mathit{sat}_{0,1}(\nu_1) \\ \mathit{sat}_{0,1}(\nu_2) \\ \mathit{sat}_{0,1}(\nu_3) \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

mit  $\boldsymbol{\nu} = [\nu_1 \quad \nu_2 \quad \nu_3]^\top$  und

$$\mathit{sat}_{0,1}(\kappa) := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } \kappa \geq 1 \\ 0 & , \text{ falls } \kappa \leq 0 \\ \kappa & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (6.14)$$

**Modellierung der Verriegelungstotzeit**

Den Effekt der zur Verhinderung eines Brückenkurzschlusses implementierten Verriegelungstotzeiten kann man in den Abschnitten 2 und 8 der Abbildungen 6.6 und 6.7 erkennen. Wie zu sehen ist, verkleinert die Verriegelungstotzeit bei positivem Laststrom die Spannungs-Zeit-Fläche, während sie sie bei negativem Laststrom vergrößert. Hieraus folgt für  $\iota \in \{1, 2, 3\}$

$$\Delta\delta_{d,\iota} = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } \delta_{\iota,id} \in \{0, 1\} \\ \Delta\delta_{d,\iota,aux} & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (6.15a)$$

mit

$$\Delta\delta_{d,\iota,aux} = -\text{sign}(i_{s,\iota,m}) \cdot \frac{T_d}{T_{pulse}}. \quad (6.15b)$$

Die Fallunterscheidung in (6.15a) dient hierbei der Behandlung von Szenarien ohne Schalthandlung, in welchen damit keine Verriegelungstotzeit zum Tragen kommt.

**Modellierung des nichtidealen Schaltverhaltens**

Folgende vier nichtidealen Effekte können in den schematischen Abbildungen 6.6 und 6.7 mit  $\iota \in \{1, 2, 3\}$  erkannt werden:

- Kommutierung des positiven Laststroms von  $D_{\iota,1}$  zu  $T_{\iota,u}$  (entspricht kreuzschraffierter Fläche in Bereich 2)
- Kommutierung des positiven Laststroms von  $T_{\iota,u}$  zu  $D_{\iota,1}$  (entspricht kreuzschraffierter Fläche in Bereich 4)

- Kommutierung des positiven Laststroms von  $T_{\iota,1}$  zu  $D_{\iota,u}$  (entspricht kreuzschraffierter Fläche in Bereich 6)
- Kommutierung des positiven Laststroms von  $D_{\iota,u}$  zu  $T_{\iota,1}$  (entspricht kreuzschraffierter Fläche in Bereich 8)

Ogleich die Bestimmung der diese Effekte beschreibenden Parameter abweichend von [SWP11] ausgeführt werden wird, wird der Vorschlag, Kennlinien für die Parameter in Abhängigkeit des Laststroms zu verwenden, übernommen. Die Modellierung erfolgt hierbei mit äquivalenten Einschaltzeiten  $t_{\iota,j,k,on}$ , welche multipliziert mit der Zwischenkreisspannung ein Rechteck der gleichen Fläche wie die kreuzschraffierten Bereiche ergeben. Mit den Kennlinien  $CC_{s,\iota,j,k,on} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  sind diese äquivalenten Einschaltzeiten definiert zu

$$t_{\iota,j,k,on} := CC_{s,\iota,j,k}(|i_{s,\iota,m}|) \quad , \iota \in \{1, 2, 3\}, j \in \{T, D\}, k \in \{u, l\}. \quad (6.16)$$

Daraus folgt für die Tastverhältnis-Abweichungen mit  $\iota \in \{1, 2, 3\}$

$$\Delta\delta_{s,\iota} = \begin{cases} 0 & , \text{falls } \delta_{\iota,id} \in \{0, 1\} \\ \Delta\delta_{s,\iota,aux} & , \text{sonst} \end{cases} \quad (6.17a)$$

mit

$$\Delta\delta_{s,\iota,aux} = \begin{cases} \frac{t_{\iota,D,l,on} - t_{\iota,T,u,on}}{T_{pulse}} & , \text{falls } i_{s,\iota,m} \geq 0 \\ -\frac{t_{\iota,D,u,on} - t_{\iota,T,l,on}}{T_{pulse}} & , \text{falls } i_{s,\iota,m} < 0 \end{cases}. \quad (6.17b)$$

Auch hier wird durch (6.17a) der Fall ohne Schalthandlung berücksichtigt.

## Modellierung der Vorwärtsspannungen

Im Gegensatz zu der Modellierung der Verriegelungstotzeit und des nichtidealen Schaltverhaltens muss bei der Modellierung der Vorwärtsspannung berücksichtigt werden, dass deren Auswirkung von einem anderen Effekt, nämlich der Verriegelungstotzeit, beeinflusst wird. Wie in Abbildung 6.6 und 6.7 zu sehen, beeinflusst die Verriegelungstotzeit  $T_d$  die Einschaltdauer eines Halbleiters und damit auch die Dauer des damit verbundenen Spannungsabfalls. Da diese Spannungsabfälle, wie in [SWP11] dargestellt, ebenfalls stromabhängig sind, werden wie im Fall des nichtidealen Schaltverhaltens Kennlinien  $CC_{f,\iota,j,k,on} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  zur Modellierung verwendet. Dies führt zu

$$U_{\iota,j,k} := CC_{f,\iota,j,k}(|i_{s,\iota,m}|) \quad , \iota \in \{1, 2, 3\}, j \in \{T, D\}, k \in \{u, l\}. \quad (6.18)$$

Damit kann die Auswirkung auf die Tastverhältnisse mit

$$\Delta\delta_{f,\iota} = \begin{cases} -\left(\delta_{\iota,id} - \frac{T_d}{T_{pulse}}\right) \cdot \frac{U_{\iota,T,u}}{U_{DC,m}} - \left(1 - \delta_{\iota,id} + \frac{T_d}{T_{pulse}}\right) \cdot \frac{U_{\iota,D,l}}{U_{DC,m}} & , \text{falls } i_{s,\iota,m} \geq 0 \\ \left(\delta_{\iota,id} + \frac{T_d}{T_{pulse}}\right) \cdot \frac{U_{\iota,D,u}}{U_{DC,m}} + \left(1 - \delta_{\iota,id} - \frac{T_d}{T_{pulse}}\right) \cdot \frac{U_{\iota,T,l}}{U_{DC,m}} & , \text{falls } i_{s,\iota,m} < 0 \end{cases} \quad (6.19)$$

für  $\iota \in \{1, 2, 3\}$  beschrieben werden.

Damit ist nun die Basis des in dieser Arbeit entwickelten Modells definiert. Im nächsten Abschnitt wird dieses Modell zur Berücksichtigung unbekannter, aber beschränkter Unsicherheiten erweitert.

## 6.2.4 Wechselrichter-Intervallmodell

Der erste Schritt, um aus dem im vorherigen Abschnitt entwickelten Wechselrichtermodell ein Wechselrichter-Intervallmodell zu erzeugen, ist die Definition der unsicherheitsbehafteten Größen. Wie bereits bei der Abgrenzung in Abschnitt 6.2.2 angegeben, zählen hierzu die Messgrößen  $i_{s,123,m}(t)$  und  $U_{DC,m}$  sowie die Ausgangsgröße  $u_{pn,123,av}(t)$  des Modells. Hinzu kommen die äquivalenten Einschaltzeiten  $t_{i,j,k,on}$ , sowie die Vorwärtsspannungen  $U_{i,j,k}$ , die aufgrund von Messfehlern bei der Identifikation ebenfalls unsicherheitsbehaftet sind. Als exakt bekannt angenommen werden dürfen hingegen das Tastverhältnis  $\delta_{id}$ , die Taktperiode  $T_{pulse}$  und die Verriegelungstotzeit  $T_d$ . Die Begründung hierfür ist, dass es sich beim Tastverhältnis  $\delta_{id}$  um eine im Signalverarbeitungssystem vorliegende Systemgröße zur Beschreibung des idealen Wechselrichterhaltens handelt und bei den beiden Zeiten  $T_{pulse}$  und  $T_d$  um konstante, vom Anwender oder Hersteller des Wechselrichters vorgegebene Systemparameter handelt. Eine tabellarische Auflistung der durch Intervalle beschriebenen, unsicherheitsbehafteten Größen und der durch Punktintervalle beschriebenen, exakt bekannten Größen ist in Tabelle 6.1 gegeben.

**Tabelle 6.1:** Definition der unsicherheitsbehafteten Größen bei der Wechselrichtermodellierung

Intervalle/Intervallvektoren		Punktintervalle/Punktintervallvektoren	
Systemvariablen			
Statorströme	$[i_{s,123,m}]$	Tastverhältnis	$\delta_{id}$
Zwischenkreisspannung	$[U_{DC,m}]$		
Sternspannungen	$[u_{pn,123,av}]$		
Systemparameter			
Äquivalente Einschaltzeit	$[t_{i,j,k,on}]$	Taktperiode	$T_{pulse}$
Vorwärtsspannung	$[U_{i,j,k}]$	Verriegelungstotzeit	$T_d$

Bei der Analyse von (6.10) unter Berücksichtigung von (6.11), (6.15), (6.17) und (6.19) wird deutlich, dass bei Verwendung der natürlichen einschließenden Funktion (siehe Definition A.5) die resultierende Funktion dem Dependency Effect (siehe Anhang A) unterliegt, da die Zwischenkreisspannung mehrfach auftritt. Durch einfache Umformungen aus denen für  $\iota \in \{1, 2, 3\}$

$$u_{pn,123,av}(t) = P_{SP} \cdot (U_{DC,m} \cdot \text{sat}_{0,1}(\delta_{sum}) + \Delta U_f) \quad (6.20)$$

mit

$$\delta_{sum,\iota} = \begin{cases} \delta_{\iota,id} & , \text{ falls } \delta_{\iota,id} \in \{0, 1\} \\ \delta_{\iota,id} + \Delta\delta_{\iota,aux} & , \text{ sonst} \end{cases}, \quad (6.21a)$$

$$\Delta\delta_{\iota,aux} = \begin{cases} \frac{t_{i,D,\iota,on} - t_{i,T,\iota,on} - T_d}{T_{pulse}} & , \text{ falls } i_{s,\iota,m} \geq 0 \\ \frac{-(t_{i,D,\iota,on} - t_{i,T,\iota,on}) + T_d}{T_{pulse}} & , \text{ falls } i_{s,\iota,m} < 0 \end{cases} \quad (6.21b)$$

und

$$\Delta U_{f,t} = \begin{cases} -\left(\delta_{l,id} - \frac{T_d}{T_{pulse}}\right) \cdot U_{l,T,u} - \left(1 - \delta_{l,id} + \frac{T_d}{T_{pulse}}\right) \cdot U_{l,D,l} & , \text{ falls } i_{s,l,m} \geq 0 \\ \left(\delta_{l,id} + \frac{T_d}{T_{pulse}}\right) \cdot U_{l,D,u} + \left(1 - \delta_{l,id} - \frac{T_d}{T_{pulse}}\right) \cdot U_{l,T,l} & , \text{ falls } i_{s,l,m} < 0 \end{cases} \quad (6.22)$$

folgt, lässt sich der Dependency Effect jedoch vermeiden. Bevor hierauf aufbauend die einschließende Funktion für das Gesamtmodell angegeben wird, sollen zunächst einschließende Funktionen für die darin enthaltenen nicht elementaren Funktionen definiert werden. Darüber hinaus muss zunächst definiert werden, wie das Kennlinien-Konzept auf Intervalle zu übertragen ist.

**Lemma 6.1 (Einschließende Funktion der Betragsfunktion)**

Eine einschließende Funktion  $[[[x]]] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IR}_+$  für  $|x| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$  ist durch

$$[[[x]]] = \begin{cases} [x] & , \text{ falls } \underline{x} \geq 0 \\ [-\underline{x}, -\bar{x}] & , \text{ falls } \bar{x} < 0 \\ [0, \max\{|\underline{x}|, |\bar{x}|\}] & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (6.23)$$

gegeben.

Die enthaltende Menge  $\mathbb{IR}_+$  ist zu  $[x] \in \mathbb{IR}_+ := [x] \in \mathbb{IR} \mid \underline{x} \geq 0$  definiert.

**Definition 6.2 (Intervall-Kennlinie (ICC))**

Eine Intervall-Kennlinie  $[\text{ICC}](x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{IR}$  sei durch

$$[\text{ICC}](x) := [f_l(x), f_u(x)] \text{ mit } f_l(x) \leq f_u(x) \forall x \in \mathbb{R} \quad (6.24)$$

definiert.

Eine Intervall-Kennlinie ordnet demnach einem Argument eine Untergrenze und eine Obergrenze zu.

**Lemma 6.2 (Einschließende Funktion einer ICC)**

Die Funktion  $[\text{ICC}]([x]) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$[\text{ICC}]([x]) = \left[ \min_{x \in [x]} f_l(x), \max_{x \in [x]} f_u(x) \right] \quad (6.25)$$

ist eine einschließende Funktion für eine ICC. Sind die Funktionen  $f_l(x)$  und  $f_u(x)$  monoton, kann für die einschließende Funktion die Vereinfachung

$$[\text{ICC}]([x]) = \left[ \min_{x \in \{\underline{x}, \bar{x}\}} f_l(x), \max_{x \in \{\underline{x}, \bar{x}\}} f_u(x) \right] \quad (6.26)$$

getroffen werden.

**Lemma 6.3 (Einschließende Funktion einer Intervallfunktion)**

Die einschließende Funktion  $[y_e]([x]) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  einer stückweise definierten Intervallfunktion  $[y]([x]) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$[y]([x]) = \begin{cases} [f_a]([x]) & , \text{ falls } \underline{x} \geq 0 \\ [f_b]([x]) & , \text{ falls } \bar{x} < 0 \end{cases} \quad (6.27)$$

zur Berücksichtigung eines unbekanntes Vorzeichens von  $x$  (d. h.  $\underline{x} < 0 \wedge \bar{x} > 0$ ) ist

$$[y_e]([x]) = \begin{cases} [f_a]([x]) & , \text{ falls } \underline{x} \geq 0 \\ [f_b]([x]) & , \text{ falls } \bar{x} < 0 . \\ [f_a]([0, \bar{x}]) \cup [f_b]([\underline{x}, 0]) & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (6.28)$$

**Lemma 6.4 (Einschließende Funktion der Sättigungsfunktion)**

Eine einschließende Funktion für die in Definition 6.1 eingeführte Sättigungsfunktion ist  $[\text{sat}_{0,1}](\boldsymbol{\nu}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert durch

$$[\text{sat}_{0,1}](\boldsymbol{\nu}) = \begin{bmatrix} [\text{sat}_{0,1}]([\nu_1]) \\ [\text{sat}_{0,1}]([\nu_2]) \\ [\text{sat}_{0,1}]([\nu_3]) \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

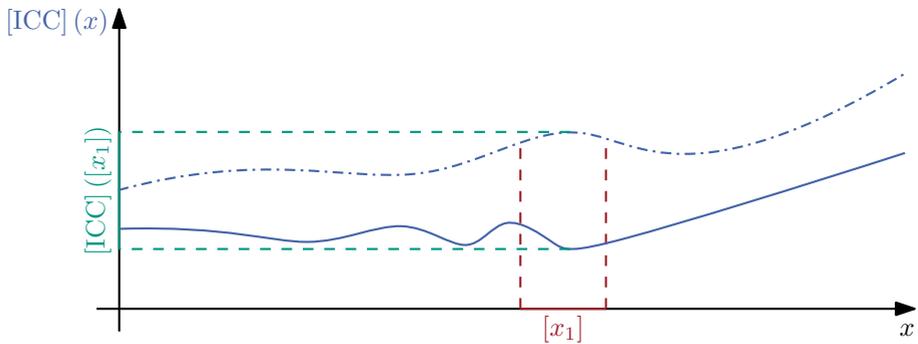
mit  $\boldsymbol{\nu} = [[\nu_1] \quad [\nu_2] \quad [\nu_3]]^\top$  und

$$[\text{sat}_{0,1}]([\kappa]) = [\text{sat}_{0,1}(\underline{\kappa}), \text{sat}_{0,1}(\bar{\kappa})] \quad (6.30)$$

unter Berücksichtigung von (6.14).

Da sich die Beweise der eingeführten Lemmata trivial gestaltet, werden sie nicht ausgeführt.

**Beispiel 6.1:** Gegeben sei die in Abbildung 6.9 blau dargestellte ICC, welche jedem Argument  $x$  ein Intervall [ICC] zuordnet. Da die die ICC definierenden Funktionen  $f_l(x)$  und  $f_u(x)$  nicht monoton sind, muss um eine einschließende Funktion der ICC zu bestimmen nach Lemma 6.2 das Maximum von  $f_u(x)$  und das Minimum von  $f_l(x)$  über dem betrachteten Intervall bestimmt werden. Exemplarisch ist dieses Vorgehen für das Intervall  $[x_1]$  in Abbildung 6.9 dargestellt. Betrachtet man den monotonen Verlauf von  $f_l(x)$  und  $f_u(x)$  am rechten Bildrand, so wird sofort ersichtlich, dass im Falle monotoner, die ICC definierender Funktionen lediglich die Grenzen des Intervallargumentes untersucht werden müssen, um eine einschließende Funktion der ICC zu bilden.



**Abbildung 6.9:** Beispiel einer ICC und einer einschließenden Funktion der ICC (blau strichpunktiiert:  $f_u$ , blau durchgezogen:  $f_l$ )

Die Anwendung dieser einschließenden Funktionen und natürlichen einschließenden Funktionen auf (6.16), (6.18) und (6.20) bis (6.22) führt auf

$$[\mathbf{u}_{pn,123,av}(t)] = \mathbf{P}_{SP} \cdot ([U_{DC,m}] \cdot [\mathbf{sat}_{0,1}]([\delta_{sum}]) + [\Delta U_f]) \quad (6.31)$$

mit

$$\delta_{sum,t} = \begin{cases} \delta_{l,id} & , \text{ falls } \delta_{l,id} \in \{0, 1\} \\ \delta_{l,id} + [\delta_{l,aux}] & , \text{ sonst} \end{cases}, \quad (6.32a)$$

$$[\delta_{l,aux}] = \begin{cases} \frac{\overbrace{[t_{l,D,l,on}] - [t_{l,T,u,on}] - T_d}^{=[\zeta_\delta](\bar{i}_{s,t,m})}}{T_{pulse}} & , \text{ falls } \bar{i}_{s,t,m} \geq 0 \\ \frac{-([t_{l,D,u,on}] - [t_{l,T,l,on}]) + T_d}{T_{pulse}} & , \text{ falls } \bar{i}_{s,t,m} < 0 \\ \underbrace{\quad}_{=[\kappa_\delta](\bar{i}_{s,t,m})} & \\ [\zeta_\delta]([0, \bar{i}_{s,t,m}]) \cup [\kappa_\delta](\bar{i}_{s,t,m}, 0) & , \text{ sonst} \end{cases}, \quad (6.32b)$$

$$\begin{aligned}
[t_{\iota,j,k,on}] &= [\text{ICC}_{s,\iota,j,k}] ([i_{s,\iota,m}]), & (6.33) \\
[\Delta U_{f,\iota}] &= \begin{cases} \overbrace{\left[ -\left(\delta_{\iota,id} - \frac{T_d}{T_{pulse}}\right) \cdot [U_{\iota,T,u}] - \left(1 - \delta_{\iota,id} + \frac{T_d}{T_{pulse}}\right) \cdot [U_{\iota,D,l}] \right]}^{=[\zeta_U](i_{s,\iota,m})} , & \text{falls } \dot{i}_{s,\iota,m} \geq 0 \\ \overbrace{\left[ \left(\delta_{\iota,id} + \frac{T_d}{T_{pulse}}\right) \cdot [U_{\iota,D,u}] + \left(1 - \delta_{\iota,id} - \frac{T_d}{T_{pulse}}\right) \cdot [U_{\iota,T,l}] \right]}^{=[\kappa_U](i_{s,\iota,m})} , & \text{falls } \bar{i}_{s,\iota,m} < 0 \\ [\zeta_U]([0, \bar{i}_{s,\iota,m}]) \cup [\kappa_U]([i_{s,\iota,m}, 0]) & , \text{sonst} \end{cases} & (6.34)
\end{aligned}$$

und

$$[U_{\iota,j,k}] = [\text{ICC}_{f,\iota,j,k}] ([i_{s,\iota,m}]) \quad (6.35)$$

für  $\iota \in \{1, 2, 3\}$ ,  $j \in \{T, D\}$ ,  $k \in \{u, l\}$ . Damit ist das qualitative Modell durch die Gleichungen (6.31) bis (6.35) definiert. Im nächsten Abschnitt soll die Ermittlung der Kennlinien für  $[t_{\iota,j,k,on}]$  und  $[U_{\iota,j,k}]$  thematisiert werden.

## 6.2.5 Parametrierung des Wechselrichter-Intervallmodells

### Rahmenbedingungen der Identifikation

Die Parametrierung soll beispielhaft mit Messdaten des SKAI 6001MD10-1452L der Firma Semikron durchgeführt werden. Bei diesem Wechselrichter stellen die in Abbildung 6.4 skizzierten Schalter  $T_{\iota,u/l}$  mit  $\iota \in \{1, 2, 3\}$  MOSFETs mit einer Durchbruchspannung von 100 V dar. Der Zwischenkreisspannungsnennwert beträgt 48 V, die Verriegelungstotzeit  $T_d = 1 \mu\text{s}$  und die Schaltfrequenz 10 kHz. Als Last wurde die ASM angeschlossen, die in Kapitel 9 zur Validierung der Intervallbeobachter verwendet werden wird. Die Skizze dieses Versuchsaufbaus ist in Abbildung 6.10 mit einer exemplarischen Messung von  $u_{3-}$  dargestellt. Während der Identifikation der Bauelemente einer Phase  $\iota$  werden die Zwischenkreisspannung  $U_{DC}$ , der Phasenstrom  $i_{s,\iota}$ , die Phasenspannung  $u_{\iota-}$  sowie die Ansteuersignale der Halbleiter  $s_{wr,v}$ ,  $v \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  aufgenommen. Die Abtastzeit wurde zu 20 ns gewählt. Als Unsicherheiten werden

$$[U_{DC,m}(t)] = U_{DC,m} + [-0,48 \text{ V}, 0,48 \text{ V}], \quad (6.36a)$$

$$[u_{\iota-,m}(t)] = u_{\iota-,m}(t) + [-0,1 \text{ V}, 0,1 \text{ V}], \quad (6.36b)$$

$$[i_{s,\iota,m}(t)] = i_{s,\iota,m}(t) + [-0,5 \text{ A}, 0,5 \text{ V}] \quad (6.36c)$$

gewählt.

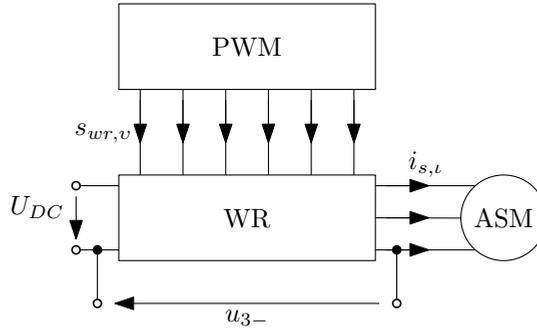


Abbildung 6.10: Skizze des Messaufbaus

### Identifikation der ICC für die Vorwärtsspannungseffekte

Die Stützstellen der in (6.35) eingeführten Intervall-Kennlinie können durch die Differenz zwischen der Zwischenkreisspannung beziehungsweise 0 V, und des in den Abbildungen 6.6 und 6.7 skizzierten Spannungsverlaufes in den Abschnitten 1, 3, 5 und 7 bestimmt werden. Die Zeitpunkte  $t_{on,s}$  und  $t_{off,s}$  können dabei direkt aus den aufgenommenen Ansteuersignalen des Wechselrichters ermittelt werden. Dies ist für  $t_{on,e}$  und  $t_{off,e}$  nicht der Fall. Diese Zeitpunkte werden anhand der gemessenen Spannungen  $u_{l-,m}(t)$  ermittelt. In der vorliegenden Arbeit wurde dabei eine Abweichung von 3 V zum Zwischenkreisspannungsnennwert von 48 V zur Detektion von  $t_{on,e}$  und eine Abweichung von 5 V zum Nulldurchgang zur Detektion von  $t_{off,e}$  genutzt. Für die folgenden Gleichungen (6.39) bis (6.42) wird von der Eindeutigkeit des Vorzeichens von  $i_{s,t}(t) \in [i_{s,t,m}(t)]$ , welche notwendig ist, um eine eindeutige Zuordnung zu einem Leistungshalbleiter zu ermöglichen, ausgegangen. Damit folgen mit dem Mittelwert des Phasenstromintervalls über eine Taktperiode

$$[i_{s,t,av}] = \frac{1}{T_{pulse}} \cdot \int_0^{T_{pulse}} [i_{s,t,m}(\tau)] d\tau$$

$$= \frac{1}{T_{pulse}} \cdot \left[ \int_0^{T_{pulse}} \underline{i}_{s,t,m}(\tau) d\tau, \int_0^{T_{pulse}} \bar{i}_{s,t,m}(\tau) d\tau \right] \quad (6.37)$$

$$(6.38)$$

die Bestimmungsgleichungen für die Stützstellen für  $\bar{i}_{s,t,m}(t) < 0$

$$[U_{l,D,u}] ([i_{s,t,av}]) = \int_{t_{on,e}}^{t_{off,s}} \frac{[u_{l-,m}(\tau)] - [U_{DC,m}]}{t_{off,s} - t_{on,e}} d\tau \cap [0, \infty] \text{ V}, \quad (6.39)$$

$$[U_{l,T,l}] ([i_{s,t,av}]) = \int_{t_{off,e}}^{t_{on,s}} \frac{[u_{l-,m}(\tau)]}{t_{on,s} - t_{off,e}} d\tau \cap [0, \infty] \text{ V} \quad (6.40)$$

und für  $i_{s,\iota,m}(t) \geq 0$

$$[U_{\iota,T,u}]([i_{s,\iota,av}]) = \int_{t_{on,e}}^{t_{off,s}} \frac{[U_{DC,m}] - [u_{\iota-,m}(\tau)]}{t_{off,s} - t_{on,e}} d\tau \cap [0, \infty] \text{ V}, \quad (6.41)$$

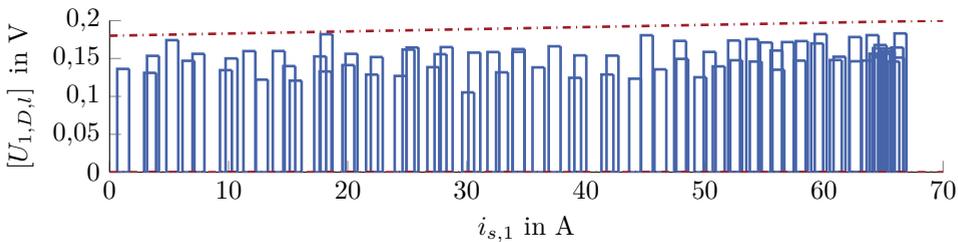
$$[U_{\iota,D,l}]([i_{s,\iota,av}]) = \int_{t_{off,e}}^{t_{on,s}} \frac{-[u_{\iota-,m}(\tau)]}{t_{on,s} - t_{off,e}} d\tau \cap [0, \infty] \text{ V} \quad (6.42)$$

mit  $\iota \in \{1, 2, 3\}$ .

Zwei Eigenschaften dieser Gleichungen sollen kurz erläutert werden. Die unterschiedlichen Vorzeichen von (6.39) und (6.41) beziehungsweise (6.40) und (6.42) rühren daher, dass in (6.34) bereits berücksichtigt wurde, dass im Fall eines positiven Stroms, die Phasenspannungen reduziert werden. In den Gleichungen (6.39) bis (6.42) wird weiteres physikalisches Vorwissen einbezogen, indem das durch den Integralausdruck berechnete Spannungsmittelwertintervall durch die Schnittmengenbildung nach unten mit 0V begrenzt wird, da eine negative Vorwärtsspannung mit der hier gewählten Vorzeichendefinition nicht möglich ist.

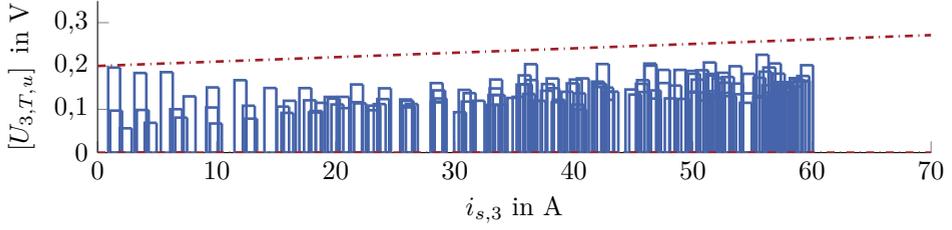
Die Abbildungen 6.11 und 6.12 zeigen beispielhaft die beim oben beschriebenen Betrieb mit einer ASM erzielten Stützstellen für die untere Diode in Phase 1 und den oberen Transistor in Phase 3, dargestellt durch die blauen Rechtecke. Um die in Lemma 6.2 beschriebenen Vorteile hinsichtlich der Auswertung einer monotonen ICC zu nutzen, wurden auf Basis dieser Stützstellen die in den Abbildungen 6.11 und 6.12 rot skizzierten, monotonen ICC definiert<sup>21</sup>. Die Untergrenze stellt hierbei eine Konstante mit dem Wert 0V dar und die Obergrenze das mit einem Offset versehene Ergebnis einer Least-Squares-Schätzung basierend auf dem Mittelpunkt der Intervalle. Wie in den Abbildungen zu erkennen ist, wurde bei dieser Least-Squares-Schätzung von einer linearen Abhängigkeit der Vorwärtsspannung vom Phasenstrom ausgegangen.

Die ICC der übrigen zehn Bauteile sind in Anhang F.1 zu finden.



**Abbildung 6.11:** Identifizierte Vorwärtsspannung der unteren Diode in Phase 1 (blau: Datenintervalle, rot strichpunktiert: berechnete ICC)

<sup>21</sup> In Abbildung 6.12 erkennt man besonders im Bereich zwischen 15 A und 30 A gut, dass die Verwendung dieser monotonen ICC jedoch auf Kosten der Einschließungsgenauigkeit geht. Da diese jedoch selbst in diesem Bereich nur ungefähr 0,05V bei einer Zwischenkreisspannung von 48V beträgt, ist dieser Nachteil zugunsten des reduzierten Rechenaufwandes vertretbar.



**Abbildung 6.12:** Identifizierte Vorwärtsspannung des oberen Transistors in Phase 3 (blau: Datenintervalle, rot strichpunktiert: berechnete ICC)

### Identifikation der ICC für das nichtideale Schaltverhalten

Ganz ähnlich dem im letzten Abschnitt beschriebenen Vorgehen kann auch eine ICC für das nichtideale Schaltverhalten für die einzelnen Bauteile ermittelt werden. Dazu werden die im letzten Abschnitt definierte Gleichung (6.37),  $t_{on,e}$  und  $t_{off,e}$  sowie die bereits definierten ICC verwendet. Je nach Bauteil kann somit einer der in den Abbildungen 6.6 und 6.7 eingeführten Abschnitte 2, 4, 6 oder 8 zur Ermittlung der Stützstellen für die zu erstellende ICC für die äquivalenten Einschaltzeiten herangezogen werden. Damit folgen zur Berechnung der Stützstellen für  $\bar{i}_{s,\iota,m}(t) < 0$  die Gleichungen

$$[t_{\iota,T,\iota,on}] ([[i_{s,\iota,av}]]) = \int_{t_{off,s}}^{t_{off,e}} \frac{[u_{\iota-,m}(\tau)]}{[U_{DC,m}]} d\tau - T_d - \frac{[U_{\iota,D,u}] ([[i_{s,\iota,av}]]) \cdot T_d}{[U_{DC,m}]} - \frac{[U_{\iota,T,\iota}] ([[i_{s,\iota,av}]]) \cdot (t_{off,e} - t_{off,s} - T_d)}{[U_{DC,m}]}, \quad (6.43)$$

$$[t_{\iota,D,u,on}] ([[i_{s,\iota,av}]]) = \int_{t_{on,s}}^{t_{on,e}} 1 - \frac{[u_{\iota-,m}(\tau)]}{[U_{DC,m}]} d\tau + \frac{[U_{\iota,D,u}] ([[i_{s,\iota,av}]]) \cdot (t_{on,e} - t_{on,s})}{[U_{DC,m}]} \quad (6.44)$$

und für  $\bar{i}_{s,\iota,m}(t) \geq 0$

$$[t_{\iota,T,u,on}] ([[i_{s,\iota,av}]]) = \int_{t_{on,s}}^{t_{on,e}} 1 - \frac{[u_{\iota-,m}(\tau)]}{[U_{DC,m}]} d\tau - T_d - \frac{[[U_{\iota,D,\iota}] ([[i_{s,\iota,av}]]) \cdot T_d]}{[U_{DC,m}]} - \frac{[U_{\iota,T,u}] ([[i_{s,\iota,av}]]) \cdot (t_{on,e} - t_{on,s} - T_d)}{[U_{DC,m}]}, \quad (6.45)$$

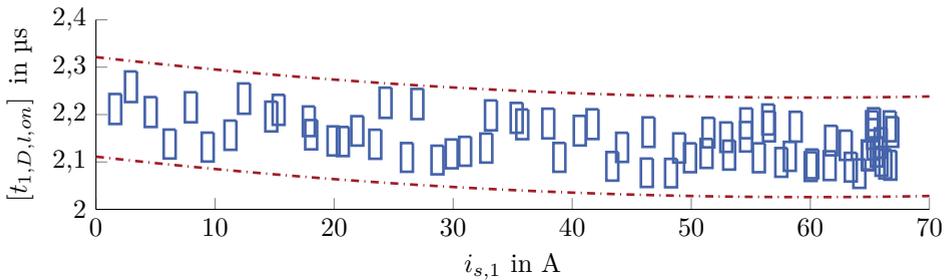
$$[t_{\iota,D,\iota,on}] ([[i_{s,\iota,av}]]) = \int_{t_{off,s}}^{t_{off,e}} \frac{[u_{\iota-,m}(\tau)]}{[U_{DC,m}]} d\tau + \frac{[U_{\iota,D,\iota}] ([[i_{s,\iota,av}]]) \cdot (t_{off,e} - t_{off,s})}{[U_{DC,m}]} \quad (6.46)$$

mit  $\iota \in \{1, 2, 3\}$ .

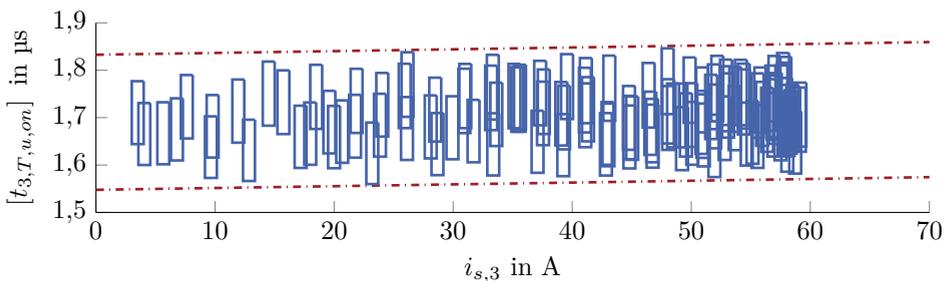
Die Gleichungen (6.43) und (6.45) bestimmen hierbei die zu den kreuzschraffierten Flächen in den Abschnitten 8 und 2 gehörenden äquivalenten Einschaltzeiten. Den

Gleichungen (6.44) und (6.46) kommt eine weitere Bedeutung hinzu. In den Abschnitten 6 und 4 werden, was in den Abbildungen 6.6 und 6.7 durch die grün schraffierten Flächen angedeutet ist, durch (6.34) bereits Vorwärtsspannungen berücksichtigt. Da jedoch in diesen Abschnitten die gesamte Abweichung des realen Verlaufes vom idealen Verlauf durch die kreuzschraffierten Flächen beschrieben wird, werden die modellierten Vorwärtsspannungen durch die grünen Ausdrücke in (6.44) und (6.46) kompensiert. Die gleichen positiven Vorzeichen trotz des Umstandes, dass ein Mal eine positive Fläche und ein Mal eine negative Fläche kompensiert werden sollen, sind im negativen Vorzeichen zur Berücksichtigung von  $[t_{i,D,u,on}]$  in (6.32) begründet.

Exemplarisch sollen an dieser Stelle die hiermit ermittelten Stützstellen für die untere Diode in Phase 1 und den oberen Transistor in Phase 3 vorgestellt werden. Diese sind in den Abbildungen 6.13 und 6.14 durch die blauen Rechtecke gezeigt. Zur Bestimmung einer monotonen ICC wurde auch hier eine mit einem Offset versehene Least-Squares-Schätzung der Intervallmittelpunkte durchgeführt, allerdings mit dem Unterschied, dass basierend auf den Messwerten eine quadratische Abhängigkeit der äquivalenten Einschaltzeiten vom Phasenstrom unterstellt wurde. Die hieraus resultierenden ICC sind in den Abbildungen 6.13 und 6.14 durch die roten Kurven gezeigt. Die weiteren Kennlinien sind in Anhang F.2 zu finden.



**Abbildung 6.13:** Identifizierte äquivalente Einschaltzeit der unteren Diode in Phase 1 (blau: Datenintervalle, rot strichpunktiert: berechnete ICC)



**Abbildung 6.14:** Identifizierte äquivalente Einschaltzeit des oberen Transistors in Phase 3 (blau: Datenintervalle, rot strichpunktiert: berechnete ICC)

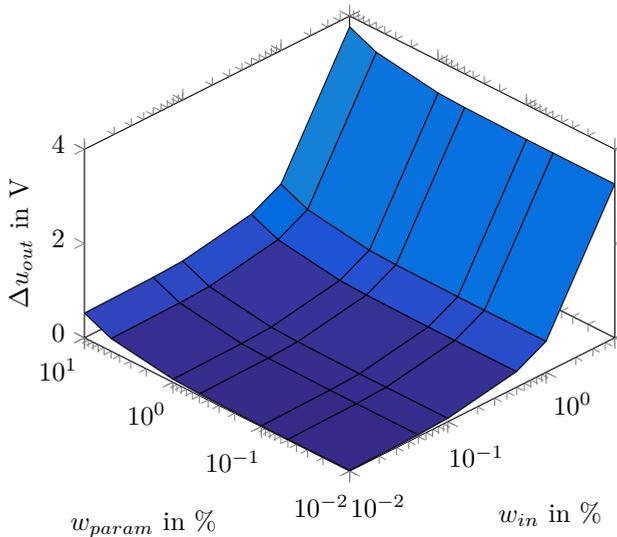
### 6.2.6 Simulative Ergebnisse

Bevor im folgenden Abschnitt eine Validierung Klarheit über die Tauglichkeit des Ansatzes bringt, soll in diesem Abschnitt kurz die Frage beleuchtet werden, ob Parameterunsicherheiten oder Messunsicherheiten die Güte der Spannungsnachbildung stärker beeinflussen. Dazu wurden Simulationen mit einer Amplitude der gewünschten dreiphasigen Spannung von 24 V ( $U_{DC} = 48$  V) und einer Frequenz von 30 Hz durchgeführt. Die Simulationsdauer betrug eine Periode der Sinusschwingung. Als Last wurde in jeder Phase eine ohmsch-induktive mit  $R = 14,0$  m $\Omega$  und  $L = 112,7$   $\mu$ H verwendet, was der in Tabelle 7.1 gegebenen Statorparametrierung der betrachteten ASM entspricht. Ausgehend von den daraus resultierenden Phasenströmen sowie den Parametern der Least-Squares-Schätzung ohne Berücksichtigung von Unsicherheiten wurden Simulationen mit Messunsicherheiten zwischen 0% und 5% und Parameterunsicherheiten zwischen 0% und 10% durchgeführt. Im Falle der Messunsicherheiten erfolgte die Parametrierung über die Prozentsätze  $w_{in}$  gegeben in (6.47) und im Falle von Parameterunsicherheiten über  $w_{param}$ .  $\kappa_{nom}$  stellt den Nominalwert der mit einer Unsicherheit zu versiehenden Größe dar. Als Vergleichswert wurde die in (6.48) definierte mittlere Intervallbreite von  $u_{pn,1,av}$  über der Simulationsdauer gewählt.

$$[\kappa_\iota] = [\kappa_{nom} (1 - w_\iota), \kappa_{ref} (1 + w_\iota)] \text{ mit } w_\iota \in \{w_{in}, w_{param}\}, \iota \in \{1, 2, 3\} \quad (6.47)$$

$$\Delta u_{out} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\bar{u}_{pn,1,av}(j) - \underline{u}_{pn,1,av}(j)) \quad (6.48)$$

Mit diesen Randbedingungen erhält man die in Abbildung 6.15 dargestellten mittleren Intervallbreiten. Wie deutlich zu sehen ist, haben die Messunsicherheiten im Betrieb eine größere Auswirkung auf die Intervallbreite als die Parameterunsicherheiten. Daraus kann abgeleitet werden, dass die üblicherweise vorhandene Prüfstandssensorik mit geringen Messfehlern zur Parametrierung des Modells eine kleinere Rolle hinsichtlich der Intervallbreite der nachgebildeten Spannungen spielt als die Sensorik, welche Daten im Betrieb des Systems liefert.



**Abbildung 6.15:** Auswirkungen von Parameter- und Messunsicherheiten auf die Ausgangsspannungsintervallbreite

## 6.2.7 Validierung

Bevor die eigentliche Validierung des Modellansatzes vorgestellt wird, soll zunächst definiert werden, welche Ergebnisse bei der Validierung eines intervallarithmetischen Ansatzes auftreten können. Die Definitionen werden so allgemein eingeführt, dass sie auch bei den folgenden Kapiteln, welche den Entwurf von Intervallbeobachtern thematisieren, unverändert verwendet werden können.

### Definition 6.3 (Valide Intervallschätzung/Intervallsimulation)

Eine Intervallschätzung oder Intervallsimulation mit der Ausgangsgröße  $[x_{is}(t)]$  zur Einschließung von  $x(t)$  ist genau dann valide für ein Szenario, wenn für eine dem Szenario zugeordnete, unsichere Messung von  $x(t)$  gegeben durch  $[x_m(t)]$  mit  $x(t) \in [x_m(t)]$  die Ungleichungen  $\underline{x}_{is}(t) \leq \underline{x}_m(t)$  und  $\bar{x}_{is}(t) \geq \bar{x}_m(t)$  gelten.

### Definition 6.4 (Invalide Intervallschätzung/Intervallsimulation)

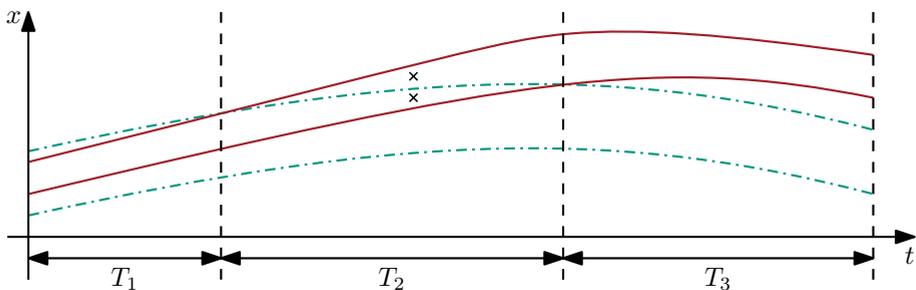
Eine Intervallschätzung oder Intervallsimulation mit der Ausgangsgröße  $[x_{is}(t)]$  zur Einschließung von  $x(t)$  ist genau dann invalide für ein Szenario, wenn für eine dem Szenario zugeordnete, unsichere Messung von  $x(t)$  gegeben durch  $[x_m(t)]$  mit  $x(t) \in [x_m(t)]$  die Bedingung  $\underline{x}_{is}(t) \geq \bar{x}_m(t)$  oder  $\bar{x}_{is}(t) \leq \underline{x}_m(t)$  gilt.

**Definition 6.5 (Praktisch valide Intervallschätzung/Intervallsimulation)**

Eine Intervallschätzung oder Intervallsimulation ist genau dann praktisch valide, wenn sie weder valide noch invalide ist.

Für eine valide Intervallschätzung gilt folglich  $x(t) \in [x_{is}(t)]$ ; für eine invalide Intervallschätzung gilt  $x(t) \notin [x_{is}(t)]$ , und für eine praktisch valide Intervallschätzung kann keine dieser beiden Aussagen getroffen werden. Anschaulich wird dies in Beispiel 6.2 demonstriert.

**Beispiel 6.2:** Gegeben sei der in Abbildung 6.16 grün dargestellte und durch eine Intervallschätzung bestimmte Ausgangsintervallverlauf  $[x_{is}(t)]$  mit dem Ziel eine Größe  $x(t)$  einzuschließen sowie ein rot dargestellter Messintervallverlauf  $[x_m(t)]$ , der die Größe  $x(t)$  einschließt.



**Abbildung 6.16:** Ergebnisse bei der Validierung von intervallarithmetischen Ansätzen (rot: Messintervall, grün strichpunktiert: Ergebnis des intervallarithmetischen Ansatzes)

Wird zur Validierung nur der Zeitabschnitt  $T_1$  betrachtet, so ist die Intervallschätzung nach Definition 6.3 valide. Da das Messintervall durch das Ausgangsintervall der Intervallschätzung eingeschlossen wird, ist damit auch garantiert, dass die Größe  $x(t)$  durch das Ausgangsintervall der Intervallschätzung eingeschlossen wird.

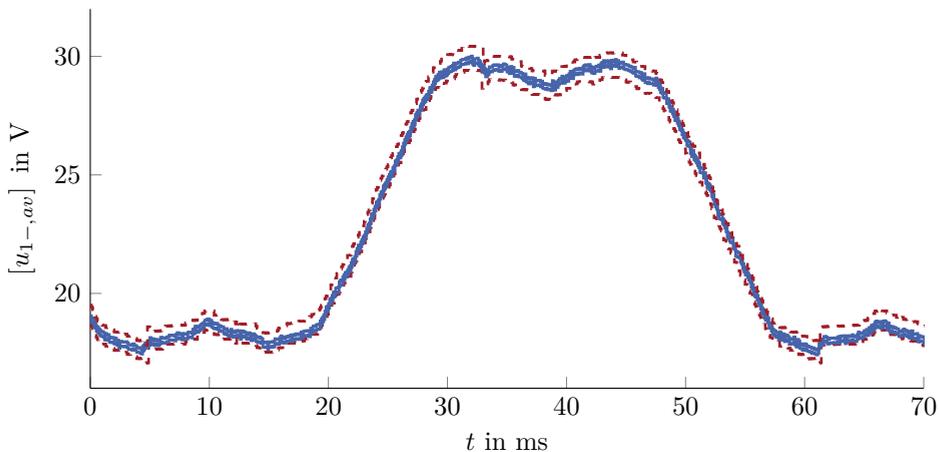
Zu einem anderen Ergebnis kommt man bei ausschließlicher Betrachtung des Zeitabschnitts  $T_3$ . Für das diesem Verlauf zugeordnete Szenario ist die Intervallschätzung nach Definition 6.4 invalide. Da  $x(t)$  sicher im Messintervall liegt, schließt das Ausgangsintervall der Intervallschätzung den tatsächlichen Wert garantiert nicht ein.

Für das dem Zeitabschnitt  $T_2$  zugeordnete Szenario ist die Intervallschätzung weder valide noch invalide. Damit ist die Intervallschätzung nach Definition 6.5 praktisch valide. Wie diese Eigenschaft interpretiert werden kann, ist in Abbildung 6.16 dargestellt. Die zwei Kreuze im Abschnitt  $T_2$  markieren mit dem Messintervall verträgliche Momentanwerte der Größe  $x(t)$ . Während der untere vom Ausgangsintervall der Intervallschätzung eingeschlossen würde, gilt dies für den oberen nicht.

Nachdem nun die drei eingeführten Definitionen zur Validierung einer Intervallschätzung oder einer Intervallsimulation anhand des Beispiels verdeutlicht wurden, soll kom-

mentiert werden, warum man für die meisten intervallarithmetischen Ansätze das Ergebnis erhalten wird, dass sie lediglich praktisch valide sind und warum dies sogar wünschenswert sein kann. Der Grund hierfür liegt in der Entwurfsvorschrift der Methoden. Dabei wird nur verlangt, dass die einzuschließende Größe innerhalb des erzeugten Intervalls liegt und nicht, dass ein Messintervall (welches nicht zwingend beim Entwurf bekannt sein muss beziehungsweise dies in der Regel auch nicht ist) eingeschlossen wird. Das Ergebnis eines praktisch validen Ansatzes ist auch mit einer vergleichsweise geringen Intervallbreite des Ausgangsintervalls des intervallarithmetischen Ansatzes verbunden (durch künstliches Verbreitern des Ausgangsintervalls des intervallarithmetischen Ansatzes kann aus jedem praktisch validen Ansatz ein valider Ansatz erzeugt werden). Zu beachten ist außerdem, dass für die Validierung möglichst Sensorik mit einer geringen Fehlerintervallbreite verwendet werden sollte, da dies die Unterscheidung zwischen praktisch validen Ansätzen und invaliden Ansätzen verbessert.

Zur Validierung des Modellansatzes wurde eine andere Sequenz der Phasenspannungen in der ersten Phase verwendet als zur Parametrierung des Modells. Das aus der Messung und der berücksichtigten unbekannt, aber beschränkten Messunsicherheit folgende Referenzspannungsmittelwertintervall für  $u_{1-}$  über den betrachteten 70 ms ist in Abbildung 6.17 durch die blauen Kurven gezeigt. Die Annahmen bezüglich der Messunsicherheiten entsprechen den bereits im Zusammenhang mit der Parametrierung in (6.36) definierten. Das auf diesen Annahmen durch das Wechselrichter-Intervallmodell bestimmte Spannungsintervall für dieses Szenario ist in Abbildung 6.17 durch die roten Kurven dargestellt.



**Abbildung 6.17:** Validierung des Wechselrichter-Intervallmodells anhand von Messungen der Phase 1 (blau: Messung mit Messunsicherheit, rot gestrichelt: Ausgang des Wechselrichter-Intervallmodells)

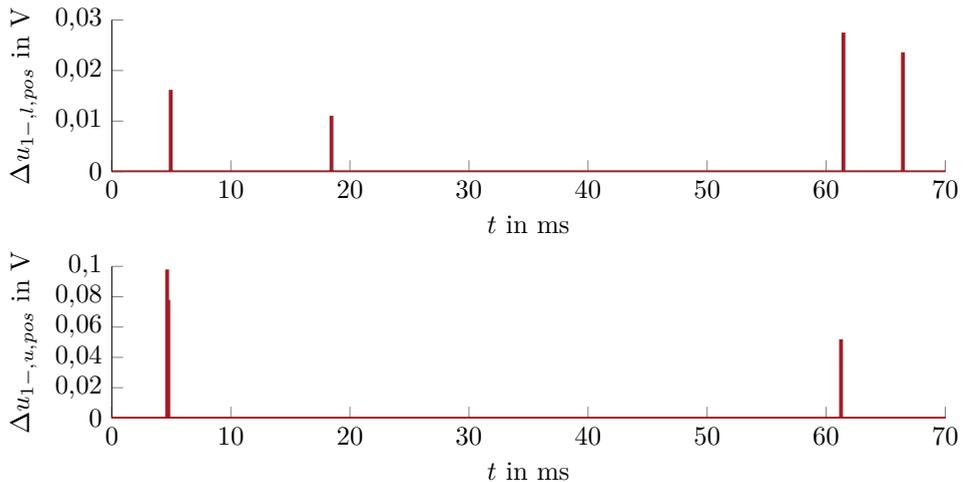
Um leicht bewerten zu können, ob der Ansatz in diesem Szenario valide, praktisch valide oder invalide ist, wurden in Abbildung 6.18 Hilfskurven durch die Gleichungen

(6.49a) und (6.49b) über der Zeit aufgetragen.

$$\Delta u_{1-,l, pos} = \max(0, \underline{u}_{1-,av} - \underline{u}_{1-,meas}) \quad (6.49a)$$

$$\Delta u_{1-,u, pos} = \max(0, \bar{u}_{1-,meas} - \bar{u}_{1-,av}) \quad (6.49b)$$

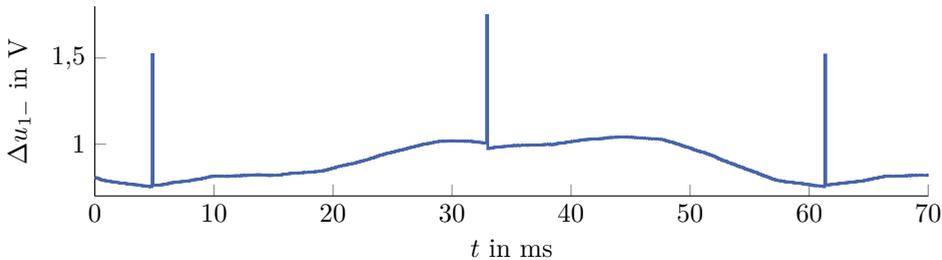
Gleichung (6.49a) nimmt genau dann einen Wert ungleich null an, wenn die Untergrenze des Messintervalls unter der Untergrenze des Spannungsintervalls des Wechselrichter-Intervallmodells liegt. Gleichung (6.49b) nimmt einen Wert ungleich null an, wenn die Obergrenze des Messintervalls über der Obergrenze des Spannungsintervalls des Wechselrichter-Intervallmodells liegt. Diese Funktionen dienen daher als Indikator, falls die Voraussetzungen für einen validen Ansatz nach Definition 6.3 nicht erfüllt sind. Wie in Abbildung 6.18 zu sehen ist, treten solche Konstellationen der Intervallgrenzen zu mehreren Zeitpunkten auf, wobei anzumerken ist, dass die Differenz dabei stets kleiner als die Intervallbreite des Messintervalls, die nach (6.36) 0,2 V beträgt, ist. Dadurch folgt, dass das Wechselrichter-Intervallmodell für dieses Szenario nicht valide ist. Aufgrund der zuvor festgestellten Tatsache, dass die Funktionswerte der in Abbildung 6.18 dargestellten Hilfsfunktionen kleiner als die Intervallbreite des Messintervalls sind, stellt die Schnittmenge aus dem Messintervall und dem Spannungsintervall des Wechselrichter-Intervallmodells keine leere Menge dar. Das Modell ist also nicht invalide und damit praktisch valide.



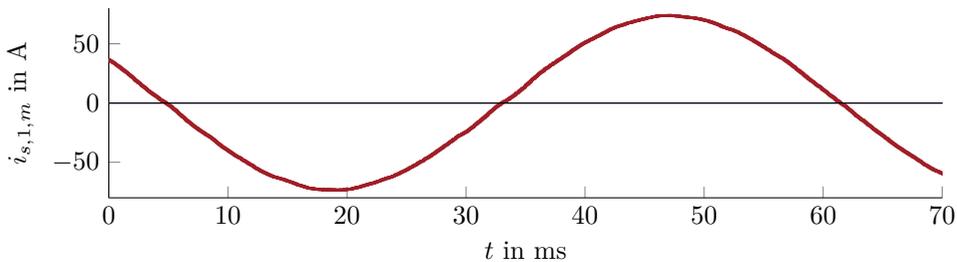
**Abbildung 6.18:** Hilfskurven zur Validierung des Wechselrichter-Intervallmodells

Zur Bewertung der Güte des durch das Wechselrichter-Intervallmodell gelieferten Ergebnisses ist in Abbildung 6.19 die Intervallbreite des Spannungsintervalls über der Zeit aufgetragen. Diese liegt für nahezu den gesamten Zeitraum unter 1 V. Auffällig sind drei Ausreißer mit ca. 1,5 V, 1,7 V und wieder 1,5 V. Die Ursache dieser Ausreißer der Intervallbreite liegt an einem Phasenstromintervall, das den Wert null beinhaltet, wodurch das Vorzeichen nicht exakt festzustellen ist. Dies ist deutlich beim Vergleich mit dem

Strommesswert, dargestellt in Abbildung 6.20, zu erkennen. Wie im dritten Fall der Gleichungen (6.32b) und (6.34) abgelesen werden kann, wird in diesem Fall die Intervallbreite dadurch vergrößert, dass sowohl die Terme für den negativen Phasenstrom als auch für den positiven Phasenstrom ausgewertet werden und die resultierenden Intervalle vereinigt werden.



**Abbildung 6.19:** Intervallbreite der Ausgangsspannung des Wechselrichter-Intervallmodells



**Abbildung 6.20:** Statorstrommesswert der ersten Phase

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die Validierung des Ansatzes gezeigt hat, dass das Wechselrichter-Intervallmodell nicht invalide ist und eine Intervallbreite liefert, die abgesehen von Zeitpunkten mit unbekanntem Vorzeichen des Laststroms nahezu die identische Breite aufweist, wie die berücksichtigte Unsicherheit der Zwischenkreisspannung (siehe (6.36)).

### 6.3 Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde zunächst gezeigt, dass eine Modellierung der ASM im Kontext eines Ansatzes zur garantierten Zustandsschätzung im  $\alpha$ - $\beta$ -Koordinatensystem durchgeführt werden sollte. Dies steht im Gegensatz zu der üblichen Praxis, dass beim modellbasierten Reglerentwurf elektrischer Maschinen die Modellgleichungen in einem rotierenden d-q-Koordinatensystem angegeben werden. Der primäre Grund für dieses abweichende Vorgehen ist, dass die Überabschätzung durch den Wrapping Effect bei dieser Transformation der unsicheren Phasengrößen reduziert wird. Basierend auf dieser

Wahl wurde eine Abwandlung eines in der Literatur vorgestellten Zustandsraummodells der ASM formuliert und deterministische Unsicherheiten in Form von Intervallen für die Eingangs-, Ausgangs- und Parametergrößen dieses Modell eingeführt.

Im zweiten Abschnitt des Kapitels wurde eine neuartige Modellierung eines Wechselrichters vorgestellt, die es erstmals ermöglicht eine garantierte Aussage hinsichtlich der Ausgangsspannungen anzugeben. Das Modell gehört zur Klasse der Grey-Box-Modelle und kombiniert dabei das Wissen über die Struktur des Systems mit Kennlinien für die einzelnen Effekte, wozu in dieser Arbeit Intervallkennlinien definiert wurden. Neben dem neuen qualitativen Modellansatz wurde auch eine Methodik zur Parametrierung des Modells gezeigt. Diese setzt ebenfalls lediglich die Beschränktheit der Messfehler voraus, während weitere Fehlereigenschaften als unbekannt angenommen werden, und bezieht Vorwissen über die Spannungsabfälle über den Halbleitern ein. Im Rahmen der Validierung wurden mögliche Ergebnisse einer Validierung eines intervallarithmetischen Ansatzes definiert. Hierbei tritt neben den üblichen Ergebnissen valide und invalide auch das Ergebnis praktisch valide hinzu, welches charakteristisch für diese Ansätze ist. Es beschreibt das Ergebnis, dass basierend auf den Messintervallen nicht sichergestellt werden kann, dass der einzuschließende Zustand eingeschlossen ist und zeitgleich auch nicht gezeigt werden kann, dass dies nicht der Fall ist. Ferner wurde gezeigt, dass dieses Ergebnis das übliche bei intervallarithmetischen Ansätzen ist, da es mit den Entwurfszielen verträglich ist und auf eine, verglichen mit dem zur Validierung verwendeten Messintervall, geringe Überabschätzung hindeutet.

Insgesamt liegt damit erstmals ein durchgängiges intervallarithmetisches Modell des Wechselrichters und der ASM vor.



# 7 Garantierte Zustandsschätzung für Asynchronmaschinen

In den vorherigen Kapiteln wurden verschiedene Intervallbeobachteransätze, welche sich zur garantierten Zustandsschätzung einer ASM eignen, vorgestellt, an numerischen Beispielen exemplarisch gezeigt und gegenübergestellt. Das Ziel dieses Kapitels soll die konkrete Auslegung von Intervallbeobachtern für die ASM sein.

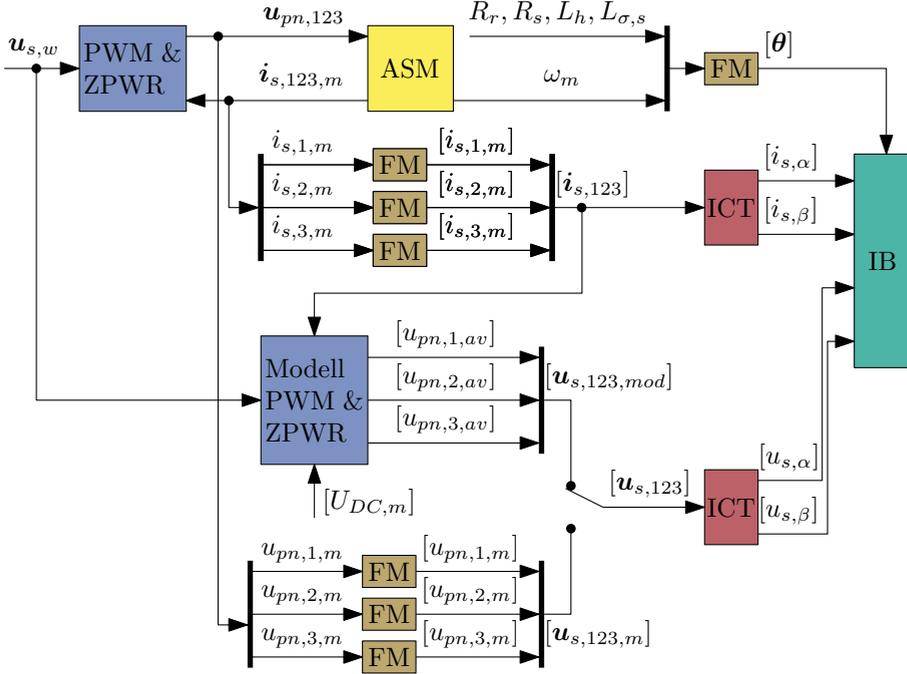
## 7.1 Wahl eines Intervallbeobachteransatzes

Die Wahl des anzuwendenden Ansatzes fiel hierbei auf den transformationsbasierten Ansatz, welcher die spezielle Systemstruktur der Dynamikmatrix des gewählten ASM-Modells ausnutzt. Dies hat mehrere Gründe. Der erste ist, dass der grenzverkoppelte Ansatz mit Anwendung auf die ASM bereits in Form eines Journal- und eines Konferenzbeitrages ([KSP<sup>+</sup>16], [KGH17]) veröffentlicht wurde, was in dieser Tiefe für den Transformationsansatz nicht gilt. Als zweites soll begründet werden wieso nicht der transformationsbasierte Intervallbeobachter mit grenzstabiler Transformationsmatrixdynamik gewählt wurde. Die für diesen Ansatz notwendige Gültigkeit der Annahme, dass die Parameteränderungen hinreichend klein und langsam sind, ist für die ASM für ein Szenario in [KPF<sup>+</sup>16] bereits gezeigt worden. Darüber hinaus sind die zu erfüllenden Annahmen bei Hinzunahme einer Parameterunsicherheit bei der im folgenden Abschnitt gewählten Ausprägung des Transformationsansatzes aufgrund der nicht beliebig vorgebbaren Eigenwerte der Beobachterfehlerdynamikmatrix restriktiver, weswegen diese gewählt wurde, um zu zeigen, dass sie dennoch für praktische Problemstellungen angewendet werden kann.

## 7.2 Struktur des Gesamtsystems

Das Ziel dieses Abschnittes ist die Struktur des Gesamtsystems, welches im Wesentlichen aus der ASM und dem Intervallbeobachter (für Abbildung 7.1 einmalig mit IB abgekürzt) besteht, vorzustellen und auf bislang nicht beschriebene Komponenten einzugehen. Diese Gesamtstruktur ist ohne die Regelung (siehe hierzu beispielsweise Abbildung 6.5) in Abbildung 7.1 dargestellt. Oben ist dabei in gelb die ASM, für welche der Intervallbeobachter zu entwerfen ist, dargestellt und in blau auf gleicher Höhe der Wechselrichter mit Modulator. Das bereits in Abschnitt 6.2 vorgestellte Modell des Wechselrichters ist ebenfalls in blau in der Mitte der Abbildung zu finden. Neben

der Möglichkeit mit diesem Modell Intervalle für die Sternspannungen der Maschine zu bestimmen, wurde die Möglichkeit einer direkten Messung der Spannungen, was beispielsweise in Simulationsstudien möglich ist, ebenfalls vorgesehen und durch den Schalter die Wahl des jeweiligen Modus angedeutet. Wie auch bei den Strommessungen werden Annahmen zu den Messfehlern durch die braun dargestellten Fehlermodelle (FM) abgebildet. Oben rechts in der Abbildung ist zu erkennen, dass auf gleiche Art der Übergang zu Parameterunsicherheiten dargestellt ist.



**Abbildung 7.1:** Struktur des Gesamtsystems zur garantierten Zustandsschätzung einer ASM (ohne Regelung, mit Intervallbeobachter)

Die Phasengrößen mit den Indizes 1, 2, 3 und die Raumzeigergrößen mit den Indizes  $\alpha$  und  $\beta$  werden durch die Clarke-Transformation miteinander in Beziehung gesetzt (siehe (6.1)). Wie in Abbildung 7.1 deutlich wird, muss für die in dieser Arbeit behandelte Forschungsfrage für die Ströme und Spannungen jedoch nicht der Zusammenhang zwischen zwei Punktintervallvektoren  $[\zeta_1(t) \ \zeta_2(t) \ \zeta_3(t)]^\top$  und  $[\zeta_\alpha(t) \ \zeta_\beta(t)]^\top$  hergestellt werden, sondern zwischen zwei Intervallvektoren. Hierzu dient die in [KSP<sup>+</sup>16] eingeführte Erweiterung, welche sich durch Anwendung der in Anhang A notierten

Grundlagen der Intervallarithmetik auf (6.1) ergibt:

$$\begin{bmatrix} \bar{\zeta}_\alpha(t) \\ \bar{\zeta}_\beta(t) \\ \underline{\zeta}_\alpha(t) \\ \underline{\zeta}_\beta(t) \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\zeta}_1(t) \\ \bar{\zeta}_2(t) \\ \bar{\zeta}_3(t) \\ \underline{\zeta}_1(t) \\ \underline{\zeta}_2(t) \\ \underline{\zeta}_3(t) \end{bmatrix}. \quad (7.1)$$

Die Intervalltransformation, welche als Intervall-Clarke-Transformation (ICT) bezeichnet wird, ist in Abbildung 7.1 durch die roten Blöcke symbolisiert. Damit sind alle Elemente der Gesamtstruktur eingeführt und im nächsten Abschnitt kann die Beobachterauslegung für die ASM erfolgen.

### 7.3 Auslegung eines transformationsbasierten Intervallbeobachters zur Berücksichtigung von Ein-/Ausgangsunsicherheiten für die Asynchronmaschine

Bevor in diesem Abschnitt die eigentliche Auslegung des gewählten Intervallbeobachters erfolgt, soll zunächst die Parametrierung des in (6.3) qualitativ eingeführten Modells der ASM erfolgen. Die elektrischen Parameter der ASM wurden mit Ausnahme der Polpaarzahl, die dem Datenblatt der Maschine entnommen ist, von Mitarbeitern des Projektpartners (Daimler AG) bestimmt und sind in Tabelle 7.1 aufgelistet. Weitere Angaben aus dem Datenblatt der elektrischen Maschine sind in Anhang E.3 zu finden. Bevor der Intervallbeobachter entworfen wird, soll überprüft werden, ob die in

**Tabelle 7.1:** Parametrierung der ASM

Parameter	Wert
$R_r$	16,1 mΩ
$R_s$	14,0 mΩ
$L_h$	1,2 mH
$L_{\sigma,s}$	112,7 μH
$z_p$	2

Satz 4.2 festgehaltenen Annahmen erfüllt sind. Die in Annahme 3.2 geforderte Beschränktheit ist, wie Tabelle 7.1 entnommen werden kann, für die elektrischen Parameter gegeben. Aufgrund der Massenträgheit der Welle, Reibungseffekten und der endlichen Stellenergie ist die mechanische Winkelgeschwindigkeit ebenfalls beschränkt, womit Annahme 3.2 erfüllt ist. Da Parameterunsicherheiten erst im nächsten Abschnitt aufgenommen werden, ist Annahme 3.3 ebenfalls gültig. Zu prüfen bleibt Annahme 4.3.

Für das gewählte Modell der ASM ergibt sich die Beobachterdynamikmatrix  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  mit

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \\ L_{31} & L_{32} \\ L_{41} & L_{42} \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

zu

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}(t), t) = \begin{bmatrix} -\frac{R_r+R_s}{L_{\sigma,s}} - L_{11} & -L_{12} & \frac{R_r}{L_{\sigma,s}} & \omega_l(t) \cdot \frac{L_h}{L_{\sigma,s}} \\ -L_{21} & -\frac{R_r+R_s}{L_{\sigma,s}} - L_{22} & -\omega_l(t) \cdot \frac{L_h}{L_{\sigma,s}} & \frac{R_r}{L_{\sigma,s}} \\ \frac{R_r}{L_h} - L_{31} & -L_{32} & -\frac{R_r}{L_h} & -\omega_l(t) \\ -L_{41} & \frac{R_r}{L_h} - L_{42} & \omega_l(t) & -\frac{R_r}{L_h} \end{bmatrix}. \quad (7.3)$$

Wie an der rot markierten Matrix  $\mathbf{F}_{22}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  zu sehen, existiert mit  $\iota = -\frac{R_r}{L_h}$  eine negative Konstante, sodass

$$\mathbf{F}_{22}(\boldsymbol{\theta}(t), t) - \iota \cdot \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_l(t) \\ \omega_l(t) & 0 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

schiefsymmetrisch ist. Darüber hinaus können die grün bzw. blau markierten Matrizen  $\mathbf{F}_{11}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  und  $\mathbf{F}_{21}(\boldsymbol{\theta}(t), t)$  frei über die Beobachtermatrix vorgegeben werden. Dies hätte beispielsweise dadurch verhindert werden können, dass Einträge der Beobachtermatrix von der inversen mechanischen Winkelgeschwindigkeit, welche Nulldurchgänge aufweisen kann, abhängig sind.

Damit sind alle Annahmen erfüllt und der Beobachterentwurf kann erfolgen. Mit (4.34) folgt für die Beobachtermatrix

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -\frac{R_r+R_s}{L_{\sigma,s}} - \epsilon & 0 \\ 0 & -\frac{R_r+R_s}{L_{\sigma,s}} - \epsilon \\ \frac{R_r}{L_h} & 0 \\ 0 & \frac{R_r}{L_h} \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

mit dem noch nicht festgelegten Entwurfsparameter  $\epsilon < -\frac{R_r}{L_h} = \iota$ . Dieser wird in den folgenden Kapiteln heuristisch festgelegt. Damit ist die Auslegung des Intervallbeobachters abgeschlossen und die ihn beschreibenden Differentialgleichungssysteme können vollständig angegeben werden. Das dynamische System zur Bestimmung der transformierten Zustandsintervalle ist dabei unter Verwendung von (7.7) und (7.8) in der nachfolgenden Gleichung (7.6) gegeben. Das Differentialgleichungssystem, welches aufgrund der Abhängigkeit von der aktuellen mechanischen Winkelgeschwindigkeit zur Laufzeit numerisch gelöst wird und zur Bestimmung der inversen Transformationsmatrix benötigt wird, ist in (7.9) aufgeführt. Ferner muss die inverse Transformation (4.7) implementiert werden, um einen Zusammenhang zwischen den geschätzten Intervallen im  $z$ -Koordinatensystem und den Intervallen für den Statorstromraumzeiger und den Magnetisierungsstromraumzeiger herzustellen.

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{\bar{z}}_1(t) \\ \dot{\bar{z}}_2(t) \\ \dot{\bar{z}}_3(t) \\ \dot{\bar{z}}_4(t) \\ \dot{\underline{z}}_1(t) \\ \dot{\underline{z}}_2(t) \\ \dot{\underline{z}}_3(t) \\ \dot{\underline{z}}_4(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_r}{L_h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{R_r}{L_h} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_r}{L_h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_r}{L_h} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{z}_1(t) \\ \bar{z}_2(t) \\ \bar{z}_3(t) \\ \bar{z}_4(t) \\ \underline{z}_1(t) \\ \underline{z}_2(t) \\ \underline{z}_3(t) \\ \underline{z}_4(t) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{\tilde{\mathbf{B}}}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \\ \underline{\mathbf{u}}_{\tilde{\mathbf{B}}}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}}_{\tilde{\mathbf{L}}}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \\ \underline{\mathbf{y}}_{\tilde{\mathbf{L}}}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \end{bmatrix} \quad (7.6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\tilde{\mathbf{B}}}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \end{bmatrix} = \mathbf{P}(t) \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{L_{\sigma,s}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{\sigma,s}} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{u}_s(t)] \quad (7.7)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{\tilde{\mathbf{L}}}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \end{bmatrix} = \mathbf{P}(t) \cdot \begin{bmatrix} -\frac{R_r+R_s}{L_{\sigma,s}} - \epsilon & 0 \\ 0 & -\frac{R_r+R_s}{L_{\sigma,s}} - \epsilon \\ \frac{R_r}{L_h} & 0 \\ 0 & \frac{R_r}{L_h} \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{i}_s(t)] \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \mathbf{P}^{-1}(t) &= \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & \frac{R_r}{L_{\sigma,s}} & \omega_l(t) \cdot \frac{L_h}{L_{\sigma,s}} \\ 0 & \epsilon & -\omega_l(t) \cdot \frac{L_h}{L_{\sigma,s}} & \frac{R_r}{L_{\sigma,s}} \\ 0 & 0 & -\frac{R_r}{L_h} & -\omega_l(t) \\ 0 & 0 & \omega_l(t) & -\frac{R_r}{L_h} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P}^{-1}(t) \\
 &- \mathbf{P}^{-1}(t) \cdot \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_r}{L_h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{R_r}{L_h} \end{bmatrix} \quad (7.9)
 \end{aligned}$$

Die konkrete Wahl des noch freien Entwurfsparameters  $\epsilon$  wird im Simulationskapitel 8 und dem Kapitel 9, in welchem Messergebnisse präsentiert werden, getroffen.

## 7.4 Auslegung eines transformationsbasierten Intervallbeobachters zur Berücksichtigung von Eingangs-, Ausgangs- und Parameterunsicherheiten für die Asynchronmaschine

Ziel dieses Abschnittes ist es, einen Intervallbeobachter zu berechnen, welcher die bisherigen Ein-/Ausgangsunsicherheiten um eine Parameterunsicherheit erweitert. Exemplarisch wird hierzu eine Unsicherheit des Rotorwiderstands  $R_r$  angenommen. Die Wahl fiel auf diesen Parameter, da er aufgrund von Temperatur- und Stromverdrängungseffekten in der Regel durch eine Online-Identifikation nachgeführt werden muss (siehe z. B. [AFA96] und [Koj09]) und von einem Fehler dieser Nachführung auszugehen ist. Beschrieben wird diese Unsicherheit durch

$$R_r \in [R_r, \bar{R}_r] = R_r^* + [-\Delta R_r, \Delta R_r] = R_r^* + [\Delta R_r] \quad (7.10)$$

mit dem Nominalrotorwiderstand  $R_r^*$  und dem symmetrischen Intervall  $[\Delta R_r]$ . Hieraus folgt für die Aufteilung der Dynamikmatrix gemäß (4.50)

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t)) \\
 [\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A(t))] &= \begin{bmatrix} -\frac{R_r^*+R_s}{L_{\sigma,s}} & 0 & \frac{R_r^*}{L_{\sigma,s}} & \omega_l(t) \cdot \frac{L_h}{L_{\sigma,s}} \\ 0 & -\frac{R_r^*+R_s}{L_{\sigma,s}} & -\omega_l(t) \cdot \frac{L_h}{L_{\sigma,s}} & \frac{R_r^*}{L_{\sigma,s}} \\ \frac{R_r^*}{L_h} & 0 & -\frac{R_r^*}{L_h} & -\omega_l(t) \\ 0 & \frac{R_r^*}{L_h} & \omega_l(t) & -\frac{R_r^*}{L_h} \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} \frac{[-\Delta R_r, \Delta R_r]}{L_{\sigma,s}} & 0 & \frac{[-\Delta R_r, \Delta R_r]}{L_{\sigma,s}} & 0 \\ 0 & \frac{[-\Delta R_r, \Delta R_r]}{L_{\sigma,s}} & 0 & \frac{[-\Delta R_r, \Delta R_r]}{L_{\sigma,s}} \\ \frac{[-\Delta R_r, \Delta R_r]}{L_h} & 0 & \frac{[-\Delta R_r, \Delta R_r]}{L_h} & 0 \\ 0 & \frac{[-\Delta R_r, \Delta R_r]}{L_h} & 0 & \frac{[-\Delta R_r, \Delta R_r]}{L_h} \end{bmatrix} \\
 &= [\Delta \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)])] \quad (7.11)
 \end{aligned}$$

An dieser Stelle sei der Hinweis gegeben, dass neben dem Rotorwiderstand alle weiteren Parameter mit einem hochgestellten Stern als Nominalparameter gekennzeichnet werden können. Da diese Parameter jedoch als exakt bekannt angenommen wurden, wurde zugunsten einer kompakteren Darstellung hierauf verzichtet.

Aus (7.11) kann direkt die im Rahmen der Überprüfung der Stabilität (siehe Annahme 4.7) verwendete Matrix  $\overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) = -\underline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)])$  abgelesen werden:

$$\overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) = \begin{bmatrix} \frac{\Delta R_r}{L_{\sigma,s}} & 0 & \frac{\Delta R_r}{L_{\sigma,s}} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta R_r}{L_{\sigma,s}} & 0 & \frac{\Delta R_r}{L_{\sigma,s}} \\ \frac{\Delta R_r}{L_h} & 0 & \frac{\Delta R_r}{L_h} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta R_r}{L_h} & 0 & \frac{\Delta R_r}{L_h} \end{bmatrix}. \quad (7.12)$$

Nach der Definition dieser Matrizen kann nun die Gültigkeit der in Satz 4.3 geforderten Annahmen überprüft werden. Wie im vorherigen Abschnitt bereits erläutert, ist die in Annahme 3.2 geforderte Beschränktheit der Elemente der Systemmatrizen des ASM-Modells gegeben. Die Forderung, dass für diese Systemparameter, falls sie in der Dynamikmatrix auftreten, zumindest beschränkte Intervalle bekannt sind, und falls sie in der Eingangs- und Ausgangsmatrix auftreten exakte Werte bekannt sind, ist für den unsicheren Rotorwiderstand ebenfalls erfüllt, wie an den Systemmatrizen der ASM in (6.3) gesehen werden kann<sup>22</sup>. Zur Sicherstellung der in Annahme 4.6 formulierten beschränkten Transformationsmatrix und ihrer Inversen muss bei dem hier gewählten Ansatz, wie im vorherigen Unterkapitel erläutert, Annahme 4.3 mit den Nominalparametern erfüllt sein. Aufgrund der offensichtlich gleichen Struktur der Matrizen  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t))$  und  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}(t))$  ist diese Annahme gemäß den Erläuterungen aus dem vorherigen Abschnitt erfüllt. Als letzte zu überprüfende Annahme bleibt damit Annahme 4.7. Aufgrund der Tatsache, dass die rechte Seite der enthaltenen Ungleichung (4.52) abhängig von der Transformationsmatrix  $\mathbf{P}(t)$  sowie von der inversen Transformationsmatrix  $\mathbf{W}(t)$  ist und deren zeitliche Verläufe von den a priori unbekanntenen, zeitvarianten Systemparametern abhängig sind, kann diese Annahme nicht unabhängig von den konkreten Szenarien überprüft werden. Daher wird die Gültigkeit dieser Annahme mit  $\lambda_{max}(\mathcal{F}_T) = -\frac{R_r^*}{L_h} = -\frac{161}{12} \approx -13,4$  im folgenden Kapitel simulativ gezeigt. Folgt man dem im vorherigen Abschnitt beschriebenen Intervallbeobachterentwurf unter Verwendung der Nominalparameter erhält man mit der Beobachtermatrix

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -\frac{R_r^* + R_s}{L_{\sigma,s}} - \epsilon & 0 \\ 0 & -\frac{R_r^* + R_s}{L_{\sigma,s}} - \epsilon \\ \frac{R_r^*}{L_h} & 0 \\ 0 & \frac{R_r^*}{L_h} \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

den Intervallbeobachter

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{z}}_1(t) \\ \dot{\bar{z}}_2(t) \\ \dot{\bar{z}}_3(t) \\ \dot{\bar{z}}_4(t) \\ \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \\ \dot{z}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_r^*}{L_h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{R_r^*}{L_h} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_r^*}{L_h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_r^*}{L_h} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{z}_1(t) \\ \bar{z}_2(t) \\ \bar{z}_3(t) \\ \bar{z}_4(t) \\ z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_{\bar{\mathbf{B}}}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \\ \mathbf{u}_{\bar{\mathbf{B}}}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}}_{\bar{\mathbf{L}}}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \\ \mathbf{y}_{\bar{\mathbf{L}}}(\boldsymbol{\theta}(t), t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t) \\ \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t) \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

<sup>22</sup> Hier sei erneut auf Fußnote 15 auf Seite 73 verwiesen, wonach auch unsichere Eingangs- und Ausgangsmatrizen berücksichtigt werden können, was im Fall der ASM eine unsichere statorseitige Streuinduktivität bedeuten würde.

mit (7.7),

$$[\mathbf{y}_{\check{L}}(\boldsymbol{\theta}(t), t)] = \mathbf{P}(t) \cdot \begin{bmatrix} -\frac{R_r^* + R_s}{L_{\sigma,s}} - \epsilon & 0 \\ 0 & -\frac{R_r^* + R_s}{L_{\sigma,s}} - \epsilon \\ \frac{R_r^*}{L_h} & 0 \\ 0 & \frac{R_r^*}{L_h} \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{i}_s(t)], \quad (7.15)$$

$$[\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t)] = \begin{bmatrix} \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t) \\ \underline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t) \end{bmatrix} \cdot (\overline{\mathbf{x}}^+(t) - \underline{\mathbf{x}}^-(t)), \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} & [\overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t)] \\ &= \mathbf{P}(t) \cdot \begin{bmatrix} -\frac{[-\Delta R_r, \Delta R_r]}{L_{\sigma,s}} & 0 & \frac{[-\Delta R_r, \Delta R_r]}{L_{\sigma,s}} & 0 \\ 0 & -\frac{[-\Delta R_r, \Delta R_r]}{L_{\sigma,s}} & 0 & \frac{[-\Delta R_r, \Delta R_r]}{L_{\sigma,s}} \\ \frac{[-\Delta R_r, \Delta R_r]}{L_h} & 0 & -\frac{[-\Delta R_r, \Delta R_r]}{L_h} & 0 \\ 0 & \frac{[-\Delta R_r, \Delta R_r]}{L_h} & 0 & -\frac{[-\Delta R_r, \Delta R_r]}{L_h} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.17)$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{P}^{-1}(t) &= \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & \frac{R_r^*}{L_{\sigma,s}} & \omega_l(t) \cdot \frac{L_h}{L_{\sigma,s}} \\ 0 & \epsilon & -\omega_l(t) \cdot \frac{L_h}{L_{\sigma,s}} & \frac{R_r^*}{L_{\sigma,s}} \\ 0 & 0 & -\frac{R_r^*}{L_h} & -\omega_l(t) \\ 0 & 0 & \omega_l(t) & -\frac{R_r^*}{L_h} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{P}^{-1}(t) \\ &- \mathbf{P}^{-1}(t) \cdot \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_r^*}{L_h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{R_r^*}{L_h} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Wie bereits im vorherigen Abschnitt des Entwurfs des Intervallbeobachters ohne berücksichtigte Parameterunsicherheiten erwähnt, wird die konkrete Wahl des noch freien Entwurfsparameters  $\epsilon$  im Simulationskapitel 8 und im Kapitel 9, in welchem Messergebnisse präsentiert werden, getroffen.

## 8 Simulationen

Ziel dieses Kapitels ist die Tauglichkeit der im vorherigen Kapitel für die ASM ausgelegten Intervallbeobachter simulativ nachzuweisen. Dazu soll zum einen gezeigt werden, dass die tatsächlichen Zustandsgrößen durch die geschätzten Intervalle eingeschlossen werden und zum anderen, dass die Intervallbreiten dieser Intervalle in einem akzeptablen Bereich liegen. Zur strukturierten Gliederung der durchgeführten Simulationen wird dieses Kapitel in die Unterkapitel Simulationsdesign, Simulation, Ergebnisse und Bewertung sowie einer Zusammenfassung unterteilt.

### 8.1 Simulationsdesign

Die für den Beobachterentwurf notwendige Voraussetzung, dass Intervalle  $[\mathbf{u}(t)]$ ,  $[\mathbf{y}(t)]$  und  $[\boldsymbol{\theta}(t)]$  existieren, wird in der Simulation auf verschiedene Weise abgebildet. Im Fall von  $[\mathbf{u}(t)]$  geschieht dies zunächst dadurch, dass angenommen wird, dass die tatsächliche Größe durch eine virtuelle Messung  $\mathbf{u}_m(t)$  mit einer in der in der Simulation frei einstellbaren Unsicherheit  $[\boldsymbol{\nu}_{u,m}(t)]$  bestimmt werden kann, sodass

$$\mathbf{u}(t) \in [\mathbf{u}(t)] = \mathbf{u}_m(t) + [\boldsymbol{\nu}_{u,m}(t)] \quad (8.1)$$

gilt. Des Weiteren wird das in Kapitel 6 vorgestellte Wechselrichtermodell zur Bestimmung von  $[\mathbf{u}(t)]$  herangezogen, wie bereits in Abschnitt 7.2 erläutert. Für die Ausgangsgrößen  $\mathbf{y}(t)$  werden, wie im Fall der Eingangunsicherheiten, virtuelle Messunsicherheiten  $[\boldsymbol{\nu}_y(t)]$  angenommen. Für die Parameterunsicherheiten wird ebenso zunächst eine beliebige Unsicherheit angenommen (vgl. (6.4)), woraus

$$\mathbf{y}(t) \in [\mathbf{y}(t)] = \mathbf{y}_m(t) + [\boldsymbol{\nu}_{y,m}(t)], \quad (8.2a)$$

$$\boldsymbol{\theta}(t) \in [\boldsymbol{\theta}(t)] = \boldsymbol{\theta}_m(t) + [\boldsymbol{\nu}_{\theta,m}(t)] \quad (8.2b)$$

folgt.

Die mechanische Winkelgeschwindigkeit wird als frei wählbar angenommen und somit auf ein mechanisches Modell der Maschine einschließlich Last verzichtet. Motiviert ist dieses Vorgehen durch den in Kapitel 9 vorgestellten Prüfstand, der auch im realen Betrieb eine nahezu freie Vorgabe der mechanischen Winkelgeschwindigkeit ermöglicht. Die Statorspannungssollwerte werden über eine vom Projektpartner implementierte Statorstromregelung, deren Sollwerte wiederum durch eine Look-Up-Tabelle aus dem gewünschten Drehmoment, der aktuellen Zwischenkreisspannung sowie der aktuellen Drehzahl erzeugt werden, bestimmt. Da sie für die Schätzung nicht relevant ist, soll diese Regelung an dieser Stelle nicht weiter ausgeführt werden. Die so bestimmten

Statorspannungssollwerte  $\mathbf{u}_{s,w}$  werden anschließend über ein ideales Wechselrichter-Average-Modell mit Modulator (entspricht in der Simulation dem oberen blauen Block in Abbildung 7.1) an das Maschinenmodell, das aus der Implementierung von (1.1) mit (6.3) besteht, weitergegeben.

## 8.2 Simulation

Hinsichtlich dem Simulationsszenario sollen zunächst das gewählte Drehmomentprofil und das gewählte Winkelgeschwindigkeitsprofil vorgestellt werden. Um das Verhalten der Intervallbeobachter bei verschiedenen Drehmomenten zu zeigen, wurde für das Soll-drehmoment ein treppenförmiges Profil (Abbildung 8.1) gewählt. Die einzelnen Stufen liegen bei 1,5 N m, 3,0 N m, 4,5 N m und 6,3 N m beziehungsweise ca. 24 %, ca. 48 %, ca. 71 % und 100 % des Nennmomentes (siehe Anhang E.3). Die starken Abweichungen im Bereich des Überganges zwischen zwei Drehmomentsollwerten rühren von dem übernommenen Stromregler. Da in dieser Arbeit nicht die Regelung der Maschine behandelt wird, sondern die Zustandsschätzung, stellen solche dynamischen Vorgänge hinsichtlich der Validierung der Ansätze jedoch sogar einen Vorteil dar.

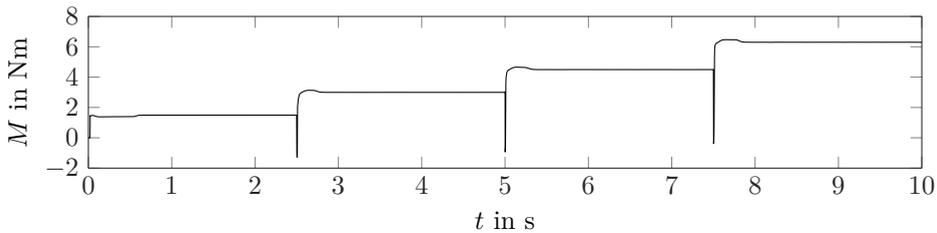
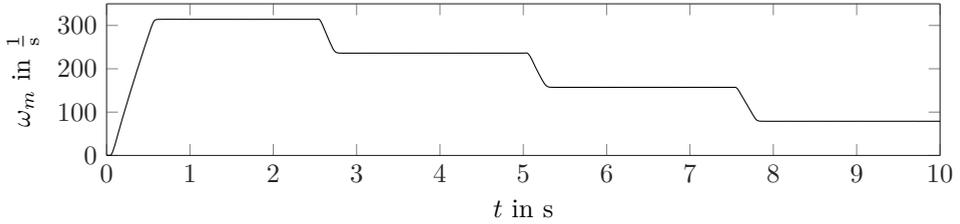


Abbildung 8.1: Drehmomentprofil (Simulation)

Für das Winkelgeschwindigkeitsprofil (Abbildung 8.2) wurde ebenfalls ein treppenförmiges Profil verwendet, allerdings nicht mit sprungförmigen Änderungen, sondern mit Rampen der Steigung  $\dot{n}(t) = 5000 \frac{1}{\text{min}\cdot\text{s}}$  beziehungsweise  $\dot{n}(t) = -3000 \frac{1}{\text{min}\cdot\text{s}}$ . Die einzelnen Stufen entsprechen einer Drehzahl von  $3000 \frac{1}{\text{min}}$ ,  $2250 \frac{1}{\text{min}}$ ,  $1500 \frac{1}{\text{min}}$  und  $750 \frac{1}{\text{min}}$  beziehungsweise 100 %, 75 %, 50 % und 25 % der Nenn Drehzahl (siehe Anhang E.3). Diese abweichende Gestalt, verglichen mit dem Drehmomentprofil, wurde ausschließlich deshalb verwendet, um zu zeigen, dass die Intervallbeobachteransätze nicht nur in speziellen Betriebspunkten bestimmungsgemäß funktionieren. Man erhält somit durch Kombination der beiden Profile Betriebspunkte mit

- konstantem Drehmoment und
  - konstanter Drehzahl,
  - veränderlicher Drehzahl,
- veränderlichen Drehmoment und veränderlicher Drehzahl.



**Abbildung 8.2:** Winkelgeschwindigkeitsprofil (Simulation)

Mit diesem Szenario erhält man  $2 \cdot \|\mathbf{P}(t) \cdot \overline{\Delta \mathbf{A}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)]) \cdot \mathbf{W}(t)\|_2 < 6,5$ , womit Annahme 4.7 durch  $\lambda_{max}(\mathcal{F}_T) \approx -13,4$  erfüllt ist.

Für die konstanten Größen gilt, dass die Zwischenkreisspannung auf 48 V gesetzt wird und die Systemparameter gemäß Tabelle 7.1 gewählt werden.

Hinsichtlich der gewählten Unsicherheiten in (8.1) und (8.2) muss zum einen zwischen den Intervallbeobachtern unterschieden werden und zum anderen, ob das Wechselrichter-Intervallmodell aus Kapitel 6 verwendet wird oder nicht. Für die jeweiligen Fälle gilt:

- Intervallbeobachter zur Berücksichtigung von Ein-/Ausgangsunsicherheiten
  - ohne Wechselrichtermodell:
    - \*  $\mathbf{u}_m(t) = \mathbf{u}(t)$  in (8.1)
    - \*  $[\boldsymbol{\nu}_{u,m}(t)] = [-\frac{1}{100} \cdot \mathbf{u}(t), \frac{1}{100} \cdot \mathbf{u}(t)]$  in (8.1)
    - \*  $\mathbf{y}_m(t) = \mathbf{y}(t)$  in (8.2)
    - \*  $[\boldsymbol{\nu}_{y,m}(t)] = [-\frac{1}{100} \cdot \mathbf{y}(t), \frac{1}{100} \cdot \mathbf{y}(t)]$  in (8.2)
  - mit Wechselrichtermodell:
    - \*  $[\mathbf{u}(t)] = [\mathbf{u}_{pn,123,av}(t)]$  definiert in (6.31) mit (6.36a)
    - \*  $\mathbf{y}_m(t) = \mathbf{y}(t)$  in (8.2)
    - \*  $[\boldsymbol{\nu}_{y,m}(t)] = [-\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}]$  in (8.2) mit  $\kappa_i = 0,5 \text{ A}, i \in \{1, 2, 3\}$
- Intervallbeobachter zur Berücksichtigung von Eingangs-, Ausgangs- und Parameterunsicherheiten
  - ohne Wechselrichtermodell:
    - \*  $\mathbf{u}_m(t) = \mathbf{u}(t)$  in (8.1)
    - \*  $[\boldsymbol{\nu}_{u,m}(t)] = [-\frac{1}{100} \cdot \mathbf{u}(t), \frac{1}{100} \cdot \mathbf{u}(t)]$  in (8.1)
    - \*  $\mathbf{y}_m(t) = \mathbf{y}(t)$  in (8.2)
    - \*  $[\boldsymbol{\nu}_{y,m}(t)] = [-\frac{1}{100} \cdot \mathbf{y}(t), \frac{1}{100} \cdot \mathbf{y}(t)]$  in (8.2)
    - \*  $[R_r] = [\frac{99}{100} \cdot R_r, \frac{101}{100} \cdot R_r]$  in (8.2)
  - mit Wechselrichtermodell:

- \*  $[\mathbf{u}(t)] = [\mathbf{u}_{pn,123,av}(t)]$  definiert in (6.31) mit (6.36a)
- \*  $\mathbf{y}_m(t) = \mathbf{y}(t)$  in (8.2)
- \*  $[\boldsymbol{\nu}_{y,m}(t)] = [-\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}]$  in (8.2) mit  $\kappa_i = 0,5 \text{ A}, i \in \{1, 2, 3\}$
- \*  $[R_r] = [\frac{99}{100} \cdot R_r, \frac{101}{100} \cdot R_r]$  in (8.2)

Damit wurde im Fall der Berücksichtigung des Wechselrichter-Intervallmodells aus Kapitel 6 die Ein-/Ausgangsunsicherheit gleich der in jenem Kapitel beschriebenen Unsicherheit bei der Messung gewählt und die Parameterunsicherheit zu  $\pm 1\%$  festgelegt. Im Fall einer direkt Ermittlung der Eingangsgrößen ohne Wechselrichter-Intervallmodell wurde sowohl die Eingangs- als auch die Ausgangsunsicherheit ebenfalls zu  $\pm 1\%$  festgelegt.

Als Anfangswerte der Beobachter wurden  $\mathbf{z}^\top(0) = [-5 \text{ A} \quad -5 \text{ A} \quad -5 \text{ A} \quad -5 \text{ A}]$  und  $\bar{\mathbf{z}}^\top(0) = [5 \text{ A} \quad 5 \text{ A} \quad 5 \text{ A} \quad 5 \text{ A}]$  gewählt, was den tatsächlichen Anfangswert  $\mathbf{x}^\top(0) = [0 \text{ A} \quad 0 \text{ A} \quad 0 \text{ A} \quad 0 \text{ A}] = \mathbf{z}^\top(0)$  einschließt.

Der noch freie Entwurfparameter  $\epsilon$  in (7.5), (7.6), (7.8), (7.9), (7.13), (7.14), (7.15) und (7.18) wurde für die verschiedenen Ausprägungen heuristisch wie folgt festgelegt:

- **Konfiguration 1** (Kein Wechselrichter-Intervallmodell und keine Parameterunsicherheit):  $\epsilon = -19100 - \frac{R_r}{L_h}$
- **Konfiguration 2** (Wechselrichter-Intervallmodell und keine Parameterunsicherheit):  $\epsilon = -12600 - \frac{R_r}{L_h}$
- **Konfiguration 3** (Kein Wechselrichter-Intervallmodell und Parameterunsicherheit):  $\epsilon = -19100 - \frac{R_r^*}{L_h}$
- **Konfiguration 4** (Wechselrichter-Intervallmodell und Parameterunsicherheit):  $\epsilon = -12600 - \frac{R_r^*}{L_h}$

Wie Kapitel 9 zeigen wird, sind derart weit links in der komplexen Ebene platzierte Eigenwerte auch bei Berücksichtigung rauschbehafteter Messwerte zielführend.

## 8.3 Ergebnisse

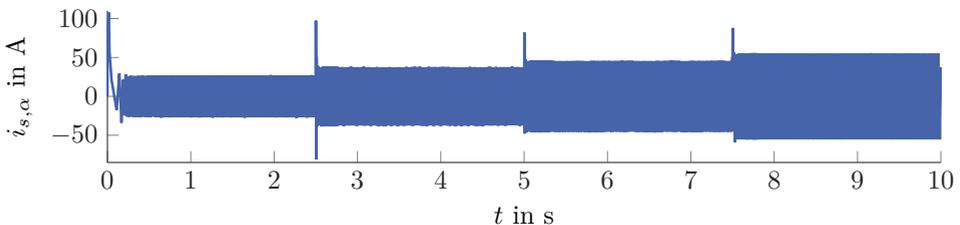
Bevor in diesem Abschnitt die in der Simulation erzielten Ergebnisse präsentiert werden, sei darauf hingewiesen, dass die in den Definitionen 6.3, 6.4 und 6.5 festgelegten Ergebnisse bei der Validierung einer Intervallschätzung bei dieser simulativen Validierung nicht zum Tragen kommen, da in der Simulation die tatsächlich einzuschließende Größe exakt bekannt ist. Damit muss nur überprüft werden, ob diese Größe im ermittelten Intervall liegt. Aufgründessen werden in diesem Ergebnisabschnitt nicht die fiktiven Messintervalle mit den geschätzten Intervallen dargestellt, sondern die tatsächlichen Größen mit den geschätzten Intervallen.

Um eine Bewertung der Ergebnisse zu ermöglichen und gleichzeitig eine kompakte Darstellung zu erzielen, sollen ausschließlich für Konfiguration 1 folgende drei Abbildungen gezeigt werden:

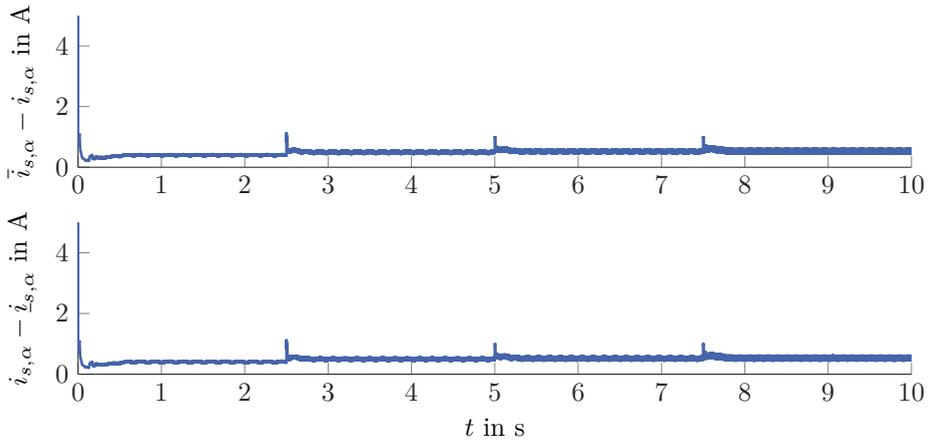
- Zeitlicher Verlauf von  $i_{s,\alpha}(t)$  und  $i_{\mu,\alpha}(t)$  über dem gesamten betrachteten Zeitintervall  $t \in [0, 10]$  s
- Abweichungen der geschätzten Intervallgrenzen zur tatsächlichen Zustandsgröße  $\bar{e}_{s,\alpha}(t) = \bar{i}_{s,\alpha}(t) - i_{s,\alpha}(t)$ ,  $\underline{e}_{s,\alpha}(t) = i_{s,\alpha}(t) - \underline{i}_{s,\alpha}(t)$ ,  $\bar{e}_{\mu,\alpha}(t) = \bar{i}_{\mu,\alpha}(t) - i_{\mu,\alpha}(t)$  und  $\underline{e}_{\mu,\alpha}(t) = i_{\mu,\alpha}(t) - \underline{i}_{\mu,\alpha}(t)$  über dem gesamten betrachteten Zeitintervall  $t \in [0, 10]$  s
- Einschwingvorgang von  $i_{s,\alpha}(t)$ ,  $i_{\mu,\alpha}(t)$  sowie deren Intervallschätzung mit  $t \in [0, 500]$   $\mu\text{s}$  für  $i_{s,\alpha}(t)$  und  $t \in [0, 100]$  ms für  $i_{\mu,\alpha}(t)$

Die Wahl fiel hierbei auf eine aus Messgrößen berechenbare Zustandsgröße ( $i_{s,\alpha}(t)$ ) und eine nicht messbare Zustandsgröße ( $i_{\mu,\alpha}(t)$ ). Der Vollständigkeit halber sind die Ergebnisse der weiteren Zustandsgrößen in Anhang G aufgeführt. Ebenso sind die qualitativ ähnlichen Ergebnisse der anderen Konfigurationen in Anhang G zu finden.

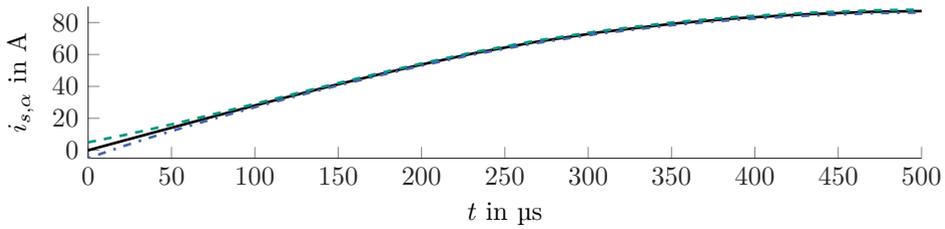
Die Darstellung des zeitlichen Verlaufes der Zustandsgrößen über das gesamte Zeitintervall dient hierbei nicht dazu, den zeitlichen Verlauf exakt nachzuvollziehen, sondern fungiert als Referenz für den Verlauf der Intervallbreite, um diese bewerten zu können. Die Signale  $\bar{e}_{s,\alpha}(t)$ ,  $\underline{e}_{s,\alpha}(t)$ ,  $\bar{e}_{\mu,\alpha}(t)$  und  $\underline{e}_{\mu,\alpha}(t)$  erfüllen zwei Zwecke. Zum einen kann an diesen Signalen abgelesen werden, ob die tatsächlichen Zustandsgrößen durch die Intervalle eingeschlossen werden, was der Fall ist, wenn die Signale nichtnegativ sind und zum anderen kann aus ihnen mit  $\bar{e}_{s,\alpha}(t) + \underline{e}_{s,\alpha}(t) = \bar{i}_{s,\alpha}(t) - \underline{i}_{s,\alpha}(t)$  beziehungsweise  $\bar{e}_{\mu,\alpha}(t) + \underline{e}_{\mu,\alpha}(t) = \bar{i}_{\mu,\alpha}(t) - \underline{i}_{\mu,\alpha}(t)$  die Breite des Schätzintervalls abgelesen werden. Die zusätzliche Darstellung des Einschwingvorgangs soll einen Eindruck des dynamischen Verhaltens des Intervallbeobachters geben.



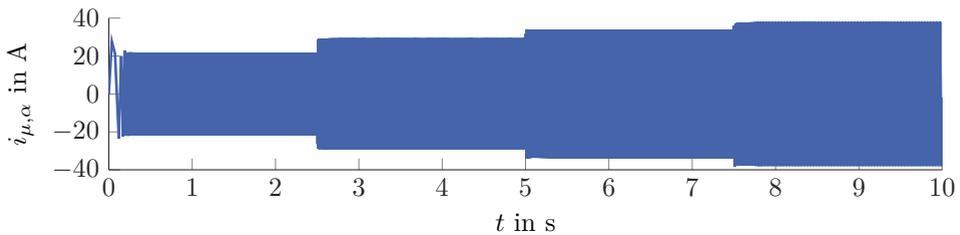
**Abbildung 8.3:** Simulation (Konfiguration 1): Zeitlicher Verlauf von  $i_{s,\alpha}(t)$  für das gesamte Szenario



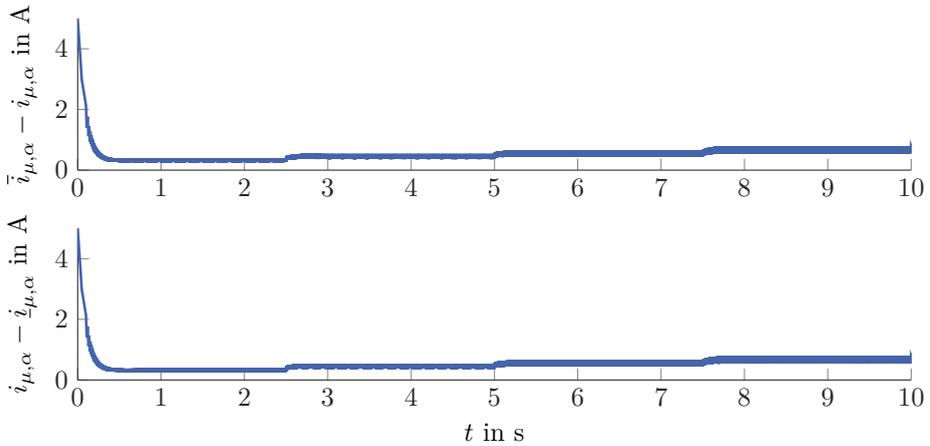
**Abbildung 8.4:** Simulation (Konfiguration 1): Zeitlicher Verlauf von  $\bar{e}_{s,\alpha}(t)$  und  $\underline{e}_{s,\alpha}(t)$  für das gesamte Szenario



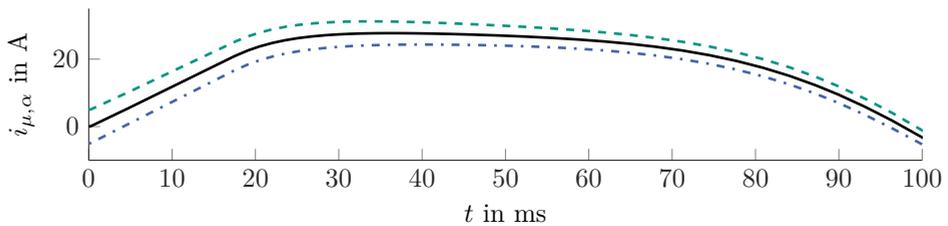
**Abbildung 8.5:** Simulation (Konfiguration 1): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von  $i_{s,\alpha}(t)$  (Untergrenze: blau strichpunktiert, Obergrenze: grün gestrichelt, tatsächliche Zustandsgröße: schwarz)



**Abbildung 8.6:** Simulation (Konfiguration 1): Zeitlicher Verlauf von  $i_{\mu,\alpha}(t)$  für das gesamte Szenario



**Abbildung 8.7:** Simulation (Konfiguration 1): Zeitlicher Verlauf von  $\bar{e}_{\mu,\alpha}(t)$  und  $\underline{e}_{\mu,\alpha}(t)$  für das gesamte Szenario



**Abbildung 8.8:** Simulation (Konfiguration 1): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von  $i_{\mu,\alpha}(t)$  (Untergrenze: blau strichpunktiert, Obergrenze: grün gestrichelt, tatsächliche Zustandsgröße: schwarz)

In den Tabellen G.1, G.2, G.3 und G.4 in Anhang G sind die mittleren Intervallbreiten der Schätzung für Zeitintervalle mit näherungsweise konstanter Intervallbreite gezeigt. Diese erlauben zum einen eine Aussage über die Auswirkung der Berücksichtigung einer Unsicherheit des Rotorwiderstands und zum anderen einen Vergleich zwischen der einprozentigen Unsicherheit der Eingangsgrößen und der Verwendung des Wechselrichter-Intervallmodells. Die Zeitintervalle entsprechen im Wesentlichen den Zeiträumen mit konstantem Drehmoment und konstanter Drehzahl. Ergänzend zu diesen Tabellen, welche eine Auskunft über die Absolutwerte der Intervallbreiten der Schätzwerte und der Amplituden der zu schätzenden Signale geben, sollen nachfolgende Tabellen durch eine Angabe die Angabe einer relativen Intervallbreite in Form des Quotienten des Mittelwertes der Intervallbreite und des Mittelwertes der Amplitude eine schnelle Bewertung der Ergebnisse ermöglichen.

**Tabelle 8.1:** Simulation: Quotient der Mittelwerte der Intervallbreite von  $[i_{s,\alpha}(t)]$  aus Tabelle G.1 und der entsprechenden mittleren Amplitude von  $i_{s,\alpha}(t)$  aus Tabelle G.5 in Abhängigkeit der Konfiguration und des betrachteten Zeitintervalls

Konfiguration	$t \in [0,5 \text{ s}, 2 \text{ s}]$	$t \in [3 \text{ s}, 4,5 \text{ s}]$	$t \in [5,5 \text{ s}, 7 \text{ s}]$	$t \in [8 \text{ s}, 9,5 \text{ s}]$
1	3,2 %	2,8 %	2,4 %	2,0 %
2	13,5 %	8,8 %	6,6 %	5,0 %
3	4,5 %	3,8 %	3,1 %	2,4 %
4	15,8 %	10,4 %	7,7 %	5,5 %

**Tabelle 8.2:** Simulation: Quotient der Mittelwerte der Intervallbreite von  $[i_{s,\beta}(t)]$  aus Tabelle G.2 und der entsprechenden mittleren Amplitude von  $i_{s,\beta}(t)$  aus Tabelle G.5 in Abhängigkeit der Konfiguration und des betrachteten Zeitintervalls

Konfiguration	$t \in [0,5 \text{ s}, 2 \text{ s}]$	$t \in [3 \text{ s}, 4,5 \text{ s}]$	$t \in [5,5 \text{ s}, 7 \text{ s}]$	$t \in [8 \text{ s}, 9,5 \text{ s}]$
1	2,8 %	2,5 %	2,1 %	1,8 %
2	12,2 %	7,9 %	5,9 %	4,4 %
3	4,2 %	3,5 %	2,8 %	2,1 %
4	14,5 %	9,5 %	7,0 %	4,9 %

**Tabelle 8.3:** Simulation: Quotient der Mittelwerte der Intervallbreite von  $[i_{\mu,\alpha}(t)]$  aus Tabelle G.3 und der entsprechenden mittleren Amplitude von  $i_{\mu,\alpha}(t)$  aus Tabelle G.5 in Abhängigkeit der Konfiguration und des betrachteten Zeitintervalls

Konfiguration	$t \in [0,5 \text{ s}, 2 \text{ s}]$	$t \in [3 \text{ s}, 4,5 \text{ s}]$	$t \in [5,5 \text{ s}, 7 \text{ s}]$	$t \in [8 \text{ s}, 9,5 \text{ s}]$
1	3,2 %	3,3 %	3,4 %	3,7 %
2	9,6 %	7,0 %	5,9 %	5,3 %
3	8,1 %	8,3 %	8,4 %	9,0 %
4	14,9 %	12,1 %	11,1 %	10,7 %

**Tabelle 8.4:** Simulation: Quotient der Mittelwerte der Intervallbreite von  $[i_{\mu,\beta}(t)]$  aus Tabelle G.4 und der entsprechenden mittleren Amplitude von  $i_{\mu,\beta}(t)$  aus Tabelle G.5 in Abhängigkeit der Konfiguration und des betrachteten Zeitintervalls

Konfiguration	$t \in [0,5 \text{ s}, 2 \text{ s}]$	$t \in [3 \text{ s}, 4,5 \text{ s}]$	$t \in [5,5 \text{ s}, 7 \text{ s}]$	$t \in [8 \text{ s}, 9,5 \text{ s}]$
1	3,2 %	3,3 %	3,4 %	3,7 %
2	9,6 %	7,0 %	5,9 %	5,3 %
3	8,1 %	8,3 %	8,4 %	9,0 %
4	14,9 %	12,1 %	11,1 %	10,7 %

## 8.4 Bewertung

Die Bewertung der gezeigten Simulationsergebnisse erfolgt in vier Unterabschnitten. Zunächst wird analysiert, ob das dynamische System, das zur Zustandsschätzung der ASM entworfen wurde, in der Simulation die notwendigen Eigenschaften zeigt. Anschließend werden Aussagen zur Konvergenzgeschwindigkeit und der erzielten Intervallbreite getroffen und zum Abschluss die Ergebnisse der vier Konfigurationen verglichen.

### 8.4.1 Notwendige Eigenschaften

Gemäß Definition 2.1 müssen die Verläufe der Beobachterfehler nichtnegativ und beschränkt sein. Betrachtet man hierzu die Verläufe aller Beobachterfehler für sämtliche Konfigurationen in den Abbildungen 8.4, G.2, 8.7, G.5, G.7, G.9, G.11, G.13, G.15, G.17, G.19, G.21, G.23, G.25, G.27 und G.29, wird sofort ersichtlich, dass sowohl die Positivität als auch die Beschränktheit für jede Konfiguration gegeben ist.

### 8.4.2 Konvergenzgeschwindigkeit

Die Bewertung der Konvergenzgeschwindigkeit der Beobachterfehler soll anhand von  $\bar{e}_{s,\alpha}$  und  $\bar{e}_{\mu,\alpha}$  aus Konfiguration 1 ausgeführt werden (Abbildung 8.4 und 8.7), da bei Betrachtung der übrigen Beobachterfehler für die Statorstromkomponenten und Magnetisierungsstromkomponenten ersichtlich wird, dass diese sich ähnlich verhalten. Für die Statorstromkomponenten ist dabei ein sehr schnelles Abklingen des Anfangsfehlers von 5 A auf 0,7 A in ca. 200  $\mu$ s zu beobachten, während dieser Abklingvorgang bei den Magnetisierungsstromkomponenten ca. 180 ms in Anspruch nimmt. Dass dieses Konvergenzverhalten zufriedenstellend ist, wird auch daran ersichtlich, dass die Dynamik des Intervallbeobachters auch bei hohen Winkelgeschwindigkeiten ausreichend ist, um die tatsächlichen Zustandsgrößen mit einer ausreichend kleinen Intervallbreite einzuschließen. Dennoch soll an dieser Stelle eine Aussage getroffen werden, ob ein schnelleres Abklingen des Anfangsfehlers erzielt werden kann. Betrachtet wird hierzu die bei der Beobachterausslegung verwendete Matrix  $\mathbf{F}_z$  (siehe (7.6) und (4.9)), welche entscheidend für die Beobachterfehlerdynamiken (4.19) und (4.20) beziehungsweise (4.57) ist. An dieser Matrix wird ersichtlich, dass die beiden Einträge, welche das dynamische Verhalten der Beobachterfehler der Magnetisierungsstromkomponenten beeinflussen, durch die Parameter des zu schätzenden Systems fest mit  $-\frac{R_r}{L_h}$  vorgegeben sind. Der freie Entwurfparameter  $\epsilon$  kann jedoch beliebig gewählt werden mit der einzigen Einschränkung, dass er kleiner als  $-\frac{R_r}{L_h}$  sein muss.

Mit Blick auf die Beobachtermatrix in (7.13) muss jedoch festgehalten werden, dass  $\epsilon$  betragsmäßig nicht beliebig groß gewählt werden sollte, da sonst die Einträge der Beobachtermatrix betragsmäßig groß werden. Dies hätte zur Folge, dass in (4.19) und (4.20) die Variablen  $\mathbf{y}_u^*(t)$  und  $\mathbf{y}_i^*(t)$  große Werte annehmen. In (4.57) gilt dies für die Differenz  $\check{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_C(t), t) \cdot [\mathbf{y}(t)] - \check{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_C(t), t) \cdot \mathbf{y}(t)$  und die Differenz

$\check{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_C(t), t) \cdot \mathbf{y}(t) - \check{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), \boldsymbol{\theta}_C(t), t) \cdot [\mathbf{y}(t)]$ . Auch wenn dies im Hinblick auf die Konvergenzgeschwindigkeit nicht problematisch erscheint, kann es die Intervallbreite vergrößern. Daher muss an dieser Stelle ein Kompromiss zwischen Konvergenzgeschwindigkeit und Intervallbreite getroffen werden.

### 8.4.3 Erzielte Intervallbreiten

Zur Bewertung der Intervallbreiten der Schätzergebnisse ist zunächst zu sagen, dass diese losgelöst von der geplanten Verwendung des Intervallbeobachters nicht zu leisten ist. Daher soll als Anwendungsbeispiel des Intervallbeobachters eine konsistenzbasierte Fehlerdiagnose herangezogen werden, welche in der Masterarbeit [Fug16] untersucht wurde. Selbst mit einer größeren Unsicherheit von  $\pm 1,5\%$  der Ein-/Ausgangsgrößen unter Berücksichtigung einer minimalen Unsicherheit von  $\pm 50$  mV der Eingangsspannungen bzw.  $\pm 50$  mA der Ausgangsströme konnte beispielsweise ein fünfprozentiger Fehler der Drehzahlmessung detektiert werden. Daraus kann selbstverständlich keine Anwendbarkeit für jede Problemstellung gefolgert werden. Insbesondere aufgrund der Tatsache, dass noch keine intervallbasierten Regelungsverfahren für die ASM existieren, deutet die Einsetzbarkeit zur Fehlerdiagnose jedoch die praktische Anwendbarkeit an.

### 8.4.4 Vergleich der verschiedenen Konfigurationen

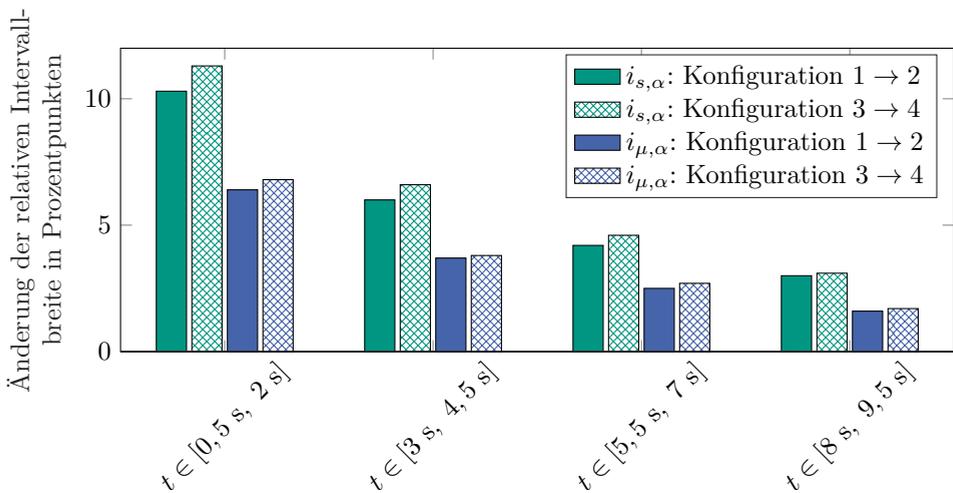
Abschließend folgt ein Vergleich der verschiedenen Konfigurationen. Das Hauptaugenmerk ist dabei auf die Auswirkung des Wechselrichter-Intervallmodells und auf die Auswirkung einer Parameterunsicherheit zu richten. Für ersteres müssen dazu die Konfigurationen 1 und 2 beziehungsweise 3 und 4 verglichen werden, während für letzteres die Konfigurationen 1 und 3 beziehungsweise 2 und 4 verglichen werden. Aufgrund der Tatsache, dass sich ein Vergleich von Konfiguration 1 und 4, welche die Konfigurationen mit den kleinsten und größten Unsicherheiten darstellen, aus dem Vergleich von Konfiguration 1 und 2 sowie 2 und 4 zusammensetzen lässt, soll er an dieser Stelle ebenfalls nicht ausgeführt werden. Wie schon in den vorangegangenen Abschnitten sollen hierbei nur die  $\alpha$ -Komponente des Statorstroms und die  $\alpha$ -Komponente des Magnetisierungsstroms betrachtet werden.

Bei allen Erläuterungen ist zu beachten, dass aufgrund der Eigenschaft von  $\mathbf{W}(t)$ , dass die ersten beiden Spalten denen einer Einheitsmatrix gleichen, die Schätzwerte von  $z_1(t)$  und  $z_2(t)$  bei der Rücktransformation keine Auswirkung auf die Schätzwerte der Magnetisierungsstromkomponenten haben.

#### Auswirkung des Wechselrichter-Intervallmodells

Vergleicht man die Ergebnisse, die bei der Nachbildung der Statorspannungen durch das Wechselrichter-Intervallmodell erzielt wurden mit denen, die mit einer fiktiven Messung der Statorspannungen mit einer einprozentigen Unsicherheit erzielt wurden, so wird

schnell ersichtlich, dass bei Verwendung des Modells eine breitere Intervalleinschließung erzielt wird. Bei Betrachtung von Abbildung 8.9 ist zu erkennen, dass gerade bei der Statorstromkomponente zu Beginn eine Verbreiterung des Schätzintervalls zwischen ca. 10 und 11 Prozentpunkten auftritt, welche mit fortschreitender Simulationsdauer auf ca. 3 Prozentpunkten abfällt. Die Konfigurationen, welche eine Parameterunsicherheit beinhalten, weisen insgesamt einen geringfügig stärkeren Anstieg auf. Bei der betrachteten Magnetisierungsstromkomponente ist ebenfalls ein relativer Intervallbreitenanstieg zu beobachten, welcher sich mit fortschreitender Simulationszeit ebenfalls reduziert und insgesamt schwächer ausfällt als der relative Intervallbreitenanstieg der Statorstromkomponente.



**Abbildung 8.9:** Simulation: Anstieg der relativen Intervallbreite (Quotient des Mittelwertes der Intervallbreite und des Mittelwertes der Amplitude) bei Erzeugung des Statorspannungsraumzeigerintervalls durch das Wechselrichter-Intervallmodell verglichen mit einer einprozentigen Messunsicherheit

Daher sind zwei Fragen zu klären:

- Wieso ist der relative Intervallbreitenanstieg zu Beginn der Simulation am größten und nimmt anschließend ab?
- Wieso wirkt sich die Verwendung des Wechselrichter-Intervallmodells auf die Statorstromkomponenten stärker aus als auf die Magnetisierungsstromkomponenten?

Zur Beantwortung der ersten Frage müssen zwei Eigenschaften der Konfigurationen 2 und 4, welche das Wechselrichter-Intervallmodell beinhalten, rekapituliert werden. Zum einen weist die Gleichung zur Bestimmung der Intervalle für die Statorspannungen (6.31) mit  $[\Delta U_f]$ , definiert in (6.34), eine Größe auf, die bereits bei sehr kleinen Strömen (siehe z. B. Abbildung 6.11) für eine Unsicherheit in den Statorspannungen

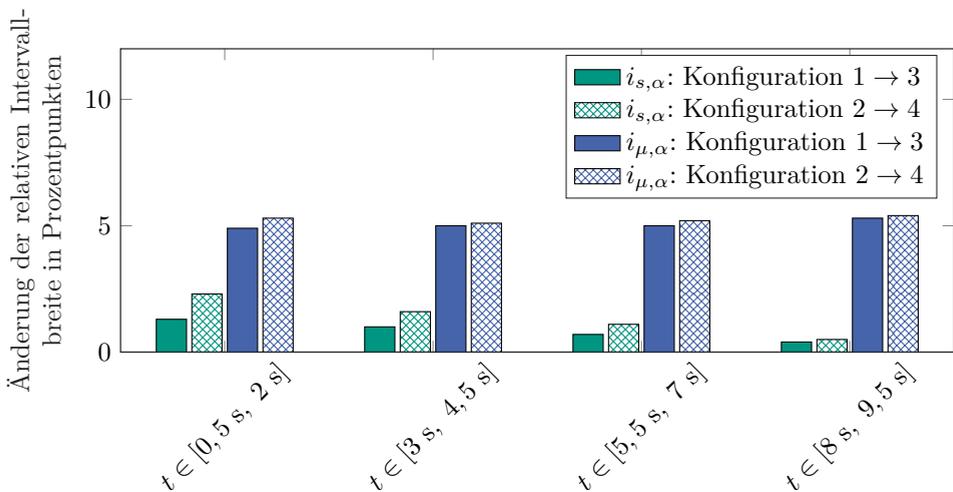
sorgt. Diese überwiegt bei kleinen Statorspannungen eine relative Unsicherheit, was also immer im Bereich um einen Nulldurchgang auftritt. Damit ist jedoch nur geklärt warum es zu einer größeren Intervallbreite kommen kann, aber nicht wieso die relative Zunahme im Verlauf der Simulation abnimmt. Die Lösung dieser Frage liefert Abbildung 8.3. An dieser Abbildung ist zu erkennen, dass die maximale Amplitude der  $\alpha$ -Komponente des Statorstroms und aufgrund der Amplitudeninvarianz der verwendeten Clarke-Transformation auch die Amplitude der Phasenströme unter Vernachlässigung der Ausreißer bei maximal ca. 50 A liegt. Mit einer relativen Unsicherheit von  $\pm 1\%$  erhält man also lediglich bei den Spitzenwerten die Unsicherheit von  $\pm 0,5$  A, welche bei Verwendung des Wechselrichter-Intervallmodells als zeitinvariante Unsicherheit angenommen wird. Da die Amplituden der Statorströme mit jedem der in Abbildung 8.9 betrachteten Abschnitte steigt, reduziert sich die Abweichung zwischen relativer und absoluter Unsicherheit, was die Erklärung der Reduzierung des relativen Intervallbreitenanstiegs liefert.

Da für das Wechselrichter-Intervallmodell Eingangsdaten von niedrigerer Qualität im Sinne einer breiteren Einschließung als  $\pm 1\%$  der Statorströme verwendet werden, ist es hier fiktiv angenommenen direkten Messung unterlegen. Jedoch ist auch bei gleicher Messgüte der Statorströme ein besseres Ergebnis einer direkten Spannungsmessung zu erwarten, da die Spannungskomponente  $[\Delta U_f]$ , welche aufgrund der Messunsicherheit der Statorströme auch bei kleinen Spannungen vorhanden ist, zu größeren Intervallbreiten der Schätzergebnisse eines Intervallbeobachters führt.

Offen ist jedoch die Frage, wieso die Magnetisierungsstromkomponenten vermeintlich schwächer von dieser größeren Statorspannungsunsicherheit betroffen sind. Dazu muss der Term  $[\mathbf{u}_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{\theta}(t), t)]$  in (7.6) bzw. (7.14) analysiert werden. Ausgeschrieben findet sich dieser in (7.7). Interessant ist außerdem die Struktur der in dieser Gleichung auftretenden Transformationsmatrix  $\mathbf{P}(t)$ . Aufgrund von  $\mathbf{W}_0 = \mathbf{I}_4$  und der Tatsache, dass nach (4.39) die ersten beiden Zeilen der Matrix  $\mathbf{W}(t)$  konstant bleiben, kann daraus geschlossen werden, dass auch die ersten beiden Spalten der Matrix  $\mathbf{P}(t)$  denen einer Einheitsmatrix gleichen. Aus dem Ergebnis der Multiplikation dieser Matrix mit der Eingangsmatrix wird sofort ersichtlich, dass die unsichere Eingangsspannung überhaupt keine direkte Auswirkung auf die Schätzung von  $z_3(t)$  und  $z_4(t)$  und damit auf die Schätzung der Magnetisierungsströme hat. Aufgrund der Diagonalstruktur der Dynamikmatrix in (7.6) gibt es bei nicht berücksichtigten Parameterunsicherheiten sogar nicht einmal eine indirekte Auswirkung über die Schätzung von  $z_1(t)$  und  $z_2(t)$ . Daraus kann die bemerkenswerte Eigenschaft geschlossen werden, dass die Güte der Eingangsgrößen keinerlei Auswirkung auf die Güte der Schätzung der Magnetisierungsstromkomponenten hat. Die in Abbildung 8.9 zu erkennende Verschlechterung beruht rein auf den bereits beschriebenen unterschiedlichen Fehlerannahmen zum Messfehler des Statorstroms. Durch die Rückkopplung der Schätzwerte auf die Schätzwerte von  $z_3(t)$  und  $z_4(t)$  durch  $[\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t)]$  in (7.14) gilt diese Aussage nicht bei Berücksichtigung von Parameterunsicherheiten. Hier findet eine indirekte Beeinflussung statt, was auch den erwähnten Effekt, dass sich die erhöhte Statorspannungsunsicherheit bei berücksichtigten Parameterunsicherheiten stärker auswirkt, mathematisch erklärt.

## Auswirkung der Rotorwiderstandsunsicherheit

Betrachtet man die Ergebnisse, welche mit und ohne die Rotorwiderstandsunsicherheit erzielt werden, wird anhand von Abbildung 8.10 deutlich, dass insbesondere die Güte der Magnetisierungsstromschätzung aufgrund der Berücksichtigung einer Rotorwiderstandsunsicherheit reduziert wird. Dabei ist auch hier zu erkennen, dass der Effekt bei der größeren Eingangsunsicherheit durch das Wechselrichter-Intervallmodell verstärkt wird. Die Erklärung hierzu ist im vorherigen Unterabschnitt zu finden. Während die Änderungen der relativen Intervallbreite bei der Statorstromkomponente von einem Wert zwischen ca. 0,5 und 2 Prozentpunkten im Verlauf liegt, beträgt jene der Magnetisierungsstromkomponente näherungsweise konstant ca. 5 Prozentpunkte.



**Abbildung 8.10:** Simulation: Anstieg der relativen Intervallbreite (Quotient des Mittelwertes der Intervallbreite und des Mittelwertes der Amplitude) bei Berücksichtigung einer einprozentigen Unsicherheit des Rotorwiderstands

Hieraus ergibt sich im Wesentlichen die Fragestellung, weshalb eine Unsicherheit des Rotorwiderstands eine größere Auswirkung auf die Schätzung der Magnetisierungsstromkomponenten hat als auf die Schätzung der Statorstromkomponenten.

Die Beantwortung gestaltet sich bei Analyse des Intervallbeobachters (7.14) schwierig. Die Intervallmatrix  $[\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t), t])]$ , definiert in (7.16), welche die Auswirkung der Parameterunsicherheit auf die Schätzwerte beschreibt, zeigt unter Berücksichtigung von (7.17), dass sich die Parameterunsicherheit sowohl auf die Statorstromschätzwerte als auch auf die Magnetisierungsstromschätzwerte direkt auswirken. Dies gilt auch unter Berücksichtigung der im vorherigen Abschnitt beschriebenen strukturellen Eigenschaften von  $\mathbf{P}(t)$ . Aufgründessen entfällt eine Argumentation rein über die Struktur der Beobachterdifferentialgleichung beziehungsweise spezieller Matrixelemente, die null sind. Daher ist dieses unterschiedliche Verhalten auf die Parametrierung des Intervallbeobachters zurückzuführen. Die Betrachtung von (7.6) und (7.14) liefert hierbei über

die Dynamikmatrix den Anhaltspunkt, dass durch die auf Seite 134 getroffene Wahl von  $\epsilon$  eine schnellere Konvergenz der Schätzwerte von  $z_1(t)$  und  $z_2(t)$  erzielt wird und damit die Anregung durch  $[\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_A^*(t), [\boldsymbol{\theta}_A(t)], t)]$  einen geringeren Einfluss hat, da sie schneller abklingt.

## 8.5 Zusammenfassung

Der Fokus dieses Kapitels lag auf einer simulativen Untersuchung des Verhaltens der im Kapitel 7 für die ASM entworfenen Intervallbeobachter. Basierend auf einem Drehmoment- und Drehzahlprofil, welche verschiedene Betriebspunkte und Übergänge verschiedener Dynamik zwischen selbigen lieferten, wurden die Schätzergebnisse untersucht. Ferner wurden vier Beobachterkonfigurationen angesetzt, die sich darin unterscheiden, ob eine direkte Spannungsmessung in der Simulation angenommen wird oder das Wechselrichter-Intervallmodell verwendet wird und ob eine Unsicherheit des Rotorwiderstands vorliegt oder nicht. Zentral bei der Analyse war hierbei der Nachweis, dass die tatsächlichen Zustandsgrößen durch die Intervallschätzung eingeschlossen werden, was für jede Zustandsgröße und jede Konfiguration der Fall war.

Das Ergebnis der Szenarien unter Verwendung des Wechselrichtermodells, welches für die Ströme in Übereinstimmung mit den realen Messdaten (siehe Kapitel 9) mit einer absoluten Statorstromunsicherheit von  $\pm 0,5$  A betrieben wird, ist, dass eine genauere Einschließung der Zustandsgrößen durch eine Messung der Statorströme und Statorspannungen mit einem relativen Fehler von  $\pm 1$  % erzielt werden kann. Im betrachteten Szenario könnte damit eine Reduzierung der relativen Intervallbreite um bis zu 11,3 Prozentpunkten bei den Statorstromkomponenten und 6,8 Prozentpunkten bei den Magnetisierungsstromkomponenten erzielt werden. In diesem Zusammenhang ist festzuhalten, dass der hier vorgestellte transformationsbasierte Intervallbeobachterentwurf für die ASM die praktisch relevante Eigenschaft hat, dass die Güte der Magnetisierungsstromschätzung bei nicht vorhandenen Parameterunsicherheiten lediglich von der Güte der Statorstrommessung abhängt.

Die Rotorwiderstandsunsicherheit erhöht die relative Intervallbreite der Statorstromschätzung um maximal 2,3 Prozentpunkte und hat einen größeren Einfluss auf die relative Intervallbreite der Magnetisierungsstromschätzung, welche um maximal 5,4 Prozentpunkte erhöht wird.

Auch unter Berücksichtigung der absoluten Zahlen in Anhang G kann somit zusammengefasst werden, dass die entworfenen Intervallbeobachter für die ASM auch im Zusammenspiel mit dem entwickelten Wechselrichter-Intervallmodell ein zufriedenstellendes Schätzergebnis liefern. Untermauert wird diese Aussage durch eine erfolgreiche Anwendung des Intervallbeobachteransatzes zur konsistenzbasierten Fehlerdiagnose in [Fug16].

## 9 Messungen

Nachdem im letzten Kapitel gezeigt werden konnte, dass die für die ASM ausgelegten Intervallbeobachter die gewünschte Einschließung mit einer guten Einschließungsgenauigkeit gewährleisten, soll das Ziel dieses Abschnittes der Nachweis dieser Leistungsfähigkeit im Betrieb mit Messdaten sein. Da eine ausführliche Analyse der Auswirkungen der Unsicherheiten keinen Mehrgewinn gegenüber den Simulationsstudien bringen würde, wird diese in diesem Abschnitt nicht durchgeführt. Ferner wird die Validierung nur unter der Annahme eines exakt bekannten Rotorwiderstands durchgeführt werden. Zur Strukturierung des Vorgehens soll zunächst auf den Prüfstandaufbau eingegangen werden und anschließend das durchgeführte Experiment skizziert werden. Die Beschreibung der Ergebnisse, deren Bewertung und eine kurze Zusammenfassung runden das Kapitel ab.

### 9.1 Experimentdesign

Zur Durchführung der experimentellen Validierung des Intervallbeobachters wurde ein Prüfstand der Daimler AG, dessen wesentliche Komponenten in Abbildung 9.1 dargestellt sind, verwendet. Diese wesentlichen Komponenten sind die links dargestellte ASM, welche stromgeregelt betrieben wird, wobei die Sollwerte durch eine Look-Up-Tabelle aus einer Drehmomentvorgabe berechnet werden, eine mit der ASM starr gekoppelte, drehzahlgeregelte PMSM und ein Echtzeitsystem der Firma dSPACE. Die

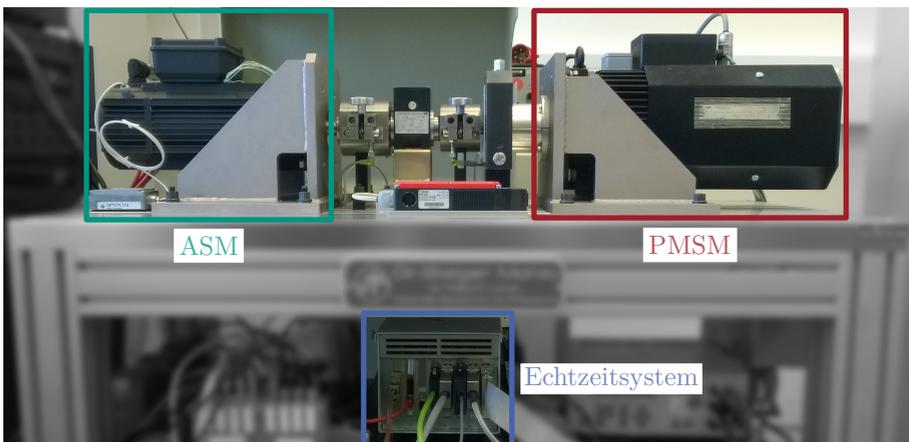


Abbildung 9.1: Prüfstand mit ASM, PMSM und Echtzeitsystem

ASM weist hierbei die in Tabelle 7.1 bzw. Anhang E.3 eingeführten Parameter auf, während die PMSM mit 32 Nm über ein deutlich höheres Drehmoment verfügt. Damit kann über die Drehzahlregelung der PMSM die Drehzahl der ASM vorgegeben werden. Das Echtzeitsystem basiert auf einem ds1005 Controller Board mit einer Taktfrequenz von 1 GHz. Die gesamte Messdatenerfassung erfolgte mit diesem Echtzeitsystem und der angeschlossenen Sensorik mit einer Taktfrequenz von 10 kHz. Mit den gewonnenen Messdaten wurden die Schätzergebnisse anschließend durch Ausführung des Intervallbeobachters in Matlab gewonnen. An dieser Stelle sei jedoch erwähnt, dass die entwickelten Intervallbeobachter einzeln auch auf dem Echtzeitsystem parallel zu der bereits implementierten Maschinenregelung lauffähig sind.

Da eine Messung der Statorspannungen am Prüfstand nicht möglich ist, wurde das für den Intervallbeobachter nötige Intervall  $[\mathbf{u}(t)]$  mithilfe des Wechselrichter-Intervallmodells, entsprechend der im vorherigen Kapitel beschriebenen Vorgehensweise, erzeugt. Die Quantifizierung der Eingangsunsicherheiten dieses Modells einschließlich der Unsicherheit  $[\nu_{y,m}(t)]$  zur Generierung von  $[\mathbf{y}(t)]$  (siehe (8.2)) erfolgt im nächsten Abschnitt. Ausgedrückt durch die Bezeichnungen aus Abschnitt 8.2 wird nachfolgend die Konfiguration 2 betrachtet.

## 9.2 Experiment

Für das Experiment wurde durch Drehmomentvorgabe der ASM das in Abbildung 9.2 dargestellte Drehmomentprofil erzielt. Besonders im hinteren Bereich des Experiments weist das Drehmoment durch die mangelnde Regelgüte des bereits implementierten Reglers starke Schwankungen auf, die nicht der Vorgabe entsprechen. Wie jedoch bereits im vorherigen Kapitel erläutert, ist dieses Verhalten des Reglers im Hinblick auf eine Validierung des Intervallbeobachters von Vorteil, da gezeigt werden kann, dass auch bei solch dynamischen Änderungen eine verlässliche Einschließung erzielt werden kann.

Das Drehzahlprofil ist durch die in Abbildung 9.3 dargestellt Rampe, deren Bereich um den Faktor zehn geringer ist als in der Simulationsstudie, gegeben. Die Wahl dieses niedrigeren Drehzahlbereiches liegt im Stromverdrängungseffekt begründet, der bei steigender Drehzahl zu einem Anstieg der Widerstandswerte führt ([QD15, S. 197]). Wie jedoch in Abschnitt 4.4 erläutert wurde, wäre auch mit einer zeitvarianten Matrix  $\mathbf{F}_z(\boldsymbol{\theta}(t), t)$ , welche aus dieser Zeitvarianz resultieren würde, ein stabiler Betrieb des Intervallbeobachters möglich. Damit könnten neben der mechanischen Winkelgeschwindigkeit auch weitere zeitvariante Parameter, welche durch eine (unsichere) Adaption nachgeführt werden können, berücksichtigt werden. Um jedoch den Fokus nicht auf eine solche Nachführung zu richten, wird in dieser Arbeit lediglich die Winkelgeschwindigkeit als zeitvarianter Parameter betrachtet.

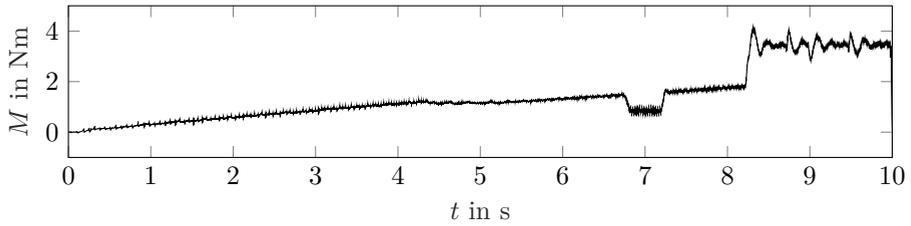


Abbildung 9.2: Drehmomentprofil (Messung)

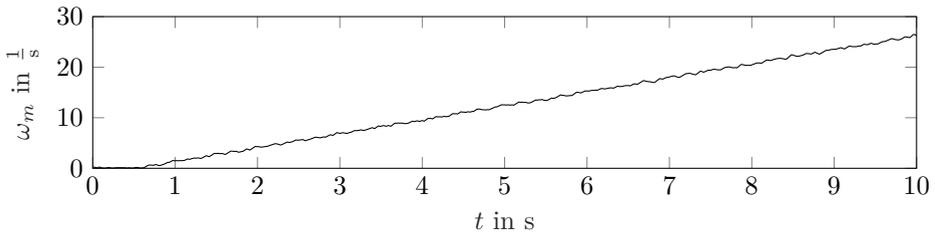


Abbildung 9.3: Winkelgeschwindigkeitsprofil (Messung)

Nachfolgend soll die bereits im vorherigen Abschnitt angekündigte quantitative Aussage zu den angenommenen Unsicherheiten erfolgen:

- $[\mathbf{u}(t)] = [\mathbf{u}_{pn,123,av}(t)]$  definiert in (6.31) mit (6.36a) in (8.1)
- $[\boldsymbol{\nu}_{y,m}(t)] = [-\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\kappa}]$  in (8.2) mit  $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_i)$  und  $\kappa_i = 0,5 \text{ A}$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$

Im Vergleich zur Simulationsstudie wurden die Anfangswerte des Intervallbeobachters mit  $\underline{\mathbf{z}}^\top(0) = [-20 \text{ A} \quad -20 \text{ A} \quad -20 \text{ A} \quad -20 \text{ A}]$  und  $\overline{\mathbf{z}}^\top(0) = [20 \text{ A} \quad 20 \text{ A} \quad 20 \text{ A} \quad 20 \text{ A}]$  konservativer gewählt. Damit soll gezeigt werden, dass auch bei sehr ungenauer Kenntnis der Anfangswerte ein zufriedenstellendes Schätzergebnis erzielt werden kann. Die heuristische Festlegung des noch freien Entwurfsparameters  $\epsilon$  in (7.5), (7.6), (7.8), (7.9), (7.13), (7.14), (7.15) und (7.18) für die betrachtete Konfiguration 2 ist durch  $\epsilon = -10700 - \frac{R_r}{L_h}$  gegeben. Damit kann mit den nachfolgend dargestellten Ergebnissen, wie bereits auf Seite 134 angekündigt, gezeigt werden, dass die Größenordnung der dort im Rahmen der Simulation gezeigten Eigenwertplatzierung auch bei Verwendung realer Messdaten zielführend ist.

## 9.3 Ergebnisse

Im Gegensatz zu den in Abschnitt 8.3 präsentierten Simulationsergebnissen sind bei der Betrachtung realer Messdaten die tatsächlichen Zustandsgrößen nicht (exakt) bekannt. Daher kommen nun die in den Definitionen 6.3, 6.4 und 6.5 eingeführten Ergebnisse

der Validierung von Intervallschätzungen zum Tragen. Es werden die unsicherheitsbehafteten Messinformationen der Statorstromkomponenten mit dem Schätzergebnis verglichen.

Wie bei den Simulationsergebnissen sollen in diesem Abschnitt lediglich die Ergebnisse für eine aus Messgrößen berechenbare Zustandsgröße ( $i_{s,\alpha}(t)$ ) und eine nicht messbare Zustandsgröße ( $i_{\mu,\alpha}(t)$ ) präsentiert werden. Die Ergebnisse der weiteren Zustandsgrößen können in Anhang G eingesehen werden. Eine Ausnahme bilden die Ergebnisse der Validierung. An dieser Stelle soll auch das Ergebnis der  $\beta$ -Komponente des Statorstromraumzeigers gezeigt werden, um die Funktionsfähigkeit des Ansatzes nachzuweisen.

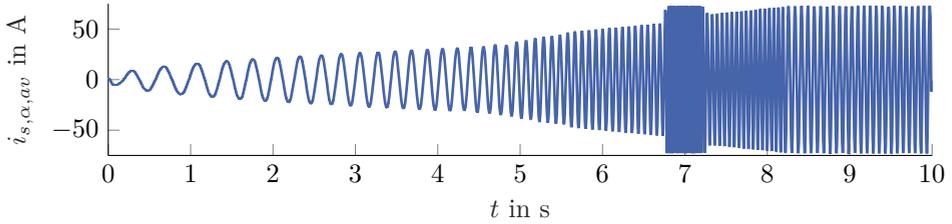
Für die im folgenden Abschnitt erfolgende Bewertung werden folgende Zeitverläufe als relevant angesehen und daher grafisch dargestellt:

- Zeitlicher Verlauf des Mittelwertes des aus Messgrößen bestimmten Intervalls  $[i_{s,\alpha}(t)]$  und der Mittelwert des Schätzintervalls  $[i_{\mu,\alpha}(t)]$  über dem gesamten betrachteten Zeitintervall  $t \in [0, 10]$  s
- Intervallbreite  $\bar{i}_{s,\alpha}(t) - \underline{i}_{s,\alpha}(t)$  und  $\bar{i}_{\mu,\alpha}(t) - \underline{i}_{\mu,\alpha}(t)$  der Schätzgrößen über dem gesamten betrachteten Zeitintervall  $t \in [0, 10]$  s
- Einschwingvorgang der Intervallschätzungen von  $i_{s,\alpha}(t)$  und  $i_{\mu,\alpha}(t)$  mit  $t \in [0, 500]$   $\mu$ s für  $i_{s,\alpha}(t)$  und  $t \in [0, 300]$  ms für  $i_{\mu,\alpha}(t)$
- Validierungsergebnis für beide Statorstromkomponenten für das gesamte betrachtete Zeitintervall  $t \in [0, 10]$  s

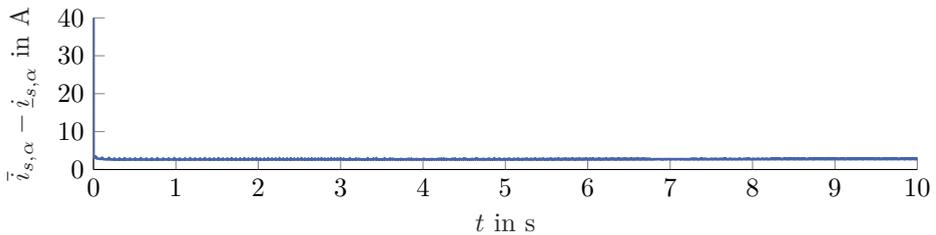
Die Darstellung der jeweiligen Mittelwerte der Intervalle der Zustandsgrößen soll dabei als Referenz zur Bewertung der Intervallbreiten dienen, weswegen es nicht relevant ist, dass die Kurvenverläufe im Detail erkennbar sind. Die Intervallbreiten wiederum geben einen Eindruck zur Güte der Zustandsschätzung, erlauben jedoch keine Aussage über die Validität des Intervallbeobachters. Hierzu wurde die Validierungsfunktion  $f_{val}$  eingeführt. Unter Berücksichtigung der Definitionen 6.3, 6.4 und 6.5 ist sie in der nachfolgenden Gleichung (9.1) definiert.

$$f_{val} = \begin{cases} 0 & , \text{ falls das Ergebnis invalide ist} \\ 1 & , \text{ falls das Ergebnis valide ist} \\ 2 & , \text{ falls das Ergebnis praktisch valide ist} \end{cases} \quad (9.1)$$

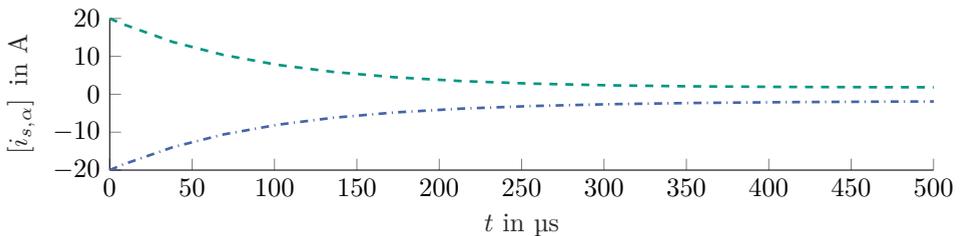
Die zusätzlich dargestellten Einschwingvorgänge gewähren einen Einblick in das dynamische Verhalten des Intervallbeobachters.



**Abbildung 9.4:** Experiment: Zeitlicher Verlauf des Intervallmittelwertes der aus der Statorstrommessung bestimmten Größe  $[i_{s,\alpha}(t)]$  für das gesamte Szenario

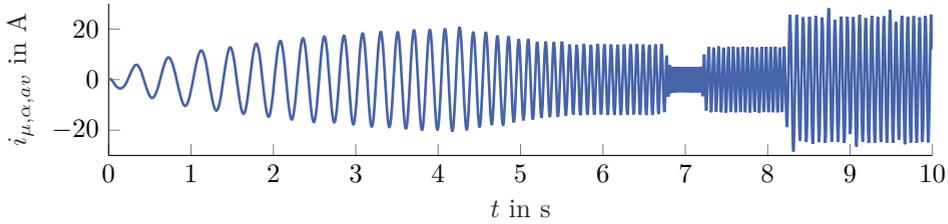


**Abbildung 9.5:** Experiment: Zeitlicher Verlauf der Intervallbreite der Schätzung  $\bar{i}_{s,\alpha}(t) - \underline{i}_{s,\alpha}(t)$

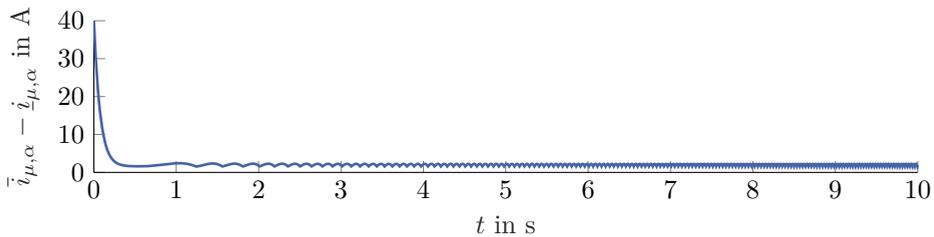


**Abbildung 9.6:** Experiment: Einschwingvorgang der Intervallschätzung von  $i_{s,\alpha}(t)$  (Untergrenze: blau strichpunktiert, Obergrenze: grün gestrichelt)

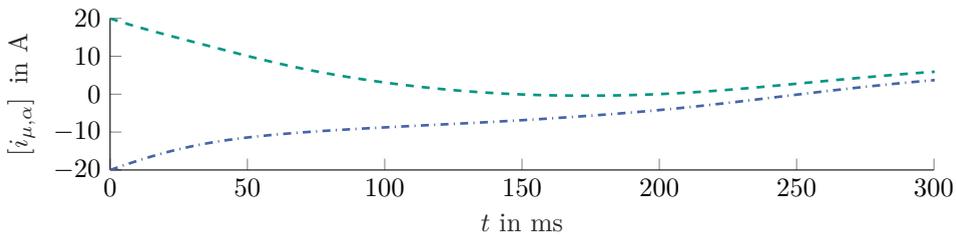
Wie den Grafiken zu entnehmen ist, liegt die Intervallbreite der Intervallschätzung von  $i_{s,\alpha}(t)$  nach dem Einschwingvorgang nahezu konstant bei ca. 2,7 A bei einem Maximalwert der Referenzkurve von ca. 73 A. Dieser Einschwingvorgang ist, wie in Abbildung 9.6 zu erkennen ist, nach ca. 300  $\mu\text{s}$  abgeschlossen.



**Abbildung 9.7:** Experiment: Zeitlicher Verlauf des Intervallmittelwertes der aus der Magnetisierungsstromintervallschätzung bestimmten Größe  $[i_{\mu,\alpha}(t)]$  für das gesamte Szenario

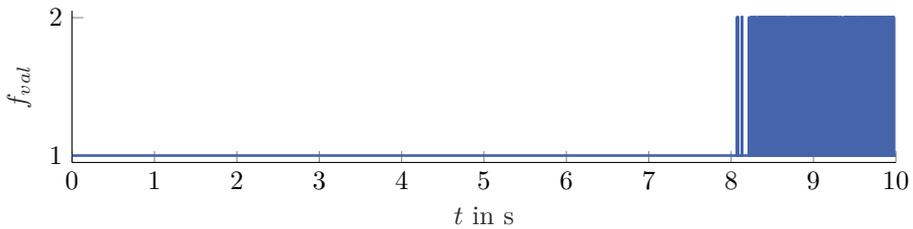


**Abbildung 9.8:** Experiment: Zeitlicher Verlauf der Intervallbreite der Schätzung  $\bar{i}_{\mu,\alpha}(t) - i_{\mu,\alpha}(t)$

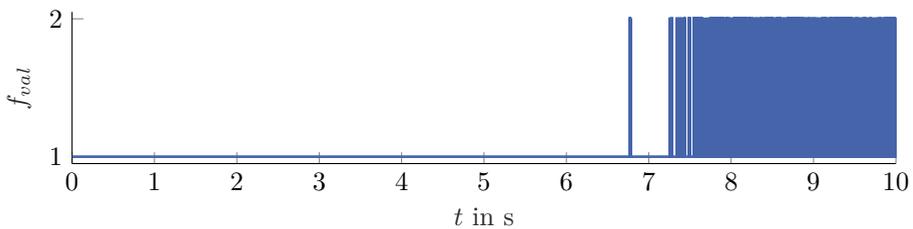


**Abbildung 9.9:** Experiment: Einschwingvorgang der Intervallschätzung von  $i_{\mu,\alpha}(t)$  (Untergrenze: blau strichpunktiert, Obergrenze: grün gestrichelt)

Wie bei der Statorstromschätzung ist auch bei der Magnetisierungsstromschätzung die mittlere Intervallbreite nach dem Einschwingvorgang, welcher nach Abbildung 9.9 ca. 250 ms in Anspruch nimmt, näherungsweise konstant und beträgt ca. 1,9 A bei einem Maximalwert der Referenz von ca. 28 A.



**Abbildung 9.10:** Experiment: Zeitlicher Verlauf der Intervallschätzung der Validierungsfunktion  $f_{val}$  für  $i_{s,\alpha}$  für das gesamte Szenario



**Abbildung 9.11:** Experiment: Zeitlicher Verlauf der Intervallschätzung der Validierungsfunktion  $f_{val}$  für  $i_{s,\beta}$  für das gesamte Szenario

Die Verläufe der Validierungsfunktion für die beiden Statorstromkomponenten zeigt ein zu keiner Zeit invalides Ergebnis des Intervallbeobachters.

## 9.4 Bewertung

Im Gegensatz zur Bewertung der Simulationsstudie gliedert sich die Bewertung der experimentellen Erprobung in lediglich zwei Unterabschnitte. Dies hat zwei Gründe. Zum einen wurde nur die Konfiguration 2 betrachtet, da wie eingangs erwähnt ein Vergleich der verschiedenen Konfigurationen keinen Mehrgewinn gegenüber der Simulationsstudie gebracht hätte, und zum anderen sind die in Abschnitt 8.4.3 getroffenen Aussagen zur Bewertung der erzielten Intervallbreiten allgemeingültig und kommen daher auch an dieser Stelle zum Tragen. Der erste der beiden nachfolgenden Abschnitte thematisiert die Untersuchung, ob die Ergebnisse zeigen, dass das entworfene dynamische System die notwendigen Eigenschaften eines Intervallbeobachters erfüllt. Anschließend soll kurz die Konvergenzgeschwindigkeit des Intervallbeobachters thematisiert werden. Es sei an dieser Stelle erneut darauf hingewiesen, dass auf eine ausführliche Auseinandersetzung, wie sie in Kapitel 8 erfolgt ist, aufgrund des nicht vorhandenen Mehrgewinns verzichtet wird.

### 9.4.1 Notwendige Eigenschaften

Nach der Definition eines Intervallbeobachters (Definition 2.1) kann basierend auf den beschriebenen Ergebnissen sicher ausgesagt werden, dass es sich bei dem dynamischen System zur Einschließung der Systemzustände um einen Intervallbeobachter handelt, wenn die Intervallbreite der Schätzung beschränkt ist und wenn nach Definition 6.3 das Ergebnis valide ist. Doch auch wenn die Intervallbreite beschränkt und das Ergebnis nach Definition 6.5 praktisch valide ist, kann es sich bei dem dynamischen System um einen Intervallbeobachter handeln (oder auch nicht). Da, wie auf Seite 118 erläutert, ein praktisch valides Ergebnis mit den Entwurfsbedingungen verträglich und im Hinblick auf die erzielte Intervallbreite gar wünschenswert ist, darf ein solches Ergebnis jedoch nicht fälschlicherweise negativ bewertet werden.

Bei Betrachtung der Abbildungen 9.5, 9.8, G.32 und G.35 wird schnell ersichtlich, dass die erste Voraussetzung einer beschränkten Intervallbreite für das gegebene Experiment erfüllt ist. Ferner kann den Abbildungen 9.10 und 9.11 entnommen werden, dass das durch das dynamische System erzielte Ergebnis nie invalide ist. Damit kann streng genommen aufgrund der Eigenart von Intervallsystemen ausgesagt werden, dass es sich um einen Intervallbeobachter handeln kann (oder auch nicht). Es sei jedoch erneut darauf hingewiesen, dass diese Qualität der Aussage aus der Problemstellung resultiert und keinen Mangel darstellt.

### 9.4.2 Konvergenzgeschwindigkeit

Zunächst sei an dieser Stelle erwähnt, dass hinsichtlich der Wahl des freien Entwurfsparameters  $\epsilon$  im Hinblick auf die Konvergenzgeschwindigkeit selbstverständlich weiterhin die Anmerkungen aus Abschnitt 8.4.2 gelten. Daneben sei darauf hingewiesen, dass kein direkter Vergleich mit dem Einschwingvorgang bei der Simulation gezogen werden kann, da die Anfangsunsicherheit um den Faktor vier größer gewählt wurde, um nachzuweisen, dass der Intervallbeobachter auch bei großen Anfangsunsicherheiten ein zufriedenstellendes Ergebnis zeigt. Obgleich diese Vorgabe zu längeren Einschwingvorgängen führt, befinden sich diese mit einer Dauer von den bereits erwähnten 300  $\mu\text{s}$  für die Statorstromkomponente bzw. 250 ms für die Magnetisierungsstromkomponente dennoch in der Größenordnung, die in der Simulation erzielt wurde. Darüber hinaus zeigen die Ergebnisse, dass, auch bei dem in den Abbildungen 9.4 und 9.7 ersichtlichen Anstieg der Dynamik der Referenzgrößen, die Dynamik des Intervallbeobachters ausreicht, um die Zustandsgrößen zufriedenstellend einzuschließen<sup>23</sup>.

---

<sup>23</sup> Eine Ausnahme könnte ein Anwendungsfall darstellen, der eine besonders schnelle Abnahme des Anfangsfehlers darstellt. In diesem Fall müsste eine Anpassung des freien Entwurfsparameters  $\epsilon$  erfolgen.

## 9.5 Zusammenfassung

Ziel dieses Abschnittes war es darzulegen, dass die im vorherigen Kapitel erzielten simulativen Ergebnisse auch bei Berücksichtigung realer Messwerte erzielt werden können, d. h., dass das entworfene dynamische System einen Intervallbeobachter darstellt. Der hierzu verwendete Aufbau bestand aus einer stromgeregelten ASM, welche mit einer drehzahlgeregelten PMSM mit nahezu fünffachem Nenndrehmoment zur Vorgabe beliebiger Drehzahlprofile der ASM gekoppelt war. Aus den erzielten Ergebnissen konnte abgeleitet werden, dass das entworfene dynamische System eine beschränkte Intervallbreite der Schätzgrößen liefert und die Ergebnisse zu keinem Zeitpunkt invalide sind. Damit zeigt es das gewünschte dynamische Verhalten.



## 10 Zusammenfassung

In einer Zeit, in welcher technische Systeme immer komplexer werden, gestaltet sich auch deren Funktionsnachweis immer aufwendiger. Als in den Medien stark vertretenes Beispiel seien autonome Fahrzeuge genannt, für die nach heutigem Vorgehen bereits Milliarden Testkilometer erforderlich sind ([MGLW15, S. 458]). Gerade im Hinblick auf diese Eigenschaft zukünftiger Systeme ist es wünschenswert, wenn der Testaufwand reduziert beziehungsweise die Validierung der implementierten Methoden komplett entfällt und nur die korrekte Implementierung verifiziert werden müsste. Genau dies liefern Intervallmethoden, welche mit dem Ziel entwickelt werden unter Berücksichtigung von beschränkten Unsicherheiten Garantien bezüglich des Systemverhaltens auszusprechen. Eine Komponente zukünftiger, elektrisch angetriebener, autonomer Fahrzeuge stellt die elektrische Traktionsmaschine dar, welche beispielsweise als ASM ausgeführt werden kann. Für dieses System existiert weder eine garantierte Zustandsschätzung noch eine garantierte Maschinenregelung. Mit der Entwicklung mehrerer Verfahren zur garantierten Zustandsschätzung für LPV-Systeme, zu denen typische ASM-Modelle gehören, liefert die vorliegende Arbeit aus praktischer Sicht einen Beitrag zur Schließung der ersten Lücke auf dem Weg zur garantierten Regelung von ASM. Aus theoretischer Sicht wurde insbesondere die Anwendbarkeit garantierter Schätzverfahren für LPV-Systeme erweitert.

Der gewählte Grundansatz hierzu ist ein Intervallbeobachter, welcher für jede Zustandsgröße eine Untergrenze und eine Obergrenze schätzt, welche die tatsächliche Zustandsgröße garantiert einschließen. Aufgrund ihrer vergleichsweise einfachen Grundstruktur eines klassischen Luenberger-Beobachters sind Intervallbeobachter in der Regel echtzeitfähig, was auch bei den in dieser Arbeit entwickelten Methoden bei Anwendung zur garantierten Zustandsschätzung für die ASM der Fall ist. Um eine garantierte Zustandsschätzung für ASM zu ermöglichen, wurden in dieser Arbeit zwei wesentliche Hürden genommen. Die erste Hürde war, dass existierende Intervallbeobachter nicht zur Zustandsschätzung der mit einem LPV-Modell modellierten ASM eingesetzt werden können. Die zweite bestand darin, überhaupt die Voraussetzung des Intervallbeobachterentwurfs, dass beschränkte Intervalle für die Ein- und Ausgangsgrößen des Systemmodells bekannt sein müssen, zu erfüllen. Da in der Regel die Eingangsspannungen der Maschine nicht gemessen werden und nur unsichere Messinformationen am Stellglied über andere Größen wie beispielsweise die gemessenen Statorströme vorliegen, ist diese nicht erfüllt. Ferner existierten keinerlei Verfahren zur Rekonstruktion von Eingangsspannungsintervallen basierend auf unsicheren Messwerten.

Konkret wurden zur Schließung der oben beschriebenen Lücke in dieser Arbeit zwei Ziele verfolgt. Zum einen wurde zur Bereitstellung einer durchgängigen Methodik zur garantierten Zustandsschätzung für ASM ein Wechselrichter-Intervallmodell entwickelt und eine Methodik zur Parametrierung dieses Modells aufgezeigt und zum anderen wur-

den mehrere echtzeitfähige Intervallbeobachter für LPV-Systeme, welche unter Berücksichtigung unsicherer Eingangs-, Ausgangs- und Parameterwerte Garantien bezüglich der tatsächlichen Systemzustände angeben, entwickelt.

Als Lösung zur Nachbildung der Ausgangsspannungen des Wechselrichters wurde ein Greybox-Modell vorgeschlagen. Dieses verbindet das verfügbare Wissen über die wesentlichen, im Stellglied auftretenden, nichtidealen Effekte und deren gegenseitige Beeinflussung mit der Nachbildung der einzelnen Effekte durch zu bestimmende Kennlinien. Neu daran ist nicht nur die Verarbeitung von Messintervallen im Betrieb, sondern insbesondere auch, dass bei der Bestimmung von Kennlinien eines Greybox-Modells durch Intervalle beschriebene Unsicherheiten berücksichtigt werden, was die in dieser Arbeit definierten Intervallkennlinien motiviert. Zusammenfassend kann zu diesem Ziel gesagt werden, dass das entwickelte Modell ein Bindeglied zwischen (unsicheren) Messgrößen und beliebigen Intervallmethoden für elektrische Maschinen darstellt und dessen zugrundeliegendes Vorgehen auf weitere leistungselektronische Stellglieder übertragbar ist. Damit ist auch der erste Schritt für die oben beschriebenen Intervallregelungen oder für Methoden zur Intervallidentifikation elektrischer Maschinen, über ASM hinaus, getan.

Während die Entwicklung eines Intervallmodells des Stellglieds noch sehr stark durch die Anwendung motiviert ist, wurden zur garantierten Zustandsschätzung in dieser Arbeit Intervallbeobachteransätze entwickelt, die auch über die Grenzen der elektrischen Antriebe hinweg Anwendung zur Zustandsschätzung von LPV-Systemen finden können. Zur Lösung wurden zwei grundlegend verschiedene Intervallbeobachteransätze für lineare parametervariante Systeme entworfen. Diese berücksichtigen im Betrieb erfasste (unsichere) Informationen zu den Parametern, was der Verbesserung der Einschließung dient. Während bei der einen Lösung die dynamischen Systeme zur Berechnung der Untergrenze und der Obergrenze der Zustandsgrößen verkoppelt sind, sind sie dies bei der zweiten Variante nicht. Erreicht wurde dies durch Einsatz einer Zustandstransformation, was die Flexibilität erhöhte, jedoch auch den Rechenaufwand. Neu an dem grenzverkoppelten Intervallbeobachter ist, dass er erstmalig für lineare parametervariante Systeme vorgestellt wurde und ebenfalls erstmalig eine reduzierte Variante eingeführt wurde, was nicht nur den Rechenaufwand reduziert, sondern auch die Anwendbarkeit des Ansatzes erhöht. Die Neuheit des auf einer Zustandstransformation basierenden Intervallbeobachters ist die Berechnung eben dieser Transformation durch Erzeugung der Transformationsmatrix durch die numerische Lösung eines Differentialgleichungssystems zur Laufzeit. Dies hat gegenüber einer a priori bestimmten Transformationsmatrix den großen Vorteil, dass zur Laufzeit vorliegende (Mess-)Informationen in die Bestimmung der Transformation einfließen können. Ferner wurde in diesem Zusammenhang auch erstmals an einem konkreten Anwendungsbeispiel gezeigt, wie Wissen über die Struktur der Systemmatrizen vorteilhaft für den Intervallbeobachterentwurf eingesetzt werden kann.

Die Kombination des entwickelten Wechselrichter-Intervallmodells und der entwickelten Intervallbeobachter ermöglicht damit erstmalig eine garantierte Zustandsschätzung für ASM.

Der Nachweis der Funktionsfähigkeit des Wechselrichter-Intervallmodells sowie der Kombination dieses Modells mit einem Intervallbeobachter wurde anhand eines rea-

len Antriebssystems erbracht.

Zusammenfassend leistet diese Arbeit durch die Entwicklung von zwei neuen Intervallbeobachteransätzen für LPV-Systeme einen wesentlichen Beitrag zur Anwendbarkeit von Intervallbeobachtern für diese Systemklasse. Die Anwendung dieser Methoden geht jedoch über die reine garantierte Zustandsschätzung hinaus, da sie auch direkt für eine robuste Fehlerdiagnose einsetzbar sind. Von Seiten der Anwendung zeigt diese Arbeit erstmals die durchgängige Nutzung von Intervallmethoden zur Zustandsbestimmung elektrischer Antriebe sowie deren praktische Erprobung.



# A Intervallararithmetik

Zweck dieses Kapitels ist die kompakte Darstellung der intervallararithmetischen Berechnungen, die in dieser Arbeit benötigt werden. Sofern keine anderen Angaben gemacht werden, basieren die Definitionen auf den Ausführungen in [JKDW01].

## Definition A.1 (Intervall)

Ein Intervall  $[x] = [\underline{x}, \bar{x}]$  ist eine zusammenhängende, abgeschlossene Teilmenge der reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ , wobei die Notation auch beibehalten wird, wenn das Intervall nicht abgeschlossen ist. Seine Grenzen  $\underline{x}$  und  $\bar{x}$  sind definiert durch

$$\underline{x} = \text{lb}([x]) := \sup \{a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} \mid \forall x \in [x], a \leq x\}, \quad (\text{A.1a})$$

$$\bar{x} = \text{ub}([x]) := \inf \{b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\} \mid \forall x \in [x], x \leq b\}. \quad (\text{A.1b})$$

Die Menge aller reellen Intervalle wird mit  $\mathbb{IR}$  bezeichnet.

Die Erweiterung der arithmetischen Grundoperationen auf Intervalle ist durch

$$[x] + [y] := [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}], \quad (\text{A.2a})$$

$$[x] - [y] := [\underline{x} - \bar{y}, \bar{x} - \underline{y}], \quad (\text{A.2b})$$

$$[x] \cdot [y] := [\min \{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}, \max \{\underline{x}\underline{y}, \underline{x}\bar{y}, \bar{x}\underline{y}, \bar{x}\bar{y}\}], \quad (\text{A.2c})$$

$$\frac{[x]}{[y]} := [x] \cdot \frac{1}{[y]} \quad (\text{A.2d})$$

mit

$$\frac{1}{[y]} := \begin{cases} \emptyset & , \text{ falls } [x] = [0, 0] \\ \left[ \frac{1}{\bar{y}}, \frac{1}{\underline{y}} \right] & , \text{ falls } 0 \notin [y] \\ \left[ \frac{1}{\bar{y}}, \infty \right[ & , \text{ falls } [y] = [0, \bar{y} > 0] \\ \left] -\infty, \frac{1}{\underline{y}} \right] & , \text{ falls } [y] = [\underline{y} < 0, 0] \\ \left] -\infty, \infty \right[ & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

gegeben.

Die Multiplikation einer reellen Zahl  $\kappa$  mit einem Intervall  $[x]$  führt auf

$$\kappa \cdot [x] := \begin{cases} [\kappa\underline{x}, \kappa\bar{x}] & , \text{ falls } \kappa \geq 0 \\ [\kappa\bar{x}, \kappa\underline{x}] & , \text{ falls } \kappa < 0 \end{cases}. \quad (\text{A.4})$$

**Definition A.2 (Intervallvektor)**

Ein Intervallvektor  $[\mathbf{x}] = [\underline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{x}}] \in \mathbb{IR}^n$  ist definiert als kartesisches Produkt von  $n$  Intervallen:

$$[\mathbf{x}] := [x_1] \times [x_2] \times \cdots \times [x_n]. \quad (\text{A.5})$$

**Definition A.3 (Intervallmatrix)**

Eine Intervallmatrix  $[\mathbf{X}] = [\underline{\mathbf{X}}, \overline{\mathbf{X}}] \in \mathbb{IR}^{m \times n}$  ist definiert als kartesisches Produkt von  $m \cdot n$  Intervallen:

$$[\mathbf{X}] := [x_{11}] \times [x_{12}] \times \cdots \times [x_{mn}]. \quad (\text{A.6})$$

Dargestellt wird eine solche Matrix durch

$$[\mathbf{X}] = \begin{bmatrix} [x_{11}] & \cdots & [x_{1n}] \\ \vdots & & \vdots \\ [x_{m1}] & \cdots & [x_{mn}] \end{bmatrix} = ([x_{ij}]). \quad (\text{A.7})$$

Die Grenzen  $\underline{\mathbf{X}}$  und  $\overline{\mathbf{X}}$  sind definiert zu

$$\underline{\mathbf{X}} = \text{lb}([\mathbf{X}]) := \begin{bmatrix} \underline{x}_{11} & \cdots & \underline{x}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \underline{x}_{m1} & \cdots & \underline{x}_{mn} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.8a})$$

$$\overline{\mathbf{X}} = \text{ub}([\mathbf{X}]) := \begin{bmatrix} \overline{x}_{11} & \cdots & \overline{x}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \overline{x}_{m1} & \cdots & \overline{x}_{mn} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.8b})$$

Für zwei quadratische Intervallmatrizen  $[\mathbf{X}], [\mathbf{Y}] \in \mathbb{IR}^{n \times n}$  und einen Intervallvektor  $[\mathbf{z}] \in \mathbb{IR}^n$  gilt:

$$[\mathbf{X}] + [\mathbf{Y}] := ([x_{ij}] + [y_{ij}]) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, n\}, \quad (\text{A.9a})$$

$$[\mathbf{X}] \cdot [\mathbf{Y}] := \left( \sum_{k=1}^n [x_{ik}] \cdot [y_{kj}] \right) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, n\}, \quad (\text{A.9b})$$

$$[\mathbf{X}] \cdot [\mathbf{z}] := \left( \sum_{j=1}^n [x_{ij}] \cdot [z_j] \right) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (\text{A.9c})$$

Eine häufige Anwendung finden in dieser Arbeit auch die folgenden zwei Lemmata, welche die Multiplikation eines Intervallvektors mit einer reellen Matrix und einem Intervallvektor thematisieren. Für die verwendete Nomenklatur sei auf (3.1) in Definition 3.1 (Seite 20) verwiesen. Ferner soll darauf hingewiesen werden, dass sich die in

dieser Arbeit verwendete Nomenklatur von der in [EFR<sup>+</sup>12] unterscheidet.

**Lemma A.1 (Multiplikation einer reellen Matrix mit einem Intervallvektor ([EFR<sup>+</sup>12]))**

Gegeben seien ein Intervallvektor  $[\mathbf{x}]$  für  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  derart, dass  $\underline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{x} \leq \overline{\mathbf{x}}$  gilt und eine Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . In diesem Falle gilt

$$\mathbf{A}^+ \cdot \underline{\mathbf{x}} + \mathbf{A}^- \cdot \overline{\mathbf{x}} \leq \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{A}^+ \cdot \overline{\mathbf{x}} + \mathbf{A}^- \cdot \underline{\mathbf{x}}. \quad (\text{A.10})$$

In dieser Arbeit wird außerdem eine Erweiterung dieses Lemmas auf Intervallmatrizen benötigt, welches nachfolgend angegeben wird.

**Lemma A.2 (Multiplikation einer reellen Matrix mit einer Intervallmatrix )**

Gegeben seien eine Intervallmatrix  $[\mathbf{X}]$  für  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times l}$  derart, dass  $\underline{\mathbf{X}} \leq \mathbf{X} \leq \overline{\mathbf{X}}$  gilt und eine Matrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . In diesem Falle gilt

$$\mathbf{A}^+ \cdot \underline{\mathbf{X}} + \mathbf{A}^- \cdot \overline{\mathbf{X}} \leq \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \leq \mathbf{A}^+ \cdot \overline{\mathbf{X}} + \mathbf{A}^- \cdot \underline{\mathbf{X}}. \quad (\text{A.11})$$

**Beweis:**

Im ersten Schritt wird  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}$  dargestellt durch  $\mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{X} + \mathbf{A}^- \cdot \mathbf{X}$ . Nutzt man nun die Gleichungen (A.2a) und (A.4) für die Matrix  $\mathbf{A}^+$ , welche nur nichtnegative Einträge hat und die Matrix  $\mathbf{A}^-$ , welche nur nichtpositive Einträge hat, so erhält man

$$\mathbf{A}^+ \cdot \underline{\mathbf{X}} \leq \mathbf{A}^+ \cdot \mathbf{X} \leq \mathbf{A}^+ \cdot \overline{\mathbf{X}}, \quad (\text{A.12a})$$

$$\mathbf{A}^- \cdot \overline{\mathbf{X}} \leq \mathbf{A}^- \cdot \mathbf{X} \leq \mathbf{A}^- \cdot \underline{\mathbf{X}}, \quad (\text{A.12b})$$

womit (A.11) gezeigt ist. □

**Lemma A.3 (Multiplikation einer Intervallmatrix mit einem Intervallvektor ([EFR<sup>+</sup>12]))**

Gegeben seien ein Intervallvektor  $[x]$  für  $x \in \mathbb{R}^n$  derart, dass  $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$  gilt und eine Intervallmatrix  $[A]$  für  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , sodass  $\underline{A} \leq A \leq \bar{A}$  gilt. In diesem Falle ist

$$\begin{aligned} & \underline{A}^+ \cdot \underline{x}^+ + \bar{A}^+ \cdot \underline{x}^- + \underline{A}^- \cdot \bar{x}^+ + \bar{A}^- \cdot \bar{x}^- \\ & \leq A \cdot x \\ & \leq \bar{A}^+ \cdot \bar{x}^+ + \underline{A}^+ \cdot \bar{x}^- + \bar{A}^- \cdot \underline{x}^+ + \underline{A}^- \cdot \underline{x}^- \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

gültig.

Für den Sonderfall eines symmetrischen Intervalls mit  $-\bar{A} = \underline{A} \leq 0 \leq \bar{A}$  können die Berechnungsvorschriften, wie in nachfolgendem Lemma gezeigt, vereinfacht werden.

**Lemma A.4 (Multiplikation einer symmetrischen Intervallmatrix mit einem Intervallvektor ([CERZ15]))**

Gegeben seien ein Intervallvektor  $[x]$  für  $x \in \mathbb{R}^n$  derart, dass  $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$  gilt und eine Intervallmatrix  $[A]$  für  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , sodass  $\underline{A} \leq A \leq \bar{A}$  und  $-\bar{A} = \underline{A} \leq 0 \leq \bar{A}$  gilt. In diesem Falle ist

$$-\bar{A} \cdot (\bar{x}^+ - \underline{x}^-) \leq A \cdot x \leq \bar{A} \cdot (\bar{x}^+ - \underline{x}^-) \quad (\text{A.14})$$

gültig.

Neben der Übertragung der Grundrechenarten auf Intervalle soll an dieser Stelle auch die intervallarithmetische Auswertung einer Funktion definiert werden.

**Definition A.4 (Einschließende Funktion ([JKDW01, S. 27]))**

Die Funktion  $[f] : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^m$  ist eine einschließende Funktion für  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , wenn  $f([x]) \subset [f]([x])$  für alle  $[x] \in \mathbb{IR}^n$  gilt.

Wie in Definition A.4 zu sehen ist, können also für eine Funktion  $f$  mehrere einschließende Funktionen definiert werden. Eine einschließende Funktion, die vergleichsweise leicht zu erhalten ist, ist die nachfolgend definierte natürliche einschließende Funktion.

**Definition A.5 (Natürliche einschließende Funktion ([JKDW01, S. 30]))**

Wird in einer Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  jede Variable und jede Funktion durch ihr intervallarithmetisches Pendant ersetzt, erhält man die natürliche einschließende Funktion.

Von hohem Interesse für die praktische Anwendung ist die einschließende Funktion, die das schmalste Hyperrechteck im Sinne der kleinsten Intervallbreite in jeder Dimension liefert. Diese Funktion wird *minimale einschließende Funktion* genannt. Lemma A.5 definiert eine Bedingung für eine solche minimale einschließende Funktion.

**Lemma A.5 (Minimale einschließende Funktion ([JKDW01, S. 30]))**

Gegeben sei eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , die sich nur aus einer endlichen Kombination stetiger Operatoren und stetiger elementarer Funktionen (Sinus, Cosinus, Exponentialfunktion, ...) zusammensetzt. In diesem Fall ist ihre natürliche Intervallerweiterung, die gebildet wird durch Ersetzen jeder Variable, jedes Operators und jeder Funktion durch ihr intervallararithmetisches Pendant, eine minimale einschließende Funktion, wenn jede Variable nur einmal auftritt.

Wie in [Rum10, S. 35] dargestellt, existiert bei Verletzung der Bedingung, dass jede Variable nur einmal auftritt, kein Zusammenhang zwischen der Häufigkeit des Auftretens und der resultierenden Überabschätzung.

In diesem Zusammenhang sollen auch kurz der *Dependency Effect* und der *Wrapping Effect* thematisiert werden. Unter dem Dependency Effect versteht man die Überabschätzung, die bei der intervallararithmetischen Auswertung eines Ausdrucks aufgrund des mehrfachen Auftretens einer Variable auftritt. Dies liegt in der Tatsache begründet, dass bei der intervallararithmetischen Auswertung eines Ausdrucks bei dem eine Variable mehrfach auftritt, nicht berücksichtigt wird, dass die Variable zwar Werte innerhalb des Intervalls annehmen kann, jedoch bei jedem Auftreten den gleichen Wert annimmt.

Unter dem Wrapping Effect versteht man die Überabschätzung, welche dadurch entsteht, dass die Lösungsmenge einer intervallararithmetischen Operation wieder nur durch ein Intervall beziehungsweise eine Intervallmatrix dargestellt wird und damit unter Umständen Elemente einschließt, die nicht zur tatsächlichen Lösung gehören. Für numerische Beispiele hierzu sei auf [Wol10] verwiesen.



# B Ergänzende Beweise

## B.1 Beweis der Positivität eines Metzler-Systems

In diesem Abschnitt wird der Beweis zu Lemma 2.1 kurz dargestellt. Er entstammt [AS03] und ist an die in dieser Arbeit verwendete Definition 2.4 und die verwendete Nomenklatur angepasst.

Gegeben seien hierzu eine beliebige Trajektorie  $\mathbf{x}(\cdot)$  mit  $\mathbf{x}(\iota) \geq \mathbf{0}$ , ein beliebiger, aber fester Zeitpunkt  $T$  mit  $T > \iota$  sowie ein Eingang  $\mathbf{u}(\cdot)$  mit  $\mathbf{u}(t) \geq \mathbf{0} \quad \forall t \geq \iota$ . Zu zeigen ist, dass für ein Metzler-System  $\mathbf{x}(T) \geq \mathbf{0}$  gilt.

**Beweis:**

Unter der Annahme, dass die Matrix  $\mathbf{A}(t)$  eine Metzler-Matrix mit beschränkten Einträgen ist, existiert ein  $r > 0$ , sodass

$$r \cdot \mathbf{I} + \mathbf{A}(t) \geq \mathbf{0} \tag{B.1}$$

gilt. Ferner werden zwei Hilfsvariablen  $\boldsymbol{\chi}(t)$  und  $\boldsymbol{\nu}(t)$  wie folgt eingeführt:

$$\boldsymbol{\chi}(t) = e^{r \cdot (t-\iota)} \cdot \mathbf{x}(t), \tag{B.2}$$

$$\boldsymbol{\nu}(t) = e^{r \cdot (t-\iota)} \cdot \mathbf{u}(t). \tag{B.3}$$

Hiermit gilt

$$\boldsymbol{\chi}(\iota) = \mathbf{x}(\iota) \geq \mathbf{0}, \tag{B.4}$$

$$\boldsymbol{\nu}(t) \geq \mathbf{0} \quad \forall t \geq \iota. \tag{B.5}$$

Damit genügt es zu zeigen, dass

$$\boldsymbol{\chi}(t) \geq \mathbf{0} \quad \forall t \in [\iota, T] \tag{B.6}$$

erfüllt ist.

Hierzu wird der Zeitpunkt  $\kappa > \iota$  eingeführt und es wird gezeigt, dass kein  $\kappa \leq \infty$  existiert, für das  $\boldsymbol{\chi}(t) < \mathbf{0}$  gilt.

Allgemein gilt

$$\boldsymbol{\chi}(\kappa) = \boldsymbol{\chi}(\iota) + \int_{\iota}^{\kappa} \dot{\boldsymbol{\chi}}(t) dt. \tag{B.7}$$

Unter Berücksichtigung von (B.2), (B.3) und (2.9) folgt

$$\begin{aligned}
 \chi(\kappa) &= \chi(\iota) + \int_{\iota}^{\kappa} \left[ r \cdot e^{r \cdot (t-\iota)} \cdot \mathbf{x}(t) + e^{r \cdot (t-\iota)} \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) \right] dt \\
 &= \chi(\iota) + \int_{\iota}^{\kappa} \left[ r \cdot e^{r \cdot (t-\iota)} \cdot \mathbf{x}(t) + e^{r \cdot (t-\iota)} \cdot (\mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{u}(t)) \right] dt \\
 &= \chi(\iota) + \int_{\iota}^{\kappa} \left[ (r \cdot \mathbf{I} + \mathbf{A}(t)) \cdot e^{r \cdot (t-\iota)} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \cdot e^{r \cdot (t-\iota)} \cdot \mathbf{u}(t) \right] dt \\
 &= \chi(\iota) + \underbrace{\int_{\iota}^{\kappa} [(r \cdot \mathbf{I} + \mathbf{A}(t)) \cdot \chi(t) + \mathbf{B}(t) \cdot \nu(t)] dt}_{\geq 0}. \tag{B.8}
 \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass  $\chi(\kappa) \geq \chi(\iota) \geq \mathbf{0}$  für beliebige  $\kappa > \iota$  gilt.  $\square$

## B.2 Transformation von Phasenspannungen zu Sternpunktspannungen

Üblicherweise bilden Wechselrichtermodelle die Spannung zwischen einer Phase und dem negativen Zwischenkreispotential nach, da diese Spannung unabhängig von der Last ist. Die in Maschinenmodellen in der Regel verwendete Spannung stellt jedoch die Spannung zwischen einer Phase und dem Sternpunkt dar ([Lev99, S. 275]). Der Zusammenhang dieser Spannungen ist in Abbildung B.1 mithilfe des Sternpunktes (SP) einer dreiphasigen ohmsch-induktiven Last, welche die Statorwicklung repräsentiert, visualisiert.

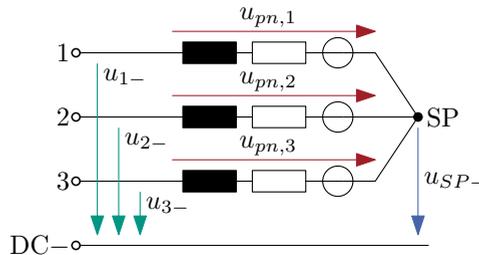


Abbildung B.1: Definition der Spannungen an der Last

Hieraus können leicht die Zusammenhänge

$$u_{pn,1} = u_{1-} - u_{SP-}, \tag{B.9a}$$

$$u_{pn,2} = u_{2-} - u_{SP-}, \tag{B.9b}$$

$$u_{pn,3} = u_{3-} - u_{SP-} \tag{B.9c}$$

abgelesen werden. Mit diesen Definitionen kann folgender Satz formuliert werden:

**Satz B.1 (Transformation von Phasenspannungen auf Sternspannungen)**

Die Transformation

$$\begin{bmatrix} u_{pn,1} \\ u_{pn,2} \\ u_{pn,3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}}{=P_{SP}} \cdot \begin{bmatrix} u_{1-} \\ u_{2-} \\ u_{3-} \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

überführt die Phasenspannungen  $[u_{1-} \ u_{2-} \ u_{3-}]^\top$  in die Sternspannungen  $[u_{pn,1} \ u_{pn,2} \ u_{pn,3}]^\top$  unter Annahme einer symmetrischen Maschine, eines nicht angeschlossenen Sternpunktes und eines Kurzschlussläufers.

**Beweis:**

Nach [Sch13a, S. 311] folgt für eine symmetrische Maschine bei Betrachtung des T-Ersatzschaltbildes

$$u_{pn,1} = R_s \cdot i_{s,1} + L_s \cdot \dot{i}_{s,1} + L_h \cdot \dot{i}_{r,1}, \quad (\text{B.11a})$$

$$u_{pn,2} = R_s \cdot i_{s,2} + L_s \cdot \dot{i}_{s,2} + L_h \cdot \dot{i}_{r,2}, \quad (\text{B.11b})$$

$$u_{pn,3} = R_s \cdot i_{s,3} + L_s \cdot \dot{i}_{s,3} + L_h \cdot \dot{i}_{r,3}. \quad (\text{B.11c})$$

Für die Summe der Sternspannungen gilt demnach

$$\begin{aligned} u_{pn,1} + u_{pn,2} + u_{pn,3} &= R_s \cdot (i_{s,1} + i_{s,2} + i_{s,3}) + L_s \cdot \frac{d}{dt} (i_{s,1} + i_{s,2} + i_{s,3}) \\ &\quad + L_h \cdot \frac{d}{dt} (i_{r,1} + i_{r,2} + i_{r,3}). \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Aufgrund des nicht angeschlossenen Sternpunktes und dem Käfigläufer gilt  $i_{s,1} + i_{s,2} + i_{s,3} = 0$  und  $i_{r,1} + i_{r,2} + i_{r,3} = 0$  und somit  $u_{pn,1} + u_{pn,2} + u_{pn,3} = 0$ . Setzt man die Summe der Sternspannungen aus (B.9) gleich null, erhält man  $u_{SP-} = \frac{1}{3} \cdot (u_{1-} + u_{2-} + u_{3-})$ . Dies wiederum in (B.9) eingesetzt, führt in Vektor-Matrix-Notation auf (B.10).  $\square$

### B.3 Ergänzungen zum Beweis des vollständigen grenzverkoppelten Intervallbeobachters für LPV-Systeme zur Berücksichtigung von Eingangs-, Ausgangs- und Parameterunsicherheiten

Ziel dieses Abschnittes ist es zu zeigen, dass die Frobeniusnorm von  $\Delta\mathcal{F}_{max}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$ , definiert in (3.68), eine obere Abschätzung für die Frobeniusnorm von  $[_{\mathbf{x}}]\Delta\mathcal{F}_{sym}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$ , definiert in (3.86), ist. Zur Vereinfachung dieses Beweises soll zunächst Lemma B.1 angegeben werden. Ein numerisches Beispiel, das auch bereits bei Zwischenergebnissen zum besseren Verständnis herangezogen werden kann, schließt den Abschnitt ab.

**Lemma B.1** (Überabschätzung der Frobeniusnorm einer symmetrischen Matrix)

Für eine Matrix  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt

$$\|\mathbf{S}_{sym}\|_{\mathbb{F}} \leq \|\mathbf{S}\|_{\mathbb{F}} \quad (\text{B.13})$$

unter Berücksichtigung von

$$\mathbf{S}_{sym} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{S} + \mathbf{S}^{\top}). \quad (\text{B.14})$$

**Beweis:**

Durch Anwendung der Ungleichung  $\|\boldsymbol{\chi}_1 + \boldsymbol{\chi}_2\| \leq \|\boldsymbol{\chi}_1\| + \|\boldsymbol{\chi}_2\|$ , welche für alle Matrixnormen gültig ist ([GVL96, S. 55]), und  $\|\boldsymbol{\chi}\|_{\mathbb{F}} = \|\boldsymbol{\chi}^{\top}\|_{\mathbb{F}}$  erhält man

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{S} + \mathbf{S}^{\top}) \right\|_{\mathbb{F}} &\leq \left\| \frac{1}{2} \cdot \mathbf{S} \right\|_{\mathbb{F}} + \left\| \frac{1}{2} \cdot \mathbf{S}^{\top} \right\|_{\mathbb{F}}, \\ \|\mathbf{S}_{sym}\|_{\mathbb{F}} &\leq \|\mathbf{S}\|_{\mathbb{F}}. \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

□

Nachfolgend soll nun die Gültigkeit von  $\|\Delta\mathcal{F}_{max}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)\|_{\mathbb{F}} \geq \|[_{\mathbf{x}}]\Delta\mathcal{F}_{sym}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)\|_{\mathbb{F}}$  gezeigt werden.

**Beweis:**

Unter Berücksichtigung von Lemma B.1 kann die Gültigkeit dieser Abschätzung durch den Beweis, dass  $\|[_{\mathbf{x}}]\Delta\mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)\|_{\mathbb{F}} \leq \|\Delta\mathcal{F}_{max}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)\|_{\mathbb{F}}$  gilt, nachgewiesen werden. Wie in den nachfolgenden Ausführungen ersichtlich werden wird, gestaltet sich dieser Nachweis einfacher, da die Elemente der Matrix  $[_{\mathbf{x}}]\Delta\mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$ , welche über

die Differenz von  ${}_{[x]}\mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  und  $\mathcal{F}_c([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  in (3.84) definiert wurde, aufgrund der fehlenden Symmetrisierung von weniger Parametern als die Elemente von  ${}_{[x]}\Delta\mathcal{F}_{sym}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  abhängig sind.

Vor dem Hauptbeweis wird gezeigt, dass trotz der vom aktuellen Zustandsintervall abhängigen Elementplatzierung die Nebendiagonalelemente der Matrizen  $\widetilde{\mathbf{F}}_u^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  und  $\widetilde{\mathbf{F}}_l^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  nichtnegativ sind und die Nebendiagonalelemente von  $\widetilde{\mathbf{F}}_u^-([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  und  $\widetilde{\mathbf{F}}_l^-([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  negativ sind. Dazu wird neben Definition 3.2 im Wesentlichen auf die in (A.4) definierte Multiplikation einer reellen Zahl mit einem Intervall zurückgegriffen. Auf eine Besonderheit sei im Falle eines unbekanntenen Vorzeichens des Zustandsintervalls  $[x]$  hingewiesen. In diesem Fall sind die nachfolgenden Ungleichungen bis zu einem gewissen Punkt stets von beiden Grenzen des Intervalls  $[\underline{f}_{ij}([\boldsymbol{\theta}(t)], t), \bar{f}_{ij}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)]$  abhängig. Die in den Herleitungen verwendeten Substitutionen werden dann derart durchgeführt, dass die Grenze erhalten bleibt, die in der jeweils untersuchten Matrix auch tatsächlich platziert werden würde. Die Argumente der Matrixelemente und die Zeitabhängigkeit des Zustandsvektors werden zugunsten einer übersichtlichen Darstellung nachfolgend nicht explizit angegeben.

Begonnen werden soll mit der Betrachtung von  $\widetilde{\mathbf{F}}_u^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$ . Damit ein Element  $f_{ij} \in [\underline{f}_{ij}, \bar{f}_{ij}]$  auf der Nebendiagonale von  $\widetilde{\mathbf{F}}_u^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  platziert wird, muss  $\max(\underline{f}_{ij} \cdot \bar{x}_j, \bar{f}_{ij} \cdot \bar{x}_j) \stackrel{!}{\geq} \max(\underline{f}_{ij} \cdot \underline{x}_j, \bar{f}_{ij} \cdot \underline{x}_j)$  gelten, was gleichbedeutend ist mit  $\text{ub}(\bar{x}_j \cdot [\underline{f}_{ij}, \bar{f}_{ij}]) \stackrel{!}{\geq} \text{ub}(\underline{x}_j \cdot [\underline{f}_{ij}, \bar{f}_{ij}])$ . Im nächsten Schritt muss nun eine Fallunterscheidung durchgeführt werden, um alle möglichen Vorzeichenkonstellationen von  $[x_j]$  zu berücksichtigen.

- Fall 1:  $0 \leq \underline{x}_j \leq \bar{x}_j$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \bar{x}_j \cdot \bar{f}_{ij} \stackrel{!}{\geq} \underline{x}_j \cdot \bar{f}_{ij} \\ &\Leftrightarrow \bar{f}_{ij} \cdot (\bar{x}_j - \underline{x}_j) \stackrel{!}{\geq} 0 \quad \Rightarrow \bar{f}_{ij} \stackrel{!}{\geq} 0 \end{aligned} \quad (\text{B.16a})$$

- Fall 2:  $\underline{x}_j \leq \bar{x}_j \leq 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \bar{x}_j \cdot \underline{f}_{ij} \stackrel{!}{\geq} \underline{x}_j \cdot \underline{f}_{ij} \\ &\Leftrightarrow \underline{f}_{ij} \cdot (\bar{x}_j - \underline{x}_j) \stackrel{!}{\geq} 0 \quad \Rightarrow \underline{f}_{ij} \stackrel{!}{\geq} 0 \end{aligned} \quad (\text{B.16b})$$

- Fall 3:  $\underline{x}_j \leq 0 \leq \bar{x}_j$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \bar{x}_j \cdot \bar{f}_{ij} \stackrel{!}{\geq} \underline{x}_j \cdot \underline{f}_{ij} \\ &\Leftrightarrow \bar{x}_j \cdot \bar{f}_{ij} \stackrel{!}{\geq} \underline{x}_j \cdot (\bar{f}_{ij} - \kappa) \quad \text{mit } \kappa \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \bar{f}_{ij} \cdot (\bar{x}_j - \underline{x}_j) \stackrel{!}{\geq} -\underline{x}_j \cdot \kappa \quad \Rightarrow \bar{f}_{ij} \stackrel{!}{\geq} 0 \end{aligned} \quad (\text{B.16c})$$

Damit ist gezeigt, dass die von den  $\tilde{\mathcal{T}}$ -Operatoren in  $\tilde{\mathbf{F}}_u^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  platzierten Nebendiagonalelemente nichtnegativ sind. Analoge Betrachtungen für  $\tilde{\mathbf{F}}_u^-([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  führen mit der Forderung  $\max(\underline{f}_{ij} \cdot \bar{x}_j, \bar{f}_{ij} \cdot \bar{x}_j) \stackrel{!}{<} \max(\underline{f}_{ij} \cdot \underline{x}_j, \bar{f}_{ij} \cdot \underline{x}_j)$ , welche mit  $\text{ub}(\bar{x}_j \cdot [\underline{f}_{ij}, \bar{f}_{ij}]) \stackrel{!}{<} \text{ub}(\underline{x}_j \cdot [\underline{f}_{ij}, \bar{f}_{ij}])$  übereinstimmt, auf

- Fall 1:  $0 \leq \underline{x}_j \leq \bar{x}_j$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \bar{x}_j \cdot \bar{f}_{ij} \stackrel{!}{<} \underline{x}_j \cdot \bar{f}_{ij} \\ &\Leftrightarrow \bar{f}_{ij} \cdot (\bar{x}_j - \underline{x}_j) \stackrel{!}{<} 0 \quad \Rightarrow \bar{f}_{ij} \stackrel{!}{<} 0, \end{aligned} \tag{B.17a}$$

- Fall 2:  $\underline{x}_j \leq \bar{x}_j \leq 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \bar{x}_j \cdot \underline{f}_{ij} \stackrel{!}{\leq} \underline{x}_j \cdot \underline{f}_{ij} \\ &\Leftrightarrow \underline{f}_{ij} \cdot (\bar{x}_j - \underline{x}_j) \stackrel{!}{<} 0 \quad \Rightarrow \underline{f}_{ij} \stackrel{!}{<} 0, \end{aligned} \tag{B.17b}$$

- Fall 3:  $\underline{x}_j \leq 0 \leq \bar{x}_j$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \bar{x}_j \cdot \bar{f}_{ij} \stackrel{!}{<} \underline{x}_j \cdot \underline{f}_{ij} \\ &\Leftrightarrow \bar{x}_j \cdot (\underline{f}_{ij} + \kappa) \stackrel{!}{<} \underline{x}_j \cdot \underline{f}_{ij} \quad \text{mit } \kappa \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \kappa \cdot \bar{x}_j \stackrel{!}{<} \underline{f}_{ij} \cdot (\underline{x}_j - \bar{x}_j) \quad \Rightarrow \underline{f}_{ij} \stackrel{!}{<} 0. \end{aligned} \tag{B.17c}$$

Mit dem gleichen Ansatz sollen nun die Matrizen  $\tilde{\mathbf{F}}_l^-([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  und  $\tilde{\mathbf{F}}_l^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  untersucht werden. Zur Analyse der Elemente von  $\tilde{\mathbf{F}}_l^-([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  muss die Ungleichung  $\min(\underline{f}_{ij} \cdot \bar{x}_j, \bar{f}_{ij} \cdot \bar{x}_j) \stackrel{!}{<} \min(\underline{f}_{ij} \cdot \underline{x}_j, \bar{f}_{ij} \cdot \underline{x}_j)$  beziehungsweise die Ungleichung  $\text{lb}(\bar{x}_j \cdot [\underline{f}_{ij}, \bar{f}_{ij}]) \stackrel{!}{<} \text{lb}(\underline{x}_j \cdot [\underline{f}_{ij}, \bar{f}_{ij}])$  untersucht werden, womit man

- Fall 1:  $0 \leq \underline{x}_j \leq \bar{x}_j$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \bar{x}_j \cdot \underline{f}_{ij} \stackrel{!}{<} \underline{x}_j \cdot \underline{f}_{ij} \\ &\Leftrightarrow \underline{f}_{ij} \cdot (\bar{x}_j - \underline{x}_j) \stackrel{!}{<} 0 \quad \Rightarrow \underline{f}_{ij} \stackrel{!}{<} 0, \end{aligned} \tag{B.18a}$$

- Fall 2:  $\underline{x}_j \leq \bar{x}_j \leq 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \bar{x}_j \cdot \bar{f}_{ij} \stackrel{!}{<} \underline{x}_j \cdot \bar{f}_{ij} \\ &\Leftrightarrow \bar{f}_{ij} \cdot (\bar{x}_j - \underline{x}_j) \stackrel{!}{<} 0 \quad \Rightarrow \bar{f}_{ij} \stackrel{!}{<} 0, \end{aligned} \tag{B.18b}$$

- Fall 3:  $\underline{x}_j \leq 0 \leq \bar{x}_j$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \bar{x}_j \cdot \underline{f}_{ij} \stackrel{!}{<} \underline{x}_j \cdot \bar{f}_{ij} \\
&\Leftrightarrow \bar{x}_j \cdot \underline{f}_{ij} \stackrel{!}{<} \underline{x}_j \cdot (\underline{f}_{ij} + \kappa) \quad \text{mit } \kappa \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \underline{f}_{ij} \cdot (\bar{x}_j - \underline{x}_j) \stackrel{!}{<} \kappa \cdot \underline{x}_j \quad \Rightarrow \underline{f}_{ij} \stackrel{!}{<} 0
\end{aligned} \tag{B.18c}$$

erhält. Die Untersuchung von  $\tilde{\mathbf{F}}_l^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  mithilfe der Ungleichung  $\text{lb}(\bar{x}_j \cdot [\underline{f}_{ij}, \bar{f}_{ij}]) \stackrel{!}{\geq} \text{lb}(\underline{x}_j \cdot [\underline{f}_{ij}, \bar{f}_{ij}])$  ergibt:

- Fall 1:  $0 \leq \underline{x}_j \leq \bar{x}_j$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \bar{x}_j \cdot \underline{f}_{ij} \stackrel{!}{\geq} \underline{x}_j \cdot \underline{f}_{ij} \\
&\Leftrightarrow \underline{f}_{ij} \cdot (\bar{x}_j - \underline{x}_j) \stackrel{!}{\geq} 0 \quad \Rightarrow \underline{f}_{ij} \stackrel{!}{\geq} 0,
\end{aligned} \tag{B.19a}$$

- Fall 2:  $\underline{x}_j \leq \bar{x}_j \leq 0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \bar{x}_j \cdot \bar{f}_{ij} \stackrel{!}{\geq} \underline{x}_j \cdot \bar{f}_{ij} \\
&\Leftrightarrow \bar{f}_{ij} \cdot (\bar{x}_j - \underline{x}_j) \stackrel{!}{\geq} 0 \quad \Rightarrow \bar{f}_{ij} \stackrel{!}{>} 0,
\end{aligned} \tag{B.19b}$$

- Fall 3:  $\underline{x}_j \leq 0 \leq \bar{x}_j$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \bar{x}_j \cdot \underline{f}_{ij} \stackrel{!}{\geq} \underline{x}_j \cdot \bar{f}_{ij} \\
&\Leftrightarrow \bar{x}_j \cdot (\bar{f}_{ij} - \kappa) \stackrel{!}{\geq} \underline{x}_j \cdot \bar{f}_{ij} \quad \text{mit } \kappa \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \bar{f}_{ij} \cdot (\bar{x}_j - \underline{x}_j) \stackrel{!}{\geq} \kappa \cdot \bar{x}_j \quad \Rightarrow \bar{f}_{ij} \stackrel{!}{\geq} 0.
\end{aligned} \tag{B.19c}$$

Damit ist unter Einbeziehung von Definition 3.1 allgemein gezeigt, dass Matrizen, welche mit einem hochgestellten + versehen werden, nur nichtnegative Nebendiagonalelemente aufweisen, während Matrizen, welche mit einem hochgestellten – gekennzeichnet werden, lediglich nichtpositive Nebendiagonalelemente besitzen.

Im Hauptteil des Beweises werden nun folgende vier Fälle betrachtet:

- Fall **(A)**:  $[\mathbf{x}] \mathcal{F}_{ij}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = \mathcal{F}_{c,ij}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$ ,
- Fall **(B)**:  $\underline{f}_{ij}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \leq 0 \leq \bar{f}_{ij}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$ ,
- Fall **(C)**:  $\underline{f}_{ij}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \leq \bar{f}_{ij}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) < 0$ ,
- Fall **(D)**:  $0 \leq \underline{f}_{ij}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \leq \bar{f}_{ij}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$ .

Fall  $\textcircled{\text{A}}$  beschreibt dabei den Fall, dass die nicht vom Zustandsintervall abhängige Matrix  $\mathcal{F}_c([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  der Matrix  ${}_{[\mathbf{x}]}\mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  gleich und damit  ${}_{[\mathbf{x}]} \Delta \mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = \mathbf{0}$  gilt. In den weiteren Fällen  $\textcircled{\text{B}}$ ,  $\textcircled{\text{C}}$  und  $\textcircled{\text{D}}$  werden lediglich Aussagen zu den Vorzeichen der Intervallgrenzen von  $[\mathbf{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)]$  getroffen.

Der Stil der nachfolgenden Analyse wird wie folgt sein: Zunächst wird das Ergebnis für die Elemente  ${}_{[\mathbf{x}]} \Delta \mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  angegeben und anschließend werden die enthaltenen Fälle ausführlich erläutert. In den folgenden Ausdrücken stellt  $\Delta f_{ij}$  die Intervallbreite des Elementes in der  $i$ -ten Zeile und  $j$ -ten Spalte von  $\mathbf{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  dar. Des Weiteren gilt für die übrigen Ausführungen in diesem Abschnitt  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Im ersten Schritt sollen die Hauptdiagonalelemente von  ${}_{[\mathbf{x}]} \Delta \mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  untersucht werden. Für diese gilt:

$${}_{[\mathbf{x}]} \Delta \mathcal{F}_{ii}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } \textcircled{\text{A}} \\ \Delta f_{ii} & , \text{ falls } \neg \textcircled{\text{A}} \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

Wie an (B.20) zu sehen ist, gestaltet sich die Auswertung von  ${}_{[\mathbf{x}]} \mathcal{F}_{ii}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$ , wie sich besonders im Vergleich mit den nachfolgenden Auswertungen zeigen wird, einfach. Falls Fall  $\textcircled{\text{A}}$  nicht vorliegt, muss keine weitere Fallunterscheidung erfolgen, da die Hauptdiagonalelemente sowohl in  ${}_{[\mathbf{x}]} \mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  (bzw. in der enthaltenen Matrix  $\tilde{\mathbf{F}}_u^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$ ) als auch in  $\mathcal{F}_c([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  (bzw. auch hier in der enthaltenen Matrix  $\tilde{\mathbf{F}}^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$ ) mit einer Intervallgrenze von  $f_{ii}$  belegt sind und die Abweichung in diesem Fall immer  $\Delta f_{ii}$  beträgt. In diesem Zusammenhang sei erwähnt, dass sowohl die Hauptdiagonalelemente von  $\tilde{\mathbf{F}}_u^-([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  als auch von  $\tilde{\mathbf{F}}^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  per Definition zu null gesetzt werden und damit folglich keine Abweichung vorliegt.

Anhand der  $\mathcal{T}$ -Operatoren und der  $\tilde{\mathcal{P}}$ -Operatoren kann leicht nachvollzogen werden, dass sich die Zusammenhänge für die übrigen Elemente nicht mehr so einfach darstellen. Falls Fall  $\textcircled{\text{A}}$  für ein Matrixelement nicht eingetreten ist, folgt hieraus nicht zwangsläufig, dass an entsprechender Stelle von  ${}_{[\mathbf{x}]} \mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  die Obergrenze/ Untergrenze von  $[f_{ij}]$  steht, wenn in  $\mathcal{F}_c([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  die Untergrenze/ Obergrenze von  $[f_{ij}]$  steht, da diese Operatoren auf den Nebendiagonalelementen auch Elemente gleich null platzieren.

Zur Vereinfachung der Darstellung sollen aufgrund der damit steigenden Komplexität der Problemstellung zunächst die ersten  $n$  Spalten der ersten  $n$  Zeilen von  ${}_{[\mathbf{x}]} \mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  (entspricht nach (3.80) der Matrix  $\tilde{\mathbf{F}}_u^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$ , korrespondierende Matrix in  $\mathcal{F}_c([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  ist nach (3.64) die Matrix  $\tilde{\mathbf{F}}^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$ ) betrachtet werden. Dabei wird für die nachfolgenden Gleichungen (B.21) bis (B.24) nur der Fall  $i \neq j$  betrachtet.

$${}_{[\mathbf{x}]} \Delta \mathcal{F}_{ij}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } \textcircled{\text{A}} \vee \textcircled{\text{C}} \\ \Delta f_{ij} & , \text{ falls } \neg \textcircled{\text{A}} \wedge \textcircled{\text{D}} \\ \zeta \cdot \Delta f_{ij} \text{ mit } 0 < \zeta < 1 & , \text{ falls } \neg \textcircled{\text{A}} \wedge \textcircled{\text{B}} \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

Da in Fall  $\textcircled{\text{C}}$  negative Nebendiagonalelemente thematisiert werden, die weder in  $\tilde{\mathbf{F}}_u^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  noch in  $\tilde{\mathbf{F}}^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  platziert werden, sind die korrespondierenden Elemente beider Matrizen gleich null, weswegen auch dieser Fall neben dem offensichtlichen

Fall  $\textcircled{A}$  die Beziehung  ${}_{[x]}\mathcal{F}_{ij}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = 0$  liefert. Den gegensätzlichen Fall hierzu stellt  $\textcircled{D}$  dar, da hier die Positivität der Intervallgrenzen von  $[f_{ij}]$  vorausgesetzt wird. Somit wird die Untergrenze in  $\tilde{\mathbf{F}}^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  platziert, während in  $\tilde{\mathbf{F}}_u^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  garantiert eine der beiden positiven Grenzen platziert wird, die Auswahl jedoch vom aktuellen Zustandsintervall abhängt. Gilt  $\underline{f}_{ij} \cdot \bar{x}_j > \bar{f}_{ij} \cdot \bar{x}_j$  (folgt aus  $\bar{x}_j < 0$ ), wird  $\underline{f}_{ij}$  platziert, was  $\textcircled{A}$  entsprechen würde, was in der zweiten Zeile von (B.21) ausgeschlossen wird. Wird wiederum  $\bar{f}_{ij}$  für  $\bar{x}_j \geq 0$  platziert, ist die Differenz zwischen dem Eintrag in  $\tilde{\mathbf{F}}_u^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  und  $\tilde{\mathbf{F}}^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  gerade durch die Intervallbreite  $\Delta f_{ij}$  gegeben. Den kniffligsten Fall stellt die letzte Konfiguration aus  $\neg\textcircled{A} \wedge \textcircled{B}$  dar. Da in diesen Fall die Untergrenze von  $[f_{ij}]$  negativ ist, wird an entsprechender Stelle in  $\tilde{\mathbf{F}}^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  eine Null gesetzt. Im Fall von  $\tilde{\mathbf{F}}_u^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  kann ebenso die Aussage getroffen werden, dass in der  $j$ -ten Spalte der  $i$ -ten Zeile ebenso aufgrund des negativen Vorzeichens nicht  $\underline{f}_{ij}$  gesetzt wird. Jedoch bedeutet dies in diesem Fall nicht, dass deshalb das Element zwangsweise zu null gesetzt wird, sondern es könnte auch gleich  $\bar{f}_{ij}$  gesetzt werden. Für den Fall, dass an entsprechender Stelle keine null gesetzt wird (was durch  $\neg\textcircled{A}$  gefordert wird), gilt  $\bar{f}_{ij} = 0 + {}_{[x]}\Delta\mathcal{F}_{ij}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$ . Mit  $\Delta f_{ij} = \bar{f}_{ij} - \underline{f}_{ij}$  und  $\underline{f}_{ij} < 0$  entspricht  ${}_{[x]}\Delta\mathcal{F}_{ij}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  daher einem Bruchteil  $\zeta = 1 + \frac{\underline{f}_{ij}}{\Delta f_{ij}} = \frac{\bar{f}_{ij}}{\Delta f_{ij}}$  der Intervallbreite.

Die weiteren  $n$  Spalten der ersten  $n$  Zeilen von  ${}_{[x]}\Delta\mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  (entspricht nach (3.80) der Matrix  $-\tilde{\mathbf{F}}_u^-([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$ , korrespondierende Matrix in  $\mathcal{F}_c([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  ist nach (3.64) die Matrix  $-\tilde{\mathbf{F}}^-([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$ ) sollen mit der gleichen Ausführlichkeit behandelt werden, da hier Vorzeichenänderungen zu berücksichtigen sind. Für die übrigen Elemente von  ${}_{[x]}\Delta\mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  werden aufgrund der leichten Übertragbarkeit nur noch die Ergebnisse angegeben.

Für die zunächst behandelten Elemente gilt:

$${}_{[x]}\Delta\mathcal{F}_{i(j+n)}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } \textcircled{A} \vee \textcircled{D} \\ -\Delta f_{ij} & , \text{ falls } \neg\textcircled{A} \wedge \textcircled{C} \\ (-1 + \zeta) \cdot \Delta f_{ij} \text{ mit } 0 < \zeta < 1 & , \text{ falls } \neg\textcircled{A} \wedge \textcircled{B} \end{cases} \quad (\text{B.22})$$

Das Element  ${}_{[x]}\Delta\mathcal{F}_{i(j+n)}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  ist in zwei Fällen gleich null: Erstens, wenn in  $\mathcal{F}_c([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  das entsprechende Element korrekt gewählt wurde, was  $\textcircled{A}$  entspricht, und zweitens, wenn beide Grenzen von  $[f_{ij}]$  positiv sind, da diese folglich weder in  $\tilde{\mathbf{F}}_u^-([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  noch in  $\tilde{\mathbf{F}}^-([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  positioniert werden. Dies ist Fall  $\textcircled{D}$ , der streng genommen in diesem Fall immer  $\textcircled{A}$  zur Folge hat. Ist das gesamte Intervall negativ (Fall  $\textcircled{C}$ ), dann ist sichergestellt, dass in Zeile  $i$  und Spalte  $j$  von  $\tilde{\mathbf{F}}_u^-([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  und  $\tilde{\mathbf{F}}^-([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  jeweils entweder  $-\underline{f}_{ij}$  oder  $-\bar{f}_{ij}$  platziert werden. Wird zusätzlich Fall  $\textcircled{A}$  ausgeschlossen folgt analog zu (B.21) betragsmäßig eine Abweichung von  $\Delta f_{ij}$ . Aus  ${}_{[x]}\mathcal{F}_{i(j+n)}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = -\bar{f}_{ij}$  und  $\mathcal{F}_{c,i(j+n)}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = -\underline{f}_{ij}$  folgt jedoch  $-\bar{f}_{ij} = -\underline{f}_{ij} + {}_{[x]}\Delta\mathcal{F}_{i(j+n)}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$ , woraus sich  ${}_{[x]}\Delta\mathcal{F}_{i(j+n)}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = -(\bar{f}_{ij} - \underline{f}_{ij}) =$

$-\Delta f_{ij}$  ergibt. Im letzten Szenario  $\neg(\mathbf{A}) \wedge (\mathbf{B})$  folgt aus der negativen Untergrenze von  $[f_{ij}]$  bei gleichzeitig positiver Obergrenze, dass das betrachtete Matrixelement von  $\mathcal{F}_{c,i(j+n)}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  gleich  $-f_{ij}$  gesetzt wird. Da durch  $\neg(\mathbf{A})$  ausgeschlossen ist, dass das Element  ${}_{[\mathbf{x}]} \mathcal{F}_{i(j+n)}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  ebenfalls gleich  $-f_{ij}$  gesetzt wird und  $\bar{f}_{ij} \geq 0$  gilt, muss für dieses Szenario  ${}_{[\mathbf{x}]} \mathcal{F}_{i(j+n)}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = 0$  gelten. Daraus folgt  $0 = -\underline{f}_{ij} + {}_{[\mathbf{x}]} \Delta \mathcal{F}_{i(j+n)}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  und damit direkt  ${}_{[\mathbf{x}]} \Delta \mathcal{F}_{i(j+n)}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = \underline{f}_{ij} = -\Delta f_{ij} + \bar{f}_{ij} = (-1 + \zeta) \cdot \Delta f_{ij}$ . Mit exakt den gleichen Argumentationsketten ergeben sich für die übrigen  $n$  Zeilen von  ${}_{[\mathbf{x}]} \Delta \mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  die Zusammenhänge

$${}_{[\mathbf{x}]} \Delta \mathcal{F}_{(i+n)j}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } (\mathbf{A}) \vee (\mathbf{D}) \\ -\Delta f_{ij} & , \text{ falls } \neg(\mathbf{A}) \wedge (\mathbf{C}) \\ (-1 + \zeta) \cdot \Delta f_{ij} \text{ mit } 0 < \zeta < 1 & , \text{ falls } \neg(\mathbf{A}) \wedge (\mathbf{B}) \end{cases} \quad (\text{B.23})$$

und

$${}_{[\mathbf{x}]} \Delta \mathcal{F}_{(i+n)(j+n)}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } (\mathbf{A}) \vee (\mathbf{C}) \\ \Delta f_{ij} & , \text{ falls } \neg(\mathbf{A}) \wedge (\mathbf{D}) \\ \zeta \cdot \Delta f_{ij} \text{ mit } 0 < \zeta < 1 & , \text{ falls } \neg(\mathbf{A}) \wedge (\mathbf{B}) \end{cases} \quad (\text{B.24})$$

Für die weitere Argumentation sollen die Zusammenhänge aus (B.20), (B.21) und (B.22) sowie die Gleichungen (B.20), (B.23) und (B.24) zusammengefasst werden, um somit eine Gesamtaussage zu einer Zeile  $i$  von  ${}_{[\mathbf{x}]} \Delta \mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  treffen zu können. Daraus folgen unter Vernachlässigung der Argumente von  ${}_{[\mathbf{x}]} \Delta \mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  die Gleichungen

$$\begin{bmatrix} {}_{[\mathbf{x}]} \Delta \mathcal{F}_{ij} \\ {}_{[\mathbf{x}]} \Delta \mathcal{F}_{i(j+n)} \end{bmatrix}^{\top} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & , \text{ falls } (\mathbf{A}) \\ \begin{bmatrix} \zeta \cdot \Delta f_{ij} & (-1 + \zeta) \cdot \Delta f_{ij} \end{bmatrix} & , \text{ falls } \neg(\mathbf{A}) \wedge (\mathbf{B}) \wedge i \neq j \\ \begin{bmatrix} 0 & -\Delta f_{ij} \end{bmatrix} & , \text{ falls } \neg(\mathbf{A}) \wedge (\mathbf{C}) \wedge i \neq j \\ \begin{bmatrix} \Delta f_{ij} & 0 \end{bmatrix} & , \text{ falls } \neg(\mathbf{A}) \wedge ((\mathbf{D}) \vee i = j) \end{cases} \quad (\text{B.25})$$

und

$$\begin{bmatrix} {}_{[\mathbf{x}]} \Delta \mathcal{F}_{(i+n)j} \\ {}_{[\mathbf{x}]} \Delta \mathcal{F}_{(i+n)(j+n)} \end{bmatrix}^{\top} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} & , \text{ falls } (\mathbf{A}) \\ \begin{bmatrix} (-1 + \zeta) \cdot \Delta f_{ij} & \zeta \cdot \Delta f_{ij} \end{bmatrix} & , \text{ falls } \neg(\mathbf{A}) \wedge (\mathbf{B}) \wedge i \neq j \\ \begin{bmatrix} -\Delta f_{ij} & 0 \end{bmatrix} & , \text{ falls } \neg(\mathbf{A}) \wedge (\mathbf{C}) \wedge i \neq j \\ \begin{bmatrix} 0 & \Delta f_{ij} \end{bmatrix} & , \text{ falls } \neg(\mathbf{A}) \wedge ((\mathbf{D}) \vee i = j) \end{cases} \quad (\text{B.26})$$

welche für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$ , für alle  $j \in \{1, \dots, n\}$  und  $0 < \zeta < 1$  gültig sind. Aus den Gleichungen (B.25) und (B.26) können die Ungleichungen

$$\left| \left[ \mathbf{x} \right] \Delta \mathcal{F}_{ij}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \right| + \left| \left[ \mathbf{x} \right] \Delta \mathcal{F}_{i(j+n)}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \right| \leq |\Delta f_{ij}|, \quad (\text{B.27a})$$

$$\left| \left[ \mathbf{x} \right] \Delta \mathcal{F}_{(i+n)j}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \right| + \left| \left[ \mathbf{x} \right] \Delta \mathcal{F}_{(i+n)(j+n)}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \right| \leq |\Delta f_{ij}| \quad (\text{B.27b})$$

direkt abgeleitet werden. Um hieraus einen Zusammenhang mit der Frobeniusnorm der Matrizen  $\left[ \mathbf{x} \right] \Delta \mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  und  $\Delta \mathcal{F}_{max}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  herzustellen, wird (B.27) zunächst quadriert, womit sich

$$\begin{aligned} & \left| \left[ \mathbf{x} \right] \Delta \mathcal{F}_{ij}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \right|^2 + \left| \left[ \mathbf{x} \right] \Delta \mathcal{F}_{i(j+n)}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \right|^2 \\ & + 2 \cdot \left| \left[ \mathbf{x} \right] \Delta \mathcal{F}_{ij}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \right| \cdot \left| \left[ \mathbf{x} \right] \Delta \mathcal{F}_{i(j+n)}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \right| \leq |\Delta f_{ij}|^2, \end{aligned} \quad (\text{B.28a})$$

$$\begin{aligned} & \left| \left[ \mathbf{x} \right] \Delta \mathcal{F}_{(i+n)j}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \right|^2 + \left| \left[ \mathbf{x} \right] \Delta \mathcal{F}_{(i+n)(j+n)}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \right|^2 \\ & + 2 \cdot \left| \left[ \mathbf{x} \right] \Delta \mathcal{F}_{(i+n)j}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \right| \cdot \left| \left[ \mathbf{x} \right] \Delta \mathcal{F}_{(i+n)(j+n)}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \right| \leq |\Delta f_{ij}|^2 \end{aligned} \quad (\text{B.28b})$$

ergibt. Aufgrund der Tatsache, dass die Summanden in diesen Ungleichungen alle positiv sind, kann für die linke Seite eine untere Abschätzung durch Weglassen von Summanden erzielt werden, was nachfolgend zielführend genutzt wird. Es folgt

$$\left| \left[ \mathbf{x} \right] \Delta \mathcal{F}_{ij}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \right|^2 + \left| \left[ \mathbf{x} \right] \Delta \mathcal{F}_{i(j+n)}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \right|^2 \leq |\Delta f_{ij}|^2, \quad (\text{B.29a})$$

$$\left| \left[ \mathbf{x} \right] \Delta \mathcal{F}_{(i+n)j}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \right|^2 + \left| \left[ \mathbf{x} \right] \Delta \mathcal{F}_{(i+n)(j+n)}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \right|^2 \leq |\Delta f_{ij}|^2. \quad (\text{B.29b})$$

Die anschließende Bildung der Summe aller Matrixelemente ergibt

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \left| \left[ \mathbf{x} \right] \Delta \mathcal{F}_{ij}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \right|^2 + \left| \left[ \mathbf{x} \right] \Delta \mathcal{F}_{i(j+n)}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \right|^2 \right) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\Delta f_{ij}|^2, \quad (\text{B.30a})$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \left| \left[ \mathbf{x} \right] \Delta \mathcal{F}_{(i+n)j}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \right|^2 + \left| \left[ \mathbf{x} \right] \Delta \mathcal{F}_{(i+n)(j+n)}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \right|^2 \right) \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\Delta f_{ij}|^2. \quad (\text{B.30b})$$

Der letzte Schritt ist nun die Addition von (B.30a) und (B.30b), womit man

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{[x]}\Delta\mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)\|_{\mathbb{F}}^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \left| \mathbf{[x]}\Delta\mathcal{F}_{ij}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \right|^2 + \left| \mathbf{[x]}\Delta\mathcal{F}_{i(j+n)}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \right|^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left| \mathbf{[x]}\Delta\mathcal{F}_{(i+n)j}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \right|^2 + \left| \mathbf{[x]}\Delta\mathcal{F}_{(i+n)(j+n)}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \right|^2 \right) \\
 &\leq 2 \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\Delta f_{ij}|^2}_{=\|\Delta\mathbf{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)\|_{\mathbb{F}}^2} \\
 &= \|\Delta\mathcal{F}_{max}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)\|_{\mathbb{F}}^2
 \end{aligned} \tag{B.31}$$

erhält. Aufgrund der positiven Argumente der quadratischen Funktion in (B.31) folgt  $\|\mathbf{[x]}\Delta\mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)\|_{\mathbb{F}} \leq \|\Delta\mathcal{F}_{max}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)\|_{\mathbb{F}}$ .  $\square$

**Beispiel B.1:** Gegeben sei die unsicherheitsbehaftete Beobachterdynamikmatrix

$$\mathbf{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = \begin{bmatrix} [-2, 1] & [1, 3] \\ [-2, 4] & [2, 5] \end{bmatrix} \tag{B.32}$$

sowie der Intervallvektor

$$\mathbf{[x]} = \begin{bmatrix} [-4, -3] \\ [1, 3] \end{bmatrix} \tag{B.33}$$

zur Beschreibung einer unsicheren Information bezüglich des Zustandsvektors.

Das Ziel dieses Beispiels ist es, zu zeigen, wie aus diesen Informationen die Matrizen  $\Delta\mathcal{F}_{max}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$ , definiert in (3.68),  $\mathcal{F}_c([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$ , definiert in (3.64), und  $\mathbf{[x]}\mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$ , definiert in (3.80), bestimmt werden können. Abschließend soll  $\mathbf{[x]}\Delta\mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$ , eingeführt in (3.84), für dieses Beispiel bestimmt werden.

Um  $\Delta\mathcal{F}_{max}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  angeben zu können, wird zunächst die Matrix  $\Delta\mathbf{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$ , definiert in (3.69), bestimmt, welche die Intervallbreite jedes Elementes von  $\mathbf{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  beinhaltet. Es ergibt sich

$$\Delta\mathbf{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \tag{B.34}$$

und

$$\Delta\mathcal{F}_{max}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}. \tag{B.35}$$

Als erster Schritt zur Bestimmung von  $\mathcal{F}_c([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  wird die Matrix  $\underline{\mathbf{F}}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  bestimmt, welche gerade die Untergrenzen der Elemente von (B.32) beinhaltet und sich somit durch

$$\underline{\mathbf{F}}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \tag{B.36}$$

angeben lässt. Wendet man auf diese Matrix den  $\tilde{\mathcal{P}}^+$ -Operator und den  $\tilde{\mathcal{P}}^-$ -Operator an, erhält man

$$\tilde{\underline{F}}^+([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = \tilde{\mathcal{P}}^+ \{ \underline{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.37a})$$

$$\tilde{\underline{F}}^-([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = \tilde{\mathcal{P}}^- \{ \underline{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) \} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (\text{B.37b})$$

woraus sich

$$\mathcal{F}_c([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.38})$$

ergibt.

Im Fall von  ${}_{[\mathbf{x}]} \mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  wird die Anwendung der  $\tilde{\mathcal{T}}$ -Operatoren nicht mehr explizit angegeben, sondern direkt die konkatenierte Matrix angegeben, die sich zu

$${}_{[\mathbf{x}]} \mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.39})$$

ergibt. Dieses Resultat soll an zwei Einträgen genauer erklärt werden. Zunächst wird das Element in der erste Zeile und ersten Spalte, welches gleich -2 ist, betrachtet. Da es sich um ein Hauptdiagonalelement handelt, muss lediglich  $\frac{\max(\underline{f}_{-11} \cdot \bar{x}_1, \bar{f}_{11} \cdot \underline{x}_1)}{\bar{x}_1} = \frac{\max(-2 \cdot (-3), 1 \cdot (-3))}{-3} = -2$  ausgewertet werden. Bei dem im zweiten Fall betrachteten Nebendiagonalelement in der dritten Zeile und vierten Spalte von  ${}_{[\mathbf{x}]} \mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  ist diese Auswertung umfangreicher. So muss zunächst überprüft werden, ob  $\min(\underline{f}_{-12} \cdot \underline{x}_2, \bar{f}_{12} \cdot \underline{x}_2) = \min(1 \cdot 1, 3 \cdot 1) = 1 \leq \min(\underline{f}_{-12} \cdot \bar{x}_2, \bar{f}_{12} \cdot \bar{x}_2) = \min(1 \cdot 3, 3 \cdot 3) = 3$  gilt, was hier der Fall ist. Daraus folgt dann, dass das Element den Wert  $\frac{\min(\underline{f}_{-12} \cdot \underline{x}_2, \bar{f}_{12} \cdot \underline{x}_2)}{\underline{x}_2} = 1$  annimmt.

Mit den berechneten Matrizen  ${}_{[\mathbf{x}]} \mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  und  $\mathcal{F}_c([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  ergibt sich  ${}_{[\mathbf{x}]} \Delta \mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  mit  ${}_{[\mathbf{x}]} \Delta \mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = {}_{[\mathbf{x}]} \mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) - \mathcal{F}_c([\boldsymbol{\theta}(t)], t)$  zu

$${}_{[\mathbf{x}]} \Delta \mathcal{F}([\boldsymbol{\theta}(t)], t) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.40})$$

## B.4 Ergänzungen zum Beweis des transformationsbasierten Intervallbeobachters zur Berücksichtigung von Eingangs-, Ausgangs- und Parameterunsicherheiten

Ziel des ersten Teils dieses Abschnittes ist es zu beweisen, dass bei Anwendung der Operationen (3.1b) und (3.1a) auf Summen die in Lemma B.2 eingeführten Ungleichungen gültig sind. Eingeführt wurden diese Ungleichungen in der Masterarbeit [Bäc16]. Der Beweis für die zweite Ungleichung wird an dieser Stelle jedoch abweichend direkt in Übereinstimmung mit Definition 3.1 geführt.

**Lemma B.2 (Abschätzungen für die Anwendung der  $\mathcal{P}^+$ - und  $\mathcal{P}^-$ -Operatoren auf Matrixsummen)**

Für die in Definition 3.1 eingeführten Matrixoperatoren  $\mathcal{P}^+(\cdot)$  und  $\mathcal{P}^-(\cdot)$  gelten mit  $\chi \in \mathbb{R}^{m \times n}$  und  $\nu \in \mathbb{R}^{m \times n}$  die Ungleichungen

$$(\chi + \nu)^+ \leq \chi^+ + \nu^+ \quad (\text{B.41a})$$

$$-(\chi + \nu)^- \leq -\chi^- - \nu^-. \quad (\text{B.41b})$$

### Beweis:

Da die Auswertungen in Definition 3.1 elementweise durchgeführt werden, genügt es die Ungleichungen (B.41) für skalare Größen zu zeigen, da hieraus die Gültigkeit der Ungleichungen für die gesamte Matrix gefolgert werden kann. Folglich ist

$$(\chi + \nu)^+ \leq \chi^+ + \nu^+, \quad (\text{B.42a})$$

$$-(\chi + \nu)^- \leq -\chi^- - \nu^-. \quad (\text{B.42b})$$

zu zeigen. Dies soll anhand einer Fallunterscheidung für beide Seiten der Ungleichungen und einem Vergleich der damit erhaltenen Resultate geschehen. Begonnen werden soll hierzu mit der Auswertung der linken Seite der Ungleichung (B.42a), wofür sich

$$(\chi + \nu)^+ = \max(0, \chi + \nu) = \begin{cases} \chi + \nu < \chi & , \text{ falls } \chi > 0 \wedge \nu < 0 \wedge |\chi| > |\nu| \\ \chi + \nu < \nu & , \text{ falls } \chi < 0 \wedge \nu > 0 \wedge |\chi| < |\nu| \\ \chi + \nu = |\chi| + |\nu| & , \text{ falls } \chi > 0 \wedge \nu > 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (\text{B.43})$$

ergibt. Für die rechte Seite der Ungleichung (B.42a) erhält man wiederum

$$\chi^+ + \nu^+ = \max(0, \chi) + \max(0, \nu) = \begin{cases} \chi & , \text{ falls } \chi > 0 \wedge \nu < 0 \\ \nu & , \text{ falls } \chi < 0 \wedge \nu > 0 \\ \chi + \nu = |\chi| + |\nu| & , \text{ falls } \chi > 0 \wedge \nu > 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (\text{B.44})$$

Damit ist (B.42a) für alle Fälle erfüllt. Analoge Betrachtungen für (B.42b) führen auf die beiden Fallunterscheidungen

$$-(\chi + \nu)^- = -\min(0, \chi + \nu) = \begin{cases} |\chi + \nu| < |\nu| & , \text{ falls } \chi > 0 \wedge \nu < 0 \wedge |\chi| < |\nu| \\ |\chi + \nu| < |\chi| & , \text{ falls } \chi < 0 \wedge \nu > 0 \wedge |\chi| > |\nu| \\ |\chi + \nu| = |\chi| + |\nu| & , \text{ falls } \chi < 0 \wedge \nu < 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (\text{B.45})$$

und

$$-(\chi)^- - (\nu)^- = -\min(0, \chi) - \min(0, \nu) = \begin{cases} |\nu| & , \text{ falls } \chi > 0 \wedge \nu < 0 \\ |\chi| & , \text{ falls } \chi < 0 \wedge \nu > 0 \\ |\chi| + |\nu| & , \text{ falls } \chi < 0 \wedge \nu < 0 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}, \quad (\text{B.46})$$

womit die Gültigkeit von (B.42b) gezeigt ist.  $\square$

Um den Stabilitätsbeweis des transformationsbasierten Intervallbeobachters zur Berücksichtigung von Eingangs-, Ausgangs- und Parameterunsicherheiten weiter zu vereinfachen, soll nachfolgend gezeigt werden, dass

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \right\|_2 = \sqrt{2}, \quad (\text{B.47a})$$

$$\|[\mathbf{I} \quad \mathbf{I}]\|_2 = \sqrt{2} \quad (\text{B.47b})$$

gilt. Der nachfolgende Beweis für (B.47a) ist dabei [Bäc16] entnommen, während der Beweis für (B.47b) in dieser Arbeit entwickelt wurde. Hierfür soll zunächst Lemma B.3 eingeführt werden.

**Lemma B.3 (Eigenwerte eines Kronecker-Produktes ([Zha11, S. 191]))**

Für die Eigenwerte des Kroneckerproduktes zwei komplexer quadratischer Matrizen  $\chi \in \mathbb{C}^{\ell \times \ell}$  und  $\nu \in \mathbb{C}^{v \times v}$ , dargestellt durch  $\chi \otimes \nu$ , gilt

$$\lambda_{\chi,i} \cdot \lambda_{\nu,j}, \quad i \in \{1, \dots, \ell\}, \quad j \in \{1, \dots, v\}, \quad (\text{B.48})$$

wobei  $\lambda_{\chi,i}$  ein Eigenwert von  $\chi$  und  $\lambda_{\nu,j}$  ein Eigenwert von  $\nu$  ist.

**Beweis:**

Aus der Definition der Spektralnorm ergibt sich

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\lambda_{max} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \right)} = \sqrt{\lambda_{max} (2 \cdot \mathbf{I})} = \sqrt{2}. \quad (\text{B.49})$$

Damit ist (B.47a) gezeigt. Um auch (B.47b) nachzuweisen, muss

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\lambda_{max} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right)} = \sqrt{\lambda_{max} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right)} \quad (\text{B.50})$$

ausgewertet werden. Unter Berücksichtigung von Lemma B.3 lässt sich diese Gleichung zu

$$\sqrt{\lambda_{max} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right)} = \sqrt{\lambda_{max} \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{I} \right)} = \sqrt{\underbrace{\lambda_{max} \left( \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)}_{=2} \cdot \underbrace{\lambda_{max}(\mathbf{I})}_{=1}} = \sqrt{2} \quad (\text{B.51})$$

umformen, womit (B.47b) gezeigt ist.  $\square$

## C Müllers Theorem

In Müllers Theorem ([Mül27]) sind Bedingungen an Differentialgleichungssysteme, deren Lösungen die Lösung eines anderen Differentialgleichungssystems einschließen, formuliert. Eine sehr kompakte Darstellung dieses Theorems ist in [KW11] gegeben und soll hier kurz in leicht abgewandelter Notation dargestellt und kommentiert werden.

### Lemma C.1 (Müllers Theorem nach [KW11])

Die Funktion  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}, t)$  in

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}, t) \quad (\text{C.1})$$

sei stetig auf dem Gebiet

$$\mathbb{T} := \begin{cases} \underline{\mathbf{x}}(t) \leq \mathbf{x}(t) \leq \bar{\mathbf{x}}(t) \\ \underline{\boldsymbol{\theta}} \leq \boldsymbol{\theta} \leq \bar{\boldsymbol{\theta}} \\ t_0 \leq t \leq t_1 \end{cases} . \quad (\text{C.2})$$

Stellen die Zeilen  $\underline{x}_i(t)$  und  $\bar{x}_i(t)$  der Vektorfunktionen  $\underline{\mathbf{x}}(t)$  und  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  im Intervall  $[t_0, t_1]$  stetige Funktionen dar und erfüllen sie

1.  $\underline{\mathbf{x}}(t_0) \leq \mathbf{x}(t_0) \wedge \bar{\mathbf{x}}(t_0) \geq \mathbf{x}(t_0)$
2.  $D^\pm \underline{x}_i(t) \leq \min_{\mathbb{T}_i(t)} f_i(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}, t) \wedge D^\pm \bar{x}_i(t) \geq \max_{\bar{\mathbb{T}}_i(t)} f_i(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\theta}, t) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$ ,

wobei die Gebiete  $\mathbb{T}_i(t)$  und  $\bar{\mathbb{T}}_i(t)$  durch

$$\mathbb{T}_i(t) := \begin{cases} x_i(t) = \underline{x}_i(t) \\ \underline{x}_j(t) \leq x_j(t) \leq \bar{x}_j(t), \quad i \neq j \\ \underline{\boldsymbol{\theta}} \leq \boldsymbol{\theta} \leq \bar{\boldsymbol{\theta}} \end{cases} , \quad (\text{C.3a})$$

$$\bar{\mathbb{T}}_i(t) := \begin{cases} x_i(t) = \bar{x}_i(t) \\ \underline{x}_j(t) \leq x_j(t) \leq \bar{x}_j(t), \quad i \neq j \\ \underline{\boldsymbol{\theta}} \leq \boldsymbol{\theta} \leq \bar{\boldsymbol{\theta}} \end{cases} \quad (\text{C.3b})$$

gegeben sind, dann gilt

$$\underline{\mathbf{x}}(t) \leq \mathbf{x}(t) \leq \bar{\mathbf{x}}(t) . \quad (\text{C.4})$$

Die in dem vorgestellten Lemma auftretenden Dini-Ableitungen stellen eine Verallgemeinerung der Ableitung dar und werden beispielsweise in [Wil11, S. 124] mit der Infinitesimalzahl  $\kappa$  zu

$$D^+ f(x) := \lim_{\kappa \rightarrow 0_+} \sup \frac{f(x + \kappa) - f(x)}{\kappa} \quad (\text{rechte obere Dini - Ableitung}), \quad (\text{C.5a})$$

$$D_+ f(x) := \lim_{\kappa \rightarrow 0_+} \inf \frac{f(x + \kappa) - f(x)}{\kappa} \quad (\text{rechte untere Dini - Ableitung}), \quad (\text{C.5b})$$

$$D^- f(x) := \lim_{\kappa \rightarrow 0_+} \sup \frac{f(x) - f(x - \kappa)}{\kappa} \quad (\text{linke obere Dini - Ableitung}), \quad (\text{C.5c})$$

$$D_- f(x) := \lim_{\kappa \rightarrow 0_+} \inf \frac{f(x) - f(x - \kappa)}{\kappa} \quad (\text{linke untere Dini - Ableitung}). \quad (\text{C.5d})$$

definiert.

Gegenüber [Mül27] ist bei der Darstellung des Theorems aus [KW11] ein wesentlicher Unterschied festzustellen. In [Mül27] die Annahme getroffen, dass  $\underline{\boldsymbol{x}}(t_0) = \boldsymbol{x}(t_0) = \bar{\boldsymbol{x}}(t_0)$  gilt und nicht, wie hier dargestellt,  $\underline{\boldsymbol{x}}(t_0) \leq \boldsymbol{x}(t_0) \wedge \bar{\boldsymbol{x}}(t_0) \geq \boldsymbol{x}(t_0)$ . Dennoch gilt (C.4), wie sich leicht sehen lässt, denn die Bedingung aus [KW11] schließt den für die Einschließung ungünstigsten Fall (aus [Mül27]), dass die Grenzen auf dem tatsächlichen Zustand liegen, ein. Es wird lediglich die schwächere Forderung getroffen, dass die Anfangswerte des einschließenden Systems den Anfangswert des einzuschließenden Systems einschließen.

## D Stabilitätsdefinitionen

Da im Verlauf der Arbeit verschiedene Stabilitätsdefinitionen im Zuge der Stabilitätsnachweise der Intervallbeobachter herangezogen werden, sollen die Definitionen an dieser Stelle kurz aufgeführt werden. Außerdem soll ein Lemma zur Beschreibung einer notwendigen Bedingung für die BIBO-Stabilität von LTI-Systemen angegeben werden.

**Definition D.1 (Asymptotische Stabilität von LTI-Systemen ([Föl16, S. 299]))**

Das durch

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u}(t), \quad (\text{D.1a})$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x}(t) \quad (\text{D.1b})$$

gegebene System ist asymptotisch stabil, wenn die Lösung von (D.1a) mit  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{0}$  für  $t \rightarrow \infty$  für jeden Anfangswert gegen  $\mathbf{0}$  strebt.

**Definition D.2 (BIBO-Stabilität ([Föl16, S. 82]))**

Ein System heißt BIBO-stabil, wenn sein Ausgang  $\mathbf{y}(t)$  für jede beschränkte Eingangsgröße  $\mathbf{u}(t)$  beschränkt ist.

**Lemma D.1 (Notwendige Bedingung für BIBO-Stabilität eines LTI-Systems ([Föl16, S. 300]))**

System (2.9) ist BIBO-stabil, wenn es asymptotisch stabil ist<sup>24</sup> ([Föl16, S. 301]). System (2.9) ist asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  einen negativen Realteil aufweisen.

**Definition D.3 (Gleichmäßige ultimative Beschränktheit ([PAS00]))**

Existiert ein  $\eta > 0$ , sodass für alle  $\kappa > 0$  ein  $\zeta(\kappa)$  existiert für das aus  $\|\mathbf{x}(t_0)\|_2 \leq \kappa$  die Ungleichung  $\|\mathbf{x}(t)\|_2 \leq \eta$  für alle  $\mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n$ , für alle  $t_0$  und für alle  $t \geq t_0 + \zeta(\kappa)$  folgt, dann ist ein System  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$  gleichmäßig ultimativ beschränkt.

<sup>24</sup> Auf den Seiten 300 und 301 in [Föl16] werden Stabilität und asymptotische Stabilität gleichgesetzt.

**Definition D.4 (Gleichmäßige exponentielle Stabilität ([Rug96, S. 101]))**

Das Differentialgleichungssystem (D.1a) ist gleichmäßig exponentiell stabil, wenn es zwei endliche positive Konstanten  $\kappa$  und  $\eta$  gibt, sodass

$$\|\mathbf{x}(t)\|_2 \leq \kappa \cdot e^{-\eta \cdot (t-t_0)} \cdot \|\mathbf{x}(t_0)\|_2, \quad t \geq t_0 \quad (\text{D.2})$$

für beliebige  $\mathbf{x}(t_0)$  und  $t_0$  gilt.

# E Maschinenmodellierung

## E.1 Wahl des Koordinatensystems

Betrachtet man die Clarke-Transformation (6.1) für unbekannte, aber beschränkte Phasengrößen  $\zeta_1 \in \zeta_{1,m} + \kappa_1 \cdot \Delta\zeta_1$ ,  $\zeta_2 \in \zeta_{2,m} + \kappa_2 \cdot \Delta\zeta_2$ ,  $\zeta_3 \in \zeta_{3,m} + \kappa_3 \cdot \Delta\zeta_3$  mit  $\kappa_i \in [-1, +1]$  und  $\Delta\zeta_i \geq 0$  mit  $i \in \{1, 2, 3\}$ , so erhält man

$$\zeta_\alpha = \frac{2}{3} \cdot (\zeta_1 + \kappa_1 \cdot \Delta\zeta_1) - \frac{1}{3} \cdot (\zeta_2 + \kappa_2 \cdot \Delta\zeta_2) - \frac{1}{3} \cdot (\zeta_3 + \kappa_3 \cdot \Delta\zeta_3), \quad (\text{E.1a})$$

$$\zeta_\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\zeta_2 + \kappa_2 \cdot \Delta\zeta_2) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\zeta_3 + \kappa_3 \cdot \Delta\zeta_3). \quad (\text{E.1b})$$

Da es sich hierbei um eine lineare Abbildung handelt, erhält man ihre Extremwerte für  $\kappa_i = -1$  oder  $\kappa_i = 1$ . Diese Extrempunkte  $(\zeta_{\alpha,\iota}, \zeta_{\beta,\iota})$  mit  $\iota \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  sind unter Zuhilfenahme der Abkürzungen

$$\zeta_{\alpha,m} = -\frac{1}{3} \cdot (-2 \cdot \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3), \quad (\text{E.2a})$$

$$\zeta_{\beta,m} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\zeta_2 - \zeta_3) \quad (\text{E.2b})$$

in Tabelle E.1 aufgeführt.

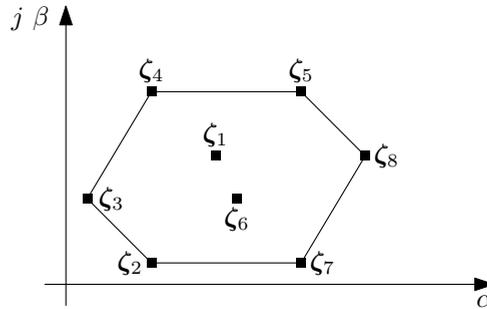
**Tabelle E.1:** Extremwerte der Clarke-Transformation

$\iota$	$\kappa_1$	$\kappa_2$	$\kappa_3$	$\zeta_{\alpha,\iota}$	$\zeta_{\beta,\iota}$
1	-1	-1	-1	$\zeta_{\alpha,m} - \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot \Delta\zeta_1 - \Delta\zeta_2 - \Delta\zeta_3)$	$\zeta_{\beta,m} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (-\Delta\zeta_2 + \Delta\zeta_3)$
2	-1	-1	1	$\zeta_{\alpha,m} - \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot \Delta\zeta_1 - \Delta\zeta_2 + \Delta\zeta_3)$	$\zeta_{\beta,m} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (-\Delta\zeta_2 - \Delta\zeta_3)$
3	-1	1	1	$\zeta_{\alpha,m} - \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot \Delta\zeta_1 + \Delta\zeta_2 + \Delta\zeta_3)$	$\zeta_{\beta,m} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\Delta\zeta_2 - \Delta\zeta_3)$
4	-1	1	-1	$\zeta_{\alpha,m} - \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot \Delta\zeta_1 + \Delta\zeta_2 - \Delta\zeta_3)$	$\zeta_{\beta,m} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\Delta\zeta_2 + \Delta\zeta_3)$
5	1	1	-1	$\zeta_{\alpha,m} - \frac{1}{3} \cdot (-2 \cdot \Delta\zeta_1 + \Delta\zeta_2 - \Delta\zeta_3)$	$\zeta_{\beta,m} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\Delta\zeta_2 + \Delta\zeta_3)$
6	1	1	1	$\zeta_{\alpha,m} - \frac{1}{3} \cdot (-2 \cdot \Delta\zeta_1 + \Delta\zeta_2 + \Delta\zeta_3)$	$\zeta_{\beta,m} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (\Delta\zeta_2 - \Delta\zeta_3)$
7	1	-1	1	$\zeta_{\alpha,m} - \frac{1}{3} \cdot (-2 \cdot \Delta\zeta_1 - \Delta\zeta_2 + \Delta\zeta_3)$	$\zeta_{\beta,m} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (-\Delta\zeta_2 - \Delta\zeta_3)$
8	1	-1	-1	$\zeta_{\alpha,m} - \frac{1}{3} \cdot (-2 \cdot \Delta\zeta_1 - \Delta\zeta_2 - \Delta\zeta_3)$	$\zeta_{\beta,m} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot (-\Delta\zeta_2 + \Delta\zeta_3)$

Wie sich anhand der Tabelle leicht ablesen lässt, gilt:

- $\max(\zeta_{\alpha,\iota}) = \zeta_{\alpha,8}$ ,
- $\min(\zeta_{\alpha,\iota}) = \zeta_{\alpha,3}$ ,
- $\max(\zeta_{\beta,\iota}) = \zeta_{\beta,4} = \zeta_{\beta,5}$  mit  $\zeta_{\alpha,4} \leq \zeta_{\alpha,5}$ ,
- $\min(\zeta_{\beta,\iota}) = \zeta_{\beta,2} = \zeta_{\beta,7}$  mit  $\zeta_{\alpha,2} \leq \zeta_{\alpha,7}$ ,
- $\zeta_{\beta,1} = \zeta_{\beta,8}$  mit  $\zeta_{\alpha,1} \geq \zeta_{\alpha,4} \wedge \zeta_{\alpha,1} \geq \zeta_{\alpha,2}$ ,
- $\zeta_{\beta,6} = \zeta_{\beta,3}$  mit  $\zeta_{\alpha,6} \leq \zeta_{\alpha,5} \wedge \zeta_{\alpha,6} \leq \zeta_{\alpha,7}$ .

Damit bilden die Extremwerte mit  $\iota = \{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$  ein Sechseck, welches die Unsicherheit im  $\alpha$ - $\beta$ -Koordinatensystem exakt beschreibt, wie exemplarisch in Abbildung E.1 mit  $\zeta_\iota^\top = [\zeta_{\alpha,\iota} \quad \zeta_{\beta,\iota}]$  dargestellt. Außerdem folgt aus der Auflistung, dass das Sechseck nur aus diesen Extremwerten gebildet wird und die Extremwerte mit  $\iota = \{1, 6\}$  stets innerhalb des Sechsecks liegen.



**Abbildung E.1:** Projektion eines Intervallvektors in das  $\alpha$ - $\beta$ -Koordinatensystem durch die Clarke-Transformation

## E.2 Herleitung der Maschinengleichungen

An dieser Stelle soll das in Abschnitt 6.1.2 vorgestellte Zustandsraummodell der ASM in Beziehung mit einem in der Literatur beschriebenen Modell der ASM gesetzt werden.

Nach [Sch15a, S. 475] gilt für die ASM:

$$\mathbf{U}_1 = R_1 \cdot \mathbf{I}_1 + \dot{\Psi}_1 + j\Omega_k \cdot \Psi_1, \quad (\text{E.3a})$$

$$\mathbf{U}_2 = R_2 \cdot \mathbf{I}_2 + \dot{\Psi}_2 + j(\Omega_k - \Omega_L) \cdot \Psi_2, \quad (\text{E.3b})$$

$$\Psi_1 = L_1 \cdot \mathbf{I}_1 + M \cdot \mathbf{I}_2, \quad (\text{E.3c})$$

$$\Psi_2 = L_2 \cdot \mathbf{I}_2 + M \cdot \mathbf{I}_1. \quad (\text{E.3d})$$

Um von der Nomenklatur aus [Sch15a] auf die hier verwendete zu kommen, werden zunächst die Umbenennungen  $\mathbf{u}_s =: \mathbf{U}_1$ ,  $\mathbf{u}_r =: \mathbf{U}_2$ ,  $\mathbf{i}_s =: \mathbf{I}_1$ ,  $\mathbf{i}_r =: \mathbf{I}_2$ ,  $\Psi_s =: \Psi_1$ ,

$\Psi_r =: \Psi_2$ ,  $\omega_k =: \Omega_k$ ,  $\omega_l =: \Omega_L$ ,  $R_s =: R_1$ ,  $R_r =: R_2$ ,  $L_h =: M$ ,  $L_s =: L_1$ ,  $L_r =: L_2$  eingeführt. An der Anzahl der Induktivitäten ist ersichtlich, dass dieses Modell auf einem T-Ersatzschaltbild beruht. An dieser Stelle wird von einem beliebigen, mit  $\omega_k$  rotierenden Koordinatensystem ausgegangen. Mit diesen Umbenennungen ergibt sich für (E.3)

$$\mathbf{u}_s = R_s \cdot \mathbf{i}_s + \dot{\Psi}_s + j\omega_k \cdot \Psi_s, \quad (\text{E.4a})$$

$$\mathbf{u}_r = R_r \cdot \mathbf{i}_r + \dot{\Psi}_r + j(\omega_k - \omega_L) \cdot \Psi_r, \quad (\text{E.4b})$$

$$\Psi_s = L_s \cdot \mathbf{i}_s + L_h \cdot \mathbf{i}_r, \quad (\text{E.4c})$$

$$\Psi_r = L_r \cdot \mathbf{i}_r + L_h \cdot \mathbf{i}_s. \quad (\text{E.4d})$$

Durch Einführung des Magnetisierungsstromraumzeigers  $\mathbf{i}_\mu = \mathbf{i}_s + \mathbf{i}_r$  folgt

$$\mathbf{u}_s = R_s \cdot \mathbf{i}_s + \dot{\Psi}_s + j\omega_k \cdot \Psi_s, \quad (\text{E.5a})$$

$$\mathbf{u}_r = R_r \cdot (\mathbf{i}_\mu - \mathbf{i}_s) + \dot{\Psi}_r + j(\omega_k - \omega_L) \cdot \Psi_r, \quad (\text{E.5b})$$

$$\Psi_s = L_s \cdot \mathbf{i}_s + L_h \cdot (\mathbf{i}_\mu - \mathbf{i}_s) = \underbrace{(L_s - L_h)}_{=L_{\sigma,s}} \cdot \mathbf{i}_s + L_h \cdot \mathbf{i}_\mu, \quad (\text{E.5c})$$

$$\Psi_r = L_r \cdot \mathbf{i}_r + L_h \cdot (\mathbf{i}_\mu - \mathbf{i}_r) = \underbrace{(L_r - L_h)}_{=L_{\sigma,r}} \cdot \mathbf{i}_r + L_h \cdot \mathbf{i}_\mu. \quad (\text{E.5d})$$

Für die weiteren Vereinfachungen werden die im Invers- $\Gamma$ -Ersatzschaltbild gültigen Beziehungen

$$L_{\sigma,r} = 0 \implies \Psi_r = L_h \cdot \mathbf{i}_\mu \implies \dot{\Psi}_r = L_h \cdot \dot{\mathbf{i}}_\mu, \quad (\text{E.6a})$$

$$\dot{\Psi}_s = L_h \cdot \dot{\mathbf{i}}_\mu + L_{\sigma,s} \cdot \dot{\mathbf{i}}_s \quad (\text{E.6b})$$

sowie die Käfigläuferbedingung  $\mathbf{u}_r = \mathbf{0}$  genutzt, womit durch Einsetzen in die Spannungsgleichungen aus (E.5)

$$\dot{\mathbf{i}}_\mu = \frac{R_r}{L_h} \cdot (\mathbf{i}_s - \mathbf{i}_\mu) + j(\omega_l - \omega_k) \cdot \mathbf{i}_\mu \quad (\text{E.7})$$

und

$$\dot{\mathbf{i}}_s = -\frac{R_r + R_s}{L_{\sigma,s}} \cdot \mathbf{i}_s + \frac{R_r}{L_{\sigma,s}} \mathbf{i}_\mu - j \left( \omega_l \cdot \frac{L_h}{L_{\sigma,s}} \cdot \mathbf{i}_\mu + \omega_k \cdot \mathbf{i}_s \right) + \frac{1}{L_{\sigma,s}} \cdot \mathbf{u}_s \quad (\text{E.8})$$

folgt.

Durch Darstellung von (E.7) und (E.8) in Komponentenschreibweise und Verwendung des statorfesten Koordinatensystems ( $\omega_k = 0$ ) erhält man (6.3).

### E.3 Datenblattangaben der Prüfstands-Asynchronmaschine

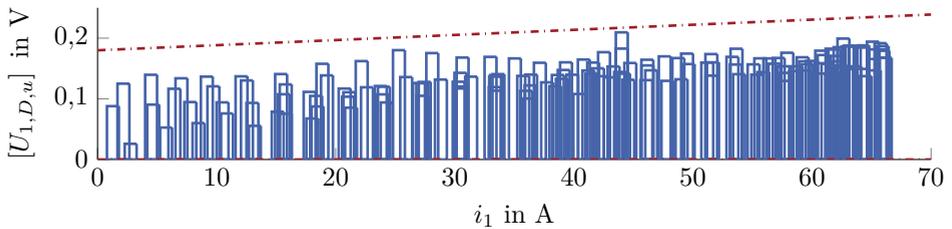
Neben den bereits in Tabelle 7.1 aufgelisteten elektrischen Parametern sollen an dieser Stelle weitere Datenblattangaben zur bei den Messungen verwendeten ASM aufgeführt werden.

- Nennleistung: 2 kW
- Nennmoment: 6,3 N m
- Nenndrehzahl:  $3000 \frac{1}{\text{min}}$
- Maximaldrehzahl:  $8000 \frac{1}{\text{min}}$

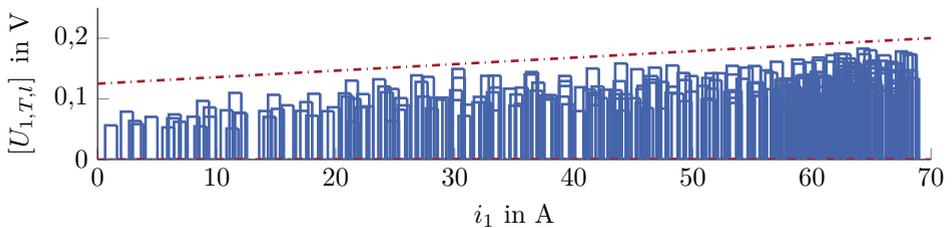
# F Ergänzende Kennlinien des Wechselrichter-Intervallmodells

In diesem Kapitel sollen Intervallkennlinien zur Charakterisierung des Wechselrichters, welche zu Gunsten einer kompakten Darstellung im Hauptteil nicht aufgeführt wurden, präsentiert werden.

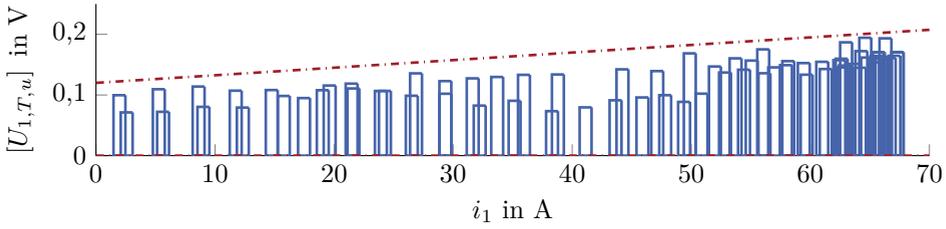
## F.1 Kennlinien der Vorwärtsspannung



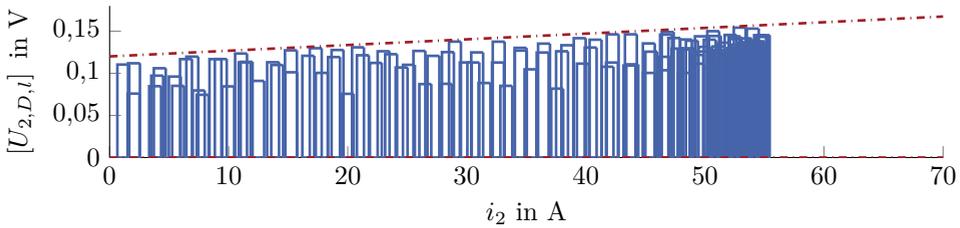
**Abbildung F.1:** Identifizierte Vorwärtsspannung der oberen Diode in Phase 1 (blau: Datenintervalle, rot strichpunktiert: berechnete ICC)



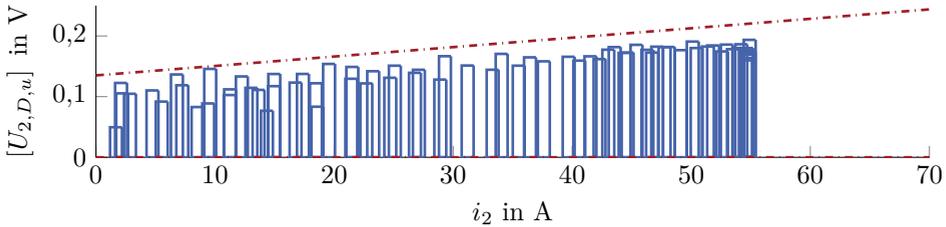
**Abbildung F.2:** Identifizierte Vorwärtsspannung des unteren Transistors in Phase 1 (blau: Datenintervalle, rot strichpunktiert: berechnete ICC)



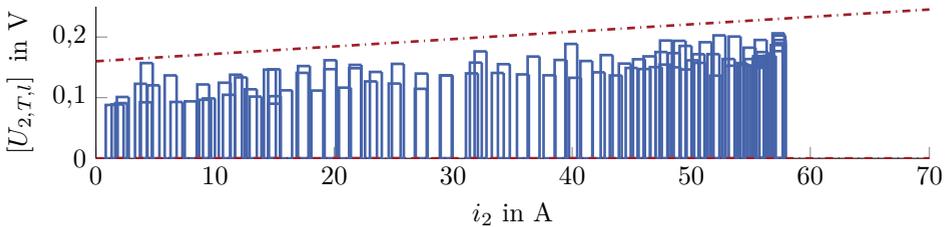
**Abbildung F.3:** Identifizierte Vorwärtsspannung des oberen Transistors in Phase 1 (blau: Datenintervalle, rot strichpunktiert: berechnete ICC)



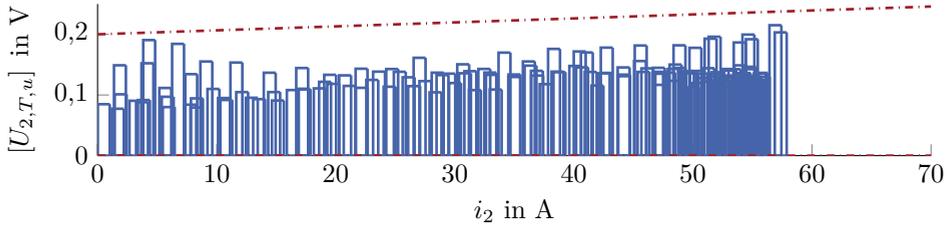
**Abbildung F.4:** Identifizierte Vorwärtsspannung der unteren Diode in Phase 2 (blau: Datenintervalle, rot strichpunktiert: berechnete ICC)



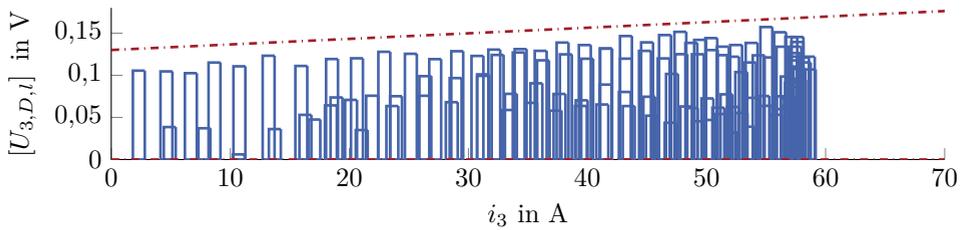
**Abbildung F.5:** Identifizierte Vorwärtsspannung der oberen Diode in Phase 2 (blau: Datenintervalle, rot strichpunktiert: berechnete ICC)



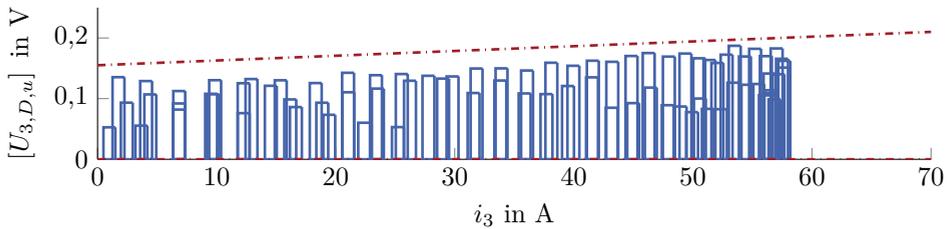
**Abbildung F.6:** Identifizierte Vorwärtsspannung des unteren Transistors in Phase 2 (blau: Datenintervalle, rot strichpunktiert: berechnete ICC)



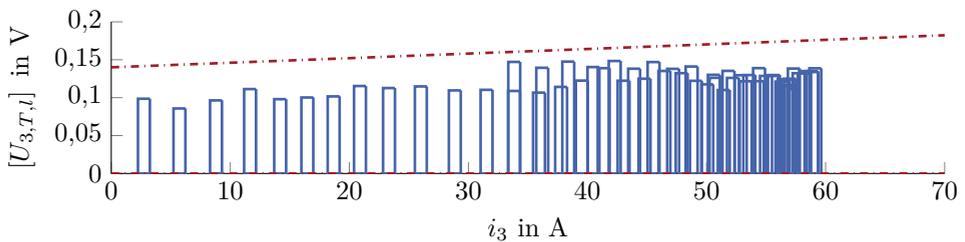
**Abbildung F.7:** Identifizierte Vorwärtsspannung des oberen Transistors in Phase 2 (blau: Datenintervalle, rot strichpunktiert: berechnete ICC)



**Abbildung F.8:** Identifizierte Vorwärtsspannung der unteren Diode in Phase 3 (blau: Datenintervalle, rot strichpunktiert: berechnete ICC)

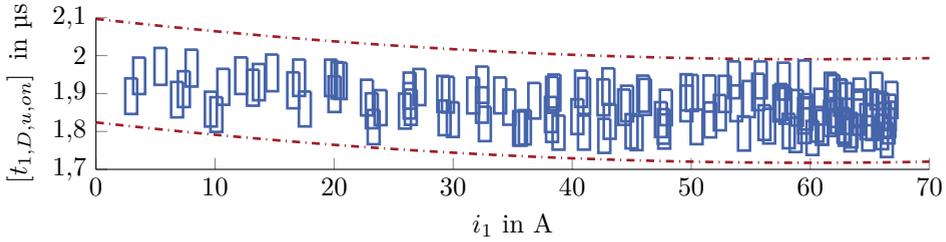


**Abbildung F.9:** Identifizierte Vorwärtsspannung der oberen Diode in Phase 3 (blau: Datenintervalle, rot strichpunktiert: berechnete ICC)

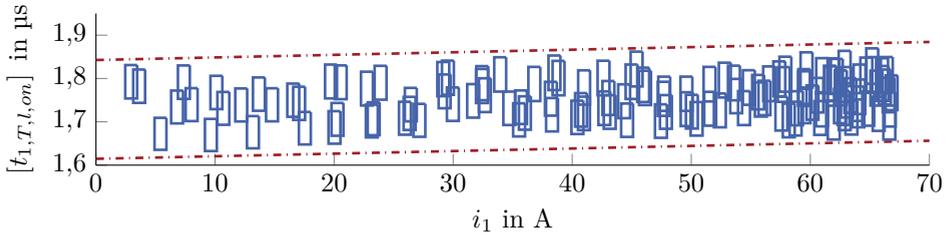


**Abbildung F.10:** Identifizierte Vorwärtsspannung des unteren Transistors in Phase 3 (blau: Datenintervalle, rot strichpunktiert: berechnete ICC)

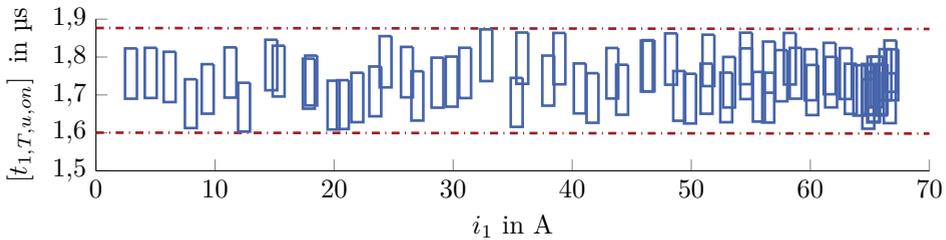
## F.2 Kennlinien der äquivalenten Einschaltzeit



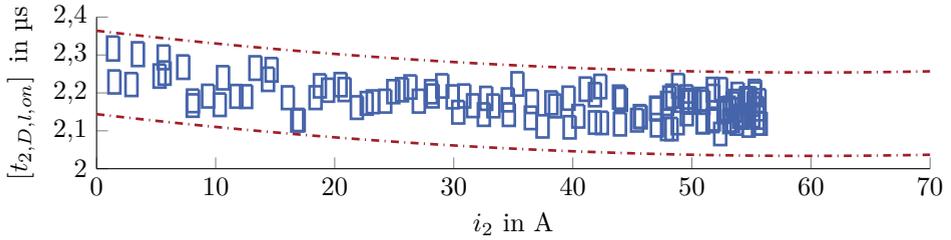
**Abbildung F.11:** Identifizierte äquivalente Einschaltzeit der oberen Diode in Phase 1 (blau: Datenintervalle, rot strichpunktiert: berechnete ICC)



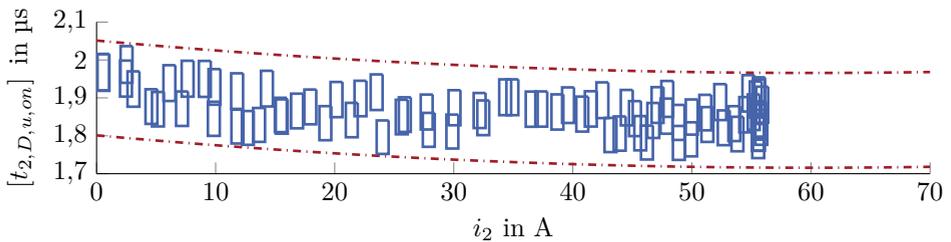
**Abbildung F.12:** Identifizierte äquivalente Einschaltzeit des unteren Transistors in Phase 1 (blau: Datenintervalle, rot strichpunktiert: berechnete ICC)



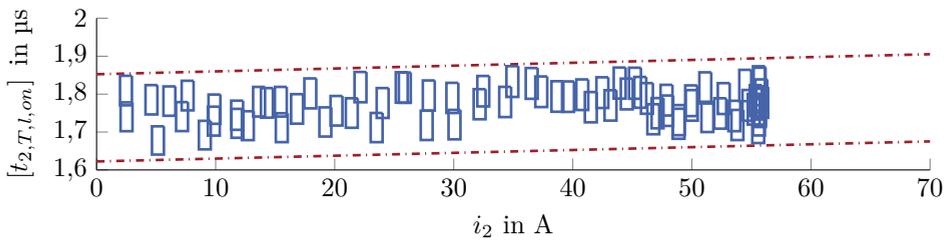
**Abbildung F.13:** Identifizierte äquivalente Einschaltzeit des oberen Transistors in Phase 1 (blau: Datenintervalle, rot strichpunktiert: berechnete ICC)



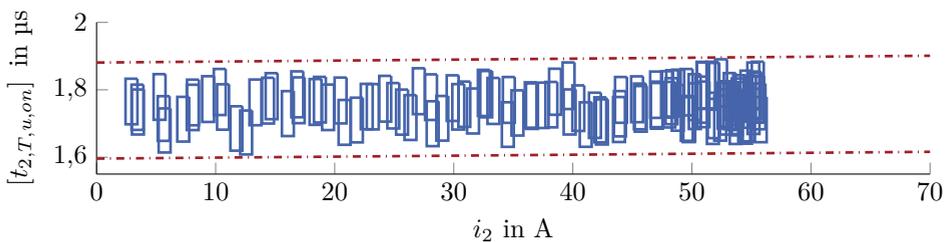
**Abbildung F.14:** Identifizierte äquivalente Einschaltzeit der unteren Diode in Phase 2 (blau: Datenintervalle, rot strichpunktiert: berechnete ICC)



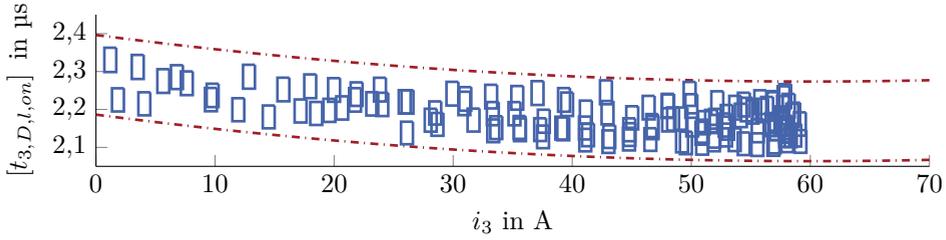
**Abbildung F.15:** Identifizierte äquivalente Einschaltzeit der oberen Diode in Phase 2 (blau: Datenintervalle, rot strichpunktiert: berechnete ICC)



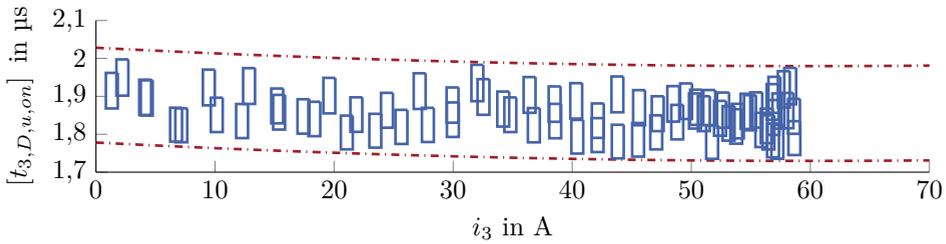
**Abbildung F.16:** Identifizierte äquivalente Einschaltzeit des unteren Transistors in Phase 2 (blau: Datenintervalle, rot strichpunktiert: berechnete ICC)



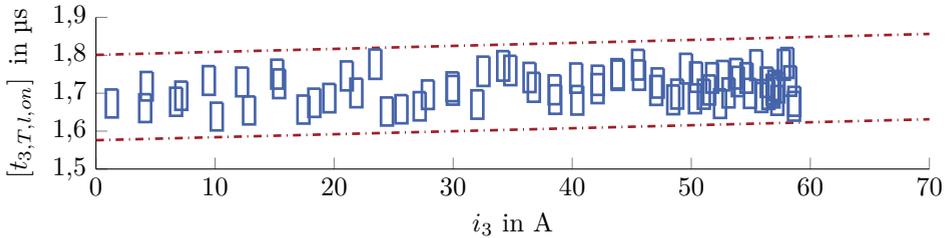
**Abbildung F.17:** Identifizierte äquivalente Einschaltzeit des oberen Transistors in Phase 2 (blau: Datenintervalle, rot strichpunktiert: berechnete ICC)



**Abbildung F.18:** Identifizierte äquivalente Einschaltzeit der unteren Diode in Phase 3 (blau: Datenintervalle, rot strichpunktiert: berechnete ICC)



**Abbildung F.19:** Identifizierte äquivalente Einschaltzeit der oberen Diode in Phase 3 (blau: Datenintervalle, rot strichpunktiert: berechnete ICC)



**Abbildung F.20:** Identifizierte äquivalente Einschaltzeit des unteren Transistors in Phase 3 (blau: Datenintervalle, rot strichpunktiert: berechnete ICC)

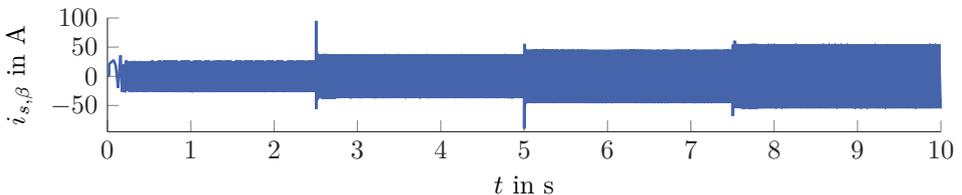
# G Ergänzende Ergebnisse der Intervallschätzung für die Asynchronmaschine

Die Grafiken und Tabellen, die in diesem Kapitel dargestellt werden, dienen als Ergänzung zu den Kapiteln 8 und 9.

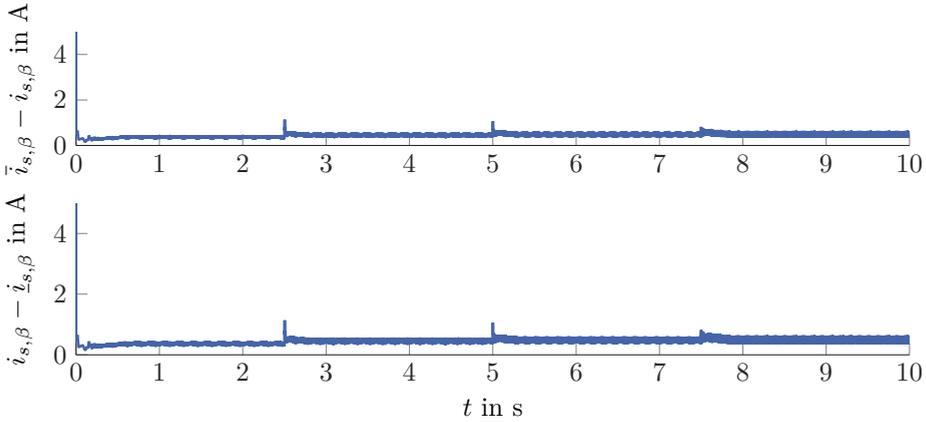
## G.1 Simulationen

Da die zeitlichen Verläufe von  $i_{s,\alpha}(t)$  und  $i_{\mu,\alpha}(t)$ , dargestellt in den Abbildungen 8.3 und 8.6, unter Vernachlässigung numerischer Fehler für alle Konfigurationen aufgrund des gleichen Szenarios identisch sind, werden sie an dieser Stelle nicht mehr für jede Konfiguration angegeben. Mit der gleichen Argumentation werden die Verläufe von  $i_{s,\beta}(t)$  und  $i_{\mu,\beta}(t)$  auch in diesem Anhangskapitel nur für Konfiguration 1 dargestellt.

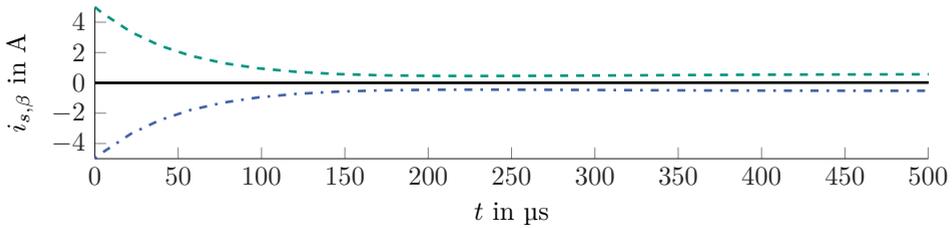
### G.1.1 Konfiguration 1



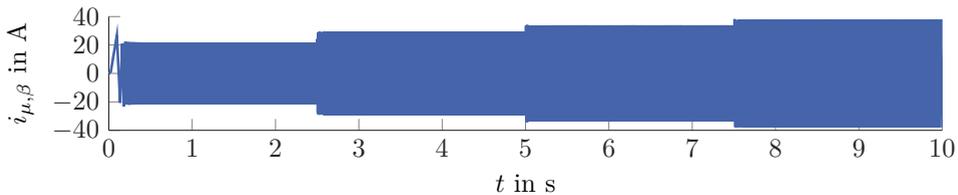
**Abbildung G.1:** Simulation (Konfiguration 1): Zeitlicher Verlauf von  $i_{s,\beta}(t)$  für das gesamte Szenario



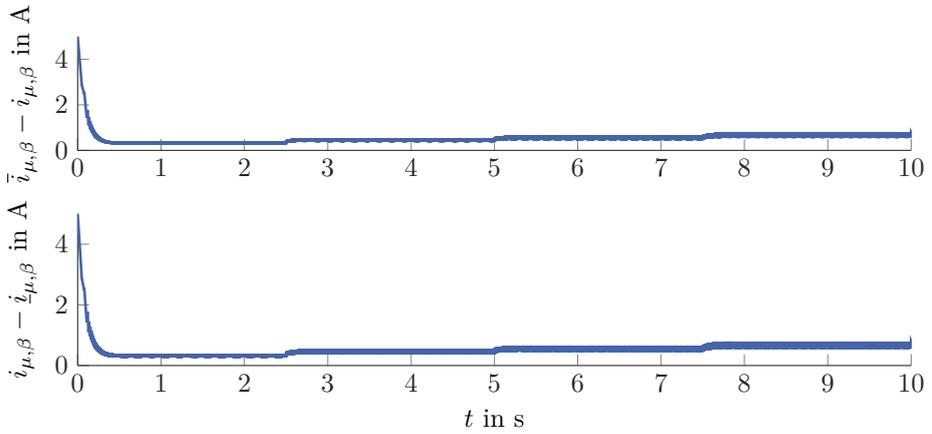
**Abbildung G.2:** Simulation (Konfiguration 1): Zeitlicher Verlauf von  $\bar{e}_{s,\beta}(t)$  und  $\underline{e}_{s,\beta}(t)$  für das gesamte Szenario



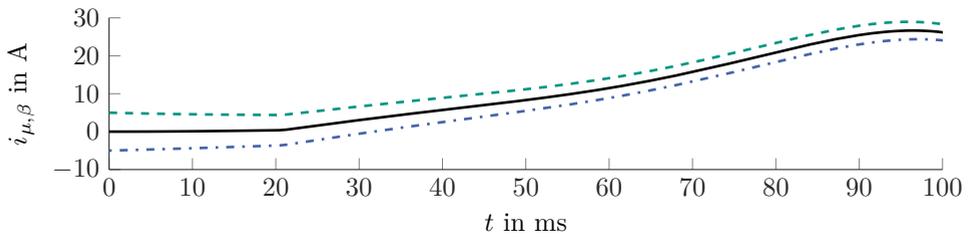
**Abbildung G.3:** Simulation (Konfiguration 1): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von  $i_{s,\beta}(t)$  (Untergrenze: blau strichpunktiiert, Obergrenze: grün gestrichelt, tatsächliche Zustandsgröße: schwarz)



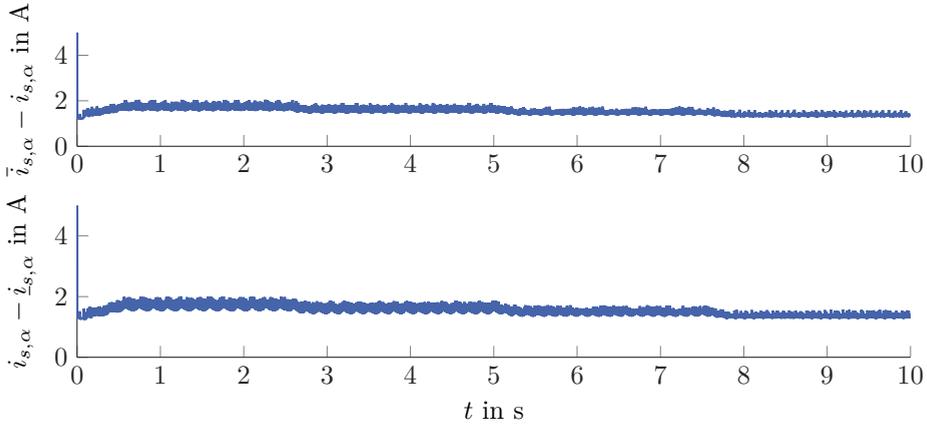
**Abbildung G.4:** Simulation (Konfiguration 1): Zeitlicher Verlauf von  $i_{\mu,\beta}(t)$  für das gesamte Szenario



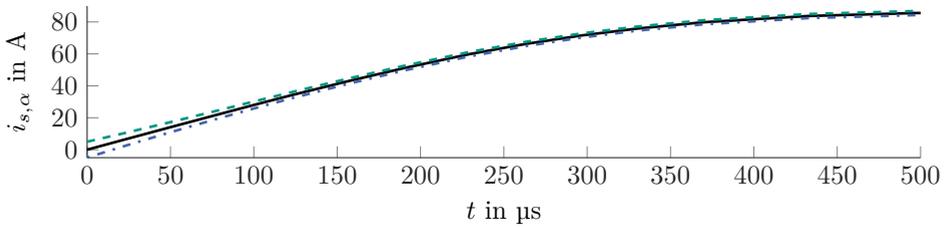
**Abbildung G.5:** Simulation (Konfiguration 1): Zeitlicher Verlauf von  $\bar{e}_{\mu,\beta}(t)$  und  $\underline{e}_{\mu,\beta}(t)$  für das gesamte Szenario



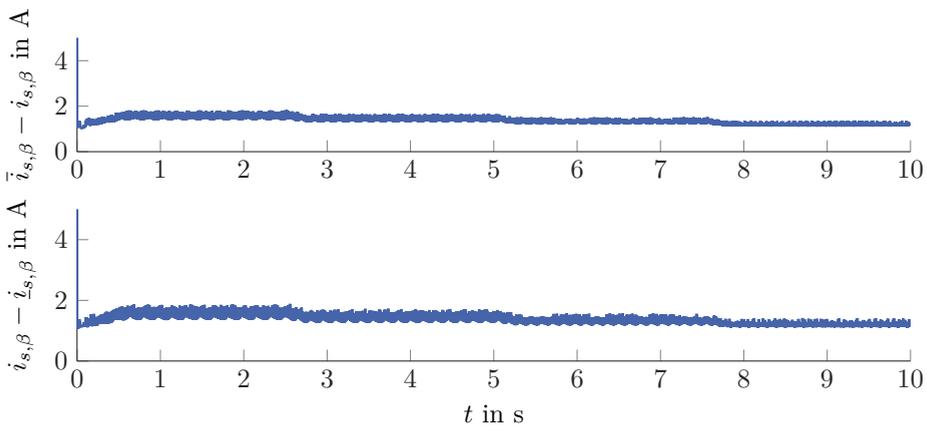
**Abbildung G.6:** Simulation (Konfiguration 1): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von  $i_{\mu,\beta}(t)$  (Untergrenze: blau strichpunktiert, Obergrenze: grün gestrichelt, tatsächliche Zustandsgröße: schwarz)



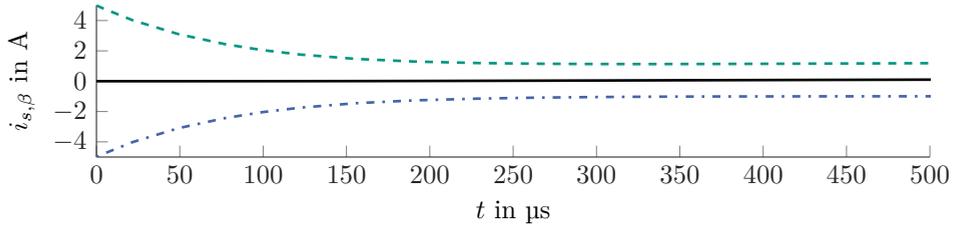
**Abbildung G.7:** Simulation (Konfiguration 2): Zeitlicher Verlauf von  $\bar{i}_{s,\alpha}(t)$  und  $\underline{i}_{s,\alpha}(t)$  für das gesamte Szenario



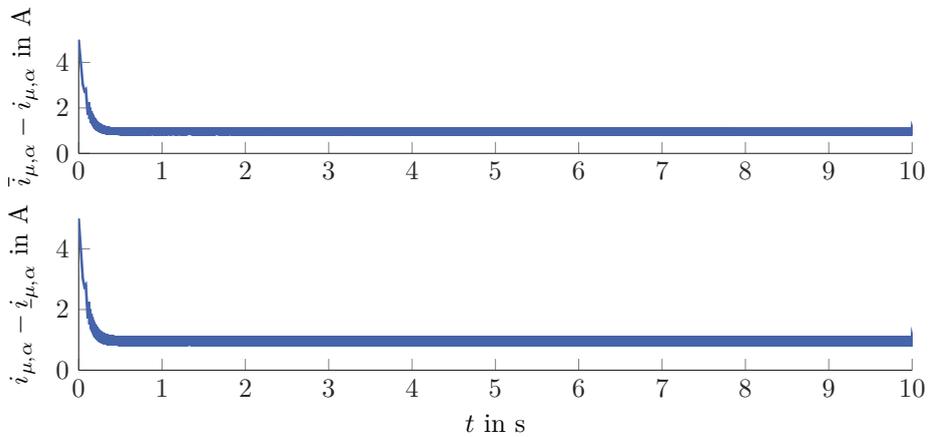
**Abbildung G.8:** Simulation (Konfiguration 2): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von  $i_{s,\alpha}(t)$  (Untergrenze: blau strichpunktiert, Obergrenze: grün gestrichelt, tatsächliche Zustandsgröße: schwarz)



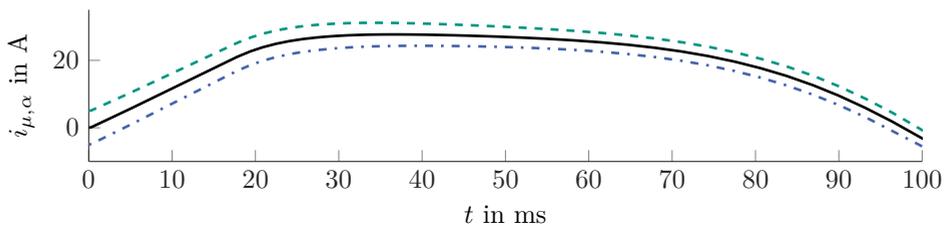
**Abbildung G.9:** Simulation (Konfiguration 2): Zeitlicher Verlauf von  $\bar{i}_{s,\beta}(t)$  und  $\underline{i}_{s,\beta}(t)$  für das gesamte Szenario



**Abbildung G.10:** Simulation (Konfiguration 2): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von  $i_{s,\beta}(t)$  (Untergrenze: blau strichpunktiert, Obergrenze: grün gestrichelt, tatsächliche Zustandsgröße: schwarz)



**Abbildung G.11:** Simulation (Konfiguration 2): Zeitlicher Verlauf von  $\bar{e}_{\mu,\alpha}(t)$  und  $\underline{e}_{\mu,\alpha}(t)$  für das gesamte Szenario



**Abbildung G.12:** Simulation (Konfiguration 2): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von  $i_{\mu,\alpha}(t)$  (Untergrenze: blau strichpunktiert, Obergrenze: grün gestrichelt, tatsächliche Zustandsgröße: schwarz)

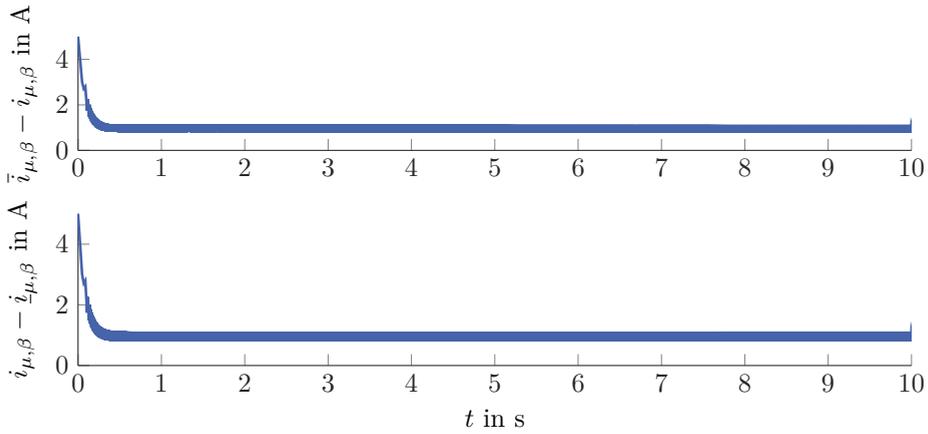


Abbildung G.13: Simulation (Konfiguration 2): Zeitlicher Verlauf von  $\bar{e}_{\mu,\beta}(t)$  und  $\underline{e}_{\mu,\beta}(t)$  für das gesamte Szenario

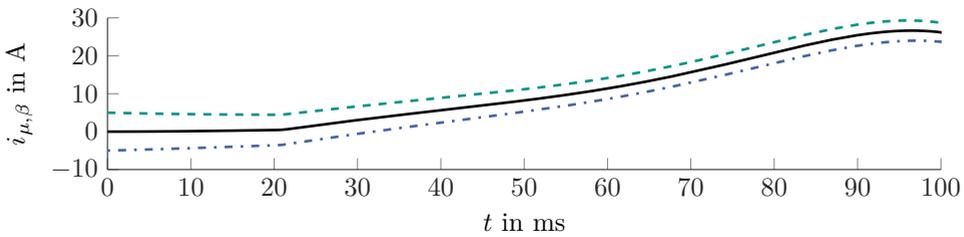
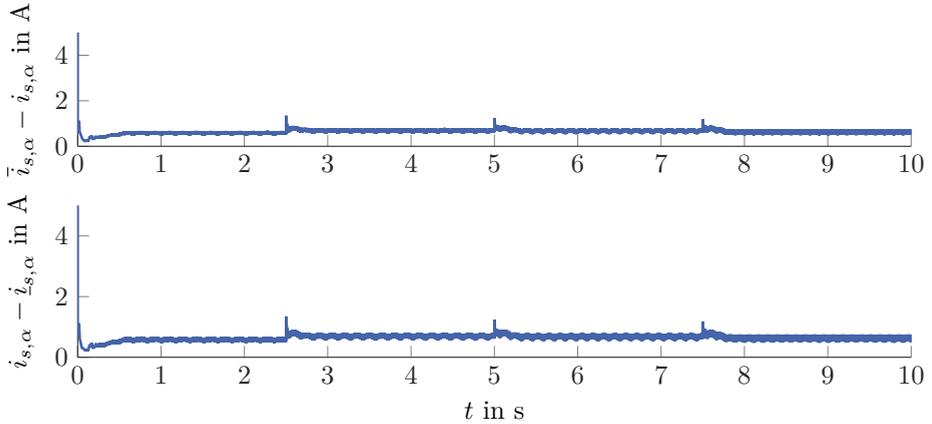
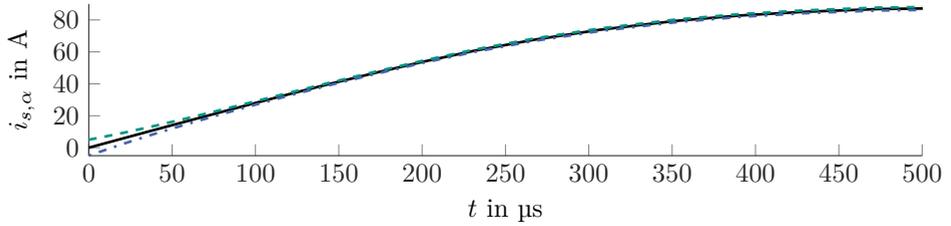


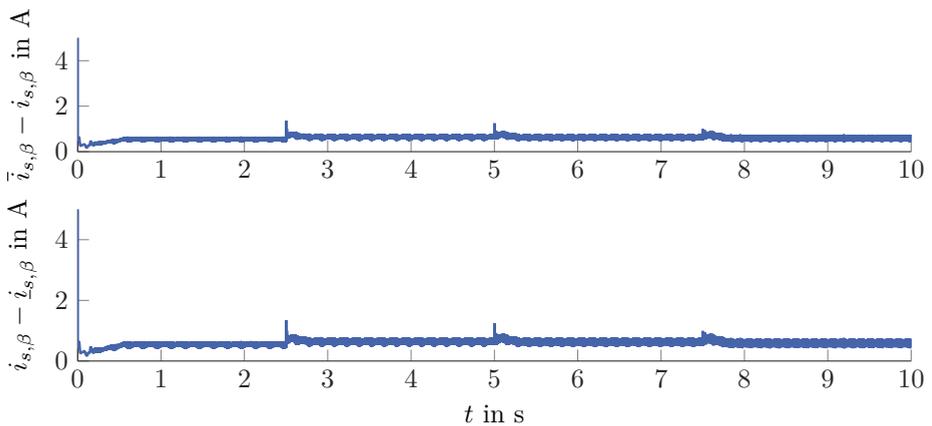
Abbildung G.14: Simulation (Konfiguration 2): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von  $i_{\mu,\beta}(t)$  (Untergrenze: blau strichpunktiert, Obergrenze: grün gestrichelt, tatsächliche Zustandsgröße: schwarz)



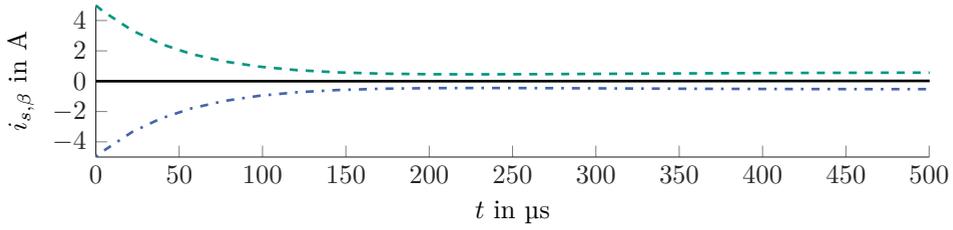
**Abbildung G.15:** Simulation (Konfiguration 3): Zeitlicher Verlauf von  $\bar{e}_{s,\alpha}(t)$  und  $\underline{e}_{s,\alpha}(t)$  für das gesamte Szenario



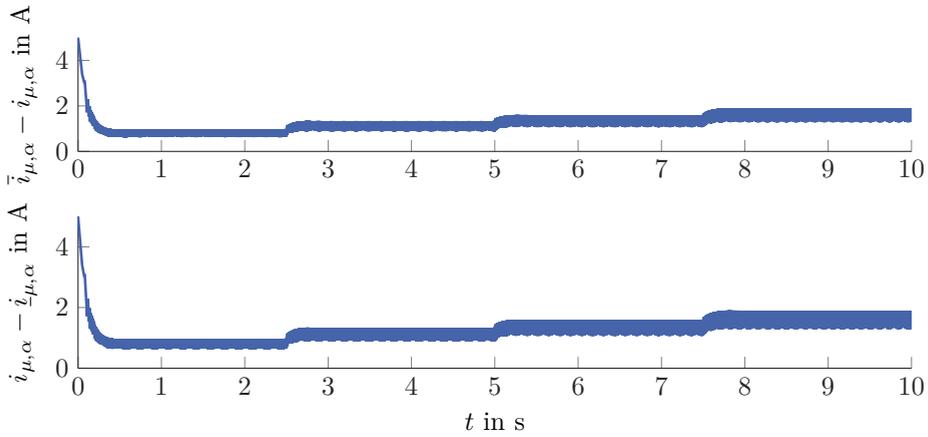
**Abbildung G.16:** Simulation (Konfiguration 3): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von  $i_{s,\alpha}(t)$  (Untergrenze: blau strichpunktiert, Obergrenze: grün gestrichelt, tatsächliche Zustandsgröße: schwarz)



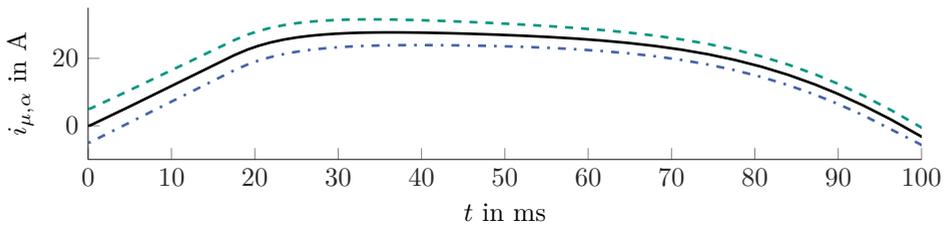
**Abbildung G.17:** Simulation (Konfiguration 3): Zeitlicher Verlauf von  $\bar{e}_{s,\beta}(t)$  und  $\underline{e}_{s,\beta}(t)$  für das gesamte Szenario



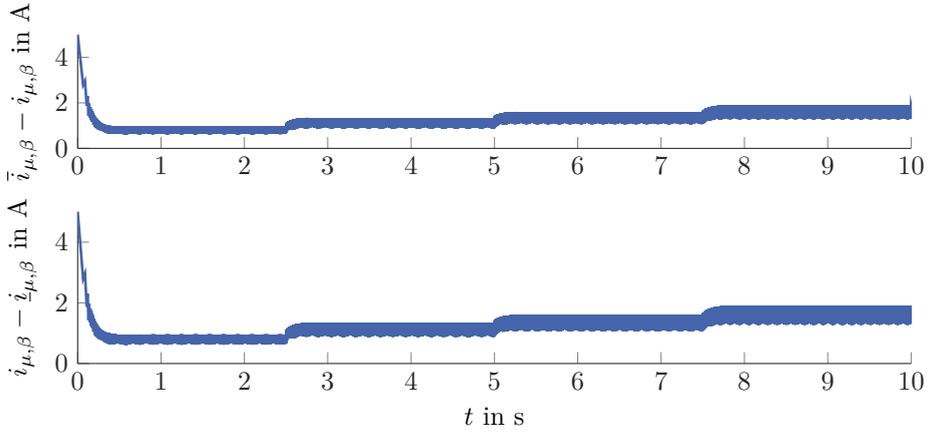
**Abbildung G.18:** Simulation (Konfiguration 3): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von  $i_{s,\beta}(t)$  (Untergrenze: blau strichpunktiert, Obergrenze: grün gestrichelt, tatsächliche Zustandsgröße: schwarz)



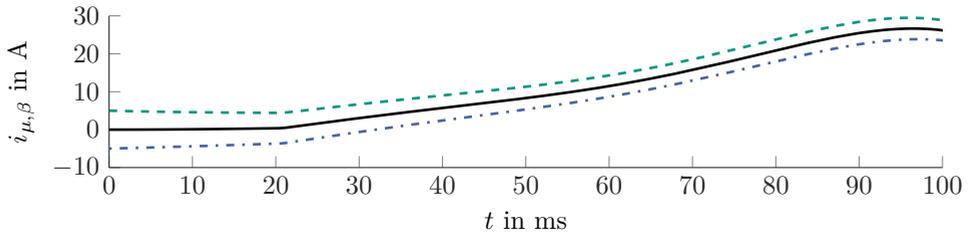
**Abbildung G.19:** Simulation (Konfiguration 3): Zeitlicher Verlauf von  $\bar{e}_{\mu,\alpha}(t)$  und  $\underline{e}_{\mu,\alpha}(t)$  für das gesamte Szenario



**Abbildung G.20:** Simulation (Konfiguration 3): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von  $i_{\mu,\alpha}(t)$  (Untergrenze: blau strichpunktiert, Obergrenze: grün gestrichelt, tatsächliche Zustandsgröße: schwarz)



**Abbildung G.21:** Simulation (Konfiguration 3): Zeitlicher Verlauf von  $\bar{e}_{\mu,\beta}(t)$  und  $\underline{e}_{\mu,\beta}(t)$  für das gesamte Szenario



**Abbildung G.22:** Simulation (Konfiguration 3): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von  $i_{\mu,\beta}(t)$  (Untergrenze: blau strichpunktiert, Obergrenze: grün gestrichelt, tatsächliche Zustandsgröße: schwarz)

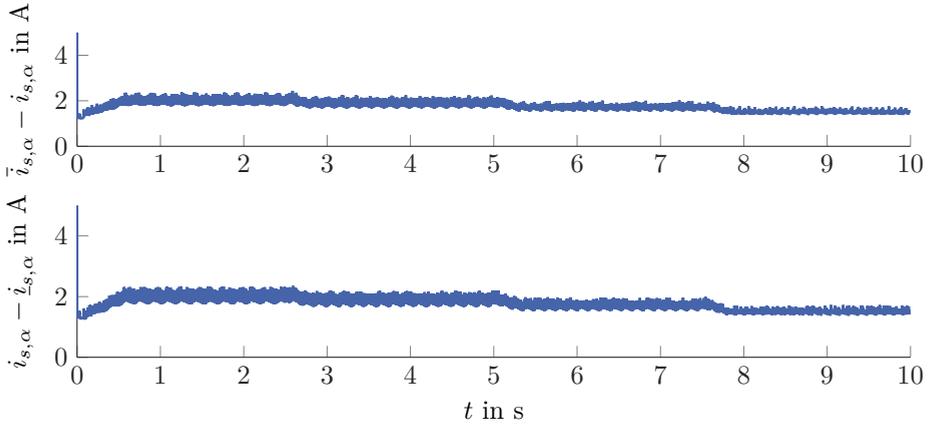


Abbildung G.23: Simulation (Konfiguration 4): Zeitlicher Verlauf von  $\bar{e}_{s,\alpha}(t)$  und  $e_{s,\alpha}(t)$  für das gesamte Szenario

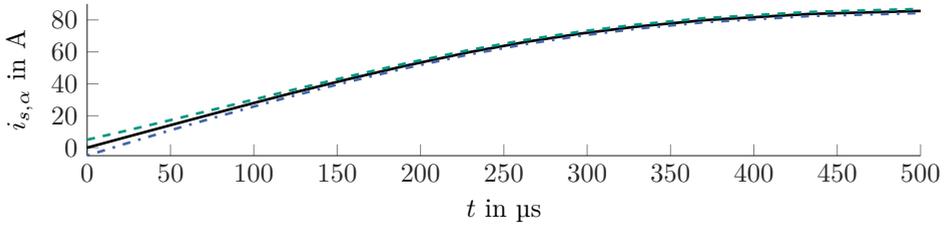


Abbildung G.24: Simulation (Konfiguration 4): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von  $i_{s,\alpha}(t)$  (Untergrenze: blau strichpunktiert, Obergrenze: grün gestrichelt, tatsächliche Zustandsgröße: schwarz)

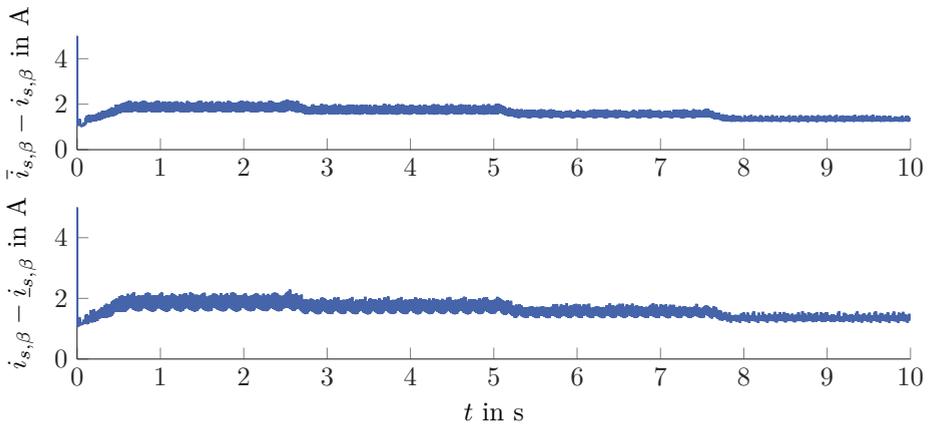
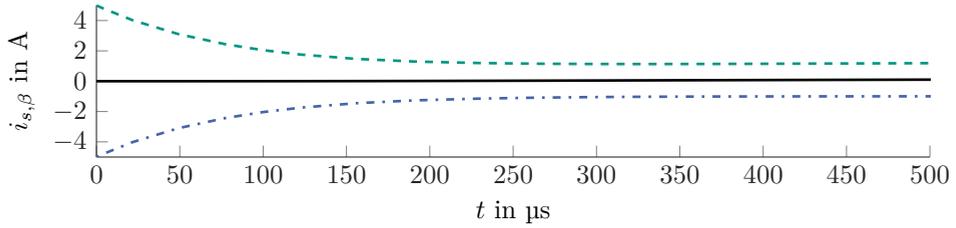
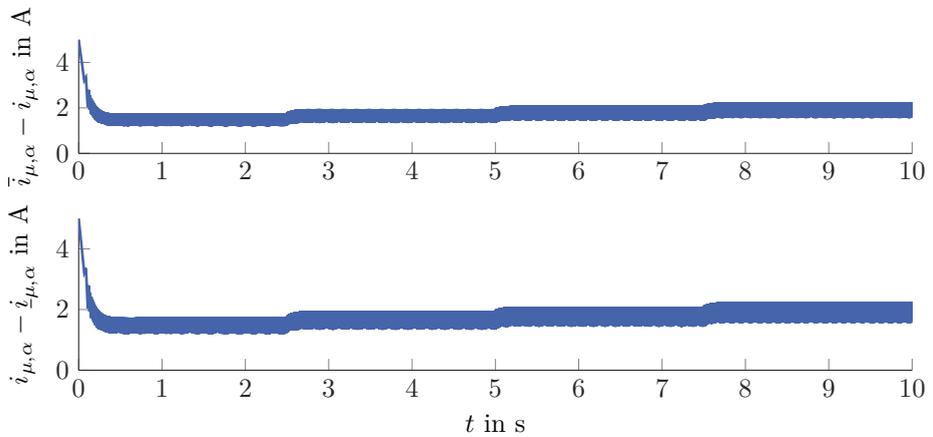


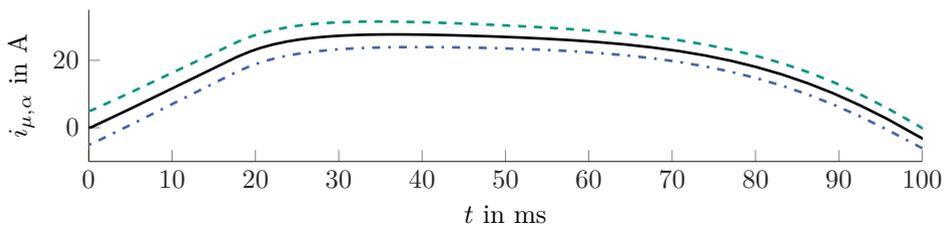
Abbildung G.25: Simulation (Konfiguration 4): Zeitlicher Verlauf von  $\bar{e}_{s,\beta}(t)$  und  $e_{s,\beta}(t)$  für das gesamte Szenario



**Abbildung G.26:** Simulation (Konfiguration 4): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von  $i_{s,\beta}(t)$  (Untergrenze: blau strichpunktiert, Obergrenze: grün gestrichelt, tatsächliche Zustandsgröße: schwarz)



**Abbildung G.27:** Simulation (Konfiguration 4): Zeitlicher Verlauf von  $\bar{e}_{\mu,\alpha}(t)$  und  $\underline{e}_{\mu,\alpha}(t)$  für das gesamte Szenario



**Abbildung G.28:** Simulation (Konfiguration 4): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von  $i_{\mu,\alpha}(t)$  (Untergrenze: blau strichpunktiert, Obergrenze: grün gestrichelt, tatsächliche Zustandsgröße: schwarz)

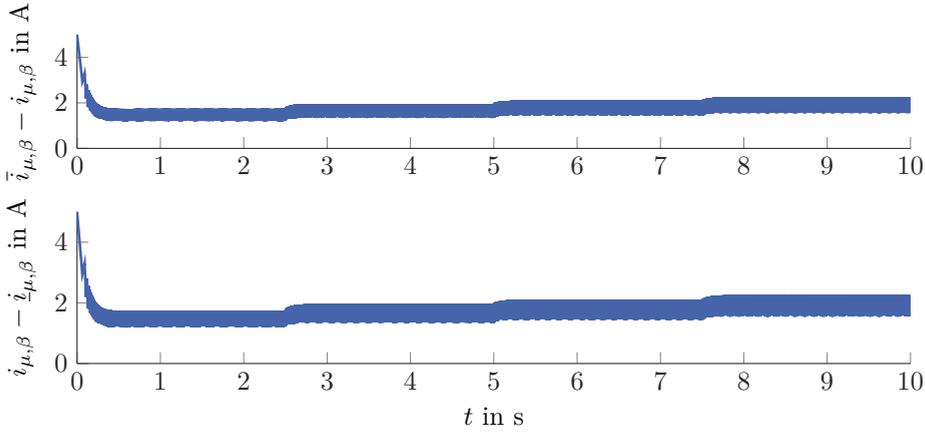


Abbildung G.29: Simulation (Konfiguration 4): Zeitlicher Verlauf von  $\bar{e}_{\mu,\beta}(t)$  und  $\underline{e}_{\mu,\beta}(t)$  für das gesamte Szenario

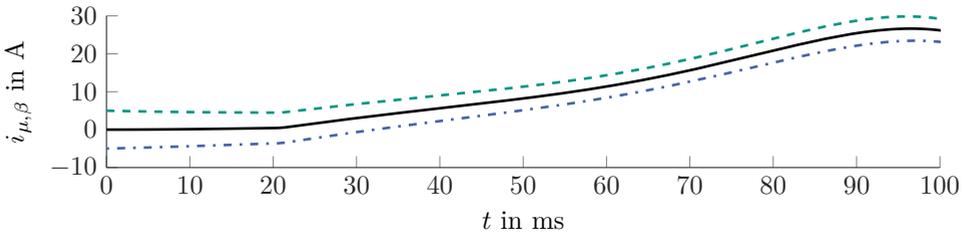


Abbildung G.30: Simulation (Konfiguration 4): Einschwingvorgang der Intervallschätzung von  $i_{\mu,\beta}(t)$  (Untergrenze: blau strichpunktiert, Obergrenze: grün gestrichelt, tatsächliche Zustandsgröße: schwarz)

Wie in Kapitel 8 beschrieben, sollen an dieser Stelle die mittleren Intervallbreiten der Schätzergebnisse in den eingeführten Zeiträumen sowie der Mittelwert der Amplituden der Referenzwerte in diesen Zeiträumen tabellarisch dargestellt werden.

Tabelle G.1: Simulation: Mittelwerte der Intervallbreite von  $[i_{s,\alpha}(t)]$  in Abhängigkeit der Konfiguration und des betrachteten Zeitintervalls

Konfiguration	$t \in [0,5 \text{ s}, 2 \text{ s}]$	$t \in [3 \text{ s}, 4,5 \text{ s}]$	$t \in [5,5 \text{ s}, 7 \text{ s}]$	$t \in [8 \text{ s}, 9,5 \text{ s}]$
1	0,82 A	1,02 A	1,08 A	1,12 A
2	3,50 A	3,25 A	2,98 A	2,72 A
3	1,18 A	1,40 A	1,38 A	1,30 A
4	4,10 A	3,85 A	3,46 A	3,01 A

**Tabelle G.2:** Simulation: Mittelwerte der Intervallbreite von  $[i_{s,\beta}(t)]$  in Abhängigkeit der Konfiguration und des betrachteten Zeitintervalls

Konfiguration	$t \in [0,5 \text{ s}, 2 \text{ s}]$	$t \in [3 \text{ s}, 4,5 \text{ s}]$	$t \in [5,5 \text{ s}, 7 \text{ s}]$	$t \in [8 \text{ s}, 9,5 \text{ s}]$
1	0,73 A	0,91 A	0,96 A	0,98 A
2	3,18 A	2,92 A	2,66 A	2,39 A
3	1,10 A	1,30 A	1,27 A	1,17 A
4	3,77 A	3,53 A	3,13 A	2,68 A

**Tabelle G.3:** Simulation: Mittelwerte der Intervallbreite von  $[i_{\mu,\alpha}(t)]$  in Abhängigkeit der Konfiguration und des betrachteten Zeitintervalls

Konfiguration	$t \in [0,5 \text{ s}, 2 \text{ s}]$	$t \in [3 \text{ s}, 4,5 \text{ s}]$	$t \in [5,5 \text{ s}, 7 \text{ s}]$	$t \in [8 \text{ s}, 9,5 \text{ s}]$
1	0,67 A	0,96 A	1,16 A	1,41 A
2	2,02 A	2,02 A	2,02 A	2,02 A
3	1,71 A	2,40 A	2,87 A	3,41 A
4	3,13 A	3,51 A	3,77 A	4,05 A

**Tabelle G.4:** Simulation: Mittelwerte der Intervallbreite von  $[i_{\mu,\beta}(t)]$  in Abhängigkeit der Konfiguration und des betrachteten Zeitintervalls

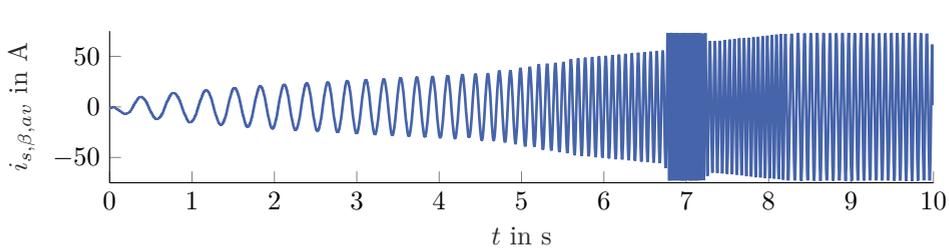
Konfiguration	$t \in [0,5 \text{ s}, 2 \text{ s}]$	$t \in [3 \text{ s}, 4,5 \text{ s}]$	$t \in [5,5 \text{ s}, 7 \text{ s}]$	$t \in [8 \text{ s}, 9,5 \text{ s}]$
1	0,67 A	0,96 A	1,16 A	1,41 A
2	2,02 A	2,02 A	2,02 A	2,02 A
3	1,71 A	2,40 A	2,87 A	3,41 A
4	3,13 A	3,51 A	3,77 A	4,05 A

Neben den dargestellten Verläufen der zu schätzenden Größen, die aufzeigen, dass deren Amplituden während der obigen Zeitintervalle nahezu konstant sind, sollen diese nachfolgend in einer Tabelle aufgeführt werden.

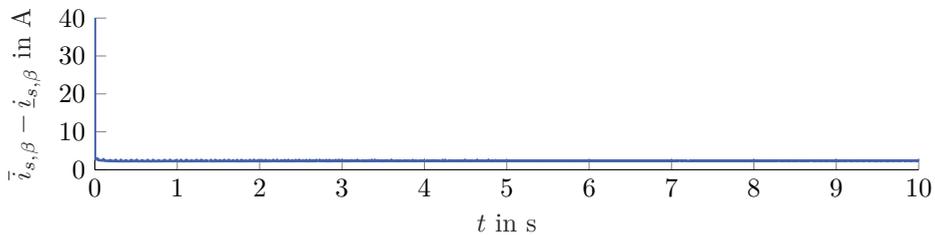
**Tabelle G.5:** Simulation: Mittelwerte der Amplituden der Zustandsgrößen in Abhängigkeit des betrachteten Zeitintervalls

Größe	$t \in [0,5 \text{ s}, 2 \text{ s}]$	$t \in [3 \text{ s}, 4,5 \text{ s}]$	$t \in [5,5 \text{ s}, 7 \text{ s}]$	$t \in [8 \text{ s}, 9,5 \text{ s}]$
$i_{s,\alpha}(t)$	26 A	37 A	45 A	55 A
$i_{s,\beta}(t)$	26 A	37 A	45 A	55 A
$i_{\mu,\alpha}(t)$	21 A	29 A	34 A	38 A
$i_{\mu,\beta}(t)$	21 A	29 A	34 A	38 A

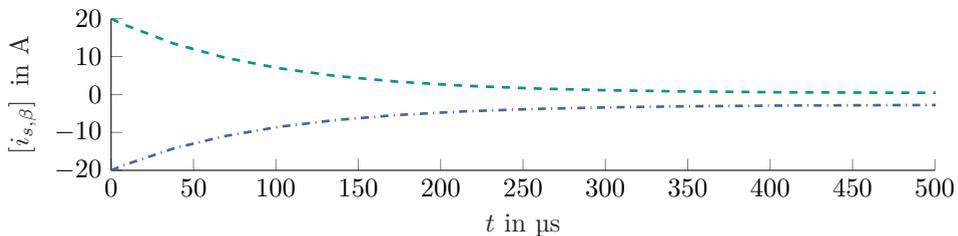
## G.2 Messungen



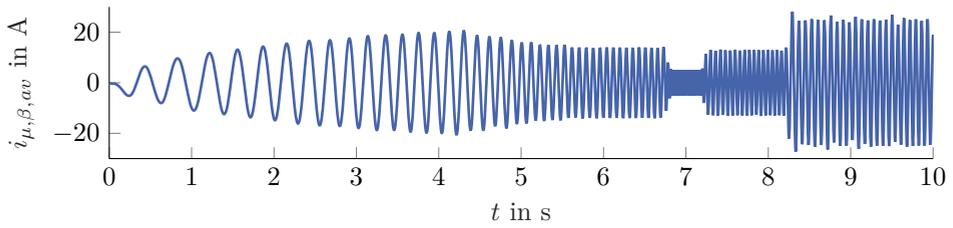
**Abbildung G.31:** Experiment: Zeitlicher Verlauf des Intervallmittelwertes der aus der Statorstrommessung bestimmten Größe  $[i_{s,\beta}(t)]$  für das gesamte Szenario



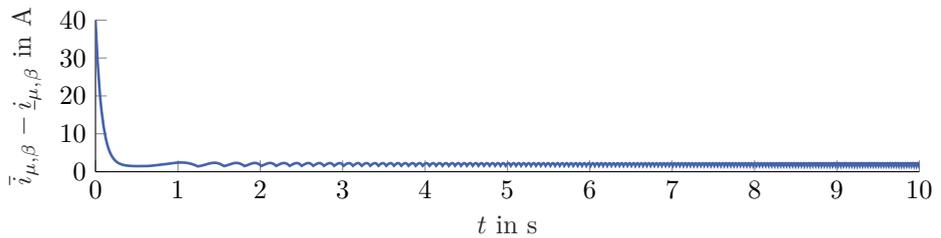
**Abbildung G.32:** Experiment: Zeitlicher Verlauf der Intervallbreite der Schätzung  $\bar{i}_{s,\beta}(t) - i_{s,\beta}(t)$



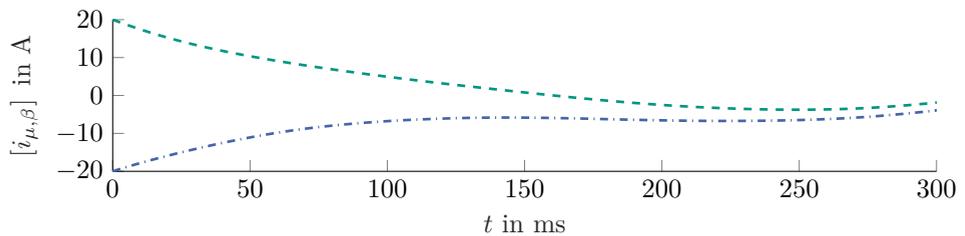
**Abbildung G.33:** Experiment: Einschwingvorgang der Intervallschätzung von  $i_{s,\beta}(t)$  (Untergrenze: blau strichpunktiert, Obergrenze: grün gestrichelt)



**Abbildung G.34:** Experiment: Zeitlicher Verlauf des Intervallmittelwertes der aus der Magnetisierungsstromintervallschätzung bestimmten Größe  $[i_{\mu,\beta}(t)]$  für das gesamte Szenario



**Abbildung G.35:** Experiment: Zeitlicher Verlauf der Intervallbreite der Schätzung  $\bar{i}_{\mu,\beta}(t) - \underline{i}_{\mu,\beta}(t)$



**Abbildung G.36:** Experiment: Einschwingvorgang der Intervallschätzung von  $i_{\mu,\beta}(t)$  (Untergrenze: blau strichpunktiert, Obergrenze: grün gestrichelt)



# Literaturverzeichnis

## Öffentlich zugängliche Quellen

- [ABC05] ALAMO, T. ; BRAVO, J. M. ; CAMACHO, E. F.: Guaranteed state estimation by zonotopes. In: *Automatica* 41 (2005), S. 1035 – 1043
- [ABWB10] AHMED, S. ; BOROYEVICH, D. ; WANG, F. ; BURGOS, R.: Development of a new voltage source inverter (VSI) average model including low frequency harmonics. In: *Twenty-Fifth Annual IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition*, 2010
- [Ada09] ADAMY, J.: *Nichtlineare Regelungen*. Springer, 2009
- [AFA96] ATKINSON, D. J. ; FINCH, J. W. ; ACARNLEY, P. P.: Estimation of rotor resistance in induction motors. In: *IEE Proceedings - Electric Power Applications* 143 (1996), Nr. 1, S. 87–94
- [AGGH<sup>+</sup>99] ALCARAZ-GONZÁLEZ, V. ; GENOVESI, A. ; HARMAND, J. ; GONZÁLEZ, A. V. ; RAPAPORT, A. ; STEYER, J.-P.: Robust exponential nonlinear interval observers for a class of lumped models useful in chemical and biochemical engineering. Application to a wastewater treatment process. In: *International Workshop on Application of Interval Analysis to Systems and Control*, 1999
- [AM14] AVILÉS, J. D. ; MORENO, J. A.: Preserving order observers for nonlinear systems. In: *International Journal of Robust and Nonlinear Control* 24 (2014), S. 2153–2178
- [AOE03] AKIN, B. ; ORGUNER, U. ; ERSAK, A.: State estimation of induction motor using unscented Kalman filter. In: *IEEE Conference on Control Applications*, 2003
- [ARJS10] AIT RAMI, M. ; JORDAN, J. ; SCHÖNLEIN, M.: Interval Observers for Linear Systems with Time-Varying Delays. In: *19th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, 2010
- [AS03] ANGELI, D. ; SONTAG, E. D.: Monotone control systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 48 (2003), S. 1684–1698
- [Bel70] BELLMAN, R.: *Introduction to matrix analysis*. New York : McGraw-Hill, 1970

- [BRH11] BOLAJRAF, M. ; RAMI, M. A. ; HELMKE, U.: Robust Positive Interval Observers For Uncertain Positive Systems. In: *18th IFAC World Congress*, 2011
- [BS11] BUNCIU, E. ; SENDRESCU, D.: State Estimation for an Anaerobic Bioprocess using an Interval Observer. In: *2nd International Conference on Networking and Information Technology*, 2011
- [CERZ13] CHEBOTAREV, S. ; EFIMOV, D. ; RAÏSSI, T. ; ZOLGHADRI, A.: On Interval Observer Design for a Class of Continuous-Time LPV Systems. In: *IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, 2013
- [CERZ15] CHEBOTAREV, S. ; EFIMOV, D. ; RAÏSSI, T. ; ZOLGHADRI, A.: Interval observers for continuous-time LPV systems with  $L_1/L_2$  performance. In: *Automatica* 58 (2015), S. 82 – 89
- [CK13] CHEBOTAREV, S. ; KREMLEV, A.: Analysis conditions on interval observer synthesis for linear systems with variable parameters. In: *18th International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics*, 2013
- [CLZ12] CAI, X. ; LV, G. ; ZHANG, W.: Stabilisation for a class of non-linear uncertain systems based on interval observers. In: *Control Theory Applications* 6 (2012), S. 2057–2062
- [Com03] COMBASTEL, C.: A state bounding observer based on zonotopes. In: *European Control Conference*, 2003
- [CPV12] CIRRINCIONE, M. ; PUCCI, M. ; VITALE, G.: *Power Converters and AC Electrical Drives with Linear Neural Networks*. CRC Press, 2012
- [CR11] COMBASTEL, C. ; RAKA, S. A.: A Stable Interval Observer for LTI Systems with No Multiple Poles. In: *18th IFAC World Congress*, 2011
- [DB93] DU, T. ; BRDYS, M. A.: Implementation of extended Luenberger observers for joint state and parameter estimation of PWM induction motor drive. In: *Fifth European Conference on Power Electronics and Applications*, 1993
- [DEI16] DEGUE, K. H. ; EFIMOV, D. ; IGGIDR, A.: Interval estimation of sequestered infected erythrocytes in malaria patients. In: *European Control Conference*, 2016
- [DER16] DEGUE, K. H. ; EFIMOV, D. ; RICHARD, J.-P.: Interval Observers for Linear Impulsive Systems. In: *10th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, 2016
- [DLSZ99] DURIEU, C. ; LORON, L. ; SEDDA, E. ; ZEIN, I.: Fault detection of an induction motor by set-membership filtering and Kalman filtering. In: *European Control Conference*, 1999

- [EFR<sup>+</sup>12] EFIMOV, D. ; FRIDMAN, L. ; RAÏSSI, T. ; ZOLGHADRI, A. ; SEYDOU, R.: Interval estimation for LPV systems applying high order sliding mode techniques. In: *Automatica* 48 (2012), S. 2365 – 2371
- [ELH<sup>+</sup>15] EFIMOV, D. ; LI, S. ; HU, Y. ; MULDOON, S. ; JAVAHERIAN, H. ; NIKIFOROV, V. O.: Application of interval observers to estimation and control of air-fuel ratio in a direct injection engine. In: *American Control Conference*, 2015
- [EMGSM99] EL MOUCARY, C. ; GARCIA SOTO, G. ; MENDES, E.: Robust rotor flux, rotor resistance and speed estimation of an induction machine using the extended Kalman filter. In: *IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, 1999
- [ERCZ13] EFIMOV, D. ; RAÏSSI, T. ; CHEBOTAREV, S. ; ZOLGHADRI, A.: Interval state observer for nonlinear time varying systems. In: *Automatica* 49 (2013), S. 200 – 205
- [ERPZ13] EFIMOV, D. ; RAÏSSI, T. ; PERRUQUETTI, W. ; ZOLGHADRI, A.: Estimation and control of discrete-time LPV systems using interval observers. In: *52nd IEEE Conference on Decision and Control*, 2013
- [ERZ11] EFIMOV, D. ; RAÏSSI, T. ; ZOLGHADRI, A.: Stabilization of nonlinear uncertain systems based on interval observers. In: *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, 2011
- [ERZ13] EFIMOV, D. ; RAÏSSI, T. ; ZOLGHADRI, A.: Control of Nonlinear and LPV Systems: Interval Observer-Based Framework. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 58 (2013), S. 773–778
- [Föl16] FÖLLINGER, O. ; KONIGORSKI, U. (Hrsg.) ; LOHMANN, B. (Hrsg.) ; ROP-PENECKER, G. (Hrsg.) ; TRÄCHTLER, A. (Hrsg.): *Regelungstechnik : Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. VDE Verlag GmbH, 2016
- [GDRZ14] GUCIK-DERIGNY, D. ; RAÏSSI, T. ; ZOLGHADRI, A.: Interval State and Unknown Inputs Estimation for Linear Time-Invariant Systems. In: *19th IFAC World Congress*, 2014
- [GDRZ16] GUCIK-DERIGNY, D. ; RAÏSSI, T. ; ZOLGHADRI, A.: A note on interval observer design for unknown input estimation. In: *International Journal of Control* 89 (2016), S. 25–37
- [Ger15] GERLING, D.: *Electrical Machines: Mathematical Fundamentals of Machine Topologies*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2015
- [GLM15] GLUMINEAU, A. ; LEÓN MORALES, J.: *Sensorless AC Electric Motor Control : Robust Advanced Design Techniques and Applications*. Cham : Springer, 2015

- [GRHS00] GOUZÉ, J.-L. ; RAPAPORT, A. ; HADJ-SADOK, M. Z.: Interval observers for uncertain biological systems. In: *Ecological Modelling* 133 (2000), S. 45 – 56
- [GVL96] GOLUB, G. H. ; VAN LOAN, C. F.: *Matrix computations*. Johns Hopkins Univ. Pr., 1996
- [HSG98a] HADJ-SADOK, M. Z. ; GOUZÉ, J.-L.: Bounds estimations for uncertain models of wastewater treatment. In: *IEEE International Conference on Control Applications*, 1998
- [HSG98b] HADJ-SADOK, M. Z. ; GOUZÉ, J.-L.: Interval observers for uncertain models of wastewater treatment processes. In: *CONTROL'98*, 1998
- [IL08] ITKONEN, T. ; LUUKKO, J.: Switching-function-based simulation model for three-phase voltage source inverter taking dead-time effects into account. In: *34th Annual Conference of IEEE Industrial Electronics*, 2008
- [JKDW01] JAULIN, L. ; KIEFFER, M. ; DIDRIT, O. ; WALTER, E.: *Applied Interval Analysis*. Springer-Verlag, 2001
- [JUDW95] JULIER, S. J. ; UHLMANN, J. K. ; DURRANT-WHYTE, H. F.: A new approach for filtering nonlinear systems. In: *American Control Conference*, 1995
- [Kha15] KHALIL, H. K.: *Nonlinear control*. Boston : Pearson, 2015
- [KJW98] KIEFFER, M. ; JAULIN, L. ; WALTER, E.: Guaranteed recursive nonlinear state estimation using interval analysis. In: *37th IEEE Conference on Decision and Control*, 1998
- [Koj09] KOJABADI, H. M.: Active power and MRAS based rotor resistance identification of an IM drive. In: *Simulation Modelling Practice and Theory* 17 (2009), Nr. 2, S. 376 – 389
- [Kre95] KREINOVICH, V.: Data Processing Beyond Traditional Statistics: Applications of Interval Computations. A Brief Introduction. In: *International Workshop on Applications of Interval Computations*, 1995
- [KRHA06] KLETTING, M. ; RAUH, A. ; HOFER, E. P. ; ASCHEMANN, H.: Interval Observer Design Based on Taylor Models for Nonlinear Uncertain Continuous-Time Systems. In: *12th GAMM - IMACS International Symposium on Scientific Computing, Computer Arithmetic and Validated Numerics*, 2006
- [KW04] KIEFFER, M. ; WALTER, E.: Guaranteed nonlinear state estimator for cooperative systems. In: *Numerical Algorithms* 37 (2004), S. 187–198
- [KW11] KIEFFER, M. ; WALTER, E.: Guaranteed estimation of the parameters of nonlinear continuous-time models: Contributions of interval analysis. In: *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* 25 (2011), S. 191–207

- [LARA16] LAMOUCHE, R. ; AMAIRI, M. ; RAISSI, T. ; AOUN, M.: Interval observer design for Linear Parameter-Varying systems subject to component faults. In: *24th Mediterranean Conference on Control and Automation*, 2016
- [LE01] LEE, B.-K. ; EHSAMI, M.: A simplified functional simulation model for three-phase voltage-source inverter using switching function concept. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 48 (2001), S. 309–321
- [Lev99] LEVINE, W. S.: *Control System Applications*. CRC Press, 1999
- [Lie15] LIESEN, J. ; MEHRMANN, V. (Hrsg.): *Linear Algebra*. Cham : Springer, 2015
- [LS07] LIN, Y. ; STADTHER, M. A.: Guaranteed State and Parameter Estimation for Nonlinear Continuous-Time Systems with Bounded-Error Measurements. In: *Industrial & Engineering Chemistry Research* 46 (2007), S. 7198–7207
- [LSA<sup>+</sup>13] LE, V. T. H. ; STOICA, C. ; ALAMO, T. ; CAMACHO, E. F. ; DUMUR, D.: Zonotopic guaranteed state estimation for uncertain systems. In: *Automatica* 49 (2013), S. 3418 – 3424
- [LSD<sup>+</sup>11] LE, V. T. H. ; STOICA, C. ; DUMUR, D. ; ALAMO, T. ; CAMACHO, E. F.: Robust tube-based constrained predictive control via zonotopic set-membership estimation. In: *50th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, 2011
- [Lue79] LUENBERGER, D. G.: *Introduction to dynamic systems : theory, models, and applications*. New York : Wiley, 1979
- [Lun13] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 2 : Mehrgrößensysteme, Digitale Regelung*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2013
- [LVS<sup>+</sup>12] LESIC, V. ; VASAK, M. ; STOJICIC, G. ; PERIC, N. ; JOKSIMOVIC, G. ; WOLBANK, T. M.: State and parameter estimation for field-oriented control of induction machine based on unscented Kalman filter. In: *International Symposium on Power Electronics, Electrical Drives, Automation and Motion*, 2012
- [LZDL08] LI, Z. ; ZHANG, G. ; DIAO, L. ; LIU, Z.: Extended Kalman Filter based on inverse Gamma model of induction motor. In: *IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference*, 2008
- [MB05] MOISAN, M. ; BERNARD, O.: Interval observers for non monotone systems application to bioprocess models. In: *16th IFAC World Congress*, 2005
- [MB10b] MAZENC, F. ; BERNARD, O.: Interval Observers for Linear Systems with Additive Disturbances. In: *8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems*, 2010

- [MB11] MAZENC, F. ; BERNARD, O.: Interval observers for linear time-invariant systems with disturbances. In: *Automatica* 47 (2011), S. 140 – 147
- [MBG09] MOISAN, M. ; BERNARD, O. ; GOUZÉ, J. L.: Near optimal interval observers bundle for uncertain bioreactors. In: *Automatica* 45 (2009), S. 291 – 295
- [MDN13] MAZENC, F. ; DINH, T. N. ; NICULESCU, S.-I.: Robust interval observers and stabilization design for discrete-time systems with input and output. In: *Automatica* 49 (2013), S. 3490 – 3497
- [MGLW15] MAURER, M. (Hrsg.) ; GERDES, J. (Hrsg.) ; LENZ, B. (Hrsg.) ; WINNER, H. (Hrsg.): *Autonomes Fahren : Technische, rechtliche und gesellschaftliche Aspekte*. Berlin, Heidelberg : Springer Vieweg, 2015
- [Mül27] MÜLLER, M.: Über das Fundamentaltheorem in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen. In: *Mathematische Zeitschrift* 26 (1927), S. 619–645
- [MR11] MESLEM, N. ; RAMDANI, N.: Interval observer design based on nonlinear hybridization and practical stability analysis. In: *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing* 25 (2011), S. 228 – 248
- [MRC08] MESLEM, N. ; RAMDANI, N. ; CANDAU, Y.: Interval Observers for Uncertain Nonlinear Systems. Application to bioreactors. In: *17th IFAC World Congress, 2008*
- [MRC10] MESLEM, N. ; RAMDANI, N. ; CANDAU, Y.: Using hybrid automata for set-membership state estimation with uncertain nonlinear continuous-time systems. In: *Journal of Process Control* 20 (2010), S. 481 – 489
- [MZ78] MALEK-ZAVAREI, M.: The stability of linear time-varying systems. In: *International Journal of Control* 27 (1978), Nr. 5, S. 809–815
- [NPOS09] NEJJARI, F. ; PUIG, V. ; OCA, S. Montes d. ; SADEGHZADEH, A.: Robust fault detection for LPV systems using interval observers and zonotopes. In: *48th IEEE Conference on Decision and Control held jointly with 28th Chinese Control Conference, 2009*
- [Nuß10] NUSS, U.: *Hochdynamische Regelung elektrischer Antriebe*. Berlin, Offenbach : VDE Verlag GmbH, 2010
- [PAS00] PEUTEMAN, J. ; AEYELS, D. ; SEPULCHRE, R.: Boundedness properties for time-varying nonlinear systems. In: *SIAM Journal on Control and Optimization* 39 (2000), S. 1408–1422
- [PJ05] POLIČ, A. ; JEZERNIK, K.: Matrix based event-driven approach for current control design of VSI. In: *IEEE International Symposium on Industrial Electronics, 2005*

- [QD15] QUANG, N. P. ; DITTRICH, J.-A.: *Vector Control of Three-Phase AC Machines : System Development in the Practice*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2015
- [QLZ<sup>+</sup>10] QIN, H. ; LIU, K. ; ZHANG, Q. ; SHEN, A. ; ZHANG, J.: Online estimating voltage source inverter nonlinearity for PMSM by Adaline neural network. In: *IEEE Fifth International Conference on Bio-Inspired Computing: Theories and Applications*, 2010
- [RCJ<sup>+</sup>17] ROTONDO, D. ; CRISTOFARO, A. ; JOHANSEN, T. A. ; NEJJARI, F. ; PUIG, V.: State estimation and decoupling of unknown inputs in uncertain LPV systems using interval observers. In: *International Journal of Control* (2017)
- [REZ12] RAÏSSI, T. ; EFIMOV, D. ; ZOLGHADRI, A.: Interval State Estimation for a Class of Nonlinear Systems. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 57 (2012), S. 260–265
- [RFDH12] ROBYNS, B. ; FRANCOIS, B. ; DEGOBERT, P. ; HAUTIER, J. P.: *Vector control of induction machines : desensitisation and optimisation through fuzzy logic*. Springer, 2012
- [RKAH06] RAUH, A. ; KLETTING, M. ; ASCHEMANN, H. ; HOFER, E. P.: Interval methods for simulation of dynamical systems with state-dependent switching characteristics. In: *IEEE International Conference on Control Applications*, 2006
- [Rop86] ROPPENECKER, G.: Modal approach to parametric state observer design. In: *Electronics Letters* 22 (1986), Nr. 3, S. 118–120
- [RRC04] RAÏSSI, T. ; RAMDANI, N. ; CANDAU, Y.: Set membership state and parameter estimation for systems described by nonlinear differential equations. In: *Automatica* 40 (2004), S. 1771 – 1777
- [Rug96] RUGH, W. J.: *Linear System Theory*. Prentice Hall, 1996
- [Rum10] RUMP, S. M.: Verification methods: Rigorous results using floating-point arithmetic. In: *Acta Numerica* 19 (2010), S. 287–449
- [Sch13a] SCHRÖDER, D.: *Elektrische Antriebe - Grundlagen*. Berlin, Heidelberg : Springer Vieweg, 2013
- [Sch15a] SCHRÖDER, D.: *Elektrische Antriebe - Regelung von Antriebssystemen*. Springer Vieweg, 2015
- [Šil78] ŠILJAK, D. D.: *Large-scale dynamic systems : stability and structure*. North-Holland, 1978
- [Sil09] DE SILVA, C.: *Modeling and Control of Engineering Systems*. CRC Press, 2009

- [Sim16] SIMONCINI, V.: Computational Methods for Linear Matrix Equations. In: *SIAM Review* 58 (2016), S. 377–441
- [Sle89] SLEMON, G. R.: Modelling of induction machines for electric drives. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 25 (1989), S. 1126–1131
- [SWP11] SEILMEIER, M. ; WOLZ, C. ; PIEPENBREIER, B.: Modelling and model based compensation of non-ideal characteristics of two-level voltage source inverters for drive control application. In: *1st International Electric Drives Production Conference*, 2011
- [TRC<sup>+</sup>14] THABET, R. E. H. ; RAÏSSI, T. ; COMBASTEL, C. ; EFIMOV, D. ; ZOLGHADRI, A.: An effective method to interval observer design for time-varying systems. In: *Automatica* 50 (2014), S. 2677 – 2684
- [TRCZ13] THABET, R. E. H. ; RAÏSSI, T. ; COMBASTEL, C. ; ZOLGHADRI, A.: Design of interval observers for LPV systems subject to exogenous disturbances. In: *European Control Conference*, 2013
- [TS13] TABATABAEIPOUR, S. M. ; STOUSTRUP, J.: Set-membership state estimation for discrete time piecewise affine systems using zonotopes. In: *European Control Conference*, 2013
- [Unb07] UNBEHAUEN, H. (Hrsg.): *Regelungstechnik II : Zustandsregelungen, digitale und nichtlineare Regelsysteme*. Wiesbaden : Vieweg, 2007
- [VA07] VOIGT, C. ; ADAMY, J.: *Formelsammlung der Matrizenrechnung*. München : Oldenbourg, 2007
- [VLB<sup>+</sup>10] VALDIVIA, V. ; LÁZARO, A. ; BARRADO, A. ; ZUMEL, P. ; FERNÁNDEZ, C. ; SANZ, M.: Black-box modeling of three phase voltage source inverters based on transient response analysis. In: *Twenty-Fifth Annual IEEE Applied Power Electronics Conference and Exposition*, 2010
- [VLB<sup>+</sup>12] VALDIVIA, V. ; LÁZARO, A. ; BARRADO, A. ; ZUMEL, P. ; FERNÁNDEZ, C. ; SANZ, M.: Black-Box Modeling of Three-Phase Voltage Source Inverters for System-Level Analysis. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 59 (2012), S. 3648–3662
- [VS88] VERGHESE, G. C. ; SANDERS, S. R.: Observers for flux estimation in induction machines. In: *IEEE Transactions on Industrial Electronics* 35 (1988), S. 85–94
- [WBR15] WANG, Y. ; BEVLY, D. M. ; RAJAMANI, R.: Interval observer design for LPV systems with parametric uncertainty. In: *Automatica* 60 (2015), S. 79 – 85
- [Wil11] WILKE, M. ; PRÜSS, J. (Hrsg.): *Gewöhnliche Differentialgleichungen und dynamische Systeme*. Basel : Springer, 2011

- [Wol10] WOLFF, F.: *Konsistenzbasierte Fehlerdiagnose nichtlinearer Systeme mittels Zustandsmengenbeobachtung*, Karlsruher Institut für Technologie, Diss., 2010
- [WSH06] WELCHKO, B. A. ; SCHULZ, S. E. ; HITI, S.: Effects and Compensation of Dead-Time and Minimum Pulse-Width Limitations in Two-Level PWM Voltage Source Inverters. In: *Conference Record of the IEEE Industry Applications Conference Forty-First IAS Annual Meeting, 2006*
- [WVDM00] WAN, E. A. ; VAN DER MERWE, R.: The unscented Kalman filter for non-linear estimation. In: *IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium, 2000*
- [ZDL92] ZAI, L.-C. ; DEMARCO, C. L. ; LIPO, T. A.: An extended Kalman filter approach to rotor time constant measurement in PWM induction motor drives. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 28 (1992), S. 96–104
- [Zha11] ZHANG, F.: *Matrix Theory : Basic Results and Techniques*. New York : Springer, 2011
- [Zhu93] ZHU, J. J.: A note on extension of the eigenvalue concept. In: *IEEE Control Systems* 13 (1993), Nr. 6, S. 68–70
- [ZV10] ZBRANEK, P. ; VESELY, L.: Nonlinear state estimation using interval computation in PMSM state observer simulation. In: *International Conference on Autonomous and Intelligent Systems, 2010*
- [ZWS85] ZIOGAS, P. D. ; WIECHMANN, E. P. ; STEFANOVIC, V. R.: A Computer-Aided Analysis and Design Approach for Static Voltage Source Inverters. In: *IEEE Transactions on Industry Applications* 21 (1985), S. 1234–1241

## Eigene Veröffentlichungen und Tagungsbeiträge

- [KBH18] KREBS, S. ; BÄCHLE, M. ; HOHMANN, S.: Coupled boundary interval observer for LPV systems subject to uncertainties in input, output and parameters. In: *Automatica* 95 (2018), S. 426 – 432
- [KFH17] KREBS, S. ; FUGEL, S. ; HOHMANN, S.: Interval State Observer Based on a Time-Variant Transformation for LPV Systems and Application to Induction Machines. In: *IEEE Conference on Control Technology and Applications, 2017*
- [KGH17] KREBS, S. ; GELLRICH, T. ; HOHMANN, S.: Interval observers for LPV systems and application to the guaranteed state estimation of an induction machine. In: *IFAC 2017 World Congress, 2017*
- [KH15] KREBS, S. ; HOHMANN, S.: Interval observers for electrical traction drives. In: *Summer School of Sino-EU Doctoral School for Sustainability, 2015*

- [KH16] KREBS, S. ; HOHMANN, S.: Garantierte Zustandsschätzung für Asynchronmaschinen auf Basis eines Intervallbeobachters. In: *GMA-Fachausschuss 1.40, Workshop 2016*, 2016
- [KKH16a] KREBS, S. ; KÖHRER, L. ; HOHMANN, S.: Interval Modelling of a Voltage Source Inverter. In: *IET International Conference on Power Electronics, Machines and Drives*, 2016
- [KKH16b] KREBS, S. ; KÖHRER, L. ; HOHMANN, S.: A New Modelling and Identification Approach for Guaranteed Inclusion of a Voltage Source Inverter's Output Voltages. In: *International Conference on Control, Automation and Information Sciences*, 2016
- [KPF<sup>+</sup>16] KREBS, S. ; PFEIFER, M. ; FUGEL, S. ; WEIGOLD, J. ; HOHMANN, S.: Interval Observer for LPV Systems Based on Time-variant Transformations. In: *IEEE Conference on Decision and Control*, 2016
- [KSMH14] KREBS, S. ; SCHMIDT, S. ; MATTHIESEN, S. ; HOHMANN, S.: A Cooperative and Competitive Workshop in Mechatronics Engineering. In: *International Journal of Engineering Pedagogy* 4 (2014), S. 13–17
- [KSP<sup>+</sup>16] KREBS, S. ; SCHNURR, C. ; PFEIFER, M. ; WEIGOLD, J. ; HOHMANN, S.: Reduced-order hybrid interval observer for verified state estimation of an induction machine. In: *Control Engineering Practice* 57 (2016), S. 157 – 168
- [MHS<sup>+</sup>13] MATTHIESEN, S. ; HOHMANN, S. ; SCHMIDT, S. ; BREITSCHUH, J. ; LOHMEYER, Q. ; KREBS, S.: Erschließung mechatronischer Synergiepotentiale durch kooperationsorientierte Lehre (koop-L). In: *11. Kolloquium Konstruktionstechnik (KT 2013)*, 2013
- [MKBH18] MÜLLER, J. ; KREBS, S. ; BUCHHOLZ, M. ; HOHMANN, S.: Interval MRAC with Proven Stability Properties and Application on Induction Motor Control. In: *IEEE International Conference on Control & Automation*, 2018
- [SLK<sup>+</sup>13] SCHMIDT, S. ; LOHMEYER, Q. ; KREBS, S. ; HOHMANN, S. ; MATTHIESEN, S.: Cooperation-Focused Education In Mechatronic Engineering Design Projects. In: *International Conference on Engineering and Product Design Education*, 2013

## Betreute studentische Arbeiten

- [Bäc16] BÄCHLE, Matthias: *Analyse von transformationsbasierten Intervallbeobachtern zur garantierten Zustandsschätzung bei Parameterunsicherheiten*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Masterarbeit, 2016

- [Chr16] CHRIST, Lena Maria: *Systematischer Vergleich eines Kalman-Filters und eines Intervallbeobachters zur Zustandsschätzung einer Asynchronmaschine*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2016
- [Cie14] CIERPKA, Rafael: *Taylormodellbasierte Zustandsmengenbeobachtung zur Parameteridentifikation eines Hybridantriebs*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Masterarbeit, 2014
- [Ehr15] EHRMANN, Jan-Valentin: *Systematischer Vergleich stochastischer Verfahren zur Schätzung des Rotorwiderstands*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2015
- [Fri15] FRITZ, Alexander: *Entwurf einer intervallhaften Identifikationsprozedur für Asynchronmaschinen*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Masterarbeit, 2015
- [Fug16] FUGEL, Sebastian: *Entwurf eines Intervallbeobachters zur garantierten Zustandsschätzung und Fehlerdiagnose eines Asynchronmotors*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Masterarbeit, 2016
- [Gel15] GELLRICH, Thomas: *Entwicklung eines nichtlinearen hybriden Beobachters zur gesicherten Schätzung des Rotorwiderstands einer Traktionsasynchronmaschine*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Masterarbeit, 2015
- [Hof15] HOFMANN, Felix: *Entwurf und Implementierung einer Kaskadenregelung für ein inverses Pendel*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2015
- [Köh15] KÖHRER, Lukas: *Entwurf und Validierung eines Wechselrichtermodells zur garantierten Einschließung der Ausgangsspannungen*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2015
- [Lan15] LANG, Tobias: *Systematischer Vergleich deterministischer Verfahren zur Schätzung des Rotorwiderstands*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2015
- [Mül16] MÜLLER, Johannes C.: *Garantierte Parameterschätzung einer Asynchronmaschine*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Masterarbeit, 2016
- [Pfe14] PFEIFER, Martin: *Guaranteed State Estimation for Uncertain Dynamical Systems Based on State Transformations*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Masterarbeit, 2014

- [Rom13] ROMMEL, Christiane: *Vergleich von Parameteridentifikationsverfahren für eine Asynchronmaschine*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2013
- [Sch13b] SCHNURR, Christoph: *Entwurf eines Intervallbeobachters für Asynchronmaschinen basierend auf einem Hybridisierungsansatz*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Masterarbeit, 2013
- [Sch14] SCHMIDT, Philipp: *Entwurf eines intervallhaften Parameteridentifikationsverfahrens für die Asynchronmaschine*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2014
- [Sch15b] SCHMIDT, Alexander: *Entwicklung eines nichtlinearen Intervallbeobachters für Systeme mit unsicheren Messgrößen und Parametern basierend auf Zustandstransformationen*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Masterarbeit, 2015
- [Sch16a] SCHEUERMANN, Michael: *Entwurf und Analyse einer Stromregelung für Asynchronmaschinen*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2016
- [Sch16b] SCHNEBLE, Tobias: *Garantierte Zustandsschätzung einer Asynchronmaschine*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2016
- [Sch16c] SCHWARTZ, Manuel: *Entwurf einer Intervallbeobachterschar zur garantierten Zustandsschätzung einer Asynchronmaschine*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Masterarbeit, 2016
- [Sie14] SIEBENROCK, Florian: *Zustandsmengenbeobachter auf Basis des IHO-Verfahrens zur Parameterschätzung einer Asynchronmaschine*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2014
- [Tro16] TROMBITAS, Daniel: *Regelung eines inversen Pendels mittels eines flachheitsbasierten Ansatzes*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Bachelorarbeit, 2016
- [Web15] WEBER, Dieter: *Implementierung eines Frameworks zur sicheren Verwendung einer Linearmotorachse in einem Praktikumsversuch*, Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), Studienarbeit, 2015



Im Kontext zunehmender Komplexität technischer Systeme ist die Gewährleistung der bestimmungsgemäßen Funktion sicherheitskritischer Systeme von höchster Relevanz. Solche Systeme sind unter anderem im Automobilbereich anzutreffen, zum Beispiel in Form eines elektrischen Traktionsantriebs. Ein methodischer Ansatz, um die Funktion auch in Anwesenheit beschränkter Störungen sicherzustellen, stellen mengenbasierte Methoden dar, die Garantien über gewisse Größen, insbesondere Zustandsgrößen abgeben. Eine besondere Herausforderung liegt bei Anwendung dieser Methoden für reale technische Systeme darin, dass diese kleine Zeitkonstanten im Millisekunden-Bereich aufweisen und damit die Rechenzeit stark eingeschränkt ist. Intervallmethoden mit ihrer vergleichsweise einfachen Mengenbeschreibung stellen in diesem Zusammenhang eine vielversprechende Möglichkeit dar, um echtzeitfähige Verfahren zu entwickeln. In dieser Arbeit werden neue Methoden vorgestellt, mit deren Hilfe Intervalle für die Zustandsgrößen von linearen parametervarianten Systemen unter Berücksichtigung beschränkter Unsicherheiten angegeben werden können. Zur Zustandsbestimmung selbst werden dazu zwei Arten von Intervallbeobachtern vorgestellt. Bei der ersten Variante beeinflussen sich die Grenzen gegenseitig, sodass die Dynamiken der Intervalluntergrenzen und die der Intervallobergrenzen verkoppelt sind. Die zweite entwickelte Variante umgeht diese Verkopplung durch Einführung einer zeitvarianten Zustands- transformation. Als praktisches Anwendungsbeispiel wird bei der Umsetzung der Methoden die Asynchronmaschine herangezogen. Durch die Kombination der Intervallbeobachter mit einem neuartigen Intervallmodell des Wechselrichters lassen sich unter Zuhilfenahme klassisch im Betrieb vorhandener Messgrößen Zustandsintervalle für ein lineares parametervariantes Modell einer Asynchronmaschine bestimmen.