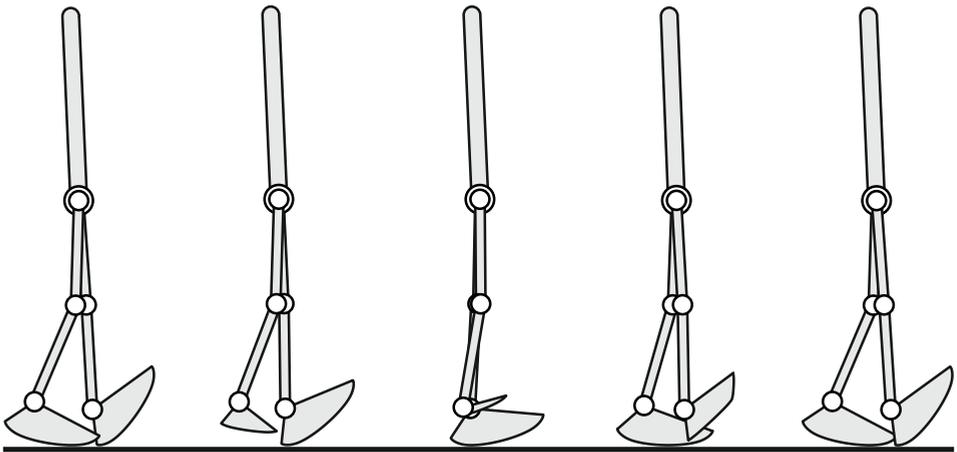


ULRICH J. RÖMER

Über den Einfluss der Fußgeometrie auf die Energieeffizienz beim zweibeinigen Gehen





Dieses Werk ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung -
Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz (CC BY-SA 4.0):
<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.de>

Über den Einfluss der Fußgeometrie auf die Energieeffizienz beim zweibeinigen Gehen

Zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften

der

Fakultät für Maschinenbau

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

genehmigte

Dissertation

von

Ulrich Johannes Römer

aus Herbrechtingen

Tag der mündlichen Prüfung:

Hauptreferent:

Korreferent:

Korreferent:

18. Oktober 2018

Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Fidlin

Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Seemann

Prof. Dr.-Ing. Andrés Kecskeméthy

Kurzfassung

Die Energieeffizienz beim Gehen ist ein wichtiger Aspekt bei der Entwicklung zweibeiniger Roboter. Diese verfügen nur über einen begrenzten Energiespeicher, mit dem ein möglichst langer Betrieb angestrebt wird. Die Energieeffizienz wird einerseits von der konstruktiven Gestaltung und den Modellparametern beeinflusst, andererseits jedoch auch von der verwendeten Regelung, mit der die Bewegung erzeugt und stabilisiert wird. In einem Entwicklungsprozess werden daher bei der Konzeption und der konstruktiven Gestaltung bereits früh Modelle zur Simulation und Methoden zur Optimierung benötigt. Da in diesem Entwicklungsstadium erst wenige Details konkretisiert und festgelegt sind, eignen sich einfache Mehrkörpermodelle für diese Fragestellung. Durch eine Regelung auf Basis der hybriden Nulldynamik können für solche Systeme stabile Gehbewegungen mit hoher Energieeffizienz erzeugt werden, die die natürliche Dynamik des Systems ausnutzen.

In dieser Arbeit wird untersucht, welchen Einfluss die Fußgeometrie auf die Energieeffizienz beim zweibeinigen Gehen hat und wie diese bei der Entwicklung eines zweibeinigen Roboters optimiert werden kann. Hierfür wird ein Modell für einen konvexen, starren Fuß entwickelt, dessen Kontaktpunkt mit dem Boden explizit berechnet werden kann. Dadurch ist eine Beschreibung der Abrollbewegung in Minimalkoordinaten möglich und für die Dynamik des Gesamtsystems kann eine gewöhnliche Differentialgleichung abgeleitet werden. Für das Fußmodell werden zwei Parametrierungen entwickelt, bei denen jeweils von einem Polygon ausgegangen wird, dessen Kanten abgerundet werden, damit sich eine kontinuierliche Abrollbewegung ergibt. Auf diese Weise wird ein flacher Fuß, und ein Fuß mit zusätzlichem Zehenbereich beschrieben. Der Roboter wird durch ein ebenes Mehrkörpersystem beschrieben, das aus einem Oberkörper, Oberschenkeln, Unterschenkeln und dem konvexen Fuß besteht, die jeweils durch Drehgelenke in Hüfte, Knie und Sprunggelenk miteinander verbunden sind. Für dieses System wird eine Regelung auf Basis der hybriden Nulldynamik entworfen. Dieses Regelungskonzept wird somit auf Systeme mit beliebiger Fußgeometrie erweitert. Mittels numerischer Optimierung werden optimale Gehbewegungen erzeugt und zugleich die Fußgeometrie optimiert. Zur Durchführung von Parameterstudien wird eine numerische Fortsetzungsmethode für dieses nichtglatte Problem entwickelt. Durch die Optimierung der Fußgeometrie kann der durchschnittliche Energieverbrauch eines 80 kg schweren und 1,80 m großen Roboters im Geschwindigkeitsbereich 0,3 bis 2,3 m/s gegenüber einem Modell mit Punktfüßen um 81 % reduziert werden.

Abstract

Energy efficiency in walking is an important aspect in the development of bipedal robots. These robots have only a limited energy supply, with the aim of operating for as long as possible. Energy efficiency is influenced on the one hand by the design and model parameters, and on the other hand by the control system used to generate and stabilize the movement. In a development process, models for simulation and methods for optimization are therefore required at an early stage during the conception and design phase. Since only few details are concretized and fixed in this development stage, simple multibody models are suitable for this question. A control system based on hybrid zero dynamics can generate stable walking movements with high energy efficiency for such systems, which exploit the natural dynamics of the system.

This thesis investigates the influence of foot geometry on energy efficiency in bipedal walking and how it can be optimized in the development of a bipedal robot. For this purpose, a model for a convex, rigid foot is developed, whose contact point with the ground can be calculated explicitly. Thus, a description of the rolling motion in minimum coordinates is possible and for the dynamics of the whole system an ordinary differential equation can be derived. For the foot model, two parameterizations are developed, each assuming a polygon whose edges are rounded off to give a continuous rolling motion. In this way, a flat foot and a foot with additional toe region are described.

The robot is described by a planar multibody system consisting of an upper body, thighs, shanks and the convex foot, each of which is connected by rotary joints in the hip, knee and ankle. A control system based on hybrid zero dynamics is designed for this system. This control concept is thus extended to systems with arbitrary foot geometry. By means of numerical optimization, optimal walking gaits are generated and at the same time the foot geometry is optimized. In order to carry out parameter studies, a numerical continuation method for this non-smooth problem is developed. By optimization of the foot geometry the average energy consumption of a 80 kg heavy and 1.80 m tall robot in the speed range 0.3 to 2.3 m/s can be reduced by 81 % compared to a model with point feet.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	IX
1 Einleitung	1
1.1 Motivation und Thema der Arbeit	1
1.2 Stand der Forschung	4
1.2.1 Zweibeiniges Gehen	5
1.2.2 Fußmodellierung	19
1.2.3 Optimierung	35
1.2.4 Numerische Fortsetzungsmethoden	49
1.3 Ziel der Arbeit	54
1.4 Aufbau der Arbeit	55
2 Fuß-Boden-Kontakt	57
2.1 Kontaktpunkte ebener Starrkörper	57
2.2 Einseitige Kontakte zwischen ebenen Starrkörpern	60
2.3 Kinematik der ebenen Rollbewegung	63
3 Fußmodell	69
3.1 Kinematik des Sprunggelenks beim Gehen des Menschen	69
3.2 Regularisierung konvexer Polygone	71
3.3 Parametrisierung der Fußmodelle	77
3.3.1 Fußmodell ohne Zehen (HM)	78
3.3.2 Fußmodell mit Zehen (HMT)	79
4 Validierung der Fußmodelle	81
4.1 Messdatenaufnahme und -aufbereitung	81
4.2 Anpassen der Modellparameter an die Messdaten	84
4.3 Auswertung der Modellanpassung	91
4.3.1 Ergebnisse der Barfuß-Experimente	92
4.3.2 Ergebnisse der Schuh-Experimente	96
4.3.3 Diskussion der Ergebnisse	97

5	Modell für zweibeiniges Gehen	99
5.1	Mehrkörpermodell	99
5.1.1	Notation	101
5.1.2	Freies Modell	102
5.1.3	Modell der Einzelstützphase	104
5.1.4	Modell der Doppelstützphase	106
5.1.5	Hybrides Modell für Gehen	107
5.2	Regelung	110
5.2.1	Phasenvariable	110
5.2.2	Solltrajektorien der Regelung	111
5.2.3	Eingangs-/Ausgangslinearisierung	115
5.2.4	Hybride Nulldynamik (HZD)	117
5.3	Periodische Gehbewegungen	119
5.4	Optimierungsproblem zur Erzeugung energieeffizienter Gehbewegungen	122
6	Optimierung	129
6.1	Berechnung von Gradienten	129
6.2	Sequentielle Quadratische Programmierung (SQP)	131
6.2.1	Exakte ℓ_1 -Straffunktion	134
6.2.2	Liniensuchverfahren und Korrektur zweiter Ordnung	137
6.2.3	BFGS-Approximation der Hesse-Matrix	141
6.2.4	SQP-Algorithmus	143
7	Numerische Fortsetzung optimaler Lösungen	147
7.1	Numerische Fortsetzung nichtglatter Probleme	147
7.2	QPSQP-Prädiktor-Korrektor-Verfahren	150
8	Leistungsfähigkeit der numerischen Methoden	157
8.1	Konvergenz des SQP-Verfahrens	157
8.2	Einfluss des Prädiktor-Verfahrens	160
9	Einfluss der Fußgeometrie auf die Energieeffizienz	165
9.1	Einfluss des Zielfunktional	165
9.2	Einfluss des Fußmodells	173
9.2.1	Fußmodell HM ohne Zehen	175
9.2.2	Fußmodell HMT mit Zehen	181
9.2.3	Vergleich und Bewertung	185

10 Optimierung der Fußgeometrie	189
10.1 Sensitivität in Bezug auf Fußparameter	190
10.2 Optimierung der Fußgeometrie	191
11 Zusammenfassung und Ausblick	203
Anhang	
A Beweis für die Konvexität der Fußmodelle	211
B Parameter der angepassten Fußmodelle	219
C Strafparameter für ℓ_1-Gütefunktion	225
D Energieeffizienz der Fußmodelle von Proband P1–P4	229
D.1 Fußmodell HM ohne Zehen (barfuß)	230
D.2 Fußmodell HM ohne Zehen (mit Schuhen)	231
D.3 Fußmodell HMT mit Zehen (barfuß)	232
D.4 Fußmodell HMT mit Zehen (mit Schuhen)	233
E Berechnung der Fußparameter aus der Geometrie	235
Abkürzungsverzeichnis	237
Symbolverzeichnis	239
Abbildungsverzeichnis	247
Tabellenverzeichnis	251
Literaturverzeichnis	253
Eigene Publikationen	289
Betreute Abschlussarbeiten	291

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Technische Mechanik, Bereich Dynamik/Mechatronik des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT).

Ich danke meinem Doktorvater Prof. Dr.-Ing. habil. Alexander Fidlin für die wissenschaftliche Betreuung meiner Arbeit und seine langjährige Förderung. In meiner Zeit am Institut hatte ich viele Freiheiten, um mich selbst und das Thema dieser Arbeit zu entwickeln. Zum Gelingen dieser Arbeit hat auch die stets ehrliche und fundierte Kritik beigetragen. Des weiteren danke ich Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Seemann für die wissenschaftlichen Diskussionen und Anregungen in meiner Zeit am Institut sowie für die Übernahme des Zweitgutachtens. Außerdem gebührt mein Dank Herrn Prof. Dr.-Ing. Andrés Kecskeméthy vom Lehrstuhl für Mechanik und Robotik der Universität Duisburg-Essen für die Übernahme des Drittgutachtens sowie seine wertvollen Hinweise. Frau Prof. Dr.-Ing. Bettina Frohnafel vom Institut für Strömungsmechanik des KIT danke ich für die Übernahme des Prüfungsvorsitzes.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Carsten Proppe und Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Böhlke danke ich für die angenehme Zusammenarbeit am Institut. Weiterhin gilt mein Dank den emeritierten Professoren Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. Jörg Wauer, Prof. Dr.-Ing. Walter Wedig und Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. Jens Wittenburg für viele interessante und hilfreiche Gespräche sowie ihr Interesse an und ihre Anmerkungen zu meiner Arbeit. Ihre rege Teilnahme am Institutsleben und vor allem den jährlichen Seminaren war stets eine Bereicherung. Ich hoffe, dass sie dem Institut noch lange erhalten bleiben.

Mein besonderer Dank gilt allen Kolleginnen und Kollegen am Institut für die durchweg angenehme Zusammenarbeit, die gegenseitige Unterstützung und die vielen Diskussionen, nicht nur über Themen der Mechanik. Das kollegiale Miteinander hat mich stets aufs neue motiviert, mich mit verschiedenen Fragen der Mechanik auseinanderzusetzen und über meinen Tellerrand zu blicken. Besonders danken möchte ich Fabian Bauer für die Unterstützung gerade zu Beginn meiner Arbeit. Außerdem Kai Becker für die angenehme Zusammenarbeit als Bürokollege. Weiterhin gilt mein Dank Prof. Dr.-Ing. Hartmut Hetzler, der mich zu Beginn meiner Zeit am Institut und auch nach seinem Ruf an die Universität Kassel stets unterstützt hat, und

dessen Anregungen stets wertvolle Denkanstöße sind und waren. Auch allen nicht namentlich genannten momentanen und ehemaligen Kolleginnen und Kollegen gilt mein ausdrücklicher Dank. Sie haben ein Institutsklima geschaffen, das diese Arbeit erst ermöglicht hat. Ich bin und bleibe vielen in Freundschaft verbunden.

Ebenfalls danke ich allen Studentinnen und Studenten, deren Bachelor- oder Masterarbeit ich als Betreuer begleitet habe. Die dabei entstandenen Fragen, Diskussionen und Ergebnisse haben ebenfalls zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Nicht zuletzt danke ich meiner Familie, meinen Eltern, meinen Schwestern und meiner Freundin Patrizia, ohne deren andauernde Unterstützung diese Arbeit nicht zustande gekommen wäre.

Karlsruhe, den 14. November 2018

Ulrich J. Römer

1 Einleitung

1.1 Motivation und Thema der Arbeit

Energieeffizienz ist von zentraler Bedeutung bei der zweibeinigen Fortbewegung, da die benötigte Energie in der Regel in einem Speicher mitgeführt werden muss. Bei der Fortbewegung des Menschen wird die über die Nahrung aufgenommene Energie durch chemische Prozesse zur Kontraktion der Muskeln verwendet. Bei der Fortbewegung zweibeiniger Roboter oder bei der Verwendung aktiver Prothesen muss ein Energiespeicher mitgeführt werden, meist in Form einer Batterie [222]. In allen Fällen ist ein Ziel, sich mit einer begrenzten Menge an Energie möglichst lange bzw. weit fortzubewegen.

Im Bereich der Biomechanik wird die Fortbewegung des Menschen seit Jahrzehnten intensiv erforscht, wobei eine Vielzahl an Modellen entwickelt wurde, um diese zu beschreiben. Im Gegensatz dazu ist das Ziel im Bereich der Robotik nicht nur die Systembeschreibung, sondern die Entwicklung und der Betrieb eines technischen Systems, das sich auf zwei Beinen fortbewegt. Während in der Biomechanik der Fokus auf der Systemanalyse liegt, ist die Fragestellung der Systemsynthese zentral für die Robotik. Bei der Entwicklung von Prothesen müssen beide Ansätze gleichermaßen genutzt und zusammengeführt werden. Biomechanik und Robotik unterscheiden sich weiterhin im Umgang mit der Systemkomplexität: während bei der Analyse des Menschen ein sehr komplexes biologisches System auf einfache Modelle und Effekte heruntergebrochen werden soll (komplexes Gesamtsystem \rightarrow vereinfachtes Modell), soll bei der Synthese eines Roboters ein komplexes Gesamtsystem aus einfacheren Bestandteilen zusammengesetzt werden (einfache Bestandteile \rightarrow komplexes Gesamtsystem).

Der menschliche Körper hat sich in Jahrtausenden der Evolution und natürlichen Auslese an den aufrechten Gang auf zwei Beinen angepasst, weshalb eine naheliegende Strategie bei der Entwicklung entsprechender Roboter in der Imitation und Kopie des Menschen besteht. Jedoch existieren bereits in der Natur unterschiedliche Lösungen für das Gehen auf zwei Beinen – so sind zum Beispiel beim Mensch die Knie „nach vorne

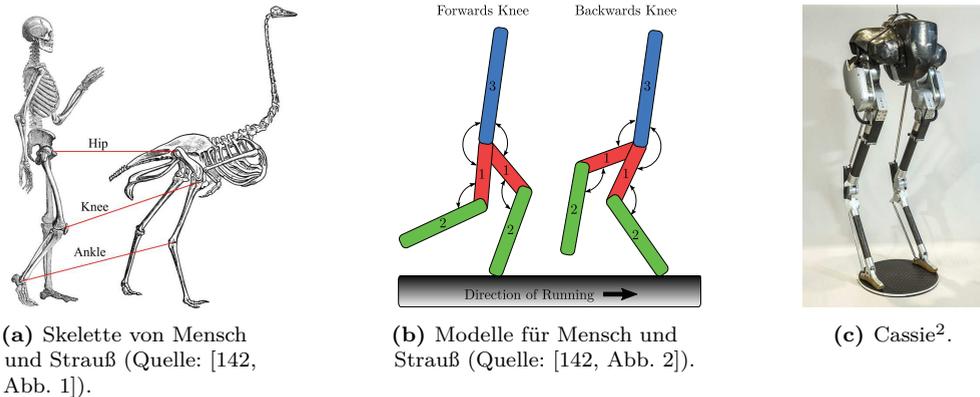


Abbildung 1.1: (a) Vergleich des Beinaufbaus von Mensch und Strauß – (b) der Mensch hat „nach vorne gerichtete“ Knie, beim Strauß übernehmen die Sprunggelenke dieselbe Funktion, weshalb der Begriff „nach hinten gerichtete“ Knie verwendet wird. (c) Die Beine des Roboters Cassie sind denen des Straußes nachempfunden.

gerichtet,“ während sie bei Vögeln „nach hinten gerichtet“ sind,¹ wie in Abb. 1.1a dargestellt. Für den Ingenieur ergibt sich damit unmittelbar die Frage, welche Strategie die bessere ist? Auf Basis dieser Fragestellung wurde in [142] mit den beiden Modellen in Abb. 1.1b die Energieeffizienz beim Rennen verglichen und festgestellt, dass die „nach hinten gerichteten“ Knie in diesem Fall besser abschneiden. Dies ist ein Grund, warum der in Abb. 1.1c dargestellte Roboter Cassie mit seinen straußenähnlichen Beinen eine sehr hohe Energieeffizienz erreicht.

Werden bei der Betrachtung der Energieeffizienz bei der Fortbewegung nicht nur biologische Systeme aus der Natur, sondern auch technische Systeme aus unserem Alltag einbezogen, so fällt auf, dass praktisch alle Landfahrzeuge zur energieeffizienten Fortbewegung Räder verwenden, für die es in der Natur kein entsprechendes Pendant gibt. Auch ohne Antrieb kann sich der Mensch auf flachem Untergrund mittels eines Fahrrads effizienter fortbewegen als durch Gehen oder Rennen [339]. Es gibt also bei der Entwicklung zweibeiniger Roboter einerseits die Natur als effizientes Vorbild, andererseits existieren Fortbewegungsmittel, die in künstlichen Umgebungen wie Straßen effizienter sind als diese biologischen Systeme. Bei der Entwicklung eines technischen Systems kann somit eine effiziente Lösung gefunden werden, die nicht unbedingt aus der Adaption eines biologischen Systems oder einer inkrementellen Veränderung eines bestehenden technischen Systems hervorgeht [141].

¹ Der Ausdruck „nach hinten gerichtetes Knie“ bei Vögeln bezieht sich genau genommen auf deren Sprunggelenk. Aufgrund der Anatomie des Vogelbeins ist hier die Funktion des Sprunggelenks analog zu der des Knies beim Menschen; allerdings wird es in die entgegengesetzte Richtung gebeugt, siehe Abb. 1.1a.

² Mit freundlicher Genehmigung der Oregon State University.

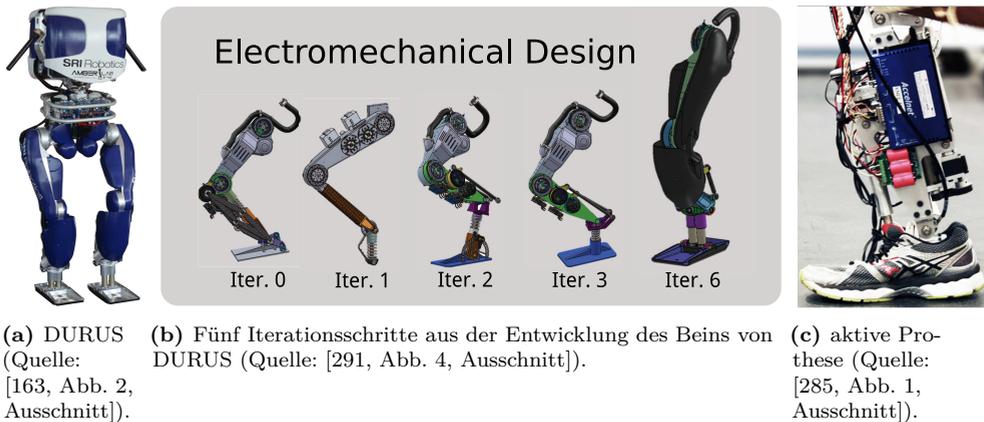


Abbildung 1.2: (a) Der Roboter DURUS und (b) fünf exemplarische Iterationsschritte, die während der Entwicklung der Beine und Füße durchlaufen wurden. (b) Zum Vergleich eine aktive Prothese der University of Texas at Dallas (UT Dallas), die eine ähnliche Komplexität aufweist.

Eine technische Lösung ohne direktes Pendant im menschlichen Körper sind beispielsweise Federn, die einzelne Segmente eines Roboters elastisch miteinander koppeln, und so dessen Resonanzfrequenzen und -bewegungen beeinflussen. Diese werden in [27] ausgiebig untersucht, wobei sich in Simulationen deutliche Effizienzsteigerungen von bis zu 200 % ergeben.³ Es stellt sich unmittelbar die Frage, warum dieser starke Effekt nicht von der Natur genutzt wird. Eine mögliche Antwort auf diese Frage ist, dass der starke Effekt bei sehr einfachen Modellen identifiziert wurde, analog dem in Abb. 1.1b links dargestellten Modell aus fünf Starrkörpern. Genau wie beim oben angeführten Vergleich zwischen Mensch und Strauß wird hier kein Fuß berücksichtigt, obwohl dieser einen signifikanten Einfluss auf die Bewegung hat, vgl. Abschnitt 1.2.1. Durch die Vernachlässigung des Fußes werden also möglicherweise diese und andere Studien verzerrt, da wesentliche Effekte nicht berücksichtigt sind.

Die Modelle in beiden Beispielen verweisen auf ein grundlegendes Problem bei der Entwicklung von Robotern und Prothesen, welches an den beiden Beispielen in Abb. 1.2 deutlich wird. Dort ist exemplarisch die iterative Entwicklung der Beine und Füße des zweibeinigen Roboters DURUS sowie zum Vergleich eine aktive Prothese dargestellt. Die Änderungen und Verbesserungen zwischen den abgebildeten Iterationsschritten bei der Konstruktion basieren in großem Maße auf Erkenntnissen aus Simulationen. Die Beschreibung der Systeme durch exakte Modelle ist aufgrund der hohen Komplexität sehr aufwendig. Es ergeben sich lange Rechen- und Simulationszeiten, was wiederum die Durchführung von Parameterstudien und die Verwendung von numerischen

³ Idealierte Modelle ohne Energiedissipation in den Robotergelenken ergeben sogar Steigerungen der Energieeffizienz von bis zu 500 %.

Optimierungsverfahren langwierig und teuer macht. Auf der anderen Seite werden durch zu stark vereinfachte Modelle wesentliche Effekte vernachlässigt. Das Ergebnis sind suboptimale Lösungen und verzerrte Vergleiche, die zu unnötigen Iterationen im Entwicklungsprozess führen. Insbesondere zu Beginn eines solchen Prozesses, wenn erst wenige Details festgelegt sind, werden aber vereinfachte Modelle benötigt, um grundsätzliche Entscheidungen z. B. über Gelenkinematiken, Segmentlängen oder Aktorpositionen zu treffen, die dann in der weiteren Entwicklung konkretisiert werden. Um beim finalen Produkt eine hohe Energieeffizienz zu erreichen, muss an dieser Stelle bereits die spätere Regelung berücksichtigt werden. Aus Sicht eines Entwicklers von zweibeinigen Robotern oder aktiven Prothesen besteht also ein Bedarf an effizienten Methoden, um in einer frühen Phase der Entwicklung verschiedene Systemkonzepte unter Berücksichtigung der Energieeffizienz bei der späteren Regelung zu optimieren. Dabei müssen die wesentlichen Effekte des finalen Systems bereits in der entsprechenden Größenordnung korrekt abgebildet werden, insbesondere auch der Einfluss der Füße auf die Gesamtbewegung und deren Effizienz.

In dieser Arbeit sollen Modelle und Methoden zur Simulation und Optimierung ebener zweibeiniger Robotermodelle mit Füßen entwickelt werden, die sich für diese Problemstellung eignen. Dabei liegt der Fokus zunächst auf einer adäquaten Modellierung der Füße und des Fuß-Boden-Kontakts. Es werden periodische Gehbewegungen eines Robotermodells simuliert und im Hinblick auf die Energieeffizienz optimiert. Diese hängt sowohl vom Robotermodell und dessen Parametern, als auch von der Fortbewegungsgeschwindigkeit beim Gehen ab. Die Berechnung der optimalen Lösung bei der Variation eines Parameters ist dabei eine typische Anwendung für numerische Fortsetzungsmethoden. Zur Untersuchung der Energieeffizienz wird zunächst ein effizientes Modell zur Simulation und Optimierung entwickelt. Der Optimierungsprozess wird in eine numerische Fortsetzungsmethode eingebettet, um effiziente Parameterstudien zu ermöglichen und den Einfluss der Füße auf die Energieeffizienz bei der zweibeinigen Fortbewegung zu quantifizieren.

1.2 Stand der Forschung

Die interdisziplinäre Forschung zur Fortbewegung auf zwei Beinen basiert auf Vorarbeiten aus verschiedenen Forschungsgebieten, unter anderem dem Maschinenbau, der Elektrotechnik, der Informatik, der Mathematik, den Sportwissenschaften, der Biologie und der Medizin. Im Folgenden wird zunächst ein Überblick über die bisherige Forschung zur zweibeinigen Fortbewegung gegeben. Dieser umfasst einerseits die Erforschung der menschlichen Bewegung und andererseits die Erschaffung und Regelung von Maschinen mit unterschiedlicher Komplexität, die zwei Beine zur Fortbewegung nutzen. Anschließend wird speziell auf den Stand der Forschung zur Beschreibung und

Modellierung der FüÙe eingegangen, sowohl derer des Menschen, als auch bei Prothesen und Robotern. Dabei steht als essentielle Funktion des Fußes die Interaktion mit dem Boden im Vordergrund. Die Bewegungen der im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Modelle für zweibeiniges Gehen werden durch ein Optimalitätskriterium beschrieben, was bei der Simulation zu einem nichtlinearen Optimierungsproblem führt. Es wird ein Überblick über aktuelle Methoden zur Lösung nichtlinearer Optimierungsprobleme, insbesondere zur Erzeugung von Gehbewegungen, gegeben. Abschließend wird auf das eng verwandte Gebiet der numerischen Fortsetzungsmethoden eingegangen, die zur Verfolgung der optimalen Lösung bei Variation der Parameter und Randbedingungen genutzt werden können.

1.2.1 Zweibeiniges Gehen

Die Forschung zum zweibeinigen Gehen ist sehr umfangreich, weshalb hier kein vollständiger Überblick gegeben werden kann. Im Folgenden werden daher nur die für diese Arbeit relevanten Vorarbeiten aufgeführt und erläutert. Dabei wird mit ausgewählten Forschungsarbeiten zur menschlichen Fortbewegung begonnen, gefolgt von einem Abschnitt zu passiven Minimalmodellen, die sowohl in der Biomechanik, als auch in der Robotik Anwendung finden. Anschließend wird auf aktuierte Systeme zum zweibeinigen Laufen eingegangen, insbesondere auf dynamisch stabilisierte periodische Bewegungen und die entsprechenden Regelungsstrategien. Abschließend werden alternative Regelungskonzepte vorgestellt, die im Bereich zweibeiniger Roboter verbreitet sind.

Bewegung des Menschen

Zweibeiniges Gehen ist schon lange von wissenschaftlichem Interesse. Die anfängliche Forschung in diesem Gebiet ist insbesondere darauf fokussiert, die menschliche Bewegung zu beschreiben und zu verstehen. So wurden von WEBER und WEBER bereits 1836 [355] sehr umfangreiche und detaillierte Beobachtungen des menschlichen Gangs angestellt und Versuche mit Leichteilen durchgeführt. Eine elementare Erkenntnis in diesem frühen Werk ist, dass die menschliche Bewegung einer Beschreibung durch die Methoden der Mechanik zugänglich ist. Dieser Überlegung liegt eine Modellvorstellung des menschlichen Körpers zugrunde, bei der einzelne Segmente wie Ober- und Unterschenkel durch ihre Masse, ihre Trägheit und Schwerpunktsposition beschrieben werden können; also eine Näherung durch starre Körper. Bei Kenntnis aller Segmentparameter, der kinematischen Verbindungen durch die Gelenke und aller wirkenden Kräfte ist dann eine Berechnung der resultierenden Bewegung möglich (Vorwärtsdynamik). Von denselben Autoren werden in [356] drei Eigenschaften des menschlichen Gangs postuliert: das Schwungbein verhält sich wie ein Pendel, weshalb die Schrittdauer

„beim schnellsten Gehen“⁴ gerade der Dauer einer halben Pendelschwingung entspricht; die Schrittlänge sei dabei halb so groß wie die größte Spannweite der Beine, was von den Autoren so interpretiert wird, dass das Schwungbein beim Aufsetzen auf den Boden senkrecht steht; und die Hüfte beschreibt bei der Bewegung eine fast horizontale Bahn. Dieses Beispiel veranschaulicht den Zugang im Bereich der Biomechanik, bei der das Ziel die Beschreibung der menschlichen Bewegung und die Identifikation grundlegender Eigenschaften derselben ist.

Neben VIERORDT, der 1881 in [345] unter anderem festhält, dass der menschliche Gang Asymmetrien im Verhalten der beiden Beine aufweist,⁵ sind als nächste wesentliche Werke die Arbeiten von FISCHER⁶ ab 1895 zu nennen [40, 97 – 101]. Durch neue Verfahren in der Fotografie konnten erstmals dreidimensionale Bahnen der Gelenkpunkte und Schwerpunkte während der Bewegung rekonstruiert werden [40]. Durch Rekonstruktion der Bahn des Gesamtschwerpunktes und damit dessen Beschleunigung können die zugehörigen Kräfte während des Gehens bestimmt werden (inverse Dynamik) [97].

Bei diesen frühen Arbeiten liegt der Fokus auf einer möglichst genauen Beschreibung des gesamten menschlichen Gangs, weshalb ein sehr komplexes Modell mit vielen Segmenten und komplizierten Gelenken zum Einsatz kommt. Aus diesem Ansatz resultiert eine große Menge an Daten, die eine Untersuchung vieler Details ermöglicht. Ein anderer Ansatz zur Identifikation grundlegender Mechanismen beim zweibeinigen Gehen besteht darin, einfache Modelle zu betrachten und diese schrittweise immer mehr dem Vorbild Mensch anzunähern. Mit diesem Vorgehen werden in [308] sechs wichtige Bestimmungsfaktoren⁷ beschrieben, anhand derer sich charakteristische Bahnen für den Gesamtschwerpunkt ergeben, welche nahezu horizontal sind. Es wird außerdem angenommen, dass dabei der Energieaufwand zur Fortbewegung minimiert wird. Dies ist ein grundlegendes Prinzip, mit dem in [28] ähnliche Ergebnisse gewonnen werden.

Darüber hinaus ist der Energieaufwand menschlicher Bewegungen selbst Gegenstand der Forschung [72, 267, 339, 380]. So wird in [43] der metabolische Energieverbrauch beim Gehen mit der mechanischen Arbeit verglichen, wobei sich eine hohe Korrelation zwischen dem metabolischen Energieverbrauch und der mechanischen Leistung ergibt. Das bedeutet, dass die mechanische Leistung als Indikator für den metabolischen Energieverbrauch in Frage kommt. Die Minimierung des Energieaufwands als grundlegendes Prinzip in der Biomechanik wird in [259] diskutiert und auf die Lösung von Balance-Problemen angewendet.

⁴ Aus der Beschreibung geht nicht klar hervor, wie dieses „schnellste Gehen“ definiert wird, bzw. welche Situation den Beobachtungen zugrunde liegt.

⁵ Diese Asymmetrien sind klein und für viele Fragestellungen nicht relevant. Symmetrische Modelle führen häufig zu besseren Übereinstimmungen mit Experimenten [21].

⁶ Dies begann in Zusammenarbeit mit BRAUNE, der allerdings während der Arbeiten am ersten Teil [40] verstarb.

⁷ Englisch: major determinants.

Messungen des metabolischen Energieverbrauchs während der Bewegung [134, 160] in Verbindung mit Muskelmodellen [38, 165] ermöglichen eine Vorhersage bzw. Abschätzung des Energieverbrauchs anhand der Muskelkraftverläufe und -aktivierungen [35]. Auf dieser Basis existieren sehr detaillierte und komplexe Modelle zur Nachbildung der menschlichen Bewegung und der dabei ablaufenden Muskelaktivierung [269]. In [76] wird ein Ganzkörper-Muskel-Skelett-Modell mit über 400 unabhängigen Muskeln vorgestellt. Mit diesem Modell werden experimentell gemessene Bewegungen analysiert, indem per inverser Dynamik die Kräfte ermittelt werden, welche die Bewegung erzeugen. Aufgrund der Vielzahl an Muskeln ist dieses inverse Problem nicht eindeutig, weshalb ein Optimalitätskriterium zur Berechnung der zugehörigen Muskelkräfte und -aktivierungen erforderlich ist. Die so bestimmten Muskelaktivierungen werden schließlich mit zugehörigen Messungen mittels Elektromyografie abgeglichen. Komplexe Muskel-Skelett-Modelle werden nicht nur zur inversen Beschreibung gemessener Bewegungen verwendet, sondern auch zur Erzeugung derselben durch Minimierung des metabolischen Energieverbrauchs [20] in Simulationen.

Die detaillierten Muskel-Skelett-Modelle des Menschen führen schließlich zu der Fragestellung, ob es möglich ist, ein geschlossenes Modell des menschlichen Gehens zu finden, das die biomechanischen Modelle (Beschreibung der Bewegung) mit neurobiologischen Modellen (Erzeugung der zugehörigen Muskelaktivierung) vereint. Ein umfassender Überblick über die neurobiologischen Arbeiten zur menschlichen Fortbewegung soll nicht Teil dieser Arbeit sein, weshalb nur kurz auf die zwei relevantesten Konzepte eingegangen wird: *Reflexschleifen* und *zentrale Mustergeneratoren*⁸. Beides sind Modelle zur Erklärung von rhythmischen Impulsen im Nervensystem der unteren Wirbelsäule, die als Quelle für die Aktivierung des Muskelsystems in den Beinen wirken [168, 343]. GRILLNER beschreibt in [135] die möglichen Ursachen auf einem Spektrum. An dessen einem Ende steht eine totale Steuerung der Muskelaktivität durch das zentrale Nervensystem, also letztendlich dem Gehirn. Am anderen Ende dieses Spektrums stehen rein reflexbasierte Rückkopplungsschleifen des Nervensystems in den unteren Extremitäten. Zwischen beiden Extremen existieren verschiedene Modelle für zentrale Mustergeneratoren, die vom zentralen Nervensystem einen einfachen Input erhalten und daraus periodische Anregungsmuster für die Muskelaktivierung erzeugen, mit mehr oder weniger Rückkopplung durch Reflexschleifen.

In [331, 332] wird ein neuronaler Schwinger⁹ als Quelle für ein Aktivierungsmuster genutzt, das die Gelenkmomente bzw. die Muskelkräfte für ein Starrkörpermodell des Menschen liefert. Damit können stabile Gehbewegungen in Simulationen erzeugt werden, die der menschlichen Fortbewegung qualitativ ähnlich sind. Ein Modell, das nur auf reflexbasierten Rückkopplungsschleifen basiert, die mit einem detaillierten

⁸ Englisch: central pattern generator.

⁹ Englisch: neural oscillator.

Muskel-Skelett-Modell gekoppelt sind, wird in [116] vorgestellt. Das Gesamtsystem kann stabile Gehbewegungen ausführen und bildet dabei viele charakteristische Verläufe der menschlichen Bewegung ab, z. B. die der Bodenreaktionskräfte. Die Parametrierung der Reflexschleifen erfolgt dabei manuell durch Versuch und Irrtum.

Sowohl bei Reflexschleifen als auch bei zentralen Mustergeneratoren gibt es aktuell weder systematische Methoden zur Erzeugung und Gestaltung ebendieser, noch Beweise für die Stabilität der resultierenden Systeme [175]. Ein systematischer Ansatz zur Gestaltung von nichtlinearen dynamischen Systemen, die als zentraler Mustergenerator fungieren können, wird in [176] vorgeschlagen. Dabei wird das dynamische System mit Methoden des maschinellen Lernens auf ein gewünschtes Attraktorverhalten trainiert, um das grundlegende Motorverhalten¹⁰ für das System zu erzeugen. In [344] wird ein Ansatz zum Entwurf eines zentralen Mustergenerators für Gehbewegungen diskutiert, der auf eine hohe Energieeffizienz abzielt. Eine umfassende Übersicht über die Vor- und Nachteile verschiedener Modelle zentraler Mustergeneratoren, aktuelle Entwicklungen und offene Fragestellungen wird in [379] gegeben. Für eine Übersicht über Modelle zur Simulation und Erzeugung menschlicher Gehbewegungen sei auf [372] verwiesen.

Passive Minimalmodelle

Die Beschreibung der menschlichen Bewegung durch das oben beschriebene Vorgehen führt zu immer komplexeren Modellen, die immer mehr Aspekte und Details berücksichtigen und durch die Kopplung von Modellen neue Einsichten in das biologische System ermöglichen. Allerdings wird es mit zunehmender Komplexität immer schwieriger, die tatsächlich grundlegenden Effekte, welche die Bewegung ausmachen, zu identifizieren und zu isolieren. Zu diesem Zweck wurden die Minimalmodelle des *inversen Pendels* (IP) in Abb. 1.3a [9, 162] und des *gedeferten inversen Pendels*¹¹ (SLIP) [36] in Abb. 1.3b eingeführt, welche die Schwerpunktbahn in der Sagittalebene¹² beschreiben. Bei diesen Minimalmodellen wird der gesamte Körper durch einen Massenpunkt modelliert, das Schwungbein vernachlässigt und das Standbein durch einen masselosen Stab bzw. eine masselose Feder ersetzt. Das gefederte inverse Pendel wurde zunächst als Modell für Rennen eingeführt [238] und um masselose, halbkreisförmige Füße [361] sowie auf räumliche Bewegungen erweitert [314]. Es liefert beim Gehen eine bessere Näherung für die Bahn des Schwerpunkts und die Bodenreaktionskraft [115, 361] als das inverse Pendel, allerdings nur in einem sehr eingeschränkten Geschwindigkeitsbereich [212]. Da beide Minimalmodelle passiv sind, muss die Energie bei der Beschreibung von periodischen Gehbewegungen konstant bleiben. Diese Annahme ist überhaupt nur beim gefederten inversen Pendel möglich.

¹⁰ Englisch: dynamic motor primitives.

¹¹ Englisch: spring loaded inverted pendulum.

¹² Die Sagittalebene teilt den Körper in eine linke und eine rechte Hälfte.

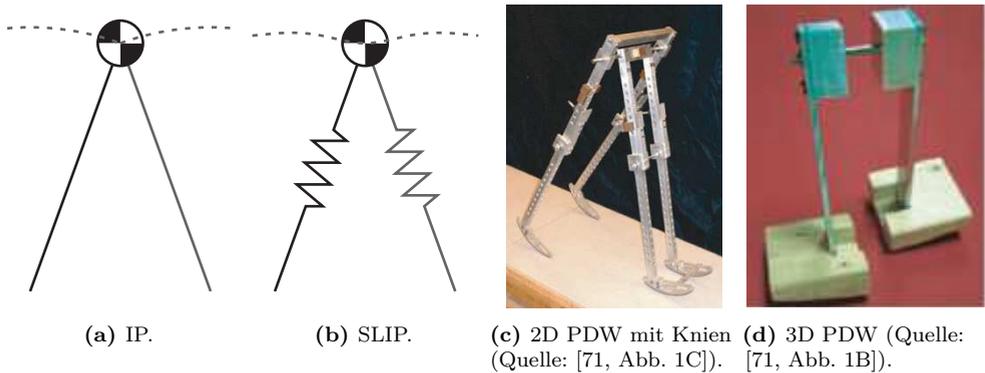


Abbildung 1.3: (a) Modell des inversen Pendels (IP) und (b) Modell des gefederten inversen Pendels (SLIP) mit jeweiliger Schwerpunktbahn; sowie zwei passiv-dynamische Gehmaschinen (PDW) (c) mit ebener Bewegung und Knien und (d) mit räumlicher Bewegung.

Im ungefederten Fall geht der Wechsel von einem Bein auf das andere mit einem Stoß einher, der die Richtung der Schwerpunktbahn abrupt ändert und dem System Energie entzieht [85, 205]. Eine Analyse von ebenen Modellen mit masselosen Beinen – mit und ohne Federn, sowie in Kombination mit Aktoren und Muskeln – wird in [323] ausgiebig diskutiert und mit dem menschlichen Gang verglichen. Die passiven Modelle des inversen Pendels und des gefederten inversen Pendels eignen sich gut zur Beschreibung der Kinematik des Schwerpunktes und können mit Einschränkungen die Bodenreaktionskraft reproduzieren; sie sind jedoch nicht geeignet, den Energieverbrauch und -transfer während der Bewegung zu beschreiben [206].

Ein genauerer Blick auf die Summe aus potentieller und kinetischer Energie des Schwerpunkts offenbart, dass diese zu Beginn und am Ende der Einzelstützphase (ESP), in der sich das Schwungbein in der Luft befindet, annähernd identisch ist [237]. Dazwischen oszilliert sie zunächst unter und anschließend über diesen Wert. Dies motiviert das Modell des ballistischen Gehens [244, 245], bei dem die Beine mit Starrkörpern modelliert werden, die über Drehgelenke verbunden sind. Obwohl das Modell passiv ist, also keine Energie zu- oder abgeführt wird, können mit entsprechenden Anfangsbedingungen gute Übereinstimmungen mit Experimenten erzielt werden [237]. Die Funktion der Beine während der Gehbewegung entspricht einem inversen Pendel für das Standbein, und einem physikalischen Pendel für das Schwungbein, die sich unter dem Einfluss der Schwerkraft bewegen. Dieses Modell ist konsistent mit dem in [52] experimentell ermittelten Zusammenhang zwischen der Schwerefeldstärke und dem Energieverbrauch beim Gehen. Bei gleicher Gehgeschwindigkeit und höherer

Schwerefeldstärke¹³ wählen die Probanden im Versuch eine kürzere Schrittlänge, also eine höhere Schrittfrequenz, was konsistent mit der ebenfalls zunehmenden Schwingungsfrequenz im Pendelmodell ist. Das rein passive Modell kann jedoch nicht sämtliche Vorgänge bei der Gehbewegung des Menschen erklären, da während der ESP auch im Schwungbein eine nicht zu vernachlässigende Muskelaktivierung stattfindet [362].

Nichtsdestotrotz wurde Gehen auf der Basis dieses passiven Prinzips bereits 1888 in einem Patent für ein Kinderspielzeug beschrieben [91]. 1990 wurde dieses von MCGEER wieder aufgegriffen [233, 234, 236] und unter dem Titel *Passives Dynamisches Gehen*¹⁴ umfassende Untersuchungen angestoßen. Diese zunächst ebenen Starrkörpermodelle haben keinen Antrieb und nutzen während des Schritts die passive Pendelschwingung zur Bewegung der Beine. Durch eine Neigung des Bodens (schiefe Ebene) wird während des Schritts Energie aus dem Gravitationspotential gewonnen (Energiequelle), während am Ende des Schritts durch den Stoßvorgang beim Absetzen des Schwungbeins Energie dissipiert wird (Energiesenke). Dadurch ergeben sich periodische Gehbewegungen in Form von Grenzyklen dieses dynamischen Systems. Im Gegensatz zu den einfacheren Modellen des inversen Pendels und des gefederten inversen Pendels¹⁵ lassen sich diese Passive Dynamic Walker (deutsch: passiv-dynamische Gehmaschinen) (PDW) technisch realisieren (siehe Abb. 1.3c), wodurch eine direkte experimentelle Analyse und Validierung der theoretischen Studien möglich ist [233, 302].

Neben dem einfachsten Modell aus zwei Pendeln, die in der Hüfte miteinander verbunden sind [233], existieren Modelle mit Knien [39, 55, 234] und mit einem Oberkörper [39, 55, 364]. Die meisten PDW haben kreisförmige Füße, die fest mit dem Unterschenkel bzw. Bein verbunden sind. Diese erhöhen sowohl die Effizienz [233], was sich in geringeren Neigungswinkeln des Bodens bei einer bestimmten Gehgeschwindigkeit niederschlägt, als auch die Robustheit gegenüber Störungen [367]. Eine passive Konstruktion mit einem ähnlichen Effekt sind flache (masselose) Füße, die im Sprunggelenk durch eine Torsionsfeder mit dem Bein verbunden sind [354, 366]. Auf den Einfluss und die Modellierung von Füßen wird in Abschnitt 1.2.2 näher eingegangen.

Periodische Gehbewegungen als Grenzyklen dieser Systeme sind ausgiebig untersucht [108, 109, 125, 126, 270], wobei insbesondere Bifurkationen mit Periodenverdopplungen bis hin zu chaotischem Verhalten [336, 386] charakteristisch sind. Eine Übersicht über die bisherige und aktuelle Forschung zum Stabilitätsverhalten von PDWs wird in [177] gegeben; die Verwendung verschiedener PDW-Modelle zur Untersuchung der

¹³ Die Experimente werden mittels Parabelflügen durchgeführt, so dass tatsächlich die effektive Schwerefeldstärke verändert wird und nicht nur eine entlastende Kraft in der Hüfte wirkt, wie z. B. in [133].

¹⁴ Englisch: passive dynamic walking.

¹⁵ In beiden Modellen sind die Beine masselos, was sich in einem physikalischen bzw. technischen System nicht realisieren lässt.

menschlichen Bewegung wird in [10] diskutiert. In [55, 123] wird eine Gehbewegung von PDWs mit Oberkörper und Federn in den Hüftgelenken beschrieben, die ohne Energieverbrauch und ohne Neigung des Bodens möglich ist. Dabei schwingt der Oberkörper mit der doppelten Schrittfrequenz, was bei genauer Abstimmung des Systems dazu führt, dass das Schwungbein ohne Geschwindigkeit auf dem Boden aufsetzt, wodurch keine Energie dissipiert wird. Diese Lösung ist jedoch bei festen Modellparametern auf eine Geschwindigkeit beschränkt und instabil. Bereits kleinste Störungen führen zu einem Energieverlust beim Stoß, wodurch die periodische Lösung des passiven Systems nach wenigen Schritten zusammenbricht. Diese Lösung ist deshalb nicht von praktischer Relevanz. Neben den bisher diskutierten ebenen Modellen gibt es auch PDW die sich räumlich bewegen [6, 67–69, 204, 271]. Um diese Bewegung zu ermöglichen, sind die Füße dabei entweder in alle Richtungen gekrümmt und fest mit dem Bein verbunden, zum Beispiel Ausschnitte aus Kugel- oder Torusflächen [67, 68], siehe Abb. 1.3d, oder die Füße sind nur in eine Richtung gekrümmt und die seitliche Bewegung wird durch ein Drehgelenk und Rückstellfedern realisiert [69]. Darüber hinaus existieren auch passive Modelle für Rennen, sog. Passive Dynamic Runner (deutsch: passiv-dynamische Rennmaschinen) (PDR) [232, 261, 334], – ebenfalls mit Erweiterungen um Knie [262] und einen Oberkörper [263] – die jedoch deutlich weniger Verbreitung gefunden haben. Die Bewegung solcher PDR ist vergleichsweise sensitiv auf Modellparameter, Anfangsbedingungen und die Neigung des Bodens.

Aktuierte Modelle ohne Füße

Ein interessanter Aspekt bei der Entstehung der PDR [334] ist, dass diese zunächst aus einem aktiv geregelten, aber unteraktuierten System¹⁶ hervorgegangen sind [286–288], das durch eine heuristische Regelung dynamisch stabilisierte Hüpfbewegungen ausführt. Auch die verschiedenen Ausführungen des PDW dienen als Ausgangspunkt für die Entwicklung effizienter Laufroboter mit Aktuierung [34, 71, 235]. Bei diesem Vorgehen ist es wichtig, dass die Eigendynamik¹⁷ bzw. *natürliche Dynamik* des passiven Systems nicht durch die Regelung unterdrückt, sondern lediglich entsprechend geformt bzw. erweitert¹⁸ wird [281, 282]. Da die Gravitation als Energiequelle auf ebenem Untergrund nicht mehr zur Verfügung steht, werden Aktoren genutzt um während des Schritts Energie zuzuführen. Dies geschieht zum Beispiel durch Motoren in der Hüfte, die das Schwingen des Beins unterstützen [365] oder durch das Abdrücken des Schwungbeins über aktuierte Sprunggelenke am Anfang des Schritts [70, 367]. Der an der Cornell University entwickelte Roboter *Ranger* [188] kann so mit einer einzelnen

¹⁶ Ein unteraktuiertes System besitzt weniger Aktoren als Freiheitsgrade.

¹⁷ Im Folgenden wird die Bezeichnung *Eigendynamik* im Zusammenhang mit nichtlinearen Systemen vermieden, um eine Verwechslung mit den *Eigenmoden* linearer Systeme zu vermeiden.

¹⁸ Vgl. [281, S. 198]: „[...] we *augmented* the natural dynamics [...]“; „[...] wir haben die natürliche Dynamik *erweitert* [...]“ (Hervorhebung im Original, Übersetzung des Verfassers).

Batterieladung eine Entfernung von 65 km zurücklegen [32, 33]. Dies entspricht der bis dato höchsten Energieeffizienz bei einem solchen Experiment mit einer zweibeinigen Laufmaschine [32]. Ein Beispiel für einen unteraktuierten Roboter auf Basis eines räumlichen PDWs ist der *MIT Toddler* [333], der sich mittels maschinellem Lernen an verschiedene Untergründe anpassen kann. Der Antrieb erfolgt über je zwei aktuierte Gelenke, die Roll- und Nickbewegungen¹⁹ des Fußes gegenüber dem entsprechenden Bein ermöglichen. Das Prinzip ist also sehr ähnlich zum Cornell Ranger, der sich ebenfalls über das Sprunggelenk abdrückt und ansonsten die passive Dynamik ausnutzt. Beide Beispiele verdeutlichen den signifikanten Einfluss von Füßen – insbesondere den von im Sprunggelenk beweglichen Füßen – auf die Energieeffizienz beim zweibeinigen Gehen.

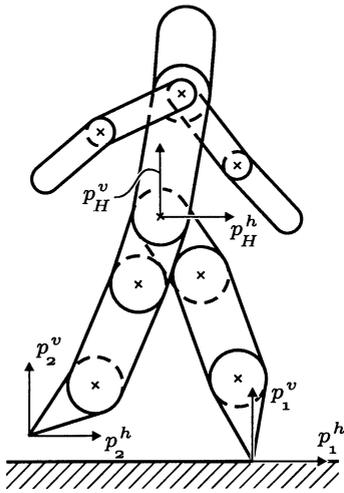
Durch die Kombination eines passiven Systems mit einer minimalen Aktuierung weniger Gelenke, die lediglich als Energiequelle anstelle der Gravitation dient, kann eine hohe Energieeffizienz erreicht werden. Allerdings bleiben auch viele Nachteile der passiven Systeme erhalten, nämlich ein eingeschränkter Geschwindigkeitsbereich und allgemein eine geringe Flexibilität. Außerdem haben die heuristischen Ansätze zur Regelung eines vormals passiven Läufers große Ähnlichkeit mit den oben diskutierten zentralen Mustergeneratoren und Reflexschleifen. Im Unterschied zu diesen Ansätzen steht die Schaffung einer künstlichen Bewegung und nicht die Imitation des Menschen im Vordergrund, was jedoch am Vorgehen und Ergebnis wenig ändert. Der Entwurf dieser Regelungen ist wenig systematisch und basiert auf Intuition und Erfahrung, wodurch er stark von Versuch und Irrtum bestimmt wird. Es ist daher auch keine A-Priori-Aussage über die Stabilität des geregelten Systems möglich. Eine logische Weiterentwicklung dieses Ansatzes besteht in der Aktuierung weiterer Freiheitsgrade (FHG)²⁰ und der Verwendung systematischer Methoden zum Entwurf stabiler Regelungen für periodische Bewegungen nichtlinearer Systeme. Dabei ist es von Vorteil, die Dynamik des passiven Systems soweit wie möglich auszunutzen, um eine hohe Energieeffizienz zu erreichen.

Auf Basis dieser Überlegungen wurde für ein ebenes Modell mit starrem Oberkörper, Punktfüßen (siehe Abb. 1.4a) und aktuierten Hüftgelenken eine Systematik entwickelt, welche die inhärente Dynamik²¹ dieses unteraktuierten Systems zum Entwurf einer stabilen Regelung ausnutzt. Die Aktoren können lediglich die Winkel innerhalb des Roboters beeinflussen; wie beim inversen Pendel ergibt sich die nichtaktuierte

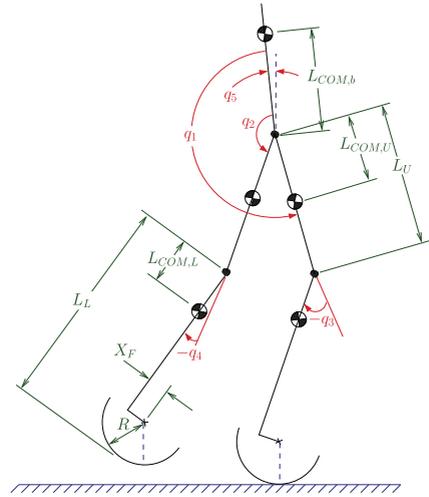
¹⁹ Rollen ist eine Drehung um die vorwärts gerichtete Achse; Nicken eine Drehung um die seitliche Achse (von links nach rechts). Eine Gierbewegung um die Hochachse ist hier nicht möglich.

²⁰ In vielen Fällen wird dies durch die Aktuierung vormals passiver Drehgelenke durch rotierende Motoren realisiert. Es sind jedoch auch Teleskopaktoren und kompliziertere Kinematiken möglich, vgl. [136, 139].

²¹ Bei einem unteraktuierten System können nicht alle Positionen bzw. Winkel direkt geregelt werden, da es mehr Freiheitsgrade als Aktoren besitzt. Das System kann also immer gewisse Bewegungen ausführen, die die Aktoren nicht direkt verhindern können.



(a) Modell für HZD-Regler mit Punktfüßen (Quelle: [358, Abb. 1]).



(b) Modell für HZD-Regler mit kreisförmigen Füßen (Quelle: [227, Abb. 1a]).

Abbildung 1.4: Zwei Modelle zum Entwurf von HZD-Reglern für ebene Systeme. Der Kontakt zum Boden findet über (a) einen Punkt oder (b) eine Kreisform statt.

Absolutorientierung aus der verbleibenden Dynamik des Systems. Beim Entwurf der Regelung werden *virtuelle Zwangsbedingungen*²² eingeführt, welche die Verläufe von ausgewählten Winkeln als Trajektorien in Abhängigkeit von einer Phasenvariablen²³ beschreiben, die der Absolutorientierung entspricht [137, 138]. Es wird eine instantane Doppelstützphase (DSP) angenommen, was bedeutet, dass beim Aufsetzen des Schwungbeins am Ende des Schritts ein Stoß stattfindet, bei dem das vormalige Standbein abhebt. Während der DSP werden Abweichungen von den virtuellen Zwangsbedingungen durch die Aktoren hinreichend schnell ausgeregelt, so dass die Stabilität von periodischen Gehbewegungen durch einen Poincaré-Schnitt für die verbleibende Dynamik beurteilt werden kann. Wenn die virtuellen Zwangsbedingungen invariant in Bezug auf den Stoß sind²⁴ ist dies die Hybride Nulldynamik (englisch: hybrid zero dynamics) (HZD) des Systems, weshalb sich in der Literatur der Begriff *HZD-control* etabliert hat. Zur Beurteilung reicht es aus, die HZD zu betrachten, für die überdies beim Gehen eine semi-analytische Lösung existiert [360]. Modelle mit Knien können mit dieser Art von Regelung sowohl gehen [358, 360], als auch rennen [61, 139], was beides in zahlreichen Experimenten erfolgreich demonstriert

²² Englisch: virtual constraints.

²³ Es gibt experimentelle Hinweise darauf, dass auch der Gang des Menschen von einer solchen Phasenvariablen abhängt und nicht nur zeitgesteuert abläuft [131, 346].

²⁴ Das bedeutet, dass sich durch den Stoß keine Abweichungen von den virtuellen Zwangsbedingungen zu Beginn der DSP ergeben, siehe Abschnitt 5.2.4.

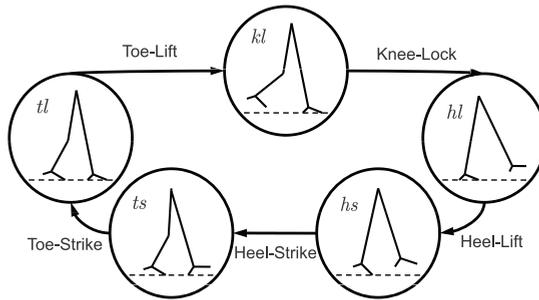


Abbildung 1.5: Modell zum Entwurf von HZD-Reglern für ebene Systeme mit flachen Füßen. Je nach Orientierung und Kontaktzustand der Füße ergeben sich verschiedene Modelle mit einem unterschiedlichen Aktuierungsgrad, die beim Reglerentwurf jeweils eine separate Phase beschreiben (Quelle: [321, Abb. 1]).

wurde [60, 139, 227, 265, 272, 359]. Die Regelung ist robust gegenüber Unebenheiten im Terrain [265, 303] und kann für Systeme mit seriell-elastischen Aktoren verwendet werden [249]. Darüber hinaus existieren Erweiterungen für nichtholonome virtuelle Zwangsbedingungen [132], sowie Ansätze zur Regelung von 3D-Systemen [62], ebenfalls mit experimentellen Umsetzungen [46, 322]. Die aktuelle Forschung zu 3D-Systemen beschäftigt sich unter anderem mit der Erweiterung für Systeme mit einem größeren Grad an Unteraktuierung, bei denen die Nulldynamik mehr als einen Freiheitsgrad hat [63]. Weitere aktuelle Fragestellungen, insbesondere in Bezug auf eine robuste Erweiterung für 3D-Modelle werden in [140] diskutiert.

Aktuierte Modelle mit Füßen

Es gibt außerdem zwei Erweiterungen für ebene Modelle mit Füßen. Zum einen die Verwendung von kreisförmigen Füßen [226] in Abb. 1.4b, die sowohl in Roboter-Experimenten [227] als auch in aktiven Prothesen umgesetzt wurde [130, 228, 285], vgl. Abb. 1.2c²⁵ (S. 3). Zum anderen Modelle mit flachen Füßen [64, 360], bei denen die HZD-Regelung deutlich komplexer wird, da der Aktuierungsgrad davon abhängt, wie der Kontaktzustand zwischen Standbeinfuß und Boden in der ESP ist, vgl. Abb. 1.5. Solange die Ferse oder Zehenspitze im Kontakt ist, ist die Orientierung des Fußes ein Freiheitsgrad des Modells; wenn der Fuß flach aufliegt, kann sich die Orientierung nicht ändern, solange der Druckpunkt (englisch: center of pressure) (COP) innerhalb der Auflagefläche ist. Der Freiheitsgrad wird also durch eine Nebenbedingung eingeschränkt und das System ist vollaktuiert, solange diese eingehalten wird [64]. Die ESP beim Gehen muss deshalb in weitere Abschnitte bzw.

²⁵ Obwohl die Konstruktion dieser Prothese keine offensichtliche Kreisform des Fußes aufweist, basiert die Regelung auf einem solchen Modell.

Phasen unterteilt werden, wobei die Dimension der Nulldynamik der Regelung in jeder Phase vom entsprechenden Grad der Unteraktuierung abhängt. Die Trajektorien zur Definition der virtuellen Zwangsbedingungen in jeder Phase müssen dabei wieder so gestaltet werden, dass die Nulldynamik invariant bzgl. der Phasenübergänge ist [360]. Analog kann auch eine nicht-instantane DSP mit dieser Betrachtungsweise umgesetzt werden, indem der Kontakt des vormaligen Schwungbeins nach dem Aufsetzen durch Nebenbedingungen eingeschränkt wird [208, 321, 337]. Es ergeben sich dabei 13 Kombinationsmöglichkeiten der möglichen Kontaktzustände der beiden Füße,²⁶ die zunächst in nahezu beliebiger Abfolge kombiniert werden können und die es bei der Regelung zuverlässig zu unterscheiden gilt. Nichtsdestotrotz gibt es auch für Modelle mit flachen Füßen erfolgreiche experimentelle Umsetzungen [384, 385]. Diese Ausführungen verdeutlichen außerdem den signifikanten Einfluss der Füße auf den Entwurf dynamisch stabiler HZD-Regelungen mittels virtueller Zwangsbedingungen. Ein wesentlicher Aspekt bei der Verwendung von HZD-Reglern ist die Erzeugung geeigneter Referenztrajektorien zur Definition der virtuellen Zwangsbedingungen, um sowohl eine hohe Stabilität und Robustheit, als auch eine hohe Energieeffizienz durch Ausnutzen der natürlichen Dynamik des passiven Systems zu erreichen. Die Stabilisierung von vorgegebenen virtuellen Zwangsbedingungen mittels einer Echtzeitregelung beim Betrieb eines Roboters kann durch verschiedene Strategien erfolgen. Diese weisen unterschiedliche Einzugsgebiete der stabilen periodischen Lösung auf, können also unterschiedlich große Störungen während der ESP ausregeln, ohne dass die Bewegung instabil wird. Verbreitet sind HZD-Regler mittels Eingangs-/Ausgangslinearisierung in Kombination mit einem PD-Regler [60, 139, 227, 265, 359, 360]. Es gibt jedoch auch erfolgreiche experimentelle Umsetzungen von modellprädiktiven Regelungen [280] und Reglern auf Basis von Control-Lyapunov-Funktionen [18]. Zur Erzeugung der Referenztrajektorien haben sich zwei Ansätze etabliert: zum einen die Identifikation und das Übertragen von Verläufen aus der Bewegung des Menschen [17, 172, 178, 279, 384, 385] und zum anderen die Verwendung von numerischen Optimierungsverfahren [30, 58, 59, 146, 163, 291, 301, 358, 360]. In beiden Ansätzen werden die Referenztrajektorien offline erzeugt, und dann in Form der virtuellen Zwangsbedingungen durch eine Echtzeitregelung im Betrieb stabilisiert. Eine Optimierung in Echtzeit ist aufgrund der Modellkomplexität und dem damit verbundenen Simulationsaufwand heute noch nicht möglich, wie bereits 2004 von BESSONNET et al. formuliert wurde [30, S. 1072]: „Solving such a problem in real time, as is required, seems beyond the reach of current algorithms and computers.“²⁷ Die Systematik beim Entwurf von HZD-Reglern liegt

²⁶ Es gibt 9 Kombinationen in der DSP mit beiden Füßen am Boden, 3 Kombinationen in der ESP mit dem Standbein am Boden und 1 Kombination für die Flugphase beim Rennen ohne Fuß am Boden.

²⁷ „Die geforderte Lösung eines solchen Problems in Echtzeit scheint außerhalb des mit aktuellen Algorithmen und Computern Erreichbaren zu liegen.“ (Übersetzung des Verfassers).

also darin, die Erzeugung und die Stabilisierung der Bewegung getrennt voneinander vorzunehmen. Dadurch können genaue Modelle bei der Erzeugung der Referenztrajektorien in der Simulation und Optimierung genutzt werden, deren Stabilisierung in Echtzeit durch verschiedene Strategien möglich ist. Es ist schon während der Erzeugung der Referenztrajektorien durch das Poincaré-Schnitt-Verfahren eine Aussage über die Stabilität der späteren Regelung möglich.

Alternative Regelungskonzepte

Die Systematik der HZD-Regler bietet viele Vorteile, ist jedoch nicht das einzige erfolgreich umgesetzte Regelungskonzept für diese Robotermodelle. Eine Regelung, bei der die Ansteuerung der Beine aus einem virtuellen Feder-Dämpfer-Element abgeleitet wird – ähnlich dem gefederten inversen Pendel –, erreicht auf dem Roboter ATRIAS stabile 3D-Gehbewegungen mit einer Geschwindigkeit von bis zu 4,3 km/h [294]. Von derselben Forschergruppe wurde die Firma *Agility Robotics* als Ausgliederung der Oregon State University gegründet, die im Jahr 2017 den Nachfolge-Roboter Cassie in Abb. 1.1c (S. 2) vorgestellt hat [1]. Dessen Beine sind denen eines Straußes nachempfunden. Mit einer Regelungsstrategie auf Basis virtueller Feder-Dämpfer-Elemente kann eine hohe Energieeffizienz und ein sehr natürlich anmutender Gang erreicht werden. Agility Robotics hat Anfang 2018 eine hohe Summe an Risikokapital²⁸ eingeworben [2], womit die Firma ihrer Vision „In the near future, robots will deliver groceries, help take care of us in our homes, and assist in disaster recovery. We are pioneering legged robot technologies to solve the mobility challenges and enable this future.“²⁹ [8] ein deutliches Stück näher gekommen ist. Dies lässt erstmals einen kommerziellen Vertrieb von zweibeinigen Robotern für die private und gewerbliche Nutzung in mittelfristiger Zukunft realistisch erscheinen.

HZD-Regler sind auf eine hohe Energieeffizienz bei der Fortbewegung ausgerichtet, weshalb der Fokus auf der Stabilisierung von periodischen Bewegungen mit konstanter Durchschnittsgeschwindigkeit liegt.³⁰ Es gibt jedoch viele Anwendungen, bei denen andere Ziele im Vordergrund stehen – beispielsweise bei der Verwendung von Armen und Händen für Manipulationsaufgaben oder der Fortbewegung in unwegsamem Terrain, wo ein genaues Platzieren der Füße erforderlich ist [180, 257]. Bei diesen Anwendungen werden Roboter mit sehr vielen Freiheitsgraden eingesetzt [24, 89, 166, 180], wobei nicht die Energieeffizienz bei der Fortbewegung im Vordergrund steht, sondern eine

²⁸ Englisch: venture capital.

²⁹ „In naher Zukunft werden Roboter Lebensmittel ausliefern und bei der häuslichen Pflege und der Katastrophenhilfe unterstützen. Wir leisten Pionierarbeit bei Technologien für Roboter mit Beinen um die Mobilitätsanforderungen zu meistern und diese Zukunft zu ermöglichen.“ (Übersetzung des Verfassers).

³⁰ Es gibt Erweiterungen für transiente Vorgänge, wie den Wechsel von einer Durchschnittsgeschwindigkeit zu einer anderen [373], die jedoch in der Literatur selten betrachtet werden.

stabile Balance. Diese Roboter haben daher meist flache Füße und nutzen zur Regelung das Konzept des sog. Zero Moment Point (deutsch: Null-Momenten-Punkt) (ZMP) [347–350]. D. h. wenn sich einer oder beide Füße flach auf dem Boden befinden, so kann aus dem Kräfte- und Momentengleichgewicht für den Roboter die Summe aller Kontaktkräfte und -momente auf einen resultierenden Kraftvektor reduziert werden. Der Schnittpunkt dieses Vektors mit dem ebenen Boden ist der ZMP. Wenn der ZMP innerhalb des Stützpolygons³¹ liegt, das durch die Auflageflächen der Füße gegeben ist, und die Haftreibung nicht überschritten wird, befindet sich der Roboter im statischen Gleichgewicht³² und die Füße bleiben in festem Kontakt zum Boden. Zur Regelung dieses Systems können folglich Methoden für vollaktuierte Systeme verwendet werden – unter der Nebenbedingung, dass der ZMP dabei innerhalb des Stützpolygons bleibt. Wenn sich nur ein Fuß auf dem Boden befindet und der ZMP innerhalb der Auflagefläche des Fußes bleibt, ist dieser gleich dem COP [306]. Für den Fall, dass der COP am Rand der Auflagefläche liegt, kann der Fuß über die entsprechende Außenkante kippen [127].

Mit dem ZMP-Konzept können ebenfalls Regler entwickelt werden, bei denen das System offline erzeugten Trajektorien folgt, die beispielsweise aus einer Optimierung [158], oder aus dem Übertragen von Bewegungen des Menschen stammen [80]. In der Praxis deutlich relevanter ist jedoch die Möglichkeit, auf Basis des ZMP die Bewegung mittels sog. *Walking Pattern Generators*³³ in Echtzeit zu planen [15]. Bei dieser Echtzeit-Planung kann aufgrund der großen Anzahl an Freiheitsgraden nicht das vollständige, nichtlineare Modell simuliert werden, weshalb auf einfachere Ersatzmodelle zurückgegriffen wird. Dabei wurde zuerst das 3D Linear Inverted Pendulum Mode (deutsch: 3D-Lineare-Inverse-Pendel-Mode) (3D-LIPM) eingesetzt, bei dem die Verbindung des Gesamtschwerpunkts mit dem ZMP als inverses Pendel angenommen wird. Durch die zusätzliche Einschränkung des Gesamtschwerpunkts auf eine konstante Höhe über dem Boden ist eine Linearisierung und Entkopplung der nichtlinearen Dynamik des inversen Pendels möglich [183]. Die einfachen Gleichungen dieses Ersatzmodells erlauben eine Lösung in Echtzeit zur Planung der Bewegung, was auch in zahlreichen Experimenten gezeigt wurde [184–186]. Eine Übersicht und Zusammenfassung dieses Ansatzes, sowie eine Erweiterung zur Planung der Gesamtbewegung³⁴ wird in [187] gegeben. Bei der Verwendung des 3D-LIPM-Ersatzmodells steht die Erzeugung stabiler Bewegungen im Vordergrund, was zunächst eine schlechte Energieeffizienz zur Folge hat. Eine Echtzeit-Planung auf Basis des ZMP-Konzepts unter Berücksichtigung der Energieeffizienz ist daher ein aktuelles Forschungsthema

³¹ Englisch: support polygon.

³² Dieses Gleichgewicht berücksichtigt (dynamische) Trägheitskräfte und -momente [350], die Grundidee basiert jedoch nichtsdestotrotz auf einer Betrachtungsweise aus der Statik.

³³ Deutsch: Gangmustergeneratoren.

³⁴ Englisch: whole body motion patterns.

[317, 318]. Außerdem ist die Beschränkung auf die Dynamik des Gesamtschwerpunkts eine starke Vereinfachung, die nur bei niedrigen Gehgeschwindigkeiten brauchbare Ergebnisse liefert. Bei höheren Geschwindigkeiten muss insbesondere die Dynamik des Schwungbeins mit berücksichtigt werden, wie beispielsweise von BUSCHMANN et al. festgestellt wird [45, S. 2]: „However, at higher walking speeds, the influence of swing leg motion becomes quite strong, especially in sagittal direction.“³⁵ Es gibt daher zahlreiche weitere Ersatzmodelle zur näherungsweisen Beschreibung der Bewegung, die teilweise auch die Trägheit der Beine berücksichtigen, beispielsweise ein Drei-Massen-Modell in [316] und das 3LP-Modell³⁶ in [92]. In [15] wird eine Übersicht über Methoden zur Echtzeit-Bewegungsplanung gegeben und eine Auswahl von 25 zweibeinigen Robotern und PDWs im Zeitraum von 1972 – 2009 mit dem jeweils verwendeten Konzept zur Stabilisierung diskutiert.

Ein Problem bei allen Regelungen, die auf dem ZMP-Konzept basieren, ist, dass durch dieses Kriterium allein keine Stabilität für periodische Gehbewegungen garantiert ist. So gibt es Bewegungen, die zwar das ZMP-Kriterium während des gesamten Gangs erfüllen, aber dennoch auf eine instabile Dynamik führen, was z. B. in [360, S. 302] gezeigt wird: „[...] a periodic orbit on which *the ZMP criterion is satisfied at each point of the gait, but yet the orbit is unstable.*“³⁷ Ein Konzept zur Erzeugung dynamisch stabiler Gehbewegungen, das ebenfalls das 3D-LIPM zur Echtzeit-Bewegungsplanung nutzt, basiert auf dem *Capture Point*³⁸ [201, 283, 284]. Dabei wird die Platzierung des Schwungbeins so gewählt, dass die dynamische Bewegung abgefangen wird, was die Kompensation von Störungen ermöglicht. Der Roboter ist dabei nicht wie beim ZMP-Konzept im statischen Gleichgewicht, sondern befindet sich vielmehr in einer Fallbewegung über das Standbein, ähnlich der menschlichen Bewegung. Mit dieser Strategie kann fast immer nach zwei Schritten wieder ein bestimmter Stabilitätszustand des Systems erreicht werden [381, S. 6300]: „Practically, this suggests that in a controller design, there is no need to plan the motion of the robot, at least for balance purposes, more than two steps ahead.“³⁹

Die Konzepte *Zero Moment Point* und *Capture Point* haben hauptsächlich die Echtzeit-Bewegungsplanung und Stabilisierung eines Roboters zum Ziel. Während für das ZMP-Konzept flache Füße erforderlich sind, um ein Stützpolygon aufzuspannen, in dem der ZMP liegen muss, ist diese für die Capture-Point-Regelung nicht unbedingt

³⁵ „Bei höheren Gehgeschwindigkeiten wird jedoch der Einfluss der Schwungbeinbewegung sehr stark, insbesondere in der Sagittalrichtung.“ (Übersetzung des Verfassers).

³⁶ Dieses Modell besteht aus drei linearisierten Pendeln (3LP) für die beiden Beine und den Oberkörper und ist eine konzeptionelle Erweiterung des 3D-LIPM.

³⁷ „[...] ein periodischer Orbit auf dem *das ZMP-Kriterium an jedem Punkt des Gangs erfüllt wird, der Orbit aber dennoch instabil ist.*“ (Hervorhebung im Original, Übersetzung des Verfassers).

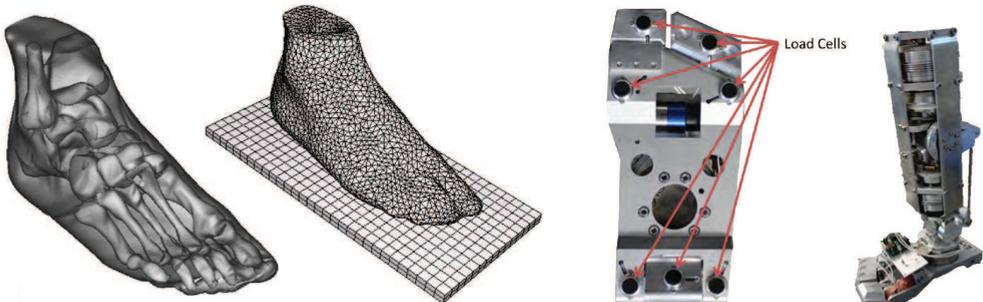
³⁸ Deutsch: Fangpunkt.

³⁹ „Praktisch suggeriert dies, dass es beim Entwurf eines Reglers für die Bewegung des Roboters keine Notwendigkeit gibt, mehr als zwei Schritte vorzuplanen, zumindest nicht für Fragen der Balance.“ (Übersetzung des Verfassers).

notwendig. Die Energieeffizienz ist jedoch in beiden Fällen eine nachrangige Fragestellung, im Gegensatz zum Ansatz der HZD-Regelungsstrategien. Für die Fragestellung dieser Arbeit – den Einfluss des Fußes auf die Energieeffizienz beim Gehen – sind die Reglerkonzepte auf Basis von *Zero Moment Point* oder *Capture Point* daher von geringem Interesse. Es wird vielmehr von einer HZD-Regelung ausgegangen, was bei der Erzeugung von Bewegungen durch Simulationen in Kombination mit numerischer Optimierung A-Priori-Stabilitätsaussagen erlaubt. Aus den in der Literatur geschilderten Experimenten kann mit großer Sicherheit davon ausgegangen werden, dass die in den Simulationen erzeugten Referenztrajektorien auch auf einem dem Modell entsprechenden Roboter in Echtzeit umgesetzt und stabilisiert werden können.

1.2.2 Fußmodellierung

Sowohl beim Menschen als auch bei PDWs und Robotern haben die Füße einen wesentlichen Einfluss auf die Bewegung beim Gehen. Je nach Fragestellung kommen in der Literatur allerdings verschiedene Modelle zum Einsatz, die sich deutlich voneinander unterscheiden. Der menschliche Fuß ist ein kompliziertes Gebilde, das aus 26 Knochen mit diversen Gelenken sowie Muskeln, Bändern, Bindegewebe und Haut aufgebaut ist [57], siehe Abb. 1.6a. Im Gegensatz dazu werden die Füße von Robotern und PDWs meist aus steifen Metallstrukturen hergestellt – vgl. Abb. 1.1c, 1.2, 1.3c und 1.6b (S. 2, 3 und 9) –, die in guter Näherung durch Starrkörper modelliert werden können. Die Hauptfunktion des Fußes ist in allen Fällen der Kontakt und die Interaktion mit dem Boden, was durch die entsprechenden Modelle beschrieben werden muss. Im Folgenden



(a) Knochengeometrie und FEM-Modell für menschlichen Fuß (Quelle: [57, Abb. 1a & 1b, nebeneinander]).

(b) Fuß von ARMAR-4 (Quelle: [24, Abb. 10]).

Abbildung 1.6: (a) Detailliertes Modell eines menschlichen Fußes durch Rekonstruktion der Geometrie aller Knochen aus Magnetresonanztomographie-Bildern und anschließende Vernetzung mittels 54 188 Tetraeder-Elemente für FEM-Simulationen. (b) Fuß des Roboters ARMAR-4 aus drei Aluminium-Segmenten mit insgesamt sieben Kraftsensoren (Load Cells); die beiden Zeh-Segmente sind jeweils drehbar mit dem Fuß-Segment verbunden. Die Aufnahme des mittleren Kraftsensors in der Ferse ist über eine Feder elastisch angebunden, um den Stoß beim Aufsetzen der Ferse aufzunehmen.

wird auf die dazu notwendigen Methoden zur Kontaktdetektion und zur Beschreibung der Kontaktkinematik in mechanischen Modellen eingegangen. Zuvor wird jedoch zunächst ein Überblick über die verschiedenen in der Literatur verwendeten Fußmodelle gegeben, die bei zweibeinigen Robotern, PDWs und Modellen des Menschen Anwendung finden. Diese führen schließlich auf das Konzept der Abrollformen, welches bisher vor allem bei der Entwicklung von Prothesen eingesetzt wird. Dieses Konzept besitzt jedoch ebenfalls großes Potential zur Entwicklung effizienter Fußmodelle für Echtzeit-Regelungen und numerische Optimierungsaufgaben.

Starre Modelle für Roboterfüße

Bei der Verwendung des ZMP-Konzepts zur Regelung und Bewegungsplanung werden flache Füße verwendet.⁴⁰ Dabei hängt die Stabilität direkt von den Abmessungen der Füße ab: je größer die Fußabmessungen sind, desto größer das Stützpolygon und damit der zulässige Bereich für den ZMP. Mit größeren Füßen können größere Abweichungen und Störungen kompensiert werden, bevor der Roboter das Gleichgewicht verliert und stürzt. Bei der Modellierung ist es ausreichend, alle Eckpunkte des Stützpolygons eines Fußes zu beschreiben, die durch gerade Linien miteinander verbunden werden. Der Kontakt des Fußes zum Boden wird daher im Modell durch den Kontakt der Eckpunkte zum Boden beschrieben.

Im Gegensatz dazu werden bei PDWs häufig runde Füße verwendet (siehe Abb. 1.3, S. 9), da durch diese ebenfalls die Stabilität, jedoch auch die Energieeffizienz beeinflusst und verbessert werden können [233]. Dies lässt sich mittels eines HZD-Reglers zur Ausnutzung der Dynamik des passiven Systems auf aktuierte zweibeinige Roboter übertragen [225]. Zur Beschreibung der Geometrie werden bei ebenen Modellen Kreisbögen und bei räumlichen Modellen Zylinder- und Torussegmente verwendet. Damit kann der Kontakt mit dem Boden einfach beschrieben werden, wie auch von McGeer formuliert [233, S. 73]: „We should mention that the semicircular foot is a mathematical convenience rather than a physical necessity; doubtless other arrangements are feasible.“⁴¹ Der Kontaktpunkt eines Kreises mit dem flachen Boden liegt auf derjenigen Geraden durch den Kreismittelpunkt, die normal zum Boden ist. Ein ebener PDW ohne Knie benötigt zum Gehen mit einer gewissen Geschwindigkeit bei zunehmendem Fußradius einen immer geringeren Neigungswinkel des Bodens. Die Energieeffizienz steigt folglich monoton mit dem Radius der Füße an und ist somit deutlich besser als beim Modell mit Punktfüßen [233]. Eine Erklärung für diesen

⁴⁰ Der in Abb. 1.6b dargestellte Fuß ist nicht vollkommen eben. Die Auflagepunkte sind durch die Kraftsensoren vorgegeben, die alle in einer Ebene liegen, wenn die Zehen gestreckt sind und die Ferse belastet wird.

⁴¹ „Es sollte erwähnt werden, dass der halbkreisförmige Fuß eher eine mathematische Zweckmäßigkeit als eine physikalische Notwendigkeit ist; zweifellos sind andere Gestaltungen möglich.“ (Übersetzung des Verfassers).

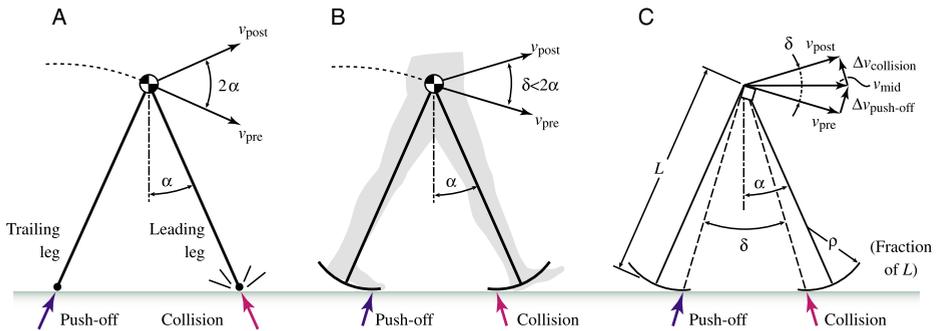


Abbildung 1.7: Vergleich eines Modells mit (a) Punktfüßen und (b) kreisförmigen Füßen beim Stoß am Ende des Schritts. Durch die kreisförmige Geometrie der Füße kann der Abstand der Kontaktpunkte im Vergleich zum Modell mit Punktfüßen verringert werden, wodurch die Stoßverluste mit zunehmendem Radius abnehmen (Quelle: [4, Abb. 1]).

Effekt ist in Abb. 1.7 dargestellt: durch die kreisförmigen Füße ist der Abstand der Kontaktpunkte geringer als beim Modell mit Punktfüßen, wodurch der Energieverlust beim Stoß, der von der Änderung der Schwerpunktschwindigkeit abhängt, abnimmt. Die Stabilität der passiven Gehbewegung nimmt dabei zunächst zu, bei sehr großen Radien jedoch auch wieder ab [233]. PDWs mit flachen Füßen, bei denen der Abstand zwischen den Kontaktpunkten gegenüber Punktfüßen ebenfalls verringert wird, sind im Vergleich zu kreisförmigen Füßen weniger effizient und robust [302, S. 453]: „It was noticed that the robustness of passive walking with flat feet is low as it was more difficult to launch successful passive walking with flat feet as compared to the one with arc feet.“⁴² Dies liegt daran, dass während der ESP beim Übergang vom Kontakt an der Ferse zu den Zehen ein weiterer Stoß stattfindet, bei dem Energie dissipiert wird [207] (siehe auch Abb. 1.5, S. 14).

Die Nachteile von flachen Füßen können zum Teil vermieden werden, wenn bewegliche Sprunggelenke eingeführt und der Fuß durch eine Torsionsfeder mit dem Unterschenkel verbunden wird [94, 250, 251, 354, 366]. Diese Modelle zeigen ein ähnliches Verhalten wie kreisförmige Füße, die starr mit dem Unterschenkel verbunden sind, allerdings treten nach wie vor Stöße beim Aufsetzen der Zehen auf. In [252] tritt bei Experimenten mit einem solchen System sogar ein Rückfedern der Zehen auf, so dass es während der ESP mehr als einen Stoß gibt, in dem Energie dissipiert wird. In [223] werden flache Füße mit einer Torsionsfeder im Sprunggelenk und starr verbundene kreisförmige Füße für ein aktuiertes System mit einer heuristischen Regelung auf Basis von Reflexschleifen verglichen. Das System weist in diesem Fall mit flachen Füßen

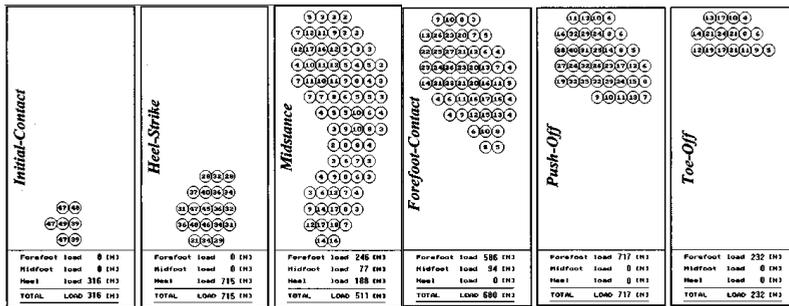
⁴² „Es wurde festgestellt, dass die Robustheit des passiven Gehens mit flachen Füßen gering ist, da es im Vergleich mit kreisförmigen Füßen schwieriger war, erfolgreiche passive Gehbewegungen mit flachen Füßen zu starten.“ (Übersetzung des Verfassers).

sogar eine höhere Robustheit auf als mit kreisförmigen Füßen. Durch die Erweiterung der flachen Füße um ein Zehengelenk, ebenfalls mit einer Torsionsfeder, sind weitere Verbesserungen möglich [202]. Durch eine Zerlegung des Fußes in mehr Segmente sind weitere Steigerungen möglich, wobei sich im Grenzfall einer großen Anzahl sehr kurzer Segmente wieder die Kreisform ergibt [202, 203]. In einem direkten Vergleich von flachen Füßen mit Sprunggelenk und fest verbundenen kreisförmigen Füßen für ein aktuiertes Modell ohne Knie und Oberkörper kommen ASANO et al. zu dem Ergebnis [23, S. 5906]: „The most important factor in biped gait generation is not what control or desired trajectories are applied to the walking robot but whether the foot shape is circular or not.“⁴³ Der positive Einfluss von kreisförmigen Füßen auf die Energieeffizienz wird in [196] für ein ebenes Modell mit teleskopierbaren Beinen und einer HZD-Regelung berichtet. Die Stabilität der periodischen Bewegung nimmt ebenfalls zunächst zu und bei großen Radien wieder ab. Das Einzugsgebiet der stabilen Lösung – die Robustheit gegenüber Störungen – nimmt ebenfalls mit zunehmendem Radius zu, auch für große Radien. In [225] wird die Energieeffizienz des ebenen Fünfsegmentläufers in Abb. 1.4b (S. 13) mit einer HZD-Regelung untersucht. Mit zunehmendem Fußradius kann bei allen betrachteten Gehgeschwindigkeiten eine Energieeinsparung von mehr als 60 % gegenüber dem Modell mit Punktfüßen erreicht werden. Dabei liegt der optimale Radius im Bereich von 30–50 % der Beinlänge; die Lage des Kreismittelpunktes und die Masse des Fußes haben nur einen geringen Einfluss auf die Effizienz. Kreisförmige Füße führen nicht nur beim Gehen, sondern auch beim Rennen mit zunehmendem Radius zu deutlichen Effizienzsteigerungen [181].

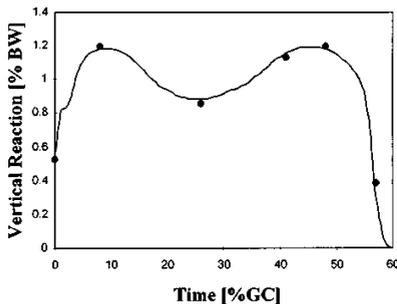
Elastische Modelle für den menschlichen Fuß

Die Fußmodelle bei Robotern und PDWs beschränken sich auf starre Körper, die entweder durch Polygone oder Kreisbögen beschrieben werden können. Zur Beschreibung des menschlichen Fußes – einer wichtigen Voraussetzung für Fragestellungen aus der Medizin und Orthopädie, aber auch bei der Entwicklung von Prothesen – sind diese Modelle nur eingeschränkt anwendbar, da dieser nicht starr ist. Der detaillierte Aufbau und die Gewebeeigenschaften werden *in vitro* [7, 49, 255] oder *in vivo* [22, 112] experimentell ermittelt und in Computermodellen nachgebildet, siehe Abb. 1.6a (S. 19). Durch die Simulation der wirkenden Kräfte und Muskelaktivitäten können durch die Finite Elemente Methode (FEM) die Gewebeverformungen und -belastungen berechnet werden. Ein Überblick über den aktuellen Stand der Forschung in diesem Bereich wird in [247] gegeben. Der Vorteil dieser Modelle ist eine hohe Genauigkeit, insbesondere durch die Möglichkeit, individuelle Modelle für einzelne Patienten zu

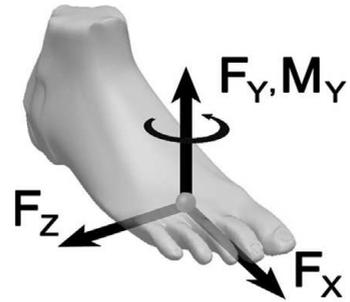
⁴³ „Der wichtigste Faktor bei der Erzeugung eines zweibeinigen Gangs ist nicht welche Regelung oder Solltrajektorien auf den gehenden Roboter angewendet werden, sondern ob die Fußform rund ist oder nicht.“ (Übersetzung des Verfassers).



(a) Druckverteilung Fuß beim Gehen (Quelle: [112, Abb. 4a, nebeneinander dargestellt]).



(b) Vertikale Reaktionskraft am Druckpunkt (Quelle: [112, Abb. 4b]).



(c) Druckpunkt mit effektiven Reaktionskräften und vertikalem Reaktionsmoment (Quelle: [147, Abb. 2, Ausschnitt ROLL]).

Abbildung 1.8: (a) Repräsentative Druckverteilung am menschlichen Fuß beim Gehen mit (b) dem zugehörigen Verlauf der vertikalen Kraft am Druckpunkt. (c) Durch Integration der Druckkräfte über die Kontaktfläche kann der Druckpunkt bestimmt werden, an dem die effektiven Reaktionskräfte und ein vertikales Reaktionsmoment wirken.

erstellen. Allerdings führt die hohe Modellkomplexität und die große Anzahl an Freiheitsgraden zu hohen Rechenzeiten. Dieser Ansatz ist daher für die Simulation und Optimierung von Gehbewegungen ungeeignet.

Effiziente Modelle für diese Art von Fragestellungen müssen die Wirkung des Fußes auf die Gesamtbewegung des Körpers korrekt abbilden [264, S. 1057]: „From the instant of heel-rise, the foot has an important kinematic function in determining the path-way of the knee, and ultimately, the position of the body’s center of gravity.“⁴⁴ Entscheidend ist die Schnittstelle des Fußes am Sprunggelenk, wo die Kinematik aufgrund der Abrollbewegung und inneren Verformung des Fußes sowie die zugehörigen Interaktionskräfte und -momente auf den Unterschenkel wirken. Aus der Messung der Kontaktfläche und der zugehörigen Druckverteilung beim Gehen in

⁴⁴ „Ab dem Zeitpunkt, an dem die Ferse abhebt, hat der Fuß eine wichtige kinematische Funktion in der Bestimmung der Bahn des Knies und schlussendlich der Position des Körperschwerpunkts.“ (Übersetzung des Verfassers).

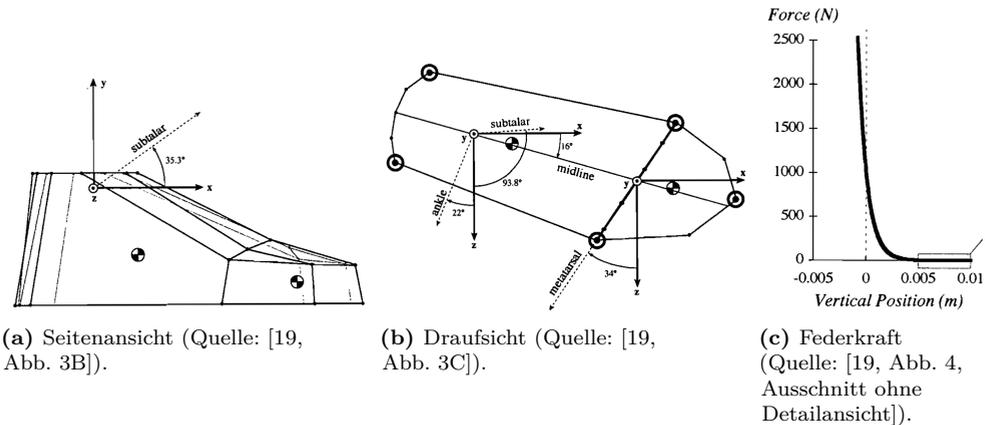


Abbildung 1.9: (a) Modell für den menschlichen Fuß aus zwei Starrkörpern. Das Zehensegment kann sich um eine Achse für das Großzehengrundgelenk verdrehen. (b) Draufsicht mit Berandung der Kontaktfläche durch ein Polygon. An den fünf markierten Punkten wirken nichtlineare Feder-Dämpfer-Elemente in alle Raumrichtungen, um die Reaktionskraft mit dem Boden abzubilden. (c) Das nichtlineare Kraftgesetz für die elastische Komponente in Vertikalrichtung in den Feder-Dämpfer-Elementen. Die Detailsicht für den umrandeten Bereich ist nicht dargestellt.

Abb. 1.8a kann durch Integration der Druckpunkt in Abb. 1.8c bestimmt werden. An diesem wirken die effektiven Reaktionskräfte sowie ein vertikales Reaktionsmoment. Der Verlauf der vertikalen Reaktionskraft während eines Schrittes ist in Abb. 1.8b dargestellt. Der Anstieg ist zu Beginn, direkt nach dem initialen Kontakt der Ferse mit dem Boden, sehr steil, was durch einen starren Körper mit einer steifen, aber elastischen Randschicht modelliert werden kann. Im weiteren Verlauf tritt jedoch keine vergleichbar sprunghafte Änderung auf. Der menschliche Fuß kann daher nur schlecht durch einen flachen Starrkörper modelliert werden, da bei einem solchen Modell beim Aufsetzen des Großzehengrundgelenks⁴⁵ der eben diskutierte Stoß auftritt. Modelle mit flachen Füßen in Form eines einzigen Starrkörpers wurden bis in die 1980er Jahre verwendet [65, 260], da die damaligen Rechenkapazitäten für komplexere Modelle nicht ausreichend waren, finden heute aber praktisch keine Anwendung mehr.

Um glatte Kraftverläufe beim Abrollen des Fußes zu erhalten, werden daher in der Literatur Modelle aus mehreren passiv oder aktiv miteinander gekoppelten Starrkörpern verwendet. Diese ermöglichen die inneren Verformungen des Fußes, insbesondere das Abrollen über das Großzehengrundgelenk. Ein einfaches Modell aus zwei Starrkörpern für den Rückfuß und die Zehen ist in Abb. 1.9 dargestellt. Das Zehensegment ist über eine Drehachse im Großzehengrundgelenk mit dem Rückfuß verbunden. Zur Interaktion mit dem Boden werden fünf nichtlineare Feder-Dämpfer-Elemente (Kelvin-Elemente) verwendet. In Abb. 1.9c ist der Kraftverlauf für die elastische

⁴⁵ Englisch: metatarsal joint.

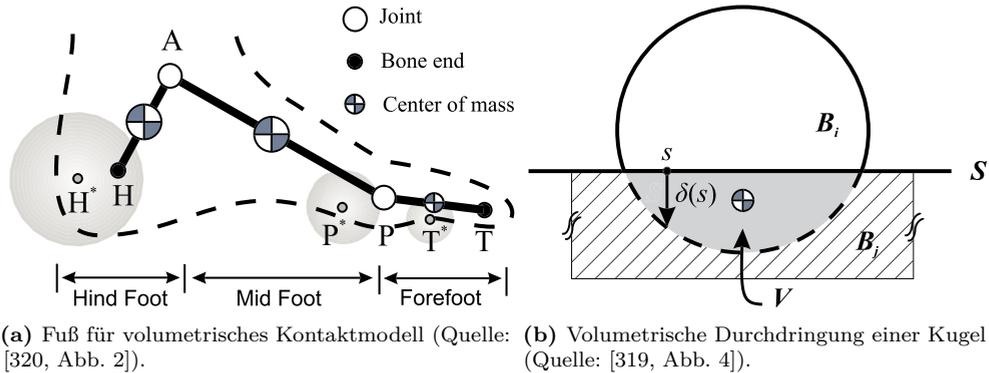
Komponente in Vertikalrichtung für ein Feder-Dämpfer-Element dargestellt. Der Verlauf entspricht einer Straffunktion⁴⁶; der Wert ist für große Abstände vom Boden sehr klein, verschwindet jedoch nie vollständig. Es ist außerdem mit hinreichend großer Kraft eine Durchdringung des Bodens möglich. Diese Art von Interaktionsmodell bringt den Nachteil mit sich, dass die Gesamtwirkung der Feder-Dämpfer-Elemente von deren Anzahl und Positionierung abhängt, und daher die Kraftgesetze und deren Parameter mit entsprechend hohem manuellem Aufwand eingestellt werden müssen. Nichtsdestotrotz ist dieses Konzept in der Literatur verbreitet und wird auch für komplexere Modelle mit mehr als zwei Starkkörpern pro Fuß verwendet.

ANDERSON et al. verwenden in [19, 20] das diskutierte Modell mit 2 Segmenten und 5 Feder-Dämpfer-Elementen; GILCHRIST et al. in [117] ein Modell mit 2 Segmenten und 7 Feder-Dämpfer-Elementen, ebenfalls in [117] mit 2 Segmenten und 9 Feder-Dämpfer-Elementen; SCOTT et al. in [311] eines mit 8 Segmenten und 7 Feder-Dämpfer-Elementen; NEPTUNE et al. in [254] 3 Segmente und 66 Feder-Dämpfer-Elemente; PEASGOOD et al. in [268] 1 Segment und 2 Feder-Dämpfer-Elemente; ACKERMANN et al. in [3] 1 Segment und 10 Feder-Dämpfer-Elemente. Diese Aufzählung ist bei Weitem nicht vollständig, gibt jedoch einen guten Eindruck über die Vielzahl an Modellen, die mit diesem Ansatz entwickelt und parametrisiert wurden. Die Modelle unterscheiden sich in der Anwendung zum Teil deutlich; so werden in [276] zwei verschiedene Modelle zur Untersuchung der Bewegung von Kindern mit und ohne Plattfüßen verwendet, wobei sich große Unterschiede und zum Teil gegensätzliche Ergebnisse für die Sprunggelenkinematik beim Gehen ergeben. Eine umfangreiche Übersicht über eine Vielzahl an Modellen und deren Eigenschaften und Unterschiede wird in [289] und [81] gegeben.

Bei den verschiedenen Modellen mit einer unterschiedlichen Anzahl an Fußsegmenten und Kontaktelementen in Form der Feder-Dämpfer-Elemente wird immer ein Kompromiss zwischen der Genauigkeit des Modells und dem Aufwand bei der Modellierung, Parametrierung und Simulation eingegangen. So schreiben PEASGOOD et al. über ihre Motivation zur Auswahl nur eines Segments mit zwei Feder-Dämpfer-Elementen [268, S. 66]: „This relatively simple contact model was selected over a higher fidelity model such as a finite element model due to the need for a fast numerical simulation that is executed many times during an optimization process.“⁴⁷ Bei der Betrachtung der Kontaktfläche beim Abrollen des Fußes in Abb. 1.8a fällt auf, dass der Druck in den drei Bereichen Ferse, Vorfuß und Zehen relativ hohe Werte annimmt. Daraus resultieren Ansätze zur Modellierung der Fuß-Boden-Interaktion, die diesem Verhalten

⁴⁶ Englisch: penalty function.

⁴⁷ „Dieses relativ einfache Kontaktmodell wurde anstatt eines Modells mit höherer Genauigkeit, wie ein FEM-Modell, ausgewählt, aufgrund der Notwendigkeit einer schnellen numerischen Simulation, die viele Male während des Optimierungsprozesses ausgeführt werden muss.“ (Übersetzung des Verfassers).



(a) Fuß für volumetrisches Kontaktmodell (Quelle: [320, Abb. 2]). (b) Volumetrische Durchdringung einer Kugel (Quelle: [319, Abb. 4]).

Abbildung 1.10: (a) Fuß aus mehreren starren Kugeln mit (b) volumetrischem Kontaktmodell. Die Kontaktkräfte zwischen jeder Kugel und dem Boden hängen vom jeweiligen Durchdringungsvolumen V ab.

durch Kontaktelemente Rechnung tragen, die nicht an zuvor festgelegten Punkten mit dem Fuß verbunden sind. In [190, 242] wird der Kontakt für einen Fuß aus zwei Segmenten für Ferse und Vorfuß (inkl. Zehen) jeweils durch *Kontaktscheiben*⁴⁸ beschrieben. Dabei ist an jedem Segment eine virtuelle Scheibe angebracht, deren Orientierung gegenüber dem Boden festlegt, an welchem Punkt eine konzentrierte Kontaktkraft auf das entsprechende Segment wirkt [189]. Trotz der vergleichsweise geringen Komplexität dieses Modells können damit experimentell ermittelte Kraft- und Druckpunktverläufe beim Gehen gut abgebildet werden; lediglich beim Aufsetzen der Ferse und beim Abdrücken über die Zehen treten größere Abweichungen in der Lage des Druckpunktes auf. In der Betrachtungsweise des vorherigen Absatzes entspricht dies einem Modell mit 2 Segmenten und 2 nichtlinearen Feder-Dämpfer-Elementen, weshalb es sich für die von PEASGOOD et al. motivierte schnelle numerische Simulation eignet.

Ein weiterer Ansatz für schnelle numerische Simulationen besteht in der Verwendung des Hunt-Crossley-Kontaktmodells [173] oder eines volumetrischen Kontaktmodells [124]. Dabei wird der Fuß aus mehreren einfachen Starrkörpern wie Kugeln [73, 241, 248, 315, 319, 320], Ellipsoiden [41, 42, 224] oder Superellipsoiden [215] aufgebaut, siehe Abb. 1.10a. Beim Hunt-Crossley-Kontaktmodell [173] wird das Hertz'sche Kontaktmodell [164] konsistent um einen dissipativen Term erweitert; das Kraftgesetz hängt also von der Oberflächenkrümmung der Kugel bzw. des Ellipsoids im Kontaktpunkt ab. Beim volumetrischen Kontaktmodell [124] wird eine Durchdringung des Bodens zugelassen, wie in Abb. 1.10b abgebildet. An jedem Punkt der Oberfläche wirkt ein Kontaktdruck, der von der Durchdringung und Geschwindigkeit dieses Punktes

⁴⁸ Englisch: contact disks.

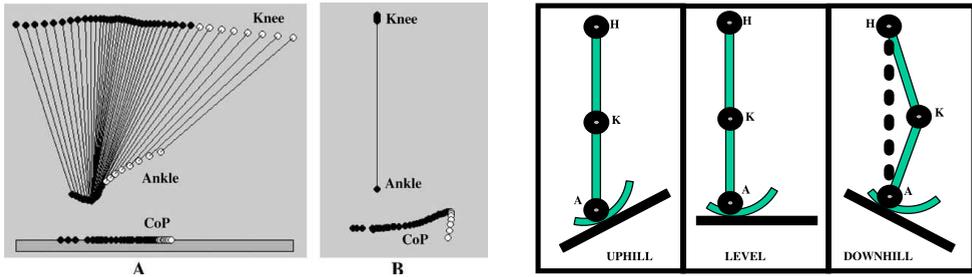
abhängt. Durch Integration über die gesamte Durchdringungsfläche ergibt sich damit eine Kontaktkraft, die vom Durchdringungsvolumen abhängt. Diese Modelle können anhand von Messungen kalibriert werden, so dass sich in Simulationen gute Übereinstimmungen für die Lage des Druckpunktes und die Reaktionskräfte des gesamten Fußes erzielen lassen [42]. Volumetrische Kontaktmodelle werden bei der Erstellung von dreidimensionalen Modellen zur Simulation der menschlichen Bewegung genutzt, beispielsweise um aus experimentell ermittelten Bewegungen mittels inverser Dynamik die zugehörigen Muskelkräfte und -aktivierungen zu berechnen [16, 363]. Darüber hinaus wird auch an der Entwicklung prädiktiver Modelle gearbeitet [268], um Bewegungen des Menschen in neuen Situationen vorherzusagen; eine Fragestellung, die insbesondere bei der Entwicklung von Prothesen wichtig ist. Die Vorhersagegenauigkeit ist jedoch noch sehr eingeschränkt [241, S. 40]: „Although Peasgood *et al.*'s [sic!] system was the first to show that prosthetic gait has a greater metabolic cost than healthy gait *in silico* using a forward dynamic simulation, the predicted kinetics of Peasgood *et al.*'s [sic!] healthy model were significantly different from published joint kinetics of human gait found using inverse dynamics analysis [...]“⁴⁹

Abrollformen

Ein Vorgehen, das für zweidimensionale Modelle glatte Verläufe liefert und insbesondere im Bereich der Prothesenentwicklung Verbreitung gefunden hat, sind die sogenannten Abrollformen⁵⁰. Dieser empirische Ansatz basiert auf der Beobachtung, dass die Trajektorie des Druckpunkts in Abb. 1.11a während der ESP bei der Darstellung in einem unterschenkelfesten Koordinatensystem (AF, siehe Abb. 1.12a) eine starke Ähnlichkeit mit einer Kreisbahn aufweist [149, 152]. Der Einfluss des Fußes auf die Gesamtbewegung wird in diesem ebenen Modell durch einen abrollenden, kreisförmigen Starrkörper beschrieben, der fest mit dem Unterschenkel verbunden ist. Die innere Verformung des Fußes und die Bewegung im Sprunggelenk werden bei diesem Modell nicht berücksichtigt. Es wird lediglich versucht, die Kontaktkraft sowie deren Angriffspunkt – also den Druckpunkt im Experiment – durch eine am Unterschenkel fixierte Abrollform abzubilden. Dieses Vorgehen ist motiviert durch das Ziel, Unterschenkel-, Knieexartikulations- und Oberschenkelprothesen zu entwickeln, die durch ihren Aufbau die Eigenschaften des menschlichen Beins und Fußes möglichst gut kopieren, um die Beweglichkeit und den Komfort für die Patienten zu maximieren [156, 157, 305].

⁴⁹ „Obwohl Peasgood *et al.*'s System zum ersten Mal *in silico* durch Simulation der Vorwärtsdynamik gezeigt hat, dass der Gang mit Prothese einen größeren metabolischen Energieverbrauch aufweist als der gesunde Gang, unterscheidet sich die vorhergesagte Kinetik von Peasgood *et al.*'s gesundem Modell signifikant von veröffentlichten Gelenkkinetiken des menschlichen Gangs, die mittels inverser Dynamik gefunden wurden [...]“ (Hervorhebungen im Original, Übersetzung des Verfassers).

⁵⁰ Englisch: rollover shapes oder roll-over shapes.

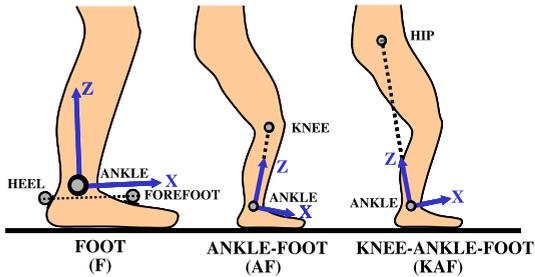


(a) Trajektorien von Sprunggelenk, Knie und Druckpunkt (Quelle: [152, Abb. 3]).

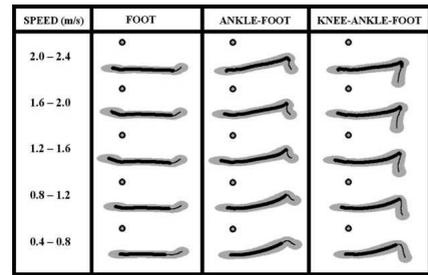
(b) Orientierung der Abrollform beim Gehen mit Bodenneigung (Quelle: [153, Abb. 9]).

Abbildung 1.11: (a) Gemessene Trajektorien von Sprunggelenk (Ankle), Knie (Knee) und Druckpunkt (CoP) des Standbeins; schwarze Datenpunkte in der ESP, weiße in der DSP. Darstellung (A) im Inertialsystem und (B) im unterschenkelfesten System. (b) Qualitative Näherung der Abrollform durch je einen Kreisbogen für Gehversuche mit Bodenneigung.

Allerdings bringt dieses Vorgehen auch einige Nachteile mit sich: die Abrollform ist sowohl im unterschenkelfesten Koordinatensystem (AF, siehe Abb. 1.12a), als auch in einem am virtuellen Bein – der Verbindungslinie von Sprunggelenk und Hüfte – befestigten Koordinatensystem (KAF, siehe Abb. 1.12a) nicht konstant, sondern abhängig von der Geschwindigkeit beim Gehen [152] (siehe Abb. 1.12b) und dem Neigungswinkel des Bodens [153] (siehe Abb. 1.13). Dies wird dadurch noch weiter verkompliziert, dass sich die Abrollform weder im Koordinatensystem AF, noch in KAF konstant ist, wenn der experimentelle Aufbau zu deren Ermittlung verändert wird. So ergibt sich bei nach oben geneigtem Boden nur eine geringe Änderung der Abrollform im Koordinatensystem AF, während diese in KAF stark variiert; bei nach unten geneigtem Boden tritt gerade der umgekehrte Fall auf [153]. Außerdem unterscheiden sich die Abrollformen beim Losgehen und Anhalten, also beim ersten und letzten Schritt, deutlich voneinander sowie von der Abrollform der stationären, periodischen Gehbewegung [240]. Weiterhin haben Schuhe, insbesondere solche mit hohen Absätzen, einen Einfluss auf die Abrollform in der ESP [151]. Tragen die Probanden Zusatzgewichte, so verändern sich die Abrollformen hingegen nicht wesentlich [154]. All diese Abhängigkeiten treten bei Prothesen mit festem Sprunggelenk nicht auf [150], weshalb diese Art von passiven Prothesen die Funktion des menschlichen Beins mit Fuß nur eingeschränkt nachbilden können [75]. Überdies unterscheiden sich die Abrollformen verschiedener aktueller Prothesen stark voneinander [74], was darauf hindeutet, dass noch andere Kriterien als die Abrollform für die Patienten ausschlaggebend sind. Der Einfluss kreisförmiger Abrollformen auf die menschliche Bewegung kann auch durch Schuhe mit einer entsprechend geformten, starren Sohle untersucht werden. Dabei zeigt sich, dass die Druckpunkttrajektorie im unterschenkelfesten Koordinatensystem AF praktisch unabhängig vom Radius der Sohle und der Höhe des Absatzes ist

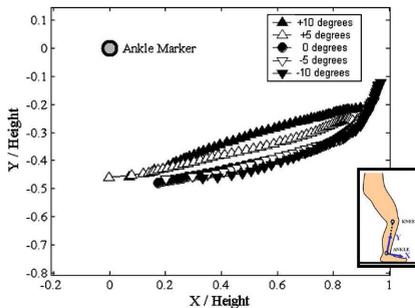


(a) Koordinatensysteme zur Darstellung und Auswertung der Abrollformen (Quelle: [152, Abb. 2]).

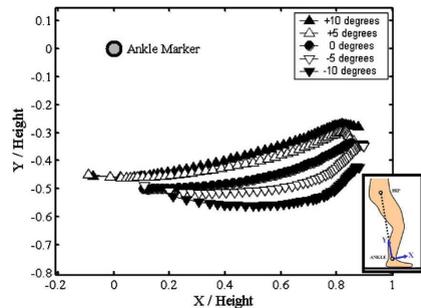


(b) Trajektorie des Druckpunkts in verschiedenen Koordinatensystemen (Quelle: [152, Abb. 4]).

Abbildung 1.12: (a) Drei mit dem Körper bewegte Koordinatensysteme zur Darstellung und Auswertung der Druckpunkttrajektorie. Links ein fußfestes Koordinatensystem (F), in der Mitte ein unterschenkelfestes Koordinatensystem (AF) und rechts ein Koordinatensystem (KAF), das am virtuellen Bein (Verbindungsline von Sprunggelenk und Hüfte) befestigt ist. (b) Darstellung von gemessenen Druckpunkttrajektorien bei verschiedenen Gehgeschwindigkeiten in diesen drei XZ-Koordinatensystemen. Darstellung der Mittelwerte in der ESP durch eine dicke Linie, in der DSP durch eine dünne Linie; Standardabweichung in grau.



(a) Trajektorie des Druckpunkts bei Boden-
neigung im Koordinatensystem AF (Quelle:
[153, Abb. 6]).



(b) Trajektorie des Druckpunkts bei Boden-
neigung im Koordinatensystem KAF (Quelle:
[153, Abb. 7]).

Abbildung 1.13: Trajektorien des Druckpunkts beim Gehen mit verschiedenen Neigungswinkeln des Bodens (a) im Koordinatensystem AF und (b) im Koordinatensystem KAF. Es sind nur die Datenpunkte in der ESP dargestellt.

[155]. Die Winkeländerung während eines Schritts ist jedoch stark vom Radius abhängig: je kleiner der Radius, desto kleiner die Änderung des Sprunggelenkwinkels beim Gehen. Aus dieser Beobachtung wurde die Empfehlung abgeleitet, solche Schuhe bei Arthrosepatienten einzusetzen, um das Sprunggelenk auf natürliche Art ruhigzustellen [106, 200]. Da dazu während des Gehens eine nicht-konstante Muskelanspannung notwendig ist, wird durch diese Maßnahme das Gelenk ruhiggestellt, ohne dass der Körper die beteiligten Muskeln abbaut. Neben dem Einfluss auf die Bewegung des Sprunggelenks hat der Radius bei diesen Experimenten auch einen Einfluss auf den

metabolischen Energieverbrauch beim Gehen [4]. Dieser hat ein Minimum, wenn der Radius ca. 30 % der Beinlänge beträgt.

Dieses Konzept der Abrollformen, das die Kinematik des Gesamtsystems Fuß-Unterschenkel durch einen Starrkörper mit abrollender Kreisgeometrie beschreibt, wurde nicht nur in den oben genannten Studien experimentell untersucht, sondern auch zur prädiktiven Simulation des menschlichen Gangs mittels Vorwärtsdynamik eingesetzt. SRINIVASAN et al. stellen in [324, 325] ein ebenes Starrkörpermodell für den Menschen vor, das zur Beschreibung der Interaktion zwischen Unterschenkel, Fuß und Boden eine Abrollform verwendet. Das Ziel dabei ist, die Bewegung von Patienten mit verschiedenen Prothesen bzw. mit verschiedenen Parametern einer Prothese zu simulieren und so ein Werkzeug zu entwickeln, mit dem eine individuelle Anpassung für jeden einzelnen Patienten vorgenommen werden kann.

Der bisher vorgestellte Ansatz für das Konzept der Abrollformen hat jedoch ein wesentliches konzeptionelles Problem, das bei der Betrachtung von Abb. 1.11a(B) und 1.12b ersichtlich wird. Die Trajektorie des Druckpunkts im unterschenkelfesten Koordinatensystem AF kann nur dann durch das Abrollen eines starren Körpers erzeugt werden, wenn die DSP außer Acht gelassen wird. Bezieht man die DSP mit in die Betrachtung ein, so kann die Trajektorie des Druckpunkts nicht durch das Abrollen eines starren Körpers erzeugt werden. Dies liegt daran, dass sich der Mensch am Ende des Schritts mit dem Sprunggelenk stark abdrückt. Damit wird sowohl die Schwingung des Schwungbeins am Beginn der DSP initiiert, als auch der Gesamtschwerpunkt nach oben beschleunigt [383]. Dieses Abdrücken erfordert eine relativ große Änderung des Gelenkwinkels, wodurch sich der Fuß dreht während er über das Großzehengrundgelenk abrollt. Dies führt dazu, dass der Unterschenkel nach oben gedrückt wird; der zunehmende Abstand zwischen Knie und Großzehengrundgelenk entspricht genau der Trajektorie des Druckpunkts in der DSP, die in Abb. 1.11a durch weiße Datenpunkte dargestellt ist. Die Bewegung des Sprunggelenks ist also wesentlich für den (gesunden) menschlichen Gang, weshalb die Abrollformen in dieser Form nicht sinnvoll zu dessen Beschreibung genutzt werden können. Auch die Sinnhaftigkeit dieses Konzepts für zweibeinige Roboter ist zumindest fraglich,⁵¹ da ohne bewegliches Sprunggelenk kein Abdrücken am Ende des Schritts möglich ist.

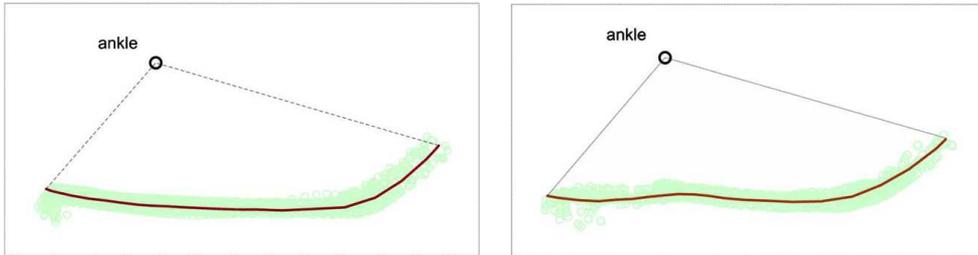
Die vorangegangenen Überlegungen führen in logischer Konsequenz darauf, nicht die Kombination aus Unterschenkel und Fuß durch einen abrollenden Starrkörper zu modellieren, sondern nur den Fuß. Dadurch ist einerseits ein Abdrücken durch das Sprunggelenk möglich, während gleichzeitig eine glatte Abrollbewegung ohne weitere Stöße beim Übergang des Druckpunkts von der Ferse zum Großzehengrunde-

⁵¹ Die Frage der Sinnhaftigkeit kann nicht pauschal beantwortet werden, da bei zweibeinigen Robotern noch weitere Faktoren in die Überlegung einbezogen werden müssen – beispielsweise Masse, Bauraum und Kosten für Aktoren im Sprunggelenk. Es ist daher eine Einzelfallentscheidung notwendig.

lenk stattfindet. Die Zwangsbedingungen für das Abrollen eines ebenen Starrkörpers sind holonom⁵² (siehe Abschnitt 2.2), die horizontale und vertikale Position des Sprunggelenks kann somit als Funktion des Winkels dargestellt werden. In [292] wird dies ausgenutzt, indem trigonometrische Polynome 3. Grades als Funktionen des gemessenen Winkels an Messdaten für die horizontale und vertikale Position des Sprunggelenks während des Fuß-Boden-Kontakts angepasst werden. Damit wird ein effizientes Modell für prädiktive Simulationen der menschlichen Bewegung erstellt, das zur Erzeugung von Bewegungen durch die Optimierung eines Energiefunktionals genutzt wird. Das Vorgehen ist jedoch formal nicht korrekt, da zwar zwei Funktionen zur Beschreibung der horizontalen bzw. vertikalen Lage des Sprunggelenks eingeführt werden, diese sind jedoch nicht konsistent zur Annahme eines abrollenden konvexen Starrkörpers. Eine konsistente Beschreibung nicht-kreisförmiger Abrollformen wird in [307] vorgestellt. Für ein einfaches Modell mit zwei starren Beinen ohne Knie wird die Geometrie, über die das Standbein abrollt, durch eine ebene Bézierkurve zweiten Grades beschrieben. Nach weiteren (schwachen) Einschränkungen kann diese Geometrie durch drei Parameter eindeutig beschrieben werden. Das Problem bei diesem Vorgehen ist jedoch, dass der Kontakt zwischen der Bézierkurve und dem Boden durch eine implizite Gleichung gegeben ist, die bei der Simulation parallel zur Zeitintegration gelöst werden muss. Dadurch steigen die Komplexität und die Rechenzeiten im Vergleich zu kreisförmigen Abrollformen deutlich. REN et al. präsentieren in [293] einen weiteren Vorschlag zur Beschreibung nicht-kreisförmiger Abrollformen. Dabei werden die Trajektorien des Druckpunkts aus Experimenten mit mehreren Probanden in ein fußfestes Koordinatensystem transformiert, was in Abb. 1.14 dargestellt ist. Es wird dann eine Abrollform an diese Trajektorie angepasst, die in einem fußfesten Polarkoordinatensystem den Radius durch eine winkelabhängige Funktion beschreibt. Von REN et al. wird ein Ansatz in Form eines Polynoms 5. Grades gewählt. Dabei werden jedoch keine Bedingungen an die Konvexität der angepassten Lösung gestellt, weshalb sich neben plausiblen (konvexen) Verläufen wie in Abb. 1.14a auch konkave Lösungen wie in Abb. 1.14b ergeben. Diese konkaven Lösungen sind wiederum inkonsistent, da ein konkaver Starrkörper beim Abrollen nicht die gemessene Trajektorie des Druckpunkts reproduziert. Es muss vielmehr ein Stoß stattfinden, wenn der konkave Bereich dem Boden am nächsten kommt, was durch den Ansatz eigentlich ausgeschlossen werden soll.

Eine mechanisch konsistente Abrollform zur Beschreibung des Fußes als konvexer Starrkörper wird in [342] für ein dreidimensionales Modell vorgeschlagen. Dabei wird eine Kreisform an die Trajektorie des Druckpunkts in der Sagittalebene angepasst.

⁵² Die physikalische Bedingung für Rollen ist, dass die Geschwindigkeit im Kontaktpunkt verschwindet, damit kein Rutschen stattfindet. Bei einem ebenen Starrkörper existiert für die resultierenden Gleichungen eine Stammfunktion; es können also eindeutige Beziehungen auf Lageebene angegeben werden.



(a) Trajektorien des Druckpunkts mit konvexer Abrollform (Quelle: [293, Abb. 2b]).

(b) Trajektorien des Druckpunkts mit konkaver Abrollform (Quelle: [293, Abb. 3b]).

Abbildung 1.14: Trajektorien des Druckpunkts zweier Probanden (grün), dargestellt im fußfesten Koordinatensystem. An die Trajektorien wird jeweils eine Abrollform (rot) angepasst; die Beschreibung erfolgt in fußfesten Polarkoordinaten, der Ansatz ist ein Polynom 5. Grades für den Radius als Funktion des Winkels. Es ergibt sich für den Probanden in (a) eine konvexe Abrollform, für den Probanden in (b) eine konkave Abrollform.

Der Fuß hat in diesem Modell jedoch keine seitliche Ausdehnung, ist also eine dünne Scheibe, so dass der Kontaktpunkt auf einer Geraden liegt, wenn der Fuß beim Abrollen keine Bohrbewegung ausführt. Da dies die räumliche Trajektorie des Druckpunkts beim menschlichen Gang nicht abbilden kann, ist das Modell zwar mechanisch konsistent, liefert jedoch nur mäßige Ergebnisse. Weitere konsistente Abrollformen ergeben sich aus der Verwendung der oben eingeführten Kontaktscheiben für ein ebenes Modell in [50, 51]. Der Kontaktpunkt zwischen Fuß und Boden wird durch die Verkippung einer virtuellen Scheibe festgelegt, wobei die Rollbedingung, also verschwindende Geschwindigkeit im tatsächlichen Kontaktpunkt des Starrkörpers, eingehalten wird. Die Form, die sich dabei ergibt, ist keine Kreisform, wobei sich trotzdem eine analytische Lösung für die Lage des Kontaktpunkts relativ zum Sprunggelenk in Abhängigkeit vom Winkel des Fußes ergibt. Es muss daher bei der Simulation keine implizite Gleichung zur Ermittlung des Kontaktpunkts gelöst werden.

Das Konzept der Abrollformen ist bisher hauptsächlich im Bereich der Prothesenentwicklung verbreitet, findet jedoch auch Anwendung in prädiktiven Simulationsmodellen für den menschlichen Gang. Der Vorteil gegenüber dem Modell eines flachen Fußes ist, dass während dem Abrollen des Fußes keine weiteren Stöße stattfinden. Dadurch ist es auch nicht erforderlich, unterschiedliche Phasen je nach Kontaktzustand des Fußes zu unterscheiden, wie am Ende des vorigen Abschnitts diskutiert wurde. Die Komplexität des Modells ist außerdem deutlich geringer als bei den Starrkörpermodellen mit nichtlinearen Feder-Dämpfer-Elementen oder volumetrischen Kontaktmodellen. Dies gilt insbesondere dann, wenn die Abrollform mathematisch so beschrieben wird, dass der Kontaktpunkt explizit berechnet werden kann. Dies ist bisher nur für spezielle Geometrien möglich: kreisförmige Abrollformen oder die Lösung mittels der Kontaktscheiben. Ein Grund, warum sich das Konzept bisher nicht

bei Robotikanwendungen etabliert hat, liegt – nach Meinung des Verfassers – darin, dass keine effiziente Methode zur Beschreibung beliebiger zweidimensionaler konvexer Geometrien mit expliziten Lösungen für den Rollkontakt mit einer Geraden existiert. Eine solche Beschreibung eröffnet die Möglichkeit, HZD-Regler für Robotersysteme zu entwerfen, die von einem beliebig flachen, aber dennoch streng konvexen Fuß ausgehen, womit sich das in Abb. 1.5 (S. 14) dargestellte Kombinationsproblem beim Regelungsentwurf elegant lösen lässt. Dieselben Vorteile ergeben sich bei der Verwendung eines solchen Modells für numerische Optimierungsprobleme wie sie im Rahmen dieser Arbeit zum Einsatz kommen. Außerdem ist zu erwarten, dass durch eine gute Abstimmung einer solchen Abrollform auf die weiteren Parameter eines zweibeinigen Roboters eine sehr energieeffiziente Bewegung ähnlich der des Menschen möglich ist [338]. Ein wesentliches Ziel der vorliegenden Arbeit ist daher die Entwicklung einer Methode zum Erzeugen beliebig komplizierter, ebener, konvexer Abrollformen, die dennoch eine explizite Lösung für die Kinematik beim Abrollen besitzen. Zur Einordnung dieser Fragestellung wird daher zunächst ein Überblick über den Stand der Forschung im Bereich der Kontaktdetektion und -kinematik in Mehrkörpersystemen gegeben.

Kontaktdetektion und -kinematik

Die Beschreibung von Kontakten in mechanischen Systemen besteht im Wesentlichen aus zwei Schritten: im ersten Schritt müssen alle Kontakte detektiert werden, im zweiten Schritt werden die Interaktionen in den Kontakten in Form von Druckverteilungen oder konzentrierten Kräften modelliert [179, 369]. Beide Schritte können im Prinzip getrennt voneinander betrachtet werden, das Modell der beteiligten Körper hängt jedoch wesentlich davon ab, wie die Interaktion im Kontakt modelliert wird. So ergibt sich beispielsweise bei der Modellierung und Simulation des FEM-Modells für den menschlichen Fuß in Abb. 1.6a (S. 19) ein deutlich komplexeres Kontaktdetektionsproblem als beim Roboterfuß in Abb. 1.6b, dessen Oberfläche durch eine relativ überschaubare Anzahl von Polygonen beschrieben werden kann. Eine zuverlässige und genaue Kontaktdetektion ist jedoch eine unbedingte Voraussetzung für sinnvolle Ergebnisse [104], unabhängig davon, wie die Interaktionen im Kontakt anschließend modelliert werden.

Das Problem der Kontaktdetektion im dreidimensionalen Raum ist zunächst rein geometrischer Natur und hängt davon ab, wie die Oberflächen der (potentiellen) Kontaktpartner beschrieben werden. Hier wird zunächst zwischen Vernetzungen durch Polygone und nicht-polygonalen Geometrien unterschieden [211, 220]. Letztere unterteilen sich nochmals in *constructive solid geometry*⁵³, und die Beschreibung der

⁵³ Der Körper wird aus einfachen Geometrien wie Quadern, Prismen, Zylindern und Kegeln durch Verschmelzen und Verschneiden aufgebaut.

Oberfläche durch parametrische oder implizite Funktionen. Für sehr komplexe Geometrien wie das FEM-Modell des menschlichen Fußes werden nicht immer alle möglichen Kontaktpaare berechnet, da dieses Problem exponentiell mit der Anzahl möglicher Kontaktpunkte und -flächen steigt. Stattdessen werden einhüllende Geometrien mit einer einfacheren mathematischen Beschreibung wie Kugeln, Ellipsoide oder konvexe Polyeder genutzt, um zu entscheiden, welche Elemente der vernetzten Oberfläche überhaupt nah genug für einen möglichen Kontakt sind [93, 213].

Mögliche Kontaktpunkte auf den beiden Oberflächen zweier potentieller Kontaktpartner werden dabei durch das Kriterium der *gemeinsamen Normalen*⁵⁴ definiert. Bei hinreichender Glattheit sind die äußeren Normalenvektoren im Kontaktpunkt auf beiden Oberflächen parallel und entgegengerichtet, was eine implizite Gleichung zur Bestimmung dieser Punkte liefert. Dieses Kriterium kann für Ebenen und Kugeln einfach ausgewertet werden, für kompliziertere Geometrien wie Superellipsoide [357] oder Quadrik- und Superquadrik-Oberflächen [214] ist jedoch keine geschlossene Lösung bekannt, weshalb die Kontaktdetektion durch eine iterative Lösung dieser impliziten Gleichung erfolgen muss. Dies ist auch der Grund, warum viele der vorgestellten Fußmodelle auf Polygonen (stückweise eben), Kreisen und Kugeln aufbauen. Für diese einfachen Geometrien können die möglichen Kontaktpunkte explizit berechnet werden, was zu kürzeren Rechenzeiten bei der Simulation und zu vorhersagbaren Rechenzeiten bei Reglern für Echtzeitanwendungen führt. Die Lösung für kompliziertere Geometrien ist überraschend schwierig: für das zweidimensionale Problem der Kontaktdetektion zwischen zwei beliebig orientierten Ellipsen wurde erst 2007 eine geschlossene Lösung vorgestellt [387], dasselbe Problem für dreidimensionale Ellipsoide ist bisher noch nicht geschlossen gelöst [388].⁵⁵

Zur Modellierung der Interaktionen im Kontakt existiert eine Vielzahl an Modellen, bei denen verschiedene Annahmen über die Nachgiebigkeit der beteiligten Körper im Kontaktbereich getroffen werden. Die einfachste Annahme sind ideal starre Körper, die sich nicht durchdringen können, weshalb entsprechende Zwangskräfte an den Kontaktpunkten eingeführt werden. Bei Stoßvorgängen sind hier jedoch weitere Annahmen notwendig, beispielsweise das Einführen einer Stoßzahl, um physikalisch sinnvolle Modelle zu erstellen [25]. Dies kann umgangen werden, wenn eine Nachgiebigkeit im Kontakt modelliert wird [219], wie beispielsweise im bereits erwähnten Hunt-Crossley-Kontaktmodell [173] oder bei den volumetrischen Kontaktmodellen. Im Rahmen dieser Arbeit wird die Entwicklung von Abrollformen für zweidimensionale Fußmodelle

⁵⁴ Englisch: common normal.

⁵⁵ Bei den Oberflächen von Ellipsoiden handelt es sich um Flächen zweiter Ordnung, so dass das Kontaktproblem auf eine Gleichung 4. Grades führt. Für Gleichungen 4. Grades existiert eine geschlossene Lösung durch die Formel von Ferrari [387], deren Lösung jedoch sehr aufwendig ist und einige Fallunterscheidungen erfordert, weshalb in der Praxis eine iterative Lösung bevorzugt wird.

angestrebt, die während dem Fuß-Boden-Kontakt als Starrkörper auf dem Boden abrollen. Das Aufsetzen des Fußes wird wie bei vielen Modellen aus Abschnitt 1.2.1 durch einen plastischen Stoß modelliert. Das bedeutet, dass die Geschwindigkeit im Kontaktpunkt nach dem Aufsetzen verschwindet und der Abrollvorgang beginnt. Zur effizienten Implementierung wird eine Beschreibung der Abrollformen angestrebt, die eine explizite Lösung für die Kinematik des (potentiellen) Kontaktpunktes liefert, so dass sowohl die Kontaktdetektion, als auch der Abrollvorgang damit beschrieben werden können. Aus der Literatur ist bekannt, dass bei dieser Art von Starrkörpermodellen inkonsistente Stoßvorgänge möglich sind – beispielsweise das Painlevé-Paradoxon [326] – und wesentliche Effekte wie die Wellenausbreitung innerhalb des Körpers vernachlässigt werden [327]. Allerdings werden dieselben Annahmen seit Jahrzehnten erfolgreich bei den vorgestellten Literatur-Modellen verwendet, weshalb davon ausgegangen wird, dass die Annahmen für das geplante Modell sinnvoll sind.

1.2.3 Optimierung

In den beiden vorigen Abschnitten wird auf die Beschreibung, Modellierung und Stabilisierung von zweibeinigen Gehbewegungen eingegangen. In der Biomechanik liegt hierbei der Fokus auf der Messung und Beschreibung der menschlichen Bewegung, während in der Robotik die Erzeugung der Bewegung eine essentielle Aufgabenstellung ist. Hierzu gibt es verschiedene Strategien, unter anderem die bereits in Abschnitt 1.2.1 (siehe S. 11f) diskutierten Heuristiken, zentralen Mustergeneratoren und Reflexschleifen, welche die Bewegung zugleich erzeugen und stabilisieren. Die Nachteile dieser Methoden sind deren geringe Flexibilität und die fehlende Systematik beim Entwurf, der auf Versuch und Irrtum basiert. Regler auf Basis des ZMP und 3D-LIPM (siehe S. 16ff) sowie Weiterentwicklungen dieser Konzepte haben neben der Stabilisierung auch die Erzeugung der Bewegung zum Ziel und werden ebenfalls zu den Heuristiken gezählt. Eine weitere Strategie besteht in der Aufzeichnung und Auswertung von menschlichen Bewegungen und der anschließenden Identifikation charakteristischer Zusammenhänge, die dann als Sollbewegungen eines Roboters durch eine Regelung stabilisiert werden, siehe z. B. [17, 172, 178, 280, 384].

Eine sehr häufig verwendete Strategie zur Erzeugung von Bewegungen besteht in der Ermittlung optimaler Bewegungen mittels numerischer Optimierungsverfahren. Dabei wird eine zulässige Bewegung gesucht, die durch den zeitlichen Verlauf der (generalisierten) Koordinaten des Modells beschrieben wird und die ein Zielfunktional f minimiert oder maximiert. Das Optimalitätskriterium zur Definition des Zielfunktional kann – wie in der vorliegenden Arbeit – ein energetisches Kriterium sein. In der Literatur werden jedoch auch andere Kriterien vorgeschlagen und verwendet, beispielsweise die Maximierung der Geschwindigkeit oder der Stabilität [198]. Die Forderung nach

zulässigen Bewegungen führt auf die Formulierung von Nebenbedingungen, durch die sowohl physikalische Bedingungen berücksichtigt werden, z. B. das Einhalten der Haftbedingung, als auch weitere Anforderungen wie eine bestimmte Fußplatzierung oder die Forderung von Periodizität. Der Lösungsraum dieses allgemeinen Optimierungsproblems, also der Funktionenraum, in dem die Zeitverläufe der Koordinaten beschrieben werden, ist unendlichdimensional. Zur Lösung wird daher zunächst eine Diskretisierung vorgenommen (siehe unten), womit sich eine endlich-dimensionale Näherung der Bewegung und des Optimierungsproblems ergibt. Das diskretisierte Problem kann daher durch eine endliche Anzahl an Variablen $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_N]^T$ und die Gleichheitsnebenbedingungen⁵⁶ $\mathbf{c}_g(\mathbf{x})$ und die Ungleichheitsnebenbedingungen⁵⁷ $\mathbf{c}_u(\mathbf{x})$ beschrieben werden, womit sich ein nichtlineares Optimierungsproblem – auch nichtlineares Programm (NLP) genannt – der Form

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad \text{u. d. N.} \quad \mathbf{c}_g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}_u(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \quad (1.1)$$

ergibt. Jedes Maximierungsproblem kann durch das Zielfunktional $f^*(\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x})$ auf ein solches Minimierungsproblem transformiert werden.

Bei der Diskretisierung der Bewegung und der daraus folgenden Formulierung des Optimierungsproblems gibt es in der Literatur im Wesentlichen zwei Ansätze. Zum einen die Unterteilung der Bewegung in viele kurze Intervalle, wobei die Zeitverläufe durch ein *Schießverfahren* [96, 198] oder mittels niedrigdimensionaler *Kollokationsansätze* beschrieben werden, z. B. durch stückweise lineare Ansatzfunktionen [199] oder durch Splines [30, 31]. Eine Übersicht zu Kollokationsverfahren und deren Anwendung wird in [191] gegeben. Dieses Vorgehen führt zu einer großen Anzahl an Optimierungsvariablen, also einer hohen Dimension von \mathbf{x} , überdies zu dünnbesetzten Gradienten mit ausgeprägter (Band-)Struktur, was bei der Lösung des NLP mittels gradientenbasierter Verfahren vorteilhaft ausgenutzt werden kann [159]. Der zweite Ansatz besteht in der Beschreibung des gesamten Zeitintervalls jeder Bewegungsphase durch ein Kollokationsverfahren mit vergleichsweise hochdimensionalen Ansatzfunktionen. Als Ansatzfunktionen werden hierbei meist Polynome verwendet [54, 58, 65, 358], weniger verbreitet sind Fourierpolynome [300] oder B-Splines [229]. Dieses Vorgehen resultiert in vergleichsweise niedrigdimensionalen Optimierungsproblemen, deren Gradienten jedoch wenig oder keine Struktur aufweisen.

Je nach Vorgehen bei der Diskretisierung der Bewegung und der Formulierung des NLP resultiert also entweder ein hochdimensionales⁵⁸ Optimierungsproblem mit vorteilhaft

⁵⁶ Englisch: equality constraints.

⁵⁷ Englisch: inequality constraints.

⁵⁸ In der englischsprachigen Literatur wird die Problemgröße je nach Anzahl an Optimierungsvariablen $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_N]^T$ in die Größen *small-size* ($N \approx 10^0 \dots 10^2$), *medium-size* ($N \approx 10^3 \dots 10^4$) und *large-scale* ($N \geq 10^5$) eingeteilt. Im Kontext der hier auftretenden Optimierungsprobleme

ter Struktur der Gradienten oder ein niedrigdimensionales Optimierungsproblem ohne diese Struktur. Bei der numerischen Lösung eines Optimierungsproblems ergeben sich in der Regel kürzere Rechenzeiten bei geringerer Dimension. Allerdings können bei gradientenbasierten Verfahren deutliche Verbesserungen der Rechenzeit durch das Ausnutzen einer speziellen Struktur dünnbesetzter Gradienten erzielt werden. Es ist daher keine generelle Aussage darüber möglich, welcher Ansatz bei der Erzeugung einer bestimmten Bewegung die besten Rechenzeiten und Ergebnisse liefert. Die Struktur der Gradienten bringt allerdings nur Vorteile, wenn gradientenbasierte Verfahren zur Lösung verwendet werden, was bereits eine deutliche Einschränkung darstellt. In diesem Fall werden speziell an das Problem angepasste Algorithmen benötigt, um von dieser Struktur Gebrauch zu machen [37, 159].

Es gibt eine Vielzahl von Verfahren und Methoden zur Lösung von NLP nach Gl. (1.1), die sich zunächst in *gradientenfreie* und *gradientenbasierte* Verfahren unterteilen lassen. Auf die Eigenschaften, Ausprägungen, Vor- und Nachteile dieser Verfahren wird im Folgenden kurz eingegangen. Da in der vorliegenden Arbeit ein gradientenbasiertes Verfahren Anwendung findet, werden diese detaillierter behandelt.

Gradientenfreie Optimierungsverfahren

Gradientenfreie Optimierungsverfahren wurden zunächst für Probleme ohne Nebenbedingungen entwickelt, weshalb es in vielen Fällen nicht ohne Weiteres möglich ist, diese Methoden zur Lösung des NLP nach Gl. (1.1) zu verwenden. Bevor auf mögliche Erweiterungen zur Berücksichtigung von Nebenbedingungen eingegangen wird, sollen daher zunächst die verschiedenen Ausprägungen und deren zugrundeliegende Ideen diskutiert werden.

Allen gradientenfreien Verfahren ist gemein, dass sie eine Iterationsvorschrift zur Minimierung eines Zielfunktionals $f(\mathbf{x})$ beschreiben, die nur auf Funktionsauswertungen basiert und keine Berechnung von Ableitungen erfordert. Dabei gibt es bereits seit den 1960er Jahren Heuristiken wie das Direct-Search-Verfahren⁵⁹ mit dem Sonderfall des Pattern-Search-Verfahrens⁶⁰ von Hooke und Jeeves [169] sowie das Simplex-Verfahren von Nelder und Mead [253]. Hierbei wird das Zielfunktional an einer fixen Anzahl von Punkten ausgewertet, aus denen ein neuer Punkt zur Auswertung des Zielfunktionals ermittelt wird. Ist dieser nicht gut genug, wird er verworfen und ein weiterer Punkt gewählt. Andernfalls wird der schlechteste Punkt durch den neuen ersetzt und die Iteration fortgesetzt. Ein Nachteil dieser Verfahren ist, dass sie nur bei niedrigdimensionalen Problemen effektiv sind [258, S. 221]: „Derivative-free optimization

bedeutet *hochdimensional* $N \geq 10^4$, womit medium-size- und large-scale-Algorithmen zur Lösung in Frage kommen.

⁵⁹ Deutsch: direktes Suchverfahren.

⁶⁰ Deutsch: Mustersuchverfahren.

methods are not as well developed as gradient-based methods; current algorithms are effective only for small problems.“⁶¹ Dieser Nachteil wird in jüngerer Vergangenheit durch neue Vorschläge wie den Adaptive-Pattern-Search-Algorithmus⁶² [110], den NEWUOA-Algorithmus [277] und die darauf basierende Erweiterung BOBYQA [278] adressiert, die gezielt für hochdimensionale Probleme entwickelt sind, wobei bei letzterem auch Nebenbedingungen in Form von Schranken berücksichtigt werden können. Eine Übersicht zu diesen und anderen Verfahren wird in [299] gegeben.

Bei anderen Ansätzen zur gradientenfreien Optimierung werden physikalische oder biologische Systeme abstrahiert und daraus sogenannte *Metaheuristiken*⁶³ abgeleitet. Beim Simulated Annealing⁶⁴ [197] wird das langsame Abkühlen einer Schmelze simuliert, die einen Zustand minimaler Energie anstrebt. Wird der Vorgang langsam genug durchgeführt, so kann der Algorithmus lokale Optima wieder verlassen und konvergiert mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zu einem Optimum, das dem globalen Optimum sehr nahekommt. Allerdings gibt es dafür keinen strikten Beweis und folglich auch keine Konvergenzgarantie [299, S. 1256]: „[...] there is no guarantee that a good solution will be obtained in a finite number of iterations [...]“⁶⁵. Der Tabu-Search-Algorithmus [119, 120] und die Weiterentwicklung Tabu Search* [122] vermeidet bereits in vorherigen Iterationen als suboptimal identifizierte Gebiete durch eine Art „Langzeitgedächtnis“ in Form einer Tabu-Liste. Evolutionäre [290] und genetische Algorithmen [167] imitieren die Mutation und Rekombination bei der biologischen Fortpflanzung, wobei eine schier unüberschaubare Anzahl an Abwandlungen und Varianten dieser Ansätze veröffentlicht sind. Stellvertretend sei an dieser Stelle auf den weitverbreiteten Differential-Evolution-Algorithmus⁶⁶ von STORN und PRICE [328] verwiesen, wobei in [78, 79] eine aktuelle Übersicht über die Entwicklung bis zum Jahr 2016 gegeben wird. Ein konzeptionell ähnlicher Ansatz, allerdings inspiriert durch Harmonien in der Musik, wird bei Harmony Search⁶⁷ [111] umgesetzt.

Ein weitverbreiteter Ansatz bei der Entwicklung von Metaheuristiken basiert auf der Imitation der Interaktion von Organismen in biologischen Systemen. Am bekanntesten ist hier die früh vorgeschlagene Particle Swarm Optimization⁶⁸ von KENNEDY

⁶¹ „Ableitungsfreie Optimierungsmethoden sind nicht so gut entwickelt wie gradientenbasierte Methoden; aktuelle Algorithmen sind nur bei kleinen Problemen effektiv.“ (Übersetzung des Verfassers).

⁶² Deutsch: adaptives Mustersuchverfahren.

⁶³ Als Metaheuristiken werden Heuristiken bezeichnet, die nicht für ein spezifisches Problem entwickelt werden, sondern auf möglichst allgemeine Probleme angewendet werden können. Allerdings müssen bei solchen Verfahren die jeweiligen Parameter trotzdem problemspezifisch gewählt werden.

⁶⁴ Deutsch: simuliertes Ausglühen.

⁶⁵ „[...] es gibt keine Garantie, dass nach einer endlichen Anzahl von Iterationen eine gute Lösung erreicht wird [...]“ (Übersetzung des Verfassers).

⁶⁶ Deutsch: differentieller Evolutionsalgorithmus.

⁶⁷ Deutsch: Harmoniesuche.

⁶⁸ Deutsch: Partikelschwarmoptimierung.

und EBERHART [192, 193], aus dem Methoden wie Honey-Bees Mating Optimization⁶⁹ [144], Ant Colony Optimization⁷⁰ [86], Cuckoo Search⁷¹ [374] und der Whale-Optimization-Algorithmus⁷² [243] entstanden sind. Diese Liste ist bei Weitem nicht vollständig sondern auf Beispiele beschränkt, die in der Literatur Verbreitung gefunden haben, im Falle von Cuckoo Search bessere bzw. schnellere Ergebnisse liefern als Particle Swarm Optimization [376] oder vor kurzem veröffentlicht wurden wie der Whale-Optimization-Algorithmus.

Zur Berücksichtigung von Nebenbedingungen bei diesen Verfahren hat sich die Verwendung von Straffunktionen⁷³ etabliert, wobei die Abweichungen von den Nebenbedingungen mit einem Strafparameter multipliziert und zum Zielfunktional addiert werden⁷⁴ [26, 66, 239, 266, 313]. Die Strafparameter haben dabei jedoch großen Einfluss auf die Konvergenz der Verfahren, weshalb bei der Verwendung von Metaheuristiken für Probleme mit Nebenbedingungen eine noch spezifischere Anpassung an das jeweilige Problem erforderlich ist, um gute Ergebnisse zu erzielen. Für einen Überblick zu Optimierungsverfahren auf Basis von Metaheuristiken sei auf [121, 299, 375, 377, 378] verwiesen, wobei auch diese Auswahl an Übersichtsarbeiten und Lehrbüchern nicht alle Algorithmen und aktuellen Entwicklungen auf diesem weiten Gebiet umfasst. Eine weitere aktuelle Entwicklung im Bereich der heuristischen Optimierungsverfahren sind die Hyperheuristiken [44], bei denen das Ziel die automatische Auswahl und Anpassung von Metaheuristiken an spezifische Probleme ist.

Ein Vorteil von gradientenfreien Optimierungsverfahren ist, dass mit diesen Methoden auch NP-Probleme, z. B. gemischt-ganzzahlige Programme⁷⁵, gelöst und sehr gute Ergebnisse berechnet werden können. Sie sind besonders zur schnellen Berechnung von spezifischen Lösungen für konkrete Optimierungsprobleme geeignet, auf deren Basis Management- oder Ingenieursentscheidungen getroffen werden sollen. Allerdings ist die gefundene Lösung stark von den – meist zufällig vorgegebenen – Anfangsbedingungen abhängig, so dass sich bei der Durchführung mehrerer Optimierungsläufe für dasselbe Problem unterschiedliche Lösungen \mathbf{x}^* mit vergleichbaren Ergebnissen $f(\mathbf{x}^*)$ ergeben. In der vorliegenden Arbeit soll der Einfluss der Fußgeometrie auf die Energieeffizienz beim zweibeinigen Gehen untersucht werden, wobei energieeffiziente Bewegungen mittels numerischer Optimierung erzeugt werden. In diesem Zusammenhang ist die nicht

⁶⁹ Deutsch: Honigbienen-Paarungs-Optimierung.

⁷⁰ Deutsch: Ameisenstaat-Optimierung.

⁷¹ Deutsch: Kuckuckssuche.

⁷² Deutsch: Wal-Optimierungsalgorithmus.

⁷³ Englisch: penalty function.

⁷⁴ Eine weitere Möglichkeit ist die Verwendung der *erweiterten Lagrange-Methode*, bei dem zwei Strafparameter eingeführt werden, von denen einer in jedem Schritt modifiziert wird, um die Nebenbedingungen nach einer ausreichenden Anzahl an Iterationen exakt zu erfüllen, siehe z. B. [313].

⁷⁵ Bei gemischt-ganzzahligen Programmen (englisch: mixed-integer program, MIP) beinhaltet \mathbf{x} sowohl kontinuierliche als auch diskrete (ganzzahlige) Variablen.

gegebene Reproduzierbarkeit der Optimierungsergebnisse und das mögliche Springen zwischen verschiedenen Lösungen mit vergleichbarer Effizienz problematisch, da allein aus dem Ergebnis nicht ersichtlich ist, ob sich eine Veränderung der Energieeffizienz aufgrund der Fußgeometrie oder aufgrund des Optimierungsverfahrens ergibt. Es werden daher in der vorliegenden Arbeit gradientenbasierte Optimierungsverfahren genutzt, auf die im Folgenden eingegangen wird.

Gradientenbasierte Optimierungsverfahren für NLP

Bei gradientenbasierten Optimierungsverfahren wird nicht nur der Wert des Zielfunktional und der Nebenbedingungen ausgewertet, sondern auch deren Gradienten, womit bei vielen Problemen eine deutlich schnellere Konvergenz erreicht werden kann als bei den im vorigen Abschnitt diskutierten gradientenfreien Verfahren. Eine vollständige Zusammenfassung aller Grundlagen und zugehörigen Beweise übersteigt den Rahmen der vorliegenden Arbeit bei Weitem, weshalb hierfür auf die entsprechende Literatur [118, 182, 258] verwiesen sei. Im Folgenden werden vielmehr die wesentlichen Ideen und Konzepte gradientenbasierter Optimierungsverfahren für NLP zusammengefasst, auf deren Basis in Kapitel 6 ein Algorithmus zur Erzeugung optimaler zweibeiniger Gehbewegungen entwickelt wird.

Im Folgenden wird angenommen, dass sowohl das Zielfunktional als auch alle Nebenbedingungen stetig differenzierbar sind, also dass die Gradienten im gesamten Definitionsbereich $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$ existieren und eindeutig sind. Weiterhin wird nach Gl. (1.1) von einem Minimierungsproblem ausgegangen. Zur Illustration der Grundidee bei der Lösung des NLP wird zunächst der einfachere Fall eines nichtlinearen Optimierungsproblems ohne Nebenbedingungen betrachtet. Bei diesem ist unter den obigen Voraussetzungen die notwendige Bedingung für ein Minimum

$$\mathbf{x}^* = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} f(\mathbf{x}) ,$$

dass an dieser Stelle der Gradient

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

verschwindet. Die Minimierung des (nichtlinearen) Zielfunktional $f(\mathbf{x})$ kann also auf eine Nullstellensuche für den Gradienten $\nabla f(\mathbf{x})$ zurückgeführt werden.⁷⁶

⁷⁶ Mittels des Gradienten kann das Zielfunktional auch dadurch minimiert werden, dass in Richtung des negativen Gradienten, also in der Richtung des steilsten Abstiegs ein Iterationsschritt ermittelt wird, der den Wert des Zielfunktional verkleinert, bis keine Verbesserung mehr erzielt wird. Dieses Vorgehen konvergiert jedoch im Vergleich zur Nullstellensuche des Gradienten sehr langsam (linear, vgl. [258, S. 43 und S. 141]), weshalb es hier nicht weiter betrachtet wird.

Unter der Annahme, dass f zweimal stetig differenzierbar ist und die Hesse-Matrix $\nabla^2 f(\mathbf{x})$ Lipschitz-stetig ist, kann durch die Verwendung eines Newton-Verfahrens zur Ermittlung der Nullstelle des Gradienten lokal eine quadratische Konvergenz erreicht werden, vgl. [258, S. 44]. Bei Verwendung eines Quasi-Newton-Verfahrens wie der BFGS-Methode⁷⁷ ergibt sich eine Iterationsvorschrift mit lokal superlinearer Konvergenz, vgl. [258, S. 47]. Bei der Suche nach einem Minimum muss zusätzlich sichergestellt werden, dass die Iteration nicht zu einer Nullstelle konvergiert, die einem Maximum entspricht. Außerdem ist zu beachten, dass beim Newton-Verfahren und je nach Methode ggf. auch beim Quasi-Newton-Verfahren⁷⁸ der Fall einer schlecht konditionierten oder gar singulären Hesse-Matrix auftreten kann, wofür geeignete Maßnahmen getroffen werden müssen. Da in der vorliegenden Arbeit die Lösung eines NLP nach Gl. (1.1) von Interesse ist, wird an dieser Stelle nicht weiter hierauf eingegangen. Für eine ausführliche Beschreibung sei auf [258, Kapitel 3] verwiesen. Für die Lösung eines NLP nach Gl. (1.1)

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad \text{u. d. N.} \quad \mathbf{c}_g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}_u(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$$

durch ein gradientenbasiertes Verfahren existieren in der Literatur eine Vielzahl an Strategien und spezifischen Algorithmen. Während für den Umgang mit Gleichheitsnebenbedingungen durch das Einführen von *dualen Variablen* – für die im Folgenden die in der Literatur übliche Bezeichnung *Multiplikatoren*⁷⁹ verwendet wird – oder durch die Elimination⁸⁰ von (primalen) Variablen⁸¹ zwei direkte Methoden zur Verfügung stehen, unterscheiden sich diese Strategien vor allem in der Behandlung der Ungleichheitsnebenbedingungen.

Mit den Multiplikatoren λ_g und λ_u kann die *Lagrangefunktion*⁸²

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda_g, \lambda_u) &= f(\mathbf{x}) + \lambda_g^\top \mathbf{c}_g(\mathbf{x}) + \lambda_u^\top \mathbf{c}_u(\mathbf{x}) \\ &= f(\mathbf{x}) + \sum_{i \in \mathcal{G}} \lambda_{g,i} c_{g,i}(\mathbf{x}) + \sum_{i \in \mathcal{U}} \lambda_{u,i} c_{u,i}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

⁷⁷ Die BFGS-Methode wird in Abschnitt 6.2.3 ausführlicher behandelt.

⁷⁸ Dieser Fall kann z. B. bei der SR1-Methode auftreten, vgl. [258, S. 144f].

⁷⁹ Englisch: multipliers.

Auf die ebenfalls gebräuchliche Bezeichnung *Lagrange-Multiplikatoren* wird verzichtet, da im Zusammenhang mit diesem Begriff in der Literatur häufig keine Ungleichheitsnebenbedingungen behandelt werden.

⁸⁰ Dies ist aufgrund der Nichtlinearität der Nebenbedingungen ggf. sehr aufwendig oder gar unmöglich, weshalb praktisch immer die Methode der Multiplikatoren verwendet wird.

⁸¹ Auf das Konzept der Dualität bei NLP, vgl. [258, Abschnitt 12.9], wird im Folgenden nicht weiter eingegangen, da dies über den Rahmen der vorliegenden Arbeit hinausgeht. Als primale Variablen werden in diesem Kontext die Optimierungsvariablen \mathbf{x} bezeichnet.

⁸² Englisch: Lagrangian oder Lagrangian function.

gebildet werden, wobei \mathcal{G} die Menge der Gleichheitsnebenbedingungen und \mathcal{U} die Menge der Ungleichheitsnebenbedingungen beschreibt. Ein Optimum $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}_g^*, \boldsymbol{\lambda}_u^*)$ des NLP ist dann durch die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen (KKT-Bedingungen)

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i \in \mathcal{G}} \lambda_{g,i}^* \nabla c_{g,i}(\mathbf{x}^*) + \sum_{i \in \mathcal{U}} \lambda_{u,i}^* \nabla c_{u,i}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} , \quad (1.3a)$$

$$\mathbf{c}_g(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} , \quad (1.3b)$$

$$\mathbf{c}_u(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{0} , \quad (1.3c)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_u^* \geq \mathbf{0} , \quad (1.3d)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_u^{*\top} \mathbf{c}_u(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (1.3e)$$

gegeben, wobei der ∇ -Operator Ableitungen bzgl. der primalen Variablen \mathbf{x} beschreibt. Die Gln. (1.3a)–(1.3c) können aus Gl. (1.2) durch Ableitung nach den primalen und dualen Variablen gewonnen werden, wobei darüber hinaus die durch Gln. (1.3c)–(1.3e) gegebene Komplementarität der Ungleichheitsnebenbedingungen und der zugehörigen Multiplikatoren erforderlich ist. Diese können mittels der *aktiven Menge*⁸³ der Ungleichheitsnebenbedingungen $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \{i \in \mathcal{U} \mid c_{u,i}(\mathbf{x}) = 0\}$ auch in der Form

$$\begin{aligned} c_{u,i}(\mathbf{x}^*) = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_{u,i}^* \geq 0 \quad \text{für alle} \quad i \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^*) , \\ c_{u,i}(\mathbf{x}^*) < 0 \quad \text{und} \quad \lambda_{u,i}^* = 0 \quad \text{für alle} \quad i \notin \mathcal{A}(\mathbf{x}^*) \end{aligned}$$

geschrieben werden. Für eine eindeutige Lösung von Gl. (1.3) ist eine weitere Bedingung erforderlich, wobei in der vorliegenden Arbeit die *linear independence constraint qualification* (LICQ) vorausgesetzt wird, nach der die Gradienten aller aktiven Nebenbedingungen $\{\nabla c_{g,i}(\mathbf{x}), i \in \mathcal{G}\} \cup \{\nabla c_{u,i}(\mathbf{x}), i \in \mathcal{A}(\mathbf{x})\}$ linear unabhängig sein müssen, vgl. [258, S. 320].

Die KKT-Bedingungen sind lediglich notwendig, jedoch nicht hinreichend für ein Minimum, ebenso wie das Verschwinden des Gradienten beim obigen Beispiel ohne Nebenbedingungen. Ein hinreichendes Kriterium dafür, dass ein KKT-Punkt ein Minimum ist, ist durch

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^\top \nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}_g^*, \boldsymbol{\lambda}_u^*) \mathbf{w} > \mathbf{0} , \\ \text{für alle} \quad \mathbf{w} \neq \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \begin{cases} \nabla c_{g,i}(\mathbf{x}^*)^\top \mathbf{w} = 0 , & \text{für alle } i \in \mathcal{G} , \\ \nabla c_{u,i}(\mathbf{x}^*)^\top \mathbf{w} = 0 , & \text{für alle } i \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^*) \text{ mit } \lambda_{u,i}^* > 0 , \\ \nabla c_{u,i}(\mathbf{x}^*)^\top \mathbf{w} \geq 0 , & \text{für alle } i \in \mathcal{A}(\mathbf{x}^*) \text{ mit } \lambda_{u,i}^* = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

⁸³ Englisch: active set.

gegeben, vgl. [258, Abschnitt 12.5]. Dies bedeutet anschaulich, dass die Hesse-Matrix der Lagrangefunktion auf dem Nullraum der linearisierten Nebenbedingungen positiv definit sein muss.

Ein wichtiger Sonderfall ergibt sich für streng konvexe *quadratische Programme* (QP)

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{u. d. N. } \mathbf{c}_g(\mathbf{x}) &= \mathbf{A}_g \mathbf{x} - \mathbf{b}_g = \mathbf{0} , \\ \mathbf{c}_u(\mathbf{x}) &= \mathbf{A}_u \mathbf{x} - \mathbf{b}_u \leq \mathbf{0} , \end{aligned}$$

bei denen das Zielfunktional f und damit dessen Hesse-Matrix \mathbf{H} positiv definit und alle Nebenbedingungen linear sind.⁸⁴ In diesem Fall existiert nur ein (globales) Minimum, das durch die KKT-Bedingungen in Gl. (1.3) gegeben ist [182, S. 205]. Dieser Sonderfall ist von großer praktischer Relevanz, da er als Teilproblem bei vielen iterativen Verfahren zur Lösung allgemeiner NLP auftritt. Die Schwierigkeit beim Bestimmen der Lösung \mathbf{x}^* des quadratischen Programms besteht in der Behandlung der Ungleichheitsnebenbedingungen, da die aktive Menge $\mathcal{A}(\mathbf{x}^*)$ zunächst unbekannt ist. In der Literatur existieren prinzipiell zwei Ansätze um dieses kombinatorische Problem zu lösen: Aktive-Mengen-Methoden⁸⁵ und Innere-Punkte-Verfahren⁸⁶.

Aktive-Mengen-Methoden: Bei den Aktive-Mengen-Methoden wird von einer Initialisierung für die aktive Menge \mathcal{A}_0 ausgegangen und die Lösung iterativ bestimmt, indem die jeweils aktiven Ungleichheitsnebenbedingungen während eines Iterationsschritts wie Gleichheitsnebenbedingungen behandelt werden. Werden durch den Iterationsschritt Nebenbedingungen inaktiv oder neue Ungleichheitsnebenbedingungen aktiv, so wird die aktive Menge entsprechend modifiziert, wobei pro Iterationsschritt meist nur eine einzelne Änderung an der aktiven Menge durchgeführt wird. Dies wird so lange wiederholt, bis sich die aktive Menge nicht mehr verändert, womit die Lösung \mathbf{x}^* und die zugehörige aktive Menge $\mathcal{A}(\mathbf{x}^*)$ bestimmt ist. Da bei diesem Vorgehen das kombinatorische Problem zur Bestimmung der aktiven Menge direkt gelöst wird, steigt der Aufwand bei vielen Ungleichheitsnebenbedingungen potentiell stark an, weshalb diese Methoden in praktischen Anwendungen auf Probleme mit wenigen (aktiven) Ungleichheitsnebenbedingungen beschränkt sind.

⁸⁴ Im allgemeinen werden im Rahmen der quadratischen Programmierung (QP) nicht nur konvexe Probleme, sondern alle Probleme mit quadratischem Zielfunktional und linearen Nebenbedingungen behandelt. Bei indefiniter Hesse-Matrix kann jedoch mehr als ein Minimum existieren, wodurch sich der Aufwand zur Bestimmung des globalen Minimums deutlich erhöht [56]. Dieser Fall wird in der vorliegenden Arbeit nicht betrachtet.

⁸⁵ Englisch: active-set methods.

⁸⁶ Englisch: interior-point methods.

Innere-Punkte-Verfahren: Bei Innere-Punkte-Verfahren werden alle Ungleichheitsnebenbedingungen gleichzeitig durch Straf- bzw. Barriereterme berücksichtigt. Durch die gezielte Steuerung der Strafterme während des iterativen Verfahrens ergibt sich am Ende wieder die exakte Lösung des ursprünglichen Problems. Dies soll kurz am Beispiel der *logarithmischen Barrierenfunktion*⁸⁷ erläutert werden, anhand dessen die Grundidee der Innere-Punkte-Verfahren anschaulich wird. Das quadratische Programm wird durch Einführen der Schlupfvariablen⁸⁸ \mathbf{s} in die Form [258, S. 424]

$$\min_{\mathbf{x}, \mathbf{s}} f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x} + \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mu \sum_{i \in \mathcal{U}} \log(s_i)$$

u. d. N. $\mathbf{c}_g(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_g \mathbf{x} - \mathbf{b}_g = \mathbf{0}$,
 $\mathbf{c}_u(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_u \mathbf{x} - \mathbf{b}_u + \mathbf{s} = \mathbf{0}$

überführt. Dieses Problem enthält aufgrund der Umformung durch die Schlupfvariablen nur noch Gleichheitsnebenbedingungen, wobei die Schlupfvariablen positiv sein müssen, damit die logarithmische Barrierenfunktion, die zum Zielfunktional addiert wird, definiert ist. Das Verfahren muss also in einem zulässigen Punkt initialisiert werden, bei dem die Schlupfvariablen $\mathbf{s} > \mathbf{0}$ und der Strafparameter $\mu > 0$ sind. Anstelle des Kombinationsproblems durch die Ungleichheitsnebenbedingungen ergibt diese Formulierung ein nichtlineares Zielfunktional mit Gleichheitsnebenbedingungen in den Variablen (\mathbf{x}, \mathbf{s}) , das durch das Einführen von Multiplikatoren mittels eines Newton- oder Quasi-Newton-Verfahrens gelöst werden kann. Das Verfahren wird mit einem Startwert für μ begonnen, für den das zugehörige Minimum berechnet wird. Anschließend wird diese Lösung numerisch fortgesetzt (siehe Abschnitt 1.2.4), wobei der Strafparameter zu einem sehr kleinen Wert $\mu \rightarrow 0$ nahe null verringert wird. Im Grenzwert entspricht die Lösung dieses Problems der Lösung des ursprünglichen quadratischen Programms. Der Vorteil bei diesem Verfahren ist, dass das kombinatorische Problem nicht direkt gelöst werden muss. Außerdem kann das Vorgehen auch direkt auf NLP übertragen werden, womit sehr effiziente Lösungsverfahren, insbesondere für hochdimensionale Probleme, entwickelt wurden, vgl. [258, Kapitel 19] und [353]. Durch das Einführen der Schlupfvariablen erhöht sich jedoch die Dimension des Optimierungsproblems ggf. deutlich, was den numerischen Aufwand zur Berechnung der Lösung erhöht. Außerdem ist zu beachten, dass das dargestellte Vorgehen bei kleiner werdenden Werten des Strafparameters μ zu einer immer weiteren Annäherung an die Barriere führt, womit sich durch das Logarithmieren der Schlupfvariablen ein Produkt aus einem sehr kleinen und einem sehr großen Wert ergibt. Dies muss bei der

⁸⁷ Die logarithmische Barrierenfunktion, historisch das erste Innere-Punkte-Verfahren, hat heute keine praktische Relevanz mehr, da in der Zwischenzeit deutlich effizientere Methoden mit schnellerer Konvergenz und besserer Robustheit entwickelt wurden, vgl. [258, Abschnitt 16.6].

⁸⁸ Englisch: slack variables.

Implementierung entsprechend durch eine geeignete Schrittweitensteuerung berücksichtigt werden, insbesondere bei der numerischen Fortsetzung hin zu sehr kleinen Werten des Strafparameters. In der Praxis hat sich gezeigt, dass Innere-Punkte-Verfahren den Aktive-Mengen-Methoden bei hochdimensionalen Optimierungsproblemen oft überlegen sind, insbesondere, wenn keine gute Schätzung für die aktive Menge zur Verfügung steht. Andererseits ist der Aufwand für die numerische Fortsetzungsmethode zur Verringerung des Strafparameters bei niedrigdimensionalen Problemen zum Teil größer als die direkte Lösung des kombinatorischen Problems durch Aktive-Mengen-Methoden.

Es gibt in der Literatur eine Vielzahl an Methoden und spezifischen Algorithmen zur Lösung von quadratischen Programmen, die sich jedoch stets einer der beiden diskutierten Kategorien zuordnen lassen. Entweder wird das kombinatorische Problem direkt gelöst, also auf einer Schätzung der aktiven Menge iteriert, bis diese exakt bestimmt ist, oder es wird eine Regularisierung in Form einer Straf- oder Barrierefunktion vorgenommen und durch eine numerische Fortsetzungsmethode die exakte Lösung als Grenzwert dieser Regularisierung bestimmt. In der vorliegenden Arbeit wird zur Lösung solcher Optimierungsprobleme durch Methoden der quadratischen Programmierung (QP) auf existierende Implementierungen von Algorithmen zurückgegriffen und daher für weitere Details auf [258, Kapitel 16] verwiesen.

Zur Lösung von allgemeinen NLP der Form Gl. (1.1) gibt es in der Literatur drei Strategien: Straf-Verfahren⁸⁹ und Erweiterte-Lagrangefunktions-Methoden⁹⁰, das bereits oben beschriebene Innere-Punkte-Verfahren sowie Methoden der sequentiellen quadratischen Programmierung (SQP)⁹¹. Bei allen Methoden wird ausgehend von einem Anfangspunkt \mathbf{x}_0 iterativ ein Punkt \mathbf{x}^* bestimmt, der die KKT-Bedingungen erfüllt. Damit diese Iteration zu einem KKT-Punkt konvergiert, der auch tatsächlich einem Minimum entspricht, ist zudem eine Schrittweitensteuerung erforderlich. Hierfür werden entweder Liniensuchverfahren⁹² oder Vertrauensbereichverfahren⁹³ verwendet, bei denen anhand einer Gütefunktion⁹⁴ oder eines Filters entschieden wird, ob ein Schritt akzeptiert wird. Falls nicht, wird die Schrittweite so lange reduziert, bis das entsprechende Kriterium eingehalten wird. Für Verfahren, die eine solche Methode verwenden, wird in der Literatur die Bezeichnung *global konvergent* verwendet – in diesem Zusammenhang bedeutet dies nicht, dass die Verfahren zu einem globalen Minimum konvergieren, sondern dass diese für praktisch beliebige Startwerte zu

⁸⁹ Englisch: penalty methods.

⁹⁰ Englisch: augmented Lagrangian methods.

⁹¹ Englisch: sequential quadratic programming (SQP).

⁹² Englisch: line search method.

⁹³ Englisch: trust-region method.

⁹⁴ Englisch: merit function.

einem KKT-Punkt konvergieren, der einem Minimum entspricht.⁹⁵ Im Folgenden werden die Eigenschaften der Straf-Verfahren und der SQP-Verfahren vorgestellt. Die Grundidee der Innere-Punkte-Verfahren wurden bereits bei der Lösung von quadratischen Programmen diskutiert und unterscheiden sich bei der Lösung von NLP nicht wesentlich, vgl. [216].

Straf-Verfahren und Erweiterte-Lagrangefunktions-Methoden: Bei Straf-Verfahren werden die Nebenbedingungen durch Strafterme zum Zielfunktional addiert, womit aus dem ursprünglichen NLP mit Nebenbedingungen ein nichtlineares Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen wird, vgl. [95] und [258, Kapitel 17]. Eine Variante besteht in der Bestrafung der quadrierten Verletzung der Nebenbedingungen

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) + \frac{\mu}{2} \sum_{i \in \mathcal{G}} (c_{g,i}(\mathbf{x}))^2 + \frac{\mu}{2} \sum_{i \in \mathcal{U}} (\max(c_{u,i}(\mathbf{x}), 0))^2 .$$

Dieses Vorgehen hat jedoch den Nachteil, dass sich das ursprüngliche Problem nur für $\mu \rightarrow \infty$ ergibt und überdies die Strafterme der Ungleichheitsnebenbedingungen nicht überall differenzierbar sind. Es wird daher hier nicht weiter betrachtet.

Eine weitere Variante ist die Verwendung einer *exakten* Straffunktion, z. B. der ℓ_1 -Straffunktion⁹⁶

$$\phi_1(\mathbf{x}, \mu) = f(\mathbf{x}) + \mu \sum_{i \in \mathcal{G}} |c_{g,i}(\mathbf{x})| + \mu \sum_{i \in \mathcal{U}} \max(c_{u,i}(\mathbf{x}), 0) . \quad (1.4)$$

Diese Straffunktion heißt exakt, weil ein Minimum von $\phi_1(\mathbf{x}, \mu)$ einem KKT-Punkt des ursprünglichen NLP entspricht, wenn μ groß genug ist. Dafür ist es ausreichend, wenn $\mu > \mu^*$ ist, wobei μ^* dem Betrag des betragsmäßig größten Multiplikators des ursprünglichen Problems entspricht [258, S. 507]. Obwohl $\phi_1(\mathbf{x}, \mu)$ nichtglatt ist, gibt es robuste Verfahren zur Minimierung dieser Straffunktion, die Ähnlichkeiten mit den SQP-Verfahren haben [102]. Salopp zusammengefasst ergibt sich ein stationärer Punkt von $\phi_1(\mathbf{x}, \mu)$, wenn die Richtungsableitung bzgl. \mathbf{x} in allen möglichen Richtungen positiv ist, also jede infinitesimale Veränderung zu einer Zunahme der Straffunktion führt. Sind die Nebenbedingungen an diesem Punkt erfüllt, so ist der Punkt *zulässig*⁹⁷ und entspricht einem KKT-Punkt des ursprünglichen Problems. Ist der Punkt nicht zulässig, so muss der Strafparameter μ erhöht werden, bis die Gewichtung der

⁹⁵ Die Verfahren stellen sicher, dass bei der Iteration die Zielfunktion und die Verletzung der Nebenbedingungen abnimmt. Es ist daher auch möglich, dass der gefundene KKT-Punkt einem Sattelpunkt entspricht – und nicht einem Minimum –, da die KKT-Bedingungen lediglich ein notwendiges, jedoch kein hinreichendes Kriterium für ein Minimum sind. Es muss daher noch das oben angegebene hinreichende Kriterium für ein Minimum überprüft werden.

⁹⁶ Englisch: ℓ_1 penalty function.

⁹⁷ Englisch: feasible.

Nebenbedingungen in $\phi_1(\mathbf{x}, \mu)$ gegenüber dem ursprünglichen Zielfunktional f groß genug ist, dass das Verfahren zu einem zulässigen stationären Punkt konvergiert, vgl. [47] und [258, Abschnitt 17.2].

Eine Kombination von quadratischen und linearen Straftermen führt auf die erweiterte Lagrangefunktion. Da diese Methode ursprünglich für Probleme mit Gleichheitsnebenbedingungen entwickelt wurde, existieren verschiedene Varianten zur Behandlung von Ungleichheitsnebenbedingungen. Zur Illustration der Grundidee werden wiederum Schlupfvariablen \mathbf{s} eingeführt, womit sich das Minimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}, \mathbf{s}} f(\mathbf{x}) + \sum_{i \in \mathcal{G}} \lambda_{g,i} c_{g,i}(\mathbf{x}) + \sum_{i \in \mathcal{U}} \lambda_{u,i} (c_{u,i}(\mathbf{x}) + s_i) \\ + \frac{\mu}{2} \sum_{i \in \mathcal{G}} (c_{g,i}(\mathbf{x}))^2 + \frac{\mu}{2} \sum_{i \in \mathcal{U}} (c_{u,i}(\mathbf{x}) + s_i)^2 \end{aligned}$$

u. d. N. $\mathbf{s} \geq \mathbf{0}$

ergibt. Dies kann effizient durch Methoden gelöst werden, mit denen die Schranken für die Schlupfvariablen ohne zusätzliche Multiplikatoren berücksichtigt werden können. Die Terme λ_g und λ_u sind bei der Formulierung der erweiterten Lagrangefunktion keine Multiplikatoren im oben eingeführten Sinne, sondern Strafparameter. Es kann jedoch gezeigt werden, dass sich durch eine geeignete Aktualisierung dieser Strafparameter während der iterativen Lösung als Grenzwert die Multiplikatoren des ursprünglichen Problems ergeben, vgl. [258, Abschnitt 17.4].

Sequentielle quadratische Programmierung: Bei der sequentiellen quadratischen Programmierung (SQP) wird das NLP iterativ gelöst, indem die Lagrangefunktion in jedem Iterationsschritt quadratisch entwickelt und die Nebenbedingungen linearisiert werden. Dadurch ergibt sich in jedem Iterationsschritt ein quadratisches Programm, dessen Optimum als nächster Iterationspunkt gewählt wird. Dieses Vorgehen entspricht von der Grundidee dem Newton-Verfahren unter Berücksichtigung der linearisierten Ungleichheitsnebenbedingungen. In der Praxis wird häufig ein Quasi-Newton-Verfahren mit positiv definiter Iterationsmatrix⁹⁸ gewählt, selbst wenn die tatsächliche Hesse-Matrix indefinit ist, wodurch das QP sehr effizient gelöst werden kann. Obwohl der so bestimmte Iterationsschritt nicht optimal ist und das Verfahren daher langsamer konvergiert, ist dieses Vorgehen in der Praxis dennoch oft schneller, da die einzelnen Iterationsschritte sehr schnell berechnet werden können.

Es gibt eine Vielzahl an Varianten von SQP-Methoden, die sich in der Berechnung des Aktualisierungsschrittes $\mathbf{d}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$ unterscheiden [128]. In der Literatur werden im Wesentlichen sog. EQP- und IQP-Verfahren unterschieden. Bei ersteren

⁹⁸ Die Iterationsmatrix ist die Schätzung für die Hesse-Matrix beim Quasi-Newton-Verfahren.

wird eine Schätzung für die aktive Menge verwendet und die damit aktiven Ungleichheitsnebenbedingungen während eines Iterationsschritts als Gleichheitsbedingungen behandelt [246]. Diese Schätzung kann z. B. durch die Lösung eines linearen Programms berechnet werden, vgl. [258, S. 551ff], worauf jedoch in der vorliegenden Arbeit nicht näher eingegangen wird. Bei den IQP-Verfahren werden die linearisierten Ungleichheitsnebenbedingungen bei der Lösung des QP-Teilproblems berücksichtigt, was im Vergleich zu den EQP-Verfahren einen höheren Rechenaufwand bedeutet, jedoch in vielen praktischen Anwendungen in guten Konvergenzeigenschaften resultiert, vgl. [258, S. 533ff].

Sowohl EQP-, als auch IQP-Verfahren benötigen zur Sicherstellung der globalen Konvergenz eine Schrittweitensteuerung. Hierfür haben sich zwei Methoden etabliert: das Liniensuchverfahren und das Vertrauensbereichverfahren. Beim Liniensuchverfahren wird zunächst eine Richtung \mathbf{d}_k durch Lösung des QP-Teilproblems ermittelt und anschließend entschieden, ob der Schritt akzeptiert oder die Schrittlänge reduziert wird. Beim Vertrauensbereichverfahren wird zuerst ein Vertrauensbereich festgelegt, der die Schrittlänge beschränkt und durch weitere Ungleichheitsnebenbedingungen beim Lösen des QP-Teilproblems berücksichtigt wird. Anschließend wird entschieden, ob der Schritt akzeptiert wird, oder der Vertrauensbereich verkleinert werden muss. Beim Liniensuchverfahren wird also erst die Richtung und anschließend die Schrittlänge bestimmt, während beim Vertrauensbereichverfahren zuerst die Schrittlänge und anschließend die Richtung bestimmt wird. Das Liniensuchverfahren hat hier den Vorteil, dass zur Verringerung der Schrittlänge nicht die erneute Lösung des QP-Teilproblems benötigt wird, sondern nur entlang der Aktualisierungsrichtung das Zielfunktional und die Nebenbedingungen ausgewertet werden müssen. Nichtsdestotrotz haben beide Methoden eine große Verbreitung in der Literatur und in praktisch verwendeten Implementierungen gefunden. Auch Kombinationen aus beiden Verfahren sind möglich [353].

Zur Beurteilung, ob ein Schritt akzeptiert wird oder nicht, werden entweder Gütefunktionen oder Filter-Methoden eingesetzt, vgl. [258, Abschnitt 15.4]. Bei den Gütefunktionen wird eine Straffunktion verwendet, häufig die exakte ℓ_1 -Straffunktion $\phi_1(\mathbf{x}, \mu)$. Bei den Liniensuchverfahren wird diese mithilfe der Richtungsableitung im Ausgangspunkt \mathbf{x}_k „linearisiert“ und anschließend geprüft, ob der Aktualisierungsschritt eine geforderte Verbesserung von $\phi_1(\mathbf{x}_{k+1}, \mu)$ gegenüber dieser Linearisierung erreicht. Es wird also eine gewichtete Summe aus der Verbesserung des Zielfunctionals und der Verletzung der Nebenbedingungen betrachtet. Ein Schritt wird entweder akzeptiert, weil das Zielfunktional deutlich verbessert wird, oder weil die Verletzung der Nebenbedingungen deutlich abnimmt. Es ist also auch möglich, dass ein Schritt angenommen wird, der den Wert des Zielfunctionals erhöht, wenn dadurch die Nebenbedingungen deutlich besser erfüllt werden. Bei den Vertrauensbereichverfahren wird meist eine quadratische

Entwicklung der Straffunktion verwendet, um dies zu entscheiden. In beiden Fällen wird durch die Gütefunktion sichergestellt, dass das Verfahren global konvergiert, weil nur Schritte akzeptiert werden, die zu einer Annäherung an einen KKT-Punkt führen. Den Filter-Methoden liegt ein ähnlicher Gedanke zugrunde. Es wird jedoch keine gewichtete Summe aus dem Zielfunktional und den Nebenbedingungen minimiert, sondern beide Größen getrennt betrachtet. Ein Schritt wird dann akzeptiert, wenn bei einer bestimmten Verletzung der Nebenbedingungen der Wert des Zielfunktionals geringer ist, als in allen bisherigen Iterationen. Gleichzeitig wird ein Schritt nur dann akzeptiert, wenn bei einem bestimmten Wert des Zielfunktionals die Verletzung der Nebenbedingungen geringer ist, als in allen bisherigen Iterationen. Für ein gutes Verhalten des Filters und zum Sicherstellen globaler Konvergenz sind jedoch noch weitere Verbesserungen und Heuristiken notwendig, womit die Implementierung eines guten Filters aufwendiger ist, als die von Gütefunktionen [258, S. 438]. Nichtsdestotrotz gibt es in der Literatur SQP-Algorithmen in Kombination mit Filter-Methoden, die bei praktischen Problemen eine gute Leistung zeigen [351, 352].

Alle hier diskutierten gradientenbasierten Methoden für NLP konvergieren je nach Anfangsbedingungen zu einem lokalen Optimum. Gradientenbasierte Methoden zur Bestimmung des globalen Optimums von NLP werden im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht betrachtet; hierfür wird auf [105, 170, 256] verwiesen. Vielmehr ist bei der Untersuchung des Einflusses der Fußgeometrie auf die Energieeffizienz beim zweibeinigen Gehen zur Durchführung effizienter Parameterstudien die numerische Fortsetzung von optimalen Lösungen für die Bewegung von Interesse. Es soll also ausgehend von einer bekannten Lösung für das NLP mit bestimmten Parameter und Nebenbedingungen eine Lösung für geänderte Parameter oder Nebenbedingungen bestimmt werden. Dies ist die klassische Fragestellung für numerische Fortsetzungsmethoden, auf die im nächsten Abschnitt eingegangen wird.

1.2.4 Numerische Fortsetzungsmethoden

Zur Untersuchung des Einflusses der Fußgeometrie auf die Energieeffizienz beim Gehen werden in der vorliegenden Arbeit Parameterstudien durchgeführt, bei denen die optimale Bewegung als Lösung des im vorigen Abschnitt eingeführten NLP bestimmt werden muss. Die Aufgabe, die Lösung eines nichtlinearen Gleichungssystems bei der Veränderung eines Parameters zu verfolgen, ist eine klassische Anwendung für *numerische Fortsetzungsmethoden*⁹⁹, die auch unter dem Begriff *numerische Pfadverfolgung*¹⁰⁰ in der Literatur behandelt werden. Diese Methoden sind unter anderem ein elementarer Teil der im vorigen Abschnitt behandelten Innere-Punkte-Verfahren zur Lösung von NLP. Für einen Überblick zu numerischen Fortsetzungsmethoden

⁹⁹ Englisch: numerical continuation methods.

¹⁰⁰ Englisch: numerical path following.

wird auf [12, 13, 83, 231, 298] verwiesen, wobei die im Folgenden zusammengefassten Grundideen vor allem aus [12] und [231, Kapitel 5] entnommen sind.

Bei numerischen Fortsetzungsmethoden wird eine Funktion $\mathbf{F}: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$, $(\mathbf{x}, p) \mapsto \mathbf{F}(\mathbf{x}, p)$ betrachtet, wobei p ein beliebiger skalarer Parameter ist. Es wird die Lösung für den Parameterwert $p = p_1$ gesucht, wobei eine Lösung

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^*, p_0) = \mathbf{0}$$

für $p = p_0$ bekannt ist. Unter der Voraussetzung, dass die Funktion \mathbf{F} stetig differenzierbar ist und die Jacobi-Matrix¹⁰¹ $\mathbf{F}'(\mathbf{x}^*, p)$ vollen Rang hat, handelt es sich bei $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*, p)$ um eine *reguläre Nullstelle* der Funktion. In diesem Fall existiert in einer offenen Umgebung um die Nullstelle (\mathbf{x}^*, p) eine implizit definierte Lösungskurve $\mathbf{c}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$, $s \mapsto \mathbf{c}(s)$ mit der Bogenlänge s , für die

$$\mathbf{F}(\mathbf{c}(s)) = \mathbf{0}$$

und $\mathbf{c}'(s) \neq \mathbf{0}$ gilt. Aufgrund der vorausgesetzten Regularität folgt daraus die Gleichung

$$\mathbf{F}'(\mathbf{c}(s))\mathbf{c}'(s) = \mathbf{0} ,$$

die Tangente $\mathbf{c}'(s)$ liegt also im eindimensionalen Kern der Jacobi-Matrix $\mathbf{F}'(\mathbf{c}(s))$. Das Ziel bei numerischen Fortsetzungsmethoden ist, die Lösungskurve $\mathbf{c}(s)$ möglichst effizient numerisch zu approximieren, um damit ausgehend von der bekannten Lösung für $p = p_0$ die Lösung $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*, p_1) = \mathbf{0}$ zu bestimmen. Dazu gibt es in der Literatur zwei Ansätze: stückweise lineare Näherungen der Lösungskurve durch sog. PL-Methoden¹⁰², vgl. [12, Kapitel 12 bis 14] und [11], und Prädiktor-Korrektor-Verfahren (PC-Methoden¹⁰³), vgl. [12, Kapitel 5 bis 7] und [231, Kapitel 5]. Bei den PL-Methoden wird eine Näherung der Lösungskurve durch einen stückweise linearen polygonalen Pfad auf einer Triangulation des Lösungsraums berechnet, siehe Abb. 1.15a. Die Lösungsverfahren sind eng mit den Simplex-Verfahren zur Lösung von linearen Programmen verwandt. Bei den PC-Methoden wird ausgehend von einem Startwert auf bzw. sehr nahe an der Lösungskurve eine Extrapolation (Prädiktor-Schritt) durchgeführt, die in der Regel nicht auf der Lösungskurve landet. Anschließend wird durch ein Korrekturverfahren (Korrektor-Schritt) wieder ein nahegelegener Punkt auf der Lösungskurve bestimmt, siehe Abb. 1.15b.

¹⁰¹ Durch $(\cdot)'$ wird in diesem Abschnitt eine Ableitung nach allen Variablen der Funktion gekennzeichnet – in Abgrenzung zum vorigen Abschnitt, wo der ∇ -Operator nur Ableitungen nach \mathbf{x} beschreibt.

¹⁰² Englisch: Piecewise-Linear methods.

¹⁰³ Englisch: Predictor-Corrector methods.

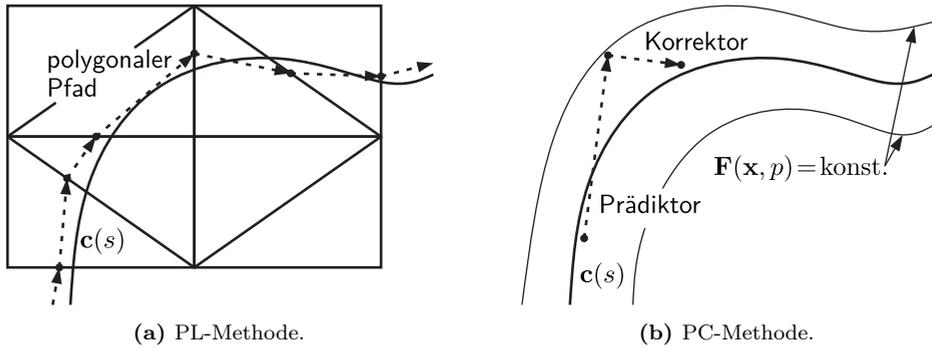


Abbildung 1.15: Pfadverfolgungsstrategien für die Lösungskurve $c(s)$. (a) PL-Methode: stückweise lineare Näherung durch einen polygonalen Pfad auf einer Triangulation. (b) PC-Methode: Prädiktor-Korrektor-Verfahren basierend auf Extrapolation (Prädiktor-Schritt) und Korrektur (Korrektor-Schritt).

Während bei den PC-Methoden eine reguläre Nullstelle zur Berechnung eines eindeutigen Prädiktor-Schritts erforderlich ist, kommen die PL-Methoden ohne diese Anforderung aus. Es ist also denkbar, durch eine PL-Methode eine nichtglatte Lösungskurve zu bestimmen, wobei für eine Fehlerabschätzung dieser Methoden dennoch Lipschitz-Stetigkeit der Jacobi-Matrix notwendig ist [12, Abschnitt 15.5]. Allerdings sind PL-Methoden in der Regel weniger effizient als PC-Methoden, insbesondere für Probleme mit hoher Dimension [14, S. 246]: „Piecewise linear continuation methods are usually considered to be less efficient than the predictor corrector methods when the latter are applicable, especially for large N . The reasons for this lie in the fact that steplength adaptation and exploitation of special structure are more difficult to implement for piecewise linear methods.“¹⁰⁴ Aus diesem Grund werden im Folgenden die PC-Methoden näher betrachtet.

Zur Implementierung einer PC-Methode werden drei Komponenten benötigt: ein Prädiktor-Verfahren, ein Korrektor-Verfahren und eine Schrittweitensteuerung. Das Prädiktor-Verfahren basiert auf einer Extrapolation an einer regulären Nullstelle, es wird daher eine Näherung für die implizit definierte Lösungskurve benötigt. Meist wird dafür die Tangente $c'(s)$ genutzt, es können jedoch auch Prädiktoren höherer Ordnung durch weitere Ableitungen der Lösungskurve bestimmt werden [114, 221], was einer Taylorreihenentwicklung entspricht. Als Korrektor-Verfahren werden in der Regel Newton- oder Quasi-Newton-Verfahren eingesetzt, da der Prädiktor-Schritt eine Schätzung nahe der Nullstelle $F(c(s)) = \mathbf{0}$ ergibt und diese Verfahren quadratisch

¹⁰⁴ „Stückweise lineare Methoden werden in der Regel als weniger effizient angesehen als Prädiktor-Korrektor-Methoden, wenn letztere verwendet werden können, insbesondere für große N . Dies liegt darin begründet, dass die Schrittweitenanpassung und die Ausnutzung einer speziellen Struktur bei stückweise linearen Methoden schwieriger zu implementieren sind.“ (Übersetzung des Verfassers).

bzw. superlinear konvergieren. Die entscheidende Komponente für eine effiziente PC-Methode ist jedoch die Schrittweitensteuerung für den Prädiktor: ist der Schritt zu kurz, so werden sehr viele Prädiktor-Korrektor-Schritte benötigt, um der Lösungskurve bis zum gewünschten Parameterwert $p = p_1$ zu folgen; ist der Schritt zu lang, so ist die Abweichung zwischen dem Prädiktor-Schritt und der Lösungskurve sehr groß, so dass viele Korrektor-Schritte benötigt werden. Beides hat hohe Rechenzeiten zur Folge, wobei in der Praxis zu große Schritte meist kritischer sind: aufgrund der Nichtlinearität von $\mathbf{F}(\mathbf{x}, p)$ ist die Lösung nicht eindeutig, weshalb es in einer kleinen Umgebung eine weitere Lösung geben kann. Ist der Prädiktor-Schritt zu groß, so springt das Verfahren auf eine andere Lösungskurve, was bei den meisten Anwendungen nicht erwünscht ist. Da die Schrittweitensteuerung von großer Relevanz für die Effizienz einer PC-Methode ist, gibt es für diese Fragestellung auch eine Vielzahl an Vorschlägen in der Literatur, vgl. [82, 143, 161, 295–297, 310], [12, Kapitel 6], [114, Abschnitt 3] und [231, S. 250ff]. Eine Möglichkeit besteht im Vergleich zweier Prädiktoren unterschiedlicher Ordnung, wobei die relative Abweichung zur Steuerung der Schrittweite genutzt wird – dafür wird in [221] eine effiziente numerische Methode vorgeschlagen. Eine weitere Möglichkeit besteht im Vergleich zweier aufeinanderfolgender Punkte, z. B. durch die Berechnung des Winkels zwischen Tangente und Sekante. Während diese Strategien lediglich auf dem Prädiktor-Schritt basieren, wird bei vielen Schrittweitensteuerungen eine Abschätzung für die Abweichung von der Lösungskurve auf Basis des Korrektor-Verfahrens getroffen. Als Maß dafür kann entweder die Länge des ersten Korrektor-Schritts dienen, oder eine Abschätzung der Konvergenzrate auf Basis der ersten beiden Korrektor-Schritte. Die Schrittweitensteuerung auf Basis des Prädiktors kann als explizite Berechnung der Schrittweite auf Basis der Extrapolation aufgefasst werden, es wird also eine Schrittweite bestimmt und anschließend die Korrektur durchgeführt. Demgegenüber kann die Schrittweitensteuerung auf Basis des Korrektors als implizite Schrittweitensteuerung aufgefasst werden, da zunächst eine Schrittweite geschätzt wird und anschließend entschieden wird, ob diese Schätzung akzeptiert wird. Prinzipiell ist auch eine Kombination aus beiden Ansätzen möglich, um die Vorteile beider Verfahren zu nutzen.

Bei der bisherigen Diskussion wurde, abgesehen von den PL-Methoden, davon ausgegangen, dass alle Punkte der Lösungskurve reguläre Nullstellen sind, also die Jacobi-Matrix überall existiert und vollen Rang hat. Diese Annahmen sind jedoch nicht immer erfüllt: bei Problemen mit Ungleichheitsnebenbedingungen ist die Lösungskurve zwar stetig, jedoch an den Stellen, an denen eine Nebenbedingung aktiv oder inaktiv wird, nicht differenzierbar – die Jacobi-Matrix existiert also nicht überall –; bei vielen nichtlinearen Problemen existieren singuläre Nullstellen an denen die Jacobi-Matrix zwar existiert, jedoch nicht vollen Rang hat. An singulären Nullstellen ist die Dimension des Kerns der Jacobi-Matrix größer eins, wobei im Folgenden nur der häufigste

Fall eines zweidimensionalen Kerns betrachtet wird. An singulären Nullstellen mit zweidimensionalem Kern der Jacobi-Matrix gibt es zwei Richtungen, in denen die Lösungskurve fortgesetzt werden kann. In diesem Fall tritt eine Lösungsverzweigung – eine Bifurkation – auf, die singuläre Nullstelle ist also ein Schnittpunkt zweier Lösungskurven.¹⁰⁵

Die Detektion von Bifurkationen und die Verfolgung aller entstehenden Lösungen ist eine wichtige Fragestellung bei der Anwendung von numerischen Fortsetzungsmethoden. Insbesondere bei der Verfolgung von Lösungen dynamischer Systeme ist dies von großem Interesse, da sich die Stabilität der Lösungen an Bifurkationspunkten verändert. Es gibt eine Vielzahl an Software-Paketen zur Bestimmung und Verfolgung von Lösungen dynamischer Systeme, vgl. [13, Kapitel VIII] und [53, 84, 88, 129, 304, 330, 335, 370]. Ein im Vergleich zur Bifurkationsanalyse in der Literatur weniger behandeltes Thema ist die numerische Fortsetzung von Lösungen in der Gegenwart von Ungleichheitsnebenbedingungen. Während bei den im vorigen Abschnitt diskutierten Innere-Punkte-Verfahren zur Lösung von NLP eine Regularisierung in Form von Barrieretermen verwendet wird, um eine glatte Näherung für das nichtglatte Problem zu formulieren, gibt es auch Ansätze zur Fortsetzung der exakten Lösung mittels PC-Methoden [77, 194, 217, 274]. Dabei werden die jeweils aktiven Ungleichheitsnebenbedingungen wie Gleichheitsnebenbedingungen behandelt und die Nullstelle des Gradienten der Lagrangefunktion numerisch fortgesetzt. Punkte, an denen eine Ungleichheitsnebenbedingung aktiv oder inaktiv wird, werden bei der Iteration exakt bestimmt und das System für die weitere Berechnung entsprechend modifiziert. Da sich dadurch die Anzahl der aktiven Nebenbedingungen und der zugehörigen dualen Variablen verändert, verändert sich die Dimension der durch die Lösungskurve beschriebenen Nullstelle. Die Lösungskurve ist daher an diesen Stellen nicht differenzierbar. Die Projektion der Lösungskurve auf den N -dimensionalen Raum der primalen Variablen \mathbf{x} weist an solchen Stellen Knicke auf, die Tangente ist dort also nicht stetig.

In der Literatur gibt es also zwei Ansätze zur numerischen Fortsetzung, wobei die PC-Methoden effizienter sind als die PL-Methoden, insbesondere bei hochdimensionalen Problemen. Zur Behandlung von Ungleichheitsnebenbedingungen, wie sie bei der Formulierung von NLP auftreten, können PC-Methoden eingesetzt werden, wenn die Stellen der Lösungskurve, an denen diese aktiv oder inaktiv werden, exakt bestimmt werden. Dieses Vorgehen kann jedoch bei einer großen Anzahl an Ungleichheitsnebenbedingungen und einem häufigen Wechsel in deren Aktivität dazu führen, dass nur sehr kurze Schritte möglich sind und das Verfahren dadurch sehr langsam wird.

¹⁰⁵ In seltenen, hier nicht betrachteten Fällen, kann eine singuläre Nullstelle auftreten, an der keine Bifurkation stattfindet und in einer endlichen Umgebung nur eine Lösungskurve existiert.

1.3 Ziel der Arbeit

Das Ziel der Arbeit besteht in der Entwicklung effizienter Modelle und Methoden zur Simulation und Optimierung der Energieeffizienz beim Gehen zweibeiniger Roboter. Hierfür besteht ein Bedarf, da die Energieeffizienz neben der Stabilisierung der Bewegung eines der beiden Hauptprobleme aktueller Roboter darstellt. Energieeffiziente Gehbewegungen zweibeiniger Roboter können durch das Regelungskonzept der hybriden Nulldynamik realisiert werden, bei dem das System dynamisch stabilisiert wird. Die Bewegung entspricht einem Grenzyklus des geregelten Systems, zu dessen Berechnung in der Literatur effiziente Methoden beschrieben werden. Allerdings existieren momentan nur unzureichende Modelle, um ein Robotermodell mit abrollenden Füßen durch dieses Konzept zu regeln und zu simulieren. Bei diesen Modellen wird die Geometrie des flachen Fußes entweder durch einen Polygonzug beschrieben – meist ein Dreieck, das aus den Punkten Sprunggelenk, Ferse und Zehenspitze besteht – oder durch Kreisbogensegmente – diese sind inspiriert durch die Abrollformen, die zur Beschreibung der Kinematik des Fußes beim Menschen genutzt werden.

Das erste Ziel ist daher die Entwicklung eines effizienten Fußmodells, das im Kontext der hybriden Nulldynamik zur Beschreibung, Regelung und Simulation periodischer Gehbewegungen genutzt werden kann. Um die Komplexität des Modells im Rahmen der vorliegenden Arbeit möglichst gering zu halten, soll dieses Fußmodell aus einem Starrkörper bestehen. Dies ermöglicht die Beschreibung der gesamten ESP durch ein einziges Modell, weshalb sich beim anschließenden Entwurf der HZD-Regelung eine einzige kontinuierliche Nulldynamik-Mannigfaltigkeit ergibt und kein kombinatorisches Problem beim Umschalten zwischen verschiedenen Modellen entsteht, vgl. Abb. 1.5 (S. 14). Bewegliche Zehen oder weitere Unterteilungen des Fußes sollen daher nicht betrachtet werden. Nach einer Erweiterung des Konzepts der Hybriden-Nulldynamik-Regelung um dieses Fußmodell soll der Einfluss der Fußgeometrie auf die Energieeffizienz beim Gehen untersucht werden. Die Erzeugung energieeffizienter Bewegungen in Simulationen kann durch die Optimierung der Regelungsparameter durchgeführt werden. Zur Durchführung von Parameterstudien ist hierbei die wiederholte Lösung des Optimierungsproblems für veränderte Modellparameter oder Nebenbedingungen notwendig.

Ein weiteres Ziel der Arbeit besteht daher in der Entwicklung einer effizienten Methode, um die Lösung des Optimierungsproblems bei der Variation von Parametern erneut zu berechnen. Diese soll im Rahmen der vorliegenden Arbeit zur Untersuchung des Einflusses der Fußgeometrie auf die Energieeffizienz beim Gehen genutzt werden, um Empfehlungen für die Entwicklung zukünftiger Roboter abzuleiten. Darüber hinaus soll der Einsatz der entwickelten Modelle und Methoden im Rahmen eines

solchen Entwicklungsprozesses anhand eines Anwendungsbeispiels zur Ermittlung einer optimalen Fußgeometrie demonstriert werden.

1.4 Aufbau der Arbeit

Die weitere Arbeit gliedert sich den Zielen entsprechend in drei Teile: die Entwicklung eines Fußmodells in den Kapiteln 2 bis 4, die Modellierung und Optimierung periodischer Gehbewegungen in den Kapiteln 5 bis 8 und die Anwendung der Modelle und Methoden zur Untersuchung der Energieeffizienz in den Kapiteln 9 und 10.

Kapitel 2: In diesem Kapitel wird der Kontakt zwischen Starrkörpern, insbesondere zwischen Fuß und Boden, behandelt. Es wird eine allgemeine Methode zur expliziten Berechnung des Kontaktpunkts für das ebene Problem vorgestellt, was eine Beschreibung von Rollkontakten in einer Minimalkoordinate erlaubt.

Kapitel 3: Ausgehend von der allgemeinen Beschreibung des Kontaktproblems werden zwei Parametrierungen für die Fußgeometrie abgeleitet. Diese beruhen auf der Regularisierung eines Polygonzugs, womit sich eine geringe Anzahl und eine geometrische Interpretation für die Parameter ergibt.

Kapitel 4: Die Fußmodelle werden anhand von Messdaten aus Experimenten mit menschlichen Probanden validiert. Dabei werden lediglich die Verläufe der Sprunggelenkposition während des Fuß-Boden-Kontakts benötigt, um die Modelle zu parametrieren. Neben einer Beurteilung der Eignung der Modelle zur Beschreibung des Fuß-Boden-Kontakts liefert dieses Vorgehen Anfangsparameter für die spätere Optimierung.

Kapitel 5: Auf Basis der Fußmodelle wird ein ebenes Mehrkörpermodell für einen zweibeinigen Roboter erstellt, für das eine HZD-Regelung zur Erzeugung periodischer Gehbewegungen entworfen wird. Für die entsprechenden Grenzyklen des geregelten Systems wird eine semi-analytische Lösung vorgestellt und schließlich das Optimierungsproblem zur Bestimmung energieeffizienter Gehbewegungen formuliert.

Kapitel 6: Zur Lösung des nichtlinearen Optimierungsproblems mit Nebenbedingungen wird ein SQP-Algorithmus entworfen und implementiert.

Kapitel 7: Um Lösungskurven des Optimierungsproblems bei der Variation von Parametern effizient zu berechnen, wird eine numerische Fortsetzungsmethode entwickelt. Diese verfolgt einen Prädiktor-Korrektor-Ansatz und berücksichtigt den nichtglatten

Charakter des Problems. Im Prädiktor-Verfahren wird eine automatische Schrittweitensteuerung entwickelt, das Korrektor-Verfahren nutzt den zuvor beschriebenen SQP-Algorithmus.

Kapitel 8: Die Leistungsfähigkeit der beiden numerischen Methoden, das SQP-Verfahren aus Kapitel 6 und das Prädiktor-Korrektor-Verfahren aus Kapitel 7 wird anhand numerischer Experimente mit dem Optimierungsproblem aus Kapitel 5 untersucht.

Kapitel 9: Die entwickelten Methoden werden in einer Untersuchung der Energieeffizienz beim zweibeinigen Gehen angewendet. Dabei wird zunächst ein sinnvolles Zielfunktional für die Optimierung bestimmt. Anschließend werden 16 Modelle mit den in Kapitel 4 ermittelten Parametrierungen zur Beschreibung des Fuß-Boden-Kontakts bei der menschlichen Gehbewegung analysiert. Es wird die Energieeffizienz der verschiedenen Modelle miteinander verglichen und auch einem Modell mit Punktfuß gegenübergestellt.

Kapitel 10: Ausgehend von diesen Ergebnissen wird als Anwendungsbeispiel der Modelle und Methoden in einem Entwicklungsprozess eine Optimierung der Fußgeometrie vorgenommen.

Kapitel 11: Im letzten Kapitel wird die Arbeit zusammengefasst und ein Ausblick auf offene Fragestellungen und weitere Anwendungsmöglichkeiten der Modelle und Methoden gegeben.

2 Fuß-Boden-Kontakt

Der Fuß-Boden-Kontakt ist ein wesentlicher Teil des mechanischen Modells für das zweibeinige Gehen und hat, wie in den Abschnitten 1.2.1 und 1.2.2 diskutiert, einen starken Einfluss auf die Gesamtdynamik. Ein Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung eines ebenen Starrkörpermodells für den Fuß, das mit einer glatten, konvexen Form auf dem Boden abrollt. Dazu werden im Folgenden zunächst zwei Methoden zur Beschreibung von ebenen Starrkörpern und die Berechnung von Kontaktpunkten eingeführt. Anschließend wird in Abschnitt 2.2 auf die Besonderheiten bei einseitigen Kontakten in ebenen Modellen eingegangen. In Abschnitt 2.3 wird schließlich eine Methode vorgestellt, mit der eine direkte Berechnung der Kontaktpunkte beim Fuß-Boden-Kontakt möglich ist und die in der weiteren Arbeit verwendet wird.

2.1 Kontaktpunkte ebener Starrkörper

In der vorliegenden Arbeit werden Systeme aus ebenen Starrkörpern zur Modellierung und Regelung zweibeiniger Gehbewegungen verwendet. Zur Beschreibung der Kinematik werden jedoch zunächst dreidimensionale Bezugssysteme eingeführt und die Bewegung anschließend auf die $\{x, z\}$ -Ebene eingeschränkt. Durch dieses Vorgehen steht insbesondere zur Beschreibung von Rotationsoperationen die in der Mechanik gebräuchliche Notation unter Verwendung von Kreuzprodukten zur Verfügung. Drehungen um die y -Achse sind dabei im Uhrzeigersinn positiv.

Die Kinematik eines Starrkörpers wird durch Lage und Orientierung eines körperfesten Bezugssystems $\mathcal{B} = \{B, \mathbf{b}_x, \mathbf{b}_y, \mathbf{b}_z\}$, das aus einem Referenzpunkt B und drei orthonormalen Basisvektoren \mathbf{b}_x , \mathbf{b}_y und \mathbf{b}_z besteht, eindeutig beschrieben. Der ebene Starrkörper selbst wird durch ein einfach zusammenhängendes, abgeschlossenes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschrieben,¹ dessen Rand $\partial\Omega$ durch eine geschlossene Kurve gegeben ist,

¹ Noch allgemeiner kann zur Definition von Ω von einem nicht einfach zusammenhängenden Gebiet ausgegangen werden. Der Rand ist dann nicht zusammenhängend, was bei den nachfolgenden Definitionen entsprechend berücksichtigt werden muss. Dies ist jedoch in der vorliegenden Arbeit nicht von Interesse.

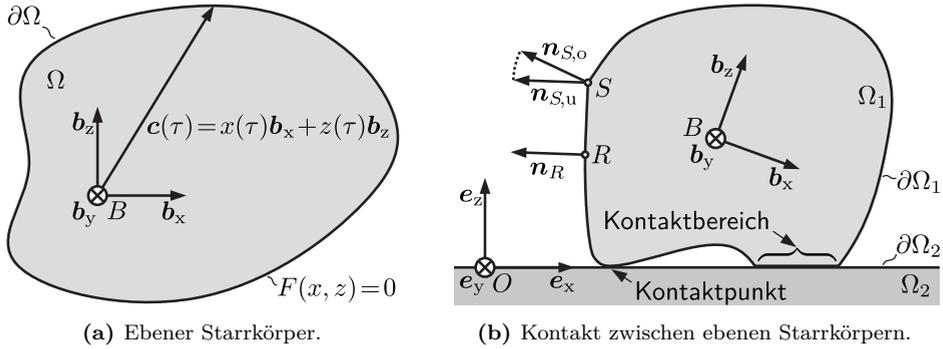


Abbildung 2.1: (a) Definition eines ebenen Starrkörpers als Menge Ω mit körperfestem Bezugssystem \mathcal{B} . Der Rand $\partial\Omega$ kann entweder durch eine Parameterdarstellung $\mathbf{c}(\tau)$ oder durch eine implizite Funktion $F(x, z) = 0$ definiert werden. (b) Kontakt zwischen zwei ebenen Starrkörpern Ω_1 und Ω_2 mit einem eindeutigen Kontaktpunkt (links) und einem ausgedehnten Kontaktbereich (rechts). Auf $\partial\Omega_1$ sind beispielhaft ein regulärer Punkt R mit dem äußeren Normalenvektor \mathbf{n}_R und ein singulärer Punkt S mit einem mengenwertigen äußeren Normalenvektor \mathbf{n}_S im Bereich zwischen $\mathbf{n}_{S,u}$ und $\mathbf{n}_{S,o}$ eingezeichnet.

siehe Abb. 2.1a. Wie in Abschnitt 1.2.2 beschrieben, kann diese Kurve entweder durch eine Parameterdarstellung der Form

$$\mathbf{c}(\tau) = x(\tau)\mathbf{b}_x + z(\tau)\mathbf{b}_z \tag{2.1}$$

oder durch eine implizite Funktion der Form

$$F(x, z) = 0 \tag{2.2}$$

definiert werden.² Eine allgemeine Umrechnung von einer Darstellung in die andere ist nicht möglich; Transformationen existieren nur für Sonderfälle. So gibt es ein Verfahren, um Parameterdarstellungen, die in Form rationaler Polynome gegeben sind, in eine implizite Funktion zu transformieren [171, 312]. Dies deckt jedoch einerseits nicht alle möglichen Parameterdarstellungen ab, andererseits ist das umgekehrte Vorgehen, also die Transformation einer impliziten Funktion in eine Parameterdarstellung mittels rationaler Polynome, im Allgemeinen nicht möglich.

Zwei Starrkörper Ω_1 (Bezugssystem \mathcal{B}) und Ω_2 (Bezugssystem $\mathcal{I} = \{O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$) sind genau dann im Kontakt mit einander, wenn es mindestens einen Punkt C gibt, der auf beiden Rändern liegt, ohne dass sich die Körper durchdringen:

$$\exists C : C \in \partial\Omega_1 \wedge C \in \partial\Omega_2 \wedge (\Omega_1 \setminus \partial\Omega_1) \cap (\Omega_2 \setminus \partial\Omega_2) = \emptyset . \tag{2.3}$$

² Auch bei der Verwendung von Polygonen oder dem Vorgehen der *constructive solid geometry* ist eine Repräsentation der einzelnen Elemente durch eine dieser beiden Darstellungen notwendig; bei diesen Geometrien ist oft eine Umrechnung von einer Darstellung in die andere möglich.

Während im Allgemeinen, wie in Abb. 2.1b dargestellt, mehrere nicht-zusammenhängende Abschnitte auf den Rändern zweier Starrkörper gleichzeitig in Kontakt sein können, sind im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit nur Kontaktprobleme mit einem eindeutigen Kontaktpunkt von Interesse. Beim Kontakt von Ω_1 mit einem ebenen Boden, dessen Rand $\partial\Omega_2$ wie abgebildet durch eine Gerade mit konstantem Normalenvektor \mathbf{e}_z gegeben ist, muss daher jeder Normalenvektor auf $\partial\Omega_1$ eindeutig einem Punkt zuordenbar sein. Dies folgt aus dem Kriterium der *gemeinsamen Normalen*, das besagt, dass die äußeren Normalenvektoren beider Gebiete im Kontaktpunkt antiparallel sind. Da der Rand $\partial\Omega_1$ stetig ist, kann diese Bedingung nur erfüllt sein, wenn Ω_1 konvex ist.

Bisher wurde stillschweigend davon ausgegangen, dass jedem Punkt auf dem Rand $\partial\Omega_1$ ein eindeutiger äußerer Normalenvektor zugeordnet werden kann. Dies ist jedoch nur an *regulären* Punkten der Fall, wie in Abb. 2.1b dargestellt. In *singulären* Punkten ist der Rand $\partial\Omega_1$ stetig, aber nicht stetig differenzierbar; die Kurve hat also einen Knick. Einem singulären Punkt S kann ein mengenwertiger Normalenvektor \mathbf{n}_S zugeordnet werden, der alle Orientierungen einschließt, die zwischen den beiden linksseitigen und rechtsseitigen Grenzwertwerten $\mathbf{n}_{S,u}$ und $\mathbf{n}_{S,o}$ liegen. Bei singulären Punkten auf dem Rand eines konvexen Gebiets ist diese Menge nicht leer.

Der Normalenvektor in einem Punkt P auf dem Rand $\partial\Omega_1$ kann durch Differentiation bestimmt werden. Bei der Darstellung des Rands durch eine implizite Funktion nach Gl. (2.2) ist ein (nicht-normierter) Normalenvektor in einem regulären Punkt P gegeben durch

$$\mathbf{n}_P = \frac{\partial}{\partial x} F(x, z) \Big|_{x=x_P, z=z_P} \mathbf{b}_x + \frac{\partial}{\partial z} F(x, z) \Big|_{x=x_P, z=z_P} \mathbf{b}_z . \quad (2.4)$$

Bei der Beschreibung von $\partial\Omega_1$ durch die Parameterdarstellung nach Gl. (2.1) ergibt sich in einem regulären Punkt P ein (nicht-normierter) Tangentenvektor

$$\mathbf{t}_P = \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{c}(\tau) \Big|_{\tau=\tau_P} \quad (2.5)$$

und damit ein dazu senkrechter (nicht-normierter) Normalenvektor

$$\mathbf{n}_P = \mathbf{b}_y \times \mathbf{t}_P . \quad (2.6)$$

Die beiden Normalenvektoren in Gl. (2.4) und (2.6) müssen noch normiert und korrekt orientiert werden. Es kann im Allgemeinen keine A-Priori-Aussage darüber gemacht werden, ob diese nach innen oder außen gerichtet sind.

Mit beiden Vorgehensweisen kann numerisch an einem gegebenen Punkt P auf dem Rand $\partial\Omega_1$ der zugehörige äußere Normaleneinheitsvektor bestimmt werden, der Aufwand ist jedoch nicht unerheblich. Bei Verwendung einer impliziten Funktion zur Definition des Randes muss zunächst iterativ ein Punkt auf dem Rand bestimmt werden, bevor der Normalenvektor nach Gl. (2.4) berechnet werden kann [224]. Bei Verwendung der Parameterdarstellung kann für einen gegebenen Wert des Parameters τ der zugehörige Punkt auf der Kurve und der zugehörige Normalenvektor nach Gl. (2.6) direkt ausgewertet werden. Der Kontaktpunkt, der über das Kriterium der gemeinsamen Normalen definiert ist, muss allerdings in beiden Varianten iterativ bestimmt werden, da eine Berechnung des Randpunktes zu einem gegebenen Normalenvektor nicht direkt möglich ist. Bei der Simulation von Bewegungen verändert sich die relative Orientierung der Starrkörper zueinander ständig, weshalb die iterative Bestimmung des Kontaktpunktes in jedem Simulationsschritt wiederholt werden muss. Bevor ein Ansatz für eine Parameterdarstellung vorgestellt wird, die eine direkte Bestimmung des Kontaktpunktes erlaubt, wird im nächsten Abschnitt zunächst auf die Besonderheiten eines einseitigen Kontakts in mechanischen Modellen eingegangen, wie er zwischen Fuß und Boden vorliegt.

2.2 Einseitige Kontakte zwischen ebenen Starrkörpern

Die Bestimmung von Kontaktpunkten zwischen starren Körpern ist zunächst in erster Linie ein geometrisches Problem, das erst in Kombination mit Interaktions- bzw. Kontaktkräften eine Bedeutung für mechanische Modelle bekommt. Bei der Beschreibung des Starrkörperkontakts zwischen Fuß und Boden muss berücksichtigt werden, dass es sich um einen einseitigen Kontakt³ handelt. Die beiden Körper können also so weit voneinander entfernt sein, dass kein Kontakt vorliegt. In diesem Fall liefert das Kriterium der gemeinsamen Normalen aus dem vorigen Abschnitt auf den beiden Rändern $\partial\Omega_1$ und $\partial\Omega_2$ jeweils einen *potentiellen* Kontaktpunkt C_1 und C_2 , siehe Abb. 2.2a. Wenn die beiden Körper nicht im Kontakt sind, ist der Abstand d zwischen den potentiellen Kontaktpunkten positiv. Andernfalls wirkt eine Kontaktkraft F_n in Normalenrichtung.

Diese Normalkraft F_n wirkt der Durchdringung der beiden Körper entgegen, deren Bewegung durch alle auf sie wirkenden Kräfte und Momente vorgegeben wird. Sie kann allerdings nur positive Werte annehmen (Druckkräfte),⁴ da negative Werte (Zugkräfte)

³ Englisch: unilateral contact.

⁴ In Systemen mit Adhäsion können auch Zugkräfte in einem Kontakt übertragen werden [369]. Diese erfordern jedoch wiederum eine entsprechende Modellierung und werden im Rahmen dieser Arbeit nicht betrachtet.

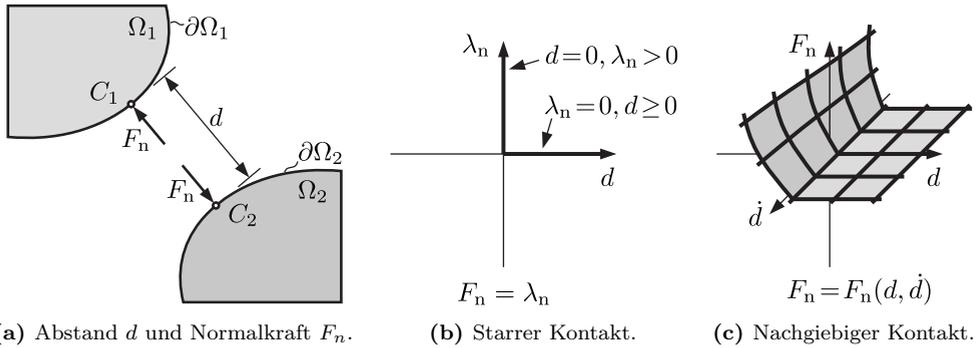


Abbildung 2.2: (a) Die potentiellen Kontaktpunkte C_1 und C_2 auf den Rändern $\partial\Omega_1$ und $\partial\Omega_2$ ergeben sich aus dem Kriterium der gemeinsamen Normalen. Der Abstand der potentiellen Kontaktpunkte ist d , in Normalenrichtung wirkt die Kontaktkraft F_n . (b) Bei ideal starren Körpern ist die Kontaktkraft $F_n = \lambda_n$ komplementär zum Abstand der Kontaktpunkte d . (c) Bei einem nachgiebig modellierten Kontakt wird ein Kraftgesetz für F_n in Abhängigkeit vom Abstand d und dessen Zeitableitung \dot{d} verwendet. Je nach Kraftgesetz ist auch eine geringe Durchdringung der beiden Körper möglich ($d < 0$) und/oder eine nicht-verschwindende Kraft bei $d = 0$, vgl. Abb. 1.9c.

das Öffnen des Kontakts verhindern würden. Wie in Abb. 2.2b dargestellt, führt die Betrachtung von $F_n = \lambda_n$ als Zwangskraft auf ein Komplementaritätsproblem

$$0 \leq \lambda_n \perp d \geq 0. \quad (2.7)$$

Wenn der Kontakt geöffnet ist, ist die Zwangskraft null und solange die Zwangskraft ungleich null ist, kann der Kontakt nicht öffnen. Zur Simulation von mechanischen Systemen mit Komplementaritätsproblemen gibt es entsprechende numerische Verfahren [329], die jedoch deutlich aufwendiger sind als solche für Systeme ohne Komplementaritätsproblem. Eine beliebte Strategie zur Vermeidung des Komplementaritätsproblems besteht darin, die Kontaktkraft nicht durch eine Zwangskraft, sondern durch eine eingepreiste Kraft aufzubringen. Wie bereits in Abschnitt 1.2.2 beschrieben (vgl. Abb. 1.9c, S. 24) und in Abb. 2.2c dargestellt, wird dabei ein Kraftgesetz modelliert, das vom Abstand d und dessen zeitlicher Änderung \dot{d} abhängt

$$F_n = F_n(d, \dot{d}). \quad (2.8)$$

Diese Annahme wird damit begründet, dass reale Körper immer eine endliche Steifigkeit aufweisen und daher eine kleine Verformung im Kontaktbereich stattfindet. Damit kann zwar das Komplementaritätsproblem vermieden werden, die so modellierten Systeme sind jedoch in der Regel sehr steif, was bei der numerischen Simulation ebenfalls geeignete Lösungsverfahren erfordert [145].

Bisher wurde lediglich die Normalkraft im Kontakt diskutiert. In mechanischen Systemen verursachen jedoch verschiedene Reibungseffekte auch eine tangentiale Kraft im Kontakt, wobei zwischen Haften und Gleiten unterschieden werden muss. Das Haften im Kontakt wird durch eine Zwangsbedingung in tangentialer Richtung erreicht, was wiederum auf eine Zwangskraft $F_t = \lambda_t$ führt. Dabei wird vorgegeben, dass die relative Tangentialgeschwindigkeit $v_{t,\text{rel}}$ der beiden materiellen Kontaktpunkte verschwindet [369]. Das Haften in tangentialer Richtung ist dabei nur möglich, wenn das Verhältnis aus tangentialer und normaler Kraft unterhalb des Haftreibungskoeffizienten μ_H liegt [275]. Beim Überschreiten dieser Haftgrenze geht der Kontakt ins Gleiten über – in diesem Fall gibt es eine tangentiale Relativbewegung der materiellen Kontaktpunkte. Es ergibt sich also ein weiteres Komplementaritätsproblem der Form

$$0 \leq \mu_H F_n + \lambda_t \perp v_{t,\text{rel}} \perp \mu_H F_n - \lambda_t \geq 0, \quad (2.9)$$

wobei die dabei auftretende Normalkraft F_n ebenfalls eine Zwangskraft sein kann, wenn sie aus dem Komplementaritätsproblem (2.7) resultiert. Beim Gleiten ist die Tangentialkraft abhängig von der Normalkraft, der Relativgeschwindigkeit und vielen weiteren Faktoren wie der Temperatur, der Materialpaarung und Oberflächenbeschaffenheit. In der vorliegenden Arbeit werden keine Gleitvorgänge betrachtet, weshalb hierauf nicht näher eingegangen wird. Auch wenn im Kontakt Haften vorliegt, ist im Allgemeinen eine Relativbewegung der beteiligten Körper zueinander möglich. Bei ebenen Systemen, wie sie hier betrachtet werden, führt Haften im Kontakt zum Abrollen der Körper aufeinander.

Bei der bisherigen Diskussion wurde davon ausgegangen, dass die Körper bereits im Kontakt zueinander sind und durch die Kontaktkräfte lediglich die Durchdringung in Normalenrichtung verhindert, bzw. das Gleiten in Tangentialrichtung beeinflusst wird. Bei mechanischen Systemen mit einseitigen Kontakten ist jedoch der Stoß beim Aufeinandertreffen der Kontaktpunkte mit endlicher Geschwindigkeit von wesentlicher Bedeutung für die resultierenden Bewegungen. Stoßvorgänge können nur sehr eingeschränkt durch Starrkörpermodelle abgebildet werden. Beim Aufeinandertreffen der Kontaktpunkte treten in realen Körpern lokale Verformungen auf, die je nach Beschaffenheit der Materialstruktur und Oberfläche elastisch, aber auch plastisch ablaufen können. Bei spitzen Geometrien ist ein Eintauchen eines Körpers in den anderen möglich, was zu relativ großen Verformungen führt. Ein Teil der Aufprallenergie breitet sich in Form von Spannungswellen in den Körpern aus und wird dort auch an Materialdefekten und Grenzflächen reflektiert [179]. Die reflektierten Wellen beeinflussen wiederum den Kontakt, was zum Rückfedern und erneuten Stößen führen kann [327]. All diese Vorgänge werden in Starrkörpermodellen nicht abgebildet, weshalb der Stoßvorgang selbst nur eingeschränkt berechnet und simuliert werden

kann. Um dennoch eine möglichst gute Aussagekraft zu erhalten, wurde eine Vielzahl von Kontaktmodellen entwickelt [25], die zum Teil bei den verschiedenen Fußmodellen in Abschnitt 1.2.2 Anwendung finden.

Eine sehr einfache Annahme, die in der vorliegenden Arbeit im Folgenden verwendet wird, ist der plastische Stoß. Dabei wird davon ausgegangen, dass sämtliche Aufprallenergie beim Stoß dissipiert wird und kein Rückfedern stattfindet. Diese Annahme ist bei Modellen für zweibeiniges Gehen darin begründet, dass auch beim Gehen des Menschen kein Rückfedern nach dem Aufsetzen der Ferse beobachtet wird. Stattdessen wird der Fuß durch die Verformung des Gewebes und ggf. durch das Material einer Schuhsohle abgebremst, bis er in Normalenrichtung zum Stillstand kommt. Kleine Rückfederbewegungen werden durch die Rückverformung des Gewebes ausgeglichen, wobei die Normalkraft nicht merkbar abnimmt, siehe Abb. 1.8b (S. 23). Diese Annahme kann nicht ohne weiteres auf Roboterfüße übertragen werden. Es basieren allerdings alle HZD-Regler auf der Annahme von plastischen Stößen, was in der Vielzahl der damit durchgeführten Experimente auch zu guten Ergebnissen führt. Für die Zielstellung dieser Arbeit, effiziente Modelle zur numerischen Simulation und möglichen Echtzeit-Regelung von zweibeinigen Robotern zu entwickeln, erscheint die Annahme eines plastischen Stoßes trotz der starken Vereinfachungen daher gerechtfertigt. Bei all diesen Überlegungen ist jedoch entscheidend, dass die potentiellen Kontaktpunkte auf den beteiligten Körpern bestimmt wurden. Es wird deshalb im nächsten Abschnitt ein Modell vorgestellt, mit dem eine explizite Berechnung der potentiellen Kontaktpunkte auf einem konvexen Starrkörper für den Fuß und einem ebenen Boden möglich ist.

2.3 Kinematik der ebenen Rollbewegung

Der im Folgenden vorgestellte Ansatz zur Beschreibung eines konvexen ebenen Starrkörpers, dessen potentieller Kontaktpunkt mit einer Geraden explizit berechnet werden kann, wurde bereits vom Verfasser in [396] veröffentlicht. Der Ansatz ist jedoch essentiell für das Fußmodell in Kapitel 3, weshalb die wesentlichen Schritte der Herleitung ([396, Abschnitt 4]) hier wiedergegeben werden.

Wie in Abschnitt 2.1 beschrieben, kann der Rand eines ebenen Starrkörpers durch eine Parameterdarstellung nach Gl. (2.1) beschrieben werden. Durch die Auswertung dieser Gleichung für einen Wert des Parameters τ kann der zugehörige Punkt auf der Kurve direkt berechnet werden. Die Berechnung von Tangenten- und Normalenvektoren ist durch die Gl. (2.5) und (2.6) ebenfalls direkt möglich. Das Problem bei der Bestimmung der potentiellen Kontaktpunkte auf Fuß und Boden über das Kriterium der gemeinsamen Normalen besteht darin, dass der Parameter τ zu einer vorgegebenen Richtung des Normalenvektors im Allgemeinen nicht direkt, sondern nur iterativ bestimmt werden kann. Der hier betrachtete Fuß-Boden-Kontakt weist allerdings die

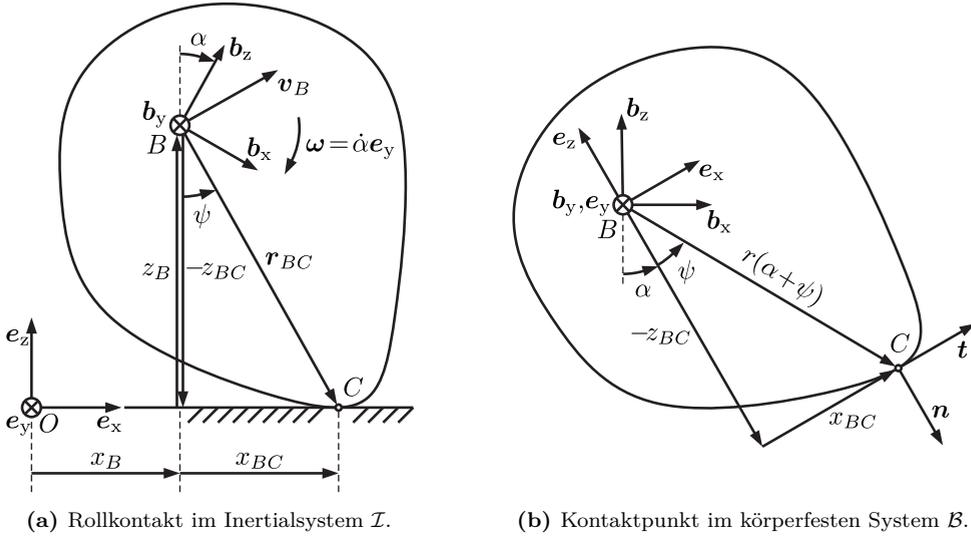


Abbildung 2.3: (a) Rollen eines konvexen ebenen Starrkörpers auf dem Boden, dargestellt im Inertialsystem \mathcal{I} . Die Orientierung des Körpers ist durch den Winkel α gegeben. Der Kontakt findet im eindeutigen Kontaktpunkt C statt. (b) Darstellung desselben Kontaktpunkts mit zugehörigem Tangentialvektor t und Normalenvektor n im körperfesten Bezugssystem \mathcal{B} .

Besonderheit auf, dass der Normalenvektor des ebenen Bodens konstant ist. Durch eine Parameterdarstellung, bei der τ gerade die Richtung des Normalenvektors am zugehörigen Kurvenpunkt beschreibt, ist also eine direkte Bestimmung des potentiellen Kontaktpunkts möglich. Die Aufgabe besteht im Folgenden nun darin, eine solche Parameterdarstellung zu entwickeln.

Zur Lösung dieses Problems wird der in Abb. 2.3 dargestellte Sonderfall des Rollens betrachtet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, dass der Boden fest mit dem Inertialsystem $\mathcal{I} = \{O, e_x, e_y, e_z\}$ verbunden ist. Der Rand des Bodens ist eine Gerade in e_x -Richtung, die durch den Ursprung O verläuft. Die Lage und Orientierung eines konvexen Starrkörpers mit dem körperfesten Bezugssystem $\mathcal{B} = \{B, b_x, b_y, b_z\}$ kann durch die generalisierten Koordinaten $\mathbf{q} = [x_B, z_B, \alpha]^T$ eindeutig beschrieben werden. Wie aus Abb. 2.3 ersichtlich ist, hängt die Lage des Kontaktpunktes C relativ zu B lediglich von der Orientierung α ab. Mit der oben getroffenen Annahme, dass der Kontaktpunkt C für alle Orientierungen α eindeutig ist, kann gezeigt werden, dass diese relative Lage $\mathbf{r}_{BC}(\alpha)$ nur von einer skalaren Funktion $f_B : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_B \in C^2$ abhängt. Diese Funktion $f_B(\alpha)$ ist dabei eine Parametrisierung des minimalen Abstands zwischen dem Punkt B und dem Boden, also die Projektion des Vektors $\mathbf{r}_{BC}(\alpha)$ auf die Richtung e_z . Die Abhängigkeit zwischen $\mathbf{r}_{BC}(\alpha)$ und $f_B(\alpha)$ kann aus dem Sonderfall der Rollbewegung des Körpers abgeleitet werden. Bei einer

Rollbewegung verschwinden die materiellen Geschwindigkeiten im Kontaktpunkt,⁵ wodurch zwei Freiheitsgrade eingeschränkt werden. Die absolute Lage des körperfesten Bezugspunkts B und des Kontaktpunkts C , sowie deren relative Lage zueinander, hängt dann nur noch von der Orientierung α ab:

$$\mathbf{r}_B = x_B(\alpha)\mathbf{e}_x + z_B(\alpha)\mathbf{e}_z, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{r}_C = x_C(\alpha)\mathbf{e}_x, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{BC} &= \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_B \\ &= x_{BC}(\alpha)\mathbf{e}_x + z_{BC}(\alpha)\mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Für die Rollbewegung ergibt sich damit direkt der Zusammenhang

$$z_B(\alpha) = -z_{BC}(\alpha). \quad (2.13)$$

Da sich der Körper im Kontakt mit dem Boden befindet, ist der vertikale Abstand des Punktes B vom Boden durch die gerade eingeführte Funktion als

$$z_B(\alpha) = f_B(\alpha), \quad (2.14)$$

$$z_{BC}(\alpha) = -f_B(\alpha) \quad (2.15)$$

gegeben. Die Abhängigkeit zwischen $x_{BC}(\alpha)$ und $f_B(\alpha)$ folgt aus der Geschwindigkeit des Punktes B für eine beliebige Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega} = \dot{\alpha}\mathbf{e}_y$, die auf zwei Arten bestimmt werden kann: durch Ableitung der Lage ergibt sich einerseits

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_B &=: \mathbf{v}_B = \dot{x}_B(\alpha, \dot{\alpha})\mathbf{e}_x + \dot{z}_B(\alpha, \dot{\alpha})\mathbf{e}_z \\ &= x'_B(\alpha)\dot{\alpha}\mathbf{e}_x + z'_B(\alpha)\dot{\alpha}\mathbf{e}_z \\ &= x'_B(\alpha)\dot{\alpha}\mathbf{e}_x + f'_B(\alpha)\dot{\alpha}\mathbf{e}_z; \end{aligned} \quad (2.16)$$

mit der Rollbedingung

$$\dot{\mathbf{r}}_C = \mathbf{v}_C = \mathbf{0} \quad (2.17)$$

ergibt sich aus der kinematischen Grundgleichung [368, Gl. (2.76)] andererseits

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{CB} \\ &= -z_{BC}(\alpha)\dot{\alpha}\mathbf{e}_x + x_{BC}(\alpha)\dot{\alpha}\mathbf{e}_z \\ &= f_B(\alpha)\dot{\alpha}\mathbf{e}_x + x_{BC}(\alpha)\dot{\alpha}\mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (2.18)$$

⁵ Im Allgemeinen verschwindet beim Rollen nur die Differenz der materiellen Geschwindigkeiten. Da der Boden im Inertialsystem fixiert ist, ist dessen Geschwindigkeit jedoch immer null.

Aus einem Koeffizientenvergleich von Gl. (2.16) und (2.18) folgen die gesuchten Zusammenhänge

$$x_{BC}(\alpha) = f'_B(\alpha) , \quad (2.19)$$

$$x_B(\alpha) = x_{B,0} + \int_0^\alpha f_B(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha} , \quad (2.20)$$

$$x_C(\alpha) = x_{B,0} + \int_0^\alpha f_B(\bar{\alpha}) d\bar{\alpha} + f'_B(\alpha) \quad (2.21)$$

mit der Integrationskonstanten $x_{B,0}$. Damit ist die relative Lage des Kontaktpunktes

$$\mathbf{r}_{BC}(\alpha) = f'_B(\alpha)\mathbf{e}_x - f_B(\alpha)\mathbf{e}_z . \quad (2.22)$$

Die Parameterdarstellung der Kurve, die den Rand des Körpers beschreibt, kann in körperfesten Polarkoordinaten (r, ϕ) in der Form

$$\|\mathbf{r}_{BC}(\alpha)\|_2 = r(\alpha) = \sqrt{f_B'^2(\alpha) + f_B^2(\alpha)} , \quad (2.23)$$

$$\psi(\alpha) = \arctan\left(\frac{f'_B(\alpha)}{f_B(\alpha)}\right) , \quad (2.24)$$

$$\alpha + \psi(\alpha) = \phi(\alpha) = \alpha + \arctan\left(\frac{f'_B(\alpha)}{f_B(\alpha)}\right) \quad (2.25)$$

angegeben werden, wie aus Abb. 2.3b ersichtlich ist. Die Krümmung der Kurve am momentanen Kontaktpunkt $C(\alpha)$ kann aus der Lage von C in \mathcal{B}

$$\mathbf{r}_{BC} = f'_B(\alpha)\mathbf{e}_x(\alpha) - f_B(\alpha)\mathbf{e}_z(\alpha) \quad (2.26)$$

und der Transformation

$$\mathbf{e}_x(\alpha) = \cos(\alpha)\mathbf{b}_x + \sin(\alpha)\mathbf{b}_z , \quad (2.27a)$$

$$\mathbf{e}_y(\alpha) = \mathbf{b}_y , \quad (2.27b)$$

$$\mathbf{e}_z(\alpha) = -\sin(\alpha)\mathbf{b}_x + \cos(\alpha)\mathbf{b}_z \quad (2.27c)$$

abgeleitet werden. Der Tangenten- und der Normalenvektor am Kontaktpunkt sind

$$\mathbf{t}(\alpha) = \mathbf{e}_x(\alpha) , \quad (2.28a)$$

$$\mathbf{n}(\alpha) = \mathbf{e}_z(\alpha) \quad (2.28b)$$

mit den zugehörigen Ableitungen

$$\frac{d}{d\alpha} \mathbf{t}(\alpha) = \mathbf{e}_z(\alpha) = \mathbf{n}(\alpha) , \quad (2.29a)$$

$$\frac{d}{d\alpha} \mathbf{n}(\alpha) = -\mathbf{e}_x(\alpha) = -\mathbf{t}(\alpha) . \quad (2.29b)$$

Die Krümmung der Kurve folgt aus der Ableitung des Tangentenvektors \mathbf{t} nach der Bogenlänge s :

$$\frac{d}{ds} \mathbf{t}(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \mathbf{t}(\alpha) \frac{d\alpha}{ds} = \kappa(\alpha) \mathbf{n}(\alpha) , \quad (2.30)$$

$$\Rightarrow \quad \kappa(\alpha) = \frac{d\alpha}{ds} = \left(\frac{ds}{d\alpha} \right)^{-1} . \quad (2.31)$$

Durch die Rollbedingung ist die Bogenlänge zwischen zwei (Kontakt-)Punkten auf dem Rand des Körpers gleich der Entfernung zwischen den beiden zugehörigen (Kontakt-)Punkten auf dem Boden. Die Ableitung der Bogenlänge s nach dem Winkel α ist also gleich der Ableitung der Lage von C im Inertialsystem \mathcal{I}

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} x_C(\alpha) = f_B''(\alpha) + f_B(\alpha) , \quad (2.32)$$

womit sich die Krümmung und der Krümmungsradius zu

$$\kappa(\alpha) = (f_B''(\alpha) + f_B(\alpha))^{-1} , \quad (2.33)$$

$$(\kappa(\alpha))^{-1} = R_\kappa(\alpha) = f_B''(\alpha) + f_B(\alpha) \quad (2.34)$$

ergeben.

Damit ist die gesuchte Parameterdarstellung in Abhängigkeit von der Orientierung des Normalenvektors gefunden. Durch Festlegen einer Funktion $f_B(\alpha)$ ergeben sich die Beziehungen Gln. (2.19)–(2.22) sowie die Krümmung und der Krümmungsradius nach Gl. (2.33) und (2.34). Bei der Definition einer Funktion $f_B(\alpha)$ muss sichergestellt werden, dass die vorher getroffene Annahme eines eindeutigen Kontaktpunktes erfüllt wird. Wenn die Kurve an allen Punkten einen positiven Krümmungsradius aufweist,

$$R_\kappa(\alpha) > 0 \quad \forall \alpha , \quad (2.35)$$

ist die Kurve konvex und diese Bedingung erfüllt. Zur Beschreibung der Fußgeometrie wird im nächsten Absatz eine Parametrisierung für $f_B(\alpha)$ vorgestellt, bei der eine anschauliche geometrische Interpretation für die Parameter möglich ist, und welche die Konvexitätsbedingung Gl. (2.35) immer erfüllt.

3 Fußmodell

Basierend auf der vorgestellten Methode zur Beschreibung der Geometrie eines ebenen, konvexen Starrkörpers wird im Folgenden eine spezielle Parametrisierung hergeleitet, die sich zur Beschreibung der Abrollform eines ebenen Fußes eignet. Das Ziel ist dabei, eine möglichst geringe Anzahl an Parametern zu erhalten, die außerdem geometrisch als Längen oder Winkel interpretiert werden können. Diese Parametrisierung wird zunächst in Abschnitt 3.1 anhand von Verläufen bei der menschlichen Gehbewegung motiviert. Anschließend wird in Abschnitt 3.2 eine Methode zur Erzeugung regulärer Parametrisierungen aus konvexen Polygonen entwickelt, die schließlich in Abschnitt 3.3 zur Beschreibung von zwei Fußmodellen verwendet wird.

3.1 Kinematik des Sprunggelenks beim Gehen des Menschen

In Abschnitt 2.3 wird gezeigt, dass es zur Parametrisierung der Geometrie eines Starrkörpers ausreichend ist, den vertikalen Abstand des Randes von einem körperfesten Punkt als Funktion der Orientierung vorzugeben. Die einzige Einschränkung bei diesem Vorgehen ist die A-Priori-Annahme, dass der Kontaktpunkt für alle Orientierungen eindeutig ist, was durch die Konvexitätsbedingung Gl. (2.35) a posteriori überprüft werden kann. Zur Motivation der im Folgenden vorgestellten Parametrisierung werden in Abb. 3.1a die bereits in Abb. 1.11a (S. 28) eingeführten Messungen der Trajektorien von Knie, Sprunggelenk und Druckpunkt bei der Gehbewegung eines Menschen betrachtet. Diese Messungen – insbesondere die Darstellung des Druckpunkts in einem unterschenkelfesten Bezugssystem in Abb. 3.1a(B) – sind der Ausgangspunkt bei der Entwicklung der Abrollformen zur Modellierung des menschlichen Fußes durch einen unterschenkelfesten Kreisbogen ohne bewegliches Sprunggelenk, wie ausführlich in Abschnitt 1.2.2 dargelegt wird. Die hier zugrundeliegende Idee ist jedoch nicht die Reproduktion des Druckpunktverlaufs in Bezug auf den Unterschenkel, sondern das Erzeugen der Sprunggelenktrajektorie durch eine Abrollform für den Fuß, also für ein Modell mit beweglichem Sprunggelenk.

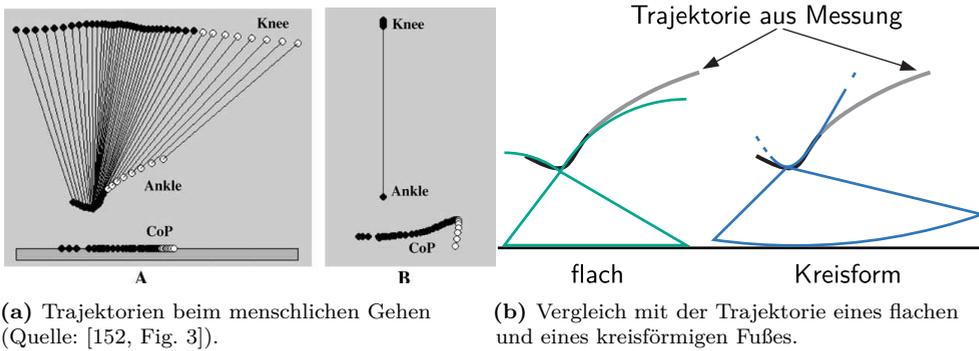


Abbildung 3.1: (a) Gemessene Trajektorien von Sprunggelenk (Ankle), Knie (Knee) und Druckpunkt (CoP) des Standbeins; schwarze Datenpunkte in der ESP, weiße in der DSP. Darstellung in (A) im Inertialsystem und (B) im unterschenkelfesten System. (b) Vergleich der Trajektorie des Sprunggelenks aus der Messung (schwarz: ESP, grau: DSP) mit der eines flachen Fußes (grün) und eines kreisförmigen Fußes (blau). Der gestrichelte Bereich der blauen Trajektorie entspricht einer Fortsetzung des Abrollens auf dem Kreis außerhalb des dargestellten Kreisbogensegments.

In Abb. 3.1b sind der Sprunggelenktrajektorie aus diesen Messungen die eines flachen Fußes und eines kreisförmigen Fußes gegenübergestellt. Die Trajektorie des flachen Fußes besteht aus zwei Kreisbögen, deren Zentrum in der Ferse bzw. in den Zehen liegt. Im dargestellten flach aufliegenden Fall findet der Übergang von einem Kreisbogen in den anderen statt; die Trajektorie ist an dieser Stelle nicht glatt und es gibt mehr als einen Kontaktpunkt. Die Trajektorie des kreisförmigen Fußes ist eine verkürzte Zykloide, der gestrichelt dargestellte Bereich entspricht einer Fortsetzung des Abrollvorgangs auf dem Kreis außerhalb des dargestellten Kreisbogensegments. Aus den beiden Vergleichen ist ersichtlich, dass die Trajektorie in der ESP einigermaßen approximiert werden kann, während in beiden Fällen große Abweichungen in der DSP vorhanden sind. Beim Vergleich der Sprunggelenktrajektorien ist die Abweichung beim flachen Fuß qualitativ geringer als beim kreisförmigen Fuß, das Problem ist jedoch die fehlende Eindeutigkeit des Kontaktpunktes in der dargestellten Lage und der nichtglatte Übergang von einem Kreisbogen auf den anderen. Die Idee bei der Entwicklung einer regulären Parametrisierung im folgenden Abschnitt ist daher, für die nichtglatte Trajektorie des Polygons eine Regularisierung durchzuführen, so dass die Verbindung der Eckpunkte nicht durch eine gerade, sondern durch eine gekrümmte Linie erfolgt. Dadurch kann eine polygonale Geometrie vorgegeben werden – beim flachen Fuß das Dreieck in Abb. 3.1b –, dessen Übergänge anschließend durch einen Regularisierungsparameter „abgerundet“ werden. Dies erlaubt eine einfache geometrische Interpretation der so erzeugten Parametrisierung: die Parameter entsprechen den Abmessungen des Polygons und der „Rundheit“ der Übergänge.

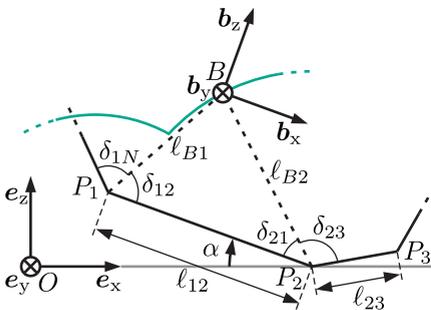
3.2 Regularisierung konvexer Polygone

Die ebenen Fußmodelle im nächsten Abschnitt werden aus konvexen Polygonen durch eine Regularisierung der Trajektorien eines körperfesten Bezugspunkts erzeugt. Diese Trajektorie besteht aus Kreisbogensegmenten, deren Mittelpunkt jeweils in einem Eckpunkt des Polygons liegt, und die beim ursprünglichen Polygon nichtglatt ineinander übergehen. In diesem Abschnitt wird eine Methode zur Regularisierung dieser Trajektorien hergeleitet, mittels derer eine glatte Trajektorie erzeugt werden kann, die bei allen Orientierungen des Körpers einen eindeutigen (potentiellen) Kontaktpunkt ergibt. Die Methode wird anschließend in Abschnitt 3.3 verwendet, um zwei Fußmodelle zu parametrisieren. Ein Beweis für die Konvexität der Geometrie, die durch diese Parametrisierung erzeugt wird, wird in Anhang A gegeben.

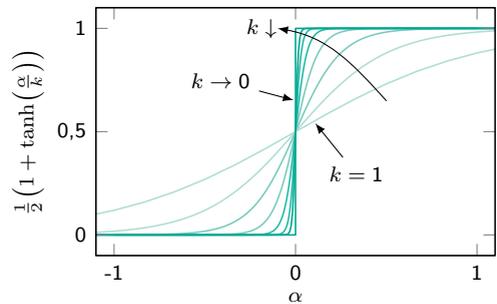
Ein Ausschnitt aus der Geometrie eines konvexen Polygons mit N Eckpunkten P_1, \dots, P_N ist in Abb. 3.2a dargestellt. Zunächst wird nur der Abschnitt zwischen P_1 und P_2 betrachtet und die daran entwickelte Methode anschließend auf eine beliebige Anzahl an Eckpunkten verallgemeinert. Ein körperfestes Bezugssystem \mathcal{B} beschreibt die Lage und Orientierung des Polygons, wobei im Folgenden die Trajektorie des körperfesten Bezugspunkts B

$$\mathbf{r}_B = x_B(\alpha)\mathbf{e}_x + z_B(\alpha)\mathbf{e}_z \quad (3.1)$$

beim Abrollen des Polygons auf dem ebenen Boden betrachtet wird. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wird angenommen, dass bei $\alpha = 0$ die gesamte Kante des



(a) Geometrie eines abrollenden Polygons.



(b) Regularisierung der Einheitssprungfunktion.

Abbildung 3.2: (a) Geometrie eines abrollenden, konvexen Polygons. Es ist der Ausschnitt mit den Eckpunkten P_1, P_2, P_3 dargestellt, der Ursprung O des Inertialsystems \mathcal{I} ist zur besseren Übersicht gegenüber der Beschreibung im Text nach links verschoben. Es sind die relevanten Abmessungen zur Beschreibung der Trajektorie des körperfesten Bezugspunkts B (grün) eingezeichnet. (b) Verlauf der regularisierten Einheitssprungfunktion mit dem Regularisierungsparameter k .

Polygons zwischen P_1 und P_2 auf dem Boden aufliegt, und sich der Punkt P_1 dabei im Ursprung O des Inertialsystems \mathcal{I} befindet.

Die Trajektorie des Bezugspunkts B beim Abrollen über die beiden Eckpunkte P_1 und P_2 kann mit den Abmessungen in Abb. 3.2a durch die abschnittsweise definierten Funktionen

$$x_B(\alpha) = \begin{cases} \vdots \\ \ell_{B1} \cos(\alpha - \delta_{12}), & \alpha < 0, \\ \ell_{12} - \ell_{B2} \cos(\alpha + \delta_{21}), & 0 \leq \alpha, \\ \vdots \end{cases} \quad (3.2a)$$

$$z_B(\alpha) = \begin{cases} \vdots \\ -\ell_{B1} \sin(\alpha - \delta_{12}), & \alpha < 0, \\ \ell_{B2} \sin(\alpha + \delta_{21}), & 0 \leq \alpha, \\ \vdots \end{cases} \quad (3.2b)$$

beschrieben werden, wobei zunächst angenommen wird, dass der Winkel α so beschränkt ist, dass kein weiterer Eckpunkt des Polygons in Kontakt kommt. Die abschnittsweise Definition der Trajektorie in Gl. (3.2) ist nicht geeignet zur Glättung der Übergänge, weshalb eine äquivalente Beschreibung mithilfe der Heaviside-Funktion (Einheitssprungfunktion) $\Theta(\alpha)$ betrachtet wird:

$$x_B(\alpha) = (\ell_{B1} \cos(\alpha - \delta_{12}))(1 - \Theta(\alpha)) + (\ell_{12} - \ell_{B2} \cos(\alpha + \delta_{21}))\Theta(\alpha) + x_{\text{Rest}}(\alpha), \quad (3.3a)$$

$$z_B(\alpha) = (-\ell_{B1} \sin(\alpha - \delta_{12}))(1 - \Theta(\alpha)) + (\ell_{B2} \sin(\alpha + \delta_{21}))\Theta(\alpha) + z_{\text{Rest}}(\alpha). \quad (3.3b)$$

Die Ausdrücke $x_{\text{Rest}}(\alpha)$ und $z_{\text{Rest}}(\alpha)$ beschreiben die Trajektorie außerhalb des momentan betrachteten Winkelbereichs. Die Gln. (3.3) können mit

$$\ell_{B1} \sin(\delta_{12}) = \ell_{B2} \sin(\delta_{21}), \quad (3.4a)$$

$$\ell_{12} = \ell_{B1} \cos(\delta_{12}) + \ell_{B2} \cos(\delta_{21}) \quad (3.4b)$$

weiter zu

$$x_B(\alpha) = \ell_{B1} \cos(\alpha - \delta_{12}) + \ell_{12}(1 - \cos(\alpha))\Theta(\alpha) + x_{\text{Rest}}(\alpha), \quad (3.5a)$$

$$z_B(\alpha) = -\ell_{B1} \sin(\alpha - \delta_{12}) + \ell_{12} \sin(\alpha)\Theta(\alpha) + z_{\text{Rest}}(\alpha) \quad (3.5b)$$

umgeformt werden. Ausgehend von einem Winkel $\alpha < 0$ werden also beim Übergang der Trajektorie von einem Kreisbogen auf den nächsten durch die Heaviside-Funktion die Terme $\ell_{12}(1 - \cos(\alpha))$ bzw. $\ell_{12} \sin(\alpha)$ einblendet. Diese Terme hängen lediglich von der Entfernung der Punkte P_1 und P_2 ab, eine Struktur, die bei allen Übergängen auftritt: ein weiterer Übergang beim Kontakt des nächsten Eckpunkts P_3 kann durch das Einblenden weiterer Terme mittels der Heaviside-Funktion in die Beschreibung der Trajektorie integriert werden, womit sich

$$\begin{aligned} x_B(\alpha) = & \ell_{B1} \cos(\alpha - \delta_{12}) + \ell_{12}(1 - \cos(\alpha))\Theta(\alpha) \\ & + \ell_{23}(1 - \cos(\alpha - (\pi - \delta_{21} - \delta_{23})))\Theta(\alpha - (\pi - \delta_{21} - \delta_{23})) + x_{\text{Rest}}(\alpha) \end{aligned} \quad (3.6)$$

ergibt¹, sowie ein entsprechender Ausdruck für $z_B(\alpha)$.

Die Struktur der nichtglatten Trajektorie des konvexen Polygons in Gl. (3.5), die sich unter Verwendung der Heaviside-Funktion ergibt, ist der Ausgangspunkt für die Regularisierung zur Erzeugung einer glatten Trajektorie. Die Trajektorie ist bei $\alpha = 0$ singulär, da die Ableitung der Heaviside-Funktion an dieser Stelle nicht definiert ist. Der gewählte Ansatz zur Regularisierung der Trajektorie besteht darin, die Heaviside-Funktion durch eine logistische Funktion

$$\Theta(\alpha) \approx \Theta_{\text{reg}}(\alpha) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh\left(\frac{\alpha}{k}\right) \right) \quad (3.7)$$

anzunähern, die für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ regulär ist. Durch den Wert des Regularisierungsparameters k kann, wie in Abb. 3.2b dargestellt, die Abweichung der Approximation gesteuert werden. Je kleiner dieser Wert ist, desto geringer die Abweichung, wobei im Grenzfall

$$\Theta(\alpha) = \lim_{k \rightarrow 0} \Theta_{\text{reg}}(\alpha) \quad (3.8)$$

die logistische Funktion in die Heaviside-Funktion übergeht.

Diese Regularisierung kann jedoch nicht gleichzeitig in Gl. (3.5a) und (3.5b) eingesetzt werden, da nach Gl. (2.14) und (2.20) sowohl $x_B(\alpha) = \int z_B(\alpha) d\alpha + x_{B,0}$ als auch $z_B(\alpha) = x'_B(\alpha)$ gelten muss. Da bei einer gegebenen Funktion das Finden einer Stammfunktion ungleich schwieriger ist als die Berechnung einer Ableitung, wird die Regularisierung auf $x_B(\alpha)$ angewendet. Aus den Ableitungen von

$$x_B(\alpha) = F_B(\alpha) + x_{B,0} \quad (3.9)$$

¹ Da der Restterm $x_{\text{Rest}}(\alpha)$ im Folgenden nicht relevant ist, wird dasselbe Formelzeichen wie in Gl. (3.5a) verwendet, obwohl sich der Wert dieses Ausdrucks verändert hat.

können dann mit Gl. (2.19) bis (2.21) und (2.34) die Lage des potentiellen Kontaktpunkts und der Krümmungsradius berechnet werden:

$$z_B(\alpha) = F'_B(\alpha) , \quad (3.10a)$$

$$x_{BC}(\alpha) = F''_B(\alpha) , \quad (3.10b)$$

$$R_\kappa(\alpha) = F'_B(\alpha) + F'''_B(\alpha) . \quad (3.10c)$$

Die Konstante $x_{B,0}$ ist abhängig von der Anfangslage des Polygons relativ zum Ursprung O . $F_B(\alpha)$ ist eine Stammfunktion für die im vorherigen Kapitel eingeführte Funktion $f_B(\alpha)$. Durch direktes Einsetzen der Regularisierung (3.7) in Gl. (3.5a) ergibt sich eine mögliche Parametrisierung für konvexe Polygone:

$$F_{B,1}(\alpha) = \ell_{B1} \cos(\alpha - \delta_{12}) + \frac{1}{2} \ell_{12} (1 - \cos(\alpha)) \left(1 + \tanh\left(\frac{\alpha}{k}\right) \right) + x_{\text{Rest}}(\alpha) . \quad (3.11)$$

Es muss jedoch noch die Konvexitätsbedingung Gl. (2.35) überprüft werden, also ob der Krümmungsradius für alle α streng positiv ist. Die Ableitungen in Gl. (3.10c) können für jeden der drei Summanden getrennt berechnet und jeweils addiert werden. Da der erste Summand eine harmonische Funktion in α ist, ergibt die Summe aus erster und dritter Ableitung für diesen null. Damit ist der Krümmungsradius

$$R_{\kappa,1}(\alpha) = \frac{\ell_{12}}{2k} \left(1 - \tanh^2\left(\frac{\alpha}{k}\right) \right) \left[(2 \cos(\alpha) + 1) - \frac{6}{k} \sin(\alpha) \tanh\left(\frac{\alpha}{k}\right) - \frac{1}{k^2} (1 - \cos(\alpha)) \left(2 - 6 \tanh^2\left(\frac{\alpha}{k}\right) \right) \right] + R_{\kappa,\text{Rest}}(\alpha) , \quad (3.12)$$

wobei der Term $R_{\kappa,\text{Rest}}(\alpha) = x'_{\text{Rest}}(\alpha) + x'''_{\text{Rest}}(\alpha)$ zunächst nicht weiter betrachtet wird. Das Vorzeichen des regularisierten Terms, das in Abb. 3.3a dargestellt ist, wird durch den Ausdruck in der eckigen Klammer bestimmt. Der Krümmungsradius nach Gl. (3.12) wird unabhängig vom Regularisierungsparameter k in einigen Winkelbereichen negativ, weshalb dieses Vorgehen zur Regularisierung nicht ausreichend ist. Die Notwendigkeit einer Modifikation dieses Vorgehens wird in [397] festgestellt und diskutiert, allerdings wird dort keine geschlossene Lösung angegeben, die Konvexität garantiert. Durch Addition eines Terms im letzten Summanden von Gl. (3.11) kann eine solche geschlossene Lösung in der Form

$$F_{B,2}(\alpha) = \ell_{B1} \cos(\alpha - \delta_{12}) + \frac{1}{2} \ell_{12} (k^2 + 1 - \cos(\alpha)) \left(1 + \tanh\left(\frac{\alpha}{k}\right) \right) + x_{\text{Rest}}(\alpha) \quad (3.13)$$

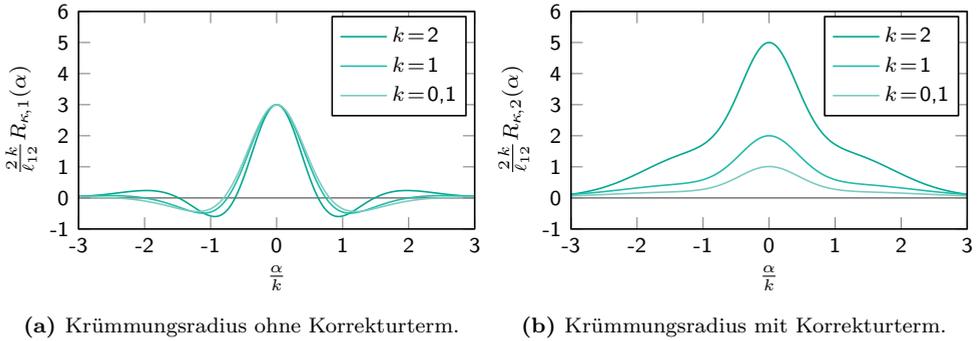


Abbildung 3.3: Vorzeichenbehafteter Anteil des Krümmungsradius (a) nach Gl. (3.11) mit positiven und negativen Wertebereichen und (b) nach Gl. (3.13) mit streng positivem Wertebereich.

erreicht werden, womit sich der Krümmungsradius

$$\begin{aligned}
 R_{\kappa,2}(\alpha) &= \frac{\ell_{12}}{2k} \left(1 - \tanh^2\left(\frac{\alpha}{k}\right)\right) \left[\left(2 \cos(\alpha) - 1 + k^2 + 6 \tanh^2\left(\frac{\alpha}{k}\right)\right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{6}{k} \sin(\alpha) \tanh\left(\frac{\alpha}{k}\right) - \frac{1}{k^2} (1 - \cos(\alpha)) \left(2 - 6 \tanh^2\left(\frac{\alpha}{k}\right)\right) \right] \\
 &\quad + R_{\kappa,\text{Rest}}(\alpha)
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

ergibt. Dieser ist in Abb. 3.3b dargestellt und bei positivem Regularisierungsparameter k immer positiv. Dies wird in Anhang A bewiesen. Aufgrund der Struktur der nichtglatten Trajektorie des konvexen Polygons in Gl. (3.5) kann dieses Vorgehen einfach auf alle Übergänge angewendet werden, wodurch diese Regularisierung eine glatte Trajektorie liefert.

Der Wert des Krümmungsradius an der Übergangsstelle ist

$$R_{\kappa,2}(\alpha = 0) = \frac{\ell_{12}}{2} \frac{1 + k^2}{k} + R_{\kappa,\text{Rest}}(\alpha = 0), \tag{3.15}$$

was bei Vernachlässigung des Restterms die Schätzung

$$R_{\kappa,2}(\alpha = 0) \approx \frac{\ell_{12}}{2} \frac{1 + k^2}{k} \tag{3.16}$$

ergibt, die eine geometrische Interpretation des Regularisierungsparameters erlaubt. An dieser Stelle muss auf eine konzeptionelle Schwachstelle der Regularisierung durch die logistische Funktion Θ_{reg} eingegangen werden, die bisher nicht diskutiert wurde. Wie in Gl. (2.14) eingeführt, beschreibt $z_B(\alpha) = F'_B(\alpha) = f_B(\alpha)$ den Abstand des Referenzpunkts B vom Boden, wenn der Körper in Kontakt ist. Dieser Abstand ist lediglich von der Orientierung abhängig und muss daher 2π -periodisch im Argument

α sein. Dies bedeutet, dass der Definitionsbereich \mathbb{S} der Funktion f_B periodisch auf \mathbb{R} fortgesetzt werden kann, wobei $f_B(\alpha + 2\pi) = f_B(\alpha)$ gilt. Die ursprüngliche Trajektorie wird also durch Gl. (3.5) nur unzureichend beschrieben. Die periodische Fortsetzung erfordert vielmehr eine unendliche Anzahl an Heaviside-Funktionen und führt auf

$$x_B(\alpha) = \ell_{B1} \cos(\alpha - \delta_{12}) + x_{\text{Rest}}(\alpha) + \ell_{12}(1 - \cos(\alpha)) \left[\Theta(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} (\Theta(\alpha - 2\pi n) + \Theta(\alpha + 2\pi n) - 1) \right], \quad (3.17a)$$

$$z_B(\alpha) = -\ell_{B1} \sin(\alpha - \delta_{12}) + z_{\text{Rest}}(\alpha) + \ell_{12} \sin(\alpha) \left[\Theta(\alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} (\Theta(\alpha - 2\pi n) + \Theta(\alpha + 2\pi n) - 1) \right]. \quad (3.17b)$$

Bei der nichtglatten Trajektorie des konvexen Polygons, die durch diese beiden Formeln beschrieben wird, bringt das keine Veränderung gegenüber Gl. (3.5); die periodische Fortsetzung der ursprünglichen Trajektorie ist also problemlos möglich. Anders verhält sich dies, wenn die Heaviside-Funktion durch die Regularisierung Θ_{reg} approximiert wird. Analog zu Gl. (3.13) ergibt sich aus Gl. (3.17a) entsprechend

$$F_{B,3}(\alpha) = \ell_{B1} \cos(\alpha - \delta_{12}) + x_{\text{Rest}}(\alpha) + \frac{1}{2} \ell_{12} (k^2 + 1 - \cos(\alpha)) \left[\left(1 + \tanh\left(\frac{\alpha}{k}\right) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tanh\left(\frac{\alpha - 2\pi n}{k}\right) + \tanh\left(\frac{\alpha + 2\pi n}{k}\right) \right) \right]. \quad (3.18)$$

Während die Heaviside-Funktion nur lokal an der Sprungstelle in einem einzigen Punkt ihren Wert ändert, hat die zur Regularisierung eingeführte logistische Funktion $\Theta_{\text{reg}}(\alpha)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ einen eindeutigen Wert² und eine endliche Steigung. Bei der Auswertung des ursprünglichen Intervalls $\alpha \in \mathbb{S}$ müssen also alle Glieder der Reihe in Gl. (3.18) berücksichtigt werden, die durch die periodische Fortsetzung entstehen. Die Regularisierung ist nach wie vor konvex, da jeder Summand einen positiven Beitrag zum Krümmungsradius leistet (siehe Anhang A). Allerdings wird die Implementierung und Auswertung dadurch sehr aufwendig³, weshalb im Folgenden nur eine endliche Anzahl an Gliedern berücksichtigt wird.

² Die logistische Funktion $\Theta_{\text{reg}} : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ bildet die reellen Zahlen \mathbb{R} bijektiv auf das Intervall $(0, 1)$ ab. Die Umkehrfunktion von $y = \Theta_{\text{reg}}(\alpha)$ ist $\alpha = \Theta_{\text{reg}}(y) = k \operatorname{artanh}(2y - 1)$.

³ Dem Verfasser ist keine geschlossene Lösung für die Reihe in Gl. (3.18) bekannt.

Die Periodizität der Funktion $f_B(\alpha) = F'_B(\alpha)$ ist eine Konsistenzbedingung, die sicherstellt, dass der Rand des Körpers eine stetige, geschlossene Kurve ist. Dies ist besonders anschaulich an Abb. 2.3b (S. 64) mit Gln. (2.23)–(2.25) zu sehen, wo diese Kurve in körperfesten Polarkoordinaten beschrieben wird. Wenn die Konsistenzbedingung nicht erfüllt ist, ergibt sich nach einem Umlauf nicht der ursprüngliche Punkt. In diesem Fall besteht jedoch noch die Möglichkeit, nur einen Teil des Randes durch die regularisierte Trajektorie des Polygons zu beschreiben und die Kurve durch ein weiteres Segment zu schließen, dass an den Übergangsstellen hinreichend glatt ist. In [396, Abschnitt 6.2.] wird ein Beispiel für eine solche abschnittsweise Definition mit glatten Übergängen beschrieben. Bei den im Folgenden parametrisierten Fußmodellen findet der Kontakt nur im Bereich der Sohle statt, deren Geometrie durch die regularisierte Trajektorie eines Polygons mittels Gl. (3.13) beschrieben wird. Der zulässige Winkelbereich wird auf die Sohle eingeschränkt und angenommen, dass die Kurve durch ein zweites Kurvensegment im Sprunggelenkbereich geschlossen wird. Dieses wird jedoch nicht explizit angegeben, da ein Kontakt mit der Fußoberseite ausgeschlossen wird.

3.3 Parametrisierung der Fußmodelle

Mit der im vorherigen Abschnitt hergeleiteten Regularisierung von konvexen Polygoneometrien werden nun zwei Fußmodelle parametrisiert: in Abschnitt 3.3.1 wird von einem Polygon ausgegangen, das durch die drei Punkte Sprunggelenk, Ferse und Großzehengrundgelenk aufgespannt wird; in Abschnitt 3.3.2 wird dieses Modell um einen weiteren Abschnitt für die Zehen erweitert. Die Geometrie der beiden Polygone ist in Abb. 3.4 dargestellt.

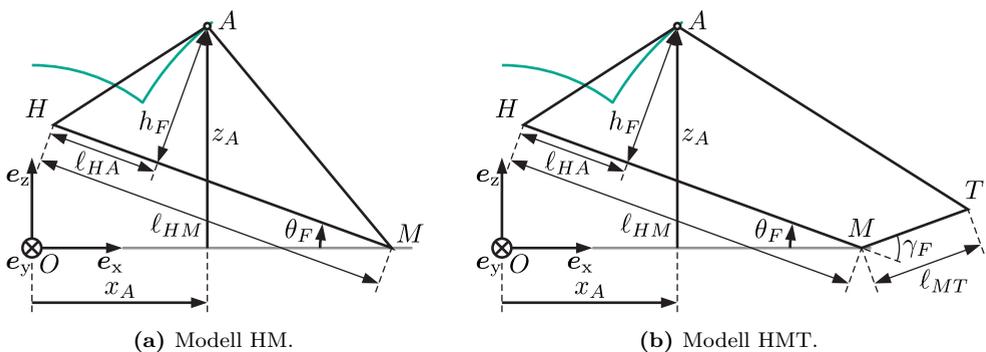


Abbildung 3.4: Geometrie der Polygone, aus denen durch die Regularisierung der Sprunggelenktrajektorie die glatten Fußmodelle erzeugt werden. (a) Modell HM ohne Zehen; das Polygon wird durch die drei Punkte Sprunggelenk A , Ferse (Hacke) H und Großzehengrundgelenk M aufgespannt. (b) Modell HMT mit Zehen; das Polygon hat zusätzlich einen vierten Punkt an der Zehenspitze T .

3.3.1 Fußmodell ohne Zehen (HM)

Das Fußmodell ohne Zehen wird aus dem Polygon in Abb. 3.4a erzeugt, das von den drei Punkten Sprunggelenk A , Ferse (Hacke) H und Großzehengrundgelenk M aufgespannt wird. Die Sohle dieses Modells ist im Bereich zwischen der Ferse H und dem Großzehengrundgelenk M , weshalb das Modell im Folgenden mit dem Index HM referenziert wird. Die Abmessungen des Polygons werden durch die drei Längen h_F , ℓ_{HA} und ℓ_{HM} eindeutig beschreiben.

Beim Abrollen des Polygons mit der Regularisierung nach Gl. (3.13) von $\theta_F = -\pi \dots \pi$ ergibt sich für die Trajektorie des Sprunggelenks die Funktion

$$F_{HM}(\theta_F) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \ell_{HM,i} (k_{HM,i}^2 + 1 - \cos(\theta_F - \delta_{HM,i})) \left(1 + \tanh\left(\frac{\theta_F - \delta_{HM,i}}{k_{HM,i}}\right) \right) \quad (3.19)$$

mit

$$k_{HM,1} = k_H, \quad \ell_{HM,1} = \sqrt{h_F^2 + \ell_{HA}^2}, \quad \delta_{HM,1} = -\pi + \arctan\left(\frac{h_F}{\ell_{HA}}\right), \quad (3.20a)$$

$$k_{HM,2} = k_{HM}, \quad \ell_{HM,2} = \ell_{HM}, \quad \delta_{HM,2} = 0, \quad (3.20b)$$

$$k_{HM,3} = k_M, \quad \ell_{HM,3} = \sqrt{h_F^2 + (\ell_{HM} - \ell_{HA})^2},$$

$$\delta_{HM,3} = \pi - \arctan\left(\frac{h_F}{\ell_{HM} - \ell_{HA}}\right). \quad (3.20c)$$

Jeder der drei Summanden beschreibt einen regularisierten Übergang von einem Eckpunkt des Polygons zum nächsten.

Wie am Ende von Abschnitt 3.2 beschrieben, führt dieser Ansatz nicht zu einer geschlossenen Kurve für den Rand des Körpers, weshalb der zulässige Winkelbereich für Gl. (3.19) auf $\theta_F \in [-\pi + \arctan(\frac{h_F}{\ell_{HA}}), \pi - \arctan(\frac{h_F}{\ell_{HM} - \ell_{HA}})]$ eingeschränkt wird. Außerhalb dieses Winkelbereichs kann der Rand des Fußes durch eine weitere Kurve beschrieben werden, die stetig und differenzierbar in die so definierte Geometrie übergeht. Da ausgeschlossen wird, dass dieser Bereich des Fußes mit dem Boden in Kontakt kommt, wird diese Funktion nicht explizit angegeben und bei der Implementierung des Modells nicht weiter berücksichtigt, siehe Abb. 3.5a.

Die Position des Sprunggelenks beim Abrollen des Standbeinfußes und die Lage des potentiellen Kontaktpunkts beim Schwungbeinfuß ergeben sich mit Gl. (3.19) aus Gl. (3.9) und (3.10), wobei der körperfeste Bezugspunkt das Sprunggelenk A ist. Das Modell wird durch sechs Parameter beschrieben: die drei Längen h_F , ℓ_{HA} und ℓ_{HM} des ursprünglichen Polygons sowie die drei Regularisierungsparameter k_H , k_{HM} und k_M ,

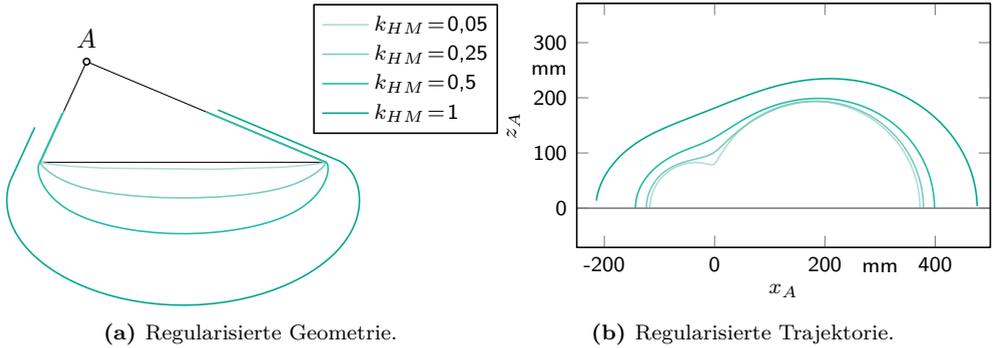


Abbildung 3.5: Fußmodell HM nach Gl. (3.19) mit $k_H = k_M = 1 \cdot 10^{-8}$ und verschiedenen Werten von k_{HM} . (a) Die Geometrie des parametrisierten Randes wird im Bereich der Sohle mit zunehmendem k_{HM} immer runder. (b) Die zugehörige Trajektorie des Sprunggelenks A wird entsprechend breiter und höher.

die mittels Gl. (3.16) in die maximalen Krümmungsradien beim jeweiligen Übergang umgerechnet werden können. Durch die linearen Bedingungen

$$\mathbf{0} \leq [h_F, \ell_{HM}, \ell_{HA}, \ell_{HM} - \ell_{HA}, k_H, k_{HM}, k_M]^T \quad (3.21)$$

wird bei der Optimierung in Kapitel 10 sichergestellt, dass das Modell konvex ist.

In Abb. 3.5 ist der Einfluss des Regularisierungsparameters k_{HM} auf die Geometrie und die dazugehörige Trajektorie des Sprunggelenks beim Abrollen dargestellt. Wenn alle anderen Parameter unverändert bleiben, ist die Sohle des Fußes umso runder, je größer k_{HM} ist.

3.3.2 Fußmodell mit Zehen (HMT)

Mit demselben Vorgehen wie im vorherigen Abschnitt wird das Fußmodell mit Zehen aus dem Polygon in Abb. 3.4b erzeugt. Dieses wird von den vier Punkten Sprunggelenk A, Ferse (Hacke) H, Großzehengrundgelenk M und Zehenspitze T aufgespannt und im Folgenden mit dem Index HMT referenziert. Die Abmessungen des Polygons werden durch die vier Längen h_F , ℓ_{HA} , ℓ_{HM} und ℓ_{MT} und den Winkel γ_F im Großzehengrundgelenk eindeutig beschrieben.

Die Funktion

$$F_{\text{HMT}}(\theta_F) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \ell_{\text{HMT},i} (k_{\text{HMT},i}^2 + 1 - \cos(\theta_F - \delta_{\text{HMT},i})) \cdot \left(1 + \tanh\left(\frac{\theta_F - \delta_{\text{HMT},i}}{k_{\text{HMT},i}}\right) \right) \quad (3.22)$$

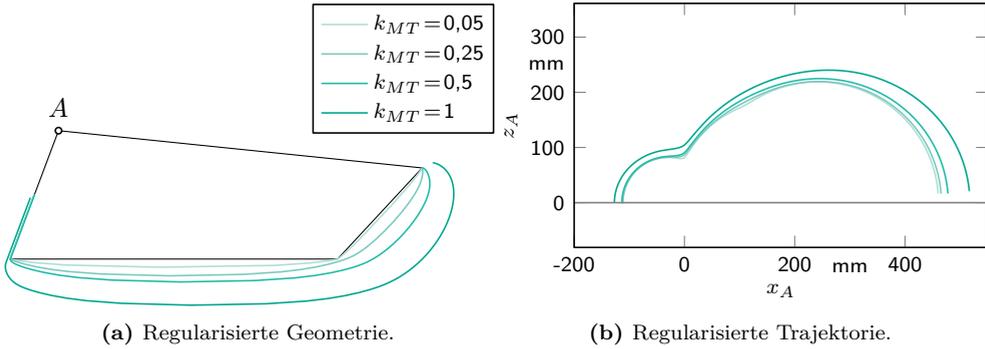


Abbildung 3.6: Fußmodell HMT nach Gl. (3.22) mit $k_H = k_T = 1 \cdot 10^{-8}$, $k_{HM} = 0,05$ und verschiedenen Werten von k_{MT} . (a) Die Geometrie des parametrisierten Randes wird im Bereich der Zehen mit zunehmendem k_{MT} immer runder. Gleichzeitig wirkt sich die Änderung von k_{MT} jedoch auch auf den Bereich zwischen Ferse und Großzehengrundgelenk aus. (b) Die Höhe der zugehörigen Trajektorie des Sprunggelenks A nimmt zu; den größten Einfluss hat die Parametervariation auf den Bereich rechts, wo der Fuß über den Zehenbereich abrollt.

mit

$$k_{\text{HMT},1} = k_H, \quad \ell_{\text{HMT},1} = \sqrt{h_F^2 + \ell_{HA}^2}, \quad \delta_{\text{HMT},1} = -\pi + \arctan\left(\frac{h_F}{\ell_{HA}}\right), \quad (3.23a)$$

$$k_{\text{HMT},2} = k_{HM}, \quad \ell_{\text{HMT},2} = \ell_{HM}, \quad \delta_{\text{HMT},2} = 0, \quad (3.23b)$$

$$k_{\text{HMT},3} = k_{MT}, \quad \ell_{\text{HMT},3} = \ell_{MT}, \quad \delta_{\text{HMT},3} = \gamma_F, \quad (3.23c)$$

$$k_{\text{HMT},4} = k_T,$$

$$\ell_{\text{HMT},4} = \sqrt{(h_F - \ell_{MT} \sin(\gamma_F))^2 + (\ell_{HM} - \ell_{HA} + \ell_{MT} \cos(\gamma_F))^2},$$

$$\delta_{\text{HMT},4} = \pi - \arctan\left(\frac{h_F - \ell_{MT} \sin(\gamma_F)}{\ell_{HM} - \ell_{HA} + \ell_{MT} \cos(\gamma_F)}\right) \quad (3.23d)$$

beschreibt im Winkelbereich $\theta_F \in [-\pi + \arctan(\frac{h_F}{\ell_{HA}}), \pi - \arctan(\frac{h_F - \ell_{MT} \sin(\gamma_F)}{\ell_{HM} - \ell_{HA} + \ell_{MT} \cos(\gamma_F)})]$ das regularisierte Fußmodell. Durch die linearen Bedingungen

$$\mathbf{0} \leq \left[h_F, \ell_{HM}, \ell_{HA}, \ell_{HM} - \ell_{HA}, \ell_{MT}, \gamma_F, \frac{\pi}{2} - \gamma_F, k_H, k_{HM}, k_{MT}, k_T \right]^T \quad (3.24)$$

wird bei der Optimierung in Kapitel 10 sichergestellt, dass das Modell konvex ist. In Abb. 3.6 ist der Einfluss des Regularisierungsparameters k_{MT} auf die Geometrie und die dazugehörige Trajektorie des Sprunggelenks beim Abrollen dargestellt. Obwohl der Parameter k_{HM} in Abb. 3.6a nicht verändert wird, hat k_{MT} auch einen Einfluss auf den Bereich der Sohle zwischen der Ferse und dem Großzehengrundgelenk. Im nächsten Kapitel werden die beiden Fußmodelle anhand von Messungen validiert.

4 Validierung der Fußmodelle

Die im vorherigen Kapitel parametrisierten Fußmodelle werden zur Validierung in Bezug auf ihre Eignung zur Beschreibung von starren Füßen als Abrollformen an Messungen von menschlichen Gehbewegungen angepasst. Wie in Abschnitt 1.2 beschrieben, finden viele Modelle im Bereich der Forschung zum zweibeinigen Gehen sowohl in der Biomechanik als auch in der Robotik Anwendung. Die Gehbewegung des Menschen besitzt eine hohe Energieeffizienz und ist daher ein natürlicher Ausgangspunkt bei der Entwicklung energieeffizienter Roboter. Es wird davon ausgegangen, dass ein Modell, mit dem die menschliche Bewegung gut abgebildet werden kann, sich auch zur Beschreibung und Entwicklung energieeffizienter zweibeiniger Roboter eignet. Durch die Anpassung der Modelle an die Abrollbewegung des Fußes bei der Gehbewegung verschiedener Probanden werden außerdem Ausgangsparameter für die spätere Optimierung des Robotermodells erzeugt.

In Abschnitt 4.1 wird zunächst die Durchführung der Experimente zur Aufnahme der Messdaten beschrieben. Bei den Probanden werden während des Gehens durch ein Motion-Capture-System (MCS) die Positionen von Markern an den Füßen und mittels Kraftmessplatten (KMP) die Druckpunkte und Kräfte gemessen. Diese Daten werden anschließend aufbereitet und für jeden Fuß die Daten während des Abrollvorgangs auf der KMP extrahiert. In Abschnitt 4.2 wird beschrieben, wie die Parameter der beiden Fußmodelle an die aufbereiteten Messdaten während der Abrollbewegung angepasst werden, wodurch sich für alle Füße jeweils eine Abrollform pro Modell ergibt. Die Ergebnisse der Modellanpassung werden in Abschnitt 4.3 präsentiert und bezüglich ihrer Eignung, die Kinematik des Sprunggelenks und des Druckpunkts zu beschreiben, ausgewertet.

4.1 Messdatenaufnahme und -aufbereitung

Zur Bestimmung der Modellparameter werden diese an Messungen der Sprunggelenktrajektorie von menschlichen Gehbewegungen angepasst, was individuelle Abrollformen für die Füße liefert. Dazu werden die Verläufe der Knöchelpositionen sowie der

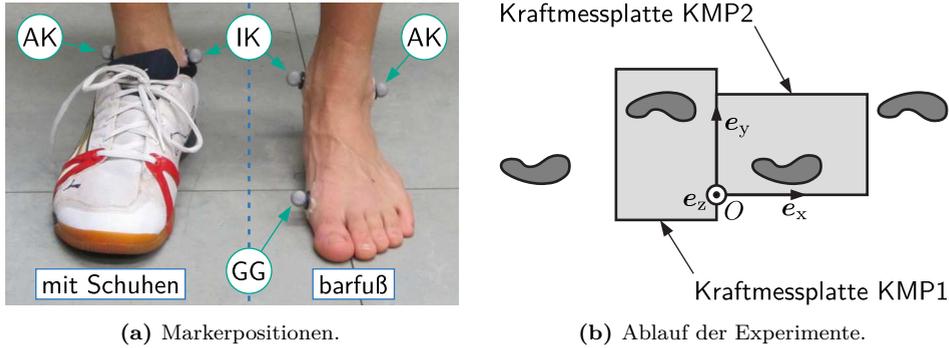


Abbildung 4.1: (a) Positionierung der Marker für die Experimente mit und ohne Schuhe. (b) Koordinatensystem und Orientierung der Kraftmessplatten für die Versuche. Die Probanden gehen in e_x -Richtung und treten immer mit dem linken Fuß auf KMP1 und mit dem rechten auf KMP2.

Druckpunkte von insgesamt neun Probanden gemessen, welche Fußlängen im Bereich von 225 mm bis 283 mm aufweisen. Die Daten der Probanden sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst.

Bei den durchgeführten Experimenten geht jeder Proband zunächst dreimal barfuß und anschließend dreimal mit Schuhen geradeaus, wobei leichte Sportschuhe mit weicher Sohle in den Schuhgrößen gemäß Tabelle 4.1 verwendet werden. Für die Barfuß-Messungen werden an jedem Fuß jeweils ein Marker am Außenknöchel (AK), ein Marker am Innenknöchel (IK) und ein Marker am Großzehengrundgelenk (GG) angebracht, wie in Abb. 4.1a dargestellt. Bei den Schuh-Messungen werden nur die Knöchelmarker AK und IK verwendet, da die Großzehengrundgelenke von den Schuhen verdeckt werden. Die Probanden gehen bei jedem Experiment mit einer selbstgewählten Geschwindigkeit geradeaus und treten nach einigen Schritten zunächst mit links

Tabelle 4.1: Daten der Probanden.

Proband	Geschlecht	Größe in m	Fußlänge (links) in mm	Fußlänge (rechts) in mm	Schuhgröße (DE)
P1	m	1,908	283	283	45
P2	m	1,775	267	267	44,5
P3	m	1,747	259	257	42
P4	m	1,759	255	249	40,5
P5	w	1,720	242	242	39
P6	w	1,689	243	241	39
P7	w	1,618	235	233	38
P8	w	1,612	232	229	38
P9	w	1,536	224	225	37

auf Kraftmessplatte 1 (KMP1) und anschließend mit rechts auf Kraftmessplatte 2 (KMP2), wie in Abb. 4.1b dargestellt. Das MCS misst die Markerpositionen mit einer Abtastfrequenz von 200 Hz, die zwei KMP messen jeweils die Position des COP und den dort angreifenden Kraftvektor mit einer Abtastfrequenz von 1 kHz. Zum Anpassen der Modelle werden nur die Positionsdaten des Sprunggelenks benötigt, während der jeweilige Fuß auf dem Boden abrollt. Die höhere Abtastfrequenz der KMP ist daher im Folgenden nicht von Interesse und es werden nur die Zeitpunkte berücksichtigt, an denen das MCS Positionsdaten liefert.

Zu jedem Experiment liegen somit aus dem MCS zu jedem Zeitpunkt t_i die Positionsvektoren $\bar{\mathbf{r}}_{\text{IKl},i}$, $\bar{\mathbf{r}}_{\text{AKl},i}$ und ggf. $\bar{\mathbf{r}}_{\text{GGl},i}$ am linken Fuß und $\bar{\mathbf{r}}_{\text{IKr},i}$, $\bar{\mathbf{r}}_{\text{AKr},i}$ und ggf. $\bar{\mathbf{r}}_{\text{GGr},i}$ am rechten Fuß vor. Dazu liefern KMP1 und KMP2 die Kraftvektoren $\bar{\mathbf{F}}_{\text{KMP1},i}$ und $\bar{\mathbf{F}}_{\text{KMP2},i}$ sowie die Druckpunktpositionen $\bar{\mathbf{r}}_{\text{COP1},i}$ und $\bar{\mathbf{r}}_{\text{COP2},i}$. Dabei werden nur die $i = 1, \dots, N$ Zeitpunkte betrachtet, bei denen an mindestens einer der KMP ein Fuß im Kontakt ist, d. h. $\bar{\mathbf{F}}_{\text{KMP1},i} = \mathbf{0} = \bar{\mathbf{F}}_{\text{KMP2},i}$ für alle $i < 1$ und $i > N$. Der erste Kontakt des linken Fußes mit KMP1 findet bei $\bar{\mathbf{F}}_{\text{KMP1},1} \neq \mathbf{0}$ statt, der letzte Kontakt des rechten Fußes mit KMP2 bei $\bar{\mathbf{F}}_{\text{KMP2},N} \neq \mathbf{0}$.

Zum Anpassen der Modellparameter an die Messdaten werden die Trajektorien der (oberen) Sprunggelenke (SG) in der Sagittalebene benötigt, die nicht direkt in den Messdaten enthalten sind. Deren Position wird daher jeweils als Mittelwert aus den Positionen der beiden Knöchelmarker AK und IK geschätzt:

$$\bar{\mathbf{r}}_{\text{SGl},i} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{r}}_{\text{IKl},i} + \bar{\mathbf{r}}_{\text{AKl},i}), \quad \bar{\mathbf{r}}_{\text{SGr},i} = \frac{1}{2}(\bar{\mathbf{r}}_{\text{IKr},i} + \bar{\mathbf{r}}_{\text{AKr},i}). \quad (4.1)$$

Obwohl alle Probanden bei den Experimenten geradeaus auf eine Markierung in \mathbf{e}_x -Richtung zugehen, können kleine Richtungsabweichungen nicht ausgeschlossen werden. Deshalb wird aus den Sprunggelenktrajektorien in der $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$ -Ebene die Gangrichtung geschätzt. Für jede der beiden Sprunggelenktrajektorien wird mit der Moore-Penrose-Pseudoinversen eine Ausgleichsgerade $y_l = a_l x_l + b_l$ bzw. $y_r = a_r x_r + b_r$ berechnet:

$$\begin{bmatrix} a_l \\ b_l \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \bar{x}_{\text{SGl},1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \bar{x}_{\text{SGl},N} & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{x}_{\text{SGl},1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \bar{x}_{\text{SGl},N} & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \bar{x}_{\text{SGl},1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \bar{x}_{\text{SGl},N} & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{y}_{\text{SGl},1} \\ \vdots \\ \bar{y}_{\text{SGl},N} \end{bmatrix}, \quad (4.2a)$$

$$\begin{bmatrix} a_r \\ b_r \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \bar{x}_{\text{SGr},1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \bar{x}_{\text{SGr},N} & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{x}_{\text{SGr},1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \bar{x}_{\text{SGr},N} & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \bar{x}_{\text{SGr},1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \bar{x}_{\text{SGr},N} & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{y}_{\text{SGr},1} \\ \vdots \\ \bar{y}_{\text{SGr},N} \end{bmatrix}. \quad (4.2b)$$

Aus dem Mittelwert der beiden Steigungen a_l und a_r wird ein Winkel und damit der Einheitsvektor

$$\tilde{\mathbf{e}}_x = \cos\left(\arctan\left(\frac{a_l + a_r}{2}\right)\right)\mathbf{e}_x + \sin\left(\arctan\left(\frac{a_l + a_r}{2}\right)\right)\mathbf{e}_y \quad (4.3)$$

für die geschätzte Gangrichtung bestimmt. Als Schätzung für die Sagittalebene, die im Folgenden zum Anpassen der Modellparameter an die Messdaten verwendet wird, ergibt sich damit die $\{\tilde{\mathbf{e}}_x, \mathbf{e}_z\}$ -Ebene. Alle Größen, die aus der Auswertung in dieser Ebene resultieren, sind im Folgenden mit einer Tilde gekennzeichnet. Bei den Barfuß-Experimenten wird mit dem Marker am Großzehengrundgelenk darüber hinaus eine Schätzung für den Fußwinkel in der Sagittalebene aus den Messdaten ermittelt:

$$\tilde{\theta}_{F1} = \arctan\left(\frac{\tilde{z}_{IKl} - \tilde{z}_{GGl}}{\tilde{x}_{GGl} - \tilde{x}_{IKl}}\right), \quad \tilde{\theta}_{Fr} = \arctan\left(\frac{\tilde{z}_{IKr} - \tilde{z}_{GGr}}{\tilde{x}_{GGr} - \tilde{x}_{IKr}}\right). \quad (4.4)$$

Mit den so aufbereiteten Messdaten werden im folgenden Abschnitt die Parameter der beiden Fußmodelle an die Messungen angepasst.

4.2 Anpassen der Modellparameter an die Messdaten

Zum Anpassen der Modellparameter an die aufbereiteten Messdaten wird, wie in Kapitel 3 motiviert, die Trajektorie des Sprunggelenks an die Messdaten in der Sagittalebene angepasst. Im Folgenden wird das Vorgehen für den jeweils linken Fuß erläutert, das Vorgehen für den rechten Fuß ist analog. Da für jedes Experiment drei Wiederholungen vorliegen, ist es möglich, die Modelle jeweils an mehr als eine Messung anzupassen. Die $K = 3$ Messungen werden mit $k = 1, \dots, K$ bezeichnet, wobei die vorgestellte Methode unabhängig von der Anzahl der Messungen ist. Zunächst werden die Zeitpunkte ermittelt, zu denen der linke Fuß auf KMP1 abrollt. Da der Kontakt bei $i = 1$ beginnt, muss lediglich das Ende der jeweiligen Messung

$$N_k = \max_i (\bar{\mathbf{F}}_{\text{KMP1},i} \neq \mathbf{0}) \quad (4.5)$$

bestimmt werden. Diese Daten werden im Folgenden mit dem Index $j = 1, \dots, N_k$ bezeichnet und die Punkte der Sprunggelenktrajektorie mit

$$\tilde{x}_{k,j} = \tilde{x}_{\text{SG1},j}, \quad \tilde{z}_{k,j} = \tilde{z}_{\text{SG1},j}. \quad (4.6)$$

Anschließend wird für jeden Punkt in den Messdaten ein Punkt der Trajektorie des jeweiligen Modells ausgewertet. Durch die Minimierung der Summe der quadrierten

Abweichungen ergibt sich ein Optimierungsproblem, bei dem neben den Parametern des jeweiligen Modells

$$\mathbf{p}_{\text{HM}} = [k_H, k_M, k_{HM}, h_F, \ell_{HA}, \ell_{HM}]^T, \quad (4.7a)$$

$$\mathbf{p}_{\text{HMT}} = [k_H, k_T, k_{HM}, k_{MT}, h_F, \ell_{HA}, \ell_{HM}, \ell_{MT}, \gamma_F]^T \quad (4.7b)$$

auch die Absolutwinkel

$$\boldsymbol{\theta}_{\text{F},k} = [\theta_{\text{F},k,1}, \dots, \theta_{\text{F},k,N_k}]^T, \quad (4.8)$$

an denen das Modell zum Vergleich mit den jeweiligen Messdaten ausgewertet werden muss, unbekannt sind. Eine zusätzliche Unbekannte ergibt sich aus der Lage $x_{\text{off},k}$ der Messdaten in $\tilde{\mathbf{e}}_x$ -Richtung relativ zum Ursprung des Modells. Die Bestimmung der Unbekannten erfolgt in drei Schritten:

1. **Bestimmung der Anfangsbedingungen** für die Parameter \mathbf{p}_{HM} , die Winkel $\boldsymbol{\theta}_{\text{F},k}$ und die Verschiebung $x_{\text{off},k}$.
2. **Anpassen des Modells HM** durch die Bestimmung von \mathbf{p}_{HM} , $\boldsymbol{\theta}_{\text{F},k}$ und $x_{\text{off},k}$ mittels Minimierung der quadrierten Abweichungen zwischen Messung und Modell.
3. **Anpassen des Modells HMT** durch die Bestimmung von \mathbf{p}_{HMT} , $\boldsymbol{\theta}_{\text{F},k}$ und $x_{\text{off},k}$ mittels Minimierung der quadrierten Abweichungen zwischen Messung und Modell.

Bestimmung der Anfangsbedingungen: Zur Ermittlung geeigneter Anfangsbedingungen wird ausgenutzt, dass das Modell HM durch Regularisierung aus einem flachen Fuß hervorgeht. Im Grenzfall infinitesimal kleiner Regularisierungsparameter k_H , k_M und k_{HM} setzt sich die Sprunggelenktrajektorie im relevanten Winkelbereich also aus zwei Kreisbogensegmenten zusammen, vgl. Abb. 3.1b (S. 70). Zur Schätzung der Anfangsbedingungen wird zunächst $x_{\text{off},k}$ so gewählt, dass die Markerposition mit der geringsten Höhe $z_{\text{min},k}$ über dem Boden in den Ursprung $x = 0$ verschoben wird, siehe Abb. 4.2a. Anschließend wird an die Markerpositionen im negativen (neg) und im positiven (pos) Bereich jeweils ein Kreisbogen mit Radius R_{neg} bzw. R_{pos} angepasst, dessen Mittelpunkt bei $z = 0$ und x_{neg} bzw. x_{pos} liegt, woraus sich mit

$$\mathcal{J}_{\text{neg},k} = \{j \mid \tilde{x}_{k,j} < 0\}, \quad \mathcal{J}_{\text{pos},k} = \{j \mid \tilde{x}_{k,j} \geq 0\} \quad (4.9)$$

die beiden Optimierungsprobleme

$$\min_{x_{\text{neg}}, R_{\text{neg}}} \sum_{k=1}^K \sum_{j \in \mathcal{J}_{\text{neg},k}} \left((\tilde{x}_{k,j} - x_{\text{neg}})^2 + \tilde{z}_{k,j}^2 - R_{\text{neg}}^2 \right) \quad \text{u. d. N.} \quad x_{\text{neg}} \leq 0, \quad (4.10a)$$

$$\min_{x_{\text{pos}}, R_{\text{pos}}} \sum_{k=1}^K \sum_{j \in \mathcal{J}_{\text{pos},k}} \left((\tilde{x}_{k,j} - x_{\text{pos}})^2 + \tilde{z}_{k,j}^2 - R_{\text{pos}}^2 \right) \quad \text{u. d. N.} \quad x_{\text{pos}} \geq 0 \quad (4.10b)$$

ergeben. Durch die Nebenbedingungen wird sichergestellt, dass aus der Lösung dieser beiden Probleme eine Schätzung für die Abmessungen des flachen Fußes

$$h_F = \min_k z_{\text{min},k}, \quad (4.11a)$$

$$\ell_{HA} = -x_{\text{neg}}, \quad (4.11b)$$

$$\ell_{HM} = x_{\text{pos}} - x_{\text{neg}} \quad (4.11c)$$

folgt, die die Nebenbedingungen in Gl. (3.21) erfüllt. Zur Berechnung der numerischen Lösung wird der *Trust-Region-Reflective Least Squares*-Algorithmus der *Matlab*-Funktion `lsqnonlin` verwendet, der Nebenbedingungen in Form von oberen und unteren Schranken für die Optimierungsvariablen berücksichtigen kann. Weiterhin wird für jede Markerposition eine Schätzung für den Winkel

$$\theta_{F,k,j} = \begin{cases} \arccos\left(-\frac{x_{\text{neg}}}{R_{\text{neg}}}\right) - \arctan\left(\frac{\tilde{z}_{k,j}}{\tilde{x}_{k,j} - x_{\text{neg}}}\right) & \text{für } j \in \mathcal{J}_{\text{neg},k} \\ \arccos\left(-\frac{x_{\text{pos}}}{R_{\text{pos}}}\right) - \arctan\left(\frac{\tilde{z}_{k,j}}{\tilde{x}_{k,j} - x_{\text{pos}}}\right) & \text{für } j \in \mathcal{J}_{\text{pos},k} \end{cases} \quad (4.12)$$

berechnet, bei dem die Trajektorie dieses flachen Fußes dem Marker am nächsten kommt. Damit liegen für alle Parameter außer k_H , k_M und k_{HM} Anfangsbedingungen vor, die zum Anpassen des Modells HM an die gemessenen Sprunggelenktrajektorien verwendet werden können. Da bisher von einem flachen Fuß ausgegangen wurde, werden die Regularisierungsparameter mit kleinen Werten initialisiert, worauf im folgenden Abschnitt eingegangen wird.

In Abb. 4.2a ist exemplarisch das Ergebnis für eine einzige Barfuß-Messung mit Proband P2 dargestellt und im Vergleich dazu das Ergebnis für alle Schuh-Messungen von Proband P9 in Abb. 4.2b. Bereits an dieser Stelle zeigen die beiden Kreisbögen jeweils eine gute Übereinstimmung mit den gemessenen Markerpositionen und liefern die grau eingezeichnete Schätzung für die Geometrie des flachen Fußes. Dabei ist allerdings zu beachten, dass sich im Allgemeinen die angepassten Kreisbögen als Schätzung für die Trajektorie zur Bestimmung der Anfangsbedingungen nicht bei $x = 0$ schneiden, da sie unabhängig voneinander an verschiedene Bereiche der Messdaten

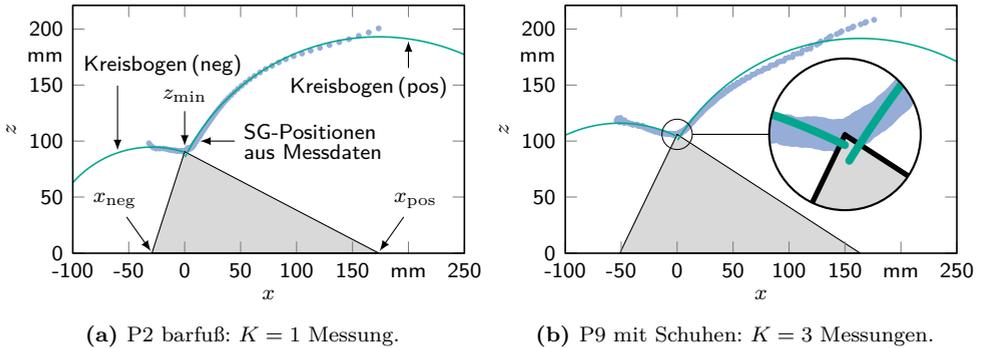


Abbildung 4.2: Ermittlung von Anfangsbedingungen durch Anpassung zweier Kreisbögen (grün) an die gemessenen Markerpositionen (blau). (a) Ergebnis der Anpassung an die Daten aus einer Messung mit Proband P2 ohne Schuhe. Die niedrigste gemessene Markerposition z_{min} wird zum Ursprung $x = 0$ verschoben. Die Mittelpunkte der beiden Kreisbögen liegen bei x_{neg} bzw. x_{pos} . Die Geometrie des flachen Fußes ohne Regularisierung ist in grau dargestellt. (b) Ergebnis der Anpassung an die Daten aus einer Messung mit Proband P9 mit Schuhen. Die Kreisbögen im positiven (pos) und negativen (neg) Bereich schneiden sich nicht bei $x = 0$.

angepasst wurden. Diese Inkonsistenz ist unerheblich, da durch diesen ersten Schritt lediglich Anfangsbedingungen für die eigentliche Anpassung der Modellparameter ermittelt werden. Die Anforderung an diesen Schritt ist daher, dass eine gute Schätzung für alle Parameter generiert wird. Auf deren Basis wird das nachfolgende Optimierungsproblem initialisiert um eine schnelle Konvergenz zu erreichen. Abbildung 4.2b zeigt außerdem, dass die Messungen sehr gut reproduzierbar sind: die Positionen aus den drei Messungen sind praktisch nicht voneinander zu unterscheiden und erscheinen deckungsgleich. Dies wird bei allen Experimenten mit allen Probanden beobachtet.

Anpassen des Modells HM: Zum Anpassen der Parameter des Modells HM wird die Summe der quadrierten Abweichungen zwischen den Punkten aus den Messdaten und einem jeweils korrespondierenden Punkt auf der Trajektorie des Modells minimiert. Die Menge der zulässigen Lösungen für die in Gl. (4.7a) eingeführten Parameter

$$\mathbf{p}_{HM} = [k_H, k_M, k_{HM}, h_F, \ell_{HA}, \ell_{HM}]^T$$

wird dafür durch die obere und untere Schranke

$$\mathbf{p}_{HM,u} = \left[1 \cdot 10^{-8}, 1 \cdot 10^{-8}, 0, \frac{z_{min}}{2}, 0, 0 \right]^T, \quad (4.13a)$$

$$\mathbf{p}_{HM,o} = \left[1 \cdot 10^{-8}, 1 \cdot 10^{-8}, 10, \infty, \infty, \infty \right]^T \quad (4.13b)$$

begrenzt. Dadurch werden die Nebenbedingungen nach Gl. (3.21) erzwungen und die Regularisierungsparameter k_H und k_M auf einen sehr kleinen Wert von $1 \cdot 10^{-8} \text{ rad}^{-1}$

festgelegt. Dieser bereits in Kapitel 3 verwendete Wert führt dazu, dass die Übergänge zwischen A und H bzw. A und M sehr flach sind und damit nahe am ursprünglichen Polygon verlaufen. Dadurch wird erreicht, dass die angepassten Modelle nicht sehr stark von der Polygoneometrie abweichen. Des Weiteren liefert das Vorgehen eine gute Interpretation der regularisierten Geometrie anhand der Abmessungen des Polygons. Für die Anpassung der Modellparameter ergibt sich bei der gleichzeitigen Verwendung von K Messungen der Optimierungsvektor

$$\mathbf{x}_{\text{HM}} = \left[\mathbf{p}_{\text{HM}}^{\text{T}}, \boldsymbol{\theta}_{\text{F},1}^{\text{T}}, \dots, \boldsymbol{\theta}_{\text{F},K}^{\text{T}}, x_{\text{off},1}, \dots, x_{\text{off},K} \right]^{\text{T}}. \quad (4.14)$$

Mit

$$x_{\text{HM},k,j}(\mathbf{p}_{\text{HM}}, \theta_{\text{F},k,j}) = F_{\text{HM}}(\mathbf{p}_{\text{HM}}, \theta_{\text{F},k,j}) - F_{\text{HM}}(\mathbf{p}_{\text{HM}}, 0), \quad (4.15a)$$

$$z_{\text{HM},k,j}(\mathbf{p}_{\text{HM}}, \theta_{\text{F},k,j}) = \frac{\partial}{\partial \theta_{\text{F}}} F_{\text{HM}}(\mathbf{p}_{\text{HM}}, \theta_{\text{F},k,j}) \quad (4.15b)$$

folgt daraus das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}_{\text{HM}}} \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{N_k} & \left((\tilde{x}_{k,j} - x_{\text{off},k} - x_{\text{HM},k,j}(\mathbf{x}_{\text{HM}}))^2 + (\tilde{z}_{k,j} - z_{\text{HM},k,j}(\mathbf{x}_{\text{HM}}))^2 \right) \\ \text{u. d. N. } & \mathbf{x}_{\text{HM},\text{u}} \leq \mathbf{x}_{\text{HM}} \leq \mathbf{x}_{\text{HM},\text{o}} \end{aligned} \quad (4.16)$$

mit den Schranken

$$\mathbf{x}_{\text{HM},\text{u}} = \left[\mathbf{p}_{\text{HM},\text{u}}^{\text{T}}, -\infty, \dots, -\infty \right]^{\text{T}}, \quad (4.17a)$$

$$\mathbf{x}_{\text{HM},\text{o}} = \left[\mathbf{p}_{\text{HM},\text{o}}^{\text{T}}, \infty, \dots, \infty \right]^{\text{T}}. \quad (4.17b)$$

Zur Lösung werden die im vorherigen Abschnitt ermittelten Anfangsbedingungen für alle Parameter sowie $k_H = k_M = 1 \cdot 10^{-8} \text{ rad}^{-1}$ und $k_{HM} = 0,1 \text{ rad}^{-1}$ verwendet. Das Ergebnis der Anpassung des Modells an alle $K = 3$ Barfuß-Messungen von Proband P2 ist in Abb. 4.3 dargestellt. Die ausgewerteten Punkte der Trajektorie des Modells in Abb. 4.3a sind kaum von den gemessenen Daten zu unterscheiden. Lediglich bei $x > 50 \text{ mm}$ ergeben sich sichtbare Abweichungen zwischen Messungen und Modell. Die zugehörige Abrollform in Abb. 4.3b weist eine runde Sohle auf, ist gleichzeitig jedoch nahe an der Geometrie des zugehörigen (unregularisierten) Polygons. Durch das beschriebene Vorgehen kann also eine gute Übereinstimmung zwischen Modell und Messung erzielt werden.

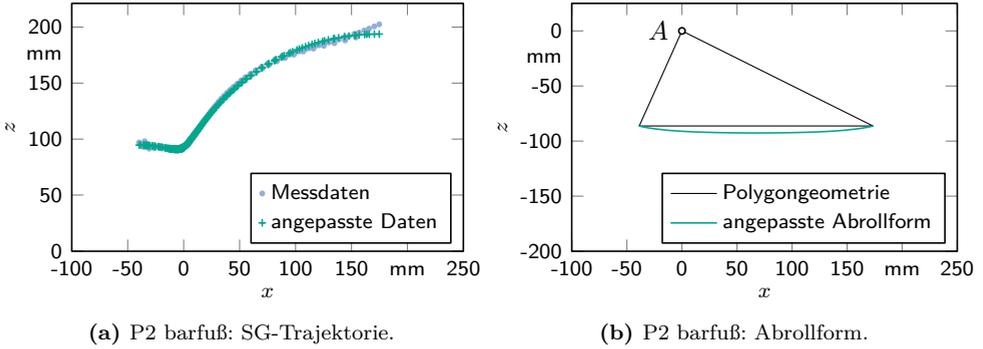


Abbildung 4.3: Ergebnis des an die Messdaten angepassten Modells HM für Proband P2 (barfuß). (a) Die Trajektorie des Sprunggelenks aus den Messdaten (blau) sowie alle bei der Optimierung ausgewerteten Punkte des Modells (grün). (b) Zugehörige Geometrie des erzeugenden Polygons (schwarz) und Abrollform des angepassten Modells (grün).

Anpassen des Modells HMT: Das Anpassen der Parameter des Modells HMT erfolgt nach derselben Vorgehensweise wie im vorherigen Abschnitt. Für die in Gl. (4.7b) eingeführten Parameter

$$\mathbf{p}_{\text{HMT}} = [k_H, k_T, k_{HM}, k_{MT}, h_F, \ell_{HA}, \ell_{HM}, \ell_{MT}, \gamma_F]^T$$

werden die beiden Schranken

$$\mathbf{p}_{\text{HMT},u} = \left[1 \cdot 10^{-8}, 1 \cdot 10^{-8}, 0, 0, \frac{z_{\min}}{2}, 0, 0, 0, 0 \right]^T, \quad (4.18a)$$

$$\mathbf{p}_{\text{HMT},o} = \left[1 \cdot 10^{-8}, 1 \cdot 10^{-8}, 10, 10, \infty, \infty, \infty, \infty, z_{\min}, \frac{\pi}{2} \right]^T \quad (4.18b)$$

definiert. Die Motivation der Schranken für die Regularisierungsparameter ist analog zum vorherigen Abschnitt. Die hinzugekommenen Polygonabmessungen ℓ_{MT} und γ_F werden so beschränkt, dass das Segment von M bis T nicht länger als die minimale Höhe z_{\min} der Messdaten ist, und maximal senkrecht auf dem Segment von H bis M sein kann, womit die Nebenbedingungen in Gl. (3.24) erfüllt werden und verhindert wird, dass die Zehen unnatürlich lang werden. Mit dem Optimierungsvektor

$$\mathbf{x}_{\text{HMT}} = \left[\mathbf{p}_{\text{HMT}}^T, \boldsymbol{\theta}_{F,1}^T, \dots, \boldsymbol{\theta}_{F,K}^T, x_{\text{off},1}, \dots, x_{\text{off},K} \right]^T \quad (4.19)$$

und

$$x_{\text{HMT},k,j}(\mathbf{p}_{\text{HMT}}, \boldsymbol{\theta}_{F,k,j}) = F_{\text{HMT}}(\mathbf{p}_{\text{HMT}}, \boldsymbol{\theta}_{F,k,j}) - F_{\text{HMT}}(\mathbf{p}_{\text{HMT}}, \mathbf{0}), \quad (4.20a)$$

$$z_{\text{HMT},k,j}(\mathbf{p}_{\text{HMT}}, \boldsymbol{\theta}_{F,k,j}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}_F} F_{\text{HMT}}(\mathbf{p}_{\text{HMT}}, \boldsymbol{\theta}_{F,k,j}) \quad (4.20b)$$

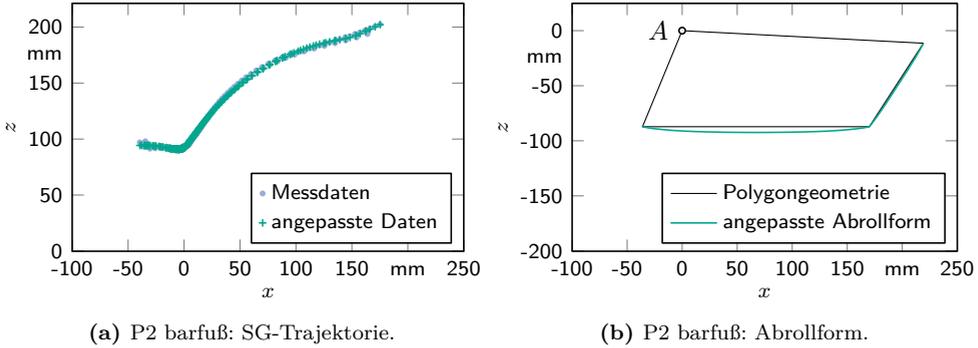


Abbildung 4.4: Ergebnis des an die Messdaten angepassten Modells HMT für Proband P2 (barfuß). (a) Die Trajektorie des Sprunggelenks aus den Messdaten (blau) sowie alle bei der Optimierung ausgewerteten Punkte des Modells (grün). (b) Zugehörige Geometrie des erzeugenden Polygons (schwarz) und Abrollform des angepassten Modells (grün).

ergibt sich das Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{x}_{\text{HMT}}} \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{N_k} \left((\tilde{x}_{k,j} - x_{\text{off},k} - x_{\text{HMT},k,j}(\mathbf{x}_{\text{HMT}}))^2 + (\tilde{z}_{k,j} - z_{\text{HMT},k,j}(\mathbf{x}_{\text{HMT}}))^2 \right)$$

u. d. N. $\mathbf{x}_{\text{HMT},\text{u}} \leq \mathbf{x}_{\text{HMT}} \leq \mathbf{x}_{\text{HMT},\text{o}}$ (4.21)

mit den Schranken

$$\mathbf{x}_{\text{HMT},\text{u}} = [\mathbf{p}_{\text{HMT},\text{u}}^T, -\infty, \dots, -\infty]^T, \quad (4.22a)$$

$$\mathbf{x}_{\text{HMT},\text{o}} = [\mathbf{p}_{\text{HMT},\text{o}}^T, \infty, \dots, \infty]^T. \quad (4.22b)$$

Als Anfangsbedingungen werden die im vorherigen Abschnitt ermittelten Parameter des Modells HM verwendet, sowie $k_{MT} = k_{HM}$, $\ell_{MT} = \frac{\ell_{HM}}{10}$ und $\gamma_F = \frac{\pi}{6}$. Das Ergebnis der Anpassung des Modells an alle $K = 3$ Barfuß-Messungen von Proband P2 ist in Abb. 4.4 dargestellt. Der Vergleich des Ergebnisses von Modell HMT in Abb. 4.4a mit dem des Modells HM in Abb. 4.3a zeigt eine deutlich bessere Übereinstimmung mit den Messungen im Bereich $x > 50$ mm. Dies wird an der zugehörigen Abrollform in Abb. 4.4b ersichtlich, die einen ausgedehnten Bereich für die Zehen aufweist. Im Gegensatz zum Modell HM gibt es beim Modell HMT deutliche Unterschiede zwischen den Ergebnissen der verschiedenen Experimente. Insbesondere die Länge des Zehenbereichs variiert sichtbar, worauf im nächsten Abschnitt bei der Diskussion und Bewertung der Ergebnisse eingegangen wird.

Bei der Anpassung des Modells HMT an die Messdaten müssen außerdem geeignete Anfangsbedingungen gewählt werden, da der Optimierungsalgorithmus sonst zum

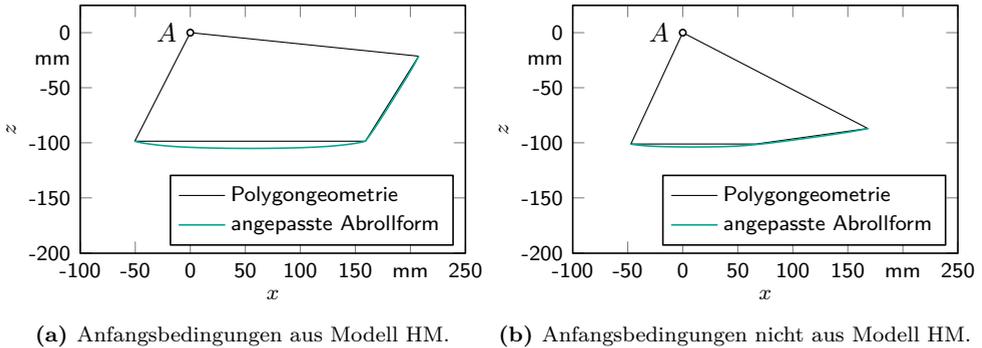


Abbildung 4.5: Ergebnis des an die Messdaten angepassten Modells HMT für Proband P2 (barfuß) mit verschiedenen Anfangsbedingungen. Jeweils die Geometrie des erzeugenden Polygons in schwarz und die Abrollform des angepassten Modells in grün. (a) Die Initialisierung mit dem Ergebnis für das Modell HM – wie oben beschrieben – liefert ein natürlich anmutendes Ergebnis mit einem abgeknickten Zehenbereich, vgl. Abb. 4.4. (b) Die Initialisierung mit einem flachen Fuß aus zwei Abschnitten konvergiert zur Lösung mit einer geknickten Sohle. Die Trajektorie des Sprunggelenks ist annähernd identisch zu der des Modells HM, vgl. Abb. 4.3.

Teil zu anderen Lösungen konvergiert, die eine schlechtere Übereinstimmung mit den Messdaten aufweisen. Dies ist in Abb. 4.5 für die Barfuß-Messdaten von Proband P2 dargestellt. Mit der oben beschriebenen Initialisierung unter Verwendung des Ergebnisses von Modell HM konvergiert die Lösung zu einer natürlich anmutenden Abrollform mit einem ausgeprägten Zehenbereich. Wird stattdessen ausgehend von Gl. (4.11) die Initialisierung $k_H = k_T = 1 \cdot 10^{-8} \text{ rad}^{-1}$ und $k_{HM} = k_{MT} = 0,1 \text{ rad}^{-1}$, $\gamma_F = \frac{\pi}{6}$ und dem Längenverhältnis $\frac{\ell_{MT}}{\ell_{HM}} = \frac{15}{85}$ gewählt, ergibt sich die Lösung in Abb. 4.5b. Da die angepassten Modelle in der vorliegenden Arbeit lediglich als Ausgangspunkt für die Fußgeometrie eines Robotermodells Verwendung finden, wird auf eine Studie zum Einfluss der Anfangsbedingungen auf die resultierenden Abrollformen verzichtet.

4.3 Auswertung der Modellanpassung

In der vorliegenden Arbeit wird der Einfluss der Fußgeometrie auf die Energieeffizienz beim zweibeinigen Gehen untersucht. Ein Ziel ist dabei die Entwicklung eines effizienten Fußmodells, das bei der Konstruktion und insbesondere der Optimierung zweibeiniger Roboter in diesem Kontext genutzt werden kann. Die Anpassung der Modelle an Messdaten aus Experimenten mit menschlichen Probanden hat also nicht den Anspruch, das Modell im Zusammenhang mit der Gesamtbewegung der Probanden im Sinne einer kinematischen oder dynamischen Analyse anzuwenden – eine aus Sicht der Biomechanik durchaus interessante Fragestellung, die jedoch über die vorliegende Arbeit hinausgeht. Vielmehr soll dadurch die prinzipielle Eignung der Modelle zur Beschreibung der Fußkinematik beim zweibeinigen Gehen überprüft wer-

den. Gleichzeitig werden Modellparameter ermittelt, die in der späteren Optimierung in Kapitel 10 als Start- und Vergleichswerte Anwendung finden. Zunächst werden in Abschnitt 4.3.1 die Barfuß-Experimente betrachtet, anschließend in Abschnitt 4.3.2 die Schuh-Experimente. Die Rohdaten, die verwendeten *Matlab*-Skripte zur Auswertung und die Ergebnisse der Modellanpassungen an alle Experimente sind in [395] veröffentlicht. Die dortigen Ergebnisse beinhalten sowohl die jeweiligen Modellparameter nach der erfolgten Anpassung, als auch Diagramme mit der zugehörigen Geometrie und den Trajektorien der Messungen und des Modells.¹ Es werden repräsentative Ergebnisse vorgestellt, anhand derer in Abschnitt 4.3.3 die Eignung der beiden Fußmodelle zur Beschreibung der Fußkinematik beim zweibeinigen Gehen diskutiert wird.

4.3.1 Ergebnisse der Barfuß-Experimente

Die an die Sprunggelenktrajektorie der Barfuß-Experimente angepassten Parameter des Modells HM sind in Tabelle 4.2 zusammengefasst. Bei allen Modellen mit der Ausnahme des linken Fußes von Proband P5 ergeben sich Regularisierungsparameter k_{HM} im Bereich von ca. $1 \cdot 10^{-2} \text{ rad}^{-1}$ bis $1 \cdot 10^{-1} \text{ rad}^{-1}$. Die Länge des erzeugenden Polygons ist bei allen Modellen deutlich kürzer als die Fußlänge in Tabelle 4.1, was daran liegt, dass dieses Modell keine Zehen beinhaltet. Es ergeben sich daher auch große Abweichungen zwischen den Abrollformen der angepassten Modelle und der zugehörigen Abrollform aus der Darstellung der Druckpunkte in einem fußfesten Koordinatensystem. Aus den Daten in Tabelle 4.2 ist außerdem ersichtlich, dass sich große individuelle Unterschiede zwischen allen Probanden und zum Teil auch zwischen dem linken und rechten Fuß eines Probanden (vgl. P2) ergeben. Im Folgenden wird exemplarisch das Ergebnis der Modellanpassung für den rechten Fuß von Proband P6 diskutiert, da dieses Modell den größten Wert für k_{HM} aufweist, womit der Unterschied zum flachen Fuß am deutlichsten zu erkennen ist. Die Zusammenhänge zwischen Messungen und angepasstem Modell sind repräsentativ für die anderen Modelle.

Das Ergebnis für den rechten Fuß von Proband P6 ist in Abb. 4.6 dargestellt. Die Übereinstimmung der gemessenen Sprunggelenktrajektorie mit der des Modells ist sehr hoch, lediglich für $x > 50 \text{ mm}$ ergeben sich sichtbare Abweichungen. Der gemessene Winkel $\tilde{\theta}_F$ des Fußes nach Gl. (4.4) zeigt einen nahezu linearen Zusammenhang mit dem Winkel θ_F des Modells, obwohl dieser nicht bei der Optimierung zur Anpassung des Modells berücksichtigt wird. Der Nullpunkt des Winkels $\tilde{\theta}_F$ wird auf den Nullpunkt des Winkels θ_F verschoben, da aus der Messung die flach aufliegende Orientierung des Fußes nicht bekannt ist. Damit ist es möglich, die gemessene Trajektorie des

¹ Die Messdaten der KMP für die Barfuß-Experimente von Proband P1 sind nicht plausibel, was bei der Interpretation der Ergebnisse berücksichtigt werden muss. Da diese nicht zur Anpassung der Modelle benötigt werden, wurden die Messungen nicht wiederholt. Die Ursache der fehlerhaften KMP-Messdaten ist nicht bekannt und wurde durch einen Neustart des Systems eliminiert.

Tabelle 4.2: Parameter des Modells HM, angepasst an die SG-Trajektorie (barfuß).

Proband	Fuß	k_H in rad^{-1}	k_M in rad^{-1}	k_{HM} in rad^{-1}	h_F in mm	ℓ_{HA} in mm	ℓ_{HM} in mm
P1	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$5,2 \cdot 10^{-2}$	88,5	52,3	226,6
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$9,2 \cdot 10^{-2}$	79,9	50,2	237,5
P2	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$6,0 \cdot 10^{-2}$	86,3	38,8	212,3
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	78,6	46,8	229,1
P3	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	68,6	68,3	261,0
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$8,4 \cdot 10^{-2}$	70,1	52,1	232,7
P4	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$4,0 \cdot 10^{-2}$	75,1	34,6	212,6
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$6,6 \cdot 10^{-2}$	68,1	39,7	204,1
P5	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$4,1 \cdot 10^{-6}$	79,4	16,5	178,3
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	78,3	19,7	178,5
P6	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,0 \cdot 10^{-1}$	67,4	56,8	227,2
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,2 \cdot 10^{-1}$	56,3	54,9	228,3
P7	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$8,3 \cdot 10^{-3}$	72,6	31,5	175,7
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	71,5	31,5	174,9
P8	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,9 \cdot 10^{-2}$	80,7	28,4	179,4
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$7,3 \cdot 10^{-2}$	71,2	35,9	186,3
P9	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	80,9	27,6	163,3
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,7 \cdot 10^{-2}$	79,2	31,8	172,6

Druckpunkts in ein fußfestes Bezugssystem umzurechnen und diese mit der Abrollform des angepassten Modells zu vergleichen. Im Bereich der Sohle ergibt sich damit eine sehr gute Übereinstimmung, lediglich im Bereich der Zehen treten größere Abweichungen auf. Das Modell besitzt keine Zehen und kann daher in diesem Bereich das Abrollen des menschlichen Fußes nur schlecht abbilden. Dies ist auch die Ursache für die Abweichungen zwischen den Sprunggelenktrajektorien von Messung und Modell bei $x > 50$ mm. Beim Vergleich der relativen Lage des Druckpunkts gegenüber dem Sprunggelenk aus der Messung mit der relativen Lage des Kontaktpunkts des Modells ergeben sich die größten Abweichungen der betrachteten Größen. Der Verlauf wird zwar qualitativ gut abgebildet, insbesondere der Übergang von der Ferse $x_{AC} < 0$ zum Großzehengrundgelenk $x_{AC} > 0$; im Bereich der Zehen bei $x_{AC} \gg 0$ ergeben sich jedoch Abweichungen von mehreren Zentimetern. Insgesamt ist die Übereinstimmung zwischen dem angepassten Modell und den Messungen jedoch hoch, besonders die Kinematik des Sprunggelenks wird gut abgebildet. Um eine noch größere Übereinstimmung zu erhalten, muss der Zehenbereich besser abgebildet werden, was mit dem Modell HMT möglich ist.

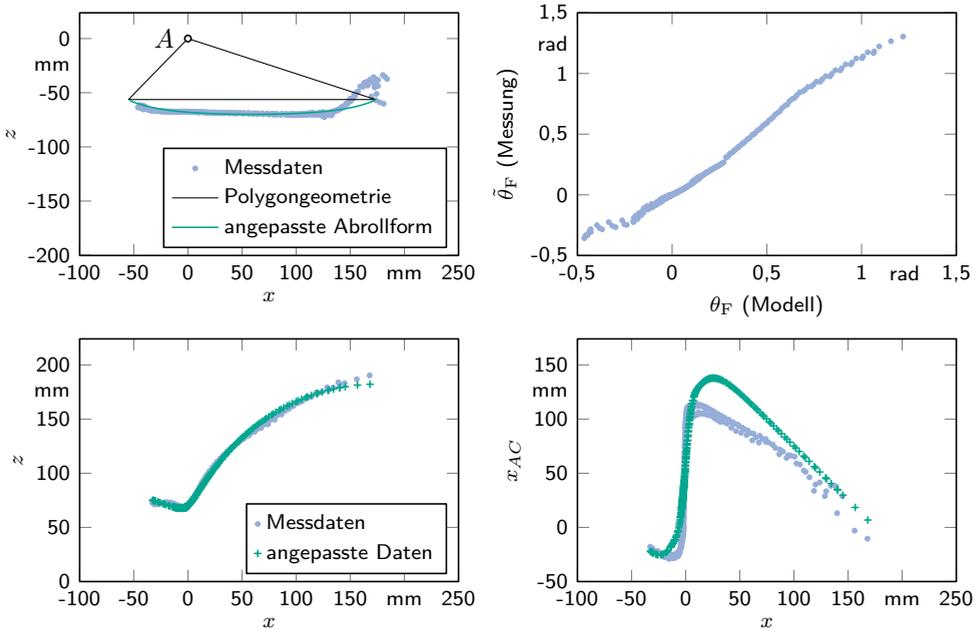


Abbildung 4.6: Ergebnis der Anpassung des Modells HM an die SG-Trajektorie für den rechten Fuß von Proband P6 (barfuß). Die Geometrie des Modells (links oben) stimmt in einem großen Bereich gut mit den gemessenen Druckpunktpositionen überein. Die Winkel von Modell und Messung (rechts oben) zeigen eine nahezu lineare Abhängigkeit voneinander. Die Sprunggelenktrajektorien von Modell und Messung (links unten) zeigen eine besonders gute Übereinstimmung für $x < 50$ mm. Die relative Lage des Druckpunkts x_{AC} gegenüber dem Sprunggelenk weicht stark von der relativen Lage des Kontaktpunkts ab (rechts unten).

Die Parameter des Modells HMT für alle Experimente sind in Tabelle B.6 (S. 222) zusammengestellt. Die Werte der Regularisierungsparameter liegen, von wenigen Ausreißern abgesehen, für k_{HM} im Bereich von ca. $1 \cdot 10^{-2} \text{ rad}^{-1}$ bis $6 \cdot 10^{-2} \text{ rad}^{-1}$ und für k_{MT} im Bereich von $2 \cdot 10^{-2} \text{ rad}^{-1}$ bis $2 \cdot 10^{-1} \text{ rad}^{-1}$. Die Länge des neu hinzugekommenen Zehenbereichs ℓ_{MT} liegt im Bereich von 40 mm bis 90 mm und ist individuell sehr unterschiedlich. Die Ursache für diese große Streuung liegt darin begründet, dass lediglich die kinematischen Daten der Sprunggelenktrajektorie für die Anpassung der Modelle genutzt wird und keine Einschränkungen für z. B. die Gesamtlänge des Fußes berücksichtigt werden. Ohne die beiden Ausreißer mit kurzem Zehenbereich liegt der zugehörige Winkel γ_F im Bereich von rund 37° bis 60° und weist keine erkennbare Abhängigkeit von der absoluten oder relativen Länge ℓ_{MT} auf. Das Ergebnis für den rechten Fuß von Proband P6 ist in Abb. 4.7 dargestellt. Der Zusammenhang zwischen $\hat{\theta}_F$ und θ_F ist praktisch unverändert und die Übereinstimmung der Sprunggelenktrajektorie ist im gesamten Bereich sehr gut. Die Abrollform zeigt eine deutlich bessere Übereinstimmung mit der Trajektorie des Druckpunkts,

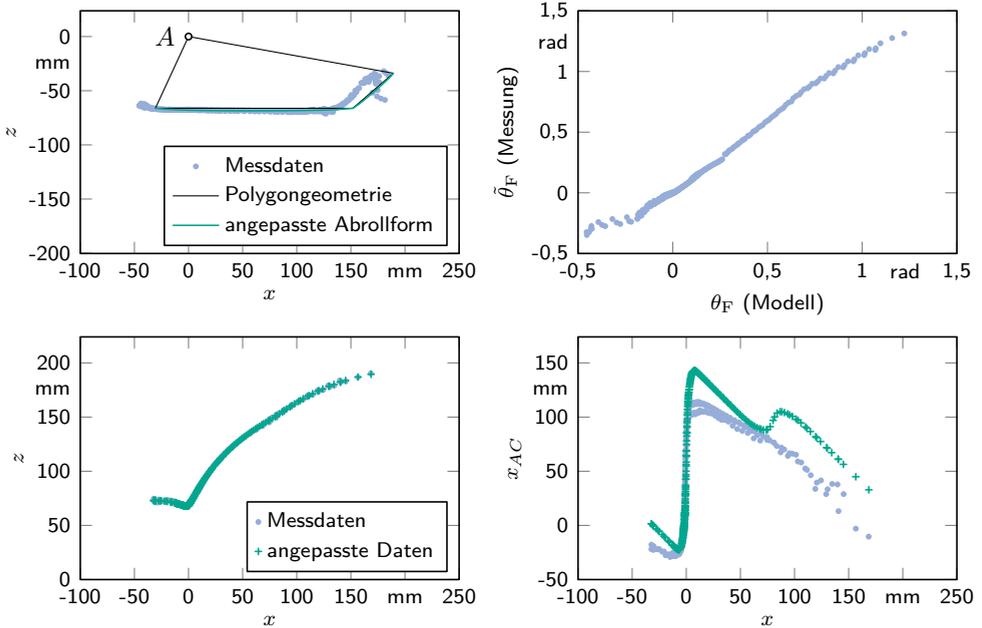


Abbildung 4.7: Ergebnis der Anpassung des Modells HMT an die SG-Trajektorie für den rechten Fuß von Proband P6 (barfuß). Die Geometrie des Modells (links oben) stimmt gut mit den gemessenen Druckpunktpositionen überein. Lediglich im Bereich der Zehen ergibt sich eine größere Abweichung. Die Winkel von Modell und Messung (rechts oben) zeigen eine nahezu lineare Abhängigkeit voneinander. Die Sprunggelenktrajektorien von Modell und Messung (links unten) zeigen durchweg eine sehr gute Übereinstimmung. Die relative Lage des Druckpunkts x_{AC} gegenüber dem Sprunggelenk weicht stark von der relativen Lage des Kontaktpunkts ab (rechts unten). Vor allem im Bereich der Zehen bei $x > 70$ mm ergibt sich eine große Abweichung.

obwohl diese in keiner Weise bei der Anpassung der Modellparameter berücksichtigt wird. Beim Vergleich der relativen Lage des Kontaktpunkts mit dem Druckpunkt aus den Messungen ergeben sich jedoch noch größere Abweichungen als beim Modell HM. Während der Druckpunkt in den Messungen beim Abrollen über die Zehen bei $x > 50$ mm eine stetige und langsame Veränderung aufweist, zeigt das Modell einen schnellen Wechsel zwischen dem Großzehengrundgelenk M und der Zehenspitze T . Dies liegt daran, dass der menschliche Fuß im Gegensatz zum Modell kein einzelner starrer Körper ist, sondern die Zehen in ihren jeweiligen Grundgelenken beweglich sind. Die Lage des Druckpunkts ergibt sich unter anderem aus dem Anpressen der Zehen und verändert sich nicht sprungartig.

Bei den bisher diskutierten Modellen wurde die Position des (oberen) Sprunggelenks SG aus den Messdaten durch den Mittelwert der Positionen der beiden Knöchelmarker AK und IK geschätzt. Dies hat jedoch ebenfalls einen großen Einfluss auf die Parameter der angepassten Modelle, was deutlich wird, wenn stattdessen die Trajektorie eines

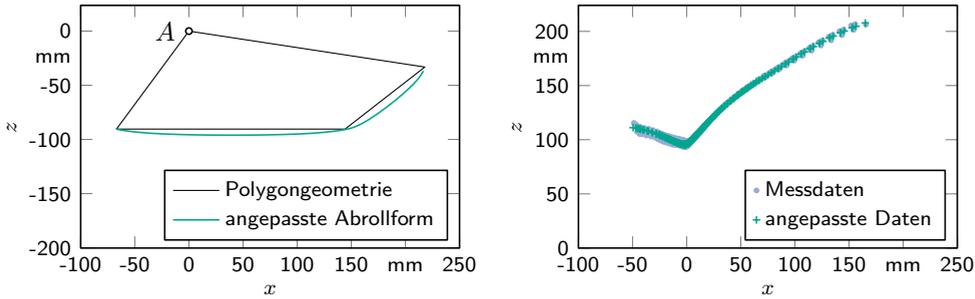


Abbildung 4.8: Ergebnis der Anpassung des Modells HMT an die SG-Trajektorie für den rechten Fuß von Proband P6 (mit Schuhen). Die Geometrie des Modells (links) und die Sprunggelenktrajektorien von Modell und Messung (rechts).

dieser Marker verwendet wird. Die resultierenden Parameter sind tabellarisch in Anhang B zusammengefasst. Es zeigt sich generell, dass sich bei der Verwendung des äußeren Knöchelmarkers AK deutlich flachere Abrollformen ergeben, was sich in sehr kleinen Werten für die Regularisierungsparameter k_{HM} und k_{MT} äußert. Im Gegensatz dazu ergeben sich größere Werte der Regularisierungsparameter und damit rundere Abrollformen bei Verwendung des inneren Knöchelmarkers IK. Da der Fokus in der vorliegenden Arbeit nicht auf der Beschreibung des menschlichen Fußes liegt, werden diese Zusammenhänge jedoch hier nicht weiter diskutiert. Stattdessen wird im nächsten Abschnitt auf die Ergebnisse der Schuh-Experimente eingegangen.

4.3.2 Ergebnisse der Schuh-Experimente

Den im vorherigen Abschnitt diskutierten Ergebnissen für die Barfuß-Experimente werden im Folgenden die Ergebnisse mit Schuhen gegenübergestellt, deren resultierende Modellparameter in Anhang B tabellarisch zusammengestellt sind. Zunächst wird das Modell HMT betrachtet, wobei das Ergebnis für den rechten Fuß von Proband P6 in Abb. 4.8 dargestellt ist. Da aufgrund der Schuhe der Marker GG nicht zur Verfügung steht, kann der Winkel des Fußes nicht aus den Messdaten rekonstruiert werden. Vielmehr müssten zur Darstellung der Trajektorie des Druckpunkts im fußfesten System zusätzliche Annahmen und Abschätzungen getroffen werden, worauf hier verzichtet wird. Die Sprunggelenktrajektorie kann, wie bei den Barfuß-Experimenten, sehr gut durch das angepasste Modell reproduziert werden. Ein Vergleich der Abrollform mit dem Ergebnis der Barfuß-Experimente in Abb. 4.7 zeigt, dass deren Abmessungen größer und die Übergänge deutlich runder sind. Die Regularisierungsparameter liegen nun für k_{HM} im Bereich von rund $3 \cdot 10^{-2} \text{ rad}^{-1}$ bis $2 \cdot 10^{-1} \text{ rad}^{-1}$ und für k_{MT} im Bereich von rund $2 \cdot 10^{-2} \text{ rad}^{-1}$ bis $2 \cdot 10^{-1} \text{ rad}^{-1}$. Bei allen Experimenten erstreckt sich der Abrollbereich der angepassten Daten – die grüne Linie in der Abbildung –

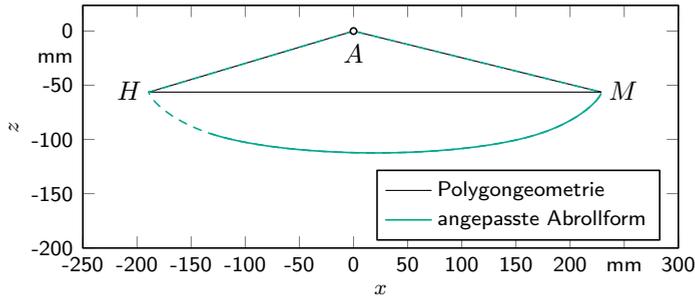


Abbildung 4.9: Ergebnis der Anpassung des Modells HM an die SG-Trajektorie für den rechten Fuß von Proband P2 (mit Schuhen). Der zur Anpassung an die Messdaten verwendete Bereich der Abrollform (grün, durchgezogen) erstreckt sich nicht über die gesamte Sohle des Modells (grün, gestrichelt).

über die gesamte Sohle von H bis T . Der Vergleich der relativen Lage des Druckpunkts aus den Messungen mit dem Kontaktpunkt der Abrollform liefert qualitativ dasselbe Ergebnis wie bei den Barfuß-Messungen und ist deshalb nicht dargestellt.

Die Resultate für das Modell HM mit Schuhen sind ebenfalls deutlich runder als im Barfuß-Fall. Die Werte des Regularisierungsparameters k_{HM} liegen im Bereich von rund $2 \cdot 10^{-1} \text{ rad}^{-1}$ bis $3 \cdot 10^{-1} \text{ rad}^{-1}$. Allerdings gibt es einen Bereich der Abrollform nahe der Ferse, der beim Anpassen des Modells an die gemessenen Sprunggelenktrajektorien nie im Kontakt mit dem Boden ist. Dies ist besonders deutlich beim linken Fuß von Proband P2 zu erkennen, der in Abb. 4.9 dargestellt ist, tritt jedoch bei der Auswertung aller Experimente mit dem Modell HM auf. Ein Vergleich mit den in Abb. 4.3a und 4.4a dargestellten Abrollformen desselben Fußes ohne Schuhe zeigt außerdem, dass die Abrollform und das dazugehörige Polygon nun deutlich länger sind. Es besteht für diese Modelle also kein einfacher Zusammenhang mehr zwischen den Abmessungen des Polygons und der Abrollform für die gemessenen Daten.

4.3.3 Diskussion der Ergebnisse

Die beiden Fußmodelle liefern für alle Experimente durchweg eine gute Übereinstimmung zwischen der Sprunggelenktrajektorie der Modelle und den Positionen aus den Messdaten. Dies ist zu erwarten, da bei der Anpassung der Modelle die Summe der quadrierten Abweichungen zwischen diesen Größen durch eine Optimierung minimiert wird. Bei der Beurteilung der Modelle werden daher die Größen betrachtet, die nicht direkt in den jeweiligen Optimierungsproblemen berücksichtigt werden. Im Falle der Barfuß-Experimente in Abschnitt 4.3.1 stehen durch den Marker am Großzehengrundgelenk Messdaten für den Winkel $\tilde{\theta}_F$ des Fußes zur Verfügung. Der Vergleich mit dem Absolutwinkel θ_F des Modells liefert in sehr guter Näherung

einen linearen Zusammenhang. Dies bedeutet, dass aus der Anpassung des Modells an die gemessene Sprunggelenktrajektorie eine gute Schätzung für die Bewegung des gesamten Fußes folgt. Es wird daher erwartet, dass bei der Verwendung der Fußmodelle in einem Gesamtmodell zur Beschreibung von zweibeinigen Gehbewegungen auch die Trägheitskräfte- und -momente aufgrund der Fußbewegung gut abgebildet werden. Die Übereinstimmung zwischen der Abrollform der Modelle und der gemessenen Druckpunkttrajektorie im fußfesten Bezugssystem ist ebenfalls gut, wobei das Modell HMT ein deutlich besseres Ergebnis liefert, da der Zehenbereich abgebildet werden kann. Die größten Abweichungen ergeben sich beim Vergleich der Lage des gemessenen Druckpunkts relativ zum Sprunggelenk mit der relativen Lage des Kontaktpunkts der Abrollform. Da beide Fußmodelle nur einen einzelnen Starrkörper abbilden, kann die Verformung des menschlichen Fußes durch das Abknicken der Zehen nicht abgebildet werden. Dies ist bei einer hier nicht betrachteten Verwendung für biomechanische Fragestellungen ggf. durch Modellerweiterungen zu berücksichtigen. Für die angestrebte Nutzung in Modellen für energieeffiziente Roboter hat diese Abweichung weniger Relevanz, da im Folgenden von einem starren Fuß ohne bewegliche Zehen ausgegangen wird.

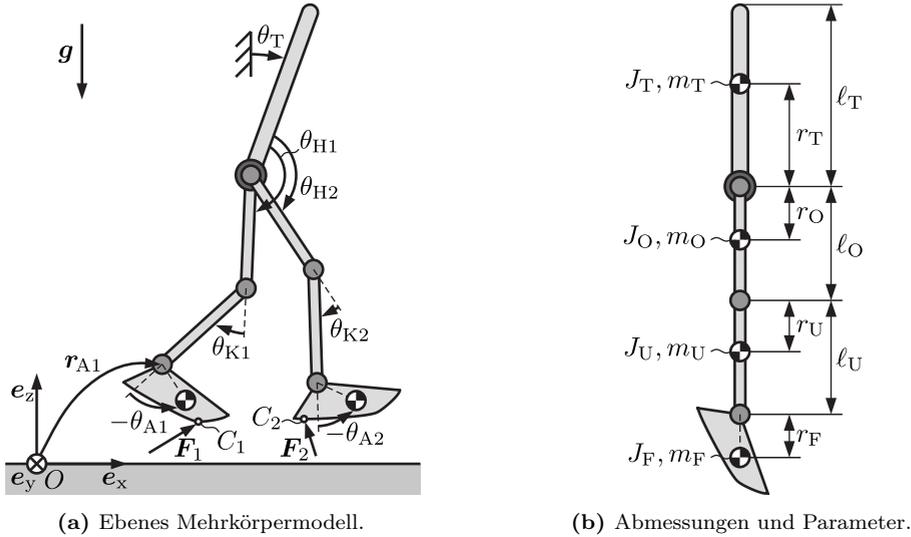
Das Modell HMT liefert sowohl für die Barfuß-Experimente als auch für die Schuh-Experimente deutlich bessere Ergebnisse als das Modell HM. Dies ist nicht verwunderlich, da durch die größere Anzahl an Modellparametern ein größerer Lösungsraum für das Optimierungsproblem zur Verfügung steht. Dies wird insbesondere bei der Anpassung der Modelle an die Schuh-Experimente deutlich, wo das Modell HM zu sehr langen Abrollformen führt, wobei bei der Anpassung nicht die gesamte Sohle in Kontakt mit dem Boden kommt. Die Fußmodelle werden im nächsten Kapitel bei der Erstellung eines Modells für die Gesamtbewegung beim zweibeinigen Gehen genutzt.

5 Modell für zweibeiniges Gehen

Im folgenden Kapitel wird ein Modell für das zweibeinige Gehen eines Roboters hergeleitet, das bei der anschließenden Untersuchung des Einflusses der Fußgeometrie auf dessen Energieeffizienz verwendet wird. Dazu wird zunächst in Abschnitt 5.1 ein ebenes Mehrkörpermodell für den Roboter erstellt, das aus starren Segmenten besteht, die durch aktuierte Drehgelenke miteinander verbunden sind. Für dieses Modell wird anschließend in Abschnitt 5.2 eine nichtlineare Regelung entworfen, die zur Realisierung zweibeiniger Gehbewegungen benötigt wird. Schließlich wird in Abschnitt 5.3 der Ablauf zur Berechnung und Simulation und Optimierung periodischer Gehbewegungen des geregelten Systems vorgestellt, die auf einer semi-analytischen Lösung für das geregelte Modell basiert und eine Aussage über die Stabilität der Bewegungen erlaubt.

5.1 Mehrkörpermodell

Zur Modellierung der Gehbewegungen wird das ebene Mehrkörpermodell in Abb. 5.1a aus sieben starren Segmenten, die durch aktuierte Drehgelenke miteinander verbunden sind, verwendet. Dieser Beschränkung des Modells liegt die Annahme zugrunde, dass die Energieeffizienz bei der Fortbewegung im Wesentlichen von der Bewegung in der Sagittalebene abhängt, während die Stabilisierung gegenüber einem seitlichen Umfallen hauptsächlich ein Regelungsproblem darstellt. Aus demselben Grund wird die Bewegung der Arme nicht berücksichtigt, da diese beim Mensch hauptsächlich zu Stabilisierung der Bewegung schwingen und nur einen geringen Einfluss auf den Energieverbrauch beim Gehen haben [273, 341]. Die Arme und der Kopf werden zusammen mit dem Torso als ein einzelner Starrkörper (Index T) modelliert, der an der Hüfte H mit den Oberschenkeln O verbunden ist. Das Modell ist symmetrisch, weshalb nicht zwischen links und rechts unterschieden wird. Die Beine werden mit den Indizes 1 und 2 bezeichnet, wobei mit den Oberschenkeln durch das jeweils Kniegelenk K ein Unterschenkel U verbunden ist, und damit wiederum über das Sprunggelenk A ein Fuß F. Die Segmente werden, abgesehen von der Fußgeometrie, durch die in Abb. 5.1b eingeführten Parameter



(a) Ebenes Mehrkörpermodell.

(b) Abmessungen und Parameter.

Abbildung 5.1: (a) Koordinaten des ebenen Mehrkörpermodells und (b) dessen Abmessungen und Parameter.

$\mathbf{p}_{\text{mech}} = [\ell_T, \ell_O, \ell_U, r_T, r_O, r_U, r_F, m_T, m_O, m_U, m_F, J_T, J_O, J_U, J_F]^T$ beschrieben, deren Werte in Tabelle 5.1 auf S. 127 zusammengestellt sind.

Periodische Gehbewegungen dieses Modells können aufgrund der Symmetrie durch eine ESP und eine DSP beschrieben werden, wobei das Ende der DSP durch Periodizitätsbedingungen mit dem Anfang der ESP verbunden ist, bei dem die beiden Beine 1 und 2 vertauscht werden. In der ESP führt das System eine kontinuierliche Bewegung aus, bei welcher der Fuß des Standbeins auf dem Boden abrollt, während das Schwungbein von hinten nach vorne schwingt. Dies wird durch ein System von Differentialgleichungen beschrieben. In der DSP trifft der Fuß des vormaligen Schwungbeins auf dem Boden auf. Da es sich um ein System aus starren Körpern handelt, wird dies durch einen Stoß beschrieben, wobei zusätzlich gefordert wird, dass das Standbein gleichzeitig vom Boden abhebt.¹ Die DSP findet in infinitesimal kurzer Zeit statt und wird durch eine algebraische Stoßabbildung beschrieben. Die Kombination aus kontinuierlicher ESP und instantaner DSP resultiert in einem *hybriden Modell* für die Dynamik des Systems. Zu dessen Herleitung wird zunächst in Abschnitt 5.1.2 das freie Modell in Abb. 5.1a beschrieben. Anschließend wird daraus in Abschnitt 5.1.3 das Modell für die ESP abgeleitet, indem die Abrollbedingung für den Standbeinfuß eingeführt wird. Analog dazu wird durch die Formulierung der entsprechenden Bedingungen in Abschnitt 5.1.4

¹ Die Annahme einer infinitesimal kurzen DSP führt zu einer einfachen Beschreibung der Bewegung und vor allem der Regelung, weshalb sie auch in der Literatur verbreitet ist, vgl. Abschnitt 1.2.1 (S. 12) sowie [137, 358, 360].

die Stoßabbildung zur Beschreibung der DSP aus dem freien Modell abgeleitet. Das kontinuierliche Modell für die ESP und das diskrete Modell für die DSP werden in Abschnitt 5.1.5 zu einem hybriden Modell für zweibeinige Gehbewegungen kombiniert.

5.1.1 Notation

Bevor in den folgenden Abschnitten die Gleichungen zur Beschreibung der Dynamik des Modells hergeleitet werden, wird kurz auf die verwendete Notation eingegangen. Der *Konfigurationsraum* \mathcal{Q} des Mehrkörpersystems wird durch die *generalisierten Koordinaten* $\mathbf{q} \in \mathcal{Q}$ aufgespannt. An jedem Punkt des Konfigurationsraums spannen die zugehörigen *generalisierten Geschwindigkeiten* $\dot{\mathbf{q}}$ bzw. die *generalisierten Impulse* \mathbf{p} einen Tangentialraum $T_q\mathcal{Q}$ auf.² Die disjunkte Vereinigung aller Tangentialräume, das Tangentialbündel, ergibt den *Phasenraum* $T\mathcal{Q}$. Die zur Beschreibung eines dynamischen Systems verwendeten generalisierten Koordinaten \mathbf{q} sind nicht eindeutig, sondern können durch eine Transformation des Konfigurationsraums auf einen gleichwertigen Satz anderer Koordinaten $\hat{\mathbf{q}}$ überführt werden.

Im Folgenden wird auf die Angabe der jeweiligen Basis verzichtet und stattdessen eine Vektor-Matrix-Notation verwendet, bei der Vektoren durch Spaltenmatrizen und Tensoren durch Matrizen dargestellt werden. Zur Unterscheidung dieser Matrizen von Vektoren im physikalischen Raum werden diese durch aufrechte Fettbuchstaben, z. B. \mathbf{q} , geschrieben. Für physikalische Vektoren werden kursive Fettbuchstaben verwendet, z. B. \mathbf{r} . Im Fließtext werden die Komponenten von Spaltenmatrizen durch einen Strichpunkt getrennt, um die ansonsten auftretenden Transpositionen zu vermeiden, z. B. $\mathbf{q} = [q_1; q_2; q_3] = [q_1, q_2, q_3]^T$.

Da das betrachtete Modell auf die $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z\}$ -Ebene beschränkt ist, müssen bei einigen Rechenoperationen diese beiden Komponenten von (dreidimensionalen) Orts- und Geschwindigkeitsvektoren auf eine zweidimensionale Spaltenmatrix abgebildet werden. Dafür werden die Projektionsmatrizen

$$\mathbf{P}_{(2\leftarrow 3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.1a)$$

$$\mathbf{P}_{(3\leftarrow 2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1b)$$

verwendet, wobei $\mathbf{P}_{(2\leftarrow 3)}$ die Projektion auf die zweidimensionale Spaltenmatrix ist, und $\mathbf{P}_{(3\leftarrow 2)} = \mathbf{P}_{(2\leftarrow 3)}^T$ die Umkehroperation.

² Bei mechanischen Systemen hängen die generalisierten Impulse \mathbf{p} mit den generalisierten Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}$ über eine Transformation mit der Massenmatrix des Systems zusammen.

Damit ergibt sich z. B. für den Ortsvektor des Sprunggelenks von Bein 1

$$\mathbf{r}_{A1} = \mathbf{P}_{(2 \leftarrow 3)} \mathbf{r}_{A1} = \begin{bmatrix} x_{A1} \\ z_{A1} \end{bmatrix}, \quad (5.2a)$$

$$\mathbf{r}_{A1} = \mathbf{P}_{(3 \leftarrow 2)} \mathbf{r}_{A1}. \quad (5.2b)$$

Das Modell des Roboters ist eine offene kinematische Kette aus sieben Segmenten, deren Konfiguration durch drei Absolutkoordinaten $\hat{\mathbf{q}}_a = [x_{A1}; z_{A1}; \theta_T]$ und sechs Relativkoordinaten (Körperkoordinaten³) $\mathbf{q}_b = [\theta_{H1}; \theta_{H2}; \theta_{K1}; \theta_{K2}; \theta_{A1}; \theta_{A2}]$ beschrieben werden kann. Bei durch ein *Dach* gekennzeichneten Vektoren, Matrizen und Gleichungen wird im Folgenden der Absolutwinkel des Oberkörpers θ_T zur Beschreibung der Orientierung des Gesamtsystems verwendet. Für den Entwurf der Regelung wird in Abschnitt 5.2.1 durch eine Koordinatentransformation die Phasenvariable θ eingeführt, die ebenfalls die Orientierung des Gesamtsystems beschreibt, womit sich die Absolutkoordinaten $\mathbf{q}_a = [x_{A1}; z_{A1}; \theta]$ ergeben. Die generalisierten Koordinaten zur Beschreibung des freien Modells in Abschnitt 5.1.2 sind damit $\hat{\mathbf{q}}_f = [\hat{\mathbf{q}}_a; \mathbf{q}_b]$ und $\mathbf{q}_f = [\mathbf{q}_a; \mathbf{q}_b]$. Die Absolutwinkel der Beinsegmente ergeben sich zu

$$\begin{bmatrix} \theta_{O1} \\ \theta_{O2} \\ \theta_{U1} \\ \theta_{U2} \\ \theta_{F1} \\ \theta_{F2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_f, \quad (5.3)$$

womit sich alle Gelenk- und Schwerpunktpositionen einfach berechnen lassen.

5.1.2 Freies Modell

Bevor in den nachfolgenden Abschnitten spezifische Modelle für die ESP und die DSP erstellt werden, werden als Grundlage dafür die Kinematik und die Dynamik des freien Modells in Abb. 5.1a hergeleitet. Dieses wird durch die Koordinaten $\hat{\mathbf{q}}_f$ in Kombination mit den Abmessungen in Abb. 5.1b und einem Fußmodell nach Kapitel 3 beschrieben. Die Absolutwinkel θ_{F1} und θ_{F2} der Füße nach Gl. (5.3) definieren die Orientierung der jeweiligen Verbindungslinie vom Sprunggelenk zum Schwerpunkt. Die Geometrie und die Kinematik der beiden Füße folgt nach Kapitel 3 aus einer Funktion $F_A(\theta_F)$, woraus sich für das Modell HM nach Gl. (3.19)

$$F_A(\theta_{F1}) = F_{HM}(\theta_{F1} - \theta_{F,0}), \quad F_A(\theta_{F2}) = F_{HM}(\theta_{F2} - \theta_{F,0}) \quad (5.4)$$

³ Englisch: body coordinates.

und ein entsprechender analoger Ausdruck für das Modell HMT nach Gl. (3.22) ergibt. Der konstante Winkel $\theta_{F,0}$ beschreibt als weiterer Fußparameter die relative Orientierung der Fußparametrisierung im Bezug auf die jeweiligen Verbindungslinie vom Sprunggelenk zum Schwerpunkt. Damit ist die Lage des potentiellen Kontaktpunkts C_1 bzw. C_2 relativ zum Sprunggelenk nach Gl. (3.10) für beide Füße durch

$$\mathbf{r}_{AC1}(\theta_{F1}) = F_A''(\theta_{F1})\mathbf{e}_x - F_A'(\theta_{F1})\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{r}_{AC2}(\theta_{F2}) = F_A''(\theta_{F2})\mathbf{e}_x - F_A'(\theta_{F2})\mathbf{e}_z \quad (5.5)$$

gegeben.

Das Modell ist dem Schwerfeld der Erde mit der Erdbeschleunigung $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ ausgesetzt, wobei die Gelenke durch die Aktormomente $\mathbf{u} = [u_{H1}; u_{H2}; u_{K1}; u_{K2}; u_{A1}; u_{A2}]$ angetrieben werden. Die Interaktion der Füße mit dem Boden bei C_1 und C_2 wird durch die beiden Kraftvektoren $\mathbf{F}_1 = F_{1x}\mathbf{e}_x + F_{1z}\mathbf{e}_z$ und $\mathbf{F}_2 = F_{2x}\mathbf{e}_x + F_{2z}\mathbf{e}_z$ beschrieben, deren Matrixdarstellungen

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{P}_{(2 \leftarrow 3)} \mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1z} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_2 = \mathbf{P}_{(2 \leftarrow 3)} \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{2z} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

sind. Da es sich bei $\hat{\mathbf{q}}_f$ um Minimalkoordinaten für das System handelt, folgt aus der kinetischen Energie $E_{\text{kin}}(\hat{\mathbf{q}}_f, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_f)$ und der potentiellen Energie $E_{\text{pot}}(\hat{\mathbf{q}}_f)$ mit

$$\mathcal{L}(\hat{\mathbf{q}}_f, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_f) = E_{\text{kin}}(\hat{\mathbf{q}}_f, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_f) - E_{\text{pot}}(\hat{\mathbf{q}}_f) \quad (5.7)$$

aus den Euler-Lagrange-Gleichungen die Bewegungsgleichung des Systems in der Form

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(\hat{\mathbf{q}}_f, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_f)}{\partial \dot{\hat{\mathbf{q}}}_f} - \frac{\partial \mathcal{L}(\hat{\mathbf{q}}_f, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_f)}{\partial \hat{\mathbf{q}}_f} = \hat{\mathbf{M}}_f(\hat{\mathbf{q}}_f) \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_f + \hat{\mathbf{T}}_f(\hat{\mathbf{q}}_f, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_f) = \hat{\mathbf{B}}_f \mathbf{u} + \hat{\mathbf{G}}_1^T \mathbf{F}_1 + \hat{\mathbf{G}}_2^T \mathbf{F}_2. \quad (5.8)$$

Die Terme auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung (5.8) folgen aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit (vgl. [209, Kapitel V]). Für die Eingangsmatrix ergibt dies

$$\hat{\mathbf{B}}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{(3 \times 6)} \\ \mathbf{B}_b(\mathbf{q}_b) \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

wobei $\mathbf{0}^{(3 \times 6)}$ eine 3×6 -Nullmatrix ist. Unter der Annahme, dass jeder Aktor direkt ein Moment im jeweiligen Gelenk aufbringt, ergibt sich für $\mathbf{B}_b(\mathbf{q}_b) = \mathbf{I}^{(6)}$ eine 6×6 -Einheitsmatrix. Die Projektionsmatrizen $\hat{\mathbf{G}}_1$ und $\hat{\mathbf{G}}_2$ hängen von der Interaktion des Modells mit dem Boden ab und unterscheiden sich in der ESP und DSP, weshalb sie in Abschnitt 5.1.3 und Abschnitt 5.1.4 gesondert hergeleitet werden.

5.1.3 Modell der Einzelstützphase

In der ESP ist das Modell lediglich mit dem Standbein 1 im Kontakt mit dem Boden, während das Schwungbein 2 vom Boden abhebt, nach vorne schwingt und am Ende der ESP gerade wieder mit dem Boden in Kontakt kommt. Es ist daher $\mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$ und \mathbf{F}_1 ergibt sich aus der Modellannahme, dass der Standbeinfuß ohne zu Gleiten auf dem Boden abrollt. Da durch die holonome Rollbedingung⁴ zwei Freiheitsgrade eingeschränkt werden, kann die Dynamik in der ESP auf eine gewöhnliche Differentialgleichung in den generalisierten Koordinaten $\hat{\mathbf{q}}_s = [\theta_T; \mathbf{q}_b]$ bzw. $\mathbf{q}_s = [\theta; \mathbf{q}_b]$ reduziert werden. Zunächst wird die Kontaktkraft aus dem freien Modell mit der Rollbedingung berechnet. Anschließend wird die Transformation zwischen den Koordinaten $\hat{\mathbf{q}}_s$ und \mathbf{q}_s eingeführt, durch welche die Phasenvariable θ zur Beschreibung der Systemdynamik verwendet wird. Schließlich wird die Bewegungsgleichung in der ESP in den Koordinaten \mathbf{q}_s abgeleitet.

Durch die Forderung, dass der Standbeinfuß auf dem Boden abrollt, ist die Position $\mathbf{r}_{A1} = [x_{A1}; z_{A1}]$ des Standbeinsprunggelenks eine Funktion des Fußwinkels θ_{F1} , der sich aus Gl. (5.3) ergibt. Damit gilt in der ESP

$$\mathbf{r}_{A1,s}(\theta_{F1}) = \begin{bmatrix} F_A(\theta_{F1}) \\ F'_A(\theta_{F1}) \end{bmatrix}, \quad (5.10a)$$

$$\dot{\mathbf{r}}_{A1,s}(\theta_{F1}, \dot{\theta}_{F1}) = \mathbf{r}'_{A1,s}(\theta_{F1}) \dot{\theta}_{F1}, \quad (5.10b)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_{A1,s}(\theta_{F1}, \dot{\theta}_{F1}, \ddot{\theta}_{F1}) = \mathbf{r}''_{A1,s}(\theta_{F1}) \dot{\theta}_{F1}^2 + \mathbf{r}'_{A1,s}(\theta_{F1}) \ddot{\theta}_{F1}, \quad (5.10c)$$

woraus die Geschwindigkeitsnebenbedingung und die Projektionsmatrix⁵

$$\mathbf{0} = \dot{\mathbf{r}}_{A1} - \dot{\mathbf{r}}_{A1,s} = \frac{\partial(\dot{\mathbf{r}}_{A1} - \dot{\mathbf{r}}_{A1,s})}{\partial \dot{\hat{\mathbf{q}}}_f} \dot{\hat{\mathbf{q}}}_f = \hat{\mathbf{G}}_1 \dot{\hat{\mathbf{q}}}_f, \quad (5.11)$$

$$\hat{\mathbf{G}}_1 = \frac{\partial(\dot{\mathbf{r}}_{A1} - \dot{\mathbf{r}}_{A1,s})}{\partial \dot{\hat{\mathbf{q}}}_f} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{A1}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_{A1}} & \frac{\partial(-\dot{\mathbf{r}}_{A1,s})}{\partial \dot{\hat{\mathbf{q}}}_s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{(2)} & -\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{A1,s}}{\partial \dot{\hat{\mathbf{q}}}_s} \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

folgen. Durch Einsetzen von Gl. (5.10) und (5.12) in Gl. (5.8) ergibt sich somit

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}_{f,00}(\hat{\mathbf{q}}_f) & \hat{\mathbf{M}}_{f,01}(\hat{\mathbf{q}}_f) \\ \hat{\mathbf{M}}_{f,10}(\hat{\mathbf{q}}_f) & \hat{\mathbf{M}}_{f,11}(\hat{\mathbf{q}}_f) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{r}}_{A1,s} \\ \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{\Gamma}}_{f,0}(\hat{\mathbf{q}}_f, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_f) \\ \hat{\mathbf{\Gamma}}_{f,1}(\hat{\mathbf{q}}_f, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_f) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{(2 \times 6)} \\ \hat{\mathbf{B}}_s \end{bmatrix} \mathbf{u} + \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{(2)} \\ \left(-\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_{A1,s}}{\partial \dot{\hat{\mathbf{q}}}_s}\right)^\top \end{bmatrix} \mathbf{F}_1. \quad (5.13)$$

⁴ Die Rollbedingung ist holonom, da ein ebenes System betrachtet wird (vgl. [209, S. 25]). Bei räumlichen Bewegungen ist die Rollbedingung im Allgemeinen nichtholonom.

⁵ Die Zwangskräfte F_{1x} und F_{1z} können formal als Lagrange-Multiplikatoren für die zwei skalaren Gleichungen in nach Gl. (5.11) eingeführt werden. Damit ergibt sich gerade die Projektionsmatrix nach Gl. (5.12), vgl. [209, S. 146f].

Aus der ersten Zeile dieser Blockmatrixdarstellung folgt die Kontaktkraft

$$\mathbf{F}_1(\hat{\mathbf{q}}_s, \dot{\hat{\mathbf{q}}}_s, \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_s) = \hat{\mathbf{M}}_{f,00} \ddot{\mathbf{r}}_{A1,s} + \hat{\mathbf{M}}_{f,01} \ddot{\hat{\mathbf{q}}}_s + \hat{\mathbf{\Gamma}}_{f,0} , \quad (5.14)$$

die mit den Beziehungen nach Gl. (5.10) nur von $\hat{\mathbf{q}}_s$, $\dot{\hat{\mathbf{q}}}_s$ und $\ddot{\hat{\mathbf{q}}}_s$ abhängt.

Bevor die Bewegungsgleichung des Modells der ESP in den Koordinaten \mathbf{q}_s aufgestellt werden kann, muss die Transformation auf die Phasenvariable θ definiert werden. Diese wird an dieser Stelle in allgemeiner Form

$$\mathbf{q}_s = \Psi(\hat{\mathbf{q}}_s) , \quad \dot{\mathbf{q}}_s = \left(\frac{\partial \Psi(\hat{\mathbf{q}}_s)}{\partial \hat{\mathbf{q}}_s} \right) \dot{\hat{\mathbf{q}}}_s , \quad (5.15a)$$

$$\hat{\mathbf{q}}_s = \Psi^{-1}(\mathbf{q}_s) , \quad \dot{\hat{\mathbf{q}}}_s = \left(\frac{\partial \Psi^{-1}(\mathbf{q}_s)}{\partial \mathbf{q}_s} \right) \dot{\mathbf{q}}_s = \left(\frac{\partial \Psi(\hat{\mathbf{q}}_s)}{\partial \hat{\mathbf{q}}_s} \right)^{-1} \dot{\hat{\mathbf{q}}}_s \quad (5.15b)$$

eingeführt und in Abschnitt 5.2.1 durch Gl. (5.48) beschrieben. Da die Rollbedingung eine holonome Nebenbedingung ist und in expliziter Form vorliegt, kann die Substitution nach Gl. (5.10) auf Gl. (5.7) angewendet werden, um analog zum Vorgehen beim freien Modell die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s)}{\partial \dot{\mathbf{q}}_s} - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s)}{\partial \mathbf{q}_s} = \mathbf{M}_s(\mathbf{q}_s) \ddot{\mathbf{q}}_s + \mathbf{\Gamma}_s(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) = \mathbf{B}_s \mathbf{u} \quad (5.16)$$

abzuleiten, wobei

$$\mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{(1 \times 6)} \\ \mathbf{B}_b(\mathbf{q}_b) \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

gilt. Die Bewegungsgleichung (5.16) gilt nur unter der Annahme, dass die Rollbedingung erfüllt ist. Dafür muss die Normalkraft im Kontakt nicht-negativ sein,

$$F_{1z} \geq 0 , \quad (5.18)$$

da der Fuß sonst abhebt. Weiterhin darf die Haftgrenze mit dem Haftreibungskoeffizienten μ_H nicht überschritten werden,

$$|F_{1x}| \leq \mu_H F_{1z} , \quad (5.19)$$

da der Fuß sonst zu Gleiten beginnt. Außerdem darf der potentielle Kontaktpunkt C_2 des Schwungbeinfußes nur am Anfang und am Ende der ESP mit dem Boden im Kontakt sein. Während des Schritts muss dieser oberhalb des Bodens sein:

$$z_{C2} \geq 0 . \quad (5.20)$$

5.1.4 Modell der Doppelstützphase

Die DSP wird als instantaner plastischer Stoß modelliert, bei dem das vormalige Schwungbein mit seinem potentiellen Kontaktpunkt auf dem Boden auftrifft und gleichzeitig das vormalige Standbein ohne Interaktion abhebt ($\mathbf{F}_1 = \mathbf{0}$). Unter diesen Annahmen kann die DSP durch eine algebraische Abbildung beschrieben werden, die die Systemzustände am Ende der ESP vor dem Stoß (Index: $-$) auf die Zustände am Anfang der nächsten ESP nach dem Stoß (Index: $+$) abbildet. Die Integration der Bewegungsgleichung (5.8) des freien Modells von t^- bis t^+ ergibt die Impulsbilanz

$$\hat{\mathbf{M}}_f(\hat{\mathbf{q}}_f^+) \dot{\hat{\mathbf{q}}}_f^+ - \hat{\mathbf{M}}_f(\hat{\mathbf{q}}_f^-) \dot{\hat{\mathbf{q}}}_f^- = \lim_{t^- \rightarrow t^+} \int_{t^-}^{t^+} \hat{\mathbf{G}}_2^\top \mathbf{F}_2 dt = \hat{\mathbf{G}}_2^\top \hat{\mathbf{F}}_2. \quad (5.21)$$

Dabei wird angenommen, dass die Aktormomente \mathbf{u} beschränkt sind und somit keinen Beitrag leisten. Vor dem Stoß ergeben sich die Koordinaten $\hat{\mathbf{q}}_f^-$ und die Geschwindigkeiten $\dot{\hat{\mathbf{q}}}_f^-$ aus dem Zustand am Ende der ESP zu

$$\hat{\mathbf{q}}_f^- = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{A1,s}(\theta_{F1}^-) \\ \hat{\mathbf{q}}_s^- \end{bmatrix}, \quad \dot{\hat{\mathbf{q}}}_f^- = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}_{A1,s}(\theta_{F1}^-, \dot{\theta}_{F1}^-) \\ \dot{\hat{\mathbf{q}}}_s^- \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

Da der Stoß in infinitesimaler Zeit abläuft, gibt es keine Änderung der Konfiguration

$$\hat{\mathbf{q}}_f^+ = \hat{\mathbf{q}}_f^-, \quad (5.23)$$

womit für die Massenmatrix $\hat{\mathbf{M}}_f = \hat{\mathbf{M}}_f(\hat{\mathbf{q}}_f^+) = \hat{\mathbf{M}}_f(\hat{\mathbf{q}}_f^-)$ folgt. Die Annahme, dass es sich um einen plastischen Stoß handelt, bedeutet, dass die materielle Geschwindigkeit des Kontaktpunkts C_2 nach dem Stoß

$$\mathbf{v}_{C_2}^+ = \frac{\partial \mathbf{v}_{C_2}}{\partial \dot{\hat{\mathbf{q}}}_f} \dot{\hat{\mathbf{q}}}_f^+ = \mathbf{0} \quad (5.24)$$

ist, womit sich analog zu Gl. (5.12) die Projektionsmatrix

$$\hat{\mathbf{G}}_2(\hat{\mathbf{q}}_f^-) = \frac{\partial \mathbf{v}_{C_2}}{\partial \dot{\hat{\mathbf{q}}}_f} \quad (5.25)$$

ergibt. Damit folgt aus Gl. (5.21) und (5.24) das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}_f & -\hat{\mathbf{G}}_2^\top \\ \hat{\mathbf{G}}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\hat{\mathbf{q}}}_f^+ \\ \hat{\mathbf{F}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}_f \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{q}}_f^-}{\partial \hat{\mathbf{q}}_s^-} \right) \dot{\hat{\mathbf{q}}}_s^-, \quad (5.26)$$

aus dessen Lösung sich der Kraftimpuls $\hat{\mathbf{F}}_2$ und die Geschwindigkeiten $\hat{\mathbf{q}}_f^+$ nach dem Stoß in Abhängigkeit von den Zuständen der ESP vor dem Stoß ergeben:

$$\dot{\mathbf{q}}_f^+ = \Delta_{\dot{\mathbf{q}}_f}(\hat{\mathbf{q}}_s^-)\dot{\mathbf{q}}_s^- , \quad (5.27)$$

$$\hat{\mathbf{F}}_2 = \Delta_{\mathbf{F}}(\hat{\mathbf{q}}_s^-)\dot{\mathbf{q}}_s^- . \quad (5.28)$$

Wie im vorigen Abschnitt muss dabei der Kraftimpuls noch physikalische Nebenbedingungen erfüllen. So darf wiederum die Normalkomponente nicht negativ sein,

$$\hat{F}_{2z} \geq 0 , \quad (5.29)$$

und die Haftgrenze

$$|\hat{F}_{2x}| \leq \mu_H \hat{F}_{2z} \quad (5.30)$$

muss eingehalten werden. Die Gültigkeit der Theorie der trockenen Reibung mit dem Haftreibungskoeffizienten μ_H wird auch für den in infinitesimaler Zeit ablaufenden Stoßvorgang angenommen, was auf den experimentellen Befunden in [327, S. 315] beruht: „We have observed that Coulomb’s theory of dry friction remains generally valid for the surface contact friction during the collision.“⁶

5.1.5 Hybrides Modell für Gehen

Das kontinuierliche Modell der ESP und das diskrete Modell der DSP in den Abschnitten 5.1.3 und 5.1.4 werden nun zu einem hybriden Modell für Gehbewegungen des Systems kombiniert. Dazu wird zunächst die Bewegungsgleichung für die ESP durch weitere Transformationen auf eine für die anschließende Regelung vorteilhaftere Form gebracht. Danach werden die Stoßabbildungen für die somit verwendeten Zustände transformiert und schließlich das hybride Gesamtmodell formuliert.

Die Bewegungsgleichung (5.16) in der Blockmatrixdarstellung

$$\begin{bmatrix} M_{s,11}(\mathbf{q}_s) & M_{s,12}(\mathbf{q}_s) \\ M_{s,21}(\mathbf{q}_s) & M_{s,22}(\mathbf{q}_s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\mathbf{q}}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_{s,1}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \\ \Gamma_{s,2}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{(1 \times 6)} \\ \mathbf{B}_b(\mathbf{q}_s) \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (5.31)$$

erlaubt eine partielle Feedback-Linearisierung nach [360, Abschnitt 3.4.5]. Mit den Gelenkwinkelbeschleunigungen als neuem Systemeingang

$$\mathbf{v} = \ddot{\mathbf{q}}_b \quad (5.32)$$

⁶ „Wir haben beobachtet, dass die Coulomb’sche Theorie der trockenen Reibung für die Oberflächenkontaktreibung während der Kollision im Allgemeinen ihre Gültigkeit behält.“ (Übersetzung des Verfassers).

und den Abkürzungen

$$\bar{\mathbf{M}}_1 = M_{s,11}^{-1} \mathbf{M}_{s,12} , \quad (5.33a)$$

$$\bar{\Gamma}_1 = M_{s,11}^{-1} \Gamma_{s,1} , \quad (5.33b)$$

$$\bar{\mathbf{M}}_2 = \mathbf{B}_b^{-1} (\mathbf{M}_{s,21} \bar{\mathbf{M}}_1 + \mathbf{M}_{s,22}) , \quad (5.33c)$$

$$\bar{\Gamma}_2 = \mathbf{B}_b^{-1} (\mathbf{M}_{s,21} \bar{\Gamma}_1 + \Gamma_{s,2}) , \quad (5.33d)$$

wobei in der vorliegenden Arbeit $\mathbf{B}_b(\mathbf{q}_s) = \mathbf{I}^{(6)}$ gilt, folgt aus Gl. (5.31)

$$\ddot{\theta} = \bar{\Gamma}_1 + \bar{\mathbf{M}}_1 \mathbf{v} , \quad (5.34)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\Gamma}_2 + \bar{\mathbf{M}}_2 \mathbf{v} . \quad (5.35)$$

Aus Gl. (5.35) können die Aktormomente \mathbf{u} berechnet werden, die zur Erzeugung des neuen Systemeingangs \mathbf{v} , der Gelenkwinkelbeschleunigungen, benötigt werden, was einer Berechnung mittels inverser Dynamik gleichkommt.

Die partielle Feedback-Linearisierung führt mit Gl. (5.32) und (5.34) auf die Bewegungsgleichung

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\mathbf{q}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_1 \\ \mathbf{0}^{(6 \times 1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{M}}_1 \\ \mathbf{I}^{(6)} \end{bmatrix} \mathbf{v} , \quad (5.36)$$

die neuen Systemeingänge \mathbf{v} wirken folglich auf alle Beschleunigungen. Für den späteren Reglerentwurf ist es von Vorteil, die Dynamik der Phasenvariablen nicht durch die beiden Zustände θ und $\dot{\theta}$ zu beschreiben, sondern statt der Winkelgeschwindigkeit den zu θ konjugierten generalisierten Impuls

$$\sigma = \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s)}{\partial \dot{\theta}} = M_{s,11}(\mathbf{q}_s) \dot{\theta} + \mathbf{M}_{s,12}(\mathbf{q}_s) \dot{\mathbf{q}}_b \quad (5.37)$$

mit

$$\dot{\sigma} = - \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s)}{\partial \theta} \quad (5.38)$$

zu verwenden. Der generalisierte Impuls σ kann aus der Transformation

$$\begin{bmatrix} \sigma \\ \dot{\mathbf{q}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{s,11}(\mathbf{q}_s) & \mathbf{M}_{s,12}(\mathbf{q}_s) \\ \mathbf{0}^{(6 \times 1)} & \mathbf{I}^{(6)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\mathbf{q}}_b \end{bmatrix} , \quad \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\mathbf{q}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{s,11}^{-1}(\mathbf{q}_s) & -\bar{\mathbf{M}}_1(\mathbf{q}_s) \\ \mathbf{0}^{(6 \times 1)} & \mathbf{I}^{(6)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma \\ \dot{\mathbf{q}}_b \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

berechnet werden, womit sich mit dem Zustandsvektor $\mathbf{x}_s = [\theta; \sigma; \mathbf{q}_b; \dot{\mathbf{q}}_b]$ die Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}_s = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \sigma \\ \mathbf{q}_b \\ \dot{\mathbf{q}}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{s,11}^{-1}(\mathbf{q}_s)\sigma - \bar{\mathbf{M}}_1(\mathbf{q}_s)\dot{\mathbf{q}}_b \\ -\frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{L}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \\ \dot{\mathbf{q}}_b \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s) + \mathbf{g}_s(\mathbf{x}_s)\mathbf{v} \quad (5.40)$$

zur Beschreibung der ESP ergibt, vgl. [360, Gl. (3.52)].

Aus Gl. (5.23) und (5.27) können die Zustände $\mathbf{q}_s^+, \dot{\mathbf{q}}_s^+$ am Beginn der ESP nach dem Stoß aus den Zuständen $\mathbf{q}_s^-, \dot{\mathbf{q}}_s^-$ am Ende der ESP vor dem Stoß berechnet werden. Der Wechsel von Schwungbein und Standbein wird durch eine Vertauschungsmatrix

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

beschrieben, womit sich

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{q}}_s^+ &= \mathbf{R}\hat{\mathbf{q}}_s^-, \\ \mathbf{q}_s^+ &= \Psi(\mathbf{R}\Psi^{-1}(\mathbf{q}_s^-)) = \Delta_{\mathbf{q}}(\mathbf{q}_s^-) \end{aligned} \quad (5.42)$$

ergibt. Für die Geschwindigkeiten nach dem Stoß folgt analog aus Gl. (5.27) und (5.41)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_s^+ &= \left(\frac{\partial \Psi^{-1}(\mathbf{q}_s)}{\partial \mathbf{q}_s} \right)_{\mathbf{q}_s=\mathbf{q}_s^+}^{-1} \left[\mathbf{0}_{(7 \times 2)} \quad \mathbf{R} \right] \Delta_{\dot{\mathbf{q}}}(\Psi^{-1}(\mathbf{q}_s^-)) \left(\frac{\partial \Psi^{-1}(\mathbf{q}_s)}{\partial \mathbf{q}_s} \right)_{\mathbf{q}_s=\mathbf{q}_s^-} \dot{\mathbf{q}}_s^- \\ &= \Delta_{\dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}_s^-) \dot{\mathbf{q}}_s^- \end{aligned} \quad (5.43)$$

und somit mit der Transformation (5.39) die Stoßabbildung

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma^+ \\ \dot{\mathbf{q}}_b^+ \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} M_{s,11}(\mathbf{q}_s^+) & \mathbf{M}_{s,12}(\mathbf{q}_s^+) \\ \mathbf{0}_{(6 \times 1)} & \mathbf{I}^{(6)} \end{bmatrix} \Delta_{\dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}_s^-) \begin{bmatrix} M_{s,11}^{-1}(\mathbf{q}_s^-) & -\bar{\mathbf{M}}_1(\mathbf{q}_s^-) \\ \mathbf{0}_{(6 \times 1)} & \mathbf{I}^{(6)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^- \\ \dot{\mathbf{q}}_b^- \end{bmatrix} \\ &= \Delta_{\sigma\dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}_s^-) \begin{bmatrix} \sigma^- \\ \dot{\mathbf{q}}_b^- \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Aus Gl. (5.42) und (5.44) kann damit die Stoßabbildung

$$\mathbf{x}_s^+ = \Delta(\mathbf{x}_s^-) \quad (5.45)$$

für den gesamten Zustandsvektor bestimmt werden.

Aus Gl. (5.40) und (5.45) folgt schließlich das hybride Modell

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_s = \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s) + \mathbf{g}_s(\mathbf{x}_s)\mathbf{v} & \mathbf{x}_s \notin \mathcal{S} \\ \mathbf{x}_s^+ = \mathbf{\Delta}(\mathbf{x}_s^-) & \mathbf{x}_s^- \in \mathcal{S}, \end{cases} \quad (5.46)$$

wobei die *Stoßmannigfaltigkeit*

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x}_s \in T\mathcal{Q} \mid z_{C2}(\mathbf{x}_s) = 0, x_{C2}(\mathbf{x}_s) > x_{C1}(\mathbf{x}_s)\} \quad (5.47)$$

alle Systemzustände umfasst, bei denen das Schwungbein in horizontaler Richtung vor dem Standbein mit dem Boden in Kontakt kommt. Dies ist eine notwendige Bedingung für periodische Gehbewegungen, die durch die Symmetrie des Modells und das Vertauschen der Beine durch einen einzigen Schritt vollständig beschrieben werden, vgl. [360, Gl. (3.31)].

5.2 Regelung

Um mit dem in Abschnitt 5.1.5 hergeleiteten, hybriden Modell zweibeinige Gehbewegungen auszuführen, wird eine Regelung benötigt, die diese Bewegung erzeugt und stabilisiert. Dazu wird die in [358, 360] für Modelle mit Punktfüßen vorgeschlagene und in [226] für Modelle mit kreisförmigen Füßen erweiterte Regelung auf das Modell angewendet. Zunächst wird in Abschnitt 5.2.1 die Transformation auf die Phasenvariable θ eingeführt. Anhand dieser werden in Abschnitt 5.2.2 die Solltrajektorien für die Gelenkwinkelverläufe während der ESP definiert, die in Abschnitt 5.2.3 durch eine nichtlineare Regelung mittels Eingangs-/Ausgangslinearisierung erzeugt und stabilisiert werden. Da das System in der ESP unteraktuiert ist, verbleibt eine interne Dynamik, die nicht direkt durch die Regelung stabilisiert werden kann. Für den Fall, dass keine Regelabweichung vorliegt, ist diese interne Dynamik die *hybride Nulldynamik* (HZD) des Systems, die in Abschnitt 5.2.4 beschrieben und analysiert wird. Darüber hinaus wird eine semi-analytische Lösung vorgestellt, die eine schnelle Berechnung und Simulation der HZD erlaubt.

5.2.1 Phasenvariable

Die bereits in Abschnitt 5.1.3 eingeführte Phasenvariable θ , die als Komponente von \mathbf{q}_s durch die Transformation $\mathbf{q}_s = \mathbf{\Psi}(\hat{\mathbf{q}}_s)$ aus den physikalischen Koordinaten des Modells in der ESP hervorgeht, wird anstelle der Zeit t zur Beschreibung der Sollbewegung der Regelung genutzt. Da $\theta(t)$ selbst ein Systemzustand ist, ergibt ein Entwurf der Regelung in Abhängigkeit von θ ein autonomes System, siehe [358], wohingegen ein zeitabhängiger Reglerentwurf in einem heteronomen System resultiert, siehe [58]. Die

dafür notwendige Bedingung ist, dass in der ESP ein streng monotoner Zusammenhang $\theta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \theta(t)$ existiert, vgl. [146, Voraussetzung 3], womit die von t abhängige Dynamik des Systems transformiert und in Abhängigkeit von θ beschrieben werden kann.

In der Literatur werden verschiedene Phasenvariablen vorgeschlagen und verwendet. Ohne Anspruch auf Vollständigkeit wird z. B. in [285, Gl. 7] die Phasenvariable über eine nichtlineare Funktion in Abhängigkeit des Oberschenkelwinkels definiert; in [228, Abschnitt V] und [208, Gl. 20] wird die horizontale Position der Hüfte verwendet; in [131] wird die Position des Druckpunkts als Phasenvariable zur Beschreibung der menschlichen Gehbewegung vorgeschlagen. Der Winkel des Oberkörpers kommt nicht als Phasenvariable infrage, da dieser bei einer periodischen Gehbewegung am Anfang und Ende der ESP identisch sein muss und daher nicht streng monoton von der Zeit abhängen kann. Eine weitere häufig gewählte Phasenvariable ist das *virtuelle Bein*, die Verbindungslinie von der Hüfte zum Sprunggelenk des Standbeins, das bereits in [358] zum Entwurf der Regelung für ein Modell mit Punktfüßen genutzt wird. Wenn die Längen von Ober- und Unterschenkel identisch sind, ergibt sich der Winkel dieses virtuellen Beins aus der linearen Transformation

$$\theta = \theta_T + \theta_{H1} + \frac{1}{2}\theta_{K1} . \quad (5.48)$$

Für den Fall unterschiedlicher Schenkellängen wird die Transformation auf die Verbindungslinie von Hüfte und Sprunggelenk nichtlinear [406]. Die lineare Transformation in Gl. (5.48) hat demgegenüber den Vorteil, das sie schnell ausgewertet und invertiert werden kann, was insbesondere beim Einsatz in einer Echtzeit-Regelung von Bedeutung ist. In der vorliegenden Arbeit ist eine schnelle und effiziente Berechnung wichtig bei der Simulation und Optimierung des geregelten Modells in Kapitel 9 und 10. Es wird daher trotz unterschiedlicher Schenkellängen bei den Modellen in Kapitel 9 und 10 die Transformation nach Gl. (5.48) verwendet. Für die Phasenvariable θ gilt dann nicht mehr die Interpretation als Winkel der Verbindungslinie von der Hüfte zum Sprunggelenk des Standbeins, es handelt sich lediglich um eine Koordinatentransformation für den Entwurf der Regelung.

5.2.2 Solltrajektorien der Regelung

Zur Erzeugung der Gehbewegungen mit der im nächsten Abschnitt folgenden Regelung werden Solltrajektorien $\mathbf{q}_{b,d}(\theta)$ für die Gelenkwinkel in Abhängigkeit von der Phasenvariablen θ definiert. Dazu wird die Phasenvariable zunächst mit

$$s(\theta) = \frac{\theta - \theta^+}{\theta^- - \theta^+} \quad (5.49)$$

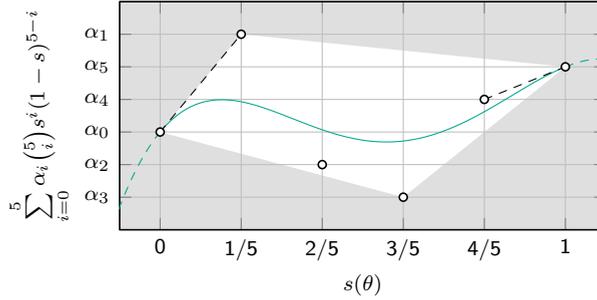


Abbildung 5.2: Beispielhafter Verlauf eines Bézierpolynoms vom Grad $M = 5$. Durch die Koeffizienten α_i werden die Stützpunkte auf einem äquidistanten Gitter im Bereich $s \in [0, 1]$ festgelegt. In diesem Bereich liegt der Wertebereich des Polynoms innerhalb der konvexen Hülle des durch die Stützpunkte aufgespannten Gebiets (weiß). Der Wert bei $s = 0$ ($s = 1$) ist α_0 (α_M), die Tangente an diesem Punkt verläuft durch die ersten (letzten) beiden Stützpunkte.

normiert, womit $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, [\theta^+, \theta^-] \mapsto [0, 1]$ folgt. Zur Beschreibung der Solltrajektorien werden, wie in [360] vorgeschlagen, Bézierpolynome⁷ vom Grad M verwendet:

$$\mathbf{q}_{b,d}(\theta) = \sum_{i=0}^M \alpha_i \binom{M}{i} s^i (1-s)^{M-i}, \quad \binom{M}{i} = \frac{M!}{i!(M-i)!}. \quad (5.50)$$

Die Koeffizienten α_i sind Spaltenmatrizen, womit jeder Gelenkwinkel unabhängig parametrisiert werden kann. Die Ableitungen der Solltrajektorien sind

$$\mathbf{q}'_{b,d}(\theta) = \frac{M}{\theta^- - \theta^+} \sum_{i=0}^{M-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \binom{M-1}{i} s^i (1-s)^{M-1-i}, \quad (5.51)$$

$$\mathbf{q}''_{b,d}(\theta) = \frac{M(M-1)}{(\theta^- - \theta^+)^2} \sum_{i=0}^{M-2} (\alpha_{i+2} - 2\alpha_{i+1} + \alpha_i) \binom{M-2}{i} s^i (1-s)^{M-2-i}. \quad (5.52)$$

Der beispielhafte Verlauf eines Bézierpolynoms in Abb. 5.2 illustriert die Vorteile dieser Parametrierung bei der Beschreibung der Solltrajektorien. Die Werte am Anfang und Ende der ESP sind durch

$$\mathbf{q}_{b,d}(\theta^+) = \alpha_0, \quad (5.53a)$$

$$\mathbf{q}_{b,d}(\theta^-) = \alpha_M \quad (5.53b)$$

⁷ Es können beliebige Ansatzfunktionen zur Parametrierung der Solltrajektorien verwendet werden. In [400] wird an einem Modell mit Punktfüßen gezeigt, dass bei der Verwendung von NURBS keine wesentliche Verbesserung in der Energieeffizienz der Bewegung erzielt werden kann, weshalb in der vorliegenden Arbeit die in der Literatur verbreitete, einfachere Beschreibung durch Bézierpolynome gewählt wird.

gegeben, die ersten Ableitungen durch

$$\mathbf{q}'_{b,d}(\theta^+) = \frac{M}{\theta^- - \theta^+} (\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_0) , \quad (5.54a)$$

$$\mathbf{q}'_{b,d}(\theta^-) = \frac{M}{\theta^- - \theta^+} (\boldsymbol{\alpha}_M - \boldsymbol{\alpha}_{M-1}) . \quad (5.54b)$$

Die Koeffizienten $\boldsymbol{\alpha}_i$ definieren Stützpunkte auf einem äquidistanten Gitter im Bereich $s \in [0, 1]$, wobei die Funktionswerte innerhalb der konvexen Hülle des durch die Koeffizienten aufgespannten Gebiets liegen. Abgesehen vom ersten und letzten Stützpunkt liegen diese nicht auf der durch ein Bézierpolynom gegebenen Kurve, sondern „ziehen“ vielmehr am Verlauf der Kurve. Die Veränderung eines Stützpunktes beeinflusst den Kurvenverlauf im gesamten Gebiet, wobei eine kleine Veränderung eines Koeffizienten zu einer kleinen Veränderung des Kurvenverlaufs und der Ableitungen führt. Dieses Verhalten ist positiv bei der späteren Bestimmung der Koeffizienten durch eine numerische Optimierung.

Bei der Parametrisierung der Solltrajektorien ist es möglich, diese invariant bzgl. des Stoßes in der DSP zu gestalten, also die Stoßabbildung bereits bei der Wahl der Koeffizienten zu berücksichtigen. Damit wird die Sollbewegung ohne Regelabweichung invariant bzgl. des Stoßes, was eine notwendige Bedingung für die Stabilitätsaussage in Abschnitt 5.2.4 ist. Dazu werden die Bézierkoeffizienten $\boldsymbol{\alpha}_0$ und $\boldsymbol{\alpha}_1$ am Anfang der ESP durch die Stoßabbildung in Abhängigkeit von den Koeffizienten $\boldsymbol{\alpha}_{M-1}$ und $\boldsymbol{\alpha}_M$ bestimmt.

Die Konfiguration $\mathbf{q}_s^- = [\theta^-; \boldsymbol{\alpha}_M]$ vor dem Stoß am Ende der ESP kann eindeutig aus den Winkeln $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_M = [\theta_{H1}^-; \theta_{H2}^-; \theta_{K1}^-; \theta_{K2}^-; \theta_{F1}^-; \theta_{F2}^-]$ berechnet werden. Aus $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_M$ kann θ_T^- explizit bestimmt werden, da durch die Vorgabe der Absolutwinkel θ_{F1}^- und θ_{F2}^- anstatt der Gelenkwinkel θ_{A1}^- und θ_{A2}^- die Lage der potentiellen Kontaktpunkte relativ zum jeweiligen Sprunggelenk nach Gl. (5.5) ausgewertet werden kann. Nach Gl. (5.47) ist vor dem Stoß

$$\begin{aligned} 0 &= z_{C2}(\mathbf{q}_s^-) \\ &= (F'_A(\theta_{F1}^-) - F'_A(\theta_{F2}^-)) \\ &\quad + (\ell_O(\cos(\theta_{H2}^-) - \cos(\theta_{H1}^-)) + \ell_U(\cos(\theta_{H2}^- + \theta_{K2}^-) - \cos(\theta_{H1}^- + \theta_{K1}^-))) \cos(\theta_T^-) \\ &\quad + (\ell_O(\sin(\theta_{H1}^-) - \sin(\theta_{H2}^-)) + \ell_U(\sin(\theta_{H1}^- + \theta_{K1}^-) - \sin(\theta_{H2}^- + \theta_{K2}^-))) \sin(\theta_T^-) , \end{aligned} \quad (5.55)$$

was explizit nach $\theta_T^-(\tilde{\alpha}_M) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aufgelöst werden kann. Damit werden im nächsten Schritt die Sprunggelenkwinkel

$$\theta_{A1}^- = \theta_{F1}^- - \theta_T^- - \theta_{H1}^- - \theta_{K1}^- , \quad (5.56a)$$

$$\theta_{A2}^- = \theta_{F2}^- - \theta_T^- - \theta_{H2}^- - \theta_{K2}^- \quad (5.56b)$$

und damit $\alpha_M(\tilde{\alpha}_M)$ sowie $\mathbf{q}_s^-(\tilde{\alpha}_M) = \Psi([\theta_T^-(\tilde{\alpha}_M); \alpha_M(\tilde{\alpha}_M)])$ berechnet. Daraus wird wiederum direkt aus Gl. (5.42)

$$\mathbf{q}_s^+(\tilde{\alpha}_M) = \begin{bmatrix} \theta^+ \\ \alpha_0 \end{bmatrix} = \Delta_q(\mathbf{q}_s^-(\tilde{\alpha}_M)) \quad (5.57)$$

ermittelt. Hiermit sind sowohl der Wertebereich der Phasenvariablen $\theta \in [\theta^+, \theta^-]$ als auch die Bézierkoeffizienten α_0 in Abhängigkeit von $\tilde{\alpha}_M$ bestimmt. Aus der Stoßabbildung für die Geschwindigkeiten können die Parameter α_1 ermittelt werden. Für die Sollbewegung ohne Regelabweichung gilt mit Gl. (5.54)

$$\dot{\mathbf{q}}_s^+ = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{M}{\theta^- - \theta^+}(\alpha_1 - \alpha_0) \end{bmatrix} \dot{\theta}^+ , \quad \dot{\mathbf{q}}_s^- = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{M}{\theta^- - \theta^+}(\alpha_M - \alpha_{M-1}) \end{bmatrix} \dot{\theta}^- , \quad (5.58)$$

womit sich aus Gl. (5.43)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{M}{\theta^- - \theta^+}(\alpha_1 - \alpha_0) \end{bmatrix} \dot{\theta}^+ = \Delta_{\dot{q}}(\mathbf{q}_s^-) \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{M}{\theta^- - \theta^+}(\alpha_M - \alpha_{M-1}) \end{bmatrix} \dot{\theta}^- \quad (5.59)$$

ergibt. Aus der ersten Zeile dieser Gleichung folgt mit

$$\Upsilon = \Delta_{\dot{q}}(\mathbf{q}_s^-) \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{M}{\theta^- - \theta^+}(\alpha_M - \alpha_{M-1}) \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

der Zusammenhang

$$\dot{\theta}^+ = \left(\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^{(1 \times 6)} \end{bmatrix} \Upsilon \right) \dot{\theta}^- , \quad (5.61)$$

was eingesetzt in die zweite Zeile

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \frac{\theta^- - \theta^+}{M} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{0}^{(6 \times 1)} & \mathbf{I}^{(6)} \end{bmatrix} \Upsilon \right) \left(\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^{(1 \times 6)} \end{bmatrix} \Upsilon \right)^{-1} \quad (5.62)$$

ergibt. Aus $\tilde{\alpha}_M$ und α_{M-1} können also θ^- , θ^+ , α_M , α_0 und α_1 bestimmt werden, was eine Sollbewegung des hybriden Systems ergibt, die invariant in Bezug auf den Stoß ist. Zur Analyse des Einflusses der Füße auf die Energieeffizienz bei der zweibeinigen

Fortbewegung wird in der vorliegenden Arbeit nur die Sollbewegung betrachtet und simuliert. Damit können prinzipiell beliebige periodische Gehbewegungen parametrisiert werden, der Lösungsraum wird lediglich durch die Wahl des Polynomgrads M eingeschränkt. Zur Beurteilung der Stabilität der Gehbewegungen des hybriden Systems wird jedoch im nächsten Abschnitt zunächst das geregelte Gesamtsystem betrachtet.

5.2.3 Eingangs-/Ausgangslinearisierung

Zum Entwurf einer nichtlinearen Regelung für das hybride Modell in Gl. (5.46) wird die Methode der Eingangs-/Ausgangslinearisierung genutzt, um die Bewegung entsprechend der Solltrajektorien $\mathbf{q}_{b,d}(\theta)$ zu erzeugen und Abweichungen davon auszuregeln. Als Systemausgang wird die Regelabweichung

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{q}_s) = \mathbf{q}_{b,d}(\theta) - \mathbf{q}_b \quad (5.63)$$

definiert. Zur Durchführung der Eingangs-/Ausgangslinearisierung wird der Ausgang so oft nach der Zeit differenziert, bis der Systemeingang explizit auftaucht. Damit ergibt sich⁸

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{q}'_{b,d}(\theta)\dot{\theta} - \dot{\mathbf{q}}_b, \quad (5.64)$$

$$\ddot{\mathbf{y}} = (\mathbf{q}'_{b,d}(\theta)\ddot{\theta} + \mathbf{q}''_{b,d}(\theta)\dot{\theta}^2) - \ddot{\mathbf{v}}. \quad (5.65)$$

Das System hat also den vektoriellen relativen Grad 2 [360, S. 119]. Durch Umstellen der letzten Gleichung ergibt sich mit dem neuen Eingang $\mathbf{w} = \ddot{\mathbf{y}}$ des eingangs-/ausgangslinearisierten Systems der Regler

$$\mathbf{v} = (\mathbf{q}'_{b,d}(\theta)\ddot{\theta} + \mathbf{q}''_{b,d}(\theta)\dot{\theta}^2) - \mathbf{w}, \quad (5.66)$$

der eingesetzt in das System (5.40) ein lineares Verhalten zwischen \mathbf{w} und \mathbf{y} ergibt. Zur Stabilisierung der Bewegung um die Solltrajektorien kann daher ein Reglerentwurf für lineare Systeme verwendet werden. Ein linearer PD-Regler ergibt mit geeignet gewählten positiv definiten Matrizen \mathbf{K}_P und \mathbf{K}_D

$$\mathbf{w} = -\mathbf{K}_P \mathbf{h}(\mathbf{q}_s) - \mathbf{K}_D \dot{\mathbf{h}}(\mathbf{q}_s, \dot{\mathbf{q}}_s) \quad (5.67)$$

ein exponentielles Abklingen der Abweichungen von den Solltrajektorien, vgl. [360, Gl. (5.97)]. Damit ist jedoch noch nicht sichergestellt, dass das so geregelte hybride System stabil ist. Zur Analyse der Stabilität des geregelten Systems wird eine Trans-

⁸ Zur Vereinfachung der Darstellung werden in den folgenden Ausdrücken zum Teil die Zeitableitungen der Phasenvariablen θ verwendet, obwohl der Zustand des Systems nicht durch $\dot{\theta}$ sondern durch σ ausgedrückt wird. Eine Umrechnung ist mittels Gl. (5.39) einfach möglich.

formation auf die *Byrnes-Isidori-Normalform* [5, S. 300] durchgeführt, die sich mit Gl. (5.39) und (5.40) zu

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \dot{\mathbf{h}} \\ \theta \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{w} \\ (M_{s,11}(\theta, \mathbf{h}) + \mathbf{M}_{s,12}(\theta, \mathbf{h})\mathbf{q}'_{b,d}(\theta))^{-1}(\sigma + \mathbf{M}_{s,12}(\theta, \mathbf{h})\dot{\mathbf{h}}) \\ -\frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{L}(\theta, \sigma, \mathbf{h}, \dot{\mathbf{h}}) \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

ergibt. In dieser Form ist klar ersichtlich, dass die *externe Dynamik* in den Zuständen \mathbf{h} und $\dot{\mathbf{h}}$ eine lineare Integratorkette darstellt, wobei der Eingang \mathbf{w} direkt auf $\frac{d}{dt} \dot{\mathbf{h}}$ wirkt. Die externe Dynamik ist unabhängig von den Zuständen θ und σ der *internen Dynamik*, während die interne Dynamik vom gesamten Systemzustand abhängt. Die externe Dynamik wird durch die Auslegung des linearen Reglers nach Gl. (5.67) stabilisiert, womit für eine Aussage über die Stabilität des gesamten geregelten hybriden Systems noch die Stabilität der internen Dynamik untersucht werden muss.

Dazu wird die *Nulldynamik* des Systems betrachtet, die durch die *Nulldynamik-Mannigfaltigkeit*

$$\mathcal{Z} = \{ \mathbf{x}_s \in T\mathcal{Q} \mid \mathbf{h}(\mathbf{x}_s) = \mathbf{0}, \dot{\mathbf{h}}(\mathbf{x}_s) = \mathbf{0} \} \quad (5.69)$$

gegeben ist, eine zweidimensionale eingebettete Untermannigfaltigkeit des Phasenraums $T\mathcal{Q}$. Durch die Regelung

$$\mathbf{v}^* = (\mathbf{q}'_{b,d}(\theta)\ddot{\theta} + \mathbf{q}''_{b,d}(\theta)\dot{\theta}^2) \quad (5.70)$$

ist \mathcal{Z} invariant unter der Dynamik der ESP, d. h. für alle $\mathbf{z}_s = [\theta; \sigma] \in \mathcal{Z}$ ist die Nulldynamik des Systems in der ESP

$$\dot{\mathbf{z}}_s = \begin{bmatrix} (M_{s,11}(\theta) + \mathbf{M}_{s,12}(\theta)\mathbf{q}'_{b,d}(\theta))^{-1}\sigma \\ -\frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{L}(\mathbf{z}_s) \end{bmatrix} = \mathbf{f}_z(\mathbf{z}_s), \quad (5.71)$$

vgl. [360, S. 119]. Die *hybride Nulldynamik* (HZD) des Systems ist gegeben durch

$$\Sigma_z : \begin{cases} \dot{\mathbf{z}}_s = \mathbf{f}_z(\mathbf{z}_s) & \mathbf{z}_s \notin \mathcal{S} \cap \mathcal{Z} \\ \mathbf{z}_s^+ = \mathbf{\Delta}(\mathbf{z}_s^-) & \mathbf{z}_s^- \in \mathcal{S} \cap \mathcal{Z}, \end{cases} \quad (5.72)$$

wobei angenommen wird, dass die Schnittmenge $\mathcal{S} \cap \mathcal{Z}$ der Stoß- und der Nulldynamik-Mannigfaltigkeiten eine glatte, eindimensionale, eingebettete Untermannigfaltigkeit des Phasenraums $T\mathcal{Q}$ ist. Darüber hinaus muss die Nulldynamik invariant bzgl. der Stoßabbildung sein $\mathbf{\Delta}(\mathcal{S} \cap \mathcal{Z}) \subset \mathcal{Z}$, siehe [360, Definition 5.1, S. 125], was durch die

Parametrisierung der Solltrajektorien $\mathbf{q}_{b,d}(\theta)$ in Abschnitt 5.2.2 in der vorliegenden Arbeit immer erfüllt wird. Unter diesen Voraussetzungen existiert nach [360, Theorem 5.2, S. 126] eine Lösung für die Nulldynamik. Wenn diese stabil ist, so ist das hybride System nach Gl. (5.46) mit der Regelung nach Gl. (5.66) und (5.67) ebenfalls stabil. Die Lösung und eine anschließende Stabilitätsbeurteilung werden im nächsten Abschnitt behandelt.

5.2.4 Hybride Nulldynamik (HZD)

Im vorigen Abschnitt wird die HZD des geregelten Systems in Gl. (5.72) hergeleitet, für die im Folgenden eine semi-analytische Lösung zur Berechnung periodischer Bewegungen vorgestellt wird. Das ursprünglich in [358] für Modelle mit Punktfüßen vorgeschlagene Verfahren wird in [226] für Modelle mit kreisförmigen, abrollenden Füßen verallgemeinert. Da mit dem in Kapitel 3 vorgestellten Fußmodell eine Darstellung der Systemdynamik durch die gewöhnliche Differentialgleichung (5.46) zur Verfügung steht, kann dieses Verfahren direkt auf Modelle mit nahezu beliebiger, konvexer Fußgeometrie übertragen werden.

Die Nulldynamik der ESP hat nach [226, Gln. (34) – (37)] die Struktur

$$\begin{bmatrix} \frac{d\theta}{dt} \\ \frac{d\sigma}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nu_1(\theta)\sigma \\ \nu_2(\theta) + \nu_3(\theta)\sigma^2 \end{bmatrix}, \quad (5.73)$$

woraus die zeitfreie Darstellung

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \sigma' = \frac{\nu_2(\theta) + \nu_3(\theta)\sigma^2}{\nu_1(\theta)\sigma} \quad (5.74)$$

resultiert. Diese kann durch

$$\zeta = \frac{1}{2}\sigma^2, \quad \zeta' = \sigma\sigma' \quad (5.75)$$

auf die lineare Differentialgleichung

$$\zeta' + \mu_1(\theta)\zeta = \mu_2(\theta), \quad \mu_1(\theta) = -2\frac{\nu_3(\theta)}{\nu_1(\theta)}, \quad \mu_2(\theta) = \frac{\nu_2(\theta)}{\nu_1(\theta)} \quad (5.76)$$

transformiert werden. Aus Gl. (5.61) ergibt sich analog zu Gl. (5.44) die Stoßabbildung der Nulldynamik mit Gl. (5.61) und (5.73) zu

$$\delta_z = \left(\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^{(1 \times 6)} \end{bmatrix} \mathbf{\Upsilon} \right) \frac{\nu_1(\theta^-)}{\nu_1(\theta^+)}. \quad (5.77)$$

Damit folgt für den generalisierten Impuls

$$\sigma^+ = \delta_z \sigma^- , \quad (5.78)$$

$$\zeta^+ = \delta_z^2 \zeta^- . \quad (5.79)$$

Periodische Lösungen der Nulldynamik können aus einer Lösung für Gl. (5.76) für die gesamte ESP mit der Randbedingung Gl. (5.79) berechnet werden. Diese lineare Differentialgleichung mit variablen Koeffizienten kann durch das Verfahren der Variation der Konstanten gelöst werden. Dazu wird zunächst mit

$$\iota(\theta) = \exp\left(-\int_{\theta^+}^{\theta} \mu_1(\bar{\theta}) d\bar{\theta}\right) \quad (5.80)$$

die Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\zeta_{\text{hom}}(\theta) = A\iota(\theta) \quad (5.81)$$

bestimmt, woraus der Lösungsansatz

$$\zeta(\theta) = A(\theta)\iota(\theta) \quad (5.82)$$

folgt. Ableiten und Einsetzen von Gl. (5.82) in Gl. (5.76) liefert

$$A'(\theta) = \frac{\mu_2(\theta)}{\iota(\theta)} , \quad (5.83)$$

womit sich die Lösung

$$\zeta(\theta) = \iota(\theta) \left(\zeta^+ + \int_{\theta^+}^{\theta} \frac{\mu_2(\bar{\theta})}{\iota(\bar{\theta})} d\bar{\theta} \right) \quad (5.84)$$

und mit Gl. (5.79) schließlich

$$\zeta^+ = \frac{\delta_z^2 \iota(\theta^-)}{1 - \delta_z^2 \iota(\theta^-)} \int_{\theta^+}^{\theta^-} \frac{\mu_2(\bar{\theta})}{\iota(\bar{\theta})} d\bar{\theta} \quad (5.85)$$

ergibt. Damit ζ^+ beschränkt ist, muss $\delta_z^2 \iota(\theta^-) \neq 1$ sein. Eine notwendige Bedingung für reelle Lösungen

$$\sigma = 2\sqrt{\zeta} \quad (5.86)$$

der HZD⁹ ist $\zeta > 0$ für alle $\zeta \in [\zeta^+, \zeta^-]$, woraus mit $\iota(\theta) > 0$, für alle θ die Bedingung

$$\zeta^+ + \int_{\theta^+}^{\theta} \frac{\mu_2(\bar{\theta})}{\iota(\bar{\theta})} d\bar{\theta} > 0 \quad (5.87)$$

folgt. Die Stabilität der periodischen Lösung für die HZD kann durch einen Poincaré-Schnitt analysiert werden. Aus Gl. (5.84) folgt für den Zustand direkt vor dem Stoß die Poincaré-Abbildung

$$\varrho(\zeta^-) = \iota(\theta^-) \left(\delta_z^2 \zeta^- + \int_{\theta^+}^{\theta^-} \frac{\mu_2(\bar{\theta})}{\iota(\bar{\theta})} d\bar{\theta} \right). \quad (5.88)$$

Deren Ableitung¹⁰ ergibt den Floquet-Multiplikator

$$\Lambda = \frac{\partial \varrho}{\partial \zeta^-} = \delta_z^2 \iota(\theta^-) \quad (5.89)$$

der HZD. Es ist $\Lambda > 0$, da sowohl $\iota(\theta) > 0$, für alle θ als auch $\delta_z^2 \geq 0$ gilt. Aus $\delta_z = 0$ folgt direkt $\zeta^+ = 0$, was hier jedoch nicht von Interesse ist, da dies eine Ruhelage und keine periodische Lösung ist. Der nichttriviale Fixpunkt der Poincaré-Abbildung Gl. (5.88) muss also die Bedingung

$$0 < \Lambda < 1 \quad (5.90)$$

erfüllen, damit die periodische Lösung der HZD – und damit die zugehörige periodische Gehbewegung – stabil ist, vgl. [226, S. 996].

Die Lösung der HZD wird im Folgenden zur Simulation und Optimierung periodischer Gehbewegungen genutzt, was im nächsten Abschnitt erläutert wird.

5.3 Periodische Gehbewegungen

Die Lösung der HZD wird im Folgenden zur Simulation periodischer Gehbewegungen des Robotermodells verwendet. Dabei werden zunächst die Parameter des Mehrkörpermodells, die unabhängigen Bézierkoeffizienten der Solltrajektorien sowie die Konfiguration am Ende der ESP vorgegeben. Anschließend wird die analytische Lösung der Nulldynamik diskretisiert und die auftretenden Integrale numerisch durch eine Quadratur gelöst. Aus der Lösung für die Nulldynamik werden dann alle Zustände

⁹ $\sigma = -2\sqrt{\zeta}$ ist in der vorliegenden Arbeit aufgrund der gewählten Koordinatensysteme und Transformationen keine Lösung.

¹⁰ Im Allgemeinen müssen die Eigenwerte der zugehörigen Jacobi-Matrix berechnet werden. Da die Poincaré-Abbildung hier eindimensional ist, ist der einzige Eigenwert trivialerweise die Ableitung.

des Gesamtmodells, die Aktormomente, die Kontaktkräfte und die Position des potentiellen Kontaktpunktes am Schwungbeinfuß rekonstruiert. Damit wird überprüft, ob die simulierte Bewegung physikalisch konsistent ist. Anschließend wird die Energie berechnet, die dem System während des Schritts durch die Aktoren zugeführt wird. Damit liegen alle Größen vor, die zur Optimierung der Energieeffizienz des Modells benötigt werden, was im folgenden Abschnitt beschrieben wird.

Dieses Vorgehen ist eine Erweiterung der in [394] vorgestellten Methode für ein Modell mit Punktfüßen. Dort wird die Fehlerfortpflanzung bei der numerischen Näherung der Integrale durch Quadratur mittels der *zusammengesetzten Trapezregel* untersucht und gezeigt, dass das Berechnungsverfahren mit zunehmend feinerer Diskretisierung gegen die analytische Lösung konvergiert.

Die Simulation von periodischen Gehbewegungen und die Berechnung des Energieverbrauchs durch die Aktoren wird wie folgt durchgeführt. Zunächst werden die Parameter des mechanischen Modells

$$\mathbf{p}_{\text{mod}} = [\mathbf{p}_{\text{mech}}; \mathbf{p}_{\text{HM}}; \theta_{\text{F},0}] \quad \text{oder} \quad \mathbf{p}_{\text{mod}} = [\mathbf{p}_{\text{mech}}; \mathbf{p}_{\text{HMT}}; \theta_{\text{F},0}] \quad (5.91)$$

– bestehend aus den Parametern des Mehrkörpermodells \mathbf{p}_{mech} , den Fußparametern \mathbf{p}_{HM} oder \mathbf{p}_{HMT} sowie $\theta_{\text{F},0}$ –, und die unabhängigen Parameter der Bewegung

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = [\boldsymbol{\alpha}_2; \dots; \boldsymbol{\alpha}_{M-1}; \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_M] \quad (5.92)$$

– bestehend aus den Parametern vor dem Stoß $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_M$ und den unabhängigen Bézierkoeffizienten $\boldsymbol{\alpha}_2, \dots, \boldsymbol{\alpha}_{M-1}$ – definiert. Aus diesen werden mittels Gln. (5.55) – (5.62) alle Bézierkoeffizienten $\boldsymbol{\alpha}$ sowie θ^+ und θ^- bestimmt. Anschließend wird die Phasenvariable in der Form

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \quad \dots \quad \theta_P], \quad \theta_i = \theta^+ + \frac{i-1}{P-1}(\theta^- - \theta^+), \quad i \in \{1, \dots, P\} \quad (5.93)$$

an P Stützpunkten diskretisiert und die zugehörigen Gelenkwinkel

$$\mathbf{q}_{\text{b},i} = \mathbf{q}_{\text{b,d}}(\theta_i) \quad (5.94)$$

in der Nulldynamik ausgewertet. Damit kann die periodische Lösung der hybriden Nulldynamik berechnet werden, indem zunächst das Integral in Gl. (5.80) durch eine *kumulative zusammengesetzte Trapezregel*¹¹ für die Diskretisierung bestimmt wird. Diese Näherung wird anschließend genutzt, um die Integrale in Gl. (5.84) und (5.85) ebenfalls durch eine kumulative zusammengesetzte Trapezregel auszuwerten, womit

¹¹ Durch die kumulative zusammengesetzte Trapezregel wird eine Näherung des Integrals für jeden der P Diskretisierungspunkte mittels der zusammengesetzten Trapezregel berechnet.

eine Lösung für ζ an allen Diskretisierungspunkten vorliegt. Anhand von Gl. (5.87) wird überprüft, ob die periodische Lösung reell¹² ist und mithilfe von Gl. (5.90) ob sie stabil ist. Aus Gl. (5.86) wird der Impuls σ berechnet, aus dem mit Gl. (5.73) die Geschwindigkeit $\dot{\theta}$ und aus deren Ableitung die Beschleunigung

$$\ddot{\theta} = \nu_1(\theta)(\nu_2(\theta) + (\nu_1'(\theta) + \nu_3(\theta))\sigma^2) \quad (5.95)$$

an allen Diskretisierungspunkten folgt. Die in der ESP verstrichene Zeit an jedem Diskretisierungspunkt wird aus

$$t = \int_{\theta^+}^{\theta} \dot{\theta}^{-1} d\theta \quad (5.96)$$

ebenfalls mittels der kumulativen zusammengesetzten Trapezregel berechnet. Aus der Auswertung von

$$\mathbf{q}_s = \begin{bmatrix} \theta \\ \mathbf{q}_{b,d}(\theta) \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{q}}_s = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \mathbf{q}'_{b,d}(\theta)\dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{q}}_s = \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \mathbf{q}'_{b,d}(\theta)\ddot{\theta} + \mathbf{q}''_{b,d}(\theta)\dot{\theta}^2 \end{bmatrix} \quad (5.97)$$

und der Transformation auf die physikalischen Koordinaten mittels Gl. (5.15b) ergeben sich alle Winkel, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen für alle Diskretisierungspunkte. Die Auswertung von Gl. (5.35) liefert schließlich die zugehörigen Aktormomente \mathbf{u} , Gl. (5.14) die Kontaktkraft in der ESP und Gl. (5.28) den Kraftimpuls beim Stoß in der DSP. Es sind somit alle Größen berechnet, die zur Beschreibung der simulierten Bewegung notwendig sind.

Damit kann der Energieverbrauch beim Gehen bestimmt werden, auf Grundlage dessen in Abschnitt 5.4 eine Optimierung der Bewegung vorgenommen wird. Dazu wird angenommen, dass Elektromotoren als Aktoren eingesetzt werden, deren Leistungsaufnahme als quasistatisch angenähert wird [27, Abschnitt 3.2]. Durch die quasistatische Näherung ist die elektrische Leistung, die dem i -ten Aktor zugeführt wird, nach [27, Gl. (3.59)]

$$P_{el,i} = c_A u_i^2 + u_i \dot{q}_{b,i}. \quad (5.98)$$

Dabei ist die Aktorkonstante c_A vom Aufbau des Elektromotors abhängig und proportional zum Ohm'schen Widerstand. Die elektrische Leistung der Aktoren kann somit aus dem jeweils anliegenden Moment und der Gelenkwinkelgeschwindigkeit bestimmt werden. Dabei ergibt der erste Term $c_A u_i^2$ die Wärmeverluste aufgrund des

¹² Imaginäre Lösungen entsprechen Gehbewegungen, bei denen der Anfangsimpuls σ^+ nicht ausreichend ist, um einen ganzen Schritt auszuführen. Während der Bewegung wird ein Zustand $\sigma = 0$ erreicht, ab dem sich das Modell nicht mehr vorwärts bewegt, sondern rückwärts fällt.

Ohm'schen Widerstands und der zweite Term $u_i \dot{q}_{b,i}$ die mechanische Leistung. Die zugeführte elektrische Energie für den gesamten Schritt ergibt sich aus der Integration der Aktorleistung über die Zeit, die ebenfalls durch die kumulative zusammengesetzte Trapezregel angenähert wird. Die konkrete Formulierung des Zielfunktional zur Optimierung der Energieeffizienz wird im nächsten Abschnitt vorgenommen.

Eine in der Realität immer vorhandene Energiedissipation, vor allem aufgrund von Reibung in den Gelenken und ggf. verwendeter Übersetzungsgetriebe, wird im Folgenden vernachlässigt. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung einer Methode zur Simulation und Optimierung der Energieeffizienz eines zweibeinigen Roboters sowie die Untersuchung des Einflusses der Fußgeometrie auf ebendiese. Diese soll insbesondere auch in frühen Phasen der Konstruktion und Entwicklung Anwendung finden, in der noch nicht alle Details festgelegt sind. Es sind daher auch für die Energiedissipation bestenfalls Schätzungen möglich, die von der geplanten Ausführung der Lagerung und vorgesehenen Übersetzungsgetrieben für die Elektromotoren abhängig sind. Da die Annahmen diesbezüglich in der vorliegenden Arbeit mehr oder weniger willkürlich wären, wird auf die Modellierung der dissipativen Effekte verzichtet. Dies muss bei einer Anwendung der vorgestellten Methode für eine konkrete Entwicklungsfragestellung ggf. ergänzt werden.

Das vorgestellte Vorgehen zur Simulation periodischer zweibeiniger Gehbewegungen des Robotermodells wird im Folgenden zur Optimierung der Energieeffizienz und der Untersuchung des Einflusses der Fußgeometrie verwendet. Dazu wird im nächsten Abschnitt das Optimierungsproblem formuliert, auf dessen numerische Lösung im nächsten Kapitel eingegangen wird.

5.4 Optimierungsproblem zur Erzeugung energieeffizienter Gehbewegungen

Zur Erzeugung optimaler periodischer Gehbewegungen wird im Folgenden ein Optimierungsproblem formuliert, das zur Berechnung und Simulation der Gehbewegungen auf dem im vorigen Abschnitt vorgestellten Vorgehen aufbaut. Dazu wird zunächst das Zielfunktional zur Maximierung der Energieeffizienz formuliert und anschließend alle Nebenbedingungen zusammengestellt, die durch eine zulässige Gehbewegung erfüllt werden müssen. Dies ergibt ein nichtlineares Programm (NLP), zu dessen Lösung in Kapitel 6 ein SQP-Algorithmus vorgestellt wird.

Die Energieeffizienz wird in der vorliegenden Arbeit definiert als zurückgelegter Weg pro zugeführter Energie. Da dies beides positive Größen sind, kann die Energieeffizienz maximiert werden indem die zugeführte Energie pro zurückgelegter Strecke minimiert wird. Dies ist ein offensichtliches Ziel bei der Entwicklung zweibeiniger Roboter, die eine möglichst weite Strecke mit einer begrenzten Energiequelle zurücklegen sollen.

Darüber hinaus gibt es biomechanische Studien, die den Schluss nahelegen, dass dieses Kriterium auch beim menschlichen Gehen optimiert wird [29].

Zur Berechnung der im Mittel zugeführten Energie pro Strecke wird die Energie, die während eines Schritts der periodischen Gehbewegung an den Aktoren zugeführt wird, durch die Schrittlänge dividiert. Mit dem oben eingeführten Modell der Aktoren in Form von Elektromotoren ist die zugeführte elektrische Leistung am i -ten Aktor nach Gl. (5.98) gegeben, wobei die Aktorkonstante c_A die Wärmeverluste aufgrund des Ohm'schen Widerstands beschreibt. Diese ist vom konkreten Aufbau des Elektromotors und eines ggf. vorgesehenen Übersetzungsgetriebes abhängig. Da in der vorliegenden Arbeit keine konkrete Konstruktion eines Roboters betrachtet wird, wären die Annahmen diesbezüglich ähnlich willkürlich wie die Modellierung der Energiedissipation, weshalb im Folgenden zwei Grenzfälle betrachtet werden: im Grenzfall eines sehr ineffizienten Aktors, dessen Energieverbrauch hauptsächlich durch die Wärmeverluste bestimmt wird, wird die Leistungsaufnahme durch

$$P_{\text{usq},i} = c_A u_i^2 \quad (5.99)$$

modelliert. Da die unbekannte Aktorkonstante c_A keinen Einfluss auf das Ergebnis der Optimierung hat, wird diese zur Darstellung der Ergebnisse zu $c_A = 1 \text{ W}/(\text{Nm})^2$ gesetzt.¹³ Im Grenzfall sehr effizienter Aktoren sind die Wärmeverluste gering und die Leistungsaufnahme wird hauptsächlich durch die mechanische Leistung bestimmt, womit sich das Modell

$$P_{\text{mech},i} = \max(u_i \dot{q}_{b,i}, 0) \quad (5.100)$$

ergibt. Aus beiden Modellen folgt je ein Zielfunktional für die Optimierung der Energieeffizienz durch Minimierung des Energieverbrauchs

$$f_{\text{usq}}(\tilde{\alpha}, \mathbf{p}_{\text{mod}}) = \frac{\sum_{i=1}^6 \int_{t^+}^{t^-} P_{\text{usq},i} dt}{mg(x_H^- - x_H^+)}, \quad (5.101)$$

$$f_{\text{mech}}(\tilde{\alpha}, \mathbf{p}_{\text{mod}}) = \frac{\sum_{i=1}^6 \int_{t^+}^{t^-} P_{\text{mech},i} dt}{mg(x_H^- - x_H^+)}. \quad (5.102)$$

Dabei ist die Schrittlänge durch die von der Hüfte zurückgelegte Distanz ($x_H^- - x_H^+$) gegeben und die Division durch die Gewichtskraft mg führt auf eine dimensionslose Größe, die in der Literatur als *cost of transport*¹⁴ bezeichnet wird.

Die Integrale zur Berechnung der Zielfunktionale werden, wie in Abschnitt 5.3 beschrieben, durch eine kumulative Trapezregel auf der durch Gl. (5.93) gegebenen

¹³ Vergleiche [27, Tabelle 3.2]: für sehr effiziente Aktoren wird $c_A = 1,81 \cdot 10^{-3} \text{ W}/(\text{Nm})^2$ angegeben.

¹⁴ Deutsch: Transportkosten.

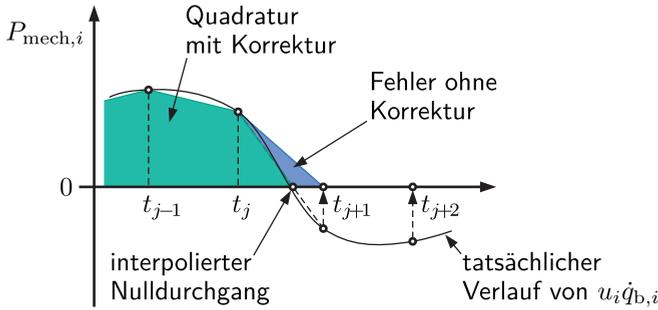


Abbildung 5.3: Lineare Interpolation des Nulldurchgangs zwischen t_j und t_{j+1} vor dem Abschneiden der negativen Komponenten bei der Integration über $P_{\text{mech},i} = \max(u_i \dot{q}_{b,i}, 0)$ mittels der kumulativen Trapezregel für f_{mech} nach Gl. (5.102). Die Näherung des Integrals mit dieser Korrektur (grüne Fläche) entspricht deutlich besser dem tatsächlichen Verlauf der Funktion als das einfache Nullsetzen aller negativen Werte ohne Korrektur (Fehler in blau).

Diskretisierung berechnet. Dabei wird bei der Berechnung von f_{mech} nach Gl. (5.100) und (5.102) eine Korrektur eingeführt, durch die die Genauigkeit der Quadratur verbessert wird, was sich positiv auf die Konvergenz bei der späteren Optimierung auswirkt. Bevor an den Stützstellen der Diskretisierung die negativen Werte nach Gl. (5.100) abgeschnitten werden, werden alle Nulldurchgänge des jeweiligen Funktionsverlaufs durch eine lineare Interpolation bestimmt, wie in Abb. 5.3 dargestellt. Diese interpolierten Nulldurchgänge werden als weitere Stützstellen bei der Quadratur durch die kumulative Trapezregel berücksichtigt, womit sich eine bessere Näherung für das tatsächliche Integral ergibt. Dies hat einen positiven Einfluss auf die Konvergenz bei der Optimierung, da der Wert des Zielfunktional so in geringerem Maße von der Auflösung der Nulldurchgänge durch die Diskretisierung abhängt. Dadurch kommt es nicht zu größeren Schwankungen des Zielfunktional bei kleinen Änderungen der Modellparameter und Bézierkoeffizienten. Kleine Änderungen der Eingangsparameter haben somit nur eine kleine Änderung des Zielfunktionalwerts zur Folge.

Bei der Herleitung der semi-analytischen Lösung für periodische Gehbewegungen des Modells in den vorigen Abschnitten dieses Kapitels werden zahlreiche Modellannahmen getroffen, die durch eine zulässige Bewegung erfüllt werden müssen. Diese werden bei der Erzeugung von Bewegungen mittels numerischer Optimierung als Nebenbedingungen berücksichtigt. Dabei werden alle Bedingungen, die während der gesamten Standphase gelten müssen, an den P Punkten der durch Gl. (5.93) gegebenen Diskretisierung ausgewertet. Damit ergeben sich eine Gleichheitsnebenbedingung

$$\mathbf{c}_g = \mathbf{0}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{c}_g = \left[\frac{x_H^- - x_H^+}{t^- - t^+} - \bar{v} \right] \quad (5.103)$$

und die $10P + 3$ Ungleichheitsnebenbedingungen

$$\mathbf{c}_u \leq \mathbf{0}, \quad \text{mit}$$

$$\mathbf{c}_u = [-\hat{F}_{2z}; \quad (5.104a)$$

$$-\hat{F}_{2x} - \mu_H \hat{F}_{2z}; \quad \hat{F}_{2x} - \mu_H \hat{F}_{2z}; \quad (5.104b)$$

$$-F_{1z,i}; \quad \text{für } i = 1, \dots, P, \quad (5.104c)$$

$$-F_{1x,i} - \mu_H F_{1z,i}; \quad F_{1x,i} - \mu_H F_{1z,i}; \quad \text{für } i = 1, \dots, P, \quad (5.104d)$$

$$-\dot{z}_{C2}^+; \quad \dot{z}_{C2}^-; \quad -z_{C2,i}; \quad \text{für } i = 2, \dots, P - 1, \quad (5.104e)$$

$$-\theta_{K1,i}; \quad -\theta_{K2,i}; \quad \text{für } i = 1, \dots, P, \quad (5.104f)$$

$$\theta_{K1,i} - \frac{2}{3}\pi; \quad \theta_{K2,i} - \frac{2}{3}\pi; \quad \text{für } i = 1, \dots, P, \quad (5.104g)$$

$$\theta_{T,i} - \frac{1}{2}\pi; \quad \frac{1}{2}\pi - \theta_{T,i}] \quad \text{für } i = 1, \dots, P. \quad (5.104h)$$

Durch die Gleichheitsnebenbedingung (5.103) wird die durchschnittliche Geschwindigkeit \bar{v} der Gehbewegung vorgegeben. Mittels der Ungleichheitsnebenbedingungen (5.104a)–(5.104d) wird sichergestellt, dass die Kontaktkräfte nicht am Boden ziehen und die Haftbedingung eingehalten ist. Gleichung (5.104e) ist die Bedingung, dass der Schwungbeinfuß nicht auf dem Boden aufkommt. Da in der DSP beide Füße im Kontakt mit dem Boden sind, darf diese Bedingung nicht für den Beginn und das Ende der ESP gestellt werden: die Parameter haben keinen Einfluss auf z_{C2}^+ und z_{C2}^- , weshalb die Gradienten dieser Bedingungen verschwinden, was die LICQ verletzt, siehe S. 42. Stattdessen wird durch die beiden Geschwindigkeitsbedingungen gefordert, dass das Schwungbein am Beginn der ESP vom Boden abhebt und am Ende der ESP von oben auf dem Boden aufkommt. Durch Gl. (5.104f) wird ein Überstrecken der Knie verhindert, was keine zwingende physikalische Notwendigkeit darstellt, sondern zur Erzeugung einer menschenähnlichen Gehbewegung vorgegeben wird. Durch die Bedingungen (5.104g) und (5.104h) werden die Kniewinkel auf $\theta_{K1}, \theta_{K2} \leq \frac{2}{3}\pi$ und der Absolutwinkel des Oberkörpers auf den Bereich $-\frac{1}{2}\pi \leq \theta_T \leq \frac{1}{2}\pi$ beschränkt. Durch diese Bedingungen wird ein aufrechter Gang ohne Überdrehen der Knie erzwungen. Dies ist lediglich als Absicherung während der iterativen Berechnung der Bewegung durch die numerische Optimierung vorgesehen. Die Ungleichheitsnebenbedingungen (5.104g) und (5.104h) sind bei keinem der in der vorliegenden Arbeit diskutierten Ergebnisse aktiv.

Damit ergibt sich ein NLP nach Gl. (1.1)

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad \text{u. d. N.} \quad \mathbf{c}_g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}_u(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0},$$

das zur Erzeugung von optimalen Bewegungen und zur gleichzeitigen Optimierung der Modellparameter verwendet werden kann. Der Optimierungsvektor \mathbf{x} beinhaltet

dazu im einfachsten Fall nur die Parameter $\tilde{\alpha}$, womit die optimale Bewegung für fixe Modellparameter \mathbf{p}_{mod} bestimmt werden kann – durch das Hinzufügen von Modellparametern ist darüber hinaus die simultane Optimierung der Bewegung und des Systems möglich, vgl. [394]. Als Zielfunktional wird dazu entweder Gl. (5.101) oder Gl. (5.102) verwendet. Bevor im nächsten Kapitel die Lösung des Optimierungsproblems mittels eines SQP-Algorithmus beschrieben wird, werden abschließend die im Folgenden verwendeten Modellparameter eingeführt.

Wie bereits bei der Modellierung der Aktoren und der Energiedissipation diskutiert, wird in der vorliegenden Arbeit keine real existierende Konstruktion eines zweibeinigen Roboters betrachtet. Es werden jedoch Modellparameter benötigt, um die Eignung und Leistungsfähigkeit des Fußmodells aus Kapitel 3 und der in Kapitel 7 entwickelten Methode zur numerischen Fortsetzung der Lösung des Optimierungsproblems zu untersuchen. Im Folgenden wird angenommen, dass der Mensch aufgrund seiner evolutionären Anpassung an den zweibeinigen Gang eine vorteilhafte Gestalt im Bezug auf seine Segmentlängen und deren Massenverteilung aufweist und ein effizienter zweibeiniger Roboter daher wahrscheinlich eine große Ähnlichkeit zu diesem biologischen Vorbild aufweist. Mit dieser Motivation werden die mittleren Parameter für einen erwachsenen Mann aus [87] auf eine Gesamtmasse von $m = 80$ kg und eine Gesamthöhe von $h = 1,80$ m umgerechnet, was die Parameter in Tabelle 5.1 ergibt.¹⁵ Dabei wird für den Haftreibungskoeffizienten der Wert $\mu_H = 0.6$ aus [27, Tabelle 3.1] übernommen. Die Durchschnittsgeschwindigkeit beim Gehen wird im Folgenden im Bereich $\bar{v} \in [0,3 \text{ m/s}, 2,3 \text{ m/s}]$ betrachtet,¹⁶ wobei der jeweilige Wert oder Wertebereich bei der Diskussion der Ergebnisse entsprechend angegeben wird. Der im Folgenden verwendete Grad M der Bézierpolynome und die Anzahl P der Diskretisierungspunkte zur numerischen Berechnung der periodischen Bewegungen sind ebenfalls in Tabelle 5.1 angegeben. In [27, 400] wird gezeigt, dass eine Vergrößerung dieser Werte zu einer geringen Verbesserung des Zielfunktionalwertes führen kann, jedoch die Bewegung selbst nur wenig beeinflusst. Da den Studien in der vorliegenden Arbeit ohnehin keine konkrete Konstruktion eines Roboters zugrunde liegt, werden aus Gründen der Rechenzeit bei der Lösung des Optimierungsproblems relativ kleine Parameter gewählt, wodurch jedoch die prinzipielle Aussagekraft der Ergebnisse nicht beeinträchtigt wird.

¹⁵ Da alle Parameter segmentweise berechnet werden und die relativen Längen, Schwerpunktlagen, Massen und Massenträgheitsmomente jeweils nur mit endlicher Genauigkeit angegeben sind, ergeben sich hierbei Rundungsfehler. Die Summe aller Segmentmassen ergibt daher nicht 80 kg, sondern aufgrund der Rundungsfehler 80,16 kg. Diese Abweichung von 0,2% ist im Rahmen der vorliegenden Arbeit unerheblich, da keine konkrete Konstruktion eines Roboters betrachtet wird, sondern aus diesem Vorgehen lediglich eine Schätzung für möglichst gute Parameter generiert werden soll. Die Gesamthöhe ist jeweils von der jeweiligen Fußgeometrie abhängig. Diese Werte werden daher in Klammer angegeben.

¹⁶ Dies entspricht ca. $\bar{v} \in [1,1 \text{ km/h}, 8,3 \text{ km/h}]$.

Tabelle 5.1: Parameter des mechanischen Modells $\mathbf{p}_{\text{mech}}, \theta_{F,0}$ (ohne Fußgeometrie).

Parameter		Wert	Einheit
h	Gesamthöhe	(1,80)	m
m	Gesamtmasse	(80)	kg
ℓ_T	Länge des Oberkörpers	0,809	m
ℓ_O	Länge des Oberschenkels	0,439	m
ℓ_U	Länge des Unterschenkels	0,440	m
r_T	Schwerpunktlage des Oberkörpers	0,302	m
r_O	Schwerpunktlage des Oberschenkels	0,188	m
r_U	Schwerpunktlage des Unterschenkels	0,181	m
r_F	Schwerpunktlage des Fußes	0,059	m
m_T	Masse des Oberkörpers	50,880	kg
m_O	Masse des Oberschenkels	9,840	kg
m_U	Masse des Unterschenkels	3,840	kg
m_F	Masse des Fußes	0,960	kg
J_T	Massenträgheitsmoment des Oberkörpers	2,646	kg m ²
J_O	Massenträgheitsmoment des Oberschenkels	0,171	kg m ²
J_U	Massenträgheitsmoment des Unterschenkels	0,058	kg m ²
J_F	Massenträgheitsmoment des Fußes	0,004	kg m ²
$\theta_{F,0}$	Nullwinkel des Fußmodells	2,246	rad
c_A	Aktorkonstante	1,000	W/(Nm) ²
g	Erdbeschleunigung	9,810	m s ⁻²
μ_H	Haftreibungskoeffizient	0,600	—
M	Grad der Bézierpolynome	6	
P	Anzahl der Diskretisierungspunkte	200	

6 Optimierung

Das im vorigen Kapitel eingeführte Modell für zweibeiniges Gehen mittels eines HZD-Reglers kann zur Simulation und Optimierung zweibeiniger Gehbewegungen genutzt werden, wofür in Abschnitt 5.4 das entsprechende Optimierungsproblem formuliert wird. Im Folgenden wird zunächst in Abschnitt 6.1 auf die Berechnung der Gradienten von Zielfunktional und Nebenbedingungen eingegangen, die zur Verwendung eines gradientenbasierten Verfahrens benötigt werden. Anschließend wird in Abschnitt 6.2 ein Algorithmus auf Basis der sequentiellen quadratischen Programmierung (SQP) vorgestellt, mit dem das Optimierungsproblem effizient gelöst werden kann.

6.1 Berechnung von Gradienten

Die Berechnung der Gradienten des Zielfunktionals und der Nebenbedingungen ist entscheidend für die Rechenzeiten bei der Optimierung durch ein gradientenbasiertes Verfahren. Einerseits kann die Berechnung der Gradienten, abhängig von der gewählten Methode, sehr zeitaufwendig sein. Andererseits beeinflusst die Genauigkeit der Gradienten entscheidend die Konvergenz des Optimierungsverfahrens, da diese zur Bestimmung des jeweils nächsten Iterationsschritts verwendet werden.

Zur Berechnung der Gradienten kann entweder Code erzeugt werden, um diese direkt auszuwerten, oder eine Näherung auf der Basis *finiter Differenzen* oder der *Komplexen-Schritt-Methode* (CSD)¹ genutzt werden. Die Verwendung finiter Differenzen hat den Vorteil einer einfachen Implementierung, da lediglich Auswertungen des Zielfunktionals und der Nebenbedingungen benötigt werden. Dazu wird unter der Annahme, dass alle Funktionen stetig differenzierbar sind, eine Taylorentwicklung

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \mathcal{O}(h^2) \tag{6.1}$$

betrachtet.

¹ Englisch: complex step derivative approximation.

Diese kann nach der unbekanntenen Ableitung

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (6.2)$$

aufgelöst werden, wobei Terme höherer Ordnung vernachlässigt werden. Im Grenzübergang $h \rightarrow 0$ ergibt sich per Definition die exakte Ableitung. Da der Funktionswert bei der numerischen Berechnung jedoch nur mit einer endlichen Anzahl an Nachkommastellen berechnet wird, ergeben sich große Rundungsfehler, wenn h zu klein gewählt wird. Wird h zu groß gewählt, so ergeben sich systematische Fehler durch das Vernachlässigen der Terme höherer Ordnung. Für die Vorwärtsdifferenzen in Gl. (6.2) ist die theoretisch optimale Schrittweite mit dem geringsten Gesamtfehler $h \approx \sqrt{\varepsilon}$,² wobei die Maschinengenauigkeit bei Gleitkommazahlen mit doppelter Genauigkeit³ $\varepsilon = 2^{-52} \approx 2,2 \cdot 10^{-16}$ beträgt.⁴ Die Genauigkeit kann durch die Verwendung von zentralen finiten Differenzen oder finiten Differenzen noch höherer Ordnung verbessert werden, der Preis dafür ist allerdings eine höhere Anzahl an Funktionsauswertungen. Unter der stärkeren Annahme, dass die Funktionen holomorph sind, kann die CSD-Methode zur Näherung der Ableitung verwendet werden [218, 230]. Dabei liefern alle Funktionen einen reellen Funktionswert für reelle Eingangsvariablen, womit sich mit einem komplexen Schritt die Reihenentwicklung

$$f(x+ih) = f(x) + if'(x)h - \frac{1}{2}f''(x)h^2 + \mathcal{O}(h^3) \quad (6.3)$$

ergibt. Durch den Vergleich der Imaginärteile auf beiden Seiten der Gleichung und der Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung ergibt sich die Näherung

$$f'(x) \approx \frac{\text{Im}(f(x+ih))}{h}. \quad (6.4)$$

Da bei diesem Vorgehen im Gegensatz zu Gl. (6.2) keine Subtraktion benötigt wird, kann h beliebig klein gewählt werden, womit eine exakte Berechnung der Ableitung im Rahmen der Maschinengenauigkeit möglich ist. Allerdings muss beim Programmieren darauf geachtet werden, dass die Funktionsauswertungen aus elementaren holomorphen Operationen⁵ zusammengesetzt werden, damit die CSD-Methode verwendet werden kann.

² Oft wird eine relative Schrittweite $h \approx x\sqrt{\varepsilon}$ gewählt, was jedoch den Nachteil hat, dass die Rundungsfehler für $x \approx 0$ sehr groß werden.

³ Englisch: double precision.

⁴ In der vorliegenden Arbeit wird *Matlab* zur Durchführung der numerischen Berechnung verwendet, wobei Gleitkommazahlen nach dem IEEE-754-Standard implementiert sind, vgl. [174, Abschnitt 3.4].

⁵ Elementare Operationen wie Addition, Multiplikation und trigonometrische Funktionen erfüllen diese Anforderung. Operationen wie z. B. die Berechnung des Betrags (Absolutwertes) jedoch nicht.

Die Berechnung der Gradienten des NLP durch finite Differenzen oder CSD ist zwar einfach umzusetzen, hat jedoch den Nachteil, dass der Aufwand linear mit der Dimension von \mathbf{x} ansteigt, da die Berechnung mittels Gl. (6.2) oder Gl. (6.4) für jeden Eintrag von \mathbf{x} ausgeführt werden muss. Dies kann bei der Programmierung zwar parallelisiert werden, ist jedoch dennoch sehr rechenzeitintensiv und bei finiten Differenzen relativ ungenau.

Eine deutlich effizientere Methode besteht in der direkten Berechnung der Gradienten durch Code, der entweder manuell oder durch *automatisches Differenzieren* (AD)⁶ erzeugt wird. Beim AD wird die Tatsache ausgenutzt, dass sich die Berechnung des Zielfunktional und der Nebenbedingungen aus elementaren mathematischen Operationen wie Addition, Multiplikation, trigonometrischen Funktionen, etc. zusammensetzt. Die Ableitung des Ergebnisses nach den Variablen \mathbf{x} kann durch sukzessive Anwendung der Kettenregel aus den Ableitungen aller verwendeter Operationen bestimmt werden. Die Algorithmen zur Simulation der periodischen Gehbewegungen und deren Optimierung werden in *Matlab* implementiert, wofür einige AD-Toolboxen zur Verfügung stehen [371]. Ein Vergleich der Leistung verschiedener nicht-kommerzieller AD-Toolboxen in [404] zeigt jedoch, dass diese für die vorliegende Anwendung nicht geeignet sind – die Rechenzeiten bei der Optimierung sind deutlich höher als bei der ebenfalls betrachteten Verwendung von CSD. Aus diesem Grund wird keine AD-Toolbox verwendet, sondern der Code zur Berechnung der Gradienten manuell programmiert. Dies ist zwar zunächst aufwendiger als die Verwendung einer AD-Toolbox, bietet jedoch die größte Flexibilität und ermöglicht dadurch eine sehr effiziente Implementierung. Durch dieses Vorgehen ist es außerdem möglich, aus den Gradienten mit Gl. (6.4) mittels der CSD-Methode die zweiten Ableitungen zu bestimmen, was im Folgenden bei der Initialisierung der Hesse-Matrix Anwendung findet. Mit der Berechnung des Zielfunktional, der Nebenbedingungen und der Gradienten kann das NLP durch eine gradientenbasierte Optimierungsmethode gelöst werden, was im nächsten Abschnitt beschrieben wird.

6.2 Sequentielle Quadratische Programmierung (SQP)

Die vorgestellte Herleitung und Formulierung des NLP zur Erzeugung optimaler Gehbewegungen resultiert in einem verhältnismäßig niedrigdimensionalen Optimierungsproblem⁷, wobei die Dimension N von \mathbf{x} im Wesentlichen vom Grad M der Bézierpolynome abhängt, durch welche die Solltrajektorien beschrieben werden. Dadurch ist das NLP jedoch stark nichtlinear, da die Lösung für die periodische Bewegung über

⁶ Zum Teil auch als *algorithmisches Differenzieren* bezeichnet. Englisch: automatic differentiation oder algorithmic differentiation.

⁷ Vergleiche z. B. [159].

mehrere aufeinander aufbauende Quadraturverfahren aus den Parametern $\tilde{\alpha}$ bestimmt wird. Wie in Abschnitt 1.2.3 erläutert, existieren verschiedene Verfahren zur Lösung von NLP. Dabei sind die SQP-Verfahren besonders für Probleme mit starken Nichtlinearitäten geeignet [258, S. 529]: „One of the most effective methods for nonlinearly constrained optimization generates steps by solving quadratic subproblems. [...] SQP methods show their strength when solving problems with significant nonlinearities in the constraints.“⁸ Innere-Punkte-Verfahren, die ebenfalls zur Lösung von Problemen mit starken Nichtlinearitäten geeignet sind, spielen ihre Stärken meist erst bei hochdimensionalen Problemen aus. Das im Folgenden entwickelte Optimierungsverfahren soll in Kapitel 7 im Rahmen einer numerischen Fortsetzungsmethode verwendet werden, um die Lösung des NLP bei Veränderungen der Modellparameter und Nebenbedingungen zu verfolgen. Da bei Innere-Punkte-Verfahren bereits zur Lösung des NLP eine numerische Fortsetzungsmethode zur Steuerung des Strafparameters benötigt wird, ist es keine triviale Fragestellung, wie beide Parameter – der Modellparameter und der Strafparameter – gleichzeitig fortgesetzt werden müssen, um die Lösungskurve zu verfolgen. Deshalb wird in der vorliegenden Arbeit ein SQP-Verfahren zur Lösung des NLP verwendet, dessen Aufbau im Folgenden beschrieben wird.

Wie in Abschnitt 1.2.3 (S. 47) beschrieben, gibt es prinzipiell zwei Ausprägungen von SQP-Verfahren: EQP-Verfahren und IQP-Verfahren. Während bei EQP-Verfahren die jeweils aktiven Ungleichheitsnebenbedingungen zum Aufstellen des QP-Teilproblems wie Gleichheitsnebenbedingungen behandelt werden und anschließend eine Korrektur unter Berücksichtigung aller Ungleichheitsnebenbedingungen durchgeführt wird, werden bei IQP-Verfahren alle Nebenbedingungen bei der Lösung des QP-Teilproblems berücksichtigt. Dies ist evtl. mit einem größeren Aufwand zur Lösung des QP-Teilproblems verbunden, hat jedoch den Vorteil einer geringeren Komplexität des resultierenden SQP-Algorithmus, weshalb dieser Ansatz gewählt wird. Bei der Verwendung einer Aktiven-Menge-Methode kann außerdem eine sehr gute Leistung erzielt werden, wenn der Algorithmus warmgestartet wird, indem eine Schätzung für die aktive Menge auf Basis der verletzten Nebenbedingungen angegeben wird. Meist verändert sich die aktive Menge während eines Iterationsschritts nur gering, weshalb dieses Vorgehen trotz der theoretisch schlechten Eigenschaften in der Praxis sehr schnell ist.

Zur Schrittweitensteuerung, die für ein global konvergentes Verfahren benötigt wird, kann entweder das Liniensuchverfahren oder das Vertrauensbereichverfahren verwendet werden. Beide Ansätze haben sich in der Praxis bewährt, wobei kein Ansatz dem anderen klar überlegen ist, [258, S. 535]: „[...] neither of the two SQP ap-

⁸ „Eine der effektivsten Methoden bei der Optimierung mit nichtlinearen Nebenbedingungen erzeugt Schritte durch die Lösung von quadratischen Teilproblemen. [...] SQP-Verfahren zeigen ihre Stärke bei der Lösung von Problemen mit erheblichen Nichtlinearitäten in den Nebenbedingungen.“ (Übersetzung des Verfassers).

proaches—line search or trust-region—is currently regarded as clearly superior to the other.“⁹ Das Liniensuchverfahren hat jedoch den Vorteil, dass diese Art der Schrittweitensteuerung nur von den Informationen im aktuellen Schritt abhängig ist, während der Vertrauensbereich eine sinnvolle Initialisierung und Modifikation auf Basis der vorherigen Iterationsschritte erfordert [258, S. 67]: „The size of the trust region is critical to the effectiveness of each step. [...] In practical algorithms, we choose the size of the region according to the performance for the algorithm during previous iterations.“¹⁰ Bei der Verwendung des SQP-Verfahrens als Teil der numerischen Fortsetzungsmethode in Kapitel 7 erscheint das Liniensuchverfahren daher vorteilhafter, da keine Heuristik zur Initialisierung des Vertrauensbereichs benötigt wird, was ggf. das gesamte Verfahren beeinträchtigen könnte. Es wird daher im Folgenden ein IQP-Liniensuchverfahren entwickelt. Zur Schrittweitensteuerung des Liniensuchverfahrens wird die exakte ℓ_1 -Straffunktion als Gütefunktion verwendet, was sich in vielen praktischen Algorithmen bewährt hat. Der folgende Algorithmus weißt Ähnlichkeiten mit [90] auf, basiert jedoch hauptsächlich auf [47, 48]. Auf die Verwendung mehrerer Gütefunktionen, wie z. B. im NLPQL-Algorithmus [309], wird verzichtet, da der Algorithmus in den getesteten Anwendungen eine gute Konvergenz aufweist und dies die Komplexität weiter erhöhen würde.

Bei der Implementierung eines effizienten und robusten Algorithmus müssen weitere Details berücksichtigt werden. Die Strafparameter der ℓ_1 -Gütefunktion müssen sinnvoll gewählt werden, wofür in Abschnitt 6.2.1 eine Systematik beschrieben wird, die lediglich Informationen über die Lösung des QP-Teilproblems im momentanen Iterationsschritt benötigt. Für den Fall, dass während der Iteration ein QP-Teilproblem auftritt, das für die linearisierten Nebenbedingungen keine zulässige Lösung besitzt, wird ebenfalls in Abschnitt 6.2.1 eine Relaxation auf Basis der ℓ_1 -Straffunktion vorgenommen, um dennoch eine Lösung für diesen Iterationsschritt zu bestimmen. Nachdem aus dem QP-Teilproblem die Suchrichtung bestimmt wurde, wird in Abschnitt 6.2.2 die Liniensuchmethode erläutert. Um eine langsame Konvergenz aufgrund des Maratos-Effekts zu vermeiden, wird dort auch ein Korrekturschritt zweiter Ordnung bestimmt. Für die Hesse-Matrix der Lagrangefunktion wird in Abschnitt 6.2.3 eine Schätzung mittels der BFGS-Methode (BFGS) berechnet. Schließlich werden alle Schritte in Abschnitt 6.2.4 zum gesamten SQP-Algorithmus zusammengefasst.

⁹ „[...] keiner der beiden SQP-Ansätze – Liniensuche oder Vertrauensbereich – wird derzeit als deutlich überlegen angesehen.“ (Übersetzung des Verfassers)

¹⁰ „Die Größe des Vertrauensbereichs ist entscheidend für die Effektivität jedes Schrittes. [...] In praktischen Algorithmen wird die Größe des Vertrauensbereichs in Abhängigkeit von der Leistung des Algorithmus während vorheriger Iterationen gewählt.“ (Übersetzung des Verfassers).

6.2.1 Exakte ℓ_1 -Straffunktion

Der folgende SQP-Algorithmus basiert im Wesentlichen auf der in [47] vorgestellten und in [48] konkretisierten Methode zur Berechnung eines optimalen Strafparameters für die exakte ℓ_1 -Straffunktion ϕ_1 und deren Verwendung als Gütefunktion in einem SQP-Liniensuchverfahren. Dabei wird ausgenutzt, dass jeder stationäre Punkt von ϕ_1 , der alle Nebenbedingungen erfüllt, ein KKT-Punkt des ursprünglichen NLP ist [48, S. 41]. Ein Verfahren, das in jedem Iterationsschritt ϕ_1 minimiert, bis ein stationärer Punkt erreicht ist, ist dadurch global konvergent. Für den Beweis der globalen Konvergenz des im Folgenden vorgestellten Verfahrens wird auf [48] verwiesen. Bei der praktischen Implementierung dieses Vorgehens stellt sich die Frage nach der Wahl des Strafparameters. Dieser muss ausreichend groß sein, damit das Verfahren zu einem stationären Punkt konvergiert, der die Nebenbedingungen nicht verletzt – sofern eine solche Lösung existiert. Andererseits führt eine zu große Wahl des Strafparameters dazu, dass durch die ℓ_1 -Gütefunktion Iterationsschritte verworfen werden, die zwar das Zielfunktional deutlich verbessern, dafür jedoch zu einer etwas größeren Verletzung der Nebenbedingungen führen. Daraus folgt eine langsame Konvergenz des Verfahrens mit entsprechend hohen Rechenzeiten, weshalb der Strafparameter nicht zu groß gewählt werden darf. Es wird also eine Systematik für die Wahl des Strafparameters benötigt, die den minimalen Wert ermittelt, bei dem keine Verletzung der Nebenbedingungen auftritt. In der Literatur wird meist ein skalarer Strafparameter μ eingeführt, vgl. Gl. (1.4), der durch eine Heuristik initialisiert wird, z. B. in [48, S. 67] mit dem Wert $\mu = 1$. Anschließend wird der Wert dieses Parameters nur noch erhöht, jedoch nicht mehr verringert, was das beschriebene Problem der langsamen Konvergenz des SQP-Verfahrens zur Folge hat.

Ein zweiter Aspekt, der essentiell für die *Robustheit* des SQP-Verfahrens ist, ist die Behandlung von Optimierungsproblemen ohne zulässige Lösung. Dies kann entweder auftreten, wenn die Nebenbedingungen nicht konsistent sind und daher keine Lösung des NLP möglich ist, bei der keine Verletzung der (nichtlinearen) Nebenbedingungen auftritt. Der wesentlich häufigere Fall tritt jedoch auf, wenn bei der iterativen Lösung ein QP-Teilproblem auftritt, bei dem keine zulässige Lösung für die linearisierten Nebenbedingungen existiert. Damit das Verfahren in diesem Fall nicht erfolglos abgebrochen werden muss, wird eine Relaxation auf Basis der ℓ_1 -Straffunktion durchgeführt. Für diese kann auch in diesem Fall ein stationärer Punkt bestimmt werden, womit der Algorithmus selbstständig in einen Bereich mit zulässigen Lösungen zurückfindet, sofern dieser existiert. Für diese Fragestellung wird in [48] ein Vorgehen vorgeschlagen und dessen Konvergenz bewiesen, bei der ein bestmöglicher, skalarer Strafparameter μ bestimmt wird.

Im Folgenden wird zunächst die Lösung eines QP-Teilproblems mit kompatiblen Nebenbedingungen vorgestellt. Anschließend wird auf den Fall mit inkompatiblen Nebenbedingungen eingegangen, für dessen Lösung die Relaxation auf Basis der exakten ℓ_1 -Straffunktion verwendet wird.

Für das NLP

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \quad \text{u. d. N.} \quad \mathbf{c}_g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}_u(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \quad (6.5)$$

nach Gl. (1.1) wird die exakte ℓ_1 -Straffunktion

$$\phi_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}_g, \boldsymbol{\mu}_u) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i \in \mathcal{G}} \mu_{g,i} |c_{g,i}(\mathbf{x})| + \sum_{i \in \mathcal{U}} \mu_{u,i} \max(0, c_{u,i}(\mathbf{x})) \quad (6.6)$$

eingeführt, wobei die Verletzung jeder Nebenbedingung mit einem separaten Strafparameter $\mu_{g,i}$ bzw. $\mu_{u,i}$ gewichtet wird. Im k -ten Iterationsschritt des SQP-Verfahrens muss zunächst das QP-Teilproblem

$$\min_{\mathbf{d}_k} f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k + \frac{1}{2} \mathbf{d}_k^\top \mathbf{W}_k \mathbf{d}_k \quad (6.7a)$$

$$\text{u. d. N.} \quad \nabla \mathbf{c}_g(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k + \mathbf{c}_g(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0}, \quad (6.7b)$$

$$\nabla \mathbf{c}_u(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k + \mathbf{c}_u(\mathbf{x}_k) \leq \mathbf{0} \quad (6.7c)$$

gelöst werden, wobei die zugehörige Formulierung mittels der exakten ℓ_1 -Straffunktion

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}_k} q_k(\mathbf{d}_k, \boldsymbol{\mu}_{g,k}, \boldsymbol{\mu}_{u,k}) \\ q_k(\mathbf{d}_k, \boldsymbol{\mu}_{g,k}, \boldsymbol{\mu}_{u,k}) &= f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k + \frac{1}{2} \mathbf{d}_k^\top \mathbf{W}_k \mathbf{d}_k \\ &\quad + \sum_{i \in \mathcal{G}} \mu_{g,k,i} |\nabla c_{g,i}(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k + c_{g,i}(\mathbf{x}_k)| \\ &\quad + \sum_{i \in \mathcal{U}} \mu_{u,k,i} \max(0, \nabla c_{u,i}(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k + c_{u,i}(\mathbf{x}_k)) \end{aligned} \quad (6.8)$$

lautet, vgl. [48, S. 41f]. Dabei ist \mathbf{W}_k eine positiv definite Näherung für die Hesse-Matrix der Lagrangefunktion, auf die in Abschnitt 6.2.3 eingegangen wird.

Die Lösung von Gl. (6.8) ist gleich der Lösung von Gl. (6.7), wenn die – zunächst noch unbekannt – Strafparameter $\mu_{g,k}$ und $\mu_{u,k}$ groß genug gewählt werden. Die Strafparameter dürfen jedoch nicht zu groß gewählt werden, da ansonsten das oben beschriebene Problem der langsamen Konvergenz des Gesamtverfahrens bei Verwendung der exakten ℓ_1 -Straffunktion als Gütefunktion für die Schrittweitensteuerung auftritt. Zur Ermittlung optimaler Strafparameter wird (abweichend von [48]) zunächst das QP-Teilproblem nach Gl. (6.7) gelöst. Für den Fall, dass eine zulässige Lösung existiert,

liefert dies neben der Schrittrichtung \mathbf{d}_k auch die Multiplikatoren $\lambda_{g,k}$ und $\lambda_{u,k}$ – andernfalls wird die unten beschriebene Relaxation zur Bestimmung einer Lösung verwendet. Wie in Anhang C gezeigt wird, sind die optimalen Strafparameter für das QP-Teilproblem gerade die Beträge der Multiplikatoren

$$\mu_{g,k} = |\lambda_{g,k}|, \quad \mu_{u,k} = \lambda_{u,k} \geq \mathbf{0},$$

wobei diese Zuweisung und der Betragsoperator komponentenweise zu verstehen sind. Für den Fall, dass das QP-Teilproblem eine zulässige Lösung besitzt, wird dieses also anhand von Gl. (6.7) gelöst und die exakte ℓ_1 -Straffunktion mit den Strafparametern nach Gl. (6.9) lediglich als Gütefunktion zur Schrittweitensteuerung des Liniensuchverfahrens verwendet, um globale Konvergenz für das SQP-Verfahren sicherzustellen. Um bei der Verwendung der Strafparameter in der Gütefunktion auch die Verletzung von Nebenbedingungen zu bestrafen, die bei der Lösung von Gl. (6.7) nicht aktiv sind, wird eine untere Schranke in Abhängigkeit des maximalen Strafparameters $\mu_{\max} = \max(\mu_{g,k,i}, \mu_{u,k,i})$, für alle $i \in \mathcal{G}, \mathcal{U}$ eingeführt,

$$\mu_{g,k,i} = \max(\mu_{g,k,i}, \sigma \mu_{\max}), \quad \text{für } i \in \mathcal{G}, \quad (6.9a)$$

$$\mu_{u,k,i} = \max(\mu_{u,k,i}, \sigma \mu_{\max}), \quad \text{für } i \in \mathcal{U}, \quad (6.9b)$$

wobei $\sigma = 10^{-3}$ gewählt wird. Für den Fall, dass das QP-Teilproblem keine zulässige Lösung besitzt, wird anhand des Vorgehens in [48] eine optimale (unzulässige) Lösung für das QP-Teilproblem bestimmt.

Dazu wird ein skalarer Strafparameter

$$\begin{aligned} \mu_{g,k,i}, \mu_{u,k,i} &= \mu_k, \quad \text{für alle } i \in \mathcal{G}, \mathcal{U} \\ \text{mit } \mu_k &= \max(\mu_{g,k-1}, \mu_{u,k-1}) \quad \text{für alle } k > 1 \quad \text{und} \quad \mu_1 = 1 \end{aligned} \quad (6.10)$$

für alle Nebenbedingungen eingeführt. Dieser wird mit dem betragsmäßig größten Strafparameter des vorherigen Iterationsschritts initialisiert, im ersten Iterationsschritt wird wie in [48, S. 67] $\mu_1 = 1$ verwendet. Damit ergibt sich mit [48, Gl. (2.4)]

$$m_k(\mathbf{d}_k) = \sum_{i \in \mathcal{G}} |\nabla c_{g,i}(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k + c_{g,i}(\mathbf{x}_k)| + \sum_{i \in \mathcal{U}} \max(0, \nabla c_{u,i}(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k + c_{u,i}(\mathbf{x}_k)) \quad (6.11)$$

für Gl. (6.8) die Form [48, Gl. (2.5)]

$$q_k(\mathbf{d}_k, \mu_k) = f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k + \frac{1}{2} \mathbf{d}_k^T \mathbf{W}_k \mathbf{d}_k + \mu_k m_k(\mathbf{d}_k), \quad (6.12)$$

die durch das Einführen der Schlupfvariablen \mathbf{r} , \mathbf{s} und \mathbf{t} in ein glattes quadratisches Programm der Form [48, Gl. (2.7)]

$$\min_{\mathbf{d}_k, \mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}} f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k + \frac{1}{2} \mathbf{d}_k^\top \mathbf{W}_k \mathbf{d}_k + \mu_k \sum_{i \in \mathcal{G}} (r_i + s_i) + \mu_k \sum_{i \in \mathcal{U}} t_i \quad (6.13a)$$

$$\text{u. d. N. } \nabla c_{g,i}(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k + c_{g,i}(\mathbf{x}_k) = r_i - s_i \quad \text{für } i \in \mathcal{G}, \quad (6.13b)$$

$$\nabla c_{u,i}(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k + c_{u,i}(\mathbf{x}_k) \leq t_i \quad \text{für } i \in \mathcal{U}, \quad (6.13c)$$

$$\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t} \geq \mathbf{0} \quad (6.13d)$$

umgeschrieben werden kann. Da dies nur für den Fall genutzt wird, in dem das ursprüngliche QP-Teilproblem keine zulässige Lösung besitzt, kann auch für Gl. (6.13) keine zulässige Lösung mit $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t} = \mathbf{0}$ gefunden werden. Vielmehr wird dieses Problem verwendet, um einen Strafparameter zu ermitteln, für den die Verletzung der Nebenbedingungen minimal wird. Dazu wird im Folgenden die Lösung des linearen Programms [48, Gl. (2.9)]

$$\min_{\mathbf{d}_k, \mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}} \sum_{i \in \mathcal{G}} (r_i + s_i) + \sum_{i \in \mathcal{U}} t_i \quad (6.14a)$$

$$\text{u. d. N. } \nabla c_{g,i}(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k + c_{g,i}(\mathbf{x}_k) = r_i - s_i \quad \text{für } i \in \mathcal{G}, \quad (6.14b)$$

$$\nabla c_{u,i}(\mathbf{x}_k) \mathbf{d}_k + c_{u,i}(\mathbf{x}_k) \leq t_i \quad \text{für } i \in \mathcal{U}, \quad (6.14c)$$

$$\|\mathbf{d}_k\|_\infty \leq \Delta_k, \quad (6.14d)$$

$$\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t} \geq \mathbf{0} \quad (6.14e)$$

benutzt, wobei Δ_k einen Vertrauensbereich für dieses Problem darstellt. Dessen Verwendung zur Bestimmung einer Suchrichtung für QP-Teilprobleme ohne zulässige Lösung wird im Rahmen des Gesamtalgorithmus in Abschnitt 6.2.4 erläutert. Bei dem SQP-Verfahren zur iterativen Lösung des NLP wird die Suchrichtung \mathbf{d}_k von Gl. (6.7), Gl. (6.13) oder Gl. (6.14) in einen Liniensuchverfahren verwendet, um den nächsten Iterationspunkt \mathbf{x}_{k+1} zu bestimmen, wofür die ℓ_1 -Gütefunktion genutzt wird. Zur Verbesserung der Konvergenz wird außerdem eine Korrektur zweiter Ordnung berechnet, worauf im nächsten Abschnitt eingegangen wird.

6.2.2 Liniensuchverfahren und Korrektur zweiter Ordnung

Durch die ℓ_1 -Gütefunktion werden beim Liniensuchverfahren nur Schritte akzeptiert, bei denen der Wert der exakten ℓ_1 -Straffunktion ϕ_1 nach Gl. (6.6) eine genügende Abnahme im Vergleich zu deren quadratischer Entwicklung q_k nach Gl. (6.8) aufweist.

Für den Fall, dass dies nicht gegeben ist, wird die Schrittlänge durch einen Faktor $\beta_k \in (0, 1]$ verkürzt, bis die Bedingung [48, Gl. (2.14)]

$$\begin{aligned} & \phi_1(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}_{g,k}, \boldsymbol{\mu}_{u,k}) - \phi_1(\mathbf{x}_k + \beta_k \mathbf{d}_k, \boldsymbol{\mu}_{g,k}, \boldsymbol{\mu}_{u,k}) \\ & \geq \eta \beta_k (q_k(\mathbf{0}, \boldsymbol{\mu}_{g,k}, \boldsymbol{\mu}_{u,k}) - q_k(\mathbf{d}_k, \boldsymbol{\mu}_{g,k}, \boldsymbol{\mu}_{u,k})) \end{aligned} \quad (6.15)$$

erfüllt ist.¹¹ Dabei wird der Parameter $\eta = 10^{-4}$ gewählt und β_k durch ein Rücksetzverfahren¹² als größter Wert der Folge $\{1, \tau, \tau^2, \dots\}$, $\tau = 0.7$ bestimmt, der Gl. (6.15) erfüllt, womit sich $\mathbf{d}_k = \beta_k \mathbf{d}_k$ ergibt.

Bei diesem Liniensuchverfahren müssen zwei weitere Fälle abgefangen werden, damit ein möglichst großer Fortschritt bei der Lösung des QP-Teilproblems erzielt wird. Zum einen kann der Fall auftreten, dass das NLP am Punkt $(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k)$ keine (reelle) Lösung besitzt, was in der vorliegenden Arbeit dann der Fall ist, wenn Gl. (5.87) verletzt ist. In diesem Fall wird das Rücksetzverfahren zur Verringerung von β_k so lange angewendet, bis eine reelle Lösung existiert. Erfüllt diese die Bedingung Gl. (6.15), so wird die Lösung akzeptiert und damit $\mathbf{d}_k = \beta_k \mathbf{d}_k$ gesetzt. Andernfalls wird der Schritt auf $\mathbf{d}_k = \beta_k \mathbf{d}_k$ verkürzt und eine Korrektur zweiter Ordnung für die Nebenbedingungen berechnet, um eine bessere Richtung \mathbf{d}_k zu bestimmen.

Bei stark nichtlinearen Nebenbedingungen tritt der sog. *Maratos-Effekt* auf: da die Nebenbedingungen nur durch eine Linearisierung im QP-Teilproblem berücksichtigt werden, führt die Richtung \mathbf{d}_k – diese ist tangential zu den Nebenbedingungen am Punkt \mathbf{x}_k – zu einer relativ starken Verletzung der Nebenbedingungen, wenn das NLP in Richtung des QP-Schrittes ausgewertet wird. Beim Liniensuchverfahren mit der Gütefunktion nach Gl. (6.15) werden also an sich gute Schritte in Richtung des Optimums verworfen und nur sehr kurze Iterationsschritte zugelassen. Die gängige Abhilfemaßnahme für dieses Problem ist die Berechnung einer *Korrektur zweiter Ordnung* (SOC)¹³ für die Nebenbedingungen, vgl. [103]. Dazu werden das Zielfunktional und die Nebenbedingungen, sowie deren Gradienten am Punkt $(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k)$ ausgewertet, wobei der Schritt \mathbf{d}_k bereits die Korrektur aus dem vorigen Absatz beinhaltet.

In [103] und [258, S.543f] wird zur Berechnung des SOC-Schritts ein weiteres quadratisches Programm hergeleitet. Dieses Vorgehen, bei dem ein weiteres IQP-Teilproblem gelöst werden muss, hat sich jedoch in der vorliegenden Arbeit als relativ ineffizient erwiesen. Es wird deshalb eine einfachere Projektion auf Basis eines EQP-Teilproblems

¹¹ Ungleichung (6.15) enthält noch keinen Korrekturschritt zweiter Ordnung. Dieser wird in Gl. (6.19) berücksichtigt.

¹² Englisch: backtracking.

¹³ Englisch: second order correction.

berechnet. Dazu werden die Nebenbedingungen im Punkt $(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k)$ mit dem weiteren Korrekturschritt $\mathbf{d}_k^{\text{SOC}}$ linearisiert:

$$c_{g,i}(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k + \mathbf{d}_k^{\text{SOC}}) = \nabla c_{g,i}(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k) \mathbf{d}_k^{\text{SOC}} + c_{g,i}(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k) \quad \text{für } i \in \mathcal{G}, \quad (6.16a)$$

$$c_{u,i}(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k + \mathbf{d}_k^{\text{SOC}}) = \nabla c_{u,i}(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k) \mathbf{d}_k^{\text{SOC}} + c_{u,i}(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k) \quad \text{für } i \in \mathcal{U}. \quad (6.16b)$$

Es wird der kürzeste Korrekturschritt gesucht, der die Linearisierung aller am Punkt $(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k)$ aktiven Nebenbedingungen erfüllt. Die aktiven Ungleichheitsnebenbedingungen werden bei der Bestimmung des Korrekturschritts also wie Gleichheitsnebenbedingungen behandelt, während die inaktiven Nebenbedingungen nicht berücksichtigt werden. Damit ergibt sich das EQP-Teilproblem

$$\min_{\mathbf{d}_k^{\text{SOC}}} \mathbf{d}_k^{\text{SOC}\top} \mathbf{d}_k^{\text{SOC}} \quad (6.17a)$$

$$\text{u. d. N. } \nabla c_{g,i}(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k) \mathbf{d}_k^{\text{SOC}} + c_{g,i}(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k) = 0 \quad \text{für } i \in \mathcal{G}, \quad (6.17b)$$

$$\nabla c_{u,i}(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k) \mathbf{d}_k^{\text{SOC}} + c_{u,i}(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k) = 0 \quad \text{für } i \in \mathcal{A}(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k), \quad (6.17c)$$

dessen Lösung mit

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^{\text{SOC}} &= [c_{g,i}(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k); \quad \text{für } i \in \mathcal{G}, \\ &\quad c_{u,i}(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k)] \quad \text{für } i \in \mathcal{A}(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k), \\ \nabla \mathbf{c}^{\text{SOC}} &= [\nabla c_{g,i}(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k); \quad \text{für } i \in \mathcal{G}, \\ &\quad \nabla c_{u,i}(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k)] \quad \text{für } i \in \mathcal{A}(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k) \end{aligned}$$

direkt aus dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \nabla \mathbf{c}^{\text{SOC}\top} \\ \nabla \mathbf{c}^{\text{SOC}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_k^{\text{SOC}} \\ \boldsymbol{\lambda}^{\text{SOC}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{c}^{\text{SOC}} \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

bestimmt werden kann. Während bei der meist in der Literatur vorgeschlagenen Vorgehensweise ein weiteres IQP-Teilproblem zur Bestimmung des SOC-Schrittes gelöst werden muss, ist die Lösung des linearen Gleichungssystems in Gl. (6.18) vergleichsweise schnell zu berechnen. Der Unterschied zwischen beiden Vorgehensweisen ist in Abb. 6.1 dargestellt. Bei der klassischen Formulierung des IQP-Teilproblems wird der Wert des Zielfunktional berücksichtigt, weshalb der SOC-Schritt eine weitere Minimierung des Zielfunktional anstrebt und damit einen größeren Schritt bestimmt. Die hier verwendete Projektion verringert lediglich den Abstand des Schritts zu den

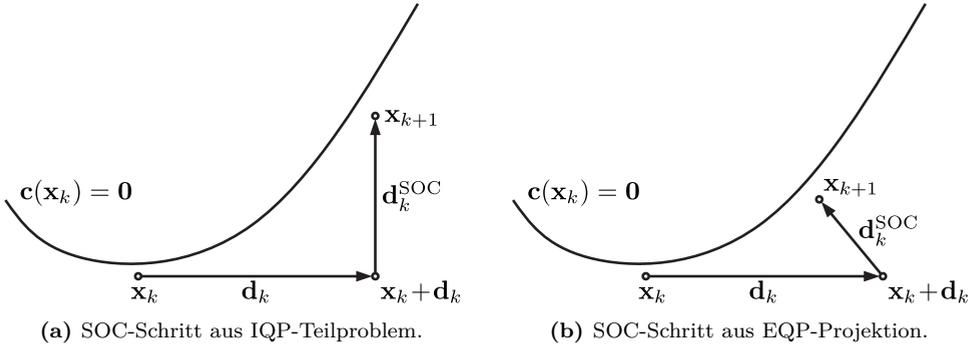


Abbildung 6.1: Schematische Darstellung der Berechnung eines Korrekturschritts zweiter Ordnung (SOC-Schritt) $\mathbf{d}_k^{\text{SOC}}$. (a) Berechnung durch Lösung eines weiteren IQP-Teilproblems unter Berücksichtigung des Zielfunktionals, vgl. [103, Abbildung 1]. (b) Berechnung der kürzesten Projektion der aktiven Nebenbedingungen am Punkt $(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k)$ aus einem EQP-Teilproblem.

Nebenbedingungen, ohne das Zielfunktional weiter zu berücksichtigen. Die Leistung dieses Korrekturschritts hat sich jedoch bei der Verwendung des Verfahrens zur Erzeugung optimaler Gehbewegungen als sehr gut erwiesen. Die globale Konvergenz des Gesamtverfahrens wird nach wie vor durch die Gütefunktion Gl. (6.15) sichergestellt. Die Berechnung des SOC-Schritts wird nur durchgeführt, wenn das ursprüngliche QP-Teilproblem eine zulässige Lösung besitzt. Andernfalls ist die Schrittichtung bereits so bestimmt, dass hauptsächlich die Verletzung der Nebenbedingungen reduziert wird. Für den Fall, dass am Punkt $(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k + \mathbf{d}_k^{\text{SOC}})$ keine (reelle) Lösung des Problems existiert, wird der SOC-Schritt verworfen und $\mathbf{d}_k^{\text{SOC}} = \mathbf{0}$ gesetzt. Andernfalls wird das Liniensuchverfahren zur Bestimmung von \mathbf{x}_{k+1} eingesetzt, wobei eine Schrittweite α_k gesucht wird, für welche die Bedingung

$$\begin{aligned} & \phi_1(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}_g, \boldsymbol{\mu}_u) - \phi_1(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k + \alpha_k^2 \mathbf{d}_k^{\text{SOC}}, \boldsymbol{\mu}_g, \boldsymbol{\mu}_u) \\ & \geq \eta \alpha_k \beta_k (q_k(\mathbf{0}, \boldsymbol{\mu}_{g,k}, \boldsymbol{\mu}_{u,k}) - q_k(\mathbf{d}_k, \boldsymbol{\mu}_{g,k}, \boldsymbol{\mu}_{u,k})) \end{aligned} \quad (6.19)$$

erfüllt ist. Dabei wird α_k wieder durch ein Rücksetzverfahren als größter Wert der Folge $\{1, \tau, \tau^2, \dots\}$ bestimmt, der Gl. (6.15) erfüllt. In diesem Fall ist meist $\beta_k = 1$, außer wenn der ursprüngliche Schritt keine reelle Lösung liefert. Zur Reduktion der Rechenzeit wird diese Liniensuche bei der Implementierung des SQP-Verfahrens parallelisiert, indem so viele Schritte der Folge $\{1, \tau, \tau^2, \dots\}$, wie CPU-Kerne zur Verfügung stehen, parallel ausgewertet werden, und anschließend der größte Wert verwendet wird, für den die ℓ_1 -Gütefunktion nach Gl. (6.19) erfüllt ist. Damit kann die Rechenzeit für die Liniensuche im besten Fall um den Faktor der zur Verfügung stehenden CPU-Kerne beschleunigt werden, im schlechtesten Fall ist die Rechenzeit gleich wie ohne Parallelisierung. Der nächste Iterationspunkt ergibt sich aus

$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k + \alpha_k^2 \mathbf{d}_k^{\text{SOC}}$. Nachdem somit alle Schritte zur Berechnung des Iterationsschritts diskutiert sind, wird im nächsten Abschnitt auf die Berechnung der Näherung \mathbf{W}_k für die Hesse-Matrix eingegangen.

6.2.3 BFGS-Approximation der Hesse-Matrix

Das in Abschnitt 6.2.1 vorgestellte Verfahren zur Formulierung des QP-Teilproblems verwendet eine Näherung der Hesse-Matrix der Lagrangefunktion, was vom Prinzip einem Quasi-Newton-Verfahren entspricht. Dies ist das gängige Vorgehen in der Literatur, da die Berechnung der zweiten Ableitungen zur Bestimmung der exakten Hesse-Matrix oft mit einem erheblichen Rechenaufwand verbunden ist. Die Verwendung einer Näherung der Hesse-Matrix führt damit zwar zu einer höheren Anzahl an Iterationsschritten, insgesamt jedoch zu kürzeren Rechenzeiten. In der vorliegenden Arbeit wird die BFGS-Methode genutzt, wobei in jedem Iterationsschritt eine Modifikation für \mathbf{W} bestimmt wird, vgl. [258, S. 536ff]. Diese bereits 1970 veröffentlichte Methode für Quasi-Newton-Verfahren hat sich in vielen praktischen Anwendungen als sehr effektiv erwiesen, [258, S. 139]: „[...] the BFGS formula, which is presently considered to be the most effective of all quasi-Newton updating formulae.“¹⁴

Zur Berechnung der Modifikation wird die Änderung des Gradienten der Lagrangefunktion [258, Gl. (18.13)]

$$\mathbf{y}_k = (\nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}_{k+1}, \boldsymbol{\lambda}_{g,k+1}, \boldsymbol{\lambda}_{u,k+1}) - \nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\lambda}_{g,k+1}, \boldsymbol{\lambda}_{u,k+1}))^\top \quad (6.20)$$

benötigt. Damit wird der Wert

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_k &= \theta_k \mathbf{y}_k + (1 - \theta_k) \mathbf{W}_k \mathbf{d}_k \\ \text{mit } \theta_k &= \begin{cases} 1 & \text{für } \mathbf{d}_k^\top \mathbf{y}_k \geq 0,2 \mathbf{d}_k^\top \mathbf{W}_k \mathbf{d}_k, \\ \frac{0,8 \mathbf{d}_k^\top \mathbf{W}_k \mathbf{d}_k}{\mathbf{d}_k^\top \mathbf{W}_k \mathbf{d}_k - \mathbf{d}_k^\top \mathbf{y}_k} & \text{für } \mathbf{d}_k^\top \mathbf{y}_k < 0,2 \mathbf{d}_k^\top \mathbf{W}_k \mathbf{d}_k \end{cases} \end{aligned} \quad (6.21)$$

definiert, mit dem sich die Vorschrift [258, Gl. (18.16)]

$$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k - \frac{\mathbf{W}_k \mathbf{d}_k \mathbf{d}_k^\top \mathbf{W}_k}{\mathbf{d}_k^\top \mathbf{W}_k \mathbf{d}_k} + \frac{\mathbf{r}_k \mathbf{r}_k^\top}{\mathbf{d}_k^\top \mathbf{r}_k} \quad (6.22)$$

ergibt. Diese Modifikation resultiert immer in einer positiv definiten Matrix \mathbf{W}_{k+1} , wenn \mathbf{W}_k positiv definit ist. Zur Initialisierung der Matrix \mathbf{W}_1 wird in der vorliegenden

¹⁴ „[...] die BFGS-Formel, die derzeit als die effektivste aller Quasi-Newton-Aktualisierungsformeln angesehen wird.“ (Übersetzung des Verfassers)

Arbeit eine positiv definite Schätzung der tatsächlichen Hesse-Matrix verwendet, die aus

$$\nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\lambda}_{g,1}, \boldsymbol{\lambda}_{u,1}) = \nabla^2 f(\mathbf{x}_1) + \boldsymbol{\lambda}_{g,1} \nabla^2 \mathbf{c}_g(\mathbf{x}_1) + \boldsymbol{\lambda}_{u,1} \nabla^2 \mathbf{c}_u(\mathbf{x}_1) \quad (6.23)$$

berechnet wird. Die zweiten Ableitungen werden mittels der CSD-Methode aus den Gradienten ermittelt, womit eine Näherung im Rahmen der Maschinengenauigkeit erreicht wird. Um sicherzustellen, dass \mathbf{W}_1 positiv definit ist, werden die Eigenwerte $\tilde{\lambda}_i$ und die zugehörigen Eigenvektoren $\tilde{\mathbf{v}}_i$ von $\nabla^2 \mathcal{L}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\lambda}_{g,1}, \boldsymbol{\lambda}_{u,1})$ bestimmt. Für die Initialisierung der Matrix \mathbf{W}_1 werden alle Eigenwerte auf

$$\tilde{\lambda}_i = \max(\tilde{\lambda}_i, \sqrt{\varepsilon} \tilde{\lambda}_{\max})$$

gesetzt, wobei ε die Maschinengenauigkeit und $\tilde{\lambda}_{\max}$ der größte Eigenwert sind. Mit der so modifizierten Näherung für die tatsächliche Hesse-Matrix $\nabla^2 \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\lambda}_{g,1}, \boldsymbol{\lambda}_{u,1})$ ist die Initialisierung

$$\mathbf{W}_1 = \nabla^2 \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}_1, \boldsymbol{\lambda}_{g,1}, \boldsymbol{\lambda}_{u,1}) . \quad (6.24)$$

Um die Leistung des Algorithmus mit anderen Verfahren vergleichen zu können, die keine Initialisierung von \mathbf{W}_1 zulassen, wird alternativ der erste Schritt mit einer Einheitsmatrix $\mathbf{W}_1 = \mathbf{I}$ durchgeführt.¹⁵ Nach dem ersten Schritt wird dann nach [258, Gl. (6.20) und (6.19)] die Matrix

$$\mathbf{W}_2 = \frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1^\top}{\mathbf{d}_1^\top \mathbf{r}_1} \mathbf{I} - \frac{\mathbf{W}_1 \mathbf{d}_1^\top \mathbf{d}_1^\top \mathbf{W}_1}{\mathbf{d}_1^\top \mathbf{W}_1 \mathbf{d}_1} + \frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1^\top}{\mathbf{d}_1^\top \mathbf{r}_1} \quad (6.25)$$

verwendet. Diese ist jedoch weniger problemspezifisch und eine schlechtere Näherung als Gl. (6.24), was sich insbesondere bei der Verwendung des SQP-Verfahrens als Teil der numerischen Fortsetzungsmethode in Kapitel 7 negativ auswirkt.

Zur Berechnung von Gl. (6.20) werden Werte für die Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}_{g,k+1}$ und $\boldsymbol{\lambda}_{u,k+1}$ benötigt, die entscheidenden Einfluss auf die Konvergenz des Verfahrens haben. Bei einer schlechten Schätzung für die Multiplikatoren wird eine schlechte Modifikation für \mathbf{W}_{k+1} berechnet, was dazu führt, dass diese degeneriert und das SQP-Verfahren immer schlechtere Richtungen \mathbf{d}_k für das Liniensuchverfahren berechnet. Eine gängige Möglichkeit zur Schätzung der Multiplikatoren sind die sog. Kleinsten-Quadrate-

¹⁵ Bei Problemen ohne Nebenbedingungen entspricht der erste Schritt damit dem Verfahren des steilsten Abstiegs mit einmal dem Gradienten als Schrittlänge.

Multiplikatoren¹⁶. Zu deren Berechnung werden die Gradienten aller aktiven Nebenbedingungen

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{c}_{g,k+1} &= \nabla \mathbf{c}_g(\mathbf{x}_{k+1}), \\ \nabla \mathbf{c}_{\mathcal{A},k+1} &= \{\nabla c_{u,i}(\mathbf{x}_{k+1}) \mid i \in \mathcal{A}(\mathbf{x}_{k+1})\}\end{aligned}$$

benötigt, mit denen sich die zugehörigen Kleinsten-Quadrate-Multiplikatoren

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda}_{g,k+1} \\ \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A},k+1} \end{bmatrix} = - \left(\begin{bmatrix} \nabla \mathbf{c}_{g,k+1} \\ \nabla \mathbf{c}_{\mathcal{A},k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla \mathbf{c}_{g,k+1} \\ \nabla \mathbf{c}_{\mathcal{A},k+1} \end{bmatrix}^\top \right)^{-1} \begin{bmatrix} \nabla \mathbf{c}_{g,k+1} \\ \nabla \mathbf{c}_{\mathcal{A},k+1} \end{bmatrix} \nabla f(\mathbf{x}_k)^\top \quad (6.26)$$

ergeben, vgl. [258, Gl. (18.21)]. Die Bezeichnung als *Kleinsten-Quadrate-Multiplikatoren* kommt daher, dass diese die Lösung des Minimierungsproblems

$$\min_{\boldsymbol{\lambda}_g, \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}}} \|\nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}_{k+1}, \boldsymbol{\lambda}_g, \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}})^\top\|_2^2 = \|\nabla f(\mathbf{x}_{k+1})^\top + \nabla \mathbf{c}_{g,k+1}^\top \boldsymbol{\lambda}_g + \nabla \mathbf{c}_{\mathcal{A},k+1}^\top \boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}}\|_2^2 \quad (6.27)$$

darstellen, was gerade der Optimalitätsbedingung an einem KKT-Punkt entspricht, wenn nur die aktiven Nebenbedingungen betrachtet werden. Durch $\boldsymbol{\lambda}_g$ und $\boldsymbol{\lambda}_{\mathcal{A}}$ wird also eine Schätzung für die Multiplikatoren berechnet, mit der die Optimalitätsbedingung an jedem Iterationspunkt möglichst gut erfüllt wird. Damit ist die Berechnung eines Iterationsschritts vollständig eingeführt. Der gesamte SQP-Algorithmus, dessen Leistungsfähigkeit in Kapitel 8 untersucht wird, wird im nächsten Abschnitt vorgestellt.

6.2.4 SQP-Algorithmus

Die in den vorigen Abschnitten beschriebenen Schritte des SQP-Verfahrens werden hier zu einem Gesamtalgorithmus zusammengestellt, der eine Erweiterung von [48, Algorithmus I] ist. Zur Lösung der QP-Teilprobleme wird die *Matlab*-Subroutine `qpsub` verwendet. Dabei handelt es sich um eine Aktive-Mengen-Methode, die in der Lage ist auch semi-definite Probleme wie Gl. (6.14e) zu lösen¹⁷ und die eine Initialisierung der aktiven Menge erlaubt. Damit ist ein Warmstart bei der Lösung des jeweiligen QP-Teilproblems anhand der jeweils verletzten Nebenbedingungen möglich, was zu einer deutlichen Reduktion der benötigten Rechenzeiten führt. Der SQP-Algorithmus ist auf der folgenden Seite dargestellt, die verwendeten Parameter sind in Tabelle 6.2 auf S. 146 angegeben.

¹⁶ Englisch: least-squares multipliers.

¹⁷ Viele an sich effizientere Algorithmen zur Lösung quadratischer Programme eignen sich nur für streng konvexe Probleme, z. B. [107].

Algorithmus 1: SQP-Liniensuchverfahren mit l_1 -Gütefunktion

Startwerte: $\mathbf{x}_1, \mathbf{W}_1, \mu_1 > 0, \rho > 1, \epsilon_1 \in (0, 1], \epsilon_2 \in (0, \epsilon_1), \eta \in (0, 1), \tau \in (0, 1), \sigma \in (0, 1), 0 < \Delta_{\min} \leq \Delta_1 \leq \Delta_{\max}, \text{ToI0pt} > 0, \text{ToICon} > 0, \text{ToIStep} > 0, \text{MaxFun} > 0, \text{MaxIter} > 0, \text{MaxTime} > 0$ und $\text{ObjLimit} \in \mathbb{R}$.

Für $k = 1, 2, \dots$

1. Wenn $k = 1$, werte $f(\mathbf{x}_1), \mathbf{c}_g(\mathbf{x}_1), \mathbf{c}_u(\mathbf{x}_1), \nabla f(\mathbf{x}_1), \nabla \mathbf{c}_g(\mathbf{x}_1)$ und $\nabla \mathbf{c}_u(\mathbf{x}_1)$ aus und berechne die Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}_{g,1}$ und $\boldsymbol{\lambda}_{u,1}$ nach Gl. (6.26).
2. Wenn $|c_{g,i}(\mathbf{x}_k)| \leq \text{ToICon}, \forall i \in \mathcal{G}, \max(0, c_{u,i}(\mathbf{x}_k)) \leq \text{ToICon}, \forall i \in \mathcal{U}$ und $\|\nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\lambda}_{g,k}, \boldsymbol{\lambda}_{u,k})\|_\infty \leq \text{ToI0pt}$, STOP: \mathbf{x}_k ist ein KKT-Punkt von Gl. (6.5).
3. Berechne die Suchrichtung \mathbf{d}_k und die Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}_{g,k}, \boldsymbol{\lambda}_{u,k}$ aus Gl. (6.7).
Wenn das QP-Teilproblem eine zulässige Lösung besitzt, und $\|\mathbf{d}_k\|_\infty \leq \text{ToIStep}$, STOP: die Schrittweite ist zu klein; potentieller KKT-Punkt von Gl. (6.5).
Wenn das QP-Teilproblem eine zulässige Lösung besitzt, und $\|\mathbf{d}_k\|_\infty > \text{ToIStep}$, setze $\boldsymbol{\mu}_{g,k}$ und $\boldsymbol{\mu}_{u,k}$ nach Gl. (6.9) und gehe zu Schritt 8.
4. Bestimme μ_k nach Gl. (6.10).
Vergrößere den Strafparameter auf $\mu_k = \rho\mu_k$, da das QP-Teilproblem keine zulässige Lösung besitzt. Setze $\mu_{g,k,i}, \mu_{u,k,i} = \mu_k$ für alle $i \in \mathcal{G}, \mathcal{U}$.
Berechne die Suchrichtung \mathbf{d}_k aus Gl. (6.13d).
5. Löse das lineare Programm nach Gl. (6.14) zur Bestimmung von \mathbf{d}_k^{LP} .
Wenn $0 < m_k(\mathbf{0}) = m_k(\mathbf{d}_k^{\text{LP}})$, STOP: \mathbf{x}_k ist ein unzulässiger stationärer Punkt von Gl. (6.5).
6. Wenn nicht $m_k(\mathbf{0}) - m_k(\mathbf{d}_k, \mu_k) \geq \epsilon_1(m_k(\mathbf{0}) - m_k(\mathbf{d}_k^{\text{LP}}))$, erhöhe den Strafparameter $\mu_k = \rho\mu_k$ und bestimme \mathbf{d}_k aus Gl. (6.13d), bis diese Ungleichung erfüllt ist.
7. Wenn nicht $q_k(\mathbf{0}, \mu_k) - q_k(\mathbf{d}_k, \mu_k) \geq \epsilon_2\mu_k(m_k(\mathbf{0}) - m_k(\mathbf{d}_k^{\text{LP}}))$, erhöhe den Strafparameter $\mu_k = \rho\mu_k$ und bestimme \mathbf{d}_k aus Gl. (6.13d), bis diese Ungleichung erfüllt ist.
8. Setze mit Gl. (6.8) $q_k^{\text{red}} = q_k(\mathbf{0}, \boldsymbol{\mu}_{g,k}, \boldsymbol{\mu}_{u,k}) - q_k(\mathbf{d}_k, \boldsymbol{\mu}_{g,k}, \boldsymbol{\mu}_{u,k})$ und mit Gl. (6.6) $\phi_{1,k}(\mathbf{x}) = \phi_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}_{g,k}, \boldsymbol{\mu}_{u,k})$.
Setze $\alpha_k = 1, \beta_k = 1$ und $\mathbf{d}_k^{\text{SOC}} = \mathbf{0}$.
9. Wenn der Punkt $(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k)$ keine reelle Lösung liefert, bestimme $0 < \beta_k \leq 1$ als erstes Element der Folge $\{\tau, \tau^2, \tau^3, \dots\}$, für das der Punkt $(\mathbf{x}_k + \beta_k \mathbf{d}_k)$ eine reelle Lösung liefert und setze $\mathbf{d}_k = \beta_k \mathbf{d}_k$.
10. Wenn nach Gl. (6.15) die Bedingung $\phi_{1,k}(\mathbf{x}_k) - \phi_{1,k}(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k) \geq \eta\beta_k q_k^{\text{red}}$ erfüllt ist, gehe zu Schritt 13.

-
11. Wenn das QP-Teilproblem eine zulässige Lösung besitzt, bestimme $\mathbf{d}_k^{\text{SOC}}$ aus Gl. (6.18).
Wenn der Punkt $(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k + \mathbf{d}_k^{\text{SOC}})$ keine reelle Lösung liefert, setze $\mathbf{d}_k^{\text{SOC}} = \mathbf{0}$.
 12. Bestimme $0 < \alpha_k \leq 1$ als erstes Element der Folge $\{1, \tau, \tau^2, \dots\}$, für das nach Gl. (6.19) die Bedingung $\phi_{1,k}(\mathbf{x}_k) - \phi_{1,k}(\mathbf{x}_k + \alpha_k \mathbf{d}_k + \alpha_k^2 \mathbf{d}_k^{\text{SOC}}) \geq \eta \alpha_k \beta_k q_k^{\text{red}}$ erfüllt ist. (parallelisiert)
 13. Setze $\mathbf{d}_k = \alpha_k \mathbf{d}_k + \alpha_k^2 \mathbf{d}_k^{\text{SOC}}$ und damit $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k$.
 14. Wenn $k = 2$, setze $\Delta_{\min} = \Delta_{\min} \|\mathbf{d}_k\|_{\infty}$ und $\Delta_{\max} = \Delta_{\max} \|\mathbf{d}_k\|_{\infty}$.
 15. Wenn $\phi_{1,k}(\mathbf{x}_k) - \phi_{1,k}(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k) < \frac{1}{4} q_k^{\text{red}}$, setze den Vertrauensbereich auf $\Delta_{k+1} = \min(\Delta_{\max}, \max(\Delta_{\min}, \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_k\|_2))$ und gehe zu Schritt 16.
Wenn $\phi_{1,k}(\mathbf{x}_k) - \phi_{1,k}(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_k) > \frac{3}{4} q_k^{\text{red}}$, setze den Vertrauensbereich auf $\Delta_{k+1} = \min(\Delta_{\max}, \max(\Delta_{\min}, 2 \|\mathbf{x}_k\|_2))$ und gehe zu Schritt 16.
Setze den Vertrauensbereich auf $\Delta_{k+1} = \min(\Delta_{\max}, \max(\Delta_{\min}, \|\mathbf{x}_k\|_2))$.
 16. Werte $f(\mathbf{x}_{k+1})$, $\mathbf{c}_g(\mathbf{x}_{k+1})$, $\mathbf{c}_u(\mathbf{x}_{k+1})$, $\nabla f(\mathbf{x}_{k+1})$, $\nabla \mathbf{c}_g(\mathbf{x}_{k+1})$ und $\nabla \mathbf{c}_u(\mathbf{x}_{k+1})$ aus und berechne die Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}_{g,k+1}$ und $\boldsymbol{\lambda}_{u,k+1}$ nach Gl. (6.27).
 17. Wenn $k = 1$ und $\mathbf{W}_1 = \mathbf{I}$, berechne \mathbf{W}_2 nach Gl. (6.25).
Andernfalls bestimme \mathbf{W}_{k+1} aus Gl. (6.22).
 18. Wenn die Anzahl der Funktionsauswertungen größer ist als **MaxFun**, STOP: Abbruch des SQP-Verfahrens.
Wenn $k > \mathbf{MaxIter}$, STOP: Abbruch des SQP-Verfahrens.
Wenn die Rechenzeit seit Beginn des Iterationsvorgangs größer ist als **MaxTime**, STOP: Abbruch des SQP-Verfahrens.
Wenn der Wert des Zielfunktional $f(\mathbf{x}_k) < \mathbf{ObjLimit}$, STOP: Abbruch des SQP-Verfahrens, da Zielfunktional vmtl. nicht nach unten beschränkt.
-

Tabelle 6.2: Parameter des SQP-Algorithmus (Algorithmus 1).

Parameter		Standardwert
μ_1	Initialisierung der Strafparameter	1
ρ	Vergrößerungsfaktor für den Strafparameter	2
ϵ_1	Faktor in Schritt 6	0,1
ϵ_2	Faktor in Schritt 7	0,1
η	Faktor in Gütefunktion	10^{-4}
τ	Verringerungsfaktor für Rücksetzverfahren	0,7
σ	Relatives Minimum der Strafparameter	10^{-3}
Δ_1	Initialisierung des Vertrauensbereichs	1
Δ_{\min}	Minimum des Vertrauensbereichs	10^{-3}
Δ_{\max}	Maximum des Vertrauensbereichs	10^3
TolOpt	Maximal zulässiger Gradient der Lagrangefunktion (mittels ∞ -Norm)	10^{-5}
TolCon	Maximal zulässige Verletzung der Nebenbedingungen (mittels ∞ -Norm)	10^{-10}
TolStep	Mindestschrittlänge (mittels 2-Norm)	10^{-14}
MaxFun	Maximale Anzahl an Funktionsauswertungen	10^4
MaxIter	Maximale Anzahl an Iterationsschritten	$2 \cdot 10^3$
MaxTime	Maximale Laufzeit	∞
ObjLimit	Untergrenze für Wert des Zielfunktional	10^{-20}

7 Numerische Fortsetzung optimaler Lösungen

Um den Einfluss der Fußgeometrie auf die Energieeffizienz beim Gehen zu untersuchen, werden Parameterstudien durchgeführt. Bei diesen werden die Fortbewegungsgeschwindigkeit und/oder die Modellparameter variiert und die Lösung des Optimierungsproblems aus dem vorigen Kapitel verfolgt. Dazu wird eine numerische Fortsetzungsmethode verwendet, die im Folgenden motiviert und vorgestellt wird. Zunächst wird in Abschnitt 7.1 auf die Theorie von Prädiktor-Korrektor-Verfahren und die Besonderheiten bei der vorliegenden Anwendung für die Lösung des Optimierungsproblems eingegangen. Anschließend wird in 7.2 das konkrete Verfahren vorgestellt, das im Folgenden verwendet wird.

7.1 Numerische Fortsetzung nichtglatter Probleme

Wie in Abschnitt 1.2.4 beschrieben, gibt es zwei grundlegende Verfahren zur numerischen Fortsetzung von Lösungen nichtlinearer Probleme. Da die Prädiktor-Korrektor-Verfahren im Allgemeinen eine höhere Leistungsfähigkeit aufweisen – also ein geringerer Rechenaufwand zur Fortsetzung der Lösung erforderlich ist –, wird in der vorliegenden Arbeit auf diese Variante gesetzt. Jedes Prädiktor-Korrektor-Verfahren hat drei Bestandteile: ein Prädiktor-Verfahren, ein Korrektor-Verfahren und eine Schrittweitensteuerung. Bevor auf diese einzeln eingegangen wird, muss zunächst das Problem genauer betrachtet werden.

Lösungen des NLP sind Punkte, die die KKT-Bedingungen erfüllen. Da an diesen Punkten die aktive Menge bekannt ist, können die aktiven Ungleichheitsnebenbedingungen – unter der Voraussetzung strenger Komplementarität – in einer Umgebung um die Lösung als Gleichheitsnebenbedingungen aufgefasst werden, während die inaktiven Nebenbedingungen dort keinen Einfluss haben. KKT-Punkte, an denen die Ungleichheitsnebenbedingungen nicht streng komplementär sind, werden im Fol-

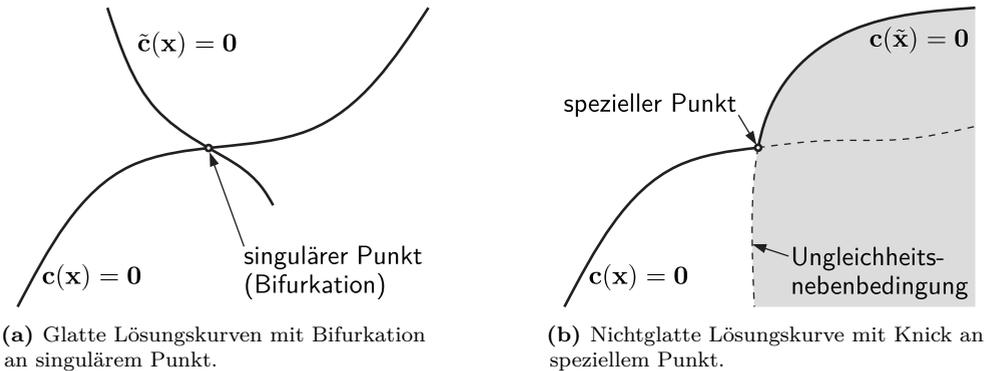


Abbildung 7.1: Vergleich von glatten und nichtglatten Problemen. (a) Glattes Problem mit zwei glatten Lösungskurven $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ und $\tilde{\mathbf{c}}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ und Bifurkation (Lösungsverzweigung) an einem singulären Punkt. (b) Nichtglattes Problem mit Ungleichheitsnebenbedingung (unzulässiger Bereich in grau) und Knick an speziellem Punkt. Die Dimension der Nullstelle ändert sich am speziellen Punkt: $\text{Dim}(\tilde{\mathbf{x}}) > \text{Dim}(\mathbf{x})$.

genden als *spezielle* KKT-Punkte¹ bezeichnet. An nicht-speziellen Punkten ergibt sich – unter Nichtbeachtung der inaktiven Ungleichheitsnebenbedingungen – für die Nullstellen der zugehörigen Lagrangefunktion ein Standardproblem für numerische Fortsetzungsmethoden. Aus der Jacobi-Matrix kann ermittelt werden, ob der jeweils betrachtete Punkt regulär oder singulär ist, also ob eine eindeutige Lösungskurve² $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ existiert, oder eine Bifurkation auftritt, vgl. Abb. 7.1a.

An speziellen Punkten findet ein Wechsel der Aktivität einer Nebenbedingung statt,³ womit sich die Dimension von \mathbf{x} verändert: durch die abschnittsweise Behandlung der aktiven Ungleichheitsnebenbedingungen als Gleichheitsnebenbedingung muss eine weitere duale Variable – der zugehörige Multiplikator – hinzugefügt werden, und die Nullstelle dieser Gleichung muss beim Bestimmen der Lösungskurve mitberücksichtigt werden. Bei der numerischen Fortsetzung der Lösungskurve müssen spezielle Punkte also gesondert behandelt werden, um die Dimension des Problems entsprechend anzu-

¹ Der Begriff *speziell* wird in Abgrenzung zu den Bezeichnungen regulär bzw. singulär verwendet. An regulären KKT-Punkten ist die LICQ erfüllt, womit die Lösung für die Multiplikatoren eindeutig ist. Andererseits werden im Kontext der numerischen Fortsetzungsmethoden Punkte auf Lösungskurven als regulär bezeichnet, an denen die Jacobi-Matrix vollen Rang besitzt, die Lösungsmannigfaltigkeit also eine eindimensionale Lösungskurve ist. Diese beiden Bedingungen sind an den speziellen KKT-Punkten (in der Regel) nicht verletzt.

² In diesem Abschnitt wird zur Diskussion der numerischen Fortsetzungsmethode die Konvention aus Abschnitt 1.2.4 verwendet, wobei die Variable \mathbf{x} sowohl die primalen, als auch die dualen Variablen des Optimierungsproblems beinhaltet.

³ Im Folgenden wird lediglich der Fall diskutiert, dass nicht mehr als eine Nebenbedingung gleichzeitig ihre Aktivität wechselt, der spezielle Punkt regulär ist, und die Lösungskurve die Ungleichungsmannigfaltigkeit nicht nur in einem Punkt berührt, sondern tatsächlich je ein Kurvenabschnitt endlicher Länge mit aktiver und inaktiver Nebenbedingung um den singulären Punkt existiert.

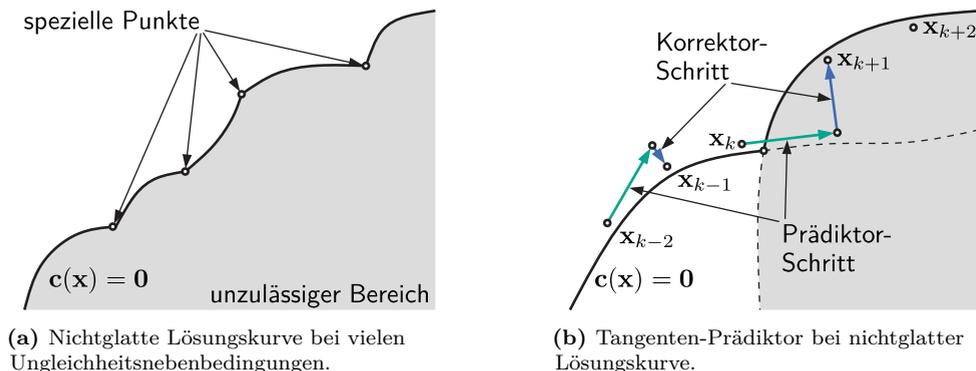


Abbildung 7.2: Lösungskurven für nichtglatte Probleme. (a) Bei Problemen mit sehr vielen Ungleichheitsnebenbedingungen gibt es viele spezielle Punkte auf der Lösungskurve, deren Bestimmung damit sehr zeitaufwendig ist. (b) Bei der Extrapolation im Prädiktor-Schritt (grün) werden keine Informationen zu bisher inaktiven Ungleichheitsnebenbedingungen berücksichtigt. Damit ergibt sich in der Nähe spezieller Punkte eine große Abweichung von der tatsächlichen Lösungskurve und ein hoher Aufwand für den Korrektor-Schritt (blau).

passen. Für Probleme mit einer geringen Anzahl an Ungleichheitsnebenbedingungen wird in der Literatur vorgeschlagen [77, 194, 335], die speziellen Punkte bei der Lösungsverfolgung exakt zu bestimmen und die Kurve unter Berücksichtigung der neuen Nebenbedingung fortzusetzen. Dieses Vorgehen führt jedoch bei einer großen Anzahl an Ungleichheitsnebenbedingungen dazu, dass von einem speziellen Punkt bis zum nächsten nur ein sehr kurzer Fortschritt erzielt wird, wie in Abb. 7.2a dargestellt. Ein Großteil der Rechenzeit wird also für die Bestimmung der speziellen Punkte aufgewendet, was das Verfahren sehr langsam und ineffizient macht.

Werden die speziellen Punkte nicht exakt bestimmt, so ergibt sich das in Abb. 7.2b dargestellte Problem, dass durch den Prädiktor-Schritt eine sehr schlechte Schätzung für den nächsten Punkt bestimmt wird. Da alle in der Literatur vorgeschlagenen Prädiktor-Verfahren auf einer Extrapolation basieren – im einfachsten Fall anhand eines Tangenten-Prädiktors –, können Aktivitätswechsel der Ungleichheitsnebenbedingungen nicht berücksichtigt werden. Diese Verfahren erfordern für eine robuste Anwendung also eine exakte Bestimmung der speziellen Punkte.

In der vorliegenden Arbeit soll die Lösung des NLP mit dem Zielfunktional nach Gl. (5.101) oder (5.102) und den Nebenbedingungen nach Gl. (5.103) und (5.104) fortgesetzt werden. Dieses Problem hat – abhängig von der Anzahl P der Diskretisierungspunkte nach Gl. (5.93) – $10P+3$ Ungleichheitsnebenbedingungen. Dabei ist in der vorliegenden Arbeit nach Tabelle 5.1 (S. 127) $P = 200$. Von diesen sind zwar nur wenige gleichzeitig aktiv, die aktive Menge verändert sich jedoch ständig beim Verfolgen der Lösungskurve. Ist beispielsweise für eine bestimmte Lösung die Nebenbedingung Gl. (5.104e) nur beim Diskretisierungspunkt $i = 100$ aktiv, da das Schwungbein

beim Nach-Vorne-Schwingen hier den geringsten Abstand zum Boden hat, so führt eine kleine Veränderung der Parameter $\tilde{\alpha}$ bei einem benachbarten Punkt auf der Lösungskurve dazu, dass dies beim Diskretisierungspunkt $i = 99$ oder $i = 101$ der Fall ist. Die Anzahl der aktiven Nebenbedingungen ist also unverändert, nicht jedoch die aktive Menge. Das Ziel bei der numerischen Fortsetzung der optimalen Lösung durch ein Prädiktor-Korrektor-Verfahren ist also die Entwicklung einer Methode, die trotz dieser Eigenschaften der Lösungskurve in der Lage ist, einen möglichst großen Prädiktor-Schritt zu wählen, ohne die speziellen Punkte exakt zu berechnen. Als Korrektor-Verfahren wird der SQP-Algorithmus aus Abschnitt 6.2.4 verwendet, der ja gerade zur iterativen Lösung dieses nichtglatten Problems entwickelt wurde. Im nächsten Abschnitt wird ein Prädiktor auf Basis eines QP-Problems vorgeschlagen, der die Linearisierung aller Nebenbedingungen berücksichtigt. Dieser wird mit einer Schrittweitensteuerung auf Basis eines Vertrauensbereichs kombiniert, wobei anhand der Konvergenz des Korrektor-Verfahrens entschieden wird, ob die Schrittlänge akzeptabel ist.

7.2 QPSQP-Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Das Prädiktor-Korrektor-Verfahren zur Verfolgung nichtglatter Lösungskurven ohne die exakte Bestimmung der speziellen Punkte basiert auf einem QP-Prädiktor-Verfahren in Kombination mit einem SQP-Korrektor-Verfahren, weshalb es im Folgenden als *QPSQP-Prädiktor-Korrektor-Verfahren* oder kurz *QPSQP-Verfahren* bezeichnet wird. Zur Verfolgung von Lösungen des NLP

$$\min_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, p) \quad \text{u. d. N.} \quad \mathbf{c}_g(\mathbf{x}, p) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}_u(\mathbf{x}, p) \leq \mathbf{0} \quad (7.1)$$

in Abhängigkeit von dem skalaren Parameter p muss im Prädiktor-Schritt eine geeignete Änderung Δp bestimmt werden. Diese soll einerseits möglichst groß sein, um einen schnellen Fortschritt zu erzielen. Andererseits führt eine zu große Änderung dazu, dass das Korrektor-Verfahren sehr viele Schritte zur Bestimmung des nächsten Punkts benötigt. Darüber hinaus besteht im Falle von mehreren koexistenten Lösungen, die jeweils einem lokalen Optimum von Gl. (7.1) entsprechen, die Gefahr, dass das Verfahren zwischen verschiedenen Lösungskurven hin und her springt. Zur Lösung dieser Fragestellung kann jedoch ein Großteil der Verfahren zur Schrittweitensteuerung von Prädiktor-Korrektor-Verfahren nicht verwendet werden, da diese auf der Annahme glatter Lösungskurven basieren, vgl. Abschnitt 1.2.4. Lediglich ein Ansatz kann direkt auf das vorliegende Problem übertragen werden: eine Schrittweitensteuerung auf Basis der Konvergenz des Korrektor-Verfahrens. Für das in Kapitel 6 vorgestellte SQP-Verfahren wird nach [258, Satz 18.6, S. 559] angenommen, dass eine lokal

superlineare Konvergenz vorliegt. Durch eine Schätzung der Konvergenzrate des Korrektor-Verfahrens für einen bestimmten Prädiktor-Schritt kann also entschieden werden, ob der Schritt Δp zu groß ist oder nicht.

Zur Steuerung der Schrittlänge Δp wird ein Vertrauensbereichverfahren verwendet, wobei der Vertrauensbereich Δ durch Δ_{\min} und Δ_{\max} beschränkt wird. Dabei verhindert Δ_{\min} , dass die Schritte zu kurz werden und das Verfahren keinen Fortschritt mehr liefert. Andererseits werden durch Δ_{\max} zu große Prädiktor-Schritte vermieden, um der Lösungskurve zuverlässig zu folgen und ein Springen zwischen verschiedenen Lösungen nach Möglichkeit zu vermeiden. Bevor auf den Unterschied zwischen der Schrittlänge Δp und dem Vertrauensbereich Δ eingegangen wird, wird zunächst das Akzeptanz-Kriterium des Vertrauensbereich-Verfahrens eingeführt.

Die zwei in der Literatur verbreiteten Methoden zur Schrittweitensteuerung für glatte Probleme auf Basis der Konvergenz des Korrektor-Verfahrens gehen auf [113] bzw. [161] zurück.⁴ Das Ziel dieser Methoden ist, den Prädiktor-Schritt gerade so groß zu wählen, dass beim Korrektor-Verfahren eine zuvor festgelegte Anzahl an Iterationsschritten ausreicht, um den nächsten Lösungspunkt zu bestimmen. Allerdings basieren beide Methoden auf einer asymptotischen Fehlerabschätzung, die nur für den Fall glatter Probleme gültig ist. Nichtsdestotrotz hat sich bei numerischen Experimenten bei der Verfolgung der nichtglatten Lösung durch das QPSQP-Verfahren gezeigt, dass

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{d}_2\|_2}{\|\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2\|_2} \quad (7.2)$$

in einem gewissen Bereich eine Abschätzung für die Konvergenzrate κ liefert, was als heuristische Modifikation von [113, Gl. (3.5)]⁵ aufgefasst werden kann. Dabei sind \mathbf{d}_1 und \mathbf{d}_2 die ersten beiden Schritte des Korrektor-Verfahrens. Das Vertrauensbereich-Verfahren zur Schrittweitensteuerung besteht also in der Auswertung der ersten beiden Korrektor-Schritte, welche die Bedingung $\kappa < 1$ erfüllen müssen. Diese ergeben sich jeweils aus der Lösung eines quadratischen Programms, weshalb diese Kombination im Folgenden als *QP-Prädiktor* bezeichnet wird.

Als weitere Bedingung für die Akzeptanz des Prädiktor-Schritts wird gefordert, dass die beiden Schritte \mathbf{d}_1 und \mathbf{d}_2 die Bedingung nach Gl. (6.19) erfüllen, ohne dass eine Verkürzung durch das Rücksetzverfahren erforderlich ist ($\alpha_k = 1$, $\beta_k = 1$ für $k = \{1, 2\}$). Ohne diese Einschränkung kann κ nach Gl. (7.2) beliebig klein werden, wenn \mathbf{d}_2 durch das Rücksetzverfahren stark verkürzt wird. Eine weitere Motivation für diese Forderung ist die Annahme, dass dem SQP-Verfahren bei einer Initialisierung der Hesse-Matrix nach Gl. (6.24) in der Nähe der Lösung ein gutes quadratisches Modell zugrunde liegt, und deshalb keine Anwendung des Rücksetzverfahrens zur

⁴ Vgl. auch [12, Abschnitt 6.1 und 6.2], [13, Abschnitt 6 und 7] und [231, S. 250ff].

⁵ Vgl. [231, S. 251].

Verkürzung der Schritte notwendig sein sollte. Im Falle eines zu großen Schritts Δp auf Basis des Vertrauensbereich-Verfahrens ist diese Annahme nicht erfüllt, weshalb eine Verkleinerung des Vertrauensbereichs vorgenommen und der Prädiktor-Schritt damit wiederholt wird. Zum Erreichen eines möglichst großen Fortschritts – also eines möglichst großen Vertrauensbereichs – unter diesen Voraussetzungen, wird ein gutes quadratisches Modell bei der Berechnung der beiden Schritte des QP-Prädiktors benötigt. Die Hesse-Matrix wird dazu für beide Schritte nach Gl. (6.24) initialisiert. Falls nur der erste Schritt von der Gütefunktion akzeptiert wird, der zweite jedoch nicht, wird ein erneuter Versuch unternommen, den zweiten Schritt auf Basis einer BFGS-Modifikation der ersten Hesse-Matrix nach Gl. (6.22) zu berechnen. Dies ist mit vergleichsweise wenig Rechenaufwand möglich und führt in einigen Fällen zu einem erfolgreichen Prädiktor-Schritt, wenn der erste Versuch scheitert.

Als weitere Besonderheit bei der Lösungsverfolgung in der vorliegenden Arbeit wird nicht nur ein Endwert des Parameters gesucht, sondern mehrere Parameterwerte in einem vorgegebenen Intervall. Dies ist insbesondere beim Bestimmen der optimalen Bewegung für verschiedene Durchschnittsgeschwindigkeiten von Interesse, wenn mehrere Modelle verglichen werden sollen. Ein solcher Vergleich ist nur sinnvoll, wenn bei allen Modellen eine Lösung für dieselben Durchschnittsgeschwindigkeiten bestimmt wird, was aufgrund der Schrittweitensteuerung des QP-Prädiktors in der Regel nicht der Fall ist, wenn nur ein Endwert vorgegeben wird. Bei der Studie zum Einfluss der Fußgeometrie auf die Energieeffizienz beim Gehen in Kapitel 9 und 10 wird der Geschwindigkeitsbereich $\bar{v} = \{0,3 \text{ m/s}, 0,4 \text{ m/s}, \dots, 2,3 \text{ m/s}\}$ betrachtet, wobei alle Durchschnittsgeschwindigkeiten in $0,1 \text{ m/s}$ -Schritten ausgewertet werden. Falls der Vertrauensbereich Δ einen Schritt zulässt, der einen dieser Punkte überspringt, wird durch das QPSQP-Verfahren die Schrittlänge Δp entsprechend verkürzt, um die Lösung an allen vorgegebenen Parameterwerten $\{p_1, \dots, p_Q\}$ zu bestimmen. Der Vertrauensbereich wird dadurch nicht verkleinert, da dies die Leistungsfähigkeit des Verfahrens beeinträchtigen würde.

Die Steuerung des Vertrauensbereichs basiert auf einer einfachen Heuristik: wenn der Prädiktor-Schritt nicht erfolgreich ist, wird der Vertrauensbereich im k -ten Schritt auf $\Delta_k = \tau \Delta_k$ verkürzt, wobei $\tau = 0,8$ gewählt wird. Falls bereits der erste Schritt \mathbf{d}_1 des QP-Prädiktors die Bedingung nach Gl. (6.19) nicht erfüllt, wird der Vertrauensbereich zweimal verkürzt. Zu Beginn jedes Schritts wird der Vertrauensbereich auf $\Delta_k = \tau^{-1} \Delta_{k-1}$ gesetzt, es findet also eine spekulative Vergrößerung des Vertrauensbereichs aus dem vorherigen Schritt statt. Der Vertrauensbereich wird nicht verkleinert, wenn Δp_{k-1} sehr klein ist, um einen der vorgegebenen Parameterwerte auszuwerten.

Im nächsten Kapitel wird die Leistungsfähigkeit des QPSQP-Verfahrens bei der Lösungsverfolgung für optimale Gehbewegungen des Robotermodells untersucht und

diskutiert. Der Algorithmus des QPSQP-Verfahrens, dessen Parameter in Tabelle 7.1 angegeben sind, folgt auf der nächsten Seite.

Tabelle 7.1: Parameter des QPSQP-Algorithmus (Algorithmus 2).

Parameter		Standardwert
η	Faktor in Gütefunktion	10^{-4}
τ	Faktor zur Steuerung des Vertrauens	0,8
Δ_1	Initialisierung des Vertrauensbereichs	$ p_2 - p_1 $
Δ_{\min}	Minimum des Vertrauensbereichs	0,002
Δ_{\max}	Maximum des Vertrauensbereichs	$\max(p_{k+1} - p_k)$

Algorithmus 2: QPSQP-Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Startwerte: $\mathbf{x}_0, p_0, \dots, p_Q, \eta \in (0, 1), \tau \in (0, 1), 0 < \Delta_{\min} \leq \Delta_1 \leq \Delta_{\max}$.

1. Bestimme den ersten Punkt \mathbf{x}_1 der Lösungskurve durch das SQP-Verfahren mit dem Startwert (\mathbf{x}_0, p_0) .

Setze $l = 1$ und $\tilde{p}_1 = p_0$.

Für $k = 1, 2, \dots$

2. Setze $\Delta p_k = \text{sign}(p_l - \tilde{p}_k) \min(\Delta_k, p_l - \tilde{p}_k)$
3. Werte $f(\mathbf{x}_k, \tilde{p}_k + \Delta p_k)$, $\mathbf{c}_g(\mathbf{x}_k, \tilde{p}_k + \Delta p_k)$, $\mathbf{c}_u(\mathbf{x}_k, \tilde{p}_k + \Delta p_k)$, $\nabla f(\mathbf{x}_k, \tilde{p}_k + \Delta p_k)$, $\nabla \mathbf{c}_g(\mathbf{x}_k, \tilde{p}_k + \Delta p_k)$ und $\nabla \mathbf{c}_u(\mathbf{x}_k, \tilde{p}_k + \Delta p_k)$ aus.
Berechne die Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}_g$ und $\boldsymbol{\lambda}_u$ nach Gl. (6.26) und bestimme $\mathbf{W}_1 = \nabla^2 \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}_{k,1}, \boldsymbol{\lambda}_g, \boldsymbol{\lambda}_u)$ nach Gl. (6.24).
4. Berechne die Suchrichtung \mathbf{d}_1 und die Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}_{g,1}$, $\boldsymbol{\lambda}_{u,1}$ aus Gl. (6.7) und setze $\boldsymbol{\mu}_{g,1}$ und $\boldsymbol{\mu}_{u,1}$ nach Gl. (6.9).
Wenn das QP-Teilproblem keine zulässige Lösung besitzt, gehe zu Schritt 18.
Wenn der Punkt $(\mathbf{x}_k + \mathbf{d}_1)$ keine reelle Lösung liefert, gehe zu Schritt 18.
5. Bestimme $\mathbf{d}_1^{\text{SOC}}$ aus Gl. (6.18) und setze $\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_1^{\text{SOC}}$ und damit $\mathbf{x}_{k,1} = \mathbf{x}_k + \mathbf{d}_1$.
Wenn der Punkt $\mathbf{x}_{k,1}$ keine reelle Lösung liefert, gehe zu Schritt 18.
6. Wenn nach Gl. (6.19) die Bedingung $\phi_1(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\mu}_{g,1}, \boldsymbol{\mu}_{u,1}) - \phi_1(\mathbf{x}_{k,1}, \boldsymbol{\mu}_{g,1}, \boldsymbol{\mu}_{u,1}) \geq \eta(q_k(\mathbf{0}, \boldsymbol{\mu}_{g,1}, \boldsymbol{\mu}_{u,1}) - q_k(\mathbf{d}_1, \boldsymbol{\mu}_{g,1}, \boldsymbol{\mu}_{u,1}))$ nicht erfüllt ist, gehe zu Schritt 18.
7. Werte $f(\mathbf{x}_{k,1}, \tilde{p}_k + \Delta p_k)$, $\mathbf{c}_g(\mathbf{x}_{k,1}, \tilde{p}_k + \Delta p_k)$, $\mathbf{c}_u(\mathbf{x}_{k,1}, \tilde{p}_k + \Delta p_k)$, $\nabla f(\mathbf{x}_{k,1}, \tilde{p}_k + \Delta p_k)$, $\nabla \mathbf{c}_g(\mathbf{x}_{k,1}, \tilde{p}_k + \Delta p_k)$ und $\nabla \mathbf{c}_u(\mathbf{x}_{k,1}, \tilde{p}_k + \Delta p_k)$ aus.
Berechne die Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}_g$ und $\boldsymbol{\lambda}_u$ nach Gl. (6.26) und bestimme $\mathbf{W}_2 = \nabla^2 \tilde{\mathcal{L}}(\mathbf{x}_{k,1}, \boldsymbol{\lambda}_g, \boldsymbol{\lambda}_u)$ nach Gl. (6.24).
8. Berechne die Suchrichtung \mathbf{d}_2 und die Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}_{g,2}$, $\boldsymbol{\lambda}_{u,2}$ aus Gl. (6.7) und setze $\boldsymbol{\mu}_{g,2}$ und $\boldsymbol{\mu}_{u,2}$ nach Gl. (6.9).
Wenn das QP-Teilproblem keine zulässige Lösung besitzt, gehe zu Schritt 17.
Wenn der Punkt $(\mathbf{x}_{k,1} + \mathbf{d}_2)$ keine reelle Lösung liefert, gehe zu Schritt 17.
9. Bestimme $\mathbf{d}_2^{\text{SOC}}$ aus Gl. (6.18) und setze $\mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_2^{\text{SOC}}$ und damit $\mathbf{x}_{k,2} = \mathbf{x}_{k,1} + \mathbf{d}_2$.
Wenn der Punkt $\mathbf{x}_{k,2}$ keine reelle Lösung liefert, gehe zu Schritt 17.
10. Wenn nach Gl. (6.19) die Bedingung $\phi_1(\mathbf{x}_{k,1}, \boldsymbol{\mu}_{g,2}, \boldsymbol{\mu}_{u,2}) - \phi_1(\mathbf{x}_{k,2}, \boldsymbol{\mu}_{g,2}, \boldsymbol{\mu}_{u,2}) \geq \eta(q_k(\mathbf{0}, \boldsymbol{\mu}_{g,2}, \boldsymbol{\mu}_{u,2}) - q_k(\mathbf{d}_2, \boldsymbol{\mu}_{g,2}, \boldsymbol{\mu}_{u,2}))$ erfüllt ist, gehe zu Schritt 15.
11. Bestimme $\mathbf{W}_2 = \mathbf{W}_1 - \frac{\mathbf{W}_1 \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1^\top \mathbf{W}_1}{\mathbf{d}_1^\top \mathbf{W}_1 \mathbf{d}_1} + \frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_1^\top}{\mathbf{d}_1^\top \mathbf{r}_1}$ nach Gl. (6.22).

12. Berechne die Suchrichtung \mathbf{d}_2 und die Multiplikatoren $\lambda_{g,2}$, $\lambda_{u,2}$ aus Gl. (6.7) und setze $\boldsymbol{\mu}_{g,2}$ und $\boldsymbol{\mu}_{u,2}$ nach Gl. (6.9).
Wenn das QP-Teilproblem keine zulässige Lösung besitzt, gehe zu Schritt 17.
Wenn der Punkt $(\mathbf{x}_{k,1} + \mathbf{d}_2)$ keine reelle Lösung liefert, gehe zu Schritt 17.
13. Bestimme $\mathbf{d}_2^{\text{SOC}}$ aus Gl. (6.18) und setze $\mathbf{d}_2 = \mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_2^{\text{SOC}}$ und damit $\mathbf{x}_{k,2} = \mathbf{x}_{k,1} + \mathbf{d}_2$.
Wenn der Punkt $\mathbf{x}_{k,2}$ keine reelle Lösung liefert, gehe zu Schritt 17.
14. Wenn nach Gl. (6.19) die Bedingung $\phi_1(\mathbf{x}_{k,1}, \boldsymbol{\mu}_{g,2}, \boldsymbol{\mu}_{u,2}) - \phi_1(\mathbf{x}_{k,2}, \boldsymbol{\mu}_{g,2}, \boldsymbol{\mu}_{u,2}) \geq \eta(q_k(\mathbf{0}, \boldsymbol{\mu}_{g,2}, \boldsymbol{\mu}_{u,2}) - q_k(\mathbf{d}_2, \boldsymbol{\mu}_{g,2}, \boldsymbol{\mu}_{u,2}))$ nicht erfüllt ist, gehe zu Schritt 17.
15. Bestimme $\mathbf{W}_3 = \mathbf{W}_2 - \frac{\mathbf{W}_2 \mathbf{d}_2 \mathbf{d}_2^\top \mathbf{W}_2}{\mathbf{d}_2^\top \mathbf{W}_2 \mathbf{d}_2} + \frac{\mathbf{r}_2 \mathbf{r}_2^\top}{\mathbf{d}_2^\top \mathbf{r}_2}$ nach Gl. (6.22).
16. Beide Schritte erfolgreich: berechne κ nach Gl. (7.2).
Wenn $\kappa < 1$: Prädiktor-Schritt erfolgreich. Setze $\mathbf{x}_{k+1,0} = \mathbf{x}_{k,2}$, $\tilde{p}_{k+1} = \tilde{p}_k + \Delta p_k$ und $\mathbf{W}_{k+1,0} = \mathbf{W}_3$ und $\Delta_{k+1} = \min(\Delta_{\max}, \tau^{-1} \Delta_k)$. Gehe zu Schritt 19.
Wenn $|\Delta p_k| \leq \Delta_{\min}$: Prädiktor-Schritt nicht erfolgreich mit minimaler Schrittlänge. Setze $\mathbf{x}_{k+1,0} = \mathbf{x}_{k,2}$, $\tilde{p}_{k+1} = \tilde{p}_k + \Delta p_k$ und $\mathbf{W}_{k+1,0} = \mathbf{W}_3$. Gehe zu Schritt 19.
Ansonsten: Prädiktor-Schritt nicht erfolgreich. Setze $\Delta_k = \max(\Delta_{\min}, \tau \Delta_k)$ und gehe zu Schritt 2.
17. Nur erster Schritt erfolgreich.
Wenn $|\Delta p_k| \leq \Delta_{\min}$: Prädiktor-Schritt nicht erfolgreich mit minimaler Schrittlänge. Setze $\mathbf{x}_{k+1,0} = \mathbf{x}_{k,1}$, $\tilde{p}_{k+1} = \tilde{p}_k + \Delta p_k$ und $\mathbf{W}_{k+1,0} = \mathbf{W}_2$. Gehe zu Schritt 19.
Ansonsten: setze $\Delta_k = \max(\Delta_{\min}, \tau \Delta_k)$ und gehe zu Schritt 2.
18. Kein Schritt erfolgreich.
Wenn $|\Delta p_k| \leq \Delta_{\min}$: Prädiktor-Schritt nicht erfolgreich mit minimaler Schrittlänge. Setze $\mathbf{x}_{k+1,0} = \mathbf{x}_{k,1}$, $\tilde{p}_{k+1} = \tilde{p}_k + \Delta p_k$ und $\mathbf{W}_{k+1,0} = \mathbf{W}_1$. Gehe zu Schritt 19.
Ansonsten: setze $\Delta_k = \max(\Delta_{\min}, \tau^2 \Delta_k)$ und gehe zu Schritt 2.
19. Berechne den nächsten Punkt \mathbf{x}_{k+1} der Lösungskurve durch das SQP-Verfahren mit den Startwerten $(\mathbf{x}_{k+1,0}, \tilde{p}_{k+1})$ und $\mathbf{W}_{k+1,0}$.
20. Wenn $\tilde{p}_{k+1} = p_Q$, STOP: Abbruch des QPSQP-Verfahrens, Zielparameter erreicht.
Wenn $\tilde{p}_{k+1} = p_l$, setze $l = l + 1$.

8 Leistungsfähigkeit der numerischen Methoden

Bevor das Optimierungsverfahren aus Kapitel 6 und die Lösungsverfolgung aus Kapitel 7 zur Untersuchung des Einflusses der Fußgeometrie auf die Energieeffizienz beim zweibeinigen Gehen verwendet werden, werden in diesem Kapitel die Eigenschaften beider Verfahren untersucht und deren Leistungsfähigkeit beurteilt. Dazu wird in Abschnitt 8.1 zunächst die Konvergenz des SQP-Verfahrens betrachtet und unter anderem mit dem SQP-Verfahren der *Matlab*-Funktion `fmincon` verglichen. In Abschnitt 8.2 wird das QPSQP-Verfahren betrachtet, wobei insbesondere der QP-Prädiktor und die Schrittweitensteuerung untersucht werden. Dabei wird auch das Verhalten des QPSQP-Verfahrens beim Vorliegen mehrerer Lösungskurven diskutiert, wobei zum einen die Zuverlässigkeit beim Verfolgen einer Lösungskurve von Interesse ist und zum anderen auch der Wechsel von einer Lösungskurve auf eine andere.

8.1 Konvergenz des SQP-Verfahrens

Das in Abschnitt 6.2.4 beschriebene SQP-Verfahren beruht auf [48], wo eine einfache Version des Verfahrens entwickelt und dessen globale Konvergenz formal bewiesen wird. Dieser Beweis beruht im Wesentlichen darauf, dass eine Folge von Schritten, die jeweils zu einer Abnahme der exakten ℓ_1 -Straffunktion führen, gegen einen stationären Punkt der ℓ_1 -Straffunktion konvergiert. Wenn die Strafparameter ausreichend groß sind – was für Punkte mit einer zulässigen Lösung des QP-Teilproblems in Anhang C gezeigt wird – ist der stationäre Punkt der ℓ_1 -Straffunktion ein KKT-Punkt des ursprünglichen NLP, womit die notwendige Bedingung für ein Optimum erfüllt ist. Die Näherung der Hesse-Matrix durch das BFGS-Verfahren, die Berechnung der dazu notwendigen Multiplikatoren und der Korrekturschritt zweiter Ordnung beeinflussen lediglich den Fortschritt in einem Iterationsschritt, also die Anzahl der notwendigen Iterationen. Zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit wird die Implementierung von Algorithmus 1 nach Abschnitt 6.2.4 mit der *Matlab*-Funktion `fmincon` verglichen. Für den Vergleich

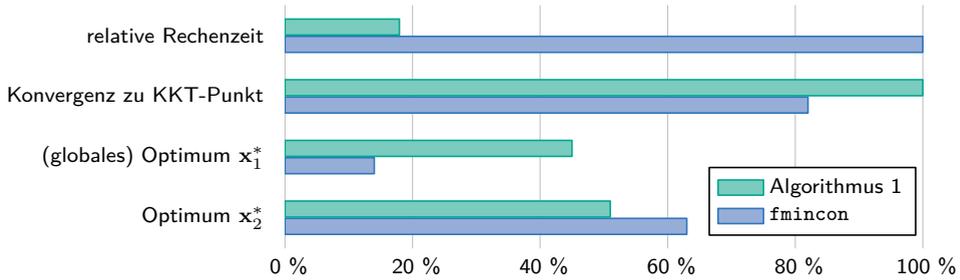


Abbildung 8.1: Vergleich von Algorithmus 1 nach Abschnitt 6.2.4 mit der *Matlab*-Funktion `fmincon`.

werden die Parameter in den Tabellen 5.1 und 6.2 (S. 127 und 146)¹ sowie die Parameter des Fußmodells HM für den linken Fuß von Proband 1 nach Tabelle 4.2 (S. 93) verwendet. Es wird von einer durch Ausprobieren gefundenen Lösung für das NLP mit dem Zielfunktional f_{mech} nach Gl. (5.102) in der Mitte des betrachteten Geschwindigkeitsbereichs bei $\bar{v} = 1,3 \text{ m/s}$ ausgegangen. Durch die Addition von Zufallszahlen auf den so ermittelten Optimierungsvektor $\mathbf{x}^* = \bar{\alpha}^*$ werden 100 Anfangsbedingungen ermittelt, die eine reelle Lösung für die periodische Bewegung liefern. Für diese 100 zufälligen Anfangsbedingungen wird das Optimierungsproblem mit beiden Verfahren gelöst und die Ergebnisse verglichen. Da `fmincon` keine Initialisierung der Hesse-Matrix erlaubt, wird für diesen Vergleich auch in Algorithmus 1 eine Einheitsmatrix verwendet, was dem üblichen Vorgehen bei der BFGS-Methode entspricht.

Die Ergebnisse dieses Vergleichs sind in Abb. 8.1 dargestellt. Obwohl die Startwerte für beide Verfahren identisch sind, konvergiert Algorithmus 1 in allen 100/100 Fällen erfolgreich zu einem KKT-Punkt, während dies bei `fmincon` nur für 82/100 Startwerte der Fall ist. Dabei ist die benötigte Rechenzeit für Algorithmus 1 um 82,1 % geringer.² Der überwiegende Teil der ermittelten KKT-Punkte entspricht den Lösungen \mathbf{x}_1^* und \mathbf{x}_2^* , wobei \mathbf{x}_1^* mit hoher Wahrscheinlichkeit das globale Optimum ist und \mathbf{x}_2^* das nächstbeste lokale Optimum. Bei der Verwendung von Algorithmus 1 wird das globale Optimum in 45/100 Fällen gefunden, während dies bei der Verwendung von `fmincon` nur in 14/100 Fällen der Fall ist. Dieser Vergleich zeigt die generelle Eignung von Algorithmus 1 zur Lösung des NLP, die gute Konvergenz und vorteilhafte Rechenzeiten, weshalb sich Algorithmus 1 als Korrektor-Verfahren im Rahmen des QPSQP-Verfahrens eignet. Bevor in Abschnitt 8.2 auf das Prädiktor-Verfahren und die Schrittweitensteuerung eingegangen wird, wird zunächst der Einfluss der Straf-

¹ Da die Anfangsbedingungen nicht nahe an der Lösung liegen, wird für diese Untersuchung `MaxIter` = $3 \cdot 10^3$ gesetzt.

² Bei diesem Vergleich wird ein Intel® Core™ i7-7700 Prozessor mit 4 Kernen und einem Grundtakt von 3,60 GHz verwendet.

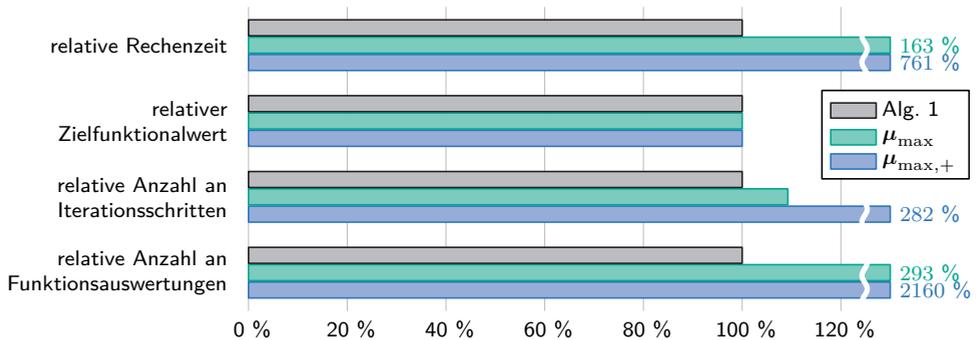


Abbildung 8.2: Vergleich von Algorithmus 1 nach Abschnitt 6.2.4 (Alg. 1) mit zwei modifizierten Versionen: bei Version μ_{\max} wird nur der betragsmäßig größte Strafparameter für alle Nebenbedingungen verwendet; bei Version $\mu_{\max,+}$ wird nur der betragsmäßig größte Strafparameter verwendet und dieser gegenüber vorherigen Schritten nur vergrößert, jedoch nie verkleinert.

parameter auf die Konvergenz des SQP-Verfahrens näher betrachtet, da dies eine wesentliche Änderung im Vergleich zu [48] darstellt.

Die Wahl der Strafparameter hat einen deutlichen Einfluss auf die Schrittweite, die in jedem Iterationsschritt von der Gütefunktion akzeptiert wird. Werden die Strafparameter zu klein gewählt, so konvergiert das Verfahren nicht zu einem KKT-Punkt. Werden diese jedoch zu groß gewählt, so werden nur kurze Schritte akzeptiert und das Verfahren konvergiert sehr langsam. Gegenüber dem in [48] vorgeschlagenen Vorgehen, bei dem ein Strafparameter für alle Nebenbedingungen verwendet wird, wird in Algorithmus 1 in jedem Iterationsschritt für jede Nebenbedingung je ein Strafparameter auf Basis der Multiplikatoren des QP-Teilproblems gewählt. Diese Wahl hat gegenüber einem einzigen Strafparameter den Vorteil einer schnelleren Konvergenz, was in Abb. 8.2 dargestellt ist. Hierbei werden Algorithmus 1 zwei modifizierte Varianten gegenübergestellt, bei denen der betragsmäßig größte Multiplikator des QP-Teilproblems als Strafparameter für alle Nebenbedingungen verwendet wird. Damit wird, ausgehend von dem oben bestimmten Optimum \mathbf{x}_1^* für eine Gehgeschwindigkeit von $\bar{v} = 1,3 \text{ m/s}$, ein Ergebnis für die neue Geschwindigkeit $\bar{v} = 1,4 \text{ m/s}$ ermittelt. In der ersten Variante wird dabei der Strafparameter in jedem Iterationsschritt entsprechend den Multiplikatoren angepasst, in der zweiten Variante findet lediglich eine Vergrößerung statt, wenn der Strafparameter des vorherigen Iterationsschritts nicht ausreichend ist. Von allen Varianten wird derselbe KKT-Punkt als Lösung ermittelt, wobei die Rechenzeit bei beiden modifizierten Varianten deutlich über der von Algorithmus 1 liegt.

Beide Untersuchungen zeigen, dass Algorithmus 1 sehr gute Konvergenzeigenschaften besitzt und eine Lösung des NLP mit relativ kurzen Rechenzeiten erlaubt. Da überdies die Möglichkeit besteht, diesen SQP-Algorithmus mit einer Schätzung für die Hesse-

Matrix zu initialisieren, eignet sich dieser als Korrektor-Verfahren für die QPSQP-Methode. Da aus dem Prädiktor-Verfahren eine gute Schätzung für die Hesse-Matrix vorliegt, kann diese direkt im Korrektor-Verfahren genutzt werden, was die Konvergenz weiter verbessert und sich damit positiv auf die Rechenzeiten auswirkt. Nachdem somit das Korrektor-Verfahren untersucht ist, wird im nächsten Abschnitt auf das Prädiktor-Verfahren eingegangen.

8.2 Einfluss des Prädiktor-Verfahrens

Das Prädiktor-Verfahren im Rahmen der QPSQP-Methode – der QP-Prädiktor – besteht aus zwei Korrektor-Schritten, auf deren Basis die Schrittweite der Parameteränderung mit dem Vertrauensbereichverfahren gesteuert wird. Als Akzeptanzkriterium wird zum einen gefordert, dass beide Schritte durch die Gütefunktion akzeptiert werden, ohne dass eine Verkürzung durch das Rücksetzverfahren notwendig ist. Zum anderen wird eine Schätzung der Konvergenzrate auf Basis dieser beiden Schritte betrachtet. Durch diese Schätzung wird versucht, die Parameteränderung so klein zu wählen, dass das Korrektor-Verfahren schnell zum nächsten Punkt der Lösungskurve konvergiert. Da für dieses Verfahren kein mathematischer Beweis zur Verfügung steht, ist das Vorgehen als Heuristik aufzufassen. Um die getroffenen Annahmen zu beurteilen, wird im Folgenden zunächst ein Vergleich der tatsächlichen Konvergenzrate mit der verwendeten Schätzung auf Basis von numerischen Experimenten durchgeführt. Anschließend wird die Leistungsfähigkeit des Verfahrens mit einem trivialen Prädiktor-Verfahren ohne Schrittweitensteuerung verglichen.

Für eine Folge $\{\mathbf{x}_k\}$, die zu \mathbf{x}^* konvergiert, ist die (lineare) Konvergenzrate C definiert als

$$\frac{\|\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^*\|_2}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|_2} \leq C, \quad \text{für alle } k, \quad (8.1)$$

vgl. [258, Gl. (A.34)], wobei die Lösung \mathbf{x}^* erst nach Abschluss des Korrektor-Verfahrens bekannt ist. Die Grundidee der Schrittweitensteuerung des QP-Prädiktors besteht darin, eine Schätzung κ für die Konvergenzrate C anhand der Punkte \mathbf{x}_0 , \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 zu bestimmen – also auf Basis der ersten beiden Korrektor-Schritte. Mit dieser Schätzung wird überprüft, ob die Konvergenzrate zu Beginn des jeweiligen Iterationsschritts des QPSQP-Verfahrens ausreichend klein ist, womit eine schnelle Konvergenz des Korrektor-Verfahrens erwartet wird. Dies entspricht von der Grundidee einer Adaption des für glatte Probleme in [12, Abschnitt 6.1] vorgestellten Verfahrens. Die Wahl der Schätzung nach Gl. (7.2) ist durch numerische Experimente motiviert, die in Abb. 8.3 dargestellt sind.

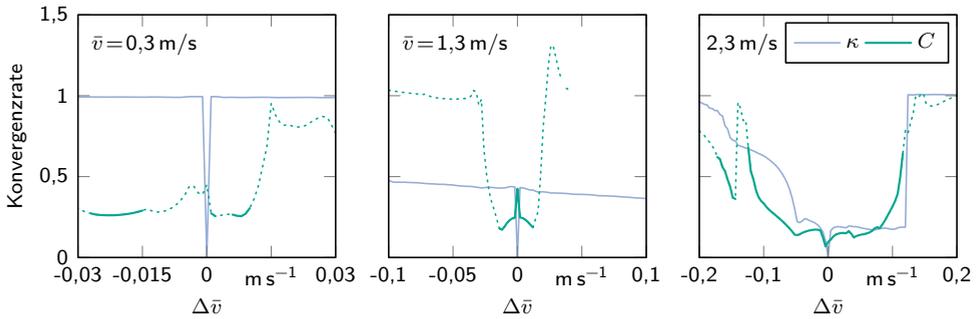


Abbildung 8.3: Vergleich der exakten Konvergenzrate des ersten Iterationsschritts $C = \frac{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}^*\|_2}{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|_2}$ (blau) mit der Schätzung $\kappa = \frac{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|_2}{\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_2\|_2}$ nach Gl. (7.2) (grün) bei den Durchschnittsgeschwindigkeiten $\bar{v} = 0,3 \text{ m/s}$, $1,3 \text{ m/s}$ und $2,3 \text{ m/s}$. Bereiche, in denen nicht beide Schritte die Gütefunktion erfüllen, sind gepunktet.

Die tatsächliche Konvergenzrate des ersten Schritts wird hierbei der Schätzung auf Basis von Gl. (7.2) gegenübergestellt, wobei als Parameter eine Veränderung der Durchschnittsgeschwindigkeit \bar{v} beim Gehen betrachtet wird. Bei der Betrachtung wird das Fußmodell HM für den linken Fuß von Proband 1 nach Tabelle 4.2 (S. 93) verwendet, wobei mit $\bar{v} = 0,3 \text{ m/s}$, $1,3 \text{ m/s}$ und $2,3 \text{ m/s}$ die Grenzen und die Mitte des betrachteten Geschwindigkeitsbereichs ausgewertet werden. Die Konvergenzrate zeigt weder einen monotonen, noch einen glatten Verlauf, was dem nichtglatten Problem geschuldet ist. Die Auswertung zeigt, dass die Schrittweite meist dadurch begrenzt wird, dass nicht beide Schritte die Gütefunktion erfüllen. Die Schätzung der Konvergenzrate nach Gl. (7.2) zeigt bei $\bar{v} = 2,3 \text{ m/s}$ eine qualitativ und quantitativ gute Übereinstimmung mit der tatsächlichen Konvergenzrate. Bei $\bar{v} = 1,3 \text{ m/s}$ ist diese Übereinstimmung geringer, bei $0,3 \text{ m/s}$ ist diese kaum noch gegeben. Weiterhin zeigt sich ein deutlicher Zusammenhang zwischen der Konvergenzrate und der Anzahl an notwendigen Korrektor-Schritten (nicht dargestellt). Für Schrittweiten außerhalb des akzeptablen Bereichs verschlechtert sich diese stark, was zu einem entsprechend höheren Rechenaufwand führt. Die akzeptable Schrittweite ist insbesondere bei $\bar{v} = 0,3 \text{ m/s}$ sehr gering, weshalb der Fortschritt des QPSQP-Verfahrens in diesem Bereich der Lösungskurve durch die Untergrenze des Vertrauensbereichs Δ_{\min} begrenzt wird, vgl. Algorithmus 2. Trotzdem ist für diese kleine Parameteränderung eine große Anzahl an Korrektor-Schritten ($\gg 100$) zur Bestimmung des nächsten Lösungspunktes notwendig. Ohne die Untergrenze wird die Schrittweite jedoch so gering, dass das Verfahren praktisch keinen Fortschritt mehr erzielt.

Bei der Betrachtung anderer Modelle tritt zum Teil der Fall auf, dass eine relativ große Parameteränderung nicht zu einer Verletzung der Gütefunktion durch die ersten beiden

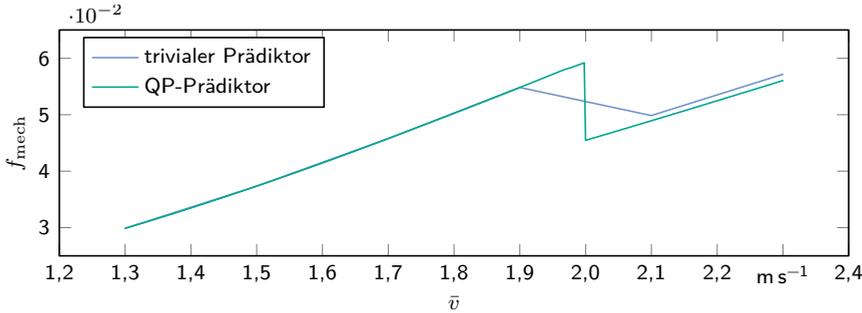


Abbildung 8.4: Vergleich des QP-Prädiktors mit Schrittweitensteuerung (grün) mit einem trivialen Prädiktor ohne Schrittweitensteuerung (blau) beim Verfolgen der Lösung \mathbf{x}_2^* von $\bar{v} = 1,3$ m/s bis 2,3 m/s. Beide Verfahren springen bei $\bar{v} = 1,9$ m/s bzw. 2,0 m/s auf eine andere Lösungskurve, da die ursprüngliche Lösung ihre Existenz verliert.

Schritte führt, jedoch $\kappa > 1$ ist. In diesem Fall führt die Forderung von $\kappa < 1$ zu einer Verringerung des jeweiligen Schritts, was nach Erfahrung des Verfassers die Robustheit bei der Verfolgung der Lösungskurve erhöht. Es werden zu große Parameteränderungen verhindert, die dazu führen können, dass das Verfahren auf eine andere Lösungskurve springt, worauf im Folgenden eingegangen wird.

Die Leistungsfähigkeit des gesamten QPSQP-Verfahrens bei der Verfolgung nicht-glatte Lösungskurven wird am Beispiel eines Hochlaufs illustriert. Dabei wird mit der Lösung \mathbf{x}_2^* für $\bar{v} = 1,3$ m/s begonnen, die im vorigen Abschnitt aus den zufällig generierten Anfangsbedingungen bestimmt wurde. Mit diesem Startwert wird die Geschwindigkeit auf $\bar{v} = 2,3$ m/s erhöht. Zum Vergleich wird dasselbe Problem mit einem trivialen Prädiktor verglichen, bei dem die Durchschnittsgeschwindigkeit in festen Intervallen von $\Delta\bar{v} = 0,2$ m/s erhöht wird. Das Ergebnis dieses Vergleichs ist in Abb. 8.4 dargestellt. Beide Verfahren folgen zunächst mit zunehmender Geschwindigkeit der lokalen Lösung. Bei einer Geschwindigkeit von $\bar{v} = 1,9$ m/s bzw. 2,0 m/s springen beide Verfahren auf eine andere Lösungskurve, die jeweils einem besseren (lokalen) Optimum entspricht. Das Verfahren mit dem trivialen Prädiktor springt dabei aufgrund der festen Schrittweite früher und landet auf einer schlechteren Lösung als das QPSQP-Verfahren. Bei einer geringeren Schrittweite verbessert sich die Leistung des trivialen Prädiktors und nähert sich immer mehr dem QPSQP-Verfahren an. Der Schritt $\Delta\bar{v} = 0,2$ m/s ist an dieser Stelle zur Illustration dieses Effekts absichtlich sehr groß gewählt. Bei der Anwendung des QPSQP-Verfahrens zur Verfolgung von Lösungskurven unterschiedlicher Modelle tritt dasselbe Verhalten zum Teil auch bei deutlich geringeren Schrittweiten auf.

Der Sprung findet statt, da das verfolgte lokale Optimum bei einem gewissen Parameterwert seine Existenz verliert. Die Nullstelle des Gradienten der Lagrangefunk-

tion entspricht dann nicht mehr einem Minimum des NLP, weshalb das Korrektor-Verfahren ab diesem Punkt zu einer anderen Lösung konvergiert. Im Kontext glatter Lösungskurven entspricht der Punkt, an dem die Lösung ihre Existenz verliert, einem Bifurkationspunkt. Bei einem Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen verliert die Hesse-Matrix an einem solchen Punkt ihre positive Definitheit. Es kann daher aus den Eigenwerten der Hesse-Matrix auf eine Annäherung an einen Bifurkationspunkt geschlossen werden, um die Schrittweite entsprechend zu steuern und der ursprünglichen Lösungskurve zu folgen. Bei dem betrachteten Optimierungsproblem mit Ungleichheitsnebenbedingungen ist eine Bewertung auf dieser Grundlage jedoch nicht möglich. In diesem Fall kann ein Minimum auch bei indefiniter Hesse-Matrix vorliegen, wenn die Nebenbedingungen die Lösung entsprechend einschränken. Die notwendige Bedingung für ein Minimum ist in diesem Fall dadurch gegeben, dass die Hesse-Matrix auf dem Nullraum der aktiven Nebenbedingungen positiv definit ist, vgl. [258, S. 330]. Analog zum glatten Problem ohne Nebenbedingungen kann diese Bedingung beim Verfolgen der Lösungskurve dadurch verletzt werden, dass sich die Vorzeichen der Eigenwerte der Hesse-Matrix verändern. Andererseits kann auch durch eine Veränderung der Nebenbedingungen bzw. der aktiven Menge eine Verletzung dieser notwendigen Bedingung erfolgen, was nur schwer a priori antizipiert werden kann. Eine Verfolgung von Nullstellen, die keinem Optimum entsprechen, erscheint dem Verfasser nicht sinnvoll, weshalb dieses Problem nicht weiter betrachtet wird. Die in diesem Kapitel durchgeführten Untersuchungen zeigen, dass das SQP-Verfahren nach Algorithmus 1 eine sehr gute Konvergenz bei relativ geringen Rechenzeiten aufweist. In Kombination mit dem QP-Prädiktor-Verfahren ist eine robuste Verfolgung von nichtglatten Lösungskurven möglich. Verliert das verfolgte Minimum seine Existenz, so springt das Verfahren auf eine andere Lösungskurve, die wiederum mit dem QPSQP-Verfahren verfolgt werden kann. Das Verfahren wird im folgenden Kapitel verwendet, um den Einfluss der Fußgeometrie auf die Energieeffizienz beim zweibeinigen Gehen zu untersuchen.

9 Einfluss der Fußgeometrie auf die Energieeffizienz

Im Folgenden werden die in den vorigen Kapiteln eingeführten Methoden angewendet, um den Einfluss der Fußgeometrie auf die Energieeffizienz beim zweibeinigen Gehen zu untersuchen. Zunächst wird in Abschnitt 9.1 der Einfluss der beiden Zielfunktionale untersucht. Anschließend werden in Abschnitt 9.2 optimale Bewegungen für Fußmodelle mit den in Kapitel 4 anhand von Messungen mit menschlichen Probanden ermittelten Parametern erzeugt und diskutiert. Diese dienen als Ausgangspunkt für die Optimierung der Fußgeometrie im nächsten Kapitel.

9.1 Einfluss des Zielfunktionalen

In der vorliegenden Arbeit werden die beiden Zielfunktionale f_{mech} und f_{usq} nach Gl. (5.101) und (5.102) betrachtet, für welche im Folgenden optimale Gehbewegungen erzeugt und die Ergebnisse verglichen werden. Bei allen Modellen werden die Parameter \mathbf{p}_{mech} nach Tabelle 5.1 (S. 127) verwendet, sofern nicht anders angegeben. Für den Vergleich der Zielfunktionale werden exemplarisch die Fußmodelle von Proband 1 nach den Tabellen 4.2, B.3, B.6 und B.9 (S. 93, 220, 222 und 223) herangezogen. Aufgrund der Menge an Lösungen wird zunächst auf die Ergebnisse für das Modell HM des rechten Fußes mit Schuhen eingegangen, da dafür die größte Lösungsmenge gefunden wurde. Da es sich um ein stark nichtlineares Optimierungsproblem handelt, kann nicht davon ausgegangen werden, dass diese Lösungsmenge alle möglichen lokalen Optima beinhaltet. Dennoch erlaubt diese Auswahl eine Diskussion der Bewegungsabläufe und eine Interpretation der zugrundeliegenden Mechanismen. Im Folgenden werden die Abbildungen für beide Zielfunktionale zum einfacheren Vergleich jeweils nebeneinander dargestellt, wobei zunächst die Ergebnisse für f_{mech} und anschließend die Ergebnisse für f_{usq} diskutiert werden. In einer abschließenden Bewertung wird ein Zielfunktional für die weiteren Untersuchungen ausgewählt.

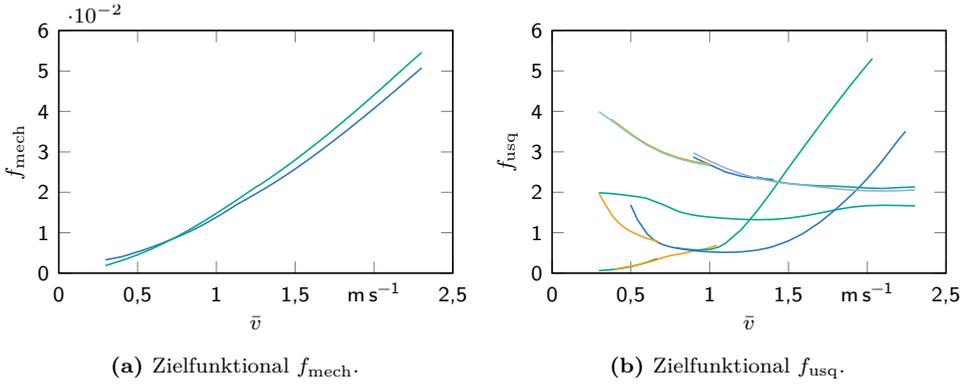


Abbildung 9.1: Ergebnisse für das Modell HM des rechten Fußes von Proband 1 (mit Schuhen). (a) Die 2 Verläufe für das Zielfunktional f_{mech} und (b) die 11 Verläufe für f_{usq} (zum Teil mit gegenseitigen Überdeckungen).

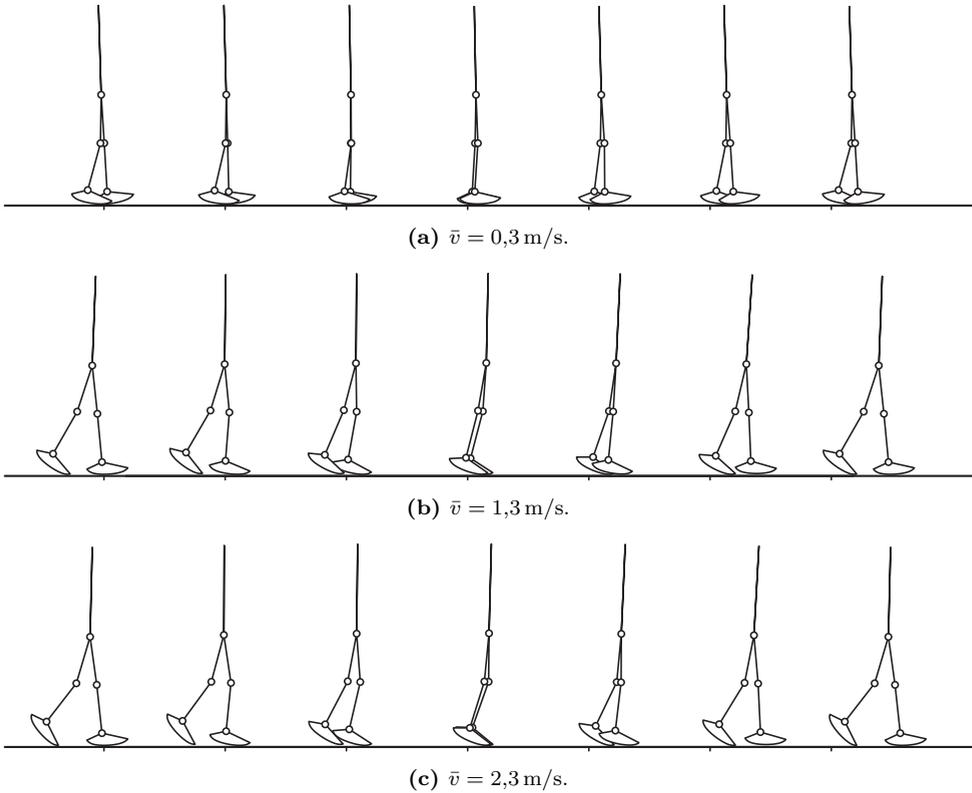


Abbildung 9.2: Illustration der jeweils optimalen Bewegung für das Zielfunktional f_{mech} bei den drei Geschwindigkeiten (a) $\bar{v} = 0,3 \text{ m/s}$, (b) $\bar{v} = 1,3 \text{ m/s}$ und (c) $\bar{v} = 2,3 \text{ m/s}$ zu jeweils sieben äquidistanten Zeitpunkten.

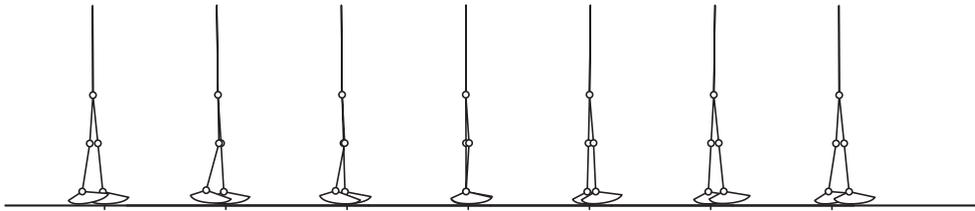
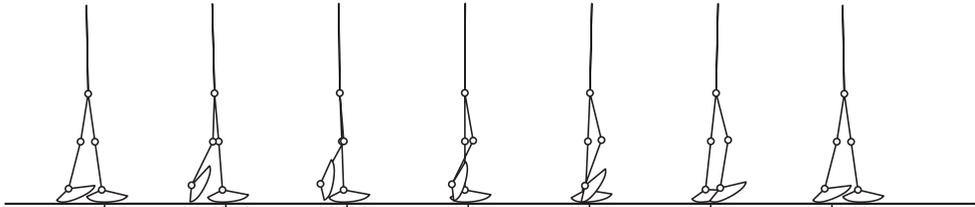
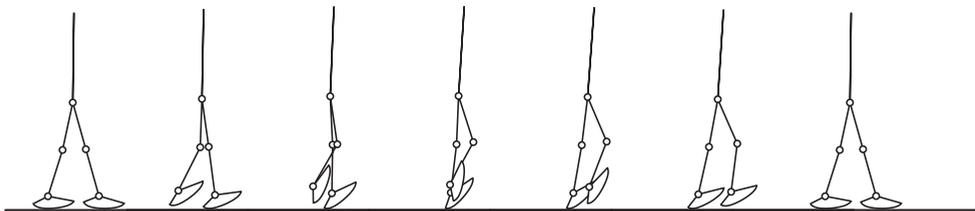
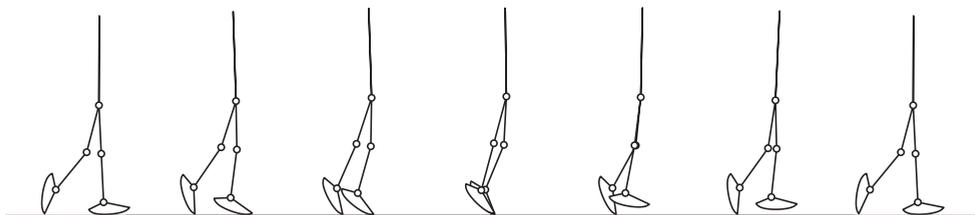
(a) $\bar{v} = 0,3 \text{ m/s}$.(b) $\bar{v} = 0,6 \text{ m/s}$.(c) $\bar{v} = 1,3 \text{ m/s}$.(d) $\bar{v} = 2,3 \text{ m/s}$.

Abbildung 9.3: Illustration der jeweils optimalen Bewegung für das Zielfunktional f_{usq} bei den vier Geschwindigkeiten (a) $\bar{v} = 0,3 \text{ m/s}$, (b) $\bar{v} = 0,6 \text{ m/s}$, (c) $\bar{v} = 1,3 \text{ m/s}$ und (d) $\bar{v} = 2,3 \text{ m/s}$ zu jeweils sieben äquidistanten Zeitpunkten.

Zielfunktional f_{mech} : Für das Zielfunktional f_{mech} können im betrachteten Geschwindigkeitsbereich $\bar{v} \in [0,3 \text{ m/s}, 2,3 \text{ m/s}]$ zwei Lösungskurven gefunden werden, die in Abb. 9.1a dargestellt sind. Der Wert des Zielfunktionalen nimmt bei beiden Lösungskurven mit zunehmender Gehgeschwindigkeit \bar{v} monoton zu. In Abb. 9.2 sind die Bewegungsabläufe bei den Geschwindigkeiten $\bar{v} = 0,3 \text{ m/s}$, $1,3 \text{ m/s}$ und $2,3 \text{ m/s}$ dargestellt. Der Gang ist bei allen Geschwindigkeiten sehr aufrecht, wobei der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Lösungskurven die Neigung des Oberkörpers ist. Dieser ist bei der in Abb. 9.1 grün dargestellten Lösung nach hinten geneigt – wie in Abb. 9.2a für die niedrigste Geschwindigkeit abgebildet –, während er bei der anderen Lösungskurve nach vorne geneigt ist – vgl. Abb. 9.2b und 9.2c. Bei beiden Lösungskurven und allen ausgewerteten Geschwindigkeiten ist der Oberkörperwinkel mit diesem Fußmodell jedoch im Bereich $\theta_T \in (-10^\circ, 5^\circ)$. Der Fuß wird bei allen Geschwindigkeiten nicht im Bereich der Ferse aufgesetzt, sondern in der Mitte der Sohle auf Höhe des Sprunggelenks. Während des Schritts findet eine Abrollbewegung statt, bei der sich der Kontaktpunkt Richtung Zehenspitze verlagert. Je höher die Gehgeschwindigkeit, desto ausgeprägter ist diese Abrollbewegung.

Diese Art der Bewegung erfordert ein sehr hohes Moment¹ im Sprunggelenk des Standbeins, wie in Abb. 9.4a dargestellt ist. Ein ebenfalls sehr hohes Maximalmoment liegt im Hüftgelenk des Schwungbeins an, wobei dieses bei niedrigen Geschwindigkeiten $\bar{v} < 1,2 \text{ m/s}$ zum Abbremsen des Schwungbeins am Ende des Schritts – also direkt vor dem Stoß – genutzt wird, während das Schwungbein bei höheren Geschwindigkeiten am Anfang des Schritts beschleunigt wird. Die Aktormomente in den Gelenken des Schwungbeins und der Hüfte haben nur am Anfang oder am Ende des Schritts einen nennenswerten Betrag, wirken also eher impulsartig, wohingegen die Aktoren im Knie und im Sprunggelenk des Standbeins ein konstant hohes Moment aufbringen. Dieses steigt bei beiden Gelenken am Ende des Schritts auf das jeweilige Maximalmoment an, was einem Strecken des Standbeins bei gleichzeitigem Abdrücken mit dem Fuß vom Boden entspricht. In der vorliegenden Arbeit ist keine Begrenzung für das Moment vorgegeben, da keine konkrete Realisierung der Aktoren modelliert wird. Da durch das Zielfunktional f_{mech} die zugeführte mechanische Leistung $P_{\text{mech},i} = \max(u_i \dot{q}_{b,i}, 0)$ in jedem Gelenk bestraft wird, findet fast keine Bewegung des Knie- und Sprunggelenks im Standbein statt. Verschwindende Relativwinkelgeschwindigkeiten $\dot{\theta}_{K1}$ und $\dot{\theta}_{A1}$ führen trotz hoher anliegender Momente dazu, dass keine mechanische Leistung zugeführt wird.

Die Gehbewegung stellt einen Grenzyklus der hybriden Nulldynamik des Systems dar, weshalb die Gesamtenergie am Anfang jedes Schritts gleich ist. Die zugeführte

¹ Es gibt keine Beschränkung der zulässigen Gelenkmomente, da hierfür weitere Annahmen getroffen werden müssten. Das Optimierungsproblem kann jedoch einfach um entsprechende Nebenbedingungen erweitert werden.

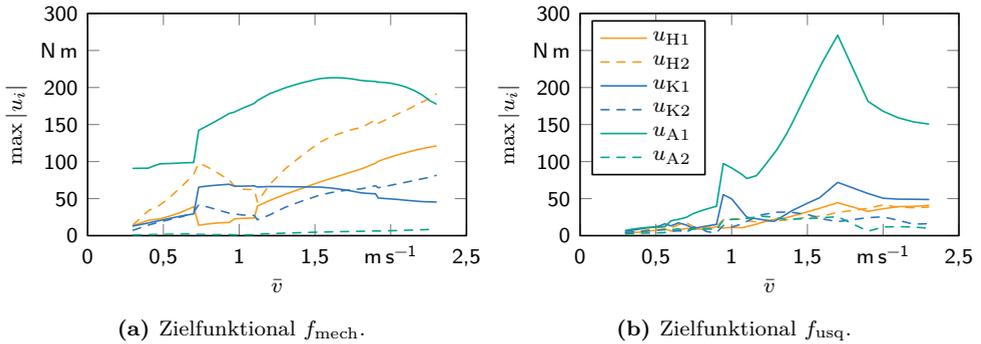
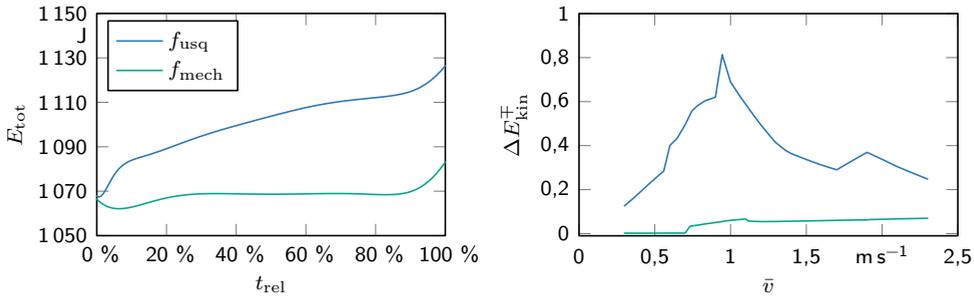


Abbildung 9.4: Maximal während des Schritts anliegende Aktormomente bei der jeweils optimalen Bewegung für (a) das Zielfunktional f_{mech} und (b) das Zielfunktional f_{usq} .

Energie, die sich als Integral über die zugeführte Leistung ergibt, muss also die während des Schritts abgeführte Energie ausgleichen, die sich aus den Stoßverlusten und einem ggf. vorhandenen Bremsbetrieb der Aktoren zusammensetzt.² Durch das Zielfunktional wird also indirekt ein Abbremsen der Gelenkbewegungen sowie ein hoher Energieverlust beim Stoß bestraft. Als Konsequenz daraus ist die Gesamtenergie während der Bewegung nahezu konstant, wie in Abb. 9.5a exemplarisch für $\bar{v} = 1,3 \text{ m/s}$ dargestellt. Am Anfang des Schritts sinkt die Gesamtenergie leicht ab, was jedoch nach ca. 25 % der Schrittdauer wieder ausgeglichen wird. Von 25–90 % der Schrittdauer ist die Energie konstant, am Ende des Schritts wird dem System durch die Aktoren weitere Energie zugeführt, die dann beim Stoß dissipiert wird.

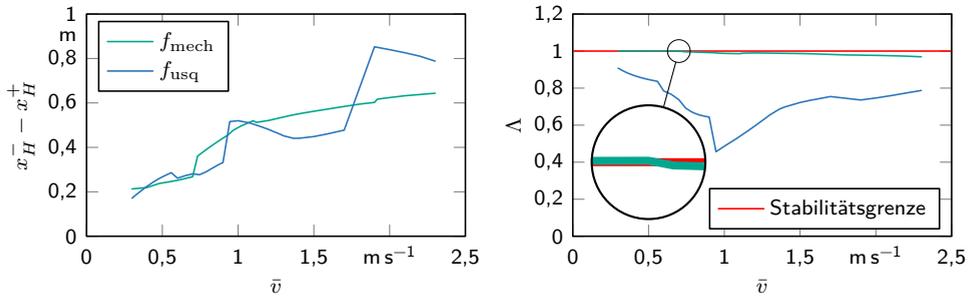
Die beim Stoß dissipierte Energie relativ zur kinetischen Energie am Anfang des Schritts ist in Abb. 9.5b für die jeweils optimale Bewegung bei allen Geschwindigkeiten dargestellt. Es fällt auf, dass bei niedrigen Geschwindigkeiten mit nach hinten geneigtem Oberkörper fast keine Energiedissipation im Stoß stattfindet, während diese beim Wechsel von der einen Lösungskurve zur anderen bei $\bar{v} = 0,7 \text{ m/s}$ schlagartig ansteigt und dann kontinuierlich weiter zunimmt. Bei niedrigen Geschwindigkeiten $\bar{v} < 0,7 \text{ m/s}$ erfolgt die Energiedissipation hauptsächlich durch den Bremsbetrieb der Aktoren, während der Fuß mit sehr geringer Geschwindigkeit aufgesetzt wird, was die Stoßverluste reduziert. Bei Gehbewegungen im Bereich $0,7 \text{ m/s} < \bar{v} < 1,2 \text{ m/s}$ erfolgt weiterhin ein Abbremsen am Ende des Schritts, es wird jedoch auch ein relevanter Anteil der Energie im Stoß dissipiert. Bei Geschwindigkeiten $\bar{v} > 1,2 \text{ m/s}$ ist der Stoß dominant für die Energiedissipation der periodischen Gehbewegung. Die Energiedissipation im Stoß korreliert direkt mit der Stabilität der periodischen Lösung, die anhand des stabilitätsrelevanten Floquet-Multiplikators Λ nach Gl. (5.90)

² Da keine Energiedissipation in den Gelenken, im Kontakt oder durch Luftwiderstand modelliert wird, gibt es keine weiteren Energiesenken im System.



(a) Gesamtenergie E_{tot} während des Schritts. (b) Relative im Stoß dissipierte Energie $\Delta E_{\text{kin}}^{\mp}$.

Abbildung 9.5: (a) Zunahme der Gesamtenergie $E_{\text{tot}} = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}}$ während der relativen Schrittdauer t_{rel} bei $\bar{v} = 1,3 \text{ m/s}$ und (b) relative im Stoß dissipierte Energie $\Delta E_{\text{kin}}^{\mp} = \frac{E_{\text{kin}}^- - E_{\text{kin}}^+}{E_{\text{kin}}^+}$ bei der jeweils optimalen Bewegung für beide Zielfunktionale f_{usq} und f_{mech} .



(a) Schrittlänge $x_H^- - x_H^+$. (b) Stabilitätsrelevanter Floquet-Multiplikator Λ .

Abbildung 9.6: (a) Schrittlänge ($x_H^- - x_H^+$) und (b) Floquet-Multiplikator Λ der jeweils optimalen Bewegung für beide Zielfunktionale f_{usq} und f_{mech} .

beurteilt werden kann, der in Abb. 9.6b dargestellt ist. Bei niedrigen Geschwindigkeiten $\bar{v} < 0,7 \text{ m/s}$ ist die optimale Bewegung instabil, bei höheren Geschwindigkeiten ist die Lösung umso stabiler, je höher die relativen Stoßverluste sind.

Eine Betrachtung der in Abb. 9.6a dargestellten Schrittlänge zeigt, dass diese mit der Gehgeschwindigkeit zunimmt. Wechsel zwischen verschiedenen Lösungskurven gehen meist mit deutlichen Veränderungen der Schrittlänge einher. Allerdings entspricht eine starke Veränderung der Schrittlänge nicht immer einem Wechsel auf eine andere Lösungskurve, wie sich an der vorliegenden Lösung bei $\bar{v} = 1,2 \text{ m/s}$ und $1,9 \text{ m/s}$ zeigt. Die Schrittlänge weist an diesen Stellen eine auffällige Veränderung auf, allerdings kann keine weitere Lösungskurve gefunden werden, die den ursprünglichen Verlauf fortsetzt. Vielmehr fällt dies bei $\bar{v} = 1,2 \text{ m/s}$ gerade mit der oben diskutierten Änderung im Wirken der Aktoren zusammen, die das Schwungbein bei $\bar{v} < 1,2 \text{ m/s}$ am Ende des

Schritts abbremsen und dieses bei $\bar{v} > 1,2 \text{ m/s}$ am Anfang des Schritts beschleunigen. Im Folgenden wird trotz solcher minimalen Veränderungen im Bewegungsablauf von einer Lösungskurve gesprochen, da sonst die Anzahl der zu diskutierenden Lösungskurven stark ansteigt, obwohl diese Detailunterschiede bei der Betrachtung des Bewegungsablaufs nicht wahrnehmbar sind.

Zielfunktional f_{usq} : Ein völlig anderes Ergebnis ergibt sich für die Optimierung mit dem Zielfunktional f_{usq} , für das eine Lösungsmenge mit insgesamt 11 Lösungskurven gefunden wird, wie in Abb. 9.1b dargestellt. Dabei gibt es viele Lösungen, bei denen der Energieverbrauch mit abnehmender Geschwindigkeit zu- und nicht abnimmt. Vier dieser Lösungskurven stellen je nach Geschwindigkeit im betrachteten Bereich $\bar{v} \in [0,3 \text{ m/s}, 2,3 \text{ m/s}]$ die jeweils optimale Lösung dar. In Abb. 9.3 sind die Bewegungsabläufe dieser jeweils optimalen Lösungen bei den Durchschnittsgeschwindigkeiten $\bar{v} = 0,3 \text{ m/s}$, $0,6 \text{ m/s}$, $1,3 \text{ m/s}$ und $2,3 \text{ m/s}$ dargestellt, wobei jeweils eine Bewegung auf jeder der vier Lösungskurven exemplarisch betrachtet wird. Der Gang ist zwar wie bei f_{mech} sehr aufrecht, das Abrollen des Standfußes und die Bewegung des Schwungbeins unterscheiden sich jedoch grundlegend. Das Aufsetzen des Fußes findet in einer ähnlichen Orientierung statt wie zuvor, bei den Geschwindigkeiten $\bar{v} = 0,3 \text{ m/s}$, $0,6 \text{ m/s}$ und $1,3 \text{ m/s}$ findet allerdings ein Abrollen in Richtung der Ferse und zurück in die Ausgangsorientierung statt. Lediglich bei der bei $\bar{v} = 2,3 \text{ m/s}$ optimalen Lösung findet ein Abrollen zur Zehenspitze und ein Abdrücken am Ende des Schritts statt. Der Fuß des Schwungbeins führt bei vielen Lösungen sehr große Bewegungen aus, die exemplarisch in Abb. 9.3b und 9.3c zu sehen sind. Ein systematischer Zusammenhang dieser Fußbewegungen mit anderen Winkelverläufen ist jedoch nicht erkennbar; dieses Verhalten tritt auch innerhalb ein und derselben Lösungskurve nicht konsistent bei allen Geschwindigkeiten auf. Die in Abb. 9.3b für $\bar{v} = 0,6 \text{ m/s}$ dargestellte Bewegung weist eine sehr große Bewegung des Schwungbeinfußes gegenüber dem Unterschenkel auf, während für die benachbarte Lösung für $\bar{v} = 0,7 \text{ m/s}$ auf derselben Lösungskurve dieses Verhalten nicht stark ausgeprägt ist (nicht dargestellt).

Eine mögliche Erklärung für diese Bewegungen folgt aus der Betrachtung der maximalen Aktormomente in Abb. 9.4b. Diese zeigt, dass die Bestrafung von betragsmäßig großen Momenten durch das Zielfunktional in allen Gelenken – mit Ausnahme des Sprunggelenks im Standbein – qualitativ und quantitativ ähnliche Verläufe ergibt. Lediglich bei hohen Geschwindigkeiten sind die Maximalmomente im Knie- und Sprunggelenk des Schwungbeins deutlich kleiner als die übrigen. Durch eine schnelle Bewegung des Fußes kann über die Interaktionskräfte und -momente im Sprunggelenk die Gesamtbewegung des Schwungbeins beeinflusst werden. Es kann sich also bei bestimmten Bewegungen im Sinne des Zielfunktional lohnen, ein geringeres Moment im Knie- und Hüftgelenk des Schwungbeins anzulegen und stattdessen durch eine

schnelle Bewegung des Fußes Einfluss auf die Dynamik zu nehmen. Beim Vergleich des Maximalmoments im Sprunggelenk des Standbeins zeigt sich, dass dieses bei niedrigen Geschwindigkeiten deutlich geringer ist als beim Zielfunktional f_{mech} . Bei Geschwindigkeiten $\bar{v} > 1,2 \text{ m/s}$ steigt das Maximalmoment im Sprunggelenk jedoch stark an und erreicht bei $\bar{v} = 1,7 \text{ m/s}$ mit 271 N m einen um 27 % größeren Wert als bei f_{mech} (213 N m). Obwohl also durch das Zielfunktional eine direkte Bestrafung von betragsmäßig großen Momenten vorgenommen wird, tritt der Fall auf, dass in einem der Aktoren ein größeres Maximalmoment als beim Zielfunktional f_{mech} benötigt wird. Alle Lösungen weisen im Vergleich zu f_{mech} sehr hohe Stoßverluste auf, was in Abb. 9.5b dargestellt ist. Bei $\bar{v} = 0,95 \text{ m/s}$ nimmt die kinetische Energie während des Schritts um mehr als 80 % zu, wobei diese Differenz vollständig im Stoß dissipiert wird. Die Ursache für dieses Verhalten liegt darin, dass durch das Zielfunktional lediglich betragsmäßig große Momente bestraft werden – es ist jedoch unerheblich, ob diese dem System Energie zu- oder abführen. In Abb. 9.5a ist die Zunahme der Gesamtenergie während des Schritts bei der Geschwindigkeit $\bar{v} = 1,3 \text{ m/s}$ dargestellt, die repräsentativ für den qualitativen Verlauf bei den Lösungen für dieses Zielfunktional ist. Als einziger Vorteil aus diesem Verhalten ergeben sich aus den großen Stoßverlusten vergleichsweise kleine Floquet-Multiplikatoren, vgl. Abb. 9.6b. Dies führt dazu, dass Störungen in den Anfangsbedingungen deutlich schneller abklingen, womit diese Lösungen eine höhere Stabilität aufweisen als die des Zielfunktional f_{mech} .

Bewertung: Beide Zielfunktionale können zur Erzeugung von jeweils optimalen periodischen Gehbewegungen genutzt werden. Das Zielfunktional f_{mech} führt dabei bei dem betrachteten Modell zu zwei Lösungskurven, die sich hauptsächlich in der Neigung des Oberkörpers unterscheiden. Bei niedrigen Geschwindigkeiten ist die Bewegung mit nach hinten geneigtem Oberkörper optimal, ab $\bar{v} > 0,7 \text{ m/s}$ ist die Neigung nach vorne besser. Alle Lösungen für dieses Zielfunktional zeichnen sich durch geringe Stoßverluste und daher relativ große Floquet-Multiplikatoren aus. Bei niedrigen Geschwindigkeiten mit nach hinten geneigtem Oberkörper ist die periodische Lösung instabil. Während der Bewegung ist die Gesamtenergie des Systems annähernd konstant, lediglich am Ende des Schritts wird die Gesamtenergie durch die Aktoren um den Anteil der Stoßverluste erhöht. Die maximalen Aktormomente liegen im Sprunggelenk des Standbeins an. Dabei ist das Moment im Sprunggelenk während der gesamten Bewegung sehr hoch und nimmt am Ende des Schritts bis zum jeweiligen Maximalmoment zu. Ein ähnliches Verhalten ergibt sich für das Kniegelenk des Standbeins. Die übrigen Gelenke sind während eines Großteils der Bewegung nicht oder schwach aktyert, das Schwingen der Beine resultiert also hauptsächlich aus der

natürlichen Dynamik des mechanischen Systems.³ Nur am Anfang oder am Ende des Schritts liegen in diesen Gelenken nennenswerte Momente an, welche die Schwingung entweder zu Beginn anstoßen oder am Ende abbremsen. Der Fuß wird bei diesen Bewegungen so aufgesetzt, dass der Kontakt in der Mitte der Sohle auf Höhe des Sprunggelenks stattfindet. Während des Schritts rollt der Fuß nach vorne ab, so dass der Anstieg des Moments im Sprunggelenk am Ende des Schritts einem Abdrücken des Fußes im Bereich der Zehen entspricht.

Beim Zielfunktional f_{usq} wird eine große Anzahl an Lösungskurven mit teils stark unterschiedlichen Bewegungen gefunden. Der Fuß wird in einer ähnlichen Orientierung aufgesetzt wie bei f_{mech} , allerdings findet das Abrollen bei vielen Lösungen nicht in Richtung der Zehen statt, sondern in Richtung der Ferse. Bei vielen Lösungen führt darüber hinaus der Fuß des Schwungbeins große Bewegungen aus. Die Gesamtenergie des Systems steigt während des Schritts stark an, was in großen Stoßverlusten resultiert. Dabei sind die Maximalmomente bei niedrigen Geschwindigkeiten deutlich geringer als beim anderen Zielfunktional, bei mittleren bis hohen Geschwindigkeiten steigt jedoch das Maximalmoment im Sprunggelenk des Standbeins stark an und übersteigt zum Teil das des Zielfunktionals f_{mech} .

Aufgrund all dieser Beobachtungen wird im Folgenden das Zielfunktional f_{usq} nicht weiter betrachtet. Dieses führt zu unnatürlich anmutenden Bewegungsabläufen, die zum Teil höhere Maximalmomente erfordern als die optimale Bewegung mit f_{mech} . Die hohen Stoßverluste führen außerdem zu großen Stoßimpulsen, die bei der Ausführung der Bewegung mit einem realen Roboter zu hohen Lager- und Materialbelastungen führen. Darüber hinaus ist das Zielfunktional f_{usq} eine Idealisierung für sehr ineffiziente Aktoren. Es wird davon ausgegangen, dass die fortschreitende technische Entwicklung im Bereich der Aktoren in Zukunft zu immer effizienteren Aktoren führt, die besser durch das Zielfunktional f_{mech} approximiert werden. Im folgenden Abschnitt werden mit diesem Zielfunktional weitere Fußmodelle mit den Parametern aus den Messungen an menschlichen Probanden untersucht.

9.2 Einfluss des Fußmodells

Bevor im nächsten Kapitel eine Optimierung der Fußgeometrie vorgenommen wird, werden zunächst einige der in Kapitel 4 an die Messdaten von menschlichen Probanden angepassten Fußmodelle untersucht. Dies dient einem besseren Verständnis der zugrundeliegenden Mechanismen und Zusammenhänge. Gleichzeitig werden damit vorteilhafte Anfangsparameter für die Optimierung ermittelt. Da die Parameter des

³ Wie in Kapitel 1 auf S. 11 erläutert, wird die Bezeichnung *Eigendynamik* im Zusammenhang mit nichtlinearen Systemen vermieden, um eine Verwechslung mit den *Eigenmoden* linearer Systeme zu vermeiden.

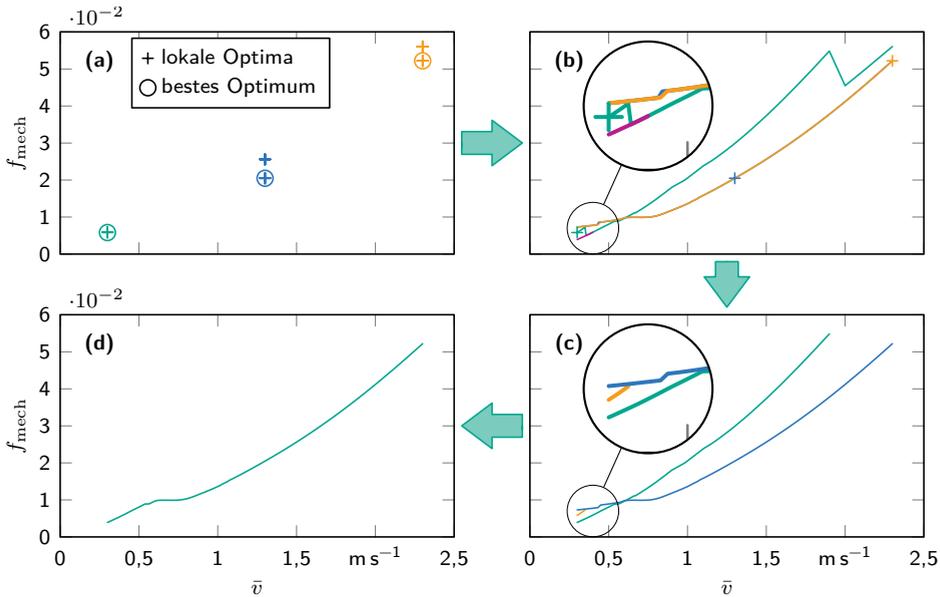


Abbildung 9.7: Prozess zur Berechnung der optimalen Lösungen im gesamten Geschwindigkeitsbereich $\bar{v} \in [0,3 \text{ m/s}, 2,3 \text{ m/s}]$ am Beispiel des Modells HM von Proband P1 (barfuß). (a) Berechnen der Lösung für 20 zufällige Anfangsbedingungen und Auswahl des jeweils besten (lokalen) Optimums. (b) Berechnen der zugehörigen Lösungskurven. Beim Wechseln auf eine neue Lösungskurve ggf. erneute Berechnung übersprungener Lösungen (violett). (c) Manuelles Festlegen des Existenzbereichs aller Lösungskurven. (d) Auswahl der jeweils besten Lösung für den gesamten Geschwindigkeitsbereich.

mechanischen Modells in Tabelle 5.1 auf Durchschnittswerten erwachsener Männer basieren, werden im Folgenden nur die Modelle des jeweils linken Fußes der vier männlichen Probanden P1–P4 betrachtet. Damit ergeben sich acht Parametrierungen für das Modell HM, auf die in Abschnitt 9.2.1 eingegangen wird, und weitere acht Parametrierungen für das Modell HMT, die in Abschnitt 9.2.2 betrachtet werden.

Bei allen Modellen wird zur Ermittlung der optimalen Lösungen im gesamten Geschwindigkeitsbereich $\bar{v} \in [0,3 \text{ m/s}, 2,3 \text{ m/s}]$ der in Abb. 9.7 dargestellte Prozess verwendet. Zunächst werden je 20 zufällige Anfangsbedingungen für die Geschwindigkeiten $\bar{v} = 0,3 \text{ m/s}$, $1,3 \text{ m/s}$ und $2,3 \text{ m/s}$ erzeugt, für die das NLP gelöst wird. Bei der Untersuchung mit 100 zufälligen Anfangsbedingungen für $\bar{v} = 1,3 \text{ m/s}$ in Abschnitt 8.1 ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von 45 %, dass die Optimierung zum globalen Optimum konvergiert. Unter der konservativen Annahme, dass bei allen Problemen nur die halbe Wahrscheinlichkeit von 22 % vorliegt, ergibt sich insgesamt eine Wahrscheinlichkeit von mehr als 99 %, dass die beste Lösung, die mit den 20 zufälligen Anfangsbedingungen ermittelt wird, dem jeweils globalen Optimum entspricht. Aus den jeweils 20 Lösungen wird das beste Optimum ausgewählt und

mittels des QPSQP-Verfahrens die zugehörige Lösungskurve für den gesamten Geschwindigkeitsbereich berechnet. Wie im vorigen Abschnitt diskutiert, ist ein Wechsel zwischen verschiedenen Lösungskurven nicht immer einfach zu ermitteln, weshalb der Existenzbereich aller Lösungskurven durch eine manuelle Auswahl festgelegt wird. Falls durch dieses Vorgehen neue Lösungskurven identifiziert werden, so wird das QPSQP-Verfahren verwendet, um diese möglichst vollständig zu bestimmen. Aus der Menge aller Lösungskurven wird abschnittsweise die jeweils beste ausgewählt, womit die effizientesten Bewegungen im gesamten Geschwindigkeitsbereich bestimmt werden. Wie im vergrößerten Ausschnitt in Abb. 9.7b zu sehen ist, liefert dieser Prozess keine Garantie dafür, dass mit den 20 zufällig generierten Anfangsbedingungen immer eine Lösung für das globale Optimum ermittelt wird. Insbesondere bei $\bar{v} = 0,3 \text{ m/s}$ ergeben sich viele lokale Lösungen, die nicht alle durch diesen Prozess ermittelt werden. Durch eine größere Anzahl an Anfangsbedingungen kann zwar die Wahrscheinlichkeit dafür erhöht werden, es gibt jedoch keine absolute Sicherheit, dass es sich bei dem besten lokalen Optimum tatsächlich um das globale Optimum handelt. Da durch eine größere Anzahl an Anfangsbedingungen die Rechenzeiten entsprechend ansteigen, wird von einer größeren Anzahl an Anfangsbedingungen abgesehen und im Folgenden der vorgestellte Prozess verwendet. Mit diesem werden in den nächsten Abschnitten die Fußmodelle HM ohne Zehen untersucht, und anschließend die Modelle HMT mit Zehen. Am Ende des Kapitels erfolgt eine Gegenüberstellung und Bewertung der Ergebnisse für die verschiedenen Modelle.

9.2.1 Fußmodell HM ohne Zehen

Mit dem Prozess nach Abb. 9.7 werden die Fußmodelle HM ohne Zehen im Bezug auf die Energieeffizienz beim Gehen untersucht. Es wird zunächst auf die Parametrierungen für die Barfuß-Experimente eingegangen, anschließend auf die der Schuh-Experimente.

Modelle der Barfuß-Experimente: In Abb. 9.8 sind die Fußgeometrien der an die Barfuß-Experimente angepassten Modelle für alle vier Probanden P1–P4 dargestellt. Das Modell mit der längsten Sohle und gleichzeitig der größten Krümmung ergibt sich für P3, während P4 das kürzeste Modell ist und gleichzeitig die geringste Krümmung aufweist. In Abb. 9.9a sind die Verläufe des Zielfunktionalis für alle vier Modelle dargestellt. Es fällt auf, dass die Unterschiede zwischen den verschiedenen Fußmodellen gering sind. Bei sehr niedrigen Geschwindigkeiten $\bar{v} < 0,6 \text{ m/s}$ ist der Fuß von P4 optimal, wobei sich bei dieser Lösung ein besonderer Gang ergibt, auf den im nächsten Absatz näher eingegangen wird. Die nächstbeste Lösung ergibt sich in diesem Geschwindigkeitsbereich für den größten Fuß (P3). Ab einer Geschwindigkeit von $\bar{v} > 0,7 \text{ m/s}$ sind die Modelle P2 und P3 optimal, während sich für P4 der höchste

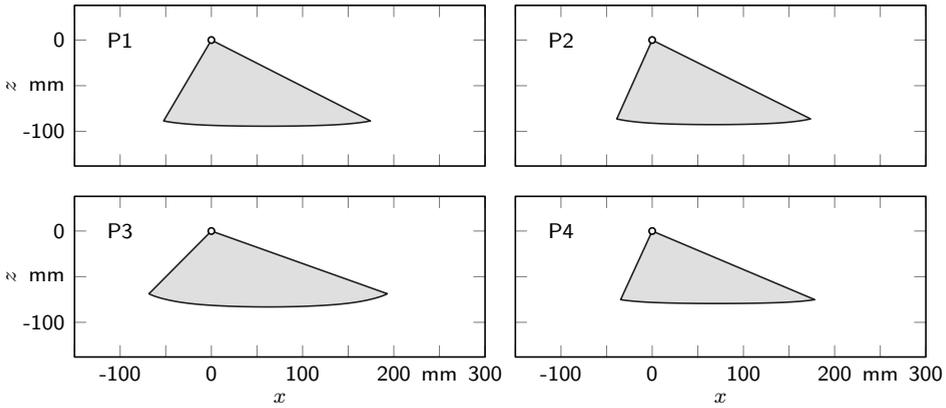
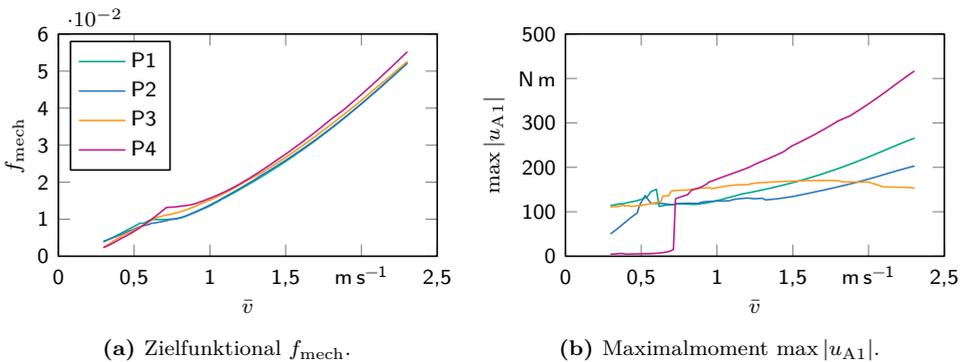


Abbildung 9.8: Geometrie der parametrisierten Fußmodelle HM (barfuß) des jeweils linken Fußes der Probanden P1 – P4.

Energieverbrauch ergibt. Die Unterschiede sind jedoch gering: für Geschwindigkeiten $\bar{v} > 1,3 \text{ m/s}$ beträgt die Differenz 6 %. Für niedrigere Geschwindigkeiten ist die relative Abweichung größer (maximal 34 % bei $\bar{v} = 0,7 \text{ m/s}$), die absolute Abweichung ist jedoch nach wie vor gering.

Bei der Betrachtung der Maximalmomente im Sprunggelenk des Standbeins zeigt sich erneut die Besonderheit bei niedrigen Geschwindigkeiten für das Modell P4, bei dem hier praktisch keine Aktuierung erfolgt. Dies liegt daran, dass die Optimierung für dieses Modell einen Gang auf Zehenspitzen findet, wie in Abb. 9.10a dargestellt. Da die Beine und Füße praktisch vollständig gestreckt sind, treten lediglich in den Hüft- und Knieaktoren nennenswerte Momente auf, die die Schwingung des Schwungbeins



(a) Zielfunktional f_{mech} .

(b) Maximalmoment $\max |u_{A1}|$.

Abbildung 9.9: (a) Wert des Zielfunktionals f_{mech} und (b) das Maximalmoment $\max |u_{A1}|$ im Sprunggelenk des Standbeins für die jeweils optimalen Bewegungen der Probanden P1 – P4 mit den Fußmodellen HM (barfuß).

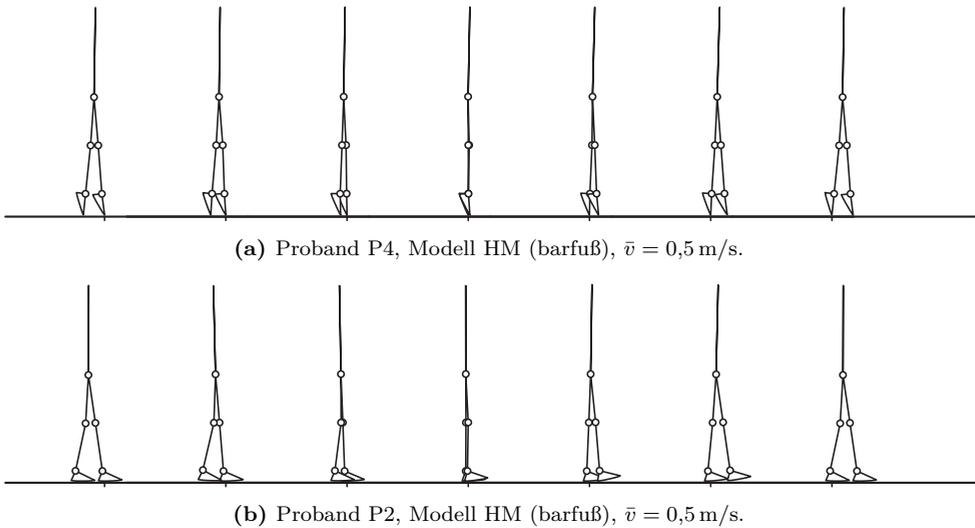


Abbildung 9.10: Illustration der jeweils optimalen Bewegung bei $\bar{v} = 0,5$ m/s für (a) Proband P4 und (b) Proband P2 mit dem Modell HM (barfuß) zu jeweils sieben äquidistanten Zeitpunkten.

beeinflussen und sicherstellen, dass dabei kein Kontakt mit dem Boden auftritt, vgl. Abb. D.1 (S. 230). Diese Art der Bewegung ist im Rahmen der vorliegenden Arbeit uninteressant, da sich die Bewegung auch durch ein Modell ohne Füße mit einem entsprechend längeren Unterschenkel erzeugen lässt. Die Fußgeometrie wird hier nicht für eine Abrollbewegung genutzt. Es handelt sich um eine Bewegung, die nur bei niedrigen Geschwindigkeiten effizient ist, wofür jedoch sehr hohe Aktormomente erforderlich sind. Eine Effizienzsteigerung für diese Art von Gang kann z. B. durch die in [27, 389] vorgeschlagenen elastischen Kopplungen der Beine erreicht werden.

Da die Definition des Zielfunktionalen einen wesentlichen Einfluss auf das Ergebnis der Optimierung hat, ist Vorsicht beim Vergleich mit anderen Modellen z. B. aus der Literatur geboten. So erinnert die Bewegung in Abb. 9.10a auf den ersten Blick an den Spitzentanz (*en pointe*) im Ballett. Dieser Art von Tanzbewegungen stellt jedoch hohe Anforderungen an die (dreidimensionale) Balance und weist große ermüdungsbedingte Veränderungen der Bewegung auf – vgl. z. B. [195, 210]. Nach Meinung des Verfassers kann nicht davon ausgegangen werden, dass die zugrundeliegenden Effekte viele Gemeinsamkeiten mit dem (zweidimensionalen) Gang von P4 aufweisen.

Die Bewegungsabläufe der drei Modelle für P1–P3 weisen bei niedrigen Geschwindigkeiten ebenfalls eine Besonderheit gegenüber dem im vorigen Abschnitt diskutierten Modell auf. In Abb. 9.10b ist exemplarisch die optimale Bewegung des Modells von Proband P2 bei $\bar{v} = 0,5$ m/s dargestellt. Es fällt auf, dass die Abrollbewegung des Fußes zunächst nach hinten stattfindet, also die Zehenspitze angehoben wird. Am Ende

des Schritts findet ein schnelles Abrollen nach vorne statt, so dass sich ein Abdrücken des Fußes mit einem Kontakt im Bereich der Zehen ergibt. Die in Abb. D.2a (S. 230) dargestellte Schrittlänge kann bei allen drei Modellen bei niedrigen Geschwindigkeiten durch einen linearen Zusammenhang mit der Geschwindigkeit angenähert werden. Dies deutet darauf hin, dass durch die jeweils optimale Lösung hauptsächlich die natürliche Dynamik des Systems beim Schwingen der Beine ausgenutzt wird, um eine möglichst hohe Effizienz zu erreichen. Ein linearer Zusammenhang zwischen Schrittlänge und Geschwindigkeit folgt aus einer näherungsweise konstanten Schrittfrequenz, vgl. [27, 389]. Die Stabilität der periodischen Gehbewegungen der drei Modelle P1–P3 weist bei niedrigen Geschwindigkeiten große Schwankungen auf, vgl. Abb. D.2b (S. 230). Die Lösungen sind zum Teil instabil, wobei kein klarer Trend oder Zusammenhang erkennbar ist. Die Stabilität hängt in großem Maße von der jeweiligen Lösungskurve ab, die für das betrachtete Modell optimal ist.

Bei allen Modellen ist ab einer Geschwindigkeit von ca. $\bar{v} = 0,6$ m/s eine Lösungskurve optimal, bei der nach dem Aufsetzen des Fußes eine monotone Abrollbewegung in Richtung der Zehenspitze und am Ende des Schritts ein Abdrücken des Fußes stattfindet (nicht dargestellt, vgl. Abb. 9.2b und 9.2c, S. 166). Die Energieeffizienz dieser Lösung unterscheidet sich nicht stark beim Vergleich der verschiedenen Modelle, es gibt jedoch deutliche Unterschiede bei den maximal auftretenden Aktormomenten, vgl. Abb. D.1 (S. 230). Insbesondere bei hohen Geschwindigkeiten liefert hier das Modell P3 mit dem längsten Fuß und der größten Krümmung der Sohle die geringsten Maximalmomente, während diese beim Modell P4 mit dem kürzesten Fuß und der geringsten Krümmung am höchsten sind. Die Energieeffizienz ist jedoch bei keinem dieser beiden Modelle minimal, sondern bei den Modellen P2 und P3, die zu einem praktisch identischen Energieverbrauch führen. Während bei der Betrachtung der maximalen Aktormomente ein möglichst langer Fuß mit hoher Krümmung vorteilhaft erscheint, ist bei der Energieeffizienz kein klarer Zusammenhang erkennbar. Eine Bewertung und Gegenüberstellung aller Modelle erfolgt am Ende dieses Kapitels, zunächst werden die an die Schuh-Experimente angepassten Modelle diskutiert.

Modelle der Schuh-Experimente: Die Fußgeometrien des an die Schuh-Experimente angepassten Modells HM für alle vier Probanden P1–P4 sind in Abb. 9.11 dargestellt. Im Vergleich zu den Geometrien der Barfuß-Experimente in Abb. 9.8 ergibt sich eine deutlich größere Länge und Krümmung der Sohle. Eine besondere Auffälligkeit ist außerdem der große Abstand vom Sprunggelenk zur Ferse, die deutlich weiter hinten liegt als bei den Parametrierungen der Barfuß-Experimente. Bei den Modellen der Probanden P2 und P4 ist die Geometrie fast symmetrisch im Bezug auf das Sprunggelenk, womit die Ferse denselben Abstand hat wie die Zehenspitze. Auf diese Besonderheit wird in Abschnitt 4.3.2 eingegangen: bei der Anpassung der Modelle an

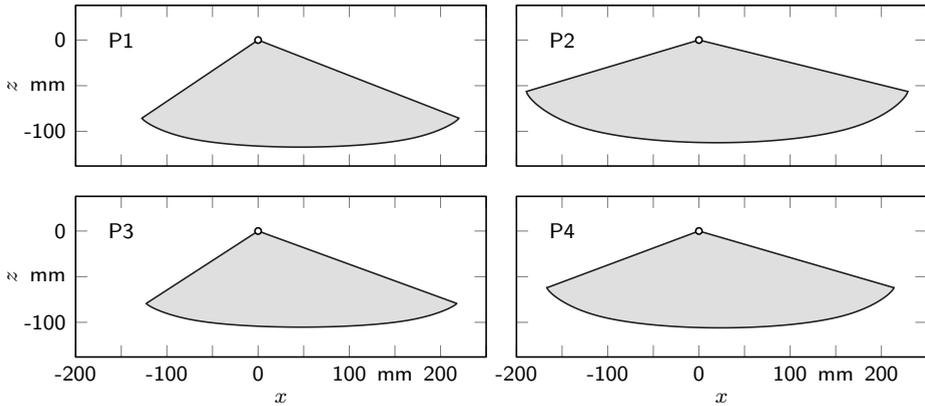
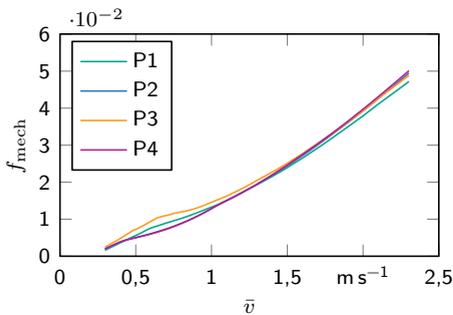


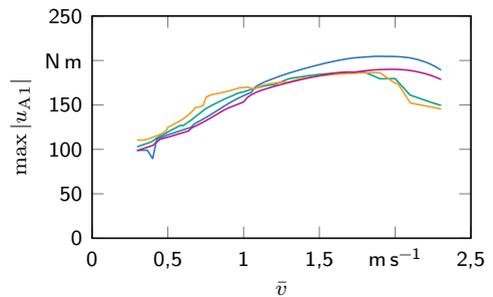
Abbildung 9.11: Geometrie der parametrisierten Fußmodelle HM (mit Schuhen) des jeweils linken Fußes der Probanden P1–P4.

die Messungen liegen die entsprechenden Kontaktpunkte nur auf einem Teil der Sohle; der Bereich der Ferse wird nicht direkt zur Anpassung an die Sprunggelenktrajektorien verwendet, vgl. Abb. 4.9 (S. 97).

Ein Vergleich des Energieverbrauchs für diese Modelle in Abb. 9.12a mit denen der Barfuß-Parametrierungen in Abb. 9.9a zeigt eine leichte Steigerung der Energieeffizienz. Bei niedrigen Geschwindigkeiten $\bar{v} < 1,2 \text{ m/s}$ sind die Modelle P2 und P4 optimal, bei hohen Geschwindigkeiten das Modell P1. Ein direkter Vergleich des Zielfunktionalwerts von Modell P2 – die beste Parametrierung der an die Barfuß-Experimente angepassten Modelle – ergibt für Geschwindigkeiten $\bar{v} > 1,0 \text{ m/s}$ einen um mindestens 8 % geringeren Energieverbrauch. Bei niedrigen Geschwindigkeiten ist der relative



(a) Zielfunktional f_{mech} .



(b) Maximalmoment $\max |u_{A1}|$.

Abbildung 9.12: (a) Wert des Zielfunktional f_{mech} (P2 durch P4 überdeckt) und (b) das Maximalmoment $\max |u_{A1}|$ im Sprunggelenk des Standbeins für die jeweils optimalen Bewegungen der Probanden P1–P4 mit den Fußmodellen HM (mit Schuhen).

Verbrauch noch deutlich geringer und beträgt bei $\bar{v} = 0,5 \text{ m/s}$ genau die Hälfte. Durch die größere Krümmung und Länge der Sohle kann also die Energieeffizienz beim Gehen gesteigert werden. Inwieweit die etwas größere Höhe ebenfalls einen Einfluss hat, lässt sich aus diesen Betrachtungen jedoch nicht aussagen. Der Grund dafür, dass bei niedrigen Geschwindigkeiten die Modelle P2 und P4 am effizientesten sind, liegt im Abrollverhalten des Fußes begründet. Dieser rollt hier bei niedrigen Geschwindigkeiten zunächst in Richtung Ferse ab, und erst am Ende des Schritts in Richtung der Zehen, vgl. Abb. 9.2a (S. 166). Da diese beiden Modelle einen deutlich größeren Abstand von der Ferse zum Sprunggelenk aufweisen, scheint eine effizientere Ausführung dieser Art von Bewegung möglich zu sein.

Die Betrachtung der maximalen Aktormomente in Abb. D.3 (S. 231) und insbesondere die Betrachtung des Maximalmoments im Sprunggelenk des Standbeins in Abb. 9.12 zeigen, dass diese sowohl qualitativ als auch quantitativ sehr ähnlich zu den Ergebnissen der Barfuß-Parametrierung von Proband P3 sind – dem Barfuß-Modell mit der längsten Sohle und der größten Krümmung. Beim Vergleich mit den Barfuß-Modellen von P1 und P2 zeigt sich, dass die Maximalmomente im Sprunggelenk des Standbeins etwas angestiegen sind. Lediglich bei sehr hohen Geschwindigkeiten sind diese für die Parametrierungen der Schuh-Experimente gleich oder sogar etwas geringer. Dafür ergeben sich jedoch deutlich geringere Maximalmomente in den Hüftaktoren, die bei den Barfuß-Parametrierungen bei hohen Geschwindigkeiten sogar größer sind als die im Sprunggelenk des Standbeins. Die Hüftaktoren beeinflussen hauptsächlich den Öffnungswinkel der Oberschenkel – also den Öffnungswinkel der Beine – am Anfang bzw. Ende des Schritts. Bei einem Modell ohne Füße entspricht dies gerade der Schrittlänge. Durch das Abrollen der Füße addiert sich dazu jedoch die durch den Kontaktpunkt des Standfußes beim Abrollen zurückgelegte Strecke. Es kann also mit längeren Füßen dieselbe Schrittlänge bei einem geringeren Öffnungswinkel der Beine erreicht werden, woraus die geringeren Momente in den Hüftaktoren resultieren. Daraus können auch die Verläufe der Schrittlänge in Abb. D.4a (S. 231) erklärt werden. Diese weisen insbesondere bei den Modellen P2 und P4 für die meisten Geschwindigkeiten $\bar{v} < 1,0 \text{ m/s}$ einen deutlich linearen Zusammenhang mit der Geschwindigkeit auf. Die Gehbewegung entspricht in diesem Fall der natürlichen Bewegung des Systems, was sie sehr effizient macht. Bei höheren Geschwindigkeiten ist die Schrittlänge bei den Barfuß-Parametrierungen geringer als bei den Modellen der Schuh-Experimente. Dies liegt mit großer Wahrscheinlichkeit daran, dass die Sohle der Barfuß-Modelle kürzer ist. Die größte Übereinstimmung ergibt sich wieder zum Barfuß-Modell von P3, also zu dem Modell mit der längsten Sohle. Ein Vergleich der stabilitätsrelevanten Floquet-Multiplikatoren in Abb. D.4b mit Abb. D.2b (S. 231 bzw. S. 230) zeigt jedoch, dass die optimalen Bewegungen für diese Parametrierungen insbesondere bei niedrigen Geschwindigkeiten deutlich häufiger und in einem größeren Bereich instabil sind. Bevor

am Ende des Kapitels ein Vergleich aller Modelle und eine Beurteilung der Ergebnisse vorgenommen wird, werden im folgenden Abschnitt zunächst die Parametrierungen für die Fußmodelle HMT mit Zehen betrachtet.

9.2.2 Fußmodell HMT mit Zehen

Nachdem im vorigen Abschnitt die Fußmodelle HM ohne Zehen untersucht wurden, werden im Folgenden die an die Experimente mit den Probanden P1–P4 angepassten Fußmodelle HMT mit Zehen betrachtet. Zunächst wird auf die Parametrierungen für die Barfuß-Experimente eingegangen, anschließend auf die an die Schuh-Experimente angepassten Modelle.

Modelle der Barfuß-Experimente: Die Fußgeometrien des an die Barfuß-Experimente angepassten Modells HMT für alle vier Probanden P1–P4 sind in Abb. 9.13 dargestellt. Der Vergleich der Geometrien ist in diesem Fall schwieriger als beim Modell HM, da die Sohle zwei Abschnitte aufweist – ein Abschnitt von der Ferse zum Großzehengrundgelenk und einer vom Großzehengrundgelenk zur Zehenspitze. Eine Besonderheit ergibt sich für Proband P1: die Geometrie hat keinen ausgeprägten Zehenbereich, sondern ist praktisch identisch mit der des entsprechenden Modells HM ohne Zehen. Dieses Modell wird daher im Folgenden nicht als gleichwertig mit den Modellen von P2–P4 betrachtet, sondern vielmehr zum Vergleich dieser drei Modelle mit dem Modell HM herangezogen.

Bei den verbleibenden Modellen ergibt sich die längste Sohle und die größte Krümmung zwischen der Ferse und dem Großzehengrundgelenk für das Modell P2. Die größte Krümmung im Bereich der Zehen ergibt sich für das Modell P4, dafür ist dieses sehr

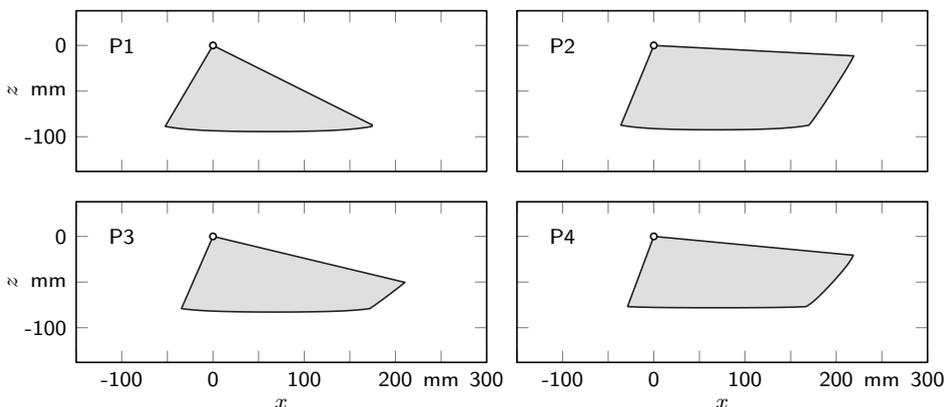


Abbildung 9.13: Geometrie der parametrisierten Fußmodelle HMT (barfuß) des jeweils linken Fußes der Probanden P1–P4.

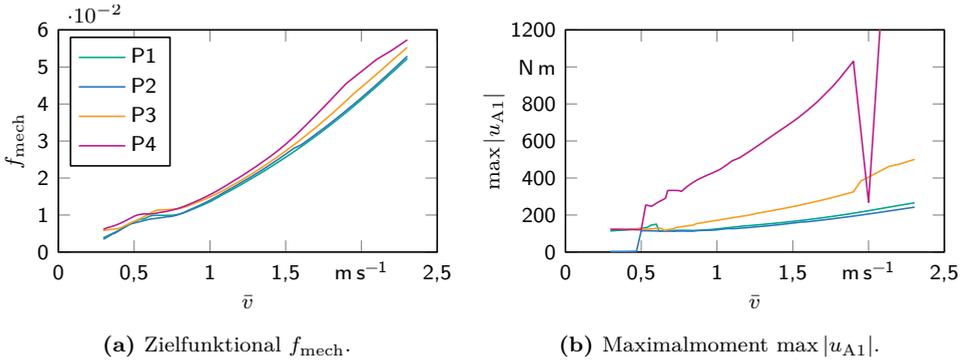


Abbildung 9.14: (a) Wert des Zielfunktional f_{mech} und (b) das Maximalmoment $\max |u_{A1}|$ im Sprunggelenk des Standbeins für die jeweils optimalen Bewegungen der Probanden P1–P4 mit den Fußmodellen HMT (barfuß).

flach im Bereich zwischen der Ferse und dem Großzehengrundgelenk. Das Modell P3 weist im Vergleich zu den beiden anderen Modellen eine mittlere Krümmung und dieselbe Länge wie P2 im Bereich von der Ferse zum Großzehengrundgelenk auf. Dabei hat es den kürzesten Zehenbereich mit der geringsten Krümmung. Das Modell P2 ist das höchste der betrachteten Modelle (10,3% höher als Modell P3), während Modell P3 und P4 in dieser Hinsicht sehr ähnlich sind (relativer Unterschied: 2,7%). Der Anstellwinkel der Zehen γ_F nimmt von P3 über P4 zu P2 deutlich von 37° über 47° bis auf 57° zu, vgl. Tabelle B.6 (S. 222).

In Abb. 9.14a ist der Energieverbrauch für alle Modelle gegenübergestellt. Es zeigt sich, dass Modell P1, das praktisch keinen ausgeprägten Zehenbereich aufweist, das effizienteste Modell ist. Lediglich für niedrige Geschwindigkeiten $\bar{v} < 0,8 \text{ m/s}$ ist das Modell P2 marginal besser. Dies liegt jedoch daran, dass das Modell keine Abrollbewegung mit dem Standfuß ausführt, sondern auf der Hacke geht, wie in Abb. 9.15 dargestellt. Diese Bewegung hat ähnliche Eigenschaften wie das Gehen auf der Zehenspitze in Abb. 9.10a (S. 177) und wird daher aus denselben Gründen in der folgenden Betrachtung ausgeschlossen.⁴ Die Betrachtung der Maximalmomente im Sprunggelenk des Standbeins zeigt, dass Modell P2 sehr ähnlich zu P1 ist, also zu einem Modell ohne Zehen, vgl. Abb. 9.9b (S. 176). Beim Modell P3 ist das Maximalmoment im Bereich $\bar{v} \in [0,6 \text{ m/s}, 2,3 \text{ m/s}]$ durchschnittlich um 47% höher. Bei P4 – dem Modell mit der flachsten Sohle zwischen der Ferse und dem Großzehengrundgelenk – ist das Maximalmoment durchschnittlich viermal so groß wie beim Modell P1. Hier gibt es lediglich bei $\bar{v} = 2,0 \text{ m/s}$ einen starken Ausreißer mit deutlich geringerem Maximalmoment, was

⁴ Beide Lösungen, der Gang auf Zehenspitzen oder auf der Hacke, können bei der Optimierung gefunden werden, wenn ausreichend viele Anfangsbedingungen generiert werden. Darüber hinaus muss die jeweilige Geometrie an diesen Punkten spitz genug sein, so dass sich praktisch ein Punktkontakt ergibt. Dies ist aufgrund der sehr kleinen Werte von k_H und k_M bzw. k_T der Fall.

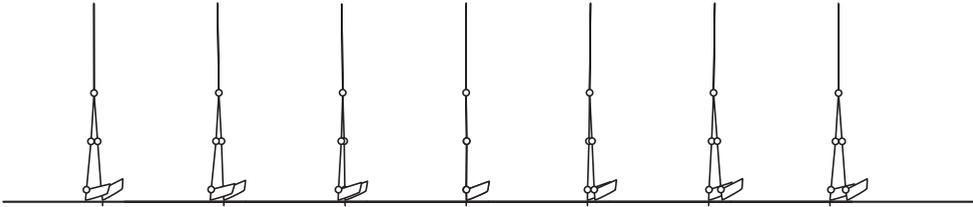


Abbildung 9.15: Illustration der optimalen Bewegung für Proband P2 bei $\bar{v} = 0,5 \text{ m/s}$ mit dem Modell HMT (barfuß) zu jeweils sieben äquidistanten Zeitpunkten.

daran liegt, dass hier ein einzelner Punkt einer anderen Lösungskurve die optimale Lösung darstellt. Als einziger Vorteil der Modelle HMT mit Zehen gegenüber den Modellen HM ohne Zehen ist die Stabilität der periodischen Gehbewegung anzusehen, die in Abb. D.6b (S. 232) dargestellt ist. Hier ergibt sich für keines der vier betrachteten Modelle eine instabile Gehbewegung. Aufgrund der schlechteren Energieeffizienz und der höheren Maximalmomente überwiegen jedoch deutlich die Nachteile gegenüber dem Modell ohne Zehen. Bevor ein abschließender Vergleich aller Ergebnisse dieses Abschnitts vorgenommen wird, werden die Parametrierungen der Schuh-Experimente ausgewertet.

Modelle der Schuh-Experimente: Die Fußgeometrien des an die Schuh-Experimente angepassten Modells HMT für alle vier Probanden P1–P4 sind in Abb. 9.16 dargestellt. Der direkte Vergleich mit den Modellen für die Barfuß-Experimente in Abb. 9.13 zeigt, dass alle Gesamtabmessungen zunehmen, was sich durch die zusätzliche Schuhsohle in den Experimenten erklären lässt. Die Krümmung der Sohle

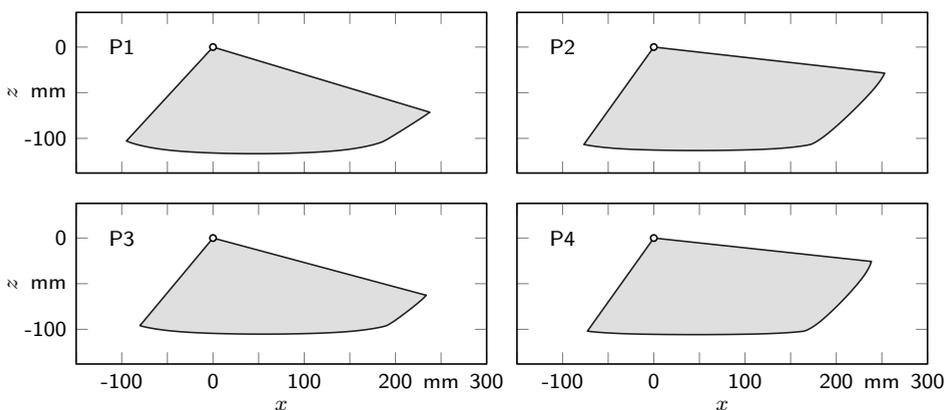


Abbildung 9.16: Geometrie der parametrisierten Fußmodelle HMT (mit Schuhen) des jeweils linken Fußes der Probanden P1–P4.

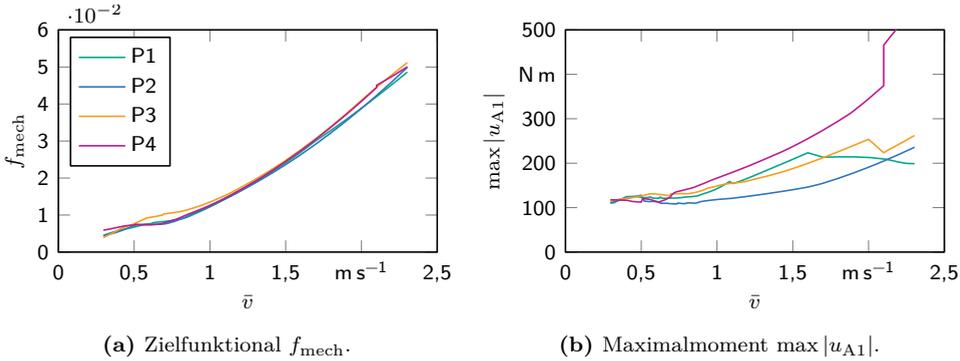


Abbildung 9.17: (a) Wert des Zielfunktional f_{mech} und (b) das Maximalmoment $\max |u_{A1}|$ im Sprunggelenk des Standbeins für die jeweils optimalen Bewegungen der Probanden P1–P4 mit den Fußmodellen HMT (mit Schuhen).

ist außerdem größer als im Barfuß-Fall. Ein Vergleich mit den ebenfalls an die Schuh-Experimente angepassten Geometrien für das Fußmodell HM in Abb. 9.11 zeigt einen deutlich kürzeren Abstand von der Ferse zum Sprunggelenk. Das Modell P1 weist die größte Krümmung im Bereich zwischen der Ferse und dem Großzehengrundgelenk auf, jedoch die kleinste Krümmung im Bereich der Zehen. Es ist gleichzeitig das höchste Modell. Die Modelle P2 und P4 weisen die geringsten Krümmungen im Bereich von der Ferse zum Großzehengrundgelenk auf, dafür jedoch die größten Krümmungen im Bereich der Zehen. Die Lage des Großzehengrundgelenks relativ zum Sprunggelenk ist bei allen Modellen ähnlich, vgl. Tabelle B.9 (S. 223).

Das Modell P2 führt, im gesamten Geschwindigkeitsbereich betrachtet, die effizienteste Bewegung aus, wie in Abb. 9.17a dargestellt. Lediglich bei hohen Geschwindigkeiten $\bar{v} > 2,0 \text{ m/s}$ weist das Modell P1 einen geringeren Energieverbrauch auf. Im Bereich $\bar{v} \in [1,1 \text{ m/s}, 2,0 \text{ m/s}]$ ist das Modell P2 am effizientesten, bei niedrigeren Geschwindigkeiten gibt es mehrere Wechsel zwischen den Modellen P1 und P2 als bester Lösung; die Unterschiede sind jedoch sehr gering. Eine Auswertung der Maximalmomente im Sprunggelenk des Standbeins in Abb. 9.17b zeigt, dass dieses bei P2 über den Großteil des betrachteten Geschwindigkeitsbereichs am geringsten ist. Die Gehbewegungen werden bei allen Modellen für niedrige Geschwindigkeiten teilweise instabil, vgl. Abb. D.8b (S. 233). Unter diesem Gesichtspunkt ist also keines der vier Modelle deutlich besser als die anderen.

In Abb. 9.18 ist die Bewegung der Modelle P1 und P2 bei $\bar{v} = 2,3 \text{ m/s}$ dargestellt. Die Orientierung beim Aufsetzen des Fußes ist bei beiden Bewegungen wieder so, dass der Kontaktpunkt nahe am Sprunggelenk ist. Anschließend findet ein Abrollen über das Großzehengrundgelenk statt. Während diese beim Modell P1 bis zur Zehenspitze fortgesetzt wird, kommt der Bereich zwischen dem Großzehengrundgelenk und der

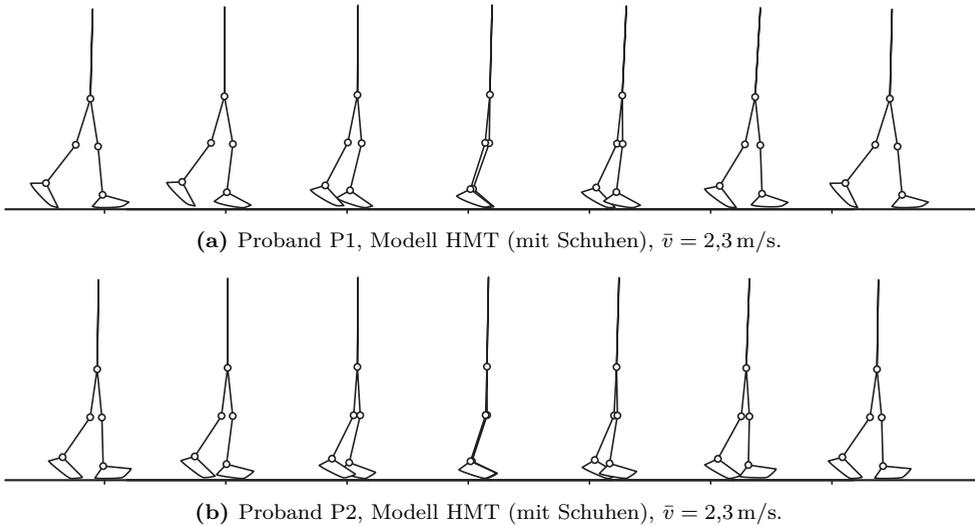


Abbildung 9.18: Illustration der jeweils optimalen Bewegung bei $\bar{v} = 2,3 \text{ m/s}$ für (a) Proband P1 und (b) P2 mit dem Modell HMT (mit Schuhen) zu jeweils sieben äquidistanten Zeitpunkten.

Zehenspitze bei P2 jedoch nicht in Kontakt mit dem Boden. Die Bewegung nutzt also den Zehenbereich beim Abrollen gar nicht aus, weshalb der Eindruck entsteht, dass hierfür auch das Modell HM ausreichend wäre. Ein Vergleich und eine Bewertung aller Ergebnisse wird im nächsten Abschnitt vorgenommen.

9.2.3 Vergleich und Bewertung

Die in den Abschnitten 9.2.1 und 9.2.2 untersuchten Modelle weisen sehr unterschiedliche Fußgeometrien auf, führen jedoch zu einer sehr ähnlichen Energieeffizienz. In Abb. 9.19a sind die Verläufe des Zielfunktionalwerts f_{mech} für das jeweils beste Modell der vier betrachteten Fälle gegenübergestellt. Als bestes Modell wird dasjenige ausgewählt, das im Geschwindigkeitsbereich $\bar{v} > 1,0 \text{ m/s}$ den geringsten Energieverbrauch aufweist. Bei niedrigen Geschwindigkeiten ergeben sich zum Teil Lösungen – wie der Gang auf Zehenspitzen (vgl. Abb. 9.10a, S. 177) oder der Hacke (vgl. Abb. 9.15, S. 183) –, die in der vorliegenden Arbeit nicht von Interesse sind. Außerdem ist der Energieverbrauch bei niedrigen Geschwindigkeiten gering, weshalb eine relative Steigerung der Energieeffizienz nur kleine absolute Steigerungen zur Folge hat. Bei den an die Barfuß-Experimente angepassten Modellen HM ohne Zehen in Abb. 9.9 wird die Lösung von Proband P2 ausgewählt, da der Unterschied zu P1 marginal ist, jedoch das Maximalmoment im Sprunggelenk deutlich geringer ausfällt.

Die Energieeffizienz unterscheidet sich zwischen den vier ausgewählten Modellen nicht wesentlich. Im Geschwindigkeitsbereich $\bar{v} \in [0,6 \text{ m/s}, 1,7 \text{ m/s}]$ stellt das Fußmodell

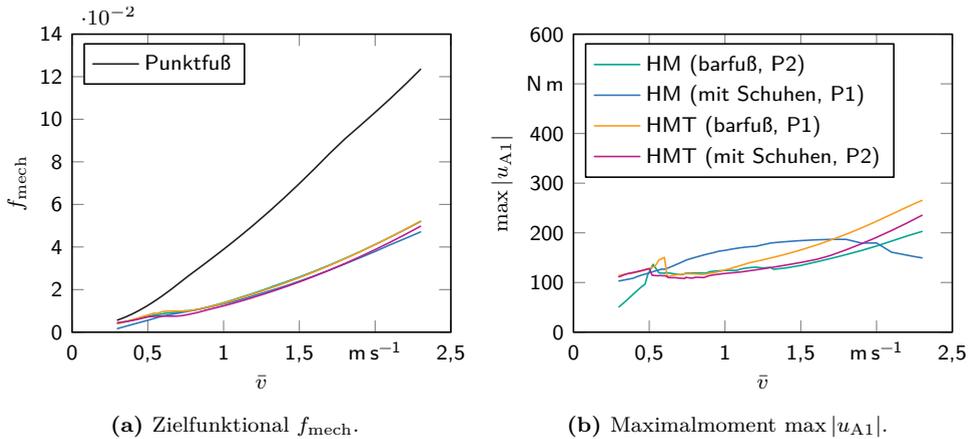


Abbildung 9.19: (a) Vergleich des Zielfunktionalwerts f_{mech} und (b) des Maximalmoments $\max |u_{A1}|$ im Sprunggelenk des Standbeins für die jeweils optimalen Parametrierungen der vier Modelle in den Abschnitten 9.2.1 und 9.2.2. In (a) zum Vergleich der Verlauf des Zielfunktionalwerts eines Modell mit Punktfüßen (schwarz).

HMT mit der Parametrierung von Proband P2 für die Schuh-Experimente die beste Lösung dar. Bei niedrigeren und höheren Geschwindigkeiten ist das Fußmodell HM mit der Parametrierung von Proband P1 für die Schuh-Experimente die beste Lösung. Die Mittelwerte dieser beiden Lösungen unterscheiden sich jedoch nur unwesentlich; eine genaue Betrachtung zeigt, dass das Modell HMT um 0,7% schlechter ist. Ein Unterschied ergibt sich bei den Maximalmomenten im Sprunggelenk des Standbeins. Hier erfordert das Modell HMT über den gesamten Geschwindigkeitsbereich betrachtet ein geringeres Maximalmoment. Lediglich bei hohen Geschwindigkeiten $\bar{v} > 1,9 \text{ m/s}$ kehrt sich diese Situation um.

Zur Einordnung der Energieeffizienz wird ein Modell mit Punktfüßen zum Vergleich herangezogen. Die Modellierung, die Berechnung periodischer Gehbewegungen als Grenzyklen der hybriden Nullodynamik und die Optimierung der Bewegung wird analog zum Vorgehen in Kapitel 5 durchgeführt.⁵ Die Parameter dieses Modells sind in Tabelle D.1 (S. 229) zusammengefasst. Diese ergeben sich aus den Parametern in Tabelle 5.1 (S. 127), indem angenommen wird, dass die Füße fest mit dem Unterschenkel verbunden sind und deren Masse und Massenträgheitsmoment entsprechend den Parametern des Unterschenkels zugeschlagen werden. Der Energieverbrauch dieses Modells ist in Abb. 9.19a neben den vier besten Modellen mit Füßen dargestellt. Daraus ist ersichtlich, dass die optimalen Bewegungen der Modelle mit Füßen einen deutlich geringeren Energieverbrauch aufweisen als das Modell mit Punktfüßen. Bei

⁵ Zur Modellierung und Optimierung periodischer Gehbewegungen eines Modells mit Punktfüßen siehe auch [394].

der Gegenüberstellung des Modells HMT von Proband P2 (mit Schuhen) ergibt sich bei $\bar{v} = 2,3 \text{ m/s}$ eine Einsparung von 60 %. Der Mittelwert über den gesamten Geschwindigkeitsbereich ist um 64 % geringer. Obwohl die Fußgeometrie nicht speziell für dieses Modell optimiert, sondern lediglich an die Messdaten der menschlichen Probanden angepasst wurde, ergibt sich durch die Verwendung eines abrollenden Fußes eine deutliche Steigerung der Energieeffizienz. Diese liegt in derselben Größenordnung (>60 %), die in [225] für Experimente mit einem HZD-geregelten zweibeinigen Roboter ermittelt werden (vgl. S. 22). Dabei ist jedoch zu beachten, dass dieser Roboter kein bewegliches Sprunggelenk besitzt, sondern kreisförmige Abrollformen fest mit dem Unterschenkel verbunden werden. Darüber hinaus hat dieser Roboter andere Modellparameter und es wird ein anderes Zielfunktional verwendet, weshalb diese quantitative Übereinstimmung nicht überbewertet werden sollte.

Das Maximalmoment im Sprunggelenk des Standbeins gemäß Abb. 9.19b zeigt für alle Modelle außer das Modell HM von P1 (mit Schuhen) einen qualitativ und quantitativ sehr ähnlichen Verlauf, wobei sich ab $\bar{v} > 0,6 \text{ m/s}$ eine monotone Zunahme ergibt. Der abweichende Verlauf für das Modell HM von P1 (mit Schuhen) wird auf die deutlich größere Krümmung der Sohle zurückgeführt, was auf S. 180 beim Vergleich aller Modelle HM diskutiert wird.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass nicht nur das Modell, sondern auch das verwendete Zielfunktional einen wesentlichen Einfluss auf die Bewegung, die Aktormomente und die damit berechnete Energieeffizienz haben. Das Zielfunktional f_{mech} auf Basis der zugeführten mechanischen Leistung liefert dabei bessere Ergebnisse, als f_{usq} und wird für alle weiteren Studien verwendet. Die betrachteten Fußmodelle, die aus der Anpassung an die Experimente mit menschlichen Probanden gewonnen werden, zeigen bereits eine deutliche Effizienzsteigerung gegenüber einem Modell ohne Füße, obwohl keine Optimierung dieser Modelle vorgenommen wurde. Die Einsparungen betragen im Mittel mehr als 60 %. Das Modell für periodische Gehbewegungen auf Basis der HZD-Regelung liefert in Kombination mit der Optimierung und Lösungsverfolgung durch das QPSQP-Verfahren gute Ergebnisse bei der Erzeugung optimaler Bewegungen in einem großen Geschwindigkeitsbereich. Im nächsten Kapitel wird auf dieser Basis eine Optimierung der Fußgeometrie vorgenommen. Als Ausgangspunkt für diese Optimierung wird das Modell HMT von Proband P2 (mit Schuhen) als Ausgangspunkt verwendet. Dessen Energieeffizienz ist gleichauf mit dem Modell HM von Proband P1 (mit Schuhen), bietet durch die höhere Anzahl an Parametern jedoch mehr Potential zur Optimierung der Geometrie.

10 Optimierung der Fußgeometrie

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist – neben der Untersuchung des Einflusses der Fußgeometrie auf die Energieeffizienz beim zweibeinigen Gehen –, Methoden zur Untersuchung und Optimierung von Robotern zu entwickeln. Zu diesem Zweck werden in Kapitel 3 Fußmodelle zur effizienten Beschreibung der Geometrie und Simulation von Gehbewegungen hergeleitet. Die Regelung des Robotermodells durch das Konzept der hybriden Nulldynamik erlaubt eine effiziente Simulation periodischer Gehbewegungen, die zur Optimierung genutzt werden kann. Das SQP-Verfahren zur Lösung des Optimierungsproblems und das QPSQP-Verfahren zu dessen numerischer Fortsetzung ermöglichen schließlich die effiziente Durchführung von Parameterstudien bei der Variation von Systemparametern oder von Nebenbedingungen.

Diese Methoden werden im vorigen Kapitel zur Untersuchung der in Kapitel 4 an die Experimente mit menschlichen Probanden angepassten Fußmodelle und deren Einfluss auf die Energieeffizienz beim Gehen verwendet. Im Folgenden wird an zwei Anwendungsbeispielen deren Einsatz in einem Entwicklungsprozess vorgestellt. Dies ist zum einen eine Sensitivitätsanalyse, bei welcher der Einfluss von Parametervariationen auf die Energieeffizienz untersucht wird. Zum anderen wird die Fußgeometrie im Hinblick auf eine optimale Energieeffizienz beim Gehen optimiert.

Die Sensitivitätsanalyse wird in Abschnitt 10.1 durchgeführt. Da das Problem nichtglatt ist, kann es nur unzureichend durch das dafür übliche Vorgehen mittels einer Linearisierung in den Parametern beschrieben werden. Das QPSQP-Verfahren bietet die Möglichkeit, die interessierenden Parameter in einem kleinen, jedoch nicht infinitesimalen Intervall zu variieren. Dabei wird mit hoher Wahrscheinlichkeit die ursprüngliche Lösung fortgesetzt und kein Wechsel auf eine andere Lösungskurve stattfinden. Anschließend wird in Abschnitt 10.2 eine Optimierung der Fußgeometrie mithilfe des SQP-Verfahrens vorgenommen.

10.1 Sensitivität in Bezug auf Fußparameter

Die Entwicklung eines technischen Systems – im vorliegenden Fall ein zweibeiniger Roboter – stellt einen iterativen Prozess dar, bei dem nach einem ersten Konzept eine immer konkretere Gestaltung aller Details erfolgt. In diesem Prozess stellt sich häufig die Frage, wie durch die gezielte Veränderung der Modellparameter eine Verbesserung erzielt werden kann. Im vorliegenden Fall soll ein erster Eindruck davon gewonnen werden, welche Abmessungen und Regularisierungsparameter sich besonders stark auf die Energieeffizienz auswirken und ggf. bei der Optimierung im nächsten Abschnitt beschränkt werden müssen. Einen Zugang zu dieser Fragestellung stellt eine Sensitivitätsanalyse dar, bei der untersucht wird, wie sich kleine Veränderungen aller interessierender Parameter auf das jeweilige Zielfunktional auswirken. Mit dieser Motivation ist es naheliegend, aus den Ableitungen der Lösung nach den Parametern die Sensitivität für infinitesimale Parametervariationen zu berechnen.

Da es sich hierbei um ein nichtglattes Problem handelt, ist eine Analyse der Sensitivität durch die Betrachtung der Ableitungen zwar prinzipiell möglich, jedoch nicht unbedingt sinnvoll. Es tritt dasselbe Problem auf, das beim Entwurf des QPSQP-Verfahrens in Kapitel 7 ausschlaggebend für die Entwicklung des QP-Prädiktor-Verfahrens ist: durch den nichtglatten Charakter der Lösungskurve kann eine kleine Variation in Richtung der Linearisierung zu einer großen Abweichung von der tatsächlichen Lösung führen, da keine Informationen über die Ungleichheitsnebenbedingungen berücksichtigt werden. Der Gültigkeitsbereich der Sensitivitätsanalyse aus der Betrachtung der Ableitungen ist also sehr klein, weshalb ein anderer Zugang notwendig ist.

Durch das QPSQP-Verfahren steht eine Methode zur Verfügung, um eine solche Untersuchung auch für nichtglatte Systeme durchzuführen. Dabei wird keine infinitesimale, sondern eine kleine, jedoch endliche Veränderung der Parameter betrachtet. In Abb. 10.1 wird exemplarisch der Einfluss der Fußparameter auf den Energieverbrauch für das im vorigen Kapitel ausgewählte Modell HMT von Proband P2 (mit Schuhen) bei $\bar{v} = 2,3 \text{ m/s}$ untersucht. Da der Energieverbrauch bei hohen Geschwindigkeiten am größten ist, hat eine Verbesserung in diesem Bereich das größte Potential für signifikante Steigerung der durchschnittlichen Energieeffizienz. Dabei werden alle Parameter, welche die Geometrie des erzeugenden Polygons beschreiben, sowie die Regularisierungsparameter im Bereich der Sohle und der Zehen jeweils um $\pm 10\%$ variiert und die Differenz Δf_{mech} des Zielfunctionals ausgewertet. Diese Auswertung zeigt, dass z. B. der Einfluss der Fußhöhe h_F sehr gut durch einen linearen Zusammenhang beschrieben werden kann, der sich auch mittels Linearisierung bestimmen lässt. Für die Länge ℓ_{MT} ergibt sich bereits bei einer relativen Änderung von 2% ein Knick. Da nicht a priori klar ist, ob, wann und bei welchen Parametern solche Knicke auftreten, ist eine Sensitivitätsanalyse mittels Linearisierung ungeeignet, die

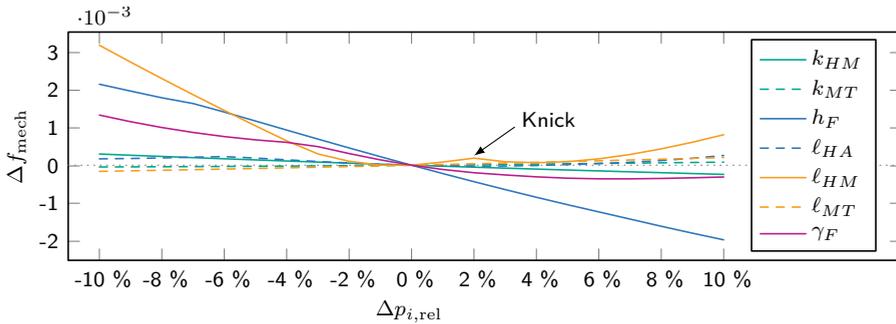


Abbildung 10.1: Sensitivitätsanalyse zur Untersuchung des Einflusses kleiner Parameteränderungen auf den Zielfunktionalwert f_{mech} . Dabei wird die Veränderung Δf_{mech} des Zielfunktionalwertes bei einer Variation der Parameter $\bigcup_{i=1}^7 p_i = \{k_{HM}, k_{MT}, h_F, l_{HA}, l_{HM}, l_{MT}, \gamma_F\}$ um $\pm 10\%$ betrachtet.

ursprüngliche Fragestellung zu beantworten. Das QPSQP-Verfahren verfolgt hingegen mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit die nichtglatte Lösung, ohne auf eine andere Lösungskurve zu springen, was eine saubere Analyse solcher Probleme erlaubt. Dies ermöglicht fundierte Entscheidungen im Entwicklungs- und Konstruktionsprozess, womit unnötige Iterationen vermieden werden können.

Im vorliegenden Beispiel hat eine Vergrößerung der Fußhöhe h_F das größte Potential zur Verringerung des Zielfunktionalwertes f_{mech} . Ebenfalls positiv – wenn auch deutlich schwächer – wirkt sich eine Steigerung des Parameters k_{HM} aus, was zu einer größeren Krümmung der Sohle zwischen Ferse und Großzehengrundgelenk führt. Die Länge der Sohle scheint dahingegen bei diesem Modell schon optimal zu sein: sowohl eine Verkürzung, als auch eine Verlängerung durch die Veränderung von l_{HM} bewirkt eine Zunahme von f_{mech} . Dasselbe gilt für den Parameter l_{HA} . Bei der Betrachtung der drei Parameter k_{MT} , l_{MT} und γ_F zeigt sich, dass eine Absenkung oder Verlängerung des Zehenbereichs eine Zunahme des Energieverbrauchs zur Folge hat.

Über die jeweiligen Ursachen und zugrundeliegenden Effekte kann allein aus dieser Sensitivitätsanalyse keine Aussage gemacht werden. Außerdem wird jeweils immer nur ein Parameter variiert, weshalb keine Wechselwirkungen berücksichtigt sind. Die Aussagekraft ist auf kleine Parameterveränderungen beschränkt. Ein Ansatz zur Verbesserung des Modells im Rahmen eines Entwicklungsprozesses, bei dem diese Einschränkungen nicht auftreten, besteht in der direkten Optimierung der Parameter. Dieser wird im nächsten Abschnitt behandelt.

10.2 Optimierung der Fußgeometrie

Eine wichtige Methode in vielen Entwicklungsprozessen ist die Optimierung von Modellparametern eines Systems im Hinblick auf die geplante Anwendung. Im Fall

eines zweibeinigen Roboters ist eine Anforderung eine möglichst hohe Energieeffizienz, welche im Folgenden durch die Optimierung der Fußgeometrie maximiert wird. Aus Geometrieänderungen resultiert immer eine Veränderung der Masse, der Schwerpunktlage und des Massenträgheitsmoments. Diesem Umstand wird im Folgenden durch eine (Flächen-)Dichte des Fußes Rechnung getragen.¹ Unter der Annahme, dass das Material und die Dicke² des Fußes gleich bleiben, hat somit eine Veränderung der Geometrie und damit der Querschnittsfläche des Fußes eine direkte Auswirkung auf diese Größen, deren Berechnung in Anhang E beschrieben wird.

Die Sensitivitätsanalyse im vorigen Abschnitt zeigt, dass es im Sinne der Energieeffizienz vorteilhaft ist, insbesondere die Fußhöhe zu maximieren. Dies ist jedoch nicht beliebig möglich, da z. B. beim Betrieb in einem Gebäude durch die übliche Decken- und Türhöhe Grenzen vorgegeben sind, die bei der Entwicklung eines zweibeinigen Roboters berücksichtigt werden müssen. Um ein unbeschränktes Vergrößern der Geometrie durch den Optimierungsalgorithmus zu verhindern, sind Nebenbedingungen erforderlich, welche die maximalen Abmessungen begrenzen. Zudem wird durch die Bestimmung der Masse und des Massenträgheitsmoments aus der Geometrie eine Vergrößerung in alle Richtungen im Zielfunktional bestraft, da schwerere Füße zu einem größeren Energieaufwand beim Schwingen der Beine führen. Es haben also zwei Effekte Einfluss auf die Energieeffizienz: einerseits führt eine Vergrößerung der Abmessungen in bestimmte Richtungen zu einer Verringerung des Energieverbrauchs durch die effizientere Abrollbewegung und die gesteigerte effektive Länge der Beine – den Abstand von der Hüfte zum Boden. Andererseits führen größere Abmessungen zu einer größeren Masse, was sich negativ auf den Energieverbrauch auswirkt. Durch die Optimierung wird eine Lösung ermittelt, die den besten Kompromiss aus beiden Effekten darstellt.

Ausgangspunkt für die Optimierung ist das Fußmodell HMT mit der Parametrierung für die Experimente von Proband P2 (mit Schuhen), das in Abschnitt 9.2.3 als bestes der betrachteten Modelle identifiziert wird. Zunächst wird als Referenz die (homogene) Flächendichte für dieses Modell so bestimmt, dass sich dieselbe Masse nach Tabelle 5.1 (S. 127) ergibt, woraus $\rho = 36,9 \text{ kg/m}^2$ folgt. Um den Einfluss der Fußmasse auf die optimale Fußgeometrie bei diesem gekoppelten Optimierungsproblem zu untersuchen, werden im Folgenden Flächendichten im Bereich $\rho \in [10 \text{ kg/m}^2, 70 \text{ kg/m}^2]$ betrachtet. Eine konvexe Fußgeometrie wird bei der Optimierung durch die Nebenbedingungen nach Gl. (3.24)

$$\mathbf{0} \leq \left[h_F, \ell_{HM}, \ell_{HA}, \ell_{HM} - \ell_{HA}, \ell_{MT}, \gamma_F, \frac{\pi}{2} - \gamma_F, k_H, k_{HM}, k_{MT}, k_T \right]^T$$

¹ Es sind auch andere Annahmen möglich, z. B. eine hohle Geometrie mit vorgegebener Wandstärke.

² Da es sich um ein ebenes Modell handelt, wird die Ausdehnung senkrecht zur Ebene im Folgenden als *Dicke* und nicht als *Breite* bezeichnet.

sichergestellt. Um außerdem eine unbegrenzte Vergrößerung der Abmessungen zu verhindern, werden die zusätzlichen Nebenbedingungen

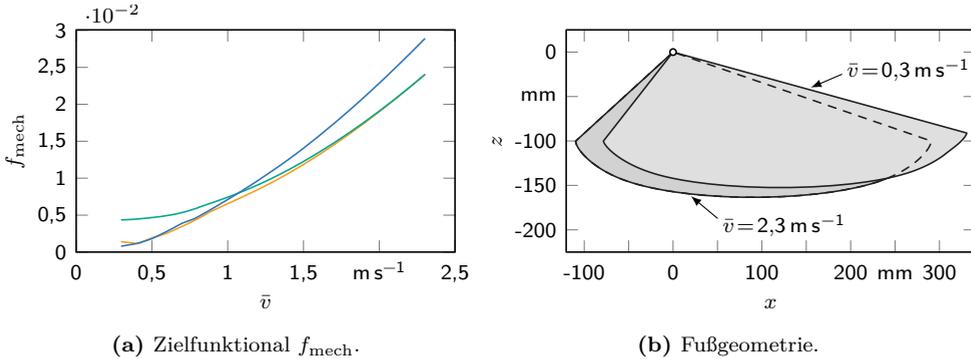
$$\mathbf{0} \leq [\ell_{HM,\max} - \ell_{HM}, h_{F,\max} - h_F, h_F - \ell_{MT}, 0,5 - k_{HM}, 0,5 - k_{MT}]^T \quad (10.1)$$

eingeführt. Damit wird die Länge von der Ferse zum Großzehengrundgelenk auf $\ell_{HM,\max} = 400$ mm beschränkt, womit dieser Parameter um maximal 60 % gegenüber dem Ausgangsmodell gesteigert werden kann, vgl. Tabelle B.9 (S. 223). Die Höhe des erzeugenden Polygons wird auf $h_{F,\max} = 100$ mm beschränkt, welche etwas geringer ist, als die des Ausgangsmodells. Die Sensitivitätsanalyse aus dem vorigen Abschnitt zeigt, dass sich eine Vergrößerung von k_{HM} positiv auf die Energieeffizienz auswirkt. Da die Höhe der tatsächlichen Geometrie größer ist als die des erzeugenden Polygons – insbesondere, wenn der Regularisierungsparameter und damit die Krümmung groß sind –, wird durch diese konservative Wahl verhindert, dass die Fußabmessungen zu groß werden.³ Außerdem wird die Länge des Zehenbereichs ℓ_{MT} auf die Höhe h_F limitiert, damit die Länge der Sohle insgesamt beschränkt ist. Die Regularisierungsparameter k_{HM} und k_{MT} werden auf den – relativ zum Ausgangsmodell – hohen Wert 0,5 beschränkt.

Zur Optimierung der Fußgeometrie werden für $\rho = 10 \text{ kg/m}^2, 20 \text{ kg/m}^2, \dots, 70 \text{ kg/m}^2$ jeweils bei der höchsten Geschwindigkeit $\bar{v} = 2,3 \text{ m/s}$ durch die Addition von Zufallszahlen 20 Startwerte erzeugt. Die Fußparameter und die Bewegung werden gleichzeitig optimiert. Aus diesen Lösungen werden die jeweils besten ausgewählt und damit die Optimierung für den gesamten Geschwindigkeitsbereich durchgeführt. Durch dieses Vorgehen wird für jede Geschwindigkeit eine jeweils optimale Fußgeometrie bestimmt. Dies setzt bei der konstruktiven Umsetzung in einem realen Roboter eine veränderliche Fußgeometrie voraus. Dem Verfasser ist kein aktueller zweibeiniger Roboter bekannt, bei dem dies möglich ist. Es wird daher in einem weiteren Schritt die jeweils optimale Geometrie für die höchste und die niedrigste Geschwindigkeit ausgewählt und für diese Modelle mit fixen Fußparametern die jeweils optimale Bewegung im gesamten Geschwindigkeitsbereich ermittelt.

Dies ist in Abb. 10.2 exemplarisch für die optimale Lösung bei $\rho = 10 \text{ kg/m}^2$ dargestellt. Bei der Betrachtung des Zielfunktionals in Abb. 10.2a zeigt sich, dass die gleichzeitige Optimierung der Fußgeometrie und der Bewegung, wie erwartet, zu einem geringeren Energieverbrauch führt als die Optimierung der Bewegung bei fixer Fußgeometrie. Allerdings konvergiert dieses Problem bei niedrigen Geschwindigkeiten $\bar{v} < 1,0 \text{ m/s}$ schlechter, als wenn nur die Bewegung optimiert wird. Dies erklärt die Abweichung zwischen den beiden Lösungskurven (orange und blau) bei $\bar{v} = 0,3 \text{ m/s}$. Der durch-

³ Zum Vergleich: mit den Abmessungen nach Tabelle 5.1 führt eine Fußhöhe von 112 mm auf die angesetzte Gesamthöhe von 1,8 m.


 (a) Zielfunktional f_{mech} .

(b) Fußgeometrie.

Abbildung 10.2: (a) Wert des Zielfunktional f_{mech} bei der Optimierung der Fußgeometrie für $\rho = 10 \text{ kg/m}^2$. Der Verlauf bei gleichzeitiger Optimierung von Fußgeometrie und Bewegung in orange; der Verlauf für die optimale Geometrie bei $\bar{v} = 2,3 \text{ m/s}$ ($\bar{v} = 0,3 \text{ m/s}$) in grün (blau). (b) Die zugehörige Fußgeometrie bei $\bar{v} = 2,3 \text{ m/s}$ ($\bar{v} = 0,3 \text{ m/s}$) in dunkelgrau (hellgrau).

schnittliche Zielfunktionalwert im gesamten Geschwindigkeitsbereich ist für die bei $\bar{v} = 2,3 \text{ m/s}$ optimale Fußgeometrie um 9 % höher und für die bei $\bar{v} = 0,3 \text{ m/s}$ optimale Fußgeometrie um 17 %. Dies zeigt, dass die Einschränkung auf eine unveränderliche Fußgeometrie für alle Geschwindigkeiten nicht zu einer wesentlichen Verschlechterung der Energieeffizienz führt. Es kann davon ausgegangen werden, dass durch die Optimierung der Fußgeometrie zur Minimierung des durchschnittlichen Energieverbrauchs eine weitere – wenn auch kleine – Verbesserung erzielt werden kann. Da diese jedoch bei weniger als 9 % liegt, die Rechenzeiten dafür deutlich zunehmen und die Konvergenz potentiell schlechter wird, werden im Folgenden lediglich die Fußgeometrien für die höchste Geschwindigkeit betrachtet.

Bei der Betrachtung der optimalen Fußgeometrien in Abb. 10.2b fällt auf, dass kein erkennbarer Zehenbereich vorhanden ist. Dabei wird bei dieser Dichte die maximal zulässige Höhe $h_{F,\text{max}}$ und auch die maximale Länge $\ell_{HM,\text{max}}$ ausgenutzt. Im Gegensatz dazu sind die Schranken für die Regularisierungsparameter k_{HM} und k_{MT} nicht aktiv. Die optimale Geometrie ist für niedrige Geschwindigkeiten etwas flacher als für hohe Geschwindigkeiten. Außerdem verschiebt sich die relative Lage des Sprunggelenks mehr in Richtung der Ferse. Die Zehenspitze T ist für $\bar{v} = 2,3 \text{ m/s}$ auf derselben Höhe wie die Ferse H , für $\bar{v} = 0,3 \text{ m/s}$ nur um 9 mm darüber. Dies ist konsistent mit den Ergebnissen aus dem vorigen Kapitel, in welchem die Modelle HMT mit ausgeprägtem Zehenbereich nur eine marginal bessere Effizienz liefern als die Modelle HM. Da ein zusätzlicher Zehenbereich die Querschnittsfläche und damit auch die Masse erhöht, lohnt sich die Verbesserung der Effizienz aufgrund der größeren Geometrie gegenüber der Verschlechterung durch die zusätzliche Masse nicht.

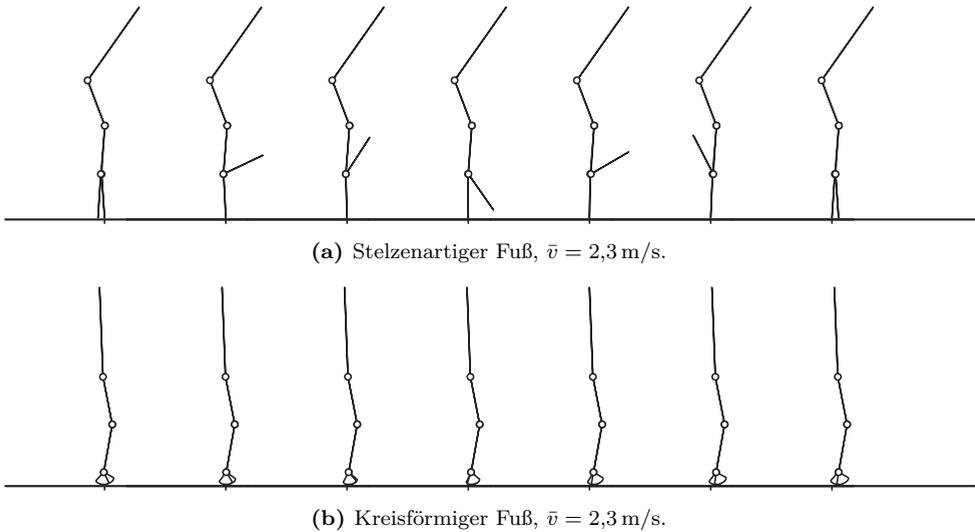


Abbildung 10.3: Illustration der jeweils optimalen Bewegung für (a) einen dünnen, stelzenartigen Fuß und (b) einen kreisförmigen Fuß (ähnlich einem Kreisausschnitt mit Mittelpunkt im Sprunggelenk) zu jeweils sieben äquidistanten Zeitpunkten.

Bevor auf die jeweils optimalen Fußgeometrien und die zugehörigen Bewegungen für verschiedene Dichten ρ eingegangen wird, ist anzumerken, dass sich aus den zufällig generierten Anfangsbedingungen, wie im vorigen Kapitel, Lösungen ergeben, die nicht als sinnvoll erachtet werden. Zwei dieser Lösungen sind in Abb. 10.3 dargestellt. Bei der in Abb. 10.3a dargestellten Lösung ergibt sich ein sehr dünner Stab, für welchen alle Längen bis auf ℓ_{HM} verschwindend klein werden. Da diese Geometrie keine Fläche mehr einschließt, ergibt sich weder eine Masse noch ein Massenträgheitsmoment, weshalb der Fuß des Schwungbeins ohne Energieaufwand beliebig bewegt werden kann. Zur Fortbewegung werden sehr hochfrequente, kurze Schritte ausgeführt. Die Schrittlänge beträgt bei $\bar{v} = 2,3 \text{ m/s}$ lediglich 60 mm, die Schrittfrequenz 38 Hz.

Bei der anderen Lösung in Abb. 10.3b ergibt sich eine nahezu kreisförmige Fußgeometrie, deren Mittelpunkt im Sprunggelenk liegt. Beim Gehen werden die Beine fast nicht bewegt, es findet lediglich ein geringes Anheben und späteres Absetzen des Schwungbeinfußes statt. Stattdessen wird die Abrollbewegung auf der näherungsweise kreisförmigen Sohle zur Fortbewegung genutzt, was im Prinzip der Bewegung eines Rades entspricht. Aufgrund der Modellierung in Kapitel 5 und der Periodizitätsbedingungen für alle Gelenkwinkel ist eine Lösung, bei welcher der Fuß während des Schritts eine ganze Umdrehung ausführt, nicht möglich. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung des Einflusses der Fußgeometrie auf die Energieeffizienz beim zweibeinigen Gehen, nicht beim Fahren mittels eines Rades. Unter den getroffenen

Annahmen (keine Energiedissipation; Wahl des Zielfunktional) ist das Rollen mittels eines kreisförmigen Rades ohne Energieverbrauch möglich. Ein zweibeiniger Roboter, der dieses Prinzip zur Fortbewegung nutzt, existiert bereits, vgl. [148]. Lösungen dieser Art werden im Folgenden nicht weiter betrachtet.

Bei der Optimierung der Fußgeometrie ergeben sich im Wesentlichen zwei Ergebnisse: bei niedrigen Dichten ist ein großer Fuß optimal, der die maximal zulässige Höhe ausnutzt; bei hohen Dichten ist ein flacher Fuß optimal, dessen erzeugendes Polygon mit $h_F = 0$ zu einer Linie degeneriert. Die beiden Lösungen werden in der folgenden Diskussion als *hohe Fußgeometrie* und als *flache Fußgeometrie* bezeichnet. In Abb. 10.5 sind die für $\bar{v} = 2,3 \text{ m/s}$ optimalen hohen Fußgeometrien dargestellt. Als Referenz ist zudem die Ausgangsgeometrie für das Fußmodell HMT mit der Parametrierung für die Experimente von Proband P2 (mit Schuhen) abgebildet. In Abb. 10.6 sind die für $\bar{v} = 2,3 \text{ m/s}$ optimalen flachen Geometrien dargestellt. Die zugehörigen Fußparameter sind in Tabellen 10.1 und 10.2 angegeben. Da sich bei allen Lösungen $\ell_{MT} = 0$ ergibt und zur Beschreibung der Modelle daher nur die Parameter des Fußmodells HM benötigt werden, sind nur diese aufgeführt.

Bei der hohen Fußgeometrie wird für die niedrigste Dichte $\rho = 10 \text{ kg/m}^2$ die maximale Länge $\ell_{HM,\max}$ erreicht. Je mehr die Dichte zunimmt, desto kürzer wird der Fuß. Außerdem nimmt die Krümmung der Sohle deutlich ab. Die Fußmasse verändert sich nicht monoton. Für die geringste Dichte ist auch die Fußmasse minimal, für $\rho = 20 \text{ kg/m}^2$ jedoch maximal, wobei nie der Wert $m_F = 0,96 \text{ kg}$ nach Tabelle 5.1 (S. 127) erreicht wird. In Abb. 10.4a ist die Bewegung für die hohe Fußgeometrie mit $\rho = 10 \text{ kg/m}^2$ bei $\bar{v} = 2,3 \text{ m/s}$ dargestellt. Der Fuß wird bei dieser Bewegung mit gestrecktem Bein auf der Hacke aufgesetzt. Anschließend findet eine Abrollbewegung in Richtung der Zehenspitze statt. Diese wird jedoch nicht ganz erreicht, bevor der Schritt abgeschlossen ist. Stattdessen wird der Standfuß abgedrückt, während sich der Kontaktpunkt im vorderen Bereich der Sohle kurz hinter der Zehenspitze befindet. Der Oberkörper ist während der Bewegung leicht nach hinten geneigt. In der ersten Hälfte des Schritts ist das Standbein gestreckt und das Schwungbein wird angewinkelt, um den Fuß über dem Boden zu halten. In der zweiten Hälfte des Schritts wird das Schwungbein gestreckt, während das Standbein langsam angewinkelt wird. Dabei bleibt der Oberschenkel des Standbeins nahezu vertikal und die Höhe der Hüfte, der Knie und des Schwerpunkts ändern sich nur um ca. 7 mm. Da das Schwungbein beim Aufsetzen des Fußes nicht nur gestreckt, sondern nahezu vertikal ist, wird nur wenig Energie im Stoß dissipiert. Die horizontale Schwerpunktrajektorie ist konsistent zu den sechs wichtigen Bestimmungsfaktoren beim Gehen des Menschen in [308]; das gestreckte, nahezu vertikal aufsetzende Bein ist analog zur Beschreibung der menschlichen Gehbewegung in [356], vgl. S. 5 und 6.

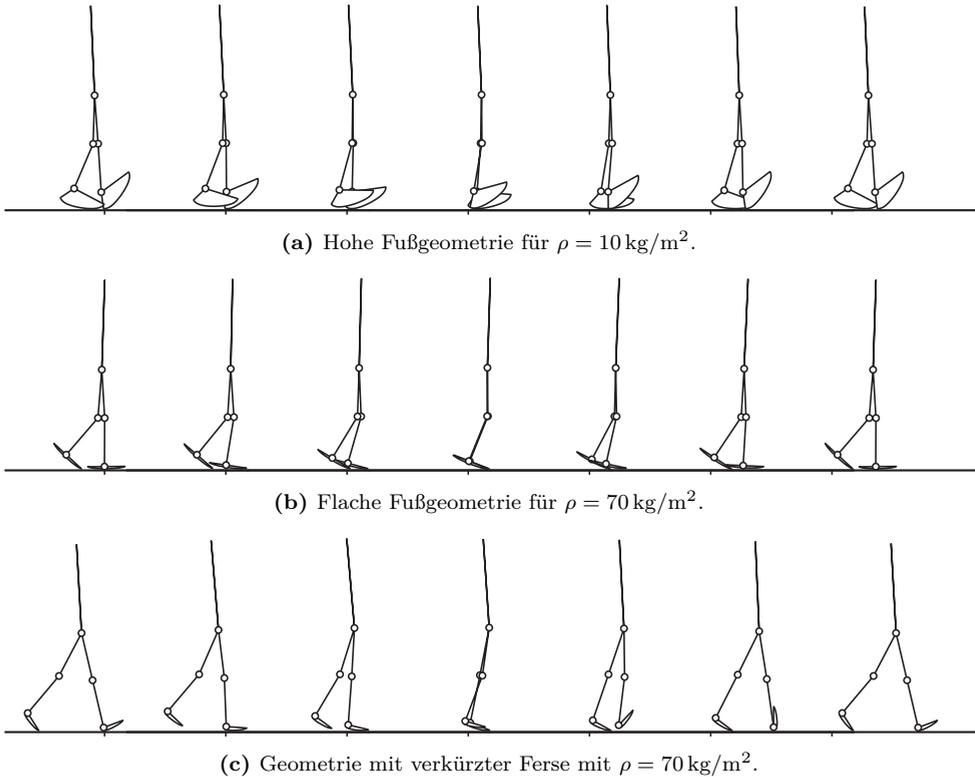


Abbildung 10.4: Illustration der jeweils optimalen Bewegung bei $\bar{v} = 2,3 \text{ m/s}$ für (a) die hohe Geometrie bei $\rho = 10 \text{ kg/m}^2$, (b) die flache Geometrie bei $\rho = 70 \text{ kg/m}^2$ und (c) die flache Geometrie mit verkürzter Ferse bei $\rho = 70 \text{ kg/m}^2$ zu jeweils sieben äquidistanten Zeitpunkten.

Die flachen Fußgeometrien stellen in Bezug auf die Fußhöhe das gegenteilige Extrem dar: das erzeugende Polygon ist mit $h_F = 0 \text{ mm}$ zu einer Linie degeneriert. Die Querschnittsfläche ergibt sich allein aus der gekrümmten Sohle aufgrund des Regularisierungsparameters k_{HM} . Die in Abb. 10.6 dargestellten Geometrien sind daher symmetrisch, wobei das Sprunggelenk jeweils etwas hinter der Fußmitte liegt. Für die Dichten $\rho = 10 \text{ kg/m}^2$, 20 kg/m^2 und 30 kg/m^2 erreicht die Fußlänge die Grenze $\ell_{HM, \max}$. Mit zunehmender Dichte werden auch die flachen Fußgeometrien kürzer. Die Bewegung in Abb. 10.4b unterscheidet sich im Vergleich zur hohen Geometrie in der Neigung des Oberkörpers, der nach vorne und nicht mehr nach hinten geneigt ist. Weiterhin ist das Bein beim Aufsetzen des Fußes leicht angewinkelt. Der Fuß wird dabei nicht direkt auf der Ferse aufgesetzt, sondern nahezu horizontal, so dass der Kontaktpunkt auf der Verlängerungslinie des Unterschenkels liegt. Der Standfuß wird direkt nach dem Aufsetzen sehr schnell bis zur Zehenspitze abgerollt und kippt anschließend über diesen Punkt. Dabei gibt es zunächst keine Relativbewegung im

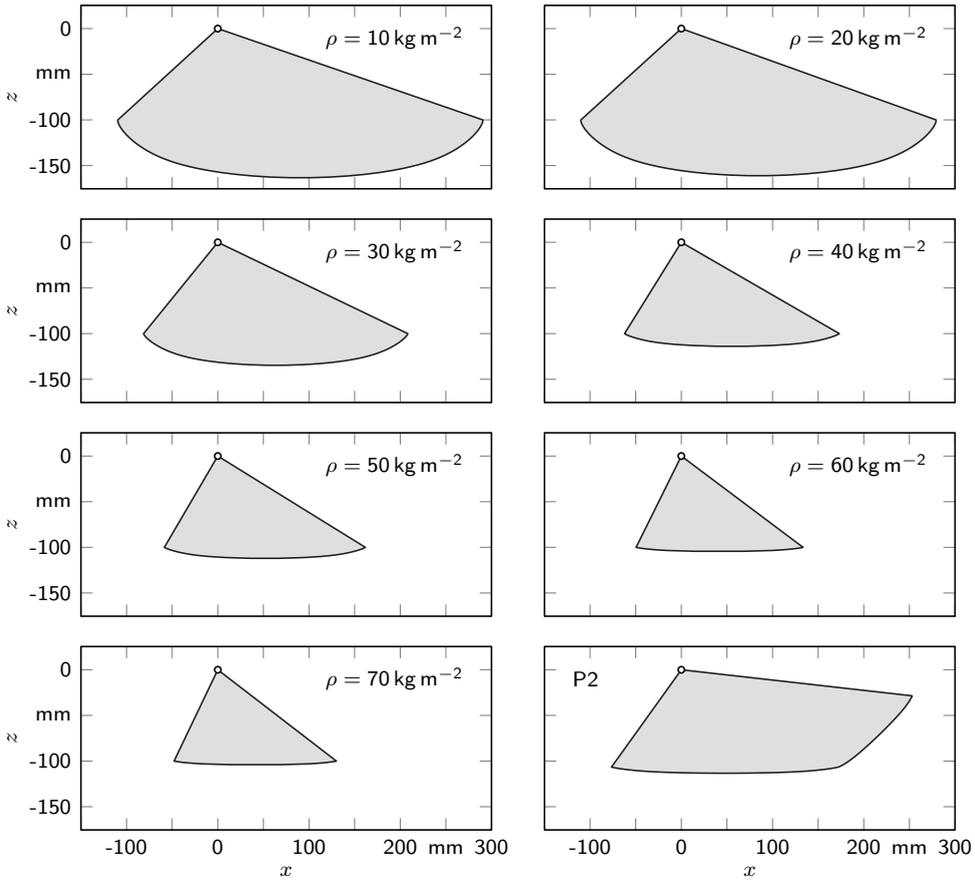


Abbildung 10.5: Optimale hohe Fußgeometrien für $\rho = 10 \text{ kg/m}^2, 20 \text{ kg/m}^2, \dots, 70 \text{ kg/m}^2$, sowie zum Vergleich die Geometrie von Proband P2.

Tabelle 10.1: Parameter der hohen Fußgeometrien.

ρ in kg m^{-2}	k_H, k_T in rad^{-1}	k_{HM} in rad^{-1}	h_F in mm	ℓ_{HA} in mm	ℓ_{HM} in mm	$\theta_{F,0}$ in rad^{-1}	r_F in mm	m_F in kg	J_F in kg m^{-2}
10	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,2 \cdot 10^{-1}$	100,0	109,5	400,0	2,480	122,6	0,399	$4,0 \cdot 10^{-3}$
20	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,1 \cdot 10^{-1}$	100,0	110,0	389,2	2,509	118,7	0,762	$7,2 \cdot 10^{-3}$
30	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,4 \cdot 10^{-1}$	100,0	81,3	289,5	2,604	97,1	0,668	$3,5 \cdot 10^{-3}$
40	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,2 \cdot 10^{-1}$	100,0	62,2	235,4	2,641	83,8	0,571	$1,9 \cdot 10^{-3}$
50	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	100,0	58,5	220,3	2,669	81,5	0,653	$1,9 \cdot 10^{-3}$
60	$1 \cdot 10^{-8}$	$4,9 \cdot 10^{-2}$	100,0	49,6	183,0	2,745	74,7	0,587	$1,2 \cdot 10^{-3}$
70	$1 \cdot 10^{-8}$	$4,6 \cdot 10^{-2}$	100,0	47,9	177,9	2,753	74,3	0,662	$1,3 \cdot 10^{-3}$

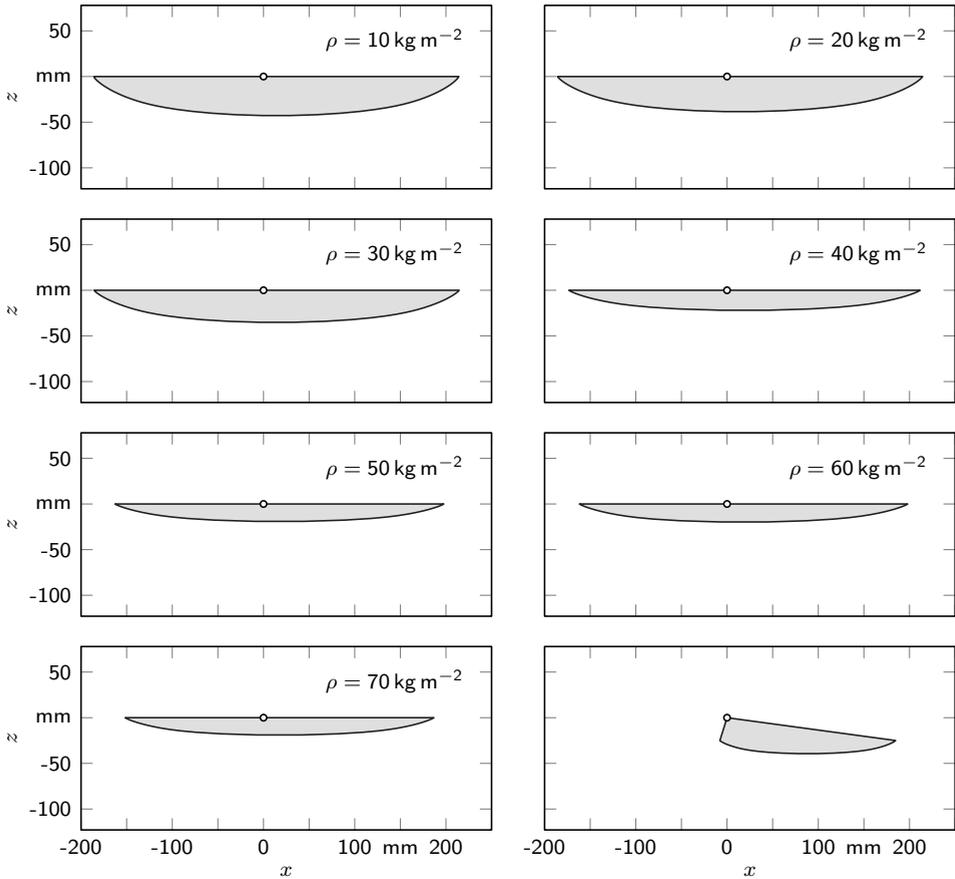


Abbildung 10.6: Optimale flache Fußgeometrien für $\rho = 10 \text{ kg/m}^2, 40 \text{ kg/m}^2, \dots, 70 \text{ kg/m}^2$, sowie eine vergleichbare Geometrie mit verkürzter Ferse (rechts unten).

Tabelle 10.2: Parameter der flachen Fußgeometrien.

ρ in kg m^{-2}	k_H, k_T in rad^{-1}	k_{HM} in rad^{-1}	h_F in mm	ℓ_{HA} in mm	ℓ_{HM} in mm	$\theta_{F,0}$ in rad^{-1}	r_F in mm	m_F in kg	J_F in kg m^{-2}
10	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,1 \cdot 10^{-1}$	0	186,0	400,0	2,487	23,0	0,132	$1,3 \cdot 10^{-3}$
20	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,9 \cdot 10^{-1}$	0	185,8	400,0	2,426	21,7	0,237	$2,3 \cdot 10^{-3}$
30	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,8 \cdot 10^{-1}$	0	185,6	400,0	2,377	20,8	0,324	$3,1 \cdot 10^{-3}$
40	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	0	173,3	385,0	2,027	21,3	0,259	$2,3 \cdot 10^{-3}$
50	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	0	162,7	360,3	2,009	19,2	0,264	$2,0 \cdot 10^{-3}$
60	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	0	161,8	359,7	2,008	20,0	0,327	$2,5 \cdot 10^{-3}$
70	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	0	151,6	338,2	2,669	19,3	0,344	$2,3 \cdot 10^{-3}$

Sprunggelenk des Standbeins; erst beim Abdrücken im letzten Viertel des Schritts findet eine relative Rotation um 3° statt. Der Fuß des Schwungbeins wird ebenfalls nur gering gegenüber dem Unterschenkel bewegt; die maximale Winkeldifferenz beträgt hier 4° . Beide Knie sind während der Bewegung immer mehr oder weniger angewinkelt, keines der beiden Beine wird ganz durchgestreckt. Die Trajektorien der Hüfte, der Knie und des Schwerpunkts weisen nach wie vor nur eine geringe Bewegung in vertikaler Richtung auf, die sich jedoch im Vergleich zur hohen Geometrie auf ca. 17 mm in etwa verdoppelt hat. Obwohl das Bein beim Aufsetzen des Fußes nicht durchgestreckt ist, ist dieses nahezu vertikal, was wiederum den Energieverlust beim Stoß reduziert.

Beim Abrollvorgang der flachen Geometrien ist nur die vordere Hälfte des Fußes in Kontakt mit dem Boden. Es stellt sich daher die Frage, warum durch die Optimierung keine Lösung ohne die hintere Hälfte des Fußes erzeugt wird, die bei einer geringeren Querschnittsfläche mit entsprechend geringerer Masse dieselbe Kinematik beim Abrollen aufweist. Zum Vergleich wird manuell eine ähnliche Geometrie ohne die hintere Fußhälfte parametrisiert, die in Abb. 10.6 dargestellt ist. Die zugehörige optimale Bewegung ist in Abb. 10.4c abgebildet. Obwohl die Unterschiede im für den Kontakt relevanten Bereich der Geometrie gering erscheinen, ergibt sich eine deutliche Veränderung der Gehbewegung. Der Oberkörper ist nach hinten geneigt, die Schrittlänge ist im Vergleich doppelt so groß und die Beine sind fast während der gesamten Schrittdauer durchgestreckt. Da der Fuß nicht mehr unterhalb der Hüfte, sondern deutlich davor aufgesetzt wird, ergeben sich größere Stoßverluste. Der Energieverbrauch dieser Bewegung ist um 51 % höher. Bei der Interpretation dieses Vergleichs muss beachtet werden, dass die Geometrie manuell erzeugt wurde und daher nicht optimal ist. Andererseits veranschaulicht dies den deutlichen Einfluss der Fußgeometrie auf die Energieeffizienz. Bereits geringe Abweichungen von der optimalen Form führen zu großen Einbußen in der Effizienz.

Der starke Einfluss der Fußgeometrie zeigt sich auch beim Vergleich der Energieeffizienz der hohen und der flachen Geometrien in Abb. 10.7. Mit allen Geometrien kann eine Verbesserung gegenüber dem Ausgangsmodell P2 erreicht werden. Besonders effiziente Gehbewegungen sind mit hohen Fußgeometrien bei geringster Dichte möglich. Mit zunehmender Dichte nimmt der Energieverbrauch bei allen Geschwindigkeiten deutlich zu: bei der größten betrachteten Dichte ist der durchschnittliche Energieverbrauch um 88 % höher als bei der geringsten. Flache Fußgeometrien sind im direkten Vergleich mit hohen bei niedrigen Geschwindigkeiten effizienter, dagegen bei hohen ineffizienter. Die Verläufe der flachen Fußgeometrien sind steiler und liegen enger zusammen. Die Veränderung der Dichte hat also bei flachen Fußgeometrien eine geringere Auswirkung als bei hohen. Beim Vergleich des durchschnittlichen Energieverbrauchs zeigt sich, dass flache Fußgeometrien bei einer Dichte größer als $\rho = 20 \text{ kg/m}^2$ effizienter sind als hohe. Für diesen Effekt gibt es jedoch keine einfache Erklärung, er entsteht vielmehr

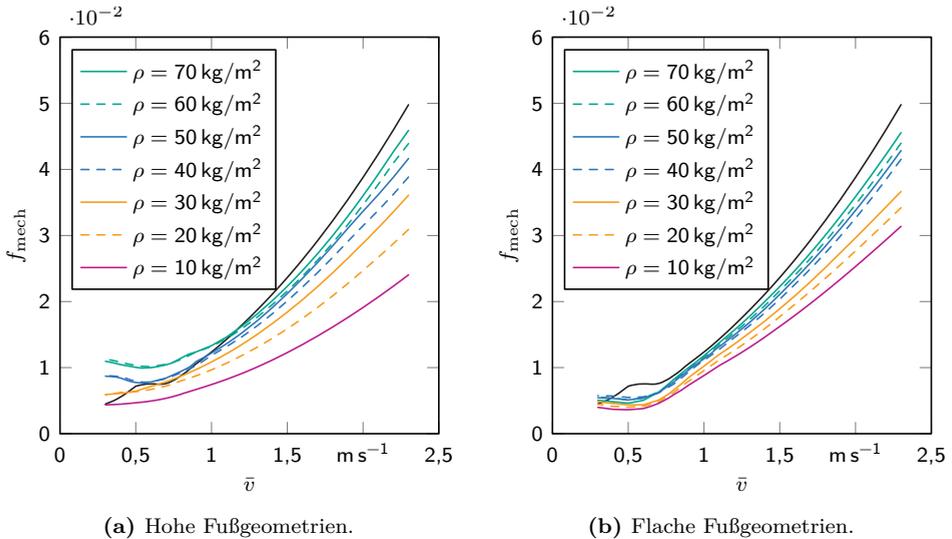


Abbildung 10.7: Wert des Zielfunktionals f_{mech} für (a) die hohen und (b) die flachen Fußgeometrien. Zum Vergleich der Verlauf für das Ausgangsmodell P2 (schwarz).

aus dem Zusammenspiel der Modellparameter und der Bewegung. Die Fußmasse kann als Hauptursache ausgeschlossen werden, da bei $\rho = 20 \text{ kg/m}^2$ die hohe Fußgeometrie mit der größten Gesamtmasse noch etwas effizienter ist, als die flache Fußgeometrie, deren Masse weniger als ein Drittel beträgt.

Zum Vergleich ist in Abb. 10.7 ebenfalls der Energieverbrauch der Ausgangsgeometrie für das Fußmodell HMT mit der Parametrierung für die Experimente von Proband P2 (mit Schuhen) dargestellt. Das beste der optimierten Modelle – die hohe Fußgeometrie für $\rho = 10 \text{ kg/m}^2$ – ergibt gegenüber der Ausgangsgeometrie eine Verringerung des durchschnittlichen Energieverbrauchs um 47 %, also annähernd eine Verdopplung der Effizienz. Im Vergleich zu dem bereits im vorigen Kapitel betrachteten Modell mit Punktfüßen beträgt die Einsparung sogar 81 %. Die Energieeffizienz beim Gehen kann durch diese Fußgeometrie um denselben Faktor gesteigert werden, der in [27, 389] durch die elastische Kopplung der Beine erreicht wird. Während sich bei der Optimierung der Dynamik durch die elastische Kopplung der Beine jedoch sehr hohe Schrittfrequenzen ergeben, führt die Optimierung mittels der Fußkinematik zu natürlicher anmutenden, menschenähnlichen Gehbewegungen.

Aus dieser Studie ist ersichtlich, dass die Gestalt der Füße einen wesentlichen Einfluss auf die Bewegung und die Energieeffizienz beim zweibeinigen Gehen hat. Dabei ist keine einfache Abhängigkeit der Energieeffizienz von einzelnen Geometrieparametern zu erkennen. Die Zusammenhänge sind sehr komplex. So wirkt sich zwar die Fußmasse negativ auf die Energieeffizienz aus, dennoch ist die hohe Geometrie für $\rho = 20 \text{ kg/m}^2$

zugleich das schwerste Modell und das zweit-effizienteste. Bei der Interpretation der Ergebnisse ist außerdem das verwendete Zielfunktional zu beachten, das einen großen Einfluss auf die Bewegung und damit auch auf die optimale Fußgeometrie hat. Darüber hinaus haben auch die Abmessungen und die Massenverteilung in den Segmenten einen wesentlichen Einfluss, ebenso wie die vernachlässigte Energiedissipation. Auf Basis der vorgestellten Studie können daher keine allgemeingültigen Empfehlungen oder Modellierungsrichtlinien abgeleitet werden, da nicht alle Abhängigkeiten untersucht und beschrieben sind.

Vielmehr ist es im Rahmen eines Entwicklungsprozesses sinnvoll, die Modellparameter – insbesondere die Fußgeometrie – und die geplante Bewegung gemeinsam zu optimieren. Damit kann für ein konkretes System die bestmögliche Effizienz erreicht werden. Die in der vorliegenden Arbeit entwickelten Modelle und Methoden eignen sich dabei gerade zur Anwendung in frühen Konzept- und Entwicklungsphasen, in denen viele Details noch nicht festgelegt sind und verschiedene Modellvarianten verglichen werden sollen. Durch die Lösungsverfolgung mittels des QPSQP-Verfahrens können dabei einzelne Lösungskurven zuverlässig verfolgt werden, was eine klare Beurteilung der Ergebnisse und eine Zuordnung der Effekte ermöglicht.

11 Zusammenfassung und Ausblick

Das Ziel der Arbeit ist, den Einfluss der Fußgeometrie auf die Energieeffizienz beim zweibeinigen Gehen zu untersuchen. Eine entscheidende Fragestellung bei der Entwicklung aktueller und zukünftiger zweibeiniger Roboter ist die Optimierung der Energieeffizienz, wozu geeignete Modelle und Methoden benötigt werden. Da die Energieeffizienz nicht nur von der Konstruktion und den Modellparametern, sondern wesentlich von der ausgeführten Bewegung abhängt, muss bei der Untersuchung und Optimierung neben den Modellparametern vor allem auch die Regelung simuliert und optimiert werden. Es werden effiziente Modelle für den Fuß-Boden-Kontakt entwickelt und in eine Regelung für dynamisch stabilisierte Gehbewegungen auf Basis der hybriden Nulldynamik (hybrid zero dynamics) integriert. Durch die Optimierung der Bewegung und der Fußgeometrie auf Basis dieser Modelle wird in der vorliegenden Arbeit ein Beitrag zur Beantwortung dieser Fragestellung bei der Entwicklung zukünftiger zweibeiniger Roboter geleistet.

Regelungen auf Basis der hybriden Nulldynamik eignen sich zur Erzeugung und zur dynamischen Stabilisierung energieeffizienter Gehbewegungen, bei denen die natürliche Dynamik des Systems ausgenutzt wird. Allerdings wird in der Literatur der Entwurf einer solchen Regelung für ebene Modelle nur für Punktfüße, für flache Füße oder für kreisförmige Füße beschrieben. Das erste Ziel ist daher eine Erweiterung dieses Regelungskonzepts für Modelle mit beliebig parametrisierten, konvexen Fußgeometrien, die auf dem Boden abrollen. Ein solchermaßen geregeltes Modell wird dann zur Untersuchung der Energieeffizienz verschiedener Fußgeometrien und schließlich zu deren Optimierung verwendet. Dieses Optimierungsproblem wird mittels sequentieller quadratischer Programmierung gelöst, wobei aufgrund der starken Nichtlinearität des Problems viele lokale Optima existieren. Um den Einfluss von Parameteränderungen wie beispielsweise der Geschwindigkeit beim Gehen auf diese lokalen Lösungen zu untersuchen, wird eine numerische Fortsetzungsmethode verwendet. Da in der Literatur nur wenige numerische Fortsetzungsmethoden für nichtglatte Probleme existieren, die sich darüber hinaus für das vorliegende Problem nicht gut eignen, wird eine neue Methode zur Verfolgung nichtglatter Lösungskurven entwickelt und verwendet.

Es wird gezeigt, dass der potentielle Kontaktpunkt auf dem Rand einer beliebigen konvexen, ebenen Geometrie explizit angegeben werden kann, wenn der Kontaktpartner eine Gerade ist. Die grundlegenden Zusammenhänge können aus dem Sonderfall einer Abrollbewegung abgeleitet werden. Dabei wird die Trajektorie eines beliebigen körperfesten Punktes durch eine skalare Funktion in Abhängigkeit von der relativen Orientierung des Körpers gegenüber der Geraden vorgegeben. Aus dieser skalaren Funktion folgen explizit die Lage des potentiellen Kontaktpunkts und die zugehörige Geometrie des Körpers. Das in der Literatur übliche Vorgehen führt dagegen auf implizite Gleichungen. Durch die vorgestellte Herangehensweise ist es möglich, die Abrollbewegung beim Fuß-Boden-Kontakt in einer Minimalkoordinate zu formulieren, was bisher nur für spezielle Geometrien, u. a. Polygone, Kreise und Ellipsen, möglich war. Diese Methode eignet sich daher zum Einsatz in einem Reglerentwurf auf Basis der hybriden Nulldynamik.

Zur Beschreibung der Geometrie eines konkreten Fußmodells wird eine Parametrisierung für die oben beschriebene skalare Funktion benötigt. Es wird gezeigt, dass eine solche Parametrisierung auf Basis einer Regularisierung eines konvexen Polygonzugs möglich ist. Dies hat gegenüber einem Polynom, einer Fourierreihe oder Splines den Vorteil, dass hierfür nur eine geringe Anzahl an Koeffizienten benötigt wird. Unter der Voraussetzung, dass der zugrundeliegende Polygonzug konvex und alle Regularisierungsparameter positiv sind, wird bewiesen, dass dieses Vorgehen immer eine konvexe Geometrie erzeugt. Da dies einfach durch lineare Ungleichheitsnebenbedingungen überprüft werden kann, eignet sich dieses Modell zur numerischen Optimierung der Fußgeometrie. Auf dieser Basis werden zwei Fußmodelle entwickelt. Ein Modell geht aus der Regularisierung eines flachen Fußes hervor, womit die Sohle nicht mehr gerade, sondern gekrümmt ist. Das zweite Modell hat einen zusätzlichen Zehenbereich.

In der Literatur werden Starrkörpermodelle für den Fuß (sog. Abrollformen) bei der Modellbildung in der Biomechanik und bei der Entwicklung von Prothesen verwendet. Dabei wird in den meisten Fällen eine kreisförmige Geometrie genutzt, da für diese eine explizite Lösung des Kontaktproblems bekannt ist. Durch die Anpassung der beiden Fußmodelle an Messdaten aus Experimenten mit menschlichen Probanden wird gezeigt, dass sich die beiden Fußmodelle auch für diese Fragestellung eignen. Auf der Basis von gemessenen Sprunggelenktrajektorien können die Koeffizienten des jeweiligen Modells optimiert werden, indem die quadrierte Abweichung zwischen der gemessenen Trajektorie und der des Modells minimiert wird. Das Ergebnis liefert nicht nur eine gute Reproduktion der Sprunggelenktrajektorie, sondern auch eine gute Übereinstimmung der gemessenen Druckpunktverläufe mit der Geometrie. Das entwickelte Vorgehen zur Modellierung des Fuß-Boden-Kontakts ist also universell anwendbar.

Das Fußmodell wird zum Entwurf einer Regelung auf Basis der hybriden Nulldynamik verwendet. Dazu wird ein Reglerentwurf für kreisförmige Füße aus der Literatur erweitert, so dass die Verwendung beliebiger, konvexer Fußgeometrien möglich ist. Das geregelte Modell wird im Rahmen dieser Arbeit zur Simulation periodischer Gehbewegungen verwendet, kann jedoch direkt auf die Anwendung in einer Echtzeitregelung eines zweibeinigen Roboters übertragen werden. Gegenüber den ebenfalls in der Literatur vorgeschlagenen Hybride-Nulldynamik-Reglern für flache Füße hat das vorgestellte Vorgehen den Vorteil, dass die gesamte Standphase durch ein einziges Modell beschrieben werden kann. Obwohl eine nahezu beliebig flache Parametrisierung der Fußgeometrie möglich ist, wird keine Fallunterscheidung für den flach aufliegenden Fuß benötigt.

Zur effizienten Lösung des Optimierungsproblems bei der Durchführung von Parameterstudien wird eine numerische Fortsetzungsmethode für nichtglatte Probleme entwickelt. Diese basiert auf einem Prädiktor-Korrektor-Ansatz, wobei als Korrektor die bereits zur Optimierung verwendete sequentielle quadratische Programmierung (SQP) verwendet wird. Der Prädiktor und die Schrittweitensteuerung basieren auf einem Vertrauensbereichsverfahren. Es wird zunächst eine Parameteränderung durchgeführt, dann werden die ersten beiden Korrektor-Schritte berechnet. Anhand einer Schätzung der Konvergenzrate wird der Schritt ggf. verworfen. In diesem Fall wird der Prädiktor-Schritt mit einer geringeren Parameteränderung erneut ausgeführt, was so lange wiederholt wird, bis der Schritt akzeptiert wird. Da zur Berechnung der Prädiktor-Schritte jeweils ein quadratisches Programm (QP) gelöst werden muss, wird das Gesamtverfahren als QPSQP-Verfahren bezeichnet. Es wird gezeigt, dass mit diesem Verfahren eine zuverlässige Verfolgung der nichtglatten Lösungskurven des Optimierungsproblems möglich ist. Da im Prädiktor-Schritt mehrere Ungleichheitsnebenbedingungen aktiv oder inaktiv werden können, sind mit diesem Vorgehen größere Schritte möglich, als mit den in der Literatur vorgeschlagenen Methoden.

Mit den entwickelten Modellen und Methoden wird zunächst die Energieeffizienz beim Gehen mit den an Experimente mit menschlichen Probanden angepassten Fußmodellen untersucht. Es werden zwei Zielfunktionale verglichen: die zugeführte mechanische Arbeit pro Strecke und das Integral über die Aktormomente im Quadrat pro Strecke. Bei diesem Vergleich zeigt sich, dass das in der Literatur häufig verwendete Zielfunktional der Momente im Quadrat keine brauchbaren Ergebnisse liefert. Es existiert eine Vielzahl an Lösungskurven mit stark unterschiedlicher Energieeffizienz. Diese sind häufig nicht monoton von der Geschwindigkeit abhängig, sondern steigen bei niedrigen Geschwindigkeiten wieder an. Dabei führt bei einzelnen Lösungen vor allem das Schwungbein und besonders das Schwungbeinsprunggelenk sehr schnelle und große Bewegungen aus. Die Abrollbewegung des Standbeinfußes erfolgt bei vielen Lösungen ausgehend von der Mitte der Sohle nicht in Richtung der Zehen, sondern in

Richtung der Ferse. Es entstehen sehr große Stoßverluste von bis zu 80 % (bezogen auf die kinetische Energie nach dem Stoß). Beim direkten Vergleich mit dem Zielfunktional der zugeführten Arbeit treten zudem zum Teil größere Maximalmomente auf.

Das Zielfunktional der zugeführten mechanischen Arbeit pro Strecke ergibt ebenfalls mehrere Lösungskurven. Der Energieverbrauch nimmt dabei jedoch monoton mit der Geschwindigkeit zu. Die Energieverluste beim Stoß sind gering und betragen auch bei hohen Geschwindigkeiten <10 % der kinetischen Energie. Bei niedrigen Geschwindigkeiten wird zum Schwingen der Beine vor allem die natürliche Dynamik des Systems ausgenutzt, was sich in einer nahezu konstanten Schrittfrequenz äußert. In diesem Bereich wird die periodische Gehbewegung je nach Fußmodell zum Teil instabil. Außer im Knie- und Sprunggelenk des Standbeins liegen keine konstant hohen Aktormomente an. Zur Beeinflussung der natürlichen Dynamik erweisen sich am Anfang oder Ende des Schritts kurzzeitig hohe Momente als optimal, um die Schwingung zu beschleunigen oder abzubremesen.

Es wird ein Vergleich von 16 an die Experimente angepassten Fußmodellen durchgeführt. Obwohl diese Geometrien stark variieren, ergeben sich nur geringe Unterschiede in der Energieeffizienz. Dabei ist kein klarer Trend oder Zusammenhang in Bezug auf die Fußlänge und die Krümmung der Sohle festzustellen. Der zusätzliche Zehenbereich bringt keine deutliche Verbesserung der Energieeffizienz. Im Vergleich zu einem Modell mit Punktfüßen ergibt das beste Fußmodell Energieeinsparungen von ca. 60 % im Geschwindigkeitsbereich von 0,3 bis 2,3 m/s. Dies zeigt, dass der Fuß einen wesentlichen Einfluss auf die Energieeffizienz beim Gehen hat.

Mit dem QPSQP-Verfahren ist eine Sensitivitätsanalyse für das nichtglatte Problem möglich. Diese zeigt, dass die Fußhöhe von allen Fußparametern das größte Potential zur Steigerung der Energieeffizienz aufweist.

Die Fußgeometrie wird unter der Annahme einer konstanten Dicke und homogenen Dichte optimiert. Es zeigt sich, dass dadurch weitere Effizienzsteigerungen möglich sind. Die optimale Fußgeometrie ist stark von der Dichte abhängig. Die Lösungen lassen sich in zwei Gruppen einteilen: Fußgeometrien, welche die maximal zulässige Fußhöhe ausnutzen und vor allem bei geringen Dichten optimal sind, sowie flache Geometrien, die bei mittleren und hohen Dichten optimal sind. Sowohl bei den hohen, als auch bei den flachen Geometrien, nehmen die Fußlänge und die Energieeffizienz mit abnehmender Dichte zu. Bei der besten Lösung ergeben sich gegenüber dem besten der an die Experimente angepassten Fußmodelle nochmals Energieeinsparungen von 47 % im Geschwindigkeitsbereich von 0,3 bis 2,3 m/s. Die Einsparung gegenüber dem Modell mit Punktfüßen beträgt in diesem Fall bis zu 81 %.

Die Untersuchungen zeigen, dass der Fuß einen wesentlichen Einfluss auf die Energieeffizienz beim Gehen hat. Durch eine Optimierung der Fußgeometrie kann also bei der Entwicklung eines zweibeinigen Roboters bereits früh Einfluss auf die spätere Effizienz bei der Bewegung genommen werden. Die vorgestellten Methoden und Modelle eignen sich gut zur Optimierung und für Parameterstudien in frühen Entwicklungsphasen, bei welchen erst wenige Details der Konstruktion fest vorgegeben sind. Da bei der Modellierung eine HZD-Regelung entworfen wird, ist es auch möglich, die simulierten und optimierten Bewegungen damit auf einem realen Roboter umzusetzen.

Aus den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit ergeben sich weitere Fragen für die zukünftige Forschung. Die Modellierung des Fußes wurde in der vorliegenden Arbeit auf einen einzelnen Starrkörper beschränkt. Aus der Biomechanik ist bekannt, dass bei der Bewegung des Menschen ein Abdrücken des Fußes über die Zehen stattfindet. Es ist also naheliegend, eine Erweiterung des Modells um ein bewegliches Zehensegment vorzunehmen.

Damit ergibt sich direkt die Frage, inwieweit das hier für einen Roboter entwickelte Modell auch zur Beschreibung der menschlichen Bewegung und zu Untersuchungen im Bereich der Biomechanik geeignet ist. Besonders die Anwendung des entwickelten Fußmodells als Abrollform für biomechanische Modelle und bei der Entwicklung von Prothesen ist naheliegend.

Das im Rahmen dieser Arbeit entwickelte QPSQP-Verfahren zur numerischen Fortsetzung von Lösungen nicht-glatte Probleme wurde bisher nur auf das Problem des vorliegenden Modells für periodische Gehbewegungen angewendet. Um dessen Leistungsfähigkeit und Eignung bei der Verfolgung von Lösungen allgemeiner nicht-glatte Probleme zu beurteilen, ist eine Studie in Form eines Benchmarks mit weiteren Modellen unterschiedlicher Komplexität und Dimension notwendig.

Anhang

A Beweis für die Konvexität der Fußmodelle

In diesem Anhang wird ein Beweis für die Konvexität der regularisierten polygonalen Geometrien in Kapitel 3 geführt. Wie in Abschnitt 3.2 beschrieben, muss dafür nach Gl. (2.35) gezeigt werden, dass der Krümmungsradius für die Parametrisierungen nach Gl. (3.13) und (3.18) für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\{k \in \mathbb{R} \mid k > 0\}$ positiv ist. Dazu ist es ausreichend, den vorzeichenbehafteten Anteil des Krümmungsradius für einen regularisierten Übergang nach Abb. 3.3b zu betrachten. Da sich die Parametrisierung des regularisierten Polygons aus einer Summe solcher Terme zusammensetzt, genügt es zu zeigen, dass jeder Summand positiv ist, was auf die Bedingung

$$0 < \left[\left(2 \cos(\alpha) - 1 + k^2 + 6 \tanh^2\left(\frac{\alpha}{k}\right) \right) - \frac{6}{k} \sin(\alpha) \tanh\left(\frac{\alpha}{k}\right) - \frac{1}{k^2} (1 - \cos(\alpha)) \left(2 - 6 \tanh^2\left(\frac{\alpha}{k}\right) \right) \right] \quad (\text{A.1})$$

führt. Der Beweis, dass diese Ungleichung für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\{k \in \mathbb{R} \mid k > 0\}$ gilt, kann folgendermaßen geführt werden. Da die rechte Seite unter diesen Annahmen stetig ist und keine Singularitäten aufweist, ist ein Nulldurchgang notwendig für einen Vorzeichenwechsel. Es ist also hinreichend zu zeigen, dass ein Punkt positiv ist und kein Nulldurchgang existiert. Ersteres kann elementar durch Einsetzen eines Wertes gezeigt werden. Die Nichtexistenz eines Nulldurchgangs wird durch einen Widerspruch bewiesen. Dazu wird für Gl. (A.1) zunächst eine Minorante für die rechte Seite abgeschätzt, die einfacher untersucht werden kann. Anschließend wird diese Minorante gleich null gesetzt und gezeigt, dass es kein Wertepaar $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\{k \in \mathbb{R} \mid k > 0\}$ gibt, für das diese Gleichung erfüllt ist. Da die Minorante keinen Nulldurchgang hat, kann auch die ursprüngliche Funktion keinen Nulldurchgang haben und das hinreichende Kriterium ist erfüllt.

Nach Multiplikation mit k^2 kann Beziehung (A.1) umgestellt werden zu

$$\begin{aligned}
0 &< \left(6 \tanh^2\left(\frac{\alpha}{k}\right) - 2 + k^2\right) (k^2 + 1 - \cos(\alpha)) + 3k^2 \cos(\alpha) - 6k \sin(\alpha) \tanh\left(\frac{\alpha}{k}\right) \\
&= f_0(k, \alpha) \\
&= 6(k^2 + 1 - \cos(\alpha)) \left(\tanh^2\left(\frac{\alpha}{k}\right) - \frac{k \sin(\alpha) \tanh\left(\frac{\alpha}{k}\right)}{k^2 + 1 - \cos(\alpha)} + \left(\frac{k \sin(\alpha)}{2(k^2 + 1 - \cos(\alpha))}\right)^2 \right) \\
&\quad - 6(k^2 + 1 - \cos(\alpha)) \left(\frac{k \sin(\alpha)}{2(k^2 + 1 - \cos(\alpha))}\right)^2 \\
&\quad + (k^2 + 1 - \cos(\alpha))(k^2 - 2) + 3k^2 \cos(\alpha) \\
&\geq 6(k^2 + 1 - \cos(\alpha)) \left(\tanh^2\left(\frac{\alpha}{k}\right) - \left| \frac{k \sin(\alpha) \tanh\left(\frac{\alpha}{k}\right)}{k^2 + 1 - \cos(\alpha)} \right| + \left(\frac{k \sin(\alpha)}{2(k^2 + 1 - \cos(\alpha))}\right)^2 \right) \\
&\quad - 6(k^2 + 1 - \cos(\alpha)) \left(\frac{k \sin(\alpha)}{2(k^2 + 1 - \cos(\alpha))}\right)^2 \\
&\quad + (k^2 + 1 - \cos(\alpha))(k^2 - 2) + 3k^2 \cos(\alpha) \\
&= f_1(k, \alpha) .
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Da alle Ausdrücke gerade Funktionen in α sind, also $f_1(k, \alpha) = f_1(k, -\alpha)$ gilt, kann die Untersuchung weiter auf den Bereich $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \geq 0\}$ und $\{k \in \mathbb{R} \mid k > 0\}$ eingeschränkt werden. Durch die YOUNG'sche Ungleichung [382, Gl. (0.20)]

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{mit } p, q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{und } a, b \geq 0 \tag{A.3}$$

folgt in diesem Bereich mit

$$a = \tanh\left(\frac{\alpha}{k}\right), \tag{A.4a}$$

$$b = \left| \frac{k \sin(\alpha)}{k^2 + 1 - \cos(\alpha)} \right|, \tag{A.4b}$$

$$p = q = 2 \tag{A.4c}$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\left| \frac{k \sin(\alpha) \tanh\left(\frac{\alpha}{k}\right)}{k^2 + 1 - \cos(\alpha)} \right| &= \tanh\left(\frac{\alpha}{k}\right) \left| \frac{k \sin(\alpha)}{k^2 + 1 - \cos(\alpha)} \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \tanh^2\left(\frac{\alpha}{k}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{k \sin(\alpha)}{k^2 + 1 - \cos(\alpha)}\right)^2 .
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Dadurch ergibt sich die Minorante

$$\begin{aligned}
f_2(k, \alpha) &= 6(k^2 + 1 - \cos(\alpha)) \left(\frac{1}{2} \tanh^2\left(\frac{\alpha}{k}\right) - \left(\frac{k \sin(\alpha)}{2(k^2 + 1 - \cos(\alpha))} \right)^2 \right) \\
&\quad - 6(k^2 + 1 - \cos(\alpha)) \left(\frac{k \sin(\alpha)}{2(k^2 + 1 - \cos(\alpha))} \right)^2 \\
&\quad + (k^2 + 1 - \cos(\alpha))(k^2 - 2) + 3k^2 \cos(\alpha) \\
&= (k^2 + 1 - \cos(\alpha)) \left(3 \tanh^2\left(\frac{\alpha}{k}\right) + k^2 - 2 \right) + 3k^2 \cos(\alpha) \\
&\quad + 3k^2 \frac{\cos^2(\alpha) - 1}{k^2 + 1 - \cos(\alpha)} \\
&= (k^2 + 1 - \cos(\alpha))^{-1} \left[\left(3 \tanh^2\left(\frac{\alpha}{k}\right) + k^2 - 2 \right) (k^2 + 1 - \cos(\alpha))^2 \right. \\
&\quad \left. + 3k^2 \cos(\alpha)(k^2 + 1 - \cos(\alpha)) + 3k^2(\cos^2(\alpha) - 1) \right] \\
&= (k^2 + 1 - \cos(\alpha))^{-1} \bar{f}_2(k, \alpha)
\end{aligned} \tag{A.6}$$

mit

$$f_0(k, \alpha) \geq f_1(k, \alpha) \geq f_2(k, \alpha) . \tag{A.7}$$

Für die ursprüngliche Ungleichung (A.1) ist es hinreichend zu zeigen, dass die Minorante $f_2(k, \alpha)$ im Bereich $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha \geq 0\}$ und $\{k \in \mathbb{R} \mid k > 0\}$ keinen Nulldurchgang hat. Da der Term $(k^2 + 1 - \cos(\alpha))$ immer positiv ist, muss für einen Nulldurchgang von $f_2(k, \alpha)$ der Term $\bar{f}_2(k, \alpha)$ in der eckigen Klammer in Gl. (A.6) verschwinden. Dieser nimmt am Rand $\alpha = 0$ den Wert

$$\bar{f}_2(k, 0) = k^6 + k^4 > 0 \quad \text{für } k > 0 \tag{A.8}$$

an, weshalb die Untersuchung weiter eingeschränkt werden kann auf den offenen Bereich $\{\alpha \in \mathbb{R} \mid \alpha > 0\}$ und $\{k \in \mathbb{R} \mid k > 0\}$. Mit den Abkürzungen

$$C = \cos(\alpha) , \quad -1 \leq C \leq 1 , \tag{A.9a}$$

$$T = \tanh\left(\frac{\alpha}{k}\right) , \quad 0 \leq T \leq 1 \tag{A.9b}$$

kann die notwendige Bedingung für eine Nullstelle

$$\begin{aligned}
0 &= (3T^2 + k^2 - 2)(k^2 + 1 - C)^2 + 3k^2C(k^2 + 1 - C) + 3k^2(C^2 - 1) \\
&= (3T^2 + k^2 - 2)C^2 + (k^2 + (k^2 + 2)^2 - 6T^2(k^2 + 1))C \\
&\quad + (3T^2(k^2 + 1)^2 + (k^2(k^4 - 6) - 2)) \\
&= g(k, C, T)
\end{aligned} \tag{A.10}$$

in den beiden neuen Variablen C und T ausgedrückt werden, wobei für eine Lösung des ursprünglichen Problems nur reelle Kombinationen aus k , C und T relevant sind, die Gl. (A.9) erfüllen. Gleichung (A.10) ist eine quadratische Gleichung in C , deren Diskriminante als Bedingung für reelle Lösungen

$$\begin{aligned}
0 &\leq (k^2 + (k^2 + 2)^2 - 6T^2(k^2 + 1))^2 \\
&\quad - 4(3T^2 + k^2 - 2)(3T^2(k^2 + 1)^2 + (k^2(k^4 - 6) - 2)) \\
&= 3k^4((19 - 24T^2) + (6 - 12T^2)k^2 - k^4)
\end{aligned} \tag{A.11}$$

und damit

$$k \leq \sqrt{3 - 6T^2 + 2\sqrt{9T^4 - 15T^2 + 7}} \tag{A.12}$$

mit

$$0 < k \leq \sqrt{3 + 2\sqrt{7}} \approx 2,88, \tag{A.13a}$$

$$0 \leq T \leq \sqrt{\frac{19}{24}} \approx 0,89 \tag{A.13b}$$

liefert, wie in Abb. A.1a dargestellt. Der zugehörige Winkel α kann nach Gl. (A.9b) aus

$$\alpha = k \operatorname{artanh}(T) \tag{A.14}$$

berechnet werden, womit sich

$$\alpha \leq \sqrt{3 - 6T^2 + 2\sqrt{9T^4 - 15T^2 + 7}} \operatorname{artanh}(T) \tag{A.15}$$

ergibt. Dadurch kann α auf dem durch die Diskriminante eingeschränkten Gebiet Werte im Bereich

$$0 < \alpha \lesssim 1,448 \approx 0,461\pi < \frac{\pi}{2} \tag{A.16}$$

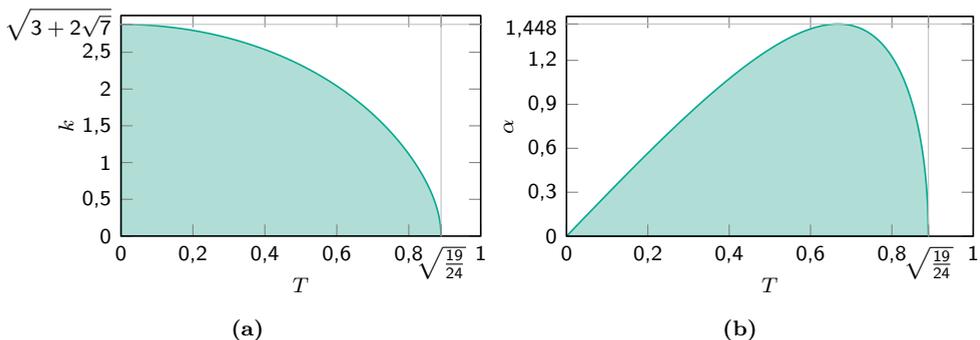


Abbildung A.1: (a) Bereich (grün) der Minorante mit nicht-negativer Diskriminante nach Gl. (A.12). (b) Entsprechender Bereich (grün) für den Winkel α nach Gl. (A.15).

annehmen, siehe Abb. A.1b, womit der Wertebereich von C auf

$$0 < C \leq 1 \quad (\text{A.17})$$

eingeschränkt wird.

Um zu zeigen, dass es im verbleibenden Gebiet keine reelle Kombination aus k , C und T gibt, die Gl. (A.9) erfüllen, werden die Lösungen

$$C_1 = (k^2 + 1) - k^2 \frac{3(k^2 + 1) + \sqrt{3}\sqrt{(19 - 24T^2) + (6 - 12T^2)k^2 - k^4}}{2(3T^2 + k^2 - 2)}, \quad (\text{A.18a})$$

$$C_2 = (k^2 + 1) - k^2 \frac{3(k^2 + 1) - \sqrt{3}\sqrt{(19 - 24T^2) + (6 - 12T^2)k^2 - k^4}}{2(3T^2 + k^2 - 2)} \quad (\text{A.18b})$$

der quadratischen Gleichung (A.10) numerisch ausgewertet und mit

$$\cos(\alpha) = \cos(k \operatorname{artanh}(T)) \quad (\text{A.19})$$

nach Gl. (A.9a) und (A.14) verglichen. Der Vergleich in Abb. A.2 zeigt, dass es im gesamten Gebiet keine Überschneidung der Lösungen von Gl. (A.18) und (A.19) gibt. Für kleinere Werte des Parameters k nähern sich die Lösungen immer mehr an, für $k > 0$ gibt es jedoch im gesamten Gebiet keine Überschneidung.

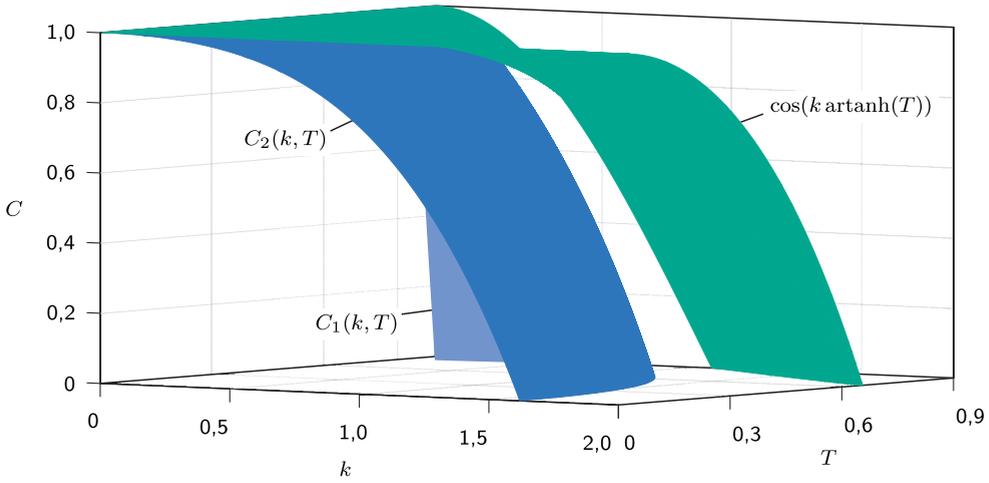


Abbildung A.2: Vergleich der Nullstellen $C_1(k, T)$ und $C_2(k, T)$ von Gl. (A.18) (blau) mit dem Wert von $\cos(k \operatorname{artanh}(T))$ nach Gl. (A.19) (grün). Es gibt keine Schnittpunkte der beiden Lösungen und daher auch für $k > 0$ keine Kombination $C_1(k, T) = \cos(k \operatorname{artanh}(T))$ oder $C_2(k, T) = \cos(k \operatorname{artanh}(T))$, die den Zusammenhang nach Gl. (A.9) erfüllen und gleichzeitig eine Nullstelle von Gl. (A.10) sind.

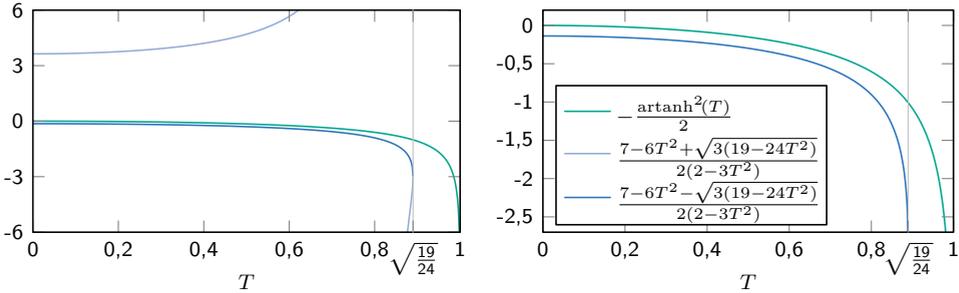


Abbildung A.3: Verläufe der Koeffizienten der quadratischen Terme der Taylorentwicklungen nach Gl. (A.20) in Abhängigkeit von T . Es gibt keine Überschneidungen der Kurven, weshalb die Koeffizienten nie denselben Wert annehmen.

Dies kann in einer hinreichend kleinen Umgebung von $k = 0$ durch die Taylorentwicklungen

$$C_1(k, T) \approx 1 + \frac{7 - 6T^2 + \sqrt{3(19 - 24T^2)}}{2(2 - 3T^2)} k^2, \quad (\text{A.20a})$$

$$C_2(k, T) \approx 1 + \frac{7 - 6T^2 - \sqrt{3(19 - 24T^2)}}{2(2 - 3T^2)} k^2, \quad (\text{A.20b})$$

$$\cos(\alpha) \approx 1 - \frac{\operatorname{artanh}^2(T)}{2} k^2 \quad (\text{A.20c})$$

gezeigt werden, deren Faktoren in Abb. A.3 dargestellt sind. Da diese nie denselben Wert annehmen, gibt es für $k >$ keine Überschneidungen zwischen Gl. (A.20a) und (A.20c) bzw. zwischen Gl. (A.20b) und (A.20c). Damit ist gezeigt, dass die Ungleichung (A.2) im gesamten Definitionsbereich gültig ist. Der Krümmungsradius der regularisierten polygonalen Geometrien ist also immer positiv, womit die Konsistenzbedingung Gl. (2.35) alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\{k \in \mathbb{R} \mid k > 0\}$ erfüllt ist. \square

B Parameter der angepassten Fußmodelle

Die Parameter aller an die Messungen in Kapitel 4 angepassten Modelle sind im Folgenden tabellarisch gesammelt. Die Parameter für Anpassung des Modells HM an die SG-Trajektorie sind in Tabelle 4.2 (S. 93) zusammengestellt.

Tabelle B.1: Parameter des Modells HM, angepasst an die AK-Trajektorie (barfuß).

Proband	Fuß	k_H in rad^{-1}	k_M in rad^{-1}	k_{HM} in rad^{-1}	h_F in mm	ℓ_{HA} in mm	ℓ_{HM} in mm
P1	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,2 \cdot 10^{-6}$	79,0	50,0	229,4
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$6,8 \cdot 10^{-2}$	70,6	37,8	229,7
P2	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	75,6	21,7	206,4
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$7,2 \cdot 10^{-2}$	70,0	24,1	223,3
P3	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$5,5 \cdot 10^{-2}$	64,6	30,7	218,2
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$7,0 \cdot 10^{-3}$	65,7	19,1	197,5
P4	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$6,1 \cdot 10^{-6}$	69,9	13,3	201,6
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$4,1 \cdot 10^{-2}$	62,1	24,0	193,3
P5	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$5,3 \cdot 10^{-6}$	69,3	8,2	182,1
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,9 \cdot 10^{-4}$	71,9	6,9	177,5
P6	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$4,9 \cdot 10^{-2}$	66,9	24,5	207,4
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,3 \cdot 10^{-1}$	50,8	39,0	227,4
P7	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,9 \cdot 10^{-5}$	67,0	19,7	170,1
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,8 \cdot 10^{-6}$	64,1	20,1	170,5
P8	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,5 \cdot 10^{-2}$	71,4	19,1	178,7
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$4,1 \cdot 10^{-2}$	63,9	23,1	179,8
P9	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$4,7 \cdot 10^{-6}$	69,4	20,4	161,2
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$5,6 \cdot 10^{-6}$	67,0	23,1	171,4

Tabelle B.2: Parameter des Modells HM, angepasst an die IK-Trajektorie (barfuß).

Proband	Fuß	k_H in rad^{-1}	k_M in rad^{-1}	k_{HM} in rad^{-1}	h_F in mm	ℓ_{HA} in mm	ℓ_{HM} in mm
P1	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,0 \cdot 10^{-1}$	93,0	71,6	245,7
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,5 \cdot 10^{-1}$	81,4	82,1	270,5
P2	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$7,3 \cdot 10^{-2}$	97,3	53,8	216,5
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	83,6	79,8	249,0
P3	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,2 \cdot 10^{-1}$	77,8	91,9	285,7
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	69,8	112,1	297,9
P4	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$6,7 \cdot 10^{-2}$	78,9	61,9	231,3
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$9,0 \cdot 10^{-2}$	72,1	62,0	222,7
P5	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$7,7 \cdot 10^{-2}$	79,8	80,6	238,0
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	69,2	131,1	288,7
P6	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,7 \cdot 10^{-1}$	62,1	104,4	267,5
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,3 \cdot 10^{-1}$	57,7	86,4	247,7
P7	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$6,0 \cdot 10^{-3}$	78,0	45,6	184,0
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,1 \cdot 10^{-2}$	78,4	47,1	184,7
P8	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$5,0 \cdot 10^{-2}$	89,8	39,7	183,7
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	76,1	57,8	204,5
P9	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,8 \cdot 10^{-2}$	91,9	37,0	169,5
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$4,9 \cdot 10^{-2}$	89,7	46,0	182,2

Tabelle B.3: Parameter des Modells HM, angepasst an die SG-Trajektorie (mit Schuhen).

Proband	Fuß	k_H in rad^{-1}	k_M in rad^{-1}	k_{HM} in rad^{-1}	h_F in mm	ℓ_{HA} in mm	ℓ_{HM} in mm
P1	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,8 \cdot 10^{-1}$	85,6	127,4	347,5
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,1 \cdot 10^{-1}$	55,1	138,2	374,2
P2	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,7 \cdot 10^{-1}$	56,3	188,9	417,7
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,0 \cdot 10^{-1}$	55,2	147,2	379,1
P3	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,5 \cdot 10^{-1}$	79,3	122,6	340,4
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,0 \cdot 10^{-1}$	65,3	132,6	347,2
P4	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,3 \cdot 10^{-1}$	62,1	166,5	380,2
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,8 \cdot 10^{-1}$	52,7	141,4	348,1
P5	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,7 \cdot 10^{-1}$	51,5	161,7	372,5
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,0 \cdot 10^{-1}$	51,3	142,6	348,2
P6	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,4 \cdot 10^{-1}$	64,2	127,5	339,6
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,2 \cdot 10^{-1}$	62,6	119,5	315,9
P7	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,6 \cdot 10^{-1}$	64,5	115,2	312,1
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,3 \cdot 10^{-1}$	49,8	115,9	315,1
P8	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,8 \cdot 10^{-1}$	64,4	120,3	315,6
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,4 \cdot 10^{-1}$	49,5	111,9	305,8
P9	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,3 \cdot 10^{-1}$	70,6	117,2	307,1
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,7 \cdot 10^{-1}$	64,4	118,5	307,5

Tabelle B.4: Parameter des Modells HM, angepasst an die AK-Trajektorie (mit Schuhen).

Proband	Fuß	k_H in rad^{-1}	k_M in rad^{-1}	k_{HM} in rad^{-1}	h_F in mm	ℓ_{HA} in mm	ℓ_{HM} in mm
P1	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$8,3 \cdot 10^{-2}$	92,1	89,1	286,8
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,8 \cdot 10^{-1}$	52,0	111,4	347,6
P2	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,3 \cdot 10^{-1}$	56,3	140,8	380,1
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,3 \cdot 10^{-1}$	63,2	109,2	347,2
P3	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	79,5	79,2	296,3
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,5 \cdot 10^{-1}$	66,9	92,1	305,1
P4	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,7 \cdot 10^{-1}$	73,6	104,6	325,3
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,6 \cdot 10^{-1}$	56,8	107,7	317,8
P5	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,5 \cdot 10^{-1}$	45,5	136,6	354,0
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,8 \cdot 10^{-1}$	47,4	122,5	335,1
P6	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,2 \cdot 10^{-1}$	60,2	103,8	324,1
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,0 \cdot 10^{-1}$	60,2	84,7	293,2
P7	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,6 \cdot 10^{-1}$	60,6	95,7	302,0
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,2 \cdot 10^{-1}$	45,1	96,0	302,1
P8	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,3 \cdot 10^{-1}$	65,3	98,6	294,5
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,3 \cdot 10^{-1}$	44,1	94,1	292,8
P9	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,6 \cdot 10^{-1}$	73,1	85,5	273,2
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,4 \cdot 10^{-1}$	59,4	103,5	294,5

Tabelle B.5: Parameter des Modells HM, angepasst an die IK-Trajektorie (mit Schuhen).

Proband	Fuß	k_H in rad^{-1}	k_M in rad^{-1}	k_{HM} in rad^{-1}	h_F in mm	ℓ_{HA} in mm	ℓ_{HM} in mm
P1	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,7 \cdot 10^{-1}$	74,2	166,3	403,7
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,1 \cdot 10^{-1}$	60,8	166,6	401,7
P2	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,9 \cdot 10^{-1}$	62,1	225,4	442,1
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,2 \cdot 10^{-1}$	58,7	168,5	389,6
P3	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,9 \cdot 10^{-1}$	78,8	168,0	386,9
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,4 \cdot 10^{-1}$	61,8	182,9	399,3
P4	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,6 \cdot 10^{-1}$	55,1	228,3	432,7
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,8 \cdot 10^{-1}$	51,8	175,2	377,4
P5	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,9 \cdot 10^{-1}$	57,0	190,3	395,1
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,1 \cdot 10^{-1}$	55,1	164,0	363,3
P6	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,6 \cdot 10^{-1}$	68,6	150,2	354,4
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,4 \cdot 10^{-1}$	61,9	173,3	359,1
P7	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,5 \cdot 10^{-1}$	69,2	134,1	321,4
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,3 \cdot 10^{-1}$	53,1	139,1	332,2
P8	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,4 \cdot 10^{-1}$	63,1	140,3	334,8
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,4 \cdot 10^{-1}$	54,1	131,9	322,0
P9	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,9 \cdot 10^{-1}$	67,7	147,7	339,1
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,0 \cdot 10^{-1}$	68,9	134,2	321,9

Tabelle B.6: Parameter des Modells HMT, angepasst an die SG-Trajektorie (barfuß).

Pro- band	Fuß	k_H in rad^{-1}	k_T in rad^{-1}	k_{HM} in rad^{-1}	k_{MT} in rad^{-1}	h_F in mm	ℓ_{HA} in mm	ℓ_{HM} in mm	ℓ_{MT} in mm	γ_F in $^\circ$
P1	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$5,2 \cdot 10^{-2}$	$3,8 \cdot 10^{-2}$	88,5	52,3	226,6	1,6	84,3
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$5,4 \cdot 10^{-2}$	$2,3 \cdot 10^{-2}$	84,1	40,6	216,2	68,5	51,6
P2	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$5,0 \cdot 10^{-2}$	$3,0 \cdot 10^{-2}$	87,2	36,0	206,1	90,3	57,0
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$5,8 \cdot 10^{-2}$	$2,5 \cdot 10^{-2}$	84,1	33,4	204,1	87,4	56,4
P3	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,7 \cdot 10^{-2}$	$2,2 \cdot 10^{-2}$	79,0	34,6	206,5	47,9	36,8
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,7 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-1}$	76,9	29,9	192,5	69,4	46,8
P4	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,3 \cdot 10^{-2}$	$9,2 \cdot 10^{-2}$	76,9	28,8	195,5	76,5	47,3
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$4,6 \cdot 10^{-2}$	$2,7 \cdot 10^{-2}$	69,9	35,9	192,9	57,8	55,4
P5	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$4,8 \cdot 10^{-7}$	$2,0 \cdot 10^{-2}$	79,5	15,8	170,2	77,2	51,5
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$	$2,3 \cdot 10^{-2}$	79,0	16,2	167,3	77,7	56,4
P6	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,0 \cdot 10^{-2}$	$2,6 \cdot 10^{-2}$	75,3	31,5	185,0	71,5	44,2
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,6 \cdot 10^{-2}$	$4,9 \cdot 10^{-2}$	66,2	30,6	182,3	49,6	40,7
P7	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$6,7 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-3}$	72,6	31,3	175,0	39,6	58,6
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,6 \cdot 10^{-6}$	$3,5 \cdot 10^{-2}$	72,1	30,1	169,4	71,3	60,1
P8	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,5 \cdot 10^{-2}$	$3,0 \cdot 10^{-2}$	81,6	25,9	172,0	62,8	53,9
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$4,2 \cdot 10^{-2}$	$3,1 \cdot 10^{-2}$	73,6	30,1	172,7	69,0	55,7
P9	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$1,9 \cdot 10^{-2}$	80,9	27,6	163,3	0,1	89,3
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,2 \cdot 10^{-2}$	$3,2 \cdot 10^{-5}$	79,5	31,1	169,3	64,7	56,3

Tabelle B.7: Parameter des Modells HMT, angepasst an die AK-Trajektorie (barfuß).

Pro- band	Fuß	k_H in rad^{-1}	k_T in rad^{-1}	k_{HM} in rad^{-1}	k_{MT} in rad^{-1}	h_F in mm	ℓ_{HA} in mm	ℓ_{HM} in mm	ℓ_{MT} in mm	γ_F in $^\circ$
P1	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	79,0	50,0	229,4	4,1	77,2
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$4,8 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	72,3	34,0	217,3	59,6	51,0
P2	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$4,3 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^{-2}$	75,9	20,7	202,4	75,1	55,0
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,6 \cdot 10^{-2}$	$1,7 \cdot 10^{-2}$	73,1	16,1	204,7	71,2	52,4
P3	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$	$4,8 \cdot 10^{-2}$	68,7	16,4	186,7	50,5	36,4
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,6 \cdot 10^{-3}$	$5,8 \cdot 10^{-2}$	65,8	18,8	189,8	54,9	47,0
P4	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,8 \cdot 10^{-7}$	$4,8 \cdot 10^{-2}$	70,0	12,8	194,4	54,6	45,9
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,7 \cdot 10^{-2}$	$2,4 \cdot 10^{-2}$	63,0	22,0	185,8	50,2	55,1
P5	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$7,1 \cdot 10^{-7}$	$1,4 \cdot 10^{-2}$	69,4	7,8	176,3	65,0	51,3
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,4 \cdot 10^{-11}$	$1,7 \cdot 10^{-2}$	71,9	6,5	171,8	69,7	55,8
P6	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,9 \cdot 10^{-2}$	$7,9 \cdot 10^{-10}$	68,4	19,6	193,7	52,4	42,6
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,0 \cdot 10^{-2}$	$8,8 \cdot 10^{-2}$	61,1	16,5	180,6	50,4	39,1
P7	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,2 \cdot 10^{-10}$	$2,1 \cdot 10^{-5}$	67,0	19,7	168,9	37,8	52,9
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,3 \cdot 10^{-7}$	$4,4 \cdot 10^{-2}$	64,2	19,8	166,0	61,5	57,0
P8	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,6 \cdot 10^{-2}$	$3,5 \cdot 10^{-4}$	71,8	17,7	172,8	45,3	50,2
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,5 \cdot 10^{-2}$	$2,1 \cdot 10^{-2}$	64,8	20,9	171,4	55,8	53,1
P9	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$9,9 \cdot 10^{-7}$	$4,3 \cdot 10^{-2}$	69,4	20,4	161,1	0,5	87,1
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$4,7 \cdot 10^{-6}$	$2,1 \cdot 10^{-4}$	67,1	22,9	169,4	54,8	55,2

Tabelle B.8: Parameter des Modells HMT, angepasst an die IK-Trajektorie (barfuß).

Pro- band	Fuß	k_H in rad^{-1}	k_T in rad^{-1}	k_{HM} in rad^{-1}	k_{MT} in rad^{-1}	h_F in mm	ℓ_{HA} in mm	ℓ_{HM} in mm	ℓ_{MT} in mm	γ_F in $^\circ$
P1	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,0 \cdot 10^{-1}$	$3,4 \cdot 10^{-2}$	93,0	71,6	245,7	0,0	89,8
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$6,9 \cdot 10^{-2}$	$2,3 \cdot 10^{-2}$	94,4	52,3	223,3	76,6	53,2
P2	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$6,3 \cdot 10^{-2}$	$2,8 \cdot 10^{-2}$	98,5	50,4	209,5	91,1	57,9
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$7,5 \cdot 10^{-2}$	$3,0 \cdot 10^{-2}$	92,5	58,8	214,5	98,0	60,0
P3	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$6,2 \cdot 10^{-2}$	$4,7 \cdot 10^{-10}$	88,0	59,9	235,1	44,1	38,0
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$5,4 \cdot 10^{-2}$	$2,9 \cdot 10^{-1}$	84,0	66,2	221,7	88,2	50,0
P4	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,5 \cdot 10^{-2}$	$8,3 \cdot 10^{-2}$	82,9	49,8	205,3	83,3	47,5
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$5,6 \cdot 10^{-2}$	$3,3 \cdot 10^{-2}$	75,8	53,9	205,0	66,1	56,2
P5	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$6,9 \cdot 10^{-6}$	$3,7 \cdot 10^{-2}$	88,6	33,3	175,5	87,8	52,4
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,5 \cdot 10^{-2}$	$4,0 \cdot 10^{-2}$	83,7	49,1	189,5	83,8	58,2
P6	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,9 \cdot 10^{-6}$	$5,7 \cdot 10^{-2}$	83,1	42,7	175,0	81,0	44,0
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,9 \cdot 10^{-3}$	$2,1 \cdot 10^{-1}$	71,3	49,0	178,8	70,6	43,4
P7	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$5,2 \cdot 10^{-3}$	$3,7 \cdot 10^{-10}$	78,0	45,5	183,7	41,3	63,2
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,1 \cdot 10^{-2}$	$2,4 \cdot 10^{-2}$	79,0	45,7	179,8	78,7	63,0
P8	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,6 \cdot 10^{-2}$	$3,2 \cdot 10^{-2}$	90,8	36,9	175,8	77,6	56,8
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$5,8 \cdot 10^{-2}$	$4,0 \cdot 10^{-2}$	81,8	43,7	180,3	81,4	58,5
P9	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,8 \cdot 10^{-2}$	$4,2 \cdot 10^{-2}$	91,9	37,0	169,5	0,0	89,7
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$4,1 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	90,4	44,2	177,5	66,0	57,6

Tabelle B.9: Parameter des Modells HMT, angepasst an die SG-Trajektorie (mit Schuhen).

Pro- band	Fuß	k_H in rad^{-1}	k_T in rad^{-1}	k_{HM} in rad^{-1}	k_{MT} in rad^{-1}	h_F in mm	ℓ_{HA} in mm	ℓ_{HM} in mm	ℓ_{MT} in mm	γ_F in $^\circ$
P1	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$9,9 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-2}$	102,7	94,8	282,6	58,9	32,2
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,3 \cdot 10^{-1}$	$5,2 \cdot 10^{-2}$	93,6	90,4	284,1	83,6	45,6
P2	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$5,4 \cdot 10^{-2}$	$1,0 \cdot 10^{-1}$	106,5	76,5	248,6	112,4	44,0
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$4,7 \cdot 10^{-2}$	90,9	99,5	296,6	88,0	50,9
P3	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$6,9 \cdot 10^{-2}$	$5,6 \cdot 10^{-2}$	95,9	80,0	270,3	54,6	37,4
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$9,9 \cdot 10^{-2}$	$8,3 \cdot 10^{-2}$	85,6	91,2	279,8	59,2	44,7
P4	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,2 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	101,9	72,8	237,2	106,3	45,9
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$8,1 \cdot 10^{-2}$	$7,8 \cdot 10^{-2}$	91,0	81,0	243,0	87,6	45,0
P5	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$5,1 \cdot 10^{-2}$	$9,6 \cdot 10^{-2}$	97,1	63,9	221,3	101,2	43,3
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,8 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	99,3	50,0	203,9	102,6	46,8
P6	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,0 \cdot 10^{-1}$	$6,0 \cdot 10^{-2}$	91,4	82,1	256,4	73,1	39,8
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$5,3 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-1}$	90,4	66,9	211,2	93,3	37,8
P7	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$8,6 \cdot 10^{-2}$	$8,0 \cdot 10^{-2}$	94,3	69,1	228,4	86,7	46,9
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$9,0 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-1}$	90,4	64,1	218,6	98,4	50,7
P8	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	$7,6 \cdot 10^{-2}$	95,6	77,0	237,0	85,2	48,2
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,8 \cdot 10^{-1}$	$7,1 \cdot 10^{-2}$	77,1	86,0	251,8	74,2	52,2
P9	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$7,0 \cdot 10^{-2}$	$6,4 \cdot 10^{-2}$	98,2	66,8	218,7	82,5	42,8
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$6,9 \cdot 10^{-2}$	$1,6 \cdot 10^{-1}$	98,4	61,4	204,8	91,4	45,0

Tabelle B.10: Parameter des Modells HMT, angepasst an die AK-Trajektorie (mit Schuhen).

Pro- band	Fuß	k_H in rad^{-1}	k_T in rad^{-1}	k_{HM} in rad^{-1}	k_{MT} in rad^{-1}	h_F in mm	ℓ_{HA} in mm	ℓ_{HM} in mm	ℓ_{MT} in mm	γ_F in $^\circ$
P1	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,1 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-1}$	100,0	68,8	226,2	100,3	29,5
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,0 \cdot 10^{-1}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	86,9	67,4	255,6	96,9	44,8
P2	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,1 \cdot 10^{-2}$	$6,8 \cdot 10^{-2}$	96,2	44,9	235,1	98,3	42,2
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$8,7 \cdot 10^{-2}$	$5,4 \cdot 10^{-2}$	91,0	61,4	266,4	84,3	48,2
P3	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$4,7 \cdot 10^{-2}$	$5,2 \cdot 10^{-2}$	88,8	53,3	249,3	51,9	36,7
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$6,5 \cdot 10^{-2}$	$1,0 \cdot 10^{-1}$	80,6	63,1	253,0	74,0	45,9
P4	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$7,5 \cdot 10^{-3}$	$9,7 \cdot 10^{-2}$	99,4	41,8	224,9	101,3	45,4
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$8,5 \cdot 10^{-2}$	$6,4 \cdot 10^{-2}$	87,0	61,2	233,4	82,3	45,1
P5	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,6 \cdot 10^{-2}$	$8,4 \cdot 10^{-2}$	89,2	34,3	200,2	91,1	40,8
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,1 \cdot 10^{-2}$	$8,4 \cdot 10^{-2}$	92,3	37,5	202,1	94,9	45,9
P6	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$9,9 \cdot 10^{-2}$	$5,4 \cdot 10^{-2}$	83,4	63,1	250,4	69,2	40,1
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$6,9 \cdot 10^{-2}$	$8,3 \cdot 10^{-2}$	81,1	46,5	217,4	71,3	37,7
P7	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$7,1 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	90,6	48,5	214,5	96,2	47,3
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$7,6 \cdot 10^{-2}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	83,8	47,9	209,5	90,1	48,7
P8	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$7,0 \cdot 10^{-2}$	$1,0 \cdot 10^{-1}$	90,4	57,4	217,9	93,0	47,7
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,6 \cdot 10^{-1}$	$8,5 \cdot 10^{-2}$	72,4	67,3	234,2	78,3	50,4
P9	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,0 \cdot 10^{-2}$	$7,5 \cdot 10^{-2}$	91,0	47,3	201,2	90,6	41,7
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$3,3 \cdot 10^{-2}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	90,1	47,4	191,3	92,6	42,3

Tabelle B.11: Parameter des Modells HMT, angepasst an die IK-Trajektorie (mit Schuhen).

Pro- band	Fuß	k_H in rad^{-1}	k_T in rad^{-1}	k_{HM} in rad^{-1}	k_{MT} in rad^{-1}	h_F in mm	ℓ_{HA} in mm	ℓ_{HM} in mm	ℓ_{MT} in mm	γ_F in $^\circ$
P1	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,3 \cdot 10^{-1}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	85,1	153,6	378,8	126,4	53,1
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$3,9 \cdot 10^{-2}$	101,4	114,9	308,8	84,4	47,0
P2	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$7,3 \cdot 10^{-2}$	$9,4 \cdot 10^{-2}$	116,1	108,9	267,7	111,8	44,7
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,2 \cdot 10^{-1}$	$2,6 \cdot 10^{-2}$	81,4	149,0	347,6	79,5	54,7
P3	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$8,8 \cdot 10^{-2}$	$5,9 \cdot 10^{-2}$	102,7	110,1	295,8	57,3	38,3
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,4 \cdot 10^{-1}$	$6,0 \cdot 10^{-2}$	87,1	134,4	324,8	47,6	44,9
P4	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$6,3 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-1}$	102,4	116,7	269,4	106,5	47,7
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$7,0 \cdot 10^{-2}$	$1,0 \cdot 10^{-1}$	96,0	100,5	250,8	96,6	44,8
P5	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$7,0 \cdot 10^{-2}$	$9,8 \cdot 10^{-2}$	104,9	95,3	245,8	107,2	45,3
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$4,8 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-1}$	106,1	64,7	208,7	110,2	47,8
P6	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,0 \cdot 10^{-1}$	$6,9 \cdot 10^{-2}$	100,1	99,3	260,7	81,1	40,1
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,9 \cdot 10^{-6}$	$1,5 \cdot 10^{-1}$	100,1	92,2	210,9	98,8	34,5
P7	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$9,4 \cdot 10^{-2}$	$6,3 \cdot 10^{-2}$	98,4	88,2	239,8	82,1	47,0
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,0 \cdot 10^{-1}$	$1,0 \cdot 10^{-1}$	95,9	83,2	233,6	93,7	51,0
P8	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,6 \cdot 10^{-1}$	$5,5 \cdot 10^{-2}$	99,2	98,0	259,3	78,1	49,5
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$2,0 \cdot 10^{-1}$	$6,2 \cdot 10^{-2}$	82,0	105,7	270,2	71,4	54,0
P9	links	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,1 \cdot 10^{-1}$	$4,5 \cdot 10^{-2}$	103,2	92,3	245,9	73,6	44,7
	rechts	$1 \cdot 10^{-8}$	$1 \cdot 10^{-8}$	$1,2 \cdot 10^{-1}$	$7,6 \cdot 10^{-2}$	103,6	82,4	234,1	69,8	46,6

C Strafparameter für ℓ_1 -Gütefunktion

In Abschnitt 6.2.1 werden die Multiplikatoren des QP-Teilproblems Gl. (6.7) als Strafparameter für die ℓ_1 -Gütefunktion eingeführt. Im folgenden Abschnitt wird gezeigt, dass dies den kleinstmöglichen Strafparametern entspricht, mit denen die Lösung (der stationäre Punkt) der zugehörigen ℓ_1 -Straffunktion nach Gl. (6.8) gleich der Lösung des ursprünglichen Problems ist. Da das ursprüngliche Problem nur eine Lösung besitzt, wenn die Nebenbedingungen konsistent sind, kann dieser Zusammenhang nur in diesem Fall genutzt werden.

Die Lösung des Problems

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{d}} q_k(\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}_g, \boldsymbol{\mu}_u) \\
 q_k(\mathbf{d}, \boldsymbol{\mu}_g, \boldsymbol{\mu}_u) &= f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k)\mathbf{d} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^\top \mathbf{W}_k \mathbf{d} \\
 & \quad + \sum_{i \in \mathcal{G}} \mu_{g,k,i} |\nabla c_{g,i}(\mathbf{x}_k)\mathbf{d} + c_{g,i}(\mathbf{x}_k)| \\
 & \quad + \sum_{i \in \mathcal{U}} \mu_{u,k,i} \max(0, \nabla c_{u,i}(\mathbf{x}_k)\mathbf{d} + c_{u,i}(\mathbf{x}_k)) \tag{C.1}
 \end{aligned}$$

nach Gl. (6.8) kann mittels der Schlupfvariablen \mathbf{r} , \mathbf{s} und \mathbf{t} auf das äquivalente glatte Problem

$$\min_{\mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}} f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k)\mathbf{d} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^\top \mathbf{W}_k \mathbf{d} + \boldsymbol{\mu}_g^\top (\mathbf{r} + \mathbf{s}) + \boldsymbol{\mu}_u^\top \mathbf{t} \tag{C.2a}$$

$$\text{u. d. N. } \nabla c_g(\mathbf{x}_k)\mathbf{d} + c_g(\mathbf{x}_k) = \mathbf{r} - \mathbf{s} , \tag{C.2b}$$

$$\nabla c_u(\mathbf{x}_k)\mathbf{d} + c_u(\mathbf{x}_k) \leq \mathbf{t} , \tag{C.2c}$$

$$\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t} \geq \mathbf{0} \tag{C.2d}$$

transformiert werden. Die Lagrange-Funktion dieses Problems ist

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(\mathbf{d}, \mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t}, \boldsymbol{\lambda}_g, \boldsymbol{\lambda}_u, \boldsymbol{\lambda}_r, \boldsymbol{\lambda}_s, \boldsymbol{\lambda}_t) & \\
 &= f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{W}_k \mathbf{d} + \boldsymbol{\mu}_g^\top (\mathbf{r} + \mathbf{s}) + \boldsymbol{\mu}_u^\top \mathbf{t} \\
 &\quad + \boldsymbol{\lambda}_g^\top (\nabla \mathbf{c}_g(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} + \mathbf{c}_g(\mathbf{x}_k) - \mathbf{r} + \mathbf{s}) + \boldsymbol{\lambda}_u^\top (\nabla \mathbf{c}_u(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} + \mathbf{c}_u(\mathbf{x}_k) - \mathbf{t}) \\
 &\quad - \boldsymbol{\lambda}_r^\top \mathbf{r} - \boldsymbol{\lambda}_s^\top \mathbf{s} - \boldsymbol{\lambda}_t^\top \mathbf{t}
 \end{aligned} \tag{C.3}$$

und die KKT-Bedingungen lauten

$$\nabla f(\mathbf{x}_k)^\top + \mathbf{W}_k \mathbf{d} + \nabla \mathbf{c}_g(\mathbf{x}_k)^\top \boldsymbol{\lambda}_g + \nabla \mathbf{c}_u(\mathbf{x}_k)^\top \boldsymbol{\lambda}_u = \mathbf{0}, \tag{C.4a}$$

$$\boldsymbol{\mu}_g - \boldsymbol{\lambda}_g - \boldsymbol{\lambda}_r = \mathbf{0}, \tag{C.4b}$$

$$\boldsymbol{\mu}_g + \boldsymbol{\lambda}_g - \boldsymbol{\lambda}_s = \mathbf{0}, \tag{C.4c}$$

$$\boldsymbol{\mu}_u - \boldsymbol{\lambda}_u - \boldsymbol{\lambda}_t = \mathbf{0}, \tag{C.4d}$$

$$\nabla \mathbf{c}_g(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} + \mathbf{c}_g(\mathbf{x}_k) - \mathbf{r} + \mathbf{s} = \mathbf{0}, \tag{C.4e}$$

$$\nabla \mathbf{c}_u(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} + \mathbf{c}_u(\mathbf{x}_k) - \mathbf{t} \leq \mathbf{0}, \tag{C.4f}$$

$$-\mathbf{r} \leq \mathbf{0}, \tag{C.4g}$$

$$-\mathbf{s} \leq \mathbf{0}, \tag{C.4h}$$

$$-\mathbf{t} \leq \mathbf{0}, \tag{C.4i}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_u \geq \mathbf{0}, \tag{C.4j}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_r \geq \mathbf{0}, \tag{C.4k}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_s \geq \mathbf{0}, \tag{C.4l}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_t \geq \mathbf{0}, \tag{C.4m}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_u^\top (\nabla \mathbf{c}_u(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} + \mathbf{c}_u(\mathbf{x}_k) - \mathbf{t}) = 0, \tag{C.4n}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_r^\top \mathbf{r} = 0, \tag{C.4o}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_s^\top \mathbf{s} = 0, \tag{C.4p}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_t^\top \mathbf{t} = 0. \tag{C.4q}$$

Hiervon wird nun die aktive Menge der Ungleichheitsnebenbedingungen betrachtet, die durch einen von null verschiedenen Multiplikator erzwungen werden müssen. Dabei ist aus der Formulierung ersichtlich, dass dies bei jeder der ursprünglichen Gleichheitsnebenbedingungen entweder für \mathbf{r} oder für \mathbf{s} der Fall ist, jedoch nie für beide Schlupfvariablen gleichzeitig. Es ist also $\mathbf{r}^\top \mathbf{s} = 0$.

Weiterhin ist die aktive Menge der ursprünglichen Ungleichheitsnebenbedingungen \mathcal{A} gleich der aktiven Schlupfvariablen \mathbf{t} . Für alle ursprünglichen Ungleichheitsnebenbe-

dingungen, die nicht aktiv sind, kann $t_i = 0$, $i \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{A}$ gesetzt werden, ohne dass dies durch den zugehörigen Multiplikator $\lambda_{t,i}$ erzwungen werden muss.

Im Folgenden wird durch einen hochgestellten Index ausgedrückt, dass die jeweilige aktive Menge betrachtet wird. So werden bei $\boldsymbol{\mu}_g^r$, $\boldsymbol{\lambda}_g^r$, und $\boldsymbol{\lambda}_r^r$ nur diejenigen Indizes betrachtet, bei denen die Schranke $-\mathbf{r}^r \leq \mathbf{0}$ durch den zugehörigen Multiplikator $\boldsymbol{\lambda}_r^r$ erzwungen werden muss. Damit ergibt sich aus den KKT-Bedingungen das Gleichungssystem

$$\nabla f(\mathbf{x}_k)^\top + \mathbf{W}_k \mathbf{d} + \nabla \mathbf{c}_g(\mathbf{x}_k)^\top \boldsymbol{\lambda}_g + \nabla \mathbf{c}_u(\mathbf{x}_k)^\top \boldsymbol{\lambda}_u = \mathbf{0} , \quad (\text{C.5a})$$

$$\boldsymbol{\mu}_g^r - \boldsymbol{\lambda}_g^r - \boldsymbol{\lambda}_r^r = \mathbf{0} , \quad (\text{C.5b})$$

$$\boldsymbol{\mu}_g^s + \boldsymbol{\lambda}_g^s - \boldsymbol{\lambda}_s^s = \mathbf{0} , \quad (\text{C.5c})$$

$$\boldsymbol{\mu}_u^t - \boldsymbol{\lambda}_u^t - \boldsymbol{\lambda}_t^t = \mathbf{0} , \quad (\text{C.5d})$$

$$\nabla \mathbf{c}_g^r(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} + \mathbf{c}_g^r(\mathbf{x}_k) - \mathbf{r}^r = \mathbf{0} , \quad (\text{C.5e})$$

$$\nabla \mathbf{c}_g^s(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} + \mathbf{c}_g^s(\mathbf{x}_k) + \mathbf{s}^s = \mathbf{0} , \quad (\text{C.5f})$$

$$\nabla \mathbf{c}_u^t(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} + \mathbf{c}_u^t(\mathbf{x}_k) - \mathbf{t}^t \leq \mathbf{0} , \quad (\text{C.5g})$$

$$-\mathbf{r}^r \leq \mathbf{0} , \quad (\text{C.5h})$$

$$-\mathbf{s}^s \leq \mathbf{0} , \quad (\text{C.5i})$$

$$-\mathbf{t}^t \leq \mathbf{0} , \quad (\text{C.5j})$$

$$\boldsymbol{\lambda}_u^t \geq \mathbf{0} , \quad (\text{C.5k})$$

$$\boldsymbol{\lambda}_r^r \geq \mathbf{0} , \quad (\text{C.5l})$$

$$\boldsymbol{\lambda}_s^s \geq \mathbf{0} , \quad (\text{C.5m})$$

$$\boldsymbol{\lambda}_t^t \geq \mathbf{0} , \quad (\text{C.5n})$$

$$\boldsymbol{\lambda}_u^t{}^\top (\nabla \mathbf{c}_u^t(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} + \mathbf{c}_u^t(\mathbf{x}_k) - \mathbf{t}^t) = 0 , \quad (\text{C.5o})$$

$$\boldsymbol{\lambda}_r^r{}^\top \mathbf{r} = 0 , \quad (\text{C.5p})$$

$$\boldsymbol{\lambda}_s^s{}^\top \mathbf{s} = 0 , \quad (\text{C.5q})$$

$$\boldsymbol{\lambda}_t^t{}^\top \mathbf{t} = 0 , \quad (\text{C.5r})$$

wobei alle anderen Schlupfvariablen und die zugehörigen Multiplikatoren zu null gesetzt sind.

Nun wird der Grenzfall betrachtet, an dem alle Strafparameter gerade so groß sind, dass eine minimale Verringerung dazu führt, dass sich für Gl. (C.2d) ein stationärer Punkt ergibt, der nicht gleich der Lösung von Gl. (C.1) ist. In diesem Fall sind sowohl alle Schlupfvariablen $\mathbf{r}^r, \mathbf{s}^s, \mathbf{t}^t = \mathbf{0}$ – die Nebenbedingungen werden gerade nicht verletzt –, als auch die zugehörigen Multiplikatoren $\boldsymbol{\lambda}_r^r, \boldsymbol{\lambda}_s^s, \boldsymbol{\lambda}_t^t = \mathbf{0}$ – eine kleine Verringerung der Strafparameter führt dazu, dass die Schlupfvariablen $\mathbf{r}^r, \mathbf{s}^s, \mathbf{t}^t > \mathbf{0}$

sind, womit aus den Komplementaritätsbedingungen folgt, dass die Multiplikatoren verschwinden.

Durch das Einsetzen der Bedingungen $\mathbf{r}^r, \mathbf{s}^s, \mathbf{t}^t, \boldsymbol{\lambda}_r^r, \boldsymbol{\lambda}_g^s, \boldsymbol{\lambda}_t^t = \mathbf{0}$ in Gl. (C.3) und (C.5) ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{d}, \boldsymbol{\lambda}_g, \boldsymbol{\lambda}_u) &= f(\mathbf{x}_k) + \nabla f(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{W}_k \mathbf{d} \\ &\quad + \boldsymbol{\lambda}_g^\top (\nabla \mathbf{c}_g(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} + \mathbf{c}_g(\mathbf{x}_k)) + \boldsymbol{\lambda}_u^\top (\nabla \mathbf{c}_u(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} + \mathbf{c}_u(\mathbf{x}_k)) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

und

$$\nabla f(\mathbf{x}_k)^\top + \mathbf{W}_k \mathbf{d} + \nabla \mathbf{c}_g(\mathbf{x}_k)^\top \boldsymbol{\lambda}_g + \nabla \mathbf{c}_u(\mathbf{x}_k)^\top \boldsymbol{\lambda}_u = \mathbf{0} , \quad (\text{C.7a})$$

$$\boldsymbol{\mu}_g^r - \boldsymbol{\lambda}_g^r = \mathbf{0} , \quad (\text{C.7b})$$

$$\boldsymbol{\mu}_g^s + \boldsymbol{\lambda}_g^s = \mathbf{0} , \quad (\text{C.7c})$$

$$\boldsymbol{\mu}_u^t - \boldsymbol{\lambda}_u^t = \mathbf{0} , \quad (\text{C.7d})$$

$$\nabla \mathbf{c}_g^r(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} + \mathbf{c}_g^r(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0} , \quad (\text{C.7e})$$

$$\nabla \mathbf{c}_g^s(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} + \mathbf{c}_g^s(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0} , \quad (\text{C.7f})$$

$$\nabla \mathbf{c}_u^t(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} + \mathbf{c}_u^t(\mathbf{x}_k) \leq \mathbf{0} , \quad (\text{C.7g})$$

$$\boldsymbol{\lambda}_u^t \geq \mathbf{0} , \quad (\text{C.7h})$$

$$\boldsymbol{\lambda}_u^{t \top} (\nabla \mathbf{c}_u^t(\mathbf{x}_k) \mathbf{d} + \mathbf{c}_u^t(\mathbf{x}_k)) = 0 . \quad (\text{C.7i})$$

Dabei ist Gl. (C.6) die Lagrange-Funktion des ursprünglichen Problems Gl. (6.7c), und Gl. (C.7a) und (C.7e) bis (C.7i) sind die zugehörigen KKT-Bedingungen. Aus Gl. (C.7b), (C.7c) und (C.7d) folgen die gesuchten Zusammenhänge zwischen den Multiplikatoren und den Strafparametern.

Da $\boldsymbol{\lambda}_g^r \geq \mathbf{0}$ und $\boldsymbol{\lambda}_g^s \leq \mathbf{0}$ gilt, folgen aus Gl. (C.7b) und (C.7c) die minimalen Strafparameter für die Gleichheitsnebenbedingungen

$$\boldsymbol{\mu}_g = |\boldsymbol{\lambda}_g| , \quad (\text{C.8})$$

und aus Gl. (C.7d) folgen die minimalen Strafparameter für die Ungleichheitsnebenbedingungen

$$\boldsymbol{\mu}_u = \boldsymbol{\lambda}_u \geq \mathbf{0} . \quad (\text{C.9})$$

□

D Energieeffizienz der Fußmodelle von Proband P1–P4

Dieser Anhang enthält zusätzliche Diagramme zu den in Abschnitt 9.2 behandelten Modellen in den Anhängen D.1 bis D.4.

Die Parameter für das zum Vergleich der Energieeffizienz herangezogene Modell mit Punktfüßen sind in Tabelle D.1 zusammengefasst. Zu den Besonderheiten der Parameter siehe Fußnote 15 (S. 126).

Tabelle D.1: Parameter des mechanischen Modells \mathbf{p}_{mech} für das Modell mit Punktfüßen.

Parameter		Wert	Einheit
h	Gesamthöhe	(1,80)	m
m	Gesamtmasse	(80)	kg
ℓ_T	Länge des Oberkörpers	0,809	m
ℓ_O	Länge des Oberschenkels	0,439	m
ℓ_U	Länge des Unterschenkels	0,440	m
r_T	Schwerpunktlage des Oberkörpers	0,302	m
r_O	Schwerpunktlage des Oberschenkels	0,188	m
r_U	Schwerpunktlage des Unterschenkels	0,240	m
m_T	Masse des Oberkörpers	50,880	kg
m_O	Masse des Oberschenkels	9,840	kg
m_U	Masse des Unterschenkels	4,800	kg
J_T	Massenträgheitsmoment des Oberkörpers	2,646	kg m^2
J_O	Massenträgheitsmoment des Oberschenkels	0,171	kg m^2
J_U	Massenträgheitsmoment des Unterschenkels	0,132	kg m^2
c_A	Aktorkonstante	1,000	$\text{W}/(\text{Nm})^2$
g	Erdbeschleunigung	9,810	m s^{-2}
μ_H	Haftreibungskoeffizient	0,600	–
M	Grad der Bézierpolynome	6	
P	Anzahl der Diskretisierungspunkte	200	

D.1 Fußmodell HM ohne Zehen (barfuß)

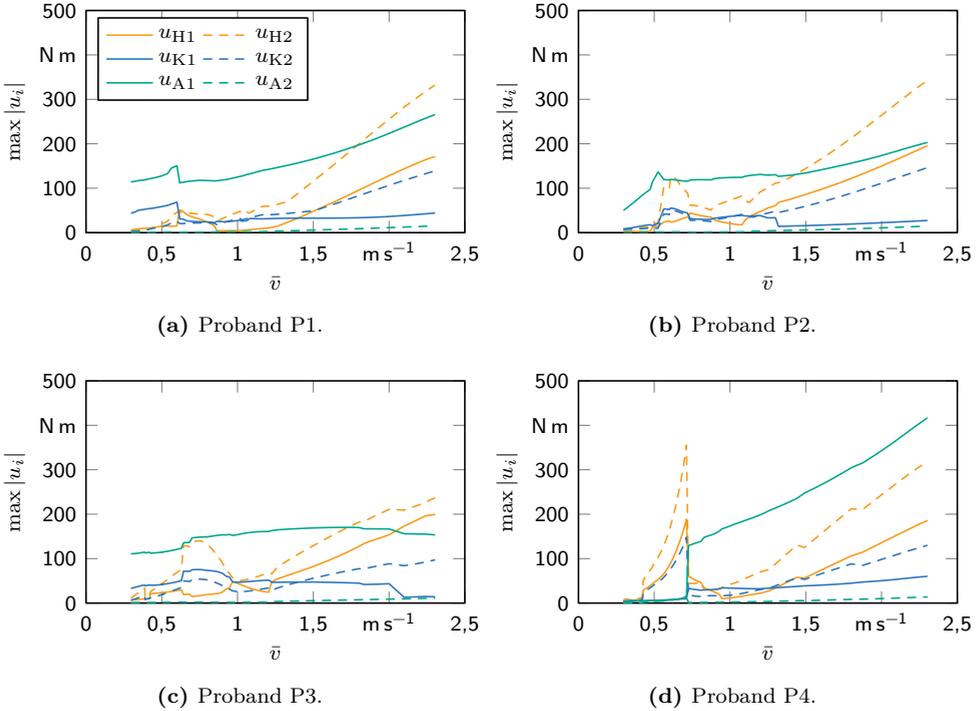


Abbildung D.1: Verläufe der maximal während des Schritts anliegenden Aktmomente bei der jeweils optimalen Bewegung für (a) Proband P1, (b) P2, (c) P3 und (d) P4.

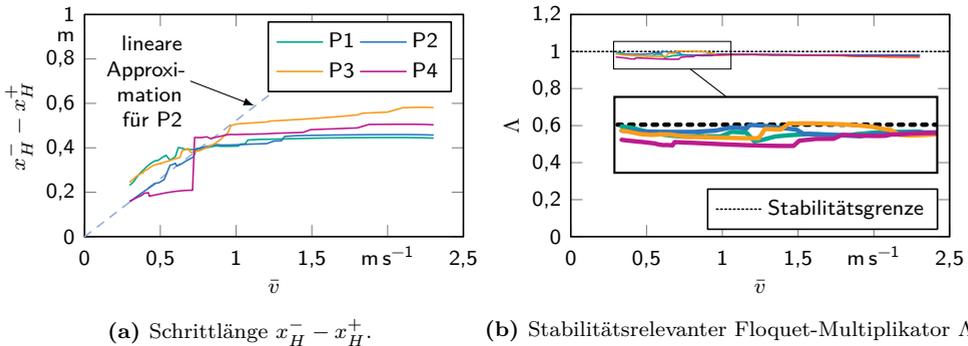


Abbildung D.2: (a) Schrittlänge ($x_H^- - x_H^+$) und (b) stabilitätsrelevanter Floquet-Multiplikator Λ der jeweils optimalen Bewegung für die Probanden P1–P4. Lineare Approximation der Schrittlänge von P2 für $\bar{v} < 0,8$ m/s (blau gestrichelt).

D.2 Fußmodell HM ohne Zehen (mit Schuhen)

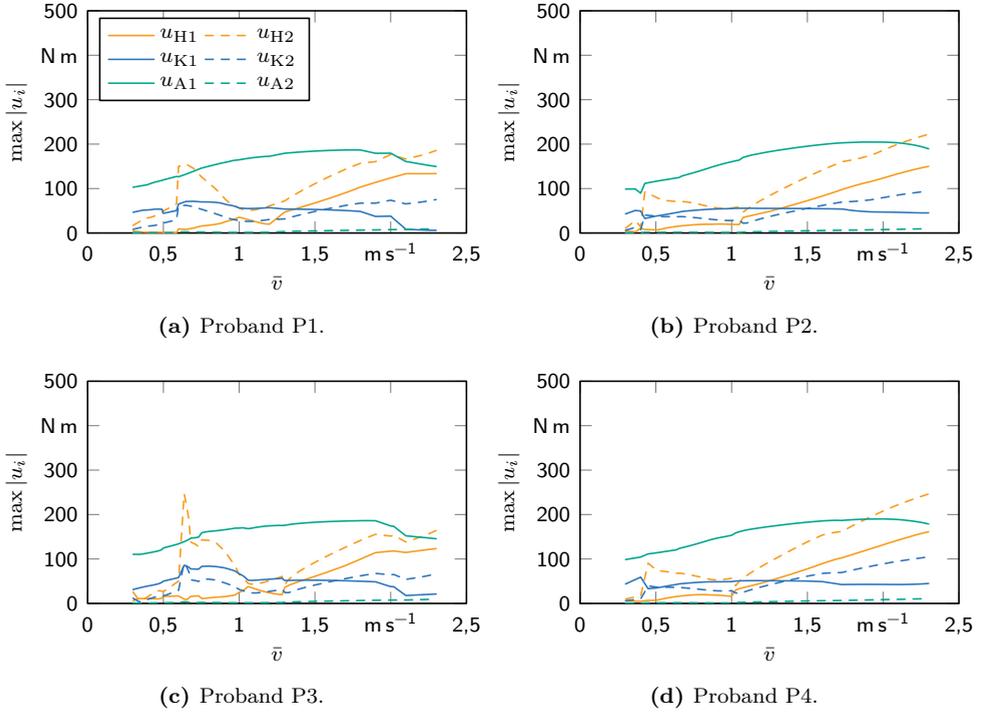


Abbildung D.3: Verläufe der maximal während des Schritts anliegenden Aktmomente bei der jeweils optimalen Bewegung für (a) Proband P1, (b) P2, (c) P3 und (d) P4.

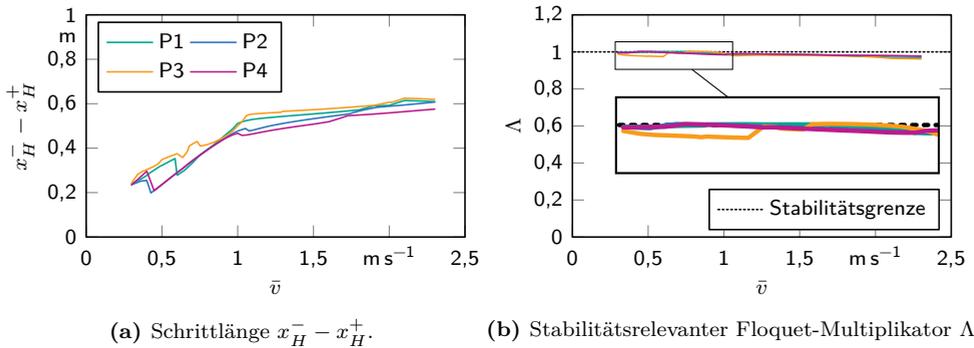


Abbildung D.4: (a) Schrittlänge ($x_H^- - x_H^+$) und (b) stabilitätsrelevanter Floquet-Multiplikator Λ (P2 durch P4 überdeckt) der jeweils optimalen Bewegung für die Probanden P1–P4.

D.3 Fußmodell HMT mit Zehen (barfuß)

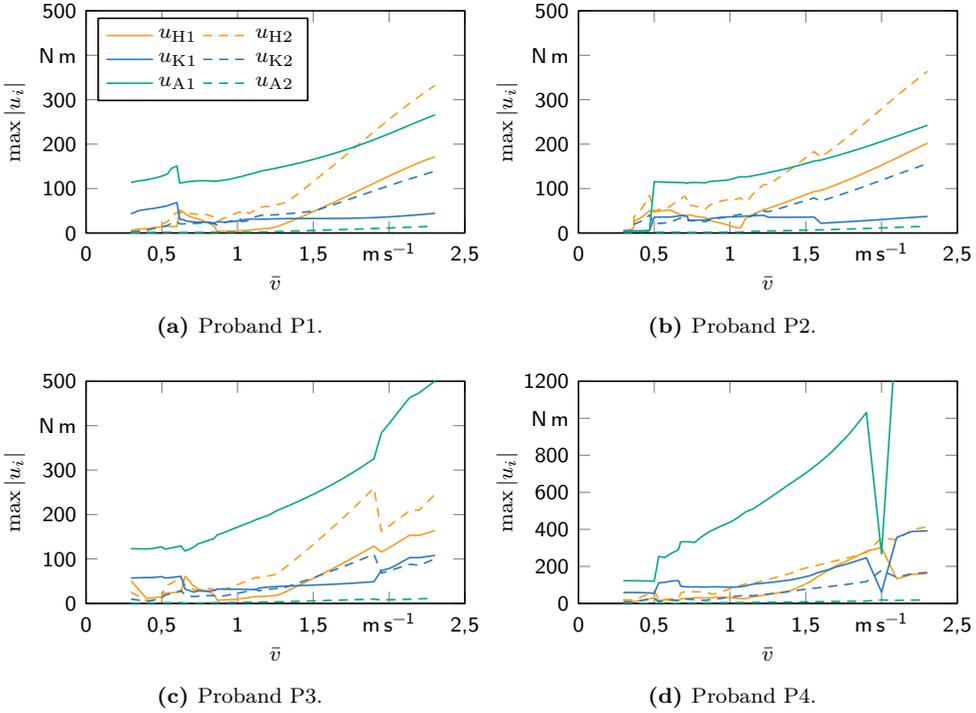


Abbildung D.5: Verläufe der maximal während des Schritts anliegenden Aktmomente bei der jeweils optimalen Bewegung für (a) Proband P1, (b) P2, (c) P3 und (d) P4.

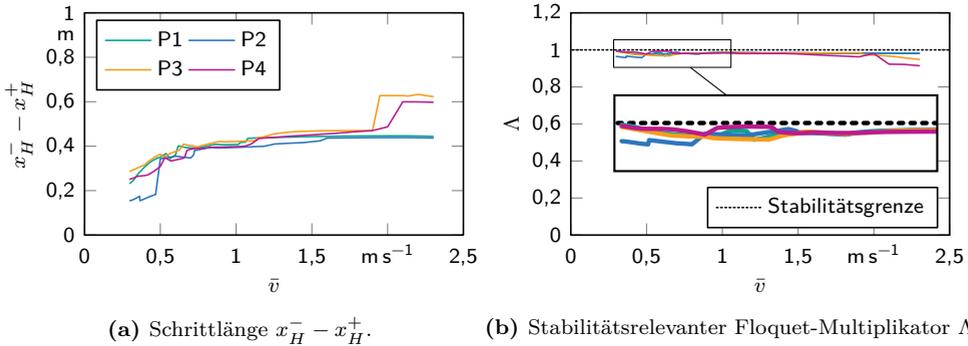


Abbildung D.6: (a) Schrittlänge ($x_H^- - x_H^+$) und (b) stabilitätsrelevanter Floquet-Multiplikator Λ der jeweils optimalen Bewegung für die Probanden P1–P4.

D.4 Fußmodell HMT mit Zehen (mit Schuhen)

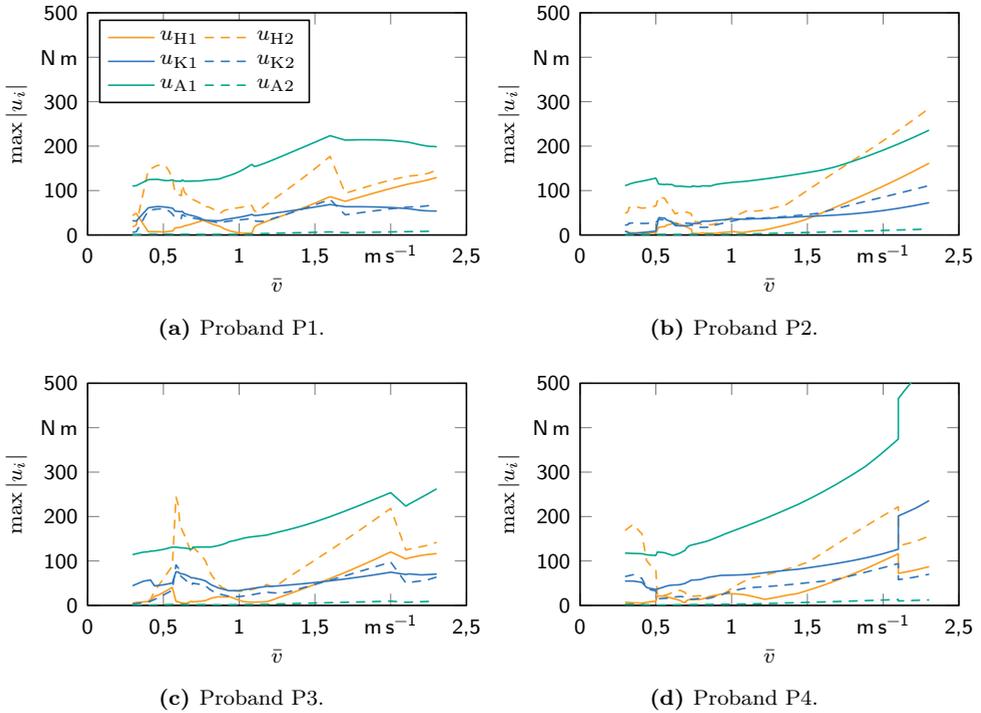


Abbildung D.7: Verläufe der maximal während des Schritts anliegenden Aktmomente bei der jeweils optimalen Bewegung für (a) Proband P1, (b) P2, (c) P3 und (d) P4.

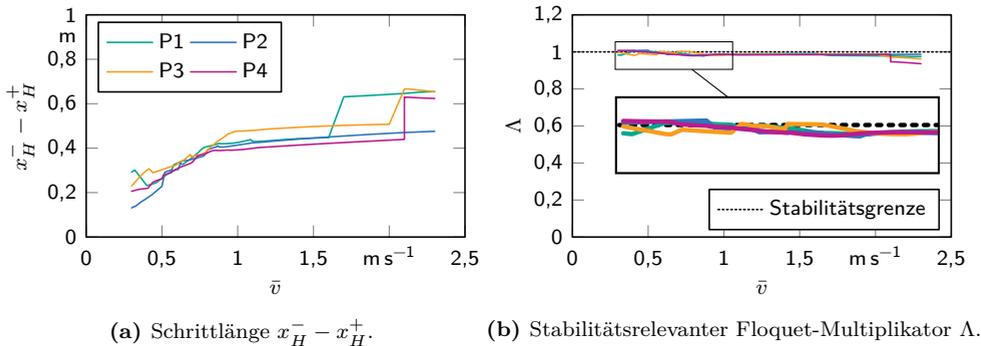


Abbildung D.8: (a) Schrittweite ($x_H^- - x_H^+$) und (b) stabilitätsrelevanter Floquet-Multiplikator Λ der jeweils optimalen Bewegung für die Probanden P1 – P4.

E Berechnung der Fußparameter aus der Geometrie

Im Folgenden werden die Masse, die Schwerpunktlage und das Massenträgheitsmoment des Fußes unter der Annahme einer homogenen Flächendichte ρ berechnet. Nach Gl. (2.23) und (2.25) ergibt sich eine Parametrierung des Umfangs in den Polarkoordinaten $r(\alpha)$ und $\phi(\alpha)$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_{BC}(\alpha)\|_2 = r(\alpha) &= \sqrt{f_B'^2(\alpha) + f_B^2(\alpha)}, \\ \alpha + \psi(\alpha) = \phi(\alpha) &= \alpha + \arctan\left(\frac{f_B'(\alpha)}{f_B(\alpha)}\right) \end{aligned}$$

sowie die Beziehung

$$\phi'(\alpha) = \frac{f_B(\alpha)(f_B(\alpha) + f_B''(\alpha))}{r^2(\alpha)}. \quad (\text{E.1})$$

Daraus kann zunächst die durch den Umfang eingeschlossene Fläche

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{r(\phi)} r \, dr \, d\phi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} r^2(\phi) \, d\phi = \int_{\alpha(\phi=-\pi)}^{\alpha(\phi=\pi)} \frac{1}{2} r^2(\alpha) \phi'(\alpha) \, d\alpha$$

bestimmt werden. Aufgrund der gewählten Parameter gilt im vorliegenden Fall in sehr guter Näherung $\alpha(\phi = -\pi) = -\pi$ und $\alpha(\phi = \pi) = \pi$, womit sich schließlich

$$A = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} r^2(\alpha) \phi'(\alpha) \, d\alpha \quad (\text{E.2})$$

ergibt. Die auftretenden Integrale werden durch eine Quadratur mittels einer zusammengesetzten Trapezregel mit 1000 äquidistanten Diskretisierungspunkten gelöst. Für die Masse ergibt sich damit

$$m = \rho A . \quad (\text{E.3})$$

Analog kann die Lage des Schwerpunkts S relativ zum Sprunggelenk A aus

$$x_{AS} = \frac{1}{3A} \int_{-\pi}^{\pi} r^3(\alpha) \sin(\phi(\alpha)) \phi'(\alpha) d\alpha , \quad (\text{E.4a})$$

$$z_{AS} = -\frac{1}{3A} \int_{-\pi}^{\pi} r^3(\alpha) \cos(\phi(\alpha)) \phi'(\alpha) d\alpha \quad (\text{E.4b})$$

bestimmt werden. Das Massenträgheitsmoment bzgl. des Sprunggelenks ergibt sich zu

$$J_A = \frac{1}{4} \rho \int_{-\pi}^{\pi} r^4(\alpha) \phi'(\alpha) d\alpha , \quad (\text{E.5})$$

woraus mit dem Satz von Steiner das Massenträgheitsmoment bzgl. des Schwerpunkts

$$J_S = J_A - m(x_{AS}^2 + z_{AS}^2) \quad (\text{E.6})$$

folgt. Aus der Lage des Schwerpunkts erhält man schließlich den Nullwinkel

$$\theta_{F,0} = \pi - \arctan\left(\frac{x_{AS}}{-z_{AS}}\right) , \quad (\text{E.7})$$

womit alle Parameter des Fußmodells in Abhängigkeit von der Parametrisierung der Geometrie bestimmt sind.

Abkürzungsverzeichnis

3D-LIPM	3D Linear Inverted Pendulum Mode (deutsch: 3D-Lineare-Inverse-Pendel-Mode)
AD	Automatisches Differenzieren
AK	Marker am Außenknöchel
BFGS	BFGS-Verfahren
COP	Druckpunkt (englisch: center of pressure)
CSD	Komplexe-Schritt-Methode zur Ableitungsnaherung (engl.: Complex Step Derivative approximation)
DSP	Doppelstützphase
ESP	Einzelstützphase
FEM	Finite Elemente Methode
FHG	Freiheitsgrad
GG	Marker am Großzehengrundgelenk
HM	Fußmodell ohne Zehen
HMT	Fußmodell mit Zehen
HZD	Hybride Nulldynamik (englisch: hybrid zero dynamics)
IK	Marker am Innenknöchel
KKT- Beding- ungen	Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen
KMP	Kraftmessplatte
KMP1	Kraftmessplatte 1
KMP2	Kraftmessplatte 2
LICQ	Linear independence constraint qualification
MCS	Motion-Capture-System
NLP	Nichtlineares Programm
PDR	Passive Dynamic Runner (deutsch: passiv-dynamische Rennmaschinen)
PDW	Passive Dynamic Walker (deutsch: passiv-dynamische Gehmaschinen)
QP	Quadratische Programmierung
QPSQP	(QP)-Prädiktor-(SQP)-Korrektor-Verfahren
SG	(oberes) Sprunggelenk

SOC	Korrektur zweiter Ordnung (englisch: second order correction)
SQP	Sequentielle quadratische Programmierung
u. d. N.	unter den Nebenbedingungen
ZMP	Zero Moment Point (deutsch: Null-Momenten-Punkt)

Symbolverzeichnis

Indizes

+	Zustände nach dem Stoß
-	Zustände vor dem Stoß
1	Bein 1: Standbein während der Einzelstützphase
2	Bein 2: Schwungbein während der Einzelstützphase
A	Sprungelenk (engl.: ankle)
AK	Marker am Außenknöchel
SG	(oberes) Sprunggelenk
C	(Potentieller) Kontaktpunkt (engl.: contact point)
COP	Druckpunkt (englisch: center of pressure)
F	Fuß
GG	Marker am Großzehengrundgelenk
H	Hüfte
HM	Fußmodell ohne Zehen
HMT	Fußmodell mit Zehen
IK	Marker am Innenknöchel
K	Knie
KMP1	Kraftmessplatte 1
KMP2	Kraftmessplatte 2
O	Oberschenkel
T	Oberkörper (Torso, Kopf und Arme)
U	Unterschenkel
b	Körperkoordinaten (englisch: body coordinates)
f	freies Modell
g	Gleichheitsnebenbedingungen
l	linker Fuß
r	rechter Fuß
s	Modell in der Standphase (ESP)
u	Ungleichheitsnebenbedingungen

Symbole

\mathcal{A}	aktive Menge (der Ungleichheitsnebenbedingungen)	(–)
\mathcal{B}	körperfestes Bezugssystem	(–)
\mathcal{G}	Menge der Gleichheitsnebenbedingungen	(–)
\mathcal{I}	Intertialsystem	(–)
\mathcal{J}_{neg}	Menge der Indizes j der Messdaten mit negativem x -Wert	(–)
\mathcal{J}_{pos}	Menge der Indizes j der Messdaten mit positivem x -Wert	(–)
\mathcal{L}	Lagrangefunktion	(–)
\mathcal{Q}	Konfigurationsraum	(–)
$T\mathcal{Q}$	Phasenraum: Tangentialbündel von \mathcal{Q}	(–)
$T_q\mathcal{Q}$	Tangentialraum von \mathcal{Q} an \mathbf{q}	(–)
\mathcal{S}	Stoßmannigfaltigkeit	(–)
\mathcal{U}	Menge der Ungleichheitsnebenbedingungen	(–)
\mathcal{Z}	Nulldynamik-Mannigfaltigkeit	(–)
A	Sprunggelenk (englisch: ankle)	(–)
\mathbf{B}	Eingangsmatrix	(–)
B	Referenzpunkt des körperfesten Bezugssystems \mathcal{B}	(–)
C	(potentieller) Kontaktpunkt (englisch: contact point)	(–)
E_{kin}	kinetische Energie	(J)
E_{pot}	potentielle Energie	(J)
\mathbf{F}_1	Interaktionskraft (Spaltenmatrix) zwischen dem Boden und Fuß 1	(N)
\mathbf{F}_1	Interaktionskraft (Vektor) zwischen dem Boden und Fuß 1	(N)
F_{1x}	e_x -Komponente der Interaktionskraft zwischen dem Boden und Fuß 1	(N)
F_{1z}	e_z -Komponente der Interaktionskraft zwischen dem Boden und Fuß 1	(N)
\mathbf{F}_2	Interaktionskraft (Spaltenmatrix) zwischen dem Boden und Fuß 2	(N)
\mathbf{F}_2	Interaktionskraft (Vektor) zwischen dem Boden und Fuß 2	(N)
F_{2x}	e_x -Komponente der Interaktionskraft zwischen dem Boden und Fuß 2	(N)
F_{2z}	e_z -Komponente der Interaktionskraft zwischen dem Boden und Fuß 2	(N)
F_A	Parametrisierung des Fußes im Gesamtmodell	(m)
f_B	Stammfunktion zu f_B	(m)
F_{HM}	Parametrisierung für das Fußmodell ohne Zehen	(m)
F_{HMT}	Parametrisierung für das Fußmodell mit Zehen	(m)

$\bar{\mathbf{F}}_{\text{KMP1}}$	Kraftvektor an KMP1 aus der Messung	(N)
$\bar{\mathbf{F}}_{\text{KMP2}}$	Kraftvektor an KMP2 aus der Messung	(N)
F_n	Kontaktkraft in Normalenrichtung	(N)
F_t	Kontaktkraft in Tangentialrichtung	(N)
\mathbf{G}	Projektionsmatrix	(-)
H	Hacke bzw. Ferse	(-)
J	Massenträgheitsmoment eines Läufersegments bzgl. dessen Schwerpunkts	(kg m ²)
\mathbf{M}	Massenmatrix	(kg,kgm ²)
M	Großzehengrundgelenk (Metatarsophalangealgelenk)	(-)
M	Grad der Beziérpolynome zur Parametrierung der Solltrajektorien	(-)
N	Anzahl der Optimierungsvariablen	(-)
O	Ursprung des Inertialsystems \mathcal{I}	(-)
P	Anzahl der Diskretisierungspunkte	(-)
$\mathbf{P}_{(3\leftarrow 2)}$	Projektionsmatrix von der Spaltenmatrixdarstellung der \mathbf{e}_x - und \mathbf{e}_z -Komponente auf einen dreidimensionalen physikalischen Vektor	(-)
$\mathbf{P}_{(2\leftarrow 3)}$	Projektionsmatrix von einem dreidimensionalen physikalischen Vektor auf die Spaltenmatrixdarstellung der \mathbf{e}_x - und \mathbf{e}_z -Komponente	(-)
$P_{\text{mech},i}$	Leistungsaufnahme des i -ten Aktors: positive mechanische Leistung	(W)
$P_{\text{usq},i}$	Leistungsaufnahme des i -ten Aktors: quadriertes Moment	(W)
R_{κ}	Krümmungsradius	(m)
R_{neg}	Radius des an die Messdaten mit negativem x -Wert angepassten Kreisbogens	(m)
R_{pos}	Radius des an die Messdaten mit positivem x -Wert angepassten Kreisbogens	(m)
T	Zehenspitze (englisch: tiptoe)	(-)
\mathbf{W}	Iterationsmatrix: Näherung für Hesse-Matrix der Lagrange-funktion	(-)
\mathbf{b}_x	Basisvektor des körperfesten Bezugssystems \mathcal{B}	(-)
\mathbf{b}_y	Basisvektor des körperfesten Bezugssystems \mathcal{B}	(-)
\mathbf{b}_z	Basisvektor des körperfesten Bezugssystems \mathcal{B}	(-)
c_A	Aktorkonstante	(W/(Nm) ²)
\mathbf{c}_g	Gleichheitsnebenbedingungen	(-)
\mathbf{c}_u	Ungleichheitsnebenbedingungen	(-)
d	Abstand zweier potentieller Kontaktpunkte	(m)

\mathbf{d}_k	Aktualisierungsschritt bei der iterativen Bestimmung der Lösung \mathbf{x}^*	(–)
\tilde{e}_x	geschätzte Gangrichtung der Probanden	(–)
e_x	Basisvektor des Intertialsystems \mathcal{I}	(–)
e_y	Basisvektor des Intertialsystems \mathcal{I}	(–)
e_z	Basisvektor des Intertialsystems \mathcal{I}	(–)
f	Zielfunktional der Optimierung	(–)
f_B	Abstand des potentiellen Kontaktpunktes vom Punkt B in Normalenrichtung	(m)
f_{mech}	Zielfunktional mit der zugeführten Aktorleistung nach $P_{\text{mech},i}$	(–)
f_{usq}	Zielfunktional mit der zugeführten Aktorleistung nach $P_{\text{usq},i}$	(–)
\mathbf{g}	Erdbeschleunigung (vektoriell)	(m/s ²)
g	Erdbeschleunigung (Betrag)	(m/s ²)
h	Gesamthöhe des Läufers	(m)
\mathbf{h}	nichtlineare Funktion für den Systemausgang \mathbf{y}	(–)
h_F	Höhe des flachen Fußes	(m)
k	Regularisierungsparameter	(–)
ℓ	Länge eines Läufersegments	(m)
ℓ_{HA}	Abstand von Ferse (H) zur Projektion des Sprunggelenks (A) auf die Sohle	(m)
ℓ_{HM}	Abstand von Ferse (H) zum Großzehengrundgelenk (M)	(m)
ℓ_{MT}	Abstand vom Großzehengrundgelenk (M) zur Zehenspitze (T)	(m)
m	Masse	(kg)
\mathbf{n}	(äußerer) Normaleneinheitsvektor	(–)
\mathbf{p}_{HM}	Parameter des Fußmodells HM	(–)
\mathbf{p}_{HMT}	Parameter des Fußmodells HMT	(–)
\mathbf{p}_{mech}	Längen und Trägheitsparameter des mechanischen Modells	(–)
\mathbf{p}_{mod}	Parameter des mechanischen Modells (\mathbf{p}_{mech} , $\theta_{F,0}$, \mathbf{p}_{HM} oder \mathbf{p}_{HMT})	(–)
\mathbf{q}	generalisierte Koordinaten	(m,rad)
\mathbf{q}_a	generalisierte Koordinaten des freien Modells	(m,rad)
$\hat{\mathbf{q}}_a$	generalisierte Koordinaten des freien Modells	(m,rad)
\mathbf{q}_b	Körperkoordinaten (engl.: body coordinates)	(rad)
$\mathbf{q}_{b,d}$	Solltrajektorien für die Gelenkwinkelverläufe \mathbf{q}_b (englisch: desired)	(–)
\mathbf{q}_f	generalisierte Koordinaten des freien Modells	(m,rad)
$\hat{\mathbf{q}}_f$	generalisierte Koordinaten des freien Modells	(m,rad)

\mathbf{q}_s	generalisierte Koordinaten des Modells in der Standphase	(m,rad)
$\hat{\mathbf{q}}_s$	generalisierte Koordinaten des Modells in der Standphase	(m,rad)
r	Schwerpunktposition eines Läufersegments	(m)
\mathbf{r}	Ortsvektor	(m)
\mathbf{r}_{A1}	Positionsvektor (Spaltenmatrixdarstellung) des Sprunggelenks von Bein 1	(m)
\mathbf{r}_{A1}	Positionsvektor des Sprunggelenks von Bein 1	(m)
$\mathbf{r}_{A1,s}$	Positionsvektor (Spaltenmatrixdarstellung) des Sprunggelenks von Bein 1 in der ESP	(m)
\mathbf{r}_{AC}	Positionsvektor von Punkt C relativ zu Punkt A	(m)
$\bar{\mathbf{r}}_{SGl}$	Positionsvektor von SG des linken Fußes (Schätzung aus den Messdaten)	(m)
$\bar{\mathbf{r}}_{SGr}$	Positionsvektor von SG des rechten Fußes (Schätzung aus den Messdaten)	(m)
\mathbf{r}_B	Ortsvektor des Punktes B	(m)
\mathbf{r}_{BC}	Vektor von Punkt B zu Punkt C	(m)
\mathbf{r}_C	Ortsvektor des Punktes C	(m)
$\bar{\mathbf{r}}_{COP1}$	Positionsvektor des COP an KMP1 aus der Messung	(m)
$\bar{\mathbf{r}}_{COP2}$	Positionsvektor des COP an KMP2 aus der Messung	(m)
$\bar{\mathbf{r}}_{AKl}$	Positionsvektor von AK des linken Fußes aus der Messung	(m)
$\bar{\mathbf{r}}_{AKr}$	Positionsvektor von AK des rechten Fußes aus der Messung	(m)
$\bar{\mathbf{r}}_{IKl}$	Positionsvektor von IK des linken Fußes aus der Messung	(m)
$\bar{\mathbf{r}}_{IKr}$	Positionsvektor von IK des rechten Fußes aus der Messung	(m)
$\bar{\mathbf{r}}_{GGl}$	Positionsvektor von GG des linken Fußes aus der Messung	(m)
$\bar{\mathbf{r}}_{GGr}$	Positionsvektor von GG des rechten Fußes aus der Messung	(m)
\mathbf{s}	Schlupfvariablen	(-)
\mathbf{t}	Tangenteneinheitsvektor	(-)
t^+	Zeitpunkt nach dem Stoß (am Anfang der ESP)	(s)
t^-	Zeitpunkt vor dem Stoß (am Ende der ESP)	(s)
\mathbf{u}	Eingangsvektor: generalisierte Kräfte der Aktoren	(Nm)
u_{A1}	Aktormoment in Sprunggelenk von Bein 1	(Nm)
u_{A2}	Aktormoment in Sprunggelenk von Bein 2	(Nm)
u_{H1}	Aktormoment in Hüfte von Bein 1	(Nm)
u_{H2}	Aktormoment in Hüfte von Bein 2	(Nm)
u_{K1}	Aktormoment in Knie von Bein 1	(Nm)
u_{K2}	Aktormoment in Knie von Bein 2	(Nm)
\mathbf{v}	Eingangsvektor: Gelenkwinkelbeschleunigungen	(rad/s ²)
\mathbf{v}	Geschwindigkeitsvektor	(m/s)
\mathbf{v}_B	Geschwindigkeitsvektor des Punktes B	(m/s)

\bar{v}	Durchschnittsgeschwindigkeit der Gehbewegung	(m/s)
\mathbf{v}_C	Geschwindigkeitsvektor (Spaltenmatrixdarstellung) des Punktes C	(m/s)
\mathbf{v}_C	Geschwindigkeitsvektor des Punktes C	(m/s)
$v_{t,rel}$	relative Tangentialgeschwindigkeit der materiellen Kontaktpunkte	(m/s)
\mathbf{w}	Eingangsvektor: eingangs-/ausganglinearisiertes System	(rad/s ²)
\mathbf{x}	Optimierungsvektor	(-)
x_{A1}	x -Koordinate des Sprunggelenks von Bein 1	(m)
x_B	x -Koordinate des Punktes B	(m)
x_{BC}	Abstand von Punkt B zu Punkt C in x -Richtung	(m)
x_C	x -Koordinate des Punktes C	(m)
x_{C1}	x -Koordinate des potentiellen Kontaktpunkts von Bein 1	(m)
x_{C2}	x -Koordinate des potentiellen Kontaktpunkts von Bein 2	(m)
x_{neg}	x -Koordinate des Mittelpunkts beim Anpassen eines Kreisbogens an die Messdaten mit negativem x -Wert	(m)
x_{off}	Verschiebung der Messdaten in x -Richtung relativ zum Ursprung des Modells (englisch: offset)	(m)
x_{pos}	x -Koordinate des Mittelpunkts beim Anpassen eines Kreisbogens an die Messdaten mit positivem x -Wert	(m)
\mathbf{x}_s	Zustandsvektor in der ESP	(-)
\mathbf{y}	Systemausgang der Regelung	(-)
z_{A1}	z -Koordinate des Sprunggelenks von Bein 1	(m)
z_B	z -Koordinate des Punktes B	(m)
z_{BC}	Abstand von Punkt B zu Punkt C in z -Richtung	(m)
z_{C2}	z -Koordinate des potentiellen Kontaktpunkts von Bein 2	(m)
z_{min}	minimale Höhe über dem Boden aller Positionen aus den Messdaten	(m)
\mathbf{z}_s	Zustandsvektor der (hybriden) Nulldynamik in der ESP	(-)
$\mathbf{\Gamma}$	generalisierte Kräfte	(N,Nm)
Δ	Stoßabbildung zur Berechnung aller Zustände \mathbf{x}_s^+ nach dem Stoß	(-)
Δ_F	Stoßabbildung zur Berechnung des Kraftimpulses $\hat{\mathbf{F}}_2$	(-)
Δ_q	Stoßabbildung zur Berechnung der Koordinaten \mathbf{q}_s^+ nach dem Stoß	(-)
$\Delta_{\dot{q}}$	Stoßabbildung zur Berechnung der Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}_s^+$ nach dem Stoß	(-)
$\Delta_{\dot{q}_f}$	Stoßabbildung zur Berechnung der Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}_f^+$ nach dem Stoß	(-)

$\Delta_{\sigma\dot{\mathbf{q}}}$	Stoßabbildung zur Berechnung des Impulses σ^+ und der Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{q}}_b^+$ nach dem Stoß	(–)
Θ	Heaviside-Funktion (Einheitssprungfunktion)	(–)
Θ_{reg}	Logistische Funktion: Regularisierung von Θ	(–)
Λ	(stabilitätsrelevanter) Floquet-Multiplikator der Nulldynamik	(–)
Σ	Hybrides Modell für Gehen	(–)
Σ_z	Modell der hybriden Nulldynamik	(–)
Ψ	Transformation von $\hat{\mathbf{q}}_s$ auf \mathbf{q}_s	(–)
Ω	Starrkörper, beschrieben durch eine einfach zusammenhängende, abgeschlossene Menge Ω	(–)
$\partial\Omega$	Berandung eines Starrkörpers, beschrieben durch den Rand der Menge Ω	(–)
α	Winkel: Verdrehung des körperfesten Bezugssystems \mathcal{B}	(rad)
$\boldsymbol{\alpha}$	Koeffizienten der Bézierpolynome zur Beschreibung der Solltrajektorien $\mathbf{q}_{b,d}$	(–)
$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}$	unabhängige Koeffizienten zur Beschreibung der Bewegung	(–)
γ_F	Winkel im Großzehengrundgelenk	(rad)
δ_z	Stoßabbildung für den generalisierten Impuls σ in der Nulldynamik	(–)
ζ	Transformation des generalisierten Impulses σ	(–)
$\boldsymbol{\theta}$	diskretisierte Werte der Phasenvariablen θ	(rad)
θ	Phasenvariable der Regelung	(rad)
θ_{A1}	Relativwinkel im Sprunggelenk von Bein 1	(rad)
θ_{A2}	Relativwinkel im Sprunggelenk von Bein 2	(rad)
$\tilde{\theta}_F$	Absolutwinkel des Fußes (Schätzung aus den Messdaten)	(rad)
$\boldsymbol{\theta}_F$	Vektor mit Absolutwinkeln des Fußmodells	(rad)
θ_F	Absolutwinkel des Fußes	(rad)
$\theta_{F,0}$	Nullwinkel des Fußmodells: relative Lage der Parameterierung F_A gegenüber dem Absolutwinkel	(rad)
θ_{F1}	Absolutwinkel des Fußes von Bein 1	(rad)
θ_{F2}	Absolutwinkel des Fußes von Bein 2	(rad)
θ_{H1}	Relativwinkel in der Hüfte von Bein 1	(rad)
θ_{H2}	Relativwinkel in der Hüfte von Bein 2	(rad)
θ_{K1}	Relativwinkel im Knie von Bein 1	(rad)
θ_{K2}	Relativwinkel im Knie von Bein 2	(rad)
θ_{O1}	Absolutwinkel des Oberschenkels von Bein 1	(rad)
θ_{O2}	Absolutwinkel des Oberschenkels von Bein 2	(rad)
θ_T	Absolutwinkel des Oberkörpers	(rad)

θ_{U1}	Absolutwinkel des Unterschenkels von Bein 1	(rad)
θ_{U2}	Absolutwinkel des Unterschenkels von Bein 2	(rad)
κ	Krümmung	(1/m)
λ	(Lagrange-)Multiplikator	(-)
λ_g	Multiplikatoren der Gleichheitsnebenbedingungen	(-)
λ_u	Multiplikatoren der Ungleichheitsnebenbedingungen	(-)
μ	Strafparameter	(-)
μ_H	Haftreibungskoeffizient	(-)
ν	Koeffizient der Nulldynamik-Differentialgleichung	(-)
ρ	Flächendichte des Fußes	(kg/m ²)
σ	zur Phasenvariable θ konjugierter generalisierter Impuls	(kg m ² /s)
ϕ_1	exakte ℓ_1 Straffunktion	(-)
ω	Winkelgeschwindigkeitsvektor	(rad/s)

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1.1:	Vergleich des Beinaufbaus von Mensch und Strauß; Cassie.	2
Abb. 1.2:	Iterationsschritte bei der Entwicklung der Beine von DURUS; aktive Prothese zum Vergleich.	3
Abb. 1.3:	Inverses Pendel, gefedertes inverses Pendel und zwei PDWs.	9
Abb. 1.4:	Ebene Modelle für HZD-Regler mit Punktfuß / kreisförmigem Fuß.	13
Abb. 1.5:	Ebenes Modell für HZD-Regler mit flachem Fuß.	14
Abb. 1.6:	Detailliertes Fußmodell des Menschen (FEM) und von ARMAR-4.	19
Abb. 1.7:	Vergleich der Kontaktpunkte und Stoßverluste bei Punktfüßen und kreisförmigen Füßen.	21
Abb. 1.8:	Druckverteilung, Vertikalkraft, Druckpunkt am menschlichen Fuß.	23
Abb. 1.9:	Modell für den menschlichen Fuß aus zwei Starrkörpern und nichtlinearer Kontaktkraftverlauf.	24
Abb. 1.10:	Volumetrisches Kontaktmodell für Fuß aus starren Kugeln.	26
Abb. 1.11:	Trajektorien von Sprunggelenk, Knie und Druckpunkt des Standbeins sowie kreisförmige Abrollform.	28
Abb. 1.12:	Druckpunkttrajektorien in drei körperfesten Koordinatensystemen.	29
Abb. 1.13:	Druckpunkttrajektorien bei verschiedenen Bodenneigungswinkeln.	29
Abb. 1.14:	Konvexe & konkave Abrollformen nach Anpassung an Messdaten.	32
Abb. 1.15:	Pfadverfolgung mit PL- und PC-Methode.	51
Abb. 2.1:	Definition und Kontakt ebener Starrkörper.	58
Abb. 2.2:	Abstand potentieller Kontaktpunkte und Kontaktkraft für starren und nachgiebigen Kontakt.	61
Abb. 2.3:	Rollen eines konvexen ebenen Starrkörpers auf dem Boden.	64
Abb. 3.1:	Vergleich gemessener Sprunggelenk-, Knie- und Druckpunkttrajektorien mit denen eines flachen und kreisförmigen Fußes.	70
Abb. 3.2:	Trajektorie eines körperfesten Punktes eines abrollenden Polygons; Regularisierung der Einheitssprungfunktion.	71
Abb. 3.3:	Vorzeichen des Krümmungsradius der zwei Regularisierungen.	75
Abb. 3.4:	Erzeugende Polygone der beiden Fußmodelle HM und HMT.	77
Abb. 3.5:	Geometrie und Sprunggelenktrajektorie des Fußmodells HM.	79
Abb. 3.6:	Geometrie und Sprunggelenktrajektorie des Fußmodells HMT.	80

Abb. 4.1:	Aufbau und Durchführung der Experimente.	82
Abb. 4.2:	Anfangsbedingungen zum Anpassen der Modelle an die Messdaten.	87
Abb. 4.3:	Angepasstes Modell HM für Proband P2 (barfuß).	89
Abb. 4.4:	Angepasstes Modell HMT für Proband P2 (barfuß).	90
Abb. 4.5:	Modellanpassung (HMT) mit verschiedenen Anfangsbedingungen.	91
Abb. 4.6:	Vergleich des angepassten Modells HM (barfuß) mit Messdaten für Druckpunkt, Sprunggelenktrajektorie und Absolutwinkel.	94
Abb. 4.7:	Vergleich des angepassten Modells HMT (barfuß) mit Messdaten für Druckpunkt, Sprunggelenktrajektorie und Absolutwinkel.	95
Abb. 4.8:	Vergleich des angepassten Modells HMT (mit Schuhen) mit Mess- daten für Sprunggelenktrajektorie.	96
Abb. 4.9:	Geometrie des angepassten Modells HM (mit Schuhen).	97
Abb. 5.1:	Koordinaten und Abmessungen des Mehrkörpermodells.	100
Abb. 5.2:	Beispielhafter Verlauf eines Bézierpolynoms.	112
Abb. 5.3:	Korrektur für Nulldurchgänge bei Quadratur mittels Trapezregel.	124
Abb. 6.1:	Korrekturschritt zweiter Ordnung (schematisch).	140
Abb. 7.1:	Vergleich von glatten und nichtglatten Problemen.	148
Abb. 7.2:	Lösungskurven für nichtglatte Probleme.	149
Abb. 8.1:	Vergleich von Algorithmus 1 mit <code>fmincon</code>	158
Abb. 8.2:	Vergleich von Algorithmus 1 mit zwei modifizierten Varianten mit anderer Berechnung der Strafparameter.	159
Abb. 8.3:	Vergleich der exakten Konvergenzrate mit der Schätzung.	161
Abb. 8.4:	Vergleich des QP-Prädiktors mit einem trivialem Prädiktor.	162
Abb. 9.1:	Vergleich der beiden Zielfunktionale f_{mech} und f_{usq}	166
Abb. 9.2:	Illustration der Bewegung für f_{mech}	166
Abb. 9.3:	Illustration der Bewegung für f_{usq}	167
Abb. 9.4:	Vergleich der maximalen Aktormomente für f_{mech} und f_{usq}	169
Abb. 9.5:	Gesamtenergie und beim Stoß dissipierte Energie für f_{mech} & f_{usq}	170
Abb. 9.6:	Schrittlänge und Floquet-Multiplikator für f_{mech} und f_{usq}	170
Abb. 9.7:	Prozess zur Berechnung der optimalen Lösungen.	174
Abb. 9.8:	Geometrie der Fußmodelle HM (barfuß) für P1–P4.	176
Abb. 9.9:	f_{mech} und $\max u_{A1} $ für das Fußmodell HM (barfuß).	176
Abb. 9.10:	Illustration der Bewegung für das Fußmodell HM (barfuß).	177
Abb. 9.11:	Geometrie der Fußmodelle HM (mit Schuhen) für P1–P4.	179
Abb. 9.12:	f_{mech} und $\max u_{A1} $ für das Fußmodell HM (mit Schuhen).	179

Abb. 9.13: Geometrie der Fußmodelle HMT (barfuß) für P1–P4.	181
Abb. 9.14: f_{mech} und $\max u_{A1} $ für das Fußmodell HMT (barfuß).	182
Abb. 9.15: Illustration der Bewegung für das Fußmodell HMT (barfuß).	183
Abb. 9.16: Geometrie der Fußmodelle HMT (mit Schuhen) für P1–P4.	183
Abb. 9.17: f_{mech} und $\max u_{A1} $ für das Fußmodell HMT (mit Schuhen).	184
Abb. 9.18: Illustration der Bewegung für das Fußmodell HMT (mit Schuhen).	185
Abb. 9.19: f_{mech} und $\max u_{A1} $ der optimalen Fußmodelle im Vergleich.	186
Abb. 10.1: Sensitivitätsanalyse.	191
Abb. 10.2: f_{mech} bei gleichzeitiger Optimierung von Bewegung und Fußgeometrie; zugehörige Fußgeometrien.	194
Abb. 10.3: Illustration der Bewegung mit einem stelzenartigen und einem kreisförmigen Fuß.	195
Abb. 10.4: Illustration der Bewegung mit der hohen und flachen Fußgeometrie.	197
Abb. 10.5: Optimale hohe Fußgeometrien.	198
Abb. 10.6: Optimale flache Fußgeometrien.	199
Abb. 10.7: f_{mech} für die hohen und die flachen Fußgeometrien.	201
Abb. A.1: Bereich der Minorante mit nicht-negativer Diskriminante.	215
Abb. A.2: Vergleich der Nullstellen $C_1(k, T)$ und $C_2(k, T)$ von Gl. (A.18) mit dem Wert von $\cos(k \operatorname{artanh}(T))$ nach Gl. (A.19).	216
Abb. A.3: Koeffizienten der Taylorentwicklungen nach Gl. (A.20).	216
Abb. D.1: $\max u_{A1} $ für das Fußmodell HM (barfuß) für P1–P4.	230
Abb. D.2: Schrittlänge und Floquet-Multiplikator für Fußmodell HM (barfuß) für P1–P4.	230
Abb. D.3: $\max u_{A1} $ für das Fußmodell HM (mit Schuhen) für P1–P4.	231
Abb. D.4: Schrittlänge und Floquet-Multiplikator für Fußmodell HM (mit Schuhen) für P1–P4.	231
Abb. D.5: $\max u_{A1} $ für das Fußmodell HMT (barfuß) für P1–P4.	232
Abb. D.6: Schrittlänge und Floquet-Multiplikator für Fußmodell HMT (barfuß) für P1–P4.	232
Abb. D.7: $\max u_{A1} $ für das Fußmodell HMT (mit Schuhen) für P1–P4.	233
Abb. D.8: Schrittlänge und Floquet-Multiplikator für Fußmodell HMT (mit Schuhen) für P1–P4.	233

Tabellenverzeichnis

Tab. 4.1:	Daten der Probanden.	82
Tab. 4.2:	Parameter des Modells HM für SG-Trajektorie (barfuß).	93
Tab. 5.1:	Parameter des mechanischen Modells (ohne Fußgeometrie).	127
Tab. 6.2:	Parameter des SQP-Algorithmus (Algorithmus 1).	146
Tab. 7.1:	Parameter des QPSQP-Algorithmus (Algorithmus 2).	153
Tab. 10.1:	Parameter der hohen Fußgeometrien.	198
Tab. 10.2:	Parameter der flachen Fußgeometrien.	199
Tab. B.1:	Parameter des Modells HM für AK-Trajektorie (barfuß).	219
Tab. B.2:	Parameter des Modells HM für IK-Trajektorie (barfuß).	220
Tab. B.3:	Parameter des Modells HM für SG-Trajektorie (mit Schuhen).	220
Tab. B.4:	Parameter des Modells HM für AK-Trajektorie (mit Schuhen).	221
Tab. B.5:	Parameter des Modells HM für IK-Trajektorie (mit Schuhen).	221
Tab. B.6:	Parameter des Modells HMT für SG-Trajektorie (barfuß).	222
Tab. B.7:	Parameter des Modells HMT für AK-Trajektorie (barfuß).	222
Tab. B.8:	Parameter des Modells HMT für IK-Trajektorie (barfuß).	223
Tab. B.9:	Parameter des Modells HMT für SG-Trajektorie (mit Schuhen).	223
Tab. B.10:	Parameter des Modells HMT für AK-Trajektorie (mit Schuhen).	224
Tab. B.11:	Parameter des Modells HMT für IK-Trajektorie (mit Schuhen).	224
Tab. D.1:	Parameter des mechanischen Modells mit Punktfüßen.	229

Literaturverzeichnis

- [1] ACKERMAN, E. (2017): *Agility Robotics Introduces Cassie, a Dynamic and Talented Robot Delivery Ostrich*. IEEE Spectrum (Automation Blog). Abgerufen am 28.03.2018. URL: <https://spectrum.ieee.org/automaton/robotics/industrial-robots/agility-robotics-introduces-cassie-a-dynamic-and-talented-robot-delivery-ostrich>.
- [2] ACKERMAN, E. (2018): *Agility Robotics Raises \$8 Million for Commercial Bipedal Robots*. IEEE Spectrum (Automation Blog). Abgerufen am 28.03.2018. URL: <https://spectrum.ieee.org/automaton/robotics/industrial-robots/agility-robotics-raises-8-million-for-commercial-bipedal-robots>.
- [3] ACKERMANN, M. und A. J. VAN DEN BOGERT (2010): Optimality principles for model-based prediction of human gait. *Journal of Biomechanics* **43**(6), S. 1055–1060. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2009.12.012.
- [4] ADAMCZYK, P. G., S. H. COLLINS und A. D. KUO (2006): The advantages of a rolling foot in human walking. *Journal of Experimental Biology* **209**(20), S. 3953–3963. DOI: 10.1242/jeb.02455.
- [5] ADAMY, J. (2014): *Nichtlineare Systeme und Regelungen*. 2. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer. DOI: 10.1007/978-3-642-45013-6.
- [6] ADOLFSSON, J., H. DANKOWICZ und A. NORDMARK (2001): 3D Passive Walkers: Finding Periodic Gaits in the Presence of Discontinuities. *Nonlinear Dynamics* **24**(2), S. 205–229. DOI: 10.1023/A:1008300821973.
- [7] AERTS, P., R. F. KER, D. DE CLERCQ, D. W. ILSLEY und R. M. ALEXANDER (1995): The mechanical properties of the human heel pad: A paradox resolved. *Journal of Biomechanics* **28**(11), S. 1299–1308. DOI: 10.1016/0021-9290(95)00009-7.
- [8] AGILITY ROBOTICS INC. (2018): *Offizielle Webseite*. Abgerufen am 28.03.2018. URL: <http://www.agilityrobotics.com>.

- [9] ALEXANDER, R. M. (1976): Mechanics of bipedal locomotion. In: *Zoology*. P. S. Davies, A. Punt und G. M. Hughes (Hrsg.). Elsevier, S. 493–504. DOI: 10.1016/B978-0-08-018767-9.50047-0.
- [10] ALEXANDER, R. M. (1995): Simple Models of Human Movement. *Applied Mechanics Reviews* **48**(8), S. 461–470. DOI: 10.1115/1.3005107.
- [11] ALLGOWER, E. L. und P. H. SCHMIDT (1985): An Algorithm for Piecewise-Linear Approximation of an Implicitly Defined Manifold. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **22**(2), S. 322–346. DOI: 10.1137/0722020.
- [12] ALLGOWER, E. L. und K. GEORG (1990): *Introduction to Numerical Continuation Methods*. Bd. 45. Classics in Applied Mathematics. Philadelphia: Society for Industrial Mathematics. DOI: 10.1137/1.9780898719154.
- [13] ALLGOWER, E. L. und K. GEORG (1997): Numerical Path Following. In: *Handbook of Numerical Analysis: Techniques of Scientific Computing (Part 2)*. P. G. Ciarlet und J. L. Lions (Hrsg.). Bd. 5. Elsevier, S. 3–207. DOI: 10.1016/s1570-8659(97)80002-6.
- [14] ALLGOWER, E. L. und K. GEORG (2000): Piecewise linear methods for nonlinear equations and optimization. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **124**(1-2), S. 245–261. DOI: 10.1016/s0377-0427(00)00427-1.
- [15] AL-SHUKA, H. F. N., F. ALLMENDINGER, B. CORVES und W.-H. ZHU (2014): Modeling, stability and walking pattern generators of biped robots: a review. *Robotica* **32**(6), S. 907–934. DOI: 10.1017/S0263574713001124.
- [16] AMBRÓSIO, J. A. C. und A. KECSKEMÉTHY (2007): Multibody Dynamics of Biomechanical Models for Human Motion via Optimization. In: *Multibody Dynamics: Computational Methods in Applied Sciences*. J. C. García Orden, J. M. Goicolea und J. Cuadrado (Hrsg.). Bd. 4. Computational Methods in Applied Sciences. Dodrecht: Springer, S. 245–272. DOI: 10.1007/978-1-4020-5684-0_12.
- [17] AMES, A. D., E. A. COUSINEAU und M. J. POWELL (2012): Dynamically Stable Bipedal Robotic Walking with NAO via Human-Inspired Hybrid Zero Dynamics. In: *Proceedings of the 15th ACM international conference on Hybrid Systems: Computation and Control*, S. 135–144. DOI: 10.1145/2185632.2185655.
- [18] AMES, A. D., K. GALLOWAY, K. SREENATH und J. W. GRIZZLE (2014): Rapidly Exponentially Stabilizing Control Lyapunov Functions and Hybrid Zero Dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control* **59**(4), S. 876–891. DOI: 10.1109/TAC.2014.2299335.
- [19] ANDERSON, F. C. und M. G. PANDY (1999): A Dynamic Optimization Solution for Vertical Jumping in Three Dimensions. *Computer Methods in Bio-*

- mechanics and Biomedical Engineering* **2**(3), S. 201–231. DOI: 10.1080/10255849908907988.
- [20] ANDERSON, F. C. und M. G. PANDY (2001): Dynamic Optimization of Human Walking. *Journal of Biomechanical Engineering* **123**(5), S. 381–390. DOI: 10.1115/1.1392310.
- [21] ANKARALI, M. M., S. SEFATI, M. S. MADHAV, A. LONG, A. J. BASTIAN und N. J. COWAN (2015): Walking dynamics are symmetric (enough). *Journal of The Royal Society Interface* **12**(108), S. 20150209. DOI: 10.1098/rsif.2015.0209.
- [22] ARNDT, A., P. WESTBLAD, I. WINSON, T. HASHIMOTO und A. LUNDBERG (2004): Ankle and Subtalar Kinematics Measured with Intracortical Pins during the Stance Phase of Walking. *Foot & Ankle International* **25**(5), S. 357–364. DOI: 10.1177/107110070402500514.
- [23] ASANO, F. und Z.-W. LUO (2006): On Energy-Efficient and High-Speed Dynamic Biped Locomotion with Semicircular Feet. In: *Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, S. 5901–5906. DOI: 10.1109/IRoS.2006.282470.
- [24] ASFOUR, T., J. SCHILL, H. PETERS, C. KLAS, J. BÜCKER, C. SANDER, S. SCHULZ, A. KARGOV, T. WERNER und V. BARTENBACH (2013): ARMAR-4: A 63 DOF Torque Controlled Humanoid Robot. In: *Proceedings of the 13th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*. IEEE, S. 390–396. DOI: 10.1109/HUMANOIDS.2013.7030004.
- [25] BANERJEE, A., A. CHANDA und R. DAS (2017): Historical Origin and Recent Development on Normal Directional Impact Models for Rigid Body Contact Simulation: A Critical Review. *Archives of Computational Methods in Engineering* **24**(2), S. 397–422. DOI: 10.1007/s11831-016-9164-5.
- [26] BANKS, A., J. VINCENT und C. ANYAKOHA (2007): A review of particle swarm optimization. Part II: hybridisation, combinatorial, multicriteria and constrained optimization, and indicative applications. *Natural Computing* **7**(1), S. 109–124. DOI: 10.1007/s11047-007-9050-z.
- [27] BAUER, F. (2014): *Optimierung der Energieeffizienz zweibeiniger Roboter durch elastische Kopplungen*. (Dissertation). Karlsruhe: KIT Scientific Publishing. DOI: 10.5445/KSP/1000042846.
- [28] BECKETT, R. und K. CHANG (1968): An evaluation of the kinematics of gait by minimum energy. *Journal of Biomechanics* **1**(2), S. 147–159. DOI: 10.1016/0021-9290(68)90017-1.
- [29] BERTRAM, J. E. A. (2005): Constrained optimization in human walking: cost minimization and gait plasticity. *Journal of experimental biology* **208**(6), S. 979–991. DOI: 10.1242/jeb.01498.

- [30] BESSONNET, G., S. CHESSE und P. SARDAIN (2004): Optimal Gait Synthesis of a Seven-Link Planar Biped. *The International Journal of Robotics Research* **23**(10–11), S. 1059–1073. DOI: 10.1177/0278364904047393.
- [31] BESSONNET, G., P. SEGUIN und P. SARDAIN (2005): A Parametric Optimization Approach to Walking Pattern Synthesis. *The International Journal of Robotics Research* **24**(7), S. 523–536. DOI: 10.1177/0278364905055377.
- [32] BHOUNSULE, P. A., J. CORTELL und A. RUINA (2012): Design and control of Ranger: an energy-efficient, dynamic walking robot. In: *Adaptive Mobile Robotics: Proceedings of the 15th International Conference on Climbing and Walking Robots and the Support Technologies for Mobile Machines*. A. K. M. Azad, N. J. Cowan, M. O. Tokhi, G. S. Virk und R. D. Eastman (Hrsg.). Singapore: World Scientific, S. 441–448. DOI: 10.1142/9789814415958_0057.
- [33] BHOUNSULE, P. A., J. CORTELL, A. GREWAL, B. HENDRIKSEN, J. G. D. KARSSEN, C. PAUL und A. RUINA (2014): Low-bandwidth reflex-based control for lower power walking: 65 km on a single battery charge. *The International Journal of Robotics Research* **33**(10), S. 1305–1321. DOI: 10.1177/0278364914527485.
- [34] BHOUNSULE, P. A. (2017): Control Based on Passive Dynamic Walking. In: *Bioinspired Legged Locomotion: Models, Concepts, Control and Applications*. M. Sharbafi und A. Seyfarth (Hrsg.). Kidlington: Butterworth-Heinemann. Kap. 6, S. 267–291. URL: http://aux.coe.utsa.edu/~pab/papers/Bhounsule2017_Control_based_on_passive_dynamic_walking.pdf.
- [35] BISI, M. C., R. STAGNI, H. HOUDIJK und G. GNUDI (2011): An EMG-driven model applied for predicting metabolic energy consumption during movement. *Journal of Electromyography and Kinesiology* **21**(6), S. 1074–1080. DOI: 10.1016/j.jelekin.2011.07.003.
- [36] BLICKHAN, R. (1989): The spring-mass model for running and hopping. *Journal of Biomechanics* **22**(11-12), S. 1217–1227. DOI: 10.1016/0021-9290(89)90224-8.
- [37] BOCK, H. G. und K. J. PLITT (1984): A Multiple Shooting Algorithm for Direct Solution of Optimal Control Problems. *IFAC Proceedings Volumes* **17**(2), S. 1603–1608. DOI: 10.1016/s1474-6670(17)61205-9.
- [38] VAN DEN BOGERT, A. J., K. G. M. GERRITSEN und G. K. COLE (1998): Human muscle modelling from a user’s perspective. *Journal of Electromyography and Kinesiology* **8**(2), S. 119–124. DOI: 10.1016/S1050-6411(97)00028-X.
- [39] BORZOVA, E. und Y. HURMUZLU (2004): Passively walking five-link robot. *Automatica* **40**(4), S. 621–629. DOI: 10.1016/j.automatica.2003.10.015.
- [40] BRAUNE, W. und O. FISCHER (1895): Der Gang des Menschen. I. Theil: Versuche am unbelasteten und belasteten Menschen. *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften* **21**, S. 154–322.

- [41] BROWN, P. und J. MCPHEE (2017): Volumetric Contact Model of Ellipsoid-Plane Geometries. In: *Proceedings of the 8th ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics 2017*, S. 365–374. URL: http://multibody2017.cz/wp-content/uploads/2017/12/MBD2017_Conference_Proceedings_online.pdf.
- [42] BROWN, P. und J. MCPHEE (2018): A 3D ellipsoidal volumetric foot–ground contact model for forward dynamics. *Multibody System Dynamics* **42**(4), S. 447–467. DOI: 10.1007/s11044-017-9605-4.
- [43] BURDETT, R. G., G. S. SKRINAR und S. R. SIMON (1983): Comparison of Mechanical Work and Metabolic Energy Consumption During Normal Gait. *Journal of Orthopaedic Research* **1**(1), S. 63–72. DOI: 10.1002/jor.1100010109.
- [44] BURKE, E. K., M. HYDE, G. KENDALL, G. OCHOA, E. ÖZCAN und J. R. WOODWARD (2010): A Classification of Hyper-heuristic Approaches. In: *Handbook of Metaheuristics*. M. Gendreau und J.-Y. Potvin (Hrsg.). 2. Aufl. Bd. 146. International Series in Operations Research & Management Science. New York: Springer, S. 449–468. DOI: 10.1007/978-1-4419-1665-5_15.
- [45] BUSCHMANN, T., S. LOHMEIER, M. BACHMAYER, H. ULBRICH und F. PFEIFFER (2007): A Collocation Method for Real-Time Walking Pattern Generation. In: *Proceedings of the 7th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*, S. 1–6. DOI: 10.1109/ichr.2007.4813841.
- [46] BUSS, B. G., K. A. HAMED, B. A. GRIFFIN und J. W. GRIZZLE (2016): Experimental Results for 3D Bipedal Robot Walking Based on Systematic Optimization of Virtual Constraints. In: *Proceedings of the 2016 American Control Conference*, S. 4785–4792. DOI: 10.1109/acc.2016.7526111.
- [47] BYRD, R. H., J. NOCEDAL und R. A. WALTZ (2008): Steering exact penalty methods for nonlinear programming. *Optimization Methods and Software* **23**(2), S. 197–213. DOI: 10.1080/10556780701394169.
- [48] BYRD, R. H., G. LOPEZ-CALVA und J. NOCEDAL (2010): A line search exact penalty method using steering rules. *Mathematical Programming* **133**(1-2), S. 39–73. DOI: 10.1007/s10107-010-0408-0.
- [49] CAMACHO, D. L. A., W. R. LEDOUX, E. S. ROHR, B. J. SANGEORZAN und R. P. CHING (2002): A three-dimensional, anatomically detailed foot model: A foundation for a finite element simulation and means of quantifying foot-bone position. *Journal of Rehabilitation Research and Development* **39**(3), S. 401–410.
- [50] CASPERS, L., M. SIEBLER, H. HEFTER und A. KECSKEMÉTHY (2017): Krümmungsradius des Abrollverhaltens beim Fuß-Boden Kontakt in der Sagittalebene während des menschlichen Ganges. In: *Tagungsband der 3. IFToMM D-A-CH Konferenz 2017*, S. 36–37. DOI: 10.17185/duerpublico/43401.

- [51] CASPERS, L., M. SIEBLER, H. HEFTER, U. LUGRÍS und A. KECSKEMÉTHY (2017): Using Kinematic Rolling Surfaces for Fast Foot-Ground Modeling in the Forward Dynamics of Human Gait — A Sagittal Plane Analysis. In: *Book of Abstracts of the 8th ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics 2017*, S. 315–316. URL: http://multibody2017.cz/wp-content/uploads/2017/12/MBD2017_Book%20of%20Abstracts_online.pdf.
- [52] CAVAGNA, G. A., P. A. WILLEMS und N. C. HEGLUND (2000): The role of gravity in human walking: pendular energy exchange, external work and optimal speed. *The Journal of Physiology* **528**(3), S. 657–668. DOI: 10.1111/j.1469-7793.2000.00657.x.
- [53] CHAMPNEYS, A. R., Y. A. KUZNETSOV und B. SANDSTEDE (1996): A numerical toolbox for homoclinic bifurcation analysis. *International Journal of Bifurcation and Chaos* **6**, S. 867–888. DOI: 10.1142/s0218127496000485.
- [54] CHANNON, P. H., S. H. HOPKINS und D. T. PHAM (1990): Simulation and optimization of gait for a bipedal robot. *Mathematical and Computer Modelling* **14**, S. 463–467. DOI: 10.1016/0895-7177(90)90227-E.
- [55] CHATTERJEE, A. und M. GARCIA (2000): Small slope implies low speed for McGeer’s passive walking machines. *Dynamics and Stability of Systems* **15**(2), S. 139–157. DOI: 10.1080/02681110050032128.
- [56] CHEN, J. und S. BURER (2011): Globally solving nonconvex quadratic programming problems via completely positive programming. *Mathematical Programming Computation* **4**(1), S. 33–52. DOI: 10.1007/s12532-011-0033-9.
- [57] CHEUNG, J. T.-M., M. ZHANG, A. K.-L. LEUNG und Y.-B. FAN (2005): Three-dimensional finite element analysis of the foot during standing—a material sensitivity study. *Journal of Biomechanics* **38**(5), S. 1045–1054. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2004.05.035.
- [58] CHEVALLEREAU, C. und Y. Aoustin (2001): Optimal reference trajectories for walking and running of a biped robot. *Robotica* **19**(5), S. 557–569. DOI: 10.1017/S0263574701003307.
- [59] CHEVALLEREAU, C. (2003): Time-Scaling Control for an Underactuated Biped Robot. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **19**(2), S. 362–368. DOI: 10.1109/TRA.2003.808863.
- [60] CHEVALLEREAU, C., G. ABBA, Y. Aoustin, F. PLESTAN, E. WESTERVELT, C. C. DE WIT und J. GRIZZLE (2003): RABBIT: A Testbed for Advanced Control Theory. *IEEE Control Systems Magazine* **23**(5), S. 57–79. DOI: 10.1109/mcs.2003.1234651.
- [61] CHEVALLEREAU, C., E. R. WESTERVELT und J. W. GRIZZLE (2005): Asymptotically Stable Running for a Five-Link, Four-Actuator, Planar Bipedal

- Robot. *The International Journal of Robotics Research* **24**(6), S. 431–464. DOI: 10.1177/0278364905054929.
- [62] CHEVALLEREAU, C., J. W. GRIZZLE und C.-L. SHIH (2009): Asymptotically Stable Walking of a Five-Link Underactuated 3-D Bipedal Robot. *IEEE Transactions on Robotics* **25**(1), S. 37–50. DOI: 10.1109/tro.2008.2010366.
- [63] CHEVALLEREAU, C., H. RAZAVI, D. SIX, Y. Aoustin und J. GRIZZLE (2018): Self-synchronization and self-stabilization of 3D bipedal walking gaits. *Robotics and Autonomous Systems* **100**, S. 43–60. DOI: 10.1016/j.robot.2017.10.018.
- [64] CHOI, J.H. und J.W. GRIZZLE (2005): Planar Bipedal Walking with Foot Rotation. In: *Proceedings of the 2005 American Control Conference*, S. 4909–4916. DOI: 10.1109/ACC.2005.1470773.
- [65] CHOW, C.K. und D.H. JACOBSON (1971): Studies of Human Locomotion via Optimal Programming. *Mathematical Biosciences* **10**(3–4), S. 239–306. DOI: 10.1016/0025-5564(71)90062-9.
- [66] COELLO, C. A. C. (2016): Constraint-Handling Techniques used with Evolutionary Algorithms. In: *Proceedings of the 2016 on Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion - GECCO '16 Companion*, S. 563–587. DOI: 10.1145/2908961.2926986.
- [67] COLEMAN, M.J. und A. RUINA (1998): An Uncontrolled Walking Toy That Cannot Stand Still. *Physical Review Letters* **80**(16), S. 3658. DOI: 10.1103/PhysRevLett.80.3658.
- [68] COLEMAN, M.J., M. GARCIA, K. Mombauro und A. RUINA (2001): Prediction of stable walking for a toy that cannot stand. *Physical Review E* **64**(2), S. 022901. DOI: 10.1103/PhysRevE.64.022901.
- [69] COLLINS, S.H., M. WISSE und A. RUINA (2001): A Three-Dimensional Passive-Dynamic Walking Robot with Two Legs and Knees. *The International Journal of Robotics Research* **20**(7), S. 607–615. DOI: 10.1177/02783640122067561.
- [70] COLLINS, S.H. und A. RUINA (2005): A Bipedal Walking Robot with Efficient and Human-Like Gait. In: *Proceedings of the 2005 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, S. 1983–1988. DOI: 10.1109/ROBOT.2005.1570404.
- [71] COLLINS, S., A. RUINA, R. TEDRAKE und M. WISSE (2005): Efficient Bipedal Robots Based on Passive-Dynamic Walkers. *Science* **307**(5712), S. 1082–1085. DOI: 10.1126/science.1107799.
- [72] COTES, J.E. und F. MEADE (1960): THE ENERGY EXPENDITURE AND MECHANICAL ENERGY DEMAND IN WALKING. *Ergonomics* **3**(2), S. 97–119. DOI: 10.1080/00140136008930473.

- [73] CUADRADO, J., R. PAMIES-VILA, U. LUGRÍS und F. J. ALONSO (2011): A force-based approach for joint efforts estimation during the double support phase of gait. *Procedia IUTAM* **2**, S. 26–34. DOI: 10.1016/j.piutam.2011.04.004.
- [74] CURTZE, C., A. L. HOF, H. G. VAN KEEKEN, J. P. K. HALBERTSMA, K. POSTEMA und B. OTTEN (2009): Comparative roll-over analysis of prosthetic feet. *Journal of Biomechanics* **42**(11), S. 1746–1753. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2009.04.009.
- [75] CURTZE, C., B. OTTEN, A. L. HOF und K. POSTEMA (2011): Determining asymmetry of roll-over shapes in prosthetic walking. *Journal of Rehabilitation Research & Development* **48**(10), S. 1249–1260. DOI: 10.1682/JRRD.2010.08.0163.
- [76] DAMSGAARD, M., J. RASMUSSEN, S. T. CHRISTENSEN, E. SURMA und M. DE ZEE (2006): Analysis of musculoskeletal systems in the AnyBody Modeling System. *Simulation Modelling Practice and Theory* **14**(8), S. 1100–1111. DOI: 10.1016/j.simpat.2006.09.001.
- [77] DANKOWICZ, H. und F. SCHILDER (2011): An Extended Continuation Problem for Bifurcation Analysis in the Presence of Constraints. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* **6**(3), S. 031003. DOI: 10.1115/1.4002684.
- [78] DAS, S. und P. N. SUGANTHAN (2011): Differential Evolution: A Survey of the State-of-the-Art. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* **15**(1), S. 4–31. DOI: 10.1109/TEVC.2010.2059031.
- [79] DAS, S., S. S. MULLICK und P. N. SUGANTHAN (2016): Recent advances in differential evolution – An updated survey. *Swarm and Evolutionary Computation* **27**, S. 1–30. DOI: 10.1016/j.swevo.2016.01.004.
- [80] DASGUPTA, A. und Y. NAKAMURA (1999): Making Feasible Walking Motion of Humanoid Robots From Human Motion Capture Data. In: *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Bd. 2, S. 1044–1049. DOI: 10.1109/robot.1999.772454.
- [81] DESCHAMPS, K., F. STAES, P. ROOSEN, F. NOBELS, K. DESLOOVERE, H. BRUYNINCKX und G. A. MATRICALI (2011): Body of evidence supporting the clinical use of 3D multisegment foot models: A systematic review. *Gait & Posture* **33**(3), S. 338–349. DOI: 10.1016/j.gaitpost.2010.12.018.
- [82] DEUFLHARD, P. (1979): A Step-size Control for Continuation Methods and its Special Application to Multiple Shooting Techniques. *Numerische Mathematik* **33**(2), S. 115–146. DOI: 10.1007/bf01399549.
- [83] DOEDEL, E. J. (1997): Nonlinear Numerics. *Journal of the Franklin Institute* **334**(5-6), S. 1049–1073. DOI: 10.1016/s0016-0032(97)00027-6.

- [84] DOEDEL, E. J. und B. E. OLDEMAN (2012): *AUTO-07P: continuation and bifurcation software for ordinary differential equations*. Mit wesentlichen Beiträgen von: Alan R. Champneys (Bristol), Fabio Dercole (Milano), Thomas Fairgrieve (Toronto), Yuri Kuznetsov (Utrecht), Randy Paffenroth (Pasadena), Björn Sandstede (Brown), Xianjun Wang und Chenghai Zhang. Concordia University, Montreal, Canada. URL: <https://sourceforge.net/projects/auto-07p/>.
- [85] DONELAN, J. M., R. KRAM und A. D. KUO (2002): Mechanical work for step-to-step transitions is a major determinant of the metabolic cost of human walking. *Journal of Experimental Biology* **205**(23), S. 3717–3727.
- [86] DORIGO, M., M. BIRATTARI und T. STUTZLE (2006): Ant Colony Optimization. *IEEE Computational Intelligence Magazine* **1**(4), S. 28–39. DOI: 10.1109/MCI.2006.329691.
- [87] DUMAS, R., L. CHÈZE und J.-P. VERRIEST (2007): Adjustments to McConville et al. and Young et al. body segment inertial parameters. *Journal of Biomechanics* **40**(3), S. 543–553. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2006.02.013.
- [88] ENGELBORGH, K., T. LUZYANINA und D. ROOSE (2002): Numerical bifurcation analysis of delay differential equations using DDE-BIFTOOL. *ACM Transactions on Mathematical Software* **28**(1), S. 1–21. DOI: 10.1145/513001.513002.
- [89] ENGLSBERGER, J., A. WERNER, C. OTT, B. HENZE, M. A. ROA, G. GAROFALO, R. BURGER, A. BEYER, O. EIBERGER, K. SCHMID und A. ALBU-SCHÄFFER (2014): Overview of the torque-controlled humanoid robot TORO. In: *Proceedings of the 14th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*, S. 916–923. DOI: 10.1109/HUMANOIDS.2014.7041473.
- [90] FABIEN, B. C. (2008): Implementation of a robust SQP algorithm. *Optimization Methods and Software* **23**(6), S. 827–846. DOI: 10.1080/10556780801996228.
- [91] FALLIS, G. T. (1888): *Walking toy*. Patent U.S. 376588 – 17. Jan. 1888.
- [92] FARAJI, S. und A. J. IJSPEERT (2017): 3LP: A linear 3D-walking model including torso and swing dynamics. *The International Journal of Robotics Research* **36**(4), S. 436–455. DOI: 10.1177/0278364917708248.
- [93] FARES, C. und Y. HAMAM (2005): Collision Detection for Rigid Bodies: A State of the Art Review. In: *GraphiCon 2005 Proceedings*. URL: <http://www.graphicon.ru/html/2005/proceedings/papers/Fares.pdf>.
- [94] FARRELL, K. D., C. CHEVALLEREAU und E. R. WESTERVELT (2007): Energetic Effects of Adding Springs at the Passive Ankles of a Walking Biped Robot. In: *Proceedings of the 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, S. 3591–3596. DOI: 10.1109/robot.2007.364028.

- [95] FEIRING, B. R., D. T. PHILLIPS und G. L. HOGG (1985): Penalty function techniques: A tutorial. *Computers & Industrial Engineering* **9**(4), S. 307–326. DOI: 10.1016/0360-8352(85)90019-1.
- [96] FELIS, M. L. und K. MOMBAUR (2012): Using Optimal Control Methods to Generate Human Walking Motions. In: *International Conference on Motion in Games*, S. 197–207. DOI: 10.1007/978-3-642-34710-8_19.
- [97] FISCHER, O. (1899): Der Gang des Menschen. II. Theil: Die Bewegung des Gesamtschwerpunktes und die äusseren Kräfte. *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften* **25**, S. 1–130.
- [98] FISCHER, O. (1901): Der Gang des Menschen. III. Theil: Betrachtungen über die weiteren Ziele der Untersuchungen und Ueberblick über die Bewegungen der unteren Extremitäten. *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften* **26**, S. 85–170.
- [99] FISCHER, O. (1901): Der Gang des Menschen. IV. Theil: Ueber die Bewegungen des Fusses und der auf denselben einwirkenden Kräfte. *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften* **26**, S. 469–556.
- [100] FISCHER, O. (1904): Der Gang des Menschen. V. Theil: Die Kinematik des Beinschwingens. *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften* **28**, S. 319–418.
- [101] FISCHER, O. (1904): Der Gang des Menschen. VI. Theil: Ueber den Einfluß der Schwere auf die Schwingungsbewegung des Beins. *Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften* **28**, S. 531–617.
- [102] FLETCHER, R. (1973): An exact penalty function for nonlinear programming with inequalities. *Mathematical Programming* **5**(1), S. 129–150. DOI: 10.1007/bf01580117.
- [103] FLETCHER, R. (1982): Second order corrections for non-differentiable optimization. In: *Numerical Analysis*. G. A. Watson (Hrsg.). Bd. 912. Lecture Notes in Mathematics. Berlin, Heidelberg: Springer, S. 85–114. DOI: 10.1007/bfb0093151.
- [104] FLORES, P. und J. AMBRÓSIO (2010): On the contact detection for contact-impact analysis in multibody systems. *Multibody System Dynamics* **24**(1), S. 103–122. DOI: 10.1007/s11044-010-9209-8.
- [105] FLOUDAS, C. A. (2000): *Deterministic Global Optimization*. 1. Aufl. Bd. 37. Nonconvex Optimization and Its Applications. Dordrecht: Springer. DOI: 10.1007/978-1-4757-4949-6.
- [106] FORGHANY, S., C. J. NESTER und B. RICHARDS (2013): The effect of rollover footwear on the rollover function of walking. *Journal of Foot and Ankle Research* **6**(1), S. 24. DOI: 10.1186/1757-1146-6-24.

- [107] FRASCH, J. V., S. SAGER und M. DIEHL (2015): A parallel quadratic programming method for dynamic optimization problems. *Mathematical Programming Computation* **7**(3), S. 289–329. DOI: 10.1007/s12532-015-0081-7.
- [108] GARCIA, M., A. CHATTERJEE, A. RUINA und M. COLEMAN (1998): The Simplest Walking Model: Stability, Complexity, and Scaling. *Journal of Biomechanical Engineering* **120**(2), S. 281–288. DOI: 10.1115/1.2798313.
- [109] GARCIA, M., A. CHATTERJEE und A. RUINA (2000): Efficiency, speed, and scaling of two-dimensional passive-dynamic walking. *Dynamics and Stability of Systems* **15**(2), S. 75–99. DOI: 10.1080/713603737.
- [110] GARDEUX, V., M. G. H. OMRAN, R. CHELOUAH, P. SIARRY und F. GLOVER (2017): Adaptive pattern search for large-scale optimization. *Applied Intelligence* **47**(2), S. 319–330. DOI: 10.1007/s10489-017-0901-8.
- [111] GEEM, Z. W., J. H. KIM und G. V. LOGANATHAN (2001): A New Heuristic Optimization Algorithm: Harmony Search. *Simulation* **76**(2), S. 60–68. DOI: 10.1177/003754970107600201.
- [112] GEFEN, A., M. MEGIDO-RAVID, Y. ITZCHAK und M. ARCAN (2000): Biomechanical Analysis of the Three-Dimensional Foot Structure During Gait: A Basic Tool for Clinical Applications. *Journal of Biomechanical Engineering* **122**(6), S. 630–639. DOI: 10.1115/1.1318904.
- [113] GEORG, K. (1983): A Note on Step Size Control for Numerical Curve Following. In: *Homotopy Methods and Global Convergence*. B. C. Eaves, F. J. Gould, H.-O. Peitgen und M. J. Todd (Hrsg.). Bd. 13. NATO Conference Series (Systems Science). Boston, MA: Springer, S. 145–154. DOI: 10.1007/978-1-4613-3572-6_8.
- [114] GERVAIS, J.-J. und H. SADIKY (2004): A continuation method based on a high order predictor and an adaptive steplength control. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **84**(8), S. 551–563. DOI: 10.1002/zamm.200310125.
- [115] GEYER, H., A. SEYFARTH und R. BLICKHAN (2006): Compliant leg behaviour explains basic dynamics of walking and running. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences* **273**(1603), S. 2861–2867. DOI: 10.1098/rspb.2006.3637.
- [116] GEYER, H. und H. HERR (2010): A Muscle-Reflex Model That Encodes Principles of Legged Mechanics Produces Human Walking Dynamics and Muscle Activities. *IEEE Transactions on Neural Systems and Rehabilitation Engineering* **18**(3), S. 263–273. DOI: 10.1109/TNSRE.2010.2047592.
- [117] GILCHRIST, L. A. und D. A. WINTER (1996): A two-part, viscoelastic foot model for use in gait simulations. *Journal of Biomechanics* **29**(6), S. 795–798. DOI: 10.1016/0021-9290(95)00141-7.

- [118] GILL, P. E., W. MURRAY und M. H. WRIGHT (1981): *Practical Optimization*. London: Academic Press.
- [119] GLOVER, F. (1989): Tabu Search—Part I. *ORSA Journal on Computing* **1**(3), S. 190–206. DOI: 10.1287/ijoc.1.3.190.
- [120] GLOVER, F. (1990): Tabu Search—Part II. *ORSA Journal on Computing* **2**(1), S. 4–32. DOI: 10.1287/ijoc.2.1.4.
- [121] GLOVER, F. und G. A. KOCHENBERGER, (Hrsg.) (2003): *Handbook of Metaheuristics*. New York: Kluwer Academic Publishers. DOI: 10.1007/b101874.
- [122] GLOVER, F. und M. LAGUNA (2013): Tabu Search*. In: *Handbook of Combinatorial Optimization*. P. M. Pardalos, D.-Z. Du und R. L. Graham (Hrsg.). New York: Springer, S. 3261–3362. DOI: 10.1007/978-1-4419-7997-1_17.
- [123] GOMES, M. und A. RUINA (2011): Walking model with no energy cost. *Physical Review E* **83**(3), S. 032901. DOI: 10.1103/PhysRevE.83.032901.
- [124] GONTHIER, Y., J. MCPHEE und C. LANGE (2007): On the Implementation of Coulomb Friction in a Volumetric-Based Model for Contact Dynamics. In: *Proceedings of the ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, S. 423–432. DOI: 10.1115/DETC2007-35311.
- [125] GOSWAMI, A., B. ESPIAU und A. KERAMANE (1996): Limit cycles and their stability in a passive bipedal gait. In: *Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Bd. 1, S. 246–251. DOI: 10.1109/ROBOT.1996.503785.
- [126] GOSWAMI, A., B. THUILOT und B. ESPIAU (1996): *Compass-Like Biped Robot Part I: Stability and Bifurcation of Passive Gaits*. Forschungsbericht RR-2996. Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique (INRIA) Rhône-Alpes.
- [127] GOSWAMI, A. (1999): Postural Stability of Biped Robots and the Foot-Rotation Indicator (FRI) Point. *The International Journal of Robotics Research* **18**(6), S. 523–533. DOI: 10.1177/02783649922066376.
- [128] GOULD, N. I. M. und P. L. TOINT (2000): SQP Methods for Large-Scale Non-linear Programming: Methods, Theory and Applications. In: *System Modelling and Optimization*. M. J. D. Powell und S. Scholtes (Hrsg.). Bd. 46. IFIP — The International Federation for Information Processing. Boston, MA: Springer, S. 149–178. DOI: 10.1007/978-0-387-35514-6_7.
- [129] GOVAERTS, W., Y. A. KUZNETSOV und A. DHOOGHE (2005): Numerical Continuation of Bifurcations of Limit Cycles in MATLAB. *SIAM Journal on Scientific Computing* **27**(1), S. 231–252. DOI: 10.1137/030600746.
- [130] GREGG, R. D., T. LENZI, L. J. HARGROVE und J. W. SENSINGER (2014): Virtual Constraint Control of a Powered Prosthetic Leg: From Simulation to

- Experiments With Transfemoral Amputees. *IEEE Transactions on Robotics* **30**(6), S. 1455–1471. DOI: 10.1109/tro.2014.2361937.
- [131] GREGG, R. D., E. J. ROUSE, L. J. HARGROVE und J. W. SENSINGER (2014): Evidence for a Time-Invariant Phase Variable in Human Ankle Control. *PLoS ONE* **9**(2), e89163. DOI: 10.1371/journal.pone.0089163.
- [132] GRIFFIN, B. und J. GRIZZLE (2015): Nonholonomic Virtual Constraints for Dynamic Walking. In: *Proceedings of the 54th IEEE Conference on Decision and Control*, S. 4053–4060. DOI: 10.1109/CDC.2015.7402850.
- [133] GRIFFIN, T. M., N. A. TOLANI und R. KRAM (1999): Walking in simulated reduced gravity: mechanical energy fluctuations and exchange. *Journal of Applied Physiology* **86**(1), S. 383–390. DOI: 10.1152/jappl.1999.86.1.383.
- [134] GRIFFIN, T. M., T. J. ROBERTS und R. KRAM (2003): Metabolic cost of generating muscular force in human walking: insights from load-carrying and speed experiments. *Journal of Applied Physiology* **95**(1), S. 172–183. DOI: 10.1152/jappphysiol.00944.2002.
- [135] GRILLNER, S. (1985): Neurobiological bases of rhythmic motor acts in vertebrates. *Science* **228**(4696), S. 143–149. DOI: 10.1126/science.3975635.
- [136] GRIMES, J. A. und J. W. HURST (2012): The design of ATRIAS 1.0 a unique monopod, hopping robot. In: *Adaptive Mobile Robotics: Proceedings of the 15th International Conference on Climbing and Walking Robots and the Support Technologies for Mobile Machines*. A. K. M. Azad, N. J. Cowan, M. O. Tokhi, G. S. Virk und R. D. Eastman (Hrsg.). Singapore: World Scientific, S. 548–554. DOI: 10.1142/9789814415958_0071.
- [137] GRIZZLE, J. W., F. PLESTAN und G. ABBA (1999): Poincare’s Method for Systems with Impulse Effects: Application to Mechanical Biped Locomotion. In: *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*. Bd. 4, S. 3869–3876. DOI: 10.1109/CDC.1999.827961.
- [138] GRIZZLE, J. W., G. ABBA und F. PLESTAN (2001): Asymptotically Stable Walking for Biped Robots: Analysis via Systems with Impulse Effects. *IEEE Transactions on Automatic Control* **46**(1), S. 51–64. DOI: 10.1109/9.898695.
- [139] GRIZZLE, J. W., J. HURST, B. MORRIS, H.-W. PARK und K. SREENATH (2009): MABEL, A New Robotic Bipedal Walker and Runner. In: *Proceedings of the 2009 American Control Conference*, S. 2030–2036. DOI: 10.1109/acc.2009.5160550.
- [140] GRIZZLE, J. W., C. CHEVALLEREAU, R. W. SINNET und A. D. AMES (2014): Models, feedback control, and open problems of 3D bipedal robotic walking. *Automatica* **50**(8), S. 1955–1988. DOI: 10.1016/j.automatica.2014.04.021.
- [141] HABERLAND, M. und S. KIM (2015): On extracting design principles from biology: I. Method-General answers to high-level design questions for bioinspired

- robots. *Bioinspiration & Biomimetics* **10**(1), S. 016010. DOI: 10.1088/1748-3190/10/1/016010.
- [142] HABERLAND, M. und S. KIM (2015): On extracting design principles from biology: II. Case study—the effect of knee direction on bipedal robot running efficiency. *Bioinspiration & Biomimetics* **10**(1), S. 016011. DOI: 10.1088/1748-3190/10/1/016011.
- [143] HACKL, J., H. J. WACKER und W. ZULEHNER (1980): An efficient step size control for continuation methods. *BIT* **20**(4), S. 475–485. DOI: 10.1007/bf01933641.
- [144] HADDAD, O. B., A. AFSHAR und M. A. MARIÑO (2006): Honey-Bees Mating Optimization (HBMO) Algorithm: A New Heuristic Approach for Water Resources Optimization. *Water Resources Management* **20**(5), S. 661–680. DOI: 10.1007/s11269-005-9001-3.
- [145] HAIRER, E. und G. WANNER (1996): *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*. 2. Aufl. Bd. 14. Springer Series in Computational Mathematics. Berlin: Springer-Verlag. DOI: 10.1007/978-3-642-05221-7.
- [146] HAMED, K. A., B. G. BUSS und J. W. GRIZZLE (2016): Exponentially stabilizing continuous-time controllers for periodic orbits of hybrid systems: Application to bipedal locomotion with ground height variations. *The International Journal of Robotics Research* **35**(8), S. 977–999. DOI: 10.1177/0278364915593400.
- [147] HAMNER, S. R., A. SETH, K. M. STEELE und S. L. DELP (2013): A rolling constraint reproduces ground reaction forces and moments in dynamic simulations of walking, running, and crouch gait. *Journal of Biomechanics* **46**(10), S. 1772–1776. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2013.03.030.
- [148] *Handle* (2018). BostonDynamics (Offizielle Webseite). Abgerufen am 08.08.2018. URL: <https://www.bostondynamics.com/handle>.
- [149] HANSEN, A. H., D. S. CHILDRESS und E. H. KNOX (1999): Roll-over Shapes of Prosthetic Feet. *Gait & Posture: Abstracts of the Gait and Clinical Movement Analysis Society (GCMA) 4th Annual Meeting* **9**(2), S. 126. DOI: 10.1016/S0966-6362(99)00006-5.
- [150] HANSEN, A. H., D. S. CHILDRESS und E. H. KNOX (2000): Prosthetic foot roll-over shapes with implications for alignment of trans-tibial prostheses. *Prosthetics and Orthotics International* **24**(3), S. 205–215. DOI: 10.1080/03093640008726549.
- [151] HANSEN, A. H. und D. S. CHILDRESS (2004): Effects of shoe heel height on biologic rollover characteristics during walking. *Journal of Rehabilitation Research and Development* **41**(4), S. 547–554.

- [152] HANSEN, A. H., D. S. CHILDRESS und E. H. KNOX (2004): Roll-over shapes of human locomotor systems: effects of walking speed. *Clinical Biomechanics* **19**(4), S. 407–414. DOI: 10.1016/j.clinbiomech.2003.12.001.
- [153] HANSEN, A. H., D. S. CHILDRESS und S. C. MIFF (2004): Roll-over characteristics of human walking on inclined surfaces. *Human Movement Science* **23**(6), S. 807–821. DOI: 10.1016/j.humov.2004.08.023.
- [154] HANSEN, A. H. und D. S. CHILDRESS (2005): Effects of adding weight to the torso on roll-over characteristics of walking. *Journal of Rehabilitation Research and Development* **42**(3), S. 381–390.
- [155] HANSEN, A. H. und D. S. CHILDRESS (2010): Investigations of roll-over shape: implications for design, alignment, and evaluation of ankle-foot prostheses and orthoses. *Disability and Rehabilitation* **32**(26), S. 2201–2209. DOI: 10.3109/09638288.2010.502586.
- [156] HANSEN, A. H. und C. C. WANG (2010): Effective rocker shapes used by able-bodied persons for walking and fore-aft swaying: Implications for design of ankle-foot prostheses. *Gait & Posture* **32**(2), S. 181–184. DOI: 10.1016/j.gaitpost.2010.04.014.
- [157] HANSEN, A., E. NICKEL, J. MEDVEC, S. BRIELMAIER, A. PIKE und M. WEBER (2014): Effects of a flat prosthetic foot rocker section on balance and mobility. *Journal of Rehabilitation Research & Development* **51**(1), S. 137–148. DOI: 10.1682/JRRD.2012.12.0229.
- [158] HASEGAWA, Y., T. ARAKAWA und T. FUKUDA (2000): Trajectory generation for biped locomotion robot. *Mechatronics* **10**(1-2), S. 67–89. DOI: 10.1016/s0957-4158(99)00052-5.
- [159] HATZ, K. (2014): *Efficient Numerical Methods for Hierarchical Dynamic Optimization with Application to Cerebral Palsy Gait Modeling*. Diss. Universität Heidelberg. URL: http://archiv.ub.uni-heidelberg.de/volltextserver/16803/1/PhDThesis_KHatz.pdf.
- [160] HAYMES, E. M. und W. C. BYRNES (1993): Walking and running energy expenditure estimated by Caltrac and indirect calorimetry. *Medicine and Science in Sports and Exercise* **25**(12), S. 1365–1369.
- [161] DEN HELIJER, C. und W. C. RHEINBOLDT (1981): On Steplength Algorithms for a Class of Continuation Methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **18**(5), S. 925–948. DOI: 10.1137/0718066.
- [162] HEMAMI, H. und C. L. GOLLIDAY JR. (1977): The Inverted Pendulum and Biped Stability. *Mathematical Biosciences* **34**(1–2), S. 95–110. DOI: 10.1016/0025-5564(77)90038-4.
- [163] HEREID, A., E. A. COUSINEAU, C. M. HUBICKI und A. D. AMES (2016): 3D Dynamic Walking with Underactuated Humanoid Robots: A Direct Collocation

- Framework for Optimizing Hybrid Zero Dynamics. In: *Proceedings of the 2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, S. 1447–1454. DOI: 10.1109/icra.2016.7487279.
- [164] HERTZ, H. (1882): Ueber die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **92**, S. 156–171. DOI: 10.1515/crll.1882.92.156.
- [165] HILL, A. V. (1938): The heat of shortening and the dynamic constants of muscle. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences* **126**(843), S. 136–195. DOI: 10.1098/rspb.1938.0050.
- [166] HIRUKAWA, H., F. KANEHIRO, K. KANEKO, S. KAJITA, K. FUJIWARA, Y. KAWAI, F. TOMITA, S. HIRAI, K. TANIE, T. ISOZUMI, K. AKACHIB, T. KAWASAKIB, S. OTAB, K. YOKOYAMAC, H. HANDAC, Y. FUKASED, J.-i. MAEDAD, Y. NAKAMURAE, S. TACHIE und H. INOUEE (2004): Humanoid robotics platforms developed in HRP. *Robotics and Autonomous Systems* **48**(4), S. 165–175. DOI: 10.1016/j.robot.2004.07.007.
- [167] HOLLAND, J. H. (1992): *Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control, and Artificial Intelligence*. 2. Aufl. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.
- [168] HOLMES, P., R. J. FULL, D. KODITSCHKEK und J. GUCKENHEIMER (2006): The Dynamics of Legged Locomotion: Models, Analyses, and Challenges. *SIAM Review* **48**(2), S. 207–304. DOI: 10.1137/S0036144504445133.
- [169] HOOKE, R. und T. A. JEEVES (1961): “Direct Search” Solution of Numerical and Statistical Problems. *Journal of the ACM* **8**(2), S. 212–229. DOI: 10.1145/321062.321069.
- [170] HORST, R. und P. M. PARDALOS, (Hrsg.) (1995): *Handbook of Global Optimization*. 1. Aufl. Bd. 2. Nonconvex Optimization and Its Applications. Dordrecht: Springer. DOI: 10.1007/978-1-4615-2025-2.
- [171] HOSCHKEK, J. und D. LASSER (1989): *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*. Stuttgart: Teubner. DOI: 10.1007/978-3-322-99494-3.
- [172] HUIHUA, Z., S. N. YADUKUMAR und A. D. AMES (2012): Bipedal Robotic Running with Partial Hybrid Zero Dynamics and Human-Inspired Optimization. In: *Proceedings of the 2012 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, S. 1821–1827. DOI: 10.1109/iro.2012.6386241.
- [173] HUNT, K. H. und F. R. E. CROSSLEY (1975): Coefficient of Restitution Interpreted as Damping in Vibroimpact. *Journal of Applied Mechanics* **42**(2), S. 440–445. DOI: 10.1115/1.3423596.
- [174] IEEE COMPUTER SOCIETY (2008): IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic. *IEEE Std 754-2008*, S. 1–70. DOI: 10.1109/IEEESTD.2008.4610935.

-
- [175] IJSPEERT, A. J. (2008): Central pattern generators for locomotion control in animals and robots: A review. *Neural Networks* **21**(4), S. 642–653. DOI: 10.1016/j.neunet.2008.03.014.
- [176] IJSPEERT, A. J., J. NAKANISHI, H. HOFFMANN, P. PASTOR und S. SCHAAL (2013): Dynamical Movement Primitives: Learning Attractor Models for Motor Behaviors. *Neural Computation* **25**(2), S. 328–373. DOI: 10.1162/NECO_a_00393.
- [177] IQBAL, S., X. ZANG, Y. ZHU und J. ZHAO (2014): Bifurcations and chaos in passive dynamic walking: A review. *Robotics and Autonomous Systems* **62**(6), S. 889–909. DOI: 10.1016/j.robot.2014.01.006.
- [178] JIANG, S., S. PARTRICK, H. ZHAO und A. D. AMES (2012): Outputs of Human Walking for Bipedal Robotic Controller Design. In: *Proceedings of the 2012 American Control Conference*, S. 4843–4848. DOI: 10.1109/ACC.2012.6315648.
- [179] JOHNSON, K. L. (1987): *Contact Mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [180] JOHNSON, M., B. SHREWSBURY, S. BERTRAND, T. WU, D. DURAN, M. FLOYD, P. ABELES, D. STEPHEN, N. MERTINS, A. LESMAN, J. CARFF, W. RIFENBURGH, P. KAVETI, W. STRAATMAN, J. SMITH, M. GRIFFIOEN, B. LAYTON, T. DE BOER, T. KOOLEN, P. NEUHAUS und J. PRATT (2015): Team IHMC’s Lessons Learned from the DARPA Robotics Challenge Trials. *Journal of Field Robotics* **32**(2), S. 192–208. DOI: 10.1002/rob.21571.
- [181] JUN, J. Y. und J. E. CLARK (2011): Effect of rolling on running performance. In: *Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, S. 2009–2014. DOI: 10.1109/ICRA.2011.5980433.
- [182] JUNGnickel, D. (2015): *Optimierungsmethoden: Eine Einführung*. 3. Aufl. Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer Spektrum. DOI: 10.1007/978-3-642-54821-5.
- [183] KAJITA, S., F. KANEHIRO, K. KANEKO, K. YOKOI und H. HIRUKAWA (2001): The 3D Linear Inverted Pendulum Mode: A simple modeling for a biped walking pattern generation. In: *Proceedings of the 2001 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*. Bd. 1, S. 239–246. DOI: 10.1109/iros.2001.973365.
- [184] KAJITA, S., O. MATSUMOTO und M. SAIGO (2001): Real-time 3D walking pattern generation for a biped robot with telescopic legs. In: *Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Bd. 3, S. 2299–2306. DOI: 10.1109/robot.2001.932965.
- [185] KAJITA, S., F. KANEHIRO, K. KANEKO, K. FUJIWARA, K. YOKOI und H. HIRUKAWA (2002): A Realtime Pattern Generator for Biped Walking. In: *Proceedings*

- of the 2002 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Bd. 1, S. 31–37. DOI: 10.1109/robot.2002.1013335.
- [186] KAJITA, S., F. KANEHIRO, K. KANEKO, K. FUJIWARA, K. HARADA, K. YOKOI und H. HIRUKAWA (2003): Biped Walking Pattern Generation by using Preview Control of Zero-Moment Point. In: *Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Bd. 2, S. 1620–1626. DOI: 10.1109/robot.2003.1241826.
- [187] KAJITA, S., H. HIRUKAWA, K. HARADA und K. YOKOI (2014): *Introduction to Humanoid Robotics*. B. Siciliano und O. Khatib (Hrsg.). Bd. 101. Springer Tracts in Advanced Robotics. Springer Berlin Heidelberg. DOI: 10.1007/978-3-642-54536-8.
- [188] KARSEN, J. G. D. (2007): *Design and construction of the Cornell Ranger, a world record distance walking robot*. Praktikumsabschlussbericht. Cornell University. URL: http://www.ecs.syr.edu/faculty/Tetley/ELE%20516%20CIS%20543/Bipedal/CornellRangerKarssen_v22.pdf.
- [189] KECSKEMÉTHY, A., C. LANGE und G. GRABNER (2000): A geometric model for cylinder-cylinder impact with application to vertebrae motion simulation. In: *Advances in Robot Kinematics*. J. Lenarčič und M. M. Stanišić (Hrsg.). Dordrecht: Springer, S. 345–354. DOI: 10.1007/978-94-011-4120-8_36.
- [190] KECSKEMÉTHY, A. (2011): Integrating efficient kinematics in biomechanics of human motions. *Procedia IUTAM* **2**, S. 86–92. DOI: 10.1016/j.piutam.2011.04.009.
- [191] KELLY, M. (2017): An Introduction to Trajectory Optimization: How to Do Your Own Direct Collocation. *SIAM Review* **59**(4), S. 849–904. DOI: 10.1137/16M1062569.
- [192] KENNEDY, J. und R. EBERHART (1995): Particle Swarm Optimization. In: *Proceedings of the 1995 IEEE International Conference on Neural Networks*. Bd. 4, S. 1942–1948. DOI: 10.1109/icnn.1995.488968.
- [193] KENNEDY, J. (2011): Particle Swarm Optimization. In: *Encyclopedia of Machine Learning*. C. Sammut und G. I. Webb (Hrsg.). New York: Springer, S. 760–766. DOI: 10.1007/978-0-387-30164-8_630.
- [194] KESSLER, T., F. LOGIST und M. MANGOLD (2016): Use of predictor corrector methods for multi-objective optimization of dynamic systems. In: *26th European Symposium on Computer Aided Process Engineering*. Z. Kravanja und M. Bogataj (Hrsg.). Bd. 38. Computer Aided Chemical Engineering. Amsterdam: Elsevier, S. 313–318. DOI: 10.1016/b978-0-444-63428-3.50057-6.
- [195] KIEFER, A. W., M. A. RILEY, K. SHOCKLEY, C. A. SITTON, T. E. HEWETT, S. CUMMINS-SEBREE und J. G. HAAS (2011): Multi-segmental postural coor-

- dination in professional ballet dancers. *Gait & Posture* **34**(1), S. 76–80. DOI: 10.1016/j.gaitpost.2011.03.016.
- [196] KINUGASA, T., C. CHEVALLEREAU und Y. AOUSTIN (2009): Effect of circular arc feet on a control law for a biped. *Robotica* **27**(4), S. 621–632. DOI: 10.1017/S0263574708005006.
- [197] KIRKPATRICK, S., C. D. GELATT und M. P. VECCHI (1983): Optimization by simulated annealing. *Science* **220**(4598), S. 671–680. DOI: 10.1126/science.220.4598.671.
- [198] KOCH, K. H., K. D. MOMBAUR und P. SOUÈRES (2012): Studying the Effect of Different Optimization Criteria on Humanoid Walking Motions. In: *Simulation, Modeling, and Programming for Autonomous Robots*. Springer Berlin Heidelberg, S. 221–236. DOI: 10.1007/978-3-642-34327-8_22.
- [199] KOCH, M. W. und S. LEYENDECKER (2016): Multibody Dynamics: Computational Methods and Applications. In: *Multibody Dynamics*. J. M. Font-Llagunes (Hrsg.). Bd. 42. Computational Methods in Applied Sciences. Springer. Kap. Structure Preserving Optimal Control of a Three-Dimensional Upright Gait, S. 115–146. DOI: 10.1007/978-3-319-30614-8_6.
- [200] KOEHLER-McNICHOLAS, S. R., E. NICKEL, C. J. SCHULTZ und A. H. HANSEN (2016): Rocker Shoes for Natural Immobilization of the Ankle During Single-Limb Support. *Journal of Medical Devices* **10**(3), S. 030954. DOI: 10.1115/1.4033767.
- [201] KOOLEN, T., T. DE BOER, J. REBULA, A. GOSWAMI und J. PRATT (2012): Capturability-based analysis and control of legged locomotion, Part 1: Theory and application to three simple gait models. *The International Journal of Robotics Research* **31**(9), S. 1094–1113. DOI: 10.1177/0278364912452673.
- [202] KUMAR, R. P., J. YOON, CHRISTIAND und G. KIM (2009): The simplest passive dynamic walking model with toed feet: a parametric study. *Robotica* **27**(5), S. 701–713. DOI: 10.1017/S0263574708005079.
- [203] KUMAR, R. P., A. ÖZER, G. KIM und J. YOON (2011): A novel dynamic walker with heel, ankle, and toe rocker motions. *Robotica* **29**(6), S. 883–893. DOI: 10.1017/S0263574711000099.
- [204] KUO, A. D. (1999): Stabilization of Lateral Motion in Passive Dynamic Walking. *The International Journal of Robotics Research* **18**(9), S. 917–930. DOI: 10.1177/02783649922066655.
- [205] KUO, A. D., J. M. DONELAN und A. RUINA (2005): Energetic Consequences of Walking Like an Inverted Pendulum: Step-to-Step Transitions. *Exercise and Sport Sciences Reviews* **33**(2), S. 88–97.

- [206] KUO, A. D. (2007): The six determinants of gait and the inverted pendulum analogy: A dynamic walking perspective. *Human Movement Science* **26**(4), S. 617–656. DOI: 10.1016/j.humov.2007.04.003.
- [207] KWAN, M. und M. HUBBARD (2007): Optimal foot shape for a passive dynamic biped. *Journal of Theoretical Biology* **248**(2), S. 331–339. DOI: 10.1016/j.jtbi.2007.05.008.
- [208] LACK, J., M. J. POWELL und A. D. AMES (2014): Planar Multi-Contact Bipedal Walking Using Hybrid Zero Dynamics. In: *Proceedings of the 2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, S. 2582–2588. DOI: 10.1109/icra.2014.6907229.
- [209] LANCZOS, C. (1986): *The Variational Principles of Mechanics*. 4. Aufl. New York: Dover Publications.
- [210] LIN, C.-F., W.-C. LEE, Y.-A. CHEN und B.-J. HSUE (2016): Fatigue-Induced Changes in Movement Pattern and Muscle Activity During Ballet Releve on Demi-Pointe. *Journal of Applied Biomechanics* **32**(4), S. 350–358. DOI: 10.1123/jab.2014-0263.
- [211] LIN, M. C. und S. GOTTSCHALK (1998): Collision detection between geometric models: a survey. In: *Proceedings of IMA Conference on Mathematics of Surfaces 1998*, S. 37–56. URL: <https://pdfs.semanticscholar.org/ca4b/fcf1df1728cff8ffbf28dba52b5741514f4b.pdf>.
- [212] LIPFERT, S. W., M. GÜNTHER, D. RENJEWSKI, S. GRIMMER und A. SEYFARTH (2012): A model-experiment comparison of system dynamics for human walking and running. *Journal of Theoretical Biology* **292**, S. 11–17. DOI: 10.1016/j.jtbi.2011.09.021.
- [213] LIU, J.-S., W.-H. PAN, W.-Y. KU, Y.-H. TSAO und Y.-Z. CHANG (2014): Simulation-based fast collision detection for scaled polyhedral objects in motion by exploiting analytical contact equations. *Robotica* **34**(1), S. 118–134. DOI: 10.1017/s0263574714000939.
- [214] LOPES, D. S., M. T. SILVA, J. A. AMBRÓSIO und P. FLORES (2010): A mathematical framework for rigid contact detection between quadric and superquadric surfaces. *Multibody System Dynamics* **24**(3), S. 255–280. DOI: 10.1007/s11044-010-9220-0.
- [215] LOPES, D. S., R. R. NEPTUNE, J. A. AMBRÓSIO und M. T. SILVA (2016): A superellipsoid-plane model for simulating foot-ground contact during human gait. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering* **19**(9), S. 954–963. DOI: 10.1080/10255842.2015.1081181.
- [216] LUNDBERG, B. N., A. B. POORE und Y. BING (1989): *Multiplier-continuation algorithms for constrained optimization*. Techn. Ber. Recent Advances in Multi-disciplinary Analysis and Optimization, Part 3; S. 1303–1315. NASA, Langley

- Research Center. URL: <https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19890015847.pdf>.
- [217] LUNDBERG, B. N. und A. B. POORE (1993): Numerical Continuation and Singularity Detection Methods for Parametric Nonlinear Programming. *SIAM Journal on Optimization* **3**(1), S. 134–154. DOI: 10.1137/0803007.
- [218] LYNESS, J. N. und C. B. MOLER (1967): Numerical Differentiation of Analytic Functions. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **4**(2), S. 202–210. DOI: 10.1137/0704019.
- [219] MACHADO, M., P. MOREIRA, P. FLORES und H. M. LANKARANI (2012): Compliant contact force models in multibody dynamics: Evolution of the Hertz contact theory. *Mechanism and Machine Theory* **53**, S. 99–121. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2012.02.010.
- [220] MACHADO, M., P. FLORES und J. AMBRÓSIO (2014): Techniques for Geometrical Detection of Contact Within Multibody Systems. In: *New Trends in Mechanism and Machine Science*. P. Flores und F. Viadero (Hrsg.). Bd. 24. Mechanisms and Machine Science. Cham: Springer, S. 471–478. DOI: 10.1007/978-3-319-09411-3_50.
- [221] MACKENS, W. (1989): Numerical Differentiation of Implicitly Defined Space Curves. *Computing* **41**(3), S. 237–260. DOI: 10.1007/bf02259095.
- [222] MADDEN, J. D. (2007): Mobile Robots: Motor Challenges and Materials Solutions. *Science* **318**(5853), S. 1094–1097. DOI: 10.1126/science.1146351.
- [223] MANOONPONG, P., T. KULVICIUS, F. WÖRGÖTTER, L. KUNZE, D. RENJEWSKI und A. SEYFARTH (2011): Compliant Ankles and Flat Feet for Improved Self-Stabilization and Passive Dynamics of the Biped Robot “RunBot”. In: *Proceedings of the 11th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*, S. 276–281. DOI: 10.1109/Humanoids.2011.6100804.
- [224] MARQUES, J. A., S. GONÇALVES und M. T. SILVA (2015): Development of a general Ground Contact model for Analysis and Simulation of Human Gait. In: *Proceedings of the 2015 Congress on Numerical Methods in Engineering*. URL: http://www.dem.ist.utl.pt/cmn2015/html/CD-Proceedings/PDF/Papers/CMN_2015_submission_337.pdf.
- [225] MARTIN, A. E. und J. P. SCHMIEDELER (2012): The Effects of Curved Foot Design Parameters on Planar Biped Walking. In: *Volume 4: 36th Mechanisms and Robotics Conference, Parts A and B*, S. 815–824. DOI: 10.1115/detc2012-70557.
- [226] MARTIN, A. E., D. C. POST und J. P. SCHMIEDELER (2014): Design and experimental implementation of a hybrid zero dynamics-based controller for planar bipeds with curved feet. *The International Journal of Robotics Research* **33**(7), S. 988–1005. DOI: 10.1177/0278364914522141.

- [227] MARTIN, A. E., D. C. POST und J. P. SCHMIEDELER (2014): The effects of foot geometric properties on the gait of planar bipeds walking under HZD-based control. *The International Journal of Robotics Research* **33**(12), S. 1530–1543. DOI: 10.1177/0278364914532391.
- [228] MARTIN, A. E. und R. D. GREGG (2015): Hybrid Invariance and Stability of a Feedback Linearizing Controller for Powered Prostheses. In: *Proceedings of the 2015 American Control Conference*, S. 4670–4676. DOI: 10.1109/acc.2015.7172065.
- [229] MARTIN, B. J. und J. E. BOBROW (1999): Minimum-Effort Motions for Open-Chain Manipulators with Task-Dependent End-Effector Constraints. *The International Journal of Robotics Research* **18**(2), S. 213–224. DOI: 10.1177/027836499901800206.
- [230] MARTINS, J. R. R. A., P. STURDZA und J. J. ALONSO (2003): The Complex-Step Derivative Approximation. *ACM Transactions on Mathematical Software* **29**(3), S. 245–262. DOI: 10.1145/838250.838251.
- [231] MARX, B. und W. VOGT (2011): *Dynamische Systeme: Theorie und Numerik*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag. DOI: 10.1007/978-3-8274-2448-8.
- [232] MCGEER, T. (1990): Passive Bipedal Running. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences* **240**(1297), S. 107–134. DOI: 10.1098/rspb.1990.0030.
- [233] MCGEER, T. (1990): Passive Dynamic Walking. *The International Journal of Robotics Research* **9**(2), S. 62–82. DOI: 10.1177/027836499000900206.
- [234] MCGEER, T. (1990): Passive walking with knees. In: *Proceedings of the 1990 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, S. 1640–1645. DOI: 10.1109/ROBOT.1990.126245.
- [235] MCGEER, T. (1993): Dynamics and Control of Bipedal Locomotion. *Journal of Theoretical Biology* **163**(3), S. 277–314. DOI: 10.1006/jtbi.1993.1121.
- [236] MCGEER, T. (1993): Passive Dynamic Biped Catalogue, 1991. In: *Experimental Robotics II: The 2nd International Symposium, Toulouse, France, June 25–27 1991*. R. Chatila und G. Hirzinger (Hrsg.). Bd. 190. Lecture Notes in Control and Information Sciences. Berlin: Springer, S. 463–490. DOI: 10.1007/BFb0036159.
- [237] MCMAHON, T. A. (1984): Mechanics of locomotion. *The International Journal of Robotics Research* **3**(2), S. 4–28. DOI: 10.1177/027836498400300202.
- [238] MCMAHON, T. A. und G. C. CHENG (1990): The mechanics of running: How does stiffness couple with speed? *Journal of Biomechanics* **23**, S. 65–78. DOI: 10.1016/0021-9290(90)90042-2.
- [239] MEZURA-MONTES, E. und C. A. C. COELLO (2011): Constraint-handling in nature-inspired numerical optimization: Past, present and future. *Swarm and*

- Evolutionary Computation* **1**(4), S. 173–194. DOI: 10.1016/j.swevo.2011.10.001.
- [240] MIFF, S. C., A. H. HANSEN, D. S. CHILDRESS, S. A. GARD und M. R. MEIER (2008): Roll-over shapes of the able-bodied knee–ankle–foot system during gait initiation, steady-state walking, and gait termination. *Gait & Posture* **27**(2), S. 316–322. DOI: 10.1016/j.gaitpost.2007.04.011.
- [241] MILLARD, M., J. MCPHEE und E. KUBICA (2009): Multi-Step Forward Dynamic Gait Simulation. In: *Multibody Dynamics*. C. L. Bottasso (Hrsg.). Bd. 12. Computational Methods in Applied Sciences. Dordrecht: Springer, S. 25–43. DOI: 10.1007/978-1-4020-8829-2_2.
- [242] MILLARD, M. und A. KECSKEMÉTHY (2014): A 3D Foot-Ground Model Using Disk Contacts. In: *Interdisciplinary Applications of Kinematics*. A. Kecskeméthy und F. G. Flores (Hrsg.). Bd. 26. Mechanisms and Machine Science. Springer International Publishing, S. 161–169. DOI: 10.1007/978-3-319-10723-3_17.
- [243] MIRJALILI, S. und A. LEWIS (2016): The Whale Optimization Algorithm. *Advances in Engineering Software* **95**, S. 51–67. DOI: 10.1016/j.advengsoft.2016.01.008.
- [244] MOCHON, S. und T. A. MCMAHON (1980): Ballistic walking. *Journal of Biomechanics* **13**(1), S. 49–57. DOI: 10.1016/0021-9290(80)90007-X.
- [245] MOCHON, S. und T. A. MCMAHON (1980): Ballistic walking: An improved model. *Mathematical Biosciences* **52**(3-4), S. 241–260. DOI: 10.1016/0025-5564(80)90070-X.
- [246] MORALES, J. L., J. NOCEDAL und Y. WU (2011): A sequential quadratic programming algorithm with an additional equality constrained phase. *IMA Journal of Numerical Analysis* **32**(2), S. 553–579. DOI: 10.1093/imanum/drq037.
- [247] MORALES-ORCAJO, E., J. BAYOD und E. B. DE LAS CASAS (2016): Computational Foot Modeling: Scope and Applications. *Archives of Computational Methods in Engineering* **23**(3), S. 389–416. DOI: 10.1007/s11831-015-9146-z.
- [248] MOREIRA, P., P. FLORES und M. SILVA (2012): A Biomechanical Multibody Foot Model for Forward Dynamic Analysis. In: *Proceedings of the 2012 IEEE 2nd Portuguese Meeting in Bioengineering*. IEEE, S. 1–6. DOI: 10.1109/enbeng.2012.6331396.
- [249] MORRIS, B. und J. W. GRIZZLE (2006): Hybrid Invariance in Bipedal Robots with Series Compliant Actuators. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, S. 4793–4800. DOI: 10.1109/CDC.2006.376784.
- [250] NARIOKA, K., S. TSUGAWA und K. HOSODA (2009): 3D Limit Cycle Walking of Musculoskeletal Humanoid Robot with Flat Feet. In: *Proceedings of the*

- 2009 *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, S. 4676–4681. DOI: 10.1109/IR0S.2009.5354388.
- [251] NARIOKA, K., T. HOMMA und K. HOSODA (2013): Roll-Over Shapes of Musculoskeletal Biped Walker. *at-Automatisierungstechnik Methoden und Anwendungen der Steuerungs-, Regelungs- und Informationstechnik* **61**(1), S. 4–14. DOI: 10.1524/auto.2013.0001.
- [252] NARUKAWA, T., K. YOKOYAMA, M. TAKAHASHI und K. YOSHIDA (2010): An Experimental Study of Three-Dimensional Passive Dynamic Walking with Flat Feet and Ankle Springs. In: *Cutting Edge Robotics 2010*. V. Kordic (Hrsg.). Rijeka: InTech. Kap. 8, S. 131–143. URL: <https://cdn.intechopen.com/pdfs-wm/12215.pdf>.
- [253] NELDER, J. A. und R. MEAD (1965): A Simplex Method for Function Minimization. *The Computer Journal* **7**(4), S. 308–313. DOI: 10.1093/comjnl/7.4.308.
- [254] NEPTUNE, R. R., I. C. WRIGHT und A. J. VAN DEN BOGERT (2000): A Method for Numerical Simulation of Single Limb Ground Contact Events: Application to Heel-Toe Running. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering* **3**(4), S. 321–334. DOI: 10.1080/10255840008915275.
- [255] NESTER, C. J., A. M. LIU, E. WARD, D. HOWARD, J. COCHEBA, T. DERRICK und P. PATTERSON (2007): In vitro study of foot kinematics using a dynamic walking cadaver model. *Journal of Biomechanics* **40**(9), S. 1927–1937. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2006.09.008.
- [256] NEUMAIER, A. (2004): Complete search in continuous global optimization and constraint satisfaction. *Acta Numerica* **13**, S. 271–369. DOI: 10.1017/s0962492904000194.
- [257] NGUYEN, Q., A. HEREID, J. W. GRIZZLE, A. D. AMES und K. SREENATH (2016): 3D Dynamic Walking on Stepping Stones with Control Barrier Functions. In: *Proceedings of the 2016 IEEE 55th Conference on Decision and Control*, S. 827–834. DOI: 10.1109/CDC.2016.7798370.
- [258] NOCEDAL, J. und S. J. WRIGHT (2006): *Numerical Optimization*. 2. Aufl. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. New York: Springer. DOI: 10.1007/978-0-387-40065-5.
- [259] NUBAR, Y. und R. CONTINI (1961): A minimal principle in biomechanics. *The bulletin of mathematical biophysics* **23**(4), S. 377–391. DOI: 10.1007/BF02476493.
- [260] ONYSHKO, S. und D. A. WINTER (1980): A mathematical model for the dynamics of human locomotion. *Journal of Biomechanics* **13**(4), S. 361–368. DOI: 10.1016/0021-9290(80)90016-0.
- [261] OWAKI, D., K. OSUKA und A. ISHIGURO (2008): On the Embodiment That Enables Passive Dynamic Bipedal Running. In: *Proceedings of the 2008 IEEE*

- International Conference on Robotics and Automation*, S. 341–346. DOI: 10.1109/ROBOT.2008.4543231.
- [262] OWAKI, D., M. KOYAMA, S. YAMAGUCHI, S. KUBO und A. ISHIGURO (2010): A Two-Dimensional Passive Dynamic Running Biped with Knees. In: *Proceedings of the 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, S. 5237–5242. DOI: 10.1109/ROBOT.2010.5509166.
- [263] OWAKI, D., S. KUBO, S. YAMAGUCHI, A. ISHIGURO, A. TERO, H.-M. MAUS, C. MAUFROY und A. SEYFARTH (2010): A TWO-DIMENSIONAL PASSIVE DYNAMIC RUNNER WITH UPPER BODY. In: *Emerging Trends In Mobile Robotics: Proceedings of the 13th International Conference on Climbing and Walking Robots and the Support Technologies for Mobile Machines*. H. Fujimoto, M. O. Tokhi, H. Mochiyama und G. S. Virk (Hrsg.). Singapore: World Scientific, S. 622–630. DOI: 10.1142/9789814329927_0077.
- [264] PANDY, M. G. und N. BERME (1988): Synthesis of human walking: A planar model for single support. *Journal of Biomechanics* **21**(12), S. 1053–1060. DOI: 10.1016/0021-9290(88)90251-5.
- [265] PARK, H.-W., K. SREENATH, A. RAMEZANI und J. W. GRIZZLE (2012): Switching Control Design for Accommodating Large Step-down Disturbances in Bipedal Robot Walking. In: *Proceedings of the 2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, S. 45–50. DOI: 10.1109/ICRA.2012.6225056.
- [266] PARSOPOULOS, K. E. und M. N. VRAHATIS (2002): Particle Swarm Optimization Method for Constrained Optimization Problems. In: *Proceedings of the Euro-International Symposium on Computational Intelligence 2002*. IOS Press, S. 214–220. URL: <http://www.cs.uoi.gr/%7Ekostas/papers/V07.pdf>.
- [267] PASSMORE, R. und J. V. G. A. DURNIN (1955): Human Energy Expenditure. *Physiological Reviews* **35**(4), S. 801–840. DOI: 10.1152/physrev.1955.35.4.801.
- [268] PEASGOOD, M., E. KUBICA und J. MCPHEE (2007): Stabilization of a Dynamic Walking Gait Simulation. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics* **2**(1), S. 65–72. DOI: 10.1115/1.2389230.
- [269] PEDOTTI, A., V. V. KRISHNAN und L. STARK (1978): Optimization of muscle-force sequencing in human locomotion. *Mathematical Biosciences* **38**(1-2), S. 57–76. DOI: 10.1016/0025-5564(78)90018-4.
- [270] PIIRONEN, P. T., H. J. DANKOWICZ und A. B. NORDMARK (2001): On a normal-form analysis for a class of passive bipedal walkers. *International Journal of Bifurcation and Chaos* **11**(09), S. 2411–2425. DOI: 10.1142/S0218127401003462.

- [271] PIIRONEN, P. T., H. J. DANKOWICZ und A. B. NORDMARK (2003): Breaking Symmetries and Constraints: Transitions from 2D to 3D in Passive Walkers. *Multibody System Dynamics* **10**(2), S. 147–176. DOI: 10.1023/A:1025540401249.
- [272] PLESTAN, F., J. W. GRIZZLE, E. R. WESTERVELT und G. ABBA (2003): Stable Walking of a 7-DOF Biped Robot. *IEEE Transactions on Robotics and Automation* **19**(4), S. 653–668. DOI: 10.1109/TRA.2003.814514.
- [273] PONTZER, H., J. H. HOLLOWAY, D. A. RAICHLEN und D. E. LIEBERMAN (2009): Control and function of arm swing in human walking and running. *Journal of Experimental Biology* **212**(4), S. 523–534. DOI: 10.1242/jeb.024927.
- [274] POORE, A. B. und C. A. TIAHRT (1987): Bifurcation problems in nonlinear parametric programming. *Mathematical Programming* **39**(2), S. 189–205. DOI: 10.1007/bf02592952.
- [275] POPOV, V. L. (2009): *Kontaktmechanik und Reibung: Ein Lehr- und Anwendungsbuch von der Nanotribologie bis zur numerischen Simulation*. Berlin: Springer-Verlag. DOI: 10.1007/978-3-540-88837-6.
- [276] POTH RAT, C., G. AUTHIER, E. VIEHWEGER, E. BERTON und G. RAO (2015): One-and multi-segment foot models lead to opposite results on ankle joint kinematics during gait: Implications for clinical assessment. *Clinical Biomechanics* **30**(5), S. 493–499. DOI: 10.1016/j.clinbiomech.2015.03.004.
- [277] POWELL, M. J. D. (2006): The NEWUOA software for unconstrained optimization without derivatives. In: *Large-Scale Nonlinear Optimization*. G. Di Pillo und M. Roma (Hrsg.). Bd. 83. Nonconvex Optimization and Its Applications. Boston, MA: Springer, S. 255–297. DOI: 10.1007/0-387-30065-1_16.
- [278] POWELL, M. J. D. (2009): *The BOBYQA Algorithm for Bound Constrained Optimization Without Derivatives*. Techn. Ber. Department of Applied Mathematics und Theoretical Physics, University of Cambridge. URL: http://www.damtp.cam.ac.uk/user/na/NA_papers/NA2009_06.pdf.
- [279] POWELL, M. J., A. HEREID und A. D. AMES (2013): Speed Regulation in 3D Robotic Walking through Motion Transitions between Human-Inspired Partial Hybrid Zero Dynamics. In: *Proceedings of the 2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, S. 4803–4810. DOI: 10.1109/icra.2013.6631262.
- [280] POWELL, M. J., E. A. COUSINEAU und A. D. AMES (2015): Model Predictive Control of Underactuated Bipedal Robotic Walking. In: *Proceedings of the 2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, S. 5121–5126. DOI: 10.1109/icra.2015.7139912.
- [281] PRATT, J., P. DILWORTH und G. PRATT (1997): Virtual Model Control of a Bipedal Walking Robot. In: *Proceedings of the 1997 IEEE International*

- Conference on Robotics and Automation*. Bd. 1, S. 193–198. DOI: 10.1109/ROBOT.1997.620037.
- [282] PRATT, J. und G. PRATT (1998): Intuitive Control of a Planar Bipedal Walking Robot. In: *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Bd. 3, S. 2014–2021. DOI: 10.1109/ROBOT.1998.680611.
- [283] PRATT, J., J. CARFF, S. DRAKUNOV und A. GOSWAMI (2006): Capture Point: A Step toward Humanoid Push Recovery. In: *Proceedings of the 6th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*. IEEE, S. 200–207. DOI: 10.1109/ichr.2006.321385.
- [284] PRATT, J., T. KOOLEN, T. DE BOER, J. REBULA, S. COTTON, J. CARFF, M. JOHNSON und P. NEUHAUS (2012): Capturability-based analysis and control of legged locomotion, Part 2: Application to M2V2, a lower-body humanoid. *The International Journal of Robotics Research* **31**(10), S. 1117–1133. DOI: 10.1177/0278364912452762.
- [285] QUINTERO, D., D. J. VILLARREAL, D. J. LAMBERT, S. KAPP und R. D. GREGG (2018): Continuous-Phase Control of a Powered Knee–Ankle Prosthesis: Amputee Experiments Across Speeds and Inclines. *IEEE Transactions on Robotics*. DOI: 10.1109/tro.2018.2794536.
- [286] RAIBERT, M. H., H. B. BROWN und M. CHEPPONIS (1984): Experiments in Balance with a 3D One-Legged Hopping Machine. *The International Journal of Robotics Research* **3**(2), S. 75–92. DOI: 10.1177/027836498400300207.
- [287] RAIBERT, M. H. (1986): *Legged Robots That Balance*. MIT Press.
- [288] RAIBERT, M. H., H. B. J. BROWN, M. CHEPPONIS, J. KOECHLING, J. K. HODGINS, D. DUSTMAN, W. K. BRENNAN, D. S. BARRETT, C. M. THOMPSON, J. D. HEBERT, W. LEE und L. BORVANSKY (1989): *Dynamically Stable Legged Locomotion*. Forschungsbericht AITR-1179. MIT Artificial Intelligence Laboratory.
- [289] RANKINE, L., J. T. LONG, K. CANSECO und G. F. HARRIS (2008): Multisegmental Foot Modeling: A Review. *Critical ReviewsTM in Biomedical Engineering* **36**(2–3), S. 127–181. DOI: 10.1615/CritRevBiomedEng.v36.i2-3.30.
- [290] RECHENBERG, I. (1973): *Evolutionsstrategie: Optimierung technischer Systeme nach Prinzipien der biologischen Evolution*. Diss. Stuttgart-Bad Cannstatt: Technische Universität Berlin (West).
- [291] REHER, J., E. A. COUSINEAU, A. HEREID, C. M. HUBICKI und A. D. AMES (2016): Realizing Dynamic and Efficient Bipedal Locomotion on the Humanoid Robot DURUS. In: *Proceedings of the 2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, S. 1794–1801. DOI: 10.1109/ICRA.2016.7487325.

- [292] REN, L., R. K. JONES und D. HOWARD (2007): Predictive modelling of human walking over a complete gait cycle. *Journal of Biomechanics* **40**(7), S. 1567–1574. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2006.07.017.
- [293] REN, L., D. HOWARD, L. REN, C. NESTER und L. TIAN (2010): A generic analytical foot rollover model for predicting translational ankle kinematics in gait simulation studies. *Journal of Biomechanics* **43**(2), S. 194–202. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2009.09.027.
- [294] REZAZADEH, S., C. HUBICKI, M. JONES, A. PEEKEMA, J. VAN WHY, A. ABATE und J. HURST (2015): Spring-Mass Walking With ATRIAS in 3D: Robust Gait Control Spanning Zero to 4.3 KPH on a Heavily Underactuated Bipedal Robot. In: *Proceedings of the ASME 2015 Dynamic Systems and Control Conference*, V001T04A003. DOI: 10.1115/DSCC2015-9899.
- [295] RHEINBOLDT, W. C. (1980): Solution Fields of Nonlinear Equations and Continuation Methods. *SIAM Journal on Numerical Analysis* **17**(2), S. 221–237. DOI: 10.1137/0717020.
- [296] RHEINBOLDT, W. C. (1981): Numerical analysis of continuation methods for nonlinear structural problems. In: *Computational Methods in Nonlinear Structural and Solid Mechanics*. A. K. Noor und H. G. McComb (Hrsg.). Oxford: Pergamon Press, S. 103–113. DOI: 10.1016/B978-0-08-027299-3.50015-7.
- [297] RHEINBOLDT, W. C. und J. V. BURKARDT (1983): A Locally Parameterized Continuation Process. *ACM Transactions on Mathematical Software* **9**(2), S. 215–235. DOI: 10.1145/357456.357460.
- [298] RHEINBOLDT, W. C. (2000): Numerical continuation methods: a perspective. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **124**(1-2), S. 229–244. DOI: 10.1016/s0377-0427(00)00428-3.
- [299] RIOS, L. M. und N. V. SAHINIDIS (2012): Derivative-free optimization: a review of algorithms and comparison of software implementations. *Journal of Global Optimization* **56**(3), S. 1247–1293. DOI: 10.1007/s10898-012-9951-y.
- [300] ROUSSEL, L., C. CANUDAS-DE-WIT und A. GOSWAMI (1997): Comparative study of methods for energy-optimal gait generation for biped robots. In: *International Conference on Informatics and Control Proceedings 1997*. Bd. 3. St. Petersburg Institute for Informatics und Automation of the Russian Academy of Sciences (SPIIRAS), S. 1213–1222. URL: <http://www.dtic.mil/get-tr-doc/pdf?AD=ADA327146#page=375>.
- [301] ROUSSEL, L., C. CANUDAS-DE-WIT und A. GOSWAMI (1998): Generation of Energy Optimal Complete Gait Cycles for Biped Robots. In: *Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Bd. 3, S. 2036–2041. DOI: 10.1109/ROBOT.1998.680615.

- [302] RUSHDI, K., D. KOOP und C. Q. WU (2014): Experimental studies on passive dynamic bipedal walking. *Robotics and Autonomous Systems* **62**(4), S. 446–455. DOI: 10.1016/j.robot.2013.12.002.
- [303] SAGLAM, C. O. und K. BYL (2015): Meshing Hybrid Zero Dynamics for Rough Terrain Walking. In: *Proceedings of the 2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, S. 5718–5725. DOI: 10.1109/ICRA.2015.7140000.
- [304] SALINGER, A. G., E. A. BURROUGHS, R. P. PAWLOWSKI, E. T. PHIPPS und L. A. ROMERO (2005): Bifurcation tracking algorithms and software for large scale applications. *International Journal of Bifurcation and Chaos* **15**(3), S. 1015–1032. DOI: 10.1142/s0218127405012508.
- [305] SAM, M., D. CHILDRESS, A. HANSEN, M. MEIER, S. LAMBLA, E. GRAHN und J. ROLOCK (2004): The ‘Shape&Roll’ Prosthetic Foot: I. Design and Development of Appropriate Technology for Low-Income Countries. *Medicine, Conflict & Survival* **20**(4), S. 294–306. DOI: 10.1080/1362369042000285937.
- [306] SARDAIN, P. und G. BESSONNET (2004): Forces Acting on a Biped Robot. Center of Pressure–Zero Moment Point. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part A: Systems and Humans* **34**(5), S. 630–637. DOI: 10.1109/tsmca.2004.832811.
- [307] SASAKI, H., M. YAMAKITA und F. ASANO (2008): Design of Convex Foot for Efficient Dynamic Bipedal Walking. In: *Proceedings of the 2008 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, S. 3433–3439. DOI: 10.1109/IROS.2008.4650907.
- [308] SAUNDERS, J. B. d. M., V. T. INMAN und H. D. EBERHART (1953): The major determinants in normal and pathological gait. *The Journal of Bone and Joint Surgery* **35**(3), S. 543–558.
- [309] SCHITTKOWSKI, K. (1986): NLPQL: A fortran subroutine solving constrained nonlinear programming problems. *Annals of Operations Research* **5**(2), S. 485–500. DOI: 10.1007/bf02022087.
- [310] SCHWETLICK, H. (1984): On the Choice of Steplength in Path Following Methods. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* **64**(9), S. 391–396. DOI: 10.1002/zamm.19840640903.
- [311] SCOTT, S. H. und D. A. WINTER (1993): Biomechanical model of the human foot: kinematics and kinetics during the stance phase of walking. *Journal of Biomechanics* **26**(9), S. 1091–1104. DOI: 10.1016/S0021-9290(05)80008-9.
- [312] SEDERBERG, T. W., D. C. ANDERSON und R. N. GOLDMAN (1984): Implicit Representation of Parametric Curves and Surfaces. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* **28**(1), S. 72–84. DOI: 10.1016/0734-189X(84)90140-3.

- [313] SEDLACZEK, K. und P. EBERHARD (2007): Augmented Lagrangian Particle Swarm Optimization in Mechanism Design. *Journal of System Design and Dynamics* **1**(3), S. 410–421. DOI: 10.1299/jsdd.1.410.
- [314] SEIPEL, J. E. und P. J. HOLMES (2005): Three-Dimensional Running is Unstable but Easily Stabilized. In: *Climbing and Walking Robots: Proceedings of the 7th International Conference CLAWAR 2004*. M. A. Armada und P. G. de Santos (Hrsg.). Berlin: Springer, S. 585–592. DOI: 10.1007/3-540-29461-9_58.
- [315] SETH, A., M. SHERMAN, J. A. REINBOLT und S. L. DELP (2011): OpenSim: a musculoskeletal modeling and simulation framework for in silico investigations and exchange. *Procedia IUTAM* **2**, S. 212–232. DOI: 10.1016/j.piutam.2011.04.021.
- [316] SHIMMYO, S., T. SATO und K. OHNISHI (2013): Biped Walking Pattern Generation by Using Preview Control Based on Three-Mass Model. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **60**(11), S. 5137–5147. DOI: 10.1109/tie.2012.2221111.
- [317] SHIN, H.-K. und B. K. KIM (2014): Energy-Efficient Gait Planning and Control for Biped Robots Utilizing the Allowable ZMP Region. *IEEE Transactions on Robotics* **30**(4), S. 986–993. DOI: 10.1109/TR0.2014.2305792.
- [318] SHIN, H.-K. und B. K. KIM (2015): Energy-Efficient Gait Planning and Control for Biped Robots Utilizing Vertical Body Motion and Allowable ZMP Region. *IEEE Transactions on Industrial Electronics* **62**(4), S. 2277–2286. DOI: 10.1109/TIE.2014.2360152.
- [319] SHOURIJEH, M. S. und J. MCPHEE (2013): Efficient Hyper-Volumetric Contact Dynamic Modelling of the Foot Within Human Gait Simulations. In: *Proceedings of the ASME 2013 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, S. 423–432. DOI: 10.1115/DETC2013-13446.
- [320] SHOURIJEH, M. S. und J. MCPHEE (2015): Foot–ground contact modeling within human gait simulations: from Kelvin–Voigt to hyper-volumetric models. *Multibody System Dynamics* **35**(4), S. 393–407. DOI: 10.1007/s11044-015-9467-6.
- [321] SINNET, R. W. und A. D. AMES (2009): 2D Bipedal Walking with Knees and Feet: A Hybrid Control Approach. In: *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control held jointly with 28th Chinese Control Conference*, S. 3200–3207. DOI: 10.1109/CDC.2009.5400503.
- [322] SREENATH, K., H.-W. PARK, I. POULAKAKIS und J. W. GRIZZLE (2013): Embedding active force control within the compliant hybrid zero dynamics to achieve stable, fast running on MABEL. *The International Journal of Robotics Research* **32**(3), S. 324–345. DOI: 10.1177/0278364912473344.

- [323] SRINIVASAN, M. (2010): Fifteen observations on the structure of energy-minimizing gaits in many simple biped models. *Journal of The Royal Society Interface* **8**(54), S. 74–98. DOI: 10.1098/rsif.2009.0544.
- [324] SRINIVASAN, S., I. A. RAPTIS und E. R. WESTERVELT (2008): Low-Dimensional Sagittal Plane Model of Normal Human Walking. *Journal of Biomechanical Engineering* **130**(5), S. 051017. DOI: 10.1115/1.2970058.
- [325] SRINIVASAN, S., E. R. WESTERVELT und A. H. HANSEN (2009): A Low-Dimensional Sagittal-Plane Forward-Dynamic Model for Asymmetric Gait and Its Application to Study the Gait of Transtibial Prosthesis Users. *Journal of Biomechanical Engineering* **131**(3), S. 031003. DOI: 10.1115/1.3002757.
- [326] STEWART, D. E. (2000): Rigid-Body Dynamics with Friction and Impact. *SIAM Review* **42**(1), S. 3–39. DOI: 10.1137/s0036144599360110.
- [327] STOIANOVICI, D. und Y. HURMUZLU (1996): A Critical Study of the Applicability of Rigid-Body Collision Theory. *Journal of Applied Mechanics* **63**(2), S. 307–316. DOI: 10.1115/1.2788865.
- [328] STORN, R. und K. PRICE (1997): Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces. *Journal of Global Optimization* **11**(4), S. 341–359. DOI: 10.1023/A:1008202821328.
- [329] STUDER, C. (2009): *Numerics of Unilateral Contacts and Friction: Modeling and Numerical Time Integration in Non-Smooth Dynamics*. Bd. 47. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. Berlin: Springer-Verlag. DOI: 10.1007/978-3-642-01100-9.
- [330] SZALAI, R., G. STÉPÁN und S. J. HOGAN (2006): Continuation of Bifurcations in Periodic Delay-Differential Equations Using Characteristic Matrices. *SIAM Journal on Scientific Computing* **28**(4), S. 1301–1317. DOI: 10.1137/040618709.
- [331] TAGA, G., Y. YAMAGUCHI und H. SHIMIZU (1991): Self-organized control of bipedal locomotion by neural oscillators in unpredictable environment. *Biological cybernetics* **65**(3), S. 147–159. DOI: 10.1007/BF00198086.
- [332] TAGA, G. (1995): A model of the neuro-musculo-skeletal system for human locomotion. *Biological Cybernetics* **73**(2), S. 97–111. DOI: 10.1007/BF00204048.
- [333] TEDRAKE, R., T. W. ZHANG, M.-f. FONG und H. S. SEUNG (2004): Actuating a Simple 3D Passive Dynamic Walker. In: *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Bd. 5, S. 4656–4661. DOI: 10.1109/ROBOT.2004.1302452.
- [334] THOMPSON, C. M. und M. H. RAIBERT (1990): Passive Dynamic Running. In: *Experimental Robotics I: The First International Symposium Montreal, June 19–21, 1989*. V. Hayward und O. Khatib (Hrsg.). Bd. 139. Lecture

- Notes in Control and Information Sciences. Springer. Berlin, S. 74–83. DOI: 10.1007/BFb0042513.
- [335] THOTA, P. und H. DANKOWICZ (2008): TC-HAT (\widehat{TC}): A Novel Toolbox for the Continuation of Periodic Trajectories in Hybrid Dynamical Systems. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* **7**(4), S. 1283–1322. DOI: 10.1137/070703028.
- [336] THUILLOT, B., A. GOSWAMI und B. ESPIAU (1997): Bifurcation and chaos in a simple passive bipedal gait. In: *Proceedings of the 1997 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Bd. 1, S. 792–798. DOI: 10.1109/ROBOT.1997.620131.
- [337] TLALOLINI, D., C. CHEVALLEREAU und Y. Aoustin (2009): Comparison of different gaits with rotation of the feet for a planar biped. *Robotics and Autonomous Systems* **57**(4), S. 371–383. DOI: 10.1016/j.robot.2008.09.008.
- [338] TORRICELLI, D., J. GONZALEZ, M. WECKX, R. JIMÉNEZ-FABIÁN, B. VANDERBORGH, M. SARTORI, S. DOSEN, D. FARINA, D. LEFEBER und J.L. PONS (2016): Human-like compliant locomotion: state of the art of robotic implementations. *Bioinspiration & Biomimetics* **11**(5), S. 051002. DOI: 10.1088/1748-3190/11/5/051002.
- [339] TUCKER, V. A. (1975): The Energetic Cost of Moving About: Walking and running are extremely inefficient forms of locomotion. Much greater efficiency is achieved by birds, fish—and bicyclists. *American Scientist* **63**(4), S. 413–419. URL: <http://www.jstor.org/stable/27845576>.
- [340] *TUM-Zitierleitfaden* (2018). mediaTUM – der Medien- und Publikationsserver der Technischen Universität München. Abgerufen am 28.03.2018. URL: <https://mediatum.ub.tum.de/node?id=1231945>.
- [341] UMBERGER, B. R. (2008): Effects of suppressing arm swing on kinematics, kinetics, and energetics of human walking. *Journal of Biomechanics* **41**(11), S. 2575–2580. DOI: 10.1016/j.jbiomech.2008.05.024.
- [342] VARMA, D. S. M. und S. SUJATHA (2014): Segmental contributions to the ground reaction force in the single support phase of gait. *Mechanical Sciences* **5**(2), S. 37–52. DOI: 10.1115/1.3002757.
- [343] VAUGHAN, C. L. (2003): Theories of bipedal walking: an odyssey. *Journal of Biomechanics* **36**(4), S. 513–523. DOI: 10.1016/S0021-9290(02)00419-0.
- [344] VERDAASDONK, B. W., H. F. J. M. KOOPMAN und F. C. T. VAN DER HELM (2009): Energy efficient walking with central pattern generators: from passive dynamic walking to biologically inspired control. *Biological Cybernetics* **101**(1), S. 49–61. DOI: 10.1007/s00422-009-0316-7.

- [345] VIERORDT, H. (1881): *Das Gehen des Menschen in gesunden und kranken Zuständen, nach selbstregistrierenden Methoden*. Tübingen: Laupp.
- [346] VILLARREAL, D. J. und R. D. GREGG (2016): Unified Phase Variables of Relative Degree Two for Human Locomotion. In: *Proceedings of the 38th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, S. 6262–6267. DOI: 10.1109/embc.2016.7592160.
- [347] VUKOBRATOVIĆ, M. und D. JURČIĆ (1969): Contribution to the Synthesis of Biped Gait. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **BME-16**(1), S. 1–6. DOI: 10.1109/TBME.1969.4502596.
- [348] VUKOBRATOVIĆ, M. und B. BOROVIĆ (2004): ZERO-MOMENT POINT — THIRTY FIVE YEARS OF ITS LIFE. *International Journal of Humanoid Robotics* **01**(01), S. 157–173. DOI: 10.1142/s0219843604000083.
- [349] VUKOBRATOVIĆ, M. und B. BOROVIĆ (2005): NOTE ON THE ARTICLE "ZERO-MOMENT POINT — THIRTY FIVE YEARS OF ITS LIFE". *International Journal of Humanoid Robotics* **02**(02), S. 225–227. DOI: 10.1142/S0219843605000466.
- [350] VUKOBRATOVIĆ, M., B. BOROVIĆ und V. POTKONJAK (2006): ZMP: A REVIEW OF SOME BASIC MISUNDERSTANDINGS. *International Journal of Humanoid Robotics* **03**(02), S. 153–175. DOI: 10.1142/s0219843606000710.
- [351] WÄCHTER, A. und L. T. BIEGLER (2005): Line Search Filter Methods for Nonlinear Programming: Local Convergence. *SIAM Journal on Optimization* **16**(1), S. 32–48. DOI: 10.1137/s1052623403426544.
- [352] WÄCHTER, A. und L. T. BIEGLER (2005): Line Search Filter Methods for Nonlinear Programming: Motivation and Global Convergence. *SIAM Journal on Optimization* **16**(1), S. 1–31. DOI: 10.1137/s1052623403426556.
- [353] WALTZ, R. A., J. L. MORALES, J. NOCEDAL und D. ORBAN (2005): An interior algorithm for nonlinear optimization that combines line search and trust region steps. *Mathematical Programming* **107**(3), S. 391–408. DOI: 10.1007/s10107-004-0560-5.
- [354] WANG, Q., Y. HUANG und L. WANG (2010): Passive dynamic walking with flat feet and ankle compliance. *Robotica* **28**(3), S. 413–425. DOI: 10.1017/S0263574709005736.
- [355] WEBER, W. und E. WEBER (1836): *Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge: Eine anatomisch-physiologische Untersuchung*. Göttingen: Dieterich.
- [356] WEBER, W. und E. WEBER (1837): Ueber die Mechanik der menschlichen Gehwerkzeuge, nebst der Beschreibung eines Versuchs über das Herausfallen des Schenkelkopfs aus der Pfanne im luftverdünnten Raume. *Annalen der Physik und Chemie* **116**(1), S. 1–13. DOI: 10.1002/andp.18371160102.

- [357] WELLMANN, C., C. LILLIE und P. WRIGGERS (2008): A contact detection algorithm for superellipsoids based on the common-normal concept. *Engineering Computations* **25**(5), S. 432–442. DOI: 10.1108/02644400810881374.
- [358] WESTERVELT, E. R., J. W. GRIZZLE und D. E. KODITSCHEK (2003): Hybrid Zero Dynamics of Planar Biped Walkers. *IEEE Transactions on Automatic Control* **48**(1), S. 42–56. DOI: 10.1109/TAC.2002.806653.
- [359] WESTERVELT, E. R., G. BUCHE und J. W. GRIZZLE (2004): Inducing Dynamically Stable Walking in an Underactuated Prototype Planar Biped. In: *Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. Bd. 4, S. 4234–4239. DOI: 10.1109/ROBOT.2004.1308942.
- [360] WESTERVELT, E. R., C. CHEVALLEREAU, J. H. CHOI, B. MORRIS und J. W. GRIZZLE (2007): *Feedback Control of Dynamic Bipedal Robot Locomotion*. Boca Raton: CRC press.
- [361] WHITTINGTON, B. R. und D. G. THELEN (2009): A Simple Mass-Spring Model With Roller Feet Can Induce the Ground Reactions Observed in Human Walking. *Journal of Biomechanical Engineering* **131**(1), S. 011013. DOI: 10.1115/1.3005147.
- [362] WHITTLESEY, S. N., R. E. A. VAN EMMERIK und J. HAMILL (2000): The Swing Phase of Human Walking Is Not a Passive Movement. *Motor Control* **4**(3), S. 273–292. DOI: 10.1123/mcj.4.3.273.
- [363] WINTER, D. A. (2009): *Biomechanics and Motor Control of Human Movement*. 4. Aufl. Hoboken: John Wiley & Sons.
- [364] WISSE, M., A. L. SCHWAB und F. C. T. VAN DER HELM (2004): Passive dynamic walking model with upper body. *Robotica* **22**(6), S. 681–688. DOI: 10.1017/S0263574704000475.
- [365] WISSE, M., A. L. SCHWAB, R. Q. VAN DER LINDE und F. C. T. VAN DER HELM (2005): How to Keep From Falling Forward: Elementary Swing Leg Action for Passive Dynamic Walkers. *IEEE Transactions on Robotics* **21**(3), S. 393–401. DOI: 10.1109/TR0.2004.838030.
- [366] WISSE, M., D. G. E. HOBBELEN, R. J. J. ROTTEVEEL, S. O. ANDERSON und G. J. ZEGLIN (2006): Ankle springs instead of arc-shaped feet for passive dynamic walkers. In: *Proceedings of the 6th IEEE-RAS International Conference on Humanoid Robots*, S. 110–116. DOI: 10.1109/ICHR.2006.321371.
- [367] WISSE, M. und J. VAN FRANKENHUYZEN (2006): Design and Construction of MIKE; a 2-D Autonomous Biped Based on Passive Dynamic Walking. In: *Adaptive Motion of Animals and Machines*. H. Kimura, K. Tsuchiya, A. Ishiguro und H. Witte (Hrsg.). Tokyo: Springer, S. 143–154. DOI: 10.1007/4-431-31381-8_13.

- [368] WITTENBURG, J. (2008): *Dynamics of Multibody Systems*. 2. Aufl. Berlin: Springer. DOI: 10.1007/978-3-540-73914-2.
- [369] WRIGGERS, P. (2006): *Computational Contact Mechanics*. 2. Aufl. Berlin: Springer. DOI: 10.1007/978-3-540-32609-0.
- [370] WULFF, C. und A. SCHEBESCH (2006): Numerical Continuation of Symmetric Periodic Orbits. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* **5**(3), S. 435–475. DOI: 10.1137/050637170.
- [371] *www.Autodiff.org - AD Tools for MATLAB* (2018). Internetseite. Abgerufen am 28.06.2018. URL: <http://www.autodiff.org/?module=Tools&language=MATLAB>.
- [372] XIANG, Y., J. S. ARORA und K. ABDEL-MALEK (2010): Physics-based modeling and simulation of human walking: a review of optimization-based and other approaches. *Structural and Multidisciplinary Optimization* **42**(1), S. 1–23. DOI: 10.1007/s00158-010-0496-8.
- [373] YANG, T., E. R. WESTERVELT, A. SERRANI und J. P. SCHMIEDELER (2009): A framework for the control of stable aperiodic walking in underactuated planar bipeds. *Autonomous Robots* **27**(3), S. 277–290. DOI: 10.1007/s10514-009-9126-y.
- [374] YANG, X.-S. und S. DEB (2009): Cuckoo Search via Lévy Flights. In: *2009 World Congress on Nature Biologically Inspired Computing (NaBIC)*, S. 210–214. DOI: 10.1109/NABIC.2009.5393690.
- [375] YANG, X.-S. (2010): *Engineering Optimization: An Introduction with Metaheuristic Applications*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.
- [376] YANG, X.-S. und S. DEB (2010): Engineering optimisation by cuckoo search. *International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation* **1**(4), S. 330–343. DOI: 10.1504/ijmmno.2010.035430.
- [377] YANG, X.-S. (2011): Metaheuristic Optimization. *Scholarpedia* **6**(8), S. 11472. DOI: 10.4249/scholarpedia.11472.
- [378] YANG, X.-S. (2014): *Nature-Inspired Optimization Algorithms*. 1. Aufl. Elsevier Insights. Amsterdam: Elsevier. DOI: 10.1016/C2013-0-01368-0.
- [379] YU, J., M. TAN, J. CHEN und J. ZHANG (2014): A Survey on CPG-Inspired Control Models and System Implementation. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems* **25**(3), S. 441–456. DOI: 10.1109/TNNLS.2013.2280596.
- [380] ZARRUGH, M. Y., F. N. TODD und H. J. RALSTON (1974): Optimization of energy expenditure during level walking. *European Journal of Applied Physiology and Occupational Physiology* **33**(4), S. 293–306. DOI: 10.1007/BF00430237.
- [381] ZAYTSEV, P., S. J. HASANEINI und A. RUINA (2015): Two steps is enough: No need to plan far ahead for walking balance. In: *Proceedings of the 2015*

- IEEE International Conference on Robotics and Automation*, S. 6295–6300.
DOI: 10.1109/icra.2015.7140083.
- [382] ZEIDLER, E. (2013): *Springer-Handbuch der Mathematik I: Begründet von I.N. Bronstein und K.A. Semendjaew, Weitergeführt von G. Grosche, V. Ziegler und D. Ziegler*. E. Zeidler (Hrsg.). 1. Aufl. Wiesbaden: Springer Spektrum. DOI: 10.1007/978-3-658-00285-5.
- [383] ZELIK, K. E. und P. G. ADAMCZYK (2016): A unified perspective on ankle push-off in human walking. *Journal of Experimental Biology* **219**(23), S. 3676–3683. DOI: 10.1242/jeb.140376.
- [384] ZHAO, H.-H., W.-L. MA, M. B. ZEAGLER und A. D. AMES (2014): Human-Inspired Multi-Contact Locomotion with AMBER2. In: *Proceedings of the 2014 ACM/IEEE International Conference on Cyber-Physical Systems*, S. 199–210. DOI: 10.1109/iccps.2014.6843723.
- [385] ZHAO, H. (2016): *From Bipedal Locomotion to Prosthetic Walking: A Hybrid System and Nonlinear Control Approach*. Dissertation. Georgia Institute of Technology. URL: <https://smartech.gatech.edu/handle/1853/56237>.
- [386] ZHAO, J., X. WU, X. ZANG und J. YAN (2012): Analysis of period doubling bifurcation and chaos mirror of biped passive dynamic robot gait. *Chinese Science Bulletin* **57**(14), S. 1743–1750. DOI: 10.1007/s11434-012-5113-3.
- [387] ZHENG, X. und P. PALFFY-MUHORAY (2007): Distance of closest approach of two arbitrary hard ellipses in two dimensions. *Physical Review E* **75**(6), S. 061709. DOI: 10.1103/PhysRevE.75.061709.
- [388] ZHENG, X., W. IGLESIAS und P. PALFFY-MUHORAY (2009): Distance of closest approach of two arbitrary hard ellipsoids. *Physical Review E* **79**(5), S. 057702. DOI: 10.1103/PhysRevE.79.057702.

Eigene Publikationen

- [389] BAUER, F., U. RÖMER, A. FIDLIN und W. SEEMANN (2016): Optimal elastic coupling in form of one mechanical spring to improve energy efficiency of walking bipedal robots. *Multibody System Dynamics* **38**(3), S. 227–262. DOI: 10.1007/s11044-016-9509-8.
- [390] BAUER, F., U. RÖMER, A. FIDLIN und W. SEEMANN (2016): Optimization of energy efficiency of walking bipedal robots by use of elastic couplings in the form of mechanical springs. *Nonlinear Dynamics* **83**(3), S. 1275–1301. DOI: 10.1007/s11071-015-2402-9.
- [391] RÖMER, U., F. BAUER und A. FIDLIN (2014): Transition from walking to running of a bipedal robot to optimize energy efficiency. In: *Mobile Service Robotics: CLAWAR 2014*. K. Kozłowski, M. O. Tokhi und G. S. Virk (Hrsg.). Singapore: World Scientific Publishing, S. 409–416. DOI: 10.1142/9789814623353_0048.
- [392] RÖMER, U. und A. FIDLIN (2014): Energy-optimized bipedal running of a simple humanoid robot. *PAMM* **14**(1), S. 81–82. DOI: 10.1002/pamm.201410028.
- [393] RÖMER, U., A. FIDLIN und W. SEEMANN (2015): Investigation of optimal bipedal walking gaits subject to different energy-based objective functions. *PAMM* **15**(1), S. 69–70. DOI: 10.1002/pamm.201510025.
- [394] RÖMER, U. J., C. KUHS, M. J. KRAUSE und A. FIDLIN (2016): Simultaneous optimization of gait and design parameters for bipedal robots. In: *2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, S. 1374–1381. DOI: 10.1109/icra.2016.7487271.
- [395] RÖMER, U. J. (2018): *Roll-over shapes for 9 human candidates with and without shoes: measurement data, evaluation scripts and results*. Repository KITopen. DOI: 10.5445/IR/1000085283.
- [396] RÖMER, U. J., A. FIDLIN und W. SEEMANN (2018): Explicit analytical solutions for two-dimensional contact detection problems between almost arbitrary geometries and straight or circular counterparts. *Mechanism and Machine Theory* **128**, S. 205–224. DOI: 10.1016/j.mechmachtheory.2018.05.018.

Betreute Abschlussarbeiten

- [397] ARAMENDIZ FUENTES, J. A. (2016): *Simulations of periodic gaits of a bipedal robot with geometry deviations in its control model*. (unveröffentlicht). Masterarbeit. Karlsruher Institut für Technologie.
- [398] BRAUN, S. (2014): *Entwicklung und Aufbau eines Demonstrators für einen zweibeinigen Roboter*. (unveröffentlicht). Bachelorarbeit. Karlsruher Institut für Technologie.
- [399] DEBERTIN, D. (2017): *Entwicklung und Evaluierung verschiedener Algorithmen zur Kniemarkerrekonstruktion*. (unveröffentlicht). Bachelorarbeit. Karlsruher Institut für Technologie.
- [400] FETZER, T. (2015): *Implementierung von NURBS zur Parametrierung der Referenzbewegung bei der Regelung eines zweibeinigen Roboters*. (unveröffentlicht). Bachelorarbeit. Karlsruher Institut für Technologie.
- [401] JOSHI, S. V. (2015): *Investigation of the Effects of Series Elastic Actuators on Bipedal Walking Robots*. (unveröffentlicht). Bachelorarbeit. Karlsruher Institut für Technologie.
- [402] KÖNIG, P. (2014): *Implementierung und Simulation eines nichtlinearen Regelungskonzeptes für einen rennenden bipedalen Roboter*. (unveröffentlicht). Masterarbeit. Karlsruher Institut für Technologie.
- [403] KREBS, F. (2016): *Simulation und Optimierung eines zweibeinigen Roboters für eine Vielzahl an schiefen ebenen Untergründen*. (unveröffentlicht). Bachelorarbeit. Karlsruher Institut für Technologie.
- [404] KUHS, C. (2015): *Numerische Optimierung der Gehbewegung eines zweibeinigen Roboters*. (unveröffentlicht). Masterarbeit. Karlsruher Institut für Technologie.
- [405] LÜDKE, S. (2015): *Experimentelle und rechnerische Untersuchung der Grenzyklen beim Gehen eines einfachen Roboters*. (unveröffentlicht). Masterarbeit. Karlsruher Institut für Technologie.
- [406] MARAHRENS, S. (2014): *Erweiterung des Regelungskonzeptes für einen zweibeinigen Roboter*. (unveröffentlicht). Bachelorarbeit. Karlsruher Institut für Technologie.

- [407] PIHUAWE, C. (2013): *Implementierung eines semi-analytischen Berechnungsmodells für exzentrische Magnetgetriebe*. (unveröffentlicht). Bachelorarbeit. Karlsruher Institut für Technologie.
- [408] WACHTER, J. (2014): *Identifikation der Modellparameter eines zweibeinigen Roboters*. (unveröffentlicht). Bachelorarbeit. Karlsruher Institut für Technologie.
- [409] WITT, J.-H. (2016): *Experimentelle Identifikation der Modellparameter eines zweibeinigen Roboters*. (unveröffentlicht). Bachelorarbeit. Karlsruher Institut für Technologie.
- [410] ZHANG, Y. (2018): *Experimentelle Parameteridentifikation und Echtzeit-Momentenregelung für einen Prototyp eines zweibeinigen Läufers mit seriell-elastischen Aktoren*. (unveröffentlicht). Masterarbeit. Karlsruher Institut für Technologie.

Die Energieeffizienz beim Gehen ist wesentlich bei der Entwicklung zweibeiniger Roboter. Sie wird sowohl von den Modellparametern als auch von der Regelung beeinflusst. Für Mehrkörpermodelle können durch eine Regelung auf Basis der hybriden Nulldynamik stabile Gehbewegungen mit hoher Energieeffizienz erzeugt werden, die die natürliche Dynamik des Systems ausnutzen.

In dieser Arbeit wird untersucht, welchen Einfluss die Fußgeometrie auf die Effizienz hat und wie diese optimiert werden kann. Es wird ein Modell für einen konvexen, starren Fuß entwickelt, dessen Kontaktpunkt mit dem Boden explizit berechnet werden kann. Dabei wird von einem Polygon ausgegangen, dessen Kanten abgerundet werden, damit sich eine kontinuierliche Abrollbewegung ergibt. Für einen Roboter mit beliebiger Fußgeometrie wird eine Regelung auf Basis der hybriden Nulldynamik entworfen. Mittels numerischer Optimierung werden optimale Gehbewegungen erzeugt und die Fußgeometrie optimiert. Außerdem wird eine numerische Fortsetzungsmethode für nichtglatte Probleme entwickelt.

Durch die Optimierung der Fußgeometrie kann der durchschnittliche Energieverbrauch des betrachteten Roboters im Geschwindigkeitsbereich 1 – 8 km/h gegenüber einem Modell mit Punktfüßen um 81% reduziert werden.

