

**Claudio Findeisen**

**CHARAKTERISIERUNG UND MODELLIERUNG  
VON INSTABILEN METAMATERIALIEN**

SCHRIFTENREIHE DES INSTITUTS  
FÜR ANGEWANDTE MATERIALIEN

BAND 76



Scientific  
Publishing



Claudio Findeisen

**Charakterisierung und Modellierung  
von instabilen Metamaterialien**

**Schriftenreihe  
des Instituts für Angewandte Materialien  
*Band 76***

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)  
Institut für Angewandte Materialien (IAM)

Eine Übersicht aller bisher in dieser Schriftenreihe erschienenen Bände  
finden Sie am Ende des Buches.

# Charakterisierung und Modellierung von instabilen Metamaterialien

von  
Claudio Findeisen

Dissertation, Karlsruher Institut für Technologie  
KIT-Fakultät für Maschinenbau

Tag der mündlichen Prüfung: 10. Juli 2018

Referenten: Prof. Dr. rer. nat. Peter Gumbsch  
PD Dr.-Ing. habil. Jörg Hohe  
Prof. Dr.-Ing. habil. Samuel Forest

#### Impressum



Karlsruher Institut für Technologie (KIT)  
KIT Scientific Publishing  
Straße am Forum 2  
D-76131 Karlsruhe

KIT Scientific Publishing is a registered trademark  
of Karlsruhe Institute of Technology.  
Reprint using the book cover is not allowed.

[www.ksp.kit.edu](http://www.ksp.kit.edu)



*This document – excluding the cover, pictures and graphs – is licensed  
under a Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International License  
(CC BY-SA 4.0): <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.en>*



*The cover page is licensed under a Creative Commons  
Attribution-No Derivatives 4.0 International License (CC BY-ND 4.0):  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/deed.en>*

Print on Demand 2019 – Gedruckt auf FSC-zertifiziertem Papier

ISSN 2192-9963

ISBN 978-3-7315-0869-4

DOI 10.5445/KSP/1000087932





# **Charakterisierung und Modellierung von instabilen Metamaterialien**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER INGENIEURWISSENSCHAFTEN (Dr.-Ing.)

von der KIT-Fakultät für Maschinenbau des  
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

angenommene

**DISSERTATION**

von

**M.Sc. Claudio Findeisen**

geb. in Berlin

Tag der mündlichen Prüfung: 10. Juli 2018  
Hauptreferent: Prof. Dr. rer. nat. Peter Gumbsch  
Korreferenten: PD Dr.-Ing. habil. Jörg Hohe  
Prof. Dr.-Ing. habil. Samuel Forest



# Danksagung

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Angewandte Materialien - Computational Materials Science des Karlsruher Instituts für Technologie sowie am Fraunhofer Institut für Werkstoffmechanik in Freiburg.

Zunächst möchte ich der Hector Fellow Academy für die Finanzierung des Kooperationsprojektes „Mechanische Metamaterialien“ danken. Herrn Prof. Peter Gumbsch und Herrn Prof. Martin Wegener danke ich für die Initiierung dieses Projektes, ihnen sowie Herrn Dr. Muamer Kadic und Herrn Tobias Frenzel sei zudem für die gute Zusammenarbeit im Rahmen dieses Projektes und die fachlichen Diskussionen gedankt.

Herrn Prof. Peter Gumbsch und Herrn Dr. Jörg Hohe danke ich für die Betreuung dieser Arbeit sowie das von ihnen entgegengebrachte Vertrauen und Interesse in meine Arbeit. Insbesondere möchte ich mich auch bei Ihnen, sowie bei unseren Projektpartnern, für die Zusammenarbeit und Geduld beim Anfertigen gemeinsamen Publikationen bedanken.

Weiterhin bedanke ich mich bei allen Kollegen/innen die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben. Hervorzuheben ist hierbei insbesondere der Kontakt zu Herrn Prof. Dr. Chris Eberl, Herrn Dr. Matthew Berwind und Herrn Felix Schiebel, mit denen ich in der Anfangszeit viele anregende Diskussionen geführt habe. Mein Dank gilt außerdem Frau Zalikha Murni Abdul Hamid für die angenehme Arbeitsatmosphäre in unserem gemeinsamen Büro.

Bedanken möchte ich mich auch für die vielen fachlichen Diskussionen auf Konferenzen. Ohne diesen fachlichen Austausch wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen. Hervorgehoben sei hierbei insbesondere die Diskussionen mit Herrn Dr. Geralf Hütter und Prof. Samuel Forest. Letzterem möchte ich auch für den Austausch während meines Aufenthaltes in Paris danken, durch welchen wichtige Grundlagen für diese Dissertation gelegt wurden.

Mein ganz persönlicher Dank geht schlussendlich an meine Familie und meine Freunde die mich in allen Situationen auf verschiedenste Art und Weise unterstützt haben. Insbesondere meiner Freundin Susanne gebührt Dank für ihr Verständnis und die moralische Unterstützung.

Freiburg im Breisgau, 20. April 2018

Claudio Findeisen

# Kurzfassung

Metamaterialien, aus künstlich hergestellten, gezielt gestalteten Strukturelementen aufgebaute Materialien, zeigen Effektiveigenschaften, die in erster Linie durch die Struktur getrieben werden und weniger von den Materialeigenschaften ihrer Konstituenten abhängen. In dieser Arbeit wird, durch die Entwicklung und Analyse eines instabilen Metamaterials, demonstriert welches Potential sich durch die gezielte Ausnutzung von strukturellen Instabilitäten ergibt.

Ausgelöst durch die Bistabilität der Basiszelle ist es möglich Effektiveigenschaften innerhalb des gleichen Materials durch Aufprägen einer Belastungsvorgeschichte zu programmieren. Weiterhin erfolgt durch Verlust der Stabilität eine schlagartige Dehnungslokalisierung, wodurch eine Separation der Zeitskalen zwischen äußerer Belastung und viskoser Dämpfung erzielt werden kann. Durch diesen Mechanismus zeigt das hier entwickelte Metamaterial eine effektive geschwindigkeitsunabhängige (nicht viskose) sowie strukturell reversible (nicht plastische) Energiedissipation. Diese ungewöhnlichen Eigenschaften, welche in erster Linie durch die Strukturinstabilität getrieben sind, grenzen diese Metamaterialien klar von gewöhnlichen bisher bekannten Materialien ab.

Mit Hilfe einer Kombination von numerischen und analytischen Modellen werden diese Eigenschaften über die verschiedenen Längenskalen - angefangen bei einem einzelnen Beulelement, über eine einzelne periodische Basiszelle und endlichen Zellverbänden bis hin zum Kontinuumsgrenzfall - untersucht. Hierdurch wird nicht nur ein tiefgreifendes Verständnis der zugrundeliegenden Mechanismen und den daraus resultierenden Größeneffekten erreicht, sondern auch die gezielte Gestaltung solcher Materialien auf den verschiedenen relevanten Ebenen ermöglicht.

Basierend auf diesen Erkenntnissen wird weiterhin untersucht in wie weit sich diese Eigenschaften und die damit verbundenen Größeneffekte über eine

heuristischer Modellierung bzw. eine systematischer Homogenisierung mittels einer verallgemeinerten Kontinuumstheorie modellieren lassen.

# Abstract

Metamaterials are composed of structural building blocks and derive their effective properties mainly from the structure, rather than from their constituent materials they are build from. By designing and analysing a mechanical unstable metamaterial, the potentials given by structural instabilities are investigated.

The bistability of the basic building block enables the design of so called programmable materials whose properties can be changed by applying a suitable loading history. Furthermore it is demonstrated, that the sudden strain localization enables a separation of the timescales between external loading and viscous dissipation. This is the reason for the exotic effective energy dissipation properties of such materials which show neither viscous nor plastic characteristics and clearly separates this metamaterial from usual materials.

The driving mechanism of these effective properties are investigated by a combination of analytical, semi-analytical, and numerical models which focus on the different relevant lengthscales. Starting from the bottom these are the single buckling element, a periodic unstable cell, finite size combinations of unstable cells and finally the continuum limit. This not only provides insight into the micromechanics and the resulting size effects of such metamaterials, but also makes them accessible on the different relevant length scales.

Finally it is intensively discussed how one can describe all these properties and the corresponding size effects within an extended continuum theory. Here two approaches, namely a heuristic modeling and a systematic homogenization are considered.



# Eigene Veröffentlichungen

Nachfolgend erfolgt eine Auflistung von Veröffentlichungen in denen ich als Mitautor beteiligt war sowie von mir gehaltene Vorträgen auf öffentlich zugänglichen wissenschaftlichen Konferenzen und Seminaren. Unterstrichende Titel kennzeichnen Veröffentlichungen und Vorträge, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit entstanden sind und somit Inhalte aus selbiger enthalten.

## Veröffentlichungen

- Findesen, C., Hohe, J., Kadic, M. und Gumbsch, P. „Characteristics of mechanical metamaterials based on buckling elements“, *J. Mech. Phys. Solids* 102 (2017), 151–164.
- Frenzel, T., Findeisen, C., Kadic, M, Gumbsch, P. und Wegener, M., „Tailored buckling micro-lattices as reusable light-weight shock absorbers“, *Adv. Mater.* 28 (2016), 5865–5870.
- Hohe, J., Fliegner, S., Findeisen, C, Reiser, J., Widak, V. und Rieth, M., „Numerical exploration into the potential of tungsten reinforced CuCrZr Matrix composites“, *J. Nucl. Mater.* 470, (2016), 13–29.
- Findeisen, C. und Wackerfuß, J., „A general approximation of the exponential Cauchy-Born hypothesis to model arbitrarily shaped shell-like nanostructures within continuum mechanics“, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 105 (2016),747-780.
- Findeisen, C. und Wackerfuß, J., „A modified approximation of the exponential Cauchy-Born rule for arbitrary shell-like nanostructures, *Proc. Appl. Math. Mech.*, 14, (2014), 565–566.

## Vorträge

- Findeisen, C., Forest, S., Hohe, J. und Gumbsch, P., „Continuum modelling of size effects in unstable mechanical metamaterials“, European Mechanics of Materials Conference (2018), Nantes Frankreich.
- Findeisen, C., Forest, S., Hohe, J., und Gumbsch, P., „Homogenization of metamaterials: Application and limits of a generalized homogenization approach“, 88th Annual Meeting of GAMM (2017), Weimar Deutschland.
- Findeisen, C., Kadic, M., Hohe, J., und Gumbsch, P., „Unstable mechanical metamaterials: principle, design, and characterization“, Seminar Vortrag MINES Paris Tech CNRS (2017), Evry Frankreich.
- Findeisen C., Hohe, J., und Gumbsch, P., „Towards modelling of mechanical metamaterials: a general homogenization scheme for higher order continua“, European Mechanics of Materials Conference (2016), Brüssel Belgien.
- Findeisen, C., Hohe, J., Gumbsch, P., Kadic, M., Frenzel, T. und Wegener, M., „Micro-mechanical instabilities as a mechanism for energy dissipation in materials“, 9th GAMM Seminar on Multiscale Material Modelling (MMM) on Real-Data Based Numerical Models (2015), Kaiserslautern Deutschland.
- Findeisen, C. und Wackerfuß, J., „A modified approximation of the exponential Cauchy-Born rule for arbitrary shell-like nanostructures“, GAMM Annual Meeting (2014), Erlangen-Nürnberg Deutschland.

# Inhaltsverzeichnis

<b>Danksagung</b> . . . . .	<b>i</b>
<b>Kurzfassung</b> . . . . .	<b>iii</b>
<b>Abstract</b> . . . . .	<b>v</b>
<b>Eigene Veröffentlichungen</b> . . . . .	<b>vii</b>
<b>1 Einleitung</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2 Strukturentwicklung</b> . . . . .	<b>7</b>
<b>3 Modellierung und Charakterisierung der Mesoebene</b> . . . . .	<b>11</b>
3.1 Vereinfachtes Federmodell . . . . .	11
3.2 Basiszellenmodell . . . . .	13
3.3 Ergebnisse . . . . .	17
<b>4 Diskrete Modellierung und Charakterisierung der Effektiveigenschaften</b> . . . . .	<b>25</b>
4.1 Eindimensionales Mehrzellenmodell . . . . .	26
4.2 Dreidimensionales Finite Elemente Modell . . . . .	30
4.3 Ergebnisse . . . . .	31
4.3.1 Eindimensionale homogene Strukturen . . . . .	31
4.3.2 Eindimensionale inhomogene Strukturen . . . . .	34
4.3.3 Dreidimensionale Strukturen . . . . .	42
<b>5 Diskussion</b> . . . . .	<b>45</b>
5.1 Methodik . . . . .	45
5.2 Größeneffekte . . . . .	51

5.3	Dissipationsmechanismus im Vergleich . . . . .	55
5.4	Programmierbarkeit . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Kontinuumsmodellierung mittels erweiterter Modelle . .</b>	<b>63</b>
6.1	Bilanzgleichungen für höhere Kontinua . . . . .	64
6.2	Sonderfall eindimensionales Gradientenmaterial . . . . .	71
6.2.1	Analytische Abschätzung der Entfestigungslänge . .	74
6.2.2	Numerische Lösung und begleitende Stabilitätsanalyse . . . . .	78
6.2.3	Numerische Ergebnisse und Vergleich mit dem diskreten Modell . . . . .	81
6.2.4	Diskussion . . . . .	84
6.3	Homogenisierung für das dreidimensionale mikromorphe Kontinuum . . . . .	89
6.3.1	Verallgemeinerte Äquivalenzbeziehungen . . . . .	91
6.3.2	Realisierungsmöglichkeiten . . . . .	93
6.3.3	Diskussion . . . . .	96
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick . . . . .</b>	<b>99</b>
<b>A</b>	<b>Anhang . . . . .</b>	<b>105</b>
A.1	Herleitung der Maxwell-Regel . . . . .	105
<b>Literatur</b>	. . . . .	<b>108</b>

# 1 Einleitung

Als Metamaterialien werden aus funktionellen Bausteinen (Basiszellen) künstlich hergestellte Materialien bezeichnet, deren Eigenschaften in erster Linie durch die Struktur getrieben sind und weniger von den Eigenschaften der Konstituenten, aus denen sie aufgebaut sind, abhängen. Die gezielte Gestaltung der elementaren Bausteine und deren Zusammensetzung zu homogenen oder inhomogenen Materialien erfolgt dabei mit dem Ziel ungewöhnliche, außerordentliche oder extreme Effekteigenschaften zu erzielen die sich grundlegend von den Eigenschaften der Konstituenten unterscheiden.

Das Konzept von Metamaterialien geht auf die Arbeiten von John Pendry und David Smith zurück, die sich als erste mit der gezielten Gestaltung und Realisierung von Mikrostrukturen mit ungewöhnlichen Eigenschaften bei der Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen beschäftigten. Die bekanntesten Beispiele hierfür sind negative Brechungsindizes (Veselago 1968; Pendry 2000; Smith u. a. 2000; Shelby u. a. 2001), das Tarnen (Cloaking) über materiell realisierte Koordinatentransformationen (Pendry 2006; Schurig u. a. 2006) und Bandlücken in der Wellendispersion (Pendry 1994; Pendry u. a. 1996). Durch eine Übertragung dieses Konzepts auf andere Bereiche der Physik, konnten eine Reihe weiterer, teilweise analoger, ungewöhnlicher Eigenschaften realisiert werden. Beispiele hierfür sind akustische (Zhang u. a. 2011) und thermische Tarnkappen (Schittny u. a. 2013), Materialien mit effektiver negativer (dynamischer) Massendichte und negativem Kompressionsmodul zur Erzeugung eines negativen Brechungsindex in akustischen Metamaterialien (Ding u. a. 2007; Huang u. a. 2009; Kadic u. a. 2013; Christensen u. a. 2015), auxetische Metamaterialien mit isotroper negativer Querkontraktion nah an dem theoretischen Limit  $\nu \rightarrow -1$  (Milton 2013; Bückmann u. a. 2014) und Pentamode Metamaterialien mit verschwindend geringer Schubsteifigkeit (bzw. einem Grenzwert  $\nu \rightarrow 0.5$ ) (Milton und Cherkhev 1995; Kadic u. a. 2014; Christensen u. a. 2015) sowie Bandlücken bei der Ausbreitung elastischer Wellen (Liu u. a. 2000; Hus-

sein u. a. 2014). Eine ausführliche Übersicht sowie weitere Beispiele sind in Milton 2002; Kadic u. a. 2013 und Christensen u. a. 2015 zu finden.

All diese Ansätze zielen allerdings auf die Generierung außergewöhnlicher linearer Effektiv-eigenschaften ab, wobei hierfür ebenfalls nur das geometrisch und materiell lineare Verhalten der zugrunde liegenden Mesostruktur ausgenutzt wird. Eine Erweiterung dieses Konzeptes auf den nichtlinearen Bereich unter Ausnutzung von materiellen und geometrischen Nichtlinearitäten hingegen, erfolgte erst in den vergangenen Jahren. Obwohl der Begriff Metamaterialien in der Mechanik sowie in den Ingenieurwissenschaften bis vor kurzem noch weitestgehend unbekannt war, ist die Idee Materialien durch gezielte Strukturgestaltung zu optimieren auch in diesen Bereichen nicht neu (vgl. z.B. Ashby u. a. 2000; Gibson und Ashby 1997; Deshpande u. a. 2001a; Deshpande u. a. 2001b und Evans u. a. 2001). Allerdings liegt der Fokus hierbei oftmals auf der Optimierung von gängigen Eigenschaften wie Steifigkeit (T.A. Schaedler u. a. 2011; Berger u. a. 2017), Energiedissipation (Meza u. a. 2014; Liu und Wang 2015; Salari-Sharif u. a. 2014) oder Wärmeübertragung (Evans u. a. 2001), wohingegen der entscheidende Aspekt der Metamaterialien, nämlich die Generierung von neuartigen und ungewöhnlichen Eigenschaften, die sich insbesondere qualitativ von denen ihrer Konstituenten unterscheiden, erst kürzlich in den Fokus geraten ist.

Um zu dieser Entwicklung beizutragen, wird in dieser Arbeit ein nichtlineares instabiles mechanisches Metamaterial entwickelt und analysiert. Die Effektiv-eigenschaften dieses Metamaterials, werden in erster Linie durch eine mechanische Instabilität, dem kontrollierten Beulen von einigen Strukturelementen getrieben. Unter Belastung erfolgt auf Grund der Instabilität eine schlagartige Dehnungslokalisation. Ferner ist die Basiszelle durch eine Bistabilität charakterisiert, wodurch die Basiszelle zwei stabile Zustände für die gleiche äußere Last aufweisen kann. Die Kombination dieser beiden Eigenschaften führen zu einer Reihe ungewöhnlicher Effektiv-eigenschaften. Auf der einen Seite erfolgt auf Grund der schlagartigen Dehnungslokalisation eine strukturell getriebene Energiedissipation, welche sich grundlegend von den üblichen Dissipationsmechanismen (Viskoelastizität, Plastizität) von Metallen und Polymeren unterscheidet. Weiterhin kann die Bistabilität der Basiszelle genutzt werden, um so genannte programmierbare Werkstoffeigenschaften, also Eigenschaften die sich im Material nach der Herstellung ändern lassen, zu realisieren. Um zu einem tiefgreifenden Verständnis dieser Mechanismen beizutragen, erfolgt in

dieser Arbeit die systematische Analyse des hier entwickelten instabilen Metamaterials über die verschiedenen relevanten Skalen hinweg. Hierfür kommen sowohl stark vereinfachte analytische und numerische Modelle sowie aufwändigere numerische Modelle basierend auf der Methode der Finiten Elemente zum Einsatz. Insbesondere mit den vereinfachten Modellen können auf systematische Art und Weise die Möglichkeiten bistabiler Strukturen sowie deren zugrundeliegenden Mechanismen studiert werden. Die aufwändigeren Modelle kommen dann zur beispielhaften Bestätigung dieser Ergebnisse und zur Analyse weiterer Besonderheiten der spezifischen Mesostruktur zum Einsatz. Obwohl die hier durchgeführten Analysen zum Großteil auf Basis der in dieser Arbeit entwickelten instabilen Struktur durchgeführt werden, sind viele der Erkenntnisse qualitativ auch auf andere instabile Mesostrukturen übertragbar. Dies folgt vor allem daraus, dass die hier untersuchten Effekteigenschaften auf der speziellen Interaktion zwischen bistabilen Basiszellen beruht und diese Gesetzmäßigkeiten analog auch für andere bistabile Basiszellen gelten.

Konzeptuell ist der Ansatz Instabilitäten in Materialien auszunutzen nicht neu. So wurde bereits 2001 von Rod Lakes festgestellt, dass instabile Einschlüsse auf molekularer Ebene zu außergewöhnlichen Dämpfungseigenschaften führen (Lakes u. a. 2001; Wang und Lakes 2004). Ebenso basieren auch die außergewöhnlichen Eigenschaften von Formgedächtnislegierungen und so genannten superelastischen Materialien auf Instabilitäten wodurch diese Materialien unter Belastung eine (unter Entlastung oder Erwärmung) reversible Phasentransformation von Austenit zu Martensit erfahren (DesRoches u. a. 2004; Shaw und Kyriakides 1997). Auch die hier untersuchten instabilen Metamaterialien erfahren eine strukturelle Zustandstransformation, wodurch auch die realisierbaren Effekteigenschaften eng verwandt sind. Der Unterschied zu klassischen Formgedächtnislegierungen besteht allerdings darin, dass die Phasen- bzw. Zustandstransformation nicht auf der atomistischen Ebene, sondern auf der Ebene der Mesostruktur erfolgt, wodurch der künstlichen Herstellung solcher Materialien mittels neuartiger 3-D Drucktechniken (Truby und Lewis 2016) kaum Grenzen gesetzt sind (Frenzel u. a. 2016).

Ausgelöst durch die neusten Fortschritte in der 3-D Drucktechnik wurde die gezielte Ausnutzung von Instabilitäten in so hergestellten Materialien erst in den vergangenen Jahren fokussiert, wobei die im Folgenden zitierten Arbeiten größtenteils während der Entstehung der vorliegenden Arbeit veröffentlicht wurden. Die außergewöhnlichen Dissipationseigenschaften von instabilen

Metamaterialien im Vergleich zu plastischem Materialverhalten wurde unter anderem in Correa u. a. 2015; Shan u. a. 2015; Rafsanjani und Pasini 2016 und Frenzel u. a. 2016 behandelt. Der in dieser Arbeit zusätzlich diskutierte Zeitskalenaspekt der Energiedissipation hingegen wurde in der Literatur im Zusammenhang mit Metamaterialien bislang ausschließlich in den aus dieser Dissertation erfolgten Veröffentlichungen (Frenzel u. a. 2016; Findeisen u. a. 2017) behandelt. Der Begriff der programmierbaren Werkstoffeigenschaften wird in der Literatur nicht einheitlich verwendet, wobei nach drei verschiedenen Aspekten der Programmierung unterschieden werden kann: 1. Materialien die, in Abhängigkeit der Belastungsgeschichte, unter vollständiger Entlastung in einem deformierten Zustand verweilen, der andere Eigenschaften als der Ursprungszustand aufweist (Meaud und Che 2017; Frenzel u. a. 2016; Findeisen u. a. 2017). Damit solche Materialien unter Entlastung im deformierten Zustand verweilen sind zu deren Realisierung zwingend bistabile Basiszellen nötig, die eine negative kritische Kraft aufweisen. 2. Materialien die in Abhängigkeit der Belastungsgeschichte oder anderer äußerer Einflüsse für die gleiche effektive Deformation (oder Deformationskomponente) unterschiedliche Eigenschaften aufweisen (Silverberg u. a. 2014; Florijn u. a. 2014; Findeisen u. a. 2017). Und 3. Die Beeinflussung von linearisierten (lokalen) Eigenschaften in Abhängigkeit von der Deformation. Wobei letzteres in erster Linie interessante nichtlineare Eigenschaften darstellen und hierfür nicht zwingend eine Bistabilität benötigt wird. Beispiele hierfür sind die Programmierung der inkrementellen Querkontraktion (Yasuda und Yang 2015; Chen u. a. 2017) oder die Programmierung der Wellendispersion (Bertoldi u. a. 2008; Bertoldi und Boyce 2008; Jang u. a. 2009; Shim u. a. 2015; Meaud und Che 2017).

Neben der eigentlichen Charakterisierung der Effektiveneigenschaften wird in dieser Arbeit ein weiterer, oftmals vernachlässigter Aspekt behandelt: Material oder Struktur? Bei der Charakterisierung von dynamischen Metamaterialien mittels der Dispersionsrelation wird der Materialaspekt oftmals unter der Voraussetzung einer Skalenseparation

$$\lambda \gg \ell_c \tag{1.1}$$

gerechtfertigt. Hierbei ist  $\lambda$  die Wellenlänge der Deformation und  $\ell$  eine für die Mesostruktur charakteristische Länge, wie zum Beispiel die Periodizitätslänge oder die Größe der Basiszelle (Kadic u. a. 2013; Bückmann 2015). Diese Bedingung ist ebenfalls eine der Grundvoraussetzung für die Anwendbarkeit

der klassischen Homogenisierung. Im Fall von instabilen Mesostrukturen lokalisiert die Deformation aber selbst im quasi-statischen Grenzfall immer in einem durch die Struktur vorgeschriebenen Bereich mit  $\lambda \approx \ell_c$ , wodurch obige Einschränkung automatisch verletzt wird und eine Homogenisierung sowie eine Effektivbeschreibung im Rahmen der klassischen Kontinuumsmechanik nicht mehr möglich ist. Für die Homogenisierung lässt sich die Forderung nach einer strikten Skalenseparation allerdings durch die Einführung höherer Deformationsmaße in gewissen Grenzen lockern (vgl. z.B. Forest und Trinh 2011). Dies wirft zwei grundlegende Fragen auf: Ist eine Beschreibung der hier präsentierten Struktur im Rahmen einer erweiterten Kontinuumsmechanik möglich und wenn ja, kann eine solche Beschreibung systematisch aus einer Homogenisierung der Mesostruktur abgeleitet werden? Begleitend zu der Charakterisierung in Kapitel 3, 4 und 5 wird in dieser Arbeit daher vorerst genau untersucht woran eine Beschreibung und Homogenisierung im Rahmen der klassischen Kontinuumsmechanik scheitert. Basierend darauf wird dann in Kapitel 6 analysiert in wie weit eine Beschreibung und Homogenisierung mittels einer erweiterten Kontinuumstheorie möglich ist. Die übergeordnete Fragestellung ist hierbei ob eine materielle Betrachtung im Sinne der Kontinuumsmechanik möglich bzw. sinnvoll ist oder ob eine strukturelle Betrachtung unter Berücksichtigung aller Inhomogenitäten unumgänglich ist. Abgesehen davon, dass in der Literatur die Umsetzung des Materialaspektes oftmals schon an einer kompatiblen dreidimensionalen Anordnung der untersuchten „Metamaterialien“ scheitert (Lv u. a. 2014; Shan u. a. 2015; Yasuda und Yang 2015; Coulais u. a. 2017), wird die systematische Materialbeschreibung im Rahmen der Kontinuumsmechanik, insbesondere für instabile Metamaterialien, in der Literatur bislang gar nicht behandelt.

Theoretische Grundlagen zu Instabilitäten und Phasentransformationen werden in dieser Arbeit zwar nicht zwingend vorausgesetzt, sind aber teilweise in der Literatur ausführlicher behandelt. In Le 2011 ist z.B. eine ausgiebige Diskussion der Phasentransformation in (kontinuierlichen) Materialien mit nicht konvexem Potential zu finden. Die Phasentransformation in diskreten Strukturen mit nicht konvexem Potential, wird, unter Vernachlässigung dynamischer Effekte, ausgiebig in Truskinovsky und Zanzotto 1996; Puglisi und Truskinovsky 2000; Puglisi und Truskinovsky 2002 und Truskinovsky und Vainchtein 2004 behandelt. Spezieller Fokus auf dynamische Aspekte der Phasentransformation ist hingegen in Balk u. a. 2001a und Balk u. a. 2001b gesetzt. Die Relevanz von höheren Kontinuumstheorien zur Modellierung von Phasentrans-

formationen wird unter anderem in Triantafyllidis und Bardenhagen 1993 und Truskinovsky und Vainchtein 2004 behandelt.

Um eventuellen Irritationen vorzubeugen sollen abschließend noch einige Begriffe und Notationen eingeführt werden. Die Begriffe Mikro-, Meso- und Makroebene werden in dieser Arbeit wie folgt verwendet: Als Mikroebene wird die Ebene des konstitutiven Materials bezeichnet, also die Ebene mit der für das Material, aus dem die Struktur des Metamaterials aufgebaut ist, relevante Längenskala. Mit Mesoebene wird die nächst höhere Betrachtungsebene bezeichnet in der einzelne Strukturelemente oder einzelne Basiszellen des Metamaterials betrachtet werden. Als Makroebene wird letztendlich die Betrachtungsebene von ganzen Zellverbänden, bis hin zum Kontinuums Grenzfalle bezeichnet. Von diesen Begrifflichkeiten wird allerdings in Kapitel 6 geringfügig abgewichen. Dort wird, analog zu der in der Literatur üblichen Bezeichnung,  $\chi$  ebenfalls als Mikrodeformation bezeichnet, obwohl sie in diesem Fall dazu dient die Mesodeformation zu beschreiben. Dies erfolgt vor allem auch vor dem Hintergrund, dass hierdurch eine klare Trennung zwischen der zu beschreibenden Mesodeformation und der zur Beschreibung verwendeten Mikrodeformation  $\chi$  möglich ist.

Die zur Darstellung von Tensoren verwendete Notation richtet sich in erster Linie nach der Verständlichkeit und Übersichtlichkeit. So wird individuell entweder eine rein symbolische oder eine reine Indexnotation verwendet. Im Falle einer Indexnotation wird die Art des Tensors über die Indizes dargestellt, wobei groß-gedruckte Indizes  $I, J, K, \dots$  für Komponenten in der Referenzkonfiguration  $\Omega_0$  und klein-gedruckte Indizes  $i, j, k, \dots$  entsprechend für Komponenten in der Momentankonfiguration  $\Omega$  verwendet werden. In jedem Fall wird von einem orthonormalen Koordinatensystem ausgegangen, so dass nicht weiter zwischen ko- und kontravarianten Darstellungen unterschieden werden muss. Tensoren höherer Ordnung, die von der Momentan- auf die Referenzkonfiguration oder andersherum abbilden werden entsprechend über gemischte Indizes dargestellt. Für Ortsableitungen bzgl. Koordinaten der Referenzkonfiguration wird die verkürzte Notation  $\partial_I A(\mathbf{X})$  und für Ableitungen bzgl. Koordinaten der Momentankonfiguration die Notation  $\partial_i A(\mathbf{x})$  verwendet, wobei der Index  $I$  bzw.  $i$  die entsprechende Raumrichtung angibt.

## 2 Strukturentwicklung

Die Basiszelle des in dieser Arbeit entwickelten Metamaterials ist in Abbildung 2.1 dargestellt und besteht aus einer hexagonalen Basisstruktur in welche  $3 \times 2$  sinusförmige Beulelemente (blau dargestellt) eingelassen sind. Die Beulelemente sind in vertikaler und horizontaler Richtung über eine sternförmige Anordnung weiterer Strukturelemente mit den benachbarten Beulelementen verbunden. Unter vertikaler Belastung ( $z$ -Richtung) ist die Deformation somit durch das Beulen der Beulelemente geprägt. Auch wenn dieser Mechanismus als eindimensional angesehen werden kann, ist die Basiszelle selbst dreidimensional. Im Gegensatz zu anderen Gestaltungsansätzen für instabile Mesostrukturen (Bertoldi u. a. 2008; Bertoldi und Boyce 2008; Jang u. a. 2009; Florijn u. a. 2014; Correa u. a. 2015; Shan u. a. 2015; Rafsanjani und Pasini 2016)), ist somit der Aufbau von dreidimensionalen (homogenen und inhomogenen) Strukturen (vgl. Abbildung 2.2) möglich.

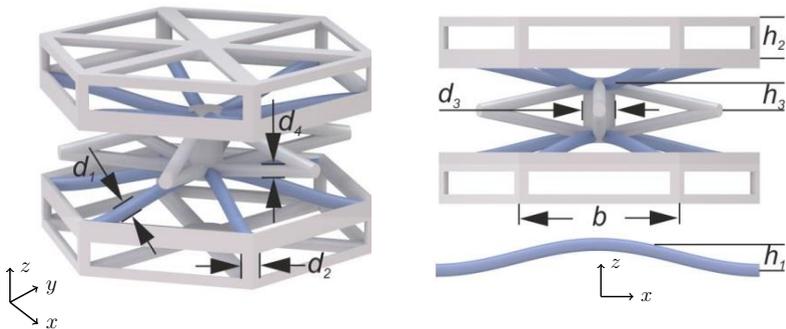


Abbildung 2.1: Basiszelle des in dieser Arbeit untersuchten Metamaterials bestehend aus hexagonaler Basisstruktur (grau) und Beulelementen (blau) und Definition der in dieser Arbeit verwendeten Parameter. (Verwendung mit Genehmigung aus Frenzel u. a. 2016).

Einer offenporige Balkenstruktur wurde hierbei einer (geschlossenporigem) flächenbasierten Struktur der Vorrang gegeben, da bei der Herstellung mittels Laser Lithographie (wie in Frenzel u. a. 2016 realisiert) Rückstände in geschlossenen Poren verbleiben würden. Wenngleich eine flächenbasierte Struktur zum Erzielen hoher (spezifischer) Beulkräfte unter Umständen zu bevorzugen wäre, ist mit einer Balkenstruktur eine Versteifung, zur Vermeidung ungewollter Deformationsmoden, leichter zu realisieren. Weiterhin bietet eine balkenbasierte Struktur mehr Optimierungspotential bzgl. massenspezifischer Kennwerte, da Material präziser an Stellen platziert werden kann wo es benötigt wird. Zum Vergleich, die hier entwickelte Struktur hat (ohne systematische Optimierung) einen Materialvolumengehalt in der Größenordnung 10%, wohingegen andere Ansätze in der Größenordnung 40 – 50% (Florijn u. a. 2014; Shan u. a. 2015; Meaud und Che 2017) liegen.

Die „glatte“ sinusförmige Form der Beulelemente wurde gewählt, da hierdurch im Vergleich zu einem Stabzweischlag ähnlichem Entwurf mit geraden Beulelemente (wie z.B. in Shan u. a. 2015 realisiert) eine gleichmäßigere Dehnungsverteilung in den Beulelementen erzielt wird. Hierdurch können die maximalen lokalen Dehnungen reduziert werden und insbesondere auch die Dehnungsspitzen von den Verbindungspunkten ferngehalten werden.

Die Anordnung der restlichen Strukturelemente erfolgte in einigen Iterationen mit dem Ziel weitere ungewollte Deformations- bzw. Instabilitätsmoden wie Scherbänder, globale Knickmoden oder lokale Rotationen der Basiszelle zu unterbinden. So dient die zusätzliche horizontale Verbindung (vgl. Abbildung 2.1, Elemente mit Durchmesser  $d_4$ ) dazu Schubinstabilitäten und damit Scherbänder zu unterbinden, während eine steife Basisstruktur ( $d_2$ ) nötig ist um eine laterale Ausdehnung zu unterbinden und somit überhaupt ein Beulen der Beulelemente zu ermöglichen.

Die Herstellung und experimentelle Charakterisierung von Strukturen basierend auf dieser Basiszelle erfolgte in Frenzel u. a. 2016. Dort wurden Strukturen mit charakteristischen Abmessungen  $d_i$  in der Größenordnung  $5\mu\text{m}$  und Gitterkonstanten  $b = 85\mu\text{m}$  realisiert (vgl. Abbildung 2.2), was das enorme Potential von aktuellen 3-D Drucktechniken und damit hergestellten Materialien verdeutlicht.

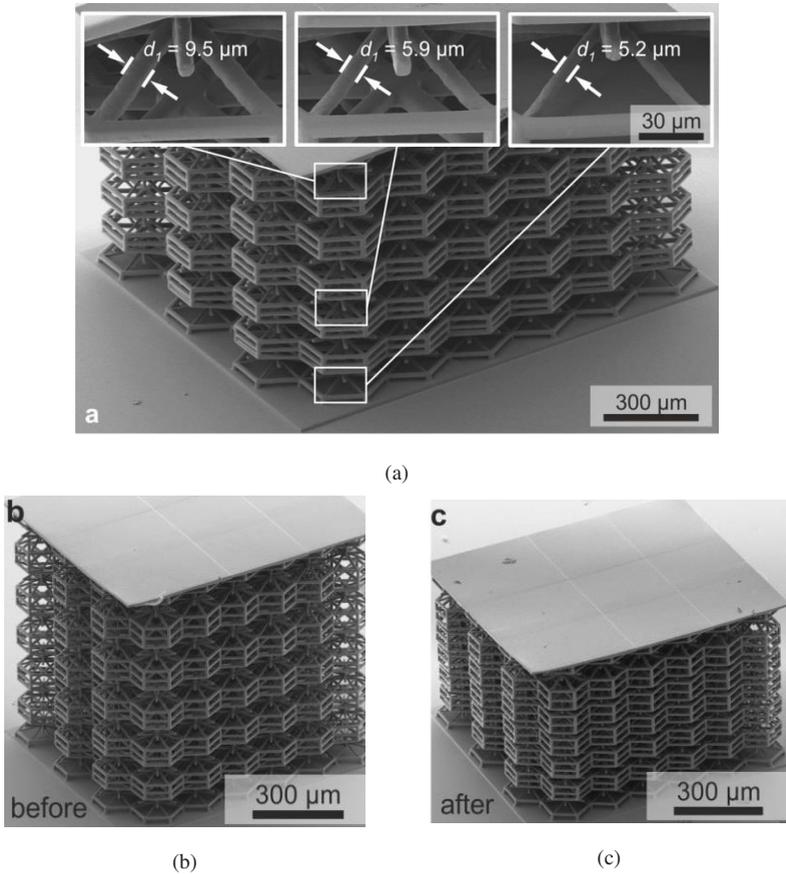


Abbildung 2.2: Elektronenmikrografie des in dieser Arbeit entwickelten instabilen Metamaterials welches aus einem Polymergrundwerkstoff mittels Laser Lithographie am Institut für Angewandte Physik des Karlsruher Instituts für Technologie hergestellt wurde. (a) Ein inhomogenes instabiles Metamaterial, das durch die Variation der Beulelementdurchmesser realisiert wurde, (b und c) ein instabiles Metamaterial im Ausgangszustand und mit einigen gebeulten Lagen im Vergleich. (Verwendung mit Genehmigung aus Frenzel u. a. 2016).



### 3 Modellierung und Charakterisierung der Mesoebene

Auf der Mesoebene erfolgt eine Charakterisierung der Basiszelle zunächst ohne genauere Berücksichtigung der Interaktionen wie sie in einem Zellverbund vorliegen. Ziel ist es hierbei zu untersuchen welche lokalen Eigenschaften durch die hier entwickelte Basiszelle realisiert werden können und wie diese durch die zugrundeliegende Mikrostruktur beeinflusst werden können. Dies erfolgt einerseits durch Analyse der Basiszelle unter gewissen Periodizitätsannahmen, andererseits wird zum besseren Verständnis der treibenden Mechanismen ein stark vereinfachtes Federmodell untersucht. Letzteres Modell zielt ebenfalls auf ein kompaktes Modell zur Beschreibung der wesentlichen Eigenschaften der Basiszelle ab, welches im Anschluss zur qualitativen Analyse der Effektivitäten in einem Zellverbund herangezogen werden soll.

#### 3.1 Vereinfachtes Federmodell

Das vereinfachte Federmodell ist aus Federn mit den zugehörigen Federkonstanten  $k_1, k_2$  und  $k_3$  aufgebaut (vgl. Abbildung 3.1a). Hierbei wird durch die Federkonstante  $k_2$  der Widerstand gegenüber lateraler Ausdehnung modelliert und durch die Feder mit der Steifigkeit  $k_3$  der Einfluss der Biegeenergie der Beulelemente abgebildet. Die Steifigkeit  $k_1$  und die Breite der Struktur  $l_0$  werden im Folgenden als Referenzwerte verwendet und haben somit keine weitere Bedeutung. Das Gesamtpotential dieser Struktur ist, unter Berücksichtigung einer wie in Abbildung 3.1a dargestellten Kraft  $F_1$ , durch

$$E = \frac{1}{2} \left( 2k_1 \Delta s^2 + 4k_2 v^2 + k_3 u^2 \right) - F_1 u, \quad (3.1)$$

mit  $\Delta s = \sqrt{(l_0 + v)^2 + (h_0 - u)^2} - \sqrt{l_0^2 - h_0^2}$

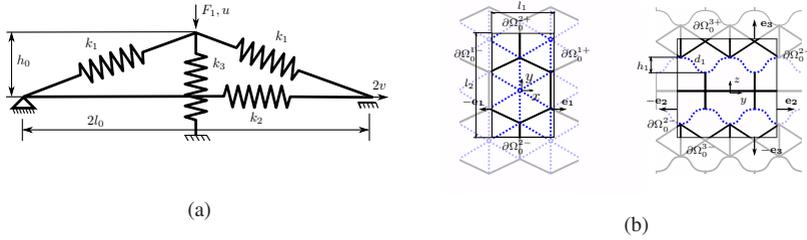


Abbildung 3.1: Darstellung der verwendeten Modelle zur Analyse der Mesostruktur. (a) Vereinfachtes Federmodell wie in Abschnitt 3.1 beschrieben, (b) Schnittdarstellung des in Kapitel 3.2 verwendeten periodischen Ausschnitts zur Analyse der Basiszelle. Beulelemente sind zum besseren Verständnis blau gepunktet dargestellt. (Verwendung mit Genehmigung aus Findeisen u. a. 2017).

gegeben. Als Freiheitsgrad wurden hierbei die Verschiebung  $u$  des Kraftangriffspunktes sowie die horizontale Ausdehnung  $v$  verwendet. Gleichgewichtskonfigurationen und damit potentielle Minimierer für das Potential (3.1) ergeben sich aus der Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial u} &= 0, \\ \frac{\partial E}{\partial v} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Zur Bewertung der Stabilität einer Gleichgewichtskonfiguration muss zwischen Dirichlet- und Neumann Randbedingung unterschieden werden. Allgemein ist eine Gleichgewichtslage  $\mathbf{p} := (u, v)^T$  genau dann stabil, wenn die Hesse-Matrix  $\partial_{ij}E$  positiv definit ist, also

$$\partial_{ij}E \delta p_i \delta p_j > 0, \quad \forall \delta p_j \in \mathcal{Z} \quad (3.3)$$

gilt, wobei  $\mathcal{Z}$  der Raum der kinematisch zulässigen Verschiebungen ist. Zur Bewertung der Stabilität unter einer Dirichlet Randbedingung muss folglich die zusätzliche Einschränkung  $\delta p_1 = \delta u = 0$  berücksichtigt werden. Damit folgt aus (3.3), unter Berücksichtigung von (3.1), die Bedingung

$$\partial_v^2 E = 2k_1 (\partial_v \Delta s)^2 + 2k_1 \Delta s \left( \partial_v^2 \Delta s \right) + 8k_2 > 0. \quad (3.4)$$

Wie man durch kurzer Rechnung feststellt, gilt allerdings  $\partial_v^2 \Delta s > 0$ , so dass jede Gleichgewichtslage unter einer vorgeschriebenen Verschiebung  $u$  stabil ist. Zur Bewertung der Stabilität unter einer Neumann Randbedingung ist keine weitere Einschränkung zu berücksichtigen. Die Stabilitätsuntersuchung erfolgt hierfür durch eine numerische Auswertung von (3.3).

## 3.2 Basiszellenmodell

Zur Charakterisierung der realen Mesostruktur wird ein periodischer Ausschnitt, wie er in Abbildung 3.1b skizziert ist, betrachtet. Zur Bewertung der mechanischen Eigenschaften einer solchen periodischen Basiszelle (im Folgenden mit  $\Omega_0$  bezeichnet), wird ein Ansatz verfolgt welcher aus der Homogenisierung bekannt ist (Hill 1972; Miehe 2002; Hohe und Becker 2003). Hierfür werden als mechanische Effektivmaße die effektive erste Piola-Kirchhoff Spannung  $\mathbf{P}^*$  sowie der effektive Deformationsgradient  $\mathbf{F}^*$  eingeführt. Diese Effektivmaße werden (auf vorerst nicht eindeutige Weise) mit der Mesostruktur - über sogenannte Äquivalenzbedingungen - verknüpft. Diese fordern einerseits, dass die mechanische Leistung, über die Hill-Mandel Bedingung (Hill 1972)

$$\frac{1}{V} \int_{\Omega_0} P_{iJ} \dot{F}_{iJ} d\Omega = P_{iJ}^* \dot{F}_{iJ}^*, \quad (3.5)$$

im integralen Mittel erhalten bleibt. Hierbei bezeichnen  $P_{iJ}$  und  $\dot{F}_{iJ}$  die entsprechenden Größen der zu charakterisierenden Basiszelle  $\Omega_0$ . Die Einhaltung der Hill-Mandel Bedingung wird zusätzlich auf Deformationsfelder  $F_{iJ}$  mit

$$\frac{1}{V} \int_{\Omega_0} F_{iJ} d\Omega = F_{iJ}^*, \quad (3.6)$$

eingeschränkt. Diese zweite Bedingung wird in der Literatur oftmals ohne physikalischen Hintergrund oder mathematische Basis formuliert. Interessanterweise lässt sie sich aber auch als Lösung eines Minimierungsproblems herleiten (vgl. auch Forest 2002). Hierauf wird in Kapitel 6 bei der Verallgemeinerung der hier vorgestellten Methodik noch näher eingegangen.

Zur praktischen Umsetzung dieser Bedingungen werden endliche Tangenten  $\Delta \mathbf{X}$  der Basiszelle  $\Omega_0$  aus der Referenzkonfiguration auf Tangenten  $\Delta \mathbf{x}$  der Momentankonfiguration abgebildet

$$\Delta x_i = F_{iJ}^* \Delta X_J + w_i, \quad \forall \Delta \mathbf{X} \in \Omega_0. \quad (3.7)$$

Hierbei enthält die sogenannte Mikrofluktuation  $\mathbf{w}$  vorerst noch alle höheren Deformationsmoden, so dass bis zu diesem Punkt noch keine Einschränkung der Deformation von  $\Omega_0$  erfolgte. Zur eindeutigen Definition der effektiven Deformation  $\mathbf{F}^*$  muss als nächstes folglich eine Annahme bzgl. der Mikrofluktuation  $\mathbf{w}$  getroffen werden, welche in Übereinstimmung mit den Bedingungen (3.5) und (3.6) ist. Setzt man hierfür (3.7) in (3.6) ein und wendet unter Annahme ausreichender Glattheit den Gaußschen Integralsatz an, so folgert man, dass für die Mikrofluktuation

$$\int_{\Omega_0} \partial_J w_i d\Omega = \int_{\partial\Omega_0} w_i n_J d\Omega = 0 \quad (3.8)$$

gelten muss. Es ist folglich ausreichend eine Annahme bzgl. der Mikrofluktuation auf dem Rand  $\partial\Omega_0$  zu machen, während die Deformation im Inneren beliebig bleibt. Nimmt man an dieser Stelle an, dass sich fiktive Nachbarzellen von der betrachteten Zelle  $\Omega_0$  gleich verformen (dies impliziert, dass die effektive Deformation  $F_{iJ}^*$  in einer gewissen Umgebung homogen ist), so lässt sich der Einfluss dieser Nachbarschaft über die Annahme einer periodischen Fluktuation berücksichtigen. Hierfür bezeichnet man mit  $\Delta \mathbf{X}^{J+}$  und  $\Delta \mathbf{X}^{J-}$  ein Paar von sich gegenüberliegenden Punkten auf gegenüberliegenden Oberflächen  $\partial\Omega_0^+$  und  $\partial\Omega_0^-$  mit den äußeren Normalen  $\mathbf{e}_J$  und  $-\mathbf{e}_J$  (vgl. Abbildung 3.1b) und fordert

$$w_i(\Delta \mathbf{X}^{J+}) = w_i(\Delta \mathbf{X}^{J-}), \quad \forall \Delta \mathbf{X}^{J-} \in \partial\Omega_0^-. \quad (3.9)$$

Spaltet man das Integrationsgebiet in die jeweiligen Oberflächen auf und berücksichtigt, dass die Normalen von sich gegenüberliegenden Oberflächen jeweils entgegengesetzt sind, so lässt sich zeigen, dass durch die Wahl (3.9) die Bedingung (3.8) und damit auch (3.6) erfüllt ist.

Berücksichtigt man die periodische Fluktuation bei der Auswertung von (3.7) für die Punkte  $\Delta \mathbf{X}^{J+}$ ,  $\Delta \mathbf{X}^{J-}$  und subtrahiert das Ergebnis, so erhält man schließlich die Nebenbedingung

$$H_{iJ}^* := F_{iJ}^* - \delta_{iJ} = \frac{u_i(\Delta \mathbf{X}^{J+}) - u_i(\Delta \mathbf{X}^{J-})}{L_J}, \quad (3.10)$$

welche bei der Lösung des Basiszellenproblems berücksichtigt werden muss und (bis auf eine überlagerte Starrkörperbewegung) in eindeutiger Weise den effektiven Deformationsgradient definiert. In (3.10) wurde weiterhin der Verschiebungsgradient  $\mathbf{H}^*$  definiert, welcher insbesondere auf Grund der intuitiven geometrischen Interpretation für die Auswertung vorteilhaft ist.

Zur Erfüllung der Nebenbedingung (3.10) und zum Beweis, dass mit selbiger die Hill-Mandel Bedingung (3.5) erfüllt ist, wird für das Basiszellenproblem das folgende Lagrange Funktional mit dem Lagrangen Multiplikator  $\tilde{P}_{iJ}$

$$\tilde{W} = \int_{\Omega_0} W d\Omega + \int_{\partial\Omega_0^-} \tilde{P}_{iJ} \left( \dot{F}_{iJ}^* - \delta_{iJ} + \frac{1}{L_J} (\dot{u}_i^- - \dot{u}_i^+) \right) d\Omega \quad (3.11)$$

minimiert (vgl. auch Miehe 2002). Hierbei beschreibt  $W$  das gewöhnliche Potential der Mesostruktur und  $\partial\Omega_0^-$  ist der Anteil der Oberfläche mit äußerer Normale  $-\mathbf{e}_J$ ,  $J = 1, 2, 3$ , weiterhin wurde die Abkürzung  $u_i^+ = u_i(\mathbf{X}^+)$  verwendet. Für ein Minimum gilt  $\delta\tilde{W} = \delta_{\dot{\mathbf{u}}}W + \delta_{\tilde{\mathbf{P}}}W = 0$ , da die Felder  $\dot{\mathbf{u}}$  und  $\tilde{\mathbf{P}}$  unabhängig voneinander sind, müssen folglich die beiden Terme  $\delta_{\dot{\mathbf{u}}}W$  und  $\delta_{\tilde{\mathbf{P}}}W$  getrennt voneinander verschwinden. Aus  $\delta_{\tilde{\mathbf{P}}}W = 0$  folgt direkt, dass ein Minimum von (3.11) immer die kinematische Bedingung (3.10) erfüllt. Für die Variation bzgl.  $\dot{\mathbf{u}}$  folgt vorerst

$$\delta_{\dot{\mathbf{u}}}\tilde{W} = \int_{\Omega_0} P_{iJ} \delta\dot{F}_{iJ} d\Omega + \int_{\partial\Omega_0^-} \tilde{P}_{iJ} \frac{1}{L_J} (\delta\dot{u}_i^- - \delta\dot{u}_i^+) d\Omega. \quad (3.12)$$

Berücksichtigt man, dass nach (3.10)  $\frac{1}{L_J} (\delta\dot{u}_i^- - \delta\dot{u}_i^+) = -\delta F_{iJ}^*$  gilt, so folgt aus (3.12) direkt die Hill-Mandel Bedingung in der Form

$$\int_{\Omega_0} P_{iJ} \delta\dot{F}_{iJ} d\Omega = \int_{\partial\Omega_0^-} \tilde{P}_{iJ} d\Omega \delta F_{iJ}^* \quad (3.13)$$

und die effektive Spannung  $\mathbf{P}^*$  ist somit durch den Lagrangen Multiplikator gegeben

$$P_{iJ}^* = \int_{\partial\Omega_0^-} \tilde{P}_{iJ} d\Omega. \quad (3.14)$$

Um aus dem Basiszellenproblem eine eindeutige Lösung zu erhalten, müssen zusätzlich noch die Starrkörperbewegungen unterdrückt werden. Hierfür wird als zusätzliche Nebenbedingung die Symmetrie des Deformationsgradienten gefordert und die Verschiebung eines beliebigen Punktes zu Null gesetzt. Erstgenannte Forderung unterdrückt die effektiven Starrkörperrotationen. Dies lässt sich mittels der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten zeigen, welche zunächst ganz allgemein

$$F_{iJ}^* = R_{iK}^* U_{KJ}^* = R_{iK}^* (F_{Kj} F_{jJ})^{1/2} \quad (3.15)$$

lautet. Wird gefordert, dass der Deformationsgradient symmetrisch ist, so gilt  $(\mathbf{F}^{*T} \mathbf{F}^*)^{1/2} = \mathbf{F}^*$  und somit folgt aus (3.15)

$$F_{iJ}^* = R_{iK}^* F_{KJ}^*, \quad (3.16)$$

damit dies für alle Deformationsgradienten erfüllt ist, muss somit für die effektive Rotation  $R_{iK}^* = \delta_{iK}$  gelten.

Das Basiszellenproblem, beschrieben durch (3.11), wird mit Hilfe von Finiten Elementen gelöst, wobei die Mesostruktur selbst durch Balkenelemente basierend auf der Timoshenko Hypothese approximiert wird. Hierfür wird eine mittlere Elementgröße von  $b/15$  verwendet, in der  $b$  die Gitterkonstante der hexagonalen Zelle ist (vgl. Abbildung 2.1). Das Materialverhalten wird als linear elastisch angenommen und mittels des De Saint-Venant Kirchoff Modells mit dem Elastizitätsmodul  $E = 2\text{GPa}$  und der Querkontraktionszahl  $\nu = 0.42$  modelliert. Dies entspricht typischen Werten für den linear elastischen Bereich von Polymeren aus denen solche Strukturen hergestellt werden können (vgl. auch Frenzel u. a. 2016).

Im Vergleich zu dem vereinfachten Federmodell ist das Stabilitätsverhalten der hier untersuchten Struktur etwas komplexer. So existieren neben der physikalisch sinnvollen (stabilen) Gleichgewichtslage eine Vielzahl an instabilen

Gleichgewichtskonfigurationen. Um sicher zu gehen, dass das Newton Verfahren bei der inkrementellen Lösung auf dem physikalisch sinnvollen Ast bleibt, wird der Referenzkonfiguration eine Störung

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^N p_i \Phi_i, \quad (3.17)$$

als Linearkombination der ersten  $N$  kritischen Beulmoden  $\Phi_i$ , überlagert. Die Beulmoden wiederum ergeben sich aus einer Abschätzung der kritischen Instabilitätspunkte als Lösung des Eigenwertproblems

$$(\mathbf{K}_I + \lambda_i \mathbf{K}_U) \Phi_i = \mathbf{0}, \quad (3.18)$$

welches für die Referenzkonfiguration  $\Omega_0$  gelöst wird (vgl. Wriggers 2008; Hill 1958). Um sicher zu gehen, dass diese Störung ausreichend zur Stabilisierung ist, werden begleitend die Eigenwerte der tangentialen Steifigkeitsmatrix beobachtet und die Störung  $p_i$  solange erhöht bis keine negativen Eigenwerte mehr auftauchen. Auf diese Art und Weise ist gewährleistet, dass die aufgebraachte Störung so groß wie nötig und so klein wie möglich ist und somit einen vernachlässigbaren Einfluss auf das stabilisierte Gesamtverhalten hat.

### 3.3 Ergebnisse

In Abbildung 3.2 ist das Verhalten des vereinfachten Federmodells, als Lösung von (3.2), für verschiedene Parameterkombinationen  $k_3$ ,  $h_0$  und  $k_2$ , zusammengefasst. Zur besseren Vergleichbarkeit ist in jedem Diagramm eine Referenzkurve mit den gleichen Parametern in rot dargestellt. Nahezu alle Parameterkombinationen führen zu einem nichtmonotonen Verhalten, mit jeweils einem Minimum und einem Maximum. Zwischen diesen Extrempunkten befindet sich ein Bereich mit negativer tangentialer Steifigkeit. Im Folgenden wird der Bereich mit negativer Steifigkeit als Zustand 2 und die beiden Bereiche mit positiver Steifigkeit als Zustand 1 und 3 bezeichnet (vgl. Abbildung 3.2c).

Unabhängig von der Parameterkombination ist Zustand 2 bei Verwendung einer Neumann Randbedingung nach Bedingung (3.3) instabil (exemplarisch für die Referenzparameter in Abbildung 3.2 dargestellt). Zur Veranschaulichung was

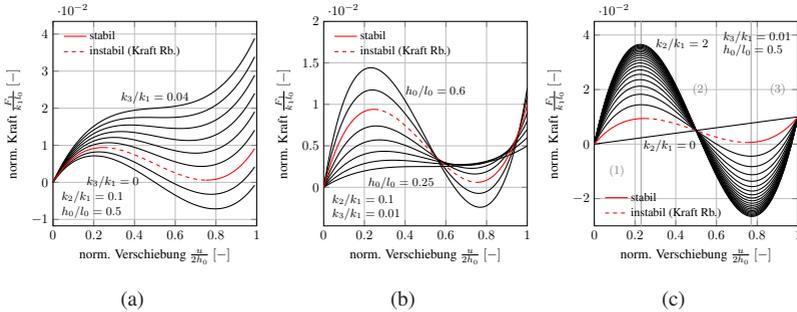


Abbildung 3.2: Normierte Kraft-Verschiebungskurven des Federmodells aus Abbildung 3.1a in Abhängigkeit der Parameter  $k_3$  (a),  $h_0$  (b) und  $k_2$  (c). Die Parametervariation ist jeweils bzgl. der gleichen Referenzkurve (rot) mit Parametern  $k_3/k_1 = 0.01$ ,  $h_0/l_0 = 0.5$  und  $k_2/k_1 = 0.1$  dargestellt. Der unter einer Krafrandbedingung instabile Teil ist exemplarisch anhand der Referenzkurve gestrichelt dargestellt. Exemplarisch sind verschiedenen Zustände in (c) grau dargestellt. Die Werte der restlichen Parameter sind in den Abbildungen gegeben. (Verwendung mit Genehmigung aus Findeisen u. a. 2017).

dies bedeutet, nimmt man einmal an, man könnte die Struktur in einen solchen instabilen Zustand  $\mathbf{p}_0$  bringen. Die Taylorentwicklung des Potentials  $E$  lautet an der Stelle  $\mathbf{p}_0$

$$E = E_0 + \partial_i E_0 \Delta p_i + \frac{1}{2} \partial_{ij} E_0 \Delta p_i \Delta p_j + O(|\Delta p|^3). \quad (3.19)$$

Für eine Gleichgewichtskonfiguration gilt allerdings nach (3.2)  $\partial_i E_0 = 0$ . Ferner folgt aus (3.3), dass für instabile Gleichgewichtskonfigurationen ein Verschiebungsinkrement  $\Delta p_i$  existiert, so dass für den quadratischen Term  $\partial_{ij} E_0 \Delta p_i \Delta p_j < 0$  gilt. Mit diesem Verschiebungsinkrement geht somit eine negative inkrementelle Energieänderung einher, der instabile Gleichgewichtszustand ist kein lokales Minimum (Gleichung (3.2) ist lediglich ein notwendiges Kriterium für ein Minimum). Auf Grund des Minimalprinzips wird das System aber immer ein Minimum des Potentials (3.1) einnehmen, die Struktur wird also von alleine nicht in diesem Gleichgewichtszustand verweilen und zu einem, mit den Randbedingungen kompatiblen, stabilen Gleichgewichtszustand (Zustand 1 oder 3) wechseln. Man spricht daher bei instabilen Zuständen auch von nicht zulässigen Gleichgewichtskonfigurationen. Hieraus lässt sich weiterhin folgern, dass es offensichtlich nicht möglich ist die Struktur mittels eines kraft-

gesteuerten Prozesses auf stabilen (statischen) Gleichgewichtskonfigurationen von der Anfangslage  $u = 0$  zu der Endlage  $\frac{u}{2h_0} = 1$  und zurück zu bringen. So gibt es unter Belastung bei dem Erreichen des Maximums - welches Zustand 1 von Zustand 2 trennt - keine benachbarte Gleichgewichtskonfiguration, die eine weitere Kraftsteigerung zulässt. Unsere Alltagserfahrung lässt uns vermuten, was an dieser Stelle unter weiterer Kraftsteigerung passiert: die Struktur wird schlagartig zu einer in Zustand 3 befindlichen Gleichgewichtskonfiguration wechseln. Man bezeichnet diesen Prozess auch als Durchschlagen. Ein Durchschlag ist allerdings immer ein dynamischer Prozess und kann somit mit dem hier verwendeten Modell nicht abgebildet werden. Im Rahmen von der Analyse von Zellverbänden wird dieses Problem an späterer Stelle (Kapitel 4) noch weiter behandelt, hier soll die heuristische Interpretation vorerst ausreichen.

Wird anstatt der Krafrandbedingung die Verschiebung vorgeschrieben, so ist klar, dass ein schlagartiges Durchschlagen von Zustand 1 zu Zustand 3 durch die Randbedingung unterbunden wird. Dies veranschaulicht wieso sämtliche Gleichgewichtskonfigurationen stabil unter einer Verschiebungsrandbedingung sind (vgl. Gleichung (3.4)).

Im Vergleich zu dem vereinfachten Federmodell ist in Abbildung 3.3a, repräsentativ für das Verhalten der Basiszelle, eine exemplarische Spannungs-Dehnungs Kurve dargestellt. Berechnet wurde hierbei die effektive Spannung  $P_{33}^*$  in Abhängigkeit einer effektiven vertikalen Kompression  $H_{33}^*$ . Da im Folgenden in erster Linie effektive Größen betrachtet werden, wird zur besseren Übersichtlichkeit auf den Stern zur Kennzeichnung von effektiven Größen verzichtet,  $P_{33} := P_{33}^*$ ,  $H_{33} := H_{33}^*$ . Werden hingegen lokale Größen der Mesostruktur betrachtet, wird dies extra kenntlich gemacht. Im Vergleich zu dem Federmodell existieren hier nun jeweils zwei Minima  $P_{\min}^i$  und Maxima  $P_{\max}^i$  mit  $i = 1, 2$  und entsprechend auch zwei (unter einer Krafrandbedingung) instabile Äste mit negativer tangentialer Steifigkeit. Diese beiden instabilen Äste werden durch das Beulen der beiden sternförmigen Anordnungen von Beulelementen (vgl. Abbildung 2.1) verursacht. An dieser Stelle stellt sich die Frage warum die Beulelemente nicht gleichzeitig Beulen und das erste Maximum mit dem zweiten Minimum wie im vereinfachten Federmodell entsprechend durch nur einen negativen Ast verbunden sind. Diese Frage lässt sich leicht durch eine energetische Betrachtung beantworten. Hierfür stelle man sich die Basiszelle zusammengesetzt aus zwei Beulelementen, wie sie durch das Federmodell beschrieben werden, vor. Geht die Gesamtdehnung über das Kraftmaximum des

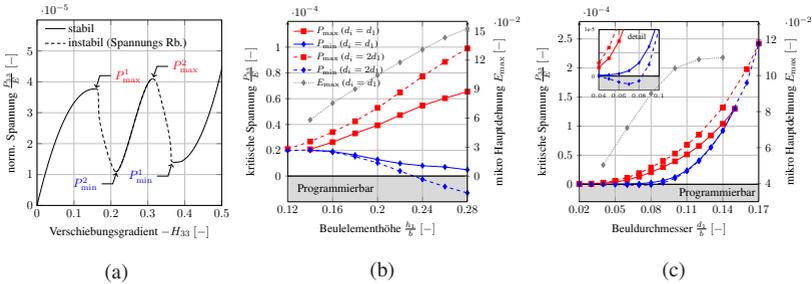


Abbildung 3.3: Verhalten der Basiszelle für verschiedene Parameterkombinationen. (a) Exemplarische Spannungs-Dehnungskurve für die Parameter  $d_1/b = 0.10$ ,  $h_1/b = 0.2$  und  $d_i = d_1$ ,  $i = 2, 3$  mit den kritischen Spannungsminka  $P_{\min}^{1,2}$  und Maxima  $P_{\max}^{1,2}$ , (b) Gemittelte kritische Spannungen in Abhängigkeit der Beulelementhöhe  $d_1$  für  $d_2 = d_3 = d_1$  und  $d_1/b = 0.1$  (durchgezogene Linien) und für  $d_2 = d_3 = 2d_1$  (gestrichelte Linie) mit jeweils  $d_1/b = 0.2$  sowie die maximale Hauptdehnung  $E_{\max}$  in der Mesostruktur, (c) die gleiche Darstellung wie in (b) aber in Abhängigkeit der Beulelementdurchmesser mit fixiertem Beulelementhöhe  $h_1/b = 0.2$ . (Verwendung mit Genehmigung aus Findeisen u. a. 2017).

einzelnen Beulelement hinaus, so gibt es drei mögliche Gleichgewichtskonfigurationen: die homogene, in der beide Beulelemente in Zustand 2 entlastet und die inhomogene, in der eines der beiden Elemente in Zustand 2 entlastet, während das jeweils andere in Zustand 1 entlastet. Da beide Elemente identisch sind, sind die beiden letztgenannten Gleichgewichtskonfigurationen allerdings äquivalent. Entlastet eines der beiden Elemente in Zustand 1, so ist die dafür nötige Gesamtenergie geringer im Vergleich zu der homogenen Entlastung in Zustand 2. Die homogene Entlastung ist folglich auch unter einer Verschiebungsrandbedingung instabil. Weiterhin ist auffällig, dass die zweiten Minima  $P_{\min}^2$  und Maxima  $P_{\max}^2$  deutlich höher als die ersten sind. Dies lässt sich darauf zurückführen, dass nachdem ein Beulelement gebeult ist unter weiterer Belastungssteigerung eine negative Querkontraktion erfolgt. Die Ausdehnung des nicht gebeulten Elementes ist folglich stärker eingeschränkt als bei dem ersten Beulvorgang, wodurch die zum Beulen benötigte Kraft größer wird.

Nachdem das grundlegende Verhalten der beiden Modelle verstanden ist, kann nun auf den Einfluss der verschiedenen Parameter eingegangen werden. Als charakteristisches Maß für das Beulen wurde hierfür einerseits der Mittelwert der beiden kritischen Beulspannungen  $P_{\min} := 1/2 (P_{\min}^1 + P_{\min}^2)$  und

$P_{\max} := 1/2 (P_{\max}^1 + P_{\max}^2)$  in Abhängigkeit von den geometrischen Parametern Beulelementdurchmesser  $d_1$ , Beulelementhöhe  $h_1$  sowie Rahmendurchmesser  $d_2$  und Verbindungselementdurchmesser  $d_3$  in den Abbildungen 3.3c, 3.3b, 3.4a und 3.4c zusammengefasst. Die genaue Definition dieser Parameter ist Abbildung 2.1 zu entnehmen, repräsentativ für das Verformungsverhalten der Basiszelle ist weiterhin in den Abbildung 3.4b und 3.4d die maximale laterale Ausdehnung  $H_{22}^{\max}$  sowie die maximale Rotation  $\varphi_z^{\max}$  des zentralen Verbindungspunktes der 3 Beulelemente, die beim Beulen durch seitliches Ausweichen der Beulelemente (vgl. Abbildung 2.1) vorliegt, dargestellt.

Betrachten man zunächst den Einfluss der Steifigkeit  $k_3$  des Federmodells sowie den zugehörigen Beulelementdurchmesser  $d_1$  der Basiszelle. Für  $k_3 = 0$  ist die Struktur symmetrische bzgl. der horizontalen Achse, was sich in der Symmetrie der Kraft-Verschiebungskurve bzgl. der Kraft  $F = 0$  widerspiegelt (Abbildung 3.2a). Der Nulldurchgang in der Kraft erfolgt genau in der horizontalen Lage  $u/2h_0 = 0.5$ . Für  $k_3 > 0$  wird während der Deformation eine zusätzliche Verzerrungsenergie gespeichert, wodurch die Symmetrie gebrochen wird und der Nulldurchgang entsprechend zu höheren Dehnungen verschoben wird. Ebenso steigen auch die kritischen Maxima und Minima an, wobei die Steifigkeit  $k_3$  einen stärkeren Einfluss auf das Kraftminimum als auf das Kraftmaximum ausübt. Für Parameterkombinationen mit  $k_3/k_1 > 0.03$  verschwindet der instabile Ast (Zustand 2) schließlich komplett und das Verhalten wird wieder streng monoton. Einen analogen Mechanismus beobachtet man bei dem Verhalten der Basiszelle. Hier wird, in Abhängigkeit von dem Beulelementdurchmesser, während der Deformation Biegeenergie gespeichert. Mit steigendem Durchmesser  $d_1$  steigen folglich auch die kritischen Minima und Maxima an, wobei für  $d_1/b > 0.15$  das instabile Verhalten wieder komplett verschwindet (vgl. durchgezogene Linien in Abbildung 3.3c). Im Gegensatz zu dem Federmodell kann der Einfluss der Biegeenergie allerdings nicht komplett abgeschaltet werden, da hierfür ein Durchmesser  $d_1 \rightarrow 0$  notwendig wäre und damit auch die Gesamtsteifigkeit der Struktur gegen Null gehen würde. Folglich findet man hier keine negativen kritischen Spannungen, da der Einfluss der Biegeenergie für die untersuchten Parameterkombinationen zu hoch ist.

Einen umgekehrten Effekt hat hingegen die Beulelementhöhe  $h_0$  bzw.  $h_1$ . Mit steigender Höhe  $h_0$  wechselt das Verhalten nun von einem streng monoton stabilem Verhalten zu einem nichtmonotonen (instabilem) Verhalten (vgl. Abbildung 3.2b). Weiterhin steigen nun die kritischen Kraftmaxima an, wohingegen

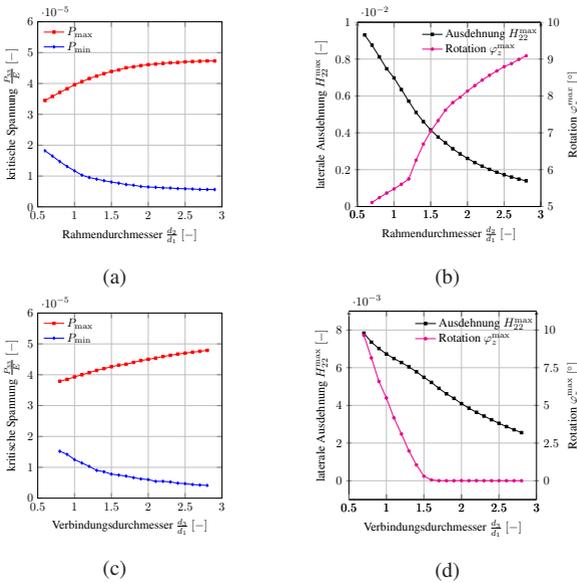


Abbildung 3.4: Verhalten der Basiszelle in Abhängigkeit der Verbindungselementsteifigkeit  $d_2$  für konstante Parameter  $d_1/b = d_3/b = 0.1$  und  $h_1/b = 0.2$  (a,b) und der Rahmensteifigkeit  $d_3$  ebenfalls für konstantes  $d_1/b = d_2/b = 0.1$  und  $h_1/b = 0.2$  (c,d). Ausgewertet sind die kritischen Spannungswerte  $P_{min}$  und  $P_{max}$  (a,c) sowie die maximale laterale Deformation  $H_{22}^{max}$  und die maximale Rotation der Beulelemente  $\varphi_z^{max}$  (b,d). (Verwendung mit Genehmigung aus Findeisen u. a. 2017).

die Minima abfallen. Im Allgemeinen (abhängig von  $k_3$ ) ist dieser Einfluss unsymmetrisch: die Maxima steigen schneller an, als die Minima abfallen. Dieses Verhalten stimmt qualitativ mit dem der Basiszelle überein: auch hier steigt mit der Beulelementhöhe  $h_1$  das kritische Spannungsmaximum schneller an als das kritische Minimum abfällt (durchgezogene Linie in Abbildung 3.3b). In dem angegebenen Parameterbereich nähert sich das Minimum zwar dem Nullwert an, wird allerdings nicht negativ. Man könnte an dieser Stelle davon ausgehen, dass durch weiteres steigern der Höhe  $h_1$  auch negative Werte angenommen werden; ohne weitere Modifikationen der Struktur führt dies aber zu ungewollten Schubinstabilitäten.

Einen ähnlichen Effekt erzielt man durch Einschränkung der lateralen Ausdehnung welche über die Steifigkeit  $k_2$  gesteuert werden kann (Abbildung 3.2c). Im Gegensatz zu der Höhe  $h_0$  ist der Einfluss nun aber symmetrisch bzgl. dem Grenzfall verschwindender lateraler Steifigkeit ( $k_2 = 0$ ). Interessanterweise ist dem nun allerdings eine Grenze gesetzt; Steigert man die lateraler Steifigkeit über  $k_2/k_1 = 2$  hinaus so beobachtet man nur noch einen geringen Einfluss auf die kritischen Kräfte. Den gleichen Effekt hat die Rahmensteifigkeit  $d_2$  der Basiszelle, auch hier steigen (fallen) die kritischen Maxima (Minima) mit dem Durchmesser  $d_2$  vorerst symmetrischen an (ab). Steigert man den Durchmesser allerdings über  $d_2/d_1 = 2$  hinaus, so beobachtet man nur noch einen vernachlässigbaren Einfluss (vgl. Abbildung 3.4a). Um ein tieferes Verständnis für die Deformationsmechanismen, die hier beeinflusst werden, zu erlangen, soll nun noch die maximale laterale Ausdehnung  $H_{22}^{\max}$  und die maximale Rotation  $\varphi_z^{\max}$  analysiert werden (Abbildung 3.4b). Wie zu erwarten war, fällt mit steigendem Rahmendurchmesser  $d_2$  die maximale Ausdehnung ab, gleichzeitig steigt allerdings die maximale Rotation an. Der kritische Beulmodus wechselt hier also folglich von einem ausdehnungsdominierten Beulen zu einem rotationsdominierten Modus.

Als weiteren Parameter wird abschließend noch der Einfluss der Steifigkeit der Verbindungselemente über den Durchmesser  $d_3$  untersucht. Wie in Abbildung 3.4c zu erkennen ist, ergibt sich hier eine weitere Möglichkeit die kritischen Maxima und Minima anzuheben bzw. abzusenken. Im Gegensatz zu der Steifigkeit der Rahmenelemente, wird hier nun aber sowohl die Rotation  $\varphi_z^{\max}$  als auch die maximale laterale Ausdehnung  $H_{22}^{\max}$  unterbunden (siehe Abbildung 3.4d).

Im Gegensatz zu dem vereinfachten Federmodell zeigt die Basiszelle bislang keine Parameterkombination mit einem negativem Kraftminimum. Interessant wäre ein solches negatives Kraftminimum für die Realisierung von programmierbaren Strukturen, in denen unter Entlastung eine quasi irreversible Deformation verbleibt. Um zu zeigen, dass auch dies mit der hier untersuchten Struktur möglich ist, ist in Abbildung 3.3c und 3.3b (gestrichelte Linien) noch das Verhalten einer Basiszelle mit jeweils sehr steifen Rahmenelementen ( $d_2 = 2d_1$ ) und Verbindungselementen ( $d_3 = 2d_1$ ) dargestellt. Für diese Kombination erhält man für die Parameter  $h_1/b > 0.23$  bzw.  $d_1/b \in [0.04, 0.08]$  negative Kraftminima und damit die Möglichkeit in dem zuvor genannten Sinne programmierbare Eigenschaften zu erzeugen.



## 4 Diskrete Modellierung und Charakterisierung der Effektiveigenschaften

Im Gegensatz zu üblichen (stabilen) Mesostrukturen von Materialien lässt sich hier aus der Charakterisierung der Mesostruktur (z.B. über die Basiszelle) nicht ohne weiteres auf das Effektivverhalten eines Zellverbundes schließen. Grund hierfür ist, dass, ähnlich wie bei der Analyse der Basiszelle bereits beobachtet, der innere Deformationszustand nicht eindeutig durch die Randbedingungen festgelegt ist und das Effektivverhalten somit von der Belastungsgeschichte abhängig ist. Weiterhin gilt es zu beachten, dass sich das Stabilitätsverhalten eines Zellverbundes grundlegend von dem der Basiszelle unterscheidet und auch dieses nicht aus den zuvor gemachten Analysen übertragbar ist.

Die Charakterisierung des Effektivverhaltens erfolgt daher im Folgenden mit zwei weiteren Modellen, welche die Interaktionen zwischen den Zellen berücksichtigen. Zuerst wird hierfür auf die Ergebnisse des vereinfachten Federmodells (Kapitel 3.1) zurückgegriffen und das Verhalten von fiktiven Zellkombinationen analysiert. Dem Verhalten der einzelnen Zelle wird hierfür das Verhalten des vereinfachten Federmodells zugeordnet. Um diese so gewonnenen Ergebnisse zu bestätigen und ferner die bei der Analyse der Basiszelle in Kapitel 3.2 gemachten Annahmen zu überprüfen, werden zusätzlich noch reale dreidimensionale Zellverbände, wie sie durch periodische Anordnung der Basiszelle (vgl. Abbildung 3.1b) entstehen, untersucht. Betrachtet werden dabei jeweils homogene und inhomogene Zellverbände, welche sich aus der Kombination von gleichen bzw. unterschiedlichen Basiszellen ergeben.

## 4.1 Eindimensionales Mehrzellenmodell

Zur Analyse des Effektivverhaltens eines Zellverbundes mit  $n$  Zellen werden zunächst Gleichgewichtskonfigurationen berechnet, die sich aus Extrempunkten der potentiellen Energie

$$\Pi = \sum_{i=1}^n E_i(u_i - u_{i+1}) - \lambda F_1 u_1, \quad (4.1)$$

ergeben. Hierbei sind  $u_i$  und  $u_{i+1}$  die obere und untere Verschiebung von Zelle  $i$  und  $E_i$  ist das Potential der inneren Kräfte einer einzelnen Zelle, gegeben durch Gleichung (3.1), wobei die laterale Verschiebung  $v = v(u)$  durch die Lösung von (3.2) gegeben ist. Um sich nicht von vornherein auf eine Art Randbedingung (Neumann oder Dirichlet) festzulegen, wird das Potential der äußeren Kräfte über eine weitere Unbekannte  $\lambda$  berücksichtigt, auf deren Bestimmung später genauer eingegangen wird. Gleichgewichtslagen ergeben sich aus der notwendigen Bedingung für ein Minimum von (4.1)

$$0 = \frac{\partial \Pi}{\partial u_i} = \begin{cases} \frac{\partial E_1}{\partial s_1} - \lambda F_1 & \text{für } i = 1 \\ \frac{\partial E_i}{\partial s_i} - \frac{\partial E_{i-1}}{\partial s_{i-1}} & \text{für } i = 1, \dots, n \\ -\frac{\partial E_n}{\partial s_n} & \text{für } i = n + 1, \end{cases} \quad (4.2)$$

wobei die Abkürzung  $s_i := u_i - u_{i+1}$  verwendet wurde und man  $\frac{\partial E_i}{\partial s_i}$  erhält indem in (3.2)  $u$  durch  $s_i$  ersetzt wird. Um alle möglichen Gleichgewichtskonfigurationen unabhängig von der vorgeschriebenen Randbedingung zu erhalten, kommt zur inkrementellen Lösung des Gleichungssystems (4.2) ein Bogenlängenverfahren (Riks 1972; Crisfield 1980; Schweizerhof und Wriggers 1986; Wriggers 2008) zum Einsatz. Hierfür wird, für den Übergang von dem letzten konvergierten Zustand  $(\mathbf{u}^m, \lambda^m)$  zu dem aktuellen Zustand  $(\mathbf{u}, \lambda)$ , als Randbedingung das Bogenlängeninkrement  $\Delta s$  vorgeschrieben, welches den Kraftfaktor  $\lambda$  und das Verschiebungsinkrement  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^m$  über die so genannte Crisfield (Crisfield 1980) Bedingung

$$f(\mathbf{u}, \lambda) = \sqrt{(\mathbf{u} - \mathbf{u}^m)^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}^m) + (\lambda - \lambda^m)^2} - \Delta s = 0 \quad (4.3)$$

ins Verhältnis setzt. Anschaulich gesprochen wird somit, ausgehend von dem Zustand  $\mathbf{g}^m = (\mathbf{u}^m, \lambda^m)$ , auf der  $n + 1$  dimensionalen Sphäre  $\mathcal{S}^{n+1}(\mathbf{g}^m, \Delta s)$  mit Radius  $\Delta s$  und Mittelpunkt  $\mathbf{g}^m$  nach benachbarten Gleichgewichtskonfigurationen gesucht. Hierbei wird weder der Wert, noch das Vorzeichen der inkrementellen äußeren Verschiebung  $\Delta u_1$  und des Kraftinkrementes  $\Delta \lambda = \lambda - \lambda^m$  vorgegeben. Das aus Gleichung 4.2 und 4.3 resultierende nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}} \\ f(\mathbf{u}, \lambda) \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (4.4)$$

wird mithilfe des Newton Verfahrens gelöst. Die inkrementelle Lösung in der  $i$ -ten Iteration  $\Delta \mathbf{g}^i = (\Delta \mathbf{u}^i, \Delta \lambda^i)^T$  ergibt sich hierbei aus der Lösung von

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -F_1 \mathbf{e}_1 \\ \partial_u f(\mathbf{u}, \lambda) & \partial_\lambda f(\mathbf{u}, \lambda) \end{bmatrix}^{i-1} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \lambda \end{pmatrix}^i = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}} \\ f(\mathbf{u}, \lambda) \end{pmatrix}^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

wobei hierbei  $K_{ij} = \partial_{u_i} \partial_{u_j} \Pi$  die übliche tangentielle Steifigkeitsmatrix ist, welche sich aus der Ableitung von (4.2) ergibt. Zur iterativen Lösung nach (4.5), ist weiterhin ein Startwert  $\mathbf{g}^0 = (\mathbf{u}^0, \lambda^0) \in \mathcal{S}^{n+1}$  nötig, welcher wie folgt berechnet wird

$$\mathbf{g}^0 = \mathbf{g}^m + \text{sign}(\mathbf{K}) \alpha \Delta \mathbf{g}^*. \quad (4.6)$$

Hierbei ist  $\mathbf{g}^m$  die letzte konvergierte Lösung,  $\alpha$  ist ein Skalierungsfaktor und  $\text{sign}(\mathbf{K})$  eine noch zu spezifizierende Vorzeichenfunktion, die berücksichtigt, dass sich die Richtung der Kraft bzw. der Verschiebung mit der Bogenlänge ändern kann. Zur Bestimmung von  $\Delta \mathbf{g}^*$  wird zunächst ein beliebiges Kraftinkrement  $\Delta \lambda^*$  angenommen und über

$$\Delta \mathbf{u}^* = \mathbf{K}^{-1} \Delta \lambda^* \mathbf{e}_1 \quad (4.7)$$

das zugehörige Verschiebungsinkrement mit einer gewöhnlichen Newton Iteration bestimmt. Der Skalierungsfaktor  $\alpha$  wird dann nach

$$\alpha = \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta \mathbf{u}^{*T} \Delta \mathbf{u} + \Delta \lambda^{*2}}} \quad (4.8)$$

so gewählt, dass der Prädiktor  $\alpha \Delta \mathbf{g}^*$  die vorgeschriebene Länge  $\Delta s$  hat. Da der Lösungspfad  $\lambda(\mathbf{u})$  in aller Regel mindestens zwei Schnittpunkte mit der Sphäre  $S^{n+1}$  aufweist, muss über die Vorzeichenfunktion die richtige Richtung vorgegeben werden. In dieser Arbeit hat sich hierfür ein pragmatisches Kriterium basierend auf den negativen Eigenwerten der Steifigkeitsmatrix bewährt

$$\text{sign}(\mathbf{K}) = \begin{cases} -1 & \text{wenn } \mathbf{K} \text{ eine ungerade Anzahl an neg. Eigenwerten hat,} \\ +1 & \text{wenn } \mathbf{K} \text{ eine gerade Anzahl an neg. Eigenwerten hat.} \end{cases} \quad (4.9)$$

Da die hier gelösten Probleme von vergleichsweise niedriger Dimension sind, lässt sich dieses Kriterium verhältnismäßig effizient und einfach implementieren. Alternativen hierzu findet man zum Beispiel in (Wriggers 2008). Beginnend mit dem Prädiktor (4.6), wird dann nachfolgend mittels des Newton Algorithmus (4.5) eine Lösung für (4.4) bestimmt. Um hierbei nach wie vor die Symmetrie der Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  auszunutzen, kann dies über eine so genannte Blockelimination (vgl. Schweizerhof und Wriggers 1986) erfolgen.

Begleitend zu diesem inkrementellen Lösungsprozess wird für jede Gleichgewichtslage  $\mathbf{g}^m = (\mathbf{u}^m, \lambda^m)$  eine Stabilitätsuntersuchung durchgeführt. Analog zu den Analysen in Kapitel 3, muss hierfür auch wieder zwischen Kraft- und Verschiebungsrandbedingung unterschieden werden. Für die Krafrandbedingung muss lediglich die Randbedingung  $u_{n+1} = \delta u_{n+1} = 0$  und für die Verschiebungsrandbedingung zusätzlich  $u_1 = u_1^m$  und  $\delta u_1 = 0$  berücksichtigt werden. Die Stabilitätsanalyse kann somit anhand der folgenden Submatrizen

$$K_{i,j}^N = K_{ij} \quad \forall i, j \in (1, \dots, n)^2 \quad (4.10)$$

$$K_{(i-1)(j-1)}^D = K_{ij} \quad \forall i, j \in (2, \dots, n)^2 \quad (4.11)$$

erfolgen, wobei  $\mathbf{K}^N$  für die Krafrandbedingung und  $\mathbf{K}^D$  für die Verschiebungsrandbedingung verwendet wird. Da eine symmetrische Matrix nach dem Hurwitz Kriterium genau dann positiv definit ist, wenn alle führenden Hauptminoren positiv sind, folgt daraus, dass die Stabilität unter einer Krafrandbedingung notwendige Bedingung für die Stabilität unter einer Verschiebungsrandbedingung ist. Ist folglich eine Gleichgewichtskonfiguration stabil unter einer Krafrandbedingung, so ist sie ebenfalls stabil unter einer Verschiebungsrandbedingung.

In Abschnitt 3.3 hat sich bereits angedeutet, dass gewisse Zustandswechsel zwangsläufig dynamisch ablaufen, auch wenn die äußere Last (Kraft oder Verschiebung) quasi-statisch aufgeprägt wird. Um solche Zustandswechsel besser bewerten zu können, wird, wo nötig, neben dem statischen Problem (4.4) auch noch das dynamische Problem gelöst. Um die aus dem Durchschlagen einzelner Zellen resultierenden Schwingungen zu dämpfen, muss hierfür neben den aus der Masse resultierenden Trägheitskräften auch eine aus der Dämpfung resultierende Kraft berücksichtigt werden. Da Dämpfungskräfte aber per Definition nicht-konservativ sind, lassen sich die Bewegungsgleichungen im Gegensatz zu der statischen Analyse nicht aus einem Minimalprinzip herleiten. Es wird daher direkt von den Euler-Lagrange Gleichungen ausgegangen, welche um die Dämpfungskraft  $\gamma_u \dot{u}_i$  mit Dämpfungskoeffizient  $\gamma_i$  erweitert wird

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} - \frac{\partial L}{\partial u_i} + \gamma_i \dot{u}_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n+1. \quad (4.12)$$

Hierbei ist  $L = K - \Pi$  die übliche Lagrangefunktion die sich aus der kinetischer Energie

$$K = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2} m_i \dot{u}_i^2 \quad (4.13)$$

und dem Potential der konservativen Kräfte  $\Pi$  (Gleichung (4.1)) zusammensetzt. Für die Masse wird eine homogen verteilte Massendichte angenommen, so dass

$$m_1 = m_{n+1} = \frac{1}{2} m, \quad m_i = m \quad \forall i \in 2, \dots, n \quad (4.14)$$

gilt. Analog wird mit  $\gamma_i = 2m_i$  eine homogene, massenproportionale Dämpfungsverteilung angenommen. Wie sich später zeigen wird, führt diese Wahl dazu, dass Schwingungen die durch das plötzliche Durchschlagen ausgelöst werden sehr schnell gedämpft werden, die niederfrequenten Moden hingegen kaum beeinflusst werden und die Lösung somit nah an dem quasi-statischen

Limit ist. Unter Berücksichtigung von (4.1), (4.13) und (4.14) folgt damit aus (4.12) das Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial E_1}{\partial s_1} + \frac{1}{2}m\ddot{u}_1 + \frac{1}{2}\gamma\dot{u}_1 = F_1(t), \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial E_i}{\partial s_i} - \frac{\partial E_{i-1}}{\partial s_{i-1}} + m\ddot{u}_i + \gamma\dot{u}_i = 0 \quad \forall i = 2, \dots, n, \quad (4.16)$$

$$-\frac{\partial E_n}{\partial s_n} + \frac{1}{2}m\ddot{u}_{n+1} + \frac{1}{2}\gamma\dot{u}_{n+1} = 0, \quad (4.17)$$

wobei wie zuvor die Abkürzung  $s_i = u_i - u_{i+1}$  verwendet wurde. Dieses Differentialgleichungssystem wird numerisch mittels expliziter Zeitintegration gelöst. Für den Kraftgesteuerten Prozess wird hierbei für die rechte Seite

$$F_1(t) = Ft \quad (4.18)$$

angenommen und zusätzlich die Randbedingung  $u_{n+1} = \delta u_{n+1} = 0$  berücksichtigt. Aus dem der Euler-Lagrange Gleichung 4.12 zugrundeliegenden Variationsprinzip folgert man aus dieser Randbedingung, dass lediglich die Gleichungen 4.15 und 4.16 zu erfüllen sind. Für einen verschiebungsgesteuerten Prozess hingegen gilt  $F_1(t) = 0$  und aufgrund der Randbedingung  $u_1 = \epsilon t$  und  $\delta u_1 = 0$  muss in diesem Fall lediglich noch (4.16) erfüllt werden. Die entsprechende Reaktionskraft erhält man dann aus dem entsprechenden Kräftegleichgewicht

$$F_1^R = \frac{\partial E_1}{\partial s_1} + \frac{1}{2}m\ddot{u}_1 + \frac{1}{2}\gamma\dot{u}_1 = \frac{\partial E_1}{\partial s_1} + \frac{1}{2}\gamma\dot{u}_1. \quad (4.19)$$

## 4.2 Dreidimensionales Finite Elemente Modell

Zusätzlich zu dem stark vereinfachten Mehrzellenmodell werden beispielhaft einige Simulationen unter Berücksichtigung der kompletten Geometrie der Basiszelle durchgeführt. Die Approximation der Geometrie erfolgt dabei, analog zu dem Basiszellenmodell in Kapitel 3.2, mittels Finiten Elementen basierend auf der Timoshenko Hypothese. Für das Material wird neben den Materialparametern  $E = 2\text{GPa}$  und  $\nu = 0.42$  eine Dichte von  $\rho = 1.18\text{g/cm}^3$  angenommen. Dies sind typische Werte für das in (Frenzel u. a. 2016) verwendete Polymer

aus dem solche Strukturen mittels 3D Druck hergestellt werden können. Zur Dämpfung der hochfrequenten Schwingungen, die durch das schlagartige Beulen ausgelöst werden, wird eine Dämpfungsmatrix proportional zur Massenmatrix  $D_{ij} = \alpha M_{ij}$  mit Dämpfungskoeffizient  $\alpha$  angesetzt. Der Koeffizient  $\alpha$  wird dabei, wie zuvor, so gewählt, dass die hochfrequenten Schwingungen nach wenigen Zyklen abklingen, ohne dabei aber die niederfrequenten Deformationsmoden zu beeinflussen und somit nah an dem quasi statischen Grenzfall zu sein.

## 4.3 Ergebnisse

Im Folgenden wird zunächst systematisch anhand des fiktiven eindimensionalen Mehrzellenmodells das Verhalten von homogenen und inhomogenen Strukturen untersucht und abschließend das Verhalten anhand einiger ausgewählter dreidimensionaler Simulationen an beispielhaften Strukturen verifiziert. Zur Beschreibung von Zuständen wird im Folgenden immer wieder das Tupel  $p = [i_1, \dots, i_n]$  verwendet, in dem  $i_j \in \{1, 2, 3\}$  angibt in welchem Zustand sich die Zelle  $j$  befindet.

### 4.3.1 Eindimensionale homogene Strukturen

Zur Illustration des Stabilitäts- und Verformungsverhaltens von homogenen Zellkombinationen sind in Abbildung 4.1a - 4.1e die Gleichgewichtskonfigurationen für steigende Anzahl an fiktiven Zellen  $n$  zusammengefasst. Gleichgewichtskonfigurationen die unter einer Kraft- bzw. Verschiebungsrandbedingung instabil sind, sind gepunktet bzw. gestrichelt dargestellt. Basierend auf der Stabilitätsanalyse ist in Abbildung 4.1a weiterhin angedeutet wie ein kraftgesteuerter Belastungs-Entlastungszyklus aussehen würde. Für einen verschiebungsgesteuerten Prozess ist dies in 4.1b-4.1e dargestellt. Als Referenz sind weiterhin die Gleichgewichtslagen des einzelnen Elementes aus Abschnitt 3.3 dargestellt.

Für die Kombination von  $n = 2$  Zellen (Abbildung 4.1a) erhält man ein Verhalten das stark an das aus der Analyse der Basiszelle in Abschnitt 3.3 erinnert: Unter einer Verschiebungsrandbedingung zeigt die Struktur zwei Lokalisie-

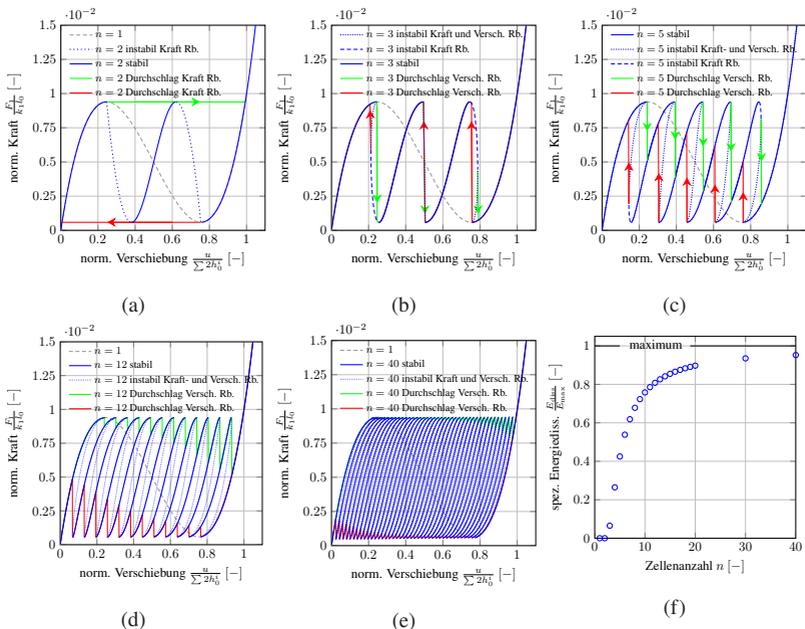


Abbildung 4.1: Statisches Verhalten einer Struktur aufgebaut aus  $n$  gleichen Zellen mit  $k_2/k_1 = 0.1$ ,  $k_3/k_1 = 0.01$  und  $h_0/l_0 = 0.5$ . Dargestellt sind in (a-e) für  $n = 2$  (a),  $n = 3$  (b),  $n = 5$  (c),  $n = 12$  (d) und  $n = 40$  (e) die Gleichgewichtslagen (blau), deren Stabilitätsverhalten sowie dynamische Durchschlagsphänomene die unter Belastung (grün) und Entlastung (rot) zu erwarten sind. (f) Zusammenfassung der zu erwartenden spezifischen Energiedissipation. (Verwendung mit Genehmigung aus Findeisen u. a. 2017).

rungsphasen in denen jeweils eine der beiden Zellen in Zustand 2 entlastet während die andere Zelle in Zustand 1 bzw. Zustand 3 entlastet. Zur Erinnerung: Es können nicht beide Zellen gleichzeitig in Zustand 2 entlasten, da dies kein lokales Minimum ist und eine solche Gleichgewichtskonfiguration somit instabil ist. Für einen kraftkontrollierten Zyklus ändert sich nichts im Vergleich zu der einzelnen Zelle, hier erwartet man (wie in Abbildung 4.1a dargestellt), dass die gleichen Durchschlagprozesse wie bei einer Zelle erfolgen. Im Gegensatz dazu zeigt ein verschiebungsgesteuerter Prozess keinerlei Durchschlagsphänomene: Belastung und Entlastung erfolgen auf dem gleichen Pfad.

Das Stabilitätsverhalten einer Struktur bestehend aus mindestens  $n = 3$  Zellen unter einer Verschiebungsrandbeingung ändert sich grundlegend (Abbildung 4.1b). Damit hier eine Zelle in Zustand 2 entlastet, während die anderen Zellen in Zustand 1 bzw. 3 (unter erneuter Ausdehnung) entlasten, ist eine Ausdehnung der gesamten Struktur nötig. Dies ist zu erwarten, da die Ausdehnung der Zellen in Zustand 1 oder 3 im Vergleich zu der Kompression der lokalisierenden Zelle, bei Berücksichtigung des Kräftegleichgewichts, überwiegt. Der Bereich in dem Lokalisierung unter einer Ausdehnung der Gesamtstruktur erfolgt ist aber auch unter einer Verschiebungsrandbedingung instabil (vgl. gepunktete Linie in Abbildung 4.1b). Möchte man folglich in einem verschiebungsgesteuerten Belastungs-Entlastungszyklus über die kritischen Kräfte hinaus, so geht dies zwangsläufig nur mit einer dynamischen Zustandstransformation, da unter Steigerung der äußeren Verschiebung keine benachbarte statische Gleichgewichtslage mehr existiert. Basierend auf der Stabilitätsbetrachtung stellt man weiterhin fest, dass eine solche dynamische Transformation während der Belastung und Entlastung jeweils bei unterschiedlichen Gesamtdehnungen erfolgt und sich somit auch bei einem kompletten verschiebungsgesteuerten Belastungs-Entlastungszyklus eine Hysterese zeigt.

An dieser Stelle stellt sich die Frage, warum unter Entlastung die Rücktransformation an anderer Stelle erfolgt, als die Hintransformation. Zur Erklärung dieses Zusammenhangs vergleicht man z.B. die Transformation der ersten Zelle mit der zugehörigen Rücktransformation der letzten Zelle unter Entlastung. Bei der Transformation unter Belastung liegt ein Dehnungszustand vor, bei dem alle Zellen die zum Kraftmaximum zugehörige Dehnung zeigen. Bei der Rücktransformation hingegen, liegt ein Dehnungszustand vor, bei dem eine Zelle die zum Kraftminimum zugehörige Dehnung aufweist, alle anderen Zellen befinden sich hingegen schon in Zustand 1, welcher wesentlich geringere Dehnungen aufweist. Somit wird auch klar, dass der Unterschied zwischen Hin- und Rücktransformation mit steigender Anzahl an Zellen größer wird.

Eine etwas anschaulichere Erklärung warum auch unter einer Verschiebungsrandbedingung ein schlagartiger Zustandswechsel stattfinden kann, erhält man, wenn man sich vor Augen führt, dass nach der Gleichgewichtsbedingung (4.2) die einzelne Zelle nur noch unter einer Kraftkontrolle steht und über die Verschiebungsrandbedingung nur noch die Gesamtverschiebung kontrolliert wird. Sind genug Zellen vorhanden, die die zur Lokalisierung einer Zelle nötige Energie unter Ausdehnung freigeben können, so ist klar, dass sobald eine Zelle

Zustand 2 erreicht eine schlagartige Lokalisierung dieser Zelle erfolgt. Im Fall der hier untersuchten homogenen Struktur spielt es ferner keine Rolle welche der sich in Zustand 1 befindenden Zellen unter Belastung lokalisiert bzw. welche der Zellen in Zustand 3 unter Entlastung entspannt. Geht man weiterhin davon aus, dass auch in einem dynamischen Prozess immer nur eine Zelle den Zustand wechselt, so kann auch für  $n = 12$  und  $n = 40$  der Zustandswechsel eindeutig bestimmt werden, obwohl es hier mehr als zwei mögliche Gleichgewichtskonfigurationen für die gleiche Gesamtdehnung gibt (vgl. Abbildung 4.1d und 4.1e).

Vergleicht man den stabilen (verschiebungsgesteuerten) Dehnungsbereich in dem sich eine beliebige Zelle in Zustand 2 befindet, so wird mit der vorangegangenen Argumentation auch klar, dass dieser mit der Anzahl an Zellen immer kleiner wird und für Strukturen mit  $n \geq 12$  nahezu komplett verschwindet (Abbildung 4.1d). Gleichzeitig steigt, mit der Anzahl an Zellen, auch die zu erwartende volumenspezifische Energiedissipation eines kompletten verschiebungsgesteuerten Belastungs-Entlastungszyklus. Normiert man die spezifische Energiedissipation  $E_{\text{diss}}$  mit dem theoretischen Maximum  $E_{\text{max}}$ , welches über einen kraftkontrollierten Prozess erzielt werden würde, so findet man ein asymptotisches Verhalten, in dem sich die spezifische Energiedissipation asymptotisch dem Maximum nähert (vgl. Abbildung 4.1f).

### 4.3.2 Eindimensionale inhomogene Strukturen

Kombiniert man in einer inhomogenen Struktur verschiedene Elemente miteinander, so lassen sich weitere interessante Eigenschaften realisieren. Zur Demonstration ist in Abbildung 4.2a das Verhalten einer inhomogenen Struktur bestehend aus elf Zellen dargestellt. Variiert wurde hierbei der Parameter  $k_3/k_1 \in \{0.0, 0.05, \dots, 0.04\}$ . Die restlichen Parameter ( $k_2/k_1 = 4$  und  $h_0/l_0 = 0.5$ ) werden so gewählt, dass nahezu alle Zellen für sich ein negatives kritisches Minimum haben (vgl. grau gestrichelte Linien). Die Gleichgewichtskonfigurationen des Zellverbundes sind blau gepunktet dargestellt und die, sowohl unter Kraft als auch unter einer Verschiebungsrandbedingung, stabilen Konfigurationen sind grün markiert. Wie sich zuvor gezeigt hat, sind die unter einer vorgeschriebener Verschiebung stabilen Gleichgewichtskonfigurationen, in denen sich eine Zelle in Zustand 2 befindet, ab einer gewissen Anzahl an Zellen vernachlässigbar, diese sollen daher hier und im Folgenden nicht wei-

ter beachtet werden. Allgemein ergeben sich bei einer solchen Struktur also  $N_s = n + 1$  stabile Gleichgewichtskonfigurationen, in denen sich die ersten  $k$  von  $n$  Zellen in Zustand 3 befinden und sich die folgenden  $n - k$  Zellen in Zustand 1 befinden. Entlastet man eine solche Struktur auf einem der stabilen Äste bis zur Kraft null, so wird sie in dieser Zustandskonfiguration verweilen. Unter erneuter Belastung wird sie dann selbstverständlich wieder diesem Ast folgen, die Steifigkeit, die die Struktur dabei zeigt, ergibt sich aber genau aus der Steifigkeit der individuellen Zellen, welche wiederum davon abhängt ob sich die Zelle in Zustand 1 oder 3 befindet. Belastet man folglich die Struktur bis zu einer bestimmten Last oder Verschiebung und entfernt die äußere Last danach wieder vollständig, so kann man mit diesem Prozess die Effektiv-eigenschaften einer solchen Struktur verändern bzw. programmieren. Der dabei mögliche Programmierbereich wird durch die Auswahl der verwendeten Zellen *a priori* festgelegt. Zur systematischen Darstellung dieser Eigenschaft ist in Abbildung 4.2b die Steifigkeit aus einem linearen Fit der stabilen Äste über die jeweilige Ausgangs bzw. Vordeformation  $u_{in}$ , bei der für die äußere Last  $F_1(u_{in}) = 0$  gilt, aufgetragen. Da der Parameterbereich aus dem die Zellen gewählt wurden konstant bleibt, ändert sich der Bereich in dem die Steifigkeit eingestellt werden kann, mit der Anzahl der Zellen, nur geringfügig. Die Differenz in der Steifigkeit zwischen den einzelnen programmierbaren Zuständen wird hingegen mit der Anzahl an Zellen kleiner.

Untersucht man auf die gleiche Art und Weise einen Zellverbund aus drei Elementen mit unterschiedlichen Höhen  $h_0/l_0 \in \{0.25, 0.435, 0.6\}$ , so erhält man bereits ein wesentlich komplexeres Bild (Abbildung 4.3). Ignoriert man die ausschließlich unter einer Verschiebungsrandbedingung stabilen Konfigurationen mit negativer effektiver Steifigkeit, so findet man hier bereits acht stabile Zustandskonfigurationen, obwohl lediglich drei Elemente kombiniert wurden (Abbildung 4.3a). Grund hierfür ist, dass sich die Kraft-Verschiebungskurven der einzelnen Zellen kreuzen. Folglich wechselt in einem Belastungs-Entlastungszyklus unter Entlastung diejenige Zelle als erstes von Zustand 3 in Zustand 1, die unter Belastung als erstes von Zustand 1 in Zustand 3 gewechselt hat und nicht wie in dem vorherigen Beispiel diejenige Zelle die unter Belastung als letztes von Zustand 1 in Zustand 3 gewechselt hat. Infolgedessen können mit kombinierten Belastungs-Entlastungszyklen alle möglichen Zustandskombinationen, in denen sich  $n - k$  beliebige Zellen in Zustand 1 und  $k$  Zellen in Zustand 3, befinden erreicht werden. Zwar existieren diese so gefundenen zusätzlichen stabilen Zustände theoretisch in dem

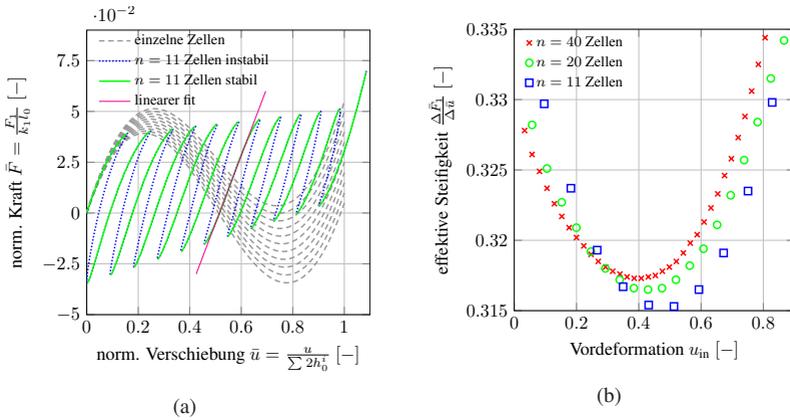
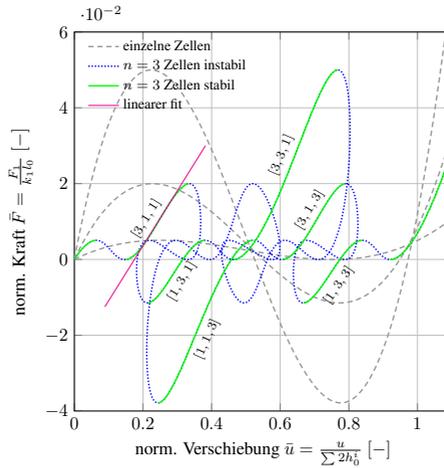


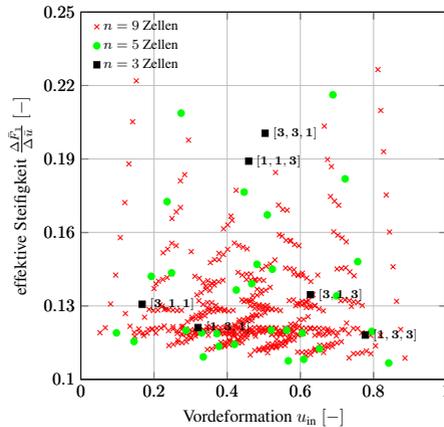
Abbildung 4.2: Verhalten einer Struktur aufgebaut aus  $n$  verschiedenen Zellen. (a) Stabile (grün) und Instabile (blau gepunktet) Gleichgewichtsconfigurationen für eine Zellkombination aus  $n = 11$  Zellen mit Parametern  $k_3/k_1 \in \{0.0, 0.005, \dots, 0.04\}$ ,  $k_2/k_1 = 4$  und  $h_0/l_0 = 0.5$  sowie das Verhalten der einzelnen Zellen (grau). (b) Zusammenfassung der effektiven Steifigkeit der stabilen Äste für verschiedene  $n$ , wobei  $k_3/k_1$  jeweils in  $n$  gleichmäßigen Inkrementen von 0 bis 0.04 variiert wurde. (Verwendung mit Genehmigung aus Findeisen u. a. 2017).

vorherigen Beispiel (Abbildung 4.2) auch. Um diese zu erreichen wäre aber das vorübergehende Aufbringen einer zusätzlichen äußeren Kraft an den individuellen Zellen nötig, die den Zustand dieser Zelle umschaltet. Dies erklärt auch, warum diese Zustände mit der hier angewandten Methodik nicht gefunden werden. Im Gegensatz zu dem vorherigen Beispiel ist die Anzahl  $N_s$  der möglichen stabilen Kombinationen, die über eine Steuerung der äußeren Last  $F_1$  oder der Verschiebung  $u_1$  erreichbar sind,  $N_s = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} = 2^n$ .

Wie sich dieser Mechanismus auf die möglichen programmierbaren Zustände in Abhängigkeit der Zellenanzahl auswirkt ist in Abbildung 4.3b dargestellt. Hierbei wurde die Beulelementhöhe  $h_0/l_0$  jeweils in drei, fünf bzw. neun gleichmäßigen Inkrementen von 0.25 bis 0.6 erhöht. Da in diesem Fall die Variation von  $h_0/l_0$  einen wesentlich stärkeren Einfluss auf das Verhalten der einzelnen Zellen hat, ist der programmierbare Bereich selbstverständlich wesentlich größer als zuvor (vgl. Abbildung 4.2b und 4.3b). Entscheidender ist nun aber, dass sich die programmierbaren Bereiche (bzgl. der äußeren Verschiebung) stark überschneiden was sich in der Darstellung in 4.2b dadurch



(a)



(b)

Abbildung 4.3: Darstellung analog zu Abbildung 4.2 aber mit einer gleichmäßigen Variation in der Beulelementhöhe  $h_0/l_0 \in [0.25, 0.6]$ . (a) Stabile (grün) und instabile (blau gepunktet) Gleichgewichtskonfigurationen für die Kombination von  $n = 3$  Zellen sowie Verhalten der einzelnen Zellen (grau gestrichelt). (b) Zusammenfassung der effektive Steifigkeit für  $n = 3$ ,  $n = 5$  und  $n = 9$  Zellen. Restliche Parameter sind  $k_2/k_1 = k_3/k_1 = 0.1$ . (Verwendung mit Genehmigung aus Findeisen u. a. 2017).

bemerkbar macht, dass für ähnliche äußere Vordeformationen  $u_{in}$  unterschiedliche Eigenschaften realisierbar sind. Beispielhaft ist dies für den Fall  $n = 3$  anhand der Zustandskonfiguration  $p_1 = [3, 1, 1]$  und  $p_2 = [1, 3, 1]$  in Abbildung 4.3a zu erkennen.

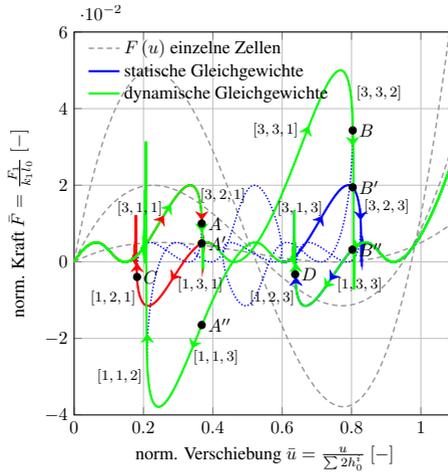
Um zu demonstrieren, dass die Steifigkeit nicht die einzige Eigenschaft ist die in einer solchen Struktur programmiert werden kann, soll als nächstes noch die Hysterese bzw. die Energiedissipation von kombinierten Belastungs-Entlastungszyklen näher untersucht werden. Im Gegensatz zu den homogenen Strukturen ist hier der Ablauf der Zustandswechsel, insbesondere bei der Berücksichtigung von einer Vielzahl an Elementen, nicht so offensichtlich. Die explizite Untersuchung der Belastungs-/Entlastungszyklen erfolgt daher an dieser Stelle unter Berücksichtigung der dynamischen Effekte, die bei einer solchen schlagartigen Zustandswechsel zwangsläufig auftreten.

Was bei Überschreiten der Grenzpunkte unter einer Verschiebungsrandbedingung passiert und wie mögliche Belastungs- und Entlastungszyklen im Fall der zuvor untersuchten Struktur aussehen können ist detailliert in Abbildung 4.4a dargestellt. Bevor auf die unterschiedlichen Belastungs-/Entlastungszyklen eingegangen wird, sollen zunächst die zwei Grenzpunkte  $A$  und  $B$  genauer betrachtet werden. Am Punkt  $A$  liegt die Zustandskonfiguration  $p_A = [3, 2, 1]$  vor. Zelle 1 befindet sich folglich bereits im gebeulten Zustand und dehnt sich somit unter abfallender Last aus, Zelle 3 befindet sich noch im Zustand 1 und dehnt sich demnach unter abfallender Last auch gerade aus. Zelle 2 hingegen befindet sich im Zustand 2 und lokalisiert somit in diesem Moment. Es ist folglich leicht nachvollziehbar dass von diesem Zustand ein Wechsel in den Zustand  $p_{A'} = [1, 3, 1]$  erfolgt. Ein Wechsel in den Zustand  $p_{A''} = [1, 1, 3]$  wäre zwar nicht im Widerspruch mit der Randbedingung, würde aber eine Umkehr der Bewegungsrichtung erfordern (Zelle 2 müsste sich ausdehnen), zusätzlich müsste Zelle 3 von Zustand 1 zu Zustand 3 wechseln. Beides würde zusätzliche Aktivierungsenergie benötigen, so dass die Transformation  $A \rightarrow A'$  energetisch günstiger ist. Am Punkt  $B$  hingegen liegt der Zustand  $p_B = [3, 3, 2]$  vor, wobei sich Zelle 1 und 2 gerade ausdehnen und Zelle 3 lokalisiert. Von diesem Punkt aus könnte somit ohne notwendige Bewegungsumkehr sowohl der Zustand  $p_{B'} = [3, 2, 3]$  als auch der Zustand  $p_{B''} = [1, 3, 3]$  erreicht werden. Unter Berücksichtigung der dynamischen Effekte scheint allerdings ein Wechsel in den Zustand  $p_{B''}$  der energetisch günstigere Prozess zu sein. Dies bestätigt wei-

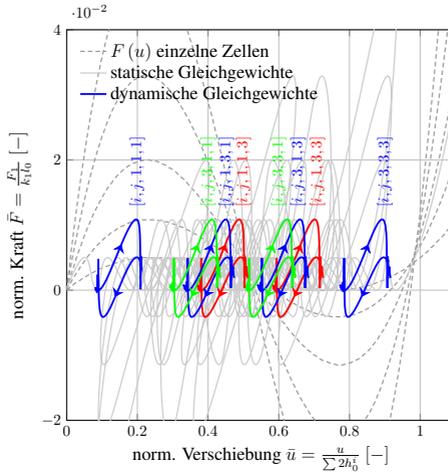
terhin die zuvor gemachte Beobachtung, dass alle der  $2^n$  möglichen stabilen Zustände auch unter Berücksichtigung der Dynamik erreicht werden können.

Betrachtet man nun verschiedene Belastungs-/Entlastungszyklen im Detail, so ergibt sich die größte Energiedissipation selbstverständlich für den kompletten Belastungs-/Entlastungszyklus. Wird hingegen nach der Zustandstransformation am Punkt  $A$  frühzeitig entlastet so folgt man dem Pfad mit Zustandszusammensetzung  $p = [1, 3, 1]$  bis der Zustandswechsel  $A \rightarrow A'$  am Punkt  $C$  in umgekehrter Richtung stattfindet. Die daraus resultierende Hysterese ist folglich dadurch geprägt, dass Zelle 1 und Zelle 2 ihre Zustände tauschen. Ein analoger Prozess findet statt, wenn bei Entlastung nach dem Zustandswechsel am Punkt  $D$  erneut bis zum Punkt  $E$  belastet wird. Auch diese Hysterese ist dadurch charakterisiert, dass Zelle 1 und Zelle 2 ihre Zustände wechseln, der Unterschied liegt nun aber darin, dass sich Zelle 3 in dem dritten Zustand befindet. Da sich die lokalen Eigenschaften von Zelle 3 zwischen Zustand 1 und Zustand 3 in dem zugehörigen Kräftehorizont kaum unterscheiden, ist auch die resultierende Hysterese sehr ähnlich, obwohl die Gesamtdehnung eine andere ist.

Für das hier präsentierte Beispiel von einer Kombination von nur drei Zellen ist eine solche Verschiebung der Hysterese nur für die kleinste Hysterese möglich. Mit den stabilen Zustandskonfigurationen steigt aber, mit der Anzahl der Zellen, auch hier die Anzahl möglicher Hysteresen sowie die möglichen Gesamtdehnungen bei der eine bestimmte Hysterese realisiert werden kann, exponentiell an. Beispielhaft ist dies in Abbildung 4.4b dargestellt. Hier sind die möglichen Realisierungen der kleinsten Hysterese, die sich in einem Zellverbund von fünf Zellen dadurch ergeben, dass die zwei schwächsten Zellen jeweils ihre Zustände wechseln. Die restlichen drei Zellen können alle möglichen Kombinationen von Zustand 1 und Zustand 3 annehmen. Natürlich sind zusätzlich auch Hysteresen möglich in denen mehr als zwei Zellen zyklisch ihre Zustände wechseln (analog zu dem kompletten Belastungs-/Entlastungszyklus in Abbildung 4.4). Zu beachten gilt es dabei aber, dass eine Hysterese aus einem zyklischer Wechsel von zum Beispiel nur Zelle 2 und 3 nicht möglich ist, da dies zwangsläufig ein Wechsel von Zelle 1 beinhaltet. Setzt man weiterhin eine ausreichende Anzahl an Zellen voraus, so dass jeder Zustandswechsel schlagartig erfolgt, ergeben sich zusätzlich auch Hysteresen in denen jeweils nur die erste Zelle seinen Zustand wechselt. Zusammenfassend sind bei  $n$  Zellen für die Hysterese, die sich durch den zyklischen Wechsel von  $k$  Zuständen



(a)



(b)

Abbildung 4.4: Verschiedene verschiebungsgesteuerte dynamische Belastungszyklen für eine inhomogene Struktur aufgebaut aus (a) 3 Zellen und (b) 5 Zellen mit einer jeweils gleichmäßigen Variation des Parameters  $h_0 \in [0.25, 0.6]$ . Die Tupel  $[i_1, \dots, i_n]$  mit  $i_j \in \{1, 2, 3\}$  geben die jeweilige Zustandszusammensetzung der stabilen Gleichgewichtskonfigurationen an.

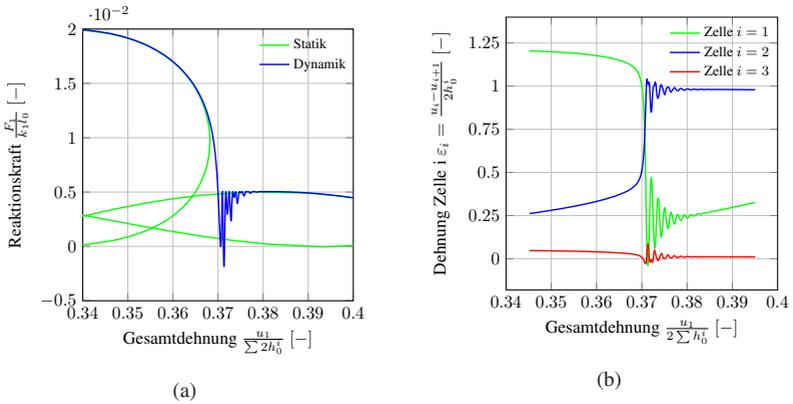


Abbildung 4.5: Detaillierte Darstellung des dynamischen Zustandswechsel  $A \rightarrow A'$  der in Abbildung 4.4a untersuchten Struktur. (a) Reaktionskraft als Funktion der Gesamtdéhnung (Ausschnitt aus Abbildung 4.4a). (b) Déhnungen der individuellen Zellen in Abhängigkeit der Gesamtdéhnung.

ergibt, jeweils  $2^{n-k}$  Realisierungen möglich. Im Grenzfall ergibt dies insgesamt  $N_h = \sum_{k=1}^n 2^{n-k} = 2^n - 1$  mögliche Hysteresen.

Anhand des dynamischen Modells lässt sich abschließend noch analysieren wie die Energiedissipation im Detail abläuft. Hierfür ist in Abbildung 4.5a der Zustandswechsel von  $[3, 2, 1]$  nach  $[1, 3, 1]$ , wie er in Abbildung 4.4a analysiert wurde, detailliert dargestellt. Weiterhin sind in Abbildung 4.5b die Déhnungen der einzelnen Zellen während dem Zustandswechsel als Funktion der Gesamtdéhnung aufgetragen. Der Prozess der zur Energiedissipation führt erfolgt in zwei Stufen: Zunächst wird durch den schlagartigen Zustandswechsel ein dynamischen Prozess in Gang gesetzt, welcher ein Teil der Verzerrungsenergie innerhalb aller Zellen in kinetische Energie umwandelt. Abhängig von dem Kraftniveau, welches durch den Zustandswechsel überwunden wird, ergeben sich für die einzelnen Zellen unterschiedliche maximale Amplituden. Das gesamte System ist somit dynamisch geworden und es werden lokale Schwingungen initiiert. In Abhängigkeit von der Dämpfung, werden diese Schwingungen im zweiten Schritt gedämpft und ein Anteil der Verzerrungsenergie schlussendlich dissipiert. Für die Energiedissipation spielt also folglich die Dynamik, ausgelöst durch den unkontrollierten Zustandswechsel, die entscheidende Rolle.

### 4.3.3 Dreidimensionale Strukturen

Um die Ergebnisse des periodischen Zellenmodells sowie des zuvor analysierten eindimensionalen Mehrzellenmodells zu bestätigen, wird nun noch das Verhalten dreidimensionaler Zellverbände untersucht. Hierfür erfolgt die Simulation eines Zellverbundes mit  $8 \times 10 \times 11$  Zellen mit Hilfe des in Abschnitt 4.2 dargestellten Modells. Beispielhaft werden hierbei zwei Gradientenstrukturen die sich durch eine Variation der Beulelementhöhe  $h_1$  in Belastungsrichtung auszeichnen betrachtet. Die Parameter für die einzelnen Lagen sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst. Die restlichen Parameter ( $d_1/b = 0.1$  und  $d_2/b = d_3/b = d_4/b = 0.2$ ) werden so gewählt, dass ein ungewollter Deformationsmodus auch in den schwächeren Zellen verhindert wird. Als Randbedingung wird

$$U_i^K = 0 \quad \forall K \in \mathcal{Z}_-, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.20)$$

$$U_3^K = -U_3t \quad \text{und} \quad U_i^K = 0 \quad \forall K \in \mathcal{Z}_+, \quad i = 1, 2. \quad (4.21)$$

aufgebracht. Hierbei ist  $\mathcal{Z}_+$  und  $\mathcal{Z}_-$  die Menge aller Elementknoten an dem oberen (+) und unteren (-) Rand des Zellverbundes.

Abbildung 4.6 zeigt die Spannungs-Dehnungs Kurven eines kompletten verschiebungsgesteuerten Belastungs-Entlastungs Zyklus für den progressiven und degressiven Gradienten. Bei dem Vergleich von Belastungs- und Entlastungspfad stellt man zunächst fest, dass die Rücktransformation unter Entlastung auch hier in der gleichen Reihenfolge stattfindet, wie die Transformation unter Belastung erfolgte. Dies bestätigt die im vorherigen Abschnitt gemachte Beobachtung, dass  $(2n)^2$  mögliche stabile Zustände durch kombinierte Belastungs-Entlastungszyklen erreicht werden können auch für endliche dreidimensionale Strukturen.

Betrachtet man die Transformationen genauer, so sind für den progressiven Gradienten (Abbildung 4.6b) unter Belastung deutlich die  $2n = 2 \times 11$  unkontrollierten Zustandswechsel durch den abrupten Abfall der Reaktionskraft und die dadurch initiierten Schwingungen zu erkennen. Im Fall des degressiven Gradienten (Abbildung 4.6a) sind auf den ersten Blick hingegen bei Belastung nur 18 Transformationen zu erkennen. Ursache hierfür ist, dass die zwei Beulelemente der Zellen in der fünften bis achten Lage jeweils gleichzeitig ihren Zustand wechseln (deutlich an den größeren Intervallen zwischen den

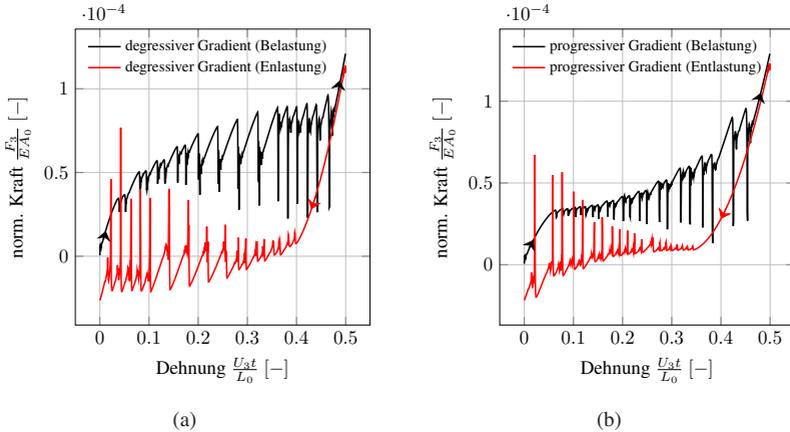


Abbildung 4.6: Dynamisches Verhalten von dreidimensionalen Zellverbänden mit degressiven (a) und progressiven (b) Strukturgradienten. Gradientenparameter sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst, restliche Parameter ( $d_1/b = 0.1$  und  $d_2/b = d_3/b = d_4/b = 0.2$ ) sind wie in den Simulationen zu Abbildung 3.3b gewählt. Die Normierung erfolgte mit dem Elastizitätsmodul  $E$  sowie mit der Querschnittsfläche  $A_0$  und der Ausgangshöhe der Struktur  $L_0$ . (Verwendung mit Genehmigung aus Findeisen u. a. 2017).

jeweiligen Transformation zu erkennen). Dies steht im Widerspruch zu dem in der Statik angewandten Minimalprinzip, dieses besagt, dass Zustandswechsel immer auf der minimal möglichen Größe stattfinden. In Abhängigkeit von dynamischen Faktoren wie Dämpfung und Trägheit kann eine simultane Transformation im dynamischen Fall allerdings durchaus vorkommen. So wurde erst kürzlich in (Liu u. a. 2018) gezeigt, dass eine simultane Transformation durch eine starke Dämpfung und hohe Belastungsgeschwindigkeit begünstigt wird. Um die Simulationszeit im vertretbaren Rahmen zu halten, ist die Dehnungsgeschwindigkeit in dem hier vorliegenden Fall mit  $\dot{U}_3/L_0 = 217\text{s}^{-1}$  in der Tat verhältnismäßig hoch, was die teilweise simultane Transformation erklärt.

Ebenfalls sind unter Entlastung bis zur äußeren Deformation  $U_3 = 0$  noch nicht alle Zellen wieder zurück transformiert, weshalb unter Entlastung lediglich 17 (degressiver Gradient) bzw. 20 (progressiver Gradient) Transformationen zu beobachten sind. Die Physikalische Erklärung hierfür ist verhältnismäßig einfach: Da sich die schwächeren Zellen bereits wieder in Zustand 1 befinden,

Lage	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$h_1$ progressiv	0.16	0.164	0.168	0.172	0.18	0.188	0.196	0.21	0.226	0.24	0.28
$h_1$ degressiv	0.16	0.2	0.214	0.23	0.244	0.252	0.26	0.268	0.274	0.278	0.28
$P_{\max}^{\text{per}}/E \times 10^5$	3.4	5.3	6.1	7.1	7.9	8.4	8.9	9.3	9.6	9.8	9.9
$P_{\max}^{\text{expl}}/E \times 10^5$	3.5	5.0	5.7	6.5	7.6	8.4	8.9	9.2	9.3	9.4	9.5

Tabelle 4.1: Geometrieparameter  $h_1/b$  für die dreidimensionalen Gradientenstrukturen die in Abbildung 4.6 analysiert wurden. Kritische Spannungen  $P_{\max}^{\text{expl}} = F_3/A_0$  des vollständigen dreidimensionalen Strukturmodells mit degressivem Gradienten verglichen mit den kritischen Spannungen  $P_{\max}^{\text{per}}$ , wie sie mit dem periodischen Zellenmodell aus Kapitel 3.2 (vgl. Abbildung 3.3b) vorhergesagt wurden.

ist auf Grund des Kräftegleichgewichtes zum Erreichen der kritischen Minima der starken Zellen, eine Ausdehnung der schwachen Zellen nötig. Je nach Verhalten der schwächeren Zellen unter Zugbelastung, kann somit zur Rücktransformation aller Zellen eine effektive Zugdeformation  $U_3 < 0$  nötig sein. Dies veranschaulicht auf weitere Art und Weise die ausgeprägte Pfadabhängigkeit des Verhaltens dieser Strukturen.

Wie durch das gezielte Design der Basiszelle beabsichtigt, zeigt die Struktur, bis auf die gewollten Beulvorgängen der einzelnen Zelllagen, keine weiteren Instabilitätsmoden. Es ist allerdings auffällig, dass durch das Basiszellenmodell die kritischen Beulspannungen zwar in der richtigen Größenordnung vorhergesagt werden, teilweise allerdings doch von den hier berechneten Werten abweichen (vgl. Tabelle 4.1). Eine Ursache hierfür ist, dass beim Basiszellenmodell von Zellen ausgegangen wird, die in einer unendlichen Struktur eingebettet sind und somit die Wirkung von den Randbedingungen (4.20) und (4.21) unberücksichtigt bleibt. Ein weiterer Grund ist, dass über die periodischen Randbedingungen Lokalisierungsphänomene falsch abgebildet werden, ein Zusammenhang der im nächsten Kapitel noch ausführlich diskutiert wird.

# 5 Diskussion

## 5.1 Methodik

Ziel des ersten Teils dieser Arbeit war es ein tiefgreifendes Verständnis für die in Kapitel 2 entwickelte Struktur zu erlangen. Um die treibenden Mechanismen auf den verschiedenen relevanten Skalen getrennt analysieren zu können, wurden hierfür Modelle entwickelt, die sich auf die für die jeweilige Skala dominierenden Mechanismen konzentrieren. Diese Modellierung wird im Folgenden im Zusammenhang mit den Ergebnissen kritisch beleuchtet.

Trotz, oder gerade wegen seiner Einfachheit kam dem Federmodell eine zentrale Bedeutung zu. Mit diesem konnte aufgezeigt werden, welche vielfältigen (lokalen) Charakteristiken mit einem einzelnen Beulelement durch Variation von lediglich drei Parametern erzielt werden können. Als Ersatzmodell für die in dieser Arbeit entwickelte Basiszelle, konnte das Federmodell zudem entscheidend zum Verständnis der treibenden Mechanismen beitragen. So konnten hierdurch verschiedene Mechanismen identifiziert werden, über die die kritischen Spannungen  $P_{\min}$  und  $P_{\max}$  auf nahezu beliebige Art und Weise und insbesondere auch unabhängig voneinander eingestellt werden können.

Für die Analyse der Basiszelle wurde eine Methodik angewandt, die sich zur Homogenisierung, also zur Bestimmung von Effektiveigenschaften von Materialien mittels der Analyse der ihr zugrundeliegenden Struktur, bewährt hat (Bishop und Hill 1951; Hill 1963; Hill 1972; Sluis u. a. 2012; Miehe 2002; Hohe und Becker 2003; Mesarovic und Padbidri 2005). Die hier angewandte Methodik basiert auf der Analyse so genannter repräsentativer Volumenelemente. Mit diesem Begriff - erstmals von Rodney Hill (Hill 1963) eingeführt - sind zwei grundlegende Forderungen an das analysierte Volumenelement verbunden:

„This phrase will be used when referring to a sample that (a) is structurally entirely typical of the whole mixture on average, and (b) contains a sufficient number of inclusions for the apparent overall moduli to be effectively independent of the surface values of traction and displacement, so long as these values are ‘macroscopically uniform’. That is, they fluctuate about a mean with a wavelength small compared with the dimensions of the sample, and the effects of such fluctuations become insignificant within a few wavelengths of the surface. The contribution of this surface layer to any average can be made negligible by taking the sample large enough.“ (Hill 1963, Seite 359)

Da die Basiszelle alle relevanten Strukturinformationen enthält, erscheint Bedingung (a) zunächst erfüllt. Bedingung (b) fordert mit anderen Worten, dass das repräsentative Volumenelement (RVE) so groß gewählt werden muss, dass die Effekteigenschaften unabhängig von den am RVE aufgeprägten Randbedingungen sind, wobei angenommen wird, dass die Wellenlänge der Fluktuation der betrachteten Felder klein im Vergleich zu dem betrachteten Volumenelement ist. Für periodische Mesostrukturen lässt sich diese Bedingung mittels der hier angewandten periodischen Randbedingungen erfüllen. Der Einfluss einer periodischen Nachbarschaft wird damit implizit berücksichtigt, ohne dass dabei zu große Volumenelemente betrachtet werden müssen.

Die hier untersuchten Strukturen weisen allerdings ein geometrisch nichtlineares Verhalten auf. Es genügt daher zur Beurteilung der Anwendbarkeit dieses Verfahrens, nicht alleine die Ausgangskonfiguration zu betrachten. Wie die Analyse von Zellverbänden gezeigt hat, kann ab einer gewissen Zellenanzahl die Deformation in einer Zelle lokalisieren, während sich die restlichen Zellen ausdehnen (vgl. Abschnitt 4.3.1). Das Dehnungsfeld fluktuiert ab diesem Punkt folglich über mehrere Zellen und kann nicht mehr als makroskopisch homogen angenommen werden, wodurch schließlich Bedingung (b) verletzt wird. Weiterhin besteht ein Zellverbund nach der Lokalisierung aus verschiedenen Zellen, die aufgrund ihrer stark unterschiedlichen Dehnungen auch unterschiedliche Eigenschaften zeigen können, wodurch ebenfalls Bedingung (a) verletzt wird.

Durch die aufgeprägten periodischen Randbedingungen wird das Beulen offensichtlich nicht unterbunden. Allerdings wird durch Erzwingen der Periodizität angenommen, dass benachbarte Zellen gleichzeitig beulen und damit, im Vergleich zu einer Zelle eingebettet in einem Zellverbund, der Einfluss der

Nachbarschaft falsch berücksichtigt. Unter der Annahme, dass die Struktur keine weiteren Instabilitätsmoden zeigt, die durch die periodische Fluktuation unterbunden werden, ist der hier verfolgte Ansatz folglich unter Belastung bis zum Erreichen des ersten Spannungsmaximums gültig. Analog gilt dies für die Entlastung bis zum ersten Spannungsminimum, wenn beginnend von einer Konfiguration entlastet wird in der sich alle Zellen in Zustand 3 befinden.

Diese Annahme kann dadurch gerechtfertigt werden, dass die Struktur gerade so gestaltet wurde, dass alle anderen Instabilitätsmoden unterbunden werden (vgl. Strukturbeschreibung in Kapitel 2). Für Strukturen mit einer endlichen Anzahl an Zellen wurde dies in Abschnitt 4.3.3 anhand der Analyse von dreidimensionalen Strukturen exemplarisch überprüft und ist ferner auch durch die in Frenzel u. a. 2016 durchgeführten Experimente bestätigt. Mesostrukturierte Materialien (wie zum Beispiel Schäume oder Honigwabenstrukturen) können allerdings auch durchaus Instabilitätsmoden zeigen, die sich über mehrere Basiszellen erstrecken (vgl. z.B. Papka und Kyriakides 1994; Papka und Kyriakides 1998a; Papka und Kyriakides 1998b; Triantafyllidis und Schraad 1998; Combescure u. a. 2016). Moden mit einer Wellenlänge größer als die in Abschnitt 4.3.3 untersuchten Strukturen, werden mit der hier verfolgten Methodik folglich nicht erfasst. Auf pragmatische Art und Weise könnten solche Moden, wie dies z.B. in Bertoldi u. a. 2008 erfolgte, durch eine weitere Vergrößerung des Volumenelementes analysiert werden. Alternativ könnte die Periodenlänge der kritischen Moden mathematisch rigoros durch Anwendung von speziellen Methoden basierend auf Bloch Wellen (Geymonat u. a. 1993; Laroussi u. a. 2002; Bertoldi u. a. 2008; Combescure u. a. 2016) berechnet werden. Zum rigorosen Nachweis des Stabilitätsverhaltens wäre die Anwendung eines solchen Ansatzes auch hier nötig. Weiterhin kann natürlich, auch wenn keine weiteren (langwelligen) Instabilitätsmoden auftreten, die periodische Randbedingung eine versteifende (oder auch entfestigende) Wirkung auf den hier vorliegenden Instabilitätsmodus haben. Wie der Vergleich mit den dreidimensionalen Strukturen aber zeigt (vgl. Tabelle 4.1) ist auch dieser Fehler durchaus vernachlässigbar. Eine weitergehende allgemeine Diskussion der Wirkung von alternativen Randbedingungen ist in Miehe 2002 zu finden. Speziellen Fokus auf die Wirkung von alternativen Randbedingungen im Zusammenhang mit Lokalisierungsphänomenen ist in Coenen u. a. 2012 zu finden.

Akzeptiert man den durch die Randbedingung verursachten Fehler, so ergibt sich bei der Umsetzung einer Homogenisierung allerdings ein weiteres grundle-

gendes Problem. Versucht man mit der aus der Homogenisierung gewonnenen Materialbeschreibung ein äquivalentes Kontinuumsproblem zu formulieren, so funktioniert dies nicht ohne weiteres. Im Folgenden erfolgt eine detailliertere Darstellung und Diskussion dieser Problematik anhand des naiven Versuchs ein äquivalentes Kontinuumsproblem zu formulieren. Hierfür wird das Potentials

$$\Pi = \int_0^L E (\partial_X u) dX, \quad (5.1)$$

eines kontinuierlichen Stabes mit der Länge  $L$  betrachtet. Hierbei wurde analog zu dem diskreten Problem (4.1) das Potential der inneren Kräfte  $E$  aus dem vereinfachten Federmodell (Gleichung (3.1)) übernommen. Im Unterschied zu dem diskreten Modell, wird als Dehnung nun aber nicht die differenzielle Dehnung  $(u_i - u_{i+1})/h$ , sondern der Verschiebungsgradient  $H = \partial_X u$  verwendet. Zur Lösung des Kontinuumsproblems, basierend auf dem Potential (5.1) wird auf die Maxwell-Regel zurückgegriffen, diese wird vielfach zur Beschreibung eines Phasenübergangs in kontinuierlichen Materialien mit nicht konvexem Potential angewandt (vgl. Clerk-Maxwell 1875; Balk u. a. 2001a; Puglisi und Truskinovsky 2002). Die Maxwell-Regel folgt aus dem absolutem Minimum von (5.1) und kann anschaulich wie folgt formuliert werden: Die Phasentransformation erfolgt unter konstanter äußerer Kraft (Spannung), der so genannten Maxwell-Kraft  $F_M$ . Das Kraftniveau  $F_M$  ist dabei dadurch gegeben, dass die sogenannte Maxwell-Linie die Kraft-/Verschiebungskurve  $F = \frac{\partial E}{\partial u}$  des lokalen Potentials in zwei gleich große Flächen  $A_M$  unterteilt (vgl. Abbildung 5.1a). Eine rigorose Herleitung der Maxwell-Regel ist in Anhang A.1 zu finden.

Nach der Maxwell-Regel (vgl. Abbildung 5.1a) erfolgt die Phasentransformation folglich unter Be- und Entlastung auf dem selben Pfad, wohingegen das hier verwendete diskrete Modell eine deutliche Pfadabhängigkeit zeigt. Einen Hinweis zur Erklärung dieses Widerspruchs ist bereits in der Originalarbeit (Clerk-Maxwell 1875) zu finden, dort heißt es zur Erklärung:

„We have hitherto supposed the experiment to be conducted in such a way that the density is the same in every part of the medium. This, however, is impossible in practice, as the only condition we can impose on the medium from without is that the whole of the medium shall be contained within a certain vessel. Hence if it is possible for the medium to arrange itself so that part has one

density and part another, we cannot prevent it from doing so.“  
(Maxwell 1875, Clerk-Maxwell 1875)

Der entscheidende Unterschied zwischen dem diskreten und dem kontinuierlichen Modell liegt folglich in der verwendeten Zustandsbeschreibung. Während im kontinuierlichen Modell, wie von Maxwell angenommen, beliebige Phasenverteilungen möglich sind, können im diskreten Modell nur diskrete Zustandsverteilungen angenommen werden. Weitere mathematisch gestützte Erklärungen findet man in Balk u. a. 2001a; Puglisi und Truskinovsky 2000; Puglisi und Truskinovsky 2002. Demnach existieren im diskreten Fall neben dem globalen Minimum eine Vielzahl lokaler Minima, die durch gewisse Energiebarrieren voneinander getrennt sind. Analog zu Puglisi und Truskinovsky 2002 wurde in dieser Arbeit angenommen, dass die Struktur solange in einem lokalen Minimum verbleibt, bis dieses schließlich instabil wird und somit kein lokales Minimum mehr ist. Der Wechsel in das nächst gelegene Minimum geht dann mit dem diskreten unkontrollierten Zustandswechsel einher. Im kontinuierlichen Fall hingegen ist unter infinitesimaler Dehnungssteigerung auch immer eine infinitesimale Phasentransformation möglich und die dabei zu überwindende Energiebarriere ist demnach null (Puglisi und Truskinovsky 2002).

Über den nun offensichtlichen Widerspruch zwischen kontinuierlicher und diskreter Beschreibung hinaus, macht die vorherige Illustration noch zwei weitere Phänomene deutlich: Bei genauer Betrachtung der Maxwell-Regel zeigt sich, dass das Effektivverhalten eines Kontinuumsproblem unabhängig von der Größe der Struktur  $L$  ist, wohingegen das diskrete Modell einen deutlichen Größeneffekt zeigt in dem insbesondere das Stabilitätsverhalten von der Strukturgröße abhängt. Die Analyse des diskreten Modells in Abschnitt 4.3.1 hat deutlich gemacht, dass dieser Größeneffekt von dem Größenverhältnis von lokalisierender Struktur zu der Gesamtgröße geprägt wird. Es ist somit auch nicht zu erwarten, dass das Kontinuumsproblem diesen Größeneffekt abbildet, da die Lokalisierungslänge in keiner Art und Weise in die Beschreibung (5.1) eingeht. Die Problematik einer nicht geeigneten Zustandsbeschreibung macht sich weiterhin in umgekehrter Art und Weise bei der numerischen Lösung von (5.1), bzw. ganz allgemein bei der numerischen Lösung von Lokalisierungsphänomenen im Kontinuum, bemerkbar. Durch Verwendung einer Approximation (z.B. über Finite Elemente) wird die mögliche Lokalisierung stark abhängig von der möglichen Zustandsbeschreibung, welche wiederum durch Faktoren

wie Elementgröße, Ansatzfunktionen und numerische Integration bestimmt wird.

Die beiden zuvor beschriebenen Effekte sind aus der Literatur in anderem Zusammenhang bereits bestens bekannt. Die starke Netzabhängigkeit bei Verwendung von Finiten Elementen zur Beschreibung von Lokalisierungsphänomenen und deren Regularisierung wurde z.B. bereits intensiv in Borst 1991; Borst u. a. 1993; Forest u. a. 2005; Mazière und Forest 2015 und Forest 2016 untersucht. Möglichkeiten zur Beschreibung von Größeneffekten im Rahmen der Kontinuumsmechanik sind unter anderem in Diebels und Steeb 2002; Diebels und Steeb 2003; Forest und Sievert 2003b und Dehm u. a. 2006 behandelt. Wie es die vorhergehende Diskussion bereits vermuten lässt, verfolgen hierbei alle genannten Arbeiten eine Erweiterung der Zustandsbeschreibung der klassischen Kontinuumsmechanik. Die Möglichkeiten zur Abbildung von Größeneffekten und Lokalisierungsphänomenen über eine Verallgemeinerung der Kontinuumsbeschreibung wird - im Zusammenhang mit der in dieser Arbeit entwickelten Struktur - intensiv im zweiten Teil dieser Arbeit (Kapitel 6) untersucht.

Zusammenfassend, lassen sich die Erkenntnisse aus der Analyse der Basiszelle in Abschnitt 3.3 nicht ohne weiteres zur Analyse eines effektiven Kontinuumsproblems anwenden. Die hier angewandte Methodik wurde daher auch als Basiszellenmodell und nicht als Homogenisierung bezeichnet. Sie ist somit rein als Hilfsmittel zur isolierten Analyse der Mesostruktur unter Berücksichtigung der zuvor beschriebenen Grenzen zu sehen.

Alternativ zu einer Kontinuumsbeschreibung wurden die Effektiveigenschaften von Zellverbänden daher in Kapitel 4 mit Hilfe eines diskreten Modells analysiert. Zunächst kam hierfür ein statisches Modell zusammen mit dem Bogenlängenverfahren und einer Stabilitätsanalyse zum Einsatz. Das Bogenlängenverfahren liefert dabei automatisch alle Gleichgewichtskonfigurationen, die theoretisch über die vorgegebene Randbedingung erreichbar sind. Dies ist ein entscheidender Vorteil gegenüber einer Integration der dynamischen Differentialgleichung, bei der zum Auffinden der (*a priori* unbekannt) Gleichgewichtslagen eine Definition des kompletten (ebenfalls unbekannt) Lastpfades nötig wäre. Bereits bei der Analyse des vereinfachten Federmodells hat sich allerdings gezeigt, dass gewisse Zustandswechsel selbst unter einer quasi-statischen Randbedingung zwangsläufig dynamisch ablaufen. Bei Zellverbänden laufen ab einer gewissen Anzahl an Zellen sogar alle Zustandswech-

sel zwangsläufig dynamisch ab. Eine Analyse von kompletten Belastungs- und Entlastungszyklen ist somit mittels des statischen Modells nur über zusätzliche Annahmen über den Ablauf der Zustandswechsel möglich. Hierdurch wird das statische Modell allerdings weit über seine eigentliche Aussagekraft hinaus interpretiert. Insbesondere macht sich das dadurch bemerkbar, dass hierdurch Hysteresen beobachtbar sind und somit Aussagen über eine Energiedissipation getroffen werden können, was per Definition im Widerspruch zu dem angewandten elastischen Modell (vgl. Gleichung 4.1) steht. Um die Erkenntnisse aus der Interpretation des statischen Modells zu bestätigen und insbesondere den Dissipationsmechanismus genauer zu verstehen, kam zusätzlich ein dynamisches Modell zum Einsatz. Für den Grenzfall einer quasi-statischen Randbedingung konnten hierdurch die getroffenen Annahmen über den Ablauf des Zustandswechsels bestätigt werden. Es hat sich aber auch gezeigt, dass ab einer gewissen Belastungsgeschwindigkeit zusätzliche dynamische Effekte auftreten, die in dieser Arbeit nicht weiter untersucht wurden. Erste Untersuchungen dynamischer Effekte bei der Zustandstransformation diskreter und kontinuierlicher Strukturen sind in den Referenzen Bruno 1995; Rosakis und Knowles 1997; Balk u. a. 2001a; Balk u. a. 2001b; Slepyan und Ayzenberg-Stepanenko 2004; Slepyan u. a. 2005 und Liu u. a. 2018 zu finden. Eine weitere Diskussion des Dissipationsmechanismus erfolgt in Abschnitt 5.3.

Abschließend ist noch hervorzuheben, dass für die Stabilitätsanalyse insbesondere die richtige Behandlung der Randbedingungen entscheidend ist. Fälschlicherweise wird eine instabile Gleichgewichtskonfiguration oftmals mit einer negativen effektiven differentiellen Steifigkeit gleichgesetzt. Bereits das vereinfachte Federmodell hat aber gezeigt, dass eine solche Gleichgewichtskonfiguration unter einer Verschiebungsrandbedingung durchaus stabil sein kann (vgl. Abbildung 3.2). Die Analyse von Zellverbänden hat weiterhin gezeigt, dass auch der umgekehrte Fall möglich ist: Eine Gleichgewichtskonfiguration mit effektiver positiver differentieller Steifigkeit kann ebenfalls instabil sein (vgl. z.B. Abbildung 4.2a).

## 5.2 Größeneffekte

Das Verhalten eines Materials mit gleichmäßiger (periodischer) Mesostruktur kann normalerweise vollständig mittels einer Homogenisierung der Basis-

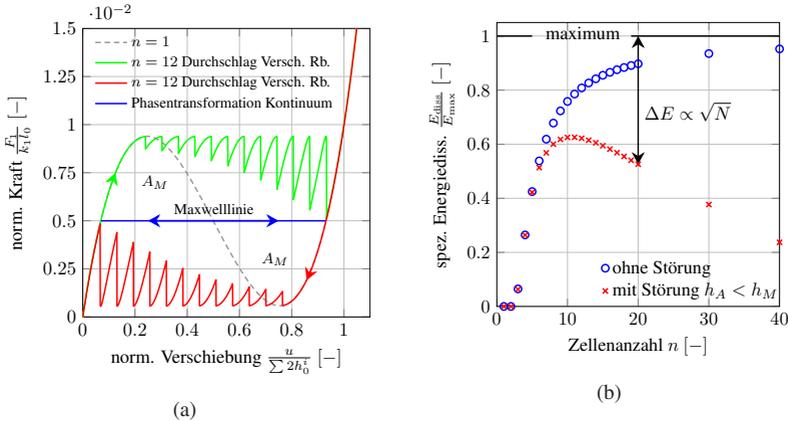


Abbildung 5.1: Diskussion und Vergleich der Ergebnisse mit der Literatur. (a) Vergleich des in dieser Arbeit angewandten Modells mit der Maxwellregel für Kontinuierliche Materialien sowie (b) qualitative Darstellung der Überlagerung des Größeneffekts der aus der Anfälligkeit gegenüber Störungen resultiert.

zelle charakterisiert werden. Für irreguläre Mesostrukturen ist oftmals eine statistisch repräsentative Charakterisierung über die Analyse sogenannter repräsentativer Volumenelemente (vgl. Kapitel 5.1, sowie Hill 1963 und Hill 1972) möglich. Ändert man die Größe der betrachteten Volumenelemente, so darf dies keinen Einfluss auf die effektiven Eigenschaften haben. Wie die Diskussion im vorherigen Abschnitt gezeigt hat, ist eine klassische Homogenisierung für die hier entwickelte Struktur allerdings nicht möglich, was sich unter anderem in den ausgeprägten Größeneffekten bemerkbar macht.

Die Untersuchung der Größeneffekte erfolgte daher in dieser Arbeit mittels eines diskreten Modells in dem die Anzahl der betrachteten Zellen sukzessive erhöht wurde. Hierfür muss auf Grund des Stabilitätsverhaltens zwischen kraft- und verschiebungsgesteuerten Prozessen unterschieden werden. Unter Vernachlässigung äußerer Störungen zeigen homogene Strukturen unter einer Krafrandbedingung keinerlei Größeneffekte. Alle Zellen spüren die gleiche äußere Kraft und ein schlagartiges Durchschlagen ist nur möglich, wenn dies in allen Zellen gleichzeitig passiert. Kontrolliert man hingegen die äußere Deformation, so ist der innere Zustand für eine fixierte Randbedingung nicht eindeutig und eine Dehnungslokalisierung wird möglich. Im statischen Fall

folgt aus der Bedingung für Stabilität, dass immer nur genau eine Zelle lokalisiert, während alle anderen Zellen unter erneuter Ausdehnung entspannen (vgl. Abschnitt 4.3.1 und Puglisi und Truskinovsky 2002). Das Effektivverhalten ist somit von dem Verhältnis von lokalisierender zu entspannender Struktur und damit von der Anzahl der Zellen abhängig. Betrachtet man beispielsweise die volumenspezifische Energiedissipation, so nähert sich diese mit wachsender Zellenanzahl asymptotisch dem Verhalten der einzelnen Zelle unter einer Krastrandbedingung an. Dies erscheint vor allem vor dem Hintergrund sinnvoll, als dass der Lokalisierungsvorgang der einzelnen Zelle durch eine Krastrandbedingung überhaupt nicht kontrolliert wird, ebenso wie unter einer Verschiebungsrandbedingung die Lokalisierung der einzelnen Zelle im Grenzfall  $n \rightarrow \infty$  nicht mehr kontrolliert werden kann.

Die vorherige Diskussion lässt für  $n \rightarrow \infty$  einen Grenzwert der Energiedissipation erwarten, wie sie die einzelne Zelle unter einer Krastrandbedingung zeigt. Dieser Grenzwert ist allerdings nicht konsistent mit der Maxwell-Regel, wonach im Kontinuumslimit ( $n \rightarrow \infty$ ) eine Transformation über die Maxwell-Linie und damit keine Energiedissipation zu erwarten wäre (vgl. Abbildung 5.1a). Dieser Widerspruch lässt sich auflösen, in dem man sich die Energiebarriere  $h_M$  anschaut, die in diskreten Strukturen für eine frühzeitige Transformation bei der Maxwell-Kraft  $F_M$  zu überwinden ist. Nach Puglisi und Truskinovsky 2002 gilt für diese Energiebarriere

$$h_M \propto 1/n \tag{5.2}$$

wobei  $n$  die Anzahl an instabilen Elementen ist. Im Grenzfall unendlich vieler Elemente, und zwar nur im Grenzfall, ist somit auch in diskreten Strukturen eine Transformation über die Maxwell-Linie möglich. Für endliche Strukturen hingegen bleibt die Energiebarriere endlich und eine frühzeitige Transformation ist ausgeschlossen.

Diese, durch das in dieser Arbeit verwendete Modell beschriebene, Situation ist allerdings vom physikalischen Gesichtspunkt fragwürdig, da man bereits für viele Elemente einen Übergang zum Kontinuumsverhalten erwarten würde. Um diesen Übergang zu sehen, muss das Modell um äußere Störungen (z.B. durch thermische Fluktuation verursacht) erweitert werden. Diese lassen sich in der Realität niemals komplett ausschließen und nach (5.2) folgt für eine Störung mit fixierter Aktivierungsenergie  $h_M$ , dass bereits für endliche Strukturen eine Transformation über die Maxwell-Linie möglich ist. Ist hingegen für die gleich

Anzahl an Zellen eine Aktivierungsenergie  $h_A < h_M$  vorhanden so kann unter Belastung (Entlastung) die frühzeitige Transformation bei einer äußeren Spannung

$$\sigma_{\text{tr}} = \begin{cases} \sigma_{\text{max}} - \sqrt{2nh_A\sigma_{\text{max}}} & \text{Belastung} \\ \sigma_{\text{min}} + \sqrt{2nh_A\sigma_{\text{max}}} & \text{Entlastung} \end{cases} \quad (5.3)$$

erfolgen (Puglisi und Truskinovsky 2002). Hierbei sind  $\sigma_{\text{max/min}}$  die kritischen maximalen/minimalen Spannungen des einzelnen Elementes. Erfolgt der Zustandswechsel jeweils bei den Spannungen nach (5.3), so folgt für die Energiedissipation

$$E_{\text{diss}} = \begin{cases} E_{\text{max}} - \Delta E, & \text{wenn } h_A < h_M \\ 0 & \text{wenn } h_A > h_M \end{cases} \quad (5.4)$$

wobei  $E_{\text{max}}$  die maximal mögliche Energiedissipation ist und aus Gleichung (5.3)  $\Delta E \propto \sqrt{n}$  folgt. Liegt folglich eine äußere Störung  $h_A$  vor, so kann eine Transformation bereits vor den in dieser Arbeit berechneten Spannungen erfolgen und die resultierende Hysterese kleiner ausfallen. Mit steigender Anzahl an Elementen wird die Empfindlichkeit gegenüber solchen Störungen immer größer, bis die Energiedissipation schließlich gegen Null geht. Da ein gewisses Maß an Störungen in der Realität nie ausgeschlossen werden kann, überlagert sich dieser Größeneffekt mit dem in Abbildung 4.1f dargestellten und es ist folglich damit zu rechnen, dass ab einer gewissen Anzahl an Elementen die Energiedissipation wieder abnimmt und schließlich für viele Elemente gegen das Kontinuumslimit strebt.

Die quantitative Bewertung dieses überlagerten Größeneffektes ist mit den in Gleichung (5.2) und (5.3) angegebenen Beziehungen allerdings nicht direkt möglich, da sie unter Annahme eines anderen als dem hier verwendeten Potentials und unter Annahme einer Krastrandbedingung hergeleitet wurden. Es ist allerdings davon auszugehen, dass für das hier verwendete Potential und insbesondere für Verschiebungsrandbedingungen ähnliche Relationen gelten (vgl. auch Truskinovsky und Vainchtein 2004). Entsprechend ist in Abbildung 5.1b nur ein qualitativer Trend des hier diskutierten Größeneffektes illustriert.

## 5.3 Dissipationsmechanismus im Vergleich

Die Energiedissipation in den meisten Materialien ist entweder abhängig von der Deformationsgeschwindigkeit (Viskoelastizität) oder aber zeitunabhängig und direkt mit irreversibler Deformation (Plastizität) verbunden. Der Dissipationsmechanismus des hier untersuchten Metamaterials basiert ebenfalls auf der Ausnutzung von viskosen Effekten. Durch die Instabilitäten kann allerdings eine Separation der Zeitskalen von äußerer Belastung und viskoser Dämpfung erfolgen: Durch den unkontrollierten Zustandswechsel wird zunächst ein dynamischer Prozess in Gang gesetzt der zu Schwingungen in der gesamten Struktur führt (vgl. Abbildung 4.5 und Balk u. a. 2001a; Balk u. a. 2001b; Slepnyan und Ayzenberg-Stepanenko 2004). Dieser Prozess ist irreversibel in dem Sinne, dass ohne äußere Einwirkung nicht mehr die ursprüngliche statische Gleichgewichtslage angenommen werden kann. Ein Teil der Verzerrungsenergie wurde so gesehen irreversibel in Schwingungsenergie umgewandelt. Im zweiten Schritt werden diese Schwingungen durch das viskoelastische Materialverhalten auf der Mikroebene gedämpft und die Energie schließlich in Wärme dissipiert. Die für diese viskose Energiedissipation relevante Zeitskala hängt aber von der Frequenz der lokalen Schwingungen ab. Diese ist in erster Näherung durch die Eigenfrequenzen der Mesostruktur gegeben, welche durch die Geometrie und das Material selbiger bestimmt wird. Vorausgesetzt die Frequenz der äußeren Belastung ist wesentlich kleiner als die Frequenz der lokalen Schwingungen, ist die Energiedissipation somit unabhängig von der äußeren Belastungsgeschwindigkeit. Dieser Mechanismus funktioniert in der skizzierten Art und Weise allerdings nur solange eine Trennung der Zeitskalen auch wirklich erfolgt. Nähert sich die Frequenz der äußeren Belastung der Frequenz der lokalen Schwingungen, so treten zusätzliche Interaktionen auf, welche in dieser Arbeit nicht näher untersucht wurden. Eine untere Gültigkeitsgrenze für die Frequenz der äußeren Belastungen gibt es allerdings ausdrücklich nicht, so dass dieser Dissipationsmechanismus auch im quasi-statischen Grenzfall erfolgt. Dies grenzt die hier untersuchten Metamaterialien eindeutig von viskoelastischen Materialien ab, bei denen die Energiedissipation proportional zur Deformationsgeschwindigkeit ist und im quasi-statischen Grenzfall gegen Null geht.

Auf der anderen Seite kann die hier verwendete Basiszelle so gestaltet werden, dass auf der Mikroebene keinerlei plastische Deformation erfolgt und

die Basiszelle somit unter Entlastung oder aufbringen eine negativen Kraft wieder seinen Ursprungszustand annimmt. Dies wiederum unterscheidet sich komplett von Materialien unter plastischer Deformation, bei denen eine Energiedissipation direkt mit einer irreversibler Deformation verbunden ist.

Die beiden zuvor diskutierten Eigenschaften der Energiedissipation machen deutlich, warum das in dieser Arbeit entwickelte Material als Metamaterial bezeichnet werden kann. Die Energiedissipation wird eindeutig durch einen Strukturmechanismus (dem schlagartigen Beulen) getrieben und zeigt dadurch eine Charakteristik die sich eindeutig von „gewöhnlichen“ Materialien und insbesondere auch von den Eigenschaften der Konstituenten unterscheidet. Die beiden zuvor diskutierten Aspekte der Reversibilität und der Geschwindigkeitsunabhängigkeit der Energiedissipation konnten in Frenzel u. a. 2016 ebenfalls experimentell nachgewiesen werden.

Teilweise zeigt das Verhalten des hier vorgestellten und untersuchten Metamaterials starke Ähnlichkeit zu dem Crashverhalten von Kunststoff- und Metallschäumen oder Honigwabenstrukturen (Ashby und Medalist 1983; Papka und Kyriakides 1994; Gibson und Ashby 1997; Papka und Kyriakides 1998a; Papka und Kyriakides 1998b; Ashby u. a. 2000; Gibson 2000; Gong u. a. 2005; Gong und Kyriakides 2005; Ashby 2006). Diese zeichnen sich ebenfalls durch eine verhältnismäßig hohe Steifigkeit bei geringen Dehnungen aus. Analog zu der hier untersuchten Struktur führt ein erstes elastisches oder plastisches Beulen dann zu einer Limitierung der möglichen Spannungen und durch das nachfolgende Beulen weiterer Strukturelemente bildet sich ein Plateau nahezu konstanter Spannung aus, bis schließlich ab einer bestimmten effektiven Dehnung die Verdichtung zu einer erneuten Steifigkeitszunahme führt (vgl. Abbildung 4.1 und Ashby 2006). Nahezu reversible Deformationen und damit eine wiederholbare Energiedissipation ist für Schäume unter Einsatz gummiartiger Materialien möglich (vgl. Gong u. a. 2005 und Gong und Kyriakides 2005). Das Beulen dieser Strukturen ist allerdings geprägt durch eine globale Schubinstabilität und einen lokalen Rotationsmodus, insbesondere letzterer führt zu einer starken Lokalisierung der Deformation im Nachbeulbereich. Dies wiederum begünstigt plastische Deformationen sowie die Schädigung der Mikrostruktur, wenn nicht wie in Gong u. a. 2005 und Shan u. a. 2015 gummiartigen Materialien eingesetzt werden. Der beschriebene Deformationsmodus wird zwar insbesondere durch die Irregularität der Mesostruktur begünstigt, starke Lokalisierungen im Nachbeulbereich und damit Schädigung treten allerdings auch

bei regulären und streng periodischen Mesostrukturen wie Honigwaben u.ä. auf (vgl. Ashby und Medalist 1983; Papka und Kyriakides 1994; Papka und Kyriakides 1998a und Papka und Kyriakides 1998b).

In diesem Zusammenhang ebenfalls interessant sind neuere Arbeiten an dünnwandigen Nickelstrukturen (Schaedler u. a. 2011; Torrents u. a. 2012; Salari-Sharif u. a. 2014). Diese erholen sich nahezu komplett von Dehnungen bis zu 50% und dissipieren dabei durch eine Kombination von einer Vielzahl an Mechanismen ebenfalls nahezu die komplette Energie (Salari-Sharif u. a. 2014). Trotz dieser scheinbaren Reversibilität, ist in nachfolgenden Zyklen eine deutliche Abnahme der Hysterese und der Steifigkeit zu beobachten, welche aus einer signifikanten Schädigung der Mikrostruktur resultiert.

Die Effekteigenschaften der hier untersuchte Mesostruktur hingegen wird durch das kontrollierte Beulen einiger weniger Strukturelemente (Beulelemente) geprägt. Ungewollte Instabilitätsmoden, die eine besonders hohe Dehnungen sowie eine Schädigung der Mikrostruktur begünstigen können, werden während des Beulvorgangs durch die steife Basisstruktur unterbunden. Aus dieser Strategie zur Gestaltung von Materialien zur Energiedissipation folgen allerdings zwei entscheidende Grenzen: Zunächst einmal sind durch die steife Basisstruktur nur wenige Strukturelemente aktiv bei der Energiedissipation. Dadurch ist zu erwarten, dass die spezifische Energiedissipation generell deutlich geringer als bei metallischen Schäumen ist, wo die Energiedissipation durch die plastische Deformation vieler (aller) Strukturelemente erfolgen kann. Weiterhin scheint die Verallgemeinerung des hier genutzten Mechanismus für den zwei- oder dreidimensionalen (quasi-isotropen) Fall schwer möglich. Würde man z.B. versuchen den Beulmechanismus in zwei orthogonalen Raumrichtungen zu realisieren, so würde man damit den Widerstand gegenüber Schubdeformationen im Vergleich zu der hier untersuchten Struktur enorm verringern und somit das Ausbilden von Scherbändern begünstigen. In Shan u. a. 2015 werden solche zwei- und dreidimensionalen Strukturen zwar am Rande dargestellt, ein Nachweis ihrer Funktion wurde dort allerdings nicht erbracht.

Für die weitere quantitative Diskussion bzgl. der realisierbaren Energiedissipation wird auf die experimentellen Ergebnisse aus Frenzel u. a. 2016 zurückgegriffen. Dort wurden Gradientenstrukturen ( $h_1/b \in [0.14, 0.2]$  und  $d_1/b \in [0.06, 0.1]$ ) mittels Laser Lithographie aus einem Polymer ( $E = 2.3\text{GPa}$ ,  $\rho = 1200\text{kg/m}^3$ ) hergestellt. Im Experiment wurde für diese Struktur unter

reversibler Deformation eine spezifische Energiedissipation von 0.15kJ/kg erzielt.

Wie bereits vermutet liegt diese spezifische Energiedissipation weit unter dem was durch Aluminiumschäume (5kJ/kg) oder metallischen Honigwaben (10kJ/kg) (Liu und Wang 2015) unter irreversibler plastischer Verformung erreicht werden kann. Diese Materialien werden vor allem im Transportwesen (Automobil, Flugzeugbau,...) eingesetzt und insbesondere dort ist der Leichtbau oftmals ein limitierender Faktor. Um mit dem hier untersuchten Konzept eine ernstzunehmende Alternative zu konventionellen Crashabsorbieren zu bieten, müsste die spezifische Energiedissipation also signifikant gesteigert werden.

Da die Herstellung Mesostrukturierter Materialien in den vergangenen Jahren enorme Fortschritte gemacht hat, soll für die folgende Diskussion die Frage der Herstellbarkeit außen vorgelassen werden. Könnte man die Struktur z.B. aus Aluminium ( $E = 70\text{GPa}$ ,  $\rho = 2700\text{kg/m}^3$ ) herstellen, würde sich eine ca. 13mal höhere spezifische Energiedissipation (1.95kJ/kg) ergeben. Für die im Experiment realisierte Parameterkombination ( $h_1/b = 0.2$  und  $d_1/b = 0.1$ ) ist nach Abbildung 3.3 allerdings mit maximalen Dehnungen in der Größenordnung von 10% zu rechnen. Aufgrund dieser hohen lokalen Dehnungen würden signifikante plastische Deformationen in den Beulelementen auftreten und es ist nicht damit zu rechnen, dass hierdurch die vollständige Reversibilität erhalten bleibt. Auch wird die alleinige systematische (mathematische) Optimierung der Mesostruktur bzgl. der maximalen Dehnungen auf der Mikroebene nicht ausreichen, um die Dehnungen so weit zu reduzieren, dass lokale plastische Deformationen nicht zu einer effektiven Irreversibilität führen.

Um die spezifische Dissipation zu steigern, sind folglich weitere alternative Materialkonzepte für die Mikrostruktur zu betrachten. Eine vielversprechende Möglichkeit die Festigkeit des Materials der Mikrostruktur weiter zu steigern und damit die maximale Dehnung auf der Mikroebene (unter gleichbleibender spezifischer Energiedissipation) zu reduzieren ergibt sich aus der Ausnutzung von Größeneffekten auf der Mikroebene. So zeigen zum Beispiel Metalle mit charakteristischen Abmessungen  $d < 10\mu\text{m}$  stark ausgeprägte Größeneffekte in denen die Fließspannung mit abnehmenden Abmessungen exponentiell zunimmt (Motz u. a. 2005; Dehm u. a. 2006; Greer u. a. 2005; Blanckenhagen u. a. 2004). Für die hier untersuchten Strukturen sind insbesondere Größeneffekte die unter Biegung auftreten interessant. So wurde zum Beispiel experimentell gezeigt, dass sich die Fließspannung von reinem Kupfer unter Biegung um das

Fünffache von 200MPa auf ca. 1000MPa steigern lässt, wenn die Probendicke von  $8\mu\text{m}$  auf  $1\mu\text{m}$  reduziert wird (Motz u. a. 2005). Die Ursachen hierfür lassen sich auf zwei einfache Phänomene zurückführen: Zunächst einmal sinkt mit dem Durchmesser das Oberflächen/Volumenverhältnis, wodurch bei kleineren Proben verhältnismäßig viele Versetzungen die Probe an der Oberfläche verlassen können. Für plastische Deformationen müssen folglich neue Versetzungen gebildet werden, was wiederum hohe Spannungen erfordert. Der zweite Einflussfaktor lässt sich auf die Anzahl an Versetzungsquellen zurückführen: Bei großen Proben sind diese mehr oder weniger gleichmäßig über die Probe verteilt, woraus eine gleichmäßige Verteilung an Versetzungen resultiert. Wird der Durchmesser reduziert so befinden sich verhältnismäßig mehr Quellen an der neutralen Biegephase. In den Gleitebenen wiederum wechselt die Schubspannung ihr Vorzeichen an der neutralen Phase, wodurch an dieser Stelle starke Versetzungsanhäufungen (pile-ups) entstehen, welche eine plastische Deformation unterbinden (Motz u. a. 2005; Dehm u. a. 2006) und somit die Fließspannung steigern.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass das hier untersuchte Metamaterial auf Grund des Dissipationsmechanismus entscheidende Vorteile gegenüber klassischen Materialien zur Energiedissipation hat. Damit dieses allerdings klassische Crashabsorber in der Praxis ersetzen kann, muss noch einiges an Optimierungspotential ausgenutzt werden.

## 5.4 Programmierbarkeit

Neben den zuvor diskutierten ungewöhnlichen Dissipationseigenschaften lassen sich noch eine Menge weiterer interessanter Eigenschaften durch die Kombination von verschiedenen Basiszellen realisieren. Zunächst einmal kann ein Gradient auf der Mesoebene zum Beispiel genutzt werden um das Belastungs- und Entlastungsverhalten auf nahezu beliebige Art und Weise vorzubestimmen. Da durch geeignete Parameterkombinationen die kritischen Minima und Maxima der einzelnen Zelle unabhängig voneinander beeinflusst werden können (vgl. Abbildung 3.2 und 3.3), ist es hierbei insbesondere möglich den Belastungs- und Entlastungspfad unabhängig voneinander einzustellen. Hierdurch kann z.B. ein Material realisiert werden welches ein Objekt bei einem

Einschlag auf genau vorbestimmte Art und Weise entschleunigt bzw. beschleunigt.

Dadurch, dass eine Zelle bei gleicher äußerer Last zwei stabile Zustände annehmen kann, können die Effektiveigenschaften allerdings nicht nur *a priori* festgelegt werden, sondern ebenfalls über die Lastgeschichte beeinflusst (programmiert) werden. Die naheliegende Art und Weise dies zu realisieren ist durch die Kombination von Zellen mit einem negativen Kraftminimum. Bringt man durch eine Vorbelastung die Struktur in einen Zustand in dem sich einige Zellen in dem dritten Zustand befinden und entlastet ab diesem Zustand wieder vollständig, so verweilen die Zellen in genau dieser Zustandskonfiguration. Unter erneuter Belastung folgt das Metamaterial selbstverständlich wieder diesem Gleichgewichtspfad, welcher in Abhängigkeit der Eigenschaften der einzelnen Zellen signifikant andere Eigenschaften als andere Pfade haben kann.

Nutzt man diese Eigenschaft zusätzlich unter Anwendung von Zellen aus deren individuelle Kraft-Verschiebungskurven sich kreuzen, so wechselt unter Entlastung nicht diejenige Zelle als erstes den Zustand in der unter Belastung als letztes ein Zustandswechsel erfolgte, sondern diejenige bei der unter Belastung als erstes ein Zustandswechsel erfolgte. Es können in diesem Fall folglich alleine durch die Kontrolle der äußeren Last  $F_1$  oder der äußeren Verschiebung  $u_1$  alle  $n^2$  möglichen Kombination von stabilen Zuständen erreicht werden. Im Fall von strikt getrennten Kraft-Verschiebungskurven sind hingegen nur  $N + 1$  Zustände erreichbar (vgl. Abbildung 4.2b mit 4.3b). An dieser Stelle sei noch darauf hingewiesen, dass obwohl sich die Materialien in dem hier skizzierten Programmierungsszenario nicht von alleine erholen, diese trotzdem durch das Aufbringen einer negativen Kraft wieder in ihren Ausgangszustand gebracht werden können und somit auch quasi-reversibel sind.

Eine weitere Art und Weise programmierbare Eigenschaften zu erzielen, benötigt hingegen nicht unbedingt eine negative kritische Kraft: Durch Ausnutzen der oben angesprochenen inversen Reihenfolge des Zustandswechsel, existieren verschiedene stabile Zustandskonfigurationen für die gleiche Gesamtdeformation. Mit anderen Worten, das Metamaterial kann unter gleicher effektiver Dehnung unterschiedliche Eigenschaften zeigen (deutlich zu erkennen in Abbildung 4.3a im Vergleich zu 4.2a). Selbstverständlich beschränkt sich die Programmierbarkeit hierbei nicht nur auf die effektive Steifigkeit (Abbildung 4.3a), auch die komplette Spannungs-Dehnungshysterese kann durch die Belastungsgeschichte beeinflusst werden (vgl. Abbildung 4.4a). Ein ähnlicher

Ansatz wurde kürzlich in Harne u. a. 2016 durch eine parallele Anordnung metastabiler Elemente vorgestellt. Im Gegensatz zu der hier untersuchten Struktur kann dort die Programmierung allerdings nicht alleine durch die Belastungsgeschichte erfolgen und zur Änderung der Eigenschaften sind zusätzliche externe Manipulationen nötig.

Eine Vielzahl weiterer interessanter Ansätze zur Erzielung variabler (programmierbarer) Eigenschaften findet man in der Literatur (Bassik u. a. 2009; Ryu u. a. 2012; Liu u. a. 2012; Felton u. a. 2013; Schenk und Guest 2013; Silverberg u. a. 2014; Florijn u. a. 2014; Harne u. a. 2016). Im Vergleich zu dem hier präsentierten Metamaterial haben diese Ansätze einige signifikante Nachteile: 1. Der Wechsel der Eigenschaften erfolgt immer durch zusätzliche äußere Manipulationen (vgl. Liu u. a. 2012; Ryu u. a. 2012; Florijn u. a. 2014; Harne u. a. 2016). 2. Oftmals wird lediglich eine einzelne Zelle bzw. ein einzelner Mechanismus untersucht und eine Integration in einer Struktur bzw. einem Material erscheint schwer möglich und wird selten diskutiert (Schenk und Guest 2013; Silverberg u. a. 2014; Lv u. a. 2014). 3. Oftmals ist die Herstellung, insbesondere, wenn mehr als eine Zelle realisiert werden soll, sehr aufwendig (Bassik u. a. 2009). Viele dieser Ansätze basieren auf sogenannten Origami Mechanismen die entweder ebenfalls auf Instabilitäten (Silverberg u. a. 2014) oder aber auf Faltmechanismen (Lv u. a. 2014) beruhen. Abgesehen davon, dass die Herstellung dieser Mechanismen sehr kompliziert erscheint, stellt der Einbau von Mechanismen zur Programmierung durch Wärme, Elektrizität oder Licht (Liu u. a. 2012; Ryu u. a. 2012; Felton u. a. 2013) noch zusätzliche Herausforderungen. Ein wesentlich einfacher und vielversprechender Ansatz sind zelluläre Mesostrukturen mit einer periodischen Anordnung von elliptischen und runden Löchern. Unter Belastung erfahren diese ebenfalls einen Zustandswechsel, welche in Abhängigkeit von lateralen Zwangsbedingungen erfolgt. Durch Unterbinden bzw. Aufbringen einer initialen Querkontraktion kann somit das komplette Spannungs-Dehnungsverhalten (Florijn u. a. 2014) oder die Wellendispersion (Bertoldi und Boyce 2008; Jang u. a. 2009) beeinflusst werden. Im Gegensatz zu dem in dieser Arbeit entwickelten Metamaterial ist allerdings nach wie vor eine zusätzlich äußere Manipulation, in dem Fall Aufprägen einer Querkontraktion, nötig.



## 6 Kontinuumsmodellierung mittels erweiterter Modelle

Der erste Teil dieser Arbeit (Kapitel 3 - 5) hat deutlich gemacht, dass die klassische Kontinuumsmechanik zur Modellierung des makroskopischen Verhaltens des hier entwickelten Metamaterials unter verschiedenen Gesichtspunkten ungeeignet ist. Dies hat sich zunächst durch die widersprüchliche Annahme der periodischen Randbedingungen bemerkbar gemacht, welche den Effekt einer sich homogen verformenden Umgebung abbilden.

Ist die makroskopische Wellenlänge der Deformation groß im Vergleich zu der untersuchten Basiszelle, ist diese Annahme gerechtfertigt, man spricht von einer strikten Skalentrennung (Hill 1963). Wie in Abschnitt 5.1 ausführlich diskutiert, lokalisiert die Deformation bei dem hier entwickelten Metamaterial innerhalb einer Basiszelle wodurch die strikte Skalentrennung automatisch verletzt wird. Kann die strikte Skalentrennung nicht eingehalten werden, so kann die Homogenisierung grundsätzlich durch höhere Terme erweitert werden, die den Effekt von nicht homogenen Verzerrungsfeldern abbildet (Gologanu u. a. 1997; Forest und Sab 1998; Forest 1999; Forest 2002; Kouznetsova u. a. 2002; Jänicke u. a. 2009a; Jänicke und Steeb 2009b; Forest und Trinh 2011; Antonakakis u. a. 2014; Findeisen und Wackerfuß 2016; Hütter 2017).

Unabhängig von der Frage nach einer geeigneten Erweiterung der Homogenisierung ist eine erweiterte Theorie aber auch bereits für die rein phänomenologische Modellierung des hier entwickelten Metamaterials nötig. So hat sich in Abschnitt 5.1 und 5.2 gezeigt, dass die Zustandsbeschreibung der klassischen Kontinuumsmechanik ungeeignet ist, um die endliche Lokalisierungszone abzubilden, wodurch unter anderem auch keine Größeneffekte abgebildet werden können. Wie bereits zuvor angedeutet, lässt sich auch diese Problematik grundsätzlich mit einer Erweiterung der klassischen Kontinuumsmechanik lösen. So ist allgemein bekannt, dass eine Erweiterung mittels höherer Deh-

nungsgradienten oder unabhängiger Mikrodeformationen<sup>1</sup>, zur Beschreibung von Größeneffekte (Diebels und Steeb 2002; Diebels und Steeb 2003) und zur Regularisierung von Lokalisationsvorgängen (Borst 1991; Borst u. a. 1993; Forest u. a. 2005; Dehm u. a. 2006; Mazière und Forest 2015; Forest 2016) verwendet werden kann. In dem in Kapitel 4 verwendeten diskrete Modell tauchte dieses Problem nicht auf, da dem materiellen Verhalten der Mesostruktur virtuelle Zellen mit einer fixierten Höhe zugeordnet wurden. Das resultierende Modell hat somit bereits eine intrinsische Länge, welche zur Regularisierung des Modells führt und somit auch die Größeneffekte korrekt wiedergibt.

Im Folgenden wird zunächst untersucht, in wie weit die Lokalisierungsvorgänge und Größeneffekte der hier untersuchten Struktur im Rahmen einer erweiterten Kontinuumstheorie beschrieben werden können. Im Anschluss wird dann genauer dargestellt wie der in Kapitel 3 beschriebene klassische Homogenisierungsansatz für höhere Theorien erweitert werden kann. Die zentrale Frage ist hierbei, ob und in wie weit mit einer solchen Erweiterung eine systematische Herleitung von Materialgesetzen für lokalisierende Strukturen im Allgemeinen und für die hier entwickelte Struktur im Speziellen möglich ist.

## 6.1 Bilanzgleichungen für höhere Kontinua

Höhere Kontinuumstheorien können in Theorien höherer Ordnung und höheren Grades unterteilt werden. Erste verfolgen eine Verallgemeinerung mittels unabhängiger Mikrodeformationen. Die bekanntesten Vertreter hierfür sind die Cosserat Theorie (Cosserat und Cosserat 1909; Borst 1991; Borst u. a. 1993; Diebels und Steeb 2002; Diebels und Steeb 2003), die Mikrodilatationstheorie (Forest und Sievert 2006) und die mikromorpher Theorie (Germain 1973b; Eringen 1998; Forest u. a. 2005). Theorien höheren Grades lassen sich aus den Theorien höherer Ordnung über zusätzliche Zwangsbedingungen ableiten und verfolgen eine Verallgemeinerung durch Berücksichtigung höherer Dehnungsgradienten (Mindlin 1965; Germain 1973a). Die Theorien höherer Ordnung

---

<sup>1</sup> Man beachte an dieser Stelle, dass die Mikrodeformation des materiellen Punktes in dieser Arbeit zur Beschreibung der Mesodeformation verwendet wird (vgl. auch Hinweis in Kapitel 1).

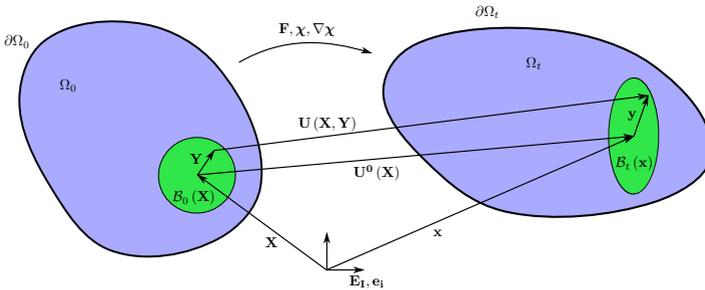


Abbildung 6.1: Notation für das mikromorphe Kontinuum. Jedem materiellen Punkt  $\mathbf{X}$  der Referenzkonfiguration  $\Omega_0$  wird ein Volumen  $\mathcal{B}_0(\mathbf{X})$  zugeordnet welches sich unabhängig von dem makroskopischen Deformationsgradient  $\mathbf{F}$  verformen kann. Die Abbildung von  $\mathcal{B}_0$  auf die Momentankonfiguration  $\mathcal{B}_t$  setzt sich zusammen aus Starrkörperbewegung  $\mathbf{U}^0$  und linearer Approximation beschrieben durch die Mikrodeformation  $\chi$  (vgl. Gleichung (6.1)).

können somit als die allgemeineren angesehen werden. Die Folgenden Herleitungen gehen daher zunächst von der Mikromorphen Theorie aus.

Eine systematische Erweiterung kann ausgehend von der klassischen Kontinuumsmechanik über das Prinzip der virtuellen Leistung (Germain 1973a; Germain 1973b; Mindlin 1965; Forest und Sievert 2006) erfolgen. Die folgende Herleitung der Bilanzgleichungen, die sich in erster Linie an der Ursprungsarbeit (Germain 1973b) orientiert, verfolgt dabei zweierlei Ziele. Zunächst soll ausgehend von der klassischen Kontinuumsmechanik das Prinzip verallgemeinert Kontinuumstheorien demonstriert werden, hierdurch erfolgt implizit auch die eindeutige Definition der verwendeten Spannungs- und Verzerrungstensoren. Weiterhin werden die lokalen und integralen Bilanzgleichungen der Referenzkonfiguration durch Transformation des in Germain 1973b postulierten Leistungsausdruck abgeleitet. Aus den lokalen Bilanzgleichungen wird in Abschnitt 6.2 durch zusätzliche Zwangsbedingungen der Sonderfall der eindimensionalen Gradiententheorie abgeleitet, welcher für die phänomenologische Modellierung Verwendung findet. Die integralen Bilanzgleichungen hingegen stellen die Grundlage für eine verallgemeinerte Hill-Mandel Bedingung für die Homogenisierung, wie sie in Abschnitt 6.3 genauer untersucht wird, dar.

Vereinfacht gesprochen geht die klassische Kontinuumsmechanik von der Annahme aus, dass die Kinematik eines materiellen Punktes alleine durch die Starrkörperbewegung  $U_i(\mathbf{X}, t)$  des materiellen Punktes  $\mathbf{X}$  hinreichend genau beschrieben wird. Die Verzerrung einer infinitesimalen Umgebung des materiellen Punktes wird über ein Verzerrungsmaß erster Ordnung (erste Ableitung der Bewegung  $U_i$  bzw.  $x_i$ ) beschrieben. Über eine der Verzerrungsgeschwindigkeit konjugierte Spannung wird die innere Leistung beschrieben, welche schließlich mit der Leistung äußerer Einflüsse bilanziert wird. Genau diese Beschreibung gilt es nun im Rahmen der mikromorphen Theorie zu erweitern. Eine Visualisierung des im Folgenden beschriebenen Konzeptes ist Abbildung 6.1 zu entnehmen. Jedem materiellen Punkt  $\mathbf{X}$  wird ein kleines Volumen  $\mathcal{B}(\mathbf{X})$  zugeordnet. Dieses Volumen kann sich im Gegensatz zur klassischen Theorie unabhängig von der makroskopischen Deformation, aus dem Verschiebungsfeld  $\mathbf{U}^0$  folgend, verformen. Ist  $\mathcal{B}(\mathbf{X})$  klein genug, so wird in Germain 1973b vorgeschlagen, die Verformung innerhalb von  $\mathcal{B}(\mathbf{X})$  über die unabhängige Mikrodeformation  $\chi_{iJ}$  wie folgt zu approximieren

$$U_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = U_i^0(\mathbf{X}) + (\chi_{iK}(\mathbf{X}) - \delta_{iK}) Y_K, \quad \forall \mathbf{Y} \in \mathcal{B}_0(\mathbf{X}). \quad (6.1)$$

hierbei ist  $U_i^0$  die makroskopische Starrkörperverschiebung des materiellen Punktes und  $\chi_{iK}$  kann als mikroskopischer, unabhängiger Deformationsgradient interpretiert werden. Um ein wohldefiniertes, positives Deformationsfeld zu erhalten, muss analog zum klassischen Deformationsgradienten, auch die Mikrodeformation  $\chi_{iJ}$  positiv definit sein.

Die innere Leistung wird im Rahmen der klassischen Kontinuumsmechanik über das innere Produkt einer Verzerrungsgeschwindigkeit und dazu konjugierten Spannung beschrieben. So kann zum Beispiel die innere Leistungsdichte  $p_{\text{int}}$  der Momentankonfiguration  $\Omega_t$  über das innere Produkt

$$p_{\text{int}} = \sigma_{ij} L_{ij} \quad (6.2)$$

aus der Cauchy Spannung  $\sigma_{ij}$  und dem Geschwindigkeitsgradienten

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \dot{F}_{iK} F_{Kj}^{-1} \quad (6.3)$$

beschrieben werden. Zur Beschreibung der Leistungsdichte für das mikromorphe Kontinuum, muss (6.2) nun um die Beiträge der zusätzlich eingeführten

Verzerrungsmaße erweitert werden. Analog zur klassischen Theorie erster Ordnung, in der lediglich der Gradient erster Ordnung berücksichtigt wird, soll hier ebenfalls nur der Beitrag von  $\chi_{iJ}$  und dessen erster Gradient  $\partial_k \chi_{iJ}$  berücksichtigt werden. Dem Postulat aus Germain 1973b folgend, wird die innere Leistung der Momentankonfiguration als

$$P_{\text{int}} = \int_{\Omega_t} K_i \dot{U}_i^0 + \sigma_{ij} L_{ij} + s_{ij} (L_{ij} - l_{ij}) + r_{ijk} \partial_k l_{ij} d\Omega \quad (6.4)$$

angenommen. Die mikroskopische Verzerrungsgeschwindigkeit  $l_{ij} := \dot{\chi}_{iK} \chi_{Kj}^{-1}$  wird dabei analog zu dem makroskopischen Geschwindigkeitsgradienten (6.3) gebildet. Mit  $s_{ij}$  und  $r_{ijk}$  wurden ferner zusätzliche Spannungsmaße, konjugiert zu den Verzerrungsmaßen  $(L_{ij} - l_{ij})$  und  $\partial_k l_{ij}$ , eingeführt. Die innere Leistung (6.4) wurde so ebenfalls in anderen Arbeiten (z.B. Forest und Sievert 2003b; Forest und Sievert 2006) angenommen, unterscheidet sich aber von der Struktur in Eringen 1998 und Jänicke u. a. 2009a. Dies demonstriert eine gewisse Willkür, bei dem Ansatz für die inneren Leistung. So wäre es zum Beispiel auch denkbar, anstatt  $s_{ij} (L_{ij} - l_{ij})$ , lediglich  $s_{ij} l_{ij}$  als zusätzlichen Term anzusetzen. Durch Definition entsprechender Spannungstensoren lassen sich die verschiedenen Formulierungen allerdings ineinander überführen und sind somit äquivalent. Für die folgende Untersuchung der Objektivität, ergeben sich bei der Wahl (6.4) allerdings einige Vereinfachungen, weshalb im Folgenden mit dieser gearbeitet wird.

Damit die Beschreibung der inneren Verzerrungsleistung (6.4) physikalisch sinnvoll ist, muss gewährleistet werden, dass einer überlagerten Starrkörperbewegung von  $\Omega_t$  die Leistung  $P_{\text{int}} = 0$  zugeordnet wird. In der Literatur, insbesondere in der Ursprungsarbeit (Germain 1973a), aber auch in weiteren Arbeiten (z.B. Forest und Sievert 2003b; Jänicke 2010), kommt diese Betrachtung leider oftmals nur sehr kurz und ist daher schwer nachvollziehbar. Um diese Lücke zu schließen wird im Folgenden die Objektivität der inneren Leistung (6.4) etwas ausführlicher dargestellt. Da (6.4) linear in den Verzerrungen ist, reicht es zum Beweis der Objektivität zu zeigen, dass für die überlagerte Starrkörperbewegung

$$\tilde{U}_i^0 = (Q_{iJ} - \delta_{iJ}) X_J + c_i \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega_0, \quad (6.5)$$

$$\tilde{U}_i = (Q_{iJ} - \delta_{iJ}) Y_J + c_i \quad \forall \mathbf{Y} \in \mathcal{B}_0(X), \quad (6.6)$$

$\tilde{P}_{\text{int}} = 0$  gilt.  $\mathbf{c}$  beschreibt hierbei eine beliebige Starrkörpertranslation, der orthogonale Tensor  $\mathbf{Q}$  eine beliebige Starrkörperrotation und Größen die aus einer Starrkörperbewegung resultieren werden hier und im Folgenden mit einer Tilde gekennzeichnet. Für die Starrkörperbewegung folgt aus (6.5), (6.6) und (6.1) direkt  $\tilde{F}_{iJ} = \tilde{\chi}_{iJ} = Q_{iJ}$  und somit für die Verzerrungsgeschwindigkeiten

$$\tilde{L}_{iJ} = \tilde{l}_{iJ} = \dot{Q}_{iK} Q_{jK} \quad \text{und} \quad \partial_k \tilde{l}_{iJ} = 0. \quad (6.7)$$

Aus der Orthogonalität von  $\mathbf{Q}$  folgert man, dass  $\tilde{\mathbf{L}}$  und  $\tilde{\mathbf{I}}$  schiefsymmetrisch sind. Es gilt nämlich  $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{1}$  und somit folgt aus der Zeitableitung dieses Ausdrucks

$$\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T = 0 \quad (6.8)$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\mathbf{L}}^T = (\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T)^T = -\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T = -\tilde{\mathbf{L}}. \quad (6.9)$$

Setzt man nun (6.7) in (6.4) ein und fordert dass die zugehörige innere Leistung für beliebige  $\mathbf{c}$  und  $\mathbf{Q}$  verschwindet, so erhält man die folgende Bedingung

$$K_i (\dot{Q}_{iJ} X_J + c_i) + \sigma_{ij} \dot{Q}_{iK} Q_{jK} + s_{ij} (\dot{Q}_{iK} Q_{jK} - \dot{Q}_{iK} Q_{jK}) = 0 \quad (6.10)$$

$$\Leftrightarrow K_i (\dot{Q}_{iJ} X_J + c_i) + \sigma_{ij} \tilde{L}_{ij} = 0. \quad (6.11)$$

Damit dies für alle Starrkörperbewegungen erfüllt ist, muss unter Berücksichtigung von (6.9) folglich

$$K_i = 0 \quad \text{und} \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (6.12)$$

gelten. Analog zum Fall des klassischen Kontinuums darf die Starrkörperbewegung  $\mathbf{U}^0$  nicht zur inneren Leistung beitragen und die Cauchy Spannung  $\sigma_{ij}$  ist ebenfalls symmetrisch. Zwar wird dieses Resultat in Germain 1973b genau so angegeben, der explizite Beweis, wie er hier erfolgte, fehlt allerdings. In Jänicke 2010 wird abweichend zu der hier erfolgten Ausführung damit argumentiert, dass  $\tilde{L}_{ij}$  orthogonal ist, wobei einerseits unklar ist, warum dies so sein sollte und andererseits, warum dies zu der Symmetrie von  $\sigma_{ij}$  führt.

Die Leistung der äußeren Kräfte, im klassischen Kontinuum resultierend aus Volumenkräften  $b_i^u$  und Kontaktkräften  $f_i^u$  wird, Germain 1973b folgend, um höheren Volumenkräfte  $b_{ij}^x$  und Kontaktkräfte  $f_{ij}^x$  erweitert

$$P_{\text{ext}} = \int_{\Omega_t} b^u \dot{U}_i^0 + b_{ij}^x l_{ij} d\Omega + \int_{\partial\Omega_t} f_i^u \dot{U}_i^0 + f_{ij}^x l_{ij} d\Omega. \quad (6.13)$$

Basierend auf der Definition der inneren und äußeren Leistung können nun die lokalen Gleichgewichtsbedingungen aus dem Prinzip der virtuellen Leistung

$$P_{\text{int}}(\delta\dot{U}_i^0, \delta l_{ij}) = P_{\text{ext}}(\delta\dot{U}_i^0, \delta l_{ij}), \quad \forall \delta\dot{U}_i^0 \in \mathcal{K}^U \quad \text{und} \quad \forall \delta l_{ij} \in \mathcal{K}^X \quad (6.14)$$

abgeleitet werden.  $\mathcal{K}^U$  und  $\mathcal{K}^X$  sind hierbei die Mengen der kinematisch zulässigen Verschiebungen und Mikrodeformationen. Unter der Annahme ausreichender Glattheit von  $\dot{U}_i$  und  $l_{ij}$  kann die innere Leistung, mittels des Gaußschen Integralsatzes und unter Berücksichtigung von (6.12), wie folgt ausgedrückt

$$P_{\text{int}} = \int_{\partial\Omega_t} (\sigma_{ij} + s_{ij}) \delta\dot{U}_i^0 n_j + r_{ijk} \delta l_{ij} n_k d\Omega \quad (6.15)$$

$$- \int_{\Omega_t} (\partial_j \sigma_{ij} + \partial_j s_{ij}) \delta\dot{U}_i^0 + (\partial_k r_{ijk} + s_{ij}) \delta l_{ij} d\Omega. \quad (6.16)$$

werden. Setzt man dies mit der rechten Seite von (6.14) gleich und fordert, dass dies für alle kinematisch zulässigen Deformationen erfüllt ist, so folgen daraus die lokalen Gleichgewichtsbedingungen

$$\partial_j \sigma_{ij} + \partial_j s_{ij} = -b_i^U \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t \quad (6.17)$$

$$\partial_k r_{ijk} + s_{ij} = -b_{ij}^X \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t \quad (6.18)$$

zusammen mit den Randbedingungen

$$(\sigma_{ij} + s_{ij}) n_j = f_i^U \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_t \quad (6.19)$$

$$r_{ijk} n_k = f_{ij}^X \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_t. \quad (6.20)$$

Für eine Verallgemeinerung der Homogenisierung in Abschnitt 6.3 ist es nötig die integralen Gleichgewichtsbedingungen bzgl. der Verzerrungen  $\dot{\mathbf{F}}, \dot{\chi}$  und  $\nabla_X \dot{\chi}$  in der Referenzkonfiguration auszudrücken, da diese Verzerrungsmaße bei der Verallgemeinerung der kinematischen Kopplungsbedingungen Verwen-

finden. Hierfür transformiert man die Integrale (6.4) und (6.13) mittels  $d\Omega_0 = \det \mathbf{F}^{-1} d\Omega_t$  auf die Referenzkonfiguration und berücksichtigt ferner die Beziehung

$$\partial_k l_{ij} = \partial_k (\dot{\chi}_{iM} \chi_{Mj}^{-1}) = \partial_L \dot{\chi}_{iM} F_{Lk}^{-1} \chi_{Mj}^{-1} + \partial_L \chi_{Mj}^{-1} F_{Lk}^{-1} \dot{\chi}_{iM}, \quad (6.21)$$

so dass sich die innere Leistung (6.4) als

$$P_{\text{int}} = \int_{\Omega_0} \left( (\sigma_{ij} + s_{ij}) F_{Kj}^{-1} \dot{F}_{iK} + (r_{ijk} \partial_L \chi_{Mj}^{-1} F_{Lk}^{-1} - s_{ij} \chi_{Mj}^{-1}) \dot{\chi}_{iK} \right. \quad (6.22)$$

$$\left. + (r_{ijk} F_{Lk}^{-1} \chi_{Mj}^{-1}) \partial_L \dot{\chi}_{iM} \right) \det \mathbf{F} d\Omega$$

$$= \int_{\Omega_0} P_{iK} \dot{F}_{iK} + S_{iK} \dot{\chi}_{iK} + R_{iML} \partial_L \dot{\chi}_{iM} d\Omega \quad (6.23)$$

schreiben lässt. Hierbei wurden für die kompakte Darstellung (6.23) die Spannungen  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{R}$  als zu den Verzerrungen  $\mathbf{F}$ ,  $\dot{\chi}$  und  $\nabla_X \dot{\chi}$  konjugierte Spannungen wie folgt definiert

$$P_{iK} := \det(\mathbf{F}) (\sigma_{ij} + s_{ij}) F_{Kj}^{-1}, \quad (6.24)$$

$$S_{iK} := \det(\mathbf{F}) (r_{ijm} \partial_m \chi_{Kj}^{-1} - s_{ij} \chi_{Kj}^{-1}), \quad (6.25)$$

$$R_{iMN} := \det(\mathbf{F}) (r_{ijk} F_{Nk}^{-1} \chi_{Mj}^{-1}). \quad (6.26)$$

Unter Anwendung des Gaußschen Integrationsssatzes folgt aus (6.23) weiterhin

$$P_{\text{int}} = \int_{\partial\Omega_0} P_{iK} N_K \dot{U}_i^0 + \partial_N R_{iM} N_N \dot{\chi}_{iM} d\Omega \quad (6.27)$$

$$- \int_{\Omega_0} \partial_K P_{iK} \dot{U}_i^0 - S_{iK} \dot{\chi}_{iK} + \partial_N R_{iMN} \dot{\chi}_{iM} d\Omega, \quad (6.28)$$

wobei  $N_i$  die Komponenten der äußeren Normale auf der Oberfläche der Referenzkonfiguration sind. Transformiert man nun mit analogen Definitionen die externe Leistung

$$P_{\text{ext}} = \int_{\Omega_0} B_i^U \dot{U}_i + B_{iK}^X d\Omega + \int_{\partial\Omega_0} T_i^U \dot{U}_i + T_{iK}^X \dot{\chi}_{iK} d\Omega, \quad (6.29)$$

so lassen sich auch hier wieder über das Prinzip der virtuellen Leistungen durch Gleichsetzen von (6.28) und (6.29) die lokalen Gleichgewichtsbedingungen und Randbedingungen in der Form

$$\partial_K P_{iK} = -B_i^U \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega_0 \quad (6.30)$$

$$\partial_N R_{iMn} - S_{iM} = -B_i^X \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega_0 \quad (6.31)$$

$$P_{iK} N_K = T_i^U \quad \forall \mathbf{X} \in \partial\Omega_0 \quad (6.32)$$

$$R_{iMn} N_N = T_{iM}^X \quad \forall \mathbf{X} \in \partial\Omega_0. \quad (6.33)$$

ableiten.

## 6.2 Sonderfall eindimensionales Gradientenmaterial

Im Folgenden wird genauer untersucht, in wie weit sich eine eindimensionale Erweiterung des klassischen Kontinuums um Gradienten zweiter Ordnung zur Abbildung der in Kapitel 4 analysierten Größeneffekte eignet. Hierfür werden im Folgenden zunächst die lokalen Gleichgewichtsbedingungen als Sonderfall aus denen der mikromorphen Theorie abgeleitet. Für den eindimensionalen Fall folgt ohne Berücksichtigung von Volumenkräften und höheren Kontaktkräften aus (6.30) - (6.33) zunächst das Randwertproblem

$$\partial_X P = 0, \quad \forall X \in [0, L], \quad P(0) = P(L) = T \quad (6.34)$$

$$\partial_X R = S, \quad \forall X \in [0, L], \quad R(0) = R(L) = 0. \quad (6.35)$$

Zur Vervollständigung dieses Modells ist zusätzlich ein Materialgesetz nötig. Hierfür wird angenommen, dass sich die Verzerrungsenergie  $W$  wie folgt additiv zusammensetzt (vgl. auch Forest 2009; Forest 2016)

$$W(F, \chi, \partial_X \chi) = W_{\text{ref}}(F) + \frac{1}{2} H_\chi (F - \chi)^2 + \frac{1}{2} A (\partial_X \chi)^2, \quad (6.36)$$

wobei das Referenzpotential  $W_{\text{ref}}$  wie bereits bei der Anwendung der Maxwellregel in Abschnitt 5.1 direkt aus dem diskreten Potential (3.1) übernommen wird. Als zusätzliche Parameter wird die Mikrosteifigkeit  $H_\chi$  und die Gradientensteifigkeit  $A$  eingeführt. Entscheidend ist hierbei dass  $W$  konvex

in  $\partial_X \chi$  ist und der Mikrodeformationsgradient  $\partial_X \chi$ , der einer bestimmten Verzerrungsenergie (6.36) zugeordnet ist, eindeutig festgelegt ist. Die Entfestigungslänge, also die Länge auf der sich Material auf dem abfallenden Spannungs-Dehnungs-Ast (Zustand 2 in Abbildung 3.2c) befindet, ist somit eindeutig festgelegt (vgl. auch Forest 2016). Ferner wird auch klar, dass durch den Term  $A (\partial_X \chi)^2$  (mit  $A > 0$ ) eine untere Grenze für die Entfestigungslänge gegeben sein muss, da für eine verschwindende Entfestigungslänge ( $\ell_{\text{loc}} \rightarrow 0$ )  $\partial_X \chi \rightarrow \infty$  gilt und somit die Energie (6.36) über alle Grenzen ansteigt. Über die Mikrosteifigkeit  $H_\chi$  wird weiterhin kontrolliert wie viel Energie nötig ist, damit die Mikrodeformation  $\chi$  von der Makrodeformation  $F$  abweicht.

Zur Herleitung der endgültigen Differentialgleichungen im Dehnungsraum, werden zunächst die Spannungen nach

$$S = \partial_\chi W = -H_\chi (F - \chi), \quad (6.37)$$

$$R = \partial_{(\partial_X)} W = A \partial_X \chi, \quad (6.38)$$

$$P = \partial_F W = \partial_F W_{\text{ref}} + H_\chi (F - \chi), \quad (6.39)$$

berechnet. Berücksichtigt man in (6.39) zusätzlich (6.37), (6.38) und (6.35) so folgt

$$P = P_{\text{ref}} - A \partial_X^2 F, \quad (6.40)$$

wobei die Referenzspannung als  $P_{\text{ref}} := \partial_F W_{\text{ref}}$  definiert wurde. Mit (6.34) folgt daraus schließlich die Differentialgleichung für die Dehnung  $F$  bzw. die Verschiebung  $u$

$$\partial_X P_{\text{ref}} + A \partial_X^3 F = 0. \quad (6.41)$$

Die zugehörige Randbedingung  $R(0) = R(L) = 0$  lässt sich mit (6.38) alternativ als

$$\partial_X F|_{X=0} = \partial_X F|_{X=L} = 0 \quad (6.42)$$

ausdrücken. Anstatt der Spannungsrandbedingung  $P(0) = P(L) = 0$  soll im Folgenden allerdings die zugehörige Dirichlet Randbedingung

$$\begin{aligned} x(0) &= X(0) \\ x(L) &= X(L) + U. \end{aligned} \quad (6.43)$$

betrachtet werden, da dies auch bei der Analyse des diskreten Modells den weitaus interessanteren Fall darstellt.

Die Mikrodeformation  $\chi$  folgt zusammen mit (6.37) und (6.38) aus (6.35)

$$\chi = A \frac{\partial_x^2 F}{H_\chi} + F \quad (6.44)$$

Im Grenzwert  $H_\chi \rightarrow \infty$  folgt die Mikrodeformation  $\chi$  der Makrodeformation  $F$  und es kann somit  $\chi = F$  und folglich  $\partial\chi = \partial_x F = \partial_x^2 x$  gesetzt werden. Das mikromorphe Kontinuum geht folglich im Grenzfall  $H_\chi \rightarrow \infty$  in ein Gradientenkontinuum über.

Wie bereits erläutert, wird über die bisher noch unbestimmte Gradientensteifigkeit  $A$  die Lokalisierungslänge  $\ell_{\text{loc}}$  bestimmt. Die im diskreten Modell verwendete Potentialbeschreibung ist allerdings rein lokal, in dem Sinne, dass in die Auswertung von  $E_i(u_i - u_{i+1})$  (vgl. Gleichung (4.1)) lediglich der lokale Zustand der Zelle  $i$  eingeht und keinerlei Informationen über die Nachbarschaft verwendet werden. Im Gegensatz zu dem Referenzpotential kann der Gradientenanteil somit nicht wie in anderen Arbeiten (Triantafyllidis und Bardenhagen 1993; Truskinovsky und Vainchtein 2004) aus einem nichtlokalen diskreten Modell abgeleitet werden. Auch würde es physikalisch keinen Sinn machen das diskrete Modell mit nichtlokalen Termen zu erweitern, da der energetische Zustand einer Zelle nur von der Dehnung der Zelle selbst aber nicht von der Dehnung der Nachbarzelle abhängt. Alternativ soll die Steifigkeit  $A$  daher aus der Forderung, dass in dem Gradientenmodell die Lokalisierung über die gleiche Länge wie in dem diskreten Modell erfolgt, abgeleitet werden. Zur Erfüllung dieser Forderung wird im Folgenden eine analytische Approximation für das Randwertproblem (6.41) - (6.43) hergeleitet. Aus der Lösbarkeitsbedingung ergibt sich hieraus der analytischer Zusammenhang  $\ell_{\text{loc}} = f(A)$  zwischen Gradientensteifigkeit  $A$  und Entfestigungslänge  $\ell_{\text{loc}}$  welcher dann wiederum dazu verwendet wird die Gradientensteifigkeit  $A$  festzulegen.

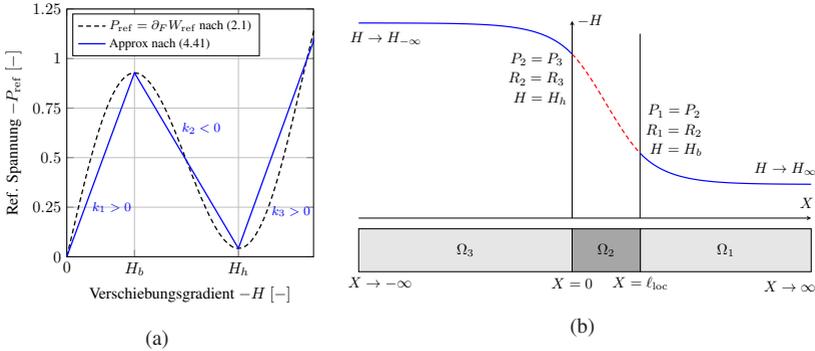


Abbildung 6.2: Darstellung der analytischen Approximation der Entfestigungslänge  $\ell_{\text{loc}}$ . (a) Approximation des Referenzpotentials nach (6.45) und (b) zugehörige Aufteilung des Lösungsgebietes zusammen mit den daraus abgeleiteten Übergangsbedingungen.

## 6.2.1 Analytische Abschätzung der Entfestigungslänge

Aufgrund der Referenzspannung  $P_{\text{ref}} = \partial_F W_{\text{ref}}$ , gegeben durch die Lösung von (3.2) (vgl. auch Abbildung 6.2a) ist die Differentialgleichung (6.41) nicht-linear und eine analytische Lösung nicht ohne weiteres möglich. Nähert man  $P_{\text{ref}}$  allerdings durch stückweise lineare Funktionen an, so lässt sich (6.41) in ein System von gekoppelten linearen Randwertproblemen aufspalten. Diese lassen sich wiederum mit gängigen Methoden leicht analytisch lösen. Dieses Vorgehen ist vergleichbar mit dem in (Mazière und Forest 2015) gewählten Ansatz, mit dem Unterschied dass dort eine Gradientenplastizität betrachtet wird und hier rein hyperelastisches Materialverhalten angenommen wurde. Die tri-lineare Approximation der Referenzspannung lautet

$$P_{\text{ref}} = \begin{cases} k_1 H & \text{für } H > H_b \\ k_1 H_b + k_2 (H - H_b) & \text{für } H_b > H > H_h \\ k_1 H_b + k_2 (H_h - H_b) + k_3 (H - H_h) & \text{für } H_h > H \end{cases} \quad (6.45)$$

Als Materialparameter wurden hier die Steifigkeiten  $k_1, k_3 > 0$  und  $k_2 < 0$  sowie die obere und untere Grenze des entfestigenden Bereiches  $H_h$  und  $H_b$  (vgl. Abbildung 6.2a) eingeführt. Weiterhin wurde hier und im Folgenden der Verschiebungsgradient  $H = F - 1$  anstatt des Deformationsgradienten

$F$  verwendet. Die Materialparameter  $k_i$  werden dabei so gewählt, dass die kritischen Spannungen, die entscheidend für das Entfestigungsverhalten sind, korrekt wiedergegeben werden. Die Approximation des Zwischenbereiches und insbesondere die Approximation für  $H < H_h$  ist hingegen von zweitrangiger Bedeutung. Für die Abschätzung der Lokalisierungslänge ist es weiterhin in erster Näherung ausreichend das Randwertproblem auf  $\Omega = \mathbb{R}$  zu lösen, wodurch die Handhabung der Randbedingungen im Folgenden erheblich vereinfacht wird. Basierend auf der Approximation (6.45) wird das Gebiet  $\Omega$  in drei Teilgebiete  $\Omega_i$  aufgeteilt, wobei für  $i = 1$   $H > H_b$ , für  $i = 2$   $H_b > H > H_h$  und für  $i = 3$   $H_h > H$  gilt (vgl. Abbildung 6.2). Selbstverständlich schränkt diese Aufteilung die Lösungsmenge *a priori* ein. So wäre es theoretisch auch möglich, dass mehrere voneinander getrennte entfestigende Bereiche gleichzeitig existieren. Physikalisch gesehen macht eine solche Aufteilung allerdings keinen Sinn, da Lösungen mit mehr als drei parallel existierenden Phasen instabil sind (vgl. auch Puglisi und Truskinovsky 2000). Der Koordinatenursprung wird so gewählt, dass  $\Omega_2 = [0, \ell_{\text{loc}}]$  gilt, wobei  $\ell_{\text{loc}}$  die zu bestimmende Entfestigungslänge ist. Für jedes dieser Teilgebiete ist nun unter Berücksichtigung der Approximation (6.45), anstatt der nichtlinearen Differentialgleichung (6.41), die folgende lineare Differentialgleichung zu lösen

$$k_i \frac{\partial H}{\partial X} - A \frac{\partial^3 H}{\partial X^3} = 0 \quad \forall X \in \Omega_i \quad \text{und} \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.46)$$

Für die Teilgebiete mit positiver Steifigkeit  $k_i$  erhält man mit  $\omega_i = \sqrt{|k_i|/A}$  folglich die Lösung

$$H_i(X) = C_1^i \exp(\omega_i X) + C_2^i \exp(-\omega_i X) + C_3^i \quad \forall X \in \Omega_i \quad i = 1, 2, \quad (6.47)$$

wohingegen die Lösung für den entfestigenden Bereich ( $k_2 < 0$ ) durch

$$H_2(X) = C_1^2 \sin(\omega_2 X) + C_2^2 \cos(\omega_2 X) + C_3^2 \quad \forall X \in \Omega_2 \quad (6.48)$$

gegeben ist. Zur Bestimmung der Koeffizienten  $C_j^i$  wird zunächst gefordert, dass die Dehnungen im Grenzfall endlich bleiben

$$\lim_{X \rightarrow \infty} H_1(X) = H_\infty \quad \text{und} \quad \lim_{X \rightarrow -\infty} H_3(X) = H_{-\infty}, \quad (6.49)$$

wobei die Grenzwerte  $H_\infty$  und  $H_{-\infty}$  noch zu bestimmen sind. Als weitere Randbedingungen wird Kontinuität der Dehnung  $H$  sowie der Spannungen  $P$  und  $R$  an den Grenzflächen  $X = 0$  und  $X = \ell_{10c}$  gefordert. Die Kontinuität der Dehnung  $H$  folgt aus der Anwendung des Gaußschen Satzes in (6.28) wonach für das Gradientenkontinuum sowohl das Verschiebungsfeld  $u$  als auch die Dehnung  $\chi = F = H + 1$  stetig differenzierbar sein müssen. Die hier zu lösende Differentialgleichungen ist somit nur für glatte Dehnungsfelder gültig. Die Forderung nach Kontinuität der Spannungen  $P$  und  $R$  hingegen folgt aus der Aufspaltung des Integrationsgebietes, wodurch in (6.28) zusätzliche Randterme auftauchen. Zur Erfüllung des Prinzips der virtuellen Leistung sind die Spannungen an den inneren Rändern folglich gleichzusetzen. Aus diesen Kontinuitätsforderungen leiten sich unter Berücksichtigung von (6.38) und (6.40) die zusätzlichen Übergangsbedingungen

$$\begin{aligned} H_3(0) = H_2(0) = H_h \quad \text{und} \quad H_1(\ell_{10c}) = H_2(\ell_{10c}) = H_b, \\ \partial_X^2 H_3(0) = \partial_X^2 H_2(0) \quad \text{und} \quad \partial_X^2 H_1(\ell_{10c}) = \partial_X^2 H_2(\ell_{10c}), \\ \partial_X H_3(0) = \partial_X H_2(0) \quad \text{und} \quad \partial_X H_1(\ell_{10c}) = \partial_X H_2(\ell_{10c}) \end{aligned} \quad (6.50)$$

ab (Abbildung 6.2b). Zur Erfüllung von (6.49) muss  $C_2^3 = C_1^1 = 0$  sowie  $C_3^1 = H_\infty$  und  $C_3^3 = H_{-\infty}$  gelten, so dass mit (6.50) weitere 8 nichtlineare Gleichungen zur Bestimmung der 8 Unbekannten  $C_2^1, C_j^2, C_1^2, H_{-\infty}, H_\infty$  und  $\ell_{10c}$  vorliegen. Eliminiert man hieraus alle Koeffizienten  $C_i^j$  so ergibt sich nach längerer Rechnung die folgende Bedingung

$$\begin{aligned} (H_h - H_{-\infty}) \left( \sin(\omega_2 \ell_{10c}) (\omega_3^2 \omega_1 - \omega_2^2 \omega_3) \right. \\ \left. + \cos(\omega_2 \ell_{10c}) (\omega_3 \omega_2 \omega_1 - \omega_3^2 \omega_2) \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Um diese zu erfüllen muss entweder  $H_h = H_{-\infty}$  gelten oder der zweite Klammerausdruck muss verschwinden. Ersteres entspricht aber genau der trivialen (homogenen) Lösung  $H(X) = H_h$ . Das Randwertproblem bestehend aus (6.46), (6.49) und (6.50) hat somit nur dann nichttriviale Lösungen, wenn der

zweite Klammerausdruck in (6.51) verschwindet. Dies ist genau dann der Fall, wenn für die Entfestigungslänge

$$\ell_{\text{loc}} \in \mathcal{L} := \left\{ \frac{1}{\omega_2} \left( \arctan \left( \frac{-(\omega_3 \omega_2 \omega_1 + \omega_3^2 \omega_2)}{\omega_3^2 \omega_1 - \omega_2^2 \omega_3} \right) \right) + n\pi, n \in \mathbb{N} \right\} \quad (6.52)$$

gilt. Die physikalisch sinnvolle (stabile) Lösung erhält man hieraus als Minimum

$$\ell_{\min} = \min_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{L}. \quad (6.53)$$

Mit  $\omega_i = \sqrt{|k_i|/A}$  stellt dies den gesuchten Zusammenhang zwischen Entfestigungslänge  $\ell_{\text{loc}}$  und Gradientensteifigkeit  $A$  dar. Weiterhin ist zu bemerken dass  $\omega_i > 0, \forall i = 1, 2, 3$  gilt und somit  $\ell_{\min} \neq 0$ . Die Entfestigung erfolgt somit stets über eine endliche Länge, was wiederum die zu Anfang erläuterte Regularisierung beweist. Mit der Entfestigungslänge nach (6.53) kann nun abschließend die vollständige Lösung angegeben werden:

$$\begin{aligned} H_1(X) &= (H_b - H_\infty) \exp(\omega_1(\ell_{\min} - X)) + H_\infty \quad \forall X \in \Omega_1, \\ H_2(X) &= (H_\infty - H_h) \frac{\omega_3^2}{\omega_2^2} \cos(\omega_2 X) \\ &\quad + (H_h - H_\infty) \frac{\omega_3}{\omega_2} \left( \sin(\omega_2 X) + \frac{\omega_3}{\omega_2} \right) + H_h \quad \forall X \in \Omega_2, \\ H_3(X) &= (H_h - H_\infty) \exp(\omega_3 X) + H_\infty \quad \forall X \in \Omega_3, \end{aligned} \quad (6.54)$$

wobei die Grenzdehnungen durch

$$\begin{aligned} H_{-\infty} &= (H_h - H_b) \left( \frac{\omega_3}{\omega_2} \sin(\omega_2 \ell_{\min}) - \frac{\omega_3^2}{\omega_2^2} \cos(\omega_2 \ell_{\min}) + \frac{\omega_3^2}{\omega_2^2} \right)^{-1} + H_h, \\ H_\infty &= (H_\infty - H_h) \left( \frac{\omega_3^2}{\omega_1^2} \cos(\omega_2 \ell_{\min}) - \frac{\omega_3 \omega_2}{\omega_1^2} \sin(\omega_2 \ell_{\min}) \right) + H_b \end{aligned} \quad (6.55)$$

gegeben sind.

## 6.2.2 Numerische Lösung und begleitende Stabilitätsanalyse

Zusätzlich zu den analytischen Abschätzungen wird das nichtlineare (endliche) Randwertproblem bestehend aus (6.41) - (6.43) numerisch mit Hilfe des Schießverfahrens gelöst. Hierbei ist zu beachten, dass analog zu den Analysen im vorherigen Abschnitt auch für das endliche nichtlineare Problem mehrere Lösungen existieren können. So erfüllt neben der lokalisierenden Lösung auch immer die triviale Lösung  $H \equiv U/L$  sowohl die Differentialgleichung (6.41) als auch die zusätzlich verwendeten Randbedingungen. Wird die numerische inkrementelle Lösung mit der homogenen Lösung als Startwert begonnen, so wird auch immer nur die homogene Lösung gefunden. Wie die Folgende Stabilitätsanalyse zeigen wird, ist die homogene Lösung allerdings, ähnlich wie im diskreten Modell, in einem gewissen Bereich instabil. Um zusätzlich auch die nichttriviale Lösung zu erhalten wird wie folgt Gebrauch von der analytischen Approximation aus dem vorherigen Abschnitt gemacht: Die Berechnung wird mit der Randbedingung  $x(L) = X - L/2$  begonnen, bei der sich die Mitte der Entfestigungszone gerade bei  $X = L/2$  befindet. Als Startwert wird die analytische Abschätzung nach Gleichung (6.54) verwendet. Wird für diesen Startwert eine konvergierte Lösung mit lokalisierter Dehnung gefunden, so wird die Berechnung in beide Richtungen mit den Inkrementen  $\pm\Delta u$  fortgesetzt.

Die auf diese Weise aufgefundenen Lösungen werden bzgl. ihrer physikalischen Realisierbarkeit mit einer begleitenden Stabilitätsanalyse bewertet. Analog zu den diskreten Stabilitätsuntersuchungen ist eine Gleichgewichtslage genau dann stabil, wenn die zweite Variation  $\delta_u^2 W$  des Gesamtpotentials

$$W = \int_0^L W_{\text{ref}} + \frac{1}{2} A (\partial_X H)^2 d\Omega \quad (6.56)$$

positiv für alle kinematisch zulässigen Variationsfelder  $(\delta u, \delta \partial_X H)$  ist. Unter Berücksichtigung der Randbedingung  $\delta \partial H(0) = \delta \partial H(L) = 0$  und mehrmaliger Anwendung der partiellen Integration erhält man hierfür

$$\delta_u^2 W = \int_0^L \partial_H^2 W_{\text{ref}} (\delta_u H)^2 + A (\delta \delta_u H)^2 d\Omega. \quad (6.57)$$

In Übereinstimmung mit den (periodischen) Randbedingungen kann das Variationsfeld, ohne Beschränkung der Allgemeinheit, als Fourier Reihe dargestellt werden (Triantafyllidis und Bardenhagen 1993)

$$\delta u = \sum_{n=1}^{\infty} \delta u_n \sin\left(\frac{n\pi X}{L}\right). \quad (6.58)$$

Für (6.57) folgt damit vorerst

$$\begin{aligned} \delta_u^2 W = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^L \partial_H^2 W_{\text{ref}} \cos\left(\frac{k\pi X}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi X}{L}\right) \frac{nk\pi^2}{L^2} d\Omega \delta u_n \delta u_k \\ + A \frac{L}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 \delta u_n^2, \end{aligned} \quad (6.59)$$

wobei für den zweiten Term die übliche Orthogonalitätsbeziehung in der Form

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi X}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi X}{L}\right) d\Omega = \frac{L}{2} \delta_{nk} \quad (6.60)$$

ausgenutzt wurde.

Für die weitere Untersuchung von (6.59) muss zwischen trivialer Lösung  $H(X) = U/L$  und lokalisierender Lösung unterschieden werden. Für erstgenannte kann die Stabilitätsanalyse rein analytisch durchgeführt werden. Hierfür wird ausgenutzt, dass in diesem Fall auch  $\partial_H^2 W_{\text{ref}}$  konstant in ganz  $\Omega$  ist und somit in (6.59) vor das Integral geschrieben werden kann. Für die zweite Variation folgt somit unter erneuter Anwendung der Orthogonalitätsbeziehung

$$\delta_u^2 W = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \partial_H^2 W_{\text{ref}} + A \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right) \frac{n^2 \pi^2}{2L} \delta u_n^2. \quad (6.61)$$

Da alle  $\delta u_n$  linear unabhängig sind, ist die triviale (homogene) Lösung genau dann stabil, wenn der Klammerausdruck für alle ganzzahligen  $n \geq 1$  positiv ist. Für die weitere Stabilitätsanalyse der homogenen Lösung muss zwischen den Zuständen 1,2 und 3 (vgl. Abbildung 6.2a bzw. 3.2c) unterschieden werden. Für die Zustände 1 ( $U/L > H_b$ ) und 3 ( $U/L < H_h$ ) gilt  $\partial_H^2 W_{\text{ref}} > 0$ , da weiterhin  $A$  per Definition positiv ist, sind diese Zustände, wie im diskreten

Fall, uneingeschränkt stabil. Für den Zwischenbereich  $H_b \geq H \geq H_h$  (Zustand 2) gilt hingegen  $\partial_H^2 W_{\text{ref}} \leq 0$ . Da ferner für alle  $n > 1$ ,  $(\frac{n\pi}{L})^2 > (\frac{\pi}{L})^2$  gilt, genügt es zu fordern, dass der Klammerausdruck in (6.61) für  $n = 1$  positiv ist. Die Gleichgewichtskonfiguration ist somit genau dann stabil, wenn

$$\partial_H^2 W_{\text{ref}} = \partial_H P_{\text{ref}} \geq -A \left( \frac{\pi}{L} \right)^2, \quad \text{mit} \quad \partial_H P_{\text{ref}} \leq 0 \quad (6.62)$$

gilt. Diese Bedingung erlaubt einige weitere Diskussion. Hierfür vergleicht man, für fixiertes Referenzpotential, zwei Strukturen mit den Längen  $L_2 > L_1$ . Aus (6.62) folgt dann, dass für den stabilen Zwischenbereich die Bedingung  $\partial_H P_{\text{ref},2} > \partial_H P_{\text{ref},1}$  gilt. Da allerdings  $\partial_H P_{\text{ref}}$  negativ ist, bedeutet dies, dass der Dehnungsbereich in dem die homogene Lösung im Zwischenbereich  $H_b \geq H \geq H_h$  instabil wird mit wachsender Länge zunimmt und im Grenzfall  $L \rightarrow \infty$  schließlich den kompletten Zwischenbereich umfasst. Dies ist qualitativ konsistent mit den Beobachtungen aus der Analyse des diskreten Modells: Während die homogene Lösung in Phase 2 für eine Zelle uneingeschränkt stabil ist, ist sie bereits für 2 Zellen komplett instabil. Weiterhin erhält man durch einige Umformungen aus (6.62) ebenfalls die maximale (minimale) Länge  $L_{\text{max}}$  bis zu der die homogene (triviale) Lösung uneingeschränkt stabil ist (ab der eine Lokalisierung der Deformation möglich ist):

$$L_{\text{max}} = \pi \sqrt{\frac{A}{-\min \partial_H P_{\text{ref}}}}. \quad (6.63)$$

Fällt die Spannungs-Dehnungskurve im Zwischenbereich folglich stärker ab, so sinkt die Länge ab der eine Lokalisierung möglich ist. Dies ist insofern nachvollziehbar, als dass bei stärkerem Abfall des Referenzpotentials, die zur Lokalisierung nötige Energie, die durch das restliche Material freigegeben werden muss, abnimmt und somit eine Lokalisierung früher möglich ist. Wohlgermerkt wurde die vorangegangene Stabilitätsuntersuchung ohne Einschränkung des (nicht konvexen) Referenzpotentials durchgeführt und ist somit für beliebige Potentiale, und nicht nur für die Approximation nach (6.45) gültig.

Für die nicht-triviale Lösung mit lokalisierender Dehnung kann das Integral in (6.59) ohne Kenntnis der Lösung nicht weiter ausgewertet werden. Die Stabilitätsanalyse wird daher begleitend zu der numerischen Lösung durchgeführt. Hierfür wird zur Approximation der zweiten Variation das Gebiet  $[0, L]$  in  $n$

Teilgebiete  $\Omega_i = [X_i - \Delta X/2, X_i + \Delta X/2]$  aufgeteilt. Gleichung (6.59) kann somit wie folgt approximiert werden

$$\delta_u^2 W \approx \delta u_k (M_{kn}^1 + M_{kn}^2) \delta u_n. \quad (6.64)$$

Die Matrizen  $\mathbf{M}^1$  und  $\mathbf{M}^2$  sind hierbei durch

$$M_{kn}^1 = \sum_{i=1}^n \partial_H^2 W_{\text{ref}}(X_i) \cos\left(\frac{k\pi X_i}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi X_i}{L}\right) \frac{nk\pi^2}{L^2} \Delta X, \quad (6.65)$$

$$M_{kn}^2 = \frac{AL}{2} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{k\pi}{L}\right) \delta_{nk} \quad (6.66)$$

gegeben, wobei in beiden Gleichungen keine Summation über  $n$  und  $k$  durchzuführen ist. Gleichgewichtskonfigurationen der inhomogenen Lösung sind folglich genau dann stabil, wenn  $\mathbf{M} = \mathbf{M}^1 + \mathbf{M}^2$  positiv definit ist.

### 6.2.3 Numerische Ergebnisse und Vergleich mit dem diskreten Modell

Zur weiterführenden Bewertung des zuvor entwickelten Modells, wird dies nun mit dem diskreten Modell aus Kapitel 4 für eine homogene Reihenschaltung von diskreten Zellen (vgl. auch Abb. 4.1) verglichen. Wie bereits erwähnt, kann das Referenzpotential  $W_{\text{ref}}$  hierfür direkt aus dem diskreten Modell übernommen werden, die Gradientensteifigkeit wird zu  $A = 0.455$  gewählt, nach Gleichung (6.52) entspricht dies einer minimalen Entfestigungslänge von  $\ell_{\text{loc}} = 1$ . Um die Modellierung der Größeneffekte bewerten zu können, muss folglich das Kontinuumsmodell mit einer Länge  $L$  mit der diskreten Struktur mit  $n = L$  Zellen verglichen werden. Abbildung 6.3a-e vergleicht die Reaktionskraft für alle mit der hier angewandten Methodik aufgefundenen Gleichgewichtskonfiguration mit der Reaktionskraft des diskreten Modells für größer werdende Stukturlängen  $L$  bzw. steigende Anzahl an diskreten Zellen. Basierend auf der Stabilitätsanalyse sind für das Gradientenmodell weiterhin die zu erwartenden Belastungs- und Entlastungspfade durch Pfeile gekennzeichnet.

Unabhängig von der absoluten Größe der Struktur folgt der Kraft-/Dehnungsverlauf des Gradientenmodells zu Anfang dem diskreten Modell. Dieses Verhalten ist zu erwarten, da sich hier noch keine Lokalisation ausgebildet hat.



sich eine Lokalisationszone aus, so gilt an den Ränder  $\partial_X^2 H \neq 0$  (vgl. auch Abbildung 6.2b), wodurch nach Gleichung (6.40) die Reaktionskraft von  $P_{\text{ref}}$  abweicht. Analog zu dem diskreten Modell ist für die kleinste Struktur mit einer Länge  $L = 1$  noch keine Lokalisierung möglich, während ab einer Länge von  $L = 2$  (entspricht zwei instabilen Zellen) eine Lokalisierung erfolgt. Dies stimmt mit der analytischen Vorhersage nach (6.63) überein, wonach für das hier verwendete Potential eine Lokalisation ab einer Länge von  $L = 1.32$  stattfindet.

Die diskreten Phasenübergänge finden im diskreten Modell für  $n \geq 3$  unter Belastung und Entlastung bei unterschiedlichen Dehnungen statt, was schlussendlich zu einer Hysterese führt. Das Gradientenmodell zeigt einen analogen Effekt. Zwar sinkt (steigt) mit steigender Größe die kritische Dehnung bei der die homogen Lösung schlagartig lokalisiert, strebt allerdings einem Grenzwert an, welcher genau dem Maximum (Minimum) des Referenzpotential entspricht (vgl. auch Gl. (6.62)). Der Instabilitätsbereich kann sich allerdings ausdrücklich nicht über dieses Maximum hinaus ausdehnen, da nach Gleichung (6.61) die homogene Lösung für  $H_h > H > H_b$  Bedingungslos stabil ist. Gleichzeitig wird der Dehnungsbereich, in dem die lokalisierte Lösung existiert (Plateau konstanter Spannung), größer. Folglich verweilt das Modell unter Entlastung länger in der lokalisierten Konfiguration. Der diesem Effekt zugrundeliegende Mechanismus ist analog zu dem im diskreten Modell (vgl. Abschnitt 4.3.1): Bei Belastung über das Spannungsmaximum hinaus erfolgt die Transformation ausgehend von der homogenen Lösung  $H(X) = H_b$ . Bei der Rücktransformation hingegen liegt eine inhomogene Dehnungsverteilung vor, bei der sich ein Großteil der Struktur bereits wieder in Zustand 1 mit  $H > H_b$  befindet. Mit steigender Länge  $L$  wird der Punkt der Rücktransformation folglich zu immer späteren Zeitpunkten verschoben. Postuliert man analog zum diskreten Modell, den Dynamischen Phasenwechsel so bildet sich bei einem vollständigen Belastungs-Entlastungszyklus eine Hysterese aus. Diese wird ebenfalls analog zum diskreten Fall mit der Modellgröße  $L$  Größer, strebt allerdings nicht dem Grenzfall entgegen welcher unter Spannungsrandbedingungen zu erwarten wäre.

Auffällig ist, dass sich, ähnlich der Maxwell-Regel, für hinreichende Länge  $L \geq 3$  ein konstantes Plateau in der Reaktionskraft ausbildet. Dieser Effekt lässt sich auf die Wirkung der Randbedingungen zurückführen: Hat sich bei hinreichender Größe des kontinuierlichen Modells eine Entfestigungszone aus-

gebildet und ist diese hinreichend weit von den Rändern entfernt, ändert sich, auf Grund des exponentiellen Abfalls (Anstiegs) der Dehnungen, die Randdehnungen quasi nicht mehr (vgl. Abbildung 6.2b) und die Reaktionskraft bleibt in einem weiten Bereich quasi konstant. Erreicht die Entfestigungszone das gegenüberliegende Ende so treten die zuvor beschriebenen Transformationsvorgänge in umgekehrter Reihenfolge auf. Um so größer die Strukturlänge  $L$  ist, um so breiter ist folglich auch das konstante Plateau in der Reaktionskraft und um so geringer wird der Einfluss der Randeffekte.

Abschließend soll noch ein Vergleich der numerischen Lösung des endlichen Problems mit der analytischen Approximation des unendlichen Problems erfolgen. Hierfür wird in Abbildung 6.3f die Entfestigungslänge  $\ell_{\text{loc}}$ , für die  $H_b > H > H_h$  gilt, für verschiedene Strukturängen  $L$  mit der analytischen Approximation  $\ell_{\text{loc}}^a = 1$  verglichen. Im Fall des endlichen Problems (numerischen Lösung) ist diese für die Konfiguration mit  $\bar{H} = u/L = -0.5$  ausgewertet, bei dieser befindet sich die Lokalisierungszone genau in der Mitte und alle Strukturängen zeigen die gleiche Reaktionskraft (vgl. Abb. 6.3a-e). Da die analytische Abschätzung durch Lösung des unendlichen Problems gewonnen wurde, könnte man erwarten, dass die numerische Lösung für steigende Strukturängen  $L$  gegen die analytische Abschätzung  $\ell_{\text{loc}}^a = 1$  konvergiert. Dies ist allerdings offensichtlich nicht der Fall. Die Ursache hierfür liegt darin, dass für die analytische Abschätzung ebenfalls eine Approximation des Referenzpotentials erfolgte, der hierdurch verursachte Fehler bleibt aber auch im Grenzfalle  $L \rightarrow \infty$  erhalten. Es ist allerdings positiv hervorzuheben, dass die analytische Abschätzung in der richtigen Größenordnung liegt und dies auch für verhältnismäßig kleine Strukturen mit  $L \approx L_{\text{min}}$  gilt. Ursache hierfür ist sicherlich, dass sich die Dehnungen außerhalb der Entfestigungszone exponentiell den Randdehnungen nähern (vgl. auch Gleichung (6.54)) und somit der Einfluss der Randbedingungen auf die Entfestigungszone bereits für kleine Strukturen gering ist.

## 6.2.4 Diskussion

Im Rahmen einer Kontinuumsmodellierung von diskreten instabilen Strukturen müssen die diskreten Zustandswechsel durch eine kontinuierliche Phasenausbreitung ersetzt werden. Dies ist grundsätzlich so und zunächst einmal unabhängig von der Art des verwendeten Kontinuums. Im Fall des klassi-

schen Kontinuums führt dies dazu, dass unter infinitesimaler Steigerung der äußeren Verschiebung immer auch eine infinitesimale Phasentransformation möglich ist und somit die zugehörige Reaktionskraft konstant bleibt. Unter der Voraussetzung, dass sich bereits eine Entfestigungszone ausgebildet hat und diese weit genug von den Rändern entfernt ist, so gilt die vorherige Argumentation analog auch für das Gradientenkontinuum. Dass der Kraft-Weg Verlauf des Gradientenkontinuums trotzdem von der Maxwell-Regel abweicht, hat wie bereits angedeutet zwei Ursachen: Einerseits wird, wie in Abschnitt 6.2 diskutiert, die Ausbildung einer Lokalisierungszone mit unendlich steilem Gradienten verhindert. Andererseits verhindert aber auch die Randbedingung  $\partial_X F = 0$  (6.42), dass sich am Rand eine Lokalisierungszone mit einer Länge  $l < l_{\text{loc}}$  bildet. Diese Einschränkungen gelten im Fall des klassischen Kontinuums nicht.

Diese Argumentation macht auch klar, warum die Hysterese des Gradientenkontinuums nicht wirklich mit dem diskreten Modell vergleichbar ist. Die Ausbildung/Ausbreitung einer Lokalisierungszone wird nur bei der Initiierung an den Rändern unterbunden, wodurch lediglich bei der Initiierung eine schlagartige Phasentransformation (und damit eine Hysterese) beobachtbar ist. Im diskreten Fall hingegen ist eine kontinuierliche Ausbreitung durch die Zustandsbeschreibung immer unterbunden. Dass mittels des Gradientenmodells kein Rückschluss auf die Energiedissipation möglich ist, könnte man als Schwäche des Gradientenmodells darstellen. Dieser Vergleich ist allerdings insofern nicht fair, als dass auch das statische diskrete Modell keine Energiedissipation modelliert, es wurde lediglich angenommen, dass die bei dem unkontrollierten Zustandswechsel von einem stabilen Zustand zum nächsten stabilen Zustand frei werdende Energie dissipiert wird. Thermodynamisch kann dies erst durch die Einführung eines Dissipationsmechanismus (wie zum Beispiel durch die in Gleichung (4.12) eingeführte Dämpfung) korrekt modelliert und bestätigt werden. Zur Erfassung der Dissipation und der damit verbundenen Größeneffekte ist somit auch im Fall des Gradientenmodells die Einführung eines Dissipationsmechanismus notwendig.

Unabhängig davon wie genau dieser Mechanismus formuliert wird, enthält das hier verwendete Gradientenmodell allerdings eine entscheidende Grundlage zur Abbildung des Größeneffektes bzgl. der Energiedissipation. Dieser ist nämlich, wie in Abschnitt 4.3.1 gezeigt, auf das Größenverhältnis zwischen lokalisierender und entspannender Mesostruktur zurückzuführen. Genau die-

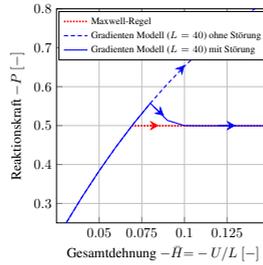


Abbildung 6.4: Detaildarstellung des Transformationspeaks unter Berücksichtigung ausreichender Aktivierungsenergie für den Fall  $L = 40$  im Vergleich zu der Maxwell-Regel.

ses Verhältnis wird aber durch die Festlegung der Gradientensteifigkeit nach Gleichung (6.53) korrekt wiedergegeben. Insbesondere wird im Vergleich zu einer Formulierung im klassischen Kontinuum gewährleistet, dass für kleine Strukturen  $L < L_{\max}$  die homogene Lösung bedingungslos stabil ist, und somit keine Lokalisierung erfolgt (vgl. auch Gleichung (6.63)).

Im Fall des Gradientenkontinuum existieren weiterhin, in einem mit der Strukturlänge  $L$  größer werdenden Bereich, zwei Gleichgewichtskonfigurationen gleichzeitig. Es stellt sich somit analog zum diskreten Fall die Frage wie das Gradientenkontinuum auf Störungen reagiert. Hier kann in Analogie zu dem diskreten Modell davon ausgegangen werden, dass unter Berücksichtigung einer gewissen Aktivierungsenergie eine frühzeitige Lokalisierung möglich ist. Geht man ebenfalls davon aus, dass die nötige Aktivierungsenergie analog zum diskreten Fall mit der Größe der Struktur abnimmt, so ist das Gradientenkontinuum im Grenzfall  $L \rightarrow \infty$  bis auf ein kleines Transformationspeak konsistent mit der Maxwell-Regel (vgl. Abbildung 6.4). Dieses wiederum hat seinen Ursprung ebenfalls darin, dass die Energie zur Erzeugung einer endlichen Entfestigungszone größer ist als die zum (infinitesimalen) Wachstum selbiger (vgl. auch Truskinovsky und Vainchtein 2004).

Dies wirft die Frage auf, ob dem Transformationspeak ein physikalischen Mechanismus zugeordnet werden kann, welcher ebenfalls in der zu beschreibenden diskreten Struktur beobachtbar ist. Es wäre denkbar dem Transformationspeak die Störungsempfindlichkeit der diskreten Struktur zuzuordnen. Die Störungsempfindlichkeit, welche nach Gl. (5.2) mit der Anzahl der Zellen  $n$  zunimmt, zeigt in der Tat einen qualitativ vergleichbaren Größeneffekt. Eine

solche Zuordnung macht in diesem Fall allerdings keinen Sinn, da hier davon ausgegangen wurde, dass das Gradientenkontinuum bereits intrinsisch eine solche Störungsempfindlichkeit aufweist. Einen Nachweis dieser Eigenschaft für ein verwandtes Problem findet man z.B. in Truskinovsky und Vainchtein 2004. Eine solche Zuordnung macht auch vor dem Hintergrund keinen Sinn, dass im diskreten Fall unter Berücksichtigung ausreichender Aktivierungsenergie kein Transformationspeak (Puglisi und Truskinovsky 2000) verbleibt, im Fall des Gradientenkontinuums bleibt dieses hingegen endlich. In der Literatur erfolgt eine Erklärung des Transformationspeaks z.B. im Rahmen der Versetzungsplastizität. Hierbei wird der Spannungsabfall auf die unterschiedlichen Kräfte, die zur Mobilisierung von Versetzungen und zum Aufrechterhalten von Versetzungsbewegungen nötig sind (Cottrell und Bilby 1949; Johnston und Gilman 1959), zurückgeführt. Dieses Phänomen wird durch Diffusion von Fremdatomen in der Umgebung von Versetzungen hervorgerufen und ist experimentell oftmals als so genanntes Lüdersband zu beobachten (Shaw und Kyriakides 1998; Kyriakides und Miller 2000; Mazière und Forest 2015). Alternativ kann das Transformationspeak mit Hilfe eines nichtlokalen diskreten Modells auf die nichtlokale Interaktion zwischen Atomen zurückgeführt werden, wobei gezeigt werden kann, dass ohne nichtlokale Interaktionen im diskreten eindimensionalen Fall kein Transformationspeak existieren kann (Truskinovsky und Vainchtein 2004). Das hier verwendete diskrete Modell ist allerdings rein lokal. Ferner würde die Einführung von nichtlokalen Interaktionen, für die in dieser Arbeit untersuchte Struktur, physikalisch keinen Sinn machen.

Die vorangegangene Diskussion macht aber auch deutlich, dass das Auftreten des Transformationspeaks stark von den Randbedingungen beeinflusst wird: So beeinflusst insbesondere die Randbedingung  $R = A\partial_x F = 0$  die Art wie sich eine Lokalisierung am Rand ausbilden kann. Hier wurde stillschweigend angenommen, dass die Randbedingungen direkt aus dem diskreten Modell übertragbar sind und keine höheren Kräfte aufgebracht werden müssen (vgl. Gl. (6.35)). Dies ist insofern plausibel, als, dass das diskrete Pendant im hier vorliegenden Fall nur aus virtuellen Zellen mit nur einem Freiheitsgrad besteht und die Randbedingungen im diskreten Fall keinen Einfluss auf das Verhalten der Mesostruktur haben. Für den Fall, dass reale dreidimensionale Strukturen, wie sie in Abschnitt 4.3.3 untersucht wurden, modelliert werden sollen, sind unter Umständen nicht verschwindende höhere Randbedingungen nötig. Diese können als „homogenisierte“ Randbedingungen den Einfluss der diskreten Randbedingungen auf die Mesostruktur und damit eventuelle Randeffekte

im Rahmen einer Kontinuumsbeschreibung modellieren. Die physikalische Grundlage ist hierbei dadurch gegeben, dass die diskreten Randbedingungen auf das Verhalten der Zellen am Rand eine versteifende Auswirkung haben und damit in der Tat die Lokalisierung durch die Randbedingungen verzögert werden kann. Solche Randeﬀekte und die damit verbundenen Größeneﬀekte sind unter anderem aus der Modellierung des elastischen Verhaltens von Schäumen und ähnlich strukturierten Materialien bekannt (Anderson und Lakes 1994; Onck u. a. 2001; Chen und Fleck 2002; Diebels und Steeb 2002; Diebels und Steeb 2003; Jänicke 2010; Seppecher u. a. 2011).

Eine weitere, vielfach diskutierte Frage ist die nach der geeigneten, minimal möglichen Erweiterung der klassischen Kontinuumstheorie, die ein bestehendes Problem regularisiert bzw. Größeneﬀekte auf geeignete Art und Weise abbildet (vgl. z.B. Forest 2003a). So können zum Beispiel Mesostrukturen entworfen werden, zu deren Kontinuumsbeschreibung beliebige höhere Deformationsgradienten  $\nabla^2 \mathbf{F}, \nabla^3 \mathbf{F}, \dots$  benötigt werden (Seppecher u. a. 2011). Für den in dieser Arbeit untersuchten eindimensionalen Fall hat sich gezeigt, dass eine Regularisierung mit Hilfe des ersten Dehnungsgradienten erfolgen kann. Dies stellt im eindimensionalen gleichzeitig die geringstmögliche Erweiterung dar. Da die Lokalisierung im dreidimensionalen Fall auf analoge Art und Weise erfolgt, ist zu erwarten, dass auch in einer dreidimensionalen Erweiterung eine zusätzliche Gradientenkomponente, anstatt des kompletten Gradienten  $\partial_I F_{kJ}$ , zur Regularisierung ausreicht.

Unmittelbar nach der Frage nach einer geeigneten Erweiterung der Kontinuumstheorie stellt sich die Frage nach der Struktur der konstitutiven Gleichung. Verschiedene Ansätze hierfür und eine Diskussion ihrer Grenzen findet man in Forest 2016. Hier wurde der einfachste Fall einer additiven Trennung zwischen nichtlinearem Referenzpotential und quadratischem Gradiententerm untersucht. Aufgrund der einfachen Struktur des Gesamtpotentials, ist es möglich das eindimensionale Problem - mit approximiertem Referenzpotential - analytisch zu lösen. Aus der Bedingung für eine nicht-triviale Lösung lässt sich wiederum ein analytischer Zusammenhang zwischen Lokalisierungslänge und Gradientensteifigkeit ableiten. Ermittelt man ferner das Referenzpotential über eine klassische Homogenisierung so ließe sich mit diesem Ansatz das aus einer klassischen Homogenisierung gewonnene Modell im Nachgang physikalisch sinnvoll regularisieren.

Unabhängig davon stellt sich natürlich die Frage wie sinnvoll eine materielle Beschreibung ist. Hierfür muss in erster Linie nach zu beschreibenden Phänomen differenziert werden. Die hier durchgeführte Materialmodellierung zielte in erster Linie auf die Beschreibung des Verhaltens homogener Strukturen ab. Wird dieses Modell durch einen geeigneten Dissipationsmechanismus erweitert, so wäre dieses insbesondere zur Untersuchung der Ausbreitung und Dissipation von Wellen im Kontinuumslimit interessant. Gleiches gilt für die Untersuchung von Wellenausbreitung in inhomogenen Strukturen, welche auf die gleich Art modelliert werden könnte, wobei das entsprechende Materialgesetz  $W(\mathbf{F}, \mathbf{X})$  dann kontinuierlich vom Ort  $\mathbf{X}$  abhängen würde. Eine weitere herausragende Eigenschaft des hier entwickelten Metamaterials ist die Programmierbarkeit der Effektiveneigenschaften. Eine Kontinuumsbeschreibung erscheint hier wenig sinnvoll, da diese Eigenschaft gerade aus der diskreten Materialverteilung resultiert. Eine Kontinuumsbeschreibung würde folglich eine diskontinuierliche Materialverteilung  $W(\mathbf{F}, \mathbf{X})$  erfordern, wodurch das Kontinuumsproblem effektiv wieder zu einem diskreten Problem wird.

### 6.3 Homogenisierung für das dreidimensionale mikromorphe Kontinuum

Die vorherige phänomenologische Modellierung ist von einem additiven Split der Verzerrungsenergie und von einem quadratischen Gradiententerm ausgegangen (vgl. Gl. (6.36)). Wie sich gezeigt hat, ist diese Annahme zur Regularisierung und zum Abbilden von Größeneffekten bzgl. des Stabilitätsverhaltens in gewissen Grenzen geeignet. Man könnte nun prinzipiell durch Hinzufügen des Gradiententerms ein Materialmodell aus einer klassischen Homogenisierung der Mikrostruktur (wie in Kapitel 3.2 dargestellt) im Nachgang Regularisieren. Alternativ dazu soll im Folgenden untersucht werden, ob die erweiterten konstitutiven Gleichungen für die Modellierung der hier entwickelten Mesostruktur auch systematisch aus einer erweiterten Homogenisierung abgeleitet werden können.

Hierfür erfolgt zunächst eine Verallgemeinerung der grundlegenden Äquivalenzbeziehungen der klassischen Homogenisierung aus Abschnitt 3.2. Anhand verschiedener Realisierungen dieser Äquivalenzbeziehungen wird nachfolgend die Anwendbarkeit für die hier vorliegende Mesostruktur diskutiert. Analog zu

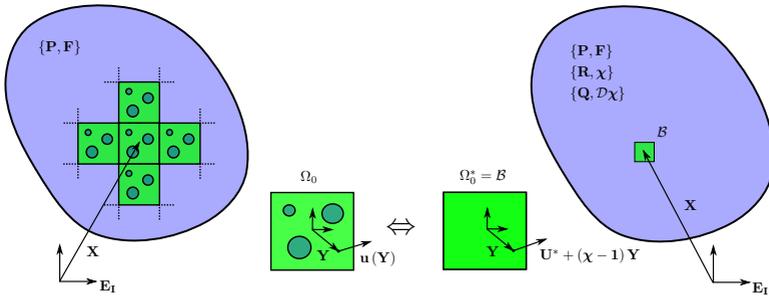


Abbildung 6.5: Darstellung des verallgemeinerten Homogenisierungsprozesses: Auf Basis von Volumenelementen  $\Omega_0$  und  $\Omega_0^*$  wird der Körper mit aufgelöster Mesostruktur (links), beschrieben über eine klassische Kontinuumstheorie, durch einen homogenen Körper (rechts), beschrieben über eine verallgemeinerte mikromorphe Theorie, ersetzt. Die Überführung erfolgt auf Basis so genannter Äquivalenzbeziehungen (vgl. Gl. (6.68) und (6.71)-(6.75))

der Herleitung der Bilanzgleichungen in Abschnitt 6.1 wird hierbei von dem allgemeineren Fall des mikromorphen Kontinuums ausgegangen. Das Gradientenkontinuum lässt sich daraus über zusätzliche Nebenbedingungen wieder leicht als Spezialfall ableiten.

Um die Notation zu vereinfachen, wird hier leicht von der bisherigen Notation abgewichen (siehe Abbildung 6.5). Die Koordinaten eines materiellen Punktes in der Referenzkonfiguration werden mit  $\mathbf{X}$  bezeichnet. Zur Beschreibung des für die Homogenisierung verwendeten Volumenelementes wird ein lokales Koordinatensystem mit Koordinaten  $\mathbf{Y}$  eingeführt, welches seinen Ursprung im volumetrischem Schwerpunkt hat. Die entsprechenden Koordinaten in der Momentankonfiguration werden mit  $\mathbf{x}$  bzw.  $\mathbf{y}$  bezeichnet. Für Ableitungen bzgl. makroskopischer Koordinaten  $\mathbf{X}$  wird das Symbol  $\mathcal{D}$  verwendet, für Ableitungen bzgl. der lokalen Koordinaten hingegen wie zuvor das Symbol  $\partial$

$$\mathcal{D}_K A(\mathbf{X}) := \frac{\partial A(\mathbf{X})}{\partial X_K}, \quad \partial_K B(\mathbf{Y}) := \frac{\partial B(\mathbf{Y})}{\partial Y_K}. \quad (6.67)$$

### 6.3.1 Verallgemeinerte Äquivalenzbeziehungen

Analog zu der klassischen Homogenisierung müssen zunächst die grundlegenden Relationen zwischen Volumenelementen der realen Mesostruktur  $\Omega_0$  und dem effektivem Kontinuum  $\Omega_0^*$  definiert werden. Im Gegensatz zum klassischen Ansatz wird nun  $\Omega_0^*$  mittels der mikromorphen Theorie beschrieben, wohingegen  $\Omega_0$  weiterhin mittels der klassischen Theorie modelliert wird. Die Hill-Mandel Bedingung (Gleichung (3.5)) wird auf der rechten Seite um die zusätzlichen Leistungsterme des mikromorphen Kontinuums (vgl. Gleichung (6.23)) erweitert

$$\langle P_{iJ} \dot{F}_{iJ} \rangle_{\Omega_0} = P_{iK}^* \dot{F}_{iK}^* + S_{iK}^* \dot{\chi}_{iK}^* + R_{iJK}^* \mathcal{D}_K \dot{\chi}_{iJ}^*, \quad (6.68)$$

wobei eckige Klammern zur Abkürzung der Volumenmittlung verwendet wurden  $\langle \bullet \rangle_S := \frac{1}{|S|} \int_S \bullet dS$ . Wie eine physikalisch sinnvolle Verallgemeinerung der kinematischen Kopplung (3.6) aussieht, ist hingegen nicht so offensichtlich. Dies liegt mitunter daran, dass  $\Omega_0$  nach wie vor durch ein klassisches Kontinuum beschrieben wird und in diesem Fall keine höheren Verzerrungsmaße  $\chi$  und  $\nabla \chi$  existieren (Kouznetsova u. a. 2002; Forest und Trinh 2011). Korrespondierende Verzerrungsmaße können somit nicht einfach wie in (3.6) über eine Volumenmittlung gleichgesetzt werden. Für den Sonderfall, dass das effektive Kontinuum ein Gradientenkontinuum ist, wird oftmals direkt mit der erweiterten Taylorreihe

$$y_i = F_{iJ} Y_J + \frac{1}{2} \mathcal{D}_K F_{iJ} Y_J Y_K \quad (6.69)$$

gearbeitet (Gologanu u. a. 1997; Kouznetsova u. a. 2002). Um diese analog zu dem klassischen Fall um eine physikalisch sinnvolle Mikrofluktuation  $\Delta \mathbf{w}$  zu erweitern, ist eine zusätzliche integrale Bedingung analog zu Gleichung (3.6) nötig. Wie diese zu wählen ist, ist allerdings mehr als unklar (Kouznetsova u. a. 2002). Wesentlich eleganter und allgemeiner ist der in Forest und Sab 1998 vorgeschlagene Ansatz, in dem die integralen Kopplungsbedingungen für den mikromorphen Fall aus der Lösung eines Minimierungsproblems abgeleitet werden. Hierfür wird das Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}(\mathbf{Y})$  innerhalb der Zelle  $\Omega_0$  mit der Approximation der Mikrodeformation eines materiellen Punktes des effektiven Kontinuums nach (6.1) verglichen. Die Freiheitsgrade  $\mathbf{U}^{0*}$  und

$\chi^*$  des effektiven Kontinuums ergeben sich dann als Lösung des folgenden Minimierungsproblems

$$\{\mathbf{U}^{0*}, \chi^*\} = \arg \min_{\mathbf{U}^0, \chi} \left\langle [\mathbf{u}(\mathbf{Y}) - \mathbf{U}^0 - (\chi - \mathbf{1})\mathbf{Y}]^2 \right\rangle_{\Omega_0}. \quad (6.70)$$

Man beachte, dass hierbei das Volumenelement  $\Omega_0^*$  einem materiellen Punkt  $\mathcal{B}$  gleichgesetzt wird, indem angenommen wird, dass die Mikrodeformation  $\chi$  konstant in  $\Omega_0^*$  ist. Im Vergleich zu der klassischen Homogenisierung wird hierdurch die Wahl des Volumenelementes vorgeschrieben: Während im Rahmen der klassischen Homogenisierung eine Vergrößerung des zu homogenisierenden Volumenelements für eine statistisch repräsentative Beschreibung gängige Praxis ist, ist hier die Wahl des Volumenelementes direkt durch die zu beschreibende Mesodeformation festgelegt. Das Volumenelement  $\Omega_0$  ist hierbei so zu wählen, dass die Approximation der Mikrodeformation (beschrieben durch  $\chi$ ) bestmöglich zu der zu beschreibenden Deformation des Volumenelementes  $\Omega_0$  passt. Diese Besonderheit im Vergleich zur klassischen Homogenisierung ist insofern plausibel, als dass die meisten verallgemeinerten Kontinuumstheorien durch die Einführung einer Längenskala motiviert werden. Es ist somit klar, dass sich diese Längenskala auch in einem Homogenisierungsansatz entsprechend wiederfinden muss (vgl. auch Hütter 2017). Für festgelegtes  $\Omega_0$  ist die notwendige Bedingung für ein Minimum, dass die erste Variation der Zielfunktion in (6.70) verschwindet. Dies führt nach kurzer Rechnung zu den integralen Kopplungsbedingungen für die effektive Verschiebung und die Mikrodeformation

$$U_i^{0*} = \langle u_i \rangle_{\Omega_0}, \quad (6.71)$$

$$\chi_{iJ}^* G_{JK} = \langle u_i Y_K \rangle_{\Omega_0}, \quad (6.72)$$

wobei die Abkürzung  $G_{IJ} = \langle Y_I Y_J \rangle_{\Omega_0}$  verwendet wurde. Kopplungsbedingungen für den effektiven Deformationsgradient und den Gradienten der Mikrodeformation können unter Anwendung der in Forest und Trinh 2011 gegebenen Identität

$$\mathcal{D}_X \langle f(X) g(Y) \rangle = \mathcal{D}_X f(X) \langle g(Y) \rangle + f(x) \langle \partial_Y g(Y) \rangle \quad (6.73)$$

durch Ableitung von (6.71) und (6.72) gewonnen werden

$$H_{iJ}^* = \mathcal{D}_J U_i^{0*} = \langle \partial_J u_i \rangle_{\Omega_0}, \quad (6.74)$$

$$\mathcal{D}_K \chi_{jJ}^* G_{JL} - U_j^{0*} \delta_{KL} = \langle \partial_K (u_j Y_L) \rangle_{\Omega_0}. \quad (6.75)$$

Da auch im Fall des mikromorphen Kontinuums Starrkörperbewegungen, zur Aufrechterhaltung der Objektivität, keinen Einfluss auf die innere Leistung haben, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $U_i^{0*} = \langle u_i \rangle_{\Omega_0} = 0$  gesetzt werden. Bedingung (6.71) kann somit im Folgenden unberücksichtigt bleiben und Bedingung (6.75) vereinfacht sich zu

$$\mathcal{D}_K \chi_{jJ}^* G_{JL} = \langle \partial_K (u_j Y_L) \rangle_{\Omega_0}. \quad (6.76)$$

### 6.3.2 Realisierungsmöglichkeiten

Wie auch im klassischen Fall, stellen die Hill-Mandel Bedingung (6.68) und die kinematischen Kopplungsbedingungen (6.72), (6.74) und (6.75) lediglich grundlegende Forderungen an einen Homogenisierungsprozess. Zur Realisierung einer Homogenisierung basierend auf diesen Bedingungen sind zusätzlich Randbedingungen nötig, die auf das zu analysierende Volumenelement aufgebracht werden können.

Bei der Herleitung dieser Randbedingungen für den mikromorphen Fall gilt es einen fundamentalen Unterschied zum klassischen Fall zu beachten: Da im klassischen Fall nur der erste Gradient als Verzerrungsmaß verwendet wird, kann sowohl die Hill-Mandel Bedingung (3.5) als auch die kinematische Kopplung (3.6) mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes als Oberflächenintegral ausgedrückt werden. Es ist somit ausreichend die Verzerrungen (Verschiebungen) oder die Spannungen (Kräfte) am Rand des zu homogenisierenden Volumenelementes vorzuschreiben. Die entsprechende effektive konjugierte Größe erhält man dann durch Volumen- bzw. Oberflächenmittlung (vgl. auch Bishop und Hill 1951; Hill 1972). Im Fall des mikromorphen Kontinuums kann zwar Bedingung (6.74) und (6.75) ebenfalls als Oberflächenintegral ausgedrückt werden, auf Grund der unabhängigen Mikrodeformation  $\chi$  ist dies aber für die Bedingung (6.72) sowie die Hill-Mandel Bedingung (6.68) nicht mehr möglich. Im Allgemeinen muss also zur Erfüllung der Kopplungsbedingungen

nicht nur die Deformation bzw. Spannung am Rand  $\partial\Omega_0$  kontrolliert werden, sondern diese auch im Inneren des zu homogenisierenden Volumenelements (Forest und Trinh 2011) vorgeschrieben werden.

Da die Hill-Mandel Bedingung und die kinematische Kopplungen lediglich Anforderungen an die integralen Mittel über  $\Omega_0$  stellen, ist es auch klar, dass es mehrere zulässige Randbedingungen gibt. So ist es einerseits möglich mit Hilfe einer polynomiellen Abbildung (Gologanu u. a. 1997; Forest und Sab 1998; Jänicke u. a. 2009a) direkt ein Verschiebungsfeld aufzugeben oder alternativ, mit dem Konzept der minimalen Randbedingung (Mesarovic und Padbidri 2005; Jänicke und Steeb 2009b; Hütter 2017), Lagrange Multiplikatoren einzusetzen um die kinematischen Kopplungsbedingungen indirekt zu erfüllen. Beide zuvor genannten Ansätze werden im Folgenden näher beleuchtet.

Motiviert durch (6.69) wird für die polynomielle Abbildung der Ansatz (3.7) um höhere Terme erweitert. Es wird also angenommen, dass sich die Deformation der zu homogenisierenden Mesostruktur durch

$$u_j(\mathbf{Y}) = A_j + B_{jK}Y_K + C_{jKL}Y_KY_L + D_{jKLM}Y_KY_LY_M + \tilde{u}_j \quad \forall Y \in \Omega_0 \quad (6.77)$$

annähern lässt. Wobei die Koeffizienten  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  und die Mikrofluktuation  $\tilde{\mathbf{u}}$  vorerst unbekannt sind. Sie sind so zu bestimmen, dass die Bedingungen (6.68) und (6.71) - (6.75) erfüllt werden. Wie zuvor erwähnt, muss im Gegensatz zu der Abbildung (3.10), diese Annahme für das komplette Volumenelement getroffen werden. Schränkt man die Deformation des zu homogenisierenden Volumenelements, unter der Annahme verschwindender Mikrofluktuation ( $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ ) weiter ein, so führt dies auf ein lineares Gleichungssystem deren Lösung die unbekanntenen Koeffizienten in Abhängigkeit der effektiven Dehnungen  $\mathbf{H}, \chi$  und  $\nabla\chi$  liefert (vgl. Jänicke 2010)

$$A_j = -\frac{1}{2}\mathcal{D}_L\chi_{jM}G_{LM} \quad (6.78)$$

$$B_{jK} = +\frac{5}{2}(\chi_{jK}^* - \delta_{jK}) - \frac{3}{2}H_{jK}^* \quad (6.79)$$

$$C_{jKL} = +\frac{1}{2}\mathcal{D}_L\chi_{jK}^* \quad (6.80)$$

$$D_{jKLM} = -\frac{5}{6}\left((\chi_{jN}^* - \delta_{jN}) - H_{jN}^*\right)\delta_{NK}\delta_{LS}G_{SM}^{-1}. \quad (6.81)$$

Eine Verallgemeinerung durch Annahme einer periodischen Mikrofluktuation analog zum klassischen Fall ist hier hingegen nicht möglich, da dies sowohl die Kopplungsbedingungen (6.74) und (6.75) als auch die verallgemeinerte Hill-Mandel-Bedingung (6.68) verletzt. Darüber hinaus ist eine solche Annahme auch physikalisch gesehen nicht sinnvoll (Forest und Trinh 2011).

Die Abbildung (6.77) mit verschwindender Mikrofluktuation, wird allerdings im Allgemeinen nicht mit der wahren Deformation des Volumenelementes übereinstimmen und somit zu einer künstlichen Versteifung führen. Als Alternative können die integralen kinematischen Kopplungsbedingungen direkt mittels Lagrange-Multiplikatoren erfüllt werden. Hierfür wird für das zu homogenisierende Volumenelement  $\Omega_0$  das folgende Lagrange-Funktional minimiert

$$W^* = \frac{1}{V} \int_{\Omega_0} W(\mathbf{F}) \, d\Omega + \tilde{P}_{iJ}^* (F_{iJ}^* - \langle F_{iJ} \rangle) + \tilde{S}_{iJ}^* (\chi_{iJ}^* - \langle u_i Y_K \rangle G_{KJ}^{-1}) + \tilde{R}_{kLJ}^* (\mathcal{D}_L \chi_{kJ}^* - \langle \partial_L (u_k Y_M) \rangle G_{MJ}^{-1}) \, d\Omega, \quad (6.82)$$

in welchem zusätzlich zur Verzerrungsenergie  $W$ , die Residuen der Kopplungsbedingungen (6.72) - (6.75) minimiert werden. Weiterhin sind als zusätzliche Freiheitsgrade die Lagrange-Multiplikatoren  $\tilde{\mathbf{P}}$ ,  $\tilde{\mathbf{S}}$  und  $\tilde{\mathbf{R}}$  eingeführt. Da dies die minimal mögliche kinematische Restriktion darstellt, wird dieser Ansatz auch als „minimal boundary conditions“ (Jänicke und Steeb 2009b) bezeichnet. Notwendige Bedingung für ein Minimum ist, dass die erste Variation bezüglich aller Freiheitsgrade verschwindet. Aus der ersten Variation bezüglich des Lagrange-Multiplikators  $\tilde{\mathbf{P}}$  ergibt sich, dass die Kopplungsbedingung (6.72) identisch erfüllt ist

$$\delta_{\tilde{\mathbf{P}}} W^* = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{iJ}^* - \langle F_{iJ} \rangle_{\Omega_0} = 0. \quad (6.83)$$

Analog ergibt sich aus der ersten Variation bezüglich  $\tilde{\mathbf{S}}$  und  $\tilde{\mathbf{R}}$ , dass auch die Kopplungsbedingungen (6.74) und (6.75) identisch erfüllt sind. Für die erste Variation bezüglich des Verschiebungsfeldes ergibt sich zunächst

$$\delta_{\mathbf{u}} W^* = \frac{1}{V} \int_{\Omega_0} P_{iJ} \delta F_{iJ} \, d\Omega - \tilde{P}_{iJ}^* \langle \delta F_{iJ} \rangle - \tilde{S}_{iJ}^* \langle \delta u_i Y_K \rangle G_{KJ}^{-1} - \tilde{R}_{kLJ}^* \langle \partial_L (\delta u_k Y_M) \rangle G_{MJ}^{-1} = 0. \quad (6.84)$$

Unter Anwendung des Gaußschen Integralsatzes und einigen Umformungen folgt hieraus

$$\begin{aligned} \delta_{\mathbf{u}} W^* &= \frac{1}{V} \int_{\Omega_0} (-P_{iJ,J} - S_{iJ}^* Y_K G_{KJ}^{-1} + R_{iLJ}^* \delta_{LJ} G_{MJ}^{-1}) \delta u_i d\Omega \\ &+ \frac{1}{V} \int_{\partial\Omega_0} (-P_{iJ} N_J - S_{iJ}^* N_J - R_{iLJ}^* Y_M N_L G_{MJ}^{-1}) \delta u_i d\Omega = 0 \quad \forall \delta u_i \in C. \end{aligned} \quad (6.85)$$

Da keine weiteren Randbedingungen aufgebracht werden, ist dies äquivalent zu der Lösung des üblichen Kontinuumsproblem unter der Wirkung einer linear verteilten Volumenlast

$$P_{iJ,J} = R_{iLJ}^* \delta_{LJ} G_{MJ}^{-1} - S_{iJ}^* G_{KJ}^{-1} Y_K \quad \forall Y \in \Omega_0 \quad (6.86)$$

und linear verteilter Kraft auf dem Rand

$$P_{iJ} N_J = -P_{iJ}^* N_J - R_{iLJ}^* N_L G_{MJ}^{-1} Y_M \quad \forall Y \in \partial\Omega_0. \quad (6.87)$$

Setzt man in (6.84) die kinematischen Kopplungsbedingungen ein, so lässt sich zeigen, dass durch die Minimierung von (6.82) ebenfalls die Hill-Mandel Bedingung erfüllt wird

$$\frac{1}{V} \int_{\Omega_0} P_{iJ} \delta F_{iJ} d\Omega = \tilde{P}_{iJ}^* \delta F_{iJ}^* + \tilde{S}_{iJ}^* \delta \chi_{iJ}^* + \tilde{R}_{kLJ}^* \mathcal{D}_L \delta \chi_{kJ}, \quad (6.88)$$

wobei die konjugierten Spannungen durch die jeweiligen Lagrange Multiplikatoren gegeben sind.

### 6.3.3 Diskussion

Wie in Abschnitt 5.1 ausgiebig diskutiert, ist die klassische Homogenisierung, auf Grund der fehlenden Skalenseparierung, streng genommen nicht auf die hier entwickelte Struktur anwendbar. Die Gültigkeit von den mit einer solchen Methodik gewonnenen Ergebnissen sind folglich kritisch zu hinterfragen. Insbesondere wird über eine solche klassische Homogenisierung die endliche Lokalisierungslänge nicht wiedergegeben. Es wurden hier daher verschiedene Konzepte betrachtet, wie der Formalismus nach Hill (Hill 1963) systematisch

auf höhere Kontinua erweitert werden kann. Diese Ansätze sind in diversen Arbeiten erfolgreich zur Abbildung von Größen- und Randeffekten (Kouznetsova u. a. 2002; Kouznetsova u. a. 2004) sowie ebenfalls zur Regularisierung von Materialversagen (Gologanu u. a. 1997; Hütter 2017) eingesetzt worden.

Die Besonderheit bei der Umsetzung eines erweiterten Homogenisierungsansatzes ist, dass die integralen Koppelbedingungen nicht wie im klassischen Fall als Oberflächenintegral ausgedrückt werden können. Es muss folglich zur Umsetzung *a priori* eine Annahme bzgl. des Verformungs- bzw. Spannungszustandes innerhalb des Volumenelement, und nicht nur auf der Oberfläche, gemacht werden. Hierfür kann entweder ein Polynom für die Deformation angenommen werden (6.77) oder alternativ die Kopplungsbedingung über Lagrange-Multiplikatoren (6.84) umgesetzt werden. Letzteres ist wiederum äquivalent zu dem Aufbringen einer linear verteilten Volumenlast was in einer quadratischen Spannungsverteilung resultiert. Dies verdeutlicht warum die Wahl des Volumenelementes bei einer verallgemeinerten Homogenisierung eine so zentrale Rolle einnimmt.

Zur Beurteilung der Anwendbarkeit der hier vorgestellten Ansätze sind diese Annahmen folglich mit der Deformation der zu homogenisierenden Mesostruktur zu vergleichen und zu prüfen ob das Volumenelement so gewählt werden kann, dass die innere Länge (Entfestigungszone) richtig erfasst wird. Eine erste intuitive Wahl wäre es, die Basiszelle als Volumenelement zu verwenden. In Kapitel 4.3 hat sich gezeigt, dass die Deformation allerdings bereits ohne das Aufbringen von höheren Gradienten innerhalb einer Basiszelle lokalisiert (vgl. Kapitel 4.3). Der zweite Deformationsgradient (oder Gradient der Mikrodeformation), welcher zur Bestimmung der inneren Länge erfasst werden müsste, „liegt“ folglich innerhalb der Basiszelle. In Ansatz (6.77) bzw. (6.86) kontrollieren die effektiven Gradienten bzw. deren konjugierte Spannungen hingegen den Gradienten über das Volumenelement hinweg und die Gradienteneffekte die zur Regularisierung nötig wären, können somit intrinsisch nicht erfasst werden. Wesentlich deutlicher wird dieser Zusammenhang bei Betrachtung der Identität (6.73), mit welcher die effektiven Gradienten durch die Ableitung nach der Makrovariable  $\mathbf{X}$  definiert sind. Die verwendeten Gradienten können also lediglich die Änderung über mehrere Zellen hinweg abbilden. Es ist folglich auch nicht zu hoffen, dass Annahmen alternativ zu der polynomiellen Abbildung (6.77) hier eine Abhilfe schaffen. Mit der gleichen Argumentation wird auch klar, dass eine Erweiterung des hier untersuchten Ansatzes um

höhere Gradienten  $\nabla^2 \mathbf{F}, \nabla^3 \mathbf{F}, \dots$  oder weiterer unabhängiger Mikrodeformationen  $\chi_2, \chi_3$ , als quadratische und kubische Glieder in der Approximation (6.1), keine Abhilfe schafft.

Basierend auf dieser Diskussion kann man nun die Forderung ableiten, dass das zur Homogenisierung betrachtete Volumenelement wesentlich kleiner sein muss als die Lokalisierungszone. Da die Lokalisierungszone in dem hier entwickelten Material allerdings alleine durch die Beulelemente gegeben ist, wäre eine solche Wahl nicht mehr repräsentativ für das Verhalten der Mesostruktur.

Wie die phänomenologische Modellierung in Abschnitt 6.2 gezeigt hat ist eine materielle Beschreibung allerdings in Grenzen durchaus möglich. Eine systematische Homogenisierung scheitert allerdings an der Definition der effektiven Gradienten. Diese werden über das Minimierungsproblems (6.70) und die Identität (6.73) definiert. Möchte man folglich eine systematische Homogenisierung für das hier entwickelte Material durchführen, ist insbesondere das Minimierungsproblem (6.70) zu hinterfragen. Wobei man sich bei beiden Vorgehen, phänomenologische Modellierung und Homogenisierung, immer die Grundsätzliche Frage stellen sollte, welche Effekte in einer Kontinuumsmodellierung abgebildet werden sollen.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurde ein instabiles mechanisches Metamaterial basierend auf instabilen Basiszellen entwickelt und mittels geeigneter Modelle über verschiedenen Skalen hinweg charakterisiert. Betrachtet wurde hierbei auf der untersten Ebene das Verhalten einer einzelnen instabilen Zelle, bzw. eines einzelnen instabilen Beulelements. Auf der nächst höheren Ebene wurde das Effektivverhalten von instabilen Zellverbänden betrachtet und schlussendlich Möglichkeiten untersucht das Effektivverhalten mittels einer erweiterten Kontinuumstheorie als Kontinuum zu beschreiben.

Die Effektiveigenschaften auf der untersten Betrachtungsebene - der einzelnen Zelle oder eines einzelnen Beulelementes - werden in erster Linie durch die Geometrie der Beulelemente getrieben und lassen sich durch wenige Geometrieparameter in einem weiten Bereich einstellen. Die Möglichkeit die kritischen Beulkräfte unabhängig voneinander einzustellen und die Realisierung von Strukturen die unter Entlastung im gebeulten Zustand verweilen ist hierbei besonders hervorgehoben.

Lässt man auf der nächst größeren Skala, bei der Betrachtung von Zellverbänden, Interaktionen zwischen den Zellen zu, so führt dies zu einer Reihe von ungewöhnlichen und spannenden effektiven Materialeigenschaften. So können durch die geeignete Kombination von verschiedenen Zellen beliebige Effektiveigenschaften wie z.B. Belastungs- und Entlastungspfade oder lokale Steifigkeiten eingestellt werden. Diese müssen allerdings nicht *a priori* festgelegt werden, sondern können insbesondere auch durch eine einstellbare Belastungsgeschichte verändert (programmiert) werden. Dies wiederum wird einerseits durch die negativen Kraftminima der einzelnen Zellen ermöglicht, ist aber auch ohne negatives Kraftminimum möglich, da Zellverbände in Abhängigkeit von der Anzahl an Zellen mehrere stabile Gleichgewichtskonfigurationen für die gleiche Randbedingung (Kraft oder Verschiebung) zeigen. Diese können wiederum durch Aufbringen einer Belastungs(vor)geschichte angesteuert werden. Über diese Mechanismen können die komplette Spannungs-Dehnungs

Hysterese sowie alle möglichen lokalen Eigenschaften innerhalb des gleichen Materials verändert/programmiert werden. Besonders betont sei hierbei, dass diese Programmierung alleine durch die Belastungsgeschichte möglich ist, und keinerlei zusätzliche äußere Manipulation nötig ist.

Eine weitere herausragende Eigenschaft ist die Art und Weise wie Energie in solchen Metamaterialien dissipiert wird. Die Energiedissipation basiert zwar im Endeffekt auf einer viskosen Dämpfung des Grundmaterials, durch die schlagartige Dehnungslokalisierung, ausgelöst durch die mechanische Instabilität, wird allerdings eine Trennung der Zeitskalen zwischen Energiedissipation und äußerer Belastung erzielt. Dieser Mechanismus führt dazu, dass das Metamaterial in einem weiten Bereich weder viskose (geschwindigkeitsabhängige) noch plastische (irreversible) Energiedissipation zeigt.

Insbesondere das Stabilitätsverhalten von Zellverbänden ist stark abhängig von der Anzahl der betrachteten Zellen, wodurch insbesondere die Energiedissipation einen starken Größeneffekt zeigt. Hierbei sind zwei überlagerte Phänomene zu unterscheiden, für wenige Zellen wird die schlagartige Dehnungslokalisierung mit steigender Anzahl an Zellen begünstigt, wodurch die spezifische Energiedissipation ansteigt. Ab einem gewissen Schwellenwert nimmt dann die Störungsempfindlichkeit zu, wodurch die spezifische Energiedissipation, unter Berücksichtigung äußerer Störungen oder Temperaturfluktuationen, wieder abnimmt.

Der Schritt zur nächst höheren Skala beschäftigte sich mit der Formulierung eines geeigneten Kontinuumsmodells, welches sowohl den Grenzfall beliebig vieler Basiszellen ( $n \rightarrow \infty$ ), als auch die ausgeprägten Größeneffekte bei einer geringen Anzahl an Zellen, richtig beschreibt. Aufgrund der fehlenden intrinsischen Länge ist eine klassische Kontinuumsstheorie allerdings skalierungsinvariant, und eine Beschreibung von Größeneffekten ist im Allgemeinen nicht möglich. Erschwerend kommt hier hinzu, dass eine klassische Kontinuumsstheorie mit nicht konvexem Potential immer eine unendlich schmale Lokalisierungszone zeigt, wodurch auch die Größeneffekte in Zusammenhang mit der endlichen Entfestigungszone nicht abgebildet werden können. Als Abhilfe wurde hier eine Modellierung mit Hilfe einer erweiterten Dehnungsgradiententheorie, als Sonderfall der Mikromorphen Theorie, angewandt. Auf Grund der einfachen Struktur des postulierten Potentials kann für den eindimensionalen Fall aus der analytischen Lösung des Eigenwertproblems ein Zusammenhang zwischen Entfestigungslänge und Gradientenstei-

figkeit abgeleitet werden. Hierdurch kann die endliche Entfestigungslänge im Rahmen einer Kontinuumsmodellierung richtig wiedergegeben werden, womit wiederum die Grundlage zur Modellierung von Größeneffekten bzgl. der Energiedissipation gelegt worden ist. Weitere zu erwartende Größeneffekte im Zusammenhang mit der Wirkung von Randbedingungen werden durch dieses Modell ebenfalls qualitativ richtig erfasst.

Abschließend wurde gezeigt, dass die in der Literatur angewandten Verallgemeinerungen der klassischen Homogenisierung nicht auf die hier vorliegende Mesostruktur anwendbar sind. Ursache sind hierbei in erster Linie die verwendeten Äquivalenzbeziehungen. Aus diesen folgt, dass sich die für die Modellierung relevanten Dehnungsgradienten über mehrere Zellen erstrecken müssen. Dass eine systematische Homogenisierung im Allgemeinen möglich ist, schließt dies allerdings ausdrücklich nicht aus.

Aufbauend auf diesen Grundlagen lässt sich eine Reihe von weiteren sowohl aus angewandter, als auch aus wissenschaftlicher Sicht - spannenden Fragestellungen ableiten. Einige dieser werden im Folgenden grob skizziert.

Zunächst einmal stellt sich aus Anwendersicht die Frage wie die Struktur bzgl. ihrer effektiven Eigenschaften weiter optimiert werden kann. Interessant wäre hier vor allem eine Steigerung der spezifischen Energiedissipation. Neben einer alleinigen Strukturoptimierung kann und sollte hierfür auch die Ebene des konstitutiven Materials mit in die Optimierung einbezogen werden und alternative Materialkonzepte betrachtet werden.

Insbesondere auch die Anfälligkeit gegenüber Störungen kann einer praktischen Anwendung sowohl als programmierbares Material, als auch einer Anwendung zur Energiedissipation, im Wege stehen. Es stellt sich somit die Frage, ob die Anfälligkeit gegenüber Störungen strukturell beeinflusst werden kann. Interessanterweise lautet die Antwort hierzu ja. So wurde erst kürzlich gezeigt, dass auch unter Berücksichtigung von Temperaturfluktuation bis zu einer gewissen Grenztemperatur die Bistabilität eines einzelnen Elementes erhalten werden kann (Caruel und Truskinovsky 2017). Erreicht wird dies durch eine nichtlokale Kopplung mehrere parallel geschalteter nicht konvexer Subelemente. Zur Beurteilung dieses Konzeptes sowie zu deren praktischen Realisierbarkeit ist allerdings ein tiefgreifendes Verständnis der statistischen Mechanik notwendig, welche in dieser Arbeit bewusst nicht behandelt wurde. An diesem

Punkt ansetzend ergibt sich somit viel Potential für nachfolgende Untersuchungen, die insbesondere auch aus wissenschaftlicher Sicht interessant sind.

Bis auf eine Ausnahme sind die in dieser Arbeit verwendeten Modelle alle unter Vernachlässigung dynamischer Effekte hergeleitet. Diese stoßen allerdings schnell an ihre Grenzen, da das System bei einem Zustandswechsel zwingend dynamisch wird. Die durch diesen dynamisch ablaufenden Zustandswechsel hervorgerufenen Mechanismen wurden in dieser Arbeit nur am Rande diskutiert. So lassen insbesondere die Interaktionen, ausgelöst durch dynamische äußere Belastung sowie die Wellenausbreitung die durch schlagartige Lokalisierung ausgelöst wird einige Fragen offen. Eine systematische Untersuchung dynamischer Effekte birgt vor allem auch aus Sicht des Materialdesigns einiges an Potential, da hier die Hoffnung besteht, weitere ungewöhnliche Eigenschaften erzeugen zu können. Eine systematische Untersuchung dynamischer Effekte ist allerdings auf Grund der nichtlinearen Differentialgleichungen eine große Herausforderung. Insbesondere sei bemerkt, dass auch eine Linearisierung hier nicht zielführend ist, da hierdurch die Instabilität unterbunden wird. Erste, überwiegend numerische Studien, auf dem Gebiet der dynamischen Zustandswechsel sind in den Referenzen Bruno 1995; Rosakis und Knowles 1997; Balk u. a. 2001a; Balk u. a. 2001b; Slepyan und Ayzenberg-Stepanenko 2004; Slepyan u. a. 2005 zu finden.

Für die effektive Materialbeschreibung instabiler Metamaterialien konnte in dieser Arbeit, über die Einführung einer physikalischen intrinsischen Länge, einige wichtige Erkenntnisse gesammelt werden. Hierauf aufbauend ergeben sich viele Möglichkeiten der Erweiterungen. So kann das Kontinuumsmodell nun um einen geeigneten Dissipationmechanismus zur Beschreibung dynamischer Effekte und insbesondere zur Abbildung der Energiedissipation, erweitert werden. Erfolgt dies im Rahmen einer mikromorphen Theorie, so ist zusätzlich auch noch die Definition einer Mikroträgheit, die der Mikrodeformationsgeschwindigkeit  $\dot{\chi}$  entgegenwirkt, nötig. Eine solche Kontinuumsbeschreibung mag auf den ersten Blick zwar als theoretische Spielerei anmuten, schafft man es allerdings tatsächlich einen äquivalenten Dissipationsmechanismus zu formulieren, so kann hierdurch insbesondere für die Analyse der Wellenausbreitung in großen Strukturen eine signifikante Vereinfachung erfolgen.

Schlussendlich verbleibt aus dieser Arbeit die Frage, wie eine systematische Homogenisierung lokalisierender Mesostrukturen erfolgen kann. Wie sich gezeigt hat, muss man sich hierfür allerdings von bekannten Konzepten weitest-

gehend trennen und die Homogenisierung grundlegend überdenken. Ein erster Ansatzpunkt wäre es, unter Berücksichtigung der für entfestigende Materialien vorliegenden Besonderheiten, die grundlegenden Äquivalenzbeziehungen, insbesondere das Minimierungsproblem (6.70), neu zu formulieren.



# A Anhang

## A.1 Herleitung der Maxwell-Regel

Die Maxwell-Regel ist in (Clerk-Maxwell 1875) nur als experimentelle Beobachtung angegeben. Sie lässt sich allerdings auch mathematisch, wie z.B. in (Le 2011) dargestellt, herleiten. Hierfür sucht man Lösungen  $u(x)$  die das Funktional

$$\Pi = \int_0^L E(H) dX \quad (\text{A.1})$$

minimieren, wobei  $E(H)$  ein beliebiges nicht konvexes Potential ist. Die folgende Herleitung beschränkt sich auf Verschiebungsrandbedingung, da dies der für diese Arbeit interessantere Fall ist. Minimierer für das obige Funktional müssen folglich zusätzlich die Randbedingungen

$$u(0) = 0 \quad \text{und} \quad u(L) = U \quad (\text{A.2})$$

erfüllen. Die Analyse des diskreten Falls hat gezeigt, dass der Bereich negativer tangentialer Steifigkeit instabil, also unzulässig ist. Wie sich später zeigen wird, gilt dies analog auch für das Kontinuumsproblem. Wenn folglich Dehnungen in einem Bereich  $H \in (H_1, H_2)$  unzulässig sind, so muss zur Erfüllung der Randbedingung (A.2) mit  $U \in (LH_1, LH_2)$  eine Phasentrennung erfolgen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit, kann angenommen werden, dass nur zwei Phasen, mit Dehnung  $H_l$  und Dehnung  $H_h > H_l$ , gleichzeitig existieren. Ein potentieller Minimierer lässt sich folglich als

$$u(X) = \begin{cases} H_l X & X \in [0, \ell) \\ H_h (X - \ell) + H_l \ell & X \in [\ell, L] \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

darstellen, wobei mit  $\ell$  die Phasengrenze parametrisiert wird. Mit dieser Phasenaufteilung folgt aus der notwendigen Bedingung  $\delta\Pi = 0$  zunächst

$$\delta\Pi = \int_0^\ell P(H) \delta H dX + \int_\ell^L P(H) \delta H dX = 0. \quad (\text{A.4})$$

$P = \partial_H E(H)$  ist hierbei die zu  $H$  konjugierte Spannung. Da die gesuchte Lösung lediglich eine Diskontinuität bei  $X = \ell$  aufweist, sonst aber ausreichend glatt ist, kann obige Bedingung, unter Anwendung der partiellen Integration, als

$$\delta\Pi = \int_0^\ell \partial_X P(H) \delta u dX + \int_\ell^L \partial_X P(H) \delta u dX + (P^+ - P^-) \delta u(\ell) = 0. \quad (\text{A.5})$$

geschrieben werden. Wobei  $P^+$  und  $P^-$  die rechts und linksseitigen Grenzwerte

$$P^+ = \lim_{X \rightarrow \ell_+} P(X) \quad \text{und} \quad P^- = \lim_{X \rightarrow \ell_-} P(X) \quad (\text{A.6})$$

an der Diskontinuität  $X = \ell$  bezeichnen. Wie zu erwarten war, folgert man aus (A.5) mit der üblichen Argumentation

$$P(X) = \partial_H E(X) = P^+ = P^- = \text{konst.} \quad \forall X \in [0, L] \quad (\text{A.7})$$

Den gleichen Argumenten folgend, erhält man aus  $\delta^2\Pi \geq 0$  die Bedingung für Stabilität der Lösung

$$\partial_H P \geq 0. \quad \forall X \in [0, L] \quad (\text{A.8})$$

In (A.3) können folglich nur Zustände  $H_l$  und  $H_h$  mit positiver tangentialer Steifigkeit angenommen werden. Unbekannt bleibt hier aber nach wie vor die Spannung  $P$ . Um diese zu erhalten, kann ausgenutzt werden, dass nach (A.3) der Lösungsraum nur noch durch  $H_h, H_l$  und  $\ell$  beschrieben ist und somit das Funktional (A.1) in die Funktion

$$\Pi = L(\ell E(H_h) + (1 - \ell) E(H_l)) \quad (\text{A.9})$$

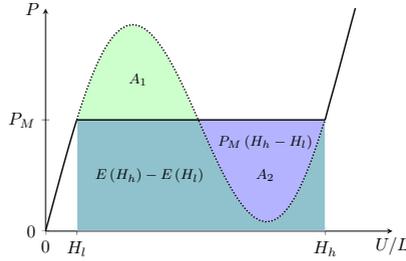


Abbildung A.1: Graphische Darstellung der Maxwell-Regel

überführt werden kann. Für die erste Variation folgt damit

$$\delta\Pi = L(\partial_H E(H_h)\ell\delta H_h + E(H_h)\delta\ell + \partial_H E(H_l)(1-\ell)\delta H_l - E(H_h)\delta\ell). \quad (\text{A.10})$$

Für die Randbedingung (A.2) folgt aus dem Lösungsansatz (A.3) aber

$$\delta U = \delta H_h \delta\ell + H_h \delta\ell + \delta H_l (1-\ell) - \delta H_l \delta\ell = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$\Leftrightarrow (H_h - H_l)\delta\ell = -\delta H_h \ell - \delta H_l (1-\ell). \quad (\text{A.12})$$

Mit (A.7) und (A.12) folgt aus (A.10) somit der folgende Ausdruck für die erste Variation

$$\delta\Pi = L(E(H_h) - E(H_l) - P(H_h - H_l))\delta\ell. \quad (\text{A.13})$$

Die weitere Herleitung beschränkt sich auf den hier interessanten Bereich  $l \in (0, 1)$ , in dem eine tatsächliche Phasentrennung vorliegt. In diesem offenen Intervall müssen die Randpunkte  $\ell = 0$  und  $\ell = 1$  nicht gesondert betrachtet werden und ein Minimierer folgt wie üblich aus  $\delta\Pi = 0$ . Da die Randbedingungen in (A.13) bereits berücksichtigt sind, gilt in diesem Bereich folglich

$$E(H_h) - E(H_l) - P_M(H_h - H_l) = 0. \quad (\text{A.14})$$

Eine Phasentrennung ist somit genau dann (und nur dann) möglich, wenn die (äußere) Spannung  $P_M$  über diese so genannte Maxwell-Regel gegeben ist. Diese, für beliebiges nicht konvexes inneres Potential  $E(H)$  gültige Beziehung, ist in Abbildung A.1 graphisch veranschaulicht. Das Spannungsniveau  $P_M$

bei der Phasentransformation ist demnach dadurch gegeben, dass die Fläche  $P_M (H_h - H_l)$  genau so groß ist, wie das Integral

$$\int_{H_l}^{H_h} P dH = \int_{H_l}^{H_h} \partial_H E dH = E (H_h) - E (H_l). \quad (\text{A.15})$$

Dies ist aber genau dann der Fall, wenn die Maxwell-Linie  $P = P_M$  die Spannungs-Dehnungs Kurve in zwei gleich große Flächen  $A_1 = A_2$  unterteilt. Jede andere Transformationsspannung wäre im Widerspruch zur Maxwell-Regel (A.14). Insbesondere ist auch eine Transformation mit abfallender oder ansteigender Spannung nicht möglich, da dies im Widerspruch zu (A.7) stehen würde.

# Literatur

- Anderson, W.B. und Lakes, R.S. (1994). „Size effects due to Cosserat elasticity and surface damage in closed-cell polymethacrylimide foam“. In: *J. Mater. Sci.* 29, S. 6413–6419.
- Antonakakis, T., Craster, R.V. und Guenneau, S. (2014). „Homogenization for elastic photonic crystals and dynamic anisotropy“. In: *J. Mech. Phys. Solids* 71, S. 84–96.
- Ashby, M.F. (2006). „The properties of foams and lattices“. In: *Phil. Trans. R. Soc A* 364, S. 15–30.
- Ashby, M.F., Evans, A.G., Fleck, N.A., Gibson, L.J., Hutchinson, J.W. und Wadley, H.N.G. (2000). „Metal Foams: A Design Guide“. In: *Butterworth Heinemann, Oxford*.
- Ashby, M.F. und Medalist, R.F.M (1983). „The Mechanical Properties of Cellular Solids“. In: *Metall. Trans. A* 14, S. 1755–1769.
- Balk, A.M., Cherkaev, A.J. und Slepyan, L.I. (2001a). „Dynamics of chains with non-monotone stress-strain relations. I. Model and numerical experiments“. In: *J. Mech. Phys. Solids* 49, S. 131–148.
- Balk, A.M., Cherkaev, A.J. und Slepyan, L.I. (2001b). „Dynamics of chains with non-monotone stress-strain relations. II. Nonlinear waves and waves of phase transition“. In: *J. Mech. Phys. Solids* 49 49, S. 149–171.
- Bassik, N., Stern, G.M. und Gracias, D.H. (2009). „Microassembly based on hands free origami with bidirectional curvature“. In: *Appl. Phys. Lett.* 95, S. 091901.
- Berger, J.B., Wadley, H.N.G. und McMeeking, R.M. (2017). „Mechanical metamaterials at the theoretical limit of isotropic elastic stiffness“. In: *Nature* 543, S. 533–537.
- Bertoldi, K. und Boyce, M.C. (2008). „Mechanically triggered transformation of phononic band gaps in periodic elastomeric structures“. In: *Phys. Rev. B* 77, S. 052105.
- Bertoldi, K., Boyce, M.C., Deschanel, S., Prange, S.M. und Mullin, T. (2008). „Mechanics of deformation-triggered pattern transformation and super-

- elastic behavior in periodic elastomeric structures“. In: *J. Mech. Phys. Solids* 56, S. 2642–2668.
- Bishop, J.F.W. und Hill, R. (1951). „A theory of the plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses“. In: *Phil. Mag.* 42, S. 414–427.
- Blanckenhagen, B. von, Arzt, E. und Gumbsch, P. (2004). „Discrete dislocation of plastic deformation in metal thin films“. In: *Acta Mater.* 52, S. 773–784.
- Borst, R. de (1991). „Simulation of strain localization: a reappraisal of the cosserat continuum“. In: *Eng. Computations* 8, S. 317–332.
- Borst, R. de, Sluys, L.J., Mühlhaus, H.B und Pamin, J. (1993). „Fundamental issues in finite element analysis of localization of deformation“. In: *Eng. Computations* 10, S. 99–121.
- Bruno, O.P. (1995). „Quasistatic dynamics and pseudoelasticity in polycrystalline shape memory wires“. In: *Smart Mater. Struct.* 4, S. 7–13.
- Bückmann, T. (2015). „Fabrication of Mechanical Metamaterials“. Diss. Karlsruher Institut für Technologie.
- Bückmann, T., Schittny, R., Thiel, M., Kadic, M., Milton, G.W. und Wegener, M. (2014). „On three-dimensional dilational elastic metamaterials“. In: *New J. Phys.* 16, S. 033032.
- Caruel, M. und Truskinovsky, L. (2017). „Bi-stability resistant to fluctuations“. In: *J. Mech. Phys. Solids* 109, S. 117–141.
- Chen, C. und Fleck, N.A. (2002). „Size effects in the constrained deformation of metallic foams“. In: *J. Mech. Phys. Solids* 50, S. 955–977.
- Chen, Y., Li, T., Scarpa, F. und Wang, L. (2017). „Lattice Metamaterials with Mechanically Tunable Poisson’s Ratio for Vibration Control“. In: *Phys. Rev. Appl.* 7, S. 024012.
- Christensen, J., Kadic, M., Kraft, O. und Wegener, M. (2015). „Vibrant times for mechanical metamaterials“. In: *MRS Commun.* 5, S. 453–462.
- Clerk-Maxwell, J. (1875). „On the Dynamical Evidence of the Molecular Constitution of Bodies“. In: *Nature* 11, S. 357–359.
- Coenen, E.W.C, Kouznetsova, V.G. und Geers, M.G.D. (2012). „Novel boundary conditions for strain localization analyses in microstructural volume elements“. In: *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 90, S. 1–21.
- Combesure, C., Henry, P. und Elliott, R.S. (2016). „Post-bifurcation and stability of a finitely strained hexagonal honeycomb subjected to equibiaxial in-plane loading“. In: *Int. J. Solids Struct.* 88-89, S. 296–318.

- Correa, D. M., Seepersad, C.C. und Haberman, M.R. (2015). „Mechanical design of negative stiffness honeycomb materials“. In: *Integrated Materials and Manufacturing Innovation* 4, S. 1–11.
- Cosserat, E. und Cosserat, F. (1909). *Theory of Deformable Bodies*. Übers. von D.H. Delphenich. 1. Auflage. Scientific Library A Hermann and Sons Paris.
- Cottrell, A.H. und Bilby, B.A. (1949). „Dislocation Theory of Yielding and Strain Ageing of Iron“. In: *Proc. Phys. Soc. A* 62, S. 49–62.
- Coulais, C., Sounas, D. und Alù, A. (2017). „Static non-reciprocity in mechanical metamaterials“. In: *Nature* 542, S. 461–464.
- Crisfield, M.A. (1980). „A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through“. In: *Comput. Struct.* 13, S. 55–62.
- Dehm, G., Motz, C., Scheu, C., H. Clemens, H, Mayrhofer, P.H. und Mitterer, C. (2006). „Mechanical Size-Effects in Miniatureized and Bulk Materials“. In: *Adv. Eng. Mater.* 8,11, S. 1033–1045.
- Deshpande, V.S., Ashby, M.F. und Fleck, N.A (2001a). „Foam topology bending versus stretching dominated architectures“. In: *Acta Mater.* 49, S. 1035–1040.
- Deshpande, V.S., Fleck, N.A. und Ashby, M.F. (2001b). „Effective properties of the octett-truss lattice material“. In: *J. Mech. Phys. Solids* 49, S. 1747–1769.
- DesRoches, R., McCormick, J. und Delemont, M. (2004). „Cyclic Properties of Superelastic Shape Memory Alloy Wires and Bars“. In: *J. Struct. Eng.* 130, S. 38–49.
- Diebels, S. und Steeb, H. (2002). „The size effect in foams and its theoretical and numerical investigation“. In: *Proc. R. Soc. Lond. A* 458, S. 2869–2883.
- Diebels, S. und Steeb, H. (2003). „Stress and couple stress in foams“. In: *Comput. Mater. Sci* 28, S. 714–722.
- Ding, Y., Liu, Z., Qiu, C. und Shi, J. (2007). „Metamaterial with Simultaneously Negative Bulk Modulus and Mass Density“. In: *Phys. Rev. Lett* 99, S. 093904.
- Eringen, A.C. (1998). *Microcontinuum Fields Theories I: Foundations and solids*. 1. Auflage. Springer-Verlag New York.
- Evans, A.G., Hutchinson, J.W., Fleck, N.A., Ashby, M.F. und Wadley, H.N.G. (2001). „The topological design of multifunctional cellular metals“. In: *Prog. Mater Sci.* 46, S. 309–327.

- Felton, S.M., Tolley, M.T., Shin, B., Onal, C.D., Demaine, E.D., Rus, D. und Wood, R.J. (2013). „Self-folding with shape memory composites“. In: *Soft Matter* 9, S. 7688–7649.
- Findeisen, C., Hohe, J., Kadic, M. und Gumbsch, P. (2017). „Characteristics of mechanical metamaterials based on buckling elements“. In: *J. Mech. Phys. Solids* 102, S. 151–164.
- Findeisen, C. und Wackerfuß, J. (2016). „A general approximation of the exponential Cauchy-Born hypothesis to model arbitrarily shaped shell-like nanostructures within continuum mechanics“. In: *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 105, S. 747–780.
- Florijn, B., Coulais, C. und Hecke, M. van (2014). „Programmable Mechanical Metamaterials“. In: *Phys. Rev. Lett.* 113, S. 175503.
- Forest, S. (1999). „Aufbau und Identifikation von Stoffgleichungen für höhere Kontinua mittels Homogenisierungsmethoden“. In: *Tech. Mech.* 19 4, S. 297–306.
- Forest, S. (2002). „Homogenization Methods and the Mechanics of Generalized Continua - part 2“. In: *Theor. Appl. Mech.* 28-29, S. 113–143.
- Forest, S. (2009). „Micromorphic approach for gradient elasticity, viscoplasticity and damage“. In: *J. Eng. Mech.* 135, S. 117–131.
- Forest, S. (2016). „Nonlinear Regularization Operators as Derived from the Micromorphic Approach to Gradient Elasticity, Viscoplasticity and Damage“. In: *Proc. R. Soc. Lond. A. Math.* 472 2188, S. 20150755.
- Forest, S. (2003a). „Questioning size effects as predicted by strain gradient plasticity“. In: *J. Mech. Behav. Mater.* 22, S. 101–110.
- Forest, S., Blazy, J.S., Chastel, Y. und Moussy, F. (2005). „Continuum modeling of strain localization phenomena in metallic foams“. In: *J. Mater. Sci.* 40, S. 5903–5910.
- Forest, S. und Sab, K. (1998). „Cosserat Overall Modeling of Heterogeneous Materials“. In: *Mech. Res. Commun* 25 4, S. 449–454.
- Forest, S. und Sievert, R. (2006). „Nonlinear Microstrain Theories“. In: *Int. J. Solids Struct.* 43, S. 7224–7245.
- Forest, S. und Sievert, R. (2003b). „Elastoviscoplastic constitutive frameworks for generalized continua“. In: *Acta Mechanica* 160, S. 71–111.
- Forest, S. und Trinh, D. (2011). „Generalized Continua and Non-homogeneous Boundary Conditions In Homogenisation Methods“. In: *Z. Angew. Math. Mech.* 91 2, S. 90–109.

- Frenzel, T., Findeisen, C., Kadic, M., Gumbsch, P. und Wegener, M. (2016). „Tailored buckling micro-lattices as reusable light-weight shock absorbers“. In: *Adv. Mater.* 28, S. 5865–5870.
- Germain, P. (1973a). „La Méthode des Puissances Virtuelles en Mécanique des Milieux Continus - 1ère Partie, Théorie du Second Gradient“. In: *J. Mécanique* 12, S. 235–274.
- Germain, P. (1973b). „The Method of Virtual Power in Continuum Mechanics. Part 2: Microstructures“. In: *J. Appl. Math.* 25, S. 556–575.
- Geymonat, G., Müller, S. und Triantafyllidis, N. (1993). „Homogenization of Nonlinearly Elastic Materials, Microscopic Bifurcation and Macroscopic Loss of Rank-One Convexity“. In: *Arch. Ration. Mech. Anal.* 122, S. 231–290.
- Gibson, L.J. (2000). „Mechanical Behaviour of Metallic Foams“. In: *Annu. Rev. Mater. Sci.* 30, S. 191–227.
- Gibson, L.J. und Ashby, M.F. (1997). *Cellular Solids: Structure and Properties*. 2. Auflage. Cambridge University Press.
- Gologanu, M., Leblond, J.-B., Perrin, G. und Devaux, J. (1997). „Recent Extensions of Gurson’s Model for Porous Ductile Metals - Part II: A Gurson-like model including the effect of strong gradients of the macroscopic field“. In: *Continuum Micromechanics CISM Courses and Lectures* 377, S. 97–130.
- Gong, L. und Kyriakides, S. (2005). „Compressive response of open-cell foams. Part II: Initiation and evolution of crushing“. In: *Int. J. Solids Struct.* 42, S. 1381–1399.
- Gong, L., Kyriakides, S. und Jang, W.Y. (2005). „Compressive response of open-cell foams. Part I: Morphology and elastic properties“. In: *Int. J. Solids Struct.* 42, S. 1355–1379.
- Greer, J.R., Oliver, W.C. und Nix, W.D. (2005). „Size dependence of mechanical properties of gold at the micron scale in the absence of strain gradients“. In: *Acta Mater.* 53, S. 1821–1830.
- Harne, R.L., Wu, Z. und Wang, K.W. (2016). „Designing and Harnessing the Metastable States of a Modular Metastructure for Programmable Mechanical Properties Adaptation“. In: *J. Mech. Des.* 138, S. 021402.
- Hill, R. (1958). „A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids“. In: *J. Mech. Phys. Solids* 6, S. 236–249.
- Hill, R. (1963). „Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles“. In: *J. Mech. Phys. Solids* 11, S. 357–372.

- Hill, R. (1972). „On constitutive macro-variables for heterogeneous solids at finite strain“. In: *Proc. R. Soc. Lond. A.* 326, S. 131–147.
- Hohe, J. und Becker, W. (2003). „Effective mechanical behavior of hyperelastic honeycombs and two-dimensional model foams at finite strain“. In: *Int. J. Mech. Sci.* 45, S. 891–913.
- Huang, H.H., Sun, C.T. und Huang, G.L. (2009). „On the negative effective mass density in acoustic metamaterials“. In: *Int. J. Eng. Sci.* 47, S. 610–617.
- Hussein, M.T., Leamy und Ruzzene, M. (2014). „Dynamics of Phononic Materials and Structures: Historical Origins, Recent Progress, and Future Outlook“. In: *Appl. Mech. Rev.* 66, S. 040802.
- Hütter, G. (2017). „Homogenization of a Cauchy continuum towards a micro-morphic continuum“. In: *J. Mech. Phys. Solids* 99, S. 394–408.
- Jang, J.H., Koh, C.Y., Bertoldi, K., Boyce, M.C. und Thomas, E.L. (2009). „Combining Pattern Instability and Shape Memory Hysteresis for phononic switching“. In: *Nano Letters* 9, S. 2113–2119.
- Jänicke, R. (2010). „Micromorphic media: Interpretation by homogenisation“. Diss. Universität des Saarlandes.
- Jänicke, R., Diebels, S., Sehlhorst, H-G. und Düster, A. (2009a). „Two-scale modelling of micromorphic continua“. In: *Contin. Mech. Therm.* 21 4, S. 297–315.
- Jänicke, R. und Steeb, H. (2009b). „Minimal loading conditions for higher order numerical homogenisation schemes“. In: *Arch. Appl. Mech.* 82 (8), S. 1075–1088.
- Johnston, W.G. und Gilman, J.J. (1959). „Dislocation Velocities, Dislocation Densities, and Plastic Flow in Lithium Fluoride Crystals“. In: *J. Appl. Phys.* 30 129, S. 129–144.
- Kadic, M., Bückmann, T., Schittny, R., Gumbsch, P. und Wegener, M. (2014). „Pentamode Metamaterials with Independently Tailored Bulk Modulus and Mass Density“. In: *Phys. Rev. Appl.* 2, S. 054007.
- Kadic, M., Bückmann, T., Schittny, R. und Wegener, M. (2013). „Metamaterials beyond electromagnetism“. In: *Rep. Prog. Phys.* 76, S. 126501.
- Kouznetsova, V., Geers, M.G.D. und Brekelmans, W.A.M. (2002). „Multi-scale Constitutive Modelling of Heterogeneous Materials with a Gradient-enhanced Computational Homogenization Scheme“. In: *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 54 8, S. 12365–1260.
- Kouznetsova, V.G., Geers, M.G.D. und Brekelmans, W.A.M. (2004). „Multi-scale second-order computational homogenization of multi-phase materi-

- als: a nested finite element solution strategy“. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 193, S. 5525–5550.
- Kyriakides, S. und Miller, J.E. (2000). „On the Propagation of Lüders Bands in Steel Strips“. In: *J. Appl. Mech.* 67, S. 645–654.
- Lakes, R.S., Lee, T., Bersie, A. und Wang, Y.C. (2001). „Extreme damping in composite materials with negative stiffness inclusions“. In: *Nature* 410, S. 565–567.
- Laroussi, M., Sab, K. und Alaoui, A. (2002). „Foam mechanics: nonlinear response of an elastic 3D-periodic microstructure“. In: *Int. J. Solids Struct.* 39, S. 3599–3623.
- Le, K.C. (2011). *Introduction to Micromechanics Classical and Quantum Mechanics*. 1. Auflage. Nova Science Publisher Inc.
- Liu, J., Qin, H. und Liu, Y. (2018). „Dynamic behaviors of phase transforming cellular structures“. In: *Compos. Struct.* 184, S. 536–544.
- Liu, Y., Boyles, J.K., Genzer, J. und Dickey, M.D. (2012). „Self-folding of polymer sheets using local light absorption“. In: *Soft Matter* 8, S. 1764–1769.
- Liu, Y. und Wang, L. (2015). „Enhanced stiffness, strength and energy absorption for co-continuous composites with liquid filler“. In: *Compos. Struct.* 128, S. 274–283.
- Liu, Z., Zhang, X., Mao, Y., Zhu, Y.Y., Yang, Z., Chan, C.T. und Sheng, P. (2000). „Locally Resonant Sonic Materials“. In: *Science* 289, S. 1734–1736.
- Lv, C., Krishnaraju, D., Konjevod, G., Yu, H. und Jiang, H. (2014). „Origami based Mechanical Metamaterials“. In: *Sci. Rep.* 4, S. 5979.
- Mazière, M. und Forest, S. (2015). „Strain gradient plasticity modeling and finite element simulation of Lüders band formation and propagation“. In: *Continuum Mech. Thermodyn.* 27, S. 83–104.
- Meaud, J. und Che, K. (2017). „Tuning elastic wave propagation in multistable architected materials“. In: *Int. J. Solids Struct.* 122–123, S. 69–80.
- Mesarovic, S.D. und Padbidri, J. (2005). „Minimal kinematic boundary conditions for simulations of disordered microstructures“. In: *Phil. Mag.* 85 1, S. 65–78.
- Meza, L.R., Das, S. und Greer, J.R. (2014). „Strong, lightweight, and recoverable three-dimensional ceramic nanolattices“. In: *Science* 345, S. 1322–1325.

- Miehe, C. (2002). „Strain-driven homogenization of inelastic microstructures and composites based on an incremental variational formulation“. In: *Int. J. Numer. Methods Eng.* 55, S. 1285–1322.
- Milton, G.W. (2002). *The Theory of Composites*. 1. Auflage. Cambridge University Press.
- Milton, G.W. (2013). „Complete characterization of the macroscopic deformations of periodic unimode metamaterials of rigid bars and pivots“. In: *J. Mech. Phys. Solids* 61, S. 1543–1560.
- Milton, G.W. und Cherkaev, A.V (1995). „Which Elasticity Tensors are Realizable“. In: *J. Eng. Material Technol* 117 4, S. 1543–1560.
- Mindlin, R.D. (1965). „Second Gradient of Strain and Surface-Tension in Linear Elasticity“. In: *Int. J. Solids Struct.* 1, S. 417–438.
- Motz, C., Schöberl, T. und Pippan, R. (2005). „Mechanical properties of micro-sized copper bending beams machined by the focused ion beam technique“. In: *Acta. Mater.* 53, S. 4269–4279.
- Onck, P.R., Andrews, E.W. und Gibson, L.J. (2001). „Size effects in ductile cellular solids. Part I: modelling“. In: *Int. J. Mech. Sci.* 43, S. 681–699.
- Papka, S.D. und Kyriakides, S. (1998a). „In-plane Crushing of Polycarbonate Honeycombs“. In: *Int. J. Solids Structures* 35, S. 239–267.
- Papka, S.D. und Kyriakides, S. (1994). „In-plane Compressive Response and Crushing of Honeycomb“. In: *J. Mech. Phys. Solids* 42, S. 1499–1532.
- Papka, S.D. und Kyriakides, S. (1998b). „Experiments and Full-Scale Numerical Simulations of In-plane crushing of a honeycomb“. In: *Acta mater.* 46, S. 2765–2776.
- Pendry, J.B. (1994). „Photonic Band Structures“. In: *Journal of Modern Optics* 41, S. 209–229.
- Pendry, J.B. (2000). „Negative Refraction Makes a Perfect Lens“. In: *Phys. Rev. Lett.* 85 18, S. 3966–3969.
- Pendry, J.B. (2006). „Controlling Electromagnetic Fields“. In: *Science* 312, S. 1780–1782.
- Pendry, J.B., Holden, A.J., Stewart, W.J. und Youngs, I. (1996). „Extremely Low Frequency Plasmons in Metallic Mesostructures“. In: *Phys. Rev. Lett.* 76, S. 4773–4776.
- Puglisi, G. und Truskinovsky, L. (2000). „Mechanics of a discrete chain with bi-stable elements“. In: *J. Mech. Phys. Solids* 48, S. 1–27.
- Puglisi, G. und Truskinovsky, L. (2002). „Rate independent hysteresis in a bi-stable chain“. In: *J. Mech. Phys. Solids* 50, S. 165–187.

- Rafsanjani, A. und Pasini, D. (2016). „Bistable Auxetic Mechanical Metamaterials Inspired by Ancient Geometric Motifs“. In: *Extreme Mech. Lett.* 9, S. 291–296.
- Riks, E. (1972). „The application of Newton’s method to the problem of elastic stability“. In: *J. Appl. Mech.* 39, S. 1060–1066.
- Rosakis, P. und Knowles, J.K (1997). „Unstable kinetic relations and the dynamics of solid-solid phase transitions“. In: *J. Mech. Phys. Solids* 45, S. 2055–2081.
- Ryu, J., D’Amato, M., Cui, X., Long, K.N., Qi, J. und Dunn, M.L. (2012). „Photo-origami – Bending and folding polymers with light“. In: *Appl. Phys. Lett.* 100, S. 161908.
- Salari-Sharif, L., Schaedler und Valdevit, L. (2014). „Energy dissipation mechanisms in hollow metallic microlattices“. In: *J. Mater. Res.* 29, S. 1755–1770.
- Schaedler, T.A., Jacobsen, A.J., Torrents, A., Sorensen, A.E., Lian, J., Greer, J.R., Valdevit, L. und Carter, W.B. (2011). „Ultralight Metallic Microlattices“. In: *Science* 334, S. 962–965.
- Schenk, M. und Guest, S.D. (2013). „Geometry of Miura-folded metamaterials“. In: *Proc. Natl. Acad. Sci.* 110, S. 3276–3281.
- Schittny, R., Kadic, M., Guenneau, S. und Wegener, M. (2013). „Experiments on Transformation Thermodynamics: Molding the Flow of Heat“. In: *Phys. Rev. Lett.* 110, S. 195901.
- Schurig, D., Mock, J. J., Justice, B. J., Cummer, S. A., Pendry, J.B., Starr, A. F. und Smith, D. R. (2006). „Metamaterial Electromagnetic Cloak at Microwave Frequencies“. In: *Science* 314, S. 977–980.
- Schweizerhof, K.H. und Wriggers, P. (1986). „Consistent linearization for path following methods in nonlinear FE Analysis“. In: *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 59, S. 261–279.
- Sepecher, P., Alibert, J.-J. und Dell’Isola, F. (2011). „Linear elastic trusses leading to continua with exotic mechanical interactions“. In: *J. Phys.: Conference Series* 319 1, S. 012018.
- Shan, S., Kang, S.H., Raney, J.R., Wang, P., Fang, L., Candido, F., Lewis, J.A. und Bertoldi, K. (2015). „Multistable Architected Materials for Trapping Elastic Strain Energy“. In: *Adv. Mater.* 27, S. 4296–4301.
- Shaw, J.A. und Kyriakides, S. (1998). „Initiation and propagation of localized deformation in elasto-plastic strips under uniaxial tension“. In: *Int. J. Plast.* 13 10, S. 837–871.

- Shaw, J.H.A. und Kyriakides, S. (1997). „On the Nucleation and Propagation of Phase Transformation in NiTi Alloy“. In: *Acta Mater.* 45, S. 683–700.
- Shelby, R.A., Smith, D.R. und Schultz, S. (2001). „Experimental Verification of a Negative Index of Refraction“. In: *Science* 292 77, S. 77–79.
- Shim, J., Wang, P. und Bertoldi, K. (2015). „Harnessing instability-induced pattern transformation to design tunable phononic crystals“. In: *Int. J. Solid Struct.* 58, S. 52–61.
- Silverberg, J.L., Evans, A.A., McLeod, L., Hayward, R.C., Hull, T., Santangelo, C.D. und Cohen, I. (2014). „Using origami design principles to fold reprogrammable mechanical metamaterials“. In: *Science* 345, S. 647–650.
- Slepyan, L., Cherkaev, A. und Cherkaev, E. (2005). „Transition waves in bistable structures. II. Analytical solution: wave speed and energy dissipation“. In: *J. Mech. Phys. Solids* 53, S. 407–436.
- Slepyan, L.I. und Ayzenberg-Stepanenko, M.V. (2004). „Localized transition waves in bistable-bond lattices“. In: *J. Mech. Phys. Solids* 52, S. 1447–1479.
- Sluis, O. van der, Schreurs, P.J.G. und Meijer, H.E.H. (2012). „Homogenisation of structured elastoviscoplastic solids at finite strains“. In: *Mech. Mater.* 33, S. 3511–3523.
- Smith, D.R., Padilla, W.J., Vier, D.C., Nemat-Nasser, S.C. und Schulz, S. (2000). „Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity“. In: *Phys. Rev. Lett.* 84 18, S. 4184–4187.
- T.A. Schaedler, Jacobsen, A.J., Torrents, A., Sorensen, A.E., Lian, J., Greer, J.R., Valdevit, L. und Carter, W.B. (2011). „Ultralight Metallic Microlattices“. In: *Science* 334, S. 962–965.
- Torrents, A., Schaedler, T.A., Jacobson, A.J., Carter, W.B. und Valdevit, L. (2012). „Characterization of nickel-based microlattice materials with structural hierarchy from the nanometer to the millimeter scale“. In: *Acta Materialia* 60, S. 3511–3523.
- Triantafyllidis, N. und Bardenhagen, S. (1993). „On higher order gradient continuum theories in 1-D nonlinear elasticity. Derivation from and comparison to the corresponding discrete models“. In: *J. Elast.* 33, S. 259–293.
- Triantafyllidis, N. und Schraad, M.W. (1998). „Onset of Failure in Aluminum honeycombs under general in-plane loading“. In: *J. Mech. Phys. Solids* 46, S. 1089–1124.

- Truby, R.L. und Lewis, J.A. (2016). „Printing soft matter in three dimensions“. In: *Nature* 540, S. 371–378.
- Truskinovsky, L. und Vainchtein, A. (2004). „The origin of nucleation peak in transformational plasticity“. In: *J. Mech. Phys. Solids* 52, S. 1421–1446.
- Truskinovsky, L. und Zanzotto, G. (1996). „Ericksen’s bar revisited: Energy Wiggles“. In: *J. Mech. Phys. Solids* 44, S. 1371–1408.
- Veselago, V.G. (1968). „The Electrodynamics of Substances with Simultaneously Negative Values of  $\epsilon$  and  $\mu$ “. In: *Soviet Physics Uspekhi* 10 4, S. 509–514.
- Wang, Y.C. und Lakes, R.S. (2004). „Stable extremely-high-damping discrete viscoelastic systems due to negative stiffness elements“. In: *Appl. Phys. Lett.* 84, S. 4451–4453.
- Wriggers, P. (2008). *Nonlinear Finite Element Methods*. 1. Auflage. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Yasuda, H. und Yang, J. (2015). „Reentrant Origami-Based Metamaterials with negative Poisson’s Ratio and Bistability“. In: *Phys. Rev. Lett.* 114, S. 185502.
- Zhang, S., Xia, C. und Fang, N. (2011). „Broadband acoustic cloak for ultrasound waves“. In: *Phys. Rev. Lett.* 106, S. 024301.



# Schriftenreihe des Instituts für Angewandte Materialien

---

ISSN 2192-9963

---

- Band 1 Prachai Norajitra  
**Divertor Development for a Future Fusion Power Plant.** 2011  
ISBN 978-3-86644-738-7
- Band 2 Jürgen Prokop  
**Entwicklung von Spritzgießsonderverfahren zur Herstellung von Mikrobauteilen durch galvanische Replikation.** 2011  
ISBN 978-3-86644-755-4
- Band 3 Theo Fett  
**New contributions to R-curves and bridging stresses – Applications of weight functions.** 2012  
ISBN 978-3-86644-836-0
- Band 4 Jérôme Acker  
**Einfluss des Alkali/Niob-Verhältnisses und der Kupferdotierung auf das Sinterverhalten, die Strukturbildung und die Mikrostruktur von bleifreier Piezokeramik ( $K_{0,5}Na_{0,5}$ )NbO<sub>3</sub>.** 2012  
ISBN 978-3-86644-867-4
- Band 5 Holger Schwaab  
**Nichtlineare Modellierung von Ferroelektrika unter Berücksichtigung der elektrischen Leitfähigkeit.** 2012  
ISBN 978-3-86644-869-8
- Band 6 Christian Dethloff  
**Modeling of Helium Bubble Nucleation and Growth in Neutron Irradiated RAFM Steels.** 2012  
ISBN 978-3-86644-901-5
- Band 7 Jens Reiser  
**Duktilisierung von Wolfram. Synthese, Analyse und Charakterisierung von Wolframlaminaten aus Wolframfolie.** 2012  
ISBN 978-3-86644-902-2
- Band 8 Andreas Sedlmayr  
**Experimental Investigations of Deformation Pathways in Nanowires.** 2012  
ISBN 978-3-86644-905-3

- Band 9 Matthias Friedrich Funk  
**Microstructural stability of nanostructured fcc metals during cyclic deformation and fatigue.** 2012  
ISBN 978-3-86644-918-3
- Band 10 Maximilian Schwenk  
**Entwicklung und Validierung eines numerischen Simulationsmodells zur Beschreibung der induktiven Ein- und Zweifrequenzrandschichthärtung am Beispiel von vergütetem 42CrMo4.** 2012  
ISBN 978-3-86644-929-9
- Band 11 Matthias Merzkirch  
**Verformungs- und Schädigungsverhalten der verbundstrang-gespresten, federstahldrahtverstärkten Aluminiumlegierung EN AW-6082.** 2012  
ISBN 978-3-86644-933-6
- Band 12 Thilo Hammers  
**Wärmebehandlung und Recken von verbundstrang-gespresten Luftfahrtprofilen.** 2013  
ISBN 978-3-86644-947-3
- Band 13 Jochen Lohmiller  
**Investigation of deformation mechanisms in nanocrystalline metals and alloys by in situ synchrotron X-ray diffraction.** 2013  
ISBN 978-3-86644-962-6
- Band 14 Simone Schreijäg  
**Microstructure and Mechanical Behavior of Deep Drawing DC04 Steel at Different Length Scales.** 2013  
ISBN 978-3-86644-967-1
- Band 15 Zhiming Chen  
**Modelling the plastic deformation of iron.** 2013  
ISBN 978-3-86644-968-8
- Band 16 Abdullah Fatih Çetinel  
**Oberflächendefektausheilung und Festigkeitssteigerung von niederdruckspritzgegossenen Mikrobiengebalken aus Zirkoniumdioxid.** 2013  
ISBN 978-3-86644-976-3
- Band 17 Thomas Weber  
**Entwicklung und Optimierung von gradierten Wolfram/EUROFER97-Verbindungen für Divertorkomponenten.** 2013  
ISBN 978-3-86644-993-0

- Band 18     Melanie Senn  
**Optimale Prozessführung mit merkmalsbasierter Zustandsverfolgung.** 2013  
ISBN 978-3-7315-0004-9
- Band 19     Christian Mennerich  
**Phase-field modeling of multi-domain evolution in ferromagnetic shape memory alloys and of polycrystalline thin film growth.** 2013  
ISBN 978-3-7315-0009-4
- Band 20     Spyridon Korres  
**On-Line Topographic Measurements of Lubricated Metallic Sliding Surfaces.** 2013  
ISBN 978-3-7315-0017-9
- Band 21     Abhik Narayan Choudhury  
**Quantitative phase-field model for phase transformations in multi-component alloys.** 2013  
ISBN 978-3-7315-0020-9
- Band 22     Oliver Ulrich  
**Isothermes und thermisch-mechanisches Ermüdungsverhalten von Verbundwerkstoffen mit Durchdringungsgefüge (Preform-MMCs).** 2013  
ISBN 978-3-7315-0024-7
- Band 23     Sofie Burger  
**High Cycle Fatigue of Al and Cu Thin Films by a Novel High-Throughput Method.** 2013  
ISBN 978-3-7315-0025-4
- Band 24     Michael Teutsch  
**Entwicklung von elektrochemisch abgeschiedenem LIGA-Ni-Al für Hochtemperatur-MEMS-Anwendungen.** 2013  
ISBN 978-3-7315-0026-1
- Band 25     Wolfgang Rheinheimer  
**Zur Grenzflächenanisotropie von SrTiO<sub>3</sub>.** 2013  
ISBN 978-3-7315-0027-8
- Band 26     Ying Chen  
**Deformation Behavior of Thin Metallic Wires under Tensile and Torsional Loadings.** 2013  
ISBN 978-3-7315-0049-0

- Band 27 Sascha Haller  
**Gestaltfindung: Untersuchungen zur Kraftkegelmethode.** 2013  
ISBN 978-3-7315-0050-6
- Band 28 Nicht erschienen
- Band 29 Gunnar Picht  
**Einfluss der Korngröße auf ferroelektrische Eigenschaften dotierter  $\text{Pb}(\text{Zr}_{1-x}\text{Ti}_x)\text{O}_3$  Materialien.** 2013  
ISBN 978-3-7315-0106-0
- Band 30 Esther Held  
**Eigenspannungsanalyse an Schichtverbunden mittels inkrementeller Bohrlochmethode.** 2013  
ISBN 978-3-7315-0127-5
- Band 31 Pei He  
**On the structure-property correlation and the evolution of Nanofeatures in 12-13.5% Cr oxide dispersion strengthened ferritic steels.** 2014  
ISBN 978-3-7315-0141-1
- Band 32 Jan Hoffmann  
**Ferritische ODS-Stähle – Herstellung, Umformung und Strukturanalyse.** 2014  
ISBN 978-3-7315-0157-2
- Band 33 Wiebke Sittel  
**Entwicklung und Optimierung des Diffusionsschweißens von ODS Legierungen.** 2014  
ISBN 978-3-7315-0182-4
- Band 34 Osama Khalil  
**Isothermes Kurzzeitermüdungsverhalten der hoch-warmfesten Aluminium-Knetlegierung 2618A (AlCu2Mg1,5Ni).** 2014  
ISBN 978-3-7315-0208-1
- Band 35 Nicht erschienen
- Band 36 Christoph Hage  
**Grundlegende Aspekte des 2K-Metallpulverspritzgießens.** 2014  
ISBN 978-3-7315-0217-3
- Band 37 Bartłomiej Albiński  
**Instrumentierte Eindringprüfung bei Hochtemperatur für die Charakterisierung bestrahlter Materialien.** 2014  
ISBN 978-3-7315-0221-0

- Band 38     Tim Feser  
**Untersuchungen zum Einlaufverhalten binärer alpha-Messinglegierungen unter Ölschmierung in Abhängigkeit des Zinkgehaltes.** 2014  
ISBN 978-3-7315-0224-1
- Band 39     Jörg Ettrich  
**Fluid Flow and Heat Transfer in Cellular Solids.** 2014  
ISBN 978-3-7315-0241-8
- Band 40     Melanie Syha  
**Microstructure evolution in strontium titanate Investigated by means of grain growth simulations and x-ray diffraction contrast tomography experiments.** 2014  
ISBN 978-3-7315-0242-5
- Band 41     Thomas Haas  
**Mechanische Zuverlässigkeit von gedruckten und gasförmig abgeschiedenen Schichten auf flexiblem Substrat.** 2014  
ISBN 978-3-7315-0250-0
- Band 42     Aron Kneer  
**Numerische Untersuchung des Wärmeübertragungsverhaltens in unterschiedlichen porösen Medien.** 2014  
ISBN 978-3-7315-0252-4
- Band 43     Manuel Feuchter  
**Investigations on Joule heating applications by multiphysical continuum simulations in nanoscale systems.** 2014  
ISBN 978-3-7315-0261-6
- Band 44     Alexander Vondrous  
**Grain growth behavior and efficient large scale simulations of recrystallization with the phase-field method.** 2014  
ISBN 978-3-7315-0280-7
- Band 45     Tobias Kennerknecht  
**Fatigue of Micro Molded Materials – Aluminum Bronze and Yttria Stabilized Zirconia.** 2014  
ISBN 978-3-7315-0293-7
- Band 46     Christopher Scherr  
**Elektrochemisches Verhalten von Lithium-Schwefel-Zellen mit unterschiedlicher Kathodenstruktur.** 2015  
ISBN 978-3-7315-0296-8

- Band 47     Konstantin Frölich  
**Der Decal-Prozess zur Herstellung katalysatorbeschichteter Membranen für PEM-Brennstoffzellen.** 2015  
ISBN 978-3-7315-0334-7
- Band 48     Benedikt Haspel  
**Werkstoffanalytische Betrachtung der Eigenschaften von mittels neuartiger RTM-Fertigungsprozesse hergestellten glasfaserverstärkten Polymerverbunden.** 2015  
ISBN 978-3-7315-0337-8
- Band 49     Marco Berghoff  
**Skalenübergreifende Modellierung und Optimierung vom atomistischen kristallinen Phasenfeldmodell bis zur mesoskopischen Phasenfeldmethode.** 2015  
ISBN 978-3-7315-0416-0
- Band 50     Michael Selzer  
**Mechanische und Strömungsmechanische Topologieoptimierung mit der Phasenfeldmethode.** 2016  
ISBN 978-3-7315-0431-3
- Band 51     Michael Mahler  
**Entwicklung einer Auswertemethode für bruchmechanische Versuche an kleinen Proben auf der Basis eines Kohäsivzonenmodells.** 2016  
ISBN 978-3-7315-0441-2
- Band 52     Christoph Bohnert  
**Numerische Untersuchung des Verformungs- und Bruchverhaltens von einkristallinem Wolfram auf mikroskopischer Ebene.** 2016  
ISBN 978-3-7315-0444-3
- Band 53     Stefan Guth  
**Schädigung und Lebensdauer von Nickelbasislegierungen unter thermisch-mechanischer Ermüdungsbeanspruchung bei verschiedenen Phasenlagen.** 2016  
ISBN 978-3-7315-0445-0
- Band 54     Markus Klinsmann  
**The Effects of Internal Stress and Lithium Transport on Fracture in Storage Materials in Lithium-Ion Batteries.** 2016  
ISBN 978-3-7315-0455-9

- Band 55    Thomas Straub  
**Experimental Investigation of Crack Initiation in Face-Centered Cubic Materials in the High and Very High Cycle Fatigue Regime.** 2016  
ISBN 978-3-7315-0471-9
- Band 56    Maren Lepple  
**Kupfer- und Eisenoxide als Konversions-Elektrodenmaterialien für Lithium-Ionen-Batterien: Thermodynamische und Elektrochemische Untersuchungen.** 2016  
ISBN 978-3-7315-0482-5
- Band 57    Stefan Andreas Slaby  
**Charakterisierung und Bewertung der Zug- und Ermüdungseigenschaften von Mikrobauteilen aus 17-4PH Edelstahl. Ein Vergleich von mikropulverspritzgegossenem und konventionell hergestelltem Material.** 2017  
ISBN 978-3-7315-0484-9
- Band 58    Kumar Ankit  
**Phase-field modeling of microstructural pattern formation in alloys and geological veins.** 2016  
ISBN 978-3-7315-0491-7
- Band 59    Kuo Zhang  
**Characterization and Modeling of the Ratcheting Behavior of the Ferritic-Martensitic Steel P91.** 2017  
ISBN 978-3-7315-0503-7
- Band 60    Nicht erschienen
- Band 61    Fabian Lemke  
**Untersuchung des Sinterverhaltens von SrTiO<sub>3</sub> unter Berücksichtigung der Defektchemie.** 2016  
ISBN 978-3-7315-0510-5
- Band 62    Johannes Kümmel  
**Detaillierte Analyse der Aufbauschneidenbildung bei der Trockenerspannung von Stahl C45E mit Berücksichtigung des Werkzeugverschleißes.** 2016  
ISBN 978-3-7315-0518-1
- Band 63    László Hagymási  
**Modellierung der Stoffübertragung beim Niederdruck-carbonitrieren mit Ammoniak und Acetylen.** 2016  
ISBN 978-3-7315-0568-6

- Band 64 Reza Eslami  
**A novel micro-mechanical model for prediction of multiaxial high cycle fatigue at small scales.** 2017  
ISBN 978-3-7315-0583-9
- Band 65 Sebastian Schulz  
**Phase-field simulations of multi-component solidification and coarsening based on thermodynamic datasets.** 2017  
ISBN 978-3-7315-0618-8
- Band 66 Markus Stricker  
**Die Übertragung von mikrostrukturellen Eigenschaften aus der diskreten Versetzungsdynamik in Kontinuumsbeschreibungen.** 2017  
ISBN 978-3-7315-0658-4
- Band 67 Luis Straßberger  
**Untersuchung und Modellierung des viskoplastischen Verformungsverhaltens oxidpartikelverstärkter Stähle.** 2018  
ISBN 978-3-7315-0674-4
- Band 68 Mark Wobrock  
**Microplasticity of idealized single crystalline Ag cantilevers characterized with methods of high resolution.** 2017  
ISBN 978-3-7315-0682-9
- Band 69 Amritesh Kumar  
**Micromechanical study on the deformation behaviour of directionally solidified NiAl-Cr eutectic composites.** 2017  
ISBN 978-3-7315-0694-2
- Band 70 Johannes Hötzer  
**Massiv-parallele und großskalige Phasenfeldsimulationen zur Untersuchung der Mikrostrukturentwicklung.** 2017  
ISBN 978-3-7315-0693-5
- Band 71 Thomas Hupfer  
**Herstellung von LATP für den Einsatz als Festkörperelektrolyt und dessen Eigenschaften.** 2017  
ISBN 978-3-7315-0702-4
- Band 72 Florentin Pottmeyer  
**Schädigungsverhalten von in CFK-Laminaten eingebetteten Inserts unter bauteilnahen Beanspruchungen.** 2017  
ISBN 978-3-7315-0719-2

- Band 73    Andres Höweling  
**Untersuchung der Hochvoltstabilität und Tiefentladung von dotierten  $\text{LiNi}_{0,5}\text{Mn}_{1,5}\text{O}_4$ -Hochvoltspinellen.** 2018  
ISBN 978-3-7315-0728-4
- Band 74    Tabea Gisela Schwark  
**Deformation and Fracture Properties of the Soft Magnetic Composite Somaloy 700 3P on Different Length Scales.** 2018  
ISBN 978-3-7315-0759-8
- Band 75    Klaudia Lichtenberg  
**Metallmatrixverbunde mit Verstärkungselementen aus metallischem Glas  $\text{Ni}_{60}\text{Nb}_{20}\text{Ta}_{20}$  – Herstellung und Charakterisierung.** 2018  
ISBN 978-3-7315-0782-6
- Band 76    Claudio Findeisen  
**Charakterisierung und Modellierung von instabilen Metamaterialien.** 2019  
ISBN 978-3-7315-0869-4

KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)  
SCHRIFTENREIHE DES INSTITUTS FÜR ANGEWANDTE MATERIALIEN

Durch die Entwicklung von 3D Druckverfahren lassen sich (Meta)Materialien mit nahezu beliebiger Mikrostruktur herstellen. Um von dieser neugewonnenen Designfreiheit zu profitieren, wird in dieser Arbeit das Potential von instabilen Mikrostrukturen untersucht und einige herausragende Eigenschaften werden weitergehend analysiert. Hier zählt unter anderem die Möglichkeit zur Programmierung von Materialeigenschaften, also Eigenschaften, die sich je nach Anforderung ändern lassen, sowie eine „perfekte“ Energiedissipation, die sich grundlegend von allen gängigen Materialien unterscheidet.

Das Design und die theoretische Untersuchung solcher Materialien stellen allerdings auch neue Herausforderungen an die Materialmodellierung dar. Wie diese Klasse von Materialien auf den verschiedenen Längenskalen modelliert werden kann, wird ausführlich untersucht und diskutiert. Die größte Herausforderung ist hierbei die physikalisch sinnvolle Modellierung der Effektiveneigenschaften sowie deren Größeneffekte im Rahmen einer verallgemeinerten Kontinuumstheorie.

ISSN 2192-9963  
ISBN 978-3-7315-0869-4

