Globale Bifurkation von Lückeneigenwerten bei nichtlinearen Schrödingergleichungen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Naturwissenschaften

von der Fakultät für Mathematik des
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

genehmigte

Dissertation

von

Peter Dietrich Rupp

Tag der mündlichen Prüfung: 12.07.2018
Referent: Prof. Dr. Michael Plum
Koreferent: Prof. Dr. Wolfgang Reichel

Danksagung

Diese Dissertation wäre ohne die Hilfe vieler Leute nicht möglich gewesen. Insbesondere möchte ich meinem Betreuer, Prof. Dr. Michael Plum, für die Unterstützung und die Bestärkung danken, eigene Ideen zu verfolgen, und diese auf den richtigen Pfad zu lenken. Dies zählt auch für die Geduld, die es brauchte, um so manchen wirren Gedanken in ein positives Resultat zu verwandeln.

Darüber hinaus möchte ich mich bei meinem Ko-Betreuer, Prof. Dr. Wolfgang Reichel, bedanken, mit dem ich einigen Fragen der Spektraltheorie auf den Grund gehen konnte. Auch abseits meiner Dissertation möchte ich das kollegiale Verhältnis betonen, welches ich in der Lehre und in meiner Arbeitsgruppe genießen darf.

Mein Dank geht ferner an meine Kollegen, Simon Kohler und Janina Gärtner, Georgia Kokkala, Dominik Scheider, sowie meinen früheren und derzeitigen Bürokollegen Carlos Hauser, der Mann für die Unterhaltung, Martin Spitz, der zwar nicht immer körperlich aber im Geiste Teil des Büros war, Andreas Hirsch, das Arbeitstier, und vor allem Jonathan Wunderlich, der mir gerade bei nahender Deadline eine unverzichtbare Unterstützung bei der Korrektur und Verbesserung war. Darüber hinaus möchte ich Rainer Mandel für die endlosen fachlichen Vorschläge und Diskussionen zur Bifurkationstheorie danken.

Für den reibungslosen Alltag im Büro ist Marion Ewald unverzichtbar, und auch Herr Schmoeger und Herr Herzog sind für die Kaffeepause unersetzlich.

Abschließend möchte ich mich bei meiner Familie und Mirco bedanken, die mich außerhalb der Arbeit immer unterstützt haben.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Schrödingergleichungen spielen eine fundamentale Rolle bei der nichtrelativistischen, modellhaften Beschreibung quantenmechanischer Zustände und deren Entwicklung in der Zeit. Der Zustand ψ eines Punktteilchens im quantenmechanischen System mit einem Potential V erfüllt die (zeitabhängige) partielle Differentialgleichung

$$i\partial_t \psi = -\Delta\psi + V\psi,$$

wobei alle physikalischen Konstanten auf 1 normiert sind. ∂_t bezeichnet dabei den (partiellen) Ableitungsoperator nach der Zeitvariablen, sowie Δ als Summe der zweiten partiellen Ortsableitungen den Laplace-Operator. Die Gleichung übernimmt im quantenmechanischen Regime die Rolle der Energieerhaltungsgleichung in der klassischen Hamilton'schen Mechanik und kann mit dem Korrespondenzprinzip auf diese zurückgeführt werden. Für eine Lösung ψ der Gleichung lässt sich (sofern ψ normiert ist) $|\psi|^2$ als Dichte der Aufenthaltswahrscheinlichkeit interpretieren. Diese ändert sich demnach durch Hinzufügen eines Phasenfaktors nicht.

Von besonderem Interesse sind "stationäre" Zustände. Damit sind jene Zustände gemeint, dessen Aufenthaltswahrscheinlichkeit konstant in der Zeit ist. Ein zeitharmonischer Ansatz der Form $\psi(t,x) = e^{-i\lambda t}u(x)$ führt zur stationären Schrödingergleichung

$$-\Delta u + Vu - \lambda u = 0.$$

Ein prominentes Beispiel erhält man durch Wahl des Coulomb-Potential $V(x) = -\frac{1}{|x|}$, dessen zugehöriger Schrödingeroperator die Elektronenzustände im Wasserstoffatom modelliert. Untersucht man den Zustand von Quantenobjekten in einem perfekten Kristall, so modelliert man dies durch periodische Potentiale. Die Spektren derartiger Operatoren bestehen aus Vereinigungen abgeschlossener Intervalle. Die offenen Intervalle dazwischen werden spektrale Lücken genannt. Darüber hinaus kann man Unregelmäßigkeiten durch zusätzliche Störpotentiale modellieren. Diese können dem Spektrum Eigenwerte in den Lücken hinzufügen.

Ein weiterer Zugang zur Schrödingergleichung ist ein Stehender-Wellen-Ansatz in der aus den Maxwellgleichungen hergeleiteten Wellengleichung für elektromagnetische Wellen.

Für die Beschreibung einiger quantenmechnischer Effekte reicht eine lineare Schrödingergleichung oft nicht aus. So werden Selbstwechselwirkungen von Quantenobjekten nicht berücksichtigt, welche zu nichtlinearen Termen führen. Ein Beispiel für eine nichtlineare Schrödingergleichung ist die Groß-Pitaevskii-Gleichung zur Beschreibung von Bose-Einstein-Kondensaten im externen Potentialfeld V. Zusätzlich zum linearen Teil beinhaltet die Gleichung eine Kerr-Nichtlinearität. Die Schrödingergleichung wird in diesem Fall zu

$$i\partial_t \psi = -\Delta\psi + V\psi - g|u|^2 u.$$

Der Parameter g beschreibt dabei anziehende oder abstoßende Wechselwirkung abhängig vom Vorzeichen. Die entsprechende stationäre Gleichung nimmt dann die Form

$$-\Delta u + Vu - \lambda u - g|u|^2 u = 0$$

an.

In der vorliegenden Dissertation soll diese Gleichung auf Verzweigung untersucht werden. Zu einem gegebenen Lösungspaar (λ^*, u^*) werden Lösungen (λ, u) gesucht, die in einem geeigneten Sinn gegen (λ^*, u^*) konvergieren. Die Frage der Verzweigung aus trivialen Lösungen der Form $(\lambda_0, 0)$ ist eng verbunden mit den spektralen Eigenschaften des linearen Teils der Schrödingergleichung. Unter anderem wird in unserem Zugang benötigt, dass die Eigenfunktionen zu Lückeneigenwerten exponentiell abklingen. Dies bildet den ersten Abschnitt der Arbeit. Im zweiten Teil steht die Verzweigungstheorie der nichtlinearen Gleichung im Fokus. Die Ergebnisse lassen auch größere Klassen von Nichtlinearitäten zu, als die hier vorgestellte Kerr-Nichtlinearität, sofern diese superlinear in der 0 ist und subkritisch wächst.

Teil I

Exponentielles Abklingen bei Lückeneigenwerten

Im ersten Teil dieser Arbeit soll es um die Untersuchung des Abklingverhaltens von Eigenfunktionen von linearen Schödingeroperatoren für $|x| \to \infty$ gehen. Da solche im Allgemeinen im Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^N)$ definiert sind, macht es zunächst keinen Sinn, über punktweise Schranken zu sprechen. Wir begreifen daher ein exponentielles Abklingverhalten einer Funktion $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ dahingehend, dass gilt

$$\exp(h(x))u \in L^2(\mathbb{R}^N). \tag{1}$$

Dabei ist $h : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche bezüglich $|x|$ mindestens linear wächst. Für beschränkte Funktionen h wäre die Bedingung (1) für $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ trivial. Von einer L^2-Schranke ausgehend erhalten wir einen punktweisen Abfall, falls die Eigenfunktionen selbst eine gewisse Glattheit aufweisen. Diese kann wiederum durch Glattheitsannahmen an das Potential gewährleistet werden.

Wir betrachten zur Motivation das Beispiel eines Schrödingeroperators des Wasserstoffatoms, dessen Eigenfunktionen die Elektronenzustände, sowie die zugehörigen Eigenwerte die Energieniveaus der Elektronen beschreiben. Es sei

$$T :\, L^2(\mathbb{R}^3) \supset H^2(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3),\; u \mapsto -\Delta u - \frac{1}{|x|}u.$$

Der Operator ist selbstadjungiert und für das essentielle Spektrum erhält man $\sigma_{ess}(T) = [0, \infty)$. Zusätzlich gibt es Eigenwerte, die unterhalb von σ_{ess} liegen. So ist zum Beispiel durch $u(x) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} e^{-\sqrt{\frac{1}{4}}|x|}$ eine Eigenfunktion zum Eigenwert $-\frac{1}{4}$ gegeben. Tatsächlich ist die exponentielle Abklingrate gerade durch den Abstand des Eigenwertes zum essentiellen Spektrums gegeben, Es wird sich herausstellen, dass dieser Abstand auch maßgeblich das Abklingverhalten von Eigenfunktionen zu Eigenwerten, die nicht unterhalb des essentiellen Spektrums liegen, bestimmt.

Das folgende Beispiel liefert die Notwendigkeit des positiven Abstands zum essentiellen Spektrum für den Erhalt exponentiellen Abfalls. Betrachtet man den folgenden Schrödingeroperator $T :\, L^2(\mathbb{R}^N) \supset H^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$, $u \mapsto (-\Delta + V)u$ mit

$$V(x) = (-N\alpha + \alpha(\alpha+2))(1+|x|^2)^{-1} - \alpha(\alpha+2)(1+|x|^2)^{-2}$$

für $\alpha > N$, so ist $\sigma_{ess}(T) = [0, \infty)$ und 0 ist ein eingebetteter Eigenwert mit Eigenfunktion $u(x) = (1+|x|^2)^{-\alpha/2}$. Diese ist sicherlich nicht exponentiell abklingend.

Wir wollen nun jene Eigenfunktionen von Schrödingeroperatoren untersuchen, deren Eigenwerte innerhalb einer Lücke des essentiellen Spektrums anzutreffen sind. Dabei schließen wir die semiendliche Lücke $(-\infty, \inf \sigma_{ess}(T))$ für nach unten halbbeschränkte Operatoren mit ein. Wir wollen dabei auf Voraussetzungen an die Struktur des Potentials weitesgehend verzichten. Typischerweise werden diese sogenannten Lückeneigenwerte durch (relativ kompakte) Störung eines Basisoperators T_0 entstehen. Im Allgemeinen kann man einen gegebenen Operator jedoch nicht in die Summe eines Basisoperators und ein solches Störpotential zerlegen.

Beispiele solcher nicht zerlegbarer Operatoren findet man bei Interface-Problemen, in denen das Potential durch Zusammenfügung zweier vollperiodischer Potentiale in zwei gegenüberliegenden Halbräumen entsteht (vgl. dazu [**DPR09**]). In diesem Fall ist das essentielle Spektrum durch die Vereinigung der entsprechenden Spektren der Schrödingeroperatoren mit periodischen Potentialen gegeben. Zusätzlich können Eigenwerte in den gemeinsamen spektralen Lücken dieser Operatoren entstehen. Das Generieren von Eigenwerten ist hier nicht Gegenstand der Arbeit. Viel mehr wird vorausgesetzt, dass das Spektrum des vorliegenden Operators eine Lücke im essentiellen Spektrum, sowie Eigenwerte darin, besitzt.

Resultate zum exponentiellen Abklingverhaltens von Eigenfunktionen reichen einige Jahrzehnte zurück und wurden in einem Übersichtsartikel von Peter Hislop [**His00**] zusammengetragen. Die grundlegende Arbeit wird von Agmon in seinen Lecture Notes [**Agm85**] bereitgestellt, in der er die Abklingrate von Eigenfunktionen unterhalb des essentiellen Spektrum als die Wurzel des Abstands zu diesem quantifiziert. Eine darauf basierende Verallgemeinerung des exponentiellen Abfalls wird dahingehend möglich, wenn man sich nicht auf Funktionen h im Exponenten in (1) einschränkt, welche nur von $|x|$ abhängen. Stattdessen lässt man die Abhängigkeit von der Richtung zu. Abschätzungen der gewichteten Norm mit derartigen Gewichten werden als anisotrop bezeichnet, wohingegen die Abschätzungen mit radialsymmetrischen Gewichten isotrop heißen. Anisotrope Abschätzungen erhält man durch Einführung der sogenannten Agmon-Metrik $g(x) = (V(x) - \lambda)_+$ auf dem Tangentialraum $T_x\mathbb{R}^N$. Der zugehörige Abstandsbegriff in $\mathbb{R}^N$ tritt dann an Stelle der Funktion h im Exponenten von (1) (vergleiche [**HS96**]).

Weitere bekannte Resultate sind jene von Slaggie und Wichmann [**SW62**], welche das Abklingverhalten des Integralkerns der freien Greensfunktion, das heißt des "inversen" Operators von $(-\Delta)$ auf $\mathbb{R}^N$ benutzen um für relativ $(-\Delta)$-beschränkte (mit Schranke < 1) Potentiale $V \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ mit $V(x) = O(|x|^{-1})$ für $|x| \to 0$ und $V(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$ entsprechende Ergebnisse zu erhalten. Dabei wird die Eigenwertgleichung für Eigenwerte $\lambda < 0$ zu

$$u = (-\Delta)^{-1} [(\lambda - V)u]$$

umgeschrieben.

Froese und Herbst ziehen in [**FH82**] für die Untersuchung von N-Körper-Schrödingeroperatoren Kommutatorabschätzungen zu Rate. Dies liefert exponentiellen Abfall in Termen des Abstands zur nächstgelegenen sogenannten Grenzenergie, das heißt Eigenwerte von Teilsystemen des N-Körpersystems. Dabei wird insbesondere die Frage der Optimalität der Abklingrate geklärt.

Als letztes, uns bekanntes Resultat dieser Reihe sei die Arbeit von Combes und Thomas [**CT73**] erwähnt, die ebenfalls we Slaggie und Wichmann die Eigenwertgleichung in die Form

$$u = (-\Delta + V - \lambda_0)^{-1}[(\lambda - \lambda_0)u]$$

für ein $\lambda_0 \in \rho(T)$ schreiben. Sie erhalten Abklingbedingung an die Resolventenoperatoren, indem sie die Darstellung der Translationsgruppe des $\mathbb{R}^N$ im Raum $L^2(\mathbb{R}^N)$ betrachten und anschließend analytisch auf eine komplexe Umgebung fortsetzen. Damit können die Methoden von [**SW62**] verbessert und auf Operatoren der Form $T = T^0 + V$ erweitert werden. Dabei ist V eine Störung, welche einen Eigenwert in einer spektralen Lücke von T^0 generiert.

Der vorliegende Teil der Arbeit basiert auf dem Resultat von [**Agm85**], und wird auf den Fall quadrierter Schrödingeroperatoren verallgemeinert. Als quadrierten Operator verstehen wir jenen, welcher die quadratische Form $u \mapsto \|Tu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ generiert. Wir betonen, dass unser Resultat ohne zusätzlichen strukturellen Voraussetzungen an das Potential auskommt und lediglich die Informationen des Spektrums in einer Umgebung dieses Eigenwerts einfließen. Die Abklingrate, die wir dadurch erhalten, ist bei Eigenwerten unterhalb des essentiellen Spektrums etwas schwächer als jene, die eine direkte Anwendung von Agmons Methode liefert. Dies ist dadurch verschuldet, dass V und $-\Delta$ im Allgemeinen nicht kommutieren. Daher sind die Ergebnisse quantitativ nicht optimal.

Für viele Anwendungen, wie auch im zweiten Teil der Arbeit, ist die genaue Quantifizierung der exponentiellen Abklingrate nicht nötig und es genügt die Tatsache, dass die Eigenfunktionen von Lückeneigenwerten exponentiell abklingen. Auch dies ist dem Autor in der (strukturellen) Allgemeinheit der Potentiale neu. Wie in [**Agm85**] liefern die Resultate auch Aussagen über die Lösungen inhomogener Gleichungen.

KAPITEL 1

Abklingraten von Eigenfunktionen

1. Notationen und Voraussetzungen

Im Verlauf der Arbeit verstehen wir den Schrödingeroperator T als unbeschränkten Operator

$$T: L^2(\mathbb{R}^N) \supset D(T) \to L^2(\mathbb{R}^N),\, Tu := -\Delta u + Vu$$

im Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^N)$. Für das (reellwertige) Potential $V: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ stellen wir dabei folgende

Voraussetzung 1. *Es gelte $V \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ und für $V_- := \max\{-V, 0\}$ existiere ein $\theta < 1$ und ein $C(\theta) > 0$, sodass die folgende Abschätzung gilt:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} V_-|\phi|^2\,dx \leq \theta \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^2\,dx + C(\theta)\int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^2\,dx \qquad (\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)). \tag{2}$$

Aus dieser Voraussetzung folgern wir nun, dass $|V_-|^{1/2}u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ gilt für alle $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, indem man u durch eine Folge $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ bezüglich der $H^1(\mathbb{R}^N)$-Norm approximiert und die Ungleichung für die Folgenglieder ausnutzt. Damit erhält man

$$\int_{\mathbb{R}^N} V_-|u|^2\,dx \leq \theta \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,dx + C(\theta)\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2\,dx \qquad (u \in H^1(\mathbb{R}^N)).$$

Im ersten Teil verwenden wir das Symbol ϕ, wenn wir Voraussetzungen an den Träger der Funktion stellen, und u für Elemente des Sobolevraums $H^1(\mathbb{R}^N)$ bzw. für Elemente im Definitionsbereich eines Operators ohne Einschränkung an die Träger. Dies soll eine bessere Übersichtlichkeit bieten.

Der Definitionsbereich des Operators soll so definiert werden, dass T selbstadjungiert ist. Dazu betrachtet man zunächst den folgenden Operator T_0 durch $D(T_0) = C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ und

$$T_0: D(T_0) \to L^2(\mathbb{R}^N),\, T_0 u := -\Delta u + Vu,$$

dessen Abschluss häufig als "minimaler Operator" bezeichnet wird. Beachte, dass aufgrund der Voraussetzungen $V \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ gilt: $Vu \in L^2(\mathbb{R}^N)$ für $u \in D(T_0)$. Ferner ist T_0 symmetrisch und nach unten halbbeschränkt, denn (2) liefert die Abschätzung

$$\begin{aligned}&\langle Tu, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \langle -\Delta u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \langle Vu, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}\\ \geq &(1-\theta)\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} - C(\theta)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \geq -C(\theta)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \qquad (u \in D(T_0)).\end{aligned}$$

Man definiert T als Friedrichserweiterung (vergleiche [**RS75**, Theorem X.23]) von T_0, um einen selbstadjungierten Operator zu erhalten. Der Definitionsbereich $D(T)$ ist gegeben durch

$$D(T) := \{u \in H^1(\mathbb{R}^N) : |V|^{\frac{1}{2}}u \in L^2(\mathbb{R}^N),\ -\Delta u + Vu \in L^2(\mathbb{R}^N)\}. \tag{3}$$

Dabei ist $-\Delta u + Vu$ im distributionellen Sinne zu verstehen. Dies wollen wir kurz genauer erläutern. Zur Theorie der Distributionen sei auf [**Gra09**] verwiesen. Für $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ ist der Ausdruck $(-\Delta + V)u$ nicht im klassischen Sinn definiert. Betrachtet man $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, so ist die Abbildung $\phi \mapsto (-\Delta + V)\phi$ wohldefiniert. Versieht man den linearen Raum $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit einer geeigneten

Topologie, so erhält man den Raum der Testfunktionen $\mathscr{D}(\mathbb{R}^N)$. Die Topologie auf dem Raum der Testfunktionen ist stärker, als die Topologie, welche die Norm in $L^2(\mathbb{R}^N)$ induziert. Für die Topologie auf den Dualräumen gilt dann die umgekehrte Eigenschaft. Das heißt, die Topologie auf dem Dualraum der Testfunktionen $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ (dem Raum der Distributionen) ist schwächer als diejenige auf dem Dualraum von $L^2(\mathbb{R}^N)$. Hilberträume sind nach dem Darstellungssatz von Riesz isometrisch isomorph zu ihren Dualräumen. Damit ist die Topologie auf dem Raum der Distributionen gröber als jene auf $L^2(\mathbb{R}^N)$. Das heißt, für jedes $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ können wir eine Distribution $\hat{u}$ definieren durch

$$\hat{u}[\phi] := \int_{\mathbb{R}^N} u\phi \, dx.$$

Wir können nun die Abbildung $(-\Delta + V)$ durch die duale Wirkung auf den Teilraum der Distributionen fortsetzen, indem wir für $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N) \subseteq \mathscr{D}'(\mathbb{R}^N)$ definieren:

$$((-\Delta + V)\hat{u})\,[\phi] := \int_{\mathbb{R}^N} u\,(-\Delta + V)\phi \, dx \qquad (\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)).$$

Mit der Bedingung $-\Delta\hat{u} + V\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ ist gemeint, dass eine Funktion $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ derart existiert, dass gilt:

$$((-\Delta + V)\hat{u})[\phi] = \int_{\mathbb{R}^N} v \cdot \phi \, dx \qquad (\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N)).$$

Dies ist nach dem Darstellungssatz von Riesz äquivalent zu der Abschätzung

$$((-\Delta + V)\hat{u})[\phi] \le C\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \qquad (\phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N))$$

für ein $C > 0$.

Man kann ferner in der Definition von $D(T)$ die Eigenschaft $|V|^{\frac{1}{2}}u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ durch $V_+u^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ ersetzen, da (2) bereits die Integrierbarkeit von V_-u^2 garantiert.

Darüber hinaus folgern wir auch die Halbbeschränktheit von T nach unten, welche durch (die Erweiterung von) (2) für $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ ersichtlich wird. Gilt zusätzlich $u \in D(T)$, so folgt:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, dx \le \frac{1}{1-\theta}\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta + V)u \cdot \overline{u} \, dx + \frac{C(\theta)}{1-\theta}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \, dx - \frac{1}{1-\theta}\int_{\mathbb{R}^N} V_+|u|^2 \, dx \tag{4}$$

Im Allgemeinen verzichten wir auf die Forderung, dass T_0 wesentlich selbstadjungiert ist. Ist $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ vorausgesetzt, so vereinfacht sich die Darstellung des Definitionsbereiches, da die Bedingung $|V|^{\frac{1}{2}}u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ trivial wird. Ferner ist $Vu \in L^2(\mathbb{R}^N)$ und $-\Delta u + Vu \in L^2(\mathbb{R}^N)$ bereits äquivalent zu $-\Delta u \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Damit liefert die Konstruktion der Friedrichserweiterung $D(T) = H^2(\mathbb{R}^N)$. Alternativ kann man in diesem Fall den Operator T als $-\Delta$-beschränkte Störung mit relativer Schranke 0 des Laplace-Operators mit Definitionsbereich $D(-\Delta) := H^2(\mathbb{R}^N)$ auf $L^2(\mathbb{R}^N)$ verstehen und erhält damit ebenfalls die Selbstadjungiertheit, vergleiche dazu Kato-Rellichs Theorem in [**HS96**, Theorem 13.5].

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei V so gewählt, dass 0 der (isolierte) Eigenwert ist, dessen Eigenfunktion hier betrachtet werden soll. Das kann für beliebige Potentiale, die ein solches Spektrum generieren, mit einem spektralen Shift erreicht werden. Überdies gibt es ein $a > 0$, sodass das Intervall $(-a, a)$ das essentielle Spektrum von T nicht schneidet, das heißt $\sigma_{ess}(T) \cap (-a, a) = \emptyset$. Ferner sind weitere Eigenwerte innerhalb einer solchen Lücke des essentiellen Spektrums $(-a, a)$ zugelassen. Wir nennen von nun an Lücken des essentiellen Spektrums vereinfacht (spektrale) Lücken und Eigenwerte innerhalb einer solchen Lücke werden Lückeneigenwerte genannt. Man beachte, dass für jedes $\alpha \in (-a, a)$ ein $\varepsilon > 0$ exisitert, sodass nur endlich viele Eigenwerte (mit endlicher Vielfachheit) in $[\alpha+\varepsilon, \alpha-\varepsilon]$ liegen. Andernfalls wäre α ein Häufungswert von Eigenwerten in $(-a, a)$ und damit würde $\alpha \in \sigma_{ess}(T)$ gelten, was der Definition von a widerspricht.

Darüber hinaus kann das Intervall $(-a, a)$ auch in der semiendlichen Lücke liegen, das heißt es gilt: $\inf \sigma_{ess} \geq a$. In diesem Fall liefert die hier vorgestellte Methode ein quantitativ schlechteres Ergebnis, als die direkte Anwendung von Agmons Resultat lieferte.

Unter Verwendung des Spektralkalküls kann nun der Operator $T^2 = T \circ T$ wie folgt definiert werden. Es sei $(E_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ die zu T gehörige Spektralschar. Dann liefert die Definition

$$D(T^2) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}} \lambda^4 d\langle E_\lambda u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} < \infty \right\}, \qquad T^2 := \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 dE_\lambda$$

einen weiteren selbstadjungierten Operator in $L^2(\mathbb{R}^N)$. Ferner ist T^2 nach unten halbbeschränkt durch 0. Die genaue Darstellung des entsprechenden Definitionsbereich ist für unsere Zwecke nicht weiter von Belang. Wir benötigen gelegentlich die Charakterisierung

$$D(T^2) = \{u \in D(T) : Tu \in D(T)\}.$$

Alternativ kann man T^2 auch als denjenigen selbstadjungierten Operators verstehen, welcher der quadratischen Form

$$q : D(q) \to \mathbb{R},\, u \mapsto \langle Tu, Tu\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

zugeordneten ist. Setzt man hierbei $D(q) = D(T)$, dann ist q abgeschlossen, da T ein abgeschlossener Operator ist. Tatsächlich gilt für eine Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus $D(q)$ derart, dass

$$\|u_n - u_m\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},\, q(u_n - u_m) \to 0 \text{ für } m, n \to \infty$$

gilt, dass es $u, v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ gibt, mit $u_n \to u$ und $Tu_n \to v$ für $n \to \infty$. Die Abgeschlossenheit von T liefert dann $u \in D(T)$ und $Tu = v$ und folglich $u \in D(q)$ sowie

$$q(u) = \lim_{n\to\infty} q(u_n).$$

Damit ist q abgeschlossen.

2. Charakterisierung des essentiellen Spektrums

Als erstes Resultat soll bewiesen werden, dass sich das Infimum des essentiellen Spektrums von T^2 über sogenannte Zhislin-Folgen charakterisieren lässt. Ein solches Resultat ist für eine große Klasse von Operatoren, sogenannte lokal kompakte Operatoren, bekannt und kann in [**HS96**, Abschnitt 10] nachgelesen werden. Zu einem späteren Zeitpunkt wird diese Terminologie vertiefend behandelt. Die ursprüngliche Definition von lokaler Kompaktheit bezieht sich nur auf Differentialoperatoren zweiter Ordnung, weshalb eine Beschreibung des essentiellen Spektrums durch Zhislin-Folgen erneut bewiesen werden muss. Zu diesem Zweck folgen wir den Ideen in [**Agm85**] und legen die entsprechenden Resultate für Operatoren vierter Ordnung dar. Dieser Abschnitt ist wie folgt strukturiert. Zunächst wird das Theorem formuliert und der Beweis am Ende nachgestellt, damit die Argumentation nicht durch technische Rechnungen unterbrochen werden muss. Jene Details bilden den Hauptteil dieses Abschnittes.

Theorem 1.1. *Es seien der Schrödingeroperator $T : L^2(\mathbb{R}^N) \supset D(T) \to L^2(\mathbb{R}^N)$, definiert durch $Tu = -\Delta u + Vu$, und die quadratische Form $q : L^2(\mathbb{R}^N) \supset D(q) \to \mathbb{C}$, definiert durch*

$u \mapsto \langle Tu, Tu \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, *gegeben. Dann gilt:*

$$\inf \sigma_{ess}(T^2) = \sup_{K \subset\subset \mathbb{R}^N} \inf_{\phi \in D(q) \colon \operatorname{supp} \phi \subset \mathbb{R}^N \setminus K} \left\{ \frac{q(\phi)}{\langle \phi, \phi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}} \right\}$$

Hierbei bedeutet das Inklusionszeichen $K \subset\subset \mathbb{R}^N$, dass K eine kompakte Menge in $\mathbb{R}^N$ ist. Zu Beginn werden einige Identitäten benötigt, die im Wesentlichen auf der partielle Integration fußen. Dazu brauchen wir die Stabilität von $D(T)$ unter Multiplikation mit glatten Abschneidefunktionen.

Lemma 1.2. *Es seien $u \in D(T)$ und $\xi, \eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit Werten in $\mathbb{R}$, Dann gilt:*

a) $\xi u \in D(T)$ und $(-\Delta + V)(\xi u) = \xi(-\Delta + V)u - 2\nabla\xi \cdot \nabla u - (\Delta\xi)u$.
b) $\langle \eta \nabla u, \nabla u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \int_{\mathbb{R}^N} \eta V |u|^2 \, dx = \frac{1}{2} \langle \Delta\eta \cdot u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \Re(\langle \eta(-\Delta + V)u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)})$,

wobei $\Re$ für den Realteil steht.

Obgleich bei Schrödingeroperatoren der Definitionsbereich stabil unter Multiplikation mit Abschneidefunktionen ist, kann man im Allgemeinen nicht erwarten, dass sich ein solches Resultat auf Operatoren vierter Ordnung überträgt. Deshalb wurde in Theorem 1.1 die quadratische Form statt des Rayleigh-Quotients verwendet. Tatsächlich ist selbst für $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ und $u \in D(T^2)$ die entsprechende Folgerung $\xi u \in D(T^2)$ im Allgemeinen falsch. Eine ausführlichere Diskussion und eine Bedingung an das Potential, für die man tatsächlich $\xi u \in D(T^2)$ für jedes $u \in D(T^2)$ erhält, wird im nächsten Kapitel geliefert.

Beweis. a) Es gilt für alle $u \in D(T)$, $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$:

$$\||V|^{\frac{1}{2}} \xi u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|\xi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \cdot \||V|^{\frac{1}{2}} u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

sowie

$$\|\nabla(\xi u)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|u \cdot \nabla\xi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\xi \cdot \nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|\nabla\xi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\xi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Da die erste Ungleichung insbesondere für $V \equiv 1$ gilt, folgt $\xi u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ und $|V|^{\frac{1}{2}} \xi u \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Darüber hinaus können wir die Wirkung der Distribution $(-\Delta + V)\widehat{\xi u}$ auf eine Testfunktion $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset D(T)$ wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned}
((-\Delta + V)\widehat{\xi u})[\phi] &= \int_{\mathbb{R}^N} \xi u (-\Delta + V)\phi \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u \left((-\Delta(\xi\phi) + 2\nabla\xi \cdot \nabla\phi + \Delta\xi \cdot \phi \right) dx + \int_{\mathbb{R}^N} V \xi u \phi \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} u(-\Delta + V)(\xi\phi) \, dx - 2 \int_{\mathbb{R}^N} \nabla(\nabla\xi \cdot u) \cdot \phi \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} \Delta\xi \cdot u\phi \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left((-\Delta + V)u \cdot \xi - 2\nabla u \cdot \nabla\xi - u\Delta\xi \right) \phi \, dx
\end{aligned}$$

Da ϕ beliebig war, gilt folglich $(-\Delta + V)(\xi u) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ und $(-\Delta + V)(\xi u) = (-\Delta + V)u \cdot \xi - 2\nabla u \cdot \nabla\xi - u\Delta\xi$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$. Daraus folgt a).

Für Teil b) nehmen wir an, dass $\eta \geq 0$ gilt. Die Gleichung in voller Allgemeinheit erhält man anschließend durch Aufteilung in eine Summe mittels $\eta = \eta_+ - \eta_-$. Für $\eta \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla(\eta^{\frac{1}{2}} u), \nabla(\eta^{\frac{1}{2}} u) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} =& \langle -\Delta(\eta^{\frac{1}{2}} u), \eta^{\frac{1}{2}} u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
=& \langle -u\Delta(\eta^{\frac{1}{2}}), \eta^{\frac{1}{2}} u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} - 2\langle \nabla(\eta^{\frac{1}{2}}) \cdot \nabla u, \eta^{\frac{1}{2}} u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \langle \eta^{\frac{1}{2}}\Delta u, \eta^{\frac{1}{2}} u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
=&\langle -u\Delta(\eta^{\frac{1}{2}}), \eta^{\frac{1}{2}} u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} - 2\langle \nabla(\eta^{\frac{1}{2}})\cdot\nabla u, \eta^{\frac{1}{2}} u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&- \langle \eta\Delta u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}
$$

Darüber hinaus können wir den Mittelteil mit der Identität

$$\nabla(|u|^2) = \nabla u\cdot\overline{u} + \nabla\overline{u}\cdot u = 2\Re(\nabla u\cdot\overline{u})$$

weiter vereinfachen. $\Re$ bezeichnet den Realteil, wohingegeben $\Im$ den Imaginärteil bezeichnet.

$$
\begin{aligned}
&\Re\left(-2\langle\nabla(\eta^{\frac{1}{2}})\cdot\nabla u, \eta^{\frac{1}{2}} u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right) \\
=&\Re\left(-2\int_{\mathbb{R}^N} \eta^{\frac{1}{2}}\overline{u}\nabla(\eta^{\frac{1}{2}})\cdot\nabla u\,dx\right) \\
=&-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N)} \nabla\left((\eta^{\frac{1}{2}})^2\right)\cdot\nabla(|u|^2)\,dx \\
=&\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \eta\cdot\Delta(|u|^2)\,dx \\
=&\int_{\mathbb{R}^N} \eta\cdot(\Re(\overline{u}\cdot\Delta u) + |\nabla u|^2)\,dx \\
=&\langle\eta\nabla u,\nabla u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \Re\langle\eta\Delta u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Das setzt man ein und bekommt:

$$
\begin{aligned}
\langle\nabla(\eta^{\frac{1}{2}}u),\nabla(\eta^{\frac{1}{2}}u)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} =&\langle -u\Delta(\eta^{\frac{1}{2}}), \eta^{\frac{1}{2}}u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \langle\eta\nabla u,\nabla u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&+ \Re(\langle\eta\Delta u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}) - \Re(\langle\eta\Delta u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}) \\
=&\langle -u\Delta(\eta^{\frac{1}{2}}), \eta^{\frac{1}{2}}u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \langle\eta\nabla u,\nabla u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}
$$

Nach Umstellen der Gleichung erhält man somit:

$$\langle\eta\nabla u,\nabla u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \langle u\Delta(\eta^{\frac{1}{2}}), \eta^{\frac{1}{2}}u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \langle\nabla(\eta^{\frac{1}{2}}u),\nabla(\eta^{\frac{1}{2}}u)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Mit a) erhält man schließlich

$$
\begin{aligned}
&\langle\eta\nabla u,\nabla u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \int_{\mathbb{R}^N} \eta\, V\, |u|^2\,dx \\
=&\Re(\langle(-\Delta+V)(\eta^{\frac{1}{2}}u), \eta^{\frac{1}{2}}u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}) + \langle\eta^{\frac{1}{2}}\Delta(\eta^{\frac{1}{2}})u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
\overset{a)}{=}&\Re(\langle\eta^{\frac{1}{2}}(-\Delta+V)u, \eta^{\frac{1}{2}}u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}) - 2\langle\nabla(\eta^{\frac{1}{2}})\cdot\nabla u, \eta^{\frac{1}{2}}u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \langle\Delta(\eta^{\frac{1}{2}})u, \eta^{\frac{1}{2}}u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&+ \langle\eta^{\frac{1}{2}}\Delta(\eta^{\frac{1}{2}})u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
=&\Re(\langle\eta^{\frac{1}{2}}(-\Delta+V)u, \eta^{\frac{1}{2}}u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}) - 2\Re\left(\langle\nabla(\eta^{\frac{1}{2}})\cdot\nabla u, \eta^{\frac{1}{2}}u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right) - \langle\Delta(\eta^{\frac{1}{2}})u, \eta^{\frac{1}{2}}u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&+ \langle\eta^{\frac{1}{2}}\Delta(\eta^{\frac{1}{2}})u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
\overset{(5)}{=}&\Re(\langle\eta(-\Delta+V)u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\nabla\eta\cdot\nabla(|u|^2)\,dx \\
=&\frac{1}{2}\langle\Delta\eta\cdot u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \Re(\langle\eta(-\Delta+V)u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}).
\end{aligned}
$$

□

Zu $R > 0$ bezeichne $B_R(0) := \{x\in\mathbb{R}^N : |x|\le R\}$ die abgeschlossene Kugel um 0 mit Radius R.

Proposition 1.3. *Es seien $\xi_1, \xi_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ gegeben mit $\xi_k \geq 0$ für $k = 1, 2$, $\xi_1(x) = 1$ für $x \in B_R(0)$, $\xi_2(x) = 1$ für $x \in \mathbb{R}^N \setminus B_{R+1}(0)$ und $\xi_1^2 + \xi_2^2 \equiv 1$ auf $\mathbb{R}^N$. Dann gelten für alle $u \in D(T)$ die folgenden Identitäten:*

$$(-\Delta + V)u = \sum_{k=1,2} \xi_k(-\Delta + V)(\xi_k u) + |\nabla \xi_k|^2 u \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\langle(-\Delta + V)u, (-\Delta + V)u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \langle pu, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \langle B\nabla u, \nabla u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\quad + \|(-\Delta + V)(\xi_1 u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|(-\Delta + V)(\xi_2 u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)},\end{aligned} \tag{7}$$

wobei $p = p_0 + 2(|\nabla\xi_1|^2 + |\nabla\xi_2|^2)V$ und $p_0 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ und $B \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N\times N})$ gegeben sind durch

$$p_0 := \sum_{k=1,2} \left(\frac{1}{2}(\Delta\xi_k)^2 + \nabla^T\xi_k \cdot \nabla(\Delta\xi_k) - \frac{1}{2}\xi_k\Delta^2\xi_k + \frac{1}{2}\Delta|\nabla\xi_k|^2\right),$$

sowie

$$B := \sum_{k=1,2} -4\nabla\xi_k \cdot \nabla\xi_k^T + (\xi_k\Delta\xi_k - |\nabla\xi_k|^2) \cdot I_N,$$

wobei $I_N \in \mathbb{R}^{N\times N}$ die Einheitsmatrix bezeichne.

Obgleich ξ_1 und ξ_2 auch von R abhängen, wird dieser Index unterdrückt, um die Notation nicht unnötig kompliziert zu machen. Insbesondere gilt die Behauptung für $V \equiv 0$, was im Wesentlichen auf der Produktregel beruht. Für den allgemeineren Fall stützen wir uns auf die Gleichung aus Lemma 1.2a).

Beweis. Mit Produktregel erhält man die folgenden beiden Gleichungen

$$\nabla\xi_k \cdot \nabla(\xi_k u) = |\nabla\xi_k|^2 u + \xi_k\nabla\xi_k \cdot \nabla u = |\nabla\xi_k|^2 u + \frac{1}{2}\nabla(\xi_k^2) \cdot \nabla u, \tag{8}$$

sowie

$$\Delta(\xi_k^2) = 2\xi_k\Delta\xi_k + 2|\nabla\xi_k|^2. \tag{9}$$

Man verwendet die Gleichung in Lemma 1.2a) und $0 = \nabla(1) = \sum\limits_{k=1,2} \nabla(\xi_k^2)$, um wie folgt zu vereinfachen:

$$\begin{aligned}(-\Delta + V)u = \sum_{k=1,2} (-\Delta + V)(\xi_k^2 u) &\overset{1.2a)}{=} \sum_{k=1,2} \xi_k(-\Delta + V)(\xi_k u) - 2\nabla\xi_k \cdot \nabla(\xi_k u) - \Delta(\xi_k)\,\xi_k u \\ &\overset{(8)}{=} \sum_{k=1,2} \xi_k(-\Delta + V)(\xi_k u) - 2|\nabla\xi_k|^2\, u - \nabla(\xi_k^2) \cdot \nabla u - \Delta(\xi_k)\,\xi_k u \\ &\overset{(9)}{=} \sum_{k=1,2} \xi_k(-\Delta + V)(\xi_k u) - 2|\nabla\xi_k|^2\, u - \nabla(\xi_k^2) \cdot \nabla u - \frac{1}{2}\Delta(\xi_k^2)u + |\nabla\xi_k|^2 u \\ &= \sum_{k=1,2} \xi_k(-\Delta + V)(\xi_k u) - |\nabla\xi_k|^2 u.\end{aligned}$$

Entsprechend erhält man die Identität (7) durch Testen von (6) mit $(-\Delta + V)u$, partieller Integration (p.I.) und mehrfacher Anwendung von (6):

$$\begin{aligned}&\langle(-\Delta + V)u, (-\Delta + V)u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\overset{(6)}{=} \sum_{k=1,2} \langle\xi_k(-\Delta + V)(\xi_k u), (-\Delta + V)u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \langle|\nabla\xi_k|^2 u, (-\Delta + V)u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(6)}{=} \sum_{k=1,2} \langle(-\Delta+V)(\xi_k u), (-\Delta+V)(\xi_k u)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \langle(-\Delta+V)(\xi_k u), 2\nabla^T\xi_k\cdot\nabla u)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\quad + \langle(-\Delta+V)(\xi_k u), \Delta\xi_k\cdot u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \langle|\nabla\xi_k|^2 u, (-\Delta+V)u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\overset{p.I.}{=} \sum_{k=1,2} \langle(-\Delta+V)(\xi_k u), (-\Delta+V)(\xi_k u)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \langle(-\Delta+V)(\xi_k u), 2\nabla^T\xi_k\cdot\nabla u)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\quad + \langle(-\Delta+V)(\xi_k u), \Delta\xi_k\cdot u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \langle\nabla(|\nabla\xi_k|^2 u), \nabla u)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \langle V|\nabla\xi_k|^2 u, u)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\overset{(6)}{=} \sum_{k=1,2} \|(-\Delta+V)(\xi_k u)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + + \langle-\Delta\xi_k\cdot u - 2\nabla^T\xi_k\cdot\nabla u + \xi_k(-\Delta+V)u, 2\nabla^T\xi_k\cdot\nabla u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\quad + \langle(-\Delta+V)(\xi_k u), \Delta\xi_k\cdot u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \langle\nabla(|\nabla\xi_k|^2 u), \nabla u)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \langle V|\nabla\xi_k|^2 u, u)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\overset{(6)}{=} \sum_{k=1,2} \|(-\Delta+V)(\xi_k u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \langle-\Delta\xi_k\cdot u - 2\nabla^T\xi_k\cdot\nabla u + \xi_k(-\Delta+V)u, 2\nabla^T\xi_k\cdot\nabla u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\quad + \langle-(\Delta\xi_k)^2 u - 2\nabla^T\xi_k\cdot\nabla u\cdot\Delta\xi_k + \xi_k\cdot(-\Delta+V)u\Delta\xi_k, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\quad - \langle\nabla|\nabla\xi_k|^2\cdot u + |\nabla\xi_k|^2\nabla u, \nabla u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \langle V|\nabla\xi_k|^2 u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&= \sum_{k=1,2} \|(-\Delta+V)(\xi_k u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} - 4\Re\left(\langle\Delta\xi_k\cdot u, \nabla^T\xi_k\cdot\nabla u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right) - 4\|\nabla^T\xi_k\cdot\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\quad - \langle|\Delta\xi_k|^2 u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \langle\Delta\xi_k\cdot\xi_k\cdot(-\Delta+V)u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\quad - \langle\nabla|\nabla\xi_k|^2\cdot u, \nabla u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \||\nabla\xi_k||\nabla u|\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \langle V|\nabla\xi_k|^2 u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}$$

In den beiden Skalarprodukten, in denen sowohl u als auch ∇u auftauchen, verwendet man wieder

$$\nabla(|u|^2) = \nabla u\cdot\overline{u} + \nabla\overline{u}\cdot u = 2\Re(\nabla u\cdot\overline{u}).$$

Somit erhält man

$$\begin{aligned}
\Re(\langle\nabla^T\xi_k\cdot\nabla u, \Delta\xi_k\cdot u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}) &= \Re\left(\int_{\mathbb{R}^N}\nabla^T\xi_k\cdot\nabla u\,\Delta\xi_k\cdot\overline{u}\,dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\nabla^T\xi_k\cdot\nabla(|u|^2)\Delta\xi_k\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2\cdot\nabla^T(\nabla\xi_k\cdot\Delta\xi_k),\ dx.
\end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\begin{aligned}
&\langle\Delta\xi_k\cdot\xi_k\cdot(-\Delta+V)u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
=&\langle\nabla u, \nabla(\Delta\xi_k\cdot\xi_k\cdot u)\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \langle V\xi_k\Delta\xi_k u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
=&\langle\nabla u, \Delta\xi_k\cdot\xi_k\cdot\nabla u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\nabla^T(|u|^2)\cdot\nabla(\xi_k\Delta\xi_k)\,dx + \langle V\xi_k\Delta\xi_k u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&+ i\Im(\langle\nabla u, \nabla(\Delta\xi_k\cdot\xi_k)\cdot u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}) + \langle V\xi_k\Delta\xi_k u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
=&\langle\Delta\xi_k\cdot\xi_k\cdot\nabla u, \nabla u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \frac{1}{2}\langle\Delta(\xi_k\Delta\xi_k)u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&+ i\Im(\langle\nabla u, \nabla(\Delta\xi_k\cdot\xi_k)\cdot u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}) - \langle V|\nabla\xi_k|^2 u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)},
\end{aligned}$$

sowie

$$\Re(\langle\nabla(|\nabla\xi_k|^2)\cdot u, \nabla u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\nabla(|u|^2)\cdot\nabla(|\nabla\xi_k|^2) = -\frac{1}{2}\langle\Delta(|\nabla\xi_k|^2)u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Setzt man diese Identitäten in die Formel für $\langle(-\Delta+V)u,(-\Delta+V)u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ ein, so vergewissert man sich, dass der Imaginärteil der rechten Seite verschwindet:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1,2}\Im(\langle\nabla u,\nabla(\Delta\xi_k\cdot\xi_k)\cdot u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)})-\Im(\langle\nabla(|\nabla\xi_k|^2)\cdot u,\nabla u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)})\\
=&\sum_{k=1,2}\Im(\langle\nabla u\cdot\nabla(\Delta\xi_k\cdot\xi_k),u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)})+\Im(\langle\nabla u\cdot\nabla(|\nabla\xi_k|^2),u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)})\\
=&\sum_{k=1,2}\Im(\langle\nabla u\cdot\nabla(\Delta\xi_k\cdot\xi_k+|\nabla\xi_k|^2),u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)})\\
\overset{(9)}{=}&\sum_{k=1,2}\Im(\langle\nabla u\cdot\nabla(\Delta(\xi_k^2)),u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)})=0
\end{aligned}$$

Damit erhält man zur Berechnung von $\langle(-\Delta+V)u,(-\Delta+V)u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}$:

$$\begin{aligned}
&\langle(-\Delta+V)u,(-\Delta+V)u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}\\
=&\sum_{k=1,2}\|(-\Delta+V)(\xi_k u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+2\langle\nabla^T(\Delta\xi_k\cdot\nabla\xi_k)u,u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}-4\|\nabla^T\xi_k\cdot\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\\
&-\langle(\Delta\xi_k)^2u,u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}+\langle\Delta\xi_k\cdot\xi_k\nabla u,\nabla u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}-\frac{1}{2}\langle\Delta(\Delta\xi_k\cdot\xi_k)u,u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}\\
&+\frac{1}{2}\langle\Delta(|\nabla\xi_k|^2)\cdot u,u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}-\||\nabla\xi_k||\nabla u|\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}-2\langle V|\nabla\xi_k|^2u,u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}\\
=&\sum_{k=1,2}\|(-\Delta+V)(\xi_k u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+\langle(-4\nabla\xi_k\cdot\nabla\xi_k^T+\xi_k\Delta\xi_k-|\nabla\xi_k|^2)\nabla u,\nabla u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}\\
&+\langle(\frac{1}{2}(\Delta\xi_k)^2+\nabla^T\xi_k\cdot\nabla(\Delta\xi_k)-\frac{1}{2}\xi_k\Delta^2\xi_k+\frac{1}{2}\Delta|\nabla\xi_k|^2)u,u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}\\
&-2\langle V|\nabla\xi_k|^2u,u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}\\
=&\sum_{k=1,2}\|(-\Delta+V)(\xi_k u)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}+\langle pu,u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}+\langle B\nabla u,\nabla u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

□

Im folgenden Lemma soll aus einer (gewichteten) spektralen Abschätzung für Funktionen mit Träger außerhalb eines Kompaktums eine Störfunktion konstruiert werden. Der durch die Störung resultierende Operator erbt die spektrale Abschätzung nicht nur, sondern erweitert sie auch auf Funktionen mit beliebigem Träger.

Lemma 1.4. *Es seien T, q definiert wie in Theorem 1.1. Ferner seien $K \subset\subset \mathbb{R}^N$ und eine reelle, messbare Funktion c gegeben, sodass für alle $\phi\in D(q)$ mit* $\operatorname{supp}\phi\cap K=\emptyset$ *gilt:*

$$q(\phi)=\langle T\phi,T\phi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}\geq\int_{\mathbb{R}^N\setminus K}c(x)|\phi|^2\,dx. \tag{10}$$

Dann existiert für jedes $\delta>0$ eine (o.B.d.A) nicht negative Funktion

$$\chi=\frac{1}{1+C\delta}\left(2\sum_{k=1,2}|\nabla\xi_k|^2+C\eta\right)V_-+\chi_0$$

für ein $\chi_0\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, sodass für die gestörte quadratische Form

$$q_\chi:L^2(\mathbb{R}^N)\supset D(q)\to L^2(\mathbb{R}^N),\ q_\chi(u)=q(u)+\langle\chi u,u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

gilt:

$$q_\chi(u) \geq \frac{1}{1+\delta} \int_{\mathbb{R}} c(x)|u|^2\,dx \qquad (u \in D(q)). \tag{11}$$

In der Sprache der Spektraltheorie des Operators T^2 in $L^2(\mathbb{R}^N)$ lässt sich Lemma 1.4 wie folgt interpretieren: Für beliebige, nach unten halbbeschränkte, selbstadjungierte Operatoren A ist das Infimum des Spektrums durch das Infimum des Rayleigh-Quotienten gegeben:

$$\inf \sigma(A) = \inf_{u \in D(A) \setminus \{0\}} \frac{\langle Au, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}}{\langle u, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}}. \tag{12}$$

Ist nun $c \equiv c_0 > 0$ aus Lemma 1.4 eine positive Konstante, so ist c_0 eine untere Schranke für das Infimum des Rayleigh-Quotienten von Funktionen mit Träger außerhalb einer kompakten Menge. Aus dem Lemma folgt dann die Existenz einer kompakt getragenen Störung des Operators, sodass c_0 eine untere Schanke des Spektrums des gestörten Operators ist. Darüber hinaus liefert der Beweis des Lemmas sogar eine Konstruktionsvorschrift einer entsprechenden kompakten Störung zu vorgegebenem Kompaktum K. Mit Weyls Theorem (vgl. [**HS96**]) ändert sich das essentielle Spektrum durch eine solche kompakte Störung nicht. Somit ist c_0 auch eine untere Schranke für das Infimum des essentiellen Spektrums, charakterisiert durch Funktionen, deren Träger "weit draußen" ist. Das Lemma ist in Termen der quadratischen Form formuliert, damit der Definitionsbereich invariant unter der Multiplikation mit Abschneidefunktionen bleibt.

Beweis. Es sei zu vorgegebener kompakter Teilmenge K ein $R > 0$ gewählt mit $B_R(0) \supset K$. Entsprechend seien die Abschneidefunktionen ξ_1, ξ_2 wie in Proposition 1.3 gegeben. Dann erhält man entsprechend der Formeln (7) für alle $u \in D(q) = D(T)$:

$$q(u) = \langle Tu, Tu \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \langle pu, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \langle B\nabla u, \nabla u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} + q(\xi_1 u) + q(\xi_2 u)$$

Mit supp $\xi_2 \cap K = \emptyset$ erhält man nach Voraussetzung

$$q(\xi_2 u) = \langle T(\xi_2 u), T(\xi_2 u) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \geq \int_{\mathbb{R}^N \setminus K} c(x)|\xi_2 u|^2\,dx. \tag{13}$$

Andererseits hat man die triviale Abschätzung

$$q(\xi_1 u) = \langle T(\xi_1 u), T(\xi_1 u) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \geq 0. \tag{14}$$

Nun werden die verbleibenden Terme betrachtet. Da $B \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N\times N})$ gilt, kann eine Abschneidefunktion $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit den Eigenschaften $\eta \geq 0$ und $\eta \equiv 1$ auf supp B gewählt werden. Da $B \in L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N\times N})$ gilt, gibt es eine Konstante $C > 0$, sodass für alle $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ gilt:

$$\langle B\nabla u, \nabla u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \geq -C \int_{\mathbb{R}^N} \eta |\nabla u|^2\,dx$$

Wir verwenden die angepasste Young-Ungleichung

$$ab \leq \delta a^2 + (4\delta)^{-1} b^2 \qquad (a, b, \delta > 0) \tag{15}$$

und erhalten für alle $\delta > 0$:

(16)

$$\begin{aligned}
\langle B\nabla u, \nabla u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} &\geq -C\int_{\mathbb{R}^N} \eta|\nabla u|^2\,dx = -C\Re\left(\int_{\mathbb{R}^N} \eta|\nabla u|^2\,dx\right)\\
&= C\Re\left(\int_{\mathbb{R}^N} \nabla\eta\cdot\nabla u\,\overline{u}\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} \Delta u\,\eta\overline{u}\,dx\right)\\
&= C\left(\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla\eta\cdot\nabla(|u|^2)\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} V\eta|u|^2\,dx - \Re\left(\int_{\mathbb{R}^N}(-\Delta+V)u\,\eta\overline{u}\,dx\right)\right)\\
&\overset{(15)}{\geq} C\int_{\mathbb{R}^N}\left(-\frac{1}{2}\Delta\eta + V\eta\right)|u|^2\,dx - C\left(\delta\|(-\Delta+V)u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{4\delta}\|\eta u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right)\\
&= C\int_{\mathbb{R}^N}\left(-\frac{1}{2}\Delta\eta + V\eta - \frac{1}{4\delta}\eta^2\right)|u|^2\,dx - C\delta q(u).
\end{aligned}$$

Fasst man die Abschätzungen (13),(14) und (16) zusammen und fügt sie in (7) ein, findet man:

$$\begin{aligned}
q(u) = \langle Tu, Tu\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} =&\langle pu, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \langle B\nabla u, \nabla u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} + q(\xi_1 u) + q(\xi_2 u)\\
\geq&\langle pu, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} + C\int_{\mathbb{R}^N}\left(-\frac{1}{2}\Delta\eta + V\eta - \frac{1}{4\delta}\eta^2\right)|u|^2\,dx\\
&- C\delta q(u) + \int_{\mathbb{R}^N\setminus K} c(x)|\xi_2 u|^2\,dx \qquad (17)\\
=&\int_{\mathbb{R}^N} \underbrace{p + c(x)\xi_2^2 + C\left(-\frac{1}{2}\Delta\eta + V\eta - \frac{1}{4\delta}\eta^2\right)}_{=:\tilde{c}}|u|^2\,dx - C\delta q(u).
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt durch Addition von

$$\int_{\mathbb{R}^N} \chi u^2\,dx := \frac{1}{1+C\delta}\int_{\mathbb{R}^N}(c-\tilde{c})u^2\,dx$$

in (17) und Skalierung $\delta \mapsto \delta/C$. Man beachte $\chi u^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ für $u \in D(T)$ und $c(x) = \tilde{c}(x)$ für $|x|$ groß genug, da alle Ableitungen von ξ_k $(k = 1, 2)$, ξ_1, sowie η und p kompakten Träger haben. Daher hat auch χ kompakten Träger. □

Nun sind wir in der Lage, einen Beweis des Theorems 1.1 zu geben. Im Beweis der Ungleichung

$$\inf\sigma_{ess}(T^2) \leq \sup_{K\subset\subset\mathbb{R}^N}\ \inf_{\phi\in D(q)\setminus\{0\}:\,\mathrm{supp}\ \phi\cap K=\emptyset}\left\{\frac{q(\phi)}{\langle\phi,\phi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}}\right\}$$

wird die spezielle Form des Operators nicht verwendet. Das Resultat kann somit auf beliebige, selbstadjungierte Operatoren in $L^2(\mathbb{R}^N)$ übertragen werden. Kernidee ist hierbei, eine gegen den sup-inf-Term konvergente Folge zu konstruieren, welche gleichzeitig eine Weyl'sche Folge für den Operator ist. Die Charakterisierung des essentiellen Spektrums über Weyl-Folgen kann in [**HS96**] rekapituliert werden.

Beweis von Theorem 1.1. Zuerst kürzen wir ab und definieren:

$$\Lambda := \sup_{K\subset\subset\mathbb{R}^N}\ \inf_{\phi\in D(q):\,\mathrm{supp}\ \phi\subset\mathbb{R}^N\setminus K}\left\{\frac{q(\phi)}{\langle\phi,\phi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}}\right\}$$

"$\leq$": Betrachte die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n := \inf_{\phi\in D(q)\setminus\{0\}:\,\mathrm{supp}\ \phi\cap B_n(0)=\emptyset}\left\{\frac{q(\phi)}{\langle\phi,\phi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}}\right\}.$$

Dann ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend, da die Menge, aus der Funktionen für das Infimum herangezogen werden, mit wachsendem $n \in \mathbb{N}$ kleiner wird. Tatsächlich ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auch nach oben beschränkt und es gilt $\sup a_n = \Lambda$, denn zu jedem $\lambda < \Lambda$ gibt es nach Definition des Supremums im Term von Λ ein Kompaktum $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ derart, dass

$$\inf_{\phi\in D(q)\setminus\{0\}:\, \mathrm{supp}\ \phi\cap K=\emptyset} \left\{ \frac{q(\phi)}{\langle \phi, \phi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}} \right\} > \lambda.$$

Daraus folgt $a_n > \lambda$ für n so groß, dass $K \subseteq B_n(0)$ gilt. Folglich ist λ keine obere Schranke. Man erhält:

$$\Lambda = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \inf_{\phi\in D(q)\setminus\{0\}:\, \mathrm{supp}\ \phi\cap B_n(0)=\emptyset} \left\{ \frac{q(\phi)}{\langle \phi, \phi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}} \right\}$$

Nun wählt man gemäß Definition des Infimums zu jedem festen $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $\{\phi_n^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ L^2-normierter Funktionen in $D(q)$ mit $\mathrm{supp}\ \phi_n^{(m)} \cap B_n(0) = \emptyset$, welche

$$q(\phi_n^{(m)}) \to a_n \qquad (m \to \infty)$$

genügen. Darüber hinaus wählt man ein $m(n) \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft

$$0 \leq q(\phi_n^{(m)}) - a_n \leq \Lambda - a_n \qquad (m \geq m(n))$$

Demzufolge gilt:

$$a_n \leq q(\phi_n^{(m(n))}) \leq \Lambda \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Nach dem Sandwich-Kriterium konvergiert auch die eingeschlossene Folge und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} q(\phi_n^{(m(n))}) = \Lambda.$$

Nun ist zu zeigen, dass $\{\phi_n^{(m(n))}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tatsächlich eine Weyl-Folge von $\sqrt{|T^2 - \Lambda|}$ zum Wert 0 ist. Zu jedem $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ gibt es n_0 mit $\mathrm{supp}\ \psi \subseteq B_{n_0}(0)$ und daher $\langle \phi_n^{(m(n))}, \psi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0$ für alle $n \geq n_0$. Ist $\psi \in L^2(\mathbb{R}^N)$ vorgegeben, so wähle zunächst zu vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $\tilde{\psi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit $\|\psi - \tilde{\psi}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon$. Wähle anschließend n_0 mit $\mathrm{supp}\ \tilde{\psi} \subseteq B_{n_0}(0)$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$ (beachte, dass $(\phi_n^{(m(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $L^2(\mathbb{R}^N)$ ist):

$$\left| \left\langle \phi_n^{(m(n))}, \psi \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \right| \leq \|\psi - \tilde{\psi}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \left| \left\langle \phi_n^{(m(n))}, \tilde{\psi} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \right| < \varepsilon.$$

Also konvergiert die Folge schwach gegen 0 und $q(\phi_n^{(m(n))}) \to \Lambda$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$ für $n \to \infty$. Das heißt, dass 0 im essentiellen Spektrum von $\sqrt{|T^2 - \Lambda|}$ liegt, das heißt mit dem Spektralsatz folgt $\Lambda \in \sigma_{ess}(T^2)$ und folglich gilt $\Lambda \geq \inf \sigma_{ess}(T)$.

"$\geq$". Sei $0 < \lambda < \Lambda$ (der Fall $\Lambda = 0$ ist trivial), dann gibt es ein $K \subset\subset \mathbb{R}^N$, sodass gilt: Für alle $\phi \in D(q) \setminus \{0\}$ mit $\mathrm{supp}\ \phi \cap K = \emptyset$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus K} |T\phi|^2\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |T\phi|^2\, dx > \lambda \int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^2\, dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N\setminus K} |\phi|^2\, dx.$$

Mit Lemma 1.4 gibt es zu jedem $\delta > 0$ eine Funktion χ mit

$$q_\chi(u) \geq \frac{\lambda}{1+\delta} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2\, dx \qquad (\phi \in D(T)).$$

Das heißt mit Hilfe der Charakterisierung für das Infimum des Spektrums (12), dass für jedes $\delta > 0$ gilt: $\frac{\lambda}{1+\delta} \leq \inf \sigma(T^2+\chi) \leq \inf \sigma_{ess}(T^2+\chi)$. Zieht man nun noch Weyls Theorem über das essentielle

Spektrum relativ kompakter Störungen heran, erhält man $\frac{\lambda}{1+\delta} \le \inf \sigma_{ess}(T^2 + \chi) = \inf \sigma_{ess}(T^2)$ für jedes $\delta > 0$. Es wurde gezeigt, dass aus $\lambda < \Lambda$ bereits $\lambda \le \inf \sigma_{ess}(T^2)$ folgt, was äquivalent zu $\Lambda \le \sigma_{ess}(T^2)$ ist. □

3. Berechnung der Abklingrate

Mit der Charakterisierung des essentiellen Spektrums aus Theorem 1.1 erhält man die Möglichkeit, eine Abschätzung der Form (11) zu beweisen, sofern das essentielle Spektrum von T die 0 nicht enthält. Ziel dieses Abschnittes ist nun zu zeigen, dass aus (10) bereits ein exponentielles Abklingverhalten im L^2-Sinne folgt. Genauer zeigen wir, dass eine Eigenfunktion des Operator T in einem gewichteten L^2-Raum liegt, dessen Gewicht exponentiell steigt. Darüber hinaus kann die Wachstumsrate des Gewichtes explizit angegeben werden, was eine untere Schranke für die Abklingrate der Eigenfunktion liefert.

Im Kernresultat werden zwei verschiedene Voraussetzungen an u behandelt. Ein entsprechendes Abklingverhalten für Funktionen aus dem Definitionsbereich des Operators wird gezeigt. Da der Term $(-\Delta + V)u$ im Distributionensinne zu verstehen ist, hat man nicht notwendigerweise $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Die nötigen Abschätzungen basieren auf Lemma 1.2, welches einen Ersatz für die Produktregel bietet. In diesem Resultat besteht nebst der Rechenarbeit die Schwierigkeit in einer geeignet Reihenfolge von Grenzwertbildungen. Der zweite Teil des Hauptresultates liefert den exponentiellen Abfall für Elemente mit höheren Glattheitsvoraussetzungen aber mit nur lokaler Integrierbarkeit. Der Term $(-\Delta + V)u$ wird zwar auch hier distributionell verstanden, jedoch mit Hilfe einer geeigneten Annäherung durch beschränkte Funktionen in eine Summe zweier (lokal) integrierbaren Funktionen geschrieben. Die Hauptschwierigkeit besteht hier in der Wahl einer geeigneten Approximation.

Das Kapitel wird wie sein Vorgänger mit der Formulierung des Hauptresultates eröffnet. Anschließend wird der Beweis des ersten Resultates in kleineren Teilschritten verpackt und zusammengefügt. Daraufhin werden die nötigen technischen Details für den Beweis des zweiten Resultates bereitgestellt.

THEOREM 1.5. *Es seien V, T wie in Voraussetzung 1. Weiter sei eine positive, von 0 weg beschränkte, stetige Funktion $c: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ und eine Funktion kompakt getragene Funktion χ mit der folgenden Eigenschaft gegeben:*

$$q_\chi(\phi) = \int_{\mathbb{R}^N} (|(-\Delta + V)\phi|^2 + \chi|\phi|^2)\, dx \ge \int_{\mathbb{R}^N} c(x)|\phi|^2\, dx \qquad (\phi \in D(T)). \tag{18}$$

Betrachte eine Funktion $u: \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} \chi = \emptyset$.

(2) Die Distribution $(-\Delta + V)u =: f$ erfülle

$$f \cdot e^{\sqrt{E(1+|\cdot|^2)}}, (-\Delta + V)f \cdot e^{\sqrt{E(1+|\cdot|^2)}} \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

(3) $\liminf_{R\to\infty} R^{-1} \int_{B_{2R}(0)\setminus B_R(0)} u^2\, dx = 0$.

Zusätzlich habe u eine der folgenden beiden Glattheitseigenschaften:

a) $u \in D(T)$,

b) $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,4}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Dabei sei $E > 0$ so gewählt, dass gilt:

$$\liminf_{|x|\to\infty} c(x) - \gamma_E(x) > 0,$$

wobei γ_E definiert ist durch

$$\gamma_E(x) := \left(\frac{3+5\theta}{1-\theta}\right) E^2 - \left(\frac{4}{1-\theta}(V_+(x) - C(\theta)) + 1\right) E.$$

Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{2\sqrt{E(1+|x|^2)}}\, |u|^2\, dx < \infty.$$

Wir geben zunächst einen Beweis unter der Annahme a). Man beachte, dass in diesem Fall die Abklingbedingung *(3)* für Lösungen $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ automatisch erfüllt ist, denn man hat in diesem Fall

$$\int_{B_{2R}(0)\setminus B_R(0)} |u|^2\, dx \le \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Darüber hinaus ist zu bemerken, dass die Bedingung an E tatsächlich erfüllt werden kann, da c von 0 weg beschränkt ist und $\sup\{\gamma_E(x) : x \in \mathbb{R}^N\} \to 0$ für $E \to 0$ gilt. Die Verschiebung des Potentials derart, dass 0 der Eigenwert ist, der zur Untersuchung steht, wird durch den Term $V_+ - C(\theta)$ wett gemacht. Eine Verschiebung von V nach unten würde entsprechend die Konstante $C(\theta)$ in die entgegengesetzte Richtung verschieben, sodass sich dies in der Differenz entsprechend aufhebt.

Auf dem Weg hin zu einem Beweis von Theorem 1.5 beginnen wir mit der Abschätzung, welche die Definition von γ_E motiviert.

Proposition 1.6. *Es seien V, T, χ, c wie in Theorem 1.5 gegeben. Dann gilt für jedes $\psi \in C_c^3(\mathbb{R}^N)$ und $u \in D(T)$ mit $(-\Delta+V)u = f$ und $(-\Delta+V)f = (-\Delta+V)^2u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ die folgende Abschätzung:*

$$\Re\left(\int_{\mathbb{R}^N} ((-\Delta+V)f)\psi^2\overline{u}\, dx + \left(6 + \frac{4\theta}{1-\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^N} f|\nabla\psi|^2\overline{u}\, dx\right) \ge \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\psi(x)|u|^2\, dx.$$

Dabei ist η_ψ kompakt getragen und gegeben durch

$$\eta_\psi = \psi^2 c(x) + |\Delta\psi|^2 - 2\nabla\Delta\psi\cdot\nabla\psi + \frac{4}{1-\theta}|\nabla\psi|^2(V_+ - C(\theta)) - \frac{4\theta}{1-\theta}|\nabla|\nabla\psi||^2 - 4|\psi_{xx}|_2^2, \tag{19}$$

Dabei ist ψ_{xx} die Hessematrix von ψ und $|\cdot|_2$ ist die euklidische Norm (hier in $\mathbb{R}^{N\times N}$). Die Konstante $C(\theta)$ entstammt der Voraussetzung **(V1)** an den Negativteil des Potentials.

Beweis. Testet man die Gleichung $(-\Delta+V)u = f$ mit $\overline{(-\Delta+V)\phi}$ für $\phi \in D(T)$, so erhält man

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta+V)u\cdot\overline{(-\Delta+V)\phi}\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} ((-\Delta+V)f)\overline{\phi}\, dx \qquad (\phi \in D(T)). \tag{20}$$

Für $\psi \in C_c^3(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ ist $\psi^2 u \in D(T)$. So nimmt die Gleichung für ein solches Element des Definitionsbereichs die folgende Form an:

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta+V)u\cdot(-\Delta+V)\psi^2\overline{u}\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} ((-\Delta+V)f)\psi^2\overline{u}\, dx.$$

Die linke Seite wird nun umgeschrieben. Es gilt mittels Lemma 1.2:

$$
\begin{aligned}
(-\Delta(\psi^2\overline{u}) + V\,\psi^2\overline{u}) &= -\Delta\psi\cdot\psi\overline{u} - 2\nabla\psi\cdot\nabla(\psi\overline{u}) + \psi(-\Delta+V)(\psi\overline{u}),\\
\psi\cdot(-\Delta u + Vu) &= (-\Delta+V)(\psi u) + \Delta\psi\cdot u + 2\nabla\psi\cdot\nabla u.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
I :=&(-\Delta u + Vu)\cdot(-\Delta+V)(\psi^2\overline{u}) - |(-\Delta+V)(\psi u)|^2 \qquad (21)\\
=&(-\Delta u + Vu)\cdot(-\Delta\psi\cdot\psi\overline{u} - 2\nabla\psi\cdot\nabla(\psi\overline{u})) + (-\Delta u + Vu)\psi\cdot(-\Delta+V)(\psi\overline{u})\\
&-(-\Delta+V)(\psi u)\cdot(-\Delta\psi\cdot\overline{u} - \nabla\psi\cdot\nabla\overline{u} + \psi(-\Delta+V)\overline{u}\\
=&(-\Delta u + Vu)\cdot(-\Delta\psi\cdot\psi\overline{u} - 2\nabla\psi\cdot\nabla(\psi\overline{u}))\\
&+(\Delta\psi\cdot\overline{u} + 2\nabla\psi\cdot\nabla\overline{u})\cdot(-\Delta+V)(\psi u) + 2i\Im\left(\psi(-\Delta+V)u\cdot(-\Delta+V)(\psi\overline{u})\right)\\
=&(-\Delta u + Vu)\cdot\psi(-\Delta\psi\cdot\overline{u} - 2\nabla\psi\cdot\nabla\overline{u}) - (-\Delta u + Vu)\cdot 2|\nabla\psi|^2\overline{u}\\
&+(\Delta\psi\cdot\overline{u} + 2\nabla\psi\cdot\nabla\overline{u})\cdot(-\Delta\psi\cdot u - 2\nabla\psi\cdot\nabla u)\\
&+(\Delta\psi\cdot\overline{u} + 2\nabla\psi\cdot\nabla\overline{u})(-\Delta u + Vu)\cdot\psi + 2i\Im\left(\psi(-\Delta+V)u\cdot(-\Delta+V)(\psi\overline{u})\right)\\
=&-2(-\Delta+V)u\cdot|\nabla\psi|^2\overline{u} - |\Delta\psi|^2|u|^2 - 4\Re\left(\Delta\psi\cdot u\cdot\nabla\psi\cdot\nabla\overline{u}\right) - 4|\nabla\psi\cdot\nabla u|^2 \qquad (22)\\
&+2i\Im\left(\psi(-\Delta+V)u\cdot(-\Delta+V)(\psi\overline{u})\right).
\end{aligned}
$$

Die Gleichheit (22) folgt, da sich der erste und der letzte Summand der vorhergehenden Zeile zu null addieren. Integriert man nun über $\mathbb{R}^N$ kann man den Term mittels partieller Integration weiter umformen. Man verwendet hierzu die Identität

$$
\Re\left(\int_{\mathbb{R}^N}\Delta\psi\cdot u\cdot\nabla\psi\cdot\nabla\overline{u}\,dx\right) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\Delta\psi\cdot\nabla\psi\cdot\nabla(|u|^2)\,dx = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2\nabla(\Delta\psi\cdot\nabla\psi)\,dx. \qquad (23)
$$

Den ∇u quadratisch beinhaltenden Term kann man abschätzen. Der zweite Teil von Lemma 1.2 mit $\eta = |\nabla\psi|^2$ liefert hierbei das Folgende:

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u\cdot\nabla\psi|^2\,dx \leq& \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\psi|^2\cdot|\nabla u|^2\,dx\\
=& -\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\psi|^2\cdot V|u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\Delta(|\nabla\psi|^2)|u|^2\,dx + \Re\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\psi|^2 u\cdot(-\Delta+V)\overline{u}\,dx.\right)
\end{aligned}
$$

Nun teilen wir das Potential gemäß $V = V_+ - V_-$ auf und verwenden die Ungleichung (2) aus der Voraussetzung 1. Dann gilt:

$$
-\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\psi|^2\cdot V|u|^2\,dx \leq -\int_{\mathbb{R}^N}V_+||\nabla\psi|u|^2\,dx + \theta\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(|\nabla\psi|u)|^2\,dx + C(\theta)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\psi|^2|u|^2\,dx.
$$

Das zweite Integral der rechten Seite schreiben wir wie folgt um:

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla(|\nabla\psi|u)|^2\,dx =& \int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla|\nabla\psi|\cdot u + |\nabla\psi|\cdot\nabla u\right|^2 dx\\
=& \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla|\nabla\psi||^2|u|^2\,dx + 2\Re\left(\int_{\mathbb{R}^N}u\nabla\overline{u}\cdot\nabla|\nabla\psi|\cdot|\nabla\psi|\,dx\right) + \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\psi|^2|\nabla u|^2\,dx\\
=& \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla|\nabla\psi||^2|u|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\psi|^2|\nabla u|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\Delta(|\nabla\psi|^2)|u|^2\,dx.
\end{aligned}
$$

Fügen wir dies zusammen, so erhält man:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u \cdot \nabla\psi|^2\, dx = -\int_{\mathbb{R}^N} V_+(|\nabla\psi| u)^2\, dx + \theta \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla|\nabla\psi||^2 |u|^2\, dx + \theta \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\psi|^2 |\nabla u|^2\, dx$$
$$+ \frac{1-\theta}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \Delta(|\nabla\psi|^2)|u|^2\, dx + \Re\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\psi|^2 u \cdot (-\Delta + V)\overline{u}\, dx\right).$$

Das heißt, nach Umstellen erhält man:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u \cdot \nabla\psi|^2\, dx \le{} & -\frac{1}{1-\theta}\int_{\mathbb{R}^N} V_+|\nabla\psi|^2|u|^2\, dx + \frac{\theta}{1-\theta}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla|\nabla\psi||^2|u|^2\, dx \\ & + \frac{C(\theta)}{1-\theta}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\psi|^2|u|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \Delta(|\nabla\psi|^2)|u|^2\, dx \\ & + \frac{1}{1-\theta}\Re\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\psi|^2 u(-\Delta + V)\overline{u}\, dx\right).\end{aligned} \tag{24}$$

Flechtet man dies in die Abschätzung (20) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} & \Re\left(\int_{\mathbb{R}^N} ((-\Delta + V)f)\psi^2\overline{u}\, dx\right) \\ ={} & \Re\left(\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta + V)u \cdot (-\Delta + V)\psi^2\overline{u}\, dx\right) \\ \overset{(21)}{=}{} & \Re\left(\int_{\mathbb{R}^N} I\, dx\right) + \int_{\mathbb{R}^N} |-\Delta(\psi u) + V\psi u|^2\, dx \\ ={} & \Re\left(\int_{\mathbb{R}^N} I\, dx\right) + \int_{\mathbb{R}^N} |-\Delta(\psi u) + V\psi u|^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} \chi|\psi u|^2 \\ \overset{(18)+(22)}{\ge}{} & \int_{\mathbb{R}^N} \Re\left(-2(-\Delta + V)u \cdot |\nabla\psi|^2\overline{u} - |\Delta\psi|^2|u|^2 - 4\Delta\psi \cdot u \cdot \nabla\psi \cdot \nabla\overline{u} - 4|\nabla\psi \cdot \nabla u|^2 + c(x)\psi^2|u|^2\right)\, dx \\ \overset{(24)}{=}{} & \int_{\mathbb{R}^N} \Re\left(-2(-\Delta + V)u \cdot |\nabla\psi|^2\overline{u} - |\Delta\psi|^2|u|^2 - 4\Delta\psi \cdot u \cdot \nabla\psi \cdot \nabla\overline{u} + c(x)\psi^2|u|^2\right)\, dx \\ & + \frac{4}{1-\theta}\int_{\mathbb{R}^N} V_+|\nabla\psi|^2|u|^2\, dx - \frac{4\theta}{1-\theta}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla|\nabla\psi||^2|u|^2\, dx \\ & - \frac{4C(\theta)}{1-\theta}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\psi|^2|u|^2\, dx - 2\int_{\mathbb{R}^N} \Delta(|\nabla\psi|^2)|u|^2\, dx - \frac{4}{1-\theta}\Re\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\psi|^2 u\,\overline{f}\, dx\right) \\ \overset{(23)}{=}{} & \int_{\mathbb{R}^N} \Re\left(-2(-\Delta + V)u \cdot |\nabla\psi|^2\overline{u} - |\Delta\psi|^2|u|^2 + 2\nabla(\Delta\psi \cdot \nabla\psi)\,|u|^2 + c(x)\psi^2|u|^2\right)\, dx \\ & + \frac{4}{1-\theta}\int_{\mathbb{R}^N} V_+|\nabla\psi|^2|u|^2\, dx - \frac{4\theta}{1-\theta}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla|\nabla\psi||^2|u|^2\, dx \\ & - \frac{4C(\theta)}{1-\theta}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\psi|^2|u|^2\, dx - 2\int_{\mathbb{R}^N} \Delta(|\nabla\psi|^2)|u|^2\, dx - \frac{4}{1-\theta}\Re\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\psi|^2 u\,\overline{f}\, dx\right).\end{aligned}$$

Darüber hinaus verwendet man die Identität:

$$\begin{aligned}\Delta(|\nabla\psi|^2) &= \sum_{k,l=1}^{N} \partial_k^2((\partial_l\psi)^2) = \sum_{k,l=1}^{N} \partial_k(2\partial_l\psi \cdot \partial_k\partial_l\psi) \\ &= \sum_{k,l=1}^{N} 2(\partial_k\partial_l\psi)^2 + 2\partial_l\psi \cdot \partial_l\partial_k^2\psi = 2|\psi_{xx}|^2 + 2\nabla\psi \cdot \nabla\Delta\psi.\end{aligned} \tag{25}$$

Damit erhält man schließlich:

$$
\begin{aligned}
&\Re\left(\int_{\mathbb{R}^N}((-\Delta+V)f)\psi^2\overline{u}\,dx+\left(2+4\frac{1}{1-\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^N}f|\nabla\psi|^2\overline{u}\,dx\right)\\
&\geq\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\psi^2c(x)+|\Delta\psi|^2+2\nabla\Delta\psi\cdot\nabla\psi+\frac{4}{1-\theta}|\nabla\psi|^2(V_+-C(\theta))\\
&\quad-\frac{4\theta}{1-\theta}|\nabla|\nabla\psi||^2-2\Delta(|\nabla\psi|^2)\Big)|u|^2\,dx\\
&\overset{(25)}{=}\int_{\mathbb{R}^N}\Big(\psi^2c(x)+|\Delta\psi|^2-2\nabla\Delta\psi\cdot\nabla\psi+\frac{4}{1-\theta}|\nabla\psi|^2(V_+-C(\theta))\\
&\quad-\frac{4\theta}{1-\theta}|\nabla|\nabla\psi||^2-4|\psi_{xx}|_2^2)\Big)|u|^2\,dx\\
&=\int_{\mathbb{R}^N}\eta_\psi|u|^2\,dx.
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Das war zu zeigen. □

Auf dem Weg zu einem Beweis von Theorem 1.5 soll nun die Wahl von $\psi\in C_c^3(\mathbb{R}^N)$ konkretisiert werden. Für $m\in\mathbb{N}$ sei $h_m\in C^2(\mathbb{R}^N)$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

$$h_m(x)=\begin{cases}\sqrt{E(1+|x|^2)} & |x|\leq m,\\ \text{konstant} & |x|\geq m+1.\end{cases}$$

Ferner sei $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ eine nicht-negative Funktion mit supp $\phi\subseteq B_2(0)$ und $\phi\equiv 1$ auf $B_1(0)$. Sei weiter zu $R>0$ die Funktion ϕ_R definiert durch $\phi_R(x):=\phi(R^{-1}x)$. Daraus setzt sich zusammen:

$$\psi_{m,R}:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R},\ \psi_{m,R}(x):=\phi_R(x)e^{h_m(x)}.$$

Für die anschließende Fehlertermabschätzung brauchen wir die folgenden partiellen Ableitungen von $\psi_{m,R}$ und h_m:

Proposition 1.7. *Für $\psi_{m,R}$ und h_m gelten die folgenden Ableitungsformeln:*

$$
\begin{aligned}
\nabla\psi_{m,R}&=(\nabla\phi_R+\phi_R\nabla h_m)\,e^{h_m}=\left(\nabla h_m+O(R^{-1})\right)\psi_{m,R},\\
\Delta\psi_{m,R}&=\left(\Delta\phi_R+\nabla\phi_R\cdot\nabla h_m+\phi_R(|\nabla h_m|^2+\Delta h_m)\right)e^{h_m}\\
&=\left(|\nabla h_m|^2+\Delta h_m+O(R^{-1})\right)\psi_{m,R},\\
\nabla(\Delta\psi_{m,R})&=\Big(\nabla(\Delta\phi_R)+(\phi_R)_{xx}\nabla h_m+(h_m)_{xx}\nabla\phi_R+\nabla\phi_R|\nabla_m|^2+2\phi_R(h_m)_{xx}\nabla h_m\\
&\quad+\nabla\phi_R\Delta h_m+\phi_R\nabla\Delta h_m+(\Delta\phi_R+\phi_R|\nabla h_m|^2+\phi_R\Delta h_m)\nabla h_m\Big)e^{h_m}\\
&=\left(2(h_m)_{xx}\nabla h_m+\nabla\Delta h_m+|\nabla h_m|^2\nabla h_m+\Delta h_m\nabla h_m+O(R^{-1})\right)\psi_{m,R},\\
\nabla(\Delta\psi_{m,R})\cdot\nabla\psi_{m,R}&=\big(2\nabla h_m^T(h_m)_{xx}\nabla h_m+\nabla h_m^T\nabla\Delta h_m+|\nabla h_m|^4+\Delta h_m|\nabla h_m|^2\\
&\quad+O(R^{-1})\big)\,\psi_{m,R}^2,\\
|\nabla|\nabla\psi_{m,r}||&=\left|\frac{((\psi_{m,r})_{xx})\cdot\nabla\psi_{m,r}}{|\nabla\psi_{m,r}|}\right|\\
&=\frac{1}{|\nabla\psi_{m,r}|}\Big|(\phi_R)_{xx}+\nabla\phi_R\cdot\nabla^T h_m+\phi_R\cdot(h_{xx})\\
&\quad+\nabla h_m\cdot\nabla^T\phi_R+\phi_R\nabla h_m\cdot\nabla^T h_m\Big|e^{2h_m}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\phi_R \cdot |\nabla h_m| + O(R^{-1})} \left(\left| (h_m)_{xx} \cdot \nabla h_m + |\nabla h_m|^2 \nabla h_m \right| + O(R^{-1}) \right) \phi_R^2 \cdot e^{h_m}, \\
|(\psi_{m,R})_{xx}|_2^2 &= \sum_{k,l=1}^{N} \left(\partial_k (\partial_l \phi_R + \phi_R \partial_l h_m) e^{h_m} \right)^2 \\
&= \sum_{k,l=1}^{N} \left(\partial_k \partial_l \phi_R + \partial_k \phi_r \partial_l h_m + \phi_R \partial_l \partial_k h_m + \partial_l \phi_R \partial_k h_m + \phi_R \partial_l h_m \partial_k h_m \right)^2 e^{2h_m} \\
&= \left(\sum_{k,l=1}^{N} \left(\partial_l \partial_k h_m + \partial_l h_m \partial_k h_m \right)^2 + O(R^{-1}) \right) \phi_R^2 e^{2h_m} \\
&= \left(|(h_m)_{xx}|_2^2 + 2\nabla^T h_m (h_m)_{xx} \nabla h_m + |\nabla h_m|^4 + O(R^{-1}) \right) \psi_{m,R}.
\end{aligned}
$$

Hierbei bedeutet $O(R^{-1})$, dass es für festes m eine Funktion $\varphi_m \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit Träger $\operatorname{supp} \varphi_m \subseteq B_2(0) \setminus B_1(0)$ *gibt, sodass $|O(R^{-1})|R \leq \varphi_m(\cdot/R)$ für alle $R > 0$ gilt. Für h_m gelten die folgenden Formeln:*

$$
\begin{aligned}
|\nabla h_m(x)|^2 &= E \frac{|x|^2}{1+|x|^2} = E + O(|x|^{-1}), \\
|\partial_k \partial_l h_m(x)| &= \sqrt{E} \left(\frac{\delta_{kl}}{\sqrt{1+|x|^2}} - \frac{x_k x_l}{(1+|x|^2)^{3/2}} \right) = O(|x|^{-1}), \\
\nabla h_m(x)^T (h_{xx})(x) \nabla h_m(x) &= \sqrt{E}^3 \frac{|x|^2}{\sqrt{1+|x|^2}^5} = O(|x|^{-1}), \\
\nabla^T \Delta h_m(x) \cdot \nabla h_m(x) &= E \left(\frac{(1-N)|x|^2}{(1+|x|^2)^2} - \frac{3}{(1+|x|^2)^3} \right) = O(|x|^{-1}).
\end{aligned}
\tag{27}
$$

In der letzten Formel für die Ableitungen von $\psi_{m,R}$ geben wir zusätzlich eine etwas gröbere Abschätzung. Es gilt

$$
|\nabla|\nabla \psi_{m,r}|| \leq |(\psi_{m,R})_{xx}|_2. \tag{28}
$$

Diese ist hinreichend für uns, da die beiden Seiten für die konkrete Wahl der Testfunktion $\psi_{m,R}$ asymptotisch gleich sind für $|x| \to \infty$.

Im Term $O(R^{-1})$ werden alle Ableitungen von ϕ_R zusammengefasst. Insbesondere erhält man dann aus der Voraussetzung: $\int_{\mathbb{R}^N} O(R_j^{-1})|u|^2 \, dx \to 0$ für eine Folge $\{R_j\}_{j=1}^\infty$ mit $R_j \to \infty$, denn φ_m ist beschränkt.

Proposition 1.8. *Es seien $\psi_{m,R}$ und $\eta_{\psi_{m,R}}$ definiert wie oben. Dann ist $\eta_{\psi_{m,R}}$ wie folgt gleichmäßig in m und R beschränkt bezüglich $x \in \mathbb{R}^N$: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein r_0, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^N$ mit $|x| \geq r_0$ und alle $m \in \mathbb{N}$, $R > 0$ gilt:*

$$
\eta_{\psi_{m,R}} \geq (c(x) - \gamma_E(x) - \varepsilon) \cdot \psi_{m,R}^2.
$$

Die Funktion γ_E ist in Theorem 1.5 definiert durch

$$
\gamma_E(x) := \left(\frac{3+5\theta}{1-\theta} \right) E^2 - \left(\frac{4}{1-\theta} (V_+(x) - C(\theta)) + 1 \right) E.
$$

Beweis. Wir ernten die aus der vorangegangenen Proposition bewiesenen Ableitungsformeln und berechnen ausgehend von der Definition von η_ψ in (19):

$$
\eta_{\psi_{m,R}}(x) = \psi_{m,R}^2 c(x) + |\Delta \psi_{m,R}|^2 - 2\nabla \Delta \psi_{m,R} \cdot \nabla \psi_{m,R} + \frac{4}{1-\theta} (V_+(x) - C(\theta)) |\nabla \psi_{m,R}|^2
$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{4\theta}{1-\theta}|\nabla|\nabla\psi_{m,R}||^2 - 4|(\psi_{m,R})_{xx}|_2^2 \\
&\overset{(28)}{\geq} \psi_{m,R}^2 c(x) + |\Delta\psi_{m,R}|^2 - 2\nabla\Delta\psi_{m,R}\cdot\nabla\psi_{m,R} + \frac{4}{1-\theta}(V_+(x) - C(\theta))|\nabla\psi_{m,R}|^2 \\
&\quad - 4\frac{1+\theta}{1-\theta}|(\psi_{m,R})_{xx}|_2^2 \\
&\overset{1.7}{=} \psi_{m,R}^2\Big(c(x) + |\nabla h_m|^2 + \Delta h_m - 2\nabla^T h_m (h_m)_{xx}\nabla h_m - \nabla h_m^T\cdot\nabla\Delta h_m - |\nabla h_m|^4 \\
&\quad - \Delta h_m|\nabla h_m|^2 + \frac{4}{1-\theta}(V_+(x) - C(\theta))\cdot|\nabla h_m|^2 - 4\frac{1+\theta}{1-\theta}\Big(|(h_m)_{xx}|_2^2 \\
&\quad + 2\nabla h_m^T (h_m)_{xx}\nabla_m + |\nabla h_m|^4\Big) + O(R^{-1})\Big) \\
&= \psi_{m,R}^2\Big(c(x) + \left(\frac{4}{1-\theta}(V_+(x) - C(\theta)) + 1\right)|\nabla h_m|^2 + \Delta h_m \\
&\quad - \left(2 + 4\frac{1+\theta}{1-\theta}\right)\nabla^T h_m (h_m)_{xx}\nabla h_m \\
&\quad - \nabla h_m^T\cdot\nabla\Delta h_m - \Bigg(\underbrace{1 + 4\frac{1+\theta}{1-\theta}}_{=\frac{5+3\theta}{1-\theta}}\Bigg)|\nabla h_m|^4 - \Delta h_m|\nabla h_m|^2 \\
&\quad - 4\frac{1+\theta}{1-\theta}(|(h_m)_{xx}|_2^2 + O(R^{-1})\Big).
\end{aligned}
$$

Setzt man die Asymptotiken für die Ableitungen von h_m aus Proposition 1.7 ein, so liefern lediglich die $|\nabla h_m|$-Terme einen Beitrag, welcher nicht für $|x| \to \infty$ verschwindet. Somit bleibt:

$$
\eta_{\psi_{m,R}}(x) \geq \psi_{m,R}^2\Big(c(x) + \left(\frac{4}{1-\theta}(V_+(x) - C(\theta)) + 1\right)E - \frac{5+3\theta}{1-\theta}E^2 + O(|x|^{-1}) + \varphi(x/R)\cdot R^{-1}\Big).
$$

Wähle nun $R > 2\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}/\varepsilon$. Ferner gilt für den Träger supp $(\varphi(\cdot/R)) \subseteq B_{2R}(0)\setminus B_R(0)$, woraus folgt, dass für alle $R > 0$ gilt

$$
\left|\varphi\left(\frac{x}{R}\right)R^{-1}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad (|x| \geq 2R).
$$

Entsprechend wählen wir $r > 0$ derart, dass $O(|x|^{-1}) \leq \varepsilon/2$ gilt für alle $|x| > r$. Dann folgt die Behauptung für alle $x \geq r_0 := \max\{R, r\}$. □

Beweis von Theorem 1.5. Nach Voraussetzung an E gibt es ein $\tilde{R} > 0$ derart, dass (für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ und) für alle $x \in \mathbb{R}^N$ mit $|x| \geq \tilde{R}$ gilt:

$$
c(x) - \gamma_E(x) - 2\varepsilon > 0.
$$

Im Hinblick auf Proposition 1.8 kann somit die Gewichtsfunktion $\eta_{\psi_{m,R}}$ nach unten durch ein positives Vielfaches von $\psi_{m,R}$ beschränkt werden. Es gibt zu diesem $\varepsilon > 0$ ein $r_0 > 0$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^N$ mit $|x| \geq \max\{r_0, \tilde{R}\}$ gilt:

$$
\eta_{\psi_{m,R}} \geq \varepsilon\psi_{m,R}^2. \tag{29}
$$

Ferner gilt für alle $R > 0$:

$$
\int_{B_R(0)} e^{2\sqrt{E(1+|x|^2)}}|u|^2\,dx \leq e^{2\sqrt{E(1+R^2)}}\int_{B_R(0)}|u|^2\,dx < \infty,
$$

da $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ vorausgesetzt ist. Insofern kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, dass supp $(u) \cap B_{\tilde{R}}(0) = \emptyset$ gilt. Ersetze gegebenenfalls u durch die ausgeschnittene Funktion $(1 - \phi_{\tilde{R}})u$; die geforderten Eigenschaften aus der Voraussetzung bleiben erhalten.

Nun betrachten wir die in Proposition 1.6 gewonnene obere Schranke für $\int_{\mathbb{R}^N} \eta_{\psi_{m,R}} u^2\,dx$ und schätzen diese weiter nach oben ab. Die Summanden werden zu

$$\begin{aligned}\Re\left(\int_{\mathbb{R}^N} ((-\Delta+V)f)\psi_{m,R}^2\overline{u}\,dx\right) &\overset{(15)}{\leq} \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta+V)f|^2\frac{\psi_{m,R}^2}{\varepsilon}\,dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} \varepsilon\psi_{m,R}^2|u|^2\,dx \\ &\overset{(29)}{\leq} \int_{\mathbb{R}^N} |(-\Delta+V)f|^2\frac{\psi_{m,R}^2}{\varepsilon}\,dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} \eta_{\psi_{m,R}}|u|^2\,dx,\end{aligned} \tag{30}$$

sowie

$$\begin{aligned}\Re\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\psi_{m,R}|^2 f\cdot\overline{u}\,dx\right) &\overset{(15)}{\leq} \frac{1}{4\delta}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\psi_{m,R}|^2|f|^2\,dx + \delta\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\psi_{m,R}|^2|u|^2\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\psi_{m,R}|^2\left(\frac{1}{4\delta}|f|^2 + \delta|u|^2\right)dx \\ &\overset{1.7}{=} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi_R + \phi_R\nabla h_m|^2\left(\frac{1}{4\delta}|f|^2 + \delta|u|^2\right)e^{2h_m(x)}\,dx \\ &\leq 2\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi_R|^2(\frac{1}{4\delta}|f|^2 + \delta|u|^2)e^{2h_m(x)}\,dx \\ &\quad + 2\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla h_m|^2\cdot\psi_{m,R}^2(\frac{1}{4\delta}|f|^2 + \delta|u|^2)\,dx, \\ &\overset{(29)}{\leq} 2\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi_R|^2(\frac{1}{4\delta}|f|^2 + \delta|u|^2)e^{2h_m(x)}\,dx \\ &\quad + \frac{2}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla h_m|^2\cdot\eta_{\psi_{m,R}}(\frac{1}{4\delta}|f|^2 + \delta|u|^2)\,dx,\end{aligned}$$

wobei das erste Integral für festes $m \in \mathbb{N}$ und $R \to \infty$ gegen 0 konvergiert (nach Voraussetzung) und der zweite Summand abgeschätzt werden kann gemäß:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla h_m|^2\eta_{\psi_{m,R}}(\frac{1}{4\delta}|f|^2 + \delta|u|^2)\,dx \overset{1.7}{\leq} E\,\frac{1}{4\delta}\int_{\mathbb{R}^N} |f|^2\eta_{\psi_{m,R}}\,dx + E\,\delta\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2\eta_{\psi_{m,R}}\,dx.$$

Dies wird nun in die Schranke aus Proposition 1.6 eingesetzt. Man erhält:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \eta_{\psi_{m,R}}|u|^2\,dx \leq& \Re\left(\int_{\mathbb{R}^N} ((-\Delta+V)f)\psi_{m,R}^2\overline{u}\,dx + \left(6 + \frac{4\theta}{1-\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^N} f|\nabla\psi_{m,R}|^2\overline{u}\,dx\right) \\ \leq& \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^N} \psi_{m,R}^2|(-\Delta+V)f|^2\,dx + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2\eta_{\psi_{m,R}}\,dx \\ &+ 2\left(6 + \frac{4\theta}{1-\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi_R|^2(\frac{1}{4\delta}|f|^2 + \delta|u|^2)e^{2h_m(x)}\,dx \\ &+ \left(6 + \frac{4\theta}{1-\theta}\right)\frac{2}{\varepsilon}\left(E\,\frac{1}{4\delta}\int_{\mathbb{R}^N} |f|^2\eta_{\psi_{m,R}}\,dx + E\,\delta\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2\eta_{\psi_{m,R}}\,dx\right) \\ \leq& \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^N} \psi_{m,R}^2|(-\Delta+V)f|^2\,dx \\ &+ 2\left(6 + \frac{4\theta}{1-\theta}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi_R|^2(\frac{1}{4\delta}|f|^2 + \delta|u|^2)e^{2h_m(x)}\,dx \\ &+ \left(6 + \frac{4\theta}{1-\theta}\right)\frac{2}{\varepsilon}\,\frac{E}{4\delta}\int_{\mathbb{R}^N} |f|^2\eta_{\psi_{m,R}}\,dx\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{1}{4}+\left(6+\frac{4\theta}{1-\theta}\right)\frac{2E\delta}{\varepsilon}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|u|^2\eta_{\psi_{m,R}}\,dx$$

Nun wählt man $\delta = \frac{\varepsilon}{8\left(6+\frac{4\theta}{1-\theta}\right)E}$, so wird der Koeffizient vor dem letzten Integral zu $\frac{1}{2}$. Dies wird auf beiden Seiten der Ungleichung subtrahiert und man erhält:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N}\eta_{\psi_{m,R}}|u|^2\,dx\\
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N}\psi_{m,R}^2|(-\Delta+V)f|^2\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\phi_R|^2(|f|^2+|u|^2)e^{h_m}\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}|f|^2\eta_{\psi_{m,R}}\,dx\right)\\
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N}|(-\Delta+V)f|^2e^{2h_m}\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\phi_R|^2(|f|^2+|u|^2)e^{h_m}\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}|f|^2e^{2h_m}\,dx\right).
\end{aligned}\tag{31}$$

Die Summanden der rechten Seite sind bis auf den $\nabla\phi_R$-Term unabhängig von R. Letzterer konvergiert nach Voraussetzung für jedes feste $m\in\mathbb{N}$ gegen 0 für $R\to\infty$. Die linke Seite wird zunächst mittels Proposition 1.8 nach unten durch $\varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}\psi_{m,R}^2|u|^2\,dx$ abgeschätzt und anschließend der untere Limes dieses Integrals gemäß Fatou durch das Integral über den punktweise unteren Limes des Integranden abgeschätzt. Somit erhält man die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}u^2e^{2h_m}\,dx &\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N}((-\Delta+V)f)^2e^{2h_m}\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}f^2e^{2h_m}\,dx\right)\\
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N}((-\Delta+V)f)^2e^{2\sqrt{E(1+|x|^2)}}\,dx+\int_{\mathbb{R}^N}f^2e^{2\sqrt{E(1+|x|^2)}}\,dx\right).
\end{aligned}\tag{32}$$

Anschließend wird noch einmal das Lemma von Fatou bemüht, diesmal für den unteren Limes für $m\to\infty$, und man erhält das Gewünschte. □

Wir schließen einer Reihe von Bemerkungen an.

Bemerkung 1.9. *a) Die Abschätzungen im Beweis bleiben auch für $u\in H^2_{loc}(\mathbb{R}^N)\cap W^{1,4}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ richtig, sofern man die Abschätzungen vorangegangenen Propositionen verallgemeinert hat. Ist $u\in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ vorausgesetzt, so greift Voraussetzung* (3)*, um in* (31) *einzusehen, dass für jedes $m\in\mathbb{N}$ gilt:*

$$\liminf_{R\to\infty}R^{-1}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\phi_R|^2|u|^2e^{h_m}\,dx<\infty.$$

b) Bedingung (2) wirkt zunächst sehr restriktiv. Wir wenden später das Theorem auf abgeschnittene Eigenfunktionen an, was ein kompakt getragenes f liefert. Auch das Bild von f unter dem Differentialausdruck $-\Delta+V$ hat dann kompakten Träger. Des Weiteren wird daran deutlich, dass man aus den Trägereigenschaften von f nicht auf die entsprechenden Trägereigenschaften des Urbildes u schließen kann. Darüber hinaus ist das Lemma auch anwendbar, um Lösungen der inhomogenen Gleichung zu untersuchen.

c) Die Bedingung $(-\Delta+V)f\in L^2(\mathbb{R}^N)$ ist nicht trivial, da der Definitionsbereich von T^2 nicht notwendigerweise stabil unter der Multiplikation mit Abschneidefunktionen ist. Ein entsprechendes Beispiel wird später konstruiert. Ist allerdings ein stärkeres exponentielles Abklingverhalten an f, nämlich $e^{2\sqrt{E(1+|x|^2)}}f\in L^2(\mathbb{R}^N)$, sowie $u\in H^1(\mathbb{R}^N)$ vorausgesetzt, so kann auf diese Bedingung verzichtet werden. In diesem Fall schätzt man statt Ungleichung (30) *wie folgt ab:*

$$\Re\left(\int_{\mathbb{R}^N}((-\Delta+V)f)\psi_{m,R}^2\overline{u}\,dx\right)$$

$$\leq \Re\left(\int_{\mathbb{R}^N} -\Delta\psi_{m,R}^2 u \cdot f\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} -\nabla\psi_{m,R}^2 \cdot \nabla u\, f\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} \psi_{m,R}^2 \cdot f^2\,dx\right)$$
$$\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N} \psi_{m,R}^4 |f|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right) + \int_{\mathbb{R}^N} \psi_{m,R}^2 \cdot |f|^2\,dx$$

wobei die rechte Seite entsprechend unabhängig von m, R beschränkt werden kann.

Für das zweite Resultat, Theorem 1.5 unter der Voraussetzung b), $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,4}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, muss die Funktion zunächst geeignet approximiert werden. Die Gleichung (20) ist für Funktionen aus "loc"-Räumen nur unter der Zusatzbedingung, beschränkt zu sein, sinnvoll. In der nächsten Proposition werden wir die Approximation geben und die benötigten Konvergenzen werden bewiesen.

Proposition 1.10. *Zu $\varepsilon > 0$ definiere $u_\varepsilon := u/(1+\varepsilon u^2)$. Dann gilt:*

a) Falls $u \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ gilt, so gilt für alle $\varepsilon > 0$: $u_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap H^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ und $u_\varepsilon \to u$ in $H^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

b) Falls $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,4}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, so gilt $u_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap H^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Ferner gilt $u_\varepsilon \to u$ in $H^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ und $(-\Delta + V)u_\varepsilon \to (-\Delta + V)u$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$ für $\varepsilon \to 0$, falls zusätzlich $(-\Delta + V)u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ gilt.

Des Weiteren hat man in beiden Fällen $\operatorname{supp} u = \operatorname{supp} u_\varepsilon$.

Für den Beweis der Proposition wird eine Kettenregel und eine Produktregel für schwache Ableitungen benötigt. Die hier verwendete Version der Kettenregel ist eher Standard, wohingegen wir das benötigte Resultat für die Produktregel der Vollständigkeit halber beweisen wollen. Es werden Approximationstechniken durch Standard-Mollifier-Funktionen vorausgesetzt. Genauer wird benötigt, dass für $p \in [1, \infty]$ eine Funktion $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ durch eine Folge $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ in $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ approximiert werden kann, sodass $u_n \to u$ in $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ gilt für $n \to \infty$. Darüber hinaus ist $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ genau dann schwach nach x_k differenzierbar mit schwacher Ableitung $w \in L^{\tilde{p}}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, wenn es eine Folge glatter Funktionen $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ aus $(L^p_{loc} \cap L^{\tilde{p}}_{loc})(\mathbb{R}^N)$ gibt, sodass gilt: $u_n \to u$ in $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ und $\partial_k u_n \to w$ in $L^{\tilde{p}}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ $(n \to \infty)$ (vgl. [**HMMS13**, Lemma D.6]). Damit erhält man die folgenden Differentiationsregeln (vgl. [**HMMS13**, Lemma D.7 und D.8]):

Lemma 1.11. *Es sei $k \in \{1, \dots, N\}$, dann gilt:*

a) Für $u \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ und $\alpha \in C^1(\mathbb{R})$ mit $\alpha' \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ gilt: $\alpha \circ u \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ und es gilt: $\partial_k(\alpha \circ u) = (\alpha' \circ u) \cdot \partial_k u$.

b) Es seien $1 \leq p, \tilde{p}, q, \tilde{q} \leq \infty$ und $u \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $v \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$ mit schwachen Ableitungen $\partial_k u \in L^{\tilde{p}}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ und $\partial_k v \in L^{\tilde{q}}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Weiter seien $r, \tilde{r} \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$r^{-1} := p^{-1} + q^{-1},$$

sowie $\tilde{r}^{-1} := \max\{\tilde{p}^{-1} + q^{-1},\, p^{-1} + \tilde{q}^{-1}\}$ und es gelte $r, \tilde{r} \geq 1$. Dann ist $u \cdot v \in L^r_{loc}(\mathbb{R}^N)$ mit Ableitung in $L^{\tilde{r}}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ und es gilt $\partial_k(u \cdot v) = \partial_k u \cdot v + u \cdot \partial_k v$.

Wir beweisen nur Teil b). Teil a) findet sich in der Referenz.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien u, v reellwertig. Zunächst ist nach Hölder-Ungleichung $uv \in L^r(\mathbb{R}^N)$. Weiter existieren nach dem oben genannten Approximationsresultat

Folgen $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ und $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ aus

$$C^\infty(\mathbb{R}^N) \cap (L^p_{loc} \cap L^{\tilde{p}}_{loc})(\mathbb{R}^N) \text{ bzw. } C^\infty(\mathbb{R}^N) \cap (L^q_{loc} \cap L^{\tilde{q}}_{loc})(\mathbb{R}^N),$$

sodass gilt:

$$\begin{aligned} u_m &\to_{L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)} u, \qquad \partial_k u_m \to_{L^{\tilde{p}}_{loc}(\mathbb{R}^N)} \partial_k u \qquad (m \to \infty),\\ v_n &\to_{L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)} v, \qquad \partial_k v_n \to_{L^{\tilde{q}}_{loc}(\mathbb{R}^N)} \partial_k v \qquad (n \to \infty). \end{aligned}$$

Sei $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ beliebig und $V \subset \mathbb{R}^N$ offen und beschränkt mit supp $\phi \subset V$. Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u \cdot v)\partial_k \phi \, dx = \int_V u \underbrace{v\partial_k\phi}_{\in L^q(\mathbb{R}^N)} \, dx = \lim_{m\to\infty} \int_V u_m v \partial_k \phi \, dx.$$

Dies erhält man, da aus der $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$-Konvergenz von u_m auch die schwache $L^p(V)$-Konvergenz folgt und $v\partial_k\phi \in L^q(\mathbb{R}^N)$ als ein Element in $(L^p(V))'$ verstanden werden kann. Weiter hat man für jedes $m \in \mathbb{N}$: $u_m\partial_k\phi \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Wegen der Konvergenz von $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ folgt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (u \cdot v)\partial_k \phi \, dx &= \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int_V u_m v_n \partial_k \phi \, dx = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int_V u_m(\partial_k(v_n\phi) - \phi\partial_k v_n) \, dx \\ &= \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int_V -v_n \underbrace{\phi\partial_k u_m}_{\in L^\infty(\mathbb{R}^N)} - \underbrace{u_m\phi}_{\in L^\infty(\mathbb{R}^N)} \partial_k v_n \, dx \\ &= -\lim_{m\to\infty} \int_V \underbrace{v\phi}_{\in L^q(V)} \partial_k u_m + u_m \underbrace{\phi\partial_k v}_{\in L^{\tilde{q}}(V)} \, dx \\ &= -\int_V (u\partial_k v + v\partial_k u)\phi \, dx. \end{aligned}$$

Damit ist per Definition $u\partial_k v + v\partial_k u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ die schwache Ableitung von uv. Aus der Hölder-Ungleichung folgt dann sogar $\partial_k(uv) \in L^{\tilde{r}}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ □

Beweis von Proposition 1.10. Zunächst gilt für alle $x \in \mathbb{R}^N$ die Ungleichung:

$$|u_\varepsilon(x)| \le \max_{t\ge 0} \left| \frac{t}{1+\varepsilon t^2} \right| = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Damit ist $u_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ für alle $\varepsilon > 0$. Ferner folgt aus der Formel direkt supp $u_\varepsilon =$ supp u. Um zu beweisen, dass $u_\varepsilon \in H^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ gilt, benötigt man die Kettenregel für schwache Ableitungen aus Lemma 1.11. Die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{t}{1+\varepsilon t^2}$ ist glatt und die Ableitung ist (wesentlich) beschränkt. Somit gilt

$$\nabla u_\varepsilon = \frac{1-\varepsilon u^2}{(1+\varepsilon u^2)^2} \nabla u.$$

Da $\nabla u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ gilt und der Vorfaktor in $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ liegt, folgt $\nabla u_\varepsilon \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Die entsprechende Konvergenz wird mittels Satz von Lebesgue bewiesen. Die punktweise Konvergenz von u_ε und ∇u_ε ist direkt abzulesen. Darüber hinaus gilt $\left|\frac{1}{1+\varepsilon u^2}\right| \le 1$ und $\left|\frac{1-\varepsilon u^2}{(1+\varepsilon u^2)^2}\right| \le 1$. Damit ist $|u|^2$ bzw. $|\nabla u|^2$ eine integrierbare Majorante für $|u_\varepsilon|^2$ bzw. $|\nabla u_\varepsilon|^2$ (über jedem Kompaktum) und daher folgt die $L^2(K)$-Konvergenz von u_ε bzw. ∇u_ε für jedes $K \subset\subset \mathbb{R}^N$.

Betrachte nun den Fall $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,4}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Die Abbildung

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \frac{1-\varepsilon t^2}{(1+\varepsilon t^2)^2}$$

ist glatt und gleichmäßig in $\varepsilon > 0$ beschränkt. Selbiges gilt auch für dessen Ableitung

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R},\, t \mapsto 2\varepsilon t \frac{\varepsilon t^2 - 3}{(1+\varepsilon t^2)^3},$$

sofern zusätzlich $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ für ein $\varepsilon_0 > 0$ vorausgesetzt wird. In der Tat erhält man

$$\left| 2\varepsilon t \frac{\varepsilon t^2 - 3}{(1+\varepsilon t^2)^3} \right| \leq \begin{cases} \varepsilon(3+\varepsilon) \leq 4 & (t \leq 1), \\ 2\varepsilon t^2 \left| \frac{\varepsilon t^2 - 3}{(1+\varepsilon t^2)^3} \right| \leq \max\limits_{v \in \mathbb{R}} \left| 2v \frac{v-3}{(1+v)^3} \right| & (t \geq 1). \end{cases}$$

Via Kettenregel aus Proposition 1.11 folgt nun, dass $\frac{1-\varepsilon u^2}{(1+\varepsilon u^2)^2} \in W^{1,4}_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ und es gilt

$$\partial_l \left(\frac{1-\varepsilon u^2}{(1+\varepsilon u^2)^2} \right) = 2\varepsilon u \frac{\varepsilon u^2 - 3}{(1+\varepsilon u^2)^3} \cdot \partial_l u \qquad (l = 1, \ldots, N).$$

Zusätzlich gilt $\partial_k u \in L^4(\mathbb{R}^N)$ und $\partial_l \partial_k u \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Nach der Produktregel 1.11 für schwache Ableitungen mit $p = \infty, \tilde{p} = 4, q = 4, \tilde{q} = 2$ folgt: $\frac{1-\varepsilon u^2}{(1+\varepsilon u^2)^2} \partial_k u \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ für $k = 1, \ldots, N$ und es gilt:

$$\partial_k \partial_l u_\varepsilon = 2\varepsilon u \frac{\varepsilon u^2 - 3}{(1+\varepsilon u^2)^3} \partial_k u \partial_l u + \frac{1-\varepsilon u^2}{(1+\varepsilon u^2)^2} \partial_k \partial_l u \qquad (k, l = 1, \ldots, N).$$

Die Konvergenz der zweiten Ableitungen bezüglich $L^2(\mathbb{R}^N)$ folgen wieder aus dem Satz von Lebesgue. Es gilt für jedes $K \subset\subset \mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned} &\|\partial_k \partial_l (u_\varepsilon - u)\|_{L^2(K)} \\ =&\|2\varepsilon u \frac{\varepsilon u^2 - 3}{(1+\varepsilon u^2)^3} \partial_k u \cdot \partial l u + \frac{1-\varepsilon u^2}{(1+\varepsilon u^2)^2} \partial_k \partial_l u - \partial_k \partial_l u\|_{L^2(K)} \\ \leq&\|2\varepsilon u \frac{\varepsilon u^2 - 3}{(1+\varepsilon u^2)^3} \partial_k u\|_{L^4(K)} \cdot \|\partial_l u\|_{L^4(K)} + \left(\int_K \left| \frac{1-\varepsilon u^2}{(1+\varepsilon u^2)^2} - 1 \right|^2 |\partial_k \partial_l u|^2 \, dx \right)^{1/2} \\ =&\Big(\int_K \Big| 2 \underbrace{\varepsilon u \frac{\varepsilon u^2 - 3}{(1+\varepsilon u^2)^3}}_{\text{gleichmäßig beschränkt in } \varepsilon} \Big|^4 |\partial_k u|^4 \, dx \Big)^{\frac{1}{4}} + \Big(\int_K \underbrace{\left| \frac{-\varepsilon u^2 - 2\varepsilon u^2 - \varepsilon^2 u^4}{(1+\varepsilon u^2)^2} \right|^2}_{\text{gleichmäßig beschränkt in } \varepsilon} |\partial_k \partial_l u|^2 \, dx \Big)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Die gleichmäßige Beschränktheit liefert für beide Integrale eine integrierbare Majorante der Form $C|\partial_k u|^4$ bzw. $C|\partial_k \partial_l u|^2$. Somit stimmen die Grenzwerte der rechten Seite für $\varepsilon \to 0$ mit den Integralen über die punktweisen Grenzwerte der Integrandenfolgen, welcher 0 ist, überein. Folglich konvergieren beide Summanden gegen 0 und die Konvergenz $u_\varepsilon \to u$ für $\varepsilon \to 0$ in $H^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ folgt. Schließlich wollen wir zeigen, dass auch $(-\Delta + V)u_\varepsilon$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$ konvergiert. Es gilt:

$$\begin{aligned} &| -\Delta u_\varepsilon + V u_\varepsilon - (-\Delta + V)u| \\ =&\left| -\varepsilon u \frac{\varepsilon u^2 - 3}{(1+\varepsilon u^2)^3} |\nabla u|^2 - \frac{1-\varepsilon u^2}{(1+\varepsilon u^2)^2} \Delta u + V \frac{u}{1+\varepsilon u^2} - (-\Delta + V)u \right| \\ =&\left| -\varepsilon u \frac{\varepsilon u^2 - 3}{(1+\varepsilon u^2)^3} \right| |\nabla u|^2 + \left| \frac{2\varepsilon u^2}{(1+\varepsilon u^2)^2} \right| |\Delta u| + \left| \frac{1}{1+\varepsilon u^2} - 1 \right| | -\Delta u + V u|. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten sind gleichmäßig in $\varepsilon > 0$ beschränkt. Somit gibt es $C > 0$ derart, dass

$$| -\Delta u_\varepsilon + V u_\varepsilon - (-\Delta + V)u|^2 \leq C(|\nabla u|^4 + |\Delta u|^2 + |(-\Delta + V)u|^2).$$

Mit dem Satz von Lebesgue folgt dann die gewünschte Konvergenz aus der punktweisen Konvergenz von $(-\Delta + V)u_\varepsilon$ gegen $(-\Delta + V)u$ für $\varepsilon \to 0$. $\square$

Für den zweiten Fall des Theorems 1.5 fehlt nur noch ein Analogon für Proposition 1.6:

PROPOSITION 1.12. *Es seien die Voraussetzungen von Theorem 1.5 erfüllt. Dann gilt für jedes* $\psi \in C_c^3(\mathbb{R}^N)$, $u \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,4}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *und* $f := (-\Delta + V)u$ *mit* $(-\Delta + V)f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ *die folgende Abschätzung:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} ((-\Delta + V)f)\psi^2 \overline{u}\, dx + \left(2 + \frac{4}{1-\theta}\right) \int_{\mathbb{R}^N} f|\nabla\psi|^2 \overline{u}\, dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\psi |u|^2\, dx.$$

Die Funktion η_ψ ist in Proposition 1.6 definiert. Die Voraussetzung $(-\Delta+V)f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ ist unabdingbar, da mit den Voraussetzungen zwar $-\Delta(\psi^2 u)$, aber nicht Vu als Element von $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ erklärt ist, wohingegen die Ungleichung in Proposition 1.6 auch ohne diesen Zusatz sinnvoll ist.

BEWEIS. Nach Voraussetzung in Theorem 1.5 gilt $(-\Delta + V)u = f$. Damit gilt für alle $\phi \in H^2(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, welche kompakten Träger haben:

$$\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta + V)u \cdot (-\Delta + V)\phi\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} ((-\Delta + V)f) \cdot \phi\, dx.$$

Insbesondere gilt dies auch für $\psi^2 u_\varepsilon$, denn einerseits implizieren $u_\varepsilon \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ und $\psi \in C_c^3(\mathbb{R}^N)$, dass $\psi^2 u \in H^2(\mathbb{R}^N)$. Andererseits folgt aus der Beschränktheit gemeinsam mit der Tatsache, dass die Träger eines Produktes mit dem Schnitt der Träger der Faktoren übereinstimmt schließlich auch $\psi^2 u_\varepsilon \in L_c^\infty(\mathbb{R}^N) \cap H^2(\mathbb{R}^N) \subset D(T)$. Auch kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit u als kompakt getragen vorausgesetzt werden, denn die Integrale in der Ungleichung können als Integrale über den Träger von ψ verstanden werden und sind somit invariant unter Abänderung von u abseits dieses Trägers. Ersetzt man u durch $\phi_R u$ mit $R > 0$ hinreichend groß, so bleibt der Term unverändert. Darüber hinaus folgt aus $\psi^2 \overline{u}_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ auch $V\psi^2\overline{u}_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Somit ist der Ausdruck $(-\Delta + V)(\psi^2 \overline{u}_\varepsilon)$ als Summe von $L^2(\mathbb{R}^N)$-Funktionen erklärt.

Mutatis mutandis kann nun der Ausdruck $\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta + V)u_\varepsilon \cdot (-\Delta + V)\psi^2 \overline{u}_\varepsilon\, dx$ wie selbiger Ausdruck mit u statt u_ε im Beweis von Proposition 1.6 umgeformt werden und man erhält:

$$\int_{\mathbb{R}^N} ((-\Delta + V)f)\psi^2 \overline{u}_\varepsilon\, dx + 6 \int_{\mathbb{R}^N} f|\nabla\psi|^2 \overline{u}_\varepsilon\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta + V)(u_\varepsilon - u)(-\Delta + V)(\psi^2 \overline{u}_\varepsilon)\, dx$$
$$\geq \int_{\mathbb{R}^N} \eta_\psi |u_\varepsilon|^2\, dx.$$

Für $\varepsilon \to 0$ konvergiert $\int_{\mathbb{R}^N} V_\pm |u_\varepsilon|^2$ (dies steht im Term von η_ψ) zum Beispiel nach Beppo Levi, und die Terme der linken Seite nach Proposition 1.10. Daher gilt die entsprechende Ungleichung und der Rest des Beweises kann aus Proposition 1.6 übernommen werden. □

Die Anwendung von Theorem 1.5 für den Beweis des exponentiellen Abfalls der Eigenfunktionen wird auf das Ende des nächsten Kapitels verschoben. Wir wollen eine Diskussion der Bedingung $(-\Delta + V)f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ voranstellen.

KAPITEL 2

Invarianz des Definitionsbereichs unter Abschneidefunktionen

Im Folgenden wollen wir das eben bewiesene Resultat verwenden, um eine entsprechende Abklingrate für Eigenfunktionen des Operators (o.B.d.A zum Eigenwert 0) zu erhalten. Da über den Träger der Störfunktion χ nichts bekannt ist und in den Voraussetzungen von Theorem 1.5 gefordert ist, dass der Träger von u denjenigen von χ nicht schneidet, müssen wir die gegebene Eigenfunktion mit einer Abschneidefunktion ξ multiplizieren. Betrachtet man formal die Wirkung des Differentialausdrucks $(-\Delta + V)$ auf die abgeschnittene Eigenfunktion ξu, wobei u Eigenfunktion zum Eigenwert 0 ist, so erhält man eine kompakt getragene Funktion, welche den Voraussetzungen zu Theorem 1.5 genügt. Insbesondere kann dann der Beweis wie in der anschließenden Bemerkung 1.9 Teil c) modifiziert werden, um die Bedingung $(-\Delta + V)f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ durch die stärkere Abklingbedingung an f zu ersetzen. Untersucht man im Allgemeinen Lösungen der inhomogenen Gleichung mit rechter Seite f auf exponentielles Abklingverhalten, so benötigt man diese Voraussetzung. Es bleibt nun die Frage, ob es zu vorgegebenem Kompaktum K eine Abschneidefunktion $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit $\xi(x) \equiv 1$ für $|x|$ groß genug und $\xi \equiv 0$ auf K gibt, sodass $\xi u \in D(T^2)$ für jedes $u \in D(T^2)$ gilt. Zunächst wird gezeigt, dass diese Aussage im Allgemeinen falsch ist, indem ein Potential V mit der folgenden Eigenschaft konstruiert wird: Es existiert ein $u \in D(T^2)$, sodass für jede Abschneidefunktion $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ gilt: $\xi u \notin D(T^2)$. Entsprechend gilt $(1-\xi)u \notin D(T^2)$ für jede Abschneidefunktion. Wir geben anschließend eine hinreichende Bedingung für V, welche die Stabilität des Definitionsbereiches $D(T^2)$ unter Multiplikation mit $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$-Funktionen gewährleistet. Ferner soll in diesem Abschnitt auf die "Normierung" $\lambda = 0$ verzichtet werden, da dies keinen Mehraufwand in der Notation mit sich bringt.

1. Charakterisierung von $D(T^2)$

Wir stellen im folgenden Lemma die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für ein solches Produkt, in $D(T^2)$ zu liegen, zusammen.

Lemma 2.1. *Es sei $u \in D(T^2)$ und $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Dann ist $\xi u \in D(T^2)$ genau dann, wenn gilt:*

$$|V|^{1/2}\nabla\xi \cdot \nabla u,\ |u_{xx} \cdot \nabla\xi|,\ (-\Delta + V)(\nabla\xi \cdot \nabla u) \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

Beweis. Mit Hilfe der Charakterisierung $D(T^2) = \{v \in D(T) : Tv \in D(T)\}$ erhält man die Äquivalenz von $v \in D(T^2)$ zu den folgenden vier Eigenschaften

a) $v \in D(T)$,
b) $Tv \in H^1(\mathbb{R}^N)$,
c) $|V|^{1/2}Tv \in L^2(\mathbb{R}^N)$,
d) $(-\Delta + V)^2 v \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Zunächst gilt für jede Funktion $u \in D(T)$ auch $v = \xi u \in D(T)$, gemäß Lemma 1.2.

Für die nächste Eigeschaft ist eine äquivalente Bedingung für $\nabla(T(\xi u)) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ zu finden. Mit Gleichung $(-\Delta + V)(\xi u) = -\Delta\xi \cdot u - 2\nabla\xi \cdot \nabla u + \xi(-\Delta + V)u$ aus Lemma 1.2 wird diese dann zu

$$\nabla(-\Delta + V)(\xi u) = -\nabla(\Delta\xi\, u) - 2\nabla(\nabla\xi \cdot \nabla u) + \nabla(\xi(-\Delta + V)u).$$

Der erste Summand ist in $L^2(\mathbb{R}^N)$ mit der gleichen Begründung wie in Teil a). Wegen $u \in D(T^2)$ ist $Tu \in D(T)$. Damit folgt wie in a), dass der letzte Summand in $L^2(\mathbb{R}^N)$ liegt. Der zweite Summand lässt sich umformen zu $\nabla(\nabla u \cdot \nabla\xi) = u_{xx}\nabla\xi + \xi_{xx}\nabla u$, wobei mittels Hölderungleichung $\xi_{xx}\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ eingesehen wird. Es bleibt die Äquivalenz von b) zu $u_{xx}\nabla\xi \in L^2(\mathbb{R}^N)$.
Der Teil c) lässt sich analog behandeln und ist äquivalent zu $|V|^{1/2}\nabla\xi \cdot \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Zu guter Letzt rechnet man

$$(-\Delta + V)^2(\xi u) = (-\Delta + V)(-u\Delta\xi) - 2(-\Delta + V)(\nabla\xi \cdot \nabla u) + (-\Delta + V)(\xi(-\Delta + V)u),$$

wobei der erste und dritte Summand wie Teil a) bzw. b) in $L^2(\mathbb{R}^N)$ liegt. Das heißt, d) ist äquvialent zu $(-\Delta + V)(\nabla\xi \cdot \nabla u) \in L^2(\mathbb{R}^N)$. □

Als nächstes benötigt man ein Glattheitsresultat für die Eigenfunktionen von Schrödingeroperatoren:

LEMMA 2.2. *Es sei $N \geq 2$. Das Potential $V \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^N)$ mit $q \geq \max\left\{\frac{N}{2}, 2\right\}$ erfülle die Voraussetzung 1. Ist $u \in D(T)$ eine Eigenfunktion zum Eigenwert λ, so gilt bereits $u \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ mit*

$$1 < p < \frac{2Nq}{(N-2)q + 2N}.$$

BEWEIS. Das Resultat folgt aus der Calderon-Zygmund-Ungleichung in [**GT01**]. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit C^2-Rand und $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ sei eine beliebige glatte Abschneidefunktion. Man definiert

$$-\Delta(u\phi) = -\Delta\phi \cdot u - 2\nabla\phi \cdot \nabla u - \phi(-V + \lambda)u =: f.$$

Dann ist $f \in L^p(\Omega)$ für p mit $\frac{N-2}{2N} + \frac{1}{q} =: \frac{1}{p}$, denn nach Hölder-Ungleichung ist $Vu \in L^p_{loc}(\Omega)$ und $\nabla u \in L^2_{loc}(\Omega)$. Somit gilt:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq & \|u\|_{L^{\frac{2N}{(N-2)_+}}(\mathbb{R}^N)} \|(\Delta\phi + |\lambda|\phi)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla u\|_{L^{\frac{2N}{(N-2)_+}}(\text{supp }(\phi))} \|\nabla\phi\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} + \|\phi V u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \\
\leq & C\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \|(\Delta\phi + |\lambda|\phi)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} + C\|\Delta u\|_{L^2(\text{supp }(\phi))} \|\nabla\phi\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} + \|\phi V u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \\
= & C\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \|(\Delta\phi + |\lambda|\phi)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} + C\lambda\|u\|_{L^2(\text{supp }(\phi))} \|\nabla\phi\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \\
& + (C\|\nabla\phi\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} + \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}) \|Vu\|_{L^q(\text{supp }(\phi))}
\end{aligned}$$

Dann ist $v = u\phi$ die eindeutige schwache Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta v &= f \qquad \text{in } \Omega \\ \quad v &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

welche mit [**GT01**, Theorem 9.15] auch eine starke Lösung ist. Da v kompakten Träger hat mit supp $v \subset \Omega$, ist $v \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ und damit $u \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^N)$. □

2. Konstruktion des Beispiels

Mit der Charakterisierung aus Lemma 2.1 geben wir ein Beispiel, welches die Notwendigkeit einer zusätzlichen Bedingung an V untermauert.

Beispiel 2.3. *Es sei $N = 3$ und $\{q_k\}_{k=0}^{\infty}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q}^3$, mit $q_0 = 0$. Sei zu $\alpha \in (1, \frac{3}{2})$ das Potential V gegeben durch $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $V(x) = -\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{3^{-k}}{|x-q_k|^\alpha} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$. Definiere dann $T : L^2(\mathbb{R}^3) \supset D(T) \to L^2(\mathbb{R}^3)$, $Tu = -\Delta u + Vu$ mit $D(T)$ wie oben als Friedrichserweiterung des entsprechenden minimalen Operators mit Definitionsbereich $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$. Dann gibt es eine Funktion $u \in D(T^2)$, sodass für jede Abschneidefunktion $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ gilt: $\xi u \notin D(T^2)$.*

Zunächst vergewissert man sich, dass V tatsächlich lokal quadratintegrierbar ist. Nach Wahl des Exponenten α gilt $2\alpha < 3$ und damit $|x|^{-\alpha} \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$. Seien weiter zu $q^1, q^2 \in \mathbb{R}^3$ und $R > 0$ die Kugeln mit Radius R und Mittelpunkt q^1 bzw. q^2 mit $B_R(q^1)$ bzw. $B_R(q^2)$ bezeichnet. Die eingedellte Kugeln $B_R(q^1) \cap (\mathbb{R}^3 \setminus B_R(q^2))$ und $B_R(q^2) \cap (\mathbb{R}^3 \setminus B_R(q^1))$ sind kongruent, wie man durch Spiegelung an jener Ebene, die der Schnittkreis $B_R(q^1) \cap B_R(q^2)$ aufspannt, erhält (Gibt es keine gemeinsamen Punkte, so vergleicht man hier die Vollkugeln.) Damit sind auch die Volumina der beiden Objekte gleich. Es folgt die Abschätzung

$$\int_{B_R(q)} \frac{1}{|x|^\alpha}\,dx = \int_{B_R(0)} \frac{1}{|x-q|^\alpha}\,dx \le \int_{B_R(0)} \frac{1}{|x|^\alpha}\,dx \qquad (q \in \mathbb{R}^N),$$

denn es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{B_R(0)} \frac{1}{|x-q|^\alpha}\,dx = \int_{B_R(q)} \frac{1}{|x|^\alpha}\,dx &= \int_{B_R(0)\cap B_q(0)} \frac{1}{|x|^\alpha}\,dx + \int_{(\mathbb{R}^3\setminus B_R(0))\cap B_R(q)} \frac{1}{|x|^\alpha}\,dx \\
&\le \int_{B_R(0)\cap B_q(0)} \frac{1}{|x|^\alpha}\,dx + \frac{1}{R^\alpha}\int_{(\mathbb{R}^3\setminus B_R(0))\cap B_R(q)} 1\,dx \\
&= \int_{B_R(0)\cap B_q(0)} \frac{1}{|x|^\alpha}\,dx + \frac{1}{R^\alpha}\int_{(\mathbb{R}^3\setminus B_R(q))\cap B_R(0)} 1\,dx \\
&\le \int_{B_R(0)\cap B_q(0)} \frac{1}{|x|^\alpha}\,dx + \int_{(\mathbb{R}^3\setminus B_R(q))\cap B_R(0)} \frac{1}{|x|^\alpha}\,dx = \int_{B_R(0)} \frac{1}{|x|^\alpha}\,dx.
\end{aligned}$$

Dies verwenden wir nun, um die Cauchykonvergenz der Reihe von V in $L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ zu beweisen. Für jedes $R > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\left\| \sum_{k=m}^{n} \frac{3^{-k}}{|x-q_k|^\alpha} \right\|_{L^2(B_R(0))} \le \sum_{k=m}^{n} 3^{-k} \left\| \frac{1}{|x-q_k|^\alpha} \right\|_{L^2(B_R(0))} \\
&\le \sum_{k=m}^{n} 3^{-k} \left\| \frac{1}{|x|^\alpha} \right\|_{L^2(B_R(0))} = 3^{-m}\frac{1-3^{m-n}}{3^{-1}} \left\| \frac{1}{|x|^\alpha} \right\|_{L^2(B_R(0))} \to 0 \qquad (m, n \to \infty).
\end{aligned}$$

Wegen der Vollständigkeit von $L^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ ist V wohldefiniert. Die Voraussetzung **(V1)** ist mit der Hardy-Ungleichung erfüllt und wird im Beweis von Lemma 2.8a) nachgeliefert. Darüber hinaus hat man:

Proposition 2.4. *V ist schwach differenzierbar und es gilt:*

$$\nabla V(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} \nabla \frac{1}{|x-q_k|^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} \frac{x-q_k}{|x-q_k|^{\alpha+2}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3) \setminus L^{\frac{3}{\alpha+1}}_{loc}(\mathbb{R}^3). \tag{33}$$

Beweis. Für jedes $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ gilt:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla V) u \, dx &= -\int_{\mathbb{R}^N} V(\nabla u) \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{-k}}{|x-q_k|^\alpha} \nabla\phi(x) \, dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{3^{-k}}{|x-q_k|^\alpha} \nabla\phi(x) \, dx = -\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\left(\frac{3^{-k}}{|x-q_k|^\alpha}\right) \phi(x) \, dx\end{aligned}$$

Die Vertauschbarkeit des Summenzeichens und des Integrals folgt mit dem Satz von Lebesgue. Damit ist V schwach differenzierbar mit Ableitung in $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ und die Ableitung ist gegeben durch (33). Darüber hinaus gilt $\nabla V \notin L_{loc}^{\frac{3}{\alpha+1}}(\mathbb{R}^3)$, denn andernfalls folgte mit der umgekehrten Dreiecksungleichung im Folgenraum $l^{\frac{3}{\alpha+1}}$:

$$\begin{aligned}\infty &> \left(\int_{B_R(0)} \left|\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} \frac{x-q_k}{|x-q_k|^{\alpha+2}}\right|^{\frac{3}{\alpha+1}}\right)^{\frac{\alpha+1}{3}} \\ &\geq \left| \left\|\frac{1}{|x|^3}\right\|_{L^1(B_R(0))} - \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} \left\|\frac{1}{|x-q_k|^3}\right\|_{L^1(B_R(0))} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left\|\frac{1}{|x|^3}\right\|_{L^1(B_R(0))},\end{aligned}$$

was einen Widerspruch liefert. □

An dieser Stelle brauchen wir die Charakterisierung des Infimums des essentiellen Spektrums über Zhislin-Folgen (vgl. [**HS96**]).

Definition 2.5. *Es sei A ein abgeschlossener Operator in $L^2(\mathbb{R}^N)$ mit Definitionsbereich $D(A)$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Eine Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus $D(A)$ heißt Zhislin-Folge für A zum Wert λ, falls gilt:*

a) $\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 1$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.
b) $\operatorname{supp} u_n \subseteq \mathbb{R}^N \setminus B_n(0)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.
c) $\|(A-\lambda)u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0$ *für* $n \to \infty$.

Die Menge $Z(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists$ Zhislin-Folge für A zum Wert $\lambda\}$ heißt Zhislin-Spektrum.

Da jede Zhislin-Folge insbesondere schwach gegen 0 konvergiert, ist sie auch eine Weyl-Folge. Folglich erhält man

$$Z(A) \subseteq \sigma_{ess}(A).$$

Die umgekehrte Inklusion gilt nur unter zusätzlichen Voraussetzungen.

Definition 2.6. *Es sei A ein abgeschlossener Operator in $L^2(\mathbb{R}^N)$. Dann heißt A lokal kompakt, falls für jede beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^N$ der Operator $\chi_B \cdot (A-\lambda)^{-1}$ für jedes $\lambda \in \rho(A)$ kompakt ist.*

Von der Notation unterscheiden wir nicht zwischen einer Funktion und dem Multiplikationsoperator mit der entsprechenden Funktion, sofern der Kontext klar ist.

Theorem 2.7 ([**HS96**],Theorem 10.6). *Es sei A selbstadjungiert und lokal kompakt in $L^2(\mathbb{R}^N)$. Zusätzlich gelte:*

$$\|[A,\phi_n](A-i)^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^N)\to L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0 \qquad (n\to\infty),$$

wobei $\phi_n = \phi(x/n)$ *und* $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ *mit* $\phi \equiv 1$ *auf* $B_1(0)$ *und* $\operatorname{supp} \phi \subseteq B_2(0)$, *sowie* $\phi \geq 0$ *gelte und* $[A, \phi_n] := A\phi_n - \phi_n A$ *den Kommutator bezeichne. Dann gilt:*

$$Z(A) = \sigma_{ess}(A).$$

Benutzt man dieses Resultat für den Operator T, so erhalten wir folgende Aussage:

LEMMA 2.8. *Sei* $\alpha \in (1, \frac{3}{2})$ *und* $T: \ L^2(\mathbb{R}^3) \supset D(T) \to L^2(\mathbb{R}^3), \ u \mapsto -\Delta u - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{-k}}{|x-q_k|^\alpha} u.$ *Dann gilt:*

a) T *ist lokal kompakt.*
b) $\inf \sigma_{ess}(T) = 0$.

BEWEIS. a) Da T selbstadjungiert ist, ist $\pm i \in \rho(T)$ und der Operator $(T+i)^{-1}$ ist ein beschränkter Operator in $L^2(\mathbb{R}^3)$. Es gilt weiter unter Verwendung der Hardy- und Young-Ungleichung (15) für alle $u \in D(T), \eta \in (0,1)$:

$$\begin{aligned}
|\langle Tu, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)}| = \left|\int_{\mathbb{R}^3} (-\Delta u + Vu)\overline{u}\, dx\right| &\geq \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} - \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{-k}|u|^2}{|x-q_k|^\alpha}\, dx \\
&\geq \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} - \frac{3}{2} 2^\alpha \|\nabla u\|^\alpha_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|u\|^{2-\alpha}_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\geq (1-\eta)\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} - C(\alpha,\eta)\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&= (1-\eta)\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)} - (C(\alpha,\eta) + (1-\eta))\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}
\end{aligned}$$

mit einer Konstanten $C(\alpha,\eta) > 0$. Diese Berechnung beinhaltet auch den Nachweis von Voraussetzung **(V1)**. Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \|(T \pm i)u\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ für alle $u \in D(T)$ folgt

$$\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{1}{1-\eta}(2 + C(\alpha,\eta) - \eta)\|(T+i)u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \qquad (u \in D(T)),$$

und damit auch $\|(T+i)^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)\to H^1(\mathbb{R}^3)} \leq C$. Folglich kann $(T+i)^{-1}$ als stetiger Operator von $L^2(\mathbb{R}^3)$ nach $H^1(\mathbb{R}^3)$ verstanden werden. Aus der Kompaktheit der Sobolev'schen Einbettung von $H^1(B) \hookrightarrow L^2(B)$ für jedes beschränkte (hinreichend glatte) Gebiet B, erhält man die Kompaktheit von $\chi_B \cdot (T-\lambda)^{-1}$ als Operator in $L^2(\mathbb{R}^3)$ für zunächst $\lambda = \pm i$ und daher nach Resolventenformel auch für alle $\lambda \in \rho(T)$.

b) Sei nun $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ mit $\phi \geq 0$, $\phi \equiv 1$ auf $B_1(0)$ und $\operatorname{supp} \phi \subseteq B_2(0)$, sowie ϕ_n definiert durch $\phi_n(x) := \phi(x/n)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\|(T \cdot \phi_n - \phi_n \cdot T)(T+i)^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^3)\to L^2(\mathbb{R}^3)} \\
\leq & C\|(T \cdot \phi_n - \phi_n \cdot T)\|_{H^1(\mathbb{R}^3)\to L^2(\mathbb{R}^3)} \\
\leq & C\| - (\Delta\phi_n) - \sum_{k=1}^{3} (\partial_k \phi_n)\partial_k\|_{H^1(\mathbb{R}^3)\to L^2(\mathbb{R}^3)} \\
\leq & \frac{1}{n^2}\|\Delta\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + \frac{1}{n}\|\nabla\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \to 0 \qquad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

Mit a) und der Kommutatorrelation sind alle Voraussetzungen erfüllt, welche die Charakterisierung des essentiellen Spektrums mittels Zhislin-Folgen erlauben. Es sei nun $\lambda \in \sigma_{ess}(T)$ und $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ eine Zhislin-Folge von T zum Wert λ. Wir zeigen, dass für jede solche Folge die folgende Aussage gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\langle Tu_n, u_n \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)} \geq -\varepsilon.$$

Dann gilt $\lambda > -\varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$ und somit $\lambda \geq 0$. Daher gilt $\sigma_{ess}(T) \subseteq [0, \infty)$.

Zu ε wählt man zunächst $M \in \mathbb{N}$ mit $3^{-M} \frac{2-\alpha}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$ und $3^{-M}\alpha < 1$. Wähle anschließend $R > 0$ mit $\frac{3-3^{-M}}{2} R^{-\alpha} < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$, mit $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} u_{n_0}, q_k) > R$ für $k = 0 \dots M$:

$$\begin{aligned}
|\langle Vu_n, u_n \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)}| \leq & \left| \sum_{k=0}^{M} \int_{\operatorname{supp}\ u_n} 3^{-k} \frac{|u_n|^2}{|x-q_k|^\alpha}\, dx \right| + \left| \sum_{k=M+1}^{\infty} 3^{-k} \int_{\operatorname{supp}\ u_n} \frac{|u_n|^2}{|x-q_k|^\alpha}\, dx \right| \\
\leq & \sum_{k=0}^{M} 3^{-k} \|u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(\operatorname{supp}\ u_n, q_k)^\alpha} \right)}_{>R} \\
& + 3^{-(M+1)} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u_n|^2}{|x-q_{k+M+1}|^\alpha} \right).
\end{aligned}$$

Nun gilt für jedes $q \in \mathbb{R}$ mit der Young- und der Hardy-Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u_n|^2}{|x-q|^\alpha}\, dx = & \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u_n|^\alpha}{|x-q|^\alpha} \|u\|^{2-\alpha}_{L^2(\mathbb{R}^3)}\, dx \\
\leq & \frac{\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{|u_n|^\alpha}{|x-q|^\alpha} \right)^{\frac{2}{\alpha}} + \frac{2-\alpha}{2} (|u_n|^{2-\alpha})^{\frac{2}{2-\alpha}}\, dx \\
= & \frac{\alpha}{2} \left\| \frac{u_n}{|x-q|} \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \frac{2-\alpha}{2} \|u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
\leq & \frac{\alpha}{2} \frac{4}{(3-2)^2} \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \frac{2-\alpha}{2} = 2\alpha \|\nabla u_n\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \frac{2-\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

Dies wird in die vorangegangene Rechnung eingepflegt und man erhält:

$$\begin{aligned}
|\langle Vu_n, u_n \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)}| \leq & \frac{1-3^{-(M+1)}}{1-3^{-1}} \frac{1}{R^\alpha} + 3^{-(M+1)} \cdot \frac{1}{1-3^{-1}} \cdot \left(2\alpha \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \frac{2-\alpha}{2} \right) \\
= & \frac{3-3^{-M}}{2} \cdot R^{-\alpha} + \frac{3^{-M}}{2} \left(2\alpha \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \frac{2-\alpha}{2} \right) \\
\leq & \varepsilon + \frac{3-3^{-M}}{2} \alpha \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

Für diese $n \geq n_0$ gilt dann auch

$$|\langle Tu_n, u_n \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)}| \geq \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} - |\langle Vu_n, u_n \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)}| \geq (1 - 3^{-M}\alpha) \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \varepsilon > -\varepsilon.$$

$\square$

Bemerkung 2.9. *Tatsächlich ist der Kommutator $T \cdot \phi_n - \phi_n \cdot T$ zunächst nur auf $D(T)$ definiert, wird aber hier als stetige Fortsetzung als Operator $H^1(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3)$ verstanden und behandelt.*

Als nächsten Schritt beweisen wir, dass T tatsächlich einen Eigenwert besitzt. Nach dem Min-Max-Prinzip ist es hinreichend, eine Funktion $\phi \in D(T)$ anzugeben, dessen Rayleigh-Quotient negativ ist. Daraus folgt, dass das Infimum des Spektrums unterhalb des Infimum des essentiellen

Spektrum liegt und daher ein Eigenwert sein muss. Für $\phi(x) := e^{-\frac{|x|^2}{100}}$ gilt $\phi \in D(T)$ und

$$\begin{aligned}
&\langle T\phi, \phi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)} < \langle(-\Delta - |\cdot|^{-\alpha})\phi, \phi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\
=&4\pi \int_0^\infty \left(\left(-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^\alpha}\right) e^{-\frac{|x|^2}{100}}\right) e^{-\frac{|x|^2}{100}} r^2\, dr\\
=&\frac{5\sqrt{2\pi}}{8} - 125 \cdot 5^{-\alpha} 2^{\frac{1-\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{3-\alpha}{2}\right)\\
\leq&\frac{15}{8} - \frac{25}{2} < 0.
\end{aligned}$$

Sei $\lambda_0 < 0$ ein solcher Eigenwert und $u_0 \in D(T)$ eine zugehörige Eigenfunktion. Anhand der Eigenwertgleichung sieht man sofort, dass $u_0 \in D(T^2)$ ist, denn es gilt $Tu_0 = \lambda_0 u_0 \in D(T)$. Wir zeigen mit der in Lemma 2.1 gegebenen Charakterisierung, dass für jede beliebige Abschneidefunktion $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ die Beziehung $\xi u_0 \notin D(T^2)$ gilt, da mindestens die letzte Eigenschaft, $(-\Delta + V)(\nabla\xi \cdot \nabla u_0) \in L^2(\mathbb{R}^3)$, verletzt ist. Aus $V \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^3)$ mit $p < \frac{3}{\alpha}$ folgt mit Lemma 2.2 auch $u_0 \in W^{2,q}_{loc}(\mathbb{R}^3)$ für $1 \leq q \leq \frac{6}{1+2\alpha}$ und damit $\sum_{k,l=1}^{3} \partial_k\partial_l\xi \cdot \partial_k\partial_l u_0 \in L^q_{loc}(\mathbb{R}^3)$. Wie in (33) gezeigt, ist V schwach differenzierbar und die Ableitung liegt nicht in $L^q_{loc}(\mathbb{R}^3)$ für $q \geq \frac{3}{\alpha+1}$. Wir schließen nun indirekt: Angenommen $\xi u_0 \in D(T^2)$, dann gilt die dritte Eigenschaft aus Lemma 2.1. Andererseits gilt:

$$\begin{aligned}
\underbrace{(-\Delta + V)(\nabla\xi \cdot \nabla u_0)}_{\in L^2(\mathbb{R}^3)} =& - \sum_{k,l=1}^{3} \partial_k^2(\partial_l\xi\partial_l u_0) + V(\nabla\xi \cdot \nabla u_0)\\
=& - \sum_{k,l=1}^{3} \left(\partial_k^2\partial_l\xi \cdot \partial_l u_0 + 2\partial_k\partial_l\xi \cdot \partial_k\partial_l u_0 + \partial_l\xi \cdot \partial_l\partial_k^2 u_0\right) + V(\nabla\xi \cdot \nabla u_0)\\
=&\underbrace{-\nabla(\Delta\xi) \cdot \nabla u_0}_{\in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)} - \underbrace{2\sum_{k,l=1}^{N} \partial_k\partial_l\xi\, \partial_k\partial_l u_0}_{\in L^q_{loc}(\mathbb{R}^3)} + \underbrace{\nabla(-\Delta u_0 + Vu_0)}_{\in L^2(\mathbb{R}^3),\text{ da } Tu_0 = \lambda_0 u_0 \in D(T)} \cdot \nabla\xi\\
&- u_0\nabla\xi \cdot \nabla V.
\end{aligned}$$

Damit erhält man: $(-\Delta + V)(\nabla\xi \cdot \nabla u_0) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^3)$ genau dann, wenn $u_0\nabla\xi \cdot \nabla V \in L^2(\mathbb{R}^3)$ gilt. Allerdings folgt aus der folgenden Bedingung $u_0\nabla\xi \cdot \nabla V \in L^s(\mathbb{R}^N)$ für $s \in (\frac{3}{\alpha+1}, \frac{6}{2\alpha+1})$, welche wegen $s < 2$ schwächer ist, bereits $u_0 = 0$. Dies sieht man wie folgt:

Aus $u_0 \in W^{2,q}(\mathbb{R}^3)$ mit einem $q > \frac{3}{2}$ erhält man mit einem Einbettungssatz von Sobolev $(2 - \frac{3}{q} > 0)$, dass u_0 stetig ist. Damit ist auch das Produkt mit $\nabla\xi$ stetig. Man erhält:

Lemma 2.10. *Falls $\nabla V \cdot \nabla\xi\, u \in L^s(\mathbb{R}^3)$ für ein $s \in \left(\frac{3}{\alpha+1}, \frac{6}{2\alpha+1}\right)$ gilt, so folgt $u \equiv 0$ auf* supp $(\nabla\xi)$.

Beweis. Angenommen es existiert ein $x_0 \in \operatorname{supp} \nabla\xi$ mit $u(x_0) \neq 0$. Dann gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^3$ von x_0, sowie ein $c > 0$ derart, dass $|u(x)| \geq c$ für alle $x \in U$ gilt. Wähle $k_0 \in \mathbb{N}$ und R_0 derart, dass $B_{R_0}(q_{k_0}) \subseteq U$ gilt. Darüber hinaus sei zu jedem $k_1 > k_0$ ein $R_1 < R_0$ gewählt, sodass $q_k \notin B_{2R_1}(q_{k_0})$ für alle $k \in \{1, \ldots, k_0 - 1, k_0 + 1, \ldots k_1\}$ gilt.

Zu $\delta > 0$ definiert man $M_\delta^{R_1} := B_{R_1}(q_{k_0}) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathring{B}_{\left(\frac{3}{4}\right)^k\delta}(q_k)$. Dann ist $M_\delta^{R_1}$ messbar, da die Vereinigung der offenen Mengen offen ist und der Schnitt von $B_{R_1}(q_{k_0})$ mit dessen Komplement abgeschlossen ist. Damit ist $M_\delta^{R_1}$ messbar. Für dessen Maß schätzt man ab:

$$\begin{aligned}
vol(M_\delta^{R_1}) \geq & vol(B_{R_1}(q_{k_0})) - \sum_{k=1}^{\infty} vol(\mathring{B}_{\left(\frac{3}{4}\right)^k \delta}(q_k)) \\
=&\frac{4}{3}\pi R_1^3 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\left(\frac{3}{4}\right)^k \delta\right)^3 \\
=&\frac{4}{3}\pi \left(R_1^3 - \delta^3 \cdot \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^3}{1-\frac{3}{4}}\right) > 0,
\end{aligned}$$

sofern $\delta > 0$ hinreichend klein ist. Nimmt man nun zum Widerspruch an, dass $\nabla V \cdot \nabla \xi \, u \in L^s(\mathbb{R}^3)$ gilt, so folgt mit umgekehrter Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla V \cdot \nabla \xi|^s |u|^s \, dx\right)^{\frac{1}{s}} \\
\geq & c\alpha \left(\int_U \left|\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} \frac{(x-q_k)\cdot \nabla \xi(x)}{|x-q_k|^{\alpha+2}}\right|^s dx\right)^{\frac{1}{s}} \\
\geq & c\alpha \left(\int_{M_\delta^{R_1}} \left|\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} \frac{(x-q_k)\cdot (\nabla \xi(x) - \nabla\xi(q_{k_0}) + \nabla\xi(q_{k_0}))}{|x-q_k|^{\alpha+2}}\right|^s dx\right)^{\frac{1}{s}} \\
\geq & c\alpha \left(\int_{M_\delta^{R_1}} \left|\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} \frac{(x-q_k)\cdot (\nabla\xi(q_{k_0}))}{|x-q_k|^{\alpha+2}}\right|^s dx\right)^{\frac{1}{s}} \\
& - c\alpha \left\|\nabla\xi(x) - \nabla\xi(q_{k_0})\right\|_{L^\infty(B_{R_1}(q_{k_0}))} \left(\int_{M_\delta^{R_1}} \left|\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} \frac{1}{|x-q_k|^{\alpha+1}}\right|^s dx\right)^{\frac{1}{s}}.
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt ist dadurch gerechtfertigt, dass das Integral der Summe des zweiten Teils existiert. Dies sieht man zum Beispiel wie folgt mit dem Satz über monotone Konvergenz:

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{M_\delta^{R_1}} \left|\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} \frac{1}{|x-q_k|^{\alpha+1}}\right|^s dx\right)^{\frac{1}{s}} \\
\leq & \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} \left(\int_{M_\delta^{R_1}} \frac{1}{|x-q_k|^{(\alpha+1)s}} \, dx\right)^{\frac{1}{s}} \\
\leq & \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} \left(\int_{B_{R_1}(q_{k_0}) \setminus \mathring{B}_{\left(\frac{3}{4}\right)^k \delta}(q_k)} \frac{1}{|x-q_k|^{(\alpha+1)s}} \, dx\right)^{\frac{1}{s}} \\
\leq & \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} \left(\int_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathring{B}_{\left(\frac{3}{4}\right)^k \delta}(q_k)} \frac{1}{|x-q_k|^{(\alpha+1)s}} \, dx\right)^{\frac{1}{s}} \\
= & \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} \cdot 4\pi \left(\int_{\left(\frac{3}{4}\right)^k \delta}^{\infty} \frac{1}{r^{(\alpha+1)s}} r^2 \, dr\right)^{\frac{1}{s}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} \cdot 4\pi \left(\left[\frac{1}{3-(\alpha+1)s} r^{3-(\alpha+1)s} \right]_{\left(\frac{3}{4}\right)^k \delta}^{\infty} \right)^{\frac{1}{s}} \\
&= C\delta^{\frac{3-(\alpha+1)s}{s}} \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} \cdot \left(\left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{3-(\alpha+1)s}{s}} \right)^k \\
&= C_1 \delta^{\frac{3-(\alpha+1)s}{s}},
\end{aligned}
$$

für ein C_1 unabhängig von δ, R_1, k_0, k_1. Beachte, dass nach Voraussetzung an s, die Ungleichung $3-(\alpha+1)s < 0$ gilt und die Summe der vorletzten Zeile eine geometrische Reihe ist (der Exponent des Bruches ist größer als $-\frac{1}{2}$). Nun folgt mit umgekehrter Dreiecksungleichung:

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_{M_\delta^{R_1}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} \frac{(x-q_k) \cdot \nabla \xi(q_{k_0})}{|x-q_k|^{\alpha+2}} \right|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \\
\geq &\left(\int_{M_\delta^{R_1}} \left| 3^{-k_0} \frac{(x-q_{k_0}) \cdot \nabla \xi(q_{k_0})}{|x-q_{k_0}|^{\alpha+2}} \right|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \\
- &\left(\int_{M_\delta^{R_1}} \left| \sum_{k=1, k\neq k_0}^{k_1} 3^{-k} \frac{(x-q_k) \cdot \nabla \xi(q_{k_0})}{|x-q_k|^{\alpha+2}} \right|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \\
- &\left(\int_{M_\delta^{R_1}} \left| \sum_{k=k_1+1}^{\infty} 3^{-k} \frac{(x-q_k) \cdot \nabla \xi(q_{k_0})}{|x-q_k|^{\alpha+2}} \right|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \\
=: &\, I - II - III.
\end{aligned}
$$

Nun schätzt man die Teile I, II und III separat ab. Für eine untere Schranke von I definiert man den Kugelsektor

$$
S_{R_1} := \{ x \in B_{R_1}(q_{k_0}) : \, |(x-q_{k_0}) \cdot \nabla \xi(q_{k_0})| \geq \frac{2}{3} |x-q_{k_0}| \, |\nabla \xi(q_{k_0})| \},
$$

sowie die Kappe der Kugel mit Radius 1:

$$
\omega := \{ x \in \mathbb{R}^3 : \, |x-q_{k_0}| = 1 \, \wedge \, |(x-q_{k_0}) \cdot \nabla \xi(q_{k_0})| \geq \frac{2}{3} \, |\nabla \xi(q_{k_0})| \}.
$$

Nach Konstruktion von R_1 gilt weiter: $q_1, \ldots, q_{k_0-1}, q_{k_0+1}, \ldots, q_{k_1} \notin B_{2R_1}(q_{k_0})$ und somit $B_{R_1}(q_{k_0}) \cap B_{\left(\frac{3}{4}\right)^k \delta}(q) = \emptyset$ gilt für $q \in \{q_1, \ldots, q_{k_0-1}, q_{k_0+1}, \ldots, q_{k_1}\}$ und $\delta > 0$ klein genug. Daher gilt

$$
\begin{aligned}
M_\delta^{R_1} &= B_{R_1}(q_{k_0}) \setminus \bigcup_{k=k_1+1}^{\infty} B_{\left(\frac{3}{4}\right)^k \delta}(q_k) \\
&= \left(B_{R_1}(q_{k_0}) \setminus B_{\left(\frac{3}{4}\right)^{k_0} \delta}(q_{k_0}) \right) \setminus \bigcup_{k=k_1+1}^{\infty} \left(B_{\left(\frac{3}{4}\right)^k \delta}(q_k) \setminus B_{\left(\frac{3}{4}\right)^{k_0} \delta}(q_{k_0}) \right)
\end{aligned}
$$

und wir können abschätzen:

$$
I^s \geq 3^{-sk_0} \left(\int_{B_{R_1}(q_{k_0}) \setminus B_{\left(\frac{3}{4}\right)^{k_0} \delta}(q_{k_0})} \frac{|(x-q_{k_0}) \cdot \nabla \xi(q_{k_0})|^s}{|x-q_{k_0}|^{s(\alpha+2)}} \, dx \right.
$$

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{k=k_1+1}^{\infty} \max_{x \in B_{(\frac{3}{4})^k\delta}(q_k) \setminus \mathring{B}_{(\frac{3}{4})^{k_0}\delta}(q_{k_0})} \left(\frac{|(x-q_{k_0}) \cdot \nabla\xi(q_{k_0})|^s}{|x-q_{k_0}|^{s(\alpha+2)}} \right) vol(B_{(\frac{3}{4})^k\delta}(q_k)) \Bigg) \\
\geq & 3^{-sk_0} \Bigg(\int_{S_{R_1} \setminus B_{(\frac{3}{4})^{k_0}\delta}(q_{k_0})} \frac{2}{3} \frac{|\nabla\xi(q_{k_0})|^s}{|x-q_{k_0}|^{s(\alpha+1)}}\, dx \\
&- \sum_{k=k_1+1}^{\infty} \frac{|\nabla\xi(q_{k_0})|^s}{((\frac{3}{4})^{k_0}\delta)^{s(\alpha+1)}} \; \frac{4}{3}\pi \left((\frac{3}{4})^k \delta \right)^3 \Bigg) \\
\geq & 3^{-sk_0} \Bigg(\frac{2}{3}\, vol(\omega)\, |\nabla\xi(q_{k_0})|^s \int_{(\frac{3}{4})^{k_0}\delta}^{R_1} \frac{1}{r^{(\alpha+1)s}} r^2\, dr \\
&- |\nabla\xi(q_{k_0})|^s \delta^{3-(\alpha+1)s} \frac{4}{3}\pi \sum_{k=k_1+1}^{\infty} \left((\tfrac{3}{4})^k \delta \right)^3 \cdot \left((\tfrac{3}{4})^{k_0} \right)^{-(\alpha+1)s} \Bigg) \\
= & 3^{-sk_0} |\nabla\xi(q_{k_0})| \left(\frac{2}{3}\, vol(\omega) \left[\frac{1}{3-(\alpha+1)s} r^{3-(\alpha+1)s} \right]_{(\frac{3}{4})^{k_0}\delta}^{R_1} - \delta^{3-(\alpha+1)s} \frac{4}{3}\pi \, \frac{(\frac{3}{4})^{3(k_1+1)}}{1-(\frac{3}{4})^3} \right) \\
\geq & \left(\tilde{C}_2 - \tilde{C}_3 (\tfrac{3}{4})^{3k_1} \right) \delta^{3-(\alpha+1)s} - \tilde{D}_1 > 0,
\end{aligned}
$$

mit Konstanten C_2, C_3 und D_1 unabhängig von δ, k_0, k_1, sowie C_2, C_3 zusätzlich unabhängig von R_1. Ist $\delta > 0$ hinreichend klein, so ist die eben errechnete untere Schranke positiv und man kann die s-te Wurzel ziehen. Dies liefert

$$
I \geq \left(C_2 - C_3 (\tfrac{3}{4})^{3k_1} \right) \delta^{\frac{3-(\alpha+1)s}{s}} - D_1 .
$$

Der Term II ist nach oben durch eine Konstante D_2 beschränkt, da nach Wahl von R_1 die Integranden alle stetig auf B_{R_1} sind. Für III erhält man mittels monotoner Konvergenz als obere Schranke:

$$
\begin{aligned}
III = & \left(\int_{M_\delta^{R_1}} \left| \sum_{k=k_1+1}^{\infty} 3^{-k} \frac{(x-q_k) \cdot \nabla\xi(q_{k_0})}{|x-q_k|^{\alpha+2}} \right|^s dx \right)^{\frac{1}{s}} \\
\leq & \sum_{k=k_1+1}^{\infty} 3^{-k} |\nabla\xi(q_{k_0})| \left(\int_{M_\delta^{R_1}} \frac{1}{|x-q_k|^{(\alpha+1)s}}\, dx \right)^{\frac{1}{s}} \\
\leq & |\nabla\xi(q_{k_0})| \; \frac{4\pi}{(\alpha+1)s-3} \left(\delta^{3-(\alpha+1)s} \sum_{k=k_1+1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{3} (\tfrac{3}{4})^{3-(\alpha+1)s} \right)^k \right)^{\frac{1}{s}} \\
\leq & C_4 \left(\tfrac{1}{3} (\tfrac{3}{4})^{3-(\alpha+1)s} \right)^{k_1+1} \cdot \delta^{\frac{3-(\alpha+1)s}{s}}
\end{aligned}
$$

Zusammengefasst erhält man die Abschätzung:

$$
\begin{aligned}
& \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla V \cdot \nabla\xi|^s |u|^s\, dx \right)^{\frac{1}{s}} \\
\geq & c\alpha \left(C_2 - C_3 (\tfrac{3}{4})^{3k_1} - \|\nabla\xi(x) - \nabla\xi(q_{k_0})\|_{L^\infty(B_{R_1}(q_{k_0}))} C_1 - C_4 \left(\tfrac{1}{3} (\tfrac{3}{4})^{3-(\alpha+1)s} \right)^{k_1+1} \right) \delta^{\frac{3-(\alpha+1)s}{s}} \\
& - c\alpha (D_1 + D_2)
\end{aligned}
$$

Wähle nun k_1 groß genug und dazugehörig R_1. Da ξ zweimal stetig differenzierbar ist, ist $\|\nabla\xi(x) - \nabla\xi(q_{k_0})\|_{L^\infty(B_{R_1}(q_{k_0}))}$ beliebig klein, sofern R_1 klein genug gewählt ist. Bei passender Wahl von k_1 und R_1 ist somit der Koeffizient vor δ positiv. Da die Ungleichung für alle $\delta > 0$ gilt, liefert dies den Widerspruch. $\square$

Nach dem Unique-Continuation-Principle [**JK85**] folgt $u_0 \equiv 0$ auf ganz $\mathbb{R}^3$. Dies liefert einen Widerspruch dazu, dass u_0 eine Eigenfunktion von T ist.

3. Hinreichende Zusatzbedingung an V

Möchte man aus Theorem 1.5 das exponentielle Abklingen von Lösungen der inhomogenen Gleichung fordern ohne stärkere Bedingungen an die rechte Seite zu stellen, so benötigt man die Invarianz des Definitionsbereiches des quadrierten Operators unter Multiplikation mit gewissen Abschneidefunktionen. Genauer muss zu jedem Kompaktum (o.B.d.A zu jeder abgeschlossenen Kugel um den Ursprung) die Existenz einer Abschneidefunktion gewährleistet sein, deren Gradient sich mit den Singularitäten des Potentials "verträgt". Dazu benötigt man höhere Glattheit des Potentials auf verformten Ringen. Unter einem solchen "topologischen Ring" sei eine Teilmenge $\mathscr{R}_k \subset \mathbb{R}^N$ derart verstanden, dass es einen C^∞-Diffeormorphismus $\Phi_k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ mit folgenden Eigenschaften gibt: Es gilt $\Phi_k(0) = 0$ und $\Phi(B_2(0) \setminus \mathring{B}_1(0)) = \mathscr{R}_k$. Da stetige Abbildungen Zusammenhangskomponenten aufeinander abbilden und Bilder kompakter Mengen kompakt bleiben, wird der Innenteil $B_1(0)$ von $B_2(0) \setminus \mathring{B}_1(0)$ auf den Innenteil (d.h. die beschränkte Zusammenhangskomponenten) von $\mathbb{R}^N \setminus \mathscr{R}_k$ abgebildet. Die andere Zusammenhangskomponente wird entsprechend als Außenteil bezeichnet. Für das Potential V erhalten wir in dieser Terminologie folgende hinreichende Bedingung, welche die Stabilität des Definitionsbereichs unter zulässigen Abschneidefunktionen nach sich zieht.

VORAUSSETZUNG 2. *Es existiere eine Folge topologischer Ringe $\{\mathscr{R}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ um $0 \in \mathbb{R}^N$ mit*

$$\operatorname{dist}(\mathscr{R}_k, 0) \to \infty \qquad (k \to \infty),$$

und glattem Rand, für die gilt: $V|_{\mathscr{R}_k} \in W^{1,\infty}(\mathscr{R}_k)$.

LEMMA 2.11. *V genüge zusätzlich zu den Voraussetzungen der Theoreme 1.1 und 1.5 der Voraussetzung 2. Dann gibt es zu jedem Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^N$ eine Abschneidefunktion $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit $\xi \equiv 1$ auf K und $\xi u \in D(T^2)$ für alle $u \in D(T^2)$.*

BEWEIS. Es sei $K \subset\subset \mathbb{R}^N$ mit $0 \in K$ und $k \in \mathbb{N}$ vorgegeben, sodass $K \cap \mathscr{R}_k = \emptyset$ gilt. Definiere $\xi := \Phi \circ \tilde{\xi} \circ \Phi^{-1}$, wobei $\tilde{\xi} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ vermöge $\tilde{\xi} \equiv 1$ auf $B_1(0)$, und $\operatorname{supp} \tilde{\xi} \subseteq B_2(0)$, $\tilde{\xi} \geq 0$. Nach der Kettenregel gilt dann $\operatorname{supp} \xi \subseteq \mathscr{R}_k$.

Da $V|_{\mathscr{R}_k}$ wesentlich beschränkt ist, folgt die erste Bedingung in Lemma 2.1 aus $u \in D(T) \subset H^1(\mathbb{R}^N)$. Die selbe Eigenschaft von V hat zur Folge, dass $-\Delta u|_{\mathscr{R}_k} = (-\Delta u + Vu)|_{\mathscr{R}_k} - Vu|_{\mathscr{R}_k} \in L^2(\mathscr{R}_k)$ gilt und demnach $u|_{\mathscr{R}_k} \in H^2(\mathscr{R}_k)$ gilt. Für die letzte Bedingung benötigt man, dass $W|_{\mathscr{R}_k} \in W^{1,\infty}(\mathscr{R}_k)$ gilt. Unter Beachtung, dass $(-\Delta + V)(u \cdot \nabla\xi) = -\Delta\xi u - 2\xi_{xx}\nabla u + (-\Delta + V)u \cdot \nabla\xi \in H^1(\mathbb{R}^n)$ gilt, liefert die Ketten- und Produktregel aus Lemma 1.11:

$$\begin{aligned}\nabla((-\Delta + V)(u \cdot \nabla\xi)) =& (-\Delta + V)(\nabla(u \cdot \nabla\xi)) + \nabla V \cdot (u \cdot \nabla\xi)\\ =& (-\Delta + V)(\nabla u \cdot \nabla\xi) + (-\Delta + V)(\Delta\xi \cdot u) + \nabla V \cdot (u \cdot \nabla\xi).\end{aligned}$$

Dies ist wiederum äquivalent zu

$$(-\Delta + V)(\nabla u \cdot \nabla \xi) = \nabla((-\Delta + V)(u \cdot \nabla \xi)) - (-\Delta + V)(\Delta \xi \cdot u) - \nabla V \cdot (u \cdot \nabla \xi) \in L^2(\mathbb{R}^N).$$

Folglich ist auch die letzte Eigenschaft aus Lemma 2.1 erfüllt und es gilt: $\xi u \in D(T^2)$. □

Wir wollen nun das Theorem 1.5 dahingehend verallgemeinern, dass die Voraussetzung an die Träger der Störfunktion χ und der Lösung u ersetzt wird.

THEOREM 2.12. *Es sei $u \in D(T)$ eine Lösung der Gleichung $(-\Delta + V)u = f$ und f erfülle einer der beiden folgenden Voraussetzungen:*

a) $e^{2\sqrt{E(1+|x|^2)}} f \in L^2(\mathbb{R}^N)$.
b) $e^{\sqrt{E(1+|x|^2)}} f$, $e^{\sqrt{E(1+|x|^2)}}(-\Delta + V)f \in L^2(\mathbb{R}^N)$ und Voraussetzung 2 ist erfüllt.

Es gelte ferner $a < \operatorname{dist}(0, \sigma_{ess}(T))$, und $E > 0$ sei so gewählt, dass

$$\liminf_{|x|\to\infty} a^2 - \gamma_E(x) > 0$$

gilt. Dann folgt:

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{2\sqrt{E(1+|x|^2)}}\ u^2\, dx < \infty.$$

BEWEIS. Zunächst stellen wir fest, dass aufgrund der Charakterisierung des Infimums des essentiellen Spektrums in Theorem 1.1 ein $R > 0$ existiert, sodass für alle $\phi \in D(T)$ mit $\operatorname{supp} \phi \cap B_R(0) = \emptyset$ gilt:

$$q(\phi) \geq a^2 \|\phi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

Dann folgt mit Theorem 1.4, dass es zu $\delta > 0$ mit $\liminf_{|x|\to\infty} \frac{a}{1+\delta} - \gamma_E(x) > 0$ ein χ gibt, sodass für alle $u \in D(T)$ gilt:

$$q_\chi(u) \geq \left(\frac{a^2}{1+\delta}\right) \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Wähle im Fall a) $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit $\xi \equiv 0$ auf $\operatorname{supp} \chi$ und $\xi \equiv 1$ für $|x| > R+1$ mit $\operatorname{supp} \chi \subseteq B_R(0)$. Für die Lösung u gilt dann $\xi \cdot u = u - (1-\xi)u \in D(T)$ nach Lemma 1.2 und $\xi \cdot u$ löst die Gleichung

$$T(\xi u) = -2\nabla \xi^T \nabla u - u\Delta \xi + \xi f =: \tilde{f}.$$

Für b) sei $R > 0$ so groß, dass $\operatorname{supp} \chi \subseteq B_R(0)$ gilt und $\mathscr{R}_k$ so gewählt, dass $B_R(0) \cap \mathscr{R}_k = \emptyset$ gilt. Wähle stattdessen eine Abschneidefunktion $\xi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit $\xi \equiv 0$ im Innenteil und $\xi \equiv 1$ auf dem Außenbereich.

Man erhält für die Träger: $\operatorname{supp} \xi u \cap \operatorname{supp} \chi = \emptyset$. Ferner ist $\tilde{f} e^{2\sqrt{E(1+|x|^2)}}$ im Fall a) und $\tilde{f} \in D(T)$, sowie $e^{\sqrt{E(1+|x|^2)}}\tilde{f}$, $e^{\sqrt{E(1+|x|^2)}}(-\Delta + V)\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ im Fall b). Damit sind die Voraussetzungen von Theorem 1.5 mit $c(x) = \frac{a^2}{1+\delta}$ erfüllt. Die Gültigkeit der Abklingrate folgt. □

Für das Resultat für die Eigenfunktion zum Eigenwert 0 liefert das Theorem mit Fall a) das gewünschte für $f = 0$. In diesem Fall ist die Zusatzvoraussetzung 2 nicht notwendig. Andererseits kann man unter der Zusatzannahme 2 auch Aussagen über die Lösungen der inhomogenen Gleichung machen. Die Abklingrate der Lösung ist dann höchstens so groß wie die Abklingrate der rechten Seite. Ferner ist sie in folgendem Sinn optimal. Kennt man die spektralen Eigenschaften des Operators, sowie eine obere Schranke für den Wert E, so kann man die Gleichung mit einer rechten Seite betrachten, deren Abklingverhalten gerade durch $e^{-\sqrt{E(1+|x|^2)}}$ beschrieben wird. Das

Abklingen der Lösung u der inhomogenen Gleichung ist im Allgemeinen nicht schneller als die der rechten Seite. So gilt zum Beispiel für $\alpha \in (0,1)$:

$$(-\Delta + 1)(e^{-\alpha\sqrt{1+|x|^2}}) = (1 - \alpha^2(1 + O(|x|^{-1}))e^{-\alpha\sqrt{1+|x|^2}} \qquad (|x| \to \infty).$$

Das heißt, für Lösungen der Gleichung

$$(-\Delta + 1)u = (-\Delta + 1)(e^{-\alpha\sqrt{1+|x|^2}})$$

ist kein schnelleres Abklingen als jenes der rechten Seite zu erwarten.

Teil II

Globale Verzweigung von Lückeneigenwerten bei nichtlinearen Schrödingergleichungen

In diesem Abschnitt der Arbeit werden wir die Verzweigungen von Lückeneigenwerten bei nichtlinearen Schrödingergleichungen untersuchen. Im Fokus stehen also Gleichungen der Form

$$-\Delta u + Vu - \lambda u - g(x,u) = 0, \tag{34}$$

wobei V ein Potential und g die (superlineare) Nichtlinearität bezeichne. Dabei stehen sowohl die Frage der Existenz von Lösungen zu einem vorgegebenen Spektralparameter, als auch die topologische Struktur der Menge der Lösungspaare (λ, u) im Fokus. Im Gegensatz zum ersten Teil der Arbeit wollen wir uns auf reellwertige Lösungen beschränken.

Wir stellen als nächstes kurz die Voraussetzungen an die Funktionen V und g vor, auf welche wir in der Arbeit verweisen wollen. Das Potential V möge die Interpretation des Terms $-\Delta + V$ als Wirkung eines selbstadjungierten Operators T in dem Hilbertraum der quadratintegrierbaren Funktionen $L^2(\mathbb{R}^N)$ erlauben. Sein Definitionsbereich T soll durch den Sobolevraum $H^2(\mathbb{R}^N)$ gegeben sein, was aus der unten vorausgesetzten wesentlichen Beschränktheit des Potentials folgerbar ist. Zusätzlich ist angenommen, dass das essentielle Spektrum des Operators eine Lücke der Form $(-a, a)$ aufweist, wobei wir uns nicht darauf einschränken wollen, ob diese Lücke von essentiellem Spektrum umgeben, oder lediglich unterhalb dessen Infimums liegt. Dass die Lücke von der speziellen Form $(-a, a)$ ist, ist keine Einschränkung, da dies durch eine spektrale Verschiebung des Potentials erreicht werden kann. Überdies trete mindestens ein Eigenwert ungerader algebraischer (= geometrischer) Vielfachheit in dieser Lücke auf, welcher Ausgangspunkt der Verzweigung sein wird. Zusammengefasst stellen wir also die folgenden Voraussetzungen an V sowie an den demgemäß definierten linearen Schrödingeroperator:

VORAUSSETZUNG 3. *Das Potential V, welches den linearen Schrödingeroperator*

$$T: L^2(\mathbb{R}^N) \supset D(T) \to L^2(\mathbb{R}^N),\ u \mapsto -\Delta u + Vu$$

definiert, genüge den folgenden Voraussetzungen:

(V1) $V \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$,

(V2) $\sigma(T) \cap (-a, a) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \subseteq \sigma_p(T)$,

wobei $\sigma_p(T)$ das Punktspektrum, also jene Eigenwerte mit endlicher Vielfachheit, von T bezeichne.

Die Formel (3) für den Definitionsbereich der Friedrichserweiterung in Teil I gewährleistet die Selbstadjungiertheit von T bei der Wahl von $D(T) = H^2(\mathbb{R}^N)$.

Als nächstes beschreiben wir die für unsere Untersuchung nötigen Voraussetzungen an die Funktion g. Zunächst sollten sämtliche Linearanteile der Schrödingergleichung bereits in V aufgefangen sein, sodass wir für $g(x, \cdot)$ ein superlineares Wachstum in einer Umgebung der 0 voraussetzen wollen. Ferner soll $g(x, \cdot)$ als stetige Abbildung von $H^2(\mathbb{R}^N)$ nach $L^2(\mathbb{R}^N)$ verstanden werde können, was durch subkritisches Wachstum gewährleistet wird. Zusätzlich benötigen wir bei der Untersuchung der Lösungskontinua eine subkritische Wachstumsschranke von $u \mapsto \partial_u g(x,u) \cdot u$, welche mit der Behandlung mit Methoden der Variationsrechnung verwandt ist. Auf die genaue Bedeutung dieser Bedingungen wird an der Stelle eingegangen, an der sie verwendet wird. Zusammengefasst genüge g der nachfolgenden

VORAUSSETZUNG 4. *Es sei $s \geq 0$ vorgegeben. Die Funktion*

$$g: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x, v) \mapsto g(x, v)$$

genüge den folgenden Voraussetzungen:

(G1) $g \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ *und* $g(x,\cdot) \in C^2(\mathbb{R})$ *für fast alle* $x \in \mathbb{R}^N$.

(G2) *Es gibt* ε_0, $C > 0$, *sowie* $\alpha < \frac{\varepsilon_0 \cdot s}{2}$ *derart, dass:*

$$|g(x,v)| \leq C\langle x\rangle^{\alpha}|v|^{1+\varepsilon_0} \qquad ((x,v) \in \mathbb{R}^N \times (-1,1)).$$

(G3) *Falls* $N \geq 4$ *gilt: Es gibt* $C > 0$, $p_0 \in (1, \frac{N}{(N-4)_+})$ *und* $\beta < \frac{(p_0-1)s}{2}$ *derart, dass:*

$$|g(x,v)| \leq C\langle x\rangle^{\beta}|v|^{p_0} \qquad ((x,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}).$$

(G4) *Falls* $N \geq 4$ *gilt: Es gibt* $C > 0$, $q_0 \in (1, \min\{\frac{N}{(N-4)_+} - 1, \frac{4}{(N-4)_+}\})$ *und* $\vartheta < \frac{q_0 s}{2}$ *derart, dass:*

$$|\partial_v g(x,v)| \leq C\langle x\rangle^{\vartheta}|v|^{q_0} \qquad ((x,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}).$$

(G5) *Es gibt* $\gamma > 2$ *mit*

$$0 \leq \gamma \cdot G(x,v) \leq g(x,v) \cdot v \qquad ((x,v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}).$$

Hierbei bezeichne $G(x,v) := \int_0^v g(x,w)\,dw$ *eine Stammfunktion von* $g(x,\cdot)$.

Die Bedingung $g \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ aus **(G1)** kann noch weiter abgeschwächt werden. Tatsächlich benötigt man lediglich, dass für jede Funktion $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ das Bild $g(\cdot, u(\cdot))$ messbar ist. Die Wachstumsschranken **(G2)** und **(G3)** garantieren dann, dass die dadurch definierte Abbildung zwischen gewichteten Räumen stetig und kompakt ist, und **(G4)** liefert die entsprechende Differenzierbarkeit. Beispiele solcher Nichtlinearitäten sind $g(x,u) = \Gamma(x)|u|^{p-1}u$ für $\Gamma \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\Gamma \geq 0$ und $p \leq p_0$, sowie Summen derartiger Terme. **(G5)** wird in der Literatur Ambrosetti-Rabinowitz Bedingung genannt und tritt im Zusammenhang mit dem Mountain-Pass-Theorem auf. Auch bei dessen Verallgemeinerung, dem Linking-Theorem findet man Bedingung **(G5)**. Dabei wird die Gleichung (34) als notwendige Bedingung für das Auftreten kritischer Punkte interpretiert (vgl. [**KS$^+$98**],[**Tro12**]).

Unter einer Lösung der Gleichung (34) verstehen wir ein Paar aus einem (reellen) Parameter λ und einer Lösungsfunktion u aus einem Sobolevraum derart, dass die Gleichung im starken Sinne, das heißt als Identität im Lebesgueraum $L^2(\mathbb{R}^N)$, erfüllt ist. Aus der intuitiven, wenn auch nicht völlig korrekten Vorstellung, dass Lösungseigenschaften sich nur wenig ändern, wenn die Eingangsparameter wenig variieren, fußt dann die Motivation, den Funktionsteil der Lösung als abhängig vom Parameter zu verstehen und die Lösungsmenge auf Kontinua oder gar stetigen Kurven zu untersuchen. Im abstrakten Kontext gibt dort der Satz über implizit definierte Funktionen die Antwort, sofern eine partielle Ableitung des noch zu definierenden nichtlinearen Operators invertierbar ist. Interessanter ist die Frage allerdings an Stellen, in denen genau diese Umkehrbarkeit nicht gegeben ist und somit die Menge der Nullstellen dieses nichtlinearen Operators nicht mehr als Graph einer Funktion darstellbar sind. In jenen Punkten können beispielsweise neue Zweige oder Kontinua von Lösungen entspringen, oder Wendepunkte auftreten. Solche Phänomene, sowie Aussagen über das Gesamtbild der Menge der Lösungen sind dann Gegenstand der Bifurkationstheorie oder Verzweigungstheorie und werden auf abstraktem Level im ersten Kapitel wiederholt. Darüber hinaus wird ein sekundäres Verzweigungsresultat vorgestellt, welches dem Wissen des Autors zufolge neu ist.

Um die Anwendbarkeit der Bifurktationstheorie zu prüfen, muss zunächst ein funktionalanalytischer Kontext geschaffen werden. Die Untersuchung auf $L^2(\mathbb{R}^N)$-Lösung ermöglicht es, die spektraltheoretischen Eigenschaften von linearen Schrödingeroperatoren als selbstadjungierte Operatoren in einem Hilbertraum zu verwenden. Man könnte den Operator auch auf $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$ definieren und als Definitionsbereich $H^1(\mathbb{R}^N)$ wählen, was aber nicht Gegenstand dieser Arbeit sein soll. Besondere Bedeutung kommt hierbei sogenannten Resolventenabschätzungen zu, welche wir unter Berücksichtigung des ersten Teils dieser Arbeit auf gewichtete Räume zu erweitern vermögen. Als Resolvente wird hier, sofern existent, die Inverse eines um den Spektralparameter verschobenen linearen Operators benannt. Die Invertierbarkeit hängt hier vom zu Grunde liegenden Hilbertraum ab und wird als Operator in $L^2(\mathbb{R}^N)$, sowie auch im gewichteten Raum $L^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ untersucht. Letztere gewichtete Versionen der Lebesgueräume sind Bestandteil des zweiten Kapitels dieses Abschnittes und werden durch Kompaktheitseigenschaften der Nichtlinearität in diesen Räumen motiviert. Die Kompaktheit ist Voraussetzung des globalen Satzes von Rabinowitz 3.2.

Im dritten und Hauptabschnitt dieses Teils werden die vorgestellten Resultate auf das vorliegende Problem angewandt und Bedingungen an die Nichtlinearität gegeben, unter welchen der globale Bifurkationssatz von Rabinowitz angewandt werden kann. Wir werden die Existenz eines globalen Astes nichttrivialer Lösungen beweisen, und Aussagen über den Parameterbereich machen, für welche Lösungen existieren. Ferner geben wir Normschranken für den Lösungszweig an.

Die bisherigen Arbeiten zur Untersuchung von globalen Verzweigungsphänomenen bei Schrödingeroperatoren lassen sich prinzipiell in die folgenden drei Techniken einordnen:

a) Anwendung des globalen Verzweigungssatz von Rabinowitz,
b) Nachweis des Entspringens eines Lösungszweiges mittels lokalem Verzweigungssatz von Crandall und Rabinowitz und anschließender Pfadverfolgung,
c) Existenzbeweis von Lösungen für einen festen Parameter und anschließend Abschätzung der Normen gegen eine gegen Null konvergierende Majorante, sofern der Parameter gegen einen festgelegten Wert konvergiert.

Für die Methode a) liegt die Schwierigkeit darin, dass der nichtlineare Operator, den man durch Umschreiben von (34) in eine Fixpunktgleichung der Form

$$u = (-\Delta + V - \lambda)^{-1}(g(x,u))$$

erhält, im Allgemeinen nicht kompakt ist bzw. nicht auf dem nötigen Parameterbereich existiert. Denkbar wäre auch, das Potential nicht mit in die Bildung der Inversen mit einzubeziehen und somit die Gleichung

$$(-\Delta + 1)^{-1}(-Vu + (\lambda - 1)u + g(x,u)) = u$$

zu erhalten. In diesem Fall ist das Problem der Invertierbarkeit gelöst, wohingegen das Problem der Kompaktheit durch den zusätzlichen linearen Term aber eher erschwert wird. Als Ausweg bieten sich die Anpassung des Begriffes des Abbildungsgrades an die gegebene Situation sowie die Definition passender Lösungsräume an. Auf beschränkten Gebieten liefert der kompakte Einbettungssatz von Sobolev, Kondrachev und Rellich die Kompaktheit der Resolvente und kombiniert mit der Beschränktheit des zweiten Teils des nichtlinearen Operators die Kompaktheit von selbigem. In [**RS01b**] wird bereits die Verwendung von gewichteten Sobolevräumen vorgeschlagen, um die fehlende Kompaktheit der Resolvente zu umgehen. Dort wird die Präsenz von essentiellem Spektrum als Ursache für Nichtkompaktheit genannt. Tatsächlich erhält man für selbstadjungierte Operatoren T mit rein diskretem Spektrum (das heißt nur Eigenwerte endlicher Vielfachheit

$\ldots \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 \ldots$ ohne Häufungswert sind vorhanden) eine Resolvente $(T-\mu)^{-1}$ für $\mu \in \rho(T)$, deren Eigenwerte von der Form $(\lambda_k - \mu)^{-1}$ sind und sich folglich höchstens in 0 häufen können. Daher ist die Resolvente für ein μ und damit für alle μ (vergleiche Resolventenformelen [**MB75**, Theorem VI.5 und Korollar]) kompakt. Betrachtet man Schrödingeroperatoren mit periodischen Potentialen, so ist das essentielle Spektrum durch die Existenz von (quasi-)periodischen Lösungen, sogenannter Blochwellen, charakterisiert. Multipliziert man diese mit einer geeigneten Abschneidefunktion, so erhält man eine Weyl'sche Folge. Die Blochwellen sind zwar beschränkt, jedoch nicht abklingend. Darin keimt die Hoffnung, dass die Einschränkung des Schrödingeroperators auf einen gewichteten Raum das essentielle Spektrum entfernt. Allerdings ist dabei die fehlende Symmetrie zu umgehen, und dies macht die Spektraltheorie schwierig. Wir können nicht alle Effekte, die eine Wahl von gewichteten Räumen hat, kontrollieren.

In [**Wil97**] wird die Invarianz des Gebietes unter einer Darstellung einer Untergruppe G der orthogonalen Gruppe $O(N)$ untersucht. Der Raum der G-invarianten Funktionen in $H^1(\mathbb{R}^N)$ bettet dann kompakt in $L^p(\mathbb{R}^N)$ ein, sofern $p \in (2, 2N/(N-2)_+)$ und $N \geq 2$ gilt. In [**BDW10**] ist dies die Basis für die Anwendbarkeit des globalen Bifurkationssatzes, um die Verzweigung von radialsymmetrischen Lösungen zu beweisen. In [**RS01a**] werden Bedingungen für die Fredholm- und Kompaktheitseigenschaften für semilineare Differentialoperatoren gegeben und in [**RS01b**] für globale Verzweigung asymptotisch periodischer Koeffizienten angewandt. Schließlich wollen wir die Autoren von [**JLS99**] erwähnen, die das Maximumprinzip ausnutzen, um für Eigenwerte unterhalb des essentiellen Spektrums die Kompaktheit des nichtlinearen Operators zu erhalten. Da wir weder Symmetrie, Periodizität, noch die Lage der Eigenwerte unterhalb des essentiellen Spektrums voraussetzen wollen, verstehen wir unseren Zugang, die Verwendung gewichteter Räume, als neu.

Als Methode b), globale Verzweigung nachzuweisen, soll die Pfadverfolgung erwähnt werden. Dabei wird das Entspringen eines Zweiges lokal mit dem Satz von Crandall-Rabinowitz nachgewiesen. Dies benötigt keine Kompaktheit. Daraufhin wird der Zweig in den Punkten, in denen die Linearisierung invertierbar ist, mit dem Satz über implizit definierte Funktionen fortgesetzt. Unglücklicherweise wird auch hier eine Art Kompaktheit benötigt, durch welche sichergestellt werden kann, dass die Definitionsbereiche der implizit gegebenen Funktionen nicht zusammenschrumpfen. Hierzu sei beispielsweise auf [**JS$^+$99**] und [**KKP11**] verwiesen, und bemerkt, dass die Voraussetzung an das Potential sehr restriktiv sind.

Schließlich gibt es eine umfangreiche Literatur, welche sich mit der dritten Herangehensweise, dem Nachweis von Bifurkation durch parameterabhängige Abschätzung der Norm von bekannten Lösungen, befasst. Die Existenz wird dabei in aller Regel mit variationellen Methoden nachgewiesen. Wichtige Sätze sind hierbei das Mountain-Pass-Theorem, sowie dessen Verallgemeinerungen und die Technik der Minimierung über die Nehari-Mannigfaltigkeit. Bei nichtlinearen Schrödingergleichung, deren Basis ein periodischer Operator bildet, sei auf [**Tro12**] verwiesen. Hier spielt die Approximation von Lösungen nahe des Randes des essentiellen Spektrums durch abgeschnittene Blochwellen die Hauptrolle. Eine weitere Arbeit zu periodischen Koeffizienten ist [**KS$^+$98**]. Hierbei werden Verzweigungen von Eigenwerten betrachtet, welche in einer Lücke des essentiellen Spektrums liegen, und somit das zugehörige Funktional indefinit werden lassen. Liegen die Eigenwerte unterhalb des essentiellen Spektrums, so ist der Nachweis der Existenz von Lösungen einfacher und allgemeinere Potentiale können betrachtet werden.

Neben den Verzweigungen von $L^2(\mathbb{R}^N)$-Lösungen auf dem Ganzraum sind bei periodischen Koeffizienten die Verzweigung von Blochwellen interessant. Dazu wird die Gleichung auf der Periodizitätszelle mit quasiperiodischen Randbedingungen betrachtet. In [**DU16**] wird damit die Existenz nichtlinearer Blochwellen für die Gross-Pitaevskii-Gleichung auf dem Ganzraum mit periodischen Koeffizienten nachgewiesen. Dies sind endliche Linearkombinationen quasiperiodischer Funktionen und somit nicht quadratintegrierbar. Darüber hinaus werden asymptotische Darstellungen dieser Lösungen berechnet.

Für die im Folgenden vorgestellte Methode zum Nachweis von Verzweigung von Lösungen im Hilbertraum stellen wir keine zusätzlichen Voraussetzungen an die Struktur an das Potential, welche über das Generieren der spektralen Eigenschaften der Linearisierung hinausgehen.

KAPITEL 3

Bifurkationstheorie

Bei der Bifurkationstheorie befasst man sich mit Lösungseigenschaften von (nichtlinearen) Gleichungen, welche von einem Parameter abhängen. Hängen die Seiten der Gleichung stetig vom Parameter ab, so erwartet man intuitiv auch eine stetige Abhängigkeit der Lösung oder der Lösungen von diesem Parameter. In der Tat gibt es aber gewisse Grenzen, welche beim Durchlaufen des Parameters die Lösungstheorie der Gleichung grundlegend verändern. Ist beispielsweise für alle Parameter unterhalb einer Grenze die Gleichung alleinig durch die triviale, also die Nulllösung erfüllt, so könnte dennoch jenseits dieser Grenze nichttriviale Lösungen auftreten. Auch die Frage der Stabilität der Lösungen muss nach dem Übertritt neu gestellt werden.

Tatsächlich legt die Untersuchung des folgenden polynomiellen Nullstellenproblems

$$F(\lambda, x) = x^3 - \lambda x = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

viele der angesprochenen Eigenschaften offen. Für nichtpositive Parameter λ hat die Gleichung die eindeutige Lösung $x = 0$, wohingegen im Fall $\lambda > 0$ zusätzlich zur erstgenannten die beiden Lösungen $\pm\sqrt{\lambda}$ zur Lösungsmenge hinzugefügt werden müssen. Darüber hinaus können diese Lösungen als kritische Punkte des zugehörigen nichtlinearen Funktionals

$$I_\lambda : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, (\lambda, x) \mapsto \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}\lambda x^2$$

interpretiert werden. Für nichtpositive Parameter hat I_λ genau ein globales Minimum in $x = 0$, wohingegen dieses für $\lambda > 0$ zum lokalen Maximum wird und zusätzlich in $\pm\sqrt{\lambda}$ globale Minima auftreten. Insofern hat sich bei Überquerung von $\lambda = 0$ auch die Stabilität geändert. In der Tat ist ein Stabilitätswechsel im Allgemeinen notwendigerweise ein Überschreiten eines Eigenwerts der Null, wenn sich der Parameter ändert und ist unter gewissen Voraussetzungen auch hinreichend für Bifurkation.

Die Untersuchung dieses einfachen Beispiels liefert Indizien für eine weitere Eigenschaft in Verbindung mit Verzweigungsphänomenen. Parametrisiert man den Ast nichttrivialer Lösungen nach Bogenlänge (dadurch wird die Ableitung für $s = 0$ nichttrivial sein)

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\, s \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{s^2+s^4}}(s^2, s) & s \neq 0 \\ 0 & s = 0 \end{cases},$$

und setzt man dies in die Gleichung ein, so erhält man für alle $s \in \mathbb{R}$:

$$F(\tfrac{1}{\sqrt{s^2+s^4}}s^2, \tfrac{1}{\sqrt{s^2+s^4}}s) = 0.$$

Differenzieren und auswerten in $s = 0$ liefert dann

$$DF(0,0)[(0,1)] = 0$$

und somit $\partial_x F(0,0) = 0$. Folglich kann der Satz über implizit definierte Funktionen in diesem Punkt nicht angewandt werden, um die Lösungsmenge in einer Umgebung des Punktes eindeutig durch eine nach λ parametrisierte Kurve darzustellen. In höheren Dimensionen oder allgemeinen Banachräumen lässt sich dies in die Nichtinvertierbarkeit der Linearisierung in der trivialen Lösung übersetzen, was zu einer notwendigen Bedingung für Verzweigung in diesem Punkt führt.

Weitere Beispiele für Bifurkation sind Eigenwertprobleme linearer Operatoren. Auch im endlichdimensionalen Fall liefert die Gleichung

$$Ax - \lambda x = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^N$$

für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ein Bifurkationsproblem. Das notwendige Kriterium heißt in diesem Fall $\ker(A - \lambda) \neq \{0\}$, was durch die Notation von Eigenwerten charakterisiert wird. Neben der trivialen Lösung $x = 0$ hat die Gleichung, sofern λ ein Eigenwert mit Eigenvektor $v \in \mathbb{R}^N$ ist, eine Schar von nichttrivialen Lösungen der Form $\{(0, tv)\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Im vorliegenden Kapitel sollen nun lokale und globale Verzweigungssätze gegeben werden, welche im Fall analytischer nichtlinearer Operatoren weitere Spezifizierungen der Lösungsmenge zulassen. Diese Resultate sind keinesfalls neu und können in [**Kie06**] nachgelesen werden. Im Anschluss geben wir ein eigenes Resultat für sekundäre Verzweigung von einem nicht differenzierbaren Zweg. Da bisherige Sätze zur sekundären Bifurkation auf der Glattheit des Lösungszweiges beruhen, um das Problem auf die Verzweigung von der trivialen Lösung zurückzuführen, erscheint das hier gegebene Resultat neu.

1. Lokale und globale Resultate

In diesem Abschnitt soll das allgemeine Verzweigungsproblem formuliert werden und zwei grundlegende Resultate, der lokale Verzweigungssatz von Crandall und Rabinowitz [**CR71**] und der globale Satz von Rabinowitz [**Rab71**] zitiert werden. Obgleich für die Beweise dieser beiden Sätze auf andere Literatur verwiesen werden soll, geben wir doch an jenen Stellen Ideen, welche später für die eigenen Resultate aufgegriffen werden sollen.

Es seien X, Y Banachräume und es existiere eine stetige Einbettung $X \hookrightarrow Y$. Bezeichne $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $F : I \times X \to Y$ sei eine stetig differenzierbare Abbildung. Ein abstraktes Verzweigungsproblem ist dann von der Form

$$F(\lambda, u) = 0 \qquad \text{in } Y.$$

Grundlegend für die Frage der Auflösbarkeit solcher Gleichungen zum Beispiel nach u ist der Satz über implizit definierte Funktionen. Die Glattheit des nichtlinearen Operators F wird dabei an die Lösungskurve $\lambda \mapsto u_\lambda$ vererbt. Dies gilt auch für Analytizität (siehe z.B. [**BT16**, Theorem 4.5.4]). Um Verzweigung zu untersuchen, stehen Punkte $(\lambda, u) \in I \times X$ im Fokus, in denen die Linearisierung $\partial_u F(\lambda, u)$ einen nichttrivialen, endlichdimensionalen Kern hat. Solche Punkte sollen fortan degenerierte Punkte genannt werden. Ist zusätzlich der Kern eindimensional, so sprechen wir von einfach degenerierten Punkten. Um den Satz über implizit definierte Funktionen in einer Umgebung solch eines degenerierten Punktes anwenden zu können, nutzt man Projektionen, um die Gleichung in einen Anteil entlang des Kernes der Linearisierung und einen Anteil im Komplement aufzuteilen. Im Komplement ist der Satz über implizit definierte Funktionen anwendbar. Auf diese Weise ist das Problem auf ein endlichdimensionales zurückgeführt (Lyapunov-Schmidt-Reduktion).

Wir geben das entsprechende Resultat für analytische Operatoren im folgenden Kapitel mitsamt einiger Identitäten für die Ableitungen der implizit definierten Funktionen.

Wir untersuchen nun Verzweigungen von der Menge der trivialen Lösungen und nehmen dazu an, dass $F(\lambda, 0) = 0$ gilt, für alle $\lambda \in I$. Die Menge aller nichttrivialen Lösungen bezeichnen wir mit

$$\mathscr{S} := \{(\lambda, u) \in I \times X : \, u \neq 0, \; F(\lambda, u) = 0\}.$$

Unter einem Zweig oder Ast verstehen wir eine abgeschlossene, zusammenhängende, nichtleere Teilmenge von $\mathscr{S}$. Werden sekundäre Bifurkationen, das heißt Verzweigungen von einem Zweig nichttrivialer Lösungen untersucht, so können wir dies wie folgt in ein Bifurkationsproblem von der trivialen Lösung zurückführen. Dabei ist vorauszusetzen, dass der Zweig eine stetig differenzierbare Kurve ist. Dies folgt zwar in allen nichtdegenerierten Punkten, ist jedoch nicht notwendigerweise im zu untersuchenden, degenerierten Punkt gegeben. Ist eine differenzierbare Kurve $\mathbb{R} \supset J \to I \times \mathbb{R}$, $t \mapsto (\lambda(t), u(t))$ von Lösungen gegeben, das heißt, es gelte $F(\lambda(t), u(t)) = 0$ für alle $t \in J$, so definiert man den nichtlinearen Operator

$$\tilde{F}(t, u) := F(\lambda(t), u(t) + u).$$

Dann ist jeder Punkt der Menge $\{(t, 0) : \, t \in J\}$ eine Lösung von $\tilde{F}(t, u) = 0$ und jede sekundäre Bifurkation von der genannten Lösungskurve der Gleichung $F(\lambda, u) = 0$ ist eine Bifurkation von der trivialen Lösungskurve zu $\tilde{F}(t, u) = 0$. In diesem Sinne kann man sich bei der Bifurkationstheorie auf solche von der trivialen Lösung beschränken.

Möchte man Bifurkation im Punkte $(\lambda_0, 0)$ beweisen, so benötigt man zusätzlich zur einfachen Degeneriertheit des Punktes eine gewisse Transversalitätsbedingung, welcher zum Beispiel durch die Forderung der Existenz von $\partial^2_{\lambda u} F(\lambda_0, 0)$ und $\partial^2_{\lambda u} F(\lambda_0, 0)[w_0] \notin \operatorname{Im}(\partial_u F(\lambda_0, 0))$ genüge getan ist. Dabei ist der Kern der Linearisierung durch $\ker(\partial_u F(\lambda_0, 0)) = [w_0]$ gegeben und das Bild ist mit Im bezeichnet. Trivialerweise kann man keine Bifurkation erwarten, wenn die Gleichung gar nicht von λ abhängt, auch wenn die Ableitung nach u einen nichttrivialen Kern besitzt. Ebenso verhielte es sich, wenn man in dem einfachen Beispiel $x^3 - \lambda x = 0$ den Parameter durch $-\lambda^2$ ersetzt, folglich die Gleichung $x^3 + \lambda^2 x = 0$ betrachtet. Auch wenn die Linearisierung in $(0, 0)$ durch 0 gegeben ist, und somit $\mathbb{R}$ im Kern der Abbildung liegt, so besitzt die Gleichung einzig die triviale Lösung für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

Die ursprüngliche Version des lokalen Bifurkationssatzes lautet wie folgt:

Theorem 3.1 (Crandall-Rabinowitz,[**Kie06**], Theorem I.5.1). *Es seien X, Y Banachräume und V eine Umgebung von $0 \in X$, sowie $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $\lambda_0 \in I$. Die Funktion*

$$F : \, I \times V \to Y$$

habe die folgenden Eigenschaften:

a) $F(\lambda, 0) = 0$ *für alle* $\lambda \in I$.
b) Die partiellen (Fréchet-)Ableitungen $\partial_u F$, $\partial_\lambda F$, $\partial^2_{\lambda u} F$ *existieren und sind stetig.*
c) $\ker(\partial_u F(\lambda_0, 0))$ *ist eindimensional und* $\operatorname{Im}(\partial_u F(\lambda_0, 0))$ *hat endliche Kodimension.*
d) $\partial^2_{\lambda u} F(\lambda_0, 0)[w_0] \notin \operatorname{Im}(\partial_u F(\lambda_0, 0))$, *wobei* $\ker \partial_u F(\lambda_0, 0) = [w_0]$ *gilt.*

Dann gilt folgende Aussage: Ist Z ein beliebiges Komplement von $\ker(\partial_u F(\lambda_0, 0))$ *in X, so gibt es eine offene Umgebung U von $(\lambda_0, 0)$ in $I \times X$, ein Intervall $(-T, T)$ und stetige Funktionen*

$\lambda : (-T, T) \to I$ *und* $\psi : (-T, T) \to Z$ *mit* $\lambda(0) = \lambda_0$ *und* $\psi(0) = 0$ *derart, dass gilt:*

$$F^{-1}(0) \cap U = \{(\lambda(t), tw_0 + \psi(t)),\, t \in (-T, T)\} \cup \{(t, 0) :\, (t, 0) \in U\}.$$

Gilt zusätzlich $F \in C^2(I \times V, X)$, so ist die Lösungskurve $(\lambda(t), tw_0 + \psi(t))$ differenzierbar (siehe [**Kie06**]). Sind ferner X, Y Hilberträume, so können die Projektionen auf $[w_0]$ als Orthogonalprojektion gewählt werden, um die Rechnung zu vereinfachen. Im Allgemeinen kann man auf die Fréchet-Differenzierbarkeit nicht verzichten. Ein entsprechendes Beispiel, bei welchem in einem Eigenwert des linearen Teils der Gleichung (im entsprechend verallgemeinerten Sinn) keine Verzweigung auftaucht, sowie die Untersuchung von Kriterien für Bifurkation von nichtlinearen Gleichung ohne die Fréchet-Differenzierbarkeit ist in [**Stu14**] zu finden. Später wird das Resultat auf Gleichung (34) angewandt. Die Tatsache, dass der Parameter λ als spektraler Shift in der Gleichung auftaucht, erlaubt es den Teil c) in der Voraussetzung von 3.1 umzuformulieren. Man ersetzt die Bedingung c) dadurch, dass λ ein einfacher Eigenwert der Linearisierung in der trivialen Lösung ist. Die Linearisierung in der trivialen Lösung können wir als einen selbstadjungierten Operator im Hilbertraum verstehen. Jene Selbstadjungiertheit macht die Voraussetzung über die Kodimension des Bildes überflüssig, da dies automatisch folgt. Ferner ist die Eigenschaft d) auch erfüllt, da $\partial^2_{\lambda u} F(\lambda, u) = -I \in L(X, Y)$ ist.

Über den Ursprung von Verzweigungsästen hinaus ist man nun daran interessiert, wie solche Zweige weiter verlaufen. Mögliche Szenarien wären eine Nichtfortsetzbarkeit, sowie auch Divergenz ins Unendliche. Dabei kann sowohl der Parameterbereich des Zweiges unbeschränkt sein, als auch die Norm im Banachraum X divergieren. Weiter ist ein Zurücklaufen oder ein Zusammenlaufen mit einem anderen Ast denkbar. Hat der Bereich, in welchem man nach Lösungen sucht, einen Rand, so ist es auch möglich, dass die Lösungskurve in diesen hineinläuft.

Der globale Verzweigungssatz von Rabinowitz liefert hier ein komplettes Bild. Der Nachteil ist, dass er die folgende spezielle Form des nichtlinearen Operators voraussetzt:

$$F(\lambda, u) = u + f(\lambda, u),$$

mit einer kompakten Abbildung $f : I \times X$. Der Satz wird unter Verwendung des Index von Leray und Schauder (siehe [**Kie06**]) formuliert, welcher für lineare Operatoren der Bauart $I + K$ mit einem kompakten Operator K einer leicht zu berechnenden Formel folgt. Es seien dazu die negativen Eigenwerte von $I + K$ mit $\mu_1, \ldots, \mu_l$ bezeichnet und die entsprechenden algebraischen Vielfachheiten seien $m_1, \ldots, m_l$. Eigenwerte kompakter Operatoren häufen sich höchstens in 0. Das heißt, die Eigenwerte von $I + K$ häufen sich höchstens in 1. Damit gibt es nur endlich viele negative Eigenwerte. Der Index ist in diesem Fall gegeben durch

$$\operatorname{ind}(I + K) = (-1)^{m_1 + \ldots + m_l}.$$

Wir geben nun eine leicht modifizierte Version des globalen Bifurkationssatzes in [**CR71**]. Der Operator, welchen wir später definieren wollen, ist nicht auf dem gesamten Parameterbereich, sondern lediglich auf einem beschränkten Intervall, definiert. Dies ändert am Beweis nichts, da dort lokal um den als beschränkt angenommenen Zweig von Lösungen argumentiert wird.

THEOREM 3.2. *Es sei* $\Omega \subset \mathbb{R} \times X$ *offen und die Funktion*

$$f : \Omega \to X,\ (\lambda, u) \mapsto f(\lambda, u)$$

sei stetig und Fréchet-differenzierbar in u mit $\partial_u f(\cdot, u) \in C(\mathbb{R}, L(E,E))$. *Für jede beschränkte, abgeschlossene Teilmenge* $A \subset \Omega$ *sei* $f|_A : A \to E$ *kompakt. Betrachte die Gleichung*

$$F(\lambda, u) := u + f(\lambda, u) = 0.$$

Wechselt der Index von $\partial_u F(\lambda, 0)$ *in* λ_0 *das Vorzeichen, so gilt für jene Zusammenhangskomponente* C_{λ_0} *von* $\overline{\mathscr{S}}$, *welche* $(\lambda_0, 0)$ *enthält, eine der folgenden Alternativen:*

a) $\exists \tilde{\lambda} \neq \lambda_0 : \ (\tilde{\lambda}, 0) \in C_{\lambda_0}$.
b) $\operatorname{dist}(C_{\lambda_0}, \partial\Omega) = 0$.

Der Vorzeichenwechsel des Indexes ist formal beschrieben durch die folgende Aussage: Es gibt ein $\varepsilon > 0$, sodass *ind*$(I + \partial_u f(\lambda_1, \cdot), 0) \neq$ *ind*$(I + \partial_u f(\lambda_2, \cdot), 0)$ für alle $\lambda_1 \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0)$ und $\lambda_2 \in (\lambda_0, \lambda_0 + \varepsilon)$.

Eine Verschärfung des globalen Verzweigungssatzes wird unter der Voraussetzung der Analytizität des nichtlinearen Operators ermöglicht. Die Autoren Buffoni und Toland beweisen in Ihrer "Analytic Bifurcation Theory" [**BT16**] eine entsprechende Version. Um einzusehen, dass ihre Resultate auch im vorliegenden Problem Anwendung findet, klären wir eingangs die Frage der Analytizität. In der Terminologie halten wir uns in diesem Abschnitt an die von den Autoren vorgeschlagene.

Definition 3.3. *Es sei* $U \subseteq X$ *eine offene, zusammenhängende Teilmenge eines Banachraums* X, *sowie* Y *ein weiterer Banachraum. Eine Funktion* $F : U \to Y$ *heißt analytisch im Punkt* $x_0 \in X$, *falls stetige und symmetrische multilineare Abbildungen* $m_k : X^k \to Y$, $(k \in \mathbb{N})$, *sowie ein* $r > 0$ *und* $m_0 \in Y$ *existieren, sodass gilt:*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} r^k \|m_k\|_{(X^k \to Y)} = M < \infty,$$

und für alle $x \in X$ *mit* $\|x - x_0\|_X < r$ *gilt:*

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k[\underbrace{x - x_0, \ldots, x - x_0}_{k \text{ Einträge}}].$$

Entsprechend heißt F *analytisch, falls* F *analytisch in* x_0 *ist für jedes* $x_0 \in U$.

Die Konvergenz der Potenzreihe ist in der Norm von Y zu verstehen und die Cauchykonvergenz beweist man durch Abschätzung gegen eine geometrische Reihe. Der analytische Bifurkationssatz macht nun zusätzlich Aussagen über die Verteilung der degenerierten Punkte entlang eines (ausgewählten) Pfades. Hier findet sich die Eigenschaft des Nichthäufens von Nullstellen bei analytischen Funktionen wieder.

Theorem 3.4 (Analytischer Bifurkationssatz, [**BT16**], Theorem 9.1.1). *Es seien die Bezeichnungen wie im globalen Bifurkationssatz 3.2. Sei zusätzlich* f *bzw.* F *eine analytische Funktion. Dann gilt:*

(1) Es gibt eine stetige Kurve $[0, \infty) \to \Omega, t \mapsto (\lambda_t, u_t)$ *in* C_{λ_0}, *für die gilt: Entweder* $\lim_{t \to \infty} \operatorname{dist}((\lambda_t, u_t), \partial\Omega) = 0$, *oder es existiert* $T > 0$ *mit* $(\lambda_{t+T}, u_{t+T}) = (\lambda_t, u_t)$ *für alle* $t \in [0, \infty)$.
(2) Die Menge $\{t \geq 0 : \operatorname{Ker}(\partial_u F(\lambda_t, u_t)) \neq \{0\}\}$ *hat keine Häufungswerte.*

(3) *In jedem Punkt dieser Kurve gibt es lokal eine analytische Umparametrisierung in folgendem Sinne: Zu jedem* $t^* \in (0,\infty)$ *existiert eine Funktion* $\rho : (-1,1) \to (0,\infty)$ *mit* $\rho(0) = t^*$ *derart, dass die Abbildung*

$$(-1,1) \to \Omega,\ t \mapsto (\lambda_{\rho(t)}, u_{\rho(t)})$$

analytisch ist. Darüber hinaus kann λ *als Funktion von* t *injektiv auf* $(t^* - \varepsilon, t^*]$ *und* $[t^*, t^* + \varepsilon)$ *gewählt werden, sofern* $\varepsilon > 0$ *hinreichend klein gewählt ist. In* $t^* = 0$ *erhält man ähnliche Eigenschaften auf rechtsseitige Umgebungen.*

Bemerkung 3.5. (1) *Aus der letzten Eigenschaft folgt nicht, dass* C_{λ_0} *glatt ist (im Sinne von Mannigfaltigkeiten), da die Ableitung der Umparametrisierung verschwinden kann und somit nicht notwendigerweise Glattheit folgt. Beispielsweise kann die Lösungskurve der Gleichung* $(y-x)^2 - x^3 = 0$ *durch die analytische Parametrisierung* $t \mapsto (t^2, t^2 + t^3)$ *gegeben werden, ohne dass die dadurch definierte Menge eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.*

(2) *Die Injektivität auf halbseitigen Umgebungen lässt ein "Zurücklaufen" des Astes wie Gleise in einem Kopfbahnhof (siehe z. B. Stuttgart bis mindestens 2025) zu.*

2. Sekundäre Bifurkation von Zweigen mit Knick

Wie im vorhergehenden Abschnitt gesehen, können selbst bei analytischen Funktionen Punkte auftreten, in denen der Zweig in gewisser Weise zurückläuft. Als notwendiges Kriterium hat sich dabei herausgesellt, dass in solchen Punkten eine nichtinvertierbare Linearisierung auftritt. Wir wollen in diesem Teil hinreichende Bedingungen geben, dass in diesen Punkten zusätzlich sekundäre Verzweigung auftritt.

Im Falle regulärer Kurven (das heißt, differenzierbar und die Ableitung ist nirgends 0) können sekundäre Bifurkationen auf ein Verzweigungsproblem von der trivialen Lösung zurückgeführt werden. Hat man eine Parametrisierung des Lösungszweiges der Form $(\lambda(t), u(t))$ und einen Punkt $(\lambda(0), u(0)) =: (\lambda_0, u_0)$, in welchem Verzweigung nachgewiesen werden soll, so definiert man sich die nichtlineare Abbildung $\tilde{F}(t,u) := F(\lambda(t), u + u(t))$ und betrachtet dort entsprechende Bifurkation von der trivialen Lösung.

Bei nichtregulären, differenzierbaren Kurven verschwinden die Ableitungen in 0, was ein Zurücklaufen unter der Voraussetzung der Analytizität überhaupt erst ermöglicht. Das hat zur Folge, dass die gemischte Ableitung $\partial^2_{\lambda u}\tilde{F}$ in (λ_0, u_0) die Nullabbildung ist. Der lokale Verzweigungssatz von Crandall-Rabinowitz ist somit nicht direkt anwendbar.

Im Folgenden werden wir den Beweis dieses lokalen Verzweigungssatzes modifizieren, um sekundäre Verzweigungen zu beweisen. Der Beweis wird häppchenweise geliefert und anschließend zusammengefügt. Wir beginnen mit der Lyapunov-Schmidt-Reduktion (vergleiche z. B [**Kie06**]):

Lemma 3.6. *Es sei* $F : (-a,a) \times X \to X$ *ein analytischer Operator in einem Hilbertraum* X. *Ferner sei* $\partial_u F(\lambda_0, u_0)$ *ein selbstadjungierter Operator mit* $\ker(\partial_u F(\lambda_0, u_0)) = [w_0]$. *Sei weiter* $P : X \to [w_0]$ *die orthogonale Projektion auf den Kern.*

Dann gibt es eine Umgebung $(-\delta + \lambda_0, \delta + \lambda_0) \times \{t w_0 : t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)\} \times V$ *von* (λ_0, u_0) *mit offenen Umgebungen* $(-\varepsilon, \varepsilon)$ *von* $t_0 := \langle u_0, w_0 \rangle_X$ *und* V *von* $(1-P)u_0$, *sowie eine analytische*

Abbildung $\psi : (-\delta + \lambda_0, \delta + \lambda_0) \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times V \to [w_0]^\perp$, *sodass die Gleichung* $F(\lambda, u) = 0$ *auf* $(-\delta + \lambda_0, \delta + \lambda_0) \times \{tw_0 : t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)\} \times V$ *äquivalent ist zu* $\psi(\lambda, t) = (1 - P)u$.

Beweis. Die Gleichung $F(\lambda, u) = 0$ ist äquivalent zum System

$$PF(\lambda, tw_0 + z) = 0,$$
$$(1 - P)F(\lambda, tw_0 + z) = 0,$$

wobei $z = (1-P)u \in [w_0]^\perp$ und $t = \langle u, w_0\rangle_X$ ist. Definiere dann $G : (-a, a) \times \mathbb{R} \times [w_0]^\perp \to [w_0]^\perp$ durch $G(\lambda, t, z) = (1-P)F(\lambda, tw+z)$. Dann ist G analytisch, da die Projektion P endlich dimensional ist. Mittels $t_0 = \langle u_0, w_0\rangle_X$ und $z_0 := (1 - P)u_0$ gilt $G(\lambda_0, t_0, z_0) = 0$ und $\partial_z G(\lambda_0, t_0, z_0) = (1-P)\partial_u F(\lambda_0, u_0)$ ist bijektiv. Nach dem Satz über implizit definierte Funktionen ([**BT16**, Theorem 4.5.4]) gibt es eine offene Umgebung und eine analytische Funktion ψ wie behauptet. □

Korollar 3.7. *Für* $(\lambda, t) \in (-\delta + \lambda_0, \delta + \lambda_0) \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ *und* $u = tw_0 + \psi(\lambda, t)$ *mit* ψ *wie oben gelten folgende Identitäten:*

a)
$$\partial_t \psi(\lambda_0, t_0) = 0,$$

b)
$$\partial_\lambda \psi(\lambda, t) = -\partial_u F(\lambda, tw_0 + \psi(\lambda, t))^{-1} \left[(1 - P)\partial_\lambda F(\lambda, tw_0 + \psi(\lambda, t))\right],$$

c)
$$\partial^2_{\lambda\lambda} \psi(\lambda, t) = -\partial_u F(\lambda, tw_0 + \psi(\lambda, t))^{-1}\big((1 - P)\partial^2_{\lambda\lambda} F(\lambda, tw_0 + \psi(\lambda, t))\big),$$

d)
$$\partial^2_{tt} \psi(\lambda, t) = -\left(\partial_u F(\lambda, tw_0 + \psi(\lambda, t))\right)^{-1} \Big[(1 - P)\partial^2_{uu} F(\lambda, tw_0 + \psi(\lambda, t)) \\ [w_0 + \partial_t \psi(\lambda, t),\ w_0 + \partial_t \psi(\lambda, t)]\Big],$$

e)
$$\partial^2_{\lambda\, t} \psi(\lambda, t) = -\,\partial_u F(\lambda, tw_0 + \psi(\lambda, t))^{-1}\Big((1 - P)\partial^2_{\lambda\, u} F(\lambda, tw_0 + \psi(\lambda, t))[w_0 + \partial_t \psi(\lambda, t)] \\ + (1 - P)\partial^2_{uu} F(\lambda, tw_0 + \psi(\lambda, t))[w_0 + \partial_t \psi(\lambda, t), \partial_\lambda \psi(\lambda, t)]\Big).$$

Wir bemerken an dieser Stelle, dass die Invertierbarkeit von $\partial_u\left((1 - P)F\right)$ in einer kleinen Umgebung um (λ_0, u_0) erhalten bleibt. Dies ist eine Folgerung aus Lemma 3.8. Wir verstehen ferner die Inverse $DF_u(\lambda, u)^{-1}$ als die Umkehrabbildung der auf $[w_0]^\perp$ eingeschränkten Abbildung.

Beweis. Für alle $(\lambda, t) \in (-\delta + \lambda_0, \delta + \lambda_0) \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ erhält man aus der Definition der Funktion ψ in Lemma 3.6:

$$(1 - P)F(\lambda, tw_0 + \psi(\lambda, t)) = 0.$$

Differenziert man die Gleichung nach t bzw. λ, so erhält man Formeln für die partiellen Ableitungen von ψ:

$$0 = \frac{d}{d\lambda}(1 - P)F(\lambda, tw_0 + \psi(\lambda, t)) =(1 - P)\partial_\lambda F(\lambda, tw_0 + \psi(\lambda, t)) \\ + \partial_u F(\lambda, tw_0 + \psi(\lambda, t))[(1 - P)\partial_\lambda \psi(\lambda, t)].$$

Da $\psi(\lambda,t) \in [w_0]^\perp$ für alle $(\lambda,t) \in (-\delta+\lambda_0, \delta+\lambda_0) \times (t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)$ gilt, erhält man selbiges für die Ableitungen. Daher gilt $(1-P)\partial_\lambda\psi(\lambda,t) = \partial_\lambda\psi(\lambda,t)$. Folglich hat man:

$$\partial_\lambda\psi(\lambda,t) = -\left(\partial_u F(\lambda, tw_0+\psi(\lambda,t))\right)^{-1}\left[(1-P)\partial_\lambda F(\lambda, tw_0+\psi(\lambda,t))\right].$$

Analog liefert das Ableiten nach t die Identität:

$$0 = \frac{d}{dt}(1-P)F(\lambda, tw_0+\psi(\lambda,t)) = (1-P)\partial_u F(\lambda, tw_0+\psi(\lambda,t))[w_0+\partial_t\psi(\lambda,t)].$$

Man erhält $\partial_t\psi(\lambda_0,t_0)=0$, denn in diesem Fall vereinfacht man weiter

$$0 = \partial_u F(\lambda_0,u_0)[w_0+\partial_t\psi(\lambda_0,t_0)] = \partial_u F(\lambda_0,u_0)[\partial_t\psi(\lambda_0,t_0)].$$

Somit gilt $\partial_t\psi(\lambda_0,t_0) \in [w_0]\cap[w_0]^\perp$ und folglich gilt $\partial_t\psi(\lambda_0,t_0) = 0$. Erneutes Ableiten der Gleichung führt auf die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
0 =& \frac{d^2}{d\lambda^2}(1-P)F(\lambda, tw_0+\psi(\lambda,t)) \\
=&(1-P)\Big(\partial^2_{\lambda\lambda}F(\lambda, tw_0+\psi(\lambda,t)) + 2\partial^2_{u\lambda}F(\lambda, tw_0+\psi(\lambda,t))[\partial_\lambda\psi(\lambda,t)] \\
&+ \partial_u F(\lambda, tw_0+\psi(\lambda,t))[\partial^2_{\lambda\lambda}\psi(\lambda,t)] \\
&+ \partial^2_{uu}F(\lambda, tw_0+\psi(\lambda,t))[\partial_\lambda\psi(\lambda,t), \partial_\lambda\psi(\lambda,t)]\Big).
\end{aligned}$$

Wie oben können wir umformen:

$$\begin{aligned}
\partial^2_{\lambda\lambda}\psi(\lambda,t) =& -\partial_u F(\lambda, tw_0+\psi(\lambda,t))^{-1}\Big((1-P)\big(\partial^2_{\lambda\lambda}F(\lambda, tw_0+\psi(\lambda,t)) \\
&+ 2\partial^2_{u\lambda}F(\lambda, tw_0+\psi(\lambda,t))[\partial_\lambda\psi(\lambda,t)] \\
&+ \partial^2_{uu}F(\lambda, tw_0+\psi(\lambda,t))[\partial_\lambda\psi(\lambda,t), \partial_\lambda\psi(\lambda,t)]\big)\Big) \\
=& -\partial_u F(\lambda, tw_0+\psi(\lambda,t))^{-1}\big((1-P)\partial^2_{\lambda\lambda}F(\lambda, tw_0+\psi(\lambda,t))\big).
\end{aligned}$$

Analog erhält man für die übrigen zweiten Ableitungen:

$$\begin{aligned}
0 =&(1-P)\frac{d^2}{d\lambda\, dt}F(\lambda, tw_0+\psi(\lambda,t)) \\
=&(1-P)\Big(\partial^2_{\lambda\, u}F(\lambda, tw_0+\psi(\lambda,t))[w_0+\partial_t\psi(\lambda,t)] \\
&+ \partial_u F(\lambda, tw_0+\psi(\lambda,t))[\partial^2_{\lambda\, t}\psi(\lambda,t)] \\
&+ \partial^2_{uu}F(\lambda, tw_0+\psi(\lambda,t))[w_0+\partial_t\psi(\lambda,t), \partial_\lambda\psi(\lambda,t)]\Big).
\end{aligned}$$

Dies ist wiederum äquivalent zu:

$$\begin{aligned}
\partial^2_{\lambda\, t}\psi(\lambda,t) =& -\partial_u F(\lambda, tw_0+\psi(\lambda,t))^{-1} \\
&\Big((1-P)\big(\partial^2_{\lambda\, u}F(\lambda, tw_0+\psi(\lambda,t))[w_0+\partial_t\psi(\lambda,t)] \\
&+ \partial^2_{uu}F(\lambda, tw_0+\psi(\lambda,t))[w_0+\partial_t\psi(\lambda,t), \partial_\lambda\psi(\lambda,t)]\big)\Big),
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
0 =&(1-P)\frac{d^2}{dt^2}F(\lambda, tw_0+\psi(\lambda,t)) \\
=&\Big((1-P)\big(\partial^2_{uu}F(\lambda, tw_0+\psi(\lambda,t))[w_0+\partial_t\psi(\lambda,t), w_0+\partial_t\psi(\lambda,t)]
\end{aligned}$$

$$+ \partial_u F(\lambda, tw_0 + \psi(\lambda,t))[\partial_{tt}^2 \psi(\lambda,t)]\Big)\Big).$$

Dies ist äquivalent zu:

$$\partial_{tt}^2 \psi(\lambda,t) = -\left(\partial_u F(\lambda, tw_0 + \psi(\lambda,t))\right)^{-1} \Big((1-P)\Big(\partial_{uu}^2 F(\lambda, tw_0 + \psi(\lambda,t))[w_0 + \partial_t \psi(\lambda,t), w_0 + \partial_t \psi(\lambda,t)]\Big)\Big).$$

□

Mit Hilfe der Lyapunov-Schmidt-Reduktion aus Lemma 3.6 haben wir die unendlichdimensionale Gleichung in ein System zweier Gleichungen umgeschrieben. Dabei ist lokal um den degenerierten Punkt lediglich das eindimensionale Problem zu lösen, das heißt der Anteil im Eigenraum der linearisierten Gleichung. Der Anteil in dessen Komplement folgt mit dem Satz über implizit definierte Funktionen. Wir schreiben nun

$$\phi : (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R},\ \phi(\lambda, t) := \langle F(\lambda, tw_0 + \psi(\lambda,t)), w_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

wobei die Variable t als $t := \langle u, w_0 \rangle$ verstanden werde. ε kann dabei beliebig groß gewählt werden, sofern die Linearisierung $\partial_t \phi(\lambda,t)$ für $(\lambda,t) \in (-\delta + \lambda_0, \delta + \lambda_0) \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \setminus \{(\lambda_0, t_0)\}$ bijektiv ist. Da ferner die Abbildung ψ stetig ist, ist in diesem Fall ein Blowup von u äquivalent zum Blowup von t.

Wir untersuchen nun das Verhalten der Lösungsmenge der reduzierten Gleichung in einer Umgebung dieses degenerierten Punktes. Dabei geben wir erst ein Kriterium für die Existenz verschiedener Folge von Lösungen, die gegen den degenerierten Punkt konvergieren, falls die Funktion zweimal stetig differenzierbar ist. Anschließend beweisen wir, dass falls die Funktion sogar analytisch ist, diese Folgenglieder tatsächlich bis auf endlich viele auf Zweigen liegen.

Lemma 3.8. *Es sei $\phi : (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, (λ_0, t_0) sei eine degenerierte Lösung mit $\phi'(\lambda_0, t_0) = 0$ und $\phi_{xx}(\lambda_0, t_0)$ sei indefinit. Dann gibt es zwei Graden S_1 und S_2 gegeben durch*

$$S_k = \{(\lambda_0, t_0) + \alpha w^k : \alpha \in \mathbb{R}\} \qquad k = 1, 2$$

für zwei Punkte $w^1, w^2 \in \mathbb{R}^2$ und in jeder der Zusammenhangskomponenten von

$$(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \setminus (S_1 \cup S_2)$$

gibt es mindestens eine Folge von Lösungen (λ_n, t_n), mit

$$(\lambda_n, t_n) \neq (\lambda_0, t_0) \text{ und } (\lambda_n, t_n) \to (\lambda_0, t_0) \text{ für } n \to \infty.$$

Insbesondere gilt für mindestens eine dieser Folgen: $\lambda_n > \lambda_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Die Indefinitheit der Hessematrix ist äquivalent dazu, dass diese einen postiven Eigenwert $\mu^+ > 0$ und einen negativen Eigenwert $\mu^- < 0$ hat. Die zugehörigen Eigenvektoren seien mit w^+ bzw. w^- bezeichnet. Nach Einschränkung auf eine möglicherweise kleinere Umgebung von (λ_0, t_0) können wir abschätzen:

$$\phi((\lambda_0, t_0) + s \cdot w^+) \geq \frac{\mu^+}{2} s^2,$$

$$\phi((\lambda_0, t_0) + s \cdot w^-) \leq \frac{\mu^-}{2} s^2.$$

für alle s hinreichend klein. Wir setzen daher

$$S_1 = \{(\lambda_0, t_0) + \alpha w^+ : \alpha \in \mathbb{R}\},$$
$$S_2 = \{(\lambda_0, t_0) + \alpha w^- : \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Definiere nun Polarkoordinaten durch $R \cdot \cos(\varphi) = \lambda_0 + \lambda$, $R \cdot \sin(\varphi)) = t_0 + t$, sowie Winkel $\varphi^\pm$ durch $R(\cos(\varphi^\pm), \sin(\varphi^\pm)) = (\lambda_0, t_0) + w^\pm$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $0 \leq \varphi^\pm < \pi$ gewählt. Dann erhält man für jedes hinreichend kleine $R > 0$, dass die Abbildung

$$\tau : \varphi \mapsto f((\lambda_0, t_0) + R(\cos(\varphi), \sin(\varphi)))$$

zweimal stetig differenzierbar ist. Nach dem Zwischenwertsatz (beachte $\tau(\varphi^+), \tau(\varphi^+ + \pi) > 0$ und $\tau(\varphi^-), \tau(\varphi^- + \pi) < 0$). gibt es Winkel $\varphi^R_{1,2,3,4}$ mit $\varphi^R_1 \in (\varphi^+, \varphi^-)$, $\varphi^R_2 \in (\varphi^-, \varphi^+ + \pi)$, $\varphi^R_3 \in (\varphi^+ + \pi, \varphi^- + \pi)$ und $\varphi^R_4 \in (\varphi^- + \pi, \varphi^+)$, falls $\varphi^+ > \varphi^-$ (sonst mit vertauschten Rollen von $''+''$ und $''-''$. und $\tau(\varphi^R_{1,2,3,4}) = 0$. Eine Wahl der Folge $(\lambda_n, t_n) := ((\lambda_0, t_0) + \frac{1}{n}(\cos(\varphi_k^{\frac{1}{n}}), \sin(\varphi_k^{\frac{1}{n}}))$ liefert für jedes $k = 1, 2, 3, 4$ eine entsprechende Folge von Lösungen. □

Im folgenden Lemma wollen wir beweisen, dass die Folgen von Lösungen, deren Existenz wir aus dem letzten Lemma ziehen, auch tatsächlich auf Zweigen liegen, sofern ϕ analytisch ist. Darüber hinaus charakterisiert dieses Resultat die Struktur der Nullstellenmenge von analytischen Funktionen lokal um einen (isolierten) einfach degenerierten Punkt als Knotenpunkt (das heißt gemeinsamen Punkt) endlich vieler maximal fortgesetzter Graphen analytischer Funktionen. Unter einem Graphen verstehen wir wie üblich die Menge $\mathrm{graph}(g) := \{(\lambda, g(\lambda)) : \lambda \in I\}$. Der Graph heißt maximal fortgesetzt, falls $I := (a, b)$ in folgendem Sinn maximal gewählt ist: Falls

$$C \cap (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$$

die Zusammenhangskomponente von Lösungen ist, welche $\mathrm{graph}(g)$ enthält, und eine weitere Funktion $\tilde{g} : \tilde{I} \to (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ existiert mit $I \cap \tilde{I} \neq \emptyset$ und $\mathrm{graph}(\tilde{g}) \subseteq C$, dann folgt $\tilde{I} \subseteq I$ und $g|_{\tilde{I}} = \tilde{g}|_{\tilde{I}}$. Für maximal fortgesetzte Graphen haben wir folgende Alternative:

Proposition 3.9. *Es sei $\phi : (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ analytisch, und $\partial_t \phi$ sei invertierbar auf $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \setminus \{(\lambda_0, t_0)\}$. Es sei weiter*

$$\mathrm{graph}(g) \subset \{(\lambda, t) \in (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) : \phi(\lambda, t) = 0\}$$

ein maximal fortgesetzter Graph einer analytischen Funktion. Dann gilt eine der beiden Alternativen:

a) (λ_0, t_0) *ist Häufungspunkt von* $\mathrm{graph}(g)$ *und es existiert ein*

$$(\lambda^*, t^*) \in \partial\left((\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)\right),$$

sodass (λ^*, t^*) *Häufungspunkt von* $\mathrm{graph}(g)$ *ist.*

b) *Es gibt* $(\lambda^*_{1,2}, t^*_{1,2}) \in \partial\left((\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)\right)$ *mit* $\lambda^*_1 \neq \lambda^*_2$, *welche Häufungspunkte von* $\mathrm{graph}(g)$ *sind.*

Beweis. Wir nehmen nun an, keine der beiden Alternativen träfe zu. Da $g(I) = g((a, b)) \subset (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ beschränkt ist, hat die Folge $\{g(\lambda_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge für jede Folge

$\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lambda_n \to a$ für $n \to \infty$, deren Grenzwert wir mit

$$c := \lim_{n\to\infty} g(\lambda_n)$$

bezeichnen wollen. Angenommen $(a, c) \in (\lambda_0-\delta, \lambda_0+\delta)\times(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)\setminus\{(\lambda_0, t_0)\}$, so ist $\partial_t\phi(a, c)$ invertierbar, $\phi(a, c) = 0$ und der Satz über implizit definierte Funktionen liefert eine Umgebung J von a und V von c sowie eine Funktion $\tilde{g} : J \to V$, sodass alle Lösungen von $\phi(\lambda, t) = 0$ in $J \times V$ genau von der Form $(\lambda, \tilde{g}(\lambda))$ sind. Insbesondere folgt, dass $\mathrm{graph}(g|_{I\cap J})$ auch von dieser Form ist und damit $\mathrm{graph}(g|_{I\cap J}) = \mathrm{graph}(\tilde{g}|_{I\cap J})$ gilt. Somit haben wir eine Fortsetzung gefunden, was der Maximalität von I widerspricht. Gleiches gilt für die Behandlung von b, wobei wegen $a < b$ entweder $a \neq \lambda_0$ oder $b \neq \lambda_0$ gelten muss. □

Lemma 3.10. *Es sei $\phi : (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ analytisch, und $\partial_t\phi$ sei invertierbar auf $(\lambda_0-\delta, \lambda_0+\delta)\times(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon)\setminus\{(\lambda_0, t_0)\}$. Sei weiter $\{(\lambda_n, t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\phi(\lambda_n, t_n) = 0$, und $(\lambda_n, t_n) \to (\lambda_0, t_0)$ für $n \to \infty$. Dann gibt es endlich viele maximal fortgesetzte Graphen $\{B_j\}_{j=1}^m$ mit $\phi(B_j) = 0$ und $(\lambda_n, t_n) \in \bigcup_{j=1}^m B_j$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere existiert (mindestens ein) $j_0 \in \{1, \ldots, m\}$ mit $(\lambda_0, t_0) \in B_{j_0}$.*

Beweis. Aus 3.9 erhalten wir, dass jedes der Folgenglieder auf einem maximal fortgesetzten Graphen liegt. Angenommen, es gebe unendlich viele. Dann haben diese Graphen paarweise keine gemeinsamen Punkte in

$$(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \setminus \{(\lambda_0, t_0)\},$$

da die lokale Invertierbarkeit von $\partial_t\phi$ und der Satz über implizit definierte Funktionen dies verbietet. Darüber hinaus hat jeder dieser Graphen einen Häufungspunkt am Rand

$$\partial\left((\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)\right).$$

Wählt man $R_0 > 0$ mit

$$B_{R_0}(\lambda_0, t_0) \subset (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon),$$

so gilt für jedes $R \in (0, R_0)$: $(\lambda_n, t_n) \in B_R(0)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Zu jedem dieser n betrachtet man die stetige Funktion $I \to \mathbb{R}$, $\lambda \mapsto |(\lambda, g(\lambda)) - (\lambda_0, t_0)|$ mit $I = (\lambda_n, b)$, falls $\lambda_n \geq \lambda_0$, $I = (a, \lambda_n)$, falls $\lambda_n < \lambda_0$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es einen Punkt $(\lambda^*, g(\lambda^*))$ mit

$$|(\lambda^*, g(\lambda^*)) - (\lambda_0, t_0)| = R.$$

Gibt es unendlich viele verschiedene maximal fortgesetzte Graphen, so hat die analytische Funktion

$$[-\pi, \pi) \to \mathbb{R},\ \varphi \mapsto \phi(\lambda_0 + R\cos(\varphi), \lambda_0 + R\sin(\varphi))$$

unendlich viele Nullstellen und ist somit konstant 0. Da $R \in (0, R_0)$ für ein $R_0 > 0$ beliebig war, folgt, dass ϕ auf einer Umgebung von (λ_0, t_0) konstant 0 ist und aufgrund der Analytizität identisch verschwinden muss, ein Widerspruch zur Invertierbarkeit von $\partial_t\phi$ auf

$$(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \setminus \{(\lambda_0, t_0)\}.$$

□

KAPITEL 4

Gewichtete Räume und Spektraltheorie

1. Charakterisierung von gewichteten Räumen

In diesem Abschnitt soll es um die Definition und die Untersuchung gewichteter Lebesgue- und Sobolevräume gehen. Als Gewicht wählen wir eine geglättete Version von Monomen, die wir verkürzt durch

$$\langle x \rangle := \sqrt{1+|x|^2} \qquad (x \in \mathbb{R}^N)$$

schreiben wollen. Anschließend werden die Protagonisten dieses Kapitels wie folgt definiert:

Definition 4.1. *Zu $s \in \mathbb{R}$ definiert man*

$$L^{p,s}(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^p(\mathbb{R}^N) : \ \langle x \rangle^{s/p} u \in L^p(\mathbb{R}^N)\},$$

und entsprechend

$$H^{2,s}(\mathbb{R}^N) := \{u \in H^2(\mathbb{R}^N) : \ u, |\nabla u|, \Delta u \in L^{2,s}(\mathbb{R}^N)\}.$$

Die Norm ist gegeben durch

$$\|u\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} := \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \langle x \rangle^s \, dx,$$

sowie entsprechend

$$\|u\|^2_{H^{2,s}(\mathbb{R}^N)} := \|u\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} + \sum_{k=1}^N \|\partial_k u\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} + \sum_{k,l=1}^N \|\partial_l \partial_k u\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}$$

Die Vollständigkeit von $L^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ folgt aus der Isometrie zu $L^2(\mathbb{R}^N)$ unter der Multiplikationsabbildung mit $\langle x \rangle^{s/2}$. Für den gewichteten Sobolevraum werden wir zeigen, dass $-\Delta u \in L^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ hinreichend für die Existenz der Normen der gemischten Ableitungen ist.

Eine gewichteten Variante der Sobolevräume $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ für $p \neq 2$ tritt in dieser Arbeit nicht auf. Der Leser beachte die Abgrenzung des gewichteten Raums $H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ zum Sobolevraum der p-ten Potenz und k-ten Ordnung, $W^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ aus dem ersten Teil der Arbeit.

Die Verwendung gewichteter Räume wird durch die fehlende Kompaktheit der Sobolev'schen Einbettungen motiviert. Jene ist nur gegeben, wenn das Gebiet, auf welchem die Gleichung untersucht wird, beschränkt ist. In diesem Rahmen sind auch die superlinearen, subkritischen Abbildungen, welche hier durch die Funktion g modelliert wird, kompakt. Obgleich man die Kompaktheit dieser Abbildung in $L^2(\mathbb{R}^N)$ verliert, so sorgt die Superlinearität von g **(G2)** für dessen Erhalt als Abbildung zwischen gewichteten Räumen sofern $s > 0$ gilt.

Betrachtet man ferner die Gleichung (34) als Gleichung in $L^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ und Parameter λ in der spektralen Lücke der Linearisierung, so verliert man keine Lösungen im Vergleich zur Analyse in $L^2(\mathbb{R}^N)$, sofern man $\alpha = \beta = 0$ in der Voraussetzung der Nichtlinearität fordert. Die Forderung an die Lösung, im gewichteten Raum zu liegen, bildet keine zuätzliche Einschränkung. Ist $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$

eine Lösung der nichtlinearen Gleichung, so ist u im Kern des linearen Operators $-\Delta + \tilde{V} - \lambda$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$ mit Definitionsbereich $H^2(\mathbb{R}^N)$. Dies lässt den ersten Teil dieser Arbeit Anwendung finden. Dabei ist $\tilde{V}$ definiert durch $\tilde{V} = V - \tilde{g}(x,u)$ und $\tilde{g} : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\tilde{g}(x,v) := \begin{cases} \frac{g(x,v)}{v} & v \neq 0, \\ 0 & v = 0. \end{cases} \tag{35}$$

$\tilde{V}$ erfüllt Voraussetzung **(V1)**, wie man unter Verwendung der Voraussetzung **(G2)** und **(G3)** wie folgt sieht. Es sei $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ eine Lösung von (34). Wir zeigen, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $C(\varepsilon)$ existiert, sodass die Abschätzung

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{g}(x,u)\, v^2\, dx \leq \varepsilon \|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + C(\varepsilon) \int_{\mathbb{R}^N} v^2\, dx \qquad (v \in H^1(\mathbb{R}^N))$$

gilt. Zusammen mit der Tatsache, dass V der Voraussetzung **(V1)** genügt erhält man, dass auch $\tilde{V}$ dieser Voraussetzung genügt. Tatsächlich gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{g}(x,u)|\, v^2\, dx &= \int_{\{u\neq 0\}} \frac{g(x,u)}{u} v^2\, dx \\ &\leq C \left(\int_{|u|\leq 1} \langle x\rangle^{\alpha} |u|^{\varepsilon_0} v^2\, dx + \int_{|u|\geq 1} \langle x\rangle^{\beta} |u|^{p_0-1} v^2\, dx \right). \end{aligned}$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir nun an, dass $\varepsilon_0 \leq p_0 - 1$ gilt, andernfalls kann man $|u|^{\varepsilon_0} \leq |u|^{p_0-1}$ für $|u| \leq 1$ abschätzen und mit einem Integral weiterarbeiten. Zusätzlich setzen wir $N \geq 4$ voraus. Der Fall $N \leq 3$ folgt durch Herausziehen der Supremumsnorm, falls $\alpha = \beta = 0$. Somit erhält man:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{g}(x,u)|\, v^2\, dx \leq & C \int_{\mathbb{R}^N} (\langle x\rangle^{\alpha} |u|^{\varepsilon_0} + \langle x\rangle^{\beta} |u|^{p_0-1}) v^2\, dx \\ \leq & C \|\langle x\rangle^{\frac{\alpha}{\varepsilon_0}} u\|^{\varepsilon_0}_{L^{2(\varepsilon_0+1)}(\mathbb{R}^N)} \|v\|^2_{L^{\frac{4(\varepsilon_0+1)}{\varepsilon_0+2}}(\mathbb{R}^N)} \\ & + C \|\langle x\rangle^{\frac{\beta}{p_0-1}} u\|^{p_0-1}_{L^{2p_0}(\mathbb{R}^N)} \|v\|^2_{L^{\frac{4p_0}{p_0+1}}(\mathbb{R}^N)} \\ \leq & C \|u\|^{p_0-1}_{H^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \|v\|^2_{L^{\frac{4(\varepsilon_0+1)}{\varepsilon_0+2}}(\mathbb{R}^N)} + C \|u\|^{\varepsilon}_{H^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \|v\|^2_{L^{\frac{4p_0}{p_0+1}}(\mathbb{R}^N)} \end{aligned}$$

Man beachte, dass $\frac{4(\varepsilon_0+1)}{\varepsilon_0+2} \leq \frac{4p_0}{p_0+1} < \frac{2N}{N-2}$ gelten. Ist $\alpha = \beta = 0$, so kann man die gewichtete Sobolevnorm durch die ungewichtete ersetzen. In diesem Fall folgt die Behauptung durch Interpolation und Sobolevscher Ungleichung.

Im Fall polynomiell steigender Nichtlinearitäten (das heißt α oder β ist größer 0) ist es ohnehin sinnvoll zu fordern, dass die Lösungen dieses Wachstum durch Abklingverhalten kompensieren. Die Gleichung wird dem entsprechend im gewichteten Raum $H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ betrachtet. Hat man eine Lösung in diesem Raum gefunden, liefert die Rechnung sogar exponentiellen Abfall. Dass $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ gilt, ist im Fall polynomiell wachsender Nichtlinearitäten darür nicht hinreichend.

Untersucht man Lösungen der nichtlinearen Schrödingergleichung, so hat man a priori bereits Informationen über das Abklingverhalten der Lösungen im Falle ihrer Existenz. Dennoch können wir diese Information über das Abklingverhalten nicht in vollem Umfang nutzen und exponentiell gewichtete Räume betrachten. Wir rechtfertigen diese Vorgehensweise in zwei Schritten. Zunächst wird im Teil I die Abklingrate in Abhängigkeit vom Abstand des essentiellen Spektrum eines linearen Operators beschränkt. Legt man ein exponentiell steigendes Gewicht zu Grunde, so genügen jene Lösungen zu Spektralparametern nahe des Randes des essentiellen Spektrums einer schwächeren Abklingbedingung, als es das Gewicht für die Zugehörigkeit zum Raum fordert. In Folge dessen werden derartige Lösungen nicht erfasst. Die Verwendung von polynomiell wachsenden Gewichten erhält in diesem Sinne die Hoffnung, sämtliche Lösungen, die auf einem Zweig vermutet werden, durch Lösung des Problems in einem gemeinsamen Raum zu detektieren. Ein weiteres Problem bei der Betrachtung exponentiell gewichteter Räume tritt bei der Untersuchung der Resolventenoperatoren auf. Polynomielle Gewichte verlieren beim Ableiten eine Potenz. Dies legt Induktionsbeweise nahe, um die zu beweisenden Eigenschaften auf den ungewichteten Fall zu reduzieren. Dies leisten exponentielle Gewichte nicht.

Resultierend aus Teil I gilt $\langle x\rangle^{s/2}u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ für alle $s \in \mathbb{R}$ für jede Lösung u der Gleichung. Dies ist äquivalent, dazu, dass $u \in H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ gilt, wie wir im folgenden Lemma beweisen wollen.

LEMMA 4.2. *Es gilt*

$$u \in H^{2,s}(\mathbb{R}^N) \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle x\rangle^{s/2}u \in H^2(\mathbb{R}^N).$$

BEWEIS. Zunächst berechnet man die folgenden Ableitungsterme von $\langle x\rangle^{s/2}$. Für alle $x \in \mathbb{R}^N$ gilt:

$$\begin{aligned}
\left|\nabla\left(\langle x\rangle^{s/2}\right)\right| &= \left|\frac{s}{2}x\langle x\rangle^{\frac{s}{2}-2}\right| \le \frac{s}{2}\langle x\rangle^{\frac{s}{2}-1},\\
\left|\Delta\left(\langle x\rangle^{s/2}\right)\right| &= \left|N\frac{s}{2}\langle x\rangle^{\frac{s}{2}-2} + \frac{s}{2}\left(\frac{s}{2}-2\right)|x|^2\langle x\rangle^{\frac{s}{2}-4}\right|\\
&\le \frac{|s|}{2}\left(N + \left|\frac{s}{2}-2\right|\right)\langle x\rangle^{\frac{s}{2}-2}.
\end{aligned} \tag{36}$$

Sei $u \in H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$, so gilt $\langle x\rangle^{s/2}u \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Ferner folgt mit

$$|\nabla(\langle x\rangle^{s/2}u)| \le \frac{s}{2}\langle x\rangle^{\frac{s}{2}-1}u + \langle x\rangle^{s/2}|\nabla u|,$$

dass auch $\nabla\left(\langle x\rangle^{s/2}u\right) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ liegt. Die $L^2(\mathbb{R}^N)$-Norm des Gradienten kann mittels der Ungleichung $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$, $(a, b \ge 0)$ nach oben durch $L^2(\mathbb{R}^N)$-Normen der Summanden der rechten Seite abgeschätzt werden. Ebenfalls erhält man mittels

$$\begin{aligned}
|\Delta(\langle x\rangle^{s/2}u)| \le& \frac{|s|}{2}\left(N + \left|\frac{s}{2}-2\right|\right)\langle x\rangle^{\frac{s}{2}-2}|u|\\
&+ \frac{s}{2}\langle x\rangle^{\frac{s}{2}-1}|\nabla u| + \langle x\rangle^{s/2}|\Delta u|,
\end{aligned}$$

dass auch $\Delta\left(\langle x\rangle^{s/2}u\right) \in L^2(\mathbb{R}^N)$ liegt. Folglich gilt $\langle x\rangle^{s/2}u \in H^2(\mathbb{R}^N)$.

Gilt andererseits $\langle x\rangle^{s/2}u \in H^2(\mathbb{R}^N)$, so ist $u \in L^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ per Definition. Weiter gilt mit

$$\langle x\rangle^{s/2}|\nabla u| \le |\nabla(\langle x\rangle^{s/2}u)| + \frac{s}{2}\langle x\rangle^{\frac{s}{2}-1}|u|,$$

dass auch $\langle x\rangle^{s/2}|\nabla u| \in L^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ gilt. Des Weiteren sieht man durch

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle^{s/2}|\Delta u| \le& \frac{|s|}{2}\left(N + \left|\frac{s}{2}-2\right|\right)\langle x\rangle^{\frac{s}{2}-2}|u|\\
&+ \frac{s}{2}\langle x\rangle^{\frac{s}{2}-1}|\nabla u| + |\Delta(\langle x\rangle^{s/2}u)|,
\end{aligned}$$

dass $\langle x\rangle^{s/2}\Delta u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ gilt. $\square$

Eine weitere wichtige Eigenschaft für die Charakterisierung der Sobolevräume im Zusammenhang mit dem Laplaceoperator ist das Hinreichen von $-\Delta u$, $u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ dafür dass $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ gilt. Somit braucht man keine gemischten zweiten Ableitungen zu untersuchen, um die Zugehörigkeit zum Sobolevraum zu beweisen, sondern lediglich Eigenschaften des Bildes des Operators zu kennen. Am einfachsten sieht man dies unter Verwendung der Fouriertransformation, da Ableitungsoperatoren sich nach dem Vertauschen mit dem Transformationsoperator wie Multiplikationsoperatoren mit Polynomen verhalten. Auf diese Weise kann man Sobolevräume dadurch charakterisieren, dass Ihre Elemente unter der Fouriertransformation in einem entsprechenden polynomiell gewichteten Lebesgueraum liegen. Da sich Polynome nach oben durch eine Summe derjenigen Monome mit der kleinsten und größten Potenz abschätzen lassen, kann dies wiederum im Urbild zur Zugehörigkeit der höchsten und niedrigsten Ableitung im Lebesgueraum zurück übersetzt werden.

In beschränkten Gebieten hat man die Fouriertransformation nicht mehr mit allen guten Eigenschaften zur Verfügung, und muss auf alternative Techniken zurückgreifen (vgl. [**LU68**]). Diese basieren maßgeblich auf dem Gauß'schen Integralsatz und kommen bei der Untersuchung gewichteter Räume auch zum Einsatz. Bis auf technische Zusatzterme, welcher der Ableitung von Produkten geschuldet sind, erhält man nun für den $H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$-Raum die selbe Charakterisierung über das Bild des Laplaceoperators.

Proposition 4.3. *Für jedes $s \geq 0$ existiert ein $C_s > 0$, sodass die folgende Abschätzung gilt:*

$$\|u_{xx}\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \leq C_s(\|\Delta u\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} + \|u\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}) \qquad (u \in H^{2,s}(\mathbb{R}^N)).$$

Der Fall $s = 0$ ist weniger aufwendig. Für Sobevräume auf dem Ganzraum folgt aus $\Delta u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ bereits, dass alle (gemischten) zweiten Ableitungen in $L^2(\mathbb{R}^N)$ liegen. Man erhält Letzteres mit der Fourier-Charakterisierung und dem Satz von Plancherel:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |\partial_i \partial_j u(x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\xi_i \xi_j \hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{1}{2}(\xi_i^2 + \xi_j^2)\hat{u}(\xi) \right|^2 \, d\xi \\
\leq &\int_{\mathbb{R}^N} |\xi|^2 |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi = \|\Delta u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}$$

Für $s > 0$ wird es etwas aufwendiger.

Beweis. Es sei $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ beliebig und $R > 0$ derart, dass supp $(\phi) \subseteq B_R(0)$ gilt. Dann erhält man:

$$\|\phi_{xx}\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} = \|\Delta \phi\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} - \int_{B_R(0)} (\nabla \phi \cdot \phi_{xx} - \nabla \phi \cdot \Delta \phi) \cdot \nabla \langle x \rangle^s \, dx, \tag{37}$$

denn es gilt:

$$\begin{aligned}
&\|\Delta \phi\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} = \int_{B_R(0)} (\Delta \phi)^2 \langle x \rangle^s \, dx \\
= &\int_{B_R(0)} \nabla(\nabla \phi \cdot \Delta \phi \cdot \langle x \rangle^s) \, dx - \int_{B_R(0)} \nabla \phi \cdot \nabla(\Delta \phi \cdot \langle x \rangle^s) \, dx \\
= &\int_{B_R(0)} \nabla(\nabla \phi \cdot \Delta \phi \cdot \langle x \rangle^s) \, dx - \int_{B_R(0)} \nabla \phi \cdot (\nabla \Delta \phi) \cdot \langle x \rangle^s \, dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \int_{B_R(0)} \nabla\phi \cdot \Delta\phi \cdot \nabla(\langle x\rangle^s)\, dx \\
&= \int_{B_R(0)} \nabla(\nabla\phi \cdot \Delta\phi \cdot \langle x\rangle^s)\, dx - \int_{B_R(0)} \left(\sum_{k=1}^N \partial_k\phi \cdot \partial_k\Delta\phi\right) \cdot \langle x\rangle^s\, dx \\
&\quad - \int_{B_R(0)} \nabla\phi \cdot \Delta\phi \cdot \nabla(\langle x\rangle^s)\, dx \\
&= \int_{B_R(0)} \nabla(\nabla\phi \cdot \Delta\phi \cdot \langle x\rangle^s)\, dx - \int_{B_R(0)} \nabla \left(\sum_{k=1}^N \partial_k\phi \cdot \nabla\partial_k\phi \cdot \langle x\rangle^s\right) dx \\
&\quad - \int_{B_R(0)} \nabla\phi \cdot \nabla\langle x\rangle^s \cdot \Delta\phi\, dx + \int_{B_R(0)} \sum_{k=1}^N \partial_k\nabla\phi \cdot \nabla(\partial_k\phi \cdot \langle x\rangle^s)\, dx \\
&= \int_{B_R(0)} \nabla(\nabla\phi \cdot \Delta\phi \cdot \langle x\rangle^s)\, dx - \int_{\partial B_R(0)} \sum_{k=1}^N \partial_k\phi \cdot (\nabla\partial_k\phi)\langle x\rangle^s \cdot \frac{x}{R}\, d\sigma \\
&\quad - \int_{B_R(0)} \nabla\phi \cdot \nabla\langle x\rangle^s \cdot \Delta\phi\, dx + \|\phi_{xx}\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} + \int_{B_R(0)} \nabla\phi \cdot \phi_{xx} \cdot \nabla\langle x\rangle^s\, dx \\
&= \int_{\partial B_R(0)} [\nabla\phi \cdot \Delta\phi - \nabla\phi \cdot \phi_{xx}] \cdot \frac{x}{R}\, \langle x\rangle^s\, d\sigma \\
&\quad + \int_{B_R(0)} (\nabla\phi \cdot \phi_{xx} - \nabla\phi \cdot \Delta\phi) \cdot \nabla\langle x\rangle^s\, dx + \|\phi_{xx}\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}
$$

Da ϕ nach Voraussetzung einen kompakten Träger innerhalb der Kugel hat, verschwindet das Randintegral. Weiter gilt.

$$
\begin{aligned}
\|\phi_{xx}\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} &\le C\|\nabla\phi\|_{L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)} \cdot (\|\phi_{xx}\|_{L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)} + \|\Delta\phi\|_{L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)}) + \|\Delta\phi\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \\
&\le C\|\phi\|^{\frac{1}{2}}_{L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)}\|\Delta\phi\|^{\frac{1}{2}}_{L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)} \cdot (\|\phi_{xx}\|_{L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)} + \|\Delta\phi\|_{L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)}) \\
&\quad + \|\Delta\phi\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \\
&\overset{(15)}{\le} C\eta\|\phi\|_{L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)}\|\Delta\phi\|_{L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)} + \frac{C}{2\eta}(\|\phi_{xx}\|^2_{L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)} + \|\Delta\phi\|^2_{L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)}) \\
&\quad + \|\Delta\phi\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \\
&\overset{(15)}{\le} C\eta\alpha\|\phi\|^2_{L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)} + \frac{C\eta}{4\alpha}\|\Delta\phi\|^2_{L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)} + \frac{C}{2\eta}(\|\phi_{xx}\|^2_{L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)} + \|\Delta\phi\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}) \\
&\quad + \|\Delta\phi\|^2_{L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)} \\
&\le C\eta\alpha\|\phi\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} + \left(1 + \frac{C\eta}{4\alpha} + \frac{C}{2\eta}\right)\|\Delta\phi\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} + \frac{C}{2\eta}\|\phi_{xx}\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)},
\end{aligned}
$$

für beliebige $\eta, \alpha > 0$, wobei in der letzten Zeile die Monotonie der $L^{2,s}(\mathbb{R}^N)$-Normen in s ausgenutzt wird. Wählt man $\eta > \frac{C}{2}$, so folgt die gewünschte Abschätzung. □

Als nächstes weisen wir die Kompaktheit der Nichtlinearität als Abbildung zwischen geeignet gewählten Räumen nach:

LEMMA 4.4. *Es sei $s > 0$ gegeben und g erfülle Voraussetzungen* ***(G1)- (G4)***. *Dann ist die Abbildung*

$$H^{2,s}(\mathbb{R}^N) \to L^{2,s}(\mathbb{R}^N),\ u \mapsto g(\cdot, u)$$

kompakt.

Beweis. Es sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine schwach gegen $u \in H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ konvergente Folge in $H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$. Dann ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Man erhält für jedes $R > 0$:

$$\|g(x,u_n)-g(x,u)\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} = \underbrace{\int_{B_R(0)} |g(x,u_n)-g(x,u)|^2 \langle x\rangle^s \, dx}_{=:I} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} |g(x,u_n)-g(x,u)|^2 \langle x\rangle^s \, dx}_{=:II}.$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
II \leq& 2\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)} \left(|g(x,u_n)|^2 + |g(x,u)|^2\right) \langle x\rangle^s \, dx \\
\leq& C\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)\cap\{u\leq 0\}} \langle x\rangle^{2\alpha+s}|u|^{2(1+\varepsilon_0)}\, dx + C\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)\cap\{u_n\leq 0\}} \langle x\rangle^{2\alpha+s}|u_n|^{2(1+\varepsilon_0)}\, dx \\
&+ C\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)\cap\{u\geq 0\}} \langle x\rangle^{2\beta+s}|u|^{2p_0}\, dx + C\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)\cap\{u_n\geq 0\}} \langle x\rangle^{2\beta+s}|u_n|^{2p_0}\, dx \\
=& C\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)\cap\{u\leq 0\}} \langle x\rangle^{2\alpha+s-(1+\varepsilon_0)s}(\langle x\rangle^{s/2}|u|)^{2(1+\varepsilon_0)}\, dx \\
&+ C\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)\cap\{u_n\leq 0\}} \langle x\rangle^{2\alpha+s-(1+\varepsilon_0)s}(\langle x\rangle^{s/2}|u_n|)^{2(1+\varepsilon_0)}\, dx \\
&+ C\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)\cap\{u\geq 0\}} \langle x\rangle^{2\beta+s-p_0s}(\langle x\rangle^{s/2}|u|)^{2p_0}\, dx \\
&+ C\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R(0)\cap\{u_n\geq 0\}} \langle x\rangle^{2\beta+s-p_0s}(\langle x\rangle^{s/2}|u_n|)^{2p_0}\, dx \\
\leq& \max\{(1+R^2)^{\frac{1}{2}(2\beta+s-p_0s)}, (1+R^2)^{\frac{1}{2}(2\alpha-\varepsilon_0 s)}\} \\
& C\left(\|\langle x\rangle^{s/2}u\|^{2p_0}_{H^2(\mathbb{R}^N)} + \|\langle x\rangle^{s/2}u\|^{2(1+\varepsilon_0)}_{H^2(\mathbb{R}^N)} + \|\langle x\rangle^{s/2}u_n\|^{2p_0}_{H^2(\mathbb{R}^N)} + \|\langle x\rangle^{s/2}u_n\|^{2(1+\varepsilon_0)}_{H^2(\mathbb{R}^N)}\right)
\end{aligned}$$

Dies geht gemäß **(G2)** und **(G3)** für $R \to \infty$ gegen 0 und dies gleichmäßig in n. Die Voraussetzungen gingen auch bei der Anwendung des Sobolev'schen Einbettungssatzes ein. Für den zweiten Teil erhält man mit Jensen's Ungleichung:

$$\begin{aligned}
I =& \int_{B_R(0)} |g(x,u_n)-g(x,u)|^2\langle x\rangle^s\, dx \leq (1+R^2)^{s/2}\int_{B_R(0)} |g(x,u_n)-g(x,u)|^2\, dx \\
=& (1+R^2)^{s/2}\int_{B_R(0)} \left|\int_0^1 \frac{d}{ds} g(x, su_n + (1-s)u)\, ds\right|^2 dx \\
\leq& (1+R^2)^{s/2}\int_{B_R(0)}\int_0^1 |(\partial_u g)(x, su_n+(1-s)u)[u_n-u]|^2\, ds\, dx \\
\leq& (1+R^2)^{s/2}\int_{B_R(0)}\int_0^1 \langle x\rangle^{2\gamma}|su_n+(1-s)u)|^{2q_0}|u_n-u|^2\, ds\, dx \\
\leq& (1+R^2)^{s/2+\gamma}\int_{B_R(0)} (|u_n|+|u|)^{2q_0}|u_n-u|^2\, dx \\
\leq& (1+R^2)^{s/2+\gamma}\||u_n|+|u|\|^{\frac{2q_0}{2(q_0+1)}}_{L^2(q_0+1)(\mathbb{R}^N)}\||u_n-u|\|^{\frac{2}{2(q_0+1)}}_{L^2(q_0+1)(B_R(0)}
\end{aligned}$$

Der hintere Faktor geht gegen 0 für $n \to \infty$, da die Einbettung von $H^2(B_R(0)) \hookrightarrow H^2(B_R(0))$ kompakt ist für jedes $R > 0$.

Sei nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle zunächst $R > 0$ so groß, dass $II < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Wähle anschließend $n_0 \in \mathbb{N}$ so groß, dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $II < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann folgt für diese $n \geq n_0$:

$$\|g(x, u_n) - g(x, u)\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon.$$

□

Der Beweis des Lemmas baut im Wesentlichen darauf auf, dass der Sobolev'sche Einbettungssatz für die Funktion multipliziert mit dem Gewicht angewandt werden kann und dadurch dessen Wachstum abgeschwächt wird. Zusätzlich wird benötigt, dass die Ableitung des Gewichtes durch ein Vielfaches des Gewichts selbst beschränkt werden kann. Insofern kann man das Resultat auch für zum Beispiel exponentiell wachsende Gewichte verallgemeinern.

2. Resolventenabschätzungen in gewichteten Räumen

Bei der Untersuchung von Bifurkationsphänomenen tritt als notwendige Voraussetzung für die Entstehung eines lokalen Zweiges aus der trivialen Lösung die Nichtinvertierbarkeit der Linearisierung des nichtlinearen Operators in den Fokus. Wir wollen nun die spektraltheoretischen Eigenschaften des durch die Wirkung des linearen Schrödingeroperators definierten Differentialausdrucks untersuchen, sofern wir das Regime der klassischen Lebesgueräume verlassen und auf gewichtete übergehen. Als ersten großen Verlust ist die fehlende Symmetrie zu bedauern. Ein Gewicht verursacht bei der partiellen Integration nichtsymmetrische Zusatzterme. Dem entgegensetzen können wir jedoch die Vergleichbarkeit zu dem wohl bekannten Operator auf dem ungewichteten Raum, dessen Eigenschaften hier von Nutzen sind. Die bereits erwähnten Eigenfunktionen sind exponentiell abklingend und werden daher als Elemente der gewichteten Räume die Invertierbarkeit des um den entsprechenden Spektralparameter verschobenen Operators verderben. Das Punktspektrum des Operators auf dem gewichteten Raum beinhaltet insofern das Punktspektrum des Operators im ungewichteten. Darüber hinaus können wir keine Aussagen über das Verhalten des essentiellen Spektrums treffen, wenn wir negative s zulassen. Zum Beispiel können im Eindimensionalen bei periodischen Potentialen die Elemente des essentiellen Spektrums durch Blochwellen charakterisiert werden. Diese sind beschränkt, und für $s < -1$ liegen sie in $L^{2,s}(\mathbb{R})$. Dadurch werden die Blochwellen zu Eigenfunktionen und die zugehörigen Elemente des Spektrums zu (eingebetteten Eigewerten). In diesem Abschnitt setzen wir daher global $s \geq 0$ voraus.

Zunächst wollen wir die fraglichen Operatoren definieren. Es sei

$$T_s : L^{2,s}(\mathbb{R}^N) \supset H^{2,s}(\mathbb{R}^N) \to L^{2,s}(\mathbb{R}^N),\, T_s u := (-\Delta + V)u.$$

Proposition 4.5. *T_s ist abgeschlossen.*

Beweis. Es sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ derart, dass $u_n \to u$ in $L^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ und $T_s u_n \to v$ in $L^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ gilt. Dann gilt wegen $Vu_n \to Vu$ in $L^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ auch $\Delta u_n \to -v + Vu$ in $L^{2,s}(\mathbb{R}^N)$. Folglich konvergiert u_n gemäß Proposition 4.3 auch in $H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ und daher zwingend auch gegen u. Daraus folgt $u \in H^{2,s}(\mathbb{R}^N) = D(T_s)$ und $T_s u = v$. □

Wir wollen nun eine (kompakte) Störung W_s des Operators T_s definieren, welcher die Eigenwerte aus der Lücke des essentiellen Spektrums entfernt und gleichzeitig (durch ihre Kompaktheit) das essentielle Spektrum nicht verändert. Wie eingangs erwähnt stimmen die Eigenwerte in $(-a, a)$

und die zugehörigen Eigenfunktionen von T und T_s überein. Diese seien mit $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_m$ bezeichnet, wobei ein Eigenwert der Vielfachheit m_0 auch m_0-mal gezählt wird. Im ungewichteten Fall würde eine mögliche Störung W_0 durch

$$W_0 : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N),\, W_0 u = 2a \sum_{n=1}^{m} \langle u, \psi_n \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \psi_n$$

realisiert. Dabei ist $2a$ die Breite der Lücke im essentiellen Spektrum und ψ_n seien die normierten, paarweise orthogonalen Eigenfunktionen zu λ_n zu jedem $n = 1, \ldots, m$. Dies fungiert als spektraler Shift der Eigenräume, auf welche die einzelnen Summanden projizieren. Entsprechend sind die Eigenwerte des gestörten Operators $T + W_0$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$ um $2a$ ins essentielle Spektrum oder in eine weitere Lücke verschoben. Der Operator W_0 ist kompakt, da sein Bild als Linearkombination der Eigenfunktionen endlichdimensional ist, und kann daher auf dem ganzen Raum definiert werden.

Eine leichte Modifikation der selbigen Konstruktion verspricht den gleichen Effekt im gewichteten Fall. Die Weite des spektralen Shifts wird durch die Konstante

$$M_s := a \left(\sum_{n=1}^{m} \|\psi_n\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \|\psi_n\|_{L^{2,-s}(\mathbb{R}^N)} + 1 \right) + |\lambda| \left(\sum_{n=1}^{m} \|\psi_n\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \|\psi_n\|_{L^{2,-s}(\mathbb{R}^N)} - 1 \right)$$

ersetzt, wohingegen der Störoperator W_s gegeben ist durch

$$W_s : L^{2,s}(\mathbb{R}^N) \to L^{2,s}(\mathbb{R}^N),\; W_s u := M_s \sum_{n=1}^{m} \langle u, \psi_n \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \psi_n,$$

Verwendet man die Hölderungleichung $\|\psi_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|\psi_n\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \|\psi_n\|_{L^{2,-s}(\mathbb{R}^N)}$, so erhält man

$$M_s \geq (m+1)a. \tag{38}$$

Darüber hinaus kann die Konstante M_s (lokal) unabhängig von s gewählt werden, sofern man $s \leq s_0$ für ein $s_0 \in (0, \infty)$ einschränkt. Das heißt, zu jedem $s_0 > 0$ existiert ein $M > 0$ mit der Eigenschaft $M_s \leq M$ für alle $s \in [0, s_0]$. Dazu genügt es zu zeigen, dass für jede Eigenfunktion ψ zu einem Lückeneigenwert ein $C > 0$ existiert, mit

$$\|\psi\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \cdot \|\psi\|_{L^{2,-s}(\mathbb{R}^N)} \leq C \qquad (s \leq s_0).$$

Da die Summe in der Definition von M endlich ist und die Eigenfunktionen unabhängig von s sind, liefert das die Behauptung. Da die Eigenfunktionen exponentiell abklingen, gibt es per Definition ein $E > 0$, sodass $e^{E\langle \cdot \rangle}\psi$, $e^{E\langle \cdot \rangle}\nabla\psi \in L^2(\mathbb{R}^N)$ gilt. Somit kann man mit der Hölderungleichung abschätzen:

$$\|\psi\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \cdot \|\psi\|_{L^{2,-s}(\mathbb{R}^N)} \leq \|e^{E\langle \cdot \rangle}\psi\|^2_{L^p(\mathbb{R}^N)} \cdot \|\langle \cdot \rangle^{s/2} e^{-E\langle \cdot \rangle}\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \|\langle \cdot \rangle^{-s/2} e^{-E\langle \cdot \rangle}\|_{L^q(\mathbb{R}^N)},$$

wobei $p^{-1} + q^{-1} = 1$ gilt und $p \leq \frac{2N}{(N-2)_+}$ vorausgesetzt werden muss, woraus $q \geq \frac{N}{N+1}$ folgt. Somit folgt die Beschränktheit aus der stetigen Abhängigkeit der folgenden Integrale vom Parameter s

$$\int_{\mathbb{R}^N} \langle x \rangle^{sq/2} e^{-qE\langle x \rangle}\, dx \int_{\mathbb{R}^N} \langle x \rangle^{-sq/2} e^{-qE\langle x \rangle}\, dx \leq C \qquad (s \leq s_0).$$

Zusätzlich liegt das Bild $W_s u$ als Linearkombination aus Eigenvektoren zu Lückeneigenwerten, welche exponentiell abfallen, in $H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Die Abbildung ist linear und aufgrund der Endlichdimensionalität des Bildes auch kompakt. Um die lokal gleichmäßige Beschränktheit in s und die Inklusion des Bildes in alle polynomiell gewichteten Sobolevräume zu gewährleisten, darf der Parameter s in der Definition der Störung nicht auftauchen. Wir definieren daher

$$W : L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N),\ Wu := M \sum_{n=1}^{m} \langle u, \psi_n \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \psi_n \tag{39}$$

mit der von s unabhängigen Konstante M und behandeln ihn situationsabhängig als Operator in $L^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ für ein $s \le s_0$.

Als kompakte Abbildung bildet W eine T-kompakte Störung des Operators $T : L^2(\mathbb{R}^N) \supset D(T) \to L^2(\mathbb{R}^N)$, $u \mapsto -\Delta u + Vu$ mit $D(T) = H^2(\mathbb{R}^N)$. Daraus folgt, dass $T + W$ mit Definitionsbereich $D(T + W) = D(T)$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$ ein selbstadjungierter Operator ist. Des Weiteren erhält man nach dem Satz von Weyl [**HS96**], dass das essentielle Spektrum des Operators durch die kompakte Störung unberührt bleibt: Es gilt $\sigma_{ess}(T + W) = \sigma_{ess}(T)$. Weiter gilt

Proposition 4.6. *Es gilt* $(-a, a) \subset \rho(T + W)$.

Beweis. Für alle $\lambda \in (-a, a)$ erhält man die folgenden spektrale Abschätzungen: Für $v \in [\psi_n : n = 1, \dots, m]^\perp =: U^\perp$ gilt:

$$\|(T + W - \lambda)v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|(T - \lambda)v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \ge (a - |\lambda|)\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

wohingegen für ψ_n, $n = 1, \dots, m$ gilt:

$$\begin{aligned} &\|(T + W - \lambda)\psi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|(\lambda_n + M - \lambda)\psi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ =&|\lambda_n + M - \lambda|\|\psi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \ge (M - a - |\lambda|)\|\psi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \overset{(38)}{=} (a - |\lambda|)\|\psi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Für beliebiges $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ bedient man sich des Satzes von Pythagoras und die Zerlegung

$$v = \sum_{n=1}^{m} \langle v, \psi_n \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \psi_n + \left(v - \sum_{n=1}^{m} \langle v, \psi_n \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \psi_n \right).$$

Man erhält:

$$\begin{aligned} \|(T + W - \lambda)v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} =& \sum_{k=1}^{m} |\langle (T + W - \lambda)v, \psi_n \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}|^2 \\ &+ \left\| (T + W - \lambda) \left(v - \sum_{n=1}^{m} \langle v, \psi_n \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \psi_n \right) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ =& \sum_{k=1}^{m} \underbrace{(\lambda_n + 2a - \lambda)^2}_{\ge (a - |\lambda|)^2} |\langle v, \psi_n \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}|^2 \\ &+ \left\| (T - \lambda) \left(v - \sum_{n=1}^{m} \langle v, \psi_n \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \psi_n \right) \right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ \ge& (a - |\lambda|)^2 \|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \end{aligned}$$

Damit ist $T + W$ injektiv und wegen $\lambda \notin \sigma_{ess}(T)$ auch surjektiv. Die Beschränktheit der Inversen ist ebenfalls durch diese Abschätzung gewährleistet und es gilt

$$\|(T + W - \lambda)^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)} \le (a - |\lambda|)^{-1}.$$

□

In gewichteten Sobolev-Räumen kann für kleine s auf die spektralen Eigenschaften des Operators im ungewichteten Raum zurückgegriffen werden. Mit dem Kompaktheitsresultat aus dem Lemma 4.2 ist es für die Kompaktheit des nichtlinearen Operators $f(\lambda, \cdot)$ hinreichend zu beweisen, dass die Abbildung

$$A_{\lambda,s} := (-\Delta + V + W - \lambda)^{-1} |_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} : L^{2,s}(\mathbb{R}^N) \to H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$$

stetig ist. Dabei wird sich das maximale s, für das man noch Stetigkeit erwarten kann, als abhängig von λ herausstellen. Der Beweis der Stetigkeit läuft in mehreren Schritten. Zunächst ist die Wohldefiniertheit zu klären.

Lemma 4.7. *Die Abbildung $A_{\lambda,s}$ ist wohldefiniert für alle $s \geq 0$. Das heißt: Für jedes $u \in L^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ gibt es (genau) ein $w \in H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$, sodass*

$$(-\Delta + V + W - \lambda)w = u$$

gilt.

Zunächst zeigen wir induktiv, dass die Behauptung für alle $s \geq 1$ aus der Induktionsvoraussetzung für $s-1$ folgt und zeigen anschließend, dass die Behauptung für alle $s \in (0,1)$ gilt. Die Behauptung gilt per Definition für $s = 0$ gemäß der Spektraltheorie selbstadjungierter Operatoren. Damit erhält man die Behauptung für alle $s \geq 0$.

Beweis. Angenommen die Behauptung gelte für $s-1$. Nach der Produktregel für schwache Ableitungen 1.11 erhält man für alle $v \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$:

$$\Delta(\langle x\rangle^s v) = \langle x\rangle^s \Delta v + 2\nabla(\langle x\rangle^s) \cdot \nabla v + \Delta(\langle x\rangle^s)v. \tag{40}$$

Sei $u \in L^{2,s}(\mathbb{R}^N)$, so gilt $u \in L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)$ und damit $w := (-\Delta + V + W - \lambda)^{-1}u \in H^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)$ nach Induktionsvoraussetzung. Ferner folgt aufgrund der lokalen Beschränktheit und Glattheit von $\langle\cdot\rangle^{s/2}$, dass $\langle\cdot\rangle^{s/2}w \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^N)$ gilt. Damit folgt nach Produktregel:

$$\begin{aligned}
&\langle x\rangle^{s/2}w \\
=&(-\Delta + V + W - \lambda)^{-1}\Big[(-\Delta + V + W - \lambda)(\langle x\rangle^{s/2}w)\Big] \\
=&(-\Delta + V + W - \lambda)^{-1}\Big[\langle x\rangle^{s/2}u - 2(\nabla\langle x\rangle^{s/2}) \cdot \nabla w - \Delta\langle x\rangle^{s/2}w\Big].
\end{aligned} \tag{41}$$

Aus $u \in L^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ erhält man $\langle\cdot\rangle^{s/2}u \in L^2(\mathbb{R}^N)$ und damit, dass der erste Summand in der Klammer in $L^2(\mathbb{R}^N)$ liegt. Aus der Induktionsvoraussetzung hat man $w \in H^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)$, woraus folgt:

$$\nabla w \in L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)$$

und damit ist auch der zweite Summand in $L^2(\mathbb{R}^N)$. Beim dritten Summand argumentiert man genauso: Aus $w \in H^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)$ folgt

$$\Delta w \in L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)$$

und damit insbesondere, dass der dritte Summand in $L^2(\mathbb{R}^N)$ liegt. Folglich ist der gesamte Term in der eckigen Klammer ein Element aus $L^2(\mathbb{R}^N)$ und das Bild unter $(-\Delta + V + W - \lambda)^{-1}$ sogar in $H^2(\mathbb{R}^N)$. Daher ist auch die linke Seite in $H^2(\mathbb{R}^N)$, was nach Lemma 4.2 äquivalent zu

$$w = (-\Delta + V + W - \lambda)^{-1}u \in H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$$

ist.

Sei nun $0 < s < 1$, dann sind die Funktionen $x \mapsto \nabla\langle x\rangle^s$ und $x \mapsto \Delta\langle x\rangle^s$ beschränkt. Dann liefert Gleichung (41) direkt (beachte $(-\Delta + V + W - \lambda)^{-1}u \in H^2(\mathbb{R}^N)$), dass die linke Seite in $H^2(\mathbb{R}^N)$ liegt. Damit gilt für alle $s \geq 0$:

$$(-\Delta + V + W - \lambda)^{-1}u \in H^{2,s}(\mathbb{R}^N) \qquad (u \in L^{2,s}(\mathbb{R}^N)).$$

$\square$

Anhand dieses Beweises lässt sich die Wahl von polynomiell steigenden Gewichten bestärken. Die Abschätzung der (partiellen) Ableitungen der Gewichte durch jene mit niedrigerer Potenz ist in der Form bei exponentiell steigenden Gewichten nicht möglich.

Als nächstes soll die Stetigkeit von $A_{\lambda,s}$ bewiesen werden. Dazu wird noch folgendes Lemma benötigt:

Lemma 4.8. *Für alle $v \in U^\perp := [\psi_n : n = 1, \dots, m]^\perp$ mit $\|v\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} = 1$ gilt:*

$$\sum_{n=1}^{m} \langle\langle\cdot\rangle^{\frac{s}{2}} v, \psi_n\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}\psi_n \to 0 \qquad (s \to 0,\ \textit{gleichmäßig in } v).$$

Beweis. Nach dem Mittelwertsatz gibt es zu jedem $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ ein $\eta(x) \in (0, |x|^2)$ mit

$$\langle x\rangle^s - 1 = (1 + |x|^2)^{\frac{s}{2}} - 1 = \frac{s}{2}(1 + \eta(x))^{\frac{s}{2}-1}|x|^2 \leq \frac{s}{2}|x|^2 \cdot \begin{cases} 1 & s < 2 \\ (1 + |x|^2)^{\frac{s}{2}-1} & s \geq 2 \end{cases}$$

Daraus folgt aufgrund von $\langle v, \psi_n\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0$ für alle $n = 1, \dots, m$ für $s < 2$ (Die Abschätzung für $s \geq 2$ ist uninteressant, da der Grenzwert $s \to 0$ betrachtet wird.):

$$\begin{aligned} \langle\langle x\rangle^{\frac{s}{2}} v, \psi_n\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \int_{\mathbb{R}^N} \langle x\rangle^{\frac{s}{2}} v(x)\psi_n(x)\,dx \\ = \int_{\mathbb{R}^N} (\langle x\rangle^{\frac{s}{2}} - 1)v(x)\psi_n(x)\,dx &\leq \frac{s}{4}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|\psi_n\|_{L^{2,2}(\mathbb{R}^N)} = C\frac{s}{4}. \end{aligned}$$

Damit erhält man unter Verwendung des Satzes des Pythagoras für $s < 2$ die Abschätzung:

$$\left\|\sum_{n=1}^{m} \langle\langle\cdot\rangle^{\frac{s}{2}} v, \psi_n\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}\psi_n\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \sum_{n=1}^{m} |\langle\langle\cdot\rangle^{\frac{s}{2}} v, \psi_n\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}|^2 \leq Cm\,\frac{s^2}{16} \to 0 \qquad (s \to 0). \tag{42}$$

$\square$

Lemma 4.9. *Für jedes $\lambda \in (-a, a)$ und alle $s \geq 0$ ist die Abbildung*

$$A_{\lambda,s} : L^{2,s}(\mathbb{R}^N) \to H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$$

stetig und linear. Ferner gibt es für alle $b < a$ ein $s(b) \in \mathbb{R}$, sodass für alle $0 < s < s(b)$ ein $C = C(s, b) > 0$ (unabhängig von λ) existiert, sodass gilt:

$$\|A_{\lambda,s}\| \leq C \qquad (\lambda \in [-b, b]).$$

Die Stetigkeit der Abbildung folgt direkt aus dem Satz über die offene Abbildung. Daraus erhält man aber keine Aussagen über die explizite Abhängigkeit der Operatornorm von den Parametern s und λ, daher wird hier eine Abschätzung per Hand gemacht. Wir wählen dazu die folgende Methode, welche auch bei computerunterstützen Methoden zur Abschätzung der Resolventen verwendet wird. Siehe zum Beispiel [**Plu08**].

Beweis. Es ist zu zeigen, dass eine Konstante $K > 0$ derart existiert, dass

$$\|(-\Delta + V + W - \lambda)u\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \geq K\|u\|_{H^{2,s}(\mathbb{R}^N)}$$

gilt. Dazu werden Konstanten $K_0, K_1, K_2 > 0$ berechnet, sodass für alle $u \in H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ gilt:

$$\begin{aligned} &\|(-\Delta + V + W - \lambda)u\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \geq K_0\|u\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}, \\ &\|(-\Delta + V + W - \lambda)u\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \geq K_1\|\nabla u\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}, \\ &\|(-\Delta + V + W - \lambda)u\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \geq K_2\|\Delta u\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned} \tag{43}$$

Wie oben definiert $U := [\psi_n : n = 1, \ldots, m]$ den Unterraum aufgespannt durch die Eigenfunktionen der Lückeneigenwerte. Da U ein abgeschlossener (weil endlich dimensionaler) Untervektorraum ist, hat jedes $v \in H^2(\mathbb{R}^N)$ eine eindeutige Darstellung der Form $v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in U$ und $v_2 \in U^\perp$. Zunächst berechnet man eine Konstante, welche die erste Ungleichung in (43) für alle $v_2 \in U^\perp$ erfüllt. Das Resultat für v_1 erhält man entsprechend unter Berücksichtigung des spektralen Shifts, der durch den Operator W entsteht. Für alle $v_2 \in U^\perp$ gilt mit Produktregel:

$$\begin{aligned} &\|(-\Delta + V + W - \lambda)v_2\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} = \|\langle x\rangle^{s/2}(-\Delta + V - \lambda)v_2\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &= \|(-\Delta + V - \lambda)(\langle x\rangle^{s/2}v_2) + 2\nabla\left(\langle x\rangle^{s/2}\right)\cdot\nabla v_2 + \Delta\left(\langle x\rangle^{s/2}\right)v_2\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &\geq \|(-\Delta + V - \lambda)(\langle x\rangle^{s/2}v_2)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} - 2\|\nabla\left(\langle x\rangle^{s/2}\right)\cdot\nabla v_2\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \|\Delta\left(\langle x\rangle^{s/2}\right)v_2\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \end{aligned}$$

Die Summanden der rechten Seite werden nun einzeln abgeschätzt. Als erstes werden die Abschätzungen für die Ableitungsterme von $\langle x\rangle^{s/2}$ aus (36) gebraucht. Ferner benötigt man die folgende Abschätzung, die mittels (42) folgt:

$$\begin{aligned} &\|(-\Delta + V - \lambda)(\langle x\rangle^{s/2}v_2)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ \geq&\left\|(-\Delta + V - \lambda)\underbrace{\Big(\langle x\rangle^{s/2}v_2 - \sum_{n=1}^{m}\langle\langle x\rangle^{\frac{s}{2}}v_2, \psi_n\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}\psi_n\Big)}_{\in V^\perp}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &- \left\|(-\Delta + V - \lambda)\Big(\sum_{n=1}^{m}\langle\langle\cdot\rangle^{\frac{s}{2}}v_2, \psi_n\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}\psi_n\Big)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ \geq&(a - |\lambda|)\left\|\langle x\rangle^{s/2}v_2 - \sum_{n=1}^{m}\langle\langle x\rangle^{\frac{s}{2}}v_2, \psi_n\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}\psi_n\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ &- \left\|\sum_{n=1}^{m}\langle\langle x\rangle^{\frac{s}{2}}v_2, \psi_n\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}(\lambda_n - \lambda)\psi_n\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\ \overset{(42)}{\geq}&(a - |\lambda|)\left(1 - \sqrt{Cm}\frac{s}{2}\right)\|v_2\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} - 2a\sqrt{Cm}\frac{s}{2}\|v_2\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned} \tag{44}$$

Als nächstes muss die Norm des Gradienten $\|\nabla v_2\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}$ nach oben beschränkt werden. Verwendet man die Identität

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_2\nabla v_2\cdot\nabla\langle x\rangle^s\,dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\nabla(v_2^2)\cdot\nabla(\langle x\rangle^s)\,dx = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} v_2^2\,\Delta(\langle x\rangle^s)\,dx,$$

so erhält man:

$$\|\nabla v_2\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N}\nabla v_2\cdot\nabla v_2\langle x\rangle^s\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_{\mathbb{R}^N} v_2 \nabla(\nabla v_2 \langle x\rangle^s)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^N} v_2 \Delta v_2 \langle x\rangle^s\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} v_2^2 \Delta\langle x\rangle^s\,dx \\
&\le \langle v_2, -\Delta v_2\rangle_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} + s(N+|s-2|)\|v_2\|^2_{L^{2,s-2}(\mathbb{R}^N)} \\
&\le \|v_2\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}\big(\|(-\Delta+V-\lambda)v_2\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \\
&\quad + \|(V-\lambda)v_2\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} + s(N+|s-2|)\|v_2\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}\big) \\
&\overset{(15)}{\le} \frac{1}{2}\|(-\Delta+V-\lambda)v_2\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \\
&\quad + \left(\frac{1}{2} + \|V-\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + s(N+|s-2|)\right)\|v_2\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}
$$

Wurzel ziehen liefert dann:

$$
\begin{aligned}
\|\nabla v_2\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \le& \frac{1}{\sqrt{2}}\|(-\Delta+V-\lambda)v_2\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \\
&+ \sqrt{\frac{1}{2} + \|V-\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + M + s(N+|s-2|)}\,\|v_2\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}
\tag{45}
$$

Mit der Abschätzung (36) und der Produktregel erhält man:

$$
\begin{aligned}
&\|(-\Delta+V-\lambda)v_2\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \\
\ge& \|(-\Delta+V-\lambda)(\langle x\rangle^{s/2}v_2)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} - s\|\nabla v_2\|_{L^{2,s-2}(\mathbb{R}^N)} - \frac{s}{2}\left(N + \left|\frac{s}{2}-2\right|\right)\|v_2\|_{L^{2,s-4}(\mathbb{R}^N)} \\
\ge& (a-|\lambda|)\left(1-\sqrt{Cm}\frac{s}{2}\right)\|v_2\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} - 2a\sqrt{Cm}\frac{s}{2}\|v_2\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \\
&- s\|\nabla v_2\|_{L^{2,s-2}(\mathbb{R}^N)} - \frac{s}{2}\left(N+\left|\frac{s}{2}-2\right|\right)\|v_2\|_{L^{2,s-4}(\mathbb{R}^N)} \\
\ge& \left(a-|\lambda| - \frac{s}{2}\left((3a-|\lambda|)\sqrt{Cm} + \left(N+\left|\frac{s}{2}-2\right|\right)\right)\right)\|v_2\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} - s\|\nabla v_2\|_{L^{2,s-2}(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}
$$

Daraus folgern wir mittels (45):

$$
\begin{aligned}
\|(-\Delta+V-\lambda)v_2\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \ge& \left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^{-1}\Bigg(a-|\lambda|-\frac{s}{2}\left((3a-|\lambda|)\sqrt{Cm}+\left(N+\left|\frac{s}{2}-2\right|\right)\right) \\
&-s\sqrt{\frac{1}{2}+\|V-\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}+s(N+|s-2|)}\Bigg)\|v_2\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)},
\end{aligned}
$$

für alle ($\lambda \in (-a,a)$, $v_2 \in U^\perp$). Zu $b \in (0,a)$ definieren wir $K_0(s)$ durch

$$
\begin{aligned}
K_0(s) :=& \left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^{-1}\Bigg(a-b-\frac{s}{2}\left((3a-b)\sqrt{Cm}+\left(N+\left|\frac{s}{2}-2\right|\right)\right) \\
&-s\sqrt{\frac{1}{2}+\|V\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}+b+s(N+|s-2|)}\Bigg).
\end{aligned}
\tag{46}
$$

Dann gilt für alle $\lambda \in [-b,b]$, $v_2 \in U^\perp$:

$$
\|(-\Delta+V-\lambda)v_2\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \ge K_0(s)\|v_2\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}.
$$

Beachte $K_0(0) = a-b > 0$ und die Konstante hängt stetig von s ab. Es sei $s(b)$ die (erste) positive Nullstelle von $K(s)$ (diese existiert, da $K(0) > 0$ und $K(s) \to -\infty$ für $s \to \infty$), dann ist $K(s) > 0$ für alle $0 < s < s(b)$. Ferner hängt $K_0(s)$ stetig von b ab. Entsprechend erhält man für $v_1 \in U$ unter Verwendung der Definition von M:

$$
\|(-\Delta+V+W-\lambda)v_1\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \|(-\Delta + V - \lambda)v_1 + M \sum_{n=1}^{m} \langle v_1, \psi_n\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \psi_n\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \\
&\geq M\| \sum_{n=1}^{m} \langle v_1, \psi_n\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \psi_n\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} - \|(-\Delta + V - \lambda)v_1\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \\
&= M\|v_1\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} - \| \sum_{n=1}^{m} (\lambda_n - \lambda)\langle v_1, \psi_n\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \psi_n\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \\
&\geq M\|v_1\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} - (a + |\lambda|) \sum_{n=1}^{m} \|v_1\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \|\psi_n\|_{L^{2,-s}(\mathbb{R}^N)} \|\psi_n\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \\
&\geq (a - |\lambda|)\| \sum_{n=1}^{m} \langle v_1, \psi_n\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \psi_n\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \\
&\geq (a - b)\|v_1\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}
$$

Da diese Konstante $(a-b)$ immer größer ist als $K_0(s)$, gilt $\|(-\Delta + V + W - \lambda)v\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \geq K_0(s)\|v\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}$ für alle $v \in L^{2,s}(\mathbb{R}^N)$. Für $0 < s < s(b)$ kann man nun unter Kenntnis von $K_0(s)$ die beiden weiteren Konstanten $K_1(s)$, $K_2(s)$ bestimmen. Für die Abschätzung von $\|\nabla v\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}$ erhält man ähnlich der Abschätzung (45):

$$
\begin{aligned}
\|\nabla v\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \leq& \|v\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} (\|(-\Delta + V + W - \lambda)v\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \\
&+ \|(V + W - \lambda)v\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} + s(N + |s-2|)\|v\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}) \\
\leq& K_0^{-1} \left(1 + (\|V - \lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + M + s(N + |s-2|))K_0^{-1}\right) \\
&\|(-\Delta + V + W - \lambda)v\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned} \tag{47}
$$

Damit kann $K_1 := K_0 \sqrt{K_0 + (\|V - \lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + M + s(N + |s-2|))}^{-1}$. Analog erhält man für K_2:

$$
\begin{aligned}
\|\Delta v\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \leq& (\|(\Delta + V + W - \lambda)v\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} + (\|V - \lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + M)\|v\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}) \\
\leq& (1 + K_0^{-1}(\|V - \lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + M))\|(\Delta + V + W - \lambda)v\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned} \tag{48}
$$

Definiert man nun $K := \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{K_0^2} + \frac{1}{K_1^2} + \frac{1}{K_2^2}}} > 0$, erhält man die gewünschte Abschätzung. Damit gilt dann für $s < s(b)$:

$$
\|(-\Delta + V + W - \lambda)^{-1}\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N) \to H^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{K}
$$

Da $K(s)$ unabhängig von λ folgt auch die Gleichmäßigkeit. □

Wir ergänzen sofort folgendes Korollar aus der Berechnung von $s(b)$. Ab sofort wollen wir $s_0 := \frac{2}{\sqrt{Cm}}$ festlegen.

Korollar 4.10. *Die Abbildung $b \mapsto s(b)$ ist invertierbar, sofern $s(b) < s_0$ gilt.*

Beweis. Aus der Darstellung von K_0 in (46) erkennt man

$$
\partial_b K_0 = \left(1 + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)^{-1} \left(-1 + \frac{s\sqrt{Cm}}{2}\right) > 0
$$

für $s(b) < s_0$. Der Satz über implizit definierte Funktionen liefert dann die Auflösbarkeit in jeder Umgebung des Tupels $(b, s(b))$ mit $s(b) < \frac{2}{\sqrt{Cm}}$, was äquivalent zur Invertierbarkeit der genannten Abbildung ist. □

KAPITEL 5

Verzweigung von Lückeneigenwerten

In diesem Kapitel wollen wir zeigen, dass sich das Bifurkationsproblem für die nichtlineare Schrödingergleichung (34) derart umschreiben lässt, dass man die Theorie aus dem abstrakten Bifurkationskapitel anwenden kann. Im ersten Teil wird die Gleichung von einem Nullstellenproblem in ein Fixpunktproblem umgewandelt. Insbesondere wird dort gezeigt, dass der besagte Operator den Voraussetzungen des globalen Satzes 3.2 genügt. Als erstes Ergebnis steht ein globales Existenzresultat eines stetigen Lösungszweiges ausgehend von einem Lückeneigenwert im Fokus.

In den darauffolgenden Abschnitten wird der Verlauf des selbigen untersucht. Wird im zweiten Abschnitt noch die Nichtdegeneriertheit vorausgesetzt, so wollen wir diese Voraussetzung abschwächen um auch Aussagen zu machen in jenen Fällen, in denen die Linearisierung in der (nichttrivialen) Lösung entlang des Zweiges ihre Bijektivität verliert. Dabei sind jedoch stärkere Einschränkungen an die Nichtlinearität zu treffen, um die Methoden aus der analytischen Verzweigungstheorie mit Satz 3.4 anwenden zu können.

1. Globale Verzweigung von Lückeneigenwerten

Um die nun folgende Untersuchung zu motivieren und die Abhandlung des Vorgängerkapitels im Nachhinein mit Sinn zu füllen, wollen wir zunächst die folgende formale Rechnung darlegen. Die Umformungsschritte, derer wir uns bedienen, werden gerechtfertigt, sobald durch die Angabe des Definitionsbereichs der Operator vollständig definiert ist. Es sei (λ, u) eine Lösung von (34) und W der Störoperator gemäß (39). Dann formen wir um:

$$\begin{aligned} -\Delta u + Vu - \lambda u &= g(\cdot, u) \\ \Leftrightarrow -\Delta u + Vu + Wu - \lambda u &= g(\cdot, u) + Wu \\ \Leftrightarrow u &= (-\Delta + V + W - \lambda)^{-1} \left(g(\cdot, u) + Wu\right). \end{aligned}$$

Wir definieren also den nichtlinearen Operator f wie folgt: Zunächst fixieren wir (aus technischen Gründen) ein $s_0 > 0$, um wie im vorhergehenden Kapitel eine gleichmäßige Schranke für M_s zu finden. Diese erlaubt die Definition des Störoperators W. Dann ist $A_{\lambda,s}$ für alle $s \leq s_0$ und $\lambda \in (-b_s, b_s)$ wohldefiniert. Wir setzen

$$f:\, (-b_s, b_s) \times H^{2,s}(\mathbb{R}^N) \to H^{2,s}(\mathbb{R}^N),\; f(\lambda, u) := A_{\lambda,s}\left(g(\cdot, u) + Wu\right),$$

wobei s und b_s ersetzt werden können durch b und $s(b)$, wenn man $b < a$ als erstes definiert und s als zugehörigen, für die Konstruktion zulässigen, Parameter versteht. Hierbei soll lediglich die Kopplung der beiden Konstanten gemäß der Positivitätsbedingung von K_0 bzw. Korollar 4.10 verdeutlicht werden. Wir weisen nun die benötigten Voraussetzungen für Theorem 3.2 nach und formulieren anschließend das Hauptresultat.

Proposition 5.1. *Für jedes $b < a$ gibt es ein $s(b)$, sodass für alle $s < s(b)$ die folgende Aussage gilt: Die Abbildung f ist stetig und kompakt auf $[-b,b] \times H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$.*

Beweis. Es sei $K \in \{W, (u \mapsto g(\cdot,u))\}$. Betrachte eine beschränkte Folge $\{(\lambda_n,u_n)\}_{n=1}^{\infty}$ in $[-b,b] \times H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$. Dann ist insbesondere $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt und besitzt eine konvergente Teilfolge. Ebenso besitzt $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine schwach konvergente Teilfolge, da $H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ als Hilbertraum reflexiv ist. Bezeichne $\overline{\lambda}$ bzw. $\overline{u}$ diese Grenzwerte. Da K kompakt ist (siehe Lemma 4.4), konvergiert $Ku_{n_k} \to K\overline{u}$. Damit und mit der Resolventenformel [**MB75**, Theorem VI.5 und Korollar] erhält man

$$
\begin{aligned}
&\|A_{\lambda_{n_k},s}Ku_{n_k} - A_{\overline{\lambda},s}K\overline{u}\|_{H^{2,s}(\mathbb{R}^N)}\\
\le&\|(-\Delta+V+W-\lambda_{n_k})^{-1}Ku_{n_k} - (-\Delta+V+W-\overline{\lambda})^{-1}Ku_{n_k}\|_{H^{2,s}(\mathbb{R}^N)}\\
&+\|(-\Delta+V+W-\overline{\lambda})^{-1}Ku_{n_k} - (-\Delta+V+W-\overline{\lambda})^{-1}K\overline{u}\|_{H^{2,s}(\mathbb{R}^N)}\\
=&|\lambda_{n_k}-\overline{\lambda}|\|(-\Delta+V+W-\lambda_{n_k})^{-1}(-\Delta+V+W-\overline{\lambda})^{-1}Ku_{n_k}\|_{H^{2,s}(\mathbb{R}^N)}\\
&+\|(-\Delta+V+W-\overline{\lambda})^{-1}(K(u_{n_k})-K(\overline{u}))\|_{H^{2,s}(\mathbb{R}^N)}\\
\le&C|\lambda_{n_k}-\overline{\lambda}| + C\|K(u_{n_k})-K(\overline{u})\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \to 0 \quad (k\to\infty),
\end{aligned}
$$

da sowohl $\{u_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ beschränkt, sowie die Norm der Resolventen gleichmäßig in λ beschränkt ist. □

Die Differenzierbarkeit von f erhält man wie folgt:

Proposition 5.2. *Angenommen, die Voraussetzungen **(G1)-(G4)** sind erfüllt. Dann ist die Abbildung*

$$f : (-b_s,b_s) \times H^{2,s}(\mathbb{R}^N) \to H^{2,s}(\mathbb{R}^N),\ (\lambda,u) \mapsto A_{\lambda,s}(g(x,u)+Wu).$$

Fréchet-differenzierbar bezüglich u mit Ableitung $\partial_u f$ definiert durch

$$\partial_u f(\lambda,u)[v] = A_{\lambda,s}(\partial_u g(x,u)v + Wv)$$

Beweis. Es seien $u,v \in H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$, dann gilt:

$$
\begin{aligned}
&\|f(\lambda,u+v)-f(\lambda,u)-A_{\lambda,s}(\partial_u g(x,u)v+Wv)\|_{H^{2,s}(\mathbb{R}^N)}\\
=&\|A_{\lambda,s}(g(x,u+v)-g(x,u)-\partial_u g(x,u)v)\|_{H^{2,s}(\mathbb{R}^N)}\\
\le&C\|g(x,u+v)-g(x,u)-\partial_u g(x,u)v\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}\\
=&C\left\|\int_0^{v(x)}\partial_u g(x,u(x)+\sigma)\,d\sigma - \partial_u g(x,u(x))v(x)\right\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}\\
=&C\left\|\langle x\rangle^{\frac{s}{2}}|v(x)|\cdot\left(\max_{\sigma\in[-|v(x)|,|v(x)|]}(\partial_u g(x,u(x)+\sigma)-\partial_u g(x,u(x))\right)\right\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\\
\le&C\left\|\max_{\sigma\in[-|v(x)|,|v(x)|]}\partial_u g(x,u(x)+\sigma)-\partial_u g(x,u(x))\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\|\langle x\rangle^{\frac{s}{2}}v\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{2}\\
\le&C\left\|\max_{\sigma\in[-|v(x)|,|v(x)|]}\partial_u g(x,u(x)+\sigma)-\partial_u g(x,u(x))\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\|v\|_{H^{2,s}(\mathbb{R}^N)}, \qquad q\le\frac{2N}{(N-4)_+}
\end{aligned}
$$

Damit ist es hinreichend zu zeigen, dass gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left|\max_{\sigma\in[-|v(x)|,|v(x)|]}\partial_u g(x,u(x)+\sigma)-\partial_u g(x,u(x))\right|^p dx \to 0 \qquad (\|v\|_{H^{2,s}(\mathbb{R}^N)}\to 0). \tag{49}$$

Dies zeigen wir mittels majorisierter Konvergenz. Gemäß Voraussetzung **(G4)** erhält man für den Integranden:

$$\begin{aligned}\left|\max_{\sigma\in[-|v(x)|,|v(x)|]}(\partial_u g(x,u(x)+\sigma)-\partial_u g(x,u(x)))\right|^p &\leq 2^p C\langle x\rangle^{\vartheta p}(|v(x)|+|u(x)|)^{q_0 p}\\ &\leq C(\langle x\rangle^{\frac{s}{2}}(|v(x)|+|u(x)|))^{q_0 p}\end{aligned}$$

Nun ist q_0 gerade so gewählt, dass $q_0 p < \frac{2N}{(N-4)_+}$ gilt (sofern $q = \frac{2N}{(N-4)_+}$ gewählt wird) und somit erhält man die Integrierbarkeit der Majorante mit dem Einbettungssatz von Sobolev für $H^2(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{q_0 p}(\mathbb{R}^N)$. Damit folgt die Konvergenz in (49) und somit die Behauptung. □

Die letzte Voraussetzung in Theorem 3.2 folgt, sofern $\lambda_0 \in (-a, a)$ ein (isolierter) Eigenwert von T von ungerader algebraischer Vielfachheit ist, denn es gilt: $u \in \ker(I - \partial_u f(\lambda, \cdot))$ genau dann, wenn $u = \partial_u f(\lambda, u)$, was wiederum äquivalent dazu ist, dass $-\Delta u + Vu - \lambda u = 0$ und $u \in H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ gilt. Da die Eigenfunktionen zu den Eigenwerte des Schrödingeroperators aber ohnehin exponentiell abklingen, ist dies äquivalent zu $-\Delta u + Vu - \lambda u = 0$ und $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ und damit ist u Eigenfunktion zum Eigenwert λ. Der Lückeneigenwert λ_0 ist nach Voraussetzung kein Element des essentiellen Spektrums, das heißt, es existiert $\varepsilon > 0$, sodass $(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon) \cap \sigma(T) = \{\lambda_0\}$ gilt. Den Vorzeichenwechsel des Index von $\partial_u F(\lambda, \cdot)$ in λ_0 erhält man im Wesentlichen als Folge dieser spektralen Eigenschaft von T:

PROPOSITION 5.3. *Es sei* $\delta := dist(\lambda_0, \sigma(T) \setminus \{\lambda_0\})$*. Es sei weiter* $\mu \in \mathbb{R}$ *ein Eigenwert von* $\partial_u f(\lambda, 0)$ *mit der Eigenschaft*

$$|\lambda - \lambda_0| < \frac{\delta}{2} \text{ und } \left|1 - \frac{1}{\mu}\right| M < \frac{\delta}{2},$$

wobei M *die (Verschiebungs-)Konstante in der Definition des Störoperators* W *in* (39) *ist. Dann folgt*

$$(\lambda_0 - \lambda) - \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) M = 0.$$

Insbesondere folgt dann $\frac{d\mu}{d\lambda}(\lambda_0) \neq 0$*. Darüber hinaus stimmt der Eigenraum zu* μ *des Operators* $\partial_u f(\lambda, 0)$ *mit dem zu* λ_0 *des Operators* T *überein.*

BEWEIS. Es sei μ ein Eigenwert von $\partial_u f(\lambda, 0)$ mit den oben genannten Eigenschaften und es sei $v_0 \neq 0$ ein zugehöriger, normierter Eigenvektor. Das heißt, es gilt

$$\partial_u f(\lambda, 0)[v_0] - \mu v_0 = (-\Delta + V + W - \lambda)^{-1}[W v_0] - \mu v_0 = 0.$$

Da $v_0 \in H^{2,s}(\mathbb{R}^N) \subset D(T)$ gilt für ein hinreichend kleines $s > 0$, können wir dies äquivalent umformen zu:

$$(T - \lambda)v_0 - \left(\frac{1}{\mu} - 1\right) W v_0 = 0.$$

Schreibt man nun v_0 in der Form $v_0 = \alpha w_0 + v^\perp$, wobei $w_0 \in \ker(T - \lambda_0)$ und $v^\perp \in \ker(T - \lambda_0)^\perp$ gilt, so erhält man die Äquivalenz der letzten Zeile zu den folgenden beiden Gleichungen:

$$\begin{cases} \alpha(\lambda_0 - \lambda) - \alpha\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) M = 0 \\ (-\Delta + V - \lambda)v^\perp - \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) W v^\perp = 0. \end{cases} \tag{50}$$

Darüber hinaus hat man die spektrale Abschätzung

$$
\begin{aligned}
&|\langle(-\Delta+V-\lambda)v^\perp, v^\perp\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \left(1-\frac{1}{\mu}\right)\langle Wv^\perp, v^\perp\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}| \\
\geq &\frac{\delta}{2}\|v^\perp\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \left|1-\frac{1}{\mu}\right| M\|v^\perp\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
= &\left(\frac{\delta}{2} - \left|1-\frac{1}{\mu}\right| M\right)\|v^\perp\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}
$$

Damit wird die zweite Gleichung von (50) äquivalent zu $v^\perp = 0$ und somit $v_0 = w_0$. Die erste Gleichung liefert den gewünschten Zusammenhang zwischen λ und μ. Ferner können wir umformen:

$$
\begin{aligned}
(\lambda_0-\lambda) - \left(1-\frac{1}{\mu}\right) M = 0 \\
\Leftrightarrow \mu = \frac{M}{M+\lambda-\lambda_0}.
\end{aligned}
$$

Man beachte, dass $M \geq 2a > |\lambda-\lambda_0|$ gilt und folglich der Nenner positiv ist. Differenzieren liefert

$$
\frac{d\mu}{d\lambda} = -\frac{M}{(M+\lambda-\lambda_0)^2} \neq 0.
$$

□

Wir wollen nun die Anwendung des globalen Bifurkationssatzes auf zwei Arten formulieren. Zunächst schließen wir die Aussage für ein festes $s \in (0, s_0)$, wohingegen wir uns im zweiten Anlauf auf eine Aussage stürzen, die den Parameter s mit einbezieht. Der Parameter s_0 wurde im Korollar 4.10 durch $s_0 = \frac{2}{\sqrt{Cm}}$ fixiert.

Theorem 5.4. *Es sei $0 < s < s_0$ und $\lambda_0 \in (-b_s, b_s)$ ein Lückeneigenwert ungerader Vielfachheit von T in $L^2(\mathbb{R}^N)$. Ferner sei $\mathscr{S}(s)$ die Menge der nichttrivialen $H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$-Lösungen der Gleichung* (34)*. Dann hat $\overline{\mathscr{S}(s)}$ eine maximale abgeschlossene und zusammenhängende Teilmenge $C_{\lambda_0}(s)$, für welche mindestens eine der folgenden Aussagen gilt:*

(1) $C_{\lambda_0}(s)$ ist unbeschränkt in $(-b_s, b_s) \times H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$.
(2) Es gibt $\lambda_1 \in (-b_s, b_s)$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_0$ und $(\lambda_1, 0) \in C_{\lambda_0}(s)$.
(3) Für jedes $\lambda \in (-b_s, \lambda_0]$ oder für alle $\lambda \in [\lambda_0, b_s)$ existiert ein $u_\lambda \in H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ derart, dass $(\lambda, u_\lambda) \in C_{\lambda_0}(s)$ gilt.

Beweis. Zu $0 < s < s_0$ betrachte die Abbildung

$$
f : (-b_s, b_s) \times H^{2,s}(\mathbb{R}^N) \to H^{2,s}(\mathbb{R}^N),\ (\lambda, u) \mapsto A_{\lambda,s}(g(\cdot, u) + Wu).
$$

Dann ist f Fréchet-differenzierbar nach Proposition 5.1 und kompakt gemäß Proposition 5.2. Ferner wechselt der Index von $Id + \partial_u f(\lambda, 0)$ in λ_0 das Vorzeichen, da nach Propostion 5.3 genau der Eigenwert $\mu = \left(1 - \frac{\lambda_0-\lambda}{M}\right)^{-1}$ in $\lambda = \lambda_0$ die 0 mit nichttrivialer Steigung kreuzt. Für den Index gilt folglich sofern $\varepsilon > 0$ klein genug gewählt ist:

$$
\operatorname{ind} \partial_u f(\lambda_0+\varepsilon) - \operatorname{ind} \partial_u f(\lambda_0-\varepsilon) = (-1)^{m(\mu)} = -1,
$$

wobei $m(\mu)$ die Vielfachheit des Eigenwerts μ ist. Damit sind alle Voraussetzungen von Theorem 3.2 erfüllt. □

Die erste und letzte Bedingung entstammen der ersten Alternative des Satzes 3.2, welche die Konvergenz des Lösungszweiges gegen den Rand $\partial\Omega$ beschreibt. In der vorliegenden Situation wird $\Omega := (-b_s, b_s) \times H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ gewählt. Dabei wird auch klar, dass die Möglichkeiten, welche der Satz bietet, nicht disjunkt sind. So kann zum Beispiel ein Blowup am Rand des Parameterbereichs stattfinden, was zugleich die erste wie auch die letzte Aussage zutreffen lässt.

Wir ergänzen sogleich das von s abhängige Statement, welches sich direkt aus der Version für festes s ableiten lässt. Darüber hinaus wird verwendet, dass sich die gewichteten Räume für steigende s zu einer Inklusionskette aufreihen lassen. Es gilt $L^{2,s}(\mathbb{R}^N) \subseteq L^{2,s'}(\mathbb{R}^N)$ für $s \geq s'$ und selbiges ist für die zugehörigen Sobolevräume übertragbar. Somit erhalten wir:

THEOREM 5.5. *Es sei $\lambda_0 \in (-a, a)$ ein Lückeneigenwert ungerader Vielfachheit von T in $L^2(\mathbb{R}^N)$. Dann gilt für die zusammenhängenden und abgeschlossenen Teilmengen $C_\lambda(s)$ von $\overline{\mathscr{S}(s)}$ mindestens eine der folgenden Aussagen:*

(1) $\exists s^* \in (0, s_0)$: $C_{\lambda_0}(s)$ ist unbeschränkt für alle $s \in [s^*, s_0)$.

(2) $\exists \lambda_1 \in (-a, a)$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_0$, sowie $\exists s^* \in (0, s_0)$, sodass $(\lambda_1, 0) \in C_{\lambda_0}(s)$ gilt für alle $s \in (0, s^*)$.

(3) $\exists s^* \in (0, s_0)$, sodass für jedes $s \in (0, s^*)$ gilt: Entweder für alle $\lambda \in (-b_s, \lambda_0]$ oder für alle $\lambda \in [\lambda_0, b_s)$ existiert ein $u_\lambda \in H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ derart, dass $(\lambda, u_\lambda) \in C_{\lambda_0}(s)$ gilt.

2. Nichtdegenerierte Fortsetzung bis zum Rand und Wachstum des Zweiges

Die folgenden Kapitel dieser Arbeit behandeln die Frage nach der Fortsetzbarkeit des Lösungszweiges. Dabei verfolgen wir verschiedene Ansätze, wie Normschranken und unter anderem Anwendung der analytischen Bifurkationstheorie. Dabei ist die Abhandlung als Bericht des Status quo und als Anregung zu verstehen und nicht als endgültige Antwort auf die Fragestellung.

2.1. Wachstumsschranken in ungewichteten Räumen. Um sich an die Problematik der Fortsetzbarkeit heranzutasten, behandeln wir zunächst die ungewichteten Normen und stellen Voraussetzungen, welche wir im weiteren Verlauf der Arbeit noch abzuschwächen versuchen. Für $s = 0$ erhalten wir in den Voraussetzungen **(G2)** und **(G3)**, dass $\alpha = \beta = 0$ gelten muss. Das heißt, dass sowohl die Nichtlinearität als auch deren Linearisierung beschränkt sind bezüglich der x-Variable. Zudem wollen wir garantieren, dass sich das Lösungskontinuum $C_{\lambda_0}(s)$ global nach λ parametrisieren lässt, was bereits eine starke Einschränkung ist. Das heißt, dass (eine Teilmenge von) $C_{\lambda_0}(s)$ der Graph einer differenzierbaren Funktion $(\lambda^*, \lambda_0] \to H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$, $\lambda \mapsto u_\lambda$ ist, also eine Darstellung in einer der Formen

$$\{(\lambda, u_\lambda) \in (\lambda^*, \lambda_0] \times H^{2,s}(\mathbb{R}^N)\} \qquad \text{oder} \qquad \{(\lambda, u_\lambda) \in [\lambda_0, \lambda^*) \times H^{2,s}(\mathbb{R}^N)\}$$

besitzt. Damit haben wir bereits die Existenz von Umkehrpunkten ausgeschlossen. Der Parameter λ^* sei (abhängig von s) so gewählt, dass Theorem 5.5 bis (ausschließlich) λ^* die Existenz einer Lösung garantiert. Die Parametrisierbarkeit ist gegeben, sofern die Linearisierung $\partial_u F(\lambda, u)$ in jedem Punkt $(\lambda, u) \in C_{\lambda_0}$ invertierbar ist. Setzt man die Lösungskurve in die Gleichung ein, so lassen die Voraussetzung ein Differenzieren nach λ zu. Mit $'$ ist die Ableitung nach dem Bifurkationsparameter bezeichnet. In diesem Sinne erhalten wir die Gleichung

$$-\Delta u'_\lambda + V u'_\lambda - \lambda u'_\lambda - \partial_u g(x, u_\lambda(x)) u'_\lambda - u_\lambda = 0.$$

Anschließend testet man mit u_λ und erhält durch partielle Integration und der Tatsache, dass u_λ die Gleichung löst:

$$
\begin{aligned}
\langle u_\lambda, u_\lambda\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \langle -\Delta u_\lambda + V u_\lambda - \lambda u_\lambda - g(x,u_\lambda), u_\lambda'\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&\quad - \langle \partial_u g(x,u_\lambda(x))u_\lambda - g(x,u_\lambda), u_\lambda'\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \\
\Leftrightarrow -\|u_\lambda\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \frac{d}{d\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} \left(g(x,u_\lambda(x))\cdot u_\lambda(x) - 2G(x,u_\lambda(x))\right)\,dx.
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Wir definieren nun $\kappa :\, (0, a+\lambda_0) \to (0,\infty)$ durch

$$
\kappa(\mu) := \int_{\mathbb{R}^N} \left(g(x,u_{\lambda_0-\mu}(x))\cdot u_{\lambda_0-\mu}(x) - 2G(x,u_{\lambda_0-\mu}(x))\right)\,dx
$$

und verwenden dies als Indikator für das Verhalten der $L^2(\mathbb{R}^N)$-Norm. Für $g(x,v) = v^3$ erhält man zum Beispiel

$$
\kappa(\mu) = \int_{\mathbb{R}^N}\left(u^4 - 2\,\frac{1}{4}u^4\right)\,dx = \frac{1}{2}\|u\|^4_{L^4(\mathbb{R}^N)}.
$$

In diesem Fall kann man κ verwenden, um das Verhalten der $L^4(\mathbb{R}^N)$-Norm zu untersuchen.

Für den Rest des Abschnittes setzen wir voraus, dass

$$
u_{\lambda_0-\mu} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)
$$

gilt. Daraus leiten wir eine Differentialungleichung für κ her. Gemäß (51) und den Voraussetzungen **(G2)** und **(G3)** erhält man:

$$
\kappa(\mu) \le C(\|u_{\lambda_0-\mu}\|^{\varepsilon}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|u_{\lambda_0-\mu}\|^{p_0-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})\cdot\frac{d}{d\mu}\kappa(\mu),
\tag{52}
$$

denn es gilt:

$$
\begin{aligned}
\kappa(\mu) \le& \int_{\mathbb{R}^N} u_{\lambda_0-\mu}g(x,u_{\lambda_0-\mu})\,dx \overset{\textbf{(G2)},\textbf{(G3)}}{\le} C\int_{\mathbb{R}^N}(|u_{\lambda_0-\mu}|^{2+\varepsilon} + |u_{\lambda_0-\mu}|^{p_0+1})\,dx \\
\le& C(\|u_{\lambda_0-\mu}\|^{\varepsilon}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|u_{\lambda_0-\mu}\|^{p_0-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})\|u_{\lambda_0-\mu}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
=& -C(\|u_{\lambda_0-\mu}\|^{\varepsilon}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|u_{\lambda_0-\mu}\|^{p_0-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}) \\
&\cdot \frac{d}{d\lambda}\Big|_{\lambda=\lambda_0-\mu}\int_{\mathbb{R}^N}\left(g(x,u_\lambda(x))\cdot u_\lambda(x) - 2G(x,u_\lambda(x))\right)\,dx \\
=& C(\|u_{\lambda_0-\mu}\|^{\varepsilon}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|u_{\lambda_0-\mu}\|^{p_0-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})\cdot\frac{d}{d\mu}\kappa(\mu).
\end{aligned}
$$

Daraus folgt der Blowup von κ', wenn die $L^\infty(\mathbb{R}^N)$-Norm des Zweiges gegen 0 geht, da die Gleichung (51) die strenge Monotonie von κ impliziert, und somit $u_\lambda \neq 0$ gilt für alle $\lambda < \lambda_0$. Geht die $L^\infty(\mathbb{R}^N)$-Norm gegen 0, so explodiert die Ableitung. Das folgende Lemma zeigt, dass ein solcher Blowup höchstens am Rand des Spektrums des linearisierten Operators eintreten kann.

Lemma 5.6. *Es sei $-a$ kein eingebetteter Eigenwert von $T = -\Delta + V$. Zu jedem $\lambda \in (-a,\lambda_0)$ sei $(\lambda,u_\lambda) \in C_{\lambda_0}$ eine Lösung von* (34) *mit $\|u_\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty$. Sei weiter $\lambda_1 \in [-a,\lambda_0)\setminus\sigma_p(T)$ mit $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_1}\|u_\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 0$ Dann gilt $\lambda_1 = -a$ und für die Lösungen u_λ zu* (34) *folgt:*

$$
v_\lambda := \frac{u_\lambda}{\|u_\lambda\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}} \rightharpoonup 0 \qquad (\lambda\to\lambda_1).
$$

Beweis. Sei $\lambda_1 \in [-a,\lambda_0)$ mit $\lim\limits_{\lambda\to\lambda_1}\|u_\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 0$ und $\{\lambda_n\}_{n\ge2}$ eine Folge in $(-a,\lambda_0)$ mit $\lambda_n \to \lambda_1$ für $(n\to\infty)$. Dann erfüllt die zugehörige Folge von Lösungen $u_n := u_{\lambda_n}$ von (34) mit

Parameter λ_n die Abschätzung:

$$\|(-\Delta + V - \lambda_n)u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} |g(\lambda_n, u_n)|^2\,dx \leq C\int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^{2+2\varepsilon} + |u_n|^{2p_0})\,dx$$
$$\leq C(\|u_n\|^{2\varepsilon}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|u_n\|^{2(p_0-1)}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})\|u_n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Dann gilt für die normierte Folge $\{v_n\}_{n\geq 2}$ mit $v_n := v_{\lambda_n}$:

$$\|v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 1 \quad (n \geq 2), \qquad \|(-\Delta + V - \lambda_n)v_n\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C(\|u_n\|^{2\varepsilon}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|u_n\|^{2(p_0-1)}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}) \to 0,$$

für $n \to \infty$. Das heißt $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Weyl'sche Folge zum Wert λ_1 und daher gilt $\lambda_1 \in \sigma(T) \cap [-a, \lambda_0)$. Darüber hinaus gilt $v_n \rightharpoonup 0$, denn angenommen, $v_n \rightharpoonup v \neq 0$ in $L^2(\mathbb{R}^N)$, so gilt für alle $\phi \in D(T)$:

$$0 = \lim_{n\to\infty} \langle v_n, (-\Delta + V + a)\phi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \langle v, (-\Delta + V + a)\phi\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Daraus folgt $v \in \operatorname{Im}(T + a)^\perp = \operatorname{Ker}(T^* + a) = \operatorname{Ker}(T + a)$. Da $-a$ kein eingebetteter Eigenwert ist, folgt $v = 0$, Widerspruch. Das heißt, $\lambda_1 \in \sigma_{ess}(T) \cap [-a, \lambda_0) = \{-a\}$. □

Nun wollen wir die Ungleichung (52) so umformulieren, dass κ die folgende Ungleichung erfüllt:

$$\frac{\kappa'(\mu)}{\kappa(\mu)} \geq \frac{C}{(\|u_{\lambda_0-\mu}\|^{\varepsilon_0}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|u_{\lambda_0-\mu}\|^{p_0-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})}.$$

Integration liefert:

$$\log(\kappa(\mu)) \geq \int_\varepsilon^\mu \frac{C}{(\|u_{\lambda_0-t}\|^{\varepsilon_0}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|u_{\lambda_0-t}\|^{p_0-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})}\,dt + \log(\kappa(\varepsilon)).$$

oder äquivalent:

$$\frac{\kappa(\mu)}{\kappa(\varepsilon)} \geq \exp\left(\int_\varepsilon^\mu \frac{C}{(\|u_{\lambda_0-t}\|^{\varepsilon_0}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|u_{\lambda_0-t}\|^{p_0-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})}\,dt\right). \tag{53}$$

Diese Hilfsmittel geben uns die Möglichkeit, das Wachstum gewisser $L^p(\mathbb{R}^N)$-Normen von unten zu beschränken. Dabei ist p abhängig von den Exponenten in **(G2)** und **(G3)**.

THEOREM 5.7. *Sei $\{(\lambda, u_\lambda)\}_{\lambda\in(-a,\lambda_0)} \subseteq C_{\lambda_0}$ ein differenzierbarer Zweig. Dann gilt für alle $p \in [2, \min\{2 + \varepsilon_0, 2p_0\}]$:*

$$\limsup_{\lambda\to -a} \|u_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \geq \frac{\kappa(\varepsilon)}{\liminf_{\lambda\to -a}(\|u_\lambda\|^{2\varepsilon-p}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|u_\lambda\|^{2(p_0-1)-p}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})}$$
$$\exp\left(\int_\varepsilon^{\lambda_0-\lambda} \frac{1}{(\|u_{\lambda_0-t}\|^{2\varepsilon}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \|u_{\lambda_0-t}\|^{2(p_0-1)}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})}\,dt\right).$$

Damit erhält man eine untere Schranke für die $L^p(\mathbb{R}^N)$-Norm für $p \in [2, \min\{2 + \varepsilon_0, 2p_0\}]$, sofern die $L^\infty(\mathbb{R}^N)$-Norm nach oben beschränkt ist.

BEWEIS. Für die Menge der nichttrivialen Lösungen gilt die Ungleichung (52). Somit ist κ streng monoton wachsend in μ. Aus der Folgeungleichung (53) erhält man die Beschränktheit nach oben. Daraus folgt die Konvergenz von κ für $\mu \to (\lambda_0 + a)$. Darüber hinaus schätzt man für

$p \in [2,4)$ mit Hölderungleichung und unter Verwendung von (53) wie folgt ab:

$$
\begin{aligned}
&\kappa(\varepsilon)\exp\left(\int_{\varepsilon}^{\lambda_0-\lambda}\frac{1}{(\|u_{\lambda_0-t}\|^{\varepsilon_0}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}+\|u_{\lambda_0-t}\|^{p_0-1}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})}\,dt\right)\\
\leq&\kappa(\mu)=\int_{\mathbb{R}^N}(g(x,u_\lambda)u_\lambda-2G(x,u_\lambda))\,dx\\
\leq&C\int_{\mathbb{R}^N}g(x,u_\lambda)u_\lambda\,dx\leq C\int_{\mathbb{R}^N}(|u_\lambda|^{2+\varepsilon_0}+|u_\lambda|^{p_0+1})\,dx=C\int_{\mathbb{R}^N}(|u_\lambda|^{2+\varepsilon_0-p}+|u_\lambda|^{p_0+1-p})|u_\lambda|^p\,dx\\
\leq&(\|u_\lambda\|^{2+\varepsilon_0-p}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}+\|u_\lambda\|^{2(p_0-1)-p}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})\|u_\lambda\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}
\end{aligned}
$$

Für den oberen Limes gilt daher:

$$
\begin{aligned}
\limsup_{\lambda\to-a}\|u_\lambda\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}\geq&\limsup_{\lambda\to-a}\frac{\kappa(\lambda_0-\lambda)}{(\|u_\lambda\|^{2\varepsilon-p}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}+\|u_\lambda\|^{2(p_0-1)-p}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})}\\
=&\frac{\lim_{\lambda\to-a}\kappa(\lambda_0-\lambda)}{\liminf_{\lambda\to-a}(\|u_\lambda\|^{2\varepsilon-p}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}+\|u_\lambda\|^{2(p_0-1)-p}_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})}>0
\end{aligned}
$$

□

Neben der unteren Schranke ist im Hinblick auf den Alternativsatz Theorem 5.5 eine obere Schranke von Bedeutung. Wesentlich dabei ist, dass der spektrale Unterraum $U \subseteq L^2(\mathbb{R}^N)$, welcher durch die Eigenvektoren zu den Lückeneigenwerten in $(-a,a)$ aufgespannt wird, endlich dimensional ist. Dabei fließt das Abklingverhalten dieser Eigenfunktionen sowie spektrale Abschätzungen des Rayleigh-Quotienten ein. Zusätzlich liefert die Bedingung **(G5)**, dass für jedes $\delta > 0$ ein $C_\delta > 0$ derart existiert, dass für alle $v \in \mathbb{R}$ gilt:

$$G(x,v) \geq C_\delta|v|^\gamma - \delta|v|^2 \tag{54}$$

(vergleiche [**KS⁺98**]). Wieder ausgehend von Gleichung (51) erhält man:

Theorem 5.8. *Es seien die Voraussetzungen aus 5.6 erfüllt. Angenommen, die Lösungen (λ, u_λ) auf dem Zweig C_{λ_0} sind nichtdegeneriert, dann gilt die folgende asymptotische Abschätzung*

$$\int_{\mathbb{R}^N}(g(x,u_\lambda)u_\lambda-2G(x,u_\lambda))\,dx\leq C\left(\frac{1}{a+\lambda}\right)^{\max\{2\frac{\gamma-2}{\gamma},\frac{1}{\gamma-1}\}}\qquad(\textit{für }\lambda\to-a+)$$

Beweis. Zunächst geben wir die nötige spektrale Abschätzung. Der spektrale Shiftoperator W ist so gewählt, dass das Spektrum des gestörten Operators $T+W$ außerhalb des Intervals $(-a,a)$ liegt. Somit gilt für jedes $u \in H^2(\mathbb{R}^N) = D(T) = D(T+W)$ und $\lambda \in (-a,a)$:

$$\frac{|\langle(T+W-\lambda)u,u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}|}{\langle u,u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}}\geq a-|\lambda|. \tag{55}$$

Darüber hinaus kann man für jedes $v \in H^2(\mathbb{R}^N)$, die folgende Abschätzung gewinnen. Mit der Bessel'schen Gleichung und aus (54) erhält man: Für jedes $\delta > 0$ existiert ein $C_\delta > 0$, sodass folgende Ungleichung gilt:

(56)

$$\begin{aligned}\langle Wv, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= \sum_{n=1}^{m} \langle Wv, \psi_n\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \langle \psi_n, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 2a \sum_{n=1}^{m} |\langle v, \psi_n\rangle|^2 \\ &\leq 2a\|v\|^2_{L^\gamma(\mathbb{R}^N)} \left(\sum_{n=1}^{m} \|\psi_n\|^2_{L^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}(\mathbb{R}^N)}\right) \overset{(54)}{\leq} C\left(C_\delta^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} G(x,u(x))\,dx + \delta\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac{2}{\gamma}}\end{aligned}$$

Kombiniert man nun (55) und (56), so erhält man, sofern $\|u_\lambda\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \geq c_0 > 0$ gleichmäßig in λ vorausgesetzt ist:

$$\begin{aligned}\|u_\lambda\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} &\overset{(56)}{\leq} \frac{1}{a-|\lambda|}\langle (T-\lambda)u_\lambda, u_\lambda\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{a-|\lambda|}\cdot C\left(C_\delta^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} G(x,u(x))\,dx + \delta\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right)^{\frac{2}{\gamma}} \\ &\leq \frac{1}{a-|\lambda|}\langle (T-\lambda)u_\lambda, u_\lambda\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \frac{CC_\delta^{-\frac{2}{\gamma}}}{(a-|\lambda|)(\gamma-2)^{\frac{2}{\gamma}}}\kappa(\mu)^{\frac{2}{\gamma}} + \frac{C\cdot\delta^{\frac{2}{\gamma}}}{a-|\lambda|}\|u_\lambda\|^{\frac{2}{\gamma}}_{L^2(\mathbb{R}^N)},\end{aligned}$$

wobei in der letzten Ungleichung die Voraussetzung **(G5)** benutzt wurde um

$$\kappa(\mu) = \int_{\mathbb{R}^N} g(x, u_{\lambda_0-\mu})u_{\lambda_0-\mu} - 2G(u_{\lambda_0-\mu})\,dx \geq (\gamma-2)\int_{\mathbb{R}^N} G(u_{\lambda_0-\mu})\,dx,$$

zu verwenden. Nun benutzt man die Young'sche Ungleichung (15) und erhält:

$$\frac{1}{a-|\lambda|}\|u_\lambda\|^{\frac{2}{\gamma}}_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|u_\lambda\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{(a-|\lambda|)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

Für $\delta > 0$ klein genung, gibt es folglich eine Konstante $C > 0$, derart, dass gilt:

$$\begin{aligned}\|u_\lambda\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq& \frac{C}{a-\lambda}\kappa(\mu)^{\frac{2}{\gamma}} + \frac{1}{a-|\lambda|}\langle (T-\lambda)u_\lambda, u_\lambda\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \frac{C}{(a-|\lambda|)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \\ \leq& \frac{C}{a-|\lambda|}\kappa(\mu)^{\frac{2}{\gamma}} + \frac{1}{a-|\lambda|}\int_{\mathbb{R}^N} g(x,u_\lambda)u_\lambda\,dx + \frac{C}{(a-|\lambda|)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \\ \leq& \frac{C}{a-|\lambda|}\kappa(\mu)^{\frac{2}{\gamma}} + \frac{\gamma}{(a-|\lambda|)(\gamma-2)}\kappa(\mu) + \frac{C}{(a-|\lambda|)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \\ \leq& 2\max\left\{\frac{C}{a-|\lambda|}\kappa(\mu)^{\frac{2}{\gamma}} + \frac{\gamma}{(a-|\lambda|)(\gamma-2)}\kappa(\mu), \frac{C}{(a-|\lambda|)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}\right\}.\end{aligned} \tag{57}$$

Nun verwenden wir die Ungleichung (57) zusammen mit der Gleichung (51), um eine obere Schranke für $\kappa'(\mu)$ zu erhalten:

$$\frac{d}{d\mu}\kappa(\mu) \leq 2\max\left\{\frac{C}{a+\lambda_0-\mu}\kappa(\mu)^{\frac{2}{\gamma}} + \frac{\gamma}{(a+\lambda_0-\mu)(\gamma-2)}\kappa(\mu), \frac{C}{(a+\lambda_0-\mu)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}\right\}$$

Im Fall $\frac{C}{a+\lambda_0-\mu}\kappa(\mu)^{\frac{2}{\gamma}} + \frac{\gamma}{(a+\lambda_0-\mu)(\gamma-2)}\kappa(\mu) < \frac{C}{(a+\lambda_0-\mu)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$ liefert Integration:

$$\kappa(\mu) \leq \kappa(\mu_0) + C\frac{1}{(a+\lambda_0-\mu)^{\frac{1}{\gamma-1}}}.$$

Beachte, dass $\kappa(\mu) > 0$ gilt für $\mu > 0$, was aus der Monotonie von κ folgt. Somit gilt im zweiten Fall:

$$\frac{\kappa'(\mu)}{\frac{\gamma}{\gamma-2}\kappa(\mu) + c\,\kappa(\mu)^{\frac{2}{\gamma}}} \leq \frac{2}{a+\lambda_0-\mu}$$

Für $0 < \mu_0 < \mu < a + \lambda_0$ kann man integrieren und erhält für ein $c > 0$:

$$
\begin{aligned}
&\int_{\kappa(\mu_0)}^{\kappa(\mu)} \frac{1}{\frac{\gamma}{\gamma-2}t + C\,t^{\frac{2}{\gamma}}}\,dt \leq 2\log\left(\frac{a+\lambda_0-\mu}{a+\lambda_0-\mu_0}\right) \\
\Leftrightarrow \qquad &\log\left(\frac{\kappa(\mu)^{\frac{\gamma}{\gamma-2}}+c}{\kappa(\mu_0)^{\frac{\gamma}{\gamma-2}}+c}\right) \leq -2\log\left(\frac{a+\lambda_0-\mu}{a+\lambda_0-\mu_0}\right) \\
\Leftrightarrow \qquad &\kappa(\mu) \leq \left(\left(\frac{a+\lambda_0-\mu_0}{a+\lambda_0-\mu}\right)^2 \left(\kappa(\mu_0)^{\frac{\gamma}{\gamma-2}}+c\right) - c\right)^{\frac{\gamma-2}{\gamma}} \\
&= \left(\kappa(\mu_0)^{\frac{\gamma}{\gamma-2}} + \left(\frac{\mu-\mu_0}{a+\lambda_0-\mu}\right)^2 \left(\kappa(\mu_0)^{\frac{\gamma}{\gamma-2}}+c\right)\right)^{\frac{\gamma-2}{\gamma}} \\
&\leq C\left(\frac{\mu}{a+\lambda_0-\mu}\right)^{2\frac{\gamma-2}{\gamma}} \qquad (\text{für } \mu_0 \to 0).
\end{aligned}
$$

Damit ist zumindest $k(\mu)$ kleiner als das Maximum der beiden berechneten Schranken. $\square$

Wir wollen am Ende noch bemerken, dass (57) gemeinsam mit dem Lemma 5.6 zu folgendem Korollar führt:

KOROLLAR 5.9. *Es seien die Voraussetzungen aus 5.6 erfüllt. Angenommen, die Lösungen (λ, u_λ) auf dem Zweig C_{λ_0} sind nichtdegeneriert, dann gilt die folgende asymptotische Abschätzung*

$$
\|u_\lambda\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C\left(\frac{1}{a+\lambda}\right)^{\max\{\frac{\gamma-2}{\gamma},\frac{1}{2\gamma-2}\}} \qquad (\textit{für } \lambda \to -a+).
$$

2.2. Wachstumsschranken in gewichteten Räumen für $g(x,u) = u^3$. Während wir im letzten Abschnitt noch allgemeinere Nichtlinearitäten zugelassen haben, wollen wir uns für die nächsten Abschnitte auf ein konkretes Beispiel konzentrieren. Im Unterschied zu den vorangegangenen Resultaten diktiert nun nicht das Gewicht des Raumes das Wachstum der Nichtlinearität in der 0 und im Unendlichen. Wir können stattdessen die Gleichung mit fester Nichtlinearität in verschiedenen, zulässigen gewichteten Räumen untersuchen. Durch Skalierung der Gleichung können wir die Nichtlinearität noch um einen positiven Faktor verallgemeinern. Darüber hinaus verbessert sich die Abschätzung für $G(x,u) = \frac{1}{4}|u|^4$ dahingehend, dass wir in (54) $\delta = 0$ wählen können und überdies Gleichheit erhalten. Darüber hinaus ist die Dimension des Raumes auf $N \leq 6$ einzuschränken, damit die Nichtlinearität subkritisch wächst und damit die Abbildung $H^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$, $u \mapsto g(x,u)$ stetig ist.

Die Hauptmotivation für die Untersuchung des Zweiges im Bezug auf die gewichteten Normen sind die Auswirkungen auf die Fälle in Theorem 5.5. Die Untersuchung der ungewichteten Normen im vorangegangenen Abschnitt gibt Grund zur Hoffnung, dass sich die gewichteten Normen ähnlich beschränken lassen und wir den Zweig lokal gleichmäßig nach oben beschränken können. In diesem Fall wäre ein Blowup innerhalb der spektralen Lücke ausgeschlossen und der Zweig wäre bis zum Rand der spektralen Lücke fortsetzbar.

Im Zentrum dieses Abschnittes steht die Untersuchung der $L^{4,s}(\mathbb{R}^N)$-Norm. Die $L^{2,s}(\mathbb{R}^N)$- und $H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$-Norm wird sich auf der Lösungsmenge als äquivalent erweisen. Wie auch im vorhergehenden Abschnitt soll die Nichtdegeneriertheit der Lösung entlang des Zweiges vorausgesetzt werden, um den Zweig als stetig differenzierbare Abbildung zu behandeln. Diese Voraussetzung wollen wir im nächsten Kapitel aufweichen.

Der Abschnitt ist wie folgt aufgebaut. Zuerst geben wir eine Schranke der gewichteten L^2-Norm, sowie der zugehörigen gewichteten Sobolev-Norm in $H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ in Abhängigkeit von der $L^{4,s}(\mathbb{R}^N)$-Norm an. Eine obere Schranke für die $L^{4,s}(\mathbb{R}^N)$-Norm liefert anschließend eine Beschränkung der Norm im richtigen Raum, für welchen unser Fixpunktoperator aus Theorem 5.5 definiert ist. Anschließend beweisen wir eine obere Schranke für die $L^{4,s}(\mathbb{R}^N)$-Norm, welche von Normen mit kleinerem Gewicht abhängt. Auf diese Weise können wir induktiv das Problem auf den ungewichteten Fall reduzieren, welcher im vorangegangenen Abschnitt behandelt wurde. Die Existenz von Lösungen im ungewichteten Raum bleibt Voraussetzung.

Für den Zusammenhang zwischen den $L^{4,s}(\mathbb{R}^N)$- und $L^{2,s}(\mathbb{R}^N)$-Normen spielen spektrale Abschätzungen wieder eine große Rolle. Da der Existenzsatz ohnehin nur einen Lösungszweig auf $(-b_s, b_s) \times H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ liefert, behält man positiven Abstand zum Rand des essentiellen Spektrums, was auch negative Potenzen von $a - |\lambda|$ global auf $(-b_s, b_s)$ beschränken lässt.

Lemma 5.10. *Zu jedem $s \geq 0$ existiert eine Konstante $C_s > 0$ derart, dass für alle $\lambda \in (-a, a)$ und alle zugehörigen Lösungen u_λ der Gleichung (34) die folgende Abschätzung gilt:*

$$\|u_\lambda\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{C_s}{(a-|\lambda|)^{\ulcorner \frac{s+1}{2} \urcorner}} (\|u_\lambda\|^2_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)} + \|u_\lambda\|^4_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)}).$$

Dabei bezeichne $\ulcorner s \urcorner := \min\{n \in \mathbb{N} :\, n \geq s\}$. Da die Konstante C_s unabhängig von $\lambda \in (-a, a)$ ist, liefert Lemma 5.10 eine gleichmäßige Schranke für die $L^{2,s}$-Norm eines Lösungszweiges in einem offenen Interval $(-b, b)$, sofern eine gleichmäßige Schranke für die $L^{4,s}$-Norm des selbigen bereits zur Hand ist. Darüber hinaus wird an keiner Stelle verwendet, dass die Lösungen, für die die Abschätzung gilt, auf C_{λ_0} liegen.

Wir beweisen die Behauptung zunächst für $s \in [0, 2)$ und anschließend, dass aus der Aussage für $s - 2$ die Aussage für s folgt.

Beweis. Im Fall $s = 0$ erhält man wegen $\sigma(T + W) \cap (-a, a) = \emptyset$ die Abschätzung

$$\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{a - |\lambda|} \langle (T + W - \lambda)u, u\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \qquad (u \in H^2(\mathbb{R}^N)).$$

Insbesondere gilt dann für Lösungen u_λ unter Verwendung von Gleichung (34):

$$\|u_\lambda\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{a - |\lambda|} \|u_\lambda\|^4_{L^4(\mathbb{R}^N)} + \langle W_0 u_\lambda, u_\lambda\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Darüber hinaus gilt aufgrund des exponentiellen Abfalls der Eigenfunktionen:

$$\begin{aligned} \langle W u_\lambda, u_\lambda\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} &= M \sum_{n=1}^{m} |\langle u_\lambda, \psi_n\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}|^2 \\ &\leq M \|u_\lambda\|^2_{L^{2,-N}(\mathbb{R}^N)} \sum_{n=1}^{m} \|\psi_n\|^2_{L^{2,N}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\langle x\rangle^{-N}\|^2_{L^2} \|u_\lambda\|^2_{L^4}. \end{aligned} \tag{58}$$

Zusammen erhält man die gewünschte Abschätzung

$$\|u_\lambda\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{a - |\lambda|} \|u_\lambda\|^4_{L^4(\mathbb{R}^N)} + C \|u_\lambda\|^2_{L^4(\mathbb{R}^N)}$$

für den Fall $s = 0$. Für $s \in (0,2)$ sowie für den Induktionsschritt benutzt man die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\|u_\lambda\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} =& \|u_\lambda \langle x\rangle^{\frac{s}{2}}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} \le \frac{1}{a-|\lambda|}\langle (T+W-\lambda)\langle x\rangle^{\frac{s}{2}}u_\lambda, \langle x\rangle^{\frac{s}{2}}u_\lambda\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}\\
=& \frac{1}{a-|\lambda|}\int_{\mathbb{R}^N}(-\Delta u_\lambda\cdot\langle x\rangle^{\frac{s}{2}} - \nabla u_\lambda\cdot\nabla\langle x\rangle^{\frac{s}{2}} - u_\lambda\Delta\langle x\rangle^{\frac{s}{2}})u_\lambda\langle x\rangle^{\frac{s}{2}}\,dx\\
&+\frac{1}{a-|\lambda|}\langle (V-\lambda+W)u_\lambda, u_\lambda\rangle_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}\\
\stackrel{(34)}{=}& \frac{1}{a-|\lambda|}\left(\|u_\lambda\|^4_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)} - \frac{3}{4}\int_{\mathbb{R}^N}|u_\lambda|^2\Delta\langle x\rangle^s\,dx + \langle Wu_\lambda, u_\lambda\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right)\\
\stackrel{(58)}{\le}& \frac{1}{a-|\lambda|}\left(\|u_\lambda\|^4_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)} - \frac{3}{4}\int_{\mathbb{R}^N}|u_\lambda|^2\Delta\langle x\rangle^s\,dx + C\|u_\lambda\|^2_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)}\right)\\
\le& \frac{1}{a-|\lambda|}\left(\|u_\lambda\|^4_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)} + C\cdot s\cdot(s-1)\int_{\mathbb{R}^N}|u_\lambda|^2\langle x\rangle^{s-2}\,dx + C\|u_\lambda\|^2_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)}\right)\\
=& \frac{1}{a-|\lambda|}\left(\|u_\lambda\|^4_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)} + C_s\|u_\lambda\|^2_{L^{2,s-2}(\mathbb{R}^N)} + C\|u_\lambda\|^2_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)}\right).
\end{aligned} \tag{59}$$

Ist nun $s \in (0,2)$, so ist die $L^{2,s-2}(\mathbb{R}^N)$-Norm stets kleiner als die $L^2(\mathbb{R}^N)$-Norm. Für diese verwendet man dann die Abschätzung für $s = 0$. Daher gilt für alle $s \in (0,2]$

$$\begin{aligned}
\|u_\lambda\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \le& \frac{1}{a-|\lambda|}\left(\|u_\lambda\|^4_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)} + C_s\Big(\frac{1}{a-|\lambda|}\|u_\lambda\|^4_{L^4(\mathbb{R}^N)} + C\|u_\lambda\|^2_{L^4(\mathbb{R}^N)}\Big) + C\|u_\lambda\|^2_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)}\right)\\
\le& \frac{C_s}{(a-|\lambda|)^2}(\|u_\lambda\|^4_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)} + \|u_\lambda\|^2_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)}).
\end{aligned}$$

Sei nun angenommen, dass die Behauptung für $s-2$ bereits gezeigt ist, so folgt für die $L^{2,s}$-Norm:

$$\begin{aligned}
\|u_\lambda\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \le& \frac{1}{a-|\lambda|}\Big(\|u_\lambda\|^4_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)}\\
&+ C_s\Big(\frac{C_{s-2}}{(a-|\lambda|)^{\lceil\frac{s-1}{2}\rceil}}(\|u_\lambda\|^2_{L^{4,s-2}(\mathbb{R}^N)} + \|u_\lambda\|^4_{L^{4,s-2}(\mathbb{R}^N)})\Big) + C\|u_\lambda\|^2_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)}\Big)\\
\le& \frac{C_s}{(a-|\lambda|)^{\lceil\frac{s+1}{2}\rceil}}(\|u_\lambda\|^2_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)} + \|u_\lambda\|^4_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)}).
\end{aligned}$$

□

Da eine beschränkte $L^{4,s}$-Norm die Beschränktheit der $L^{2,s}$-Norm impliziert, liegt es nahe, dass analog zum ungewichteten Fall auch die $H^{1,s}$-Norm beschränkt bleibt. Dies geht aus der schwachen Formulierung hervor. In gewichteten Räumen liefert die partielle Integration zusätzliche Terme, die es zu kontrollieren gilt. Anschließend erhält man durch Wahl einer geeigneten Testfunktion in der schwachen Formulierung die Beschränktheit der $L^{6,s}$-Norm, welche eine Schranke für $H^{2,s}$ impliziert. Wir benötigen die Abschätzung aus Proposition 4.3.

Lemma 5.11. *Für jedes $s \ge 0$ existiert ein $C_s > 0$ derart, dass für alle $\lambda \in (-a,a)$ und für alle zugehörigen Lösungen u_λ der Gleichung* (34) *die folgende Abschätzung gilt:*

$$\|u_\lambda\|^2_{H^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \le \frac{C_s}{(a-|\lambda|)^{\lceil s+1\rceil}}\left(\|u_\lambda\|^2_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)} + \|u_\lambda\|^4_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)}\right).$$

Beweis. Es ist hinreichend, die Abschätzung für eine zur $H^{2,s}$-Norm äquivalente Norm zu beweisen. Im Hinblick auf Proposition 4.3 genügt es eine entsprechende Schranke für $\|\nabla u\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}$

und $\|\Delta u\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}$ zu geben. Die $L^{2,s}(\mathbb{R}^N)$-Schranke kann aus Lemma 5.10 übernommen werden, und die Normen der Ableitungen werden gegen diese Norm abgeschätzt.

Für $u \in H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ gilt $u^3 \in L^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ nach dem Sobolev'schen Einbettungssatz. Betrachte den Term

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta u) \cdot u^3 \cdot \langle x\rangle^s \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla(\langle x\rangle^s u^3) \, dx \\
=&\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot (\nabla\langle x\rangle^s) u^3 + \nabla u \cdot \nabla(u^3) \cdot \langle x\rangle^s \, dx \\
=&\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(u^4) \cdot \nabla\langle x\rangle^s + 3u^2 \cdot |\nabla u|^2 \cdot \langle x\rangle^s \, dx \\
\leq&\frac{Cs(s-1)}{4}\|u\|^4_{L^{4,s-2}(\mathbb{R}^N)} + 3\|u^2\|_{L^{\frac{N}{2}}(\mathbb{R}^N)} \cdot \||\nabla u|^2\langle x\rangle^s\|_{L^{\frac{N}{(N-2)_+}}(\mathbb{R}^N)},
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile die Hölderungleichung mit $\frac{2}{N} + \frac{N-2}{N} = 1$ verwendet wurde. Man erhält weiter mit den Ungleichungen von Sobolev und Young für jedes $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta u) \cdot |u|^2 u \cdot \langle x\rangle^s \, dx \\
\leq&\frac{Cs(s-1)}{4}\|u\|^4_{L^{4,s-2}(\mathbb{R}^N)} + 3C(\varepsilon)\|u\|^4_{L^N(\mathbb{R}^N)} \\
&+ \varepsilon\|\nabla(|\nabla u| \cdot \langle x\rangle^{\frac{s}{2}})\|^4_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
\leq&\frac{Cs(s-1)}{4}\|u\|^4_{L^{4,s-2}(\mathbb{R}^N)} + 3C(\varepsilon)\|u\|^4_{L^N(\mathbb{R}^N)} \\
&+ \varepsilon\left(C\|\Delta u \cdot \langle x\rangle^{\frac{s}{2}}\|^4_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \tilde{C}\|\nabla u\|^4_{L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)}\right)
\end{aligned} \tag{60}$$

wobei in der letzten Zeile Propostion 4.3 verwendet wurde.. Nun testet man die Gleichung (34) mit $u_\lambda^3\langle x\rangle^s$. Man erhält:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^6\langle x\rangle^s \, dx \leq \|V-\lambda\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|u_\lambda\|^4_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)} + \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta u_\lambda) \cdot |u_\lambda|^2 u_\lambda \cdot \langle x\rangle^s \, dx.$$

Andererseits folgt direkt aus Gleichung (34):

$$\|-\Delta u_\lambda\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \leq \|V-\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|u_\lambda\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^6\langle x\rangle^s \, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Fügt man dies zusammen, gilt:

$$\begin{aligned}
\|-\Delta u_\lambda\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \leq&2\|V-\lambda\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|u_\lambda\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \\
&+ 2\left(\|V-\lambda\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|u_\lambda\|^4_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)} + \int_{\mathbb{R}^N} (-\Delta u_\lambda) \cdot |u_\lambda|^2 u_\lambda \cdot \langle x\rangle^s \, dx\right) \\
\overset{(60)}{\leq}& 2\|V-\lambda\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|u_\lambda\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} + 2\|V-\lambda\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|u_\lambda\|^4_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)} \\
&+ \frac{Cs(2s-1)}{2}\|u_\lambda\|^4_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)} + 6C(\varepsilon)\|u_\lambda\|^2_{L^N(\mathbb{R}^N)} \\
&+ 2C\varepsilon\|\Delta u_\lambda \cdot \langle x\rangle^s\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + 2\tilde{C}\varepsilon\|\nabla u_\lambda\|^4_{L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)} \\
=&\frac{1}{2}\|\Delta u_\lambda\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} + \text{Terme von kleinerer Ableitung in } u_\lambda,
\end{aligned}$$

für $\varepsilon = 1/(4C)$. Die Beschränktheit der L^N-Norm folgt aus der Hölder-Interpolationsungleichung, sofern $N \leq 6$ gilt. Es bleibt die Beschränktheit von $\|\nabla u_\lambda\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}$ aus der $L^{4,s}$-Beschränktheit zu folgern. Dazu testet man die Gleichung (34) mit $\langle x\rangle^s u_\lambda$. Man erhält.

$$\int_{\mathbb{R}^N} -\Delta u_\lambda \cdot u_\lambda \langle x\rangle^s \, dx = \langle (V-\lambda)u_\lambda, u_\lambda\rangle_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} + \|u_\lambda\|^4_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)}.$$

Nach partieller Integration folgt somit

$$\|\nabla u_\lambda\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \le Cs(s-1)\|u_\lambda\|^2_{L^{2,s-2}(\mathbb{R}^N)} + \|V-\lambda\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\|u_\lambda\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} + \|u_\lambda\|^4_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)},$$

und daher die Beschränktheit der Gradientennorm. □

Als nächstes wollen wir die Beschränktheit der $L^{4,s}(\mathbb{R}^N)$-Norm untersuchen. Das Resultat basiert wie auch im ungewichteten Fall auf der Nichtdegeneriertheit der Lösungen und der damit verbundenen stetigen Differenzierbarkeit des Zweiges. Ferner greifen wir auf die Schachtelung der Intervalle im Existenzsatz zurück. Für jedes $s > 0$ liefert der globale Satz von Crandall-Rabinowitz gemäß Theorem 5.4 einen stetigen Zweig von Lösungen in $(-b_s, b_s) \times H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$, wobei b_s die erste Nullstelle von K_0 als Funktion von b ist und monoton fallend in s ist. Wir beweisen nun, dass die Beschränktheit des Zweiges in der $L^4(\mathbb{R}^N)$-Norm bereits die Beschränktheit in $L^{4,s}(\mathbb{R}^N)$ impliziert.

Lemma 5.12. *Es sei $\lambda^* \in (-a,a)$ derart, dass durch $[\lambda^*, \lambda_0] \to L^4(\mathbb{R}^N)$, $\lambda \mapsto u_\lambda$ ein stetiger Zweig von Lösungen existiert. Dann gilt: Zu jedem $s > 0$ gibt es eine Konstante $C_s > 0$, sodass für alle $(\lambda, u_\lambda) \in C_{\lambda_0}(s)$ mit $\lambda \in [\lambda^*, \lambda_0] \cap (-b_s, b_s)$, gilt:*

$$\|u_\lambda\|_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)} \le C_s.$$

Beweis. Wir differenzieren die Gleichung $-\Delta u_\lambda + Vu_\lambda - \lambda u_\lambda - |u_\lambda|^2 u_\lambda = 0$ nach λ und testen anschließend mit $u_\lambda \langle x\rangle^s$. Man erhält:

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} \left(-\Delta u'_\lambda + Vu'_\lambda - \lambda u'_\lambda - u_\lambda - 3|u_\lambda|^2 u'_\lambda\right) u_\lambda \langle x\rangle^s \, dx.$$

Mittels partieller Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} -\Delta u'_\lambda \cdot u_\lambda \cdot \langle x\rangle^s \, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u'_\lambda \cdot \nabla u_\lambda \cdot \langle x\rangle^s \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u'_\lambda \cdot u_\lambda \cdot \nabla\langle x\rangle^s \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u'_\lambda \cdot \nabla u_\lambda \cdot \langle x\rangle^s \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} u'_\lambda \nabla u_\lambda \cdot \nabla\langle x\rangle^s \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} u'_\lambda u_\lambda \cdot \Delta\langle x\rangle^s \, dx \\ &=2\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u'_\lambda \cdot \nabla u_\lambda \cdot \langle x\rangle^s \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} u'_\lambda \Delta u_\lambda \cdot \langle x\rangle^s \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} u'_\lambda u_\lambda \cdot \Delta\langle x\rangle^s \, dx.\end{aligned}$$

Dies wird nun wiederum eingesetzt und man erreicht

$$\begin{aligned}0 =&2\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u'_\lambda \cdot \nabla u_\lambda \cdot \langle x\rangle^s \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} u'_\lambda \Delta u_\lambda \cdot \langle x\rangle^s \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} u'_\lambda u_\lambda \cdot \Delta\langle x\rangle^s \, dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \left(Vu'_\lambda - \lambda u'_\lambda - u_\lambda - 3|u_\lambda|^2 u'_\lambda\right) u_\lambda \langle x\rangle^s \, dx \\ =&2\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u'_\lambda \cdot \nabla u_\lambda \cdot \langle x\rangle^s \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} u'_\lambda u_\lambda \cdot \Delta\langle x\rangle^s \, dx \\ &+ 2\int_{\mathbb{R}^N} \left(Vu'_\lambda - \lambda u'_\lambda - u_\lambda - 2|u_\lambda|^2 u'_\lambda\right) u_\lambda \langle x\rangle^s \, dx \\ =&2\left[\langle \nabla u_\lambda, \nabla u'_\lambda\rangle_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} + \langle (V-\lambda-|u_\lambda|^2)u_\lambda, u'_\lambda\rangle_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}\right] \\ &- \|u_\lambda\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} - \frac{1}{2}\frac{d}{d\lambda}\|u_\lambda\|^4_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)} - \frac{1}{2}\frac{d}{d\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^2 \cdot \Delta\langle x\rangle^s \, dx\end{aligned}$$

$$= -2\int_{\mathbb{R}^N} u_\lambda' \nabla u_\lambda \cdot \nabla\langle x\rangle^s \, dx - \|u_\lambda\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}$$
$$- \frac{1}{2}\frac{d}{d\lambda}\|u_\lambda\|^4_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)} - \frac{1}{2}\frac{d}{d\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^2 \cdot \Delta\langle x\rangle^s \, dx.$$

Damit folgt die Abschätzung für alle $\lambda \in (-b_s, b_s)$:

$$\left|\frac{d}{d\lambda}\|u_\lambda\|^4_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)}\right| \le C\|u_\lambda'\|_{L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)}\|\nabla u_\lambda\|_{L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)} + 2\|u_\lambda\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} + \left|\frac{d}{d\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^2 \Delta\langle x\rangle^s \, dx\right|. \tag{61}$$

Nun schließen wir wieder durch vollständige Induktion. Für $s = 0$ ist die Beschränktheit des Zweiges, sofern er existiert, in Theorem 5.8 bewiesen. Die Existenz wiederum ist vorausgesetzt. Angenommen, die Behauptung gilt für $s-1$, so folgt mit Lemma 5.10 die Beschränktheit der $L^{2,s-1}$-Norm und anschließend aus Lemma 5.11 die Beschränktheit der $H^{2,s-1}$-Norm auf $(-b_{s-1}, b_{s-1})$. Insbesondere liefert dann der globale Satz von Crandall-Rabinowitz, dass für jedes $\lambda \in (-b_{s-1}, b_{s-1})$ eine Lösung u_λ auf dem Zweig existiert. Nach Voraussetzung ist die Abbildung $\lambda \mapsto u_\lambda'$ stetig und das Intervall $[-b_s, b_s] \subset (-b_{s-1}, b_{s-1})$ kompakt. Somit gibt es ein $C > 0$ derart, dass gilt:

$$\|u_\lambda'\|_{L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)} \le C \qquad (\lambda \in [-b_s, b_s]).$$

Ferner hat man die spektrale Abschätzung (59) aus dem Beweis des letzten Lemmas:

$$\|u_\lambda\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{a-|\lambda|}\left(\|u_\lambda\|^4_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)} + C_s\|u_\lambda\|^2_{L^{2,s-2}(\mathbb{R}^N)} + C\|u_\lambda\|^2_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)}\right).$$

Dies setzen wir in die Ungleichung (61) ein und erhalten ähnlich des ungewichteten Falls die folgende Ungleichung für $\kappa : (0, a+\lambda_0) \to H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$, $\mu \mapsto \|u_{\lambda_0-\mu}\|^4_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)}$:

$$\kappa'(\mu) \le C_1 + \frac{C_2 + \kappa(\mu)}{a + \lambda_0 - \mu}, \tag{62}$$

wobei die Konstante C_1 von $\sup_{\lambda\in[\lambda_0-\mu,\lambda_0]} \|u_\lambda\|_{H^{1,s-1}(\mathbb{R}^N)}$ und $\sup_{\lambda\in[\lambda_0-\mu,\lambda_0]} \|u_\lambda'\|_{L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)}$ abhängt, sowie die Konstante C_2 von $\sup_{\lambda\in[\lambda_0-\mu,\lambda_0]} \|u_\lambda\|_{H^{1,s-1}(\mathbb{R}^N)}$ abhängt. Alle diese Suprema existieren nach Induktionsvoraussetzung. Anwendung von Gronwalls Lemma liefert die Beschränktheit. □

Der Beweis von Lemma 5.12 liefert die Möglichkeit, die Aussage in Theorem 5.5 zu verschärfen. Wir haben die Beschränktheit der gewichteten Normen erhalten, indem wir sie nach oben durch die Normen kleineren Gewichtes beschränkt haben. Umgekehrt bedeutet dies, dass falls die Aussage (1) in Theorem 5.5 zutrifft und der Zweig nichtdegeneriert ist, der Blowup bereits in $L^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ für alle $s > 0$ auftreten muss. Am Ende des nächsten Abschnittes wollen wir diese Überlegung formulieren.

3. Einfach degenerierte Fortsetzung bis zum Rand

Schließlich wollen wir abermals den Lösungszweig der Gleichung (34) untersuchen, und nun einfach degenerierte Punkte zulassen. Als Hilfsmittel benötigen wir die analytische Bifurkationstheorie und sind somit gezwungen, unsere Wahl der Nichtlinearität einzuschränken. Denkbar wäre hierbei die Untersuchung einer endlichen Linearkombination aus Monomen. Wir betrachten jedoch wieder den einfachsten Fall $g(x, u) = u^3$.

Ausgangspunkt für die Untersuchung des globalen Verlaufs des Zweiges ist die Identität

$$\frac{d}{d\lambda}\|u_\lambda\|^4_{L^4(\mathbb{R}^N)} = -2\|u_\lambda\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

welche in allen Punkten gilt, in denen der Zweig durch den Graph einer differenzierbaren Abbildung $\lambda \mapsto u_\lambda$ beschrieben werden kann. Daraus erhält man die Monotonie der $L^4(\mathbb{R}^N)$-Norm und gleichzeitig auch eine Majorante, sofern der Zweig existiert. Die Schwierigkeit, die nun behandelt werden soll, ist der Umgang mit Punkten, in denen die Linearisierung der nichtlinearen Abbildung nicht invertierbar ist. In solchen erhalten wir keine Differenzierbarkeit des Zweiges durch den Satz über implizit definierte Funktionen. Es ist also fraglich, wie der Zweig derartige Punkte durchläuft. Zunächst ist es auch denkbar, dass dieser umkehrt oder ein Blowup in einer (und damit in allen) gewichteten Norm mit positivem Exponenten stattfindet und damit der Graph der $L^4(\mathbb{R}^N)$-Norm des Zweiges einfach stoppt. Im ersten Teil wollen wir uns mit einem Kriterium befassen, welcher eine Fortsetzung über solche degenerierten Punkte hinaus garantiert. Anschließend geben wir eine äquivalente Bedingung für die globale Fortsetzbarkeit des Zweiges bis zum Rand der spektralen Lücke.

Eingangs wollen wir klären, dass die Abbildung, welche wir zur Anwendung des globalen Bifurkationssatz definiert haben, tatsächlich eine analytische ist. Betrachtet man zunächst den Resolventenoperator, so erhält man (vgl [**MB75**]):

Proposition 5.13. *Es sei $T : X \to X$ ein abgeschlossener Operator in einem Banachraum X mit Definitionsbereich $D(T)$ und $\lambda \in \rho(T)$. Dann gilt $\mu \in \rho(T)$ für alle $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu - \lambda| < \|(T-\lambda)^{-1}\|^{-1}$. Für die Resolventen gilt:*

$$(T-\mu)^{-1} = (T-\lambda)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left[(T-\lambda)^{-1}(\mu-\lambda)\right]^k.$$

Insbesondere ist die Resolventenabbildung $\rho(T) \to L(X)$ analytisch.

Mit dem Resultat aus Lemma 4.9 folgert man nun die Analytizität von $A_{\lambda,s}$. Dazu seien $b \le a$ und $s \ge 0$ so gewählt, dass $\|A_{\lambda,s}\|_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)\to H^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \le C$ gilt für alle $\lambda \in [-b,b]$. Man erhält:

$$A_{\mu,s} = A_{\lambda,s}\sum_{k=0}^{\infty}\left[(\mu-\lambda)(\iota_{H^{2,s}(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \circ A_{\lambda,s})\right]^k$$

als Operator $L^{2,s}(\mathbb{R}^N) \to H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$. Die Reihe konvergiert dann bezüglich der Operatornorm für jedes $\lambda \in [-b,b]$ mit $|\lambda-\lambda_0| < 1/C$. Da F als Funktion von u im Wesentlichen ein Polynom ist, erhält man unmittelbar das folgende

Lemma 5.14. *Für jedes $s \ge 0$ ist die Abbildung $f : (-b_s, b_s) \times H^{2,s}(\mathbb{R}^N) \to H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ analytisch.*

Beweis. Es sei $(\lambda_0, u_0) \in (-b_s, b_s) \times H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$, dann gilt für jedes $\lambda \in (-b_s, b_s)$ mit $|\lambda-\lambda_0| < 1/C$ und $u \in H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ die folgende Darstellung von f als Potenzreihe von $\lambda - \lambda_0$ und $u - u_0$:

$$\begin{aligned} f(\lambda,u) =& A_{\lambda,s}(|u|^2u + Wu) \\ =& A_{\lambda,s}\sum_{k=0}^{\infty}\left[(\mu-\lambda)(\iota_{H^{2,s}(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow L^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \circ A_{\lambda,s})\right]^k \\ & \left(W(u-u_0) + Wu_0 + (u-u_0)^3 + 3u_0(u-u_0)^2 + 3u_0^2(u-u_0) + u_0^3\right), \end{aligned}$$

wobei $\iota_{H^{2,s}(\mathbb{R}^N)\hookrightarrow L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}$ die Einbettung $H^{2,s}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ bezeichnet. $\square$

Somit liefert die Anwendung von Theorem 3.4 nun zusätzlich, dass sich die Menge der degenerierten Punkte entlang eines Lösungszweiges nicht häufen und zusätzlich eine Möglichkeit, den Zweig lokal auf analytische Weise umzuparametrisieren. Man beachte dabei, dass die Degeneriertheit im gewichteten Raum äquivalent zur Degeneriertheit im ungewichteten Raum ist (vgl. Teil I). Darüber hinaus liefert der Satz über implizit definerte Funktionen die Invertierbarkeit der Linearisierung des nichtlinearen Operators in der Lösung als hinreichende Bedingung, den Lösungszweig nach λ parametrisieren zu können. Sei $(\lambda^*, u^*) \in C_{\lambda_0}$ eine Lösung, für welche der Operator $\partial_u F(\lambda^*, u^*) = -\Delta + V - \lambda^* - 3|u^*|^2$ invertierbar ist, so ist C_{λ_0} in einer Umgebung von (λ^*, u^*) nach λ parametrisierbar. In der Nähe des Ursprungs $(\lambda_0, 0)$ des Lösungszweiges ist dies sicherlich der Fall, da die Störung mit $3|u_\lambda|^2$ des linearen Operators $-\Delta + V + W$ für kleine λ das Spektrum auch nur gering stört [**RS78**] und daher in einer Umgebung von (λ^*, u^*) in C_{λ_0} die Invertierbarkeit der Linearisierung erhalten bleibt. Angenommen es gibt einen Punkt $(\lambda^*, u^*) \in C_{\lambda_0}$, in welchem nicht nach λ parametrisiert werden kann. Dann folgt, dass die Linearisierung in diesem Punkt nicht invertierbar ist. Wir wollen voraussetzen, dass der Kern der Linearisierung $\partial_u F(\lambda^*, u^*)$ eindimensional ist, also von der Form $\partial_u F(\lambda^*, u^*) = [w_0]$ ist. Die zugehörige $L^2(\mathbb{R}^N)$-orthogonale Projektion bezeichnen wir mit P. Der analytische Bifurkationssatz aus Theorem 3.4 liefert nun die Existenz einer (relativ) offenen Umgebung U von (λ^*, u^*) in C_{λ_0} und einer analytischen Funktion $(\lambda, u) : (-\delta, \delta) \to (-a, a) \times H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$, welche zusätzlich zu den in Theorem 3.4 aufgeführten Eigenschaften auch

$$\lambda'(t) \neq 0 \qquad t \in (-\delta, \delta) \setminus \{0\}$$

erfüllt. Dies folgt aus der Eigenschaft, das sich die Nullstellen analytischer Funktionen nicht häufen können. Nun zeigen wir, dass wir die Kurve $t \mapsto (\lambda(t), u(t))$ mit $(\lambda(0), u(0)) = (\lambda^*, u^*)$ bzw. deren beiden Abschnitte $\{(\lambda(t), u(t)) \in (-b_s, b_s) \times H^{2,s}(\mathbb{R}^N) : t > 0\}$ bzw. $\{(\lambda(t), u(t)) \in (-b_s, b_s) \times H^{2,s}(\mathbb{R}^N) : t < 0\}$ nach einer Art Bogenlänge parametrisieren können. Betrachte dazu für eine stetig differenzierbare Funktion $\rho : (-1, 0) \to (-\delta, 0)$ bzw. $\rho : (0, 1) \to (0, \delta)$ folgende gewöhnliche Differentialgleichung:

$$\left(\frac{d}{dL}\lambda(\rho(L))\right)^2 + \left(\frac{d}{dL}\|u(\rho(L))\|^4_{L^4(\mathbb{R}^N)}\right)^2 = 1, \tag{63}$$

wobei $\lambda(\cdot)$ und $u(\cdot)$ die beiden analytischen Funktionen aus Theorem 3.4 sind. Eine Anwendung der Kettenregel liefert die äquivalente Gleichung

$$\left(\frac{d\rho}{dL}(L)\right)^2 \cdot \left(\lambda'(\rho(L))^2 + \left(\frac{d}{dt}\left(\|u(t)\|^4_{L^4(\mathbb{R}^N)}\right)\Big|_{t=\rho(L)}\right)^2\right) = 1$$

Es sei nun $L_0 \in (-1, 0)$ (bzw. $L_0 \in (0, 1)$) fest. Dann gilt für alle $L \in (-1, 0)$ (bzw. $L \in (0, 1)$):

$$\pm \int_{\rho(L_0)}^{\rho(L)} \sqrt{\lambda'(\gamma)^2 + (\|u(\gamma)\|^4_{L^4(\mathbb{R}^N)})'^2}\, d\gamma = t - t_0$$

Da $|\frac{dt}{d\rho}| = \sqrt{\lambda'(\rho)^2 + (\|u(\rho)\|^4_{L^4(\mathbb{R}^N)})'^2} \geq |\lambda'(\rho)| > 0$ für alle $\rho \in (-1, 0)$ (bzw. $\rho \in (0, 1)$) nach Voraussetzung erfüllt ist, kann die Gleichung nach ρ aufgelöst werden. Das heißt, eine Parametrisierung nach Bogenlänge existiert und ist stetig differenzierbar in $(-1, 0)$ bzw. $(0, 1)$. In dieser

Parametrisierung erhält man für $L \neq 0$:

$$\frac{d}{dL}\lambda(\rho(L)) = \lambda'(\rho(L)) \cdot \rho'(L) = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{d}{d\lambda}\|u_\lambda\|^4_{L^4(\mathbb{R}^N)}\right)^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\|u_\lambda\|^4_{L^2(\mathbb{R}^N)}}}.$$

Aus der Stetigkeit des Zweiges folgt die Konvergenz von $\frac{d}{dL}\lambda(\rho(L))$ für $L \to \pm 0$ und beide Grenzwerte sind ungleich 0. Obgleich man nun ein "Zurücklaufen" des Astes, das heißt ein Vorzeichenwechsel, wenn L die 0 durchquert, nicht ausschließen kann, gilt zumindest

$$(1-P)\frac{d}{dL}u(\rho(0\pm)) \neq 0,$$

wobei die linke Seite als Grenzwert von $(1-P)\frac{d}{dL}u(\rho(L))$ für $L \to 0\pm$ verstanden wird. Daraus folgt, $\frac{d}{dL}u(\rho(0)) \notin \ker(\partial_u F(\lambda^*, u^*))$ und folglich liegt in (λ^*, u^*) kein Turningpoint vor. Wir wollen nun zunächst die Existenz des Grenzwertes rechtfertigen.

In der Tat liefert ein Differenzieren der Gleichung in $L \neq 0$ die Identität

$$(-\Delta + V - \lambda - 3|u(\rho(L))|^2)\frac{d}{dt}u(\rho(L)) - \lambda'(\rho(L))u(\rho(L)) = 0.$$

Wir benutzen folgendes Resultat aus der Funktionalanalysis.

Lemma 5.15. *Es seien X, Y Banachräume und $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge in $L(X,Y)$ mit $T_n \to T$ bezüglich der Operatortopologie. Weiter sei T invertierbar. Dann ist auch T_n invertierbar für fast alle $n \in \mathbb{N}$ und die Folge $\{T_n^{-1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen T^{-1}.*

Beweis. Aus der Invertierbarkeit von T folgt mit dem Satz von der offenen Abbildung die Stetigkeit der inversen Abbildung. Daraus folgt insbesondere die Existenz einer Konstanten $C > 0$ derart, dass für alle $x \in X$ die Abschätzung $\|Tx\|_Y \geq C\|x\|_X$ gilt. Gibt man sich $\varepsilon < C$ vor, so liefert die Konvergenz bezüglich Operatornorm wie folgt eine untere Schranke für die Norm der Bilder der Operatorenfolge für alle $n \geq N_0(\varepsilon)$ für ein $N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:

$$\|T_n x\|_Y \geq \|Tx\|_Y - \|(T-T_n)x\|_Y \geq C\|x\|_X - \varepsilon\|x\|_X = (C-\varepsilon)\|x\|_X. \tag{64}$$

Demzufolge ist auch T_n injektiv. Ferner ist $T_n(X)$ abgeschlossen für jedes $n \in \mathbb{N}$, denn für eine Cauchy-konvergente Folge $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ aus $T_n(X)$ gibt es eine Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $T_n x_k = y_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-konvergent wegen Ungleichung (64). Folglich gilt $x_k \to x$ für ein $x \in X$ für $k \to \infty$. Aus der Stetigkeit von T_n folgt dann $T_n(x_k) \to T_n(x)$ für $k \to \infty$ und somit ist $T_n(X)$ abgeschlossen.

Man nimmt nun an, dass T_n nicht surjektiv ist für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Teilfolge (auch mit $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet), dessen Folgenglieder nicht surjektiv sind und abgeschlossenes Bild haben. Nach dem Riesz'schen Lemma gibt es eine Folge $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus Y mit $\|y_n\|_Y = 1$, sodass für alle $x \in X$ gilt:

$$\|T_n x - y_n\|_Y \geq \frac{1}{2}.$$

Da T allerdings surjektiv ist gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit $Tx_n = y_n$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X ist beschränkt, da T^{-1} stetig ist. Die Wahl von $x = x_n$ liefert schließlich

$$\|T_n x_n - Tx_n\| \geq \frac{1}{2} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

was der Konvergenz von $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen T widerspricht. T_n ist also surjektiv für fast alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Konvergenz der inversen Operatoren erhält man nun durch die folgende Ungleichheitskette:

$$\begin{aligned}\|T^{-1} - T_n^{-1}\|_{L(Y,X)} &\leq C^{-1}\|T(T^{-1} - T_n^{-1})\|_{L(Y,Y)} \\ &\leq (C-\varepsilon)^{-1}C^{-1}\|T(T^{-1} - T_n^{-1})T_n\|_{L(X,Y)} \\ &= (C-\varepsilon)^{-1}C^{-1}\|T_n - T\|_{L(X,Y)}.\end{aligned}$$

□

Dies verwenden wir nun für die differenzierte Gleichung. Zunächst Projezieren wir auf $[w_0]^\perp$ mittels $(1-P)$:

$$(1-P)(-\Delta + V - \lambda - 3|u(\rho(L))|^2)\frac{d}{dL}u(\rho(L)) = (1-P)(\lambda'(\rho(L))u(\rho(L))).$$

Invertieren des Operators und nochmaliges Projezieren auf $[w_0]^\perp$ liefert:

$$\begin{aligned}&(1-P)\frac{d}{dL}u(\rho(L)) \\ =&(1-P)(-\Delta + V - \lambda - 3|u(\rho(L))|^2)^{-1}(1-P)\lambda'(\rho(L))u(\rho(L)) \\ =&\left((-\Delta + V - \lambda - 3|u(\rho(L))|^2)|_{Ran(-\Delta+V-\lambda-3|u(\rho(L))|^2)}\right)^{-1}(1-P)\lambda'(\rho(L))u(\rho(L)).\end{aligned} \tag{65}$$

Per Konstruktion ist der Grenzwert des Operators

$$(-\Delta + V - \lambda - 3|u(\rho(L))|^2)|_{Ran(-\Delta+V-\lambda-3|u(\rho(L))|^2)}$$

für $L \to 0\pm$ invertierbar (für $L \neq 0$ ist der Operator auch auf dem gesamten Raum invertierbar). Das Lemma liefert dann auch die Konvergenz des inversen Operators, sodass die rechte Seite von (65) konvergiert. In der Folge konvergiert auch $(1-P)\frac{d}{dL}u(\rho(L))$ in $H^2(\mathbb{R}^N)$ für $L \to 0\pm$ und die Grenzwerte von oben und unten unterscheiden sich gemäß Gleichung (65) höchstens um ein Vorzeichen. Dass sie nicht 0 werden, folgt aus $\lambda'(\rho(0\pm))u(\rho(0)) \neq 0$.

Nun wollen wir die sekundäre Verzweigungstheorie aus dem allgemeinen Kapitel anwenden, um ein Kriterium für eine sekundäre Verzweigung in der Nähe einer degenerierten Lösung des Zweiges zu erarbeiten. In diesem Fall gibt es prinzipiell zwei Wege, die nichtlineare Abbildung zu definieren, auf welche die Resultate des letzten Abschnittes angewandt werden können. In diesem Kontext soll nicht wie im allgemeinen Kapitel 3 mit der Abbildung

$$F:\, (-a,a) \times H^{2,s}(\mathbb{R}^N) \to H^{2,s}(\mathbb{R}^N),\, (\lambda, u) \mapsto (-\Delta + V + W - \lambda)^{-1}(|u|^2 u + Wu)$$

gearbeitet werden, da wir für lokale Resultate keine Kompaktheit benötigen. Stattdessen betrachten wir die Abbildung

$$\tilde{F}:\, (-a,a) \times H^{2,s}(\mathbb{R}^N) \to L^{2,s}(\mathbb{R}^N),\, (\lambda, u) \mapsto (-\Delta + V - \lambda)u - |u|^2 u,$$

um anhand dieser an eine hinreichende Bifurkationsbedingung zu gelangen. Die Existenz eines Lösungszweiges, welche auf analytische Weise die Quelle $(\lambda_0, 0)$ mit dem degenerierten Punkt (λ^*, u^*) verbindet, ist schon durch den globalen Satz geklärt. Das folgende lokale Resultat liefert die Existenz über diesen degenerierten Punkt hinaus, sofern $s > 0$ hinreichend klein ist.

Theorem 5.16. *Es sei λ_0 ein einfacher Eigenwert von*

$$T:\, L^2(\mathbb{R}^N) \supset H^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N),\, Tu = -\Delta u + Vu$$

und zu $s > 0$ sei $C_{\lambda_0}(s)$ der zugehörige Zweig von nichttrivialen Lösungen der Gleichung (34) mit $g(x,u) = u^3$ in $(-b_s, b_s) \times H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$. Es sei weiter $\lambda^* \in (-b_s, b_s)$ derart, dass die zugehörige Lösung u_{λ^*} einfach degeneriert ist, das heißt, es gilt: $\ker(\partial_u F(\lambda^*, u_{\lambda^*}))$ *ist von der Form* $[w_0]$. *Ferner gelte:*

$$\langle u^*, w_0\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + 6\langle (u^*)^2(-\Delta + V - 3|u^*|^2 - \lambda)^{-1}[u^*], w_0\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \neq 0. \tag{66}$$

Dann ist der Zweig $C_\lambda(s)$ über λ^* hinaus fortsetzbar, das heißt, $C_{\lambda_0}(s)$ enthält einen Punkt (λ, u_λ) mit $\lambda < \lambda^*$. Ferner ist $(\lambda^*, u^*) \in C_{\lambda^*}(s)$ ein Verzweigungspunkt, falls $\langle u^*, w_0\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0$ gilt.

Wir wenden im Beweis das Lemma 3.8 auf die reduzierte Abbildung $\tilde{F}$ auf $H^2(\mathbb{R}^N)$ an. Daher ist a priori kein Abklingverhalten im Sinne gewichteter Sobolevräume geklärt. Allerdings kann a posteriori exponentielles Abklingen bewiesen werden, indem man u_λ als Lösung einer linearen Schrödingergleichung versteht. Folglich liegt der verzweigende Ast in $H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ für jedes $s \geq 0$. Darüber hinaus verstehen wir die Bedingung (66) als Transversalitätsbedingung, welche auch im lokalen Bifurkationssatz in der Form $\partial^2_{\lambda u} F(\lambda_0, 0)$ zu finden ist.

Beweis. Wir weisen die Voraussetzungen der Lemmata 3.8 und 3.10 nach. In einer Umgebung des Punktes $(\lambda^*, u^*) \in C_{\lambda_0}$ verwendet man die Lyapunov-Schmidt-Reduktion aus Lemma 3.6 um die Gleichung $\tilde{F}(\lambda, u) = 0$ äquivalent umzuformen in die Gleichung

$$\phi(\lambda, t) := \langle \tilde{F}(\lambda, tw_0 + \psi(\lambda, t)), w_0\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0,$$

Wir setzen $t^* = \langle u^*, w_0\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}$, sodass gilt:

$$u^* = t^* w_0 + \psi(\lambda^*, t^*).$$

Bei der Berechnung des Gradienten von ϕ im Punkt $(\lambda^*, t^* w_0 + \psi(\lambda^*, t^*))$ erhält man einerseits

$$\partial_t \phi(\lambda^*, t^*) = \langle \partial_u \tilde{F}(\lambda^*, t^* w_0 + \psi(\lambda^*, t^*))[w_0 + \partial_t \psi(\lambda^*, t^*)], w_0\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0,$$

andererseits gilt

$$\partial_\lambda \phi(\lambda^*, t^*) = \langle \partial_\lambda \tilde{F}(\lambda^*, t^* w_0 + \psi(\lambda^*, t^*)) + \partial_u \tilde{F}(\lambda^*, t^* w_0^* + \psi(\lambda^*, t^*))[\partial_\lambda \psi(\lambda^*, t^*)], w_0\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Der zweite Summand wird 0, da $\partial_u \tilde{F}$ selbstadjungiert auf $L^2(\mathbb{R}^N)$ mit Definitionsbereich $H^2(\mathbb{R}^N)$ ist und w_0 per Definition dessen Kern aufspannt. Daraus folgt

$$\partial_\lambda \phi(\lambda^*, t^*) = \langle \partial_\lambda \tilde{F}(\lambda^*, t^* w_0 + \psi(\lambda^*, t^*)), w_0\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = -\langle u^*, w_0\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \tag{67}$$

Nun verwenden wir, dass wir bereits die Existenz eines Lösungszweig $\{(\lambda, u_\lambda)\}_{\lambda \in (\lambda^*, \lambda^* + \tilde{\varepsilon})}$ für ein $\tilde{\varepsilon} > 0$ hinreichend klein bewiesen haben und unterscheiden zwei Fälle:

a) Falls $\partial_\lambda \phi(\lambda^*, t^*) \neq 0$ gilt, so liefert der Satz über implizit definierte Funktionen eine Umgebung $(\lambda^* - \delta, \lambda^* + \delta) \times (t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon)$ und eine Funktion $\theta : (t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon) \to (\lambda^* - \delta, \lambda^* + \delta)$, sodass die Gleichung $\phi(\lambda, t) = 0$ für $(\lambda, t) \in (\lambda^* - \delta, \lambda^* + \delta) \times (t^* - \varepsilon, t^* + \varepsilon)$ äquivalent ist zu $\theta(t) = \lambda$. Die Eindeutigkeit hat zur Folge, dass eine der Mengen $\{(\theta(t), t)\}_{t \in (t^* - \varepsilon, t^*)}$ oder $\{(\theta(t), t)\}_{t \in (t^*, t^* + \varepsilon)}$ eine Obermenge von $\{(\lambda, t_\lambda)\}_{\lambda \in (\lambda^*, \lambda^* + \tilde{\varepsilon})}$ ist. Darüber hinaus sind die Punkte $(\theta(t), t)$ für alle $t \neq t^*$ nichtdegeneriert, da $(\theta(t), tw_0 + \psi(\theta(t), t))$ Lösungen der Gleichung $F(\lambda, u) = 0$ sind und sich die degenerierten Punkte nicht häufen (vergleich Theorem 3.4). Somit liefert der Abschnitt $\{(\theta(t), t)\}_{t \in (t^* - \varepsilon, t^*)}$ oder $\{(\theta(t), t)\}_{t \in (t^*, t^* + \varepsilon)}$, welcher nicht $\{(\lambda, t_\lambda)\}_{\lambda \in (\lambda^*, \lambda^* + \tilde{\varepsilon})}$ beinhaltet eine Fortsetzung von der Parametrisierung $\lambda \mapsto (\lambda, u_\lambda)$ in $(-b_s, b_s) \times H^2(\mathbb{R}^N)$. Die Monotonie der $L^4(\mathbb{R}^N)$-Norm impliziert die Existenz von $(\lambda, u_\lambda) \in C_\lambda(s)$ mit $\lambda < \lambda^*$.

b) Falls $\langle \partial_\lambda \tilde{F}(\lambda^*, u^*), w_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0$ gilt, so betrachtet man die Hessematrix. Dazu berechnet man entsprechend die zweiten partiellen Ableitungen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\partial^2_{tt}\phi(\lambda^*, t^*) =& \langle \partial^2_{uu}\tilde{F}(\lambda^*, t^* w_0 + \psi(\lambda^*, t^*))[w_0 + \partial_t \psi(\lambda^*, t^*), w_0 + \partial_t \psi(\lambda^*, t^*)] \\
& + \partial_u \tilde{F}(\lambda^*, t^* w_0 + \psi(\lambda^*, t^*))[\partial^2_{tt}\psi(\lambda^*, t^*)], w_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
=& \langle \partial^2_{uu}\tilde{F}(\lambda^*, t^* w_0 + \psi(\lambda^*, t^*))[w_0, w_0], w_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
=& 6\langle |w_0|^2 (t^* w_0 + \psi(\lambda^*, t^*)), w_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \\
\partial^2_{\lambda\lambda}\phi(\lambda^*, t^*) =& \langle \partial^2_{\lambda\lambda}\tilde{F}(\lambda^*, t^* w_0 + \psi(\lambda^*, t^*)) + 2\partial^2_{\lambda u}\tilde{F}(\lambda^*, t^* w_0 + \psi(\lambda^*, t^*))[\partial_\lambda \psi(\lambda^*, t^*)] \\
& + \partial_u \tilde{F}(\lambda^*, t^* w_0 + \psi(\lambda^*, t^*))[\partial^2_{\lambda\lambda}\psi(\lambda^*, t^* w_0 + \psi(\lambda^*, t^*))], w_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0, \\
\partial^2_{t\lambda}\phi(\lambda^*, t^*) =& \langle \partial^2_{u\lambda}\tilde{F}(\lambda^*, t^* w_0 + \psi(\lambda^*, t^*))[w_0 + \partial_t \psi(\lambda^*, t^*)] \\
& + \partial^2_{uu}\tilde{F}(\lambda_0, w_0 + \partial_t \psi(\lambda^*, t^*))[\partial_\lambda \psi(\lambda^*, t^*), w_0 + \partial_t \psi(\lambda^*, t^*)] \\
& + \partial_u \tilde{F}(\lambda^*, t^* w_0 + \psi(\lambda^*, t^*))[\partial_{\lambda t}\psi(\lambda^*, t^*)], w_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
=& -\langle w_0, w_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} + 6\langle ((t^* w_0 + \psi(\lambda^*, t^*))^2 \partial_\lambda \psi(\lambda^*, t^*), w_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
=& -1 - 6\langle (t^* w_0 + \psi(\lambda^*, t^*))^2 (-\Delta + V - 3|t^* w_0 + \psi(\lambda^*, t^*)|^2 - \lambda)^{-1} \\
& [t^* w_0 + \psi(\lambda^*, t^*)], w_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Um nachzuweisen, dass die Hessematrix indefinit ist, bedient man sich der Basisunabhängigkeit der Determinante, um diese als Produkt der Eigenwerte zu klassifizieren. Die Matrix ist in der Folge genau dann indefinit, wenn die Determinante negativ ist. Es gilt:

$$\det(\partial^2 \psi(\lambda^*, t^*)) = -\left(1 + 6\langle (u^*)^2 (-\Delta + V - 3|u^*|^2 - \lambda)^{-1}[u^*], w_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}\right)^2 < 0,$$

und somit die Indefinitheit nach Voraussetzung. Lemma 3.8 liefert dann die Existenz von Lösungen (λ, u_λ) in $(-b_s, b_s) \times H^2(\mathbb{R}^N)$ mit $\lambda < \lambda^*$, welche sich in (λ^*, u^*) häufen. Darüber hinaus liefert Lemma 3.8 mindestens zwei weiteren Folgen von Lösungen, die für die Verzweigung verantwortlich sind. Für diese Lösungen gilt auch $F(\lambda, u_\lambda) = 0$. Lemma 3.10 garantiert anschließend, dass die Lösungen tatsächlich auf einem Zweig liegen. Mit der Existenz der Lösungen in $(-b_s, b_s) \times H^2(\mathbb{R}^N)$ und dessen lokale Beschränktheit folgt gemäß Lemma 5.12 und Theorem 5.4 die Existenz der Lösung in $(-b_s, b_s) \times H^2(\mathbb{R}^N)$ über (λ^*, u^*) hinaus. □

Der globale analytische Verzweigungssatz liefert nun, dass die Menge der degenerierten Stellen, das heißt, jene, in denen der Zweig nicht analytisch ist, sich entlang des Zweiges nicht häufen können. Theorem 5.16 liefert die stetige Parametrisierbarkeit nach dem Spektralparameter. Dann hat jedes kompakte Teilintervall $[\lambda_1, \lambda_2] \subset (-a, \lambda_0]$ ein kompaktes Bild in $\mathbb{R} \times H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$ für $s > 0$ gemäß Theorem 5.16 passend gewählt. In der Folge gibt es im Intervall $[\lambda_1, \lambda_2]$ nur endlich viele solcher degenerierten Stellen, sodass diese sich (nach Wiederholung des Arguments) höchstens in $-a$ häufen können und höchstens abzählbar viele sind.

Theorem 5.17. *Es sei λ_0 ein einfacher Eigenwert von T und $C_{\lambda_0} := \bigcup_{s>0} C_{\lambda_0}(s) \subset \mathbb{R} \times H^2(\mathbb{R}^N)$ sei der dazugehörige Lösungszweig, sowie $\tilde{C}_{\lambda_0}$ dessen Abschluss unter der schwachen Topologie in $H^2(\mathbb{R}^N)$. Für jeden degenerierten Punkt $(\lambda^*, u^*) \in C_{\lambda_0}$ gelte $\ker(\partial_u F(\lambda^*, u^*)) = [w_0]$ für ein*

$w_0 \in H^2(\mathbb{R}^N)$ und ferner

$$1 + 6\langle (u^*)^2(-\Delta + V - 3|u^*|^2 - \lambda)^{-1}[u^*], w_0\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \neq 0,$$

falls $\langle u^*, w_0\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} = 0$ gilt.

Dann existiert ein nach λ parametrisierbarer, stetiger Zweig $\{(\lambda, u_\lambda)\}_{\lambda\in I} \subset C_{\lambda_0}$ mit $I \subseteq (-a, \lambda_0]$ zusammenhängend, relativ offen in $(-a, \lambda_0]$ und maximal gewählt. Ferner sind die folgenden beiden Aussage äquivalent:

(1) Für alle $J \subset\subset (-a, \lambda_0]$ gibt es (höchstens endlich viele) $\lambda_1^* > \ldots > \lambda_M^* \in I \cap J$, sodass folgende Aussage gilt: Für alle $(\lambda^*, u^*) \in \tilde{C}_{\lambda_0}$, welche einfach degeneriert sind und $\lambda^* \in J$ gilt, folgt $(\lambda^*, u^*) \in C_{\lambda_0}$ und $\lambda^* = \lambda_k^*$ für ein $k \in 1, \ldots, M$.
(2) $I = (-a, \lambda_0]$ und für alle $J \subset\subset I$ gilt: $\sup\limits_{\lambda\in J} \|u_\lambda\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} < \infty$.

Beweis. Eingangs kann das Zurücklaufen in einen weiteren Eigenwert in $(-a, \lambda_0]$ ausgeschlossen werden, denn nach dem Mittelwertsatz würde dies der Monotonie der $L^4(\mathbb{R}^N)$-Norm in Bezug auf den Spektralparameter λ widersprechen. Theorem 5.16 liefert die Fortsetzbarkeit eines Zweiges über degenerierte Punkte hinaus.

$'' \Rightarrow ''$ Angenommen, für jedes $J \subset\subset I$ existieren endlich viele $\lambda_1^* > \ldots > \lambda_M^* \in I \cap J$ derart, dass $\{(\lambda, u_\lambda)\}_{\lambda\in J}$ genau in $(\lambda_m^*, u_{\lambda_m^*})$ einfach degeneriert ist. Angenommen $I \neq (-a, \lambda_0]$. Wähle $\lambda_* \in (-a, \lambda_0]$ und $J \supset (\lambda_*, \lambda_0]$, sowie $b > 0$ mit $J \subset (-b, b)$ und das zugehörige $s = s(b)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $s \in (0, 1)$ gewählt (ansonsten betrachte ein größeres $b > 0$). Dann folgt aus Theorem 5.5, dass $\|u_\lambda\|_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)} \to \infty$ für $\lambda \to \lambda^* + 0$ gilt. Daraus erhält man $\lambda^* > \lambda_1^* \geq \ldots \geq \lambda_M^*$, da andernfalls nach Voraussetzung $(\lambda^*, u_{\lambda^*}) \in C_{\lambda_0}$ gelte und die Offenheit von $C_{\lambda_0}(s)$ der Divergenz von $\|u_\lambda\|_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)} \to \infty$ für $\lambda \to \lambda^* + 0$ widerspräche.

Nun ist der Zweig für $\lambda \in (-a, \lambda_1^*) \cap I$ nichtdegeneriert, woraus mit Theorem 5.8 und Korollar 5.9 die gleichmäßige Beschränktheit der $L^2(\mathbb{R}^N)$- und der $L^4(\mathbb{R}^N)$-Norm über $J \subset\subset I$ folgt. Da u_λ die Gleichung löst, folgt daraus auch die gleichmäßige Beschränktheit der $H^2(\mathbb{R}^N)$-Norm, woraus schwache Konvergenz für $\lambda \to \lambda^*$ folgt. Die Einbettung $H^2(\mathbb{R}^N) \to L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)$ ist kompakt, da $s - 1 < 0$ gilt. Somit konvergiert u_λ sogar stark in $L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)$ gegen u_{λ^*}. Darüber hinaus ist u_{λ^*} auch eine Lösung der Gleichung (34), denn für alle $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N)$ dicht, gilt:

$$\begin{aligned}
&\langle(-\Delta + V - \lambda^*)u_{\lambda^*} - u_{\lambda^*}^3, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
=&\langle(-\Delta + V - \lambda^*)v, u_{\lambda^*} - u_\lambda\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \langle(-\Delta + V - \lambda)u_\lambda, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&+ (\lambda - \lambda^*)\langle u_\lambda, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \langle u_{\lambda^*}^3, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
=&\langle(-\Delta + V - \lambda^*)v, u_{\lambda^*} - u_\lambda\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} + \langle u_\lambda^3 - u_{\lambda^*}^3, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \\
&+ (\lambda - \lambda^*)\langle u_\lambda, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0 \qquad (\lambda \to \lambda^*).
\end{aligned}$$

Die Konvergenz $\langle u_\lambda^3 - u_{\lambda^*}^3, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0$ erhält man nach Kondrachov-Rellich. Um die Konvergenz für $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$ zu folgern bedient man sich noch der Beschränktheit von $\|u_\lambda\|_{H^2(\mathbb{R}^N)}$ in λ. Daher gilt

$$(-\Delta + V - \lambda^*)u_{\lambda^*} - u_{\lambda^*}^3 = 0.$$

Nach Voraussetzung ist $\partial_u F(\lambda^*, u_{\lambda^*})$ invertierbar, denn andernfalls wäre $(\lambda^*, u_{\lambda^*}) \in C_{\lambda_0}$ und λ_1^* wäre nicht das kleinste λ zu einem degenerierten Punkt. Zu jedem $v \in H^2(\mathbb{R}^N)$ ist die Abbildung $[\lambda^*, \lambda_1^*] \to \mathbb{R}$, $\lambda \mapsto \langle(-\Delta + V - \lambda - 3|u_\lambda|^2)v, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}$ stetig, denn die Abbildung

$(\lambda^*, \lambda_1^*) \to H^2(\mathbb{R}^N)$, $\lambda \mapsto u_\lambda$ ist schwach stetig und daher gilt für alle $\lambda, \mu \in [\lambda^*, \lambda_1^*]$:

$$\begin{aligned}&\langle(-\Delta + V - \lambda - 3|u_\lambda|^2)v, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} - \langle(-\Delta + V - \mu - 3|u_\mu|^2)v, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}\\ =&(\mu - \lambda)\langle v, v\rangle + 3\langle(|u_\mu|^2 - |u_\lambda|^2)v, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \to 0, \qquad \lambda \to \mu.\end{aligned}$$

Der erste Summand konvergiert gegen 0 wenn $\mu \to \lambda$ geht. Der zweite konvergiert zunächst für alle $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset L^4(\mathbb{R}^N)$ dicht und schließlich für alle $v \in L^4(\mathbb{R}^N)$, da die Abbildung $\lambda \to u_\lambda$ beschränkt in $L^4(\mathbb{R}^N)$ ist.

Ferner gilt für jedes $\lambda \in [\lambda^*, \lambda_1^* - \varepsilon]$:

$$\langle(-\Delta + V - \lambda - 3|u_\lambda|^2)v, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)} \neq 0,$$

da die Linearisierung invertierbar ist. Zusammen mit der Stetigkeit ist die Abbildung

$$\lambda \to \langle(-\Delta + V - \lambda - 3|u_\lambda|^2)v, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}$$

von 0 weg beschränkt für jedes $v \in H^2(\mathbb{R}^N)$, d.h. es gibt $c_0 > 0$ derart, dass für alle $\lambda \in [\lambda^*, \lambda_1^* - \varepsilon]$ gilt:

$$\begin{aligned}&\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\|(-\Delta + V - \lambda - 3|u_\lambda|^2)[v]\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\\ \geq& c_0|\langle(-\Delta + V - \lambda - 3|u_\lambda|^2)v, v\rangle_{L^2(\mathbb{R}^N)}| \geq c_0\|v\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

Daraus folgt für jedes $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$:

$$\|(-\Delta + V - \lambda - 3|u_\lambda|^2)^{-1}[v]\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{c_0}\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \qquad (\lambda \in [\lambda^*, \lambda_1^* - \varepsilon]).$$

Nach dem Satz von Banach-Steinhaus gibt es folglich ein $C > 0$ derart, dass für alle $\lambda \in [\lambda^*, \lambda_1^* - \varepsilon]$ gilt:

$$\|(-\Delta + V - \lambda - 3|u_\lambda|^2)^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)} \leq C.$$

Wir folgern, dass für alle $\lambda \in [\lambda^*, \lambda_1^* - \varepsilon]$ gilt:

$$\begin{aligned}\|u_\lambda'\|_{L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)} \leq& \|u_\lambda'\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|(-\Delta + V - \lambda - 3|u_\lambda|^2)^{-1}[u_\lambda]\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}\\ \leq& C\|u_\lambda\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \tilde{C}.\end{aligned}$$

Man erhält schließlich wie im nichtdegenerierten Fall in Lemma 5.12 die Ungleichung (61):

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{d\lambda}\|u_\lambda\|^4_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)}\right| \leq& C\|u_\lambda'\|_{L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)}\|\nabla u_\lambda\|_{L^{2,s-1}(\mathbb{R}^N)} + 2\|u_\lambda\|^2_{L^{2,s}(\mathbb{R}^N)}\\ &+ \left|\frac{d}{d\lambda}\int_{\mathbb{R}^N} |u_\lambda|^2 \Delta\langle x\rangle^s \, dx\right|,\end{aligned}$$

und somit für $\kappa :\ (0, a + \lambda_0) \to H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$, $\mu \mapsto \|u_{\lambda_0 - \mu}\|^4_{L^{4,s}(\mathbb{R}^N)}$:

$$\kappa'(\mu) \leq C_1 + \frac{C_2 + \kappa(\mu)}{a + \lambda_0 - \mu}.$$

Auch hier folgt die Beschränkung der $L^{4,s}(\mathbb{R}^N)$-Norm mittels Lemma von Gronwall, was dem Blowup in λ_* widerspricht.

$'' \Leftarrow''$: Angenommen $I = (-a, \lambda_0]$ und für jedes $J \subset\subset (-a, \lambda_0]$ existiert eine Konstante $C > 0$ mit $\sup_{\lambda \in J} \|u_\lambda\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} = C$. In diesem Fall ist die Menge $\{(\lambda, u_\lambda)\}_{\lambda \in J}$ als Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung selbst kompakt und jede beschränkte Folge hat einen Häufungswert. Dies schließt die Existenz unendlich vieler degenerierter Punkte auf C_{λ_0} gemäß dem analytische

Bifurkationssatz 3.4 aus. Sei schließlich $(\lambda^*, u^*) \in \tilde{C}_{\lambda_0}$ beliebig mit $-a < \lambda_*$, so gibt es eine Folge $(\lambda_n, u_{\lambda_n}) \in C_{\lambda_0}(s)$ mit $\lambda_n \to \lambda^*$ und $u_{\lambda_n} \rightharpoonup u^*$ in $H^2(\mathbb{R}^N)$. Wähle $J \subset\subset (-a, \lambda_0]$ mit $\lambda^*, \lambda_n \in J$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt nach Voraussetzung $\|u_{\lambda_n}\|_{H^{2,s}(\mathbb{R}^N)} \leq C$ für ein $C > 0$ und da u_{λ_n} die Gleichung löst, folgt mit der Kompaktheit von $A_{\lambda,s}[|u_{\lambda_n}|^2 u_{\lambda_n} + W u_{\lambda_n}] = u_{\lambda_n}$ die Existenz einer $H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$-konvergenten Teilfolge. Ihr Grenzwert sei mit u^{**} bezeichnet. Insbesondere gilt $u_{\lambda_n} \rightharpoonup u^{**}$ in $H^2(\mathbb{R}^N)$, woraus $u^* = u^{**}$ folgt. und daraus $(\lambda^*, u^*) \in C_{\lambda_0}(s) \subseteq C_{\lambda_0}$. □

Wir reichen sofort das entsprechende Korollar für nichtdegenerierte Zweige nach.

KOROLLAR 5.18. *Es sei λ_0 ein einfacher Eigenwert von T und $\tilde{C}_{\lambda_0}$, der schwache $H^2(\mathbb{R}^N)$ Abschluss der Lösungen zu*

$$(-\Delta + V - \lambda)u - u^3 = 0,$$

sei nichtdegeneriert. Dann existiert ein nach λ parametrisierbarer, stetiger Zweig

$$\{(\lambda, u_\lambda)\}_{\lambda \in (-a, \lambda_0]} \subset C_{\lambda_0}$$

von Lösungen.

BEWEIS. Aussage (2) in Theorem 5.17 ist erfüllt. □

Wir schließen mit einigen Bemerkungen. Die Abgeschlossenheit des Zweiges bezüglich schwach $H^2(\mathbb{R}^N)$-konvergenter Folgen, deren Grenzwerte degenerierte Punkte sind, erscheint eine sehr technische Voraussetzung. Der Autor vermutet, dass es für den $'' \Rightarrow''$-Teil hinreichend ist, dass man lokal nur endlich viele degenerierten Punkte auf dem (starken) $H^2(\mathbb{R}^N)$-Abschluss des Zweig hat. Man beweist analog, dass, falls ein Blowup in der gewichteten Norm auftritt, man dennoch eine schwach konvergente (in den äquivalenten Normen $H^2(\mathbb{R}^N)$, $L^2(\mathbb{R}^N)$ und $L^4(\mathbb{R}^N)$) hat. Der Autor geht davon aus, dass daraus auch die starke Konvergenz folgt, indem man sich die Monotonie der $L^4(\mathbb{R}^N)$-Norm oder die spektralen Abschätzungen zu Nutze macht. In [**JS$^+$99**] wird dies im eindimensionalen und unter starken Symmetrievoraussetzungen gefolgert. Dies ist dem Autor bisher nicht gelungen. Ist dies gezeigt, so folgt mit dem Satz über implizit definierte Funktionen, einmal in einer $(-a, a) \times H^2(\mathbb{R}^N)$-Umgebung und einmal in $(-a, a) \times H^{2,s}(\mathbb{R}^N)$-Umgebung des Grenzwertes (λ^*, u^*) angewandt, dass dieser Zweig lokal mit $C_{\lambda_0}(s)$ übereinstimmt, was dem Blowup widerspricht.

KAPITEL 6

Ausblick

Die Verwendung gewichteter Sobolevräume für die Kompaktheit des nichtlinearen Operators kann dahingehend ausgedehnt werden, dass man nun statt beschränkter Potentiale auch größere Klassen von Potentialen zulässt, welche die Definition eines selbstadjungierten Schrödingeroperators zulassen. Hierbei wird der Definitionsbereich des linearen Operators und somit der Lösungsraum, in welchem nach Lösungen der nichtlinearen Gleichung gesucht wird, durch eine gewichtete Version des Definitionsbereichs angepasst werden. Man muss dabei sicherstellen, dass der nichtlineare Teil des Operators wieder in den Definitionsbereich abbildet und diesen gegebenenfalls mit zusätzlichen Bedingungen versehen.

Ferner steht die Behandlung exponentiell gewichteter Räume zur Debatte. Obgleich die Existenz der Lösungen lediglich im polynomiell gewichteten Raum nachgewiesen wurde, kann a posteriori das exponentielle Abklingen der Lösungen mit dem ersten Teil dieser Arbeit nachgewiesen werden. Ferner haben wir im ersten Teil bewiesen, dass die Abklingrate lediglich vom Abstand des Spektralparameters zum essentiellen Spektrum abhängt. Das heißt, die Lösungen der Gleichung haben eine gemeinsame untere Schranke für die Abklingrate, sofern der Spektralparameter sich in einem abgeschlossenen Interval, welches disjunkt vom essentiellen Spektrum ist, befindet. Die Existenz von Lösungen in einem Sobolevraum mit exponentiell steigendem Gewicht ist daher bewiesen. Fraglich bleiben darüber hinaus die topologischen Eigenschaften der Menge der Lösungen, da der globale Verzweigungssatz (bisher) nicht im exponentiell gewichteten Raum angewandt wurde.

Die Behandlung weiterer nicht Schrödinger-artiger Gleichungen unter Verwendung gewichteter Räume ist immer dann möglich, wenn man über das Abklingverhalten der Eigenfunktionen der Linearisierung in der trivialen Lösung innerhalb des Intervals, für welches man globale Bifurkation nachweisen möchte, hinreichend gute Informationen hat. Die Kompaktheit des nichtlinearen Teils hängt von dem Wachstum der Nichtlinearität im Verhältnis zum Gewicht des Raumes ab. So ist es denkbar, zum Beispiel ein logarithmisch wachsendes Gewicht zu verwenden, um lediglich polynomiell wachsende Eigenfunktionen zu Lückeneigenwerten zu behandeln. Solche Eigenfunktionen können auch bei Schrödingeroperatoren als Eigenfunktionen zu eingebetteten Eigenwerten auftauchen.

In konkreteren Beispielen von Gleichungen bzw. stärkeren Voraussetzungen an die Parameter dieser ist der Autor zuversichtlich, die spektralen Abschätzungen der Resolventennorm im gewichteten Raum zu verbessern. Als Beispiel seien hier nichtlineare Operatoren erwähnt, deren Linearisierung ein (gestörtes) periodisches Potential beinhaltet. Das essentielle Spektrum dieser Schrödingeroperatoren ist durch Blochwellen charakterisiert, welche, geeignet abgeschnitten, eine Weyl'sche Folge bilden. Diese Blochwellen sind beschränkt, und die Konvergenz der Weyl'schen Folge basiert wesentlich auf dieser Eigenschaft. Betrachtet man die Folgen in gewichteten Räumen, so kann diese Eigenschaft verloren gehen. Das heißt, dass in gewichteten Räumen der Operator möglicherweise kein essentielles Spektrum besitzt. In dem Fall bildet der inverse Abstand zum essentiellen Spektrum des selbstadjungierten Operators in $L^2(\mathbb{R}^N)$ keine obere Schranke der Resolvente als Abbildung zwischen gewichteten Räumen. Folglich ist das Interval, in welchem der globale Satz angewandt wird, nicht auf die spektrale Lücke der Linearisierung als Operator in $L^2(\mathbb{R}^N)$ beschränkt. Denkbar ist im konkreten Fall auch eine Abschätzung der Norm der Resolvente als Abbildung zwischen Räumen mit verschieden Gewichten. Dies könnte in dem Fall zu Kompaktheit führen, wohingegen die Wachstumsbedingungen der Nichtlinearität weniger eingeschränkt werden müsste. Eine solche Herangehensweise stellen wir uns auch bei der Lösung des Problems der fehlenden Kompaktheit des Zweiges im letzten Abschnitt vor. Der Blowup in der gewichteten Norm behindert die Fortsetzbarkeit des Zweiges auch im ungewichteten Raum, obwohl die ungewichteten Normen beschränkt bleiben. Der pathologische Fall, dass der Zweig im Raum abbricht, scheint dem Autor ausschließbar zu sein.

Literaturverzeichnis

[Agm85] Shmuel Agmon. Bounds on exponential decay of eigenfunctions of schrödinger operators. In Schrödinger operators, pages 1–38. Springer, 1985.

[BDW10] Thomas Bartsch, Norman Dancer, and Zhi-Qiang Wang. A liouville theorem, a-priori bounds, and bifurcating branches of positive solutions for a nonlinear elliptic system. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 37(3-4):345–361, 2010.

[BT16] Boris Buffoni and John Toland. Analytic theory of global bifurcation. Princeton University Press, 2016.

[CR71] Michael G Crandall and Paul H Rabinowitz. Bifurcation from simple eigenvalues. Journal of Functional Analysis, 8(2):321–340, 1971.

[CT73] Jean-Michel Combes and L Thomas. Asymptotic behaviour of eigenfunctions for multiparticle schrödinger operators. Communications in Mathematical Physics, 34(4):251–270, 1973.

[DPR09] Tomáš Dohnal, Michael Plum, and Wolfgang Reichel. Localized modes of the linear periodic schrödinger operator with a nonlocal perturbation. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 41(5):1967–1993, 2009.

[DU16] Tomáš Dohnal and Hannes Uecker. Bifurcation of nonlinear bloch waves from the spectrum in the gross–pitaevskii equation. Journal of Nonlinear Science, 26(3):581–618, 2016.

[FH82] Richard Froese and Ira Herbst. Exponential bounds and absence of positive eigenvalues forn-body schrödinger operators. Communications in Mathematical Physics, 87(3):429–447, 1982.

[Gra09] Loukas Grafakos. Modern fourier analysis, volume 250. Springer, 2009.

[GT01] David Gilbarg and Neil S Trudinger. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, volume 224. Springer Science & Business Media, 2001.

[His00] PD Hislop. Exponential decay of two-body eigenfunctions: A review. In Proceedings of the Symposium on Mathematical Physics and Quantum Field Theory (Berkeley, CA, 1999), volume 4, pages 265–288, 2000.

[HMMS13] Dirk Hundertmark, Martin Meyries, Lars Machinek, and Roland Schnaubelt. Operator semigroups and dispersive equations. In 16th Internet Seminar on Evolution Equations, 2013.

[HS96] P. D. Hislop and I. M. Sigal. Introduction to spectral theory, volume 113 of Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1996. With applications to Schrödinger operators.

[JK85] David Jerison and Carlos E Kenig. Unique continuation and absence of positive eigenvalues for schrodinger operators. Annals of Mathematics, 121(3):463–488, 1985.

[JLS99] Hélène Jeanjean, Marcello Lucia, and Charles Alexander Stuart. Branches of solutions to semilinear elliptic equations on $\mathbb{R}^n$. Mathematische Zeitschrift, 230(1):79–105, 1999.

[JS$^+$99] Hélène Jeanjean, Charles Alexander Stuart, et al. Nonlinear eigenvalue problems having an unbounded branch of symmetric bound states. Advances in Differential Equations, 4(5):639–670, 1999.

[Kie06] Hansjörg Kielhöfer. Bifurcation theory: An introduction with applications to PDEs, volume 156. Springer Science & Business Media, 2006.

[KKP11] E Kirr, PG Kevrekidis, and DE Pelinovsky. Symmetry-breaking bifurcation in the nonlinear schrödinger equation with symmetric potentials. Communications in mathematical physics, 308(3):795–844, 2011.

[KS$^+$98] Wojciech Kryszewski, Andrzej Szulkin, et al. Generalized linking theorem with an application to a semilinear schrödinger equation. Advances in Differential Equations, 3(3):441–472, 1998.

[LU68] Olga A Ladyzhenskaya and Nina N Ural. tseva. linear and quasilinear elliptic equations. translated from the russian by scripta technica, inc. translation editor: Leon ehrenpreis, 1968.

[MB75] Reed Michael and Simon Barry. Methods of modern mathematical physics, 1975.

[Plu08] Michael Plum. Existence and multiplicity proofs for semilinear elliptic boundary value problems by computer assistance. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, 110(1):19, 2008.

[Rab71] Paul H Rabinowitz. Some global results for nonlinear eigenvalue problems. Journal of functional analysis, 7(3):487–513, 1971.

[RS75] Michael Reed and Barry Simon. Methods of Modern Mathematical Physics: Vol.: 2.: Fourier Analysis, Self-Adjointness. Academic Press, 1975.

[RS78] Michael Reed and Barry Simon. IV: Analysis of Operators, volume 4. Elsevier, 1978.

[RS01a] Patrick J Rabier and Charles Alexander Stuart. Fredholm and properness properties of quasilinear elliptic operators on $\mathbb{R}^n$. Mathematische Nachrichten, 231(ANA-ARTICLE-2001-002):129–168, 2001.

[RS01b] Patrick J Rabier and Charles Alexander Stuart. Global bifurcation for quasilinear elliptic equations on $\mathbb{R}^n$. Mathematische Zeitschrift, 237(1):85–124, 2001.

[Stu14] CA Stuart. Bifurcation at isolated eigenvalues for some elliptic equations on rn. Progress in nonlinear differential equations, 85:423–443, 2014.

[SW62] E Leo Slaggie and Eyvind H Wichmann. Asymptotic properties of the wave function for a bound nonrelativistic three-body system. Journal of Mathematical Physics, 3(5):946–968, 1962.

[Tro12] Christophe Troestler. Bifurcation into spectral gaps for a noncompact semilinear schr\ödinger equation with nonconvex potential. arXiv preprint arXiv:1207.1052, 2012.

[Wil97] Michel Willem. Minimax theorems, volume 24. Springer Science & Business Media, 1997.

Eidesstattliche Erklärung:
Hiermit erkäre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Zuhilfenahme der ausgewiesenen Hilfsmittel angefertigt habe. Sämtliche Stellen der Arbeit, die im Wortlaut oder dem Sinn nach anderen gedruckten oder im Internet veröffentlichten Werken entnommen sind, habe ich durch genaue Quellenangaben kenntlich gemacht.

Karlsruhe, den 14.06.2018