

Florian Eppler

**Entwicklung von Methoden zum  
Entwurf einer robusten Anti-Rupf-  
Regelung am Beispiel von  
Fahrzeugen mit trocken laufender  
Doppelkupplung**

Development of Methods to Design  
a Robust Anti-Judder Control Using  
the Example of Vehicles Featuring  
a Dry Double Clutch

Band 113

Systeme ■ Methoden ■ Prozesse

Hrsg.: Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. A. Albers







Florian Eppler

**Entwicklung von Methoden zum Entwurf einer robusten  
Anti-Rupf-Regelung am Beispiel von Fahrzeugen mit  
trocken laufender Doppelkupplung**

Development of Methods to Design a Robust Anti-  
Judder Control Using the Example of Vehicles  
Featuring a Dry Double Clutch

Copyright: IPEK ▪ Institut für Produktentwicklung, 2018  
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)  
Die Forschungsuniversität in der Helmholtz-Gemeinschaft  
Alle Rechte vorbehalten

Druck: Stolzenberger Druck und Werbung GmbH & Co. KG, Leimen  
06224-7697915

ISSN 1615-8113

# **Entwicklung von Methoden zum Entwurf einer robusten Anti-Rupf-Regelung am Beispiel von Fahrzeugen mit trocken laufender Doppelkupplung**

Zur Erlangung des akademischen Grades  
**Doktor der Ingenieurwissenschaften**  
der Fakultät für Maschinenbau  
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

genehmigte  
**Dissertation**

von

Dipl. Phys. Florian Eppler  
aus Rastatt

Tag der mündlichen Prüfung: 25.07.2018  
Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. A. Albers  
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. E. Kirchner



## Vorwort des Herausgebers

Wissen ist einer der entscheidenden Faktoren in den Volkswirtschaften unserer Zeit. Der Unternehmenserfolg wird in der Zukunft mehr denn je davon abhängen, wie schnell ein Unternehmen neues Wissen aufnehmen, zugänglich machen und verwerten kann. Die Aufgabe eines Universitätsinstitutes ist es, hier einen wesentlichen Beitrag zu leisten. In den Forschungsarbeiten wird ständig Wissen generiert. Dieses kann aber nur wirksam und für die Gemeinschaft nutzbar werden, wenn es in geeigneter Form kommuniziert wird. Diese Schriftenreihe dient als eine Plattform zum Transfer und macht damit das Wissenspotenzial aus aktuellen Forschungsarbeiten am IPEK - Institut für Produktentwicklung Karlsruhe\* am Karlsruher Institut für Technologie (KIT) verfügbar.

Die Forschungsfelder des Institutes sind die methodische Entwicklung und das Entwicklungsmanagement, die rechnergestützte Optimierung von Strukturen und Systemen, die Antriebstechnik mit einem Schwerpunkt auf den Gebieten Antriebsstrang-Engineering und Tribologie und Monitoring von Lager- und Funktionsreibsystemen, die NVH mit dem Fokus auf Schwingungen und Akustik an Komponenten und am Gesamtfahrzeug, die Mikrosystemtechnik mit dem Fokus auf die zugehörigen Entwicklungsprozesse sowie die Mechatronik. Die Forschungsberichte werden aus allen diesen Gebieten Beiträge zur wissenschaftlichen Fortentwicklung des Wissens und der zugehörigen Anwendung – sowohl den auf diesen Gebieten tätigen Forschern als auch ganz besonders der anwendenden Industrie – zur Verfügung stellen. Ziel ist es, qualifizierte Beiträge zum Produktentwicklungsprozess zu leisten.

Albert Albers

---

\* Eh.: Institut für Maschinenkonstruktionslehre und Kraftfahrzeugbau, Universität Karlsruhe (TH)



## Vorwort zu Band 113

Die Produkte des modernen Fahrzeug- und Maschinenbaus sind in hohem Maße mechatronische Lösungen, die durch eine Integration von mechanischen Strukturen aus dem Maschinenbau, elektrotechnischen Lösungen aus der Elektrotechnik und Softwarelösungen aus dem Bereich der Informatik zu integralen Produkten zusammengeführt werden. Diese Produkte erlauben es Funktionsanforderungen durch die Art der Integration, zum Beispiel durch neuartige Regelungskonzepte, die früher mit klassischen, rein mechanischen Elementen gelöst werden mussten – besser, effizienter und mit neuen Potenzialen zu realisieren. Eine große Herausforderung ist dabei die Integration der Fachtermini und der Entwicklungsprozesse in den unterschiedlichen Gebieten. Hier wurden in den letzten Jahren erhebliche Forschungsarbeiten geleistet, um zu integrierten Ansätzen zu kommen. Dabei geht es vor allem darum, den inhaltlichen Austausch zwischen den Disziplinen strukturiert durchzuführen und sicherzustellen. Ein wichtiger Ansatz in diesem Kontext ist die PGE – Produktgenerationsentwicklung nach ALBERS, die einen völlig neuen Blick auf den Entwicklungsprozess wirft. Der Ansatz postuliert, dass alle Produkte auf der Basis von Referenzprodukten entwickelt werden, wobei die Referenzprodukte als Vorgängerprodukte, aber auch aus ganz anderen Bereichen entstammen können. In diesem Ansatz sind natürlich auch mehrere Referenzprodukte – zum Beispiel für unterschiedliche Teilsysteme des Produkts – selbstverständlich. Mit dem PGE-Ansatz können die Effizienz und Effektivität der Entwicklungsprozesse weiter gesteigert werden.

Ein Beispiel eines solchen Entwicklungsprozesses wird in der Arbeit von Herrn Dr.-Ing. Eppler angegangen. Im Rahmen eines Kooperationsprojektes zwischen dem IPEK und einem Unternehmen, das Kupplungssysteme herstellt, soll eine mechatronische Lösung für eine trockene Doppelkupplung gefunden werden, um bestimmte NVH-Phänomene angehen zu können. Dabei geht es in der Arbeit von Herrn Dr.-Ing. Eppler um die Beherrschung des sogenannten Rupfens, einer Schwingungserscheinung, die bei schlupfender Kupplung in Antriebssträngen von Fahrzeugen auftritt. Herr Dr.-Ing. Eppler hat im Rahmen seiner Arbeit hier nach neuen Lösungen für eine robuste Anti-Schlupf-Regelung gesucht und dabei parallel die Fragestellung der Integration der mechatronischen Fachdisziplinen in das Konzept der PGE – Produktgenerationsentwicklung mit erforscht. Damit leistet die Arbeit einen praxisorientierten Beitrag zur KaSPro – Karlsruher Schule für Produktentwicklung.



## Kurzfassung

Die vorliegende Forschungsarbeit befasst sich mit der Entwicklung einer robusten Regelung zur aktiven Dämpfung von Antriebsstrangschwingungen in der Schlupfphase der Kupplung zur Verbesserung des Fahrkomforts speziell für Antriebsstränge mit trocken laufender Doppelkupplung. Ziel ist insbesondere die Entwicklung zielführender und effizienter Methoden, die die Entwicklung geeigneter Schwingungsdämpfungskonzepte durch aktive Momentenmodulation unterstützen.

Die behandelte Problemstellung resultiert aus den wachsenden Anforderungen an Emissionsreduktion, dem damit einhergehenden Bestreben nach Verringerung der systeminhärenten Dämpfung und verstärkter Anwendung von Leichtbaumethoden im Antriebsstrang bei gleichzeitiger Optimierung des Fahrkomforts speziell von Doppelkupplungsgetrieben. Dieser Zielkonflikt der Entwicklung von Antriebsstrangkomponenten soll durch geeignete hard- oder softwarebasierte Ansätze zur Schwingungsdämpfung nach Möglichkeit aufgelöst werden.

Bisherige Ansätze zu einer solchen Lösung sind im Hinblick auf rein mechanische Lösungen entweder nicht ausreichend effektiv oder zu komplex, wogegen die effizienteren softwarebasierten Lösungen oft störanfällig, in ihrer Wirkung limitiert oder nicht in ausreichender Breite erprobt sind.

Somit ergibt sich für die vorliegende wissenschaftliche Arbeit als Ziel, ein regelungstechnisches Konzept zur effizienten und insbesondere robusten Dämpfung zu finden, welches sich ebenfalls in die bestehende Getriebesteuerungssoftware integrieren lässt. Darüber hinaus werden Methoden zur Validierung dieses software-basierten Ansatzes besonders im Hinblick auf die unsicheren Systemeigenschaften generiert.

Dabei stützt sich die Arbeit auf die Anwendung einer Methode zur effizienten Systemidentifikation durch Verwendung von pseudozufälligen Signalen in Simulation und Fahrzeug, einer damit entwickelten detaillierten Systemmodellierung und -simulation sowie einer so entwickelten integrierten Validierungsmethode die durch realitätsnahe Reproduktion der Phänomene eine zielgerichtete Entwicklungsarbeit ermöglicht. Mithilfe dieser Methoden wird einer aus mehreren betrachteten Ansätzen zur robusten Regelung ausgewählter Ansatz zur  $\mathcal{H}_\infty$ -Regelung im Zeitbereich unter Verwendung von integralen quadratischen Zwangsbedingungen (IQC) sowie der s-Prozedur entwickelt und geprüft.

Damit stellt diese Arbeit den ersten Ansatz zum Entwurf einer in diesem Sinne robusten Anti-Rupf-Regelung sowie die erste bekannte praktische Anwendung des gewählten regelungstechnischen Ansatzes dar. Weitere Ergebnisse sind eine detaillierte Systembetrachtung in Form eines Zustandsraum- und Simulationsmodells sowie eine in diesem Anwendungsbereich neue Methode zur Systemidentifikation.



## abstract

The present scientific work discusses the development of a robust control approach to actively damp drive train oscillations occurring during the clutches slipping phase, where damping is intended to improve the driving comfort especially for dry running double clutch powertrain applications. The goal is particularly to establish productive and efficient methods supporting the development of suitable oscillation damping concepts using active clutch torque modulation.

The problem task treated here has been emerging from the growing requirements to emission reduction, leading to striving for reduction of the damping inherent in the system, an intensified use of lightweight design methods in powertrain construction and simultaneously optimizing the driving comfort especially for double clutch transmission systems. This conflict of objectives in the development of powertrain components shall be solved by the means of suitable hard- or software-based approaches to damping of oscillations.

Current approaches to achieve such a solution are with respect to pure mechanical solutions either not sufficiently efficient or too complex, while the more efficient software-based solutions are mostly prone to disturbances, limited in their effect or not tested within a sufficiently broad scope.

Thus, the scientific work presented here aims to find a control engineering concept to an efficient and most important robust damping of drive train oscillations, which also allows for integration into the existing transmission control software. Further, suitable validation methods are generated to prove the developed software based approach with special focus on the uncertain system characteristics.

The work is based on the application of a method to efficiently identify system dynamics by applying pseudo-random signals in simulation as well as in the car, which enables developing a detailed system modelling and simulation and thereby establishing an integrated validation method by realistic reproduction of phenomena and thus leading to a productive way of development. Using these particular methods, one approach to robust control selected out of several ones being evaluated, which treats time-domain  $\mathcal{H}_\infty$ -control by use of integral quadratic constraints (IQC) as well as the so-called s-procedure, is developed and tested.

Thereby, the presented work represents the first approach to an Anti-Judder-Control being robust in this very meaning as well as the first known practical application of the chosen control theoretical approach. Further results are a detailed system analysis and view in the form of a state-space model and a simulation model as well as a method to system identification being new in this field of application.



## Danksagung

Meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr. h.c. Albert Albers danke ich ganz herzlich für die Unterstützung und das entgegengebrachte Vertrauen in dieser gesamten Zeit, sowie für sehr intensive, aufschlussreiche und anregende Diskussionen, ohne die diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre. Ebenso danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. Eckhard Kirchner für die Übernahme des Korreferats, dem entgegengebrachten Interesse an und der kritischen Auseinandersetzung mit dieser Arbeit.

Eine wissenschaftliche Arbeit lebt von Diskussion und kritischer Auseinandersetzung. Daher gilt mein ganz besonderer Dank Herrn Dr.-Ing. Jonas Kniel für die Betreuung dieser Arbeit in der Forschungsgruppe Kupplungen und tribologische Systeme, für stets sehr interessante, lehrreiche und auch unterhaltsame Gespräche und damit für einen maßgeblichen Beitrag zum Gelingen dieser Arbeit. Darüber hinaus danke ich Herrn Sascha Ott und Herrn Simon Rapp, die wertvolle Beiträge zu hier behandelten fachlichen Fragestellungen geleistet haben, sowie allen IPEK Kollegen, die mich in meiner Zeit am Institut sehr gut aufgenommen haben, und bei allen Studenten, die ich in dieser Zeit betreuen durfte und die zu dieser Arbeit beigetragen haben.

Mein Dank geht ausserdem an Herrn Dr. Klaus Henneberger für die Möglichkeit, diese wissenschaftliche Arbeit in der Abteilung Entwicklung Software und Funktion bei der LuK GmbH&Co. KG bearbeiten zu dürfen. Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Michael Reuschel, der mich als mein Teamleiter stets in allen Phasen dieser Arbeit unterstützt, gefordert und gefördert hat und somit in hohem Maße zum Gelingen dieser Arbeit als auch zu meiner persönlichen Entwicklung beigetragen hat. Weiterhin bedanke ich mich insbesondere bei meinen Kollegen Daniel Müller und Dr. Ulrich Neuberth mit denen ich thematisch eng zusammenarbeiten durfte und in vielen Diskussionen Dinge hinterfragen und neue Lösungsansätze finden konnte. Darüber hinaus gilt mein Dank allen Kollegen in Team und Abteilung für eine schöne Zeit, eine tolle Atmosphäre und besonders Herrn Dr. Jürgen Eich und Herrn Dr. Matthias Krug für Diskussionen und Hilfestellung auf dem Gebiet der robusten Regelung.

Nicht zuletzt möchte ich an dieser Stelle noch meine Dankbarkeit gegenüber meiner Familie zum Ausdruck bringen, die mir immer ein Rückhalt war. Insbesondere danke ich meinen Eltern von Herzen für ihre immerwährende und bedingungslose Unterstützung in allen Lebenslagen und dafür, dass sie aus mir den Menschen gemacht haben, der ich heute bin. Darüber hinaus gilt mein Dank auch meinen Freunden, die mir auch im Laufe dieser Promotion zur Seite standen und Verständnis entgegengebracht haben.

Diese Arbeit möchte ich meiner lieben Oma widmen.

Karlsruhe, den 25.07.2018

Florian Eppler



“When it all comes down,  
Will you say you did everything you could?  
When it all comes down,  
Can you say that you never gave up?”

(Rise Against, 2014)<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Rise Against, 2014: „The Eco-Terrorist In Me“, Album: „The Black Market“ ; Interscope Records



# Inhalt

<b>1</b>	<b>Einleitung</b> .....	<b>1</b>
1.1	Struktur der Arbeit .....	3
<b>2</b>	<b>Grundlagen und Stand der Forschung</b> .....	<b>7</b>
2.1	Methoden und Prozesse der Produktentwicklung .....	7
2.1.1	SPALTEN .....	7
2.1.2	Der IPEK-XiL-Ansatz.....	11
2.1.3	Der Beschreibungsansatz PGE – Produktgenerationsentwicklung.....	14
2.1.4	Zwischenfazit .....	16
2.2	Identifikation der Systemdynamik mithilfe von Pseudozufälligen Binärwertigen Signalen (PRBS) .....	17
2.2.1	Ziel der Systemidentifikation .....	17
2.2.2	Gängige Methoden zur Identifikation der Systemdynamik.....	19
2.2.3	Erzeugung und Eigenschaften eines PRBS .....	21
2.2.4	Optimierungsmöglichkeiten für PRBS .....	24
2.3	Doppelkupplungsgetriebe – Aufbau und Funktionsweise.....	27
2.3.1	Spezielle Eigenschaften der trockenen Doppelkupplung.....	33
2.3.2	Neue Entwicklungen bei Trockenen Doppelkupplungen.....	34
2.4	Modellierung eines PKW-Antriebsstrangs .....	36
2.4.1	Modellierung als Zwei-Massen-Schwinger .....	36
2.4.2	Modellierung unter Berücksichtigung der rotatorischen Kopplung an Aggregat und Karosserie .....	37
2.4.3	Modellierung als Vier-Massen-Schwinger .....	39
2.4.4	Modellierung unter Berücksichtigung der longitudinalen Freiheitsgrade des Aggregates.....	39
2.4.5	Modellreduktion einer Torsionsschwingerkette.....	42
2.4.6	Zwischenfazit .....	44
2.5	Drehzahlmessung im Automobilen Antriebsstrang.....	44
2.5.1	Zeitsynchrone Erfassung der Drehzahl .....	45
2.5.2	Winkelsynchrone Erfassung der Drehzahl.....	47
2.6	Komfortmindernde Schwingungsphänomene im Antriebsstrang von Kraftfahrzeugen .....	51
2.6.1	Akustische Schwingungsphänomene – Ursachen und Wirkungsweisen .....	52
2.6.2	Mechanische Schwingungsphänomene – Ursachen und Wirkungsweisen.....	53
2.6.3	Kupplungsrupfen – Ursachen und Wirkungsweisen .....	53
2.7	Objektivierung des subjektiven Komforteindrucks in Kraftfahrzeugen .....	59
2.7.1	Fahrkomfort als subjektive Größe .....	59
2.7.2	Komfortmindernder Einfluss von Antriebsstrangschwingungen .....	61
2.7.3	Ansätze zur Objektivierung des subjektiven Komforteindrucks unter dem Einfluss mechanischer Schwingungen .....	65

2.7.4	Zwischenfazit .....	71
2.8	Schwingungsdämpfung im Antriebsstrang.....	72
2.8.1	Aktive Hardware-basierte Ansätze .....	72
2.8.2	Passive Hardware-basierte Ansätze .....	74
2.8.3	Aktive Software-basierte Ansätze.....	76
2.8.4	Zwischenfazit .....	87
2.9	Ansätze zur robusten Regelung unsicherheitsbehafteter Systeme .....	88
2.9.1	Zustandsraumdarstellung von regelungstechnischen Systemen .....	88
2.9.2	Steuerbarkeit, Stabilisierbarkeit und Beobachtbarkeit von Regelungstechnischen Systemen .....	93
2.9.3	Linearisierung von Systemen im Zustandsraum.....	96
2.9.4	Unsicherheitsbehaftete Systeme.....	100
2.9.5	Linear Quadratisch Optimaler Regler (LQR).....	107
2.9.6	H- $\infty$ Regelung Unsicherheitsbehafteter Systeme .....	111
2.9.7	Zwischenfazit .....	130
2.10	Numerische Lösung von Riccati Matrix Differenzialgleichungen .....	131
2.10.1	Unterscheidung grundlegender Problemstellungen .....	131
2.10.2	Relationen zwischen Lösungen der algebraischen Riccati Gleichung und der Riccati Matrix Differenzialgleichung .....	132
2.10.3	Methoden zur Lösung des Anfangswertproblems .....	134
2.10.4	Methoden zur Lösung des Endwertproblems.....	136
<b>3</b>	<b>Motivation und Zielsetzung.....</b>	<b>143</b>
<b>4</b>	<b>Methoden zur Entwicklung einer Robusten Anti-Rupf-Regelung.....</b>	<b>149</b>
4.1	Entwicklung einer integrierten Validierungsmethode .....	152
4.2	Einordnung der Forschungsarbeit im Rahmen der PGE .....	154
4.2.1	Einteilung des betrachteten Systems in seine Teilsysteme .....	155
4.2.2	Einordnung in den Kontext der PGE.....	155
4.2.3	Interpretation des PGE-Beschreibungsansatzes in Bezug auf Softwareentwicklung am Beispiel der Entwicklung einer Anti-Rupf-Regelung.....	156
4.2.4	Einordnung des Projektes im Kontext der erweiterten Interpretation der Produktgenerationsentwicklung .....	161
<b>5</b>	<b>Identifikation der Regelstrecke.....</b>	<b>165</b>
5.1	Analyse der Dynamik von PKW-Antriebssträngen .....	166
5.1.1	Begriffsdefinition .....	166
5.1.2	Vorgehensweise und Methoden.....	167
5.1.3	Grundlegende Dynamik eines PKW-Antriebsstrang .....	174
5.1.4	Auftreten der Vorderachsmode .....	176
5.1.5	Aufspaltung der Antriebsstrangresonanzen.....	177
5.2	Modellierung der Regelstrecke anhand eines PKW-Antriebsstrangs.....	181
5.2.1	Entwicklung eines Antriebsstrangmodells anhand bestehender Modelle.....	181

5.2.2	Synthese eines Modells für die Reglerauslegung .....	183
5.3	Übersicht über die in der Regelstrecke verfügbaren Signale .....	184
5.4	Überführen des Antriebsstrangmodells in den Zustandsraum.....	187
5.4.1	Modellierung der systeminhärenten Unsicherheiten .....	194
5.4.2	Modellierung der äußeren Einflüsse auf den geschlossenen Regelkreis .....	199
5.5	Modellreduktion der Regelstrecke .....	201
5.6	Modellierung des Stellgliedes am Beispiel eines mechatronischen Aktors und trocken laufender Doppelkupplung .....	207
5.6.1	Physikalisches Modell des mechatronischen Aktuators.....	208
5.6.2	Physikalisches Modell der trockenen Doppelkupplung .....	212
5.6.3	Validierung des physikalischen Modells des Stellgliedes.....	217
5.6.4	Identifikation der Systemdynamik des mechatronischen Aktuators .....	220
5.6.5	Mögliche systeminhärente Limitierungen .....	225
5.7	Zwischenfazit .....	226
<b>6</b>	<b>Auswahl einer Methode zur Auslegung einer robusten Anti-Rupf-Regelung.....</b>	<b>227</b>
<b>7</b>	<b>Design eines robusten Anti-Rupf-Reglers nach der H-<math>\infty</math> Methode.....</b>	<b>231</b>
7.1	Entwicklung der Reglerstruktur im Zustandsraum .....	231
7.2	Analyse der Systemcharakteristik.....	236
7.2.1	Steuerbarkeit.....	236
7.2.2	Beobachtbarkeit .....	237
7.2.3	Stabilisierbarkeit.....	238
7.2.4	Analyse des Erweiterten Systems .....	239
7.2.5	Zwischenfazit .....	241
7.3	Auslegung eines robusten Reglers mit Ausgangsrückführung zur Unterdrückung von Rupf-Schwingungen im PKW-Antriebsstrang .....	242
7.3.1	Übersicht und Bedeutung der Parameter des Reglerdesigns .....	242
7.3.2	Entwicklung eines geeigneten Performance-Kriteriums.....	244
7.3.3	Entwicklung einer Integralen Quadratischen Zwangsbedingung.....	245
7.3.4	Aufstellen und Lösen der Riccati-Gleichungen .....	255
7.3.5	Implementierung und Anwendung des Reglerdesigns in MATLAB.....	258
7.4	Ordnungsreduktion des Reglers .....	263
7.4.1	Modellreduktion der Regelstrecke .....	263
7.4.2	Bestimmung der Designparameter für das reduzierte Streckenmodell .....	268
7.4.3	Bestimmung der Reglerparameter .....	271
7.5	Zwischenfazit .....	277
<b>8</b>	<b>Analyse des geschlossenen Regelkreises durch Simulation.....</b>	<b>279</b>
8.1	Methoden und Vorgehensweise .....	279
8.2	Aufbau des Simulationsmodells.....	281
8.2.1	Die Subsysteme der Regelstrecke .....	281

8.2.2	Abbildung von Kupplungsrupfen in der Simulation .....	283
8.3	Validierung des Simulationsmodells .....	284
8.3.1	Validierung des synthetisierten Simulationsmodells .....	284
8.3.2	Validierung der Rupfeigenschaften .....	286
8.3.3	Validierung der Variation der Systemdynamik durch systeminhärente Unsicherheiten.....	293
8.4	Einbindung des Reglers in das Simulationsmodell.....	302
8.4.1	Implementierung eines vereinfachten Lagereglers .....	302
8.4.2	Umsetzung des robusten Reglers im Simulationsmodell.....	308
8.5	Diskussion der Begrenzung des Simulationsmodells .....	310
8.6	Analyse des geschlossenen Regelkreises.....	313
8.6.1	Führungsverhalten .....	313
8.6.2	Störverhalten.....	314
8.6.3	Robustheitsanalyse durch Variationsrechnung.....	316
8.7	Zwischenfazit .....	317
<b>9</b>	<b>Problemlösungsansatz Reglerauslegung.....</b>	<b>319</b>
9.1	Situationsanalyse (SA).....	319
9.2	Problemeingrenzung (PE).....	321
9.3	Alternative Lösungen Entwickeln (AL) .....	323
9.4	Zwischenfazit .....	325
<b>10</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick.....</b>	<b>327</b>
10.1	Zusammenfassung.....	327
10.1.1	Erzielte Ergebnisse .....	327
10.1.2	Bewertung der Ergebnisse .....	328
10.2	Ausblick .....	330
10.2.1	Folgerung aus der Problembetrachtung .....	330
10.2.2	Alternative Ansätze .....	330
<b>11</b>	<b>Literaturverzeichnis.....</b>	<b>333</b>
	Studien-, Diplom-, Bachelor- und Masterarbeiten.....	350
<b>12</b>	<b>Anhang.....</b>	<b>351</b>
12.1	Parameter des Entwicklungsfahrzeugs.....	351
12.2	Synthetisiertes Modell des PKW-Antriebsstrangs mit Doppelkupplungsgetriebe.....	353
12.3	Blockdiagramme des Simulationsmodells in Simulink .....	354
12.4	Simulationsergebnisse der Variation der systeminhärenten Unsicherheiten .....	359
12.4.1	Variation der einzelnen Dämpfungskoeffizienten .....	359
12.4.2	Variation der einzelnen Steifigkeiten .....	360
12.4.3	Variation der einzelnen Trägheitsmomente und Massen .....	361
12.4.4	Kombinierte Variation der Dämpfung von Aggregatlager und Seitenwelle ...	362
12.4.5	Kombinierte Variation der Steifigkeit von Aggregatlager und Seitenwelle ....	364

12.4.6	Kombinierte Variation der Trägheitsmomente von Aggregat und Getriebeeingang .....	366
12.5	Umsetzung und Validierung der Rosenbrock-Methode 2. Ordnung zur Lösung von Riccati Matrix Differenzialgleichungen .....	368
12.6	C-Code der Reglerimplementierung in SIMULINK .....	370



## Formelzeichen

$F_N$	N	Normalkraft
$J_{[...]}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	Massenträgheitsmoment
$c_{[...]}$	$\frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$	Steifigkeit
$d_{[...]}$	$\frac{\text{Nm} \cdot \text{s}}{\text{rad}}$	Dämpfung
$n_{[...]}$	rpm	Drehzahl
$\omega_{[...]}$	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$	Winkelgeschwindigkeit
$\dot{\omega}_{[...]}$	$\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$	Winkelbeschleunigung
$\varphi_{[...]}$	rad	Verdrehwinkel
$\mu$	1	Reibwert
$i_{[...]}$	1	Übersetzung
$M_{[...]}$	Nm	Drehmoment
$p$	$\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$	Pressung, Druck
$r_{\text{Reib}}$	m	effektiver Reibradius der Kupplung
$F_{\text{Clamp}}$	N	Anpresskraft der Kupplung
$F_{\text{Roll}}, F_{\text{Road}}, F_{\text{Air}}$	N	Roll-, Steigungs- und Luftwiderstand eines fahrenden Fahrzeugs
$x$	-	Zustandsvektor des Systems
$y$	-	Ausgangsgrößenvektor des Systems
$z$	-	Regelgrößenvektor des Systems
$w$	-	Störungsvektor des Systemzustandes
$v$	-	Störungsvektor der Ausgangsmessung des Systems
$\nu$	-	Vektor der harmonischen Störungen des Systems
$A$	-	Dynamik- oder Systemmatrix des Zustandsraummodells
$B_1$	-	Eingangsmatrix des Eingangsvektors der Stellsignale im Zustandsraummodell
$B_2$	-	Eingangsmatrix des Eingangsvektors der systeminhärenten Unsicherheiten im Zustandsraummodell
$B_3$	-	Eingangsmatrix des Eingangsvektors der externen Störungen im Zustandsraummodell
$C_1$	-	Ausgangsmatrix zur Systemunsicherheit im Zustandsraummodell
$C_2$	-	Ausgangsmatrix des Systems im Zustandsraummodell

$D_1$	-	Durchgangsmatrix zur Systemunsicherheit im Zustands-raummodell
$D_2$	-	Durchgangsmatrix zum Systemausgang im Zustands-raummodell
$G, R, X_T$	-	Gewichtungsmatrizen im Gütekriterium zur Reglerauslegung
$M, N, Q, P_0$	-	Gewichtungsmatrizen der Integralen Quadratischen Zwangsbedingung zur Reglerauslegung
$c_0, c_1, c_2, c_3$	-	Skalare Gewichtungsparameter zur Reglerauslegung
$d$	-	Auslegungsparameter der nicht modellierten Systemdynamik in der Integralen Quadratischen Zwangsbedingung zur Reglerauslegung
$a_{[\dots]}$	Nm	Amplituden der auf die Regelstrecke einwirkenden harmonischen Störungen
$\phi_{[\dots]}$	rad	Phasenlagen der auf die Regelstrecke einwirkenden harmonischen Störungen
$\Delta_{[\dots]}$	1	Angenommene relative parametrische Unsicherheiten der Regelstrecke
$\mu_{Cl}$	Nm	Aus der Systemunsicherheit resultierender Anteil des Kupplungsdrehmomentes
$h, \dot{h}$	-	Zustandsvektor des Erweiterten Systems sowie dessen zeitliche Änderung
$\hat{A}, \hat{B}_1, \hat{B}_2, \tilde{B}_2,$ $\hat{C}_1, \hat{C}_2, \hat{D}_1, \hat{D}_2$	-	Systemmatrizen der Zustandsraumdarstellung des Erweiterten Systems
$\hat{w}$	-	Vektor der gewichteten Störungen des Erweiterten Systems
$n_{Harm}$	1	Anzahl der modellierten äußeren harmonischen Störungen
$X(t), Y(t)$	-	Lösungen der Riccati Matrix Differenzialgleichungen zur Reglerauslegung
$\tau$	-	Gewichtungsparameter der Reglerauslegung, resultierend aus der s-Prozedur
$\rho(\cdot)$	-	Spektralradius einer Matrix
$\bar{\mathbb{C}}^+$	-	Offene rechte Halbebene der Komplexen Zahlenebene
$Cov(\cdot, \cdot)$	-	Kovarianzmatrix zweier Signalvektoren
$Var(\cdot)$	-	Varianz einer Signalkomponente



# 1 Einleitung

Aktuelle Studien der Marktsituation im PKW Bereich zeigen, dass der Einfluss von Doppelkupplungsgetrieben seit deren Einführung im Jahre 2008 stetig gestiegen ist und im kommenden Jahrzehnt etwa jedes fünfte Automatikgetriebe über eine Doppelkupplung verfügen wird.<sup>2</sup> Dabei vereint das Doppelkupplungsgetriebe die Verbrauchs- und Kosteneffizienz eines Handschaltgetriebes mit dem Fahrkomfort eines herkömmlichen Automatikgetriebes mit Drehmomentwandler und bietet zudem eine ideale Basis zur Erweiterung des Antriebsstranges hin zu Hybridfunktionen wie zum Beispiel Start-Stopp oder Rekuperation.<sup>2,3,4,5</sup> Speziell in den durch strengere Emissionsverordnungen und zunehmende Urbanisierung weiter wachsenden Segmenten der Kompakt- und unteren Mittelklasse kommt dem wartungsärmeren System mit trockener Doppelkupplung aufgrund deren hoher Kosten- und Verbrauchseffizienz eine besondere Bedeutung zu.<sup>4,5</sup>

Die steigenden Anforderungen an die CO<sub>2</sub>-Emissionswerte im PKW Segment sowohl von Seiten der Politik<sup>6,7</sup> als auch seitens der Endkunden führt außerdem zu einer Verringerung der systeminhärenten Dämpfung im Antriebsstrang durch die Automobilhersteller. Dies hat jedoch auch zur Folge, dass etwaige Drehmomentschwankungen im Antriebsstrang nun in größerem Maße auf die Antriebsachse(n) und auch direkt auf die Karosserie übertragen werden und somit den Fahrkomfort negativ beeinflussen.<sup>2</sup>

Betrachtet man zudem die Komfortanforderungen an Automatikgetriebe aus Kundensicht anhand des Kano-Modells der Kundenzufriedenheit, so wird deutlich, dass ein komfortables und jederzeit reproduzierbares Anfahrverhalten als Basismerkmal erwartet wird, welches bei Nichterfüllung dieser Erwartungen direkt zu Unzufriedenheit des Kunden führt.<sup>8</sup>

Damit steht die Verbesserung der NVH Eigenschaften (Rupfen, Geräuscentwicklung) gerade für trockene Doppelkupplungen im Fokus der weiteren Entwicklungsarbeit.

---

<sup>2</sup> Zink et al., 2014

<sup>3</sup> Kimmig; Agner, 2006

<sup>4</sup> Kimmig et al., 2010

<sup>5</sup> Zink; Hausner, 2010

<sup>6</sup> Bundesministerium für Umwelt, Naturschutz, Bau und Reaktorsicherheit, 2009

<sup>7</sup> Europäisches Parlament, 2014

<sup>8</sup> Albers 2015

Dies geschieht entweder durch die Entwicklung neuer Reibsysteme mit höherer Schwingungsdämpfung oder durch den Einsatz von speziellen Regelalgorithmen, um dem System auch im Wettbewerb mit neuen Produktgenerationen von Drehmomentwandlern zu einer guten Position zu verhelfen.<sup>2</sup> Dabei bietet gerade der Einsatz spezieller Regelalgorithmen eine Chance für die Hersteller, die NVH Eigenschaften des Systems signifikant zu verbessern und dabei bei geringen Wartungs- und vor allem Entwicklungskosten eine hohe Modularität und Flexibilität und auch ein hohes Maß an Robustheit<sup>9</sup> zu erreichen.

Der Entwickler bewegt sich hier im Spannungsfeld zwischen Kunden- und Unternehmensanforderungen und muss unter Berücksichtigung der unterschiedlichen Motivationen den möglichen Lösungsraum einschränken. Ergebnis dieser Einschränkung sind die Forderungen nach selektiver Erhöhung der Systemdämpfung (Komfortverbesserung, Wahrung der Effizienz) mithilfe einer sehr einfachen Hardwarekomponente oder einer Softwarelösung (Wartungs- und Entwicklungskosten, Robustheit, Modularität), welche sich in der Entwicklung sehr einfach auf ein System abstimmen lässt und sich auch im Betrieb an verändernde Systemeigenschaften adaptieren kann (Modularität, Kosteneffizienz, Robustheit).

Bisher in die Praxis umgesetzte Lösungen konnten nicht alle diese Anforderungen<sup>10</sup> erfüllen, da die bislang gängigen Hardwarekomponenten zur Schwingungsdämpfung im Antriebsstrang oftmals nur sehr selektive Dämpfung erreichen konnten oder eine zu hohe Komplexität aufwiesen und so keine seriennahe Umsetzung durchgeführt wurde.<sup>4</sup> Zudem wurde sowohl bei den bisher umgesetzten Hard- als auch Softwarelösungen eine Variation der Schwingungsdynamik des Antriebsstranges über Fahrzeuglebensdauer und in Form einer piece-to-piece Variation nicht oder nicht hinreichend beachtet. Gerade letztere Anforderung an eine wirkungsvolle<sup>11</sup> Schwingungsdämpfung im PKW-Antriebsstrang kann mithilfe einer Software-basierten Anti-Rupf-Regelung erfüllt werden, da ein solcher Regelalgorithmus das Potenzial besitzt, kritische Situationen zu erkennen und zu verbessern und sich außerdem an veränderte Systemeigenschaften anzupassen.

Die Problemstellung der Entwicklung einer Software-basierten robusten Anti-Rupf-Regelung bestand hier zunächst einmal darin, die Schwingungsdynamik der

---

<sup>9</sup> Im Sinne einer hundertprozentigen Funktionserfüllung auch unter wechselnden Bedingungen

<sup>10</sup> Der Begriff der Anforderung folgt hier der Definition nach IPEK Glossar. „Eine Anforderung ist eine durch einen Wert oder einen Wertebereich festgelegte Beschreibung eines einzelnen Produktmerkmals. Eine Anforderung kann ein Ziel nicht ersetzen, sondern lediglich konkretisierend beschreiben.“

<sup>11</sup> „Wirkung“ nach IPEK Glossar: „Eine Wirkung beschreibt die aus einer Funktion resultierenden Outputs, die innerhalb eines technischen Systems gleichzeitig Ursachen (Inputs) mit Auslösung weiterer Funktionen sein können. An der Systemgrenze sind Wirkungen messbar.“

Regelstrecke und der Ansteuerglieder sowie deren dominierende Einflussfaktoren zu bestimmen. Mithilfe dieser Analyse konnten zunächst einmal mögliche systeminhärente Limitierungen für die Regelung durch aktive Momentenmodulation, als auch daraus entstehende Anforderungen aus Sicht des Entwicklers an die eingesetzte Hardware gewonnen werden. Darüber hinaus konnte mit diesem Wissen eine problemorientierte Systemmodellierung und eine Modellierung der bestimmenden Systemunsicherheiten durchgeführt werden, welche letztendlich die Basis für die Entwicklung eines robusten Reglers bildeten.

Die vorliegende Arbeit trägt hier zur Entwicklung einer Software-basierten Lösung zur Schwingungsdämpfung im Antriebsstrang durch aktive Momentenmodulation bei, indem schon bei der Auslegung des Reglers mögliche Systemschwankungen in Form von piece-to-piece Schwankungen und Veränderungen über die Fahrzeuglebensdauer berücksichtigt werden. Durch diese Berücksichtigung ist es möglich, die Regelung nach einmaliger Abstimmung ohne weitere individuelle Anpassungen als Serienprodukt einzusetzen und Sie über die komplette Lebensdauer des Fahrzeuges möglichst effizient zu betreiben.

## 1.1 Struktur der Arbeit

Die vorliegende Arbeit ist in 10 Kapitel strukturiert und soll den Leser sowohl Schritt für Schritt durch die behandelte Thematik führen, als auch einzelne Themenblöcke klar und verständlich vermitteln. Eine grafische Darstellung der im Folgenden erläuterten Struktur ist in Bild 1 zu sehen.

In **Kapitel 2** werden die wissenschaftlichen Grundlagen und der Stand der Forschung dargelegt, auf welchen die vorliegende Arbeit aufbaut.

Eingeleitet wird der Stand der Forschung durch eine Vorstellung verschiedener Methoden der Produktentwicklung, wie sie auch im Rahmen des integrierten Produktentstehungsmodells (iPeM) zum Einsatz kommen.<sup>12</sup> Hier werden mit dem Prozessmodell SPALTEN, dem IPEK-X-in-the-Loop Ansatz (XiL) sowie dem Ansatz zur PGE – Produktgenerationsentwicklung drei äußerst nützliche Werkzeuge zur Produktentwicklung präsentiert und durch ein Verfahren zur Bestimmung der Systemdynamik mithilfe von pseudozufälligen binärwertigen Signalfolgen (PRBS) ergänzt. Hierdurch wird die Orientierung der vorliegenden wissenschaftlichen Arbeit an einer strukturierten Herangehensweise sowie der Erarbeitung von entwicklungsbegleitenden spezifischen Methoden unterstrichen.

Anschließend wird das zu regelnde System und die zugrunde liegende Problematik für die im Rahmen der Arbeit zu entwickelnde Regelung definiert, wodurch die Relevanz

---

<sup>12</sup> Albers et al., 2016c

einer tiefgreifenden Systemkenntnis als unabdingbare Basis für eine erfolgreiche Entwicklung einer robusten Regelung verdeutlicht wird. Der Leser wird hier mit Aufbau und Funktionsweise der trockenen Doppelkupplung, der Modellierung eines PKW-Antriebsstrangs und schließlich den fahrkomfortrelevanten akustischen und mechanischen Phänomenen sowie deren Auswirkungen auf den subjektiv empfundenen Fahrkomfort vertraut gemacht.

Daran anknüpfend werden bereits existierende Lösungen zur Schwingungsdämpfung im Antriebsstrang vorgestellt und somit eine Grundlage für die später folgende Motivation und Zielsetzung gelegt. Im Folgenden werden gängige Konzepte zur Auslegung robuster Regler, sowie die dafür notwendigen regelungstechnischen und mathematischen Grundlagen vorgestellt.

**Kapitel 3** thematisiert, aufbauend auf Kapitel 2, die Motivation und Zielsetzung der vorliegenden Arbeit. Dabei wird zunächst die Relevanz der behandelten Thematik der Verbesserung der NVH Eigenschaften von trockenen Doppelkupplungen für PKW dargestellt, indem der Einsatz von trockenen Doppelkupplungen auch für kommende Produktgenerationen von Automatikgetrieben motiviert wird. Aufbauend auf dem in Kapitel 2 vorgestellten Stand der Forschung wird die Forschungslücke identifiziert. Zusammen mit den aufgestellten Forschungshypothesen ergibt sich daraus die wissenschaftliche Grundlage für die vorliegende Arbeit. Entsprechend dieser Grundlage werden die Forschungsfragen formuliert, welche im Rahmen dieser Arbeit beantwortet werden sollen.

In **Kapitel 4** wird zur Definition des Handlungssystems<sup>13</sup> das Vorgehen zur Entwicklung einer solchen Lösung zur Schwingungsdämpfung im Antriebsstrang anhand des SPALTEN Prozesses zur strukturierten Problemlösung dargestellt, woraus auch die weitere Struktur der vorliegenden Arbeit abgeleitet wird. Insbesondere wird auch auf die methodische Vorgehensweise im Verlauf der hier dokumentierten wissenschaftlichen Arbeit über SPALTEN hinaus eingegangen und diese motiviert, sowie das Forschungsvorhaben in den Rahmen der PGE – Produktgenerationsentwicklung eingeordnet.

**Kapitel 5** behandelt die Identifikation der Regelstrecke basierend auf einer im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Methode zur Identifikation der Dynamik mechatronischer Systeme. Damit wurde zunächst ein geeignetes Modell des PKW-Antriebsstrang aus bestehenden Ansätzen synthetisiert, unter Zuhilfenahme der dem Entwickler in der Fahrzeugsoftware verfügbaren Signale in den Zustandsraum überführt und darauf aufbauend erfolgt eine Modellierung der Systemunsicherheiten für die spätere

---

<sup>13</sup> Definiert nach IPEK Glossar als „sozio-technische Systeme, die strukturierte und vernetzte Aktivitäten für die Transformationen zwischen dem Ziel- und Objektsystem durchführen.“

Auswahl und Anwendung eines geeigneten Regelkonzeptes. Zur Abbildung von möglichen systeminhärenten Limitierungen werden im Anschluss die Kupplung, der Kupplungsaktor und dessen Ansteuerung als Schnittstelle zwischen Regler und Regelstrecke modelliert und im Hinblick auf ihre dynamischen Eigenschaften analysiert.

Im Laufe von **Kapitel 6** erfolgt anhand der bislang gewonnenen Erkenntnisse die Auswahl eines geeigneten Regelkonzeptes aus den in Kapitel 2 vorgestellten Ansätzen.

Auf Grundlage dieser Auswahl wird in **Kapitel 7** schließlich eine robuste Anti-Rupf-Regelung zur aktiven Momentenmodulation entwickelt, auf ihre grundlegenden regelungstechnischen Eigenschaften im geschlossenen Regelkreis geprüft und schließlich auf das zu regelnde System ausgelegt.

Die in Kapitel 7 entwickelte Regelstrategie wird im Laufe von **Kapitel 8** im Hinblick auf ihr Führungs- und Störverhalten sowie abschließend auf ihre Robustheit hin getestet. Hierzu wird eine geeignete Validierungsmethode mithilfe eines speziell aufgebauten Simulink-Modells entwickelt.

**Kapitel 9** beschließt die Dokumentation der Entwicklung einer robusten Anti-Rupf-Regelung, indem im Rahmen von SPALTEN eine Analyse<sup>14</sup> der im Verlauf der Arbeit erkannten Herausforderungen stattfindet und daraus Schlussfolgerungen für weitere anknüpfende Arbeiten abgeleitet werden.

**Kapitel 10** fasst die vorliegende wissenschaftliche Arbeit abschließend zusammen und gibt einen Ausblick auf mögliche weiterführende Forschungsvorhaben im Kontext dieses Themenkomplexes.

---

<sup>14</sup> Analyse ist hier als „eine Handlung, die das Verstehen eines existierenden Systems bezweckt“ mit dem Resultat einer Erkenntnis, zu verstehen. IPEK Glossar

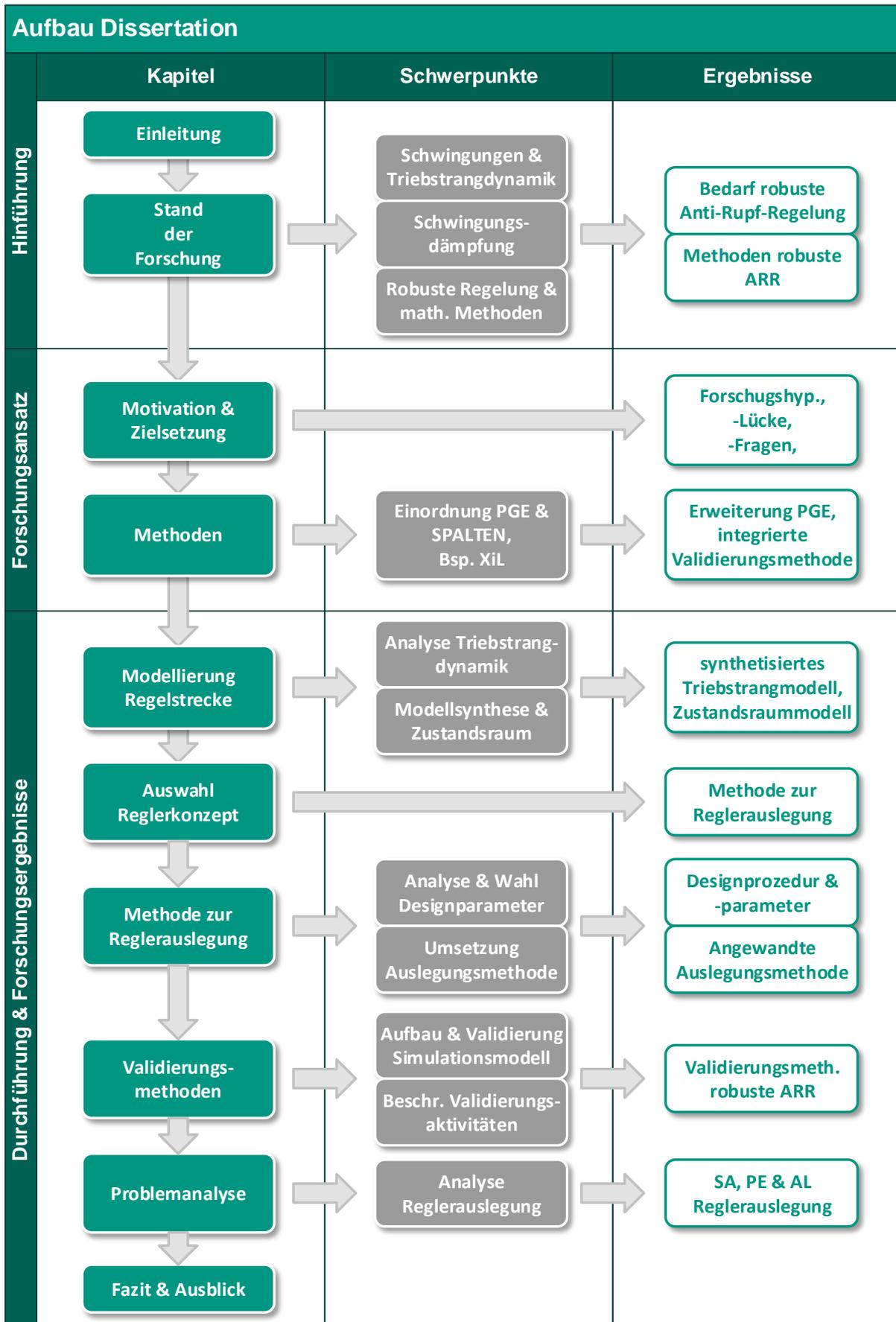


Bild 1: Schematischer Aufbau der vorliegenden Arbeit

## 2 Grundlagen und Stand der Forschung

In diesem Kapitel werden die technischen und methodischen wissenschaftlichen Grundlagen erläutert, auf denen die vorliegende wissenschaftliche Arbeit aufbaut. Diese Grundlagen sind dergestalt thematisch gegliedert, dass der Leser schrittweise an die in der Arbeit behandelte Problemstellung herangeführt wird.

### 2.1 Methoden und Prozesse der Produktentwicklung

#### 2.1.1 SPALTEN

Nach ALBERS ET AL. kann der Produktentwicklungsprozess als Ganzes sowie auch die darin auftretenden Phasen der Produktentwicklung als ein Problemlösungsprozess angesehen werden. Dabei können bedingt durch unterschiedliche Einflüsse, wie zum Beispiel die Ausgangssituation, die zur Verfügung stehende Zeit zur Problemlösung sowie Komplexität und Umfang zu unterschiedlichen Komplexitätsgraden der Problemstellung und auch deren Lösungen führen. Diesem variierenden Komplexitätslevel kann der Entwickler durch die Anwendung einer Methodik zur gezielten, schrittweisen Problemlösung begegnen.<sup>15</sup>

*„Die SPALTEN-Methodik beschreibt eine universelle Vorgehensweise zur Behandlung von Problemen mit unterschiedlichen Randbedingungen und Komplexitätsgraden.“* ALBERS ET AL. <sup>16</sup>

Diese Vorgehensweise wurde mit dem Ziel entwickelt, die im Produktentwicklungsprozess auftretenden unterschiedlichen Problemstellungen unter Sicherstellung eines optimierten Nutzen/Aufwand-Verhältnisses schrittweise zu lösen. Unter einem optimierten Nutzen/Aufwand-Verhältnis versteht man dabei eine Minimierung von Aufwand und Zeit bis zur Lösung des Problems sowie eine Optimierung der Lösung selbst unter Sicherheitsmaximierung bei der Problemlösung.<sup>17,18</sup>

Dabei enthält die Vorgehensweise nach SPALTEN den „Allgemeinen Problemlösungsprozess“ nach der VDI-Richtlinie 2221 und ergänzt diesen um die weiteren Schritte der Lösungsumsetzung sowie des Nacharbeitens und Lernens.

---

<sup>15</sup> Albers et al., 2005a

<sup>16</sup> nach Albers et al., 2005a

<sup>17</sup> Albers et al., 2005a

<sup>18</sup> Albers et al., 2016a

Diesen Problemlösungsprozess soll der Entwickler sowohl bei zukunftsorientierten Problemen als auch bei solchen, die spontan im Laufe der Entwicklung auftreten anwenden.<sup>19</sup>

Den Ausführungen von ALBERS ET AL.<sup>19</sup> zufolge lässt sich die Problemlösung nach der SPALTEN-Methode als Zusammensetzung der folgenden Module beschreiben:

#### SA – Situationsanalyse

Während der Situationsanalyse wird durch Sammeln, Ordnen und Dokumentation von Informationen die der Problemstellung zugrunde liegende Situation erfasst und somit eine Grundlage für die folgenden Schritte hin zu einer Lösung des Problems erarbeitet. In diesem Schritt wird außerdem die Situation beurteilt und eine Vorgehensweise zur Problembehandlung festgelegt.

#### PE – Problemeingrenzung

Hier erfolgt zunächst eine Fokussierung auf die problemlösungsrelevanten Informationen mit dem Ziel, die Ursache für die vorliegende Abweichung zwischen Soll- und Ist-Zustand zu identifizieren und diese zu beweisen. Dabei werden sowohl der Soll- als auch der Ist- bzw. Ist(Nicht)-Zustand definiert. Letzterer definiert einen Zustand, in dem ein Problem hätte auftreten können, aber bislang nicht aufgetreten ist. Das Ermitteln der Ursache für die Abweichung zwischen Soll- und Ist-Zustand erfolgt durch Aufstellung von Hypothesen sowie einer Beweisführung zur Verifizierung bzw. Falsifizierung dieser Hypothesen. Das Ergebnis dieser Phase sind die Problemlösungsziele bzw. eine detaillierte Beschreibung der zu lösenden Aufgabe mithilfe geeigneter Methoden.

#### AL – Alternative Lösungen generieren

Im Zuge der Entwicklung von alternativen Lösungen werden die Randbedingungen der Lösungssuche ermittelt sowie eine abstrakte Zielformulierung festgelegt. Letztere dient der Vermeidung einer möglichen Vorfixierung auf eine bestimmte Lösung. Die dabei erzeugten Lösungen werden analysiert, konkretisiert und dokumentiert.

#### LA – Lösungen auswählen

Das Modul der Lösungsauswahl wird charakterisiert durch die Analyse und Bewertung der im Zuge der Entwicklung von alternativen Lösungen generierten Ansätze anhand von zuvor festgelegten Bewertungskriterien.<sup>20</sup> Die Lösungen werden darüber hinaus auf ihre Sicherheit und ihre Einflussnahme auf die Lösungsauswahl hin untersucht und

---

<sup>19</sup> Albers et al., 2005a

<sup>20</sup> Der Begriff Bewertung versteht sich hier als „eine Aktivität zur Untersuchung von Elementen des Objektsystems aus Stakeholder-Sicht“ basierend auf Zahlenwerten (objektiv) oder persönlichen Empfindungen (subjektiv). Albers et al., 2015a

letztendlich die Lösungen mit dem, gemessen an den Bewertungskriterien, höchsten Potential weiterverfolgt.

#### TA – Tragweite analysieren

Für die ausgewählte(n) Lösung(en) werden nun die vorhersehbaren Chancen und Risiken analysiert. Dabei sollen insbesondere sogenannte kritische Orte identifiziert werden, die zur Ermittlung dieser Chancen und Risiken und deren Ursachen dienen. Durch diesen Schritt können Maßnahmen zur Vermeidung der identifizierten Risiken oder Nutzung der jeweiligen Chance definiert und in den Problemlösungsprozess implementiert werden.

#### EU – Entscheiden und Umsetzen

Nun werden die Ergebnisse der vorangegangenen beiden Schritte der Lösungsauswahl und Tragweitenanalyse aufgenommen und dabei die Entscheidung zur Umsetzung der gewählten Problemlösung dokumentiert. Ziel dieses Moduls ist die vollständige Bearbeitung und Realisierung der anhand der Module LA und TA gewählten Lösung(en) unter Berücksichtigung der Maßnahmen zur Risiko- und Chancenoptimierung.

#### NL – Nachbereiten und Lernen

Dieses Modul basiert auf der Idee des kontinuierlichen Verbesserungsprozesses und soll aus den Erfahrungen der Bearbeitung und Lösung des Problems eine Verbesserung für zukünftige Problemlösungen, -bearbeitungen und dem zugrunde liegenden Prozess erzielen. Die in diesem Prozessschritt gesammelten Erkenntnisse werden zur optimalen Ausschöpfung der erkannten Verbesserungspotenziale dokumentiert.

Die Verwendung dieser Phasen der SPALTEN Methode kann entsprechend der Problemstellung in unterschiedlicher Abstraktion angewandt werden, wodurch sich diese Methode sowohl für den gesamten Produktentwicklungsprozess als auch für einzelne Aktivitäten innerhalb dieses Prozesses eignet.<sup>21</sup>

Eine Besonderheit der SPALTEN Methode ist die Bestimmung des Problemlösungsteams, die jeweils zu Beginn eines Moduls zur stattfindet (vgl. Bild 2). Während diesem initialen Arbeitsschritt wird die Zusammensetzung des Teams überprüft und gegebenenfalls an die vorliegende Aufgabe angepasst, wodurch eine deutliche Effizienz- und Qualitätssteigerung gegenüber herkömmlichen Methoden zur Problemlösung erreicht wird.<sup>22</sup>

---

<sup>21</sup> Albers et al., 2016a

<sup>22</sup> Albers et al., 2005a

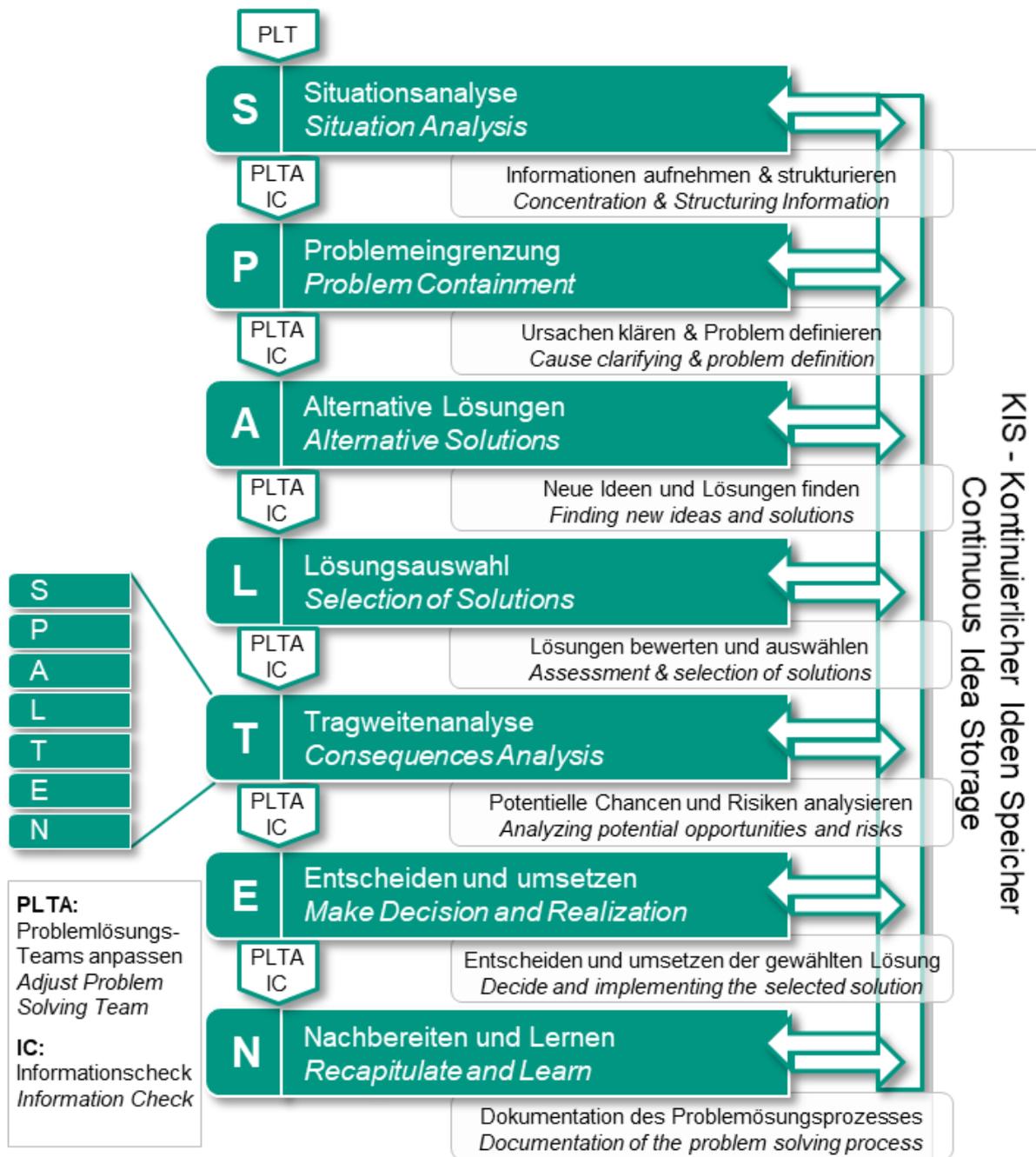


Bild 2: Grafische Darstellung der Problemlösungsmethode SPALTEN zur Verdeutlichung des modularen und des fraktalen Charakters<sup>23</sup>

Die Problemlösungsmethode SPALTEN soll jedoch auch über die zuvor beschriebene Flexibilität der problemspezifisch angepassten Anwendung hinaus als fraktale Methode angesehen werden. Der Entwickler wird in jeder der zuvor beschriebenen Phasen des Prozesses wiederum mit Problemstellungen, von im Allgemeinen geringerer Komplexität, konfrontiert und hat somit die Möglichkeit, auch innerhalb dieser einzelnen Phasen diese Methode zur erfolgreichen und effizienten

<sup>23</sup> nach Albers et al., 2016a

Lösungsfindung anzuwenden. Durch diesen fraktalen Charakter der Methode wird auch die ständige Abfolge von Sammlung und Verdichten von Information (*Honeycomb-Model*) noch einmal betont.<sup>24</sup>

Sowohl der fraktale Charakter als auch die Modularität der einzelnen Phasen der Problemlösung sind nochmals grafisch in Bild 2 veranschaulicht.

### 2.1.2 Der IPEK-XiL-Ansatz

Nach den Ausführungen von ALBERS ET AL. liegt der Schlüssel zu einer erfolgreichen Produktentwicklung in einer kontinuierlichen Validierung über den kompletten Produktentstehungsprozess hinweg. Dabei versteht sich Validierung im Gegensatz zur Verifikation nicht als Überprüfung, ob das Produkt zu einem gegebenen Zeitpunkt im Produktentstehungsprozess die festgelegten Anforderungen erfüllt, sondern sie fordert auch die Überprüfung des Prozesses zur Gewinnung dieser Anforderungen, wodurch auch subjektive Aspekte Berücksichtigung finden. Dabei kann die zentrale Rolle der Validierung anhand des erweiterten ZHO-Modells, welches die Produktentwicklung als eine fortlaufende Abfolge von Kreation und Validierung sieht (Bild 3), im Rahmen des integrierten Produktentstehungsmodells (iPeM) erklärt werden.<sup>25</sup>

Die Validierung besteht in diesem Modell aus der Analyse des Objektsystems, einer daraus folgenden Erweiterung der Wissensbasis und einer daraufhin erfolgenden Synthese eines angepassten Zielsystems.<sup>26</sup> Auslöser für eine Validierungsaktivität<sup>27</sup> ist demnach eine auftretende Wissenslücke, welche nach einer geeigneten Formulierung den Ausgangspunkt der Validierung als Problemlösungsprozess bildet. Dieser Prozess definiert das genaue Vorgehen, um mittels geeigneter Methoden gezielte Untersuchungen zu definieren und durch deren Durchführung die auftretende Wissenslücke zu schließen.<sup>28</sup>

---

<sup>24</sup> Albers et al., 2005a

<sup>25</sup> Albers et al., 2016e

<sup>26</sup> Definiert nach Albers et al., 2016e: „Das Zielsystem umfasst dabei die geplanten Eigenschaften und Randbedingungen eines Produkts, wodurch der gewünschte Zustand dessen beschrieben wird, nicht jedoch die Lösung als solche. Das Zielsystem wird zu Beginn der Entwicklung als initiales Zielsystem definiert und im Laufe der Entwicklung kontinuierlich erweitert und angepasst.“

<sup>27</sup> Aktivität versteht sich hier im Sinne der Zusammensetzung „einer Tätigkeit, einer ausführenden Ressource, einer zu benutzenden Ressource und einer zeitlichen Abhängigkeit“. IPEK Glossar

<sup>28</sup> Albers et al., 2016e

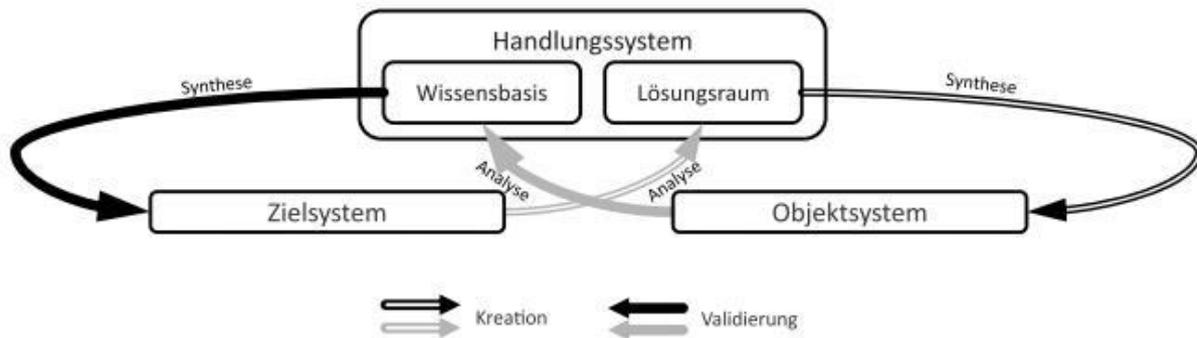


Bild 3: Das erweiterte ZHO-Modell der Produktentstehung zur Verdeutlichung der Rolle der Validierung im Rahmen des integrierten Produktentstehungsmodells (iPeM)<sup>29</sup>

Da die Validierung innerhalb des Produktentstehungsprozesses eine fortlaufende, iterative Aktivität darstellt, ist der Entwickler immer wieder mit unterschiedlichen zu untersuchenden Systemen (*X-in-the-Loop*) in einem veränderlichen Kontext für die Validierung konfrontiert. Daher bedarf es einer unterstützenden Methode, um die Validierungsaktivitäten über den kompletten Produktentstehungsprozess in der geeigneten Modularität zu unterstützen. Dieses Ziel einer Unterstützung der Produktentwicklung über die Analyse, Synthese und Validierung mithilfe einer integrativen und zeiteffizienten Methode unter Verwendung der strategischen Ressourcen „Wissen“ und „Information“ und der Möglichkeit der modularen Anwendung von Optimierungsverfahren wird mithilfe des IPEK-X-in-the-Loop-(IPEK-XiL)-Ansatzes erreicht.<sup>30,31</sup>

Der IPEK-XiL-Ansatz beschreibt das grundlegende Verständnis der Validierung eines Teilsystems in der Wechselwirkung mit dem Gesamtsystem, der Umwelt und eventuell weiteren interagierenden Systemen (in Bild 4 am Beispiel der Validierung in der Automobilentwicklung). Die Beschreibung der mit dem zu untersuchenden System interagierenden Systeme als *Connected Systems* erlaubt dabei, die Wechselwirkungen zwischen den Systemen entsprechend der vorliegenden spezifischen Validierungsziele zu berücksichtigen. Dadurch kann die Validierungsumgebung in Form einer rein virtuellen, einer rein physischen oder auch einer gemischt physisch-virtuellen Ausprägung vorliegen. Hierbei ist das „X“ definiert als

*„das physische und/oder virtuelle (Teil)-System, welches im Fokus einer spezifischen Validierungsaktivität ist und über welches dabei Erkenntnisse gewonnen werden sollen.“* ALBERS ET AL.

<sup>29</sup> Albers et al., 2016e

<sup>30</sup> Albers et al., 2013

<sup>31</sup> Albers et al., 2016e

Daraus entstehen für das „X“ zwei unterschiedliche Sichten:

Die des *System-in-Development (SiD)*, bei dem sich die Validierungsaktivitäten auf das in der Entwicklung befindliche System konzentrieren, und die Sicht des *System-unter-Investigation (Sul)*, wenn der Fokus der Aktivitäten auf dem Erkenntnisgewinn über ein Teil-System (nicht im Verantwortungsbereich des Entwicklers, eventuell Vorgänger- oder Konkurrenzprodukt) zum Zwecke der weiteren Verwendung im Entwicklungsprozess liegt.<sup>32</sup>



Bild 4: Der IPEK-XiL-Ansatz anhand der Validierung in der Automobilentwicklung<sup>33</sup>

Ziel des IPEK-XiL-Ansatzes ist das Zusammenführen der oft getrennt betrachteten Teilsysteme und der verfügbaren Validierungskonzepte zu einem ganzheitlichen integrierten Ansatz, wodurch zur Realisierung des Konzeptes intelligente und relevante Echtzeitkopplungen (Software, Prüfstandsansbindungen, leistungsfähige Aktoren) zwingend erforderlich sind.

<sup>32</sup> Albers et al., 2016e

<sup>33</sup> Albers et al., 2016e

Zusätzlich kann der IPEK-XiL-Ansatz zu den bestehenden Systemen Gesamtsystem, Umwelt und der weiteren interagierenden Systeme um das optionale System der Optimierungsmethoden ergänzt werden, welche eingesetzt werden können, um eine simultane Optimierung eines komplexen Systems bestehend aus mehreren interagierenden Teilsystemen (*SiD*'s) im Zusammenspiel mit dessen Umwelt durchführen zu können.<sup>34</sup>

### 2.1.3 Der Beschreibungsansatz PGE – Produktgenerationsentwicklung

Ein wichtiger Aspekt der Produktentwicklung, wie sie auch im Rahmen dieses Forschungsprojektes durchgeführt wird, ist die Betrachtung und Einordnung der Entwicklungsaktivitäten im Rahmen des am IPEK entwickelten Beschreibungsansatzes PGE – Produktgenerationsentwicklung. Dieser Ansatz beschreibt die Produktentwicklung, deren Beschreibung als reine Neu-, Varianten- oder Anpassungskonstruktion oftmals nicht ausreichend ist, basierend auf Referenzprodukten in Form der Aktivitäten Übernahme-, Gestalt- und Prinzipvariation.<sup>35</sup> Die Motivation zu einer möglichst allgemeingültigen Beschreibung und Einordnung der Aktivitäten zur Produktentwicklung entsteht aus dem Zielkonflikt der Minimierung technischer und ökonomischer Risiken. Dieser Zielkonflikt soll aufgelöst werden, indem die Entwicklung von Innovationen durch Inventionen<sup>36</sup> basierend auf bereits am Markt erfolgreichen Produkten geschieht, in deren Zuge die notwendigen Anpassungen möglichst begrenzt sind, jedoch andererseits in Bezug auf bereits bestehende Produkte eine Mindestdifferenzierung erreichen. Durch praxisnahe Untersuchungen in der Industrie konnte gezeigt werden, dass die zuvor bestehenden Ansätze zur Klassifizierung der Entwicklungsaktivitäten aus den Bereichen des Innovationsmanagements sowie der Konstruktionsmethodik keine ausreichende Beschreibung dieser Aktivitäten liefern, weshalb mit der PGE ein neuer beschreibender Ansatz entwickelt wurde, um die in der industriellen Praxis vorkommenden Entwicklungsprojekte zutreffend zu charakterisieren.<sup>37,38</sup>

Die PGE stellt hierbei einen universellen Ansatz zur Beschreibung von Produktentwicklungsprojekten dar, der somit auch für die Planung und Steuerung dieser Projekte und der damit verbundenen wirtschaftlichen und technischen Risiken dienen kann. Die Produktgenerationsentwicklung selbst ist dabei definiert als

---

<sup>34</sup> Albers et al., 2013

<sup>35</sup> Albers et al., 2015b

<sup>36</sup> Die Innovation versteht sich hier als am Markt wirtschaftlich erfolgreich durchgesetzte Invention; Schumpeter, 2008

<sup>37</sup> Albers et al., 2017f

<sup>38</sup> Albers et al., 2016d

*„die Entwicklung einer neuen Generation eines technischen Produkts, die sowohl durch die Anpassung von Teilsystemen als Übernahmevariation als auch durch eine signifikante Neuentwicklung von Teilsystemen charakterisiert ist. Neu entwickelte Anteile technischer Produkte können durch Gestalt- und durch Prinzipvariation realisiert werden. Neue Produktgenerationen basieren immer auf Referenzprodukten, welche die grundsätzliche Struktur beschreiben.“* ALBERS ET AL.

Dabei sind Referenzprodukte /-systeme bereits bestehende Systeme (auch aus anderen Branchen), auf deren Basis durch teilweise Variation von Strukturen und Teilsystemen, die sowohl Teil des Ziel- als auch des Objektsystems sein können, eine neue Produktgeneration entwickelt wird.<sup>39</sup> Die Übernahmevariation (ÜV) definiert sich als das unveränderte Beibehalten der Gestalt und des Lösungsprinzips einzelner Teilsysteme, wodurch der Umfang konstruktiver Änderungen minimiert wird, da lediglich Anpassungen an den Systemgrenzen des Teilsystems vorgenommen werden müssen. Die Gestaltvariation (GV) wiederum ist beschrieben durch eine Übernahme des grundsätzlichen Lösungsprinzips unter Veränderung der Gestalt, wogegen bei einer Prinzipvariation (PV) sowohl das Lösungsprinzip als auch die Gestalt des Teilsystems angepasst wird, wobei die Gestaltvariation im Zuge einer PV eine direkte Folge des geänderten Lösungsprinzips ist.<sup>40</sup> Eine solche Prinzipvariation besteht auch dann, wenn Lösungen in Form von „Produkten, die ähnliche Funktionen und Eigenschaften in andern Kontexten erfüllen“, für die Realisierung des Zielsystems adaptiert werden.<sup>41</sup>

Zur Planung und Steuerung von Entwicklungsaktivitäten im Rahmen der PGE ist eine mathematische Formulierung dieses Ansatzes hilfreich, da so die Anteile der einzelnen Aktivitätstypen bzw. die Anteile an Teilsystemen, die den jeweiligen Aktivitäten unterliegen, quantifiziert werden können und die Abschätzung von Entwicklungsrisiken erleichtern. Diese mathematische Formulierung erfolgt in Form von Teilmengen, die die Menge aller Teilsysteme darstellen, die durch die jeweiligen Variationsarten entstehen

$$\begin{aligned} & \ddot{U}S_n\{TS|\ddot{U}V_{(TS)}\} \\ & GS_n\{TS|GV_{(TS)}\} \\ & PS_n\{TS|PV_{(TS)}\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

und die eine neue Produktgeneration  $G_n$  konstituieren

<sup>39</sup> Albers et al., 2017f

<sup>40</sup> Albers et al., 2017f

<sup>41</sup> Albers et al., 2015b

$$G_n = \ddot{U}S_n \cup GS_n \cup PS_n. \quad (2.2)$$

Dadurch ergibt sich der prozentuale Anteil einer Variationsart in der Entwicklung einer neuen Produktgeneration aus dem Verhältnis der Teilmenge dieses Variationstypus zu der Gesamtmenge der Variationen (hier am Beispiel des Gestaltvariationsanteils)

$$\delta_{GV,n} = \frac{\|GS_n\|}{\|G_n\|} = \frac{\|GS_n\|}{\|\ddot{U}S_n \cup GS_n \cup PS_n\|}. \quad (2.3)$$

Diese Quantifizierung der Variationsanteile ermöglicht nun die Planung und Steuerung von Entwicklungsprozessen zur Entwicklung von Produkten maximaler Innovationsfähigkeit bei möglichst kleinem technischen und ökonomischen Risiko.<sup>42,43,44</sup>

Bei der hier beschriebenen Entwicklung neuer Produktgenerationen spielt die Validierung unter Verwendung der Methode des Test-based-Development, wie sie im Rahmen des IPEK-XiL-Ansatzes umgesetzt ist, eine wichtige Rolle. Zum einen leistet sie Beiträge zu folgenden Produktgenerationen und zum anderen stehen anhand der vorhergehenden Generationen unter Anpassung geeignete Validierungsumgebungen zur Verfügung.<sup>45</sup>

Alle bisherigen Anwendungen des PGE-Ansatzes beziehen sich auf die Einordnung von Entwicklungen im Sinne mechatronischer Produkte, da aus diesem Gebiet die Motivation für eine Beschreibung der Produktentwicklungsaktivitäten im Rahmen der PGE entstanden ist, jedoch liefern ALBERS ET AL. Ansatzpunkte für eine Erweiterung der Anwendung der PGE auf andere Produktklassen.<sup>43,45</sup>

#### 2.1.4 Zwischenfazit

Mit SPALTEN und dem IPEK-XiL-Ansatz wurden zwei äußerst wirkungsvolle und nützliche<sup>46,47,48</sup> Prozesse bzw. Methoden der Produktentwicklung vorgestellt, die im Laufe der hier vorgestellten wissenschaftlichen Arbeit, zum Einsatz kommen. Dabei wird der IPEK-XiL-Ansatz zum Zwecke einer effektiven und effizienten Validierung herangezogen und auf die darin enthaltenen Methoden und Prozesse

---

<sup>42</sup> Albers et al., 2017f

<sup>43</sup> Albers et al., 2016d

<sup>44</sup> Albers et al., 2016b

<sup>45</sup> Albers et al., 2015c

<sup>46</sup> Albers et al., 2016a

<sup>47</sup> Albers et al., 2013

<sup>48</sup> Albers et al., 2016e

zurückgegriffen.<sup>49</sup> Ebenso kommt die Problemlösung nach SPALTEN immer wieder zum Einsatz<sup>50</sup> und liefert auch die Orientierung für die Struktur der vorliegenden Arbeit.<sup>51</sup> Insbesondere diese Problemlösungsmethode wird im Verlauf der Arbeit fortlaufend angewandt, auch wenn dies nicht in jedem Abschnitt explizite Erwähnung findet, so stehen insbesondere die gewählte Struktur dieser Arbeit als auch die in Kapitel 4 erläuterte und in Kapitel 6 dargelegte Methode exemplarisch für die kontinuierliche Anwendung des SPALTEN Ansatzes in der hier dokumentierten wissenschaftlichen Arbeit. Darüber hinaus wird das Ziel der vorliegenden wissenschaftlichen Arbeit im Rahmen des Beschreibungsansatzes zur PGE – Produktgenerationsentwicklung eingeordnet und interpretiert.<sup>52</sup>

## **2.2 Identifikation der Systemdynamik mithilfe von Pseudozufälligen Binärwertigen Signalen (PRBS)**

Eine wichtige Basis für den Entwurf eines Reglers für ein zu regelndes dynamisches System ist die möglichst genaue Kenntnis des dynamischen Verhaltens<sup>53</sup> dieser Regelstrecke. Diese Kenntnis wird in Form von parametrischen oder nicht-parametrischen Modellen im Frequenz- oder im Zeitbereich formuliert. Eine Methode zum Erlangen dieser Kenntnis über die Systemdynamik wird im Allgemeinen als Systemidentifikation bezeichnet. Im Folgenden werden verschiedene Methoden zur Systemidentifikation vorgestellt und anschließend die Methode unter Verwendung von PRBS, wie sie im weiteren Verlauf der Arbeit angewandt wird<sup>54</sup>, genauer beleuchtet.

### **2.2.1 Ziel der Systemidentifikation**

Die grundlegende Motivation für eine Systemidentifikation ist der Wunsch, die Reaktion  $y(t)$  des zu entwickelnden Systems auf ein gegebenes Eingangssignal  $u(t)$  (z.B. Schwingung, Impulsanregung, etc.) für alle Zeitpunkte  $t \in [t_0, t_f]$  möglichst genau vorherzusagen. Da dies eine Vorhersage über das zukünftige Verhalten des Systems impliziert, ist ein Modell dieses Systems notwendig. Dieses kann idealerweise anhand der grundlegenden mathematischen Beschreibung der physikalischen Prozesse im

---

<sup>49</sup> vgl. 4.1

<sup>50</sup> vgl. Kap. 6

<sup>51</sup> vgl. Kap. 5ff

<sup>52</sup> vgl. 4.2

<sup>53</sup> Verhalten ist hier nach IPEK Glossar zu verstehen: „Das Verhalten ist die Reaktion eines Technischen Systems auf konkrete Inputs, die in Wirknetzen gewandelt werden. Die resultierenden Outputs sind an den Systemgrenzen als Wirkungen messbar und ermöglichen eine Interpretation (Validierung) des Systemverhaltens.“

<sup>54</sup> vgl. 5.1

System erlangt werden (*parametrisches Modell*). Jedoch sind oft nicht alle physikalischen Parameter dieser Prozesse ausreichend genau bekannt oder einige der Prozesse selbst sind nicht bekannt. In diesen Fällen ist eine Systemidentifikation als Ergänzung zur theoretischen Modellbildung notwendig, da anderenfalls die theoretische Modellbildung zu aufwendig wäre. Eine einfache Möglichkeit für ein solches Modell ist hier das Eingangs-Ausgangs-Modell, das lediglich eine direkte Beziehung zwischen dem Ein- und dem Ausgangssignal herstellt, ohne auf die innerhalb der Übertragungstrecke ablaufenden Prozesse einzugehen (daher auch die geläufige Bezeichnung des *Black Box Modells* oder des *nichtparametrischen Modells*).<sup>55</sup>

Ein solches nichtparametrisches Modell eines linearen Systems im Frequenzraum wird als der Frequenzgang, die Frequenzantwort oder, für den Fall von nichtperiodischen Signalen, die Übertragungsfunktion des Systems bezeichnet. Prinzipiell lässt sich diese Beschreibung auch auf nichtlineare Systeme anwenden, jedoch entspricht diese Darstellung dann einer Linearisierung des Systems, da in der Darstellung des Systems durch seinen Frequenzgang die Frequenz des Ausgangssignals der des eingehenden Signals entspricht. Der Frequenzgang ordnet nun der Übertragung eines Signals jeder beliebigen Frequenz durch das betrachtete System eine Verstärkung und eine Phasenverschiebung zu, die dieses Signal erfährt. Dadurch erlaubt diese Methode eine sehr einfache Beschreibung des Systemerhaltens, da die Signalübertragung für eine feste (Kreis-) Frequenz  $\omega$  durch die Angabe zweier Parameter,  $a(\omega)$  und  $\varphi(\omega)$  vollständig beschrieben werden kann. Diese Möglichkeit der Beschreibung eines komplexen dynamischen Systems durch seinen Frequenzgang beruht auf der Tatsache, dass mithilfe einer Fourier- oder einer Laplace-Transformation nahezu jedes beliebige Zeitsignal durch eine Superposition aus einzelnen sinusförmigen Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen, Amplituden und Phasen dargestellt werden kann. Somit lässt sich die Dynamik eines linearen Systems vollständig durch seinen Frequenzgang beschreiben.<sup>56</sup>

Mathematisch wird die Übertragungsfunktion beschrieben durch das Verhältnis der beiden Laplace-Transformierten von Eingangs- und Ausgangssignal

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\mathcal{L}[y(t)]}{\mathcal{L}[u(t)]}. \quad (2.4)$$

---

<sup>55</sup> Isermann, 2008

<sup>56</sup> Lunze, 2006a

Die zuvor beschriebene Möglichkeit der Beschreibung der Übertragung durch Betrag und Phase beruht auf der Zerlegung der komplexen Größe  $G(s)$  als eine komplexe Exponentialfunktion

$$G(s) = \frac{\|Y(s)\|}{\|U(s)\|} \cdot e^{i(\phi_y(s) - \phi_u(s))}.$$

Den eingangs erwähnten Frequenzgang bzw. die Frequenzantwort erhält man durch den Übergang vom Bildbereich der Laplace-Transformation zum Frequenzraum<sup>56</sup>

$$G(i\omega) = \lim_{s \rightarrow i\omega} G(s).$$

Ein solches einfaches nicht-parametrisches Modell des betrachteten Systems kann nun mithilfe einer geeigneten Methode zur Systemidentifikation gewonnen werden. Im Folgenden werden nun einige solcher Methoden vorgestellt.

### 2.2.2 Gängige Methoden zur Identifikation der Systemdynamik

Grundlegend unterliegt die Systemidentifikation den Beschränkungen in der Amplitude des Eingangssignals und somit auch der Änderung des Ausgangssignals sowie der begrenzten Messdauer. Weiterhin ist das Ausgangssignal im Allgemeinen von einem Störsignal überlagert, das sich aus den Komponenten Drift, einem stochastischen Anteil und nicht genau zu definierenden Anteilen (z.B. Sprünge, etc.) zusammensetzt. Darüber hinaus bestimmt die Klasse des Identifikationsmodells auch die Menge und Art der zur Verfügung stehenden Eingangssignale. Ausschlaggebend hierfür sind zunächst die Unterteilung in parametrische und nichtparametrische Modelle, die unterschiedlichen im Modell angenommenen Signaltypen (zeitdiskret oder zeitkontinuierlich) sowie das angenommene Fehlermodell (Eingangs-, Ausgangs- oder verallgemeinerter Fehler). Es stehen als mögliche Signaltypen für die Identifikation deterministische und stochastische Signale zur Verfügung sowie die Möglichkeiten einer Online- oder einer Offline-Identifikation, wobei erstere neben der direkten Messung am System auch eine Bestimmung des Identifikationsmodells während des Identifikationsprozesses leistet, während bei der Offline-Identifikation die Daten im Betrieb aufgezeichnet und erst im Nachgang ausgewertet werden.<sup>57</sup>

Die allgemeinen Anforderungen an ein potenzielles Testsignal für die Verwendung zur Systemidentifikation sind dabei die einfache Erzeugung und Reproduzierbarkeit des Signals, eine möglichst einfache mathematische Beschreibung des Signals sowie eine ausreichende Anregung der für die Untersuchung relevanten Prozessdynamik und des entsprechenden Amplitudenbereiches. Darüber hinaus muss das anregende Signal

---

<sup>57</sup> Isermann, 2008

mit den gegebenen Stelleinrichtungen des Systems realisierbar sein und außerdem auch auf den im System ablaufenden Prozess anwendbar sein. Damit ergeben sich drei unterschiedliche Klassen an möglichen Testsignalen, die sich auch gegebenenfalls durch Überlagerung geeignet kombinieren lassen: stochastische Signale, wie etwa echte Rauschsignale, und deterministische Signale, die sich wiederum in kontinuierliche Signale, wie zum Beispiel harmonische Schwingungen, und nichtstetige Signale, wie zum Beispiel Sprungfunktionen, unterteilen lassen.<sup>58</sup>

Mit den bereits beschriebenen zur Verfügung stehenden Modellen und den genannten Klassen von Testsignalen ergeben sich zahlreiche mögliche Methoden zur Systemidentifikation. Von diese Möglichkeiten werden nun zunächst die gängigsten Methoden zur Identifikation nichtparametrischer Modelle, mit der Korrelationsanalyse als einziger Methode für ein nichtparametrisches Modell im Zeitbereich, beschrieben und in ihrer Anwendbarkeit verglichen. Hier können sowohl stochastische als auch deterministische, zeitkontinuierliche und auch zeitdiskrete Signale auf den offenen Regelkreis angewandt werden, um den linearen Prozess zu identifizieren. Das Ergebnis der Korrelationsanalyse sind Korrelationsfunktionen und Gewichtungsfunktionen im Zeitbereich, die hauptsächlich zur Erkennung von Signalzusammenhängen oder auch zur Laufzeitidentifikation verwendet werden. Diese Methode ist sehr robust gegenüber Störungen und verfügt über eine hohe potenzielle Genauigkeit bei geringem Rechenaufwand. Im Frequenzbereich stehen für die Identifikation nichtparametrischer Modelle mehrere Methoden zur Verfügung. Die Frequenzgangmessung verwendet periodische Testsignale, die sowohl eine Analyse von Hand als auch durch orthogonale Korrelation erlauben und dabei eine sehr hohe Genauigkeit ermöglichen, jedoch auch eine nennenswerte Anfälligkeit für Signalstörungen besitzen. Des Weiteren steigt der Aufwand für eine solche Identifikation stark an, sobald die Identifikation für mehrere Frequenzen durchgeführt werden soll. Weiterhin gibt es die Möglichkeit einer Identifikation unter Verwendung von nichtstetigen, breitbandigen Signalen wie zum Beispiel Signalsprüngen und einer Bestimmung des Frequenzganges mittels Fourier-Analyse. Diese ist allerdings sehr störanfällig und bietet eine bestenfalls durchschnittliche erreichbare Genauigkeit, weshalb diese Methode hauptsächlich bei Systemen zum Einsatz kommt, die lediglich eine kurze Messdauer zur Identifikation erlauben und daher möglichst viele Frequenzen in möglichst kurzer Zeit angeregt werden sollen.<sup>59</sup> Zuletzt gibt es noch die Möglichkeit der Systemidentifikation, die von ISELMANN als Spektralanalyse bezeichnet wird. Die Bedingungen sind hierbei identisch mit denen der Korrelationsanalyse im Zeitbereich, mit dem Unterschied, dass hier statt Korrelationsfunktionen im Zeitbereich

---

<sup>58</sup> Isermann, 2008

<sup>59</sup> Isermann, 2008

nun mithilfe von periodischen oder stochastischen Signalen Korrelations- und Gewichtungsfunktionen im Frequenzraum bestimmt werden. Auch dieses Verfahren ist wie die Korrelationsanalyse sehr robust gegenüber Störungen und bietet eine hohe potenzielle Genauigkeit.<sup>59</sup>

Tabelle 1: Übersicht über die vorgestellten Methoden zur Systemidentifikation

Methoden	Domäne	Modelltyp	typische Testsignale
Frequenzgangmessung	Frequenzbereich	nichtparametrisch	Sinus
Korrelationsanalyse	Zeitbereich	nichtparametrisch	PRBS
Spektralanalyse	Frequenzbereich	nichtparametrisch	PRBS
Kennwertermittlung	Zeitbereich	parametrisch	Stufenfunktion
Referenzmodellmethoden	Zeitbereich	parametrisch	kontinuierliche Signale
Parameterschätzung	Zeitbereich	parametrisch	beliebige Signale

Ein Beispiel für ein stochastisches Signal zur Anwendung von Methoden wie der Korrelations- und Spektralanalyse ist das *Pseudo-Random Binary Signal (Pseudo-Rausch-Binär-Signal)*<sup>60</sup>, PRBS). Dieses wird in den folgenden Abschnitten im Detail vorgestellt.

### 2.2.3 Erzeugung und Eigenschaften eines PRBS

#### 2.2.3.1 Erzeugung des PRBS

Die Erzeugung eines PRBS erfolgt durch einen deterministischen Zufallszahlengenerator, der durch ein linear rückgekoppeltes Schieberegister (*Linear Feedback Shift Register, LFSR*) realisiert werden kann. Der Eingang des Schieberegisters wird von einer linearen Funktion des vorhergehenden Registerzustands gebildet. Die genaue Implementierung kann als sogenanntes Fibonacci- oder Galois-LFSR erfolgen, beide sind äquivalent zueinander und können in die jeweils andere Umsetzung transferiert werden.<sup>61</sup>

Beim Fibonacci-LFSR werden bestimmte Speicherzellen des Registers über XOR-Glieder, deren Anwendung einer Abfolge aus Addition und Modulo-2-Rechnung entspricht, verknüpft und auf den Eingang zurückgeführt. Den Ausgang bildet die letzte Speicherzelle des Registers (vgl. Bild 47<sup>62</sup>).

Zusammen mit der Registerlänge  $n$  bestimmen die für die Rückführung ausgewählten Speicherzellen, die sogenannten Taps, die Länge der Ausgabesequenz. Theoretisch kann ein solches Schieberegister der Länge  $n$  jeden der möglichen  $2^n$  Zustände annehmen. Wenn jedoch alle Bits Null sind kann dieser Zustand aufgrund der XOR-

<sup>60</sup> Isermann, 2008

<sup>61</sup> Barker et al., 2004

<sup>62</sup> siehe Abschnitt 5.1.2.2, Seite 173

Verknüpfung nicht mehr verlassen werden, weshalb die Anzahl der für ein LFSR erlaubten Zustände nun  $N = 2^n - 1$  beträgt (alle Zustände ohne den Nullzustand). Dies entspricht auch der Größe der längsten Sequenz (*Maximum Length Sequence, MLS*), die mit einem  $n$ -Bit Register durch die Verwendung geeigneter Taps generiert werden kann. Innerhalb einer solchen MLS ist die Initialisierung des Registers beliebig aus den  $2^n - 1$  erlaubten Zuständen wählbar. Die Wahl der Taps zum Erreichen einer MLS beschränkt sich dabei auf bestimmte Konfigurationen. Werden diese nicht verwendet, so ergeben sich Sequenzen die bedeutend kürzer sein können und nicht die statistischen Eigenschaften einer MLS besitzen. Um die maximale Sequenzlänge zu erreichen, müssen die Taps gleich den Exponenten eines primitiven Polynoms eines sogenannten Galois-Feldes sein, welches dann auch Generatorpolynom einer MLS genannt wird. Die Anzahl der Exponenten eines Generatorpolynoms ist immer gerade. Für jede Registerlänge  $n > 2$  existieren mehrere solcher Polynome, in der Praxis wird jedoch aufgrund ihrer Einfachheit häufig auf PRBS-Generatoren mit zwei Taps zurückgegriffen.<sup>63,64,65,66</sup>

Generell ist die Verwendung von PRBS für die Systemidentifikation (als auch als Generatoren für Zufallszahlen) vorteilhaft, da sie gründlich und gut charakterisiert, schnell und einfach zu programmieren sowie auf heutigen Computern sehr gut technisch realisierbar sind.<sup>67</sup>

Für viele Anwendungen ist es günstig, wenn das PRBS zwei Signalpegel ungleich Null enthält und somit die Wahl der Pegel als  $\pm 1$  naheliegend ist. Da jedoch das Register lediglich die Werte 1 und 0 ausgibt, muss der Ausgang des Registers zusätzlich mit einer Multiplikation mit zwei sowie einer Verschiebung um  $-1$  beaufschlagt werden, um somit ein Pseudo-zufälliges Signal mit zwei Signalpegeln ungleich Null zu erhalten.<sup>68,69</sup>

### 2.2.3.2 Eigenschaften des PRBS im Zeitbereich

Das PRBS Signal besteht aus einer quasi-zufälligen Abfolge von zwei Signalpegeln mit variierendem Abstand (vgl. Bild 48<sup>70</sup>). Die Länge der erzeugten Sequenz beträgt für ein Schieberegister der Länge  $n$  gerade  $N = 2^n - 1$ . Im Falle des oben erwähnten Signals mit den Pegeln  $\pm 1$  enthält das PRBS genau  $2^{n-1}$  Einsen und, da das Register

---

<sup>63</sup> Eppler et al., 2016

<sup>64</sup> New Wave Instruments, 2010

<sup>65</sup> Ziff

<sup>66</sup> Barker et al., 2004

<sup>67</sup> Ziff

<sup>68</sup> Eppler et al., 2016

<sup>69</sup> Barker et al., 2004

<sup>70</sup> siehe Abschnitt 5.1.2.2, Seite 175

nicht den Nullzustand annehmen kann,  $2^{n-1} - 1$  mal den Wert  $-1$ . Die Hälfte aller Abschnitte aufeinanderfolgender gleicher Werte ( $-1$  oder  $1$ ) hat die Länge eins, ein Viertel die Länge zwei, ein Achtel die Länge drei, usw. Jeweils die Hälfte der Abschnitte einer Länge besteht aus Einsen, die andere aus dem Pegel  $-1$ . Der längste Abschnitt besteht aus einer Folge von  $n$  aufeinanderfolgenden Einsen, der zweitlängste aus  $n-1$  mal dem Pegel  $-1$ . Beide treten jeweils nur einmal auf.

Ein PRBS kann über seine drei Parameter für die Identifikation eines Systems angepasst werden. Diese sind die LFSR-Länge  $n$ , die Umschaltzeit  $\lambda$  und die Amplitude  $a$ . Die Periodendauer des entstehenden Signals ergibt sich damit direkt zu

$$T_{PRBS} = \lambda \cdot N. \text{ } ^{71}$$

Die zirkuläre Autokorrelationsfunktion eines um den Nullpunkt symmetrischen PRBS ist periodisch mit dem Abstand  $T_{PRBS}$  und nimmt für die ganzzahligen Vielfachen von

$$T_{PRBS} \text{ den Wert } a^2 \text{ an, sonst } -\frac{a^2}{N}. \text{ Der Übergang erfolgt linear innerhalb von } \pm\lambda \text{ um}$$

den jeweiligen Peak.

Die besondere Eignung des PRBS zur Systemidentifikation ergibt sich auch aus der theoretischen Überlegung, dass man das Signal als eine Überlagerung von endlichen Wellenzügen (*Wavelets*) darstellen kann, die eine orthonormale Basis bilden und somit eine besonders störungsresistente Schätzung des Frequenzganges erlauben.<sup>72</sup>

### 2.2.3.3 Spektrale Eigenschaften des PRBS

Das PRBS verfügt über ein breitbandiges Spektrum und einen flachen Verlauf der spektralen Leistungsdichte, welche durch das Verhältnis aus der Umschaltzeit  $\lambda$  des erzeugenden Registers und der Abtastrate  $\tau$  der Messung bestimmt werden und durch eine geeignete Wahl dieser Größen flexibel an die Zielanwendung angepasst werden können.<sup>73</sup>

Da das PRBS ein periodisches Signal ist, besteht das Autoleistungsspektrum aus diskreten Spektrallinien mit dem Abstand  $\Delta f = \frac{1}{T_{PRBS}} = \frac{1}{\lambda \cdot N}$ . Die Einhüllende wird im

idealisierten zeitkontinuierlichen Fall durch  $\text{sinc}^2(\lambda \cdot f_i)$  mit Nullstellen bei  $\frac{1}{\lambda}, \frac{2}{\lambda}, \frac{3}{\lambda}, \dots$

beschrieben. Dieses Spektrum bleibt auch im zeitdiskreten Fall im Falle einer

---

<sup>71</sup> Eppler et al., 2016

<sup>72</sup> Wilson, 2005

<sup>73</sup> Eppler et al., 2016

Überabtastung mit  $t_{\text{Sampling}} = \frac{1}{k} \cdot \lambda$  erhalten (Bild 49<sup>74</sup>) und verändert sich erst im Fall einer Abtastung mit  $t_{\text{Sampling}} = \lambda$  (Bild 50<sup>75</sup>).<sup>76</sup>

## 2.2.4 Optimierungsmöglichkeiten für PRBS

Auch wenn die ursprüngliche Form des PRBS, wie sie zuvor beschrieben wurde, für die Systemidentifikation sehr nützlich ist, so gibt es verschiedene Ansätze, um das mögliche Anwendungsgebiet zu verbreitern und auch die Qualität der Identifikationsergebnisse weiter zu verbessern.

### 2.2.4.1 Erhöhung der Anzahl der Taps

So analysiert ZIFF die Veränderung der Pseudozufälligkeit des Signals mit einer Veränderung der Taps zur Erzeugung des PRBS. Das Ziel ist, durch eine Verbesserung der Pseudozufälligkeit des entstehenden Signals eine Verbesserung der Qualität des PRBS als Zufallszahlengenerator und auch der Qualität der Identifikationsergebnisse zu erreichen. Dabei wird im Allgemeinen festgestellt, dass diese Eigenschaft des PRBS signifikant verbessert wird, wenn anstatt der oft verwendeten zwei Taps fortan vier Taps verwendet werden.

Diese Verbesserung der Zufälligkeit des ausgegebenen Signals wird auf eine bei Registern mit zwei Taps auftretende Dreipunktkorrelation zurückgeführt, bei der der Wert  $x_k$  im Falle der Tap-Positionen  $\{a, b\}$  direkt mit den vorhergehenden Werten  $x_{k-a}$  und  $x_{k-b}$  zusammenhängt. Dadurch wird ein bestimmtes in der Initialisierungssequenz des Registers auftretendes Muster für eine lange Zeit im Ausgangssignal fortbestehen.<sup>77</sup>

Um dieses unerwünschte durch Dreipunktkorrelation hervorgerufene Verhalten zu vermeiden, sollen zur Erzeugung eines PRBS Generatoren mit mindestens vier Taps und einem möglichst großen Tap-Offset eingesetzt werden.<sup>78</sup>

### 2.2.4.2 Inverted Repeated Sequence (IRS)

Ein weiterer Bedarf zur Modifikation des PRBS ergibt sich aus der Annahme, dass die meisten realen Systeme kein ideal lineares dynamisches Verhalten haben, sondern nichtlineare Effekte zumindest als Störungen, oder sogar als signifikanter Anteil des

<sup>74</sup> siehe Abschnitt 5.1.2.2, Seite 174

<sup>75</sup> Siehe Abschnitt 5.1.2.2, Seite 175

<sup>76</sup> Eppler et al., 2016

<sup>77</sup> Ziff

<sup>78</sup> Ziff

Systemverhaltens zur Dynamik beitragen. Dieses nichtlineare Verhalten besteht in der Vermischung der Frequenzanteile des Eingangssignals, der sogenannten Intermodulation (vgl. Bild 51<sup>79</sup>), die eine Verzerrung des Ausgangssignals bewirkt. Daher ergibt sich bei der Präsenz nichtlinearer Effekte und einer Betrachtung des untersuchten Prozesses als lineares System ein Fehler in der Schätzung des Frequenzganges durch diese Vermischung von Frequenzen.

Daher kann es von Interesse sein, das lineare und das nichtlineare Verhalten des Systems getrennt voneinander zu identifizieren. Dies ist jedoch nur möglich, wenn bei der Messung zur Schätzung der Frequenzantwort ein Signal verwendet wird, das eine eindeutige Unterscheidung zwischen linearen und nichtlinearen Effekten ermöglicht. Eine solche Möglichkeit bietet sich dann, wenn die durch die Nichtlinearität erzeugten Frequenzanteile im Ausgangssignal nicht im Eingangssignal enthalten sind. Im Falle eines breitbandigen Signals, wie insbesondere das PRBS eines darstellt, müssen nun dem Signal gezielt Frequenzanteile entzogen werden. Geht man nun von einer Nichtlinearität aus, die sich näherungsweise durch ein Polynom zweiter Ordnung beschreiben lässt, so wird deutlich (siehe Bild 51), dass bei einer eingehenden Frequenz  $f_1$  im Ausgangssignal neben  $f_1$  auch die doppelte Frequenz  $2 \cdot f_1$  zu finden ist. Im Fall von zwei eingehenden Frequenzen  $f_1$  und  $f_2$  entstehen so durch Intermodulation die zusätzlichen Frequenzen  $\{2 \cdot f_1, 2 \cdot f_2, (f_1 + f_2), (f_1 - f_2)\}$ . Diese Frequenzen sind genau dann klar von den im Eingangssignal enthaltenen zu unterscheiden, wenn die eingehenden Frequenzen ungerade sind.<sup>80,81</sup>

Dies erreicht man für ein PRBS Signal, indem man es zu einer sogenannten *Inverse Repeated Sequence (IRS)* modifiziert. Dieses Signal entsteht aus der Forderung, dass alle enthaltenen Frequenzen ungerade sein müssen und damit auch das Signal selbst ungerade sein muss. Daraus lässt sich für das neue Signal mit der Periodenlänge  $N$  ( $N$  gerade) die Forderung ableiten, dass für  $0 \leq k \leq \frac{N}{2}$

$$u_{IRS}(k) + u_{IRS}\left(k + \frac{N}{2}\right) = 0 \tag{2.5}$$

gelten muss.<sup>82</sup>

<sup>79</sup> siehe Abschnitt 5.1.2.2, Seite 175

<sup>80</sup> Barker et al., 2004

<sup>81</sup> Eppler et al., 2016

<sup>82</sup> Barker et al., 2004

## 2.2.4.3 Pseudorandom Ternary Signal (PRTS)

Wenn man in dem zuvor beschriebenen Fall die Nichtlinearität von einem Polynom zweiter Ordnung auf ein Polynom höherer Ordnung erweitert, so lässt sich dadurch eine größere Menge an realen Systemen adäquat beschreiben, jedoch führt dann eine Systemidentifikation mit der vorgestellten IRS zu den bekannten Intermodulationseffekten, welche wiederum in die Schätzung des Frequenzganges eingehen, da nun nicht nur gerade Frequenzen durch die Nichtlinearität erzeugt werden. Die durch ein Polynom höherer Ordnung entstehenden Verzerrungen und deren Effekte auf die Schätzung der Frequenzantwort lassen sich signifikant verringern, wenn zusätzlich zu den geraden Frequenzen auch noch andere Frequenzen aus dem Anregungsspektrum eliminiert werden. Eine signifikante Verringerung des Einflusses der Verzerrung durch Nichtlinearitäten auf die Schätzung der Frequenzantwort lässt sich erzielen, wenn neben den geraden Frequenzen auch diese eliminiert werden, deren Harmonische Ordnung ein Vielfaches von drei ist. Das so entstehende Signal muss nun die Forderungen (2.5) sowie

$$u_{PRTS}(k) + u_{PRTS}\left(k + \frac{N}{3}\right) + u_{PRTS}\left(k + 2 \cdot \frac{N}{3}\right) = 0 \quad (2.6)$$

erfüllen.<sup>83</sup>

Mithilfe eines solchen Signals können die Auswirkungen von Nichtlinearitäten gerader Ordnung komplett eliminiert und die der Nichtlinearitäten ungerader Ordnungen reduziert werden. Aus der Forderung (2.6) wird deutlich, dass nun mindestens drei Signalpegel benötigt werden, statt den zwei beim bisher diskutierten PRBS. Aus diesem Grund tragen Signale dieser Klasse die Bezeichnung *Pseudo-Random Ternary Signals (PRTS)*.<sup>84</sup>

Ein solches PRTS lässt sich nach TAN direkt erzeugen, indem eine punktweise Multiplikation aus zwei Sequenzen  $u_a$  und  $u_b$ , erzeugt aus der binären Basissequenz  $u_{Basis}$  der Länge  $N_{Basis}$  mit

$$N_{Basis} \in \{5 + 6 \cdot p, 7 + 6 \cdot p \mid p \geq 0, p \in \mathbb{Z}\}$$

$$N_{Basis} \in \{5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\}$$

und einer speziellen bekannten Sequenz  $u_{Special}$  der Länge  $N_{Special} = 6$ , ausgeführt wird. Die Sequenz  $u_a$  der Länge  $N = 6 \cdot N_{Basis}$  wird mithilfe der Basissequenz durch sechsmalige Aneinanderreihung gebildet

<sup>83</sup> Barker et al., 2004

<sup>84</sup> Tan, 2013

$$u_a = \left[ u_{Basis}^{(1)}, u_{Basis}^{(2)}, u_{Basis}^{(3)}, \dots, u_{Basis}^{(6)} \right]. \quad (2.7)$$

Die zweite Sequenz  $u_b$  wird nun mithilfe der speziellen Sequenz  $u_{Special}$  ebenfalls durch Aneinanderreihung

$$u_b = \left[ u_{Special}^{(1)}, u_{Special}^{(2)}, \dots, u_{Special}^{(N_{Basis})} \right] \quad (2.8)$$

erzeugt. Mit diesen beiden Sequenzen erhält man nun direkt ein PRTS Signal

$$u_{PRTS} = u_a \times u_b \quad (2.9)$$

für dessen Erzeugung ein als Basissequenz  $u_{Basis}$  verwendetes PRBS zum Einsatz kommen kann. Eine mögliche spezielle Sequenz zur Unterdrückung von Harmonischen Frequenzen der Ordnungen zwei und drei ist<sup>85</sup>

$$u_{Special} = [1 \ 1 \ 0 \ -1 \ -1 \ 0].$$

Die in den vergangenen Abschnitten vorgestellten Verfahren von PRBS, IRS und PRTS wurden bislang unter anderem zur Abschätzung des Verhalten von Codemultiplex-Netzwerken, zur Codierung in solchen Netzwerken oder in elektronischen Schaltkomponenten verwendet.<sup>86,87,88</sup>

### 2.3 Doppelkupplungsgetriebe – Aufbau und Funktionsweise

Da die Doppelkupplungsgetriebe ein zentraler Bestandteil des in dieser Arbeit betrachteten Systems sind, soll im Folgenden ihr Aufbau und ihre Funktionsweise kurz erläutert werden, da im weiteren Verlauf der Arbeit speziell auf den Aufbau der trockenen Doppelkupplung zurückgegriffen wird.<sup>89</sup>

Nachdem die ersten Doppelkupplungsgetriebe im Rennsport schon früh Anwendung fanden, gelangte die erste Variante als „6-Gang DSG“ bei Volkswagen im Jahre 2002 zur Serienreife.<sup>90</sup>

Damals wie heute war die Motivation zur Anwendung von Doppelkupplungsgetrieben hauptsächlich, den Komfort, den Automatikgetriebe mit Drehmomentwandlern bieten, mit der Effizienz der Handschaltergetriebe zu vereinen. Darüber hinaus sollte durch eine im Vergleich zu Handschalt- und automatisierten Schaltgetrieben freiere Wahl der

---

<sup>85</sup> Tan, 2013

<sup>86</sup> Roinila et al., 2009

<sup>87</sup> Pinter und Fernando, 2010

<sup>88</sup> Yang, 2008

<sup>89</sup> vgl. 5.6

<sup>90</sup> Volkswagen AG 22.11.2002

Getriebeübersetzungen sowie der Möglichkeit von zugkraftunterbrechungsfreien Schaltungen eine verbesserte Fahrdynamik erzielt werden. Die Effizienz der neuen Getriebegeneration sollte unter anderem durch die Verwendung der äußerst effizienten Schalt- und Synchronisierungseinrichtungen der Handschaltgetriebe erreicht werden, woraus die Forderung nach zwei getrennt voneinander schaltbaren Kupplungen resultiert.<sup>91</sup>

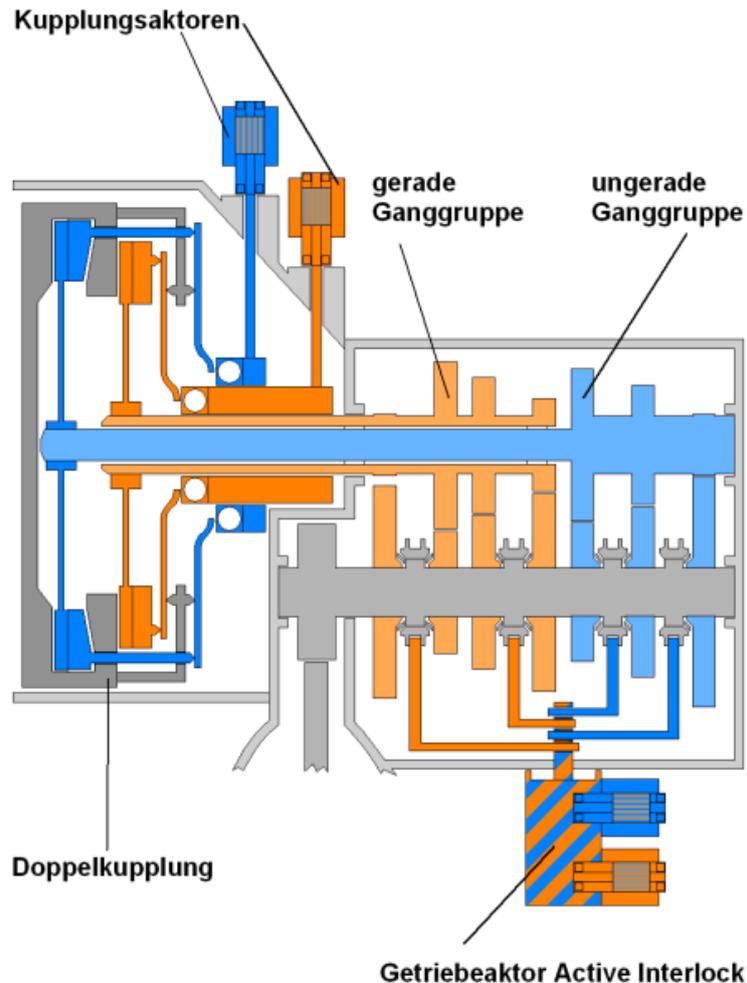


Bild 5: Aufbau eines Doppelkupplungsgetriebes<sup>92</sup>

Um eine möglichst bauraumeffiziente Anordnung zu erreichen, sind die beiden Teilkupplungen an eine Voll- bzw. eine Hohlwelle gekoppelt, welche ineinander gelagert sind. Dabei überträgt die Vollwelle das Drehmoment zum Teilgetriebe 1, welches die ungeraden Gänge umfasst, wogegen die Hohlwelle dem Teilgetriebe 2 mit den geraden Gängen zugeordnet ist (siehe Bild 5).

Hier sorgt der Einsatz eines speziellen Getriebeaktors dafür, dass durch eine falsche Wahl der Gänge in den beiden Teilgetrieben keine Beschädigung des

<sup>91</sup> Kimmig; Agner, 2006

<sup>92</sup> Berger et al., 2002

Antriebsstranges hervorgerufen werden kann. Die Forderung nach der separaten Schaltbarkeit wird erfüllt, indem jede der beiden Teilkupplungen von einem eigenen Kupplungsaktor betätigt wird. Dies ist ebenfalls in Bild 5 dargestellt.

Diese separate Schaltbarkeit der Teilkupplungen ermöglicht die sogenannte Überschneidungsschaltung (siehe Bild 6).

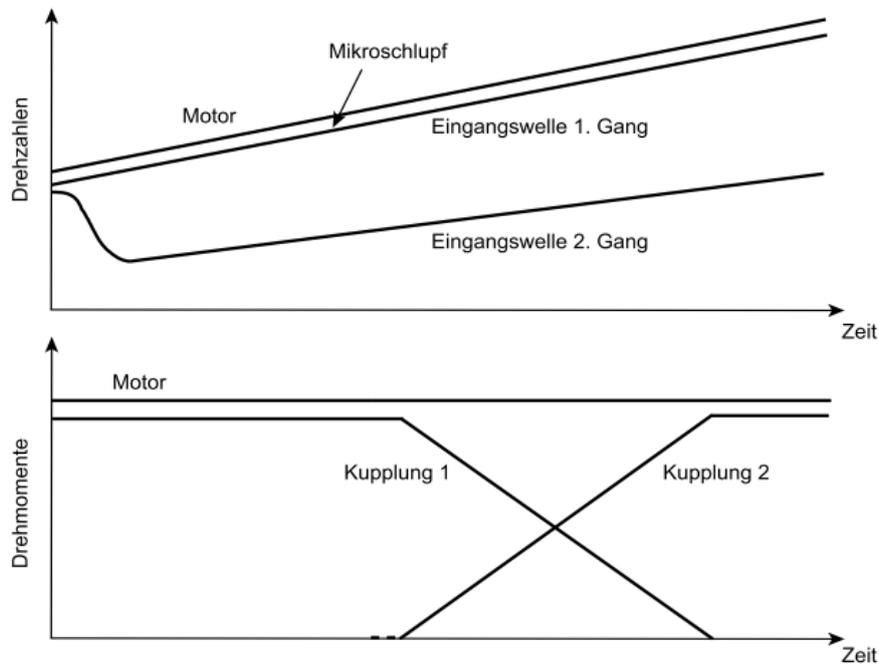


Bild 6: Idealisierte Überschneidungsschaltung bei Doppelkupplungsgetrieben am Beispiel einer 1-2 Schaltung<sup>93</sup>

Dabei wird – zum Beispiel bei einer Hochschaltung von Gang 1 auf Gang 2 – das durch die Teilkupplung 1 übertragene Drehmoment stetig verringert, während gleichzeitig das durch die Teilkupplung 2 übertragene Drehmoment entsprechend stetig erhöht wird. Dadurch erfolgt ein kontinuierlicher Übergang von Gang 1 auf Gang 2, ohne dass das resultierende Abtriebsmoment als Summe der Drehmomente der beiden unter Last schlupfenden Teilkupplungen signifikant verringert wird. Dieses Prinzip ermöglicht die gewünschte Funktionalität der zugkraftunterbrechungsfreien Schaltung.

<sup>93</sup> Fischer et al., 2012

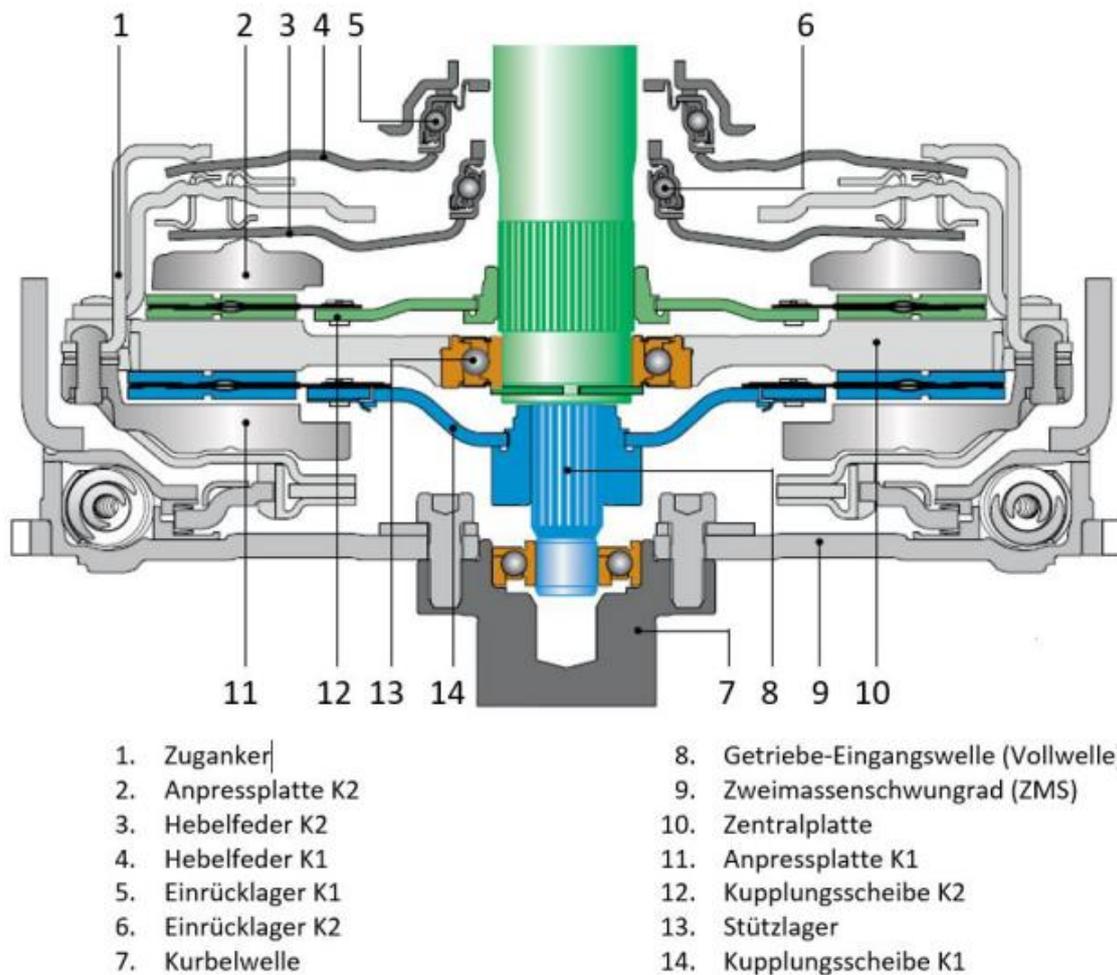


Bild 7: Beispielhafter Aufbau einer trocken laufenden Doppelkupplung mit Zweimassenschwungrad<sup>94</sup>

Darüber hinaus ist in Bild 6 außerdem die Möglichkeit zur Einstellung eines Teil- oder Mikroschlupfes dargestellt (sog. Schlupfregelung), der eine erhöhte Isolation der Abtriebsseite des Antriebsstranges gegenüber Drehungleichförmigkeiten aus dessen Antriebsseite und damit einen erhöhten Fahrkomfort ermöglicht.<sup>95</sup>

Der Aufbau einer trocken laufenden Doppelkupplung besteht im Wesentlichen aus den beiden koaxialen Kupplungsmechanismen die jeweils aus Kupplungsscheibe, Druckplatte und Anpressplatte bestehen.<sup>96,97</sup> Dies ist beispielhaft in Bild 7 gezeigt.

Der Betätigungsmechanismus funktioniert für beide Teilkupplungen in gleicher Weise und wird hier am Beispiel der ersten Teilkupplung (in Bild 7 und Bild 8 blau dargestellt) erläutert. Die Betätigung erfolgt durch die Aufbringung einer Kraft auf das Einrücklager, wodurch nach Überwinden einer Gegenkraft, welche durch die in ihrer Einbaulage

<sup>94</sup> Schaeffler Automotive Aftermarket GmbH & Co. KG, 2014

<sup>95</sup> Kimmig; Agner, 2006

<sup>96</sup> Dalbiez; Feigler, 2000

<sup>97</sup> Dau et al., 2000

befindliche Hebelfeder entsteht, das Einrücken eingeleitet wird ((2) in Bild 8). Im Falle einer Doppelkupplung mit Nachstellmechanismus rollt die Hebelfeder über den Senserring auf den Verstellring ab. Die Hebelfeder überträgt diese Bewegung auf den Zuganker und kehrt die Wirkrichtung der Einrückkraft um ((3) in Bild 8). Infolgedessen wird die Anpressplatte zur Zentralplatte herangezogen und die Kupplung geschlossen ((4) in Bild 8).

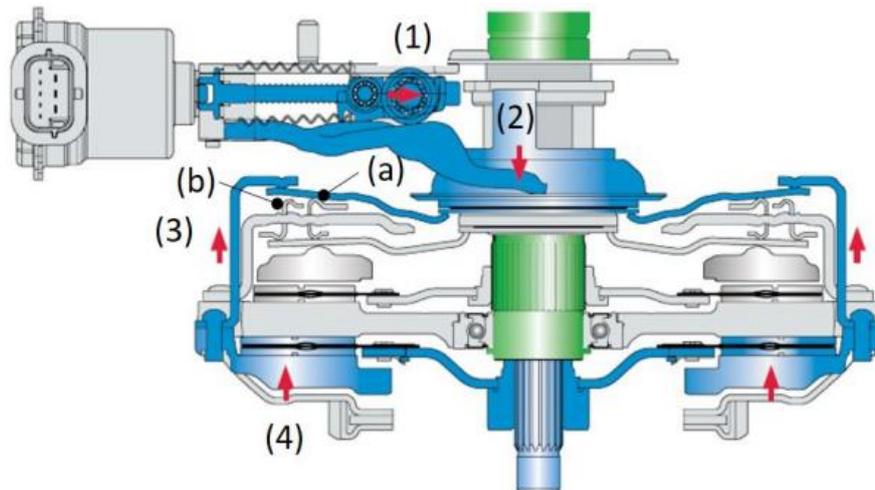


Bild 8: Betätigungsmechanismus am Beispiel der ersten Teilkupplung einer trocken laufenden Doppelkupplung mit elektromechanischer Betätigung<sup>98</sup>

Die Betätigung der zweiten Teilkupplung erfolgt analog zu der der ersten Teilkupplung, mit dem Unterschied, dass hier aufgrund der räumlichen Anordnung der zweiten Teilkupplung zum Einrücklager keine Umkehrung der Wirkrichtung der Einrückkraft notwendig ist und somit der Zuganker entfällt.<sup>99,100,101</sup>

Auch für die nass laufende Doppelkupplung gilt das oben beschriebene Wirkprinzip<sup>102</sup>, dass durch eine Betätigungskraft, welche hier im Allgemeinen hydraulisch eingebracht wird, über den Reibkontakt in der Kupplung das Motordrehmoment ganz oder teilweise

<sup>98</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

<sup>99</sup> Schaeffler Automotive Aftermarket GmbH & Co. KG, 2014

<sup>100</sup> Dalbiez; Feigler, 2000; Dau et al., 2000

<sup>101</sup> Dau et al., 2000

<sup>102</sup> Definition nach IPEK Glossar: „Ein Wirkprinzip bezeichnet eine Art der Wandlung von Energie, Stoff und Information, die beim Konstruieren als Lösungsmöglichkeit für eine Teilfunktion eines Produkts genutzt werden kann. Ein Wirkprinzip ergibt sich aus der Kombination von

- physikalischen Effekten (z. B. Reibung, magnetische oder elektrostatische Anziehung/Abstoßung),
- den von den Interaktionspartnern durchgeführten Relativbewegungen, sowie
- der Anordnung und den Eigenschaften der beteiligten Wirkflächenpaare und Leitstützstrukturen.“

übertragen wird. Die nass laufende Doppelkupplung wird meist in Lamellenbauweise ausgeführt, wobei das tribologische System aus den Lamellen und dem sich zwischen den Lamellen ausbildenden Ölfilm besteht. Dementsprechend befinden sich die Lamellen bzw. die Lamellenpakete in einem öldichten Gehäuse. Die beiden zum tribologischen System beitragenden Lamellen sind die den Reibbelag tragende Belagslamelle und die Stahllamelle, welche als Gegenreibpartner wirkt.

Die Übertragung des Kupplungsmoments erfolgt im Falle der nasslaufenden Doppelkupplung von den Lamellen über die Lamellenverzahnung zu den Innen- bzw. Außenlamellenträgern. Die Anordnung der Lamellenpakete in einer nass laufenden Doppelkupplung kann entsprechend der jeweiligen Anforderungen unterschiedlich erfolgen (Bild 9).<sup>103</sup>

Ein solcher Aufbau einer nass laufenden Doppelkupplung ist beispielhaft in Bild 10 dargestellt.

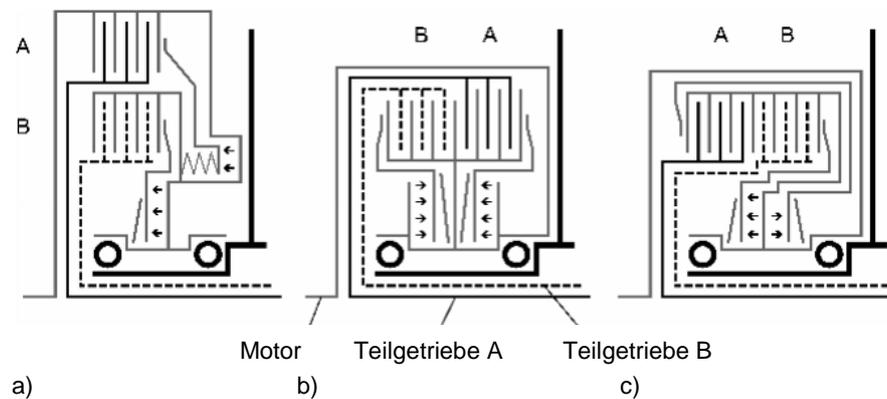


Bild 9: Möglichkeiten zur Anordnung der Lamellenpakete bei nass laufenden Doppelkupplungen:  
a) radial geschichtet, b) und c) axial gestaffelt<sup>104</sup>

Hier wird das Motormoment über die Eingangsnabe (7 in Bild 10) in die Kupplungseinheit eingeleitet und über die Mitnehmerscheibe (10 in Bild 10) in das Kupplungsgehäuse bzw. zu den beiden Außenlamellenträgern (2,4 in Bild 10) übertragen. Über die damit verzahnten Stahllamellen wird das Moment über den Reibkontakt zu den Belagslamellen übertragen und gelangt über die damit verbundenen Innenlamellenträger (1,3 in Bild 10) weiter zu den Getriebeeingangswellen.<sup>105,106</sup>

<sup>103</sup> Naunheimer et al., 2007

<sup>104</sup> Naunheimer et al., 2007

<sup>105</sup> Naunheimer et al., 2007

<sup>106</sup> Mazière, 2005

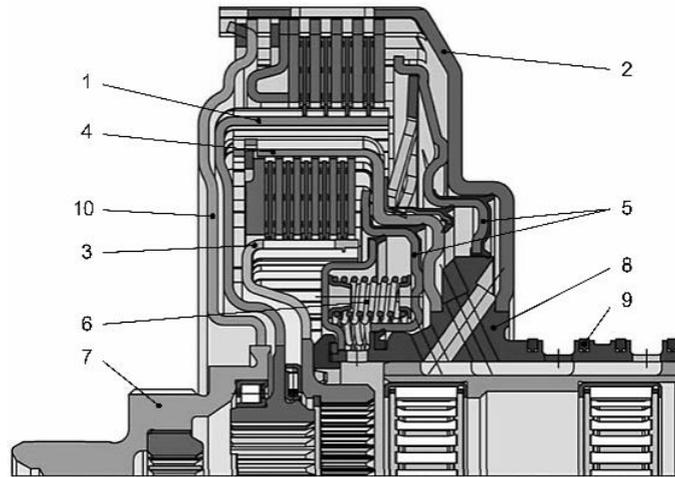


Bild 10: Beispiel eines nass laufenden Doppelkupplungsgetriebes in radial geschichteter Anordnung (Teilkupplung 1 außen, Teilkupplung 2 innen)  
 1,2: Innen- und Außenlamellenträger K1, 2,4: Innen- und Außenlamellenträger K2  
 5: Kolben, 6: Druckfeder, 7: Eingangsnabe, 8: Hauptnabe, 9: Dichtring,  
 10: Mitnehmerscheibe<sup>107</sup>

### 2.3.1 Spezielle Eigenschaften der trockenen Doppelkupplung

Unterscheidende Merkmale zwischen der nassen und der trocken laufenden Doppelkupplung ergeben sich direkt aus der im vorigen Abschnitt erläuterten Bau- und Funktionsweise.

Dabei ist die trocken laufende Doppelkupplung mit elektromechanischer, selbthaltender Aktorik, wie in Bild 11 gezeigt, im Vergleich zur nass laufenden Variante effizienter, da bei der nass laufenden Kupplung bedingt durch den Ölfluss Schleppmomente auftreten, welche direkt zu Energieverlusten führen.<sup>108</sup>

Auch benötigen trocken laufende Doppelkupplungen keine zusätzliche Ölpumpe beziehungsweise ein zusätzliches Powerpack, welche bei einer nasslaufenden Kupplung notwendig sind, um Leckage zu kompensieren.<sup>109</sup>

Neben ihrer Effizienz bietet die trocken laufende Doppelkupplung speziell im Fahrzeugklassen der Klein- und Kleinstwagen sowie der Kompakt- und Mittelklasse<sup>110</sup> ein größeres Potenzial, als die nass laufende Doppelkupplung, da sie insbesondere in Kombination mit einer in die Kupplungsglocke integrierbaren Aktorik einen deutlich geringeren Bauraumbedarf hat. Des Weiteren zeichnet sich insbesondere die

<sup>107</sup> Naunheimer et al., 2007

<sup>108</sup> Zink et al., 2014

<sup>109</sup> Kimmig; Agner, 2006

<sup>110</sup> Definition der Fahrzeugklassen entsprechend Europäische Kommission, 2002 , sowie Kraftfahrt-Bundesamt, 2011

Kombination aus trockener Doppelkupplung mit einer elektromechanischen Aktorik durch einen geringen Wartungsaufwand aus.<sup>111,112</sup>

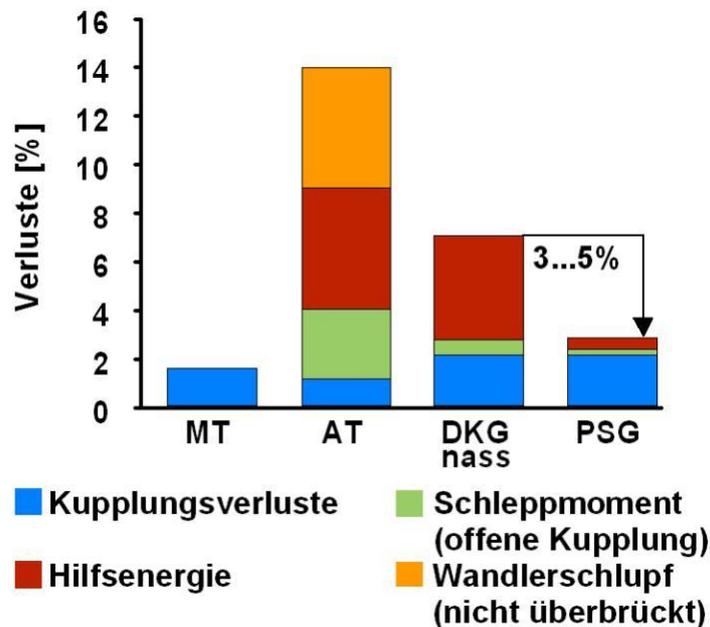


Bild 11: Verluste von Doppelkupplungsgetrieben (DKG nass, PSG) im Vergleich zu Handschalt- und Wandlerautomatikgetrieben<sup>113</sup>

Bedingt durch die Ausführung als trocken laufende Kupplung verfügt die trockene Doppelkupplung gegenüber der nass laufenden Variante jedoch über eine geringere Temperaturbeständigkeit, da hier im Gegensatz zu einer nassen Kupplung die Wärmeabfuhr nicht von einem Ölstrom geleistet wird, sondern lediglich durch Konvektion und Abstrahlung erfolgt, welche einen deutlich geringeren Wärmefluss ermöglichen. Daher werden beim Umsetzen größerer Reibleistungen schnell Temperaturen erreicht, die den im Allgemeinen organischen Reibbelag schädigen und damit auch das Reibverhalten negativ beeinflussen können. Darüber hinaus treten bei trocken laufenden Doppelkupplungen stärkere Drehungleichförmigkeiten auf, welche sich durch ein nicht im Kraftfluss befindliches Teilgetriebe in Form von Störgeräuschen und Schwingungen des Antriebsstranges bemerkbar machen können.<sup>109,114</sup>

### 2.3.2 Neue Entwicklungen bei Trockenen Doppelkupplungen

Für die Zukunft der trockenen Doppelkupplung stellen sich weitere Herausforderungen, denen die Entwickler mit verschiedenen Ansätzen begegnen wollen. So soll im Vergleich zur bisherigen Umsetzung der trockenen Doppelkupplung

<sup>111</sup> Kimmig et al., 2010

<sup>112</sup> Zink; Hausner, 2010

<sup>113</sup> Berger et al., 2002

<sup>114</sup> vgl. auch 2.6

neben der Verbesserung des Komfortverhaltens außerdem das maximal übertragbare Moment gesteigert werden, die begrenzte Leistungsaufnahmefähigkeit, welche durch die begrenzte Kühlung durch Konvektion und die Temperaturfestigkeit der organischen Reibbeläge bedingt ist, verbessert werden und gleichzeitig das Massenträgheitsmoment und die Bauraumanforderungen der Kupplung reduziert werden.<sup>115</sup>

	Generation 1	Generation 2 (MDD)	
<b>Drehmoment</b>	250 Nm	150 Nm	250 Nm
<b>Masse</b>	12,5 - 15,6 kg	10 kg	11,6 kg
<b>Massenträgheit</b>	0,09 - 0,15 kgm <sup>2</sup>	0,08 kgm <sup>2</sup>	0,09 kgm <sup>2</sup>
<b>Baugröße</b> Außen-Ø der Kupplungsscheibe K1	Ø214 - Ø235	Ø212	Ø220

Bild 12: Trockene Doppelkupplung der ersten und der zweiten Generation als modularer Baukasten<sup>116</sup>

Um diese Ziele zu erreichen, werden laut HOFFMANN ET AL. an verschiedenen Stellen des Kupplungssystems neue Entwicklungen vorangetrieben. So sollen neue Reibbeläge noch besser an die speziellen Lastkollektive der trockenen Doppelkupplung angepasst werden und außerdem die bis heute gewonnenen Erkenntnisse über die Prozesse, welche zu einer Veränderung der Dämpfung der Reibbeläge führen, genutzt werden, um diese Dämpfungscharakteristik im Rahmen der Belagsentwicklung zu verbessern. Weiterhin soll durch den Einsatz eines hydrostatischen sog. *Concentric Slave Cylinder (CSC)* für direkt betätigte Kupplungen die geometrische Anregung des Kupplungsmomentes aufgrund der veränderten Steifigkeiten im System verringert werden. Darüber hinaus wird ein neues Kupplungskonzept basierend auf der bisherigen trockenen Doppelkupplung entwickelt, welches als Kernelemente einen modularen Aufbau mit entweder einer oder auch zwei Kupplungsscheiben vorsieht und sich somit sowohl für Anwendungen mit niedrigem als auch für solche mit hohem maximal übertragbarem Moment eignet (Bild 12).

<sup>115</sup> Hoffmann et al., 2015

<sup>116</sup> Baumann et al., 2015

Zusätzlich zur bereits beschriebenen Betätigung via CSC kommt ein neues Lagerungskonzept zum Einsatz, welches die Anregung von Schwankungen des Kupplungsmomentes durch Axialschwingungen der Kurbelwelle oder der Getriebeeingangswelle minimiert. Außerdem kommen in diesem neuen Kupplungskonzept statt der bisher üblichen Gussteile nun Blechkomponenten zum Einsatz, die für das Design neue Möglichkeiten, wie Reduktion der Bauteildicke oder eine neue Gestaltung der Reibflächen ermöglichen. Durch die Anwendung dieser Komponenten kann eine Reduktion des Massenträgheitsmomentes der Kupplung von 20 bis 30% erreicht werden und somit die Fahrdynamik eines solchen Systems weiter verbessert werden.<sup>117,118</sup>

## **2.4 Modellierung eines PKW-Antriebsstrangs**

Um das dynamische und damit insbesondere das schwingungsdynamische Verhalten eines PKW-Antriebsstrangs beeinflussen zu können, muss dieses auch nachvollzogen werden können, weshalb mechanische Modelle dieses Systems von besonderer Bedeutung sind. Dabei kommt wie in den meisten Bereichen der anwendungsorientierten Modellbildung der Grundsatz „so kompliziert wie nötig und so einfach wie möglich“ zum Tragen. Daher findet sich in der Literatur eine Vielzahl von Modellen eines PKW-Antriebsstrangs zur Abbildung der Schwingungsdynamik, die in Abhängigkeit ihrer Anwendung eine unterschiedliche Komplexität aufweisen. Diese werden im folgenden Abschnitt kurz vorgestellt.

### **2.4.1 Modellierung als Zwei-Massen-Schwinger**

Einen Ansatz für eine sehr einfache Modellierung eines PKW-Antriebsstrangs zur Abbildung des schwingungsdynamischen Verhaltens – in diesem Fall zur konkreten Abbildung von durch Kupplungsrupfen induzierte Schwingungen – zeigt KRÜGER. Der Antriebsstrang wird hier auf ein System aus zwei rotierenden Massen reduziert, die durch ein Feder-Dämpfer-Element miteinander verknüpft wird (siehe Bild 13).<sup>119</sup>

Die Masse von Motor und Schwungrad wird hier bei der Klassifizierung des Modells nicht berücksichtigt, da sie aufgrund der schlupfenden Kupplung isoliert ist und somit nicht zur Schwingungsdynamik beiträgt. Aus diesem Grund wird dieses Modell im Folgenden als zwei Massen Modell bezeichnet werden.

---

<sup>117</sup> Hoffmann et al., 2015

<sup>118</sup> Baumann et al., 2015

<sup>119</sup> Albers; Krüger, 2002

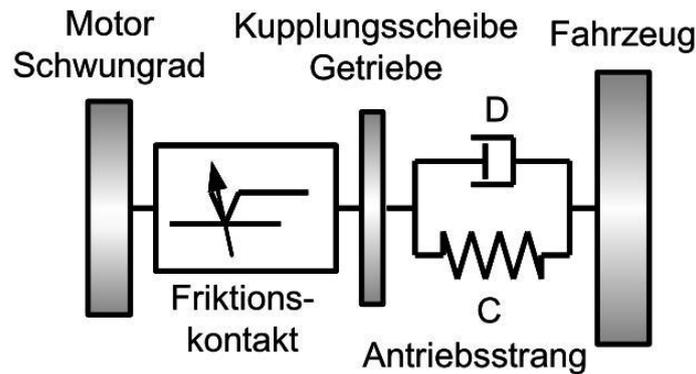


Bild 13: Einfachmodell eines PKW-Antriebsstrangs als Zwei-Massen-Modell<sup>120,121</sup>

Die Motivation dieser Vereinfachung des Antriebsstrangmodells auf zwei Massen ist, dass für eine Dämpfung von Rupfschwingungen nur die erste Eigenfrequenz des von der Primärseite der Kupplung isolierten Antriebsstranges von Interesse ist.<sup>122,123</sup>

Tatsächlich ist es mit diesem einfachen Modell möglich, die bei selbsterregtem Kupplungsrupfen (siehe Abschnitt 2.6.3) angeregte erste Eigenfrequenz des Antriebsstranges darzustellen.

#### 2.4.2 Modellierung unter Berücksichtigung der rotatorischen Kopplung an Aggregat und Karosserie

Das zuvor vorgestellte zwei Massen Modell der Sekundärseite des Antriebsstranges genügt der Analyse einfacher Schwingungseffekte und erlaubt eine Betrachtung der ersten Eigenfrequenz des Antriebsstranges. Nun lassen sich jedoch unter Umständen im Fahrzeug komplexere Schwingungsmodi betrachten, welche sich mit diesem einfachen Modell nicht erklären lassen. Daher kann das Modell um eine rotatorische Kopplung des Aggregates an die Karosserie erweitert werden. Das Aggregat ist über Motorlager, Getriebelager und Pendelstütze beweglich an die Karosserie gekoppelt und kann demnach Relativbewegungen zur Karosserie ausführen,<sup>124</sup> wobei Motor- und Getriebelager Normalkräfte und die Pendelstütze rotatorische Kräfte abstützen, welche aus dem vom Motor in den Antriebsstrang eingebrachten Antriebsmoment resultieren. Die Übersetzungsstufen des Getriebes sind ebenfalls Teil des Aggregates und tragen durch Abstützung ihrer übertragenen Momente ebenfalls zum gesamten Abstützmoment des Aggregates bei (siehe Bild 14).

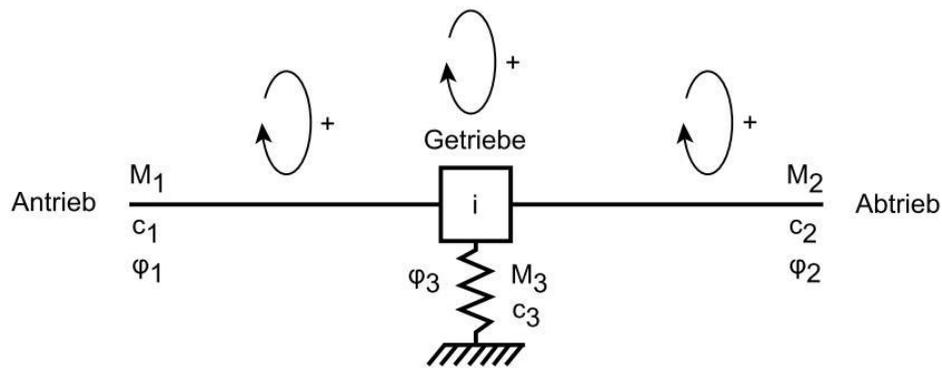
<sup>120</sup> nach Albers; Krüger, 2002

<sup>121</sup> vgl. auch Albers, 1994

<sup>122</sup> Krüger

<sup>123</sup> Albers; Krüger, 2002

<sup>124</sup> Maier, 2006

Bild 14: Vereinfachte Darstellung der elastischen Getriebeabstützung<sup>125</sup>

Dieses Abstützmoment lässt sich unter Verwendung der Bezeichnungen aus Bild 14 mithilfe von

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \frac{\varphi_1}{i} + \varphi_3 \cdot \frac{1-i}{i} \\ M_2 &= M_1 \cdot i \\ M_3 &= M_1 \cdot (i-1)\end{aligned}\quad (2.10)$$

berechnen.<sup>126</sup>

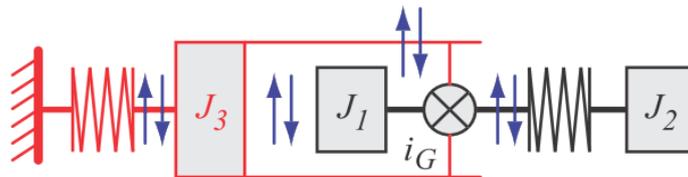


Bild 15: Erweitertes zwei Massen Modell des Antriebsstrangs unter Berücksichtigung der rotatorischen Aggregatbewegung.  $J_1$  ist die zusammengefasste Trägheit an der Sekundärseite der Kupplung,  $J_2$  die Abtriebs- und  $J_3$  die Aggregatträgheit.  $i_G$  bezeichnet die Getriebeübersetzung.<sup>127,128</sup>

Durch diese Betrachtung der elastischen Getriebeabstützung im Antriebsstrangmodell (Bild 15) und dem damit einhergehenden Drehmomentfluss von Getriebe über das Gesamtaggregate hin zur Karosserie werden die Schwingungseigenschaften des Systems verändert und es entstehen aus der Berücksichtigung der Aggregatträgheit

<sup>125</sup> Fischer et al., 2012

<sup>126</sup> Fischer et al., 2012

<sup>127</sup> Schwenger, 2005

<sup>128</sup> Anm. d. Autors: in der vorliegenden Abbildung sind die Steifigkeiten  $c_i$  sowie die Dämpfungen  $d_i$  nicht explizit bezeichnet, jedoch symbolisieren die dargestellten Federn kombinierte Feder-Dämpfer-Elemente, wie sie in Bild 13 explizit dargestellt und bezeichnet sind (vgl. Schwenger, 2005)

und der dazugehörigen Lagerung zusätzliche Schwingungsmodi,<sup>129</sup> welche die Eigenfrequenz des Antriebsstranges beeinflussen.<sup>130</sup>

### 2.4.3 Modellierung als Vier-Massen-Schwinger

Durch die Berücksichtigung der elastischen Getriebe- und Aggregatlagerung sowie der damit verbundenen rotatorischen Kupplung lassen sich nun mehr Schwingungsmodi als im zwei Massen Modell darstellen, jedoch lassen sich in der Praxis weitere Effekte im Schwingungsverhalten des Antriebsstranges beobachten, welche mit diesem erweiterten Modell aus 2.4.2 nicht erklärbar sind. So lässt sich in einigen Fahrzeugen bei Analyse der Schwingungsdynamik eine weitere Resonanzfrequenz abseits der Hauptresonanz, welche der ersten Eigenfrequenz des Antriebsstranges bei geöffneter bzw. schlupfender Kupplung entspricht, beobachten (vgl. Bild 56<sup>131</sup>). Diese zweite Resonanz liegt bei höheren Frequenzen und lässt sich im Simulationsmodell dann darstellen, wenn man die Trägheiten und Steifigkeiten auf der Abtriebsseite des Antriebsstrangs separiert betrachtet. Durch diese separierte Betrachtung entstehen weitere Schwingungsmodi, da nun die Schwingungsenergie auf mehrere schwingungsfähige Teilsysteme mit im Allgemeinen unterschiedlichen Eigenfrequenzen verteilt werden kann.

Hierbei liefert ein Modell unter Berücksichtigung der separaten Trägheitsmomente an Getriebeeingang, Getriebeausgang, der Radträgheit und der Fahrzeugmasse eine ausreichende Übereinstimmung mit den in Fahrzeugmessungen beobachteten Schwingungsmodi. Durch die separate Betrachtung dieser Trägheiten werden auch die Steifigkeiten und Dämpfungen der dazwischen liegenden Verbindungselemente – also Getriebeein- und Getriebeausgangswelle, Seitenwelle und die Achsaufhängung – einzeln betrachtet.<sup>132</sup> Speziell die Betrachtung von Radträgheit und Achsaufhängung ermöglicht die Beschreibung der in Bild 56<sup>131</sup> beispielhaft dargestellten Schwingungscharakteristik mit einer zusätzlichen Eigenmode der Fahrzeuglängsbeschleunigung in einem Bereich von typischerweise 13 – 20 Hz.<sup>133</sup>

### 2.4.4 Modellierung unter Berücksichtigung der longitudinalen Freiheitsgrade des Aggregates

Eine weitere im Zuge von Fahrzeugmessungen festgestellte Beobachtung besteht in der Separation der Resonanzfrequenzen der Getriebeeingangsdrehzahl und der Fahrzeuglängsbeschleunigung. Bei den bisherigen Modellen war das

---

<sup>129</sup> Maier, 2006

<sup>130</sup> Schwenger, 2005

<sup>131</sup> siehe Abschnitt 5.1.4, Seite 181

<sup>132</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

<sup>133</sup> Schaeffler AG, 2016b

Schwingungsverhalten für diese beiden Messgrößen qualitativ identisch, es konnten also die gleichen charakteristischen Frequenzen zur Beschreibung herangezogen werden. Es kann jedoch für einige Fahrzeugmodelle beobachtet werden, dass die Hauptresonanz der Längsbeschleunigung des Fahrzeugs relativ zur Hauptresonanz der Getriebeeingangsdrehzahl hin zu höheren Frequenzen verschoben ist. Dies ist beispielhaft mithilfe eines Bode-Diagramms in Bild 57<sup>134</sup> dargestellt.

Diese lässt sich nun erklären, indem man für den Motor und das Aggregat nicht nur eine rotatorische, sondern auch eine translatorische Kopplung berücksichtigt. Diese wird relevant, da der Motorblock im Vergleich zu anderen Komponenten des Antriebsstranges eine hohe Masse besitzt und daher seine translatorische Bewegung die Gesamtdynamik des Antriebsstranges beeinflusst.<sup>135</sup> Die über die Motorlagerung eingebrachte Kraft auf die Motormasse verursacht eine Bewegung entsprechend<sup>136</sup>

$$\ddot{x}_{Eng} = \frac{1}{m_{Eng}} \cdot (F_{Eng} - F_{Agg}) \quad (2.11)$$

Diese Kraft resultiert, wie in Bild 16 dargestellt, aus der Kopplung zwischen der rotatorischen Aggregatbewegung und der translatorischen Bewegung des Motors.

Wie in Bild 17 zu sehen ist, ist das Aggregat bestehend aus Motor, Kupplungssystem und Getriebe im Wesentlichen in drei Punkten gelagert, um eine Bewegung in Richtung aller sechs Freiheitsgrade abzustützen.<sup>137</sup>

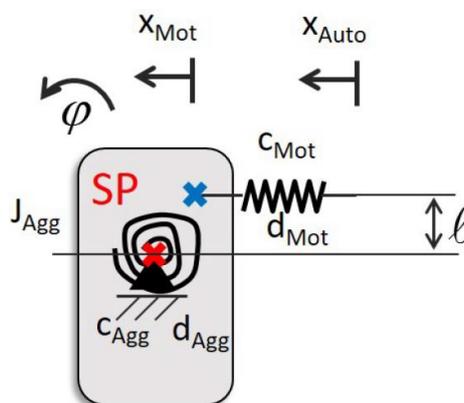


Bild 16: Vereinfachte Darstellung der Motorblockbewegung und der daraus resultierenden Kopplung von rotatorischen und translatorischen Bewegungen<sup>138</sup>

<sup>134</sup> siehe Abschnitt 5.1.5, Seite 181

<sup>135</sup> Maier, 2006

<sup>136</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

<sup>137</sup> Maier, 2006

<sup>138</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

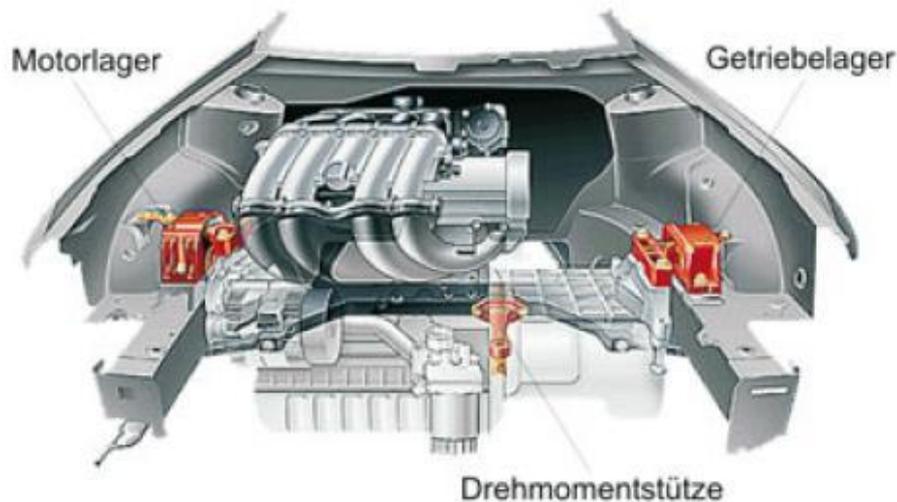


Bild 17: Aggregatlagerung im Falle eines Front-Quereinbaus<sup>139</sup>

Wenn die Lagerung des Motorblocks nicht im Schwerpunkt  $SP$  erfolgt, so sind die rotatorische Bewegung des Aggregats und die translatorische Bewegung des Motorblocks über den Versatz  $l$  der Aufhängung zum Schwerpunkt im in Bild 16 dargestellten vereinfachten Modell miteinander gekoppelt. Für die entgegengerichtete Kraft  $F_{Agg}$  ergibt sich

$$F_{Agg} = d_{Eng} \cdot l \cdot \omega_{Agg} + c_{Eng} \cdot l \cdot \varphi_{Agg} \quad (2.12)$$

Voraussetzung für dieses vereinfachte Modell der Motorblockbewegung als Beschreibung mit zwei Freiheitsgraden ist, dass der Motorblock eine ebene Bewegung beschreibt, also im Wesentlichen um eine der drei möglichen Achsen rotiert. Dies lässt sich mathematisch durch die Bedingung formulieren, dass das Verhältnis der Winkel  $\gamma$  (Rotation um die  $z$ -Achse) und  $\beta$  (Rotation um die  $y$ -Achse) über veränderliche Winkel  $\beta$  konstant sein muss. Damit lässt sich die Bewegung auf die zwei Freiheitsgrade der Längsrichtung und des Winkels der Rotation um die  $y$ -Achse reduzieren und wie in Bild 16 skizziert darstellen, wobei die Modellgröße  $l$  die Kopplungskonstante zwischen rotatorischer und translatorischer Bewegung darstellt.<sup>140</sup>

Aus der Kopplung von rotatorischer und translatorischer Motorblockbewegung folgt mit der zuvor eingeführten elastischen Getriebeabstützung sowie einer ebenfalls zu berücksichtigenden elastischen Abstützung des Differenzials eine veränderte

<sup>139</sup> Heißing et al., 2013

<sup>140</sup> Schaeffler AG, 2016a

Schwingungsdynamik des Antriebsstrangs, die über die grundlegende Beschreibung durch das Modell in Abschnitt 2.4.1 hinausgehen. Insbesondere durch die Eigenfrequenzen der Schwingungsmodi des Aggregates<sup>141</sup> und deren Lage relativ zu den charakteristischen Frequenzen der Antriebsstrangdynamik lässt sich die beobachtete Aufspaltung der Hauptresonanzen von Getriebeeingangsdrehzahl und Fahrzeugbeschleunigung motivieren.

### 2.4.5 Modellreduktion einer Torsionsschwingerkette

Ein weiterer Aspekt der Modellierung eines PKW-Antriebsstrangs mit Fokus auf dessen Schwingungsdynamik ist die Reduktion eines gewählten Modells auf die dominanten dynamischen Komponenten, um zu einer Beschreibung mithilfe eines Modells mit einer reduzierten Anzahl an Freiheitsgraden zu gelangen. Dadurch wird es dem Entwickler zum einen ermöglicht, sich auf die dominant auftretenden Effekte zu fokussieren und gleichzeitig durch die reduzierte Anzahl der Freiheitsgrade Berechnungsaufwände zu minimieren. Eine Methode um diese Modellreduktion zu erreichen ist die von DRESIG UND FIDLIN vorgestellte Methode nach Rivin und Di, bei der die Torsionsschwingerkette in Teilsysteme mit jeweils einem Freiheitsgrad unterteilt wird und somit entweder Systeme von Typ A, mit einer Drehmasse zwischen zwei Torsionsfedern, oder vom Typ B, mit einer Torsionsfeder zwischen zwei Drehmassen, entstehen (siehe Bild 18). Die grundlegende Idee der Modellreduktion nach Rivin und Di ist, dass steife Teilsysteme gegen ihre Umgebung durch relativ hohe Eigenfrequenzen ausgezeichnet sind und daher als lokal starre Körper angenommen werden können. Diese steifen Teilsysteme werden nun identifiziert, in dem für jedes Teilsystem vom Typ A oder Typ B die Eigenfrequenz berechnet wird. Diese ergibt sich zu<sup>142</sup>

$$\omega_{A,k}^2 = \frac{C_{k-1} + C_k}{J_k} \quad \omega_{B,k}^2 = \frac{C_k \cdot (J_k + J_{k+1})}{J_k \cdot J_{k+1}} \quad (2.13)$$

Insgesamt erhält man so für die gesamte Torsionsschwingerkette  $2n - 1$  Teilsysteme, von denen  $n$  vom Typ A und  $n - 1$  vom Typ B sind. Die größte Eigenfrequenz zeichnet nun das steifste Teilsystem aus, für das im Folgenden die partielle Reduktion vorgenommen wird, indem entweder im Fall eines Typ A Modells die Drehmasse auf die beiden umgebenden Nachbarmassen, oder im Fall eines Modells vom Typ B die Steifigkeit der mittigen Torsionsfeder auf die beiden benachbarten Federn verteilt wird (vgl. Bild 18).

<sup>141</sup> im Bereich von ca. 6,0 Hz bis 17,0 Hz, für eine rotatorische Bewegung des Aggregates um die y-Achse ca. 8,5 Hz im Falle eines Fahrzeugs der Kompaktklasse mit einem front-quer eingebauten Dreizylinder Benzin-Motor; Maier, 2006

<sup>142</sup> Dresig und Fidlin, 2014

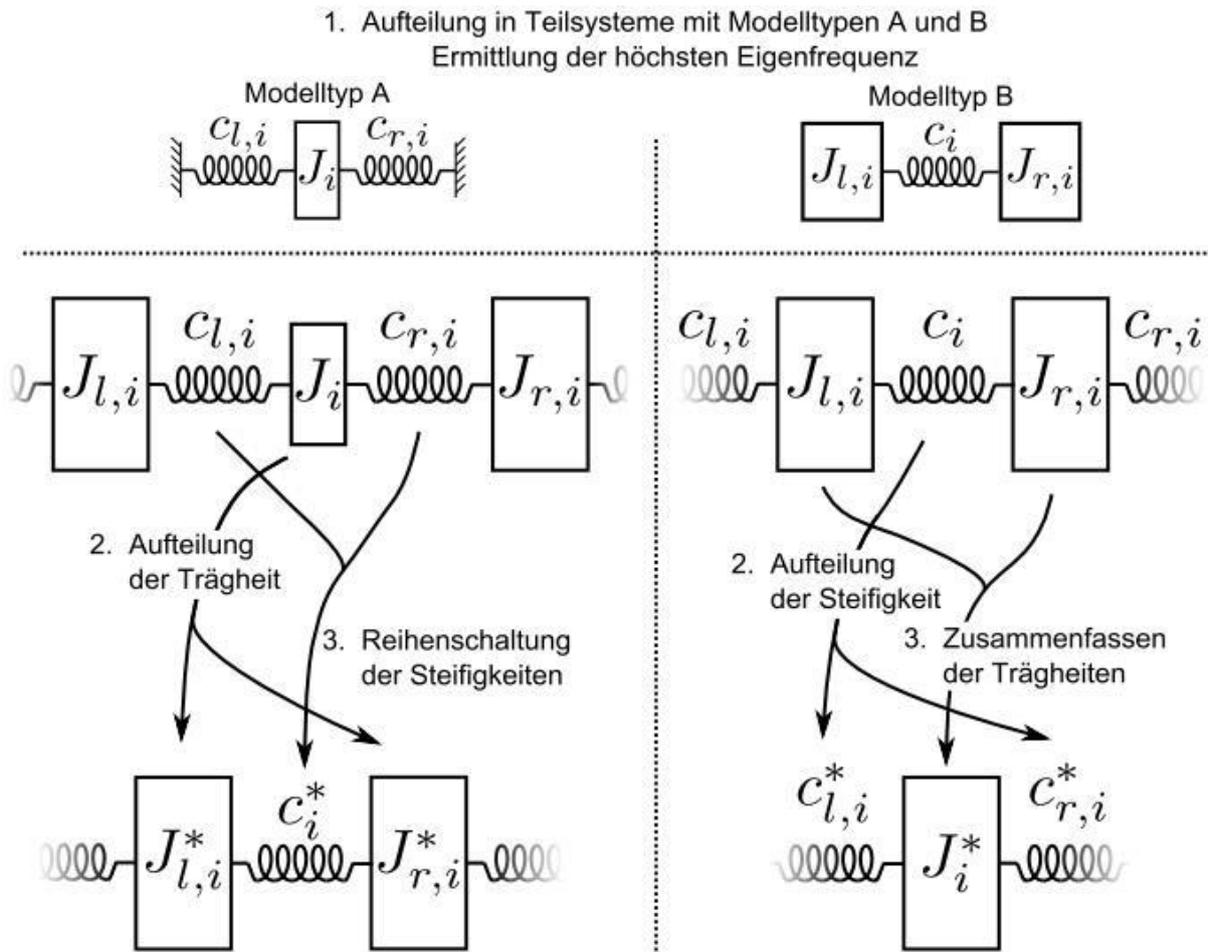


Bild 18: Verfahren der Modellreduktion nach Rivin und Di<sup>143</sup>

Damit ergeben sich die Parameter des reduzierten Systems im Falle eines Typ A Modells zu

$$\begin{aligned}
 J_{L,i}^* &= J_{L,i} + \frac{C_{L,i}}{C_{L,i} + C_{R,i}} \cdot J_i \\
 J_{R,i}^* &= J_{R,i} + \frac{C_{R,i}}{C_{L,i} + C_{R,i}} \cdot J_i \\
 C_i^* &= \frac{C_{L,i} \cdot C_{R,i}}{C_{L,i} + C_{R,i}}
 \end{aligned}
 \tag{2.14}$$

und für den Fall eines Typ B Modells

<sup>143</sup> Stier

$$\begin{aligned}
 J_i^* &= J_{L,i} + J_{R,i} \\
 c_{L,i}^* &= \left( \frac{1}{c_{L,i}} + \frac{J_{R,i}}{c_i \cdot (J_{R,i} + J_{L,i})} \right)^{-1} \\
 c_{R,i}^* &= \left( \frac{1}{c_{R,i}} + \frac{J_{L,i}}{c_i \cdot (J_{R,i} + J_{L,i})} \right)^{-1}
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Dieses Vorgehen wird nun wiederholt, bis alle Eigenfrequenzen des reduzierten Systems im angestrebten Frequenzbereich liegen.<sup>144</sup>

### 2.4.6 Zwischenfazit

Es wurden unterschiedliche Abstraktionsgrade der Antriebsstrangmodellierung, wie sie in der Literatur zu finden sind, vorgestellt und insbesondere auf den direkten Zusammenhang zwischen den betrachteten Phänomenen, dem Ziel der Modellierung und dem daraus abgeleiteten Detaillierungsgrad des Torsionsschwingermodells eingegangen. Demzufolge ergibt sich auch die Notwendigkeit der Betrachtung der Kopplungen zwischen torsionalen und longitudinalen Schwingungszuständen aus den spezifischen Eigenschaften des betrachteten realen Systems und der in diesem Zusammenhang untersuchten Problematik. Abschließend wurde mit der Modellreduktion nach Rivin und Di eine Methode zur Abstraktion eines bereits vorhandenen Modells vorgestellt, die es ermöglicht, eine bestehende Modellierung zu vereinfachen und eine Abstraktion mit Fokus auf die für die Problemstellung relevante Dynamik vorzunehmen. Die hier gewonnenen Erkenntnisse über modellierung und Modellreduktion finden in Kapitel 5 und insbesondere in den Abschnitten 5.2 und 5.5 Anwendung.

## 2.5 Drehzahlmessung im Automobilen Antriebsstrang

Ein zentrales Element zur Bestimmung des dynamischen Zustandes eines automobilen Antriebsstranges ist die Erfassung der Drehzahlen, an verschiedenen Positionen im Antriebsstrang. Dabei stehen unterschiedliche Verfahren zur Verfügung, die einen jeweils optimalen Messbereich besitzen und damit je nach zu erwartendem Drehzahlbereich eingesetzt werden können. Die hier gewonnenen Erkenntnisse werden bei der Betrachtung der Unsicherheiten im Regelsystem in 7.3 verwendet.

Grundlegend erfolgt die Drehzahlmessung entweder frequenzanalog oder amplitudenanalog. Bei der amplitudenanalogen Messung wird mithilfe eines Tachogenerators ein in seiner Amplitude der Drehzahl der Welle proportionales Spannungssignal erzeugt. Dies ist jedoch aufgrund des benötigten Generators

---

<sup>144</sup> Dresig und Fidlin, 2014

aufwändiger und auch potenziell fehleranfälliger. Alternativ bietet sich die Möglichkeit der Berührungslosen Messung mithilfe eines mit der Welle mitrotierenden Zahnrades an. Dabei kann die Drehzahl durch Detektion der Zahnflanken mit einem Hall-Sensor oder einem induktiven Sensor bestimmt werden. Diese Art von Verfahren gilt als die robustere und wird aufgrund ihrer häufigen Anwendung im Folgenden kurz diskutiert.<sup>145</sup>

Durch die Detektion der Zahnflanke mit einem geeigneten Sensor entsteht ein periodisches Signal, welches durch einen sogenannten Schmitt-Trigger in ein Rechtecksignal umgewandelt wird. Die Periodendauer dieses Rechtecksignals wird anschließend mithilfe eines Referenzzählers bestimmt. Daraus ergibt sich mit der bekannten Anzahl der Zähne  $Z$  das Winkelinkrement pro Zahn als  $\varphi_0 = \frac{2\pi}{Z}$  und die Drehzahl durch Winkelmessung aus dem Differenzenquotienten

$$\omega_m = 2\pi \cdot n = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1}.$$

Für dessen Auswertung besteht nun die Möglichkeit der winkelsynchronen und der zeitsynchronen Erfassung. Auch für diese beiden Verfahren ergeben sich aufgrund der Messgenauigkeit in Abhängigkeit des Betrags von  $n$  unterschiedliche Einsatzgebiete.<sup>145</sup>

Diese endliche Messgenauigkeit resultiert aus der Quantisierung der Messgröße, welche in beiden Fällen erfolgt, und wird ebenfalls für beide Methoden diskutiert.

### 2.5.1 Zeitsynchrone Erfassung der Drehzahl

Bei der zeitsynchronen Drehzahlerfassung wird im Gegensatz zur winkelsynchronen Messung nicht für jede Zahnflanke ein neuer Messwert erzeugt, sondern es wird die Anzahl der detektierten Zahnflanken  $n_{\text{Zahn}}$  über ein festgelegtes Zeitintervall  $T_{\text{Ref}}$  bestimmt (Bild 19). Da hier für nach jedem Zeitintervall der Länge  $T_{\text{Ref}}$  ein neuer Wert der Drehzahl mit

$$\omega_m = \frac{n_{\text{Zahn}} \cdot \varphi_0}{T_{\text{Ref}}}$$

berechnet wird, wird dieses Verfahren als zeitsynchron bezeichnet.<sup>145</sup>

---

<sup>145</sup> Puente León und Kiencke, 2012

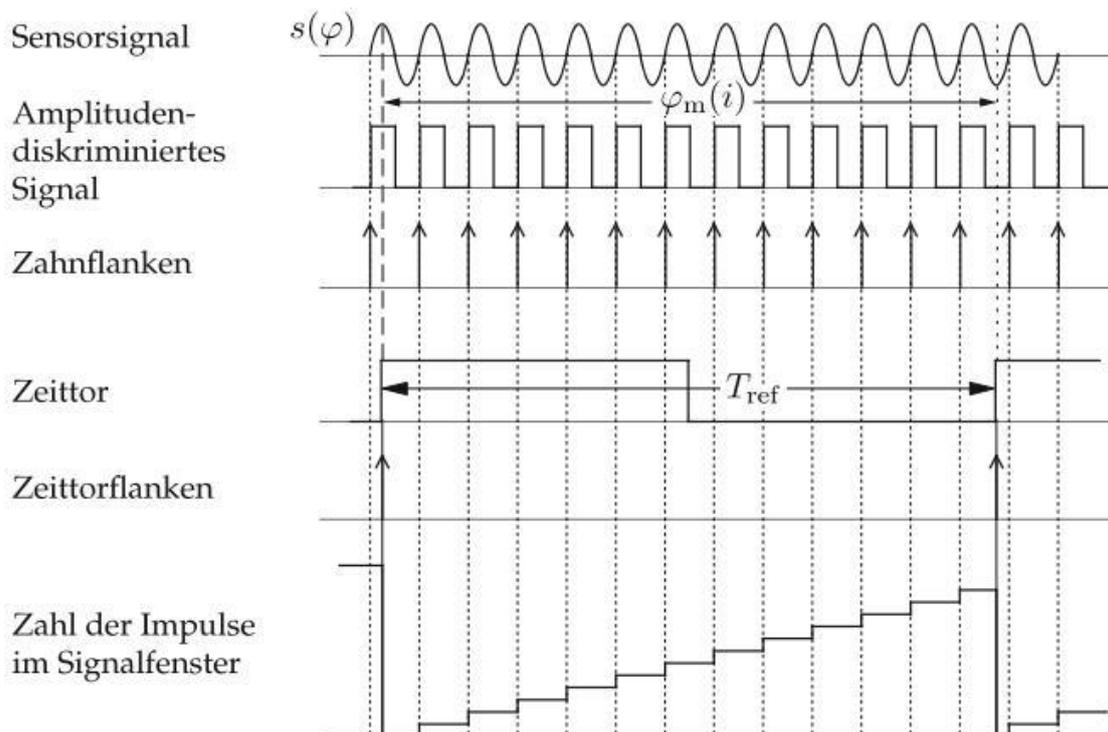


Bild 19: Signalerzeugung bei der zeitsynchronen Frequenzmessung<sup>146</sup>

Für diese Methode wird nun ein Quantisierungsfehler eingeführt, welcher sich hier durch die Quantisierung des Drehwinkels  $\varphi_m$  als  $n_{\text{Zahn}} \cdot \varphi_0$  ergibt. Daraus wird nun das quantisierte Drehzahlsignal  $\omega_q = \frac{n_{\text{Zahn}} \cdot \varphi_0}{T_{\text{Ref}}}$  generiert, welches einen Quantisierungsfehler von maximal

$$|\varphi_m - n_{\text{Zahn}}\varphi_0| \leq \varphi_0$$

aufweist. Damit ergibt sich der relative Quantisierungsfehler im Falle der zeitsynchronen Drehzahlmessung zu

$$F_{r,zs} = \frac{|\omega_q - \omega_m|}{\omega_m} = \frac{\left| \frac{n_{\text{Zahn}} \cdot \varphi_0}{T_{\text{Ref}}} - \frac{\varphi_m}{T_{\text{Ref}}} \right|}{\frac{\varphi_m}{T_{\text{Ref}}}} = \frac{|n_{\text{Zahn}} \cdot \varphi_0 - \varphi_m|}{\varphi_m} \approx \frac{|n_{\text{Zahn}} \cdot \varphi_0 - \varphi_m|}{n_{\text{Zahn}}\varphi_0} \quad (2.16)$$

$$F_{r,zs} \leq \frac{\varphi_0}{n_{\text{Zahn}}\varphi_0} = \frac{1}{N} = \frac{\varphi_0}{\omega_q \cdot T_{\text{Ref}}} \propto \frac{1}{\omega_q}$$

und ist damit proportional zur inversen Drehzahl.<sup>147</sup>

<sup>146</sup> Puente León und Kiencke, 2012

<sup>147</sup> Puente León und Kiencke, 2012

### 2.5.2 Winkelsynchrone Erfassung der Drehzahl

Bei der winkelsynchronen Drehzahlmessung wird die Periodendauer der Rotation bestimmt, indem die Zeitdifferenz  $T_m$  zwischen der Detektion zweier Zähne und damit die Zeit für das Überstreichen des Winkels  $\frac{2\pi}{Z}$  bestimmt wird. Damit ergibt sich die Drehzahl durch

$$\omega_m = \frac{2\pi}{T_m \cdot Z}.$$

Die Bestimmung der Zeit  $T_m$  erfolgt dabei durch Zählen der Impulse einer Referenzfrequenz  $f_0$  (siehe Bild 20) und ergibt sich damit zu  $T_m = \frac{n_{Imp}}{f_0}$ .

Die Bezeichnung der winkelsynchronen Abtastung resultiert aus der Tatsache, dass mit jeder erfassten Zahnflanke ein neuer Wert der Drehzahl berechnet wird.

Da bei diesem Messverfahren die Periodendauer als  $n_{Imp} \cdot T_0$  quantisiert wird, ist das entstehende Drehzahlsignal  $\omega_q = \frac{\varphi_0}{n_{Imp} T_0}$  mit einem Quantisierungsfehler behaftet. Mit einer maximalen Abweichung von  $|T_m - n_{Imp} T_0| \leq T_0$  des gemessenen Wertes  $n_{Imp} T_0$  vom wahren Wert  $T_m$  ergibt sich der relative Drehzahlfehler als

$$F_{r,ws} = \frac{|\omega_q - \omega_m|}{\omega_m} = \left| \frac{\frac{\varphi_0}{n_{Imp} T_0} - \frac{\varphi_0}{T_m}}{\frac{\varphi_0}{T_m}} \right| = \left| \frac{T_m}{n_{Imp} T_0} - 1 \right| \tag{2.17}$$

$$F_{r,ws} \leq \frac{1}{n_{Imp}} = \frac{1}{n_{Imp} T_0 f_0} = \frac{\omega_q}{\varphi_0 f_0} \propto \omega_q$$

und ist damit proportional zur Drehzahl.<sup>148</sup>

<sup>148</sup> Puente León und Kiencke, 2012

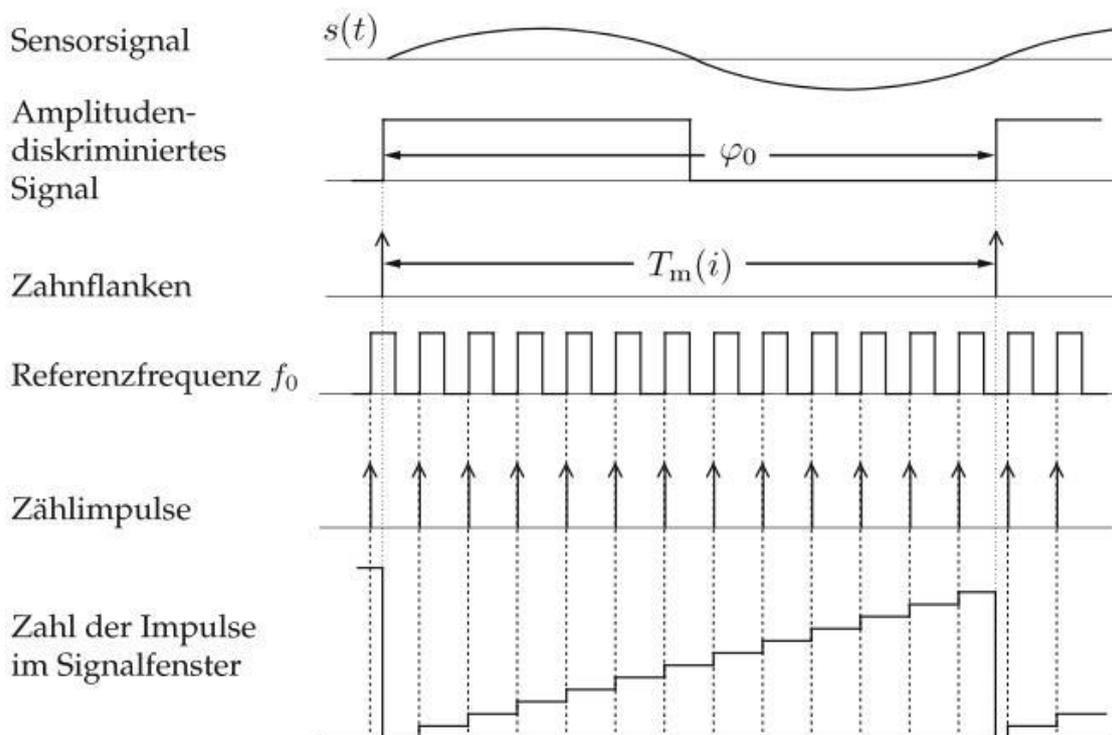


Bild 20: Signalerzeugung bei der winkelsynchronen Periodendauermessung<sup>149</sup>

Im Fahrzeug wird die Drehzahl fortlaufend bestimmt und damit ist es von Interesse, den Quantisierungsfehler als statistische Größe zu beschreiben. Da der Zähler der Referenzzeit  $T_0$  kontinuierlich durchläuft, wird im Falle einer Winkelgeschwindigkeit  $\omega_m$  der Winkel  $\varphi_0$  im  $i$ -ten Zählintervall (dies entspricht dem  $i$ -ten Unterteilungsabschnitt des Zahnrades) in der Zeit  $T_m(i)$  durchlaufen und dabei mit dem ersten Zählimpuls innerhalb von  $T_m(i)$  die Zeitdifferenz  $T_0$  gemessen. Dabei wird jedoch auch die Zeit mitgezählt, die seit dem vorhergehenden Zählimpuls aber noch vor Beginn des Intervalls  $T_m(i)$  bei passieren der Zahnflanke vergangen ist. Dadurch wird ein Quantisierungsfehler  $\Delta n(i-1) \cdot T_0$  zu Beginn der Messung erzeugt (Bild 21). Nach entsprechender Betrachtung der Messung am Ende des Messintervalls  $T_m(i)$  wird ebenfalls ein Quantisierungsfehler erzeugt, da hier die Messung mit dem letzten Zählimpuls vor Passieren des nächsten Zahnes abgeschlossen ist und damit die Zeit zwischen diesem Zählimpuls und dem Passieren der Zahnflanke nicht mehr gemessen wird. Dieser Quantisierungsfehler wird mit  $\Delta n(i) \cdot T_0$  bezeichnet.

<sup>149</sup> Puente León und Kiencke, 2012

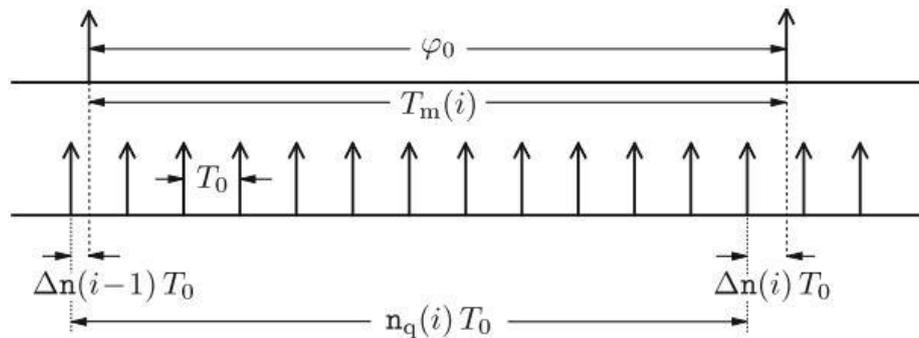


Bild 21: Schematische Darstellung zur statistischen Betrachtung des Quantisierungsfehlers bei winkelsynchroner Drehzahlmessung<sup>150</sup>

Die durch Erfassung der Zahnflanken bestimmte Zeit  $T_m(i)$  und die Zählperiode  $T_0$  können bezüglich ihrer Zeitdauer und ihrer Phasenlage als statistisch unabhängig voneinander gesehen werden. Daher kann für beide Quantisierungsfehler  $\Delta n(i)$  und  $\Delta n(i-1)$  eine Gleichverteilung angenommen werden.<sup>151</sup>

$$f_{\Delta n}(n) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq n \leq 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit dem kontinuierlichen Verhältnis  $n(i) = \frac{T_m(i)}{T_0}$  und dem gesamten Quantisierungsfehler  $\Delta n_q(i) = \Delta n(i-1) - \Delta n(i)$  ergibt sich das resultierende quantisierte Zählergebnis zu

$$n_q(i) = n(i) + \Delta n_q(i). \tag{2.18}$$

Nach PUENTE LEÓN UND KIENCKE ergibt sich damit für den resultierenden Quantisierungsfehler  $\Delta n_q(i)$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte als Faltung der beiden einzelnen Wahrscheinlichkeitsdichten

$$f_{\Delta n_q}(n) = f_{\Delta n} * f_{\Delta n} \tag{2.19}$$

und damit als Faltung zweier Gleichverteilungen eine Dreiecksverteilung (Bild 22).

<sup>150</sup> Puente León und Kiencke, 2012

<sup>151</sup> Puente León und Kiencke, 2012

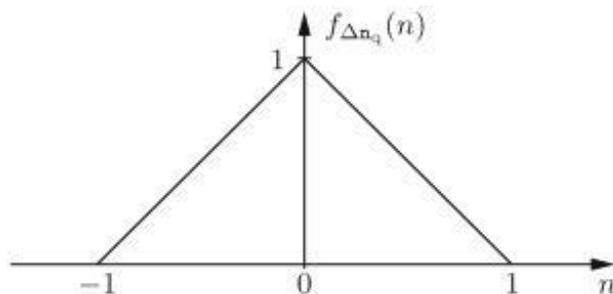


Bild 22: Dreiecksverteilung des Quantisierungsfehlers bei Drehzahlmessung<sup>152</sup>

Das vormals stochastische Zählergebnis  $n(i)$  wird damit zu einem stochastischen Signal  $n_q(i)$  mit einer Dreiecksverteilung um den Wert  $n$ .

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für das letztlich diskrete Zählergebnis  $n_q(i)$  ergibt sich aus einer Diskretisierung der Wahrscheinlichkeitsdichte  $f_{\Delta n}(n)$ . Daraus ergibt sich für den Fall, dass der wahre Wert, also das Verhältnis  $n(i)$  der Zeitdifferenz zwischen zwei Zahnflanken  $T_m(i)$  und der Referenzzeit  $T_0$ , durch  $n(i) = N_0 + x$  mit  $N_0 \in \mathbb{N}$  beschrieben wird, die diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung<sup>153</sup>

$$p_{n_q}(n) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - x \right)^2 \cdot \delta(n - (N_0 - 1)) + \left( \frac{3}{4} - x^2 \right) \cdot \delta(n - N_0) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + x \right)^2 \cdot \delta(n - (N_0 + 1)). \quad (2.20)$$

Daraus ergibt sich der Erwartungswert für das Zählergebnis als

$$E\{n_q\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \cdot p_{n_q}(n) = \sum_{i=-1}^1 (N_0 + i) \cdot p(N_0 + i) = N_0 + x = n$$

Aus der Betrachtung des zweiten statistischen Momentes

$$E\{n_q^2\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 \cdot p_q(n) = n^2 + \frac{1}{4}$$

ergibt sich die Varianz des stochastischen Zählergebnis im Falle der winkelsynchronen Drehzahlmessung als

$$\sigma_{n_q}^2 = E\{n_q^2\} - E^2\{n_q\} = \frac{1}{4}. \quad (2.21)$$

<sup>152</sup> Puente León und Kiencke, 2012

<sup>153</sup> Puente León und Kiencke, 2012

Mit diesem Ergebnis lassen sich die statistischen Kennzahlen des aus dem quantisierten Zählergebnis  $n_q$  berechneten stochastischen Drehzahlsignals

$\hat{\omega}_m(i) = \frac{\varphi_0}{n_q(i) \cdot T_0}$  bestimmen. Der Erwartungswert der Winkelgeschwindigkeit ist demnach

$$E\{\hat{\omega}_m(i)\} \approx \omega_m(i) \cdot \left(1 + \frac{1}{4 \cdot n(i)^2}\right) \quad (2.22)$$

mit der Varianz<sup>154</sup>

$$\sigma_{\hat{\omega}_m(i)}^2 \approx \omega_m^2 \cdot \frac{1}{4 \cdot n(i)^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4 \cdot n(i)^2}\right) \quad (2.23)$$

Mit den Definitionen für das Verhältnis  $n(i) = \frac{T_m(i)}{T_0}$  und der aus dem Zeitabstand

zwischen zwei Zahnflanken bestimmten Winkelgeschwindigkeit  $\omega_m(i) = \frac{2\pi}{T_m(i) \cdot Z}$  gilt

für Erwartungswert und Varianz der durch winkelsynchrone Messung bestimmten Winkelgeschwindigkeit  $\hat{\omega}_m(i)$

$$E\{\hat{\omega}_m(i)\} \approx \omega_m(i) \cdot \left(1 + \frac{1}{4 \cdot \left(\frac{2\pi}{T_0 Z} \cdot \frac{1}{\omega_m(i)}\right)^2}\right) \quad (2.24)$$

$$\sigma_{\hat{\omega}_m(i)}^2 \approx \omega_m^2 \cdot \frac{1}{4 \cdot \left(\frac{2\pi}{T_0 Z} \cdot \frac{1}{\omega_m(i)}\right)^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{4 \cdot \left(\frac{2\pi}{T_0 Z} \cdot \frac{1}{\omega_m(i)}\right)^2}\right)$$

## 2.6 Komfortmindernde Schwingungsphänomene im Antriebsstrang von Kraftfahrzeugen

Ein Aspekt der Entwicklung der Komponenten im automobilen Antriebsstrang ist die Berücksichtigung sogenannter NVH-Phänomene. Hier steht NVH für *noise, vibration and harshness* (Geräusch, Vibration und Rauheit) und damit für Schwingungsphänomene, welche anhand ihrer charakteristischen Frequenz

<sup>154</sup> Puente León und Kiencke, 2012

eingordnet werden können. Demnach werden Geräusche durch mechanische Schwingungen mit einer Frequenz  $> 100$  Hz verursacht, Vibrationen sind mechanische Schwingungen mit einer Frequenz  $< 20$  Hz und somit lediglich spür- aber nicht hörbar und Rauheit bezeichnet Phänomene, die im Übergangsbereich, also zwischen 20 Hz und 100 Hz auftreten und damit sowohl im spürbaren als auch im hörbaren Bereich den Fahrkomfort beeinträchtigen.<sup>155</sup>

Nach Funktion und Kosten bildet der Komfort den dritten Aspekt, welcher maßgeblich zur Kundenzufriedenheit beiträgt und damit die Untersuchung mit dem Ziel der Vermeidung der sogenannten NVH Phänomene motiviert.<sup>156</sup>

Im Folgenden wird nun eine kurze Übersicht über typischerweise in der Praxis auftretenden Phänomene geliefert und abschließend im Speziellen auf das Phänomen des Kupplungsrupfens eingegangen, da dieses im Fokus der vorliegenden Arbeit liegt.

### **2.6.1 Akustische Schwingungsphänomene – Ursachen und Wirkungsweisen**

Den Ausführungen von KIRCHNER zufolge ist es nach dem heutigen Stand der Technik das Ziel der Auslegung von Fahrzeuggetrieben, die von leistungsübertragenden Zahnrädern verursachten Geräusche so stark zu minimieren, dass sie der Fahrer im normalen Fahrbetrieb nicht mehr wahrnimmt.

Ein Beispiel für Geräusche, die von nicht leistungsübertragenden Rädern, also Zahnrädern, die in der betrachteten Situation nicht unter Last stehen, verursacht werden, ist das sogenannte Rasseln oder Klappern. Hier werden vom Motor auf das Getriebe übertragene Drehungleichförmigkeiten – typischerweise mit doppelter Zündfrequenz – von unbelasteten Rädern und Schaltungsteilen aufgenommen, welche dadurch zu radialen und axialen Schwingungen innerhalb ihrer Fertigungstoleranzen angeregt werden. Die dabei an den Spielgrenzen auftretenden Stöße sind die Hauptursache für die auftretenden Klapper- und Rasselgeräusche. Man unterscheidet je nach der für das Auftreten charakteristischen Situation zwischen Leerlaufklappern sowie Schub- und Zugrasseln.<sup>157</sup>

Ein weiteres auftretendes Geräusch, welches hauptsächlich bei Schaltungen und hier speziell beim Einlegen des Rückwärtsganges auftritt ist das sogenannte *Klonk* oder *Knocking*. Dies ist ein Umschlaggeräusch, welches durch einen Anlegewechsel in der Verzahnung zweier Räder, verursacht durch einen Momentenstoß, auftreten kann. Das typische Auftreten beim Einlegen eines synchronisierten Rückwärtsganges liegt

---

<sup>155</sup> Lerspalungsanti

<sup>156</sup> Kirchner, 2007

<sup>157</sup> Kirchner, 2007

in der Umkehrung der Drehrichtung bei der Synchronisierung begründet.<sup>158</sup> Ähnliche Geräusche können jedoch auch für andere Formen von Momentenstößen – zum Beispiel durch starke Triebstrangschwingungen – hervorgerufen werden und können somit auch zum Beispiel als Begleiterscheinung von Kupplungsrupfen (siehe 2.6.3) auftreten.

## **2.6.2 Mechanische Schwingungsphänomene – Ursachen und Wirkungsweisen**

Zu den maßgeblichen mechanischen Schwingungsphänomenen, die den Fahrkomfort beeinträchtigen können zählen das Kupplungsrupfen und das Ruckeln.<sup>159</sup>

Dabei wird in einer grundlegenden Definition das Kupplungsrupfen zusammenfassend für alle Schwingungsphänomene in der Schlupfphase der Kupplung ungeachtet ihrer konkreten Ursache verwendet. Die Ursachen und Wirkungsweisen dieses Phänomens werden im folgenden Abschnitt 2.6.3 detailliert betrachtet.

Das Ruckeln hingegen entsteht auch bei geschlossener Kupplung, welches aus starken Lastwechseln oder bei Automatikgetrieben aus einer nicht optimalen Anpassung von Motor und Getriebe resultiert, sowie im Falle von Handschaltgetrieben zudem aus einer falschen Gangwahl. Dabei äußert sich das Ruckeln durch eine mechanische Schwingung des Antriebsstranges und einer daraus resultierende Fahrzeuglängsschwingung mit der Eigenfrequenz des geschlossenen Triebstranges, welche typischerweise im Bereich zwischen 2 und 8 Hz liegt, und wird durch einen untertourig betriebenen Motor verursacht.<sup>160,161,162</sup>

## **2.6.3 Kupplungsrupfen – Ursachen und Wirkungsweisen**

Rupfen entsteht generell durch in der Schlupfphase der Kupplung auftretende periodische Wechseldrehmomente, die im Eigenfrequenzbereich des Antriebsstrangs liegen und durch die Antriebsräder des Fahrzeugs in Längsschwingungen der Karosserie umgewandelt werden. Anhand der unterschiedlichen Ursachen dieser Wechseldrehmomente und deren unterschiedlicher Auswirkung unterscheidet man zweierlei grundlegende Arten von Rupfen: das selbsterregte und das zwangserregte Rupfen.<sup>163,164,165</sup>

---

<sup>158</sup> Kirchner, 2007

<sup>159</sup> Albers; Peeken, 1991

<sup>160</sup> Lerspalungsanti

<sup>161</sup> Kirchner, 2007

<sup>162</sup> Albers; Peeken, 1991

<sup>163</sup> Albers et al., 2001

<sup>164</sup> Dresig und Fidlin, 2014

<sup>165</sup> Kirchner, 2007

## 2.6.3.1 Selbsterregtes Rupfen

Das selbsterregte Rupfen entsteht nach ALBERS UND HERBST durch einen mit zunehmender Differenzdrehzahl abnehmenden Reibwert.<sup>166</sup> Dieses Verhalten wird im Allgemeinen als negativer Reibwertgradient bezeichnet und bewirkt ein Abnehmen der „wirksamen Dämpfung“ des Antriebsstranges und führt damit zu einem anregenden Verhalten.

Das Wirkprinzip lässt sich anschaulich mit einem Ersatzmodell beschreiben, welches aus einer Masse besteht, die auf einem Laufband liegt und dort durch ihre Gewichtskraft angepresst wird. Diese Masse wird zusätzlich mit einer Feder mit einem festen Ende verbunden (siehe Bild 23).

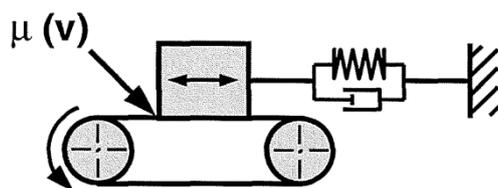


Bild 23: Ersatzmodell zur Erklärung selbsterregter Schwingungen<sup>167</sup>

Wenn nun das Laufband Geschwindigkeit aufnimmt, so bewegt sich die Masse zunächst aufgrund der wirkenden Haftreibungskraft mit dem Band mit. Dies geschieht bis zu einem Punkt, an dem die Rückstellkraft durch die Feder größer als die Haftreibungskraft ist. Ab diesem Zeitpunkt beginnt der Körper auf dem Band zu gleiten. Ist der Gleitreibungskoeffizient kleiner als der Haftreibungskoeffizient, so zieht die Feder den Körper über das Band zurück, bis wieder Haften auftritt und der Körper somit wieder mit dem Band mitgezogen wird und damit der Prozess wieder von vorne beginnt. Demnach tritt nur dann eine Schwingung auf, wenn der Gleitreibungskoeffizient kleiner als der Haftreibungskoeffizient ist, da sich sonst ein stationärer Zustand einstellt.

Das weitere Verhalten wird nun durch den Verlauf des Gleitreibungskoeffizienten in Abhängigkeit von der Gleitgeschwindigkeit bestimmt und es können drei Fälle unterschieden werden:<sup>168</sup>

<sup>166</sup> Hier und im Verlauf der Arbeit ist der mit einem tribologischen System assoziierte „Reibwert“ die dimensionslose Größe, die das Verhältnis zwischen der Anpresskraft bzw. Normalkraft der beiden Reibpartner sowie der aus dem tribologischen Kontakt aus einer Relativbewegung resultierenden Reibungskraft angibt. Der Verwendung des Reibwertes  $\mu$  liegt im Gegensatz zur Reibungszahl  $f$  die Annahme zugrunde, dass das Verhältnis der beiden Kräfte in der kompletten Reibungsfläche konstant ist. Dies ist für die in dieser Arbeit angestellten Modellbetrachtungen legitim. (Entsprechend dem Verständnis nach Gesellschaft für Tribologie (GfT), 2002)

<sup>167</sup> Albers; Herbst, 1998

<sup>168</sup> Albers; Herbst, 1998

- Fällt der Reibwert mit zunehmender Gleitgeschwindigkeit ab ( $\mu' < 0$ ), so wird die Schwingung angeregt, da die der Feder entgegenwirkende Gleitreibungskraft mit zunehmender Gleitgeschwindigkeit abnimmt.
- Ist der Reibwert unabhängig von der Gleitgeschwindigkeit ( $\mu' = 0$ ), so verhält sich der Reibkontakt neutral und es bildet sich ein stationärer Schwingungszustand aus.
- Steigt der Reibwert mit zunehmender Gleitgeschwindigkeit ( $\mu' > 0$ ), so wird die Schwingung gedämpft, da mit zunehmender Gleitgeschwindigkeit die Reibungskraft zunimmt und dem System so Energie entzieht.

Dieser Einfluss des Reibwertes auf die Energiebilanz der Schwingung kann für den Fall einer Reibkupplung auch anhand Bild 24 nachvollzogen werden.

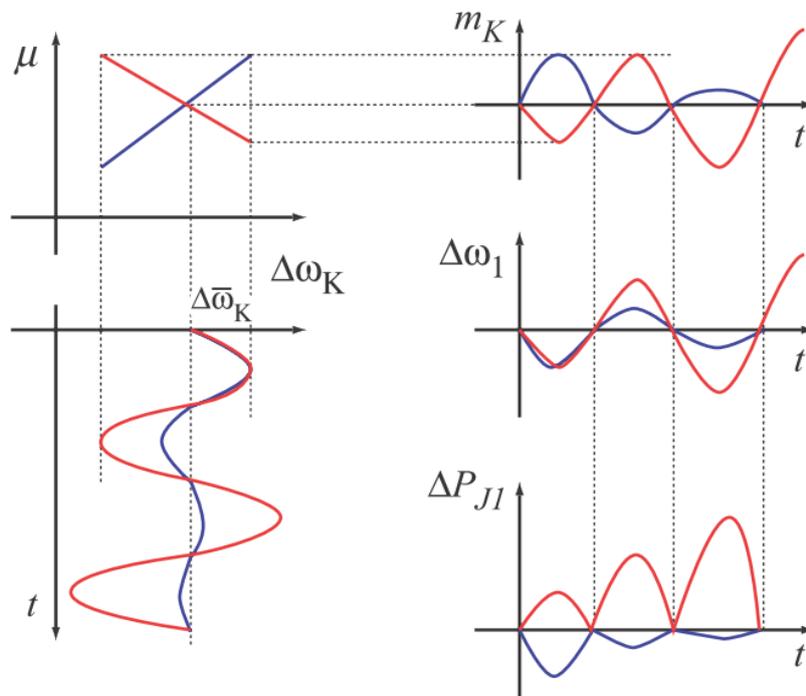


Bild 24: Wirkmechanismus und Energiebilanz der selbst-erregten Rupschwingung<sup>169</sup>

Die Differenzdrehzahl  $n_{slip}$  beginnt durch eine kleine initiale Anregung zu schwingen. Im Fall eines negativen Reibwertgradienten (-) ist die Schwingung des übertragenen Momentes in Phase zu der Schwingung der Differenzdrehzahl und somit ist die durch die Schwingung in den Reibkontakt eingetragene Energie positiv, wodurch die Schwingung weiter verstärkt wird. Im Falle eines positiven Reibwertgradienten (+) ist die Schwingung des von der Kupplung übertragenen Momentes genau gegenphasig

<sup>169</sup> Schwenger, 2005

zu der in der Differenzdrehzahl auftretenden Schwingung und somit wird dem schwingenden System Energie entzogen.

Die Schwingung selbst erfolgt mit der Eigenfrequenz des Antriebsstranges bei schlupfender Kupplung<sup>170</sup>, welche näherungsweise aus einem stark vereinfachten Modell mit einer schwingenden Masse (Bild 25) gewonnen werden kann.

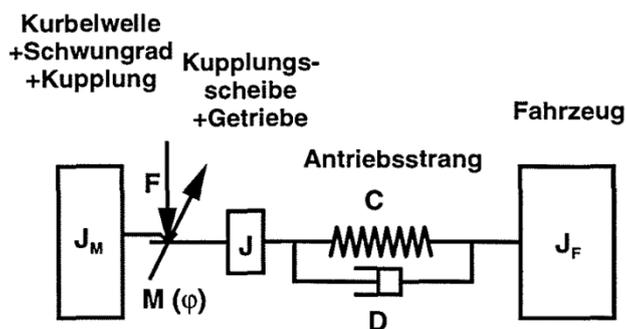


Bild 25: Vereinfachtes Schwingungsmodell des Antriebsstranges<sup>171</sup>

Aus der Momentenbilanz erhält man die Differentialgleichung des Systems

$$J \cdot \ddot{\varphi} + d \cdot \dot{\varphi} + c \cdot \varphi = M(\varphi, \dot{\varphi}) \quad (2.25)$$

mit dem zusammengefassten Trägheitsmoment von Getriebe und Kupplung  $J$ , der zusammengefassten Steifigkeit  $C$  und Dämpfung  $D$  des vereinfachten Antriebsstranges und dem von der Kupplung übertragenen Drehmoment  $M(\varphi, \dot{\varphi})$ . Hier gehen die Trägheitsmomente der Primärseite  $J_M$  und des Fahrzeugs  $J_F$  nicht ein, da erstere durch die schlupfende Kupplung vom schwingenden System entkoppelt ist und letztere aufgrund der Relation  $J_F \gg J$  als näherungsweise fest angesehen werden kann.<sup>172</sup>

Die Eigenfrequenz des Antriebsstranges ergibt sich mit diesem Modell zu

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{C}{J}} \quad (2.26)$$

Wenn man nun in diesem Modell den Reibwert als lokal näherungsweise lineare Funktion der Schlupfdrehzahl  $\dot{\varphi}$  betrachtet

$$\mu(\varphi, \dot{\varphi}) \approx \mu_0(\varphi) + \mu' \cdot \dot{\varphi}$$

so ergibt sich als im System wirksame Dämpfung

<sup>170</sup> Albers et al., 2001

<sup>171</sup> Albers; Herbst, 1998

<sup>172</sup> Albers; Herbst, 1998

$$d_{\text{eff}} = d - \mu' . \quad (2.27)$$

Daraus kann man bei Kenntnis der nominellen Dämpfung des Antriebsstranges  $d$  die kritischen Werte des Reibwertgradienten identifizieren, welche zu einer Selbstanregung des Systems führen.

Nach ALBERS UND HERBST sind für gängige PKW Antriebsstränge Gradienten von  $\mu' > -0,002 \frac{\text{s}}{\text{m}}$  unkritisch, bei Werten von  $-0,002 \frac{\text{s}}{\text{m}} > \mu' > -0,007 \frac{\text{s}}{\text{m}}$  liegt eine potenzielle Rupfgefahr vor und bei Gradienten  $-0,007 \frac{\text{s}}{\text{m}} > \mu'$  ist mit starkem Rupfen zu rechnen, jedoch hängen diese Werte von dem jeweiligen betrachteten Antriebsstrang ab.<sup>173</sup>

Als Ursache des selbsterregten Rupfens wurde bereits anhand des Ersatzmodells in Bild 23 der negative Reibwertgradient identifiziert. Dieser kann im einfachsten Fall eine Eigenschaft des Wirkflächenpaars bestehend aus dem in der Kupplung verwendeten Reibbelag und dessen Gegenfläche sein, die sich zum Beispiel abhängig von der Belagtemperatur verändert. Dieses Szenario liegt im Falle des sogenannten Heißrupfens vor, bei dem der Reibwertgradient für hohe Temperaturen negativ wird. Jedoch kann auch im Falle eines im Betriebsbereich positiven, stabilen Reibwertgradienten selbsterregtes Rupfen auftreten, wenn der Belag im Betrieb verschmutzt wird, oder mit Öl oder Wasser in Kontakt kommt. Ist dies der Fall, so führen die im Reibkontakt bei hohen Reibgeschwindigkeiten entstehenden hohen Temperaturen zur Verdampfung der Verunreinigungen und damit zur Bildung von Gasblasen, welche den Reibwert lokal vermindern und damit einen stark negativen Reibwertgradienten erzeugen.<sup>174</sup>

### 2.6.3.2 Geometrisch angeregtes Rupfen

Eine weitere mögliche Ursache für in der Kupplung entstehende periodische Wechseldrehmomente und das daraus entstehende Kupplungsrupfen ist die Präsenz von geometrischen Abweichungen im Reibkontakt. Diese können durch Fehler im Rahmen der Bauteiltoleranzen entstehen und, wenn sich diese auf ungünstige Weise ergänzen, zu einer periodischen Schwankung des von der Kupplung in das Getriebe eingeleiteten Drehmomentes führen. In diesem Fall wird der Antriebsstrang zu einer erzwungenen oder auch fremderregten Schwingung angeregt und es tritt das sogenannte fremderregte Rupfen auf.<sup>174</sup>

<sup>173</sup> Dresig und Fidlin, 2014

<sup>174</sup> Albers; Herbst, 1998

Eine Kombination aus einem feststehenden geometrischen Fehler und einem Fehler eines mit Motordrehzahl rotierenden Bauteils resultiert in einer Anregung einer Schwingung mit einer Frequenz gleich der Motordrehzahl und damit motordrehzahlabhängigem Rupfen. Ein Beispiel hierfür wäre ein Radial- und Winkelversatz von Motor und Getriebe oder eine Schiefstellung der Kupplungsbetätigung als feststehende geometrische Fehler und Axialschwingungen der Kurbelwelle oder ein Schiefabhub der Kupplungsdruckplatte als ein mit Motordrehzahl rotierender Fehler.<sup>175</sup>

Entsprechend liefert eine Kombination von feststehendem Fehler und einem mit Getriebeeingangsdrehzahl rotierenden Fehler zu einer Anregung mit Getriebeeingangsdrehzahl und damit zu getriebeeingangsdrehzahlabhängigem Rupfen. Solche mit Getriebeeingangsdrehzahl rotierenden Fehler können eine Variation der Dicke der Kupplungsscheibe, Unregelmäßigkeiten der Belagsfederung oder ein Radialversatz der Getriebeeingangswelle sein.<sup>175</sup>

Eine Kombination von mit Getriebeeingangs- und Motordrehzahl rotierenden Fehlern führt entsprechend der bisherigen Überlegungen zu schlupfdrehzahlabhängigem Rupfen.

Angesichts des vereinfachten Antriebsstrangmodells in Bild 25 als Ein-Massen-Schwinger und dem damit verbundenen Schwingungsverhalten führen die Anregungen mit variabler Frequenz zu erzwungenen Schwingungen mit einem entsprechenden Auf- und Abklingen der Amplitude entsprechend dem Resonanzcharakter des schwingenden Systems.<sup>176</sup>

### 2.6.3.3 Auswirkung auf Fahrzeug und Insassen

Wie zu Beginn des Abschnitts erläutert, wird die Rupfschwingung im Antriebsstrang durch ein in der Kupplung erzeugtes periodisches Wechseldrehmoment hervorgerufen, welches durch den Antriebsstrang bis hin zu den Antriebsrädern weitergeleitet wird und dort schließlich über diese in eine Längsschwingung des Fahrzeugs umgewandelt. Diese Längsschwingung wird im für Kupplungsrupfen relevanten Frequenzbereich hauptsächlich über den Sitz an den Fahrer übertragen und beeinträchtigt den von ihm subjektiv empfundenen Fahrkomfort.<sup>177</sup>

Da dieser nach KIRCHNER einen wichtigen Aspekt der Kundenzufriedenheit darstellt, gilt es, die Auswirkungen des Kupplungsrupfens wie auch die der anderen in diesem Abschnitt beschriebenen NVH-Phänomene zu minimieren.

---

<sup>175</sup> Albers; Herbst, 1998; Albers und Stier 2011

<sup>176</sup> Albers; Herbst, 1998

<sup>177</sup> Albers; Herbst, 1998; Lerspalungsanti

## 2.7 Objektivierung des subjektiven Komforteindrucks in Kraftfahrzeugen

Der folgende Abschnitt befasst sich mit dem subjektiven Komforteindruck in Bezug auf das Fahren von Kraftfahrzeugen, dem gerade im Zusammenhang mit Schwingungen im Antriebsstrang und deren Bekämpfung eine besondere Bedeutung zukommt. Zu Einordnung dieser Rolle werden im Folgenden der Fahrkomfort und dessen Eigenschaft als subjektive Größe sowie der der komfortmindernde Einfluss von mechanischen Schwingungen betrachtet und abschließend mehrere Ansätze zu einer Objektivierung des subjektiven Fahrkomfortempfindens sowie die Motivation zu dieser Objektivierung vorgestellt.

### 2.7.1 Fahrkomfort als subjektive Größe

Den Ausführungen von HEYDER UND DELSO zufolge führen gestiegene Erwartungen der Kunden hinsichtlich des Fahrverhaltens dazu, dass insbesondere im Falle der Längsdynamik neben der objektiv bestimmbaren Fahrzeugbeschleunigung auch der subjektive Eindruck immer stärker in den Fokus rückt. Da dieser auch abhängig von der Fahrzeugklasse ist, spiegelt sich in diesem subjektiven Empfinden ebenfalls die Erwartungshaltung der Kunden an ein spezifisches Fahrzeug(-modell) wider. Da somit der subjektive Komforteindruck neben Faktoren wie Sicherheit, Qualität, Design und Verbrauch zu einem die Kaufentscheidung beeinflussenden Faktor wird, rückt dessen Betrachtung auch zunehmend in den Fokus der Automobilentwicklung und zwingt die Entwickler, den Fahrkomfort zu analysieren und zu optimieren.<sup>178</sup>

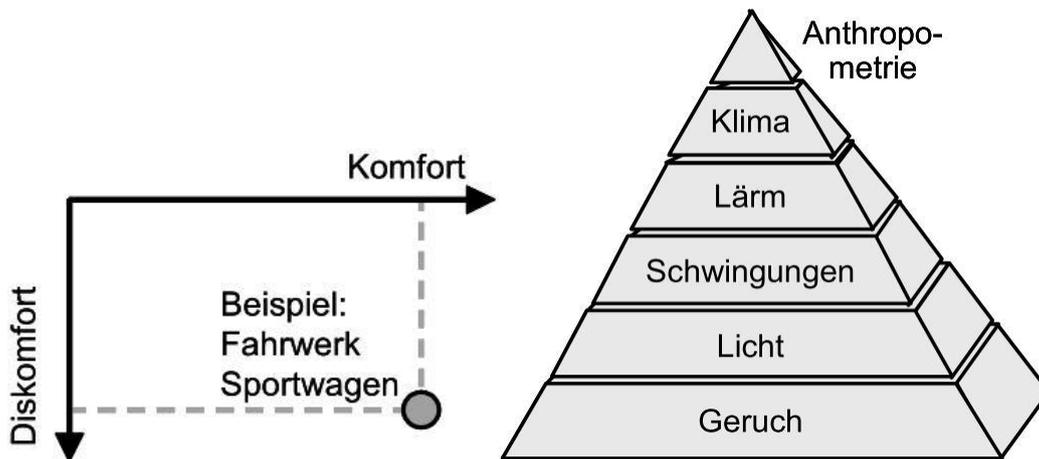


Bild 26: Hypothetisches Modell zu Komfort und Diskomfort nach Zhang (links) und die Diskomfortpyramide nach Bubb (rechts)<sup>179</sup>

<sup>178</sup> Albers et al., 2014c

<sup>179</sup> Maier

Für diese Aufgabe kommen verschiedene Methoden und Modelle zum Einsatz, so auch die grundlegenden Modelle nach Zhang, der die Abbildung des subjektiven Komfortempfindens in die voneinander unabhängigen Achsen Komfort und Diskomfort unterteilt (siehe Bild 26), und nach Bubb, der die verschiedenen Einflussfaktoren des Diskomfortempfindens klassifiziert (siehe Bild 26). Die Unterteilung von Komfort und Diskomfort beruht dabei auf der unterschiedlichen Wahrnehmungsweise, die Komfort in den Zusammenhang mit Gefallen stellt und den Diskomfort mit einem Erleiden in Verbindung bringt, das hauptsächlich durch biomechanische Faktoren beeinflusst wird, während Gefallen auch durch die individuellen Vorlieben des Subjekts geprägt wird.<sup>180</sup> Aus diesem multidimensionalen Charakter der Komfortwahrnehmung folgt der Bedarf nach einer zweidimensionalen Einstufung entsprechend der beiden zuvor definierten Achsen.<sup>181</sup> Exemplarisch dafür steht hier das von MAIER vorgestellte Beispiel des Sportwagenfahrers, der ein wesentlich höheres Maß an Diskomfort akzeptiert, als das zum Beispiel für eine Limousine der Fall wäre, da der sportliche Charakter eines Autos durch stärkere Kräfte und Schwingungen geprägt ist, die auf die Insassen einwirken, und damit trotz eines hohen Maßes an Diskomfort der empfundene Komfort überwiegt.<sup>182</sup>

Da diesen Erkenntnissen zufolge jedoch der Komfort eine rein subjektiv geprägte Größe ist, muss eine Minimierung des Diskomforts und seiner verursachenden Faktoren im Vordergrund stehen, bei denen nach Bild 26 (rechts) die Schwingungen eine mittlere Priorität einnehmen. Dieser beeinflussende Faktor des Diskomforts wird nun im Folgenden im speziellen Fall von Schwingungen des Antriebsstrangs betrachtet, die durch Übertragung über den Rad-Fahrbahn-Kontakt sowie über die Lagerung von Motor, Getriebe und Kardanwelle über die drei Wirkflächenpaare Sitzkissen, Sitzlehne und dem Lenkrad auf den Fahrer einwirken. Für die Betrachtung müssen demzufolge eine Trennung des statischen und dynamischen Sitzkomforts sowie des durch Geräusche und durch Schwingungen verursachten Diskomforts erfolgen. Speziell Letzteres lässt sich in der Praxis nur schwer umsetzen, da die beiden Phänomene Schwingung und Geräusch meist überlagert auftreten.<sup>183,184,185,186</sup>

Im Folgenden wird angenommen, dass eine ausreichende Trennung der Diskomfortfaktoren Geräusch und Schwingung möglich ist und eine losgelöste

---

<sup>180</sup> vgl. hierzu auch Dylla, der das Komfortempfinden ebenfalls als zweidimensionale Wahrnehmung beschreibt, die über die unabhängigen Wahrnehmungskanäle „Charakter“ und „Diskomfort“ definiert ist.

<sup>181</sup> Dylla

<sup>182</sup> Maier

<sup>183</sup> Maier

<sup>184</sup> Albers et al., 2014c

<sup>185</sup> Krüger

<sup>186</sup> Albers; Krüger, 2002

Betrachtung der Antriebsstrangschwingungen als Quelle von subjektiv empfundenem Diskomfort möglich ist.

### 2.7.2 Komfortmindernder Einfluss von Antriebsstrangschwingungen

Wie im vorangegangenen Abschnitt beschrieben, ist der komfortmindernde Einfluss von Schwingungen stark von den Erwartungen der Fahrzeuginsassen in Bezug auf das Fahrzeug und dessen Verhalten abhängig. Diesbezüglich ist die Behandlung von Schwingungen des Antriebsstranges erwartungsgemäß einfacher, da der Fahrer diese für keine PKW-Klasse akzeptieren wird und der Beitrag der Antriebsstrangschwingungen somit ausschließlich dem Diskomfort zuzuordnen ist. Die Übertragung dieser Schwingungen zum Fahrer hin erfolgt, wie zuvor beschrieben, über verschiedene Pfade hin zu den Wirkflächenpaaren Sitzkissen und –lehne sowie Lenkrad. Über diese Wirkflächenpaare erfolgt eine Schwingungsanregung des Fahrers zu unterschiedlichen Schwingungsformen, wie zum Beispiel Hand-Arm-Schwingungen im Falle des Wirkflächenpaares aus Hand und Lenkrad oder Ganzkörperschwingungen für eine Übertragung über das Sitzkissen. MAIER zufolge liegen die Resonanzen im Bereich des Lenksystems bei mehr als 25 Hz und damit außerhalb des relevanten Bereichs für kupplungsseitig angeregte Antriebsstrangschwingungen, die im Rahmen der Fahrmanöver Ankriechen und Anfahren entstehen. Daher werden diese in der folgenden Betrachtung der Komfortminderung durch mechanische Schwingungen nicht weiter beleuchtet.<sup>187,188</sup>

Im Zusammenhang des durch mechanische Schwingungen erzeugten Diskomfort von Fahrzeuginsassen unterscheidet SUJATHA die Frequenzbereiche von  $f = [0,1; 0,63]$  Hz, welcher hauptsächlich im Zusammenhang mit Schiffen und Fahrzeugen mit sehr weicher Federung auftritt und gesundheitsrelevante Effekte zur Folge hat, und von  $f = [1; 80]$  Hz, in welchem die Schwingungen Diskomfort hervorrufen. Hier wird eine unterschiedliche Empfindlichkeit gegenüber Diskomfort durch mechanische Schwingungen durch ein Schwingungsmodell des menschlichen Körpers motiviert, der sich als Reaktion auf eine Anregung nicht als eine einzige feste Masse verhält, sondern als eine Ansammlung vieler schwingungsfähiger Massen, die unterschiedliche Resonanzfrequenzen aufweisen und damit eine variierende Sensitivität gegenüber Schwingungsanregung begründen (siehe Bild 27).

---

<sup>187</sup> Maier

<sup>188</sup> Heyder und Delso, 2014

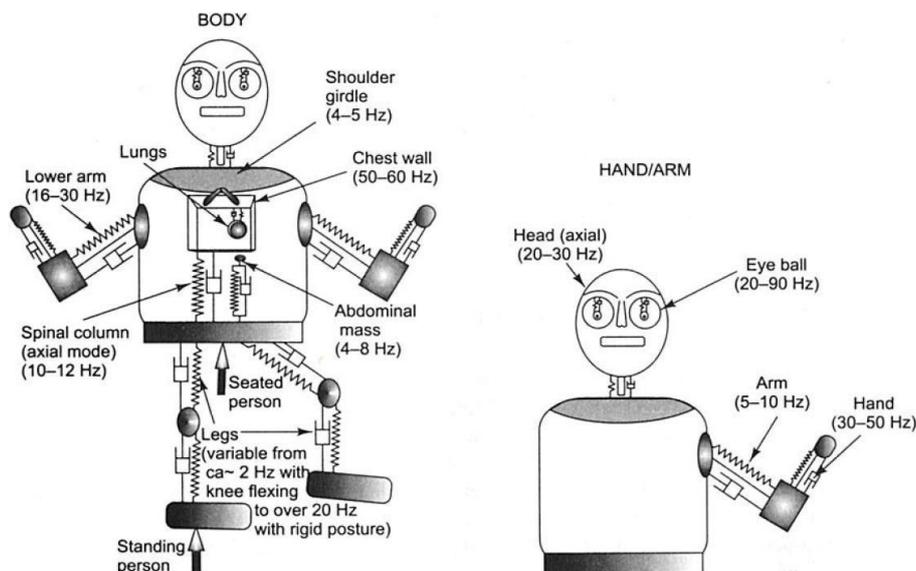


Bild 27: Vibrationsmodell des menschlichen Körpers für Ganzkörper- und Hand-Arm-Schwingungen <sup>189</sup>

Dabei sind für eine sitzende Person die wichtigsten Frequenzbereiche die Resonanzbereiche der bauchseitigen Masse mit  $f_{Res} = [4; 8]$  Hz und einer Verstärkung der eingeleiteten Schwingungen von bis zu 200% und der Hals- sowie der Lendenwirbelsäule mit  $f_{Res} = [2,5; 5]$  Hz und einer Verstärkung von bis zu 240% <sup>190</sup>

ALBERS ET AL. sowie MORIOKA UND GRIFFIN untersuchen die Wahrnehmung von Schwingungen auf den Fahrer eines PKW und tragen somit zur Verbesserung der Bewertung des Fahrkomforts bei. Dabei wird die psychophysikalische Studie von ALBERS ET AL. <sup>191</sup> unter kundenorientierten, realistischen Bedingungen durchgeführt, indem die Probanden in einem vollständigen Fahrzeug auf einem Rollenprüfstand sitzen, dessen Antriebsstrang über einen elektrodynamischen Shaker angeregt wird, wobei die Anregungsamplitude von der Wahrnehmungsschwelle bis hin zu einer für realistische Fahrsituationen typischen Intensität variiert wird und die Probanden eine subjektive Komfortbeurteilung abgeben während gleichzeitig objektive Messwerte aufgezeichnet werden. Der hier abgedeckte Frequenzbereich liegt mit 31,5 Hz bis 315 Hz jedoch außerhalb des für die Antriebsstrangschwingungen Rupfen und Ruckeln typischen Frequenzen. Ergebnis der Arbeit sind Wahrnehmungsschwellen, ab denen die Schwingungen bzw. Vibrationen fühlbar werden, und Kurven gleichen

<sup>189</sup> Sujatha, 2010

<sup>190</sup> Sujatha, 2010

<sup>191</sup> Albers et al., 2014c

Komfortempfindens mit variierender Frequenz, wobei hervorzuheben ist, dass die Wahrnehmungsschwelle für über den Fahrersitz übertragene Vibrationen für niedrige Frequenzen (ca. 30 Hz) deutlich geringer ist, als für die übrigen, höheren Frequenzen, während für die Wirkflächenpaare an Lenkrad und im Fußraum die Sensitivität für hohe Frequenzen größer ist.<sup>192</sup>

Ähnliche Ergebnisse zeigen sich aus der Studie von MORIOKA UND GRIFFIN, die jedoch nicht aus einer Untersuchung in der Vehicle-in-the-Loop Ebene, sondern in der Subsystem-Ebene einer stark abstrahierten Fahrzeugumgebung, in der das Lenkrad durch einen zylindrischen, geraden Griff, die Sitzfläche durch eine hölzerne passend geformte Sitzplatte und der Fußraum durch eine hölzerne ebene Fußplatte abgebildet wird. Der untersuchte Frequenzbereich der Schwingungen ist mit 2 Hz bis 315 Hz für die Vibrationen am Sitz und 8 Hz bis 315 Hz für die Wirkflächenpaare an Fuß und Hand im Vergleich zur Arbeit von ALBERS ET AL. zu niedrigeren Frequenzen hin erweitert, weshalb die Ergebnisse einen zusätzlichen Beitrag zur Wahrnehmung von niederfrequenten Antriebsstrangschwingungen leisten können.

Untersucht werden Schwingungen in alle drei Raumrichtungen mit dem Ziel, je Raumrichtung und je Wirkflächenpaar eine frequenzabhängige Fühlschwelle zu bestimmen, indem für jeden Versuch die 2 s andauernde Einleitung der Schwingung über jeweils eine einzige der Schnittstellen erfolgte.

Wie in der Darstellung der Ergebnisse in Bild 28 zu erkennen ist, zeigen die Fühlschwellen für alle drei Wirkflächenpaare eine starke Frequenzabhängigkeit, wobei die Sensitivität im Falle der Hand-Arm-Schwingungen und der Vibrationen im Fußraum bei Frequenzen im Bereich von 100 Hz am größten ist, während sie im Falle der Sitzschwingungen im Bereich < 16 Hz am größten ist.

Auch die in Bild 29 dargestellten Wahrnehmungsschwellen für die drei verschiedenen Wirkflächenpaare für den Fall von Längsschwingungen zeigen eine deutlich höhere Sensitivität für die Übertragung von Schwingungen im Bereich bis ca. 10 Hz über die Sitzfläche.

---

<sup>192</sup> Albers et al., 2014c

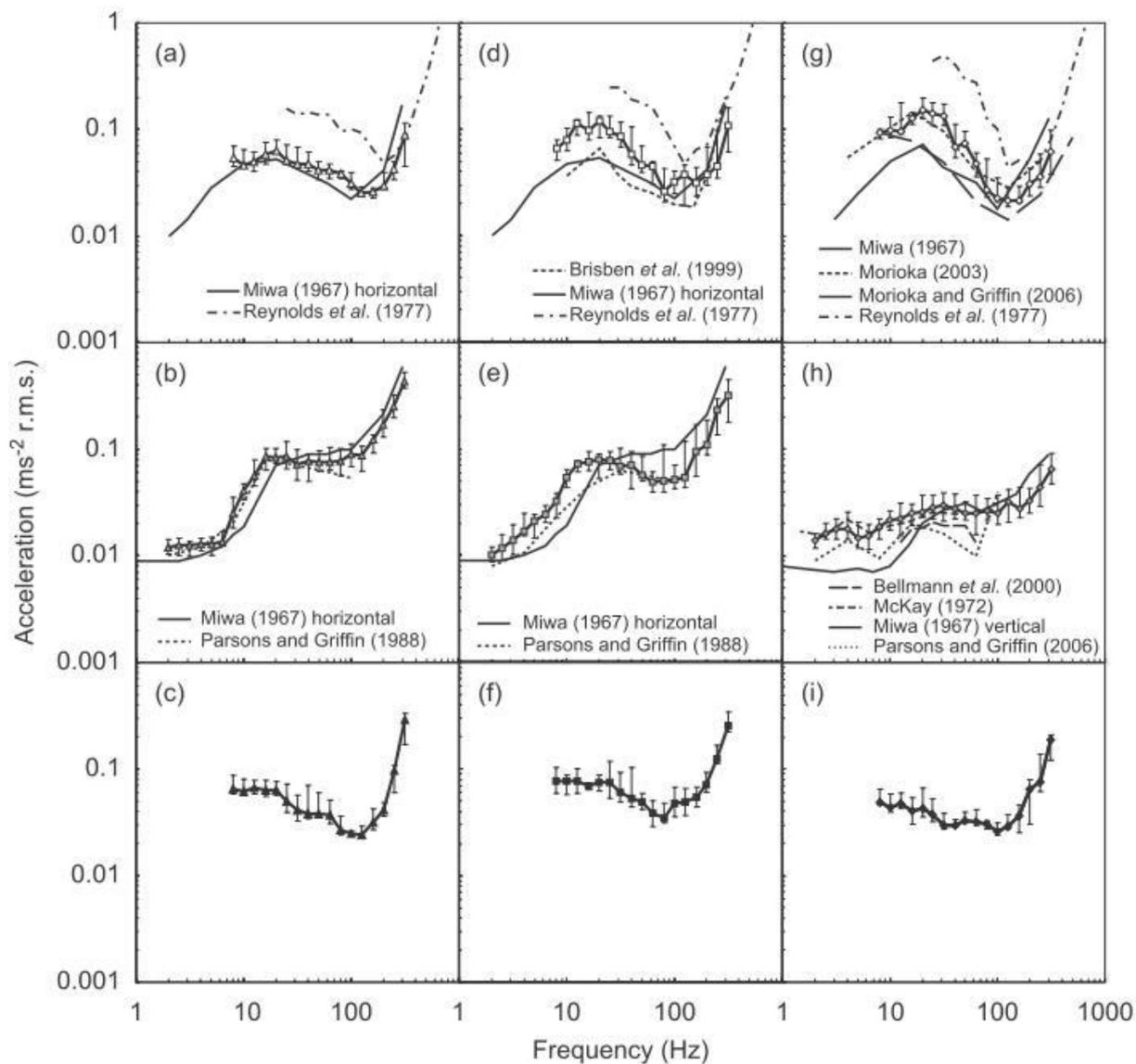


Bild 28: Medianwerte der absoluten Föhlschwellen für Schwingungen in den 3 Raumrichtungen längs (a, b und c), lateral (d, e und f) sowie vertikal (g, h und i) für die drei Wirkflächenpaare Hand (a, d und g), Sitz (b, e und h) sowie Fuß (c, f und i)<sup>193</sup>

<sup>193</sup> Morioka und Griffin, 2008

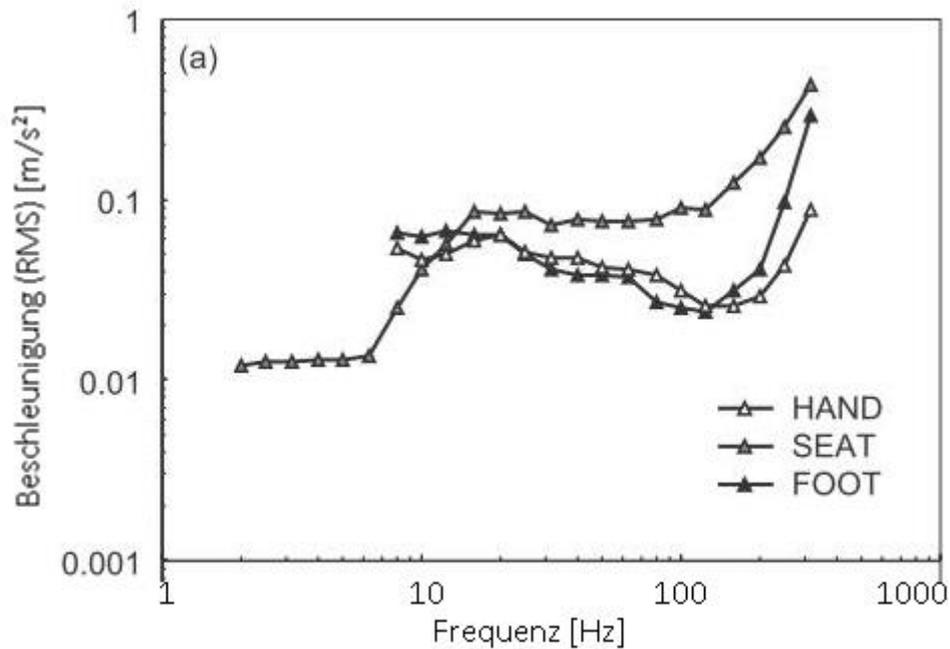


Bild 29: Medianwerte der absoluten Fehlschwellen für verschiedene Wirkflächenpaare im Falle von Längsschwingungen im Bereich von 1 Hz bis 100 Hz in doppellogarithmischer Skalierung<sup>194</sup>

### 2.7.3 Ansätze zur Objektivierung des subjektiven Komforteindrucks unter dem Einfluss mechanischer Schwingungen

Die in den Abschnitten 2.7.1 und 2.7.2 gezeigten Zusammenhänge zeigen die Relevanz der Betrachtung von antriebsstrangerregten Schwingungen in Bezug auf ihren Einfluss auf das subjektive Fahrkomfortempfinden der Fahrzeuginsassen. Für die Automobilentwicklung besteht die Aufgabe, den subjektiv empfundenen Diskomfort zu minimieren und dabei den Fahrkomforteindruck zu optimieren. Zu diesem Zweck ist es bislang gängige Praxis, die Abstimmung mithilfe von speziell geschulten und erfahrenen Fahrbarkeitsexperten vorzunehmen, die anhand einer gegebenen Skala (z.B. ATZ-basierte Notenskala, siehe Bild 30) den Fahrkomfort in definierten Situationen zu bewerten.

Diese Praxis ist jedoch stark abhängig von der Verfügbarkeit dieser Bewertungsexperten, der Zuverlässigkeit der von ihnen vergebenen Bewertung sowie dem Versuchsaufbau für die Fahrbarkeitsbewertung. Dazu kommt das Problem, dass eine solche Abstimmung des Fahrkomforts im Entwicklungsprozess oft viele Iterationen benötigt sowie praktisch für jede Modellvariante separat durchgeführt werden muss und damit sehr zeit- und kostenintensiv ist.<sup>195,196</sup>

<sup>194</sup> Morioka und Griffin, 2008

<sup>195</sup> Heyder und Delso, 2014

<sup>196</sup> Schaeffler AG, 2013b

Note	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	unerträglich	sehr schlecht	schlecht	deutliche Mängel	an der Grenze	befriedigend	noch gut	gut	Sehr gut	exzellent
Geräusch / Vibration	für Akustik / Vibration nicht mehr relevant		unzumutbar laut / stark	sehr laut / stark	störend	deutlich hörbar / spürbar	hörbar / spürbar	leicht hörbar / spürbar	kaum noch hörbar / spürbar	Geräusch / Vibration nicht wahrnehmbar
Festgestellt von	Alle Kunden				Durchschnitts Kunden	Kritischen Kunden		Ausgebildeten Beobachtern		
Kundenreaktion	Sofortiges Abstellen des Fahrzeuges	Vorsichtige Weiterfahrt zur nächsten Werkstatt	Aufsuchen der Werkstatt sobald als möglich	Außerplanmäßiger Werkstattbesuch		Reklamation bei nächstem Werkstattbesuch (Inspektion)	Vereinzelte Forderungen nach Verbesserungen treten auf	Keine Reklamationen zu erwarten		

Bild 30: Notenskala für subjektive Beurteilungen (nach DIN 2563 und ATZ Notenskala)<sup>197,198</sup>

Aus diesen Nachteilen der bisher gängigen Praxis ergibt sich der Bedarf, den durch NVH Phänomene (siehe Abschnitt 2.6) entstehenden subjektiv empfundenen Diskomfort mithilfe der Analyse von geeigneten Signalen zu bestimmen oder abzuschätzen. Dieses Verfahren wird im Allgemeinen als Objektivierung eines subjektiven Eindrucks bezeichnet und bezeichnet den Prozess der Ermittlung geeigneter Signale, Signalkennwerte und Experimente, mit deren Hilfe anhand von Messsignalen ein subjektiver Fahreindruck errechnet werden kann. Mit dieser Methode sollen vornehmlich die Entwicklungskosten gering gehalten sowie die komfortrelevante Entwicklung vereinfacht werden, da die aus der Objektivierung entstandenen Methoden bei Validierungsaktivitäten sowohl in der Simulation, als auch in der Subsystem-in-the-Loop- und der Vehicle-in-the-Loop-Ebene angewandt werden können. Darüber hinaus wird die Einschränkung der Validierungsaktivitäten durch eine Limitierung der Ressourcenverfügbarkeit der Bewertungsexperten entschärft und es besteht weiterhin die Möglichkeit einer Steigerung der Effizienz im Entwicklungsprozess durch die Möglichkeit, den modellierten Diskomfort automatisiert zu bestimmen.<sup>199,200</sup>

Ein wichtiger Aspekt bei der Objektivierung subjektiver Fahreindrücke ist der zugrundeliegende Maßstab, anhand dessen die Fahreindrücke gegeneinander

<sup>197</sup> Schaeffler AG, 2013a

<sup>198</sup> vgl. auch Albers; Albrecht, 2002

<sup>199</sup> Heyder und Delso, 2014

<sup>200</sup> Maier

abgestuft werden sollen. Dabei gibt es unterschiedliche Konzepte, wie einen Fragebogen mit kategorialer Skala, die entweder kontinuierlich oder gestuft, verbal oder numerisch, oder auch zweistufig als Kombination einer kontinuierlichen und einer gestuften Skala, sein kann. Alternativ existieren die Methoden des Paarvergleichs, bei dem zwei aufeinanderfolgende Ereignisse in Relation gestellt werden sollen, oder das semantische Differenzial, bei dem der Proband zwei Eigenschaftspaare (z.B. stark und schwach) angeboten werden. Die letztere Methode führt zu einer binären Abstufung, während mit den zuvor genannten eine feiner abgegrenzte oder auch quasi-kontinuierliche Einstufung entsteht. Die in Bild 30 gezeigte Umsetzung der ATZ Skala stellt eine Kombination aus einer numerischen und einer verbalen gestuften Skala dar. Die verbale Abstufung dient dabei einer besseren Abgrenzung der einzelnen Noten und einer einheitlicheren Interpretation der verschiedenen Bewertungsstufen.<sup>201</sup>

Für eine entsprechende aus der Objektivierung entstehende Methode müssen ein geeignetes Experiment definiert und bestimmte Messsignale und –methoden sowie geeignete Auswertalgorithmen ermittelt werden, um den subjektive empfundenen Diskomfort in einem Modell abzubilden. Mögliche Standards die dafür herangezogen werden könnten beziehen sich zumeist auf Aspekte des Arbeitsschutzes und damit auf Anregungen mit wesentlich größerer Energiedichte, oder auf mögliche Schädigungsgrenzen von schweren Maschinen durch Vibrationen im Betrieb und sind daher nicht direkt anwendbar.<sup>202,203</sup> Eine weitere Problematik bei der Objektivierung ist die einer ungenauen oder auch fehlenden Referenz, da diese zwangsläufig aus einem subjektiven Diskomfortempfinden gebildet werden muss, welches von einem Bewertungsexperten bewertet wird. Dieser Bewertungsexperte wird zumindest unbewusst durch Umweltfaktoren wie zum Beispiel die Licht- und Straßenverhältnisse sowie die Verkehrssituation beeinflusst und ist, sowohl der einzelne Fahrer als auch ein Kollektiv von Bewertungsexperten, Schwankungen in der Bewertung unterworfen, die sich im Rahmen der ATZ-Notenskala (Bild 30) durch eine Schwankungsbreite von bis zu  $\pm 1$  Note äußert.<sup>204,205</sup> Zusätzlich zu diesen inter- und intraindividuellen Schwankungen müssen bei einer Objektivierung von subjektiven Bewertungen anhand der in Bild 30 gezeigten Skala Effekte wie der Halo-Effekt sowie die sogenannte zentrale Tendenz berücksichtigt werden. Diese Effekte bewirken, dass die zur Verfügung stehende Notenskala nicht vollständig ausgenutzt wird, indem sowohl die besten als auch die schlechtest möglichen Bewertungen vermieden werden.<sup>206</sup>

---

<sup>201</sup> Maier

<sup>202</sup> Sujatha, 2010

<sup>203</sup> Maier

<sup>204</sup> Schaeffler AG, 2013b

<sup>205</sup> Albrecht

<sup>206</sup> Dylla

Zuletzt stellt sich auch die Frage der Bemessung des Einflusses des verwendeten Versuchsfahrzeuges, durch welches eine gegebene Schwingung des Antriebsstrangs in verschiedenen Fahrzeugmodellen Schwingungen unterschiedlicher Amplitude und Charakteristik auf den Fahrer überträgt, der Experte außerdem durch das Erscheinungsbild und eine individuelle Erwartungshaltung an ein Modell einer bestimmten Fahrzeugklasse beeinflusst wird und damit die Bestimmung einer Referenz maßgeblich beeinflusst werden kann.<sup>207,208</sup> Diese Beeinflussung soll vermieden werden, indem zum Beispiel in der Subsystem-in-the-Loop Ebene die Versuchsumgebung auf die Realisierung der Wirkflächenpaare reduziert wird. Dabei wird zum Beispiel die Fahrzeugumgebung des Fahrers auf eine Sitzplatte ohne Lehne, ein Zylindrischer Stab und eine Fußplatte reduziert, um eine direkte Übertragung über die drei zuvor genannten Wirkflächenpaare zu gewährleisten, und die Probanden über Kopfhörer mit weißem Rauschen beschallt, um eine mögliche Beeinflussung durch Geräusche auszuschließen.<sup>209</sup>

Entsprechend der oben genannten Aspekte der Versuchsumgebung und des Bewertungsmaßstabs ist die Wahl der Kennwerte für eine Objektivierung des Fahrkomforts entscheidend. Hierzu werden nun verschiedene Ansätze vorgestellt, wobei in vielen Fällen für die Quantifizierung der subjektiven Wahrnehmung von Schwingungen das *Weber-Fechner-Gesetz*, nach welchem die subjektive Wahrnehmung eines Reizes  $E$  mit dem Logarithmus dieses physikalischen Reizes  $R$  relativ zu einer Art Reizschwelle  $R_0$  geht

$$E = c \cdot \ln\left(\frac{R}{R_0}\right), \quad (2.28)$$

wobei  $c$  eine reizabhängige Konstante darstellt, oder das *Stevens'sche Potenzgesetz* als Erweiterung des *Weber-Fechner-Gesetz* auf einen exponentiellen Zusammenhang

$$E = k \cdot (R - R_0)^n \quad (2.29)$$

mit dem rezeptorabhängigen Exponenten  $n$ , das sich besonders für eine Abbildung der direkten Schätzung der Empfindungsstärke eignet. Weit verbreitete Kennwerte zur Bestimmung der Schwingungsintensität, die auch zur Abbildung des subjektiven Komfortempfindens verwendet werden, sind der *Root Mean Square* (RMS) Wert

$$a_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T a(t)^2 dt} \quad (2.30)$$

---

<sup>207</sup> Heyder und Delso, 2014

<sup>208</sup> Schaeffler AG, 2013b

<sup>209</sup> Morioka und Griffin, 2008

und der sogenannte *Vibration Dose Value* (VDV)

$$a_{VDV} = \sqrt[4]{\int_0^T a(t)^4 dt}, \quad (2.31)$$

welcher im Gegensatz zum RMS Wert neben der Schwingungsdauer auch eine eventuelle starke lokale Überhöhung der Schwingungsamplitude stärker berücksichtigen soll. Darüber hinaus wurden in verschiedenen Arbeiten zu den Themen Schwingungen bei Motorstart und –stopp, Leerlaufvibrationen und Vibrationen im Fahrbetrieb bei geschlossener Kupplung neben der Schwingungsamplitude die Schwingungsfrequenz selbst, die Überlagerung zweier Frequenzen und die Dauer einer Schwingung als beitragende Faktoren zur subjektiven Wahrnehmung von Schwingungen identifiziert.<sup>210</sup>

Die genannten Phänomene behandelt auch MAIER, mit dem Ziel mit einem auf der X-in-the-Loop basierten Methode skalare Kennwerte aus Messdaten verschiedener Messpunkte des Subsystems Fahrersitz und des Gesamtsystems Fahrzeug anhand deren Korrelation mit dem Subjektivurteil zu identifizieren. Hierzu werden die Wirkflächenpaare Sitzkissen, Lehnenkissen und Sitzkonsole berücksichtigt, mit einem den Komfort nicht beeinflussenden Messsystem ausgestattet und die auftretenden Schwingungen durch ein Modell abstrahiert, in welches neben dem Messpunkt und der zu messenden Größe auch die Schwingungsrichtung (je 3 Rotations- und Translationsrichtungen) sowie der verwendete Auswertalgorithmus eingehen. Als Kenngrößen verwendet werden die jeweiligen Amplituden von Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung, deren Spitze-Spitze-Wert, der Effektivwert, der Vibration Dose Value (2.31) dieser Signale, die Frequenz und die Periodenanzahl (als Maß der Schwingungsdauer) der Schwingungen. Es wird bei allen genannten Situationen davon ausgegangen, dass die auftretende Antriebsstrangerregte Schwingung eine Überlagerung mehrerer Schwingungsfrequenzen darstellt, deren Hauptfrequenz als ein Vielfaches der Motorordnung aus dem Maximum des Spektrums bestimmt wird und um die folgenden drei amplitudenstärksten Frequenzen ergänzt wird, während durch Betrachtung der Hüllkurve der Schwingung eine Modulationsanalyse durchgeführt wird.<sup>211</sup>

Zur Identifikation von geeigneten Kennwerten werden nun aus den Experimenten – Anfahrt und Hochfahrt als Manöver für die Beobachtung von Schwingungen im Fahrbetrieb bei geschlossener Kupplung – alle Wertepaare aus Subjektivurteil und Kennwert miteinander korreliert, wobei die Ergebnisse von Probanden mit geringer Individualkorrelation ausgeschlossen und die verbleibenden Ergebnisse um ihren

---

<sup>210</sup> Maier

<sup>211</sup> Maier

Mittelwert bereinigt wurden. Es ergibt sich dabei für die Betrachtung der Maximalrichtung der Signale, modelliert durch deren Vektorbetrag, eine bessere Korrelation als für die einzelnen Schwingungsrichtungen, eine Verschlechterung der Korrelation bei der Berücksichtigung mehrerer Frequenzmaxima und entgegen der Erwartung keine Verbesserung der Korrelation durch Verwendung des VDV statt der Schwingungsamplitude. Für die Messpunkte ergibt sich für die Position in der Mitte der Fahrersitzkonsole die beste Korrelation mit einer vergleichbar guten Korrelation der Punkte vorne und hinten links an der Fahrersitzkonsole.<sup>212</sup>

Einen anderen Ansatz zur Objektivierung des subjektiven Fahrkomforteindrucks liefern ALBERS UND ALBRECHT<sup>213</sup> sowie ALBERS ET AL.<sup>214</sup>. Ersterer betrachtet die allgemeine Komfortbeurteilung während des Fahrmanövers Anfahren, während die zweite Arbeit den Einfluss der Phänomene Rupfen, Ruckeln und Getrieberasseln auf die Komfortbeurteilung bewertet. Dabei sollen die Subjektivurteile mithilfe von künstlichen Neuronalen Netzen (KNN) im Rahmen der X-in-the-Loop Umgebung sowohl für Antriebsstrangsimulationen als auch für Rollenprüfstands- und Fahrzeugversuche möglichst zuverlässig vorhergesagt werden. Zur Generierung insbesondere der Trainingsdaten werden die bewertenden Fahrer selbst bezüglich ihrer Eignung für diese Aufgabe geprüft und bei der Auswertung der Daten in eine kundenorientierte Fahrerklassierung eingeteilt. Die Komfortbeurteilung erfolgt anhand einer zweistufigen Skala bestehend aus einem Schiebewiderstand und einer unterlegten abgestuften Notenskala mit den Werten 1 bis 10. Für das KNN stehen mehrere auf der Längsbeschleunigung an verschiedenen Punkten basierenden Objektivwerte, wie die Spektrale Leistungsdichte (*Power Spectral Density, PSD*) in Frequenzabschnitten von 1 Hz bis 4 Hz mit einer Breite von jeweils 1 Hz, die maximale Längsbeschleunigungen an Kopfstütze und Fahrersitzschiene mit dem jeweiligen relativen Zeitpunkt, der maximale und mittlere Gaspedalwert und –gradient mit dem jeweiligen relativen Zeitpunkt des Maximums sowie die Anfahrtdauer zur Verfügung.<sup>215,216,217,218</sup>

Das KNN wird mithilfe der generierten und selektierten Trainingsdaten konditioniert und anschließend mit Daten aus Simulation und Vehicle-in-the-Loop Experimenten in einer Validierungs- und Optimierungsphase analysiert, wobei Neuronen mit niedriger Signifikanz eliminiert werden und durch diese Optimierung die Breite der

---

<sup>212</sup> Maier

<sup>213</sup> Albers; Albrecht, 2005

<sup>214</sup> Albers et al., 2009b

<sup>215</sup> Lerspalungsanti

<sup>216</sup> Albers et al., 2009b

<sup>217</sup> Albers et al., 2008

<sup>218</sup> Albers; Albrecht, 2005

Anwendbarkeit und die Effizienz erhöht werden. Es wird gezeigt, dass die Vorhersage der Komfortbewertung aus Rollenprüfstands- oder Simulationsdaten mittels der KNN Methode möglich ist. Die gefundene KNN Konfiguration wird in einer Designparameterstudie (verändertes Simulationsmodell, veränderte Kupplungscharakteristik auf dem Rollenprüfstand) und für Versuche mit anderen Probandengruppen mit zufriedenstellenden Ergebnissen auf ihre Robustheit getestet. Jedoch liefert die Methode tendenziell schlechtere Bewertungsergebnisse als ein menschlicher Bewerter. Außerdem zeigt der Transfer auf andere Bewertergruppen oder Versuchsreihen eine Abweichung der vorhergesagten Komfortbeurteilung für den Fall, dass Kupplungsrupfen auftritt. Darüber hinaus setzt die Übertragbarkeit der KNN Methode auf andere Phänomene oder Versuchsreihen eine breite Datenbasis an Trainingssituationen voraus.<sup>219,220</sup>

#### **2.7.4 Zwischenfazit**

In diesem Unterkapitel wurden unterschiedliche Aspekte der Bewertung und Objektivierung des subjektiven Fahrkomfortempfindens betrachtet. Ausgehend von den Einflussfaktoren dieses Komfoteindrucks über die Unterscheidung von Komfort und Diskomfort wurde der spezifische Komfoteinfluss von Antriebsstrangschwingungen beleuchtet. Daraufhin wurde die gängige Praxis zur Bewertung des Komfortempfindens vorgestellt und in das Spektrum der unterschiedlichen Methoden eingeordnet und in Betrachtung der Vor- und Nachteile diskutiert. Anschließend wurden mögliche Kennwerte zur Objektivierung des Schwingungskomforts vorgestellt und in Zusammenhang mit bestehenden methodischen Ansätzen gestellt, die jedoch allesamt keine abschließende Betrachtung des Themas der Objektivierung des subjektiv empfundenen Fahrkomforts darstellen. Die Relevanz der hier vorgestellten differenzierten Betrachtung der Ansätze zur Objektivierung des Fahrkomforts für die vorliegende Arbeit ergibt sich mit der Notwendigkeit der Messung der Beschleunigung als für den Komfort ausschlaggebende Größe und somit relevante Messgröße bei einer möglichen Bewertung des Regelergebnisses.

---

<sup>219</sup> Lerspalungsanti

<sup>220</sup> Albers; Lerspalungsanti, 2010

## 2.8 Schwingungsdämpfung im Antriebsstrang

Um die potenziell auftretenden Ruppphänomene mit ihren im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen negativen Auswirkungen auf den subjektiven Fahrkomfort des Fahrers zu vermeiden, werden unterschiedliche Maßnahmen vorgenommen. Diese reichen von präventiven Maßnahmen an den vorhandenen Bauteilen über zusätzliche Bauteile bis hin zu reinen softwareseitigen Maßnahmen. Diese Varianten werden im folgenden Unterkapitel vorgestellt und diskutiert.

### 2.8.1 Aktive Hardware-basierte Ansätze

Als aktive Hardware-basierte Ansätze werden im Folgenden solche Maßnahmen bezeichnet, die mithilfe von zusätzlichen beweglichen Bauteilen vorgenommen werden.

#### 2.8.1.1 Einfacher Hardware-Tilger

Eine sehr einfache Maßnahme zur Verringerung des Einflusses von Kupplungsrupfen auf den Antriebsstrang und den subjektiven Fahrkomfort der Fahrzeuginsassen basiert auf dem aus der Mechanik bekannten Funktionsprinzip des Schwingungstilgers. Dabei wird an das zu beruhigende System die Tilgermasse über die Tilgerfeder angekoppelt. Damit ist der Tilger selbst ein schwingungsfähiges System, welches bei geeigneter Abstimmung von Tilgerfeder und –masse auf die Eigenfrequenz des zu beruhigenden Systems in der Lage ist, diesem bei dieser Eigenfrequenz Schwingungsenergie zu entziehen und dadurch dessen Schwingungsamplitude zu verringern.

Nach diesem Prinzip arbeitet auch der Torsionsschwingungstilger. Dieser besteht, entsprechend dem Tilgerprinzip, aus einer Tilgermasse, die über Federn an eine Reibeinrichtung bzw. an die Kupplung angekoppelt und parallel zur Kupplungsscheibe angeordnet ist. Diese Reibeinrichtung muss auf eine definierte Ruffanregung abgestimmt werden. Aus diesem Grund ist es jedoch in der Praxis kaum möglich, den potenziellen Wirkungsgrad eines nicht-adaptiven Schwingungstilgers mit einer Dämpfung der Schwingungsamplitude auf 50% des ursprünglichen Wertes zu erreichen, da sowohl die Reibung im Tilgersystem, als auch die Ruffanregung der Kupplung große Streuungen aufweisen. Bei einer Reibung, die größer ist als in der Auslegung vorgesehen, neigt das Tilgersystem zum Haften und kann damit dem Antriebsstrang nicht genug Energie entziehen. Wenn die Ruffanregung größer ist, als in der Abstimmung der Reibeinrichtung vorgesehen, so erreicht der Tilger bei der nun verschobenen Systemeigenfrequenz eine zu geringe Dämpfung. Mithilfe einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung im Tilger könnten diese Nachteile behoben werden, jedoch wäre der Aufwand für eine solche Einrichtung sehr hoch.<sup>221</sup>

---

<sup>221</sup> Freitag et al., 2010

### 2.8.1.2 Weiterentwicklung einfacher Hardware-Tilger

Um die Nachteile des einfachen Drehschwingungstilgers zu kompensieren, wurde dieser weiterentwickelt und um eine Reibeinrichtung mit verdrehwinkelabhängiger Reibung erweitert. Dabei soll die Reibung im Tilgersystem mit dem Verdrehwinkel des Tilgers gegenüber der Kupplungsscheibe und damit proportional zur Rupanregung zunehmen.<sup>221,222</sup>

Der Aufbau des Tilgers mit verdrehwinkelabhängiger Reibeinrichtung ist in Bild 31 dargestellt.

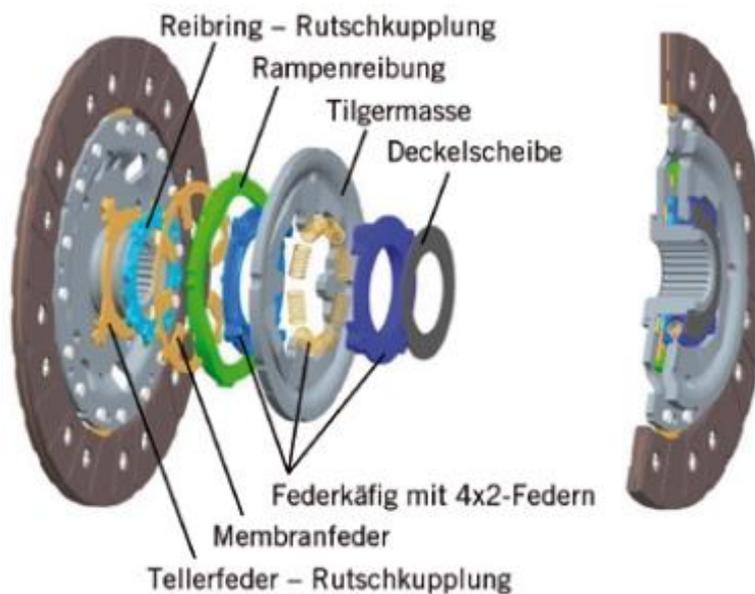


Bild 31: Aufbau des Torsionsschwingungstilgers<sup>223</sup>

Die Abhängigkeit der Reibung vom Verdrehwinkel wird hier durch eine Reibeinrichtung mit gegeneinander verdrehbaren Rampen erreicht, die auf eine lineare Membranfeder wirken und somit die geforderte Proportionalität von Reibung und Verdrehwinkel erreichen. Die Auslegung der Tilgermasse erfolgt anhand der zu erwartenden Anregungsmomente und dem konstruktiv realisierbaren Auslenkungswinkel des Tilgers, wobei die Tilgermasse in etwa 10 % der reduzierten Antriebsstrangmasse betragen sollte. Die weitere Auslegung des Tilgers erfolgt mithilfe von gegeneinander verspannten Druckfederpaaren. Für den Fall, dass höhere Momente auftreten, die zu einem Überschreiten dieses maximalen Auslenkungswinkels führen würden, ist der Tilger über eine Rutschkupplung an die Kupplungsscheibe angekoppelt.<sup>221,222</sup>

<sup>222</sup> Hausner und Häßler, 2012

<sup>223</sup> Hausner und Häßler, 2012

Mit diesem System können unabhängig von der Ursache und Charakteristik der Rupfanregung die Rupfschwingungen im Antriebsstrang reduziert werden, sofern die Anregung nahe der Tilgerfrequenz liegt.<sup>224</sup> Der Tilger kann für alle Schwingungsprobleme mit annähernd konstanter Frequenz angewandt werden und eignet sich somit im speziellen zur Dämpfung selbsterregter Rupfschwingungen.<sup>225</sup>

Es ist zu berücksichtigen, dass eine Anwendung des Tilgers zu einer erhöhten zu synchronisierenden Masse sowie einem erhöhten Bauraumbedarf führt.<sup>225</sup>

## 2.8.2 Passive Hardware-basierte Ansätze

Der Arbeit von KRÜGER<sup>226,227</sup> zufolge gibt es neben den im vorangegangenen Abschnitt diskutierten aktiven Hardware-basierten Maßnahmen gegen Rupfschwingungen im Antriebsstrang auch die Möglichkeit zu passiven hardwareseitigen Gegenmaßnahmen. Dazu zählen unter anderem eine gezielte Optimierung des in der Kupplung eingesetzten Reibbelages hin zu einem durchgehend leicht positiv verlaufenden Reibwert, eine Einengung der Fertigungstoleranzen, um geometrische Abweichungen zu reduzieren oder die Verwendung einer weicheren Belagfederung, um die Auswirkung von bestehenden geometrischen Fehlern zu reduzieren. Darüber hinaus besteht auch die Möglichkeit, den Antriebsstrang im Gesamten, zum Beispiel durch die in Abschnitt 2.3.2 erwähnte Reduktion des Massenträgheitsmomentes der Kupplung, weniger anfällig gegenüber Rupfschwingungen zu machen, oder mittels geeigneter Anpassungen des Kupplungssystems etwaige auftretende Zwangsbewegungen dieses Systems und die damit verbundenen geometrischen Anregungen zu reduzieren.<sup>226,227</sup> Eine solche Möglichkeit wird zusammen mit anderen möglichen passiven Gegenmaßnahmen im Folgenden vorgestellt.

### 2.8.2.1 Optimierung der Reibflächen-Paarung

Nach den Ausführungen von HOFFMANN ET AL. besteht eine Möglichkeit, die Rupfanregung im Reibkontakt der Kupplung zu minimieren darin, die geometrischen Anregungsmechanismen zu reduzieren, indem man die einzelnen am Reibkontakt beteiligten Komponenten aneinander anpasst. Dabei werden Bauteile entsprechend ihrer geometrischen Eigenschaften sortiert und paarweise zugeordnet, um die jeweiligen bestehenden Schiefstände auszugleichen.<sup>228</sup>

---

<sup>224</sup> Freitag et al., 2010

<sup>225</sup> Hausner und Häßler, 2012

<sup>226</sup> Albers; Krüger, 2002

<sup>227</sup> Krüger

<sup>228</sup> Kimmig et al., 2013

### 2.8.2.2 Kardanische Kupplungsbetätigung

Durch die Verwendung einer sogenannten kardanischen Betätigung der Kupplung können bestehende Schiefstände einzelner Bauteile ausgeglichen werden. Durch die in Abschnitt 2.3.2 bereits erwähnte Verwendung eines CSC zur Betätigung der Kupplung können, wie in Bild 32 dargestellt, bestehende Abhubschiefstände ausgeglichen oder verringert werden.<sup>229,230</sup>

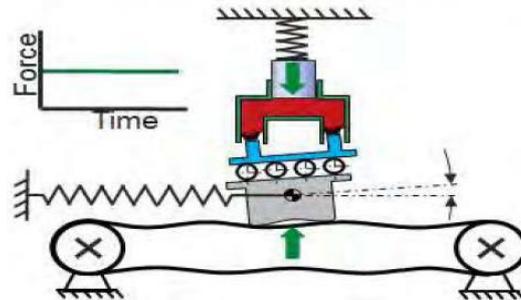


Bild 32: Ausgleich von Abhubschiefständen durch kardanische Kupplungsbetätigung<sup>231</sup>

### 2.8.2.3 Optimierung der Belagfederkennlinie

Entsprechend HÄBLER UND KESSLER spielt der Verlauf der Belagfederkennlinie eine wichtige Rolle bei der Vermeidung bzw. Minimierung von geometrischen Anregungen im Kupplungssystem. Dies folgt daraus, dass die geometrischen Fehler im Allgemeinen eine nichtparallele Betätigung der Belagfederung der Kupplungsscheibe zur Folge haben. Mithilfe von entwicklungsbegleitenden Simulationsmethoden unter Berücksichtigung solcher nichtparalleler Betätigung kann die Belagfederkennlinie derart optimiert werden, dass das Maximum der geometrischen Anregung außerhalb des für Anfahrtrupfen relevanten Momentenbereiches liegt.<sup>232</sup>

## 2.8.3 Aktive Software-basierte Ansätze

Als aktive Software-basierte Ansätze zur Schwingungsdämpfung im Antriebsstrang werden hier Maßnahmen unterschiedlicher Komplexität vorgestellt, die mithilfe der bestehenden Kupplungsbetätigung innerhalb der Softwareumgebung zur Kupplungssteuerung der Momentenmodulation des Kupplungsrupfens aktiv entgegenwirken.

<sup>229</sup> Hoffmann et al., 2015

<sup>230</sup> Kimmig et al., 2013

<sup>231</sup> Hoffmann et al., 2015

<sup>232</sup> Häßler; Kessler, 2015

## 2.8.3.1 Aktive Momentenmodulation nach dem Regelungsprinzip

Bei diesem Ansatz wird die Getriebeeingangsdrehzahl als Rohsignal und in einer gefilterten Variante ohne die überlagerten Rupschwingungen in jedem Steuergeräteinterrupt gemessen. Durch die Bildung der Differenz dieser beiden Drehzahlen können die Rupschwingungen als Signal isoliert und somit auch detektiert werden.

Aus diesen detektierten Abweichungen der beiden Drehzahlsignale wird ein Korrekturmoment bestimmt (siehe Bild 33, links). Dadurch soll die Regelung in der Lage sein, schnell auf etwaige Änderungen der Anregung in ihrer Frequenz oder Amplitude zu reagieren und somit auch durch geometrisches Rupsen entstehende Schwingungen im Antriebsstrang effizient und schnell dämpfen zu können.<sup>233</sup>

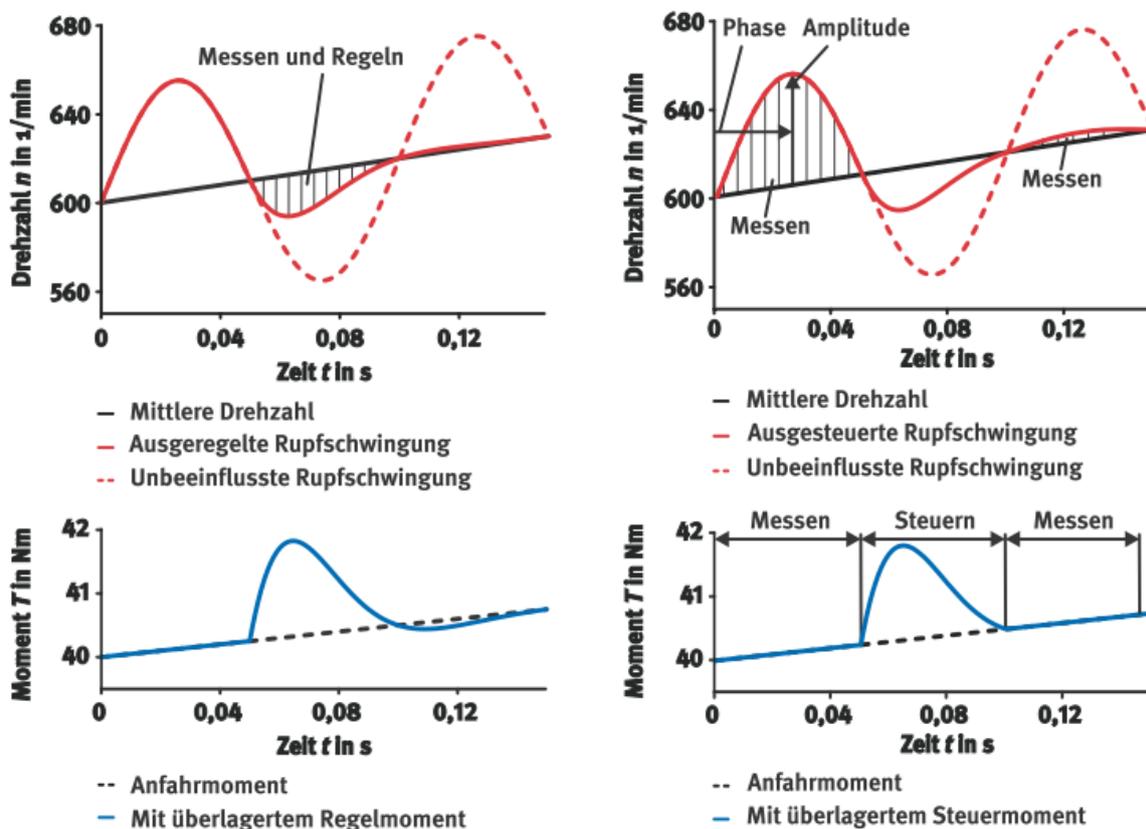


Bild 33: Links: Prinzip der aktiven Momentenmodulation nach dem Regelungsprinzip  
Rechts: Aktive Momentenmodulation nach dem Steuerungsprinzip<sup>234</sup>

Diese schnelle Reaktion auf eine Drehzahlabweichung kann jedoch auch dazu führen, dass auch andere im Drehzahlsignal auftretende Störungen als Rupschwingungen interpretiert werden und daraus ein Korrekturmoment abgeleitet wird. Somit können

<sup>233</sup> Küpper et al., 2006

<sup>234</sup> Küpper et al., 2006

etwaige hochfrequente Störungssignale oder auch Ungenauigkeiten in Messung und Filterung auf das Kupplungsmoment und damit in den Antriebsstrang zurückgekoppelt werden, wodurch die Dämpfung des Rupfens geringer wird oder das Rupfen sogar verstärkt wird und auch der Stellmechanismus der Kupplung potenziell eine zu hohe Belastung erfahren kann.<sup>233</sup>

#### 2.8.3.2 Aktive Momentenmodulation nach dem Steuerungsprinzip

Um diese Nachteile der aktiven Momentenmodulation nach dem Regelungsprinzip zu vermeiden, kann eine aktive Momentenmodulation nach dem Steuerungsprinzip angewandt werden. Hier werden die Schritte der Erkennung der Rupfschwingungen und der Bestimmung des Korrekturmomentes voneinander getrennt. Die Erkennung der Rupfschwingung beinhaltet hierbei eine Bestimmung der Amplitude und der Phasenlage der Schwingung, welche hier als sinusförmig angenommen wird, durch zeitliche Lage und Höhe der größten Auslenkung. Dabei liegt die Annahme zugrunde, dass diese Schwingung nur sehr langsam veränderlich ist, also die darauffolgende Halbwelle in etwa die gleichen charakteristischen Eigenschaften aufweisen wird.<sup>233</sup>

Wie in Bild 33 rechts dargestellt, wird nun für diese darauffolgende Halbwelle ein Korrekturmoment bestimmt, indem ein sogenannter Prototyp des Korrektursignals, der im Speicher des Steuergerätes vorgehalten wird und speziell auf die dynamischen Eigenschaften der Kupplungsaktorik abgestimmt ist, in seiner Frequenz, Amplitude und Phasenlage angepasst wird. Nach diesem Regelungsintervall erfolgt wieder ein Messintervall bei dem eine weitere Halbwelle vermessen wird. Dies birgt den Nachteil, dass die Steuerung nur nach jeder zweiten Halbwelle aktiv werden kann und somit weder sehr schnelle Amplituden- noch Frequenzänderungen wirkungsvoll kompensieren kann.<sup>233</sup>

#### 2.8.3.3 Aktive Momentenmodulation mittels einer Fuzzy-Regelung

Die Strategie der aktiven Momentenmodulation mithilfe einer Fuzzy-Regelung wurde ursprünglich für einen Antriebsstrang mit *Elektronischem Kupplungsmanagement* (EKM) mit einem keramischen Reibbelag und aufgedrückter Kupplung entwickelt, lässt sich aber auch ohne Weiteres auf einen Antriebsstrang mit trockener Doppelkupplung und beliebigen Belägen anwenden. Als Eingangsgrößen der Regelung dienen die mithilfe eines Bandpasses gefilterten Signale der Getriebeeingangsdrehzahl, der Position des Kupplungsstellers sowie der Drehzahl des Kupplungsschwungrades. Die Idee der aktiven Momentenmodulation mithilfe einer Fuzzy-Regelung ist eine möglichst kleine Verzögerungsdauer bis zum Einstellen des Korrekturmomentes und eine Berücksichtigung des nichtlinearen Verhaltens der Stellstrecke und des zu regelnden Systems.<sup>235</sup>

---

<sup>235</sup> Albers et al., 2010

Zur Bestimmung des Modulationsmomentes mit einem Fuzzy-Regler müssen die Eingangsgrößen entsprechenden Eingangsfunktionen zugeordnet werden, welche dann von einer sogenannten *Inferenzmaschine (inference machine)* entsprechenden Werten der Ausgangsgrößen zugeordnet werden. Das Ergebnis ist eine Art nichtlinearer Regler, der sozusagen anhand selbst generierter Kennfelder sein Regelverhalten an die gegebene Situation anpasst. Hier ist der Vorteil der Fuzzy-Regelung die relativ einfache Beschreibung der Funktionszusammenhänge, welche sich im vorliegenden Beispiel durch die folgenden sieben Regeln beschreiben lassen:

- WENN die Winkelbeschleunigung negativ ist, DANN ist die Änderung des Ausrückweges negativ
- WENN die Winkelbeschleunigung nahe Null ist, DANN ist die Änderung des Ausrückweges Null
- WENN die Winkelbeschleunigung positiv ist, DANN ist die Änderung des Ausrückweges positiv
- WENN die Schlupfdrehzahl klein ist, DANN ist die Änderung des Ausrückweges klein
- WENN die Schlupfdrehzahl groß ist, DANN ist die Änderung des Ausrückweges groß
- WENN der Ausrückweg klein ist, DANN ist die Änderung des Ausrückweges groß
- WENN der Ausrückweg groß ist, DANN ist die Änderung des Ausrückweges klein

Hier sind die Regeln vier bis sieben außerdem von dem Vorzeichen der Winkelbeschleunigung abhängig. Die Regeln vier und fünf basieren auf der Annahme von selbsterregtem Rufen und dem damit verbundenen negativen Reibwertgradienten, während die Regeln sechs und sieben der vorliegenden Öffnungscharakteristik des Kupplungssystems zugrunde liegen.<sup>236</sup>

Neben dem Vorteil der Einfachheit dieses Ansatzes und der erhöhten Robustheit gegenüber simplen Regelungsansätzen sind dessen Nachteile, dass lediglich selbsterregtes Rufen kompensiert werden kann und dass der Regler sehr empfindlich gegenüber Änderungen im Betätigungssystem ist.<sup>237</sup>

---

<sup>236</sup> Albers et al., 2010

<sup>237</sup> Albers et al., 2010

2.8.3.4 Aktive Momentenmodulation basierend auf dem Wurzelort Verfahren

Ein weiterer Ansatz zur aktiven Dämpfung von Schwingungen im Antriebsstrang liefert KRÜGER<sup>238,239</sup> mit dem relativ einfachen Konzept des Reglers mit Auslegung nach dem Wurzelortverfahren.

Die Eingangsgröße dieses Reglers ist die Getriebeeingangsdrehzahl, welche mithilfe eines Proportional- und eines Differenziergledes über den Kupplungsaktor auf die Anpresskraft der Kupplung zurückgekoppelt wird. Letzteres bewirkt eine Hochpass-Filterung des Regelsignals und verhindert damit die Regelung auf sehr langsam veränderliche oder konstante Signalanteile. Die dabei entstehende Sensitivität wird durch die Verwendung eines PT1-Gliedes anstatt eines reinen Proportionalgledes abgeschwächt. Die Auslegung des Proportionalgledes erfolgt dabei nach dem Wurzelortverfahren anhand eines stark vereinfachten Antriebsstrangmodells mit einem rotatorischen Freiheitsgrad. Beim Wurzelortverfahren werden die Polstellen des geschlossenen Regelkreises (Bild 34) in der komplexen Ebene betrachtet. Dabei kann der Winkel, den der Zeiger auf solch einen komplexen Pol mit der imaginären Achse einschließt, mit der Dämpfung des geschlossenen Regelkreises identifiziert werden.<sup>238,239</sup>

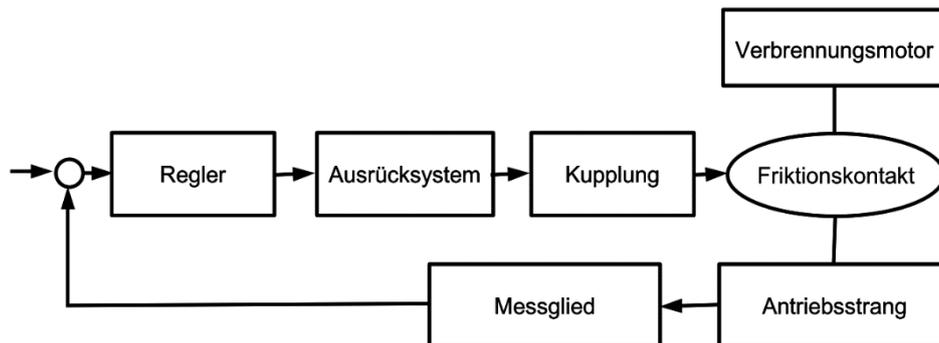


Bild 34: Blockschaltbild des geschlossenen Regelkreises für die Anti-Rupf-Regelung nach dem Wurzelortverfahren<sup>240</sup>

Die Auslegung erfolgt nun dadurch, dass die Veränderung die Lage der mit der Rupfschwingung assoziierten Pole in Abhängigkeit des Verstärkungsfaktors des Reglers betrachtet wird. Hierbei werden ein möglichst großer Winkel und damit eine möglichst hohe Dämpfung angestrebt. Bei Versuchen am realen Kupplungssystem wurde deutlich, dass zum Erreichen einer optimalen Dämpfung des Systems die Reglerverstärkung fortlaufend über den gesamten Einkuppelvorgang angepasst werden müsste. Darüber hinaus erschweren Störsignale sowohl auf der gemessenen

<sup>238</sup> Krüger

<sup>239</sup> Albers; Krüger, 2002

<sup>240</sup> Krüger

Eingangsgröße, als auch auf dem Stellsignal des Kupplungsaktors die Regelung zusätzlich. Hierdurch muss die Reglerverstärkung im Versuch nochmal angehoben werden und liegt daraufhin in einem Bereich, in dem es durch Änderungen der Randbedingungen leicht zu einem instabilen Reglerverhalten kommen kann und außerdem der Einkuppelvorgang zum Teil deutlich verlängert wird.<sup>241,242</sup>

### 2.8.3.5 Aktive Momentenmodulation mittels eines Linear Quadratisch Optimalen Reglers

Zwei unterschiedliche Ansätze mit unterschiedlicher Komplexität zur Dämpfung von Rupfschwingungen sind in der Arbeit von SCHWENGER dargestellt. Beide Varianten basieren auf der Regelung des Kupplungssollmomentes über den Kupplungssteller, wobei für die Reglercharakteristik ein Bandpasscharakter gefordert wird, um sowohl eine Beeinflussung der niederfrequenten Drehzahlregelung bei Anfahr- und Ankriebsituationen als auch eine Reaktion des Reglers auf Rauschanteile in den Messsignalen zu vermeiden.<sup>243</sup>

Der erste der beiden vorgestellten Regler ist ein Ausgangsgrößenregler nach dem Konzept einer linear quadratisch optimalen Regelung (LQR) mit einem Zustandsschätzer, der den Systemzustand anhand einer Messgröße abschätzt. Ziel der linear quadratisch optimalen Regelung ist eine Reduktion der Regelabweichungen im Bereich der Eigendynamik der mechanischen Strecke, indem das Kupplungsmoment als Stellgröße und die Getriebeeingangsdrehzahl als Regelgröße verwendet werden. Die Parametrierung des Reglers erfolgt mithilfe eines quadratischen Gütefunktional (mit zeitdiskreter Betrachtung der Signale, z.B.  $z(t) \rightarrow z_k$ )

$$J_{LQR}(u) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k + 2 x_k^T N u_k, \quad (2.32)$$

woraus sich die optimale Zustandsrückführung als

$$K = (B^T P B + R)^{-1} (B^T P A + N^T) \quad (2.33)$$

mit der Lösung  $P$  der algebraischen Riccati-Gleichung

$$A^T P A - P - (A^T P B + N) (B^T P B + R)^{-1} (B^T P A + N^T) + Q = 0. \quad (2.34)$$

---

<sup>241</sup> Krüger

<sup>242</sup> Albers; Krüger, 2002

<sup>243</sup> Schwenger, 2005

Die Gewichtungsmatrizen in (2.32) werden anhand der jeweiligen Maxima der Regelgrößen  $z$  und der Stellgrößen  $u$  als

$$Q_{ii} = \frac{1}{\max(z_i)^2}, \quad i = 1, \dots, l \quad Q \in \mathbb{R}^{l \times l}$$

$$R_{jj} = \frac{1}{\max(u_j)^2}, \quad j = 1, \dots, m \quad R \in \mathbb{R}^{l \times l}$$

$$N = 0$$

gewählt. Um auch nach der Festlegung der Gewichtungsmatrizen Einfluss auf das Regelverhalten zu haben, wird der skalare Parameter  $\rho$  in das Gütekriterium eingeführt

$$J_{LQR}(u) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} z_k^T Q z_k + \rho \cdot u_k^T R u_k .$$

Weiterhin wird der Vektor der Regelgrößen  $z$  um die mit dem Faktor  $\gamma$  gewichtete zeitliche Änderung der Regelgrößen  $z_{k+1} - z_k$  erweitert. Die Auslegung der Rückführung erfolgt nun mithilfe dieser Parameter  $\rho$  und  $\gamma$ , die jeweils lediglich separaten Einfluss auf Amplituden- und Phasenverlauf der Reglercharakteristik haben, anhand des Bode-Diagramms des offenen Regelkreises (Bild 35).<sup>244</sup>

Das zweite Reglerkonzept, das in der Arbeit von SCHWENGER zur Dämpfung von Rumpfschwingungen vorgeschlagen wird, ist ein Zustandsregler mit Störgrößenschätzung. Dabei werden die Soll- und Ist-Zustände des Systems anhand von drei Messgrößen mithilfe von jeweils einem Kalman-Filter geschätzt. Ziel eines solchen Kalman-Filters ist, die Kovarianz des Rekonstruktionsfehlers eines Signals zu minimieren. Dabei wird angenommen, dass sowohl Mess- als auch Eingangsruschen den Erwartungswert Null haben und stochastisch unabhängig voneinander sind. Das optimale Kalman-Filter würde eine zeitabhängige Verstärkung besitzen, dies wird hier unter der Annahme eines beobachtbaren und steuerbaren Systems zu einer konstanten Verstärkung

$$L = MC^T (R + CMC^T)^{-1} \tag{2.35}$$

vereinfacht und ebenfalls mit einer algebraischen Riccati Gleichung ausgelegt

$$M = FQF^T + AMA^T - AMC^T (R + CMC^T)^{-1} CMA^T . \tag{2.36}$$

---

<sup>244</sup> Schwenger, 2005

Hier entsprechen die Matrizen  $Q$  und  $R$  den jeweiligen Varianzen des Eingangs- und Messrauschens.<sup>245</sup>

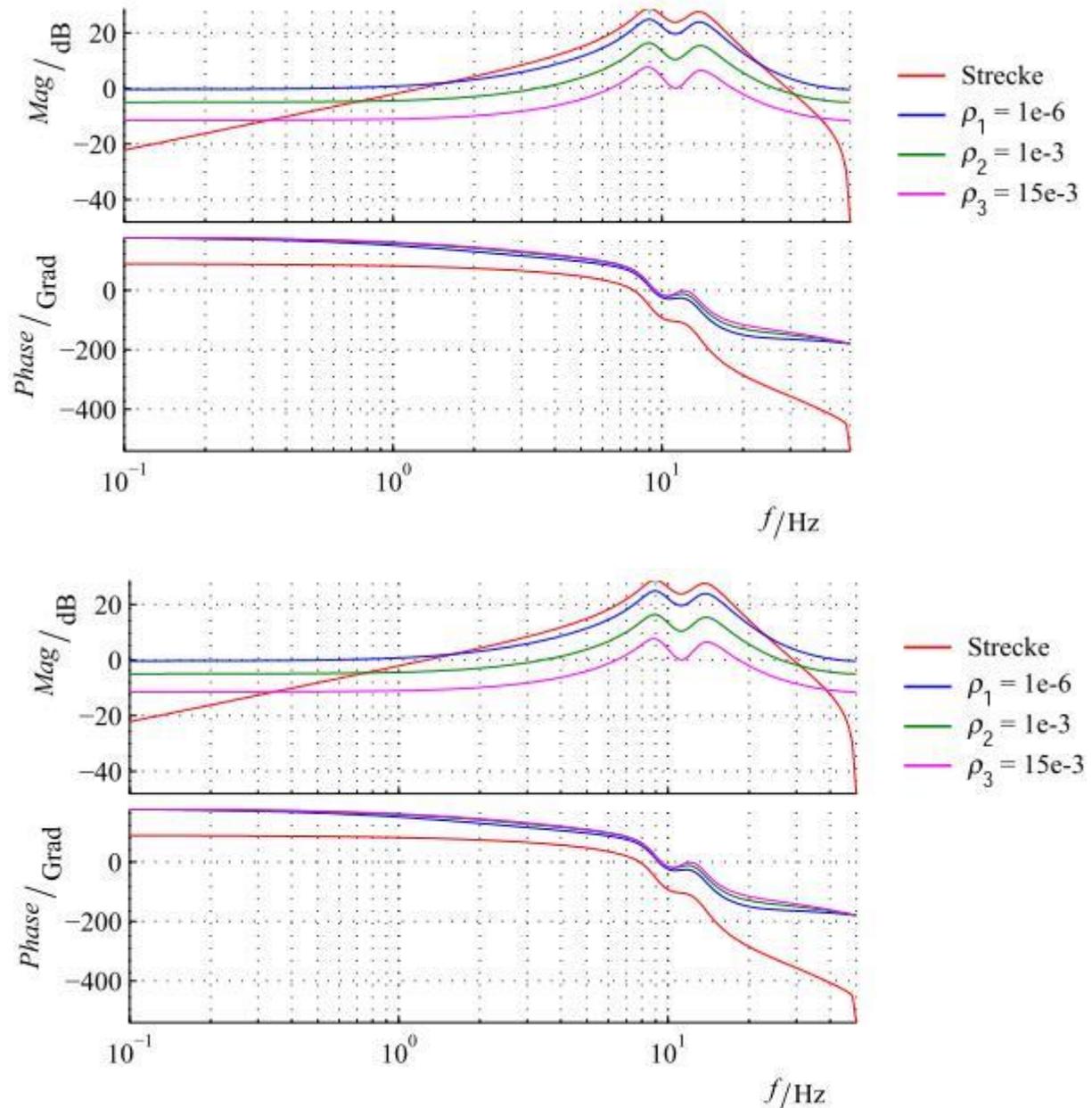


Bild 35: Beispiel für die Auslegung des Ausgangsgrößenreglers anhand des Parameters  $\rho$ <sup>246</sup>

Für die Auslegung der beiden Filter werden für den Beobachter der Ist-Zustände größere Varianzen angenommen als für die Auslegung des Beobachters der Soll-Zustände. Daraus resultiert eine zu erwartende stärkere Kopplung zwischen den Soll-Zuständen und dem Soll-Streckenmodell. Der Abgleich der daraus resultierenden

<sup>245</sup> Schwenger, 2005

<sup>246</sup> Schwenger, 2005

Parametrierung erfolgt anhand des Bode-Diagramms der offenen Strecke. Dabei ist im Vergleich mit dem Ausgangsgrößenregler zu erkennen, dass die Verstärkung im Falle des Zustandsreglers für Frequenzen im Bereich oberhalb der Dynamik des mechanischen Stellgliedes geringer ist (Bild 36).

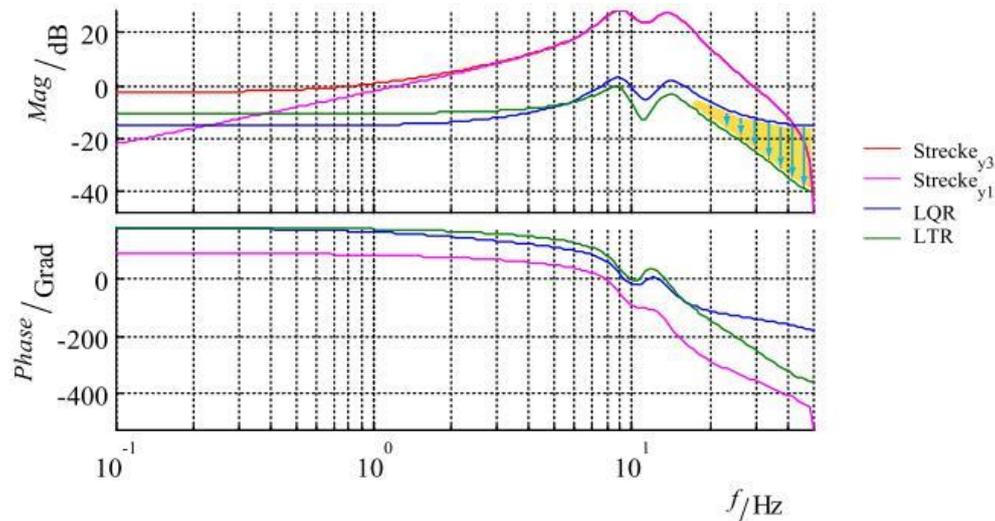


Bild 36: Vergleich der Streckendynamik von Zustands- und Ausgangsgrößenregler (LTR und LQR)<sup>247</sup>

In der Simulation kann die Wirksamkeit beider Regelungen für eine Anfahrssituation gezeigt werden, allerdings liegt hier der Regelanteil des Kupplungssollmomentes bei einer Größenordnung von 0,01 Nm. Hierfür müsste die Betätigung der Kupplung quasi vollkommen hysteresefrei sein, die ist in realen Anwendungen jedoch nicht der Fall. Weiterhin wird in der Simulation erkennbar, dass die Regelgüte für eine Umsetzung des Reglers im langsameren 10 ms Steuergerätetakt deutlich geringer ist, verglichen mit einer Umsetzung im schnelleren 2 ms Takt. Auch die experimentellen Ergebnisse in einem Versuchsfahrzeug unter Verwendung eines Forschungssteuergerätes bestätigen die stabilisierende Wirkung sowohl des Ausgangsgrößen- als auch des Zustandsreglers. Hier ist auch erkennbar, dass der Zustandsregler den für eine optimale Dämpfung benötigten Phasenversatz von 180° zur bestehenden Schwingung deutlich schneller erreicht, als der Ausgangsgrößenregler. Bei den Experimenten im Fahrzeug werden Regelanteile im Kupplungssollmoment im Bereich von +10 Nm bis -10 Nm beobachtet. auf diese Diskrepanz zwischen Simulation und Experiment wird nicht weiter eingegangen.<sup>248</sup>

<sup>247</sup> Schwenger, 2005

<sup>248</sup> Schwenger, 2005

### 2.8.3.6 Aktive Momentenmodulation durch Integration der Regelung in die bestehende Serien-Softwareumgebung

Ein weiterer Ansatz zur aktiven Dämpfung von Rupschwingungen ist ein von KIMMIG ET AL. vorgestelltes Konzept, bei welchem der Regler vollständig in die Seriensoftware zur Kupplungsansteuerung integriert wurde (Bild 37).

Dieser Ansatz soll, anders als bislang in Serie umgesetzte Regler, eine Dämpfung der Schwingungen in einem breiten Frequenzbereich erreichen, indem die Möglichkeit zur aktiven Dämpfung permanent aktiv ist und zusätzlich in kritischen Arbeitspunkten spezielle Maßnahmen gegen Rupsanregungen zum Einsatz kommen.

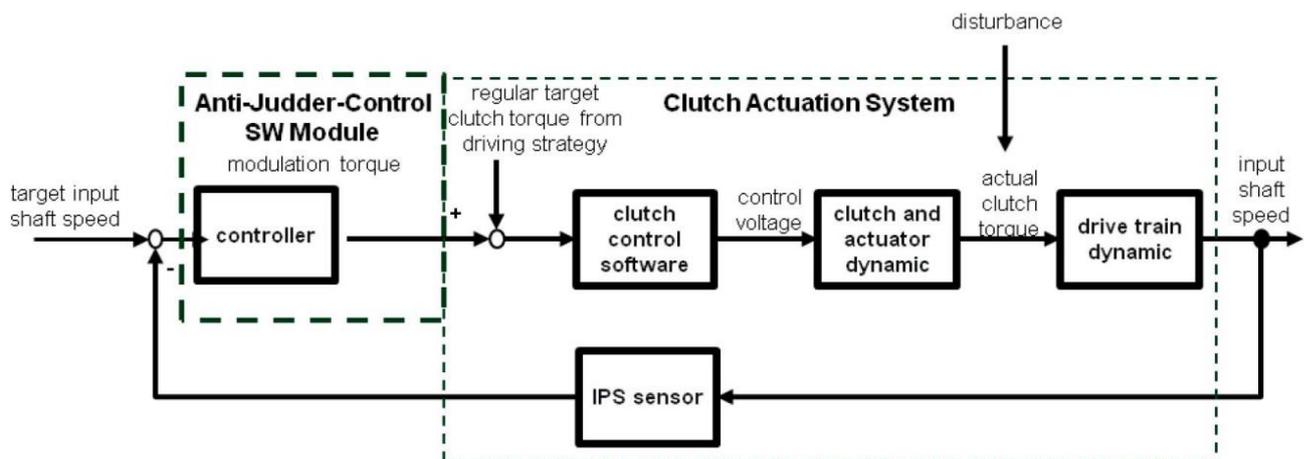


Bild 37: Ansteuerungskonzept der aktiven Momentenmodulation zur Dämpfung von Rupschwingungen in einer Serien-Softwareumgebung<sup>249</sup>

Dazu wird die ursprüngliche Kupplungsansteuerung um ein Modul zur Momentenkorrektur erweitert, welches als Eingangssignal eine Signalamplitude erhält, die proportional zum Schwingungsverhalten des Antriebsstrangs ist (z.B. die Getriebeeingangsdrehzahl). Diese Signalamplitude wird mithilfe eines linearen Korrekturalgorithmus in ein Korrekturmoment umgewandelt, welches anschließend zu dem von der ursprünglichen Kupplungsansteuerung angeforderten Drehmoment hinzuaddiert wird. Diese Korrektur kann mit den bislang zur Verfügung stehenden Systemen in einem Frequenzbereich von ca. 4 Hz bis 10 Hz erfolgen und wurde für diesen Frequenzbereich auch in Messungen bestätigt. Um die Wirksamkeit dieses Reglers sicherzustellen, muss jedoch die Hysterese der Kupplungsbetätigung im Kleinsignalbereich sehr klein sein, damit die von der Software angeforderten Korrekturmomente zuverlässig umgesetzt werden können.<sup>250</sup>

<sup>249</sup> Kimmig et al., 2013

<sup>250</sup> Kimmig et al., 2013

### 2.8.3.7 Aktive Momentenmodulation mithilfe eines Reinforcement Learning Algorithmus

Einen Ansatz zur Verringerung von Rumpfschwingungen mit Fokus auf eine möglichst hohe Variabilität und Anpassungsfähigkeit der Regelung bei gleichzeitig vergleichsweise einfacher Umsetzung wird in der Arbeit von SOMMER OBANDO vorgestellt. Dabei wird aus den genannten Motiven eine Regelung auf Basis des sogenannten *Reinforcement Learning* Prinzips entwickelt, um damit einen Regler zu erhalten, der sein Verhalten selbstlernend möglichst optimal an das vorliegende Systemverhalten anpassen kann. Die Regelung wird mithilfe der X-in-the-Loop Methode (siehe 2.1.2) entwickelt und wird zunächst mithilfe eines Simulationsmodells eines PKW-Antriebsstrangs ausgelegt, anschließend über den Zwischenschritt der Anpassung mithilfe einer Simulation des Prüfstands an die dort vorliegenden Bedingungen die Regelung an diesem Prüfstand umgesetzt. Dabei kommt in der ersten Simulation noch eine Modulation der Anpresskraft der Kupplung zum Einsatz, bei der Anpassung auf die Prüfstands Umgebung wird diese Schnittstelle jedoch aufgrund der mangelnden Reproduzierbarkeit der einzustellenden Größe zu einer Modulation des Aktorwegs abgeändert. Der Antriebsstrang wird hier auf ein drei Massen System reduziert und das zu optimierende Fahrmanöver als ein Schließen der Kupplung bei einer Motordrehzahl von 900 rpm definiert.

Beim *Reinforcement Learning* bestimmt der sogenannte Agent die vorzunehmende Handlung – den neuen Wert der Regelgröße – anhand des Zustandssignals des zu regelnden Systems. Die Entscheidung, welche Handlung am System vorgenommen wird, bestimmt der Agent anhand einer hinterlegten Strategie und eines Belohnungssignals, mit dessen Hilfe der Wert einer Aktion festgelegt wird. Das Zustandssignal setzt sich hier zusammen aus den Drehzahlen an Getriebeein- und -ausgang sowie dem Verdrehwinkel zwischen Getriebeein- und -ausgang. Als Belohnungssignal wird eine mean-square Variante des *Vibration Dose Value (VDV)* gewählt, welche als Integral über die Drehzahldifferenz zwischen Getriebeein- und -ausgang umgesetzt wird, da letzterer deutlich stärker gedämpft ist und damit die Rumpfschwingungen durch die Subtraktion weitestgehend isoliert werden. Die Wahl des Belohnungssignals soll die Berücksichtigung der Dauer einer Schwingung als auch eventuell in der Schwingung auftretender Spitzen erlauben. Der Agent selbst hat die Aufgabe, die Belohnungsfunktion zu aktualisieren und auf dieser Basis eine neue Handlung zu bestimmen und wird mithilfe einer Tabelle, einer sogenannten *Q-Table*, umgesetzt, die jedem durch die drei gewählten Signale definierten Zustand den möglichen Handlungssignalen eine Wertigkeit entsprechend einer Belohnung zuordnet.

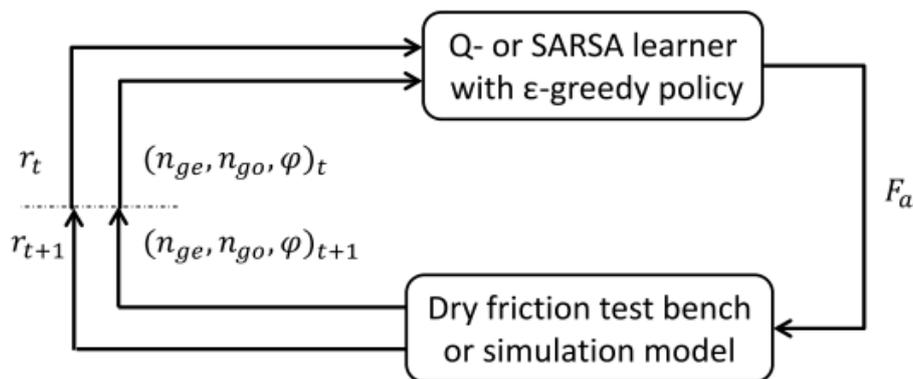


Bild 38: Reinforcement Learning Umgebung zur Verringerung von Rupfenschwingungen<sup>251</sup>

Die Auswahl der Handlung durch den Agenten erfolgt anhand einer vorgegebenen Strategie, welche hier durch die sogenannte  $\epsilon$ -greedy Strategie vorgegeben wird, durch welche der Agent nicht ausschließlich nach dem Maßstab der höchstmöglichen Belohnung entscheidet, sondern einen gewissen Anteil seiner Aktionen zufällig auswählt, wodurch langfristig verbesserte Strategien gefunden werden können.<sup>252</sup>

Ein Schema der Umsetzung eines Reinforcement Learning Algorithmus zur Dämpfung von Rupfenschwingungen in der Arbeit von SOMMER OBANDO ist in Bild 38 dargestellt. Das Verhalten des implementierten Reglers in Bezug auf sowohl permanente Veränderungen als auch Fluktuationen des Systems (Fahrzeugmasse, statische Reibwertkomponente) nach der abgeschlossenen Lernphase wurde in der Simulation untersucht. Dabei zeigte sich in Bezug auf eine Fluktuation der Fahrzeugmasse, dass der Regler lediglich kleine Abweichungen zulässt und darüber hinaus eine wesentlich schlechtere Performance oder sogar kontraproduktive Aktionen liefert. Im Falle eines kurzfristigen Abfalls der statischen Komponente des Reibwertes wurde schon bei kleinen Abweichungen eine deutliche Verschlechterung der Performance beobachtet. Im Falle bleibender Abweichungen der beiden Systemparameter und einer Beobachtung des Konvergenzverhaltens und der Performance des Reglers konnte beobachtet werden, dass eine Verringerung der Fahrzeugmasse sich kaum auswirkt, eine Erhöhung dieser führt jedoch zu deutlich längerer Dauer bis zum Erreichen der Konvergenz und gleichzeitig schlechteren Ergebnissen, während sich im Falle der statischen Reibwertkomponente die Anzahl der Episoden bis zur Konvergenz als auch die Performance des Reglers proportional zur Abweichung vom nominellen Reibwert verhalten. Auch für die Umsetzung auf einem herunterskalierten Prüfstand wurden schlechtere Ergebnisse als in der Simulation erreicht. Jedoch erreicht der Reinforcement Learning Ansatz zuverlässig eine Reduktion der Rupfenschwingungen.<sup>252</sup>

<sup>251</sup> Sommer Obando

<sup>252</sup> Sommer Obando

Zusammenfassend ist die selbst-Anpassung des Reinforcement Learning Algorithmus zur Unterdrückung von Rupfschwingungen erfolgreich, jedoch benötigt diese unter Umständen etwa 100 oder mehr Episoden (also Anfahrvorgänge) und es werden keine so guten Ergebnisse mehr erzielt. Für eine Implementierung in einer realen Fahrzeugumgebung müsste die Umsetzbarkeit dieses Ansatzes (die hier angewandte Q-Table besitzt mehr als 21000 Elemente) in einem Steuergerät mit limitierten Ressourcen geprüft werden.

#### **2.8.4 Zwischenfazit**

Es wurden in diesem Unterkapitel verschiedene Arten von Ansätzen zur Verringerung von rupfinduzierten Antriebsstrangschwingungen betrachtet, die entweder auf Änderungen, Ergänzungen oder Optimierungen der bestehenden Hardware oder auf softwarebasierten Regelalgorithmen unterschiedlicher Komplexität beruhen. Dabei sind die hardwarebasierten Ansätze meist aufwendig in der Umsetzung und besitzen trotz dieser Aufwände lediglich eine limitierte Wirksamkeit, während die vergleichsweise einfachen hardwarebasierten Maßnahmen eine zu geringe Effizienz zeigen. Dagegen sind die softwarebasierten Maßnahmen im Allgemeinen mit weniger Aufwand verbunden, da sie die bereits vorhandene Hardware nutzen und lediglich eine Ergänzung zur bestehenden Software benötigen. Diese Ansätze sind jedoch oft störanfällig, in ihrer Wirkung limitiert oder aber ihre Wirkung wurde nicht abschließend in Simulation und in der realen Fahrzeugumgebung belegt. Somit liefert dieser Abschnitt einen wichtigen Beitrag zur in Kapitel 3 abgeleiteten Motivation und Zielsetzung dieser Arbeit.

### **2.9 Ansätze zur robusten Regelung unsicherheitsbehafteter Systeme**

Im folgenden Unterkapitel wird die theoretische Grundlage zur Bewertung, Auswahl und Anwendung eines in der Regelungstechnik etablierten Ansatzes zur robusten Regelung von unsicherheitsbehafteten Systemen dargestellt. Dabei wird zunächst auf grundlegende regelungstechnische Konzepte wie die Zustandsraumdarstellung als eine der gängigsten Darstellungen regelungstechnischer Systeme und die Theorien zu Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit und Stabilisierbarkeit von regelungstechnischen Systemen eingegangen. Anschließend erfolgt die Überleitung zu unsicherheitsbehafteten Systemen und deren Beschreibung im Zustandsraum sowie zur Beschreibung verschiedener Ansätze zur robusten Regelung solcher unsicherheitsbehafteter Systeme. Somit liefert dieses Unterkapitel zentrale Beiträge

zur Systemmodellierung<sup>253</sup> sowie zur Wahl eines geeigneten Reglerkonzeptes<sup>254</sup>, worin auch die Ausführlichkeit der folgenden Ausführungen begründet liegt.

### 2.9.1 Zustandsraumdarstellung von regelungstechnischen Systemen

Die Zustandsraumdarstellung ist eine in der Regelungstechnik sehr verbreitete Darstellung dynamischer Systeme. Das System wird anhand einer Menge von  $n$  Differenzialgleichungen erster Ordnung im Zeitbereich beschrieben, welche sich durch Signalvektoren und Systemmatrizen beschreiben lassen. Aufgrund der Darstellung unter Verwendung eines Systemzustandes  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  erleichtert die Zustandsraumdarstellung die Analyse des regelungstechnischen Systems insbesondere im Falle von Mehrgrößensystemen oder nichtlinearen und zeitvarianten Systemen, sowie aufgrund der vektoriellen Darstellung die rechnergestützte Behandlung des regelungstechnischen Problems.<sup>255</sup>

Die allgemeine Form eines einfachen regelungstechnischen Systems (*single input single output, SISO*) lässt sich anhand der folgenden Gleichungen erläutern<sup>256</sup>

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + b(t)u(t), & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= c(t)^T x(t) + d(t) \cdot u(t)\end{aligned}\tag{2.37}$$

wobei  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  der Zustandsvektor bestehend aus den Zustandsgrößen  $x_i(t) \in \mathbb{R}$  ist,  $u(t) \in \mathbb{R}$  die Stellgröße und  $y(t) \in \mathbb{R}$  die Mess- bzw. Ausgangsgröße ist. Weiterhin sind  $A(t) \in \mathbb{R}^{(n \times n)}$  die Systemmatrix,  $b(t) \in \mathbb{R}^{(n \times 1)}$  beschreibt die Reaktion des Systems auf die Stellgröße,  $c(t)^T \in \mathbb{R}^{(1 \times n)}$  und  $d(t) \in \mathbb{R}$  beschreiben den Einfluss des Zustandes bzw. der Stellgröße auf den Systemausgang  $y(t)$  sowie  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  den Anfangszustand des Systems. Die Dimension  $n$  des Zustandsvektors  $x(t)$  heißt Ordnung des regelungstechnischen Systems.

Diese Darstellung eines Systems basiert auf der Erkenntnis, dass sich jede Differenzialgleichung der Ordnung  $n$  in ein System von  $n$  Differenzialgleichungen erster Ordnung überführen lässt.<sup>257</sup>

Ein System, das über mehrere Eingangs- und Ausgangsgrößen verfügt (*multiple input multiple output, MIMO-System*), kann man über eine Erweiterung der in (2.37) gegebenen Darstellung beschreiben. Dabei werden die Gleichungen derart

<sup>253</sup> vgl. 5.4

<sup>254</sup> vgl. Kap. 6 und 7

<sup>255</sup> Föllinger und Konigorski, 2013

<sup>256</sup> Lunze, 2006a

<sup>257</sup> Lunze, 2006a

angepasst, dass man alle  $m$  Eingangsgrößen im Eingangsvektor  $u(t) \in \mathbb{R}^{(m \times 1)}$  und alle  $p$  Ausgangsgrößen im Ausgangsvektor  $y(t) \in \mathbb{R}^{(p \times 1)}$  zusammenfasst. Das System wird nun beschrieben durch

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t) \cdot u(t) \end{aligned} \tag{2.38}$$

wobei hier die Steuermatrix  $B(t) \in \mathbb{R}^{(n \times m)}$ , die Beobachtungsmatrix  $C(t) \in \mathbb{R}^{(p \times n)}$  und die Durchgangsmatrix  $D(t) \in \mathbb{R}^{(p \times m)}$  eingeführt wurden, um die neu eingeführten Dimensionen von Ein- und Ausgangsvektoren zu berücksichtigen. Der Signalfluss in dieser Systemdarstellung ist in Bild 39 veranschaulicht.

Die Koeffizienten der einzelnen Elemente des Zustandsraummodells kann man aus der bzw. den Differenzialgleichungen des Systems ableiten, indem man diese derart umformt, dass man ein System von Differenzialgleichungen erster Ordnung erhält. Sind diese bestimmt, so kann man in der Folge einen Regler entwerfen, um so das Verhalten des Systems durch Vorgabe der Eingangsgröße(n)  $u(t)$  zu beeinflussen.

Dazu sollen im Folgenden zwei grundlegende Klassen von Reglern vorgestellt werden, die sich direkt aus der vorliegenden Systemarchitektur ergeben.

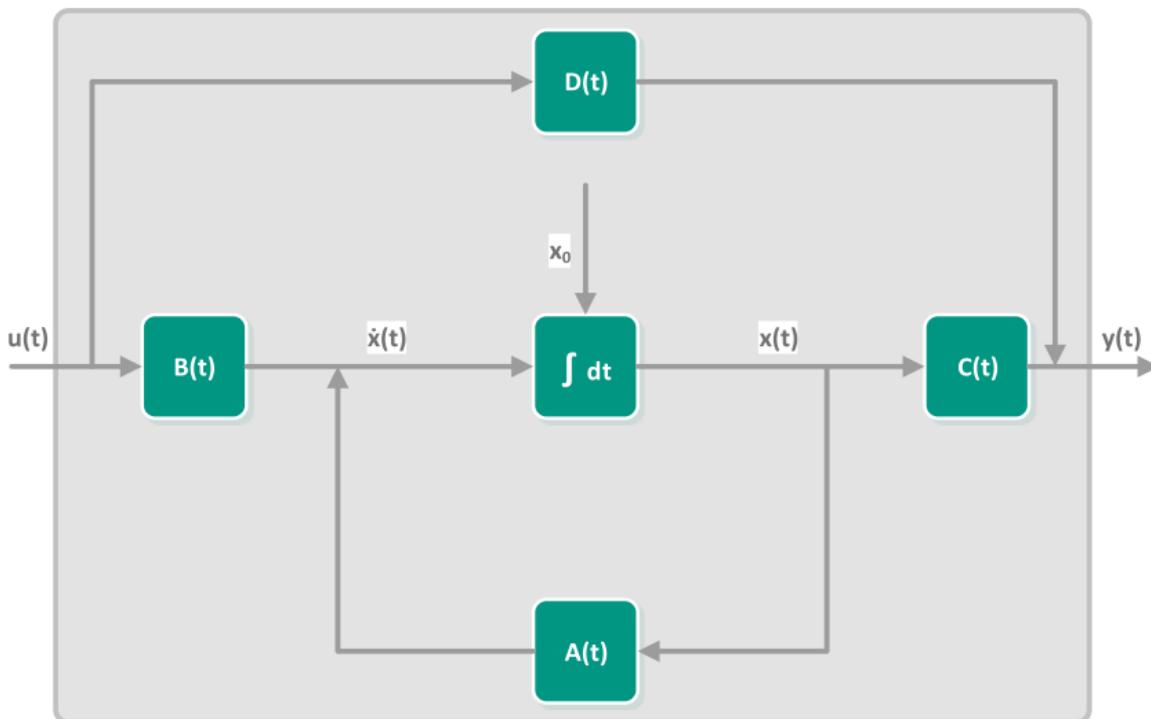


Bild 39: Schematische Darstellung des Signalflusses in der Zustandsraumdarstellung, die graue Unterlegung symbolisiert das gesamte regelungstechnische System

Für diese Betrachtung der grundlegenden Strukturen von Reglern für die bereits eingeführten Mehrgrößensysteme (MIMO-Systeme) wird das in (2.38) beschriebene Systemmodell um eine Störung  $d(t) \in \mathbb{R}^{(q \times 1)}$  erweitert. Damit ergibt sich die folgende Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B_1(t)u(t) + B_2(t)d(t), & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= C(t)x(t) + D_1(t) \cdot u(t) + D_2(t)d(t) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Hier wird der Einfluss der Störung auf den Zustand des Systems sowie auf dessen Ausgang durch die Matrizen  $B_2(t) \in \mathbb{R}^{(n \times q)}$  und  $D_2(t) \in \mathbb{R}^{(p \times q)}$  dargestellt.

### 2.9.1.1 Regelung durch Zustandsrückführung

Zur Regelung eines Systems der in (2.39) gezeigten Zustandsraumdarstellung wird typischerweise eine Rückführungsschaltung verwendet. Sofern bei einem System alle Zustandsvariablen messbar sind – also  $x(t)$  vollständig messbar ist, besteht die Möglichkeit, das Streckenverhalten nach einem Regelgesetz der Art

$$u(t) = -K \cdot x(t) \quad (2.40)$$

beeinflussen. Hier ist  $K \in \mathbb{R}^{(m \times n)}$  die sogenannte Reglermatrix und gibt die Proportionalität zwischen der Stellgröße  $u(t)$  und dem Systemzustand  $x(t)$  an.

Die technische Umsetzung einer solchen Zustandsrückführung ist jedoch in den meisten Anwendungsfällen nicht möglich, da eine Messung des vollständigen Systemzustandes technisch nur schwer oder gar nicht realisierbar ist.<sup>258</sup>

Ist dies der Fall so kann man versuchen, die gewünschten Regelkreiseigenschaften mithilfe einer Ausgangsrückführung zu erreichen.

### 2.9.1.2 Regelung durch Ausgangsrückführung

Bei der Ausgangsrückführung wird der Regler, genau wie auch bei einer Zustandsrückführung, als ein Rückführungsglied ausgeführt, welches einen Ausgang proportional zu den eingehenden Signalen erzeugt. Jedoch wird hierbei nun nicht der komplette Systemzustand zurückgeführt, sondern ein Signalvektor, der den messbaren Anteil der für die Charakterisierung des Systemzustandes notwendigen Signale enthält. Dabei ist der zurückgeführte Systemausgang  $y(t)$  im einfachsten Fall eine Untermenge des Systemzustandes  $x(t)$ . Das durch die Rückführung entstehende System ist in Bild 40 schematisch dargestellt und kann wie folgt beschrieben werden

<sup>258</sup> Lunze, 2013b

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B_1(t)u(t) + B_2(t)d(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D_1(t)u(t) + D_2(t)w(t) \\ u(t) &= -K_y y(t) + Vw(t) \end{aligned} \tag{2.41}$$

Hier ist  $w(t)$  eine mögliche Sollwertvorgabe an das System, welche mit dem Vorfilter  $V$  gewichtet wird.

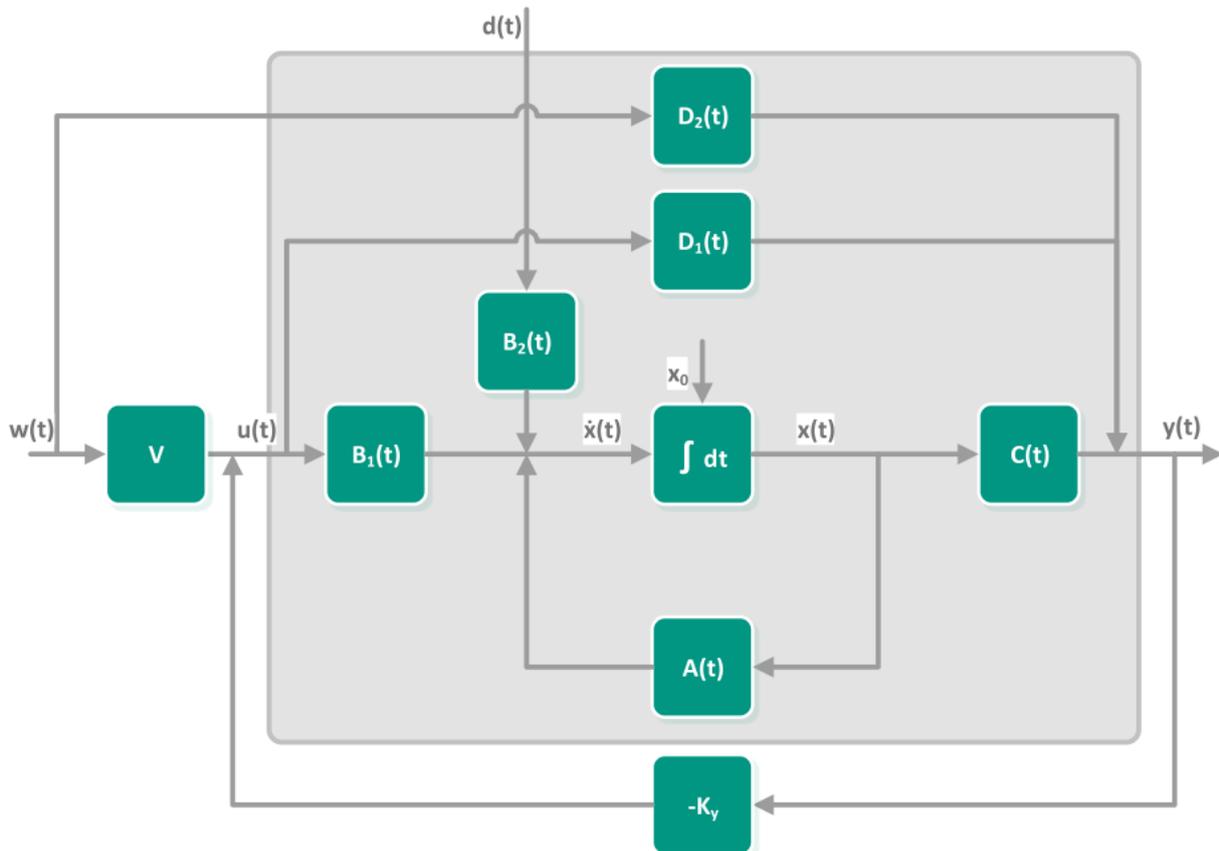


Bild 40: Ausgangsrückführung durch einen konstanten Faktor  $K_y$  am Beispiel eines regelungstechnischen Systems mit Sollwertvorgabe  $w(t)$ , Vorfilter  $V$  und äußerer Störung  $d(t)$

Da in dem für diesen Regelkreis geltenden Regelgesetz

$$u(t) = -K_y y(t) + Vw(t) \tag{2.42}$$

die im Falle einer Sollwertvorgabe auftretende Regelabweichung  $e(t) = w(t) - y(t)$  nicht direkt enthalten ist, besitzt dieser Regelkreis zwei Freiheitsgrade und erlaubt daher eine getrennte Gestaltung der Regelkreisdynamik und des Störverhaltens durch Wahl der Parameter  $K_y$  und  $V$ .<sup>259</sup>

<sup>259</sup> Lunze, 2013b

Die Regelung durch Ausgangsrückführung kann nach den Ausführungen von LUNZE „als der beste technisch realisierbare P-Regler“ angesehen werden, da er die größtmögliche messbare Information über den Systemzustand verwendet, um die Regelkreisdynamik zu beeinflussen.

### 2.9.2 Steuerbarkeit, Stabilisierbarkeit und Beobachtbarkeit von Regelungstechnischen Systemen

Bevor man einen geeigneten Regler für eine gegebene Strecke nach den in Kapitel 2.9.1 beschriebenen Methoden auslegen kann, ist es hilfreich, diese Strecke zunächst einmal auf ihre grundlegenden Eigenschaften zu untersuchen. Dabei kann festgestellt werden, ob Einschränkungen für eine erfolgreiche Regelung der vorliegenden Strecke bestehen und – sofern dies der Fall ist – welcher Art die Einschränkungen sind. Für diese Analyse werden hier drei Konzepte vorgestellt, die ein zu regelndes System auf seine Eigenschaften Steuerbarkeit, Stabilisierbarkeit und Beobachtbarkeit hin testen, wobei das System

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t)\end{aligned}$$

anhand der Systemmatrizen seiner Zustandsraumdarstellung analysiert wird.

#### 2.9.2.1 Steuerbarkeit

Das Konzept der Steuerbarkeit bezieht sich auf die Möglichkeit, das System durch Einwirkung des Regelsignals innerhalb einer endlichen Zeit  $t$  in einen gewünschten Zustand zu überführen. Dabei wird nach DULLERUD UND PAGANINI die Menge der erreichbaren Zustände definiert durch die Gesamtheit aller Zustände  $x(t) = \xi$ , die innerhalb einer gegebenen Zeit  $t$  mittels eines geeigneten Regeleingangs  $u(t)$  erreicht werden können

$$\mathcal{R}_t = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \exists u(t): x(t) = \xi\} \subset \mathbb{R}^n. \quad (2.43)$$

Diese Zustände bilden den mit dem gegebenen System assoziierten steuerbaren Unterraum, welcher definiert ist durch das Bild der Steuerbarkeitsmatrix<sup>260</sup>

$$\mathcal{C}_{AB} = \text{Im} \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.44)$$

Wenn dieser Unterraum die Dimension  $n$  hat, dann wird das Matrizenpaar  $(A, B)$  steuerbar genannt.

---

<sup>260</sup> Dullerud und Paganini, 2000

Alternativ kann zur Prüfung der Steuerbarkeit auch die Bedingung verwendet werden, dass die Steuerbarkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \tag{2.45}$$

vollen Rang besitzt. Dies kann man auch mithilfe des Popovich-Belevitch-Hautus Tests überprüfen. Dabei wird geprüft, ob für jeden Eigenwert  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  die Bedingung

$$\text{rank}[A - \lambda_i \cdot \mathbb{I} \quad B] = n \tag{2.46}$$

erfüllt ist.<sup>261</sup>

Wenn die genannten Bedingungen für das gegebene System mit den Matrizen  $(A, B)$  in der Zustandsgleichung erfüllt sind, so kann man durch einen geeigneten Reglereingang  $u(t)$  das System in endlicher Zeit  $t$  in jeden gewünschten Zustand bringen. Damit ist das System steuerbar.

### 2.9.2.2 Stabilisierbarkeit

Die Forderung nach der Stabilisierbarkeit eines Systems unter Einfluss eines Reglers ist ähnlich der nach vollständiger Steuerbarkeit des Systems, mit dem Unterschied, dass die Stabilisierbarkeit nicht für alle Zustände gelten muss, sondern nur solche, die sich durch ein instabiles Systemverhalten auszeichnen. Daher lässt sich der Popovich-Belevitch-Hautus Test in (2.46) abwandeln zu der Forderung, dass

$$\text{rank}[A - \lambda_j \cdot \mathbb{I} \quad B] = n$$

nicht für alle  $\lambda_j \in \mathbb{C}$  gilt, sondern nur für solche Eigenwerte  $\lambda_j \in \overline{\mathbb{C}}^+$ , die sich in der rechten geschlossenen komplexen Halbebene befinden, sich demnach durch  $\Re(\lambda_j) \geq 0$  auszeichnen und damit zu einem instabilen Systemverhalten führen. Wenn das System nun für diese Zustände steuerbar ist, so lässt sich jeder instabile Zustand durch geeignete Regelung immer in einen stabilen Zustand überführen.<sup>261,262</sup>

Darunter versteht man die Forderung nach der Existenz einer beschränkten Matrixfunktion  $K(t)$ , welche das geregelte System

$$\dot{x}(t) = (A(t) + B(t)K(t))x(t) \tag{2.47}$$

---

<sup>261</sup> Dullerud und Paganini, 2000

<sup>262</sup> Föllinger und Franke, 1982

zu einem exponentiell stabilen Verhalten führt. Dies ist der Fall, wenn zwei Konstanten  $(a, \alpha) > 0$  existieren, sodass für die Zustandsübergangsmatrix  $\mathcal{R}(t, s)$ , welche den homogenen Teil der Lösung der Zustandsgleichung in (2.38)

$$x(t) = \mathcal{R}(t, s)x(s) + \int_s^t \mathcal{R}(t, \tau)B(\tau)u(\tau) d\tau$$

darstellt, gilt<sup>263</sup>

$$\|\mathcal{R}(t, s)\| \leq a \cdot e^{-\alpha(t-s)} \quad \forall t \geq s \quad (2.48)$$

Mit der in (2.48) beschriebenen Beschränkung der Norm der Zustandsübergangsmatrix durch eine zeitlich abfallende Exponentialfunktion wird das zuvor geforderte exponentiell stabile Verhalten des Systemzustandes sichergestellt.

### 2.9.2.3 Beobachtbarkeit

Die Prüfung, ob ein System beobachtbar ist, erfolgt nach gleichem Muster wie die in 2.9.2.1 und 2.9.2.2 vorgestellten Verfahren zur Steuerbarkeit und Stabilisierbarkeit. Ein System gilt nach DULLERUD UND PAGANINI genau dann als beobachtbar, wenn sich der Systemzustand oder auch die Anfangsbedingungen des Systems aus der Messung des Systemausgangs  $y(t)$  rekonstruieren lassen.

Dies ist nur dann der Fall, wenn die Abbildung des Anfangszustandes  $x_0$  auf den Ausgang zum Zeitpunkt  $t$ ,  $y(t)$ , eindeutig ist. Wenn also  $\Psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^p)$  mit  $\Psi: x_0 \rightarrow y(t)$  die Abbildung von  $x_0$  auf  $y(t)$  ist, sodass

$$\begin{aligned} x_0 &\xrightarrow{\Psi} Ce^{At}x_0 \\ y &= \Psi x_0 \end{aligned} \quad (2.49)$$

gilt, dann ist diese Abbildung genau dann eindeutig, wenn der Kern der Abbildung  $\text{Ker}(\Psi)$  Null ist. In diesem Fall hat die zweite Gleichung in (2.49) exakt eine Lösung.<sup>264</sup>

$$\text{Ker}(\Psi) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.50)$$

<sup>263</sup> Petersen et al., 2000

<sup>264</sup> Dullerud und Paganini, 2000

In Gleichung (2.50) wurde nun für die Abbildung  $\Psi$  die sogenannte Beobachtbarkeitsmatrix eingesetzt. Wenn diese Matrix nun vollen Spaltenrang hat, so ist die in Gleichung (2.50) formulierte Bedingung erfüllt. Man kann diese Bedingung auch als Steuerbarkeitsbedingung und damit in der gleichen Form wie (2.46) formulieren. Dazu muss man das invertierte System betrachten, in welchem Ein- und Ausgänge umgekehrt sind. Wenn das Teilsystem, welches durch  $(A, C)$  beschrieben wird, beobachtbar ist, dann ist das invertierte System mit dem Teilsystem  $(A^+, C^+)$  steuerbar. Das Matrizenpaar  $(A, C)$  ist nach Kapitel 2.9.2.1 also genau dann beobachtbar, wenn die Steuerbarkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} C^+ & A^+C^+ & (A^+)^2C^+ & (A^+)^3C^+ & \dots & (A^+)^{n-1}C^+ \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

vollen Rang hat<sup>265</sup>. Damit ergibt sich als alternative Bedingung zur Erfüllung der Beobachtbarkeit von  $(A, C)$ , die Forderung, dass

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C^+ & A^+C^+ & (A^+)^2C^+ & (A^+)^3C^+ & \dots & (A^+)^{n-1}C^+ \end{bmatrix} = n. \quad (2.52)$$

Damit stehen mit den in diesem Kapitel vorgestellten Methoden Werkzeuge zur Systemuntersuchung zur Verfügung, welche sich schon bei der Modellbildung und in der Phase des Reglerdesigns verwenden lassen, um eine möglichst wirkungsvolle und effiziente Regelung zu realisieren.

### 2.9.3 Linearisierung von Systemen im Zustandsraum

Die Beschreibung von regelungstechnischen Systemen im Zustandsraum basiert, wie in Abschnitt 2.9.1 gezeigt, auf der Beschreibung durch lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung. In der Realität treten jedoch in fast allen Fällen auch Nichtlinearitäten, wie zum Beispiel arbeitspunktabhängige dynamische Eigenschaften oder auch quadratische Abhängigkeiten, auf. In einem solchen Fall ist für eine Beschreibung des allgemeinen nichtlinearen Systems

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x, u) \\ y(t) &= g(x, u) \end{aligned} \quad (2.53)$$

im Zustandsraum eine Linearisierung notwendig.

Dabei wird je nach Ursache des nichtlinearen Verhaltens in der Vorgehensweise unterschieden.

---

<sup>265</sup> Dullerud und Paganini, 2000

## 2.9.3.1 Linearisierung um einen Gleichgewichtszustand

Im Falle eines generellen nichtlinearen Verhaltens, wie zum Beispiel einer Abhängigkeit des Systemverhaltens von seinem Arbeitspunkt, kann eine Linearisierung um einen Gleichgewichtszustand durchgeführt werden. Dabei wird angenommen, dass sich der Systemzustand lediglich in kleinen Abständen von einem stationären Zustand  $(\bar{x}, \bar{u})$  bewegt und daher beschrieben werden kann durch<sup>266</sup>

$$\begin{aligned} x(t) &= \bar{x} + \delta x(t) \\ u(t) &= \bar{u} + \delta u(t) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Hierbei ist der stationäre Zustand definiert durch

$$\dot{x}(t)\Big|_{(\bar{x}, \bar{u})} = f(\bar{x}, \bar{u}) = 0.$$

Somit ergibt sich für die Berechnung der Zustandsdifferenzialgleichung in (2.53) direkt<sup>266</sup>

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial}{\partial t}(\bar{x} + \delta x) = \frac{\partial(\delta x)}{\partial t} = (\dot{\delta x})(t)$$

und damit die linearisierte Zustandsdifferenzialgleichung

$$(\dot{\delta x}) = A(\delta x) + B(\delta u). \quad (2.55)$$

In (2.55) wurde genutzt, dass der Zustand, um welchen das System hier linearisiert wurde, ein Beharrungszustand ist und somit selbst keinerlei zeitliche Änderung aufweist, also

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ u \rightarrow \bar{u}}} \dot{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow \bar{x} \\ u \rightarrow \bar{u}}} f(x, u) = 0$$

gilt.<sup>266</sup>

Die Matrizen des linearisierten Systems (2.55) sind nun aufgrund der Entwicklung von  $f(x, u)$  nach Taylor um den Punkt  $(\bar{x}, \bar{u})$

$$(\dot{\delta x}) = f(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(\bar{x}, \bar{u})} \cdot \delta x + \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{(\bar{x}, \bar{u})} \cdot \delta u$$

gegeben durch

---

<sup>266</sup> Föllinger und Konigorski, 2013

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{u})} \quad (2.56)$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_p} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_p} \end{bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{u})}$$

Analog wird die linearisierte Ausgangsgleichung des Systems zu

$$\delta y = C(\delta x) + D(\delta u) \quad (2.57)$$

mit den Matrizen  $C$  und  $D$  des linearisierten Systems, analog zu (2.56)<sup>266</sup>

$$C = \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})} \quad (2.58)$$

$$D = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{(\bar{x}, \bar{u})}$$

Somit ergibt die Linearisierung um einen stationären Zustand für ein System, welches durch eine Zustands- und eine Ausgangsgleichung beschrieben wird, den Übergang<sup>266</sup>

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{um } (\bar{x}, \bar{u})]{\text{Linearisierung}} \left\{ \begin{array}{l} (\delta \dot{x}) = A(\delta x) + B(\delta u) \\ \delta y = C(\delta x) + D(\delta u) \end{array} \right\} \quad (2.59)$$

Die damit entstehende Beschreibung im Zustandsraum beschreibt die Dynamik der Abweichungen von dem stationären Punkt  $(\bar{x}, \bar{u})$  für den Fall, dass die Abweichungen klein sind gegenüber den gesamten Signalen.

## 2.9.3.2 Linearisierung um eine Referenztrajektorie

In einigen Fällen kommt es jedoch vor, dass ein regelungstechnisches System nicht stationär in einem bestimmten Punkt  $(\bar{x}, \bar{u})$  gehalten werden soll, sondern einem von außen vorgegebenen Verlauf folgen soll. Eine solche Bahn  $x_R(t)$  wird Referenztrajektorie genannt und genügt der Zustandsdifferenzialgleichung

$$\dot{x}_R(t) = f(x_R, u_R). \quad (2.60)$$

Damit ist das Systemverhalten zunächst einmal nichtlinear. Aufgrund von Störungen muss davon ausgegangen werden, dass das System sich nicht genau auf der vorgegebenen Bahn bewegt. Andererseits darf jedoch angenommen werden, dass die Abweichungen durch den Einsatz eines geeigneten Reglers klein gegenüber der Referenz sind und damit die Beschreibung des Zustandes

$$x(t) = x_R(t) + (\delta x)(t) \quad (2.61)$$

und gleiches für das Eingangssignal

$$u(t) = u_R(t) + (\delta u)(t) \quad (2.62)$$

gilt.<sup>267</sup>

Mit (2.61) und (2.62) wird (2.60) zu

$$\dot{x}_R(t) + (\dot{\delta x})(t) = f(x_R + (\delta x), u_R + (\delta u)).$$

Nun kann die Annahme ausgenutzt werden, dass die Abweichungen von der Referenztrajektorie klein seien. Damit lässt sich  $f(x, u)$  in eine Taylorreihe entwickeln und alle Glieder höherer Ordnung vernachlässigen

$$\dot{x}_R(t) + (\dot{\delta x})(t) \approx f(x_R, u_R) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x_R, u_R)} \cdot (\delta x)(t) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(x_R, u_R)} \cdot (\delta u)(t) \quad (2.63)$$

Damit ergibt sich nun für die um die Referenztrajektorie  $(x_R(t), u_R(t))$  linearisierte Zustandsdifferenzialgleichung

$$(\dot{\delta x})(t) = A(\delta x)(t) + B(\delta u)(t) \quad (2.64)$$

mit den Matrizen<sup>267</sup>

---

<sup>267</sup> Föllinger und Franke, 1982

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(x_R(t), u_R(t))} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(x_R(t), u_R(t))} \tag{2.65}$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(x_R(t), u_R(t))} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial u_p} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_p} \end{bmatrix}_{(x_R(t), u_R(t))}$$

und der entsprechend linearisierten Ausgangsgleichung

$$\delta y = C(\delta x) + D(\delta u)$$

mit der analogen Definition der Matrizen

$$C = \left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(x_R(t), u_R(t))} \tag{2.66}$$

$$D = \left. \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(x_R(t), u_R(t))}$$

Hier besteht der wesentliche Unterschied zu der in Abschnitt 2.9.3.1 durchgeführten Linearisierung um einen stationären Zustand darin, dass die Matrizen in (2.65) und (2.66) im Allgemeinen zeitabhängig sind, während die in (2.56) und (2.58) beschriebenen Systemmatrizen konstant sind.<sup>268</sup>

### 2.9.4 Unsicherheitsbehaftete Systeme

Ein zentraler Punkt bei dem Entwurf robuster Regler ist die Betrachtung und Modellierung der mit dem System assoziierten Unsicherheiten. Eine in realen Systemen auftretende Unsicherheit kann zum Beispiel ein konstanter oder auch zeitlich variierender reeller Parameter sein, welcher die Unsicherheit in einem physikalischen Parameter des Systems (z.B. ein elektrischer Widerstand  $R(t) = R_0 + \delta R(t)$ ), oder auch eine Übertragungsfunktion, welche die Systemunsicherheit beschreibt, die durch eventuelle Vernachlässigung von Teilen der Systemdynamik entsteht (z.B. vernachlässigte ungewollte und unvermeidbare

---

<sup>268</sup> Föllinger und Franke, 1982

Kapazitäten in einer elektrischen Schaltung) oder auch eine nichtlineare Abbildung, welche die vernachlässigten Nichtlinearitäten der Systemdynamik repräsentiert.<sup>269</sup>

Der erste Schritt zur Behandlung eines unsicherheitsbehafteten Systems ist der Versuch, die auftretenden Unsicherheiten mittels einer Möbius-Transformation (*linear fractional transformation*, LFT) vom nominellen System zu separieren.<sup>270</sup> Das dadurch entstehende System kann dann im Zustandsraum durch folgendes Gleichungssystem beschrieben werden

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1u + B_2\xi \\ z &= C_1x + D_1\xi \\ y &= C_2x + D_2u + D_3\xi\end{aligned}\tag{2.67}$$

Dabei sind  $x(t)$ ,  $y(t)$  und  $u(t)$  die aus Kapitel 2.9.1 bekannten Vektoren des Systemzustandes, des Ausgangs und des Eingangs,  $z(t)$  ist nun der Systemausgang, welcher als Eingang an die Systemunsicherheit weitergegeben wird – der sogenannte *uncertainty output*<sup>271</sup> – und  $\xi(t)$  ist der Ausgang der Systemunsicherheit, welcher wiederum als Eingang an das System weitergegeben wird – auch *uncertainty input* genannt.<sup>272</sup> Eine Darstellung dieses Systems im Blockschaltbild ist in Bild 41 zu sehen

Durch die Klassifizierung und im nächsten Schritt die Quantifizierung der Systemunsicherheiten gelingt es, eventuell vorhandene wertvolle Informationen über das unsichere Systemverhalten zu nutzen und damit das Ergebnis des robusten Regelungsproblems weniger konservativ zu gestalten. Die Informationen können dabei sowohl in direkt in der Modellierung des Systems bei der Aufstellung der Systemmatrizen, oder auch als zusätzliche Randbedingungen für das System einfließen.<sup>269, 273</sup>

<sup>269</sup> Fan, Michael K. H. et al., 1991

<sup>270</sup> Petersen et al., 2000

<sup>271</sup> Petersen et al., 2000

<sup>272</sup> Savkin und Petersen, 1999

<sup>273</sup> Dieses Vorgehen entspricht damit dem Versucht, den Anteil der Epistemischen Unsicherheit sowie der Produktmodellierungsunsicherheit möglichst stark zu reduzieren und möglichst ausschließlich Aleatorische Unsicherheit bei der Modellierung des Systems zuzulassen. (vgl. Würtenberger, 2018)

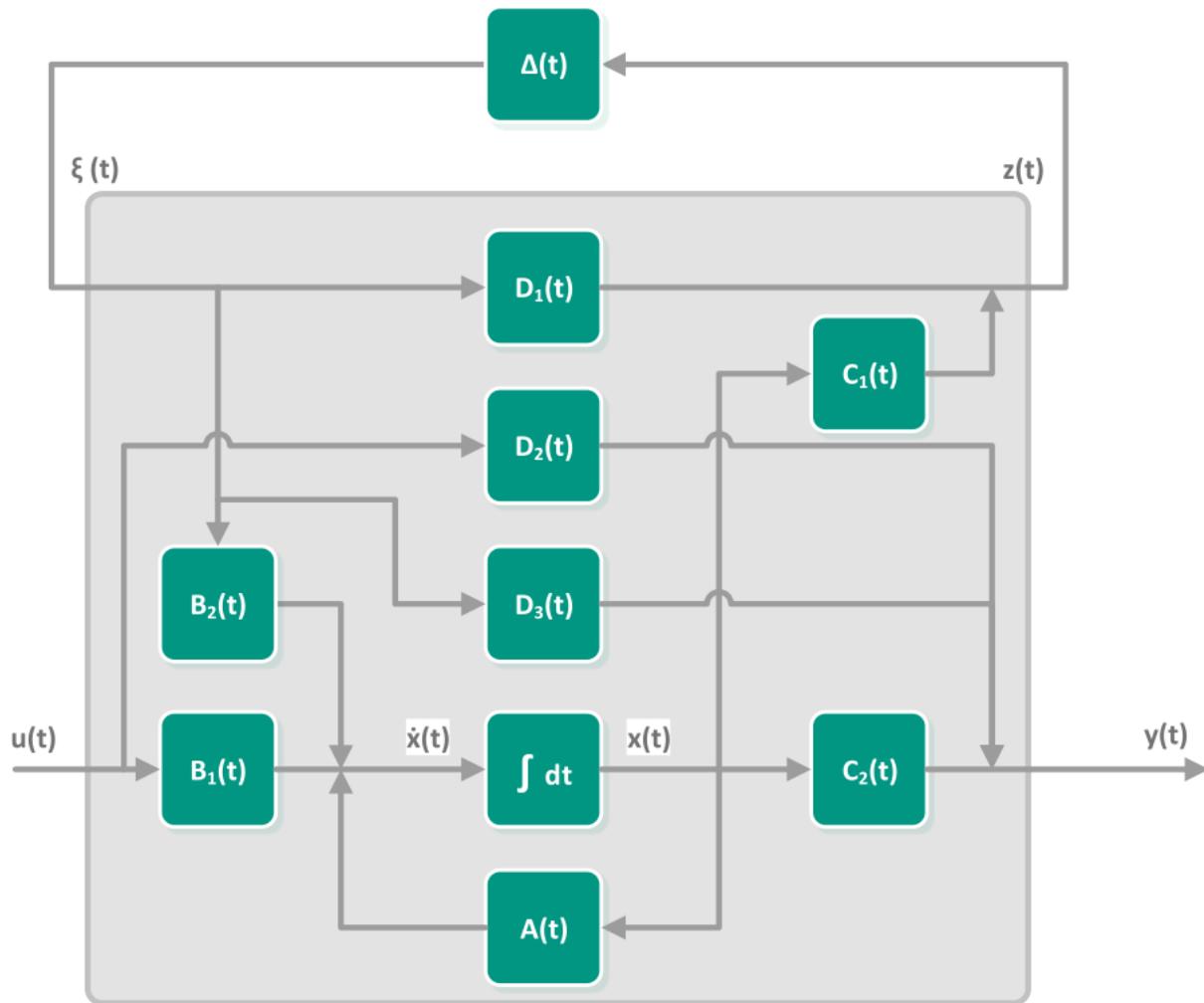


Bild 41: Allgemeine Zustandsraumdarstellung eines unsicherheitsbehafteten Systems mit der Unsicherheit  $\Delta(t)$ , dem *uncertainty output*  $z(t)$  und dem *uncertainty input*  $\xi(t)$ , das nominale System ist mit seinen Ein- und Ausgängen grau hinterlegt dargestellt

### 2.9.4.1 Klassifizierung unsicherheitsbehafteter Systeme

Eine grundlegende Unterscheidung von Unsicherheiten kann schon alleine durch ihre Wirkungsweise getroffen werden. Dabei wird unterschieden zwischen strukturierten und unstrukturierten Unsicherheiten. Während eine unstrukturierte Unsicherheit alleine durch einen einzigen eingehenden Signalvektor  $z(t)$  und einen einzigen ausgehenden Vektor  $\xi(t)$  gekennzeichnet ist, so besteht eine strukturierte Unsicherheit aus  $k$  separaten Blöcken und kann dementsprechend durch  $k$  Paare aus Eingangs- und Ausgangsvektoren  $(z_i(t), \xi_i(t))$  beschrieben werden, welche sich nicht gegenseitig beeinflussen können.<sup>274</sup> Dieser Fall ist in Bild 42 dargestellt.

<sup>274</sup> Petersen et al., 2000

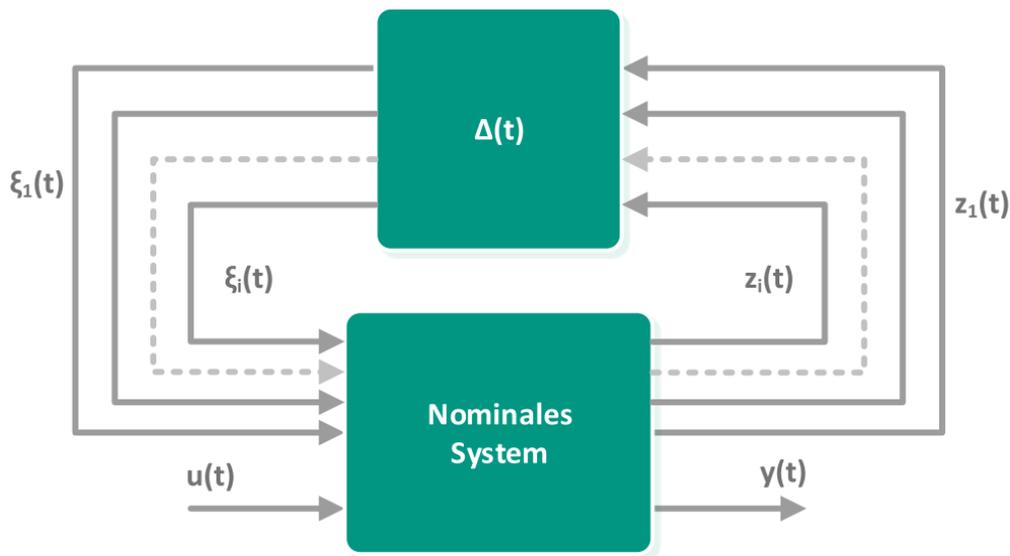


Bild 42: Schematische Zustandsraumdarstellung eines unsicherheits-behafteten Systems mit strukturierter Unsicherheit

Eine weitere grundlegende Unterscheidung kann gemacht werden zwischen zeitlich veränderlichen Norm-beschränkten Unsicherheiten

$$\| \Delta(t) \| \leq \mu \quad \forall t \geq 0$$

und Unsicherheiten, welche durch ihre  $\mathcal{H}_\infty$ -Norm im Frequenzbereich beschränkt sind

$$\| \Delta(i\omega) \|_\infty \leq \mu \quad \forall \omega.$$

Diese Unterscheidung beruht auf der Tatsache, dass in den meisten Anwendungsfällen die Systemunsicherheiten zwar unbekannt, aber in jedem Fall auch in ihrer Größe beschränkt sind. Zum Beispiel kann ein System mit zeitlich veränderlicher Norm-beschränkter Unsicherheit beschrieben werden durch<sup>275</sup>

$$\dot{x}(t) = [A + B_2\Delta(t)C_1]x(t) + [B_1 + B_2\Delta(t)D_1]u(t)$$

$$y(t) = [C_2 + D_2\Delta(t)C_1]x(t) + D_2\Delta(t)D_1u(t)$$

Dabei sind  $x(t)$ ,  $u(t)$ ,  $y(t)$  der Zustands-, der Eingangs- und der Ausgangsvektor und  $\Delta(t) \in \mathbb{R}^{p \times q}$  ist die zeitlich veränderliche Matrix der unsicheren Parameter, welche der Beschränkung  $\Delta(t)^T \Delta(t) \leq 1$  unterliegt.<sup>276</sup>

<sup>275</sup> Petersen et al., 2000

<sup>276</sup> Savkin und Petersen, 1999

Alternativ kann man die Systemgleichungen mithilfe des Ausgangssignals der Systemunsicherheit  $\xi(t) = \Delta(t)z(t)$  umschreiben zu

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1u(t) + B_2\xi(t) \\ z(t) &= C_1x(t) + D_1u(t) \\ y(t) &= C_2x(t) + D_2\xi(t) \end{aligned}$$

Mit der Beschränkung für die Norm der Unsicherheitsmatrix  $\Delta(t)$  und dem nun eingeführten Signal des Unsicherheitsausgangs  $\xi(t)$  erhält man als Beschränkung der Systemunsicherheit

$$\|\xi(t)\| \leq \|z(t)\| \tag{2.68}$$

Ob nun die Beschreibung der Unsicherheit als zeitlich-veränderlich und Norm-beschränkt oder als frequenzabhängig und  $\mathcal{H}_\infty$ -Norm-beschränkt erfolgt, hängt im Anwendungsfall von der Gestalt und den Abhängigkeiten der Unsicherheiten ab.<sup>277</sup>

#### 2.9.4.2 Integrale Quadratische Zwangsbedingungen und ihre Bedeutung

Die Beschreibung einer zeitlich veränderlichen Norm-beschränkten Unsicherheit wie in Gleichung (2.68) genügt zwar zum Beispiel für zeitlich veränderliche unsichere Parameter, jedoch gilt sie nicht für dynamische Unsicherheiten, die beispielsweise aus nichtmodellierter Systemdynamik entstehen können. Hieraus motivieren MEGRETSKI UND RANTZER<sup>278</sup> sowie PETERSEN ET AL.<sup>277</sup> die Beschreibung von Systemunsicherheiten mithilfe von Integralen Quadratischen Zwangsbedingungen (*integral quadratic constraints*, IQCs), welche im Folgenden vorgestellt wird.

Ein einfaches Beispiel für die Verwendung von IQCs ist der Fall einer Unsicherheit  $\Delta$ , welche stabil und in ihrer  $\mathcal{H}_\infty$ -Norm beschränkt ist

$$\|\Delta(j\omega)\|_\infty \leq 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}.$$

Die  $\mathcal{H}_\infty$ -Norm eines stabilen, properen Operators wird gemäß FÖLLINGER UND KONIGORSKI definiert durch das Supremum des maximalen Singulärwertes

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\text{Re}(s) < 0} \max \sigma(G(s)) \tag{2.69}$$

und wird induziert durch das Verhältnis der 2-Normen von Ein- und Ausgangsvektor<sup>279</sup>

<sup>277</sup> Petersen et al., 2000

<sup>278</sup> Megretski und Rantzer, 1997

<sup>279</sup> Föllinger und Konigorski, 2013

$$\|G(s)\|_{\infty} = \sup_{u(\cdot), y(\cdot) \in \mathbb{L}_2[0, \infty), \|u(\cdot)\|_2 = d} \frac{\|y(\cdot)\|_2}{\|u(\cdot)\|_2}. \quad (2.70)$$

Mit der Definition der 2-Norm

$$\|u(t)\|_2 = \left( \int_0^{\infty} u(t)^T u(t) dt \right)^{1/2}$$

und unter Verwendung des Parseval'schen Theorems<sup>279</sup> ergibt sich eine äquivalente Beschreibung dieser Beschränkung als Ungleichung im Zeitbereich

$$\int_0^{\infty} \|\xi(t)\|^2 dt \leq \int_0^{\infty} \|z(t)\|^2 dt \quad (2.71)$$

für alle Eingangssignale der Unsicherheit  $z(t)$  und ihrer Euklidischen Norm  $\|z(t)\|$ . Hier ist (2.71) ein Beispiel für eine integrale quadratische Zwangsbedingung im Zeitbereich, welche sich auf einfache Weise zur zusätzlichen Betrachtung des Einflusses von Rauschen auf das System erweitern lässt:<sup>279,280</sup>

$$\int_0^{\infty} \|\xi(t)\|^2 dt \leq d + \int_0^{\infty} \|z(t)\|^2 dt \quad (2.72)$$

Hier ist  $d > 0$  eine Konstante, die eine obere Grenze für das Integral des Rauscheinflusses darstellt. Dies lässt sich leicht erkennen, indem man annimmt, dass das Eingangssignal in die Systemunsicherheit  $z(t)$  Null wird und somit der Block der Unsicherheit  $\Delta$  keinen Einfluss mehr auf das System nimmt. Damit ergibt sich für den Einfluss des Rauschens die direkte Beschränkung<sup>279,280</sup>

$$\int_0^{\infty} \|\xi(t)\|^2 dt \leq d,$$

welche aufgrund ihrer Form einer Beschränkung der Energie des Rauschsignals gleichkommt.<sup>281</sup> Weiterhin kann man die Konstante  $d$  in (2.72) zur Beschreibung von Anfangsbedingungen für die Dynamik der Systemunsicherheiten verwenden. Dies lässt sich leicht zeigen, wenn man  $z(0) = 0$  annimmt. Dabei ist zu erkennen, dass hier  $\xi(0) \neq 0$  durch die Verwendung von  $d > 0$  ermöglicht wird.<sup>280</sup>

Eine allgemeinere Formulierung von IQCs kann für den Fall von Unsicherheiten der Form

<sup>280</sup> Petersen et al., 2000

<sup>281</sup> Megretski und Rantzer, 1997

$$\begin{aligned}
 \xi_1(t) &= \phi_1(t, x(\cdot), u(\cdot)) \\
 \xi_2(t) &= \phi_2(t, x(\cdot), u(\cdot)) \\
 \xi_3(t) &= \phi_3(t, x(\cdot), u(\cdot)) \\
 &\vdots \\
 \xi_k(t) &= \phi_k(t, x(\cdot), u(\cdot))
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

nach Definition von PETERSEN ET AL. wie folgt vorgenommen werden:

„Eine Unsicherheit der Form (2.73) ist eine zulässige Unsicherheit [...], wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind: Sei ein lokal quadratintegrierbarer Regeleingang  $u(\cdot)$  und eine zugehörige Lösung [der Systemgleichungen], definiert auf einem Existenzintervall  $(0, t)$ , gegeben, so existiert eine Sequenz  $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$  und Konstanten  $d_1 \geq 0, \dots, d_k \geq 0$ , sodass  $t_i \rightarrow t$ ,  $t_i \geq 0$  und

$$\int_0^{t_i} \|\xi_j(t)\|^2 dt \leq d_j + \int_0^{t_i} \|z_j(t)\|^2 dt \tag{2.74}$$

für alle  $i$  und alle  $j = 1, 2, \dots, k$ .“

Dabei erlaubt die Beschreibung der Unsicherheit in (2.73) nicht nur die Präsenz von nichtlinearen und zeitlich variierenden Unsicherheiten, sondern durch die direkte Abhängigkeit der Funktionale von der Regelgröße  $u(\cdot)$  auch die Beschreibung von dynamischen Unsicherheiten. Die Definition von Integralen Quadratischen Zwangsbedingungen nach (2.74) ermöglicht damit die Behandlung von unsicheren Systemen mit Regeleingang im Rahmen der Verwendung von IQCs und damit auch die Verwendung der  $\mathcal{H}_{\infty}$ -Regelungstheorie für die Reglersynthese im Falle unsicherer Systeme. Da bei dieser Beschreibung nicht vorausgesetzt wird, dass das zu beschreibende unsichere System stabil ist oder seine Lösungen für eine beliebig lange Zeitspanne existieren, ist es möglich, durch die Verwendung von IQCs eine Vielzahl von unsicheren Systemen zu behandeln.<sup>282,283</sup> Wenn der in der Herleitung von (2.74) angenommene Regler jedoch das System stabilisiert, so kann man auf die Verwendung der Zeitreihe  $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$  verzichten und den Fall  $t_j \rightarrow \infty$  betrachten. In diesem Fall lässt sich zeigen, dass die Beschreibung (2.74) äquivalent zur folgenden integralen quadratischen Zwangsbedingung im Frequenzbereich ist<sup>284</sup>

<sup>282</sup> Megretski und Rantzer, 1997

<sup>283</sup> Petersen et al., 2000

<sup>284</sup> Petersen et al., 2000

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \tilde{z}_i(i\omega) \\ \tilde{\xi}_i(i\omega) \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{z}_i(i\omega) \\ \tilde{\xi}_i(i\omega) \end{bmatrix} d\omega \geq -d_i. \quad (2.75)$$

In (2.75) sind  $\tilde{z}_i(i\omega)$  und  $\tilde{\xi}_i(i\omega)$  die jeweiligen Fourier-Transformationen der Ein- und Ausgangssignale der Unsicherheiten  $z_i(t)$  und  $\xi_i(t)$ .<sup>285</sup>

Über die Verwendung von IQCs zur simplen Beschreibung von Norm-Beschränkungen hinaus besteht auch die Möglichkeit, Gewichtungsmatrizen einzuführen, welche eine problemspezifische mathematische Behandlung ermöglichen. Auf diese Weise kann beispielsweise die unstrukturierte Unsicherheit

$$\xi(t) = \phi(t, x(\cdot), u(\cdot))$$

eines Systems mit einer gegebenen Gewichtungsmatrix  $Q$  (symmetrisch,  $Q = Q^T$ ) beschrieben werden durch

$$\int_0^t \xi(t)^T Q \xi(t) dt \leq d + \int_0^t \|z(t)\|^2 dt. \quad (2.76)$$

Diesem Prinzip folgend, kann auf Basis der Beschreibung im Frequenzbereich (2.75) nach MEGRETSKI UND RANTZER eine Vielzahl von Systemkomponenten und Eigenschaften mit der Methode der IQCs beschrieben werden. Dabei gilt allgemein, dass zwei Signale  $(z(t), \xi(t)) \in \mathbb{L}_2[0, \infty)$  die Integrale Quadratische Zwangsbedingung erfüllen, welche durch die Matrix  $\Pi$  definiert ist, wenn gilt<sup>285</sup>

$$\int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \tilde{z}(i\omega) \\ \tilde{\xi}(i\omega) \end{bmatrix}^\dagger \Pi(i\omega) \begin{bmatrix} \tilde{z}(i\omega) \\ \tilde{\xi}(i\omega) \end{bmatrix} d\omega \geq 0. \quad (2.77)$$

Hier definiert die Wahl der Matrix  $\Pi(i\omega)$  die Art der Unsicherheit, die durch die IQC beschrieben wird. Eine Auswahl solcher Matrizen für unterschiedliche Anwendungsbereiche wird in MEGRETSKI UND RANTZER gegeben und erläutert. Im Falle einer Beschreibung nach (2.76) ist die Fourier-Transformierte der Gewichtungsmatrix  $Q$  in der Matrix  $\Pi(i\omega)$  in (2.77) enthalten. Somit ist, je nach Problemstellung, eine Beschreibung von Systemunsicherheiten als auch externer Störungen des Systems mithilfe von Integralen Quadratischen Zwangsbedingungen möglich und nach den Ausführungen von u.a. PETERSEN ET AL. sowie MEGRETSKI UND RANTZER auch vorteilhaft im Falle der Auslegung eines robusten Reglers.<sup>284,285</sup>

Dies gilt insbesondere, da in vielen Fällen die exakte Modellierung der einzelnen Unsicherheiten nicht möglich ist oder das Ausmaß der Unsicherheiten nicht genau

<sup>285</sup> Megretski und Rantzer, 1997

bekannt ist, wie dies zum Beispiel bei nicht modellierter Systemdynamik der Fall ist. Die Verwendung von Integralen Quadratischen Zwangsbedingungen erleichtert hier die mathematische Behandlung der unsicherheitsbehafteten Systeme, da nun statt einer exakten Beschreibung der Störungen lediglich der Raum der zulässigen Störungen begrenzt wird. Die IQC liefert nach ihrer Interpretation als Ungleichung demnach eine Obergrenze für die zu erwartende Unsicherheit. Im Falle der Verwendung von IQCs zur Auslegung von robusten Reglern muss jedoch die Balance gehalten werden zwischen einer mathematisch möglichst einfachen und damit handhabbaren Abschätzung der Begrenzung des zulässigen Signalraumes und einer möglichst präzisen Beschreibung der Unsicherheiten, da eine zu grobe Abschätzung eine zu konservative Reglerauslegung zur Folge hätte.<sup>284,285,286</sup>

### 2.9.5 Linear Quadratisch Optimaler Regler (LQR)

Den Ausführungen von FÖLLINGER folgend, kann man die Auslegung eines optimalen Reglers für ein lineares System mithilfe der Verwendung eines quadratischen Gütekriteriums erreichen. Dabei liegt die Forderung nahe, den Energieverbrauch zur Regelung auf den gewünschten Endzustand des Systems zu minimieren. Das zu minimierende Gütemaß für eine verbrauchsoptimale Regelung<sup>287</sup>

$$J_E(u, t_0, t_e) = \frac{1}{2} \cdot \int_{t_0}^{t_e} u(t)^T R u(t) dt \quad (2.78)$$

repräsentiert somit nichts anderes, als die benötigte Stellenergie im Zeitraum  $[t_0, t_e]$ , welche zusätzlich mit der symmetrischen, positiv definiten Matrix  $R$  gewichtet wird.

Weiter soll verhindert werden, dass das System sich während des Regelprozesses unnötig weit vom Zielzustand entfernt. Dabei wird für eine verlaufsoptimale Regelung das Prinzip der quadratischen Regelfläche auf Zustandsvektoren erweitert, indem ein Gütemaß

$$J_{Tr}(x, t_0, t_e) = \frac{1}{2} \cdot \int_{t_0}^{t_e} x(t)^T Q x(t) dt \quad (2.79)$$

zum Einsatz kommt, welches das mit der ebenfalls symmetrischen, positiv semidefiniten Matrix  $Q$  gewichtete Quadrat des Systemzustandes beinhaltet.

Für eine Regelung, welche sowohl verlaufsoptimiert als auch verbrauchsoptimiert ist, ergibt sich nun also als Gütefunktional die Kombination der beiden Kriterien (2.78) und (2.79)

<sup>287</sup>

<sup>286</sup> Fan, Michael K. H. et al., 1991

<sup>287</sup> Föllinger, 1988

$$J(x, u, t_0, t_e) = \frac{1}{2} \cdot \int_{t_0}^{t_e} \left( x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) \right) dt . \quad (2.80)$$

Geht man nun von einem System aus, das sich zum Zeitpunkt  $t_0$  aufgrund einer externen Störung im Zustand  $x_0$  befindet und nun durch den Einsatz einer Regelung in den gewünschten Arbeitspunkt  $x(t_e) = x_B$  geführt werden soll, so kann man als Bedingung für einen optimalen Regler das Gütemaß (2.80) verwenden. Der gewünschte Endzustand kann nun der Einfachheit halber zu  $x(t_e) = 0$  gewählt werden, was jederzeit durch eine Parallelverschiebung der Zustände möglich ist. Wenn nun jedoch als Regelziel explizit  $x(t_e) = 0$  gefordert würde, so würde die Optimierung einen zeitabhängigen Regler ergeben, dessen Koeffizienten für  $t \rightarrow t_e$  gegen unendlich streben würden. Da ein solcher Regler nicht umsetzbar ist und weiterhin davon ausgegangen werden muss, dass weder das System noch sein Zustand so exakt bekannt sind, dass eine Regelung auf den exakten Zielzustand  $x(t_e) = 0$  möglich wäre, ist es möglich, das Gütekriterium um den zu erreichenden Endzustand zu erweitern<sup>287</sup>

$$J(x, u, t_0, t_e) = \frac{1}{2} \cdot x(t_e)^T S x(t_e) + \frac{1}{2} \cdot \int_{t_0}^{t_e} \left( x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t) \right) dt . \quad (2.81)$$

Durch die Verwendung des mit  $S$  (symmetrisch, positiv definit, konstant) gewichteten Quadrates des Endzustandes wird eine zu große Abweichung von diesem Regelungsziel im Zuge der Optimierung vermieden, da in diesem Falle das Funktional (2.81) nicht minimal werden könnte. Damit kann statt des wie beschrieben nicht erreichbaren exakten Endzustandes  $x(t_e) = 0$  nun eine näherungsweise Erreichung dieses Zustandes in der vorgegebenen Zeit erzielt werden, also  $\lim_{t \rightarrow t_e} x(t) = 0$ .<sup>288</sup>

Nach der Behandlung des Optimierungsproblems nach dem Hamilton-Formalismus<sup>289</sup> erfüllt eine optimale Lösung  $(x_{opt}(t), u_{opt}(t))$  die beiden Vektorgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial H}{\partial u} \end{aligned} \quad (2.82)$$

<sup>288</sup> Petersen et al., 2000

<sup>289</sup> Föllinger, 1988

Hierbei ist  $H$  die Hamilton-Funktion und  $\Psi$  ist der Vektor der Lagrange-Multiplikatoren. Die Hamilton-Funktion ist gegeben durch

$$H(x, u, \Psi, t) = -f_0(x, u, t) + \Psi^T \cdot f(x, u, t) \quad (2.83)$$

Mit dem Integranden des Gütekriteriums  $f_0(x, u, t)$ , der linken Seite der Zustandsdifferentialgleichung  $f(x, u, t)$  als Nebenbedingung des Variationsproblems. Im Falle der Betrachtung einer Zielmannigfaltigkeit, also einem nicht exakt festgelegten Zielzustand, ergibt sich außer den Gleichungen (2.82) für die Lösung des Variationsproblems die sogenannte Transversalitätsbedingung

$$\Psi(t_e) = -\left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x_e}. \quad (2.84)$$

Darin ist  $h(x_e, t_e)$  die Bedingung an den Endzustand im verwendeten Gütemaß und schließt die Informationslücke, die durch den offenen Endzustand und den dadurch entstandenen Freiheitsgraden zustande kommt. Im Falle von (2.81) und der allgemeinen Zustandsdifferentialgleichung

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.85)$$

stellen sich  $h(x_e, t_e)$  sowie die Hamilton-Funktion (2.83) wie folgt dar:<sup>289</sup>

$$\begin{aligned} H(x, u, \Psi, t) &= -\frac{1}{2} \cdot (x^T Q x + u^T R u) + \Psi^T (Ax + Bu) \\ h(x_e, t_e) &= \frac{1}{2} \cdot x(t_e)^T S x(t_e) \end{aligned} \quad (2.86)$$

Mit den Bedingungen für eine optimale Lösung (2.82) und (2.84) ergeben sich die adjungierte Differentialgleichung

$$\dot{\Psi} = Qx - A^T \Psi \quad (2.87)$$

sowie die Steuerungsgleichung

$$0 = -Ru + B^T \Psi. \quad (2.88)$$

Aus letzterer ergibt sich ein direkter Zusammenhang zwischen der Steuergröße  $u(t)$  und den Lagrange-Multiplikatoren  $\Psi(t)$

$$u = R^{-1} B^T \Psi.$$

Verwendet man dies in (2.87) und (2.85), so erhält man zwei lineare Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + BR^{-1}B^T\Psi \\ \dot{\Psi} &= Qx - A^T\Psi\end{aligned}\quad (2.89)$$

Angesichts der Linearität dieser Gleichungen kann man als Ansatz für den optimalen Regler ein ebenfalls lineares Regelgesetz annehmen

$$u(t) = -K(t)x(t).$$

Zusammen mit der Bedingung aus der Steuerungsgleichung ergibt sich nun als Ansatz<sup>289</sup>

$$u = -R^{-1}B^T Px. \quad (2.90)$$

Wird nun (2.90) in (2.89) eingesetzt, so ergibt sich eine Riccati Matrixdifferentialgleichung für die noch unbekannte Matrix  $P(t)$ , welche letztendlich die fehlende Information zur Vervollständigung des Regelgesetzes (2.90) darstellt<sup>290</sup>

$$\dot{P} = PBR^{-1}B^T P - PA - A^T P - Q. \quad (2.91)$$

Mithilfe der Transversalitätsbedingung (2.84) und dem Zusammenhang zwischen  $P$  und den Lagrange-Multiplikatoren  $\Psi$  ergibt sich auch die Anfangsbedingung für die Lösung der Differentialgleichung zu

$$P(t_e) = S. \quad (2.92)$$

Nach FÖLLINGER liefert das so bestimmte Regelgesetz (2.90) unter allen möglichen Reglern für beliebige Anfangszeiten  $t_0$  und beliebigen Anfangszustand  $x(t_0)$  den kleinsten Wert des Gütemaßes (2.81).<sup>289</sup>

Für den Fall, dass das betrachtete System zeitinvariant ist, kann man nun den Ansatz (2.90) für einen optimalen Regler abwandeln. Da das System zeitinvariant ist, kann man das auch für den Regler annehmen, sofern man von die Zeit zum Erreichen des Regelungsziels  $t_e \rightarrow +\infty$  streben lässt (für endliche Endzeiten ist die Übergangsmatrix des Systems selbst zeitabhängig, was demnach auch für den Regler angenommen werden müsste). Nun sind also nicht nur die Systemmatrizen  $A$  und  $B$  konstant, sondern auch die Matrix  $P$  im Regelgesetz.

Damit wird die zu lösende Riccati Matrixdifferentialgleichung (2.91) zu der sogenannten algebraischen Riccati Matrixgleichung

$$0 = PBR^{-1}B^T P - PA - A^T P - Q. \quad (2.93)$$

---

<sup>290</sup> Khargonekar et al., 1991

In diesem Fall ist es außerdem sinnvoll, die Gewichtungsmatrizen  $Q$  und  $R$  in (2.81) als konstant anzunehmen.<sup>291</sup>

### 2.9.6 H-∞ Regelung Unsicherheitsbehafteter Systeme

Die Regelung nach dem  $\mathcal{H}_\infty$ -Prinzip beruht auf der Optimierung des betrachteten Systems im Frequenzraum. Dabei soll die Übertragungsfunktion des Systems für die Strecke von dem oder den Störsignal(en) hin zum Ausgangssignal des Systems optimiert werden. Grundlage für diese Optimierung ist der Maximalwert dieser Übertragungsfunktion, wobei die Idee zugrunde gelegt wird, dass durch eine Reduzierung des Maximums der Übertragungsfunktion unterhalb einer geforderten Schwelle auch alle anderen Bereiche der Übertragungsfunktion diesen Wert nicht überschreiten und damit die Verstärkung von Störungen des Systems in dessen Ausgangssignal für alle Frequenzen unterhalb des geforderten Wertes liegt. Im Frequenzbereich entspricht dieser Maximalwert der Übertragungsfunktion dem maximalen Singulärwert der Übertragungsmatrix, welcher gleichbedeutend ist mit der sogenannten  $\mathcal{H}_\infty$ -Norm dieser Matrix und motiviert die Namensgebung dieses Regelungskonzeptes.<sup>291,292,293</sup>

Dieses Konzept kann nicht nur im Frequenzbereich, sondern auch im Zeitbereich bzw. im Zustandsraum angewandt werden. Dieser Ansatz wird in den folgenden Abschnitten vorgestellt und ausgehend von dem grundlegenden Problem zur  $\mathcal{H}_\infty$ -Regelung im Zustandsraum auf zunehmend komplexere Problemstellungen ausgedehnt.

#### 2.9.6.1 Grundlegendes Problem zur H-∞ Regelung

Betrachtet wird ein lineares zeitinvariantes unsicherheitsbehaftetes System, welches beschrieben wird durch

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B_1 u + B_2 w \\ z &= C_1 x + D_1 u \\ y &= C_2 x + D_2 w \end{aligned} \tag{2.94}$$

mit den Signalvektoren zur Beschreibung des Zustandes  $x(t)$ , des Regeleingangs  $u(t)$ , des Systemausgangs  $y(t)$ , sowie des Ein- und Ausgangs der Systemunsicherheit  $z(t)$  und  $w(t)$ .

<sup>291</sup> Föllinger, 1988

<sup>292</sup> Petersen et al., 2000

<sup>293</sup> Damit entspricht dieser Ansatz zur Robusten Regelung der Strategie „Unsicherheitswirkung vermeiden“ im Rahmen des Robust Design (vgl. Freund, 2018), wobei hier die Robustheit in Bezug auf den Einfluss von (unsicheren) Störgrößen betrachtet wird.

Das Ziel für das Design eines geeigneten Reglers für ein System nach (2.94) ist, eine kausale lineare Zustandsrückführung

$$u(t) = \mathcal{K}(t, x(\cdot)|_0^t), \quad t \geq 0 \quad (2.95)$$

zu finden, sodass der damit geschlossene Regelkreis eine interne Stabilitätsbedingung und außerdem die  $\mathcal{H}_\infty$ -Beschränkung für die Übertragungsfunktion  $W_{wz}^K$  von  $w(t)$  nach  $z(t)$  des geschlossenen Regelkreises

$$\|W_{wz}^K\|_\infty < \gamma \quad (2.96)$$

erfüllt. Hier bezeichnet  $\|W_{wz}^K\|_\infty$  die in (2.69) und (2.70) eingeführte induzierte Norm des linearen Operators.<sup>294,295</sup>

Im Folgenden werden Methoden der  $\mathcal{H}_\infty$ -Theorie im Zustandsraum behandelt, da diese im Vergleich zu den ursprünglichen operatortheoretischen und Frequenzraum-basierten Methoden vorteilhaft in ihrer Anwendung auf zeitlich veränderliche Systeme, Systeme mit nicht verschwindenden Anfangsbedingungen sowie Problemen mit finitem Zeithorizont sind.<sup>295</sup>

Ausgangsbasis für diese Betrachtung ist nun ein Ansatz, der aus der Stabilitätsbedingung (2.96) ein Kostenfunktional ableitet, welches gegeben ist durch

$$J_\gamma(u(\cdot), w(\cdot)) := \int_0^\infty (\|z(t)\|^2 - \gamma \|w(t)\|^2) dt. \quad (2.97)$$

Die Bedingung (2.96) ist, sofern man die Stabilität des geschlossenen Regelkreises voraussetzt, genau dann erfüllt, wenn ein  $\varepsilon > 0$  existiert, sodass für das Funktional in (2.97) gilt<sup>295</sup>

$$J_\gamma(u(\cdot), w(\cdot)) \leq -\varepsilon \cdot \int_0^\infty \|w(t)\|^2 dt. \quad (2.98)$$

Ziel des Regeldesigns ist es nun, im Falle der größtmöglichen Störung den Minimalwert des Kostenfunktionals (2.97) zu erreichen

$$\inf_K \sup_{w \in \mathbb{L}_2[0, \infty)} J_\gamma(K, w(\cdot)).$$

Dabei spricht man im Falle, dass  $\gamma$  den kleinstmöglichen Wert

$$\gamma^\infty = \operatorname{infl}_{K(\cdot)} \|W_{wz}^K\|_\infty$$

<sup>294</sup> Khargonekar et al., 1991

<sup>295</sup> Petersen et al., 2000

annimmt von einem optimalen, im Falle von  $\gamma > \gamma^\infty$  von einem suboptimalen Regler.<sup>295</sup>

Basierend auf diesen Überlegungen ist es nun möglich, verschiedene unsicherheitsbehaftete Systeme als  $\mathcal{H}_\infty$ -Regelungsprobleme zu behandeln.

### 2.9.6.2 $H_\infty$ Regelung zeitinvarianter unsicherheitsbehafteter Systeme

Der Argumentation von u.a. PETERSEN ET AL. folgend, kann die Lösung des  $\mathcal{H}_\infty$ -Problems mithilfe der Lösung von algebraischen Riccati-Gleichungen erfolgen.<sup>296,297</sup> Demnach gilt für ein System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

- (1) Die Matrix  $A$  ist stabil und die Norm der Zustandsübergangsmatrix  $\|C(s\mathbb{I} - A)^{-1}B\|_\infty < 1$  ist beschränkt
- (2) Die algebraische Riccati Gleichung

$$A^T P + PA + PBB^T P + C^T C = 0 \tag{2.99}$$

hat eine stabilisierende Lösung  $P \geq 0$ . Eine stabilisierende Lösung zeichnet sich hier dadurch aus, dass die Matrix  $A - BB^T P$  alle ihre Eigenwerte in der offenen linken Halbebene der Komplexen Ebene hat, also  $\text{Re}(A - BB^T P) < 0$  ist.

Die Bedeutung der Riccati-Gleichungen für die Lösung eines Problems der optimalen Regelung wurde ebenfalls schon in Kapitel 2.9.5 erläutert und findet sich auch im Bereich der optimalen Regelung mit  $\mathcal{H}_\infty$ -Methoden wieder.<sup>296,297,298</sup>

#### Zustandsrückführung

Für das System (2.94) und das Funktional (2.97) lautet die zu lösende algebraische Riccati Matrixgleichung

$$\begin{aligned}(A - B_1 G^{-1} D_1^T C_1)^T X + X(A - B_1 G^{-1} D_1^T C_1) + C^T (\mathbb{I} - D_1 G^{-1} D_1^T C_1) + X \left( B_1 G^{-1} B_1^T - \frac{1}{\gamma^2} B_2 B_2^T \right) X = 0\end{aligned} \tag{2.100}$$

mit  $G = D_1^T D_1 > 0$ .<sup>298</sup>

<sup>296</sup> Khargonekar et al., 1991

<sup>297</sup> Föllinger, 1988

Wenn nun das Matrizenpaar  $((A - B_1 G^{-1} D_1^T C_1), (\mathbb{I} - D_1 G^{-1} D_1^T) C_1)$  beobachtbar ist und eine minimale, positiv definite Lösung  $X^+$  der algebraischen Riccati-Gleichung (2.100) existiert, so erreicht ein Regler der Form

$$u(t) = K^+ x(t) ; \quad K^+ := -G^{-1} (B_1^T X^+ + D_1^T C_1) \quad (2.101)$$

den bestmöglichen Wert des Optimierungsproblems

$$\sup_{w \in \mathbb{L}_2[0, \infty)} J_\gamma(K, w(\cdot)) = x(0)^T X^+ x(0). \quad (2.102)$$

Dieser obere Wert ist für ein  $\gamma > 0$  genau dann beschränkt, wenn das Matrizenpaar  $(A, B_1)$  des offenen Regelkreises stabilisierbar ist.<sup>298</sup>

### Ausgangsrückführung

Für den Fall der Ausgangsrückführung muss nach den Ausführungen von Abschnitt 2.9.1.2 ein Regler der Form

$$u(t) = \mathcal{K} \left( t, y(\cdot) \Big|_0^t \right) \quad t \geq 0 \quad (2.103)$$

gefunden werden, mit welchem die geforderte Performance des geschlossenen Systems (2.96) erfüllt werden kann.<sup>298,299</sup>

Es kann nun gezeigt werden, dass es möglich ist, mit einem Regler der Form

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y \\ u &= C_c x_c \end{aligned} \quad (2.104)$$

das gegebene  $\mathcal{H}_\infty$ -Regelungsproblem für das System (2.94) zu lösen.

Nach PETERSEN ET AL. ist dies genau dann der Fall, wenn zwei entsprechende  $\mathcal{H}_\infty$ -Regelungsprobleme gelöst werden können. Zunächst muss jedoch die Matrix des geschlossenen Regelkreises aus (2.94) und (2.104)

$$\begin{bmatrix} A & B_1 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix}$$

stabil sein und die Übertragungsfunktion von  $w$  nach  $z$  gegeben durch

$$\mathcal{W}_{wz}^K = [C_1 \quad D_1 C_c] \times \left( s\mathbb{I} - \begin{bmatrix} A & B_1 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} B_2 \\ B_c D_2 \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

<sup>298</sup> Petersen et al., 2000

<sup>299</sup> Föllinger und Franke, 1982

muss die Bedingung

$$\| \mathcal{W}_{wz}^K \|_{\infty} < 1$$

erfüllen.<sup>298,300</sup> Die beiden  $\mathcal{H}_{\infty}$ -Aufgaben für die Ausgangseinspeisung sowie die Zustands-rückführung lassen sich dann wie zuvor schon gesehen als Lösungen von Riccati Matrixgleichungen beschreiben.

Für die Zustandsrückführung muss es für eine geeignete Rückführungsmatrix  $K$  eine Lösung  $X > 0$  der Riccati-Gleichung

$$(A + B_1 K)^T X + X(A + B_1 K) + X B_2 B_2^T X + (C_1 + D_1 K)^T (C_1 + D_1 K) < 0 \quad (2.106)$$

geben, wodurch die Matrix  $(A + B_1 K)$  stabil ist und außerdem die Übertragungsfunktion durch Zustandsrückführung mit dem Regler beschrieben durch  $u = Kx$  die Norm

$$\| (C_1 + D_1 K)(s\mathbb{I} - A_{B_1 K})^{-1} B_2 \|_{\infty} < 1$$

erfüllt.<sup>298</sup>

Nun muss für den Eingang eines solchen Reglers noch eine geeignete Ausgangseinspeisung gefunden werden. Dies ist der Fall, wenn es bei einer gegebenen Einspeisungsmatrix  $L$  die Lösung  $Y < 0$  zur Riccati-Gleichung

$$(A + L C_2)^T Y + Y(A + L C_2) + Y C_1^T C_1 Y + (B_1 + L D_2)(B_1 + L D_2)^T < 0 \quad (2.107)$$

gibt.<sup>301</sup>

Damit ist sowohl die Matrix  $(A + L C_1)$  stabil und die Übertragungsfunktion von  $w$  nach  $z$ , welche durch die Anwendung der Ausgangseinspeisung

$$\dot{x} = Ax + B_2 w + Ly$$

entsteht, erfüllt die Norm-Beschränkung

$$\| C_1 (s\mathbb{I} - A - L C_2)^{-1} (B_2 + L D_2) \|_{\infty} < 1. \quad (2.108)$$

Darüber hinaus muss der Spektralradius der beiden Lösungen zu (2.106) und (2.107) die Beschränkung

$$\rho(XY) < 1 \quad (2.109)$$

<sup>300</sup> Chang, 2014

<sup>301</sup> Petersen et al., 2000

erfüllen. Hier ist der Spektralradius  $\rho(\cdot)$  einer Matrix gegeben durch den größten Absolutwert ihrer Eigenwerte und findet oftmals Anwendung im Bereich der Stabilitätsbetrachtung im Rahmen des *Small Gain Theorems* mit der Forderung, dass die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises die Bedingung  $\|G_0(i\omega)\| < 1$  erfüllt. Ebenso gilt die Forderung  $\rho(XY) < 1$  als ein Maß für die Stabilität des Regelkreises.<sup>302</sup>

Sind diese Bedingungen erfüllt, so ergibt die Kombination aus Zustandsrückführung und Ausgangseinspeisung eine optimale  $\mathcal{H}_\infty$ -Regelung durch Ausgangsrückführung. Hierbei ist insbesondere die Gleichung (2.107) zur Ausgangseinspeisung ähnlich der Riccati-Gleichung zur Auslegung eines Kalman Filters<sup>301</sup> und kann somit als Lösung für einen optimalen Zustandsbeobachter interpretiert werden. Somit ergibt sich die Regelung durch Ausgangsrückführung als Kombination aus Zustandsschätzung mithilfe der Ausgangssignale und anschließender Rückführung des geschätzten Zustandes.<sup>303</sup>

### 2.9.6.3 $H_\infty$ Regelung zeitinvarianter unsicherheitsbehafteter Systeme unter Berücksichtigung des transienten Verhaltens

Im Folgenden wird das in 2.9.6.2 behandelte System (2.94) um einen von Null verschiedenen Anfangszustand  $x_0$  erweitert, wodurch das System ein initiales transientes Verhalten erhält. Demnach soll nun ein Regler gefunden werden, der die induzierte Norm der Übertragungsfunktion von dem Eingang der Störung  $w(\cdot)$  sowie der Anfangsbedingung  $x_0$  auf den geregelten Systemausgang  $z(\cdot)$  minimiert.

Das für die Optimierung herangezogene Gütekriterium berücksichtigt der Problemstellung entsprechend auch die Anfangsbedingung<sup>304,305</sup>

$$\gamma(K, X_T, P_0, T) = \sup_{x(0) \in \mathbb{R}^n, w(\cdot) \in \mathcal{L}_2[0, T]} \left( \frac{x(T)^T X_T x(T) + \int_0^T \|z(t)\|^2 dt}{x(0)^T P_0 x(0) + \int_0^T \|w(t)\|^2 dt} \right). \quad (2.110)$$

Dabei wird bei der Betrachtung von  $x(0)$  und  $w(\cdot)$  der zugelassene Wertebereich derart eingeschränkt, dass  $x(0)^T P_0 x(0) + \int_0^T \|w(t)\|^2 dt > 0$  gilt. Das Gütemaß (2.110) kann demnach als induzierte Norm des Operators angesehen werden, der das Signalpaar  $(x(0), w(\cdot))$  auf das Paar  $(x(T), z(\cdot))$  abbildet. In (2.110) ist die

<sup>302</sup> Lunze, 2013b

<sup>303</sup> Föllinger, 1988

<sup>304</sup> Petersen et al., 2000

<sup>305</sup> Khargonekar et al., 1991

Möglichkeit der Betrachtung sowohl endlicher als auch unendlicher Zeithorizonte gegeben, da bei letzterer Variante  $T = \infty$  gilt und damit  $X_T = 0$  gesetzt wird, damit der Operator, dessen Norm in (2.110) gebildet wird, nun das Signalpaar  $(x(0), w(\cdot))$  auf das einzelne Signal  $z(\cdot)$  abbildet. Das  $\mathcal{H}_\infty$ -Problem, welches im Folgenden betrachtet wird, ist definiert durch die Fragestellung, ob ein zeitvarianter linearer Regler mit Ausgangsrückführung

$$\begin{aligned} \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c y \\ u &= C_c x_c + D_c y \end{aligned} \quad (2.111)$$

existiert, sodass für eine gegebene Konstante  $\gamma > 0$  gilt<sup>304,305</sup>

$$\gamma(K, X_T, P_0, T) < \gamma^2. \quad (2.112)$$

Es wird nun angenommen, dass für das System (2.94) die folgenden Aussagen gelten:

- Für die Matrizen  $C_1$  und  $D_1$  gilt, dass  $C_1^T D_1 = 0$  und  $G := D_1^T D_1 > 0$ . Damit wird angenommen, dass im Ausdruck für  $\|z(t)\|^2$  in (2.110) keine Kreuzterme beitragen. Darüber hinaus gibt  $G$  die Norm für den Einfluss des Regeleingangs  $u(t)$  auf das Gütekriterium an.
- Für  $B_2$  und  $D_2$  gilt  $D_2 B_2^T = 0$  sowie  $\Gamma := D_2 D_2^T > 0$ . Mit der ersten Relation wird angenommen, dass das Prozessrauschen und das Messrauschen unkorreliert sind, während  $\Gamma$  die Norm des Messrauschens angibt.
- Die Matrizenpaare  $(A; B_2)$  und  $(A; C_1)$  seien stabilisierbar bzw. detektierbar. Diese Annahme stellt sicher, dass das System (2.94) keine invarianten Nullstellen auf der imaginären Achse hat.
- Die Matrizenpaare  $(A; B_1)$  und  $(A; C_2)$  seien stabilisierbar bzw. detektierbar. Diese Annahme ist notwendig und hinreichend für die Existenz eines intern stabilisierenden Reglers für das System (2.94).<sup>306</sup>

Die Annahmen  $C_1^T D_1 = 0$  und  $D_2 B_2^T = 0$  sind nicht zwingend erforderlich, jedoch vereinfachen sie die nachfolgenden Betrachtungen.<sup>307</sup>

<sup>306</sup> Khargonekar et al., 1991

<sup>307</sup> Petersen et al., 2000

Zustandsrückführung

Es wird nun die Problemstellung betrachtet, bei der der volle Zustand messbar ist, also  $y(t) = x(t)$  und eine optimale Regelung mit endlichem Zeithorizont gefunden werden soll.

In diesem Fall gibt es einen Regler  $K(\cdot)$  für das System (2.94) unter Einhaltung der Anforderung (2.112), wenn eine eindeutige symmetrische Matrix  $X(t)$ ,  $t \in [0, T]$  existiert, sodass

$$\begin{aligned} -\dot{X}(t) &= A^T X(t) + X(t)A + C_1^T C_1 - X(t) \left[ B_1 G^{-1} B_1^T - \frac{1}{\gamma^2} B_2 B_2^T \right] X(t) \\ X(T) &= X_T \end{aligned} \quad (2.113)$$

mit  $X(0) < \gamma^2 P_0$ .

Dieser Regler ist dann gegeben durch<sup>306,307</sup>

$$u(t) = K(t)x(t), \quad K(t) = -G^{-1}B_1^T X(t). \quad (2.114)$$

Ausgangsrückführung

Für den Fall, dass der volle Zustand nicht messbar ist und damit eine Ausgangsrückführung notwendig wird, kann für einen endlichen Zeithorizont gezeigt werden, dass für gegebene Matrizen  $X_T \geq 0$  und  $P_0 > 0$  ein Regler der Form (2.111) für das System (2.94) unter Einhaltung der Anforderung (2.112) existiert, wenn zwei Matrizen  $(X(t), Y(t))$  existieren, für die neben (2.113) außerdem gilt

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= AY(t) + Y(t)A^T + B_2^T B_2 - Y(t) \left[ C_2^T \Gamma^{-1} C_2 - \frac{1}{\gamma^2} C_1 C_1^T \right] Y(t) \\ Y(0) &= P_0^{-1} \end{aligned} \quad (2.115)$$

Weiterhin müssen  $X(t)$  und  $Y(t)$  die Forderung  $\rho(X(t)Y(t)) < \gamma^2$ ,  $\forall t \in [0, T]$  erfüllen.<sup>308</sup>

Dieser Regler ist dann gegeben durch<sup>309</sup>

<sup>308</sup> Khargonekar et al., 1991

<sup>309</sup> Petersen et al., 2000

$$\begin{aligned}
 A_c(t) &= A + B_1 C_c(t) - B_c(t) C_2 + \frac{1}{\gamma^2} B_2 B_2^T X(t) \\
 B_c(t) &= \left( \mathbb{I} - \frac{1}{\gamma^2} Y(t) X(t) \right)^{-1} Y(t) C_2^T \Gamma^{-1} \\
 C_c(t) &= -G^{-1} B_1^T X(t) \\
 D_c(t) &= 0
 \end{aligned} \tag{2.116}$$

2.9.6.4 Die s-Prozedur zur Anwendung auf H-∞ Regelungsprobleme von unsicherheitsbehafteten Systemen mit Integraler Quadratischer Zwangsbedingung (IQC)

In vielen Problemen der robusten Regelung von unsicherheitsbehafteten Systemen treten bei der Auslegung neben einer Optimalitätsbedingung für das Gütefunktional zur Sicherstellung der optimalen Regelgüte außerdem eine oder mehrere Integrale Quadratische Zwangsbedingungen (IQC, siehe Abschnitt 2.9.4.2) zur Beschreibung der zulässigen Systemunsicherheiten auf.

Damit ist das vorliegende Optimierungsproblem nicht mehr nur einer Bedingung unterworfen, sondern die Suche unterliegt nun mehreren Bedingungen. Dies erschwert die Lösungssuche zusätzlich.<sup>310</sup>

Ein Ansatz um diese durch mehrere Zwangsbedingungen entstehende Komplexität zu überwinden ist die sogenannte s-Prozedur, wie sie zum Beispiel in PETERSEN ET AL. erläutert und verwendet wird.

Dabei werden die – im Bereich der Optimalen Regelung oft quadratischen – Zwangsbedingungen zu einer Bedingung zusammengefasst und somit das Problem der Lösungsfindung vereinfacht. Diese Prozedur wird im Folgenden für den Fall eines quadratischen Funktionals und eine quadratische Bedingung erläutert.

Gegeben seien zwei quadratische Funktionale  $G_0(\lambda)$  und  $G_1(\lambda)$  definiert im realen linearen Vektorraum  $\mathcal{X}$ . Es wird allgemein angenommen, dass

$$\begin{aligned}
 G_0(\lambda) &= G_0(\lambda, \lambda) + g_0(\lambda) + \gamma_0 \\
 G_1(\lambda) &= G_1(\lambda, \lambda) + g_1(\lambda) + \gamma_1
 \end{aligned}$$

mit den Bilinearformen  $(G_0(\lambda, \lambda), G_1(\lambda, \lambda))$  auf  $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ , den linearen Funktionalen  $(g_0(\lambda), g_1(\lambda))$  auf  $\mathcal{X}$  sowie den Konstanten  $(\gamma_0, \gamma_1)$ .<sup>311</sup>

Es kann nun gezeigt werden, dass für zwei Funktionale  $(G_0(\lambda), G_1(\lambda))$  gilt:

<sup>310</sup> Megretski und Rantzer, 1997

<sup>311</sup> Petersen et al., 2000

Wenn ein Vektor  $\lambda_0$  existiert, sodass  $G_1(\lambda_0) > 0$ , dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

$$(1) G_0(\lambda) \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathcal{X}, \text{ sodass gleichzeitig } G_1(\lambda) \geq 0.$$

(2) Es existiert eine Konstante  $\tau \geq 0$ , sodass für alle  $\lambda \in \mathcal{X}$  gilt

$$G_0(\lambda) - \tau \cdot G_1(\lambda) \geq 0.$$

Weiterhin kann gezeigt werden, dass eine Abbildung der Form

$$(\eta_1, \eta_2) = (G_0(\lambda), G_1(\lambda))$$

den Raum  $\mathcal{X}$  auf die konvexe Menge  $\mathcal{M}$  abbilden.<sup>311</sup>

Damit ist es also möglich, unter den in diesem Abschnitt geschilderten Bedingungen zwei quadratische Funktionale derart zu kombinieren, dass die durch sie definierten Bedingungen zu einer Bedingung verschmolzen werden, sodass hieraus ein konvexes Problem entsteht. Dies kann im speziellen Fall der quadratisch optimalen Regelung mit einer IQC zur Vereinfachung der Problemstellung verwendet werden.<sup>312</sup>

#### 2.9.6.5 $H_\infty$ Regelung zeitlich veränderlicher unsicherheitsbehafteter Systeme unter Einschränkung des Endzustandes

In diesem Abschnitt wird die Problemstellung eines unsicheren zeitlich veränderlichen Systems betrachtet, welches durch einen geeigneten Regler robust zu einem Endzustand geführt werden soll, der Teil einer endlichen Menge erlaubter Endzustände ist. Es wird im Folgenden angenommen, dass für das gegebene System lediglich eine Ausgangsrückführung möglich ist. Daher erscheint es nicht vernünftig, zu fordern, dass der Regler das System in einer endlichen Zeit exakt auf den Nullzustand führt, da dies selbst im Falle einer Zustandsrückführung nur unter strengen Bedingungen möglich ist.<sup>313</sup> Demnach soll das System in einen Endzustand gebracht werden, der Teil einer begrenzten Menge ist, deren Größe von der Größe der Anfangsbedingung für das System abhängt. Darüber hinaus wird gefordert, dass diese Regelung in die Menge erlaubter Endzustände mit möglichst geringem Energieaufwand erfolgt.

Das betrachtete System lässt sich in der Form

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A x + B_1 u + B_2 w \\ z &= C_1 x + D_1 u \\ y &= C_2 x + v(t) \end{aligned} \tag{2.117}$$

<sup>312</sup> Megretski und Rantzer, 1997

<sup>313</sup> Petersen et al., 2000

darstellen, sowie die mit dem System assoziierte Unsicherheit als<sup>313</sup>

$$\begin{bmatrix} w(t) & v(t) \end{bmatrix} = \phi(t, x(t)). \quad (2.118)$$

Für letztere gelte die Integrale Quadratische Zwangsbedingung (IQC)<sup>313,314</sup>

$$\int_0^T \left( w(t)^T Q(t) w(t) + v(t)^T N(t) v(t) \right) dt \leq \int_0^T \| z(t) \|^2 dt + x(0)^T S x(0) \quad (2.119)$$

mit den symmetrischen Gewichtungsmatrizen  $N(t) \geq \delta \cdot \mathbb{I}$ ,  $Q(t) \geq \delta \cdot \mathbb{I}$  ( $\delta > 0$ ) und  $S > 0$ . Die Klasse der nach (2.119) zulässigen Signale aus der Systemunsicherheit wird im Folgenden mit  $\Xi$  bezeichnet.

Das hier diskutierte regelungstechnische Problem der robusten Regelung des Systems (2.117) mit Einschränkung des Endzustandes soll nun mithilfe eines endlich dimensionalen, zeitvarianten linearen Reglers mit Ausgangsrückführung gelöst werden. Um der Einschränkung des Endzustandes gerecht zu werden, muss diese nun im Gütekriterium berücksichtigt werden<sup>313,315</sup>

$$\sup_{x(0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, [w(\cdot), v(\cdot)] \in \Xi} \left( \frac{x(T)^T X_T x(T) + \gamma \cdot \int_0^T \| u(t) \|^2 dt}{x(0)^T P_0 x(0)} \right) < 1. \quad (2.120)$$

Dabei sind  $X_T > 0$  und  $P_0 > 0$  symmetrische Gewichtungsmatrizen und  $\gamma > 0$  eine Konstante, welche mittels ihrer Gewichtung die Einschränkung des Endzustandes definieren. Ein Regler der Form

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c(t) x_c(t) + B_c(t) y(t) \\ u(t) &= C_c(t) x_c(t) + D_c(t) y(t) \end{aligned} \quad (2.121)$$

ist ein robuster Regler in Bezug auf die Einschränkung des Endzustandes, wenn der geschlossene Regelkreis (2.117), (2.119) und (2.121) die Beschränkung (2.120) erfüllt. Dabei ermöglicht die Form des Gütefunktional (2.120) das Design eines Reglers, der sowohl einen definierten Endzustand erreicht, als auch ein begrenztes Regelsignal bzw. eine begrenzte Stellenergie sicherstellt.<sup>316</sup>

Ein typischer gewünschter Endzustand für eine solche Regelung ist  $x(T) = 0$  und kann mithilfe einer Parallelverschiebung des Nullzustandes des Systems auch für jeden gewünschten Stationären Endzustand  $\tilde{x}(T) \neq 0$  erreicht werden.<sup>315</sup>

<sup>314</sup> Savkin und Petersen, 1999

<sup>315</sup> Föllinger, 1988

<sup>316</sup> Petersen et al., 2000

Die Lösung des hier beschriebenen Regelungstechnischen Problems kann mithilfe der in Abschnitt 2.9.6.4 erläuterten s-Prozedur erfolgen.

Es wird nun angenommen, dass ein Regler existiert, der für das System (2.117) unter Voraussetzung von (2.119) die Bedingung (2.120) erfüllt, dann existiert aufgrund von  $P_0 > 0$ ,  $X_T > 0$ ,  $\gamma > 0$  ein  $\epsilon > 0$ , sodass<sup>316</sup>

$$(1+\epsilon) \cdot \left( x(T)^T X_T x(T) + \gamma \cdot \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \right) + \epsilon \cdot \int_0^T (\|x(t)\|^2 + \|u(t)\|^2) dt \leq x(0)^T P_0 x(0). \quad (2.122)$$

Es kann nun der Hilbert-Raum  $\mathcal{M}$  aller Vektorfunktionen

$$\lambda(\cdot) := [x(\cdot), u(\cdot), w(\cdot), v(\cdot)] \in \mathbb{L}_2[0, T],$$

die über die Beziehungen (2.117) und (2.121) verbunden sind, definiert werden. Damit können die beiden quadratischen Funktionale  $G_0(\lambda)$  und  $G_1(\lambda)$  mit Bezug zum Gütekriterium (2.120) bzw. der Bedingung (2.122) und zur integralen quadratischen Zwangsbedingung (2.119) eingeführt werden.

$$\begin{aligned} G_0(\lambda) &= (1+\epsilon) \cdot \left( x(T)^T X_T x(T) + \gamma \cdot \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \right) + \epsilon \cdot \int_0^T (\|x(t)\|^2 + \|u(t)\|^2) dt - x(0)^T P_0 x(0) \\ G_1(\lambda) &= \int_0^T (\|z(t)\|^2 - w(t)^T Q(t) w(t) - v(t)^T N(t) v(t)) dt + x(0)^T S x(0) \end{aligned} \quad (2.123)$$

Mit (2.122) folgt direkt, dass  $G_0(\lambda) \leq 0 \quad \forall \lambda \in \mathcal{M}$  und damit auch direkt  $G_1(\lambda) \geq 0$ . Da weiterhin  $S > 0$  gilt, wird unter der Annahme, dass  $w(t) = 0$ ,  $v(t) = 0$  sowie  $x(0) \neq 0$ , ein  $\lambda_0$  konstruiert, sodass  $G_1(\lambda_0) > 0$ , sodass nach der s-Prozedur direkt folgt, dass es eine Konstante  $\mu \geq 0$  geben muss, sodass<sup>316</sup>

$$G_0(\lambda) + \mu \cdot G_1(\lambda) \leq 0 \quad \forall \lambda \in \mathcal{M}.$$

Es lässt sich nun, unter Zuhilfenahme der Annahmen  $\int_0^T \|B_2(t)\| dt > 0$  und  $C_1(\cdot)^T D_1(\cdot) = 0$  zeigen, dass  $\mu > 0$ . Damit lässt sich nun die Konstante  $\tau = \frac{1}{\mu} > 0$  einführen, sodass

$$G_1(\lambda) + \tau \cdot G_0(\lambda) \leq 0 \quad \forall \lambda \in \mathcal{M}$$

und mit (2.123)

$$\begin{aligned}
 & x(0)^T [\tau P_0 - S] x(0) \geq \\
 & \tau \cdot (1 + \epsilon) \cdot \left( x(T)^T X_T x(T) + \tau \gamma \cdot \int_0^T \|u(t)\|^2 dt \right) + \int_0^T \left[ \delta \cdot (\|x(t)\|^2 + \|u(t)\|^2) + \|z(t)\|^2 \right. \\
 & \quad \left. - w(t)^T Q(t) w(t) - v(t)^T N(t) v(t) \right] dt
 \end{aligned} \tag{2.124}$$

mit  $\delta = \epsilon \tau$ . Aus (2.124) folgt mit  $w(t) = v(t) = 0$  direkt, dass  $\tau P_0 - S > 0$ .<sup>316</sup>

Nun kann auf dieser Basis das sogenannte *Erweiterte System* (*augmented system*<sup>317</sup>) eingeführt werden

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + \hat{B}_2(t)\hat{w}(t) + B_1(t)u(t) \\
 \hat{z}(t) &= \begin{bmatrix} C_1(t)x(t) + D_1(t)u(t) \\ \sqrt{\tau\gamma} \cdot u(t) \end{bmatrix} \\
 y(t) &= C_2(t)x(t) + \hat{D}_2(t)\hat{w}(t)
 \end{aligned} \tag{2.125}$$

mit den Signalvektoren des *Erweiterten Systems*<sup>317</sup>

$$\begin{aligned}
 \hat{w}(t) &= \begin{bmatrix} Q(t)^{\frac{1}{2}} w(t) \\ N(t)^{\frac{1}{2}} v(t) \end{bmatrix}; & \hat{B}_2(t) &= \begin{bmatrix} B_2(t)Q(t)^{-\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}; \\
 \hat{D}_2(t) &= \begin{bmatrix} 0 & N(t)^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Damit wird (2.124) zu

$$\begin{aligned}
 & x(0)^T [\tau P_0 - S] x(0) \geq \\
 & \tau \cdot (1 + \epsilon) \cdot \left( x(T)^T X_T x(T) + \int_0^T \left[ \delta \cdot (\|x(t)\|^2 + \|u(t)\|^2) + \|\hat{z}(t)\|^2 - \|\hat{w}(t)\|^2 \right] dt \right)
 \end{aligned}$$

Daraus folgt als Gütekriterium für das *Erweiterte System*<sup>317</sup>

$$\sup_{x(0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \hat{w}(\cdot) \in \mathbb{L}_2[0, T]} \left( \frac{\tau \cdot x(T)^T X_T x(T) + \int_0^T \|\hat{z}(t)\|^2 dt}{x(0)^T [\tau P_0 - S] x(0) + \int_0^T \|\hat{w}(t)\|^2 dt} \right) < 1. \tag{2.126}$$

Damit kann ein Regler der Form (2.121) mit  $x_c(0) = 0$  für das durch das *Erweiterte System* (2.125) und der Bedingung (2.126) definierte  $\mathcal{H}_\infty$ -Problem gefunden werden und die Lösung dann auf das ursprüngliche Problem, definiert durch (2.117), (2.119) und (2.120), angewandt werden.<sup>317</sup>

<sup>317</sup> Petersen et al., 2000

Durch die Transformation hin zum *Erweiterten System* kann eine zusätzliche Berücksichtigung der Integralen Quadratischen Zwangsbedingung (2.119) bei der Optimierungsaufgabe entfallen, da diese Beschränkung nun durch die Wahl der transformierten Signalvektoren in das *Erweiterte System* integriert ist.

Unter der oben getroffenen Annahme, dass  $C_1(\cdot)^T D_1(\cdot) = 0$  sowie  $\int_0^T \|B_2(t)\| dt > 0$  gilt, können für eine gegebene Konstante  $\tau > 0$  (siehe (2.124)) die zeitabhängigen Matrizen  $X(t)$  und  $Y(t)$  als Lösungen der beiden Riccati Differenzialgleichungen

$$-\dot{X}(t) = A(t)^T X(t) + X(t)A(t) + C_1(t)^T C_1(t) + X(t) \begin{pmatrix} B_2(t)Q(t)^{-1} B_2(t)^T \\ -B_1(t)(D_1(t)^T D_1(t) + \tau\gamma\mathbb{I})^{-1} B_1(t)^T \end{pmatrix} X(t) \quad (2.127)$$

$$\dot{Y}(t) = A(t)Y(t) + Y(t)A(t)^T + B_2(t)Q(t)^{-1} B_2(t)^T + Y(t)(C_1(t)^T C_1(t) - C_2(t)^T N(t)C_2(t))Y(t) \quad (2.128)$$

bestimmt werden.<sup>318</sup>

Wenn nun eine Lösung  $X(t)$  der Gleichung (2.127) im Intervall  $[0, T]$  existiert, sodass  $X(T) = \tau X_T$  und  $\tau P_0 - S > X(0) > 0$  erfüllt ist, eine Lösung  $Y(t)$  zu (2.128) in  $[0, T]$  existiert mit  $Y(0) = (\tau P_0 - S)^{-1}$ ,  $Y(t) > 0 \quad \forall t \in [0, T]$  und für diese beiden Lösungen der Spektralradius  $\rho(Y(t)X(t)) < 1 \quad \forall t \in [0, T]$  erfüllt, dann ist ein Regler der Form (2.121) mit den Matrizen

$$\begin{aligned} A_c(t) &= A(t) + B_1(t)C_c(t) - B_c(t)C_2(t) + B_2(t)Q(t)^{-1} B_2(t)^T X(t) \\ B_c(t) &= (\mathbb{I} - Y(t)X(t))^{-1} Y(t)C_2(t)^T N(t) \\ C_c(t) &= -(D_1(t)^T D_1(t) + \tau\gamma\mathbb{I})^{-1} B_1(t)^T X(t) \\ D_c(t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.129)$$

ein robuster Regler unter Einhaltung des in (2.120) eingeschränkten Endzustandes.<sup>318</sup>

<sup>318</sup> Petersen et al., 2000

2.9.6.6 H-∞ Regelung zeitlich veränderlicher unsicherheitsbehafteter Systeme unter dem Einfluss harmonischer Störungen

Ein weiterer Ansatz zur robusten Regelung unter der Verwendung von  $\mathcal{H}_\infty$ -Methoden nach PETERSEN ET AL. basiert auf der gezielten Nutzung zusätzlicher Informationen über eine vorliegende externe Störung des Systems. In diesem Fall wird angenommen, dass das zeitlich veränderliche, unsicherheitsbehaftete System durch harmonische Störungen bekannter Frequenz beeinflusst wird. Daraus ergibt sich die folgende Systembeschreibung<sup>319</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B_1(t)u(t) + B_2(t)w(t) + B_3(t)v(t) \\ z(t) &= C_1(t)x(t) + D_1(t)u(t) \\ y(t) &= C_2(t)x(t) + v(t) + D_2(t)v(t) \end{aligned} \quad (2.130)$$

Die Beschreibung (2.130) basiert auf der bereits zuvor eingeführten Beschreibung von zeitlich veränderlichen, unsicherheitsbehafteten Systemen, weshalb die Vektoren und Matrizen in (2.130) ihre Bedeutung aus (2.94) behalten. Hier wurden nun zusätzliche Signale eingeführt, um Messfehler als Teil der Systemunsicherheit zu berücksichtigen – dieser Effekt<sup>320</sup> wird durch  $v(t)$  repräsentiert – und zusätzlich noch die Betrachtung der harmonischen Störungen bekannter Frequenz  $\omega_i$  sowie unbekannter Amplitude  $a_i$  und Phase  $\varphi_i$ , die von außen auf das System einwirken<sup>318,319</sup>

$$v(t) = \begin{bmatrix} a_1 \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ a_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ a_3 \cdot \sin(\omega_3 t + \varphi_3) \\ \vdots \\ a_N \cdot \sin(\omega_N t + \varphi_N) \end{bmatrix} \quad (2.131)$$

Hier werden  $(\omega_i, a_i, \varphi_i)$  als konstant angenommen.

Die Systemunsicherheit wird, wie in Kapitel 2.9.4.2 beschrieben, über eine Integrale Quadratische Zwangsbedingung (IQC) definiert

$$x(0)^T P_0 x(0) + \int_0^T (w(t)^T Q(t)w(t) + v(t)^T N(t)v(t)) dt \leq d + \int_0^T \|z(t)\|^2 dt, \quad (2.132)$$

<sup>319</sup> Savkin und Petersen, 1995

<sup>320</sup> Effekt versteht sich hier gemäß der Definition nach IPEK Glossar. „Ein Effekt beschreibt eine naturwissenschaftliche Gesetzmäßigkeit zur Bestimmung des Verhältnisses zwischen Inputs und Outputs in WFP und LSS unter Einbezug ihrer relevanten Merkmale und Eigenschaften.“

wobei  $(Q(t), N(t), P_0)$  symmetrische, positiv definite Matrizen sind, wobei gelten soll, dass eine Konstante  $\varepsilon \geq 0$  existiert, sodass  $Q(t) \geq \varepsilon \mathbb{I}$  und  $N(t) \geq \varepsilon \mathbb{I}$  für alle  $t \in [0, T]$ .

Das Gütekriterium für die robuste Regelung entspricht dem für die quadratisch optimale Regelung (2.81)<sup>318,319</sup>

$$J(x, u, T) = x(T)^T X_T x(T) + \int_0^T \left( x(t)^T R(t) x(t) + u(t)^T G(t) u(t) \right) dt \quad (2.133)$$

wobei für die Gewichtungsmatrix des Endzustandes die positiv definite, symmetrische Matrix  $X_T$  eingeführt, das endliche Zeitintervall  $t \in [0, T]$  verwendet und der Faktor  $\frac{1}{2}$  aus (2.81), der ursprünglich aus der Energiebetrachtung des Gütekriteriums resultierte, vernachlässigt wurde.

Der Regler für das System (2.130) soll – den Ausführungen von Abschnitt 2.9.5 folgend – dieses System im Zeitraum  $[0, T]$  unter Aufwendung minimaler Stellenergie und minimaler quadratischer Abweichung der Trajektorie vom Nullpunkt in einen definierten Endzustand  $x(T)$  überführen.

Das Optimierungsproblem ergibt sich unter Berücksichtigung der durch die äußeren Störungen in das System eingebrachte Leistung sowie entsprechender Gewichtungsfaktoren  $(c_0, c_1, c_2, \dots, c_N)$  zu<sup>321,319</sup>

$$\sup_{v(\cdot) \in \mathcal{N}, [x(0), w(\cdot), v(\cdot)] \in \Xi} \frac{J(x(\cdot), u(\cdot), T)}{c_0 + \sum_{i=1}^N c_i \cdot a_i^2} \quad (2.134)$$

Um dieses Problem der optimalen Regelung des Systems (2.130) mit den zusätzlich eingeführten Signalen  $v(t)$  und  $w(t)$  auf das bekannte Problem der optimalen Regelung eines zeitlich veränderlichen, unsicherheitsbehafteten Systems zurückzuführen, kann man nun einige Transformationen annehmen, die das System auf die Form (2.94) zurückzuführen. Nach PETERSEN ET AL. erhält man das sogenannte *Erweiterte System* durch erweiteren des Zustandsvektors  $x(t)$  auf<sup>321</sup>

$$x(t) \rightarrow h(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ \dot{v}(t) \\ x(t) \end{bmatrix}, \quad (2.135)$$

---

<sup>321</sup> Petersen et al., 2000

des Ausgangs zur Systemunsicherheit  $z(t)$  zu

$$z(t) \rightarrow \hat{z}(t) = \begin{bmatrix} u(t)G(t)^{\frac{1}{2}} \\ x(t)R^{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\tau}z(t) \end{bmatrix}, \quad (2.136)$$

und des Eingangs der Systemunsicherheit zur nominellen Strecke  $w(t)$  zu

$$w(t) \rightarrow \hat{w}(t) = \sqrt{\tau} \cdot \begin{bmatrix} Q(t)^{\frac{1}{2}} w(t) \\ N(t)^{\frac{1}{2}} v(t) \end{bmatrix}. \quad (2.137)$$

Daraus ergibt sich für die Systemmatrizen des *Erweiterten Systems* <sup>322</sup>

$$\begin{aligned} \hat{A}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I} & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \\ B_3(t) & 0 & A(t) \end{bmatrix}; \\ C_1(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R(t)^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & C_1(t) \end{bmatrix}; \\ \hat{B}_1(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_1(t) \end{bmatrix}; \quad \hat{B}_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\tau}} \cdot B_2(t) \end{bmatrix}; \\ \hat{D}_1(t) &= \begin{bmatrix} G^{\frac{1}{2}} \\ 0 \\ \sqrt{\tau} \cdot D_1(t) \end{bmatrix}; \quad \hat{C}_2(t) = [D_2 \quad 0 \quad C_2]; \\ \hat{D}_2(t) &= \begin{bmatrix} 0 & N(t)^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}; \quad \tilde{B}_2(t) = \begin{bmatrix} \hat{B}_2(t)Q(t)^{-\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.138)$$

mit der hier eingeführten Diagonalmatrix

$$\Omega = \text{diag}[-\omega_1^2, -\omega_2^2, -\omega_3^2, \dots, -\omega_N^2], \quad (2.139)$$

<sup>322</sup> Savkin und Petersen, 1995

mit deren Hilfe man die harmonischen Störungen  $v(t)$  beschreiben kann durch  $\ddot{v}(t) = \Omega v(t)$ .<sup>323</sup>

Entsprechend der Transformation des Zustandsvektors in (2.135) werden die damit verbundenen Gewichtungsmatrizen in (2.132) und (2.133) angepasst

$$\hat{P}_0 = \begin{bmatrix} \Gamma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \cdot P_0 \end{bmatrix}; \quad \hat{X}_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X_T \end{bmatrix} \quad (2.140)$$

mit  $\Gamma_1 = \text{diag}[c_1, c_2, c_3, \dots, c_N]$  und  $\Gamma_2 = \text{diag}\left[\frac{c_1}{\omega_1^2}, \frac{c_2}{\omega_2^2}, \frac{c_3}{\omega_3^2}, \dots, \frac{c_N}{\omega_N^2}\right]$ .

Das *Erweiterte System* wird nun beschrieben durch

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) &= \hat{A}(t)h(t) + \hat{B}_1(t)u(t) + \tilde{B}_2(t)\hat{w}(t) \\ \dot{z}(t) &= \hat{C}_1(t)h(t) + \hat{D}_1(t)u(t) \\ y(t) &= \hat{C}_2(t)h(t) + \hat{D}_2(t)\hat{w}(t) \end{aligned} \quad (2.141)$$

Für die Bestimmung eines optimalen Reglers für dieses System kann man nun aus der IQC (2.132) und dem Gütefunktional (2.133) gemäß der s-Prozedur aus Abschnitt 2.9.6.4 ein gemeinsames Funktional generieren. Ausgehend von

$$\begin{aligned} G_0(x, u, v, w, \nu) &= (1 + \delta) \cdot J(x(\cdot), u(\cdot), T) - c_0 - \sum_{i=1}^N c_i \cdot a_i^2 \\ G_1(x, u, v, w, \nu) &= d + \int_0^T \left( \|z(t)\|^2 - w(t)^T Q(t)w(t) + v(t)^T N(t)v(t) \right) dt \end{aligned} \quad (2.142)$$

abgeleitet aus (2.134) und (2.132). Hierbei kommt bei  $G_0$  die Notwendigkeit zum Ausdruck, dass im Falle der Existenz eines nach (2.134) optimalen Reglers ebenfalls eine Konstante  $\delta > 0$  existiert, sodass

$$(1 + \delta) \cdot J(x(\cdot), u(\cdot), T) \leq c_0 + \sum_{i=1}^N c_i a_i^2 \quad (2.143)$$

gilt.<sup>323</sup>

Da diese Bedingung für alle Lösungen des Systems unter Berücksichtigung der IQC (2.132) gilt, gilt notwendigerweise  $G_0(x, u, w, v, \nu) \leq 0$  und außerdem

<sup>323</sup> Petersen et al., 2000

$G_1(x, u, w, v, v) \geq 0$ . Der Argumentation aus 2.9.6.4 folgend, muss es demnach eine Konstante  $\tau$  geben, sodass

$$G_0(x, u, w, v, v) + \tau \cdot G_1(x, u, w, v, v) \leq 0$$

erfüllt ist.

Diese Ungleichung lässt sich mithilfe von (2.142) und den Transformationen (2.135) bis (2.140) ausdrücken als

$$(1 + \tilde{\delta}) \cdot h(t)^T \hat{X}_T h(T) + \int_0^T (1 + \tilde{\delta}) \cdot [\|\hat{z}(t)\|^2 - \|\hat{w}(t)\|^2] dt - h(0)^T \hat{P}_0 h(0) \leq c_0 - \tau d, \quad (2.144)$$

wobei eine bewusste Unterscheidung zwischen  $\delta$  in (2.143) und  $\tilde{\delta}$  in (2.144) getroffen wurde, da diese für zwei unterschiedliche Systeme gelten und damit im Allgemeinen unterschiedliche Werte annehmen können. Aus dem Fall  $[\hat{z}(t) \equiv 0, \hat{w}(t) \equiv 0, h(t) \equiv 0]$  in (2.144) folgt damit direkt  $c_0 - \tau \cdot d \geq 0$  und damit, dass der Parameter  $\tau$ , der eine Art Gewichtungsfaktor zwischen Integraler Quadratischer Zwangsbedingung und dem Gütekriterium darstellt, im Intervall  $\left(0, \frac{c_0}{d}\right]$  liegt.<sup>323</sup>

Weiterhin kann aus (2.144) abgeleitet werden, dass

$$(1 + \tilde{\delta}) \cdot h(t)^T \hat{X}_T h(T) + \int_0^T (1 + \tilde{\delta}) \cdot [\|\hat{z}(t)\|^2 - \|\hat{w}(t)\|^2] dt - h(0)^T \hat{P}_0 h(0) \leq 0 \quad (2.145)$$

da in (2.144) die rechte Seite eine Konstante ist und die linke Seite eine quadratische Funktion ist. Wenn also (2.145) für eine Signalkombination  $(\hat{w}(\cdot), h(0))$  nicht erfüllt wäre, dann könnte durch eine Skalierung dieser Signalkombination eine Verletzung von (2.144) herbeigeführt werden. Da (2.145) erfüllt sein muss, kann man hieraus ein neues quadratisches Gütefunktional für das *Erweiterte System* (2.141) gewinnen, welches durch

$$\hat{J}(h(\cdot), u(\cdot)) := \sup \left( \frac{h(T)^T \hat{X}_T h(T) + \int_0^T \|\hat{z}(t)\|^2 dt}{h(0)^T \hat{P}_0 h(0) + \int_0^T \|\hat{w}(t)\|^2 dt} \right) < 1 \quad (2.146)$$

gegeben ist.<sup>324</sup>

<sup>324</sup> Savkin und Petersen, 1995

Damit ist das Problem auf die Lösung der robusten Regelung eines unsicheren Systems mit einer Einschränkung des Endzustands (siehe Kapitel 2.9.6.5) zurückgeführt. Somit lässt sich das Optimierungsproblem durch die Lösung der beiden Riccati Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned} -\dot{X}(t) &= \hat{A}^T X + X \hat{A} + \hat{C}_1^T \hat{C}_1 + X (\hat{B}_2 Q^{-1} \hat{B}_2^T - \hat{B}_1 E^{-1} \hat{B}_1^T) X \\ \dot{Y}(t) &= \hat{A} Y + Y \hat{A}^T + \hat{B}_2 Q^{-1} \hat{B}_2^T + Y (\hat{C}_1^T \hat{C}_1 - \hat{C}_2^T N \hat{C}_2) Y \end{aligned} \quad (2.147)$$

Mit den Lösungen  $X(t)$  und  $Y(t)$  zu (2.147) ergibt sich der Regler nach (2.104) in 2.9.6.2 zu<sup>324, 325</sup>

$$\begin{aligned} A_c(t) &= \hat{A}(t) + \hat{B}_1(t) C_c(t) - B_c(t) \hat{C}_2(t) + (\hat{B}_2(t) - B_c(t)) Q(t)^{-1} \hat{B}_2(t)^T X(t) \\ B_c(t) &= (\mathbb{I} - Y(t) X(t))^{-1} Y(t) \hat{C}_2(t)^T N(t) \\ C_c(t) &= -E(t)^{-1} \hat{B}_1(t)^T X(t) \end{aligned} \quad (2.148)$$

mit  $E(t) = \hat{D}_1^T \hat{D}_1$ . Das System (2.130) ist mit einem Regler nach (2.104) und (2.148) robust regelbar mit Unterdrückung harmonischer Störungen, wenn eine Konstante  $\tau \in \left(0, \frac{c_0}{d}\right]$  existiert, sodass die Lösungen  $X(t)$  und  $Y(t)$  zu (2.147) existieren, sodass  $X(T) = \hat{X}_T$  und  $Y(0) = \hat{P}_0^{-1}$  sowie der Spektralradius

$$\rho(Y(t) X(t)) < 1$$

erfüllt sind.<sup>324,325</sup>

## 2.9.7 Zwischenfazit

In diesem Abschnitt wurden aufbauend auf den entsprechenden Grundlagen der Regelungstechnik, wie der Zustandsraumdarstellung, den Konzepten der Steuer-, Regel- und Beobachtbarkeit, sowie einer Methode zur Linearisierung regelungstechnischer Systeme in Zustandsraumdarstellung, verschiedene Konzepte zur robusten Regelung unterschiedlicher Komplexität vorgestellt. Dabei galt der Fokus der Regelung von unsicherheitsbehafteten Systemen, die in ihrer Beschreibung, insbesondere unter Zuhilfenahme von Integralen Quadratischen Zwangsbedingungen (IQC), und den möglichen Klassifikationen eingeführt wurden. Darauf aufbauend wurden die Konzepte des Linear Quadratisch Optimalen Reglers (LQR) und verschiedene Abstufungen der  $\mathcal{H}_\infty$ -Regelung von unsicherheitsbehafteten Systemen

<sup>325</sup> Petersen et al., 2000

und die dabei zur Anwendung kommende s-Prozedur vorgestellt, die sich je nach zugrundeliegender Problemstellung – insbesondere dem Ziel der Regelung – anwenden lassen.

## 2.10 Numerische Lösung von Riccati Matrix Differenzialgleichungen

Im Zuge der zuvor vorgestellten Konzepte zur robusten Regelung wurde der Leser mit den sogenannten Riccati Matrix Differenzialgleichungen konfrontiert, deren Lösung für die Bestimmung eines optimalen Regelgesetzes zwingend erforderlich ist. Auf die Möglichkeiten der numerischen Lösung dieses speziellen Differenzialgleichungstypus wird im Folgenden näher eingegangen und verschiedene Ansätze unterschiedlicher Komplexität und unterschiedlichen Ressourcenaufwandes vorgestellt, da diese Betrachtung einen wesentlichen Beitrag zur Auswahl<sup>326</sup> und Umsetzung<sup>327</sup> des Reglerkonzeptes liefert.

### 2.10.1 Unterscheidung grundlegender Problemstellungen

Bei der Behandlung von Riccati Matrix Differenzialgleichungen (*Riccati matrix differential equations*, RMDE) unterscheidet man mehrere Grundlegend verschiedene Problemstellungen. Eine allgemeine Darstellung einer RMDE ist durch

$$\dot{W}(t) + W(t)A(t) + D(t)W(t) + W(t)B(t)W(t) - C(t) = 0 \quad (2.149)$$

gegeben.<sup>328</sup>

Zunächst wird unterschieden, ob es sich um ein Anfangswertproblem (*initial value problem*, IVP), ein Endwertproblem oder ein sogenanntes Zwei-Punkt Randwertproblem (*two point boundary value problem*, TPBPV) handelt, also ob die Randbedingung zur Lösung der Gleichung in der Form  $W(0) = W_0$ , in der Form  $W(T) = W_T$  oder in der Form  $W(T) = W_T$  mit einer Zusatzbedingung für  $W(0)$  gegeben ist. Dabei erfordern die letzteren beiden Probleme eine andere mathematische Behandlung, da hier rückwärts in der Zeit integriert werden muss. Dies erschwert insbesondere bei numerischer Behandlung die Umsetzung einer geeigneten Lösung.

Weiterhin wird unterschieden zwischen involutorischen und nicht-involutorischen RMDEs. Eine involutorische Riccati Matrix Differenzialgleichung zeichnet sich im Falle reeller Matrizen durch die Beziehungen

<sup>326</sup> vgl. Kap. 6

<sup>327</sup> vgl. 7.3 sowie 12.5

<sup>328</sup> Reid, 1972

$$B = B^T, \quad C = C^T, \quad D = A^T$$

aus, während im Falle von komplexen Matrizen die Transponierte der Matrizen durch die konjugiert komplexe Transponierte ersetzt werden muss. Solche involutorische RMDE zeichnen sich insbesondere durch eine symmetrische Lösung  $W(t) = W(t)^T$  beziehungsweise  $W(t) = W(t)^\dagger$  aus, welche sich auch durch die Beziehung  $W(t) = V(t)U^{-1}(t)$  mithilfe der Lösungen  $U(t)$  und  $V(t)$  eines Hamilton'schen Matrix Differenzialgleichungssystem bestimmen lässt.<sup>329</sup>

Eine weitere Unterscheidung, welche naturgemäß entscheidend für den Lösungsansatz für eine Riccati Matrix Differenzialgleichung ist, ist die zwischen autonomen und nicht-autonomen RMDEs. Eine autonome Riccati Matrix Differenzialgleichung zeichnet sich durch zeitunabhängige Koeffizientenmatrizen aus

$$A(t) = A, \quad B(t) = B, \quad C(t) = C, \quad D(t) = D,$$

während umgekehrt die Koeffizientenmatrizen im Falle einer nicht-autonomen RMDE eine Zeitabhängigkeit aufweisen. Letzteres bedeutet wiederum eine aufwändigere mathematische Behandlung.

Diese Eigenschaften von Riccati Matrix Differenzialgleichungen spiegeln sich auch in den verschiedenen Ansätzen zur numerischen Lösung dieser Gleichungen und ihren Einschränkungen wider.

### 2.10.2 Relationen zwischen Lösungen der algebraischen Riccati Gleichung und der Riccati Matrix Differenzialgleichung

Den Ausführungen von PETERSEN ET AL.<sup>330</sup> folgend, besteht ein direkter Zusammenhang zwischen der Existenz der Lösungen zu den in der Regelungstechnik auftretenden Problemstellungen mit Riccati Matrix Differenzialgleichungen und der Existenz der Lösung zu den mit ihnen assoziierten algebraischen Riccati Gleichungen.

Für ein Endwertproblem einer Riccati Matrix Differenzialgleichung der Form

$$\begin{aligned} \dot{X} &= X\tilde{A}_x + \tilde{A}_x^T X + \tilde{C}_x + X\tilde{Q}_x X \\ X(T) &= M \end{aligned} \tag{2.150}$$

existiert eine positiv semidefinite Lösung  $X(t) \geq 0$  mit dem Grenzwert  $\lim_{T \rightarrow \infty} (X(t)) = X_\infty$ , wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:<sup>330</sup>

<sup>329</sup> Reid, 1972

<sup>330</sup> Petersen et al., 2000

- die Matrix  $\tilde{C}_x$  ist positiv semidefinit,  $\tilde{C}_x \geq 0$ ,
- das Matrizenpaar  $(\tilde{A}_x, \tilde{C}_x)$  ist beobachtbar,
- die algebraische Riccati Gleichung

$$0 = X_\infty \tilde{A}_x + \tilde{A}_x^T X_\infty + \tilde{C}_x + X_\infty \tilde{Q}_x X_\infty \quad (2.151)$$

hat die minimale positiv semidefinite Lösung  $X_\infty \geq 0$ .

Ein ähnlicher Zusammenhang kann für das Anfangswertproblem gefunden werden.

Das Anfangswertproblem einer Riccati Matrix Differentialgleichung der Form

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \tilde{A}_y Y + Y \tilde{A}_y^T + B_2 \tilde{C}_y B_2^T - Y \tilde{Q}_y Y \\ Y(0) &= Y_0 \end{aligned} \quad (2.152)$$

besitzt eine positiv definite Lösung  $Y(t, Y_0) > 0$  mit dem Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow \infty} (Y(t, Y_0)) = Y_\infty$ , wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:<sup>330</sup>

- die Matrix  $Y_\infty$  erfüllt die Bedingung  $Y_\infty \geq Y_0 \geq 0$ ,
- das Matrizenpaar  $(\tilde{A}_y, B_2 \tilde{C}_y)$  ist stabilisierbar,
- die algebraische Riccati Gleichung

$$0 = \tilde{A}_y Y_\infty + Y_\infty \tilde{A}_y^T + B_2 \tilde{C}_y B_2^T - Y_\infty \tilde{Q}_y Y_\infty \quad (2.153)$$

hat die minimale positiv definite Lösung  $Y_\infty > 0$ .

Wenn nun entsprechende Lösungen für die algebraischen Gleichungen (2.151), (2.153) und die Differentialgleichungen (2.150), (2.152) existieren, dann folgt für den Spektralradius  $\rho$  aus

$$\rho(Y_\infty X_\infty) < 1$$

auch, dass<sup>331</sup>

$$\rho(Y(t, Y_0) X(t)) > 1, \quad \forall t \in [0, T], \forall T > 0.$$

---

<sup>331</sup> Petersen et al., 2000

### 2.10.3 Methoden zur Lösung des Anfangswertproblems

#### 2.10.3.1 Rosenbrock-Methode 2. Ordnung

Zur Lösung des Anfangswertproblems einer nicht-autonomen, steifen Riccati Matrix Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= Q(t) + X(t)A(t) + B(t)X(t) - X(t)R(t)X(t) \equiv F(t, X(t)); \\ X(t_0) &= X_0; t \in [t_0, t_f]\end{aligned}\quad (2.154)$$

wählen BENNER UND MENA einen Ansatz unter Verwendung sogenannter Rosenbrock Methoden aus der Klasse der Ein-Schritt Methoden. Die Rosenbrock-Methoden werden dabei auch oft als lineare implizite Runge-Kutta Methoden bezeichnet. BENNER UND MENA beschreiben diese Methode als eine mit „guten Stabilitätseigenschaften“, der Möglichkeit einer „effizienten Größenkontrolle“ und kleineren Berechnungsaufwänden als im Falle von Mehr-Schritt Methoden (z.B. *Backward Differentiation Formula*, BDF-basierte Verfahren).<sup>332</sup>

Die Rosenbrock Methode kann als die Anwendung einer Iteration nach dem Newton-Verfahren in jeder Stufe einer impliziten Runge-Kutta Methode unter direkter Verwendung der Jacobi-Matrix in der Integrationsformel interpretiert werden.

Die Anwendung dieser Methode auf das Anfangswertproblem (2.154) ergibt demnach<sup>332</sup>

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{h\gamma_{ii}} - \frac{\partial F}{\partial X}(t_k, X_k)\right)K_i &= F\left(t_k, X_k + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}K_j\right) + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{c_{ij}}{h}K_j + \gamma_i h F_{t_k} \\ X_{k+1} &= X_k + \sum_{j=1}^s m_j K_j\end{aligned}\quad (2.155)$$

mit  $t_{k,i} = t_k + \alpha_i \cdot h$  ( $i = 1, \dots, s$ ) und  $F_{t_k} = \frac{\partial F}{\partial t}(t_k, X(t_k))$ . Die Ableitung ist hier gegeben durch den *Sylvester Operator*

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial X}(t_k, X_k) : U &\rightarrow (B_k^T - R_k X_k)^T U + U(A_k - R_k X_k), \\ X_k &\approx X(t_k), A_k \approx A(t_k), \dots\end{aligned}$$

woraus sich zusammen mit (2.155) ergibt<sup>332</sup>

<sup>332</sup> Benner und Mena, 2013

$$\begin{aligned} \bar{B}_k K_i + K_i \bar{A}_k &= F \left( t_k, X_k + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j \right) + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{c_{ij}}{h} K_j + \gamma_i h \cdot F_{t_k} \\ X_{k+1} &= X_k + \sum_{j=1}^s m_j K_j \end{aligned} \tag{2.156}$$

Somit muss in jedem Zeitschritt  $k$  und in jeder Stufe  $s$  der Methode eine *Sylvester Gleichung* gelöst werden. Diese Berechnung wird durch die Tatsache vereinfacht, dass die Koeffizientenmatrizen  $(\bar{A}_k, \bar{B}_k)$  in jeder Stufe der Methode gleich sind und somit nur ein einziges Mal berechnet werden müssen.

Damit bietet die Rosenbrock Methode für Riccati Matrix Differenzialgleichungen einen Lösungsweg, der im Vergleich zu BDF Methoden um den Faktor  $k$  effizienter ist, da bei diesen Methoden eine Algebraische Riccati Gleichung (*algebraic Riccati equation*, ARE) gelöst werden muss, welche in der numerischen Lösung einen höheren Rechenaufwand hat, als die Sylvester Gleichung.<sup>333</sup>

Diese Methode kann außerdem auf die Problemstellung einer autonomen RMDE angepasst werden, wodurch dann statt der Sylvester Gleichung eine *Lyapunov Gleichung* gelöst werden muss.<sup>333</sup>

Weiterhin ist es ebenfalls möglich, mit dieser Methode statt eines Anfangswertproblems auch ein Endwertproblem oder ein Zwei-Punkt Randwertproblem zu lösen, indem das zugrunde liegende Problem mithilfe einer Variablentransformation

$$\begin{aligned} \bar{X}(t_f; t) &:= X(t_f - t) \\ \dot{\bar{X}}(t_f; t) &:= -\dot{X}(t_f - t) \end{aligned} \tag{2.157}$$

auf die Form

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= Q(t) + X(t)A(t) + A^T(t)X(t) - X(t)S(t)X(t) \\ X(t_0) &= X_0 \end{aligned} \tag{2.158}$$

gebracht wird.<sup>334,335</sup>

### 2.10.3.2 Verwendung von Backward Differentiation Formula Methoden

IBÁÑEZ UND HERNÁNDEZ präsentieren in ihrer Arbeit eine Methode zur numerischen Lösung des Anfangswertproblems einer zeitabhängigen RMDE

<sup>333</sup> Benner und Mena, 2013

<sup>334</sup> Benner und Mena, 2016

<sup>335</sup> Lang et al., 2015

$$\begin{aligned}\dot{X} &= A_{21}(t) + A_{22}(t)X - XA_{11}(t) - XA_{12}(t)X, \\ X(t_0) &= X_0 \in \mathbb{R}^{m \times n}\end{aligned}\tag{2.159}$$

unter Verwendung von BDF Verfahren basierend auf der Newton-Sylvester Gleichung. In dieser Arbeit werden mehrere Algorithmen vorgestellt, welche auf der BDF Methode beziehungsweise auf der Lösung der Kommutator Gleichung beruhen.

Bei der Anwendung des BDF basierten Verfahrens wird das ursprüngliche Zeitintervall  $[t_0, t_f]$  in zwei Teilintervalle  $[t_0, t_k]$  und  $[t_k, t_f]$  unterteilt. Es wird nun angenommen, dass die ursprüngliche Riccati Matrix Differentialgleichung zu einer algebraischen Riccati Gleichung wird.<sup>336</sup>

$$0 = \bar{A}_{21} + \bar{A}_{22}X - X\bar{A}_{11} - X\bar{A}_{12}X$$

Auf diese wird dann das Newton-Verfahren angewandt, welches zu einer Sylvester Gleichung führt. Für deren Behandlung wird nun ein auf Bartels-Steward basierender Algorithmus angewandt, welcher zu einer Vektorisierung der Matrixgleichung führt.

Für das Verfahren auf Basis der Kommutator-Gleichung wird die RMDE zunächst vektorisiert, wodurch nun Riccati Differentialgleichungen in Vektorform entstehen. Diese werden nun mit einem Netz aus  $l$  Zeitintervallen stückweise linearisiert, wodurch lineare Differentialgleichungen entstehen, welche mittels Rücktransformation wieder zu Matrixdifferentialgleichungen werden. Auf diese kann nun ein auf der Kommutator-Gleichung basierender Algorithmus angewandt werden, um Berechnungskosten zu reduzieren.<sup>336</sup>

## 2.10.4 Methoden zur Lösung des Endwertproblems

### 2.10.4.1 Verwendung der Singulärwert- und QR-Zerlegung

Eine Methode zur numerischen Lösung des mathematisch anspruchsvollen Endwertproblems im Falle eines Deskriptor Systems

$$\begin{aligned}E^T \dot{X}(t)E(t) &= E^T X(t)A + A^T X(t)E + Q - E^T X(t)WX(t)E, \\ E^T X(T)E &= C^T MC\end{aligned}\tag{2.160}$$

welches durch die Verwendung der quadratischen Matrix  $E$  den allgemeinsten Fall eines linearen zeitinvarianten Systems darstellt, wird von MEHRMANN behandelt.<sup>337</sup>

Dabei wird zunächst  $E$  mittels Singulärwertzerlegung transformiert

$$\Sigma_o = U^* E V = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n), \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$$

<sup>336</sup> Ibáñez und Hernández, 2009

<sup>337</sup> Mehrmann, 1991

wodurch eine Diagonalmatrix  $\Sigma_0$  entsteht, deren Diagonalwerte der Größe nach absteigend geordnet sind. Im nächsten Schritt wird nun numerisch der Rang  $p$  dieser Matrix ermittelt, sodass  $p$  der größte Index ist, für den

$$\sigma_i \geq \epsilon \sigma_1$$

gilt. Damit wird die reduzierte Matrix  $\Sigma_E$  bestimmt, für die  $\sigma_{p+1} = \dots = \sigma_n = 0$  gesetzt werden. Mithilfe der Anwendung der Transformation mit  $U$  und  $V$  auf die gesamte Riccati Matrix Differentialgleichung (also  $\hat{A} = U^T A V$ ,  $\hat{B} = U^T B V, \dots$ ) wird erreicht, dass diese in vier voneinander entkoppelte Gleichungen transformiert wird.<sup>337</sup>

Eine dieser Gleichungen, die algebraische Gleichung

$$0 = \Sigma_E (Y_{12} A_{22} + Y_{11} A_{12}) + Q_{12}$$

wird mithilfe der *QR-Zerlegung* nach dem Endwert  $Y_{12}(T)$  aufgelöst<sup>337</sup>

$$Y_{12}(T) = -\Sigma_E^{-1} (M_{11} \Sigma_E^{-1} A_{12} + Q_{12}) A_{22}^{-1}.$$

Anschließend werden Teile der Matrix  $Y(t)$  in Vektorform geschrieben, wodurch das Gleichungssystem

$$\tilde{E} \dot{v}(t) = \tilde{f}(t, v(t))$$

entsteht. Dieses kann nun mit einem Algorithmus zur Lösung von algebraischen Differentialgleichungen aufgelöst werden und anschließend entsprechend der vorherigen Transformation nun die Matrix  $Y(t_0)$  aus dem Vektor  $v(t_0)$  gewonnen werden.<sup>337</sup>

Der gesuchte Anfangswert der Matrixfunktion  $X(t_0)$  kann nun mithilfe der Rücktransformation der Singulärwertzerlegung

$$X(t_0) = U Y(t_0) U^T$$

erhalten werden.<sup>337</sup>

Mit dieser kann die Riccati Matrix Differentialgleichung aus (2.160) nun als Anfangswertproblem behandelt werden.

#### 2.10.4.2 Geschlossene Lösung aus der Bernoulli-Substitution

Einen alternativen Vorschlag zur Lösung des Endwertproblems

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) + A^T P(t) + P(t) A - (P(t) B + S) R^{-1} (P(t) B + S)^T + Q &= 0 \\ P(T) = P_T = P_T^T \geq 0, \quad T > 0 \end{aligned} \quad (2.161)$$

liefern NTOGRAMATZIDIS UND FERRANTE in Form einer geschlossenen Lösung, welche unter Verwendung des sogenannten *Popov-Triplets* gefunden wird.

Das *Popov-Triplet* ist definiert als  $\Sigma = (A, B, \Pi)$  mit der *Popov-Matrix*

$$\Pi = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix},$$

welche hier symmetrisch und positiv definit sein soll.

Es wird nun ausgenutzt, dass die Lösung des Endwertproblems (2.161) aus der Lösung der Hamilton Differentialgleichungen

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BR^{-1}S^T & -BR^{-1}B^T \\ -Q + SR^{-1}S^T & -A^T + SR^{-1}B^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \Lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X(T) \\ \Lambda(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_n \\ P_T \end{bmatrix}$$

als

$$P(t) = \Lambda(t) X^{-1}(t), \quad t \in (-\infty, T]$$

gewonnen werden kann.<sup>338</sup>

Dabei kann die Linearität der Hamilton Differentialgleichungen verwendet werden, indem man deren Lösung direkt aus der Endwertbedingung erhält

$$\begin{bmatrix} X(t) \\ \Lambda(t) \end{bmatrix} = e^{Ht} C = e^{H(t-T)} \begin{bmatrix} \mathbb{I}_n \\ P_T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times n}$$

und anschließend die exponentielle Matrixfunktion in der Form

$$\begin{bmatrix} E_1(t) & E_2(t) \\ E_3(t) & E_4(t) \end{bmatrix}$$

schreibt. Dadurch erhält man für die Lösungen der Hamilton Differentialgleichungen

$$X(t) = E_1(t) + E_2(t) P_T$$

$$\Lambda(t) = E_3(t) + E_4(t) P_T$$

und kann nun die Lösung des Endwertproblems (2.161) schreiben als

$$P(t) = \Lambda(t) X^{-1}(t) = (E_3(t) + E_4(t) P_T) (E_1(t) + E_2(t) P_T)^{-1}. \quad (2.162)$$

Dieses Verfahren wird oftmals als *Bernoulli-Substitution* bezeichnet.

---

<sup>338</sup> Ntogramatzidis und Ferrante, 2010

Ein Nachteil dieser Substitution ist, dass sich die Matrizen  $E_i(T)$  nicht Abhängigkeit der Matrizen des ursprünglichen Problems – dem Popov-Triplet  $\Sigma$  schreiben lassen. Daher kann man anhand von (2.162) nicht analysieren, wie sich die Lösung mit einer Änderung von  $\Sigma$  oder  $P_T$  verändern wird.

NTOGRAMATZIDIS UND FERRANTE entwickeln nun auf dieser Basis andere geschlossene Darstellungen von  $P(t)$  unter verschiedenen starken Anforderungen an die Regelbarkeit oder Stabilisierbarkeit des Systems. Dies wird nun am Beispiel der Lösung für ein stabilisierbares System gezeigt.

Ist das System, das dem Endwertproblem (2.161) zugrunde liegt, stabilisierbar, dann kann die geschlossene Form einer Lösung  $P(t)$  wie folgt geschrieben werden:

$$P(t) = T_s^{-T} \Lambda(t) X^{-1} T_s^{-1}. \quad (2.163)$$

Dabei sind

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{A_{p^+} t} \hat{\Phi} + J e^{A^*(t-T)} \hat{\Psi} \\ \Lambda(t) &= P^+ e^{A_{p^+} t} \hat{\Phi} + P^+ e^{A^*(t-T)} \hat{\Psi} \end{aligned}$$

die Lösungen der Hamilton Differenzialgleichungen mit den Matrixfunktionen

$$\begin{aligned} \hat{\Phi} &= e^{-A_{p^+} T} \left( \mathbb{I}_n + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Delta_c^{-1} \end{bmatrix} (T_s^T P_T T_s - P^+) \right) \\ \hat{\Psi} &= \begin{bmatrix} I_{n_u} & -P_{uc}^+ \Delta_c^{-1} \\ 0 & \Delta_c^{-1} \end{bmatrix} (T_s^T P_T T_s - P^+) \end{aligned}$$

Hier ist  $T_s$  eine Matrix, welche das stabilisierbare System in ein „sign-controllable“ System überführt.

Für den Fall, dass das System „sign-controllable“<sup>339</sup> ist, wird eine geschlossene Form der Lösung zu (2.161) gefunden, indem zunächst die algebraische Riccati Gleichung

$$PA + A^T P - (S + PB)R^{-1}(S^T + P^T B) + Q = 0$$

nach  $P = P^T$  aufgelöst wird. Mithilfe dieser Lösung wird nun die sogenannte Matrix des geschlossenen Systems  $A_p = A - BR^{-1}(S^T + B^T P)$  konstruiert und damit die Lösung  $Y$  der Lyapunov Gleichung

$$A_p Y + Y A_p^T + BR^{-1} B^T = 0$$

---

<sup>339</sup> Ntogramatzidis und Ferrante, 2010

bestimmt. Diese existiert nur dann eindeutig, wenn die Matrix  $A_p$  keine gespiegelten komplexen Eigenwerte besitzt (also  $\lambda \in \sigma(A_p) \Rightarrow -\lambda \notin \sigma(A_p)$  gilt).

Dann ist die Lösung des Endwertproblems gegeben durch

$$P(t) = \Lambda(t) X^{-1}(t)$$

mit

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{-A_p(T-t)} (\mathbb{I}_n - Y(P - P_T)) + Y e^{A_p^T(T-t)} (P - P_T) \\ \Lambda(t) &= P e^{-A_p(T-t)} (\mathbb{I}_n - Y(P - P_T)) + (PY - \mathbb{I}_n) e^{A_p^T(T-t)} (P - P_T) \end{aligned}$$

Hier muss demnach zur Bestimmung der Lösung zunächst die algebraische Riccati Gleichung gelöst, die Matrix  $A_p$  bestimmt und die damit assoziierte Lyapunov Gleichung gelöst werden. Damit werden dann die Lösungen der Hamilton Differenzialgleichungen, die Inverse  $X^{-1}(t)$  und schließlich  $P(t)$  berechnet.<sup>340</sup>

#### 2.10.4.3 Integration in negativer Zeitrichtung durch Übergangsmatrizen

Ein anderer Ansatz zur Bestimmung einer geschlossenen Form der Lösung des Endwertproblems

$$\begin{aligned} -\dot{K}(t) &= K(t)A + A^T K(t) - K(t) \underbrace{BR^{-1}B^T}_{:=S} K(t) + Q \\ K(T) &= F \end{aligned} \tag{2.164}$$

diskutiert GAJIC. Dabei wird die Lösung mithilfe der Lösung einer algebraischen Riccati Gleichung, einer algebraischen Lyapunov Gleichung sowie einer Lyapunov Differenzialgleichung berechnet. Dies geschieht unter der Annahme, dass die Paare  $(A, B)$  und  $(A, C)$  vollständig regelbar bzw. beobachtbar sind.

Unter diesen Annahmen hat die algebraische Riccati Gleichung

$$0 = KA + A^T K - KSK + Q$$

genau eine positiv definite Lösung  $K^+$  und genau eine negativ definite Lösung  $K^-$ .

Diese negative definite Lösung kann auch aus der positiv definiten Lösung der Gleichung

$$0 = -K_n A - A^T K_n - K_n S K_n + Q$$

erhalten werden durch  $K_n^+ = -K^-$ .

---

<sup>340</sup> Ntogramatzidis und Ferrante, 2010

Nun kann man die algebraische Gleichung mit  $K^-$  eingesetzt für  $K$  von der Riccati Matrix Differentialgleichung in (2.164) abziehen und eine Variablentransformation  $P_0(t) = (K(t) - K^-)^{-1}$  durchführen. Damit entsteht die Lyapunov Differentialgleichung

$$\dot{P}_0(t) = A_0 P_0(t) + P_0(t) A_0^T - S$$

mit  $A_0 = A - SK^-$  und der Endwertbedingung  $P_0(T) = (F - K^-)^{-1}$ . Die Lösung dieser Differentialgleichung kann nun wiederum mithilfe der Lösung  $E$  der algebraischen Lyapunov Gleichung

$$A_0 E + E A_0^T - S = 0$$

durch

$$P_0(t) = e^{A_0(t-T)} \cdot (P_0(T) - E) \cdot e^{A_0^T(t-T)} + E$$

gefunden werden.

Damit ergibt sich die Lösung des Endwertproblems (2.164) als<sup>341</sup>

$$K(t) = K^- + P_0^{-1}(t). \tag{2.165}$$

Zur Umsetzung dieser numerischen Lösung müssen also die negative algebraische Riccati Gleichung und die algebraische Lyapunov Gleichung gelöst werden. Daraus kann nun die Matrixfunktion  $X(t) = e^{-A_0 \cdot \Delta t}$  mit der Schrittweite  $\Delta t$  berechnet werden, woraus sich die Lösung der Lyapunov Differentialgleichung

$$P_{l-k} = X \cdot (P_{l-(k-1)} - E) \cdot X^T + E.$$

ergibt. Daraus ergibt sich dann die Lösung der RMDE zum Zeitpunkt  $k$  im in  $l$  Zeitschritte diskretisierten Intervall  $[0, T]$  als

$$K_{l-k} = K^- - P_{l-k}^{-1}. \tag{2.166}$$

---

<sup>341</sup> Gajic, 2010



### 3 Motivation und Zielsetzung

In diesem Kapitel wird, basierend auf dem Stand der Forschung, die Forschungslücke identifiziert, die zusammen mit den anschließend aufgestellten Forschungshypothesen die wissenschaftliche Basis dieser Arbeit bilden und die Ableitung der Forschungsfragen erlauben, die der Fokussierung und Einordnung relevanter Inhalte der vorliegenden Arbeit dienen.

Die Relevanz der trockenen Doppelkupplung für ihre heutigen als auch für zukünftige Anwendungen, speziell in den Bereichen der Fahrzeugklassen der Klein- und Kleinstwagen sowie der Kompakt- und Mittelklasse,<sup>342</sup> ergibt sich aus den in Abschnitt 2.3 erläuterten technischen Eigenschaften von Doppelkupplungsgetrieben und der trockenen Doppelkupplung bezüglich Fahrkomfort, Fahrdynamik, sowie Effizienz und Möglichkeiten zur Elektrifizierung des Antriebsstrangs.<sup>343,344</sup> Diese Anwendung von trocken laufenden Doppelkupplungen ist aktuell limitiert durch die erreichbare Leistungsaufnahmefähigkeit und Temperaturbeständigkeit, ist jedoch aufgrund der Kosten- und Bauraumeffizienz speziell für einen Einsatz in diesen Fahrzeugklassen von Vorteil.<sup>343</sup>

Jedoch ist gerade das Potenzial zukünftiger Anwendungen dieser Doppelkupplungsvariante von der Lösung zumindest einiger der im Abschnitt 2.6 genannten Probleme, wie zum Beispiel dem Kupplungsrupfen, abhängig. Daher liegt der momentane Fokus der Weiterentwicklung von trocken laufenden Doppelkupplungssystemen neben der Reduktion der Schwungmasse vor allem auch auf der Verbesserung der fahrkomfortrelevanten Eigenschaften.<sup>345</sup>

Die Motivation zur Entwicklung einer Anti-Rupf-Regelung für PKWs mit trocken laufender Doppelkupplung ergibt sich somit direkt aus dem in Kapitel 2 erörterten Stand der Forschung.

Während es bei anderen der in Kapitel 2.6 beschriebenen komfortmindernden Phänomene möglich ist, deren Einfluss mithilfe der sog. Schlupfregelung zu minimieren,<sup>346</sup> so gilt dies nicht für das Kupplungsrupfen, da dieses Phänomen genau

---

<sup>342</sup> Definition der Fahrzeugklassen entsprechend Europäische Kommission, 2002 , sowie Kraftfahrt-Bundesamt, 2011

<sup>343</sup> vgl. 2.3 sowie Bild 16

<sup>344</sup> Tschöke, 2015

<sup>345</sup> vgl. 2.3.2

<sup>346</sup> vgl. 2.3

in den Schlupfphasen der Kupplung auftritt und daher zur Minimierung des komfortmindernden Einfluss im Fahrbetrieb ein anderer Weg gewählt werden muss.<sup>347</sup>

Darüber hinaus resultieren die bereits in Kapitel 1 erwähnten Verschärfungen der Emissionsvorgaben in einem Bestreben der Entwicklung von automobilen Antriebssträngen hin zu verringerter Reibung sowie dem verstärkten Einsatz von Leichtbaumethoden in diesem Teilsystem. Ein Nachteil dieser Tendenz ergibt sich jedoch aus dem folgenden Zitat aus dem 9. Schaeffler Kolloquium:

*„Geringere Reibung und Leichtbau führen jedoch auch zu einer höheren Sensitivität gegenüber Drehschwingungen, da weniger Masse bewegt und Schwingungen weniger gedämpft werden.“* ZINK UND HAUSNER<sup>348,349</sup>

Aus diesem Spannungsfeld zwischen Verringerung der Reibung und einer Reduktion der Trägheitsmomente im Antriebsstrang auf der einen und einer Reduzierung der Sensitivität gegenüber Drehschwingungen auf der anderen Seite ergibt sich der Bedarf nach einer selektiven Erhöhung der Systemdämpfung.

Ein Mechanismus, der eine solche selektive Erhöhung der Dämpfung ermöglicht, muss jedoch, gerade aufgrund der bevorzugten Fahrzeugklassen für den Einsatz von trocken laufenden Doppelkupplungen, möglichst kosteneffizient und bauraumneutral angewandt werden können.

Diese Möglichkeit zur selektiven Erhöhung der Triebstrangdämpfung ist mit dem in Abschnitt 2.8.1.1 beschriebenen Hardware-Tilger nicht möglich, respektive eine den Anforderungen entsprechende Konstruktion wird als zu aufwendig angesehen.<sup>350</sup> Darüber hinaus ist eine konstruktive Lösung zur Verringerung von Kupplungsrupfen stets mit höheren Stückkosten verbunden, da die Bauteile nicht nur konstruiert und entwickelt, sondern außerdem auch gefertigt und verbaut werden müssen.

Aus diesem Grund wurden schon früh Software-basierte Ansätze zur Dämpfung von Rupfschwingungen entwickelt und getestet (siehe Kapitel 2.8.3). Jedoch wurden diese Regelkonzepte entweder nur auf dem Prüfstand bzw. in der Simulation erprobt und nicht auf einem Fahrzeugsteuergerät umgesetzt,<sup>351</sup> oder sie wurden auf ein zur Verfügung stehendes Versuchsfahrzeug angewandt und auch speziell auf dieses Fahrzeug abgestimmt.<sup>352</sup>

---

<sup>347</sup> vgl. 2.6.3

<sup>348</sup> Zink; Hausner, 2010

<sup>349</sup> vgl. auch Albers; Herbst, 1998, sowie Albers et al., 2001

<sup>350</sup> vgl. 2.8

<sup>351</sup> vgl. 2.8.3.4

<sup>352</sup> vgl. 2.8.3.5

Darüber hinaus wurde bei der Entwicklung dieser Ansätze eine notwendige Robustheit der Regeleinrichtung gegenüber dem zur Reglerauslegung dienenden nominellen System nicht berücksichtigt. Jedoch muss davon ausgegangen werden, dass das zu regelnde System, ein PKW-Antriebsstrang mit Reibkupplung, sich über die Produktlebensdauer durch Alterung und Verschleiß der einzelnen Komponenten in seiner Dynamik verändern kann. Dieser zu erwartende Effekt lässt sich am Beispiel des Einflusses sowohl der longitudinalen als auch der transversalen Schwingungsmoden des Motorblockes erläutern, da durch diese Kopplung von Schwingungszuständen die Motorlagerung einen deutlichen Einfluss auf das Schwingungsverhalten des gesamten Antriebsstranges hat.<sup>353</sup> Eine zu erwartende Veränderung der Eigenschaften der mit dem Antriebsstrang verbundenen Lager über die Fahrzeuglebensdauer (z.B. Verringerung der Dämpfung) hat somit einen direkten Einfluss auf die Schwingungsdynamik und damit auch die Rupfeigenschaften des betrachteten Systems. Weiterhin muss angenommen werden, dass es in jedem Fahrzeug bedingt durch Bauteilstreuungen zu Abweichungen der Dynamik des Antriebsstranges kommen kann und sich dieses Verhalten von einer Systemrealisierung zur anderen unterscheiden kann. Gegenüber diesen Unterschieden der Dynamik innerhalb einer Menge von Systemrealisierungen eines nominellen Systems muss der implementierte Software-basierte Ansatz zur Dämpfung von Rupfschwingungen robust sein, da es ansonsten entgegen der eigentlichen Intention möglich wäre, durch die Regelung diese Schwingungen zu verstärken, oder im Falle einer potenziellen Anpassung auf jede einzelne dieser Realisierungen der zu erwartende Aufwand einen der Vorteile einer softwarebasierten Lösung zunichtemachen würde.<sup>354</sup>

Daraus leitet sich nun der Forschungsbedarf für die vorliegende Arbeit ab:

**Ziel dieser Arbeit** ist die Entwicklung eines effizienten Software-basierten Ansatzes zur Reduktion von rotatorischen Antriebsstrangschwingungen in der Schlupfphase der Kupplung, welcher gleichzeitig robust gegenüber Veränderungen des Systems über Lebensdauer sowie gegenüber durch Serienfertigung bedingten Schwankungen der Systemeigenschaften ist.

---

<sup>353</sup> vgl. 2.4

<sup>354</sup> Damit entspricht der angestrebte Ansatz im Sinne des Robust Design der Strategie „Unsicherheitswirkung reduzieren“, da die existierenden Systemunsicherheiten weder eliminiert noch unterdrückt werden, sondern durch die Unterdrückung der Rupfschwingungen das durch den Einfluss der Unsicherheiten auf das Schwingungsverhalten des Systems auf dessen Verhalten reduziert wird. (vgl. Freund, 2018)

Der Begriff der Robustheit lässt sich in diesem Zusammenhang derart definieren, dass die Regelung unter Einfluss einer unsicherheitsbehafteten Systemdynamik eine garantierte Performance bei gleichzeitiger Sicherstellung der dynamischen Stabilität liefert.<sup>355</sup>

Weiterhin lässt sich der Begriff eines effizienten Software-basierten Ansatzes festlegen, als ein Konzept, welches für eine gewisse Menge an Systemrealisierungen ohne Kalibrationsänderungen eingesetzt werden kann und welches dem Ingenieur erlaubt, im Falle notwendiger Anpassungen diese mit standardisierten und einfach zu handhabenden Werkzeugen und Messverfahren schnell und damit kostengünstig vorzunehmen.

Nun werden mit den Forschungshypothesen grundlegende Annahmen aufgestellt, welche zusammen mit der Forschungslücke die wissenschaftliche Grundlage der vorliegenden Arbeit bilden. Sie werden unter der Annahme formuliert, dass es möglich ist, mithilfe eines geeigneten Kupplungsaktuators die aufgrund von Kupplungsrupfen auftretenden Schwingungen des PKW-Antriebsstrangs zu reduzieren. Diese Annahme wird durch die in Abschnitt 2.8.3 vorgestellten Methoden bestätigt.

#### **Forschungshypothese 1: Verbesserung des Komfortverhaltens**

Ein geeigneter Software-basierter Ansatz zur Ansteuerung des Kupplungsaktuators ermöglicht die Verbesserung des Komfortverhaltens eines PKW-Antriebsstrangs mit automatisierter Kupplung.

#### **Forschungshypothese 2: Abbilden von Systemunsicherheiten**

Die zu erwartenden Systemunsicherheiten eines PKW-Antriebsstrangs können in geeigneter regelungstechnischer Form modelliert werden.

#### **Forschungshypothese 3: Robuste Reduktion von Schwingungen**

Es existieren regelungstechnische Ansätze, welche trotz des Auftretens starker Streuung der Schwingungsanregung und der unsicheren Systemeigenschaften eine Reduktion der auftretenden Antriebsstrangschwingungen erreichen.

---

<sup>355</sup> Dieses Verständnis von Robustheit kann hier als eine Konkretisierung der Begriffsdefinition von Freund, 2018 im Rahmen des Robust Design verstanden werden: „Ein technisches System wird als robust bezeichnet, wenn die Auswirkung von Unsicherheit aus allen Lebenslaufphasen auf die Funktionserfüllung in einem festgelegten, zulässigen Rahmen bleibt. Entsprechend werden alle Tätigkeiten im Rahmen der Produktentwicklung die diesen Zustand zum Ziel haben als Robust Design bezeichnet.“ Freund, 2018

Zusammen mit dem Forschungsbedarf lassen sich nun die im Folgenden formulierten Forschungsfragen ableiten, deren Beantwortung wesentlich zur Überprüfung der Hypothesen sowie zum Erreichen der Forschungsziele beiträgt.

**Forschungsfrage 1: Robuster Regler**

Mit welchem regelungstechnischen Konzept können die verschiedenen Arten des Kupplungsrupfens im PKW-Antriebsstrang effizient und robust gegenüber Schwankungen des Systems über Serie und Lebensdauer gedämpft werden?

**Forschungsfrage 2: Validierung der Robustheit des Regelverhaltens**

Mit welchen Methoden lässt sich die Robustheit des gefundenen Software-basierten Ansatzes in Bezug auf die unsicheren Systemeigenschaften überprüfen?

**Forschungsfrage 3: Integration in Fahrzeugsoftware**

Welches regelungstechnische Konzept ist geeignet, den Regler in die bestehende Softwareumgebung zu integrieren?



## 4 Methoden zur Entwicklung einer Robusten Anti-Rupf-Regelung

Ziel dieses Kapitels ist es, den gewählten Forschungsansatz, der dieser Arbeit zugrunde liegt, zu erläutern und zu motivieren. Dabei soll hier gemäß des integrierten Produktentstehungsmodells (iPeM)<sup>356</sup> das Handlungssystem<sup>357</sup> definiert werden, welches die Methoden beinhaltet, mithilfe derer es möglich ist, das auf Kapitel 2 basierende Objektsystem<sup>358</sup> derart zu erweitern, dass das in Kapitel 3 definierte Zielsystem erreicht werden kann. Die Methoden, die hierbei zum Einsatz kommen und im Folgenden erläutert und motiviert werden, sind die Problemlösungsmethode SPALTEN nach ALBERS ET AL.<sup>359,360</sup>, der IPEK X-in-the-Loop Ansatz<sup>361,362</sup> sowie die hier ebenfalls als Methode<sup>363</sup> betrachtete kooperative Promotion.

Diese im folgenden Kapitel erläuterten Methoden werden nun anhand der in Kapitel 3 formulierten Forschungsfragen motiviert, da diese Forschungsfragen im Laufe der Arbeit beantwortet werden sollen und demnach die Differenz zwischen dem Objektsystem und dem Zielsystem treffend beschreiben.

Die Antwort auf die erste Forschungsfrage<sup>364</sup>, welches regelungstechnische Konzept geeignet ist, um die unterschiedlichen Arten von Kupplungsrupfen effizient und robust gegenüber Schwankungen des Systems zu dämpfen, findet sich unter Einsatz der Problemlösungsmethode SPALTEN. Dabei hilft die strukturierte Vorgehensweise dieser Methode, um mit dem Durchlaufen der einzelnen Phasen Schritt für Schritt ausgehend von der Problemstellung die unterschiedlichen regelungstechnischen

---

<sup>356</sup> Albers et al., 2016e

<sup>357</sup> „Handlungssysteme sind sozio-technische Systeme, die strukturierte und vernetzte Aktivitäten für die Transformationen zwischen dem Ziel- und Objektsystem durchführen. [...] Ziel- und Objektsystem werden durch das Handlungssystem erstellt und stehen nur durch dieses in gegenseitiger Wechselbeziehung.“, IPEK Glossar

<sup>358</sup> „Objektsysteme erfüllen in der Produktentstehung drei Bedeutungen: Sie sind Ressourcen, Erkenntnisobjekte und Ergebnisse des Handlungssystems.“, IPEK Glossar

<sup>359</sup> Albers et al., 2016e

<sup>360</sup> Albers et al., 2016a

<sup>361</sup> Albers et al., 2016e

<sup>362</sup> Albers et al., 2013

<sup>363</sup> Der Begriff der Methode versteht sich hier und im Folgenden nach IPEK Glossar: „Methoden beschreiben ein zielgerichtetes Vorgehen. Sie haben einen deskriptiven Charakter und bilden das verallgemeinerte Wissen zu bestimmten Anwendungsfällen ab. Sie sollen dem Anwender als Hilfestellung zur Erreichung eines Ziels dienen. Der Ausgang der Anwendung einer Methode ist offen.“

<sup>364</sup> vgl. Kapitel 3

Ansätze zu bewerten und schließlich den Ansatz, der unter Berücksichtigung der erwarteten Risiken die bestmöglichen Chancen bietet, auszuwählen. Dieses Vorgehen wird in der entsprechenden Struktur und mit Bezug auf SPALTEN in Kapitel 6 dargelegt.

Die zweite Forschungsfrage nach der Validierung der Robustheit des Reglers kann im Rahmen des IPEK X-in-the-Loop Ansatzes<sup>365</sup> beantwortet werden. Dabei wird der zu entwickelnde Regler als *System-in-Development (SiD)* in unterschiedlichen Umgebungen validiert. In der einfachsten Stufe wird der Regler als isolierte Softwarekomponente an einem virtuellen Antriebsstrangmodell mit einer virtuellen Realisierung der trockenen Doppelkupplung getestet und entsprechend der bei dieser Interaktion mit einer rein virtuellen Validierungsumgebung gewonnenen Erkenntnisse weiterentwickelt. Das hier verwendete Simulationsmodell erlaubt die Variation von Systemparametern zur Simulation von Schwankungen des Systems, wie sie in Form von Serienstreuung und über Lebensdauer erwartet werden und ergänzt somit die virtuelle Validierungsumgebung um diese Variationen des zu regelnden Systems. In einer weiteren Stufe erfolgt die Validierung an der vorherigen virtuellen Umgebung unter zusätzlichem Einsatz eines virtuellen Aktormodells, welches in diesem Fall zusammen mit den dazugehörigen Schnittstellen der Software (Modulationsinterface und Ansteuerung des Aktors) als *Connected Systems* die Verbindung zwischen dem Regler und dem Antriebsstrang darstellt. Die darauffolgende Stufe der Validierung erfolgt unter Zuhilfenahme eines virtuellen Antriebsstrangmodells, welches es erlaubt, die gesamte Kupplungs- und Getriebesteuerung zu validieren, jedoch keine Schwankungen des Systems zulässt. Somit wurde hier die virtuelle Validierungsumgebung um die komplette Softwareumgebung zur Kupplungs- und Getriebesteuerung erweitert, jedoch wieder um die Möglichkeiten der Systemvariation reduziert. Die finale Validierung des *SiD* erfolgt schließlich in einem geeigneten Versuchsfahrzeug, welches in diesem Fall den Übergang von einer virtuellen zu einer physischen Validierungsumgebung darstellt und gleichzeitig die erste Validierungsumgebung, die einen realen Fahrer als auch reale Umwelteinflüsse als *Connected Systems* berücksichtigt, die in den vorherigen Stufen jeweils als stark vereinfachte Modelle zum Einsatz kamen.

Im Zuge dieser Validierungsaktivitäten kommt neben dem XiL-Ansatz auch das Konzept der kooperativen Promotion zum Tragen, da die Validierung der Robustheit auf den während der Tätigkeit im Rahmen dieser kooperativen Promotion gewonnenen Erkenntnissen über das zu regelnde System, seine Veränderung über die Lebensdauer und seine unterschiedlichen Realisierungen basiert. Die kooperative

---

<sup>365</sup> vgl. Abschnitt 2.1.2

Promotion mit einem Schwerpunkt auf einer Mitarbeit im Unternehmen liefert hier einen substanziellen Beitrag zur Forschung, da hierdurch ein deutlich einfacherer Zugang zu Versuchsfahrzeugen gewährleistet ist und somit sowohl Erkenntnisse aus Langzeitbeobachtungen zur Verfügung stehen, als auch unterschiedliche Systeme und unterschiedliche Realisierungen eines nominellen Systems untersucht werden können. Darüber hinaus steht durch die Tätigkeit im Unternehmen auch eine Vielzahl von Daten zur Verfügung, die neben der Schwankung der Systeme auch Informationen zur Modellierung der Validierungs- und Entwicklungsumgebung liefern.

Auch für die Beantwortung der dritten Forschungsfrage bezüglich der Integration des entwickelten Reglers in die Umgebung der Seriensoftware zur Kupplungs- und Getriebesteuerung liefert die Methode der kooperativen Promotion wichtige Beiträge, da in diesem Rahmen eine entwicklungsbegleitende Forschung ermöglicht wurde. So konnte die mit dieser Arbeit vorgestellte Forschungstätigkeit in der bereits bestehenden Entwicklungsumgebung der Seriensoftware durchgeführt und dabei wichtige Einblicke in die bestehende Ansteuerung von Doppelkupplung und Doppelkupplungsgetriebe gewonnen werden. Durch diese Möglichkeit konnten Zusammenhänge innerhalb der einzelnen Softwarekomponenten sowie zwischen Hard- und Software analysiert und damit auch die Auswahl eines geeigneten Regelungskonzeptes für eine möglichst optimale Integration des entwickelten Reglers in die bestehende Umgebung gewährleistet werden.

Die hier exemplarisch anhand der Forschungsfragen motivierten Methoden wurden kontinuierlich im gesamten Verlauf der Forschungsarbeit angewandt. Dies spiegelt sich zum Beispiel im Falle der Problemlösungsmethode SPALTEN darin wider, dass die Struktur der hier vorliegenden Arbeit sich an dem Durchlaufen der einzelnen Phasen des SPALTEN Prozesses orientiert. Entsprechend kann durch den oben erwähnten speziell gewählten Aufbau von Kapitel 6 sowie der strukturierten Problembehandlung in Kapitel 9 nach SPALTEN der fraktale Charakter dieser Methode veranschaulicht werden. Die folgende Zuordnung der einzelnen Kapitel zu den entsprechenden Phasen der Problemlösung nach SPALTEN soll sowohl die bei der Bearbeitung des Forschungsprojektes angewandte Vorgehensweise als auch die kontinuierliche Verwendung dieser Methode im Verlauf des Projektes widerspiegeln.

In Kapitel 1 und 2 erfolgt die *Situationsanalyse*, das Sammeln und Ordnen der Informationen, die zur Erfassung des vorliegenden Problems und seiner Randbedingungen dienen.

Kapitel 3 stellt die *Problemeingrenzung* dar, wobei die im ersten Schritt gesammelten Informationen gebündelt werden und eine Fokussierung auf die problemlösungsrelevanten Daten mit dem Ergebnis einer abstrakten Zielformulierung erfolgt. Als weiterer Schritt der *Problemeingrenzung* wird in Kapitel 5 die Regelstrecke

identifiziert, wodurch die Anforderungen und die Randbedingungen aus Kapitel 3 konkretisiert werden.

Entsprechend der Ergebnisse der vorangegangenen Phase erfolgt in Kapitel 6 zusammen mit den in Kapitel 2 vorgestellten Methoden zur robusten Regelung die *Entwicklung alternativer Lösungen*. Abgeschlossen wird das Kapitel mit der *Lösungsauswahl* entsprechend der Anforderungen und Randbedingungen der Problemstellung sowie der *Tragweitenanalyse*, welche zu großen Teilen auf den Betrachtungen in Kapitel 5 basiert. Ergebnis dieses Kapitels ist eine Strategie zu einer robusten Anti-Rupf-Regelung mit dem Ziel der optimalen Serientauglichkeit.

Die *Umsetzung* der in Kapitel 6 ausgewählten Lösung unter Berücksichtigung der Ergebnisse der *Tragweitenanalyse* wird in den Kapiteln 7 und 8 dargelegt. Ergebnis dieses Moduls sind Methoden zur Auslegung und Validierung eines robusten Regelalgorithmus, der den in Kapitel 3 gestellten Anforderungen bestmöglich entspricht, sowie einer beispielhaften Umsetzung dieser Methoden.

Das abschließende Modul *Nachbereiten und Lernen* erfolgt durch die Diskussion der in den Kapiteln 7 und 8 dargestellten erzielten Ergebnisse und der daraus abgeleiteten möglichen Maßnahmen in den Kapiteln 9 und 10.

#### **4.1 Entwicklung einer integrierten Validierungsmethode**

In Folgenden wird eine im Rahmen dieser Arbeit entwickelte integrierte Validierungsmethode vorgestellt, welche im Kontext der Methoden XiL sowie der kooperativen Promotion eingesetzt wurde. Diese Methode soll hier als Beispiel für den Nutzen der beiden im vorangehenden Abschnitt diskutierten Methoden der kooperativen Promotion und XiL dienen.

Im Laufe der wissenschaftlichen Arbeit wurde durch eine eingehende Beschäftigung mit der Problematik des Kupplungsrupfens und deren Charakteristika wie der Erscheinungsform, -intensität und -wahrscheinlichkeit in Bezug auf die meist sehr schlechte Reproduzierbarkeit von Kupplungsrupfen der Bedarf für eine Validierungsmethode erkannt, die speziell das Problem der mangelnden Reproduzierbarkeit von Kupplungsrupfen löst. Hintergrund dieses Bedarfs ist die Tatsache, dass selbsterregtes Kupplungsrupfen nur schwer reproduzierbar ist, da hierfür der Reibbelag der Kupplung entsprechend konditioniert werden muss und dies oft nicht oder nur unzureichend gelingt, während geometrische Anregungen naturgemäß leichter zu reproduzieren sind, diese Reproduktion jedoch auf der Fertigung speziell modifizierter Kupplungen beruht, deren geometrische Anregung dann meist nicht mit der real vorzufindenden Anregung übereinstimmt, da sie entweder zu schwach oder zu stark ausgeprägt ist. Diese Unzulänglichkeiten in der Reproduktion realitätsnaher Rupfphänomene resultiert in sehr hohen Aufwänden für

eine Validierung von Maßnahmen zur Schwingungsdämpfung im Antriebsstrang, die es in Bezug auf eine effiziente Produktentwicklung zu optimieren gilt.

Die entwickelte Validierungsmethode besteht im Kontext der Integration in die bestehende Getriebe- und Kupplungssteuerungssoftware aus einem variabel konfigurierbaren und flexibel einsetzbaren Testmodus als Teil einer Komponente zur Dämpfung von Antriebsstrangschwingungen<sup>366</sup>, der die bestehende Schnittstelle zur Modulation des Kupplungsmomentes verwendet.

Die Anforderungen an diesen Testmodus ergeben sich aus der zuvor erläuterten Problemstellung im Rahmen der Validierung von Komponenten zur Schwingungsdämpfung im Antriebsstrang. Mithilfe der zu entwickelnden Methode soll es möglich sein, Rupfphänomene unterschiedlicher Charakteristik und Intensität in einer Art und Weise zu generieren, dass sie auch von einem menschlichen Bewerter nicht erwartet werden und somit auch keine Erwartungshaltung bezüglich eines Rupfens erzeugen, wodurch andernfalls eine subjektive Bewertung beeinträchtigt werden könnte.<sup>367</sup> Zudem muss es möglich sein, dass ein ebenfalls in die Kupplungs- und Getriebesteuerungssoftware integrierter und zu validierender Regler die durch die Methode hervorgerufenen Schwingungen potenziell zu dämpfen vermag.

Eine Methode, die diese Anforderungen erfüllt, ist der bereits erwähnte in die Softwareumgebung integrierte Testmodus, der mithilfe einer im Speicher hinterlegten Sinuskurve und der zur Verfügung stehenden Drehzahlsignale von Motor und Getriebeeingang in der Lage ist, in ihrer Frequenz drehzahlabhängige Modulationen des Kupplungsdrehmomentes zu erzeugen und darüber hinaus eine Möglichkeit bietet, eine Schwingung mit einer kalibrierbaren, konstanten Frequenz auf das Kupplungsdrehmoment zu modulieren. Es lässt sich hierbei zeigen, dass die Charakteristik der so erzeugten Schwingungen der Getriebeeingangsdrehzahl die gleichen charakteristischen Merkmale aufweisen, wie real beobachtbare geometrisch angeregte und selbsterregte Rupfschwingungen, und sich diese somit auch zu Zwecken der Reproduktion ersetzen lassen.<sup>368</sup> Die Erzeugung der Modulationen erfolgt in pseudozufälliger Abfolge, mit einer einstellbaren Wahrscheinlichkeit für die Erzeugung einer Rupfsituation von 25 %, 50 % oder 75 %, mit pseudozufälligen Charakteristika, wobei hier Implementierungen der in 2.2.3 diskutierten Signale zum Einsatz kommen, um diese Pseudozufälligkeit zu erreichen. Zu der variablen Charakteristik der Modulationen zählen hier die Drehzahlabhängigkeit der Frequenz inklusive der Möglichkeit einer konstanten, kalibrierbaren Frequenz, sowie eine

---

<sup>366</sup> vgl. 2.8.3.6

<sup>367</sup> vgl. 2.7.1

<sup>368</sup> Eppler, 2015

konstante Drehmomentenamplitude und Schwingungsdauer in einem kalibrierbaren Intervall.

Die Erzeugung der Modulationen wird bei jeder Anfahrt und jedem Ankriechvorgang abgefragt und entsprechend der Pseudozufälligkeit sowie der kalibrierten mittleren Wahrscheinlichkeit eine Rupfsituation erzeugt. In Kombination mit der ebenfalls pseudozufälligen Charakteristik der Modulation wird somit eine Validierungsmethode für Komponenten zur Dämpfung von Antriebsstrangschwingungen geschaffen, die durch die kalibrierbare Wahrscheinlichkeit des Auftretens einer Situation statistisch gesehen mehr und, vorbehaltlich einer entsprechenden Kalibrierung, realistischere Situationen erzeugt, die zudem von einem menschlichen Bewerter nicht vorherzusehen sind. Somit wird die Effizienz der Validierung dieser Komponenten sowohl für messdatenorientierte Untersuchungen als auch für auf subjektive Bewertungen ausgelegte Tests deutlich gesteigert.

## **4.2 Einordnung der Forschungsarbeit im Rahmen der PGE**

In diesem Abschnitt werden die im Verlauf des Forschungsprojektes vorgenommenen Aktivitäten zur Erreichung des Zielsystems in den Rahmen des Beschreibungsansatzes PGE – Produktgenerationsentwicklung, wie er in Abschnitt 2.1.3 erläutert wurde, eingeordnet. Damit lässt sich eine Klassifizierung der zur Entwicklung einer robusten Anti-Rupf-Regelung für PKW-Antriebsstränge mit trocken laufender Doppelkupplung vorgenommenen Variationen und damit auch eine Abschätzung der technischen Entwicklungsrisiken vornehmen. Dazu werden im ersten Schritt das behandelte System gemäß dem PGE Beschreibungsansatz in Teilsysteme unterteilt und die daran vorgenommenen Variationen gemäß der PGE eingeordnet. Dieser ersten Analyse folgt eine Erweiterung des Beschreibungsansatzes der PGE auf Bereiche der Softwareentwicklung, die somit der zunehmenden Bedeutung von mechatronischen Systemen auch in den sogenannten Branchen des klassischen Maschinenbaus Rechnung trägt.<sup>369</sup> In diesen nun erweiterten Rahmen der PGE werden das betrachtete System sowie die vorgenommenen Aktivitäten neu eingeordnet. Ergänzt wird diese Betrachtung durch eine zusätzliche Analyse, die unterschiedlichen Variationen an Teilsystemen etwaige notwendige Änderungen an der im Rahmen dieser Arbeit zu entwickelnden Regelung zuordnet und damit das Potenzial einer solchen robusten Regelung hinsichtlich Stabilität und Flexibilität aufzeigt.

---

<sup>369</sup> Albers et al., 2016d

#### 4.2.1 Einteilung des betrachteten Systems in seine Teilsysteme

Um eine Einordnung der vorgenommenen Variationen durchführen zu können, wird das behandelte System in Teilsysteme unterteilt. Dabei erfolgt die Einteilung entsprechend der für die Entwicklung einer Anti-Rupf-Regelung relevanten Baugruppen und Komponenten entsprechend ihrer Funktionalitäten.

Damit wird das betrachtete System in die Teilsysteme Antriebsstrang mit einer Unterteilung der Antriebs- und der Abtriebsseite entsprechend der Behandlung in Kapitel 5, die trocken laufende Doppelkupplung und die Aktorik unterteilt. Hinzu kommen als weitere Teilsysteme die Ansteuerung der Aktorik, in der das Getriebesteuergerät (TCU) und die für die Ansteuerung erforderlichen Softwarekomponenten zusammengefasst sind, sowie die Implementierung der Anti-Rupf-Regelung in der Software zur Kupplungs- und Getriebesteuerung (Bild 43).

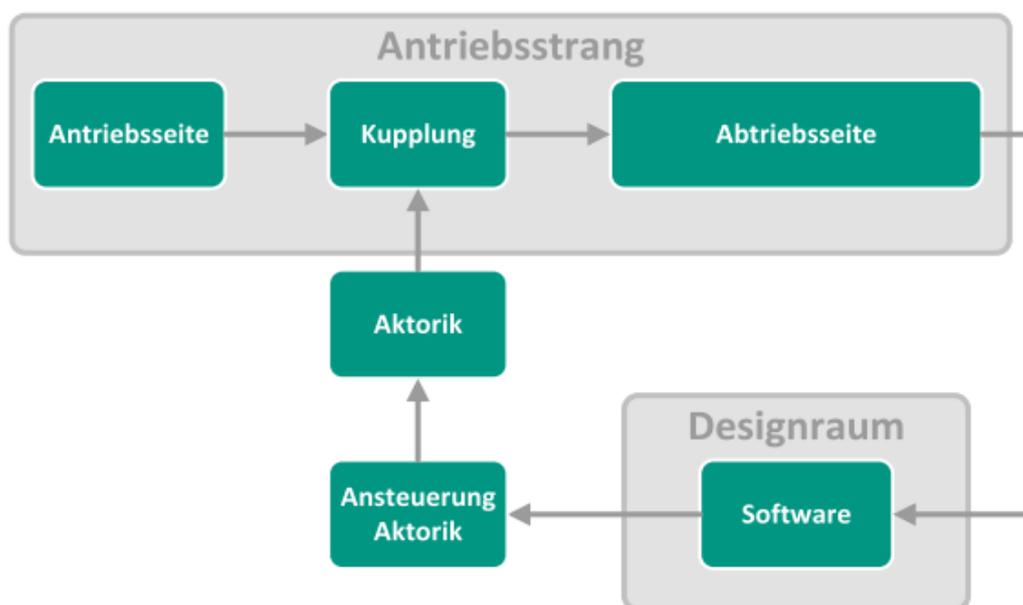


Bild 43: Definition des Designraums für die PGE zur Minimierung von Rupfschwingungen sowie Einteilung der konstituierenden Teilsysteme

Diese Teilsysteme bilden in Bezug auf das Ziel der Vermeidung und Unterdrückung von Rupfschwingungen den Design-Raum, der zur Entwicklung zur Verfügung steht. Für die hier vorliegende Arbeit im Speziellen ist nach den Ausführungen in Kap. 3 der Designraum, wie in Bild 43 gezeigt, auf das Teilsystem Software beschränkt.

#### 4.2.2 Einordnung in den Kontext der PGE

Die zuvor definierten im Design-Raum befindlichen Teilsysteme werden nun auf die im Rahmen der vorliegenden wissenschaftlichen Arbeit vorgenommenen Variationen geprüft und diese Variationen entsprechend dem Modell der PGE klassifiziert.

Als Referenzprodukt wird hier zum einen das zur Verfügung stehende Entwicklungsfahrzeug (Fzg. A), auf das auch im weiteren Verlauf dieser Arbeit immer wieder Bezug genommen wird, für die Teilsysteme Antriebsstrang mit An- und Abtriebsseite, Aktorik<sup>370</sup> sowie Ansteuerung der Aktorik herangezogen. Für die Betrachtung des Teilsystems der Software-Implementierung der Anti-Rupf-Regelung werden die in 2.8.3 vorgestellten Ansätze als Referenzlösungen herangezogen.

Da sich diese Arbeit mit der Entwicklung eines neuartigen Konzeptes für eine Anti-Rupf-Regelung befasst, wird schnell deutlich, dass es sich für die Teilsysteme des Antriebsstranges, der Kupplung, der Aktorik sowie der Ansteuerung der Aktorik um Übernahmevariationen handelt, da diese Systeme unverändert in das Objektsystem übernommen werden. Betrachtet man nun die Implementierung der Anti-Rupf-Regelung als eine in sich abgeschlossene Komponente des Systems, so ändern sich hier im Vergleich zur Referenzlösung lediglich die Schnittstellen der Softwarekomponente, da für die entwickelte Regelung mehr Signale benötigt werden. Dementsprechend lässt sich diese Änderung als eine Gestaltvariation klassifizieren, weshalb nach der Betrachtung der Teilsysteme bei der im Rahmen dieser Arbeit vorgenommenen Entwicklung keine Prinzipvariation vorliegt.

Entsprechend der vorgenommenen Klassifikation der Variationsanteile der hier beschriebenen Entwicklung und dem Fehlen einer Prinzipvariation ist basierend auf empirischen Erkenntnissen tendenziell ein geringeres Entwicklungsrisiko zu erwarten.<sup>371</sup> Im weiteren Verlauf dieser Arbeit kann jedoch gezeigt werden, dass diese Abschätzung den tatsächlichen Aufwänden und den technischen Risiken der Entwicklung einer robusten Anti-Rupf-Regelung, wie sie in der vorliegenden Arbeit beschrieben werden, nicht gerecht wird. Aufgrund dieser Diskrepanz erscheint es notwendig, den Beschreibungsansatz der PGE – Produktgenerationsentwicklung von der bisher angestellten expliziten Betrachtung mechanischer Systeme<sup>371</sup> auf die Analyse von Softwareprodukten und -komponenten zu erweitern.

#### **4.2.3 Interpretation des PGE-Beschreibungsansatzes in Bezug auf Softwareentwicklung am Beispiel der Entwicklung einer Anti-Rupf-Regelung**

Die Analyse der in der vorliegenden Arbeit vorgestellten Entwicklungsarbeit im Rahmen der PGE hat gezeigt, dass für eine vollständige Einordnung in dieses Modell eine Erweiterung der bislang bestehenden Interpretation der Variationsanteile auf die Entwicklung von Softwarekomponenten benötigt wird. Eine solche Betrachtung der

---

<sup>370</sup> vgl. 5.2 und 5.6 für eine detaillierte Betrachtung dieser Teilsysteme

<sup>371</sup> Albers et al., 2017f

Software als Teil eines mechatronischen Systems und Teil einer Funktion<sup>372</sup> und damit auch als ein im Sinne der PGE einer Variation unterliegendes Teilsystem einer Produktgeneration wurde bislang zwar angedeutet, jedoch nicht eingehend betrachtet.<sup>373</sup> Im Kontext der zunehmenden Verwendung mechatronischer Systeme und dem damit verbundenen engen Zusammenhang zwischen Software und Bauteilkonstruktion, sowie auch im Kontext einer reinen Softwareentwicklung, wird eine Software, genau wie mechatronische Komponenten, zur Erfüllung gewünschter Funktionalitäten mehrheitlich in Produktgenerationen entwickelt. Vor diesem Hintergrund erscheint eine Interpretation der bisher im Beschreibungsansatz der PGE verwendeten Begriffe in Bezug auf Software und deren charakteristischen Merkmale sinnvoll. Ziel ist hier explizit eine Verwendung einer einheitlichen Begrifflichkeit in der Beschreibung der Produktgenerationsentwicklung im Sinne der Hardware- als auch im Sinne der Softwareentwicklung, um so einen durchgehenden und einheitlichen Beschreibungsansatz zu erhalten, der somit auch über die Grenzen von Software und Hardware hinweg seinen fraktalen Charakter<sup>374</sup> behält.

Gemäß dieses fraktalen Charakters wird nun im Folgenden eine Software nicht mehr wie im vorangegangenen Abschnitt nur als Black Box mit definierten Schnittstellen betrachtet, sondern dieses Teilsystem „Software“ als Ganzes wiederum in Teilsysteme unterteilt. Diese Teilsysteme können hierbei Features sein, die mehrere Module zu einer Funktionalität kapseln, welche wiederum die Kapselung mehrerer Funktionen sind. Diese Teilsysteme können jedoch auch, in konsequenter Fortführung des fraktalen Ansatzes der PGE, Funktionen, die innerhalb der hier angestellten Betrachtung die kleinste funktionserfüllende Einheit mit definierten Schnittstellen und Struktur darstellen, sein (s. Bild 44).<sup>375</sup>

---

<sup>372</sup> „Funktion“ ist an dieser Stelle im Sinne der funktionsorientierten Entwicklung von Gesamtsystemen, nach den Ausführungen von Albers et al., 2016d zu verstehen

<sup>373</sup> Albers et al., 2016d

<sup>374</sup> Albers et al., 2015b

<sup>375</sup> Im Folgenden ist der Begriff „Funktion“ somit im Sinne der prozeduralen Programmierung (z.B. C) zu verstehen. Hingegen ist der Begriff des „Moduls“ im Vergleich zur üblichen Definition in C in einem erweiterten Sinne zu verstehen, der nicht nur die herkömmliche Definition eines Moduls umfasst, sondern auch Strukturen aus Funktionen und innerhalb dieser aufgerufenen Unterfunktionen, die jedoch nicht über ein eigenes Headerfile (\*.h) verfügen. Diese Interpretation des Begriffs „Funktion“ lässt sich somit als eine Konkretisierung der Definition nach IPEK Glossar verstehen.



Bild 44: Generischer Aufbau der unterschiedlichen Ebenen einer Software

Es wird gefordert, dass sich ein Teilsystem eines Produktes der Softwareentwicklung im Rahmen der PGE stets über die definierten Merkmale „Statische Architektur“, „Dynamische Architektur“, „Algorithmus“ und „Schnittstellen“ beschreiben lässt.<sup>376</sup> Die Struktur eines solchen Teilsystems wird hierbei beschrieben durch die „Statische Architektur“, die die Unterteilung der Software in logische Einheiten sowie die Schnittstellen und Verbindungen dieser Funktionseinheiten<sup>377</sup> untereinander spezifiziert,<sup>378</sup> sowie durch die „Dynamische Architektur“, die die zeitliche Abfolge der Aufrufe dieser Funktionseinheiten sowie deren Zustände und Verteilung zu Laufzeit beschreibt. Nach IEEE Std 1471-2000 sind die beiden Merkmale nicht als zwei voneinander separierbare Architekturen zu verstehen, sondern als unterschiedliche Sichtweisen ein und derselben Architektur mit unterschiedlichem Betrachtungsfokus.<sup>379</sup> Zusammen mit dem Merkmal „Algorithmus“ bestimmen diese beiden Merkmale das Wirkprinzip des Software-Teilsystems. Darüber hinaus wurde das Merkmal der „Schnittstellen“ eingeführt, welche nach der gängigen Definition bereits in der Software-Architektur beinhaltet sind, jedoch in dieser Beschreibung explizit die Verbindungen der betrachteten Software-Einheit zu ihrer Umgebung

<sup>376</sup> Die Verwendung des Begriffes „Merkmal“ in diesem Abschnitt kann als eine Spezifizierung der allgemeinen Definition nach IPEK Glossar verstanden werden: „Ein Merkmal ist ein Attribut eines Strukturelements eines technischen Systems (z.B. Datenformat, Interfaceart, Form, Lage, Stoff) und wird durch den Entwickler festgelegt.“

<sup>377</sup> „Funktionseinheit“ kann hier verstanden werden als die Module oder Funktionen, die innerhalb eines betrachteten Software-Teilsystems aufgerufen werden.

<sup>378</sup> vgl. die Definition von Software-Architektur nach IEEE Std 1471-2000 (2007): „The fundamental organization of a system embodied in its components, their relationships to each other, and to the environment, and the principles guiding its design and evolution.“

<sup>379</sup> „[...] an architectural description is organized into one or more constituents called (architectural) views. Each view addresses one or more of the concerns of the system stakeholders. The term view is used to refer to the expression of a system’s architecture with respect to a particular viewpoint.“; IEEE Std 1471-2000 (2007)

beinhaltet um so eine differenzierte Beschreibung der Variationsanteile zu ermöglichen. Die „Schnittstellen“ beinhalten hier unter anderem die Anzahl und Art der Verbindungen des Software-Teilsystems zu seiner Umwelt, die Spezifikationen der übertragenen Signale sowie die verwendeten Übertragungsprotokolle. Durch diese Forderung nach der Beschreibung eines Software-Teilsystems mithilfe der vier beschriebenen und in Bild 45 schematisch dargestellten Merkmale lässt sich auch eine zur Betrachtung der Produktentwicklung von Hardwarekomponenten im Rahmen der PGE analoge Beschreibungsweise begründen. Hierbei bildet der Begriff des „Algorithmus“ eines Teilsystems das Analogon zu der Leitstützstruktur (LSS) eines Teilsystems einer Hardwarekonstruktion in der Beschreibung mithilfe des C&C<sup>2</sup>-Ansatzes.<sup>380</sup> Weiterhin entsprechen die Merkmale „Statische Architektur“ und „Dynamische Architektur“ eines Software-Teilsystems, die das Zusammenwirken der konstituierenden Teilsysteme oder Funktionseinheiten beschreiben, dem in der Beschreibung von Hardware-Systemen gängigen Begriff der Wirkflächenpaare (WFP), während die „Schnittstellen“ des Software-Teilsystems, dem Begriff der Connectoren (C) in der Konstruktionsbeschreibung entsprechen (vgl. Bild 45).<sup>381</sup>

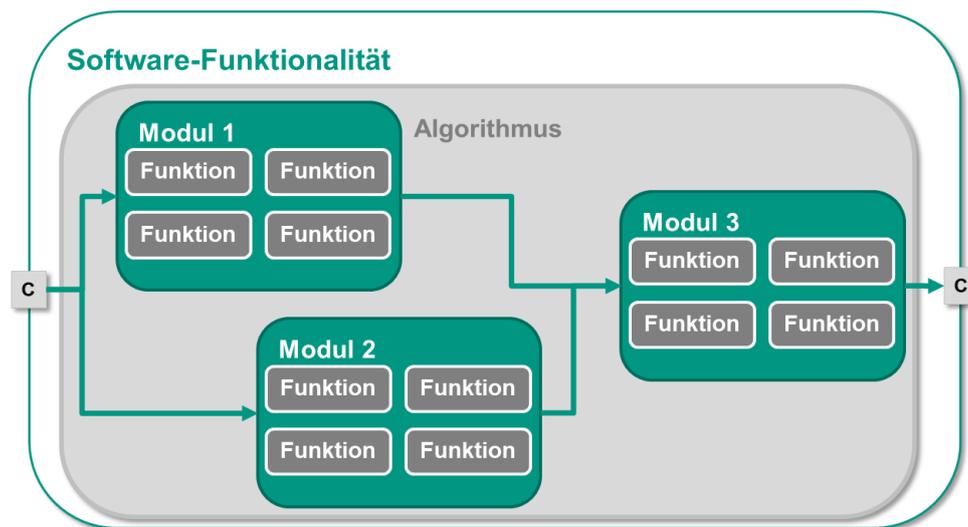


Bild 45: Erläuterung der eingeführten Merkmale zur Beschreibung von Softwareentwicklungsaktivitäten im Rahmen der PGE; Dargestellt sind die „Schnittstellen“ (C), die „Statische Architektur“ repräsentiert als die Anordnung und Verknüpfung der einzelnen Elemente, sowie der „Algorithmus“ als Produkt aus Funktionen und Architektur<sup>382</sup>

Analog zu den hier miteinander verknüpften Begriffen zur Beschreibung von Teilsystemen einer Software und Teilsystemen eines Hardwaresystems sollen im

<sup>380</sup> Albers; Wintergerst, 2014

<sup>381</sup> Albers; Zingel, 2013

<sup>382</sup> Da die „Statische Architektur“ und die „Dynamische Architektur“ nach IEEE Std 1471-2000 (2007) unterschiedliche Sichtweisen der Architektur darstellen, ist eine Darstellung beider Merkmale in einem Bild nicht möglich.

weiteren Verlauf nun die Variationsbegriffe des PGE-Beschreibungsansatzes für eine entsprechende Verwendung zur Beschreibung der Produktgenerationsentwicklung von Softwarekomponenten interpretiert und erläutert werden.

In diesem Kontext würde eine Übernahmevariation, die im Rahmen der Konstruktion als Übernahme eines Teilsystems unter Anpassungen an den Teilsystemgrenzen (Connectoren, C) gemäß den Anforderungen der Systemintegration<sup>383</sup> unter minimalen Änderungen der Konstruktion<sup>384</sup> definiert ist, als eine Anpassung der „Schnittstellen“ des Software-Teilsystems interpretiert werden. Diese Interpretation der Übernahmevariation bedeutet somit eine Übernahme des Software-Teilsystems unter einer, durch die Änderung der „Schnittstellen“ bedingten, minimalen Variation der Merkmale „Statische Architektur“ und „Dynamische Architektur“ im Bereich der Systemgrenzen und einer vollständigen Übernahme des „Algorithmus“, weshalb hier tendenziell geringere Entwicklungsaufwände und –risiken zu erwarten sind.<sup>384</sup>

Entsprechend kann eine Gestaltvariation, im Kontext eines Hardware-Systems definiert als Neuentwicklung unter Beibehaltung des „grundsätzlichen Lösungsprinzips“ und Veränderung der Gestalt<sup>384</sup> zur Steigerung der Funktionserfüllung oder deren Qualität<sup>385</sup>, in Zusammenhang mit der Entwicklung einer neuen Softwaregeneration interpretiert werden als eine Veränderung der „Statischen Architektur“ sowie der „Dynamischen Architektur“ und damit in vielen Fällen auch der „Schnittstellen“ des Software-Teilsystems unter Beibehaltung des Merkmals „Algorithmus“. Hierunter kann beispielsweise eine Parallelisierung von Prozessen, eine Veränderte logische Aufteilung der Funktionen oder auch eine andere Verteilung der Ausführung auf verschiedene Prozessorkerne und Speicherelemente zur Verbesserung der Performance verstanden werden. Speziell letzteres Beispiel zeigt hier, dass eine Differenzierung der Merkmale „Statische Architektur“ und „Dynamische Architektur“ notwendig ist, da es auch Fälle geben kann, in denen ausschließlich die „Dynamische Architektur“ angepasst wird.

Den vorigen Interpretationen der Begriffe Übernahme und Gestaltvariation im Kontext der Softwareentwicklung folgend, kann in diesem Zusammenhang die Prinzipvariation, in der PGE definiert als Entwicklung unter Änderung des Lösungsprinzips mit der direkten Konsequenz der Gestaltvariation<sup>384</sup>, ebenfalls interpretiert werden als eine Veränderung des grundsätzlichen Lösungsprinzips des Software-Teilsystems, des „Algorithmus“, mit der ebenfalls direkten Konsequenz von Änderungen der übrigen Merkmale „Statische Architektur“, „Dynamische Architektur“ sowie „Schnittstellen“.

---

<sup>383</sup> Albers et al., 2015b

<sup>384</sup> Albers et al., 2017f

<sup>385</sup> Albers et al., 2015b

Somit wurden die zentralen Begriffe des Beschreibungsansatzes der PGE, die Prinzip-, Übernahme und Gestaltvariation, im Kontext der Produktgenerationsentwicklung von mechatronischen Systemen unter Berücksichtigung der Software und deren Bestandteilen interpretiert, um gemäß des fraktalen Charakters des Beschreibungsansatzes der Produktgenerationsentwicklung eine durchgehende Beschreibung der Entwicklung von mechatronischen Systemen unter Berücksichtigung der Entwicklung von Software in Produktgenerationen zu ermöglichen.

#### **4.2.4 Einordnung des Projektes im Kontext der erweiterten Interpretation der Produktgenerationsentwicklung**

Das im Verlauf der vorliegenden Arbeit vorgestellte Forschungsprojekt wird nun gemäß der zuvor vorgenommenen Erweiterung des Beschreibungsansatzes der Produktgenerationsentwicklung nochmals in diesen Kontext eingeordnet.

Dabei bleibt die Betrachtung der mechanischen Teilsysteme, An- und Abtriebsseite des Antriebsstrangs, Kupplung sowie die die Kupplung betätigende Aktorik, die allesamt eine Übernahmevariation erfahren, bestehen. Ebenso bleibt die Einordnung der Aktivitäten am Teilsystem Ansteuerung der Aktorik als Übernahmevariation bestehen, da hier keines der zuvor eingeführten Merkmale verändert wurde.

Dagegen erfahren die das Teilsystems der Softwareintegration der Anti-Rupf-Regelung betreffenden Aktivitäten eine neue Einordnung. Hier wurde zunächst das Merkmal der „Schnittstellen“ angepasst, da die Regelung im Vergleich zu den Referenzprodukten mehr Signale verwendet, wogegen die Stellgröße in Form des an der Kupplung einzustellenden Drehmomentes erhalten bleibt. Hinzu kommt eine Veränderung der Merkmale „Statische Architektur“ und „Dynamische Architektur“ des Software-Teilsystems, da die Regelung nun in Form einer Zustandsraumdarstellung eines Reglers ausgeführt ist und damit die Funktionseinheiten dieses Teilsystems, deren Aufrufabfolge sowie die Verknüpfungen und Abhängigkeiten zwischen den Funktionseinheiten im Vergleich zu den Referenzprodukten verschieden sind. Diese Veränderungen der Merkmale „Statische Architektur“ und „Dynamische Architektur“ sind eine direkte Konsequenz der Veränderung des Merkmals „Algorithmus“ aufgrund des veränderten Lösungsprinzips. Grundsätzlich erfolgt immer noch eine Bestimmung des Schwingungszustandes des Antriebsstranges aus verfügbaren Messsignalen mit Methoden der Linearen Algebra zur Berechnung einer Modulation des an der Kupplung einzustellenden Drehmomentes, jedoch sind die zugrunde liegenden Verfahren<sup>386</sup> fundamental verschieden von den bisher verwendeten<sup>387</sup>.

---

<sup>386</sup> vgl. Abschnitt 2.9.6 sowie Kapitel 7

<sup>387</sup> vgl. Abschnitt 2.8.3

Somit lassen sich die in der vorliegenden Arbeit beschriebenen, am Software-Teilsystem zur aktiven Dämpfung von Rupfschwingungen im Antriebsstrang, vorgenommenen Aktivitäten im Rahmen der erweiterten Interpretation des PGE Beschreibungsansatzes als eine Prinzipvariation einordnen. Im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit wird sich zeigen, dass die damit verbundene Abschätzung hoher technischer und wirtschaftlicher Risiken im Rahmen dieser Entwicklungsaktivitäten bestätigt werden kann.

Im Folgenden soll nun zusätzlich das hohe Potenzial der angestrebten und im weiteren Teil der Arbeit beschriebenen Lösung einer robusten Anti-Rupf-Regelung mithilfe einer Betrachtung im Rahmen der PGE – Produktgenerationsentwicklung aufgezeigt werden. Hierzu kommt das Modell der PGE aus einer anderen Perspektive zum Einsatz, indem nun eine Abhängigkeit der Variation der Softwareimplementierung der Anti-Rupf-Regelung von Variationen der übrigen Teilsysteme im für die Dämpfung von Antriebsstrangschwingungen bei schlupfender Kupplung zur Verfügung stehenden Design-Raum<sup>388</sup> diskutiert wird. Dabei soll untersucht werden, ob eine Variation der umgebenden Teilsysteme im Zuge der Entwicklung einer neuen Produktgeneration ihrerseits eine Variation der Softwareimplementierung der Anti-Rupf-Regelung erfordert und welcher Art diese Variation sein müsste. Es werden somit Variationen der Softwarekomponente der Anti-Rupf-Regelung als direkte Konsequenz der unterschiedlichen Variationen der übrigen Teilsysteme betrachtet, um so das Potenzial einer robusten Anti-Rupf-Regelung aufzuzeigen.

Im Falle der Teilsysteme Doppelkupplung und Aktorik haben sowohl eine Übernahme-, eine Gestalt- als auch eine Prinzipvariation in Bezug auf die Software-Implementierung der robusten Anti-Rupf-Regelung lediglich eine Übernahmevariation zur Folge, da mit diesen Teilsystemen keine direkten Verbindungen bestehen und somit alle der in 4.2.3 eingeführten Merkmale unverändert bleiben.

Für Variationen des Antriebsstranges können unterschiedliche Betrachtungen angestellt werden, die sich auf die beiden Teilsysteme der An- und Abtriebsseite beziehen. Hier entspricht eine Prinzipvariation beispielsweise einer Veränderung der Topologie des Antriebsstranges oder der Verwendung einer elektrischen Antriebseinheit. Im Falle einer Übernahme- oder einer Gestaltvariation der beiden Teilsysteme der An- und Abtriebsseite des Antriebsstranges, z.B. eine veränderte Anordnung oder Dimensionierung von Komponenten, ist für die Implementierung der

---

<sup>388</sup> vgl. Bild 43 für einen Überblick der Teilsysteme, der Design-Raum erstreckt sich für die gesamte Problemstellung der Dämpfung von Antriebsstrangschwingungen bei schlupfender Kupplung über alle dargestellten Systeme. Damit ist er weiter gefasst als der in Bild 43 dargestellte spezifische Design-Raum für die vorliegende Arbeit

Anti-Rupf-Regelung nur eine Übernahmevariation notwendig, da hier lediglich die Kalibration des Reglers angepasst werden muss, falls die Variationen der Antriebsstrangkomponenten die Grenzen der berücksichtigten systeminhärenten Unsicherheiten verletzen.<sup>389</sup> Ist letzteres nicht der Fall, so kann die bestehende Kalibration weiterhin verwendet werden. Eine Prinzipvariation der Antriebsseite unter Beibehaltung des Konzeptes mit einer an die Doppelkupplung gekoppelten Antriebsmaschine hat ebenfalls zunächst eine reine Übernahmevariation der Software zur Anti-Rupf-Regelung zur Folge, da aufgrund der Regelsituation mit einer im Schlupf befindlichen Kupplung die Antriebsseite und die Abtriebsseite des Antriebsstranges weitestgehend dynamisch entkoppelt sind. Damit ergibt sich weder der Bedarf zur Anpassung der „Schnittstellen“, noch der „Statischen Architektur“ oder der „Dynamischen Architektur“ der Softwarekomponente. Dies ändert sich jedoch, sobald die Topologie des Antriebsstranges variiert wird, sich also zum Beispiel die Anzahl der Antriebsmaschinen oder auch die Anzahl der rotierenden Massen der Abtriebsseite des Antriebsstranges ändern. Diese Formen der Prinzipvariation auf An- und Abtriebsseite haben eine Gestaltvariation der Software zur Anti-Rupf-Regelung zur Folge, da sich hier die Anzahl der verfügbaren und zur Regelung benötigten Signale ändert, also die „Schnittstellen“ des Teilsystems zu den übrigen Teilsystemen eine Variation erfahren.

Diese Form der Betrachtung zeigt, dass eine Vielzahl der möglichen Variationen im Rahmen der Entwicklung einer neuen Produktgeneration des betrachteten Systems innerhalb des zur Verfügung stehenden Design-Raumes lediglich eine Übernahme- oder in wenigen Fällen eine Gestaltvariation der Software-Implementierung der Anti-Rupf-Regelung zur Folge haben. Hierdurch ist zu erwarten, dass die technischen und wirtschaftlichen Risiken der Entwicklung einer neuen Produktgeneration in Bezug auf die Umsetzung dieser Regelung sehr begrenzt bleiben.

---

<sup>389</sup> vgl. hierzu insbesondere 7.3.1 sowie 7.3.3 für die Bedeutung der systeminhärenten Unsicherheiten



## 5 Identifikation der Regelstrecke

In diesem Kapitel wird die Modellierung der für die Entwicklung und Anwendung einer Anti-Rupf-Regelung relevanten Regelstrecke beschrieben und motiviert. Ausgehend von der grundlegenden Dynamik des Antriebsstrangs mit einer im Schlupf befindlichen Kupplung, die sich im einfachsten Fall als die eines schwingungsfähigen Systems bestehend aus zwei miteinander gekoppelten rotierenden Massen beschreiben lässt, wird vor der eigentlichen Modellierung die Dynamik verschiedener für die Anwendung in Frage kommenden Systeme untersucht und die dabei beobachteten Phänomene werden hinsichtlich ihrer Ursachen analysiert. Die dabei gewonnenen Erkenntnisse fließen zusammen mit den in bisherigen Arbeiten verwendeten und in 2.4 vorgestellten Ansätzen zur Modellierung der Dynamik des Antriebsstranges in die Modellierung der für die vorliegende Arbeit relevante Regelstrecke ein. Dies geschieht zunächst in Form eines detaillierten Antriebsstrangmodells als rotierendes System aus Feder-Dämpfer Elementen und den damit gekoppelten Drehmassen, welches anschließend entsprechend der angedachten Verwendung im Rahmen der Entwicklung einer robusten Anti-Rupf-Regelung angepasst wird. So wird für eine effiziente Auslegung des Reglers das Modell unter Berücksichtigung seiner charakteristischen Dynamik vereinfacht und unter Berücksichtigung der verfügbaren Signale in ein Zustandsraummodell überführt, während das ursprüngliche detaillierte Antriebsstrangmodell für die spätere Validierung der entwickelten Anti-Rupf-Regelung verwendet wird.

## 5.1 Analyse der Dynamik von PKW-Antriebssträngen

Hier wird die Dynamik von für die Entwicklung einer Anti-Rupf-Regelung zur Verfügung stehenden PKW-Antriebssträngen vermessen und analysiert. Zunächst erhält der Leser einen Überblick über die dabei zum Einsatz kommenden Methoden und deren Verwendung zur Identifikation der Systemdynamik, während anschließend verschiedene Beispiele für mögliche dynamische Eigenschaften des Systems anhand unterschiedlicher Versuchsfahrzeuge vorgestellt und deren Ursachen analysiert werden.

### 5.1.1 Begriffsdefinition

Zunächst wird der Begriff der Antriebsstrangdynamik, wie er in der vorliegenden Arbeit verwendet wird, definiert, um eine Abgrenzung zu etwaigen anderen Verwendungen dieses Begriffs zu schaffen und Missverständnisse zu vermeiden.

Im Rahmen dieser Arbeit wird mit der Antriebsstrangdynamik das schwingungsdynamische Verhalten eines PKW-Antriebsstrangs mit im Schlupf befindlicher Kupplung, welches sich als Reaktion auf eine Anregung durch das von der Kupplung übertragene Drehmoment manifestiert, bezeichnet. Konkret wird die Schwingungsdynamik des Antriebsstranges beschrieben durch die Rotationsschwingung der beiden Getriebeeingangswellen, welche sich in Form von Schwankungen der Getriebeeingangsdrehzahl beobachten lässt, da zum einen diese Größe in nahezu allen Fahrzeugen mit automatisierter Schalteinheit verfügbar ist und sich zum anderen die erste Eigenform der Antriebsstrangschwingung bei schlupfender Kupplung als eine solche Schwankung der Drehzahl beobachten lässt. Ein weiterer Aspekt der Beschreibung der Antriebsstrangdynamik sind Längsschwingungen der Karosserie, die durch die bereits genannten Antriebsstrangschwingungen hervorgerufen werden. Diese werden beschrieben durch die an der Sitzschiene des Fahrersitzes gemessene Längsbeschleunigung und wird als solche zur Charakterisierung der Antriebsstrangdynamik herangezogen, da diese Messgröße nach den Ausführungen in 2.7 relevant für den subjektiv empfundenen Fahrkomfort bzw. Diskomfort ist.<sup>390,391</sup>

In dieser Arbeit wird die Betrachtung der Antriebsstrangdynamik entsprechend der obigen Begriffsdefinition auf die Betrachtung von Schwingungsphänomenen bei

---

<sup>390</sup> Albers; Albrecht, 2005

<sup>391</sup> Somit entspricht die Antriebsstrangdynamik in diesem Sinn der im Robust Design häufig verwendeten Transfer Function, die einen kontinuierlichen Zusammenhang von Prozesseigenschaften über Design Parametern und Systemeigenschaften hin zur Kundenwahrnehmung herstellt. (vgl. Freund, 2018)

schlupfender Kupplung reduziert, da dies entsprechend der Ausführungen in 2.6 für die Behandlung von Kupplungsrupfen der einzige relevante Zustand ist.

## 5.1.2 Vorgehensweise und Methoden

### 5.1.2.1 Fahrsituationen zur Bestimmung der Antriebsstrangdynamik

Für die Entwicklung einer Anti-Rupf-Regelung ist die Dynamik des Antriebsstrangs<sup>392</sup> bei schlupfender Kupplung von Bedeutung, da entsprechend der Erläuterungen in 2.6 das Phänomen Kupplungsrupfen ausschließlich bei einer Drehzahldifferenz zwischen Kupplung und Kupplungsscheibe auftritt. Aus diesem Grund muss für die Identifikation der Systemdynamik im Rahmen dieser Arbeit eine Fahrsituation gewählt werden, für die sich die Kupplung im schlupfenden Zustand befindet. Weiterhin wird aufgrund möglicher nichtlinearer Effekte im dynamischen System davon ausgegangen, dass sich das dynamische Verhalten des Systems mit dem von der Kupplung übertragenen Drehmoment verändert. Daraus ergibt sich zum einen die Anforderung, dass das Kupplungsmoment über die Dauer der Systemidentifikation annähernd konstant bleibt und zum anderen Fahrsituationen erzeugt werden können, durch die verschiedene Arbeitspunkte des Systems in Form unterschiedlicher Kupplungsmomente vermessen werden können.

Darüber hinaus muss die Dynamik des Antriebsstranges für alle möglichen Kombinationen von eingelegten Gängen auf den Teilgetrieben 1 und 2 bestimmt werden, da sich die Schwingungsdynamik des Antriebstrangs mit der Übersetzung des im aktiven Teilgetriebe eingelegten Gangs verändert und ein im inaktiven Teilgetriebe eingelegter Gang eine Ankopplung einer zusätzlichen Trägheit und einer Versteifung des Systems gleichkommt. Letzteres ist die Folge der speziellen Architektur eines Doppelkupplungsgetriebes mit den beiden ineinander liegenden Getriebeeingangswellen.<sup>393</sup>

Somit muss die für die Identifikation der Schwingungsdynamik des Antriebsstrangs eine Fahrsituation gewählt werden, die sowohl den Anforderungen einer permanent vorhandenen Differenzdrehzahl und eines möglichst konstanten Kupplungsmomentes genügt, jedoch auch für unterschiedliche übertragene Drehmomente und Gangkombinationen realisierbar ist. Hierfür bietet sich die Möglichkeit der Orientierung an den für eine Anti-Rupf-Regelung relevanten Situationen an, welche hauptsächlich

---

<sup>392</sup> vgl. Begriffsdefinition „Antirebsstrangdynamik“ in Abschnitt 5.1.1, S. 170

<sup>393</sup> vgl. Abschnitt 2.3

in Anfahr- oder Ankriechsituationen bestehen.<sup>394</sup> Die spezielle Situation des Ankriechens erfüllt diese Anforderungen im Besonderen, da hier nach dem ersten Ankriechen auf einen festen Wert der Getriebeeingangsdrehzahl geregelt wird und somit ein permanenter und näherungsweise konstanter Schlupf der Kupplung entsteht. Im Falle eines konstanten an den Antriebsrädern angreifenden Lastmomentes ist für dieses Beibehalten einer konstanten Differenzdrehzahl ein näherungsweise konstantes von der Kupplung übertragenes Drehmoment notwendig (siehe Bild 46).

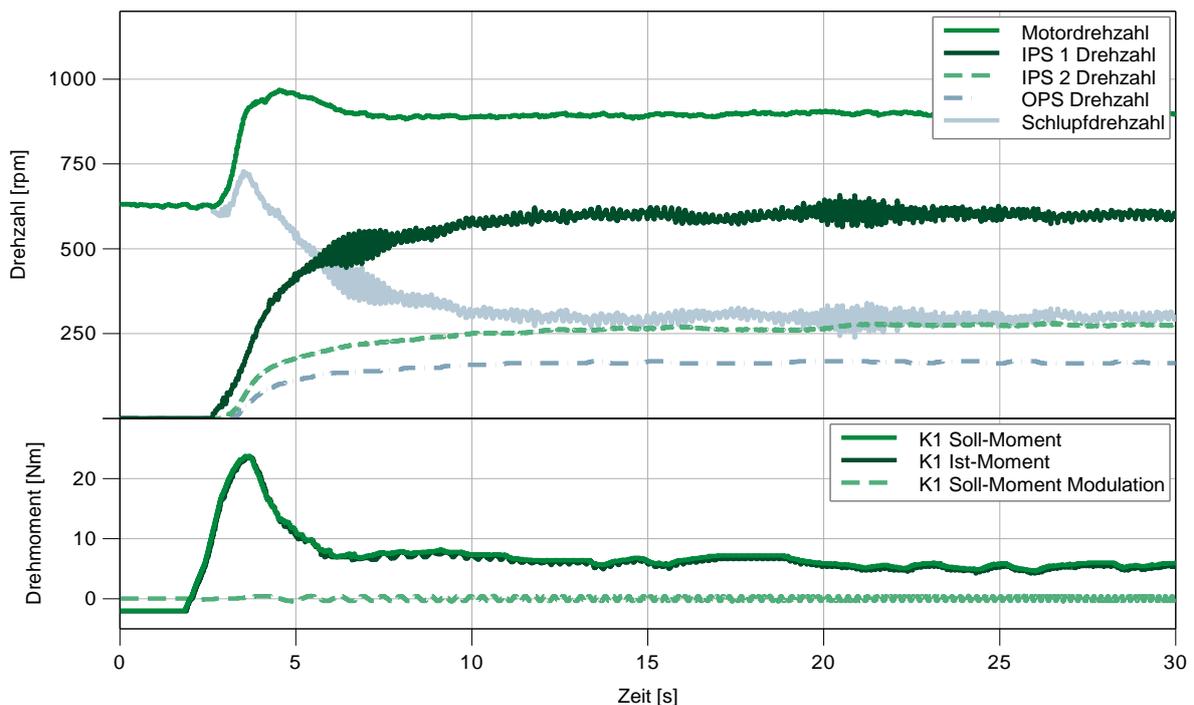


Bild 46: Beispiel für Drehzahl- und Drehmomentenverläufe für die Fahrsituation Ankriechen unter Einwirkung eines Modulationsmomentes; Zu sehen sind die Drehzahlverläufe über die Zeit (oben; Motor, Getriebeeingang 1&2, Getriebeausgang, Drehzahldifferenz an der Kupplung) sowie die Drehmomentverläufe an der Teilkupplung 1 über die Zeit (unten; Soll-Vorgabe, Ist- sowie in der Soll-Vorgabe enthaltene gezielte Modulation)

Weiterhin kann, abhängig von den in der Kupplungssteuerungssoftware kalibrierten Parametern, diese Ankriechsituation an unterschiedlichen Fahrbahnsteigungen reproduziert werden und somit durch eine Variation des Lastmomentes eine Vermessung unterschiedlicher Arbeitspunkte erzwungen werden. In den meisten Fällen werden durch diese Wahl der Fahrsituation auch direkt alle für die Regelung relevanten Gangkombinationen vermessen. Ist dies jedoch nicht der Fall, so wird für die Identifikation der Dynamik eine spezielle Software zur Kupplungs- und

<sup>394</sup> „Anfahren“: Hochfahrt aus dem Stand durch Betätigen des Gaspedals mit Übergang von schlupfender zu haftender Kupplung und eventuellem Gangwechsel; „Ankriechen“: Hochfahrt aus dem Stand ohne Betätigung des Gaspedals durch Lösen der Bremse(n) mit durchgehend schlupfender Kupplung. Komfortfunktion bei Automatikgetrieben unter Bezugnahme auf technisch bedingtes Kriechen bei Drehmomentwandlern

Getriebesteuerung benötigt, die eine Wahl der auf dem aktiven und dem inaktiven Teilgetriebe eingelegten Gänge ermöglicht.

Somit ergibt sich als geeignete Wahl der Fahrsituation zur Identifikation der Schwingungsdynamik des Antriebsstrangs ein möglichst langes Ankriechen an konstanter, wählbarer Fahrbahnsteigung mit möglichst konstanter Schlupfdrehzahl und idealerweise frei wählbarer Gangkombination.

#### 5.1.2.2 Identifikationsmethoden

Um die Identifikation der Schwingungsdynamik des Antriebsstrangs möglichst effizient zu gestalten ist eine geeignete Wahl des Modulationssignals notwendig. Dieses Modulationssignal wird verwendet um während der im vorherigen Abschnitt abgeleiteten Fahrsituation das von der Kupplung übertragene Drehmoment im aktuellen Arbeitspunkt zu modulieren und damit die dynamische Antwort des Systems auf das variierende Kupplungsmoment zu erhalten. Entscheidend ist hierbei der von dem gewählten Modulationssignal angeregte Frequenzbereich, welcher zum einen den für Rupfschwingungen relevanten Frequenzbereich abdecken sollte, und zum anderen möglichst groß sein soll, um einen möglichst vollständigen Eindruck des dynamischen Verhalten des Gesamtsystems zu erhalten. Innerhalb dieses Frequenzbereiches sollte die Anregung durch das Modulationssignal idealerweise gleichmäßig verteilt sein, damit keine Effekte in einem schwächer angeregten Frequenzbereich von solchen in stärker angeregten Bereichen überlagert werden. Zuletzt muss das Modulationssignal für das zu vermessende Gesamtsystem aus Antriebsstrang, Kupplungsbetätigung und Kupplungsansteuerung in angemessener Weise umsetzbar sein. Dies beinhaltet in diesem Fall die Möglichkeit der Umsetzung in einem zeitdiskreten System, da die Ansteuerung der Kupplungsbetätigung über die Kupplungs- und Getriebesteuerungssoftware über ein CAN-Bussystem erfolgt, welches lediglich zeitdiskrete Signale übertragen kann. Darüber hinaus muss ein geeignetes Modulationssignal eine möglichst effiziente Umsetzung des in der Software zur Kupplungsansteuerung bezüglich der erforderlichen Ressourcen Rechenzeit und Speicherbedarf garantieren.

Anhand dieser Anforderungen an das Modulationssignal wird in Anlehnung an die in 2.2 diskutierten Methoden zur Identifikation der Systemdynamik mithilfe eine Fibonacci LFSR (Bild 47) die Methode der Identifikation mithilfe eines PRBS Signals mit 4 Taps (beispielhafter Signalverlauf in Bild 48) und einer optionalen Anwendung einer IRS umgesetzt.<sup>395</sup>

---

<sup>395</sup> vgl. 2.2.4

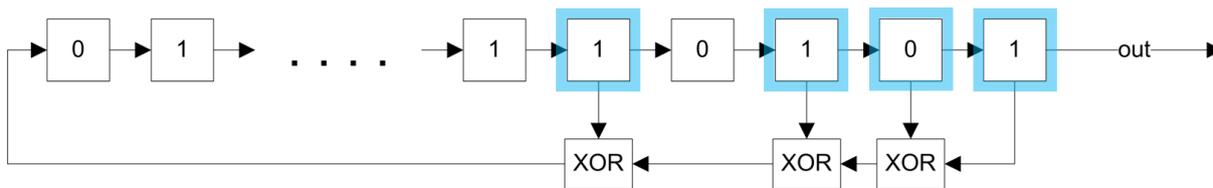


Bild 47: 4-Tap Fibonacci Linear Feedback Shift Register (LFSR) mit einer Tap-Konfiguration  $\{n, n-1, n-2, n-4\}$  und dem letzten Bit als Signalausgang des Registers<sup>396</sup>

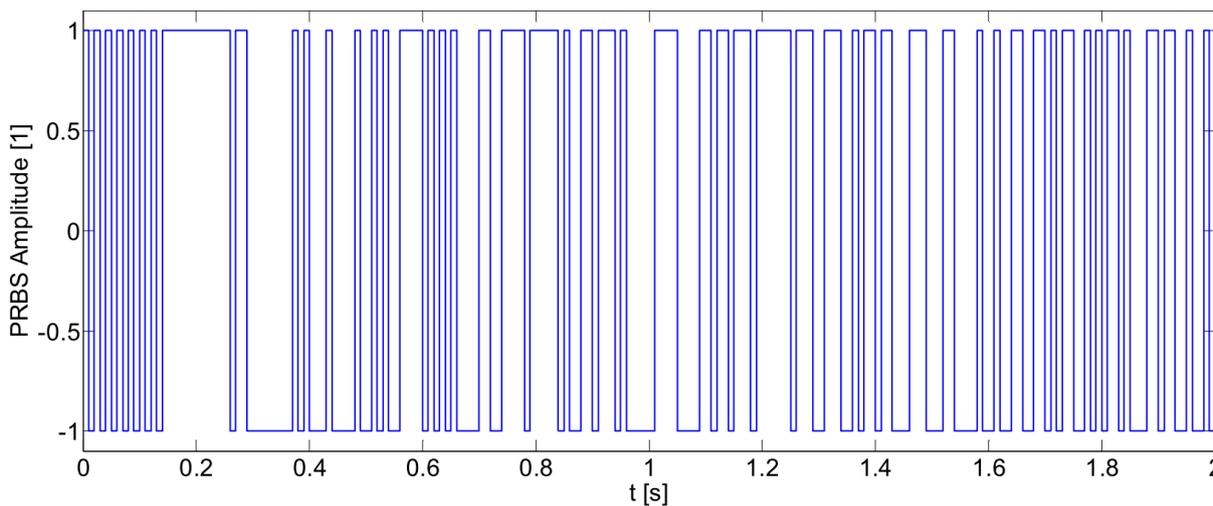


Bild 48: Beispielhafter Signalverlauf eines von einem 4-Tap LFSR mit 10ms Umschaltzeit erzeugten PRBS<sup>397</sup>

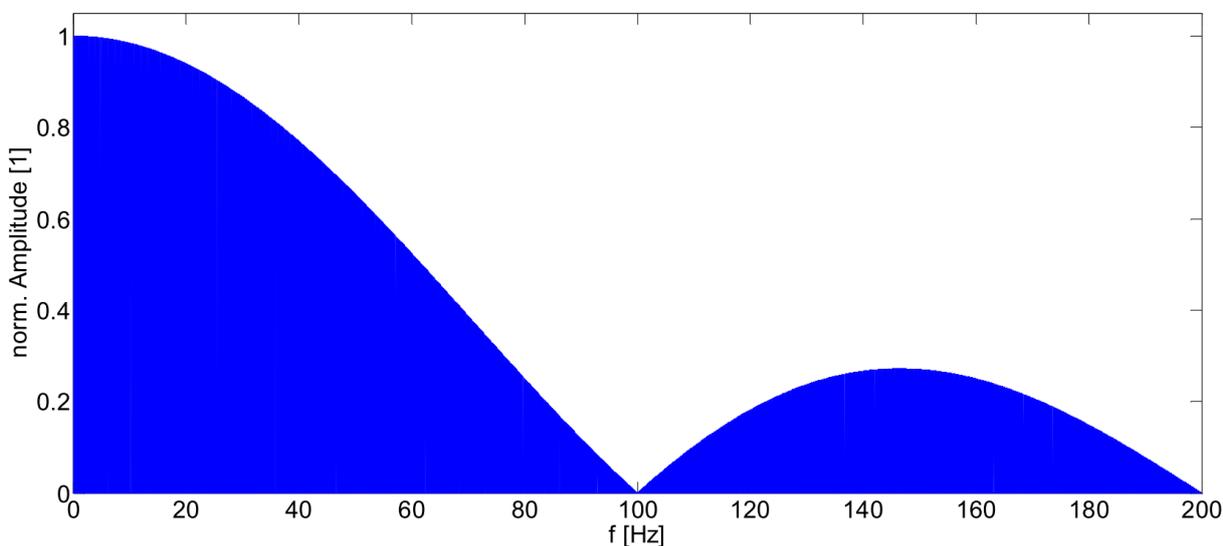


Bild 49: Spektrum eines mit einem 4-Tap LFSR mit 10ms Umschaltzeit erzeugten PRBS bei einer Überabtastung mit 2,5ms Sample-Zeit<sup>398</sup>

<sup>396</sup> Eppler et al., 2016

<sup>397</sup> Eppler et al., 2016

<sup>398</sup> Eppler et al., 2016

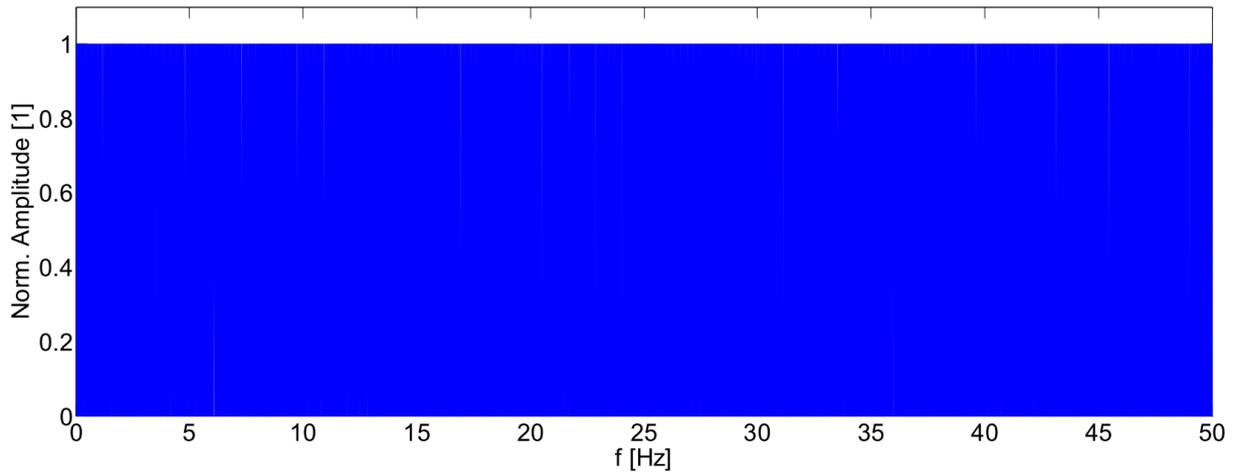


Bild 50: Spektrum eines mit einem 4-Tap LFSR mit 10ms Umschaltzeit erzeugten PRBS bei einer Abtastung mit 10ms Sample-Zeit<sup>399</sup>

Das Spektrum des so erzeugten Signals ist für die beiden in Abschnitt 2.2.3.3 diskutierten Varianten mit und ohne Oversampling in Bild 49 respektive in Bild 50 dargestellt.

Der Bedarf zu der erwähnten optionalen Anwendung eines IRS Signals, wie es in 2.2.4.2 vorgestellt wurde, ergibt sich aus dem zu erwarteten nicht ideal linearen dynamischen Verhalten des zu identifizierenden Systems und der Intermodulationseffekte, die dadurch hervorgerufen werden können (Bild 51). Solche nichtlinearen Effekte sollen bei der Identifikation der Systemdynamik von der linearen Systemdynamik getrennt werden können.

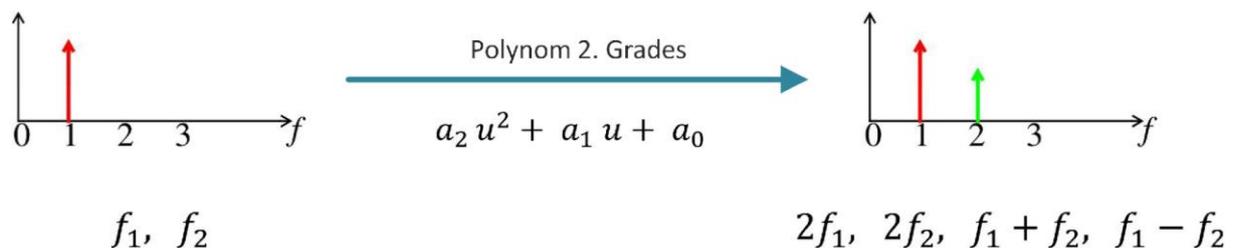


Bild 51: Beispiel für die Intermodulation als eine Verzerrung durch eine Nichtlinearität, die sich durch ein Polynom zweiten Grades beschreiben lässt<sup>400</sup>

<sup>399</sup> Eppler et al., 2016

<sup>400</sup> Eppler et al., 2016

### 5.1.2.3 Vorgehensweise zur Identifikation der Antriebsstrangdynamik

Um nun die für die Entwicklung einer Anti-Rupf-Regelung relevante Systemdynamik zu identifizieren wird eine spezielle Kupplungs- und Getriebesteuerungssoftware verwendet, die die Möglichkeit der Modulation entweder mit einem PRBS oder einem IRS-Signal mit einstellbarer Amplitude und Umschaltzeit bietet und unter Umständen eine Auswahl der eingelegten Gänge auf den beiden Teilgetrieben ermöglicht.

Mithilfe dieser Software wird die zuvor definierte Fahrsituation des Ankriechens an unterschiedlichen Fahrbahnsteigungen durchgeführt. Dabei wird für jede zur Verfügung stehende Fahrbahnsteigung die Amplitude des Modulationssignals im für das zu vermessende Fahrzeug relevanten Bereich variiert und die Vermessung in den unterschiedlichen Gangkombinationen sowohl in Vorwärts- als auch in Rückwärtsfahrt durchgeführt (Bild 52)

Während diesen Experimenten werden sowohl das Modulationssignal sowie dessen Umsetzung in der Kupplungsbetätigung, als auch die Getriebeeingangsdrehzahlen der beiden Teilgetriebe sowie nach Möglichkeit die Fahrzeugbeschleunigung als fahrkomfortrelevante physikalische Größe<sup>401</sup> mit einem geeigneten Messsystem aufgezeichnet.

Diese Signale werden mit entsprechenden im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Skripten in imc FAMOS<sup>402</sup> ausgewertet und die Ergebnisse der nichtparametrischen Identifikation zur Analyse als Übertragungsfunktionen im Frequenzbereich dargestellt.

---

<sup>401</sup> vgl. 2.2.4.2

<sup>402</sup> imc Meßsysteme GmbH

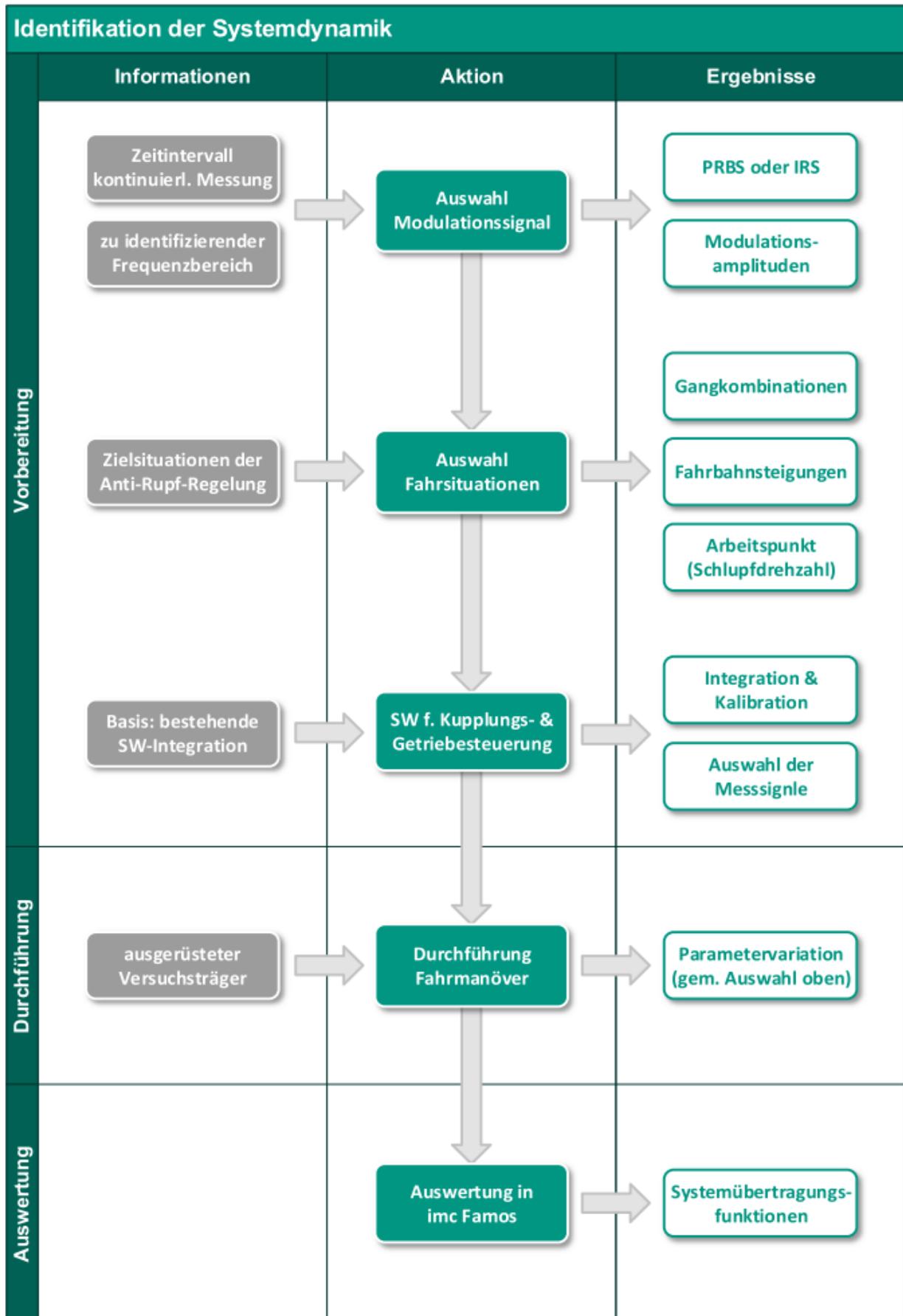


Bild 52: Schematische Vorgehensweise zur Identifikation der Systemdynamik

### 5.1.3 Grundlegende Dynamik eines PKW-Antriebsstrang

Nach den Ausführungen in 5.1.1 beschreibt die grundlegende Dynamik des Antriebsstrangs die Reaktion auf eine Anregung durch das von der Kupplung in der Schlupfphase übertragene Drehmoment. Durch die schlupfende Kupplung ist die Primärseite des Antriebsstrangs mit Schwungrad und dem Verbrennungsmotor von der Sekundär- oder Abtriebsseite schwingungsdynamisch entkoppelt. In diesem Zustand liegt die Eigenfrequenz des abtriebsseitigen Systems abhängig von den Eigenschaften der einzelnen Komponenten im Bereich von 6,0 Hz bis 12,0 Hz.<sup>403</sup>

Damit ergibt sich eine einfache Beschreibung der Dynamik als ein aus zwei durch ein Feder-Dämpfer-Element gekoppelten Drehmassen bestehendes schwingungsfähiges Systems. Dieses System entsteht als der einfachste Fall einer Modellreduktion des Antriebsstranges und ermöglicht eine einfache Betrachtung der ersten Eigenfrequenz des Antriebsstranges.<sup>404</sup>

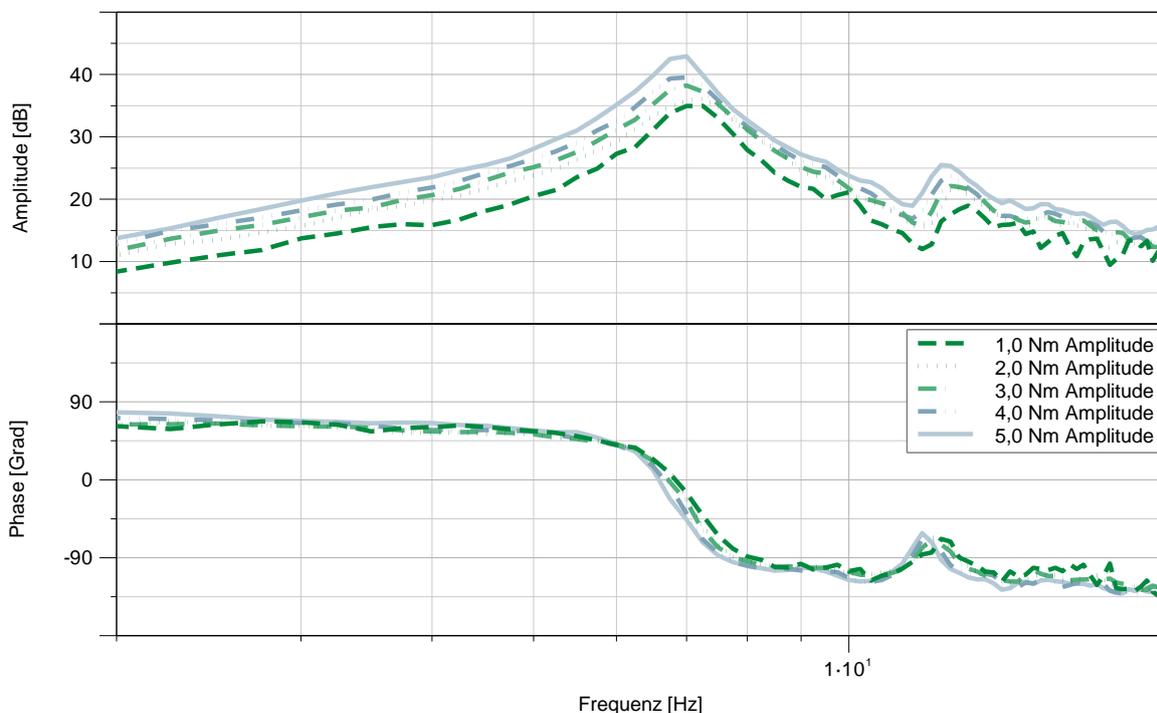


Bild 53: Einfache Dynamik eines Antriebsstrangs am Beispiel von (Fzg. A) mit Gangkombination 1-N für die Übertragung von Kupplungsdrehmoment zur Getriebeeingangsdrehzahl bei 2 % Fahrbahnsteigung und unterschiedlichen Anregungsamplituden von 1,0 Nm bis 5,0 Nm und der ersten Mode des Antriebsstrangs bei ca. 7,0 Hz

Diese Dynamik des Systems wird im Allgemeinen beschrieben durch die Lage und die Höhe der Resonanz, sowie durch die Lage und den Verlauf der Phase. Beispielhaft ist

<sup>403</sup> Albers; Herbst, 1998

<sup>404</sup> vgl. 2.4.1

in Bild 53 der Amplituden- und Phasenverlauf zur Charakterisierung des Antriebsstrangdynamik für die Übertragung von Kupplungsdrehmoment zu Getriebeeingangsdrehzahl von (Fzg. A) sowie in Bild 54 für (Fzg. C) in einem Bode-Diagramm dargestellt.

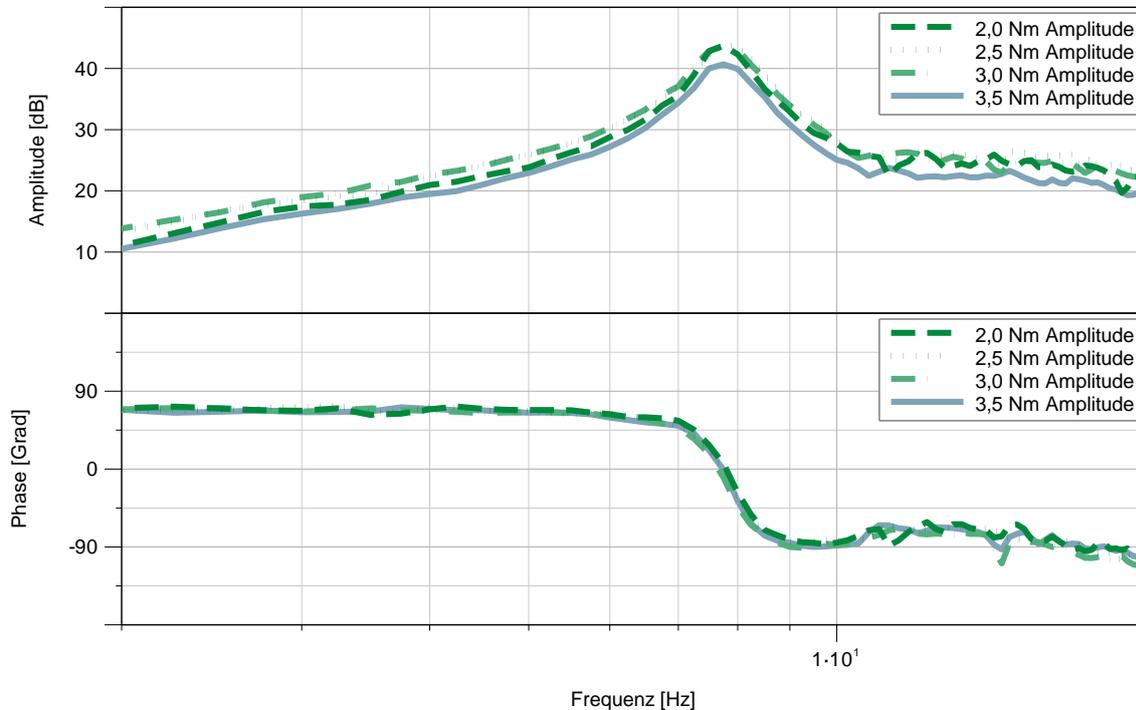


Bild 54: Einfache Dynamik eines Antriebsstrangs am Beispiel von (Fzg. C) mit der Gangkombination 1-N und variierender Anregungsamplitude von  $M_{Cl,Tgt}$  die Resonanzfrequenz des Antriebsstranges für die Übertragung von  $M_{Cl}$  nach  $n_{PS}$  liegt hier bei ca. 7,5 Hz

In diesem Fall einer einfachen Antriebsstrangdynamik ist das Verstärkungsverhalten des Systems für die Drehmomentschwankung hin zur Schwankung der Getriebeeingangsdrehzahl und hin zur Längsbeschleunigung des Fahrzeugs qualitativ nahezu identisch. Die wesentlichen Verstärkungen in der Übertragung liegen bei der gleichen Frequenz, die identisch mit der ersten Eigenfrequenz des Antriebsstrangs bei schlupfender Kupplung ist.

Ein ähnliches Verhalten zeigt sich bei der Identifikation der Antriebsstrangdynamik von (Fzg. B) für den Fall, dass auf dem aktiven Teilgetriebe der erste Gang gewählt und auf dem inaktiven Teilgetriebe der Rückwärtsgang vorgewählt ist (Bild 55). Auch hier lässt sich erkennen, dass das Übertragungsverhalten von anregendem Drehmoment zur Getriebeeingangsdrehzahl und zur Fahrzeuglängsbeschleunigung eine sehr ähnliche Charakteristik mit ausgeprägter Resonanz bei ca. 6,5 Hz aufweist.

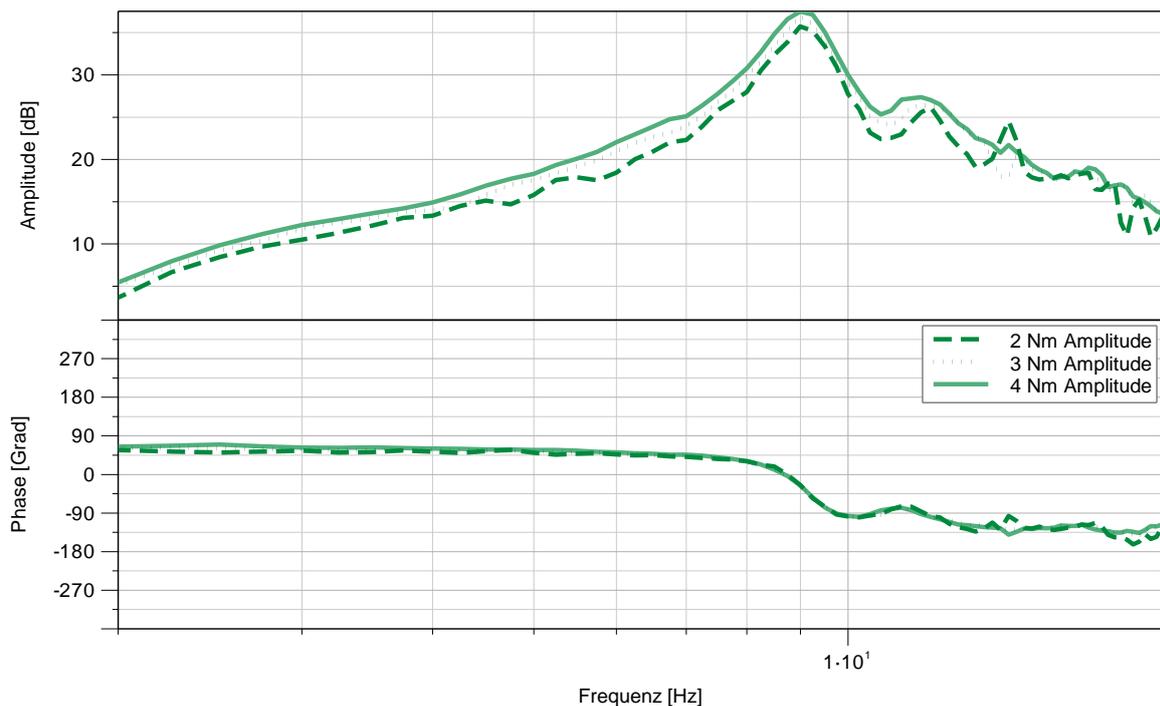


Bild 55: Dynamik des Antriebsstranges von (Fzg. B) für die Gangkombination 1-R und einer Anregungsamplitude von 5 Nm

#### 5.1.4 Auftreten der Vorderachsmode

Es gibt jedoch auch Fahrzeuge, deren Antriebsstrang keine einfache Dynamik, wie sie im vorangegangenen Abschnitt diskutiert wurde, aufweist. Durch eine veränderte Kombination der einzelnen Komponenten werden die dynamischen Eigenschaften des Antriebsstrangs maßgeblich beeinflusst. Dies kann zum Beispiel durch eine veränderte Steifigkeit der Aufhängung der Antriebsachse passieren, die daraufhin in einem charakteristischen Frequenzbereich mehr Schwingungsenergie aufnimmt und dadurch zum Auftreten einer schwach ausgeprägten zweiten Resonanz bei einer Frequenz von ca. 13 – 20 Hz führt.<sup>405</sup> Ein Beispiel hierfür ist die Antriebsstrangdynamik von (Fzg. D), die durch ein nichtlineares Verhalten der Steifigkeit der Achsaufhängung in Längsrichtung verursacht wird,<sup>406</sup> oder auch wie in Bild 56 für den Fall von (Fzg. A). Die durch die veränderte Steifigkeit der Seitenwellen auftretende Nebenresonanz ist noch einmal entsprechend markiert.

Hier ist zu erkennen, dass diese Nebenresonanz für die Übertragung von Kupplungsdrehmoment zu Fahrzeuglängsbeschleunigung stärker ausgeprägt ist, als das für die Getriebeeingangsdrehzahl der Fall ist.

<sup>405</sup> vgl. 2.4.3

<sup>406</sup> Schaeffler AG, 2016b

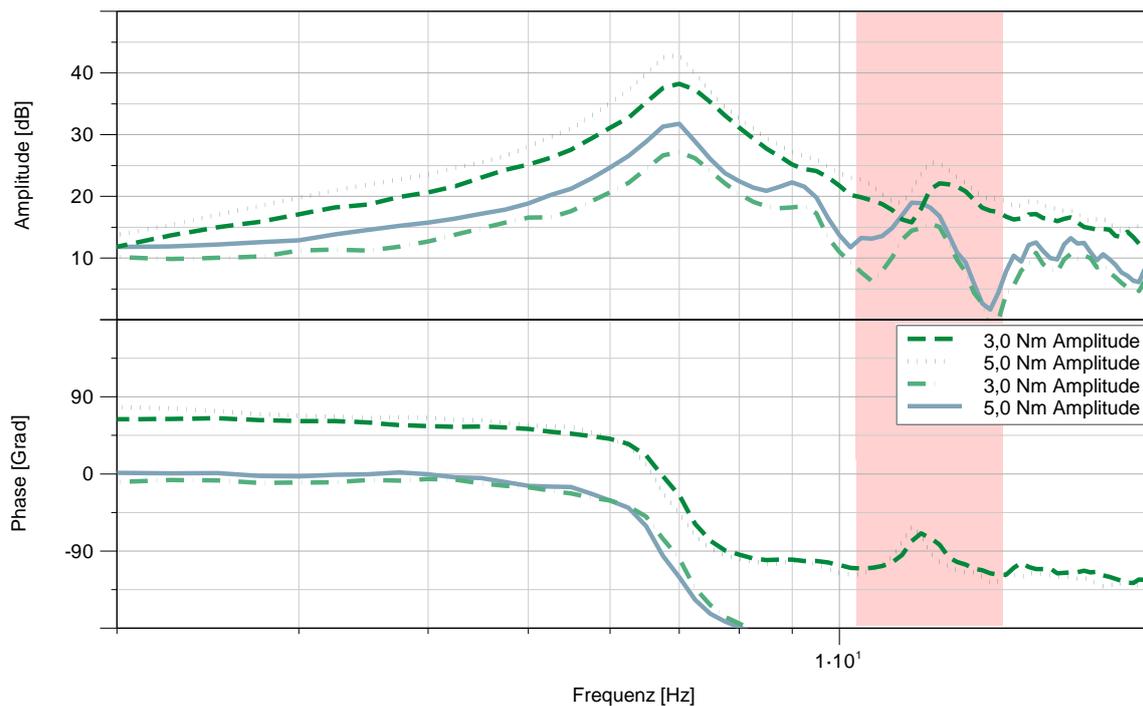


Bild 56: Beispiel für eine Antriebsstrangdynamik mit auftretender Vorderachs-  
mode für (Fzg. A) für die Gangkombination 1-N aufgenommen bei 2%  
Fahrbahnsteigung und einer Anregungsamplitude von 3,0 Nm und 5,0 Nm ;  
Die Fahrzeugbeschleunigung ( —•— und — — ) zeigt eine  
deutliche zweite Resonanz bei ca. 12,5 Hz

### 5.1.5 Aufspaltung der Antriebsstrangresonanzen

Eine weitere Möglichkeit für eine komplexere Antriebsstrangdynamik<sup>407</sup> ergibt sich zum Beispiel für (Fzg. B), (Fzg. D) und (Fzg. E). Hier ist das Verhalten abhängig von der Kombination aus dem im aktiven Teilgetriebe eingelegten und dem im inaktiven Teilgetriebe vorgewählten Gang. Bei den genannten Fahrzeugen kann eine Aufspaltung der ersten Resonanz des Antriebsstranges in der Getriebeeingangsdrehzahl beobachtet werden, die sich allerdings in dieser Form nicht in der Längsbeschleunigung des Fahrzeugs widerspiegelt. Dadurch entsteht ein deutlicher Unterschied im schwingungsdynamischen Verhalten des Antriebsstranges in Bezug auf Getriebeeingangsdrehzahl und Fahrzeuglängsbeschleunigung (siehe Bild 57).

In Bild 57 ist eine deutliche Aufspaltung der Resonanzmode des Antriebsstranges für die Übertragung von Kupplungsdrehmoment zur Fahrzeuglängsbeschleunigung zu erkennen, wobei die Dämpfung der Resonanzmode auf einen sehr schmalen Frequenzbereich beschränkt ist.

<sup>407</sup> vgl. 5.1.1 für eine Definition des Begriffs „Antriebsstrangdynamik“

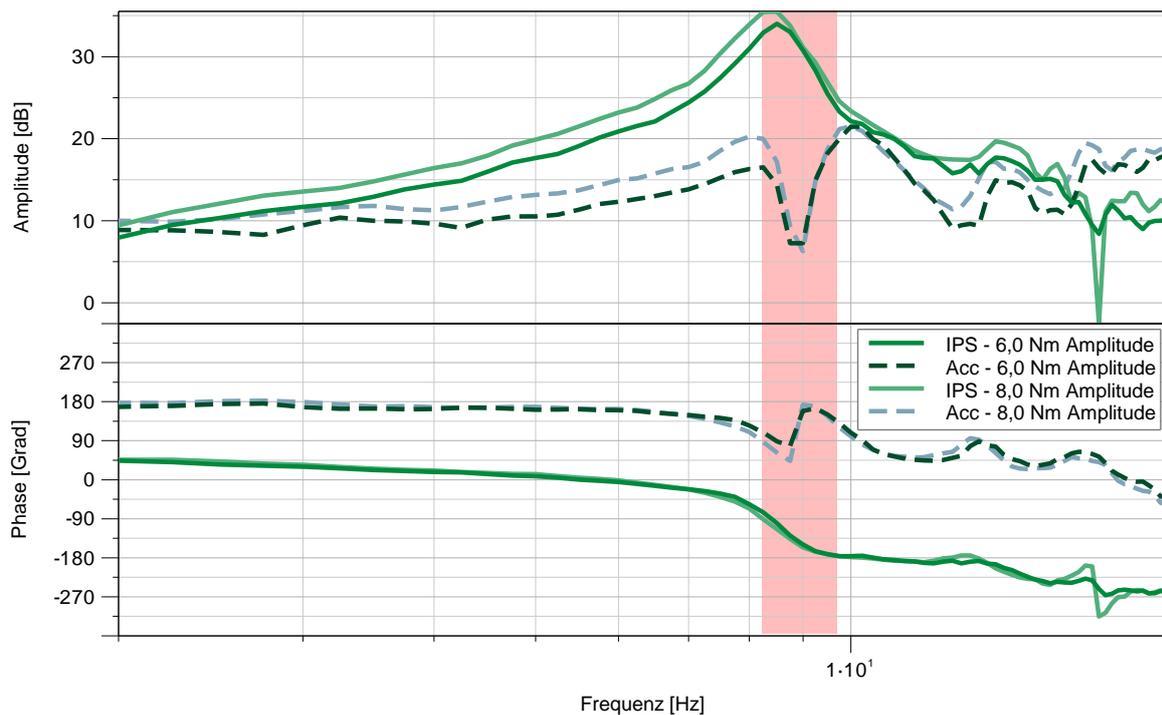


Bild 57: Leichte Aufspaltung der Triebstrangresonanz in der Übertragung von Kupplungsdrehmoment zu Fahrzeugbeschleunigung (---) im Vergleich zur Übertragung von Drehmoment nach Getriebeeingangsdrehzahl (—) für (Fzg. E) bei Gangkombination 1-N, 2% Steigung und Anregungsamplituden von 6,0 Nm und 8,0 Nm

Die Begründung für dieses Verhalten erfordert eine deutlich komplexere Variante des Antriebsstrangmodells, die über die bislang betrachtete Abtriebsseite nun auch die Antriebsseite mit Motor, Kurbelwelle und Schwungrad sowie deren mechanische Kopplung an die Sekundärseite über das Aggregat und die darin enthaltenen Lagerungen der Komponenten berücksichtigt. Das Aggregat bezeichnet hier die Motor-Getriebe-Einheit, die durch Motor-, Getriebe- und Drehmomentstützen dynamisch im Fahrzeug gelagert sind (siehe Bild 58), wobei erstere die Abstützung von Normalkräften übernehmen, während die Drehmomentstützen eine Rotationsbewegung des Aggregates begrenzen sollen.<sup>408</sup>

Durch die Getriebe- und Drehmomentstützen entsteht eine direkte elastische mechanische Kopplung der Sekundärseite des Antriebsstranges zur Karosserie. Dies ermöglicht es der Karosserie, unter gewissen Umständen Schwingungsenergie aus dem Getriebe aufzunehmen und in eine Aggregatebewegung umzuwandeln. Weiterhin ermöglicht diese Kopplung auf umgekehrtem Weg ein Einkoppeln von Schwingungsenergie aus einer translatorischen Bewegung des Motors in den Antriebsstrang. Dieser Einfluss

<sup>408</sup> Heißing et al., 2013

kann insbesondere aufgrund der vergleichsweise hohen Motormasse nicht vernachlässigt werden.<sup>409</sup>

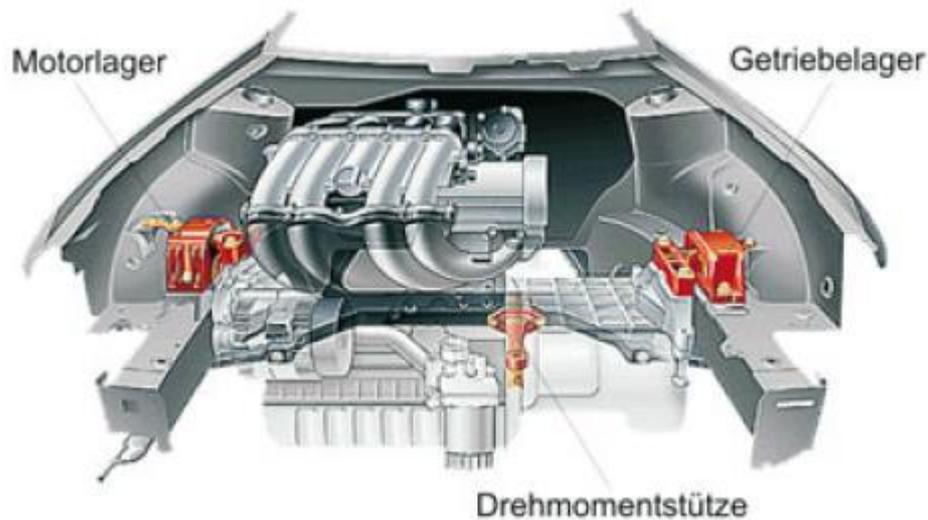


Bild 58: Aggregatlagerung im Falle eines Front-Quereinbaus<sup>410</sup>

So ist es für bestimmte Systemkonfigurationen möglich, dass eine starke dynamische Kopplung zwischen der translatorischen Bewegung des Motors und dem rotatorischen Schwingungsverhalten des Antriebsstranges existiert. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn bei einem Fahrzeug der Motorblock nicht in seinem Schwerpunkt gelagert ist und daher eine translatorische Bewegung des Motorblocks zu einer rotatorischen Bewegung des Aggregates führt (Bild 59).<sup>411</sup>

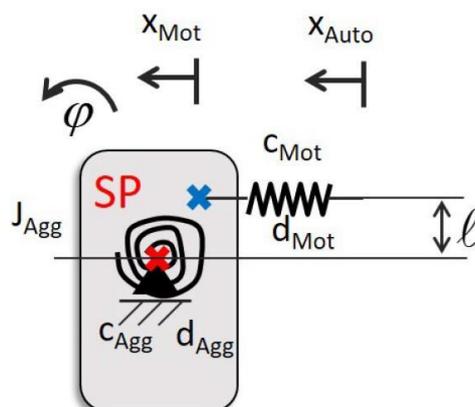


Bild 59: Vereinfachte Darstellung der Motorblockaufhängung<sup>412</sup>

<sup>409</sup> vgl. 2.4.4

<sup>410</sup> Heißing et al., 2013

<sup>411</sup> 2.4.4

<sup>412</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

Das durch diese Bewegung entstehende Moment kann wiederum über die Aggregatlagerung und die Getriebelagerung in die Sekundärseite eingekoppelt werden oder auf umgekehrtem Wege auch Schwingungsenergie über die Lagerung von Getriebe und Differential von Aggregat bzw. Motorblock aufgenommen werden. Dadurch kann der Motorblock als eine Art Tilger wirken und damit für eine Aufspaltung (Bild 57) oder eine teilweise Dämpfung der Resonanz sorgen (Bild 60).

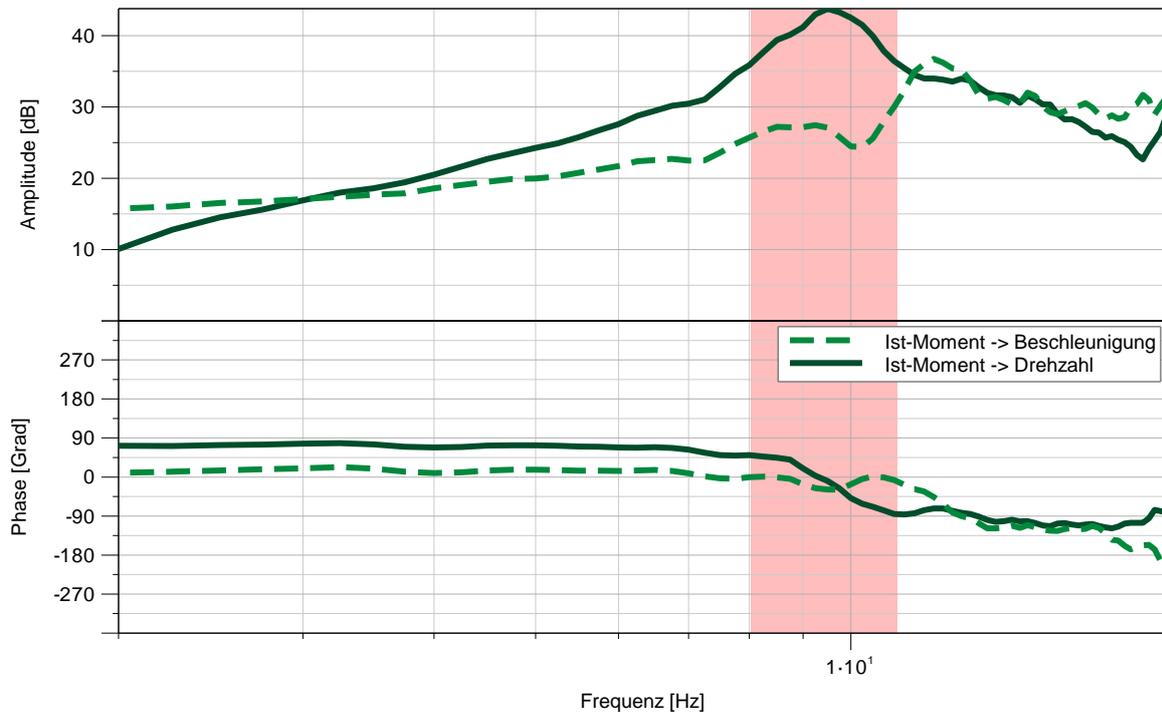


Bild 60: Teilweise Dämpfung der Antriebsstrangresonanz in der Übertragung von Drehmoment nach Längsbeschleunigung am Beispiel der Antriebsstrangdynamik von (Fzg. B) in der Gangkombination R-N und einer Anregungsamplitude von 3 Nm  
Der Motorblock nimmt hier über die Aggregatlagerung im Bereich der Antriebsstrangresonanz vermehrt Energie auf, sodass diese nicht an die Karosserie weitergegeben wird

Der spezielle Fall von (Fzg. B) zeigt, dass die Auswirkungen dieses Effektes deutlich mit der gewählten Gangkombination verändern können. So sind in bestimmten Fällen die Resonanzmaxima von Drehzahl und Beschleunigung bei der gleichen Frequenz, während für andere Kombinationen diese Maxima für unterschiedliche Frequenzen auftreten, weshalb nach den Ausführungen in 2.7 zu erwarten ist, dass der durch die Schwingungen hervorgerufene und mit der an der Sitzschiene gemessenen Beschleunigung korrelierende subjektiv empfundene Diskomfort nicht mehr mit der gemessenen Drehzahlschwankung korreliert.

## 5.2 Modellierung der Regelstrecke anhand eines PKW-Antriebsstrangs

Anhand der zuvor beschriebenen Phänomene der Schwingungsdynamik des Antriebsstranges in unterschiedlichen Systemrealisierungen soll nun ein schwingungsfähiges Modell des Antriebsstranges gefunden werden, das es ermöglicht, diese Phänomene durch eine geeignete Wahl der Systemparameter abzubilden. Dazu werden zunächst die in anderen Arbeiten mit ähnlichem Anwendungsgebiet verwendeten und in 2.4 beschriebenen Modelle auf ihre Fähigkeit der Abbildung sowohl der grundlegenden Dynamik als auch der in 5.1.4 und 5.1.5 beschriebenen Phänomene geprüft. Entsprechend der Ergebnisse dieser Prüfung und der Erkenntnisse aus 5.1.4 und 5.1.5 über die Ursachen der beobachteten Phänomene wird anschließend ein Modell zur Abbildung der Dynamik des Antriebsstranges synthetisiert, welches auch im weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit verwendet wird.

### 5.2.1 Entwicklung eines Antriebsstrangmodells anhand bestehender Modelle

Wie bereits in 2.4 erörtert, eignet sich das von ALBERS<sup>413</sup>, ALBERS UND KRÜGER sowie von SOMMER OBANDO verwendete Modell aus zwei über ein Feder-Dämpfer Element gekoppelten Drehmassen (Bild 61) sehr gut, um die grundlegende Schwingungsdynamik des Antriebsstranges abzubilden. Dies liegt insbesondere darin begründet, dass dieses Modell aus einem komplexeren Modell mit zwei primärseitigen und fünf sekundärseitigen Drehmassen durch eine Modellreduktion entstanden ist, um eine Betrachtung dieser grundlegenden Dynamik zu vereinfachen.<sup>414,415</sup>

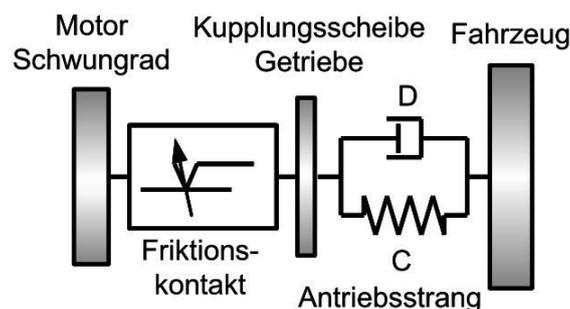


Bild 61: Einfachmodell eines PKW Antriebsstrangs als Zwei-Massen-Modell<sup>416,417</sup>

<sup>413</sup> Albers, 1994

<sup>414</sup> Krüger

<sup>415</sup> Albers; Krüger, 2002

<sup>416</sup> Krüger

<sup>417</sup> vgl. auch Albers; Krüger, 2002

Die Schwingungsdynamik dieses Antriebsstrangmodells kann durch die, im Vergleich zur aus Kupplungsscheibe und Getriebe zusammengesetzten vorderen Drehmasse wesentlich größere, Fahrzeugmasse als die Dynamik einer durch ein Feder-Dämpfer-Element an ein fest stehendes Ende gekoppelten Schwungmasse angenähert werden. Damit ergibt sich für die Schwingungsdynamik ein einfacher Amplitudenverlauf mit einer Resonanz, die der ersten Eigenmode des Antriebsstranges entspricht, und einem entsprechenden Phasenverlauf, der im Bereich der Resonanz den zu erwartenden Abfall um  $90^\circ$  zeigt.

Eine Möglichkeit der Übertragung von Schwingungsenergie von der Sekundärseite des Antriebsstranges zur Karosserie wird durch die Berücksichtigung der endlichen Steifigkeit der Getriebelagerung geschaffen. Damit einher geht die Berücksichtigung des Trägheitsmomentes des Aggregates sowie dessen Kopplung an die Karosserie (siehe Bild 62).

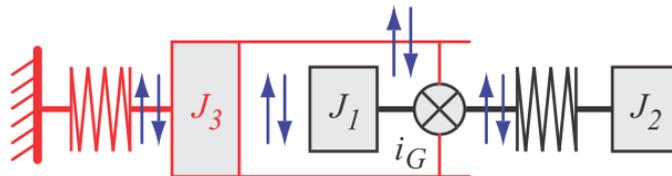


Bild 62: Erweitertes zwei Massen Modell des Antriebsstrangs unter Berücksichtigung der rotatorischen Aggregatbewegung.  $J_1$  ist die zusammengefasste Trägheit an der Sekundärseite der Kupplung,  $J_2$  die Abtriebs- und  $J_3$  die Aggregatträgheit.  $i_G$  bezeichnet die Getriebeübersetzung.<sup>418</sup>

Damit wird jedoch noch keine Aufspaltung der Resonanz, wie sie zuvor beschrieben wurde, ermöglicht, sondern lediglich eine Veränderung der Lage der Resonanzfrequenz.

Das zuvor beschriebene Auftreten der Vorderachsmode wird ermöglicht, indem das Modell mit zwei sekundärseitigen Schwungmassen (Bild 61) auf ein Modell mit vier sekundärseitigen Massen erweitert wird, das durch den erhöhten Detaillierungsgrad eine Abbildung der Dynamik der Seitenwellen, Achsen und Räder des Fahrzeuges erlaubt. Das Feder-Dämpfer-Element, das die Kopplung der Radmasse an die Fahrzeugmasse darstellt, steht hier für die Aufhängung der angetriebenen Achse in Fahrzeuginnenrichtung und ermöglicht die Abbildung der Vorderachsmode im schwingungsfähigen Modell.<sup>419</sup>

<sup>418</sup> Schwenger, 2005

<sup>419</sup> Schaeffler AG, 2016b

Da bei manchen der untersuchten Fahrzeuge eine Aufspaltung der Resonanzen von Getriebeeingangsdrehzahl und Fahrzeuglängsbeschleunigung beobachtet wurde, muss ebenfalls die Kopplung von translatorischer und rotatorischer Motorblockbewegung berücksichtigt werden. Dies kann im einfachsten Fall als ein System mit zwei Freiheitsgraden modelliert werden.<sup>420</sup>

### 5.2.2 Synthese eines Modells für die Reglerauslegung

Anhand der zuvor durchgeführten Analyse der beobachteten Phänomene der Schwingungsdynamik des Antriebsstranges soll nun ein Modell zur adäquaten Beschreibung dieser Dynamik synthetisiert werden.<sup>421</sup> Dabei muss das Modell die Möglichkeiten zur Ankopplung der Vorderachsmode sowie der Kopplung der rotatorischen und translatorischen Motorblockmoden bieten.

Daher wird das von SCHWENGER vorgestellte Modell als Basis verwendet und um die detailliertere Beschreibung des Antriebsstranges unter Berücksichtigung von Seitenwellen und Achsaufhängung sowie die Ankopplung der translatorischen Aggregatebewegung erweitert. Letzteres führt zu der Notwendigkeit einer separaten Betrachtung der Motormasse als translatorisches sowie der Aggregateträgheit als rotatorisches Element (siehe Bild 63). Über die genannten Erweiterungen hinaus wurde das Modell außerdem um das inaktive Teilgetriebe mit der dazugehörigen Kupplung erweitert, um die dynamischen Effekte, die aus der Getriebeabstützung und der Ankopplung der zusätzlichen Getriebemasse entstehen, zu berücksichtigen.

Dieses Modell soll im weiteren Teil der vorliegenden Arbeit als Basis für die Entwicklung der robusten Anti-Rupf-Regelung dienen, indem es zum einen in diesem Detaillierungsgrad zur Validierung der Reglers sowie dessen Robustheit in der Simulation verwendet wird, und zum anderen, indem es als Ausgangsbasis für die Zustandsraumdarstellung des zu regelnden Systems dient, die eine Vereinfachung des in Bild 63 gezeigten Systems darstellt, da darin aufgrund der einfacheren mathematischen Behandlung die zuvor beschriebene translatorische und rotatorische Kopplung der Aggregateträgheit an die Sekundärseite des Antriebsstranges vernachlässigt wird. Diese soll dann jedoch durch eine darauffolgende geeignete robuste Auslegung des Reglers kompensiert werden.

---

<sup>420</sup> vgl. 2.4.4

<sup>421</sup> „Synthese“ ist hier als „eine Handlung, die das Erschaffen eines bis dato noch nicht existierenden Systems bezweckt.“, IPEK Glossar

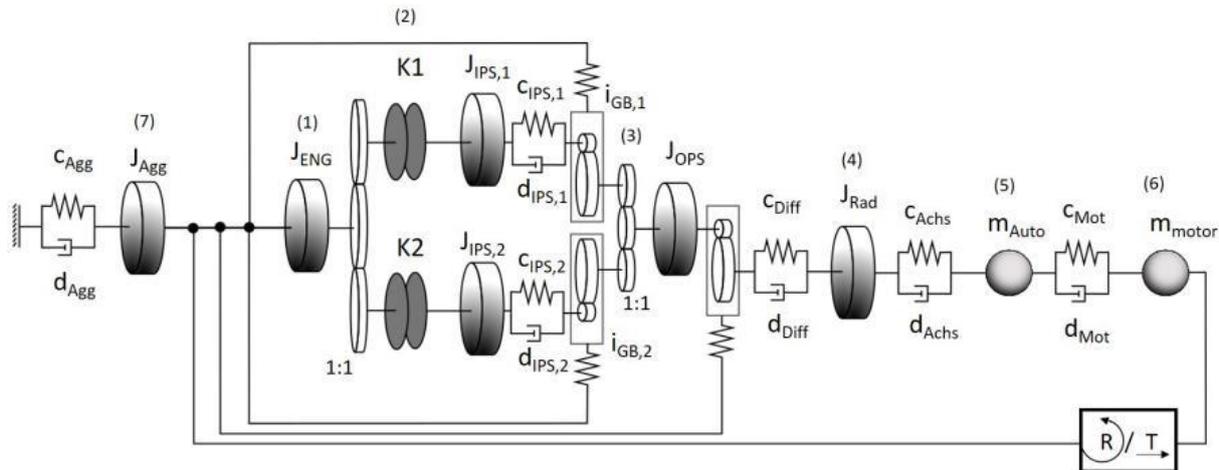


Bild 63: Aus der Modellsynthese entstandenes physikalisches Modell eines PKW-Antriebsstrangs<sup>422</sup>

### 5.3 Übersicht über die in der Regelstrecke verfügbaren Signale

Die für das im vorangegangenen Abschnitt hergeleitete Modell der Regelstrecke relevanten Signale werden entweder über CAN-Monitoring und den darauf aufbauenden Protokollen CCP (*CAN Calibration Protocol*) und XCP (*Universal Measurement and Calibration Protocol*)<sup>423</sup> oder mithilfe eines ETK (*Elektronischer Tastkopf*)<sup>424</sup> Messsystems gemessen.

Für eine Serienanwendung ist eine tatsächliche Messung der Signale nur für die auf dem CAN-Bus verfügbaren Größen möglich, da die ETK Messung lediglich zu Entwicklungszwecken in der Steuergerätehardware verfügbar ist. Jedoch ist es bei einer Umsetzung eines Reglers zur Minimierung von Triebstrangschwingungen auf dem Getriebesteuergerät (*Transmission Control Unit, TCU*) natürlich möglich, die Software-internen Signale zu verwenden, auch wenn diese nicht auf dem Fahrzeug-CAN ausgegeben werden. Daher können im Rahmen dieser Arbeit die Signale aus der ETK Messung betrachtet werden und auch im Folgenden als für den Regler „messbare“ Größen betrachtet werden.

Generell von Interesse sind hier Signale, die für eine möglichst genaue Kenntnis des Systemzustandes bezogen auf das in Abschnitt 5.2 entwickelte Modell der Regelstrecke herangezogen werden können. Hierzu wird daher die Verfügbarkeit der Drehzahlssignale geprüft und das Ergebnis dieser Prüfung in Tabelle 2 dargestellt.

<sup>422</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit) , eine vergrößerte Darstellung findet sich in 12.2

<sup>423</sup> Vector Informatik GmbH, 2013

<sup>424</sup> ETAS GmbH, 2009

Tabelle 2: Für die Regelung verfügbare Drehzahlsignale

Physikalische Messgröße	Signalbezeichnung	Signalquelle	physikalische Messung	Aktualisierungsrate [ms]
Motordrehzahl	$n_{Eng}$	CAN	ja	2,5
Getriebeeingangsdrehzahl	$n_{IPS}$	SW intern	ja	2,5
Getriebeausgangsdrehzahl	$n_{OPS}$	SW intern	nein <sup>425</sup>	2,5
Raddrehzahl	$n_{Rad}$	CAN	ja	10,0
Fahrzeuggeschwindigkeit	$n_{Veh}$	CAN	nein <sup>426</sup>	10,0

Daraus geht hervor, dass alle für die modellierte Regelstrecke benötigten Signale verfügbar sind. Ebenfalls lässt sich daraus die Verfügbarkeit der Verdrehwinkel ableiten, da sich diese direkt durch fortlaufende Integration aus den Drehzahlsignalen berechnen lassen.

Die Betrachtung der Größen zur Beschreibung der äußeren Einflüsse auf die Regelstrecke erfolgt analog zur eben angestellten Betrachtung der Drehzahlsignale in Tabelle 3.

Hier wird nun direkt ersichtlich, dass es im Falle der Einflussgrößen schwierig ist, gesicherte Informationen zu bekommen, da gerade die Messung von Drehmomenten im Serienfahrzeug gar nicht vorgenommen wird und selbst im Entwicklungsfahrzeug lediglich mit erhöhtem Aufwand realisierbar ist. Gleiches gilt auch für die Bestimmung der Einrückwege der Einrücklager der beiden Teilkupplungen, welche nur mithilfe von Spezialanfertigungen unter der Zuhilfenahme von Hall-Sensoren möglich ist und auch in diesem Fall nur eine eingeschränkte Signalqualität liefern.<sup>427</sup> Hier muss gegebenenfalls auf Untersuchungen am Kupplungsprüfstand mithilfe von Fadenpotentiometern zurückgegriffen werden.<sup>428</sup> Bauraumbedingt ebenfalls nicht praktikabel ist die Messung des Verfahrenweges des Kupplungsaktors, weshalb hierzu meist auf die Messung des Inkrementalweges der EC Motoren, welche die Aktoren betätigen, zurückgegriffen wird.

<sup>425</sup> Berechnung aus  $n_{IPS}$

<sup>426</sup> Berechnung aus  $n_{Rad}$

<sup>427</sup> Eppler, F.: Interne Untersuchung LuK GmbH

<sup>428</sup> Eppler, 2014

Tabelle 3: Verfügbarkeit der die äußeren Einflüsse beschreibenden Signale

Physikalische Messgröße	Signalbezeichnung	Signalquelle	physikalische Messung	Aktualisierungsrate [ms]
Motordrehmoment	$M_{Eng}$	CAN	nein	2,5
Kupplungsdrehmoment (Soll/Ist)	$M_{Cl,Tgt/Act}$	SW intern	nein	2,5
Lastdrehmoment	$M_{Load}$	-	nein	-
Einrückweg des Einrücklagers	$I_{ERW}$	SW intern	nein	2,5
Rollenweg der Aktortraverse (Soll/Ist)	$I_{Cl,Tgt/Act}$	SW intern	nein	2,5
Inkrementalweg des EC-Motors (Soll/Ist)	$x_{Tgt/Act}$	SW intern	ja	2,5

## 5.4 Überführen des Antriebsstrangmodells in den Zustandsraum

Mithilfe der Ergebnisse aus der in 5.2 erfolgten Systemmodellierung können zur Beschreibung der Systemdynamik Differenzialgleichungen abgeleitet werden, mithilfe derer das zu regelnde System in den Zustandsraum überführt werden kann. Diese Differenzialgleichungen lauten<sup>429</sup>

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega}_{Eng}(t) &= \frac{1}{J_{Eng}} \cdot \left[ M_{Eng}(t) - M_{cl}(t) - \left( F_{clamp}(t) \cdot r_{Reib} \cdot \frac{d\mu(\omega_{Eng} - \omega_{IPS})}{d(\omega_{Eng} - \omega_{IPS})} \right) \cdot (\omega_{Eng}(t) - \omega_{IPS}(t)) \right] \\
 \dot{\omega}_{IPS}(t) &= \frac{1}{J_{IPS}} \cdot \left[ M_{Cl}(t) + \left( F_{clamp}(t) \cdot r_{Reib} \cdot \frac{d\mu(\omega_{Eng} - \omega_{IPS})}{d(\omega_{Eng} - \omega_{IPS})} \right) \cdot (\omega_{Eng}(t) - \omega_{IPS}(t)) - c_{IPS} \cdot (\varphi_{IPS}(t) - i_{GB} \cdot \varphi_{OPS}(t)) - d_{IPS} \cdot (\omega_{IPS}(t) - i_{GB} \cdot \omega_{OPS}(t)) \right] \\
 \dot{\omega}_{OPS}(t) &= \frac{1}{J_{OPS}} \cdot \left[ i_{GB} \cdot c_{IPS} \cdot (\varphi_{IPS}(t) - i_{GB} \cdot \varphi_{OPS}(t)) + i_{GB} \cdot d_{IPS} \cdot (\omega_{IPS}(t) - i_{GB} \cdot \omega_{OPS}(t)) - \frac{1}{i_{Diff}} \cdot c_{SShaft} \cdot \left( \frac{1}{i_{Diff}} \cdot \varphi_{OPS}(t) - \varphi_{Rad}(t) \right) - \frac{1}{i_{Diff}} \cdot d_{SShaft} \cdot \left( \frac{1}{i_{Diff}} \cdot \omega_{OPS}(t) - \omega_{Rad}(t) \right) \right] \quad (5.1) \\
 \dot{\omega}_{Rad}(t) &= \frac{1}{J_{Rad}} \cdot \left[ c_{SShaft} \cdot \left( \frac{1}{i_{Diff}} \cdot \varphi_{OPS}(t) - \varphi_{Rad}(t) \right) + d_{SShaft} \cdot \left( \frac{1}{i_{Diff}} \cdot \omega_{OPS}(t) - \omega_{Rad}(t) \right) - \frac{1}{i_{Rad}} \cdot c_{Axle} \cdot \left( \frac{1}{i_{Rad}} \cdot \varphi_{Rad}(t) - \varphi_{Veh}(t) \right) \right] \\
 &\quad \left[ -\frac{1}{i_{Rad}} \cdot d_{Axle} \cdot \left( \frac{1}{i_{Rad}} \cdot \omega_{Rad}(t) - \omega_{Veh}(t) \right) - M_{Load}(t) \right] \\
 \dot{\omega}_{Veh}(t) &= \frac{1}{J_{Veh}} \cdot \left[ c_{Axle} \cdot \left( \frac{1}{i_{Rad}} \cdot \varphi_{Rad}(t) - \varphi_{Veh}(t) \right) + d_{Axle} \cdot \left( \frac{1}{i_{Rad}} \cdot \omega_{Rad}(t) - \omega_{Veh}(t) \right) \right]
 \end{aligned}$$

<sup>429</sup> Die Bedeutung der einzelnen Variablenbezeichnungen lassen sich dem vorangestellten Formelverzeichnis entnehmen.

Die zeitlich veränderlichen Eingänge in das System führen hier zu einem nichtlinearen Systemverhalten. Hier kann man nun ausnutzen, dass der Regler für eine Anti-Rupf-Regelung Signale unterhalb einer bestimmten Frequenz, typischerweise  $f_{Lim} = 2 \text{ Hz}$ , nicht ausregeln soll. Andernfalls würde die Fahrstrategie, die typischerweise Signale im Spektralbereich von  $f_{Strat} = [0; 2] \text{ Hz}$  erzeugt, von der Regelung beeinflusst werden. Dies ist nicht gewünscht, da der Regler in diesem Falle beispielsweise das Fahrzeug im Stillstand halten würde, da nicht nur Drehzahlschwankungen, sondern jegliche Drehzahlabweichung von „Gleichgewichtszustand“ 0 rpm ausgeregelt würde.

Die Beschränkung der zu regelnden Dynamik auf einen Frequenzbereich  $f_{Contr} \geq 2 \text{ Hz}$  ermöglicht eine Trennung der auftretenden Systemdynamik in einen für die Regelung relevanten dynamischen Anteil im Bereich von  $f_{Contr}$  sowie in einen als näherungsweise stationär betrachteten Anteil im Bereich von  $f_{Strat}$ . Dies geschieht durch eine Linearisierung der Systemgleichungen (5.1) um eine Referenztrajektorie, welche nach den Ausführungen in Abschnitt 2.9.3 durchgeführt wird.

Für die Linearisierung des Systems (5.1) nach diesem Vorgehen ist die Aufteilung der Signale in einen als stationär betrachteten, langsam veränderlichen Anteil und einen dynamischen Anteil erforderlich.

$$\begin{aligned}
 M_{Eng}(t) &= \bar{M}_{Eng} + \delta M_{Eng}(t) \\
 M_{Cl}(t) &= \bar{M}_{Cl} + \delta M_{Cl}(t) \\
 \\ 
 \omega_{Eng}(t) &= \bar{\omega}_{Eng} + \delta \omega_{Eng}(t) \\
 \omega_{IPS}(t) &= \bar{\omega}_{IPS} + \delta \omega_{IPS}(t) \quad . \\
 &\vdots \\
 \varphi_{IPS}(t) &= \bar{\varphi}_{IPS} + \delta \varphi_{IPS}(t) \\
 \varphi_{OPS}(t) &= \bar{\varphi}_{OPS} + \delta \varphi_{OPS}(t) \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Für das System kann nun die folgende grundlegende Zustandsraumdarstellung angenommen werden

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= f(x, u, w, v) \\
 z(t) &= g(x, u) \quad . \\
 y(t) &= h(x, u, v, v)
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Sie folgt dem in Abschnitt 2.9.6.6 beschriebenen Ansatz von PETERSEN ET AL.<sup>430</sup> zur robusten Regelung mit Unterdrückung von harmonischen Störungen. Dabei können anhand der Differenzialgleichungen (5.1) die Signalvektoren identifiziert werden.

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \omega_{Eng} \\ \omega_{IPS} \\ \omega_{OPS} \\ \omega_{Rad} \\ \omega_{Veh} \\ \varphi_{IPS} \\ \varphi_{OPS} \\ \varphi_{Rad} \\ \varphi_{Veh} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{u} = M_{CL}; \quad \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} M_{Eng} \\ M_{Load} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_{IPS} \cdot \sin(\omega_{IPS} \cdot t + \phi_{IPS}) \\ a_{Eng} \cdot \sin(\omega_{Eng} \cdot t + \phi_{Eng}) \\ a_{Slip} \cdot \sin(\omega_{Slip} \cdot t + \phi_{Slip}) \end{bmatrix}$$

(5.4)

Hier sind mit  $(w_2(t), v(t))$  die Störungen bezeichnet, die von außen auf das System einwirken. Dabei wurde eine bewusste Trennung zwischen den zu unterdrückenden harmonischen Störungen  $v(t)$  und den nicht explizit zu kompensierenden Momenten  $w_2(t)$  eingeführt, da sich die Rollen dieser externen Störungen für das vorliegende System stark unterscheiden. Weiterhin muss darauf hingewiesen werden, dass eine explizite Unterscheidung der zeitabhängigen Funktion der Verdrehwinkel  $\varphi_{IPS}(t)$ ,  $\varphi_{Eng}(t)$ ,  $\varphi_{Slip}(t) = \varphi_{Eng}(t) - \varphi_{IPS}(t)$  und den den harmonischen Störungen zugeordneten konstanten Phasenwinkeln  $\phi_{IPS}$ ,  $\phi_{Eng}$  und  $\phi_{Slip}$  durch die Wahl der unterschiedlichen Variablennamen erfolgt, da zwar alle diese Größen die Einheit eines Winkels haben, jedoch eine fundamental unterschiedliche Bedeutung haben.

Mit der in (5.4) vorgenommenen Definition der im System vertretenen Signale kann nun die Linearisierung um eine Trajektorie vorgenommen werden. Dabei ergeben sich auf Grundlage der Differenzialgleichungen in (5.1) die linearisierten Systemgleichungen in (5.6).

Daraus lassen sich wiederum für die Zustandsgleichung des linearisierten Systems

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{u} + \mathbf{B}_{21}\mathbf{w}_1 + \mathbf{B}_{22}\mathbf{w}_2 + \mathbf{B}_3\mathbf{v} \\
 \mathbf{z} &= \mathbf{C}_1\mathbf{x} + \mathbf{D}_1\mathbf{u} \\
 \mathbf{y} &= \mathbf{C}_2\mathbf{x} + \mathbf{v} + \mathbf{D}_2\mathbf{v}
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

<sup>430</sup> Petersen et al., 2000

mit den in (5.4) definierten Signalvektoren die in (5.7) bis (5.10) dargestellten Matrizen ableiten.

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega}_{Eng}(t) &= \frac{1}{J_{Eng}} \cdot \left[ (\bar{M}_{Eng} - \bar{M}_{Cl}) + \delta M_{Eng}(t) - \frac{dM_{Cl}}{d\omega_{Slip}} \cdot (\delta\omega_{Eng}(t) - \delta\omega_{IPS}(t)) - \delta M_{Cl}(t) \right] \\
 \dot{\omega}_{IPS}(t) &= \frac{1}{J_{IPS}} \cdot \left[ (\bar{M}_{Cl} - c_{IPS} \cdot (\bar{\varphi}_{IPS} - i_{GB} \cdot \bar{\varphi}_{OPS}) - d_{IPS} \cdot (\bar{\omega}_{IPS} - i_{GB} \cdot \bar{\omega}_{OPS})) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{dM_{Cl}}{d\omega_{Slip}} \cdot (\delta\omega_{Eng}(t) - \delta\omega_{IPS}(t)) + \delta M_{Cl}(t) - c_{IPS} \cdot (\delta\varphi_{IPS}(t) - i_{GB} \cdot \delta\varphi_{OPS}(t)) - d_{IPS} \cdot (\delta\omega_{IPS}(t) - i_{GB} \cdot \delta\omega_{OPS}(t)) \right] \\
 \dot{\omega}_{OPS}(t) &= \frac{1}{J_{OPS}} \cdot \left[ \left( i_{GB} \cdot (c_{IPS} \cdot (\bar{\varphi}_{IPS} - i_{GB} \cdot \bar{\varphi}_{OPS}) + d_{IPS} \cdot (\bar{\omega}_{IPS} - i_{GB} \cdot \bar{\omega}_{OPS})) - \frac{c_{SShaft}}{i_{Diff}} \cdot \left( \frac{1}{i_{Diff}} \cdot \bar{\varphi}_{OPS} - \bar{\varphi}_{Rad} \right) - \frac{d_{SShaft}}{i_{Diff}} \cdot \left( \frac{1}{i_{Diff}} \cdot \bar{\omega}_{OPS} - \bar{\omega}_{Rad} \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. + i_{GB} \cdot (c_{IPS} \cdot (\delta\varphi_{IPS}(t) - i_{GB} \cdot \delta\varphi_{OPS}(t)) + d_{IPS} \cdot (\delta\omega_{IPS}(t) - i_{GB} \cdot \delta\omega_{OPS}(t))) - \frac{c_{SShaft}}{i_{Diff}} \cdot \left( \frac{1}{i_{Diff}} \cdot \delta\varphi_{OPS}(t) - \delta\varphi_{Rad}(t) \right) - \frac{d_{SShaft}}{i_{Diff}} \cdot \left( \frac{1}{i_{Diff}} \cdot \delta\omega_{OPS}(t) - \delta\omega_{Rad}(t) \right) \right] \\
 \dot{\omega}_{Rad}(t) &= \frac{1}{J_{Rad}} \cdot \left[ \left( c_{SShaft} \cdot \left( \frac{1}{i_{Diff}} \cdot \bar{\varphi}_{OPS} - \bar{\varphi}_{Rad} \right) + d_{SShaft} \cdot \left( \frac{1}{i_{Diff}} \cdot \bar{\omega}_{OPS} - \bar{\omega}_{Rad} \right) - \frac{c_{Axle}}{i_{Rad}} \cdot \left( \frac{1}{i_{Rad}} \cdot \bar{\varphi}_{Rad} - \bar{\varphi}_{Veh} \right) - \frac{d_{Axle}}{i_{Rad}} \cdot \left( \frac{1}{i_{Rad}} \cdot \bar{\omega}_{Rad} - \bar{\omega}_{Veh} \right) - \bar{M}_{Load} \right) \right. \\
 &\quad + c_{SShaft} \cdot \left( \frac{1}{i_{Diff}} \cdot \delta\varphi_{OPS}(t) - \delta\varphi_{Rad}(t) \right) + d_{SShaft} \cdot \left( \frac{1}{i_{Diff}} \cdot \delta\omega_{OPS}(t) - \delta\omega_{Rad}(t) \right) - \frac{c_{Axle}}{i_{Rad}} \cdot \left( \frac{1}{i_{Rad}} \cdot \delta\varphi_{Rad}(t) - \delta\varphi_{Veh}(t) \right) \\
 &\quad \left. - \frac{d_{Axle}}{i_{Rad}} \cdot \left( \frac{1}{i_{Rad}} \cdot \delta\omega_{Rad}(t) - \delta\omega_{Veh}(t) \right) - \delta M_{Load}(t) \right] \\
 \dot{n}_{Veh}(t) &= \frac{1}{J_{Veh}} \cdot \left[ \left( c_{Axle} \cdot \left( \frac{1}{i_{Rad}} \cdot \bar{\varphi}_{Rad} - \bar{\varphi}_{Veh} \right) + d_{Axle} \cdot \left( \frac{1}{i_{Rad}} \cdot \bar{n}_{Rad} - \bar{n}_{Veh} \right) \right) + c_{Axle} \cdot \left( \frac{1}{i_{Rad}} \cdot \delta\varphi_{Rad}(t) - \delta\varphi_{Veh}(t) \right) + d_{Axle} \cdot \left( \frac{1}{i_{Rad}} \cdot \delta n_{Rad}(t) - \delta n_{Veh}(t) \right) \right]
 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Matrizen der Zustandsgleichung des linearisierten Systems (5.5):

$$A(t) = \begin{bmatrix}
 -\frac{1}{J_{Eng}} \cdot \frac{dM_{Cl}}{d\omega_{Slip}} & +\frac{1}{J_{Eng}} \cdot \frac{dM_{Cl}}{d\omega_{Slip}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{1}{J_{IPS}} \cdot \frac{dM_{Cl}}{d\omega_{Slip}} & -\frac{1}{J_{IPS}} \cdot \left( \frac{dM_{Cl}}{d\omega_{Slip}} + d_{IPS} \right) & +i_{GB} \cdot \frac{d_{IPS}}{J_{IPS}} & 0 & 0 & -\frac{c_{IPS}}{J_{IPS}} & +i_{GB} \cdot \frac{c_{IPS}}{J_{IPS}} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & +\frac{i_{GB} \cdot d_{IPS}}{J_{OPS}} & -\frac{d_{SShaft} + i_{Diff}^2 i_{GB}^2 \cdot d_{IPS}}{i_{Diff}^2 \cdot J_{OPS}} & +\frac{d_{SShaft}}{i_{Diff} \cdot J_{OPS}} & 0 & +\frac{i_{GB} \cdot c_{IPS}}{J_{OPS}} & -\frac{c_{SShaft} + i_{Diff}^2 i_{GB}^2 \cdot c_{IPS}}{i_{Diff}^2 \cdot J_{OPS}} & +\frac{c_{SShaft}}{i_{Diff} \cdot J_{OPS}} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & +\frac{d_{SShaft}}{i_{Diff} \cdot J_{Rad}} & -\frac{i_{Rad}^2 \cdot d_{SShaft} + d_{Axle}}{i_{Rad}^2 \cdot J_{Rad}} & +\frac{d_{Axle}}{i_{Rad} \cdot J_{Rad}} & 0 & +\frac{c_{SShaft}}{i_{Diff} \cdot J_{Rad}} & -\frac{i_{Rad}^2 \cdot c_{SShaft} + c_{Axle}}{i_{Rad}^2 \cdot J_{Rad}} & +\frac{c_{Axle}}{i_{Rad} \cdot J_{Rad}} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & +\frac{d_{Axle}}{i_{Rad} \cdot J_{Veh}} & -\frac{d_{Axle}}{J_{Veh}} & 0 & 0 & +\frac{c_{Axle}}{i_{Rad} \cdot J_{Veh}} & -\frac{c_{Axle}}{J_{Veh}} & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

(5.7)

$$B_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{J_{Eng}} & +\frac{1}{J_{IPS}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (5.8)$$

$$B_{22} = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_{Eng}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{J_{Rad}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (5.9)$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{J_{Eng}} & +\frac{1}{J_{IPS}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{J_{Eng}} & +\frac{1}{J_{IPS}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{J_{Eng}} & +\frac{1}{J_{IPS}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (5.10)$$

Zur Definition der verbleibenden Matrizen ( $B_{21}, C_1, D_1, C_2, D_2$ ) sowie der damit verbundenen Bestimmung des Signalvektors  $z(t)$ , dem Eingang der Systemunsicherheit  $\Delta(t)$ , sowie dem Vektor der verfügbaren Messsignale  $y(t)$  in (5.5) müssen zunächst die systeminhärenten Unsicherheiten beschrieben werden.

In (5.6) und (5.7) wurde der Gradient des Kupplungsmomentes über die Differenzdrehzahl  $\frac{dM_{Cl}}{d\omega_{Slip}}$  eingeführt. Dieser berechnet sich mit

$$\frac{dM_{Cl}}{d\omega_{Slip}} = F_{Clamp} \cdot r_{Reib} \cdot \frac{d\mu}{d\omega_{Slip}} \quad (5.11)$$

aus dem Reibwertgradienten  $\frac{d\mu}{d\omega_{Slip}}$  des Reibkontaktes in der Kupplung. Hierfür wird die dynamische Größe der Anpresskraft der Kupplung benötigt, welche jedoch aufgrund der geforderten Linearität des Systems durch eine für die charakteristischen Fahrsituationen Ankriechen und Anfahren typische mittlere Anpresskraft  $\bar{F}_{Clamp} \approx 550\text{N}$  ersetzt worden ist.<sup>431</sup>

<sup>431</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

### 5.4.1 Modellierung der systeminhärenten Unsicherheiten

In diesem Abschnitt erfolgt nun die Modellierung der dem System zugeordneten Unsicherheiten. Es wird gezeigt, wieso die in den vorangegangenen Abschnitten vorgestellte und in den Zustandsraum überführte Modellierung des PKW-Antriebsstrangs mit Doppelkupplungsgetriebe als ein unsicherheitsbehaftetes System angesehen werden muss und wie sich diese Unsicherheiten im Zustandsraummodell (5.5) abbilden lassen. Dabei wird entsprechend der Definitionen in Abschnitt 2.9.4 im Folgenden unterschieden zwischen parametrischen und dynamischen Unsicherheiten.

Zunächst erfolgt eine Betrachtung der parametrischen Unsicherheiten. Es wird angenommen, dass sich die im System enthaltenen, die Dynamik beeinflussenden Unsicherheiten hauptsächlich in Form von schwankenden Steifigkeiten und Dämpfungen äußern. Dies lässt sich sowohl für die Piece-to-Piece Variationen des Systems als auch für die Veränderungen über Lebensdauer annehmen, da anzunehmen ist, dass sich die Trägheitsmomente der Antriebsstrangelemente weder über Lebensdauer verändern werden, noch im Neuzustand große relative Abweichungen voneinander aufweisen werden. Hingegen können sich die im Antriebsstrang verbauten Lager, welchen die Dämpfung zugeschrieben wird, erwartungsgemäß schon im Neuzustand unterscheiden und sich außerdem auch über die Fahrzeugslebensdauer deutlich verändern. Ähnliches gilt für die Steifigkeiten der Wellen, die sich aller Voraussicht nach weniger in der Veränderung über Lebensdauer als mehr in der Piece-to-Piece Variation niederschlagen.

Zur Modellierung dieser parametrischen Unsicherheiten betrachtet man nun das durch die Welle übertragene Drehmoment am Beispiel der Getriebeeingangswelle

$$\begin{aligned} M_{Tor,IPS} &= c_{IPS} \cdot (\varphi_{IPS} - i_{GB} \cdot \varphi_{OPS}) + d_{IPS} \cdot (\omega_{IPS} - i_{GB} \cdot \omega_{OPS}) \\ &= c_{IPS} \cdot (\Delta\varphi)_{IPS} + d_{IPS} \cdot (\Delta\omega)_{IPS} \end{aligned}$$

Hier wurden die an der Welle anliegenden Größen Differenzwinkel und –Drehzahl abkürzend mit  $(\Delta\varphi)_{IPS}$  bzw.  $(\Delta\omega)_{IPS}$  bezeichnet.

Es wird jetzt angenommen, dass sich eine Änderung bzw. eine Abweichung von der nominellen Steifigkeit  $c_{IPS}$  als eine relative Abweichung  $\Delta_{c,IPS}$  beschreiben lässt.

Damit wird die veränderliche Steifigkeit zu

$$\tilde{c}_{IPS} = c_{IPS} \cdot (1 + \Delta_{c,IPS}) \quad (5.12)$$

und das übertragene Drehmoment unter Berücksichtigung der Unsicherheit, bei Betrachtung der Dämpfung  $d_{IPS}$  analog zu (5.12), ergibt sich damit zu

$$M_{Tor,IPS} = \tilde{c}_{IPS} \cdot (\Delta\varphi)_{IPS} + d_{IPS} \cdot (1 + \Delta_{d,IPS}) \cdot (\Delta\omega)_{IPS} \quad (5.13)$$

Die Beschreibung der Systemunsicherheit als

$$w(t) = \Delta(t) \cdot z(t) \quad (5.14)$$

führt nun zu folgender Identifikation der Komponenten in (5.13)

$$\begin{aligned} (\Delta(t) \cdot z(t))_{\varphi,IPS} &= \Delta_{c,IPS} \cdot (\Delta\varphi)_{IPS} \\ (\Delta(t) \cdot z(t))_{n,IPS} &= \Delta_{d,IPS} \cdot (\Delta\omega)_{IPS} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Aus (5.13) und (5.15) wird deutlich, dass sich die relative, und damit einheitenlose Unsicherheit in der Steifigkeit einer Welle  $\Delta_{c,Shaft}$  auch dem Verdrehwinkel dieser Welle  $(\Delta\varphi)_{Shaft}$  zuschlagen lässt. Die Unsicherheit in der Dämpfung der Welle  $\Delta_{d,Shaft}$  lässt sich äquivalent zu der unsicheren Steifigkeit betrachten und damit der Differenzdrehzahl der Welle  $(\Delta\omega)_{Shaft}$  zuordnen.

Als weitere unsicherheitsbehaftete Parameter können die Trägheitsmomente des Systems angesehen werden. Hierbei treten jedoch, wie zuvor bereits erläutert, die den einzelnen Wellen zugeordneten Trägheitsmomente sowie die des angekoppelten Motors lediglich in Form einer Piece-to-Piece Variation des Systems auf, da hier keinerlei Veränderung über Lebensdauer zu erwarten ist. Das einzige Trägheitsmoment, für das eine signifikante Veränderung im Laufe der Fahrzeuglebensdauer zu erwarten ist, ist das des Fahrzeugs selbst, da dieses sich durch Zuladung in Form von variierenden Passagierzahlen, Gepäck oder auch Anhängerlast deutlich verändern kann. Allerdings ist hier zu erwarten, dass die Zeitskala, auf der diese Veränderungen stattfinden, deutlich größer ist als die der für den Regler relevanten Dynamik, welche sich anhand der zu dämpfenden Frequenzen abschätzen lässt. Es wird daher angenommen, dass die Unsicherheit des Fahrzeugträgheitsmomentes genauso wie die der restlichen Trägheitsmomente quasi-stationär ist.

Die gleiche Annahme gilt für die zuvor diskutierten Unsicherheiten in Steifigkeiten und Dämpfungen. Im Falle der Steifigkeiten wurde ja bereits eine für die Schwingungsdynamik signifikante Änderung über Lebensdauer ausgeschlossen und damit die Unsicherheit als komplett stationär charakterisiert. Weiterhin kann man auch für die Dämpfungen im Antriebsstrang annehmen, dass zu erwartende Veränderungen über Lebensdauer mit einer sehr großen charakteristischen Zeitkonstante auftreten werden und somit für die relevante Dynamik der Regelung als quasi-stationär angesehen werden können.

Weiterhin wird aufgrund zahlreicher Erfahrungen aus der praktischen Anwendung von Reibkupplungen im PKW-Bereich angenommen, dass auch das Kupplungsmoment, das für das vorliegende System sowohl als Regelgröße als auch als externer Eingang

aus der überlagerten Fahrstrategie betrachtet wird, Unsicherheiten unterworfen ist. Dies ist darin begründet, dass sich aufgrund variierender Temperatur und Temperaturverteilung im Reibkontakt als auch aufgrund der Vorgeschichte der Reibpartner das Reibverhalten und damit auch das übertragene Kupplungsmoment ändert. Dies resultiert darin, dass basierend auf empirischen Erkenntnissen angenommen werden muss, dass das zum Zeitpunkt  $t$  übertragene Kupplungsmoment  $M_{Cl}(t)$  nur mit einer relativen Unsicherheit von  $\pm 10\%$  bekannt ist.

Bezüglich der Quantifizierung der Schwankungsbreiten der parametrischen Unsicherheiten können mangels geeigneter Literaturwerte lediglich Schätzwerte angenommen werden, welche hier aber mit den jeweils zugrunde liegenden Begründungen aufgeführt werden. So werden als Variationsbreiten der unsicheren Trägheitsmomente für den Motorblock aufgrund der Möglichkeit einer variierenden Motorisierung innerhalb einer Fahrzeugbaureihe 40 % Schwankungsbreite angenommen, für das Trägheitsmoment des Fahrzeuges werden 65 % angenommen, da sich das Trägheitsmoment durch Zuladung und Anhängerlast potentiell auf das doppelte Erhöhen kann und Umgekehrt im Falle fehlender Zuladung und eines leeren Tanks das resultierende Trägheitsmoment bis auf das 0,7-fache des ursprünglichen Wertes absinken kann. Daher wird hier als nominales Trägheitsmoment nicht der der nominellen Fahrzeugmasse entsprechende Wert angenommen, sondern das mit dem Faktor 1,35-fache dessen. Damit wird der Annahme Rechnung getragen, dass das Fahrzeug in der Mehrheit der Fälle mit Zuladung bewegt wird, und zusätzlich kann wieder eine symmetrische Schwankung von 65 % um den Nominalwert angenommen werden. Für das getriebeeingangsseitige Trägheitsmoment wird eine Schwankungsbreite von 30 % angesetzt, wodurch ein eventueller Einsatz verschiedener Kupplungsausführungen (z.B. Mehrscheibenkupplung) in Betracht gezogen wird.<sup>432</sup> Analoge Überlegungen lassen sich für die Trägheit der Räder anstellen. Für das verbleibende Trägheitsmoment am Getriebeausgang werden entsprechend der im Vergleich zu den anderen Trägheitsmomenten des Systems geringeren Variationsmöglichkeiten 20 % Schwankungsbreite angenommen.

Für die Variationsbreiten der Steifigkeiten im System wird aufgrund dessen, dass lediglich eine piece-to-piece Variation zu erwarten ist, eine geringe Schwankungsbreite

---

<sup>432</sup> Die Überlegungen sind hier analog zu und als direkte Konsequenz der zuvor angestellten Überlegungen zu einer variierenden Motorisierung eines Fahrzeugmodells. Hier kann eine große Spreizung der Motorisierungsvarianten und des zu übertragenden maximalen Drehmomentes den Einsatz unterschiedlicher Kupplungstypen erfordern. Die angegebene Schwankungsbreite von 30% ist kein berechneter, sondern ein auf Diskussion mit erfahrenen Experten basierender Wert.

von 20 % angenommen. Im Falle der Dämpfungen wird aufgrund der zusätzlichen Veränderung über Lebensdauer eine größere Variation von 30 % Breite abgeschätzt.

Tabelle 4: Zusammenfassung der parametrischen Systemunsicherheiten

Physikalische Messgröße	Signalbezeichnung	Variationsbreite [%]	Zeitkonstante [s]
Trägheitsmoment Motor	$\Delta_{J,Eng}$	40	$\infty$
Trägheitsmoment Getriebeeingang	$\Delta_{J,IPS}$	30	$\infty$
Trägheitsmoment Getriebeausgang	$\Delta_{J,OPS}$	20	$\infty$
Trägheitsmoment Rad	$\Delta_{J,Rad}$	30	$\gtrsim 10^5$
Trägheitsmoment Fahrzeug	$\Delta_{J,Veh}$	65	$\gtrsim 10^3$
Steifigkeit Getriebeeingang	$\Delta_{c,IPS}$	20	$\infty$
Steifigkeit Seitenwelle	$\Delta_{c,SShaft}$	20	$\infty$
Steifigkeit Achsaufhängung	$\Delta_{c,Axle}$	20	$\infty$
Dämpfung Getriebeeingang	$\Delta_{d,IPS}$	30	$\gtrsim 10^5$
Dämpfung Seitenwelle	$\Delta_{d,SShaft}$	30	$\gtrsim 10^5$
Dämpfung Achsaufhängung	$\Delta_{d,Axle}$	30	$\gtrsim 10^5$
Variation Kupplungsmoment	$\Delta_{M,Cl}$	10	$\gtrsim 10^2$

Unter Berücksichtigung der bis zu diesem Punkt betrachteten und in Tabelle 4 zusammengefassten parametrischen Unsicherheiten des Systems lassen sich die noch benötigten Matrizen für das System (5.5) ableiten.

Aus der Wirkungsweise der Unsicheren Steifigkeiten und Dämpfungen in (5.13) und der Annahme eines aufgrund der in Abschnitt 5.3 und in diesem Abschnitt erläuterten Gegebenheiten unsicherheitsbehafteten Kupplungsmomentes, folgt der Eingangsvektor in die Unsicherheit des Systems  $z(t)$  in (5.5)

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \omega_{IPS} \\ \omega_{OPS} \\ \omega_{Rad} \\ \omega_{Veh} \\ \varphi_{IPS} \\ \varphi_{OPS} \\ \varphi_{Rad} \\ \varphi_{Veh} \\ M_{Cl} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

und damit die Matrizen  $(C_1, D_1)$  zu Bestimmung des Eingangs der Unsicherheit als

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Aus (5.14) und (5.15) folgt mit (5.16) die Unsicherheitsmatrix

$$\Delta(t) = \begin{bmatrix} +\Delta_{d,IPS} & -i_{GB} \cdot \Delta_{d,IPS} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +\frac{\Delta_{d,SShaft}}{i_{Diff}} & -\Delta_{d,SShaft} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +\frac{\Delta_{d,Axle}}{i_{Rad}} & -\Delta_{d,Axle} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & +\Delta_{c,IPS} & -i_{GB} \cdot \Delta_{c,IPS} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +\frac{\Delta_{c,SShaft}}{i_{Diff}} & -\Delta_{c,SShaft} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +\frac{\Delta_{c,Axle}}{i_{Rad}} & -\Delta_{c,Axle} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta_{M,Cl} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

womit der Eingang der Systemunsicherheit in das nominelle System  $w(t)$  als

$$w_1(t) = \begin{bmatrix} \delta\omega_{Tor,IPS} \\ \delta\omega_{Tor,OPS} \\ \delta\omega_{Tor,SShaft} \\ \delta\omega_{Tor,Axle} \\ \delta\varphi_{Tor,IPS} \\ \delta\varphi_{Tor,OPS} \\ \delta\varphi_{Tor,SShaft} \\ \delta\varphi_{Tor,Axle} \\ \mu_{Cl} \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

beschrieben werden kann.

In (5.18) beschreiben die Parameter  $(\Delta_{c,XY}, \Delta_{d,XY})$  die mit einer Welle  $XY$  assoziierten unsichere Dämpfung und Steifigkeit und in (5.19) bezeichnen  $(\delta\omega_{Tor,XY}, \delta\varphi_{Tor,XY})$  die durch die unsichere Dämpfung und Steifigkeit der Welle entstehende Änderung in deren Verdrehwinkel bzw. der an der Welle anliegenden Drehzahldifferenz. Das unsichere Kupplungsmoment wird in (5.19) durch  $\mu_{Cl} = \Delta_{M,Cl} \cdot M_{Cl}$  berücksichtigt.

Die noch fehlende Matrix für den Einfluss der Unsicherheit auf die Zustandsgleichung in (5.5) ist dann als

$$B_{21} = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{J_{Eng}} \\
 -\frac{d_{IPS}}{J_{IPS}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{c_{IPS}}{J_{IPS}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{J_{IPS}} \\
 +i_{GB} \cdot \frac{d_{IPS}}{J_{OPS}} & 0 & -\frac{d_{SShaft}}{i_{Diff} \cdot J_{OPS}} & 0 & +i_{GB} \cdot \frac{c_{IPS}}{J_{OPS}} & 0 & -\frac{c_{SShaft}}{i_{Diff} \cdot J_{OPS}} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & +\frac{d_{SShaft}}{J_{Rad}} & -\frac{d_{Axle}}{i_{Rad} \cdot J_{Rad}} & 0 & 0 & +\frac{c_{SShaft}}{J_{Rad}} & -\frac{c_{Axle}}{i_{Rad} \cdot J_{Rad}} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & +\frac{d_{Axle}}{J_{Veh}} & 0 & 0 & 0 & +\frac{c_{Axle}}{J_{Veh}} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

(5.20)

definiert.

#### 5.4.2 Modellierung der äußeren Einflüsse auf den geschlossenen Regelkreis

Die äußeren Einflüsse auf das System beeinflussen im Falle des Antriebsstranges nachhaltig die Dynamik. Dies geschieht zum Beispiel im Falle eines Lastmomentes durch eine zusätzliche Verspannung des Antriebsstranges und der damit verbundenen erhöhten Dynamik zum Beispiel durch Überwinden von Spielen an Verzahnungen oder Vorspannen der Tellerfedern der Kupplung.

Um diese Einflüsse auf die Dynamik der Regelstrecke korrekt zu berücksichtigen, werden nun sowohl das eingehende Motormoment als auch das am Kontakt Reifen zu Fahrbahn abgestützte Lastmoment modelliert.

Eine weitere Komponente der äußeren Einflüsse auf den geschlossenen Regelkreis ist das Messrauschen, welches im Rahmen der physikalischen Messung verschiedener Systemgrößen entsteht. Durch diesen Einfluss auf das Messsignal kann es unter Umständen auch die Qualität des Regelergebnisses beeinflussen und muss daher adäquat betrachtet werden. Zunächst müssen jedoch die zur Verfügung stehenden Messsignale identifiziert werden und damit auch die noch zur Definition verbleibenden Systemmatrizen  $(C_2, D_2)$  festgelegt werden.

Zunächst kann hier anhand der Betrachtungen in Abschnitt 5.3 festgestellt werden, dass alle Variablen des Systemzustandes messbar sind. Damit ergibt sich die Matrix  $C_2$  direkt als entsprechend dimensionierte Einheitsmatrix

$$C_2 = \mathbb{I}_9 \quad (5.21)$$

Die ebenfalls als die Messgrößen beeinflussenden Größen berücksichtigten harmonischen Störungen werden hier zunächst nicht als direkt messbar angenommen. Dies ist der Tatsache geschuldet, dass eine direkte Messung der zu Kupplungsrupfen führenden Drehmomentschwankungen analog der des anliegenden Kupplungsmoment nicht möglich ist. Aus diesem Grund wird für die letzte verbleibende Systemmatrix

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

festgelegt.

Aus den im bisherigen Verlauf dieses Kapitels angestellten Überlegungen ergibt sich somit die Zustandsraumdarstellung der Regelstrecke als zeitinvariantes System. Die systeminhärenten Unsicherheiten können wie auch die externen Einflüsse auf das System – abgesehen von den harmonischen Störungen – aufgrund ihrer deutlich größeren Zeitkonstante als quasi-stationär angesehen werden. Die einzelnen systeminhärenten Unsicherheiten sowie auch die externen Einflüsse auf das System werden mit ihren charakteristischen Eigenschaften in Tabelle 5 aufgelistet.

Tabelle 5: Zusammenfassung der Systemunsicherheiten und der externen Einflüsse auf das System

Physikalische Messgröße	Signalbezeichnung	Systeminhärent / Extern	Variationsbreite / Rauschleistung	Zeitkonstante [s]
Trägheitsmoment Motor	$\Delta_{J,Eng}$	Inhärent	40	$\infty$
Trägheitsmoment Getriebeeingang	$\Delta_{J,IPS}$	Inhärent	30	$\infty$
Trägheitsmoment Getriebeausgang	$\Delta_{J,OPS}$	Inhärent	20	$\infty$
Trägheitsmoment Rad	$\Delta_{J,Rad}$	Inhärent	30	$\gtrsim 10^5$
Trägheitsmoment Fahrzeug	$\Delta_{J,Veh}$	Inhärent	65	$\gtrsim 10^3$
Steifigkeit Getriebeeingang	$\Delta_{c,IPS}$	Inhärent	20	$\infty$
Steifigkeit Seitenwelle	$\Delta_{c,SShaft}$	Inhärent	20	$\infty$
Steifigkeit Achsaufhängung	$\Delta_{c,Axle}$	Inhärent	20	$\infty$
Dämpfung Getriebeeingang	$\Delta_{d,IPS}$	Inhärent	30	$\gtrsim 10^5$
Dämpfung Seitenwelle	$\Delta_{d,SShaft}$	Inhärent	30	$\gtrsim 10^5$
Dämpfung Achsaufhängung	$\Delta_{d,Axle}$	Inhärent	30	$\gtrsim 10^5$
Variation Kupplungsmoment	$\Delta_{M,Cl}$	Inhärent	10	$\gtrsim 10^2$
Trajektorie Motormoment	$\bar{M}_{Eng}$	Extern	-	$\gtrsim 10^0$
Trajektorie Lastmoment	$\bar{M}_{Load}$	Extern	-	$\gtrsim 10^1$

## 5.5 Modellreduktion der Regelstrecke

Um die mathematischen Aufwände zu reduzieren, kann im ersten Schritt der Reglerauslegung mit einem reduzierten Systemmodell gearbeitet werden, da lediglich die dominanten dynamischen Aspekte und Parameter des Antriebsstrangs berücksichtigt werden. Diese vereinfachte Betrachtung der Regelstrecke bei der Auslegung des Reglers ermöglicht eine Analyse und eventuelle Optimierung des Auslegungsprozesses und der verwendeten Methoden mit einem reduzierten Berechnungsaufwand.

Ausgangspunkt ist das der Zustandsraumdarstellung in 5.4 zugrundeliegende Antriebsstrangmodell, in dem die rotatorische und translatorische Kopplung des Aggregates vernachlässigt wurde. Die erste Vereinfachung des Modells besteht darin, die entsprechenden Massen und Torsionsfedern mit den vor ihnen geschalteten Übersetzungsstufen zu verrechnen und somit ein Modell frei von Übersetzungen zu generieren, welches in Bild 64 dargestellt ist.

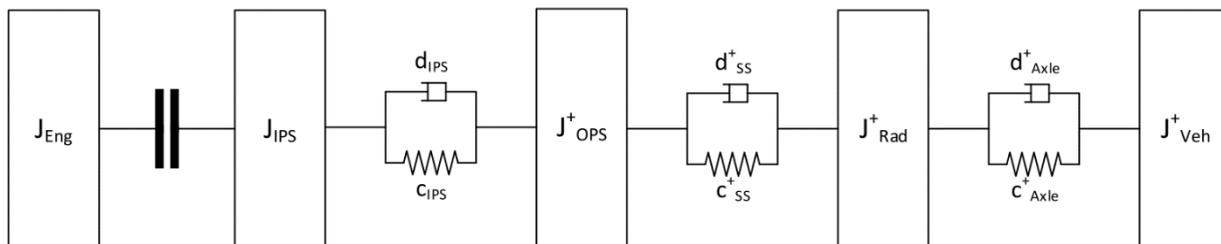


Bild 64: Torsionsschwingerkette des Antriebsstrangs um die Getriebe- und Differentialübersetzung reduziert

Die darin enthaltenen berechneten Größen ergeben sich gemäß den Übersetzungen in Getriebe und Differential zu

$$\begin{aligned}
 J^+_{OPS} &= \frac{J_{OPS}}{i_{GB}^2} ; \\
 d^+_{SShaft} &= \frac{d_{SShaft}}{i_{Diff}^2 \cdot i_{GB}^2} ; & d^+_{Axle} &= \frac{d_{Axle}}{i_{Diff}^2 \cdot i_{GB}^2 \cdot i_{Rad}^2} . \\
 J^+_{Rad} &= \frac{J_{Rad}}{i_{Diff}^2 \cdot i_{GB}^2} ; & J^+_{Veh} &= \frac{J_{Veh}}{i_{Diff}^2 \cdot i_{GB}^2 \cdot i_{Rad}^2}
 \end{aligned} \tag{5.23}$$

Die Steifigkeiten werden entsprechend den Dämpfungen behandelt und im Folgenden zugunsten einer übersichtlicheren Darstellung nicht aufgeführt.

Die weitere Reduktion des Antriebsstrangmodells auf die für die zu erwartenden Rupfphänomene essenzielle Dynamik erfolgt nach der in 2.4.5 beschriebenen Modellreduktion einer Torsionsschwingerkette nach der Methode von Rivin und Di.

Der in Bild 64 dargestellte übersetzungsfreie reduzierte Antriebsstrang lässt sich nun in fünf Teilsysteme aufteilen, von denen drei Systeme, gemäß der in 2.4.5 verwendeten Bezeichnung, vom Typ A und zwei vom Typ B sind. Die Aufteilung in die einzelnen Teilsysteme sowie die Berechnung der jeweiligen Eigenfrequenzen wird für diesen ersten Schritt der Reduktion exemplarisch ausgeführt. Die einzelnen Teilsysteme sind in Bild 65 bis Bild 69 dargestellt und ihren Eigenfrequenzen, die nach (2.13) berechnet wurden, zugeordnet.

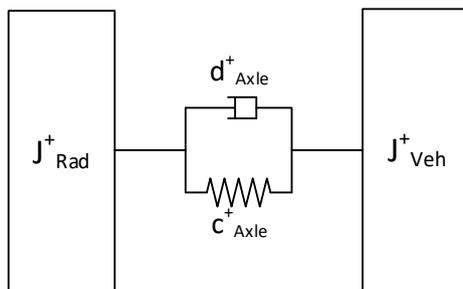


Bild 65: Teilsystem I, Typ B

$$\text{Eigenfrequenz } \omega_{B,I}^2 = 78,08 \frac{1}{s^2} ; \quad f_{B,I} \approx 1,41 \text{ Hz}$$

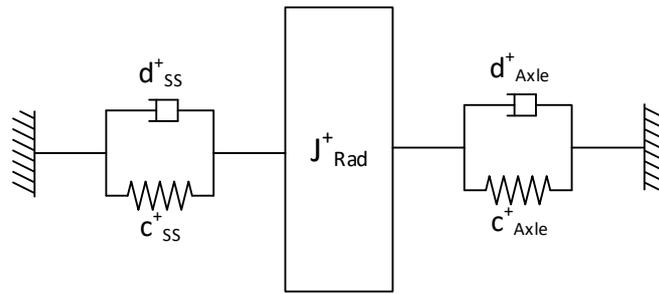


Bild 66: Teilsystem II, Typ A

Eigenfrequenz  $\omega_{A,II}^2 = 4984,7 \frac{1}{s^2}$ ;  $f_{A,II} \approx 11,24 \text{ Hz}$

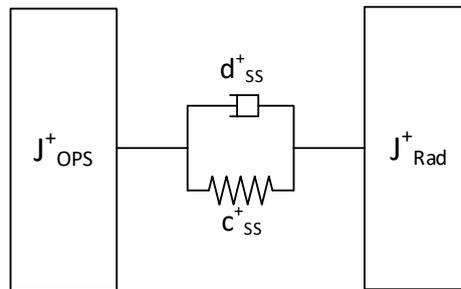


Bild 67: Teilsystem III, Typ B

Eigenfrequenz  $\omega_{B,III}^2 = 10839,5 \frac{1}{s^2}$ ;  $f_{B,III} \approx 16,6 \text{ Hz}$

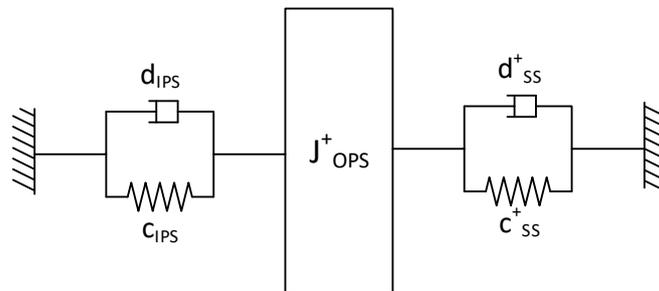


Bild 68: Teilsystem IV, Typ A

Eigenfrequenz  $\omega_{A,IV}^2 = 4498447 \frac{1}{s^2}$ ;  $f_{A,IV} \approx 337,6 \text{ Hz}$

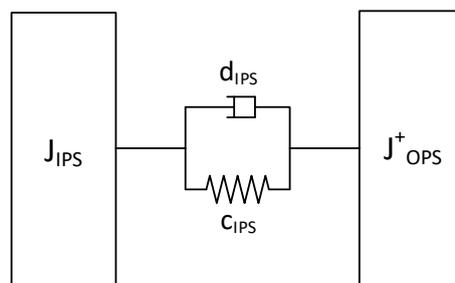


Bild 69: Teilsystem V, Typ B

Eigenfrequenz  $\omega_{B,V}^2 = 6641103 \frac{1}{s^2}$ ;  $f_{B,V} \approx 410,1 \text{ Hz}$

Ein Vergleich der Eigenfrequenzen der jeweiligen Teilsysteme ergibt die Notwendigkeit der Reduktion des Modells beginnend mit Teilsystem V in Bild 69. Die durch die Reduktion entstehenden Parameter lauten

$$\begin{aligned}
 J_V &= J_{IPS} + J_{OPS}^+ = 0,0118 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\
 c_{L,V} &= \frac{c_{IPS} \cdot (J_{OPS}^+ + J_{IPS})}{J_{OPS}^+} = 53129 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \\
 d_{L,V} &= \frac{d_{IPS} \cdot (J_{OPS}^+ + J_{IPS})}{J_{OPS}^+} = 0,3091 \frac{\text{Nm} \cdot \text{s}}{\text{rad}} \\
 c_{SS,V} &= \left[ \frac{1}{c_{SS}^+} + \frac{J_{IPS}}{c_{IPS} \cdot J_V} \right]^{-1} = 22,68 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \\
 d_{SS,V} &= \left[ \frac{1}{d_{SS}^+} + \frac{J_{IPS}}{d_{IPS} \cdot J_V} \right]^{-1} = 0,0530 \frac{\text{Nm} \cdot \text{s}}{\text{rad}}
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Für den nächsten Schritt der Reduktion stellen sich das Gesamtsystem und seine Unterteilung in Teilsysteme wie in Bild 70 dar.

Die nächsten Schritte werden nicht mehr explizit dargestellt, da diese Modellreduktion nicht den Fokus dieses Kapitels bilden soll. Daher werden im Folgenden lediglich die Eigenfrequenzen der einzelnen Teilsysteme aufgelistet, damit der Leser den Stand der Reduktion und somit die maximale noch berücksichtigte Dynamik verfolgen kann.

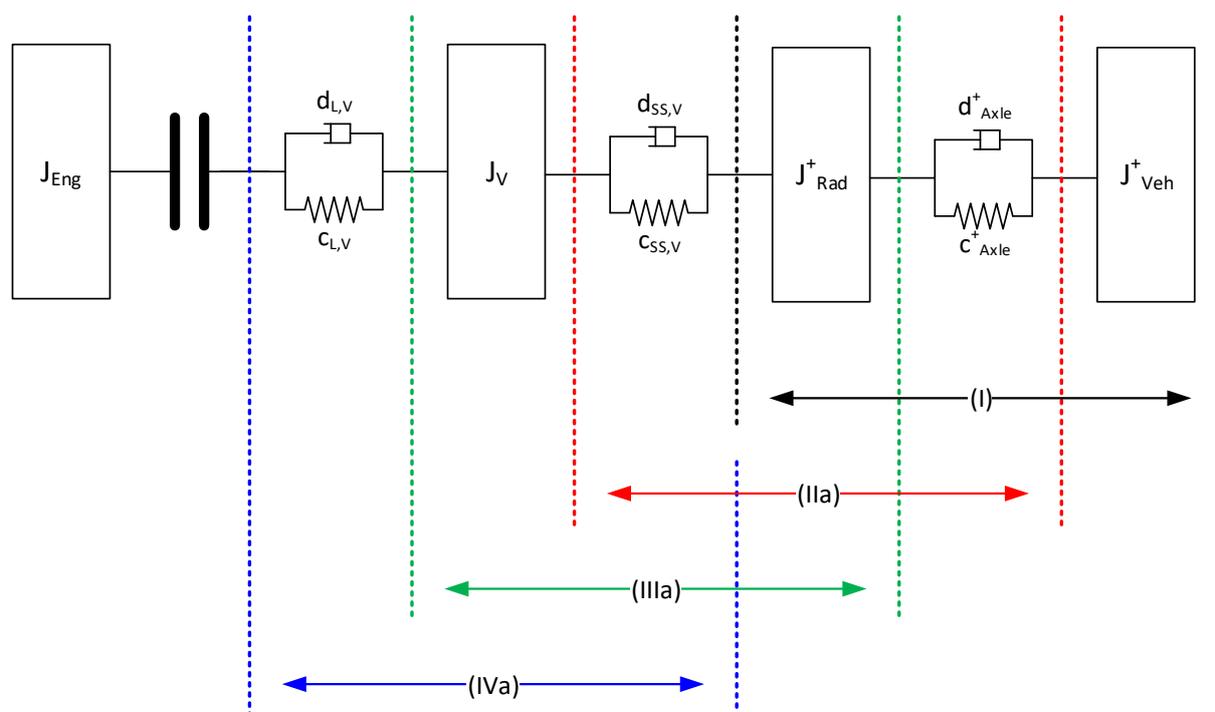


Bild 70: Das reduzierte Antriebsstrangmodell nach Schritt 1 der Reduktion nach Rivin und Di

Für das in Bild 70 dargestellte reduzierte Modell sind diese Eigenfrequenzen gegeben durch

$$\begin{aligned} \omega_{B,I}^2 &= 78,08 \frac{1}{\text{s}^2}; & \omega_{A,IIa}^2 &= 4980,4 \frac{1}{\text{s}^2} \\ f_{B,I} &\approx 1,41 \text{ Hz}; & f_{A,IIa} &\approx 11,23 \text{ Hz} \end{aligned}, \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \omega_{B,IIIa}^2 &= 6820,6 \frac{1}{\text{s}^2}; & \omega_{A,IVa}^2 &= 4494400 \frac{1}{\text{s}^2} \\ f_{B,IIIa} &\approx 13,14 \text{ Hz}; & f_{A,IVa} &\approx 337,4 \text{ Hz} \end{aligned}$$

woraus sich eine Reduktion des Teilsystems IVa mit den resultierenden Parametern  $J_{L,IVa}$ ,  $J_{R,IVa}$ ,  $c_{IVa}$ ,  $d_{IVa}$  in dem in Bild 71 gezeigten reduzierten Modell. Dieses wird anhand der resultierenden Eigenfrequenzen der Teilsysteme

$$\begin{aligned} \omega_{A,IIb}^2 &= 5006 \frac{1}{\text{s}^2}; & \omega_{B,IIIb}^2 &= 6849 \frac{1}{\text{s}^2}, \\ f_{A,IIb} &\approx 11,26 \text{ Hz}; & f_{B,IIIb} &\approx 13,2 \text{ Hz} \end{aligned}, \quad (5.26)$$

wobei die Eigenfrequenz des Teilsystems I unverändert bleibt.

Aus dem Vergleich der Eigenfrequenzen folgt die Reduktion des Teilsystems IIIb mit der Eigenfrequenz  $f_{B,IIIb} \approx 13,2 \text{ Hz}$ .

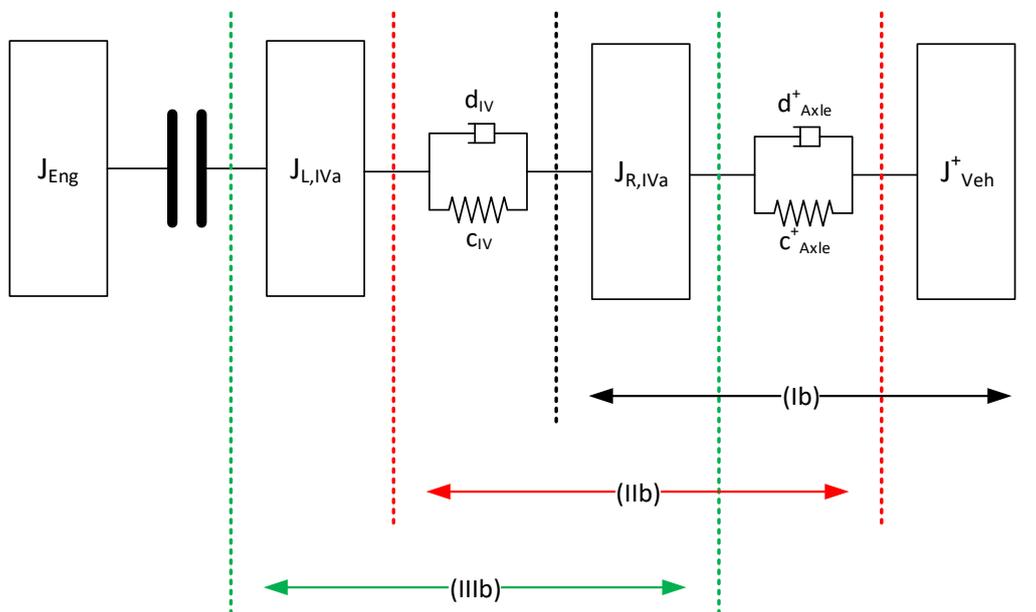


Bild 71: Reduziertes Antriebsstrangmodell nach Schritt 2 der Modellreduktion

Das resultierende reduzierte Modell ist in Bild 72 dargestellt und wird durch die neu berechneten Parameter  $J_{IIIb}$ ,  $c_{L,IIIb}$ ,  $d_{L,IIIb}$ ,  $c_{SS,IIIb}$ ,  $d_{SS,IIIb}$ .

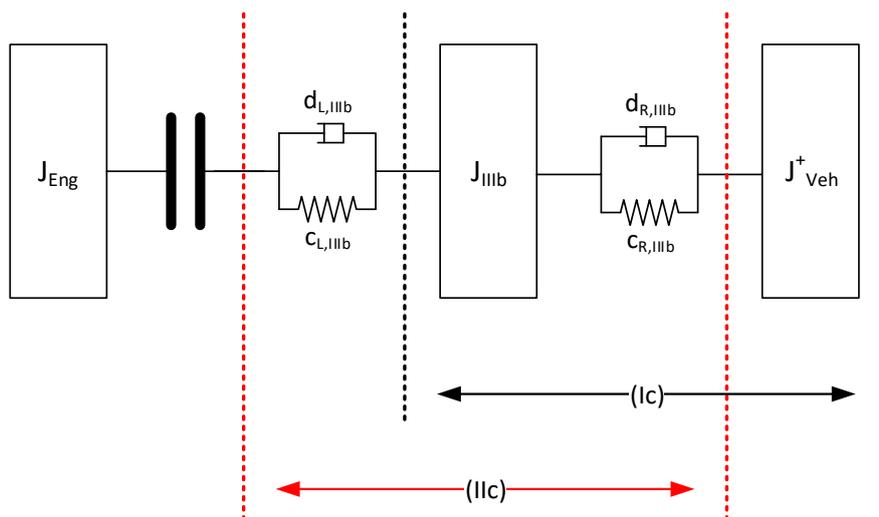


Bild 72: Reduziertes Antriebsstrangmodell nach Schritt 3 der Modellreduktion

Die Eigenfrequenzen dieses System sind gegeben durch

$$\omega_{B,IIc}^2 = 2585,2 \frac{1}{s^2}; \quad \omega_{A,IIc}^2 = 7407,9 \frac{1}{s^2}. \tag{5.27}$$

$$f_{B,IIc} \approx 8,09 \text{ Hz} \quad ; \quad f_{A,IIc} \approx 13,7 \text{ Hz}$$

Durch eine weitere Reduktion des Systems auf einen Ein-Massen-Schwinger lässt sich die Frequenz der ersten Eigenform des Antriebsstranges näherungsweise bestimmen und durch ein Vergleich mit der am tatsächlichen System beobachteten Eigenfrequenz von etwa 7,5 Hz die Validität der angewandten Methode bestätigen.

Um dieses einfachste Modell des Antriebsstrangs als Torsionsschwinger zu erhalten muss nun gemäß der Eigenfrequenzen in (5.27) das Teilsystem  $(IIc)$  zur Reduktion herangezogen werden, wodurch sich das System zu dem Modell in Bild 73 mit den Parametern  $J_{L,IIc}, J_{R,IIc}, c_{IIc}, d_{IIc}$  vereinfacht.

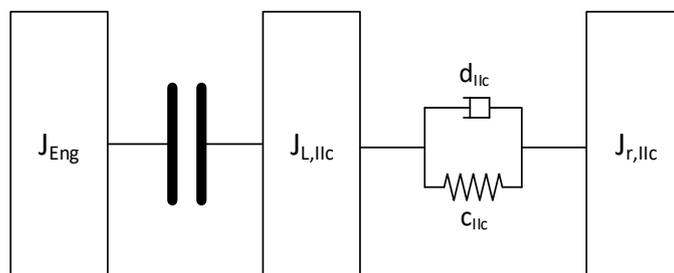


Bild 73: Vereinfachung des Antriebsstrangs als Ein-Massen-Schwinger nach Schritt 4 der Modellreduktion

Die Eigenfrequenz des Systems berechnet sich als

$$\omega_{llc}^2 = 2551,6 \frac{1}{s^2} \quad (5.28)$$

$$f_{llc} \approx 8,04 \text{ Hz}$$

und bestätigt damit die Validität des gewählten Ansatzes zur Modellreduktion.

## 5.6 Modellierung des Stellgliedes am Beispiel eines mechatronischen Aktors und trocken laufender Doppelkupplung

Um das Kapitel der Modellbildung des vorliegenden zu regelnden mechatronischen Systems zu beschließen, wird nach der in den Abschnitten 5.1 bis 5.5 analysierten und modellierten Regelstrecke nun das im System vorhandene und zur Regelung verwendete Stellglied betrachtet. Es wird hier sowohl das dynamische Verhalten des elektromechanischen Kupplungsaktors sowie das der im System zur Anwendung kommenden trocken laufenden Doppelkupplung analysiert und zum Zwecke der simulativen Validierung des Reglers in ein geeignetes Simulationsmodell überführt. Die im folgenden Unterkapitel dargestellten Ergebnisse entsprechen in ihrer Darstellung den Ausführungen von WITMANN<sup>433</sup> und wurden um die Identifikation der Systemdynamik des realen Stellgliedes sowie deren Diskussion ergänzt.

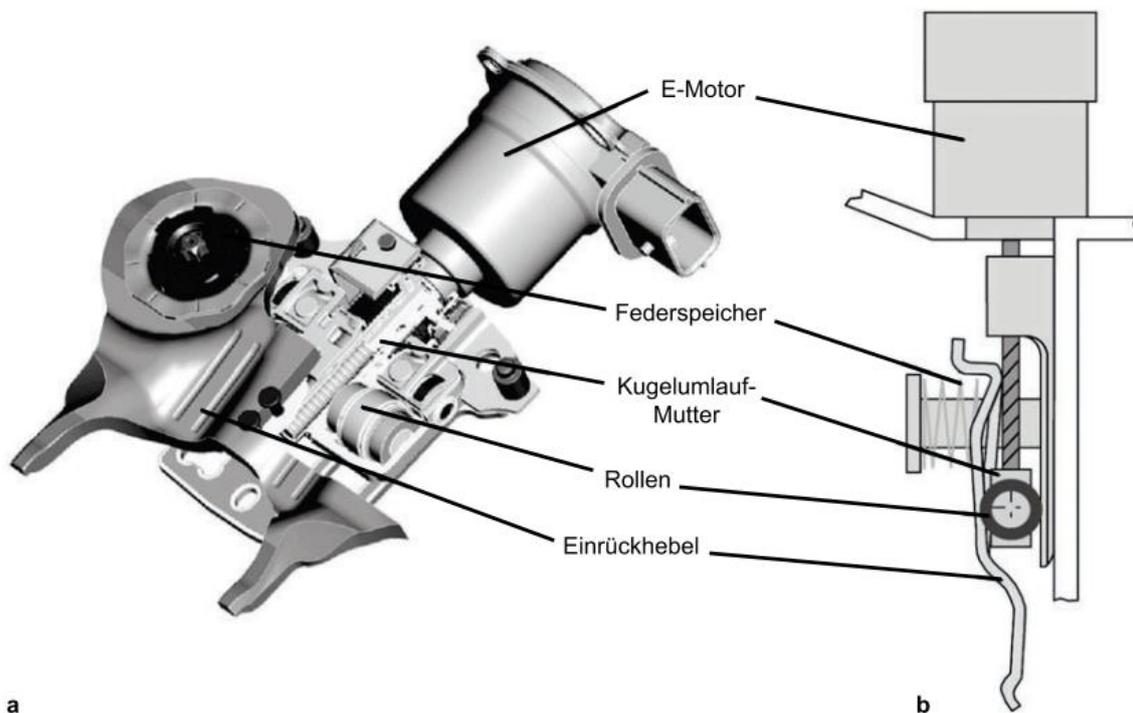


Bild 74: Aufbau des elektromechanischen Kupplungsaktors<sup>434</sup>

<sup>433</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

<sup>434</sup> Fischer et al., 2012

### 5.6.1 Physikalisches Modell des mechatronischen Aktuators

Der im Folgenden als Stellglied des Regelungssystems angenommene Aktuator ist der in Bild 74 dargestellte mechatronische Aktuator, der für die spezielle Verwendung der Betätigung von trocken laufenden Doppelkupplungen entwickelt wurde.<sup>435</sup>

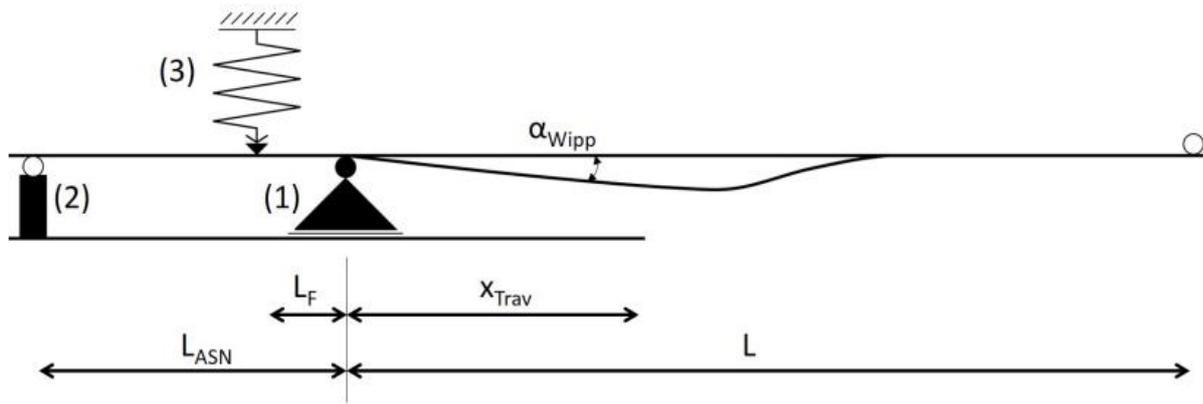
Da dieser Aktortyp sehr häufig bei trocken laufenden Doppelkupplungen zum Einsatz kommt, wird er für die folgenden Betrachtungen herangezogen.

Ziel der physikalischen Modellierung<sup>436</sup> des Aktors ist die Bestimmung der Einrückkraft, die durch die Druckfedern am Ende der Hebeltraverse erzeugt und über das Einrücklager an die Kupplung übertragen wird. Diese muss als Eingangsgröße des Kupplungsmodells verwendet werden, da durch die von der Kupplung in Einbaulage auf den Hebel aufgebrauchte Gegenkraft zusammen mit der Einrückkraft den resultierenden Hebelweg und damit auch den Einrückweg der Kupplung bestimmt. Eine Änderung der Einrückkraft wird durch eine Bewegung der Rollen ausgelöst, die wiederum durch die Drehbewegung des Elektromotors und der Übersetzung durch den Spindeltrieb erzeugt wird, weshalb für eine exakte Modellierung zusätzlich der Elektromotor modelliert werden müsste. Dies wird jedoch im Folgenden ausgelassen, um den Modellierungs- und Berechnungsaufwand zu begrenzen und stattdessen wird als Eingangsgröße des Modells der tatsächliche Rollenweg der Traverse  $x_{Trav}$  verwendet, wodurch eine Modellierung des Elektromotors und des Kugelgewindetriebs sowie des Lagereglers, der für die Ansteuerung des Elektromotors verantwortlich ist, vermieden werden kann. Diese Vereinfachung des Modells beruht auf der Annahme, dass sowohl der Kugelgewindetrieb als auch der Elektromotor nicht zu einer physikalischen Limitierung der Systemdynamik von Aktor und Kupplung beitragen. Die grundlegenden physikalischen Wirkprinzipien des elektromechanischen Aktors sind in Bild 75 skizziert.

---

<sup>435</sup> vgl. 2.3.1

<sup>436</sup> Hier und im Folgenden ist der Begriff der „physikalischen Modellierung“ im Sinne der Modellierung eines Systems nach dessen physikalischen Wirkprinzipien und deren Beschreibung zu verstehen. Durch diese Art der Modellierung wird neben den modellierten Effekten auch das Zusammenwirken der konstituierenden Teilsysteme betrachtet. Damit stellt diese Begrifflichkeit eine klare Abgrenzung zu z.B. einer Black Box Modellierung dar und liefert somit auch einen tieferen Einblick in die Funktionsweise des modellierten Systems.


 Bild 75: Physikalisches Modell des elektromechanischen Kupplungsaktors<sup>437</sup>

Mithilfe der Skizze in Bild 75 lässt sich durch Berechnung die Einrückkraft  $F_{ERK}$  am Hebelende bestimmen, wobei der Hebel als eine waagrechte Gerade angenommen wird, der annähernd reibungsfrei auf den Rollen ((1) in Bild 75) und den Anschlagnieten (2) aufliegt. Am Kontaktpunkt zwischen Rollen und Hebel wird dieser mit einer schiefen Ebene versehen, die durch den Wirkwinkel  $\alpha_{Wipp}(x_{Trav})$  definiert ist und die tatsächlich wirkende Wippkurve modelliert, die durch die spezielle Hebelgeometrie gegeben ist. Durch die beiden in Einbaulage vorgespannten Federspeicher (3) wird die am Hebelende resultierende Einrückkraft aufgebracht.

Wie zuvor geschildert, wirkt in Einbaulage eine von der Kupplung aufgebrachte Gegenkraft auf die Spitzen des Hebels, wodurch der Hebel von den Anschlagnieten (2) abhebt. Zur Bestimmung der Einrückkraft an den Hebelspitzen kann nun das Drehmomentengleichgewicht um den Auflagepunkt des Hebels aufgestellt werden.

$$F_F \cdot (L_F + x_{Trav}) = F_{ERK} \cdot (L - x_{Trav})$$

$$F_{ERK} = F_F \cdot \frac{L_F + x_{Trav}}{L - x_{Trav}} \quad (5.29)$$

Beim Verfahren der Rolle kippt der Hebel um seinen Auflagepunkt und drückt die Federspeicher zusammen, wodurch die Einrückkraft an der Hebelspitze ansteigt. Wenn nun an dieser Hebelspitze keine Gegenkraft herrscht – also sich der Aktor noch nicht in seiner Einbaulage befindet, - dreht sich der Aktor um den Auflagepunkt, der durch die Anschlagnieten definiert ist. Somit entsteht hier der maximale Aktorweg  $y_{HAW}$ , wenn die Traverse den maximalen Verfahrenweg in Richtung des Einrücksystems zurückgelegt hat (Bild 76).

<sup>437</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

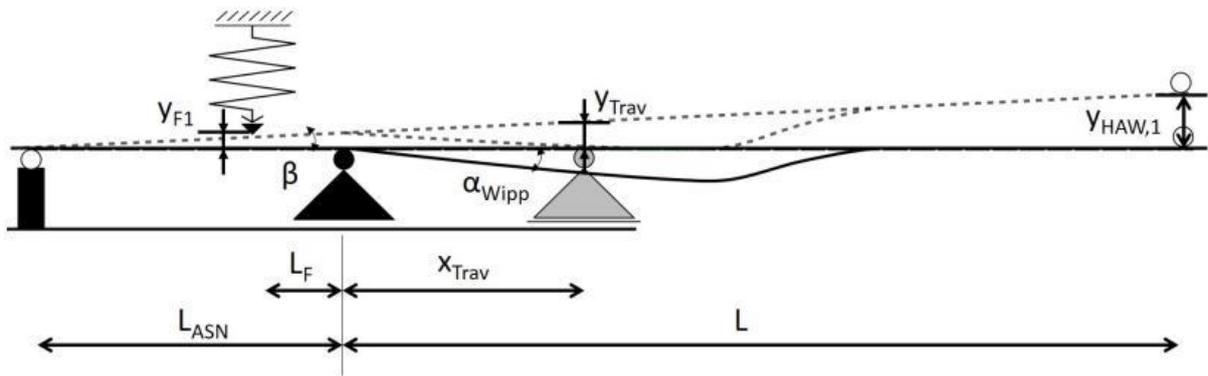


Bild 76: Der aus dem Verfahren der Traverse entstehende Federeintrückweg  $y_{F1}$ <sup>438</sup>

Dabei werden die Druckfedern um den Weg  $y_{F1}$  zusammengedrückt, welcher sich über den Winkel zwischen dem Hebel und der x-Achse berechnen lässt

$$y_{F1} = (L_{ASN} - L_F) \cdot \tan(\beta). \quad (5.30)$$

Demzufolge berechnet sich der Hebelweg an der Hebelspitze zu

$$y_{HAW,1} = (L_{ASN} + L) \cdot \tan(\beta) \quad (5.31)$$

und der maximale Hebelweg  $y_{HAW}$  aus der Addition von (5.31) und dem Weg  $y_{HAW,0}$ , der durch die Gegenkraft in Einbaulage verursacht wird

$$y_{HAW} = y_{HAW,1} + y_{HAW,0}. \quad (5.32)$$

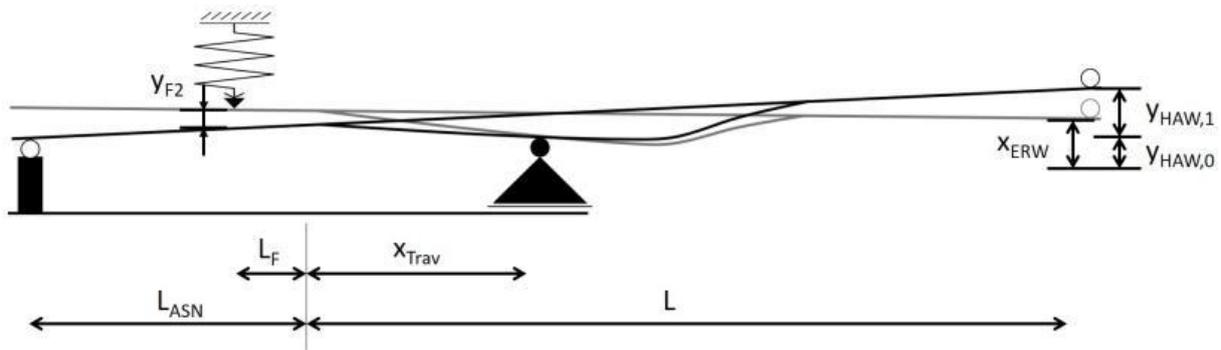
Der Winkel  $\beta$  in (5.30) und (5.31) berechnet sich mithilfe der Wippkurve

$$\beta = \arcsin\left(\frac{y_{Wipp}}{L_{ASN} + x_{Trav}}\right). \quad (5.33)$$

$$y_{Wipp} = x_{Trav} \cdot \tan(\alpha_{Wipp})$$

Diese Wippkurve bezeichnet hier eine schiefe Ebene, mit der der Hebel versehen wird, um die gewünschte Einrückkraft am Ende des Hebels zu erreichen und somit ein Einrücken der Doppelkupplung zu ermöglichen. Diese Wippkurve entsteht in der realen Auslegung des Hebels als Folge einer komplexen Optimierungsprozedur und wird hier zugunsten des Berechnungsaufwandes als durch einen konstanten Winkel  $\alpha_{Wipp}$  charakterisiert angenommen.

<sup>438</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)


 Bild 77: Der Hebelweg unter Einfluss einer Gegenkraft<sup>439</sup>

Sobald der Hebel an seinem Ende mit einer Gegenkraft beaufschlagt wird, beginnt er um seinen Auflagepunkt an der Rolle zu kippen und hebt sich dabei von den Anschlagnieten ab, wodurch die Federn um den Weg  $y_{F2}$  zusammengedrückt werden (Bild 77).

Dieser berechnet sich unter Berücksichtigung des tatsächlichen Einrückweges  $x_{ERW}$  der Kupplung mithilfe des Strahlensatzes zu

$$\frac{y_{F2}}{L_F + x_{Trav}} = \frac{y_{HAW} - x_{ERW}}{L - x_{Trav}} \quad (5.34)$$

$$y_{F2} = (y_{HAW} - x_{ERW}) \cdot \frac{L_F + x_{Trav}}{L - x_{Trav}}$$

Letztlich wird nun noch angenommen, dass der Hebel am Angriffspunkt der Feder eine endliche Steifigkeit  $c_G$  habe, wodurch die Druckspeicher um den Weg  $y_{F3}$  entlastet werden, welcher sich als

$$y_{F3} = \frac{F_F}{c_G} \quad (5.35)$$

berechnet.

Mithilfe der Ergebnisse aus (5.30), (5.34) und (5.35) kann die Federkraft bestimmt werden

$$F_F = F_{Vorspann} + c_F \cdot (y_{F1} + y_{F2} - y_{F3}), \quad (5.36)$$

mithilfe derer mit (5.29) die Einrückkraft des Hebels bestimmt werden kann, die über das Einrücklager auf die Kupplung wirkt. Dabei wird deutlich, dass neben der Rückkopplung bei der Berechnung der Federkraft die Einrückkraft außerdem vom

<sup>439</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

Einrückweg der Kupplung beeinflusst wird, wodurch die Dynamik dieser beiden Elemente in komplexer Weise miteinander in Zusammenhang steht.

### 5.6.2 Physikalisches Modell der trockenen Doppelkupplung

Um die im vorangegangenen Abschnitt beschriebene physikalische Modellierung des mechatronischen Aktors zu komplettieren wird nun die Axialdynamik der trockenen Doppelkupplung modelliert und somit das komplette für die Anti-Rupf-Regelung zur Verfügung stehende Stellglied in seiner Dynamik modelliert. Diese Dynamik der beiden Teilkupplungen lässt sich anhand der in Abschnitt 2.3 beschriebenen und in Bild 78 und Bild 79 nochmals dargestellten Betätigungsprinzipien nun noch einmal im Kontext des physikalischen Wirkprinzips des elektromechanischen Aktors<sup>440</sup> erläutern.

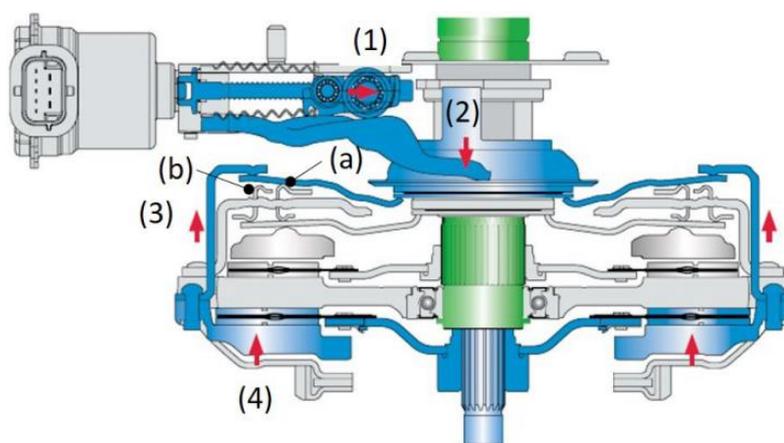


Bild 78: Betätigungsmechanismus der Teilkupplung K1<sup>441</sup>

Für die Teilkupplung 1 gilt, dass sobald der Elektromotor von Seiten des Steuergerätes mit Spannung versorgt wird, sich die Traverse des Aktors in Richtung des Einrücksystems bewegt (1), wodurch nach den Ausführungen in 5.6.1 die Einrückkraft am Hebelende ansteigt, auf das Einrücklager wirkt und somit ein Einrücken der Kupplung zur Folge hat (2). Die Ursache für die im vorigen Abschnitt erwähnte Gegenkraft, die in Einbaulage aus der Kupplung auf den Aktor wirkt, wird durch die in der Kupplung verbaute Hebelfeder verursacht, die in Einbaulage auf dem Senserring aufliegt. Sobald der Aktor diese Gegenkraft überwindet, rollt diese Feder vom Senserring auf den Verstellring ab und überträgt diese Bewegung auf den Zuganker, der eine Umkehr der Kraft- und Bewegungsrichtung bewirkt (3). Durch diese Weg- und Kraftumkehr wird die Anpressplatte zur Zentralplatte herangezogen und somit die Kupplung geschlossen (4).

<sup>440</sup> vgl. 5.6.1

<sup>441</sup> Schaeffler Automotive Aftermarket GmbH & Co. KG, 2014

Ein ähnliches Prinzip gilt für die Betätigung der Teilkupplung 2, auch hier wird durch eine Erhöhung der Spannungsversorgung am Elektromotor die Traverse in Richtung des Einrücksystems bewegt (1) und somit eine erhöhte Kraft auf das Einrücklager übertragen, welches sich somit in Richtung der Kupplung bewegt (2). Hier wird nun jedoch im Gegensatz zur Teilkupplung 1 die Wirkrichtung nicht umgekehrt, sondern die Einrückkraft direkt über die Hebelfedern auf die Anpressplatte übertragen (3), welche sich auf die Zentralplatte zubewegt und somit die zweite Teilkupplung schließt.

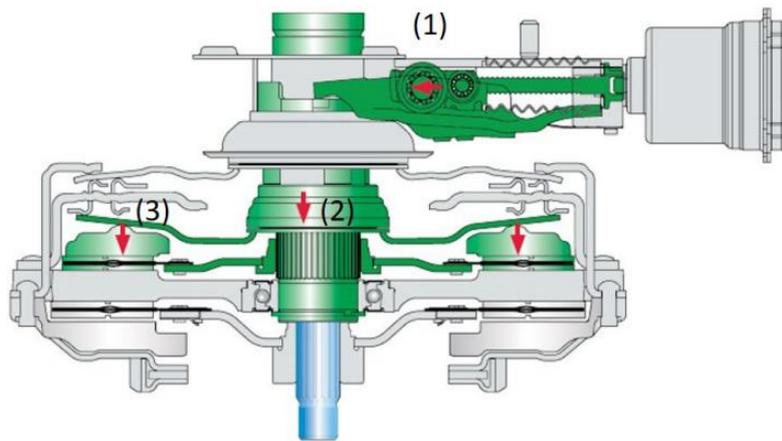
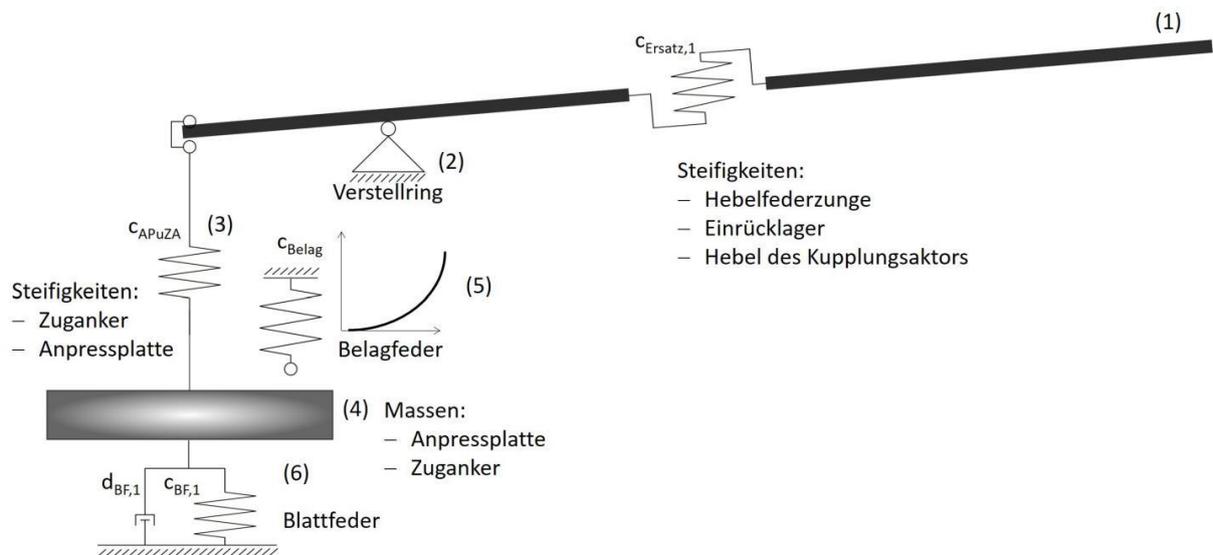


Bild 79: Betätigungsmechanismus der Teilkupplung K2<sup>442</sup>

Anhand dieser Wirkmechanismen soll nun ein vereinfachtes physikalisches Modell erstellt werden, das zusammen mit der in 5.6.1 entwickelten Modellierung des Aktors für das in den folgenden Kapiteln verwendete Simulationsmodell zum Einsatz kommen soll. Dabei soll zum einen die charakteristische und für die vorliegende Aufgabe relevante Axialdynamik abgebildet werden und zum anderen ein Modell entstehen, das einen minimalen Simulationsaufwand erlaubt.

Hierfür werden sowohl das Einrücklager, als auch der Hebel des Kupplungsaktors als nicht massebehaftete Komponenten angenähert, weshalb die Einrückkraft nun direkt auf die Hebelfeder wirkt ((1) in Bild 80), welche bis zu ihrem Auflagepunkt als Bauteil mit einer linearen Ersatzsteifigkeit  $c_{\text{Ersatz},1}$  angenommen wird. In dieser Steifigkeit sind die einzelnen in Reihe angeordneten Steifigkeiten von Hebelfederzunge, Einrücklager und des Actorhebels enthalten. Der Auflagepunkt am Verstellring (2) wird als unendlich steif angenommen und zusätzlich die Vereinfachung getroffen, dass die Hebelfeder ständig auf dem Verstellring aufliegt, wogegen sie in der realen Kupplung zunächst auf dem Sensierring ((b) in Bild 78) aufliegt.

<sup>442</sup> Schaeffler Automotive Aftermarket GmbH & Co. KG, 2014

Bild 80: Physikalisches Modell der Teilkupplung 1<sup>443</sup>

Die im Modell abgebildete bewegte Masse (4) repräsentiert die Massen von Anpressplatte und Zuganker, welche durch die kombinierte Ersatzsteifigkeit  $c_{APuZA}$  des Zugankers und der Anpressplatte mit dem Hebel verbunden sind (3). Die im Modell berücksichtigte Belagsfeder (5) ist durch eine nichtlineare Steifigkeit modelliert, die die Verbindung zur Zentralplatte (als unendlich steif angenommen) darstellt. Um einen ständigen Kontakt zwischen Anpressplatte und Belag im Modell zu vermeiden wurde die in der realen Kupplung verbaute Blattfeder (6) berücksichtigt, die eine der Bewegungsrichtung entgegengesetzte Kraft ausübt. Das hierbei zusätzlich verwendete Dämpferelement musste in das Modell integriert werden, um numerische Instabilitäten in der Modellsimulation zu vermeiden.<sup>444</sup>

Für die Modellierung der Teilkupplung 2 wurden die zuvor für die Teilkupplung 1 beschriebenen Annahmen übernommen, da hier lediglich die Umkehr der Wirkrichtung entfällt und somit keine gesonderte Beschreibung des in Bild 81 dargestellten Modells notwendig ist.

<sup>443</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

<sup>444</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

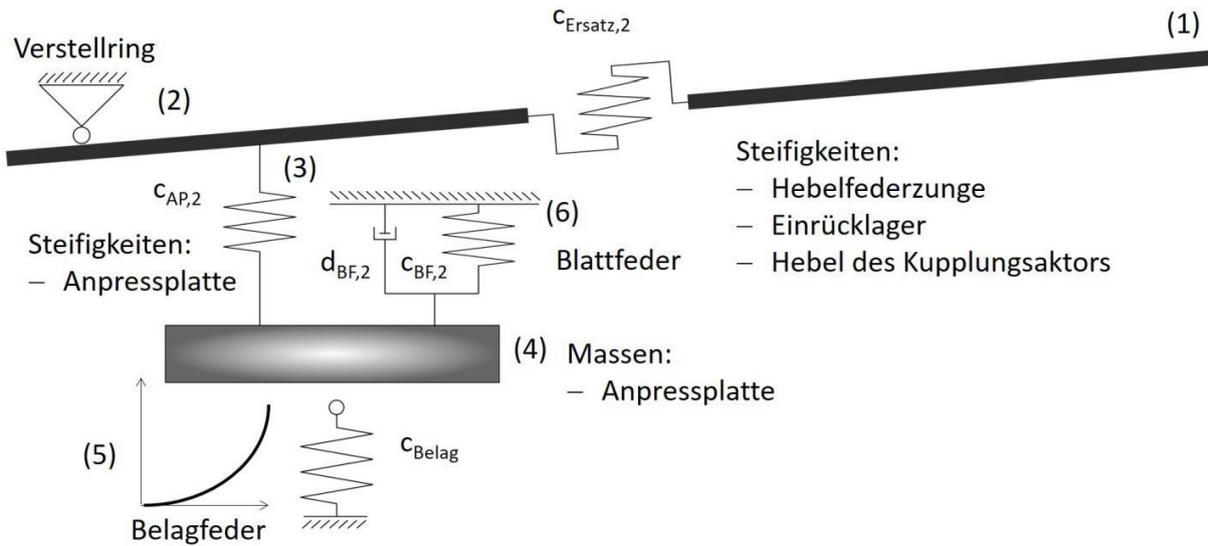


Bild 81: Physikalisches Modell der Teilkuplung 2<sup>445</sup>

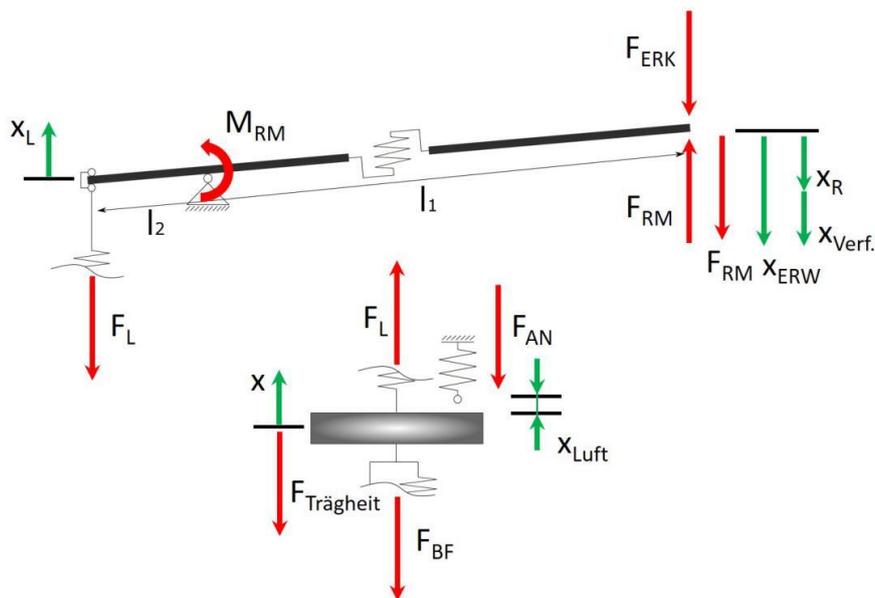


Bild 82: Kräftefreischnitt für die Teilkuplung K1<sup>446</sup>

Für die mathematische Behandlung der Dynamik der beiden in Bild 80 und Bild 81 dargestellten physikalischen Modelle werden diese freigeschnitten und die wirkenden Kräfte betrachtet, wie sie in Bild 82 und Bild 83 visualisiert sind.

<sup>445</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

<sup>446</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

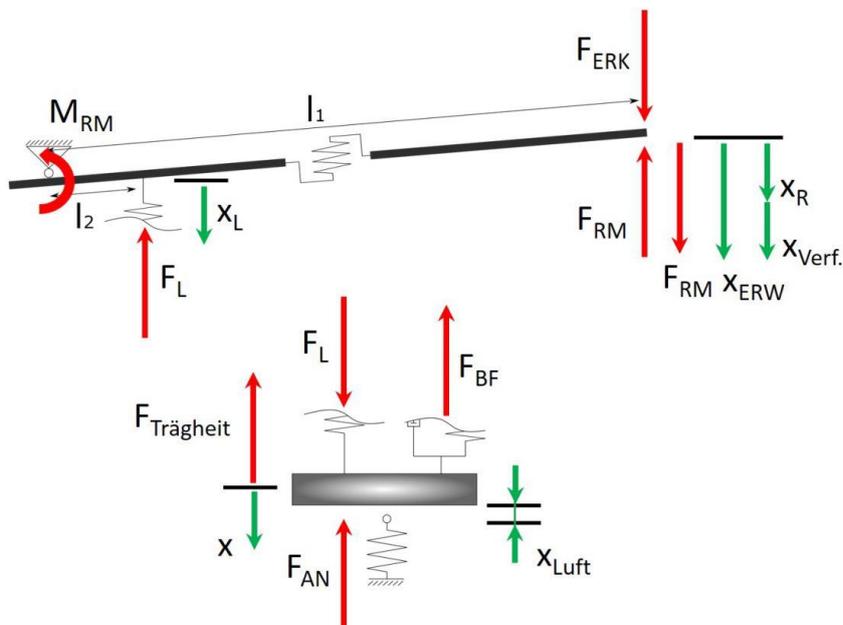


Bild 83: Kräftefreischnitt für die Teilkupplung K2<sup>447</sup>

Da die dabei bestimmten Formeln zur Berechnung identisch sind, werden diese im Folgenden lediglich mit dem Index  $i$  gekennzeichnet, der für die jeweilige Teilkupplung stehen soll. Für die bewegte Masse ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$m_i \cdot \ddot{x}_i = F_{L,i} - F_{BF,i} - F_{Belag,i}, \quad (5.37)$$

in der sich die Kraft  $F_{L,i}$  aus dem Momentengleichgewicht um den Auflagepunkt berechnet

$$F_{L,i} = F_{R,i} \cdot \frac{l_{1,i}}{l_{2,i}}, \quad (5.38)$$

mit der aus Einrückkraft und Gegenkraft resultierenden Kraft  $F_{R,i} = F_{ERK,i} - F_{M,i}$ .

Die Gegenkraft ist hierbei das Resultat aus dem Rückstellmoment der Kupplung

$$F_{M,i} = \frac{M_{M,i}}{l_1}. \quad (5.39)$$

Der aus diesen Kräften resultierende Einrückweg bestimmt sich aus der starren Bewegung der Spitze der Hebelfeder und der elastischen Verformung

$$x_{ERW} = x_{R,i} + x_{Verformung,i}, \quad (5.40)$$

welche sich mithilfe der einwirkenden Kraft und der Ersatzsteifigkeit berechnet

<sup>447</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

$$x_{\text{Verformung},i} = \frac{F_{R,i}}{c_{\text{Ersatz},i}}. \quad (5.41)$$

Letztere wird durch die Reihenschaltung der einzelnen Steifigkeiten von Hebelfederzungen, Einrücklager und des Hebels bestimmt

$$c_{\text{Ersatz},i} = \frac{1}{c_{\text{HZ},i}^{-1} + c_{\text{Lager},i}^{-1} + c_{\text{K},i}^{-1}}. \quad (5.42)$$

Die starre Bewegung der rechten Seite ergibt sich direkt aus der der linken Seite

$$x_{R,i} = x_{L,i} \cdot \frac{l_{1,i}}{l_{2,i}},$$

wobei sich die starre Bewegung der linken Seite als direkte Folge der Kraft  $F_{L,i}$  auf den Zuganker ergibt und sich mithilfe der Steifigkeit dessen, der Steifigkeit der Anpressplatte sowie der Wegänderung berechnen lässt

$$\begin{aligned} F_{L,i} &= c_{\text{ZAuAP},i} \cdot (x_{L,i} - x_i) \\ x_{L,i} &= \frac{F_{L,i}}{c_{\text{ZAuAP},i}} + x_i \end{aligned} \quad (5.43)$$

Die nichtlineare Anpresskraft ergibt sich direkt aus dem zurückgelegten Weg der Anpressplatte und der nichtlinearen Steifigkeit des Belagsfederung

$$F_{An,i} = c_{\text{Belag}} \cdot x_i. \quad (5.44)$$

Die Blattfeder ist im eingebauten Zustand vorgespannt und besitzt eine linear ansteigende Federkraft, sobald die Masse  $m_i$  bewegt wird. Unter Berücksichtigung des Dämpfers zur Vermeidung der numerischen Instabilitäten in der Simulation ergibt sich die Federkraft des Blattfeder zu

$$F_{Bl,i} = F_{BL,0,i} + c_{Bl} \cdot x_i + d_{Bl} \cdot \dot{x}_i. \quad (5.45)$$

### 5.6.3 Validierung des physikalischen Modells des Stellgliedes

Die in 5.6.1 und 5.6.2 abgeleiteten physikalischen Modelle von Kupplung und Aktor werden anhand der Ergebnisse der entsprechenden Auslegungstools validiert. Dazu werden im Falle der Simulation der Kupplung zum Auslegungsprogramm identische Parameter verwendet und eine Simulation für den Ein- und für den Ausrückvorgang durchgeführt und die Verläufe charakteristischer Größen verglichen. Diese sind der Einrückweg, die Anpresskraft und die Einrückkraft der Kupplung als Funktionen des Rollenwegs der Aktortraverse, welcher in der Simulation als linear mit der Simulationszeit ansteigend angenommen wurde. Die zu vergleichenden Größen sind in Bild 84 dargestellt.

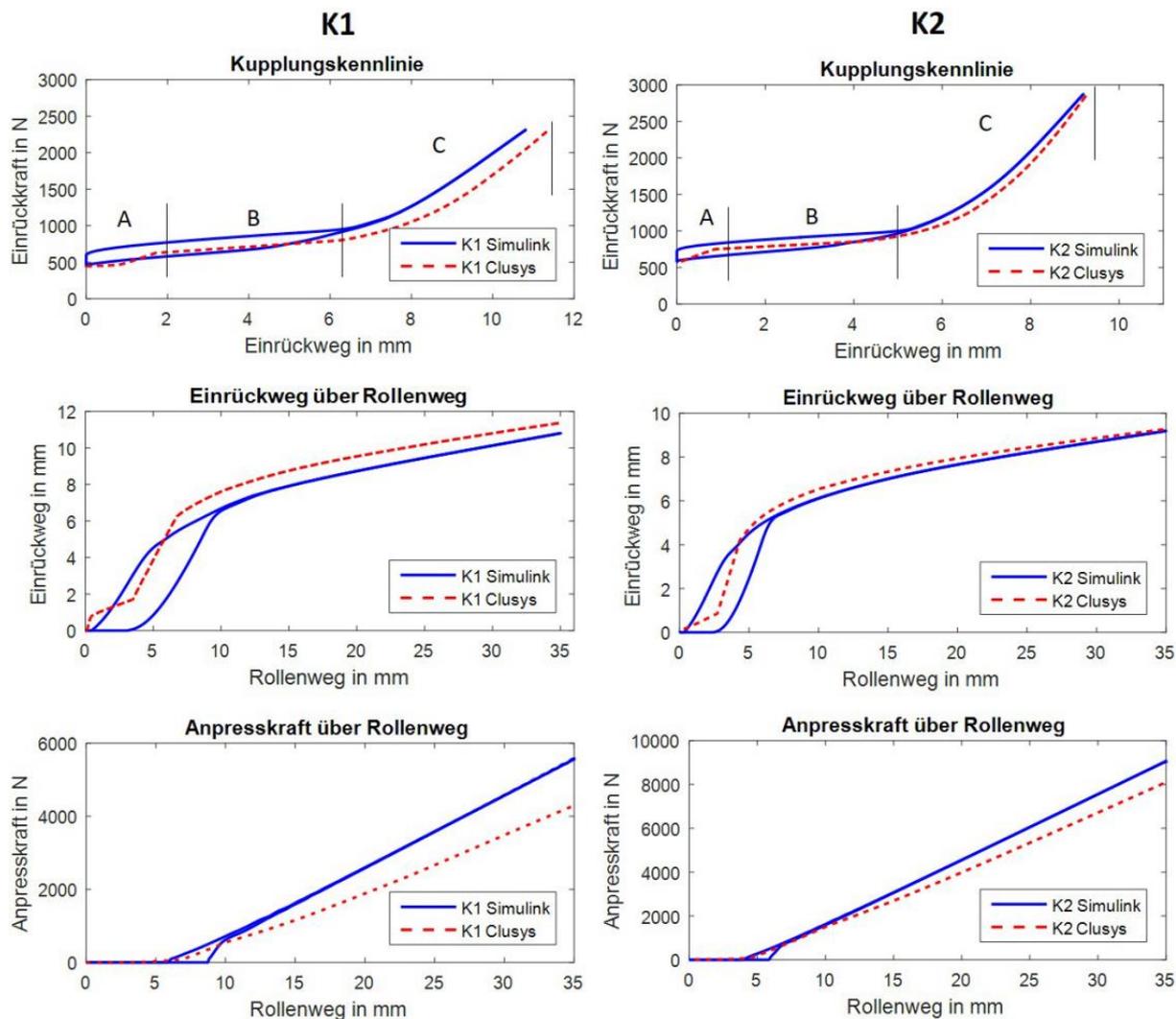


Bild 84: Simulationsvergleich zwischen dem physikalischen Kupplungsmodell in MATLAB Simulink und dem Kupplungsmodell im Auslegungstool<sup>448</sup>

Für die Kupplungskennlinie – dem Verlauf der Einrückkraft über dem Rollenweg – zeigt sich im Falle des simulierten physikalischen Modell eine Hysterese, die dem im vorangegangenen Abschnitt erläuterten parallel zur Steifigkeit der Blattfeder modellierten zusätzlichen Dämpferelement geschuldet ist und aus den zuvor genannten Gründen in Kauf genommen werden muss. Die Hysterese beginnt bei einem Einrückweg von 0 mm und endet, sobald die bewegte Masse bei einem Einrückweg von ca. 6 mm auf die Belagsfederung trifft. Zu Beginn des Einrückens ist im Auslegungsmodell zu erkennen, wie der Sensiering und der Verstellring zusammen arbeiten. Nach einem bestimmten Einrückweg wird der Sensiering kraftfrei und der Verstellring wird bis zur maximalen Einrückkraft belastet (A in Bild 84). Der Bereich (B) zeigt einen linearen Verlauf der Einrückkraft, welcher durch die Steifigkeit

<sup>448</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

der Blattfedern beeinflusst wird, da diese die einzige Gegenkraft zur Hebefeder bilden. Im Bereich (C) liegt die Anpressplatte an dem Belag der Kupplungsscheibe an. Ab diesem Punkt, welcher auch als Tastpunkt bezeichnet wird, überträgt die Kupplung im Falle einer Differenzdrehzahl ein Drehmoment.

Die für die Kupplungskennlinie beobachtete Hysterese ist auch für die Verläufe der anderen betrachteten Größen zu erkennen.

Zum Zwecke der weiteren Validierung der Simulation werden die durch eine Verkettung der beiden physikalischen Modelle erzielten Ergebnisse mit realen – also mit Toleranzen behafteten – Auslegungskurven verglichen.

Hier dient für die Simulation nun der Rollenweg der Aktortraverse als Eingangsgröße, die einen linearen Verlauf von 0 mm bis 35 mm beschreibt. Die Ergebnisse dieses Vergleichs sind in Bild 85 dargestellt.

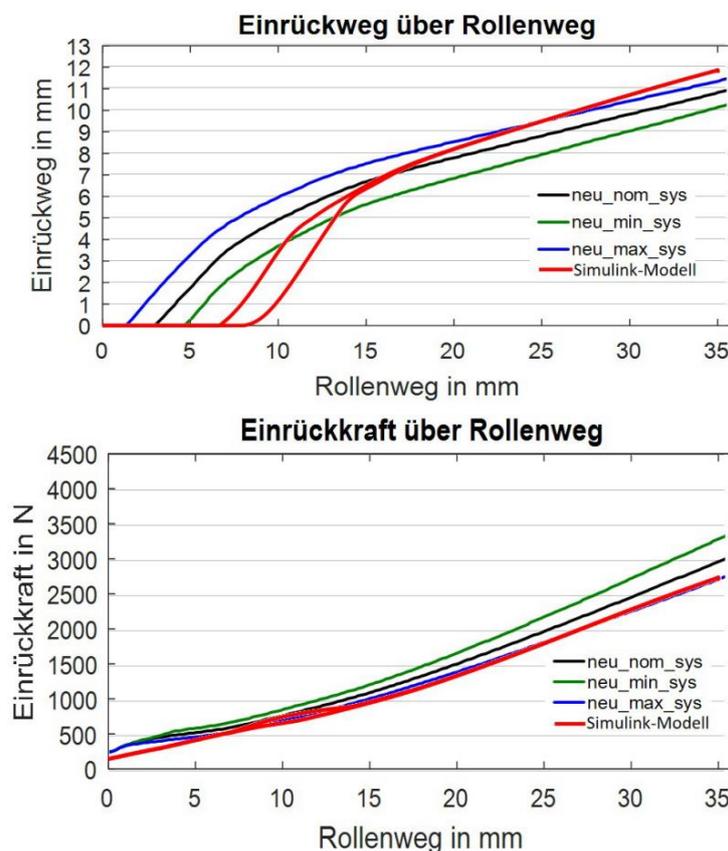


Bild 85: Vergleich der physikalischen Modelle mit Auslegungskurven des Systems<sup>449</sup>

Im Gegensatz zu den Auslegungskurven beginnt der Anstieg des Einrückweges erst bei einem Rollenweg von ca. 8 mm, da der modellierte Kupplungsaktor zu Beginn eine

<sup>449</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

etwas geringere Kraft aufbringt, als das reale Bauteil. Dies kann aber in der weiteren Verwendung des Simulationsmodells berücksichtigt werden. Die weiteren Abweichungen entstehen als Folge der vereinfachten Modellbildung, welche aber aus diesem Grund in Kauf genommen werden, da der Grad der Abweichung als noch akzeptabel angesehen wird.

Damit wurde das in den Abschnitten 5.6.1 und 5.6.2 abgeleitete physikalische Modell für den angedachten Zweck der Ergänzung eines Simulationsmodells des Antriebsstrangs in MATLAB Simulink hinreichend validiert.

#### **5.6.4 Identifikation der Systemdynamik des mechatronischen Aktuators**

Um die Möglichkeit der Umsetzung einer robusten Anti-Rupf-Regelung im angestrebten Frequenzbereich mit dem in den vorangegangenen Abschnitten betrachteten und modellierten Stellglied bewerten zu können, wird im Folgenden die Schwingungsdynamik des Stellgliedes vermessen und bewertet. Dies geschieht anhand realer Bauteile, die zu diesem Zwecke auf einem drehenden Prüfstand vermessen wurden.

Der hier zum Einsatz kommende Prüfstand ist speziell für die Vermessung von Doppelkupplungssystemen ausgelegt und wird auf der Primärseite von einem Elektromotor mit einer nahezu konstanten Drehzahl angetrieben. Die Sekundärseite der Kupplung wird festgehalten und mit zwei unterschiedlich auflösenden Drehmomentmesswellen das von der Kupplung übertragene Moment gemessen. Die Betätigung der Kupplung erfolgt über die dazugehörigen Aktoren, die mithilfe der Prüfstandssteuerung durch eine Vorgabe des einzustellenden Rollenwegs der Aktortraverse angesteuert werden können. Dabei wird der tatsächliche Einrückweg der Kupplung mittels Fadenpotentiometern analog gemessen. Hierbei wurden in Anlehnung an die zuvor vorgestellte Methode zur Identifikation der Antriebsstrangdynamik<sup>450</sup> die in 2.2.4 vorgestellten Varianten des PRBS Signals zur Identifikation der Systemdynamik als Momentenvorgaben gewählt und mithilfe einer unmittelbar vor der Charakterisierung vorgenommenen Kennlinie des Systems aus Aktorik und Kupplung in eine Rollenwegvorgabe umgerechnet. Die Charakterisierung der Systemdynamik erfolgt dabei mithilfe der gemessenen Signale von eingestelltem Rollenweg der Aktortraverse, Einrückweg der Kupplung und dem von der Kupplung übertragenen Drehmoment, die jeweils in Bezug zu dem vorgegebenen Rollenweg gesetzt werden. Für die Aufzeichnung dieser Signale wurden drei Messsysteme benötigt, die parallel betrieben wurden und in Teilen redundant aufzeichneten, um für die darauffolgende Auswertung einen Ausgleich der unterschiedlichen Zeitbasen vornehmen zu können.

---

<sup>450</sup> vgl. 5.1.2

Mithilfe der dabei gewonnenen Übertragungsfunktionen kann nun zunächst die Verbesserung der Identifikation durch die Verwendung eines 4-Tap PRBS anstatt eines 2-Tap PRBS für ein reales nichtlineares System verifiziert werden. Dazu sind in Bild 86 die ermittelten Verstärkungsfaktoren für die Übertragung von Rollenwegvorgabe zu Einrückweg und übertragenem Moment dargestellt. Hier lassen sich deutlich die im Falle des 2-Tap PRBS durch das nichtlineare Streckenverhalten auftretenden Verzerrungen der Übertragungsfunktion erkennen, die im Falle des 4-Tap PRBS nicht mehr auftreten.

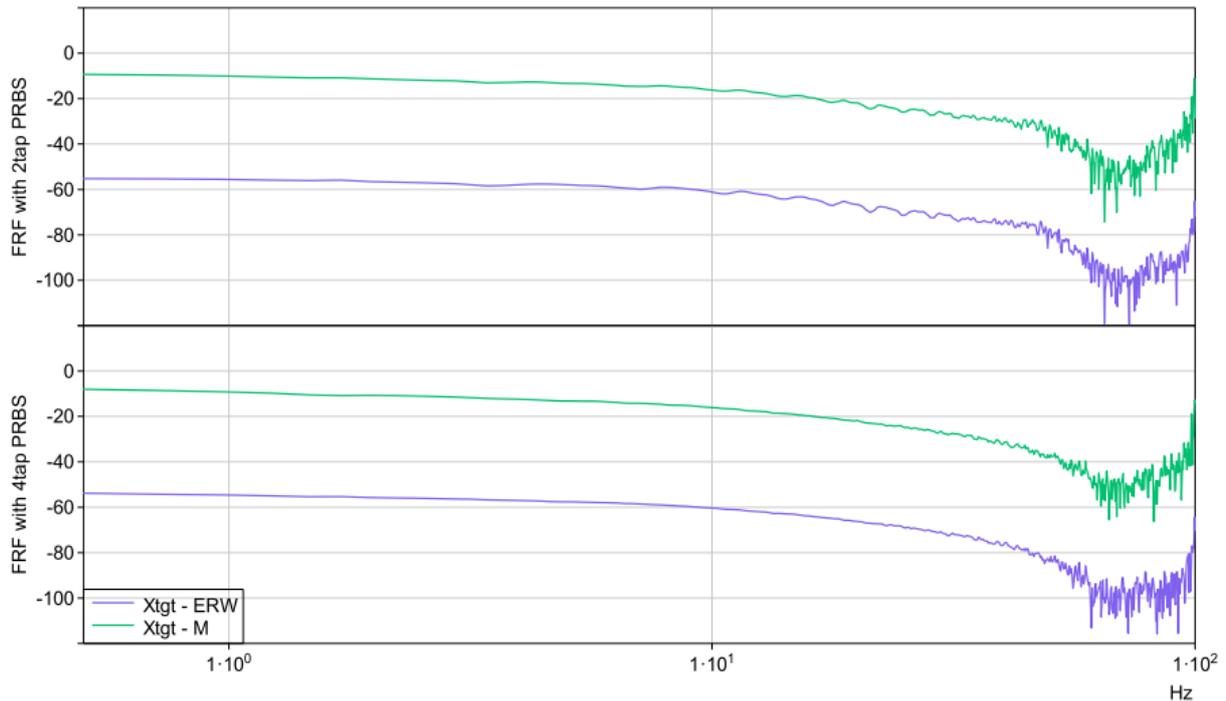


Bild 86: Bestimmung des Verstärkungsfaktors als Funktion der Anregungsfrequenz für die Übertragung von Rollenwegvorgabe nach Einrückweg und übertragenem Drehmoment am Prüfstand;  
Verifikation der Verbesserung der Charakterisierung der Systemdynamik durch Verwendung eines 4-Tap (unten) statt eines 2-Tap PRBS (oben)<sup>451</sup>

Die weiteren in 2.2.4 diskutierten Signale wurden ebenfalls im Experiment erprobt, jedoch konnten die Signalverläufe von IRS und PRTS aufgrund der speziellen Signalübertragungskette und der Routine zur Umwandlung der Rollenwegvorgabe in ein CAN-Bus Signal des Prüfstands nicht hinreichend präzise umgesetzt werden, sodass die günstigen Eigenschaften der Signale verloren gingen und die damit erzielten Ergebnisse für die Systemidentifikation nicht brauchbar waren.

Es bleibt jedoch die Analyse der mithilfe des ursprünglichen 2-Tap PRBS gewonnenen Daten, welche nun zwar durch die in 2.2.3 beschriebenen Verzerrungen durch

<sup>451</sup> Schaeffler AG, 2015 (betreute Studienarbeit)

nichtlineares Verhalten beeinträchtigt sind, jedoch trotzdem eine Analyse der Dynamik des Aktorsystems sowie des Systems aus Aktor und Kupplung erlauben. Hierzu wurde das System aus Aktor und Kupplung unter den zuvor beschriebenen Versuchsbedingungen mit einem 15 Bit 2-Tap PRBS für zwei charakteristische Arbeitspunkte von circa 5 Nm und 100 Nm durch die Kupplung übertragenem mittleren Moment untersucht, wobei der erste Arbeitspunkt repräsentativ für die Fahrsituation des Kriechens und der zweite für die Fahrsituation des Anfahrens gewählt wurden.

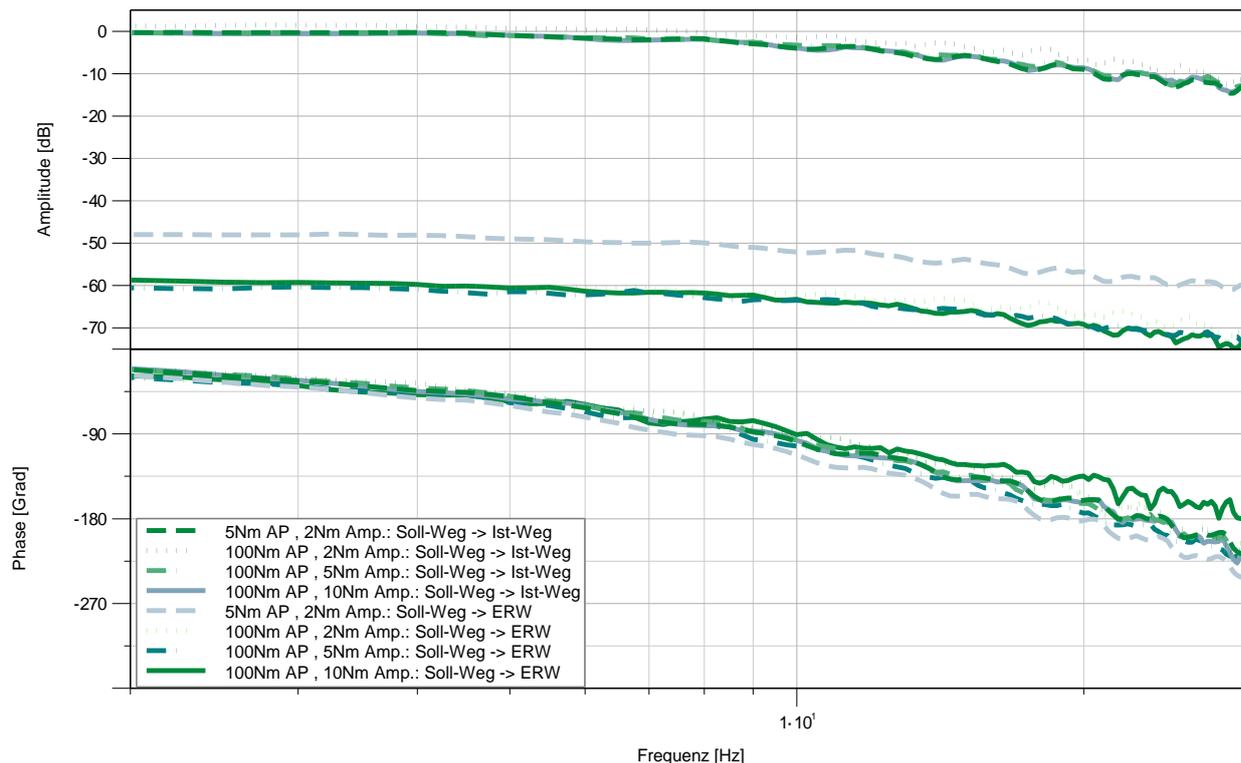


Bild 87: Vergleich des Übertragungsverhaltens des Aktors für das Subsystem Lagereger (Soll- nach Ist-Rollenweg) sowie den kompletten Aktor (Soll-Weg nach Einrückweg) für 5 Nm und 100 Nm Arbeitspunkt und Modulation mit einem 2-Tap PRBS mit 2,5,10 Nm Amplitude

In Bild 87 sind die Übertragungsfunktionen der unterschiedlichen Arbeitspunkte für Modulationsamplituden von 2 Nm, 5 Nm und 10 Nm dargestellt, wobei der erste Arbeitspunkt aufgrund der verhältnismäßig hohen Modulationsamplituden auf 10 Nm und auf 15 Nm verschoben werden musste, um ein komplettes Öffnen der Kupplung zu verhindern. Da die Ergebnisse für diese Arbeitspunkte jedoch nahezu identisch sind, werden hier und im Folgenden lediglich die Ergebnisse für den Arbeitspunkt von 5 Nm mit 2 Nm Modulationsamplitude diskutiert und dargestellt. In Bild 87 ist zu erkennen, dass die Übertragungsfunktion des die Position der Aktortraverse regelnden Lageregers, welche die Rollenwegvorgabe als Eingang und den tatsächlichen

Rollenweg als Ausgang besitzt, bei einem Verstärkungsfaktor von 1 oder 0 dB beginnt und zu höheren Frequenzen hin abfällt, während sich die Phasenverschiebung von ca.  $-45^\circ$  bei einer Anregungsfrequenz von 2,0 Hz bis hin zu einer Phasenlage zwischen  $-180^\circ$  und  $-220^\circ$  bei 30,0 Hz vergrößert. Insbesondere der für kleine Frequenzen ermittelte Verstärkungsfaktor von 1 entspricht den Erwartungen, da der die Traverse bewegendende Elektromotor mit dem vorgeschalteten Lageregler die vorgegebene Position direkt umsetzen kann. Für die Übertragung von Soll-Rollenweg nach Einrückweg, also der Übertragungsfunktion des gesamten Aktorsystems, liegt der Verstärkungsfaktor für kleine Frequenzen im Bereich von  $-50$  dB bis  $-60$  dB, da hier die Ein- und Ausgangsgröße eine unterschiedliche Bedeutung haben und somit ein Skalierungsfaktor zu erwarten ist. Der weitere Verlauf ist, wie auch der Phasenverlauf, qualitativ identisch zu dem der Übertragungsfunktion des Lagereglers, wobei sich die Übertragungsfunktionen des Aktors zusätzlich durch eine Abhängigkeit des Verstärkungsfaktors von dem gewählten Arbeitspunkt auszeichnen. Für den niedrigeren Arbeitspunkt ergibt sich ein Verstärkungsfaktor, der für die Übertragung von Rollenweg zu Einrückweg größer ist als für den höheren Arbeitspunkt. Dies ist angesichts des Verlaufs der Einrückkennlinie des Systems aus Kupplung und Aktor, die den Einrückweg als Funktion des Rollenweges beschreibt, zu erwarten, da diese für kleine Rollenwege eine größere Steigung aufweist, als für größere Rollenwege. Die Grenzfrequenz liegt für beide Systeme nach der in der Regelungstechnik üblichen Definition<sup>452,453</sup> bei ca. 10,0 Hz.

In Bild 88 sind analog zu den bislang diskutierten Übertragungsfunktionen die Bode-Diagramme für die Übertragung des kompletten Systems aus Aktorik und Kupplung dargestellt und zum Vergleich um die Ergebnisse für das komplette Aktorsystem, wie sie auch in Bild 87 dargestellt wurde, ergänzt. Es zeigt sich für das Gesamtsystem eine ähnliche Dynamik wie für das Aktorsystem mit einem Abfall von Verstärkung und Phase hin zu hohen Frequenzen und eine daraus resultierende geschätzte Grenzfrequenz von 10,0 Hz. Es ergibt sich für den niedrigeren Arbeitspunkt ein niedrigerer Verstärkungsfaktor, der aus der für den Betrieb nahe des Tastpunktes geringeren Steigung der Kupplungskennlinie (Rollenweg nach Drehmoment) im Vergleich zu dem höheren Arbeitspunkt, liegt.

---

<sup>452</sup> „Grenzfrequenz“: Frequenz, bei der die Verstärkung der Übertragungskette im Vergleich zur Verstärkung bei statischer Übertragung um  $-3$  dB abgefallen ist. Dies entspricht einer Abnahme der Energie um den Faktor 0,5 im Vergleich zum statischen Fall.

<sup>453</sup> Lunze, 2006a

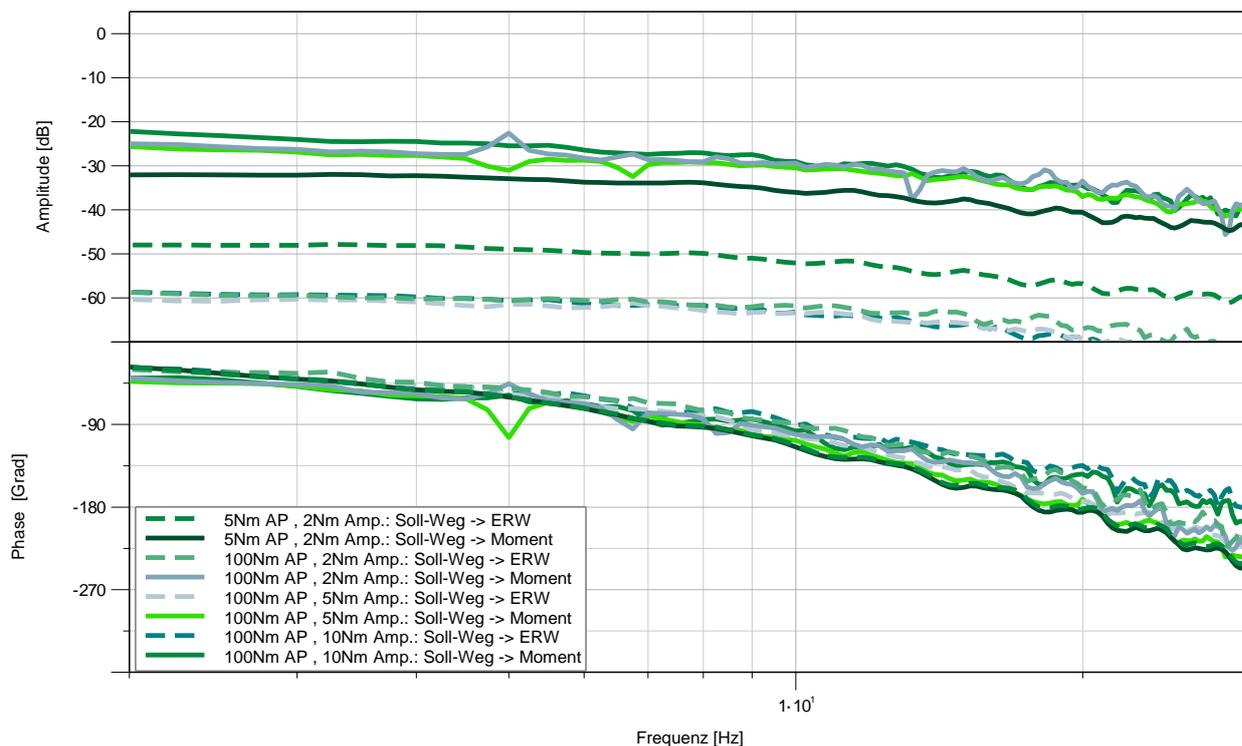


Bild 88: Vergleich des Übertragungsverhaltens des Hebelaktors für das Subsystem Aktor (Soll-Weg nach Einrückweg, gestrichelte Linie) sowie für das System aus Aktor und Kupplung (Soll-Weg nach Drehmoment, durchgezogene Linie) für 5 Nm und 100 Nm Arbeitspunkt und Modulation mit 2-Tap PRBS mit 2, 5, 10 Nm

Durch einen Vergleich der einzelnen Übertragungsstrecken kann nun die Teilstrecke innerhalb des Systems aus Aktorik und Kupplung identifiziert werden, die für die Dynamik des Systems die größte Einschränkung zur Folge hat. Dieser Vergleich ist für die Untersuchung bei einem Arbeitspunkt von 5 Nm und 2 Nm Modulationsamplitude in Bild 89 dargestellt. Da alle Übertragungsfunktionen das gleiche Eingangssignal als Basis haben, stellen diese Kurven eine schrittweise Erweiterung der Übertragungsstrecke dar, die bei der kleinsten Strecke, der Lageregelung der Aktortraverse, beginnt und bis hin zum Gesamtsystem aus Kupplung und Aktorik erweitert wird. Da alle diese Strecken nun abgesehen von einem Offset des Verstärkungsfaktors nahezu eine identische Schwingungsdynamik zeigen, folgt daraus, dass das begrenzendes Element die zu Beginn liegende Übertragungsstrecke sein muss, da sich der hier identifizierte Dynamikverlust über alle Erweiterungen des Systems fortpflanzt.

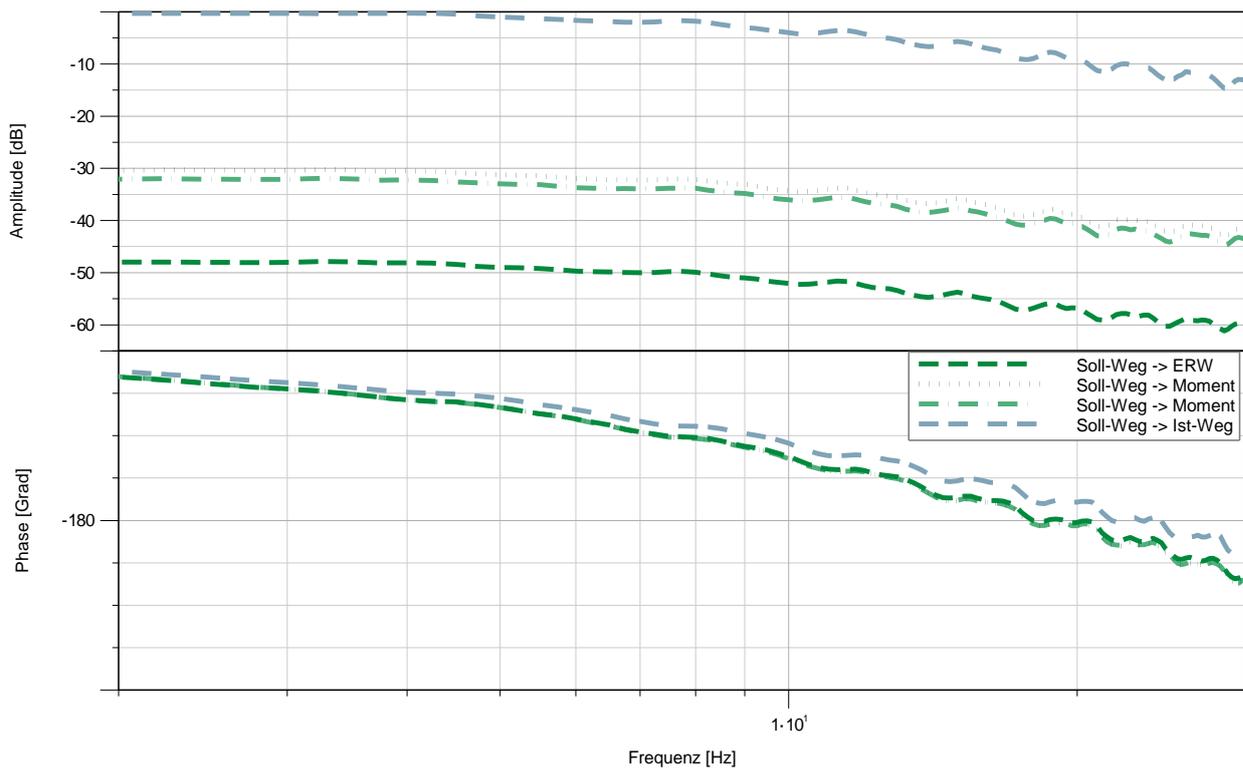


Bild 89: Vergleich der verschiedenen untersuchten Übertragungsstrecken für eine Modulation mit 2-Tap PRBS und 2 Nm Amplitude bei einem Arbeitspunkt von 5 Nm

### 5.6.5 Mögliche systeminhärente Limitierungen

Aus der vorangegangenen Analyse der Dynamik des Subsystems bestehend aus mechatronischem Aktor und Doppelkupplung lassen sich mögliche Einschränkungen für die aktive Dämpfung von Antriebsstrangschwingungen ableiten. Dies erfolgt basierend auf dem gewählten Konzept zur aktiven Dämpfung, für das das betrachtete Subsystem als Stellglied fungiert und somit für die Umsetzung der vom Regler ausgegebenen Stellgröße verwendet wird. Durch diese Rolle ergeben sich aus der Analyse der Dynamik in 5.6.4 mögliche Konsequenzen für die Dynamik und die Stabilität des geregelten Systems und somit auch für die sich ergebenden Möglichkeiten zur aktiven Dämpfung von Antriebsstrangschwingungen.

Ein maßgeblicher Einfluss auf die erreichbare Regelgüte, -stabilität und die Grenzen der aktiven Dämpfung ergibt sich aus der für das Stellglied ermittelten Grenzfrequenz von ca. 10 Hz. Hier liegt die Übertragung durch das Stellglied bei etwa 50% des statischen Verstärkungsfaktors bei einer Phasenverzögerung von mehr als  $90^\circ$ . Wenn diese Phasenverschiebung nicht durch den Regler kompensiert werden kann, so wird statt einer Dämpfung der Schwingung bei diesen hohen Frequenzen sogar eine leichte Verstärkung als Summe aus der Stellgröße und der bereits bestehenden Momentenanregung resultieren. Damit kann eine stabile Regelung im Bereich

oberhalb von 10 Hz nicht garantiert werden, da diese Frequenzen unter Umständen nicht oder nur unzureichend geregelt werden können.<sup>454</sup>

Ein weiteres Risiko stellen die unterschiedlichen Steigungen der Kupplungskennlinie dar, die sich im unterschiedlichen Verstärkungsfaktor für die Übertragung von Soll-Rollenweg nach übertragenem Drehmoment äußern, der für den Arbeitspunkt bei ca. 100 Nm in etwa um einen Faktor 3 bis Faktor 4 (entspricht einem Unterschied von 5–6 dB, vgl. Bild 88) höher ist als für den niedrigen Arbeitspunkt von ca. 5 Nm. Dieser Unterschied wird im Normalfall durch die Ansteuerung der Kupplung durch die Kupplungssteuerungssoftware bei Vorgabe eines einzustellenden Drehmomentes kompensiert, jedoch besteht bei einer ungenauen Umsetzung dieser Kompensation speziell im Übergangsbereich zwischen den unterschiedlichen Steigungen der Kupplungskennlinie die Gefahr eines Über- oder Untersteuerns des vom Regler ausgegebenen Stellsignals, wodurch der Regler nicht das gewünschte Ergebnis erzielt, da er entweder die bestehende Schwingung nur unzureichend dämpft, oder aber selbst eine starke Schwingung mit der gleichen Frequenz anregt.

## 5.7 Zwischenfazit

In diesem Kapitel wurde die Modellierung der Regelstrecke und die dafür notwendigen Methoden und Überlegungen vorgestellt. Die Modellierung des Antriebsstrangs als Regelstrecke basiert dabei auf der Schwingungsdynamik desselben, zu deren Identifikation ein methodisches Vorgehen entwickelt und angewandt wurde. Basierend auf den dabei beobachteten Phänomenen wurde anhand bereits bestehender Modellierungsansätze ein geeignetes Modell durch Synthese gewonnen, welches unter Berücksichtigung der zur Verfügung stehenden Signale in die Zustandsraumdarstellung überführt und dann um seine systeminhärenten Unsicherheiten ergänzt wurde. Anschließend erfolgte eine Modellreduktion zum Zwecke einer Steigerung der Effizienz der Reglerauslegung, wodurch jeweils ein Streckenmodell für das Reglerdesign und für die spätere Validierung des Reglers entstanden ist. Zuletzt wurde zur Komplettierung des Modells zur Validierung das in den betrachteten Fahrzeugen vorhandene Stellglied in seiner Dynamik modelliert und diese Modellierung mit der mithilfe der zuvor eingeführten Methode identifizierten Dynamik validiert.<sup>455</sup> Die Überlegungen und Ergebnisse dieses Kapitels bilden die Grundlage für die in Kapitel 7 folgende Auslegung des robusten Reglers.

---

<sup>454</sup> Lunze, 2006a

<sup>455</sup> Somit bildet das in diesem Kapitel entwickelte Modell einen Großteil der in der Arbeit von Freund, 2018 gestellten Anforderungen an die Modellierung technischer Systeme inklusive gewollter und ungewollter Prozesse und Wirkungen, einer detaillierten Verortung der Unsicherheit im System sowie einer detaillierten Abbildung von Produkt-Prozess-Zusammenhängen. (vgl. Freund, 2018)

## 6 Auswahl einer Methode zur Auslegung einer robusten Anti-Rupf-Regelung

In diesem Kapitel soll anhand der vorausgegangenen Betrachtungen des zu regelnden Systems und dem dargelegten Stand der Forschung vor dem Hintergrund der in Kapitel 3 formulierten Zielsetzung ein geeignetes regelungstechnisches Konzept zur Entwicklung einer robusten Anti-Rupf-Regelung ausgewählt werden. Da diese Problemstellung sehr effizient durch die Anwendung der SPALTEN Methode<sup>456</sup> gelöst werden konnte, ist dieses Kapitel in seiner Struktur am Ablauf dieser Vorgehensweise zur Problemlösung orientiert.

Die Situationsanalyse (SA) basiert auf den Erkenntnissen aus der Analyse des Stands der Forschung<sup>457</sup> zur grundlegenden Problemstellung mit dem Thema Kupplungsrupfen. Die wesentlichen Informationen sind, dass Kupplungsrupfen eine im Reibkontakt der Kupplung entstehende Drehmomentenschwankung mit periodischem Charakter ist, der entweder geometrische Fehler im Kupplungssystem oder ein negativer Reibwertgradient im tribologischen System zugrunde liegen und deren Auswirkung eine rotatorische Schwingung auf der Abtriebsseite des Antriebsstranges ist.<sup>458</sup> Ein weiterer Bestandteil dieser ersten Phase der Problemlösung sind die in Kapitel 5 gewonnenen Erkenntnisse über die Dynamik und Modellierung der Regelstrecke, die als ein System mit komplexer Schwingungsdynamik identifiziert wurde. Darüber hinaus wurde gezeigt, dass es von Nutzen ist, das System als ein unsicherheitsbehaftetes System zu beschreiben, da es zum einen streuende dynamische Eigenschaften aufweist und zum anderen eine Veränderung dieser Dynamik über die Lebensdauer des Systems zu erwarten ist. Das Ergebnis der Situationsanalyse ist demnach, dass für ein System mit unsicherer Dynamik durch potenzielle Momentenschwankungen hervorgerufene harmonische Schwingungen des sekundären Antriebsstrangs gedämpft werden sollen.

Im Rahmen der Problemeingrenzung (PE) wurde eine Fokussierung auf die Dämpfung der Schwingungen mittels einer aktiven Modulation des Kupplungsmomentes durch die zu entwickelnde Regelung vorgenommen, da somit die dämpfende Maßnahme an der gleichen Stelle in das System eingreift, an der auch die Störung in das System

---

<sup>456</sup> vgl. Abschnitt 2.1

<sup>457</sup> vgl. Kap. 2

<sup>458</sup> vgl. Abschnitt 2.6.3

eingeleitet wird und hierdurch eine hohe potenzielle Wirksamkeit der Maßnahme erwartet wird. Weiterhin kann festgestellt werden, dass im Falle von geometrischem Rupfen die Frequenz der auftretenden Schwingungen bekannt ist und hier lediglich die Amplitude sowie die Phasenlage als Unbekannte auftreten.<sup>459</sup> Ein weiterer Schritt der Problemeingrenzung ist die Forderung, dass die Regelung trotz der in der Situationsanalyse (SA) festgestellten unsicheren Streckendynamik robust und auch robust wirksam sein soll und dass bislang keine Umsetzung einer Maßnahme bekannt ist, die diese unsichere Dynamik berücksichtigt.<sup>460</sup>

Aus der Problemeingrenzung (PE) ergibt sich somit für die Suche alternativer Lösungen (AL) der Fokus auf die Suche einer Möglichkeit der aktiven Dämpfung von Rupfschwingungen durch Modulation des Kupplungsmomentes mithilfe einer Regelung, die in ihrem Ansatz die zu erwartenden Systemunsicherheiten berücksichtigt und die weiterhin nach Möglichkeit auch die a priori als verfügbar bekannten Informationen über die auftretenden Schwingungen nutzt.

Diesen Anforderungen folgend bietet sich nach Analyse der bestehenden Möglichkeiten der robusten Regelung insbesondere die Variante eines Reglers nach dem in Abschnitt 2.9.6 eingeführten  $\mathcal{H}_\infty$ -Ansatz im Zeitbereich an, da hier sowohl ein unsicherheitsbehaftetes System berücksichtigt werden kann<sup>461</sup> als auch der Einfluss unsicherer, zeitlich varianter, nicht-harmonischer äußerer Störungen sowie eines transienten Verhaltens,<sup>462</sup> wie es der Antriebsstrang während einer Anfahr- oder einer Ankriebsituation zeigt. Unter den Ansätzen dieser Kategorie stellt insbesondere der von SAVKIN UND PETERSEN vorgestellte Ansatz<sup>463</sup> mit der  $\mathcal{H}_\infty$ -Regelung eines unsicherheitsbehafteten Systems unter dem Einfluss äußerer harmonischer Störungen im Zeitbereich einen vielversprechenden Lösungsansatz dar.

Der zuletzt in der vorausgegangenen Phase zur Suche alternativer Lösungen (AL) genannte Ansatz wird aus den oben genannten Gründen auch derjenige Ansatz, der sich im Rahmen der Lösungsauswahl (LA) als der am geeignetste Lösungsansatz herausstellt und als solcher auch für die weitere Analyse und Umsetzung ausgewählt wird.

Nach der Auswahl einer geeigneten potenziellen Lösung wird dieser Ansatz nun im Rahmen der Tragweitenanalyse (TA) auf mögliche Chancen und Risiken analysiert,

---

<sup>459</sup> vgl. Abschnitt 2.6.3

<sup>460</sup> vgl. Abschnitt 2.8

<sup>461</sup> vgl. Abschnitt 2.9.6.2

<sup>462</sup> vgl. Abschnitt 2.9.6.3

<sup>463</sup> vgl. Abschnitt 2.9.6.6

um im Vorfeld der Umsetzung mögliche kritische Punkte zu identifizieren und geeignete Maßnahmen zu definieren, falls die an den kritischen Punkten identifizierten Risiken auftreten sollten. Dabei wurde als Chancen eine verbesserte Reglerperformance durch eine Berücksichtigung und geeignete Beschreibung der Systemunsicherheiten durch die Verwendung von IQC und s-Prozedur<sup>464</sup> sowie eine einfache Implementierung des Reglers durch die Verwendung elementarer Matrixoperationen und einem möglichst großen Einsatz von offline-Berechnungen in der Auslegungsprozedur. Die potenziellen Risiken, die bei der Analyse des Ansatzes identifiziert werden konnten sind zum einen die Lösbarkeit der Algorithmen zur Auslegung unter den gegebenen Voraussetzungen, dass das System nicht steuerbar, aber stabilisierbar ist. Weiterhin wird es für möglich gehalten, dass die Riccati Differenzialgleichungen, die zur Auslegung des Reglers von zentraler Bedeutung sind, nicht lösbar sind oder eine numerische Lösung nicht unter Einsatz der zur Verfügung stehenden Mittel möglich ist. Dieses Risiko resultiert daraus, dass für die Lösung der Differenzialgleichungen sehr komplexe Rechenoperationen notwendig sein können, oder im Falle einer zu berücksichtigenden Zeitabhängigkeit keine offline Berechnung möglich wäre. In beiden Fällen würde eine Implementierung der Berechnungen im Steuergerät signifikant erschwert. Zuletzt besteht das Risiko, dass der nach dem ausgewählten Ansatz umgesetzte Regler unter den gegebenen Voraussetzungen keine zufriedenstellende Ergebnisse liefert, da zum Beispiel der Regler sich aufgrund der berücksichtigten Unsicherheit robust verhält, jedoch die erreichte Performance nicht den Erwartungen entspricht.

Basierend auf der in diesem Kapitel dokumentierten Lösungsauswahl (LA) sowie der darauf aufbauenden Tragweitenanalyse (TA) werden in den folgenden Kapiteln die verbleibenden Phasen der Problemlösung, das Entscheiden und Umsetzen (EU) sowie das Nachbereiten und Lernen (NL) dargestellt.

---

<sup>464</sup> vgl. Abschnitte 2.9.4.2 und 2.9.6.4



## 7 Design eines robusten Anti-Rupf-Reglers nach der $H_\infty$ Methode

In diesem Kapitel wird aufbauend auf den Zielen der vorliegenden Arbeit<sup>465</sup>, der Modellierung der Regelstrecke<sup>466</sup> und der Auswahl eines geeigneten regelungstechnischen Ansatzes im vorangegangenen Kapitel ein Regler für die robuste Dämpfung von Antriebsstrangschwingungen durch eine aktive Modulation des von der Kupplung übertragenen Drehmomentes entwickelt. Dabei wird zunächst die Struktur des Reglers im Zustandsraum entwickelt, die Systemcharakteristik analysiert sowie die Auslegungsparameter des Reglers diskutiert und festgelegt. Anschließend werden die numerische Berechnung der Reglerkoeffizienten und die Umsetzung des entworfenen Reglers diskutiert.

### 7.1 Entwicklung der Reglerstruktur im Zustandsraum

Um das Problem der Entwicklung einer robusten Regelung unter Einsatz von  $H_\infty$ -Methoden effizient behandeln zu können, wird das bestehende System mit seinen äußeren Störungen und seinen Unsicherheiten auf ein bekanntes Problem der robusten Regelung zurückgeführt.

Dazu bedient man sich, wie schon in Abschnitt 2.9.6.6 gezeigt, der Einführung eines sogenannten *Erweiterten Systems* (englisch *augmented system*), welches die gleiche Struktur wie ein in einer bekannten und bereits gelösten Problemstellung vorliegendes System aufweist.

Im Falle der hier behandelten Entwicklung einer robusten Anti-Rupf-Regelung wählt man nun anhand der in den Kapiteln 5.2 bis 5.4 erfolgten Systemmodellierung im Zustandsraum sowie der in Kapitel 6 erläuterten Auswahl einer geeigneten Regelungsmethode den Ansatz der robusten Regelung durch Ausgangsrückführung mit einer Einschränkung des Endzustandes. Damit soll das in Abschnitt 5.4 abgeleitete Zustandsraummodell

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1u + B_{21}w_1 + B_{22}w_2 + B_3v \\ z &= C_1x + D_1u \\ y &= C_2x + v + D_2v\end{aligned}$$

in die Form des in 2.9.6.5 behandelten Systems

<sup>465</sup> vgl. Kapitel 3

<sup>466</sup> vgl. Kapitel 5

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_1u + B_2w \\ z &= C_1x + D_1u \\ y &= C_2x + D_2w\end{aligned}$$

gebracht werden (vgl. auch (2.117)).

Die hierzu notwendige Transformation orientiert sich an dem Vorgehen von PETERSEN ET AL., welches in Abschnitt 2.9.6.6 vorgestellt wurde.

Das Ziel der Transformation, das *Erweiterte System*, wird beschrieben durch

$$\begin{aligned}\dot{h} &= \hat{A}h + \hat{B}_1u + \tilde{B}_2\hat{w} \\ \hat{z} &= \hat{C}_1h + \hat{D}_1u \\ y &= \hat{C}_2h + \hat{D}_2\hat{w}\end{aligned}$$

Diese Struktur kann durch folgende Transformationen der Signalvektoren unter Verwendung der Gewichtungsmatrizen der Integralen Quadratischen Zwangsbedingung (IQC) sowie des Performance Kriteriums<sup>467</sup> erreicht werden

$$\begin{aligned}x(t) &\xrightarrow{\text{AugmentedSystem}} h(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ \dot{v}(t) \\ x(t) \end{bmatrix} \\ z(t) &\xrightarrow{\text{AugmentedSystem}} \hat{z}(t) = \begin{bmatrix} G^{\frac{1}{2}}u(t) \\ R^{\frac{1}{2}}x(t) \\ \sqrt{\tau} \cdot z(t) \end{bmatrix} \\ w(t) &\xrightarrow{\text{AugmentedSystem}} \hat{w}(t) = \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}}w_1(t) \\ M^{\frac{1}{2}}w_2(t) \\ N^{\frac{1}{2}}v(t) \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (7.1)$$

Dabei bleibt der Ausgangsvektor der Messung des Systems unberührt, es werden ein neuer Zustandsvektor  $h(t)$ , der die modellierten äußeren harmonischen Störungen  $v(t)$  aufgreift, ein neuer Ausgangsvektor zur Systemunsicherheit  $\hat{z}(t)$  mit den gewichteten Eingangs- und Zustandsvektoren sowie ein neuer Eingangsvektor der Systemunsicherheiten  $\hat{w}(t)$  mit den gewichteten Störungen aus der Systemunsicherheit, externen Störungen sowie der gewichteten Messfehler eingeführt.

<sup>467</sup> vgl. (7.6) und (7.7) im weiteren Verlauf, sowie 2.9.6.6

Die dem *Erweiterten System* zugeordneten Matrizen ergeben sich Entsprechend der gewählten Transformationen (7.1) und den so transformierten Systemgleichungen

$$\begin{aligned}
 \dot{h}(t) = \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \ddot{v} \\ \dot{x} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I} & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \\ B_1 & 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \dot{v} \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_2 \hat{Q}^{-\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix} \cdot \sqrt{\tau} \cdot \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} w_1 \\ M^{\frac{1}{2}} w_2 \\ N^{\frac{1}{2}} v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_1 \end{bmatrix} u \\
 \dot{z} = \begin{bmatrix} G^{\frac{1}{2}} u \\ R^{\frac{1}{2}} x \\ \sqrt{\tau} z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\tau} C_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ \dot{v} \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G^{\frac{1}{2}} \\ 0 \\ \sqrt{\tau} D_1 \end{bmatrix} u \\
 y = [D_2 \quad 0 \quad C_2] \begin{bmatrix} v \\ \dot{v} \\ x \end{bmatrix} &+ [0 \quad 0 \quad N^{-\frac{1}{2}}] \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} w_1 \\ M^{\frac{1}{2}} w_2 \\ N^{\frac{1}{2}} v \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{7.2}$$

Damit sind die Matrizen des *Erweiterten Systems* gemäß (7.2) gegeben durch

$$\begin{aligned}
 \hat{A} &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{I} & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \\ B_3 & 0 & A \end{bmatrix}; & \hat{B}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_1 \end{bmatrix}; & \tilde{B}_2 &= \begin{bmatrix} \hat{B}_2 \hat{Q}^{-\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}; \\
 \hat{B}_2 &= [\hat{B}_{21} \quad \hat{B}_{22}]; & \hat{Q} &= \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}; \\
 \hat{B}_{21} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\tau}} B_{21} \end{bmatrix}; & \hat{B}_{22} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\tau}} \cdot B_{22} \end{bmatrix}; & \hat{C}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R^{\frac{1}{2}} \\ 0 & 0 & \sqrt{\tau} C_1 \end{bmatrix}; \\
 \hat{D}_1 &= \begin{bmatrix} G^{\frac{1}{2}} \\ 0 \\ \sqrt{\tau} D_1 \end{bmatrix}; & \hat{C}_2 &= [D_2 \quad 0 \quad C_2]; & \hat{D}_2 &= [0 \quad 0 \quad N^{-\frac{1}{2}}]
 \end{aligned} \tag{7.3}$$

Durch diese Transformation wurde das Ausgangssystem, welches in Abschnitt 5.4 abgeleitet wurde, in die Form einer Problemstellung mit bereits bekannter Lösung überführt. Dabei wurde der Zustandsvektor entsprechend (7.1) erweitert, wobei bei der Erweiterung die spezielle Charakteristik der durch die Regelung zu dämpfenden  $n_{\text{Harm}}$  externen harmonischen Störung  $v(t)$  ausgenutzt wurde. Unter Verwendung der in (7.2) und (7.3) eingeführten Diagonalmatrix

$$\Omega = \begin{bmatrix} -\omega_1^2 & & & & & \\ & -\omega_2^2 & & & & \\ & & -\omega_3^2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & \\ & & & & & -\omega_{n_{\text{Harm}}}^2 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

lassen sich die externen harmonischen Störungen auch mithilfe der  $n_{\text{Harm}}$  Differenzialgleichungen

$$\Omega v = \ddot{v} \quad (7.5)$$

ausdrücken, welche sich nun in der zweiten Komponente der Zustandsgleichung des *Erweiterten Systems* wiederfinden.

Die in der Systemdarstellung (7.2) eingeführten Gewichtungsmatrizen für die Störungen ( $M, N, Q$ ), das Eingangssignal ( $G$ ) und den Zustandsvektor ( $R$ ) stammen ursprünglich aus der mit dem System assoziierten IQC

$$x(0)^T P_0 x(0) + \int_0^T \left[ w_1(t)^T Q(t) w_1(t) + w_2(t)^T M(t) w_2(t) + v(t)^T N(t) v(t) \right] dt \leq d + \int_0^T \|z(t)\|^2 dt \quad (7.6)$$

sowie dem quadratischen Gütefunktional

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = x(T)^T X_T x(T) + \int_0^T \left[ x(t)^T R(t) x(t) + u(t)^T G(t) u(t) \right] dt. \quad (7.7)$$

Die Verwendung dieser Gewichtungsmatrizen in der Darstellung des *Erweiterten Systems* resultiert aus der in Kapitel 2.9.6.4 eingeführten und angewandten s-Prozedur, aus der sich die Verwendung dieses *Erweiterten Systems* begründet.

Da der Zustandsvektor des *Erweiterten Systems* nun neben dem ursprünglichen Zustand  $x(t)$  auch die von außen auf das System einwirkende harmonische Störung  $v(t)$  beinhaltet, diese jedoch der Problemstellung folgend in ihren Amplituden  $a_i$  und Phasen  $\varphi_i$  unbekannt ist, kann der Zustand nun nicht mehr als vollständig bekannt bzw. messbar angenommen werden.<sup>468</sup> Daher soll das *Erweiterte System* nun mithilfe eines Ansatzes zur Regelung durch robuste Ausgangsrückführung geregelt werden, wobei wie zuvor erwähnt auf die bereits bekannte Lösung des Problems der Regelung in endlicher Zeit mit garantierter Regelgüte (engl. *finite-horizon guaranteed cost control*) zurückgegriffen wird.

<sup>468</sup> vgl. auch (5.22) in 5.4.2

Demnach ist das unsicherheitsbehaftete System (7.2), (7.5), (7.6) robust regelbar unter der Unterdrückung harmonischer Störungen, wenn eine Konstante  $\tau \in \left(0, \frac{c_0}{d}\right]$  existiert, womit für die Lösungen  $X(t)$  und  $Y(t)$  der beiden Riccati Differenzialgleichungen

$$-\dot{X}(t) = \hat{A}(t)^T X(t) + X(t) \hat{A}(t) + \hat{C}_1(t)^T \hat{C}_1(t) + X(t) \left( \hat{B}_2(t) \hat{Q}(t)^{-1} \hat{B}_2(t)^T - \hat{B}_1(t) E(t)^{-1} \hat{B}_1(t)^T \right) X(t) \quad (7.8)$$

$$\dot{Y}(t) = \hat{A}(t) Y(t) + Y(t) \hat{A}(t)^T + \hat{B}_2(t) \hat{Q}(t)^{-1} \hat{B}_2(t)^T + Y(t) \left( \hat{C}_1(t)^T \hat{C}_1(t) - \hat{C}_2(t)^T N(t) \hat{C}_2(t) \right) Y(t) \quad (7.9)$$

gilt, dass sowohl  $X(t)$  als auch  $Y(t)$  auf dem Intervall  $[0, T]$  definiert sind, dass  $X(0) < \hat{P}_0$  und  $X(T) = \hat{X}_T$ , sowie  $Y(0) = \hat{P}_0^{-1}$  und  $Y(t) > 0 \quad \forall t \in [0, T]$  und, dass der Spektralradius  $\rho(Y(t) X(t)) < 1 \quad \forall t \in [0, T]$  ist.

Wenn Lösungen  $X(t)$  und  $Y(t)$  zu den Gleichungen (7.8) und (7.9) existieren, die diese Bedingungen erfüllen, dann erreicht das System (7.2), (7.5), (7.6) die geforderte Regelgüte mit einem Regler der Form

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c(t) x_c(t) + B_c(t) y(t) \\ u(t) &= C_c(t) x_c(t) \end{aligned} \quad (7.10)$$

Dabei sind die Reglermatrizen gegeben durch<sup>469,470</sup>

$$\begin{aligned} A_c(t) &= \hat{A}(t) + \hat{B}_1(t)C_c(t) - B_c(t)\hat{C}_2(t) + \hat{B}_2(t)\hat{Q}(t)^{-1}\hat{B}_2(t)^T X(t) \\ B_c(t) &= (\mathbb{I} - Y(t)X(t))^{-1} Y(t)\hat{C}_2(t)^T N(t) \\ C_c(t) &= -E(t)^{-1}\hat{B}_1(t)^T X(t) \end{aligned} \quad (7.11)$$

## 7.2 Analyse der Systemcharakteristik

Bevor mit der Auslegung des Reglers begonnen wird, wird zunächst das in Kapitel 5 entwickelte Zustandsraummodell der Regelstrecke mithilfe der in Abschnitt 2.9.2 vorgestellten Methoden auf seine Eigenschaften hinsichtlich Steuerbarkeit, Beobachtbarkeit und Stabilisierbarkeit untersucht. Anhand der mit diesen Methoden abgeleiteten Ergebnisse kann eine erste Einschätzung der Erfolgchancen für den Entwurf eines robusten Reglers nach der im vorherigen Kapitel ausgewählten und im vorangegangenen Abschnitt vorgestellten Methode erfolgen. Für das zuvor entwickelte *Erweiterte System* ist zu erwarten, dass es aufgrund der zum Systemzustand zugeschlagenen harmonischen Störungen nicht steuerbar und damit auch nicht stabilisierbar ist.<sup>471</sup> Jedoch ist es hilfreich, diese Eigenschaften zunächst für das ursprüngliche System in seiner Zustandsraumdarstellung<sup>472</sup> zu überprüfen, um den Einfluss der in 7.1 vorgenommenen Erweiterung des Systemzustandes<sup>473</sup> auf die nun untersuchten Eigenschaften des Systems deutlich zu machen.

### 7.2.1 Steuerbarkeit

Zur Bewertung der Steuerbarkeit eines Systems anhand seiner Zustandsraumdarstellung kann entsprechend der Ausführungen in 2.9.2 geprüft werden, ob die Steuerbarkeitsmatrix, gegeben durch (2.45) vollen Rang besitzt. Ist

<sup>469</sup> Petersen et al., 2000

<sup>470</sup> Da diese Reglermatrizen aus einem Vorgehen analog zu dem von Petersen et al., 2000 vorgestellten Ansatz einer robusten Regelung unter einer Einschränkung des Endzustands (vgl. 2.9.6.5) abgeleitet werden, ergibt ein Vergleich der Berechnungen, dass die Darstellung von  $\hat{A}(t)$  als  $A_c(t) = \hat{A}(t) + \hat{B}_1(t)C_c(t) - B_c(t)\hat{C}_2(t) + (\hat{B}_2(t) - B_c(t))\hat{Q}(t)^{-1}\hat{B}_2(t)^T X(t)$  in Petersen et al., 2000 nicht korrekt ist. Stattdessen muss die Berechnung wie in (7.11) lauten ( $\hat{B}_1 C_c$  statt  $\hat{B}_2 C_c$  und  $\hat{B}_2 \hat{Q}(t)^{-1} \dots$  statt  $(\hat{B}_2(t) - B_c(t))\hat{Q}(t)^{-1} \dots$ ). Dies lässt sich auch anhand der Dimensionen der einzelnen Matrizen des erweiterten Systems plausibilisieren. weiterhin ist diese Berechnung neben den Ergebnissen in 2.9.6.5 außerdem konsistent mit den Darstellungen in Khargonekar et al., 1991 sowie in Teilen mit den Ergebnissen in Savkin und Petersen, 1995.

<sup>471</sup> Petersen et al., 2000

<sup>472</sup> vgl. 5.4

<sup>473</sup> vgl. (7.1)

dies der Fall, so kann das System innerhalb eines beliebig langen, endlichen Zeitintervalls in einen gewünschten Zustand gebracht werden.

Um diese Eigenschaft für das in Abschnitt 5.4 vorgestellte Zustandsraummodell zu prüfen, werden die Parameter von (Fzg. A)<sup>474</sup> für die Modellparameter eingesetzt und die Steuerbarkeitsmatrix

$$\begin{bmatrix} B_1 & AB_1 & A^2B_1 & A^3B_1 & \dots & A^{n-1}B_1 \end{bmatrix}$$

berechnet.

Die Bestimmung des Ranges dieser Matrix ergibt, dass diese keinen vollen Rang besitzt

$$\text{rang}\begin{bmatrix} B_1 & AB_1 & A^2B_1 & A^3B_1 & \dots & A^{n-1}B_1 \end{bmatrix} = 2$$

und damit das System nicht steuerbar ist. Dies erscheint anhand der neun vorhandenen Zustandsgrößen und lediglich einer verfügbaren Stellgröße nicht plausibel, da formal betrachtet mithilfe dieser einen Stellgröße, dem von der Kupplung übertragenen Drehmoment, alle dieser neun Zustandsgrößen beeinflusst werden können.<sup>475</sup> Eine mögliche Fehlerquelle ist hier die numerische Bestimmung des Ranges der Steuerbarkeitsmatrix mithilfe von Matlab<sup>476</sup>, weshalb die Berechnung nochmals zur Prüfung mithilfe des Computeralgebrasystems Maple<sup>477</sup> durchgeführt wird. Diese ergibt nun, dass die Steuerbarkeitsmatrix vollen Rang besitzt und damit das System vollständig steuerbar ist

$$\text{rang}\begin{bmatrix} B_1 & AB_1 & A^2B_1 & A^3B_1 & \dots & A^{n-1}B_1 \end{bmatrix} = 9.$$

## 7.2.2 Beobachtbarkeit

Ähnliches wie für die Steuerbarkeit gilt auch für die Beobachtbarkeit eines Systems in seiner Zustandsraumdarstellung. In diesem Falle wird geprüft, ob es möglich ist, anhand der Messung der Ausgangsgrößen des Systems seinen Zustand vollständig zu rekonstruieren.<sup>478</sup> Hierzu wird ermittelt, ob die Steuerbarkeitsmatrix des invertierten Systems (2.51)

$$\begin{bmatrix} C_2^+ & A^+C_2^+ & (A^+)^2C_2^+ & (A^+)^3C_2^+ & \dots & (A^+)^{n-1}C_2^+ \end{bmatrix}$$

<sup>474</sup> vgl. 12.1

<sup>475</sup> Auch wenn der Einfluss auf die Motordrehzahl im Falle der hier angestrebten Regelung aufgrund der kleinen Variationen des von der Kupplung übertragenen Drehmomentes nicht realistisch und auch nicht gewünscht ist.

<sup>476</sup> The Mathworks Inc., 2015

<sup>477</sup> Maplesoft, 2014

<sup>478</sup> vgl. 2.9.2.3

vollen Rang besitzt. Wie im Falle der Ermittlung der Steuerbarkeit werden hierzu wieder die Parameter des (Fzg. A)<sup>474</sup> und aufgrund der damit resultierenden ausschließlich reellen Matrixelemente die Transponierung  $A^T$  und  $C_2^T$  statt der Adjungierten dieser Matrizen verwendet.

Die Bestimmung des Ranges dieser Matrix ergibt

$$\text{rang} \begin{bmatrix} C_2^+ & A^+ C_2^+ & (A^+)^2 C_2^+ & (A^+)^3 C_2^+ & \dots & (A^+)^{n-1} C_2^+ \end{bmatrix} = 3$$

und damit, dass das System nicht beobachtbar ist. Auch dieses Ergebnis scheint anhand der Tatsache, dass der Systemzustand vollständig messbar ist, nicht plausibel. Eine mögliche Ursache für diese Diskrepanz kann die Berechnung des Ranges einer Matrix mithilfe von Matlab sein, die angesichts der in der Beobachtbarkeitsmatrix auftretenden Potenzen der Matrix  $A$  und den dabei entstehenden betragsmäßig großen Zahlen ( $\max \|M_{i,j}\| = 4.4 \cdot 10^{29}$ ) sowie der mit  $(9 \times 81)$  großen Dimensionen der Beobachtbarkeitsmatrix möglicherweise keine zuverlässigen Ergebnisse liefert.

Daher wird dieser Test auf Beobachtbarkeit des Systems, wie auch im Falle der Steuerbarkeit, nochmals mithilfe von Maple durchgeführt. Auch hier zeigt sich nun, dass die Matrix vollen Rang besitzt und das System somit, wie erwartet, beobachtbar ist

$$\text{rang} \begin{bmatrix} C_2^+ & A^+ C_2^+ & (A^+)^2 C_2^+ & (A^+)^3 C_2^+ & \dots & (A^+)^{n-1} C_2^+ \end{bmatrix} = 9.$$

### 7.2.3 Stabilisierbarkeit

Ähnlich der Betrachtung in den vorangegangenen Abschnitten erfolgt nun als letzter Teil der Analyse der Systemcharakteristik der Regelstrecke die Prüfung, ob das System mithilfe eines geeigneten Reglers stabilisierbar ist. Grundlage hierfür sind nochmals die Systemmatrizen  $A$  und  $B_1$  der Zustandsgleichung des Systems. Der Unterschied zur Betrachtung der Steuerbarkeit des Systems besteht darin, dass im Falle der Untersuchung der Stabilisierbarkeit nicht gefordert wird, dass die Steuerbarkeitsmatrix (2.45) vollen Rang besitzt, sondern dass die Bedingung des sog. Popov-Belevitch-Hautus Test (2.46)

$$\text{rank} [A - \lambda_i \cdot \mathbb{I} \quad B_1] = n, \quad n := \dim(A)$$

für alle instabilen Moden des Systems ( $\lambda_i \in \mathbb{C}^+$ ) erfüllt ist.<sup>479</sup>

<sup>479</sup> vgl. 2.9.2.2

Auch wenn dieser Test formal durch die zuvor abgedeckte Prüfung auf Steuerbarkeit abgedeckt ist, wird er hier trotzdem durchgeführt, da dieses Ergebnis aus Abschnitt 7.2.1 unter Verwendung einer anderen Methode nochmals überprüft werden kann.

Dazu müssen zunächst die Eigenwerte der Systemmatrix  $A$  bestimmt werden, die sich für die Parameter des (Fzg.  $A$ )<sup>474</sup> und mit (5.7) wie folgt ergeben

$$\lambda_A = \begin{bmatrix} -26.10 + i \cdot 2.58 \cdot 10^3 \\ -26.09 + i \cdot 75.10 \\ -14.04 \\ 0.63 \\ 7.50 \cdot 10^{-5} \pm i \cdot 4.56 \cdot 10^{-3} \\ -2.38 \end{bmatrix}.$$

Damit repräsentieren die Eigenwerte

$$\{\lambda_A \in \overline{\mathbb{C}^+}\} = \begin{bmatrix} 0.63 \\ 7.50 \cdot 10^{-5} \pm i \cdot 4.56 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}$$

die beiden instabilen Eigenmoden des Systems. Für diese wird nun der oben genannte Popov-Belevitch-Hautus Test durchgeführt, woraus resultiert, dass die Matrix

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_{A,i} \cdot \mathbb{I} & B_1 \end{bmatrix}$$

für diese Eigenmoden vollen Rang besitzt und damit das System unter der Verwendung eines geeigneten Reglers stabilisierbar ist. Weiterhin ist zu erwähnen, dass die zweite instabile Eigenmode, die mit dem komplex konjugierten Polpaar verknüpft ist, eine sehr niedrige Eigenfrequenz aufweist ( $f_{inst.} < 10^{-3}$  Hz), und damit das integrative Verhalten des Systems für ein konstantes Kupplungsmoment repräsentiert.

## 7.2.4 Analyse des Erweiterten Systems

Abschließend wird nun noch das in 7.1 eingeführte *Erweiterte System* auf die oben diskutierten Eigenschaften Stabilisierbarkeit, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit geprüft. Allerdings ist hier zu erwarten, dass das System aufgrund der Erweiterung des Systemzustandes um die harmonischen Störungen nun nicht mehr steuerbar und damit auch nicht stabilisierbar ist.<sup>480,481</sup> Dies lässt sich damit begründen, dass im Allgemeinen davon ausgegangen wird, dass ein Regler zwar in der Lage sein kann, die Auswirkungen der harmonischen Störungen auf den Systemzustand zu kompensieren, nicht jedoch die harmonischen Störungen selbst, da diese als externe Störungen modelliert sind und damit außerhalb der Wirkung eines Reglers sind.

<sup>480</sup> Petersen et al., 2000

<sup>481</sup> Savkin und Petersen, 1995

Die Analyse der Steuerbarkeit mithilfe von Matlab ergibt unter Verwendung der Matrizen  $\hat{A}$  und  $\hat{B}_1$  in (7.3) für den Rang der Steuerbarkeitsmatrix

$$\text{rang}\left[\hat{B}_1 \quad \hat{A}\hat{B}_1 \quad \hat{A}^2\hat{B}_1 \quad \hat{A}^3\hat{B}_1 \quad \dots \quad \hat{A}^{n-1}\hat{B}_1\right] = 2 .$$

Hier sollte für die Steuerbarkeitsmatrix derselbe Rang gefunden werden, wie für das ursprüngliche zu regelnde System in Abschnitt 7.2.1, da die Steuerbarkeitsmatrix aufgrund der Wahl der Matrix  $\hat{B}_1$  in (7.3) sich lediglich von der des ursprünglichen Systems durch zusätzliche Nullzeilen in den ersten sechs Zeilen unterscheidet. Daher sollte die Bestimmung des Ranges hier, wie auch durch eine nochmalige Berechnung mit Maple bestätigt wird,

$$\text{rang}\left[\hat{B}_1 \quad \hat{A}\hat{B}_1 \quad \hat{A}^2\hat{B}_1 \quad \hat{A}^3\hat{B}_1 \quad \dots \quad \hat{A}^{n-1}\hat{B}_1\right] = 9$$

ergeben. Jedoch bleibt das Fazit, dass das *Erweiterte System* nicht steuerbar ist, unverändert.

Zur Überprüfung der Beobachtbarkeit des *Erweiterten Systems* werden nun die Matrizen  $\hat{A}$  und  $\hat{C}_2$  in (7.3) zur Berechnung der Beobachtbarkeitsmatrix herangezogen, womit sich für die Prüfung der Beobachtbarkeit

$$\text{rang}\left[\hat{C}_2^+ \quad \hat{A}^+\hat{C}_2^+ \quad (\hat{A}^+)^2\hat{C}_2^+ \quad (\hat{A}^+)^3\hat{C}_2^+ \quad \dots \quad (\hat{A}^+)^{n-1}\hat{C}_2^+\right] = 2$$

ergibt. Auch hier sind bei der Berechnung mit Matlab unpräzise Ergebnisse aufgrund der schlechten Konditionierung der Matrix sowie ihrer großen Dimensionen von (15×135) zu erwarten, weshalb wie zuvor eine nochmalige Prüfung mit Maple durchgeführt wird. Diese ergibt

$$\text{rang}\left[\hat{C}_2^+ \quad \hat{A}^+\hat{C}_2^+ \quad (\hat{A}^+)^2\hat{C}_2^+ \quad (\hat{A}^+)^3\hat{C}_2^+ \quad \dots \quad (\hat{A}^+)^{n-1}\hat{C}_2^+\right] = 15$$

und damit, dass das *Erweiterte System* beobachtbar ist. Dies erscheint plausibel, da die harmonischen Störungen sich direkt auf die messbaren Zustandsgrößen des zu regelnden Systems auswirken und sie damit auch aus einer Messung dieser Größen rekonstruiert werden können.

Zuletzt folgt die Prüfung auf Stabilisierbarkeit des Systems mithilfe der Überprüfung der Steuerbarkeit aller instabilen Moden des Systems. Hier ist nach den Betrachtungen aus 7.2.3 zu erwarten, dass das *Erweiterte System* zu den zuvor gefundenen instabilen Moden der ursprünglichen Regelstrecke nun durch die drei modellierten harmonischen Störungen mindestens sechs zusätzliche instabile Eigenwerte

aufweist.<sup>482</sup> Dies wird durch eine Analyse der Eigenwerte der Matrix  $\hat{A}$  mit den folgenden zu instabilen Moden zugeordneten Eigenwerten

$$\{\lambda_A \in \overline{\mathbb{C}}^+\} = \begin{bmatrix} 0 \pm i \cdot 43.98 \\ 0 \pm i \cdot 50.27 \\ 0 \pm i \cdot 94.25 \\ 0.63 \\ 7.50 \cdot 10^{-5} \pm i \cdot 4.56 \cdot 10^{-3} \\ 47.16 \pm i \cdot 106.00 \end{bmatrix}$$

bestätigt. Für diese ergibt sich als Ergebnis des Popov-Belevitch-Hautus Test, dass die durch die Synthese zum *Erweiterten System* hinzugekommenen instabilen Moden (repräsentiert durch die ersten drei komplex konjugierten Polpaare mit einem Realteil identisch mit Null) nicht steuerbar sind und somit das System, wie zuvor bereits erwartet, auch nicht stabilisierbar ist.

### 7.2.5 Zwischenfazit

Anhand der vorangegangenen Analyse der Systemeigenschaften im Hinblick auf Stabilisierbarkeit, Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit konnte gezeigt werden, dass es möglich ist, das System mithilfe eines geeigneten Reglers zu stabilisieren. Weiterhin konnte gezeigt werden, dass es möglich ist, mithilfe eines geeigneten Beobachters aus den vorhandenen Messgrößen den Systemzustand zu rekonstruieren sowie das System durch einen geeigneten Regeleingang in jeden möglichen Systemzustand zu versetzen. Diese Betrachtungen wurden zunächst nur für das ursprüngliche Systemmodell angestellt, jedoch lassen diese Ergebnisse vermuten, dass das System auch unter dem Einfluss äußerer Störungen, zumindest mit einer geeigneten Kombination aus Regler und Beobachter, noch stabilisierbar ist. Die Analyse des *Erweiterten Systems* in Abschnitt 7.2.4 bestätigt dies, da dieses synthetisierte System beobachtbar ist und sich somit der Systemzustand aus den Messgrößen vollständig rekonstruieren lässt. Dadurch bleibt das System auch unter dem Einfluss äußerer Störungen, unter Verwendung eines geeigneten Beobachters, in Bezug auf seine tatsächlichen Zustandsgrößen steuer- und damit auch stabilisierbar. Basierend auf dieser Schlussfolgerung wird im Folgenden der in Abschnitt 7.1 vorgestellte Ansatz zur robusten Regelung auf das gestörte und unsicherheitsbehaftete System angewandt.

<sup>482</sup> Je Schwingungsmode ein komplex konjugiertes Polpaar mit  $\Re(\lambda) = 0$ .

## 7.3 Auslegung eines robusten Reglers mit Ausgangsrückführung zur Unterdrückung von Rupf-Schwingungen im PKW-Antriebsstrang

### 7.3.1 Übersicht und Bedeutung der Parameter des Reglerdesigns

Für das Design des Reglers stehen nach den Ausführungen in Abschnitt 7.1 mehrere Optionen zur Verfügung, um eine gewünschte Charakteristik des Gesamtsystems zu erzielen.

Als erstes Mittel zur Beeinflussung der Reglercharakteristik gelten die Gewichtungsmatrizen aus dem Gütekriterium (7.7) und der Integralen Quadratischen Zwangsbedingung (7.6), da mit diesen die grundlegende Designentscheidung, worauf der Fokus der Regelung gelegt werden soll, getroffen werden kann. Meistens werden diese Matrizen, trotz anderslautender allgemeingültiger Notation in den vorangegangenen Abschnitten, zeitunabhängig gewählt. Diese Verwendung wird im Folgenden aufgrund der damit einhergehenden Vereinfachung der Problembehandlung und Berechnung übernommen.

Im Falle des Gütefunktional wird mithilfe der Matrizen  $G$ ,  $R$  und  $X_T$  das Hauptaugenmerk der Regelung entweder darauf gelegt, dass die Regelung energieoptimal (Gewichtungsmatrix  $G$ ) oder unter Berücksichtigung eines minimalen Trajektorienverlaufes ( $R$ ) erfolgt und bestimmt, welches Gewicht dem zu erreichenden Endzustand zukommt ( $X_T$ ). Zum Beispiel kann eine verlaufsoptimale Regelung unter sehr guter Annäherung an den gewünschten Zielzustand  $x(T) = 0$  durch eine hohe Gewichtung in  $R$  und  $X_T$  mit den Elementen von  $X_T$  signifikant größer als den Elementen von  $R$  und  $G$  erzielt werden.<sup>483</sup> Eine solche Regelung wäre jedoch normalerweise nicht energieoptimal, da dieser Aspekt im Gütekriterium gegenüber den Aspekten des Trajektorienverlaufes und des vorgegebenen Endzustandes weniger stark gewichtet wurde. Demnach wird eine Abweichung vom Ziel der Regelung entsprechend der gewählten Gewichte  $G$ ,  $R$  und  $X_T$  bestraft.

Eine ähnliche Möglichkeit bieten die Gewichtungsmatrizen der IQC,  $Q$ ,  $N$ ,  $M$  und  $P_0$ . Hierbei wird jedoch nicht das Ziel der Regelung vorgegeben, sondern die Systemunsicherheit sowie der Einfluss der äußeren Störungen auf das Regelergebnis entsprechend der Ausführungen in Abschnitt 2.9.4.2 charakterisiert. Im Falle eines Rauschsignales (z.B.  $v(t)$  in (7.6)) wird so zum Beispiel die reziproke Kovarianzmatrix des modellierten Rauschens als Gewichtung eingesetzt.<sup>484</sup> Der gesamte Term

---

<sup>483</sup> Föllinger, 1988

<sup>484</sup> Petersen et al., 2000

$v(t)^T N(t)v(t)$  in der Integralen Quadratischen Zwangsbedingung bekommt somit die Bedeutung der Varianz des Zufallsprozesses des Rauschens. Für die Matrix  $M(t)$  in der IQC, welche den Einfluss der Momente  $M_{Load}$  und  $M_{Eng}$ , die von außen auf das System einwirken, beschreibt kann eine andere Überlegung angestellt werden. Da hier lediglich bekannt ist, in welchem Intervall sich diese Werte befinden werden, kann als einfachste Beschreibung im Rahmen der IQC eine Begrenzung auf dieses Intervall gewählt werden.

Für die anderen beiden Matrizen der IQC müssen längere Überlegungen angestellt werden, um deren Parametrierung korrekt auszuführen. Hierbei muss beachtet werden, dass die IQC eine Ungleichung ist, die den Raum der erlaubten Ausgangssignale der Systemunsicherheit  $(w_1(t), w_2(t), n(t), x(0))$  in Relation zum Eingangssignal der Systemunsicherheit  $z(t)$  beschränkt.

Als letzte verbleibende Gewichtungsmatrix der IQC bleibt nun noch die Gewichtung  $P_0$  des Anfangszustandes. Diese ist als einzige nicht Teil der Integration über die Zeit und kann somit, wie auch die als vorhanden angenommene nicht modellierte Dynamik, dem Parameter  $d$  zugordnet werden. Dadurch wird an den unbekanntem Anfangszustand  $x(0)$  lediglich die Forderung gestellt, dass er in seiner Norm beschränkt ist. Weiterhin gibt die Wahl von  $P_0$  die Unsicherheit im Anfangszustand des Systems relativ zum Einfluss der systeminhärenten Unsicherheit beschrieben durch das Signal  $w(t)$  an, wobei eine größere Unsicherheit im Anfangszustand durch eine kleinere Norm von  $P_0$  ausgedrückt wird, während eine größere Norm von  $P_0$  ein größeres Wissen über den Anfangszustand reflektiert.<sup>485</sup> Im Folgenden wird nun der Einfachheit halber  $P_0 = \text{diag}(P_{0,11}; P_{0,22}; \dots; P_{0,nn})$  gewählt.

Dies führt auf den verbleibenden Designparameter in der IQC, den Parameter  $d$ , der aufgrund des Grundcharakters der IQC als Matrixnorm (siehe Abschnitt 2.9.4.2) als Norm für die eventuell im Systemmodell nicht berücksichtigte Systemdynamik angesehen werden kann und anhand der vorigen Erläuterung ebenfalls die Norm des unbekanntem Anfangszustandes beinhaltet. Daher steht ein großer Wert von  $d$  gleichbedeutend für einen großen Einfluss der nicht berücksichtigten Systemdynamik respektive des Anfangszustandes.

Darüber hinaus existieren für das Reglerdesign die Parameter  $c_0, c_1, c_2, c_3$ , welche als reine Normierungs- und Gewichtungsparameter angesehen werden können. Es

---

<sup>485</sup> Khargonekar et al., 1991

wird lediglich durch das relative Gewicht zwischen diesen Parametern den harmonischen Störungen ein größeres ( $c_0 \ll c_{1,2,3}$ ) oder ein kleineres Gewicht ( $c_0 \gg c_{1,2,3}$ ) zuteil. Weiterhin besteht durch die Wahl der Parameter  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  zueinander die Möglichkeit, die unterschiedlichen harmonischen Störungen in ihrem Einfluss auf das System gegeneinander zu gewichten.

Final bleibt noch der Parameter  $\tau$ , welcher als direkte Folge der Anwendung der s-Prozedur Eingang in das System findet. Dieser Parameter hängt zunächst einmal von der zuvor getroffenen Wahl der Parameter  $d$  und  $c_0$  ab, da er nach den Ausführungen

in 7.1 Werte im Intervall  $\left(0, \frac{c_0}{d}\right]$  annehmen darf. Des Weiteren muss in jedem Fall

sichergestellt werden, dass für die getroffene Wahl für  $\tau$  die beiden Riccati Matrix Differenzialgleichungen (7.8) und (7.9) eine Lösung haben. Fernab dieser Einschränkungen bleibt mit diesem Parameter jedoch die Möglichkeit – entsprechend den Ausführungen zur s-Prozedur – die IQC und das Gütekriterium gegeneinander zu gewichten, jedoch ist die zentrale Rolle von  $\tau$  die des finalen Designparameters, durch dessen nach den zuvor getroffenen Designentscheidungen erfolgende Variation eine konvergierende und damit den Anforderungen genügende Reglerkonfiguration gefunden werden kann.

### 7.3.2 Entwicklung eines geeigneten Performance-Kriteriums

Aufgrund ihres zuvor diskutierten Einflusses können die zur Verfügung stehenden Designparameter des Gütekriteriums (7.7) entsprechend der gewünschten Regelcharakteristik gewählt werden. Zu Beginn werden aufgrund ihres großen Einflusses auf das Regelergebnis die Gewichtungsmatrizen gewählt, welche aufgrund der Erläuterungen zu Beginn dieses Abschnittes als Vielfache von entsprechend dimensionierten Diagonalmatrizen gewählt werden. Somit ergeben sich, der Orientierungshilfe zur initialen Parametrierung von Optimalitätsgewichten als sich in ihren Größenordnungen voneinander unterscheidenden Parametern folgend,<sup>486</sup>

$$\begin{aligned} G &= 1 & G &\in \mathbb{R} \\ R &= 100 \cdot \text{diag}(0,1,1,1,1,0,\dots,0) & R &\in \mathbb{R}^{9 \times 9} \\ X_T &= 10^4 \cdot \text{diag}(0,1,1,1,1,0,\dots,0) & X_T &\in \mathbb{R}^{9 \times 9} \end{aligned} \quad (7.12)$$

Die Matrizen  $R$  und  $X_T$  sind hier nicht als Vielfache der Einheitsmatrix gegeben, da der Regler nur die Drehzahlen auf der Sekundärseite der Kupplung in den gewünschten Zustand führen soll, jedoch keinerlei direkten Einfluss auf die

<sup>486</sup> Lunze, 2013b

Verdrehwinkel der einzelnen Wellen nehmen soll und darüber hinaus die Motordrehzahl aufgrund der technischen Voraussetzungen nicht signifikant beeinflussen kann. Die relative Dimensionierung der Matrizen zueinander ergibt sich aus den Zielen für einen Anti-Rupf-Regler. Das Hauptaugenmerk liegt zunächst darauf die Drehzahlschwingungen möglichst vollständig zu eliminieren, auf jeden Fall jedoch auf ein Minimum zu dämpfen, weshalb das Gewicht des Endzustandes  $X_T$  als größte der drei Gewichtungsmatrizen gewählt wird. Bei der Steuerung des Systems zum gewünschten Endzustand muss nun jedoch darauf geachtet werden, dass die Drehzahlschwankungen bis zum Erreichen dieses Punktes nicht zu groß sind, da der Fahrer dies andernfalls in Form einer Beeinträchtigung des subjektiven Fahrkomforts verspüren könnte. Daher wird die Gewichtung der Trajektorie  $R$  als die zweitgrößte gewählt. Letztendlich soll die Regelung unter Beachtung der beiden erstgenannten Punkte auch möglichst energieoptimal erfolgen, um der Aktorik keine zu hohen Belastungen aufzuzwingen oder über die Strom- oder Spannungsbegrenzung hinaus zu regeln. Daher wird die verbleibende Matrix  $G \gg 0$  gewählt.

Als letzter zu definierender Parameter des Gütekriteriums (7.7) bleibt nun die Zeit  $T$  bis zu welcher die Regelung den gewünschten Endzustand des Systems eingeregelt hat. Diese Zeit wird für den Fall einer Anti-Rupf-Regelung anhand der Zeitkonstante einer charakteristischen Rupfschwingung gewählt. Dafür wird eine Schwingung mit einer typischen Eigenfrequenz des Antriebsstranges von  $f_{Typ} = 7$  Hz und damit einer Periodendauer von  $T_{Typ} \approx 0,143$  s gewählt. Nun wird die Forderung gestellt, dass diese Rupfschwingung nach einem Maximum von 1,5 Schwingungsperioden möglichst vollständig ausgeregelt sein soll, woraus sich näherungsweise

$$T = 0,22 \text{ s} \quad (7.13)$$

für die Zeit bis zum Erreichen des gewünschten Endzustandes ergibt.

Für die noch zu wählenden Skalierungsparameter  $\{c_0, c_1, c_2, c_3\}$  kann man zunächst festlegen, dass alle drei harmonischen Störungen – also die drei Arten geometrischen Rupfens – für die Regelung gleich relevant sind. Daher gilt für die damit assoziierten Parameter  $c_1 = c_2 = c_3 = c_{Harm}$ . Nun kann diesen Störungen entsprechend 7.3.1 gegenüber der unsicheren Systemdynamik ein größeres oder kleineres Gewicht gegeben werden. Da die Regelung in erster Linie robust gegenüber Störungen sein soll, wird die Variante  $c_{Harm} < c_0$  und damit  $c_0 = 100$  und  $c_{Harm} = 0,01$  gewählt.

### 7.3.3 Entwicklung einer Integralen Quadratischen Zwangsbedingung

Nun folgt die Parametrierung der Integralen Quadratischen Zwangsbedingung (IQC) (7.6), welche entsprechend der Erläuterungen in 7.3.1 derart vorgenommen wird, dass

sie den Raum der erlaubten Systemunsicherheiten auf die erwarteten und in Kapitel 5 beschriebenen Unsicherheiten und Störungen einschränkt.

Um diese Parametrierung effizient, also mit mathematisch überschaubarem Aufwand und trotzdem aus regelungstechnischer Sicht sinnvoll, vorzunehmen, wird der grundlegende mathematische Charakter der IQC ausgenutzt. Da es sich bei der IQC um eine Ungleichung handelt, kann sie in einfacher Weise als eine Begrenzung der Extremwerte der Systemunsicherheit angesehen werden und darf daher auch mithilfe von Abschätzungen parametrierbar werden. Jedoch muss dabei beachtet werden, dass eine zu großzügige Parametrierung der IQC einer Überabschätzung des Einflusses der Unsicherheit entsprechen würde, welche in der Folge zu einer zu konservativen Auslegung des Reglers und damit zu einem nicht-optimalen Regelverhalten im Sinne einer schlechten Performance der Anti-Rupf-Regelung führen würde. Entsprechend muss hier die Balance zwischen einer möglichst präzisen Abschätzung der Parameter und einer möglichst einfachen mathematischen Handhabung gewahrt werden.

Für die Gewichtung  $Q(t)$  des Ausgangs  $w_1(t)$  der in (5.18) beschriebenen Unsicherheit ergibt sich dabei die folgende Abschätzung:

Im Falle, dass  $w_2(t) = 0$ ,  $n(t) = 0$ ,  $x(0) = 0$  gilt nach (7.6) ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\int_0^T w_1(t) Q w_1(t) dt \leq d + \int_0^T \|z(t)\|^2 dt.$$

Die linke Seite der Ungleichung lässt sich nun mithilfe der Definition von  $w_1(t) = \Delta(t)z(t)$  sowie der Annahme, dass die Gewichtungsmatrix  $Q$  der Einfachheit halber ein Vielfaches der Einheitsmatrix  $Q = q \cdot \mathbb{I}$  ist, abschätzen

$$\begin{aligned}
 w_1(t) Q w_1(t) &= z(t)^T \Delta(t)^T Q \Delta(t) z(t) \\
 &= \mathbf{q} \cdot \left[ \begin{aligned} &\Delta_{d,IPS}^2 \omega_{IPS}^2 + i_{GB}^2 \cdot \Delta_{d,IPS}^2 \omega_{OPS}^2 + \Delta_{d,SShaft}^2 \omega_{Rad}^2 + \Delta_{d,Axle}^2 \omega_{Veh}^2 \\ &+ \Delta_{c,IPS}^2 \varphi_{IPS}^2 + i_{GB}^2 \cdot \Delta_{c,IPS}^2 \varphi_{OPS}^2 + \Delta_{c,SShaft}^2 \varphi_{Rad}^2 + \Delta_{c,Axle}^2 \varphi_{Veh}^2 + \Delta_{M,Cl}^2 M_{Cl}^2 \end{aligned} \right] \\
 &\quad - 2 \cdot \mathbf{q} \cdot i_{diff}^2 i_{Rad}^2 \cdot \left[ \begin{aligned} &i_{GB} \Delta_{d,IPS}^2 \omega_{IPS} \omega_{OPS} + \frac{1}{i_{Diff}} \Delta_{d,SShaft}^2 \omega_{OPS} \omega_{Rad} + \frac{1}{i_{Rad}} \Delta_{d,Axle}^2 \omega_{Rad} \omega_{Veh} \\ &+ i_{GB} \Delta_{c,IPS}^2 \varphi_{IPS} \varphi_{OPS} + \frac{1}{i_{Diff}} \Delta_{c,SShaft}^2 \varphi_{OPS} \varphi_{Rad} \end{aligned} \right] \\
 &\quad + \mathbf{q} \cdot \left[ i_{Rad}^2 \Delta_{d,SShaft}^2 \omega_{OPS}^2 + i_{Diff}^2 \Delta_{d,Axle}^2 \omega_{Rad}^2 + i_{Rad}^2 \Delta_{c,SShaft}^2 \varphi_{OPS}^2 + i_{Diff}^2 \Delta_{c,Axle}^2 \varphi_{Rad}^2 \right] \\
 w_1(t) Q w_1(t) &\leq \mathbf{q} \cdot \left[ \begin{aligned} &\Delta_{d,IPS}^2 \omega_{IPS}^2 + i_{GB}^2 \cdot \Delta_{d,IPS}^2 \omega_{OPS}^2 + \Delta_{d,SShaft}^2 \omega_{Rad}^2 + \Delta_{d,Axle}^2 \omega_{Veh}^2 \\ &+ \Delta_{c,IPS}^2 \varphi_{IPS}^2 + i_{GB}^2 \cdot \Delta_{c,IPS}^2 \varphi_{OPS}^2 + \Delta_{c,SShaft}^2 \varphi_{Rad}^2 + \Delta_{c,Axle}^2 \varphi_{Veh}^2 + \Delta_{M,Cl}^2 M_{Cl}^2 \end{aligned} \right] \\
 &\quad - 2 \cdot \mathbf{q} \cdot i_{diff}^2 i_{Rad}^2 \cdot \left[ i_{GB}^2 \Delta_{d,IPS}^2 \omega_{OPS}^2 + \Delta_{d,SShaft}^2 \omega_{Rad}^2 + \Delta_{d,Axle}^2 \omega_{Veh}^2 + i_{GB}^2 \Delta_{c,IPS}^2 \varphi_{OPS}^2 + \Delta_{c,SShaft}^2 \varphi_{Rad}^2 \right] \\
 &\quad + \mathbf{q} \cdot \left[ i_{Rad}^2 \Delta_{d,SShaft}^2 \omega_{OPS}^2 + \Delta_{d,Axle}^2 \omega_{Veh}^2 + i_{Rad}^2 \Delta_{c,SShaft}^2 \varphi_{OPS}^2 + \Delta_{c,Axle}^2 \varphi_{Veh}^2 \right] \\
 &\quad (7.14)
 \end{aligned}$$

In (7.14) wurden im zweiten und dritten Term die Beziehungen zwischen den Drehzahlen und Verdrehwinkeln genutzt. Dabei gilt, am Beispiel der Getriebeeingangs- und Ausgangsdrehzahl, die Relation  $\omega_{OPS} \leq \frac{\omega_{IPS}}{i_{GB}}$ . Das

Gleichheitszeichen gilt hier im hypothetischen Fall, dass das Torsionsmoment an der Getriebeeingangswelle genau null ist. Die Relationen der anderen Drehzahlen und Verdrehwinkel ergeben sich analog unter Verwendung der entsprechenden Übersetzungen.

Weiterhin lässt sich für den Vorfaktor des zweiten Terms abschätzen, dass unter der für typische PKW Antriebsstränge gültigen Annahme  $i_{Diff}, i_{Rad} > 1$  gilt<sup>487</sup>

$$\begin{aligned}
 -2i_{Diff}^2 i_{Rad}^2 &\leq -(2 + i_{Diff}^2 + i_{Rad}^2) \\
 &\leq -(2 + i_{Rad}^2)
 \end{aligned}$$

und sich (7.14) damit vereinfacht zu

---

<sup>487</sup> exakt: die kleinere der beiden Übersetzungen (hier  $i$ ) muss  $i > \sqrt{2}^{-1}$  sein und die größere der Übersetzungen  $\bar{i}$  muss die Bedingung  $\bar{i} > \sqrt{\frac{i^2 + 2}{2 \cdot i^2 - 1}}$  erfüllen. Dies ist für typische Werte von  $i_{Rad}$  und  $i_{Diff}$  gegeben (vgl. 12.1).

$$\begin{aligned}
w_1(t)Qw_1(t) &\leq q \cdot \left[ \Delta_{d,IPS}^2 \omega_{IPS}^2 + \Delta_{d,SShaft}^2 \omega_{Rad}^2 + \Delta_{d,Axle}^2 \omega_{Veh}^2 + \Delta_{c,IPS}^2 \varphi_{IPS}^2 + \Delta_{c,SShaft}^2 \varphi_{Rad}^2 + \Delta_{c,Axle}^2 \varphi_{Veh}^2 + \Delta_{M,Cl}^2 M_{Cl}^2 \right] \\
&\quad - 2 \cdot q \cdot i_{diff}^2 i_{Rad}^2 \cdot \left[ \Delta_{d,SShaft}^2 \omega_{Rad}^2 + \Delta_{d,Axle}^2 \omega_{Veh}^2 + \Delta_{c,SShaft}^2 \varphi_{Rad}^2 \right] \\
w_1(t)Qw_1(t) &\leq q \cdot \Delta_{max}^2 \cdot \|z(t)\|^2
\end{aligned} \tag{7.15}$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass die IQC eine Obergrenze für die zulässige Unsicherheit festlegt. Daher wurde für die Quadrate der relativen Unsicherheiten der Systemparameter, welche in 5.4.1 festgelegt wurden, der Maximalwert über alle in  $\Delta(t)$  auftretenden Abweichungen angenommen und mit  $\Delta_{max}^2$  bezeichnet.

Mit (7.15) folgt nun

$$\int_0^T w_1(t)Qw_1(t) dt \leq q \cdot \Delta_{max}^2 \cdot \int_0^T \|z(t)\|^2 dt \leq d + \int_0^T \|z(t)\|^2 dt \tag{7.16}$$

Davon ausgehend, dass  $w_1(t)Qw_1(t)$  nur die mithilfe der Systemunsicherheitsmatrix  $\Delta(t)$  modellierte Unsicherheit, nicht aber eine eventuell auftretende nicht modellierte Dynamik abbildet, kann nun für diese Betrachtung  $d = 0$  angenommen werden. Damit ergibt sich aus (7.16) direkt, dass eine Wahl von  $q = \frac{1}{\Delta_{max}^2}$  und damit  $Q = \frac{1}{\Delta_{max}^2} \cdot \mathbb{I}$  sinnvoll ist.

Nun folgt die Parametrierung der Gewichtungsmatrix  $N(t)$  des Rauschsignals  $v(t)$ . In 7.3.1 wurde bereits erklärt, dass diese Matrix üblicherweise mit der reziproken Kovarianzmatrix des Rauschsignals identifiziert wird

$$N(t) = N = \frac{1}{\text{Cov}(v(t), v(t))} . \tag{7.17}$$

Hier wurde direkt die Annahme verwendet, dass das Rauschen der Signale durch deren physikalische Messung verursacht wird oder durch Fehlerfortpflanzung von Messrauschen im Falle von berechneten Signalen gewonnen werden kann. Da diese Betrachtung von einer zugrunde liegenden gleichbleibenden statistischen Verteilung des Rauschens ausgeht, kann die reziproke Kovarianzmatrix  $N$  zeitunabhängig gewählt werden. Im Fall, dass die einzelnen Rauschterme statistisch unabhängig voneinander sind, reduziert sich die Kovarianzmatrix zur Diagonalmatrix der Varianzen

$$N = \frac{1}{\text{Cov}(v_j, v_j)} \equiv \text{diag} \left( \frac{1}{\text{Var}(v_i)} \right) . \tag{7.18}$$

Diese ergeben sich aus den jeweiligen physikalischen Messverfahren respektive der Fortpflanzung der daraus resultierenden Varianzen. Diese Varianzen ergeben sich für den Fall der physikalisch gemessenen Drehzahlen entsprechend der Ausführungen in Abschnitt 0, da in den zur Entwicklung zur Verfügung stehenden Fahrzeugen mit jeder detektierten Zahnflanke ein neuer Wert für die Drehzahl bestimmt wird und die Messung somit winkelsynchron erfolgt. Daher ergibt sich die Varianz der gemessenen Drehzahlsignale als<sup>488</sup>

$$\sigma_{\dot{\omega}_m(i)}^2 \approx \omega_m^2 \cdot \frac{1}{4 \cdot \left( \frac{2\pi}{T_0 Z} \cdot \frac{1}{\omega_m(i)} \right)^2} \cdot \left( 1 + \frac{1}{4 \cdot \left( \frac{2\pi}{T_0 Z} \cdot \frac{1}{\omega_m(i)} \right)^2} \right).$$

Als Beispiel wird hier die Messung der Getriebeeingangsdrehzahl mit typischen Werten  $Z=33$  und  $T_0=10^{-5}$ s betrachtet.<sup>489</sup> Hierfür ergibt sich der in Bild 90 dargestellte Verlauf von Varianz und Standardabweichung.

Die gemessenen Drehzahlsignale im Antriebsstrang sind typischerweise die Motordrehzahl, die Getriebeeingangsdrehzahl und die Raddrehzahl. Die Getriebeausgangsdrehzahl wird typischerweise aus der Getriebeeingangsdrehzahl und die Fahrzeuggeschwindigkeit aus der Raddrehzahl berechnet. Entsprechend müssen sowohl für diese beiden Drehzahlen als auch für alle Verdrehwinkel die Varianzen durch Fehlerfortpflanzung bestimmt werden.

Weiterhin werden die gemessenen Drehzahlen für die Nutzung in der Steuergerätesoftware durch Mittelung aufbereitet. Diese Mittelung geschieht für ein mit 2,5ms Abtastrate verfügbares Signal über eben dieses Intervall von 2,5ms Länge. Für eine typische Drehzahl von 3000rpm,  $Z=33$  Zähnen und  $T_0=10^{-5}$ s ergibt sich damit eine Mittelung über 60 Messpunkte. Nach dem Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz<sup>490</sup> ergibt sich im Falle einer Mittelung über  $n_{Tast}$  Punkte einer stochastischen Größe mit dem unkorrelierten Fehler für die Varianz

<sup>488</sup> Hier und in den folgenden Abschnitten der vorliegenden Arbeit werden im Zusammenhang mit Berechnungen – insbesondere im Bezug auf das Zustandsraum- sowie auf das Simulationsmodell – Drehzahlen in der Einheit  $\frac{\text{rad}}{\text{s}}$  angegeben, da dies für die Berechnungen geeigneter ist. Hingegen wird aus Gründen der Anschaulichkeit für den Leser hin und wieder auch eine Angabe von Drehzahlen in der Einheit rpm gemacht.

<sup>489</sup> Die Werte entsprechen dem zur Verfügung stehenden Entwicklungsfahrzeug.  $Z_1=33, Z_2=35$

<sup>490</sup> Bronstein et al., 2013

$$\sigma_{\langle x \rangle_N}^2 = \frac{1}{n_{Tast}} \cdot \sigma_x^2.$$

Varianz der gemessenen Winkelgeschwindigkeiten und berechneten

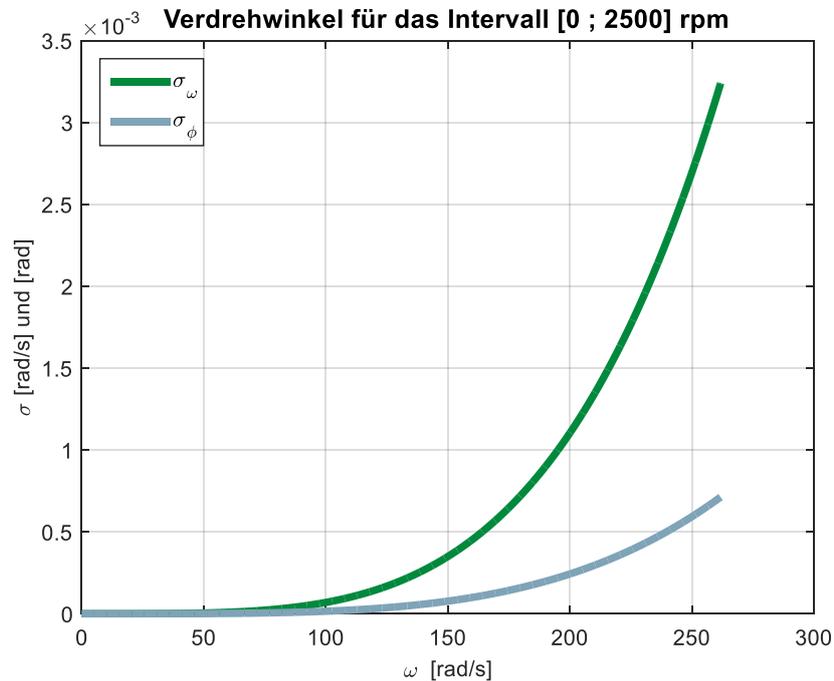


Bild 90: Varianz und Standardabweichung des Drehzahlsignals am Beispiel einer physikalisch gemessenen und nicht übersetzten Drehzahl

Für die Varianzen der aus diesen gemittelten Messgrößen berechneten Drehzahlen ergibt sich nach dem Gauß'schen Fehlerfortpflanzungsgesetz

$$\sigma_{\omega_{OPS}}^2 = \frac{1}{i_{GB}^2} \cdot \sigma_{\omega_{IPS}}^2 \quad (7.19)$$

$$\sigma_{\omega_{Veh}}^2 = \frac{1}{i_{Rad}^2} \cdot \sigma_{\omega_{Rad}}^2$$

Für die durch Integration bzw. Summation (hier am Beispiel der Getriebeeingangswelle)

$$\varphi_{IPS} = \Delta t \cdot \sum_{i=1}^k \omega_{IPS}(i \cdot \Delta t)$$

aus den Drehzahlen berechneten Verdrehwinkeln ergibt sich nach den Regeln der Fehlerfortpflanzung für die Varianzen

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\varphi_{IPS}}^2 &= t \cdot \sigma_{\omega_{IPS}}^2 \\
 \sigma_{\varphi_{OPS}}^2 &= t \cdot \sigma_{\omega_{OPS}}^2 \\
 \sigma_{\varphi_{Rad}}^2 &= t \cdot \sigma_{\omega_{Rad}}^2 \\
 \sigma_{\varphi_{Veh}}^2 &= t \cdot \sigma_{\omega_{Veh}}^2
 \end{aligned} \quad (7.20)$$

Als Maximalwerte der Drehzahlen in den für die Regelung relevanten Situationen Ankriechen und Anfahren werden nun

$$\begin{bmatrix} n_{Eng} \\ n_{IPS} \\ n_{OPS} \\ n_{Rad} \\ n_{Veh} \end{bmatrix}_{max} \approx \begin{bmatrix} 2500 \\ 2000 \\ (i_{GB} \cdot \cdot)^{-1} \cdot 2000 \\ (i_{GB} \cdot i_{Diff})^{-1} \cdot 2000 \\ (i_{GB} \cdot i_{Diff} \cdot i_{Rad})^{-1} \cdot 2000 \end{bmatrix}$$

gewählt. Damit werden die Varianzen für die integrale Quadratische Zwangsbedingung mit  $i_{GB} = 3,615$ ,  $i_{Diff} = 4,813$  und  $i_{Rad} = 3,257$ <sup>491</sup> abgeschätzt als

$$\begin{aligned}
 \sigma_{n_{Eng}}^2 &\approx 28,78 \text{ rpm}^2 ; & \sigma_{\omega_{Eng}}^2 &\approx 3,2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} \\
 \sigma_{n_{IPS}}^2 &\approx 11,79 \text{ rpm}^2 ; & \sigma_{\omega_{IPS}}^2 &\approx 1,3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} ; & \sigma_{\varphi_{IPS}}^2 &\approx 2,92 \cdot 10^{-4} \text{ rad}^2 \\
 \sigma_{n_{OPS}}^2 &\approx 0,901 \text{ rpm}^2 ; & \sigma_{\omega_{OPS}}^2 &\approx 1,02 \cdot 10^{-4} \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} ; & \sigma_{\varphi_{OPS}}^2 &\approx 2,23 \cdot 10^{-5} \text{ rad}^2 \\
 \sigma_{n_{Rad}}^2 &\approx 0,039 \text{ rpm}^2 ; & \sigma_{\omega_{Rad}}^2 &\approx 4,38 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} ; & \sigma_{\varphi_{Rad}}^2 &\approx 9,64 \cdot 10^{-7} \text{ rad}^2 \\
 \sigma_{n_{Veh}}^2 &\approx 3,7 \cdot 10^{-3} \text{ rpm}^2 ; & \sigma_{\omega_{Veh}}^2 &\approx 4,13 \cdot 10^{-7} \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} ; & \sigma_{\varphi_{Veh}}^2 &\approx 9,09 \cdot 10^{-8} \text{ rad}^2
 \end{aligned} \quad (7.21)$$

In (7.21) wurde zur Berechnung der Varianzen der Verdrehwinkel für die fortlaufende Zeit  $t$  die in (7.13) festgelegte Zeit  $T$  zum Erreichen des Endzustandes verwendet.

Damit ergibt sich die Gewichtungsmatrix des Messrauschens aus (7.18) und (7.21) als

$$N = \text{diag} \left( \frac{1}{\sigma_{\omega_{Eng}}^2} ; \frac{1}{\sigma_{\omega_{IPS}}^2} ; \frac{1}{\sigma_{\omega_{OPS}}^2} ; \frac{1}{\sigma_{\omega_{Rad}}^2} ; \frac{1}{\sigma_{\omega_{Veh}}^2} ; \frac{1}{\sigma_{\varphi_{IPS}}^2} ; \frac{1}{\sigma_{\varphi_{OPS}}^2} ; \frac{1}{\sigma_{\varphi_{Rad}}^2} ; \frac{1}{\sigma_{\varphi_{Veh}}^2} \right). \quad (7.22)$$

Für die Gewichtung der von außen auf das System wirkenden Momente  $w_2(t)$  kann, wie zuvor schon erwähnt, eine einfache Intervallbeschränkung angewandt werden,

<sup>491</sup> Die Werte entsprechen dem zur Verfügung stehenden Entwicklungsfahrzeug, vgl. 12.1

durch welche lediglich eingeschränkt wird, in welchem Bereich die Momente  $M_{Load}$  und  $M_{Eng}$  liegen und somit den Arbeitspunkt für jede Regelsituation bestimmen. Aus dieser Überlegung ergibt sich eine Betrachtung der IQC (7.6) für den Fall, dass  $x(0) \equiv 0, w_1(t) \equiv 0, v(t) \equiv 0, z(t) \equiv 0$  und damit

$$\int_0^T w_2(t)^T M(t) w_2(t) dt \leq d_M$$

Daraus wiederum ergibt sich als sinnvolle Wahl der Parameter

$$M(t) = M = \begin{bmatrix} \max(M_{Eng})^{-2} & 0 \\ 0 & \max(M_{Load})^{-2} \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

$$d_M = T$$

Wobei  $\max(M_{Eng})$  und  $\max(M_{Load})$  die jeweils zu erwartenden Maxima der von außen auf das System wirkenden Drehmomente sind.

Eine ähnliche Überlegung gilt für die Gewichtung  $P_0$  der als unsicher behandelten Anfangsbedingung  $x(0)$ . Hier entfällt zusätzlich die Integration über die Zeit, wodurch sich für den Fall  $w_1(t) \equiv 0, w_2(t) \equiv 0, v(t) \equiv 0, z(t) \equiv 0$  die folgende Relation ergibt

$$x(0)^T P_0 x(0) \leq d_{x_0}$$

Damit lässt sich  $P_0$ , wie auch schon im Fall  $M$ , durch eine Abschätzung des Maximalwertes von  $x(0)$  bestimmen. Da die Regelung für die typischen Situationen Anfahrt und Ankriechen zum Einsatz kommen sollen, werden als charakteristische maximale Anfangswerte der Drehzahlen folgende Werte angenommen

$$\max \begin{pmatrix} n_{Eng} \\ n_{IPS} \\ n_{OPS} \\ n_{Rad} \\ n_{Veh} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2000 \text{ rpm} \\ 1600 \text{ rpm} \\ \frac{1}{i_{GB}} \cdot 1600 \text{ rpm} \\ \frac{1}{i_{GB} \cdot i_{Diff}} \cdot 1600 \text{ rpm} \\ \frac{1}{i_{GB} \cdot i_{Diff} \cdot i_{Rad}} \cdot 1600 \text{ rpm} \end{bmatrix} \Rightarrow \max \begin{pmatrix} \omega_{Eng} \\ \omega_{IPS} \\ \omega_{OPS} \\ \omega_{Rad} \\ \omega_{Veh} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 209,4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ 167,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ \frac{1}{i_{GB}} \cdot 167,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ \frac{1}{i_{GB} \cdot i_{Diff}} \cdot 167,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \\ \frac{1}{i_{GB} \cdot i_{Diff} \cdot i_{Rad}} \cdot 167,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \end{bmatrix}$$

Die Maximalwerte der Verdrehwinkel sind für diese Abschätzung unerheblich, da diese keinen Einfluss auf das Regelergebnis haben, da weder Absolutmessungen der Verdrehwinkel durchgeführt werden, noch diese Winkel im Gütekriterium und damit auch in der Regelung berücksichtigt werden. Jedoch müssen die entsprechenden Diagonalelemente in  $P_0$  ungleich Null gewählt werden, sodass gewährleistet ist, dass  $P_0$  positiv definit ist.<sup>492</sup> Um trotzdem den zu vernachlässigenden Einfluss der Verdrehwinkel auf die Systemunsicherheit widerzuspiegeln, werden die entsprechenden Gewichte in  $P_0$  deutlich kleiner als die der Drehzahlen gewählt.

Damit werden  $P_0$  und  $d_{x_0}$  gewählt als

$$P_0 = 3,56 \cdot 10^{-5} \frac{\text{s}^2}{\text{rad}^2} \cdot \text{diag}(0,64, 1,0, i_{GB}^2, i_{GB}^2 i_{Diff}^2, i_{GB}^2 i_{Diff}^2 i_{Rad}^2, 10^{-3}, 10^{-3}, 10^{-3}, 10^{-3})$$

$$d_{x_0} = 1$$

(7.24)

Als letzter festzulegender Parameter der IQC folgt nun noch die Konstante  $d$ , welche entsprechend der Ausführungen in Abschnitt 7.3.1 hauptsächlich eine Normbegrenzung der nichtmodellierten Dynamik darstellt. Da jedoch auch andere Terme der IQC unabhängig vom Eingang der Systemunsicherheit  $z(t)$  sind, gehen außer der Norm der nichtmodellierten Dynamik  $d_{Dyn}$  auch noch die Begrenzung der Anfangsbedingung  $d_{x_0}$  und die Begrenzung der äußeren Momente  $d_M$  ein. Somit ergibt sich  $d$  als

$$d = d_{Dyn} + d_{x_0} + d_M. \quad (7.25)$$

Die Norm der nichtmodellierten Dynamik wird hier als  $d_{Dyn} = 1$  angenommen. Damit wird der unsicheren Dynamik eine obere Grenze eingeräumt, welche im Bereich der Obergrenzen für die anderen von  $z(t)$  unabhängigen gewichteten Terme liegt. Dadurch sollen mögliche numerische Probleme durch Skalierungseffekte vermieden werden. Somit ist

$$d = 2 + T$$

Die Parametrisierung der IQC erfolgt nun wie zuvor diskutiert nicht anhand der gewünschten Reglercharakteristik, sondern anhand des erwarteten Ausmaßes der in der Systemmodellierung berücksichtigten Unsicherheiten. So wird für die

---

<sup>492</sup> Bronstein et al., 2013

Dimensionierung von  $N$  die erwartete Kovarianz des zu erwarteten Signalrauschens der Messsignale herangezogen, dagegen kann die Matrix  $Q$  entsprechend der erwarteten Schwankungsbreiten der parametrischen Unsicherheiten und die Matrix  $M$  anhand des Störeinflusses der von außen auf das System wirkenden Momente gewählt werden.

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{1}{\Delta_{max}^2} \cdot \mathbb{I}_9 = \frac{1}{0,3^2} \cdot \mathbb{I}_9; & Q \in \mathbb{R}^{9 \times 9} \\
 N &= \frac{1}{\text{Cov}(v(t))}; & N \in \mathbb{R}^{9 \times 9} \\
 M &= \text{diag}\left(\max(M_{Eng})^{-2}, \max(M_{Load})^{-2}\right); & M \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \\
 P_0 &= 3,56 \cdot 10^{-5} \frac{\text{s}^2}{\text{rad}^2} \cdot \text{diag}\left(0,64, 1,0, i_{GB}^2, i_{GB}^2 i_{Diff}^2, i_{GB}^2 i_{Diff}^2 i_{Rad}^2, \right); & P_0 \in \mathbb{R}^{9 \times 9} \\
 & & \left(10^{-3}, 10^{-3}, 10^{-3}, 10^{-3}\right) \\
 d &= 2 + T
 \end{aligned}
 \tag{7.26}$$

Die gewählten Diagonalwerte für die Matrix  $Q$  entsprechen hierbei der aus (7.15) und (7.16) abgeleiteten Relation mit dem Maximalwert der in Tabelle 4 in Kapitel 5 genannten erwarteten Schwankungsbreiten der betreffenden physikalischen Parameter.  $\max(M_{Eng})$  und  $\max(M_{Load})$  können für die für eine Anti-Rupf-Regelung als relevant angesehenen Fahrsituationen Anfahren und Ankriechen abgeschätzt werden. Im Falle von Fahrzeugen mit trocken laufender Doppelkupplung beträgt das typische maximal verfügbare Motormoment 250Nm. Für das maximale Lastmoment kann eine Abschätzung anhand der Zusammensetzung des Lastmomentes aus den Teillasten vorgenommen werden. Das Lastmoment ergibt sich nach ISERMANN als

$$M_{Load} = r_{Rad} \cdot (F_{Roll} + F_{Road} + F_{Air}) \tag{7.27}$$

mit dem Radradius  $r_{Rad}$ , dem Rollwiderstand  $F_{Roll}$ , dem Steigungswiderstand  $F_{Road}$  und dem Luftwiderstand  $F_{Air}$ . Für die Situationen Anfahren und Ankriechen kann der Luftwiderstand aufgrund der kleinen auftretenden Geschwindigkeiten vernachlässigt werden und es ergibt sich unter Einsetzen der einzelnen Funktionen<sup>493</sup>

$$M_{Load} \approx r_{Rad} \cdot m_{Veh} \cdot g \cdot (k_r \cdot \cos(\alpha_{Road}) + \sin(\alpha_{Road})) \tag{7.28}$$

Hier ist  $m_{Veh}$  die Fahrzeugmasse,  $k_r$  der Rollreibungskoeffizient und  $\alpha_{Road}$  der Steigungswinkel der Fahrbahn. Die Steigung der Fahrbahn wird aufgrund der

<sup>493</sup> Isermann, 2008

praktischen Relevanz auf das Intervall  $[-20\%; +20\%]$  abgeschätzt, also  $-11,31^\circ \leq \alpha_{Road} \leq 11,31^\circ$ . Der Rollwiderstand liegt für die meisten der in der Praxis auftretenden Reibpaarungen aus Reifen und Fahrbahn im Intervall  $[0,007; 0,05]$ <sup>494</sup>. Danach hat das Lastmoment den Maximalwert bei einer Steigung von +20%. Die Abschätzung erfolgt mit einem typischen Wert für die Fahrzeugmasse von 1240kg und einem Radradius von 0,3m<sup>495</sup> als

$$\max(M_{Load}) \approx 895 \text{ Nm} . \quad (7.29)$$

Damit wird aus (7.26) mit (7.29) und dem angenommenen maximalen Motormoment die Gewichtungsmatrix

$$M = 10^{-5} \cdot \begin{bmatrix} 0,125 & 0 \\ 0 & 1,600 \end{bmatrix} . \quad (7.30)$$

### 7.3.4 Aufstellen und Lösen der Riccati-Gleichungen

Aufgrund der Wahl der im *Erweiterten System* auftretenden Gewichtungsmatrizen als zeitinvariante Gewichte und der in Kapitel 5.4 diskutierten näherungsweisen Zeitinvarianz des Zustandsraummodells werden auch ein Großteil der Matrizen in den Riccati Gleichungen (7.8) und (7.9) zeitinvariant.

$$-\dot{X}(t) = \hat{A}(t)^T X(t) + X(t) \hat{A}(t) + \hat{C}_1^T \hat{C}_1 + X(t) (\hat{B}_2 Q^{-1} \hat{B}_2^T - \hat{B}_1 E^{-1} \hat{B}_1^T) X(t) \quad (7.31)$$

$$\dot{Y}(t) = \hat{A}(t) Y(t) + Y(t) \hat{A}(t)^T + \hat{B}_2 Q^{-1} \hat{B}_2^T + Y(t) (\hat{C}_1^T \hat{C}_1 - \hat{C}_2^T N \hat{C}_2) Y(t) \quad (7.32)$$

Die einzige zeitlich veränderliche Koeffizientenmatrix in (7.31) und (7.32) ist nun die Matrix  $\hat{A}(t)$ , da hier nach (7.3) die zeitabhängige Frequenzmatrix der harmonischen Störungen

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} -\omega_{IPS}^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_{Eng}^2 & 0 \\ 0 & 0 & -(\omega_{Eng} - \omega_{IPS})^2 \end{bmatrix}$$

einght.

Hierdurch würde zunächst über die Drehzahlen eine Rückkopplung der Schwingungen auf sich selbst induziert, die zu einem stark nichtlinearen System führen würden. Daher wird die Vereinfachung getroffen, dass die Drehzahlen, welche die Frequenzen der

<sup>494</sup> Robert Bosch GmbH, 2007

<sup>495</sup> vgl. 12.1

harmonischen Störungen darstellen, diejenigen Anteile der Drehzahlen mit großer Zeitkonstante sind, die auch die Trajektorie für die in 5.4 vorgenommene Linearisierung beschreiben (also  $\bar{\omega}_{IPS}$  und  $\bar{\omega}_{Eng}$ ). Dadurch wird  $\Omega(t)$  in (7.31) und (7.32) durch Verwendung der als quasi-stationär angesehenen Drehzahlsignale zeitunabhängig. Dieses Vorgehen ist damit auch im Einklang mit der in 5.4 durchgeführten Linearisierung des Systems durch Auftrennen der Zustandsvariablen in Anteile mit großen und Anteile mit kleinen Zeitkonstanten.

Damit werden aus den beiden ursprünglich zeitabhängigen Riccati Differenzialgleichungen zwei autonome Riccati DGL, woraus sich auch andere Möglichkeiten zur Lösung dieser beiden Gleichungen ergeben.

Aufgrund der Zielsetzung dieser Arbeit, welche in Kapitel 3 in Form des Forschungsbedarfs, der Forschungshypothesen und der Forschungsfragen definiert wurde, gilt für die Lösung der Riccati Matrix Differenzialgleichungen die Vorgabe, dass sie möglichst einfach und effizient umgesetzt werden kann. Ferner fordert ein möglicher Einsatz im Getriebesteuergerät des Fahrzeugs einen minimalen Speicher- und Rechenzeitbedarf. Um den Bedarf an Speicherkapazität möglichst gering zu halten, wird eine Möglichkeit angestrebt, die Berechnung der Trajektorien  $X(t)$  und  $Y(t)$  online auszuführen.

Zur Bestimmung der Lösung des Endwertproblems

$$\begin{aligned} -\dot{X}(t) &= \hat{A}^T X(t) + X(t) \hat{A} + \hat{C}_1^T \hat{C}_1 + X(t) (\hat{B}_2 Q^{-1} \hat{B}_2^T - \hat{B}_1 E^{-1} \hat{B}_1^T) X(t) \\ X(T) &= \hat{X}_T \end{aligned}$$

scheidet daher bei der Betrachtung der in 2.10 vorgestellten Methoden die von MEHRMANN entwickelte Lösung unter Verwendung des Matrix-Pencils sowie der Singulärwertzerlegung aus, da hier in jedem Schritt der Rang einer Matrix näherungsweise neu berechnet werden muss.<sup>496</sup> Dieses Verfahren benötigt bedingt durch sein hohes Maß an Komplexität verhältnismäßig hohe Rechenleistung und ist daher auf einem gängigen Fahrzeugsteuergerät nur schwer umzusetzen. Dagegen bietet die Methode nach NTOGRAMATZIDIS UND FERRANTE<sup>497</sup> den Vorteil einer Lösung in geschlossener Form, wodurch die Notwendigkeit zur Iteration der Differenzialgleichungen entfällt und somit auch Berechnungszeit gespart wird. Die von GAJIC präsentierte Methode der Iteration unter Verwendung einer Übergangsmatrix ist ebenfalls mit vergleichsweise wenig Aufwand durchzuführen, da die Berechnung

<sup>496</sup> vgl. 2.10.4.1

<sup>497</sup> vgl. 2.10.4.2

iterativ unter Verwendung einer zu Beginn bestimmten Übergangsmatrix sowie der Lösung einer Lyapunov Gleichung zum jeweiligen Zeitpunkt erfolgt.<sup>498</sup> Hier ist die Methode von GAJIC zu bevorzugen, da sie trotz der Iteration in ihrer Implementierung weniger komplex erscheint, da hier im Gegensatz zu der von NTOGRAMATZIDIS UND FERRANTE gezeigten Lösung keine Separierung von regelbaren und nicht regelbaren Zustandsgrößen durch Anwendung einer Transformationsmatrix notwendig ist.

Zur Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= \hat{A}Y(t) + Y(t)\hat{A}^T + \hat{B}_2 Q^{-1} \hat{B}_2^T + Y(t) (\hat{C}_1^T \hat{C}_1 - \hat{C}_2^T N \hat{C}_2) Y(t) \\ Y(0) &= \hat{P}_0^{-1} \end{aligned}$$

wurden in 2.10.3 zwei etablierte Methoden von IBÁÑEZ UND HERNÁNDEZ sowie von BENNER UND MENA vorgestellt. Dabei bietet keine der beiden Methoden eine Lösung in geschlossener Form, weshalb in jedem Fall eine Iteration erfolgen muss. Für eine erste Umsetzung sollte hier auf die Methoden von IBÁÑEZ UND HERNÁNDEZ zurückgegriffen, da hier bereits existierende Implementierungen in MATLAB zur Verfügung stehen<sup>499</sup> und sich damit der Implementierungsaufwand minimieren lässt. Da das Anfangswertproblem eine zeitinvariante Riccati Matrix Differentialgleichung beinhaltet, werden bei der Auswahl des Algorithmus nur diese betrachtet, die speziell für die Behandlung dieser Problemstellungen entwickelt wurden. dabei erscheint anhand des numerischen Vergleichs<sup>500</sup> der *DGEIDREPLCE* Algorithmus am geeignetsten und wird daher im Folgenden verwendet.

Bei der Lösung der Riccati Matrix Differentialgleichungen spielt der durch die s-Prozedur eingeführte und in den Matrizen des *Erweiterten Systems* auftretende Parameter  $\tau$  eine zentrale Rolle. Er ist nach den Ausführungen in 7.1 auf das Intervall  $\left(0, \frac{c_0}{d}\right]$  beschränkt und bestimmt nach PETERSEN ET AL. unter anderem die Lösbarkeit der Riccati Matrix Differentialgleichungen (7.31) und (7.32).

Der initiale Ansatz, für die Wahl von  $\tau$  das gegebene Intervall anhand der in 2.10.2 diskutierten Bedingungen für die Existenz der Lösungen dieser Differentialgleichungen in Bezug auf die Existenz entsprechender Lösungen von algebraischen Riccati Gleichungen zu durchsuchen, war leider aufgrund numerischer Ungenauigkeiten nicht erfolgreich oder würde bei der erforderlichen Präzision in der

<sup>498</sup> vgl. 2.10.4.3

<sup>499</sup> Ibáñez; Hernández, 2009

<sup>500</sup> Ibáñez und Hernández, 2009

Wahl von  $\tau$  eine zu große Berechnungszeit zur Folge haben. Zudem ist das *Erweiterte System* durch die Einbindung der harmonischen Störungen nicht stabilisierbar<sup>501</sup>, weshalb die Lösungen der Riccati Gleichungen für  $T \rightarrow \infty$  nicht zu stabilisierenden stationären Lösungen konvergieren und damit die bekannten Zusammenhänge zwischen der Lösbarkeit der algebraischen Riccati Gleichung und der Riccati Matrix Differenzialgleichung nicht mehr anwendbar sind.<sup>502</sup>

Hinzu kommt die Sensitivität der ausgewählten Algorithmen in Bezug auf numerische Ungenauigkeiten, die zu singulären Matrizen führen können und somit eine Lösbarkeit der Gleichungen für nur wenige Werte von  $\tau$  ergibt, die über das gesamte Intervall gestreut sind. Anhand der möglichen Algorithmen zur Lösbarkeit des Anfangswertproblems wird hierfür der von BENNER UND MENA vorgestellte Ansatz der Anwendung der Rosenbrock Methode zweiter Ordnung zur Lösung des Anfangswertproblems implementiert. Dieser zeigt sich nach den im Zuge der Validierung des Algorithmus vorgenommenen Korrekturen des in BENNER UND MENA dargestellten Algorithmus entsprechend den Ausführungen von LANG ET AL. als numerisch deutlich stabiler, da nun für fast alle Werte des Intervalls für  $\tau$  Lösungen der Riccati Matrix Differenzialgleichung gefunden werden.<sup>503</sup>

Aufgrund dieser Beobachtung wird im Folgenden, ebenfalls den Ausführungen von LANG ET AL. folgend, die Möglichkeit genutzt, diesen Algorithmus auch zur Lösung des Zwei-Punkt Randwertproblems zu verwenden. Damit sinkt der Implementierungsaufwand, da nun für beide Riccati Matrix Differenzialgleichungen der gleiche Algorithmus angewandt werden kann und es werden zudem für fast jeden erlaubten Wert von  $\tau$  Lösungen zu mindestens einer der beiden Gleichungen gefunden.

---

<sup>501</sup> vgl. 7.2

<sup>502</sup> Petersen et al., 2000

<sup>503</sup> vgl. 12.5 für die Umsetzung und Validierung des Algorithmus in MATLAB

### 7.3.5 Implementierung und Anwendung des Reglerdesigns in MATLAB

Anhand der in den vorherigen Abschnitten diskutierten Aspekte des Reglerdesigns besteht im Folgenden die Herausforderung für eine erfolgreiche Auslegung des Reglers darin, dass zwei Lösungen der Gleichungen (7.31) und (7.32) gefunden werden, welche die bereits in 7.1 gestellten Forderungen erfüllen:

$$\begin{aligned}
 X(0) < \hat{P}_0 &\Rightarrow [\hat{P}_0 - X(0)] > 0 \\
 X(T) = \hat{X}_T &\Rightarrow [X(T) - \hat{X}_T] = 0 \\
 Y(0) = \hat{P}_0^{-1} &\Rightarrow [Y(0) - \hat{P}_0^{-1}] = 0 \\
 Y(t) > 0 &\quad \forall t \in [0; T] \\
 \rho(Y(t)X(t)) < 1 &\quad \forall t \in [0; T]
 \end{aligned} \tag{7.33}$$

Zur Umsetzung der Auslegungsprozedur wird eine Bibliothek von MATLAB Funktionen erstellt, in der, ausgehend von einer Hauptfunktion, die den einzelnen Schritten der Auslegung entsprechenden Unterfunktionen aufgerufen werden. Eine schematische Darstellung der Zusammenhänge innerhalb dieser Funktionsbibliothek ist in Bild 91 zu sehen.

Zu Beginn werden die Dimensionen der in der Zustandsraumdarstellung definierten Signalvektoren<sup>504</sup> und die Behandlung von potenziell im Laufe der Berechnungen auftretenden Fehlern festgelegt. Letzteres ist notwendig, um einen kompletten Durchlauf der Auslegungsprozedur trotz der Ausgabe von Warnungen oder Fehlermeldungen durch MATLAB zu ermöglichen, da zu erwarten ist, dass für gewisse Parameterkonfigurationen keine Lösung der Riccati Matrix Differenzialgleichungen existiert und die Berechnung daraufhin singuläre oder nicht definierte Matrizen liefert. Anschließend werden die Parameter der Regelstrecke in einer eigenen Funktion definiert, wodurch die Auslegungsprozedur modular auf unterschiedliche Fahrzeuge anwendbar wird. Mithilfe dieser Parameter werden nun entsprechend den Ausführungen in 5.4 die Systemmatrizen berechnet, die später zusammen mit den Gewichtungsmatrizen und Auslegungsparametern zum Erweiterten System verschmolzen werden, und geprüft, ob diese singulär oder nahezu singulär sind.

<sup>504</sup> vgl. (5.4), (5.16), (5.19)

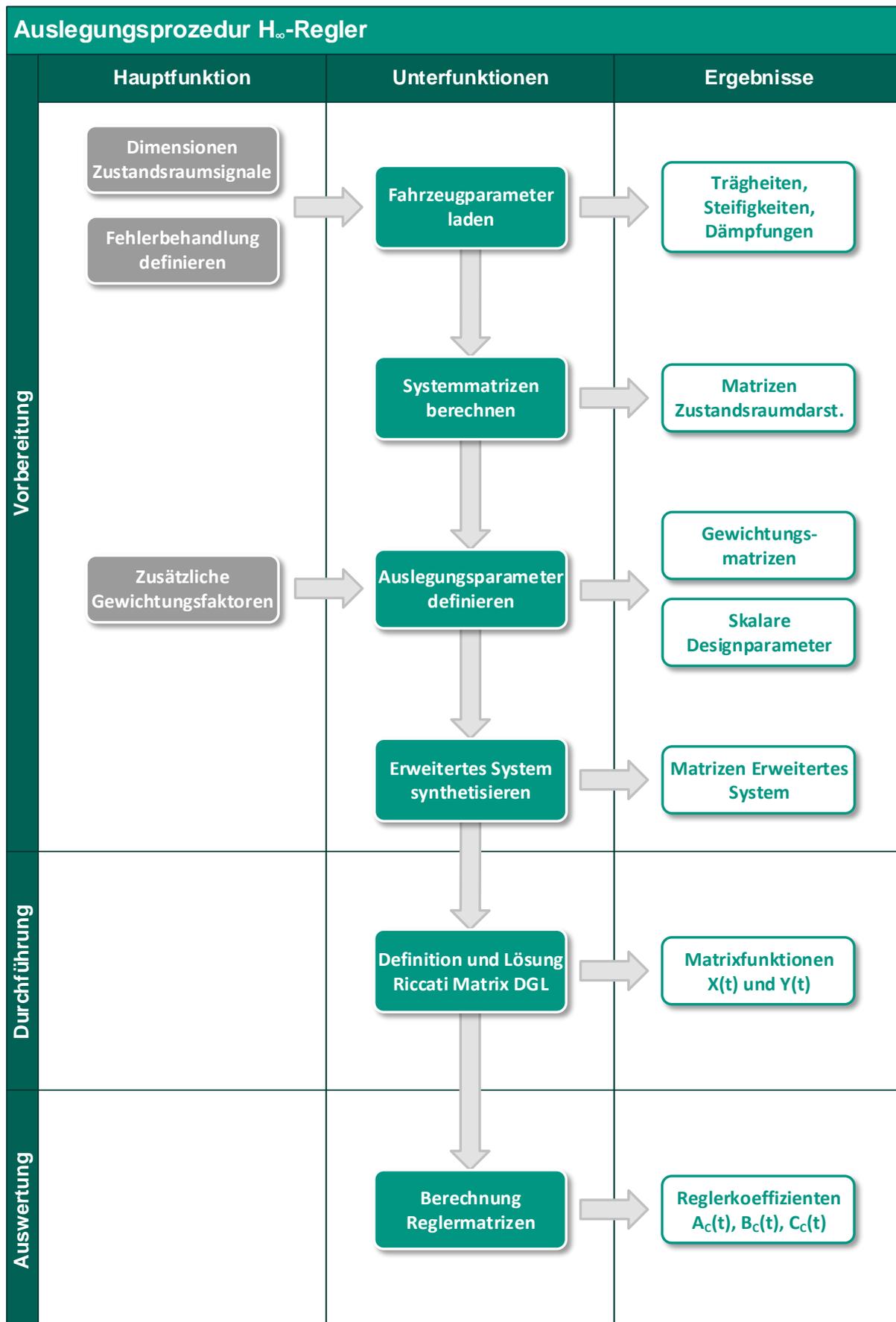


Bild 91: Schematische Darstellung des Ablaufs zur Reglerauslegung und dessen Umsetzung in MATLAB

Daraufhin erfolgt die Definition der skalaren Auslegungsparameter und der Gewichtungsmatrizen entsprechend 7.3.2 und 7.3.3 unter Zuhilfenahme zusätzlicher Gewichtungsfaktoren für das Performancekriterium sowie die IQC, die eine zusätzliche Designmöglichkeit bieten, ohne dass eine zusätzliche Parametrierung in den Unterfunktionen vorgenommen werden muss.

Danach wird aus diesen Gewichtungsmatrizen und Designparametern sowie den Systemmatrizen die Matrixdarstellung des Erweiterten Systems synthetisiert<sup>505</sup>, die anschließend zur Bestimmung der Koeffizientenmatrizen der Riccati Matrix Differentialgleichungen dienen. Diese Gleichungen werden entsprechend den Ausführungen im vorangegangenen Abschnitt mithilfe der Rosenbrock Methode 2. Ordnung<sup>506</sup> für ein definierbares Raster von erlaubten Werten des Parameters  $\tau$  im Intervall  $\left[0; \frac{c_0}{d}\right]$ , wobei für jeden Wert von  $\tau$  die Lösungen der beiden Gleichungen

(7.31) und (7.32), sofern numerisch möglich, bestimmt werden. Die zu Beginn der Auslegungsprozedur definierte Fehlerbehandlung ermöglicht eine Analyse, für wie viele Werte von  $\tau$  eine Lösung gefunden werden konnte und, sofern dies nicht möglich war, welche Art von Fehler bei der Berechnung aufgetreten ist.

Jede dieser Lösungen wird daraufhin überprüft, ob sie die Voraussetzungen (7.33) erfüllt, und für jeden Wert von  $\tau$  für den für beide Gleichungen gültige Lösungen gefunden werden konnte, werden diese Lösungen auf die Erfüllung der Anforderung an den Spektralradius

$$\rho(Y(t)X(t)) < 1 \quad \forall t \in [0; T]$$

geprüft.<sup>507</sup> Anschließend wird das Lösungspaar, das den Spektralradius minimiert, für die weitere Verwendung zur Reglerauslegung ausgewählt und in der Folge zur Berechnung der Koeffizientenmatrizen des robusten Reglers im Zustandsraum verwendet.

Um eine angemessene Analyse der Auslegungsprozedur und speziell der Iteration der Riccati Matrix Differentialgleichungen zu ermöglichen, werden ausgewählte Ergebnisse in geeigneten Grafiken dargestellt.

<sup>505</sup> vgl. 7.1

<sup>506</sup> vgl. 2.10.3.1

<sup>507</sup> vgl. 2.9.6.2 für die Bedeutung des Spektralradius im Rahmen der Stabilitätsbetrachtung

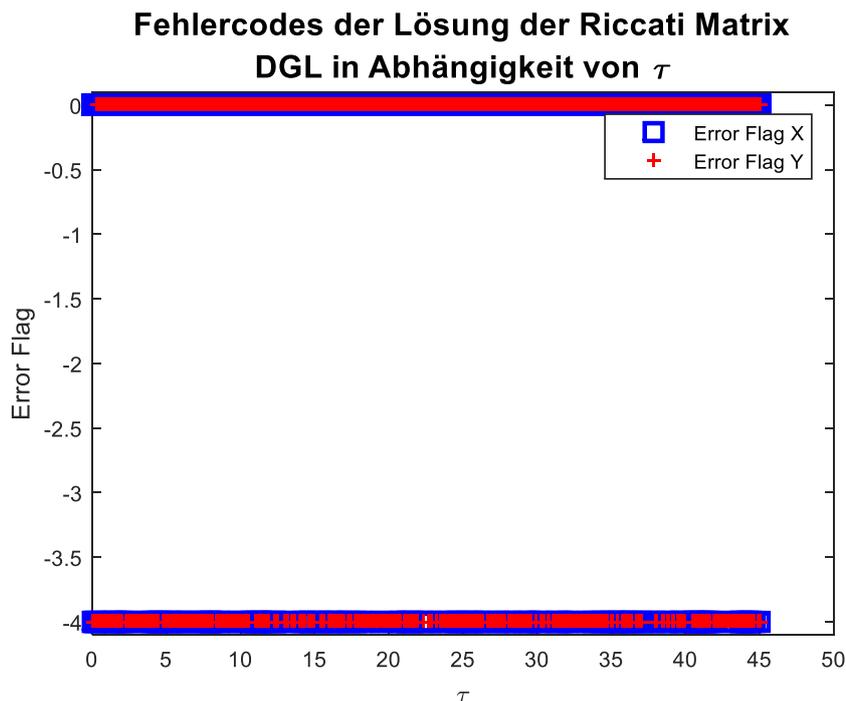


Bild 92: Fehlercodes der Berechnung der Riccati Matrix Differentialgleichungen über den Iterationsparameter  $\tau$ ; Es wurden Lösungen für  $X(t)$  und  $Y(t)$  gefunden (Fehlercode 0), während im Laufe der Berechnungen ebenfalls ungültige Einträge der Matrixelemente erzeugt werden (Code -4)

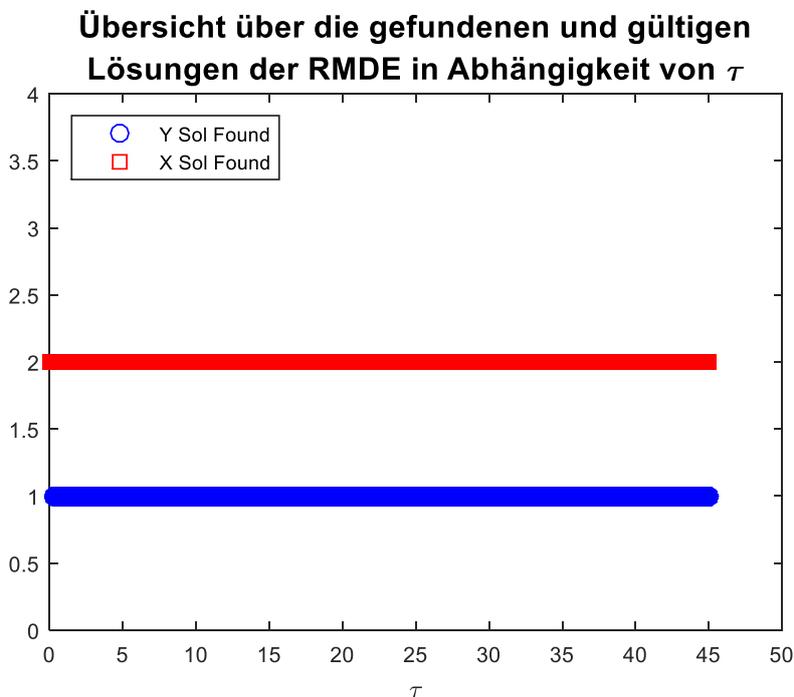


Bild 93: Übersicht über die gefundenen und entsprechend der Bedingungen (7.33) gültigen Lösungen der beiden Riccati Matrix Differentialgleichungen; es wurden sowohl für  $X(t)$  als auch für  $Y(t)$  Lösungen gefunden, die jedoch die Anforderungen nicht erfüllen

Die Ergebnisse dieser Berechnungen für das durch die Wahl der Parameter in (7.26) und mit  $c_0 = 100$  festgelegte Intervall sind in Bild 92 und Bild 93 dargestellt. Leider wurde trotz der zahlreichen gefundenen Lösungen für die Auslegungsgleichungen kein Lösungspaar gefunden, das die Anforderungen in (7.33) erfüllt. Nach eingehender Analyse sind der Grund dafür numerische Ungenauigkeiten, welche nach aktuellem Wissensstand auch aufgrund der Dimensionen der zu ermittelnden Matrixfunktionen auftreten und zum Teil dazu führen, dass diese Funktionen sich teilweise divergent verhalten. Es wird daher eine Ordnungsreduktion der zu ermittelnden Reglermatrizen angestrebt, um die benannten numerischen Probleme zu vermeiden.

## 7.4 Ordnungsreduktion des Reglers

Angesichts der auftretenden numerischen Probleme bei der Lösung der aus dem Reglerdesign für das in 5.4 aufgestellte Modell der Regelstrecke bestimmten Matrix Riccati Differenzialgleichungen werden im folgenden Abschnitt Vereinfachungen und Anpassungen getroffen, die die Behandlung der für das Reglerdesign zu lösenden Gleichungen vereinfacht. Im Fokus steht dabei die Reduktion der Ordnung des Regelstreckenmodells, das aufgrund der dabei vorgenommenen Reduktion der Zahl der Zustandsvariablen einen direkten Einfluss auf die Ordnung des entstehenden Reglers hat. Zusätzlich werden verschiedene Designparameter angepasst, um die numerischen Eigenschaften der behandelten Gleichungen zu verbessern.

### 7.4.1 Modellreduktion der Regelstrecke

Zunächst soll die numerische Handhabbarkeit des in 5.4 entwickelten und in den Gleichungen (5.4) und (5.5), (5.7) bis (5.10) sowie (5.16) bis (5.22) beschriebenen Zustandsraummodells der Regelstrecke verbessert werden, indem das Modell auf Möglichkeiten der Ordnungsreduktion hin untersucht wird. Ziel ist hierbei die durch das Modell abgebildete Dynamik unverändert zu lassen und gleichzeitig die Ordnung des Modells, welche den Dimensionen des Zustandsvektors des Systems entspricht, zu reduzieren. Der bisherige Zustandsvektor des Systems ist gemäß (5.4) definiert als

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \omega_{Eng} \\ \omega_{IPS} \\ \omega_{OPS} \\ \omega_{Rad} \\ \omega_{Veh} \\ \varphi_{IPS} \\ \varphi_{OPS} \\ \varphi_{Rad} \\ \varphi_{Veh} \end{bmatrix}.$$

Hier kann aufgrund der Betrachtung der Dynamik des Antriebsstrangs bei einer von Null verschiedenen Differenzdrehzahl an der Kupplung des aktiven Teilgetriebes auf eine explizite Betrachtung der Dynamik der Drehzahl des Antriebsmotors verzichtet werden, da diese aufgrund der schlupfenden Kupplung von der Sekundärseite des Antriebsstrangs entkoppelt ist. Um weiterhin die Möglichkeit der Abbildung der dynamischen Effekte eines von Null verschiedenen Reibwertgradienten zu haben, kann nun statt der Motordrehzahl  $\omega_{Eng}$  die Schlupfdrehzahl der Kupplung  $\omega_{Slip}$  sowie der durch Integration in der Zeit daraus gewonnene Verdrehwinkel  $\varphi_{Slip}$  betrachtet werden. Hierdurch ergibt sich als direkte Konsequenz zwar keine Reduktion der Dimensionen des Zustandsvektors, jedoch weist die Systemmatrix  $A$  aus (5.7) nun wesentlich bessere Eigenschaften auf, da zuvor im Falle eines Reibwertgradienten nahe oder gleich Null die erste Spalte der Matrix in jedem Element den Wert Null besaß, wodurch die Konditionszahl dieser Matrix ebenfalls Null wurde und die numerische Handhabbarkeit, insbesondere die Invertierbarkeit der Matrix, stark eingeschränkt wurde. Die Variablentransformation von der Motordrehzahl hin zur Differenzdrehzahl führt zu einer Änderung der ersten beiden Differenzialgleichungen aus (5.6) zu

$$\begin{aligned} \dot{n}_{Slip}(t) &= \left[ \frac{1}{J_{Eng}} \cdot \bar{M}_{Eng} - \frac{J_{Eng} + J_{IPS}}{J_{Eng} \cdot J_{IPS}} \cdot \bar{M}_{Cl} + \frac{c_{IPS}}{J_{IPS}} \cdot (\bar{\varphi}_{IPS} - i_{GB} \cdot \bar{\varphi}_{OPS}) + \frac{d_{IPS}}{J_{IPS}} \cdot (\bar{\omega}_{IPS} - i_{GB} \cdot \bar{\omega}_{OPS}) \right] \\ &+ \left[ \frac{1}{J_{Eng}} \cdot \delta M_{Eng}(t) - \frac{J_{Eng} + J_{IPS}}{J_{Eng} \cdot J_{IPS}} \cdot \delta M_{Cl}(t) - \frac{dM_{Cl}}{dn_{Slip}} \cdot \delta \omega_{Slip}(t) \right. \\ &\left. + \frac{c_{IPS}}{J_{IPS}} \cdot (\delta \varphi_{IPS}(t) - i_{GB} \cdot \delta \varphi_{OPS}(t)) + \frac{d_{IPS}}{J_{IPS}} \cdot (\delta \omega_{IPS}(t) - i_{GB} \cdot \delta \omega_{OPS}(t)) \right] \\ \dot{n}_{IPS}(t) &= \frac{1}{J_{IPS}} \cdot \left[ (\bar{M}_{Cl} - c_{IPS} \cdot (\bar{\varphi}_{IPS} - i_{GB} \cdot \bar{\varphi}_{OPS})) - d_{IPS} \cdot (\bar{\omega}_{IPS} - i_{GB} \cdot \bar{\omega}_{OPS}) \right. \\ &\left. + \frac{dM_{Cl}}{dn_{Slip}} \cdot \delta \omega_{Slip}(t) - c_{IPS} \cdot (\delta \varphi_{IPS}(t) - i_{GB} \cdot \delta \varphi_{OPS}(t)) - d_{IPS} \cdot (\delta \omega_{IPS}(t) - i_{GB} \cdot \delta \omega_{OPS}(t)) + \delta M_{Cl}(t) \right] \end{aligned} \quad (7.34)$$

Im nächsten Schritt erfolgt nun eine tatsächliche Ordnungsreduktion des Reglers und des Streckenmodells, indem statt der bislang verwendeten einfachen Verdrehwinkel nun die Differenzen der einzelnen Verdrehwinkel zueinander eingeführt werden. Es erfolgt nun also eine Substitution

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_{IPS} &= \varphi_{IPS} - i_{GB} \cdot \varphi_{OPS} \\ \Delta \varphi_{SShaft} &= \frac{1}{i_{Diff}} \cdot \varphi_{OPS} - \varphi_{Rad} \quad , \\ \Delta \varphi_{Axle} &= \frac{1}{i_{Rad}} \cdot \varphi_{Rad} - \varphi_{Veh} \end{aligned} \quad (7.35)$$

wodurch die Ordnung des Streckenmodells um eins reduziert wird. Es wird im Folgenden eine weitere Reduktion der Ordnung vorgenommen, indem die Annahme getroffen wird, dass die durch einen von Null verschiedenen Reibwert der Kupplung auftretende Dynamik dem dynamischen Anteil des Kupplungsmomentes  $\delta M_c(t)$  und damit der Systemunsicherheit zugeschlagen werden kann. Dies erscheint legitim, da diesem ebenfalls die Funktion zukommt, Momentenschwankungen und damit auch potenziell das selbsterregte Rupfen der Kupplung abzubilden. Damit ist nun die Primärseite des Antriebsstranges in ihrer Rotationsdynamik vollkommen von der Sekundärseite entkoppelt, wodurch die Notwendigkeit der Betrachtung von  $n_{Slip}$  und  $\varphi_{Slip}$  entfällt, wodurch die Ordnung des Streckenmodells um zwei reduziert wird. Die Systemmatrix des derart reduzierten Systems lautet nun

$$A(t) = \begin{bmatrix}
 -\frac{d_{IPS}}{J_{IPS}} & +\frac{i_{GB} \cdot d_{IPS}}{J_{IPS}} & 0 & 0 & -\frac{c_{IPS}}{J_{IPS}} & 0 & 0 \\
 +\frac{i_{GB} \cdot d_{IPS}}{J_{OPS}} & -\frac{d_{SShaft} + i_{Diff}^2 \cdot d_{IPS}}{i_{Diff}^2 \cdot J_{OPS}} & +\frac{d_{SShaft}}{i_{Diff} \cdot J_{OPS}} & 0 & +\frac{i_{GB} \cdot c_{IPS}}{J_{OPS}} & -\frac{c_{SShaft}}{i_{Diff} \cdot J_{OPS}} & 0 \\
 0 & +\frac{d_{SShaft}}{i_{Diff} \cdot J_{Rad}} & -\frac{i_{Rad}^2 \cdot d_{SShaft} + d_{Axle}}{i_{Rad}^2 \cdot J_{Rad}} & +\frac{d_{Axle}}{i_{Rad} \cdot J_{Rad}} & 0 & +\frac{c_{SShaft}}{i_{Diff} \cdot J_{Rad}} & -\frac{c_{Axle}}{i_{Rad} \cdot J_{Rad}} \\
 0 & 0 & +\frac{d_{Axle}}{i_{Rad} \cdot J_{Veh}} & -\frac{d_{Axle}}{J_{Veh}} & 0 & 0 & +\frac{c_{Axle}}{J_{Veh}} \\
 +1 & -i_{GB} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & +\frac{1}{i_{Diff}} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & +\frac{1}{i_{Rad}} & -1 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}$$

(7.36)

Im Folgenden kann nun eine Reduktion der Ordnung der Regelstrecke anhand der Ergebnisse der Modellreduktion nach Rivin und Di in 5.5 erfolgen. Anhand der in 5.5 ermittelten Dynamik der jeweiligen reduzierten Systeme liegt es nahe, für eine erste Ordnungsreduktion der Regelstrecke das in Bild 71 in 5.5 und unterhalb nochmals dargestellte reduzierte Modell des Antriebsstranges zu verwenden und die mit der Systemmatrix  $A$  in (7.36) assoziierte Zustandsraumdarstellung entsprechend der Berechnungen in 5.5 anzupassen.

Die Sekundärseite des reduzierten Antriebsstrangmodells enthält nun noch drei Massenträgheitsmomente, die jeweils mit den im ursprünglichen Modell des Antriebsstranges vorhandenen Trägheitsmomenten assoziiert werden können. Dies erleichtert eine spätere Zuordnung der Trägheitsmomente zu den jeweils in der

Regelstrecke vorhandenen Signalen. Hierbei wird das Trägheitsmoment  $J_{L,IVa}$  mit der Getriebeeingangswelle assoziiert,  $J_{R,IVa}$  mit den Rädern des Fahrzeugs und schließlich  $J_{Veh}^+$  mit der Masse des Fahrzeugs. Damit sind die verbleibenden Zustandsvariablen die Getriebeeingangsdrehzahl  $\omega_{IPS}$ , die Raddrehzahl  $\omega_{Rad}$  sowie die zur Drehzahl übersetzte Fahrzeuggeschwindigkeit  $\omega_{Veh}$  und die mit diesen Drehzahlen assoziierten relativen Verdrehwinkel  $\Delta\varphi_{IPS}$  und  $\Delta\varphi_{Axle}$ .

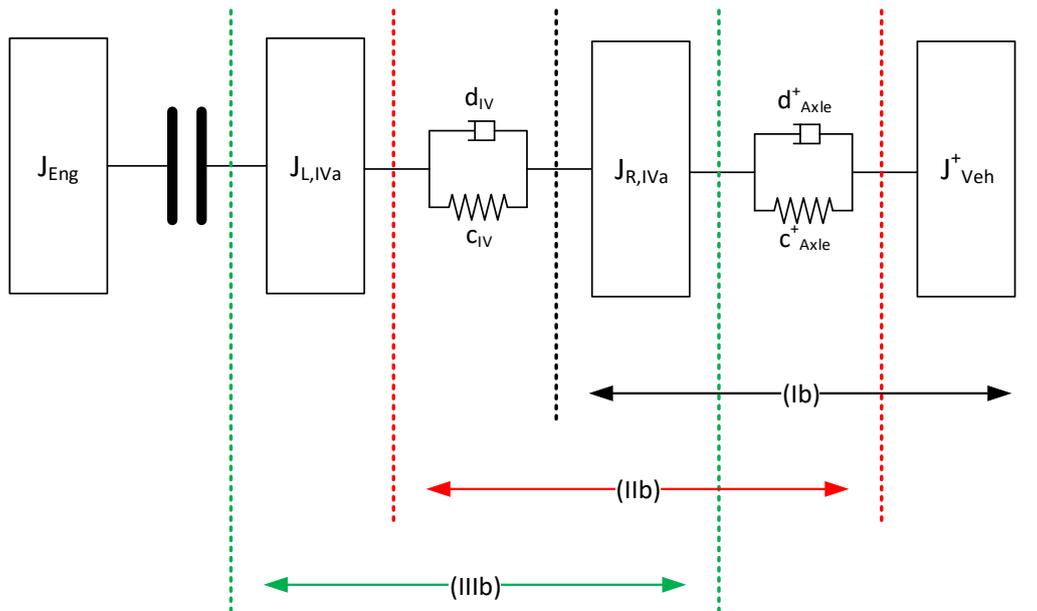


Bild 71: Reduziertes Antriebsstrangmodell nach Schritt 2 der Modellreduktion in 5.5

Damit ist der Zustandsvektor dieses reduzierten Systems gegeben durch

$$x^T = [\omega_{IPS} \quad \omega_{Rad} \quad \omega_{Veh} \quad \Delta\varphi_{IPS} \quad \Delta\varphi_{Axle}] \tag{7.37}$$

sowie die Matrizen der bereits bekannten Zustandsraumdarstellung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1u + B_{21}w_1 + B_{22}w_2 + B_3v \\ z &= C_1x + D_1u \\ y &= C_2x \quad + v \quad \quad \quad + D_2v \end{aligned}$$

des Systems durch

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{d_{IV}}{J_{L,IV a}} & \frac{d_{IV}}{J_{L,IV a}} & 0 & -\frac{c_{IV}}{J_{L,IV a}} & 0 \\ \frac{d_{IV}}{J_{R,IV a}} & \frac{d_{IV} - d_{Axle}^+}{J_{R,IV a}} & \frac{d_{Axle}^+}{J_{R,IV a}} & \frac{c_{IV}}{J_{R,IV a}} & -\frac{c_{Axle}^+}{J_{R,IV a}} \\ 0 & \frac{d_{Axle}^+}{J_{Veh}^+} & -\frac{d_{Axle}^+}{J_{Veh}^+} & 0 & \frac{c_{Axle}^+}{J_{Veh}^+} \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.38)$$

$$B_1^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_{L,IV a}} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad B_{22}^T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{J_{R,IV a}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.39)$$

$$B_3^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{J_{L,IV a}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{J_{L,IV a}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{J_{L,IV a}} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.40)$$

und mit den neu definierten Signalvektoren des reduzierten Systems

$$\begin{aligned} Z^T &= [\Delta\omega_{IPS} \quad \Delta\omega_{Rad} \quad \Delta\varphi_{IPS} \quad \Delta\varphi_{Axle} \quad M_{Cl}] \\ W^T &= [\delta\omega_{Tor,IPS} \quad \delta\omega_{Tor,Axle} \quad \delta\varphi_{Tor,IPS} \quad \delta\varphi_{Tor,Axle} \quad \mu_{Cl}] \end{aligned} \quad (7.41)$$

ergibt sich die Beschreibung der Systemunsicherheit und die Verknüpfung dieser mit dem nominalen System

$$\Delta(t) = \begin{bmatrix} \Delta_{d,IV} & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \Delta_{d,Axle} & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \Delta_{c,IV} & & \\ & \ddots & & \Delta_{c,Axle} & 0 \\ 0 & \dots & & 0 & \Delta_{M,Cl} \end{bmatrix}; \quad B_{21} = \begin{bmatrix} -\frac{d_{IV}}{J_{L,IV a}} & 0 & -\frac{c_{IV}}{J_{L,IV a}} & 0 & \frac{1}{J_{L,IV a}} \\ \frac{d_{IV}}{J_{R,IV a}} & -\frac{d_{Axle}^+}{J_{R,IV a}} & \frac{c_{IV}}{J_{R,IV a}} & -\frac{c_{Axle}^+}{J_{R,IV a}} & 0 \\ 0 & \frac{d_{Axle}^+}{J_{Veh}^+} & 0 & \frac{c_{Axle}^+}{J_{Veh}^+} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.42)$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 \\ & & \ddots & & \ddots & 1 \\ 0 & & \dots & & & 0 \end{bmatrix}; \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (7.43)$$

Hier sind die neu gewonnenen Parameter des reduzierten Systems gegeben durch

$$\begin{aligned} J_{L,IVa} &= 0,0118 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ J_{R,IVa} &= 0,0046 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ c_{IV} &= 22,67 \frac{\text{Nm}}{\text{rad}} \\ d_{IV} &= 0,0452 \frac{\text{Nm} \cdot \text{s}}{\text{rad}} \end{aligned} \quad (7.44)$$

sowie  $d_{Axle}^+$ ,  $c_{Axle}^+$ ,  $J_{Veh}^+$  durch (5.23).

Somit wurde die Ordnung des unsicherheitsbehafteten Systems, das die Regelstrecke beschreibt von neun auf fünf reduziert, wodurch die Zahl der zu bestimmenden Parametern der Matrix Riccati Differentialgleichungen in (7.31) und (7.32) für jeden Zeitschritt von 450 auf 242 verringert wurde und damit der Rechenaufwand für die numerische Lösung dieser Gleichungen deutlich reduziert werden konnte.

#### 7.4.2 Bestimmung der Designparameter für das reduzierte Streckenmodell

Analog zu den in 7.3 angestellten Überlegungen zur Wahl der einzelnen Designparameter des Reglerentwurfs, werden im Folgenden geeignete Parameter zur Auslegung eines Reglers wie in (7.11) für das zuvor entwickelte reduzierte Streckenmodell ermittelt. Da die Bedeutung der Parameter sowie die zu deren Wahl angestellten Überlegungen bereits in 7.3 umfangreich erläutert wurden und die Ziele der Regelung auch für den Regler des reduzierten Streckenmodells gültig bleiben, werden hier lediglich die Ergebnisse der Auslegung präsentiert und in den Rahmen der Designprozedur eingeordnet.

Für die Parameter des Performance Kriteriums ergeben sich damit die folgenden Matrizen

$$\begin{aligned} G &= 1 & G &\in \mathbb{R} \\ R &= 10^2 \cdot \text{diag} \left( 1, \frac{1}{(i_{GB} \cdot i_{Diff})^2}, \frac{1}{(i_{GB} \cdot i_{Diff} \cdot i_{Rad})^2}, 0, 0 \right) & R &\in \mathbb{R}^{5 \times 5} \\ X_T &= 10^4 \cdot \text{diag} \left( 1, \frac{1}{(i_{GB} \cdot i_{Diff})^2}, \frac{1}{(i_{GB} \cdot i_{Diff} \cdot i_{Rad})^2}, 0, 0 \right) & X_T &\in \mathbb{R}^{5 \times 5} \end{aligned} \quad (7.45)$$

sowie die skalaren Parameter

$$c_0 = 10^2; \quad c_{Ham} = 10^{-2}; \quad T = 0,22 \text{ s}. \quad (7.46)$$

Für die Koeffizienten der Integralen Quadratischen Zwangsbedingung (IQC) gelten ebenfalls weiterhin die Überlegungen aus 7.3.3, beginnend mit der Bestimmung der Gewichtungsmatrix  $Q$  mithilfe der Relation

$$\int_0^T w_1(t) Q w_1(t) dt \leq d + \int_0^T \|z(t)\|^2 dt$$

sowie den Formulierungen für die Matrix der Unsicherheiten in (7.42) sowie der Signale  $z(t)$  und  $w(t)$  in (7.41). Die Abschätzung der Ungleichung gestaltet sich hier sehr einfach, da in  $z(t)$  die Drehzahlen und Verdrehwinkel ausschließlich als die in den Differenzialgleichungen des Systems auftretenden Differenzen enthalten sind und somit die Matrix der Unsicherheiten  $\Delta(t)$  eine Diagonalmatrix ist. Da die Gewichtungsmatrix  $Q$ , wie auch in 7.3.3, ebenfalls als Diagonalmatrix angesetzt wird, wobei sich die Diagonalelemente  $q_i$  voneinander unterscheiden dürfen, vereinfacht sich nun die Bestimmung der Matrix  $Q$  durch die Berechnung

$$\begin{aligned} \int_0^T w_1(t) Q w_1(t) dt &\leq d + \int_0^T \|z(t)\|^2 dt \\ \int_0^T (\Delta(t) z(t))^T Q (\Delta(t) z(t)) dt &\leq d + \int_0^T \|z(t)\|^2 dt \\ \int_0^T z(t)^T \underbrace{\Delta(t) Q \Delta(t)}_{\tilde{Q} = \Delta Q \Delta = \text{diag}(\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_5)} z(t) dt &\leq d + \int_0^T \|z(t)\|^2 dt \\ \int_0^T z(t) \tilde{Q} z(t) dt &\leq d + \int_0^T \|z(t)\|^2 dt \end{aligned} \quad (7.47)$$

Hier ist bereits die Annahme einer zeitunabhängigen Systemunsicherheit, die sich aus der Abschätzung der Veränderlichkeit in Relation zur Systemdynamik<sup>508</sup> ergibt, ausgenutzt, womit sich in komponentenweiser Betrachtung

$$\begin{aligned} \int_0^T \|z_i(t)\|^2 \cdot \tilde{q}_i &\leq \int_0^T \|z_i(t)\|^2 \\ \tilde{q}_i &\leq 1 \\ q_i \cdot \|\Delta_i\|^2 &\leq 1 \\ q_i &\leq \frac{1}{\|\Delta_i\|^2} \end{aligned} \quad (7.48)$$

ergibt.

<sup>508</sup> vgl. Tabelle 4

Damit resultiert die Bestimmung von  $Q$  in der Form  $Q = \text{diag}(q_1, \dots, q_5)$  in einer Diagonalmatrix mit den inversen quadratischen Beträgen der Unsicherheiten

$Q = \text{diag}\left(\frac{1}{\|\Delta_1\|^2}, \dots, \frac{1}{\|\Delta_5\|^2}\right)$ . Ebenfalls analog zu den in 7.3.3 angestellten

Überlegungen wird die Gewichtungsmatrix des Rauschsignals  $N$  als die reziproke Kovarianzmatrix des Signals definiert

$$N(t) = N = \frac{1}{\text{Cov}(v(t), v(t))},$$

die sich für die Varianzen der noch vorhandenen Messsignale

$$\begin{aligned} \sigma_{n_{IPS}}^2 &\approx 11,79 \text{ rpm}^2 ; & \sigma_{\omega_{IPS}}^2 &\approx 1,3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} ; & \sigma_{\varphi_{IPS}}^2 &\approx 2,92 \cdot 10^{-4} \text{ rad}^2 \\ \sigma_{n_{Rad}}^2 &\approx 0,039 \text{ rpm}^2 ; & \sigma_{\omega_{Rad}}^2 &\approx 4,38 \cdot 10^{-6} \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} ; & \sigma_{\varphi_{Rad}}^2 &\approx 9,64 \cdot 10^{-7} \text{ rad}^2 \\ \sigma_{n_{Veh}}^2 &\approx 3,7 \cdot 10^{-3} \text{ rpm}^2 ; & \sigma_{\omega_{Veh}}^2 &\approx 4,13 \cdot 10^{-7} \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} ; & \sigma_{\varphi_{Veh}}^2 &\approx 9,09 \cdot 10^{-8} \text{ rad}^2 \end{aligned}$$

zu

$$\begin{aligned} N &= \text{diag}\left(\frac{1}{\sigma_{\omega_{IPS}}^2}; \frac{1}{\sigma_{\omega_{Rad}}^2}; \frac{1}{\sigma_{\omega_{Veh}}^2}; \frac{1}{(\sigma_{\varphi_{IPS}}^2 - \sigma_{\varphi_{Rad}}^2)}; \frac{1}{(\sigma_{\varphi_{Rad}}^2 - \sigma_{\varphi_{Veh}}^2)}\right) \\ &= 10^3 \cdot \text{diag}(0,769; 2,283 \cdot 10^2; 2,421 \cdot 10^3; 3,436; 1,146 \cdot 10^3) \end{aligned} \quad (7.49)$$

ergibt.

Die Bestimmung von  $M$  erfolgt mithilfe einer Abschätzung der Ungleichung und mit (7.29)

$$\int_0^T w_2(t)^T M(t) w_2(t) dt \leq d_M$$

als

$$M = \frac{1}{\max(M_{Load})^2} \approx 1,6 \cdot 10^{-5}; \quad d_M = T, \quad (7.50)$$

da in dem reduzierten Modell die Dynamik des Verbrennungsmotors und damit auch das Motormoment nicht mehr Eingang in das Modell und somit auch nicht mehr in die Gewichtungsmatrix  $M$  findet.

Die letzte verbleibende Gewichtungsmatrix ist die des Anfangszustandes  $P_0$  und wird mithilfe von

$$x(0)^T P_0 x(0) \leq d_{x_0}$$

ermittelt. Diese Beziehung lässt sich analog zu 7.3.3 abschätzen und damit

$$P_0 = 3,56 \cdot 10^{-5} \frac{s^2}{\text{rad}^2} \cdot \text{diag}(1, 0; i_{GB}^2 i_{Diff}^2; i_{GB}^2 i_{Diff}^2 i_{Rad}^2; 10^{-3}; 10^{-3}) \quad (7.51)$$

$$d_{x_0} = 1$$

erhalten.

Zusammengefasst sind die Auslegungsparameter des Reglers für das reduzierte Modell gegeben durch

$$\begin{aligned} G &= 1 & G &\in \mathbb{R} \\ R &= 10^2 \cdot \text{diag}\left(1, \frac{1}{(i_{GB} \cdot i_{Diff})^2}, \frac{1}{(i_{GB} \cdot i_{Diff} \cdot i_{Rad})^2}, 10^{-6}, 10^{-6}\right) & R &\in \mathbb{R}^{5 \times 5} \\ X_T &= 10^4 \cdot \text{diag}\left(1, \frac{1}{(i_{GB} \cdot i_{Diff})^2}, \frac{1}{(i_{GB} \cdot i_{Diff} \cdot i_{Rad})^2}, 10^{-6}, 10^{-6}\right) & X_T &\in \mathbb{R}^{5 \times 5} \\ Q &= \text{diag}\left(\frac{1}{0,09}, \frac{1}{0,09}, \frac{1}{0,04}, \frac{1}{0,04}, \frac{1}{0,01}\right) & Q &\in \mathbb{R}^{5 \times 5} \\ N &= 10^3 \cdot \text{diag}(0,769; 2,283 \cdot 10^2; 2,421 \cdot 10^3; 3,436; 1,146 \cdot 10^3) & N &\in \mathbb{R}^{5 \times 5} \\ M &= 1,6 \cdot 10^{-5} & M &\in \mathbb{R} \\ P_0 &= 3,56 \cdot 10^{-5} \frac{s^2}{\text{rad}^2} \cdot \text{diag}(1, 0; i_{GB}^2 i_{Diff}^2; i_{GB}^2 i_{Diff}^2 i_{Rad}^2; 10^{-3}; 10^{-3}) & P_0 &\in \mathbb{R}^{5 \times 5} \\ d &= 2 + T & d &\in \mathbb{R} \\ c_0 &= 10^2 & c_0 &\in \mathbb{R} \\ c_{1...3} &= 10^{-2} & c_{1...3} &\in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (7.52)$$

Mit diesen Parametern können nun die Matrix Riccati Differenzialgleichungen in (7.31) und (7.32) aufgestellt und die Reglermatrizen wie in (7.11) bestimmt werden.

### 7.4.3 Bestimmung der Reglerparameter

Die Reduktion des Zustandsraummodells und die Anpassung der Designparameter wurden in die MATLAB Funktionen zur Auslegung des Reglers übernommen. Damit können nun, nach dem in Bild 91 dargestellten Schema, über die Lösung der Riccati Matrix Differenzialgleichungen die Parameter des robusten Reglers für das reduzierte Modell der Regelstrecke im Zustandsraum bestimmt werden. Dieser Lösungsweg erfordert einige Iterationen zur Anpassung der Designparameter und wird hier mit einer

geeigneten Darstellung ausgewählter, für das Verständnis des Lesers wichtiger Zwischenergebnisse präsentiert.

Zunächst wurde die Lösung des regelungstechnischen Problems unter Verwendung der in (7.52) gegebenen Designparameter versucht, jedoch konnten trotz der grundsätzlichen Lösbarkeit der beiden Riccati Matrix Differenzialgleichungen (7.31) und (7.32) über einen großen Teil des Intervalls für den Designparameter  $\tau$  keine Lösungen gefunden werden, die den aus der Zielformulierung für den Entwurf eines Reglers resultierenden Anforderungen (7.33) genügen.

Daraufhin wurde eine Anpassung der im vorigen Abschnitt abgeleiteten Designparameter durchgeführt, um die relative Gewichtung der unterschiedlichen Regelziele zueinander zu variieren und somit die Möglichkeit einer Lösung der regelungstechnischen Problemstellung zu testen. So wurde unter anderem die Gewichtungsmatrix  $P_0$  der Anfangsbedingung angepasst, indem nun als Ausgangsbasis nicht mehr eine Getriebeeingangsdrehzahl von  $n_{IPS} = 1600$  rpm, sondern  $n_{IPS} = 800$  rpm, verwendet wurde. Dies lässt sich durch die Fahrsituationen, in denen die Anti-Rupf-Regelung zum Einsatz kommen soll, begründen, da sowohl beim Anfahren als auch in der Situation Ankriechen das erste Auftreten einer signifikanten Rupfschwingung in der Regel spätestens im Bereich der Antriebsstrangresonanz, also im Bereich  $n_{IPS,Res} \approx 420$  rpm<sup>509</sup> zu erwarten ist. Um der Regelung keine zu große Einschränkung durch die Wahl der Gewichtung  $P_0$  aufzuerlegen, wurde als Basis der Bestimmung von  $P_0$  die oben genannte Drehzahl von  $n_{IPS} = 800$  rpm gewählt und eine zusätzliche Gewichtung der Anfangsbedingung mit  $10^6$  vorgenommen, wodurch die neue Gewichtung durch

$$P_0 = 1,42 \cdot 10^2 \frac{\text{s}^2}{\text{rad}^2} \cdot \text{diag}(1, 0; i_{GB}^2 i_{Diff}^2; i_{GB}^2 i_{Diff}^2 i_{Rad}^2; 10^{-3}; 10^{-3}) \quad (7.53)$$

gegeben ist. Weiterhin wurde der berücksichtigte Einfluss des Messrauschens reduziert, da diese Störungen im Vergleich zu den Auswirkungen beispielsweise der systeminhärenten Unsicherheiten als gering einzustufen sind, weshalb die Gewichtung  $N$  um den Faktor  $10^{-4}$  angepasst wurde. Darüber hinaus wurden die Gewichtungen der den Zielen der Regelung zugeordneten Gewichtungsmatrizen zueinander angepasst, um die zuvor diskutierten Prioritäten der Ziele der Regelung nochmals zu verstärken, und daraufhin die Matrizen  $G$ ,  $R$  und  $X_T$  jeweils um die Faktoren  $10^{-2}$ ,  $10^4$  und  $10^8$  angepasst. Für eine Iteration in  $\tau$  in  $5 \cdot 10^4$  Schritten über

---

<sup>509</sup> entspricht einer Frequenz von 7,0 Hz

das zulässige Intervall  $\left[0; \frac{c_0}{d}\right]$  ergeben sich somit die in Bild 94 und Bild 95 dargestellten Grafiken zur Analyse der Lösung der beiden Riccati Matrix Differenzialgleichungen. Es ist zu erkennen, dass einige Lösungen der RMDE (7.31) die an sie gestellten Anforderungen mit Ausnahme der Anforderung an den Spektralradius erfüllen (grüne Kreuze in Bild 95), während bislang keine der gefundenen Lösungen für  $Y(t)$  diese Anforderungen erfüllt, wobei gezeigt werden kann, dass hier für jede der Lösungen die Bedingung  $Y(t) > 0 \quad \forall t \in [0; T]$  in (7.33) verletzt wird. Eine mögliche Ursache hierfür kann die zuvor vorgenommene zusätzliche Gewichtung des Parameters  $P_0$  mit dem Faktor  $10^6$  sein, der daraufhin auf  $10^3$  reduziert wird und somit aufgrund  $Y(0) = \hat{P}_0^{-1}$ <sup>510</sup> die positive Definitheit von  $Y(t)$  unter der Berücksichtigung einer möglicherweise fehlerbehafteten numerischen Berechnung nicht vollständig garantiert werden kann.

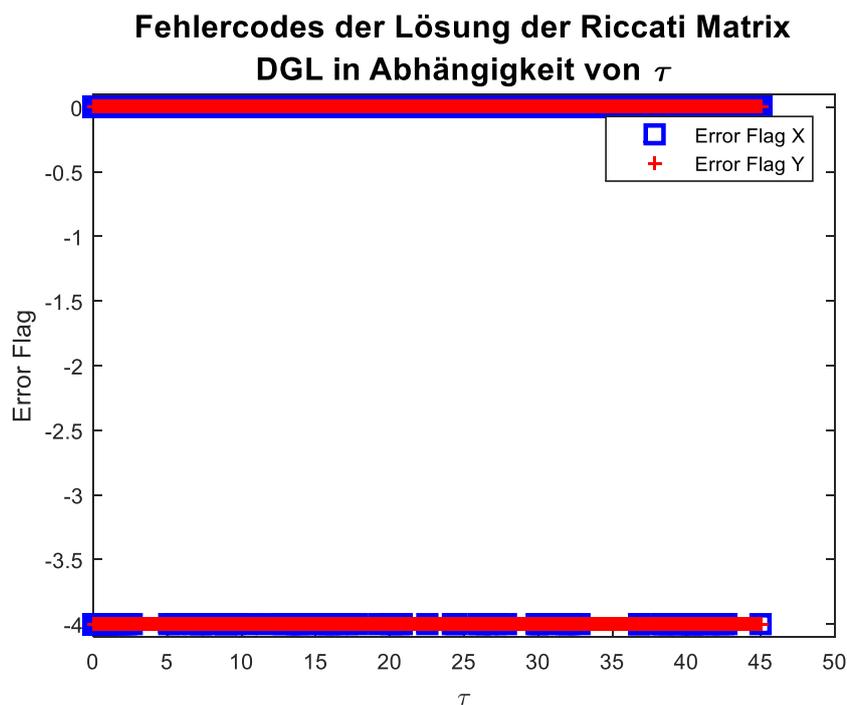


Bild 94: Übersicht über die während der Iteration über das Intervall von  $\tau$  aufgetretenen Fehlercodes für die Lösung der beiden Riccati Matrix Differenzialgleichungen<sup>511</sup>

Daraufhin wurden die Parameter nach einem Verfahren, das sich an die Methode der fortgesetzten Bisektion<sup>512</sup> anlehnt, auf eine sinnvoll erscheinende Größenordnung

<sup>510</sup> vgl. (7.33)

<sup>511</sup> vgl. 7.3.5 für eine Einordnung der Fehlercodes

<sup>512</sup> Schwarz und Köckler, 2011

eingegrenzt. Im weiteren Verlauf wurden die beiden Riccati Matrix Differentialgleichungen (7.31) und (7.32) auf ihre Abhängigkeiten von den verfügbaren Designparametern und Gewichtungsmatrizen analysiert, sodass die Werte des Iterationsparameters  $\tau$ , für den valide Lösungen<sup>513</sup>  $X(t)$  und  $Y(t)$  gefunden werden, für jede der Gleichungen innerhalb des Iterationsintervalls verschoben werden können, ohne dass dabei die Lösungspunkte der jeweils anderen Gleichung beeinflusst werden, indem die entsprechenden Gewichtungen variiert werden.

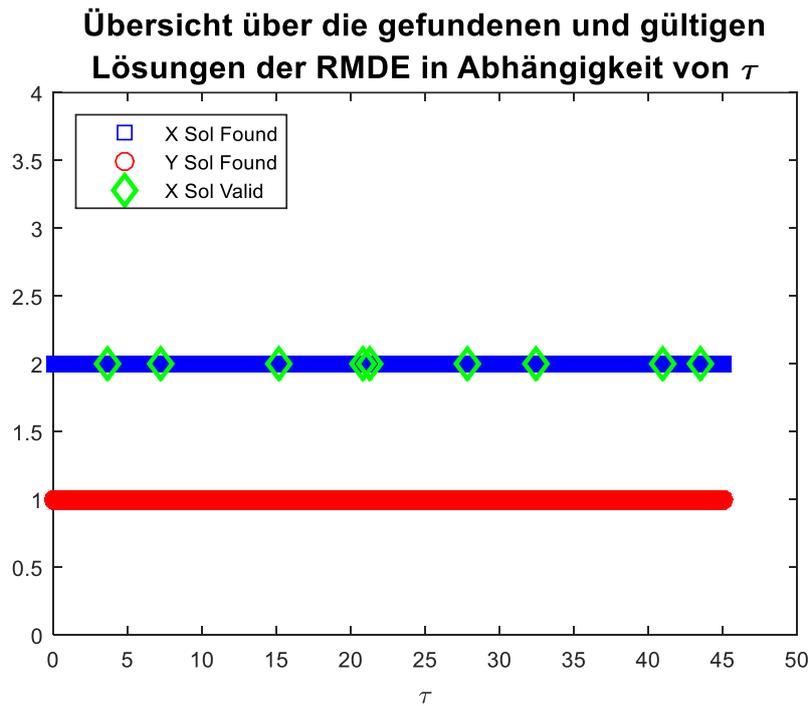


Bild 95: Übersicht über die durch die Iteration in  $\tau$  gefundenen Lösungen der beiden Riccati Matrix Differentialgleichungen sowie einer Kennzeichnung der Werte  $\tau_{XY}$  für die diese Lösungen valide sind

<sup>513</sup> hier im Sinne der Erfüllung der Anforderungen aus (7.33)

Tabelle 6: Übersicht über die Abhängigkeiten der Lösungen der zur Reglerauslegung verwendeten Riccati Matrix Differentialgleichungen von den für das Design zu Verfügung stehenden Gewichtungsmatrizen  $G$  und  $N$

Design -matrix	Intervall Skalierungsfaktor	Änderung Anz. Lsg. X(t) & Y(t)	Änderung Anz. valide Lsg. X(t)	Änderung Pos. valide Lsg. X(t)	Änderung Anz. valide Lsg. Y(t)	Änderung Pos. valide Lsg. Y(t)
G	$[7,5 ; 9,5] \cdot 10^{-3}$	0	↑	→ ↔	–	–
	$[7,5 ; 8,8] \cdot 10^{-6}$	~0	↑	↔	–	–
N	$[0,9 ; 2,0] \cdot 10^{-7}$	↓	–	–	↑	→ ↔
	$[0,5 ; 1,5] \cdot 10^{-4}$	↓↓	–	–	↑	⇒

Diese Analyse ergab als derart geeignete Variationsparameter die Gewichtungsmatrix  $G$  für die RMDE (7.31), da hier die Gleichung (7.32) und deren Lösungen nicht beeinflusst werden, sowie  $N$  für die RMDE (7.32), da durch deren Variation die Gleichung (7.31) unberührt bleibt.

In Tabelle 6 sind nun die Ergebnisse der als Folge dieser Analyse durchgeführten Untersuchung der Einflussmöglichkeiten auf die Lösungen der Gleichungen (7.31) und (7.32) mithilfe der Matrizen  $G$  und  $N$  dargestellt. Betrachtet wird der Einfluss auf die Gesamtzahl der Werte von  $\tau$ , für die für beide Gleichungen Lösungen gefunden werden, auf die Gesamtzahl der Validen Lösungen der jeweiligen Gleichung, sowie auf die Position der Werte von  $\tau$  für die die Lösungen der Differentialgleichungen die Anforderungen in (7.33), wiederum mit Ausnahme der Forderung an den Spektralradius  $\rho(Y(t)X(t))$ , erfüllen. Diese Abhängigkeiten sind wiederum für unterschiedliche Intervalle der Gewichtungsfaktoren der Matrizen  $G$  und  $N$  in Bezug auf deren Wahl in (7.52) gezeigt, da hier mehrere Intervalle vielversprechend erschienen.<sup>514</sup>

<sup>514</sup> Im Sinne einer möglichst großen Anzahl valider Lösungen für beide Gleichungen sowie kleiner Abstände der Werte für  $\tau$  für die jeweiligen validen Lösungen.

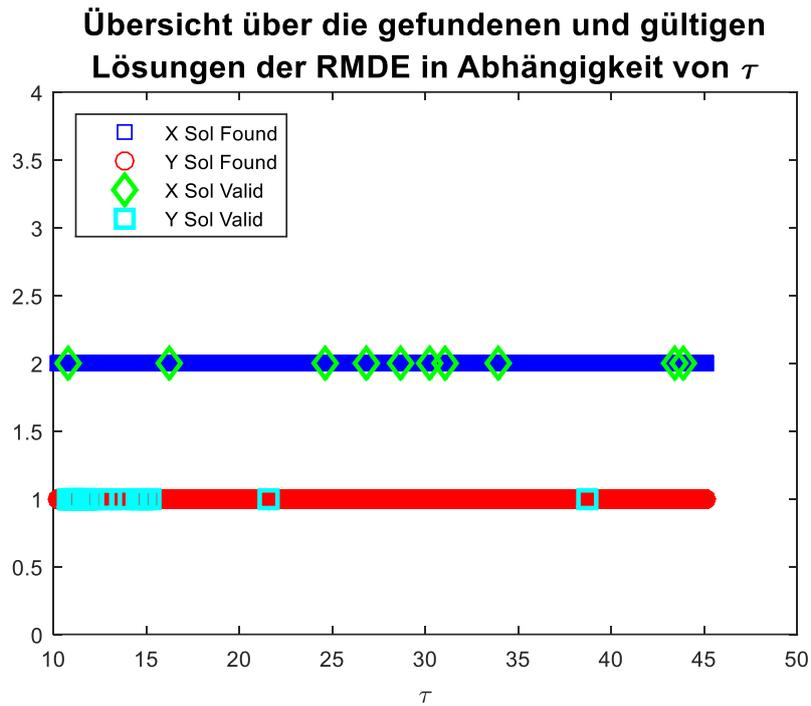


Bild 96: Übersicht über die gefundenen und validen Lösungen der beiden Riccati Matrix Differentialgleichungen für den beschriebenen Fall einer gemeinsamen Lösung für  $\tau = 10,8063$

Entsprechend der durch die Analyse ermittelten und in Tabelle 6 veranschaulichten Abhängigkeiten werden die Skalierungsfaktoren der Matrizen  $G$  und  $N$  variiert, sodass Werte des Parameters  $\tau$  gefunden werden können, für die für beide Riccati Matrix Differentialgleichungen Lösungen gefunden werden können, die mit Ausnahme der Forderung an den Spektralradius  $\rho(Y(t)X(t))$  die Anforderungen in (7.33) erfüllen.

Dies ist beispielsweise für die Parameterkombination

$$\begin{aligned}
 G &= 0,0088 & G &\in \mathbb{R} \\
 R &= 10^2 \cdot \text{diag} \left( 1, \frac{1}{(i_{GB} \cdot i_{Diff})^2}, \frac{1}{(i_{GB} \cdot i_{Diff} \cdot i_{Rad})^2}, 10^{-6}, 10^{-6} \right) & R &\in \mathbb{R}^{5 \times 5} \\
 X_T &= 10^4 \cdot \text{diag} \left( 1, \frac{1}{(i_{GB} \cdot i_{Diff})^2}, \frac{1}{(i_{GB} \cdot i_{Diff} \cdot i_{Rad})^2}, 10^{-6}, 10^{-6} \right) & X_T &\in \mathbb{R}^{5 \times 5} \\
 Q &= 0,51 \cdot \text{diag} \left( \frac{1}{0,09}, \frac{1}{0,09}, \frac{1}{0,04}, \frac{1}{0,04}, \frac{1}{0,01} \right) & Q &\in \mathbb{R}^{5 \times 5} \\
 N &= 9 \cdot 10^{-2} \cdot \text{diag} (0,769; 2,283 \cdot 10^2; 2,421 \cdot 10^3; 3,436; 1,146 \cdot 10^3) & N &\in \mathbb{R}^{5 \times 5} \\
 M &= 1,6 \cdot 10^{-5} & M &\in \mathbb{R} \\
 P_0 &= 1,42 \cdot 10^{-1} \frac{\text{s}^2}{\text{rad}^2} \cdot \text{diag} (1,0; i_{GB}^2 i_{Diff}^2; i_{GB}^2 i_{Diff}^2 i_{Rad}^2; 10^{-3}; 10^{-3}) & P_0 &\in \mathbb{R}^{5 \times 5} \\
 d &= 2 + T & d &\in \mathbb{R} \\
 c_0 &= 10^2 & c_0 &\in \mathbb{R} \\
 c_{1...3} &= 10^{-2} & c_{1...3} &\in \mathbb{R}
 \end{aligned}
 \tag{7.54}$$

der Fall. Hier wurden für  $\tau_{Sol} = 10,8063$  valide Lösungen für  $X(t)$  und  $Y(t)$  gefunden (vgl. Bild 96).

Diese erfüllen jedoch nicht die in (7.33) gestellte Anforderung an den Spektralradius.

Auch eine weitere systematische Suche innerhalb der als vielversprechend erachteten Intervalle ergibt leider keine Kombination valider Lösungen für einen Wert von  $\tau$ , die alle in (7.33) gestellten Anforderungen erfüllen. Somit konnte trotz der unternommenen Anstrengungen und einer systematischen Vorgehensweise keine Lösung des regelungstechnischen Problems gefunden werden. Die Ursache hierfür liegt in der numerischen Lösung der Riccati Matrix Differentialgleichungen unter Berücksichtigung der Anforderungen an diese Lösungen.

## 7.5 Zwischenfazit

Im Zuge des in diesem Kapitel vorgestellten Designs eines robusten Anti-Rupf-Reglers konnte leider weder für das ursprüngliche System in seiner Zustandsraumdarstellung<sup>515</sup> noch für das reduzierte System<sup>516</sup> eine geeignete Kombination der Designparameter gefunden werden, die ein unter der

<sup>515</sup> vgl. 7.3

<sup>516</sup> vgl. 7.4

Berücksichtigung der systeminhärenten Unsicherheiten sowie der von außen auf das System einwirkenden harmonischen Störungen robust stabiles Verhalten des geschlossenen Regelkreises garantieren würden. Angesichts der Ergebnisse der Analyse der Systemcharakteristik in Abschnitt 7.2 ist dies nicht zu erwarten, da diese eine Lösbarkeit der regelungstechnischen Problemstellung nahelegen. Der Grund für das Nichterreichen dieser geeigneten Parameterkombination liegt in der Lösung der beiden in 7.3.4 aufgestellten Riccati Matrix Differenzialgleichungen, deren Lösung im Rahmen der gewählten Implementierung in Matlab nicht ausreichend numerisch stabil erscheint, um Lösungen der Differenzialgleichungen zu generieren, die die an sie gestellten Voraussetzungen erfüllen. Die These der numerischen Instabilität im Sinne einer nicht erreichbaren erforderlichen Präzision wird durch die Beobachtung gestützt, dass die Auslegung für das reduzierte Modell bessere Ergebnisse zu liefern scheint, als die strukturell identische Auslegung für das ursprüngliche Modell. Durch eine Variation der zur Verfügung stehenden Designparameter über mehrere Größenordnungen wurde außerdem das Risiko einer ungenügenden Lösbarkeit aufgrund einer möglichen Wahl ungeeigneter Auslegungsparameter minimiert.<sup>517</sup> Eine weitergehende Diskussion der hier aufgetretenen Probleme und möglicher Abhilfemaßnahmen wird im weiteren Verlauf der Arbeit dargelegt. Als Konsequenz dieser fehlgeschlagenen Auslegung eines Reglers, der den Anforderungen der hier gestellten regelungstechnischen Aufgabe genügt, wird auf eine Betrachtung der Umsetzung des Reglers – sowohl in Matlab als auch im Hinblick auf eine Implementierung in der Software zur Kupplungs- und Getriebesteuerung – verzichtet und stattdessen im folgenden Kapitel eine geeignete Methode zur Validierung eines robusten Reglers zur Dämpfung von Rupf-schwingungen im Antriebsstrang entwickelt.

---

<sup>517</sup> vgl. 7.4.3

## 8 Analyse des geschlossenen Regelkreises durch Simulation

In diesem Abschnitt erfolgt eine Beschreibung des ersten Teils der Aktivitäten zur Validierung eines, beispielsweise nach der in Kapitel 7 beschriebenen Auslegung mithilfe der  $\mathcal{H}_\infty$ -Methode entwickelten, potenziellen robusten Reglers zur Dämpfung von Rupfeschwingungen im PKW-Antriebsstrang. Zu diesen Validierungsaktivitäten zählen die Ermittlung und Überprüfung des Führungs- und Störverhaltens des Reglers, also das Verhalten des Reglers auf die Vorgabe einer äußeren Führungsgröße sowie das Verhalten des Reglers bei einer auftretenden äußeren Störung am Ausgang der Regelstrecke<sup>518</sup>, sowie die Validierung der Robustheit des Reglers gegenüber den in den vorigen Kapiteln diskutierten systeminhärenten Unsicherheiten.

### 8.1 Methoden und Vorgehensweise

Diese rein virtuellen Aktivitäten lassen sich als einzelne Sichtweisen des IPEK X-in-the-Loop Frameworks interpretieren, wobei der entworfene Regler jeweils die Rolle des *System-in-Development* einnimmt, während die restlichen Bestandteile des im folgenden Unterkapitel beschriebenen Modells Teil des Gesamtsystems sind. Zu diesen *Connected Systems* zählen hierbei der elektromechanische Aktor und die Kupplung, welche beide in 5.6 modelliert wurden, sowie das in 5.2 synthetisierte Modell des Antriebsstrangs. Die *Connected Systems* die die Umwelt des *SiD* abbilden sind demnach die von außerhalb der Regelstrecke wirkenden Momente, also das Lastmoment sowie das durch den Motor bereitgestellte Drehmoment, die von der Kupplungs- und Getriebesteuerung gesendete und durch den den Aktor ansteuernden Lageregler umgesetzte Rollenwegvorgabe sowie etwaige Störungen der Ausgangssignale des Systems wie sie in der Reglerauslegung berücksichtigt wurden.<sup>519</sup>

In diesem Framework ergibt sich somit die Analyse des Führungsverhaltens des Reglers als Validierung des Reglers in der Wechselwirkung mit dem Teilsystem Rollenwegvorgabe der Umwelt des *SiD*, die Analyse des Störverhaltens als Validierung in Wechselwirkung mit den Teilsystemen Last- und Motormoment sowie Störsignale der Umwelt.

---

<sup>518</sup> Lunze, 2006a

<sup>519</sup> vgl. 7.3 und 7.4.2

Wie bereits erwähnt erfolgen die in diesem Kapitel dokumentierten Validierungsaktivitäten des XiL Frameworks in einer rein virtuellen Umgebung, da es zunächst gilt, die grundlegenden Eigenschaften des Reglers zu validieren, bevor aufwendigere Validierungsaktivitäten durchgeführt werden, die unter Umständen bei einem nicht erwünschten Reglerverhalten auch eine Beschädigung der Hardware verursachen könnten.

Der letzte Teil dieser rein virtuell ablaufenden Validierungsaktivitäten ist die Prüfung der Robustheit des Reglers gegenüber den bereits in der Modellbildung berücksichtigten Systemunsicherheiten und beschreibt die Validierung des *SiD* mit dem virtuellen Gesamtsystem, das in diesem speziellen Fall aus allen im Rahmen der Zielanwendung möglichen Systemrealisierungen besteht. Dieser letzte Schritt kann, im Gegensatz zu den zuvor beschriebenen Aktivitäten, aufgrund der begrenzten Verfügbarkeit von Versuchsfahrzeugen und der potenziell notwendigen großen Anzahl an Versuchsträgern zur Abbildung aller möglichen Systemrealisierungen ausschließlich rein virtuell erfolgen.

Bevor diese Validierungsaktivitäten begonnen werden, werden jedoch alle bisher beschriebenen *Connected Systems* einer Verifikation unterzogen, sofern dies wie im Falle des Stellgliedes bestehend aus Aktor und Kupplung<sup>520</sup> noch nicht in einem vorangehenden Kapitel geschehen ist. Dies ist notwendig, da diese Systeme anhand der beschriebenen Modellierung im Rahmen dieser Arbeit aufgebaut wurden und somit auf keine bereits bestehende Verifikation oder Validierung dieser Teilsysteme zurückgegriffen werden kann. Im Falle dieser Teilsysteme wird jedoch lediglich eine Verifikation und keine Validierung vorgenommen, da hier die den Aktivitäten zugrunde liegenden Anforderungen nicht diskutiert werden sollen.

Zu Beginn dieses Kapitels wird der Aufbau des Simulationsmodells in Matlab Simulink<sup>521</sup> unter Verweis auf die Identifikation der Regelstrecke in Kapitel 5 beschrieben, gefolgt von der Validierung und Verifikation der Bestandteile dieses Modells. Anschließend werden die Integration des entwickelten Reglers in das Simulationsmodell sowie die Durchführung der zuvor erläuterten Validierungsaktivitäten beschrieben und deren Ergebnisse dokumentiert. Diese werden abschließend nochmals zusammengefasst und bilden damit die Grundlage für die darauffolgende Prüfung auf Möglichkeiten und Notwendigkeiten zur Optimierung des Reglerverhaltens.

---

<sup>520</sup> vgl. 5.6.3

<sup>521</sup> The Mathworks Inc., 2015

## 8.2 Aufbau des Simulationsmodells

Das Simulationsmodell wurde nach den in Kapitel 5 angestellten Überlegungen zur Modellierung des Antriebsstrangs<sup>522</sup> sowie zur Abbildung des Stellgliedes bestehend aus Doppelkupplung und elektromechanischem Aktor<sup>523</sup> in Matlab Simulink<sup>524</sup> aufgebaut, wobei die beschriebene Unterteilung der Subsysteme in dieser Form auch im Simulationsmodell beibehalten wurde (Bild 97). Der folgende Abschnitt beschreibt, wie von WITMANN erläutert, diesen Aufbau des Simulationsmodells.

Die Eingangsgrößen des Subsystems Aktor sind der tatsächliche Rollenweg sowie der zurückgekoppelte Einrückweg der Kupplung und als Ausgangsgröße die Einrückkraft, für das Subsystem einer Teilkupplung sind die beiden Eingangsgrößen die Einrückkraft sowie der Rollenweg des Aktors, während der Einrückweg und die Anpresskraft die Ausgangsgrößen bilden, wobei letztere die Eingangsgröße zum Subsystem des abtriebsseitigen Antriebsstrangs ist.

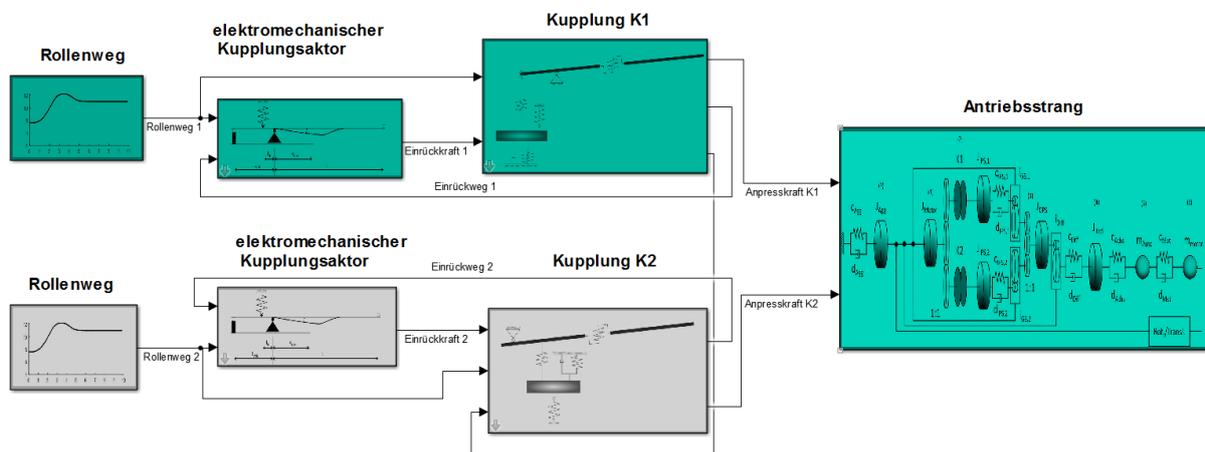


Bild 97: Das Antriebsstrangmodell (rot) mit dem aus den Subsystemen Aktor und Doppelkupplung bestehenden Stellglied (blau und grün)<sup>525</sup>

Ebenfalls in das Modell integriert sind die in Abschnitt 5.4 diskutierten systeminhärenten Unsicherheiten, welche als parametrische Unsicherheiten über die Masken der einzelnen Subsysteme quantifiziert werden können.

### 8.2.1 Die Subsysteme der Regelstrecke

Die Eingangsgröße des Simulationsmodells ist die Vorgabe des tatsächlichen Rollenwegs, welcher wiederum entsprechend den Erläuterungen in 5.6 die

<sup>522</sup> vgl. 5.2.2

<sup>523</sup> vgl. 5.6

<sup>524</sup> The Mathworks Inc., 2015

<sup>525</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

Eingangsgröße des elektromechanischen Aktors darstellt. Der Ankriechvorgang wird hier anhand eines idealisierten Verlaufs des Rollenwegs, der durch ein  $PT_2$ -Filter realisiert wurde, modelliert, um auch im weiteren Verlauf der Simulationen die Vorgabe nach Bedarf anpassen zu können. Ein möglicher Verlauf des Rollenweges als Funktion der Zeit, wie er durch diese Modellierung realisiert werden kann, ist in Bild 98 dargestellt.

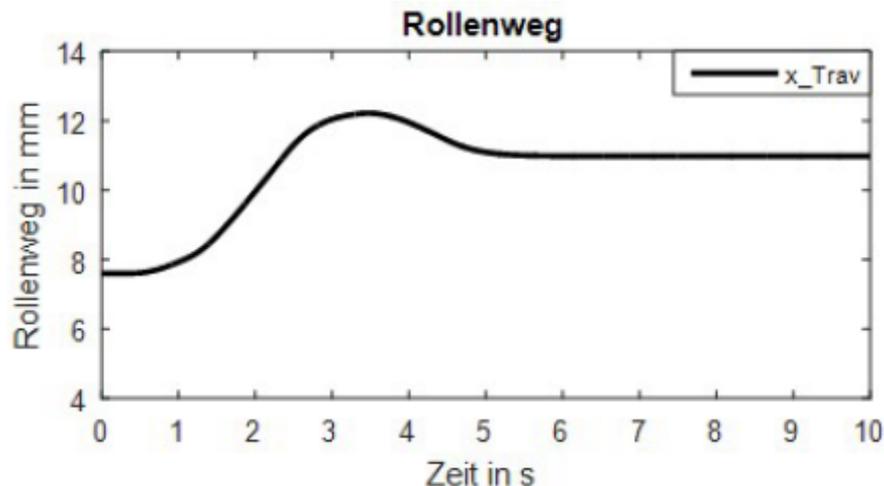


Bild 98: Modellierter Verlauf des Rollenwegs zur Simulation eines Ankriechvorgangs<sup>526</sup>

Der elektromechanische Aktor, dessen Funktionsweise und Dynamik bereits in 5.6 diskutiert wurde, ist, wie im Blockschaltbild in Anhang 12.3, Bild 122 dargestellt, in der Simulation umgesetzt und ist in seinem Prinzip für beide den jeweiligen Teilkupplungen zugeordneten Aktoren mit der Ausnahme einer veränderten Steifigkeit identisch.

Die durch den modellierten Aktor betätigte Kupplung wird wie in Anhang 12.3, Bild 123 dargestellt in der Simulation abgebildet. Dabei muss bei der Berechnung des Einrückweges aus der Einrückkraft berücksichtigt werden, dass die Hebelfeder in Einbaulage mit einer Vorspannkraft beaufschlagt ist, indem diese Vorspannkraft durch Subtraktion zu einer Verschiebung der Nulllage verwendet wird (in Bild 123 rot umrandet). Die aus der Betätigung der Kupplung resultierende Bewegung der im vereinfachten mechanischen Modell der Kupplung enthaltenen Masse kann nun mithilfe ihrer Bewegungsgleichung simuliert werden, welche im Modell der Teilkupplung als Subsystem enthalten ist. Dieses Subsystem ist im Blockschaltbild in Anhang 12.3, Bild 124 dargestellt und enthält die Verwendung von unterschiedlichen Dämpfungselementen für jede der beiden Bewegungsrichtungen der Masse, die

<sup>526</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

notwendig sind, um die Betätigungscharakteristik der modellierten Kupplung möglichst nahe an die in der Auslegung der Kupplung vorgesehene Charakteristik zu führen.

Darüber hinaus ist für den Verlauf der Anpresskraft die Charakteristik der Belagskennlinie entscheidend, die den von der bewegten Masse zurückgelegten Weg als Eingangsgröße enthält, welcher die Möglichkeit beinhaltet, einen sogenannten Luftweg zwischen Belag und Anpressplatte und somit die Möglichkeit verschlissener Kupplungsbeläge zu berücksichtigen (rote Markierung in Bild 124).

Nach der Beschreibung der beiden Subsysteme Aktorik und Teilkupplungen folgt nun die Beschreibung eines der Teilgetriebe inklusive der in 2.4, 5.1 und 5.2 diskutierten Momentenabstützung und Kopplung an die Bewegungsmoden des Aggregates.

Auf die Beschreibung der Modellierung der darauffolgenden Trägheiten im Antriebsstrang wird hier verzichtet, da diese abgesehen von der Kopplung an die Bewegung des Aggregates weitestgehend identisch ist. In Bild 125 ist diese Modellierung der Teilstrecke inklusive der rot markierten Modellierung der Kopplung an die Rotationsmode des Aggregates dargestellt.

Die Übertragung der verschiedenen Momente an die Teilgetriebe und das Aggregat ist entsprechend Tabelle 7 mithilfe von Schaltelementen umgesetzt.

Tabelle 7: Verzweigung der Momente in der Simulation

Differenzdrehzahl der aktiven Teilkupplung	$M_{Eng} > M_{Cl}$	$M_{Eng} \leq M_{Cl}$	Momentensenke
$n_{Eng} \geq n_{IPS}$	$M_{Eng} - M_{Cl}$	$M_{Eng} - M_{Cl}$	$J_{Eng} \cdot \ddot{\varphi}_{Eng}$
	$M_{Cl,1}$	$M_{Cl,1}$	$J_{IPS,1} \cdot \ddot{\varphi}_{IPS,1}$
	$M_{Cl,2}$	$M_{Cl,2}$	$J_{IPS,2} \cdot \ddot{\varphi}_{IPS,2}$
$n_{Eng} < n_{IPS}$	$M_{Eng} + M_{Cl}$	$M_{Eng} + M_{Cl}$	$J_{Eng} \cdot \ddot{\varphi}_{Eng}$
	$-M_{Cl,1}$	$-M_{Cl,1}$	$J_{IPS,1} \cdot \ddot{\varphi}_{IPS,1}$
	$-M_{Cl,2}$	$-M_{Cl,2}$	$J_{IPS,2} \cdot \ddot{\varphi}_{IPS,2}$

### 8.2.2 Abbildung von Kupplungsrupfen in der Simulation

Zur Abbildung der selbsterregten Rupfschwingungen dienen hier zum einen die einstellbaren Reibwertgradienten der Reibpaarungen der beiden Teilkupplungen, als auch – im Falle einer eventuellen Diskrepanz zwischen dem mit den nominalen Fahrzeugparametern erzielten Verhalten und dem des untersuchten Versuchsträgers – die Möglichkeit der Anpassung der Dämpfung des Antriebsstranges über die Anpassung der Dämpfung der einzelnen Teilsysteme der Sekundärseite des Antriebsstranges und speziell der Seitenwellen, da sich eine Variation der mit diesem

Teilsystem assoziierten Dämpfung als sehr effektiv für die Erzeugung von selbsterregtem Rumpfen gezeigt hat.

Für die Simulation von zwangserregten Rumpfschwingungen wird ein zusätzlicher Funktionsblock im Modell angewandt, der es ermöglicht, die drei bekannten unterschiedliche Arten von geometrischen Anregungen auf das zu übertragende Kupplungsmoment zu modulieren (Bild 126 in 12.3).

Es wird hier nochmals betont, dass es nicht Gegenstand der Modellierung war, die verschiedenen Arten des Kupplungsrumpfen in ihrer Entstehung möglichst exakt abzubilden, sondern die jeweilige Charakteristik der entstehenden Modulationen des von der Kupplung übertragenen Drehmomentes auf möglichst einfachem Wege zu simulieren.

### **8.3 Validierung des Simulationsmodells**

In diesem Unterkapitel soll das zuvor beschriebene Simulationsmodell des Antriebsstrang in Bezug auf seine geplante Verwendung validiert werden. Dies ist ein vor der Erprobung des Reglers in der Simulation zwingend notwendiger Schritt, da nur ein validiertes Simulationsmodell eine solide Basis für belastbare Ergebnisse und Aussagen zum Reglerverhalten darstellt. Der Begriff der Validierung ist hier nach den Ausführungen von ALBERS ET AL. zu verstehen und demnach auch explizit gegenüber dem Begriff der Verifikation abzugrenzen.<sup>527</sup> Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit dargestellten Validierungsaktivitäten werden im Folgenden in Anlehnung an die Ausführungen von WITMANN beschrieben und diskutiert.

#### **8.3.1 Validierung des synthetisierten Simulationsmodells**

Das anhand der vorangegangenen Überlegungen synthetisierte Modell zur Abbildung der Schwingungsdynamik eines PKW-Antriebsstrangs<sup>528</sup> wurde inklusive des modellierten Stellgliedes in der Simulationsumgebung abgebildet und soll nun durch den Vergleich mit realen Fahrzeugmessungen validiert werden. Exemplarisch soll dies im Folgenden für (Fzg. A) geschehen, welches zu diesem Zwecke bei einer Fahrbahnsteigung von 2% mehrmals mittels der zuvor vorgestellten Methode zur Identifikation der Systemdynamik vermessen wurde.<sup>529</sup>

Die dieser Überprüfung zugrunde liegende Anforderung an das Simulationsmodell des Antriebsstranges ist hier, dass auf Basis der nominellen physikalischen Parametern<sup>530</sup>

---

<sup>527</sup> vgl. 2.1.2

<sup>528</sup> vgl. Bild 64, oder 12.2

<sup>529</sup> vgl. Bild 53

<sup>530</sup> der Begriff „nominell“ ist hier und im Folgenden als Bezeichnung des nicht durch Unsicherheiten beeinflussten Systems zu verstehen

des Antriebsstranges des Erprobungsfahrzeugs in der Simulation ein vergleichbares, nicht notwendigerweise exakt identisches, dynamisches Verhalten erreicht werden muss, wie dies für das durch seine Parameter abgebildete Erprobungsfahrzeug der Fall ist. Diese Anforderung ist aus Sicht der Entwicklung einer Anti-Rupf Regelung legitim, da das Simulationsmodell einer Erprobung des Reglers sowie auch der Validierung bestimmter Eigenschaften des Reglers dient, die nicht ohne Weiteres an einem oder mehreren Versuchsträgern erprobt werden können, weshalb eine möglichst präzise Abbildung der schwingungsdynamischen Eigenschaften des Antriebsstranges notwendig erscheint. Diese Anforderung ergibt sich implizit aus den Überlegungen in Kapitel 5, weshalb eine für eine Validierung notwendige tiefere Überlegung der Anforderung an dieser Stelle nicht ausgeführt wird.

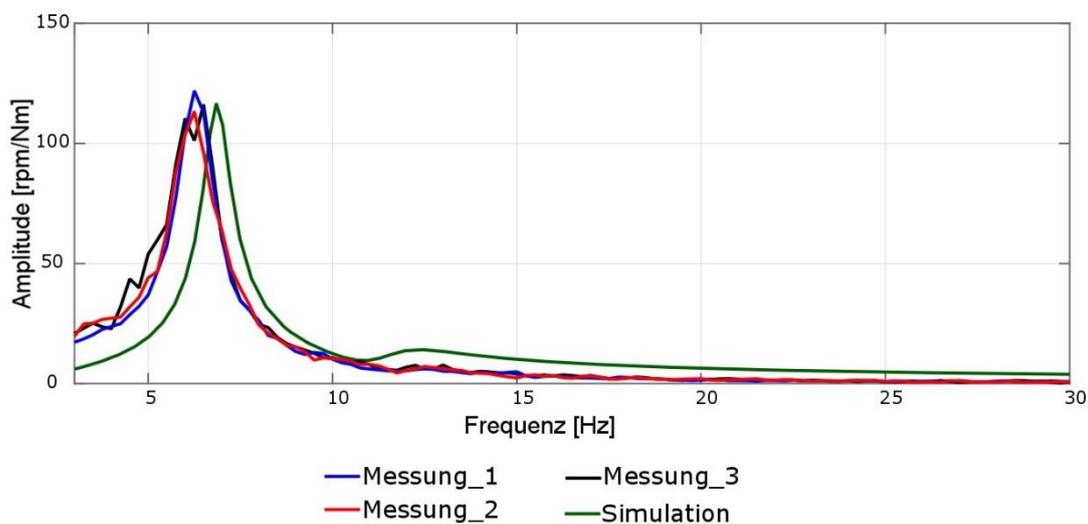


Bild 99: Vergleich der Schwingungsdynamik des Simulationsmodells und des realen Fahrzeugs ((Fzg. A)) zur Validierung des Simulationsmodells zum Zwecke der Erprobung eines Anti-Rupf-Reglers<sup>531</sup>

Zum Abgleich der am Versuchsträger gewonnenen Informationen über die Systemdynamik mit der des simulierten Antriebsstrangs wurde das in 8.1 diskutierte Modell in MATLAB Simulink mit dem in 2.2.4 und 5.1.2 beschriebenen, auf einem 15 Bit 4-Tap PRBS basierenden Verfahren charakterisiert und mit den Ergebnissen der oben beschriebenen Messungen verglichen. Dieser Vergleich der Systemdynamik ist für den Amplitudengang in Bild 99 zu sehen.

Generell zeigen die Ergebnisse der Simulation eine sehr gute Übereinstimmung mit den aus den Messungen gewonnenen Daten. Die Abweichung in der Resonanzfrequenz von weniger als 0,5 Hz sowie die ebenfalls zu beobachtende Abweichung in der Amplitude für die zweite Resonanz bei 13 Hz sind den in das

<sup>531</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

Modell eingehenden Vereinfachungen sowie der limitierten Genauigkeit im Falle der Fahrzeugmessungen geschuldet. Jedoch zeigen Fahrzeug und Simulationsmodell insgesamt eine große Übereinstimmung in ihrer Schwingungsdynamik, weshalb die Validierung des Antriebsstrangmodells als abgeschlossen angesehen werden kann und eine Verwendung des Simulationsmodells im darauffolgenden Teil dieser Arbeit legitim ist.

### **8.3.2 Validierung der Rupfeigenschaften**

Im nächsten Schritt der Validierung des Simulationsmodells folgt die Prüfung, ob die Abbildung der Rupfeigenschaften im Simulationsmodell den real beobachteten Phänomenen gerecht wird. Dabei erfolgt die Validierung dieser Eigenschaften für jedes der vier beobachtbaren Ruppffänomene, deren spezifische Eigenschaften bereits in 2.6.3 diskutiert wurden, separat. Die Anforderung, dass das Simulationsmodell zur Erprobung des entwickelten Reglers zur Dämpfung von Rupfschwingungen eine Abbildung dieser Schwingungen ermöglicht, ergibt sich aus der Zielstellung der Arbeit und dem Einsatzgebiet des Simulationsmodells und bedarf daher keiner weiteren Überprüfung.

Für das selbsterregte Ruffen wird die auftretende Schwingung der Drehzahlen und insbesondere der Getriebeeingangsdrehzahl durch eine konstante Frequenz, die der Eigenfrequenz des Antriebsstrangs entspricht, charakterisiert. Darüberhinaus zeichnet sie sich durch ein Aufklingen zu Beginn des Anfahr- oder Ankriechvorgangs und, abhängig von der Dämpfung des Systems, einem Abklingen der Schwingung nach einer gewissen Zeit aus.

Dies wird nun anhand der Simulation eines Ankriechvorgangs gezeigt, der mithilfe von einem aus Fahrzeugmessungen extrahierten Signal des Motordrehmomentes und einem Verlauf des Kupplungsdrehmomentes dargestellt wird (Bild 101, simulierte Signale ohne Ruffen). Dieser wird mithilfe des einstellbaren Rollenwegverlaufs<sup>532</sup> entsprechend einem aus einer Messung extrahierten Signalverlauf synthetisiert (Bild 100).

---

<sup>532</sup> vgl. 8.2.1

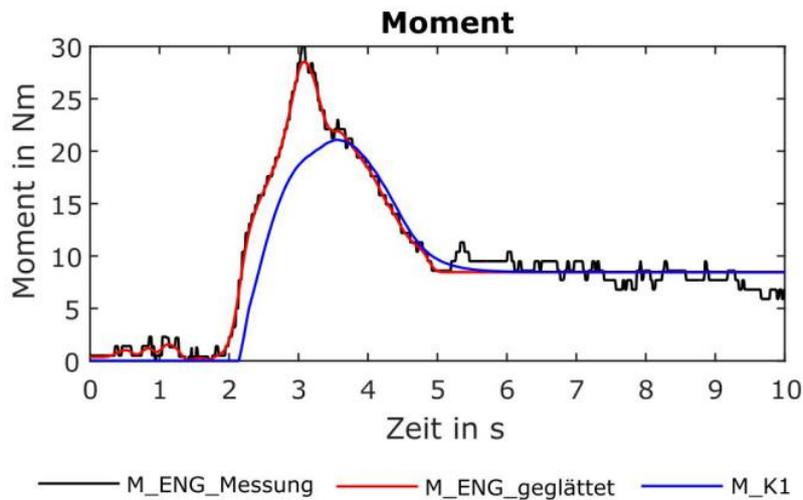


Bild 100: Für die Simulation eines Ankriechvorgangs synthetisierte Signalverläufe der Drehmomente<sup>533</sup>

Zur Darstellung des selbsterregten Rupfens wird nun der beschriebene Ankriechvorgang mit variierendem Reibwertgradienten und variierender Seitenwellendämpfung simuliert, wobei als Basis für diese Variation ein mittlerer Reibwert von  $\bar{\mu} = 0,31$  und ein im Zusammenhang mit selbsterregtem Rupfen typischer Gradient von  $\dot{\mu} = -0,015 \frac{\text{s}}{\text{m}}$  zugrunde liegen.

Zunächst erfolgt die Variation der Seitenwellendämpfung, welche die dem gesamten Antriebsstrang bei schlupfender Kupplung zugeordnete Dämpfung maßgeblich beeinflusst. Es ist zu erwarten, dass diese Variation bei geringerer Seitenwellendämpfung zur Beobachtung von selbsterregtem Rupfen führt, da der hier verwendete Reibwertgradient mit  $\dot{\mu} = -0,015 \frac{\text{s}}{\text{m}}$  negativ ist und damit die Möglichkeit des Auftretens von selbsterregtem Rupfen gegeben ist.<sup>534</sup>

Die Dämpfung der Seitenwelle wird nun von ihrem nominellen Wert von  $d_{S\text{Shaft}} = 25,00 \frac{\text{Nm} \cdot \text{s}}{\text{rad}}$ <sup>535</sup>, für den wie in Bild 101 zu erkennen kein selbsterregtes Rupfen auftritt, zu kleineren Werten hin verändert. Das Resultat dieser Variation ist im Vergleich mit dem nominellen Ankriechvorgang inklusive der jeweiligen Werte der Dämpfung der Seitenwellen in Bild 102 dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, dass die auftretenden Schwingungen alle eine konstante und zudem auch die gleiche Frequenz aufweisen und auch das charakteristische Aufklingen zeigen.

<sup>533</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

<sup>534</sup> vgl. 2.6.3

<sup>535</sup> vgl. 12.1

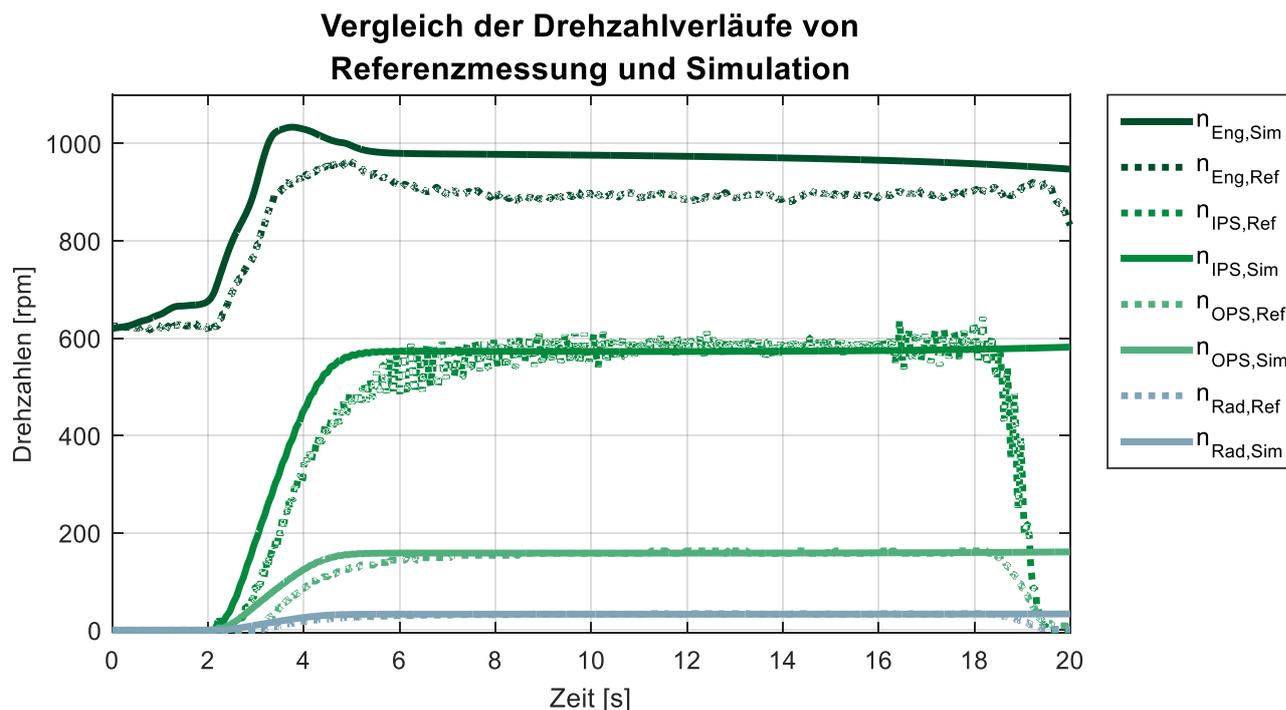


Bild 101: Vergleich der Drehzahlverläufe des simulierten Antriebsvorgangs in der Gangkombination 1-2 mit den gemessenen Signalen

Weiterhin zeigt die Simulation für  $d_{SShaft} = 6,25 \frac{\text{Nm} \cdot \text{s}}{\text{rad}}$  das ebenfalls für bestimmte Bereiche der Dämpfung des Gesamtsystems typische Abklingen der Schwingung, welches für  $d_{SShaft} = 2,50 \frac{\text{Nm} \cdot \text{s}}{\text{rad}}$  nur noch schwach zu erkennen ist. Auch die deutlich größere Amplitude der Rumpfschwingungen für kleinere Dämpfungswerte ist im Vergleich der Simulationsergebnisse sehr gut zu erkennen und beschließt damit die Überprüfung der Abbildung des selbsterregten Rumpfs durch Variation der Triebstrangdämpfung in der Simulation.

Für die Untersuchung der Erzeugung von selbsterregtem Rumpfen durch eine Variation des Reibwertgradienten wird die Dämpfung der Seitenwellen nun auf einen konstanten Wert von  $d_{SShaft} = 8,30 \frac{\text{Nm} \cdot \text{s}}{\text{rad}}$  festgelegt. Diese Abweichung von dem nominellen Wert der Dämpfung ist notwendig, da diese so hoch ist, dass man selbst mit unrealistisch hohen negativen Reibwertgradienten keine Schwingungen erzeugen könnte. Ausgehend von dem zuvor erwähnten Reibwertgradienten von  $\dot{\mu} = -0,015 \frac{\text{s}}{\text{m}}$  wird

dieser nun zu  $\dot{\mu} = -0,010 \frac{\text{s}}{\text{m}}$  und  $\dot{\mu} = -0,020 \frac{\text{s}}{\text{m}}$  variiert, woraus sich die in Bild 103 dargestellten unterschiedlichen Drehzahlverläufe ergeben.

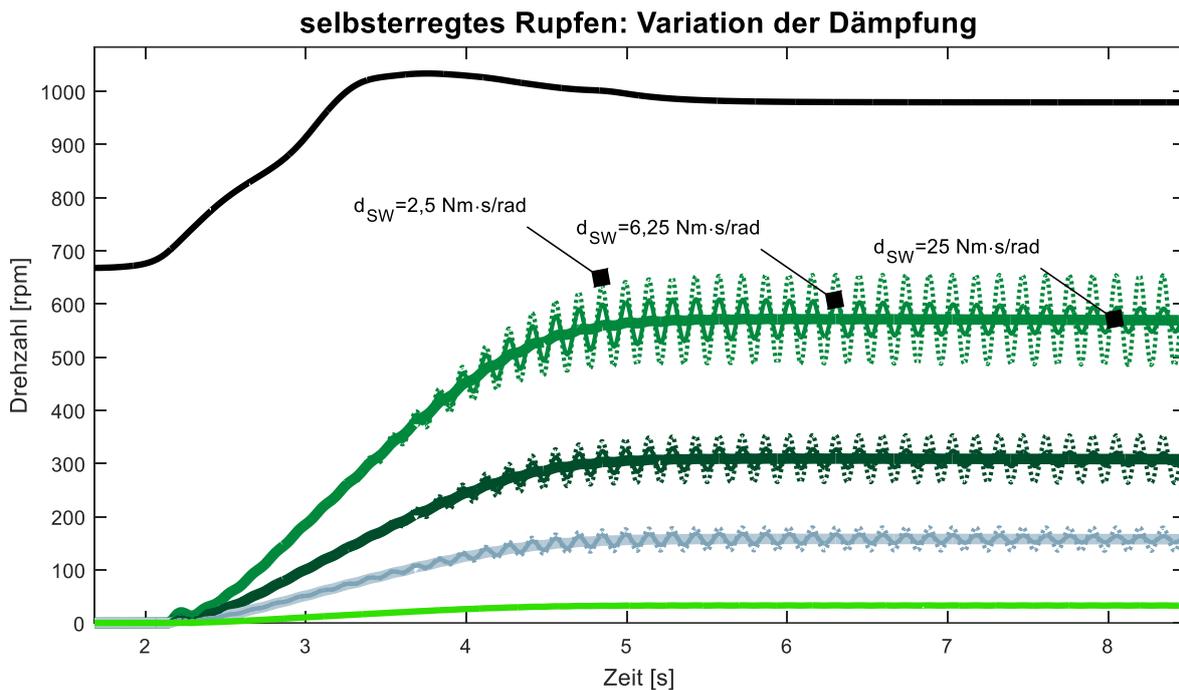


Bild 102: Auftreten von selbsterregtem Rumpfen im Simulationsmodell in Abhängigkeit von der Seitenwellendämpfung. Zu sehen sind die Motordrehzahl (schwarz), sowie die Drehzahlen an beiden Getriebeeingängen (grün, dunkelgrün), dem Getriebeausgang (grau) sowie die Raddrehzahl (hellgrün)<sup>536</sup>

Für den nominellen Gradienten ergibt sich eine moderat ausgeprägte Schwingung der Getriebeeingangsdrehzahl, welche auch die charakteristischen Auf- und Abklingverläufe zeigt. Für den kleineren Reibwertgradienten von  $\dot{\mu} = -0,010 \frac{\text{S}}{\text{m}}$  ergibt sich dagegen eine nur schwach erkennbare Schwingung der Getriebeeingangsdrehzahl, die auch sehr schnell wieder abklingt, wogegen die Schwingung für  $\dot{\mu} = -0,020 \frac{\text{S}}{\text{m}}$  sehr deutlich ausgeprägt ist und auch das gesamte Verhalten des Antriebsvorgangs massiv beeinflusst, da die Kupplung bedingt durch den stark negativen Reibwertgradienten als auch die Schwingung nicht in der Lage ist, für den vorgegebenen Verlauf des Rollenweges ausreichend Drehmoment übertragen, um das simulierte Fahrzeug dauerhaft in Bewegung zu halten.

Auch hier zeigen alle drei Schwingungsverläufe die gleiche Frequenz die mit der Eigenfrequenz des simulierten Antriebsstrangs identisch ist, womit die Validierung der Abbildung des selbsterregten Rumpfens im Simulationsmodell abgeschlossen ist.

Zur Abbildung des zwangserregten Rumpfens wird die zuvor erläuterte Ergänzung zum Simulationsmodell verwendet und, um die Analyse der auftretenden Schwingungen

<sup>536</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

nicht zu beeinträchtigen, die Parameter des Modells derart eingestellt, dass kein selbsterregtes Rumpfen auftritt ( $d_{Sshaft} = 25,00 \frac{\text{Nm} \cdot \text{s}}{\text{rad}}$  und  $\dot{\mu} = -0,015 \frac{\text{s}}{\text{m}}$ ).

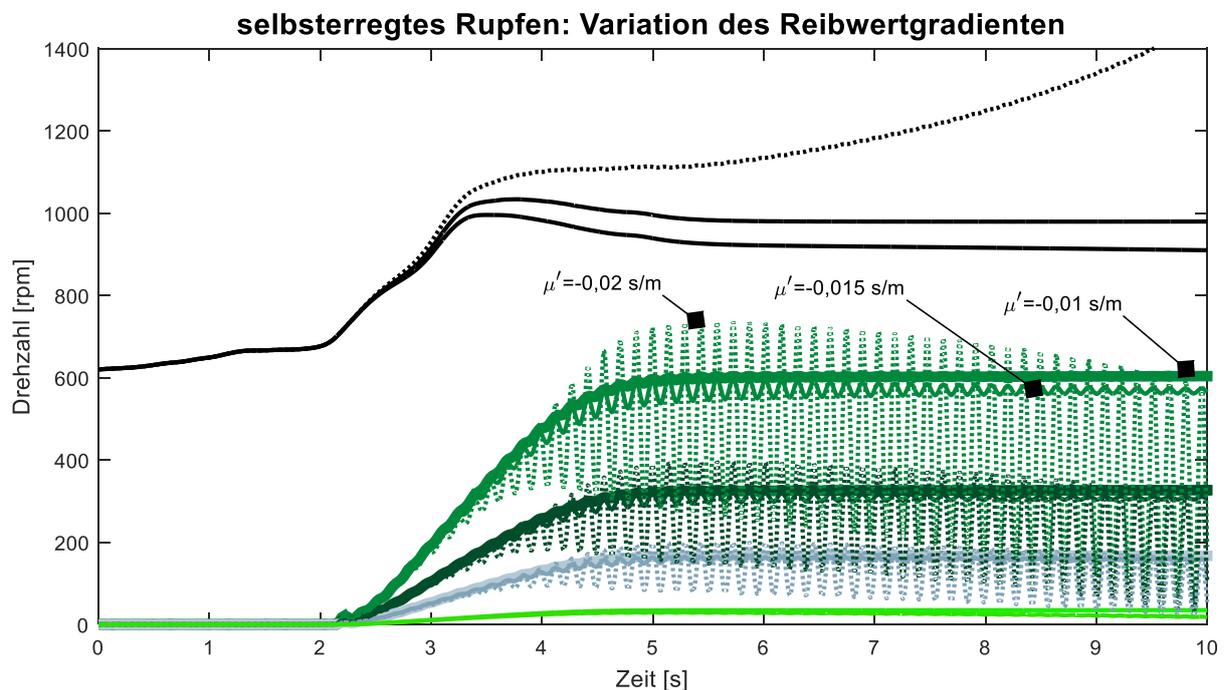


Bild 103: Auftreten von selbsterregtem Rumpfen im Simulationsmodell in Abhängigkeit des Reibwertgradienten. Zu sehen sind die Motordrehzahl, sowie die Drehzahlen an beiden Getriebeeingängen, dem Getriebeausgang sowie die Raddrehzahl<sup>537</sup>

Für das motordrehzahlabhängige Rumpfen wird die Amplitude der Anregung auf 20 % des anliegenden Kupplungsdrehmomentes festgelegt, wodurch die nachfolgend beschriebenen Ergebnisse erzielt werden (Bild 104). Damit einher geht eine Veränderung des Verlaufs von Motor- und Getriebeeingangsdrehzahl, die jedoch zugunsten einer deutlich sichtbaren Schwingung in Kauf genommen wird, da die Sensitivität des Antriebsstrangs in dem relevanten Frequenzbereich sehr niedrig ist<sup>538</sup> und es deshalb einer vergleichsweise starken Anregung bedarf.

Trotz der im Vergleich zu den bisher simulierten Schwingungen sehr hohen Frequenzen ist die Abhängigkeit der Frequenz der Rumpfschwingung von der Motordrehzahl insbesondere für kleinere Motordrehzahlen ( $t = 7 - 10 \text{ s}$  in Bild 104) deutlich zu erkennen.

<sup>537</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

<sup>538</sup> vgl. Bild 100

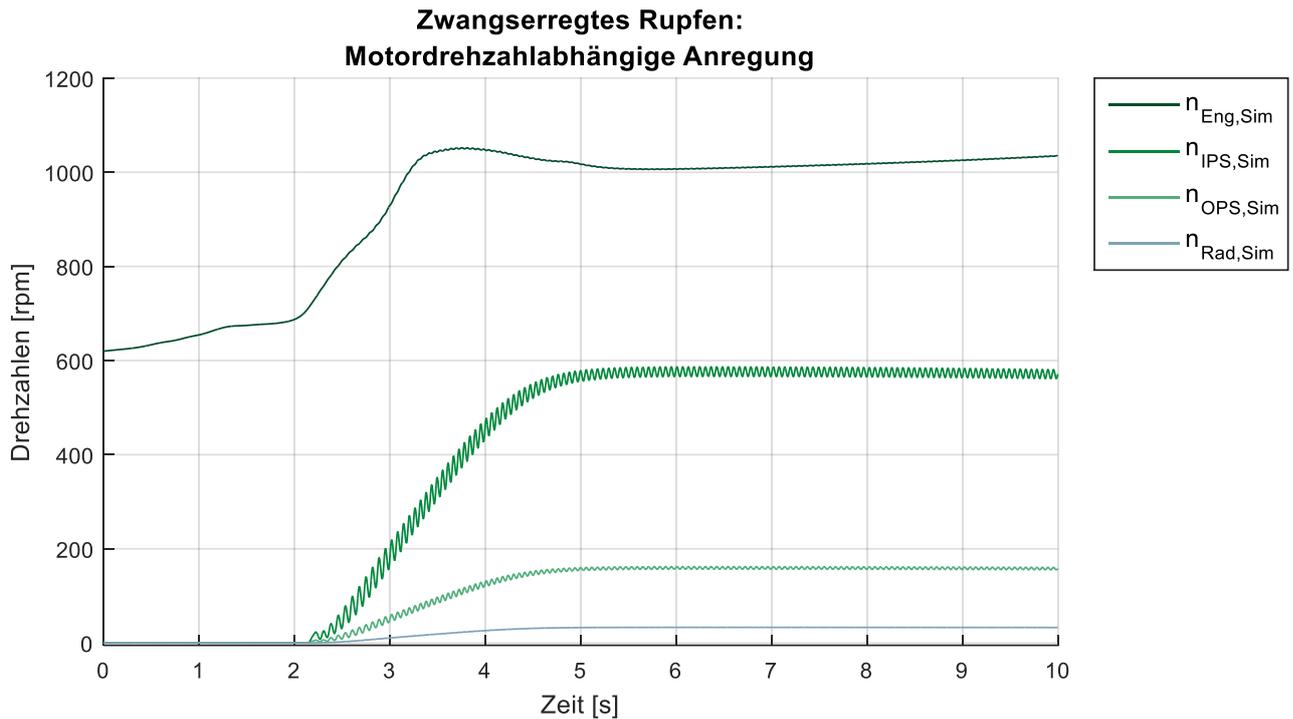


Bild 104: Simulation des Ankriechvorgangs mit geometrischem Rumpfen mit einer Frequenz gleich der Motordrehzahl<sup>539</sup>

Zur Erzeugung von differenzdrehzahlabhängigem Rumpfen wird die Anregung auf 5 % des Kupplungsdrehmomentes festgelegt, da die Schwingung hier unter anderem auch Frequenzen im Bereich der Antriebsstrangresonanz annehmen wird und die Amplitude für Anregungen größer als die gewählten 5 % sehr große Werte annehmen würde, die für diese Betrachtung nicht förderlich wären. Mit der gewählten Anregung ist im Verlauf der Getriebeeingangsdrehzahl eine deutliche Schwingung zu erkennen, die einen Frequenzverlauf von der Motordrehzahl hin zu einer niedrigeren Frequenz, der Differenzdrehzahl im stationären Drehzahlbereich, zeigt und die typische Resonanzüberhöhung der Amplitude im Bereich in dem die Differenzdrehzahl in etwa der Resonanzfrequenz entspricht ( $t \approx 5 - 7 \text{ s}$ ) aufweist (Bild 105).

<sup>539</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

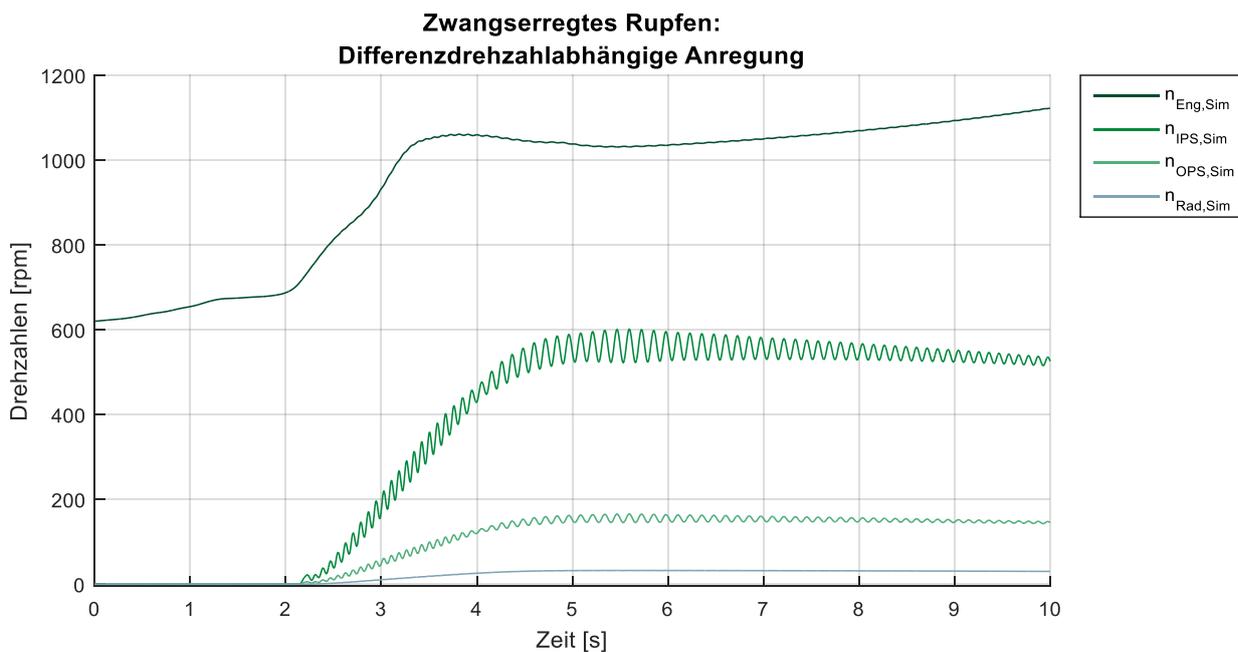


Bild 105: Simulation des Ankriechvorgangs mit geometrischem Rufen mit einer Frequenz gleich der Differenzdrehzahl<sup>540</sup>

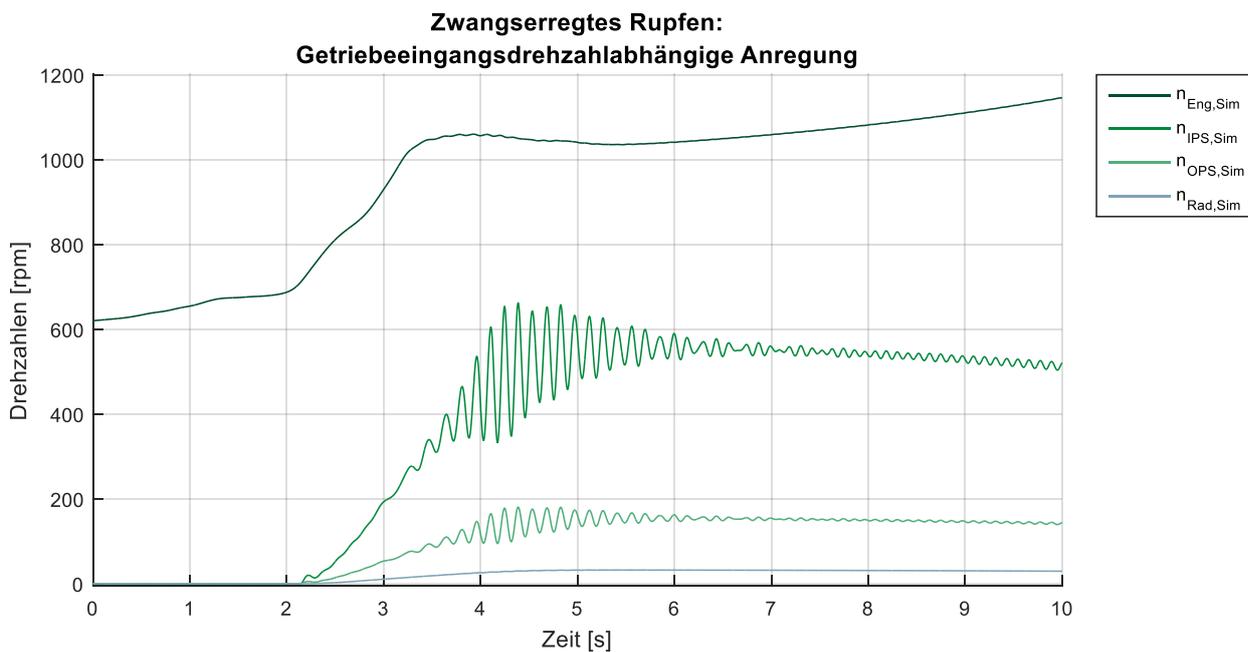


Bild 106: Simulation des Ankriechvorgangs mit geometrischem Rufen mit einer Frequenz gleich der Getriebeeingangsdrehzahl<sup>541</sup>

Zuletzt folgt die Überprüfung der Darstellung von zwangserregtem Rufen mit einer Frequenz gleich der Getriebeeingangsdrehzahl im Simulationsmodell. Hierzu wird, wie

<sup>540</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

<sup>541</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

im Falle des differenzdrehzahlabhängigen Ruffens, die Anregung auf 5% des Kupplungsdrehmomentes festgelegt, woraus sich die in Bild 106 dargestellten Zeitverläufe ergeben. Hier ist eine noch stärkere Überhöhung im Bereich der Antriebsstrangresonanz zu erkennen, die daraus resultiert, dass sich die Getriebeeingangsdrehzahl selbst ebenfalls im Resonanzbereich befindet, wodurch das Resonanzverhalten im Vergleich zum differenzdrehzahlabhängigen Ruffen zusätzlich verstärkt wird. Auch hier zeigen sich die zu erwarteten Charakteristika der drehzahlabhängigen Frequenz, die hier einen Verlauf von niedrigen hin zu hohen Frequenzen zeigt, sowie das Auf- und Abklingen der Schwingung vor und nach der Resonanzfrequenz.

Hiermit wurde gezeigt, dass sich alle drei Arten von geometrischem Ruffen sowie auch das selbsterregte Ruffen mithilfe des in diesem Kapitel vorgestellten Simulationsmodells mit ihren charakteristischen Eigenschaften darstellen lassen, womit die Validierung der Ruffeigenschaften dieses Simulationsmodells abgeschlossen ist.

### **8.3.3 Validierung der Variation der Systemdynamik durch systeminhärente Unsicherheiten**

Der finale Schritt zur Validierung des in Bild 97 skizzierten Simulationsmodells ist die Überprüfung der Abbildung der systeminhärenten Unsicherheiten sowie deren Auswirkungen auf die Schwingungsdynamik des Antriebsstrangs.

Die Anforderung für diese Berücksichtigung der Unsicherheiten und deren Auswirkungen in der Simulation ergibt sich direkt aus der Zielsetzung dieser Arbeit in Zusammenhang mit den Überlegungen der Kapitel 5 bis 7 und bedarf daher keiner weiteren Überprüfung.

Da wie zuvor schon diskutiert die Anzahl an Versuchsträgern sowie auch deren schwingungsdynamische Variationsbreite sehr begrenzt ist, ist die Überprüfung der Erfüllung der oben genannten Anforderung an das Simulationsmodell schwieriger, als für die zuvor validierten Modelleigenschaften, da hier nicht die zunächst für eine tiefgreifende und vollständige Überprüfung notwendig erscheinenden Messdaten zur Verfügung stehen. Jedoch kann die Überprüfung dieser Eigenschaften darauf reduziert werden, dass die in Abschnitt 5.1 diskutierten schwingungsdynamischen Phänomene des Antriebsstrangs durch eine Variation der Systemparameter im Bereich der zu erwartenden Grenzen der Unsicherheiten<sup>542</sup> mithilfe des Simulationsmodells dargestellt werden können.

---

<sup>542</sup> vgl. 5.4, sowie Tabelle 5

Dazu werden die in Kapitel 5 diskutierten unsicherheitsbehafteten Parameter im Bereich der jeweiligen zu erwartenden Unsicherheit<sup>542</sup> und zum Teil darüber hinaus variiert und die Auswirkung dieser Variation auf die Schwingungsdynamik anhand des Bode-Diagramms des Systems analysiert. Im Folgenden werden zunächst die Auswirkungen der Variation einzelner Parameter betrachtet und anschließend Kombinationen der Parameter variiert, die sich im ersten Schritt durch eine besonders starke Beeinflussung der Systemdynamik ausgezeichnet haben.

Zunächst werden die einzelnen Dämpfungen der den Antriebsstrang konstituierenden schwingungsfähigen Teilsysteme im Bereich von 40 % bis 160 % des jeweiligen nominellen Wertes in Schritten von 20 % variiert.<sup>542</sup> Hier ist zu erkennen, dass die Resonanzverstärkung mit zunehmender Aggregat- und Seitenwellendämpfung abnimmt und für kleine Dämpfungen zunimmt, während eine Variation der Dämpfung der Getriebeeingangswelle nahezu keine Auswirkung hat (Bild 107). Zudem ist ein signifikanter Einfluss der Dämpfung der Seitenwelle auf die Ausprägung der zweiten Resonanz (bei ca. 12 Hz, „Vorderachsmode“<sup>543</sup>) zu erkennen.<sup>544</sup>

Die Variation der Steifigkeiten der Teilsysteme erfolgt im Bereich von 70 % bis 130 % in Schritten von 10 %<sup>542</sup>. Es kann beobachtet werden, dass bei einer Variation der Steifigkeit der Aggregatlagerung und der Seitenwellensteifigkeit die Eigenfrequenz des Antriebsstrangs beeinflusst wird (zunehmend bei größerer Steifigkeit) und für eine größer werdende Seitenwellensteifigkeit die Verstärkung in der ersten als auch in der zweiten Resonanzfrequenz zunimmt (Bild 108). Für die Variation der Achssteifigkeit ist hier kein signifikanter Einfluss auf das Schwingungsdynamische Verhalten des Antriebsstrangs zu erkennen.<sup>545</sup>

Wie im Falle der Steifigkeiten wurden auch die als unsichere Parameter betrachteten Trägheitsmomente der einzelnen Antriebsstrangkomponenten bzw. deren Ersatzträgheitsmomente im Bereich von 70 % bis 130 % in Schritten von 10 % variiert.<sup>542</sup> Speziell die Auswirkungen der Variation in der Trägheit des Aggregates, an Getriebeein- und -ausgang sowie der translatorisch angekoppelten Masse des Motorblocks sind in Bild 109 und Bild 110 dargestellt.

---

<sup>543</sup> vgl. 5.1.4

<sup>544</sup> vgl. 12.4.1 für eine Übersicht der Auswirkungen aller variiertes Dämpfungen

<sup>545</sup> vgl. 12.4.2 für eine Übersicht der Auswirkungen aller variiertes Dämpfungen

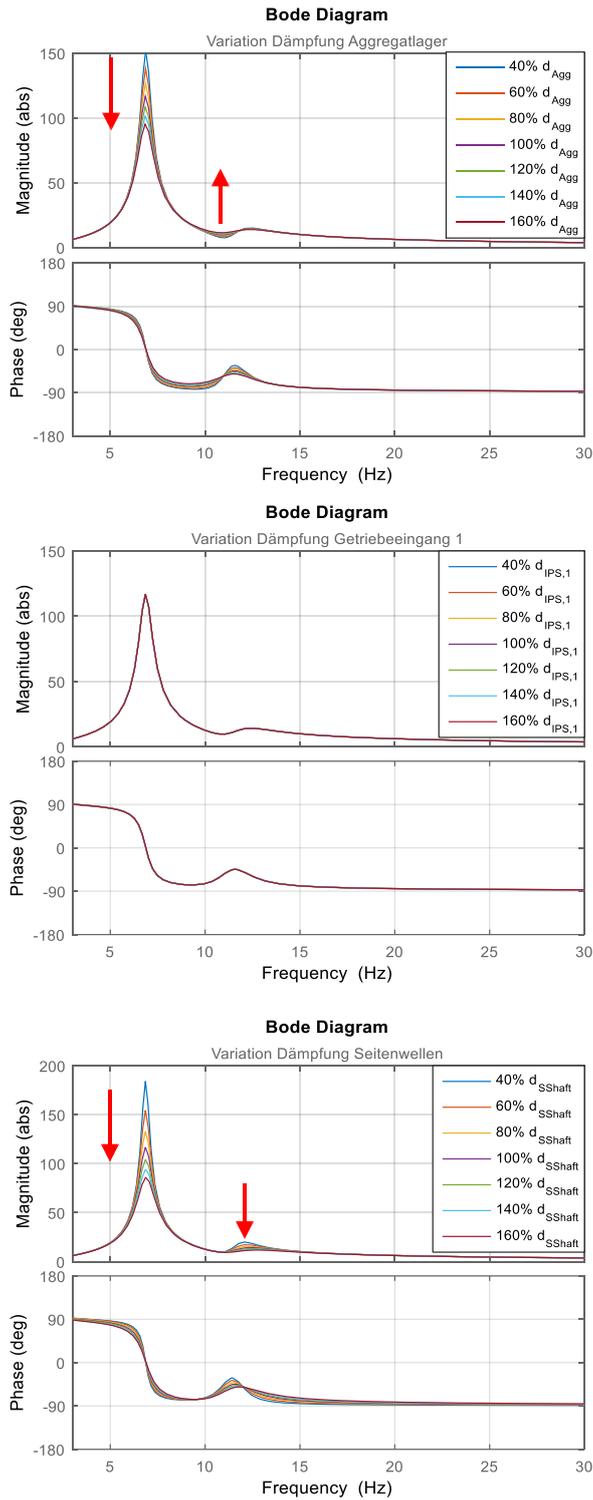


Bild 107: Variation der Dämpfung von Aggregatlager (oben), Seitenwellen (Mitte) und Getriebeeingangswelle des Teilgetriebe 1 (unten) und deren Auswirkungen auf die Systemdynamik des Simulationsmodells<sup>546</sup>

<sup>546</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

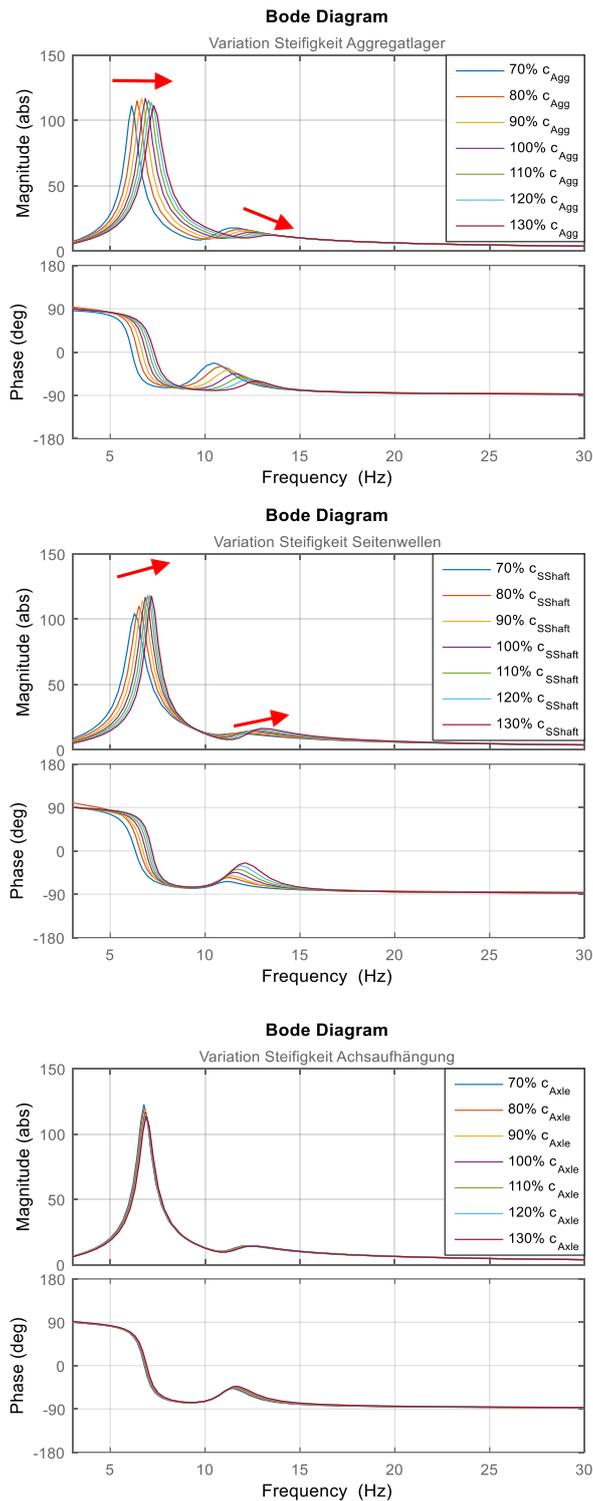


Bild 108: Variation der Steifigkeit von Aggregatlager (links), Seitenwellen (rechts) und Achsen (unten) sowie deren Auswirkungen auf die Systemdynamik des Simulationsmodells<sup>547</sup>

<sup>547</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

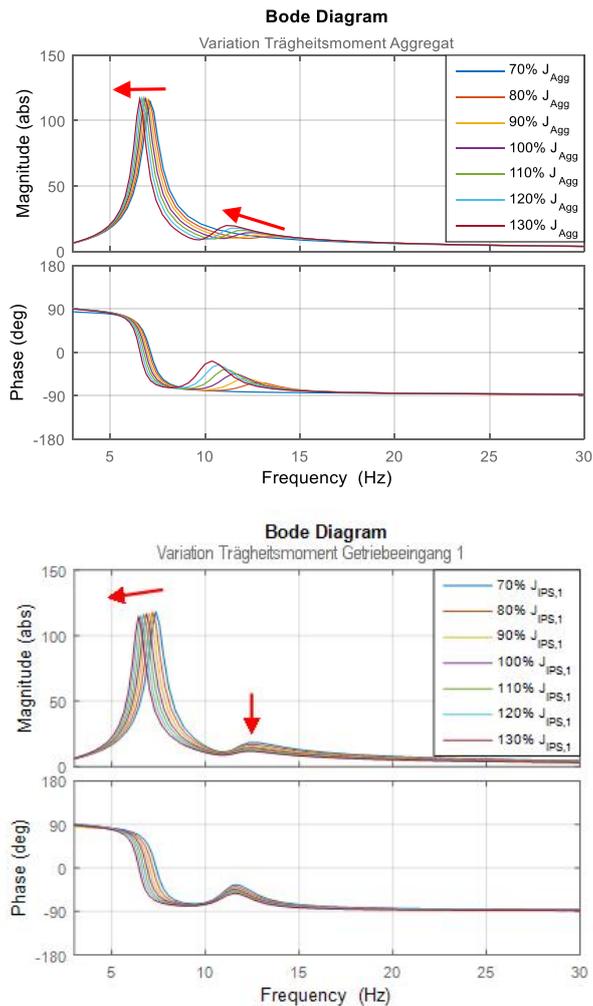


Bild 109: Variation der Trägheit von Aggregat (oben) und Getriebeeingang des Teilgetriebe 1 (unten), sowie deren Auswirkungen auf die Systemdynamik des Simulationsmodells<sup>548</sup>

Hier zeigt sich, dass erwartungsgemäß für eine größer werdende Trägheit die Resonanzfrequenz sinkt. Dieser Effekt zeigt sich insbesondere für die Variation des Trägheitsmomentes am Getriebeeingang. Im Falle der Variation des Trägheitsmomentes des Aggregats ist ebenfalls eine Verschiebung der Resonanzfrequenz zu erkennen, allerdings ist diese eher schwach ausgeprägt. Zudem sieht man aber einen starken Einfluss auf die Lage und Ausprägung der zweiten Resonanzfrequenz, die sich ebenfalls hin zu kleineren Frequenzen verschiebt und dabei an Verstärkung zunimmt. Dieser Effekt ist auch am Getriebeeingang zu erkennen, ist dort jedoch wesentlich weniger ausgeprägt.<sup>549</sup>

<sup>548</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

<sup>549</sup> vgl. 12.4.3 für eine Übersicht der Auswirkungen aller variierten Trägheitsmomente

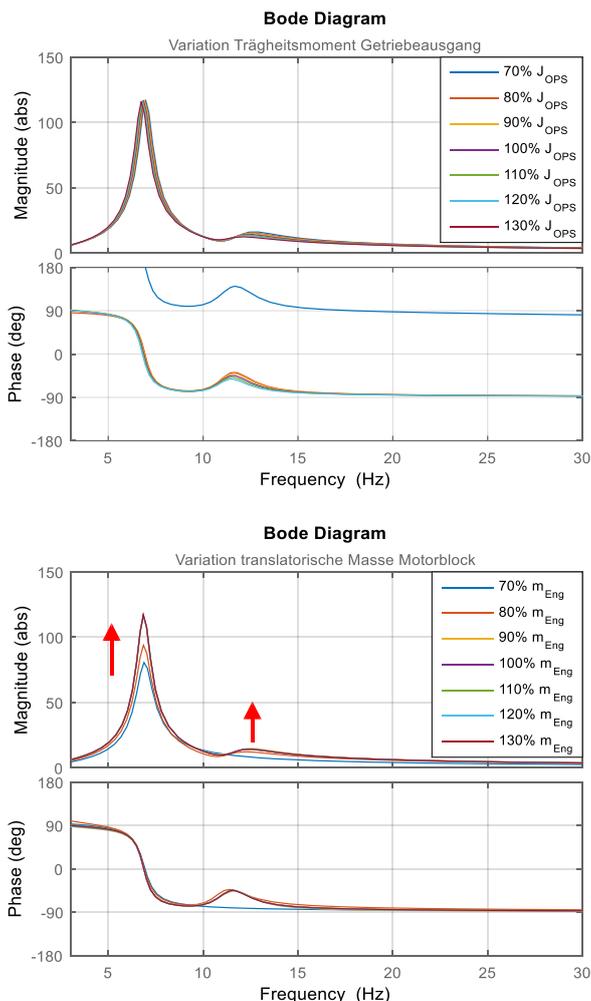


Bild 110: Variation der Trägheit von Getriebeausgang (oben) und der translatorischen Masse des Motorblocks (unten), sowie deren Auswirkungen auf die Systemdynamik des Simulationsmodells<sup>550</sup>

Im Folgenden wird der Einfluss von jeweils zwei der variierten Parameter untersucht, die bei der jeweiligen Untersuchung den größten Einfluss auf die Systemdynamik gezeigt haben. So soll ein etwaiges Zusammenwirken zweier unsicherer Parameter auf die Systemdynamik analysiert werden.

Im Falle der variierten Dämpfungen zeigen sich deutlich die Dämpfung der Aggregatlager und die Seitenwellendämpfung als diejenigen Parameter, die den größten Einfluss auf die Systemdynamik haben. Daher werden jetzt die Variationen dieser Parameter durchkombiniert und der Einfluss auf die Höhe der Resonanzverstärkung als markantem Element der Systemdynamik betrachtet (Bild 111).<sup>551</sup>

<sup>550</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

<sup>551</sup> vgl. 12.4.4 für eine vollständige Übersicht der kombinierten Variation der beiden Dämpfungen

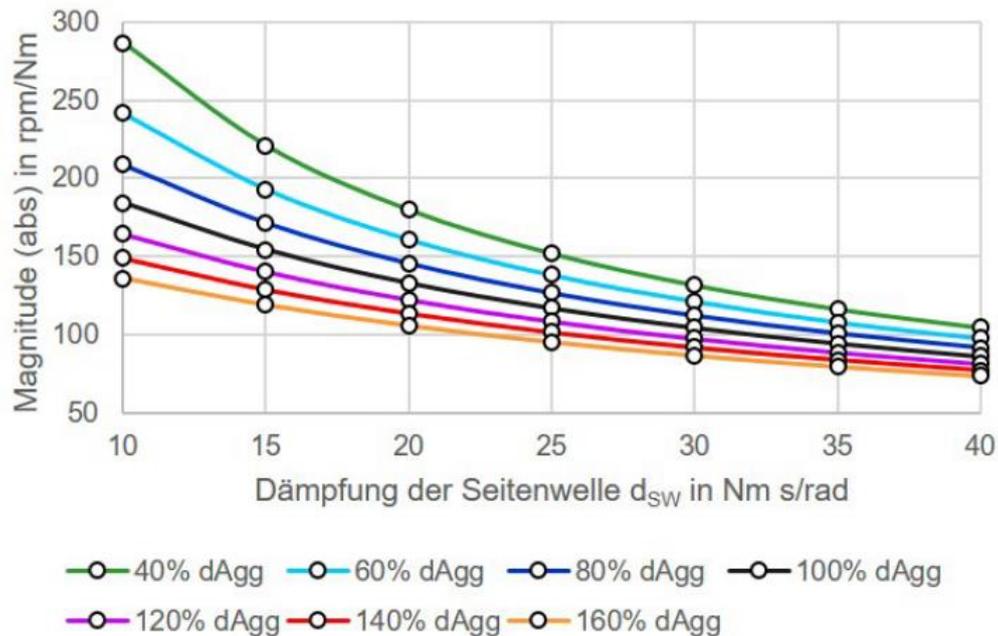


Bild 111: Einfluss der gleichzeitigen Variation der Dämpfung von Aggregatlagern und Seitenwellen auf die Höhe der Amplitudenverstärkung<sup>552</sup>

Es ist deutlich zu erkennen, dass die Amplitudenverstärkung mit zunehmender Dämpfung in beiden Komponenten abnimmt, während die Resonanzfrequenz nahezu konstant bleibt.

Für die Variation der Steifigkeiten haben sich wie auch im Falle der Dämpfungen insbesondere für eine Variation der Steifigkeit der Aggregatlager sowie der Seitenwellen deutliche Auswirkungen auf die Antriebsstrangdynamik gezeigt. Hier ergibt sich jedoch bei gleichzeitiger Variation beider Parameter ein deutlich komplexeres Verhalten der Amplitudenverstärkung in der Resonanzfrequenz (Bild 112).<sup>553</sup>

Für geringe Steifigkeiten der Aggregatlager nimmt die Amplitudenverstärkung in der Resonanz mit zunehmender Steifigkeit ab, jedoch nimmt sie für größere Steifigkeiten der Aggregatlager mit größer werdender Seitenwellensteifigkeit zu. Hier verändert sich im Gegensatz zur Variation der Dämpfungen auch die Resonanzfrequenz selbst (Bild 113). In Abhängigkeit von der Steifigkeit der Seitenwellen ergibt sich hier ein nahezu linearer Verlauf mit steigender Resonanzfrequenz bei größerer Steifigkeit und auch für eine Erhöhung der Steifigkeit der Aggregatlager zeigt sich eine steigende Resonanzfrequenz, die im Bereich zwischen 5,8 Hz und 7,8 Hz variiert.

<sup>552</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

<sup>553</sup> vgl. 12.4.5 für eine vollständige Übersicht der kombinierten Variation der beiden Steifigkeiten

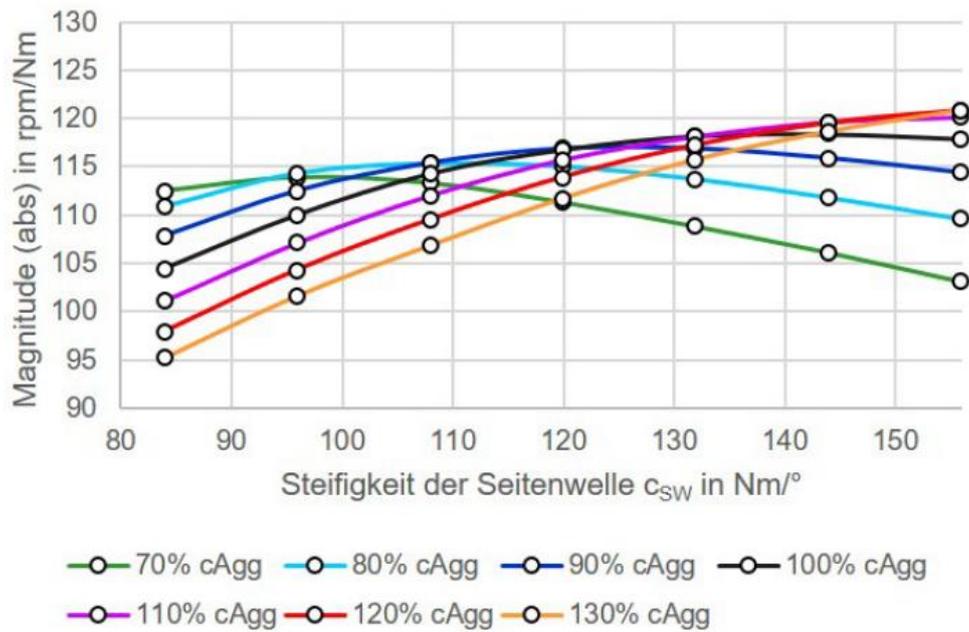


Bild 112: Einfluss der gleichzeitigen Variation der Steifigkeiten von Aggregatlager und Seitenwellen auf die Höhe der Amplitudenverstärkung<sup>554</sup>

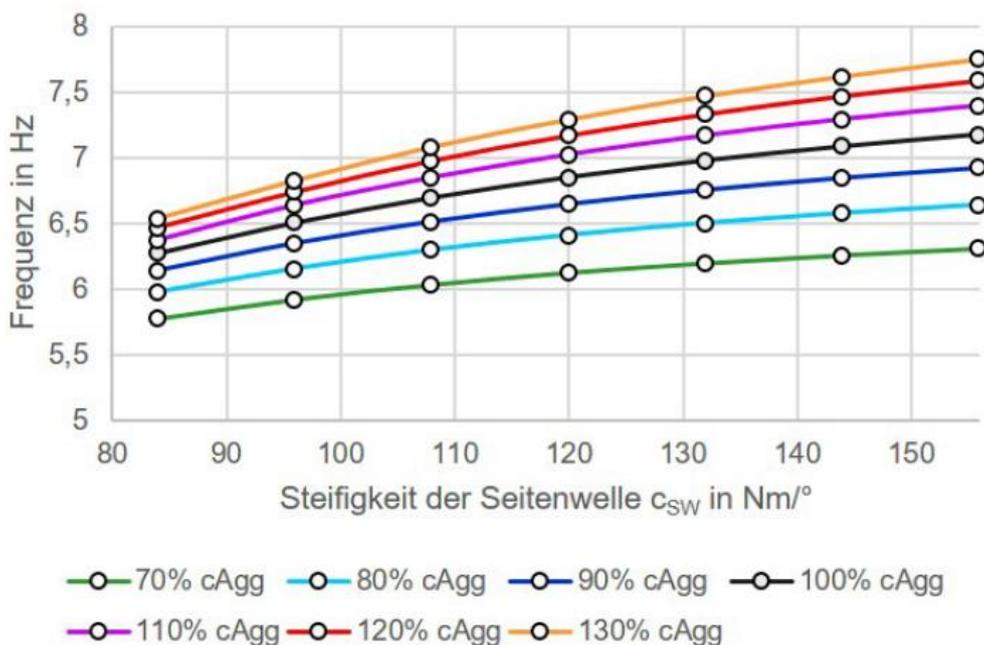


Bild 113: Einfluss der Variation der Steifigkeit von Aggregatlager und Seitenwellen auf die Lage der Resonanzfrequenz<sup>555</sup>

Für die parallele Variation der Trägheitsmomente liegt es nahe, die Trägheit des Aggregates und die am Getriebeeingang liegende Trägheit zu variieren, da diese den stärksten Einfluss auf die Schwingungsdynamik gezeigt haben. Hier ergibt sich für die

<sup>554</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

<sup>555</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

Amplitudenverstärkung der Resonanz kein signifikanter Einfluss, jedoch ein starker Einfluss auf die Lage der Resonanzfrequenz. Dieser kann anhand von Bild 114 abgelesen werden und zeigt, dass die Resonanzfrequenz nahezu linear mit dem Trägheitsmoment am Getriebeeingang abnimmt sowie ebenfalls eine Abnahme der Resonanzfrequenz mit steigender Trägheit des Aggregates. Hierbei variiert die Resonanzfrequenz zwischen ca. 6,2 Hz und 7,8 Hz.<sup>556</sup>

Schon anhand der Darstellungen in Bild 107 bis Bild 109 ist erkennbar, dass die in 5.1 diskutierten Phänomene der Schwingungsdynamik des Antriebsstrangs mithilfe der systeminhärenten Unsicherheiten im Simulationsmodell abgebildet werden können. Damit kann die Validierung der Abbildung dieser Unsicherheiten und ihrer Effekte im Simulationsmodell als abgeschlossen angesehen werden.

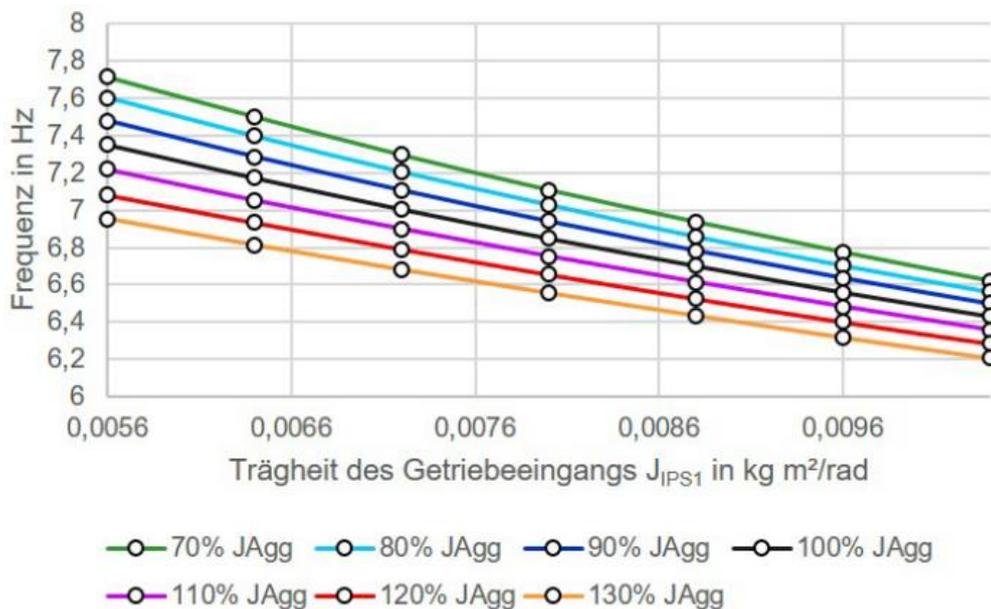


Bild 114: Einfluss der Trägheitsmomente des Aggregates und am Getriebeeingang auf die Lage der Resonanzfrequenz<sup>557</sup>

Da dies der letzte Schritt der Validierung des in 8.2 vorgestellten Simulationsmodell war und sämtliche Validierungsschritte erfolgreich abgeschlossen wurden, kann das Simulationsmodell nun als für die Erprobung des im Rahmen dieser Arbeit entwickelten Reglers hinreichend validiert und damit als anwendbar betrachtet werden.

<sup>556</sup> vgl. 12.4.6 für eine vollständige Übersicht der kombinierten Variation der beiden Trägheitsmomente

<sup>557</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

## 8.4 Einbindung des Reglers in das Simulationsmodell

### 8.4.1 Implementierung eines vereinfachten Lagereglers

Um den im vorangegangenen Kapitel ausgelegten Regler mithilfe des hier vorgestellten Simulationsmodells zu validieren, muss zunächst die Schnittstelle für die Anbindung des Reglers ausgewählt werden. Die Grundlage hierfür bildet der spätere Einsatz des Reglers im Fahrzeug und damit die Integration in die Softwareumgebung der Kupplungs- und Getriebesteuerung. In dieser Umgebung gibt der Regler eine Modulation des an der Kupplung einzustellenden Drehmomentes aus, die zu der Momentenvorgabe der Fahrstrategie addiert wird. Die dadurch entstehende Momentenvorgabe wird mithilfe verschiedener Regelungs- und Steuerungsalgorithmen zuerst in eine Rollenwegvorgabe und anschließend in eine Spannungsvorgabe an den elektrischen Stellmotor des elektromechanischen Aktors umgewandelt. Im Simulationsmodell stehen für die Ankopplung des Reglers mehrere potenzielle Schnittstellen zur Verfügung. Hier ist eine Ankopplung an das an den beiden Teilkupplungen anliegende Moment, an die in den jeweiligen Teilkupplungen wirkende Anpresskraft oder an den eingestellten Rollenweg als Eingangsgröße des elektromechanischen Aktors möglich. Eine Modulation der an den Teilkupplungen anliegenden Drehmomente würde eine direkte Umsetzung der Regelvorgabe bedeuten, bei der somit die komplette Charakteristik der Kupplung und des Aktors als Einfluss auf die Regelgröße vernachlässigt würden. Ähnliches gilt für eine Modulation der Anpresskräfte, die eine Idealisierung der Dynamik des elektromechanischen Aktors durch eine Überbrückung desselben bedeuten würde. Hier müsste eine zusätzliche Übersetzung der Drehmomentenmodulation des Reglers in eine Anpresskraftmodulation an der Kupplung implementiert werden, die alleine aufgrund der Rückkopplung zwischen Aktor und Kupplung durch die Wirkung der Einrückkraft<sup>558</sup> im Vergleich zur Ankopplung des Reglers an das tatsächliche Kupplungsmoment eine erhöhte Komplexität aufweisen würde. Eine Ankopplung des Reglers in Form einer Modulation des Rollenweges am Eingang des elektromechanischen Aktors würde ebenfalls eine Übersetzung der Reglervorgabe, von einer Drehmomentenvorgabe in eine Modulation des Rollenweges, erfordern. Eine sehr ähnliche Konfiguration ist jedoch ebenfalls in der Softwareumgebung des Fahrzeugs vorhanden, dort wird die Modulation der Drehmomentenvorgabe in eine Modulation der Rollenwegvorgabe übersetzt. Damit würde diese Form der Ankopplung des Reglers in der Simulation der späteren Umsetzung in der Kupplungs- und Getriebesteuerungssoftware sehr nahe kommen.

---

<sup>558</sup> vgl. 5.6.1 und 5.6.2

Aus diesen Überlegungen ergibt sich die Entscheidung, den Regler zum Zwecke der Validierung über einen vereinfachten Lageregler, der die Vorgabe des an der Kupplung einzustellenden Drehmomentes direkt in eine Einstellung des Rollenweges des elektromechanischen Aktors überführt, an das im Vorfeld diskutierte Simulink Modell anzukoppeln.

Dieser Lageregler muss insbesondere anhand des aktuellen Arbeitspunktes des Systems aus der vorgegebenen Modulation des von der Kupplung zu übertragenden Drehmomentes eine entsprechende Modulation des Rollenweges ausgeben. Dies geschieht im realen Fall anhand eines in die Steuerungssoftware integrierten komplexen dynamischen Modells des Systems aus Kupplung und Aktor, das insbesondere das komplexe Verhalten der Kupplungskennlinie und deren Veränderung über der Zeit abbilden und adaptieren soll. Im vorliegenden Simulationsmodell wird dagegen nicht vor einer zeitlichen Änderung der Charakteristik des Systems aus Kupplung und Aktor ausgegangen, weshalb es hier nun möglich ist, einen vereinfachten Lageregler umzusetzen, der auf die direkt im Simulationsmodell gemessene Charakteristik des Subsystems aus Aktor und Kupplung sowie die zuvor beschriebene im Simulationsmodell vorgegebene Reibwertcharakteristik zurückgreift. Dazu wird in einem ersten Schritt die Kennlinie des Subsystems Kupplung und Aktor für die Übertragung von eingestelltem Rollenweg der Aktortraverse zur in der Kupplung anliegenden Anpresskraft vermessen. Dies kann mithilfe einer einfachen, langsam ansteigenden Rampenvorgabe des Rollenwegs geschehen<sup>559</sup>, da dieser Übertragungsweg im Simulationsmodell frei von Einflüssen außerhalb des Subsystems ist. Mithilfe der im vereinfachten Lageregler hinterlegten invertierten Kennlinie kann nun aus einer Vorgabe der Anpresskraft direkt ein entsprechender Rollenweg der Aktortraverse berechnet werden ((4) in Bild 115). Die Berechnung dieser Vorgabe der Anpresskraft aus einer Drehmomentvorgabe geschieht mithilfe der im Modell vorgegebenen Reibwertcharakteristik, die im allgemeinen Fall zunächst einmal abhängig von der aktuellen Schlupfdrehzahl der Kupplung ist, weshalb diese eine der Eingangsgrößen des vereinfachten Lagereglers ist (3). Da im Simulationsmodell eine direkte Verwendung der berechneten Rollenwegvorgabe als tatsächlich eingestellter Rollenweg erfolgt, jedoch im realen System eine pulsweitenmodulierte Spannung an den elektronisch kommutierten Stellmotor gegeben und in die Position der Aktortraverse umgesetzt wird, muss die dabei auftretende Dynamik ebenfalls in dem in der Simulation umgesetzten vereinfachten Lageregler berücksichtigt werden. Entsprechend den Ausführungen von ISERMANN

---

<sup>559</sup> Wertebereich 0 mm bis 35 mm, Steigung  $0,35 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$

sowie der Überlegung, dass sich die Umsetzung der Drehzahl des EC-Motors zu einem Verdrehwinkel bzw. zu einem zurückgelegten Weg der Traverse vereinfacht als ein mit einer  $PT_1$ -Dynamik behafteten Integrationsglied beschreiben lässt<sup>560</sup>, ergibt sich für die Strecke Eingangsspannung EC-Motor zu Traversenweg vereinfacht eine Beschreibung als ein  $PT_2$ -Übertragungsglied, dem sich die Übertragungsfunktion

$$G_{LR}(s) = \frac{K_{LR}}{-\frac{1}{\omega_{0,LR}^2} \cdot s^2 + \frac{2d_{LR}}{\omega_{0,LR}} \cdot s + 1} \quad (8.1)$$

mit der ersten Eigenmode  $\omega_{0,LR}$ , der Verstärkung  $K_{LR}$  und der Dämpfung  $d_{LR}$  des Subsystems aus Lageregler und EC-Motor zuordnen lässt (5).

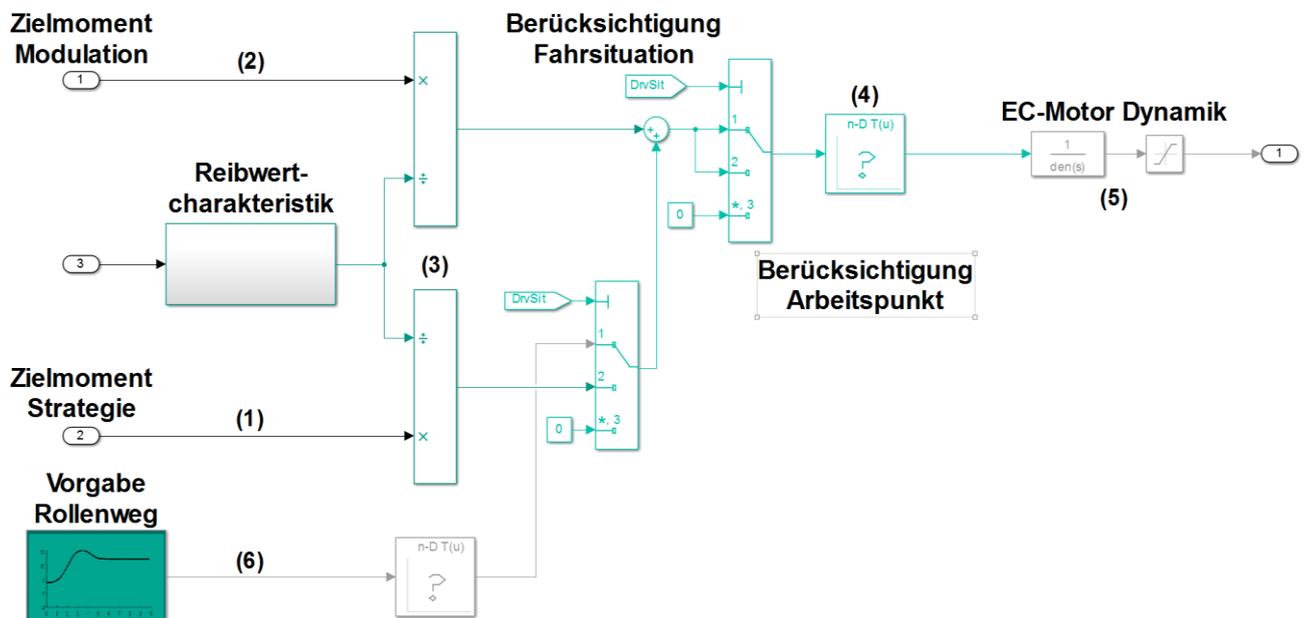


Bild 115: Blockschaltbild des in der Simulation umgesetzten vereinfachten Lagereglers zur Anbindung des zu entwickelnden Reglers (2) sowie zur Umsetzung eines für die entsprechende Fahrsituation benötigten Strategiemomentes (1)

Der so im Simulink Modell umgesetzte vereinfachte Lageregler unter Berücksichtigung einer vereinfachten EC-Motor Dynamik ist in Bild 115 dargestellt. Die Parameter  $\omega_{0,LR}$  und  $d_{LR}$  der EC-Motor Dynamik sind frei wählbar, als realistische Werte werden hier  $\omega_{0,LR} = 2\pi \cdot 80 \frac{1}{s}$  und  $d_{LR} = 1$  angenommen, sodass die Kombination aus vereinfachtem Lageregler und EC-Motor Dynamik nicht schwingungsfähig ist, sondern sich im aperiodischen Grenzfall bewegt und eine erste Eigenmode bei 80 Hz aufweist.

<sup>560</sup> Reuter und Zacher, 2008

Ebenso wurde die Verstärkung auf  $K_{LR} = 1$  gesetzt, da davon ausgegangen wird, dass eine idealisiert statische Rollenwegvorgabe ohne Verluste umgesetzt werden kann. Der vereinfachte Lageregler verfügt über verschiedene Möglichkeiten zur Vorgabe des an der Kupplung einzustellenden Drehmomentes. Das aus der Fahrstrategie für die entsprechende zu simulierende Fahrsituation bestimmte Moment wird über einen separaten Pfad (1) eingegeben und mithilfe der Reibwertcharakteristik in die einzustellende Anpresskraft umgerechnet (3) und vor der Berechnung des einzustellenden Rollenweges (4) mit der Modulation der Anpresskraft verrechnet. Diese entsteht auf einem identischen Pfad aus dem separat eingegebenen Modulationsmoment (2). Für die Umsetzung der zuvor beschriebenen Referenzsituation des Ankriechens in der Gangkombination 1-2<sup>561</sup> wurde zudem die Möglichkeit gegeben, die hierzu modellierte Rollenwegvorgabe über die invertierte Kennlinie Rollenweg über Anpresskraft in Form einer Anpresskraft vorzugeben (6).

Zur Validierung des Lagereglers wurde neben der zuvor vorgestellten Ankriechsituation eine weitere Referenzsituation umgesetzt. Hier wurde eine Anfahrt in der Gangkombination 1-2 unter Verwendung der aus der Messung extrahierten Zeitverläufe von Motor- und Kupplungsmoment simuliert und die Ergebnisse der Simulation mit den gemessenen Signalen verglichen (Bild 116).

Zur weiteren Validierung des Lagereglers wird im nächsten Schritt mithilfe der bereits zuvor eingesetzten Methoden zur Systemidentifikation<sup>562</sup>, genauer gesagt einem IRS basierend auf einem 8 Bit Register mit 4 Taps, die Dynamik des vereinfachten Lagereglers vermessen. Dazu wird im Verlauf der zuvor bereits diskutierten Referenzsituation des Ankriechens zusätzlich zur Vorgabe des Rollenwegverlaufs das IRS auf das von der Kupplung zu übertragende Moment moduliert (Bild 117). Dies geschieht in der Phase des Ankriechvorgangs, in dem die Drehzahlen einen nahezu stationären Zustand eingenommen haben, da hierdurch eine Überlagerung des IRS durch andere transiente Signalverläufe vermieden werden kann (Bild 118).

---

<sup>561</sup> vgl. 8.3.1

<sup>562</sup> vgl. 5.1.2

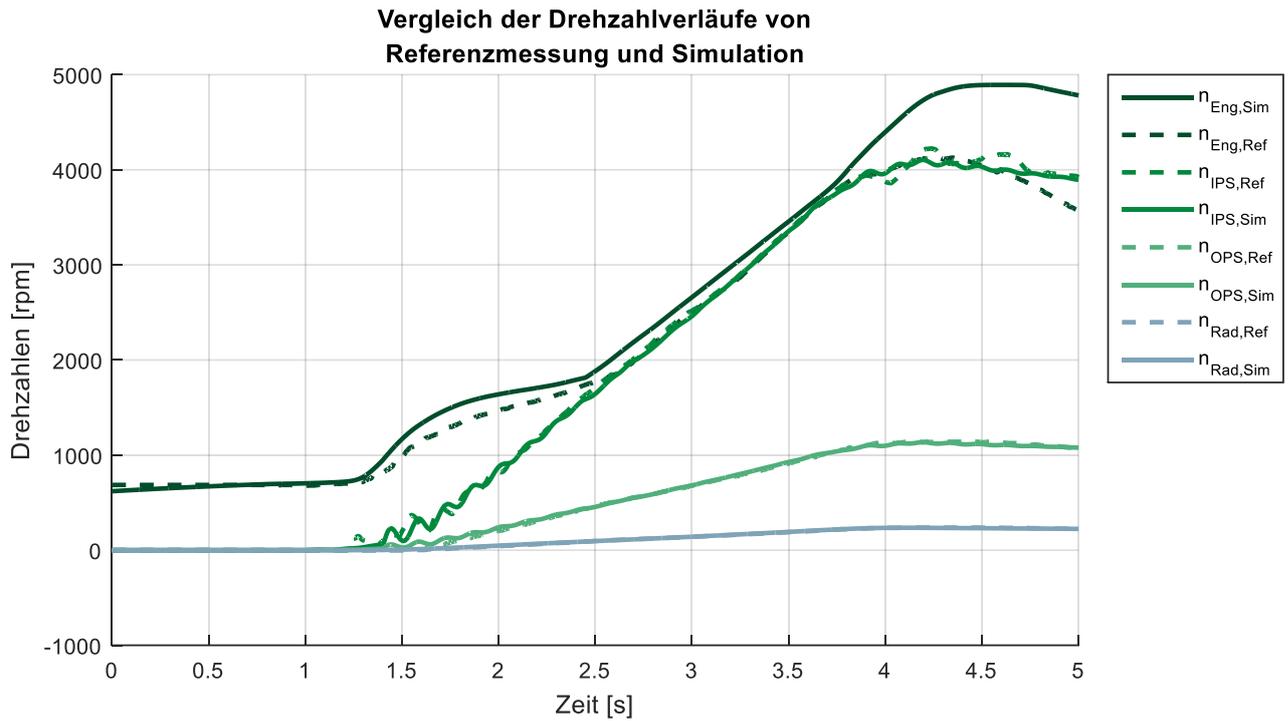


Bild 116: Vergleich der Drehzahlensignale aus Simulation und Messung für die Referenzsituation Anfahrt in der Gangkombination 1-2

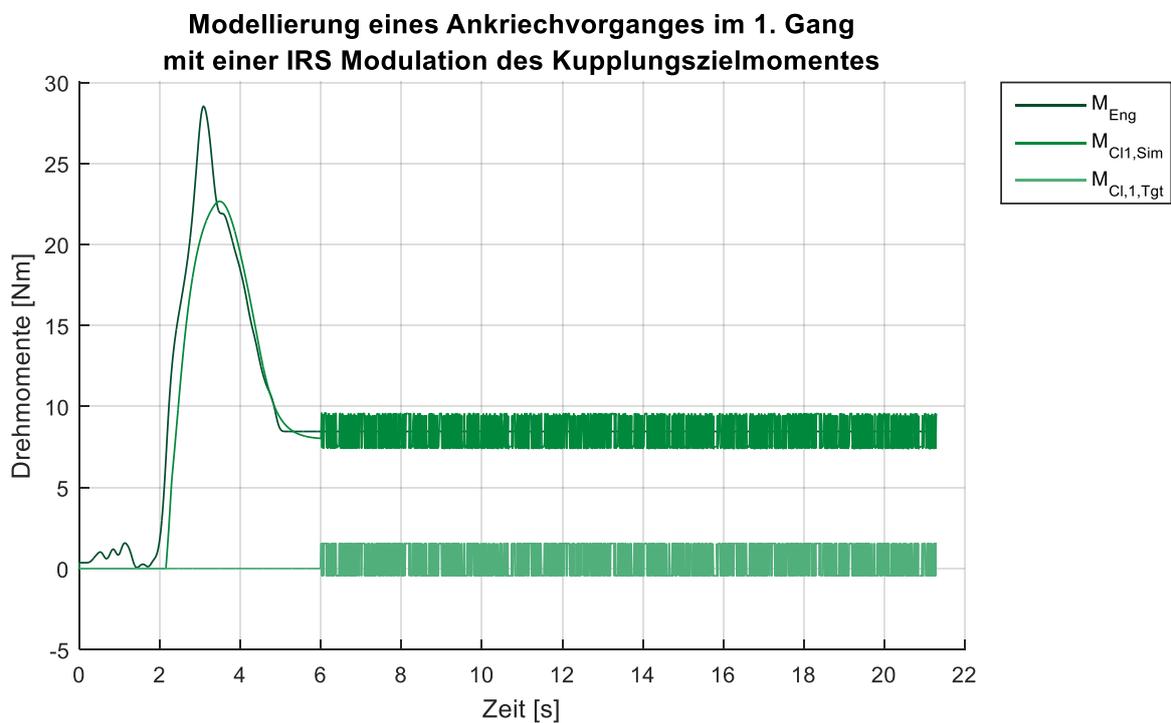


Bild 117: Verlauf der simulierten Drehmomente zur Identifikation der Lage-reglerdynamik mithilfe einer IRS Modulation;  
Zu sehen sind das Motormoment, die Modulation des Kupplungszielmomentes sowie des übertragenen Kupplungsmomentes

Das dynamische Verhalten des Lagereglers lässt sich durch die Analyse von Zielmoment zu Rollenweg charakterisieren. Hier ist zu erwarten, dass die Übertragung für kleine Frequenzen annähernd gleichmäßig ist, um Stellsignale, die typischerweise eine langsame Dynamik ausweisen, möglichst verlustfrei umzusetzen. Dagegen sollte für hohe Frequenzen die Übertragung gegen Null streben, um etwaige hochfrequente Störsignale nicht an das System weiterzugeben.

Mithilfe der in Bild 119 dargestellten aus den Simulationsdaten berechneten Übertragungsfunktionen für die Strecken von der Modulation des Zielmomentes am Eingang des Lagereglers hin zu dem eingestellten Rollenweg der Aktortraverse am Ausgang des vereinfachten Lagereglers sowie zu dem dadurch von der Kupplung übertragenen Drehmoment lässt sich zeigen, dass die zuvor beschriebenen geforderten Eigenschaften für einen idealen Lageregler durch die im Simulationsmodell umgesetzte Variante erfüllt sind.

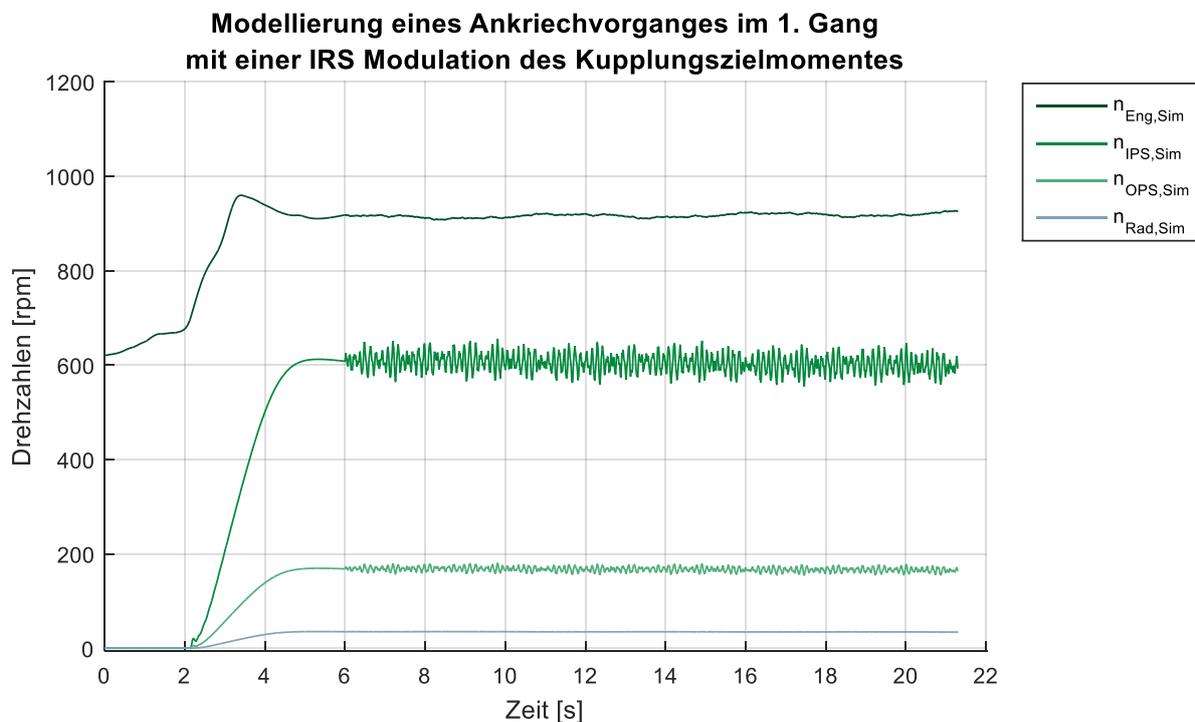


Bild 118: Verlauf der simulierten Drehzahlen zur Identifikation der Lagereglerdynamik mithilfe einer IRS Modulation;  
Zu sehen sind Motor-, Getriebeein- und -ausgangs-, sowie die Raddrehzahl

Die Verstärkungen für die Übertragung zum Rollenweg sowie zum übertragenen Drehmoment sind bis hin zu hohen Frequenzen von ca. 70 Hz nahezu konstant mit einem Verlust von weniger als 5 dB, einem Verlust von weniger als 3 dB bis 50 Hz sowie einem Verstärkungsfaktor von nahezu 1 ( $\equiv$  0 dB) für die Übertragung von

Zielmoment nach übertragenem Moment<sup>563</sup>, wodurch es mithilfe dieses vereinfachten Lagereglers möglich ist, eine über einen zu validierenden Regler eingespeiste Momentenmodulation im für die Regelung relevanten Bereich nahezu verlustfrei an der Kupplung einzustellen. Somit stellt der implementierte vereinfachte Lageregler eine geeignete Schnittstelle für die Einbindung eines zu validierenden Reglers zur aktiven Dämpfung von Antriebsstrangschwingungen in das zur Validierung verwendete Simulationsmodell dar.

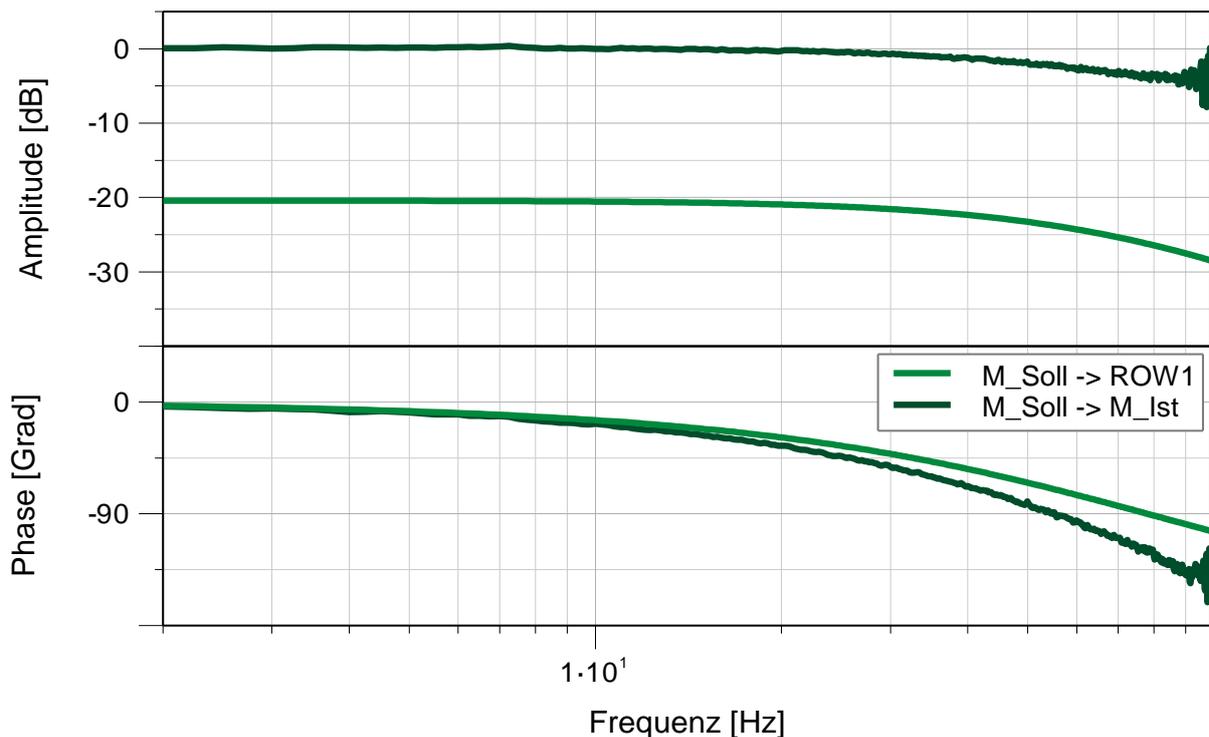


Bild 119: Übertragungsfunktionen des im Simulink Modell implementierten vereinfachten Lagereglers für die Übertragung von der Modulation des Zielmomentes zu Rollenweg und zu dem von der Kupplung übertragenen Drehmoment

#### 8.4.2 Umsetzung des robusten Reglers im Simulationsmodell

Die Einbindung des eigentlichen Anti-Rupf-Reglers in das Simulationsmodell erfolgt über eine sogenannte S-Function, die die Möglichkeit einer Berechnung der Regelsignale mithilfe eines entsprechend interpretierten Matlab- oder C-Codes bietet. Der Vorteil dieser Methode zur Einbindung des Reglers ist, dass unter Verwendung von vektoriellen Signalen die komplette Berechnung in Form von Matrizenoperationen erfolgen kann und somit die Matlab-eigene Berechnungsstruktur ausgenutzt werden

<sup>563</sup> Die unterschiedlichen Verstärkungsfaktoren resultieren aus den unterschiedlichen Einheiten von Ein- und Ausgangssignal für die Übertragung von Zielmoment nach Rollenweg (Nm → mm).

kann, und dass die Befehls- und Ablaufstruktur der S-Function den Berechnungsschritten des Regelalgorithmus im Zustandsraum entspricht (Initialisierung, Zustandsgleichung, Ausgangsgleichung, etc.).<sup>564</sup> Darüber hinaus bietet eine Umsetzung des Reglers als S-Function die Möglichkeit, potenzielle Verzögerungen in der Laufzeit zu minimieren, da insbesondere im Falle von Mex-File basierten S-Functions der Code bereits vor der Ausführung der Simulation kompiliert wird und zur Laufzeit lediglich aufgerufen und nicht mehr interpretiert wird.<sup>565</sup> Dem Nachteil einer im Vergleich zur Umsetzung als blockbasiertes Subsystem erhöhten Komplexität steht weiter eine Umsetzung entgegen, die Code-basiert und damit auch näher an der geplanten Umsetzung im Steuergerät des Fahrzeugs ist. Zur Interpretation des C-Code basierten Reglers steht der Compiler „Microsoft Visual C++ 2013 Professional (C)“<sup>566</sup> zur Verfügung.

Die Implementierung erfolgt aufgrund der Laufzeitvorteile und der größeren Nähe zu einem mit der Getriebesteuerungssoftware kompatiblen Code in Form einer C-Mex-basierten S-Function mithilfe des „S-Function Builders“, welcher eine strukturierte Umsetzung der S-Function mithilfe eines graphical user interface (GUI) ermöglicht.<sup>567</sup> Entsprechend der einzelnen Methoden einer C-Mex S-Function werden in der Initialisierungsroutine die Dimensionen der Signalvektoren entsprechend der in 7.4 definierten Signale festgelegt und der interne Zustand des Reglers  $x_c(t)$  in (7.10) mit  $x_c(0) = 0^{(11 \times 1)}$  initialisiert. Darüber hinaus erfolgt die Definition dieses internen Zustandsvektors als ein aus zeitdiskreten Zustandsvariablen bestehender Vektor, da diese zeitdiskrete Bestimmung der internen Größen und damit auch des Ausgangs des Reglers einer möglichen Umsetzung in der Getriebesteuereinheit des Fahrzeugs entspricht. Entsprechend erfolgt auch die Berechnung der Zustandsgleichung des Reglers<sup>568</sup>

$$\dot{x}_c(t) = A_c(t)x_c(t) + B_c(t)y(t)$$

in der zeitdiskreten Aktualisierungsroutine. Hierbei muss beachtet werden, dass die Matrizen der Reglerparameter  $A_c(t), B_c(t), C_c(t)$  durch die Umsetzung als Eingangsgrößen der S-Function beim Einlesen implizit durch eine Aneinanderreihung der einzelnen Spalten in Spaltenvektoren transformiert werden und entsprechend dieser Transformation eine andere Indizierung erfahren.<sup>569</sup>

---

<sup>564</sup> Bode, 2013

<sup>565</sup> Pietruszka, 2014

<sup>566</sup> Microsoft Corp., 2014

<sup>567</sup> The Mathworks Inc., 2015

<sup>568</sup> vgl. (7.10)

<sup>569</sup> vgl. 12.6

Die Berechnung der Regelgröße erfolgt in der Ausgangsroutine der S-Function entsprechend der Ausgangsgleichung des Reglers<sup>568</sup>

$$u(t) = C_c(t)x_c(t).$$

Die Umsetzung der beiden den Regler definierenden Gleichungen in Form von C-Code basierten Berechnungen zeigt die Einfachheit einer potenziellen Umsetzung des Reglers in der Kupplungs- und Getriebesteuerungssoftware. Diese muss zusätzlich zu dem in 12.6 gezeigten Quellcode lediglich um Initialisierungsroutinen und der Definition der Reglermatrizen  $A_c(t)$ ,  $B_c(t)$ ,  $C_c(t)$  als Kalibrationsgrößen ergänzt werden.

Eine Übersicht der Umsetzung des robusten Reglers im Simulink Modell ist in Bild 120 dargestellt.

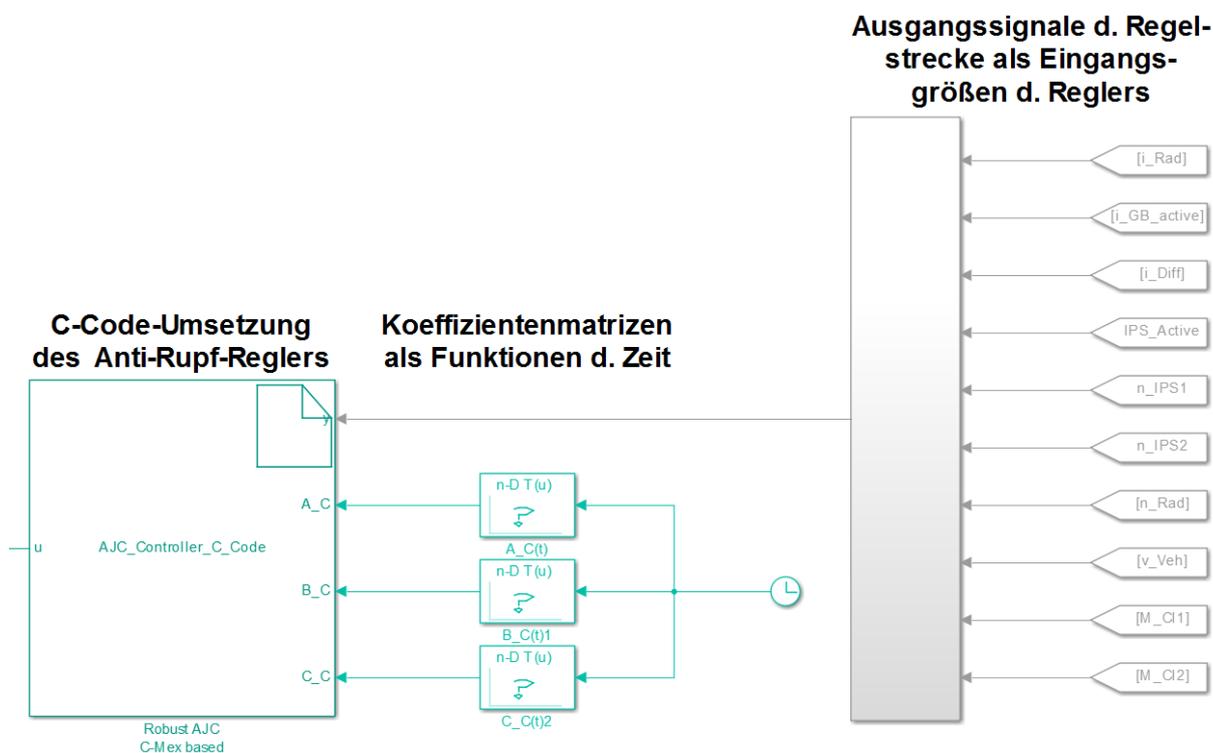


Bild 120: Struktur der Implementierung des robusten Reglers im Simulationsmodell; Zu sehen sind die Aufbereitung des Vektors der Messgrößen, der als Eingangsvektor des Reglers dient, die Parametermatrizen des Reglers als Funktionen der Zeit sowie der S-Function Block mit der C-Code Implementierung des Reglers

## 8.5 Diskussion der Begrenzung des Simulationsmodells

Das im bisherigen Verlauf des Kapitels entwickelte Simulationsmodell des Antriebstranges, des dazugehörigen Stellgliedes aus Aktor und Kupplung sowie der modellierten Regelstrukturen für Lageregelung sowie der in dieser Arbeit entwickelten robusten Anti-Rupf-Regelung wird nun im Hinblick auf die Grenzen seiner

Abbildungsfähigkeit im Vergleich zu realen Systemen und den dort beobachtbaren Effekten diskutiert.

Zunächst wird dabei betrachtet, welche Fahrsituationen mit dem entwickelten Fahrzeugmodell abgebildet werden können. Aufgrund seiner spezifischen Anwendung zur Validierung einer Anti-Rupf-Regelung werden hier lediglich die für diese Regelung im Fokus stehenden Situationen Anfahren und Ankriechen in den Gängen 1 und R in unterschiedlichen Kombinationen mit einem vorgewählten Gang (Gangkombinationen 1-N, 1-R und 1-2 sowie R-1 und R-N) abgebildet.<sup>570</sup> Andere Fahrsituationen und insbesondere Gangkombinationen sind natürlich möglich, jedoch müssen hierzu die Vorgaben des vom Motor gelieferten und des von der Kupplung übertragenen Drehmomentes angepasst werden. Durch die Möglichkeit der Variation der Gangkombinationen wird der Einfluss der Gangvorwahl im inaktiven Teilgetriebe realitätsnah abgebildet. Die Fahrsituation Anfahren wurde hier für eine Fahrbahnsteigung von mehr als 2,75 % umgesetzt, kleinere Fahrbahnsteigungen führen zu einem kleineren Lastmoment und erfordern demnach ebenfalls eine Anpassung der Antriebsdrehmomente. Für die umgesetzten Fahrsituationen ist es darüber hinaus möglich, sowohl mithilfe eines kalibrierbaren negativen Reibwertgradienten selbsterregtes Rupfen sowie geometrisch angeregte Rupfschwingungen in den drei bekannten Realisierungen<sup>571</sup> mit Amplituden proportional zum anliegenden Kupplungsdrehmoment realitätsnah abzubilden.<sup>572</sup> Weiterhin bietet das Simulationsmodell zu Zwecken der Identifikation der Systemdynamik entsprechend den Ausführungen in 5.1.2 die Möglichkeit zur Modulation der Vorgabe des Kupplungsdrehmomentes mit einem IRS und damit die Möglichkeit, die einzelnen Komponenten und Subsysteme des Simulationsmodells sowie das System als Ganzes hinsichtlich seiner dynamischen Eigenschaften zu untersuchen und zu validieren.<sup>573</sup> Als Beispiel hierfür dient die Validierung der ebenfalls umgesetzten Abbildung einer Variation der Systemdynamik aufgrund der Einflüsse veränderlicher Steifigkeiten und Dämpfungen einzelner Antriebsstrangkomponenten<sup>574</sup> sowie die Abbildung der bereits diskutierten Einflüsse der Aggregat- und Motorblockbewegung in Abhängigkeit von deren Lagerung sowie der sogenannten Vorderachsmode, welche durch eine Variation der Steifigkeit der Achsaufhängung hervorgerufen wird.<sup>575</sup>

---

<sup>570</sup> vgl. u.a. 8.3.1 und 8.4.1

<sup>571</sup> vgl. 2.6.3

<sup>572</sup> vgl. 8.3.2

<sup>573</sup> vgl. 8.3.3 und 8.4.1

<sup>574</sup> vgl. 8.3.3

<sup>575</sup> vgl. 5.1.3 bis 5.1.5

Jedoch wurden neben der Anzahl der zur Verfügung stehenden Fahrsituationen ebenfalls einige Effekte bei der Modellierung nicht berücksichtigt, die eventuell im realen System auftreten können, die an dieser Stelle jedoch vernachlässigt wurden, da ihr Einfluss, in Anbetracht des Verwendungszwecks des Modells, als zu gering erachtet wurde und ihre Umsetzung in der Summe eine signifikante Steigerung des Modellierungsaufwandes erfordert hätte, die damit gewonnenen Erkenntnisse jedoch dazu in keinem Verhältnis gestanden hätten. Dies beinhaltet beispielsweise die Modellierung der Überschneidungsschaltung eines Doppelkupplungsgetriebes, die nicht modelliert wurde, da diese Situationen in der vorliegenden Arbeit nicht betrachtet werden und die Berücksichtigung die Komplexität der Modellierung erhöhen würde.

Auch wurde auf eine Modellierung der CAN-Bus Übertragung von Signalen und deren verhältnismäßig grobe Abtastung<sup>576</sup> verzichtet, da dieses Kommunikationssystem durch eine Beeinträchtigung der Signalqualität die Regelgüte einschränken kann, jedoch ein Fahrzeug als mögliche Zielanwendung über eine Steuergerätekommunikation mit höheren Taktraten verfügen kann. Dadurch würde die möglicherweise im Fahrzeug erreichbare Regelgüte nicht in der Simulation sichtbar, obwohl gerade diese das Potenzial eines entwickelten Anti-Rupf-Reglers aufzeigen soll. Daher erfolgt die Signalübertragung in der Simulation in der gleichen Taktung wie die diskrete Simulationsschrittweite von  $\Delta t_{Sim} = 10^{-4}$  s, welche hier gewählt wurde, um einen geeigneten Kompromiss zwischen quasikontinuierlicher Simulation eines kontinuierlichen mechanischen Systems und einer effizienten Ressourcennutzung zu erzielen.

Weiterhin wurde auch auf eine Abbildung eines realistischen Lagereglers zur Ansteuerung der Kupplungsbetätigung verzichtet, da ein solcher zum einen aufgrund der notwendigen Parametrierung den Modellierungsaufwand erhöht hätte und zum anderen ebenfalls die Regelgüte negativ beeinflussen würde, da die Regelsignale nicht adäquat umgesetzt würden. Damit würde wiederum wie im Falle der langsamen Samplingrate der CAN-Bus-Kommunikation das tatsächliche Potenzial eines zu validierenden Anti-Rupf-Reglers in der Simulation durch die Abbildung von suboptimalen Komponenten verschleiert.

Zuletzt wurde aus Gründen der Reduktion der Komplexität auf eine realistische, nichtlineare Abbildung des Verlaufs der Reibungszahl des Friktionskontaktes in der Kupplung zugunsten einer einfachen nach oben und unten begrenzten linearen Modellierung des Reibwertes als Funktion der Differenzdrehzahl verzichtet, da diese für die Abbildung relevanter Effekte in der Simulation genügt.<sup>577</sup>

---

<sup>576</sup> in den zur Verfügung stehenden Systemen max. 400Hz

<sup>577</sup> vgl. 8.3.2

## 8.6 Analyse des geschlossenen Regelkreises

### 8.6.1 Führungsverhalten

Nach den Ausführungen von LUNZE ist die Bestimmung des Führungsverhaltens des Reglers definiert als das Verhalten für ein ungestörtes System für den Fall einer durch die Führungsgröße vorgegebenen Solltrajektorie der Eingangsgröße. In diesem Testfall definiert sich ein ungestörtes System als eines, in dem das nominelle System sowie der Ausgang der Regelstrecke nicht durch äußere Störungen beeinträchtigt sind und außerdem keinerlei Messrauschen vorliegt. Im Falle des in Abschnitt 5.4 abgeleiteten Zustandsraummodells der unsicherheitsbehafteten Regelstrecke, dass zum einen die Auswirkung der Systemunsicherheit, repräsentiert durch den Vektor  $w(t)$ , sowie die auf die Regelstrecke wirkenden harmonischen Störungen  $v(t)$  Null sind, und zum anderen, dass das in der Systemmodellierung berücksichtigte Messrauschen  $v(t)$  ebenfalls Null ist.

Dies kann nun auf das zuvor diskutierte Simulationsmodell übertragen werden, indem zur Untersuchung des Führungsverhaltens des Reglers die Parameter des Antriebsstrangmodells bei ihren nominellen Werten festgehalten werden und somit der Einfluss der Systemunsicherheit eliminiert wird.<sup>578</sup> Da dieses Simulationsmodell eine idealisierte Situation repräsentiert, wurde hier auf eine Modellierung von Messrauschen verzichtet, weshalb diese Voraussetzung zur Bestimmung des Führungsverhaltens in jedem Fall erfüllt ist. Darüber hinaus müssen die von außen auf die Regelstrecke wirkenden Störungen, die Drehmomentschwankungen durch das Kupplungsrupfen, abgeschaltet werden. Im Falle der geometrischen Anregungen ist das mithilfe des Switch-Blocks<sup>579</sup> sehr leicht zu realisieren, indem der Eingang dieses Subsystems zu Null gesetzt wird. Dagegen ist die Möglichkeit des Auftretens von selbsterregtem Rupfen in den Eigenschaften des Simulationsmodells implizit durch die Variabilität des Reibwertgradienten der Reibpaarung und der Dämpfung des Antriebsstrangs enthalten und kann somit nicht explizit eliminiert werden, ohne von den nominellen Parametern des Modells abzuweichen. Jedoch wurde in 8.3.2 gezeigt, dass für die nominellen Systemparameter die Dämpfung des Antriebsstrangs so hoch ist, dass selbsterregtes Rupfen in der Simulation nicht auftritt.<sup>580</sup>

Nach diesen Überlegungen ergibt sich als Testsituation zur Bestimmung des Führungsverhaltens des Reglers die Vorgabe eines realistischen Verlaufes des Kupplungsdrehmomentes, wie er durch den in Bild 98 gezeigten Rollenwegverlauf

---

<sup>578</sup> vgl. 12.1

<sup>579</sup> vgl. Bild 127

<sup>580</sup> vgl. Bild 103 und Bild 104

erreicht wird, um zu bestimmen, ob der Regler eine Beeinträchtigung des Ankriechvorgangs zur Folge hat und somit ein Maß für das Führungsverhalten des Reglers im Zeitbereich liefert. Diese Bestimmung des Führungsverhaltens im Zeitbereich kann jedoch nur exemplarisch anhand dieser speziellen Fahrsituation geprüft werden und liefert damit keine Aussage über das generelle Führungsverhalten des geschlossenen Regelkreises. Dieses kann ausschließlich mithilfe einer geeigneten Übertragungsfunktion sinnvoll bestimmt werden.

Zur Bestimmung des Führungsverhaltens im Frequenzbereich steht als Werkzeug die sogenannte Führungsübertragungsfunktion zur Verfügung, die als Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises mit der Führungsvorgabe als Eingangssignal und dem Systemausgang als Ausgangssignal definiert ist. Hier ist gewünscht, dass diese Übertragungsfunktion für niedrige Frequenzen eine möglichst verlustfreie Übertragung ermöglicht (Verstärkungsfaktor 1, entspricht 0 dB) und für hohe Frequenzen abfällt, um eine Verstärkung von Messrauschen und hochfrequenten Störungen zu vermeiden.<sup>581</sup> Diese Führungsübertragungsfunktion lässt sich mithilfe der in 5.1 beschriebenen Methoden zur Identifikation der Systemdynamik bestimmen, indem als Führungssignal ein konstanter Pegel mit einer Modulation durch ein PRBS oder einem darauf basierenden Signal<sup>582</sup> gewählt wird.

### 8.6.2 Störverhalten

Ähnlich der Untersuchung des Führungsverhaltens erfordert auch die Bestimmung des Störverhaltens des Reglers, dass bestimmte Einflussfaktoren auf den geschlossenen Regelkreis eliminiert werden müssen, um die Einflüsse der verbleibenden Signale auf das Regelverhalten zu untersuchen. Im Falle der Bestimmung des Störverhaltens muss demnach der Einfluss der Führungsgröße minimiert werden, weshalb für diese Untersuchung der Verlauf der Führungsgröße auf einen konstanten Signalpegel reduziert wird. Dagegen werden die von außen auf das System einwirkenden Störungen detailliert betrachtet, während das Messrauschen ebenfalls vernachlässigt wird.<sup>583</sup>

Für die Übertragung auf das in Kapitel 5 diskutierte System bedeutet dies, dass die vorgegebene Trajektorie des Kupplungsmomentes  $\bar{M}_{Cl}(t)$  auf einen konstanten Pegel fixiert wird, das im Zustandsraummodell berücksichtigte Messrauschen  $v(t)$  zu Null gesetzt wird und die äußeren Störungen auf das System, also die unterschiedlichen

---

<sup>581</sup> Lunze, 2006a

<sup>582</sup> vgl. 2.2

<sup>583</sup> Lunze, 2006a

Rupfeschwingungen  $v(t)$ , aktiviert werden. Auch hier bleiben wie bei der Bestimmung des Führungsverhaltens die systeminhärenten Unsicherheiten unberücksichtigt und somit behalten die veränderlichen Parameter des Systems ihre nominellen Werte.<sup>584</sup> Auch hier kann somit zunächst kein selbsterregtes Rupfen auftreten, dies wird jedoch in der Folge durch eine entsprechende Variation der Parameter realisiert.<sup>585</sup>

Auch hier ergeben sich aus den Überlegungen wie im vorigen Abschnitt zwei unterschiedliche Testfälle zur Bestimmung des Störverhaltens, jeweils eine Untersuchung zur Charakterisierung des Störverhaltens im Zeitbereich sowie ein Simulationsszenario zur Identifikation der Störübertragungsfunktion im Frequenzbereich. Für die Ermittlung des Verhaltens im Zeitbereich ist die Vorgabe des Drehmomentes wie zuvor diskutiert konstant, während die unterschiedlichen Rupfanregungen nacheinander und mit unterschiedlichen Amplituden aktiviert werden. Ähnlich erfolgt die Bestimmung des Verhaltens für die Störung durch selbsterregtes Rupfen, mit der Ausnahme, dass hier der Reibwertgradient bzw. die Dämpfung der Seitenwellen variiert werden, um unterschiedliche Anregungsintensitäten zu erhalten. Für eine solche Bestimmung des Verhaltens des geschlossenen Regelkreises im Zeitbereich bei konstanter Führungsgröße bietet sich somit die bereits zuvor simulierte Situation des Ankriechvorgangs an, da dieser nach dem initialen Ankriechen in einen stationären Zustand übergeht, der zunächst alle Voraussetzungen für die zuvor geschilderte Bestimmung des Störverhaltens des geschlossenen Regelkreises erfüllt.<sup>586</sup>

Für die Bestimmung der Störübertragungsfunktion, welche definiert ist als Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises mit der äußeren Störung als Eingangssignal und dem Systemausgang als Ausgangssignal, wird wiederum die Führungsgröße konstant gehalten, während statt einer sinusförmigen Rupfanregung ein PRBS-basiertes Signal auf das konstante Kupplungsmoment moduliert wird. Das Ziel ist hier eine niedrige Verstärkung für niedrige Frequenzen, gleichbedeutend mit einer guten Abschwächung der Störungen durch den Regler, während die Verstärkung für hohe Frequenzen ansteigen darf, da es nicht gewünscht ist, dass der Regler spürbar auf diese hochfrequenten Anteile reagiert und außerhalb des für die Regelung relevanten Bereiches einen hohen Beitrag zur Stellenergie leistet.<sup>587</sup>

---

<sup>584</sup> vgl. 12.1

<sup>585</sup> vgl. Bild 103 und Bild 104

<sup>586</sup> vgl. Bild 102

<sup>587</sup> Lunze, 2006a

### 8.6.3 Robustheitsanalyse durch Variationsrechnung

In diesem letzten Teil der Erprobung des Reglers in der Simulation soll bestimmt werden, wie stark die in den beiden vorigen Abschnitten ermittelte Regelgüte in Abhängigkeit von der Ausprägung der im Verlauf der Arbeit diskutierten systeminhärenten Unsicherheiten<sup>588</sup> abhängt. Dazu werden die vollständig im Simulationsmodell berücksichtigten unsicheren Parameter im Rahmen ihrer zuvor festgelegten Grenzen variiert, wobei diejenigen Parameter, die im Rahmen der Untersuchung in 8.3.3 keinen oder nur einen zu vernachlässigenden Einfluss auf die Systemdynamik zeigten, nicht für die Variation berücksichtigt werden, um an dieser Stelle die Aufwände der Untersuchung möglichst zu reduzieren.<sup>589</sup>

Daraus ergeben sich die in Tabelle 8 dargestellten Variationsparameter für die Simulation mit ihren jeweiligen Variationsbreiten. Diese Parameter werden zunächst einzeln variiert und die Regelgüte mithilfe der in den beiden vorigen Abschnitten verwendeten Testsettings erprobt. Diese Ergebnisse werden mit den Resultaten der vorigen Abschnitte verglichen und zu einer abschließenden Bewertung der robusten Regelgüte zusammengefasst. Zur Bewertung dieser Ergebnisse werden die maximale und die mittlere Amplitude der Schwingung der Getriebeeingangsdrehzahl herangezogen, sowie die Unterschiede in den Verstärkungsfaktoren der Führungs- und der Störübertragungsfunktionen. Dies ist notwendig, da nur auf diese Weise eine signifikante Beeinträchtigung des Regelergebnisses im Zeit- und im Frequenzbereich erkannt werden kann.

---

<sup>588</sup> vgl. 5.4.1 und Tabelle 4, sowie 7.3.3, 7.4.2 und 8.3.3

<sup>589</sup> vgl. 12.3

Tabelle 8: Variationsparameter und -breiten für die Bestimmung des Regelverhaltens in Abhängigkeit von den systeminhärenten Unsicherheiten

Physikalische Messgröße	Signalbezeichnung	Variationsbreite [%]
Trägheitsmoment Motor und Aggregat sowie Masse Motorblock	$\Delta_{J,Eng}$ ; $\Delta_{J,Agg}$ $\Delta_{m,Eng}$	40
Trägheitsmoment Getriebeeingang	$\Delta_{J,IPS}$	30
Trägheitsmoment Getriebeausgang	$\Delta_{J,OPS}$	20
Trägheitsmoment Fahrzeug	$\Delta_{J,Veh}$	65
Steifigkeit Seitenwelle	$\Delta_{c,SShaft}$	20
Steifigkeit Achsaufhängung	$\Delta_{c,Axle}$	20
Steifigkeit Aggregatlager	$\Delta_{c,Agg}$	30
Dämpfung Seitenwelle	$\Delta_{d,SShaft}$	30
Dämpfung Aggregatlager	$\Delta_{d,Agg}$	30

## 8.7 Zwischenfazit

Im vorangegangenen Kapitel wurde ein Simulationsmodell in Matlab Simulink<sup>590</sup> entwickelt mit dem Ziel, eine geeignete virtuelle Validierungsumgebung für die Entwicklung einer robusten Anti-Rupf-Regelung zu erhalten. Dazu wurde der Antriebsstrang mit einem Doppelkupplungsgetriebe durch die die Dynamik beschreibenden Differenzialgleichungen abgebildet und damit eine direkte Verbindung zu den die Dynamik bestimmenden mechanischen Größen wie Dämpfungen, Steifigkeiten, Trägheitsmomente geschaffen.<sup>591</sup> Innerhalb dieser Modellierung wurde die Übertragung eines Drehmomentes durch die beiden Teilkupplungen mithilfe einer einfachen Modellierung eines Friktionskontaktes inklusive der dabei potenziell entstehenden Rupfanregung und deren unterschiedlichen Anregungsmechanismen realitätsnah abgebildet.<sup>592</sup> Ergänzt wird diese Modellierung des PKW-Antriebsstrangs durch die Abbildung der Stellglieder der Regelstrecke in Form eines elektromechanischen Aktors sowie einer auf den mechanischen Wirkprinzipien bestehenden Modellierung der einzelnen Teilkupplungen. In diesem Modell zur Validierung wurden außerdem die unterschiedlichen möglichen Schwingungszustände eines PKW-Antriebsstrangs im Hinblick auf deren Ursachen und den zugrunde liegenden Kopplungen, wie sie in 5.1 beschrieben wurden, berücksichtigt und modelliert. Weiterhin wurden die in Kapitel 5 diskutierten systeminhärenten

<sup>590</sup> The Mathworks Inc., 2015

<sup>591</sup> vgl. 8.3.1

<sup>592</sup> vgl. 8.3.2

Unsicherheiten des PKW-Antriebsstrangs, in Bezug auf dessen Veränderung der Systemdynamik über Lebensdauer sowie als Resultat von Schwankungen innerhalb der Fertigungstoleranzen in der Serienfertigung, in Form von variablen Systemparametern übernommen und deren Auswirkung auf die Systemdynamik validiert.<sup>593</sup> Zur Anbindung eines in der Entwicklung befindlichen Anti-Rupf-Reglers zu virtuellen Validierungsaktivitäten wurde eine geeignete Schnittstelle geschaffen, die die Anwendung einer Modulation des von der Kupplung zu übertragenden Drehmomentes erlaubt, indem die durch den Regler eingebrachte Modulation zusammen mit der vorhandenen Momentenvorgabe zu einer Einstellung des Rollenweges des elektromechanischen Aktors umgewandelt wird.<sup>594</sup> Das hier beschriebene komplette Simulationsmodell wurde, bevor es selbst zur Validierung eines entwickelten Reglers verwendet werden kann, ebenfalls inklusive seiner konstituierenden Subsysteme validiert.<sup>595</sup>

---

<sup>593</sup> vgl. 8.3.3

<sup>594</sup> vgl. 8.4.1

<sup>595</sup> 8.3

## 9 Problemlösungsansatz Reglerauslegung

Im folgenden Kapitel wird analysiert, welche Probleme die Lösung der in Kapitel 7 behandelten regelungstechnischen Problemstellung verhindern. Dazu wird, wie auch schon in vorangegangenen Abschnitten der vorliegenden Arbeit, auf die Problemlösungsmethode SPALTEN<sup>596</sup> zurückgegriffen. Aufgrund der Tatsache, dass eine weitere vollständige Behandlung des Problems nach SPALTEN – wie im Verlauf des Kapitels deutlich wird – nicht in den Rahmen dieser Arbeit passen würde, werden im Folgenden lediglich die Schritte der Situationsanalyse, der Problemeingrenzung sowie der Entwicklung alternativer Lösungen ausgeführt. Die Durchführung dieser Schritte und deren Ergebnisse bilden damit die Überleitung zu den darauffolgenden Abschnitten Fazit und Ausblick der vorliegenden Arbeit.

### 9.1 Situationsanalyse (SA)

Die Situationsanalyse ergibt die folgende, der Problemstellung zugrunde liegende Situation: es konnten trotz einer intensiven Variation der zur Verfügung stehenden Designparameter<sup>597</sup> keine Lösungen zu den beiden Riccati Matrix Differenzialgleichungen (7.31) und (7.32) gefunden werden, die für einen gemeinsamen Wert des Parameters  $\tau$  die Voraussetzungen (7.33) erfüllen und somit eine Lösung der regelungstechnischen Problemstellung darstellen.

Da die Problemstellung sich als eine Abweichung des Ist(Nicht)-Zustandes zu einem Soll-Zustand beschreiben lässt, wird der Analyse dieser Problemstellung sowie der möglichen Ursachen eine Definition dieser Zustände zugrunde gelegt. Der Soll-Zustand wird beschrieben durch die Existenz mindestens einer Lösung des regelungstechnischen Problems, also ein Lösungspaar der Gleichungen (7.31) und (7.32), die die Bedingungen (7.33) vollständig erfüllen. Dabei ergibt sich diese Lösung der regelungstechnischen Aufgabenstellung im Soll-Zustand aus einer Menge an möglichen Lösungen, die die Kriterien (7.33) vollständig erfüllen, wobei die gefundene Lösung diejenige ist, die den Spektralradius  $\rho(Y(t)X(t))$  minimiert. Darüber hinaus existiert eine Menge möglicher Lösungen, die die Kriterien (7.33) mit Ausnahme des Kriteriums an den Spektralradius erfüllen. Die Verteilung dieser Mengen möglicher Lösungen ist im Soll-Zustand kontinuierlich innerhalb von Bereichen des Intervalls des Parameters  $\tau$ .

---

<sup>596</sup> vgl. 2.1.1

<sup>597</sup> vgl. 7.3.1 bis 7.3.3 sowie 7.4.2 und 7.4.3

Dagegen wird der Ist(Nicht)-Zustand dadurch beschrieben, dass keine Lösung der beiden Gleichungen zu einem gemeinsamen Parametersatz gefunden werden konnte, darüber hinaus bei einer Variation über eine Vielzahl von Parametersätzen lediglich eine Konfiguration gefunden werden konnte, die eine gemeinsame Lösung der Gleichungen (7.31) und (7.32), die die Bedingungen (7.33) mit Ausnahme der Anforderung an den Spektralradius erfüllt.<sup>598</sup> Zudem ist klar erkennbar, dass die Verteilung der möglichen Lösungen innerhalb des Intervalls von  $\tau$  nicht kontinuierlich in Bereichen gestreut ist, sondern solche möglichen Lösungen eher singuläre Ereignisse in einer Umgebung  $\tau \pm \delta\tau$  sind.

Ein hierfür möglicherweise ursächliches Problem ist, dass die hierbei angewandte Methode zur Reglerauslegung, wie sie in 7.3 beschrieben wurde, zu wenige Punkte potenzieller Lösungen im Parameterraum generiert. Insbesondere ist hierbei anzumerken, dass die Anzahl der für die Gleichung (7.32) gefundenen Lösungen, die den Vorgaben (7.33) entsprechen, mit circa 80 bis 90 in Relation zu den maximal gefundenen 30 Lösungen zu (7.31), die diese Voraussetzungen erfüllen, um den Faktor drei größer ist. Jedoch erscheint auch diese Zahl in Relation zu der Anzahl der insgesamt gefundenen Lösungen der beiden Gleichungen (7.31) und (7.32)<sup>599</sup>, die in ihrer Größenordnung  $10^4$  beträgt, verschwindend gering. Mögliche Ursachen hierfür sind ein zu großer Parameterraum, der durch die verfügbaren Designparameter aufgespannt wird, wodurch es nur schwer möglich ist, unter vertretbarem Aufwand eine ideale Parameterkonfiguration zu finden. Oder die Möglichkeit, dass die gegebene regelungstechnische Aufgabenstellung mit dem in dieser Arbeit gewählten Ansatz nicht lösbar ist und somit kein tatsächlicher Lösungspunkt im verfügbaren Parameterraum existiert. Eine weitere Möglichkeit ist, dass die für diesen gewählten regelungstechnischen Ansatz angewandte Auslegungsprozedur numerisch instabil ist und daher die Lösung dieses Problems ausschließlich mit speziell darauf zugeschnittenen Algorithmen möglich ist.

Ein weiteres der dargelegten Situation potenziell zugrundeliegendes Problem ist, dass die zur Auslegung eines geeigneten Reglers nach dem in Kapitel 7 beschriebenen Ansatz verwendeten Implementierungen in Matlab numerisch instabil sind oder Ergebnisse unzureichender Präzision liefern. Mögliche Ursachen hierfür sind eine schlechte Konditionierung der Systemmatrizen aufgrund der unterschiedlichen Größenordnungen der Matrixelemente und zahlreichen Nullelementen in den Matrizen. Ebenfalls möglich ist, dass die verwendeten Methoden und Algorithmen in der vorliegenden Implementierung in Zusammenhang mit den zugrundeliegenden

---

<sup>598</sup> vgl. 7.3.1 bis 7.3.3 sowie 7.4.2 und 7.4.3

<sup>599</sup> ohne Berücksichtigung von (7.33)

Berechnungsmethoden in Matlab für die Berechnungen im gewählten regelungstechnischen Ansatz aufgrund ihrer Präzision oder Stabilität nicht geeignet sind.

Diese der gesamten Problemstellung zugrundeliegenden möglichen Probleme werden nun im Zuge der Problemeingrenzung im darauffolgenden Abschnitt analysiert und auf ihre potenziellen Beiträge zur Problemstellung geprüft.

## 9.2 Problemeingrenzung (PE)

Nun werden zur Problemeingrenzung die unterschiedlichen in der Situationsanalyse aufgestellten Hypothesen anhand der Unterschiede zwischen Soll- und Ist(Nicht)-Zustand auf die Wahrscheinlichkeit ihres Beitrages und daraufhin auch auf die ihres Auftretens untersucht.

Die Hypothese, dass die regelungstechnische Aufgabenstellung mit dem gewählten Ansatz nicht lösbar ist, kann nicht die alleinige Ursache für die auftretende Diskrepanz zwischen Soll- und Ist(Nicht)-Zustand sein. Auch wenn diese Hypothese zutreffen würde, wäre immer noch eine deutlich höhere Auftretenswahrscheinlichkeit für Lösungspaare zu (7.31) und (7.32), die die Bedingungen (7.33) bis auf die Anforderung an den Spektralradius erfüllen, zu erwarten. Darüber hinaus wäre auch eine kontinuierliche Verteilung dieser Lösungen über das Intervall für  $\tau$  zu erwarten. Hinzu kommt, dass die Untersuchung des regelungstechnischen Systems auf seine spezifischen Eigenschaften hin eine Lösbarkeit der Aufgabenstellung nahelegt.<sup>600</sup>

Der Einfluss einer generellen numerischen Instabilität der Auslegungsprozedur auf die Unterschiede zwischen Soll- und Ist(Nicht)-Zustand ist ebenfalls als gering zu bewerten, da die Analyse zeigt, dass die Riccati Matrix Differenzialgleichungen (7.31) und (7.32) über einen Großteil des untersuchten Parameterraums und zudem über kontinuierliche Bereiche hinweg lösbar sind und diese Lösungen selbst zunächst weder singular noch divergent sind.<sup>601</sup> Dies wäre nicht zu erwarten, wenn die Prozedur insgesamt nicht stabil wäre. Gleichwohl ist es möglich, dass die Prozedur im Detail numerische Instabilitäten aufweist, die eine häufige Verletzung der Bedingungen (7.33) für gefundene Lösungen der Gleichungen (7.31) und (7.32) verursachen. Die in 7.4.3 beschriebene breit angelegte Untersuchung über den gesamten Parameterraum schließt auch die in 9.1 genannte Möglichkeit einer Wahl ungeeigneter Werte für die Auslegungsparameter nahezu aus.

Diese Hypothese eines numerisch instabilen Verhaltens der Auslegungsprozedur steht damit im engen Zusammenhang zu den verbleibenden Hypothesen der schlecht

---

<sup>600</sup> vgl. 7.2

<sup>601</sup> vgl. 7.4.3

konditionierten Systemmatrizen sowie der für die vorliegende Aufgabe ungeeigneten Berechnungsmethoden.

Für die Hypothese der schlecht konditionierten Systemmatrizen spricht die Tatsache, dass eine einfache Bewertung mithilfe der sogenannten *condition number* in Matlab, die ein Maß für die Invertierbarkeit einer Matrix darstellt,<sup>602</sup> ergibt, dass die im Rahmen der Modellierung auftretenden Systemmatrizen schlecht konditioniert zu sein scheinen. Jedoch scheint die Fähigkeit verschiedener Programme zur präzisen numerischen Berechnung für mutmaßlich schlecht konditionierte Matrizen unterschiedlich ausgeprägt zu sein, da in Kapitel 7 gezeigt werden konnte, dass die Berechnung von Rängen und Eigenwerten für die gleichen fraglichen Matrizen mit Maple<sup>603</sup> plausible Ergebnisse lieferte, während Berechnungen mit Matlab Ergebnisse lieferten, die so nicht korrekt sein können.<sup>604</sup> Dieser Vergleich legt nahe, dass eine schlechte Konditionierung der Systemmatrizen einen Einfluss auf die hier untersuchte Diskrepanz zwischen Soll- und Ist(Nicht)-Zustand haben kann, dass diese jedoch nicht die alleinige Ursache sein kann, da diese Eigenschaft sonst unabhängig von dem verwendeten Berechnungsprogramm zu Problemen und Fehlern führen würde.

Somit bleibt die letzte der eingangs angestellten Hypothesen, dass die zum Einsatz kommenden Berechnungsmethoden beziehungsweise deren Implementierung in der Berechnungsumgebung Matlab für die hier bearbeitete regelungstechnische Aufgabenstellung nicht geeignet sind. Für diese These spricht die zuvor schon diskutierte Abweichung in den mithilfe der Programme Matlab und Maple erzielten Berechnungsergebnissen sowie deren Prüfung auf Plausibilität. Des Weiteren wird diese Hypothese durch die Feststellung gestützt, dass die Anzahl der gefundenen möglichen Lösungen für die Gleichung (7.32) für konstante Parameter über mehrere Berechnungsvorgänge leichten Schwankungen unterworfen sind (bei mehreren Durchgängen 89 statt der erwarteten 90 möglichen Lösungen). Da sich hier die Bedingungen für die Berechnungen der Lösungen zu (7.32) sowie die Bedingungen (7.33) an deren potenziellen Validität für die Lösung der Aufgabenstellung während der einzelnen Durchläufe nicht ändern, legt dies nahe, dass die numerischen Berechnungsmethoden die zur Bestimmung der Lösungen als auch zur Bewertung

---

<sup>602</sup> The Mathworks Inc., 2015

“The condition number of a matrix measures the sensitivity of the solution of a system of linear equations to errors in the data. It gives an indication of the accuracy of the results from matrix inversion and the linear equation solution. Values of  $\text{cond}(X)$  [...] near 1 indicate a well-conditioned matrix.

$c = \text{cond}(X)$  returns the 2-norm condition number, the ratio of the largest singular value of  $X$  to the smallest.”

<sup>603</sup> Maplesoft, 2014

<sup>604</sup> vgl. 7.2

dieser Lösungen mithilfe der Kriterien (7.33) verwendet werden, nicht ausreichend stabil sind.

Damit wird als Hauptursache für die hier dargelegte, im Rahmen der Reglerauslegung, wie sie in Kapitel 7 beschrieben wurde, auftretende Problematik die mangelnde Eignung der verwendeten Berechnungsmethoden sowie deren Implementierung in Matlab identifiziert.

### 9.3 Alternative Lösungen Entwickeln (AL)

Im vorangehenden Abschnitt wurden im Rahmen der Problemeingrenzung eine mangelnde Eignung der Berechnungsmethoden und deren Implementierung in Matlab sowie das Auftreten numerischer Ungenauigkeiten im Rahmen der entwickelten Auslegungsprozedur als mögliche Ursachen für die in der Situationsanalyse dargelegte Diskrepanz zwischen Soll und Ist(Nicht)-Zustand identifiziert. Eine eingehende weitere Behandlung der Problemstellung zur Behebung dieser Diskrepanz würde demnach ein fundiertes Wissen in numerischer Mathematik sowie der detaillierten Implementierung spezifischer Algorithmen in den Berechnungsumgebungen Matlab und Maple erfordern. Damit ist offensichtlich das dieser Arbeit zugrunde liegende Handlungssystem nicht ausreichend, um diese eingehende Bearbeitung zu leisten, weshalb an dieser Stelle lediglich mögliche alternative Lösungen aufgezeigt werden und die folgenden Schritte der Problembehandlung nicht weiter ausgeführt werden.

Um Probleme einer möglicherweise instabilen Auslegungsprozedur zu vermeiden, können unter anderem die beiden folgenden Maßnahmen geprüft werden, die sich beide auf den gewählten Ansatz zur robusten Regelung beziehen. Zunächst kann geprüft werden, ob eine Konzeption des Reglers im Rahmen eines sogenannten *Infinite-Horizon Robust Control* Ansatzes für die in dieser Arbeit behandelte regelungstechnische Aufgabenstellung sinnvoll wäre. Hier würde anstatt der im verwendeten Ansatz auftretenden Begrenzung des Zeitintervalls der Regelung<sup>605</sup> eine Regelung über einen unendlich ausgedehnten Zeitraum konzipiert. Aufgrund der Aufhebung dieser Beschränkung würden zur Auslegung statt der beiden Riccati Matrix Differenzialgleichungen zwei Algebraische Riccati Matrixgleichungen verwendet, deren Lösung aufgrund der nicht vorhandenen Zeitabhängigkeit potenziell größere

---

<sup>605</sup> vgl. 7.3.1 bis 7.3.3, die Regelung ist durch die gewählte Zeit  $T$  zeitlich begrenzt

numerische Stabilität aufweisen würde.<sup>606,607,608,609,610</sup> Eine Ausdehnung des für die Regelung zur Verfügung stehenden Zeitintervalls, das auf 1,5 Schwingungsperioden für eine charakteristische Frequenz von 7 Hz festgelegt wurde,<sup>611</sup> verspricht dagegen angesichts der Ergebnisse der vorhergehenden Problemeingrenzung keine signifikante Verbesserung. Alternativ kann geprüft werden, ob eine Auslegung statt unter Verwendung der beiden Riccati Matrix Differenzialgleichungen mithilfe sogenannter linearer Matrixungleichungen (*Linear Matrix Inequalities, LMI*) erfolgen kann. Dieser Ansatz ist in Teilen der aktuellen Literatur der Regelungstechnik ebenfalls verbreitet und findet ebenfalls im Zusammenhang mit robuster Regelung Anwendung.<sup>612,613,614,615</sup> Es ist allerdings anzumerken, dass sowohl bei der Verwendung von algebraischen Riccati Matrixgleichungen als auch im Falle der LMI-basierten Auslegung weiterhin die Algorithmen der Linearen Algebra zur Anwendung kommen und die auftretenden Matrizen auch weiterhin potenziell schlecht konditioniert sind, wodurch es ebenfalls wieder zu ähnlichen Problemen, wie sie hier diskutiert werden, kommen kann.<sup>616,617</sup>

In Bezug auf die mutmaßlich mangelnde Eignung der Berechnungsmethoden sowie deren Implementierung in Matlab ergeben sich als Maßnahmen zu präziseren Berechnungen innerhalb der Auslegungsprozedur die Einbindung und Verwendung speziell entwickelter und in Form von C- oder FORTRAN-Code implementierten Programmbibliotheken in die Matlab Umgebung über das zur Verfügung stehende MEX Interface.<sup>618,619,620,621,622</sup> Damit würde eine weitere Verwendung der in Matlab verfügbaren Standardfunktionen weitestgehend vermieden. Alternativ ist es ebenfalls möglich, die bislang in Matlab umgesetzte Auslegungsprozedur in Maple zu

---

<sup>606</sup> Petersen, 2009a

<sup>607</sup> Petersen, 2009b

<sup>608</sup> Petersen und Hollot, 1986

<sup>609</sup> Savkin und Petersen, 1996

<sup>610</sup> Petersen et al., 2000

<sup>611</sup> vgl. (7.13) in 7.3.2

<sup>612</sup> Byrnes et al., 2003

<sup>613</sup> Lee und Chung, 1998

<sup>614</sup> Lee et al., 2004

<sup>615</sup> Yu et al., 2016

<sup>616</sup> Liu et al., 2014

<sup>617</sup> Stoorvogel, 1999

<sup>618</sup> Löfberg, 2015

<sup>619</sup> Jos F. Sturm

<sup>620</sup> Benner; Niconet e.V., 2015

<sup>621</sup> Benner et al., 2016

<sup>622</sup> The Mathworks Inc., 2015

implementieren und dort von der vermuteten größeren Genauigkeit und Robustheit bei der Berechnung unter dem Einfluss schlecht konditionierter Matrizen zu profitieren.<sup>623</sup>

#### **9.4 Zwischenfazit**

In diesem Kapitel wurden die im Rahmen der Auslegungsprozedur für den in dieser Arbeit verfolgten Ansatz zur robusten Regelung aufgetretenen Probleme mithilfe der ersten drei Phasen der Problemlösungsmethode SPALTEN analysiert. Dabei wurden die Unterschiede zwischen dem Soll- und dem Ist(Nicht)-Zustand beschrieben und während der Problemeingrenzung als mögliche Ursachen eine in Teilen instabile Auslegungsprozedur, insbesondere jedoch eine mangelnde Eignung der verwendeten Berechnungsmethoden sowie deren Umsetzung in Matlab identifiziert.<sup>624</sup> Als potenzielle Abhilfemaßnahmen wurden eine Veränderung der Designprozedur im Hinblick auf die Verwendung anderer Auslegungsgleichungen sowie die Möglichkeit der Verwendung anderer Berechnungsroutinen, sowohl in Form von eingebundenen Bibliotheken als auch in Form einer anderen Berechnungsplattform (Maple), aufgezeigt.<sup>624</sup>

---

<sup>623</sup> vgl. 7.2

<sup>624</sup> vgl. 7.2 und insbes. 7.2.3 sowie 7.2.4



## **10 Zusammenfassung und Ausblick**

In diesem Kapitel werden zum Abschluss der vorliegenden Arbeit die Ergebnisse, die im Rahmen dieses Forschungsprojektes erzielt worden sind, nochmals zusammengefasst und bewertet, sowie anhand der gewonnenen Erkenntnisse Folgerungen und Anknüpfungspunkte für zukünftige Forschungsvorhaben aufgezeigt.

### **10.1 Zusammenfassung**

#### **10.1.1 Erzielte Ergebnisse**

Im Verlauf dieser Arbeit wurde eine klar strukturierte methodische Behandlung des Themas der aktiven Dämpfung von Rupf-schwingungen im PKW-Antriebsstrang mithilfe von Ansätzen der robusten Regelung vorgestellt. Die im Zuge des Forschungsprojektes entwickelten und in der vorliegenden Arbeit dargelegten Neuerungen sind im Folgenden nochmals zusammengefasst.

Eine besondere Neuerung dieses Forschungsansatzes besteht insbesondere in der systematischen Betrachtung der Rупfproblematik unter Berücksichtigung der systeminhärenten Unsicherheiten sowie deren Integration in ein unsicherheitsbehaftetes Modell des PKW-Antriebsstrangs sowie in ein ebenfalls unsicherheitsbehaftetes reduziertes Modell dieser Regelstrecke im Zustandsraum.

Darüber hinaus wurde mit der Entwicklung eines entsprechenden Simulationsmodells unter Berücksichtigung der systeminhärenten Unsicherheiten, der Validierung dieses Modells sowie der Beschreibung geeigneter Testaktivitäten eine umfassende und effiziente Methode zur Validierung von robusten Reglern zur aktiven Dämpfung von Schwingungen im PKW-Antriebsstrang entwickelt.

Teil dieser Validierungsmethode ist ebenfalls die Anwendung einer effizienten Methode zur Identifikation der Systemdynamik von zeitdiskreten und zeitkontinuierlichen mechatronischen Systemen sowie hybriden Varianten dieser beiden Systemtypen, die sich insbesondere auf die Anwendung von pseudozufälligen Binärsignalen (PRBS), deren Variationen und eine auf diese Signale angepasste Auswertemethode stützt.

Über die Entwicklung und Anwendung dieser Methoden hinaus wurde ebenfalls eine neuartige Entwurfsmethode für eine robuste Anti-Rupf-Regelung zur aktiven Dämpfung umgesetzt, die gemäß dem Stand der Forschung den ersten Ansatz für eine solche Anti-Rupf-Regelung darstellt, in welchem die systeminhärenten Unsicherheiten explizit berücksichtigt wurden.

Diese Entwurfsmethode stützt sich im Wesentlichen auf die Anwendung von Methoden aus dem Bereich der  $\mathcal{H}_\infty$ -Regelung im Zeitbereich, der Beschreibung der systeminhärenten Unsicherheiten unter der Verwendung Integraler Quadratischer Zwangsbedingungen (IQC) und der damit verbundenen Anwendung der sogenannten s-Prozedur sowie der Lösung zweier Riccati Matrix Differenzialgleichungen (RMDE).

Diese Methoden wurden für den Zweck der Entwicklung einer robusten Anti-Rupf-Regelung im Rahmen dieser Arbeit in Form einer geschlossenen Toolkette bestehend aus Identifikation der Systemdynamik, Modellierung, Simulation, Design und Validierung in den Softwareumgebungen Matlab und imc Famos umgesetzt und angewandt.

Damit beschreibt die vorliegende Arbeit gemäß dem Stand der Forschung die erste praktische Umsetzung des ausgewählten Ansatzes zur Auslegung einer Regelung eines unsicherheitsbehafteten Systems unter dem Einfluss äußerer harmonischer Störungen im Zeitbereich.

### **10.1.2 Bewertung der Ergebnisse**

Zu Beginn der Bewertung der im Rahmen dieses Forschungsprojektes erzielten Ergebnisse, werden diese zunächst den in Kapitel 3 formulierten Forschungsfragen gegenüber gestellt und geprüft, ob diese Fragen im Laufe der vorliegenden Arbeit hinreichend beantwortet werden konnten.

Anhand der zuvor beschriebenen Ergebnisse lässt sich die Forschungsfrage 1, welches regelungstechnische Konzept für eine effiziente Dämpfung der verschiedenen Arten des Kupplungsrupfens in einem unter dem Einfluss von durch piece-to-piece Schwankungen sowie Veränderungen über Lebensdauer hervorgerufenen systeminhärenten Unsicherheiten stehenden PKW-Antriebsstrang geeignet ist, nicht vollständig beantwortet werden. Die Ursache dafür sind die in Kapitel 9 diskutierten Probleme in der numerischen Auslegung des Reglers als deren Folge keine konkrete Umsetzung des gewählten Regelansatzes und somit auch kein Nachweis der Wirksamkeit im Sinne einer robusten effizienten Dämpfung möglich waren. Jedoch lässt sich anhand der in Kapitel 7 angestellten Überlegungen und insbesondere anhand der Untersuchungen in Abschnitt 7.2 feststellen, dass ein solches regelungstechnisches Konzept das Potenzial besitzt, diese in der Forschungsfrage 1 formulierten Anforderungen zu erfüllen. Die für die Entwicklung eines solchen Reglers notwendigen Methoden wurden im Rahmen dieser Arbeit vollständig beschrieben und bedürfen für eine erfolgreiche Auslegung und vollständige Beantwortung der Forschungsfrage lediglich einer geeigneten Umsetzung der zum Einsatz kommenden numerischer Methoden, weshalb zur vollständigen Beantwortung dieser

Forschungsfrage nach dem aktuellen Kenntnisstand lediglich ein kleiner weiterer Schritt notwendig ist.

Entsprechend dieser Aussagen lässt sich auch die Forschungsfrage 3, welche Reglermethode für eine Umsetzung des Reglers in die bestehende Softwareumgebung geeignet ist, nicht gänzlich beantworten, da der in dieser Arbeit präsentierte Stand eines angewandten Ansatzes zur Entwicklung in einer robusten Regelung keine Umsetzung in der seriennahen bestehenden Softwareumgebung ermöglicht hat. Jedoch ist die Voraussetzung für die Beantwortung dieser Frage als auch der Forschungsfrage 1 ausschließlich die Verfügbarkeit geeigneter numerischer Methoden für eine erfolgreiche Auslegung des in der vorliegenden wissenschaftlichen Arbeit entworfenen Reglers, um diese Frage vollständig zu beantworten.

Somit wurde mit dieser Arbeit ein umfassender und substanzieller Beitrag zur Beantwortung der Forschungsfragen nach einem regelungstechnischen Konzept zur einer seriennahen, robusten und effizienten Regelung zur Dämpfung von Rupfschwingungen im PKW-Antriebsstrang geliefert.

Darüber hinaus konnte die Forschungsfrage 2 zu geeigneten Methoden zur Validierung der Robustheit eines Software-basierten Ansatzes zur aktiven Dämpfung in Bezug auf die unsicheren Systemeigenschaften vollständig beantwortet werden. Mithilfe der zuvor genannten geschlossenen Toolkette bestehend aus Identifikation der Systemdynamik, Modellierung, Simulation, Design und Validierung können die systeminhärenten Unsicherheiten sowie deren Auswirkungen auf die Schwingungsdynamik des PKW-Antriebsstrangs zuverlässig und effizient untersucht und in einem entsprechenden Simulationsmodell abgebildet und validiert werden. Diese validierte Abbildung der systeminhärenten Unsicherheiten sowie eine geeignete Anbindung eines Reglers zur aktiven Dämpfung ermöglicht eine umfassende und effiziente Validierung dieses robusten Reglers.

Zuletzt sei bei der hier vorgenommenen Bewertung der Forschungsergebnisse nochmals hervorgehoben, dass der hier verfolgte Ansatz zur Auslegung eines robusten Reglers zur Dämpfung harmonischer Störungen eines unsicherheitsbehafteten Systems unter Verwendung von Methoden der  $\mathcal{H}_\infty$ -Regelung im Zeitbereich sowie der Beschreibung der systeminhärenten Unsicherheiten unter der Verwendung Integraler Quadratischer Zwangsbedingungen (IQC) die, nach dem bekannten Stand der Forschung, bislang erste vollständige praktische Umsetzung dieses Ansatzes darstellt, der zuvor lediglich in Beispielrechnungen demonstriert wurde.

## 10.2 Ausblick

Im folgenden Abschnitt soll nun ein Ausblick über mögliche folgende Forschungsprojekte gegeben werden, die an die im Rahmen dieser wissenschaftlichen Arbeit gewonnenen Erkenntnisse anknüpfen.

### 10.2.1 Folgerung aus der Problembetrachtung

Anhand der in Kapitel 9 erfolgten Behandlung der numerischen Probleme im Rahmen der Auslegungsprozedur mithilfe der Methode SPALTEN lassen sich die auf diese numerischen Probleme bezogenen Anknüpfungspunkte für folgende Forschungsaktivitäten einteilen in solche, die sich auf die mathematischen Methoden zum Reglerentwurf beziehen, und solche, die eine Anpassung der Berechnungsmethoden und deren spezifische Implementierung erfordern.

So bestehen mögliche Ansätze zur Weiterführung der hier dokumentierten wissenschaftlichen Arbeit unter Änderung der mathematischen Auslegungsmethoden vor allem in der Verwendung von Linearen Matrixungleichungen (LMI) zur mathematischen Bestimmung einer Reglerkonfiguration unter Berücksichtigung der jeweiligen Anforderungen, sowie in der Auslegung eines Reglers mithilfe von algebraischen Riccati Matrixgleichungen, indem der hier verfolgte Regleransatz nach dem Prinzip des *Infinite-Horizon Robust Control* Ansatzes angepasst wird.<sup>625</sup>

Darüber hinaus besteht die Möglichkeit, den in der vorliegenden Arbeit entwickelten Ansatz zur Entwicklung einer robusten Anti-Rupf-Regelung weiter zu verfolgen, indem andere, numerisch potenziell stabilere Berechnungsmethoden zum Einsatz kommen. Hierbei erscheint es unter anderem sinnvoll, die im Laufe dieses Forschungsprojektes in Matlab umgesetzte Methode zur Auslegung eines robusten Reglers zur aktiven Dämpfung von Rupfschwingungen im PKW-Antriebsstrang in die Berechnungsumgebung Maple zu transferieren, da die dort implementierten Berechnungsmethoden numerisch stabiler erscheinen.<sup>626</sup> Weitere derartige Anknüpfungspunkte sind außerdem die Verwendung von speziellen Methoden als Teil externer Programmbibliotheken in C- oder FORTRAN-Code, die in Matlab eingebunden werden können, oder auch andere in der Forschung angewandte Programme zur präzisen numerischen Berechnung algebraischer Probleme.<sup>627</sup>

### 10.2.2 Alternative Ansätze

Alternativ zu den oben genannten, auf dem bisherigen regelungstechnischen Ansatz basierenden Anknüpfungspunkten besteht ebenfalls die Möglichkeit, die im Rahmen

---

<sup>625</sup> vgl. Kap. 9

<sup>626</sup> vgl. 7.2 sowie Kap. 9

<sup>627</sup> vgl. Kap. 9

dieser wissenschaftlichen Arbeit entwickelten Methoden zur effizienten Entwicklung einer robusten Anti-Rupf-Regelung mit anderen regelungstechnischen Ansätzen zu verknüpfen und somit die in der vorliegenden Arbeit identifizierten numerischen Probleme in der Auslegung des Reglers möglicherweise zu vermeiden.

Hierzu existieren unterschiedliche Ansätze, wie beispielsweise der sogenannte *Robust Repetitive Control* Ansatz speziell zur robusten Unterdrückung harmonischer Störungen unter Verfolgung einer dem System von außen vorgegebenen Trajektorie, wie er in den Arbeiten von LIU ET AL. sowie YU ET AL. dargestellt ist. Allerdings ist anzumerken, dass dieser Reglertypus üblicherweise nur für Systeme, deren vorgegebene Trajektorie ebenfalls ein harmonisches Signal ist, zum Einsatz kommt, sowie dass die Auslegung über LMI mithilfe der Singulärwertzerlegung vorgenommen wird und somit ebenfalls zu numerischen Problemen führen kann.<sup>628</sup>

Alternativ könnte die Verwendung von Ansätzen nach dem sogenannten *Internal Model-based Design* für die dargestellte regelungstechnische Aufgabenstellung geprüft werden, die dem in dieser Arbeit verfolgten Ansatz sehr ähnlich sind, wie sich beispielsweise in den Ausführungen von BYRNES ET AL. erkennen lässt, und auch in Form robuster Reglerdesigns verwendet werden.<sup>629,630,631</sup>

Ebenfalls besteht die Möglichkeit, Erkenntnisse aus anderen Ansätzen zur aktiven Störungsunterdrückung zu nutzen oder auch diese Ansätze komplett auf das in dieser Forschungsarbeit behandelte Problem anzuwenden. Die Arbeit von CASTANEDA ET AL. greift beispielsweise ebenfalls auf ein Reglerdesign basierend auf der Lösung zweier Riccati Matrix Differenzialgleichungen zurück, jedoch werden hier keine tiefergehenden Annahmen hinsichtlich der Störungen sowie der systeminhärenten Unsicherheiten getroffen, weshalb die Auslegung in diesem Falle möglicherweise numerisch stabiler wäre, dafür jedoch die Gefahr einer konservativen Reglerauslegung besteht. Ebenfalls auf die Lösung von Riccati Matrixgleichungen zurückgreifende Arbeiten existieren von ZATSEILOVA UND CHESTNOV sowie MARTINEZ-FONSECA ET AL..

Über die bereits genannten Arbeiten hinaus existieren andere Arbeiten zu robusten Reglern, die beispielsweise auf eine Kombination eines konventionellen Reglers und eines robusten Reglers<sup>632</sup>, die Anwendung von nichtlinearen Reglern<sup>633,634</sup>, einer

---

<sup>628</sup> vgl. 9.3

<sup>629</sup> Coral-Enriquez et al., 2013

<sup>630</sup> Lee und Chung, 1998

<sup>631</sup> Yao et al., 2015

<sup>632</sup> Lee et al., 2004

<sup>633</sup> Lee und Smith, 2000

<sup>634</sup> Wang und Su, 2015

universalen Parametrierung aller möglichen stabilisierenden optimalen Reglern<sup>635</sup> oder einer modifizierten adaptiven Regelung zurückgreifen.<sup>636</sup> Hervorzuheben ist hier die Arbeit von TOIVONEN UND MEDVEDEV, die sich speziell mit der Problemstellung der robusten Regelung in abgetasteten Systemen beschäftigt und somit einen weiteren Aspekt des in dieser Arbeit diskutierten Systems berücksichtigt.

---

<sup>635</sup> Lindquist und Yakubovich, 1999

<sup>636</sup> Yucelen und Haddad, 2012

## 11 Literaturverzeichnis

### **Albers 1994**

Albers, A.: Fortschritte beim ZMS – Geräuschkomfort für moderne Kraftfahrzeuge. In: Schaeffler AG (Hg.): 5. LuK Kolloquium. 5. LuK Kolloquium. Bühl. LuK GmbH & Co. OHG. Bühl, S. 5–41 1994.

### **Albers et al. 2001**

Albers, A.; Krüger, A.; Lux, R.; Albrecht, M.: Prüfen von Antriebssträngen am Beispiel des Kupplungsrupfens – Ganzheitliche Antriebsstrangentwicklung. In: *Automobiltechnische Zeitschrift* (103), S. 44–49 2001.

### **Albers et al. 2005a**

Albers, A.; Burkardt, N.; Mebold, M.; Saak, M.: Spalten Problem Solving Methodology in the Product Development. In: *INTERNATIONAL CONFERENCE ON ENGINEERING DESIGN ICED 05 MELBOURNE 2005* (DS35\_317.49), S. 1–12 2005.

### **Albers et al. 2008**

Albers, A.; Lerspalungsanti, S.; Ott, S.; Düser, T.: Vehicle start-up simulation on drive train test bench and subjective comfort evaluation of virtual drive train by means of new driver modelling tools based on artificial neural networks. In: FISITA World Automotive Congress (Hg.): 32nd FISITA World Automotive Congress, Bd. 32, 2008.

### **Albers et al. 2009b**

Albers, A.; Lerspalungsanti, S.; Düser, T.; Ott, S.: Design Parameter Investigation in Customer-oriented Drive Train Development Using Human Sensation Modeling Tools. In: ASME 2009. International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, 2009.

### **Albers et al. 2010**

Albers, A.; Meid, M.; Ott, S.: Avoiding clutch excited judder by using an active clamping force control 2010 2010.

### **Albers et al. 2013**

Albers, A.; Behrend, M.; Schroeter, J.; Ott, S.; Klingler, S.: X-IN-THE-LOOP: A Framework for Supporting Central Engineering Activities and Contracting Complexity in Product Engineering Processes. In: *INTERNATIONAL CONFERENCE ON ENGINEERING DESIGN ICED 13 SEOUL 2013* 2013.

### **Albers et al. 2014c**

Albers, A.; Cai, R.; Spengler, R.; Behrendt, M.: Psychophysical Study on the

Vibration Perception in Passenger Vehicle. In: *FISITA 2014 World Automotive Congress 2014* 2014.

**Albers et al. 2015a**

Albers, A.; Matros, K.; Behrendt, M.; Jetzinger, H.: Das Pull-Prinzip der Validierung. Ein Referenzmodell zur effizienten Integration von Validierungsaktivitäten in den Produktentstehungsprozess. In: *Konstruktion 6-2015*, S. 74–81 2015.

**Albers et al. 2015b**

Albers, A.; Bursac, N.; Wintergerst, E.: Produktgenerationsentwicklung – Bedeutung und Herausforderungen aus einer entwicklungsmethodischen Perspektive. In: Binz, B. (Hg.): *Stuttgarter Symposium für Produktentwicklung 2015 SSP 2015*. Stuttgarter Symposium für Produktentwicklung. Stuttgart 2015.

**Albers 2015**

Albers, A.: Innovationsstrategie und Kupplungsgenerationsentwicklung. Eröffnung der Fachtagung Kupplungen und Kupplungssysteme in Antrieben 2015, Institut für Produktentwicklung. Verband Deutscher Ingenieure. Karlsruhe, 27.04.2015 2015.

**Albers et al. 2016a**

Albers, A.; Reiß, N.; Bursac, N.; Breitschuh, J.: 15 Years of SPALTEN Problem Solving Methodology in Product Development. In: *Proceedings NordDesign 2016*, 2016.

**Albers et al. 2016b**

Albers, A.; Walch, M.; Bursac, N.: Entscheidungsunterstützung durch die Variationsanteile der Produktgenerationsentwicklung. In: *Konstruktion (4)* 2016.

**Albers et al. 2016c**

Albers, A.; Reiss, N.; Bursac, N.; Richter, T.: iPeM – Integrated Product Engineering Model in Context of Product Generation Engineering. In: *Procedia CIRP 50*, S. 100–105 2016.

**Albers et al. 2016d**

Albers, A.; Haug, F.; Heitger, N.; Arslan, M.; Rapp, S.; Bursac, N.: Produktgenerationsentwicklung – Praxisbedarf und Fallbeispiel in der automobilen Produktentwicklung. In: *Vorausschau und Technologieplanung. Symposium für Vorausschau und Technologieplanung (Verlagsschriftenreihe des Heinz Nixdorf Instituts, Band 360)* 2016.

**Albers et al. 2016e**

Albers, A.; Behrend, M.; Klingler, S.; Matros, K.: Verifikation und Validierung im Produktentstehungsprozess. In: Lindemann, U. (Hg.): *Handbuch Produktentwicklung*. München: Hanser; Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, S. 543–571, 2016.

**Albers et al. 2017f**

Albers, A.; Bursac, N.; Rapp, S.: PGE – Produktgenerationsentwicklung am Beispiel des Zweimassenschwungrads. In: *Forschung im Ingenieurwesen* 81 (1), S. 13–31 2017.

**Albers / Albrecht 2002**

Albers, A.; Albrecht, M.: Vorhersage subjektiver Komforturteile mittels künstlicher neuronaler Netze. VDI Tagung, Berechnung und Simulation im Fahrzeugbau, 11. Internationaler Kongress, Würzburg, 01.-02. Oktober 2002, Tagungsband: VDI-Berichte 1701, VDI-Verlag Düsseldorf 2002, S. In: Verband Deutscher Ingenieure (VDI) (Hg.): VDI-Berichte, Bd. 1701. VDI Tagung Berechnung und Simulation Fahrzeugbau. Würzburg, 01.-02. Oktober 2002. Düsseldorf: VDI-Verlag (1701), S. 401–420 2002.

**Albers / Albrecht 2005**

Albers, A.; Albrecht, M.: Abbildung der individuellen subjektiven Komfortbeurteilung von Kunden aus objektiven Messwerten am Beispiel des automatisierten Anfahrens. In: *Systemanalyse in der Kfz-Antriebstechnik*. 5. Tagung Dynamisches Gesamtsystemverhalten von Fahrzeugantrieben. Augsburg, 01.-02.03.2005. Renningen: Expert Verlag (*Systemanalyse in der Kfz-Antriebstechnik*, 3), S. 30–47 2005.

**Albers / Herbst 1998**

Albers, A.; Herbst, D.: Kupplungsrupfen - Ursachen, Einflüsse Gegenmaßnahmen. In: *Schwingungen in Antrieben*, 98. Tagung Frankenthal 10. und 11. September 1998, Bd. 1998. Nichtred. Ms.-Dr. Düsseldorf: VDI-Verl. (VDI-Berichte, 1416), S. 1–33, 1998.

**Albers / Krüger 2002**

Albers, A.; Krüger, A.: Reibungserregte Schwingungen in Kraftfahrzeugkupplungen und ihre aktive Dämpfung. In: Verband Deutscher Ingenieure (VDI) (Hg.): VDI Berichte, Bd. 1736. Verband Deutscher Ingenieure (VDI). Düsseldorf: VDI-Verlag (1736), S. 135–152 2002.

**Albers / Lerspalungsanti 2010**

Albers, A.; Lerspalungsanti, S.: METHOD AND TOOL OF HUMAN SENSATION MODELING FOR COMFORT EVALUATION OF NVH PHENOMENON ON THE EXAMPLE OF GEAR RATTLE. In: *FISITA World Automotive Congress* (Hg.): FISITA 2010, 2010.

**Albers / Peeken 1991**

Albers, A.; Peeken, H.: Das Zweimassenschwungrad der dritten Generation – Optimierung der Komforteigenschaften von PKW-Antriebssträngen. In: *Maschinen-*

und Anlagenüberwachung, Komponenten der Antriebstechnik im System, Neu- und Weiterentwicklungen. Antriebstechnisches Kolloquium. Köln: Verl. TÜV Rheinland (Reihe IME-Leitfaden), S. 245–267 1991.

**Albers / Stier 2011**

Albers, A.; Stier, C.: Analysis of Geometrical Deviations in Clutch Systems and their Interdependencies in Relation to the Excitation of Judder Vibrations. VDI-Fachtagung Kupplungen und Kupplungssysteme in Antrieben. Verband Deutscher Ingenieure (VDI), 2011 2011.

**Albers / Wintergerst 2014**

Albers, A.; Wintergerst, E.: The Contact and Channel Approach (C&C2-A). Relating a System's Physical Structure to Its Functionality. In: Chakrabarti, A. und Blessing, L. T. M. (Hg.): An Anthology of Theories and Models of Design: Philosophy, Approaches and Empirical Explorations. London: Springer London, S. 151–171, 2014.

**Albers / Zingel 2013**

Albers, A.; Zingel, C.: Extending SysML for Engineering Designers by Integration of the Contact & Channel – Approach (C&C2-A) for Function-Based Modeling of Technical Systems. In: Procedia Computer Science (Hg.): Conference on Systems Engineering Research (CSER 2013), Bd. 16: Elsevier (16), S. 353–362, 2013.

**Albers, A.; Bursac, N.; Behrendt, M. (2015c):** Validierung in der Produktgenerationsentwicklung. In: Wissenschaftliche Gesellschaft für Produktentwicklung e.V (Hg.): Mitteilungen der WiGeP, Bd. 2 (2), S. 18.

**Albrecht**

Albrecht, M.: Modellierung der Komfortbeurteilung aus Kundensicht am Beispiel des automatisierten Anfahrens. In: Albers, A. (Hg.): Forschungsberichte des IPEK - Institut für Produktentwicklung am KIT, Bd. 18. ISSN: 1615-8113. Unter Mitarbeit von Albert Albers, 2005.

**Barker et al. 2004**

Barker, H. A.; Tan, A. H.; Godfrey, K. R.: Design of multilevel perturbation signals with harmonic properties suitable for nonlinear system identification. In: *IEEE Proceedings - Control Theory and Applications* 151 (2), S. 145–151 2004.

**Baumann et al. 2015**

Baumann, M.; Kimmig, K.-L.; Daikeler, R.: Das trockene Doppelkupplungssystem, ideal für Hybridantriebstränge. In: Verband Deutscher Ingenieure (VDI) (Hg.): Fachtagung Kupplungen und Kupplungssysteme in Antrieben. Kupplungen und Kupplungssysteme in Antrieben. Karlsruhe. Verband Deutscher Ingenieure (VDI). Düsseldorf: VDI Wissensforum 2015.

**Benner / Mena 2013**

Benner, P.; Mena, H.: Rosenbrock Methods for Solving Riccati Differential Equations. In: *IEEE Trans. Automat. Contr.* 58 (11), S. 2950–2956 2013.

**Benner / Mena 2016**

Benner, P.; Mena, H.: Numerical solution of the infinite-dimensional LQR problem and the associated riccati differential equations. In: *Journal of Numerical Mathematics* 2016.

**Benner, P.; Köhler, M.; Saak, J. (2016):** M-M.E.S.S. Matrix Equation Sparse Solver. recommended for Matlab R2014a and above. Magdeburg: MPI for Dynamics of Complex Technical Systems Magdeburg. Online verfügbar unter [www.mpi-magdeburg.mpg.de/projects/mess](http://www.mpi-magdeburg.mpg.de/projects/mess), zuletzt geprüft am 11.08.2016.

**Benner, P.; Niconet e.V. (2015):** SLICOT. Subroutine Library in Systems and Control Theory. Braunschweig: SynOptio. Online verfügbar unter <http://slicot.org/>, zuletzt geprüft am 11.08.2016.

**Berger et al. 2002**

Berger, R.; Meinhard, R.; Bündler, C.: Das Parallel-Schalt-Getriebe PSG. Doppelkupplungsgetriebe mit Trockenkupplungen. In: Schaeffler AG (Hg.): Gearing up for tomorrow. 7. LuK Kolloquium. Bühl. LuK GmbH & Co. OHG. Bühl 2002.

**Bode 2013**

Bode, H.: Systeme der Regelungstechnik mit MATLAB und Simulink. Analyse und Simulation. 2. Aufl., 2. aktual. Aufl. München: De Gruyter, 2013.

**Bronstein et al. 2013**

Bronstein, I.; Semendjajew, K.; Musiol, G.; Mühlig, H.: Taschenbuch der Mathematik. 9. Aufl.: Haan-Gruiten : Europa-Lehrmittel, 2013.

**Bundesministerium für Umwelt, Naturschutz, Bau und Reaktorsicherheit 2009**

Bundesministerium für Umwelt, Naturschutz, Bau und Reaktorsicherheit: Die EU-Verordnung zur Verminderung der CO<sub>2</sub>-Emissionen von Personenkraftwagen. Hg. v. Bundesministerium für Umwelt, Naturschutz, Bau und Reaktorsicherheit, Bundesministerium für Umwelt, Naturschutz, Bau und Reaktorsicherheit, 2009. Online verfügbar unter [http://www.bmub.bund.de/fileadmin/bmu-import/files/pdfs/allgemein/application/pdf/eu\\_verordnung\\_co2\\_emissionen\\_pkw.pdf](http://www.bmub.bund.de/fileadmin/bmu-import/files/pdfs/allgemein/application/pdf/eu_verordnung_co2_emissionen_pkw.pdf), zuletzt aktualisiert am 01.04.2009, zuletzt geprüft am 30.04.2016.

**Byrnes et al. 2003**

Byrnes, C. I.; Gilliam, D. S.; Isidori, A.; Ikeda, Y.; Marconi, L.: Internal model based design for the suppression of harmonic disturbances. In: Rantzer, A. und Byrnes, C. I. (Hg.): Directions in Mathematical Systems Theory and Optimization. Berlin: Springer (Lecture Notes in Control and Information Sciences, 286), S. 51–70, 2003.

**Castaneda et al. 2015**

Castaneda, L. A.; Luviano-Juarez, A.; Chairez, I.: Robust Trajectory Tracking of a Delta Robot Through Adaptive Active Disturbance Rejection Control. In: *IEEE Trans. Contr. Syst. Technol.* 23 (4), S. 1387–1398 2015.

**Chang 2014**

Chang, X.-H.: Robust Output Feedback H-infinity Control and Filtering for Uncertain Linear Systems. Berlin, Heidelberg, s.l.: Springer Berlin Heidelberg (Studies in Systems, Decision and Control, 7), 2014.

**Coral-Enriquez et al. 2013**

Coral-Enriquez, H.; Cortés-Romero, J.; Ramos, G. A.: Robust Active Disturbance Rejection Control Approach to Maximize Energy Capture in Variable-Speed Wind Turbines. In: *Mathematical Problems in Engineering* 2013 (6), S. 1–12 2013.

**Dalbiez, A.; Feigler, J. (2000):** Doppelkupplung, insbesondere für Kraftfahrzeuge. Angemeldet durch Valeo am 21.12.2000. Anmeldenr: DE2000164459. Veröffentlichungsnr: DE10064459 C5. F16D 25/10 (2006.01). Prioritätsdaten: 30. Dez. 1999.

**Dau, A.; Ebert, A.; Großpietsch, W.; Heiartz, M.; John, T.; Kraus, P.; Reisser, W. (2000):** Doppelkupplungsanordnung. Angemeldet durch ZF Friedrichshafen AG am 14.04.2000. Anmeldenr: DE2000118646. Veröffentlichungsnr: DE000010018646B4. F16D 21/06 (2006.01). Prioritätsdaten: 14.04.2000.

**Dresig / Fidlin 2014**

Dresig, H.; Fidlin, A.: Schwingungen mechanischer Antriebssysteme. Modellbildung, Berechnung, Analyse, Synthese. 3., überarb. u. erw. Aufl. Berlin: Springer Vieweg, 2014.

**Dullerud / Paganini 2000**

Dullerud, G. E.; Paganini, F.: A course in robust control theory. A convex approach. New York, Berlin, Heidelberg: Springer (Texts in applied mathematics, 36), 2000.

**Dylla**

Dylla, S.: Entwicklung einer Methode zur Objektivierung der subjektiv erlebten Schaltbetätigungsqualität von Fahrzeugen mit manuellem Schaltgetriebe. In: Albers, A. (Hg.): Forschungsberichte des IPEK - Institut für Produktentwicklung am KIT, Bd. 42. ISSN: 1615-8113. Unter Mitarbeit von Albert Albers, 2010.

**Eppler 2014**

Eppler, F.: Untersuchung der Dynamik des Hebelaktorsystems am Prüfstand. DMR\_2014\_0000619\_DE\_IN. Hg. v. Schaeffler AG, Schaeffler AG (DMR\_2014\_0000619\_DE\_IN), 2014.

**Eppler 2015**

Eppler, F.: Werkzeuge zur Entwicklung fahrkomfortrelevanter Funktionalitäten im Automobilbereich. In: Verband Deutscher Ingenieure (VDI) (Hg.): Fachkonferenz Schwingungsreduzierung in mobilen Systemen. Fachkonferenz Schwingungsreduzierung in mobilen Systemen. Karlsruhe. Verband Deutscher Ingenieure (VDI). Düsseldorf: VDI Wissensforum 2015.

**Eppler et al. 2016**

Eppler, F.; Kniel, J.; Reuschel, M.; Ott, S.: Pseudo Random Binary Signal (PRBS) als Schlüssel für eine schnelle und tiefgreifende Systemidentifikation. In: Verband Deutscher Ingenieure (VDI) (Hg.): Getriebe Aktuell. Wissenschaftlicher Informationsdienst für Getriebe- und Antriebstechnik, 02/2016. Düsseldorf: VDI Wissensforum (9), S. 27–29, 2016.

**ETAS GmbH 2009**

ETAS GmbH: Einsatz von ETK-Lösungen bei der Powertrain Division von Continental. Stabile Schnittstellen für die Steuergerätekalibration. Hg. v. ETAS GmbH, 2009. Online verfügbar unter [http://www.etas.com/data/RealTimes\\_2009/rt\\_2009\\_1\\_24\\_de.pdf](http://www.etas.com/data/RealTimes_2009/rt_2009_1_24_de.pdf).

**Europäische Kommission 2002**

Europäische Kommission: Kraftfahrzeugvertrieb und -kundendienst in der europäischen Union 2002.

**Europäisches Parlament 2014**

Europäisches Parlament: Begrenzung der CO<sub>2</sub>-Emissionen von Pkw. Hg. v. Europäisches Parlament, Europäisches Parlament, 2014. Online verfügbar unter <http://www.europarl.europa.eu/news/de/news-room/20140221IPR36626/Begrenzung-der-CO2-Emissionen-von-Pkw>, zuletzt aktualisiert am 25.02.2014, zuletzt geprüft am 30.04.2016.

**Fan, Michael K. H. et al. 1991**

Fan, Michael K. H.; Tits, A. L.; Doyle, J. C.: Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 1991 (36), S. 25–38 1991.

**Fischer et al. 2012**

Fischer, R.; Jürgens, G.; Küçükay, F.; Najork, R.; Pollak, B.: Das Getriebebuch. Vienna: Springer (Der Fahrzeugantrieb), 2012.

**Föllinger 1988**

Föllinger, O.: Optimierung dynamischer Systeme. Eine Einführung für Ingenieure. 2., verb. Aufl. München, Wien: Oldenbourg (Methoden der Regelungstechnik), 1988.

**Föllinger / Franke 1982**

Föllinger, O.; Franke, D.: Einführung in die Zustandsbeschreibung dynamischer Systeme. Mit e. Anleitung zur Matrizenrechnung. München: Oldenbourg, 1982.

**Föllinger / Konigorski 2013**

Föllinger, O.; Konigorski, U.: Regelungstechnik. Einführung in die Methoden und ihre Anwendung. 11., völlig neu bearb. Aufl. Berlin: VDE-Verl, 2013.

**Freitag et al. 2010**

Freitag, J.; Gerhardt, F.; Hausner, M.; Wittman, C.: Das Kupplungssystem der Zukunft. Mehr als Trennen und Verbinden. In: Schaeffler AG (Hg.): Driven by the next generations. 9. Schaeffler Kolloquium. Bühl. Schaeffler AG. Herzogenaurach 2010.

**Freund 2018**

Freund, T.: Konstruktionshinweise zur Beherrschung von Unsicherheit in technischen Systemen. Dissertation, Technische Universität, Darmstadt. Fachgebiet Produktentwicklung und Maschinenelemente (PMD), 2018.

**Gajic 2010**

Gajic, Z.: Solving the Matrix Differential Riccati Equation. A Lyapunov Equation Approach. In: *IEEE Trans. Automat. Contr.* 55 (1), S. 191–194 2010.

**Gesellschaft für Tribologie (GfT) 2002**

Gesellschaft für Tribologie (GfT): Arbeitsblatt 7. Tribologie Definitionen, Begriffe, Prüfung. Hg. v. Gesellschaft für Tribologie (GfT), Gesellschaft für Tribologie (GfT), 2002. Online verfügbar unter [http://gft-ev.de/wp-content/uploads/2014/07/2002\\_AB\\_7\\_Tribologie.pdf](http://gft-ev.de/wp-content/uploads/2014/07/2002_AB_7_Tribologie.pdf), zuletzt geprüft am 11.05.2016.

**Häßler / Kessler 2015**

Häßler, M.; Kessler, M.: Entwicklungsbegleitende Simulationsmethoden zur Vermeidung von Anfahrrippen. Vom Kupplungsspalt zur Sitzschiene. In: Verband Deutscher Ingenieure (VDI) (Hg.): Fachtagung Kupplungen und Kupplungssysteme in Antrieben. Kupplungen und Kupplungssysteme in Antrieben. Karlsruhe. Verband Deutscher Ingenieure (VDI). Düsseldorf: VDI Wissensforum 2015.

**Hausner / Häßler 2012**

Hausner, M.; Häßler, M.: Kupplungsscheibe mit Frequenztilger gegen Rupfschwingungen. In: *Automobiltechnische Zeitschrift* (1), S. 64–69 2012.

**Heißing et al. 2013**

Heißing, B.; Ersoy, M.; Gies, S.: Fahrwerkhandbuch. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2013.

**Heyder / Delso 2014**

Heyder, U.; Delso, P. M. I.: Objektivierung des Fahrverhaltens. In: *Automobiltechnische Zeitschrift* 2014 (6), S. 44–48 2014.

**Hoffmann et al. 2015**

Hoffmann, J.; Bührlé, P.; Kimmig, K.-L.; Englisch, A.; Götz, A.: Double Clutch Systems - comfortable, efficient, sporty. In: Verband Deutscher Ingenieure (VDI) (Hg.): Internationaler VDI-Kongress Getriebe in Fahrzeugen - Drivetrain for Vehicles. Getriebe in Fahrzeugen. Friedrichshafen. Verband Deutscher Ingenieure (VDI). Düsseldorf: VDI Wissensforum 2015.

**Ibáñez / Hernández 2009**

Ibáñez, J.; Hernández, V.: Solving Differential Matrix Riccati Equations by a piecewise-linearized method based on the commutant equation. In: *Computer Physics Communications* 180 (11), S. 2103–2114 2009.

**Ibáñez / Hernández 2009**

Ibáñez, J.; Hernández, V.: The Differential Matrix Riccati Equations (DMRE) Toolbox. Version 2.0 (September 14, 2009). Hg. v. Computer and Information Systems Department, Technical University of Valencia, 2009. Online verfügbar unter <http://www.grycap.upv.es/dmretoolbox/>, zuletzt aktualisiert am 2009.

**imc Meßsysteme GmbH:** imc FAMOS: imc Meßsysteme GmbH.

**IPEK Glossar**

IPEK Glossar: Glossar der KaSPro - Karlsruher Schule für Produktentwicklung. Hg. v. o. Dr -Ing h. c. A. Albers und S. Matthiesen, Institut für Produktentwicklung (IPEK). Online verfügbar unter [https://vm-glossar.ipek.kit.edu/\\_layouts/15/start.aspx#/SitePages/Homepage.aspx](https://vm-glossar.ipek.kit.edu/_layouts/15/start.aspx#/SitePages/Homepage.aspx), zuletzt geprüft am 19.01.2018.

**Isermann 2008**

Isermann, R.: Mechatronische Systeme. Grundlagen. 2. vollständig neu bearbeitete Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg (SpringerLink : Bücher), 2008.

**IEEE Std 1471-2000**

IEEE Std 1471-2000, 2007: ISO/IEC Standard for Systems and Software Engineering - Recommended Practice for Architectural Description of Software-Intensive Systems. IEEE. Piscataway, NJ, USA.

**Jos F. Sturm:** SeDuMi: Lehigh University. Online verfügbar unter <https://github.com/SQLP/SeDuMi.>, zuletzt geprüft am 16.03.2016.

**Khargonekar et al. 1991**

Khargonekar, P. P.; Nagpal, K. M.; Poolla, K. R.: H-Infinity Control with Transients. In: *SIAM J. Control Optim.* 29 (6), S. 1373–1393 1991.

**Kimmig et al. 2010**

Kimmig, K.-L.; Bührle, P.; Henneberger, K.; Ehrlich, M.; Rathke, G.; Martin, J.: Mit Effizienz und Komfort zum Erfolg. Die trockene Doppelkupplung etabliert sich auf dem Automatikmarkt. In: Schaeffler AG (Hg.): *Driven by the next generations*. 9. Schaeffler Kolloquium. Bühl. Schaeffler AG. Herzogenaurach 2010.

**Kimmig et al. 2013**

Kimmig, K.-L.; Rathke, G.; Reuschel, M.: The Next Generation of Efficient Dry Double Clutch-Systems. In: Verband Deutscher Ingenieure (VDI) (Hg.): *Internationaler VDI-Kongress Getriebe in Fahrzeugen - Drivetrain for Vehicles*. Getriebe in Fahrzeugen. Friedrichshafen, 18.-19.06.2013. Verband Deutscher Ingenieure (VDI). Düsseldorf: VDI Wissensforum 2013.

**Kimmig / Agner 2006**

Kimmig, K.-L.; Agner, I.: Doppelkupplung – Nass oder trocken, das ist hier die Frage. In: Schaeffler AG (Hg.): *LuK forward...* 8. Schaeffler Kolloquium. Bühl. LuK GmbH & Co. OHG. Bühl 2006.

**Kirchner 2007**

Kirchner, E.: Leistungsübertragung in Fahrzeuggetrieben. Grundlagen der Auslegung, Entwicklung und Validierung von Fahrzeuggetrieben und deren Komponenten. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag Berlin Heidelberg (VDI-Buch), 2007.

**Krafftahrt-Bundesamt 2011**

Krafftahrt-Bundesamt: Fachartikel: Marken und Modelle, 2011.

**Krüger**

Krüger, A.: Kupplungsrupfen - Ursachen, Einflüsse und Gegenmaßnahmen. In: Albers, A. (Hg.): *Forschungsberichte des IPEK - Institut für Produktentwicklung am KIT*, Bd. 10. ISSN: 1615-8113. Unter Mitarbeit von Albert Albers, 2003.

**Küpper et al. 2006**

Küpper, K.; Serebrennikov, B.; Göppert, G.: Software für automatisierte Getriebe. Erfahrbare Intelligenz. In: Schaeffler AG (Hg.): *LuK forward...* 8. Schaeffler Kolloquium. Bühl. LuK GmbH & Co. OHG. Bühl 2006.

**Lang et al. 2015**

Lang, N.; Mena, H.; Saak, J.: On the benefits of the LDLT factorization for large-scale differential matrix equation solvers. In: *Linear Algebra and its Applications* (480), S. 44–71 2015.

**Lee et al. 2004**

Lee, M.-N.; Jin, K. B.; Lee, J. K.: Design of a robust track-following controller for optical disk drives. In: *IEEE Trans. Consumer Electron.* 50 (2), S. 723–731 2004.

**Lee / Chung 1998**

Lee, M.-N.; Chung, M. J.: Robust control for uncertain linear systems with sinusoidal disturbance of uncertain frequencies. In: *IEEE Proceedings on Control Theory and Applications* 1998 (145), S. 531–536 1998.

**Lee / Smith 2000**

Lee, R. C.; Smith, M. C.: Nonlinear control for robust rejection of periodic disturbances. In: *Systems & Control Letters* 39 (2), S. 97–107 2000.

**Lerspaltungsanti**

Lerspaltungsanti, S.: Ein Beitrag zur Modellierung des menschlichen Komfortempfindens und Beurteilung der NVH-Eigenschaften in der Antriebsstrangentwicklung auf Basis von Künstlichen Neuronalen Netzen. In: Albers, A. (Hg.): Forschungsberichte des IPEK - Institut für Produktentwicklung am KIT, Bd. 43. ISSN: 1615-8113. Unter Mitarbeit von Albert Albers, 2010.

**Lindquist / Yakubovich 1999**

Lindquist, A.; Yakubovich, V. A.: Universal regulators for optimal tracking in discrete-time systems affected by harmonic disturbances. In: *IEEE Trans. Automat. Contr.* 44 (9), S. 1688–1704 1999.

**Liu et al. 2014**

Liu, R.-J.; Liu, G.-P.; Wu, M.; She, J.; Nie, Z.-Y.: Robust disturbance rejection in modified repetitive control system. In: *Systems & Control Letters* 70, S. 100–108 2014.

**Löfberg, J. (2015):** YALMIP. Linköping: Linköpings Universitetet. Online verfügbar unter <http://users.isy.liu.se/johanl/yalmip/>, zuletzt geprüft am 16.03.2016.

**Lunze 2006a**

Lunze, J. (Hg.) (2006): Regelungstechnik 1. Systemtheoretische Grundlagen Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen. 5., neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

**Lunze 2013b**

Lunze, J. (Hg.) (2013): Regelungstechnik 2. Mehrgrößensysteme Digitale Regelung. 7., überarbeitete Aufl. 2013. Berlin, Heidelberg: Springer.

**Maier**

Maier, P.: Entwicklung einer Methode zur Objektivierung der subjektiven Wahrnehmung von antriebsstrangerregten Fahrzeugschwingungen. In: Albers, A.

(Hg.): Forschungsberichte des IPEK - Institut für Produktentwicklung am KIT, Bd. 51. ISSN: 1615-8113. Unter Mitarbeit von Albert Albers, 2011.

**Maier 2006**

Maier, H.: Analyse- und Optimierungsmethoden für Aggregatlagerungssysteme zur Verbesserung des Fahrkomforts. Forschungsberichte / IPEK. Karlsruhe: Universität Karlsruhe Institut für Produktentwicklung (24), 2006.

**Maplesoft (2014):** Maple 18.0: Waterloo Maple Inc.

**Martinez-Fonseca et al. 2016**

Martinez-Fonseca, N.; Castaneda, L. A.; Uranga, A.; Luviano-Juarez, A.; Chairez, I.: Robust disturbance rejection control of a biped robotic system using high-order extended state observer. In: *ISA transactions* 62, S. 276–286 2016.

**Mazière, F. de (2005):** Wet clutch, in particular DCT clutch. Angemeldet durch Hoerbiger Antriebstechnik GmbH am 25.08.2005. Anmeldenr: US20050212472 20050825. Veröffentlichungsnr: US7478718 B2. Prioritätsdaten: 26.08.2004.

**Megretski / Rantzer 1997**

Megretski, A.; Rantzer, A.: System analysis via integral quadratic constraints. In: *IEEE Trans. Automat. Contr.* 1997 (42), S. 819–830 1997.

**Mehrmann 1991**

Mehrmann, V.: The Autonomous Linear Quadratic Control Problem: Springer (Lecture Notes in Control and Information Sciences, 163), 1991.

**Microsoft Corp. (2014):** Visual C++ 2013 Professional.

**Morioka / Griffin 2008**

Morioka, M.; Griffin, M. J.: Absolute thresholds for the perception of fore-and-aft, lateral, and vertical vibration at the hand, the seat, and the foot. In: *Journal of Sound and Vibration* 314 (1-2), S. 357–370 2008.

**Naunheimer et al. 2007**

Naunheimer, H.; Bertsche, B.; Lechner, G.; Ryborz, J.: Fahrzeuggetriebe. Grundlagen, Auswahl, Auslegung und Konstruktion. 2., bearb. und erw. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2007.

**New Wave Instruments 2010**

New Wave Instruments: Linear Feedback Shift Registers. Implementation, M-Sequence Properties, Feedback Tables, 2010. Online verfügbar unter [http://www.newwaveinstruments.com/resources/articles/m\\_sequence\\_linear\\_feedback\\_shift\\_register\\_lfsr.htm](http://www.newwaveinstruments.com/resources/articles/m_sequence_linear_feedback_shift_register_lfsr.htm), zuletzt geprüft am 16.10.2016.

**Ntogramatzidis / Ferrante 2010**

Ntogramatzidis, L.; Ferrante, A.: On the solution of the Riccati differential equation

arising from the LQ optimal control problem. In: *Systems & Control Letters* 59 (2), S. 114–121 2010.

**Petersen et al. 2000**

Petersen, I. R.; Ugrinovskii, V. A.; Savkin, A. V.: Robust control design using H-methods. London, Berlin, Heidelberg: Springer, 2000.

**Petersen 2009a**

Petersen, I. R.: Robust  $H^\infty$  control of an uncertain system via a strict bounded real output feedback controller. In: *Optimal Control Applications and Methods 2009* (30), S. 247–266 2009.

**Petersen 2009b**

Petersen, I. R.: Robust H-Infinity Control of an Uncertain System Via a Stable Output Feedback Controller. In: *IEEE Trans. Automat. Contr.* 2009 (54), S. 1418–1423 2009.

**Petersen / Hollot 1986**

Petersen, I. R.; Hollot, C. V.: A riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems. In: *Automatica* 1986 (22), S. 397–411 1986.

**Pietruszka 2014**

Pietruszka, W. D.: MATLAB und Simulink in der Ingenieurpraxis. Modellbildung, Berechnung und Simulation. 4., überarb., aktualisierte und erw. Aufl. Wiesbaden: Springer Vieweg (Lehrbuch), 2014.

**Pinter / Fernando 2010**

Pinter, S.; Fernando, X.: Estimation and equalization of fiber-wireless uplink for multiuser CDMA 4G networks. In: *IEEE Trans. Commun.* 58 (6), S. 1803–1813 2010.

**Puente León / Kiencke 2012**

Puente León, F.; Kiencke, U.: Messtechnik. Systemtheorie für Ingenieure und Informatiker. 9., überarb. Aufl. 2013. Berlin, Heidelberg: Springer, 2012.

**Reid 1972**

Reid, W. T.: Riccati differential equations. New York: Academic Press (Mathematics in science and engineering, v. 86), 1972.

**Reuter / Zacher 2008**

Reuter, M.; Zacher, S.: Regelungstechnik für Ingenieure. Analyse Simulation und Entwurf von Regelkreisen. 12., korrigierte und erweiterte Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2008.

**Robert Bosch GmbH 2007**

Robert Bosch GmbH: Kraftfahrtechnisches Taschenbuch. [Kfz-Fachwissen kompakt]. 26., überarb. und erg. Aufl. Wiesbaden: Vieweg (Studium und Praxis), 2007.

**Roinila et al. 2009**

Roinila, T.; Helin, T.; Vilkkko, M.; Suntio, T.; Koivisto, H.: Circular correlation based identification of switching power converter with uncertainty analysis using fuzzy density approach. In: *Simulation Modelling Practice and Theory* 17 (6), S. 1043–1058 2009.

**Savkin / Petersen 1995**

Savkin, A. V.; Petersen, I. R.: Robust control with rejection of harmonic disturbances. In: *IEEE Transactions on Automatic Control* 1995 (40), S. 1968–1971 1995.

**Savkin / Petersen 1996**

Savkin, A. V.; Petersen, I. R.: Robust H-Infinity Control of Uncertain Systems with Structured Uncertainty. In: *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control* 1996 (6), S. 1–14 1996.

**Savkin / Petersen 1999**

Savkin, A. V.; Petersen, I. R.: Weak robust controllability and observability of uncertain linear systems. In: *IEEE Trans. Automat. Contr.* 44 (5), S. 1037–1041 1999.

**Schaeffler AG 2010**

Schaeffler AG (Hg.): Driven by the next generations. 9. Schaeffler Kolloquium. Bühl, Schaeffler AG. Herzogenaurach 2010.

**Schaeffler AG 2013a**

Schaeffler AG: Interner Bericht. Nr. EO D1D076. Unter Mitarbeit von Thorsten Rittergott, Schaeffler AG, 2013.

**Schaeffler AG 2013b**

Schaeffler AG: Interner Bericht. Nr. DMR\_2013\_0000463\_DE\_IN. Unter Mitarbeit von Gerald Küstler, Schaeffler AG, 2013.

**Schaeffler AG 2016a**

Schaeffler AG: Interner Bericht. Webinar Network of Dyfasim Competence - Engine Block Modeling. Unter Mitarbeit von Jan Faißt, Schaeffler AG, 2016.

**Schaeffler AG 2016b**

Schaeffler AG: Interner Bericht. Unter Mitarbeit von Jan Faißt, Schaeffler AG, 2016.

**Schaeffler Automotive Aftermarket GmbH & Co. KG 2014**

Schaeffler Automotive Aftermarket GmbH & Co. KG: Die trockene Doppelkupplung. Technik/Spezialwerkzeuge. Hg. v. Schaeffler Automotive Aftermarket GmbH & Co. KG, Schaeffler Automotive Aftermarket GmbH & Co. KG, 2014. Online verfügbar unter

[http://www.schaeffler.com/remotemedien/media/\\_shared\\_media/08\\_media\\_library/01](http://www.schaeffler.com/remotemedien/media/_shared_media/08_media_library/01)

[\\_publications/automotiveaftermarket/brochure\\_1/downloads\\_5/luk\\_5/bro\\_LuK\\_TecBr\\_2CT\\_Repair\\_Solution\\_Basis\\_LowRes\\_de\\_de.pdf](#), zuletzt aktualisiert am 11/2014, zuletzt geprüft am 07.05.2016.

**Schumpeter 2008**

Schumpeter, J. A.: The theory of economic development. An inquiry into profits, capital, credit, interest, and the business cycle. 14. print. New Brunswick u.a.: Transaction Publ (Economics Third World studies), 2008.

**Schwarz / Köckler 2011**

Schwarz, H. R.; Köckler, N.: Numerische Mathematik. 8., aktualisierte Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag / Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH Wiesbaden, 2011.

**Schwenger 2005**

Schwenger, A.: Aktive Dämpfung von Triebstrangschwingungen. Dissertation, Leibnitz Universität Hannover, Hannover. Institut für Grundlagen der Elektrotechnik und Messtechnik, 2005.

**Sommer Obando**

Sommer Obando, H.: Reinforcement Learning Framework for the self-learning Suppression of Clutch Judder in automotive Drive Trains. In: Albers, A. (Hg.): Forschungsberichte des IPEK - Institut für Produktentwicklung am KIT, Bd. 94. ISSN: 1615-8113. Unter Mitarbeit von Albert Albers, 2017.

**Stier**

Stier, C.: Ein Beitrag zur Validierung von Antriebssystemen mit Bezug auf kupplungs- und motorinduzierte Schwingungen. In: Albers, A. (Hg.): Forschungsberichte des IPEK - Institut für Produktentwicklung am KIT, Bd. 82. ISSN: 1615-8113. Unter Mitarbeit von Albert Albers, 2015.

**Stoorvogel 1999**

Stoorvogel, A. A.: Numerical problems in robust and  $H^\infty$  optimal control. Hg. v. NICONET, 1999. Online verfügbar unter <http://slicot.org/working-notes/wgs-niconet-reports/57-numerical-problems-in-robust-and-h-inf-optimal-control>, zuletzt geprüft am 31.07.2016.

**Sujatha 2010**

Sujatha, C.: Vibration and acoustics. Measurement and signal analysis. New York, N.Y.: McGraw-Hill Education LLC, 2010.

**Tan 2013**

Tan, A. H.: Direct synthesis of pseudo-random ternary perturbation signals with harmonic multiples of two and three suppressed. In: *Automatica* 49 (10), S. 2975–2981 2013.

**The Mathworks Inc. (2015):** Matlab. R2015a. 32 Bit.

**Toivonen / Medvedev 2003**

Toivonen, H. T.; Medvedev, A.: Damping of harmonic disturbances in sampled-data systems—parameterization of all optimal controllers. In: *Automatica* 2003 (39), S. 75–80 2003.

**Tschöke 2015**

Tschöke, H.: Die Elektrifizierung des Antriebsstrangs. Basiswissen. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden (ATZ/MTZ-Fachbuch), 2015.

**Vector Informatik GmbH 2013**

Vector Informatik GmbH: Übersicht XCP. Hg. v. Vector Informatik GmbH, 2013. Online verfügbar unter [https://vector.com/portal/medien/solutions\\_for/xcp/Vector\\_XCP\\_Basics\\_DE.pdf](https://vector.com/portal/medien/solutions_for/xcp/Vector_XCP_Basics_DE.pdf), zuletzt geprüft am 03.12.2016.

**Volkswagen AG (22.11.2002):** Volkswagen DSG – Weltweit erstes Getriebe mit Doppelkupplung im Serien-Pkw. Wolfsburg. Online verfügbar unter [https://www.volkswagen-media-services.com/detailpage/-/detail/Volkswagen-DSG--Weltweit-erstes-Getriebe-mit-Doppelkupplung-im-Serien-Pkw/view/86958/75d9972d9e87d3cfb605c0b3c81d8cc2?p\\_p\\_auth=mEGzb3FJ](https://www.volkswagen-media-services.com/detailpage/-/detail/Volkswagen-DSG--Weltweit-erstes-Getriebe-mit-Doppelkupplung-im-Serien-Pkw/view/86958/75d9972d9e87d3cfb605c0b3c81d8cc2?p_p_auth=mEGzb3FJ), zuletzt geprüft am 06.05.2016.

**Wang / Su 2015**

Wang, L.; Su, J.: Robust Disturbance Rejection Control for Attitude Tracking of an Aircraft. In: *IEEE Trans. Contr. Syst. Technol.* 23 (6), S. 2361–2368 2015.

**Wilson 2005**

Wilson, S. S.: Understanding the PRBS Signal as an Optimum Input Signal in the Wavelet-Correlation Method of System Identification using Multiresolution Analysis. In: Excellence in engineering, science, and technology. Proceedings of the IEEE SoutheastCon 2005 ; April 8 - 10, 2005, Ft. Lauderdale, FL. IEEE SoutheastCon, 2005. Ft. Lauderdale, Florida, USA, April 8-10, 2005. SoutheastCon; Institute of Electrical and Electronics Engineers; IEEE SoutheastCon 2005. Piscataway, NJ: IEEE Operation Center, S. 39–44 2005.

**Würtenberger 2018**

Würtenberger, J.: Ein Beitrag zur Identifikation und Beherrschung von Unsicherheit bei der Modellierung technischer Systeme. Dissertation, TU Darmstadt, Darmstadt. PMD, 2018.

**Yang 2008**

Yang, C.-C.: Optical CDMA Fiber Radio Networks Using Cyclic Ternary Sequences. In: *IEEE Commun. Lett.* 12 (1), S. 41–43 2008.

**Yao et al. 2015**

Yao, J.; Jiao, Z.; Ma, D.: Output Feedback Robust Control of Direct Current Motors With Nonlinear Friction Compensation and Disturbance Rejection. In: *J. Dyn. Sys., Meas., Control* 137 (4), S. 1–9 2015.

**Yu et al. 2016**

Yu, P.; Wu, M.; She, J.; Lei, Q.: Robust Repetitive Control and Disturbance Rejection Based on Two-Dimensional Model and Equivalent-Input-Disturbance Approach. In: *Asian Journal of Control* 18 (6), S. 2325–2335 2016.

**Yucelen / Haddad 2012**

Yucelen, T.; Haddad, W. M.: A robust adaptive control architecture for disturbance rejection and uncertainty suppression with  $L^\infty$  transient and steady-state performance guarantees. In: *Int. J. Adapt. Control Signal Process.* 26 (11), S. 1024–1055 2012.

**Zatsepilova / Chestnov 2011**

Zatsepilova, Z. V.; Chestnov, V. N.: Design of prescribed-precision controllers of multivariable systems by root-mean-square criterion on the basis of LQ-optimization procedures. In: *Autom Remote Control* 72 (11), S. 2285–2299 2011.

**Ziff**

Ziff, R. M.: Four-tap shift-register-sequence random-number generators. In: *Computers in Physics* 1998 (12), S. 385–392.

**Zink et al. 2014**

Zink, M.; Wagner, U.; Feltz, C.: Doppelkupplungssysteme. Modular und höchst effizient für den Antriebsstrang von morgen. In: Schaeffler AG (Hg.): Solving the Powertrain Puzzle. 10. Schaeffler Kolloquium. Baden-Baden, 03. / 04.04.2014. Schaeffler AG. Herzogenaurach 2014.

**Zink / Hausner 2010**

Zink, M.; Hausner, M.: LuK Kupplungssysteme und Torsionsdämpfer. Schlüsselemente für effiziente Antriebsstränge. In: Schaeffler AG (Hg.): Driven by the next generations. 9. Schaeffler Kolloquium. Bühl. Schaeffler AG. Herzogenaurach 2010.

## **Studien-, Diplom-, Bachelor- und Masterarbeiten**

### **Schaeffler AG 2015**

Schaeffler AG: Interner Bericht. Nr. DMR\_2015\_0000433\_DE\_IN. Unter Mitarbeit von Felix Hauser, Schaeffler AG, 2015.

### **Witmann 2016**

Witmann, V.: Erstellung eines physikalisch basierten Triebstrangmodells zur Auslegung robuster Regler. Masterthesis, Hochschule Offenburg, Offenburg, 2016.

## 12 Anhang

### 12.1 Parameter des Entwicklungsfahrzeugs

Hier werden die für die Modellbildung und die Reglerauslegung verwendeten Parameter aufgelistet, wie sie für das im Rahmen dieser Arbeit verwendete Entwicklungsfahrzeug (Fzg. A) zutreffen und im Verlauf der vorliegenden Arbeit in den Kapiteln 5, 7 und 8 verwendet wurden.

Tabelle 9: Fahrzeugparameter des Entwicklungsfahrzeugs

Parameter	Variablenbezeichnung	Einheit	Zahlenwert
Trägheitsmoment Kupplungsprimärseite	$J_{Eng}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	0,235
Trägheitsmoment Kupplungssekundärseite 1	$J_{IPS,1}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	0,008
Trägheitsmoment Kupplungssekundärseite 2	$J_{IPS,2}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	0,009
Trägheitsmoment Getriebeausgangswelle	$J_{OPS}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	0,050
Trägheitsmoment beider Räder	$J_{Rad}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	1,400
Trägheitsmoment Aggregat	$J_{Agg}$	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$	8,000
Masse Fahrzeug (Leergewicht)	$m_{Veh}$	kg	1240
Masse Motorblock	$m_{Eng}$	kg	150
Steifigkeit Getriebeeingangswelle 1	$c_{IPS,1}$	$\frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$	17188,7
Dämpfung Getriebeeingangswelle 1	$d_{IPS,1}$	$\frac{\text{Nm} \cdot \text{s}}{\text{rad}}$	0,1
Steifigkeit Getriebeeingangswelle 2	$c_{IPS,2}$	$\frac{\text{Nm}}{\text{rad}}$	57295,8
Dämpfung Getriebeeingangswelle 2	$d_{IPS,2}$	$\frac{\text{Nm} \cdot \text{s}}{\text{rad}}$	0,1

Parameter	Variablenbezeichnung	Einheit	Zahlenwert
Steifigkeit Seitenwelle	$c_{SShaft}$	$\frac{Nm}{rad}$	6870,6
Dämpfung Seitenwelle	$d_{SShaft}$	$\frac{Nm \cdot s}{rad}$	25
Steifigkeit Achsaufhängung	$c_{Axle}$	$\frac{N}{m}$	1145,9
Dämpfung Achsaufhängung	$d_{Axle}$	$\frac{N \cdot s}{m}$	600
Steifigkeit Motorlagerung	$c_{Eng}$	$\frac{N}{m}$	$10^4$
Dämpfung Motorlagerung	$d_{Eng}$	$\frac{N \cdot s}{m}$	1000
Steifigkeit Aggregatlagerung	$c_{Agg}$	$\frac{Nm}{rad}$	$8,6 \cdot 10^4$
Dämpfung Aggregatlagerung	$d_{Agg}$	$\frac{Nm \cdot s}{rad}$	50
Getriebeübersetzung Gang 1	$i_{GB}$	1	3,615
Getriebeübersetzung Gang 2	$i_{GB}$	1	1,955
Getriebeübersetzung Gang R	$i_{GB}$	1	-3,452
Übersetzung Differenzial	$i_{Diff}$	1	4,813
Übersetzungsverhältnis Rad	$i_{Rad}$	1	3,257
Mittlerer Reibradius der Kupplung	$r_{Reib}$	m	0,0968
Reibwertgradient der Kupplung	$\dot{\mu}$	$\frac{s}{m}$	-0,015
Mittlerer Reibwert der Kupplung	$\bar{\mu}$	1	0,33588

## 12.2 Synthetisiertes Modell des PKW-Antriebsstrangs mit Doppelkupplungsgetriebe

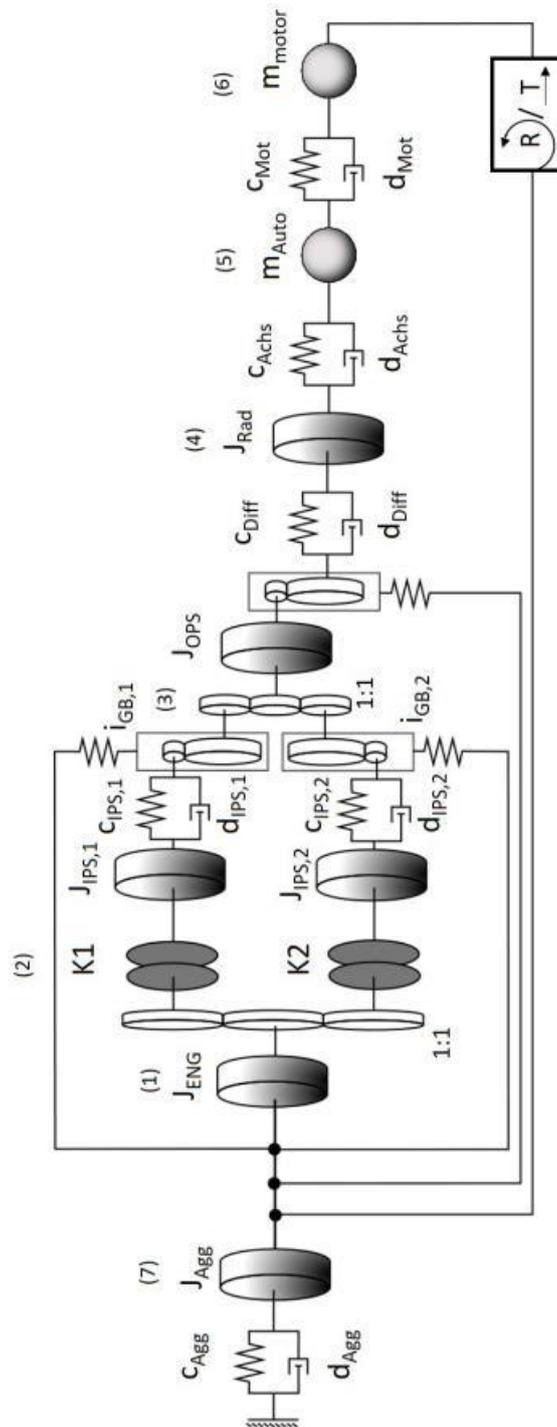


Bild 121: Aus der Modellsynthese entstandenes physikalisches Antriebsstrangmodell<sup>637</sup>

<sup>637</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

## 12.3 Blockdiagramme des Simulationsmodells in Simulink

Im Folgenden sind ergänzend zu den Erläuterungen in Kapitel 8 einige der Blockdiagramme des im Kapitel diskutierten Antriebsstrangmodells in Simulink dargestellt.

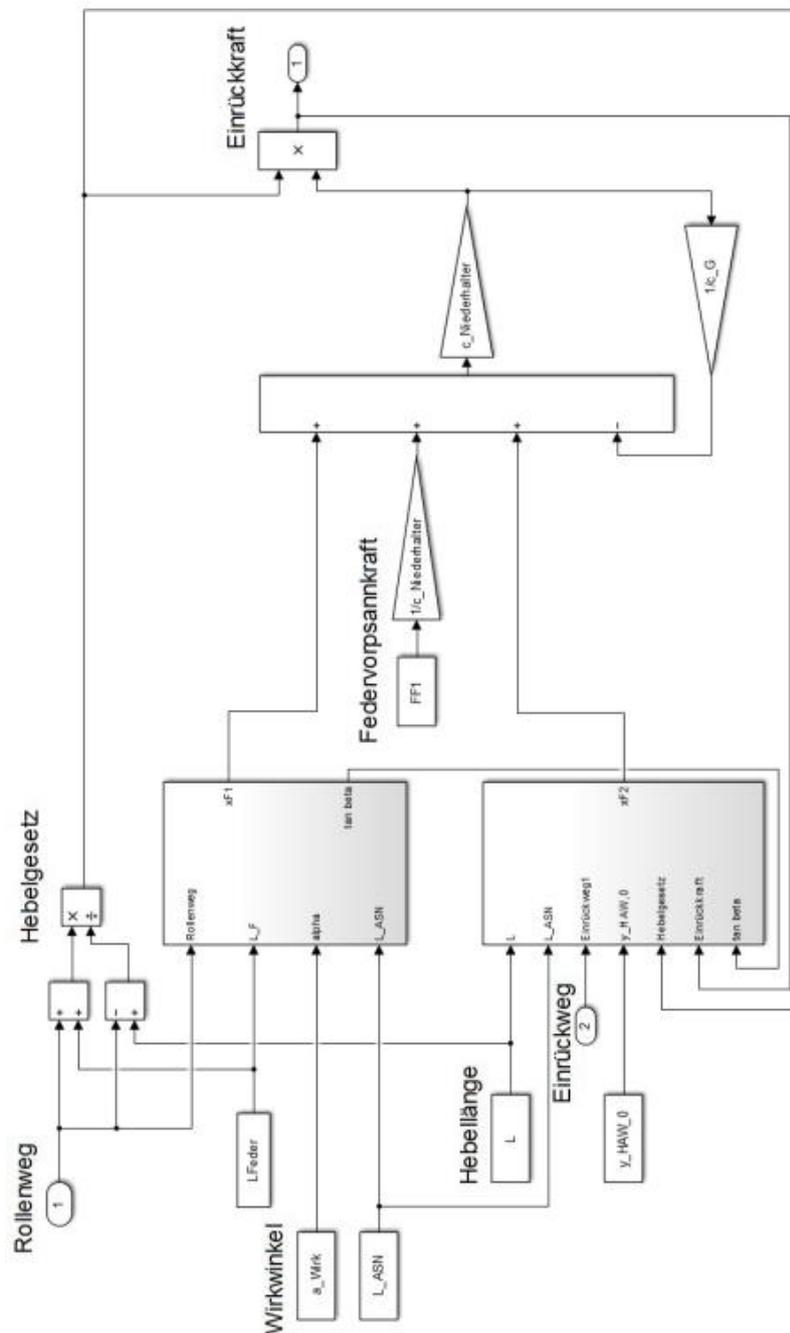


Bild 122: Modellierung des elektromechanischen Aktors in Simulink<sup>638</sup>

<sup>638</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

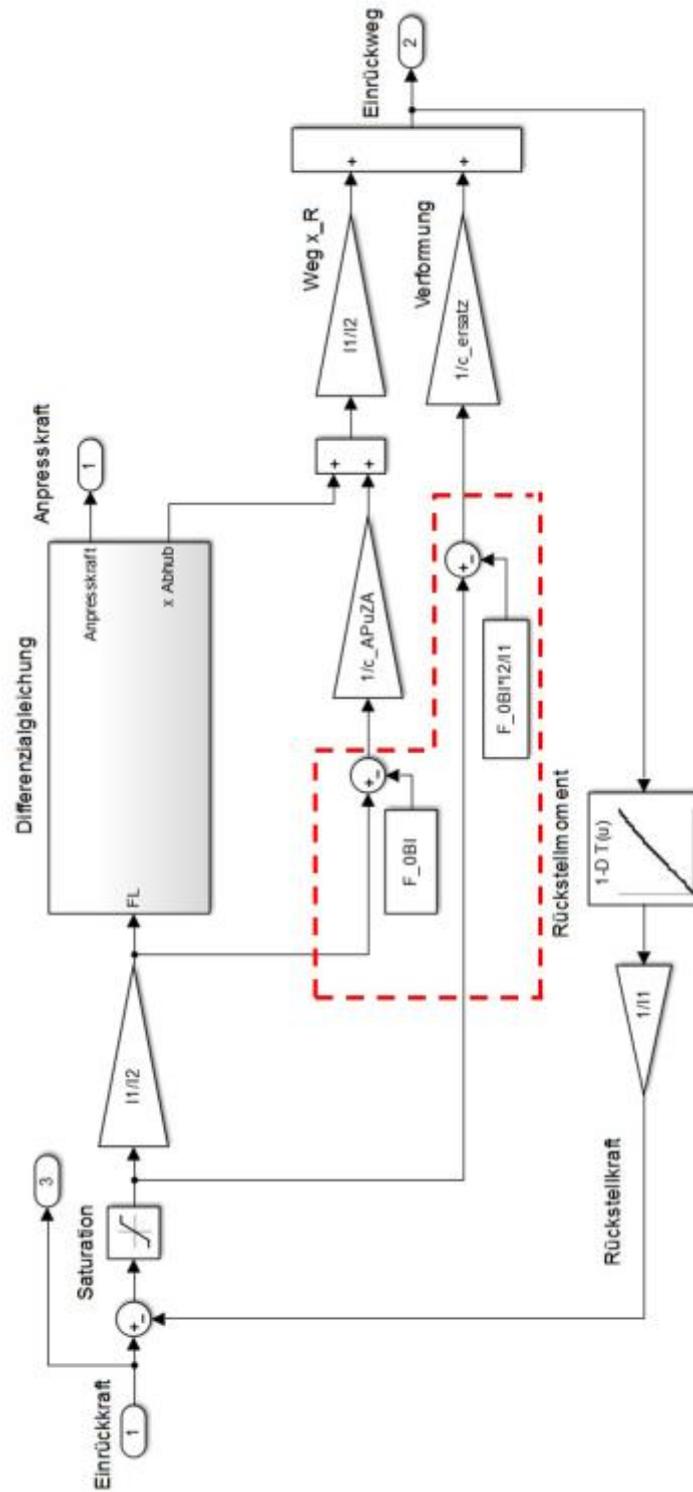


Bild 123: Modellierung einer Teilkupplung in Simulink, die berücksichtigte Vorspannkraft der Hebefeder in Einbaulage ist rot markiert<sup>639</sup>

<sup>639</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

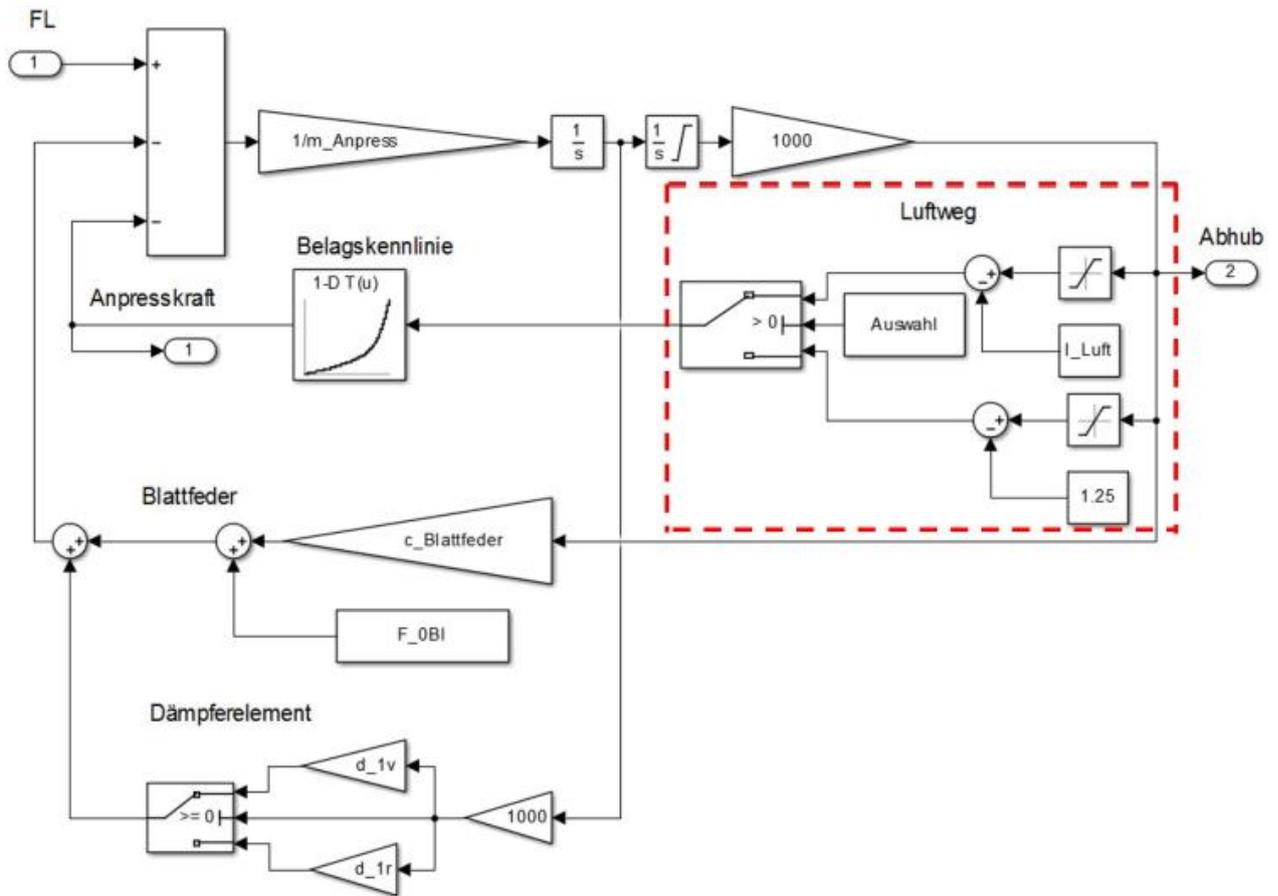


Bild 124: Blockschaltbild der Differentialgleichung der bewegten Masse einer Teilkupplung<sup>640</sup>

<sup>640</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

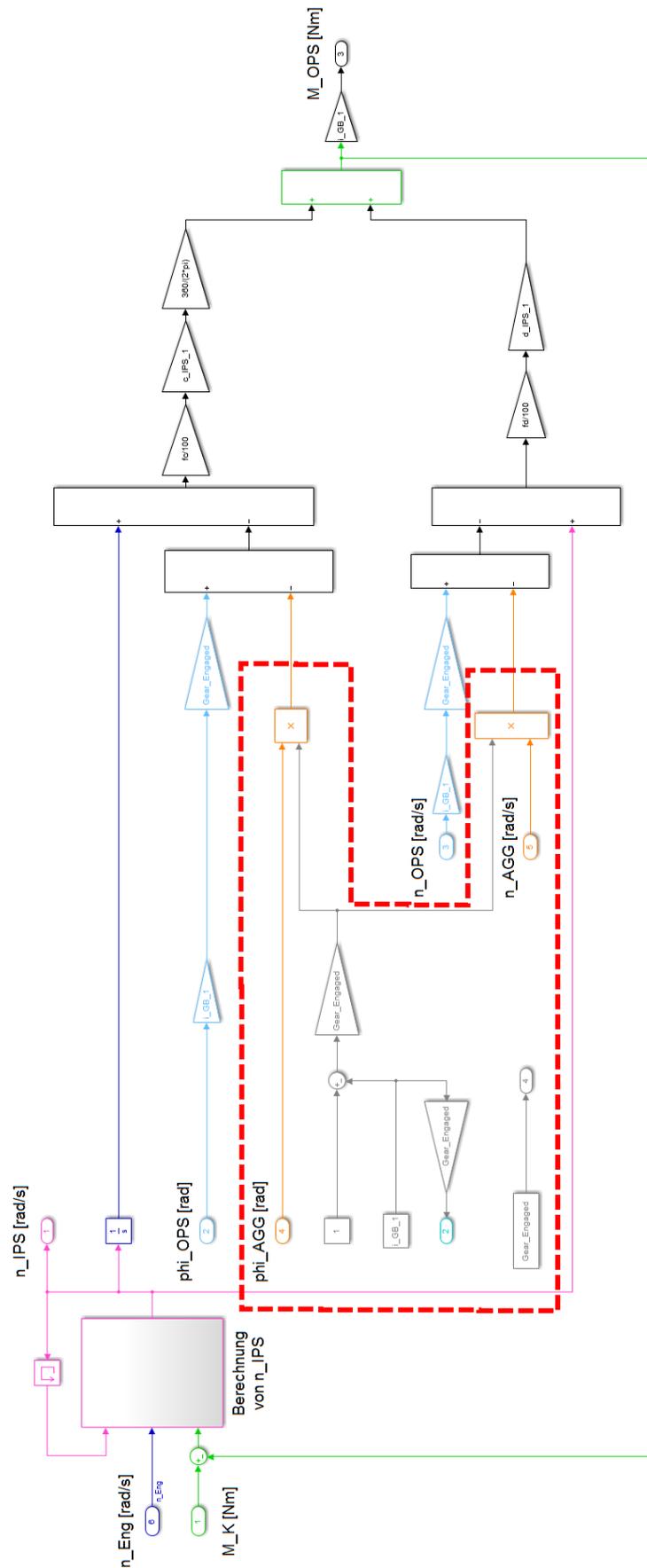


Bild 125: Blockschaltbild der Modellierung des Teilgetriebes 1 inklusive der Kopplung an die Bewegung des Aggregates (rot markiert)

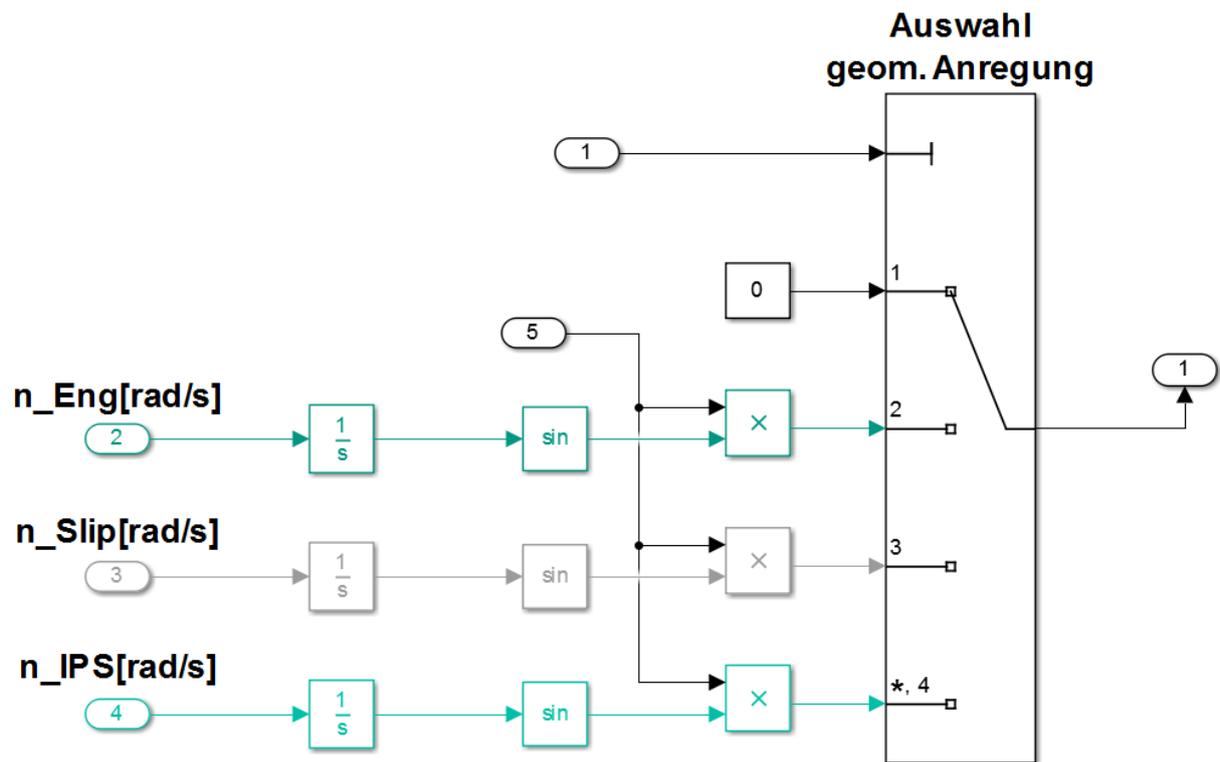


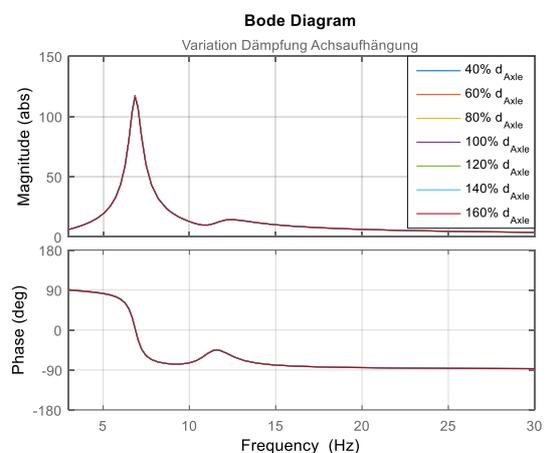
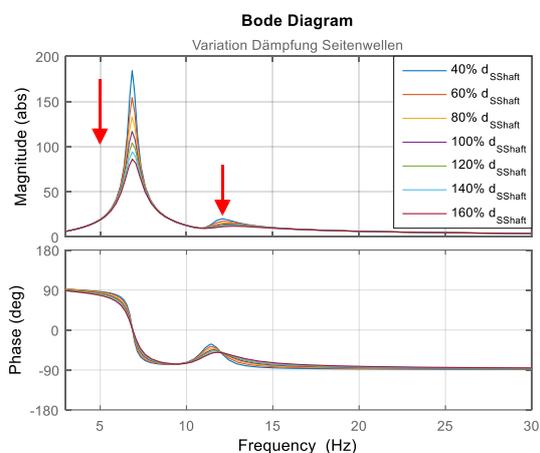
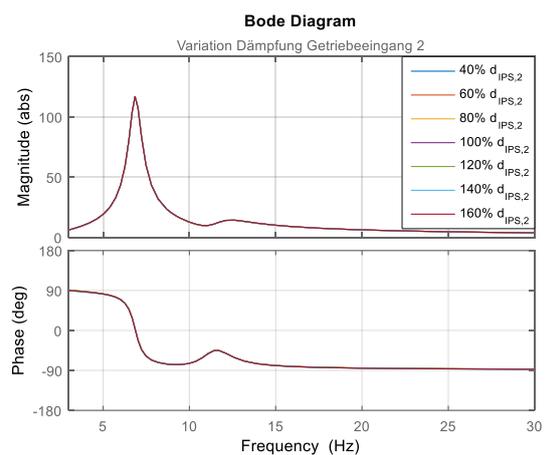
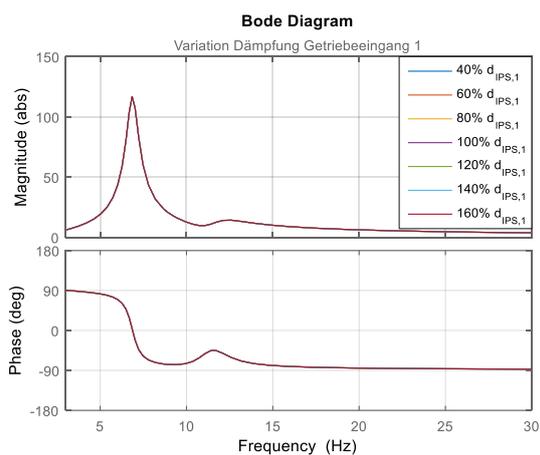
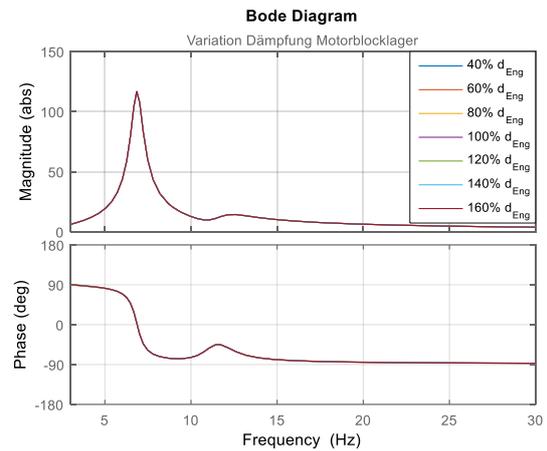
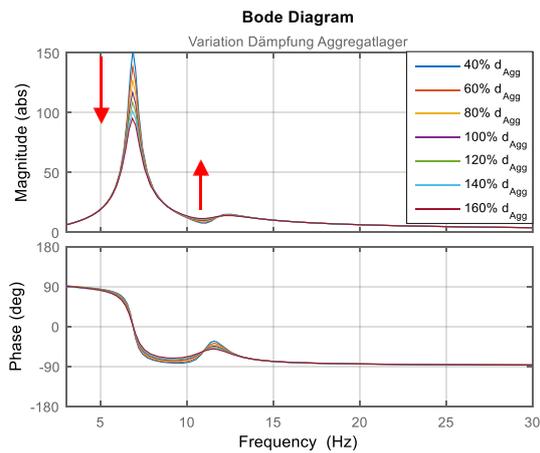
Bild 126: Funktionsblock zur Auswahl der geometrischen Anregungen der jeweiligen Teilkupplung im Simulationsmodell<sup>641</sup>

<sup>641</sup> Witmann, 2016 (betreute Abschlussarbeit)

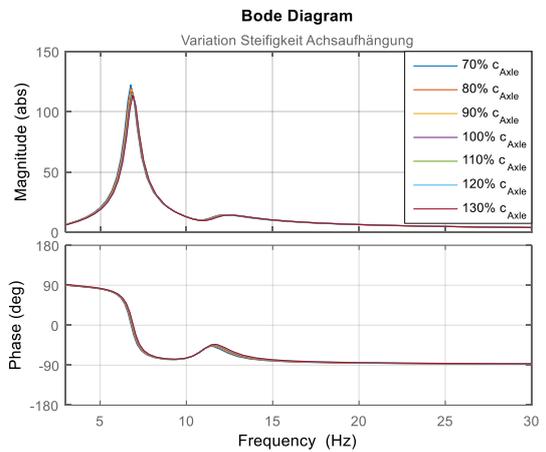
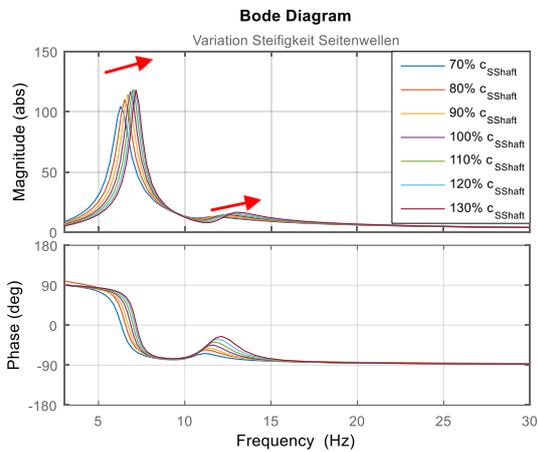
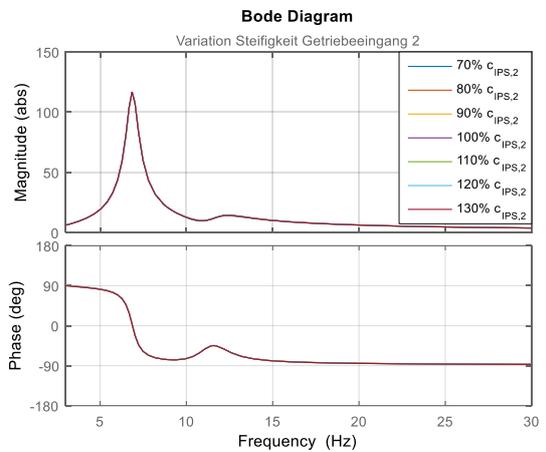
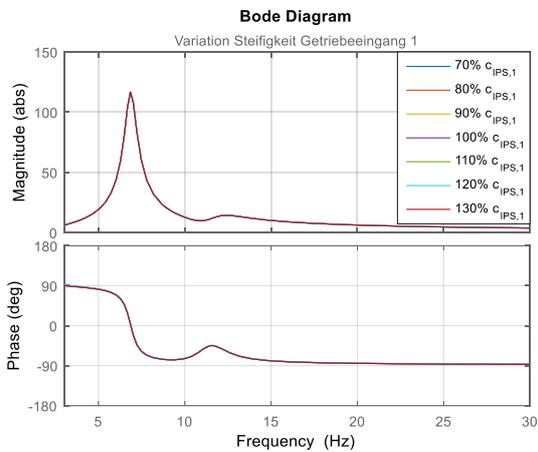
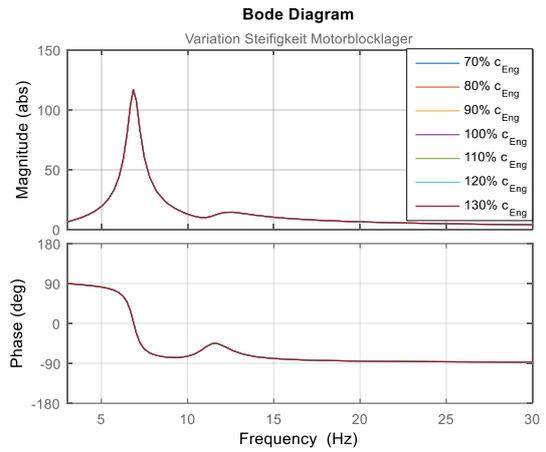
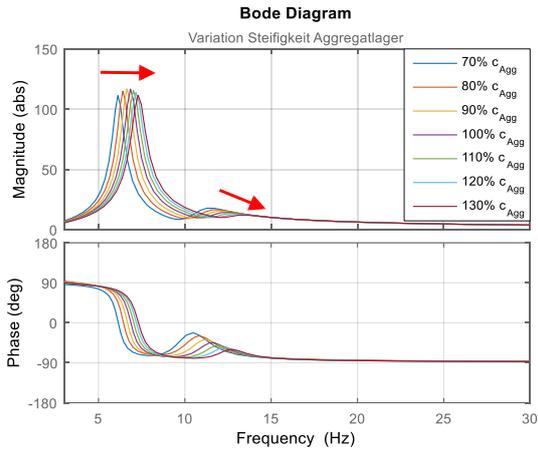
## 12.4 Simulationsergebnisse der Variation der systeminhärenten Unsicherheiten

Die in diesem Unterkapitel dargestellten Ergebnisse der Validierung der Umsetzung der systeminhärenten Unsicherheiten im Simulationsmodell entsprechen den in der betreuten Masterarbeit von WITMANN präsentierten Ergebnissen.

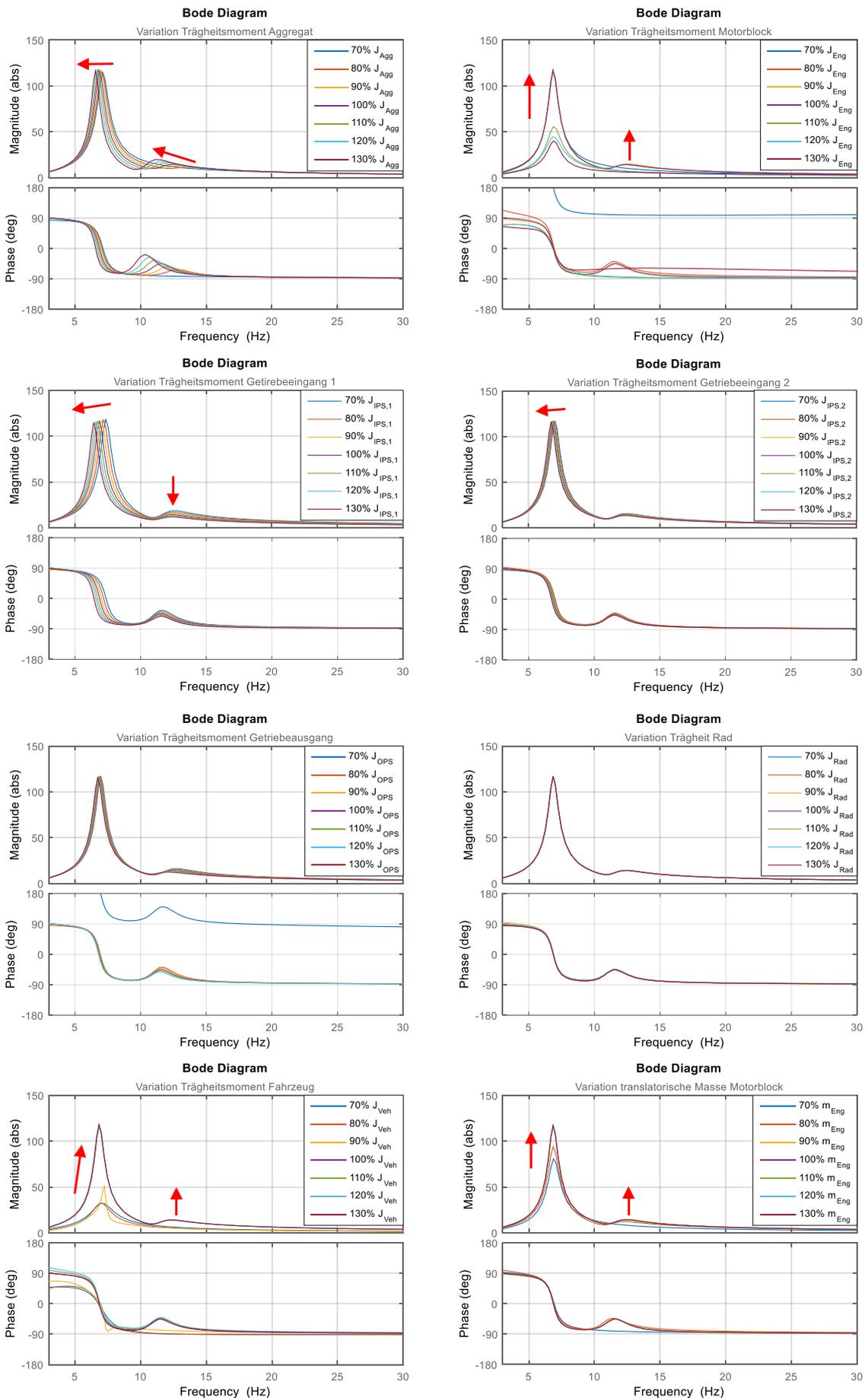
### 12.4.1 Variation der einzelnen Dämpfungskoeffizienten



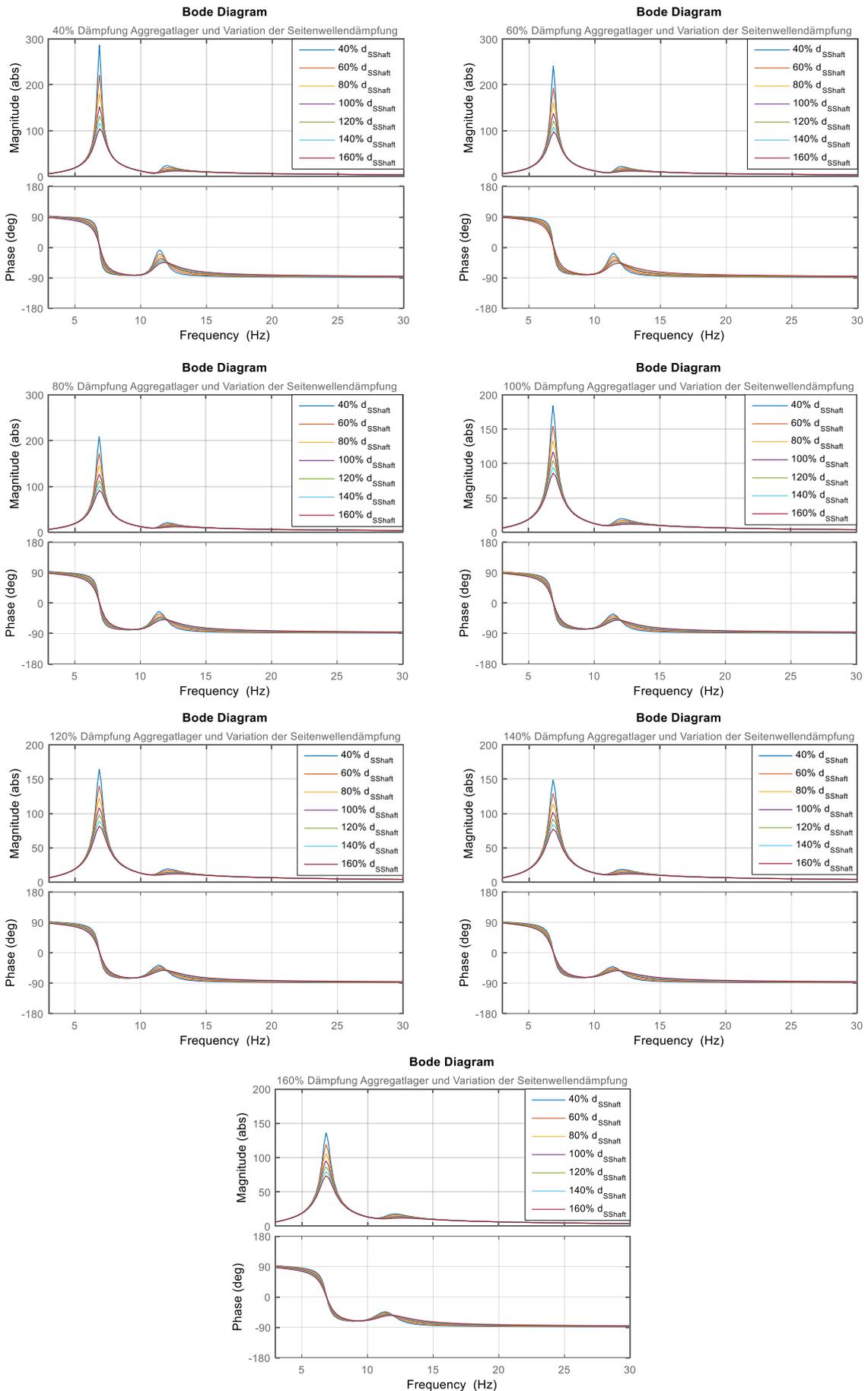
### 12.4.2 Variation der einzelnen Steifigkeiten

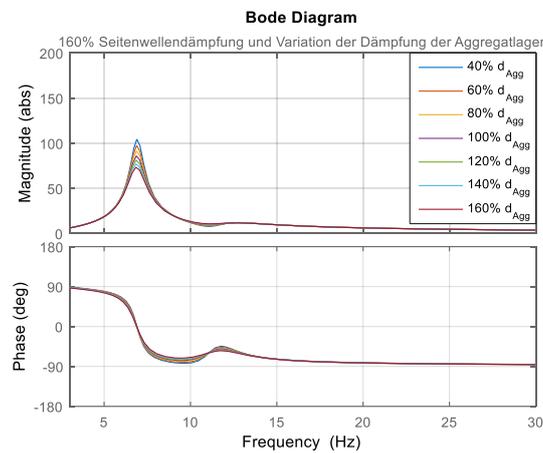
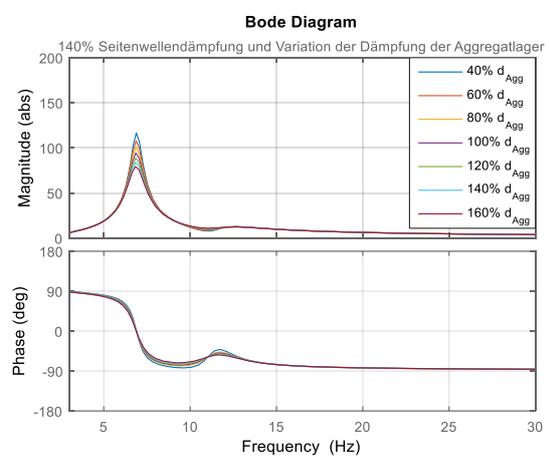
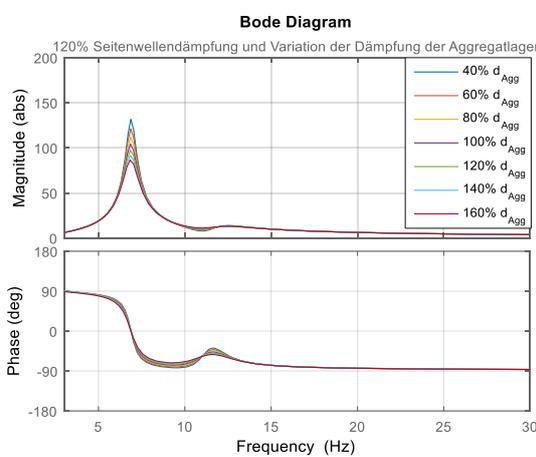
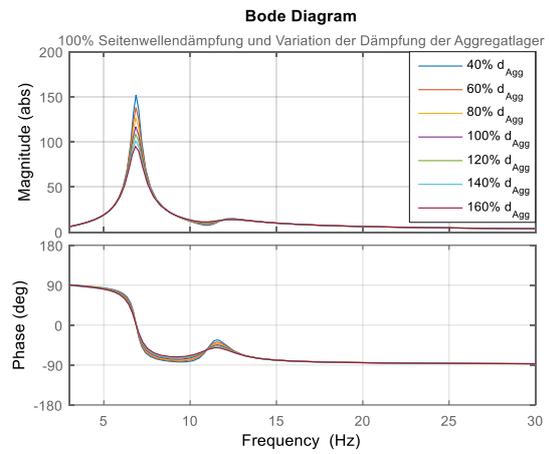
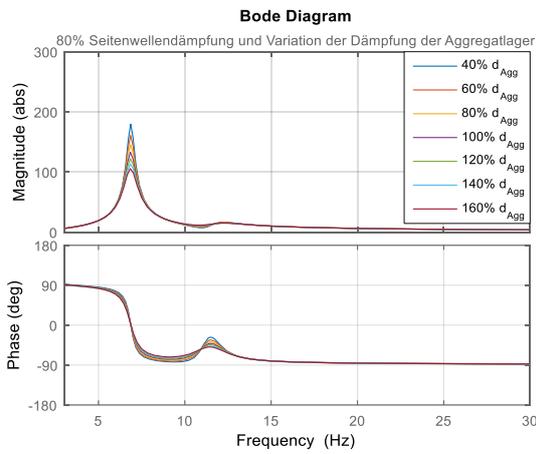
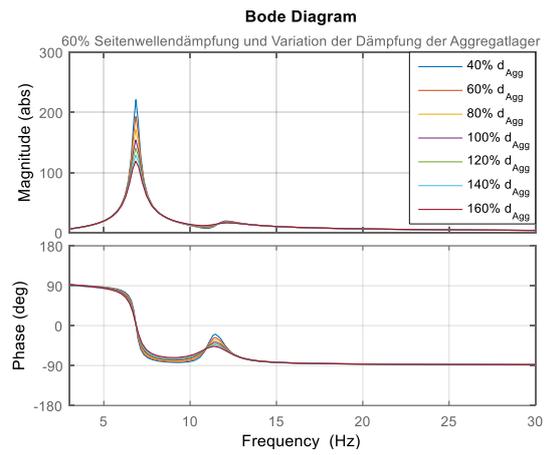
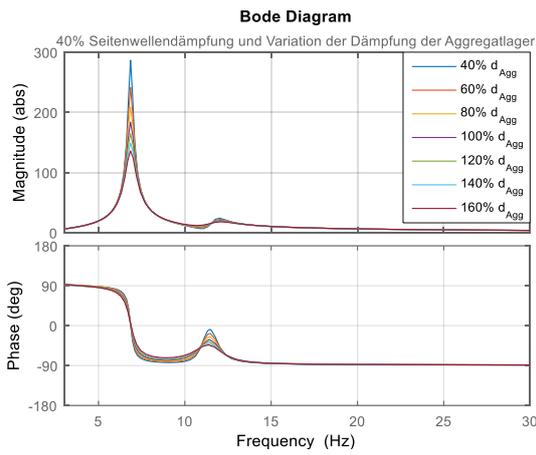


### 12.4.3 Variation der einzelnen Trägheitsmomente und Massen

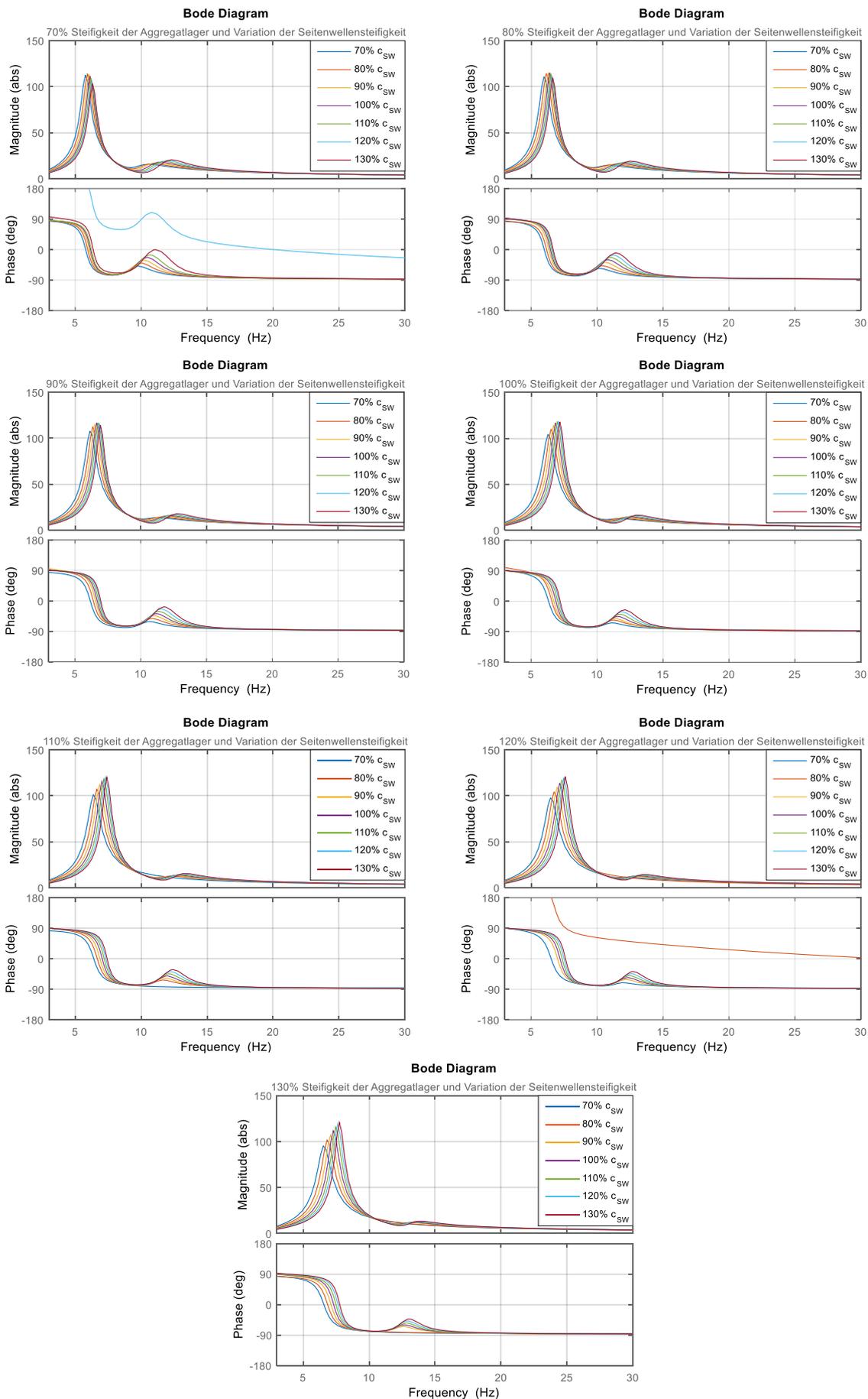


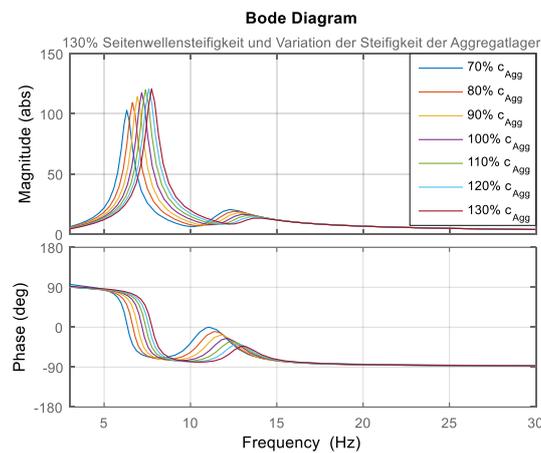
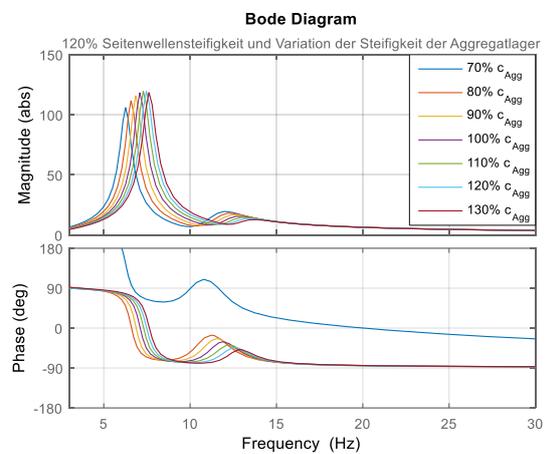
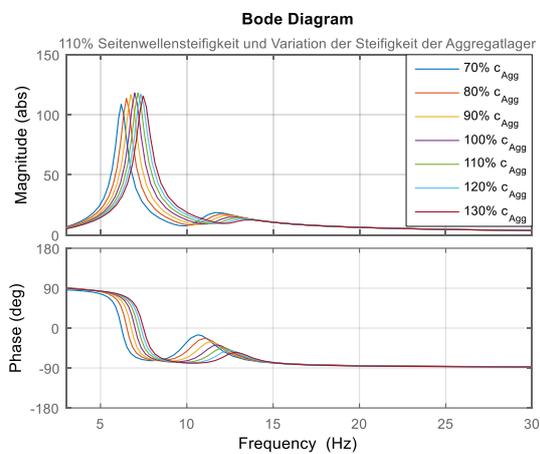
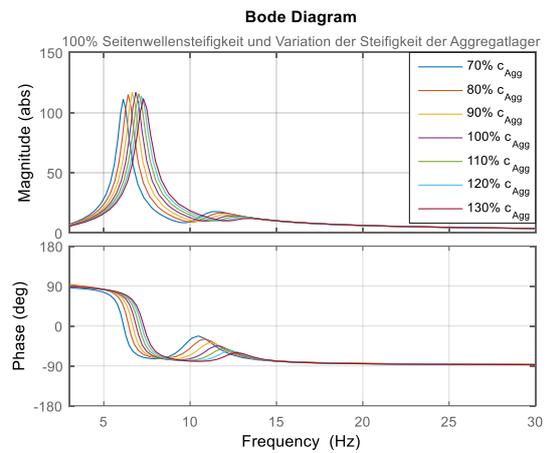
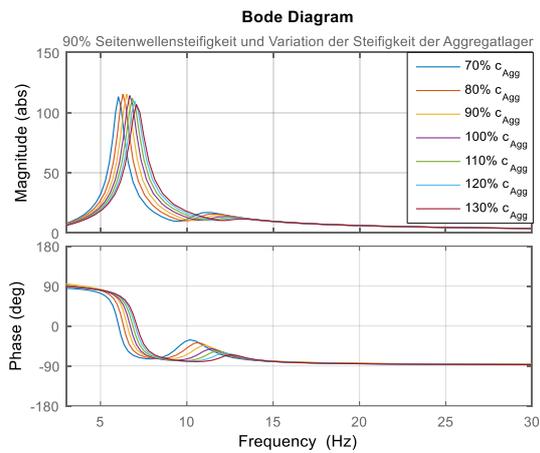
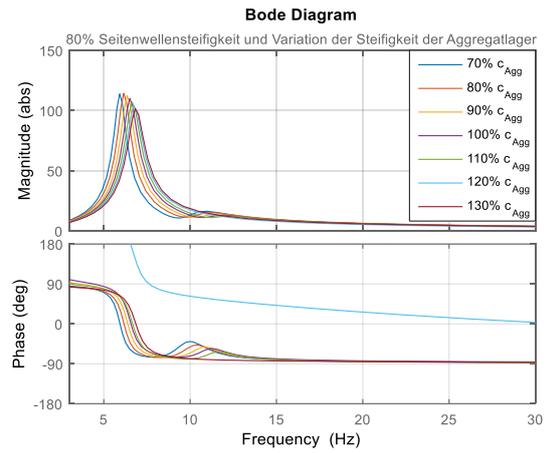
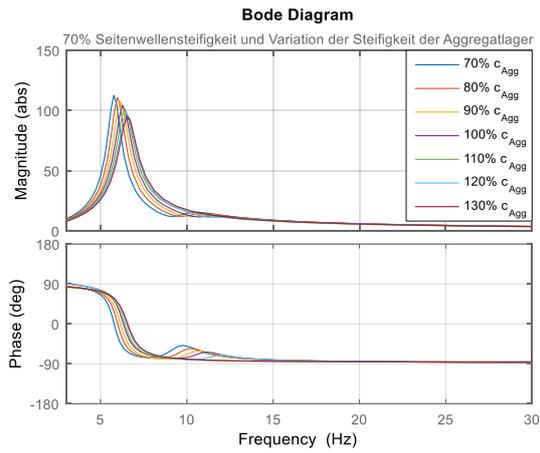
### 12.4.4 Kombinierte Variation der Dämpfung von Aggregatlager und Seitenwelle



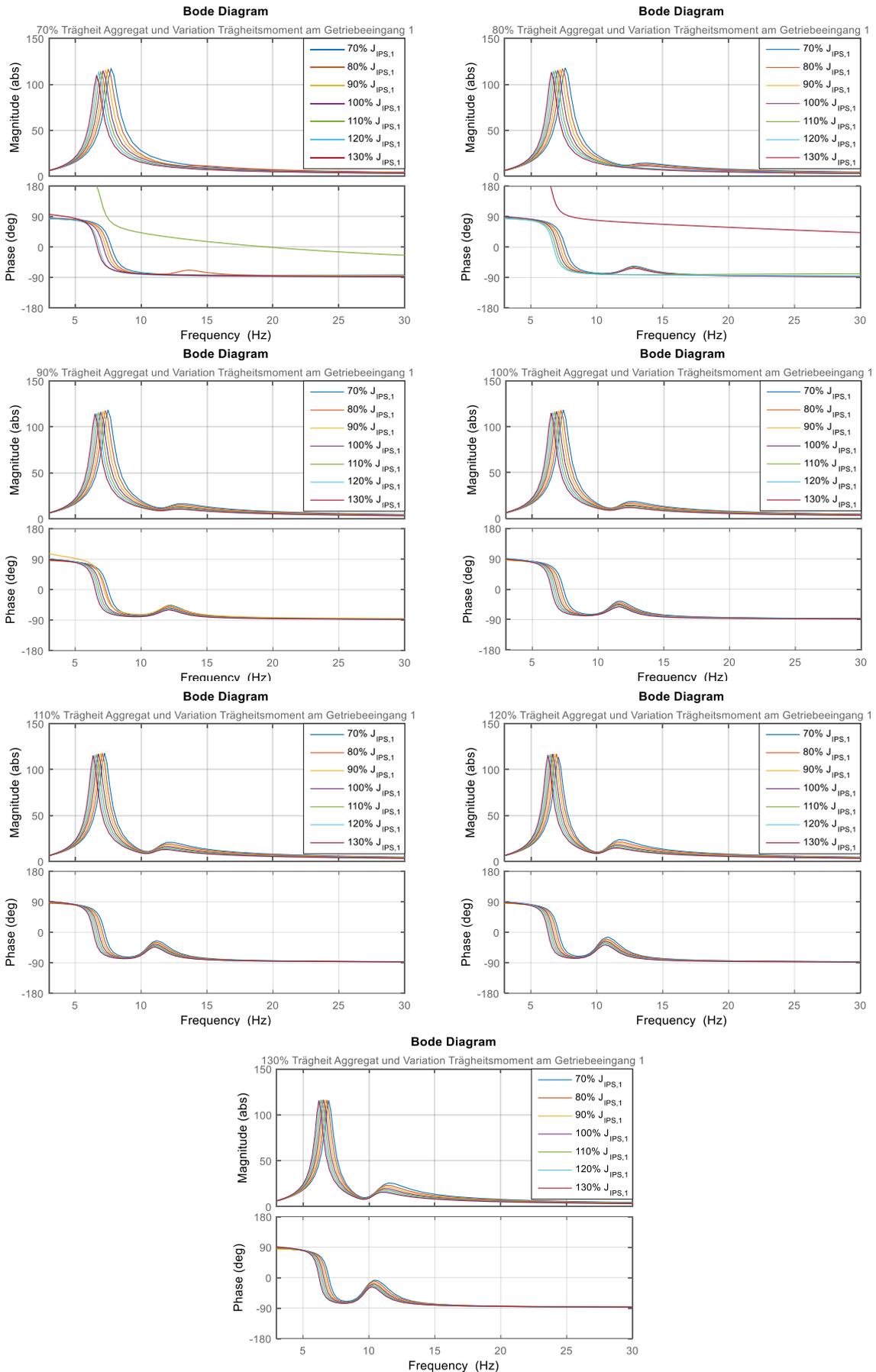


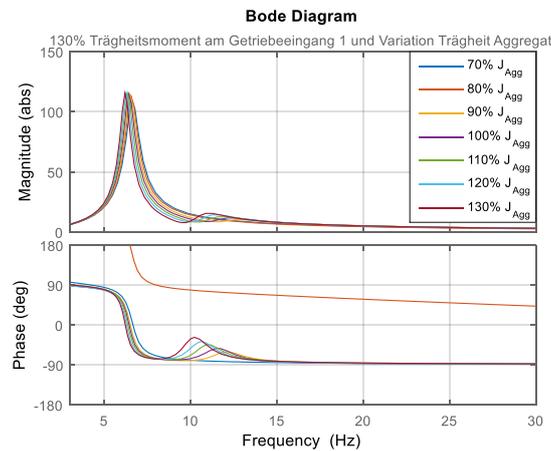
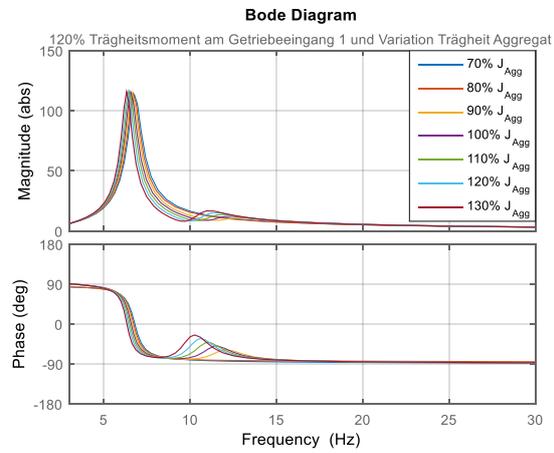
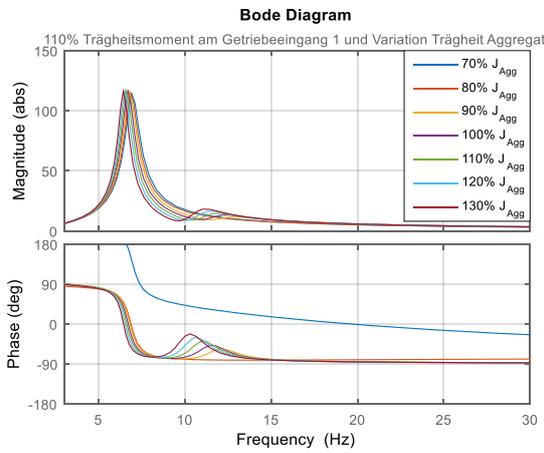
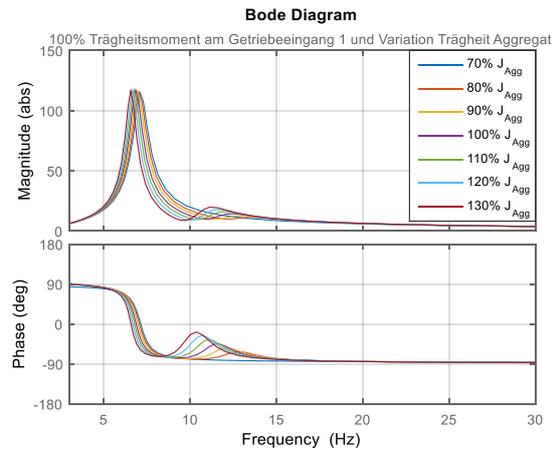
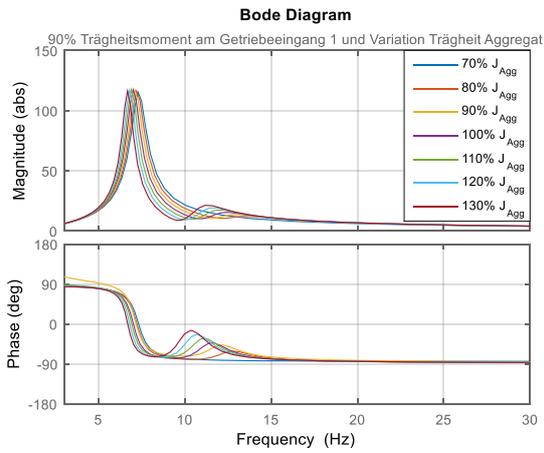
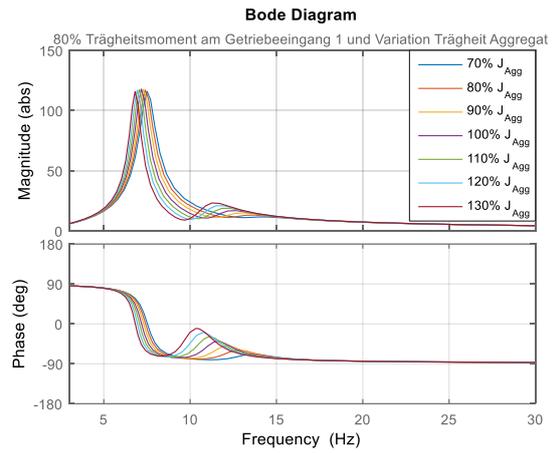
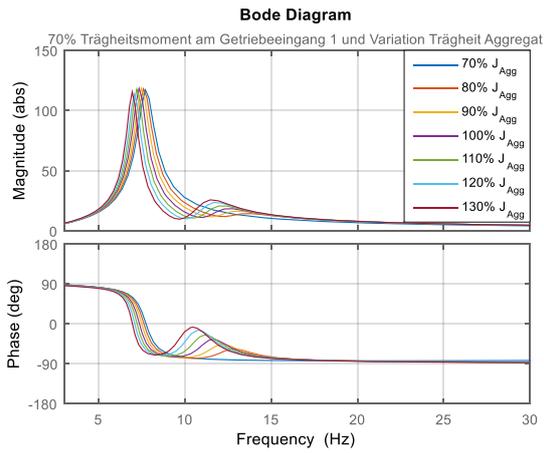
### 12.4.5 Kombinierte Variation der Steifigkeit von Aggregatlager und Seitenwelle





## 12.4.6 Kombinierte Variation der Trägheitsmomente von Aggregat und Getriebeeingang





## 12.5 Umsetzung und Validierung der Rosenbrock-Methode 2. Ordnung zur Lösung von Riccati Matrix Differenzialgleichungen

Zur Lösung der Riccati Matrix Differenzialgleichungen im Zuge des Reglerdesigns<sup>642</sup> wird der von BENNER UND MENA vorgestellte Algorithmus der Rosenbrock-Methode 2. Ordnung verwendet. Dieser wurde in 2.10.3.1 beschrieben und wurde entsprechend den Ausführungen von BENNER UND MENA in MATLAB<sup>643</sup> umgesetzt und anschließend das in der Veröffentlichung der Methode vorgestellte Beispiel 1<sup>644</sup> zur Validierung der Umsetzung verwendet.

Hierbei zeigte sich eine signifikante Diskrepanz der berechneten Ergebnisse mit den in der Veröffentlichung präsentierten Ergebnissen. Ein Vergleich des nach BENNER UND MENA umgesetzten Algorithmus mit der in LANG ET AL. diskutierten Methode ergab eine unterschiedliche Kombination der Koeffizienten in der Iteration.

Statt der Berechnung der neuen Matrix  $X_{k+1}$  als<sup>645</sup>

$$X_{k+1} = X_k + \frac{3}{2} \cdot K_1 + \frac{1}{2} \cdot K_2 \quad (13.1)$$

erfolgt die Berechnung nun als<sup>646</sup>

$$X_{k+1} = X_k + \frac{3}{2} \cdot \tau \cdot K_1 + \frac{1}{2} \cdot \tau \cdot K_2 \quad (13.2)$$

unter der Berücksichtigung der Schrittweite  $\tau$ .

Damit ergeben sich nun die gewünschten Ergebnisse für die Berechnung des Beispiels (Bild 127). Das Erzielen der im Rahmen der Beispielrechnung geforderten Ergebnisse entspricht einer Validierung der Implementierung der Rosenbrock-Methode 2. Ordnung in MATLAB, da hiermit die Berechnung verifiziert wurde und die Anforderungen an die Umsetzung sowie die umgesetzte Methode im Laufe der Ausführungen der vorliegenden Arbeit überprüft wurden.<sup>642</sup>

<sup>642</sup> vgl. Kap. 7

<sup>643</sup> The Mathworks Inc., 2015

<sup>644</sup> Benner und Mena, 2013

<sup>645</sup> Benner und Mena, 2013

<sup>646</sup> Lang et al., 2015

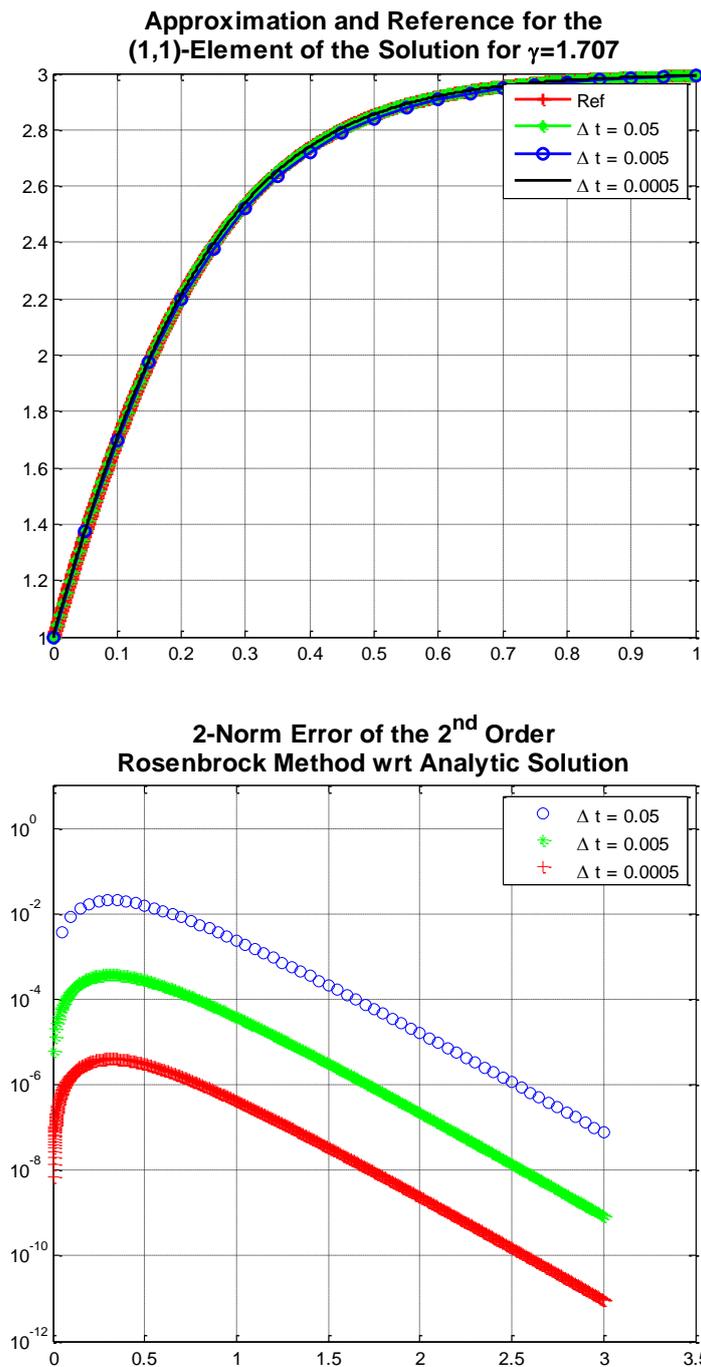


Bild 127: Mithilfe der MATLAB Umsetzung der Rosenbrock-Methode erzielten Ergebnisse der Berechnung des Beispiels 1<sup>647</sup>, die durch den Vergleich mit den in BENNER UND MENA vorgestellten Ergebnissen, die Umsetzung der Methode in MATLAB validieren

## 12.6 C-Code der Reglerimplementierung in SIMULINK

```

/* Calculate the discrete update of the controller state vector given by
 * xD and being defined by the state equation
 * d(xD)/dt = A_C * xD + B_C * y
 * which can be translated to the discrete time case
 * xD(k) = xD(k-1) + A_C * xD(k-1) + B_C * y(k)
 */

int i=0;
int j=0;
int k=0;
int nx = 11; /*NUM_DISC_STATES; */
int ny = 6; /*INPUT_0_WIDTH; */
int mat_ind = 0;

double x_contr[11]={(*xD)};

/* Perform the matrix calculations.
 * Note, that the input matrices A_C, B_C and C_C to the s-Function are
 * concatenated implicitly to form column vectors formed from the columns
 * of the original matrices (vec(A)=[A11 ; A21 ; A31 ; ... ; A12 ; ...Ann])
 * which has to be accounted for by calculating the suitable matrix element
 * index.
 * By calling the elements of vectors and matrices via indexing, no
 * dereferencing of the pointers needs to be done as this is done
 * implicitly when calling single elements.
 */
for (i=0 ; i < nx ; i++)
{
    for (j=0 ; j < nx ; j++)
    {
        mat_ind = nx * i + j;
        x_contr[i] = x_contr[i] + A_C[mat_ind] * xD[j];
    }
    for (k=0 ; k < ny ; k++)
    {
        mat_ind = nx * i + k;
        x_contr[i] = x_contr[i] + B_C[mat_ind] * y[k];
    }
}

xD = x_contr;

```

Bild 128: C-Code der Routine zur zeitdiskreten Aktualisierung des Reglerzustandes entsprechend der Umsetzung im S-Function Builder

```
/* Here the robust controller output is calculated and assigned to the
 * output variables, which are here named as u[i] being equivalent to the
 * output of the controller, which features thus the input variables y[i]
 * and the matrices A_C(t), B_C(t) and C_C(t).
 */

/* The output signal is specified by the output equation of the controller
 * u = C_C * x_C
 * where x_C is the vector of the internal controller state being
 * equivalent to the vector of discrete states xD.
 */

int i = 0;
double out = 0;

for (i=0 ; i<11 ; i++)
{
    out = out + C_C[i] * xD[i];
}

u = &out;
```

Bild 129: C-Code der Routine zur Berechnung des Ausgangssignals des robusten Reglers entsprechend der Umsetzung im S-Function Builder

## Lebenslauf

### Persönliche Daten

Name: Florian Eppler  
Geburtsdatum: 02. April 1988  
Geburtsort: Rastatt  
Staatsangehörigkeit: deutsch  
Familienstand: ledig

### Bildungsgang

1994 – 1998 Carl-Schurz-Schule Rastatt (Grundschule)  
1998 – 2006 Tulla Gymnasium Rastatt (Abschluss: Allgemeine Hochschulreife)  
2006 – 2012 Studium der Physik mit Vertiefungsrichtung Optik, Festkörperphysik und Energietechnik am Karlsruher Institut für Technologie (KIT) (Abschluss: Diplom)  
2012 – 2018 Kooperative Promotion in Fachrichtung Maschinenbau am IPEK – Institut für Produktentwicklung am Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

### Berufstätigkeit

04/2012 – 08/2012 Wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Photonik und Quantenelektronik (IPQ), Karlsruher Institut für Technologie (KIT)  
10/2012 – 05/2017 Entwicklungsingenieur Abteilung „Entwicklung Software und Funktion“ bei der LuK GmbH & Co. KG, Bühl (Baden)  
Kooperative Promotion am IPEK – Institut für Produktentwicklung am Karlsruher Institut für Technologie (KIT)  
seit 06/2017 Entwicklungsingenieur Abteilung „Fahrassistenzsysteme“ (RD/ASP) bei der Daimler AG, Sindelfingen