

# Tracking von Objektgruppen und ausgedehnten Zielobjekten

zur Erlangung des akademischen Grades eines

Doktors der Ingenieurwissenschaften

von der KIT-Fakultät für Informatik  
des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

**genehmigte**

**Dissertation**

von

**Michael Feldmann**

aus Marsberg im Sauerland

Tag der mündlichen Prüfung:	30. November 2018
Erster Gutachter:	Prof. Dr.-Ing. Uwe D. Hanebeck
Zweiter Gutachter:	apl. Prof. Dr. rer. nat. Wolfgang Koch



---

# Danksagung

---

Diese Arbeit entstand während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter der Abteilung für Sensordaten- und Informationsfusion am Fraunhofer-Institut für Kommunikation, Informationsverarbeitung und Ergonomie FKIE in Wachtberg und wurde von der Wehrtechnischen Dienststelle für Informationstechnologie und Elektronik (WTD 81) in Greiding gefördert.

Herrn Professor Dr. Uwe D. Hanebeck danke ich für seine Bereitschaft, mich als externen Doktoranden an seinem Lehrstuhl für Intelligente Sensor-Aktor-Systeme (ISAS) am Karlsruher Institut für Technologie (KIT) anzunehmen, als Doktorvater während der Promotion zu betreuen und mich bei Klausurtagungen und Seminaren seines Lehrstuhles einzubeziehen sowie mit Anregungen und Fragestellungen zu unterstützen.

Meinem Abteilungsleiter und Co-Doktorvater Herrn Professor Dr. Wolfgang Koch danke ich für die hervorragenden Arbeitsbedingungen in Wachtberg, die vielen Anregungen zu meiner Forschungstätigkeit und die Möglichkeit, seine Vorarbeiten zum Tracking mit Zustandsmatrizen und Straßenkarteninformationen aufzugreifen und im Rahmen einer Promotion weiterzuentwickeln.

Außerdem möchte ich Herrn Dr. Dietrich Fränken danken, dass er mich über meine von ihm betreute Masterarbeit in Ulm hinaus auf dem Weg zur Promotion begleitet hat: Er hat mich zu dieser Arbeit ermutigt, war bei der Kontaktaufnahme zu meinen beiden Doktorvätern behilflich und hat durch viele Anregungen und Hilfestellungen zum Gelingen der Promotion beigetragen.

Mein Dank gilt auch allen aktuellen und ehemaligen Abteilungskollegen in Wachtberg sowie den Menschen am ISAS in Karlsruhe, die ich im Laufe der Jahre kennenlernen durfte – insbesondere die Herren Dr. Josef Heinskill, Dr. Jost Koller, Dr. Gereon Schüller und Dr. Martin Ulmke. Ebenso möchte ich mich an dieser Stelle bei meinen Eltern, Großeltern und meiner Schwester bedanken.

Bonn, im Januar 2019

Michael Feldmann



Die vorliegende Arbeit befasst sich mit dem rechnergestützten Verfolgen – d. h. Tracking – einer Gruppe von Objekten oder eines ausgedehnten Zielobjektes auf Grundlage von verrauschten Sensordaten. In konventionellen Zielverfolgungsverfahren modellieren wir die interessierenden Objekte als punktförmig. Ihre räumliche Ausdehnung wird als vernachlässigbar betrachtet im Vergleich zu Sensorauflösung und -messfehler. Im Hinblick auf zunehmend leistungsfähigere Sensoren ist diese Annahme jedoch immer weniger zutreffend – etwa bei sehr großen Objekten oder im Nahbereich von Sensoren, wenn mehrere Auflösungszellen bei der Zielmessung involviert sind. In der Folge ergeben sich bei einem ausgedehnten Ziel mehrere zu verarbeitende Messungen. Unterschiedliche Streuzentren des Zielobjektes sorgen für eine fluktuierende Zahl von Reflexionen von Messzeitpunkt zu Messzeitpunkt. Ein ähnliches Detektionsmuster und die schwankende Zahl der Messungen können wir im Fall dicht operierender Gruppenziele beobachten, wenn mehrere Objekte als ein einziges Ziel detektiert werden aufgrund einer zu geringen Sensorauflösung. Da bei konventionellen Tracking-Verfahren pro Objekt maximal eine Detektion erwartet wird, lassen sich die Messungen den Zielspuren nicht eindeutig zuordnen. Die mehrdeutige Datenassoziation in Verbindung mit der fluktuierenden Zahl an Reflexionen beeinflusst die Tracking-Ergebnisse. Infolge einer instabilen Track-Führung geht die Zielspur möglicherweise verloren.

Aus der Literatur ist ein Bayes'sches Tracking-Verfahren bekannt, mit dem sowohl eine Objektgruppe als auch ein ausgedehntes Objekt in einer einheitlichen Zielspur abgebildet werden können. Die geschätzte Zielspur besteht aus dem kinematischen Schwerpunkt und dem räumlichen Ausmaß des Zielobjektes, wobei die Ausdehnung – auch die einer Objektgruppe – durch ein Ellipsoid modelliert wird. Mathematisch wird diese Ausdehnung durch eine Zustandsmatrix beschrieben. Deshalb ergeben sich multivariate Matrixverteilungen im statistischen Schätzproblem. Mit diesem Ansatz vermeiden wir nicht nur die Sensorauflösungsthematik, sondern auch das gruppeninterne oder objektbezogene Datenassoziationsproblem eines konventionellen Punktziel-Verfahrens. Die Sensordaten werden als über die Ausdehnung verteilte Messungen des Schwerpunktes interpretiert, wobei Messfehler nicht berücksichtigt werden. Damit wird die Zustandsmatrix der Objektausdehnung Teil des Schätzproblems – sie wird *messbar*. Folglich ist ein statistischer Sensormessfehler nicht Teil der Filtergleichungen. Das Verfahren schätzt Ausdehnung plus Sensorfehler, da es die Streuung durch einen Messfehler als *Ausdehnungsrauschen* interpretieren muss. Ein erhöhtes Messrauschen vergrößert damit automatisch die Ausdehnungsschätzung und beeinflusst auch die Schätzung des kinematischen Schwerpunktes.

Ausgehend von diesen Beobachtungen stellt diese Arbeit eine Weiterentwicklung des ursprünglichen Bayes'schen Verfahrens vor, um sowohl den Einfluss der Objektausdehnung als auch des Messrauschens auf die Messungen näherungsweise zu berücksichtigen. Mit einem statistischen Messfehler als Parameter in den Filtergleichungen verbessert sich das glättende Verhalten des Tracking-Filters, weshalb das weiterentwickelte Verfahren in Simulationen geringere Schätzfehler für Kinematik und Ausdehnung zeigt. Auch bei Zunahme des Sensormessfehlers können wir das *Überschätzen* der

Ausdehnung weitgehend vermeiden. Darüber hinaus liefert diese Arbeit noch weitere Beiträge zur allgemeinen Weiterentwicklung:

- Einsatz des weiterentwickelten Verfahrens in einem IMM-Filter (für engl. *Interacting-Multiple-Model-Filter*), was ein abgestuftes Modellieren der Systemdynamik für unterschiedliche Bewegungszustände ermöglicht – und somit weitgehend geringere Schätzfehler, ohne dass die Zahl der Modellhypothesen mit der Zeit exponentiell zunimmt.
- Untersuchung einiger Besonderheiten der Ausdehnungsschätzung und ihrer multivariaten Matrixverteilung: Berechnung eines Schätzfehlers, Moment-Matching im Zusammenhang mit Mischverteilungsdichten und die Darstellung eines graphischen Konfidenzbereiches für die geschätzte Objektausdehnung.

Der Fokus dieser Arbeit liegt dabei auf Anwendungen in der militärischen Weitbereichsüberwachung, da sie in einem wehrwissenschaftlichen Forschungsinstitut angefertigt wurde. Allerdings können auch andere Forschungsgebiete von den entwickelten Verfahren dieser Arbeit profitieren: Beispielsweise ist ein vollständig selbstfahrendes Kraftfahrzeug notwendigerweise auch eine Sensorplattform, deren Sensorik andere Verkehrsteilnehmer ebenfalls wie ausgedehnte Zielobjekte und Objektgruppen detektiert – seien es z. B. andere Fahrzeuge, Fahrradfahrer oder Fußgänger.

Eine besondere Form der Weitbereichsüberwachung ist die luftgestützte Bodenaufklärung, da dort zusätzliche Schwierigkeiten auftreten: Mögliche Probleme bereiten sowohl eine hohe Verkehrsdichte und Falschalarmrate als auch eine geringe Entdeckungswahrscheinlichkeit aufgrund von topographischen Abschattungsphänomenen oder gegnerischen Tarnmaßnahmen. Daher nehmen einige konventionelle Tracking-Verfahren für punktförmige Straßenziele an, dass sich nicht nur zivile Fahrzeuge, sondern auch militärische Bodenziele überwiegend auf befestigten Straßen bewegen, deren bekannte geographische Lage zum Verbessern der Zielverfolgung beitragen kann.

In diesem Kontext stellt die vorliegende Arbeit vor, wie sich das ursprüngliche Bayes'sche Verfahren mit Straßenkarteninformationen erweitern lässt, um eine Kolonne von Fahrzeugen als Objektgruppe auf einer Straße zu verfolgen. Dabei wird die Zielspur der Fahrzeugkolonne im parametrisierten Raum der Straße geführt, so dass sich das Ellipsoid der Ausdehnungsschätzung auf eine Längensinformation reduziert, die wiederum der Länge der Kolonne entspricht. Zum Verarbeiten der Sensordaten sind Koordinatentransformationen erforderlich, da die Messungen häufig etwas abseits der Straße liegen – z. B. aufgrund von Sensormessfehlern. Dadurch ergeben sich im Wesentlichen zwei Verfahrenseigenschaften: Bei der Prädiktion in Straßenkoordinaten folgt die Zielspur der Kolonne automatisch einem kurvigen Straßenverlauf, während im Aktualisierungsteil der Track zurück auf die Straße projiziert wird, nachdem die Messungen in Bodenkoordinaten verarbeitet worden sind. Infolgedessen erreichen wir eine verbesserte Schätzgenauigkeit im Vergleich zum Verfahren ohne Straßenkarteninformationen.

---

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>Notation</b>	<b>XI</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Problemstellung im Kontext der Weitbereichsüberwachung . . . . .	2
1.2 Lösungsansätze in der Literatur . . . . .	4
1.2.1 Multi-Hypothesen-Tracker . . . . .	4
1.2.2 PHD-Filter . . . . .	5
1.2.3 Sequenzielle Monte-Carlo-Methoden . . . . .	5
1.2.4 Alternative Tracking-Ansätze . . . . .	6
1.3 Merkmale der luftgestützten Bodenaufklärung . . . . .	6
1.4 Ausgangspunkte und Beiträge der Arbeit . . . . .	8
1.4.1 Tracking-Verfahren von Koch . . . . .	8
1.4.2 Beiträge der Arbeit . . . . .	9
1.4.3 Aufbau und Struktur der Arbeit . . . . .	10
<b>2 Ausbau des methodischen Rahmens: Berücksichtigung der Objektausdehnung</b>	<b>11</b>
2.1 Methodischer Rahmen: Bayes'scher Formalismus . . . . .	11
2.1.1 Konjugierte A-priori-Verteilungen . . . . .	12
2.1.2 Dynamische Zustandsschätzung . . . . .	13
2.1.3 Beispiel: Kalman-Filter . . . . .	14
2.2 Berücksichtigung der Objektausdehnung im methodischen Rahmen . . . . .	16
2.2.1 Aktualisierung: Anwenden der Bayes'schen Regel . . . . .	17
2.2.2 Prädiktion: Berechnung als Marginaldichte . . . . .	18
2.3 Tracking-Verfahren für ausgedehnte Objekte und Objektgruppen . . . . .	19
2.3.1 Modellierung der Likelihood-Funktion . . . . .	19
2.3.2 Filtergleichungen zur Aktualisierung . . . . .	22
2.3.3 Filtergleichungen zur Prädiktion . . . . .	24
2.4 Weitere Einsichten: Berechnen der kinematischen Marginaldichte . . . . .	27
2.4.1 Analyse eines Berechnungsansatzes aus der Fachliteratur . . . . .	27
2.4.2 Allgemeine Berechnung der kinematischen Marginaldichte . . . . .	28
2.5 Weitere Einsichten: Berechnen von Messwahrscheinlichkeiten . . . . .	30
2.5.1 Erwartete Einzelmessung . . . . .	32
2.5.2 Erwartete mittlere Messung und erwartete Messstreuung . . . . .	32
2.5.3 Beziehungen zu anderen Wahrscheinlichkeitsverteilungen . . . . .	34

<b>3</b>	<b>Weiterentwicklung unter speziellen Gesichtspunkten</b>	<b>37</b>
3.1	Berücksichtigung eines statistischen Sensormessfehlers . . . . .	37
3.1.1	Angepasste Filtergleichungen zur Aktualisierung . . . . .	39
3.1.2	Angepasste Filtergleichungen zur Prädiktion . . . . .	41
3.2	Besonderheiten der physikalischen Ausdehnung . . . . .	42
3.2.1	Schätzunsicherheiten und MMSE-Schätzer . . . . .	42
3.2.2	Mischverteilungsdichten und Moment-Matching . . . . .	43
3.2.3	Darstellbarer Konfidenzbereich der 2-D-Objektausdehnung . . . . .	45
3.3	Einsatz des weiterentwickelten Verfahrens in einem IMM-Filter . . . . .	49
3.3.1	Berücksichtigung der Objektausdehnung im methodischen Rahmen . . . . .	50
3.3.2	Filtergleichungen des weiterentwickelten IMM-Filters . . . . .	52
3.4	Alternativer Aktualisierungsschritt von Orguner . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Quantitative Evaluierung anhand von Beispielen</b>	<b>61</b>
4.1	Einblicke in Besonderheiten der Ausdehnungsschätzung . . . . .	61
4.2	Simulation einer Gruppe dicht fliegender Ziele . . . . .	65
4.3	Simulation eines ausgedehnten Zielobjektes . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Integration von Straßenkarteninformationen</b>	<b>77</b>
5.1	Berücksichtigung von Straßenkarteninformationen . . . . .	77
5.2	Prädiktion des erweiterten Bayes'schen Ansatzes . . . . .	81
5.2.1	Prädiktion in Straßenkoordinaten . . . . .	82
5.2.2	Prädiktion in segmentweisen Straßenkoordinaten . . . . .	83
5.2.3	Prädiktion in segmentweisen 2-D-Bodenkoordinaten . . . . .	85
5.3	Aktualisierung des erweiterten Bayes'schen Ansatzes . . . . .	87
5.3.1	Aktualisierung in segmentweisen 2-D-Bodenkoordinaten . . . . .	88
5.3.2	Aktualisierung in segmentweisen Straßenkoordinaten . . . . .	89
5.3.3	Aktualisierung in Straßenkoordinaten . . . . .	91
5.4	Simulation einer Kolonne von Fahrzeugen . . . . .	92
5.5	Grundsätzliche Problematik des erweiterten Ansatzes . . . . .	98
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>103</b>
<b>A</b>	<b>Allgemeine Grundlagen</b>	<b>107</b>
A.1	Spezielle Funktionen . . . . .	107
A.1.1	Gammafunktion . . . . .	107
A.1.2	Unvollständige und regularisierte Gammafunktion (der oberen Grenze) . . . . .	108
A.1.3	Multivariate Gamma- und Betafunktion . . . . .	109
A.2	Matrizenrechnung . . . . .	110
A.2.1	Kronecker-Produkt und vec-Operator . . . . .	110
A.2.2	Determinante und Inverse einer Matrix der Form $\mathbf{A} + \mathbf{BCD}$ . . . . .	111
A.2.3	Matrixexponentialfunktion . . . . .	112
A.3	Berechnung eines bestimmten Integrals der Funktion $(\sin x)^n$ . . . . .	112

<b>B</b>	<b>Relevante Wahrscheinlichkeitsverteilungen</b>	<b>115</b>
B.1	Univariate Verteilungen . . . . .	115
B.1.1	Gammaverteilung . . . . .	115
B.1.2	Inverse Gammaverteilung . . . . .	115
B.2	Multivariate Verteilungen . . . . .	116
B.2.1	Multivariate Normalverteilung . . . . .	116
B.2.2	Multivariate $t$ -Verteilung . . . . .	116
B.3	Multivariate Matrixverteilungen . . . . .	116
B.3.1	Matrixvariante Normalverteilung . . . . .	117
B.3.2	Matrixvariante $t$ -Verteilung . . . . .	117
B.3.3	Wishart-Verteilung . . . . .	118
B.3.4	Inverse Wishart-Verteilung . . . . .	119
B.3.5	Verallgemeinerte matrixvariante Betaverteilung zweiter Art . . . . .	120
B.4	Produktformel für multivariate Normalverteilungen . . . . .	120
B.5	Produktformel für Wishart-Verteilungen . . . . .	124
B.6	Gleichverteilte Messungen über ein $d$ -dimensionales Ellipsoid . . . . .	125
B.6.1	Dichtefunktion und Kovarianzmatrix der gleichverteilten Zufallsvariablen . . . . .	125
B.6.2	Berechnung der Kovarianzmatrix dieser gleichverteilten Zufallsvariablen . . . . .	126
<b>C</b>	<b>MMSE-Schätzer für Zufallsmatrizen</b>	<b>131</b>
<b>D</b>	<b>Konfidenzbereich der 2-D-Objektausdehnung</b>	<b>133</b>
D.1	Berechnung des Konfidenzniveaus . . . . .	133
D.2	Ähnliche Problemstellung in der Fachliteratur . . . . .	135
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>137</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>139</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>141</b>
	<b>Publikationsverzeichnis</b>	<b>153</b>



## Abkürzungen

ANEEES	Average Normalized Estimation Error Squared
CSOs	Closely Spaced Objects
GMTI	Ground Moving Target Indication
IMM	Interacting Multiple Model
MFA	Multiple Frame Assignment
MHT	Multi-Hypothesen-Tracker
MMSE	Minimum Mean Square Error
MSE	Mean Square Error
MTI	Moving Target Indication
MTT	Multiple Target Tracking
PHD	Probability Hypothesis Density
RFS	Random Finite Set
RHM	Random Hypersurface Model
RMS	Root Mean Square
RMSE	Root Mean Square Error
SDI	Strategic Defense Initiative
SMC	Sequenzielle Monte-Carlo(-Methoden)
SPD	Symmetrische, positiv definite (Matrix)
VB	Variational Bayesian

## Mathematische Konventionen

$ \cdot $	Determinante einer Matrix
$\mathbf{0}$	Nullmatrix
$a, \mathbf{a}, \mathbf{a}^T, \mathbf{A}, \mathbf{A}^T$	Skalar, Spaltenvektor, Zeilenvektor, Matrix, transponierte Matrix
$\mathbf{A}_{m \times n}, \mathbf{A}_d$	$m \times n$ -Matrix $\mathbf{A}$ , $d \times d$ -Matrix $\mathbf{A}$
$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$	Kronecker-Produkt von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ (siehe Abschnitt A.2.1)
$\text{cov}[\mathbf{X}]$	Kovarianzmatrix der Zufallsmatrix $\mathbf{X}$ , d. h. von $\text{vec}(\mathbf{X}^T)$ (siehe Gleichung (B.3))
$\text{diag}(\cdot)$	Diagonal- oder Blockdiagonalmatrix
$\text{dim}(\cdot)$	Dimension eines Vektors
$\text{etr}(\cdot)$	Abkürzende Schreibweise für $\exp(\text{tr}(\cdot))$
$\exp(\cdot)$	Exponentialfunktion
$\exp(\mathbf{A})$	Matrixexponential von $\mathbf{A}$ (siehe Abschnitt A.2.3)
$E[\cdot]$	Erwartungswert
$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix

$k \ell$	Index zur Angabe des Zeitschrittes $k$ basierend auf Messungen bis Zeitschritt $\ell$
$L(\lambda)$	Lagrange-Funktion mit dem Lagrange-Multiplikator $\lambda$
$\mathbb{N}$	Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen
$\mathbb{N}^*$	Menge der positiven ganzen Zahlen
$p(\mathbf{x})$	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsvariablen $\mathbf{x}$
$p(\mathbf{x} = x)$	Auswertung der Dichtefunktion $p(\mathbf{x})$ für den speziellen Wert $x$
$P\{\mathbf{x}^\top \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x} \leq b\}$	Wahrscheinlichkeit für $\mathbf{x}^\top \mathbf{P}^{-1} \mathbf{x} \leq b$
$\mathcal{P}(a, x)$	Regularisierte Gammafunktion der oberen Grenze (siehe Abschnitt A.1.2)
$\text{tr}(\cdot)$	Spur einer Matrix
$\text{Var}[\cdot]$	Varianz oder Kovarianzmatrix
$\text{vec}(\cdot)$	vec-Operator (siehe Abschnitt A.2.1)
$\mathbf{x} \sim p(\mathbf{x})$	Die Zufallsvariable $\mathbf{x}$ genügt der Verteilung mit Dichtefunktion $p(\mathbf{x})$ .
$\mathbf{X} > \mathbf{A}$	$\mathbf{X} - \mathbf{A}$ ist eine symmetrische, positiv definite (SPD) Matrix.
$\mathbf{X} \geq \mathbf{A}$	$\mathbf{X} - \mathbf{A}$ ist eine symmetrische, positiv semidefinite Matrix.
$\beta_p(a, b)$	Multivariate Betafunktion (siehe Abschnitt A.1.3)
$\gamma(a, x)$	Unvollständige Gammafunktion der oberen Grenze (siehe Abschnitt A.1.2)
$\Gamma(a)$	(Euler'sche) Gammafunktion (siehe Abschnitt A.1.1)
$\Gamma_p(a)$	Multivariate Gammafunktion (siehe Abschnitt A.1.3)

## Wahrscheinlichkeitsverteilungen

$\mathcal{G}(x; \nu, c)$	Gammaverteilung
$\mathcal{GB}_p^{\text{II}}(\mathbf{X}; a, b; \mathbf{C}, \mathbf{D})$	Verallgemeinerte matrixvariante Betafunktion zweiter Art
$\mathcal{IG}(x; \nu, c)$	Inverse Gammaverteilung
$\mathcal{IW}_p(\mathbf{X}; \nu, \mathbf{C})$	Inverse Wishart-Verteilung
$\mathcal{N}_p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$	Multivariate Normalverteilung
$\mathcal{N}_{p,m}(\mathbf{X}; \mathbf{M}, \mathbf{C} \otimes \mathbf{D})$	Matrixvariante Normalverteilung
$\mathcal{T}_p(\mathbf{x}; \nu, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{C})$	Multivariate $t$ -Verteilung
$\mathcal{T}_{p,m}(\mathbf{X}; \nu, \mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$	Matrixvariante $t$ -Verteilung
$\mathcal{U}_d(\mathbf{x}; \boldsymbol{\Sigma})$	Multivariate (erwartungswertfreie) Gleichverteilung
$\mathcal{W}_p(\mathbf{X}; \nu, \mathbf{C})$	Wishart-Verteilung

Die expliziten Dichtefunktionen und weitere Formeln zu den Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind in einem eigenen Kapitel zusammengefasst worden; siehe Anhang B.

## Wesentliche Formelzeichen

$c$	Konfidenzwahrscheinlichkeit
$c_d(\bar{\mathbf{Y}}_k, n_k)$	Vorfaktor der Likelihood-Funktion (siehe Gleichung (2.23))
$d$	Räumliche Dimension des Schätzproblems
$e_{k k}$	MMSE der Ausdehnungsschätzung
$f_{k k}$	Skalierungsfaktor für den Konfidenzbereich der Ausdehnungsschätzung

$\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}} \otimes \mathbf{I}_d$	Systemmatrix
$\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{H}} \otimes \mathbf{I}_d$	Messmatrix
$k$	Index zur Angabe des Zeitschrittes und somit des Messzeitpunktes $t_k$
$\mathbf{K}_{k k-1}$	Kalman-Verstärkung
$\tilde{\mathbf{K}}_{k k-1}$	Verstärkungsvektor im ursprünglichen Bayes'schen Ansatz
$l_k, l_\vartheta$	Bogenlänge (Position in Straßenkoordinaten), Kilometrierung der Straße
$L_\vartheta$	Länge des Straßensegmentes $\vartheta$
$M$	Zahl der Monte-Carlo-Simulationsläufe
$n_k$	Zahl der Messungen im Zeitschritt $k$
$n_{\mathcal{R}}$	Zahl der Straßensegmente des Polygonzuges $\mathcal{R}$
$\mathbf{N}_{k k-1}$	Innovationsmatrix der Ausdehnungsschätzung (siehe Gleichung (2.29))
$\mathbf{P}_{k k}$	Kinematische Schätzfehlerkovarianzmatrix
$\tilde{\mathbf{P}}_{k k}$	Kinematische Parametermatrix im ursprünglichen Bayes'schen Ansatz
$\mathbf{Q}$	Kovarianzmatrix des Prozessrauschens
$\tilde{\mathbf{Q}} \otimes \mathbf{X}_k$	Varianz des Prozessrauschens im ursprünglichen Bayes'schen Ansatz
$r$	Index zum Kennzeichnen der Straßenkoordinaten
$\mathcal{R}$	Polygonzug als Approximation der Straße
$R$	Zahl der Modelle eines IMM-Filters
$\mathbf{R}$	Kovarianzmatrix des Messrauschens
$\mathbf{R}_{g \leftarrow r}^{[\vartheta]}$	Rotationsmatrix zur Koordinatentransformation (siehe Abschnitt 5.2.3)
$s$	Kinematische Dimension des Schätzproblems, d. h. $\dim(\mathbf{x}_k) = sd$
$\mathbf{s}_\vartheta$	Wegpunkt (Stützstelle) des Polygonzuges $\mathcal{R}$
$\mathbf{s}_{g \leftarrow r}^{[\vartheta]}$	Kinematischer Hilfsvektor zur Koordinatentransformation (siehe Abschnitt 5.2.3)
$\tilde{\mathbf{S}}_{k k-1}$	Innovationsfaktor im ursprünglichen Bayes'schen Ansatz
$\mathbf{S}_{k k-1}$	Kovarianzmatrix der Innovation
$t_k$	Zeitpunkt des Zeitschrittes $k$
$\mathbf{t}_\vartheta$	Normierter Richtungsvektor des Straßensegmentes $\vartheta$
$T$	(Äquidistante) Zeitspanne zwischen zwei Messzeitpunkten
$\mathbf{T}_{g \leftarrow r}^{[\vartheta]}$	Kinematische Hilfsmatrix zur Koordinatentransformation (siehe Abschnitt 5.2.3)
$\mathbf{x}_{k \ell}$	Kinematische Schätzung zum Zeitpunkt $t_k$ basierend auf den Messungen $\mathcal{Y}_\ell$
$\mathbf{x}_k = [\mathbf{r}_k^T, \dot{\mathbf{r}}_k^T]^T$	Kinematischer Zustand aus Position $\mathbf{r}_k$ und Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{r}}_k$
$\mathbf{x}_k^r = [l_k, \dot{l}_k]^T$	Kinematischer Zustand aus Position und Geschwindigkeit in Straßenkoordinaten
$\mathbf{X}_k^r$	$1 \times 1$ -Zustandsmatrix der Ausdehnung in Straßenkoordinaten
$\mathbf{X}_k$	Zustandsmatrix der Ausdehnung
$\mathbf{X}_{k \ell}$	Ausdehnungsschätzung zum Zeitpunkt $t_k$ basierend auf den Messungen $\mathcal{Y}_\ell$
$\tilde{\mathbf{X}}_{k k}$	Parametermatrix der Ausdehnung im ursprünglichen Bayes'schen Ansatz
$\mathbf{y}_k, \mathbf{y}_k^{[j]}$	Positionsmessung im Zeitschritt $k$ , $j$ -te Positionsmessung von $n_k$ Messungen
$\bar{\mathbf{y}}_k, \bar{\mathbf{Y}}_k$	Mittlere Messung, Messstreuung (siehe Abschnitt 2.3.1)
$\mathbf{Y}_k$	Menge der $n_k$ Messungen im Zeitschritt $k$ , d. h. $\{\mathbf{y}_k^{[j]}\}_{j=1}^{n_k}$
$\mathcal{Y}_k$	Sequenz aller Messungen des gesamten Beobachtungszeitraumes, d. h. $\{\mathbf{Y}_x\}_{x=0}^k$

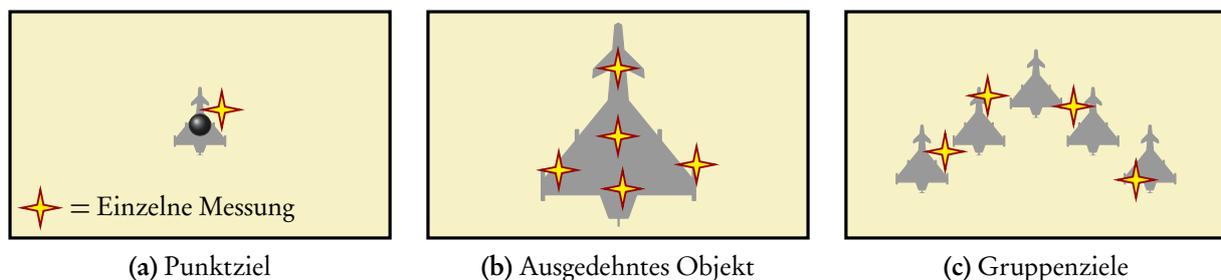
---

$z_d$	Faktor zum Skalieren der Ausdehnung in der Likelihood-Funktion
$\alpha_{k k}$	Skalarer Parameter der Ausdehnungsschätzung ( $\alpha_{k k} = \nu_{k k} - d - 1$ )
$\theta_k$	Zufallsvariable des während der Prädiktion gültigen Straßensegmentes
$\vartheta$	Index zur Angabe des Straßensegmentes
$\nu_{k k}$	Skalarer Parameter der Ausdehnungsschätzung ( $\alpha_{k k} = \nu_{k k} - d - 1$ )
$\pi_k$	Zufallsvariable des während der Prädiktion gültigen IMM-Filtermodells
$\sigma, \sigma_x, \sigma_y$	Standardabweichung des statistischen Sensormessfehlers
$\tau$	Zeitkonstante zum Einstellen des Prozessrauschens der Ausdehnung

Im heutigen Computer- und Informationszeitalter bildet das Zusammenspiel von Mikroprozessorsystemen, Sensoren und Aktoren die Grundlage für viele Anwendungen unseres Alltages: seien es Fahrerassistenzsysteme im Automobilbereich wie ein radargestützter Notbremsassistent auf dem Weg zum autonomen Fahren, Sensorsysteme zum Überwachen und Koordinieren von Verkehrsströmen im Luftraum oder räumlich verteilte Sensornetzwerke zum Erfassen von verteilten Umweltphänomenen wie etwa einer städtischen Schadstoffkonzentration. Diese Aufzählung ließe sich durch weitere Anwendungen ergänzen; siehe etwa [14, 87, 91, 94, 108]. Gemeinsame Grundlage der Systeme ist der Aufbau von Wissen über eine Umgebung, die durch aktive oder passive Sensorik observiert wird. Erfolgt diese Überwachung über einen längeren Zeitraum, erhalten wir eine Zeitreihe von Sensordaten, aus der wir Zielspuren für beobachtete Objekte schätzen können. Auf diese Weise entsteht ein dynamisches Lagebild, aus dem Rückschlüsse auf Zielobjekte und -dynamiken möglich sind: woher die Objekte kommen, wohin sie voraussichtlich wollen und wie sie in Bezug zueinander stehen [79].

Historisch gesehen besteht eine enge Verknüpfung zwischen rechnergestützter Objektverfolgung – d. h. *Tracking-Verfahren* – und der vom Militär getriebenen Entwicklung moderner Radarsensorik seit dem Zweiten Weltkrieg [137], wobei die Verfahren und Systeme mittlerweile in vielen zivilen Bereichen Einzug gehalten haben [79]. In diesen Tracking-Verfahren werden interessierende Objekte und Ziele häufig als punktförmig modelliert [34, 149]. Ihre räumliche Ausdehnung gilt als vernachlässigbar im Vergleich zu Sensorauflösung und -messfehler. Ein *Punktziel* wie in Abbildung 1.1(a) belegt per Definition nur eine Auflösungszelle des Sensors, weshalb ein Sensor bei jedem Messdurchgang höchstens eine Messung liefert, falls das Objekt detektiert wird [50].

Im Hinblick auf zunehmend leistungsfähigere Sensoren ist diese Annahme jedoch immer weniger zutreffend [79] – etwa bei sehr großen Objekten wie Schiffen in der Seeraumüberwachung oder beim Tracking im Nahbereich von Sensoren [105, 150], wenn ein Ziel mehrere Auflösungszellen



**Abbildung 1.1:** Unterschiede bei der erwarteten Zahl von Messungen je nach detektiertem Objekt (Punktziel, ausgedehntes Objekt und Gruppenziele): Dargestellt sind neben den Zielobjekten (Grau) auch Positionsmessungen, die mit einem Sensormessfehler behaftet sind.

belegt. Infolgedessen sind bei einem *ausgedehnten Ziel* wie in Abbildung 1.1(b) mehrere Messungen zu verarbeiten. Darüber hinaus ist die Zahl der Messungen nicht konstant. Unterschiedliche Streuzentren des Zielobjektes verursachen eine fluktuierende Zahl von Messzeitpunkt zu Messzeitpunkt.

Ein ähnliches Detektionsmuster und die schwankende Zahl der Messungen können wir im Fall dichter operierender *Gruppenziele* wie in Abbildung 1.1(c) beobachten [79, 105]: Aufgrund der großen Auflösungszellen, d. h. einer zu geringen Sensorauflösung, können mehrere Objekte als ein einziges Ziel detektiert werden. Die Zahl der Reflexionen wird durch die Ziel-Sensor-Geometrie beeinflusst. Da in konventionellen Tracking-Verfahren die Objekte als Punktziele modelliert werden und wir pro Objekt maximal eine Detektion erwarten, lassen sich Messungen und Zielspuren nicht eindeutig zuordnen [48]. Die Mehrdeutigkeit der Datenassoziation erhöht sich durch die fluktuierende Zahl der Reflexionen von Messzeitpunkt zu Messzeitpunkt und beeinflusst die Tracking-Ergebnisse [32, 121]: Die speziellen Detektionsmuster bei ausgedehnten Objekten und Gruppenzielen können letztlich zu instabilen Zielspuren führen – womöglich zum Spurverlust [17].

In der vorliegenden Arbeit befassen wir uns mit einem Verfahren zum Tracking von Objektgruppen und ausgedehnten Zielobjekten, wobei die Ziele nicht mehr als Punktziele modelliert werden. Damit lässt sich der Datenassoziationskonflikt vom Ansatz her vermeiden. Wir betrachten die Tracking-Problematik in einem militärischen Kontext, da die Arbeit in einem wehrwissenschaftlichen Forschungsinstitut angefertigt wurde: in der Abteilung *Sensordaten- und Informationsfusion* des *Fraunhofer-Institutes für Kommunikation, Informationsverarbeitung und Ergonomie* in Wachtberg. Zunächst beleuchten wir die Problemstellung im Kontext der Weitbereichsüberwachung, stellen bekannte Lösungsansätze vor und gehen auch auf spezielle Eigenschaften der luftgestützten Bodenaufklärung ein. Zum Schluss stellen wir Beiträge und Aufbau der Arbeit vor.

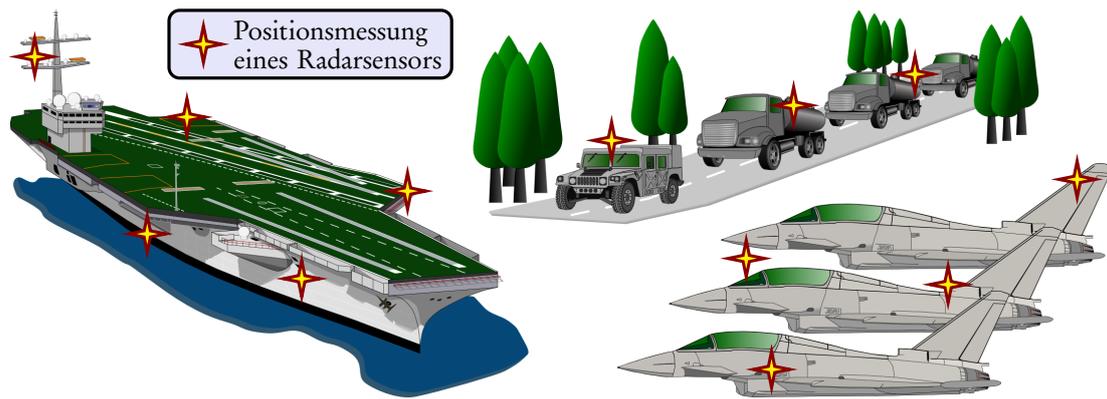
## 1.1 Problemstellung im Kontext der Weitbereichsüberwachung

Überwachen und Aufklären eines (militärischen) Gesamtgeschehens – sei es in der Luft, auf dem Boden, zur See oder unter Wasser – ist eine komplexe (militärische) Aufgabe, weshalb Sensorik und Fusionsverfahren aufeinander abgestimmt sein müssen [83]. Ausgedehnte Objekte sind z. B. Schiffe in der See- und Küstenüberwachung, während Detektionsmuster von Gruppenzielen bei Formationsflügen oder Marschgruppen auftreten. Dementsprechend lässt sich eine Gruppe CSOs (für engl. *Closely Spaced Objects*<sup>1</sup>) auch als ein fiktives ausgedehntes Objekt auffassen, um die Ausdehnung der Gruppe aus den Sensordaten zu schätzen [50, 78, 105]; siehe Abbildung 1.2.

Beim Entwickeln von Tracking-Algorithmen für dichte Ziellagen (kurz *MTT* für engl. *Multiple Target Tracking*) wurde die Sensorauflösung früher berücksichtigt als die Ausdehnungsschätzung. Taenzer [142] weist 1980 darauf hin, dass eine Flugzeugstaffel durch Formationsflug die begrenzten Auflösungsfähigkeiten von Radarsensoren benutzen könnte, um ihre Kampfkraft zu tarnen. In diesem Fall bliebe die Zahl der Flugzeuge verborgen, womöglich würde die Gruppe als einzelnes Ziel detektiert. Blackman [17] fasst 1986 erste Lösungsansätze zusammen, wobei er Vorteile beim Tracking von Gruppen statt einzelner Ziele nennt: Zum einen müssen weniger Zielspuren geführt werden, zum anderen lassen sich Gruppeninformationen auch bei geringer Detektionswahrscheinlichkeit

---

<sup>1</sup>Wir verwenden an verschiedenen Stellen englische Fachausdrücke, da deutsche Begriffe in der Literatur entweder nicht vorhanden sind oder sich zum jetzigen Zeitpunkt nicht durchgesetzt haben.



**Abbildung 1.2:** Illustration der Auflösungsproblematik: Während Flugzeugträger Ziele mit sehr großer räumlicher Ausdehnung darstellen, verbildlicht der Rest der Abbildung, dass eine Flugzeugstaffel oder Marschgruppe auch als ein ausgedehntes Objekt modelliert werden kann – bedingt durch eine begrenzte Sensorauflösung und des folglich ähnlichen Detektionsmusters.

eines Einzelzieles gewinnen, indem Informationen gruppenweise akkumuliert werden. Bei einer Gruppenzielspur entfällt die mehrdeutige Datenzuordnung, wodurch instabile Tracks wie bei konventionellen Verfahren ausgeschlossen sind. Ungelöste Probleme sieht Blackman [17] in Punkten, die über das reine Führen einer Gruppenzielspur samt Prädiktion und Aktualisierung hinausgehen: Aufspalten (*Splitting*) einer Objektgruppe und Zusammenschließen (*Merging*) mehrerer Gruppen; Initiieren und Extrahieren einer Gruppenzielspur sowie Schätzen der Zielzahl.

Die US-amerikanische Seite untersuchte die Auswirkungen einer begrenzten Sensorauflösung auch im Rahmen der strategischen Verteidigungsinitiative (kurz *SDI* für engl. *Strategic Defense Initiative*) zum Aufbau eines Abwehrschirmes gegen Interkontinentalraketen. Frenkel und Fridling fassen in ihrem Bericht [40] Ergebnisse der *SDI Panels on Tracking* zusammen und nennen kritische Punkte beim Entwickeln von *SDI-Tracking-Algorithm*en. *Cluster-Tracking* wird zuerst genannt: Während des Freifluges einer Interkontinentalrakete oder nach ihrem Wiedereintritt in die Erdatmosphäre muss ein Tracking-Verfahren mit *Clusterwolken* rechnen, die durch Mehrfachsprengköpfe, Täuschkörper und Gefechtskopfattappen entstehen können. Diese Punkte wurden auch im Nachfolgeprojekt *National Missile Defense* kritisch gesehen [95].

An dieser Stelle könnten wir weitere Beispiele für Gruppenziele und ihre Tracking-Verfahren nennen. Entscheidend ist: Robustes *Multiple Target Tracking* erfordert die begrenzte Sensorauflösung zu berücksichtigen [32, 121]. Außerachtlassen kann beim Verfolgen von CSOs zu Spurabbrüchen führen [18]. Analog zum Gruppieren von einzelnen Zielspuren bieten Tracking-Verfahren für Clusterwolken oder Objektgruppen Vorteile bei der Lagedarstellung: Ein Bediener oder Auswerter kann präzisere Aussagen treffen über die Gesamtlage (*Situational Awareness*) oder mögliche Entwicklungen und Bedrohungen (*Threat and Risk Analysis*) [19, 30, 131].

## 1.2 Lösungsansätze in der Literatur

### 1.2.1 Multi-Hypothesen-Tracker

Ein Multi-Hypothesen-Tracker (kurz *MHT*), der auf die Arbeiten [124, 136] zurückgeht, stellt auf Basis neuer Messungen neue Spurhypothesen auf. Die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese, d. h. ihr *Hypothesengewicht*, berechnen wir u. a. über die Messwahrscheinlichkeit<sup>2</sup> der Sensordaten. Da bei der Datenassoziation keine harte oder feste Zuordnung getroffen wird, baut der MHT mit der Zeit einen *Hypothesenbaum* auf – entweder über mehrere oder alle Zeitschritte hinweg. Die aktuelle Zielspur ergibt sich z. B. durch den Zweig mit dem größten Hypothesengewicht. Die Zahl der Hypothesen wächst exponentiell mit der Zeit. Deshalb muss sie in der Praxis oft begrenzt werden, ein Tracker soll in der Regel echtzeitfähig sein. Es gibt drei Standardmaßnahmen: Verschmelzen ähnlicher Hypothesen, Löschen von Hypothesen mit geringem Gewicht und *Gating* zur Vorauswahl relevanter Messungen.

Wie in den Arbeiten [42–44, 122] ausgeführt, funktioniert *Gating* nicht im Fall von CSOs, da sich die Bereiche zur Vorauswahl innerhalb der Gruppe überlappen. Je nach Zahl der Messungen müssen wir eine entsprechende Zahl von Hypothesen berücksichtigen. Angesichts der Parallelen zur SDI-Sensorauflösung wird in den Arbeiten [42–44, 122] eine *clusterbasierte Datenassoziation* vorgeschlagen, die auf Ausführungen von Blackman et al. [17, 36] zurückgeht: Das Zuordnungsproblem wird über die letzten Zeitschritte zusammengefasst betrachtet und ausgewertet (kurz *MFA* für engl. *Multiple Frame Assignment*). Für die MFA-Datencluster ergibt sich ein gleitendes Zeitfenster (*Sliding Window*), mit dem der Einfluss einer womöglich ambivalenten Clusterung reduziert werden soll.

Koch und van Keuk [69, 70, 80] berücksichtigen bei ihrer MHT-Variante zusätzliche Hypothesen, um unaufgelöste Sensormessungen im Fall temporär dicht fliegender Ziele einzubeziehen. Sie unterscheiden zwischen Auflösung und Detektion durch den Sensor. Bei zwei Zielobjekten und vier in Frage kommenden Messungen ergeben sich 26 mögliche Auslegungen der Sensordaten, die wir in fünf Kategorien einteilen können [80]:

- Die Ziele sind vom Sensor aufgelöst und separat detektiert worden. Zwei Zielmeldungen und zwei Falschmeldungen führen zu zwölf Dateninterpretationen.
- Die Ziele konnten vom Sensor aufgelöst werden, eins wurde detektiert – welches, ist nicht bekannt. Eine Zielmeldung und drei Falschmeldungen führen zu acht Dateninterpretationen.
- Die Zielobjekte wurden unaufgelöst als Gruppe detektiert, gemessen wurde ihr Schwerpunkt, vier weitere Dateninterpretationen.
- Die Gruppe der beiden Ziele konnte weder aufgelöst noch detektiert werden, vier Falschmeldungen, eine weitere Dateninterpretation.
- Die vom Sensor aufgelöste Gruppe konnte nicht detektiert werden, vier Falschmeldungen, eine weitere Dateninterpretation.

---

<sup>2</sup>Messwahrscheinlichkeiten bewerten die Differenz zwischen erwarteten Messungen und gemessenen Sensordaten.

Die Zahl der Interpretationsmöglichkeiten würde bei größeren Objektgruppen oder mehr Messungen steigen. Die MHT-Variante setzt voraus, dass wir die Zahl der Gruppenmitglieder kennen. Das ist häufig nicht der Fall, was den Einsatz solcher Verfahren erschwert [18] – z. B. bei einer Flugzeugstaffel, die in das Sichtfeld eines Sensors fliegt und bei der Auflösungskonflikte sofort eine Rolle spielen. Die Fähigkeit des Sensors zum Auflösen einer Gruppe hängt vom Ziel-Sensor-Abstand ab.

### 1.2.2 PHD-Filter

Im Gegensatz zum vorherigen Beispiel ist Mahlers PHD-Filter (für engl. *Probability Hypothesis Density Filter*) [96–98] ein systematischer MTT-Ansatz, mit dem wir auch eine unbekannte Zahl CSOs verfolgen können. Das Verfahren führt unter der Annahme linearer Gauß-Modelle zu einer geschlossenen analytischen Lösung der Filtergleichungen [151, 152]. Es stellt eine Alternative zu den konventionellen Tracking-Verfahren dar: Statt einer isolierten oder separaten Filterung der Ziele betrachtet Mahler in seinem PHD-Ansatz das Überwachungsgebiet als Ganzes. Zu diesem Zweck interpretiert er die unbekannte Zahl der Zielzustände als Zufallsvariable einer endlichen Menge (kurz *RFS* für engl. *Random Finite Set*). Dabei benötigt das PHD-Filter keine Assoziationen zwischen Messungen und Zielspuren.

Zur Anwendung beim Tracking von CSOs schlagen Clark und Godsill [28] vor, die Mitglieder einer Objektgruppe anhand ihrer Positions- und Geschwindigkeitsschätzung zu identifizieren. Bei der Zustandsprädiktion der einzelnen Ziele soll daraufhin eine gewisse Dynamik berücksichtigt werden zum Homogenisieren der Gruppenbewegung. Diese Bewegungsdynamik kann sich z. B. an dem natürlichen *Schwarmverhalten* von Vögeln<sup>3</sup> orientieren. Mit der RFS-Theorie kann auch für ausgedehnte Zielobjekte ein angepasstes Messmodell angegeben werden [153], wobei sich die resultierenden Filtergleichungen unter gewissen Annahmen in einen Spezialfall des ursprünglichen PHD-Verfahrens überführen lassen.

Ergänzend sei zu den PHD-Verfahren [96–98, 151, 152] bemerkt: Ihr Prinzip beruht vereinfacht gesehen auf der Schätzung der erwarteten Zielzahl pro Volumeneinheit. Die PHD-Funktion beinhaltet das Wissen über die Zielobjektzustände und die Zielzahl. Deshalb kann ein solches Filter nicht unterscheiden, welcher Anteil der Streuung innerhalb der PHD-Funktion der mit der Schätzung verbundenen Schätzunsicherheit zugeschrieben werden muss und welcher Anteil dem räumlichen Ausmaß einer Objektgruppe oder eines ausgedehnten Zielobjektes.

### 1.2.3 Sequenzielle Monte-Carlo-Methoden

In der überwiegend englischsprachigen Literatur werden sequenzielle Monte-Carlo-Methoden (kurz *SMC-Methoden*) oft als *Bootstrap Filter*, *Condensation Algorithm*, *Particle Filter* oder *Sampling-Importance-Resampling Filter* bezeichnet. Sie sind in verschiedenen Arbeiten auf Erweiterungsmöglichkeiten untersucht worden zum Tracking von Objektgruppen und ausgedehnten Zielobjekten; siehe etwa [4, 47–49, 127–129, 149] oder die Zusammenstellung in [105].

---

<sup>3</sup>Jeder Vogel innerhalb eines Schwarms vermeidet eine Kollision mit den Nachbartieren (*Separation*) und richtet sein Flugverhalten entsprechend der Flugrichtung (*Alignment*) oder der mittleren Position der Schwarmnachbarn (*Kohäsion*) aus [28, 116, 125].

Beispielsweise modellieren Gilholm et al. [47, 48] die Sensormessungen als Poisson-Prozess mit einem raumabhängigen Intensitätsparameter. Die Verteilung der zu verfolgenden Ziele entspricht einer räumlichen Intensitätsverteilung. Zum einen erlaubt die Poisson-Annahme, dass mehr als nur eine Messung von einem Ziel stammen kann; zum anderen werden verschiedene Zieltypen einheitlich als *Entität* aufgefasst: Punktziel, ausgedehntes Objekt, Gruppe CSOs. Eine Sensormessung wird nur einer Entität zugeschrieben. Das Messmodell kann einfach ausgewertet werden, da auf die Bildung von Datenzuordnungshypothesen und die Berechnung ihrer Gewichte verzichtet wird. Dazu muss die Zahl der Entitäten im Vorfeld bekannt sein.

#### 1.2.4 Alternative Tracking-Ansätze

Neben den vorgestellten Verfahren gibt es noch eine Reihe von abgewandelten und alternativen Ansätzen. Zum Beispiel existieren Arbeiten zum Imitieren gruppendynamischen Verhaltens durch eine multivariate stochastische Differentialgleichung [115, 116]. Im Gegensatz zu anderen Verfahren treffen Baum et al. [8–12] keine statistische Annahme über die objektabhängige Verteilung der Sensordaten. Dies gelingt durch eine kombinierte stochastische und mengenbasierte Datenfusion, deren Verknüpfung auch das Berücksichtigen eines statistischen Sensormessfehlers zulässt.

Die Vielfalt der vorgestellten Verfahren verdeutlicht die Schwierigkeit einen Einblick in relevante Forschungsarbeiten zu geben. Für einen Überblick bis ins Jahre 2004 verweisen wir auf die Bibliographie von Waxman und Drummond [154], wohingegen neuere Zusammenstellungen [50, 105] auch Arbeiten der letzten Jahre enthalten. Dabei lassen sich die Tracking-Verfahren in drei oder vier verschiedene Kategorien einteilen [17, 18, 154]:

1. Tracking der Gruppe ohne explizite Zielspuren für die Einzelziele,
2. Tracking der Gruppe mit zusätzlich geführten Zielspuren für die Einzelziele,
3. Tracking der Einzelziele unter Berücksichtigung von gewonnenem Wissen über die Gruppe,
4. Tracking der Einzelziele ohne<sup>4</sup> jegliche Berücksichtigung von Wissen über die Gruppe.

### 1.3 Merkmale der luftgestützten Bodenaufklärung

Bei der Weitbereichsüberwachung stellt die luftgestützte Bodenaufklärung eine Unterkategorie dar, die sich durch spezielle Sensorik und angepasste Tracking-Verfahren abgrenzt. Beispielsweise werden luftgestützte Trägerplattformen eingesetzt, deren Radarsensorik zum Detektieren von Bewegtzielen im *MTI-Modus*<sup>5</sup> arbeitet und durch adaptive Raum-Zeit-Signalverarbeitung [54, 67] unerwünschte Festzielechos unterdrückt [71, 74]. Allein durch spezielle Sensorik lässt sich eine umfassende und präzise Zielverfolgung nicht sicherstellen. Probleme bereiten sowohl hohe Verkehrsdichten und Falschalarmraten als auch geringe Entdeckungswahrscheinlichkeiten aufgrund von topographischen Abschattungsphänomenen oder gegnerischen Tarnmaßnahmen [86, 119, 148].

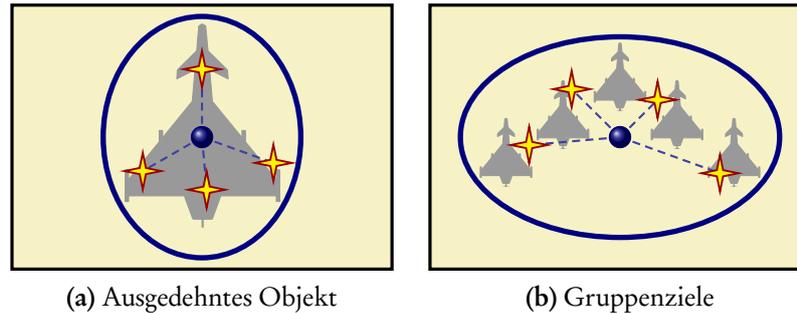
<sup>4</sup>Diese Kategorie fasst konventionelle Tracking-Verfahren zusammen und wird z. B. von Blackman und Popoli [18] nicht verwendet.

<sup>5</sup>*MTI* für engl. *Moving Target Indication* oder auch *GMTI* für engl. *Ground Moving Target Indication*.

Bedingt durch zusätzliche Schwierigkeiten beim Aufklären von bewegten Bodenzielen befassen sich zahlreiche Veröffentlichungen mit der Weiterentwicklung und Anpassung bekannter Tracking-Verfahren, die ursprünglich für die Luftraumüberwachung entwickelt worden sind [119]. Ein Überblick zu frühen Forschungsarbeiten bietet der Bericht [64] aus dem Jahre 1999. Während in einigen Aufsätzen mit GMTI-spezifischen Sensorparametern im Messmodell gerechnet wird [29, 76, 77], konzentrieren sich viele Arbeiten auf Straßenkarteninformationen, die als Kontextwissen im Schätzprozess eingerechnet werden; siehe [3, 5, 27, 45, 66, 90, 112, 114, 117–120, 135, 140, 158, 159]. Die Gemeinsamkeit der Ansätze mit Straßenkarteninformationen liegt in der Annahme, dass sich nicht nur zivile Fahrzeuge, sondern auch militärische Bodenziele überwiegend auf Straßen bewegen, deren geographische Lage bekannt ist. Die Unterschiede liegen in der Umsetzung, d. h. wie und an welcher Stelle das Kontextwissen im Tracking-Verfahren verarbeitet wird. Als Gewinn ergeben sich weniger Spurabbrüche und geringere Schätzfehler im Vergleich zu konventionellen Verfahren.

Die Abteilung *Sensordaten- und Informationsfusion* hat sich ebenfalls mit Straßenkarten befasst, die als Kontextinformation in Tracking-Verfahren für Punktziele eingerechnet werden können. Die Arbeiten [71, 72, 74, 84–86, 102, 103, 144–148] schlagen vor, Punkte einer Straße abschnittsweise durch geradlinige Segmente zu verbinden. Es entsteht ein Polygonzug [35] als Approximation der Straße, so dass auch ihre Lage im Raum näherungsweise bestimmt ist. Die Spur eines Straßenzieles wird im parametrisierten Raum des Polygonzuges geführt, d. h. in *Straßenkoordinaten*. Es ist ein eindimensionales Koordinatensystem, da eine skalare Größe zum Parametrisieren des Polygonzuges ausreicht. Der kinematische Zustandsvektor einer Zielspur besteht aus der Bogenlänge und ihrer zeitlichen Änderung als Geschwindigkeit. Die Bogenlänge können wir als *Kilometrierung* der Straße interpretieren. Die Geschwindigkeit in Straßenkoordinaten entspricht vom Betrag her dem Tachometerwert eines Fahrzeuges. Aufgrund von Messfehlern liegen Messungen häufig abseits der Straße und lassen sich nicht in Straßenkoordinaten angeben. Sie sollen deshalb für Zielzustände in *Bodenkoordinaten* verarbeitet werden. Die Arbeiten [71, 144, 145, 148] stellen einen mehrschrittigen Tracking-Algorithmus vor, mit dem wir die Zielzustände zwischen Straßen- und Bodenkoordinaten transformieren können. Bei der Prädiktion in Straßenkoordinaten folgt die Zielspur automatisch einem kurvigen Straßenverlauf, während im Aktualisierungsteil der Track zurück auf die Straße projiziert wird, nachdem die Messungen in Bodenkoordinaten verarbeitet worden sind. Das Verfahren erzielt mit Straßenkoordinaten geringere Schätzfehler und weniger Spurabbrüche; siehe [84–86, 102, 103, 145, 146, 148].

Bei Objektgruppen auf einer Straße wie z. B. einer Fahrzeugkolonne müssen wir zusätzlich die begrenzte Sensorauflösung berücksichtigen, die zu unaufgelösten Messungen führen kann. Trotz Straßenkarteninformationen beeinflusst die mehrdeutige Datenassoziation in Verbindung mit der fluktuierenden Zahl an Reflexionen die Tracking-Ergebnisse. Die speziellen Detektionsmuster können zu instabilen Zielspuren führen – womöglich zum Spurverlust. Dementsprechend könnte eine (noch zu entwickelnde) Gruppenzielspur in Straßenkoordinaten und ein Verfahren zum Tracking von CSOs diese Schwierigkeiten vermeiden.



**Abbildung 1.3:** Illustration der gemeinsamen Zielspur von Objektgruppen und ausgedehnten Einzelobjekten im Bayes'schen Verfahren von Koch [75, 78, 81, 82]: Dargestellt sind neben der Ausdehnungsellipse (Blau) sowohl der kinematische Schwerpunkt (blauer Punkt) als auch Beispielmessungen (Rot-Gelb). Die gestrichelten Linien verbildlichen das Grundprinzip oder Messmodell aus [78]: Einzelmessungen sind als über die Ausdehnung verteilte Messungen des Schwerpunktes aufzufassen.

## 1.4 Ausgangspunkte und Beiträge der Arbeit

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit dem Tracking von ausgedehnten Zielobjekten und Objektgruppen. Der Fokus liegt auf Anwendungen in der (luftgestützten) Weitbereichsüberwachung, bei denen die klassische Modellierung der Objekte als Punktziele an ihre Grenzen stößt. Deshalb betrachten wir das räumliche Ausmaß sowohl eines Einzelzieles als auch einer Objektgruppe als Teil des Schätzproblems. Ziel ist ein Tracking-Verfahren mit hoher Schätzgenauigkeit, das vom Ansatz her eine hohe Spurkontinuität verspricht.

### 1.4.1 Tracking-Verfahren von Koch

Das Bayes'sche Verfahren von Koch zum Tracking ausgedehnter Zielobjekte und grobstrukturierter Objektgruppen [78] ist ein systematischer und rigoroser Ansatz, um eine Gruppe wie ein ausgedehntes Objekt als Einheit zu verfolgen; siehe auch [75, 81, 82]. Bei einer Objektgruppe oder einem ausgedehnten Objekt umgeht das Verfahren nicht nur die Sensorauflösungsthematik, sondern auch das gruppeninterne oder objektbezogene Datenassoziationsproblem eines Punktziel-Verfahrens. Wie in Abbildung 1.3 angedeutet, besteht die geschätzte Zielspur in [78] aus kinematischem Schwerpunkt und physikalischer Ausdehnung. Das räumliche Ausmaß eines Zieles oder einer Objektgruppe wird durch ein Ellipsoid modelliert, d. h. im zweidimensionalen Fall durch eine Ellipse. Diese Annahmen haben auch andere in früheren Arbeiten getroffen; siehe etwa [17, 36, 89, 130, 160]. Der Unterschied und die Innovation von Koch [78] beruht auf der *gemeinsamen Schätzung* von Schwerpunkt und Ausdehnung, d. h. ihrer *Verbundschätzung*. Zu diesem Zweck beschreibt er das Ellipsoid durch eine symmetrische, positiv definite (kurz *SPD*) Zustandsmatrix.<sup>6</sup> Diese matrixwertige Zufallsvariable<sup>7</sup> stellt das Pendant zum Zustandsvektor des Schwerpunktes dar und bedingt die Verwendung von *multivariaten Matrixverteilungen*. Zum Schätzen des Ellipsoids interpretiert Koch die Sensordaten

<sup>6</sup>Ein Eigenwert der SPD Matrix entspricht der quadrierten Länge einer Halbachse des zugehörigen Ellipsoids.

<sup>7</sup>Die klassische Zufallsmatrixtheorie ist in der Kernphysik beheimatet und befasst sich mit statistischen Untersuchungen zu Eigenschaften von Eigenwerten hochdimensionaler Matrizen: Eigenwertdynamiken, Eigenwertspektrum, Eigenfunktionen, ... (siehe auch [156]). Für einen kurzen historischen Abriss, beginnend mit den Anfängen der Zufallsmatrizen in [157], sei auf [39] verwiesen, während die Ausarbeitungen [56, 126, 138] einen detaillierteren Überblick über derzeitige Anwendungs- und Forschungsgebiete der Zufallsmatrixtheorie liefern.

als über die Ausdehnung verteilte Messungen des Schwerpunktes. Dadurch ist die Zustandsmatrix Teil des Schätzproblems und mit dem Bayes'schen Formalismus ergibt sich das Tracking-Verfahren.

### 1.4.2 Beiträge der Arbeit

Das Bayes'sche Verfahren von Koch [78] ist ein rigoroser Ansatz zum Tracking von Objektgruppen und ausgedehnten Zielobjekten – vorausgesetzt, dass sich die Sensordaten als über die Ausdehnung verteilte Messungen des Schwerpunktes interpretieren lassen. Das Verfahren erklärt die Streuung der Messungen allein durch die Ausdehnung. Ein statistischer Messfehler ist nicht Teil der kinematischen Filtergleichungen. Sein Streuanteil ist implizit in der Ausdehnungsschätzung enthalten. Ein erhöhtes Messrauschen führt zu einer vergrößerten Ausdehnungsschätzung.

Ausgangspunkt der Arbeit war die Frage, wie sich der Bayes'sche Ansatz von Koch erweitern oder weiterentwickeln lässt, um sowohl den Einfluss der Ausdehnung als auch des Messrauschens auf die Messungen zu berücksichtigen. Ein zweiter Ausgangspunkt war die Frage, wie sich das in Abschnitt 1.3 vorgestellte Konzept der Straßenkarteninformationen mit Kochs Verfahren verbinden lässt, um eine Fahrzeugkolonne im parametrisierten Raum der Straße zu verfolgen. Die Beiträge der Arbeit bestehen in folgenden Punkten:<sup>8</sup>

- Einsichten in den ursprünglichen Bayes'schen Ansatz, die über Kochs Arbeiten [75, 78, 81, 82] hinausgehen, d. h. allgemeine Herleitung der kinematischen Marginaldichte und Schätzfehlerkovarianzmatrix; Berechnung von Messwahrscheinlichkeiten mit Ausdrücken für die erwartete Einzelmessung, die erwartete mittlere Messung und erwartete Messstreuung; Berücksichtigung eines Parameters in der Likelihood-Funktion, mit dem sich die angenommene Streuung einer Messung beeinflussen lässt, um die Ausdehnungsschätzung zu skalieren.
- Weiterentwicklung des ursprünglichen Bayes'schen Ansatzes, so dass ein statistischer Sensormessfehler in den Filtergleichungen näherungsweise berücksichtigt werden kann mit Hilfe geeigneter Approximationen. Durch Einbeziehen eines statistischen Messfehlers verbessert sich das glättende Verhalten des Tracking-Filters. In Simulationen ergeben sich geringere Schätzfehler für Kinematik und Ausdehnung. Bei Zunahme des Sensormessfehlers kann das *Überschätzen* der Ausdehnung weitgehend vermieden werden.
- Untersuchung von besonderen Eigenschaften der Ausdehnungsschätzung und ihrer *inversen Wishart-Verteilung*: Berechnung eines Schätzfehlers, *Moment-Matching* für Mischverteilungsdichten und ein graphischer Konfidenzbereich für die geschätzte Objektausdehnung.
- Integration der Zustandsmatrix der Objektausdehnung in den Bayes'schen Formalismus des IMM-Filters (für engl. *Interacting-Multiple-Model-Filter*), mit dem sich verschiedene Dynamikmodelle für unterschiedliche Bewegungszustände berücksichtigen lassen – ohne dass die Zahl der Hypothesen mit der Zeit zunimmt.

---

<sup>8</sup>Genau wie Koch [78] fokussieren wir uns auf das *reine Schätzen* der Zielspur, d. h. auf Prädiktion und Aktualisierung des gemeinsamen Systemzustandes von Kinematik und Ausdehnung. Themen wie Datenassoziation zwischen mehreren Objektgruppen oder Falschmeldungen sind nicht Teil der Arbeit, genauso wie *Splitting* und *Merging* von Gruppen.

- Einsatz des weiterentwickelten Verfahrens in dem IMM-Filter, was ein abgestuftes Modellieren der Systemdynamik ermöglicht – und somit weitgehend geringere Schätzfehler.
- Vergleich des ursprünglichen und des weiterentwickelten Verfahrens in Simulationsbeispielen mit ausgedehnten Zielobjekten und Objektgruppen, wodurch sich Unterschiede bei den Verfahrenseigenschaften beleuchten lassen.
- Erweiterung und Adaption des ursprünglichen Bayes'schen Ansatzes zum Tracking einer Fahrzeugkolonne mit Hilfe von Straßenkarteninformationen, so dass die Verbundschätzung von Kinematik und Ausdehnung im parametrisierten Raum der Straße geführt werden kann und sich die Zielzustände zwischen Straßen- und Bodenkoordinaten transformieren lassen.
- Vergleich des ursprünglichen und des mit Straßenkarteninformationen erweiterten Ansatzes am Beispiel einer simulierten Fahrzeugkolonne, wobei das Potential der Straßenkoordinaten zur Verbesserung der Schätzgenauigkeit deutlich wird. Ein weiteres Beispiel zeigt Grenzen des erweiterten Verfahrens.

Teilaspekte der Arbeit sind in Veröffentlichungen dokumentiert worden; siehe [161–175]. Darüber hinaus sind Erkenntnisse der Masterarbeit<sup>9</sup> vertieft worden: Die früheren Untersuchungen zum Einbeziehen eines Sensormessfehlers werden in Abschnitt 3.1 aufgegriffen und waren Ansporn, sich der Tracking-Problematik im Rahmen einer Dissertation anzunehmen.

### 1.4.3 Aufbau und Struktur der Arbeit

In *Kapitel 2* befassen wir uns mit dem ursprünglichen Verfahren von Koch [78]: wie und unter welchen Annahmen sich die Filtergleichungen ergeben, welche Ergebnisse und Einsichten über seine Arbeiten hinausgehen. In *Kapitel 3* wird das weiterentwickelte Verfahren vorgestellt, mit dem sich ein Messfehler näherungsweise berücksichtigen lässt. Wir untersuchen besondere Eigenschaften der Ausdehnungsschätzung, berechnen ihren Konfidenzbereich und führen vor, wie sich das weiterentwickelte Verfahren in einem IMM-Filter einsetzen lässt. *Kapitel 4* fasst Simulationsbeispiele zusammen, in denen das ursprüngliche mit dem weiterentwickelten Tracking-Verfahren verglichen wird. In *Kapitel 5* wird gezeigt, wie sich Kochs Verfahren mit Straßenkoordinaten erweitern lässt, um eine Marschkolonne als Gruppe zu verfolgen. In *Kapitel 6* fassen wir die Ergebnisse der Arbeit zusammen und nennen Anknüpfungspunkte.<sup>10</sup>

<sup>9</sup>FELDMANN, M.: *Ein Verfahren zum Tracking von Gruppen dicht fliegender Ziele*, EADS Deutschland GmbH, Data Fusion Algorithms & Software, Ulm – Universität Paderborn, Institut für Elektrotechnik und Informationstechnik, Fachgebiet Nachrichtentheorie, Masterarbeit, 2007

<sup>10</sup>Am Ende der Arbeit finden sich Zusammenstellungen und Nebenrechnungen: allgemeine Grundlagen in *Anhang A* (spezielle Funktionen, Matrizenrechnung, ...); Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Produktformeln für Dichtefunktionen in *Anhang B*; Berechnung des MMSE-Schätzers für die Ausdehnungsschätzung in *Anhang C*; Nebenrechnung zum Konfidenzbereich der 2-D-Objektausdehnung in *Anhang D*.

## Kapitel 2

---

# Ausbau des methodischen Rahmens: Berücksichtigung der Objektausdehnung

---

Im Mittelpunkt dieses Kapitels steht der Bayes'sche Ansatz zur Verfolgung ausgedehnter Zielobjekte und grobstrukturierter Objektgruppen aus [78] (siehe auch [75, 81, 82]). Abschnitt 2.1 dient als Einführung in den Bayes'schen Formalismus und der dynamischen Zustandsschätzung: Am Beispiel des Kalman-Filters werden die Vorzüge des Konzeptes der konjugierten A-priori-Verteilungen veranschaulicht. Darauf aufbauend stellt Abschnitt 2.2 vor, wie sich die Objektausdehnung in den Bayes'schen Formalismus integrieren lässt. Dieser methodische Rahmen ist die Grundlage für das Tracking-Verfahren aus [78], dessen Filtergleichungen in Abschnitt 2.3 hergeleitet werden: Während in [78] zunächst die Prädiktionsgleichungen zur Berücksichtigung der Zustandsdynamik angegeben werden, beginnt Abschnitt 2.3 mit der Messgleichung im Aktualisierungsschritt, woraufhin sich die spezielle Modellierung des Systemzustandes in [78] als logische Schlussfolgerung einer konjugierten A-priori-Verteilung herausstellt. Des Weiteren befasst sich dieses Kapitel mit Ergebnissen und Einsichten, die über die ursprüngliche Arbeit [78] hinausgehen: Zum einen wird in Abschnitt 2.4 die vollständige Berechnung der kinematischen Marginaldichte aus [171] vorgestellt, zum anderen wird in Abschnitt 2.5 gezeigt, wie sich für dieses Tracking-Verfahren Messwahrscheinlichkeiten berechnen lassen – ein Ergebnis, das bereits in [174, 175] verwendet wird.

### 2.1 Methodischer Rahmen: Bayes'scher Formalismus

Das Entwickeln geeigneter Schätzverfahren ist eine zentrale Aufgabe der mathematischen Statistik. In diesem Kontext entspricht Tracking – d. h. rechnergestützte Objektverfolgung – im Kern dem Schätzen eines unbekanntes Systemzustandes aus vorliegenden Messungen [6, 41, 58, 73]. Die Messungen sind mit Fehlern behaftet, wodurch neben der jeweiligen Messinformation auch deren Ungenauigkeit zu berücksichtigen ist. Folglich entspringen viele Zielverfolgungsverfahren dem sogenannten *Bayes'schen Formalismus*: Dieser ermöglicht eine systematische Beschreibung der Tracking-Problematik durch die mathematische Koppelung zwischen Informationen und ihrer statistischen Glaubwürdigkeit [77]. Zu diesem Zweck werden Systemzustand, Messung und Messfehler durch Zufallsvariablen modelliert, deren Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Dichtefunktionen eine statistische Systembetrachtung erlauben [41, 68, 107].

Im Folgenden bezeichnet  $\mathbf{x}$  die vektorielle Zufallsvariable des zu schätzenden Systemzustandes und  $\mathbf{y}$  die vektorielle Zufallsvariable der Messung. Die zu  $\mathbf{x}$  gehörende Dichtefunktion  $p(\mathbf{x})$  berücksichtigt das Vorwissen über den Systemzustand und wird daher *A-priori-Dichte* genannt, während die *Likelihood-Funktion*  $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$  u. a. den funktionalen Zusammenhang zwischen Messung und Systemzustand beinhaltet. Das Verknüpfen dieser beiden Funktionen soll eine verbesserte Schätzung

Verteilung der Likelihood-Funktion	Konjugierte A-priori-Verteilung
Bernoulli-Verteilung	Betaverteilung
Binomialverteilung	Betaverteilung
Exponentialverteilung	Gammaverteilung
Negative Binomialverteilung	Betaverteilung
Normalverteilung (unbekannter Erwartungswert)	Normalverteilung
Normalverteilung (unbekannte Varianz)	Inverse Gammaverteilung
Poisson-Verteilung	Gammaverteilung

**Tabelle 2.1:** Ausgewählte Likelihood-Funktionen und ihre konjugierten A-priori-Verteilungen (vgl. [37, 41, 46]).

des Zustandsvektors<sup>1</sup>  $\mathbf{x}$  ermöglichen – in Abhängigkeit von Messinformation und A-priori-Wissen. Diese Wechselwirkung kommt in der bedingten Dichtefunktion  $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$  zum Ausdruck, die als *A-posteriori-Dichte* bezeichnet wird und die sich mit der *Regel von Bayes* wie folgt berechnet [46]:

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})}{p(\mathbf{y})} = \frac{p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})}{\int p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}. \quad (2.1)$$

Bei dem Term  $p(\mathbf{y})$  im Nenner handelt es sich in erster Linie um eine Konstante zur korrekten Normierung der A-posteriori-Dichte entsprechend  $\int p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x} = 1$ . Daher findet sich in einigen Fachbüchern zur Bayes'schen Statistik neben der Regel von Bayes auch der proportionale Zusammenhang  $p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \propto p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})$ ; siehe etwa [16, 23, 46, 68]. Diese proportionale Zuordnung stellt den Kern des Bayes'schen Formalismus dar [46]: Sie betont das charakteristische Zusammenspiel zwischen A-priori-Dichte, Likelihood-Funktion und A-posteriori-Dichte zum Schätzen eines unbekanntes Systemzustandes [139].

### 2.1.1 Konjugierte A-priori-Verteilungen

Die Regel von Bayes (2.1) bietet einen Automatismus zur mathematischen Verknüpfung von Messinformation und A-priori-Wissen. Allerdings gestaltet sich die praktische Umsetzung in rechnergestützten Verfahren schwieriger – je nach Wahl der Likelihood-Funktion und der A-priori-Dichte, deren Produkt sowohl den Zähler als auch den Nenner in Gleichung (2.1) beeinflusst. Insbesondere das Berechnen der Normierungskonstante  $p(\mathbf{y})$  erweist sich als problematisch, da sich das Integral  $p(\mathbf{y}) = \int p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  oftmals nur näherungsweise durch numerische Verfahren auswerten lässt [23, 26]. Daher sind diejenigen Paare aus Likelihood-Funktion und A-priori-Verteilung von besonderem Interesse, die eine analytische Berechnung der Bayes'schen Regel ermöglichen [37].

Diese Konstellation ergibt sich beispielsweise bei denjenigen Likelihood-Funktionen  $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ , zu denen sich sogenannte *konjugierte A-priori-Verteilungen* angeben lassen. In diesem Fall gehört die A-posteriori-Dichte  $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$  zur derselben Verteilungsklasse wie die A-priori-Dichte  $p(\mathbf{x})$ : Die Typen dieser beiden Dichtefunktionen sind identisch [33, 46, 123, 155]. Demzufolge bestimmen die

<sup>1</sup>Für einen leserfreundlichen Formelsatz verzichtet diese Arbeit weitestgehend auf die formale Unterscheidung von Zufallsvariablen und ihren Realisierungen. Diese Konvention findet sich auch in der Fachliteratur, da sie eine kompakte Schreibweise der verschiedenen Dichtefunktionen erlaubt; siehe etwa [6, Seite 33], [16, Seite 14] oder [46, Seite 7]. In diesem Sinne bezeichnet  $p(\mathbf{x})$  die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Zufallsvariablen  $\mathbf{x}$ , wohingegen  $p(\mathbf{x} = \mathbf{x})$  die explizite Auswertung der Dichtefunktion für den speziellen Wert  $\mathbf{x}$  angibt.

gleichen Parameter<sup>2</sup> sowohl die konjugierte A-priori-Dichte  $p(\mathbf{x})$  als auch die A-posteriori-Dichte  $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ : Sie spiegeln das extrahierte Wissen wider – über den zu schätzenden Systemzustand und die damit verbundene Schätzunsicherheit. Aus der Bayes'schen Regel (2.1) ergeben sich für diese Parameter Aktualisierungsgleichungen, die Messinformation und Vorwissen miteinander verknüpfen; d. h., mit konjugierten A-priori-Verteilungen lässt sich Gleichung (2.1) in geschlossener Form auswerten, so dass numerische Integrationsverfahren zum Berechnen der Normierungskonstante nicht benötigt werden [23, 41]. Eine Gegenüberstellung ausgewählter Likelihood-Funktionen und ihrer konjugierten A-priori-Verteilungen findet sich in Tabelle 2.1.

### 2.1.2 Dynamische Zustandsschätzung

Zum Verfolgen eines bewegten Objektes wird das betrachtete System als zeitdiskretes dynamisches System modelliert, wodurch sich die zeitliche Entwicklung des Systemzustandes berücksichtigen lässt. Rückschlüsse auf den unbekanntem Systemzustand sind nur über Messungen zu bestimmten Zeitpunkten möglich. O. B. d. A. wird in dieser Arbeit von äquidistanten Messzeitpunkten  $t_k$  ausgegangen. Der Zeitraum zwischen zwei Messzeitpunkten genügt  $T := t_{k+1} - t_k$ , wobei der Index  $k$  ( $k \geq 0$ ) den jeweiligen *Scan* oder Zeitschritt kennzeichnet und damit die Abtastung durch einen Sensor zum Zeitpunkt  $t_k$ . Dementsprechend bezeichnet  $\mathbf{x}_k := \mathbf{x}(t_k)$  den zu schätzenden Zustandsvektor zum Zeitpunkt  $t_k$ , während  $\mathbf{y}_k := \mathbf{y}(t_k)$  die entsprechende Messung angibt. Zusätzlich wird mit  $\mathcal{Y}_k := \{\mathbf{y}_x\}_{x=0}^k$  die Sequenz der Messungen des Beobachtungszeitraumes dargestellt.

Im Sinne des Bayes'schen Formalismus beruht ein Verfahren zur dynamischen Zustandsschätzung auf der Berechnung der bedingten A-posteriori-Dichte  $p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Y}_k)$ : Das Schätzen des aktuellen Zustandes  $\mathbf{x}_k$  zum Zeitpunkt  $t_k$  erfolgt demnach unter Berücksichtigung aller vorliegender Sensordaten  $\mathcal{Y}_k$  [16, 41, 77, 98, 107], wobei sich mit der Regel von Bayes (2.1) der Zusammenhang

$$p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Y}_k) = p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_k, \mathcal{Y}_{k-1}) = \frac{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k, \mathcal{Y}_{k-1})p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Y}_{k-1})}{p(\mathbf{y}_k|\mathcal{Y}_{k-1})}$$

ergibt. In dieser Gleichung bezeichnet  $p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Y}_{k-1})$  die bedingte A-priori-Dichte, die das Vorwissen über den zu schätzenden Systemzustand beinhaltet, d. h. die Prädiktion des Systemzustandes für den Zeitschritt  $k$  unter Berücksichtigung der Messungen bis zum Zeitpunkt  $t_{k-1}$ . Die A-priori-Dichte selbst lässt sich als eine Marginaldichte entsprechend

$$p(\mathbf{x}_k|\mathcal{Y}_{k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k-1}|\mathcal{Y}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} = \int p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, \mathcal{Y}_{k-1})p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathcal{Y}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}$$

berechnen, wobei  $p(\mathbf{x}_{k-1}|\mathcal{Y}_{k-1})$  die A-posteriori-Dichte zum Zeitpunkt  $t_{k-1}$  angibt. Auf Basis der vorangegangenen Schätzung erfolgt eine Vorhersage für den aktuellen Messzeitpunkt [41], wobei  $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_{k-1}, \mathcal{Y}_{k-1})$  die *Transitionsdichte* darstellt: Sie beschreibt die zeitliche Entwicklung des Systemzustandes im Prädiktionszeitraum  $T$  [73].

Zum Berücksichtigen von Ungenauigkeiten im Bewegungsmodell und Messfehlern werden *Störgrößen* in Form von *Prozessrauschen* und *Messrauschen* eingeführt, die weder untereinander oder mit dem Systemzustand noch individuell zeitlich korreliert sein sollen. Unter dieser Annahme verein-

<sup>2</sup>Die sogenannten *Verteilungsparameter* charakterisieren eine Wahrscheinlichkeitsverteilung und ihre Dichtefunktion: Sie erlauben die Berechnung der Momente einer Zufallsvariablen, z. B. des Erwartungswertes und der Varianz.

facht sich die Transitionsdichte zu  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathcal{Y}_{k-1}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ . Das Bewegungsmodell entspricht einem einstufigen zeitdiskreten *Markow-Prozess* [41]. Die Einstufigkeit – auch *Markow-Eigenschaft* genannt [6] – ergibt sich aus  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_{k-1}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$ , wonach der Systemzustand  $\mathbf{x}_k$  nur vom unmittelbar vorangegangenen Zustand  $\mathbf{x}_{k-1}$  abhängt [16, 52]. Die A-priori-Dichte berechnet sich demnach zu

$$p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_{k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathcal{Y}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}, \quad (2.2)$$

wobei dieser Ausdruck in der Literatur auch als *Chapman-Kolmogorow-Gleichung* bekannt ist; siehe etwa [6, 26, 41]. Darüber hinaus wird auch für die Likelihood-Funktion eine vereinfachende Annahme getroffen: Die aktuelle Messung im Zeitschritt  $k$  soll nur vom Systemzustand  $\mathbf{x}_k$  abhängen und nicht mit vorangegangenen Messungen korrelieren, d. h.  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \mathcal{Y}_{k-1}) = p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$ . Laut [107] genügt  $\mathbf{y}_k$  in diesem Fall einem *Markow'schen Messmodell*. Für die A-posteriori-Dichte ergibt sich demzufolge der Zusammenhang

$$p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k) = \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_{k-1})}{p(\mathbf{y}_k | \mathcal{Y}_{k-1})} = \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_{k-1})}{\int p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_{k-1}) d\mathbf{x}_k}. \quad (2.3)$$

Ausgehend von der Initialisierungsdichte  $p(\mathbf{x}_0 | \mathcal{Y}_0)$  definieren diese beiden Gleichungen ein *rekursives Verfahren* zur dynamischen Zustandsschätzung, wenn Gleichung (2.2) zur *Prädiktion* des Systemzustandes verwendet wird und Gleichung (2.3) zur *Aktualisierung* [41, 77, 107]. Daher wird der Bayes'sche Formalismus auch als rekursive Formulierung der Bayes'schen Regel betrachtet [107].

Das Konzept der konjugierten A-priori-Verteilung aus Abschnitt 2.1.1 lässt sich auch bei einem rekursiven Verfahren anwenden – unter folgender Voraussetzung: Der Verteilungstyp der Dichtefunktionen  $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_{k-1})$  und  $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k)$  bleibt identisch, sowohl nach der Prädiktion (2.2) als auch nach der Aktualisierung (2.3) des Systemzustandes. Im Idealfall lässt sich Gleichung (2.2) ebenfalls in geschlossener Form auswerten, so dass keine numerische Integrationsverfahren benötigt werden. Genau dieser Fall wird im folgenden Abschnitt am Beispiel des Kalman-Filters vorgestellt.

### 2.1.3 Beispiel: Kalman-Filter

Das *Kalman-Filter* ist eines der bekanntesten Verfahren zur dynamischen Zustandsschätzung [98]. Es wird in den unterschiedlichsten Gebieten eingesetzt – sei es in der Weitbereichs- oder Verkehrsüberwachung; Medizin-, Nachrichten- oder Regelungstechnik; Signalverarbeitung oder in anderen Bereichen [87, 108]. Bekannt wurde das Verfahren u. a. durch seinen Beitrag zur Lösung des Navigationsproblems im amerikanischen Apollo-Programm, das in der ersten bemannten Mondlandung<sup>3</sup> gipfelte. Die Grundlage des Kalman-Filters – und damit der zeitdiskreten Schätzung des Zustandsvektors  $\mathbf{x}_k$  – beruht auf einem linearen Zustandsraummodell mit additivem Rauschen [6, 41]:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \quad (2.4)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (2.5)$$

<sup>3</sup>In [53, 100] werden die einzelnen Schritte vorgestellt, wie Kalmans Arbeit [92] auf das nichtlineare Navigationsproblem angepasst wurde, so dass ein numerisch stabiles Verfahren im Bordcomputer eingesetzt werden konnte.

mit  $\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$  und  $\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$ .  $\mathbf{F}$  stellt die Systemmatrix dar,  $\mathbf{H}$  die Messmatrix. Sowohl das Prozessrauschen  $\mathbf{v}_k$  als auch das Messrauschen  $\mathbf{w}_k$  bezeichnen *weißes* Gauß'sches Rauschen [73], wodurch sie weder untereinander oder mit dem Systemzustand noch individuell zeitlich korreliert sind. Unter diesen Voraussetzungen gilt: Das Kalman-Filter ist nichts anderes als der rekursive *MMSE-Schätzer* (für engl. *Minimum Mean Square Error Estimator*) des Zustandes  $\mathbf{x}_k$ ; seine Schätzung  $\mathbf{x}_{k|\ell}$  zum Zeitpunkt  $t_k$  basiert auf den Messungen<sup>4</sup>  $\mathcal{Y}_\ell$  und minimiert den mittleren quadratischen Schätzfehler (kurz *MSE* für engl. *Mean Square Error*) – ausgehend von den Startwerten  $\mathbf{x}_{0|0}$  und  $\mathbf{P}_{0|0}$  für die zugehörige Schätzfehlerkovarianzmatrix  $\mathbf{P}_{k|\ell}$ , die ein Maß für die Schätzunsicherheit darstellt. Dies ist genau dann der Fall, wenn zur *Prädiktion* der Schätzung die Filtergleichungen

$$\mathbf{x}_{k|k-1} = \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1|k-1} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{P}_{k|k-1} = \mathbf{F}\mathbf{P}_{k-1|k-1}\mathbf{F}^\top + \mathbf{Q} \quad (2.7)$$

verwendet werden, während die *Innovation*  $\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1}$ , ihre Kovarianzmatrix

$$\mathbf{S}_{k|k-1} = \mathbf{H}\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}^\top + \mathbf{R} \quad (2.8)$$

und die Matrix der *Kalman-Verstärkung*

$$\mathbf{K}_{k|k-1} = \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}^\top\mathbf{S}_{k|k-1}^{-1} \quad (2.9)$$

für die *Aktualisierung* der Schätzung sorgen:

$$\mathbf{x}_{k|k} = \mathbf{x}_{k|k-1} + \mathbf{K}_{k|k-1}(\mathbf{y}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1}) \quad (2.10)$$

$$\mathbf{P}_{k|k} = \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_{k|k-1}\mathbf{S}_{k|k-1}\mathbf{K}_{k|k-1}^\top. \quad (2.11)$$

Die Optimalität der Schätzung  $\mathbf{x}_{k|\ell}$  folgt aus der Tatsache, dass sie dem *bedingten Erwartungswert* des unbekanntes Zustandes  $\mathbf{x}_k$  gegeben den akkumulierten Messungen  $\mathcal{Y}_\ell$  entspricht und dass der bedingte Erwartungswert der unter dem Kostenkriterium MSE bestmögliche Schätzer ist; siehe etwa [6, 41, 107]. Dementsprechend gilt beispielsweise

$$\mathbf{x}_{k|k} = \mathbb{E}[\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k] = \int \mathbf{x}_k p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k) d\mathbf{x}_k. \quad (2.12)$$

Die Literatur betrachtet das Kalman-Filter häufig im Zusammenhang mit rekursiven Varianten der *Methode der kleinsten Fehlerquadrate* [139]. Beim Herleiten der Filtergleichungen bleibt jedoch in vielen Fachbüchern unerwähnt (siehe z. B. [17, 18, 25, 52]), dass das Kalman-Filter auch aus dem Bayes'schen Formalismus abgeleitet werden kann [98]: Nach Gleichung (2.5) berechnet sich die Wahrscheinlichkeit für eine Messung  $\mathbf{y}_k$  bei gegebenem Zustand  $\mathbf{x}_k$  zu  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{y}_k; \mathbf{H}\mathbf{x}_k, \mathbf{R})$ . Es zeigt sich, dass eine konjugierte A-priori-Verteilung zu dieser Likelihood-Funktion einer Normalverteilung genügt, d. h.

$$p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_{k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}) \quad \text{und} \quad p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}).$$

Das Ergebnis für die A-posteriori-Dichte  $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k)$  erhalten wir unmittelbar aus Gleichung (2.3), da

<sup>4</sup>Der erste Index bezieht sich auf den Zeitpunkt der Schätzung, der zweite auf die zugrunde liegende Sequenz der Messungen. Demnach bezeichnet  $\mathbf{x}_{k|k-1}$  die Prädiktion des geschätzten Systemzustandes und  $\mathbf{x}_{k|k}$  seine Aktualisierung.

durch die Produktformel für Normalverteilungen (B.11) folgendes gilt:

$$\underbrace{\mathcal{N}(\mathbf{y}_k; \mathbf{H}\mathbf{x}_k, \mathbf{R})}_{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)} \underbrace{\mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1})}_{p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_{k-1})} = \underbrace{\mathcal{N}(\mathbf{y}_k; \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1}, \mathbf{S}_{k|k-1})}_{p(\mathbf{y}_k | \mathcal{Y}_{k-1})} \underbrace{\mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k})}_{p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k)}.$$

Mit dieser Umformung werden darüber hinaus auch die Aktualisierungsgleichungen (2.8) bis (2.11) bestätigt (siehe Anhang B.4). Auf ähnliche Weise lässt sich zeigen, dass aus  $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathcal{Y}_{k-1})$  wieder eine normalverteilte Dichte  $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_{k-1})$  folgt, deren Parameter entsprechend der Prädiktionsgleichungen (2.6) und (2.7) berechnet werden: Das gewünschte Ergebnis ergibt sich nach Auswerten der Chapman-Kolmogorow-Gleichung<sup>5</sup> (2.2) – in Verbindung mit der Systemgleichung (2.4), d. h. der Transitionsdichte  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k; \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Q})$ .

Das Kalman-Filter ist demnach ein Spezialfall des *Bayes'schen Filters* [98]: Der Aktualisierungsschritt folgt aus der Bayes'schen Regel (2.3), der Prädiktionschritt aus der Chapman-Kolmogorow-Gleichung (2.2). Zum Durchführen beider Schritte werden keine numerischen Integrationsverfahren benötigt, weswegen das Kalman-Filter auch ein Paradebeispiel für konjugierte A-priori-Verteilungen darstellt. Als Schlussfolgerung ergibt sich für diese Arbeit: Der Bayes'sche Formalismus bietet einen einheitlichen methodischen Rahmen zum systematischen Beschreiben der Tracking-Problematik [77]. Aus dem Formalismus lassen sich Verfahren zur dynamischen Zustandsschätzung ableiten, die über konventionelle Filterprobleme hinausgehen [98, 139].

## 2.2 Berücksichtigung der Objektausdehnung im methodischen Rahmen

Viele klassische Tracking-Verfahren, wie z. B. das Kalman-Filter, modellieren die zu verfolgenden Objekte als punktförmig: Für jedes detektierte Ziel wird jeweils höchstens eine Messung erwartet, da die räumliche Ausdehnung – im Vergleich zur Auflösungsfähigkeit eines Sensors – als vernachlässigbar betrachtet wird [81]. Genau diese Annahme wird in [78] fallengelassen: zum einen aufgrund der Entwicklung moderner Radarsensorik, deren verbesserte Auflösungseigenschaften zu Mehrfachreflexionen bei einem beleuchteten Objekt führen können; zum anderen wegen der begrenzten Auflösungsfähigkeit im Fall einer Gruppe von Zielobjekten, wenn die Zuordnung zwischen Messungen und Gruppenmitgliedern nicht mehr eindeutig<sup>6</sup> ist. In beiden Fällen ist eine nicht vorhersagbare Anzahl von Messungen zu verarbeiten, deren Zahl auch nicht von Scan zu Scan konstant bleibt. Demzufolge betrachtet [78] die räumliche Ausdehnung eines Objektes (oder einer Gruppe von Zielen) als Teil des Filterproblems, weshalb die zu schätzende Zielspur aus der Kinematik des Schwerpunktes und der Objektausdehnung besteht; siehe auch [75, 81, 82].

Im Folgenden bezeichnet die vektorielle Zufallsvariable  $\mathbf{x}_k$  den kinematischen Zustandsvektor des Objektschwerpunktes – in dieser Arbeit bestehend aus Position und Geschwindigkeit, d. h.  $\mathbf{x}_k^T = [\mathbf{r}_k^T, \dot{\mathbf{r}}_k^T]$ . Die Objektausdehnung wird durch ein Ellipsoid approximiert, so dass sich der Ausdehnungszustand durch die symmetrische, positiv definite (kurz *SPD*) Zustandsmatrix  $\mathbf{X}_k := \mathbf{X}(t_k)$  modellieren lässt. Ein Eigenwert von  $\mathbf{X}_k$  entspricht der quadrierten Länge einer Halbachse des Ellipsoids. Das Ellipsoid ist durch die Menge aller Punkte  $\mathbf{c}_k$  bestimmt, die der folgenden Gleichung

<sup>5</sup>Nach Anwenden der Produktformel (B.11) kann die Integration über  $\mathbf{x}_{k-1}$  durchgeführt werden.

<sup>6</sup>Insbesondere unaufgelöste Gruppenmitglieder erschweren die Datenzuordnung: Je nach Ziel-Sensor-Geometrie können zwei oder mehrere Ziele als ein einziges Ziel detektiert werden.

genügen:

$$(\mathbf{c}_k - \mathbf{r}_k)^\top \mathbf{X}_k^{-1} (\mathbf{c}_k - \mathbf{r}_k) = 1. \quad (2.13)$$

Des Weiteren kennzeichnet  $\mathbf{Y}_k := \{\mathbf{y}_k^{[j]}\}_{j=1}^{n_k}$  die Menge der  $n_k$  Messungen im Zeitschritt  $k$ , während die Sequenz aller Messungen des gesamten Beobachtungszeitraumes wie zuvor mit  $\mathcal{Y}_k$  dargestellt wird, d. h.  $\mathcal{Y}_k := \{\mathbf{Y}_x\}_{x=0}^k$ . In diesem Kontext interpretiert [78] die Zielverfolgung von ausgedehnten Objekten oder Gruppen benachbarter Ziele als die rekursive Berechnung der bedingten Verbundverteilungsdichte  $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k)$ , so dass die Objektausdehnung Teil des methodischen Rahmens wird. Bei der Modellierung einer Likelihood-Funktion in Abschnitt 2.3.1 wird sich zeigen, dass der gemeinsame Objektzustand auch als das Produkt einer vektor- und einer matrixvariaten Wahrscheinlichkeitsverteilung aufgefasst werden kann:

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathcal{Y}_k) p(\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k). \quad (2.14)$$

Diese Schreibweise verdeutlicht einerseits die Abhängigkeit des kinematischen Zustandes  $\mathbf{x}_k$  von der Objektausdehnung  $\mathbf{X}_k$ , andererseits werden durch  $p(\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k)$  multivariate Matrixverteilungen ins Spiel gebracht; vgl. [55] und Anhang B. Im Sinne des Bayes'schen Formalismus basiert das rekursive Berechnen der Verbunddichte  $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k)$  (und somit das Tracking-Verfahren aus [75, 78, 81, 82]) auf zwei fundamentalen Bausteinen: *Aktualisierung* und *Prädiktion*.

### 2.2.1 Aktualisierung: Anwenden der Bayes'schen Regel

Ausgehend von der bedingten A-priori-Dichte erfolgt das Aktualisieren des gemeinsamen Objektzustandes mit Hilfe der aktuellen Sensormessungen. Dieser Vorgang lässt sich anschaulich als

$$\underbrace{p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_{k-1})}_{\text{A-priori-Dichte}} \xrightarrow[\text{Aktualisierung}]{\text{Sensormessungen: } \mathbf{Y}_k} \underbrace{p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k)}_{\text{A-posteriori-Dichte}}$$

darstellen, wobei im Prinzip die Likelihood-Funktion  $p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \mathcal{Y}_{k-1})$  mit Hilfe der Bayes'schen Regel ausgewertet wird. Allerdings wird auch hier für die Likelihood-Funktion eine vereinfachende Annahme getroffen (vgl. Abschnitt 2.1.2): Die  $n_k$  Messungen im Zeitschritt  $k$  sollen nur vom aktuellen Systemzustand  $(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k)$  abhängen und nicht mit vorangegangenen Messungen korrelieren, d. h.  $p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \mathcal{Y}_{k-1}) = p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k)$ . Aus der Bayes'schen Regel ergibt sich für die A-posteriori-Dichte demzufolge der Zusammenhang

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k) = \frac{p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k) p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_{k-1})}{p(\mathbf{Y}_k | \mathcal{Y}_{k-1})} \quad (2.15)$$

mit der Normierungskonstante

$$p(\mathbf{Y}_k | \mathcal{Y}_{k-1}) = \iint p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k) p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_{k-1}) d\mathbf{x}_k d\mathbf{X}_k.$$

Der Tracking-Algorithmus in [78] definiert sich daher im Wesentlichen über die Modellierung der Likelihood-Funktion  $p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k)$  und ihrer konjugierten A-priori-Dichte  $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_{k-1})$ .

### 2.2.2 Prädiktion: Berechnung als Marginaldichte

Zum Verarbeiten der aktuellen Messungen wird u. a. die bedingte A-priori-Dichte  $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_{k-1})$  benötigt, die das Vorwissen über den Systemzustand zum Messzeitpunkt widerspiegelt. Diese Vorhersage basiert auf der vorangegangenen Schätzung und einem zeitlichen Entwicklungsmodell des Systemzustandes für den Prädiktionszeitraum, d. h. anschaulich

$$\underbrace{p(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1} | \mathcal{Y}_{k-1})}_{\text{A-posteriori-Dichte}} \xrightarrow[\text{Prädiktion}]{\text{Zeitliche Entwicklung}} \underbrace{p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_{k-1})}_{\text{A-priori-Dichte}}.$$

In Anlehnung an die Chapman-Kolmogorow-Gleichung (2.2) wird die A-priori-Dichte als eine Marginaldichte interpretiert:

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_{k-1}) = \iint p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1}, \mathcal{Y}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1} | \mathcal{Y}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} d\mathbf{X}_{k-1}.$$

An dieser Stelle werden in [78] verschiedene Annahmen getroffen, damit dieses Doppelintegral in zwei Teilprobleme aufgespalten werden kann: Auf diese Weise soll zum einen die Produktform der Verbundverteilungsdichte (2.14) erhalten bleiben, zum anderen dürfte sich die Prädiktion einfacher gestalten lassen, wenn die Dynamikmodelle getrennt nach Kinematik und Ausdehnung anzugeben sind. Zunächst soll die Systemdynamik einem einstufigen zeitdiskreten Markow-Prozess genügen, wodurch die Vorhersage des Systemzustandes nicht von vorangegangenen Messungen abhängt:

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1}, \mathcal{Y}_{k-1}) = p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1}) p(\mathbf{X}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1}).$$

Darüber hinaus setzt [78] für die jeweilige Transitionsdichte voraus, dass das Dynamikmodell für Kinematik/Ausdehnung nicht durch den vorherigen Systemzustand der Ausdehnung/Kinematik beeinflusst wird, d. h.

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1}) &= p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{x}_{k-1}) \\ p(\mathbf{X}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1}) &= p(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1}). \end{aligned}$$

Die dritte und letzte Annahme bezieht sich auf die vorangegangene Schätzung, die den Ausgangspunkt für die Prädiktion darstellt, d. h.  $p(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1} | \mathcal{Y}_{k-1}) = p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{X}_{k-1}, \mathcal{Y}_{k-1}) p(\mathbf{X}_{k-1} | \mathcal{Y}_{k-1})$ : Die zeitliche Änderung der Objektausdehnung soll näherungsweise keinen Einfluss auf die Prädiktion des kinematischen Zustandes haben, weshalb laut [78] die Approximation

$$p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{X}_{k-1}, \mathcal{Y}_{k-1}) \approx p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{X}_k, \mathcal{Y}_{k-1})$$

gilt. Mit anderen Worten: Der Zustand  $\mathbf{X}_{k-1}$  wird durch  $\mathbf{X}_k$  ersetzt, damit die bedingte A-priori-Dichte  $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_{k-1})$  mit den beiden folgenden Integralen getrennt berechnet werden kann:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathcal{Y}_{k-1}) = \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{x}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{X}_k, \mathcal{Y}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \quad (2.16)$$

$$p(\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_{k-1}) = \int p(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1}) p(\mathbf{X}_{k-1} | \mathcal{Y}_{k-1}) d\mathbf{X}_{k-1}. \quad (2.17)$$

Hierbei muss im Sinne einer konjugierten A-priori-Verteilung sichergestellt sein, dass der Verteilungstyp der beiden Dichtefunktionen  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathcal{Y}_{k-1})$  und  $p(\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k)$  auch bei der Prädiktion iden-

tisch bleibt. Auf diese Weise ist letztendlich der methodische Rahmen vorgegeben, mit dem sich die Objektausdehnung im Bayes'schen Formalismus berücksichtigen lässt.

## 2.3 Tracking-Verfahren für ausgedehnte Objekte und Objektgruppen

Ausgehend von der Initialisierung  $p(\mathbf{x}_0, \mathbf{X}_0 | \mathcal{Y}_0)$  bilden die Gleichungen (2.15), (2.16) und (2.17) das Grundgerüst für das Tracking eines ausgedehnten Objektes oder einer Gruppe von Zielen in [75, 78, 81, 82]. Im Folgenden wird dieses rekursive Verfahren und seine Filtergleichungen vorgestellt.

### 2.3.1 Modellierung der Likelihood-Funktion

Ausgangspunkt für das Tracking-Verfahren in [78] ist die Wahl einer geeigneten Likelihood-Funktion  $p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k)$ : In Anlehnung an die Messgleichung (2.5) des Kalman-Filters wird in [78] zunächst angenommen, dass im Zeitschritt  $k$  insgesamt  $n_k$  unabhängige Messungen

$$\mathbf{y}_k^{[j]} = \mathbf{H}\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k^{[j]} \quad (j = 1, \dots, n_k) \quad (2.18)$$

vorliegen, wobei es sich um Messungen der  $d$ -dimensionalen Positionskomponente  $\mathbf{r}_k$  handeln soll. Daraus folgt  $\mathbf{H}\mathbf{x}_k = \mathbf{r}_k$  und  $\dim(\mathbf{y}_k^{[j]}) = \dim(\mathbf{r}_k) = d$ . Während  $\mathbf{X}_k$  eine  $d \times d$ -Matrix ist, stellt  $\mathbf{x}_k$  im Allgemeinen einen  $sd$ -dimensionalen Zustandsvektor<sup>7</sup> dar. Die Messmatrix  $\mathbf{H}$  ist demnach eine  $d \times sd$ -Matrix; aufgrund der angenommenen Positionsmessungen ergibt sich<sup>8</sup>

$$\mathbf{H} = [\mathbf{I}_d, \mathbf{0}_{d \times (s-1)d}] = \tilde{\mathbf{H}} \otimes \mathbf{I}_d \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{H}} = [1, \mathbf{0}_{1 \times (s-1)}],$$

wobei  $\otimes$  das *Kronecker-Produkt* bezeichnet (siehe [59, Kapitel 16] oder Abschnitt A.2.1 im Anhang).

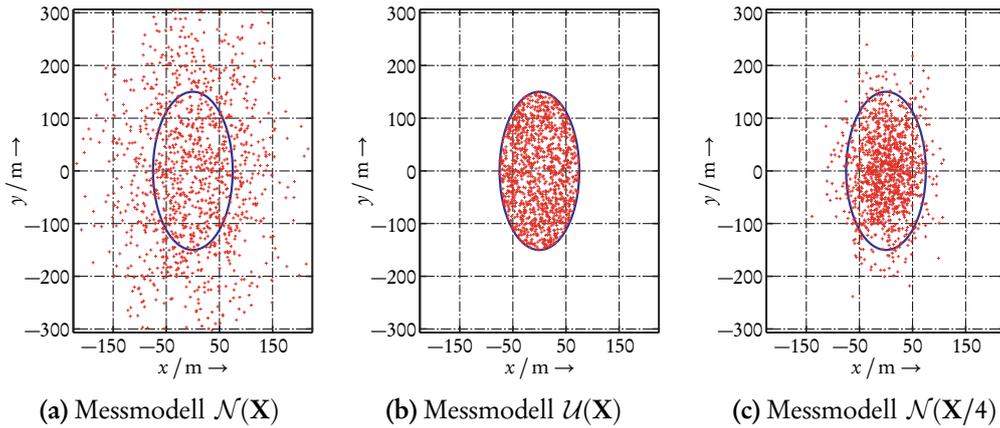
Zum Schätzen einer Ausdehnung müssen in irgendeiner Form Informationen über die Größe eines Objektes (oder einer Objektgruppe) gewonnen werden: Die Zustandsmatrix  $\mathbf{X}_k$  soll daher Teil der Likelihood-Funktion sein. Allerdings ist sie kein Bestandteil der Messgleichung (2.18), da der Sensor selbst keine direkte Messung der Objektgröße ermöglicht: Stattdessen liefert er eine oder mehrere Positionsmessungen für das beleuchtete Objekt. Angesichts dieser Problematik wird in [78] die Annahme getroffen, dass die räumliche Streuung der Messungen im Wesentlichen durch die Objektausdehnung dominiert wird und dass ein statistischer Sensormessfehler vernachlässigbar ist. Demnach ist das Messrauschen ausschließlich auf die Objektausdehnung zurückzuführen. Diese Auslegung wird durch ein gleichanteilsfreies und mit der Varianz  $\mathbf{X}_k$  normalverteiltes *Ausdehnungsrauschen*  $\mathbf{w}_k^{[j]}$  modelliert, so dass die Ausdehnung über diese *Störgröße* Teil der Likelihood-Funktion wird. Deshalb interpretiert das Verfahren in [78] jede Einzelmessung als eine durch die Objektausdehnung *verrauschte* Messung des Objektschwerpunktes:

$$\mathbf{y}_k^{[j]} \sim \mathcal{N}_d(\mathbf{H}\mathbf{x}_k, z_d \mathbf{X}_k) \quad (j = 1, \dots, n_k). \quad (2.19)$$

Der Parameter  $z_d$  ist ein (fest gewählter) *Skalierungsfaktor* der Ausdehnung, der die angenommene

<sup>7</sup>Im Fall  $s = 1$  besteht der kinematische Zustandsvektor  $\mathbf{x}_k$  nur aus der  $d$ -dimensionalen Positionskomponenten  $\mathbf{r}_k$ . Bei  $s = 2$  wird zusätzlich die Geschwindigkeitskomponente  $\dot{\mathbf{r}}_k$  berücksichtigt, bei  $s = 3$  (wie in [78]) obendrein die Beschleunigungskomponente  $\ddot{\mathbf{r}}_k$ . In den Simulationen in Kapitel 4 und Kapitel 5 wurde  $s = 2$  und  $d = 2$  verwendet.

<sup>8</sup>Die Matrix  $\mathbf{I}_d$  bezeichnet die  $d \times d$ -Einheitsmatrix,  $\mathbf{0}_{s \times d}$  die  $s \times d$ -Nullmatrix. Daher stellt  $\mathbf{0}_{1 \times s}$  den  $s$ -dimensionalen Nullvektor in Zeilenschreibweise dar.



**Abbildung 2.1:** Beispielmessungen für verschiedene Messmodelle: Grundlage war eine Ellipse (Blau) mit Achsenlängen von 150 m und 300 m, d. h. die SPD Matrix  $\mathbf{X} = \text{diag}((150\text{m}/2)^2, (300\text{m}/2)^2)$ . In (a) wurden die Messungen (Rot) als Samples einer gleichanteilsfreien normalverteilten Zufallsvariable mit Varianz  $\mathbf{X}$  erzeugt, in (b) gleichverteilt über die Ellipse. (c) entsprach (a) mit einer um den Faktor  $1/4$  skalierten Varianz  $\mathbf{X}$ , d. h.  $z_d = 1/4$ . Es wurden jeweils 1200 Samples generiert.

räumliche Streuung einer Messung beeinflusst. Er wurde in [169, 171] eingeführt und stellt eine Erweiterung<sup>9</sup> zu [78] dar. Um einen geeigneten Wert für  $z_d$  zu bestimmen, betrachten wir zunächst das ursprüngliche *Messprinzip* aus [78]: Abbildung 2.1(a) zeigt Beispielmessungen für eine Ellipse  $\mathbf{X}$ , wobei für das Ausdehnungsrauschen eine normalverteilte Zufallsvariable mit Varianz  $\mathbf{X}$  angenommen wurde, d. h.  $z_d = 1$ . Aufgrund der angenommenen Normalverteilung liegt eine Vielzahl der Messungen außerhalb der Ellipse. Umgekehrt bedeutet dies: Zur möglichst genauen Schätzung der elliptischen Ausdehnung benötigt das Tracking-Filter Messungen, die wie in Abbildung 2.1(a) über die Ausdehnung verteilt sind. Allerdings ist vielen praktischen Anwendungsfällen davon auszugehen, dass die Sensormessungen wie in Abbildung 2.1(b) annähernd gleichverteilt<sup>10</sup> über das Objekt sind: Mit einer *diffusen Verteilung* wie der Gleichverteilung lässt sich berücksichtigen, dass in der Regel kein Vorwissen über mögliche Streuzentren des beleuchteten Objektes besteht. In diesem Fall würde das Tracking-Verfahren durch die *Normalverteilungsannahme* eine zu kleine Ellipse schätzen, da die Messungen in Abbildung 2.1(b) einer gleichverteilten Zufallsvariable mit Varianz  $\mathbf{X}/4$  genügen [169, 171]. Zur Kompensation eignet sich ein Skalierungsfaktor  $z_d$  im originalen Messmodell  $\mathcal{N}(\mathbf{X})$ , so dass in der Likelihood-Funktion eine geringere Messstreuung erwartet wird, d. h.  $\mathcal{N}(z_d\mathbf{X})$ . Abbildung 2.1(c) verdeutlicht diese Idee: Statistisch gesehen soll durch  $z_d$  diejenige Varianz angenommen werden, die sich bei einer entsprechenden Gleichverteilung über dieselbe Ausdehnung ergeben würde. Durch diese skalierte Messstreuung lässt sich dann im Umkehrschluss eine korrekt skalierte Ausdehnung schätzen.

Der explizite Wert für  $z_d$  hängt allerdings von der räumlichen Dimension  $d$  des Schätzproblems ab. Dies wird in Abschnitt B.6 deutlich, wo gleichverteilte Messungen über ein  $d$ -dimensionales Ellipsoid  $\mathbf{X}$  betrachtet werden. In diesem Fall genügen die Messungen einer gleichverteilten Zufallsvariable mit Varianz  $\mathbf{X}/(d+2)$ ; siehe Gleichung (B.24). Wie bereits erläutert, ergibt sich der Skalierungsfaktor  $z_d$  in Gleichung (2.19) nun aus einem *Moment-Matching* bezüglich der Varianz;

<sup>9</sup>Im Fall  $z_d = 1$  ergeben sich die Filtergleichungen aus [78].

<sup>10</sup>Ein statistischer Sensormessfehler wird an dieser Stelle außen vor gelassen.

demzufolge gilt allgemein

$$z_d = \frac{1}{d+2} \quad (d \in \mathbb{N}^*).$$

Mit diesem Skalierungsfaktor und der Normalverteilungsannahme (2.19) lässt sich die gesuchte Likelihood-Funktion letztlich wie folgt berechnen [78]:

$$p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k) = \prod_{j=1}^{n_k} \mathcal{N}_d(\mathbf{y}_k^{[j]}; \mathbf{H}\mathbf{x}_k, z_d \mathbf{X}_k). \quad (2.20)$$

Sie bezeichnet die Wahrscheinlichkeit der Menge  $n_k$  unabhängiger Messungen für den gegebenen gemeinsamen Objektzustand. Durch Berücksichtigen der *mittleren Messung*

$$\bar{\mathbf{y}}_k = \frac{1}{n_k} \sum_{j=1}^{n_k} \mathbf{y}_k^{[j]}$$

und der *Messstreuung*

$$\bar{\mathbf{Y}}_k = \sum_{j=1}^{n_k} (\mathbf{y}_k^{[j]} - \bar{\mathbf{y}}_k)(\mathbf{y}_k^{[j]} - \bar{\mathbf{y}}_k)^\top$$

lässt sich u. a. der Zusammenhang

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n_k} (\mathbf{y}_k^{[j]} - \mathbf{H}\mathbf{x}_k)^\top (z_d \mathbf{X}_k)^{-1} (\mathbf{y}_k^{[j]} - \mathbf{H}\mathbf{x}_k) \\ &= n_k (\bar{\mathbf{y}}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_k)^\top (z_d \mathbf{X}_k)^{-1} (\bar{\mathbf{y}}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_k) + \sum_{j=1}^{n_k} (\mathbf{y}_k^{[j]} - \bar{\mathbf{y}}_k)^\top (z_d \mathbf{X}_k)^{-1} (\mathbf{y}_k^{[j]} - \bar{\mathbf{y}}_k) \\ &= \text{tr} \left( \left( n_k (\bar{\mathbf{y}}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_k) (\bar{\mathbf{y}}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_k)^\top + \bar{\mathbf{Y}}_k \right) (z_d \mathbf{X}_k)^{-1} \right) \end{aligned}$$

angeben, so dass sich Gleichung (2.20) auch wie folgt darstellen<sup>11</sup> lässt:

$$p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k) = \mathcal{N}_d(\bar{\mathbf{y}}_k; \mathbf{H}\mathbf{x}_k, z_d \mathbf{X}_k / n_k) \cdot |2\pi z_d \mathbf{X}_k|^{-\frac{1}{2}(n_k-1)} n_k^{-\frac{1}{2}d} \text{etr} \left( -\frac{1}{2} \bar{\mathbf{Y}}_k (z_d \mathbf{X}_k)^{-1} \right). \quad (2.21)$$

Die Likelihood-Funktion  $p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k)$  zerfällt in einen vektor- und in einen matrixvariablen Teil, wobei letzterer nicht vom kinematischen Zustand abhängt. Der matrixvariable Teil der Likelihood-Funktion ähnelt nicht nur der Dichtefunktion (B.6) einer *Wishart-Verteilung* [55], sondern er lässt sich im Fall  $n_k > d$  und  $\bar{\mathbf{Y}}_k > \mathbf{0}$  auch entsprechend<sup>12</sup>

$$p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k) = c_d(\bar{\mathbf{Y}}_k, n_k) \cdot \mathcal{N}_d(\bar{\mathbf{y}}_k; \mathbf{H}\mathbf{x}_k, z_d \mathbf{X}_k / n_k) \mathcal{W}_d(\bar{\mathbf{Y}}_k; n_k - 1, z_d \mathbf{X}_k) \quad (2.22)$$

interpretieren, wobei  $c_d(\bar{\mathbf{Y}}_k, n_k)$  einen vom Objektzustand unabhängigen Vorfaktor bezeichnet:

$$c_d(\bar{\mathbf{Y}}_k, n_k) = \Gamma_d\left(\frac{n_k-1}{2}\right) \pi^{-\frac{1}{2}(n_k-1)d} n_k^{-\frac{1}{2}d} |\bar{\mathbf{Y}}_k|^{-\frac{1}{2}(n_k-d-2)} \quad (n_k > d, \bar{\mathbf{Y}}_k > \mathbf{0}). \quad (2.23)$$

Diese Zerlegung in einen vektor- und in einen matrixvariablen Teil findet sich auch in der Produktform (2.14) der bedingten Verbundverteilungsdichte, d. h.  $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathcal{Y}_k) p(\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k)$ .

<sup>11</sup>Der Ausdruck  $\text{etr}(\cdot)$  ist eine abkürzende Schreibweise für  $\exp(\text{tr}(\cdot))$ ; siehe [55].

<sup>12</sup>Die Messstreuung, d. h. die  $d \times d$ -Matrix  $\bar{\mathbf{Y}}_k$ , stellt im Fall  $n_k > d$  und  $\bar{\mathbf{Y}}_k > \mathbf{0}$  ein  $d$ -dimensionales Ellipsoid dar.

Darüber hinaus bildet die Likelihood-Funktion (2.21) den Ausgangspunkt für die Herleitung der Filtergleichungen in [75, 78, 81, 82].

### 2.3.2 Filtergleichungen zur Aktualisierung

Die Bayes'sche Regel (2.15) kann genau dann in geschlossener Form ausgewertet werden, wenn sich zur Likelihood-Funktion (2.21) eine konjugierte A-priori-Dichte angeben lässt. Dementsprechend wird in [78] die A-priori-Dichte  $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_{k-1}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathcal{Y}_{k-1})p(\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_{k-1})$  wie folgt gewählt:<sup>13</sup>

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathcal{Y}_{k-1}) = \mathcal{N}_{sd}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k-1}, \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1} \otimes \mathbf{X}_k) \quad (2.24)$$

$$p(\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_{k-1}) = \mathcal{IW}_d(\mathbf{X}_k; \nu_{k|k-1}, \tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}), \quad (2.25)$$

wobei  $p(\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_{k-1})$  der Dichtefunktion (B.8) einer *inversen Wishart-Verteilung* [55] entspricht. Die Aktualisierungsgleichungen für die Parameter der A-posteriori-Dichte

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathcal{Y}_k)p(\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k) = \mathcal{N}_{sd}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k}, \tilde{\mathbf{P}}_{k|k} \otimes \mathbf{X}_k) \mathcal{IW}_d(\mathbf{X}_k; \nu_{k|k}, \tilde{\mathbf{X}}_{k|k}) \quad (2.26)$$

ergeben sich aus der Bayes'schen Regel (2.15) durch Auswerten von

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k)p(\mathbf{Y}_k | \mathcal{Y}_{k-1}) &= p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k)p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_{k-1}) \\ &= \mathcal{N}_d(\bar{\mathbf{y}}_k; \mathbf{H}\mathbf{x}_k, z_d \mathbf{X}_k / n_k) \cdot |2\pi z_d \mathbf{X}_k|^{-\frac{1}{2}(n_k-1)} n_k^{-\frac{1}{2}d} \text{etr}\left(-\frac{1}{2}\bar{\mathbf{Y}}_k(z_d \mathbf{X}_k)^{-1}\right) \\ &\quad \cdot \mathcal{N}_{sd}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k-1}, \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1} \otimes \mathbf{X}_k) \mathcal{IW}_d(\mathbf{X}_k; \nu_{k|k-1}, \tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Mit der Produktformel (B.11) und unter Beachtung der besonderen Eigenschaften des Kronecker-Produktes (siehe Abschnitt A.2.1) lässt sich für die beiden Normalverteilungen<sup>14</sup>

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}_d(\bar{\mathbf{y}}_k; \mathbf{H}\mathbf{x}_k, z_d \mathbf{X}_k / n_k) \mathcal{N}_{sd}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k-1}, \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1} \otimes \mathbf{X}_k) \\ &= \mathcal{N}_d(\bar{\mathbf{y}}_k; \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1}, \tilde{\mathbf{S}}_{k|k-1} \mathbf{X}_k) \mathcal{N}_{sd}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k}, \tilde{\mathbf{P}}_{k|k} \otimes \mathbf{X}_k) \end{aligned}$$

festhalten. Demnach sorgen die mittlere Messung  $\bar{\mathbf{y}}_k$ , ein skalarer *Innovationsfaktor*

$$\tilde{\mathbf{S}}_{k|k-1} = \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}\tilde{\mathbf{H}}^\top + \frac{z_d}{n_k}$$

und ein  $s$ -dimensionaler *Verstärkungsvektor*

$$\tilde{\mathbf{K}}_{k|k-1} = \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}\tilde{\mathbf{H}}^\top\tilde{\mathbf{S}}_{k|k-1}^{-1}$$

für die Aktualisierung der kinematischen Parameter:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k|k} &= \mathbf{x}_{k|k-1} + (\tilde{\mathbf{K}}_{k|k-1} \otimes \mathbf{I}_d)(\bar{\mathbf{y}}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1}) \\ \tilde{\mathbf{P}}_{k|k} &= \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1} - \tilde{\mathbf{K}}_{k|k-1}\tilde{\mathbf{S}}_{k|k-1}\tilde{\mathbf{K}}_{k|k-1}^\top. \end{aligned}$$

<sup>13</sup>Der Index einer Dichte beschreibt die Dimension der Zufallsvariablen, d. h.  $\dim(\mathbf{x}_k) = s \cdot d$  und  $\dim(\mathbf{X}_k) = d$ .

<sup>14</sup>Unter Berücksichtigung von  $\mathbf{H} = \tilde{\mathbf{H}} \otimes \mathbf{I}_d$  werden u. a. die drei folgenden Umformungen benötigt:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1} \otimes \mathbf{X}_k)\mathbf{H}^\top + z_d \mathbf{X}_k / n_k &= (\tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}\tilde{\mathbf{H}}^\top) \otimes \mathbf{X}_k + (z_d / n_k) \otimes \mathbf{X}_k = \tilde{\mathbf{S}}_{k|k-1} \mathbf{X}_k \\ (\tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1} \otimes \mathbf{X}_k)\mathbf{H}^\top(\tilde{\mathbf{S}}_{k|k-1} \mathbf{X}_k)^{-1} &= (\tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}\tilde{\mathbf{H}}^\top\tilde{\mathbf{S}}_{k|k-1}^{-1}) \otimes (\mathbf{X}_k \mathbf{I}_d \mathbf{X}_k^{-1}) = \tilde{\mathbf{K}}_{k|k-1} \otimes \mathbf{I}_d \\ \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1} \otimes \mathbf{X}_k - (\tilde{\mathbf{K}}_{k|k-1} \otimes \mathbf{I}_d)(\tilde{\mathbf{S}}_{k|k-1} \mathbf{X}_k)(\tilde{\mathbf{K}}_{k|k-1} \otimes \mathbf{I}_d)^\top &= (\tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1} - \tilde{\mathbf{K}}_{k|k-1}\tilde{\mathbf{S}}_{k|k-1}\tilde{\mathbf{K}}_{k|k-1}^\top) \otimes \mathbf{X}_k = \tilde{\mathbf{P}}_{k|k} \otimes \mathbf{X}_k. \end{aligned}$$

Diese Filtergleichungen erinnern formal an die des Kalman-Filters in Abschnitt 2.1.3 – aber nur auf den ersten Blick: Der Verstärkungsvektor ist unabhängig von der räumlichen Dimension des Schätzproblems; zur Gewichtung der *kinematischen Innovation*  $\bar{\mathbf{y}}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1}$  wird das Kronecker-Produkt mit der Einheitsmatrix verwendet, weswegen die eigentliche Verstärkungsmatrix aus Skalarmatrizen besteht. Die  $s \times s$ -Parametermatrix  $\tilde{\mathbf{P}}_{k|k}$  ist ebenfalls unabhängig von der räumlichen Dimension des Schätzproblems; erst das Kronecker-Produkt mit der (unbekannten) Zustandsmatrix  $\mathbf{X}_k$  bestimmt die Kovarianzmatrix der Dichte  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k)$ ; siehe Gleichung (2.26). Zur Angabe einer kinematischen Schätzfehlerkovarianzmatrix benötigen wir allerdings die Marginaldichte  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k)$ . Deren Berechnung erfordert einen speziellen Ansatz, der in Abschnitt 2.4 vorgestellt wird.

Die Aktualisierungsgleichungen für die Parameter der Dichte  $p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_k) = \mathcal{IW}_d(\mathbf{X}_k; \nu_{k|k}, \tilde{\mathbf{X}}_{k|k})$  erhalten wir durch Auswerten der restlichen Ausdrücke in Gleichung (2.27), d. h.

$$p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_k) p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{Y}_{k-1}) = |2\pi z_d \mathbf{X}_k|^{-\frac{1}{2}(n_k-1)} n_k^{-\frac{1}{2}d} \text{etr}\left(-\frac{1}{2} \bar{\mathbf{Y}}_k (z_d \mathbf{X}_k)^{-1}\right) \cdot \mathcal{N}_d(\bar{\mathbf{y}}_k; \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1}, \tilde{\mathbf{S}}_{k|k-1} \mathbf{X}_k) \mathcal{IW}_d(\mathbf{X}_k; \nu_{k|k-1}, \tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}). \quad (2.28)$$

Unter Berücksichtigung der *Innovationsmatrix*

$$\mathbf{N}_{k|k-1} = (\bar{\mathbf{y}}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1})(\bar{\mathbf{y}}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1})^\top \quad (2.29)$$

lässt sich die Normalverteilung auch wie folgt darstellen:

$$\mathcal{N}_d(\bar{\mathbf{y}}_k; \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1}, \tilde{\mathbf{S}}_{k|k-1} \mathbf{X}_k) = |2\pi \tilde{\mathbf{S}}_{k|k-1} \mathbf{X}_k|^{-\frac{1}{2}} \text{etr}\left(-\frac{1}{2} \mathbf{N}_{k|k-1} (\tilde{\mathbf{S}}_{k|k-1} \mathbf{X}_k)^{-1}\right).$$

Die Matrixschreibweise der Normalverteilung ermöglicht das Zusammenfassen der verschiedenen  $\mathbf{X}_k$ -Terme in Gleichung (2.28), woraufhin sich die gesuchten Gleichungen zur Aktualisierung der matrixvariablen Dichte  $p(\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_k)$  angeben lassen:

$$\tilde{\mathbf{X}}_{k|k} = \tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \tilde{\mathbf{S}}_{k|k-1}^{-1} \mathbf{N}_{k|k-1} + \bar{\mathbf{Y}}_k / z_d \quad (2.30)$$

$$\nu_{k|k} = \nu_{k|k-1} + n_k. \quad (2.31)$$

An dieser Stelle ist zu beachten, dass die Parametermatrix  $\tilde{\mathbf{X}}_{k|k}$  selbst nicht die Schätzung der Zustandsmatrix  $\mathbf{X}_k$  ist, sondern dass sie erst im Zusammenspiel mit  $\nu_{k|k}$  erlaubt, den Schätzwert  $\mathbf{X}_{k|k}$  zu berechnen:

$$\mathbf{X}_{k|k} := \mathbb{E}[\mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_k] = \frac{\tilde{\mathbf{X}}_{k|k}}{\nu_{k|k} - d - 1} \quad (\nu_{k|k} - d > 1). \quad (2.32)$$

Damit sind alle notwendigen Filtergleichungen zur Aktualisierung formuliert.

Die verbleibenden Terme in Gleichung (2.28) sind unabhängig vom gemeinsamen Systemzustand  $(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k)$  und bilden die Normierungskonstante  $p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{Y}_{k-1})$  der Bayes'schen Regel (2.15):

$$p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{Y}_{k-1}) = \frac{\Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k}}{2}\right)}{\Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k-1}}{2}\right)} \pi^{-\frac{1}{2}n_k d} (\tilde{\mathbf{S}}_{k|k-1})^{-\frac{1}{2}d} z_d^{-\frac{1}{2}(n_k-1)d} n_k^{-\frac{1}{2}d} |\tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}|^{\frac{1}{2}\nu_{k|k-1}} |\tilde{\mathbf{X}}_{k|k}|^{-\frac{1}{2}\nu_{k|k}}. \quad (2.33)$$

Ihre Berechnung erfordert demnach keine numerischen Integrationsverfahren. Die Normierungskonstante wird in [78] nicht explizit angegeben, da sie zum Durchführen des Aktualisierungsschrit-

tes nicht benötigt wird. Allerdings lassen sich mit  $p(\mathbf{Y}_k | \mathcal{Y}_{k-1})$  sogenannte *Messwahrscheinlichkeiten* berechnen – sei es beispielsweise für die *erwartete mittlere Messung* oder die *erwartete Messstreuung*; siehe Abschnitt 2.5.

### 2.3.3 Filtergleichungen zur Prädiktion

Im Prädiktionsschritt ist bei der Modellierung der Systemdynamik sicherzustellen, dass der Verteilungstyp der konjugierten A-priori-Dichte erhalten bleibt. Für die Vorhersage der Kinematik bedeutet das: Ausgehend von der vorherigen Schätzung

$$p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{X}_k, \mathcal{Y}_{k-1}) = \mathcal{N}_{sd}(\mathbf{x}_{k-1}; \mathbf{x}_{k-1|k-1}, \tilde{\mathbf{P}}_{k-1|k-1} \otimes \mathbf{X}_k)$$

ist eine Transitionsdichte  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{x}_{k-1})$  gesucht, so dass sich nach Auswerten des Integrals (2.16) die Dichte  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathcal{Y}_{k-1})$  aus Gleichung (2.24) ergibt. In [78] wird zu diesem Zweck die Systemgleichung (2.4) des Kalman-Filters angesetzt – aber mit einem entscheidenden Unterschied: Aufgrund des Kronecker-Produktes in der Kovarianzmatrix von  $p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{X}_k, \mathcal{Y}_{k-1})$  modelliert [78] die Ungenauigkeiten im Dynamikmodell durch ein gleichanteilsfreies und mit der Varianz  $\tilde{\mathbf{Q}} \otimes \mathbf{X}_k$  normalverteiltes Prozessrauschen. Infolgedessen lässt sich die Prädiktionsgleichung (2.16) geschlossen lösen, während das Kronecker-Produkt in  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathcal{Y}_{k-1})$  erhalten bleibt. Die Abhängigkeit des Prozessrauschens von der Objektausdehnung  $\mathbf{X}_k$  ermöglicht laut [78, 81] nicht nur das Einhalten des Bayes'schen Formalismus, sondern auch das Berücksichtigen adaptiver Ungenauigkeiten im kinematischen Dynamikmodell: Das Bewegungsverhalten einer kleineren Gruppe von Zielen lasse sich beispielsweise präziser beschreiben als das einer größeren, da ihr Verhalten eher mit dem eines Einzelobjektes vergleichbar sei. Bei einer sich auflösenden Gruppe könne dagegen die zunehmende Unbestimmtheit der Gruppenbewegung imitiert werden – als Folge der zunehmenden Varianz des Prozessrauschens bei einer sich vergrößernden Ausdehnung  $\mathbf{X}_k$ .

Demzufolge beruht die Prädiktion der Kinematik in [78] auf der linearen Systemgleichung

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{v}_k \quad \text{mit} \quad \mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}_{sd}(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{Q}} \otimes \mathbf{X}_k).$$

Dabei wird die Systemmatrix als  $\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}} \otimes \mathbf{I}_d$  mit einer  $s \times s$ -Matrix  $\tilde{\mathbf{F}}$  aufgefasst, für die sich im Fall  $s = 2$  bei einem Bewegungsmodell mit näherungsweise konstanter Geschwindigkeit [41]

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

notieren lässt.  $T$  bezeichnet den Zeitraum zwischen dem alten und neuen Messzeitpunkt, d. h.  $T := t_k - t_{k-1}$ . Aus diesem Dynamikmodell wird in [78] die Transitionsdichte

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{x}_{k-1}) = \mathcal{N}_{sd}(\mathbf{x}_k; \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1}, \tilde{\mathbf{Q}} \otimes \mathbf{X}_k) \quad (2.34)$$

abgeleitet, mit der sich die Prädiktionsgleichung (2.16) in geschlossener Form auswerten<sup>15</sup> lässt. Als

<sup>15</sup>Nach Anwenden der Produktformel für Normalverteilungen (B.11) kann die Integration über  $\mathbf{x}_{k-1}$  durchgeführt werden. Beim Berechnen der aktualisierten Parametermatrix ist die folgende Umformung zu beachten:

$$\mathbf{F}(\tilde{\mathbf{P}}_{k-1|k-1} \otimes \mathbf{X}_k)\mathbf{F}^\top + \tilde{\mathbf{Q}} \otimes \mathbf{X}_k = (\tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{P}}_{k-1|k-1}\tilde{\mathbf{F}}^\top + \tilde{\mathbf{Q}}) \otimes \mathbf{X}_k = \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1} \otimes \mathbf{X}_k.$$

Ergebnis erhalten wir für die Prädiktion der Kinematik

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k|k-1} &= \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1|k-1} \\ \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1} &= \tilde{\mathbf{F}}\tilde{\mathbf{P}}_{k-1|k-1}\tilde{\mathbf{F}}^\top + \tilde{\mathbf{Q}},\end{aligned}$$

womit alle Parameter der Dichte  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathcal{Y}_{k-1})$  vorliegen.

Diese Vorgehensweise soll in [78] auch zur Prädiktion der Ausdehnung verwendet werden: Ausgehend von der vorangegangenen Schätzung

$$p(\mathbf{X}_{k-1} | \mathcal{Y}_{k-1}) = \mathcal{IW}_d(\mathbf{X}_{k-1}; \nu_{k-1|k-1}, \tilde{\mathbf{X}}_{k-1|k-1})$$

ist eine Transitionsdichte  $p(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1})$  gesucht, so dass sich nach Auswerten des Integrals (2.17) die Dichte  $p(\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_{k-1})$  aus Gleichung (2.25) ergibt. Zum Herleiten eines solchen Dynamikmodells wird in [78] angenommen, dass sich die geschätzte Ausdehnung zwischen zwei Messzeitpunkten tendenziell nicht ändert, d. h.

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1}] = \mathbf{X}_{k-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{X}_{k|k-1} = \mathbf{X}_{k-1|k-1}, \quad (2.35)$$

während die Schätzunsicherheit mit zunehmender Länge des Zeitintervalls  $T$  ansteigen soll. Allerdings ist laut [173] keine Transitionsdichte  $p(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1})$  bekannt, die dafür sorgt, dass  $p(\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_{k-1})$  wieder einer inversen Wishart-Verteilungsdichte entspricht. In [78] wird diese Problematik an einem Beispiel verdeutlicht: Für die Transitionsdichte wird dort die Dichtefunktion einer Wishart-Verteilung angesetzt, d. h.

$$p(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1}) = \mathcal{W}_d(\mathbf{X}_k, \delta, \mathbf{X}_{k-1}/\delta)$$

mit  $\mathbb{E}[\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1}] = \mathbf{X}_{k-1}$ , wobei  $\delta$  ( $\delta > d - 1$ ) als Parameter des Dynamikmodells das Prozessrauschen modelliert. Nach Anwenden der Produktformel für Wishart-Verteilungen (B.22) kann die Integration über  $\mathbf{X}_{k-1}$  in Gleichung (2.17) durchgeführt werden. Wir erhalten die Dichtefunktion (B.10) einer *verallgemeinerten matrixvariablen Beta-Verteilung zweiter Art* (für engl. *Generalized Matrix-Variate Beta Type II Distribution*), die im Sinne einer konjugierten A-priori-Verteilung durch die inverse Wishart-Verteilungsdichte (2.25) approximiert werden muss:

$$\begin{aligned}p(\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_{k-1}) &= \int \mathcal{W}_d(\mathbf{X}_k, \delta, \mathbf{X}_{k-1}/\delta) \mathcal{IW}_d(\mathbf{X}_{k-1}; \nu_{k-1|k-1}, \tilde{\mathbf{X}}_{k-1|k-1}) d\mathbf{X}_{k-1} \\ &= \mathcal{GB}_d^{\text{II}}(\mathbf{X}_k; \frac{1}{2}\delta, \frac{1}{2}\nu_{k-1|k-1}, \tilde{\mathbf{X}}_{k-1|k-1}/\delta, \mathbf{0}) \approx \mathcal{IW}_d(\mathbf{X}_k; \nu_{k|k-1}, \tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1})\end{aligned}$$

mit  $\mathbb{E}[\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_{k-1}] = \mathbf{X}_{k-1|k-1}$ . In [78] wird nicht explizit angegeben, wie sich diese Approximation durchführen<sup>16</sup> lässt. Stattdessen wird die Frage aufgeworfen, ob sich dieser Aufwand für ein derartiges Dynamikmodell lohnt: Die zugehörige Transitionsdichte wird letztlich nur durch den skalaren Modellparameter  $\delta$  beeinflusst, wohingegen das geschätzte Ellipsoid ohnehin wegen  $\mathbf{X}_{k|k-1} = \mathbf{X}_{k-1|k-1}$  identisch bleibt.

Als Alternative wird in [78] ein heuristisches Dynamikmodell vorgeschlagen, das auf der gewünschten Vorgabe  $\mathbf{X}_{k|k-1} = \mathbf{X}_{k-1|k-1}$  (siehe Gleichung (2.35)) beruht: Mit diesem Ansatz erhalten

<sup>16</sup>Der Forschungsbericht [51] befasst sich u. a. mit der Frage, wie die Dichtefunktion einer verallgemeinerten matrixvariablen Beta-Verteilung zweiter Art durch eine inverse Wishart-Verteilungsdichte approximiert werden kann.

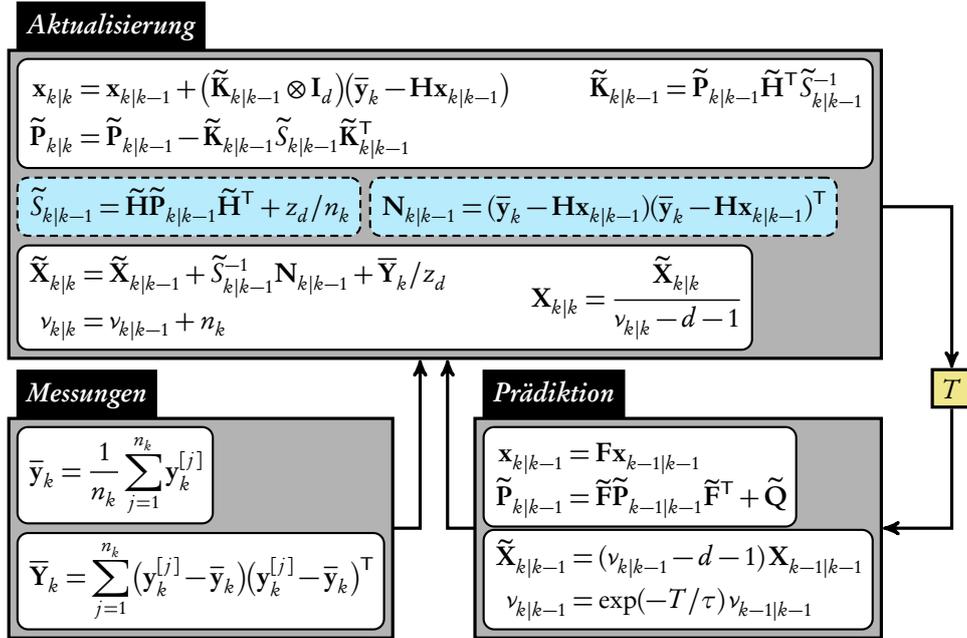


Abbildung 2.2: Verarbeitungszyklus des Bayes'schen Ansatzes zum Verfolgen ausgedehnter Zielobjekte und grobstrukturierter Objektgruppen aus [75, 78, 81, 82].

wir unter Beachtung von Gleichung (2.32) zunächst eine Vorhersage für die Parametermatrix, d. h.

$$\tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1} = \frac{\nu_{k|k-1} - d - 1}{\nu_{k-1|k-1} - d - 1} \tilde{\mathbf{X}}_{k-1|k-1}$$

mit einem noch zu bestimmenden Parameter  $\nu_{k|k-1}$ , der laut [78] ein Maß für die Genauigkeit der Ausdehnungsschätzung darstellt. Diese Auffassung deckt sich mit der Aktualisierung (2.31), wonach zur Prädiktion  $\nu_{k|k-1}$  die Anzahl der Messungen hinzuaddiert wird: Das *Vertrauen* in einen geschätzten Zustand ist umso größer, je mehr Information sich aus verschiedenen Messungen gewinnen lässt. Aufgrund der Ungenauigkeiten im Dynamikmodell muss die Prädiktion diesem *Aktualisierungseffekt* entgegenwirken, d. h.  $\nu_{k|k-1} \leq \nu_{k-1|k-1}$ . Dieser *Vertrauensverlust* soll mit der Zeit  $T$  zunehmen, weshalb in [78] das folgende Modell gewählt wird:

$$\nu_{k|k-1} = \exp(-T/\tau)\nu_{k-1|k-1}.$$

$\tau$  bezeichnet eine Zeitkonstante, mit der sich das Prozessrauschen einstellen lässt; ein größerer Wert für  $\tau$  verringert die angenommene Agilität der Objektausdehnung. Damit sind alle notwendigen Filtergleichungen zur Prädiktion formuliert.

### Verarbeitungszyklus des Tracking-Verfahrens

Abbildung 2.2 skizziert einen Verarbeitungszyklus des Tracking-Verfahrens aus [75, 78, 81, 82]: Die Ausdrücke für  $\tilde{\mathbf{S}}_{k|k-1}$  und  $\mathbf{N}_{k|k-1}$  sind farblich hervorgehoben, da sie einen kinematischen Einfluss auf die Parameter der Ausdehnungsschätzung erlauben und somit die *Verbundschätzung* von Kinematik und Ausdehnung symbolisieren. Darüber hinaus ermöglicht die Innovationsmatrix  $\mathbf{N}_{k|k-1}$  ein Update der Ausdehnungsschätzung mit nur einer Messung, d. h. im Fall  $n_k = 1$  trotz  $\bar{\mathbf{Y}}_k = \mathbf{0}$ . Cha-

rakteristisch für dieses Verfahren ist obendrein, dass die Schätzgrößen durch *indirekte Messparameter* aktualisiert werden – mit der mittleren Messung  $\bar{y}_k$  und der Messstreuung  $\bar{Y}_k$ . *Indirekt* bedeutet, dass die Parameter  $\bar{y}_k$  und  $\bar{Y}_k$  nicht vom Sensor gemessen, sondern aus den ursprünglichen Messdaten abgeleitet werden, so dass sich alle  $n_k$  Messungen in einem einzigen Aktualisierungsschritt berücksichtigen lassen. Das Berechnen von  $\bar{y}_k$  und  $\bar{Y}_k$  kann demnach als ein *Vorverarbeitungsschritt* interpretiert werden und wird daher als separater Block in Abbildung 2.2 dargestellt; vgl. auch [171].

## 2.4 Weitere Einsichten: Berechnen der kinematischen Marginaldichte

Die folgenden Abschnitte stellen neue Ergebnisse vor und ermöglichen weitere Einsichten in den Bayes'schen Ansatz zur Verfolgung ausgedehnter Zielobjekte und grobstrukturierter Objektgruppen, die über die ursprünglichen Arbeiten [75, 78, 81, 82] hinausgehen. In diesem Abschnitt liegt der Schwerpunkt auf der vollständigen Berechnung der kinematischen Marginaldichte, da ihre Herleitung in [78, 81] nur für den Spezialfall  $s = 1$  gültig ist; siehe [171].

Mit den Parametern der bedingten Verbunddichte  $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k)$  aus Gleichung (2.26) lassen sich nicht alle interessierenden Größen direkt bestimmen: Beispielsweise wird zur Angabe des geschätzten Ausdehnungsellipsoids erst die Marginaldichte der Objektausdehnung benötigt, die sich wegen  $\int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathcal{Y}_k) d\mathbf{x}_k = 1$  unmittelbar zu

$$p(\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k) = \int p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k) d\mathbf{x}_k = \mathcal{I}\mathcal{W}_d(\mathbf{X}_k; \nu_{k|k}, \tilde{\mathbf{X}}_{k|k}) \quad (2.36)$$

ergibt. Mit den Parametern dieser Marginaldichte lässt sich die geschätzte Objektausdehnung  $\mathbf{X}_{k|k}$  aus Gleichung (2.32) berechnen, wohingegen wir zum Auswerten der kinematischen Schätzfehlervarianz zunächst die kinematische Marginaldichte benötigen, d. h.

$$p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k) = \int p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k) d\mathbf{X}_k = \int \mathcal{N}_{sd}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k}, \tilde{\mathbf{P}}_{k|k} \otimes \mathbf{X}_k) \mathcal{I}\mathcal{W}_d(\mathbf{X}_k; \nu_{k|k}, \tilde{\mathbf{X}}_{k|k}) d\mathbf{X}_k. \quad (2.37)$$

### 2.4.1 Analyse des Berechnungsansatzes aus [78]

Zum Bestimmen der kinematischen Marginaldichte  $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k)$  müssen beide Dichtefunktionen in Gleichung (2.37) derart zusammengefasst werden, dass die Integration über die Zustandsmatrix  $\mathbf{X}_k$  durchgeführt werden kann – eine Aufgabe, die besonders durch das Kronecker-Produkt  $\tilde{\mathbf{P}}_{k|k} \otimes \mathbf{X}_k$  erschwert wird. Zu diesem Zweck wird in [78] zuerst der Exponent der normalverteilten Dichte  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathcal{Y}_k)$  umgeformt, d. h. mit

$$(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k})^\top = \left[ \tilde{\mathbf{r}}_k^{[1]\top}, \dots, \tilde{\mathbf{r}}_k^{[s]\top} \right] \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^{-1} = \begin{bmatrix} (\tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^{-1})^{[11]} & \dots & (\tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^{-1})^{[1s]} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^{-1})^{[s1]} & \dots & (\tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^{-1})^{[ss]} \end{bmatrix}$$

ergibt sich u. a.

$$(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k})^\top (\tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^{-1} \otimes \mathbf{X}_k^{-1}) (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k}) = \text{tr} \left( \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s (\tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^{-1})^{[ij]} \tilde{\mathbf{r}}_k^{[j]} \tilde{\mathbf{r}}_k^{[i]\top} \mathbf{X}_k^{-1} \right).$$

Die Darstellung des Zustandsvektors mit Subvektoren ermöglicht eine alternative Formulierung der bedingten Verbundverteilungsdichte:

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k) = \frac{\Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k} + s}{2}\right) |\tilde{\mathbf{X}}_{k|k}|^{\frac{1}{2}\nu_{k|k}}}{\pi^{\frac{1}{2}s d} \Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k}}{2}\right) |\tilde{\mathbf{P}}_{k|k}|^{\frac{1}{2}d}} |\tilde{\mathbf{Z}}_k|^{-\frac{1}{2}(\nu_{k|k} + s)} \mathcal{I}W_d(\mathbf{X}_k; \nu_{k|k} + s, \tilde{\mathbf{Z}}_k) \quad (2.38)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{Z}}_k := \tilde{\mathbf{X}}_{k|k} + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s (\tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^{-1})^{[ij]} \tilde{\mathbf{r}}_k^{[j]} \tilde{\mathbf{r}}_k^{[i]\top}.$$

Damit kann in [78] die Integration entsprechend  $\int \mathcal{I}W_d(\mathbf{X}_k; \nu_{k|k} + s, \tilde{\mathbf{Z}}_k) d\mathbf{X}_k = 1$  durchgeführt werden. Unter Berücksichtigung von

$$|\tilde{\mathbf{Z}}_k| = |\tilde{\mathbf{X}}_{k|k}| \cdot \left| \mathbf{I}_d + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s (\tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^{-1})^{[ij]} \tilde{\mathbf{r}}_k^{[j]} \tilde{\mathbf{r}}_k^{[i]\top} \tilde{\mathbf{X}}_{k|k}^{-1} \right| \quad \text{und} \quad |\tilde{\mathbf{P}}_{k|k}|^{\frac{1}{2}d} |\tilde{\mathbf{X}}_{k|k}|^{\frac{1}{2}s} = |\tilde{\mathbf{P}}_{k|k} \otimes \tilde{\mathbf{X}}_{k|k}|^{\frac{1}{2}}$$

soll der Ausdruck für die kinematische Marginaldichte in eine interpretierbare Darstellung umgewandelt werden, woraufhin sich

$$p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k) = \frac{\Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k} + s}{2}\right) |\tilde{\mathbf{P}}_{k|k} \otimes \tilde{\mathbf{X}}_{k|k}|^{-\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}s d} \Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k}}{2}\right)} \left| \mathbf{I}_d + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s (\tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^{-1})^{[ij]} \tilde{\mathbf{r}}_k^{[j]} \tilde{\mathbf{r}}_k^{[i]\top} \tilde{\mathbf{X}}_{k|k}^{-1} \right|^{-\frac{1}{2}(\nu_{k|k} + s)}$$

ergibt. Mit Hilfe des Zusammenhanges (A.19) soll dieses Ergebnis in die Dichtefunktion (B.2) einer *multivariaten  $t$ -Verteilung* [88] überführt werden, wozu die Doppelsumme in einer geschlossenen Vektor- und Matrixform zu schreiben ist. In [171] wird darauf hingewiesen, dass die Umformung in [78, Gleichung (118) bis (120)] nur für den Spezialfall  $s = 1$  möglich ist, da im Allgemeinen

$$\sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s (\tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^{-1})^{[ij]} \tilde{\mathbf{r}}_k^{[j]} \tilde{\mathbf{r}}_k^{[i]\top} \tilde{\mathbf{X}}_{k|k}^{-1} \neq (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k})(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k|k})^\top (\tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^{-1} \otimes \tilde{\mathbf{X}}_{k|k}^{-1}) \quad (2.39)$$

für  $s > 1$  gilt. Während der linke Teil des Ausdruckes einer  $d \times d$ -Matrix entspricht, steht rechts vom Ungleichheitszeichen eine  $sd \times sd$ -Matrix. Daher ist die Interpretation von  $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k)$  als die Dichte einer multivariaten  $t$ -Verteilung auf den Fall  $s = 1$  begrenzt; vgl. [78, Gleichung (66)] oder [169, Gleichung (20)]. Die gleiche Einschränkung gilt für die aus  $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k)$  abgeleitete Schätzfehlerkovarianzmatrix  $\text{Var}[\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k]$ ; vgl. [169, Gleichung (22)]. Grundsätzlich stellt sich das Schätzproblem bei  $s = 1$  wie folgt dar: Der Zustandsvektor  $\mathbf{x}_k$  bestünde lediglich aus einer  $d$ -dimensionalen Positionskomponente, die Parametermatrix  $\tilde{\mathbf{P}}_{k|k}$  wäre eine  $1 \times 1$ -Matrix und die Messmatrix  $\mathbf{H}$  entspräche einer  $d \times d$ -Einheitsmatrix. In [78] selbst gilt  $s = 3$ , da sich dort der Zustandsvektor aus einer Positions-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponente zusammensetzt.

## 2.4.2 Allgemeine Berechnung der kinematischen Marginaldichte

In vielen Anwendungsfällen ist von  $s > 1$  auszugehen. Deshalb benötigen wir eine kinematische Marginaldichte, mit der sich ein allgemeingültiger Ausdruck für die Schätzfehlervarianz angeben lässt. In [171] wird ein anderer Ansatz zum Berechnen des Integrals (2.37) vorgeschlagen: Ausgehend von  $\mathbf{x}_k^\top = [\mathbf{r}_k^{[1]\top}, \dots, \mathbf{r}_k^{[s]\top}]$  und  $\mathbf{x}_{k|k}^\top = [\mathbf{r}_{k|k}^{[1]\top}, \dots, \mathbf{r}_{k|k}^{[s]\top}]$  formulieren wir den Zustandsvektor und

seinen Erwartungswert als zeilenweise Vektorisierung der  $s \times d$ -Zustandsmatrizen  $\Xi_k$  und  $\Xi_{k|k}$ , so dass sich mit dem  $\text{vec}$ -Operator<sup>17</sup>

$$\left. \begin{aligned} \Xi_k &= \begin{bmatrix} \mathbf{r}_k^{[1]\top} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_k^{[s]\top} \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}_k &= \text{vec}(\Xi_k^\top) \end{aligned} \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{aligned} \Xi_{k|k} &= \begin{bmatrix} \mathbf{r}_{k|k}^{[1]\top} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{k|k}^{[s]\top} \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}_{k|k} &= \text{vec}(\Xi_{k|k}^\top) \end{aligned} \right. \quad (2.40)$$

ergeben. Unter Berücksichtigung der Umformung (A.17) kann die multivariate Normalverteilung  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k)$  in ihr *matrixvariates Pendant* überführt werden:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}sd} |\tilde{\mathbf{P}}_{k|k}|^{-\frac{1}{2}d} |\mathbf{X}_k|^{-\frac{1}{2}s} \text{etr} \left( -\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^{-1} (\Xi_k - \Xi_{k|k}) \mathbf{X}_k^{-1} (\Xi_k - \Xi_{k|k})^\top \right) \\ &= \mathcal{N}_{s,d}(\Xi_k; \Xi_{k|k}, \tilde{\mathbf{P}}_{k|k} \otimes \mathbf{X}_k). \end{aligned}$$

Demnach entspricht  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{Y}_k)$  der Dichtefunktion einer *matrixvariaten Normalverteilung* [55]. Die bedingte Verbundverteilungsdichte können wir wie folgt darstellen:

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_k) = \frac{|\tilde{\mathbf{X}}_{k|k}|^{\frac{1}{2}\nu_{k|k}} |\mathbf{X}_k|^{-\frac{1}{2}(\nu_{k|k} + s + d + 1)}}{2^{\frac{1}{2}(\nu_{k|k} + s)d} \pi^{\frac{1}{2}sd} \Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k}}{2}\right) |\tilde{\mathbf{P}}_{k|k}|^{\frac{1}{2}d}} \text{etr} \left( -\frac{1}{2} \tilde{\mathbf{Z}}_k \mathbf{X}_k^{-1} \right)$$

mit

$$\tilde{\mathbf{Z}}_k := \tilde{\mathbf{X}}_{k|k} + (\Xi_k - \Xi_{k|k})^\top \tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^{-1} (\Xi_k - \Xi_{k|k}). \quad (2.41)$$

Des Weiteren lässt sich  $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_k)$  auf den Ausdruck (2.38) mit der inversen Wishart-Verteilung  $\mathcal{IW}_d(\mathbf{X}_k; \nu_{k|k} + s, \tilde{\mathbf{Z}}_k)$  zurückführen – allerdings mit  $\tilde{\mathbf{Z}}_k$  aus Gleichung (2.41), wobei wegen

$$(\Xi_k - \Xi_{k|k})^\top \tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^{-1} (\Xi_k - \Xi_{k|k}) = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s (\tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^{-1})^{[ji]} \tilde{\mathbf{r}}_k^{[j]} \tilde{\mathbf{r}}_k^{[i]\top} = \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s (\tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^{-1})^{[ij]} \tilde{\mathbf{r}}_k^{[j]} \tilde{\mathbf{r}}_k^{[i]\top}$$

ein direkter Bezug zu [78] besteht. Mit diesem Zusammenhang lässt sich Gleichung (2.39) auch ohne Ungleichheitszeichen formulieren.

Nach Auswerten der Integration über  $\mathbf{X}_k$  erhalten wir letztlich das gesuchte Ergebnis für die kinematische Marginaldichte, d. h.

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k) = \frac{\Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k} + s}{2}\right) |\tilde{\mathbf{X}}_{k|k}|^{-\frac{1}{2}s}}{\pi^{\frac{1}{2}sd} \Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k}}{2}\right) |\tilde{\mathbf{P}}_{k|k}|^{\frac{1}{2}d}} \left| \mathbf{I}_d + \tilde{\mathbf{X}}_{k|k}^{-1} (\Xi_k - \Xi_{k|k})^\top \tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^{-1} (\Xi_k - \Xi_{k|k}) \right|^{-\frac{1}{2}(\nu_{k|k} + s)}$$

und somit<sup>18</sup>

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k) = \mathcal{T}_{s,d}(\Xi_k; \nu_{k|k} - d + 1, \Xi_{k|k}, \tilde{\mathbf{P}}_{k|k}, \tilde{\mathbf{X}}_{k|k}). \quad (2.42)$$

Die Schreibweise als Dichtefunktion (B.4) einer *matrixvariaten  $t$ -Verteilung* [55] vereinfacht die Interpretation des Ergebnisses für die kinematische Marginaldichte  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k)$ : Der Zusammenhang

<sup>17</sup>Siehe [59, Kapitel 16] oder Abschnitt A.2.1 im Anhang.

<sup>18</sup>An dieser Stelle ist  $\mathcal{T}_{d,s}(\Xi_k^\top; \nu_{k|k} - d + 1, \Xi_{k|k}^\top, \tilde{\mathbf{X}}_{k|k}, \tilde{\mathbf{P}}_{k|k}) = \mathcal{T}_{s,d}(\Xi_k; \nu_{k|k} - d + 1, \Xi_{k|k}, \tilde{\mathbf{P}}_{k|k}, \tilde{\mathbf{X}}_{k|k})$  zu beachten.

zwischen den Dichtefunktionen von  $\Xi_k$  und  $\text{vec}(\Xi_k^T)$  in  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathcal{Y}_k)$ , d. h.

$$\mathcal{N}_{s,d}(\Xi_k; \Xi_{k|k}, \tilde{\mathbf{P}}_{k|k} \otimes \mathbf{X}_k) = \mathcal{N}_{s,d}(\text{vec}(\Xi_k^T); \text{vec}(\Xi_{k|k}^T), \tilde{\mathbf{P}}_{k|k} \otimes \mathbf{X}_k),$$

ist ein besonderes Merkmal der matrixvariaten Normalverteilung. Bei der matrixvariaten  $t$ -Verteilung ist dieser Rückschluss im Allgemeinen nicht möglich; vgl. Abschnitt B.3.2 und [55, Seite 140]: Lediglich im Fall  $s = 1$  oder  $d = 1$  ergibt sich aus  $\mathcal{T}_{s,d}(\Xi_k; \nu_{k|k} - d + 1, \Xi_{k|k}, \tilde{\mathbf{P}}_{k|k}, \tilde{\mathbf{X}}_{k|k})$  in Gleichung (2.42) eine multivariate  $t$ -Verteilung für  $\text{vec}(\Xi_k^T)$ , d. h. für  $p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k)$ .

Allerdings können wir aus Gleichung (2.42) die uns interessierenden Momente ableiten: Laut [55, Seite 46] wird der Erwartungswert einer Zufallsmatrix *elementweise* berechnet. Es ist demnach unerheblich, ob wir den Erwartungswertvektor einer vektorisierten Zufallsmatrix oder die vektorisierte Erwartungswertmatrix einer Zufallsmatrix betrachten, da  $\text{vec}$ - und Erwartungswertoperator vertauschbar sind. Demzufolge lässt sich mit

$$E[\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k] = E[\text{vec}(\Xi_k^T) | \mathcal{Y}_k] = \text{vec}(E[\Xi_k^T | \mathcal{Y}_k]) = \text{vec}(\Xi_{k|k}^T) = \mathbf{x}_{k|k}$$

bestätigen, dass  $\mathbf{x}_{k|k}$  an dieser Stelle tatsächlich dem bedingten Erwartungswert (2.12) entspricht. Darüber hinaus können wir – unter Berücksichtigung der speziellen Definition (B.3) einer Kovarianzmatrix für Zufallsmatrizen [55] – den Zusammenhang

$$\text{Var}[\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k] = \text{Var}[\text{vec}(\Xi_k^T) | \mathcal{Y}_k] = \text{cov}[\text{vec}(\Xi_k^T) | \mathcal{Y}_k] = \text{cov}[\Xi_k | \mathcal{Y}_k]$$

formulieren, wodurch sich die gesuchte Schätzfehlerkovarianzmatrix der Kinematik zu

$$\text{Var}[\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k] = \frac{1}{\nu_{k|k} - d - 1} (\tilde{\mathbf{P}}_{k|k} \otimes \tilde{\mathbf{X}}_{k|k}) = \tilde{\mathbf{P}}_{k|k} \otimes \mathbf{X}_{k|k}$$

ergibt; siehe (B.5). Im Vergleich zur Kovarianzmatrix  $\tilde{\mathbf{P}}_{k|k} \otimes \mathbf{X}_k$  der bedingten Dichte  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathcal{Y}_k)$  ist lediglich die wahre (aber unbekannte) Ausdehnung  $\mathbf{X}_k$  durch ihre Schätzung  $\mathbf{X}_{k|k}$  ersetzt worden.

Als Ergänzung zu den bisherigen Ausführungen berücksichtigt Tabelle 2.2 auch die Ergebnisse für die zwei Spezialfälle  $s = 1$  und  $d = 1$ , in denen von der matrixvariaten  $t$ -Verteilung (2.42) auf eine multivariate  $t$ -Verteilung geschlossen werden kann. Insbesondere der Fall  $d = 1$  wird noch im Rahmen dieser Arbeit eine Rolle spielen, da es sich bei dem verwendeten Straßenkoordinatensystem in Kapitel 5 um ein eindimensionales Koordinatensystem handelt.

## 2.5 Weitere Einsichten: Berechnen von Messwahrscheinlichkeiten

Das Verfahren [75, 78, 81, 82] zum Tracking eines ausgedehnten Objektes oder einer Gruppe von benachbarten Zielen stellt ein *Bayes'sches Filter* dar; seine Aktualisierungsgleichungen beruhen auf der Bayes'schen Regel (2.15). Der Term  $p(\mathbf{Y}_k | \mathcal{Y}_{k-1})$  bezeichnet in diesem Kontext nicht nur eine Konstante zur Normierung der A-posteriori-Dichte  $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k)$ , sondern auch die sogenannte *Messwahrscheinlichkeit*, die Rückschlüsse auf die *erwarteten Messungen* erlaubt. Mit Messwahrscheinlichkeiten bewerten wir die Differenz zwischen erwarteten Messungen und tatsächlich gemessenen Sensordaten, so dass sich beim Tracking mit Straßenkarteninformationen in Kapitel 5 beurteilen lässt, auf welchen Teilstücken der Straße die zu schätzenden Bodenziele zu vermuten sind; siehe

	$p(\mathbf{x}_k   \mathcal{Y}_k)$	$E[\mathbf{x}_k   \mathcal{Y}_k]$	$\text{Var}[\mathbf{x}_k   \mathcal{Y}_k]$
$d = 1$ :	$\mathcal{T}_s(\mathbf{x}_k; \nu_{k k}, \mathbf{x}_{k k}, \tilde{\mathbf{P}}_{k k} \tilde{\mathbf{X}}_{k k} / \nu_{k k})$	$\mathbf{x}_{k k}$	$\tilde{\mathbf{P}}_{k k} \mathbf{X}_{k k}$
$s = 1$ :	$\mathcal{T}_d(\mathbf{x}_k; \tilde{\nu}_{k k}, \mathbf{x}_{k k}, \tilde{\mathbf{P}}_{k k} \tilde{\mathbf{X}}_{k k} / \tilde{\nu}_{k k})$	$\mathbf{x}_{k k}$	$\tilde{\mathbf{P}}_{k k} \mathbf{X}_{k k}$
$s \neq 1, d \neq 1$ :	$\mathcal{T}_{s,d}(\Xi_k; \tilde{\nu}_{k k}, \Xi_{k k}, \tilde{\mathbf{P}}_{k k}, \tilde{\mathbf{X}}_{k k})$	$\mathbf{x}_{k k}$	$\tilde{\mathbf{P}}_{k k} \otimes \mathbf{X}_{k k}$

**Tabelle 2.2:** Auflistung der Marginalisierungsergebnisse für die bedingte Dichte der Kinematik unter Berücksichtigung der Sonderfälle  $d = 1$  und  $s = 1$ . Zusätzlich werden jeweils die Ausdrücke für den bedingten Erwartungswert und die Schätzfehlervarianz angegeben. Der Parameter  $\tilde{\nu}_{k|k}$  ist eine Abkürzung für<sup>19</sup>  $\tilde{\nu}_{k|k} := \nu_{k|k} - d + 1$ .

auch [174, 175]. Im Gegensatz dazu wird  $p(\mathbf{Y}_k | \mathcal{Y}_{k-1})$  im standardmäßigen Aktualisierungsschritt nicht benötigt; vgl. Abbildung 2.2 oder [78].

Während sich diese Normierungskonstante und Messwahrscheinlichkeit unmittelbar mit den bekannten Parametern des Tracking-Verfahrens berechnen lässt, befasst sich dieser Abschnitt mit der Frage, inwiefern dieser Ausdruck z. B. Rückschlüsse auf die erwartete mittlere Messung und Messstreuung zulässt. Ausgangspunkt ist demnach Gleichung (2.33), d. h.

$$p(\mathbf{Y}_k | \mathcal{Y}_{k-1}) = \left(\Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k-1}}{2}\right)\right)^{-1} \Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k}}{2}\right) \pi^{-\frac{1}{2}n_k d} (\tilde{\mathcal{S}}_{k|k-1})^{-\frac{1}{2}d} z_d^{-\frac{1}{2}(n_k-1)d} n_k^{-\frac{1}{2}d} |\tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}|^{\frac{1}{2}\nu_{k|k-1}} |\tilde{\mathbf{X}}_{k|k}|^{-\frac{1}{2}\nu_{k|k}}.$$

Aus der Aktualisierungsgleichung (2.30) erhalten wir zunächst

$$|\tilde{\mathbf{X}}_{k|k}| = |\tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \bar{\mathbf{Y}}_k / z_d| \cdot |\mathbf{I}_d + \tilde{\mathcal{S}}_{k|k-1}^{-1} (\tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \bar{\mathbf{Y}}_k / z_d)^{-1} \mathbf{N}_{k|k-1}|,$$

woraufhin sich mit der Innovationsmatrix (2.29) der Zusammenhang (A.19) ausnutzen lässt:

$$|\tilde{\mathbf{X}}_{k|k}| = |\tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \bar{\mathbf{Y}}_k / z_d| \cdot \left(1 + (\bar{\mathbf{y}}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1})^T \tilde{\mathcal{S}}_{k|k-1}^{-1} (\tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \bar{\mathbf{Y}}_k / z_d)^{-1} (\bar{\mathbf{y}}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1})\right).$$

Da zum Berechnen der Ausdehnungsschätzung (2.32) u. a.  $\nu_{k|k} - d > 1$  gelten muss, können wir auch die Formel (A.11) für multivariate Gammafunktionen anwenden, so dass sich<sup>20</sup>

$$\frac{\Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k}}{2}\right)}{\Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k-1}}{2}\right)} = \frac{\Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k}}{2}\right)}{\Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k-1}}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k-1}}{2}\right)}{\Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k-1}}{2}\right)} = \frac{\Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k}}{2}\right)}{\Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k-1}}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k}}{2}\right)}{\Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k-1}}{2}\right)} = \frac{\Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k-1}}{2}\right)}{\Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k-1}}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_{k|k}}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_{k|k}-d}{2}\right)}$$

ergibt. Mit der äquivalenten Darstellung sowohl von  $|\tilde{\mathbf{X}}_{k|k}|$  als auch der beiden multivariaten Gammafunktionen lässt sich  $p(\mathbf{Y}_k | \mathcal{Y}_{k-1})$  auch entsprechend

$$p(\mathbf{Y}_k | \mathcal{Y}_{k-1}) = \mathcal{T}_d\left(\bar{\mathbf{y}}_k; \nu_{k|k} - d, \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1}, \tilde{\mathcal{S}}_{k|k-1} (\tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \bar{\mathbf{Y}}_k / z_d) / (\nu_{k|k} - d)\right) \cdot \frac{\Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k-1}}{2}\right) |z_d \tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}|^{\frac{1}{2}\nu_{k|k-1}}}{\pi^{\frac{1}{2}(n_k-1)d} n_k^{\frac{1}{2}d} \Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k-1}}{2}\right) |z_d \tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \bar{\mathbf{Y}}_k|^{\frac{1}{2}(\nu_{k|k}-1)}} \quad (2.43)$$

interpretieren: Ebenso wie die Likelihood-Funktion (2.21) zerfällt die Messwahrscheinlichkeit in einen vektor- und in einen matrixvariablen Teil, wobei ersterer durch die Dichtefunktion (B.2) einer

<sup>19</sup>Die  $s \times d$ -Matrizen  $\Xi_k$  und  $\Xi_{k|k}$  ergeben sich aus Gleichung (2.40), d. h.  $\mathbf{x}_k = \text{vec}(\Xi_k^T)$  und  $\mathbf{x}_{k|k} = \text{vec}(\Xi_{k|k}^T)$ .

<sup>20</sup>Für diese Umformung muss  $\nu_{k|k} - d > 0$  gelten.

multivariaten  $t$ -Verteilung bestimmt wird.

### 2.5.1 Erwartete Einzelmessung ( $n_k = 1$ )

Liegt im Zeitschritt  $k$  nur eine Messung zur Aktualisierung des Systemzustandes vor, gilt  $n_k = 1$ ,  $\bar{\mathbf{Y}}_k = \mathbf{0}$  und  $\nu_{k|k} = \nu_{k|k-1} + 1$ . In diesem Fall entspricht  $p(\mathbf{Y}_k | \mathcal{Y}_{k-1})$  der Messwahrscheinlichkeit der Einzelmessung  $\mathbf{y}_k$ , Gleichung (2.43) reduziert sich auf

$$p(\mathbf{y}_k | \mathcal{Y}_{k-1}) = \mathcal{T}_d(\mathbf{y}_k; \nu_{k|k-1} - d + 1, \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1}, \tilde{\mathbf{S}}_{k|k-1} \tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1} / (\nu_{k|k-1} - d + 1))$$

mit

$$\mathbb{E}[\mathbf{y}_k | \mathcal{Y}_{k-1}] = \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1} \quad \text{und} \quad \text{Var}[\mathbf{y}_k | \mathcal{Y}_{k-1}] = \tilde{\mathbf{S}}_{k|k-1} \mathbf{X}_{k|k-1}.$$

Demnach stimmt die erwartete Einzelmessung mit der vorhergesagten Position des kinematischen Zustandes überein.

### 2.5.2 Erwartete mittlere Messung und erwartete Messstreuung ( $n_k > d$ , $\bar{\mathbf{Y}}_k > \mathbf{0}$ )

In Abschnitt 2.3.1 wurde gezeigt, dass sich der matrixvariante Teil der Likelihood-Funktion (2.21) im Fall  $n_k > d$  und  $\bar{\mathbf{Y}}_k > \mathbf{0}$  als Dichtefunktion einer Wishart-Verteilung schreiben lässt; siehe Gleichung (2.22). Zu diesem Zweck wurde ein vom Objektzustand unabhängiger Vorfaktor  $c_d(\bar{\mathbf{Y}}_k, n_k)$  berücksichtigt, der durch die Normierungskonstante kompensiert werden muss. Dieser Vorfaktor aus Gleichung (2.23) ist allerdings nicht nur Bestandteil von  $p(\mathbf{Y}_k | \mathcal{Y}_{k-1})$ , sondern er ermöglicht auch die Interpretation des matrixvarianten Teiles der Messwahrscheinlichkeit (2.43) gemäß

$$p(\mathbf{Y}_k | \mathcal{Y}_{k-1}) = c_d(\bar{\mathbf{Y}}_k, n_k) p(\bar{\mathbf{y}}_k | \bar{\mathbf{Y}}_k, \mathcal{Y}_{k-1}) p(\bar{\mathbf{Y}}_k | \mathcal{Y}_{k-1}) \quad (n_k > d, \bar{\mathbf{Y}}_k > \mathbf{0}).$$

Neben einem Ausdruck für die erwartete mittlere Messung erhalten wir für  $n_k > d$  und  $\bar{\mathbf{Y}}_k > \mathbf{0}$  auch eine Dichtefunktion  $p(\bar{\mathbf{Y}}_k | \mathcal{Y}_{k-1})$  für die erwartete Messstreuung: Da sich aus dem vektorvarianten Teil in Gleichung (2.43) unmittelbar die multivariate  $t$ -Verteilung

$$p(\bar{\mathbf{y}}_k | \bar{\mathbf{Y}}_k, \mathcal{Y}_{k-1}) = \mathcal{T}_d(\bar{\mathbf{y}}_k; \nu_{k|k} - d, \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1}, \tilde{\mathbf{S}}_{k|k-1}(\tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \bar{\mathbf{Y}}_k/z_d) / (\nu_{k|k} - d)) \quad (2.44)$$

mit<sup>21</sup>

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\bar{\mathbf{y}}_k | \bar{\mathbf{Y}}_k, \mathcal{Y}_{k-1}] &= \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1} \\ \text{Var}[\bar{\mathbf{y}}_k | \bar{\mathbf{Y}}_k, \mathcal{Y}_{k-1}] &= \frac{\tilde{\mathbf{S}}_{k|k-1}(\tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \bar{\mathbf{Y}}_k/z_d)}{\nu_{k|k} - d - 2} = \frac{\tilde{\mathbf{S}}_{k|k-1}(\tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \bar{\mathbf{Y}}_k/z_d)}{(\nu_{k|k-1} - d - 1) + (n_k - 1)} \end{aligned}$$

ergibt, muss  $c_d(\bar{\mathbf{Y}}_k, n_k)$  mit dem matrixvarianten Teil in Gleichung (2.43) verrechnet werden, so dass

$$p(\bar{\mathbf{Y}}_k | \mathcal{Y}_{k-1}) = \frac{\Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k-1}-1}{2}\right) |z_d \tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}|^{\frac{1}{2}\nu_{k|k-1}}}{c_d(\bar{\mathbf{Y}}_k, n_k) \pi^{\frac{1}{2}(n_k-1)d} n_k^{\frac{1}{2}d} \Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k-1}}{2}\right) |z_d \tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \bar{\mathbf{Y}}_k|^{\frac{1}{2}(\nu_{k|k-1}-1)}}$$

<sup>21</sup> Analog zur erwarteten Einzelmessung bestimmt die vorhergesagte Position des kinematischen Zustandes auch die erwartete mittlere Messung.

**Regel von Bayes ( $n_k > d, \bar{\mathbf{Y}}_k > \mathbf{0}$ )**

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k) = \frac{\mathcal{N}_d(\bar{\mathbf{y}}_k; \mathbf{H}\mathbf{x}_k, z_d \mathbf{X}_k / n_k) \mathcal{W}_d(\bar{\mathbf{Y}}_k; n_k - 1, z_d \mathbf{X}_k) p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_{k-1})}{\mathcal{T}_d(\bar{\mathbf{y}}_k; \nu_{k|k} - d, \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1}, \tilde{\mathbf{S}}_{k|k-1}(\tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \bar{\mathbf{Y}}_k / z_d) / (\nu_{k|k} - d)) \mathcal{G}\mathcal{B}_d^{\text{II}}(\bar{\mathbf{Y}}_k; \frac{n_k-1}{2}, \frac{\nu_{k|k-1}}{2}; z_d \tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}, \mathbf{0})}$$

$$\begin{aligned} \text{A-priori-Dichte: } & p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_{k-1}) = \mathcal{N}_{sd}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k-1}, \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1} \otimes \mathbf{X}_k) \mathcal{I}\mathcal{W}_d(\mathbf{X}_k; \nu_{k|k-1}, \tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}) \\ \text{A-posteriori-Dichte: } & p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k) = \mathcal{N}_{sd}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k}, \tilde{\mathbf{P}}_{k|k} \otimes \mathbf{X}_k) \mathcal{I}\mathcal{W}_d(\mathbf{X}_k; \nu_{k|k}, \tilde{\mathbf{X}}_{k|k}) \end{aligned}$$

**Abbildung 2.3:** Zusammenschau der Bayes'schen Regel und relevanter Wahrscheinlichkeitsdichten zur Aktualisierung des gemeinsamen Objektzustandes für den Fall, dass  $n_k > d$  und  $\bar{\mathbf{Y}}_k > \mathbf{0}$  gilt.

gilt. Durch Berücksichtigen von Gleichung (2.23) und der multivariaten Betafunktion (A.12)

$$\beta_d\left(\frac{n_k-1}{2}, \frac{\nu_{k|k-1}}{2}\right) = \frac{\Gamma_d\left(\frac{n_k-1}{2}\right) \Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k-1}}{2}\right)}{\Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k-1} + n_k - 1}{2}\right)} = \frac{\Gamma_d\left(\frac{n_k-1}{2}\right) \Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k-1}}{2}\right)}{\Gamma_d\left(\frac{\nu_{k|k-1}}{2}\right)}$$

lässt sich diese Dichtefunktion auch entsprechend

$$p(\bar{\mathbf{Y}}_k | \mathcal{Y}_{k-1}) = \frac{|\bar{\mathbf{Y}}_k|^{\frac{1}{2}(n_k-1) - \frac{1}{2}(d+1)} |z_d \tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}|^{\frac{1}{2}\nu_{k|k-1}}}{\beta_d\left(\frac{n_k-1}{2}, \frac{\nu_{k|k-1}}{2}\right) |z_d \tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \bar{\mathbf{Y}}_k|^{\frac{1}{2}(\nu_{k|k-1} + n_k - 1)}}$$

darstellen. Daraus folgt: Der Ausdruck für die erwartete Messstreuung stellt sich im Fall  $n_k > d$  und  $\bar{\mathbf{Y}}_k > \mathbf{0}$  als die Dichtefunktion (B.10) einer verallgemeinerten matrixvariaten Betaverteilung zweiter Art heraus, d. h.

$$p(\bar{\mathbf{Y}}_k | \mathcal{Y}_{k-1}) = \mathcal{G}\mathcal{B}_d^{\text{II}}(\bar{\mathbf{Y}}_k; \frac{n_k-1}{2}, \frac{\nu_{k|k-1}}{2}; z_d \tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}, \mathbf{0}) \quad (2.45)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\bar{\mathbf{Y}}_k | \mathcal{Y}_{k-1}] &= \frac{(n_k - 1) z_d \tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}}{\nu_{k|k-1} - d - 1} = (n_k - 1) z_d \mathbf{X}_{k|k-1} \\ \text{Var}[\bar{\mathbf{Y}}_k | \mathcal{Y}_{k-1}] &= \frac{(n_k - 1) z_d^2 (\nu_{k|k-1} + n_k - d - 2)}{(\nu_{k|k-1} - d)(\nu_{k|k-1} - d - 3)} \\ &\quad \cdot \left( (\nu_{k|k-1} - d + 1) \mathbf{X}_{k|k-1}^2 + (\nu_{k|k-1} - d - 1) \text{tr}(\mathbf{X}_{k|k-1}) \mathbf{X}_{k|k-1} \right), \end{aligned}$$

wobei zur Auswertung der letzten Gleichung  $\nu_{k|k-1} - d > 3$  gelten muss. In Anlehnung an den Ausdruck einer *korrigierten Stichprobenkovarianzmatrix* lässt sich auch

$$\mathbb{E}[\bar{\mathbf{Y}}_k | \mathcal{Y}_{k-1}] / (n_k - 1) = z_d \mathbf{X}_{k|k-1}$$

formulieren. Dieses Ergebnis korrespondiert mit dem angenommenen *Ausdehnungsrauschen* in der Likelihood-Funktion (2.19) einer Einzelmessung, wonach  $\mathbf{w}_k^{[j]} \sim \mathcal{N}_d(\mathbf{0}, z_d \mathbf{X}_k)$  gilt.

Mit diesen Ergebnissen sind letztlich alle relevanten Wahrscheinlichkeitsdichten des Tracking-Verfahrens aus [78] bestimmt, wobei der matrixvariante Teil sowohl der Likelihood-Funktion als auch der Normierungskonstante für  $n_k > d$  und  $\bar{\mathbf{Y}}_k > \mathbf{0}$  durch eine multivariate Matrixverteilungsdichte dargestellt werden kann; vgl. die Darstellung der Bayes'schen Regel (2.15) in Abbildung 2.3.

### 2.5.3 Beziehungen zu anderen Wahrscheinlichkeitsverteilungen

In diesem Abschnitt sollen die Beziehungen der Messwahrscheinlichkeiten zu anderen Wahrscheinlichkeitsverteilungen aufgezeigt werden: Im Einzelnen werden die Grenzwerte von  $p(\bar{y}_k | \bar{Y}_k, \mathcal{Y}_{k-1})$  und  $p(\bar{Y}_k | \mathcal{Y}_{k-1})$  für  $v_{k|k-1}$  gegen unendlich ( $v_{k|k-1} \rightarrow \infty$ ) berechnet. Dieser Grenzübergang entspricht der Vernachlässigung der mit der geschätzten Ausdehnung einhergehenden Schätzunsicherheit, da der Parameter  $v_{k|k-1}$  laut [78] ein Maß für die Genauigkeit der Ausdehnungsschätzung darstellt; vgl. Abschnitt 2.3.3 mit den Filtergleichungen zur Prädiktion der geschätzten Ausdehnung. Das Ausblenden dieser Schätzunsicherheit spielt in Abschnitt 3.1 und [164, 165, 169] eine entscheidende Rolle, wo neben dem reinen *Ausdehnungsrauschen* auch ein statistisches Messrauschen berücksichtigt werden soll: Zu diesem Zweck sind geeignete Approximationen erforderlich, die u. a. auf diesem Grenzübergang beruhen. Für die Dichtefunktion (2.44) der erwarteten mittleren Messung kann der Grenzwert unter Berücksichtigung von

$$\text{Var}[\bar{y}_k | \bar{Y}_k, \mathcal{Y}_{k-1}] = \frac{(v_{k|k-1} - d - 1) \tilde{S}_{k|k-1} \mathbf{X}_{k|k-1}}{v_{k|k-1} + n_k - d - 2} + \frac{\tilde{S}_{k|k-1} \bar{Y}_k / z_d}{v_{k|k-1} + n_k - d - 2}$$

unmittelbar mit

$$\lim_{v_{k|k-1} \rightarrow \infty} p(\bar{y}_k | \bar{Y}_k, \mathcal{Y}_{k-1}) = \mathcal{N}_d(\bar{y}_k; \mathbf{H} \mathbf{x}_{k|k-1}, \tilde{S}_{k|k-1} \mathbf{X}_{k|k-1})$$

angegeben werden, da  $\mathcal{T}_d(\mathbf{x}; \nu, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{C})$  für  $\nu \rightarrow \infty$  gegen die Dichtefunktion einer multivariaten Normalverteilung mit Erwartungswertvektor  $\boldsymbol{\mu}$  und Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}$  konvergiert [88]. Für die Dichtefunktion  $p(\bar{Y}_k | \mathcal{Y}_{k-1})$  der erwarteten Messstreuung findet sich ein ähnlicher Zusammenhang: Ausgehend von

$$|z_d \tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1} + \bar{Y}_k| = |2z_d \mathbf{X}_{k|k-1}| \cdot \left| \frac{1}{2}(v_{k|k-1} - d - 1) \mathbf{I}_d + (2z_d \mathbf{X}_{k|k-1})^{-1} \bar{Y}_k \right|$$

und

$$|z_d \tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}|^{\frac{1}{2} v_{k|k-1}} |2z_d \mathbf{X}_{k|k-1}|^{-\frac{1}{2}(v_{k|k-1} + n_k - 1)} = \left( \frac{1}{2}(v_{k|k-1} - d - 1) \right)^{\frac{1}{2} v_{k|k-1} d} |2z_d \mathbf{X}_{k|k-1}|^{-\frac{1}{2}(n_k - 1)}$$

lässt sich Gleichung (2.45) mit der matrixvariablen Betaverteilung auch entsprechend

$$p(\bar{Y}_k | \mathcal{Y}_{k-1}) = \frac{2^{-\frac{1}{2}(n_k - 1)d} \Gamma_d\left(\frac{v_{k|k-1} + n_k - 1}{2}\right) |\bar{Y}_k|^{\frac{1}{2}(n_k - d - 2)} |z_d \mathbf{X}_{k|k-1}|^{-\frac{1}{2}(n_k - 1)} \left(\frac{1}{2}(v_{k|k-1} - d - 1)\right)^{\frac{1}{2} v_{k|k-1} d}}{\Gamma_d\left(\frac{n_k - 1}{2}\right) \Gamma_d\left(\frac{v_{k|k-1}}{2}\right) \left| \frac{1}{2}(v_{k|k-1} - d - 1) \mathbf{I}_d + (2z_d \mathbf{X}_{k|k-1})^{-1} \bar{Y}_k \right|^{\frac{1}{2}(v_{k|k-1} + n_k - 1)}}$$

darstellen. Bezeichnet  $\exp(\mathbf{A})$  das Matrixexponential [61, 134] einer  $d \times d$ -Matrix  $\mathbf{A}$ , ergibt sich mit den Zusammenhängen in Abschnitt A.2.3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{nd} |n \mathbf{I}_d + \mathbf{A}|^{-n} = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \mathbf{I}_d + \frac{\mathbf{A}}{n} \right)^{-n} \right| = |(\exp(\mathbf{A}))^{-1}| = |\exp(-\mathbf{A})| = \text{etr}(-\mathbf{A}).$$

Auf diese Weise erhalten wir den folgenden Ausdruck als Grenzwert von  $p(\bar{Y}_k | \mathcal{Y}_{k-1})$ :

$$\lim_{v_{k|k-1} \rightarrow \infty} p(\bar{Y}_k | \mathcal{Y}_{k-1}) = \frac{2^{-\frac{1}{2}(n_k - 1)d} |\bar{Y}_k|^{\frac{1}{2}(n_k - d - 2)}}{\Gamma_d\left(\frac{n_k - 1}{2}\right) |z_d \mathbf{X}_{k|k-1}|^{\frac{1}{2}(n_k - 1)}} \text{etr}\left(-\frac{1}{2}(z_d \mathbf{X}_{k|k-1})^{-1} \bar{Y}_k\right).$$

Demnach konvergiert die Dichtefunktion (2.45) der erwarteten Messstreuung gegen die Dichtefunktion einer Wishart-Verteilung, d. h.

$$\lim_{\nu_{k|k-1} \rightarrow \infty} p(\bar{\mathbf{Y}}_k | \mathcal{Y}_{k-1}) = \mathcal{W}_d(\bar{\mathbf{Y}}_k; n_k - 1, z_d \mathbf{X}_{k|k-1}). \quad (2.46)$$

Dies bedeutet: Sowohl  $p(\bar{\mathbf{y}}_k | \bar{\mathbf{Y}}_k, \mathcal{Y}_{k-1})$  als auch  $p(\bar{\mathbf{Y}}_k | \mathcal{Y}_{k-1})$  konvergieren für  $\nu_{k|k-1} \rightarrow \infty$  gegen die entsprechenden Verteilungstypen der Likelihood-Funktion (2.22); siehe auch Abbildung 2.3.

## Zusammenfassung

In diesem Kapitel wurde der Ausgangspunkt dieser Arbeit vorgestellt – der Bayes'sche Ansatz zur Verfolgung ausgedehnter Zielobjekte und grobstrukturierter Objektgruppen aus [75, 78, 81, 82]. Zum Verständnis des Ursprungs dieses Verfahrens wurde zunächst allgemein der Bayes'sche Formalismus beschrieben, der eine systematische Darstellung der Tracking-Problematik ermöglicht: zum einen durch die mathematische Koppelung zwischen Informationen und ihrer statistischen Glaubwürdigkeit; zum anderen durch das Zusammenspiel von A-priori-Dichte, Likelihood-Funktion und A-posteriori-Dichte zum Schätzen eines unbekanntes Systemzustandes aus vorliegenden Messungen. In diesem Kontext wurden die Vorteile konjugierter A-priori-Verteilungen am Beispiel des Kalman-Filters erläutert, das sich als Spezialfall eines Bayes'schen Filters erweist.

Daraufhin wurde in diesem Kapitel erörtert, wie die Objektausdehnung Teil des Bayes'schen Formalismus werden kann, so dass sich letztlich die Filtergleichungen des Bayes'schen Ansatzes zur Verfolgung ausgedehnter Objekte aus [75, 78, 81, 82] ergeben. Als Erweiterung des Verfahrens wurde hier ein (fest gewählter) Skalierungsfaktor der Objektausdehnung eingeführt, mit dem sich die angenommene räumliche Streuung einer Messung beeinflussen lässt.

Darüber hinaus befasste sich dieses Kapitel mit Einsichten zur kinematischen Marginaldichte und zu Messwahrscheinlichkeiten, die über die ursprünglichen Arbeiten [75, 78, 81, 82] hinausgehen: Beim Berechnen der kinematischen Marginaldichte zeigte sich, dass ihre Herleitung in [78, 81] nur für einen Spezialfall gültig ist, von dem allerdings in vielen praktischen Anwendungsfällen nicht ausgegangen werden kann. Aus diesem Grund wurde eine andere Vorgehensweise bei der Herleitung gewählt, mit der wir nicht nur die marginale Dichtefunktion der Kinematik angeben konnten, sondern auch die uns interessierenden Momente wie bedingter Erwartungswert und Schätzfehlerkovarianzmatrix. Darüber hinaus wurde im letzten Abschnitt dieses Kapitels gezeigt, wie sich für dieses Tracking-Verfahren Messwahrscheinlichkeiten berechnen lassen. Es wurden Ausdrücke bestimmt, mit denen sich die Messwahrscheinlichkeiten von erwarteter Einzelmessung, mittlerer Messung und Messstreuung berechnen lassen, so dass die Differenz zwischen erwarteten Messungen und tatsächlich gemessenen Sensordaten bewertet werden kann. Die Beziehungen dieser Ausdrücke zu anderen Wahrscheinlichkeitsverteilungen wurden zu guter Letzt untersucht: Diese Zusammenhänge spielen vor allem eine Rolle bei der Weiterentwicklung des Verfahrens im nächsten Kapitel, wo die mit der geschätzten Ausdehnung einhergehende Schätzunsicherheit teilweise vernachlässigt wird, um zusätzlich einen statistischen Sensormessfehler im Verfahren berücksichtigen zu können. Dies betrifft auch die Angabe geeigneter Messwahrscheinlichkeiten im Rahmen von *Mehrmodell-Ansätzen*.



# Weiterentwicklung unter speziellen Gesichtspunkten

---

Der Bayes'sche Ansatz zur Verfolgung ausgedehnter Objekte und nicht aufgelöster Gruppen aus Kapitel 2 (siehe auch [75, 78, 81, 82]) ermöglicht das gemeinsame Schätzen von räumlicher Objektausdehnung und Kinematik des Schwerpunktes. Zu diesem Zweck interpretiert das Verfahren die Sensordaten als Positionsmessungen des Schwerpunktes, deren Messrauschen ausschließlich auf die Objektausdehnung zurückzuführen ist. Dieses Kapitel befasst sich mit der Fortentwicklung dieses Tracking-Verfahrens, die im Wesentlichen in den Veröffentlichungen [164–166, 168, 169] dokumentiert worden ist. Abschnitt 3.1 stellt einen modifizierten Bayes'schen Ansatz vor, der einen statistischen Sensormessfehler in den Filtergleichungen näherungsweise berücksichtigt – unter Zuhilfenahme geeigneter Approximationen. Anschließend fasst Abschnitt 3.2 einige Besonderheiten zusammen, die beim Schätzen der Objektausdehnung zu beachten sind: Berechnung eines Schätzfehlers, *Moment-Matching* u. a. im Zusammenhang mit Mischverteilungsdichten und die Darstellung eines graphischen Konfidenzbereiches für die geschätzte Objektausdehnung. Darauf aufbauend führt Abschnitt 3.3 vor, wie die Objektausdehnung in den Bayes'schen Formalismus eines sogenannten IMM-Filters (für engl. *Interacting-Multiple-Model-Filter*) integriert werden kann, mit dem sich gleichzeitig verschiedene Dynamikmodelle für unterschiedliche Bewegungszustände berücksichtigen lassen. Zum Abschluss dieses Kapitels erläutert Abschnitt 3.4 eine alternative Vorgehensweise zum Berücksichtigen eines statistischen Sensormessfehlers im Tracking-Verfahren, die Umut Orguner in [113] entwickelt hat und die wir im nächsten Kapitel – zum Bewerten unserer Approximationen im Rahmen von Simulationen – näher untersuchen.

### 3.1 Berücksichtigung eines statistischen Sensormessfehlers

Der ursprüngliche Bayes'sche Ansatz in Kapitel 2 interpretiert die Sensordaten als über die Objektausdehnung verteilte Positionsmessungen des Objektschwerpunktes, wodurch der Streuanteil eines statistischen Sensormessfehlers implizit der Ausdehnungsschätzung zugerechnet wird. Diese Annahme aus [75, 78, 81, 82] ist die Voraussetzung für eine rigorose Herleitung des Algorithmus mit Hilfe des Bayes'schen Formalismus. Als Konsequenz ergibt sich ein Verfahren zum gemeinsamen Schätzen von physikalischer Ausdehnung und Kinematik des Schwerpunktes, wobei das Aktualisieren der Ausdehnungsschätzung auch mit einer einzelnen Messung möglich ist. Da das Update mit abgeleiteten Messparametern erfolgt, lassen sich alle Messungen in einem einzigen Aktualisierungsschritt verarbeiten. Darüber hinaus sind folgende Verfahrenseigenschaften bemerkenswert:

- Im Gegensatz zur klassischen *Kalman-Verstärkung* ist der Verstärkungsvektor  $\tilde{\mathbf{K}}_{k|k-1}$  unabhängig von der räumlichen Dimension des Schätzproblems. Da das Tracking-Filter in Kapitel 2

keinen raumabhängigen Messfehler kennt, verwendet es zum Gewichten der *kinematischen Innovation*  $\bar{\mathbf{y}}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1}$  das Kronecker-Produkt mit der Einheitsmatrix gemäß  $\tilde{\mathbf{K}}_{k|k-1} \otimes \mathbf{I}_d$ , weswegen die eigentliche Verstärkungsmatrix aus Skalarmatrizen besteht.

- Die kinematische Parametermatrix  $\tilde{\mathbf{P}}_{k|k}$  ist ebenfalls unabhängig von der räumlichen Dimension des Schätzproblems. Die kinematische Schätzfehlerkovarianzmatrix ergibt sich erst mit dem Kronecker-Produkt aus  $\tilde{\mathbf{P}}_{k|k}$  und Ausdehnungsschätzung gemäß  $\tilde{\mathbf{P}}_{k|k} \otimes \mathbf{X}_{k|k}$ . Deshalb entspricht z. B. der Positionsteil dieser Schätzfehlerkovarianzmatrix einer skalierten Zustandsschätzung  $\mathbf{X}_{k|k}$ ; vgl. die Definition des Kronecker-Produktes in Gleichung (A.13).
- Bei der Vorhersage der Kinematik modelliert der Bayes'sche Ansatz die Ungenauigkeiten im Dynamikmodell durch ein gleichanteilsfreies und mit der Varianz  $\tilde{\mathbf{Q}} \otimes \mathbf{X}_k$  normalverteiltes Prozessrauschen. Die Zustandsgröße  $\mathbf{X}_k$  hat direkten Einfluss auf das Prozessrauschen. In der klassischen Zustandsschätzung wird bei der Einführung von *Störgrößen* wie Prozessrauschen und Messrauschen in der Regel betont, dass sie weder untereinander oder mit dem Systemzustand noch individuell zeitlich korreliert sein sollen; siehe etwa Abschnitt 2.1.2.
- Das Bayes'sche Verfahren in Kapitel 2 schätzt grundsätzlich Ausdehnung plus Sensorfehler, da es die Streuung durch einen statistischen Messfehler als *Ausdehnungsrauschen* interpretieren muss. Ein erhöhtes Messrauschen vergrößert damit automatisch die Ausdehnungsschätzung, wodurch die Ausmaße des Objektes größer geschätzt werden als sie tatsächlich sind.
- Der Bayes'sche Ansatz schätzt letztlich die Kovarianzmatrix eines *Pseudomessrauschens* aus unabhängigen Einzelmessungen: Im Fall von Positionsmessungen lässt sich diese Matrix dann als räumliche Objektausdehnung interpretieren.

Aufgrund dieser Beobachtungen ergibt sich der Wunsch nach einer zumindest näherungsweise Berücksichtigung eines statistischen Sensormessfehlers. Die Kovarianzmatrix  $\mathbf{R}$  des Messrauschens soll neben der Zustandsmatrix  $\mathbf{X}_k$  Teil der Likelihood-Funktion sein. Demzufolge interpretieren wir jede Einzelmessung als eine durch Objektausdehnung und Messfehler *verrauschte* Messung des Objektschwerpunktes:

$$\mathbf{y}_k^{[j]} \sim \mathcal{N}_d(\mathbf{H}\mathbf{x}_k, z_d \mathbf{X}_k + \mathbf{R}) \quad (j = 1, \dots, n_k). \quad (3.1)$$

Der Parameter  $z_d$  entspricht dem in Abschnitt 2.3.1 eingeführten *Skalierungsfaktor* der Ausdehnung, der die angenommene räumliche Streuung einer Messung beeinflusst. Mit dieser angepassten Einzelmessung ergibt sich im Zeitschritt  $k$  bei insgesamt  $n_k$  unabhängigen Messungen die Likelihood-Funktion

$$p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k) = \prod_{j=1}^{n_k} \mathcal{N}_d(\mathbf{y}_k^{[j]}; \mathbf{H}\mathbf{x}_k, z_d \mathbf{X}_k + \mathbf{R}),$$

die sich mit der *mittleren Messung*  $\bar{\mathbf{y}}_k$  und der *Messstreuung*  $\bar{\mathbf{Y}}_k$  im Fall  $n_k > d$  und  $\bar{\mathbf{Y}}_k > \mathbf{0}$  auch als

$$p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k) \propto \mathcal{N}_d(\bar{\mathbf{y}}_k; \mathbf{H}\mathbf{x}_k, (z_d \mathbf{X}_k + \mathbf{R})/n_k) \mathcal{W}_d(\bar{\mathbf{Y}}_k; n_k - 1, z_d \mathbf{X}_k + \mathbf{R}) \quad (3.2)$$

darstellen lässt. Allerdings konnte zu dieser Likelihood-Funktion keine konjugierte A-priori-Verteilung gefunden werden, die sowohl unabhängig von  $\mathbf{R}$  als auch analytisch handhabbar ist. Es ist

im Allgemeinen auch nicht möglich, die Ausdehnungsschätzung des ursprünglichen Ansatzes als Summe von Ausdehnung und Sensorstreuung aufzufassen und somit die Schätzung für die tatsächliche Ausdehnung durch Subtraktion des Messrauschens  $\mathbf{R}$  zu gewinnen: In diesem Fall könnten wir nicht sicherstellen, dass  $\mathbf{X}_{k|k} - \mathbf{R}$  immer positiv definit bliebe. Darüber hinaus würde ein solches Verfahren weiterhin keinen Sensormessfehler für die kinematische Schätzung einbeziehen. Es sind daher geeignete Approximationen erforderlich.

### 3.1.1 Angepasste Filtergleichungen zur Aktualisierung

Ausgangspunkt für eine Adaption der Filtergleichungen ist die bereits in Abschnitt 2.3.2 beobachtete formale Ähnlichkeit zwischen den kinematischen Filtergleichungen des Kalman-Filters und des Bayes'schen Ansatzes zur Verfolgung ausgedehnter Zielobjekte und grobstrukturierter Objektgruppen aus [75, 78, 81, 82]. Diese Verwandtschaft bietet einen Einstiegspunkt zum Berücksichtigen eines Sensormessfehlers, indem wir zunächst die kinematischen Aktualisierungsgleichungen

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k|k} &= \mathbf{x}_{k|k-1} + \mathbf{K}_{k|k-1}(\bar{\mathbf{y}}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1}) \\ \mathbf{P}_{k|k} &= \mathbf{P}_{k|k-1} - \mathbf{K}_{k|k-1}\mathbf{S}_{k|k-1}\mathbf{K}_{k|k-1}^\top\end{aligned}$$

mit der Kalman-Verstärkung

$$\mathbf{K}_{k|k-1} = \mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}^\top\mathbf{S}_{k|k-1}^{-1}$$

verwenden. Im Vergleich zu den Standardgleichungen des Kalman-Filters in Abschnitt 2.1.3 ist lediglich die Einzelmessung  $\mathbf{y}_k$  durch die mittlere Messung  $\bar{\mathbf{y}}_k$  ersetzt worden. Zum vollwertigen kinematischen Update fehlt allerdings noch eine geeignete Kovarianzmatrix  $\mathbf{S}_{k|k-1}$  für die *Innovation*  $\bar{\mathbf{y}}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1}$ . In diesem Zusammenhang hilft folgendes Gedankenspiel: Wäre lediglich die Kinematik Teil des Schätzproblems und die Objektausdehnung  $\mathbf{X}_k$  demnach eine bekannte Größe, könnte das Messrauschen der mittleren Messung mit  $(z_d\mathbf{X}_k + \mathbf{R})/n_k$  berechnet werden; vgl. Gleichung (3.2). Da die Prädiktion  $\mathbf{X}_{k|k-1}$  zum Zeitpunkt der Aktualisierung die beste verfügbare Schätzung der wahren Objektausdehnung  $\mathbf{X}_k$  darstellt, drängt sich förmlich die Näherung  $\mathbf{X}_k \approx \mathbf{X}_{k|k-1}$  auf, so dass wir mit der prädizierten Varianz einer einzelnen Messung

$$\mathbf{Y}_{k|k-1} = z_d\mathbf{X}_{k|k-1} + \mathbf{R}$$

als Approximation der wahren Innovationskovarianzmatrix

$$\mathbf{S}_{k|k-1} = \mathbf{H}\mathbf{P}_{k|k-1}\mathbf{H}^\top + \frac{\mathbf{Y}_{k|k-1}}{n_k}$$

erhalten. Bei dieser Vorgehensweise vernachlässigen wir allerdings die Schätzunsicherheit der Objektausdehnung, die mit der Prädiktion  $\mathbf{X}_{k|k-1}$  einhergeht. Darüber hinaus approximieren wir formal gesehen die (unbekannte) Dichtefunktion der Kinematik bei gegebener Ausdehnung durch ihre (unbekannte) Marginaldichte, wobei jeweils eine Normalverteilung zugrunde liegt, d. h.

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathcal{Y}_k) \approx p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k) \approx \mathcal{N}_{sd}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}). \quad (3.3)$$

Zum einen wird damit die Schätzfehlerkovarianz  $\mathbf{P}_{k|k}$  direkt als interessierende Größe angegeben, zum anderen ist ihr Positionsteil nicht über einen skalaren Faktor an die geschätzte Objektausdehnung gekoppelt. Darüber hinaus beinhaltet die Kalman-Verstärkung  $\mathbf{K}_{k|k-1}$  für jede Raumrichtung eine eigene Komponente für Position und Geschwindigkeit – im Gegensatz zu  $\tilde{\mathbf{K}}_{k|k-1} \otimes \mathbf{I}_d$  beim ursprünglichen Bayes'schen Ansatz in Kapitel 2.

Die Ausdehnungsschätzung des Bayes'schen Ansatzes in Kapitel 2 besteht aus Objektausdehnung und statistischem Sensormessfehler, weshalb die Filtergleichungen für den Ausdehnungsteil ebenfalls anzupassen sind. Der Vorgehensweise aus Gleichung (2.30) möchten wir dabei erhalten: Die aktualisierte Schätzung soll sich durch eine gewichtete Summe aus vorhergesagter Objektausdehnung  $\mathbf{X}_{k|k-1}$ , Innovationsmatrix  $\mathbf{N}_{k|k-1}$  und Messstreuung  $\bar{\mathbf{Y}}_k$  berechnen. Allerdings gewichten wir wegen

$$\begin{aligned} E[\mathbf{N}_{k|k-1} | \mathcal{Y}_{k-1}, \mathbf{X}_k = \mathbf{X}_{k|k-1}] &= \mathbf{S}_{k|k-1} \\ E[\bar{\mathbf{Y}}_k | \mathcal{Y}_{k-1}, \mathbf{X}_k = \mathbf{X}_{k|k-1}] &= (n_k - 1) \mathbf{Y}_{k|k-1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

mit matrixwertigen Faktoren, damit die einzelnen Erwartungswerte der gewichteten Terme im Fall  $\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_{k|k-1}$  skalare Vielfache der Matrix  $\mathbf{X}_{k|k-1}$  entsprechen. Zu diesem Zweck berechnen wir Zerlegungen der Matrizen  $\mathbf{X}_{k|k-1}$ ,  $\mathbf{S}_{k|k-1}$  und  $\mathbf{Y}_{k|k-1}$  gemäß

$$\mathbf{X}_{k|k-1} = \mathbf{X}_{k|k-1}^{1/2} (\mathbf{X}_{k|k-1}^{1/2})^\top, \quad \mathbf{S}_{k|k-1} = \mathbf{S}_{k|k-1}^{1/2} (\mathbf{S}_{k|k-1}^{1/2})^\top \quad \text{und} \quad \mathbf{Y}_{k|k-1} = \mathbf{Y}_{k|k-1}^{1/2} (\mathbf{Y}_{k|k-1}^{1/2})^\top,$$

woraufhin sich mit diesen matrixwertigen Faktoren die neu definierten Ausdrücke<sup>1</sup>

$$\widehat{\mathbf{N}}_{k|k-1} = \mathbf{X}_{k|k-1}^{1/2} \mathbf{S}_{k|k-1}^{-1/2} \mathbf{N}_{k|k-1} (\mathbf{S}_{k|k-1}^{-1/2})^\top (\mathbf{X}_{k|k-1}^{1/2})^\top \quad (3.5)$$

$$\widehat{\mathbf{Y}}_{k|k-1} = \mathbf{X}_{k|k-1}^{1/2} \mathbf{Y}_{k|k-1}^{-1/2} \bar{\mathbf{Y}}_k (\mathbf{Y}_{k|k-1}^{-1/2})^\top (\mathbf{X}_{k|k-1}^{1/2})^\top \quad (3.6)$$

ergeben, d. h.

$$\begin{aligned} E[\widehat{\mathbf{N}}_{k|k-1} | \mathcal{Y}_{k-1}, \mathbf{X}_k = \mathbf{X}_{k|k-1}] &= \mathbf{X}_{k|k-1} \\ E[\widehat{\mathbf{Y}}_{k|k-1} | \mathcal{Y}_{k-1}, \mathbf{X}_k = \mathbf{X}_{k|k-1}] &= (n_k - 1) \mathbf{X}_{k|k-1}. \end{aligned}$$

In Anlehnung an Gleichung (2.30) und (2.31) lautet die Aktualisierung der geschätzten Objektausdehnung  $\mathbf{X}_{k|k}$  dann wie folgt:

$$\mathbf{X}_{k|k} = \frac{1}{\alpha_{k|k}} (\alpha_{k|k-1} \mathbf{X}_{k|k-1} + \widehat{\mathbf{N}}_{k|k-1} + \widehat{\mathbf{Y}}_{k|k-1}) \quad (3.7)$$

$$\alpha_{k|k} = \alpha_{k|k-1} + n_k. \quad (3.8)$$

Die Ähnlichkeit zwischen den Gleichungen (3.7) und (2.30) sowie (3.8) und (2.31) ist ein Hinweis darauf, dass – analog zur Annahme bei der Kinematik – die (marginalisierte) A-priori-Dichtefunk-

<sup>1</sup>Diese matrixwertigen Faktoren können beispielsweise durch *Cholesky-Faktorisierung* oder über eine *Eigenwertzerlegung* bestimmt werden. Sei  $\Sigma$  eine SPD Matrix mit der Zerlegung  $\Sigma = \mathbf{C}\mathbf{C}^\top$ : Dann entspricht  $\mathbf{C}$  bei Berechnung durch Cholesky-Faktorisierung einer Dreiecksmatrix; bei Eigenwertzerlegung erhalten wir eine SPD Matrix  $\mathbf{C}$ , da es sich um die Quadratwurzel von  $\Sigma$  handelt, d. h.  $\Sigma = \mathbf{C}^2$ ; siehe etwa [55, 59, 61]. Dadurch ergeben sich je nach Berechnung minimale Unterschiede für die Ausdrücke in Gleichung (3.5) und (3.6), da die verschiedenen Ausdrücke der Form  $\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{C}^\top$  nur im Fall  $\mathbf{A} = a \cdot \mathbf{I}$  identische Ergebnisse liefern, d. h., falls es sich bei  $\mathbf{A}$  um eine Skalarmatrix handelt.

tion der Ausdehnung einer inversen Wishart-Verteilung genügt und dass die zugehörige (eigentlich ebenfalls unbekannt) A-posteriori-Dichte von derselben Form ist: Diesen Zusammenhang bei den Filtergleichungen interpretieren wir als

$$p(\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k) \approx \mathcal{IW}_d(\mathbf{X}_k; \nu_{k|k}, \alpha_{k|k} \mathbf{X}_{k|k}) \quad \text{mit} \quad \alpha_{k|k} = \nu_{k|k} - d - 1. \quad (3.9)$$

### 3.1.2 Angepasste Filtergleichungen zur Prädiktion

Um einen Messfehler im Aktualisierungsschritt zu berücksichtigen, ist ein wesentlicher Punkt die näherungsweise angenommene Unabhängigkeit zwischen der Schätzung von Kinematik und Ausdehnung. Diese Prämisse kommt insbesondere in Gleichung (3.3) zum Ausdruck. Ergänzend zu dieser Annahme setzen wir bei der Prädiktion voneinander unabhängige Dynamikmodelle an, damit wir das Kronecker-Produkt mit der Objektausdehnung in der kinematischen Dichtefunktion vermeiden können; vgl. z. B. Gleichung (2.24). Auf diese Weise können wir für die kinematische Vorhersage direkt die Standardgleichungen des Kalman-Filters

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k|k-1} &= \mathbf{F} \mathbf{x}_{k-1|k-1} \\ \mathbf{P}_{k|k-1} &= \mathbf{F} \mathbf{P}_{k-1|k-1} \mathbf{F}^T + \mathbf{Q} \end{aligned}$$

verwenden, wobei  $\mathbf{Q}$  die Varianz eines gleichanteilsfreien und normalverteilten Prozessrauschens bezeichnet und nicht mehr von  $\mathbf{X}_k$  abhängt; wie etwa noch in Gleichung (2.34).

Analog zum ursprünglichen Dynamikmodell der Ausdehnungsschätzung in Kapitel 2 nehmen wir auch hier an, dass sich die geschätzte Ausdehnung zwischen zwei Messzeitpunkten tendenziell nicht ändert, d. h.

$$\mathbf{X}_{k|k-1} = \mathbf{X}_{k-1|k-1}.$$

Wie sich im weiteren Verlauf dieser Arbeit in Abschnitt 3.2.1 zeigt, ist die Schätzfehlervarianz der Ausdehnungsschätzung in etwa proportional zu  $1/(\alpha_{k|k} - 2)$  sowohl für sehr große Werte von  $\alpha_{k|k}$  als auch für Werte nahe bei 2. Dabei muss stets  $\alpha_{k|k} > 2$  gelten. Daher bietet es sich an, einen exponentiellen Anstieg der Varianz mit der Prädiktionszeit  $T$  gemäß

$$\frac{1}{\alpha_{k|k-1} - 2} = \exp(T/\tau) \frac{1}{\alpha_{k-1|k-1} - 2}$$

bzw.

$$\alpha_{k|k-1} = 2 + \exp(-T/\tau)(\alpha_{k-1|k-1} - 2)$$

zu wählen, wobei  $\tau$  eine Zeitkonstante zum Einstellen des Prozessrauschens bezeichnet. Als Alternative könnte allerdings auch das Modell

$$\frac{1}{\alpha_{k|k-1} - 2} = (T/\tau) + \frac{1}{\alpha_{k-1|k-1} - 2} \quad \text{bzw.} \quad \alpha_{k|k-1} = 2 + \frac{\alpha_{k-1|k-1} - 2}{1 + (T/\tau)(\alpha_{k-1|k-1} - 2)}$$

eingesetzt werden, das für einen linearen Anstieg der Schätzfehlervarianz sorgt. Damit sind letztlich alle notwendigen Filtergleichungen zur Prädiktion formuliert.

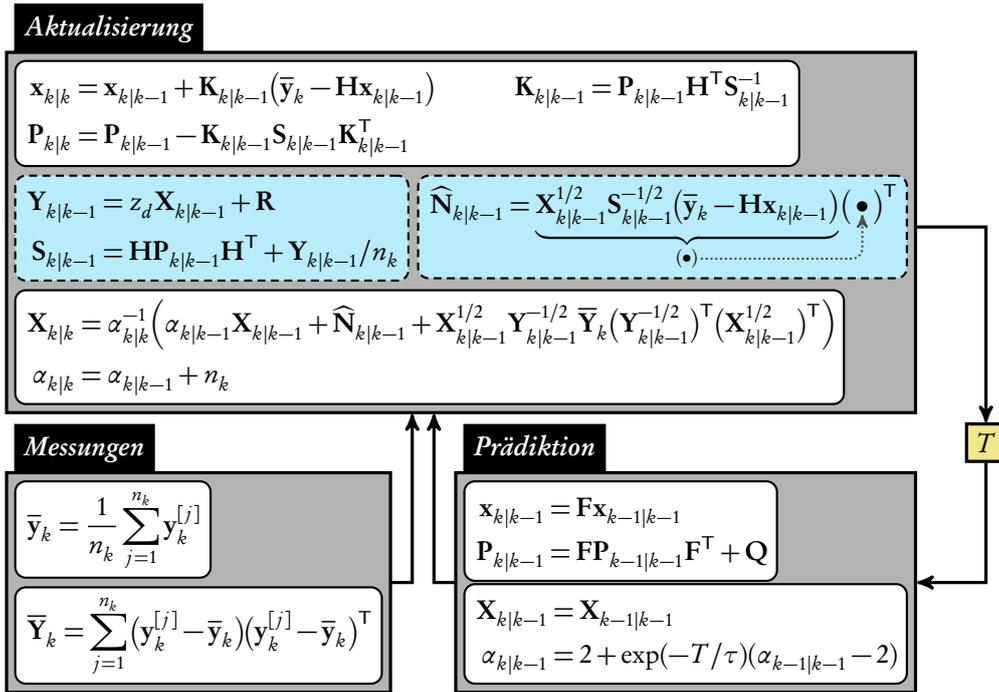


Abbildung 3.1: Verarbeitungszyklus des modifizierten Bayes'schen Ansatzes, der einen statistischen Sensormessfehler berücksichtigt – in Form der Kovarianzmatrix  $\mathbf{R}$  des Messrauschens.

## Verarbeitungszyklus des Tracking-Verfahrens

Abbildung 3.1 fasst einen Verarbeitungszyklus des überarbeiteten Tracking-Verfahrens zusammen. Analog zur Darstellung in Abbildung 2.2 sind auch hier diejenigen Ausdrücke farblich hervorgehoben, die für direkte Wechselbeziehungen zwischen den Filtergleichungen der Kinematik und Ausdehnung sorgen, d. h.  $\mathbf{Y}_{k|k-1}$ ,  $\mathbf{S}_{k|k-1}$  und  $\hat{\mathbf{N}}_{k|k-1}$ . Diese wechselseitigen Abhängigkeiten bleiben demnach bestehen – trotz aller Approximationen und Heuristiken um einen Sensormessfehler im Algorithmus zu integrieren. Ferner ist weiterhin ein Update der Ausdehnungsschätzung mit nur einer Messung möglich: mit Hilfe der kinematischen Innovation  $\bar{\mathbf{y}}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1}$  in  $\hat{\mathbf{N}}_{k|k-1}$ . Ebenso sorgen die *indirekten Messparameter*  $\bar{\mathbf{y}}_k$  und  $\bar{\mathbf{Y}}_k$  für das Aktualisieren des Objektzustandes, weswegen sich alle Messungen nach wie vor in einem einzigen Aktualisierungsschritt berücksichtigen lassen.

## 3.2 Besonderheiten der physikalischen Ausdehnung

### 3.2.1 Schätzunsicherheiten und MMSE-Schätzer

Die in dieser Arbeit vorgestellten Tracking-Filter zur Verfolgung ausgedehnter Zielobjekte nehmen übereinstimmend an, dass die Marginaldichte der Objektausdehnung  $p(\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k)$  der Dichtefunktion einer inversen Wishart-Verteilung genügt; siehe etwa Gleichung (2.36) oder (3.9). Als eigentliche Ausdehnungsschätzung haben wir automatisch den *bedingten Erwartungswert*

$$\mathbb{E}[\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k] = \mathbf{X}_{k|k} = \tilde{\mathbf{X}}_{k|k} / \alpha_{k|k} \quad \text{mit} \quad \alpha_{k|k} = \nu_{k|k} - d - 1$$

angenommen. Dies ist auf Erfahrungen aus der klassischen Zustandsschätzung zurückzuführen: Im Fall des kinematischen Zustandsvektors  $\mathbf{x}_k$  folgt die Optimalität der Schätzung  $\mathbf{x}_{k|k}$  aus der Tatsache, dass sie dem bedingten Erwartungswert des unbekanntes Zustandes  $\mathbf{x}_k$  gegeben den akkumulierten Messungen  $\mathcal{Y}_k$  entspricht und dass der bedingte Erwartungswert  $E[\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k]$  der unter dem Kostenkriterium  $MSE^2$  bestmögliche Schätzer ist; siehe etwa [6, 41, 107]. Deshalb wird er auch als MMSE-Schätzer<sup>3</sup> bezeichnet. In Anhang C wird gezeigt, dass dies auch für Zufallsmatrizen gilt.

Sei  $\hat{\mathcal{X}}_k$  eine beliebige SPD Schätzung der SPD Zustandsmatrix  $\mathbf{X}_k$ . Ausgehend von dem Schätzfehler  $\hat{\mathcal{X}}_k - \mathbf{X}_k$  soll der MSE durch Summation über alle mittleren quadratischen Schätzfehler der einzelnen Matrixelemente von  $\hat{\mathcal{X}}_k - \mathbf{X}_k$  ermittelt werden. Dieser MSE berechnet sich demnach zu

$$\hat{e}_{k|k} = \text{tr} E[(\hat{\mathcal{X}}_k - \mathbf{X}_k)^2 | \mathcal{Y}_k].$$

Analog zu den Ausführungen in Anhang C wird dieser Ausdruck gerade im Fall  $\hat{\mathcal{X}}_k = E[\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k]$  minimal. Wie im vektorvariante Fall ist auch hier der bedingte Erwartungswert der MMSE-Schätzer. Den zugehörigen MMSE  $e_{k|k}$  erhalten wir aus der Varianz

$$\text{Var}[\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k] := E[(\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k|k})^2 | \mathcal{Y}_k] = E[\mathbf{X}_k^2 | \mathcal{Y}_k] - \mathbf{X}_{k|k}^2$$

gemäß

$$e_{k|k} = \text{tr} \text{Var}[\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k].$$

Für eine SPD Zufallsmatrix, die der inversen Wishart-Verteilung in Gleichung (3.9) genügt, lässt sich die Varianz laut Gleichung (B.9) durch

$$\mathbf{V}_{k|k} := \text{Var}[\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k] = \frac{\alpha_{k|k} (\text{tr} \mathbf{X}_{k|k}) \mathbf{X}_{k|k} + (\alpha_{k|k} + 2) \mathbf{X}_{k|k}^2}{(\alpha_{k|k} + 1)(\alpha_{k|k} - 2)} \quad (3.10)$$

berechnen, so dass wir letztlich auch den MMSE

$$e_{k|k} = \frac{\alpha_{k|k} (\text{tr} \mathbf{X}_{k|k})^2 + (\alpha_{k|k} + 2) \text{tr}(\mathbf{X}_{k|k}^2)}{(\alpha_{k|k} + 1)(\alpha_{k|k} - 2)} \quad \text{für } \alpha_{k|k} > 2 \quad (3.11)$$

erhalten.

### 3.2.2 Mischverteilungsdichten und Moment-Matching

Generell ist *Moment-Matching* ein wichtiges Werkzeug für Zielverfolgungsverfahren, die unscharfe Zielzustandsinformationen durch Dichten geeigneter Wahrscheinlichkeitsverteilungen repräsentieren. Diese Technik wird z. B. beim IMM-Filter in Abschnitt 3.3 benötigt, um die Spurnhypthesen verschiedener Dynamikmodelle miteinander zu verrechnen. Allgemein betrachtet bilden diese Modellhypthesen die Dichtefunktion einer sogenannten *Mischverteilung*: Diese Dichte entspricht per Definition einer gewichteten Summe einzelner Verteilungsdichten, wobei die Summe der einzelnen Gewichte eins ergibt [6, Abschnitt 1.4.16]. Bezeichnet beispielsweise  $\pi_{k|k}^{[i]}$  die Gültigkeitswahrscheinlichkeit der  $i$ -ten Hypothese im Zeitschritt  $k$  basierend auf den Beobachtungen  $\mathcal{Y}_k$ , erhalten wir im

<sup>2</sup>Für engl. *Mean Square Error*, d. h. mittlerer quadratischer Fehler.

<sup>3</sup>Für engl. *Minimum Mean Square Error Estimator*.

Fall von  $R$  Modellhypothesen den Zusammenhang

$$p(\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k) = \sum_{i=1}^R \pi_{k|k}^{[i]} \mathcal{N}_{sd}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k}^{[i]}, \mathbf{P}_{k|k}^{[i]}) \approx \mathcal{N}_{sd}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k}) \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^R \pi_{k|k}^{[i]} = 1.$$

Bei der Approximation in dieser Gleichung wird die Dichte der Mischverteilung durch eine gewöhnliche Dichtefunktion ersetzt – allerdings mit übereinstimmenden ersten und zweiten Momenten, d. h. Erwartungswert und Varianz. Dieser Vorgang wird in der Fachliteratur als *Moment-Matching* bezeichnet<sup>4</sup> [6, 79]. Zu diesem Zweck müssen die Momente der Mischverteilung berechnet werden; siehe etwa [79, Anhang A.6]:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k|k} &= \sum_{i=1}^R \pi_{k|k}^{[i]} \mathbf{x}_{k|k}^{[i]} \\ \mathbf{P}_{k|k} &= \sum_{i=1}^R \pi_{k|k}^{[i]} \left( \mathbf{P}_{k|k}^{[i]} + (\mathbf{x}_{k|k}^{[i]} - \mathbf{x}_{k|k})(\mathbf{x}_{k|k}^{[i]} - \mathbf{x}_{k|k})^T \right). \end{aligned}$$

Demzufolge ergibt sich der Erwartungswert der Mischverteilung intuitiv als gewichtete Summe der einzelnen Mittelwerte, wohingegen die Schätzfehlerkovarianzmatrix nicht nur die gewichtete Summe der einzelnen Kovarianzen bilden muss, sondern auch eine gewichtete Summe der dyadischen Produkte aus der Streuung der einzelnen Erwartungswerte vom Mittelwert der Mischverteilung.

Diese Vorgehensweise zum Approximieren von Mischverteilungsdichten lässt sich auch auf multivariate Matrixverteilungen erweitern, wie im Folgenden für die inverse Wishart-Verteilung gezeigt wird: Analog zum vektorvariaten Fall ergibt sich eine matrixvariante Mischverteilungsdichte der Form

$$p(\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k) = \sum_{i=1}^R \pi_{k|k}^{[i]} \mathcal{IW}_d(\mathbf{X}_k; \alpha_{k|k}^{[i]} + d + 1, \alpha_{k|k}^{[i]} \mathbf{X}_{k|k}^{[i]}) \approx \mathcal{IW}_d(\mathbf{X}_k; \alpha_{k|k} + d + 1, \alpha_{k|k} \mathbf{X}_{k|k}).$$

Der Erwartungswert dieser Mischverteilung lässt sich ebenfalls als gewichtete Summe der einzelnen Mittelwerte berechnen, d. h.

$$\mathbf{X}_{k|k} = \sum_{i=1}^R \pi_{k|k}^{[i]} \mathbf{X}_{k|k}^{[i]}.$$

Nachdem das Moment-Matching erster Ordnung durchgeführt und  $\mathbf{X}_{k|k}$  festgelegt worden ist, verbleibt lediglich der skalare Parameter  $\alpha_{k|k}$  für ein Moment-Matching zweiter Ordnung. Demnach ist nicht davon auszugehen, dass wir Gleichung (3.10) unter allen Umständen vollständig erfüllen können. Angesichts des skalaren Parameters  $\alpha_{k|k}$  empfiehlt sich daher ein Moment-Matching basierend auf dem MMSE  $e_{k|k}$  in Gleichung (3.11). Für diesen MMSE der matrixvariante Mischverteilung gilt

$$e_{k|k} = \sum_{i=1}^R \pi_{k|k}^{[i]} \left( e_{k|k}^{[i]} + \text{tr} \left( (\mathbf{X}_{k|k}^{[i]} - \mathbf{X}_{k|k})^2 \right) \right).$$

Zum Berechnen von  $\alpha_{k|k}$  aus dem MMSE  $e_{k|k}$  stellen wir lediglich Gleichung (3.11) um, woraufhin

<sup>4</sup>Ein weiteres Beispiel für Moment-Matching ist die Integration des Parameters  $z_d$  in die Likelihood-Funktion zur Skalierung der Ausdehnungsschätzung; siehe Abschnitt 2.3.1. Dort wird allerdings keine Mischverteilungsdichte approximiert, sondern die Dichtefunktion einer Gleichverteilung durch die einer Normalverteilung.

sich mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} p_{k|k} &:= e_{k|k} + (\text{tr } \mathbf{X}_{k|k})^2 + \text{tr}(\mathbf{X}_{k|k}^2) \\ q_{k|k} &:= 2(e_{k|k} + \text{tr}(\mathbf{X}_{k|k}^2)) \end{aligned}$$

die folgende quadratische Gleichung ergibt:

$$e_{k|k} \alpha_{k|k}^2 - p_{k|k} \alpha_{k|k} - q_{k|k} = 0.$$

Unter Berücksichtigung von  $p_{k|k} > e_{k|k}$  und  $q_{k|k} > 2e_{k|k}$  berechnen wir daraufhin als eindeutige Lösung

$$\alpha_{k|k} = \left(2e_{k|k}\right)^{-1} \left(p_{k|k} + \sqrt{p_{k|k}^2 + 4e_{k|k}q_{k|k}}\right). \quad (3.12)$$

In diesem Fall darf nicht das negative Vorzeichen vor der Wurzel verwendet werden, da dies stets einen negativen Wert für  $\alpha_{k|k}$  ergeben würde. Dagegen bewirkt das gewählte Vorzeichen offenbar immer  $\alpha_{k|k} > 2$  und liefert somit jeweils eine gültige Lösung. Damit verfügen wir über alle notwendigen Gleichungen, um ein Moment-Matching für eine matrixvariante Mischverteilung durchzuführen, deren einzelne Dichtefunktionen einer inversen Wishart-Verteilungsdichte genügen.

### 3.2.3 Darstellbarer Konfidenzbereich der 2-D-Objektausdehnung

Bei der rechnergestützten Sensordatenverarbeitung ist nicht nur die eigentliche Schätzung des unbekanntes Systemzustandes von Interesse, sondern auch ihre statistische Glaubwürdigkeit – z. B. in Form des MMSE, d. h.  $\text{tr Var}[\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k]$  für den kinematischen Zustand oder  $e_{k|k} = \text{tr Var}[\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k]$  für die Ausdehnungsschätzung. Zum Visualisieren dieser Schätzunsicherheiten eignen sich graphisch darstellbare Konfidenzbereiche, die aus Sicht des Schätzverfahrens den Bereich vorgeben, in dem es den wahren (aber unbekanntes) Systemzustand mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit vermutet. Im Fall von Zustandsvektoren ist dieses Vorgehen wohlbekannt: Mit  $\text{Var}[\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k] = \mathbf{P}_{k|k}$  und einer im Vorfeld festgelegten Konfidenzwahrscheinlichkeit  $c$  berechnet sich ein sogenanntes *Konfidenzniveau*  $h := h(c)$  durch Auswerten von

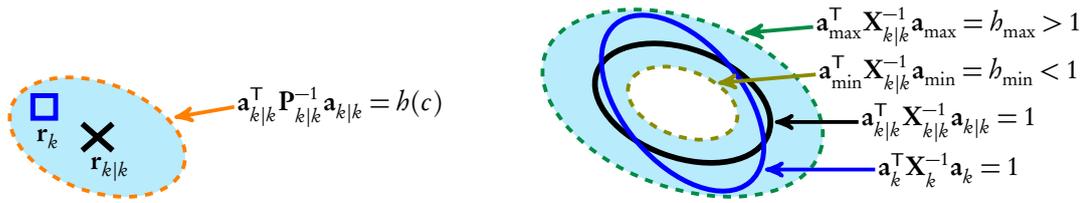
$$P\{(\mathbf{x}_{k|k} - \mathbf{x}_k)^\top \mathbf{P}_{k|k}^{-1} (\mathbf{x}_{k|k} - \mathbf{x}_k) \leq h\} = c.$$

Im Fall eines normalverteilten Zustandsvektors  $\mathbf{x}_k$  kann das Höhenniveau  $h$  numerisch bestimmt werden, da in diesem Fall  $(\mathbf{x}_{k|k} - \mathbf{x}_k)^\top \mathbf{P}_{k|k}^{-1} (\mathbf{x}_{k|k} - \mathbf{x}_k)$  einer Chi-Quadrat-Verteilung genügt; siehe etwa [6, Abschnitt 1.4.17]. Beschränken wir uns weiterhin lediglich auf die Positionskomponente  $\mathbf{r}_{k|k}$  der kinematischen Schätzung, kann eine sogenannte *Vertrauensellipse* durch die Menge aller Punkte  $\mathbf{c}_{k|k}$  angegeben werden, die der folgenden Gleichung genügen:

$$\mathbf{a}_{k|k}^\top \mathbf{P}_{k|k}^{-1} \mathbf{a}_{k|k} = h \quad \text{mit} \quad \mathbf{a}_{k|k} := \mathbf{c}_{k|k} - \mathbf{r}_{k|k}. \quad (3.13)$$

Diese Konfidenzellipse gibt die Grenze eines Bereiches vor, in dem das Verfahren für eine bestimmte Positionsschätzung  $\mathbf{r}_{k|k}$  den wahren Wert  $\mathbf{r}_k$  mit der Konfidenz  $c$  vermutet; siehe Abbildung 3.2(a) für eine Illustration dieser Zusammenhänge.

Diese Vorgehensweise bei Zustandsvektoren lässt sich allerdings nicht eins zu eins übertragen auf die Zustandsmatrix der Objektausdehnung: Obwohl  $\mathbf{V}_{k|k} = \text{Var}[\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k]$  wiederum eine SPD



(a) Konfidenzgebiet für einen normalverteilten Zustandsvektor (hier nur Positionskomponente). Dargestellt sind die geschätzte Position (Schwarz), die wahre Position (Blau) sowie die Grenze (Orange) des Konfidenzbereiches.

(b) Konfidenzgebiet für eine SPD Zustandsmatrix mit einer inversen Wishart-Verteilung. Dargestellt sind die geschätzte Ausdehnung (Schwarz), die wahre Ausdehnung (Blau) sowie die innere (Gold) und äußere Grenze (Grün) des Konfidenzbereiches.

**Abbildung 3.2:** Schematische Darstellung des Konfidenz- und Vertrauensbereiches bei einem Zustandsvektor (a) und einer Zustandsmatrix (b).

Matrix ist und wir rein formal gesehen  $\mathbf{P}_{k|k}$  durch  $\mathbf{V}_{k|k}$  in Gleichung (3.13) ersetzen können, bleibt die Bedeutung einer hierdurch definierten Ellipse unklar, da in diesem Fall ein Punkt  $\mathbf{a}_{k|k}$  die physikalische Einheit einer Fläche hätte. Aus diesem Grund benötigen wir einen anderen Ansatz zur Darstellung eines Konfidenzbereiches. Gemäß Gleichung (2.13) ist die Ellipse der wahren 2-D-Objektausdehnung durch

$$\mathbf{a}_k^T \mathbf{X}_k^{-1} \mathbf{a}_k = 1 \quad \text{mit} \quad \mathbf{a}_k := \mathbf{c}_k - \mathbf{r}_k \quad (3.14)$$

gegeben, wohingegen sich

$$\mathbf{a}_{k|k}^T \mathbf{X}_{k|k}^{-1} \mathbf{a}_{k|k} = 1 \quad (3.15)$$

als Ellipse der Ausdehnungsschätzung interpretieren lässt. Demzufolge sollte ein Konfidenzbereich bei einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit  $c$  eine Ausdehnung  $\mathbf{X}_k$  vorliegen haben, beim dem innerhalb des Vertrauensbereiches alle Punkte  $\mathbf{a}_k$  liegen, die in diesem Fall Gleichung (3.14) genügen.

Wie in Abbildung 3.2(b) gezeigt, betrachten wir im Folgenden zwei verschiedene Höhenlinien als Grenzen eines Konfidenzbereiches, dessen Orientierung und Halbachsenverhältnis durch die Ausdehnungsschätzung  $\mathbf{X}_{k|k}$  vorgegeben werden und daher von der wahren Ausdehnung  $\mathbf{X}_k$  abweichen können. Die jeweilige *Breite* des Konfidenzbereiches muss dann durch den Parameter  $\alpha_{k|k}$  festgelegt werden, der ein Maß für die Genauigkeit<sup>5</sup> der Ausdehnungsschätzung angibt. Im Detail bezeichnet  $c$  dann die Wahrscheinlichkeit für das Vorliegen einer Zustandsmatrix  $\mathbf{X}_k$ , so dass

$$h_{\min} \leq \mathbf{a}_k^T \mathbf{X}_{k|k}^{-1} \mathbf{a}_k \leq h_{\max} \quad (3.16)$$

für alle Punkte  $\mathbf{a}_k$  aus Gleichung (3.14) gilt. Betrachten wir einen solchen Punkt  $\mathbf{a}_k$ , berechnet sich der entsprechende Wert in Gleichung (3.16) zu

$$\zeta := \mathbf{a}_k^T \mathbf{X}_{k|k}^{-1} \mathbf{a}_k \quad \text{bzw.} \quad (\zeta^{-\frac{1}{2}} \mathbf{a}_k)^T \mathbf{X}_{k|k}^{-1} (\zeta^{-\frac{1}{2}} \mathbf{a}_k) = 1.$$

Daraus ergeben sich

$$\mathbf{a}_{k|k} = \zeta^{-\frac{1}{2}} \mathbf{a}_k \quad \text{und} \quad \mathbf{a}_k = \zeta^{\frac{1}{2}} \mathbf{a}_{k|k}$$

<sup>5</sup>Bei der Aktualisierung erhöht sich der Wert dieses skalaren Parameters um die Anzahl der Messungen: Das *Vertrauen* in einen geschätzten Zustand ist umso größer, je mehr Information sich aus verschiedenen Messungen gewinnen lässt. Aufgrund der Ungenauigkeiten im Dynamikmodell wirkt die Prädiktion diesem *Aktualisierungseffekt* entgegen.

für einen Punkt  $\mathbf{a}_{k|k}$ , der offensichtlich Gleichung (3.15) genügt. Aus Gleichung (3.14) folgt demnach

$$\mathbf{a}_{k|k}^\top \mathbf{X}_k^{-1} \mathbf{a}_{k|k} = \zeta^{-1},$$

während sich aus Gleichung (3.16) und somit  $h_{\min} \leq \zeta \leq h_{\max}$  folgender Ausdruck ergibt:

$$h_{\max}^{-1} \leq \mathbf{a}_{k|k}^\top \mathbf{X}_k^{-1} \mathbf{a}_{k|k} \leq h_{\min}^{-1}. \quad (3.17)$$

In diesem Fall bezeichnet  $c$  die Wahrscheinlichkeit für das Vorliegen einer Matrix  $\mathbf{X}_k$ , so dass Gleichung (3.17) für alle Punkte  $\mathbf{a}_{k|k}$  gilt, die Gleichung (3.15) genügen. Diese äquivalente Darstellung hat den entscheidenden Vorteil gegenüber Gleichung (3.16), dass wir die Marginaldichte der Zustandsmatrix  $\mathbf{X}_k$  – im Gegensatz zur Marginaldichte der Punkte  $\mathbf{a}_k$  – bereits kennen; siehe Gleichung (3.9).

Der Einfachheit halber ersetzen wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit die beiden Höheniveaus  $h_{\min}$  und  $h_{\max}$  durch einen Skalierungsfaktor  $f_{k|k} > 1$ , mit dem sich der Konfidenzbereich durch zweifache<sup>6</sup> Skalierung der Ausdehnungsschätzung berechnen lässt:

$$h_{\min} := f_{k|k}^{-1} \quad \text{und} \quad h_{\max} := f_{k|k},$$

wodurch wir

$$f_{k|k}^{-1} \leq \mathbf{a}_{k|k}^\top \mathbf{X}_k^{-1} \mathbf{a}_{k|k} \leq f_{k|k} \quad (3.18)$$

erhalten. Diese Ungleichung ist genau dann für alle  $\mathbf{a}_{k|k}$  erfüllt, wenn sie für diejenigen Punkte  $\mathbf{a}_{k|k}$  gilt, die die Extremwerte von  $\mathbf{a}_{k|k}^\top \mathbf{X}_k^{-1} \mathbf{a}_{k|k}$  liefern. Zur Extremwertbestimmung unter der Nebenbedingung (3.15) stellen wir mit dem Lagrange-Multiplikator  $\lambda$  zunächst die Lagrange-Funktion

$$L(\lambda) := \mathbf{a}_{k|k}^\top \mathbf{X}_k^{-1} \mathbf{a}_{k|k} + \lambda \left( 1 - \mathbf{a}_{k|k}^\top \mathbf{X}_k^{-1} \mathbf{a}_{k|k} \right)$$

auf, die über

$$\frac{1}{2} \text{grad}_{\mathbf{a}_{k|k}} L(\lambda) = \left( \mathbf{X}_k^{-1} - \lambda \mathbf{X}_k^{-1} \right) \mathbf{a}_{k|k} \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \quad (3.19)$$

wegen  $\mathbf{a}_{k|k} \neq \mathbf{0}$  zu einem verallgemeinerten Eigenwertproblem führt. Unter Berücksichtigung von Gleichung (3.15) berechnen sich mögliche Extremwerte demzufolge mit

$$\mathbf{a}_{k|k}^\top \mathbf{X}_k^{-1} \mathbf{a}_{k|k} = \lambda. \quad (3.20)$$

Darüber hinaus entsprechen die Lösungen für  $\lambda$  in Gleichung (3.19) gleichzeitig den Eigenwerten einer SPD Zustandsmatrix

$$\mathbf{Z}_k := (\mathbf{X}_{k|k}^{1/2})^\top \mathbf{X}_k^{-1} \mathbf{X}_{k|k}^{1/2} \quad \text{mit} \quad \mathbf{X}_{k|k}^{1/2} (\mathbf{X}_{k|k}^{1/2})^\top = \mathbf{X}_{k|k}.$$

Durch Einbeziehen von Gleichung (3.20) bei der Ausgangsforderung (3.18) ergeben sich letztlich die Bedingungen

$$\lambda_{\min}(\mathbf{Z}_k) \geq f_{k|k}^{-1} \quad \text{und} \quad \lambda_{\max}(\mathbf{Z}_k) \leq f_{k|k}.$$

Infolgedessen benötigen wir die Dichtefunktion der Verbundverteilung von kleinstem und größtem Eigenwert von  $\mathbf{Z}_k$ .

<sup>6</sup>Auf diese Weise ergeben sich die äußere und innere Grenze des Konfidenzbereiches für die Ausdehnungsschätzung in Abbildung 3.2(b).

Wie bereits erwähnt, beschreibt Gleichung (3.9) die Marginaldichte der Zustandsmatrix  $\mathbf{X}_k$  mit Erwartungswert  $\mathbf{X}_{k|k}$  und skalarem Parameter  $\alpha_{k|k} = \nu_{k|k} - d - 1$ . Daraus ergibt sich sowohl

$$\mathbf{X}_k^{-1} \sim \mathcal{W}_d(\nu_{k|k}, \alpha_{k|k}^{-1} \mathbf{X}_{k|k}^{-1})$$

als auch [55, Seite 90]

$$\mathbf{Z}_k \sim \mathcal{W}_d(\nu_{k|k}, \alpha_{k|k}^{-1} (\mathbf{X}_{k|k}^{1/2})^\top \mathbf{X}_{k|k}^{-1} \mathbf{X}_{k|k}^{1/2}),$$

weshalb die SPD Zustandsmatrix  $\mathbf{Z}_k$  der *Standard-Wishart-Verteilung*

$$\mathbf{Z}_k \sim \mathcal{W}_d(\nu_{k|k}, \alpha_{k|k}^{-1} \mathbf{I}_d) \quad (3.21)$$

genügt. Demzufolge beeinflusst ausschließlich der skalare Parameter  $\alpha_{k|k} = \nu_{k|k} - d - 1$  den gesuchten Zusammenhang zwischen Konfidenzwahrscheinlichkeit  $c$  und Skalierungsfaktor  $f_{k|k}$ . Aus der Fachliteratur [110, Seite 107] kennen wir die Verbunddichtefunktion der Eigenwerte einer Zustandsmatrix mit Standard-Wishart-Verteilung (3.21): Im Fall  $d = 2$ , d. h. zwei räumliche Dimensionen, gilt laut Abschnitt B.3.3

$$p(\lambda_{\max}, \lambda_{\min}) = \frac{(\alpha_{k|k})^{\nu_{k|k}} (\lambda_{\max} \lambda_{\min})^{\frac{1}{2}(\nu_{k|k}-3)} (\lambda_{\max} - \lambda_{\min})}{4\Gamma(\nu_{k|k} - 1)} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha_{k|k} (\lambda_{\max} + \lambda_{\min})\right)$$

für  $\lambda_{\max} \geq \lambda_{\min} \geq 0$ . Mit dieser Verbunddichtefunktion berechnet sich die Konfidenzwahrscheinlichkeit  $c$  für einen vorgegebenen Skalierungsfaktor  $f_{k|k}$  durch zweifache Integration:

$$c(f_{k|k}) = P\left\{f_{k|k}^{-1} \leq \lambda_{\min} \wedge \lambda_{\max} \leq f_{k|k}\right\} = \int_{f_{k|k}^{-1}}^{f_{k|k}} \int_{f_{k|k}^{-1}}^{\lambda_{\max}} p(\lambda_{\max}, \lambda_{\min}) d\lambda_{\min} d\lambda_{\max}.$$

Die ausführliche Berechnung dieses Doppelintegrals u. a. mit Hilfe von partieller Integration findet sich aus Gründen der Übersichtlichkeit in Anhang D. Mit den Abkürzungen

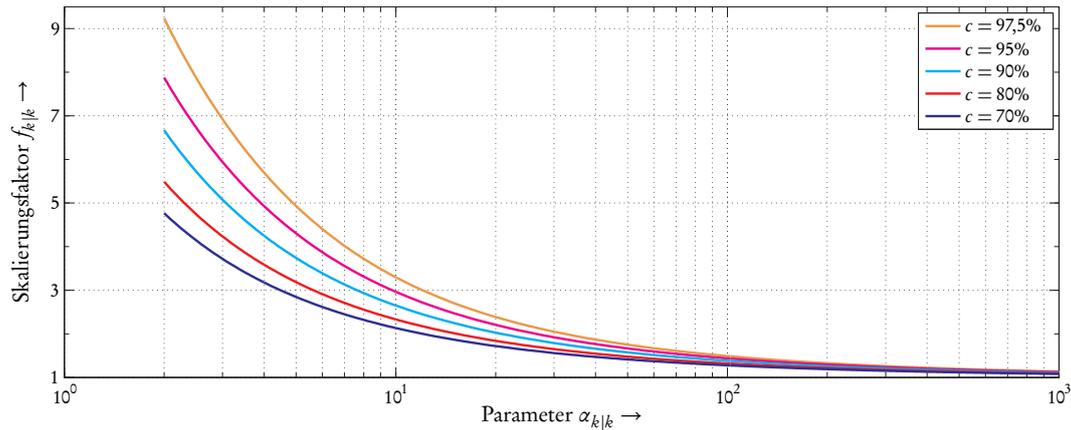
$$\Lambda_1 := \frac{1}{2}\alpha_{k|k} f_{k|k}^{-1}, \quad \Lambda_2 := \frac{1}{2}\alpha_{k|k} f_{k|k} \quad \text{und} \quad \beta := \frac{1}{2}(\nu_{k|k} - 1)$$

und der regularisierten Gammafunktion (A.7), d. h.  $\mathcal{P}(\beta, \Lambda) = \gamma(\beta, \Lambda)/\Gamma(\beta)$ , ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für den Konfidenzbereich der 2-D-Ausdehnungsschätzung gemäß Gleichung (D.4) zu

$$c(f_{k|k}) = \mathcal{P}(2\beta, 2\Lambda_2) - \mathcal{P}(2\beta, 2\Lambda_1) - \sqrt{\pi} \frac{\Lambda_1^\beta \exp(-\Lambda_1) + \Lambda_2^\beta \exp(-\Lambda_2)}{\Gamma(\beta + \frac{1}{2})} \cdot \left(\mathcal{P}(\beta, \Lambda_2) - \mathcal{P}(\beta, \Lambda_1)\right). \quad (3.22)$$

Mit diesem Zusammenhang existiert eine Formel, um bei vorgegebenen Werten für  $f_{k|k}$  und  $\alpha_{k|k}$  die zugehörige Konfidenzwahrscheinlichkeit  $c$  zu berechnen. Gesucht ist allerdings ein Ausdruck der Form  $f_{k|k}(c)$ , so dass wir bei vorgegebener Wahrscheinlichkeit  $c$  und einem beliebigen  $\alpha_{k|k}$  den entsprechenden Skalierungsfaktor  $f_{k|k}$  erhalten.

Obwohl der Ausdruck  $c(f_{k|k})$  eigentlich streng monoton steigend und damit prinzipiell umkehrbar ist, kann  $f_{k|k}$  offenbar nur numerisch für vorgegebenes  $c$  und  $\alpha_{k|k}$  berechnet werden. Zu diesem Zweck eignen sich beispielsweise numerische Standardverfahren zur Nullstellenberechnung – wie etwa das *Verfahren der Bisektion* [133]. Nachdem mit der gewünschten Wahrscheinlichkeit  $c_0$  eine



**Abbildung 3.3:** Verlauf des Skalierungsfaktors  $f_{k|k}$  zum Berechnen des Konfidenzbereiches der Zielausdehnung in Abhängigkeit des skalaren Parameters  $\alpha_{k|k}$  der Ausdehnung für verschiedene Konfidenzwahrscheinlichkeiten  $c$ .

Nullstellengleichung z. B. der Form  $g(f_{k|k}) := c(f_{k|k}) - c_0$  aufgestellt worden ist, erhalten wir bei vorgegebenem  $\alpha_{k|k}$  für  $g(f_{k|k}) = 0$  den gesuchten Skalierungsfaktor  $f_{k|k}$ , so dass  $c(f_{k|k}) = c_0$  gilt. Generell können diese Werte für jede gewünschte Wahrscheinlichkeit im Voraus berechnet werden, da sie nur von einem skalaren Parameter abhängen; somit hat die numerische Berechnung keinen Einfluss auf die Laufzeit der eigentlichen Zielverfolgung.

Abschließend zeigt Abbildung 3.3 verschiedene Verläufe des Skalierungsfaktors  $f_{k|k}$  für ausgewählte Konfidenzwahrscheinlichkeiten, wobei der skalare Parameter  $\alpha_{k|k}$  im Intervall  $[2, 1000]$  liegt: Wie zuvor erläutert ist  $\alpha_{k|k}$  ein Maß für die Genauigkeit der Ausdehnungsschätzung. Deshalb nähert sich der Skalierungsfaktor  $f_{k|k}$  dem Wert eins an für große Werte von  $\alpha_{k|k}$ . Darüber hinaus erhalten wir für eine höhere Konfidenzwahrscheinlichkeit einen größeren Skalierungsfaktor, da in diesem Fall der Konfidenzbereich *breiter* ausfallen muss, so dass die wahre Ausdehnung mit der höheren Wahrscheinlichkeit innerhalb dieses Vertrauensbereiches liegt; siehe auch Abbildung 3.2(b).

### 3.3 Einsatz des weiterentwickelten Verfahrens in einem IMM-Filter

Die Modellierung der Systemdynamik spielt für die Qualität der Tracking-Ergebnisse eine wichtige Rolle: Bei der dynamischen Zustandsschätzung werden häufig lineare Bewegungsmodelle angenommen, während die Unsicherheiten der Systemdynamik über das Prozessrauschen modelliert werden. Das *glättende Verhalten* eines Tracking-Filters beruht auf dem Wechselspiel zwischen Festhalten an der Prädiktion und Berücksichtigen der mit Fehlern behafteten Messungen. Schwierigkeiten bei der Wahl geeigneter Dynamikmodelle ergeben sich zwangsläufig durch das nicht vorhersagbare Bewegungsverhalten stark manövrierender Ziele: Für Geradeausbewegungen mit konstanter Geschwindigkeit bietet sich eher ein niedrigeres Prozessrauschen an als beispielsweise bei Beschleunigungs- und Bremsvorgängen sowie Manövern mit Richtungswechseln. Bei ausgedehnten Zielobjekten und grobstrukturierten Objektgruppen spielen zusätzlich Änderungen der räumlichen Ausdehnung eine Rolle – z. B. beim Kurvenflug einer Rotte oder einer sich auflösenden Formation.

In diesem Zusammenhang berücksichtigen sogenannte *Mehrmodell-Ansätze* eine vorher festgelegte Zahl von unterschiedlichen Dynamikmodellen zur Modellierung der Systemdynamik: Statt einer

harten Entscheidung für ein bestimmtes Dynamikmodell benutzen solche Verfahren *Gültigkeitswahrscheinlichkeiten*, um die Übereinstimmung zwischen Messungen und Bewegungsmodellen zu bewerten. Da auf jede Modellhypothese immer alle Dynamikmodelle angewendet werden, nimmt die Zahl der Hypothesen mit der Zeit exponentiell zu, so dass wir in der Praxis auf Näherungen angewiesen sind [6, 41, 93]: Das etablierte Standardverfahren für diese Zwecke ist laut [79, Seite 10] das sogenannte IMM-Filter (für engl. *Interacting Multiple Model Filter*), mit dem sich zuverlässig auch solche Objekte verfolgen lassen, deren dynamisches Verhalten lediglich über gewisse Zeiträume hinweg konstant ist. Dieses IMM-Filter reduziert in einem sogenannten *Interaktionsschritt* die Zahl der Modellhypothesen durch Moment-Matching: Im Fall von  $R$  Dynamikmodellen ist die Zahl der Modellhypothesen auch gleich  $R$ . Es müssen lediglich  $R$  parallele Tracking-Filter implementiert werden. Für Punktziele finden sich die Details zu diesem Verfahren in der Fachliteratur; siehe etwa [6, 20, 21, 41]. Im Folgenden soll lediglich aufgezeigt werden, wie sich die Ausdehnungsschätzung in einem IMM-Filter berücksichtigen lässt.

### 3.3.1 Berücksichtigung der Objektausdehnung im methodischen Rahmen

Sei  $R$  die Zahl der zu berücksichtigten Dynamikmodelle und  $\pi_k$  die Zufallsvariable, die das jeweils gültige Bewegungsmodell während der Prädiktion angibt. Dann bezeichnet

$$\pi_{k|k}^{[j]} := P\{\pi_k = j | \mathcal{Y}_k\} \quad (j = 1, \dots, R)$$

die Gültigkeitswahrscheinlichkeit des  $j$ -ten Dynamikmodells im Zeitschritt  $k$  basierend auf der Messsequenz  $\mathcal{Y}_k$ , wobei

$$\sum_{j=1}^R \pi_{k|k}^{[j]} = 1$$

gilt. Nach Erweiterung des gemeinsamen Systemzustandes  $(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k)$  mit der Zufallsvariablen  $\pi_k$  lässt sich die A-posteriori-Dichte zunächst in modellabhängige Komponenten zerlegen, d. h.

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k) = \sum_{j=1}^R \pi_{k|k}^{[j]} p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \pi_k = j, \mathcal{Y}_k),$$

woraufhin sich für die  $R$  modellabhängigen A-posteriori-Dichtefunktionen der Zusammenhang

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \pi_k = j, \mathcal{Y}_k) = \frac{p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \pi_k = j) p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \pi_k = j, \mathcal{Y}_{k-1})}{p(\mathbf{Y}_k | \pi_k = j, \mathcal{Y}_{k-1})} \quad (3.23)$$

ergibt – mit  $R$  modellspezifischen Messwahrscheinlichkeiten

$$\Lambda_{k|k-1}^{[j]} := p(\mathbf{Y}_k | \pi_k = j, \mathcal{Y}_{k-1}) = \iint p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \pi_k = j) p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \pi_k = j, \mathcal{Y}_{k-1}) d\mathbf{x}_k d\mathbf{X}_k. \quad (3.24)$$

Weiterhin berechnet sich die modellabhängige Prädiktion in Gleichung (3.23) zu

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \pi_k = j, \mathcal{Y}_{k-1}) &= p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \pi_k = j, \mathcal{Y}_{k-1}) p(\mathbf{X}_k | \pi_k = j, \mathcal{Y}_{k-1}) \\ &= \iint p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1}, \pi_k = j, \mathcal{Y}_{k-1}) p(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1} | \pi_k = j, \mathcal{Y}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} d\mathbf{X}_{k-1}. \end{aligned}$$

An dieser Stelle benutzen wir die bekannten Annahmen aus Abschnitt 2.2.2 und [78], damit ein solches Doppelintegral erneut in zwei Teilprobleme aufgespalten werden kann: Demnach soll die Systemdynamik einem einstufigen zeitdiskreten Markow-Prozess genügen, das Dynamikmodell für Kinematik/Ausdehnung nicht vom vorherigen Systemzustand der Ausdehnung/Kinematik abhängen und die zeitliche Änderung der Objektausdehnung näherungsweise keinen Einfluss auf die Prädiktion des kinematischen Zustandes haben, d. h.

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1}, \pi_k = j, \mathbf{Y}_{k-1}) &= p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1}, \pi_k = j) p(\mathbf{X}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1}, \pi_k = j) \\ p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1}, \pi_k = j) &= p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \pi_k = j) \\ p(\mathbf{X}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1}, \pi_k = j) &= p(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1}, \pi_k = j) \\ p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{X}_{k-1}, \pi_k = j, \mathbf{Y}_{k-1}) &\approx p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{X}_k, \pi_k = j, \mathbf{Y}_{k-1}). \end{aligned}$$

Damit kann die modellabhängige A-priori-Dichte  $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \pi_k = j, \mathbf{Y}_{k-1})$  mit den beiden Integralen

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \pi_k = j, \mathbf{Y}_{k-1}) &= \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \pi_k = j) p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{X}_k, \pi_k = j, \mathbf{Y}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1} \\ p(\mathbf{X}_k | \pi_k = j, \mathbf{Y}_{k-1}) &= \int p(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1}, \pi_k = j) p(\mathbf{X}_{k-1} | \pi_k = j, \mathbf{Y}_{k-1}) d\mathbf{X}_{k-1} \end{aligned}$$

getrennt angegeben werden. Allerdings entspricht

$$p(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1} | \pi_k = j, \mathbf{Y}_{k-1}) \approx p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{X}_k, \pi_k = j, \mathbf{Y}_{k-1}) p(\mathbf{X}_{k-1} | \pi_k = j, \mathbf{Y}_{k-1}) \quad (3.25)$$

nicht der modellspezifischen A-posteriori-Dichte zum Zeitpunkt  $t_{k-1}$ , da sich diese Dichtefunktionen auf das im Zeitschritt  $k$  gültige Dynamikmodell  $\pi_k$  beziehen – und nicht auf  $\pi_{k-1}$ . Deshalb ergänzen wir zunächst den kinematischen Teil um die Zufallsvariable  $\pi_{k-1}$  und erhalten

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{X}_k, \pi_k = j, \mathbf{Y}_{k-1}) &= \sum_{i=1}^R p(\mathbf{x}_{k-1}, \pi_{k-1} = i | \mathbf{X}_k, \pi_k = j, \mathbf{Y}_{k-1}) \\ &= \sum_{i=1}^R P\{\pi_{k-1} = i | \pi_k = j, \mathbf{Y}_{k-1}\} p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{X}_k, \pi_{k-1} = i, \pi_k = j, \mathbf{Y}_{k-1}) \end{aligned}$$

mit den sogenannten *Mischungswahrscheinlichkeiten* [41]

$$\pi_{k-1|k-1}^{[ij]} := P\{\pi_{k-1} = i | \pi_k = j, \mathbf{Y}_{k-1}\}. \quad (3.26)$$

In diesem Zusammenhang wird beispielsweise in [21] die Annahme getroffen, dass  $\pi_k$  unabhängig vom Zustand  $\mathbf{x}_{k-1}$  ist bei bekanntem  $\pi_{k-1}$ . Mit dieser Auslegung können wir

$$p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{X}_k, \pi_{k-1} = i, \pi_k = j, \mathbf{Y}_{k-1}) = p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{X}_k, \pi_{k-1} = i, \mathbf{Y}_{k-1})$$

formulieren, so dass sich für den kinematischen Teil letztlich

$$p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{X}_k, \pi_k = j, \mathbf{Y}_{k-1}) = \sum_{i=1}^R \pi_{k-1|k-1}^{[ij]} p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{X}_k, \pi_{k-1} = i, \mathbf{Y}_{k-1})$$

ergibt – analog zum Ergebnis für Punktziele in [6, 41]. Mit den gleichen Überlegungen erhalten wir

für den Ausdehnungsteil in Gleichung (3.25)

$$p(\mathbf{X}_{k-1} | \pi_k = j, \mathbf{Y}_{k-1}) = \sum_{i=1}^R \pi_{k-1|k-1}^{[i]j} p(\mathbf{X}_{k-1} | \pi_{k-1} = i, \mathbf{Y}_{k-1}).$$

Damit beziehen sich die Dichtefunktionen letztlich auf die modellspezifischen A-posteriori-Dichten zum Zeitpunkt  $t_{k-1}$ , die aus der letzten Aktualisierung bekannt sind:

$$p(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{X}_{k-1} | \pi_{k-1} = i, \mathbf{Y}_{k-1}) \approx p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{X}_k, \pi_{k-1} = i, \mathbf{Y}_{k-1}) p(\mathbf{X}_{k-1} | \pi_{k-1} = i, \mathbf{Y}_{k-1}).$$

Damit können wir alle Berechnungen dieses Abschnittes im folgenden Zusammenhang festhalten:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_k) &= \sum_{j=1}^R \pi_{k|k}^{[j]} \frac{1}{\Lambda_{k|k-1}^{[j]}} p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \pi_k = j) \\ &\cdot \int p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \mathbf{x}_{k-1}, \pi_k = j) \underbrace{\sum_{i=1}^R \pi_{k-1|k-1}^{[i]j} p(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{X}_k, \pi_{k-1} = i, \mathbf{Y}_{k-1}) d\mathbf{x}_{k-1}}_{\text{Approx. d. Mischverteilung durch Moment-Matching}} \\ &\cdot \int p(\mathbf{X}_k | \mathbf{X}_{k-1}, \pi_k = j) \underbrace{\sum_{i=1}^R \pi_{k-1|k-1}^{[i]j} p(\mathbf{X}_{k-1} | \pi_{k-1} = i, \mathbf{Y}_{k-1}) d\mathbf{X}_{k-1}}_{\text{Approx. d. Mischverteilung durch Moment-Matching}}. \quad (3.27) \end{aligned}$$

Wie bereits erwähnt, reduziert das IMM-Filter in einem sogenannten *Interaktionsschritt* die Zahl der Modellhypothesen durch Moment-Matching: In der letzten Gleichung markieren geschweifte Klammern diese zu approximierenden Mischverteilungen. Demzufolge entstehen die Startwerte der modellabhängigen Prädiktion erst durch *Mischen* vorangegangener Modellhypothesen – deshalb auch der Begriff *Interaktion*. Auf diese Weise bleibt die Zahl der Modellhypothesen konstant.

### 3.3.2 Filtergleichungen des weiterentwickelten IMM-Filters

Ausgehend von der Integration der Objektausdehnung in den Bayes'schen Formalismus des IMM-Filters stellt dieser Abschnitt das rekursive Verfahren und seine Filtergleichungen vor. Neben der folgenden Beschreibung der einzelnen Schritte bietet Abbildung 3.4 parallel zu dieser eine Übersicht.

Ausgangspunkt der Berechnungen ist die Gültigkeitswahrscheinlichkeit des  $j$ -ten Dynamikmodells (von insgesamt  $R$ ) nach der letzten Aktualisierung  $\pi_{k-1|k-1}^{[j]}$ , d. h. zum Zeitpunkt  $t_{k-1}$  gegeben der Messsequenz  $\mathbf{Y}_{k-1}$ . Zur Prädiktion dieser Modellgewichte benötigen wir sogenannte *Transitions-wahrscheinlichkeiten*, die die Wahrscheinlichkeit eines Wechsels von Modell  $i$  zu Modell  $j$  angeben:

$$\pi^{[ij]} := P\{\pi_k = j | \pi_{k-1} = i\} \quad \text{mit} \quad \sum_{j=1}^R \pi^{[ij]} = 1 \quad (i, j = 1, \dots, R).$$

Für diese Wahrscheinlichkeiten wird wie in [6, 41] angenommen, dass sie unabhängig vom gemeinsamen Systemzustand sind. Zu Beginn des Verarbeitungszyklus berechnen wir zunächst mit

$$\pi_{k|k-1}^{[j]} := P\{\pi_k = j | \mathbf{Y}_{k-1}\} = \sum_{i=1}^R P\{\pi_k = j, \pi_{k-1} = i | \mathbf{Y}_{k-1}\} = \sum_{i=1}^R \pi^{[ij]} \pi_{k-1|k-1}^{[i]}$$

die Vorhersage der Gültigkeitswahrscheinlichkeiten; daraufhin ergibt sich mit der Bayes'schen Regel

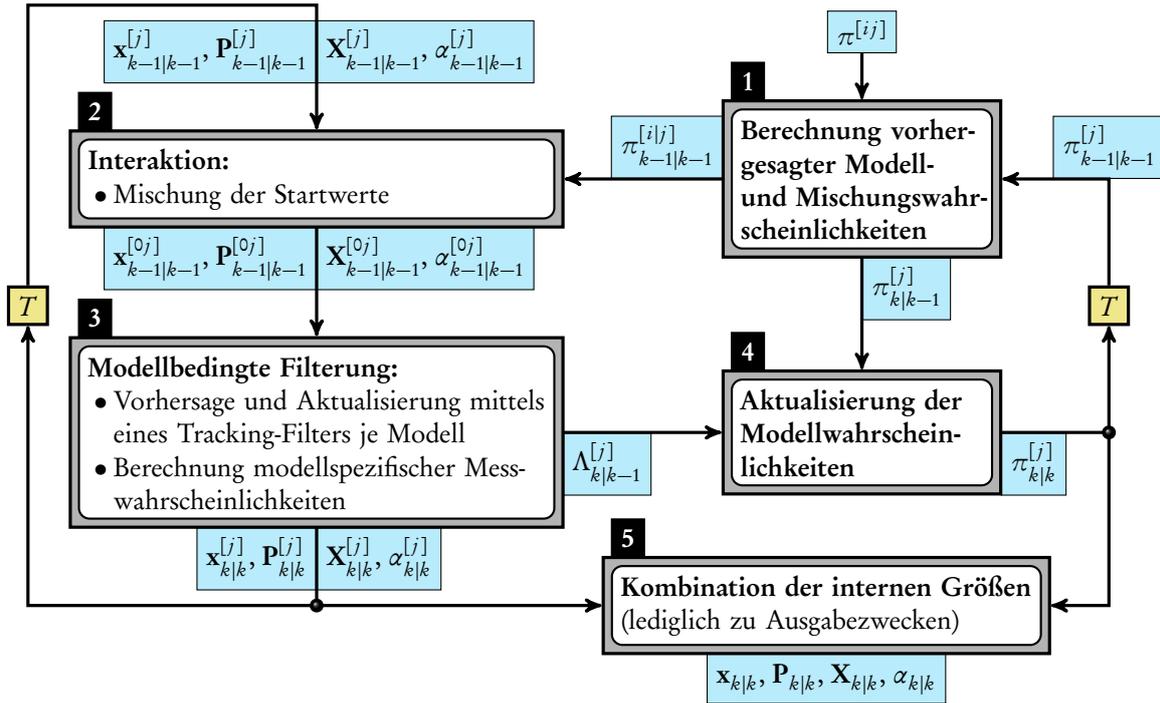


Abbildung 3.4: Verarbeitungszyklus des IMM-Filters für ausgedehnte Zielobjekte und Objektgruppen.

für die Mischungswahrscheinlichkeiten aus Gleichung (3.26)

$$\pi_{k-1|k-1}^{[ij]} = \frac{P\{\pi_k = j | \pi_{k-1} = i\} P\{\pi_{k-1} = i | \mathcal{Y}_{k-1}\}}{P\{\pi_k = j | \mathcal{Y}_{k-1}\}} = \frac{\pi^{[ij]} \pi_{k-1|k-1}^{[i]}}{\pi_{k|k-1}^{[j]}}$$

Wie in Gleichung (3.27) angedeutet, lässt sich mit diesen Mischungswahrscheinlichkeiten der Interaktionsschritt durchführen, dem ein Moment-Matching zugrunde liegt. Für den kinematischen Teil des Schätzproblems erhalten wir demnach in Anlehnung an Abschnitt 3.2.2

$$\mathbf{x}_{k-1|k-1}^{[0j]} = \sum_{i=1}^R \pi_{k-1|k-1}^{[ij]} \mathbf{x}_{k-1|k-1}^{[i]}$$

$$\mathbf{P}_{k-1|k-1}^{[0j]} = \sum_{i=1}^R \pi_{k-1|k-1}^{[ij]} \left( \mathbf{P}_{k-1|k-1}^{[i]} + (\mathbf{x}_{k-1|k-1}^{[i]} - \mathbf{x}_{k-1|k-1}^{[0j]})(\mathbf{x}_{k-1|k-1}^{[i]} - \mathbf{x}_{k-1|k-1}^{[0j]})^T \right),$$

wohingegen aus den inversen Wishart-Verteilungen der Ausdehnungsschätzung

$$\mathbf{X}_{k-1|k-1}^{[0j]} = \sum_{i=1}^R \pi_{k-1|k-1}^{[ij]} \mathbf{X}_{k-1|k-1}^{[i]}$$

$$e_{k-1|k-1}^{[0j]} = \sum_{i=1}^R \pi_{k-1|k-1}^{[ij]} \left( e_{k-1|k-1}^{[i]} + \text{tr} \left( (\mathbf{X}_{k-1|k-1}^{[i]} - \mathbf{X}_{k-1|k-1}^{[0j]})^2 \right) \right)$$

folgt: Aus  $e_{k-1|k-1}^{[0j]}$  ergibt sich letztlich der skalare Parameter  $\alpha_{k-1|k-1}^{[0j]}$  gemäß Gleichung (3.12). Ausgehend von diesen durch *Mischung* gewonnenen Anfangszuständen und Startwerten beginnt der eigentliche Tracking-Zyklus unseres weiterentwickelten Ansatzes – bestehend aus einem Tracking-Filter mit Prädiktions- und Aktualisierungsschritt je Dynamikmodell. In jedem Filter benutzen wir

die Messungen individuell zum Update des modellspezifischen Systemzustandes.

Zum Bewerten der modellabhängigen Zustandsschätzungen benötigen wir die modellspezifischen Messwahrscheinlichkeiten  $\Lambda_{k|k-1}^{[j]}$  aus Gleichung (3.24), die die Differenz zwischen erwarteten Messungen und gemessenen Sensordaten beurteilen. Im Kontext von ausgedehnten Zielobjekten und Objektgruppen ist dabei auch zu berücksichtigen, wie die Streubreite der Messungen mit der vorhergesagten Objektausdehnung  $\mathbf{X}_{k|k-1}^{[j]}$  harmonisiert. Mit der modellspezifischen prädizierten Varianz einer Einzelmessung

$$\mathbf{Y}_{k|k-1}^{[j]} = z_d \mathbf{X}_{k|k-1}^{[j]} + \mathbf{R}$$

empfiehlt [169] in Anlehnung an Gleichung (3.4) den Ansatz

$$\Delta_{k|k-1}^{[j]} := \bar{\mathbf{Y}}_k - (n_k - 1) \mathbf{Y}_{k|k-1}^{[j]}.$$

Um später die modellabhängige Schätzfehlervarianz der Ausdehnung einbeziehen zu können, definieren wir mit der wahren Ausdehnung  $\mathbf{X}_k$  zunächst

$$\Delta \mathbf{Y}_k^{[j]} := \bar{\mathbf{Y}}_k - (n_k - 1)(z_d \mathbf{X}_k + \mathbf{R})$$

und erhalten

$$\Delta_{k|k-1}^{[j]} = \Delta \mathbf{Y}_k^{[j]} + z_d (n_k - 1) (\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k|k-1}^{[j]}).$$

Dann ersetzen wir zur ungefähren Bestimmung der Varianz von  $\Delta \mathbf{Y}_k^{[j]}$  die unbekannte Größe  $\mathbf{X}_k$  durch ihre modellbedingte Vorhersage, so dass analog zu Gleichung (3.2) die Wishart-Verteilung<sup>7</sup>

$$\bar{\mathbf{Y}}_k \stackrel{(\approx)}{\sim} \mathcal{W}_d(n_k - 1, \mathbf{Y}_{k|k-1}^{[j]})$$

angenommen werden kann: Unter Berücksichtigung von Gleichung (B.7) ergibt sich die Näherung

$$\text{Var}[\Delta \mathbf{Y}_k^{[j]}] \approx (n_k - 1) \left( (\text{tr} \mathbf{Y}_{k|k-1}^{[j]}) \mathbf{Y}_{k|k-1}^{[j]} + (\mathbf{Y}_{k|k-1}^{[j]})^2 \right).$$

Mit diesem Ergebnis und der modellspezifischen Varianz der Ausdehnung aus Gleichung (3.10) erhalten wir schließlich

$$\text{Var}[\Delta_{k|k-1}^{[j]}] \approx \text{Var}[\Delta \mathbf{Y}_k^{[j]}] + z_d^2 (n_k - 1)^2 \mathbf{V}_{k|k-1}^{[j]}.$$

In den Arbeiten [165, 166, 169] wird daraufhin zur Berechnung der gesuchten modellspezifischen Messwahrscheinlichkeiten vorgeschlagen, für  $n_k \geq 2$  den Ausdruck

$$\Lambda_{k|k-1}^{[j]} \propto \mathcal{N}(\bar{\mathbf{y}}_k; \mathbf{H} \mathbf{x}_{k|k-1}^{[j]}, \mathbf{S}_{k|k-1}^{[j]}) \cdot \frac{\text{etr} \left( -\frac{1}{2} \Delta_{k|k-1}^{[j]} (\text{Var}[\Delta_{k|k-1}^{[j]}])^{-1} \Delta_{k|k-1}^{[j]} \right)}{|2\pi \text{Var}[\Delta_{k|k-1}^{[j]}]|^{\frac{d+1}{4}}}$$

zu verwenden – und im Fall  $n_k = 1$ , d. h. im Fall einer einzelnen Messung, den Ausdruck

$$\Lambda_{k|k-1}^{[j]} \approx \mathcal{N}(\bar{\mathbf{y}}_k; \mathbf{H} \mathbf{x}_{k|k-1}^{[j]}, \mathbf{S}_{k|k-1}^{[j]}).$$

Wie beim Ansatz für Punktziele in [6, 41] aktualisieren wir mit diesen Messwahrscheinlichkeiten die

<sup>7</sup>Diese Verteilung entspricht dem Grenzwert der erwarteten Messstreuung in Abschnitt 2.5.3, wobei wir hier im Vergleich zu Gleichung (2.46) zusätzlich die Kovarianzmatrix  $\mathbf{R}$  eines statistischen Sensormessfehlers berücksichtigen.

Gültigkeitswahrscheinlichkeiten der verschiedenen Dynamikmodelle: Mit der Bayes'schen Regel ergibt sich zunächst

$$\pi_{k|k}^{[j]} \propto p(\mathbf{Y}_k | \pi_k = j, \mathbf{Y}_{k-1}) P\{\pi_k = j | \mathbf{Y}_{k-1}\} = \Lambda_{k|k-1}^{[j]} \pi_{k|k-1}^{[j]}.$$

Da die Summe der einzelnen Modellgewichte im Sinne einer Mischverteilung gleich eins sein soll, erhalten wir für die Gültigkeitswahrscheinlichkeit des  $j$ -ten Dynamikmodells schließlich

$$\pi_{k|k}^{[j]} = \frac{\Lambda_{k|k-1}^{[j]} \pi_{k|k-1}^{[j]}}{\sum_{i=1}^R \Lambda_{k|k-1}^{[i]} \pi_{k|k-1}^{[i]}} \quad (j = 1, \dots, R).$$

Auf diese Weise sind alle Gleichungen des weiterentwickelten IMM-Filters formuliert, die für einen reinen Funktionsablauf benötigt werden. Zu Darstellungs- und Ausgabezwecken empfiehlt sich am Ende eines Verarbeitungszyklus eine *Kombination* der internen Modellgrößen, der wiederum ein Moment-Matching zugrunde liegt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k|k} &= \sum_{j=1}^R \pi_{k|k}^{[j]} \mathbf{x}_{k|k}^{[j]} & \mathbf{P}_{k|k} &= \sum_{j=1}^R \pi_{k|k}^{[j]} \left( \mathbf{P}_{k|k}^{[j]} + (\mathbf{x}_{k|k}^{[j]} - \mathbf{x}_{k|k}) (\mathbf{x}_{k|k}^{[j]} - \mathbf{x}_{k|k})^\top \right) \\ \mathbf{X}_{k|k} &= \sum_{j=1}^R \pi_{k|k}^{[j]} \mathbf{X}_{k|k}^{[j]} & e_{k|k} &= \sum_{j=1}^R \pi_{k|k}^{[j]} \left( e_{k|k}^{[j]} + \text{tr} \left( (\mathbf{X}_{k|k}^{[j]} - \mathbf{X}_{k|k})^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Aus  $e_{k|k}$  ergibt sich dann der skalare Parameter  $\alpha_{k|k}$  gemäß Gleichung (3.12).

### 3.4 Alternativer Aktualisierungsschritt von Orguner

In Abschnitt 3.1 haben wir eine Weiterentwicklung des Bayes'schen Ansatzes zur Verfolgung ausgedehnter Objekte und nicht aufgelöster Gruppen vorgestellt, so dass sich ein statistischer Sensormessfehler in den Filtergleichungen näherungsweise einbeziehen lässt – unter Zuhilfenahme geeigneter Approximationen. In 2012 wurde in *IEEE Transactions on Signal Processing* ein Artikel von Umut Orguner veröffentlicht [113], der eine alternative Verfahrensweise vorschlägt, um Messrauschen in unserem Bayes'schen Ansatz zu berücksichtigen. Dieser Abschnitt stellt seine Herangehensweise im Kontext dieser Arbeit kurz dar.

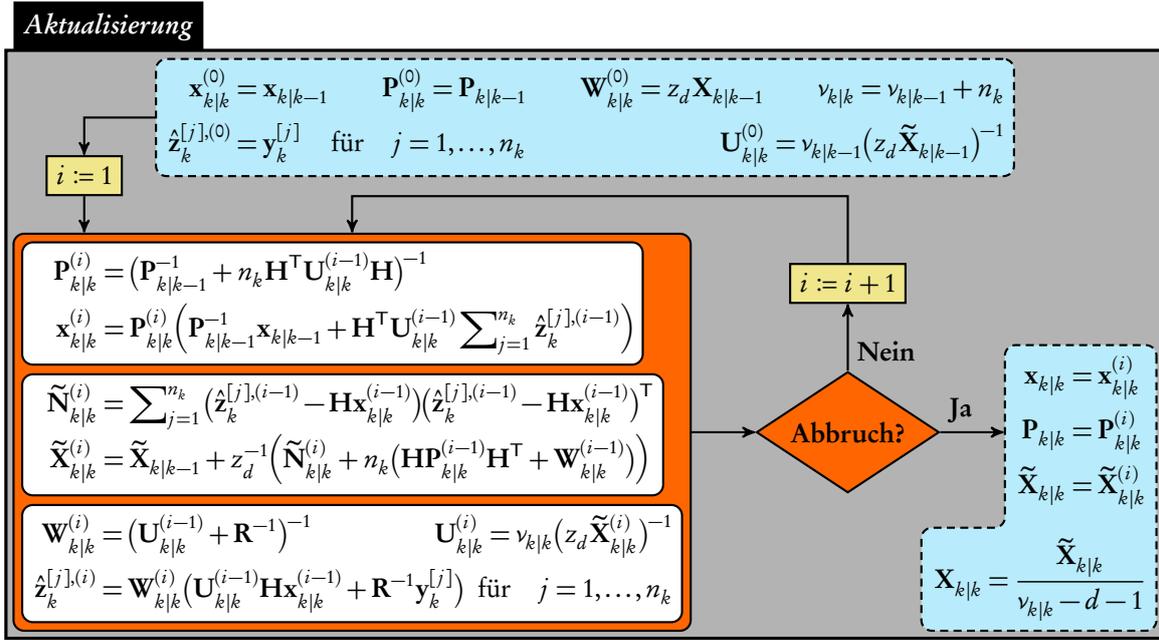
Orguners Ausgangspunkt in [113] ist die Annahme, dass sich eine einzelne Messung (der insgesamt  $n_k$  Messungen) durch zwei Zufallsvariablen darstellen lässt: Einerseits bezeichnet  $\mathbf{z}_k^{[j]}$  eine nichtbeobachtbare (*innere*) Zufallsvariable des eigentlichen Schwerpunktes, deren Varianz lediglich durch die skalierte Objektausdehnung bestimmt wird, d. h.

$$\mathbf{z}_k^{[j]} \sim \mathcal{N}_d(\mathbf{H}\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_d \mathbf{X}_k);$$

andererseits ist diese *latente* Zufallsvariable über einen statistischen Sensormessfehler direkt mit der eigentlichen Messung  $\mathbf{y}_k^{[j]}$  verknüpft, d. h.

$$\mathbf{y}_k^{[j]} \sim \mathcal{N}_d(\mathbf{z}_k^{[j]}, \mathbf{R}).$$

Demnach entspricht  $\mathbf{z}_k^{[j]}$  der modellierten Einzelmessung des ursprünglichen Bayes'schen Ansatzes



**Abbildung 3.5:** Alternativer Aktualisierungsschritt aus [113] für den Bayes'schen Ansatz zur Verfolgung ausgehnter Objekte und nicht aufgelöster Gruppen aus Abschnitt 3.1.

in Gleichung (2.19), wohingegen in [113] für jede Einzelmessung eine Verbunddichte der Form

$$p(\mathbf{y}_k^{[j]}, z_k^{[j]} | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k) = \mathcal{N}_d(z_k^{[j]}; \mathbf{H} \mathbf{x}_k, z_d \mathbf{X}_k) \mathcal{N}_d(\mathbf{y}_k^{[j]}; z_k^{[j]}, \mathbf{R})$$

angesetzt wird. Würde an dieser Stelle diese Verbunddichte über  $z_k^{[j]}$  integriert, so erhielten wir nach Anwenden der Produktformel (B.11) die Marginaldichte

$$p(\mathbf{y}_k^{[j]} | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k) = \mathcal{N}_d(\mathbf{y}_k^{[j]}; \mathbf{H} \mathbf{x}_k, z_d \mathbf{X}_k + \mathbf{R}),$$

d. h. den bekannten Ausdruck unseres weiterentwickelten Bayes'schen Ansatzes aus Gleichung (3.1). Grundsätzlich ist in [113] die Menge der  $n_k$  latenten Zufallsvariablen

$$\mathbf{Z}_k := \{z_k^{[j]}\}_{j=1}^{n_k}$$

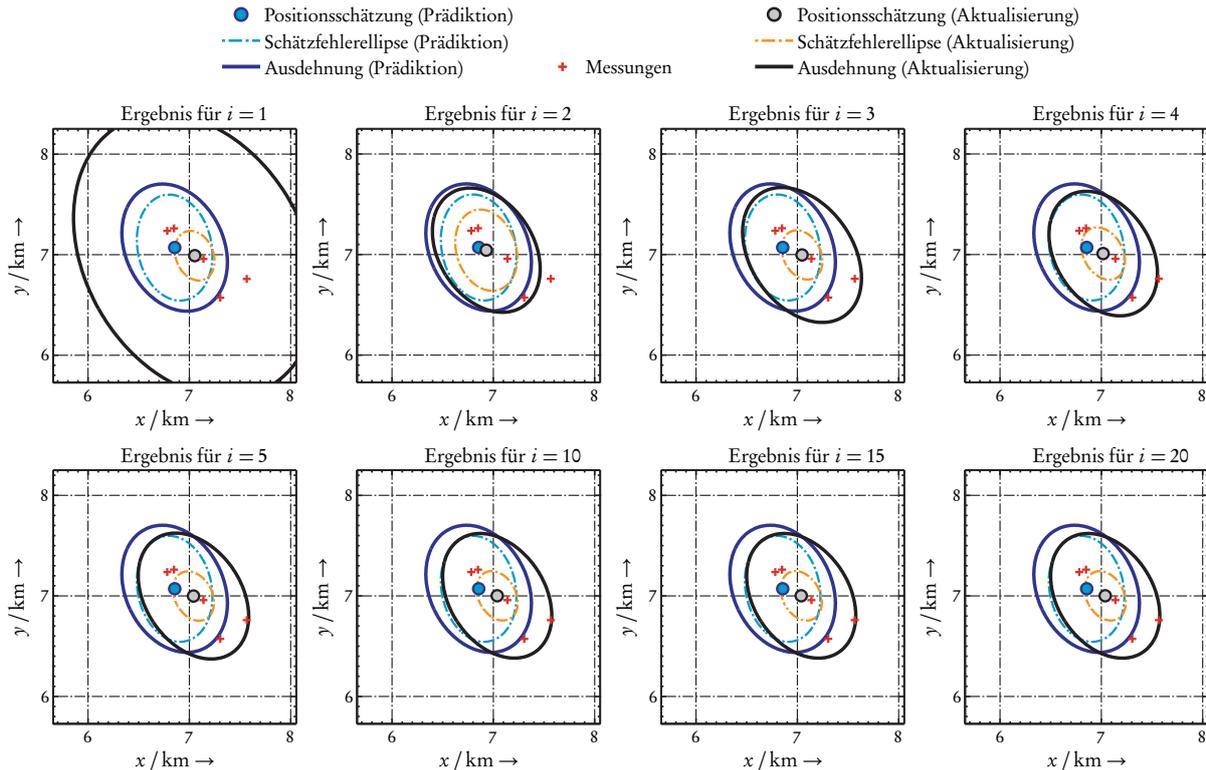
Teil des Schätzproblems; gesucht ist demnach ein Ausdruck der Form  $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k | \mathbf{Y}_k)$ , von dem allerdings noch auf die eigentlich gesuchte Dichtefunktion  $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_k)$  des gemeinsamen Systemzustandes  $(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k)$  geschlossen werden muss.

Zum Herleiten der Filtergleichungen wählt Orguner in [113] einen approximativen Ansatz der Form  $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k | \mathbf{Y}_k) \approx q(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k)$ , wobei sich diese approximative Verbunddichte wie folgt faktorisieren lassen soll:

$$q(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \mathbf{Z}_k) := q_x(\mathbf{x}_k) q_X(\mathbf{X}_k) q_Z(\mathbf{Z}_k).$$

Laut [113] berechnet sich daraufhin die gesuchte Dichtefunktion des gemeinsamen Objektzustandes zu  $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathbf{Y}_k) \approx q_x(\mathbf{x}_k) q_X(\mathbf{X}_k)$ . Zum Abschätzen der Dichten  $q_x(\mathbf{x}_k)$ ,  $q_X(\mathbf{X}_k)$  und  $q_Z(\mathbf{Z}_k)$  minimiert Orguner jeweils die *Kullback-Leibler-Divergenz*<sup>8</sup> als Maß für die Unterschiedlichkeit zwischen  $q_\xi(\xi_k)$  und der Verbunddichte  $p(\xi_k, \mathbf{Y}_k | \mathbf{Y}_{k-1})$ , wobei  $\xi_k$  hier als Platzhalter für  $\mathbf{x}_k$ ,  $\mathbf{X}_k$  und

<sup>8</sup>Siehe etwa [31] oder [98, Seite 66].



**Abbildung 3.6:** Beispiel für den alternativen Aktualisierungsschritt von Orguner aus [113]. Ausgangspunkt ist der dargestellte prädierte Objektzustand, der zusammen mit den vorliegenden Sensormessungen im iterativen Lösungsverfahren berücksichtigt wird. In den einzelnen Abbildungen sind verschiedene Zwischenergebnisse des aktualisierten Objektzustandes nach dem  $i$ -ten Iterationsschritt dargestellt.

$\mathbf{Z}_k$  dient. Auf diese Weise ergibt sich in [113] ein iteratives Lösungsverfahren, d. h., dass sich der Algorithmus schrittweise den aktualisierten Parametern des Objektzustandes nähert – durch wiederholtes Anwenden derselben Filtergleichungen. Dieses spezielle näherungsweise Vorgehen wird in der Literatur dem Bereich der VB-Verfahren (für engl. *Variational Bayesian Methods*) zugerechnet. Für einen Einstieg in diese Thematik bietet sich beispielsweise [143] oder [16, Kapitel 10] an.

Die resultierenden Gleichungen des alternativen Aktualisierungsschrittes aus [113] fasst Abbildung 3.5 zusammen: Ausgangspunkt ist der Initialisierungsblock zum Bestimmen der Startwerte aus den Parametern des prädierten Objektzustandes, an dem sich der Block mit den Gleichungen des iterativen Lösungsverfahrens anschließt. Nach jedem Iterationsschritt wird dann eine Abbruchbedingung geprüft – z. B. ob die Parameter des aktualisierten Objektzustandes konvergieren oder ob eine maximale Anzahl an Iterationen erreicht worden ist. Ist die Abbruchbedingung erfüllt, können letztlich die Parameter des aktualisierten Objektzustandes bestimmt werden. Diese Vorgehensweise zur Aktualisierung des Objektzustandes könnte beispielsweise in Abbildung 3.1 den oberen Block namens *Aktualisierung* ersetzen. Gleichzeitig würde dann der Block namens *Messungen* nicht mehr benötigt, da Orguners Aktualisierungsschritt direkt mit den Sensormessungen  $\mathbf{y}_k^{[j]}$  und nicht mit den indirekten Messparametern  $\bar{\mathbf{y}}_k$  und  $\bar{\mathbf{Y}}_k$  arbeitet. Allerdings fällt bereits an dieser Stelle beim Vergleich der beiden Aktualisierungsmethoden auf, dass Orguners Aktualisierungsschritt [113] aus numerischer Sicht deutlich aufwendiger ist – aufgrund der reinen Anzahl an Berechnungen im iterativen Lösungsverfahren. Darüber hinaus wird in [113] ebenfalls vorgestellt, wie die Normierungs-

konstante  $p(\mathbf{Y}_k | \mathcal{Y}_{k-1})$  berechnet werden kann, die wir auch als Messwahrscheinlichkeit bezeichnen: Ausgehend von der finalen  $i$ -ten Iteration des Aktualisierungsschrittes ergibt sich mit

$$\mathbf{W}_{k|k} = \mathbf{W}_{k|k}^{(i)} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{z}}_k^{[j]} = \hat{\mathbf{z}}_k^{[j],(i)} \quad (j = 1, \dots, n_k)$$

diese Messwahrscheinlichkeit zu

$$\begin{aligned} p(\mathbf{Y}_k | \mathcal{Y}_{k-1}) &\approx |2\pi \mathbf{P}_{k|k}|^{\frac{1}{2}} |2\mathbf{W}_{k|k}/z_d|^{\frac{1}{2}n_k} |\tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}|^{\frac{1}{2}v_{k|k-1}} |\tilde{\mathbf{X}}_{k|k}|^{-\frac{1}{2}v_{k|k}} \\ &\cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\text{tr}(\mathbf{P}_{k|k} \mathbf{P}_{k|k-1}^{-1}) - sd + n_k(\text{tr}(\mathbf{W}_{k|k} \mathbf{R}^{-1}) - d)\right)\right) \\ &\cdot \frac{\Gamma_d\left(\frac{v_{k|k}}{2}\right)}{\Gamma_d\left(\frac{v_{k|k-1}}{2}\right)} \cdot \left(\prod_{j=1}^{n_k} \mathcal{N}_d(\mathbf{y}_k^{[j]}; \hat{\mathbf{z}}_k^{[j]}, \mathbf{R})\right) \cdot \mathcal{N}_{sd}(\mathbf{x}_{k|k}; \mathbf{x}_{k|k-1}, \mathbf{P}_{k|k-1}). \end{aligned}$$

Zum Veranschaulichen des iterativen Charakters zeigt Abbildung 3.6 ein simuliertes Beispiel für die schrittweise Aktualisierung des Objektzustandes nach [113]. Beim Vergleich der einzelnen Teilabbildungen wird insbesondere deutlich, wie sich das VB-Verfahren sukzessive dem finalen Zustand nähert, bevor es schließlich gegen das Endergebnis der Aktualisierung konvergiert. Orguner selbst schreibt in [113], dass sein VB-Update ungefähr fünf Iterationen bis zur Konvergenz benötige; zur Sicherheit würden aber 20 Iterationen pro Update durchgeführt.

## Zusammenfassung

Dieses Kapitel befasste sich mit der allgemeinen Weiterentwicklung des Bayes'schen Ansatzes zum Verfolgen ausgedehnter Objekte und nicht aufgelöster Gruppen aus dem vorherigen Kapitel (siehe auch [75, 78, 81, 82]). Ausgangspunkt dieser Weiterentwicklung war zunächst das Identifizieren besonderer Verfahrenseigenschaften: Beispielsweise schätzt das Originalverfahren Ausdehnung plus Sensorfehler, da es prinzipiell alle Sensordaten als über die Objektausdehnung verrauschte Positionsmessungen des Schwerpunktes interpretiert, weshalb die Streuung durch einen statistischen Messfehler ebenfalls der räumlichen Ausdehnung zugeschrieben wird. In diesem Kontext ist auch die Gewichtung der kinematischen Innovation unabhängig vom Sensorfehler, da dieser im Verfahren selbst nicht berücksichtigt wird. Ausgehend von diesen Beobachtungen stellte dieses Kapitel vor, wie sich ein statistischer Sensormessfehler zumindest näherungsweise im Originalansatz berücksichtigen lässt – durch Ausnutzen der Ähnlichkeiten zu den Filtergleichungen des Kalman-Filters und unter der Annahme, dass die Prädiktion der Objektausdehnung eine geeignete Approximation der wahren (aber unbekannt) Zustandsmatrix der Ausdehnung ist.

Darüber hinaus wurden verschiedene Besonderheiten der physikalischen Ausdehnung diskutiert, die sich durch die Modellierung als SPD Zustandsmatrix ergeben: Zunächst wurde kurz vorgestellt, dass der bedingte Erwartungswert auch im Fall der Objektausdehnung der MMSE-Schätzer ist, d. h. analog zum Zustandsvektor der Kinematik. Weiterhin wurde gezeigt, wie sich der berechnete MMSE der Zustandsmatrix zur Approximation von Mischverteilungsdichten durch Moment-Matching verwenden lässt. Zuletzt stellte dieser Teil des Kapitels noch vor, wie sich für die Ausdehnungsschätzung ein graphisch darstellbarer Konfidenzbereich angeben lässt, der aus Sicht unseres Schätzverfahrens den Bereich vorgibt, in dem es den wahren (aber unbekannt) Wert der Objektausdehnung mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit vermutet.

Aufbauend auf den neuen Ergebnissen zu Mischverteilungsdichten und Moment-Matching wurde in diesem Kapitel ein IMM-Filter eingeführt zum Verfolgen eines manövrierenden Objektes oder einer sehr agilen Gruppe von Zielen. Mit einem solchen Mehrmodell-Ansatz lässt sich eine vorher festgelegte Zahl von unterschiedlichen Dynamikmodellen einbeziehen, so dass je nach Bewegungszustand eine feinere Modellierung der Systemdynamik möglich ist. Die Struktur dieses erweiterten IMM-Filters gleicht dabei dem Aufbau des IMM-Verfahrens für Punktziele – allerdings unter Berücksichtigung der Objektausdehnung sowohl im Bayes'schen Formalismus als auch in den resultierenden Filtergleichungen. Der ursprüngliche Bayes'sche Ansatz aus dem vorherigen Kapitel kann übrigens nicht in diesem IMM-Filter eingesetzt werden: Seine Schätzgrößen für Kinematik und Ausdehnung sind zu sehr miteinander verkoppelt über das Kronecker-Produkt in der kinematischen Schätzfehlerkovarianzmatrix.

Zum Abschluss des Kapitels wurde noch ein alternativer Ansatz aus der Fachliteratur vorgestellt, mit dem ebenfalls ein statistischer Sensormessfehler im Tracking-Filter beachtet werden kann. Diesem Verfahren liegt die Annahme zugrunde, dass sich eine Einzelmessung durch zwei Zufallsvariablen beschreiben lässt, die daher auch beide Teil des Schätzproblems sind. Anschließend ergibt sich ein iteratives Lösungsverfahren durch Minimierung der Kullback-Leibler-Divergenz zwischen der Zieldichte und ihrer Vorgabe. Durch wiederholtes Anwenden derselben Filtergleichungen nähert sich der Algorithmus schrittweise den aktualisierten Parametern des gemeinsamen Systemzustandes aus Kinematik und Ausdehnung. Aufgrund der rigorosen Herleitung dieses alternativen Ansatzes bietet er die Möglichkeit zum Vergleich mit unserer eigenen Weiterentwicklung zur Integration eines statistischen Sensormessfehlers. Diese Untersuchungen sind Teil des nächsten Kapitels.



## Kapitel 4

---

# Quantitative Evaluierung anhand von Beispielen

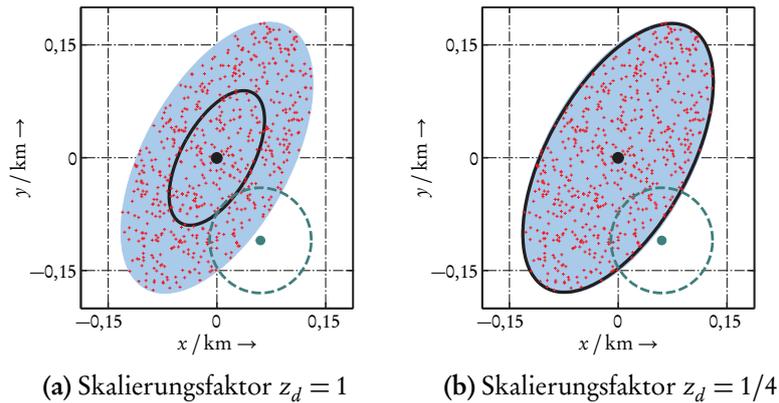
---

Dieses Kapitel fasst ausgewählte Simulationsbeispiele zusammen, die einen Vergleich ermöglichen zwischen dem ursprünglichen Bayes'schen Ansatz von Koch [78] (siehe Kapitel 2) und der Weiterentwicklung im Rahmen dieser Arbeit (siehe Kapitel 3). Diese Simulationsexperimente sind in gleicher oder ähnlicher Form bereits in [161, 164–167, 169, 171] vorgestellt worden und beschränken sich grundsätzlich auf die zweidimensionale  $(x, y)$ -Ebene, so dass wir die Ergebnisse einfacher und übersichtlicher darstellen können. Zunächst analysiert Abschnitt 4.1 besondere Merkmale der Ausdehnungsschätzung am Beispiel sich nicht bewegender Ziele mit konstanter räumlicher Ausdehnung. Danach befasst sich Abschnitt 4.2 mit einer Gruppe dicht fliegender Ziele, die in Liniinformation mehrere Flugmanöver durchführen. In diesem Zusammenhang verwenden wir auch den alternativen Aktualisierungsschritt von Orguner [113] (siehe Abschnitt 3.4), um einen statistischen Sensormessfehler in den Filtergleichungen zu berücksichtigen. Zum Abschluss dieses Kapitels betrachtet Abschnitt 4.3 ein Schiff als ausgedehntes Zielobjekt und diskutiert die Konsistenz der beiden Bayes'schen Ansätze hinsichtlich ihrer ausgewiesenen Schätzunsicherheiten.

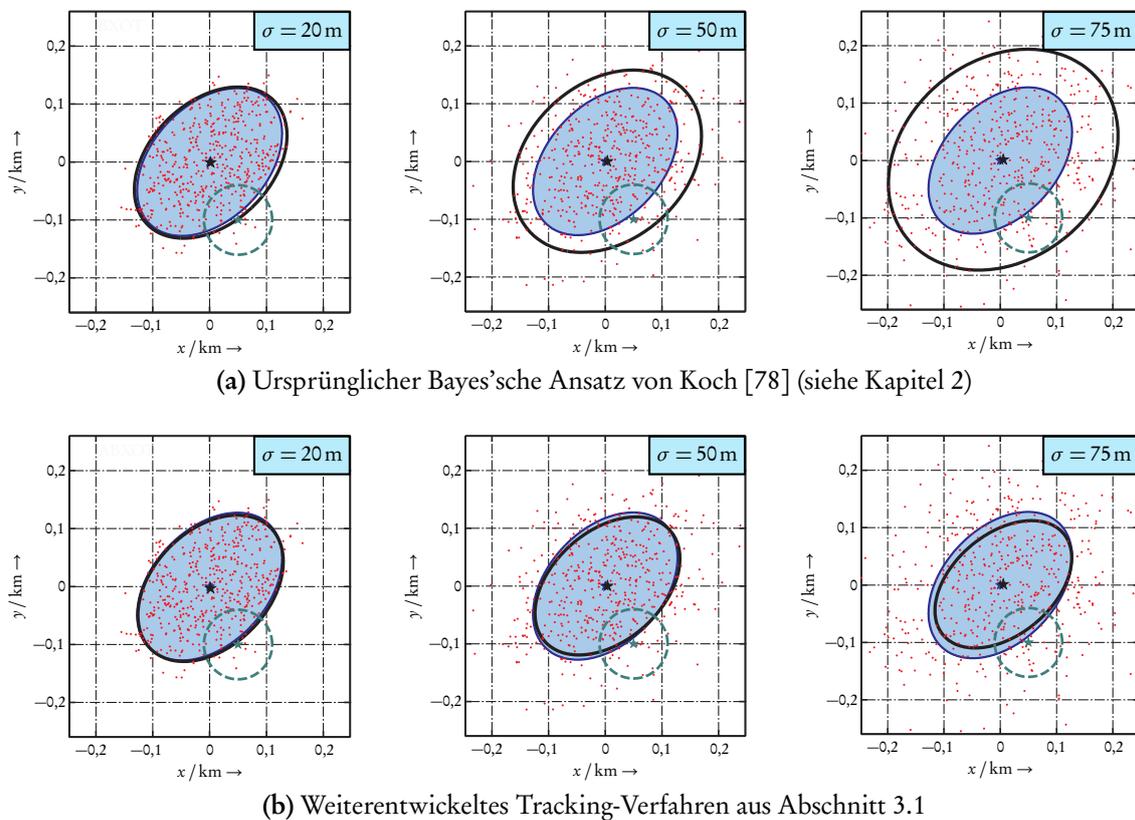
### 4.1 Einblicke in Besonderheiten der Ausdehnungsschätzung

In diesem Abschnitt analysieren wir drei Beispiele mit sich nicht bewegenden Objekten, deren räumliche Ausmaße konstant sind und an denen sich besondere Eigenschaften der Ausdehnungsschätzung erklären lassen. Diese Besonderheiten ergeben sich durch die Annahmen im Bayes'schen Ansatz von Koch: z. B. die Objektausdehnung durch ein Ellipsoid zu approximieren und den unbekanntem Systemzustand der Ausdehnung durch eine SPD Zustandsmatrix zu modellieren. Da sich die Objekte nicht bewegen, haben wir den Prädiktionsschritt ausgelassen und stattdessen bei neuen Messungen erneut den Aktualisierungsschritt durchgeführt. Zum Initialisieren der Algorithmen haben wir jeweils ein Objekt verwendet mit kreisförmiger Ausdehnung und einem Schwerpunkt abseits der wahren Position, wobei die Geschwindigkeitskomponente mit null vorbelegt wurde.

Das erste Simulationsbeispiel mit dem Bayes'schen Ansatz von Koch [78] bezieht sich auf den in Abschnitt 2.3.1 vorgestellten Skalierungsfaktor  $z_d$  der Ausdehnung, der die angenommene räumliche Streuung einer Messung beeinflusst; siehe Gleichung (2.19) oder [171]. Grundlage der Simulation war eine Ellipse als ausgedehntes Objekt mit Achsenlängen von 400 m und 200 m. Die Sensormessungen wurden gleichverteilt über der Ellipse erzeugt, wobei sich die Zahl der Messungen aus einer Poisson-Verteilung mit einem Erwartungswert von fünf Messungen ergab. Darüber hinaus war ein statistischer Sensormessfehler nicht Teil der Simulation, d. h.  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ . Abbildung 4.1 zeigt die Ergebnisse nach insgesamt 120 Zeitschritten und Aktualisierungen: Im linken Teil sind für  $z_d = 1$  die Schätzergebnisse des Originalverfahrens [78] dargestellt, rechts die Ergebnisse mit dem angepassten Skalierungsfaktor  $z_d = 1/4$ . Es wird deutlich, dass sich durch eine skalierte Messstreuung in

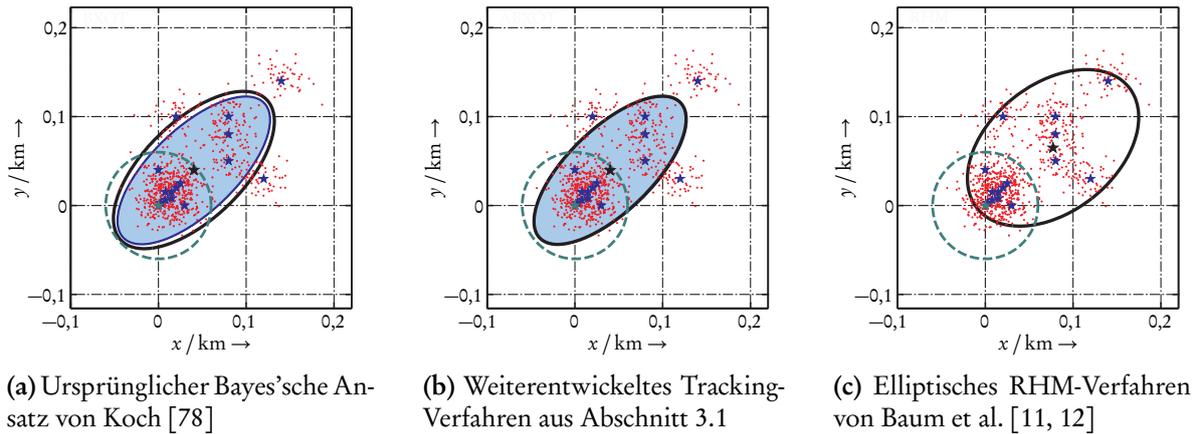


**Abbildung 4.1:** Einfluss des Skalierungsfaktors  $z_d$  auf die Ausdehnungsschätzung beim Bayes'schen Ansatz von Koch [78] (siehe Kapitel 2), wobei ein sich nicht bewegendes Objekt mit konstanter räumlicher Ausdehnung Grundlage der Simulation war. Dargestellt sind neben geschätzter Position und Ausdehnung (Schwarz) auch die wahre Ellipse (Hellblau), die Initialisierung (graugrün gestrichelter Kreis) und die akkumulierten Sensordaten (Rot).



**Abbildung 4.2:** Einfluss eines statistischen Sensormessfehlers  $\sigma$  auf die Ausdehnungsschätzung einer sich nicht bewegendes Ellipse (Blau) mit Achsenlängen von 200 m und 300 m: Dargestellt sind die Schätzergebnisse (Schwarz) nach 100 Zeitschritten. Die Sensormessungen (Rot) wurden gleichverteilt über der Ellipse erzeugt, wobei sich die Zahl der Messungen jeweils aus einer Poisson-Verteilung mit einem Erwartungswert von fünf Messungen ergab.

der Likelihood-Funktion eine korrekt skalierte Objektausdehnung schätzen lässt, wohingegen die reine Normalverteilungsannahme ( $z_d = 1$ ) zu einem *Unterschätzen* der Ausdehnung führt. Dieses *Unterschätzen* wurde in früheren Arbeiten ohne einen Skalierungsfaktor dadurch vermieden, dass die elliptische Ausdehnungsschätzung lediglich zu Ausgabezwecken mit einem festen Faktor hochskaliert wurde – siehe etwa den Simulationsteil in [164, 165]. Der Wert dieser *Konstanten* wurde

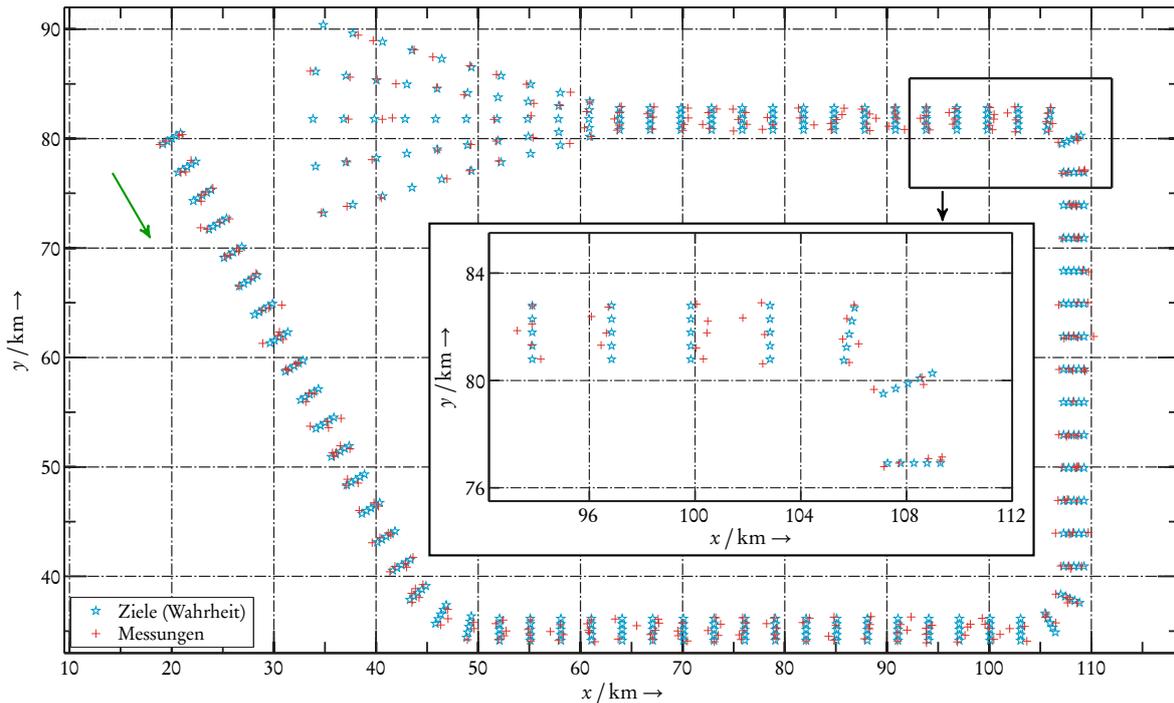


**Abbildung 4.3:** Simulationsergebnisse für eine Gruppe aus 16 sich nicht bewegenden Punktzielen (Blau), die willkürlich verteilt waren. Dargestellt sind die Initialisierung (graugrün gestrichelter Kreis), die akkumulierten Sensormessungen (Rot) und die Schätzergebnisse (Schwarz) nach 50 Zeitschritten. Darüber hinaus ist bei den beiden auf Zustandsmatrizen basierenden Verfahren auch die skalierte Ellipse (Hellblau) eingezeichnet, die sich aus der (korrigierten) Stichprobenvarianz der einzelnen Zielpositionen berechnen lässt.

zuvor experimentell durch Simulationen ohne einen statistischen Sensormessfehler festgelegt. Allerdings ignoriert eine solch nachgelagerte Skalierung der Ausdehnung, dass das geschätzte Ausmaß eines Objektes auch interne Parameter des Schätzverfahrens beeinflusst – wie z. B. die kinematische Schätzfehlerkovarianzmatrix  $\tilde{\mathbf{P}}_{k|k} \otimes \mathbf{X}_{k|k}$ . Demnach spielt es eine wichtige Rolle, dass das Tracking-Verfahren auch *intern* mit der korrekt skalierten Objektausdehnung rechnet.

Kochs Arbeit zum ursprünglichen Bayes'schen Ansatz [78] erwähnt keinen Skalierungsfaktor. Dort ist der Streuanteil der Messungen, der auf einen statistischen Sensormessfehler zurückgeht, implizit in der Ausdehnungsschätzung enthalten. Das Verfahren schätzt grundsätzlich Ausdehnung plus Sensorfehler, so dass dieser Effekt der *Überschätzung* den der *Unterschätzung* maskieren kann. Daher bedeutet die Ergänzung der Likelihood-Funktion um den Skalierungsfaktor  $z_d$  wiederum auch, dass es bei einem entsprechenden Sensormessfehler zwangsläufig zu einem *Überschätzen* der Ausdehnung kommen muss. Um diesen Sachverhalt zu verdeutlichen, betrachten wir im zweiten Simulationsexperiment abermals ein ausgedehntes Objekt, allerdings diesmal mit einem zunehmenden statistischen Sensormessfehler: Zunächst zeigt Abbildung 4.2(a) die Ergebnisse für das ursprüngliche Verfahren von Koch [78], das um den Skalierungsfaktor ergänzt worden ist. Dabei bestätigt sich, dass bei diesem Verfahren mit zunehmenden Sensormessfehler auch das *Überschätzen* der eigentlichen Ausdehnung zunimmt. Im Gegensatz dazu präsentiert Abbildung 4.2(b) die Schätzergebnisse unseres modifizierten Bayes'schen Ansatzes aus Abschnitt 3.1, der einen statistischen Sensormessfehler in den Filtergleichungen näherungsweise berücksichtigt, so dass es in diesem Fall zu keinem *Überschätzen* der Ausdehnung kommt; siehe auch [161].

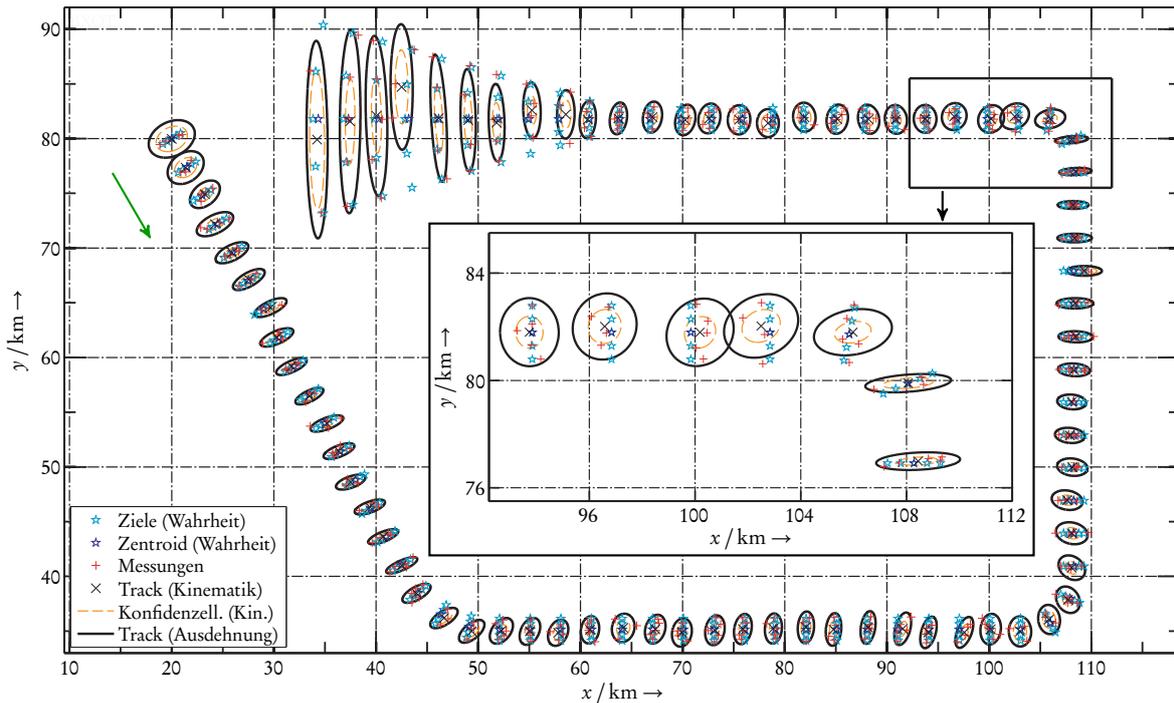
Ausgangspunkt des dritten und letzten Simulationsbeispiels dieses Abschnittes war eine sich nicht bewegende Gruppe aus 16 willkürlich angeordneten Punktzielen. Da Auflösungskonflikte in diesem Experiment nicht betrachtet worden sind, gab es in jedem Zeitschritt für jedes Gruppenmitglied eine Sensormessung mit einem normalverteilten Messfehler ( $\sigma = 15$  m). Aufgrund der nicht gleichverteilten Anordnung der Einzelziele lassen sich Besonderheiten der Schätzverfahren vorführen – insbesondere die Unterschiede beim Schätzen von Kinematik und Ausdehnung je nach



**Abbildung 4.4:** Simulation einer Gruppe bestehend aus fünf fliegenden Punktzielen. Dargestellt sind für jeden Messzeitpunkt die Positionen der Gruppenmitglieder (Cyan) sowie die resultierenden Messungen (Rot).

Tracking-Ansatz. Zu diesem Zweck betrachten wir hier neben den beiden Bayes'schen Ansätzen mit Zustandsmatrizen auch das Verfahren von Baum et al. [11, 12] zum Tracking von ausgedehnten Objekten und Objektgruppen. Dieses Verfahren modelliert die Objektausdehnung als Zufallsvariable einer elliptischen Hyperfläche und wird daher im Folgenden als elliptisches RHM-Verfahren (für engl. *Elliptic Random Hypersurface Model Approach*) bezeichnet. Zum Modellieren einer Likelihood-Funktion nimmt dieses Verfahren an, dass das für eine Einzelmessung verantwortliche Streuzentrum auf dem skalierten Rand einer elliptischen Zielausdehnung liegt; der dazu notwendige Skalierungsfaktor wird über eine Wahrscheinlichkeitsdichte angegeben, um auch einen Messfehler im Algorithmus berücksichtigen zu können. Darüber hinaus benötigt es keine Matrixverteilungen für die Ausdehnungsschätzung, da es den kinematischen Zustand des ausgedehnten Objektes mit den von null verschiedenen Einträgen der Cholesky-Zerlegung der SPD Matrix erweitert. Dadurch sind alle Parameter zum Beschreiben des Ellipsoids vereint in einem Zustandsvektor.

Abbildung 4.3 fasst die Simulationsergebnisse der verschiedenen Verfahren zusammen, die im Rahmen einer Zusammenarbeit erzielt worden sind; siehe [161]. Es wird deutlich, dass der Hauptunterschied zwischen den Methoden mit SPD Zustandsmatrizen und dem elliptischen RHM-Verfahren in der jeweiligen Interpretation des Ausdehnungsellipsoids liegt: Das elliptische RHM-Verfahren [11, 12] versucht die kleinste umschließende Ellipse der Gruppe zu schätzen; die beiden Ansätze mit Zustandsmatrizen beabsichtigen hingegen, den empirischen Mittelwert der Punktzielpositionen als Schwerpunkt zu schätzen, wobei ihre Ausdehnungsschätzung einem skalierten Ellipsoid ähnelt, das sich aus der (korrigierten) Stichprobenvarianz der einzelnen Zielpositionen berechnet. Dementsprechend würden sich die Schätzergebnisse im Fall eines ausgedehnten Objektes gleichen, das als ein Ellipsoid mit gleichverteilten Streuzentren simuliert werden würde.

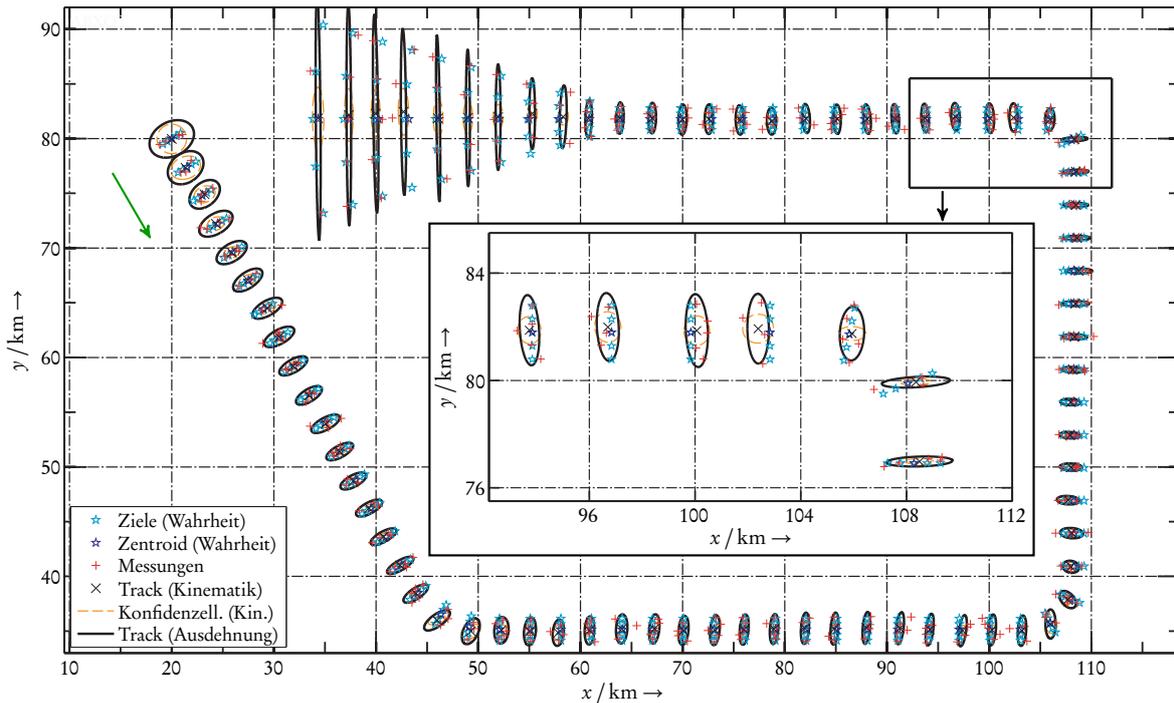


**Abbildung 4.5:** Tracking-Ergebnisse des ursprünglichen Bayes'schen Ansatzes von Koch [78] (siehe Kapitel 2) für das Szenario aus Abbildung 4.4. Dargestellt sind für jeden Messzeitpunkt neben den Sensordaten (Rot) die wahren Positionen der Gruppenmitglieder (Cyan) und des eigentlichen Schwerpunktes (Blau), die geschätzte Position des Schwerpunktes ( $\times$ ) und die Ellipse der Ausdehnungsschätzung (Schwarz) sowie die Vertrauensellipse der Positionsschätzung (Orange) bei einer Konfidenz von 90%.

## 4.2 Simulation einer Gruppe dicht fliegender Ziele

Dieser Abschnitt befasst sich mit einem fiktiven Szenario aus der Luftraumüberwachung, in dem eine Gruppe dicht fliegender Ziele in Linienformation mehrere Flugmanöver durchführte; siehe Abbildung 4.4: Die Gruppenformation bestand aus fünf punktförmigen Einzelzielen, die jeweils 500 m Abstand zueinander hielten und sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von 300 m/s in der  $(x, y)$ -Ebene bewegten. Neben längeren Phasen einer Geradeausbewegung absolvierte die Gruppe drei Kurvenflüge in geschlossener Formation mit Richtungsänderungen von  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  und  $90^\circ$  und Radialbeschleunigungen von  $1g$ ,  $2g$  und  $3g$ ; zum Schluss löste sich die Linienformation auf. Das Szenario wurde durch einen fiktiven Sensor mit einer Abtastzeit von  $T = 10s$  beobachtet, der unkorrelierte  $x$ - und  $y$ -Messungen mit Standardabweichungen von  $\sigma_x = 500m$  und  $\sigma_y = 100m$  lieferte. In diesem Zusammenhang wurde für jedes Gruppenmitglied eine Detektionswahrscheinlichkeit von 80% angenommen. Abbildung 4.4 zeigt die Zielpositionen zu den Messzeitpunkten, wobei auch die generierten Messungen für einen Durchlauf dieses Szenarios dargestellt sind.

Zunächst haben wir auf dieses Szenario das ursprüngliche Verfahren von Koch [78] angewandt und dabei auch den in Abschnitt 2.3.1 vorgestellten Skalierungsfaktor  $z_d$  der Ausdehnungsschätzung berücksichtigt. Zum Initialisieren haben wir die Messungen des ersten Messzeitpunktes verwendet, wobei die Geschwindigkeitskomponente mit null vorbelegt wurde. Abbildung 4.5 zeigt die erzielten Tracking-Ergebnisse für die simulierten Daten aus Abbildung 4.4. Grundsätzlich sind Schätzen und Verfolgen der Linienformation als ausgedehntes Objekt möglich, wobei einige bereits erwähnte

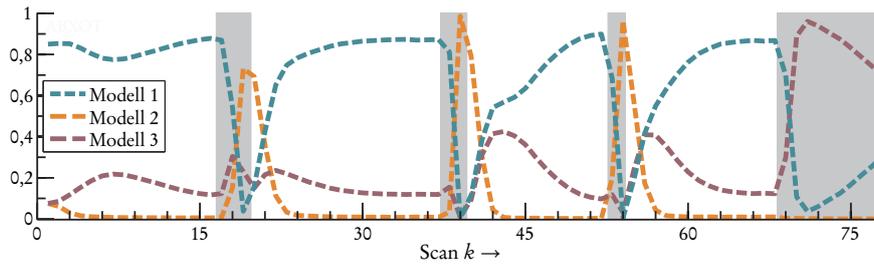
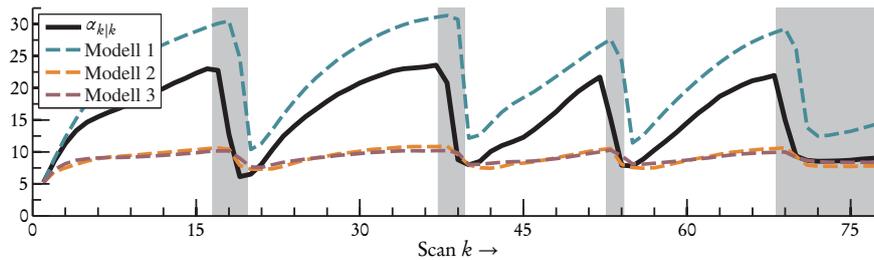
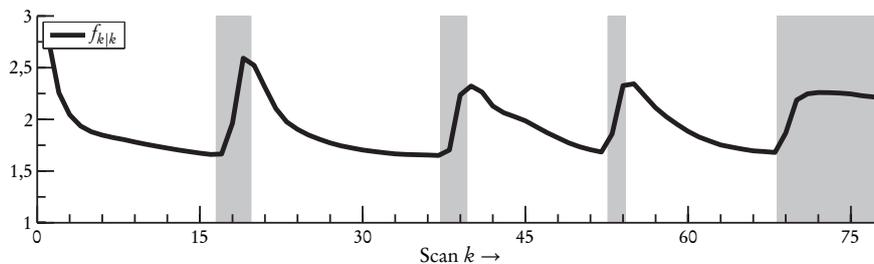


**Abbildung 4.6:** Tracking-Ergebnisse des weiterentwickelten Bayes'schen Ansatzes (siehe Kapitel 3) für das Szenario aus Abbildung 4.4, wobei ein IMM mit drei Modellen eingesetzt wurde. Dargestellt sind für jeden Messzeitpunkt neben den Sensordaten (Rot) die wahren Positionen der Gruppenmitglieder (Cyan) und des eigentlichen Schwerpunktes (Blau), die geschätzte Position des Schwerpunktes ( $\times$ ) und die Ellipse der Ausdehnungsschätzung (Schwarz) sowie die Vertrauensellipse der Positionsschätzung (Orange) bei einer Konfidenz von 90%.

Verfahrenseigenschaften auffallen: Da sich die kinematische Schätzfehlerkovarianzmatrix in diesem Tracking-Verfahren gemäß  $\tilde{\mathbf{P}}_{k|k} \otimes \mathbf{X}_{k|k}$  ergibt, sind geschätzte Ausdehnung und Schätzfehlerkovarianz der Positionsschätzung miteinander verkoppelt. Sie unterscheiden sich lediglich durch einen skalaren Faktor, was sich in Abbildung 4.5 zu jedem Messzeitpunkt in den zueinander skalierten Ellipsen beobachten lässt. Ein statistischer Messfehler findet sich nicht in den Filtergleichungen, so dass der Bayes'sche Ansatz von Koch [78] generell Ausdehnung plus Sensorfehler schätzt. Außerdem erfolgt das Gewichten der kinematischen Innovation unabhängig von  $\sigma_x$  oder  $\sigma_y$ . Daher reagierte das Verfahren in Abbildung 4.5 auch erst mit etwas Verzögerung auf eine sich verändernde Orientierung der Gruppe und neigte insgesamt dazu, beim Schätzen des Gruppenschwerpunktes eher dem jeweiligen Schwerpunkt der Messungen zu folgen. Gerade der letzte Punkt zeigte sich umso deutlicher, je größer die Ausdehnung der betrachteten Gruppe wurde – wie etwa zum Ende des Szenarios beim Auflösen der Gruppe.

Anschließend haben wir den im Rahmen dieser Arbeit weiterentwickelten Bayes'schen Ansatz (siehe Kapitel 3) eingesetzt – allerdings in Verbindung mit einem IMM-Filter (siehe Abschnitt 3.3). Dieses IMM-Filter bestand aus drei verschiedenen Dynamikmodellen mit jeweils näherungsweise konstanter Geschwindigkeit bei *weißer Beschleunigung* [6, 41] mit folgenden Einstellungen:

1. geringes kinematisches Prozessrauschen bei niedriger Agilität der Ausdehnung,
2. starkes kinematisches Prozessrauschen bei sehr hoher Agilität der Ausdehnung zur Berücksichtigung typischen Manöververhaltens,

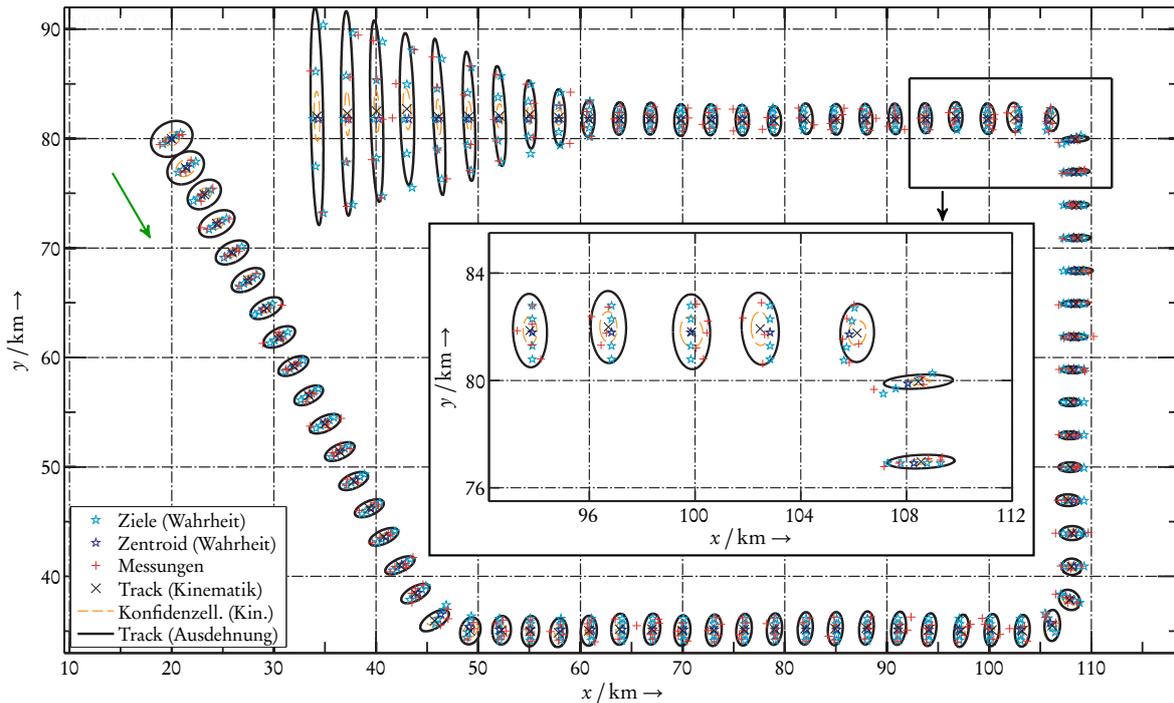
(a) Gültigkeitswahrscheinlichkeiten  $\pi_{k|k}^{[j]}$  der drei Dynamikmodelle des IMM-Filters(b) Modellspezifische Parameter  $\alpha_{k|k}^{[j]}$  der Ausdehnungsschätzung und des kombinierten Wertes  $\alpha_{k|k}$ (c) Skalierungsfaktor  $f_{k|k}$  bei einer Konfidenz von 70% (Konfidenzbereich der Ausdehnungsschätzung)

**Abbildung 4.7:** Ergebnisse für 900 Monte-Carlo-Simulationsläufe zum Szenario aus Abbildung 4.4 bei Anwendung des weiterentwickelten Bayes'schen Ansatzes (siehe Kapitel 3), wobei ein IMM mit drei Modellen ( $j = 1, 2, 3$ ) eingesetzt wurde. Sämtliche Werte der Abbildung wurden als Mittelwerte der Monte-Carlo-Simulation berechnet. Die grauen Hintergründflächen markieren die Zeitspannen der Flugmanöver und des Auflösens der Formation.

3. gemäßigt kinematisches Prozessrauschen bei hoher Agilität der Ausdehnung zur Berücksichtigung von Änderungen der Form, Größe oder Ausrichtung ohne Manöver des Schwerpunktes.

In Abbildung 4.6 sind die hiermit erzielten Tracking-Ergebnisse für die simulierten Daten aus Abbildung 4.4 dargestellt. Der Algorithmus zeigte sowohl ein glättendes Verhalten während der Nicht-Manöver-Phasen als auch zeitnahe Reaktionen auf Manöver und Veränderungen der Ausdehnung. Insbesondere folgte das Verfahren der veränderten Orientierung ohne größere Verzögerung. Das berücksichtigte Messrauschen beeinflusste auch die kinematische Schätzfehlerkovarianz, die formal von der Ausdehnungsschätzung entkoppelt ist. Dadurch war die Vertrauensellipse der Positionsschätzung nicht mehr eine rein skalierte Ausdehnungsellipse.

Um den Einfluss der drei Dynamikmodelle des IMM-Filters auf die Tracking-Ergebnisse genauer beurteilen zu können als nach einem einzigen Durchlauf des Szenarios, haben wir insgesamt 900 Monte-Carlo-Simulationsläufe für die Linienformation in Abbildung 4.4 durchgeführt. Neben den in Grau gekennzeichneten Zeitspannen der Flugmanöver zeigt Abbildung 4.7(a) die Zeitverläufe

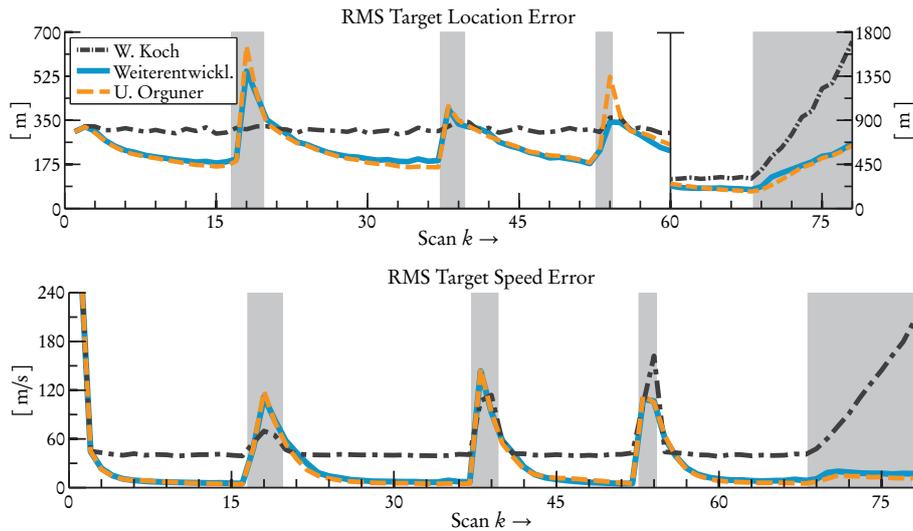


**Abbildung 4.8:** Tracking-Ergebnisse bei Anwendung des alternativen Aktualisierungsschrittes von Orguner [113] (siehe Abschnitt 3.4) für das Szenario aus Abbildung 4.4, wobei ein IMM mit drei Modellen eingesetzt wurde. Dargestellt sind für jeden Messzeitpunkt neben den Sensordaten (Rot) die wahren Positionen der Gruppenmitglieder (Cyan) und des eigentlichen Schwerpunktes (Blau), die geschätzte Position des Schwerpunktes (x) und die Ellipse der Ausdehnungsschätzung (Schwarz) sowie die Vertrauensellipse der Positionsschätzung (Orange) bei einer Konfidenz von 90%.

der IMM-Gültigkeitswahrscheinlichkeiten  $\pi_{k|k}^{[j]}$ , die für jeden Zeitschritt als Mittelwerte der Monte-Carlo-Simulation<sup>1</sup> berechnet worden sind. Das Manövermodell (*Modell 2*) reagierte auf plötzliche Veränderungen des Schwerpunktes – gleichwohl mit etwas Verzögerung, da ein IMM-Filter zunächst abwägen muss, ob die Abweichungen zwischen Prädiktion und Messungen auf Messfehler oder Manöver zurückzuführen sind. Deshalb sind häufig mehrere Zeitschritte und Messungen erforderlich, bevor ein IMM-Filter mit höherer Wahrscheinlichkeit auf ein anderes Modell umschaltet [41]. Nach Beenden der Flugmanöver zeigte das Modell für reine Ausdehnungsänderungen (*Modell 3*) eine etwas höhere Wahrscheinlichkeit, bevor das Nicht-Manöver-Modell (*Modell 1*) nach Anpassung der Orientierung wieder den wesentlichen Beitrag lieferte. Dominant war das Modell für reine Ausdehnungsänderungen (*Modell 3*) beim Auflösen der Gruppenformation: In dieser Phase wich der Schwerpunkt kaum von einer Geradeausbewegung mit konstanter Geschwindigkeit ab, wohingegen sich das Ausmaß der Gruppe rapide änderte.

Abbildung 4.7(b) stellt die modellspezifischen Werte  $\alpha_{k|k}^{[j]}$  sowie ihre Kombination  $\alpha_{k|k}$  dar, die ein skalares Maß für die ausgewiesene Genauigkeit der Ausdehnungsschätzung sind. Offenbar wurde  $\alpha_{k|k}$  maßgeblich beeinflusst durch den spezifischen Wert des jeweils dominierenden Modells. Allerdings führte das skalare Moment-Matching aus Abschnitt 3.2.2 beim Berechnen von  $\alpha_{k|k}$  nicht zu einer rein gewichteten Summe der einzelnen  $\alpha_{k|k}^{[j]}$ , stattdessen konnte der Gesamtwert durchaus

<sup>1</sup>Bei einer Monte-Carlo-Simulation werden mehrere Durchläufe desselben Szenarios durchgeführt, wobei unterschiedliche Sequenzen von Pseudozufallszahlen zum Erzeugen von Messungen verwendet werden.



**Abbildung 4.9:** Ergebnisse für 900 Monte-Carlo-Simulationenläufe zum Szenario aus Abbildung 4.4, wobei Fehlermaße bezüglich Position und Geschwindigkeit für drei verschiedene Verfahren dargestellt sind: (i) den ursprünglichen Bayes'schen Ansatz von Koch [78] (siehe Kapitel 2 und Abbildung 4.5); (ii) den im Rahmen dieser Arbeit weiterentwickelten Bayes'schen Ansatz (siehe Kapitel 3 und Abbildung 4.6); (iii) den Tracking-Ansatz mit dem VB-Verfahren im Aktualisierungsschritt von Orguner [113] (siehe Abschnitt 3.4 und Abbildung 4.8). Die grauen Hintergründflächen markieren die Zeitspannen der Flugmanöver und des Auflösens der Formation.

kleiner sein als seine einzelnen Beiträge; wie z. B. beim ersten Manöver. Als Ergänzung zur ausgewiesenen Genauigkeit der Ausdehnungsschätzung präsentiert Abbildung 4.7(c) den Verlauf des Skalierungsfaktors<sup>2</sup>  $f_{k|k}$  aus Gleichung (3.22) bei einer Konfidenz von 70%: Analog zu  $\alpha_{k|k}$  spiegelte der Verlauf von  $f_{k|k}$  die während eines Manövers und unmittelbar danach reduzierte Verlässlichkeit der Ausdehnungsschätzung, wobei Phasen einer Geradeausbewegung ohne Veränderung der räumlichen Anordnung ein zunehmendes Vertrauen bewirkten.

Zuletzt haben wir das VB-Verfahren von Orguner [113] (siehe Abschnitt 3.4) eingesetzt, mit dem sich ebenfalls ein statistischer Messfehler in den Filtergleichungen berücksichtigen lässt. Dabei haben wir erneut ein IMM-Filter mit den drei bekannten Dynamikmodellen verwendet – allerdings wurde jedes Mal der Aktualisierungsteil ersetzt durch Orguners VB-Update aus Abbildung 3.5. In Abbildung 4.8 sind die hiermit erzielten Tracking-Ergebnisse für die simulierten Daten aus Abbildung 4.4 dargestellt, wobei wir beim Aktualisieren für jedes Modell jeweils zehn Iterationsschritte durchgeführt haben. Analog zu den vorherigen IMM-Filterergebnissen lässt sich hier festhalten: Das Tracking-Verfahren mit dem VB-Update zeigte sowohl ein glättendes Verhalten während der Nicht-Manöver-Phasen als auch zeitnahe Reaktionen auf Manöver und Veränderungen der Ausdehnung; insbesondere folgte das Verfahren der veränderten Orientierung ohne größere Verzögerung.

Für einen detaillierten Vergleich dieser drei Verfahren haben wir wiederum Monte-Carlo-Simulationen zu dem Szenario aus Abbildung 4.4 durchgeführt. Abbildung 4.9 zeigt hierzu Ergebnisse bezüglich des Positions- und Geschwindigkeitsfehlers<sup>3</sup> beim Schätzen des kinematischen Schwerpunktes. Wie zuvor erläutert, neigte der Bayes'sche Ansatz von Koch [78] beim Schätzen des Gruppenschwerpunktes eher dem jeweiligen Schwerpunkt der Messungen zu folgen, da der Algorithmus

<sup>2</sup>Je größer dieser Wert und damit der Konfidenzbereich für eine bestimmte geschätzte Ausdehnung ist, desto weniger Verlässlichkeit wird dem jeweiligen Schätzwert zugeschrieben.

<sup>3</sup>RMS Target Location Error und RMS Target Speed Error (RMS für engl. Root Mean Square).

einen statistischen Sensormessfehler nicht berücksichtigt zugunsten einer geschlossenen Herleitung der Filtergleichungen. Bei der Monte-Carlo-Simulation führte diese Vorgehensweise zu einem relativ großen und konstanten Positions- und Geschwindigkeitsfehler in den Phasen einer Geradeausbewegung, wohingegen die beiden anderen Verfahren deutlich niedrigere Fehler erreichten durch Einbeziehen eines Messfehlers. Die jeweiligen Spitzen während der Manöver lassen sich durch das Zögern des IMM-Filters erklären, das zunächst stärker der eigenen Prädiktion vertraute, bevor es auf das Manövermodell umschaltete. Abschließend bleibt festzuhalten, dass sich mit Orguners VB-Verfahren [113] ähnliche Ergebnisse erzielen lassen im Vergleich zum weiterentwickelten Bayes'schen Ansatz und dass sich unsere teils heuristischen Approximationen zum Berücksichtigen eines statistischen Sensormessfehlers als gleichwertig erwiesen haben. Allerdings ist sein Aktualisierungsschritt auf ein iteratives Lösungsverfahren angewiesen, weshalb er numerisch aufwendiger ist.

### 4.3 Simulation eines ausgedehnten Zielobjektes

Im Zuge eines Schätzprozesses interessiert für gewöhnlich nicht nur der Schätzwert allein, sondern auch die vom Schätzer selbst ausgewiesene Schätzunsicherheit: Für den kinematischen Schätzwert  $E[\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k] = \mathbf{x}_{k|k}$  lässt sich diese Unsicherheit mit der Schätzfehlerkovarianzmatrix  $\text{Var}[\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k]$  oder dem MMSE  $\text{tr Var}[\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k]$  angeben. Ist nun der wahre Zielzustand bekannt, können wir auch für einen Schätzwert die wahre Schätzunsicherheit berechnen und mit der vom Schätzer ausgewiesenen Unsicherheit vergleichen, so dass sich die *Glaubwürdigkeit* der Schätzergebnisse beurteilen lässt. Bei Simulationsexperimenten bieten sich zudem Monte-Carlo-Simulationen an, so dass mehrere Durchläufe desselben Szenarios genauere Schlussfolgerungen über die Glaubwürdigkeit der Schätzergebnisse ermöglichen.

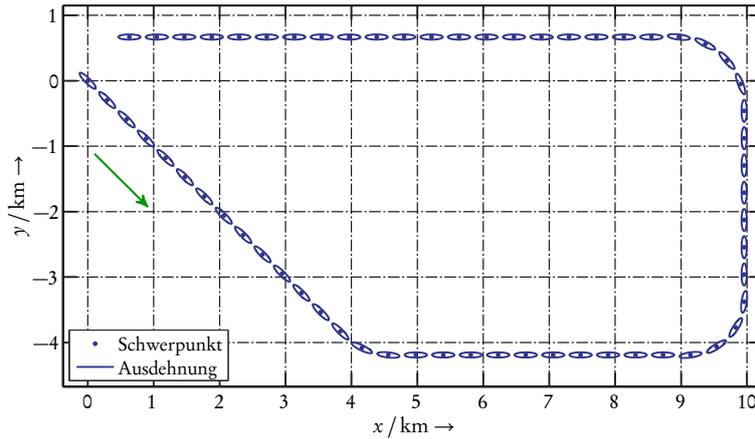
Sei  $\mu$  der Index der Tracking-Ergebnisse des  $\mu$ -ten Monte-Carlo-Simulationslaufes (von insgesamt  $M$ ). Dann berechnet sich der *ANEES* (für engl. *Average Normalized Estimation Error Squared*) für den kinematischen Teil des Schätzproblems wie folgt [6]:

$$\text{ANEES}_x := \frac{1}{\dim(\mathbf{x}_k) \cdot M} \sum_{\mu=1}^M \left[ (\mathbf{x}_{k|k} - \mathbf{x}_k)^\top (\text{Var}[\mathbf{x}_k | \mathcal{Y}_k])^{-1} (\mathbf{x}_{k|k} - \mathbf{x}_k) \right]_\mu.$$

Hierbei zeigen Werte größer als eins an, dass das Filter zu optimistisch ist über seine eigene Schätzqualität, wohingegen Werte kleiner als eins eine zu pessimistische Sichtweise des Filters bedeuten. Da dieses Glaubwürdigkeitsmaß keine negativen aber beliebig große Werte annehmen kann, betrachten wir im Folgenden den Logarithmus des ANEES, so dass sich die Intervalle beidseitig von null harmonisieren.

Mit ähnlichen Überlegungen lässt sich auch bei der Ausdehnungsschätzung ein Glaubwürdigkeitsmaß finden. Zu diesem Zweck berücksichtigen wir neben dem Schätzwert  $E[\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k] = \mathbf{X}_{k|k}$  auch den im Verfahren ausgewiesenen MMSE  $e_{k|k} = \text{tr Var}[\mathbf{X}_k | \mathcal{Y}_k]$  als Schätzunsicherheit, so dass sich der ANEES der Ausdehnungsschätzung wie folgt ergibt [167, 169]:

$$\text{ANEES}_X := \frac{1}{M} \sum_{\mu=1}^M \left[ \frac{\text{tr}((\mathbf{X}_{k|k} - \mathbf{X}_k)^2)}{e_{k|k}} \right]_\mu.$$



**Abbildung 4.10:** Simulation einer Ellipse als ausgedehntes Objekt mit typischen Abmaßen eines Flugzeugträgers. Dargestellt sind für jeden dritten Messzeitpunkt sowohl die Position des Objektschwerpunktes als auch die räumliche 2-D-Ausdehnung bei einer Abtastzeit von  $T = 10$  s.

Demnach drücken auch hier Werte größer als eins aus, dass das Filter zu optimistisch ist über seine eigene Schätzqualität bezüglich der Objektausdehnung. Neben diesen relativen Fehlermaßen sind im Rahmen von Monte-Carlo-Simulationen auch absolute Fehlermaße von Bedeutung, wobei wir uns nicht nur für kinematische Positions- und Geschwindigkeitsfehler interessieren, sondern auch für Abweichungen bei der Ausdehnungsschätzung. Dieser Fehler<sup>4</sup> beim Schätzen der Ausdehnung ergibt sich in Anlehnung an [167, 169] als *RMSE* (für engl. *Root Mean Square Error*) zu

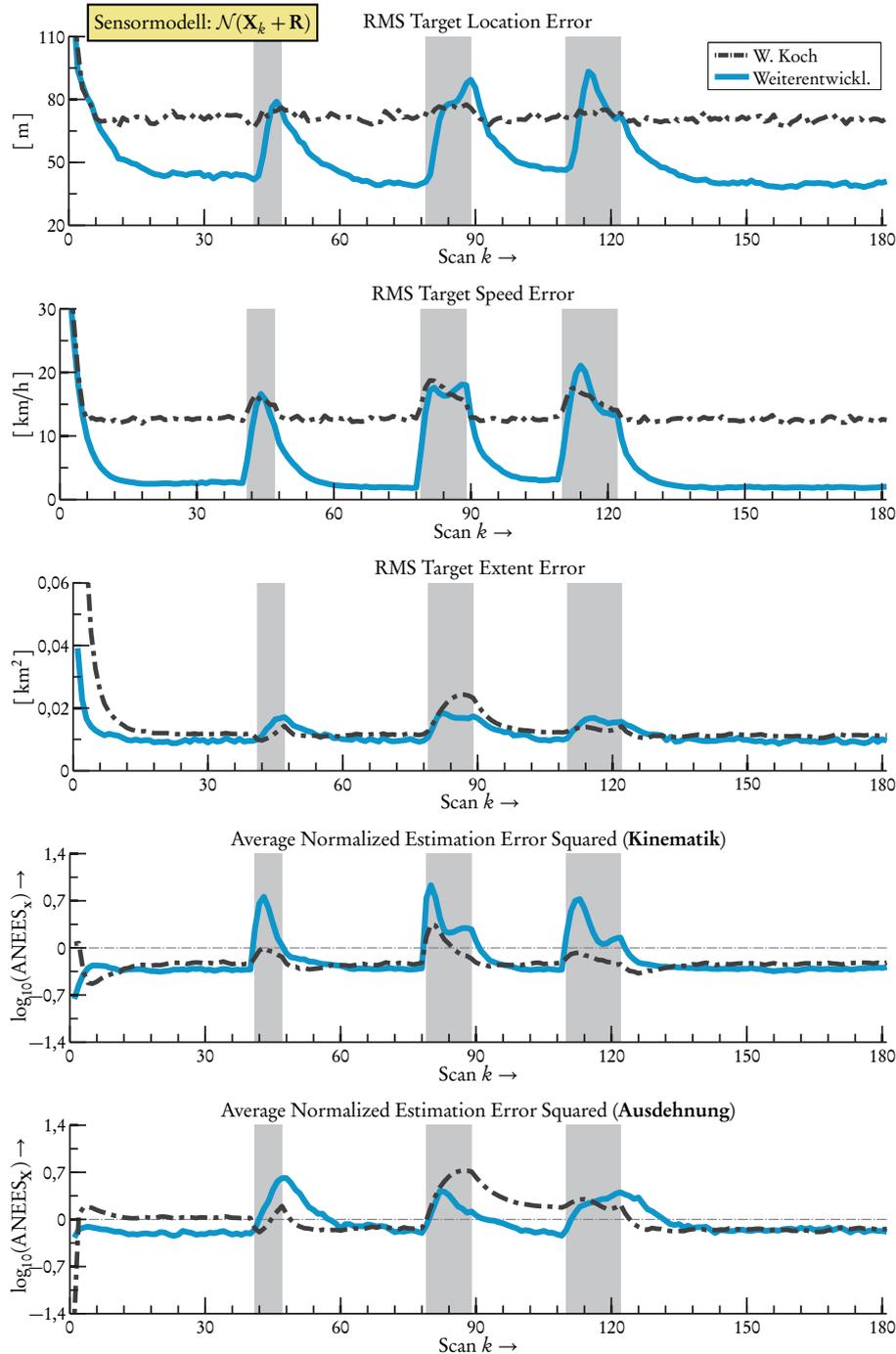
$$\text{RMSE}_{\mathbf{X}} := \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{\mu=1}^M \left[ \text{tr} \left( (\mathbf{X}_{k|k} - \mathbf{X}_k)^2 \right) \right]_{\mu}}.$$

Zum Berechnen von  $\text{ANEES}_{\mathbf{X}}$  und  $\text{RMSE}_{\mathbf{X}}$  muss allerdings die wahre Ausdehnung  $\mathbf{X}_k$  bekannt sein, die sich für eine Gruppe von Einzelzielen nur ungenau festlegen lässt; siehe etwa die unterschiedlichen Interpretationen eines Ausdehnungsellipsoids bei der Gruppe aus 16 willkürlich angeordneten Punktzielen in Abbildung 4.3. Deshalb betrachten wir im Folgenden eine Ellipse mit Achsenlängen von 340 m und 80 m als ein ausgedehntes 2-D-Zielobjekt, für das wir Simulationen durchgeführt haben. Da die Ellipse näherungsweise ein Schiff<sup>5</sup> darstellen sollte, gab ihre Hauptachse auch die Bewegungsrichtung vor, wobei wir eine konstante Geschwindigkeit von 27 kn ( $\approx 50$  km/h) angenommen haben. Neben längeren Phasen der Geradeausfahrt waren auch drei Kursänderungen von  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  und  $90^\circ$  Teil der Zieltrajektorie, die in Abbildung 4.10 dargestellt ist.

Zum Erzeugen von Messungen wurden zwei verschiedene Sensormodelle gewählt: Das Erste orientierte sich an der Normalverteilungsannahme der ursprünglichen Likelihood-Funktion ohne Skalierungsfaktor gemäß  $\mathbf{y}_k^{[j]} \sim \mathcal{N}_2(\mathbf{H}\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k + \mathbf{R})$  und wird im Folgenden als  $\mathcal{N}(\mathbf{X}_k + \mathbf{R})$  bezeichnet; beim zweiten Sensormodell wurden die Messungen gleichverteilt über die Zielausdehnung erzeugt und es wurde wiederum ein gleichanteilsfreies normalverteiltes Messrauschen berücksichtigt, so dass dieses Modell  $\mathcal{U}(\mathbf{X}_k) + \mathcal{N}(\mathbf{R})$  genannt wird. Da beim Sensormodell  $\mathcal{N}(\mathbf{X}_k + \mathbf{R})$  eine höhere Streuung der Sensormessungen zu erwarten war, wurde hier der Skalierungsfaktor der Objektausdeh-

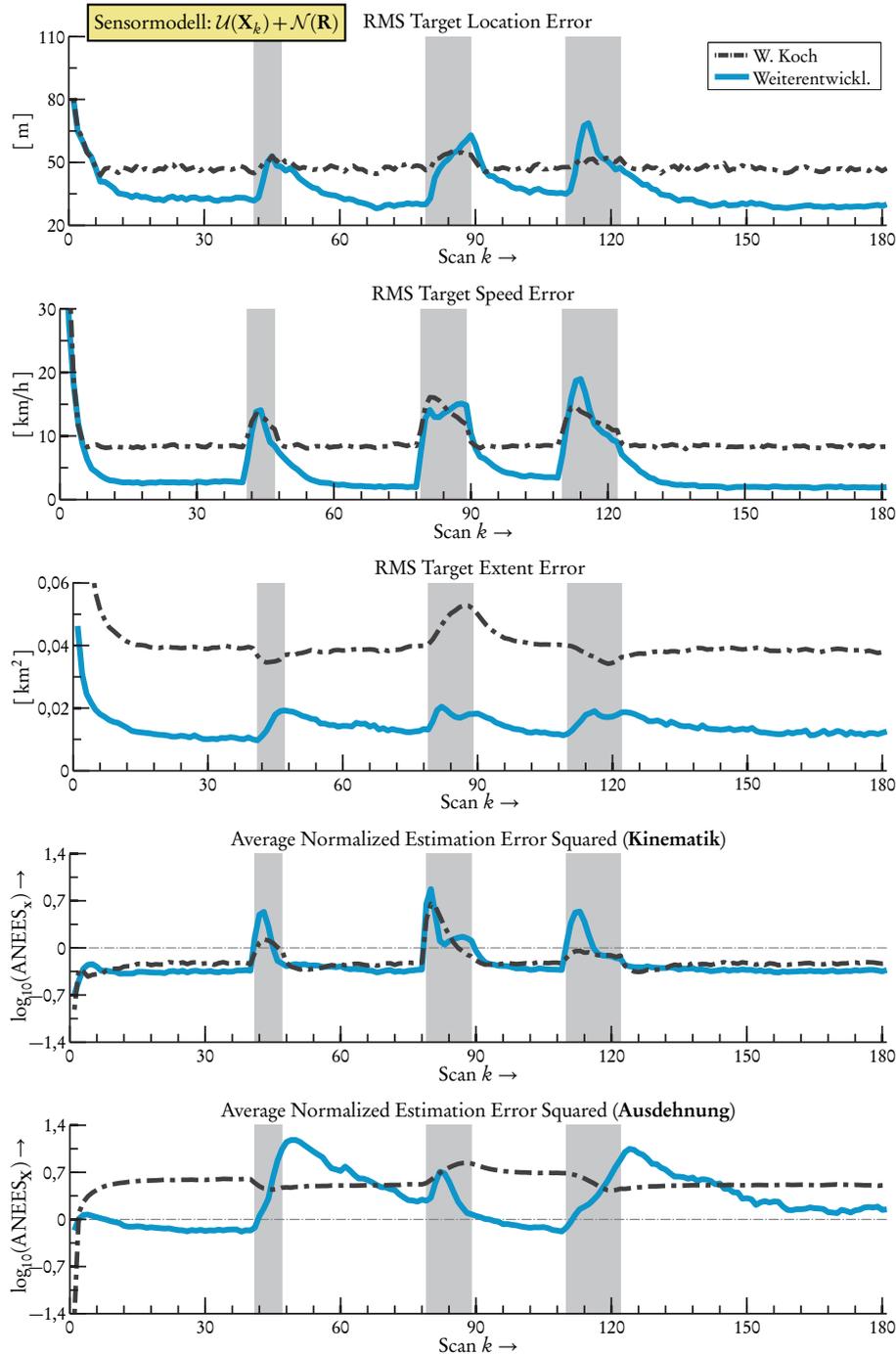
<sup>4</sup>*RMS Target Extent Error* (RMS für engl. *Root Mean Square*).

<sup>5</sup>Ein Schiff mit solchen Ausmaßen entspricht etwa einem Flugzeugträger der Nimitz-Klasse.



**Abbildung 4.11:** Ergebnisse für 900 Monte-Carlo-Simulationsläufe zum Szenario aus Abbildung 4.10, wobei zum Erzeugen von Messungen das Sensormodell  $\mathcal{N}(\mathbf{X}_k + \mathbf{R})$  verwendet wurde. Dargestellt sind absolute und relative Fehlermaße für den ursprünglichen Bayes'schen Ansatz von Koch [78] aus Kapitel 2 (schwarze Strichpunktlinie) und den im Rahmen dieser Arbeit weiterentwickelten Bayes'schen Ansatz aus Kapitel 3 (hellblaue Linie). Die grauen Hintergrundflächen markieren die Zeitspannen der Kursänderungen.

nung nicht berücksichtigt, wohingegen beim Sensormodell  $\mathcal{U}(\mathbf{X}_k) + \mathcal{N}(\mathbf{R})$  standardmäßig  $z_2 = 1/4$  galt. Genauer gesagt wurden die Sensordaten als unkorrelierte  $x$ - und  $y$ -Messungen mit Standardabweichungen von  $\sigma_x = 100$  m bzw.  $\sigma_y = 20$  m erzeugt – bei einer angenommenen Abtastzeit von  $T = 10$  s, wobei sich die Zahl der Messungen zu jedem Messzeitpunkt aus einer Poisson-Verteilung mit einem Erwartungswert von fünf Messungen ergab. Als Tracking-Verfahren haben wir nicht nur



**Abbildung 4.12:** Ergebnisse für 900 Monte-Carlo-Simulationenläufe zum Szenario aus Abbildung 4.10, wobei zum Erzeugen von Messungen das Sensormodell  $\mathcal{U}(\mathbf{X}_k) + \mathcal{N}(\mathbf{R})$  verwendet wurde. Dargestellt sind absolute und relative Fehlermaße für den ursprünglichen Bayes'schen Ansatz von Koch [78] aus Kapitel 2 (schwarze Strichpunktlinie) und den im Rahmen dieser Arbeit weiterentwickelten Bayes'schen Ansatz aus Kapitel 3 (hellblaue Linie). Die grauen Hintergrundflächen markieren die Zeitspannen der Kursänderungen.

den ursprünglichen Bayes'schen Ansatz von Koch [78] aus Kapitel 2 eingesetzt, sondern auch den weiterentwickelten Bayes'schen Ansatz aus Kapitel 3 in Verbindung mit einem IMM-Filter, das wie im vorherigen Abschnitt aus drei verschiedenen Dynamikmodellen bestand. Während Abbildung 4.11 die Ergebnisse der Monte-Carlo-Simulation für das Sensormodell  $\mathcal{N}(\mathbf{X}_k + \mathbf{R})$  zusammenfasst, zeigt Abbildung 4.12 die Simulationsergebnisse für das Modell  $\mathcal{U}(\mathbf{X}_k) + \mathcal{N}(\mathbf{R})$ .

Die Fehlerverläufe für Position und Geschwindigkeit bestätigen bei beiden Sensormodellen die Beobachtung aus dem vorherigen Abschnitt: Der ursprüngliche Bayes'sche Ansatz folgte beim Schätzen des Objektschwerpunktes im Wesentlichen dem jeweiligen Schwerpunkt der Messungen, wodurch ein nahezu konstanter Positionsfehler auftrat. Gerade zu Beginn der Kursänderungen müssten sich Spitzen im Fehlerverlauf finden lassen, wenn das Verfahren der eigenen Prädiktion mehr vertraut hätte. Durch das kontinuierliche Neuausrichten auf den gemessenen Schwerpunkt ergab sich auch ein größerer Geschwindigkeitsfehler, wohingegen das eher glättende Verhalten des weiterentwickelten Ansatzes für niedrigere Fehler während der Geradeausfahrten sorgte. Das Berücksichtigen eines Messfehlers wirkte sich auch positiv auf die Ausdehnungsschätzung aus, was insbesondere der Verlauf des Ausdehnungsfehlers beim Messmodell  $\mathcal{U}(\mathbf{X}_k) + \mathcal{N}(\mathbf{R})$  widerspiegelt. Der Unterschied zwischen beiden Verfahren fiel bei diesem Sensormodell deutlicher aus, da der durch die Ausdehnung bedingte Streuanteil in den Messungen kleiner war als beim Modell  $\mathcal{N}(\mathbf{X}_k + \mathbf{R})$ , so dass das Messrauschen eine größere Rolle spielte.

Der untere Teil in Abbildung 4.11 und Abbildung 4.12 zeigt jeweils die relativen Fehlermaße, d. h. den Logarithmus des ANEES für Kinematik und Ausdehnung. Unabhängig vom Sensormodell, mit dem die Messungen generiert wurden, fällt beim kinematischen ANEES auf, dass beide Tracking-Verfahren ein wenig zu optimistisch waren bezüglich ihrer Schätzqualität während der Kursänderungen. Allerdings gab es im Ausdehnungsteil diese Phasen der zu positiv bewerteten Schätzgenauigkeit auch während der Geradeausfahrten des Zielobjektes. Dies dürfte u. a. darauf zurückzuführen sein, dass die Qualität der Messungen – d. h., ob der Sensormessfehler groß oder klein ist – keinen Einfluss hat auf die ausgewiesene Genauigkeit der Ausdehnungsschätzung. Beide Tracking-Verfahren weisen diese Genauigkeit durch einen skalaren Parameter aus, d. h.  $\alpha_{k|k} = \nu_{k|k} - d - 1$ . Dieser Parameter erhöht sich wiederum im Aktualisierungsschritt um die Zahl der verarbeiteten Messungen – unabhängig davon, ob der Streuanteil des Messrauschen größer oder kleiner als derjenige Anteil ist, der durch die reine Objektausdehnung bedingt ist. Als wesentliche Erkenntnis bleibt letztlich festzuhalten, dass insbesondere das Größenverhältnis zwischen Ausdehnung und Sensormessfehler von entscheidender Bedeutung ist sowohl für die Qualität der geschätzten Zustandsgrößen als auch für die Glaubwürdigkeit der ausgewiesenen Schätzunsicherheiten.

## Zusammenfassung

Dieses Kapitel stellte mehrere Simulationsbeispiele vor, in denen der ursprüngliche und der weiterentwickelte Bayes'sche Ansatz zum Verfolgen ausgedehnter Objekte und nicht aufgelöster Gruppen miteinander verglichen wurden. Hierzu zählten Beispiele mit sich nicht bewegenden Objekten, um gezielt einige Besonderheiten der Ausdehnungsschätzung hervorheben zu können. Danach befasste sich dieses Kapitel mit einer Gruppe dicht fliegender Ziele, die in Linienformation mehrere Flugmanöver durchführte, so dass sich auch der Einfluss der modellierten Systemdynamik auf die Qualität der Tracking-Ergebnisse studieren ließ. Das Kapitel endete mit der simulierten Fahrt eines Schiffes, wobei die wahre Ausdehnung des Objektes durch eine Ellipse vorgegeben wurde, weshalb Fehlermaße auch für die Ausdehnungsschätzung berechnet werden konnten. Anhand dieser Simulationsbeispiele wurden im Wesentlichen folgende Punkte und Verfahrenseigenschaften beleuchtet:

- Der Skalierungsfaktor  $z_d$  in der Likelihood-Funktion ermöglicht eine korrekt skalierte Ausdehnungsschätzung, weshalb wir auf eine nachgelagerte Skalierung bei der graphischen Ausgabe verzichten und weswegen die Algorithmen auch *intern* mit der korrekt skalierten Objektausdehnung rechnen können.
- Ein zunehmender statistischer Sensormessfehler führt bei dem ursprünglichen Bayes'schen Ansatz von Koch [78] zu einer zunehmenden Ausdehnungsschätzung, da er generell Ausdehnung plus Sensorfehler schätzt. Dahingegen kann der weiterentwickelte Ansatz aus Kapitel 3 dieses *Überschätzen* weitgehend vermeiden.
- Die Bayes'schen Ansätze beabsichtigen nicht, das kleinste umschließende Ellipsoid einer Gruppe von Punktzielen zu schätzen, sondern als Schwerpunkt den empirischen Mittelwert der einzelnen Zielpositionen und als Ausdehnung ein skaliertes Ellipsoid, das sich aus der (korrigierten) Stichprobenvarianz der Zielpositionen berechnet.
- Das Einbeziehen eines statistischen Sensormessfehlers verbessert das glättende Verhalten eines Tracking-Filters. Deshalb ergeben sich beim weiterentwickelten Bayes'schen Ansatz im Mittel geringere Schätzfehler für Kinematik und Ausdehnung.
- Der weiterentwickelte Bayes'schen Ansatz kann in Verbindung mit einem IMM-Filter eingesetzt werden, da seine Schätzgrößen nicht mehr direkt miteinander verkoppelt sind. Als Folge können unterschiedliche Dynamikmodelle berücksichtigt werden, die ein abgestuftes Modellieren der Systemdynamik ermöglichen – und somit weitgehend geringere Schätzfehler.
- Das Größenverhältnis zwischen Ausdehnung und Sensormessfehler bestimmt weitgehend die Qualität der geschätzten Zustandsgrößen und die Konsistenz der ausgewiesenen Schätzunsicherheiten, weil die Größe des Messfehlers keinen Einfluss auf den skalaren Parameter der Ausdehnungsschätzung hat und somit auch nicht auf ihre ausgewiesene Schätzqualität. Da der ursprüngliche Bayes'sche Ansatz grundsätzlich Ausdehnung plus Sensorfehler schätzt, ergibt sich hier bei einem entsprechend großen Messfehler eine dauerhaft zu optimistische Sichtweise auf die Ausdehnungsschätzung.
- Orguners VB-Verfahren [113] ist ein alternativer Aktualisierungsschritt zum Berücksichtigen eines statistischen Sensormessfehlers, mit dem sich ähnliche Tracking-Ergebnisse erzielen lassen im Vergleich zum weiterentwickelten Bayes'schen Ansatz. Allerdings beruht Orguners Algorithmus auf einem iterativen Lösungsverfahren und ist daher numerisch aufwendiger.



## Kapitel 5

---

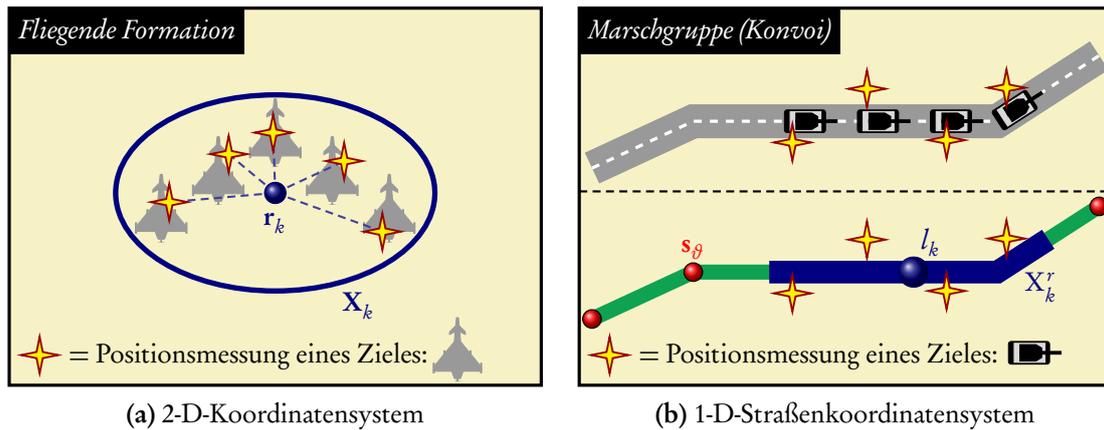
# Integration von Straßenkarteninformationen

---

In diesem Kapitel erweitern wir den ursprünglichen Bayes'schen Ansatz aus Kapitel 2 zum Tracking einer motorisierten Marschgruppe mit Hilfe von digitalen Straßenkarteninformationen. Unter der Annahme, dass sich die zu verfolgenden Fahrzeuge auf einer Straße bewegen, können Kartendaten als geographisches Kontextwissen im Tracking-Algorithmus berücksichtigt werden zur Präzisierung der Zielverfolgung. Zu diesem Zweck wird die Verbundschätzung von Kinematik und Ausdehnung im parametrisierten Raum der Straße geführt, wobei wir die Straßenbreite als vernachlässigbar betrachten im Vergleich zum Sensormessfehler. Da die Messungen nicht in diesem 1-D-Straßenkoordinatensystem vorliegen, sondern in 2-D-Bodenkoordinaten, benötigen wir entsprechende Transformationen der Verbundverteilungsdichte zur Aktualisierung des Gesamtsystemzustandes. Erste Ansätze und Ergebnisse zu dieser Vorgehensweise für Marschgruppen wurden in den Arbeiten [170, 172, 173] diskutiert, wohingegen die Filtergleichungen des hier vorgestellten Verfahrens bereits in [174, Kapitel 5] und [175, Abschnitt 6.5] zusammengefasst worden sind. Abschnitt 5.1 erläutert das gewählte Konzept zur Integration von Straßenkarteninformationen, bevor im Anschluss der erweiterte Bayes'sche Formalismus vorgestellt wird: Die Prädiktionsgleichungen finden sich in Abschnitt 5.2 und die Gleichungen zur Aktualisierung in Abschnitt 5.3. Anhand von Simulationsergebnissen demonstriert Abschnitt 5.4 das Potential des Straßenkoordinatensystems zur Verbesserung der Schätzgenauigkeit beim Tracking einer Kolonne von Fahrzeugen. Zum Abschluss dieses Kapitels erläutert Abschnitt 5.5 eine besondere Eigenschaft oder Problematik des neuen Verfahrens, die sich im Rahmen dieser Arbeit herauskristallisiert hat und beim Interpretieren der Schätzergebnisse zu berücksichtigen ist.

### 5.1 Berücksichtigung von Straßenkarteninformationen

Zahlreiche Arbeiten im Bereich der luftgestützten Bodenaufklärung betonen den möglichen Gewinn durch geographisches Kontextwissen beim Tracking von punktförmigen Bodenzielen; siehe etwa [3, 5, 27, 45, 66, 71, 90, 112, 114, 117–120, 135, 140, 144, 145, 148, 158, 159]: Dieser Gewinn ergibt sich z. B. durch weniger Spurabbrüche und einer größeren Genauigkeit beim Schätzen des unbekanntes Systemzustandes. Zum Berücksichtigen von Straßenkarteninformationen im Tracking-Verfahren für ausgedehnte Objekte und Objektgruppen adaptieren wir den Ansatz aus [71, 144, 145, 148], dessen eindimensionales Straßenkoordinatensystem sich als vorteilhaft erweist für unsere Ausdehnungsschätzung, wie es bereits Abbildung 5.1 andeutet: Der linke Teil – also Abbildung 5.1(a) – illustriert den ursprünglichen Bayes'schen Ansatz aus Kapitel 2 und sein *Messprinzip* zum Schätzen des gemeinsamen Systemzustandes  $(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k)$ . In dem dort dargestellten 2-D-Koordinatensystem entspricht das geschätzte Ellipsoid einer Ellipse. Verwenden wir dieses Verfahren zum Tracking einer motorisierten Marschgruppe, interpretiert der Bayes'sche Ansatz bereits das einfache Verfolgen ei-



**Abbildung 5.1:** Illustration des Tracking-Verfahrens für unterschiedliche Objektgruppen: Im linken Teil der Abbildung verbildlichen die gestrichelten Linien das Grundprinzip aus [78], wonach die Einzelmessungen als über die Ausdehnung verteilte Messungen des Schwerpunktes aufzufassen sind. Diese Ausdehnung wird im Fall  $d = 2$  durch eine Ellipse approximiert, deren Punkte sich aus der zugehörigen SPD Zustandsmatrix  $X_k$  ergeben; siehe etwa Gleichung (2.13). Der rechte Teil der Abbildung veranschaulicht die Idee des Straßenkoordinatensystems ( $d = 1$ ), wonach die Straße durch einen 2-D-Polygonzug mit linearen Segmenten beschrieben wird, deren Endpunkte den digitalen Kartenpositionen  $s_\vartheta$  entsprechen. Dadurch reduziert sich die Zustandsmatrix der Ausdehnung auf eine skalare Zufallsvariable und wir erhalten eine Längeninformation als Approximation der Gruppenlänge.

nes kurvigen Straßenverlaufs als Manöver der jeweiligen Fahrzeuge, was zu Instabilitäten und Ungenauigkeiten bei der Zielverfolgung bis hin zum Spurverlust führen kann; siehe auch [170, 172–175], wonach für diese Probleme insbesondere die ständigen Orientierungswechsel der geschätzten 2-D-Gruppenausdehnung verantwortlich sind.

Analog zu den Ausführungen in [71, 144, 145, 148] greifen wir die Annahme auf, dass sich eine motorisierte Marschgruppe vornehmlich auf einer Straße fortbewegt, deren realer Verlauf durch eine 2-D-Kurve in dem sogenannten *Bodenkoordinatensystem*<sup>1</sup> vorgegeben sei. Durch die Eindeutigkeit der Parametrisierung dieser Kurve reicht die Bogenlänge  $l_k$  zur genauen Angabe des Gruppenschwerpunktes völlig aus, während die Geschwindigkeit  $\dot{l}_k$  vom Betrag her dem Tachometerwert eines Fahrzeuges entspricht. Gemeinsam bilden sie den kinematischen Zustandsvektor aus Position und Geschwindigkeit gemäß  $\mathbf{x}_k^r = [l_k, \dot{l}_k]^T$ , wobei der hochgestellte Index  $r$  für das *1-D-Straßenkoordinatensystem* steht – eindimensional wegen  $d = \dim(l_k) = 1$ . Ferner beschreibt  $X_k^r$  als  $1 \times 1$ -Zufallsmatrix die skalare Zufallsvariable der Gruppenausdehnung in Straßenkoordinaten. Diese Ausdehnung, die beispielsweise in einem zweidimensionalen Koordinatensystem durch eine Ellipse beschrieben wird, reduziert sich in Straßenkoordinaten zu einer einfachen Längeninformation – der Kolonnen- oder Gruppenlänge  $2\sqrt{X_k^r}$ ; siehe Gleichung (B.23) für  $d = 1$ . Abbildung 5.1(b) verdeutlicht die Idee hinter diesem Straßenkoordinatensystem: Der Straßenverlauf kann hier nicht nur zur Angabe der Kinematik genutzt werden, sondern auch zur Modellierung der Gruppenausdehnung über mehrere Straßenabschnitte.

Für den Verlauf einer Straße seien nun insgesamt  $n_{\mathcal{R}} + 1$  Wegpunkte  $s_\vartheta$  als Stützstellen bekannt ( $\vartheta = 1, \dots, n_{\mathcal{R}} + 1$ ), so dass die jeweils gerade Verbindung benachbarter Punkte<sup>2</sup> den Polygonzug  $\mathcal{R}$

<sup>1</sup>Das Beschränken auf die zweidimensionale  $(x, y)$ -Ebene beruht auf einfacheren Transformationsformeln der Ausdehnung und übersichtlicheren Möglichkeiten zur Präsentation der Simulationsergebnisse. Das vorgestellte Verfahren kann mit entsprechenden Anpassungen auf ein 3-D-Bodenkoordinatensystem erweitert werden.

<sup>2</sup>Die gerade Verbindung zwischen den Wegpunkten  $s_\vartheta$  und  $s_{\vartheta+1}$  ergibt das lineare Straßensegment  $\vartheta$ .

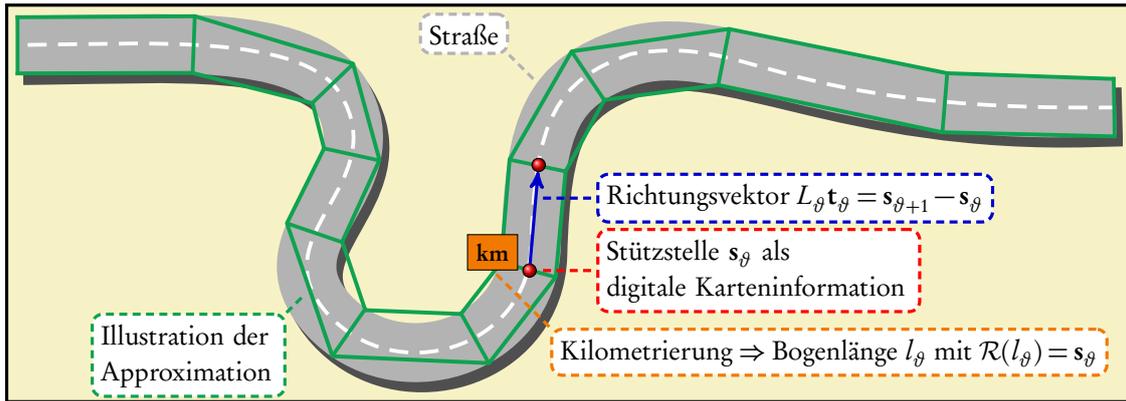


Abbildung 5.2: Schematische Darstellung einer Straße zur Berücksichtigung im Tracking-Formalismus.

als Approximation dieser Straße bestimmt; siehe Abbildung 5.2. Die Parametrisierung dieses Streckenzuges erfolgt durch die Bogenlänge  $l$ , die vereinfacht gesehen der *Kilometrierung* der Straße entspricht, so dass für die Stützstellen  $\mathbf{s}_\vartheta = \mathcal{R}(l_\vartheta)$  gilt. An dieser Stelle ist allerdings von einem *Discretisierungsfehler* auszugehen, d. h. einer segmentspezifischen Differenz aus der realen Straßenabschnittslänge und dem jeweiligen Abstand  $L_\vartheta$  zweier benachbarter Stützstellen  $\mathbf{s}_\vartheta$  und  $\mathbf{s}_{\vartheta+1}$ , wie sie in Abbildung 5.2 bei der Darstellung der Approximation durch gerade Straßensegmente angedeutet wird. Dieser Approximationsfehler oder auch die Straßenbreite könnten im Tracking-Formalismus als zusätzliche Kontextinformation berücksichtigt werden. Von einer bekannten Bogenlänge  $l_{\vartheta=1}$  (z. B.  $l_{\vartheta=1} = 0$  m) ausgehend lässt sich mit den Abstandswerten  $L_\vartheta$  explizit

$$l_\vartheta = \sum_{\vartheta'=1}^{\vartheta-1} L_{\vartheta'} \quad (\vartheta = 2, \dots, n_{\mathcal{R}} + 1)$$

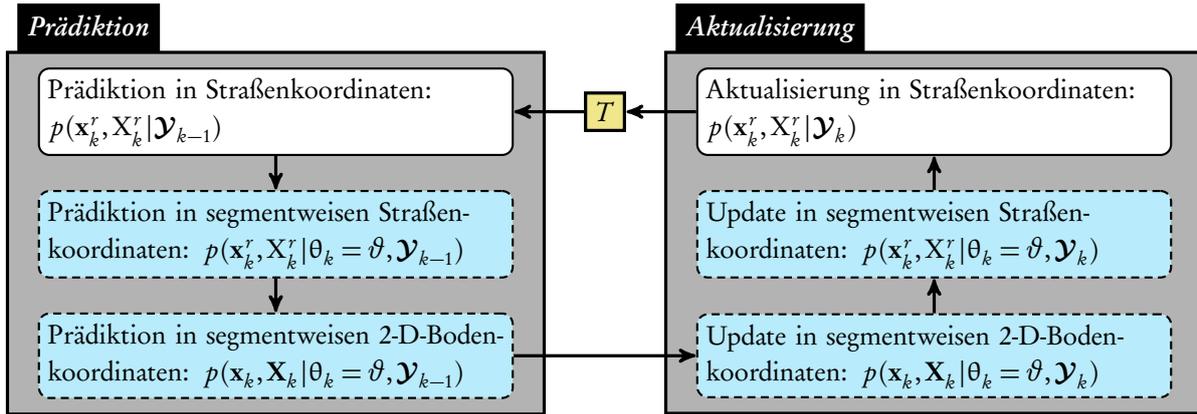
berechnen. Darüber hinaus gilt für die normierten Richtungsvektoren der  $n_{\mathcal{R}}$  Straßensegmente

$$\mathbf{t}_\vartheta = [t_x^{[\vartheta]}, t_y^{[\vartheta]}]^T = \frac{\mathbf{s}_{\vartheta+1} - \mathbf{s}_\vartheta}{L_\vartheta}$$

und somit ebenfalls

$$\mathbf{s}_{\vartheta+1} = \mathbf{s}_\vartheta + L_\vartheta \mathbf{t}_\vartheta.$$

Da die Messungen mit Fehlern behaftet sind, liegen sie oftmals abseits der Straße und lassen sich nicht allgemein in Straßenkoordinaten angeben, sondern in Bodenkoordinaten, weshalb wir zum Aktualisieren des prädizierten Systemzustandes die Verbunddichte  $p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \mathcal{Y}_{k-1})$  ebenfalls in Bodenkoordinaten benötigen. Würden wir stattdessen die Messungen auf die Straßensegmente projizieren – und damit ins Straßenkoordinatensystem –, ergäben sich Mehrdeutigkeiten und Schwierigkeiten bei der Zuordnung – bereits auch bei einem kurvigen Straßenverlauf ohne Kreuzungen und Einmündungen wie in Abbildung 5.2. Beim Tracking-Verfahren für punktförmige Bodenziele in [71, 144, 145, 148] erfolgt dieses Umrechnen zwischen Straßen- und Bodenkoordinaten in mehreren Prozessschritten, wobei die Dichtefunktion des Systemzustandes zunächst in eine segmentweise Darstellung überführt wird, so dass anschließend die Transformation für jedes Straßensegment separat berechnet werden kann. Zur Adaption dieser Vorgehensweise für eine Gruppe von Straßenzielen



**Abbildung 5.3:** Verarbeitungszyklus des erweiterten Bayes'schen Ansatzes, der Straßenkarteninformationen berücksichtigt, wobei  $\theta_k$  diejenige Zufallsvariable sei, die das jeweils gültige Segment während der Prädiktion angibt; siehe auch die schematischen Darstellungen in [74, 148].

führen wir zunächst eine weitere Zufallsvariable ein: Sei  $\theta_k$  diejenige Zufallsvariable, die das jeweils gültige Straßensegment während der Prädiktion angibt, für das die Koordinatentransformation gerade durchzuführen ist. Ausgehend von der Vorgehensweise für Punktziele<sup>3</sup> in [71, 144, 145, 148] ergeben sich dann sechs verschiedene Prozessschritte entsprechend Abbildung 5.3, die zusammen genommen den erweiterten Bayes'schen Ansatz zur Verfolgung einer Gruppe von Straßenzielen bilden:

1. *Prädiktion in Straßenkoordinaten:* Zum Verarbeiten der neuen Messungen benötigen wir eine Vorhersage zum Messzeitpunkt über den Systemzustand der Marschgruppe – ausgehend von der vorangegangenen Schätzung in Straßenkoordinaten. Da dem zeitlichen Entwicklungsmodell für den Prädiktionszeitraum ebenfalls das 1-D-Straßenkoordinatensystem zugrunde liegen soll, ergibt sich der prädizierte gemeinsame Systemzustand  $(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r)$  ebenfalls in Straßenkoordinaten. Aufgrund dieses Dynamikmodells folgt die Prädiktion  $p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \mathcal{Y}_{k-1})$  automatisch dem Straßenverlauf, d. h. dem Polygonzug  $\mathcal{R}$  als Approximation der jeweiligen Straße.
2. *Prädiktion in segmentweisen Straßenkoordinaten:* Wie bereits erläutert, benötigen wir zum Aktualisieren des gemeinsamen Systemzustandes die prädizierte Verbunddichte in Bodenkoordinaten. Da die Transformation in dieses Koordinatensystem allerdings nur für jedes Segment einzeln eindeutig angegeben werden kann, überführen wir die bedingte Verbunddichte der Objektgruppe in eine segmentweise Darstellung und erhalten für jedes der  $n_{\mathcal{R}}$  Straßensegmente eine segmentabhängige Dichtefunktion  $p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_{k-1})$ .
3. *Prädiktion in segmentweisen 2-D-Bodenkoordinaten:* Diese Dichtefunktionen werden anschließend in das 2-D-Bodenkoordinatensystem transformiert, so dass sich zum Abschluss der Prädiktion die segmentweisen Dichtefunktionen  $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_{k-1})$  ergeben – entsprechend dem linken Block in Abbildung 5.3. Zum Einhalten des Formalismus in diesem Schritt wandeln wir auch die geschätzte Länge der Gruppe in eine 2-D-Ausdehnung in Bodenkoordinaten, d. h. in eine Ellipse mit entsprechenden Achsenlängen.

<sup>3</sup>Dieser spezielle Ansatz zum Integrieren von Straßenkarteninformationen findet sich auch in weiteren Arbeiten; siehe etwa [72, 74, 84–86, 102, 103, 146, 147].

4. *Aktualisierung in segmentweisen 2-D-Bodenkoordinaten:* Mit den bekannten Filtergleichungen des ursprünglichen Bayes'schen Ansatzes aus Kapitel 2 verwenden wir die aktuellen Sensordaten im Tracking-Verfahren und erhalten somit eine aktualisierte Darstellung der segmentspezifischen Dichtefunktionen  $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_k)$  im 2-D-Bodenkoordinatensystem.
5. *Aktualisierung in segmentweisen Straßenkoordinaten:* Nach dem segmentabhängigen Update mittels aktueller Sensormessungen erfolgt die Rücktransformation von segmentweisen Bodenkoordinaten ins Straßenkoordinatensystem. Indem wir den segmentspezifischen Systemzustand auf das entsprechende Straßensegment projizieren, erhalten wir für jedes der  $n_{\mathcal{R}}$  Straßensegmente eine segmentabhängige Dichtefunktion  $p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_k)$ .
6. *Aktualisierung in Straßenkoordinaten:* Zum Abschluss des aktuellen Zeitschrittes wird aus der segmentweisen Darstellung wieder die bedingte Verbunddichte  $p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \mathcal{Y}_k)$  berechnet, so dass auch die interessierenden Größen für den gemeinsamen Systemzustand bekannt sind.

Im Vergleich zum Punktzielverfahren [71, 144, 145, 148] ist darauf zu achten, dass sich der Zustand einer Gruppe von Straßenzielen über mehrere Straßensegmente erstrecken kann – aufgrund der räumlichen Verteilung der einzelnen Gruppenmitglieder auf der Straße. Lassen wir die Schätzunsicherheit zunächst außer Acht, existiert diese Problematik nicht bei dem Ansatz für punktförmige Bodenziele, da der Zustandsvektor eines Punktzieles nur auf einem Segment liegen kann.

Die sechs Prozessschritte in Abbildung 5.3 beschreiben die rekursive Berechnung der Verbunddichte  $p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \mathcal{Y}_k)$  unter Berücksichtigung von Straßenkarteninformationen, wobei sich auch dieser Verarbeitungszyklus in zwei fundamentale Bausteine einteilen lässt, wie im weiteren Verlauf dieser Arbeit gezeigt wird: die *Prädiktion* entsprechend Abschnitt 5.2 und die *Aktualisierung* gemäß Abschnitt 5.3. Ausgangspunkt ist dabei der ursprüngliche Ansatz aus Kapitel 2, da sich das neue Verfahren so konsequent im Bayes'schen Formalismus entwickeln lässt – im Vergleich zum weiterentwickelten Verfahren aus Kapitel 3 mit seinen angepassten Filtergleichungen, die auf verschiedene Approximationen zurückzuführen sind.

## 5.2 Prädiktion des erweiterten Bayes'schen Ansatzes

Analog zum ursprünglichen Bayes'schen Ansatz in Kapitel 2 verwenden wir das Produkt einer vektor- und einer matrixvariaten Wahrscheinlichkeitsverteilung zum Modellieren des aktuellen Systemzustandes  $(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r)$  im 1-D-Straßenkoordinatensystem, d. h.

$$p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \mathcal{Y}_k) = p(\mathbf{x}_k^r | \mathbf{X}_k^r, \mathcal{Y}_k) p(\mathbf{X}_k^r | \mathcal{Y}_k),$$

wobei diese A-posteriori-Dichte in Anlehnung an Gleichung (2.26) wie folgt gewählt wird:

$$p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \mathcal{Y}_k) = \mathcal{N}_s(\mathbf{x}_k^r; \mathbf{x}_{k|k}^r, \tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^r \otimes \mathbf{X}_k^r) \mathcal{IW}_1(\mathbf{X}_k^r; \nu_{k|k}^r, \tilde{\mathbf{X}}_{k|k}^r). \quad (5.1)$$

Da  $\mathbf{X}_k^r$  lediglich eine skalare Zufallsvariable ist, könnten wir die inverse Wishart-Verteilungsdichte auch direkt als Dichtefunktion einer inversen Gammaverteilung schreiben, d. h.

$$p(\mathbf{X}_k^r | \mathcal{Y}_k) = \mathcal{IW}_1(\mathbf{X}_k^r; \nu_{k|k}^r, \tilde{\mathbf{X}}_{k|k}^r) = \mathcal{IG}(\mathbf{X}_k^r; \frac{1}{2} \nu_{k|k}^r, \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{X}}_{k|k}^r),$$

und bei der Kovarianzmatrix der Normalverteilung das Kronecker-Produkt auslassen. Für eine einheitliche Schreibweise innerhalb des Bayes'schen Formalismus wird in dieser Arbeit aber auf diese abweichende Darstellung verzichtet; stattdessen verwenden wir Gleichung (5.1) als Ausgangspunkt zum Herleiten der Filtergleichungen. In diesem Kontext befassen sich die folgenden Unterabschnitte mit den drei Einzelschritten der Prädiktion, d. h. der Vorgehensweise, um aus der letzten Aktualisierung in Straßenkoordinaten zum Zeitpunkt  $t_{k-1}$  die prädizierte Dichtefunktion in segmentweisen Bodenkoordinaten zu berechnen – entsprechend dem linken Block in Abbildung 5.3.

### 5.2.1 Prädiktion in Straßenkoordinaten

Ausgehend von der bedingten Verbundverteilungsdichte  $p(\mathbf{x}_{k-1}^r, \mathbf{X}_{k-1}^r | \mathcal{Y}_{k-1})$  zum Zeitpunkt  $t_{k-1}$  benötigen wir zum späteren Verarbeiten der neuen Sensormessungen im Zeitschritt  $k$  zunächst die *Prädiktion in Straßenkoordinaten*

$$p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \mathcal{Y}_{k-1}) = \mathcal{N}_s(\mathbf{x}_k^r; \mathbf{x}_{k|k-1}^r, \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}^r \otimes \mathbf{X}_k^r) \mathcal{IW}_1(\mathbf{X}_k^r; \nu_{k|k-1}^r, \tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}^r).$$

In Anlehnung an Abschnitt 2.3.3 und [78] ergeben sich die Parameter des vektorvariablen Teiles durch Annahme der linearen Systemgleichung

$$\mathbf{x}_k^r = \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{x}_{k-1}^r + \mathbf{v}_k^r \quad \text{mit} \quad \mathbf{v}_k^r \sim \mathcal{N}_s(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{Q}} \otimes \mathbf{X}_k^r),$$

die letztlich zu

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k|k-1}^r &= \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{x}_{k-1|k-1}^r \\ \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}^r &= \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{P}}_{k-1|k-1}^r \tilde{\mathbf{F}}^\top + \tilde{\mathbf{Q}} \end{aligned}$$

für die Prädiktion der Kinematik führt. Die Filtergleichungen zur Vorhersage der Ausdehnung leiten sich aus der Annahme ab, dass die Länge der Objektgruppe zwischen zwei Messzeitpunkten tendenziell konstant bleibt. Dies ist gleichbedeutend mit  $\mathbf{X}_{k|k-1}^r = \mathbf{X}_{k-1|k-1}^r$ . Demnach berechnet sich die  $1 \times 1$ -Parametermatrix der inversen Wishart-Verteilung zu

$$\tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}^r = (\nu_{k|k-1}^r - 2) \mathbf{X}_{k-1|k-1}^r = \frac{\nu_{k|k-1}^r - 2}{\nu_{k-1|k-1}^r - 2} \tilde{\mathbf{X}}_{k-1|k-1}^r,$$

wohingegen

$$\nu_{k|k-1}^r = 4 + \exp(-T/\tau)(\nu_{k-1|k-1}^r - 4)$$

garantiert, dass die Forderung  $\nu_{k|k-1}^r > 4$  zur Angabe des mittleren quadratischen Fehlers  $e_{k|k-1}^r$  stets eingehalten wird, für den

$$e_{k|k-1}^r = \frac{2(\mathbf{X}_{k|k-1}^r)^2}{\nu_{k|k-1}^r - 4} \quad \text{mit} \quad \mathbf{X}_{k|k-1}^r = \frac{\tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}^r}{\nu_{k|k-1}^r - 2}$$

gilt; siehe Gleichung (3.11) unter Berücksichtigung des Zusammenhanges (3.9).

### 5.2.2 Prädiktion in segmentweisen Straßenkoordinaten

Wie in Abschnitt 5.1 erläutert, soll die bedingte Verbundverteilungsdichte  $p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \mathcal{Y}_{k-1})$  in eine segmentweise Darstellung überführt werden, so dass wir anschließend eine Transformation ins Bodenkoordinatensystem durchführen können. Sei  $n_{\mathcal{R}}$  die Zahl der zu berücksichtigenden Straßensegmente und  $\theta_k$  die Zufallsvariable, die das jeweils gültige Segment während der Prädiktion angibt. Dann bezeichnet

$$\theta_{k|k-1}^{[\vartheta]} := P\{\theta_k = \vartheta | \mathcal{Y}_{k-1}\} \quad (\vartheta = 1, \dots, n_{\mathcal{R}})$$

die Gültigkeitswahrscheinlichkeit<sup>4</sup> der  $\vartheta$ -ten Segmenthypothese im Zeitschritt  $k$  basierend auf der Messsequenz  $\mathcal{Y}_{k-1}$ , wobei

$$\sum_{\vartheta=1}^{n_{\mathcal{R}}} \theta_{k|k-1}^{[\vartheta]} = 1 \quad (5.2)$$

gilt. Nach Erweiterung des gemeinsamen Systemzustandes  $(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r)$  mit der Zufallsvariablen  $\theta_k$  lässt sich die A-priori-Dichte zunächst in segmentabhängige Komponenten zerlegen, d. h.

$$p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \mathcal{Y}_{k-1}) = \sum_{\vartheta=1}^{n_{\mathcal{R}}} \theta_{k|k-1}^{[\vartheta]} p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_{k-1}), \quad (5.3)$$

wobei  $p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_{k-1})$  die sogenannte *Prädiktion in segmentweisen Straßenkoordinaten* bezeichnet. Wie beim Verfahren für punktförmige Straßenziele in [71, 144, 145, 148] lassen sich diese  $n_{\mathcal{R}}$  segmentabhängigen Dichtefunktionen mit Hilfe der Bayes'schen Regel<sup>5</sup> berechnen:

$$p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_{k-1}) = \frac{p(\theta_k = \vartheta | \mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r) p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \mathcal{Y}_{k-1})}{\theta_{k|k-1}^{[\vartheta]}}. \quad (5.4)$$

Die Aufteilung des gemeinsamen Systemzustandes auf die verschiedenen Straßensegmente erfordert eine geeignete Modellierung der segmentspezifischen Likelihood-Funktion  $p(\theta_k = \vartheta | \mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r)$ . Diese Wahrscheinlichkeit beschreibt den funktionalen Zusammenhang zwischen dem jeweiligen Segment  $\vartheta$  und dem aktuellen Systemzustand  $(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r)$ , wobei nicht nur der räumliche Schwerpunkt der Marschgruppe

$$l_k = \tilde{\mathbf{H}}_r \mathbf{x}_k^r \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{H}}_r = [1, 0]$$

Teil der segmentspezifischen Likelihood-Funktion sein soll, sondern auch ihre Länge  $2\sqrt{\overline{\mathbf{X}}_k^r}$ , da sich ein Verband von Fahrzeugen über mehrere Straßensegmente erstrecken kann. Ein weiteres Kriterium ist die Einhaltung des methodischen Rahmens, d. h. des Bayes'schen Formalismus: Daher soll die Varianz von  $p(\theta_k = \vartheta | \mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r)$  dem Term  $\Delta l_{\vartheta}^2 \mathbf{X}_k^r$  entsprechen, wobei  $\Delta l_{\vartheta}$  einen segmentabhängigen, skalaren Wert darstellt, d. h. einen segmentspezifischen Skalierungsfaktor für die Ausdehnung. Als Bezugspunkt für diese segmentspezifische Likelihood-Funktion verwenden wir – analog zum

<sup>4</sup>Diese Gültigkeitswahrscheinlichkeit bezeichnet die *Aufenthaltswahrscheinlichkeit* der Marschkolonne auf dem jeweiligen Straßensegment.

<sup>5</sup>Die Likelihood-Funktion für das jeweils gültige Straßensegment im Zeitschritt  $k$  soll nur vom aktuellen Systemzustand abhängen und nicht mit alten Messungen korrelieren, d. h.  $p(\theta_k = \vartheta | \mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r, \mathcal{Y}_{k-1}) = p(\theta_k = \vartheta | \mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r)$ .

Punktzielverfahren [71, 144, 145, 148] – den Mittelpunkt

$$\bar{l}_\vartheta := \frac{1}{2}(l_\vartheta + l_{\vartheta+1})$$

eines Straßensegmentes, woraufhin sich die Likelihood-Funktion zu

$$p(\theta_k = \vartheta | \mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r) = \mathcal{N}_1(\bar{l}_\vartheta; \tilde{\mathbf{H}}_r \mathbf{x}_k^r, \Delta l_\vartheta^2 \mathbf{X}_k^r)$$

ergibt. Formal gesehen erfolgt die Berücksichtigung von Straßenkoordinaten im Prädiktionsschritt demnach durch eine Aktualisierung mit der *Pseudomessung*  $\bar{l}_\vartheta$  entsprechend Gleichung (5.4).

Allerdings muss zuvor noch der dimensionslose Parameter  $\Delta l_\vartheta$  berechnet werden: Da die Länge der Marschgruppe im Vergleich zur Länge des jeweiligen Straßensegmentes

$$L_\vartheta := l_{\vartheta+1} - l_\vartheta$$

zu sehen ist, wird in [175, Abschnitt 6.5.2.1] von einer mit  $z_\vartheta$  skalierten  $1 \times 1$ -*Ausdehnungsmatrix*<sup>6</sup> ausgegangen, woraus der Ansatz

$$\Delta l_\vartheta^2 \mathbf{X}_k^r := z_\vartheta \left( \frac{L_\vartheta + 2\sqrt{\mathbf{X}_k^r}}{2} \right)^2$$

folgt. Dabei entspricht der erste Summand für  $z_\vartheta = 1/3$  der Varianz einer Gleichverteilung<sup>7</sup> auf dem Intervall  $[l_\vartheta, l_{\vartheta+1}]$ , d. h.  $L_\vartheta^2/12$ . Obwohl sich durch Umstellen dieser Gleichung die Formel

$$\Delta l_\vartheta = \sqrt{z_\vartheta} \left( 1 + \frac{L_\vartheta}{2\sqrt{\mathbf{X}_k^r}} \right)$$

ergibt, können wir damit den Parameter  $\Delta l_\vartheta$  im Tracking-Verfahren nicht berechnen – aufgrund der unbekanntenen Zufallsvariablen  $\mathbf{X}_k^r$ . Da die Prädiktion  $\mathbf{X}_{k|k-1}^r$  zu diesem Zeitpunkt die beste verfügbare Schätzung von  $\mathbf{X}_k^r$  darstellt, verwenden wir die Näherung<sup>8</sup>

$$\Delta l_\vartheta \approx \sqrt{z_\vartheta} \left( 1 + \frac{L_\vartheta}{2\sqrt{\mathbf{X}_{k|k-1}^r}} \right)$$

zum expliziten Berechnen von  $\Delta l_\vartheta$  im Tracking-Algorithmus.

Wie bereits erläutert, interpretieren wir Gleichung (5.4) als *Pseudoaktualisierung der Prädiktion in Straßenkoordinaten*  $p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \mathbf{y}_{k-1})$  mit einer *segmentspezifischen Likelihood-Funktion*. Demzufolge verwenden wir die bekannten Aktualisierungsgleichungen aus Abschnitt 2.3.2 – siehe auch Abbildung 2.2 – und erhalten

$$p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \theta_k = \vartheta, \mathbf{y}_{k-1}) = \mathcal{N}_s(\mathbf{x}_k^r; \mathbf{x}_{k|k-1}^{r[\vartheta]}, \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}^{r[\vartheta]} \otimes \mathbf{X}_k^r) \mathcal{IW}_1(\mathbf{X}_k^r; \mathbf{v}_{k|k-1}^r + 1, \tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}^{r[\vartheta]}) \quad (5.5)$$

<sup>6</sup>Die *Ausdehnungsmatrix* eines Ellipsoids ist eine SPD Matrix, wobei ein Eigenwert dieser Matrix der quadrierten Länge einer Halbachse entspricht. Im eindimensionalen Fall ( $d = 1$ ) lässt sich das Ellipsoid als Intervall interpretieren, d. h. die  $1 \times 1$ -*Ausdehnungsmatrix* ist die halbe Intervallbreite zum Quadrat.

<sup>7</sup>Beim Verfahren für punktförmige Bodenziele wird  $\mathcal{N}_1(\bar{l}_\vartheta; \tilde{\mathbf{H}}_r \mathbf{x}_k^r, L_\vartheta^2/12)$  als Approximation für die entsprechende Likelihood-Funktion gewählt; siehe etwa [144, 148].

<sup>8</sup>Wie bei der Berücksichtigung eines statistischen Sensormessfehlers in Abschnitt 3.1 wird an dieser Stelle die Schätzunsicherheit vernachlässigt, die mit der Ausdehnungsschätzung einhergeht.

für  $\vartheta = 1, \dots, n_{\mathcal{R}}$  als *Prädiktion in segmentweisen Straßenkoordinaten*, wobei sich die Parameter einer segmentspezifischen Dichtefunktion wie folgt berechnen: Mit Hilfe von

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{k|k-1}^{r[\vartheta]} &= \tilde{\mathbf{H}}_r \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}^r \tilde{\mathbf{H}}_r^\top + \Delta l_{\vartheta}^2 \\ \tilde{\mathbf{K}}_{k|k-1}^{r[\vartheta]} &= \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}^r \tilde{\mathbf{H}}_r^\top (\tilde{S}_{k|k-1}^{r[\vartheta]})^{-1} \\ N_{k|k-1}^{r[\vartheta]} &= (\bar{l}_{\vartheta} - \tilde{\mathbf{H}}_r \mathbf{x}_{k|k-1}^r)^2\end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k|k-1}^{r[\vartheta]} &= \mathbf{x}_{k|k-1}^r + \tilde{\mathbf{K}}_{k|k-1}^{r[\vartheta]} (\bar{l}_{\vartheta} - \tilde{\mathbf{H}}_r \mathbf{x}_{k|k-1}^r) \\ \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}^{r[\vartheta]} &= \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}^r - \tilde{\mathbf{K}}_{k|k-1}^{r[\vartheta]} \tilde{S}_{k|k-1}^{r[\vartheta]} (\tilde{\mathbf{K}}_{k|k-1}^{r[\vartheta]})^\top\end{aligned}$$

für die Kinematik sowie

$$\tilde{X}_{k|k-1}^{r[\vartheta]} = \tilde{X}_{k|k-1}^r + (\tilde{S}_{k|k-1}^{r[\vartheta]})^{-1} N_{k|k-1}^{r[\vartheta]}$$

für die Ausdehnung. Letztlich sind noch die *Segmentgewichte*  $\theta_{k|k-1}^{[\vartheta]}$  der Mischverteilungsdichte (5.3) zu bestimmen, die sich gemäß Gleichung (5.4) als Messwahrscheinlichkeiten interpretieren lassen:

$$\theta_{k|k-1}^{[\vartheta]} = \iint p(\theta_k = \vartheta | \mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r) p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \mathcal{Y}_{k-1}) d\mathbf{x}_k^r d\mathbf{X}_k^r \quad (\vartheta = 1, \dots, n_{\mathcal{R}}).$$

Da dieser Prozessschritt dem segmentweisen Update mit einer einzelnen Pseudomessung entspricht, verwenden wir das bekannte Ergebnis für die Messwahrscheinlichkeit einer erwarteten Einzelmessung aus Abschnitt 2.5.1 und erhalten unmittelbar

$$\theta_{k|k-1}^{[\vartheta]} = \mathcal{T}_1(\bar{l}_{\vartheta}; \nu_{k|k-1}^r, \tilde{\mathbf{H}}_r \mathbf{x}_{k|k-1}^r, \tilde{S}_{k|k-1}^{r[\vartheta]} \tilde{X}_{k|k-1}^r / \nu_{k|k-1}^r) \quad (\vartheta = 1, \dots, n_{\mathcal{R}}).$$

Nach Berechnen aller Segmentgewichte sollten diese *Segmentaufenthaltswahrscheinlichkeiten* auch noch entsprechend Gleichung (5.2) normiert werden, so dass wir  $p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \mathcal{Y}_{k-1})$  als Mischverteilungsdichte (5.3) darstellen können.

### 5.2.3 Prädiktion in segmentweisen 2-D-Bodenkoordinaten

Eine Eigenschaft des Verfahrens für punktförmige Straßenziele in [71, 144, 145, 148] ist das konsequente Einhalten des methodischen Rahmens des Bayes'schen Formalismus – insbesondere bei der segmentweisen Prädiktion in Bodenkoordinaten, da die Transformation von Straßen- in Bodenkoordinaten über eine segmentspezifische *Transitionsdichte* vorgegeben wird, d. h.  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_k^r, \theta_k = \vartheta)$  für  $\vartheta = 1, \dots, n_{\mathcal{R}}$ . Die Adaption dieser Vorgehensweise für eine Gruppe von Straßenzielen im erweiterten Bayes'schen Ansatz lautet formal

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_{k-1}) = \iint p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r, \theta_k = \vartheta) p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_{k-1}) d\mathbf{x}_k^r d\mathbf{X}_k^r,$$

wobei

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_{k-1}) = p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_{k-1}) p(\mathbf{X}_k | \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_{k-1})$$

die sogenannte *Prädiktion in segmentweisen Bodenkoordinaten* bezeichnet – mit der bekannten Darstellung der bedingten Verbundverteilungsdichte als das Produkt einer vektor- und einer matrixvariierten Wahrscheinlichkeitsverteilung. Grundsätzlich soll das Doppelintegral mit der segmentspezifischen Übergangsdichte in zwei Teilprobleme aufgespalten werden: Zum einen soll die Produktform der Verbunddichte erhalten bleiben, zum anderen dürfte sich der Übergang von Straßen- in Bodenkoordinaten einfacher realisieren lassen, wenn die Transformationsformeln getrennt nach Kinematik und Ausdehnung anzugeben sind. Gesucht ist demzufolge

$$p(\mathbf{x}_k^r | \mathbf{X}_k^r, \theta_k = \vartheta, \mathbf{y}_{k-1}) \left. \vphantom{p(\mathbf{x}_k^r | \mathbf{X}_k^r, \theta_k = \vartheta, \mathbf{y}_{k-1})} \right\} \begin{array}{c} \text{Transformation von Straßen- in} \\ \text{Bodenkoordinaten} \end{array} \left. \vphantom{p(\mathbf{x}_k^r | \mathbf{X}_k^r, \theta_k = \vartheta, \mathbf{y}_{k-1})} \right\} \begin{array}{l} p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \theta_k = \vartheta, \mathbf{y}_{k-1}) \\ p(\mathbf{X}_k | \theta_k = \vartheta, \mathbf{y}_{k-1}). \end{array}$$

Damit die Integration sowohl über  $\mathbf{x}_k^r$  als auch über  $\mathbf{X}_k^r$  getrennt berechnet werden kann, müssten wir die kinematische Dichtefunktion der Prädiktion in segmentweisen Straßenkoordinaten anpassen. Dementsprechend müsste  $p(\mathbf{x}_k^r | \mathbf{X}_k^r, \theta_k = \vartheta, \mathbf{y}_{k-1})$  durch eine Dichtefunktion der Form  $p(\mathbf{x}_k^r | \mathbf{X}_k, \theta_k = \vartheta, \mathbf{y}_{k-1})$  ersetzt werden.

Da für dieses Problem bisher keine Lösung gefunden wurde, wird stattdessen in [175, Abschnitt 6.5.2.1] die Annahme getroffen, dass sich die segmentspezifische Verbunddichte der *Prädiktion in segmentweisen 2-D-Bodenkoordinaten* wie folgt für  $\vartheta = 1, \dots, n_R$  formulieren lässt:

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \theta_k = \vartheta, \mathbf{y}_{k-1}) = \mathcal{N}_{2s}(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k-1}^{[\vartheta]}, \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}^{[\vartheta]} \otimes \mathbf{X}_k) \mathcal{IW}_2(\mathbf{X}_k; \nu_{k|k-1}, \tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}^{[\vartheta]}). \quad (5.6)$$

Darüber hinaus soll  $\check{\vartheta}$  dasjenige Straßensegment bezeichnen, auf dem die kinematische Position der Prädiktion in segmentweisen Straßensegmenten liegt, so dass

$$l_{\check{\vartheta}} \leq \tilde{\mathbf{H}}_r \mathbf{x}_{k|k-1}^{r[\check{\vartheta}]} < l_{\check{\vartheta}+1}$$

gilt. Dieses explizite Bestimmen des aktuellen Segmentes ist notwendig, da sich der Zustandsvektor  $\mathbf{x}_{k|k-1}^{r[\check{\vartheta}]}$  als Aktualisierung von  $\mathbf{x}_{k|k-1}^r$  mit einer Pseudomessung ergibt, die dem Mittelpunkt des jeweiligen Straßensegmentes  $\check{\vartheta}$  entspricht. Daher können wir im Allgemeinen nicht voraussetzen, dass der Positionsteil von  $\mathbf{x}_{k|k-1}^{r[\check{\vartheta}]}$  automatisch auf dem Straßensegment  $\check{\vartheta}$  liegt, da er auch auf einem Segment zwischen  $\mathbf{x}_{k|k-1}^r$  und Pseudomessung liegen kann. Mit den vom Punktzielverfahren [71, 144, 145, 148] bekannten Größen<sup>9</sup>

$$\mathbf{T}_{g \leftarrow r}^{[\check{\vartheta}]} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_{\check{\vartheta}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{t}_{\check{\vartheta}} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{s}_{g \leftarrow r}^{[\check{\vartheta}]} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{\check{\vartheta}} - l_{\check{\vartheta}} \mathbf{t}_{\check{\vartheta}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

ergibt sich dann die segmentspezifische Transformation des kinematischen Zustandes zu

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k|k-1}^{[\check{\vartheta}]} &= \mathbf{T}_{g \leftarrow r}^{[\check{\vartheta}]} \mathbf{x}_{k|k-1}^{r[\check{\vartheta}]} + \mathbf{s}_{g \leftarrow r}^{[\check{\vartheta}]} \\ \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}^{[\check{\vartheta}]} &= \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}^{r[\check{\vartheta}]}, \end{aligned}$$

wobei die kinematische Parametermatrix  $\tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}^{(r)[\check{\vartheta}]}$  unverändert bleibt, da sie als  $s \times s$ -Matrix<sup>10</sup> unabhängig von der räumlichen Dimension ist.

<sup>9</sup>Der tiefgestellte Index ( $g \leftarrow r$ ) kennzeichnet den Übergang von Straßen- in Bodenkoordinaten, d. h. von *Road Coordinates* in *Ground Coordinates*.

<sup>10</sup>In dieser Arbeit gilt  $s = 2$ , da wir Positionsmessungen zur Aktualisierung des kinematischen Zustandes verwenden,

Zur Transformation des Ausdehnungsteiles berechnen wir aus Gleichung (5.5) zunächst die segmentspezifische Prädiktion der Ausdehnungsschätzung in Straßenkoordinaten:

$$\mathbf{X}_{k|k-1}^{r[\vartheta]} := E[\mathbf{X}_k^r | \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_{k-1}] = \frac{\tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}^{r[\vartheta]}}{(\nu_{k|k-1}^r + 1) - 2} = \frac{\tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}^{r[\vartheta]}}{\nu_{k|k-1}^r - 1}.$$

Anschließend definieren wir eine SPD Matrix zur Beschreibung einer Ellipse, deren Hauptachsenlänge der segmentabhängigen Länge der Marschgruppe entspricht; die Nebenachsenlänge ergibt sich z. B. aus der angenommenen Straßenbreite oder einem segmentweisen Straßenkartenfehler. Zusätzlich wird diese Ellipse entsprechend der Segmentausrichtung im 2-D-Raum mit der Rotationsmatrix

$$\mathbf{R}_{g \leftarrow r}^{[\vartheta]} = \begin{bmatrix} t_x^{[\vartheta]} & -t_y^{[\vartheta]} \\ t_y^{[\vartheta]} & t_x^{[\vartheta]} \end{bmatrix}$$

gedreht. Mathematisch ausgedrückt bedeutet das

$$\mathbf{X}_{k|k-1}^{[\vartheta]} := E[\mathbf{X}_k | \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_{k-1}] = \mathbf{R}_{g \leftarrow r}^{[\vartheta]} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{k|k-1}^{r[\vartheta]} & 0 \\ 0 & (\sigma_W^{[\vartheta]}/2)^2 \end{bmatrix} (\mathbf{R}_{g \leftarrow r}^{[\vartheta]})^\top, \quad (5.7)$$

wobei die Nebenachsenlänge  $\sigma_W^{[\vartheta]} > 0$  die positive Definitheit von  $\mathbf{X}_{k|k-1}^{[\vartheta]}$  garantiert. Des Weiteren wird der skalare Parameter der inversen Wishart-Verteilung um eins erhöht, d. h.

$$\nu_{k|k-1} = (\nu_{k|k-1}^r + 1) + 1 = \nu_{k|k-1}^r + 2, \quad (5.8)$$

so dass das Tracking-Verfahren im Fall eines vernachlässigbaren Wertes für  $\sigma_W^{[\vartheta]}$  ( $\sigma_W^{[\vartheta]} \rightarrow 0$ ) denselben MMSE in segmentweisen Straßen- und Bodenkoordinaten ausweist. Schließlich erhalten wir mit

$$\tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}^{[\vartheta]} = (\nu_{k|k-1} - 3) \mathbf{X}_{k|k-1}^{[\vartheta]}$$

den letzten noch fehlenden Parameter der bedingten Verbunddichte aus Gleichung (5.6), womit alle notwendigen Filtergleichungen zur Prädiktion formuliert sind.

### 5.3 Aktualisierung des erweiterten Bayes'schen Ansatzes

Im Mittelpunkt dieses Abschnittes steht die Berechnung der bedingten Verbunddichtefunktion in Straßenkoordinaten aus Gleichung (5.1), d. h.  $p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \mathcal{Y}_k)$ . Unsere Vorgehensweise im Prädiktions-schritt erfordert wiederum die Erweiterung des gemeinsamen Systemzustandes  $(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r)$  mit der Zufallsvariablen  $\theta_k$  zur segmentweisen Darstellung

$$p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \mathcal{Y}_k) = \sum_{\vartheta=1}^{n_{\mathcal{R}}} \theta_{k|k}^{[\vartheta]} p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_k) \quad (5.9)$$

der sich wiederum aus einer Positions- und Geschwindigkeitskomponente zusammensetzt.

mit den Gültigkeitswahrscheinlichkeiten

$$\theta_{k|k}^{[\vartheta]} := P\{\theta_k = \vartheta | \mathcal{Y}_k\} \quad (\vartheta = 1, \dots, n_{\mathcal{R}}),$$

wobei  $p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_k)$  die sogenannte *Aktualisierung in segmentweisen Straßenkoordinaten* bezeichnet. Diese segmentspezifische Dichtefunktion ergibt sich aus ihrem Pendant in Bodenkoordinaten, d. h.  $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_k)$ . Obwohl diese Rücktransformation analog zum Prädiktionsschritt erneut heuristisch durchgeführt wird, kann dieser Schritt formal mit einer Transitionsdichte dargestellt werden:

$$p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \mathcal{Y}_k) = \sum_{\vartheta=1}^{n_{\mathcal{R}}} \iint \theta_{k|k}^{[\vartheta]} p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \theta_k = \vartheta) p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_k) d\mathbf{x}_k d\mathbf{X}_k. \quad (5.10)$$

In diesem Kontext befassen sich die folgenden Unterabschnitte mit den drei Einzelschritten der Aktualisierung, d. h. der Vorgehensweise, um aus der Prädiktion in segmentweisen Bodenkoordinaten die aktualisierte Dichtefunktion in Straßenkoordinaten zu berechnen – entsprechend dem rechten Block in Abbildung 5.3.

### 5.3.1 Aktualisierung in segmentweisen 2-D-Bodenkoordinaten

Ausgehend von der Prädiktion in segmentweisen 2-D-Bodenkoordinaten erfolgt die Aktualisierung des gemeinsamen Systemzustandes mit Hilfe der aktuellen  $n_k$  Sensormessungen, d. h. mit der mittleren Messung  $\bar{\mathbf{y}}_k$  und der Messstreuung  $\bar{\mathbf{Y}}_k$ . Diese Messungen sollen nur vom aktuellen Systemzustand  $(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k)$  abhängen und nicht mit vorangegangenen Messungen oder dem jeweiligen Straßensegment korrelieren, d. h.  $p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_{k-1}) = p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k)$ . Für die segmentspezifische Verbunddichtefunktion der *Aktualisierung in segmentweisen 2-D-Bodenkoordinaten*

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_k) = \mathcal{N}_2(\mathbf{x}_k; \mathbf{x}_{k|k}^{[\vartheta]}, \tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^{[\vartheta]} \otimes \mathbf{X}_k) \mathcal{IW}_2(\mathbf{X}_k; \nu_{k|k}, \tilde{\mathbf{X}}_{k|k}^{[\vartheta]}) \quad (5.11)$$

ergibt sich mit der Bayes'schen Regel der Zusammenhang

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_k) = \frac{p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k) p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_{k-1})}{p(\mathbf{Y}_k | \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_{k-1})}$$

für  $\vartheta = 1, \dots, n_{\mathcal{R}}$ , wobei wir die Normierungskonstante

$$\Lambda_{k|k-1}^{[\vartheta]} := p(\mathbf{Y}_k | \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_{k-1}) = \iint p(\mathbf{Y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k) p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_{k-1}) d\mathbf{x}_k d\mathbf{X}_k$$

als *segmentspezifische Messwahrscheinlichkeit* interpretieren. Mit den bekannten Zusammenhängen in Abschnitt 2.3.2 – siehe auch Abbildung 2.2 – können wir geradewegs die Filtergleichungen zur

Aktualisierung der Parameter in Gleichung (5.11) formulieren: Mit Hilfe von<sup>11</sup>

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{S}}_{k|k-1}^{[\vartheta]} &= \tilde{\mathbf{H}}\tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}^{[\vartheta]}\tilde{\mathbf{H}}^\top + \frac{1}{4 \cdot n_k} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{k|k-1}^{[\vartheta]} &= \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}^{[\vartheta]}\tilde{\mathbf{H}}^\top(\tilde{\mathcal{S}}_{k|k-1}^{[\vartheta]})^{-1} \\ \mathbf{N}_{k|k-1}^{[\vartheta]} &= (\bar{\mathbf{y}}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1}^{[\vartheta]})(\bar{\mathbf{y}}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1}^{[\vartheta]})^\top\end{aligned}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k|k}^{[\vartheta]} &= \mathbf{x}_{k|k-1}^{[\vartheta]} + (\tilde{\mathbf{K}}_{k|k-1}^{[\vartheta]} \otimes \mathbf{I}_d)(\bar{\mathbf{y}}_k - \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1}^{[\vartheta]}) \\ \tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^{[\vartheta]} &= \tilde{\mathbf{P}}_{k|k-1}^{[\vartheta]} - \tilde{\mathbf{K}}_{k|k-1}^{[\vartheta]}\tilde{\mathcal{S}}_{k|k-1}^{[\vartheta]}(\tilde{\mathbf{K}}_{k|k-1}^{[\vartheta]})^\top\end{aligned}$$

für die Kinematik und

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{X}}_{k|k}^{[\vartheta]} &= \tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}^{[\vartheta]} + (\tilde{\mathcal{S}}_{k|k-1}^{[\vartheta]})^{-1}\mathbf{N}_{k|k-1}^{[\vartheta]} + 4 \cdot \bar{\mathbf{Y}}_k \\ \nu_{k|k} &= \nu_{k|k-1} + n_k\end{aligned}$$

für die Ausdehnung, während sich gemäß Gleichung (2.33) als Messwahrscheinlichkeit

$$\Lambda_{k|k-1}^{[\vartheta]} = \frac{4^{(n_k-1)} \Gamma_2\left(\frac{\nu_{k|k}}{2}\right) |\tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}^{[\vartheta]}|^{\frac{1}{2}\nu_{k|k-1}}}{\pi^{n_k} n_k \tilde{\mathcal{S}}_{k|k-1}^{[\vartheta]} \Gamma_2\left(\frac{\nu_{k|k-1}}{2}\right) |\tilde{\mathbf{X}}_{k|k}^{[\vartheta]}|^{\frac{1}{2}\nu_{k|k}}}$$

ergibt. Deshalb gilt im Fall  $n_k > 2$  und  $\bar{\mathbf{Y}}_k > \mathbf{0}$  laut Abschnitt 2.5.2

$$\begin{aligned}\Lambda_{k|k-1}^{[\vartheta]} &= \mathcal{T}_2\left(\bar{\mathbf{y}}_k; \nu_{k|k} - 2, \mathbf{H}\mathbf{x}_{k|k-1}^{[\vartheta]}, \tilde{\mathcal{S}}_{k|k-1}^{[\vartheta]}(\tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}^{[\vartheta]} + 4 \cdot \bar{\mathbf{Y}}_k)/(\nu_{k|k} - 2)\right) \\ &\quad \cdot \mathcal{GB}_2^{\text{II}}\left(\bar{\mathbf{Y}}_k; \frac{n_k-1}{2}, \frac{\nu_{k|k-1}}{2}; \tilde{\mathbf{X}}_{k|k-1}^{[\vartheta]}/4, \mathbf{0}\right).\end{aligned}$$

Mit diesen segmentspezifischen Messwahrscheinlichkeiten lässt sich beurteilen, auf welchen Straßensegmenten die zu schätzenden Bodenziele zu vermuten sind. Daher können wir mit ihnen auch die Gültigkeitswahrscheinlichkeiten der verschiedenen Segmenthypothesen in Gleichung (5.10) aktualisieren: Mit der Bayes'schen Regel ergibt sich zunächst

$$\theta_{k|k}^{[\vartheta]} \propto p(\mathbf{Y}_k | \theta_k = \vartheta, \mathbf{y}_{k-1})P\{\theta_k = \vartheta | \mathbf{y}_{k-1}\} = \Lambda_{k|k-1}^{[\vartheta]} \theta_{k|k-1}^{[\vartheta]}.$$

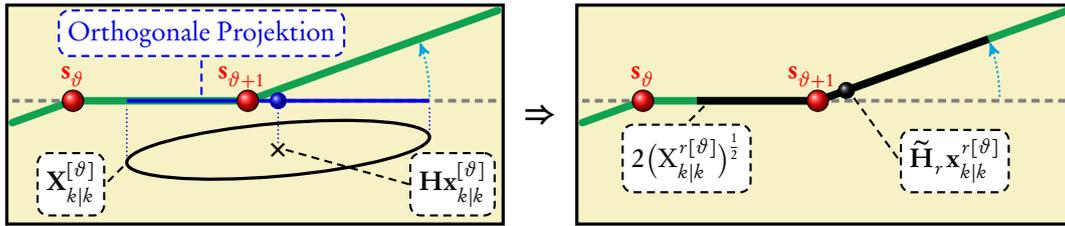
Da die Summe der einzelnen Segmentgewichte im Sinne der Mischverteilung (5.9) gleich eins sein soll, erhalten wir für die Gültigkeitswahrscheinlichkeit der  $\vartheta$ -ten Segmenthypothese schließlich

$$\theta_{k|k}^{[\vartheta]} = \frac{\Lambda_{k|k-1}^{[\vartheta]} \theta_{k|k-1}^{[\vartheta]}}{\sum_{\vartheta'=1}^{n_{\mathcal{R}}} \Lambda_{k|k-1}^{[\vartheta']} \theta_{k|k-1}^{[\vartheta']}} \quad (\vartheta = 1, \dots, n_{\mathcal{R}}).$$

### 5.3.2 Aktualisierung in segmentweisen Straßenkoordinaten

Nach der segmentabhängigen Aktualisierung des Systemzustandes durch die aktuellen Sensormessungen erfolgt als Nächstes die Rücktransformation von segmentweisen Bodenkoordinaten ins Straßenkoordinatensystem. Die Dichtefunktion  $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k | \theta_k = \vartheta, \mathbf{y}_k)$  aus Gleichung (5.11) soll deshalb

<sup>11</sup>Im 2-D-Raum ( $d = 2$ ) gilt für den Skalierungsfaktor der Ausdehnung  $z_2 = 1/4$ .



**Abbildung 5.4:** Illustration der Transformation von segmentweisen 2-D-Boden- in Straßenkoordinaten. Startpunkt ist die Aktualisierung in segmentweisen Bodenkoordinaten (Schwarz) im linken Teil der Abbildung, wobei hier lediglich die  $\vartheta$ -te Segmenthypothese dargestellt ist. Aufgrund der Annahme, dass die präzidierte Position in segmentweisen Straßenkoordinaten auf dem Segment  $\vartheta$  lag, wird die orthogonale Projektion (Blau) gerade für dieses Segment ausgewertet – oder präziser: für die Gerade (Grau) mit den beiden Punkten  $s_\vartheta$  und  $s_{\vartheta+1}$  (Rot). Die daraus folgenden Werte z. B. für die Länge oder den Schwerpunkt der Objektgruppe (Schwarz) interpretiert unser erweitertes Tracking-Verfahren stets direkt als Werte im Straßenkoordinatensystem, wodurch das *Umklappen* im rechten Teil der Abbildung automatisch erfolgt.

als  $p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_k)$  in Straßenkoordinaten abgebildet werden, wobei die Aufteilung der Verbunddichte in eine vektor- und eine matrixvariante Wahrscheinlichkeitsverteilung beizubehalten ist. Bereits Gleichung (5.10) beschreibt diese Umwandlung durch eine segmentspezifische Transitionsdichte  $p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \mathbf{x}_k, \mathbf{X}_k, \theta_k = \vartheta)$  und der Integration über  $\mathbf{x}_k$  und  $\mathbf{X}_k$ . Mit der gleichen Begründung wie in Abschnitt 5.2.3 – Produktform der Verbunddichte und einfachere Transformationsformeln – soll auch hier das Doppelintegral in zwei Teilprobleme aufgespalten werden:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_k) \left\{ \begin{array}{l} \text{Transformation von Boden- in} \\ \text{Straßenkoordinaten} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} p(\mathbf{x}_k^r | \mathbf{X}_k^r, \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_k) \\ p(\mathbf{X}_k^r | \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_k) \end{array} \right.$$

Ähnlich wie in Abschnitt 5.2.3 müsste zu diesem Zweck  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k, \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_k)$  durch eine Dichtefunktion der Form  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{X}_k^r, \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_k)$  ersetzt werden; allerdings existiert für dieses Problem bisher keine Lösung.

Stattdessen verwenden wir den heuristischen Ansatz aus [175, Abschnitt 6.5.2.2], der im Wesentlichen eine orthogonale Projektion des segmentspezifischen Systemzustandes auf das entsprechende Straßensegment vorsieht – entsprechend der Illustration in Abbildung 5.4. Analog zum Punktzielverfahren [144, 145, 148] ergibt sich die segmentspezifische Transformation des kinematischen Zustandes zu

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k|k}^{r[\vartheta]} &= (\mathbf{T}_{g \leftarrow r}^{[\vartheta]})^\top (\mathbf{x}_{k|k}^{[\vartheta]} - \mathbf{s}_{g \leftarrow r}^{[\vartheta]}) \\ \tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^{r[\vartheta]} &= \tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^{[\vartheta]}, \end{aligned}$$

wobei die kinematische Parametermatrix  $\tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^{(r)[\vartheta]}$  auch bei der Rücktransformation nicht verändert wird, da sie unabhängig von der räumlichen Dimension ist. Die Ausdehnungsschätzung soll ebenfalls durch eine orthogonale Projektion auf das entsprechende Segment bestimmt werden: Dazu berechnen wir zunächst den bedingten Erwartungswert der Objektausdehnung in segmentweisen 2-D-Bodenkoordinaten

$$\mathbf{X}_{k|k}^{[\vartheta]} = \frac{\tilde{\mathbf{X}}_{k|k}^{[\vartheta]}}{\nu_{k|k} - 3}.$$

Anschließend wird mit  $(\mathbf{R}_{g \leftarrow r}^{[\vartheta]})^\top \mathbf{X}_{k|k}^{[\vartheta]} \mathbf{R}_{g \leftarrow r}^{[\vartheta]}$  die Drehung aus Gleichung (5.7) nivelliert, so dass – auf-

grund der ursprünglichen Definition der Ellipse in Abschnitt 5.2.3 – das Element in der ersten Zeile und der ersten Spalte der resultierenden Matrix der orthogonalen Projektion auf das jeweilige Straßensegment entspricht, d. h.

$$\mathbf{X}_{k|k}^{r[\vartheta]} = [1, 0] \times (\mathbf{R}_{g \leftarrow r}^{[\vartheta]})^\top \mathbf{X}_{k|k}^{r[\vartheta]} \mathbf{R}_{g \leftarrow r}^{[\vartheta]} \times [1, 0]^\top.$$

In Anlehnung an Gleichung (5.8) und den dort folgenden Bemerkungen zum Erhalt des MMSE vermindern wir bei dieser Transformation den skalaren Parameter der inversen Wishart-Verteilung um eins, so dass sich letztlich die Parametermatrix der Ausdehnungsschätzung zu

$$\tilde{\mathbf{X}}_{k|k}^{r[\vartheta]} = ((\nu_{k|k} - 1) - 2) \mathbf{X}_{k|k}^{r[\vartheta]} = (\nu_{k|k} - 3) \mathbf{X}_{k|k}^{r[\vartheta]}$$

ergibt. Auf diese Weise sind alle Filtergleichungen zur Angabe der *Aktualisierung in segmentweisen Straßenkoordinaten* formuliert:

$$p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_k) = \mathcal{N}_s(\mathbf{x}_k^r; \mathbf{x}_{k|k}^{r[\vartheta]}, \tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^{r[\vartheta]} \otimes \mathbf{X}_k^r) \mathcal{IW}_1(\mathbf{X}_k^r; \nu_{k|k} - 1, \tilde{\mathbf{X}}_{k|k}^{r[\vartheta]}).$$

### 5.3.3 Aktualisierung in Straßenkoordinaten

Zum Abschluss eines Verarbeitungszyklus sind noch die Parameter der bedingten Verbunddichtefunktion  $p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \mathcal{Y}_k)$  aus Gleichung (5.1) zu berechnen, da bis zu diesem Zeitpunkt lediglich die Parameter der Mischverteilungsdichte (5.9) bekannt sind:

$$p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \mathcal{Y}_k) = \sum_{\vartheta=1}^{n_{\mathcal{R}}} \theta_{k|k}^{[\vartheta]} \mathcal{N}_s(\mathbf{x}_k^r; \mathbf{x}_{k|k}^{r[\vartheta]}, \tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^{r[\vartheta]} \otimes \mathbf{X}_k^r) \mathcal{IW}_1(\mathbf{X}_k^r; \nu_{k|k} - 1, \tilde{\mathbf{X}}_{k|k}^{r[\vartheta]}).$$

Wie bereits in Abschnitt 3.2.2 vorgestellt, bedeutet *Moment-Matching* u. a. eine Mischverteilungsdichte durch eine gewöhnliche Dichtefunktion zu approximieren mit übereinstimmenden ersten und zweiten Momenten. Da in diesem speziellen Fall die Kovarianzmatrix der vektorvariablen Dichte von der wahren (aber unbekannt)en Zufallsvariablen  $\mathbf{X}_k^r$  abhängt, verwenden wir beim Moment-Matching ersatzweise die jeweilige Marginaldichte, d. h.  $p(\mathbf{X}_k^r | \mathcal{Y}_k)$  für die Ausdehnung und  $p(\mathbf{x}_k^r | \mathcal{Y}_k)$  für die Kinematik. Für die Marginaldichte der Ausdehnung soll demzufolge

$$p(\mathbf{X}_k^r | \mathcal{Y}_k) = \sum_{\vartheta=1}^{n_{\mathcal{R}}} \theta_{k|k}^{[\vartheta]} \mathcal{IW}_1(\mathbf{X}_k^r; \nu_{k|k} - 1, \tilde{\mathbf{X}}_{k|k}^{r[\vartheta]}) \approx \mathcal{IW}_1(\mathbf{X}_k^r; \nu_{k|k}, \tilde{\mathbf{X}}_{k|k}^r)$$

gelten, weshalb ein Moment-Matching erster Ordnung in Bezug auf den Erwartungswert zunächst

$$\mathbf{X}_{k|k}^r = \sum_{\vartheta=1}^{n_{\mathcal{R}}} \theta_{k|k}^{[\vartheta]} \mathbf{X}_{k|k}^{r[\vartheta]} \quad (5.12)$$

ergibt. Mit dem segmentspezifischen MMSE der Ausdehnungsschätzung

$$e_{k|k}^{r[\vartheta]} = \frac{2(\mathbf{X}_{k|k}^{r[\vartheta]})^2}{(\nu_{k|k} - 1) - 4} = \frac{2(\mathbf{X}_{k|k}^{r[\vartheta]})^2}{\nu_{k|k} - 5}$$

berechnen wir anschließend den MMSE der matrixvariablen Mischverteilung gemäß

$$e_{k|k}^r = \sum_{\vartheta=1}^{n_{\mathcal{R}}} \theta_{k|k}^{[\vartheta]} \left( e_{k|k}^{r[\vartheta]} + (\mathbf{X}_{k|k}^{r[\vartheta]} - \mathbf{X}_{k|k}^r)^2 \right).$$

Unter Berücksichtigung der Zusammenhänge in Gleichung (3.12) und Gleichung (3.9) können wir mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} p_{k|k}^r &:= e_{k|k}^r + 2(\mathbf{X}_{k|k}^r)^2 \\ q_{k|k}^r &:= 2(e_{k|k}^r + (\mathbf{X}_{k|k}^r)^2) \end{aligned}$$

schließlich die gesuchten Parameter der inversen Wishart-Verteilung angeben:

$$\begin{aligned} \nu_{k|k}^r &= 2 + (2e_{k|k}^r)^{-1} \left( p_{k|k}^r + \sqrt{(p_{k|k}^r)^2 + 4e_{k|k}^r q_{k|k}^r} \right) \\ \tilde{\mathbf{X}}_{k|k}^r &= (\nu_{k|k}^r - 2)\mathbf{X}_{k|k}^r. \end{aligned}$$

Ausgangspunkt für das kinematische Moment-Matching ist die segmentspezifische Marginaldichte<sup>12</sup>

$$p(\mathbf{x}_k^r | \theta_k = \vartheta, \mathbf{y}_k) = \mathcal{T}_s(\mathbf{x}_k^r; \nu_{k|k}^r - 1, \mathbf{x}_{k|k}^{r[\vartheta]}, \tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^{r[\vartheta]} \tilde{\mathbf{X}}_{k|k}^{r[\vartheta]} / (\nu_{k|k}^r - 1))$$

und damit die Approximation

$$p(\mathbf{x}_k^r | \mathbf{y}_k) = \sum_{\vartheta=1}^{n_{\mathcal{R}}} \theta_{k|k}^{[\vartheta]} p(\mathbf{x}_k^r | \theta_k = \vartheta, \mathbf{y}_k) \approx \mathcal{T}_s(\mathbf{x}_k^r; \nu_{k|k}^r, \mathbf{x}_{k|k}^r, \tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^r \tilde{\mathbf{X}}_{k|k}^r / \nu_{k|k}^r).$$

Infolgedessen führt ein Moment-Matching bezüglich des Erwartungswertes zu

$$\mathbf{x}_{k|k}^r = \sum_{\vartheta=1}^{n_{\mathcal{R}}} \theta_{k|k}^{[\vartheta]} \mathbf{x}_{k|k}^{r[\vartheta]},$$

während wir in Bezug auf die kinematische Schätzfehlervarianz zunächst den Zusammenhang

$$\text{Var}[\mathbf{x}_k^r | \mathbf{y}_k] = \tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^r \mathbf{X}_{k|k}^r = \sum_{\vartheta=1}^{n_{\mathcal{R}}} \theta_{k|k}^{[\vartheta]} \left( \tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^{r[\vartheta]} \mathbf{X}_{k|k}^{r[\vartheta]} + (\mathbf{x}_{k|k}^{r[\vartheta]} - \mathbf{x}_{k|k}^r)(\mathbf{x}_{k|k}^{r[\vartheta]} - \mathbf{x}_{k|k}^r)^T \right)$$

erhalten, mit dem sich unter Berücksichtigung von  $\mathbf{X}_{k|k}^r$  aus Gleichung (5.12)

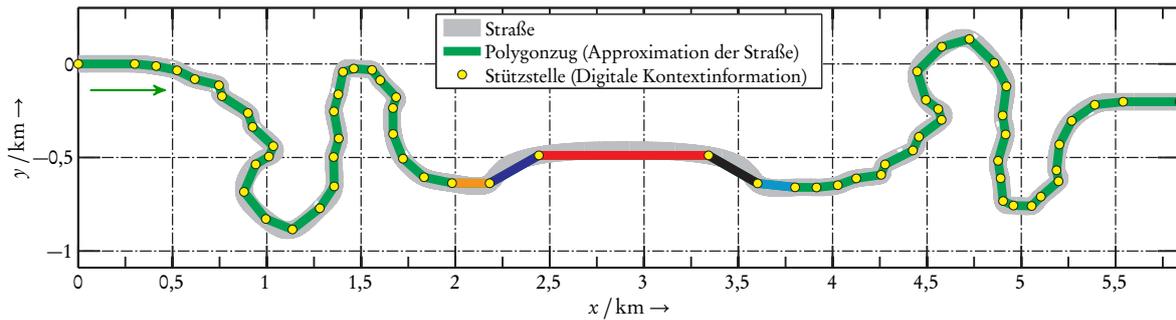
$$\tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^r = \frac{1}{\mathbf{X}_{k|k}^r} \sum_{\vartheta=1}^{n_{\mathcal{R}}} \theta_{k|k}^{[\vartheta]} \left( \tilde{\mathbf{P}}_{k|k}^{r[\vartheta]} \mathbf{X}_{k|k}^{r[\vartheta]} + (\mathbf{x}_{k|k}^{r[\vartheta]} - \mathbf{x}_{k|k}^r)(\mathbf{x}_{k|k}^{r[\vartheta]} - \mathbf{x}_{k|k}^r)^T \right)$$

ergibt. Damit sind alle Parameter zur erneuten Angabe der Dichtefunktion  $p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \mathbf{y}_k)$  in Gleichung (5.1) bekannt, so dass ein vollständiger Verarbeitungszyklus des erweiterten Bayes'schen Ansatzes unter Berücksichtigung von Straßenkartinformationen durchgeführt werden kann.

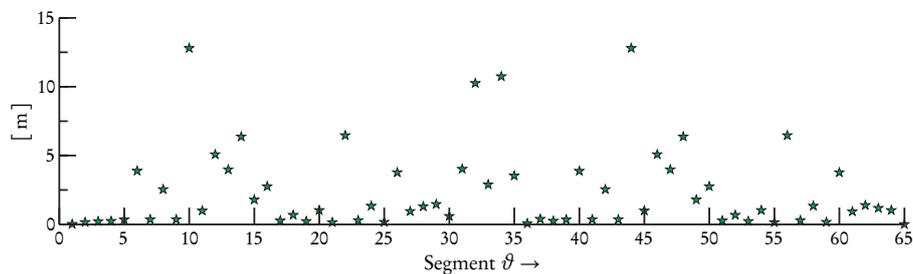
## 5.4 Simulation einer Kolonne von Fahrzeugen

Dieser Abschnitt befasst sich mit einem fiktiven Szenario aus der luftgestützten Bodenaufklärung, in dem eine Kolonne von Fahrzeugen einem Straßenverlauf folgte. Zum Erzeugen des Straßenverlaufes

<sup>12</sup>Siehe Abschnitt 2.4 und Tabelle 2.2.



**Abbildung 5.5:** Simulation der Straßenkarteninformationen: Dargestellt sind die vorgegebenen Wegpunkte, die durch Interpolation berechnete Straße und die Straßensegmente, die sich durch jeweils gerade Verbindung der Stützstellen ergeben. Gemeinsam bilden die Segmente den Polygonzug, der den Verlauf der Straße approximiert. Die Segmente 31 bis 35 sind farblich hervorgehoben – entsprechend der Farbwahl in Abbildung 5.8(a).

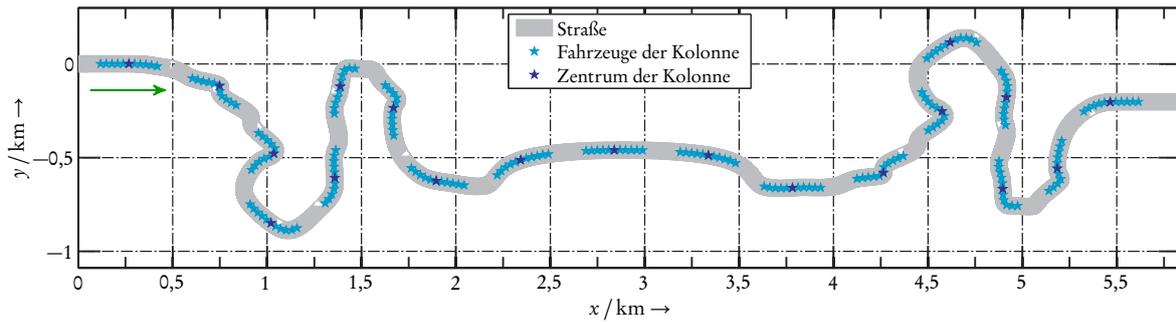


**Abbildung 5.6:** Segmentspezifische Differenz aus der realen Straßenabschnittslänge und der jeweiligen Segmentlänge  $L_\theta$  zwischen zwei benachbarten Stützstellen  $s_\theta$  und  $s_{\theta+1}$ .

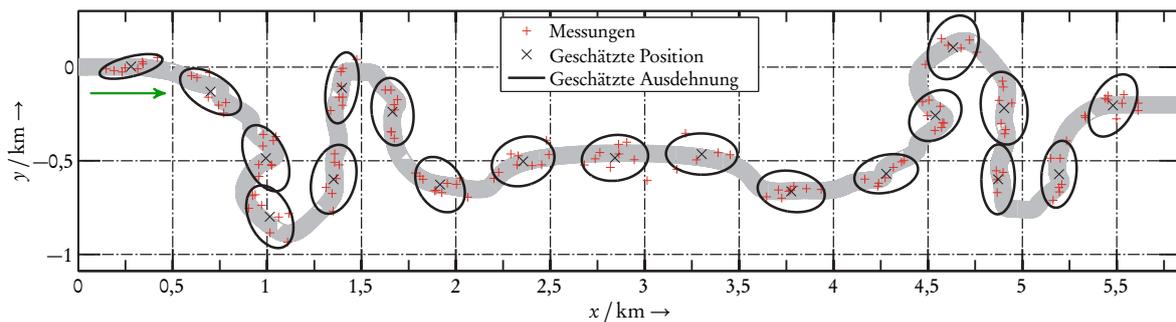
in Abbildung 5.5 wurden insgesamt 66 Wegpunkte oder Stützstellen vorgegeben, die anschließend durch eine 2-D-Raumkurve interpoliert wurden, d. h. durch *kubische Spline-Interpolation* in Parameterdarstellung [7, 24]. Der Polygonzug zum Approximieren der Straße ergab sich durch die jeweils gerade Verbindung der Stützstellen und bestand demnach aus 65 linearen Segmenten. Dadurch ergab sich für jedes Straßensegment ein Approximationsfehler, der als Differenz aus Straßenabschnittslänge und Segmentlänge in Abbildung 5.6 dargestellt ist. Die Segmentlängen variierten zwischen 60 m und 900 m und lagen im Mittel bei 146 m, so dass sich für den Polygonzug eine Gesamtlänge von nahezu 9,5 km ergab.

Für einen Vergleich zwischen dem ursprünglichen Bayes'schen Ansatz von Koch [78] (siehe Kapitel 2) und dem daraus erweiterten Ansatz zum Tracking mit Straßenkarteninformationen wurde eine Marschkolonne aus elf punktförmigen Einzelfahrzeugen gewählt, die dem Verlauf der Straße in Abbildung 5.5 folgte. Diese Gruppe von Fahrzeugen fuhr mit einer konstanten Geschwindigkeit von 45 km/h, wobei die Einzelfahrzeuge untereinander einen Abstand von 30 m hielten, so dass die Länge der Marschkolonne<sup>13</sup> ungefähr 330 m betrug. Das Szenario wurde durch einen fiktiven Sensor mit einer Abtastzeit von  $T = 8$  s beobachtet, der unkorrelierte  $x$ - und  $y$ -Messungen mit Standardabweichungen von  $\sigma_x = 20$  m und  $\sigma_y = 50$  m lieferte. Um die begrenzte Auflösungsfähigkeit des Sensors zu simulieren, wurde für jedes Fahrzeug eine Detektionswahrscheinlichkeit von 65 % angenommen. Abbildung 5.7(a) zeigt die Positionen der Fahrzeuge für jeden fünften Messzeitpunkt,

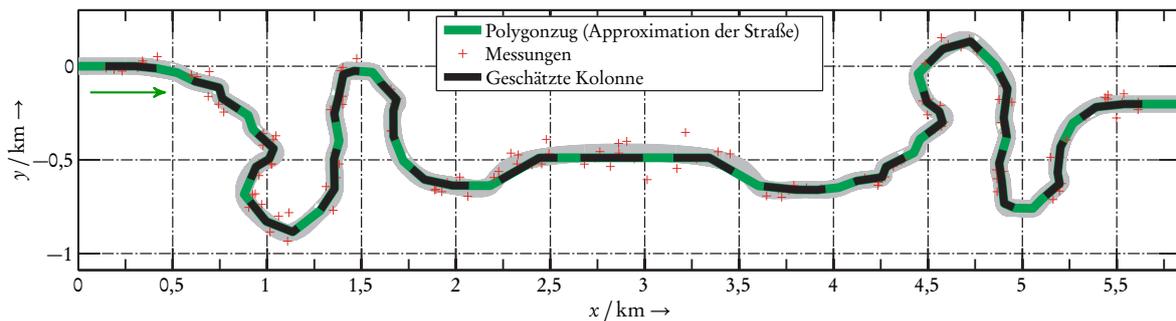
<sup>13</sup>Der exakte Abstand zwischen erstem und letztem Punktziel der Kolonne betrug 300 m. Gemäß der Ausdehnungsschätzung berechnen wir die Kolonnenlänge aus der  $1 \times 1$ -Zustandsmatrix  $X_k^r$ , die wiederum der skalierten Stichprobenvarianz der einzelnen Zielpositionen entspricht. Auf diese Weise ergab sich für die Länge der Marschkolonne 328,63 m.



(a) Simulierte Positionen der einzelnen Fahrzeuge und des Zentrums der Kolonne auf der Straße



(b) Tracking-Ergebnisse des ursprünglichen Bayes'schen Ansatzes von Koch [78] (siehe Kapitel 2)

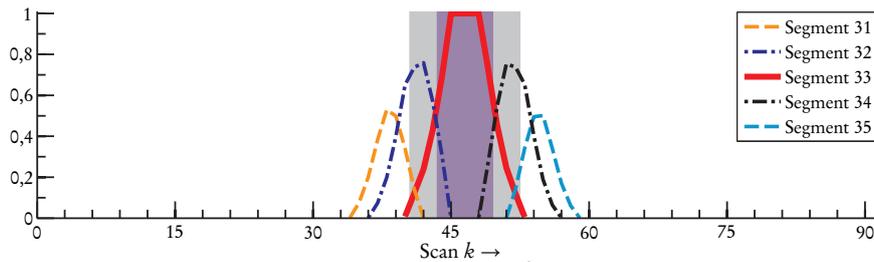


(c) Tracking-Ergebnisse des mit Straßenkarteninformationen erweiterten Bayes'schen Ansatzes

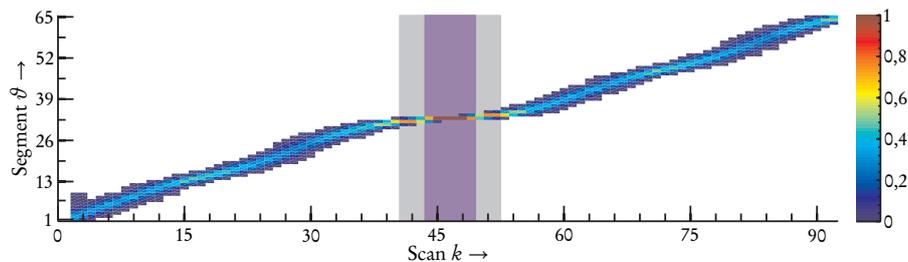
**Abbildung 5.7:** Simulation einer Kolonne von elf Fahrzeugen, die dem Straßenverlauf aus Abbildung 5.5 folgte. Neben den wahren Zielpositionen werden auch Tracking-Ergebnisse für einen einzelnen Durchlauf des Szenarios dargestellt, die mit dem ursprünglichen Bayes'schen Ansatz und dem erweiterten Ansatz zum Tracking mit Straßenkarteninformationen berechnet worden sind. Um die Abbildung übersichtlich zu gestalten, werden Ergebnisse nur für jeden fünften Messzeitpunkt gezeigt.

wobei in Abbildung 5.7(b/c) auch simulierte Messungen für einen Durchlauf dieses Szenarios zu sehen sind. Das Zentrum der Kolonne wurde nicht als empirischer Mittelwert in 2-D-Bodenkoordinaten berechnet, sondern im Straßenkoordinatensystem, d. h. im Raum der Straße. Deshalb war das sechste Fahrzeug der Kolonne gleichzeitig das Gruppenzentrum; siehe Abbildung 5.7(a). Zum Initialisieren der Tracking-Verfahren haben wir jeweils die Messungen des ersten Messzeitpunktes verwendet und die Geschwindigkeitskomponente mit null vorbelegt.

Zunächst haben wir auf dieses Szenario den ursprünglichen Bayes'schen Ansatz von Koch [78] angewandt, der keine Straßenkarteninformationen im Verfahren berücksichtigt. Abbildung 5.7(b) stellt die erzielten Tracking-Ergebnisse für einen Durchlauf des Szenarios dar. Das Umorientieren der Ausdehnungsellipsen zeigt deutlich, dass das Verfahren sich auf die wechselnde Ausrichtung der



(a) Prädizierte Segmentaufenthaltswahrscheinlichkeiten  $\theta_{k|k-1}^{[\vartheta]}$  für  $\vartheta = 31, \dots, 35$  (vgl. Abbildung 5.5)

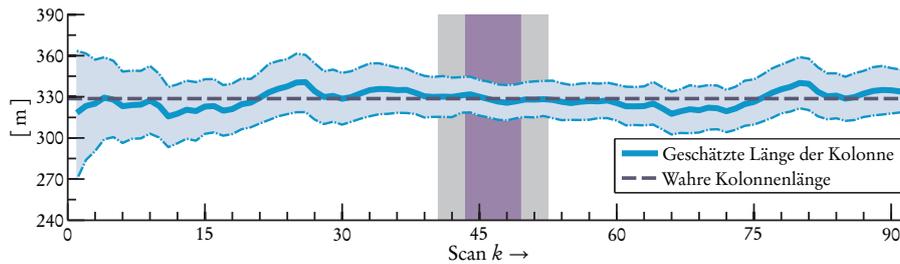


(b) Prädizierte Segmentaufenthaltswahrscheinlichkeiten  $\theta_{k|k-1}^{[\vartheta]}$  für  $\vartheta = 1, \dots, 65$

**Abbildung 5.8:** Ergebnis des erweiterten Bayes'schen Ansatzes für die prädizierten Segmentaufenthaltswahrscheinlichkeiten (gemittelt aus 900 Monte-Carlo-Simulationsläufen). Die grauen Hintergrundflächen markieren die Zeitspanne von Scan 41 bis 52, in der sich mindestens ein Fahrzeug der Marschkolonne auf dem längsten Segment befand, d. h. auf Straßensegment 33. Die violette Fläche kennzeichnet die Zeitspanne von Scan 44 bis 49, in der sich alle Ziele auf diesem Hauptsegment befanden.

Kolonne ständig neu einstellen musste: Der Algorithmus interpretierte das Fahren auf einer kurvenreichen Straße als Manöver der jeweiligen Fahrzeuge. In praktischen Anwendungen würde dadurch der (hier nicht berücksichtigte) Datenassoziationsschritt erschwert, da die Zieldynamik die jeweilige Zuordnung zwischen Sensordaten und Zielspur beeinflusst – zusätzlich zu anderen Fahrzeugen, Falschalarmen und topographischen Abschattungen [64, 65, 117, 120, 148].

Anschließend haben wir den im Rahmen dieser Arbeit erweiterten Ansatz zum Tracking mit Straßenkarteninformationen eingesetzt. Abbildung 5.7(c) zeigt die erzielten Tracking-Ergebnisse für einen Durchlauf des Szenarios, wobei auch hier nur Ergebnisse für ausgewählte Messzeitpunkte dargestellt sind, da sich sonst die Zielspur bei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten überlagern würde. Das Tracking-Verfahren folgte der Marschkolonne sowohl auf langen Segmenten im mittleren Drittel des Szenarios als auch auf kurvenreichen Teilstücken mit eher kürzeren Straßensegmenten, wobei sich die Gruppe von Fahrzeugen über mehrere Segmente erstreckte. Des Weiteren erlaubten die Straßenkoordinaten mit dem Polygonzug eine genauere Modellierung der Gruppenausdehnung. Dabei ist das Verfahren darauf angewiesen, die bedingte Verbunddichte der Objektgruppe in eine segmentweise Darstellung zu überführen, so dass wir für jedes Straßensegment eine segmentabhängige Dichtefunktion erhalten. Das würde bei diesem Szenario 65 Dichtefunktionen bedeuten, für die nicht nur Prädiktion und Aktualisierung durchzuführen wären, sondern auch noch die Hin- und Rücktransformation zwischen segmentweisen Straßen- und Bodenkoordinaten. Zum Reduzieren des numerischen Aufwandes haben wir in Abbildung 5.7(c) nur diejenigen segmentabhängigen Dichtefunktionen berechnet, deren Straßensegment zuvor eine entsprechende Segmentaufenthaltswahrscheinlichkeit  $\theta_{k|k-1}^{[\vartheta]}$  zugewiesen bekam. Durch Vorgabe eines nicht zu unterschreitenden Schwellenwertes für die Segmentgewichte genügte dazu die Betrachtung der unmittelbaren Umgebung der

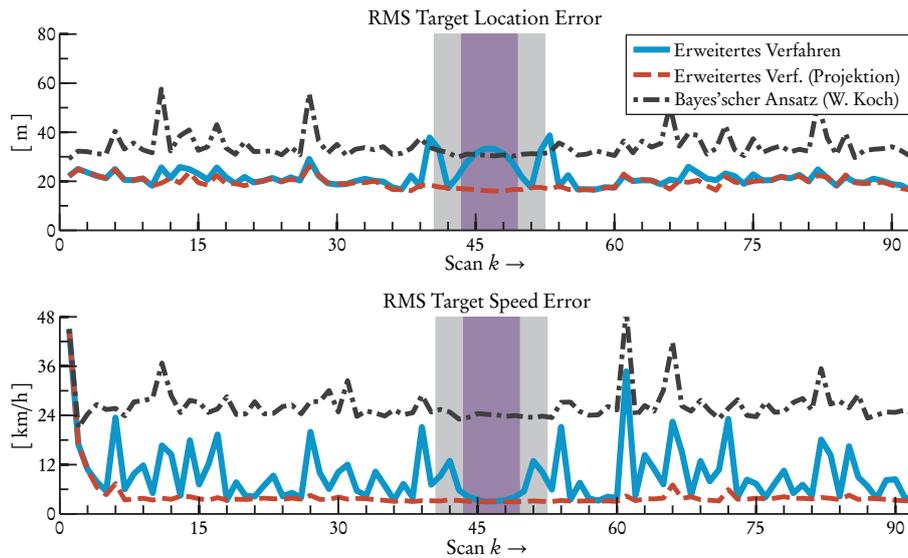


**Abbildung 5.9:** Ergebnis des erweiterten Bayes'schen Ansatzes für die geschätzte Länge der Kolonne (gemittelt aus 900 Monte-Carlo-Simulationsläufen). Während die gestrichelte Linie der tatsächlichen Kolonnenlänge entspricht, kennzeichnet der Schlauch um den Verlauf der geschätzten Kolonnenlänge den *Interdezilbereich* der Schätzwerte. In diesem Bereich lagen die mittleren 80% der Werte aller 900 Monte-Carlo-Simulationsläufe. Die grauen und violetten Hintergründflächen markieren die in Abbildung 5.8 genannten Zeitspannen.

Gruppenzielstruktur, so dass eine segmentabhängige Dichtefunktion nur für relevante Segmente auszuwerten war.

Um den Einfluss der Straßenkoordinaten auf die Tracking-Ergebnisse genauer beurteilen zu können als nach einem einzigen Durchlauf des Szenarios, haben wir insgesamt 900 Monte-Carlo-Simulationsläufe durchgeführt und uns danach den erwähnten Segmentaufenthaltswahrscheinlichkeiten zugewandt. In diesem Zusammenhang zeigt Abbildung 5.8 die Zeitverläufe der prädizierten Segmentgewichte  $\theta_{k|k-1}^{[\vartheta]}$ , die für jeden Zeitschritt als Mittelwerte der Monte-Carlo-Simulation berechnet worden sind. Im Detail fokussiert sich Abbildung 5.8(a) dabei auf das längste Straßensegment, das im mittleren Teil des Szenarios von der Marschkolonne befahren wurde; siehe Abbildung 5.5. Die Länge dieses Segments ( $\vartheta = 33$ ) betrug 900 m und entsprach damit nicht ganz der dreifachen Gruppenlänge, weshalb sich hier besonders der Einfluss der unterschiedlichen Segmentlängen studieren lässt. In dieser und den folgenden Abbildungen dieses Abschnittes kennzeichnen daher die grauen Hintergründflächen die Zeitspanne von Scan 41 bis 52, in der sich mindestens ein Fahrzeug der Marschkolonne auf dem längsten Segment befand, d. h. auf Straßensegment 33. Demgegenüber illustrieren die violetten Flächen die Zeitspanne von Scan 44 bis 49, in der sich alle Ziele auf diesem Hauptsegment befanden. Die Zeitverläufe der jeweiligen Segmentgewichte in Abbildung 5.8(a) veranschaulichen, wie sich die Schätzung der Kolonne zunächst über mehrere Segmente verteilte, bevor anschließend das längste Segment die Gewichte dominierte. Beim Verlassen dieses Segmentes trat der umgekehrte Effekt auf. Außerdem zeigt sich hier die beschränkende Wirkung des Schwellenwertes für die Segmentgewichte, da die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten  $\theta_{k|k-1}^{[\vartheta]}$  nur zu relevanten Messzeitpunkten berechnet wurden. Dieser Eindruck bestätigt sich auch in Abbildung 5.8(b), in der die prädizierten Segmentgewichte für das vollständige Szenario dargestellt sind: Zum Tracking mit Straßenkartinformationen benötigte der erweiterte Ansatz in jedem Zeitschritt nur relativ wenige Straßensegmente (im Vergleich zur Gesamtzahl), was sich positiv auf die Laufzeit des Verfahrens auswirkte.

Abbildung 5.9 stellt den Verlauf der geschätzten Kolonnenlänge dar, deren Werte für jeden Zeitschritt als Mittelwerte der Monte-Carlo-Simulation berechnet worden sind. Da das erweiterte Verfahren zum Tracking mit Straßenkartinformationen aus dem ursprünglichen Bayes'schen Ansatz von Koch [78] hergeleitet worden ist, gibt es dort wie beim Originalverfahren keinen statistischen Messfehler in den Filtergleichungen. Demnach schätzt auch das erweiterte Verfahren grundsätzlich



**Abbildung 5.10:** Ergebnisse für 900 Monte-Carlo-Simulationenläufe zum Szenario aus Abbildung 5.7, wobei Fehlermaße bezüglich Position und Geschwindigkeit für zwei verschiedene Verfahren dargestellt sind: (i) den ursprünglichen Bayes'schen Ansatz von Koch [78] aus Kapitel 2 (schwarze Strichpunktlinie); (ii) den erweiterten Ansatz zum Tracking mit Straßenkarteninformationen (hellblaue Linie). Zum Berechnen der Fehlerwerte wurden die Schätzgrößen ins 2-D-Bodenkoordinatensystem transformiert, da die Fahrzeuge der Kolonne auf der Straße fuhren und nicht auf dem Polygonzug. Um den Qualitätseinfluss der Straßenkarteninformationen auf die Schätzgenauigkeit zu verdeutlichen, wurden die Fehlermaße für den erweiterten Ansatz auch in Straßenkoordinaten berechnet (rote Strichlinie). Dazu wurde der wahre Zielzustand des Zentrums der Kolonne auf den Polygonzug projiziert. Die grauen und violetten Hintergründflächen markieren die in Abbildung 5.8 genannten Zeitspannen.

Ausdehnung plus Sensorfehler. Ein *Überschätzen* der Kolonnenlänge konnte in diesem Simulationsexperiment allerdings nicht beobachtet werden. Dies dürfte u. a. darauf zurückzuführen sein, dass für jedes Fahrzeug lediglich eine Entdeckungswahrscheinlichkeit von 65 % angenommen wurde und dass der Messfehler in der Hauptbewegungsrichtung mit 20 m eher klein ausfiel im Vergleich zur Länge der Marschgruppe.

Für den ursprünglichen Bayes'schen Ansatz haben wir zum Vergleich ebenfalls eine Monte-Carlo-Simulation durchgeführt. Beim Berechnen von Fehlermaßen haben wir uns mit dem kinematischen Positions- und Geschwindigkeitsfehler begnügt, da die unterschiedliche Dimensionierung der Ausdehnungsschätzung – 2-D-Ellipse versus 1-D-Intervall – einen Vergleich erschwerte mit dem erweiterten Verfahren. Abbildung 5.10 zeigt die Monte-Carlo-Simulationsergebnisse bezüglich des Positions- und Geschwindigkeitsfehlers<sup>14</sup> beim Schätzen des Zentrums der Kolonne. Durch das Berücksichtigen von Straßenkarteninformationen konnte der erweiterte Ansatz weitestgehend kleinere Fehler erzielen. Dabei ist zu beachten, dass der Approximationsfehler zwischen Straße und Polygonzug auch einging in den Positions- und Geschwindigkeitsfehler des erweiterten Ansatzes. Aus diesem Grund beinhaltet Abbildung 5.10 auch die Fehlermaße bezogen auf den projizierten kinematischen Zielzustand, d. h. für die Projektion des wahren Zielzustandes von der Straße auf den Polygonzug, so dass die Fehler direkt im Straßenkoordinatensystem berechnet werden konnten. Daraufhin ergab sich beim Geschwindigkeitsfehler ein glatterer Verlauf.

<sup>14</sup>RMS Target Location Error und RMS Target Speed Error (RMS für engl. Root Mean Square).

## 5.5 Grundsätzliche Problematik des erweiterten Ansatzes

Im vorherigen Abschnitt konnten wir anhand eines Simulationsbeispiels vorführen, dass sich Straßenkartinformationen nicht nur formal im Bayes'schen Ansatz für Objektgruppen integrieren lassen, sondern auch positiv auf die Schätzgenauigkeit auswirken und eine genauere Modellierung der Ausdehnung ermöglichen. Allerdings zeigte sich beim Auswerten weiterer Simulationsexperimente wie z. B. in [162, 163],

- dass unter gewissen Umständen ungewöhnlich starke Abweichungen bei der geschätzten Kolonnenlänge auftreten können im Vergleich zur tatsächlichen Länge,
- dass diese Abweichungen auch im Falle eines kleinen Sensormessfehlers auftreten können
- und dass sie vielmehr von der Länge der Kolonne und der jeweiligen Straßensegmente abhängen sowie insbesondere von der Kurvigkeit der Straße.

Abbildung 5.11 stellt solch ein Simulationsbeispiel vor: Obwohl Geschwindigkeit und Länge der Marschkolonne konstant waren, brach die Längenschätzung in den Momenten ein, als sich die Fahrzeuge über zwei Segmente gleichzeitig verteilten. Dabei lagen die beiden Straßensegmente im rechten Winkel zueinander. Dieses Phänomen soll im Folgenden näher beleuchtet werden.

Die Problematik entsteht bereits beim Erweitern des gemeinsamen Systemzustandes  $(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r)$  mit der Zufallsvariablen  $\theta_k$ , die das jeweils gültige Segment während der Prädiktion angibt, d. h.

$$p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \mathcal{Y}_{k-1}) = \sum_{\vartheta=1}^{n_{\mathcal{R}}} p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r, \theta_k = \vartheta | \mathcal{Y}_{k-1}) = \sum_{\vartheta=1}^{n_{\mathcal{R}}} \theta_{k|k-1}^{[\vartheta]} p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_{k-1})$$

und

$$p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \mathcal{Y}_k) = \sum_{\vartheta=1}^{n_{\mathcal{R}}} p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r, \theta_k = \vartheta | \mathcal{Y}_k) = \sum_{\vartheta=1}^{n_{\mathcal{R}}} \theta_{k|k}^{[\vartheta]} p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \theta_k = \vartheta, \mathcal{Y}_k).$$

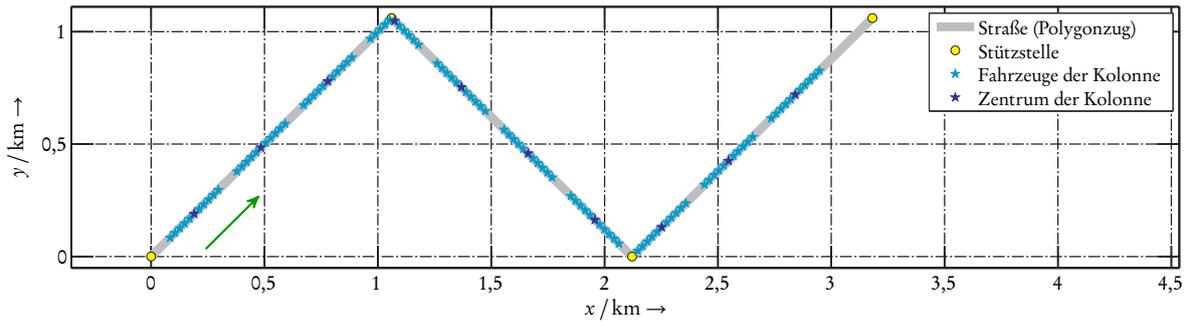
Der  $\vartheta$ -te Summand entspricht jeweils einem Produkt aus Segmentgewicht und segmentabhängiger Verteilungsdichte und bezieht sich auf das  $\vartheta$ -te Straßensegment (von insgesamt  $n_{\mathcal{R}}$ ). Dank dieser Umformung können wir die segmentabhängige Transformation zwischen Straßen- und Bodenkoordinaten eindeutig angeben und den methodischen Rahmen des Bayes'schen Formalismus einhalten. Dieses Vorgehen ist identisch zu dem Ansatz mit Punktzielen aus [71, 144, 145, 148] und führt zur obigen Interpretation von  $p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \mathcal{Y}_{k-1})$  und  $p(\mathbf{x}_k^r, \mathbf{X}_k^r | \mathcal{Y}_k)$  als Mischverteilungsdichten; siehe Gleichung (5.3) und Gleichung (5.9).

Per Definition entspricht die Dichte einer Mischverteilung einer gewichteten Summe einzelner Verteilungsdichten, wobei die Summe der einzelnen Gewichte eins ergibt [6, Abschnitt 1.4.16], d. h.

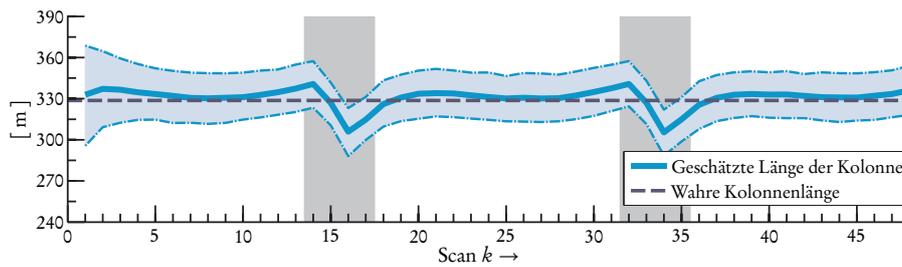
$$\sum_{\vartheta=1}^{n_{\mathcal{R}}} \theta_{k|k-1}^{[\vartheta]} = 1 \quad \text{und} \quad \sum_{\vartheta=1}^{n_{\mathcal{R}}} \theta_{k|k}^{[\vartheta]} = 1.$$

Mit dieser Vorgabe berechnet sich allerdings auch der bedingte Erwartungswert – und damit die Ausdehnungsschätzung – als eine gewichtete Summe der segmentweisen Erwartungswerte gemäß

$$\mathbf{X}_{k|k-1}^r = \sum_{\vartheta=1}^{n_{\mathcal{R}}} \theta_{k|k-1}^{[\vartheta]} \mathbf{X}_{k|k-1}^{r[\vartheta]} \quad \text{und} \quad \mathbf{X}_{k|k}^r = \sum_{\vartheta=1}^{n_{\mathcal{R}}} \theta_{k|k}^{[\vartheta]} \mathbf{X}_{k|k}^{r[\vartheta]}.$$

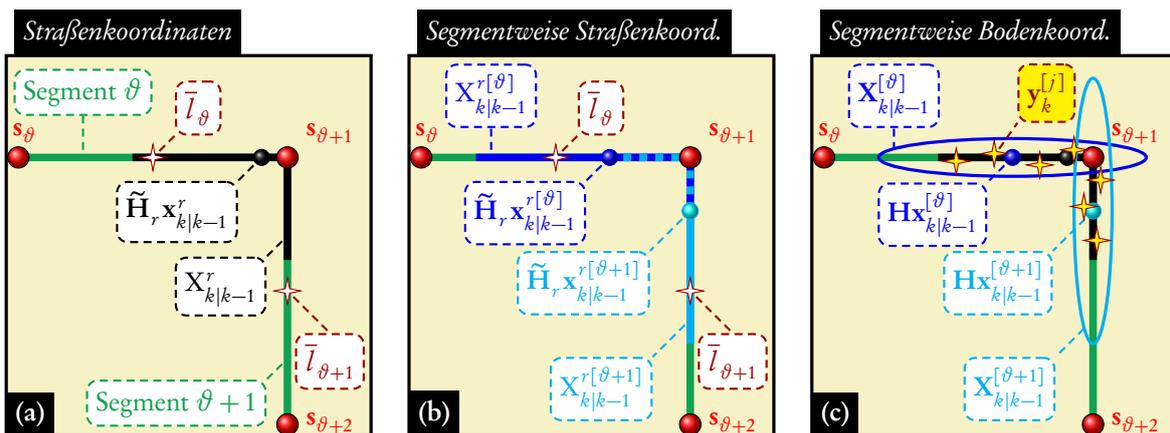


(a) Positionen der Fahrzeuge und des Zentrums der Kolonne (dargestellt für jeden fünften Messzeitpunkt)



(b) Geschätzte Länge der Kolonne (gemittelt aus 900 Monte-Carlo-Simulationsläufen)

**Abbildung 5.11:** Simulation einer Kolonne von elf Fahrzeugen, die untereinander jeweils einen Abstand von 30 m hielten bei einer konstanten Geschwindigkeit von 30 km/h. Aufgrund der Geradlinigkeit der Straße gab es keinen Approximationsfehler zwischen Straßenverlauf und Polygonzug. Der fiktive Sensor hatte eine Abtastzeit von  $T = 10$  s, er lieferte unkorrelierte  $x$ - und  $y$ -Messungen mit einer Standardabweichung von  $\sigma = 30$  m. Die Detektionswahrscheinlichkeit für jedes Fahrzeug lag bei 100 %. Die simulierten Zielpositionen sind im oberen Teil der Abbildung dargestellt. Der untere Teil zeigt das Ergebnis des erweiterten Bayes'schen Ansatzes für die geschätzte Länge der Kolonne, wobei der Schlauch um den Verlauf der geschätzten Kolonnenlänge den *Interdezilbereich* der Schätzwerte kennzeichnet. In diesem Bereich lagen die mittleren 80 % der Werte aller 900 Monte-Carlo-Simulationsläufe. Die grauen Hintergrundflächen markieren die beiden Zeitspannen, in denen sich die Fahrzeuge der Marschkolonne jeweils über zwei Segmente verteilen.



**Abbildung 5.12:** Skizze zum dreiteiligen Prädiktionsschritt des erweiterten Bayes'schen Ansatzes: Anhand von zwei Straßensegmenten veranschaulicht Teil (a) die Prädiktion in Straßenkoordinaten aus Abschnitt 5.2.1. Neben prädizierter Länge und Position der Marschkolonne (Schwarz) sind auch die Mittelpunkte der Segmente (Rot-Weiß) eingezeichnet, die als *Pseudomessungen* zum Berechnen der Prädiktion in segmentweisen Straßenkoordinaten nach Abschnitt 5.2.2 benötigt werden. Teil (b) skizziert dieses Ergebnis in segmentweisen Straßenkoordinaten für die Segmente  $\vartheta$  (Blau) und  $\vartheta + 1$  (Hellblau). Im Tracking-Verfahren erfolgt danach die segmentabhängige Koordinatentransformation aus Abschnitt 5.2.3, worauf sich die Prädiktion in segmentweisen 2-D-Bodenkoordinaten ergibt, die in Teil (c) dargestellt ist. Zusätzlich ist hier auch die ursprüngliche Prädiktion der Marschkolonne (Schwarz) eingezeichnet, da sie auf diejenigen Bereiche hinweist, in denen die Sensormessungen (Rot-Gelb) zu erwarten sind.

Beim Verarbeiten der Sensordaten im Aktualisierungsschritt müsste demnach die gesamte Ausdehnungsschätzung bestätigt werden – und zwar auf jedem beteiligten Straßensegment, so dass wir anschließend mit

$$2\sqrt{\mathbf{X}_{k|k}^r} = 2\sqrt{\sum_{\vartheta=1}^{n_{\mathcal{R}}} \vartheta_{k|k}^{[\vartheta]} \mathbf{X}_{k|k}^{r[\vartheta]}} \quad (5.13)$$

die Kolonnenlänge erhalten.

Das daraus folgende Dilemma ergibt sich im Prädiktionsschritt beim Übergang von Straßenzu Bodenkoordinaten: Wie Abbildung 5.12 anschaulich darstellt, können Konstellationen bei kleinen Segmentlängen oder hoher Krümmigkeit der Straße auftreten, bei denen die segmentweisen Ausdehnungsellipsen der Prädiktion auch Bereiche abseits der Straße abdecken. Gerade in diesen Bereichen sind allerdings nur wenige oder keine Messungen für die Marschkolonne zu erwarten, wie in Abbildung 5.12(c) deutlich wird. Beim anschließenden Verarbeiten der Sensordaten im Aktualisierungsschritt verkleinern sich die segmentweisen Ausdehnungsellipsen und damit die Ausdehnungsschätzung  $\mathbf{X}_{k|k}^{[\vartheta]}$ , woraufhin sich nach der Rücktransformation in segmentweisen Straßenkoordinaten zwangsläufig auch die geschätzte Kolonnenlänge verringern muss; siehe Gleichung (5.13). Genau solch eine Konstellation sorgte im Simulationsbeispiel in Abbildung 5.11 für das Einbrechen der Längenschätzung beim Übergang von einem Straßensegment zum nächsten. Einerseits reduziert dieser Effekt das *Mitschätzen* des Sensormessfehlers als Teil der Ausdehnung, andererseits beginnt die Schätzung der Kolonnenlänge stärker zu schwanken, wenn die Fahrzeuge auf einer kurvigen Straße fahren oder wenn die Marschkolonne sehr lang ist im Vergleich zu den einzelnen Segmenten, so dass sie sich über mehrere Straßensegmente erstreckt. Diese Wechselwirkung sollte beim Anwenden des erweiterten Ansatzes zum Tracking mit Straßenkarteninformationen stets berücksichtigt werden.

## Zusammenfassung

Dieses Kapitel zeigte einen Weg auf, wie sich Straßenkarteninformationen im Bayes'schen Ansatz von Koch [75, 78, 81, 82] integrieren lassen, um präzisere Schätzergebnisse beim Tracking einer Kolonne von Straßenzielen zu erhalten. Zu diesem Zweck wurde zunächst das Straßenkoordinatensystem vorgestellt, das aus der Literatur zum Tracking von einzelnen Straßenzielen bekannt ist. In diesem Bezugssystem kann die Zielspur einer Kolonne einfach im parametrisierten Raum der Straße geführt werden, so dass sich Position, Geschwindigkeit und Länge jeweils durch einen skalaren Parameter angeben lassen. Daraufhin erläuterte das Kapitel die sechs Einzelschritte des erweiterten Bayes'schen Ansatzes, mit denen ein vollständiger Verarbeitungszyklus aus Prädiktion und Aktualisierung durchgeführt werden kann: Da die Messungen üblicherweise nicht in Straßenkoordinaten vorliegen, transformiert das Verfahren die Zielspur der Kolonne in 2-D-Bodenkoordinaten und nach Verarbeiten der Messungen zurück ins 1-D-Straßenkoordinatensystem. Dazu ist es allerdings erforderlich, die gemeinsame Dichtefunktion von Kinematik und Ausdehnung segmentweise darzustellen, weshalb auch sogenannte *Segmentaufenthaltswahrscheinlichkeiten* oder *Segmentgewichte* zu berechnen sind. Als hilfreich erwiesen sich dabei die in Kapitel 2 hergeleiteten Ausdrücke für Messwahrscheinlichkeiten, mit denen sich die Differenz zwischen erwarteten Messungen und tatsächlich gemessenen Sensordaten bewerten lässt.

Im Anschluss daran demonstrierte dieses Kapitel am Beispiel einer simulierten Kolonne von Straßenzielen, dass sich mit Straßenkarteninformationen weitestgehend bessere Schätzergebnisse ergeben – sowohl für Position und Geschwindigkeit als auch für die Ausdehnungsschätzung im Vergleich zum ursprünglichen Bayes'schen Ansatz ohne geographische Kontextinformationen. Dabei war es vollkommen ausreichend, dass sich der erweiterte Ansatz auf die lokalen Straßensegmente in unmittelbarer Umgebung der Kolonne beschränkte, d. h. bei der segmentweisen Berechnung der Dichtefunktion. Demnach ist auch der numerische Zusatzaufwand überschaubar, der zur Integration von Straßenkarteninformationen erforderlich ist.

Zuletzt beleuchtete dieses Kapitel einen Aspekt des erweiterten Bayes'schen Ansatzes, der auf die segmentweise Darstellung der gemeinsamen Dichtefunktion zurückzuführen ist: Da diese Verbundverteilungsdichte in eine Mischverteilungsdichte umgewandelt wird, ergibt sich eine gewichtete Summe von segmentweisen Dichtefunktionen, wobei die Summe der Segmentgewichte eins ergibt. Infolgedessen berechnet sich die Ausdehnungsschätzung der Kolonne auch als gewichtete Summe der segmentweisen Ausdehnungsschätzungen, weshalb leichte Abweichungen bei der geschätzten Kolonnenlänge auftreten können – insbesondere bei hoher Kurvigkeit der Straße, wie das Kapitel in einem Simulationsexperiment vorführte.



# Zusammenfassung und Ausblick

---

Viele Anwendungen des Alltages – sei es in der Weitbereichs- oder Verkehrsüberwachung; Medizin-, Nachrichten- oder Regelungstechnik; Signalverarbeitung oder in anderen Bereichen – benötigen im Hintergrund ein Computer- und Informationssystem, das die Umgebung mit Sensorik überwacht und ein dynamisches Lagebild erstellt, aus dem Rückschlüsse auf Objekte und Personen möglich sind. Konventionelle Tracking-Verfahren beschreiben die zu verfolgenden Zielobjekte als Punktziele ohne Ausdehnung – unabhängig von ihrem Volumen oder Platzbedarf. Die Verfahren gehen davon aus, dass ein Ziel nur eine Auflösungszelle eines Sensors belegt, weshalb bei jedem Messdurchgang höchstens eine Messung pro Ziel erwartet wird. Im Nahbereich der Sensorik oder mit hochauflösenden Sensoren ist diese Annahme nicht haltbar, da mehrere Auflösungszellen bei der Messung betroffen sind und sich für ein Ziel mehrere zu verarbeitende Messungen ergeben. Die mehrdeutige Datenassoziation in Verbindung mit der fluktuierenden Zahl an Reflexionen beeinflusst die Schätzergebnisse konventioneller Tracking-Verfahren. Die Zielspur kann infolge einer instabilen Track-Führung verlorengehen. Ähnliche Probleme bereiten Objektgruppen, deren Einzelziele aufgrund einer zu geringen Sensorauflösung nicht separat detektiert werden können. Ihr Detektionsmuster gleicht dem eines ausgedehnten Zielobjektes.

In dem Kontext befasste sich die Arbeit mit Verfahren zum Tracking von Objektgruppen und ausgedehnten Zielobjekten. Ausgangspunkt war das Bayes'sche Tracking-Verfahren von Koch, mit dem wir Objektgruppen und ausgedehnte Objekte in einer einheitlichen Zielspur abbilden können. Sein Verfahren berücksichtigt keinen statistischen Sensormessfehler in den Filtergleichungen. Ein Ziel der Arbeit bestand in der Weiterentwicklung des ursprünglichen Verfahrens, um sowohl den Einfluss der Objektausdehnung als auch des Messrauschens auf die Messungen berücksichtigen zu können. Neben der militärischen Weitbereichsüberwachung können auch andere Forschungsgebiete von den entwickelten Verfahren profitieren: Beispielsweise ist ein selbstfahrendes Kraftfahrzeug notwendigerweise auch eine Sensorplattform, deren Sensorik andere Verkehrsteilnehmer wie ausgedehnte Zielobjekte und Objektgruppen detektiert – seien es andere Fahrzeuge, Fahrradfahrer oder Fußgänger.

Eine besondere Form der Weitbereichsüberwachung stellt die luftgestützte Bodenaufklärung mit ihren eigenen Anforderungen dar: Probleme bereiten sowohl hohe Verkehrsdichten und Falschalarmraten als auch geringe Entdeckungswahrscheinlichkeiten aufgrund von topographischen Abschattungsphänomenen oder gegnerischen Tarnmaßnahmen. Deshalb nehmen Tracking-Verfahren für punktförmige Straßenziele an, dass sich nicht nur zivile Fahrzeuge, sondern auch militärische Bodenziele auf Straßen bewegen, deren bekannte geographische Lage zum Verbessern der Zielverfolgung beitragen kann. Aus diesem Grund bestand ein weiteres Ziel der Arbeit in der Erweiterung des ursprünglichen Tracking-Verfahrens mit Straßenkarteninformationen, um eine Kolonne von Fahrzeugen als Objektgruppe auf einer Straße zu verfolgen.

Beide Hauptanliegen wurden im Rahmen der Dissertation bearbeitet und waren Anregungen für weitere Entwicklungen, die in der vorliegenden Arbeit zusammengefasst worden sind:

- Die vorgestellten Verfahren ermöglichen die gemeinsame Schätzung (*Verbundschätzung*) von Kinematik und Ausdehnung einer Objektgruppe oder eines einzelnen Zielobjektes. Sie vermeiden vom Ansatz her das gruppeninterne oder objektbezogene Datenassoziationsproblem konventioneller Punktziel-Verfahren. Eine Objektgruppe wird ohne explizite Zielspuren für die Einzelziele verfolgt. Für die (wahre) Zielspur gilt: Der kinematische Schwerpunkt ergibt sich als Mittelwert der einzelnen Zielpositionen, die Ausdehnung als skaliertes Ellipsoid, das aus der Stichprobenvarianz der Zielpositionen berechnet wird. Das Schätzen des Ellipsoids erfordert multivariate Matrixverteilungen. Trotzdem handelt es sich um *analytische Lösungsverfahren*. Unabhängig von der Zahl der Messungen verarbeiten sie alle Sensordaten in einem Aktualisierungsschritt. Das Update erfolgt mit den abgeleiteten Messgrößen *mittlere Messung* und *Messstreuung*. Sie werden in einem Vorverarbeitungsschritt berechnet. Die Verfahren schätzen auch die Ausdehnung von Objekten, die pro Zeitschritt höchstens eine Messung liefern. Für die Ausdehnungsschätzung kann ein graphischer Konfidenzbereich dargestellt werden.
- Mit der *Weiterentwicklung* des ursprünglichen Ansatzes können *beide Rauscheinflüsse* auf die Streuung der Sensordaten berücksichtigt werden: sowohl das *statistische Sensormessrauschen* als auch der Rauschanteil verursacht durch die Ausdehnung des Objektes oder der Objektgruppe. Dadurch verbessert sich das glättende Verhalten des Tracking-Filters. Die Weiterentwicklung lässt sich in einem *IMM-Filter* mit verschiedenen Dynamikmodellen einsetzen. Das ermöglicht ein abgestuftes Modellieren der Systemdynamik bei manövrierenden Zielen und geringere Schätzfehler. Die Zahl der Modellhypothesen bleibt über die Zeit gesehen konstant.
- Die Arbeit hat eine *Erweiterung* des ursprünglichen Ansatzes vorgestellt, mit der sich *Straßenkarteninformationen* im Tracking-Verfahren berücksichtigen lassen. Folgt eine Kolonne von Fahrzeugen einem bekannten Straßenverlauf, kann die Zielspur der Fahrzeugkolonne im parametrisierten Raum der Straße geführt werden. Als Ausdehnungsschätzung ergibt sich eine skalare Größe, die der Kolonnenlänge entspricht. Bei der Prädiktion folgt die Zielspur aus Schwerpunkt und Länge automatisch dem Straßenverlauf, bei der Aktualisierung wird die Zielspur zurück auf die Straße projiziert, nachdem die verrauschten Sensordaten in Bodenkoordinaten verarbeitet worden sind. Es ergeben sich geringere Schätzfehler im Vergleich zum ursprünglichen Verfahren ohne Straßenkarteninformationen.

Auf Basis der vorgestellten Tracking-Verfahren sind verschiedene Anknüpfungspunkte möglich: Die Arbeit fokussierte sich auf das *reine Schätzen* der Zielspur, d. h. auf Prädiktion und Aktualisierung des gemeinsamen Systemzustandes einer einzelnen Zieleinheit. In den Simulationen gab es keine Falschalarme. Sämtliche Messungen wurden der einzigen Zieleinheit zugeordnet. Es musste keine Zielspur aufgegriffen werden, die Verfahren initialisierten die Zielspur mit den Sensordaten des ersten Messzeitpunktes. Weitere Vorarbeiten sind notwendig, bevor wir die Verfahren in praktischen Anwendungen einsetzen können. Andere haben bereits die veröffentlichten Ergebnisse der Arbeit [161–175] aufgegriffen, um die praktische Anwendbarkeit der vorgestellten Verfahren zu

---

untersuchen, wobei sie sich auch den offenen Fragestellungen angenommen haben – sei es für Daten, die mit einem hochauflösenden Radar aus dem Automobilbereich aufgenommen wurden [132] oder für Radardaten eines Hafen- und Küstenschutzszenarios [150]. Unabhängig davon dürfte der Schwerpunkt zukünftiger Forschungsarbeiten auf folgenden Punkten liegen:

- Tracking von mehreren Objektgruppen und ausgedehnten Objekten mit Datenassoziation zwischen den Zieleinheiten,
- Datenassoziation zum Berücksichtigen von Falschalarmen (*Clutter*),
- Extrahieren einer Zielspur,
- Aufteilen (*Splitting*) und Zusammenlegen (*Merging*) von Objektgruppen,
- Schätzen der Zielzahl innerhalb einer Objektgruppe,
- Alternativen zum Berücksichtigen von Straßenkarteninformationen,
- Doppler-Blindheit bei Sensorik mit Festzielunterdrückung,
- topographische Abschattungsphänomene im Straßenverkehr (Tunnel),
- Stop-and-go-Verkehr oder Verlassen der Straße.

Letztlich wirft insbesondere die *Splitting- und Merging-Thematik* die Fragen auf, wann eine Gruppe von Zielen als eine Objektgruppe zu behandeln ist, wann zwei Objektgruppen zu einer zusammenzufassen sind und ob es in Zukunft nicht darauf hinauslaufen könnte, Gruppen von ausgedehnten Zielobjekten zu haben. Für die Forschung jedenfalls hat sich mit dem Einbeziehen der Ausdehnung ein arbeitsreiches Feld aufgetan.



### A.1 Spezielle Funktionen

#### A.1.1 Gammafunktion

Die (Euler'sche) Gammafunktion  $\Gamma(a)$  normiert die Dichtefunktion einer Gamma-Verteilung (vgl. Abschnitt B.1.1). Sie ist für  $a > 0$  durch folgendes Integral definiert [1, Seite 255]:

$$\Gamma(a) = \int_0^{\infty} \xi^{a-1} \exp(-\xi) d\xi.$$

Aufgrund der Funktionalgleichung

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \tag{A.1}$$

mit  $\Gamma(1) = 1$  wird die Gammafunktion auch als Verallgemeinerung der Fakultätsfunktion betrachtet [24, Seite 478]: Genauer gesagt gilt für eine nichtnegative ganze Zahl  $n$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

$$\Gamma(n+1) = n! = \prod_{k=1}^n k. \tag{A.2}$$

Der Wert für  $n = 0$  ist über das leere Produkt

$$\Gamma(1) = 0! = \prod_{k=1}^0 k = 1$$

bestimmt. Darüber hinaus ist aus [1, Seite 255] der Zusammenhang

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n-1)}{2^n} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \cdot \prod_{k=1}^n (2k-1) = \sqrt{\pi} \cdot \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2} \tag{A.3}$$

bekannt, d. h.  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$  und  $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ .

Sei  $n$  nun eine positive ganze Zahl ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). Dann bezeichnet

$$\Gamma(na) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(1-n)} n^{na-\frac{1}{2}} \prod_{i=0}^{n-1} \Gamma\left(a + \frac{i}{n}\right)$$

die Gauß'sche Multiplikationsformel [1, Seite 256], aus der sich für  $n = 2$  die Legendre'sche Verdopplungsformel ergibt:

$$\sqrt{\pi} \Gamma(2a) = 2^{2a-1} \Gamma(a) \Gamma\left(a + \frac{1}{2}\right). \tag{A.4}$$

### A.1.2 Unvollständige und regularisierte Gammafunktion (der oberen Grenze)

Die unvollständige Gammafunktion der oberen Grenze  $\gamma(a, x)$  ist für  $a > 0$  und  $x > 0$  durch folgendes Integral definiert [1, Seite 260]:

$$\gamma(a, x) = \int_0^x \xi^{a-1} \exp(-\xi) d\xi. \quad (\text{A.5})$$

Analog zur Funktionalgleichung (A.1) der Gammafunktion ergibt sich durch partielle Integration eine Rekursionsformel, d. h.

$$\gamma(a+1, x) = \int_0^x \xi^a \exp(-\xi) d\xi = \left[ -\xi^a \exp(-\xi) \right]_{\xi=0}^{\xi=x} + a \int_0^x \xi^{a-1} \exp(-\xi) d\xi$$

und somit [1, Seite 262]

$$\gamma(a+1, x) = a \gamma(a, x) - x^a \exp(-x). \quad (\text{A.6})$$

Die regularisierte Gammafunktion der oberen Grenze  $\mathcal{P}(a, x)$  ist für  $a > 0$  und  $x > 0$  durch folgendes Integral definiert [1, Seite 260]:

$$\mathcal{P}(a, x) = \frac{\gamma(a, x)}{\Gamma(a)} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x \xi^{a-1} \exp(-\xi) d\xi. \quad (\text{A.7})$$

Unter Berücksichtigung der Funktionalgleichung (A.1) der Gammafunktion lässt sich aus dem Zusammenhang (A.6) auch für die regularisierte Gammafunktion eine Rekursionsformel angeben:

$$\mathcal{P}(a+1, x) = \mathcal{P}(a, x) - \frac{x^a \exp(-x)}{\Gamma(a+1)}. \quad (\text{A.8})$$

Beim Berechnen des Konfidenzniveaus für einen Konfidenzbereich der Ausdehnungsschätzung in Anhang D treten Ausdrücke der Form

$$\mathcal{C}(a, x) := \mathcal{P}(a-1, x) - \frac{\sqrt{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}(a-1)} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \cdot \mathcal{P}\left(\frac{a-1}{2}, \frac{x}{2}\right)$$

auf. Über den Ansatz  $\mathcal{C}(a, x) = \mathcal{C}(a, x) - c_0(a, x) + c_0(a, x)$  mit dem Term

$$c_0(a, x) := \frac{x^{a-1} \exp(-x)}{\Gamma(a)} \stackrel{(\text{A.4})}{=} \frac{\sqrt{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{a-1} \exp(-x)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}$$

ergibt sich

$$\mathcal{C}(a, x) = \mathcal{P}(a-1, x) - \frac{x^{a-1} \exp(-x)}{\Gamma(a)} + \frac{\sqrt{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{a-1} \exp(-x)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right) \Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)} - \frac{\sqrt{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}(a-1)} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \cdot \mathcal{P}\left(\frac{a-1}{2}, \frac{x}{2}\right),$$

so dass wir mit der Rekursionsformel (A.8) unmittelbar

$$C(a, x) = \mathcal{P}(a, x) - \frac{\sqrt{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}(a-1)} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \cdot \underbrace{\left( \mathcal{P}\left(\frac{a-1}{2}, \frac{x}{2}\right) - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}(a-1)} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)} \right)}_{\mathcal{P}\left(\frac{a+1}{2}, \frac{x}{2}\right)}$$

erhalten. Auf diese Weise bestätigen wir den in Anhang D verwendeten Zusammenhang

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(a-1, x) &= \frac{\sqrt{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}(a-1)} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \cdot \mathcal{P}\left(\frac{a-1}{2}, \frac{x}{2}\right) \\ &= \mathcal{P}(a, x) - \frac{\sqrt{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}(a-1)} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} \cdot \mathcal{P}\left(\frac{a+1}{2}, \frac{x}{2}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Während die linke und rechte Seite dieser Gleichung für  $a > 1$  identische Ergebnisse liefern, lässt sich die rechte Seite auch für  $0 < a \leq 1$  auswerten.

### A.1.3 Multivariate Gamma- und Betafunktion

Die multivariate Gammafunktion  $\Gamma_p(a)$  stellt eine Verallgemeinerung der Euler'schen Gammafunktion  $\Gamma(a)$  dar und normiert die Dichtefunktion einer Wishart-Verteilung (vgl. Abschnitt B.3.3). Sie ist für  $2a > p - 1$  durch folgendes Integral definiert [55, Seite 18 f.]:

$$\Gamma_p(a) = \int_{\mathbf{A} > \mathbf{0}} |\mathbf{A}|^{a - \frac{1}{2}(p+1)} \text{etr}(-\mathbf{A}) d\mathbf{A}.$$

Da die Integration über alle SPD  $p \times p$ -Matrizen ( $\mathbf{A} > \mathbf{0}$ ) geführt werden muss, empfiehlt sich die äquivalente Darstellung mit Euler'schen Gammafunktionen entsprechend

$$\Gamma_p(a) = \pi^{\frac{1}{4}p(p-1)} \prod_{i=1}^p \Gamma\left(a - \frac{1}{2}(i-1)\right) \quad (\text{A.10})$$

für  $2a > p - 1$ . Demzufolge gilt  $\Gamma_1(a) = \Gamma(a)$ . Außerdem erhalten wir für  $\nu > 0$  den Zusammenhang

$$\frac{\Gamma_p\left(\frac{\nu+p}{2}\right)}{\Gamma_p\left(\frac{\nu+p-1}{2}\right)} = \frac{\prod_{i=1}^p \Gamma\left(\frac{\nu+p}{2} - \frac{i-1}{2}\right)}{\prod_{i=1}^p \Gamma\left(\frac{\nu+p}{2} - \frac{1}{2} - \frac{i-1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \quad (\text{A.11})$$

zwischen multivariaten und gewöhnlichen Gammafunktionen.

Die multivariate Betafunktion  $\beta_p(a, b)$  stellt eine Verallgemeinerung der Euler'schen Betafunktion dar und normiert Dichtefunktionen verschiedener matrixvariater Betaverteilungsdichten (vgl. [55, Kapitel 5] und Abschnitt B.3.5). Sie ist für  $2a > p - 1$  und  $2b > p - 1$  u. a. durch folgendes Integral definiert [55, Seite 20]:

$$\beta_p(a, b) = \int_{\mathbf{0} < \mathbf{A} < \mathbf{I}_p} |\mathbf{A}|^{a - \frac{1}{2}(p+1)} |\mathbf{I}_p - \mathbf{A}|^{b - \frac{1}{2}(p+1)} d\mathbf{A}.$$

Dabei erfolgt die Integration über diejenigen symmetrischen  $p \times p$ -Matrizen, für die  $\mathbf{I}_p - \mathbf{A}$  jeweils

positiv definit ist. Neben einer weiteren Integraldarstellung

$$\beta_p(a, b) = \int_{\mathbf{B} > 0} |\mathbf{B}|^{b - \frac{1}{2}(p+1)} |\mathbf{I}_p + \mathbf{B}|^{-(a+b)} d\mathbf{B}$$

existiert wegen

$$\beta_p(a, b) = \frac{\Gamma_p(a) \Gamma_p(b)}{\Gamma_p(a+b)} \quad (\text{A.12})$$

ein direkter Zusammenhang zur multivariaten Gammafunktion. Für  $p = 1$  bestimmen diese Ausdrücke auch die Euler'sche Betafunktion ( $a > 0, b > 0$ ):

$$\beta_1(a, b) = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 \xi^{a-1} (1-\xi)^{b-1} d\xi.$$

## A.2 Matrizenrechnung

### A.2.1 Kronecker-Produkt und vec-Operator

Sei  $\mathbf{A}$  eine  $m \times n$ -Matrix,  $\mathbf{B}$  eine  $p \times q$ -Matrix. Dann bezeichnet die  $mp \times nq$ -Matrix  $\mathbf{A}_{m \times n} \otimes \mathbf{B}_{p \times q}$  das Kronecker-Produkt von  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$ , das als

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11} \mathbf{B} & \cdots & a_{1n} \mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \mathbf{B} & \cdots & a_{mn} \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

definiert ist. Die folgenden Zusammenhänge für das Kronecker-Produkt stammen aus [59, Kapitel 16]. Unter Berücksichtigung eines Skalars  $k$  und einer  $u \times v$ -Matrix  $\mathbf{C}$  lässt sich zunächst

$$\begin{aligned} k \otimes \mathbf{A} &= \mathbf{A} \otimes k = k \mathbf{A} \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T &= \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T \\ (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} &= \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) \end{aligned}$$

festhalten, während für eine  $n \times u$ -Matrix  $\mathbf{C}$  und eine  $q \times v$ -Matrix  $\mathbf{D}$  außerdem

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD})$$

Gültigkeit hat. Handelt es sich bei  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  um  $m \times n$ -Matrizen, so gelten für eine  $p \times q$ -Matrix  $\mathbf{C}$  die folgenden Umformungen:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{C}) + (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) \\ \mathbf{C} \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= (\mathbf{C} \otimes \mathbf{A}) + (\mathbf{C} \otimes \mathbf{B}). \end{aligned}$$

Sei  $\mathbf{A}$  eine  $m \times m$ -Matrix,  $\mathbf{B}$  eine  $p \times p$ -Matrix. Dann gilt für diese quadratischen Matrizen:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) &= (\text{tr} \mathbf{A})(\text{tr} \mathbf{B}) \\ |\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}| &= |\mathbf{A}|^p |\mathbf{B}|^m. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Sind  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  außerdem invertierbar, existiert auch der folgende Zusammenhang:

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}.$$

Sei  $\mathbf{A}$  eine  $m \times n$ -Matrix. Dann bezeichnet  $\text{vec}(\mathbf{A})$  den  $mn$ -dimensionalen Vektor, der durch das Stapeln der Spaltenvektoren von  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n]$  entsprechend

$$\text{vec}(\mathbf{A}) = [\mathbf{a}_1^T, \dots, \mathbf{a}_n^T]^T \quad (\text{A.15})$$

entsteht. Die folgenden Zusammenhänge für den  $\text{vec}$ -Operator stammen auch aus [59, Kapitel 16]. Bezeichnet  $\mathbf{B}$  ebenfalls eine  $m \times n$ -Matrix und  $k$  ein Skalar, lässt sich zunächst

$$\begin{aligned} \text{vec}(k\mathbf{A}) &= k \text{vec}(\mathbf{A}) \\ \text{vec}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \text{vec}(\mathbf{A}) + \text{vec}(\mathbf{B}) \\ \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B}) &= (\text{vec } \mathbf{A})^T \text{vec}(\mathbf{B}) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

festhalten. Der letzte Zusammenhang lässt sich für eine  $m \times p$ -Matrix  $\mathbf{B}$ , eine  $p \times q$ -Matrix  $\mathbf{C}$  und eine  $n \times q$ -Matrix  $\mathbf{D}$  wie folgt verallgemeinern:

$$\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B} \mathbf{C} \mathbf{D}^T) = (\text{vec } \mathbf{A})^T (\mathbf{D} \otimes \mathbf{B}) \text{vec}(\mathbf{C}). \quad (\text{A.17})$$

### A.2.2 Determinante und Inverse einer Matrix der Form $\mathbf{A} + \mathbf{BCD}$

Sei  $\mathbf{A}$  eine  $n \times n$ -Matrix,  $\mathbf{B}$  eine  $n \times m$ -Matrix,  $\mathbf{C}$  eine  $m \times m$ -Matrix,  $\mathbf{D}$  eine  $m \times n$ -Matrix. Falls die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{C}$  invertierbar sind, lässt sich die Determinante einer Matrix der Form  $\mathbf{A} + \mathbf{BCD}$  auch entsprechend

$$|\mathbf{A} + \mathbf{BCD}| = |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{C}| \cdot |\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}| \quad (\text{A.18})$$

berechnen [59, Seite 416], so dass

$$|\mathbf{I}_n + \mathbf{BD}| = |\mathbf{I}_m + \mathbf{DB}|$$

gilt. Im Fall  $m = 1$  lässt sich für die Vektoren  $\mathbf{b} := \mathbf{B}_{n \times 1}$  und  $\mathbf{d}^T := \mathbf{D}_{1 \times n}$  das Folgende notieren:

$$|\mathbf{I}_n + \mathbf{b}\mathbf{d}^T| = 1 + \mathbf{d}^T \mathbf{b}. \quad (\text{A.19})$$

Darüber hinaus ist laut [59, Seite 424] eine Matrix der Form  $\mathbf{A} + \mathbf{BCD}$  genau dann invertierbar, wenn neben  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{C}$  auch  $\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$  nichtsingulär ist. In diesem Fall erhalten wir

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{D}\mathbf{A}^{-1}. \quad (\text{A.20})$$

Dieser Zusammenhang wird als *Matrix-Inversions-Lemma* bezeichnet. Für  $\mathbf{C} = -\mathbf{I}$  erhalten wir die *Woodbury-Formel* [57], die für  $\mathbf{C} = \mathbf{I}$  auch als *Sherman-Morrison-Woodbury-Formel* bekannt ist [61]. Im Gegensatz dazu bezeichnet  $(\mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{d}^T)^{-1}$  die *Sherman-Morrison-Formel* [57] (vgl. auch [60]).

### A.2.3 Matrixexponentialfunktion

Sei  $\mathbf{A}$  eine quadratische Matrix. Dann bezeichnet  $\exp(\mathbf{A})$  das Matrixexponential von  $\mathbf{A}$ , das durch die folgende Potenzreihe definiert ist [61, Kapitel 10]:

$$\exp(\mathbf{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3}{3!} + \dots$$

Alternativ berechnet sich das Matrixexponential auch als Grenzwert einer Funktion [13, 61, 62]:

$$\exp(\mathbf{A}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}}{n} \right)^n.$$

Sei  $\mathbf{B}$  ebenfalls eine quadratische Matrix. Handelt es sich nun bei  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  um kommutierende Matrizen, d. h.  $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$ , gilt laut [134, Seite 185]

$$\exp(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \exp(\mathbf{A})\exp(\mathbf{B}).$$

Dementsprechend erhalten wir über

$$\exp(\mathbf{A})\exp(-\mathbf{A}) = \exp(\mathbf{A} - \mathbf{A}) = \exp(\mathbf{0}) = \mathbf{I}$$

die Inverse des Matrixexponentials, d. h.

$$(\exp(\mathbf{A}))^{-1} = \exp(-\mathbf{A}).$$

Darüber hinaus benötigen wir bei der Bestimmung des Grenzwertes der erwarteten Messstreuung in Abschnitt 2.5.3 noch den folgenden Zusammenhang aus [134, Seite 186 f.]:

$$|\exp(\mathbf{A})| = \text{etr}(\mathbf{A}).$$

### A.3 Berechnung eines bestimmten Integrals der Funktion $(\sin x)^n$

Bei der Berechnung der Kovarianzmatrix einer gleichverteilten Zufallsvariable in Abschnitt B.6.2 sind Integrale der Form  $\int_0^\pi (\sin x)^n dx$  auszuwerten ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), wobei aus der Literatur lediglich der Zusammenhang

$$\int (\sin x)^n dx = -\frac{1}{n}(\sin x)^{n-1} \cos x + \frac{n-1}{n} \int (\sin x)^{n-2} dx$$

bekannt ist [104, Seite 106]. Unter Berücksichtigung der Integrationsgrenzen 0 und  $\pi$  gilt demnach

$$\int_0^\pi (\sin x)^n dx = \frac{n-1}{n} \int_0^\pi (\sin x)^{n-2} dx \quad (\text{A.21})$$

für  $n \geq 2$ . Diese Rekursionsformel wird in Abschnitt B.6.2 auch bei der Betrachtung des Integranden  $(\cos x)^2(\sin x)^{n-2}$  benötigt, da sich unter Berücksichtigung des trigonometrischen Pythagoras

unmittelbar der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\cos x)^2 (\sin x)^{n-2} dx &= \int_0^\pi (\sin x)^{n-2} dx - \int_0^\pi (\sin x)^n dx \\ &= \int_0^\pi (\sin x)^{n-2} dx - \frac{n-1}{n} \int_0^\pi (\sin x)^{n-2} dx \\ &= \frac{1}{n} \int_0^\pi (\sin x)^{n-2} dx \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

für  $n \geq 2$  ergibt.

Die Problematik beim Auswerten der Rekursionsformel (A.21) entsteht durch zwei unterschiedliche Startwerte der Rekursion: Je nachdem, ob  $n$  eine ungerade oder eine gerade positive Zahl ist, lautet dieser Startwert entweder

$$\int_0^\pi (\sin x)^1 dx = 2 \quad \text{oder} \quad \int_0^\pi (\sin x)^0 dx = \pi.$$

Ist  $n$  eine ungerade Zahl, d. h.  $n = 2p + 1$  für  $p \in \mathbb{N}$ , so folgt aus der Rekursionsformel (A.21)

$$\int_0^\pi (\sin x)^{2p+1} dx = \frac{2p}{2p+1} \cdot \frac{2p-2}{2p-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = 2 \cdot \prod_{k=1}^p \frac{2k}{2k+1}$$

bzw.

$$\int_0^\pi (\sin x)^n dx = 2 \cdot \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{2k}{2k+1}. \quad (\text{A.23})$$

Ist  $n$  allerdings eine gerade Zahl, d. h.  $n = 2p$ , so folgt aus der Rekursionsformel (A.21)

$$\int_0^\pi (\sin x)^{2p} dx = \frac{2p-1}{2p} \cdot \frac{2p-3}{2p-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi = \pi \cdot \prod_{k=1}^p \frac{2k-1}{2k}$$

bzw.

$$\int_0^\pi (\sin x)^n dx = \pi \cdot \prod_{k=1}^{n/2} \frac{2k-1}{2k}. \quad (\text{A.24})$$

Die abkürzende Schreibweise mit dem Produktzeichen  $\prod$  in den Ausdrücken (A.23) und (A.24) erinnert an die Gammafunktion in Abschnitt A.1.1: Ist  $n$  eine ungerade Zahl, d. h.  $n = 2p + 1$ , so folgt aus Gleichung (A.2)

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{n-1}{2} + 1\right) = \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{2k}{2},$$

während sich aus dem Zusammenhang (A.3)

$$\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \Gamma\left(\frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \cdot \prod_{j=1}^{(n+1)/2} \frac{2j-1}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \prod_{j=2}^{(n+1)/2} \frac{2j-1}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \frac{2k+1}{2}$$

ergibt. Ist  $n$  allerdings eine gerade Zahl, d. h.  $n = 2p$ , so folgt aus Gleichung (A.3)

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{n}{2} + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \cdot \prod_{k=1}^{n/2} \frac{2k-1}{2},$$

während sich aus dem Zusammenhang (A.2)

$$\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \prod_{k=1}^{n/2} \frac{2k}{2}$$

ergibt. Der Vergleich dieser vier Zusammenhänge mit den Ausdrücken in (A.23) und (A.24) zeigt, dass eine Fallunterscheidung beim Berechnen eines Integrals der Form  $\int_0^\pi (\sin x)^n dx$  nicht erforderlich ist: Für eine nichtnegative ganze Zahl  $n$ , d. h.  $n \in \mathbb{N}$ , gilt demnach

$$\int_0^\pi (\sin x)^n dx = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}(n+1)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n+1\right)}. \quad (\text{A.25})$$

Beispielsweise erhalten wir im Fall  $n = 0$  und  $n = 1$  unmittelbar die bekannten Ergebnisse

$$\int_0^\pi (\sin x)^0 dx = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \pi \quad \text{und} \quad \int_0^\pi (\sin x)^1 dx = \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} = 2.$$

## Anhang B

# Relevante Wahrscheinlichkeitsverteilungen

## B.1 Univariate Verteilungen

### B.1.1 Gammaverteilung

Eine Zufallsvariable  $x$  genügt einer Gammaverteilung mit den skalaren Parametern  $\nu$  ( $\nu > 0$ ) und  $c$  ( $c > 0$ ), d. h.  $x \sim \mathcal{G}(\nu, c)$ , wenn  $x$  die Dichtefunktion

$$\mathcal{G}(x; \nu, c) = \begin{cases} (c^\nu \Gamma(\nu))^{-1} x^{\nu-1} \exp(-c^{-1}x) & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

besitzt [111]. Die kumulative Verteilungsfunktion  $P_{\mathcal{G}}(x; \nu, c)$  berechnen wir für  $x \geq 0$  als Integral über die Dichtefunktion, d. h.

$$P_{\mathcal{G}}(x; \nu, c) = \int_0^x (c^\nu \Gamma(\nu))^{-1} \zeta^{\nu-1} \exp(-c^{-1}\zeta) d\zeta = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^{x/c} \xi^{\nu-1} \exp(-\xi) d\xi.$$

Unter Berücksichtigung der unvollständigen Gammafunktion (A.5) oder der regularisierten Gammafunktion (A.7) gilt für  $x \geq 0$  demnach

$$P_{\mathcal{G}}(x; \nu, c) = \frac{\gamma(\nu, x/c)}{\Gamma(\nu)} = \mathcal{P}(\nu, x/c). \quad (\text{B.1})$$

**Beziehung zur Chi-Quadrat-Verteilung** Eine Zufallsvariable  $x$  genügt einer Chi-Quadrat-Verteilung mit  $n$  Freiheitsgraden ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), wenn  $x$  die Dichtefunktion  $\mathcal{G}(x; n/2, 2)$  besitzt (vgl. Definition der Dichte einer Chi-Quadrat-Verteilung in [99, Seite 487] oder [111]).

**Beziehung zur inversen Gammaverteilung** Eine Zufallsvariable  $x$  genügt einer inversen Gammaverteilung mit den skalaren Parametern  $\nu$  ( $\nu > 0$ ) und  $c$  ( $c > 0$ ), d. h.  $x \sim \mathcal{IG}(\nu, c)$ , falls  $x^{-1} \sim \mathcal{G}(\nu, 1/c)$  [38, Seite 112].

### B.1.2 Inverse Gammaverteilung

Eine Zufallsvariable  $x$  genügt einer inversen Gammaverteilung mit den skalaren Parametern  $\nu$  ( $\nu > 0$ ) und  $c$  ( $c > 0$ ), d. h.  $x \sim \mathcal{IG}(\nu, c)$ , wenn  $x$  die folgende Dichtefunktion besitzt [38, Seite 112]:

$$\mathcal{IG}(x; \nu, c) = \begin{cases} (x^{\nu+1} \Gamma(\nu))^{-1} c^\nu \exp(-cx^{-1}) & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0). \end{cases}$$

## B.2 Multivariate Verteilungen

### B.2.1 Multivariate Normalverteilung

Ein  $p$ -dimensionaler Zufallsvektor  $\mathbf{x}$  genügt einer multivariaten Normalverteilung mit dem Erwartungswertvektor  $\boldsymbol{\mu}$  und der Kovarianzmatrix<sup>1</sup>  $\boldsymbol{\Sigma}$  ( $\boldsymbol{\Sigma} > \mathbf{0}$ ), d. h.  $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , wenn  $\mathbf{x}$  die folgende Dichtefunktion besitzt [99, Seite 37]:

$$\mathcal{N}_p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = |2\pi\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right).$$

### B.2.2 Multivariate $t$ -Verteilung

Ein  $p$ -dimensionaler Zufallsvektor  $\mathbf{x}$  genügt einer multivariaten  $t$ -Verteilung mit dem skalaren Parameter  $\nu$  ( $\nu > 0$ ), dem Erwartungswertvektor  $\boldsymbol{\mu}$  und der  $p \times p$ -Parametermatrix  $\mathbf{C}$  ( $\mathbf{C} > \mathbf{0}$ ), d. h.  $\mathbf{x} \sim \mathcal{T}_p(\nu, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{C})$ , wenn  $\mathbf{x}$  die Dichtefunktion

$$\mathcal{T}_p(\mathbf{x}; \nu, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{C}) = \left((\pi\nu)^{\frac{1}{2}p} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\right)^{-1} \Gamma\left(\frac{\nu+p}{2}\right) |\mathbf{C}|^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{\nu}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right)^{-\frac{1}{2}(\nu+p)} \quad (\text{B.2})$$

besitzt [88, Seite 1]. Für  $\nu > 2$  ergibt sich die Kovarianzmatrix des Zufallsvektors  $\mathbf{x}$  zu [88, Seite 11]

$$\text{Var}[\mathbf{x}] = \frac{\nu}{\nu-2} \mathbf{C} \quad (\nu > 2).$$

**Beziehung zur Student- $t$ -Verteilung** Im Fall  $p = 1$  sei  $\mathbf{x} \sim \mathcal{T}_1(\nu, 0, 1)$ . Dann entspricht Gleichung (B.2) der Dichtefunktion einer Student- $t$ -Verteilung (vgl. [38, Seite 183]).

**Beziehung zur multivariaten Normalverteilung** Für  $\nu \rightarrow \infty$  konvergiert die Dichtefunktion  $\mathcal{T}_p(\mathbf{x}; \nu, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{C})$  gegen die Dichtefunktion einer multivariaten Normalverteilung mit Erwartungswertvektor  $\boldsymbol{\mu}$  und Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}$  [88, Seite 2].

## B.3 Multivariate Matrixverteilungen

Sei  $\mathbf{X}$  eine  $p \times m$ -Zufallsmatrix, d. h. eine matrixwertige Zufallsvariable. Dann ist das erste Moment von  $\mathbf{X}$  durch die  $p \times m$ -Erwartungswertmatrix  $E[\mathbf{X}]$  bestimmt, während das zweite zentrale Moment alle Kovarianzen zwischen den einzelnen Matrixelementen berücksichtigen muss. Zur einfachen Notation dieser Kovarianzen lässt sich eine Kovarianzmatrix  $\text{cov}[\mathbf{X}]$  unter Zuhilfenahme des  $\text{vec}$ -Operators<sup>2</sup> angeben [15, Seite 73 f.]: Demnach bezeichnet  $\text{cov}[\mathbf{X}]$  die  $pm \times pm$ -Kovarianzmatrix des Spaltenvektors  $\text{vec}(\mathbf{X}^\top)$  entsprechend

$$\text{cov}[\mathbf{X}] = \text{cov}[\text{vec}(\mathbf{X}^\top)] = E\left[\text{vec}(\mathbf{X}^\top)(\text{vec}(\mathbf{X}^\top))^\top\right] - E\left[\text{vec}(\mathbf{X}^\top)\right]E\left[(\text{vec}(\mathbf{X}^\top))^\top\right] \quad (\text{B.3})$$

(vgl. auch [55, Seite 47]). Darüber hinaus geben verschiedene Arbeiten (z. B. [2, 165]) zusätzlich einen Ausdruck  $\text{Var}[\mathbf{X}]$  für die Varianz einer Zufallsmatrix an, der sich zu  $\text{Var}[\mathbf{X}] = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^\top] -$

<sup>1</sup>Auf den Fall einer singulären Kovarianzmatrix  $\boldsymbol{\Sigma}$  ( $\boldsymbol{\Sigma} \geq \mathbf{0}$ ), die zu einer singulären multivariaten Normalverteilung führen würde [106], wird in dieser Arbeit nicht eingegangen.

<sup>2</sup>Anmerkungen zum  $\text{vec}$ -Operator finden sich in Abschnitt A.2.1.

$E[\mathbf{X}]E[\mathbf{X}]^T$  berechnet, d. h.  $\text{Var}[\mathbf{X}] = E[\mathbf{X}^2] - E[\mathbf{X}]^2$  für eine SPD Zufallsmatrix. Unter Berücksichtigung von Gleichung (A.16) lässt sich der folgende Zusammenhang zwischen  $\text{cov}[\mathbf{X}]$  und  $\text{Var}[\mathbf{X}]$  nachweisen:

$$\begin{aligned} \text{tr cov}[\mathbf{X}] &= \text{tr} \left( E \left[ \text{vec}(\mathbf{X}^T) (\text{vec}(\mathbf{X}^T))^T \right] - E \left[ \text{vec}(\mathbf{X}^T) \right] E \left[ (\text{vec}(\mathbf{X}^T))^T \right] \right) \\ &= E \left[ (\text{vec}(\mathbf{X}^T))^T \text{vec}(\mathbf{X}^T) \right] - (\text{vec}(E[\mathbf{X}^T]))^T \text{vec}(E[\mathbf{X}^T]) \\ &= \text{tr}(E[\mathbf{X}\mathbf{X}^T]) - \text{tr}(E[\mathbf{X}]E[\mathbf{X}^T]) = \text{tr Var}[\mathbf{X}]. \end{aligned}$$

### B.3.1 Matrixvariante Normalverteilung

Eine  $p \times m$ -Zufallsmatrix  $\mathbf{X}$  genügt einer matrixvariante Normalverteilung mit der  $p \times m$ -Erwartungswertmatrix  $\mathbf{M}$  und der Kovarianzmatrix  $\text{cov}[\mathbf{X}] = \text{cov}[\text{vec}(\mathbf{X}^T)] = \mathbf{C} \otimes \mathbf{D}$ , die sich aus der  $p \times p$ -Parametermatrix  $\mathbf{C}$  ( $\mathbf{C} > \mathbf{0}$ ) und der  $m \times m$ -Parametermatrix  $\mathbf{D}$  ( $\mathbf{D} > \mathbf{0}$ ) ergibt, wenn der durch spaltenweise Vektorisierung entstandene  $pm$ -dimensionale Spaltenvektor  $\text{vec}(\mathbf{X}^T)$  gemäß

$$\text{vec}(\mathbf{X}^T) \sim \mathcal{N}_{pm}(\text{vec}(\mathbf{M}^T), \mathbf{C} \otimes \mathbf{D})$$

einer multivariaten Normalverteilung genügt [55, Seite 55]. In diesem Fall gilt  $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}_{p,m}(\mathbf{M}, \mathbf{C} \otimes \mathbf{D})$  und  $\mathbf{X}$  besitzt die Dichtefunktion

$$\mathcal{N}_{p,m}(\mathbf{X}; \mathbf{M}, \mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}mp} |\mathbf{C}|^{-\frac{1}{2}m} |\mathbf{D}|^{-\frac{1}{2}p} \text{etr} \left( -\frac{1}{2} \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{M}) \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{M})^T \right).$$

Diese Beschreibung ergibt sich – unter Beachtung von (A.14) und (A.17) – unmittelbar aus

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}_{pm}(\text{vec}(\mathbf{X}^T); \text{vec}(\mathbf{M}^T), \mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) \\ &= |2\pi(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})|^{-\frac{1}{2}} \text{etr} \left( -\frac{1}{2} (\text{vec}(\mathbf{X}^T - \mathbf{M}^T))^T (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})^{-1} \text{vec}(\mathbf{X}^T - \mathbf{M}^T) \right). \end{aligned}$$

Dieser Zusammenhang zwischen den Dichten von  $\mathbf{X}$  und  $\text{vec}(\mathbf{X}^T)$  ist eine besondere Eigenschaft der matrixvariante Normalverteilung. Beispielsweise ist bei der matrixvariante  $t$ -Verteilung ein Rückschluss auf die Dichte von  $\text{vec}(\mathbf{X}^T)$  im Allgemeinen nicht möglich (vgl. Abschnitt B.3.2 und [55, Seite 140]).

### B.3.2 Matrixvariante $t$ -Verteilung

Eine  $p \times m$ -Zufallsmatrix  $\mathbf{X}$  genügt einer matrixvariante  $t$ -Verteilung mit dem skalaren Parameter  $\nu$  ( $\nu > 0$ ), der  $p \times m$ -Erwartungswertmatrix  $\mathbf{M}$ , der  $p \times p$ -Parametermatrix  $\mathbf{C}$  ( $\mathbf{C} > \mathbf{0}$ ) und der  $m \times m$ -Parametermatrix  $\mathbf{D}$  ( $\mathbf{D} > \mathbf{0}$ ), d. h.  $\mathbf{X} \sim \mathcal{T}_{p,m}(\nu, \mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ , wenn  $\mathbf{X}$  die Dichtefunktion

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{p,m}(\mathbf{X}; \nu, \mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) &= \left( \pi^{\frac{1}{2}mp} \Gamma_p \left( \frac{\nu+p-1}{2} \right) \right)^{-1} \Gamma_p \left( \frac{\nu+m+p-1}{2} \right) |\mathbf{C}|^{-\frac{1}{2}m} |\mathbf{D}|^{-\frac{1}{2}p} \\ &\quad \cdot \left| \mathbf{I}_p + \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{M}) \mathbf{D}^{-1} (\mathbf{X} - \mathbf{M})^T \right|^{-\frac{1}{2}(\nu+m+p-1)} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

besitzt [55, Seite 134 f.]. Damit gilt auch  $\mathbf{X}^\top \sim \mathcal{T}_{m,p}(\nu, \mathbf{M}^\top, \mathbf{D}, \mathbf{C})$ . Für  $\nu > 2$  berechnet sich die Kovarianzmatrix der Zufallsmatrix  $\mathbf{X}$  wie folgt:

$$\text{cov}[\mathbf{X}] = \text{cov}[\text{vec}(\mathbf{X}^\top)] = \frac{1}{\nu-2} \mathbf{C} \otimes \mathbf{D} \quad (\nu > 2). \quad (\text{B.5})$$

Im Gegensatz zur matrixvariaten Normalverteilung lässt sich ein allgemeiner Zusammenhang zwischen den Wahrscheinlichkeitsdichten von  $\mathbf{X}$  und  $\text{vec}(\mathbf{X}^\top)$  nicht angeben [55, Seite 140] (vgl. auch Abschnitt B.3.1). Ausgehend von der multivariaten  $t$ -Verteilung (B.2) tritt das Problem auf, dass sich der Ausdruck<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{pm}(\text{vec}(\mathbf{X}^\top); \nu, \text{vec}(\mathbf{M}^\top), \mathbf{C} \otimes \mathbf{D} / \nu) &= \left( \pi^{\frac{1}{2}mp} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \right)^{-1} \Gamma\left(\frac{\nu+mp}{2}\right) |\mathbf{C}|^{-\frac{1}{2}m} |\mathbf{D}|^{-\frac{1}{2}p} \\ &\quad \cdot \left( 1 + (\text{vec}(\mathbf{X}^\top - \mathbf{M}^\top))^\top (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})^{-1} \text{vec}(\mathbf{X}^\top - \mathbf{M}^\top) \right)^{-\frac{1}{2}(\nu+mp)} \\ &= \left( \pi^{\frac{1}{2}mp} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \right)^{-1} \Gamma\left(\frac{\nu+mp}{2}\right) |\mathbf{C}|^{-\frac{1}{2}m} |\mathbf{D}|^{-\frac{1}{2}p} \left( 1 + \text{tr}(\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{X} - \mathbf{M})\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{X} - \mathbf{M})^\top) \right)^{-\frac{1}{2}(\nu+mp)} \end{aligned}$$

nicht in die dazu notwendige Form von Gleichung (B.4) überführen lässt. Dies ist nur für  $p = 1$  und  $m = 1$  möglich.

**Beziehung zur multivariaten  $t$ -Verteilung** Im Spezialfall  $m = 1$  sei  $\mathbf{x} := \mathbf{X}_{p \times 1}$ ,  $\boldsymbol{\mu} := \mathbf{M}_{p \times 1}$  und  $D := \mathbf{D}_{1 \times 1}$  ( $D > 0$ ). Unter Berücksichtigung der Formeln (A.11) und (A.19) folgt aus der Dichtefunktion (B.4), dass der  $p$ -dimensionale Zufallsvektor  $\mathbf{x}$  entsprechend  $\mathbf{x} \sim \mathcal{T}_p(\nu, \boldsymbol{\mu}, D\mathbf{C}/\nu)$  einer multivariaten  $t$ -Verteilung genügt. Im Spezialfall  $p = 1$  sei  $\mathbf{x}^\top := \mathbf{X}_{1 \times m}$ ,  $\boldsymbol{\mu}^\top := \mathbf{M}_{1 \times m}$  und  $C := \mathbf{C}_{1 \times 1}$  ( $C > 0$ ). Dann folgt aus der Dichtefunktion (B.4), dass der  $m$ -dimensionale Zufallsvektor  $\mathbf{x}$  entsprechend  $\mathbf{x} \sim \mathcal{T}_m(\nu, \boldsymbol{\mu}, C\mathbf{D}/\nu)$  einer multivariaten  $t$ -Verteilung genügt.

### B.3.3 Wishart-Verteilung

Eine SPD  $p \times p$ -Zufallsmatrix  $\mathbf{X}$  ( $\mathbf{X} > \mathbf{0}$ ) genügt einer Wishart-Verteilung mit dem skalaren Parameter  $\nu$  ( $\nu > p - 1$ ) [16, Seite 693] und der  $p \times p$ -Parametermatrix  $\mathbf{C}$  ( $\mathbf{C} > \mathbf{0}$ ), d. h.  $\mathbf{X} \sim \mathcal{W}_p(\nu, \mathbf{C})$ , wenn  $\mathbf{X}$  die folgende Dichtefunktion besitzt [55, Seite 87]:

$$\mathcal{W}_p(\mathbf{X}; \nu, \mathbf{C}) = \left( 2^{\frac{1}{2}\nu p} \Gamma_p\left(\frac{\nu}{2}\right) \right)^{-1} |\mathbf{C}|^{-\frac{1}{2}\nu} |\mathbf{X}|^{\frac{1}{2}(\nu-p-1)} \text{etr}\left(-\frac{1}{2}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{X}\right). \quad (\text{B.6})$$

Für den Erwartungswert und das zweite Moment von  $\mathbf{X}$  ergibt sich laut [55, Seite 98]

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{X}] &= \nu \mathbf{C} \\ \mathbb{E}[\mathbf{X}^2] &= \nu \mathbf{C}^2 + \nu \text{tr}(\mathbf{C}) \mathbf{C} + \nu^2 \mathbf{C}^2, \end{aligned}$$

so dass sich die Varianz von  $\mathbf{X}$  gemäß  $\text{Var}[\mathbf{X}] = \mathbb{E}[\mathbf{X}^2] - \mathbb{E}[\mathbf{X}]^2$  wie folgt berechnet:

$$\text{Var}[\mathbf{X}] = \nu \mathbf{C}^2 + \nu \text{tr}(\mathbf{C}) \mathbf{C} = \nu^{-1} \left( \mathbb{E}[\mathbf{X}^2] + \text{tr}(\mathbb{E}[\mathbf{X}]) \mathbb{E}[\mathbf{X}] \right). \quad (\text{B.7})$$

**Beziehung zur Gammaverteilung** Die Wishart-Verteilung stellt eine Verallgemeinerung der Gamma-Verteilung auf mehrere Dimensionen dar. Eine Zufallsvariable  $\mathbf{x}$  genügt einer Gammaverteilung mit den skalaren Parametern  $\nu$  ( $\nu > 0$ ) und  $c$  ( $c > 0$ ), d. h.  $\mathbf{x} \sim \mathcal{G}(\nu, c)$ , falls  $\mathbf{x} \sim \mathcal{W}_1(2\nu, c/2)$ .

<sup>3</sup>Gemäß (A.14) gilt  $|\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}| = |\mathbf{C}|^m |\mathbf{D}|^p = \nu^{-mp} |\mathbf{C}|^m |\mathbf{D}|^p$ .

**Beziehung zur Chi-Quadrat-Verteilung** Eine Zufallsvariable  $\mathbf{x}$  genügt einer Chi-Quadrat-Verteilung mit  $n$  Freiheitsgraden ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), wenn sie die Dichtefunktion  $\mathcal{W}_1(\mathbf{x}; n, 1)$  besitzt (vgl. Definition der Dichte einer Chi-Quadrat-Verteilung in [99, Seite 487] oder [111]). Demnach stellt die Wishart-Verteilung eine Verallgemeinerung der Chi-Quadrat-Verteilung auf mehrere Dimensionen dar [38, Seite 202 f.], so dass der skalare Parameter  $n$  der Dichtefunktion  $\mathcal{W}_p(\mathbf{X}; n, \mathbf{C})$  auch als *Zahl der Freiheitsgrade* bezeichnet wird. Aus diesem Grund wird in einigen Büchern die Dichtefunktion einer Wishart-Verteilung für  $n \geq p$  (anstatt  $n > p - 1$ ) definiert, siehe etwa [15, 38, 55].

**Beziehung zur inversen Wishart-Verteilung** Eine SPD  $p \times p$ -Zufallsmatrix  $\mathbf{X}$  ( $\mathbf{X} > \mathbf{0}$ ) genügt einer inversen Wishart-Verteilung mit dem skalaren Parameter  $\nu$  ( $\nu > p - 1$ ) und der  $p \times p$ -Parametermatrix  $\mathbf{C}$  ( $\mathbf{C} > \mathbf{0}$ ), d. h.  $\mathbf{X} \sim \mathcal{IW}_p(\nu, \mathbf{C})$ , falls  $\mathbf{X}^{-1} \sim \mathcal{W}_p(\nu, \mathbf{C}^{-1})$ .

**Verbunddichtefunktion der Eigenwerte** Eine SPD  $p \times p$ -Zufallsmatrix  $\mathbf{X}$  besitze die Dichtefunktion  $\mathcal{W}_p(\mathbf{X}; \nu, \mu \mathbf{I})$ . Dann ergibt sich laut [110, Seite 107] für die Verbunddichtefunktion der nach Größe sortierten Eigenwerte ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p > 0$ ) von  $\mathbf{X}$

$$p(\lambda_1, \dots, \lambda_p) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}p^2}}{(2\mu)^{\frac{1}{2}\nu p} \Gamma_p(\frac{1}{2}p) \Gamma_p(\frac{1}{2}\nu)} \exp\left(-\frac{1}{2\mu} \sum_{i=1}^p \lambda_i\right) \prod_{i=1}^p \lambda_i^{\frac{1}{2}(\nu-p-1)} \prod_{i<j}^p (\lambda_i - \lambda_j).$$

Unter Berücksichtigung von (A.10) und der Legendre'schen Verdopplungsformel (A.4) gilt

$$\frac{\pi^2}{2^\nu \Gamma_2(1) \Gamma_2(\frac{1}{2}\nu)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^\nu \Gamma(\frac{1}{2}\nu) \Gamma(\frac{1}{2}(\nu-1))} = \frac{1}{4\Gamma(\nu-1)}.$$

Demnach ergibt sich im Fall  $p = 2$  für die Verbunddichte der beiden Eigenwerte

$$p(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\exp(-(2\mu)^{-1}(\lambda_1 + \lambda_2))}{4\mu^\nu \Gamma(\nu-1)} (\lambda_1 \lambda_2)^{\frac{1}{2}(\nu-3)} (\lambda_1 - \lambda_2).$$

### B.3.4 Inverse Wishart-Verteilung

Eine SPD  $p \times p$ -Zufallsmatrix  $\mathbf{X}$  ( $\mathbf{X} > \mathbf{0}$ ) genügt einer inversen Wishart-Verteilung mit dem skalaren Parameter  $\nu$  ( $\nu > p - 1$ ) und der  $p \times p$ -Parametermatrix  $\mathbf{C}$  ( $\mathbf{C} > \mathbf{0}$ ), d. h.  $\mathbf{X} \sim \mathcal{IW}_p(\nu, \mathbf{C})$ , wenn  $\mathbf{X}$  die folgende Dichtefunktion besitzt [55, Seite 111]:

$$\mathcal{IW}_p(\mathbf{X}; \nu, \mathbf{C}) = \left(2^{\frac{1}{2}\nu p} \Gamma_p\left(\frac{\nu}{2}\right)\right)^{-1} |\mathbf{C}|^{\frac{1}{2}\nu} |\mathbf{X}|^{-\frac{1}{2}(\nu+p+1)} \text{etr}\left(-\frac{1}{2}\mathbf{C}\mathbf{X}^{-1}\right). \quad (\text{B.8})$$

Mit dieser Parametrisierung<sup>4</sup> der Dichtefunktion ergibt sich für den Erwartungswert und das zweite Moment

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{X}] &= \frac{\mathbf{C}}{\nu - p - 1} & (\nu - p > 1) \\ \mathbb{E}[\mathbf{X}^2] &= \frac{\text{tr}(\mathbf{C})\mathbf{C} + (\nu - p - 1)\mathbf{C}^2}{(\nu - p)(\nu - p - 1)(\nu - p - 3)} & (\nu - p > 3) \end{aligned}$$

<sup>4</sup>In [55] wird eine andere Parametrisierung der Dichtefunktion verwendet. Die dort angegebene Dichtefunktion folgt aus Gleichung (B.8), wenn  $\nu$  durch  $\nu - p - 1$  ersetzt wird.

(vgl. [55, Seite 113]), so dass sich die Varianz von  $\mathbf{X}$  für  $\nu - p > 3$  wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned}\text{Var}[\mathbf{X}] &= \text{E}[\mathbf{X}^2] - \text{E}[\mathbf{X}]^2 = \frac{(\nu - p - 1) \text{tr}(\mathbf{C})\mathbf{C} + (\nu - p + 1)\mathbf{C}^2}{(\nu - p)(\nu - p - 1)^2(\nu - p - 3)} \\ &= \frac{(\nu - p - 1) \text{tr}(\text{E}[\mathbf{X}]) \text{E}[\mathbf{X}] + (\nu - p + 1) \text{E}[\mathbf{X}]^2}{(\nu - p)(\nu - p - 3)}.\end{aligned}\quad (\text{B.9})$$

**Beziehung zur inversen Gammaverteilung** Die inverse Wishart-Verteilung stellt eine Verallgemeinerung der inversen Gamma-Verteilung auf mehrere Dimensionen dar. Eine Zufallsvariable  $\mathbf{x}$  genügt einer inversen Gammaverteilung mit den skalaren Parametern  $\nu$  ( $\nu > 0$ ) und  $c$  ( $c > 0$ ), d. h.  $\mathbf{x} \sim \mathcal{IG}(\nu, c)$ , falls  $\mathbf{x} \sim \mathcal{IW}_1(2\nu, 2c)$ .

### B.3.5 Verallgemeinerte matrixvariante Betaverteilung zweiter Art

Eine SPD  $p \times p$ -Zufallsmatrix  $\mathbf{X}$  genügt einer verallgemeinerten matrixvariante Betaverteilung zweiter Art (für engl. *Generalized Matrix-Variate Beta Type II Distribution*) mit dem skalaren Parameter  $a$  ( $2a > p - 1$ ), dem skalaren Parameter  $b$  ( $2b > p - 1$ ), der  $p \times p$ -Parametermatrix  $\mathbf{D}$  ( $\mathbf{D} \geq \mathbf{0}$ ) und der  $p \times p$ -Parametermatrix  $\mathbf{C}$  ( $\mathbf{C} > \mathbf{D}$ ), d. h.  $\mathbf{X} \sim \mathcal{GB}_p^{II}(a, b; \mathbf{C}, \mathbf{D})$ , wenn  $\mathbf{X}$  für  $\mathbf{X} > \mathbf{D}$  die folgende Dichtefunktion besitzt [55, Seite 167]:

$$\mathcal{GB}_p^{II}(\mathbf{X}; a, b; \mathbf{C}, \mathbf{D}) = (\beta_p(a, b))^{-1} |\mathbf{C} + \mathbf{D}|^b |\mathbf{X} - \mathbf{D}|^{a - \frac{1}{2}(p+1)} |\mathbf{C} + \mathbf{X}|^{-(a+b)}. \quad (\text{B.10})$$

Im Fall, dass  $\mathbf{X} \sim \mathcal{GB}_p^{II}(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b; \mathbf{C}, \mathbf{0})$  ist, ergibt sich für den Erwartungswert und das zweite Moment

$$\begin{aligned}\text{E}[\mathbf{X}] &= \frac{a}{b - p - 1} \mathbf{C} && (b - p > 1) \\ \text{E}[\mathbf{X}^2] &= \frac{a(a(b - p - 2) + 2)\mathbf{C}^2 + a(a + b - p - 1)(\mathbf{C}^2 + \text{tr}(\mathbf{C})\mathbf{C})}{(b - p)(b - p - 1)(b - p - 3)} && (b - p > 3).\end{aligned}$$

(vgl. [55, Seite 179]), so dass sich die Varianz von  $\mathbf{X}$  gemäß  $\text{Var}[\mathbf{X}] = \text{E}[\mathbf{X}^2] - \text{E}[\mathbf{X}]^2$  wie folgt berechnet (für  $b - p > 3$ ):

$$\begin{aligned}\text{Var}[\mathbf{X}] &= \frac{a(a + b - p - 1)}{(b - p)(b - p - 1)^2(b - p - 3)} \left( (b - p + 1)\mathbf{C}^2 + (b - p - 1)\text{tr}(\mathbf{C})\mathbf{C} \right) \\ &= \frac{a + b - p - 1}{a(b - p)(b - p - 3)} \left( (b - p + 1)\text{E}[\mathbf{X}]^2 + (b - p - 1)\text{tr}(\text{E}[\mathbf{X}])\text{E}[\mathbf{X}] \right).\end{aligned}$$

## B.4 Produktformel für multivariate Normalverteilungen

Unter der Voraussetzung, dass die Kovarianzmatrizen  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{P}$  symmetrisch, positiv definit und damit auch invertierbar<sup>5</sup> sind, lässt sich das Produkt  $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})$  zweier multivariater Normalverteilungen unter Berücksichtigung der Formel

$$\mathcal{N}_d(\mathbf{y}; \mathbf{H}\mathbf{x}, \mathbf{R})\mathcal{N}_p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \mathbf{P}) = \mathcal{N}_d(\mathbf{y}; \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{S})\mathcal{N}_p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu} + \mathbf{K}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}), \mathbf{P} - \mathbf{K}\mathbf{S}\mathbf{K}^T) \quad (\text{B.11})$$

<sup>5</sup>Auf den Fall einer singulären Kovarianzmatrix, die zu einer singulären multivariaten Normalverteilung führen würde [106], wird in dieser Arbeit nicht eingegangen.

mit

$$\mathbf{S} = \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T + \mathbf{R} \quad \text{und} \quad \mathbf{K} = \mathbf{P}\mathbf{H}^T\mathbf{S}^{-1} \quad (\text{B.12})$$

durch ein Produkt  $p(\mathbf{y})p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$  ersetzen. Mit dieser Gleichung kann unmittelbar die Marginaldichte

$$p(\mathbf{y}) = \int p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \mathcal{N}_d(\mathbf{y}; \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{S})$$

oder die bedingte Dichte

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \propto p(\mathbf{y}|\mathbf{x})p(\mathbf{x}) = \mathcal{N}_p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu} + \mathbf{K}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}), \mathbf{P} - \mathbf{K}\mathbf{S}\mathbf{K}^T)$$

angegeben werden. Zum Beweis dieser Produktformel betrachten wir zunächst den Exponenten

$$q := (\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x})^T\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}) + (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \quad (\text{B.13})$$

der gemeinsamen Verteilungsdichte

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \mathcal{N}_d(\mathbf{y}; \mathbf{H}\mathbf{x}, \mathbf{R})\mathcal{N}_p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu}, \mathbf{P}) = |2\pi\mathbf{R}|^{-\frac{1}{2}}|2\pi\mathbf{P}|^{-\frac{1}{2}}\exp(-\frac{1}{2}q).$$

Ausmultiplizieren von Gleichung (B.13) ergibt

$$\begin{aligned} q = & \mathbf{y}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} - \mathbf{x}^T\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} - \mathbf{y}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{x}^T\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{x} \\ & + \mathbf{x}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{x}^T\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\mu}^T\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\mu}, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

so dass die quadratische Ergänzung mit dem noch zu bestimmenden Erwartungswert  $\mathbf{m}$  und der Kovarianzmatrix<sup>6</sup>  $\mathbf{Q}$ , d. h.

$$\mathbf{Q}^{-1} := \mathbf{P}^{-1} + \mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}, \quad (\text{B.15})$$

zu der Darstellung

$$q = (\mathbf{x} - \mathbf{m})^T\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m}) - \mathbf{m}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{m} + \mathbf{y}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} + \boldsymbol{\mu}^T\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\mu}$$

führt. In diesem Zusammenhang interpretieren wir  $q$  als

$$q := q_{\mathbf{x}|\mathbf{y}} + q_{\mathbf{y}}$$

mit

$$\begin{aligned} q_{\mathbf{x}|\mathbf{y}} & := (\mathbf{x} - \mathbf{m})^T\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m}) \\ q_{\mathbf{y}} & := \mathbf{y}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} + \boldsymbol{\mu}^T\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\mu} - \mathbf{m}^T\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{m}. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

<sup>6</sup>Im Folgenden wird sich zeigen, dass  $p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \mathcal{N}_p(\mathbf{x}; \mathbf{m}, \mathbf{Q})$  gilt.

Unter Berücksichtigung des Matrix-Inversions-Lemmas aus (A.20) und der Ausdrücke für  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{K}$  in (B.12) können wir die Berechnung der Kovarianzmatrix der Dichte  $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$  wie folgt<sup>7</sup> bestätigen:

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H})^{-1} = \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{H}^T (\mathbf{R} + \mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{H}^T)^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P} \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned} &= \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{H}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P} = \mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{H}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P} \\ &= \mathbf{P} - \mathbf{K} \mathbf{S} \mathbf{K}^T. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Eine Gleichung zum Berechnen des Erwartungswertvektors  $\mathbf{m}$  in  $q_{\mathbf{x}|\mathbf{y}}$  ergibt sich durch den Vergleich der  $\mathbf{x}^T$ -Mischterme in Gleichung (B.14) mit  $\mathbf{x}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{m}$ , d. h.

$$\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{m} = \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} + \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\mu}$$

und damit

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \mathbf{Q} (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} + \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\mu}) \\ &= (\mathbf{P} - \mathbf{P} \mathbf{H}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}) (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} + \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\mu}) \\ &= \boldsymbol{\mu} - \mathbf{K} \mathbf{H} \boldsymbol{\mu} + \mathbf{P} \mathbf{H}^T (\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{S}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}) \mathbf{y}. \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Unter Beachtung des Matrix-Inversions-Lemmas (A.20) für

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{S}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}) &= (\mathbf{R}^{-1} - (\mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}) \\ &= (\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} (\mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}) \\ &= (\mathbf{R} + \mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P} \mathbf{H}^T)^{-1} = \mathbf{S}^{-1} \end{aligned}$$

bestätigen wir auch die Gleichung für den Erwartungswert  $\mathbf{m}$  der Dichte  $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$  entsprechend

$$\mathbf{m} = \boldsymbol{\mu} - \mathbf{K} \mathbf{H} \boldsymbol{\mu} + \mathbf{P} \mathbf{H}^T \mathbf{S}^{-1} \mathbf{y} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{K} (\mathbf{y} - \mathbf{H} \boldsymbol{\mu}).$$

Die Ergebnisse in (B.17) und (B.19) erlauben nun auch die Berechnung von  $\mathbf{m}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{m}$  gemäß<sup>8</sup>

$$\mathbf{m}^T \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{m} = (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} + \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{Q} (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} + \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\mu}),$$

so dass für  $q_{\mathbf{y}}$  aus Gleichung (B.16) das Folgende gilt:

$$q_{\mathbf{y}} = \mathbf{y}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\mu} - (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} + \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{Q} (\mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{y} + \mathbf{P}^{-1} \boldsymbol{\mu}). \quad (\text{B.20})$$

Durch quadratische Ergänzung mit dem noch zu bestimmenden Vektor  $\mathbf{v}$  erhalten wir

$$\begin{aligned} q_{\mathbf{y}} &= (\mathbf{y} - \mathbf{v})^T (\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{Q} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}) (\mathbf{y} - \mathbf{v}) \\ &\quad - \mathbf{v}^T (\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{Q} \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}) \mathbf{v} + \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{P}^{-1}) \boldsymbol{\mu}, \end{aligned}$$

<sup>7</sup>Die Matrizen  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{P}$  sind symmetrisch, d. h.  $\mathbf{K}^T = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{P}$ . Beim Berechnen von  $\mathbf{K}^T$  haben wir berücksichtigt, dass die Inverse der symmetrischen invertierbaren Matrix  $\mathbf{S}$  erneut symmetrisch ist, d. h.  $\mathbf{S}^{-1} = (\mathbf{S}^{-1})^T$ . Dieser Zusammenhang folgt unmittelbar aus  $\mathbf{S} \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{I} = (\mathbf{S}^{-1} \mathbf{S})^T = \mathbf{S}^T (\mathbf{S}^{-1})^T = \mathbf{S} (\mathbf{S}^{-1})^T$ .

<sup>8</sup>Die Matrix  $\mathbf{Q}$  ist symmetrisch, d. h.  $\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}$ .

wobei sich diese Gleichung unter Berücksichtigung des Matrix-Inversions-Lemmas (A.20) für

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1} &= \mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}(\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1} \\ &= (\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T)^{-1} = \mathbf{S}^{-1}\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{P}^{-1} &= \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H})^{-1}\mathbf{P}^{-1} \\ &= \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{H}^T(\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T)^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P})\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{H}^T\mathbf{S}^{-1}\mathbf{H}\end{aligned}$$

wie folgt vereinfacht:

$$q_y = (\mathbf{y} - \mathbf{v})^T\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{v}) - \mathbf{v}^T\mathbf{S}^{-1}\mathbf{v} + \boldsymbol{\mu}^T\mathbf{H}^T\mathbf{S}^{-1}\mathbf{H}\boldsymbol{\mu}. \quad (\text{B.21})$$

Eine Gleichung zum Berechnen von  $\mathbf{v}$  in  $q_y$  ergibt sich durch den Vergleich der  $\mathbf{y}^T$ -Mischterme in (B.20) mit  $\mathbf{y}^T\mathbf{S}^{-1}\mathbf{v}$ , d. h.

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{Q}\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\mu}$$

und damit unter Beachtung von Gleichung (B.17)

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{S}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}(\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{H}^T(\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T)^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P})\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\mu} \\ &= \mathbf{S}(\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T(\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T)^{-1})\mathbf{H}\boldsymbol{\mu}.\end{aligned}$$

Mit dem Matrix-Inversions-Lemma (A.20) folgt wiederum

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T(\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T)^{-1} &= \mathbf{R}^{-1} - \mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T(\mathbf{R} + \mathbf{R}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T)^{-1}\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1} \\ &= (\mathbf{R} + \mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R})^{-1} = \mathbf{S}^{-1}\end{aligned}$$

und somit

$$\mathbf{v} = \mathbf{S}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{H}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}.$$

Unter Berücksichtigung dieses Ergebnisses reduziert sich Gleichung (B.21) auf

$$q_y = (\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\mu})^T\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}).$$

Auf diese Weise haben wir letztlich  $\mathbf{H}\boldsymbol{\mu}$  als Erwartungswertvektor und  $\mathbf{S}$  als Kovarianzmatrix der Dichte  $p(\mathbf{y})$  bestätigt.

Der Vollständigkeit halber betrachten wir ebenfalls die Normierungsfaktoren der Normalverteilungen in Gleichung (B.11). Da die Matrizen  $\mathbf{R}$  und  $\mathbf{P}$  invertierbar sind, lässt sich die Determinante der Matrix  $\mathbf{S}$  unter Berücksichtigung von (A.18) und (B.15) auch entsprechend

$$|\mathbf{S}| = |\mathbf{H}\mathbf{P}\mathbf{H}^T + \mathbf{R}| = |\mathbf{R}| \cdot |\mathbf{P}| \cdot |\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}| = |\mathbf{R}| \cdot |\mathbf{P}| \cdot |\mathbf{Q}^{-1}|$$

berechnen. Da auch  $\mathbf{Q}^{-1}$  invertierbar ist, gilt  $|\mathbf{Q}^{-1}| = 1/|\mathbf{Q}|$  [59, Seite 188], so dass wir mit dem Ausdruck für  $\mathbf{Q}$  aus Gleichung (B.18) unmittelbar die Äquivalenz der Normierungsfaktoren in Gleichung (B.11) bestätigen können.

chung (B.11) nachweisen:

$$\begin{aligned} |2\pi\mathbf{S}|^{-\frac{1}{2}} \cdot |2\pi(\mathbf{P} - \mathbf{K}\mathbf{S}\mathbf{K}^T)|^{-\frac{1}{2}} &= ((2\pi)^d (2\pi)^p \cdot |\mathbf{S}| \cdot |\mathbf{Q}|)^{-\frac{1}{2}} \\ &= ((2\pi)^d (2\pi)^p \cdot |\mathbf{R}| \cdot |\mathbf{P}| \cdot |\mathbf{Q}^{-1}| \cdot |\mathbf{Q}|)^{-\frac{1}{2}} = |2\pi\mathbf{R}|^{-\frac{1}{2}} \cdot |2\pi\mathbf{P}|^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Damit haben wir die Gültigkeit der Produktformel in Gleichung (B.11) bestätigt, d. h.

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \mathcal{N}_p(\mathbf{x}; \mathbf{Q}(\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\mu} + \mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y}), \mathbf{Q}) = \mathcal{N}_p(\mathbf{x}; \boldsymbol{\mu} + \mathbf{K}(\mathbf{y} - \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}), \mathbf{P} - \mathbf{K}\mathbf{S}\mathbf{K}^T)$$

und

$$p(\mathbf{y}) = \mathcal{N}_d(\mathbf{y}; \mathbf{v}, \mathbf{S}) = \mathcal{N}_d(\mathbf{y}; \mathbf{H}\boldsymbol{\mu}, \mathbf{S}).$$

## B.5 Produktformel für Wishart-Verteilungen

Das Produkt  $p(\mathbf{Y}|\mathbf{X})p(\mathbf{X})$  aus einer gewöhnlichen und einer inversen Wishart-Verteilung kann unter Berücksichtigung der Formel

$$\mathcal{W}_p(\mathbf{Y}; m, \mathbf{X}/n) \mathcal{IW}_p(\mathbf{X}; \nu, \mathbf{C}) = \mathcal{GB}_p^{II}(\mathbf{Y}; \frac{1}{2}m, \frac{1}{2}\nu; \mathbf{C}/n, \mathbf{0}) \mathcal{IW}_p(\mathbf{X}; m + \nu, n\mathbf{Y} + \mathbf{C}) \quad (\text{B.22})$$

durch ein Produkt  $p(\mathbf{Y})p(\mathbf{X}|\mathbf{Y})$  ersetzt werden. Mit dieser Gleichung lässt sich unmittelbar die Marginaldichte

$$p(\mathbf{Y}) = \int p(\mathbf{Y}|\mathbf{X})p(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \mathcal{GB}_p^{II}(\mathbf{Y}; \frac{1}{2}m, \frac{1}{2}\nu, \mathbf{C}/n, \mathbf{0})$$

oder die bedingte Dichte

$$p(\mathbf{X}|\mathbf{Y}) \propto p(\mathbf{Y}|\mathbf{X})p(\mathbf{X}) = \mathcal{IW}_p(\mathbf{X}; m + \nu, n\mathbf{Y} + \mathbf{C})$$

angeben. Zum Beweis der Produktformel (B.22) berechnen wir ausgehend von der gemeinsamen Verteilungsdichte  $p(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = p(\mathbf{Y}|\mathbf{X})p(\mathbf{X})$  zunächst das Folgende:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) &= p(\mathbf{Y}|\mathbf{X})p(\mathbf{X}) = \mathcal{W}_p(\mathbf{Y}; m, \mathbf{X}/n) \mathcal{IW}_p(\mathbf{X}; \nu, \mathbf{C}) \\ &= \left( 2^{\frac{1}{2}mp} 2^{\frac{1}{2}\nu p} \Gamma_p\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma_p\left(\frac{\nu}{2}\right) \right)^{-1} |\mathbf{X}/n|^{-\frac{1}{2}m} |\mathbf{Y}|^{\frac{1}{2}(m-p-1)} |\mathbf{C}|^{\frac{1}{2}\nu} |\mathbf{X}|^{-\frac{1}{2}(\nu+p+1)} \\ &\quad \cdot \text{etr}\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{X}/n)^{-1}\mathbf{Y}\right) \text{etr}\left(-\frac{1}{2}\mathbf{C}\mathbf{X}^{-1}\right) \\ &= \left( 2^{\frac{1}{2}(m+\nu)p} \Gamma_p\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma_p\left(\frac{\nu}{2}\right) \right)^{-1} n^{\frac{1}{2}mp} |\mathbf{C}|^{\frac{1}{2}\nu} |\mathbf{Y}|^{\frac{1}{2}(m-p-1)} |\mathbf{X}|^{-\frac{1}{2}(m+\nu+p+1)} \text{etr}\left(-\frac{1}{2}(n\mathbf{Y} + \mathbf{C})\mathbf{X}^{-1}\right). \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung lässt sich durch den Vergleich mit Gleichung (B.8) auf die Parameter der Dichte einer inversen Wishart-Verteilung schließen: Die Exponentialfunktion liefert den Hinweis auf die Parametermatrix  $n\mathbf{Y} + \mathbf{C}$ , während der Exponent von  $|\mathbf{X}|$  die Anzahl der Freiheitsgrade mit  $m + \nu$  vorgibt. Auf diese Weise erhalten wir

$$\begin{aligned} p(\mathbf{Y}|\mathbf{X})p(\mathbf{X}) &= \mathcal{W}_p(\mathbf{Y}; m, \mathbf{X}/n) \mathcal{IW}_p(\mathbf{X}; \nu, \mathbf{C}) \\ &= \left( \Gamma_p\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma_p\left(\frac{\nu}{2}\right) \right)^{-1} \Gamma_p\left(\frac{m+\nu}{2}\right) n^{\frac{1}{2}mp} |\mathbf{C}|^{\frac{1}{2}\nu} |\mathbf{Y}|^{\frac{1}{2}(m-p-1)} |n\mathbf{Y} + \mathbf{C}|^{-\frac{1}{2}(m+\nu)} \cdot p(\mathbf{X}|\mathbf{Y}) \end{aligned}$$

mit

$$p(\mathbf{X}|\mathbf{Y}) = \mathcal{IW}_p(\mathbf{X}; m + \nu, n\mathbf{Y} + \mathbf{C}).$$

Unter Berücksichtigung der multivariaten Betafunktion (A.12) und der Nullmatrix  $\mathbf{0}$  erhalten wir anschließend den gesuchten Ausdruck für die Dichte  $p(\mathbf{Y})$ , d. h.

$$\begin{aligned} p(\mathbf{Y}) &= \left( \Gamma_p\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma_p\left(\frac{\nu}{2}\right) \right)^{-1} \Gamma_p\left(\frac{m+\nu}{2}\right) n^{\frac{1}{2}mp} |\mathbf{C}|^{\frac{1}{2}\nu} |\mathbf{Y}|^{\frac{1}{2}(m-p-1)} |n\mathbf{Y} + \mathbf{C}|^{-\frac{1}{2}(m+\nu)} \\ &= \left( \beta_p\left(\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}\nu\right) \right)^{-1} n^{\frac{1}{2}mp} |\mathbf{C}|^{\frac{1}{2}\nu} |\mathbf{Y}|^{\frac{1}{2}(m-p-1)} n^{-\frac{1}{2}(m+\nu)p} |\mathbf{Y} + \mathbf{C}/n|^{-\frac{1}{2}(m+\nu)} \\ &= \left( \beta_p\left(\frac{1}{2}m, \frac{1}{2}\nu\right) \right)^{-1} |\mathbf{C}/n + \mathbf{0}|^{\frac{1}{2}\nu} |\mathbf{Y} - \mathbf{0}|^{\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}(p+1)} |\mathbf{Y} + \mathbf{C}/n|^{-\frac{1}{2}(m+\nu)} \end{aligned}$$

und letztlich

$$p(\mathbf{Y}) = \mathcal{GB}_p^{II}(\mathbf{Y}; \frac{1}{2}m, \frac{1}{2}\nu, \mathbf{C}/n, \mathbf{0}).$$

Damit haben wir die Gültigkeit der Produktformel (B.22) bestätigt.

## B.6 Gleichverteilte Messungen über ein $d$ -dimensionales Ellipsoid

Zur Modellierung der Messstreuung wird in Abschnitt 2.3.1 die Kovarianzmatrix einer entsprechenden Zufallsvariablen betrachtet. Die Verteilung der Messungen entspricht einer Gleichverteilung über das räumliche Ausmaß eines  $d$ -dimensionalen Ellipsoids ( $d \in \mathbb{N}^*$ ). Zur Berechnung der Kovarianzmatrix benötigen wir die Dichtefunktion einer solchen Zufallsvariablen. Diese Dichtefunktion lässt sich über das Volumen eines  $d$ -dimensionalen Ellipsoids bestimmen.

Die Längen der Halbachsen eines  $d$ -dimensionalen Ellipsoids seien gegeben durch  $a_1, \dots, a_d$ . Dann ergibt sich das Volumen dieses Ellipsoids zu [141]

$$\mathcal{V}_d(a_1, \dots, a_d) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} \prod_{j=1}^d a_j.$$

Ein Ellipsoid lässt sich auch durch eine SPD Matrix beschreiben, wobei ein Eigenwert dieser Matrix der quadrierten Länge einer Halbachse entspricht. Sei  $\Sigma$  die SPD  $d \times d$ -Matrix eines  $d$ -dimensionalen Ellipsoids. Da die Determinante von  $\Sigma$  dem Produkt der Eigenwerte entspricht, berechnet sich das Volumen des Ellipsoids zu

$$\mathcal{V}_d(\Sigma) = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} \sqrt{|\Sigma|}. \quad (\text{B.23})$$

Für  $d = 1$  ergibt sich die Länge eines Intervalls, für  $d = 2$  der Flächeninhalt einer Ellipse, für  $d = 3$  das Volumen eines dreidimensionalen Ellipsoids, d. h.

$$\mathcal{V}_1(\Sigma) = 2\sqrt{\Sigma}, \quad \mathcal{V}_2(\Sigma) = \pi\sqrt{|\Sigma|} \quad \text{und} \quad \mathcal{V}_3(\Sigma) = \frac{4\pi}{3}\sqrt{|\Sigma|}.$$

### B.6.1 Dichtefunktion und Kovarianzmatrix der gleichverteilten Zufallsvariablen

Ein Ellipsoid mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung sei durch die SPD  $d \times d$ -Parametermatrix  $\Sigma$  ( $\Sigma > \mathbf{0}$ ) definiert, so dass sich sein Volumen entsprechend Gleichung (B.23) berechnen lässt. Dann genügt der Zufallsvektor  $\mathbf{x}$  einer erwartungswertfreien Gleichverteilung über das räumliche Ausmaß

dieses  $d$ -dimensionalen Ellipsoids, d. h.  $\mathbf{x} \sim \mathcal{U}_d(\Sigma)$ , wenn  $\mathbf{x}$  die folgende Dichtefunktion besitzt:

$$\mathcal{U}_d(\mathbf{x}; \Sigma) = \begin{cases} \Gamma(\frac{d}{2} + 1) (\pi^{d/2} \sqrt{|\Sigma|})^{-1} & \text{für } \mathbf{x}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{x} \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie in Abschnitt B.6.2 gezeigt wird, ergibt sich die Kovarianzmatrix des Zufallsvektors  $\mathbf{x}$  zu

$$\text{Var}[\mathbf{x}] = \frac{1}{d+2} \Sigma. \quad (\text{B.24})$$

### B.6.2 Berechnung der Kovarianzmatrix dieser gleichverteilten Zufallsvariablen

Sei  $\mathbf{x} \sim \mathcal{U}_d(\Sigma)$ . Dann berechnet sich die Kovarianzmatrix des Zufallsvektors  $\mathbf{x}$  unter Berücksichtigung von  $E[\mathbf{x}] = \mathbf{0}$  formal wie folgt:

$$\text{Var}[\mathbf{x}] = E[\mathbf{xx}^\top] = \frac{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}{\pi^{d/2} \sqrt{|\Sigma|}} \int \cdots \int_{\mathbf{x}^\top \Sigma^{-1} \mathbf{x} \leq 1} \mathbf{xx}^\top dx_1 \cdots dx_d.$$

Mit Hilfe der Quadratwurzel der Matrix  $\Sigma$ , d. h.  $\mathbf{C} := \sqrt{\Sigma}$  entsprechend  $\Sigma = \mathbf{C}^2$ , führen wir zum Berechnen von  $\text{Var}[\mathbf{x}]$  die folgende Substitution<sup>9</sup> durch:

$$\mathbf{v} := \mathbf{C}^{-1} \mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{C} \mathbf{v}.$$

In diesem Zusammenhang ist noch die Funktionaldeterminante  $|\mathbf{C}| = \sqrt{|\Sigma|}$  zu beachten. Auf diese Weise erhalten wir

$$\text{Var}[\mathbf{x}] = \frac{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}{\pi^{d/2}} \cdot \mathbf{C} \left( \int \cdots \int_{\mathbf{v}^\top \mathbf{v} \leq 1} \mathbf{vv}^\top dv_1 \cdots dv_d \right) \mathbf{C} = \frac{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}{\pi^{d/2}} \cdot \mathbf{C} \mathbf{V} \mathbf{C} \quad (\text{B.25})$$

mit dem noch zu berechnenden Ausdruck

$$\mathbf{V} := \int \cdots \int_{\mathbf{v}^\top \mathbf{v} \leq 1} \mathbf{vv}^\top dv_1 \cdots dv_d. \quad (\text{B.26})$$

#### B.6.2.1 Berechnung für $d = 1$

Im eindimensionalen Fall berechnet sich die mehrdimensionale Integration in Gleichung (B.26) unmittelbar zu

$$\int_{v_1^2 \leq 1} v_1^2 dv_1 = \int_{-1}^1 v_1^2 dv_1 = \frac{2}{3},$$

so dass sich aus Gleichung (B.25) für die Varianz der in diesem Fall skalaren Zufallsvariablen  $x$

$$\text{Var}[x] = \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + 1)}{\pi^{1/2}} \cdot \frac{2}{3} \Sigma = \frac{1}{3} \Sigma \quad (\text{B.27})$$

<sup>9</sup>Die Quadratwurzel einer SPD Matrix ist auch eine SPD Matrix [59, Seite 543 ff.] und damit invertierbar.

ergibt. Unter Berücksichtigung der entsprechenden Intervalllänge  $\mathcal{V}_1(\Sigma) = 2\sqrt{\Sigma}$  haben wir damit für  $d = 1$  das aus der Literatur bekannte Ergebnis  $\text{Var}[x] = (\mathcal{V}_1(\Sigma))^2/12$  bestätigt [38, Seite 177].

### B.6.2.2 Berechnung für $d \geq 2$

Zum Integrieren über die mehrdimensionale Einheitskugel in Gleichung (B.26) bieten sich  $d$ -dimensionale Polarkoordinaten [22] an, d. h.

$$\begin{aligned} v_1 &= r \cos \varphi \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cdots \sin \vartheta_{d-3} \sin \vartheta_{d-2} \\ v_2 &= r \sin \varphi \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cdots \sin \vartheta_{d-3} \sin \vartheta_{d-2} \\ v_3 &= r \cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cdots \sin \vartheta_{d-3} \sin \vartheta_{d-2} \\ v_4 &= r \cos \vartheta_2 \cdots \sin \vartheta_{d-3} \sin \vartheta_{d-2} \\ &\vdots \\ v_{d-1} &= r \cos \vartheta_{d-3} \sin \vartheta_{d-2} \\ v_d &= r \cos \vartheta_{d-2}. \end{aligned}$$

Bei dieser Koordinatentransformation ist die Funktionaldeterminante  $r^{d-1} \prod_{k=1}^{d-2} (\sin \vartheta_k)^k$  zu berücksichtigen [22], so dass sich aus Gleichung (B.26) der Ausdruck

$$\mathbf{V} = \int_0^\pi \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 \mathbf{v}\mathbf{v}^\top r^{d-1} dr d\varphi \prod_{k=1}^{d-2} (\sin \vartheta_k)^k d\vartheta_k \quad (\text{B.28})$$

ergibt. Die Integration über  $r$  berechnet sich für alle Einträge der Matrix  $\mathbf{V}$  zu

$$\int_0^1 r^2 r^{d-1} dr = \int_0^1 r^{d+1} dr = (d+2)^{-1}.$$

Im Folgenden werden die verschiedenen Elemente der  $d \times d$ -Matrix  $\mathbf{V}$  mit  $v_{i,j}$  bezeichnet, d. h.  $\mathbf{V} = (v_{i,j})$ . Darüber hinaus ist  $\mathbf{V}$  symmetrisch, d. h.  $v_{i,j} = v_{j,i}$ .

**Matrizelemente  $v_{i,j}$  außerhalb der Hauptdiagonale** Zunächst werten wir Gleichung (B.28) für diejenigen Matrizelemente von  $\mathbf{V}$  aus, die nicht auf der Hauptdiagonale liegen, d. h. für  $v_{i,j} = v_{j,i}$  mit  $i \neq j$ . In den ersten beiden Spalten und Zeilen sind diese Matrizeinträge aufgrund der Integration über  $\varphi$  gleich null. Im Einzelnen ergibt sich für  $v_{1,2} = v_{2,1}$

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi = 0$$

[104, Seite 115], für  $v_{1,m} = v_{m,1}$  ( $m = 3, \dots, d$ )

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi = 0$$

und für  $v_{2,m} = v_{m,2}$  ( $m = 3, \dots, d$ )

$$\int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi = 0.$$

Darüber hinaus sind auch die restlichen Matrizelemente außerhalb der Hauptdiagonale gleich null, da sich die jeweilige Integration über  $\vartheta_k$  ( $k = 1, \dots, d-2$ ) für die verbleibenden Einträge in der

$(k + 2)$ -ten Spalte und Zeile wie folgt auswerten lässt:

$$\int_0^\pi \cos \vartheta_k (\sin \vartheta_k)^k d\vartheta_k = \left[ (k + 1)^{-1} (\sin \vartheta_k)^{k+1} \right]_{\vartheta_k=0}^{\vartheta_k=\pi} = 0.$$

Deshalb entspricht  $\mathbf{V}$  einer Diagonalmatrix.

**Matrizelemente  $v_{i,i}$  der Hauptdiagonale** Zum Auswerten von Gleichung (B.28) für die Hauptdiagonalelemente von  $\mathbf{V}$  wird zunächst die Integration über  $\varphi$  betrachtet. Im Einzelnen sind für die verschiedenen Matriceinträge die Ergebnisse

$$\int_0^{2\pi} (\cos \varphi)^2 d\varphi = \pi, \quad \int_0^{2\pi} (\sin \varphi)^2 d\varphi = \pi \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

[104, Seite 106 f.] zu berücksichtigen. Infolgedessen lässt sich der Ausdruck für die Matrix  $\mathbf{V}$  aus Gleichung (B.28) entsprechend

$$\mathbf{V} = \frac{\pi}{d+2} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_d) \prod_{k=1}^{d-2} d\vartheta_k \quad (\text{B.29})$$

konkretisieren, wobei die Einträge dieser Diagonalmatrix wie folgt lauten:

$$\omega_m = \left( \prod_{k=1}^{d-2} (\sin \vartheta_k)^{k+2} \right) \quad (\text{B.30})$$

für  $m = 1, 2$  und

$$\omega_m = 2 (\cos \vartheta_{m-2})^2 \left( \prod_{\ell=m-1}^{d-2} (\sin \vartheta_\ell)^2 \right) \left( \prod_{k=1}^{d-2} (\sin \vartheta_k)^k \right) \quad (\text{B.31})$$

für  $m = 3, \dots, d$ .

Zum Auswerten von Gleichung (B.29) wird u. a. ein allgemeiner Ausdruck für Integrale der Form  $\int_0^\pi (\sin \vartheta)^m d\vartheta$  benötigt. Diese Berechnungen werden aus Gründen der Übersichtlichkeit im Abschnitt A.3 vorgestellt. Mit diesen Ergebnissen, d. h. mit Gleichung (A.25), erhalten wir im Fall  $m = 1, 2$  mit dem Integranden (B.30) unmittelbar

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \omega_m \prod_{k=1}^{d-2} d\vartheta_k &= \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \prod_{k=1}^{d-2} (\sin \vartheta_k)^{k+2} d\vartheta_k \\ &= \prod_{k=1}^{d-2} \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}(k+3))}{\Gamma(\frac{1}{2}k+2)} = \frac{\pi^{(d-2)/2} \cdot \Gamma(2)}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} = \frac{\pi^{(d-2)/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}. \end{aligned}$$

Im Fall  $m = 3, \dots, d$  mit dem Integranden (B.31) ergibt sich unter Berücksichtigung der Umformung (A.22) zunächst

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \omega_m \prod_{k=1}^{d-2} d\vartheta_k &= 2 \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi (\cos \vartheta_{m-2})^2 \left( \prod_{\ell=1}^{m-2} (\sin \vartheta_\ell)^\ell \right) \left( \prod_{k=m-1}^{d-2} (\sin \vartheta_k)^{k+2} \right) \prod_{k=1}^{d-2} d\vartheta_k \\ &= \frac{2}{m} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \left( \prod_{\ell=1}^{m-2} (\sin \vartheta_\ell)^\ell \right) \left( \prod_{k=m-1}^{d-2} (\sin \vartheta_k)^{k+2} \right) \prod_{k=1}^{d-2} d\vartheta_k, \end{aligned}$$

so dass sich dieser Ausdruck mit dem Zusammenhang (A.25) und der Funktionalgleichung der Gammafunktion (A.1) entsprechend

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi w_m \prod_{k=1}^{d-2} d\vartheta_k &= \frac{2}{m} \left( \prod_{\ell=1}^{m-2} \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}(\ell+1))}{\Gamma(\frac{1}{2}\ell+1)} \right) \left( \prod_{k=m-1}^{d-2} \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(\frac{1}{2}(k+3))}{\Gamma(\frac{1}{2}k+2)} \right) \\ &= \frac{2\pi^{(d-2)/2}}{m} \cdot \frac{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}{\Gamma(\frac{m}{2})} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} = \frac{\pi^{(d-2)/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} \end{aligned}$$

auswerten lässt. Demnach handelt es sich bei der Diagonalmatrix  $\mathbf{V}$  aus Gleichung (B.29) um eine  $d$ -dimensionale Skalarmatrix, die sich gemäß

$$\mathbf{V} = \frac{\pi^{d/2}}{(d+2) \cdot \Gamma(\frac{d}{2}+1)} \cdot \mathbf{I}$$

berechnet. Damit ergibt sich aus Gleichung (B.25) die Kovarianzmatrix des Zufallsvektors  $\mathbf{x}$  zu

$$\text{Var}[\mathbf{x}] = \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}{\pi^{d/2}} \cdot \mathbf{CVC} = \frac{1}{d+2} \Sigma.$$

Der Vergleich mit Gleichung (B.27) zeigt, dass dieses Ergebnis auch für den Fall einer skalaren Zufallsvariable gilt, d. h. für den Fall  $d = 1$ . Damit haben wir den Ausdruck für die Kovarianzmatrix in Gleichung (B.24) bestätigt.



# MMSE-Schätzer für Zufallsmatrizen

Mathematisch betrachtet entsprechen Tracking-Algorithmen dem Schätzen eines Systemzustandes aus vorliegenden Messungen, wobei diese Beobachtungswerte häufig mit Messfehlern behaftet sind. Im Folgenden betrachten wir den Fall, dass sich ein Systemzustand durch die Zufallsmatrix<sup>1</sup>  $\mathbf{X}$  modellieren lässt, während die vorliegende Messung durch die Zufallsvariable  $\mathbf{Y}$  angegeben wird. Des Weiteren wird die A-priori-Verteilung der Zufallsvariablen  $\mathbf{X}$ , d. h.  $p(\mathbf{x}) := f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ , als bekannt vorausgesetzt.

Gesucht ist nun ein Schätzer  $\hat{\mathbf{x}}$ , der den mittleren quadratischen Fehler (kurz *MSE* für engl. *Mean Square Error*) minimiert und deshalb als MMSE-Schätzer<sup>2</sup>  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{MMSE}}$  bezeichnet wird. Dabei gilt für den MSE: Ausgehend von der Schätzfehlermatrix  $\tilde{\mathbf{x}} := \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{X}$  berechnen wir zunächst elementweise den jeweiligen mittleren quadratischen Schätzfehler und erhalten dann durch Aufsummieren den MSE des Schätzers. Mit Hilfe des *vec*-Operators (A.15) ergibt sich der MMSE-Schätzer demnach zu

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_{\text{MMSE}}(\mathbf{Y}) &= \arg \min_{\hat{\mathbf{x}}} \mathbb{E} \left[ (\text{vec}(\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{Y}) - \mathbf{X}))^\top \text{vec}(\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{Y}) - \mathbf{X}) \right] \\ &= \arg \min_{\hat{\mathbf{x}}} \text{tr} \left( \mathbb{E} \left[ (\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{Y}) - \mathbf{X})^\top (\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{Y}) - \mathbf{X}) \right] \right).\end{aligned}$$

Würde der Systemzustand lediglich durch eine skalare Zufallsvariable oder einen Zufallsvektor modelliert, so erhielten wir aus dieser Gleichung auch die bekannten Definitionen des MMSE-Schätzers aus der Literatur, siehe etwa [6, Seite 99] oder [41, Seite 17]. Daher ähnelt die nachfolgende Berechnung des MMSE-Schätzers für Zufallsmatrizen auch weitgehend der mathematischen Vorgehensweise zum Berechnen des MMSE-Schätzers für Zufallsvektoren in [41, Seite 17 f.].

Da  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{MMSE}}$  offensichtlich von beiden Zufallsvariablen abhängt, berechnet sich der Erwartungswert unter Berücksichtigung der gemeinsamen Dichtefunktion  $p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := f_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  und der sogenannten A-posteriori-Dichte  $p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) := f_{\mathbf{X}|\mathbf{Y}}(\mathbf{x}|\mathbf{y})$  zu

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \left[ (\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{Y}) - \mathbf{X})^\top (\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{Y}) - \mathbf{X}) \right] &= \iint (\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) - \mathbf{x})^\top (\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) - \mathbf{x}) p(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\ &= \iint (\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) - \mathbf{x})^\top (\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) - \mathbf{x}) p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x} p(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.\end{aligned}$$

Da die Dichtefunktion  $p(\mathbf{y}) := f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$  durchweg nichtnegativ ist, genügt zum Minimieren des Gesamtausdruckes die Betrachtung des Integrals

$$\int (\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) - \mathbf{x})^\top (\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) - \mathbf{x}) p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) d\mathbf{x} = \mathbb{E} \left[ (\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) - \mathbf{X})^\top (\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) - \mathbf{X}) \mid \mathbf{Y} = \mathbf{y} \right].$$

<sup>1</sup>Die Matrix  $\mathbf{x}$  bezeichnet in diesem Teil der Arbeit einen festen, aber unbekanntem Wert der Zufallsmatrix  $\mathbf{X}$ . Darüber hinaus bezeichnet  $\mathbf{y}$  einen festen, aber unbekanntem Wert der Zufallsvariablen  $\mathbf{Y}$ .

<sup>2</sup>Für engl. *Minimum Mean Square Error Estimator*.

Gesucht ist also ein Wert  $\hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}}(\mathbf{y})$ , der den mittleren quadratischen Fehler entsprechend

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}}(\mathbf{y}) = \arg \min_{\hat{\mathbf{x}}} \text{tr} \left( \mathbb{E} \left[ (\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) - \mathbf{X})^T (\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) - \mathbf{X}) \mid \mathbf{Y} = \mathbf{y} \right] \right)$$

minimiert. Ausgehend von dem Ansatz  $\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{X} = \hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_0 + \hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{X}$  ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned} \text{tr} \left( \mathbb{E} \left[ (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{X})^T (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{X}) \mid \mathbf{y} \right] \right) &= \text{tr} \left( (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_0)^T (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_0) + (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_0)^T (\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbb{E}[\mathbf{X} \mid \mathbf{y}]) \right. \\ &\quad \left. + (\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbb{E}[\mathbf{X} \mid \mathbf{y}])^T (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_0) + \mathbb{E} \left[ (\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{X})^T (\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{X}) \mid \mathbf{y} \right] \right). \end{aligned}$$

Mit der naheliegenden Wahl  $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbb{E}[\mathbf{X} \mid \mathbf{Y} = \mathbf{y}]$  folgt dann

$$\text{tr} \left( \mathbb{E} \left[ (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{X})^T (\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{X}) \mid \mathbf{y} \right] \right) = \text{tr} \left( (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_0)^T (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_0) + \mathbb{E} \left[ (\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{X})^T (\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{X}) \mid \mathbf{y} \right] \right).$$

Dieser Ausdruck wird aber für

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{opt}}(\mathbf{y}) = \hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbb{E}[\mathbf{X} \mid \mathbf{Y} = \mathbf{y}] = \int \mathbf{x} p(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) d\mathbf{x}$$

minimal, so dass sich letztlich für die eigentliche Minimierungsaufgabe

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{MMSE}}(\mathbf{Y}) = \arg \min_{\hat{\mathbf{x}}} \text{tr} \left( \int \mathbb{E} \left[ (\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) - \mathbf{X})^T (\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) - \mathbf{X}) \mid \mathbf{Y} = \mathbf{y} \right] p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right)$$

der bedingte Erwartungswert als MMSE-Schätzer ergibt (analog zum MMSE-Schätzer für Zufallsvektoren [41, Seite 18]):

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{MMSE}}(\mathbf{Y}) = \mathbb{E}[\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}].$$

Der MMSE-Schätzer ist erwartungstreu, d. h.  $\mathbb{E}[\hat{\mathbf{x}}_{\text{MMSE}}(\mathbf{Y}) - \mathbf{X}] = \mathbf{0}$  wegen

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{\mathbf{x}}_{\text{MMSE}}(\mathbf{Y})] &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E}[\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}] \right] = \int \mathbb{E}[\mathbf{X} \mid \mathbf{y}] p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \iiint \mathbf{x} p(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} d\mathbf{x} = \int \mathbf{x} p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \mathbb{E}[\mathbf{X}]. \end{aligned}$$

Demnach berechnet sich unter Berücksichtigung von

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{\mathbf{x}}_{\text{MMSE}}(\mathbf{Y})^T \mathbf{X}] &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \mathbb{E}[\mathbf{X} \mid \mathbf{y}]^T \mathbf{X} \mid \mathbf{Y} = \mathbf{y} \right] \right] = \iint \mathbb{E}[\mathbf{X} \mid \mathbf{y}]^T \mathbf{x} p(\mathbf{x} \mid \mathbf{y}) d\mathbf{x} p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \int \mathbb{E}[\mathbf{X} \mid \mathbf{y}]^T \mathbb{E}[\mathbf{X} \mid \mathbf{y}] p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \mathbb{E} \left[ \mathbb{E}[\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}]^T \mathbb{E}[\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}] \right] \end{aligned}$$

der minimale mittlere quadratische Fehler entsprechend

$$\text{tr} \left( \mathbb{E} \left[ (\hat{\mathbf{x}}_{\text{MMSE}}(\mathbf{Y}) - \mathbf{X})^T (\hat{\mathbf{x}}_{\text{MMSE}}(\mathbf{Y}) - \mathbf{X}) \right] \right) = \text{tr} \left( \mathbb{E}[\mathbf{X}^T \mathbf{X}] - \mathbb{E} \left[ \mathbb{E}[\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}]^T \mathbb{E}[\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}] \right] \right)$$

sowie die Varianz des Schätzfehlers gemäß

$$\mathbb{E} \left[ (\hat{\mathbf{x}}_{\text{MMSE}}(\mathbf{Y}) - \mathbf{X}) (\hat{\mathbf{x}}_{\text{MMSE}}(\mathbf{Y}) - \mathbf{X})^T \right] = \mathbb{E}[\mathbf{X} \mathbf{X}^T] - \mathbb{E} \left[ \mathbb{E}[\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}] \mathbb{E}[\mathbf{X} \mid \mathbf{Y}]^T \right].$$

## Anhang D

# Konfidenzbereich der 2-D-Objektausdehnung

Im Folgenden berechnen wir das Konfidenzniveau für den in dieser Arbeit vorgestellten Konfidenzbereich der 2-D-Ausdehnungsschätzung. Ausgangspunkt sind die Betrachtungen in Abschnitt 3.2.3, wonach sich das Konfidenzniveau  $c$  zu

$$c(f) = P\{f^{-1} \leq \lambda_{\min} \wedge \lambda_{\max} \leq f\} = \int_{f^{-1}}^f \int_{f^{-1}}^{\lambda_{\max}} p(\lambda_{\max}, \lambda_{\min}) d\lambda_{\min} d\lambda_{\max} \quad (\text{D.1})$$

für  $\lambda_{\max} \geq \lambda_{\min} \geq 0$  ergibt. Für die Verbundverteilungsdichte der beiden Eigenwerte der SPD  $2 \times 2$ -Zufallsmatrix  $\mathbf{Z}$  gilt

$$p(\lambda_{\max}, \lambda_{\min}) = \frac{\alpha^\nu (\lambda_{\max} \lambda_{\min})^{\frac{1}{2}(\nu-3)} (\lambda_{\max} - \lambda_{\min})}{4\Gamma(\nu-1)} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha(\lambda_{\max} + \lambda_{\min})\right),$$

wobei  $\mathbf{Z}$  der Dichtefunktion  $\mathcal{W}_2(\mathbf{Z}; \nu, \alpha^{-1}\mathbf{I})$  mit  $\nu > 1$  und  $\alpha > 0$  genügt. Während Abschnitt D.1 die explizite Berechnung des Doppelintegrals (D.1) vorstellt, vergleicht Abschnitt D.2 dieses Ergebnis für  $c(f)$  mit der Fachliteratur, aus der für den Fall  $\alpha = 1$  die Wahrscheinlichkeit  $P\{\lambda_{\max} \leq f\}$  bekannt ist.

### D.1 Berechnung des Konfidenzniveaus

Für eine übersichtlichere Darstellung beim Berechnen des Doppelintegrals (D.1) werden die folgenden Abkürzungen verwendet:

$$\mu := 2\alpha^{-1}, \quad r := \frac{1}{2}(\nu-3), \quad a := f^{-1}, \quad b := f, \quad x := \lambda_{\max} \quad \text{und} \quad y := \lambda_{\min}. \quad (\text{D.2})$$

Demnach berechnet sich das Konfidenzniveau  $c(a, b) = P\{a \leq y \wedge x \leq b\}$  für  $x \geq y \geq 0$  zu

$$c(a, b) = \frac{2^{\nu-2}}{\mu^\nu \Gamma(\nu-1)} \cdot I(a, b; \mu; r) \stackrel{(\text{A.4})}{=} \frac{\sqrt{\pi}}{\mu^\nu \Gamma(\frac{1}{2}\nu) \Gamma(\frac{1}{2}(\nu-1))} \cdot I(a, b; \mu; r),$$

wobei  $I(a, b; \mu; r)$  durch das Doppelintegral

$$I(a, b; \mu; r) := \int_a^b \int_a^x (xy)^r (x-y) \exp(-\mu^{-1}(x+y)) dy dx \quad (\text{D.3})$$

definiert ist. Ausgehend von

$$\begin{aligned} u(x) &:= -\mu \exp(-\mu^{-1}x) \\ z(x) &:= \int_a^x y^r \exp(-\mu^{-1}y) dy \end{aligned}$$

ergibt sich für den Ausdruck (D.3) zunächst

$$I(a, b; \mu; r) = \int_a^b \underbrace{\exp(-\mu^{-1}x)}_{u'(x)} x^{r+1} \underbrace{\int_a^x y^r \exp(-\mu^{-1}y) dy}_{v(x)} dx \\ - \int_a^b \exp(-\mu^{-1}x) x^r \int_a^x \underbrace{y^{r+1}}_{w(y)} \underbrace{\exp(-\mu^{-1}y)}_{u'(y)} dy dx .$$

Durch Anwenden der Produktregel und Differentiation nach variabler oberer Grenze [24, Seite 460] erhalten wir

$$v'(x) = (r+1)x^r z(x) + x^{2r+1} \exp(-\mu^{-1}x) ,$$

so dass anschließend mit Hilfe der partiellen Integration

$$I(a, b; \mu; r) = \left[ u(x)v(x) \right]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \mu \exp(-\mu^{-1}x) \left( (r+1)x^r z(x) + x^{2r+1} \exp(-\mu^{-1}x) \right) dx \\ - \int_a^b \exp(-\mu^{-1}x) x^r \left( \left[ w(y)u(y) \right]_{y=a}^{y=x} + \mu(r+1)z(x) \right) dx \\ = \left[ u(x)v(x) \right]_{x=a}^{x=b} + \int_a^b \mu x^{2r+1} \exp(-2\mu^{-1}x) dx - \int_a^b \exp(-\mu^{-1}x) x^r \left[ w(y)u(y) \right]_{y=a}^{y=x} dx$$

folgt. Die Auswertung dieses Ausdruckes ergibt zunächst

$$I(a, b; \mu; r) = -\mu b^{r+1} \exp(-\mu^{-1}b) \int_a^b y^r \exp(-\mu^{-1}y) dy + 2\mu \int_a^b x^{2r+1} \exp(-2\mu^{-1}x) dx \\ - \mu a^{r+1} \exp(-\mu^{-1}a) \int_a^b x^r \exp(-\mu^{-1}x) dx .$$

Schließlich führt die Substitution von  $x/\mu$ ,  $y/\mu$  und  $2x/\mu$  durch  $x$  zu

$$I(a, b; \mu; r) = 2^{-(2r+1)} \mu^{2r+3} \int_{2\mu^{-1}a}^{2\mu^{-1}b} x^{2r+1} \exp(-x) dx \\ - \mu^{r+2} \left( a^{r+1} \exp(-\mu^{-1}a) + b^{r+1} \exp(-\mu^{-1}b) \right) \int_{\mu^{-1}a}^{\mu^{-1}b} x^r \exp(-x) dx .$$

Solche Integrale lassen sich mit der unvollständigen Gammafunktion (A.5) wie folgt interpretieren:

$$\int_{x_1}^{x_2} \xi^{t-1} \exp(-\xi) d\xi = \gamma(t, x_2) - \gamma(t, x_1) .$$

Demnach berechnet sich das Doppelintegral (D.3) zu

$$I(a, b; \mu; r) = 2^{-(2r+1)} \mu^{2r+3} \left( \gamma(2r+2, 2\mu^{-1}b) - \gamma(2r+2, 2\mu^{-1}a) \right) \\ - \mu^{r+2} \left( a^{r+1} \exp(-\mu^{-1}a) + b^{r+1} \exp(-\mu^{-1}b) \right) \\ \cdot \left( \gamma(r+1, \mu^{-1}b) - \gamma(r+1, \mu^{-1}a) \right) .$$

Unter Berücksichtigung der Zusammenhänge (D.2) und der regularisierten Gammafunktion (A.7), d. h.

$$\mathcal{P}(\beta, \Lambda) = \frac{\gamma(\beta, \Lambda)}{\Gamma(\beta)} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\Lambda \xi^{\beta-1} \exp(-\xi) d\xi \quad (\beta > 0, \Lambda > 0),$$

ergibt sich das Konfidenzniveau (D.1) für den Konfidenzbereich der 2-D-Ausdehnungsschätzung zu

$$\begin{aligned} c(f) &= \mathcal{P}(2\beta, 2\Lambda_2) - \mathcal{P}(2\beta, 2\Lambda_1) \\ &\quad - \sqrt{\pi} \frac{\Lambda_1^\beta \exp(-\Lambda_1) + \Lambda_2^\beta \exp(-\Lambda_2)}{\Gamma(\beta + \frac{1}{2})} \cdot (\mathcal{P}(\beta, \Lambda_2) - \mathcal{P}(\beta, \Lambda_1)) \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

mit

$$\Lambda_1 := \frac{1}{2}\alpha f^{-1}, \quad \Lambda_2 := \frac{1}{2}\alpha f \quad \text{und} \quad \beta := \frac{1}{2}(\nu - 1).$$

## D.2 Ähnliche Problemstellung in der Fachliteratur

Für die Theorie der Zufallsmatrizen sind statistische Untersuchungen der Eigenwerte und Eigenvektoren von quadratischen Zufallsmatrizen von besonderer Bedeutung [101, 156]. In diesem Kontext ist auch die Marginaldichte des größten Eigenwertes  $\lambda_{\max}$  und seine kumulative Verteilungsfunktion  $P\{\lambda_{\max} \leq x\}$  von Interesse. In [63, 109] wird u. a. ein Ausdruck für  $P\{\lambda_{\max} \leq x\}$  für den Fall vorgestellt, dass eine SPD  $2 \times 2$ -Zufallsmatrix einer Standard-Wishart-Verteilung mit  $n$  Freiheitsgraden ( $n > 1$ ) genügt. Im Folgenden wird nun gezeigt, wie sich dieses Ergebnis auch aus der Berechnung des Konfidenzniveaus im vorherigen Abschnitt ergibt.

Die SPD  $2 \times 2$ -Zufallsmatrix  $\mathbf{Z}$  genüge einer Standard-Wishart-Verteilung mit  $n$  Freiheitsgraden, d. h.  $\mathbf{Z} \sim \mathcal{W}_2(n, \mathbf{I})$ . Demnach gilt für die Verbunddichte der beiden Eigenwerte [110, Seite 107]

$$p(\lambda_{\max}, \lambda_{\min}) = \frac{(\lambda_{\max} \lambda_{\min})^{\frac{1}{2}(n-3)} (\lambda_{\max} - \lambda_{\min})}{4\Gamma(n-1)} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\lambda_{\max} + \lambda_{\min})\right).$$

Ausgehend von

$$P\{\lambda_{\max} \leq x\} = \int_0^x \int_0^{\lambda_{\max}} p(\lambda_{\max}, \lambda_{\min}) d\lambda_{\min} d\lambda_{\max}$$

führt die mathematische Vorgehensweise aus Abschnitt D.1 zu

$$P\{\lambda_{\max} \leq x\} = \mathcal{P}(n-1, x) - \frac{\sqrt{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \mathcal{P}\left(\frac{n-1}{2}, \frac{x}{2}\right),$$

so dass sich mit dem Zusammenhang (A.9) für regularisierte Gammafunktionen der gesuchte Ausdruck zu

$$P\{\lambda_{\max} \leq x\} = \mathcal{P}(n, x) - \frac{\sqrt{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \mathcal{P}\left(\frac{n+1}{2}, \frac{x}{2}\right)$$

ergibt. Werden an dieser Stelle nur ganzzahlige Werte für  $n$  betrachtet, lässt sich der Ausdruck für  $P\{\lambda_{\max} \leq x\}$  unter Berücksichtigung der kumulativen Verteilungsfunktion der Chi-Quadrat-Vertei-

lung  $P_{\chi^2}(x; n)$  [1, Seite 941], d. h.

$$P_{\chi^2}(x; n) = \mathcal{P}\left(\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}x\right),$$

wie folgt interpretieren:

$$P\{\lambda_{\max} \leq x\} = P_{\chi^2}(2x; 2n) - \frac{\sqrt{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot P_{\chi^2}(x; n+1).$$

Damit haben wir bestätigt, dass sich mit der mathematische Vorgehensweise aus Abschnitt D.1 dasselbe Ergebnis wie in [63, Seite 367] und [109, Seite 292] ergibt.

Würden wir an dieser Stelle auch nichtganzzahlige Werte für  $n$  betrachten, so ließe sich der Ausdruck für  $P\{\lambda_{\max} \leq x\}$  mit der kumulativen Verteilungsfunktion der Gammafunktion (B.1) interpretieren, für die u. a.

$$P_{\chi^2}(x; n) = P_{\mathcal{G}}\left(x; \frac{1}{2}n, 2\right)$$

gilt (siehe auch Abschnitt B.1.1):

$$P\{\lambda_{\max} \leq x\} = P_{\mathcal{G}}(2x; n, 2) - \frac{\sqrt{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot P_{\mathcal{G}}\left(x; \frac{n+1}{2}, 2\right).$$

---

# Abbildungsverzeichnis

---

1.1	Unterschiede bei der erwarteten Zahl von Messungen je nach detektiertem Objekt (Punktziel, ausgedehntes Objekt und Gruppenziele). . . . .	1
1.2	Illustration der Auflösungsproblematik anhand eines Flugzeugträgers, einer Flugzeugstaffel und einer Marschgruppe. . . . .	3
1.3	Illustration der gemeinsamen Zielspur von Objektgruppen und ausgedehnten Einzelobjekten im Bayes'schen Verfahren von Koch [75, 78, 81, 82]. . . . .	8
2.1	Beispielmessungen für verschiedene Messmodelle. . . . .	20
2.2	Verarbeitungszyklus des Bayes'schen Ansatzes zum Verfolgen ausgedehnter Zielobjekte und grobstrukturierter Objektgruppen aus [75, 78, 81, 82]. . . . .	26
2.3	Zusammenschau der Bayes'schen Regel und relevanter Wahrscheinlichkeitsdichten zur Aktualisierung des gemeinsamen Objektzustandes. . . . .	33
3.1	Verarbeitungszyklus des modifizierten Bayes'schen Ansatzes, der einen statistischen Sensormessfehler berücksichtigt – in Form der Kovarianzmatrix des Messrauschens. . . . .	42
3.2	Schematische Darstellung des Konfidenz- und Vertrauensbereiches bei einem Zustandsvektor und einer Zustandsmatrix. . . . .	46
3.3	Verlauf des Skalierungsfaktors $f_{k k}$ zum Berechnen des Konfidenzbereiches der Zielausdehnung in Abhängigkeit des skalaren Parameters $\alpha_{k k}$ der Ausdehnung für verschiedene Konfidenzwahrscheinlichkeiten $c$ . . . . .	49
3.4	Verarbeitungszyklus des IMM-Filters für ausgedehnte Zielobjekte und Objektgruppen. . . . .	53
3.5	Alternativer Aktualisierungsschritt aus [113] für den Bayes'schen Ansatz zur Verfolgung ausgedehnter Objekte und nicht aufgelöster Gruppen aus Abschnitt 3.1. . . . .	56
3.6	Beispiel für den alternativen Aktualisierungsschritt von Orguner aus [113]. . . . .	57
4.1	Einfluss des Skalierungsfaktors $z_d$ auf die Ausdehnungsschätzung beim Bayes'schen Ansatz von Koch [78] (siehe Kapitel 2), wobei ein sich nicht bewegendes Objekt mit konstanter räumlicher Ausdehnung Grundlage der Simulation war. . . . .	62
4.2	Einfluss eines statistischen Sensormessfehlers auf die Ausdehnungsschätzung einer sich nicht bewegendem Ellipse. . . . .	62
4.3	Simulationsergebnisse für eine Gruppe aus 16 sich nicht bewegendem Punktzielen, die willkürlich verteilt waren. . . . .	63
4.4	Simulation einer Gruppe bestehend aus fünf fliegenden Punktzielen. . . . .	64
4.5	Tracking-Ergebnisse des ursprünglichen Bayes'schen Ansatzes von Koch [78] (siehe Kapitel 2) für das Szenario aus Abbildung 4.4. . . . .	65

4.6	Tracking-Ergebnisse des weiterentwickelten Bayes'schen Ansatzes (siehe Kapitel 3) für das Szenario aus Abbildung 4.4, wobei ein IMM mit drei Modellen eingesetzt wurde. . . . .	66
4.7	Ergebnisse für 900 Monte-Carlo-Simulationsläufe zum Szenario aus Abbildung 4.4 bei Anwendung des weiterentwickelten Bayes'schen Ansatzes (siehe Kapitel 3), wobei ein IMM mit drei Modellen eingesetzt wurde. . . . .	67
4.8	Tracking-Ergebnisse bei Anwendung des alternativen Aktualisierungsschrittes von Orguner [113] (siehe Abschnitt 3.4) für das Szenario aus Abbildung 4.4, wobei ein IMM mit drei Modellen eingesetzt wurde. . . . .	68
4.9	Ergebnisse für 900 Monte-Carlo-Simulationsläufe zum Szenario aus Abbildung 4.4, wobei Fehlermaße bezüglich Position und Geschwindigkeit für drei verschiedene Verfahren dargestellt sind. . . . .	69
4.10	Simulation einer Ellipse als ausgedehntes Objekt mit typischen Abmaßen eines Flugzeugträgers. . . . .	71
4.11	Ergebnisse für 900 Monte-Carlo-Simulationsläufe zum Szenario aus Abbildung 4.10, wobei zum Erzeugen von Messungen das Sensormodell $\mathcal{N}(\mathbf{X}_k + \mathbf{R})$ verwendet wurde. . . . .	72
4.12	Ergebnisse für 900 Monte-Carlo-Simulationsläufe zum Szenario aus Abbildung 4.10, wobei zum Erzeugen von Messungen das Sensormodell $\mathcal{U}(\mathbf{X}_k) + \mathcal{N}(\mathbf{R})$ verwendet wurde. . . . .	73
5.1	Illustration des Tracking-Verfahrens für unterschiedliche Objektgruppen. . . . .	78
5.2	Schematische Darstellung einer Straße zur Berücksichtigung im Tracking-Formalismus. . . . .	79
5.3	Verarbeitungszyklus des erweiterten Bayes'schen Ansatzes, der Straßenkarteninformationen berücksichtigt. . . . .	80
5.4	Illustration der Transformation von segmentweisen 2-D-Boden- in Straßenkoordinaten. . . . .	90
5.5	Simulation der Straßenkarteninformationen. . . . .	93
5.6	Segmentspezifische Differenz aus der realen Straßenabschnittslänge und der jeweiligen Segmentlänge. . . . .	93
5.7	Simulation und Tracking einer Kolonne von elf Fahrzeugen, die dem Straßenverlauf aus Abbildung 5.5 folgte. . . . .	94
5.8	Ergebnis des erweiterten Bayes'schen Ansatzes für die prädizierten Segmentaufenthaltswahrscheinlichkeiten (gemittelt aus 900 Monte-Carlo-Simulationsläufen). . . . .	95
5.9	Ergebnis des erweiterten Bayes'schen Ansatzes für die geschätzte Länge der Kolonne (gemittelt aus 900 Monte-Carlo-Simulationsläufen). . . . .	96
5.10	Ergebnisse für 900 Monte-Carlo-Simulationsläufe zum Szenario aus Abbildung 5.7, wobei Fehlermaße bezüglich Position und Geschwindigkeit für zwei verschiedene Verfahren dargestellt sind. . . . .	97
5.11	Simulation einer Kolonne von elf Fahrzeugen zur grundsätzlichen Problematik des erweiterten Ansatzes. . . . .	99
5.12	Skizze zum dreiteiligen Prädiktionsschritt des erweiterten Bayes'schen Ansatzes. . . . .	99

---

## Tabellenverzeichnis

---

2.1	Ausgewählte Likelihood-Funktionen und ihre konjugierten A-priori-Verteilungen (vgl. [37, 41, 46]). . . . .	12
2.2	Auflistung der Marginalisierungsergebnisse für die bedingte Dichte der Kinematik unter Berücksichtigung der Sonderfälle $d = 1$ und $s = 1$ . . . . .	31



---

## Literaturverzeichnis

---

- [1] ABRAMOWITZ, M. (Hrsg.) ; STEGUN, I. A. (Hrsg.): *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. 10. Auflage. New York : Dover Publications, 1972 (Applied Mathematics Series 55). – <http://www.math.sfu.ca/~cbm/aands/> – Onlineresource, Abruf: 4. April 2018
- [2] ADHIKARI, S.: Matrix variate distributions for probabilistic structural dynamics. In: *AIAA Journal* 45 (2007), Nr. 7, S. 1748–1762
- [3] AGATE, C. S. ; SULLIVAN, K. J.: Road-Constrained Target Tracking and Identification using a Particle Filter. In: DRUMMOND, O. E. (Hrsg.): *Proc. SPIE Conf. Signal and Data Processing of Small Targets* Bd. 5204. San Diego, Kalifornien, 2003, S. 532–543
- [4] ANGELOVA, D. ; MIHAYLOVA, L.: Extended Object Tracking Using Monte Carlo Methods. In: *IEEE Trans. Signal Process.* 56 (2008), Nr. 2, S. 825–832
- [5] ARULAMPALAM, M. S. ; GORDON, N. ; ORTON, M. ; RISTIC, B.: A Variable Structure Multiple Model Particle Filter for GMTI Tracking. In: *Proc. Int. Conf. on Information Fusion (FUSION'02)* Bd. 2. Annapolis, Maryland, 2002, S. 927–934
- [6] BAR-SHALOM, Y. ; LI, X.-R. ; KIRUBARAJAN, T.: *Estimation with Applications to Tracking and Navigation (Theory, Algorithms and Software)*. New York : Wiley, 2001
- [7] BARTSCH, H.-J.: *Taschenbuch Mathematischer Formeln*. 20. Auflage. München, Deutschland : Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, 2004
- [8] BAUM, M. ; HANEBECK, U. D.: Extended Object Tracking Based On Combined Set-Theoretic and Stochastic Fusion. In: *Proc. Int. Conf. on Information Fusion (FUSION'09)*. Seattle, Washington, 2009, S. 1288–1295
- [9] BAUM, M. ; HANEBECK, U. D.: Random Hypersurface Models for Extended Object Tracking. In: *Proc. IEEE Int. Symp. on Signal Processing and Information Technology (IS-SPIT'09)*. Adschman, Vereinigte Arabische Emirate, 2009, S. 178–183
- [10] BAUM, M. ; HANEBECK, U. D.: Tracking an Extended Object Modeled as an Axis-Aligned Rectangle. In: *Proc. Workshop Sensor Data Fusion: Trends, Solutions, Applications (SDF'09)*. Lübeck, Deutschland, 2009, S. 2422–2427
- [11] BAUM, M. ; HANEBECK, U. D.: Extended Object Tracking with Random Hypersurface Models. In: *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* 50 (2014), Nr. 1, S. 149–159
- [12] BAUM, M. ; NOACK, B. ; HANEBECK, U. D.: Extended Object and Group Tracking with Elliptic Random Hypersurface Models. In: *Proc. Int. Conf. on Information Fusion (FUSION'10)*. Edinburgh, Vereinigtes Königreich, 2010. – 8 Seiten
- [13] BELLMAN, R.: On the Calculation of Matrix Exponential. In: *Linear and Multilinear Algebra* 13 (1983), Nr. 1, S. 73–79

- [14] BEYERER, J. (Hrsg.) ; PUENTE LEÓN, F. (Hrsg.) ; SOMMER, K.-D. (Hrsg.): *Information fusion in der Mess- und Sensortechnik*. Karlsruhe, Deutschland : Universitätsverlag Karlsruhe, 2006
- [15] BILODEAU, M. ; BRENNER, D.: *Theory of Multivariate Statistics*. New York : Springer, 1999 (Springer Texts in Statistics)
- [16] BISHOP, C. M.: *Pattern Recognition and Machine Learning*. New York : Springer, 2006 (Information Science and Statistics)
- [17] BLACKMAN, S. S.: *Multiple-Target Tracking with Radar Applications*. Norwood, Massachusetts : Artech House, 1986 (Artech House Radar Library)
- [18] BLACKMAN, S. S. ; POPOLI, R.: *Design and Analysis of Modern Tracking Systems*. Norwood, Massachusetts : Artech House, 1999 (Artech House Radar Library)
- [19] BLASCH, E. P. ; CONNARE, T.: Improving Track Maintenance Through Group Tracking. In: *Proc. Workshop on Estimation, Tracking and Fusion: A Tribute to Yaakov Bar-Shalom*. Monterey, Kalifornien, 2001, S. 360–371
- [20] BLOM, H. A. P.: An efficient filter for abruptly changing systems. In: *Proc. IEEE Conf. on Decision and Control*. Las Vegas, Nevada, 1984, S. 656–658
- [21] BLOM, H. A. P. ; BAR-SHALOM, Y.: The Interacting Multiple Model Algorithm for Systems with Markovian Switching Coefficients. In: *IEEE Trans. Autom. Control* 33 (1988), Nr. 8, S. 780–783
- [22] BLUMENSON, L. E.: A Derivation of  $n$ -Dimensional Spherical Coordinates. In: *The American Mathematical Monthly* 67 (1960), Nr. 1, S. 63–66
- [23] BOLSTAD, W. M.: *Introduction to Bayesian Statistics*. 2. Auflage. Hoboken, New Jersey : Wiley, 2007
- [24] BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDJAJEW, K. A. ; MUSIOL, G. ; MÜHLIG, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. 5. Auflage. Frankfurt am Main, Deutschland : Verlag Harri Deutsch, 2001
- [25] BROOKNER, E.: *Tracking and Kalman Filtering Made Easy*. New York : John Wiley & Sons, 1998
- [26] CANDY, J. V.: *Bayesian Signal Processing: Classical, Modern and Particle Filtering Methods*. Hoboken, New Jersey : Wiley, 2009 (Adaptive Learning Systems for Signal Processing, Communications and Control)
- [27] CHENG, Y. ; SINGH, T.: Efficient Particle Filtering for Road-Constrained Target Tracking. In: *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* 43 (2007), Nr. 4, S. 1454 – 1469
- [28] CLARK, D. ; GODSILL, S.: Group Target Tracking with the Gaussian Mixture Probability Hypothesis Density Filter. In: *Proc. Int. Conf. on Intelligent Sensors, Sensor Networks and Information (ISSNIP'07)*. Melbourne, Australien, 2007, S. 149–154
- [29] CLARK, J. M. C. ; KOUNTOURIOTIS, P.-A. ; VINTER, R. B.: A New Gaussian Mixture Algorithm for GMTI Tracking Under a Minimum Detectable Velocity Constraint. In: *IEEE Trans. Autom. Control* 54 (2009), Nr. 12, S. 2745–2756

- [30] CONNARE, T. ; BLASCH, E. P. ; GREENEWALD, J. ; SCHMITZ, J. ; SALVATORE, F. ; SCARPI-NO, F.: Group IMM Tracking Utilizing Track and Identification Fusion. In: *Proc. Workshop on Estimation, Tracking and Fusion: A Tribute to Yaakov Bar-Shalom*. Monterey, Kalifornien, 2001, S. 205–220
- [31] COVER, T. M. ; THOMAS, J. A.: *Elements of Information Theory*. 2. Auflage. Hoboken, New Jersey : John Wiley & Sons, 2006
- [32] DAUM, F. E. ; FITZGERALD, R. J.: Importance of resolution in multiple-target tracking. In: DRUMMOND, O. E. (Hrsg.): *Proc. SPIE Conf. Signal and Data Processing of Small Targets* Bd. 2235. Orlando, Florida, 1994, S. 329–338
- [33] DEGROOT, M. H.: *Optimal Statistical Decisions*. New York : McGraw-Hill, 1970
- [34] DEZERT, J.: Tracking maneuvering and bending extended target in cluttered environment. In: DRUMMOND, O. E. (Hrsg.): *Proc. SPIE Conf. Signal and Data Processing of Small Targets* Bd. 3373. Orlando, Florida, 1998, S. 283–294
- [35] DIESTEL, R.: *Graphentheorie*. 3. Auflage. Heidelberg, Deutschland : Springer, 2006
- [36] DRUMMOND, O. E. ; BLACKMAN, S. S. ; PETRISOR, G. C.: Tracking clusters and extended objects with multiple sensors. In: DRUMMOND, O. E. (Hrsg.): *Proc. SPIE Conf. Signal and Data Processing of Small Targets* Bd. 1305. Orlando, Florida, 1990, S. 362–375
- [37] FINK, D.: A Compendium of Conjugate Priors / Montana State University. Bozeman, Montana, 1997. – Forschungsbericht
- [38] FORBES, C. ; EVANS, M. ; HASTINGS, N. ; PEACOCK, B.: *Statistical Distributions*. 4. Auflage. Hoboken, New Jersey : John Wiley & Sons, 2011
- [39] FORRESTER, P. J. ; SNAITH, N. C. ; VERBAARSCHOT, J. J. M.: Developments in random matrix theory. In: *J. Phys. A: Math. Gen.* 36 (2003), Nr. 12, S. R1–R10
- [40] FRENKEL, G. ; FRIDLING, B. E.: Survey of Strategic Defense Initiative Tracking Algorithms / Institute for Defense Analyses. Alexandria, Virginia, 1989 (P-2284). – IDA Paper
- [41] FRÄNKEN, D.: *Dynamische Zustandsschätzung*, Universität Paderborn, Institut für Elektrotechnik und Informationstechnik, Fachgebiet Nachrichtentheorie, Vorlesungsskript, 2006
- [42] GADALETA, S. ; KLUSMAN, M. ; POORE, A. P. ; SLOCUMB, B. J.: Multiple Frame Cluster Tracking. In: DRUMMOND, O. E. (Hrsg.): *Proc. SPIE Conf. Signal and Data Processing of Small Targets* Bd. 4728. Orlando, Florida, 2002, S. 275–289
- [43] GADALETA, S. ; POORE, A. B. ; ROBERTS, S. ; SLOCUMB, B. J.: Multiple Hypothesis Clustering, Multiple Frame Assignment, Tracking. In: DRUMMOND, O. E. (Hrsg.): *Proc. SPIE Conf. Signal and Data Processing of Small Targets* Bd. 5428. Orlando, Florida, 2004, S. 294–307
- [44] GADALETA, S. ; POORE, A. P. ; SLOCUMB, B. J.: Single-Frame Cluster MFA Tracking. In: *Proc. American Control Conf. (ACC'03)* Bd. 2. Denver, Colorado, 2003, S. 1242–1247
- [45] GARCIA HERRERO, J. ; BESADA PORTAS, J. A. ; CASAR CORREDERA, J. R.: Use of Map Information for Tracking Targets on Airport Surface. In: *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* 39 (2003), Nr. 2, S. 675–693

- [46] GELMAN, A. ; CARLIN, J. B. ; STERN, H. S. ; RUBIN, D. B.: *Bayesian Data Analysis*. 2. Auflage. Boca Raton, Florida : Chapman & Hall/CRC Press, 2003 (Texts in Statistical Science)
- [47] GILHOLM, K. ; GODSILL, S. ; MASKELL, S. ; SALMOND, D.: Poisson models for extended target and group tracking. In: DRUMMOND, O. E. (Hrsg.): *Proc. SPIE Conf. Signal and Data Processing of Small Targets* Bd. 5913. San Diego, Kalifornien, 2005. – 12 Seiten
- [48] GILHOLM, K. ; SALMOND, D.: Spatial distribution model for tracking extended objects. In: *IEE Radar Sonar Navig.* 152 (2005), Nr. 5, S. 364–371
- [49] GNING, A. ; MIHAYLOVA, L. ; MASKELL, S. ; PANG, S. K. ; GODSILL, S.: Group Object Structure and State Estimation With Evolving Networks and Monte Carlo Methods. In: *IEEE Trans. Signal Process.* 59 (2011), Nr. 4, S. 1383–1396
- [50] GRANSTRÖM, K. ; BAUM, M. ; REUTER, S.: Extended Object Tracking: Introduction, Overview and Applications. In: *ISIF Journal of Advances in Information Fusion* 12 (2017), Nr. 2, S. 139–174
- [51] GRANSTRÖM, K. ; ORGUNER, U.: Properties and Approximations of some Matrix Variate Probability Density Functions / Universität Linköping. Linköping, Schweden, 2011 (LiTH-ISY-R-3042). – Forschungsbericht
- [52] GREWAL, M. S. ; ANDREWS, A. P.: *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB*. 3. Auflage. Hoboken, New Jersey : John Wiley & Sons, 2008
- [53] GREWAL, M. S. ; ANDREWS, A. P.: Applications of Kalman Filtering in Aerospace 1960 to the Present [Historical Perspectives]. In: *IEEE Control Syst. Mag.* 30 (2010), Nr. 3, S. 69–78
- [54] GUERCI, J. R.: *Space-Time Adaptive Processing for Radar*. Norwood, Massachusetts : Artech House, 2003 (Artech House Radar Library)
- [55] GUPTA, A. K. ; NAGAR, D. K.: *Matrix Variate Distributions*. Boca Raton, Florida : Chapman & Hall/CRC Press, 1999 (Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 104)
- [56] HAAKE, F. ; STÖCKMANN, H.-J.: Klassisches und quantenmechanisches Wellenchaos: Warum sind die Fluktuationen der Energie-Eigenwerte universell? In: *Physikalische Blätter* 56 (2000), Nr. 6, S. 27–32
- [57] HAGER, W. W.: Updating the Inverse of a Matrix. In: *SIAM Rev.* 31 (1989), Nr. 2, S. 221–239
- [58] HANEBECK, U. D. ; HORN, J.: Zustandsschätzung im Fall simultan auftretender mengenbasierter und stochastischer Unsicherheiten. In: *at – Automatisierungstechnik* 48 (2000), Nr. 6, S. 265–272
- [59] HARVILLE, D. A.: *Matrix Algebra From a Statistician's Perspective*. New York : Springer, 1997
- [60] HENDERSON, H. V. ; SEARLE, S. R.: On Deriving the Inverse of a Sum of Matrices. In: *SIAM Rev.* 23 (1981), Nr. 2, S. 53–60
- [61] HIGHAM, N. J.: *Functions of Matrices: Theory and Computation*. Philadelphia, Pennsylvania : SIAM, 2008 (Other Titles in Applied Mathematics)
- [62] HIGHAM, N. J.: The Scaling and Squaring Method for the Matrix Exponential Revisited. In: *SIAM Rev.* 51 (2009), Nr. 4, S. 747–764

- [63] JOHN, S.: A tolerance region for multivariate normal distributions. In: *Sankhya: The Indian Journal of Statistics* 25 (1963), Nr. 4, S. 363–368
- [64] KE, C.-C.: Literature Survey on Ground Target Tracking Problems / Center for Multisource Information Fusion. University at Buffalo, New York, 1999 (No. CMIF-3-99). – Report
- [65] KE, C.-C.; GARCIA HERRERO, J.; LLINAS, J.: Comparative Analysis of Alternative Ground Target Tracking Techniques. In: *Proc. Int. Conf. on Information Fusion (FUSION'00)* Bd. 2. Paris, Frankreich, 2000. – 8 Seiten
- [66] KIRUBARAJAN, T.; BAR-SHALOM, Y.; PATTIPATI, K. R.; KADAR, I.: Ground Target Tracking with Variable Structure IMM Estimator. In: *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* 36 (2000), Nr. 1, S. 26–46
- [67] KLEMM, R.: *IET Radar, Sonar, Navigation and Avionics Series*. Bd. 21: *Principles of Space-Time Adaptive Processing*. 3. Auflage. London, Vereinigtes Königreich : The Institution of Engineering and Technology, 2006
- [68] KOCH, K.-R.: *Introduction to Bayesian Statistics*. 2. Auflage. Berlin, Deutschland : Springer, 2007
- [69] KOCH, W.: Experimental Results on Bayesian MHT for Maneuvering Closely-Spaced Objects in a Densely Cluttered Environment. In: *Proc. Radar Systems (RADAR'97)*. Edinburgh, Vereinigtes Königreich, 1997, S. 729–733
- [70] KOCH, W.: On Bayesian MHT for Formations with Possibly Unresolved Measurements – Quantitative Results. In: DRUMMOND, O. E. (Hrsg.): *Proc. SPIE Conf. Signal and Data Processing of Small Targets* Bd. 3163. San Diego, Kalifornien, 1997, S. 417–428
- [71] KOCH, W.: GMTI-Tracking und Datenfusion zur Bodenaufklärung: Probleme und Lösungsansätze / FGAN e.V. Wachtberg, Deutschland, 2000 (Nr. 26). – FKIE-Bericht
- [72] KOCH, W.: GMTI-Tracking and Information Fusion for Ground Surveillance. In: DRUMMOND, O. E. (Hrsg.): *Proc. SPIE Conf. Signal and Data Processing of Small Targets* Bd. 4473. San Diego, Kalifornien, 2001, S. 381–392
- [73] KOCH, W.: Target Tracking. In: STERGIOPOULOS, S. (Hrsg.): *Advanced Signal Processing Handbook: Theory and Implementation for Radar, Sonar, and Medical Imaging Real-Time Systems*. Boca Raton, Florida : CRC Press, 2001 (Electrical Engineering & Signal Processing Series), Kapitel 8
- [74] KOCH, W.: Ground Target Tracking with STAP Radar: Selected Tracking Aspects. In: KLEMM, R. (Hrsg.): *Applications of Space-Time Adaptive Processing*. London, Vereinigtes Königreich : The Institution of Engineering and Technology, 2004 (IEE Radar, Sonar, Navigation and Avionics Series 14), Kapitel 15, S. 501–540
- [75] KOCH, W.: On Bayesian Tracking of Extended Objects. In: *Proc. IEEE Int. Conf. on Multi-sensor Fusion and Integration for Intelligent Systems (MFI'06)*. Heidelberg, Deutschland, 2006, S. 209–216
- [76] KOCH, W.: On exploiting 'negative' sensor evidence for target tracking and sensor data fusion. In: *Information Fusion* 8 (2007), Nr. 1, S. 28–39

- [77] KOCH, W.: Verfeinerte Sensormodelle für Tracking-Anwendungen. In: *tm – Technisches Messen* 74 (2007), Nr. 3, S. 112–120
- [78] KOCH, W.: Bayesian Approach to Extended Object and Cluster Tracking using Random Matrices. In: *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* 44 (2008), Nr. 3, S. 1042–1059
- [79] KOCH, W.: *Tracking and Sensor Data Fusion: Methodological Framework and Selected Applications*. Heidelberg, Deutschland : Springer, 2014 (Mathematical Engineering)
- [80] KOCH, W. ; KEUK, G. van: Multiple hypothesis track maintenance with possibly unresolved measurements. In: *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* 33 (1997), Nr. 3, S. 883–892
- [81] KOCH, W. ; SAUL, R.: Ein Bayes-Ansatz zur Verfolgung ausgedehnter Zielobjekte und grobstrukturierter Objektgruppen / FGAN e.V. Wachtberg, Deutschland, 2005 (Nr. 91). – FKIE-Bericht
- [82] KOCH, W. ; SAUL, R.: A Bayesian approach to extended object tracking and tracking of loosely structured target groups. In: *Proc. Int. Conf. on Information Fusion (FUSION'05)*. Philadelphia, Pennsylvania, 2005. – 8 Seiten
- [83] KOCH, W. ; SIELEMANN, M. ; ULMKE, M.: MAJIIC – ISR-Interoperabilität für weiträumige Bodenaufklärung. In: WUNDER, M. (Hrsg.) ; GROSCHE, J. (Hrsg.): *Verteilte Führungsinformationssysteme*. Berlin, Deutschland : Springer, 2009, Kapitel 19, S. 267–278
- [84] KOLLER, J. ; BÖS, H. ; ULMKE, M.: Track Extraction and Multi Hypothesis Tracking for GMTI Sensor Data / FGAN e.V. Wachtberg, Deutschland, 2005 (Nr. 90). – FKIE-Bericht
- [85] KOLLER, J. ; ULMKE, M.: Multi hypothesis track extraction and maintenance of GMTI sensor data. In: *Proc. Int. Conf. on Information Fusion (FUSION'05)*. Philadelphia, Pennsylvania, 2005. – 8 Seiten
- [86] KOLLER, J. ; ULMKE, M.: Data Fusion for Ground Moving Target Tracking. In: *Aerospace Science and Technology* 11 (2007), Nr. 4, S. 261–270
- [87] KORDIC, V. (Hrsg.): *Kalman Filter*. Vukovar, Kroatien : InTech, 2010
- [88] KOTZ, S. ; NADARAJAH, S.: *Multivariate t-Distributions and Their Applications*. Cambridge, Vereinigtes Königreich : Cambridge University Press, 2004
- [89] KOVACICH, M. A. ; CASALETTO, T. ; LUTJENS, W. E. ; MCINTYRE, D. D. ; ANSELL, R. ; VANDYK, E.: An Application of MHT to Group-to-Object Tracking. In: DRUMMOND, O. E. (Hrsg.): *Proc. SPIE Conf. Signal and Data Processing of Small Targets* Bd. 1481. Orlando, Florida, 1991, S. 357–370
- [90] KRAVARITIS, G. ; MULGREW, B.: Variable-Mass Particle Filter for Road-Constrained Vehicle Tracking. In: *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing* 2008, Article ID 321967, 13 Seiten (2008). <http://dx.doi.org/10.1155/2008/321967>. – DOI 10.1155/2008/321967
- [91] KUWERTZ, A. ; HUBER, M. F. ; SAWO, F. ; HANEBECK, U. D.: Modellbasierte Quellenverfolgung in räumlich ausgedehnten Phänomenen mittels Sensoreinsatzplanung. In: *tm – Technisches Messen* 77 (2010), Nr. 10, S. 551–557

- [92] KÁLMÁN, R. E.: A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. In: *Trans. ASME: Journal of Basic Engineering (Series D)* 82 (1960), S. 35–45
- [93] LI, X.-R. ; JILKOV, V. P.: Survey of Maneuvering Target Tracking. Part V: Multiple-Model Methods. In: *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* 41 (2005), Nr. 4, S. 1255–1321
- [94] LIGGINS, M. E. (Hrsg.) ; HALL, D. L. (Hrsg.) ; LLINAS, J. (Hrsg.): *Handbook of Multisensor Data Fusion: Theory and Practice, Second Edition*. Boca Raton, Florida : CRC Press, 2008 (Electrical Engineering and Applied Signal Processing Series)
- [95] LÜBBERT, D. ; BEHME, C. ; FALTIN, F.: Raketenabwehr – technische Aspekte und naturwissenschaftlicher Hintergrund / Deutscher Bundestag / Wissenschaftliche Dienste. 2007 (WD 8-121/07). – INFO-BRIEF. – <https://www.bundestag.de/blob/190076/3fa53109dfe54841832293cccec220f2/raketenabwehr-data.pdf> – Onlineresource, Abruf: 4. April 2018
- [96] MAHLER, R. P. S.: Multitarget Bayes Filtering via First-Order Multitarget Moments. In: *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* 39 (2003), Nr. 4, S. 1152–1178
- [97] MAHLER, R. P. S.: PHD Filters of Higher Order in Target Number. In: *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* 43 (2007), Nr. 4, S. 1523–1543
- [98] MAHLER, R. P. S.: *Statistical Multisource-Multitarget Information Fusion*. Norwood, Massachusetts : Artech House, 2007
- [99] MARDIA, K. V. ; KENT, J. T. ; BIBBY, J. M.: *Multivariate Analysis*. London, Vereinigtes Königreich : Academic Press, 1979 (Probability and Mathematical Statistics)
- [100] MCGEE, L. A. ; SCHMIDT, S. F.: Discovery of the Kalman Filter as a Practical Tool for Aerospace and Industry / NASA Ames Research Center. Moffett Field, Kalifornien, 1985 (TM-86847). – NASA Technical Memorandum
- [101] MEHTA, M. L.: *Random Matrices*. 3. Auflage. Amsterdam, Niederlande : Elsevier Academic Press, 2004 (Pure and Applied Mathematics 142)
- [102] MERTENS, M.: 3D-GMTI-Tracking eines Einzelzieles basierend auf einem realitätsorientierten Sensormodell und der Verwendung von Straßeninformationen / FGAN e.V. Wachtberg, Deutschland, 2007 (Nr. 151). – FKIE-Bericht
- [103] MERTENS, M. ; ULMKE, M.: Ground Moving Target Tracking with Context Information and a Refined Sensor Model. In: *Proc. Int. Conf. on Information Fusion (FUSION'08)*. Köln, Deutschland, 2008, S. 1497–1504
- [104] MERZIGER, G. ; MÜHLBACH, G. ; WILLE, D. ; WIRTH, T.: *Formeln und Hilfen zur Höheren Mathematik*. 4. Auflage. Springe, Deutschland : Binomi Verlag, 2001
- [105] MIHAYLOVA, L. ; CARMÍ, A. Y. ; SEPTIER, F. ; GNING, A. ; PANG, S. K. ; GODSILL, S.: Overview of Bayesian sequential Monte Carlo methods for group and extended object tracking. In: *Digital Signal Processing* 25 (2014), S. 1–16
- [106] MIKHEEV, P. V.: Multidimensional Gaussian Probability Density and its Applications in the Degenerate Case. In: *Radiophysics and Quantum Electronics* 49 (2006), Nr. 7, S. 564–571

- [107] MITCHELL, H. B.: *Multi-Sensor Data Fusion: An Introduction*. Berlin, Deutschland : Springer, 2007
- [108] MORENO, V. M. (Hrsg.) ; PIGAZO, A. (Hrsg.): *Kalman Filter: Recent Advances and Applications*. Vukovar, Kroatien : InTech, 2009
- [109] MUIRHEAD, R. J.: Expressions for Some Hypergeometric Functions of Matrix Argument with Applications. In: *J. Multivariate Anal.* 5 (1975), Nr. 3, S. 283–293
- [110] MUIRHEAD, R. J.: *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. 2. Auflage. Hoboken, New Jersey : John Wiley & Sons, 2005 (Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics)
- [111] NIST/SEMATECH: *e-Handbook of Statistical Methods*. National Institute of Standards and Technology, US Department of Commerce, 2006. – <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/> – Onlineresource, Abruf: 16. März 2012
- [112] NOE, B. J. ; COLLINS, N.: Variable structure interacting multiple-model filter (VS-IMM) for tracking targets with transportation network constraints. In: DRUMMOND, O. E. (Hrsg.): *Proc. SPIE Conf. Signal and Data Processing of Small Targets* Bd. 4048. Orlando, Florida, 2000, S. 247–257
- [113] ORGUNER, U.: A Variational Measurement Update for Extended Target Tracking with Random Matrices. In: *IEEE Trans. Signal Process.* 60 (2012), Nr. 7, S. 3827–3834
- [114] ORGUNER, U. ; SCHÖN, T. B. ; GUSTAFSSON, F.: Improved Target Tracking with Road Network Information. In: *Proc. IEEE Aerospace Conf.* Big Sky, Montana, 2009. – 11 Seiten
- [115] PANG, S. K. ; LI, J. ; GODSILL, S. J.: Models and Algorithms for Detection and Tracking of Coordinated Groups. In: *Proc. Int. Symp. on Image and Signal Processing and Analysis (ISPA'07)*. Istanbul, Türkei, 2007, S. 504–509
- [116] PANG, S. K. ; LI, J. ; GODSILL, S. J.: Models and Algorithms for Detection and Tracking of Coordinated Groups. In: *Proc. IEEE Aerospace Conf.* Big Sky, Montana, 2008. – 17 Seiten
- [117] PANNETIER, B. ; BENAMEUR, K. ; NIMIER, V. ; ROMBAUT, M.: Ground moving target tracking with road constraint. In: KADAR, I. (Hrsg.): *Proc. SPIE Conf. Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition XIII* Bd. 5429. Orlando, Florida, 2004, S. 138–149
- [118] PANNETIER, B. ; BENAMEUR, K. ; NIMIER, V. ; ROMBAUT, M.: VS-IMM using road map information for a ground target tracking. In: *Proc. Int. Conf. on Information Fusion (FUSION'05)*. Philadelphia, Pennsylvania, 2005. – 8 Seiten
- [119] PANNETIER, B. ; DEZERT, J. ; POLLARD, E.: Improvement of Multiple Ground Targets Tracking with GMTI Sensor and Fusion of Identification Attributes. In: *Proc. IEEE Aerospace Conf.* Big Sky, Montana, 2008. – 13 Seiten
- [120] PANNETIER, B. ; NIMIER, V. ; ROMBAUT, M.: Multiple Ground Target Tracking. In: *Aerospace Science and Technology* 11 (2007), Nr. 4, S. 271–278
- [121] PERRELLA, A. J.: Operational tracking issues in the presence of Closely Spaced Objects (CSOs). In: DRUMMOND, O. E. (Hrsg.): *Proc. SPIE Conf. Signal and Data Processing of Small Targets* Bd. 5204. San Diego, Kalifornien, 2003, S. 429–435

- [122] POORE, A. B. ; GADALETA, S.: The Group Assignment Problem. In: DRUMMOND, O. E. (Hrsg.): *Proc. SPIE Conf. Signal and Data Processing of Small Targets* Bd. 5204. San Diego, Kalifornien, 2003, S. 595–607
- [123] RAIFFA, H. ; SCHLAIFER, R.: *Applied Statistical Decision Theory*. Boston, Massachusetts : Harvard University, 1961
- [124] REID, D. B.: An Algorithm for Tracking Multiple Targets. In: *IEEE Trans. Autom. Control* 24 (1979), Nr. 6, S. 843–854
- [125] REYNOLDS, C. W.: Flocks, Herds, and Schools: A Distributed Behavioral Model. In: *ACM SIGGRAPH Computer Graphics* 21 (1987), Nr. 4, S. 25–34
- [126] RICHTER, A.: Billardspiel mit Mikrowellen: Die Analogie zwischen Schrödinger-Gleichung und Helmholtz-Gleichung ermöglicht Experimente zum Quantenchaos. In: *Physikalische Blätter* 57 (2001), Nr. 7/8, S. 59–65
- [127] SALMOND, D. J. ; GORDON, N. J.: Group and extended object tracking. In: DRUMMOND, O. E. (Hrsg.): *Proc. SPIE Conf. Signal and Data Processing of Small Targets* Bd. 3809. Denver, Colorado, 1999, S. 284–296
- [128] SALMOND, D. J. ; GORDON, N. J.: Group and extended object tracking. In: *Proc. IEE Colloquium on Target Tracking: Algorithms and Applications*. London, Vereinigtes Königreich, 1999, S. 16/1–16/4
- [129] SALMOND, D. J. ; GORDON, N. J.: Group tracking with limited sensor resolution and finite field of view. In: DRUMMOND, O. E. (Hrsg.): *Proc. SPIE Conf. Signal and Data Processing of Small Targets* Bd. 4048. Orlando, Florida, 2000, S. 532–540
- [130] SALMOND, D. J. ; PARR, M. C.: Track maintenance using measurements of target extent. In: *IEE Radar Sonar Navig.* 150 (2003), Nr. 6, S. 389–395
- [131] SASSMAN, S. M.: Track grouping to enhance moving target exploitation. In: DRUMMOND, O. E. (Hrsg.): *Proc. SPIE Conf. Signal and Data Processing of Small Targets* Bd. 4048. Orlando, Florida, 2000, S. 156–167
- [132] SCHUSTER, M. ; REUTER, J. ; WANIELIK, G.: Multi Detection Joint Integrated Probabilistic Data Association Using Random Matrices with Applications to Radar-Based Multi Object Tracking. In: *ISIF Journal of Advances in Information Fusion* 12 (2017), Nr. 2, S. 175–188
- [133] SCHWARZ, H. R. ; KÖCKLER, N.: *Numerische Mathematik*. 6. Auflage. Wiesbaden, Deutschland : B.G. Teubner Verlag, 2006
- [134] SERRE, D.: *Matrices: Theory and Applications*. 2. Auflage. New York : Springer, 2010 (Graduate Texts in Mathematics 216)
- [135] SHEA, P. J. ; ZADRA, T. ; KLAMER, D. ; FRANGIONE, E. ; BROUILLARD, R.: Improved state estimation through use of roads in ground tracking. In: DRUMMOND, O. E. (Hrsg.): *Proc. SPIE Conf. Signal and Data Processing of Small Targets* Bd. 4048. Orlando, Florida, 2000, S. 321–332

- [136] SINGER, R. A. ; SEA, R. G. ; HOUSEWRIGHT, K. B.: Derivation and Evaluation of Improved Tracking Filters for Use in Dense Multitarget Environments. In: *IEEE Trans. Inf. Theory* 20 (1974), Nr. 4, S. 423–432
- [137] SKOLNIK, M. I. (Hrsg.): *Radar Handbook*. 3. Auflage. New York : McGraw-Hill Education, 2008
- [138] SPECIAL ISSUE: Random Matrix Theory. In: *J. Phys. A: Math. Gen.* 36 (2003), Nr. 12
- [139] STONE, L. D.: Bayesian Approach to Multiple-Target Tracking. In: LIGGINS, M. E. (Hrsg.) ; HALL, D. L. (Hrsg.) ; LLINAS, J. (Hrsg.): *Handbook of Multisensor Data Fusion: Theory and Practice*. 2. Auflage. Boca Raton, Florida : CRC Press, 2008 (Electrical Engineering & Applied Signal Processing Series), Kapitel 12, S. 265–297
- [140] STRELLER, D.: Road-map assisted ground target tracking. In: *Proc. Int. Conf. on Information Fusion (FUSION'08)*. Köln, Deutschland, 2008, S. 1162–1168
- [141] SÝKORA, S.: Volume Integrals over  $n$ -Dimensional Ellipsoids. In: *Stan's Library* 1 (2005). – DOI 10.3247/SL1Math05.001 – Onlineressource, Abruf: 26. März 2012
- [142] TAENZER, E.: Tracking Multiple Targets Simultaneously with a Phased Array Radar. In: *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* 16 (1980), Nr. 5, S. 604–614
- [143] TZIKAS, D. G. ; LIKAS, A. C. ; GALATSANOS, N. P.: The Variational Approximation for Bayesian Inference. In: *IEEE Signal Process. Mag.* 25 (2008), Nr. 6, S. 131–146
- [144] ULMKE, M.: Road-Map Assisted GMTI Tracking / FGAN e.V. Wachtberg, Deutschland, 2002 (Nr. 55). – FKIE-Bericht
- [145] ULMKE, M.: Improved GMTI-Tracking using Road-Maps and Topographic Information. In: DRUMMOND, O. E. (Hrsg.): *Proc. SPIE Conf. Signal and Data Processing of Small Targets* Bd. 5204. San Diego, Kalifornien, 2003, S. 143–154
- [146] ULMKE, M. ; ERDINC, O. ; WILLETT, P.: Convoy Tracking with the Gaussian Mixture Cardinalized Probability Hypothesis Density Filter / FGAN e.V. Wachtberg, Deutschland, 2007 (Nr. 152). – FKIE-Bericht
- [147] ULMKE, M. ; ERDINC, O. ; WILLETT, P.: Gaussian Mixture Cardinalized PHD Filter for Ground Moving Target Tracking. In: *Proc. Int. Conf. on Information Fusion (FUSION'07)*. Québec, Kanada, 2007. – 8 Seiten
- [148] ULMKE, M. ; KOCH, W.: Road-Map Assisted Ground Moving Target Tracking. In: *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* 42 (2006), Nr. 4, S. 1264–1274
- [149] VERMAAK, J. ; IKOMA, N. ; GODSILL, S. J.: Sequential Monte Carlo framework for extended object tracking. In: *IEE Radar Sonar Navig.* 152 (2005), Nr. 5, S. 353–363
- [150] VIVONE, G. ; BRACA, P. ; GRANSTRÖM, K. ; NATALE, A. ; CHANUSSOT, J.: Converted Measurements Bayesian Extended Target Tracking Applied to X-band Marine Radar Data. In: *ISIF Journal of Advances in Information Fusion* 12 (2017), Nr. 2, S. 189–210
- [151] VO, B.-N. ; MA, W.-K.: The Gaussian Mixture Probability Hypothesis Density Filter. In: *IEEE Trans. Signal Process.* 54 (2006), Nr. 11, S. 4091–4104

- [152] VO, B.-T. ; VO, B.-N. ; CANTONI, A.: Analytic Implementations of the Cardinalized Probability Hypothesis Density Filter. In: *IEEE Trans. Signal Process.* 55 (2007), Nr. 7, S. 3553–3567
- [153] VO, B.-T. ; VO, B.-N. ; CANTONI, A.: Bayesian Filtering with Random Finite Set Observations. In: *IEEE Trans. Signal Process.* 56 (2008), Nr. 4, S. 1313–1326
- [154] WAXMAN, M. J. ; DRUMMOND, O. E.: A Bibliography of Cluster (Group) Tracking. In: DRUMMOND, O. E. (Hrsg.): *Proc. SPIE Conf. Signal and Data Processing of Small Targets* Bd. 5428. Orlando, Florida, 2004, S. 551–560
- [155] WETHERILL, G. B.: Bayesian Sequential Analysis. In: *Biometrika* 3/4 (1961), S. 281–292
- [156] WIGNER, E. P.: Random Matrices in Physics. In: *SIAM Rev.* 9 (1967), Nr. 1, S. 1–23
- [157] WISHART, J.: The Generalised Product Moment Distribution in Samples from a Normal Multivariate Population. In: *Biometrika* 20A (1928), Nr. 1/2, S. 32–52
- [158] YANG, C. ; BLASCH, E.: Fusion of Tracks with Road Constraints. In: *ISIF Journal of Advances in Information Fusion* 3 (2008), Nr. 1, S. 14–32
- [159] YANG, C. ; BLASCH, E.: Kalman Filtering with Nonlinear State Constraints. In: *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* 45 (2009), Nr. 1, S. 70–84
- [160] ZIMMER, M. A. ; TSAI, M.-J.: Tracking of a single cluster of closely spaced objects using one and two passive optical sensors. In: DRUMMOND, O. E. (Hrsg.): *Proc. SPIE Conf. Signal and Data Processing of Small Targets* Bd. 1698. Orlando, Florida, 1992, S. 268–280



---

## Publikationsverzeichnis

---

- [161] BAUM, M. ; FELDMANN, M. ; FRÄNKEN, D. ; HANEBECK, U. D. ; KOCH, W.: Extended Object and Group Tracking: A Comparison of Random Matrices and Random Hypersurface Models. In: *Proc. IEEE ISIF Workshop Sensor Data Fusion: Trends, Solutions, Applications (SDF'10)*. Leipzig, Deutschland, 2010. – 12 Seiten
- [162] FELDMANN, M.: Abschlussbericht zum Forschungsvorhaben E/E810/7C009/7F146: „ISIF – Integrierte Sensordaten- und Informationsfusion, wissensbasierte Auswertung von Sensorprodukten“ / Fraunhofer FKIE. Wachtberg, Deutschland : Fraunhofer FKIE, 2010 (FKIE-SDF 2010/4). – Technischer Bericht. – IV+31 Seiten
- [163] FELDMANN, M.: Abschlussbericht zum Forschungsvorhaben E/E810/BC012/AF146: „ISIF – Integrierte Sensordaten- und Informationsfusion“ / Fraunhofer FKIE. Wachtberg, Deutschland : Fraunhofer FKIE, 2013 (FKIE-SDF 2013/3). – Technischer Bericht. – IV+52 Seiten
- [164] FELDMANN, M. ; FRÄNKEN, D.: Tracking of Extended Objects and Group Targets using Random Matrices – A New Approach. In: *Proc. Int. Conf. Inform. Fusion (FUSION'08)*. Köln, Deutschland, 2008, S. 242–249
- [165] FELDMANN, M. ; FRÄNKEN, D.: Advances on Tracking of Extended Objects and Group Targets using Random Matrices. In: *Proc. Int. Conf. Inform. Fusion (FUSION'09)*. Seattle, Washington, 2009, S. 1029–1036
- [166] FELDMANN, M. ; FRÄNKEN, D.: Tracking ausgedehnter Objekte und nicht aufgelöster Gruppen mit Zufallsmatrizen. In: *Tagungsband des 16. Steirischen Seminars über Regelungstechnik und Prozessautomatisierung (SSRP'09)*. Leibnitz, Österreich, 2009, S. 150–165
- [167] FELDMANN, M. ; FRÄNKEN, D.: Tracking of Extended Objects and Group Targets using Random Matrices – A Performance Analysis. In: *Proc. Workshop Sensor Data Fusion: Trends, Solutions, Applications (SDF'09)*. Lübeck, Deutschland, 2009. – 6 Seiten
- [168] FELDMANN, M. ; FRÄNKEN, D.: Weiterentwicklung eines Ansatzes zur Verfolgung ausgedehnter Zielobjekte und grobstrukturierter Objektgruppen / Fraunhofer FKIE. Wachtberg, Deutschland : Fraunhofer FKIE, 2010 (Nr. 194). – FKIE-Bericht. – VI+56 Seiten
- [169] FELDMANN, M. ; FRÄNKEN, D. ; KOCH, W.: Tracking of Extended Objects and Group Targets Using Random Matrices. In: *IEEE Trans. Signal Process.* 59 (2011), Nr. 4, S. 1409–1420
- [170] FELDMANN, M. ; KOCH, W.: Road-Map Assisted Convoy Track Maintenance using Random Matrices. In: *Proc. Int. Conf. Inform. Fusion (FUSION'08)*. Köln, Deutschland, 2008, S. 250–257
- [171] FELDMANN, M. ; KOCH, W.: Comments on “Bayesian Approach to Extended Object and Cluster Tracking using Random Matrices”. In: *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.* 48 (2012), Nr. 2, S. 1687–1693

- 
- [172] KOCH, W. ; FELDMANN, M.: Cluster Tracking under Kinematical Constraints using Random Matrices. In: *Proc. IET Seminar on Target Tracking and Data Fusion: Algorithms and Applications*. Birmingham, Vereinigtes Königreich, 2008, S. 89–96
- [173] KOCH, W. ; FELDMANN, M.: Cluster Tracking under Kinematical Constraints using Random Matrices. In: *Robotics and Autonomous Systems 57* (2009), Nr. 3, S. 296–309
- [174] MERTENS, M. ; FELDMANN, M. ; ULMKE, M. ; KOCH, W.: Advanced Tracking and Fusion Methods for Ground Surveillance / Fraunhofer FKIE. Wachtberg, Deutschland : Fraunhofer FKIE, 2011 (Nr. 218). – FKIE-Bericht. – VI+52 Seiten
- [175] MERTENS, M. ; FELDMANN, M. ; ULMKE, M. ; KOCH, W.: Tracking and Data Fusion for Ground Surveillance. In: MALLICK, M. (Hrsg.) ; KRISHNAMURTHY, V. (Hrsg.) ; VO, B.-N. (Hrsg.): *Integrated Tracking, Classification, and Sensor Management: Theory and Applications*. Hoboken, New Jersey : John Wiley & Sons, 2012, Kapitel 6, S. 203–254