

# Recheneffiziente Trajektorienoptimierung für automatisierte Fahreingriffe

Benjamin Gutjahr





Benjamin Gutjahr

Recheneffiziente Trajektorienoptimierung  
für automatisierte Fahreingriffe



# Recheneffiziente Trajektorienoptimierung für automatisierte Fahreingriffe

von  
Benjamin Gutjahr

Titelbild: © BMW AG, München (Deutschland)

Dissertation, Karlsruher Institut für Technologie  
KIT-Fakultät für Maschinenbau

Tag der mündlichen Prüfung: 21. August 2018  
Hauptreferent: PD Dr.-Ing. habil. Lutz Gröll  
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. Christoph Stiller

#### Impressum



Karlsruher Institut für Technologie (KIT)  
KIT Scientific Publishing  
Straße am Forum 2  
D-76131 Karlsruhe

KIT Scientific Publishing is a registered trademark  
of Karlsruhe Institute of Technology.  
Reprint using the book cover is not allowed.

[www.ksp.kit.edu](http://www.ksp.kit.edu)



*This document – excluding the cover, pictures and graphs – is licensed  
under a Creative Commons Attribution-Share Alike 4.0 International License  
(CC BY-SA 4.0): <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.en>*



*The cover page is licensed under a Creative Commons  
Attribution-No Derivatives 4.0 International License (CC BY-ND 4.0):  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/deed.en>*

Print on Demand 2019 – Gedruckt auf FSC-zertifiziertem Papier

ISBN 978-3-7315-0922-6

DOI 10.5445/KSP/1000093098







# **Recheneffiziente Trajektorienoptimierung für automatisierte Fahreingriffe**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

**DOKTORS DER INGENIEURWISSENSCHAFTEN  
(Dr.-Ing.)**

von der KIT-Fakultät für Maschinenbau,  
des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)

angenommene

**DISSERTATION**

von

**Dipl.-Ing. Benjamin Gutjahr**

geb. in Tübingen

Tag der mündlichen Prüfung:

21.08.2018

Hauptreferent:

PD Dr.-Ing. habil. Lutz Gröll

Korreferent:

Prof. Dr.-Ing. Christoph Stiller



# Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als Doktorand bei der BMW AG in München.

Mein besonderer Dank gilt Herrn PD Dr.-Ing. Lutz Gröll vom Institut für Angewandte Informatik/Automatisierungstechnik am Karlsruher Institut für Technologie (KIT) für die Übernahme der wissenschaftlichen Betreuung sowie die wertvollen Anregungen und Ratschläge zu dieser Arbeit.

Des Weiteren danke ich ganz herzlich Herrn Prof. Dr.-Ing. Christoph Stiller für sein Interesse an dieser Arbeit und die Übernahme des Korreferats.

In ganz besonderer Weise möchte ich Herrn PD Dr.-Ing. Moritz Werling, der diese Arbeit initiierte, für seine Unterstützung und die Betreuung der Arbeit von Seiten der BMW AG herzlich danken. Die zahlreichen Diskussionen mit ihm und seine fachlichen Anregungen haben mich gleichermaßen gefordert wie gefördert und maßgeblich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Für die produktive und freundschaftliche Zusammenarbeit gilt mein Dank meinen Kolleginnen und Kollegen Udo Rietschel, Ilona Trübswetter, Dr. Sebastian Gnatzig, Dr. Georg Tanzmeister, Yves Pilat und Martin Friedl. Die erfolgreichen Demonstrationen der entwickelten Algorithmen wie auch die vielen Teststunden in den Versuchsfahrzeugen werde ich in bester Erinnerung behalten.

Schließlich möchte ich meinen Eltern und meiner Familie danken, dass sie mich auf meinem bisherigen Lebens-, Ausbildungs- und Berufsweg immer gefördert und unterstützt haben.

München, im Juli 2018

Benjamin Gutjahr



Für Jenny und meine Familie



# Inhaltsverzeichnis

<b>Danksagung</b> . . . . .	<b>i</b>
<b>Abkürzungen und Notationen</b> . . . . .	<b>ix</b>
<b>1 Einleitung</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1 Bedeutung und Einordnung . . . . .	1
1.2 Entwicklungsstand . . . . .	4
1.3 Zielsetzung der Arbeit . . . . .	8
<b>2 Methodik zur recheneffizienten Trajektorienplanung</b> . . .	<b>11</b>
2.1 Klassifikation der Fahraufgabe . . . . .	12
2.1.1 Drei-Ebenen-Modell . . . . .	12
2.1.2 Anforderungen an die Trajektorienplanung . . . . .	13
2.2 Trajektorienplanung als Optimierungsproblem . . . . .	16
2.2.1 Mathematische Formulierung . . . . .	18
2.2.2 Modellprädiktive Trajektorienoptimierung . . . . .	19
2.2.3 Grundproblematik der Trajektorienoptimierung . . . . .	22
2.2.4 Optimierungsmethoden . . . . .	23
2.3 Vorteile linear-quadratischer Optimierung . . . . .	26
2.4 Konvexe Optimierung der Längs-Quer-Bewegung . . . . .	29
2.4.1 Dekomposition in konvexe Teilprobleme . . . . .	30
2.4.2 Lineare Bewegungsmodelle in Längs und Quer . . . . .	32
2.5 Zusammenfassung . . . . .	36
<b>3 Linear-quadratische Optimierung für aktive Fahreingriffe</b> <b>39</b>	
3.1 Linear-quadratische Optimierung ohne Beschränkungen . . . . .	40
3.1.1 Hamilton-Funktion und Optimalitätsbedingungen . . . . .	40
3.1.2 Riccati-Differentialgleichung . . . . .	42

3.1.3	Optimierung der Endzeit . . . . .	44
3.1.4	Endbedingungen . . . . .	46
3.1.5	Interne Randbedingungen . . . . .	49
3.2	Linear-quadratische Optimierung mit Beschränkungen . . .	52
3.2.1	Äquivalente zeitdiskrete Problemformulierung . . .	53
3.2.2	Problemformulierung als quadratisches Programm .	56
3.2.3	Anwendungsspezifischer Einsatz von Schlupfvariablen	59
3.3	Zusammenfassung . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Neue Algorithmen zur Fahrzeuglängsführung . . . . .</b>	<b>67</b>
4.1	Eigenschaften der Fahrzeuglängsbewegung . . . . .	68
4.1.1	Zeitinvariante Dynamik eindimensionaler Bewegungen	68
4.1.2	Ortsgebundene Bewegungsvorgaben . . . . .	69
4.2	Unbeschränkte Trajektorienoptimierung . . . . .	70
4.2.1	Formulierung des Optimalsteuerungsproblems . . .	71
4.2.2	Analytische Lösung des Optimalsteuerungsproblems	72
4.3	Bewegungsplanung mit Zustandsbeschränkungen . . . . .	74
4.3.1	Erweiterte Systemdynamik und Bewegungskosten .	74
4.3.2	Sicherheitsrelevante Ausgangsbeschränkungen . . .	76
4.3.3	Komfortorientierter Einsatz von Schlupfvariablen . .	78
4.3.4	Stabilitätsbetrachtungen und zyklische Lösbarkeit . .	80
4.4	Kollisionsvermeidung beim Rangieren . . . . .	81
4.4.1	Umfeldrepräsentation und Kollisionsberechnung . .	82
4.4.2	Ruck- und zeitoptimales Bremsen . . . . .	85
4.5	Zusammenfassung . . . . .	88
<b>5</b>	<b>Neuer Algorithmus zur Fahrzeugquerführung . . . . .</b>	<b>91</b>
5.1	Lineare Systemdynamik der Fahrzeugquerbewegung . . . .	92
5.1.1	Lineare Bewegungsgleichungen der Relativkinematik	93
5.1.2	Festlegung des Systemausgangs . . . . .	94
5.1.3	Zeitdiskrete Formulierung der Systemdynamik . . .	95
5.2	Sicherheit durch zeitvariante Systembeschränkungen . . . .	96
5.2.1	Kollisionsfreiheit durch Fahrtraumbeschränkungen .	98
5.2.2	Beschränkungen der Fahrzeugquerdynamik . . . . .	99
5.3	Optimierungskriterien für ein natürliches Fahrverhalten . . .	100



5.4	Zyklische Lösung des Trajektorienoptimierungsproblems . . .	101
5.4.1	Problemspezifische Verwendung von Schlupfvariablen	101
5.4.2	Stabilitätsbetrachtungen und zyklische Lösbarkeit . . .	103
5.5	Zusammenfassung . . . . .	104
<b>6</b>	<b>Umsetzung und Validierung im Realversuch . . . . .</b>	<b>107</b>
6.1	Versuchsaufbau und -durchführung . . . . .	108
6.2	Längsführung für Komfort- und Sicherheitssysteme . . . . .	110
6.2.1	Aktive Kollisionsvermeidung beim Rangieren . . . . .	110
6.2.2	Optimale Längsbewegung mit Beschränkungen . . . . .	113
6.3	Fahrzeugquerführung in urbanen Fahrsituationen . . . . .	117
6.3.1	Dynamisches Kreisverkehrmanöver . . . . .	118
6.3.2	Vollautomatisierter Parkassistent . . . . .	118
6.3.3	Ausweichen auf ein dynamisches Objekt . . . . .	120
6.4	Kombinierte Fahrzeuglängs- und -querführung . . . . .	123
6.5	Diskussion der Versuchsergebnisse . . . . .	129
6.6	Zusammenfassung . . . . .	130
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung . . . . .</b>	<b>133</b>
<b>A</b>	<b>Anhang . . . . .</b>	<b>139</b>
A.1	Optimale Trajektorie bei Punkt- und Endbedingungen . . . . .	139
A.2	Bestimmung der Stabilität und zyklischen Lösbarkeit . . . . .	144
A.3	Bestimmung der Störung $z$ für die Fahrzeugquerführung . . . . .	145
A.4	Zeikdiskrete Systemmatrizen der Querbewegung . . . . .	147
	<b>Abbildungsverzeichnis . . . . .</b>	<b>149</b>
	<b>Literaturverzeichnis . . . . .</b>	<b>151</b>
	<b>Eigene Veröffentlichungen . . . . .</b>	<b>163</b>
	Journalartikel . . . . .	163
	Konferenzbeiträge . . . . .	163



# Abkürzungen und Notationen

## Abkürzungen

<b>ABS</b>	Antiblockiersystem
<b>ACC</b>	Adaptive Cruise Control
<b>ASR</b>	Antriebsschlupfregelung
<b>BO</b>	Bewegungsoption
<b>CLF</b>	Control-Lyapunov-Funktion
<b>CES</b>	Consumer Electronics Show
<b>DARPA</b>	Defense Advanced Research Projects Agency
<b>EB</b>	Endbedingungen
<b>EPS</b>	Electric Power Steering (elektrische Servolenkung)
<b>FAS</b>	Fahrerassistenzsysteme
<b>GP</b>	Grundproblem
<b>GPS</b>	Global Positioning System
<b>ICS</b>	Inevitable Collision States
<b>LQ</b>	linear-quadratisch
<b>LQR</b>	Linear Quadratic Regulator
<b>MPC</b>	model predictive control (modellprädiktive Regelung)
<b>LMPC</b>	linear model predictive control (lineare modellprädiktive Regelung)

<b>NMPC</b>	nonlinear model predictive control (nichtlineare modellprädiktive Regelung)
<b>RWA</b>	Randwertaufgabe
<b>SQP</b>	sequentielles quadratisches Programm
<b>UNB</b>	Ungleichungsnebenbedingungen

## Notationensvereinbarungen

<b>Skalare</b>	nicht fett, kursiv: $a, b, c, A, B, C \dots$
<b>Vektoren</b>	klein, fett, kursiv: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \dots$
<b>Matrizen</b>	groß, fett, kursiv, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$
$()^D$	Äquivalent zeit-diskrete Systemformulierung
$()^*$	Optimale Lösung für die Variable
$\bar{()}$	interne Optimierungsvariable
$()_d$	Variable zur Beschreibung des Sollwerts
$()_r$	Variable zur Beschreibung einer vorgegebenden Referenzgröße
$\dot{()}$	Zeitableitung
$:=$	Definition
argmax	Argument mit dem maximalen Wert
argmin	Argument mit dem minimalen Wert
max	Maximum
min	Minimum

# 1 Einleitung

## 1.1 Bedeutung und Einordnung

Obwohl der weltweite Bestand an Kraftfahrzeugen stetig steigt, erweitert sich das öffentliche Straßennetz nur langsam. Beispielsweise hat sich der Fahrzeugbestand in Deutschland seit der Wiedervereinigung bei nahezu unveränderter Größe der Infrastruktur um 40 Prozent erhöht [99]. Die Gesamtfahrleistung auf deutschen Straßen wuchs laut Statistischem Bundesamt im selben Zeitraum um beinahe 30 Prozent. In Kombination mit zunehmenden Alltagsbelastungen wie Zeitdruck, Leistungsverdichtung und Informationsflut verlangt dieses stetig zunehmende Verkehrsaufkommen den Autofahrern ein immer größer werdendes Maß an Konzentration ab [31]. Aufgrund dieser Entwicklung verwundert es nicht, insbesondere vor dem Hintergrund des Demografischen Wandels [16], dass die Anzahl der in Deutschland polizeilich erfassten Verkehrsunfälle im Jahre 2013 ihren höchsten Stand erreicht hat [98] und sich seitdem auf gleichbleibend hohem Niveau hält.

Die laut der GIDAS-Unfalldatenbank<sup>1</sup> mit Abstand häufigste Unfallursache ist mit 93,5 Prozent das menschliche Fehlverhalten [116]. Offensichtlich stellen die Anforderungen des Straßenverkehrs für den Fahrer eine große Herausforderung dar und bringen diesen nicht selten an die Grenze seiner Leistungsfähigkeit [117]. Wie in Abb. 1.1 dargestellt, kann jedoch neben der beschriebenen Überforderung des Fahrers auch durch eine Unterforderung die Leistungsfähigkeit negativ beeinträchtigt werden (vgl. Yerkes-Dodson Gesetz [24]). Anschaulich gesprochen bedeutet dies, dass beispielsweise die ermüdende Eintönigkeit zähfließenden Verkehrs ebenso wie das hektische Fahrzeugumfeld in Innenstädten gefährliche Verkehrssituationen provozieren können. Zur Reduktion des daraus resultierenden Gefahrenpotenzials, streben moderne Fahrerass-

---

<sup>1</sup> GIDAS - German In-Depth Accident Study - Unfalldatenbank, Dresden, Hannover.

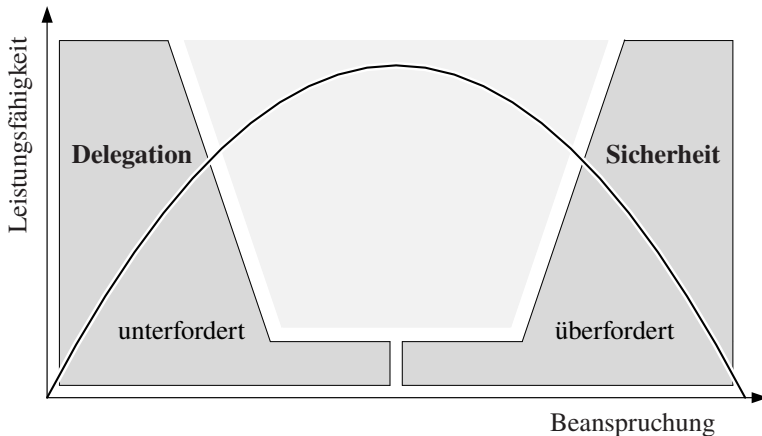


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung der menschlichen Leistungsfähigkeit bei unterschiedlichen Beanspruchungen (vgl. Yerkes-Dodson Gesetz [24])

sistenzsysteme<sup>2</sup> [13, 17, 36, 82, 117] durch automatisierte Fahreingriffe nach einer bestmöglichen Entlastung des Fahrers bei der Umsetzung der Fahraufgabe [116].

In Abhängigkeit von der Beanspruchung durch die jeweilige Verkehrssituation unterscheidet sich die Art der größtmöglichen Entlastung in erster Linie durch die Dauer der automatisierten Fahreingriffe. So verspricht, wie in Abb. 1.1 dargestellt, eine dauerhafte Delegation der Fahraufgabe typischerweise in Situationen geringer Beanspruchung (z. B. Stop-and-Go-Verkehr auf Autobahnen) die für den Fahrer größtmögliche Entlastung. Im Gegensatz dazu unterstützen kurze, zeitlich begrenzte Fahreingriffe bei plötzlich auftretenden Situationen großer Beanspruchung (z. B. Ausweich- oder Notbremsmanöver) den Fahrer bedarfsgerecht und ermöglichen eine sichere Weiterfahrt.

Mit der dauerhaften Delegation der Fahraufgabe rückt neben dem angestrebten Sicherheitspotenzial durch automatisierte Fahreingriffe [47] verstärkt auch der Komfortaspekt in den Vordergrund [118]. Aufgrund der sich daraus ergebenden Differenzierungsmöglichkeit zwischen den unterschiedlichen Automobil-

<sup>2</sup> FAS, engl. advanced driver assistance systems, ADAS.

herstellern [75] und nicht zuletzt wegen des gesteigerten Strebens der Autofahrer nach Bequemlichkeit, gewinnt dieser Aspekt immer mehr an Bedeutung. Der daraus resultierende Kompromiss zwischen Komfort und Sicherheit ist in Abb. 1.2 in Abhängigkeit der durch die jeweilige Verkehrssituation hervorgerufenen Beanspruchung schematisch dargestellt. Entsprechend des aufgezeigten Unterstützungscharakters lassen sich die Assistenzsysteme in Komfort- und Sicherheitsfunktionen unterscheiden.

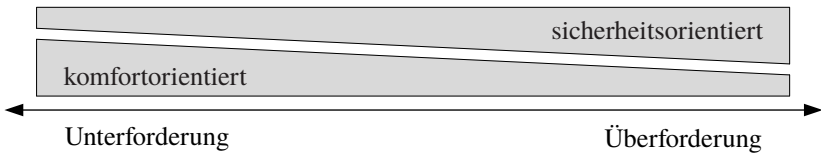


Abbildung 1.2: Unterstützungscharakter automatisierter Fahreingriffe in Abhängigkeit von der Beanspruchung des Fahrers

Für die modernen Fahrerassistenzsysteme spielt die Planung des präzisen Verlaufs der zukünftigen Fahrzeugbewegung, die sog. Trajektorienplanung<sup>3</sup>, unter Berücksichtigung der sich zeitlich verändernden Fahrzeugumgebung eine entscheidende Rolle. Deren Aufgabe ist es, sowohl für kurzzeitige Fahreingriffe als auch bei der vollständigen Übernahme der Fahraufgabe, den beschriebenen Kompromiss zwischen Komfort und Sicherheit so aufzulösen, dass ein für den Fahrer souveränes und nachvollziehbares Fahrverhalten entsteht. Um auch in komplexen Verkehrssituationen schnell auf ein dynamisches Fahrzeugumfeld oder permanent einwirkende Störungen angemessen reagieren zu können, ist es essentiell, diesen Kompromiss möglichst recheneffizient in Echtzeit zyklisch zu lösen.

Insbesondere vor dem Hintergrund der wirtschaftlich in ein Fahrzeug integrierbaren Rechenleistung [65], stellen die angesprochenen Echtzeitanforderungen für etablierte Methoden der Trajektorienplanung eine große Hürde dar. Trotz vielversprechender geplanter Erweiterungen des Leitungsumfangs der sog. Steuergeräte [20, 61, 67] zeigt die vergangene Entwicklung der in Serienfahrzeugen zur Verfügung stehenden Rechenleistung [65], dass diese auch in

<sup>3</sup> Für den Fall, dass die Trajektorienplanung durch die Lösung eines Optimierungsproblems erfolgt, spricht man auch von *Trajektorienoptimierung*.

den kommenden Jahren (vgl. Moore'sches Gesetz<sup>4</sup>) stark begrenzt sein wird. Aus diesem Grund kommt der Reduktion der für die Trajektorienplanung notwendigen Rechenleistung eine große Bedeutung zu.

## 1.2 Entwicklungsstand

Das Bestreben, den Fahrer bei der Umsetzung der Fahraufgabe bestmöglich zu entlasten, besteht seit vielen Jahrzehnten. Bereits in den 1930er Jahren war es mit Hilfe mechanischer Steuerungen möglich, das Getriebe von Automobilen zu automatisieren. Weitere assistierende Funktionen, wie die 1952 eingeführte Servolenkung oder der 1955 verfügbare Bremskraftverstärker, griffen bereits zu dieser frühen Zeit in die Fahrzeugquer- und -längsdynamik ein. Auch wenn diese Eingriffe nur passiv<sup>5</sup> erfolgen, bestätigt die inzwischen als unerlässlich empfundene Unterstützung die Wirksamkeit solcher Systeme.

Mit dem Einsatz von Sensoren zur Messung des eigenen Fahrzustandes und zusätzlichen elektronischen Recheneinheiten konnte 1978 durch die Einführung des Antiblockiersystems<sup>6</sup> ABS, nicht nur passiv auf die Fahrdynamik des Fahrzeugs eingewirkt werden, sondern erstmalig auch ohne Initiative des Fahrers das Fahrgeschehen aktiv beeinflusst werden. Dank weiterentwickelter Sensorik und gesteigerter Rechenleistung der Steuergeräte wächst seither die Anzahl von Assistenzfunktionen mit automatisierten Fahreingriffen. So verhindert z. B. das seit 1995 verfügbare elektronische Stabilitätsprogramm ESP durch gezieltes Abbremsen einzelner Räder im Millisekundenbereich das Schleudern des Fahrzeugs beim Ausweichen und in Kurven.

Im Unterschied zu diesen, rein stabilisierenden Systemen, die ausschließlich auf Messungen bzw. Beobachtungen des eigenen Fahrzustandes basieren, nutzen die modernen Fahrerassistenzsysteme mittels Radar-, Kamera- und Ultraschallsensorik zusätzliche Informationen aus der Fahrzeugumgebung und

---

<sup>4</sup> Das Moore'sche Gesetz besagt, dass sich die Komplexität integrierter Schaltkreise ca. alle zwei Jahre verdoppelt [92].

<sup>5</sup> Ohne die Initiative des Fahrers erfolgen keine Eingriffe, sodass lediglich eine vom Fahrer aufgebrauchte Kraft verstärkt wird.

<sup>6</sup> Das Antiblockiersystem verhindert bei starkem Bremsen ein blockieren der Räder und stellt damit die Lenkfähigkeit des Fahrzeugs auch bei Vollverzögerungen sicher.



berechnen aufbauend darauf die erforderlichen Fahreingriffe. Dadurch sind heute bereits in Serie befindliche Notbremsassistenten in der Lage, die Anzahl schwerer Unfälle mit Personenschaden um 28 Prozent zu reduzieren [50]. Bei Lkw führt der Einsatz von Spurhalteassistenten zu einer Reduktion von Unfällen durch Spurverlassen auf Autobahnen um 49 Prozent [60]. Zu dieser bedeutsamen Steigerung der Sicherheit durch die Berücksichtigung der Fahrumgebung treten Funktionen wie der Abstandsregeltempomat<sup>7</sup> oder der Stauassistent, welcher bei niedrigen Geschwindigkeiten sowohl die Längs- als auch die Querverführung des Fahrzeugs übernimmt, hinzu und erfreuen sich immer größerer Beliebtheit.

Die internationalen Forschungsaktivitäten und Entwicklungsbestrebungen bei Fahrzeugherstellern [2, 120] und Automobilzulieferern [10] gehen allerdings noch einen Schritt weiter. Deren Bestreben ist es, die technischen Systeme im Fahrzeug soweit zu befähigen, dass durch eine sukzessive Erhöhung des Automatisierungsgrads<sup>8</sup> langfristig die vollständige Übernahme der Fahraufgabe durch das Fahrzeug möglich wird [47]. Um das zu erreichen, ist es im Unterschied zu den in Serie befindlichen Fahrerassistenzfunktionen notwendig, gesamtheitliche Konzepte zu entwickeln. Diese sollten sowohl für eine Vielzahl komplexer Verkehrssituationen universell eingesetzt werden können, als auch in der Lage sein, das gesamte Dynamikpotenzial des Fahrzeugs vor allem in Notsituationen auszuschöpfen.

Erste vielversprechende Ansätze dazu wurden im Rahmen der DARPA Urban Challenge<sup>9</sup> entwickelt. Die Finalisten des internationalen Wettbewerbs stellten im Jahre 2007 unter Beweis, dass mithilfe stimmiger Gesamtkonzepte Fahrzeuge dazu fähig sind, fahrerlos im stilisierten<sup>10</sup> Vorstadtverkehr zu manövrieren [7, 66, 83, 85, 93, 100, 104]. Anders als im realen Straßenverkehr konnten für den Wettbewerb allerdings vereinfachende Annahmen über die Bewegung anderer Verkehrsteilnehmer getroffen werden. So war es aufgrund der rela-

---

<sup>7</sup> Adaptive Cruise Control, ACC.

<sup>8</sup> Nach Definition der Bundesanstalt für Straßenwesen (BAST) unterschieden sich Teil-, Hoch- und Vollautomatisierung in erster Linie durch die vom Fahrer erforderliche Überwachung des Systems.

<sup>9</sup> Von der Defense Advanced Research Projects Agency (DARPA) ausgetragener Wettkampf zur Förderung der Entwicklung fahrerloser Fahrzeuge.

<sup>10</sup> Fußgänger, Fahrrad- oder Motorradfahrer wurden von vornherein durch die Wettkampfgeln ausgeschlossen [29].

tiv niedrigen Fahrgeschwindigkeiten und der großen Fahrzeugabstände aller Verkehrsteilnehmer zulässig, die *quasi-statische* Umgebung durch konservative Abschätzungen auf eine statische zu reduzieren [110]. Dies ermöglichte, bei der Planung der zukünftigen Fahrzeugbewegung ausschließlich *bahnba-sierte* Konzepte zu verwenden, für welche jedoch Kollisionsfreiheit entlang des geplanten, abzufahrenden Pfades<sup>11</sup> lediglich für statische Hindernisse sichergestellt werden kann. Da diese Annahmen bei größerer Verkehrsdichte und -geschwindigkeit nicht mehr gerechtfertigt sind, ist eine Übertragung der entworfenen bahnbasierten Algorithmen auf reale Verkehrssituationen nicht gegeben [42].

Aus diesem Grund ist für die Planung einer sicheren und komfortablen zukünftigen Fahrzeugbewegung für komplexe und zeitkritische Manöver des realen Straßenverkehrs, wie

- die Kollisionsvermeidung mit bewegten Hindernissen,
- das Einfädeln in den fließenden Verkehr,
- das Abstandhalten bei hohen Verkehrsaufkommen,

die explizite Berücksichtigung der Zeit  $t$  essentiell. Das macht die Anwendung von trajektorienbasierten<sup>12</sup> Lösungsansätzen erforderlich [107]. Bis heute haben sich nur wenige Ansätze zur Trajektorienplanung für Fahrzeuge in der Literatur etabliert. In den überwiegenden Fällen werden Algorithmen vorgestellt, welche nur schwer auf universelle Anwendungsfälle verallgemeinerbar sind. Hervorzuheben sind daher die Arbeiten von Werling [111] und Ziegler [119]. In beiden Fällen ist es gelungen, gesamtheitliche Konzepte zur Trajektorienplanung zu entwickeln, welche sowohl für assistierende Fahrfunktionen als auch für das vollautomatisierte Fahren eingesetzt werden können. In Kombination mit der gesteigerten Leistungsfähigkeit verfügbarer Umfeldsensorik tragen diese Arbeiten maßgeblich dazu bei, dass prototypisch modifizierte Versuchsfahrzeuge im öffentlichen Straßenverkehr selbstständig fahren und immer wieder für Erfolgsmeldungen sorgen [28, 105].

---

<sup>11</sup> Synonym für Bahn und Kurve.

<sup>12</sup> Obwohl viele Veröffentlichungen die „Trajektorie“ synonym für „Bahn“ verwenden, wird im Rahmen der Arbeit strikt zwischen den beiden Begriffen differenziert [107].

Für die im Wettbewerb stehenden Automobilhersteller, welche unter Hochdruck daran arbeiten, die aktuellen Erkenntnisse aus der Forschung für den Kunden als innovative Funktionen umzusetzen, sind diese gesamtheitlichen Ansätze zur Trajektorienplanung besonders lukrativ. Sie bieten weitreichende Möglichkeiten, den Entwicklungsprozess für zukünftige Fahrerassistenzfunktionen zu vereinheitlichen, um so den Integrationsaufwand für das Gesamtfahrzeug zu verringern. Da etablierte Methoden den Kostenaspekt für die zu verwendende Hardware vernachlässigen, ist zwar auf der einen Seite der für die prototypische Umsetzung kostspielige, aber notwendige Einsatz leistungsfähiger Prozessoren<sup>13</sup> akzeptabel, stellt aber auf der anderen Seite für den Einsatz in Serienfahrzeugen eine bis heute unüberwindbare Hürde dar. Um diese große Lücke zwischen den auch in Zukunft stark beschränkten<sup>14</sup> wirtschaftlich ins Fahrzeug integrierbaren Rechenressourcen und der zur Berechnung der etablierten Methoden notwendigen Rechenleistung zu schließen, sind neue, effiziente Ansätze zur Planung von Trajektorien für automatisierte Fahreingriffe zu entwickeln. Die Automobilindustrie könnte so bereits in wenigen Jahren von einer wirtschaftlich attraktiven und universell einsetzbaren Methodik zur Trajektorienplanung profitieren.

---

<sup>13</sup> Diese Prozessoren besitzen meist mehrere Kerne, haben einen Arbeitsspeicher von mehreren Gigabyte und sind mit mehreren Gigahertz getaktet.

<sup>14</sup> Die aktuellsten Prozessoren für automobiler Anwendungen haben Taktraten zwischen 200 – 300MHz und interne Speicher im einstelligen Megabyte Bereich, vgl. [62].

## 1.3 Zielsetzung der Arbeit

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, den für die Trajektorienplanung von automatisierten Fahreingriffen notwendigen Rechenaufwand gegenüber bestehen Ansätzen um den Faktor 10-100 zu reduzieren, um deren Berechnung bereits in wenigen Jahren trotz gering verfügbarer Rechenleistung in Serien-Fahrzeugen zu ermöglichen.

Die hierfür zu entwickelnden Algorithmen sind mit ausgewählten modernen Methoden der Regelungstechnik herzuleiten und ihre praktische Relevanz anhand neuartiger Fahrerassistenzfunktionen und realer Fahrversuche nachzuweisen. Die folgenden Anforderungen bzw. Randbedingungen sind zu berücksichtigen:

- Grundfunktionalitäten bestehender Ansätze zur Trajektorienplanung, wie z. B. die Kollisionsvermeidung mit statischen und dynamischen Objekten oder die Berücksichtigung fahrphysikalischer Beschränkungen, müssen integriert werden.
- Die verwendete Methodik zur Trajektorienplanung muss für unterschiedliche automatisierte Fahrfunktionen und Automatisierungsgrade universell einsetzbar sein, insbesondere sollten die zu entwickelnden Ansätze sowohl für Sicherheits- als auch für Komfortfunktionen geeignet sein.
- Störungen<sup>15</sup> sind durch die Trajektorienplanung in Kombination mit einer unterlagerten Stabilisierungsebene schnell und robust zu auszuregeln.
- Das durch die Trajektorienplanung erzeugte Fahrverhalten sollte vergleichbar mit dem eines menschlichen Fahrers sein und von diesem als natürlich und an die Fahrsituation angepasst empfunden werden.

Durch den praktischen Anwendungsbezug der zu entwickelnden Trajektorienplanungsmethodik, kommen für die prototypische Umsetzung folgende Punkte hinzu:

---

<sup>15</sup> Typische Störungen sind neben menschlichen Fahreingriffen, z. B. Windböen, seitlich geneigte Fahrbahnen oder Fahrbahnunebenheiten, wie Schlaglöcher.

- Die umzusetzenden Fahrerassistenzfunktionen sollten auch von nicht ausgebildeten Testfahrern einfach zu bedienen sein.
- Die eingesetzte Rechenleistung sollte einer in wenigen Jahren im Serienfahrzeug zur Verfügung stehenden entsprechen.
- Algorithmen sind in der Art zu entwerfen, dass eine intuitive Parametrierung durch einfache Fahrttests für unterschiedliche Fahrzeuge erreicht werden kann.
- Schnittstellen zu überlagerten und unterlagerten Funktionsarchitekturebenen sind modular aufzubauen, sodass eine Weiterentwicklung verschiedener Funktionsanteile auch zu einer Verbesserung des Gesamtsystems führt.

Dazu wird in **Kapitel 2** die Relevanz der Trajektorienplanung im Kontext der Fahraufgabe dargestellt und aufbauend darauf die Herausforderungen bei der Berechnung derselben umfassend beleuchtet. Ausgehend davon werden Anforderungen an die zu verwendende Methodik zusammengefasst. Dabei werden bestehende Ansätze zur Lösung des Trajektorienplanungsproblems in Bezug auf die gestellten Anforderungen auf Vor- und Nachteile diskutiert und das Potenzial alternativer Methoden analysiert. Auf Basis dieser Analyse erfolgt abschließend die Ableitung einer zweckmäßigen Methodik zur effizienten Trajektorienberechnung.

In **Kapitel 3** werden die Grundlagen dieser Methodik zusammengefasst und für die Anwendung zur Planung automatisierter Fahreingriffe im Allgemeinen erweitert. Dabei folgt dieses Kapitel inhaltlich dem vorausgehenden und bildet, wie in Abb. 1.3 dargestellt, den Ausgangspunkt für die nachfolgenden Kapitel.

Unter Verwendung der hergeleiteten Grundlagen wird in **Kapitel 4** die Planung der Fahrzeuglängsbewegung mittels zweier unterschiedlicher linear-quadratischer Problemformulierung vorgestellt. Der wesentliche Unterschied dieser Problemformulierungen ergibt sich durch die Berücksichtigung von Beschränkungen. Die besonderen Eigenschaften der Problemformulierung unter Vernachlässigung von Beschränkungen machen deren gezielten Einsatz bei der Entwicklung verschiedener Assistenzsysteme vorteilhaft. Die Umsetzung einer neuartigen Funktion zur verlässlichen Kollisionsvermeidung beim Parken und Rangieren für den gesamten Fahrzeugumriss verdeutlicht dies. Demgegenüber bietet die zweite hergeleitete Problemformulierung in Situationen, in denen

nicht zugunsten eines reduzierten Rechenaufwands auf die Berücksichtigung von Beschränkungen verzichtet werden kann, eine funktional umfassende Alternative.

Ebenfalls auf Basis der in Kapitel 3 abgeleiteten Grundlagen wird in **Kapitel 5** ein besonders effizienter Algorithmus zur Fahrzeugquerführung hergeleitet. Indem die Bewegung des Fahrzeugs als lineares Bewegungsmodell entlang einer Referenzkurve mit unzeitigem Krümmungsverlauf formuliert wird, ergibt sich in Kombination mit einem quadratischen Kostenfunktional eine linear-quadratische Problembeschreibung. Durch die Formulierung zusätzlicher, linearer Nebenbedingungen ist es möglich, nicht nur eine kollisionsfreie Fahrzeugbewegung im dynamischem Umfeld zu planen, sondern dabei auch fahrphysikalische Beschränkungen zu berücksichtigen. Die effiziente Lösungsmöglichkeit der verwendeten Problemformulierung erlaubt den Einsatz des Algorithmus für unterschiedliche Assistenzfunktionen mit aktiver Querführung.

**Kapitel 6** gibt einen kurzen Überblick über die hardware- und softwaretechnische Umsetzung im Versuchsfahrzeug. Aufbauend darauf werden die vorgestellten Algorithmen für die entwickelten Fahrerassistenzfunktionen und zur Trajektorienplanung, gesondert für die Längs- und Querführung, isolierten Tests unterzogen, um deren Verhalten in verschiedenen Szenarien im Realversuch zu validieren und deren Performanz ausgiebig diskutieren zu können.

Abschließend fasst **Kapitel 7** die wesentlichen Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zusammen und gibt einen Ausblick.

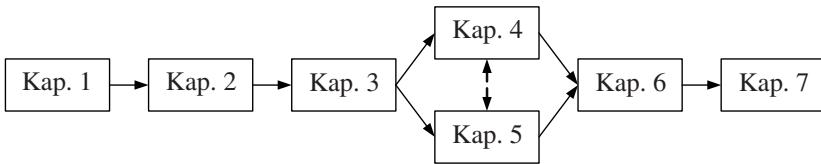


Abbildung 1.3: Übersichtsdarstellung und Vernetzung der einzelnen Kapitel

## 2 Ableitung einer Methodik zur recheneffizienten Trajektorienplanung

Im Allgemeinen beschäftigt sich die Trajektorienplanung mit der Bestimmung eines zeitlichen Verlaufs für den Übergang von Systemzuständen, der ggf. systembedingte Beschränkungen berücksichtigt und möglichst „optimal“ in Bezug auf vordefinierte Kriterien ist [81]. Aus Sicht der Fahrzeuganwendung ist es daher die Aufgabe der Trajektorienplanung, ausgehend vom aktuellen Fahrzustand, die Fahrzeugbewegung bis zu einem beliebigen Zielzustand in der Art zu bestimmen, dass diese als souverän und nachvollziehbar von den Fahrzeuginsassen empfunden wird und gleichzeitig die Einhaltung der jeweils geltenden Straßenverkehrsordnung sicherstellt. Die hohe Komplexität dieser Aufgabe macht eine technische Umsetzung in Serienfahrzeugen nur unter vereinfachenden Annahmen möglich.

Da Vereinfachungen jedoch stets von Kompromissen begleitet und abhängig von den eingesetzten Methoden sind, ist die Ableitung dieser Annahmen keinesfalls trivial. Um konkrete Anforderungen an die Trajektorienplanung stellen zu können, wird im vorliegenden Kapitel auf Basis eines etablierten Fahrermodells die Fahraufgabe in drei Ebenen untergliedert. Unter Berücksichtigung der Recheneffizienz dienen diese Anforderungen als Grundlage zur Bewertung der Vor- und Nachteile bestehender Ansätze zur Trajektorienplanung. Folglich wird das Planungsproblem in Form eines Optimierungsproblems formuliert, für welches verschiedene Lösungsmethoden vorgestellt und unter den entsprechenden Gesichtspunkten diskutiert werden. Nach der Motivation weiterführender Annahmen erfolgt der Vorschlag einer effizienten Methodik zur Trajektorienplanung und deren abschließende Bewertung.

## 2.1 Klassifikation der Fahraufgabe

### 2.1.1 Drei-Ebenen-Modell

Entsprechend [34] besteht laut [109] die übergeordnete Fahraufgabe darin, das Kraftfahrzeug mit Hilfe von Fahreingriffen unter Berücksichtigung der verfügbaren Information sicher an einen Zielort zu überführen. Eine Unterteilung in hierarchisch verknüpfte Einzelaufgaben kann über das Drei-Ebenen-Modell erfolgen [33]. Wie in Abb. 2.1 dargestellt, orientiert sich die Aufteilung an der Struktur eines kaskadierten Regelkreises [52], sodass die jeweils übergeordnete Ebene alle, zur Lösung der nachfolgenden Einzelaufgabe notwendigen Informationen zur Verfügung stellt.

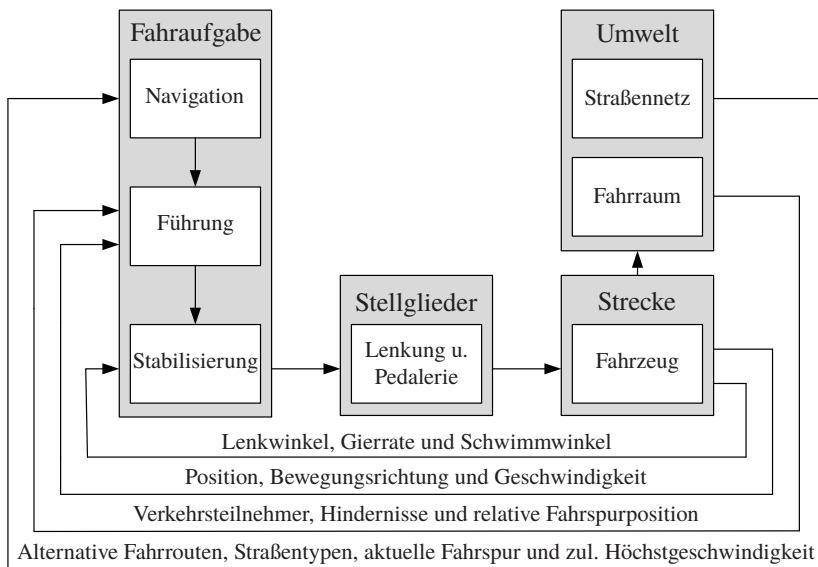


Abbildung 2.1: Für die Planung automatisierter Fahreingriffe modifiziertes Drei-Ebenen-Modell, vgl. [35, 109]

Hierbei umfasst die **Navigationsebene** die Bestimmung einer zielführenden Fahrroute ausgehend vom aktuellen Fahrzeugort unter Berücksichtigung der Fahrzeit und des Verbrauchs. Dies geschieht typischerweise unter Vernachlässi-



gung der Fahrphysik, da diese für Fahrzeiten von bis zu mehreren Stunden eine stark untergeordnete Rolle spielt. Gleichzeitig ist es ausreichend, aufgrund der sich nur langsam verändernden Verkehrslage, die Bestimmung der Fahrroute zu wenigen diskreten Zeitpunkten pro Minute auszuführen. Die nachgeschaltete **Führungsebene** setzt die Fahrroute in Form konkreter Fahrmanöver um. Unter Beachtung des aktuellen Fahrzustands sowie des prädizierten Fahrraums stehen bei der Wahl der zukünftigen Fahrmanöver der Komfort und die Verkehrssicherheit im Vordergrund. Aber auch fahrphysikalische Beschränkungen wie die maximal mögliche Traktion können an dieser Stelle Berücksichtigung finden. Die Realisierung des gewählten Manövers erfolgt auf der unterlagerten **Stabilisierungsebene**. Mittels entsprechender Eingriffe in Gas, Bremse und Lenkung wird die gewünschte Fahrzeugbewegung erzeugt.

### 2.1.2 Anforderungen an die Trajektorienplanung

Die Anforderungen an die technische Umsetzung der Trajektorienplanung für automatisierte Fahreingriffe werden aus der durch das menschliche Verhalten motivierten hierarchisch abstrahierten Aufteilung der Fahraufgabe abgeleitet. Wie in Abb. 2.1 dargestellt, nimmt die Bestimmung eines Fahrmanövers auf der Führungsebene eine zentrale Rolle bei der Planung der zukünftigen Fahrzeugbewegung ein. Obwohl im erweiterten Sinn auch auf der Navigationsebene eine Planung der Fahrzeugbewegung erfolgt, leiten sich von dieser Ebene für die Trajektorienplanung keine Anforderungen ab, da die Ermittlung einer Fahrroute losgelöst von der aktuellen Fahrsituation und zeitlich unabhängig erfolgen kann. Vielmehr stellt die Navigationsebene der Trajektorienplanung eine zeitlich invariante Referenz<sup>1</sup> zur Verfügung, entlang derer die Fahrzeugbewegung situationsgerecht geplant werden kann. Dementsprechend beschränken sich die abzuleitenden Anforderungen auf die Aufgaben der Führungsebene.

Diese Aufgaben sind in Abb. 2.2 für eine beispielhafte, komplexe Verkehrssituation abgebildet. In dieser fährt das betreffende Fahrzeug<sup>2</sup> entlang einer gekrümmten, einspurigen Straße, wobei parkende Fahrzeuge und bewegte Verkehrsteilnehmer wie Fußgänger, Motorräder und weitere fahrende Fahrzeuge den zur Verfügung stehenden Fahrraum einschränken. Ein auf die Fahrbahn

<sup>1</sup> Für viele Anwendungen dient der Verlauf der Fahrbahnmitte als Referenzkurve [111].

<sup>2</sup> In der Literatur hat sich der Begriff *Egofahrzeug* als Bezeichnung durchgesetzt.

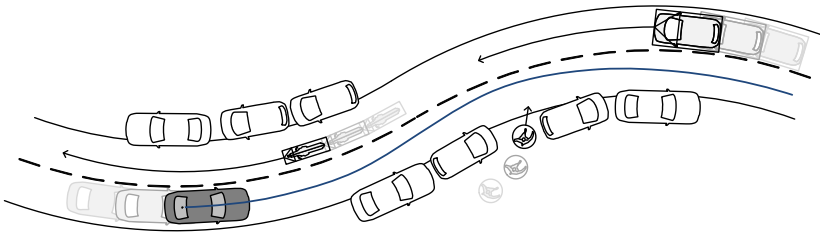


Abbildung 2.2: Aufgaben der Trajektorienplanung an einer komplexen Verkehrssituation mit bewegten Verkehrsteilnehmern (Kreise und Rechtecke) und geplanter zukünftiger Fahrzeugbewegung (blaue Kurve)

tretender Fußgänger provoziert in Kombination mit gleichzeitig entgegenkommendem Verkehr eine situationsgerechte Fahrzeugreaktion durch die Planung eines geeigneten Fahrmanövers, dargestellt als blaue Kurve. Zur Umsetzung dieser Aufgabe ist es für die Trajektorienplanung im Einzelnen notwendig, die im Folgenden beschriebenen Eigenschaften und Fähigkeiten zu besitzen.

Die fundamentale Anforderung an die Trajektorienplanung ist die Sicherstellung der Kollisionsfreiheit bei der zukünftigen Bewegung des Fahrzeugs. Wie im Beispiel aufgezeigt, sind hierzu im universellen Fall die statischen (unbewegten) Hindernissen und dynamischen (bewegten) Objekten zu beachten. Die Bewegung anderer Verkehrsteilnehmer hat besonderen Einfluss auf die eigene Bewegungsplanung. Aufgrund dieser wird der zur Verfügung stehende Fahrraum nicht nur entsprechend der aktuellen Objektpositionen beschränkt - wie es bei statischen Hindernissen der Fall ist - sondern auch durch deren zukünftige Positionen, welche sich entsprechend ihrer Geschwindigkeit in Abhängigkeit der Zeit verändern. Aus diesem Grund ist es bei dynamischen Objekten unumgänglich, die Zeit  $t$  explizit bei der Bewegungsplanung zu berücksichtigen.

Um die Fahrzeugbewegung rechtzeitig an die sich verändernden Verkehrssituationen anpassen zu können, muss die Trajektorienplanung dazu in der Lage sein, die zukünftige Bewegung auf einer ausreichenden zeitlichen Vorausschau zu planen. Je größer der Planungshorizont gewählt ist, desto früher kann situationsgerecht reagiert werden, was wiederum Freiheitsgrade für die Planung des bevorstehenden Manövers eröffnet. Beispielsweise durch die Minimie-

nung der Beschleunigung und des Ruckes<sup>3</sup>, können diese Freiheitsgrade dazu genutzt werden, neben der Kollisionsfreiheit auch Komfortaspekte bei der Bewegungsplanung zu berücksichtigen, wodurch ein natürliches, dem Menschen nachempfundenen Fahrverhalten erzeugt wird. Aufgrund der eingeschränkten Zuverlässigkeit der Bewegungsprädiktion anderer Verkehrsteilnehmer und des begrenzten Erfassungsbereichs der Sensorik, ist ein Planungshorizont im einstelligen Sekundenbereich allerdings ausreichend.

Die Anforderung eines möglichst großen Planungshorizonts steht jedoch im Widerspruch zu einer vorzugsweise kurzen Berechnungszeit des Trajektorienplanungsproblems. Diese ist ausschlaggebend, um durch zyklische Neuplanung der Eigenbewegung schnell auf plötzlich auftretende Veränderungen in der Fahrzeugumgebung reagieren zu können. Zudem bietet eine schnelle und häufige Neuplanung der Trajektorien ausgehend vom momentanen Fahrzeug-Istzustand und in Kombination mit einer unterlagerten Regelung die Möglichkeit, eine qualitativ hochwertige Stabilisierung des Gesamtsystems zu erreichen [109].

Zur Vermeidung ungewünschter Wechselwirkungen zwischen der stabilisierenden Regelung und der Bewegungsplanung ist von Seiten der Trajektorienplanung, die Einhaltung fahrphysikalischer Beschränkungen zu gewährleisten. Auch in fahrphysikalisch kritischen Situationen muss durch konservative Abschätzung der Traktionsverhältnisse und Verwendung des gesamten, verfügbaren Manörraums der unterlagerten Stabilisierung genügend Spielraum gewährt werden, um die geplanten Manöver sicher ausführen zu können.

Zusätzlich zu den aufgeführten Anforderungen ist sicherzustellen, dass sprunghafte Wechsel zwischen unterschiedlichen Manöveroptionen, welche durch leicht variierende Umgebungsbedingungen oder Sensorrauschen verursacht werden können, durch die Trajektorienplanung zu vermeiden sind. Ein unbeständiger Bewegungsverlauf führt zu einer Reduktion des Fahrkomforts und steht folglich nicht im Einklang mit der menschlichen Fahrweise.

Unter der Prämisse einer aus wirtschaftlichen Gründen zu minimierenden Rechenleistung und der Einhaltung der Straßenverkehrsordnung besteht die übergeordnete Aufgabe der Trajektorienplanung in der Erzeugung eines si-

---

<sup>3</sup> Mit dem Ruck wird die zeitliche Ableitung der Beschleunigung bezeichnet.

chere und komfortable Fahrverhaltens, deren zentrale Anforderungen sich zusammenfassend darstellen lassen als:

- Kollisionsvermeidung mit statischen und dynamischen Objekten,
- Berücksichtigung fahrphysikalischer Beschränkungen,
- Erzeugung eines natürlichen Fahrverhaltens,
- Planungshorizont im einstelligen Sekundenbereich,
- Zyklische Neuplanung im Millisekundenbereich.

## 2.2 Trajektorienplanung als Optimierungsproblem

In der Literatur findet sich eine Vielzahl unterschiedlicher Methoden zur Trajektorienplanung. Da deren Anwendung meist nur unter weitreichend einschränkenden Annahmen eine erfolgreiche Problemformulierung im Kontext automatisierter Fahreingriffe zulässt, sind eine Reihe von Ansätzen nur unter Abstrichen in der Lage, die im vorherigen Abschnitt abgeleiteten Anforderungen i. Allg. zu erfüllen. So ist beispielsweise der Einsatz vergleichsweise eingängiger Heuristiken in Kombination mit bahnbasierten Planungsansätzen für isolierte Verkehrssituationen unter vereinfachenden Annahmen ausreichend [110], führt jedoch bei einer Erweiterung auf verallgemeinerte Verkehrsgegebenheiten<sup>4</sup> zu einem ungewollten Verhalten oder sogar zu Unfällen [42].

Im Gegensatz dazu hat sich die Theorie der Optimierung bei der Planung von Fahrtrajektorien als besonders vorteilhaft erwiesen. Deren Eigenschaften ermöglichen es, bei probater Formulierung eines Optimierungsproblems den durch die Anforderungen bedingten Kompromiss zwischen Komfort und Sicherheit mithilfe einfacher Parametrierungen zielführend aufzulösen. Gleichzeitig können zusätzlich geltende Beschränkungen eingehalten werden. Allerdings ergeben sich in Abhängigkeit der verschiedenen Klassen von Opti-

---

<sup>4</sup> Dazu zählen z. B. die Berücksichtigung dynamischer Objekte bei zeitkritischen Verkehrssituationen wie einem Spurwechsel bei hohem Verkehrsaufkommen.

mierungsproblemen und der entsprechenden Optimierungsmethoden auch an dieser Stelle Unterschiede hinsichtlich ihrer Eignung für das Bewegungsplanungsproblem für Fahrzeuge.

So eignen sich Problemformulierungen, welche keine differentiellen Nebenbedingungen beinhalten, nur bedingt für die Bewegungsplanung von Fahrzeugen. Ein weitverbreiteter Ansatz dieser Art von Optimierungsproblemen sind die sog. Potenzialfeldmethoden [22, 71]. Trotz Verwendung intuitiver Ersatzmodelle können die Systemdynamik von Fahrzeugen und die damit verbundenen fahrphysikalischen Beschränkungen nur indirekt bei der Optimierung berücksichtigt werden [70].

Aus diesen dargestellten Zusammenhängen hat sich in den vergangenen Jahren die Optimierung mit differentiellen Beschränkungen zur Trajektorienplanung etabliert [5, 57, 91, 112]. Auch die vorliegende Arbeit widmet sich im Folgenden geeigneten mathematischen Formulierungen sog. Optimalsteuerungsprobleme zur Planung von Fahrtrajektorien, welche durch die Wahl qualifizierter Optimierungsmethoden effizient gelöst werden können. Da die Planung der Trajektorien durch Lösung eines Optimierungsproblems erfolgt, spricht man von Trajektorienoptimierung.

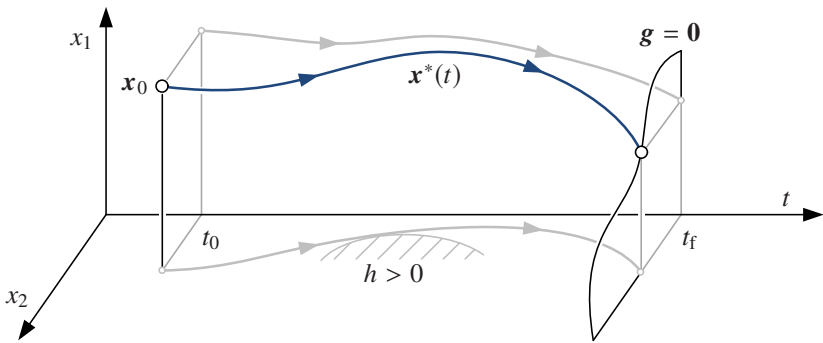


Abbildung 2.3: Optimaler Zustandsverlauf  $x^*(t)$  (blau) eines Optimalsteuerungsproblems unter Berücksichtigung von Endbedingung  $g = 0$  und Ungleichungsbeschränkung  $h \leq 0$  für  $x_2$  sowie fester Endzeit  $t_f$  nach [109]

## 2.2.1 Mathematische Formulierung

Im Unterschied zur *statischen* Optimierung, bei der die Optimierungsvariablen  $\mathbf{x}$  Elemente des Euklidischen Raums  $\mathbb{R}^n$  sind, widmet sich die *dynamische* Optimierung der Bestimmung von Funktionen  $\mathbf{x}(t)$  einer unabhängigen Variable  $t$  (z. B. der Zeit), welche ein Kostenfunktional<sup>5</sup> minimiert [53]. Einen Sonderfall stellen die *Optimalsteuerungsprobleme* dar, für welche die zu bestimmende Funktion, die Eingangstrajektorie eines dynamischen Systems ist. Die Systemdynamik wird in Form der zuvor angesprochenen differenziellen Beschränkungen bei der Optimierung berücksichtigt.

Eine in der Literatur [53, 90, 109] häufig verwendete Struktur des Optimalsteuerungsproblems lautet:

Minimiere das Kostenfunktional

$$J(\mathbf{u}) = \int_{t_0}^{t_f} l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) dt + V(\mathbf{x}_f, t_f) \quad (2.1a)$$

unter Berücksichtigung der Systemdynamik

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f, \quad (2.1b)$$

sowie der Endbedingungen und Ungleichungsbeschränkungen

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_f, t_f) = \mathbf{0}, \quad (2.1c)$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \leq \mathbf{0}, \quad (2.1d)$$

bezüglich des Signalverlaufes  $\mathbf{u}(t)$  für  $t \in [t_0, t_f]$ .

Die Problematik der Optimalsteuerung besteht nun darin, für das (i. Allg. nicht-lineare und zeitvariante) dynamische System (2.1b) mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  und Eingangsvektor  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  eine Steuertrajektorie  $\mathbf{u}^*(t)$  auf dem Intervall  $t \in [t_0, t_f]$  so zu bestimmen, dass die Zustandstrajektorie  $\mathbf{x}^*(t)$  ausgehend vom Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  den Endzustand  $\mathbf{x}_f$  erreicht, die Unglei-

---

<sup>5</sup> In der Literatur werden die Begriffe *Gütefunktional* und *Kostenfunktional* synonym verwendet, da sich deren implizierte Maximierung bzw. Minimierung durch einen Vorzeichenwechsel der Bewertungsfunktion ineinander überführen lässt [90].

chungsbedingungen (UNB)  $\mathbf{h} \leq \mathbf{0}$  und Endbedingungen (EB)  $\mathbf{g} = \mathbf{0}$  erfüllt sind und gleichzeitig das Kostenfunktional  $J$  minimiert wird (siehe Abb. 2.3). In der hier dargestellten *Bolza-Form* setzt sich das Kostenfunktional (2.1a) aus den Interalkosten  $l$  und den Endkosten  $V$ , dem sog. Mayer-Term, zusammen [53].

In Abhängigkeit der Anwendung kann die Endzeit  $t_f$  vorgegeben oder unbekannt sein, weshalb von einer *festen* bzw. *freien Endzeit* gesprochen wird. Im Fall einer freien Endzeit, ist  $t_f$  Teil des Optimierungsproblems. Beim Entfall der Endbedingung  $\mathbf{g} = \mathbf{0}$  spricht man äquivalent von einem *freien Endzustand*.

Mit Blick auf die Fahrzeuganwendung können die einzelnen Bestandteile des Optimierungsproblems folgendermaßen verstanden werden [109]: Das Systemmodell (2.1b) dient der Beschreibung der Bewegungsdynamik des Fahrzeugs. Ziel der Optimierung ist folglich die Bestimmung der Steuertrajektorie in Form der zukünftigen Verläufe für Lenkung, Gas und Bremse. Unerwünschte Fahrzeugbewegungen wie das Abweichen von der Straßenmitte oder unkomfortables, hektisches Beschleunigen und Bremsen sind im Kostenfunktional (2.1a) zu bestrafen. Die hieraus resultierenden Kosten  $J$  ermöglichen es, die Lösungen des Optimierungsproblems für verschiedene Manöroptionen objektiv gegenüberzustellen. Zusätzlich können die Ungleichungsbeschränkungen (2.1d), wie in Abb. 2.3 angedeutet, eingesetzt werden, den Fahrraum in der Art einzuschränken, dass die Kollisionsfreiheit inmitten von Hindernissen sichergestellt ist. Die Berücksichtigung dynamischer Hindernisse macht eine zeitvariante Formulierung der Beschränkungen auf Basis der präzidierten Fahrzeugumgebung notwendig. Über die Endbedingungen (2.1c) bietet sich die Möglichkeit, einen definierten Zielzustand, etwa eine gewünschte Zielgeschwindigkeit, am Manöverende vorzugeben. Abschließend sei darauf hingewiesen, dass die Wahl der Endkosten  $V$  und der Beschränkungen  $\mathbf{h}$  eine entscheidende Rolle bei der im folgenden Abschnitt beschriebenen, zyklischen Lösung des Optimierungsproblems spielt.

## 2.2.2 Modellprädiktive Trajektorienoptimierung

Den Anforderungen aus Abschn. 2.1.2 zufolge, ist zur Berücksichtigung des sich fortwährend verändernden Fahrumfelds und -zustands eine permanente Anpassung der Fahrzeugbewegung gemäß der aktuellen Umgebungsinformationen erforderlich. Entsprechend dem Grundprinzip der modellprädiktiven

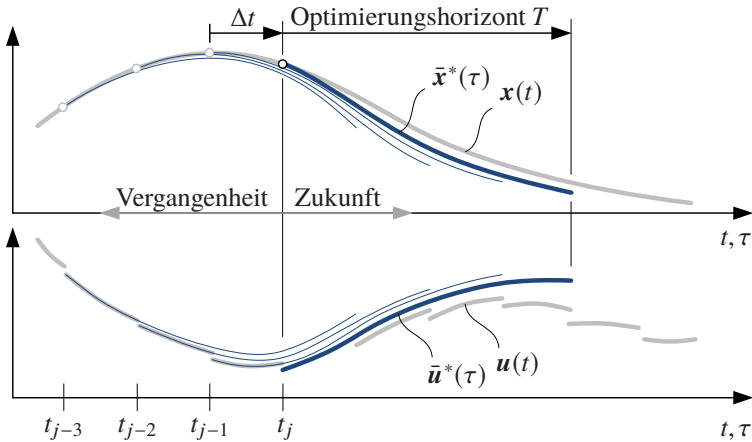


Abbildung 2.4: Grundprinzip der modellprädiktiven Regelung nach [109]; dick, blau: Verlauf der optimierten Zustands- und Stellgrößen zum internen Zeitpunkt  $t_j$ ; dünn, blau: intern optimierte Verläufe vergangener Zeitpunkte; dick, grau: tatsächlicher Verlauf des geschlossenen Regelkreises

Regelung (MPC), kann diese durch das zyklische Lösen des Optimalsteuerungsproblems (2.1) in kurzen Abständen  $\Delta t$  auf einem fortschreitenden Optimierungshorizont der Länge  $T$  erreicht werden [40, 53, 56, 64]. Wie in Abb. 2.4 dargestellt, wird in jedem Schritt die ausgehend vom Systemzustand  $\mathbf{x}(t_j)$  optimierte Stellgrößentrajektorie  $\bar{\mathbf{u}}^*(\tau), \tau \in [t_j, t_j + T]$  ausschließlich auf dem Intervall  $t \in [t_j, t_j + \Delta t]$  gestellt, da zum folgenden Zeitpunkt bereits das Ergebnis des nächsten Optimierungsschritts vorliegt.

Aufgrund der sich permanent ändernden Anfangsbedingungen stellt sich das auf dem Optimierungshorizont  $T$  schritthaltend zu lösende Optimalsteuerungsproblem folgendermaßen dar:

$$\underset{\bar{\mathbf{u}}(\cdot)}{\text{minimiere}} \quad \int_{t_j}^{t_j+T} l(\bar{\mathbf{x}}(\tau), \bar{\mathbf{u}}(\tau), \tau) d\tau + V(\bar{\mathbf{x}}(t_j + T), t_j + T) \quad (2.2a)$$

$$\text{u.B.v.} \quad \dot{\bar{\mathbf{x}}}(\tau) = \mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}(\tau), \bar{\mathbf{u}}(\tau), \tau), \quad \bar{\mathbf{x}}(t_j) = \mathbf{x}(t_j) \quad (2.2b)$$

$$\mathbf{g}(\bar{\mathbf{x}}(t_j + T), t_j + T) = \mathbf{0} \quad (2.2c)$$

$$\mathbf{h}(\bar{\mathbf{x}}(\tau), \bar{\mathbf{u}}(\tau), \tau) \leq \mathbf{0}, \quad \forall \tau \in [t_j, t_j + T]. \quad (2.2d)$$



Da es für die Lösung aus Sicht der Optimierung keine algorithmischen Unterschiede zu (2.1) gibt, können beide Formulierungen problemlos ineinander überführt und daher äquivalent verwendet werden.

Obwohl durch das zyklische Lösen des Optimalsteuerungsproblems die Anforderungen an die Bewegungsplanung formal erfüllt sind, gilt es aus Sicht der Stabilität und Robustheit des Gesamtsystems einige Gesichtspunkte im Kontext der Trajektorienplanung für automatisierte Fahreingriffe qualitativ zu beleuchten [97].

Nach dem *Bellman'schen Optimalitätsprinzip* sind bei der zyklischen Lösung eines Optimalsteuerungsproblems auf einem *unendlich* langen Horizont Garantien über die *anhaltende* bzw. *rekursive* Lösbarkeit und die Stabilität des Regelkreises möglich [21,40,56]. Bedauerlicherweise verlieren diese Aussagen bei der Optimierung auf einem *endlichen* Horizont  $T$  i. Allg. ihre Gültigkeit. Dies kann, wie in [109] aufgezeigt, anschaulich am Beispiel eines modellprädiktiven Abstandsregeltempomaten (ACC) verdeutlicht werden. Von einem Optimierungsschritt auf den anderen kann bei stark beschränkter Vorausschau und hohen Relativgeschwindigkeiten der Fahrzeugabstand schlagartig abnehmen, sodass keine kollisionsvermeidende<sup>6</sup> Lösung des Problems mehr existiert. Folglich sind wegen des für die Fahrzeuganwendung begrenzten Optimierungshorizonts, bedingt durch den beschränkten Erfassungsbereich der Umfeldsensorik, den über der Zeit wachsenden Unsicherheiten der prädizierten Objektpositionen und der geringen zur Verfügung stehenden Rechenleistung alternative Aussagen notwendig.

Wie z. B. in [40, 109] dargestellt, existieren für bestimmte MPC-Schemata ebenfalls Aussagen über die rekursive Lösbarkeit und Stabilität des geschlossenen Regelkreises auch bei einem endlichen Optimierungshorizont  $T$ . Bei geeigneter Wahl der Endkosten  $V(\mathbf{x}(t_j+T), t_j+T)$  in Verbindung mit sog. Zielmengen  $\mathbf{x}(t_j+T) \in \mathcal{X}_f$  garantiert eine Abnahme der optimalen Kosten  $J^*$  über zwei aufeinanderfolgende Optimierungsschritte  $t_j$  und  $t_j + \Delta t$ , welche größer ist als die Abnahme der Kosten bei unendlichem Optimierungshorizont, rekursive Lösbarkeit und asymptotische Stabilität nach Lyapunov. Allerdings ist für den allgemeinen Fall einer nichtlinearen Systemdynamik die Bestimmung einer geeigneten *Control-Lyapunov-Funktion* (CLF) und der davon abzuleitenden Vorgaben für die Endkosten und Endmengen schwierig vorzunehmen.

---

<sup>6</sup> In der Literatur werden diese Zustände als sog. Zustände unvermeidbarer Kollision, engl. Inevitable Collision States, ICS bezeichnet. Eine gute Übersicht dazu wird in [44] gegeben.

Ungeachtet dessen zeigen [3, 39] eine erfolgreiche Umsetzung eines stabilen Ansatzes zur Pfadfolge. Entsprechend der beschriebenen Herangehensweise kann in Kapitel 5 unter den in Abschn. 2.4 getroffenen Annahmen, die Stabilität und rekursive Lösbarkeit der in dieser Arbeit vorgestellten Ansätze zur Trajektorienplanung unter bestimmten Voraussetzungen nachgewiesen werden.

### 2.2.3 Grundproblematik der Trajektorienoptimierung

Obwohl die Formulierung eines Optimalsteuerungsproblems und dessen zyklische Lösung auf einem beschränkten Optimierungshorizont großes Potenzial besitzt die Anforderungen aus Abschn. 2.1.2 vollumfänglich für alle Verkehrssituationen erfüllen zu können, bieten die aus der Theorie der Optimierung bekannten Lösungsmethoden nicht die Möglichkeit, die aus der Anwendung resultierende Klasse nichtlinearer und nichtkonvexer<sup>7</sup> Optimierungsprobleme in Echtzeit ohne vereinfachende Annahmen zu lösen. Die Kombination des, aus Fahrdynamik und Bewegungs kinematik herrührenden, nichtlinearen Systemmodells hoher Ordnung [84] und der, durch das Fahrumfeld bedingten nichtkonvexen Struktur des Optimierungsproblems (siehe Abb. 2.5) verbietet den uneingeschränkten Einsatz existierender Optimierungsmethoden.

Vor diesem Hintergrund besteht das Grundproblem der Trajektorienoptimierung darin, das nichtlineare und nichtkonvexe Optimalsteuerungsproblem in der Art zu formulieren, dass existierende Optimierungsmethoden ihren Eigenschaften entsprechend effektiv eingesetzt werden können. Unter Berücksichtigung der für die Lösung notwendigen Rechenleistung gilt es, vereinfachende Annahmen zu treffen, die das Grundproblem in effizient zu berechnende Subprobleme unterteilen, ohne dass dabei die Lösung des Grundproblems ihre Gültigkeit verliert. Die Vielzahl an Freiheitsgraden bei der Wahl vereinfachender Annahmen lässt große Spielräume bei der Problemformulierung der Trajektorienoptimierung für die Planung der Fahrzeugbewegung zu, was sich in der großen Anzahl der aus der Literatur bekannten Ansätze widerspiegelt. Da die angesprochenen Annahmen stets von Kompromissen begleitet sind,

---

<sup>7</sup> Bei streng konvexen Optimierungsproblemen garantiert die Existenz einer Lösung deren Eindeutigkeit [97]. Daraus folgt, dass die *lokale* gleichzeitig auch die *globale* Lösung des Optimierungsproblems ist.

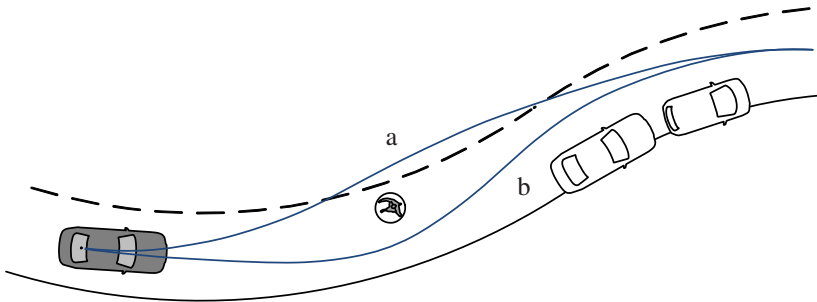


Abbildung 2.5: Grundproblematik der durch die Umgebung bedingten nichtkonvexen Bewegungsplanung mit mehreren Bewegungsoptionen (a, b)

bieten die in Abschn. 2.1.2 aufgeführten Anforderungen die Möglichkeit, die verschiedenen Ansätze gegenüber zu stellen und objektiv zu bewerten. Der folgende Abschnitt gibt einen Überblick über bestehende Ansätze entsprechend der jeweils verwendeten Optimierungsmethoden sowie deren Eignung für die Bewegungsplanung von Fahrzeugen.

## 2.2.4 Optimierungsmethoden

Aus der Optimierungstheorie [88] sind verschiedene Methoden zur Lösung dynamischer Optimierungsprobleme bekannt. Klassischerweise erfolgt deren Aufteilung in *Dynamische Programmierung*, *Indirekte* und *Direkte Optimierungsmethoden*. Dieser Abschnitt gibt einen Überblick zu deren Eignung für die Lösung des Trajektorienoptimierungsproblems aus Sicht der Fahrzeuganwendung und bewertet aufbauend darauf die aus der Literatur bekannten Ansätze bzgl. der in Abschn. 2.1.2 gestellten Anforderungen.

### Dynamische Programmierung

Die Dynamische Programmierung gründet direkt auf dem *Optimalitätsprinzip von Bellman* [14] und zeichnet sich durch eine kombinatorische Lösungsfindung aus. Dementsprechend eignet sich die Dynamische Programmierung,

im Unterschied zur indirekten und direkten Optimierung, zur globalen, wenn auch approximativen Lösungsfindung nichtkonvexer Optimierungsprobleme. Zusätzlich bietet sie die Möglichkeit, auch nichtlineare Systemmodelle bei der Optimierung zu berücksichtigen. Das Kostenfunktional kann aus beliebigen Termen flexibel zusammengesetzt sein und eine Vielzahl an Nebenbedingungen kann definiert werden. Allerdings beschränkt sich der Einsatz der Dynamischen Programmierung wegen des *Fluches der Dimensionalität* [11] auf Systeme geringer Ordnung.

Trotz dieser gravierenden Einschränkung bietet die Dynamische Programmierung durch ihre besondere Eigenschaft zur globalen Lösungsfindung bei nichtlinearer Systemdynamik Vorteile für die Bewegungsplanung von Fahrzeugen [32, 79]. Wie beispielsweise in [59] vorgeschlagen, kann für die Bewegungskinetik als Teildynamik des Fahrzeugmodells das Grundproblem (vgl. Abschn. 2.2.3) vereinfacht gelöst werden [57, 101]. Die hierdurch erzeugte nicht zwangsweise fahrbare Bahnkurve dient in einem zweistufigen Ansatz der nachgelagerten Optimierung höherer Systemordnungen als Referenz, sodass durch die Kombination verschiedener Optimierungsmethoden das ursprüngliche Problem erfolgreich gelöst werden kann. Diese Herangehensweise bietet wie in [27, 45] dargestellt vor allem in wenig strukturierten Verkehrsumgebungen wie Parkflächen oder Baustellen große Vorteile.

Letztlich ist jedoch eine echtzeitfähige Planung der zukünftigen Fahrzeugbewegung mit einem stetig differenzierbaren Verlauf der Lenkung aufgrund der dafür notwendigen hohen Systemordnung nicht möglich. Wegen der nicht hinreichend zu erfüllenden Anforderung nach einer komfortablen Bewegungsplanung wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit diese Methode nicht weiter berücksichtigt.

## Indirekte Optimierungsmethoden

Lösungsmethoden, die auf der Auswertung der notwendigen Bedingungen für Optimalsteuerungs- oder Variationsprobleme beruhen, werden als indirekte Optimierungsmethoden bezeichnet [48]. Im multivariablen Fall resultiert aus den Optimalitätsbedingungen ein Gleichungssystem, dessen Lösung *indirekt* zu den Minima oder Maxima des ursprünglichen Problems führt. Obwohl die indirekten Optimierungsmethoden nur für die Lösung lokaler Optimierungsprobleme eingesetzt werden können, sind sie in speziellen Fällen der Problemformulierung besonders attraktiv für die Trajektorienoptimierung, da

sie Einsicht in die Struktur der optimalen Lösung erlauben. Wie in [126] aufgezeigt, können für einfache Bewegungsmodelle unter bestimmten Voraussetzungen die Lösungen des Optimierungsproblems extrem effizient bestimmt werden. In diesen seltenen Fällen existiert eine analytische Lösung, sodass sich der Rechenaufwand während der Laufzeit des Algorithmus minimiert und eine höhere Genauigkeit gegenüber approximierenden Methoden bietet. Eine Einschränkung stellen allerdings die nur schwer zu integrierenden Nebenbedingungen dar, da sie eine analytische Lösung des Optimierungsproblems selbst für einfache Bewegungsmodelle praktisch unmöglich machen. Hinzu kommt, dass bei der numerischen Lösung des Problems, Anfangsbedingungen nicht nur für die Systemzustände zu bestimmen sind, sondern auch nicht trivialerweise für die zur Optimierung notwendigen adjungierten<sup>8</sup> Variablen, gleichwohl diese in den überwiegenden Fällen ohne physikalische Bedeutung sind.

Diese Umstände schränken zwar die Verwendung der indirekten Methoden für die Trajektorienoptimierung stark ein, ermöglichen jedoch wie in [114] dargestellt bei ausreichend feiner Diskretisierung des Fahrraums in Kombination mit einem sog. *Sampling* über eine sehr große Anzahl an Bewegungskandidaten, die suboptimale Lösung des Trajektorienoptimierungsproblems bei umfassender Umsetzung der Anforderungen aus Abschn. 2.1.2.

## Direkte Optimierungsmethoden

Die direkten Optimierungsmethoden erweisen sich für die Lösung nichtlinearer Optimierungsprobleme unter der Voraussetzung einer konvexen Problemformulierung für die Bewegungsplanung von Fahrzeugen als vorteilhaft [113, 119]. Sie basieren auf einer Diskretisierung des Optimalsteuerungsproblems und umgehen auf diese Weise die Probleme der indirekten Methoden [48]. Durch Parametrierung der Steuertrajektorie  $\mathbf{u}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$  wird das Optimalsteuerungsproblem auf ein endlich dimensionales Problem reduziert. Das entstehende i. Allg. *nichtlineare Programm*, das gutmütig mit der Anzahl der Zustände des ursprünglichen Problems skaliert, kann demnach flexibel mit Methoden der statischen Optimierung gelöst werden [53]. Die

---

<sup>8</sup> Mit Hilfe der *adjungierten* Variablen, welche auch als *Lagrange-Multiplikatoren* bezeichnet werden, lassen sich die Nebenbedingungen in das Kostenfunktional integrieren, sodass diese bei der Lösung nicht explizit berücksichtigt werden müssen [43, 53].

für beliebige nichtlineare Systeme teilweise aufwändige, komplexe Herleitung der Optimalitätsbedingungen wird überflüssig. Zudem können Zustands- und Eingangsbeschränkungen bei der Optimierung einfach berücksichtigt werden. Ein weiterer entscheidender Vorteil der direkten Methode ergibt sich durch einen vergrößerten Konvergenzbereich, da keine Startlösung der adjungierten Zustände benötigt wird.

Diese Eigenschaften machen die direkten Optimierungsmethoden für die Planung von Fahrtrajektorien besonders interessant. Nicht zuletzt die zahlreichen aus der Forschung bekannten Umsetzungen [3, 8, 46, 54, 80] machen dies deutlich. Vor allem die Möglichkeit zur weitgehend uneingeschränkten Problemformulierung und die vergleichsweise einfache Integration einer großen Anzahl an Nebenbedingungen für die Erfüllung der Anforderungen zur Bewegungsplanung spielen dabei eine entscheidende Rolle. Jedoch eignet sich die direkte Optimierung ebenso wie die indirekten Methoden ausschließlich für die lokale Lösungsfindung von Optimierungsproblemen. Auch sind die zur Lösung der i. Allg. nichtlinearen Problemformulierungen notwendigen numerischen Lösungsverfahren rechenintensiv und ermöglichen nur bei der Vernachlässigung des Kostenarguments der einzusetzenden Hardware eine mögliche Anwendung.

## 2.3 Vorteile linear-quadratischer Optimierung

Eine aus der Literatur wohlbekanntes Klasse von Optimierungsproblemen bildet die der linear-quadratischen Optimalsteuerungsprobleme mit linearen Nebenbedingungen [21, 43]. Deren mathematische Formulierung stellt einen Sonderfall der verallgemeinerten Problemformulierung (2.1) dar und ergibt sich im kontinuierlichen und zeitvarianten Fall zu

$$\text{minimiere}_{\mathbf{u}_{[t_0, t_f]}} \quad \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [\mathbf{x}^\top \mathbf{Q}(t) \mathbf{x} + \mathbf{u}^\top \mathbf{R}(t) \mathbf{u}] \, dt + \frac{1}{2} \mathbf{x}_f^\top \mathbf{S} \mathbf{x}_f \quad (2.3a)$$

$$\text{u.B.v.} \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t) \mathbf{x} + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f, \quad (2.3b)$$

$$\mathbf{G}(t) \mathbf{x}_f + \mathbf{g}_c(t_f) = \mathbf{0}, \quad (2.3c)$$

$$\mathbf{H}_1(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{H}_2(t) \mathbf{u}(t) + \mathbf{h}_c(t) \leq \mathbf{0}, \quad \forall t \in [t_0, t_f]. \quad (2.3d)$$

Entsprechend ihrer Bezeichnung ist diese Klasse durch eine lineare Systemdynamik (2.3b) in Kombination mit einem quadratischen Kostenfunktional (2.3a) charakterisiert. Zur Sicherstellung der Existenz der Lösung gelten die folgenden Voraussetzungen (vgl. [4] und [48]). Für den Optimierungsvektor soll gelten  $\mathbf{u}_{[t_0, t_f]} \in L^\infty([t_0, t_f], \mathbb{R}^m)$ . Damit folgt unter stückweise stetiger Dynamikmatrix  $\mathbf{A}(t) \in PC([t_0, t_f], \mathbb{R}^{n \times n})$  und Eingangsmatrix  $\mathbf{B}(t) \in PC([t_0, t_f], \mathbb{R}^{n \times m})$  für den Zustand  $\mathbf{x}(t) \in W^{1,\infty}([t_0, t_f], \mathbb{R}^n)$ , sodass sowohl die Existenz des Integrals (2.3a) mit den Gewichtungsmatrizen  $\mathbf{Q}(t), \mathbf{S} \in PC([t_0, t_f], \mathbb{R}^{n \times n})$  und  $\mathbf{R}(t) \in PC([t_0, t_f], \mathbb{R}^{m \times m})$  als auch die Existenz des Minimums gegeben ist. Der Minimierer wird gemeinhin eine stückweise stetige Funktion sein. Außerdem gilt für die zeitvarianten stetigen Endbedingungen  $\mathbf{G}(t) \in PC([t_0, t_f], \mathbb{R}^{n_{EB} \times n})$  und  $\mathbf{g}_c(t_f) \in PC([t_0, t_f], \mathbb{R}^{n_{EB}})$  sowie für die zeitvarianten stetigen Ungleichungsbedingungen  $\mathbf{H}_1(t) \in PC([t_0, t_f], \mathbb{R}^{n_{UNB} \times n})$ ,  $\mathbf{H}_2(t) \in PC([t_0, t_f], \mathbb{R}^{n_{UNB} \times m})$  und  $\mathbf{h}_c(t) \in PC([t_0, t_f], \mathbb{R}^{n_{UNB}})$ .

Im Gegensatz zu der verallgemeinerten Problemstellung zeichnet sich die linear-quadratische Formulierung eines Optimalsteuerungsproblems durch besondere strukturelle Eigenschaften aus, welche entscheidende Vorteile bei deren Lösung bieten [21, 76]. Zum einen gilt durch die Beschränkung auf lineare Systemdynamiken das *Superpositionsprinzip*, was erhebliche Vereinfachungen für die analytische Beschreibung des zukünftigen Systemverhaltens mit sich bringt. Zum anderen folgt aus der Optimierung der linear-quadratischen und damit konvexen Zielfunktion im Falle eines, durch die linearen Beschränkungen definierten, konvexen Polyeder, direkt die Konvexität dieser Probleme. Folglich garantiert die Formulierung konvexer Nebenbedingungen durch die Struktur des Optimierungsproblems die Eindeutigkeit der Lösung.

Zur Verdeutlichung der Zusammenhänge zwischen konvexer und nichtkonvexer sowie lokaler und globaler Optimierung stellt Abb. 2.6 für den Fall einer eindimensionalen Zielfunktion ohne Nebenbedingungen die Vorteile der konvexen Optimierung bildlich dar. Im Fall einer konvexen Problemformulierung ist jedes lokale Optimum des formulierten Problems gleichzeitig auch das globale. Dementsprechend spricht man bei linear-quadratischer Optimierung mit linearen und konvexen Nebenbedingungen von lokaler Optimierung. Nachfolgend werden nur die positiven Auswirkungen der lokalen Lösungsmethoden erläutert.

Aus Sicht der indirekten Optimierungsmethoden ist bei einer linear-quadratischen Formulierung des Optimalsteuerungsproblems eine erhebliche Verein-

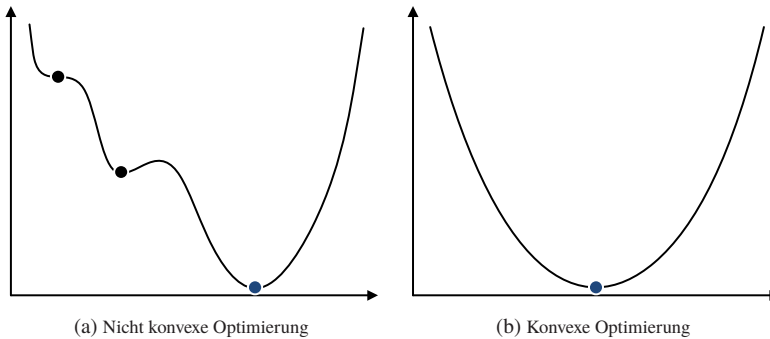


Abbildung 2.6: Gegenüberstellung nichtkonvexer und konvexer Kostenfunktionen im Eindimensionalen; der blaue Punkt kennzeichnet in beiden Fällen das globale Optimum

fachung der Optimalitätsbedingungen möglich. Dies führt dazu, dass unabhängig von der Länge des Optimierungshorizonts ohne Beschränkungen mit Hilfe der sog. Riccati-Differentialgleichung<sup>9</sup> eine geschlossene Lösung des Optimierungsproblems bestimmt werden kann (vgl. Kapitel 3). Aufbauend darauf reduziert sich auch im Fall mit Beschränkungen der verbleibende numerische Lösungsaufwand signifikant, sodass unabhängig von der Berücksichtigung von Nebenbedingungen der zur Lösung erforderliche Rechenaufwand bei linear-quadratischer Problemstruktur ausgesprochen gering ist [53, 76].

Die direkten Optimierungsmethoden ermöglichen weitreichende Vereinfachungen bei der Lösung linear-quadratischer Optimierungsprobleme. Durch die spezifische Struktur der Problemformulierung kann das ursprünglich dynamische Optimierungsproblem in ein *Quadratisches Programm* überführt werden, welches trotz Nebenbedingungen mit verschiedenen Lösungsverfahren sehr effizient gelöst werden kann. Etablierte Verfahren dieser Art sind beispielsweise die *Interior-Point-Verfahren*, die *Active-Set-Verfahren* oder die *Projizierte-Gradienten-Verfahren* [21, 53]. Vergleichsweise dazu ist die Lösungsfindung im Fall der verallgemeinerten, i. Allg. nichtlinearen Problemstellung durch eine sequentiell zu lösende Abfolge approximierender Optimie-

<sup>9</sup> Im Falle eines unendlich langen Optimierungshorizonts reduziert sich die Dynamik der Gleichung auf den stationären Fall, sodass die Betrachtung der *algebraischen* Riccati-Gleichung ausreichend ist [53].



rungsprobleme zeitaufwändig. Die *Sequentiell Quadratische Programmierung* (SQP) ist eine weit verbreitete Methode zur Lösung nichtlinearer Optimierungsprobleme. Die Lösung des übergeordneten nichtlinearen Problems ergibt sich dabei durch die iterative Lösung einer Folge Quadratischer Programme, wobei das Konvergenzverhalten aufgrund der iterativen Lösungsfindung stark von einer zu wählenden Startlösung<sup>10</sup> abhängt. Deren Bestimmung ist i. Allg. nicht trivial. Aus Sicht der linear-quadratischen Problemformulierung entsteht ein deutlicher Vorteil in Bezug auf die Anwendung und den Rechenaufwand, da pro Zyklus nur ein einziges Quadratisches Programm gelöst werden muss.

Unabhängig von der Optimierungsmethode lässt eine linear-quadratische Problemformulierung neben den großen Vorteilen bezüglich des einzusetzenden Rechenaufwands auch für die Absicherung wichtige, umfassende Aussagen über die Stabilität und rekursive Lösbarkeit des Optimalsteuerungsproblems zu [21]. In diesem speziellen Fall existieren Bedingungen für die Wahl der Endkostengewichtung  $S$  und Zielmengen  $X_f$  (vgl. Abschn. 2.2.2), welche unter verhältnismäßig einfachen Voraussetzungen erfüllt werden können.

Vor allem diese Eigenschaften machen die linear-quadratische Problemformulierung überaus attraktiv für eine echtzeitfähige Optimierung von Trajektorien bei hoher Neuplanungsfrequenz. So finden sich in der Literatur Ansätze in verschiedenen Anwendungsbereichen wie beispielsweise für Fluggeräte [12, 72] oder Schiffe [89]. Entsprechend motivieren die beschriebenen Vorteile auch die Formulierung linear-quadratischer Optimalsteuerungsprobleme zur effizienten Trajektorienoptimierung für automatisierte Fahreingriffe.

## 2.4 Konvexe Optimierung bei entkoppelter Längs-Quer-Bewegung

Da die aus der Bewegungsplanung resultierende Problemstellung durch eine nichtlineare und nichtkonvexe Struktur charakterisiert ist, ist die Lösung

---

<sup>10</sup> Obwohl sich in viele Fällen die, aus dem vorherigen Zyklus bekannte, optimale Lösung als Startlösung anbietet, ist diese Vorgehensweise für Anwendungen, bei denen sich von einem Optimierungsschritt auf den anderen die Parametrierung des Optimierungsproblems weitreichend verändern kann, nur bedingt möglich.

des Grundproblems der Trajektorienoptimierung nur unter vereinfachenden Annahmen möglich (vgl. Abschn. 2.2.3). Die beschriebenen Vorteile linear-quadratischer Optimierung legen das Ziel dieses Abschnitts nahe, durch die Transformation und Modifikation des Grundproblems eine linear-quadratische Problemstellung für die Planung der Fahrzeugbewegung abzuleiten [55].

### 2.4.1 Dekomposition in konvexe Teilprobleme

Aufgrund beliebiger Konstellationen von Hindernissen und anderen Verkehrsteilnehmern resultiert im allgemeinen Fall der Bewegungsplanung ein nichtkonvexes Optimierungsproblem mit mehreren lokalen Lösungen (vgl. Abb. 2.5). Jede lokale Lösung kann dabei als eine mögliche Bewegungsoption verstanden werden. Wie in Abb. 2.7 beispielhaft für die Querbewegung verdeutlicht, ermöglicht die gezielte Beschränkung des Fahrraums pro Bewegungsoption eine Dekomposition des nichtkonvexen Problems in eine endliche Menge konvexer Teilprobleme. Folglich ergibt sich die globale Lösung des

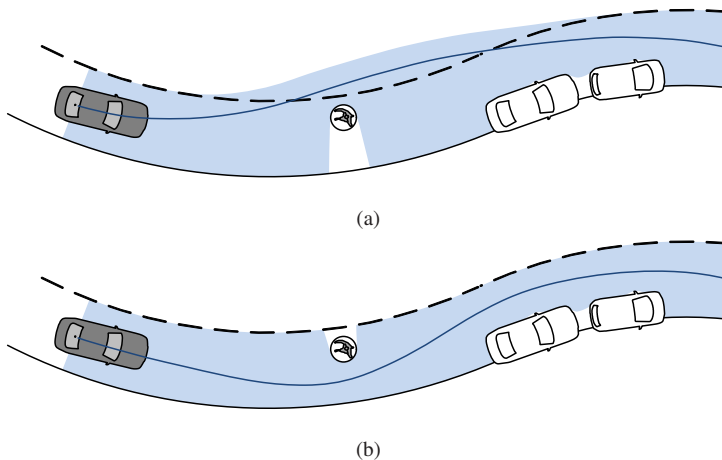


Abbildung 2.7: Konvexe Problemformulierung für zwei unterschiedliche Bewegungsoptionen a und b der Querbewegung durch gezielte laterale Fahrtraumbeschränkungen (blau markierter Bereich) mit resultierendem Positionsverlauf der geplanten Fahrzeugbewegung (blaue Kurve), vgl. Abb. 2.5

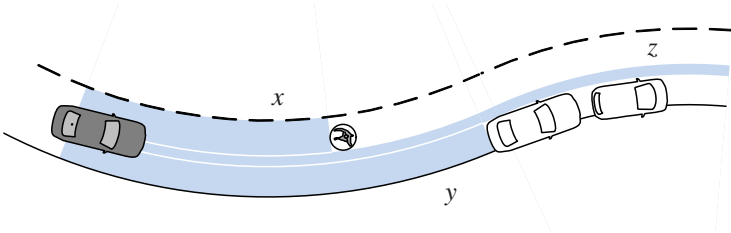


Abbildung 2.8: Konvexe Problemformulierung für verschiedene Bewegungsoptionen  $x$ ,  $y$  und  $z$  in Längsrichtung durch gezielte Beschränkung der für jedes Hindernis verbleibenden Wegstrecken (blau markierte Bereiche), vgl. Abb. 2.7b

Grundproblems (GP) mit dem Kostenfunktional  $J(\mathbf{u}; \mathbf{x})$  aus dem Vergleich aller konvexen Lösungen für jede der  $i = 1, \dots, n_{\text{BO}}$  Bewegungsoptionen. Es gilt [55]

$$\min_{\substack{\mathbf{u}^{\text{GP}, [t_0, t_f]}, \\ \mathbf{x} \in \mathcal{X}_1 \cup \dots \cup \mathcal{X}_{n_{\text{BO}}}}} J(\mathbf{u}; \mathbf{x}) = \min \left\{ \min_{\substack{\mathbf{u}_{1, [t_0, t_f]}, \\ \mathbf{x} \in \mathcal{X}_1}} J(\mathbf{u}; \mathbf{x}), \dots, \min_{\substack{\mathbf{u}_{n_{\text{BO}}, [t_0, t_f]}, \\ \mathbf{x} \in \mathcal{X}_{n_{\text{BO}}}}} J(\mathbf{u}; \mathbf{x}) \right\}, \quad (2.4)$$

wobei sich jede der  $n_{\text{BO}}$  Bewegungsoptionen durch die zugehörige zulässige konvexe Zustandsmenge  $\mathcal{X}_i$  definiert.

Grundvoraussetzung für die Dekomposition ist ein gutes Verständnis der nicht-konvexen Problemstruktur, da bereits im Vorfeld der Optimierung die Lage aller relevanten lokalen Optima über eine geeignete Heuristik näherungsweise zu bestimmen ist. Für die Anwendung der Bewegungsplanung im Straßenverkehr bieten vergleichsweise einfache, laterale Abstandsbetrachtungen der Positionen anderer Verkehrsteilnehmer und Hindernisse ein geeignetes Maß zur Unterscheidung lokaler Optima. Basierend darauf können beispielsweise Rückschlüsse darüber getroffen werden, ob für eine Umfahrung von Hindernissen selbst mit reduzierter Geschwindigkeit ausreichend Fahrraum zur Verfügung steht. Die Anzahl  $n_{\text{BO}}$  aller Bewegungsoptionen ergibt sich zu der kombinatorischen Menge aus den in Abbildungen 2.7 und 2.8 für jede Bewegungskomponente isoliert dargestellten beispielhaften Quer- bzw. Längsbewegungsoptionen.

Mit Blick auf eine möglichst recheneffiziente Lösung des Grundproblems kann das laterale Abstandsmaß auch dazu verwendet werden, die Anzahl  $n_{\text{BO}}$  der

zu optimierenden Bewegungsoptionen klein zu halten. Wegen des durch die Verkehrsinfrastruktur lateral beschränkten Verkehrsraums lässt sich somit die in Abb. 2.7a dargestellte Querbewegungsoption bereits von vornherein ausschließen, da diese zwangsläufig das Befahren des benachbarten Fahrstreifens beinhaltet. Typischerweise existiert daher nur ein einzelner zulässiger Fahrkorridor pro Fahrstreifen, sodass meist eindeutig bestimmt ist, in welcher Richtung ein Hindernis in Bezug auf die Referenzkurve umfahren werden soll [119], siehe Abb. 2.7b.

## 2.4.2 Lineare Bewegungsmodelle in Längs- und Querrichtung

Neben der Formulierung konvexer Beschränkungen ist für die Anwendung der linear-quadratischen Optimierung die Beschreibung der Fahrzeugbewegung in Form linearer Systemmodelle essentiell. Obwohl die Dynamik von Fahrzeugen i. Allg. nichtlinear ist [84, 96], lässt sich mittels Kontraktion<sup>11</sup> das Problem in der Art modifizieren, dass die Bewegung des Fahrzeugs linear zu beschreiben ist [107]. Eine Modellierung der Relativkinematik in kartesischen Koordinaten, wie in Abb. 2.9a dargestellt, bietet aufgrund beliebiger zulässiger Werte für den Fahrtrichtungswinkel  $\theta$  keine Möglichkeit der Linearisierung. Im Gegensatz dazu ist die Beschreibung der Fahrzeugbewegung in sog. Bahnkoordinaten (siehe Abb. 2.9b) zielführend. Mittels derer ist es möglich, von den nichtlinearen Bewegungsgleichungen

$$\dot{s} = v \frac{\cos(\theta - \theta_r(s))}{1 - d\kappa_r(s)} \quad (2.5a)$$

$$\dot{d} = v \sin(\theta - \theta_r(s)), \quad (2.5b)$$

für die Wegstrecke  $s$  und dem Abstand  $d$  in Relation zur Referenzkurve  $\Gamma$  ein vereinfachtes Systemmodell für die Relativkinematik des Fahrzeugs abzuleiten [125]. Unter der Annahme kleiner Ausrichtungsdifferenzen zwischen der Bewegungsrichtung des Fahrzeugs  $\theta$  und der Orientierung der Referenzkurve

---

<sup>11</sup> Problemmodifikation durch Kontraktion im Sinne von Einengung des Optimierungsraums (Restriktionen werden verschärft z. B. durch Festhalten von Teilvariablen) als Gegenstück zur Relaxation im Sinne der Entspannung (Restriktionen werden gelockert), wodurch sich der Optimierungsraum vergrößert [55].

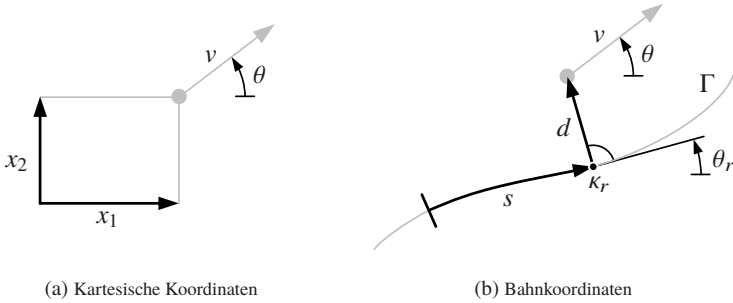


Abbildung 2.9: Relativkinematik der Fahrzeugbewegung für unterschiedliche Bezugssysteme nach [108]

$\theta_r$  sowie kleiner Abstände  $d$  im Verhältnis zum Referenzkurvenradius  $r_r$ , so dass  $\frac{d}{r_r} = d\kappa_r \ll 1$  gilt, ergeben sich die vereinfachten Bewegungsgleichungen zu

$$\dot{s} = v, \quad (2.6a)$$

$$\dot{d} = v(\theta - \theta_r). \quad (2.6b)$$

Trotz dieser Vereinfachungen führt die Formulierung in Bahnkoordinaten aufgrund der Geschwindigkeit  $v$  für die Bewegungsgleichung der Querbewegung (2.6b) auf einen nichtlinearen Zusammenhang. Für die kombinierte Optimierung beider Bewegungsrichtungen mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x} = [s, d]^T$  resultiert daher ein nichtlineares Optimalsteuerungsproblem für den Stellgrößenvektor  $\mathbf{u}_{i,[t_0,t_f]} = [u_l, u_q]^T = [v, \theta]^T$  für jede der  $i$  Bewegungsoptionen. Bei Betrachtung des Einflusses unabhängiger Stellgrößen der  $i$ -ten Bewegungsoption  $\mathbf{u}_{i_1,[t_0,t_f]}$  und  $\mathbf{u}_{i_2,[t_0,t_f]}$  auf die Bewegungsrichtungen wird deutlich, dass

$$\begin{aligned} s_i(t) &= \phi_l(\mathbf{u}_{i_1,[t_0,t_f]}; s_0) && \cong && s_i(t) &= \phi_l(\mathbf{u}_{i_1,[t_0,t_f]}; s_0) \\ d_i(t) &= \phi_q(\mathbf{u}_{i_1,[t_0,t_f]}; d_0, \theta_r(s_i)) && && d_i(t) &= \phi_q(\mathbf{u}_{i_2,[t_0,t_f]}; d_0, \theta_r(s_i)) \end{aligned}$$

ausschließlich für  $\mathbf{u}_{i_1,[t_0,t_f]} = \mathbf{u}_{i_2,[t_0,t_f]}$  gilt.  $\phi_l$  und  $\phi_q$  sind die den Bewegungsgleichungen (2.6) entsprechenden Operatoren für die Längs- und Querbewegung. Eine Kontraktion des Optimierungsproblems ermöglicht jedoch, durch wechselnde Elementfixierung von  $u_q$  und  $u_l$ , eine Separation der Sys-

temdynamik in zwei lineare Teildynamiken. Die Optimierung einer einzelnen konvexen Bewegungsoption  $i$  ist folglich durch eine zweistufige Lösung ( $i_1$  und  $i_2$ ) isolierter linear-quadratischer Optimalsteuerungsprobleme für die Längs- und Querbewegung möglich, wobei gilt:

1. optimiere  $u_l$  auf Basis einer guten initialen Schätzung von  $u_q$  ( $\mathbf{u}_{i_1, [t_0, t_f]}$ ),
2. optimiere  $u_q$  unter Verwendung des zuvor optimierten  $u_l$  ( $\mathbf{u}_{i_2, [t_0, t_f]}$ ).

Der geringe rückgekoppelte Einfluss der optimierten Querbewegung  $u_q$  auf die optimale Längsbewegung  $u_l$  wird vernachlässigt. Für die dadurch erzeugte Suboptimalität der Lösung  $\mathbf{u}_{i, [t_0, t_f]}$  gilt nach [55]

$$\min_{\substack{\mathbf{u}_{i, [t_0, t_f]}, \\ \mathbf{x} \in \mathcal{X}_i}} J(\mathbf{u}; \mathbf{x}) \leq \max \left\{ \min_{\substack{\mathbf{u}_{i_1, [t_0, t_f]}, \\ \mathbf{x} \in \mathcal{X}_i}} J(\mathbf{u}; \mathbf{x}), \min_{\substack{\mathbf{u}_{i_2, [t_0, t_f]}, \\ \mathbf{x} \in \mathcal{X}_i}} J(\mathbf{u}; \mathbf{x}) \right\}. \quad (2.7)$$

Dementsprechend ist für die Minimierung der durch die Kontraktion verursachten Suboptimalität der Lösung eine gute initiale Schätzung der Querbewegung  $u_q$  bei der Optimierung der Längsbewegung  $u_l$  von entscheidender Bedeutung.

Da eine geeignete Referenzkurve entweder von der übergeordneten Navigationssebene (vgl. Abschn. 2.1.1) oder durch Prädiktion der Eigenbewegung [126] bereitgestellt werden kann, stellt die Beschreibung der Fahrzeugbewegung in Bahnkoordinaten grundsätzlich keine Einschränkung dar. In gut strukturierter Verkehrsumgebung bietet sich beispielsweise die Mitte des Fahrstreifens, welche aus Karten oder mit Hilfe der Kamera [73, 74] bestimmt werden kann, als Referenz an. Aber auch in unstrukturierter Umgebung wie Baustellen oder auf Parkflächen existieren Ansätze mit denen geeignete Referenzkurven erzeugt werden können [27, 45, 101, 122]. Da im Weiteren die Fahrzeugbewegung typischerweise in der Nähe der Referenzkurve  $\Gamma$  erfolgt, ergeben sich auch aus den zuvor abgeleiteten Annahmen für die Linearisierung der Bewegungsgleichungen (2.5) i. Allg. vernachlässigbare Auswirkungen auf die Anwendung. Selbst bei kritischen Ausweichmanövern, bei denen sehr kurzfristig große Ausrichtungsdifferenzen ( $\theta - \theta_r$ ) von bis zu 25 auftreten können, erzeugt die Approximation der Winkel bei der Querbewegung  $\dot{d}$  nur geringe Abweichungen von weniger als drei Prozent. Für die Längsbewegung  $\dot{s}$  resultieren maximale Abweichungen von neun Prozent in einer konservativen Überschätzung der zu erreichenden Positionen, sodass mögliche Abweichungen lediglich zu

einer Erhöhung von Sicherheitsreserven führen. Ebenso können die Approximationsfehler der Fahrgeschwindigkeit  $v$  bei möglicherweise ungünstigen Verhältnissen des Referenzkurvenradius  $r_r = 1/\kappa_r$  und des Abstandes  $d$  vernachlässigt werden, da diese nur bei sehr niedrigen Fahrgeschwindigkeiten auftreten können, weshalb die absoluten Fehler klein bleiben.

Obwohl durch die Kontraktion nichtlineare Kopplungseffekte zwischen den Bewegungsrichtungen vernachlässigt werden, entstehen nur geringe Nachteile für die Planung der zukünftigen Fahrzeugbewegung. Da in kritischen Notsituationen die Kopplungseffekte maßgeblich von den i. Allg. ohnehin unbekanntem Reibungsverhältnissen des Untergrunds abhängig sind und ausschließlich bei einer Kombination aus sehr großen Längs- und Querbewegungen nahe des fahrphysikalischen Grenzbereichs einen nur geringen Einfluss auf die Fahrzeugdynamik haben [69], genügt es, diesen Effekten bei der Planung der zukünftigen Fahrzeugbewegung durch konservative Beschleunigungsbeschränkungen Rechnung zu tragen (vgl. Abschn. 2.1.2). Hinzu kommt, dass auch aus Komfortgründen die Kopplungseffekte eine untergeordnete Rolle spielen. Bei vorausschauender Planung der Fahrgeschwindigkeit unter Berücksichtigung der Geschwindigkeitsbegrenzungen stellt die Verkehrsinfrastruktur genügend Spielraum für die Ausführung einer ausreichend komfortablen Querbewegung zur Verfügung, was die Bestimmung eines globalen Optimums einer kombinierten Betrachtung des Komforts in Längs- und Querrichtung erübrigt.

Des Weiteren bietet die Entkopplung den Vorteil, dass aufgrund des Potenzials der linear-quadratischen Problemformulierung die Lösungsfindung auch bei großer zeitlicher Vorausschau sehr effizient erfolgen kann. Durch die kurzen Berechnungszyklen kann blitzschnell auf Störungen und Veränderungen im Fahrzeugumfeld reagiert werden, wodurch kritische Situationen frühzeitig entschärft und Manöver an der Grenze der Fahrphysik vermieden werden können. Die Auswirkungen einer frühzeitigen Anpassung des geplanten Fahrmanövers auf Basis eines langen Planungshorizonts sind aus Komfortsicht weitaus größer als Auswirkungen einer suboptimalen Berücksichtigung der Kombination aus Längs- und Querruck.

Die rückkopplungsfreie Bewegungsplanung in Längs- und Querrichtung in Kombination mit einer konvexen Problemformulierung ermöglicht folglich auch im universellen Anwendungsfall die Lösung des nichtlinearen und nicht-konvexen Grundproblems der Trajektorienplanung auf Basis der Methodik der linear-quadratischen Optimierung. Durch die Dekomposition und Kontraktion

des Grundproblems ist es möglich, die in Abschn. 2.3 beschriebenen Vorteile der linear-quadratischen Problemformulierung zielführend auszunutzen, wobei diese, die aus den abgeleiteten Annahmen resultierenden Einschränkungen deutlich überwiegen. Vor allem die Möglichkeit der effizienteren Lösungsfindung spielt eine entscheidende Rolle. Aufgrund der geringen Anzahl zu berechnender linear-quadratischer Optimalsteuerungsprobleme hat der Einsatz der linear-quadratischen Optimierungsmethodik gegenüber anderen Optimierungsmethoden großes Potenzial, den für die Trajektorienoptimierung notwendigen Rechenaufwand deutlich zu reduzieren.

## 2.5 Zusammenfassung

Zur Reduktion des für die Bewegungsplanung von Fahrzeugen notwendigen Rechenaufwands beschreibt das vorliegende Kapitel die systematische Ableitung einer Methodik zur effizienten Trajektorienplanung. Motiviert durch die beobachtbare Fahrweise menschlicher Fahrer, werden dazu die Aufgaben der Trajektorienplanung zur technischen Umsetzung der Fahrzeugführung in Form von Anforderungen beschrieben, welche wiederum die Bewertungsgrundlage für verschiedene Ansätze zur Trajektorienplanung bilden. Aufbauend darauf erweist sich die Formulierung von Optimalsteuerungsproblemen zur Trajektorienplanung als besonders vorteilhaft. Mit ausgewählten Optimierungskriterien kann der durch die Anforderungen entstehende Kompromiss zwischen Komfort und Sicherheit elegant gelöst werden, sodass sich die umzusetzende Fahrtrajektorie als Lösung des Optimalsteuerungsproblems ergibt. Die zyklische Lösung des Optimalsteuerungsproblems auf einem fortschreitenden Optimierungshorizont bietet die Möglichkeit, die eigene Fahrzeugbewegung an das sich permanent verändernde Fahrzeugumfeld situationsgerecht anzupassen.

Demzufolge reduziert sich die Fragestellung nach einer effizienten Trajektorienplanungsmethodik auf die Formulierung geeigneter Optimalsteuerungsprobleme, welche auch bei geringer Rechenleistung eine zyklische Lösungsfindung mit hoher Neuplanungsfrequenz in Echtzeit zulassen. Da die aus der Optimierungstheorie bekannten Optimierungsmethoden diese Anforderungen nach einer echtzeitfähigen Lösungsfindung nur unter bestimmten Voraussetzungen erlauben, ist die Lösung des i. Allg. nichtlinearen und nichtkonvexen Grundproblems der Trajektorienoptimierung (vgl. Abschn. 2.2.3) nur un-



ter vereinfachenden Annahmen möglich. Aufgrund der beachtlichen Vorteile der linear-quadratischen Problemformulierung in Bezug auf eine effiziente Lösungsfindung, werden in Abschn. 2.4 vereinfachende Annahmen abgeleitet, welche die Anwendung der linear-quadratischen Optimierungsmethodik ermöglichen. Diese grundlegenden Annahmen lassen sich zusammenfassen zu:

- Die globale Lösung des Grundproblems lässt sich mittels Dekomposition in mehrere konvexe Optimierungsprobleme hinreichend genau bestimmen.
- Die Formulierung linearer Bewegungsgleichungen mittels Kontraktion beschreiben die Fahrzeugdynamik hinreichend genau.

Aus Sicht der Bewegungsplanung von Fahrzeugen ergeben sich auch für den universellen Anwendungsfall im Verhältnis zur Reduktion des zu erwartenden Rechenaufwands vernachlässigbare Einschränkungen, was bestehende Ansätze zur Trajektorienoptimierung bereits andeuten. Bekannte Umsetzungen lokaler Problemformulierungen finden sich beispielsweise in [15, 49, 119]. Zusätzlich dazu finden sich verschiedene Ansätze, welche die Bewegungsgleichungen des Fahrzeugs linear formulieren [8, 26, 37, 38, 46, 87]. Vor diesem Hintergrund fokussiert sich die vorliegende Arbeit auf die Kombination einer lokalen Problemformulierung und der konsequenten systematischen Anwendung der Methodik linear-quadratischer Optimierung zur Umsetzung einer effizienten Trajektorienoptimierung für automatisierte Fahreingriffe.



### **3 Linear-quadratische Optimierung im Kontext aktiver Fahreingriffe**

Das vorliegende Kapitel gibt einen systematisierten Überblick über die aus der Literatur bekannten Lösungsmethoden linear-quadratischer Optimalsteuerungsprobleme und stellt diese in den Kontext automatisierter Fahreingriffe. Dabei werden sowohl die Vor- und Nachteile der unterschiedlichen Methoden für die Bewegungsplanung von Fahrzeugen diskutiert als auch entsprechend ihrer Anwendung, spezifische Anpassungen der in Lehrbüchern formulierten Problemstellungen hergeleitet. Motiviert durch die unabhängige Planung der Längs- und Querbewegung, ergeben sich für eine möglichst effiziente Lösungsfindung sowohl für die indirekten als auch für die direkten Optimierungsmethoden vorteilhaft Anwendungsfälle, vgl. Abschn. 2.2.4.

Angesichts der Möglichkeit bei konservativer Parametrierung der Optimierungskriterien Nebenbedingungen, die keinen Einfluss auf die optimale Lösung des Problems besitzen, zu vernachlässigen, lassen sich die vorgestellten Lösungsmethoden in zwei Gruppen aufteilen. In Abhängigkeit der expliziten Berücksichtigung von Beschränkungen werden diese beiden Gruppen losgelöst voneinander betrachtet. Um auch ohne Beschränkungen eine flexible Problemformulierung für die Bewegungsplanung von Fahrzeugen zu ermöglichen, werden zunächst, basierend auf der sog. Hamilton-Gleichung, die für die Lösung notwendigen Optimalitätsbedingungen vorgestellt, welche auch die erweiterte Problemstellung mit End- und Punktbedingungen zulassen. Analog dazu werden Bedingungen hergeleitet, mit deren Hilfe nicht nur die Fahrzustände, sondern auch die Dauer von Fahrmanövern optimiert werden kann.

Anschließend wird für den allgemeineren Fall der Lösung linear-quadratischer Optimalsteuerungsprobleme mit Beschränkungen eine Lösungsmethode erläutert. Mittels einer zeitlichen Diskretisierung der kontinuierlichen Bewegungsgleichungen und zusätzlichen aus der Literatur bekannten Erweiterungen des Optimierungsproblems, den sog. Schlupfvariablen, lässt diese Methode trotz einer großen Anzahl von Beschränkungen eine effiziente Lösungsfindung zu.

## 3.1 Linear-quadratische Optimierung ohne Beschränkungen

Aus Sicht der Optimierung begünstigt sich durch das Vernachlässigen von Beschränkungen der Form  $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \leq \mathbf{0}$  die Lösungsfindung erheblich [53]. Durch den Einsatz indirekter Optimierungsmethoden lässt sich bei linear-quadratischer Problemformulierung die exakte Lösung des Optimalsteuerungsproblems weitgehend analytisch vorberechnen, sodass sich der zur Laufzeit des Algorithmus verbleibende Rechenaufwand auf ein Minimum reduziert. Ausgangspunkt der Herleitung der geschlossenen Lösung bildet die aus der Literatur wohlbekannte Hamilton-Gleichung, für welche sich die Optimalitätsbedingungen durch die linear-quadratische Problemstruktur merklich vereinfachen lassen. Die gesuchte optimale Steuertrajektorie  $\mathbf{u}^*_{[t_0, t_f]}$  des linearen Systems (2.3b) und des Kostenfunktional (2.3a) ergibt sich als Lösung einer einzigen Differentialgleichung, der sog. Riccati-Differentialgleichung [43, 90].

Für die Bewegungsplanung von Fahrzeugen ist demzufolge ein anwendungsspezifischer Kompromiss zwischen einer äußerst effizienten Bestimmung der Lösung und den Einbußen, welche aus der Vernachlässigung von Beschränkungen resultieren, zu finden. Um die negativen Auswirkungen dieser Einbußen zu reduzieren, werden zu den zuvor angesprochenen Optimalitätsbedingungen sog. Transversalitätsbedingungen vorgestellt. Mittels dieser Bedingungen lassen sich zusätzliche Vorgaben über die zu erreichenden Punkt- und Endbedingungen bei der Optimierung berücksichtigen, sodass ungewünschte Fahrzustände umgangen werden können. Darüber hinaus ermöglichen diese Bedingungen, die Zeit bis zum Erreichen des Endzustands zu optimieren. Unterschiede in der Eignung der in diesem Abschnitt aufgeführten Lösungsmethoden ergeben sich in Abhängigkeit der Bewegung in Längs- bzw. Querrichtung.

### 3.1.1 Hamilton-Funktion und Optimalitätsbedingungen

Basierend auf der Variationsrechnung können die aus der Differenzialrechnung bekannten, notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Extremum eines Funktional  $J$  hergeleitet werden, welche die optimale Lösung  $\mathbf{x}^*(t)$ ,  $\mathbf{u}^*(t)$  des i. Allg. nichtlinearen Optimalsteuerungsproblems (2.1) ohne Beschränkungen (2.1d) erfüllen müssen [53]. Wie auch im allgemeinen, nichtlinearen Fall

lassen sich diese Beziehungen für den Spezialfall linear-quadratischer Optimalsteuerungsprobleme (2.3) mit Hilfe der Hamilton-Funktion

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda, t) = \underbrace{\frac{1}{2}[\mathbf{x}^\top \mathbf{Q}(t) \mathbf{x} + \mathbf{u}^\top \mathbf{R}(t) \mathbf{u}]}_{l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)} + \lambda^\top \underbrace{[\mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}]}_{f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)} \quad (3.1)$$

auf dem Intervall  $t_0 \leq t \leq t_f$  kompakt darstellen. Zur Berücksichtigung der differentiellen Nebenbedingungen  $\mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} - \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$  wird auf die sog. *Lagrange-Multiplikatoren*  $\lambda$  zurückgegriffen, wodurch das Extremwertproblem mit Nebenbedingungen auf ein solches ohne Nebenbedingungen zurückgeführt werden kann [43, 90].

Für das linear-quadratische Optimalsteuerungsproblem (2.3) ergeben sich, wie in Abschn. 2.3 angedeutet, vereinfachte, notwendige Optimalitätsbedingungen 1. Ordnung im unbeschränkten Fall

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.2a)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{Q}(t)\mathbf{x} - \mathbf{A}(t)^\top \lambda, \quad \lambda(t_f) = \mathbf{S}\mathbf{x}(t_f), \quad (3.2b)$$

$$\mathbf{0} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{R}(t)\mathbf{u} + \mathbf{B}(t)^\top \lambda, \quad (3.2c)$$

wobei sich die Randbedingungen der Differentialgleichungen (3.2a) und (3.2b) aus den für die Optimierung bekannten Anfangszuständen  $\mathbf{x}_0$  sowie der Transversalitätsbedingung

$$\lambda(t_f) = \left[ \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t_f} \stackrel{(2.1a), (2.3)}{=} \mathbf{S}\mathbf{x}(t_f) \quad (3.3)$$

für einen freien Endzustand ergeben und die Gewichtungsmatrizen  $\mathbf{Q}(t)\mathbf{R}(t)$  und  $\mathbf{S}$  positiv definit<sup>12</sup> sind [53].

<sup>1</sup> Eine Matrix  $\mathbf{M}$  ist positiv definit, falls  $\mathbf{x}^\top \mathbf{M} \mathbf{x} > \mathbf{0} \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  und  $\mathbf{x}^\top \mathbf{M} \mathbf{x} = \mathbf{0}$  für  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ; gilt anstelle des Vergleichsoperators  $>$  nur  $\geq$ , so ist  $\mathbf{M}$  positiv semidefinit.

<sup>2</sup> Für  $\mathbf{S}$  und  $\mathbf{Q}$  würde Positiv-Semidefinitheit ausreichen [90].

Zudem vereinfachen sich mit der Hamilton-Funktion (3.1) die notwendigen Optimalitätsbedingungen 2. Ordnung für die optimale Lösung  $\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t)$  zu

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} = \mathbf{R}(t) \geq \mathbf{0}, \quad \forall t \in [t_0, t_f], \quad (3.4)$$

sodass aus der Wahl einer positiv definiten Gewichtungsmatrix  $\mathbf{R}(t)$  direkt die strenge Konvexität linear-quadratischer Optimalsteuerungsprobleme folgt und die Betrachtung der Optimalitätsbedingungen 1. Ordnung ausreichend ist (vgl. Abschn. 2.3).

### 3.1.2 Riccati-Differentialgleichung

Entsprechend der im vorausgehenden Abschnitt auf das linear-quadratische Problem angewendeten Optimalitätsbedingungen stellen die Gleichungen (3.2) die notwendigen und hinreichenden Bedingungen zur Bestimmung der optimalen Lösung  $\mathbf{u}^*_{[t_0, t_f]}$  des unbeschränkten Optimalsteuerungsproblems (2.3) dar. Den Ausgangspunkt für die optimale Lösung des unbeschränkten Optimalsteuerungsproblems (2.3) bildet die Steuergleichung (3.2c), welche sich zu

$$\mathbf{0} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{R}(t)\mathbf{u} + \mathbf{B}(t)^\top \boldsymbol{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}^* = -\mathbf{R}(t)^{-1} \mathbf{B}(t)^\top \boldsymbol{\lambda}^* \quad (3.5)$$

umformen lässt und sich die kanonischen Differentialgleichungen (3.2a) und (3.2b) wie folgt formulieren lassen

$$\dot{\mathbf{x}}^* = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}^* - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}(t)^{-1} \mathbf{B}(t)^\top \boldsymbol{\lambda}^*, \quad \mathbf{x}^*(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.6a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^* = -\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}^* - \mathbf{A}(t)^\top \boldsymbol{\lambda}^*, \quad \boldsymbol{\lambda}^*(t_f) = \mathbf{S}\mathbf{x}^*(t_f). \quad (3.6b)$$

Für die daraus resultierende Zwei-Punkt-Randwertaufgabe (RWA) ist es zielführend, die Beziehung zwischen dem optimalen Systemzustand  $\mathbf{x}^*(t)$  und den Lagrange-Multiplikatoren  $\boldsymbol{\lambda}^*(t)$  über eine zeitvariante Matrix  $\mathbf{P}(t)$  mit den Endbedingungen  $\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{S}$  anzusetzen, d. h.

$$\boldsymbol{\lambda}^*(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}^*(t), \quad t \in [t_0, t_f]. \quad (3.7)$$

Dessen Ableitung  $\dot{\lambda}^* = \dot{P}(t)x^* + P(t)\dot{x}^*$  liefert nach Einsetzen der Differentialgleichungen (3.6) und (3.7) den Zusammenhang

$$[\dot{P} - PBR^{-1}B^T P + PA + A^T P + Q]x^* = 0,$$

wobei auf die Darstellung der Zeitabhängigkeit der Matrizen der Übersicht halber verzichtet wurde. Da diese Gleichung für beliebige optimale Trajektorien  $x^*(t)$  nur bei Verschwinden des Klammerausdrucks erfüllt ist, ergibt sich für  $P(t)$  die bekannte *Matrix-Riccati-Differentialgleichung*

$$\dot{P} = PBR^{-1}B^T P - PA - A^T P - Q, \quad P(t_f) = S. \quad (3.8)$$

Aufgrund der nicht vorhandenen Anfangsbedingungen für  $P(t_0)$ , erfolgt die Lösung der Riccati-Gleichung zweckmäßigerweise durch Integration von  $t = t_f$  aus *rückwärts* in der Zeit bis  $t = t_0$ . Nach Bestimmung von  $P(t)$ ,  $\forall t \in [t_0, t_f]$  kann daraufhin mit (3.7) die optimale Trajektorie  $x^*(t)$  durch Integration von (3.6a) bestimmt werden, womit sich die optimale Steuertrajektorie des unbeschränkten Optimalsteuerungsproblems (2.3)

$$u_{[t_0, t_f]}^* = -R(t)^{-1}B(t)^T P(t) x^* \quad (3.9)$$

ergibt. Zusammengefasst verringert sich der Aufwand zur Lösung des unbeschränkten Optimalsteuerungsproblem (2.3) auf die Lösung der Riccati-Differentialgleichung und die Integration der Gleichung (3.6a). Im Fall von zeitinvarianten Systemmatrizen  $A, B$  und Gewichtungsmatrizen  $Q, R$  ist die Lösung und Integration dieser Gleichungen lediglich ein einziges Mal zu bestimmen, wodurch sich der online Rechenaufwand bei zyklischer Lösung des Optimierungsproblems auf ein absolutes Minimum reduziert. Da beispielsweise für eindimensionale Bewegungen die Bewegungsgleichungen des Fahrzeugs zeitinvariant formuliert werden können, bietet dieser Ansatz, vor allem aufgrund der extrem effizienten Lösungsfindung, für die Planung der Fahrzeuglängsbewegung ein großes Potenzial (vgl. Kapitel 4). Obwohl explizit keine Beschränkungen bei der Optimierung berücksichtigt werden können, bieten die in den folgenden Abschnitten beschriebenen Erweiterungen weitreichende Möglichkeiten der Problemformulierung, die die optimale Lösung des Trajektorienoptimierungsproblems von Fahrzeugen flexibel beeinflussen können.

### 3.1.3 Optimierung der Endzeit

Bei der Planung optimaler Fahrtrajektorien ist für eine natürliche Fahrzeugbewegung neben der Minimierung von Ruck und Beschleunigung auch die Dauer bis zum Erreichen eines bestimmten Fahrzustandes von entscheidender Bedeutung. Dies wird beispielsweise bei der Betrachtung eines optimalen Spurwechsels deutlich [109]. Durch die Minimierung von Querruck und Querschleunigung ergibt sich ohne die Berücksichtigung der Zeit eine beliebig lange Spurwechseldauer, da jegliche Querbewegung aus Sicht der Optimierung zusätzliche Kosten verursacht. Im Gegensatz dazu ist die Bestimmung einer festen Vorgabe der Spurwechseldauer i. Allg. nicht trivial, da diese neben der Spurbreite auch vom aktuellen Verkehrsgeschehen abhängig ist und bei ungeeigneter Wahl zu Überschwingen oder erhöhten Querschleunigungen führt. Dementsprechend gilt es, einen Kompromiss zwischen der Spurwechseldauer und einer ausreichend komfortablen Querbewegung zu finden. Die Berücksichtigung der Endzeit  $t_f$  bei der Formulierung eines Optimalsteuerungsproblems (2.3) bietet dabei große Vorteile.

Dies kann durch die Erweiterung des Kostenfunktional (2.3a) erreicht werden. Die Gesamtkosten nehmen dabei mit steigender Endzeit  $t_f$  zu, sodass sich  $t_f$  als Teil der Lösung des Optimalsteuerungsproblems (2.3) bestimmt. Wie im Folgenden für den Fall zeitinvarianter System- und Gewichtungsmatrizen  $A, B, Q, R$  gezeigt, kann der zusätzliche Kostenterm als Teil der Integralkosten  $l(x, u)$  formuliert werden [76]. Das quadratische Gütemaß (2.3a) erweitert sich auf

$$J(u_{[t_0, t_f]}) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [w_{t_f} + x^T Q x + u^T R u] dt + \frac{1}{2} x_f^T S x_f, \quad (3.10)$$

wobei sich mit Hilfe des Faktors  $w_{t_f} \geq 0$  für die Gewichtung der Endzeit  $t_f$  der Kompromiss zwischen der optimalen Zeit und anderen Optimierungskriterien einfach parametrieren lässt. Dementsprechend ergibt sich die zeitinvariante Hamilton-Funktion (3.1) zu

$$H(x, u, \lambda) = \frac{1}{2} [w_{t_f} + x^T Q x + u^T R u] + \lambda^T [A x + B u]. \quad (3.11)$$

Wie auch bei der Formulierung der Optimalitätsbedingungen (3.2) für den Fall einer *festen* Endzeit  $t_f$ , lassen sich basierend auf der Hamilton-Funktion



(3.11) weitere kompakte Bedingungen für die Bestimmung der *freien* Endzeit herleiten. Bildet man deren totale Ableitung nach der Zeit

$$\frac{d}{dt}H = \frac{\partial H}{\partial t} + \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}\right)^\top \dot{\mathbf{x}}}_{\stackrel{(3.2b)}{=} -\lambda^\top \dot{\mathbf{x}}} + \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}\right)^\top \dot{\mathbf{u}}}_{=0} + \underbrace{\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)^\top \dot{\lambda}}_{\stackrel{(3.2a)}{=} \dot{\mathbf{x}}^\top \lambda} = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (3.12)$$

zeigt sich, dass alle Hamilton-Funktionen, die nicht explizit von  $t$  abhängen, entlang der optimalen Lösung *konstant* sind, d. h.

$$\frac{d}{dt}H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda) = 0. \quad (3.13)$$

In Kombination mit der Transversalitätsbedingung für eine *freie* Endzeit [53]

$$[H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda)]_{t_f} = - \left[ \frac{\partial V}{\partial t} \right]_{t_f} \stackrel{(3.10)}{=} 0, \quad (3.14)$$

folgt daher für die Hamilton-Funktion (3.11) zum Zeitpunkt  $t_0$  mit (3.9) und (3.7)

$$[H]_{t_0} = \frac{w_{t_f}}{2} - \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top(t_0) \underbrace{[\mathbf{PBR}^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{P} - \mathbf{PA} - \mathbf{A}^\top \mathbf{P} - \mathbf{Q}]}_{\stackrel{(3.8)}{=} \dot{\mathbf{P}}} \mathbf{x}(t_0) = 0. \quad (3.15)$$

Daraus ergibt sich die notwendige und hinreichende Bedingung zur Bestimmung der Endzeit  $t_f$  mit den gegebenen Anfangsbedingungen  $\mathbf{x}_0$ . Für den rückwärts integrierten Verlauf der Riccati-Differentialgleichung  $\dot{\mathbf{P}}(\tau)$ ,  $\tau \in [T, T - t_f]$  beginnend von einem beliebigen Zeitpunkt  $T$ , an dem gilt  $P(T) = S$ , ist die optimale Endzeit  $t_f$  dadurch charakterisiert, dass die Bedingung

$$\mathbf{x}_0^\top \dot{\mathbf{P}}(\tau) \mathbf{x}_0 - w_{t_f} = 0, \quad (3.16)$$

erstmalig erfüllt ist. Für den Fall, dass die Bedingung zu keinem Zeitpunkt  $\tau$  erfüllt werden kann, ergibt sich für die optimale Endzeit  $t_f = 0$ .

Zusammenfassend betrachtet, erweitert sich durch die Optimierung der Endzeit  $t_f$  der Lösungsaufwand des Optimalsteuerungsproblems (2.3) lediglich um ein eindimensionales Nullstellenproblem, da die Lösung der Riccati-

Differentialgleichung ohnehin für die Berechnung der optimalen Lösung  $\mathbf{u}^*$  erforderlich ist. Dadurch ergeben sich nur geringfügige Einschränkungen aus Sicht einer effizienten Trajektorienoptimierung und die Optimierung von  $t_f$  kann vorteilhaft bei der Erzeugung eines natürlichen Fahrverhaltens eingesetzt werden.

### 3.1.4 Endbedingungen

Neben der Optimierung der Endzeit  $t_f$  bietet die Vorgabe von gezielten Endzuständen  $\mathbf{x}_{f,d}$  weitreichende Vorteile für eine flexible Problemformulierung, um mit Blick auf ein sicheres Fahrverhalten, Einfluss auf die optimale Lösung des Optimalsteuerungsproblems zu nehmen. Für die Planung der Querbewegung ist es beispielsweise möglich, einen gewünschten Querversatz vorzugeben. Ebenso lassen sich für die Längsbewegung Vorgaben über eine bestimmte Zielgeschwindigkeit und Zielbeschleunigung machen.

Bestimmte Zielzustände können entweder durch *feste* Endbedingungen der Form  $\mathbf{g}(\mathbf{x}_f, t_f) = \mathbf{0}$  vorgegeben oder alternativ spezifische Endkosten  $V(\mathbf{x}_f, t_f)$  für Abweichungen von den gewünschten Zuständen definiert werden, sodass sich der tatsächliche Endzustand  $\mathbf{x}_f$  als Teil der optimalen Lösung ergibt. Im Unterschied zu einer festen Vorgabe der Endbedingungen, welche vorteilhaft für eine garantierte Einhaltung sicherheitskritischer Systemzustände ist, bietet die Berücksichtigung der Zielzustände über Kosten die Möglichkeit, einen Kompromiss zwischen dem Erreichen des Zielzustandes und dem dazu notwendigen Stellaufwand zu parametrieren. Hierdurch können Singularitäten der Stellgröße nahe der Endzeit, verursacht durch kleine Abweichungen vom Zielzustand, vermieden werden. In Abhängigkeit der Anwendung ist es in vielen Fällen zielführend, eine Kombination von *festen* und *freien* Endbedingungen für die unterschiedlichen Systemzustände zu formulieren. Infolgedessen spricht man von *partiellen* Endbedingungen, wobei die Indexmenge  $\mathcal{I}_f \subseteq \{1, \dots, n\}$  diejenigen Zustände umfasst, welche bei  $t_f$  über feste Endbedingungen fixiert sind.

Obwohl für den Fall **freier** Endbedingungen  $\mathcal{I}_f = \{\}$  die Systembeschreibung in  $\Delta$ -Größen ( $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{f,d}$ ) eine einfache Möglichkeit bietet, die Endkosten unabhängig von dem gewünschten Zielzustand  $\mathbf{x}_{f,d}$  zu formulieren, erschweren partielle Endbedingungen oder interne Randbedingungen (siehe Abschn. 3.1.5) eine solche Systembeschreibung, sodass sich die Berücksichtigung von Abwei-

chungen vom Zielzustand  $\mathbf{x}_{f,d}$  nur durch eine Erweiterung des Endkostenterms des Kostenfunctionals (3.10) auf

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [w_{t_f} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}] dt + \frac{1}{2} [\mathbf{C} \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_{f,d}]^T \mathbf{S} [\mathbf{C} \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_{f,d}] \quad (3.17)$$

erreichen lässt. Über die Ausgangsmatrix  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  können diejenigen Systemzustände selektiert werden, deren Zielzustand über Endkosten beeinflusst werden soll. Analog zur Herleitung der Riccati-Differentialgleichung können auch für das Kostenfunctional (3.17) einfache Bedingungen für die optimale Stellgröße  $\mathbf{u}^*_{[t_0, t_f]}$  abgeleitet werden [76]. Entsprechend der Transversalitätsbedingung (3.3) folgt daher für den Zeitpunkt  $t_f$

$$\lambda(t_f) = \mathbf{C}^T \mathbf{S} [\mathbf{C} \mathbf{x}_f - \mathbf{x}_{f,d}]. \quad (3.18)$$

Gemäß Abschn. 3.1.5 lässt sich aus diesem Zusammenhang die Ansatzfunktion

$$\lambda^*(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{x}^*(t) - \mathbf{U}(t) \mathbf{x}_{f,d}, \quad t \in [t_0, t_f], \quad (3.19)$$

ableiten. Aus deren Differentiation mit den Optimalitätsbedingungen (3.6) ergibt sich neben der Riccati-Differentialgleichung auch

$$\dot{\mathbf{U}}(t) = [\mathbf{P}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T - \mathbf{A}^T] \mathbf{U}(t), \quad \mathbf{U}(t_f) = \mathbf{C}^T \mathbf{S}, \quad (3.20)$$

als Lösungsvorschrift des Optimalsteuerungsproblems, wobei sich die Endbedingungen  $\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{C}^T \mathbf{S} \mathbf{C}$  und  $\mathbf{U}(t_f) = \mathbf{C}^T \mathbf{S}$  für die *Rückwärts*-Integration der Differentialgleichungen durch Koeffizientenvergleich von (3.19) und (3.18) ergeben. Damit erweitert sich die optimale Steuertrajektorie (3.9) bei Berücksichtigung spezieller Endkosten (3.17) für beliebige Zielzustände  $\mathbf{x}_{f,d}$  auf

$$\mathbf{u}^*_{[t_0, t_f]} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T [\mathbf{P}(t) \mathbf{x} + \mathbf{U}(t) \mathbf{x}_{f,d}]. \quad (3.21)$$

Im Gegensatz zu der beschriebenen Herangehensweise der Berücksichtigung der Zielzustände  $\mathbf{x}_{f,d}$  über spezielle Endkosten, wird im Folgenden die Lösungsfindung des verallgemeinerten Optimalsteuerungsproblems (2.3) mit **fes-**

**ten** Endbedingungen (2.3c) der Form  $\mathbf{g}(\mathbf{x}_f, t_f) = \mathbf{0}$  vorgestellt. Unter Vorgabe bestimmter Zielzustände  $\mathbf{x}_{f,d}$  ergeben sich diese Endbedingungen zu

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_f, t_f) = \mathbf{G}\mathbf{x}_f + \mathbf{g}_c(t_f) = \mathbf{G}\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_{f,d} = 0, \quad (3.22)$$

wobei äquivalent zu der Gewichtung der Zielzustände über die Matrix  $\mathbf{G}$  diejenigen Systemzustände selektiert werden können, für welche feste Endbedingungen gelten sollen. Analog zur Berücksichtigung der differentiellen Nebenbedingungen bei der Formulierung der Hamilton-Funktion (3.1), können Endbedingungen dieser Form über zusätzliche Lagrange-Multiplikatoren  $\mathbf{v}$  zum Kostenfunktional (3.10) hinzugefügt werden

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [w_{t_f} + \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{u}] dt + \frac{1}{2} \mathbf{x}^\top(t_f) \mathbf{S} \mathbf{x}(t_f) + \mathbf{v}^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}(t_f), t_f). \quad (3.23)$$

Durch den zusätzlichen Term  $\mathbf{v}^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}(t_f), t_f)$  erweitern sich die Transversalitätsbedingungen (3.3) und (3.14) entsprechend [53] auf

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \left[ \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} + \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right)^\top \mathbf{v} \right]_{t_f}, \quad (3.24)$$

$$[H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})]_{t_f} = - \left[ \frac{\partial V}{\partial t} + \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} \right)^\top \mathbf{v} \right]_{t_f} \quad \text{falls } t_f \text{ frei ist.} \quad (3.25)$$

Demnach folgt aus der Transversalitätsbedingung (3.24) für die Beziehung zwischen dem Systemzustand  $\mathbf{x}$  und den Lagrange-Multiplikatoren  $\boldsymbol{\lambda}$  und  $\mathbf{v}$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{S}\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{G}^\top \mathbf{v}. \quad (3.26)$$

Gemäß der sog. *sweep method* [76] für das Intervall  $t \in [t_0, t_f]$  lässt sich der Zusammenhang

$$\boldsymbol{\lambda}^*(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{U}(t)\mathbf{v} \quad (3.27)$$

ansetzen. Der Vergleich zwischen den Ansatzfunktionen (3.27) und (3.19) verdeutlicht die Ähnlichkeit der Lösungsfindung bei festen und freien Endbedingungen. Folglich ist für die Lösung des Optimalsteuerungsproblems mit festen Endbedingungen ebenfalls die Lösung der Differentialgleichungen (3.8) und (3.20) mit den Randbedingungen  $\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{S}$  und  $\mathbf{U}(t_f) = \mathbf{G}^\top$  erforderlich.

Darüber hinaus ermöglicht die Rückwärtsintegration einer weiteren Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{W}}(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{U}(t), \quad \mathbf{W}(t_f) = \mathbf{0} \quad (3.28)$$

die Bestimmung von  $\nu$  und damit die Berechnung der optimalen Steuertrajektorie (3.9), welche bei festen Endbedingungen zu

$$\mathbf{u}_{[t_0, t_f]}^* = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \left[ [\mathbf{P}(t) - \mathbf{U}(t)\mathbf{W}(t)^{-1}\mathbf{U}(t)^T] \mathbf{x} + \mathbf{U}(t)\mathbf{W}(t)^{-1}\mathbf{x}_{f,d} \right] \quad (3.29)$$

resultiert. Eine detaillierte Herleitung der Matrixdifferentialgleichungen (3.20) und (3.28) sowie der optimalen Steuertrajektorie findet sich in Anhang A.1.

Für den Fall partieller Endbedingungen kann bei der Optimierung durch die Wahl komplementärer Matrizen  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{G}$  und entsprechender Erweiterung der Rückführungsgesetze (3.21) und (3.29) eine flexible Kombination aus speziellen Endkosten (3.17) oder festen Endbedingungen (3.22) zum Erreichen beliebiger Zielzustände  $\mathbf{x}_f$  berücksichtigt werden. Hinsichtlich des Rechenaufwands zur Lösung des unbeschränkten Optimalsteuerungsproblems (2.3) erweitert sich dieser nur geringfügig um die Lösung der Differentialgleichungen (3.20) bzw. (3.28). Da sich diese, wie auch die Riccati-Differentialgleichung, für zeitinvariante Systemgleichungen und Gewichtungsmatrizen offline vorberechnen lassen, bleibt der Rechenaufwand in diesem Fall nahezu unverändert.

Abschließend sei bemerkt, dass auch bei Vorgabe beliebiger Endkosten (3.17) oder Endbedingungen (3.22) im zeitinvarianten Fall die Hamilton-Funktion entlang der optimalen Lösung konstant bleibt, sodass Gleichung (3.13) weiterhin gilt. Lediglich durch die erweiterte Transversalitätsbedingung (3.24) und die modifizierten Ansatzfunktionen (3.19), (3.27) ergibt sich für (3.15) ein angepasster Zusammenhang, das Vorgehen zur Bestimmung des optimalen Endzeitpunkts  $t_f$  auf Basis von (3.16) bleibt unverändert.

### 3.1.5 Interne Randbedingungen

Zusätzlich zur Formulierung von Endbedingungen besteht über die Vorgabe von internen Randbedingungen [48, 90] zu beliebigen Zeitpunkten  $t_o \in [t_0, t_f]$  die Möglichkeit, die Problemformulierung noch flexibler zu gestalten, um die aus der Vernachlässigung der Beschränkungen resultierenden, praktischen

Einschränkungen zu umgehen. Beispielsweise können die lateralen Fahrraumbeschränkungen für die Planung einer kollisionsfreien Querbewegung (vgl. Abschn. 2.4.1) als zeitabhängige Ortsvorgaben der lateralen Fahrzeugposition in Bezug auf die gegebene Referenzkurve  $\Gamma$  umformuliert werden. Bei der Optimierung können die Beschränkungen zwar nicht direkt mitberücksichtigt werden, deren Einfluss auf das optimale Fahrverhalten kann jedoch abgebildet werden [125]. Des Weiteren lassen sich auch für die Längsbewegung gezielte Vorgaben über die Fahrgeschwindigkeit zu unterschiedlichen Zeitpunkten  $t_0$  und  $t_f$  machen, um damit z. B. ein Einfädeln in den fließenden Verkehr zu realisieren.

Analog der Berücksichtigung von Endbedingungen kann zum Erreichen der internen Zielzustände  $\mathbf{x}_0$  das Optimierungsproblem sowohl durch spezifische zusätzliche Kosten  $\tilde{V}(\mathbf{x}(t_0), t_0)$ , als auch durch Gleichungsnebenbedingungen der Form  $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}(t_0), t_0) = \mathbf{0}$  erweitert werden. Durch Variation um den Zielzustand  $\mathbf{x}_0$  lassen sich nach [90] die zusätzlichen Transversalitätsbedingungen

$$\lambda(t_0^-) = \lambda(t_0^+) + \left[ \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t_0} + \left[ \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}}{\partial \mathbf{x}} \right]_{t_0}^T \boldsymbol{\mu}, \quad (3.30)$$

$$[H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})]_{t_0^-} = [H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})]_{t_0^+} - \left[ \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} \right]_{t_0} - \left[ \frac{\partial \tilde{\mathbf{g}}}{\partial t} \right]_{t_0}^T \boldsymbol{\mu} \quad (3.31)$$

für den Zeitpunkt  $t_0$  herleiten, wobei  $t_0^-$  und  $t_0^+$  die Zeit unmittelbar vor und nach  $t_0$  bezeichnet. Außerdem folgt aus der Forderung eines stetigen Zustandsverlaufs, dass  $\mathbf{x}(t_0^-) = \mathbf{x}(t_0^+)$  gilt.

Durch die Transversalitätsbedingung (3.30) wird deutlich, dass trotz des stetigen Zustandsverlaufs  $\mathbf{x}(t)$  der Verlauf der Lagrange-Multiplikatoren  $\boldsymbol{\lambda}(t)$  zum Zeitpunkt  $t_0$  springt. Wie in Anhang A.1 für den Fall interner Punktkosten  $\tilde{V}(\mathbf{x}(t_0), t_0) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{S}_0 \mathbf{x}(t_0) + \boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{x}(t_0^-) - \mathbf{x}(t_0^+))$  gezeigt wird, führt dieser Zusammenhang ebenfalls zu einem Sprung der Lösung der Riccati-Differentialgleichung (3.8), sodass gilt  $\mathbf{P}(t_0^-) = \mathbf{S}_0 + \mathbf{P}(t_0^+)$ . Der gesamte Zeitverlauf von  $\mathbf{P}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$  kann folgerichtig durch Rückwärtsintegration der unabhängigen Zeitintervalle  $[t_f, t_0)$  und  $[t_0, t_0]$  erreicht werden. Die Berechnung der optimalen Stellgröße (3.9) bleibt durch die Systembeschreibung in  $\Delta$ -Größen ( $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ ) trotz der Berücksichtigung von internen Randbedingungen  $\mathbf{x}_0$  über Punktkosten unverändert [125]. Folglich können Zielzustände  $\mathbf{x}_0$  auf einfache Weise und ohne zusätzlichen Rechenaufwand bei der Optimie-

rung Berücksichtigung finden. Im Unterschied dazu führt die Formulierung von Gleichungsnebenbedingungen  $\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}(t_0), t_0) = \mathbf{0}$  aufgrund der zusätzlichen Lagrange-Multiplikatoren  $\boldsymbol{\mu}$ , äquivalent zur Herleitung der Endbedingungen, zu weiteren Differentialgleichungen. Die Berücksichtigung der Zielzustände  $\mathbf{x}_o$  über Punktkosten ist deshalb vorteilhaft. Ebenso wie bei der Beachtung der Endbedingungen aus der Formulierung von Punktkosten resultieren keine Einschränkungen für die Bestimmung der optimalen Endzeit  $t_f$ , die analog zu auf (3.13) entsprechend des Vorgehens in Abschn. 3.1.3, mit (3.31) erfolgen kann.

Ein Spezialfall der Berücksichtigung interner Randbedingungen stellt das Folgen<sup>3</sup> eines zeitlichen Verlaufs vorgegebener Zustände  $\mathbf{x}_d(t), t \in [t_0, t_f]$  dar. Durch die Wahl geeigneter Optimierungskriterien kann beispielsweise erreicht werden, dass einem nicht fahrbaren Verlauf der Fahrzeugquerpositionen relativ zu einer Referenzkurve  $\Gamma$  komfortabel gefolgt werden kann. Um dem vorgegebenen Zustandsverlauf  $\mathbf{x}_d(t)$  folgen zu können, lassen sich entsprechend der Endkosten in Abschn. 3.1.4, Integralkosten für Abweichungen von  $\mathbf{x}_d(t)$  veranschlagen. Das Kostenfunktional (2.3a) erweitert sich auf

$$\begin{aligned}
 J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} & [C\mathbf{x} - \mathbf{x}_d]^T \mathbf{Q} [C\mathbf{x} - \mathbf{x}_d] + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} \, dt \\
 & + \frac{1}{2} [C\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_{f,d}]^T \mathbf{S} [C\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_{f,d}]. \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

Analog zur Herleitung der Riccati-Differentialgleichung in Abschn. 3.1.2 kann basierend auf den Optimalitätsbedingungen (3.2), der Transversalitätsbedingung (3.3) und der Ansatzfunktion

$$\boldsymbol{\lambda}^*(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}^*(t) - \boldsymbol{\nu}(t), \quad t \in [t_0, t_f], \quad (3.33)$$

äquivalent zu Abschn. 3.1.4, neben der modifizierten Riccati-Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\mathbf{P} - \mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{C}, \quad \mathbf{P}(t_f) = \mathbf{C}^T\mathbf{S}\mathbf{C}, \quad (3.34)$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = [\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T - \mathbf{A}^T] \boldsymbol{\nu} + \mathbf{C}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}_d(t), \quad \boldsymbol{\nu}(t_f) = \mathbf{C}^T\mathbf{S}\mathbf{x}_{f,d} \quad (3.35)$$

---

<sup>3</sup> engl. tracking.

als weitere Differentialgleichung zur Bestimmung der optimalen Stellgröße

$$\mathbf{u}_{[t_0, t_f]}^* = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^\top [\mathbf{P}(t) \mathbf{x} + \mathbf{v}(t)] \quad (3.36)$$

hergeleitet werden. Auch für den zeitinvarianten Fall erweitert sich der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung des Tracking-Problems auf die Integration von Gleichung (3.35), da deren Lösung direkt von dem gewünschten Zustandsverlauf  $\mathbf{x}_d(t)$  abhängt. Aus Sicht der Fahrzeuganwendung gilt es abzuwägen, ob die Berücksichtigung einer Abfolge interner Zielzustände  $\mathbf{x}_d(t)$  den gesteigerten Rechenaufwand rechtfertigt.

## 3.2 Linear-quadratische Optimierung mit Beschränkungen

Für eine Vielzahl von Fahrsituationen ist die Berücksichtigung von Nebenbedingungen zur Erfüllung der in Kapitel 2 definierten Anforderungen essentiell, beispielsweise um den Grenzen der Fahrphysik bei Notbremsungen und dynamischen Manövern Rechnung zu tragen oder um die Kollisionsfreiheit der geplanten Fahrtrajektorien durch Begrenzungen des Fahrraums garantieren zu können.

Hinsichtlich der Berücksichtigung von Beschränkungen der Form  $\mathbf{H}_1(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{H}_2(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{h}_c(t) \leq \mathbf{0}$  ergeben sich allerdings Unterschiede in der Eignung von indirekten und direkten Optimierungsmethoden. Obwohl - basierend auf dem Maximumprinzip von Pontryagin und den Lagrange-Multiplikatoren - auch für die indirekten Optimierungsmethoden Ansätze existieren, um beschränkte Optimierungsprobleme zu lösen [53, 90], zeigt [109], dass sich bereits für vergleichsweise einfache Beschleunigungsbeschränkungen beim Bremsen, diese Ansätze nur unter großem Rechenaufwand in Echtzeit lösen lassen. Im Unterschied dazu können mit direkten Optimierungsmethoden eine große Zahl von Beschränkungen bei der Lösung des Optimalsteuerungsproblems (2.3) berücksichtigt werden [21].

Aus diesem Grund konzentriert sich der vorliegende Abschnitt auf die Lösung beschränkter linear-quadratischer Optimalsteuerungsprobleme mittels direkter Optimierungsmethoden. Da diese auf einer zeitlichen Diskretisierung des Optimierungsproblems basieren (vgl. Abschn. 2.2.4), wird zunächst eine Methode zur Bestimmung der äquivalenten zeitdiskreten Formulierung von



zeitkontinuierlichen Systemdynamiken vorgestellt. Aufbauend darauf wird das ursprünglich dynamische Optimalsteuerungsproblem (2.3) in ein *Quadratisches Programm* umformuliert [21], welches mit Methoden der statischen Optimierung äußerst recheneffizient gelöst werden kann. Motiviert durch die Anwendung der Bewegungsplanung wird die in Lehrbüchern dargestellte Herangehensweise auf den allgemeineren, zeitvarianten Fall mit Störungstermen sowohl für den Ausgang als auch für den Zustand erweitert. Zusätzlich kann für den Zustand ein Zielverlauf  $\mathbf{x}_d(t)$  vorgegeben werden. Anschließend wird der erstmalig anwendungsspezifische Einsatz der aus der Literatur bekannten Schlupfvariablen<sup>4</sup> adressiert. Dadurch wird zum einen die Lösbarkeit des Optimalsteuerungsproblems sichergestellt und zum anderen eine gezielte Beeinflussung der optimalen Trajektorienform durch die situationsabhängige Parametrierung von Nebenbedingungen ermöglicht.

### 3.2.1 Äquivalente zeitdiskrete Problemformulierung

Den Ausgangspunkt für die Anwendung der direkten Optimierungsmethoden bildet die zeitdiskrete Formulierung des ursprünglich zeitkontinuierlichen linear-quadratischen Optimalsteuerungsproblems (2.3). Um eine flexiblere Problemformulierung zu ermöglichen, wird im Weiteren die gegenüber (2.3) um eine zusätzliche Störung  $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^q$  und Ausgangsgleichungen  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$  erweiterte Systemdynamik

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} + \mathbf{D}(t)\mathbf{z}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (3.37a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{E}(t)\mathbf{z}, \quad (3.37b)$$

zu Grunde gelegt. Für die Matrizen  $\mathbf{D}(t) \in PC([t_0, t_f], \mathbb{R}^{n \times q})$  sowie  $\mathbf{C}(t) \in PC([t_0, t_f], \mathbb{R}^{p \times n})$  und  $\mathbf{E}(t) \in PC([t_0, t_f], \mathbb{R}^{p \times q})$  soll gelten, dass diese auf dem abgeschlossenen Intervall  $[t_0, t_f]$  stückweise stetig sind. Ferner sei die Störung  $\mathbf{z}(t)$  stückweise stetig und beschränkt auf  $[t_0, t_f]$ . Durch die Betrachtung diskreter Zeitpunkte  $t_k = k \cdot T_s, k \in \mathbb{N}$  des zeitkontinuierlichen Systems mit der Schrittweite  $T_s$ , siehe Abb. 3.1, lässt sich selbiges mittels endlicher Parametrierung der Stellgröße  $\mathbf{u}$  zwischen den diskreten Zeitpunkten exakt in dessen zeit-

<sup>4</sup> bzw. *Slackvariablen*, von engl. to slack = locker, entspannt.

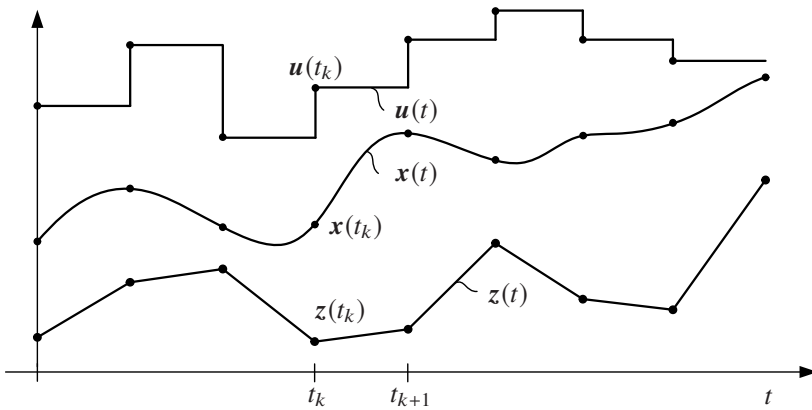


Abbildung 3.1: Exaktes zeitdiskretes Modell des zeitkontinuierlichen Systems zu den Zeitpunkten  $t_{k+1}$  bei gegebenem  $x(t_k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  für abschnittsweise konstantes Eingangssignal  $u(t_k)$  und abschnittsweise lineares Störungssignal  $z(t_k)$

diskrete Form überführen. Aus dem dynamischen Optimalsteuerungsproblem wird durch diesen Schritt ein statisches. Der Verlauf des Systemzustands  $x(t_k)$  zu diskreten Zeitpunkten  $t_k$  berechnet sich für einen gegebenen Anfangszustand  $x_0 = x(t_0)$  mit dem Verlauf von  $u(t_k)$  und  $z(t_k)$  durch aufeinanderfolgendes Lösen des Superpositionsintegrals

$$x(t) = \Phi(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau) D(\tau) z(\tau) d\tau, \quad (3.38)$$

auf dem Zeitintervall  $t \in [t_k, t_{k+1})$  für fortschreitendes  $k$  beginnend bei  $k = 0$ . Die Bestimmung der Transitionsmatrix  $\Phi(t, t_0)$  des kontinuierlichen Systems ist im allgemeinen zeitvarianten Fall analytisch nicht möglich. Allerdings existieren nach [6] für bestimmte Klassen von Systemmatrizen  $A(t)$  Lösungsvor-

schriften für deren Berechnung<sup>5</sup>. Für die zeitdiskreten Systemmatrizen gilt für jedes Diskretisierungsintervall  $k$

$$\mathbf{A}^D(t_k) = \mathbf{\Phi}(t_{k+1}, t_k), \quad (3.39a)$$

$$\mathbf{B}^D(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{\Phi}(t_{k+1}, \tau) \mathbf{B}(\tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau, \quad (3.39b)$$

$$\mathbf{D}^D(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{\Phi}(t_{k+1}, \tau) \mathbf{D}(\tau) \mathbf{z}(\tau) d\tau. \quad (3.39c)$$

Die Matrizen  $\mathbf{C}(t)$  und  $\mathbf{E}(t)$  sind im zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Fall identisch. Damit ergibt sich das zeitdiskrete Modell der verallgemeinerten Systemformulierung (3.37) in vereinfachter Darstellung der Zeitabhängigkeit ( $t_k \rightarrow k$ ) und für den klassischen Fall konstanter Stell- und Störgrößen  $\mathbf{u}(k)$  und  $\mathbf{z}(k)$

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}^D(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{B}^D(k) \mathbf{u}(k) + \mathbf{D}^D(k) \mathbf{z}(k), \quad (3.40a)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}^D(k) \mathbf{x}(k) + \mathbf{E}^D(k) \mathbf{z}(k), \quad \mathbf{x}(k=0) = \mathbf{x}_0. \quad (3.40b)$$

Das Kostenfunktional (2.3a) lässt sich als Summe über alle Optimierungszeit-schritte  $k = 0, \dots, N$  auf dem Optimierungshorizont  $N$  darstellen als

$$J = \mathbf{x}(N)^T \mathbf{S} \mathbf{x}(N) + \sum_{k=1}^{N-1} \mathbf{x}(k)^T \mathbf{Q}(k) \mathbf{x}(k) + \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{u}(k)^T \mathbf{R}(k) \mathbf{u}(k). \quad (3.41)$$

Darüber hinaus gilt für die linearen Nebenbedingungen (2.3c) und (2.3d), dass sie entsprechend der zeitdiskreten Systemformulierung (3.40) nur zu diskreten Zeitpunkten  $k$  berücksichtigt werden können. Angesichts der verallgemeinerten Problemformulierung mit Ausgangsgleichungen lassen sich die linearen zeitvarianten Ungleichungsbeschränkungen (2.3d) flexibel für beliebige Sys-

---

<sup>5</sup> Gilt  $\mathbf{A}(t) \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau \mathbf{A}(t)$  folgt für die Transitionsmatrix  $\mathbf{\Phi}(t, t_0) = e^{\int_{t_0}^t \mathbf{A}(\tau) d\tau}$ . Dies gilt insbesondere für zeitinvariante Systemmatrizen  $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}$ .

temausgänge<sup>6</sup>  $y_{i_p}$  und -eingänge  $u_{i_m}$  zu beliebigen Zeitpunkten  $k$  in Form von

$$y_{i_p, \min}(k) \leq y_{i_p}(k) \leq y_{i_p, \max}(k), \quad (3.42a)$$

$$u_{i_m, \min}(k) \leq u_{i_m}(k) \leq u_{i_m, \max}(k), \quad (3.42b)$$

für  $i_p \in \mathcal{I}_p \subseteq \{1, \dots, p\}$  und  $i_m \in \mathcal{I}_m \subseteq \{1, \dots, m\}$  definieren. Durch die Forderung  $y_{i_p, \max} = y_{i_p, \min}$  zum Zeitpunkt  $k = N$  können auch Endbedingungen bei der Formulierung des Optimalsteuerungsproblems mit berücksichtigt werden.

### 3.2.2 Problemformulierung als quadratisches Programm

Zur Lösung zeitdiskreter Optimalsteuerungsprobleme (3.40)-(3.41) mit Beschränkungen (3.42) hat sich in der Literatur der sog. *Batch-Ansatz*<sup>7</sup> etabliert [21]. Dieser nutzt die Eigenschaft der Superposition linearer Systeme, um das zukünftige Systemverhalten ab dem gegebenen Anfangszustand  $\mathbf{x}_0$  in Form von Vektorsequenzen für den Systemzustand  $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$  und -ausgang  $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^p$

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^\top, \dots, \mathbf{x}_N^\top]^\top, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{nN}, \quad (3.43)$$

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1^\top, \dots, \mathbf{y}_N^\top]^\top, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{pN} \quad (3.44)$$

sowie der a priori bekannten Störung  $\mathbf{z}(k) \in \mathbb{R}^q$

$$\mathbf{z} = [\mathbf{z}_1^\top, \mathbf{z}_2^\top, \dots, \mathbf{z}_N^\top]^\top, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{qN}, \quad (3.45)$$

$$\tilde{\mathbf{z}} = [\mathbf{z}_0^\top, \mathbf{z}_1^\top, \dots, \mathbf{z}_{N-1}^\top]^\top, \quad \mathbf{z} \in \mathbb{R}^{qN} \quad (3.46)$$

nur in Abhängigkeit der gesuchten Sequenz des Systemeingangs  $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^m$

$$\mathbf{u} = [\mathbf{u}_0^\top, \mathbf{u}_1^\top, \dots, \mathbf{u}_{N-1}^\top]^\top, \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{mN} \quad (3.47)$$

---

<sup>6</sup> Durch die Ausgangsmatrizen  $\mathbf{C}$  und  $\mathbf{E}$  lassen sich Beschränkungen des Zustands ebenfalls in Form von Ausgangsbeschränkungen darstellen.

<sup>7</sup> In [25] wird dieser Ansatz als *Dynamik-Matrix-Control* bezeichnet.

kompakt ausdrücken zu können. Einer übersichtlichen Darstellung halber sind die Optimierungszeitschritte  $k = 0, \dots, N$  als Index repräsentiert.

Die Systemgleichungen (3.40) lassen sich in Folge dessen umformulieren zu

$$\mathbf{x} = \mathcal{A}\mathbf{x}_0 + \mathcal{B}\mathbf{u} + \mathcal{D}\mathbf{z}, \quad (3.48a)$$

$$\mathbf{y} = \mathcal{C}\mathbf{x} + \mathcal{E}\mathbf{z}. \quad (3.48b)$$

Die zusammengefassten Systemmatrizen  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  ergeben sich zu

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} (A_0^D)^T & \left(\prod_{l=0}^1 A_{1-l}^D\right)^T & \cdots & \left(\prod_{l=0}^{N-1} A_{N-1-l}^D\right)^T \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} B_0^D & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ A_1^D B_0^D & B_1^D & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \left(\prod_{l=1}^{N-1} A_{N+0-l}^D\right) B_0^D & \cdots & A_{N-1}^D B_{N-2}^D & B_{N-1}^D \end{bmatrix}$$

und  $\mathcal{C} = \text{diag}(\mathcal{C}_1^D, \dots, \mathcal{C}_N^D)$ . Des Weiteren lassen sich die Matrizen  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{E}$  äquivalent zu den Matrizen  $\mathcal{B}$  und  $\mathcal{C}$  bestimmen.

Analog dazu kann das zeitdiskrete Kostenfunktional (3.41) mittels der Vektorsequenzen des Zustandes  $\mathbf{x}$  und des Eingangs  $\mathbf{u}$  durch

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathcal{R} \mathbf{u}, \quad (3.49)$$

mit  $\mathcal{R} = \text{diag}(\mathbf{R}_0, \dots, \mathbf{R}_{N-1})$  und  $\mathbf{Q} = \text{diag}(\mathbf{Q}_1, \dots, \mathbf{Q}_{N-1}, \mathbf{S})$ <sup>8</sup> kompakt zusammengefasst werden.

Wie auch im zeitkontinuierlichen Fall ohne Beschränkungen, siehe Abschn. 3.1.5, besteht für mehr Flexibilität bei der Problemformulierung an dieser Stelle die Möglichkeit, das Kostenfunktional (3.49) dahingehend zu erweitern, um einem beliebig vorgegebenen Zustandsverlauf  $\mathbf{x}_d$  folgen zu können. Aus Sicht der Anwendung sind dadurch beispielsweise Vorgaben über den Verlauf der

<sup>8</sup> Da die Teilkosten  $\mathbf{x}_0^T \mathbf{Q} \mathbf{x}_0$  nur einen additiven Anteil der Gesamtkosten darstellen und nicht über den Systemeingang beeinflussbar sind, wird auf diese bei der Zusammenfassung der Kosten verzichtet.

Querbewegung möglich, um z. B. einem vorausfahrenden Fahrzeug bei fehlenden Fahrspurmarkierungen in Baustellen folgen zu können. Das erweiterte Kostenfunktional ergibt sich zu

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{u}; \mathbf{x}_d) = [\mathbf{x} - \mathbf{x}_d]^\top \mathbf{Q} [\mathbf{x} - \mathbf{x}_d] + \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{u}. \quad (3.50)$$

Basierend auf der kompakten Beschreibung der Systemdynamik (3.48), welche den gesamten zukünftigen Systemzustand in Abhängigkeit der zu optimierenden Sequenz des Systemeingangs  $\mathbf{u}$  repräsentiert, lässt sich selbige durch Einsetzen von (3.48a) auf einfache Weise in das Kostenfunktional (3.50) integrieren, sodass sich ein statisches Optimierungsproblem ergibt, dessen Optimierungsvariablen die Vektorsequenz  $\mathbf{u}$  darstellt. Dementsprechend lässt sich das Kostenfunktional (3.50) zu

$$J(\mathbf{u}; \mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{x}_d) = \mathbf{u}^\top \mathbf{H} \mathbf{u} + 2 [\mathbf{x}_0^\top \mathbf{F} + [\mathcal{D}\tilde{\mathbf{z}} - \mathbf{x}_d]^\top \mathbf{G}] \mathbf{u} + \mathbf{o} \quad (3.51)$$

mit

$$\mathbf{H} = \mathcal{B}^\top \mathbf{Q} \mathcal{B} + \mathcal{R}, \quad \mathbf{F} = \mathcal{A}^\top \mathbf{Q} \mathcal{B}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{Q} \mathcal{B} \quad (3.52)$$

umformen. In  $\mathbf{o}$  sind alle von  $\mathbf{u}$  unabhängigen Konstanten zusammengefasst, die keinen Einfluss auf die optimale Lösung des Optimierungsproblems besitzen.

Durch die Zusammenfassung der Beschränkungen (3.42) entsprechend der Vektorsequenzen für den Systemausgang  $\mathbf{y}$  und -eingang  $\mathbf{u}$  zu

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{\min} &= [\mathbf{y}_{1,\min}^\top, \dots, \mathbf{y}_{N,\min}^\top]^\top, & \mathbf{y}_{\max} &= [\mathbf{y}_{1,\max}^\top, \dots, \mathbf{y}_{N,\max}^\top]^\top, \\ \mathbf{u}_{\min} &= [\mathbf{u}_{0,\min}^\top, \dots, \mathbf{u}_{N-1,\min}^\top]^\top, & \mathbf{u}_{\max} &= [\mathbf{u}_{0,\max}^\top, \dots, \mathbf{u}_{N-1,\max}^\top]^\top, \end{aligned}$$

folgt mit Hilfe der Ausgangsgleichung (3.48b), ebenfalls nach Einsetzen von (3.48a)

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &\leq \mathbf{y}_{\max} &\Rightarrow & \mathbf{C} \mathcal{B} \mathbf{u} \leq \mathbf{y}_{\max} - \mathbf{C} \mathcal{A} \mathbf{x}_0 - \mathbf{C} \mathcal{D} \tilde{\mathbf{z}} - \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{z}, \\ -\mathbf{y} &\leq -\mathbf{y}_{\min} &\Rightarrow & -\mathbf{C} \mathcal{B} \mathbf{u} \leq -\mathbf{y}_{\min} + \mathbf{C} \mathcal{A} \mathbf{x}_0 + \mathbf{C} \mathcal{D} \tilde{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{z}. \end{aligned}$$

Sowohl alle Ausgangs- als auch Eingangsbeschränkungen (3.42) lassen sich nur in Abhängigkeit des Optimierungsvektors  $\mathbf{u}$  des Kostenfunktionals (3.51) durch

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{CB} \\ \mathbf{I}_{mN} \\ -\mathbf{CB} \\ -\mathbf{I}_{mN} \end{bmatrix}}_{A_C} \mathbf{u} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_{\max} - \mathbf{C}[\mathcal{A}\mathbf{x}_0 + \mathcal{D}\mathbf{z}] - \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{z} \\ \mathbf{u}_{\max} \\ -\mathbf{y}_{\min} + \mathbf{C}[\mathcal{A}\mathbf{x}_0 + \mathcal{D}\mathbf{z}] + \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{z} \\ -\mathbf{u}_{\min} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}_C} \quad (3.54)$$

kompakt darstellen.

In Verbindung mit dem Kostenfunktional (3.51) kann das ursprünglich zeitkontinuierliche linear-quadratische Optimalsteuerungsproblem (2.3) mit Beschränkungen in ein *Quadratisches Programm* mit Ungleichungsnebenbedingungen (3.54) umformuliert werden, welches mit Methoden der statischen Optimierung<sup>9</sup> sehr effizient gelöst werden kann [21, 53, 90]. Hinsichtlich des zur Lösung notwendigen Rechenaufwands ergeben sich, wie auch im unbeschränkten Fall (vgl. Abschn. 3.1.2) ebenso Vorteile bei zeitinvarianter Problemformulierung, da eine Berechnung der Matrizen (3.52) zur Laufzeit entfällt.

### 3.2.3 Anwendungsspezifischer Einsatz von Schlupfvariablen

Zur Vermeidung unlösbarer Problemstellungen durch Beschränkungen, bieten die aus der Literatur bekannten *Schlupfvariablen* [21, 53] die Möglichkeit, durch „lockern“ (engl. slack) der Ungleichungsnebenbedingungen (UNB), die zyklische Lösbarkeit beschränkter Optimierungsprobleme sicherzustellen. Die Grundidee ist, die Verletzung der Beschränkungen als zusätzliche Kosten  $l(\boldsymbol{\epsilon})$  bei der Optimierung mit zu berücksichtigen. Die Schlupfvariablen  $\boldsymbol{\epsilon} \in \mathbb{R}^r$

<sup>9</sup> Etablierte Methoden zur Lösung statischer Optimierungsprobleme sind beispielsweise die *Interior-Point-Verfahren*, die *Active-Set-Verfahren* oder die *Projizierte-Gradienten-Verfahren* [21, 53], vgl. Abschn. 2.3.

repräsentieren den Grad der Verletzung, sodass sich Beschränkungen in Form erweiterter Ungleichungsnebenbedingungen

$$\mathbf{H}_1(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{H}_2(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{h}_c(t) \leq \boldsymbol{\epsilon} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\epsilon} \geq \mathbf{0} \quad (3.55)$$

beschreiben lassen. Durch die Integration der Schlupfvariablen  $\boldsymbol{\epsilon}$  als zusätzliche Optimierungsvariablen beinhaltet die optimale Lösung des erweiterten Problems den Kompromiss zwischen der mit hohen Kosten belegten Verletzung der Beschränkungen und der Lösbarkeit des Optimierungsproblems.

Um ausreichend hohe Kosten für die Verletzung von Beschränkungen formulieren zu können, ohne die optimale Lösung  $\mathbf{u}^*$  des Originalproblems negativ zu verändern, ist, wie in Abb. 3.2c für den skalaren Fall  $r = 1$  dargestellt, eine linear-quadratische Formulierung der zusätzlichen Kosten zielführend. Durch die Wahl eines hinreichend großen linearen Verstärkungsfaktors  $k_{1i_r} \geq 0$  für  $i_r \in [1, \dots, r]$  kann so sichergestellt werden, dass die Gesamtkosten bei Verletzung der Nebenbedingung immer größer sind als im zulässigen Bereich (vgl. Abb. 3.2a). Im Vergleich dazu führt eine rein quadratische Kostenzunahme in bestimmten Fällen zwangsläufig zu einer Verschiebung der optimalen Lösung in den unzulässigen Bereich (vgl. Abb. 3.2b). Außerdem ermöglicht eine quadratische Kostenzunahme mit den Faktoren  $k_{2i_r} \geq 0$  die Verletzung von Beschränkungen stärker zu bestrafen. Die zusätzlichen Kosten  $l(\boldsymbol{\epsilon})$  werden daher zu

$$l(\boldsymbol{\epsilon}) = \sum_{i_r=1}^r l_{i_r}(\epsilon_{i_r}) = \sum_{i_r=1}^r \left( k_{1i_r} \epsilon_{i_r} + k_{2i_r} \epsilon_{i_r}^2 \right) = \mathbf{k}_1^\top \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^\top \mathbf{K}_2 \boldsymbol{\epsilon} \quad (3.56)$$

mit  $\mathbf{k}_1 = [k_{11}, k_{12}, \dots, k_{1r}]^\top$ ,  $\mathbf{K}_2 = \text{diag}(k_{21}, k_{22}, \dots, k_{2r})$  angesetzt. Für das Quadratische Programm (3.51), (3.54) erweitert sich dessen Kostenfunktional durch die Berücksichtigung der Schlupfvariablen auf

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\epsilon}; \mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{x}_d) &= J(\mathbf{u}; \mathbf{x}_0, \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{x}_d) + \mathbf{k}_1^\top \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^\top \mathbf{K}_2 \boldsymbol{\epsilon} \\ &= \tilde{\mathbf{u}}^\top \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{F}} \tilde{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (3.57)$$

mit  $\tilde{\mathbf{H}} = \text{diag}(\mathbf{H}, \mathbf{K}_2)$ ,  $\tilde{\mathbf{F}} = \left[ 2 \left[ \mathbf{x}_0^\top \mathbf{F} + [\mathcal{D}\tilde{\mathbf{z}} - \mathbf{x}_d]^\top \mathbf{G} \right] \quad \mathbf{k}_1^\top \right]$  und dem erweiterten Optimierungsvektor  $\tilde{\mathbf{u}} = \left[ \mathbf{u}^\top, \boldsymbol{\epsilon}^\top \right]^\top$ .



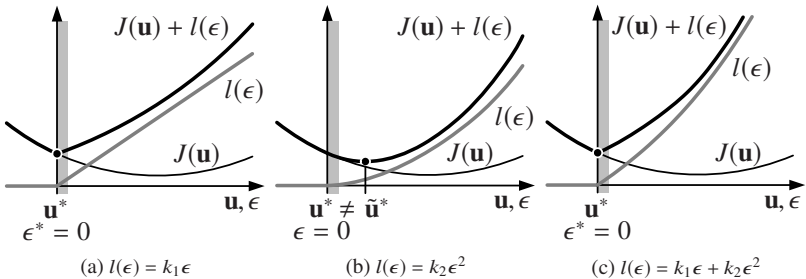


Abbildung 3.2: Vergleich der Gesamtkosten bei unterschiedlichen zusätzlichen Kostentermen  $l(\epsilon)$  nach [108]

Zu beachten ist, dass für die Erweiterung des Optimierungsvektors  $\mathbf{u}$ , der zur Lösung notwendige Rechenaufwand mit der Anzahl der Schlupfvariablen  $r$  zunimmt. Aus diesem Grund wird zur bloßen Sicherstellung der Lösbarkeit des Optimierungsproblems hinsichtlich einer effizienten Lösungsfindung typischerweise nur eine einzige Schlupfvariable  $\epsilon$  für alle Ungleichungsbeschränkungen (3.42) zu allen Zeitschritten  $0 \leq k \leq N$  verwendet. In diesem Fall ergeben sich mit dem erweiterten Optimierungsvektor  $\tilde{\mathbf{u}}$  entsprechend (3.55) für  $r = 1$  die Ungleichungsbeschränkungen (3.54) zu

$$\underbrace{\begin{bmatrix} A_C & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}_C} \tilde{\mathbf{u}} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{b}_C \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{b}}_C}. \quad (3.58)$$

Der Einsatz mehrerer voneinander unabhängiger Schlupfvariablen bietet über die Sicherstellung der Lösbarkeit hinaus die Möglichkeit, deren besondere Eigenschaften anwendungsspezifisch für eine flexible Problemformulierung auszunutzen. Zum einen können die Verletzungen verschiedener Beschränkungen unabhängig voneinander betrachtet werden, womit sich z. B. die Übertretungen der Fahrraumbeschränkungen auf der rechten Seite nicht auf die der linken Seite auswirken können. Zum anderen erlaubt eine unterschiedliche Parametrierung der Gewichtungen  $k_1$  und  $k_2$ , die Verletzungen bestimmter Beschränkungen verschieden zu priorisieren, sodass beispielsweise eine Verletzung der ohnehin nur konservativ abzuschätzenden fahrphysikalischen Begrenzungen

der Verletzung von kollisionsrelevanten Beschränkungen vorgezogen werden kann. Einen Spezialfall stellt die Verwendung mehrerer Beschränkungen mit Schlupfvariablen für dieselbe Größe dar. Wie in Abb. 3.3 dargestellt, ist dadurch ein mehrstufiger Anstieg der Kosten zu erreichen, was z. B. für eine unterschiedliche Berücksichtigung von Fahrbahnmarkierungen und Leitplanken bei der Planung der Querbewegung ausgenutzt werden kann.

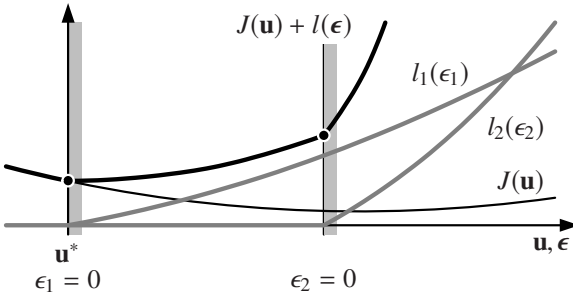


Abbildung 3.3: Mehrstufiger Anstieg der Gesamtkosten bei zwei voneinander unabhängigen Schlupfvariablen  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$

Darüber hinaus ermöglicht die Formulierung von Schlupfvariablen auf einem beschränkten Optimierungshorizont  $N_s < N$  die flexible Berücksichtigung von Beschränkungen, deren Einfluss auf die Lösbarkeit und die optimale Lösung für kleiner werdende  $k$  stark ansteigt. Negative Auswirkungen sprunghafter Änderungen der Nebenbedingungen, verursacht z. B. durch Sensorrauschen, können bei zyklischer Lösung des Optimierungsproblems stark reduziert werden.

Motiviert durch eine flexible Problemformulierung folgt für den selektiven Einsatz von Schlupfvariablen für ausgewählte Beschränkungen (3.42) eine gegenüber (3.58) angepasste Zusammensetzung der Ungleichungsnebenbedingungen. Diese basiert auf einer Separation derjenigen Beschränkungen des Ausgangs und Eingangs, die zu einem Zeitpunkt  $k$  durch Schlupfvariablen „gelockert“ werden sollen, und den Beschränkungen, die durch die Schlupfvariablen unberührt bleiben. Über die Matrix  $S_k^y$  für den Ausgang und  $S_k^u$  für den Eingang, können zu jedem Zeitpunkt  $k$ , diejenigen Ausgänge  $y_{i_p,s}(k), i_{p,s} \in \mathcal{I}_{p,s}(k) \subseteq \mathcal{I}_p$  und Eingänge  $u_{i_m,s}(k), i_{m,s} \in \mathcal{I}_{m,s}(k) \subseteq \mathcal{I}_m$  selektiert werden, für welche Schlupfvariablen gelten (Index  $s$ ). Analog dazu lassen sich alle übrigen Aus- und Eingänge durch  $H_k^y$  und  $H_k^u$  zusammenfassen

(Index h), sodass sich in Summe  $n_s = \sum_{k=0}^N (|\mathcal{I}_{p,s}(k)| + |\mathcal{I}_{m,s}(k)|)$  „gelockerte“ und  $n_h = \sum_{k=0}^N (|\mathcal{I}_{p,h}(k)| + |\mathcal{I}_{m,h}(k)|)$  „harte“ Beschränkungen ergeben. Entsprechend lassen sich die Vektorsequenzen  $\mathbf{y}$  und  $\mathbf{u}$  aufteilen in

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{s,k} &= \mathbf{S}_k^y \mathbf{y}_k \Rightarrow \mathbf{y}_s = \mathbf{S}^y \mathbf{y} \quad \text{mit} \quad \mathbf{S}^y = \text{diag}(\mathbf{S}_1^y, \dots, \mathbf{S}_N^y), \\ \mathbf{u}_{s,k} &= \mathbf{S}_k^u \mathbf{u}_k \Rightarrow \mathbf{u}_s = \mathbf{S}^u \mathbf{u} \quad \text{mit} \quad \mathbf{S}^u = \text{diag}(\mathbf{S}_0^u, \dots, \mathbf{S}_{N-1}^u), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{h,k} &= \mathbf{H}_k^y \mathbf{y}_k \Rightarrow \mathbf{y}_h = \mathcal{H}^y \mathbf{y} \quad \text{mit} \quad \mathcal{H}^y = \text{diag}(\mathbf{H}_1^y, \dots, \mathbf{H}_N^y), \\ \mathbf{u}_{h,k} &= \mathbf{H}_k^u \mathbf{u}_k \Rightarrow \mathbf{u}_h = \mathcal{H}^u \mathbf{u} \quad \text{mit} \quad \mathcal{H}^u = \text{diag}(\mathbf{H}_0^u, \dots, \mathbf{H}_{N-1}^u). \end{aligned}$$

Äquivalent zum vorausgehenden Abschnitt können auch hier die Ausgangsbeschränkungen durch (3.48b) und (3.48a) in Eingangsbeschränkungen umformuliert werden, sodass sich mit  $\mathbf{A}'_C = \mathbf{C}\mathcal{B}$  und  $\mathbf{b}'_C = \mathbf{C}[\mathcal{A}\mathbf{x}_0 + \mathcal{D}\mathbf{z}] + \mathcal{E}\mathbf{z}$  die Beschränkungen des Kostenfunktional (3.57) unter Berücksichtigung der Schlupfvariablen zusammenfassen lassen zu

$$\left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \mathcal{H}^y \mathbf{A}'_C \\ \mathcal{H}^u \\ -\mathcal{H}^y \mathbf{A}'_C \\ -\mathcal{H}^u \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} \mathbf{S}^y \mathbf{A}'_C \\ \mathbf{S}^u \\ -\mathbf{S}^y \mathbf{A}'_C \\ -\mathbf{S}^u \end{array} \right] \\ \mathbf{0}_{r \times N} \end{array} \right] \begin{array}{c} \mathbf{0}_{2n_h \times r} \\ -\mathbf{Y}_{2n_s \times r} \\ -\mathbf{I}_r \end{array} \tilde{\mathbf{u}} \leq \left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \mathcal{H}^y [\mathbf{y}_{\max} - \mathbf{b}'_C] \\ \mathcal{H}^u \mathbf{u}_{\max} \\ -\mathcal{H}^y [\mathbf{y}_{\min} - \mathbf{b}'_C] \\ -\mathcal{H}^u \mathbf{u}_{\min} \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} \mathbf{S}^y [\mathbf{y}_{\max} - \mathbf{b}'_C] \\ \mathbf{S}^u \mathbf{u}_{\max} \\ -\mathbf{S}^y [\mathbf{y}_{\min} - \mathbf{b}'_C] \\ -\mathbf{S}^u \mathbf{u}_{\min} \end{array} \right] \\ \mathbf{0}_r \end{array} \right], \quad (3.59)$$

wobei  $\mathbf{Y}$  die Schlupfvariablenmatrix ist. Sie beschreibt, welche Beschränkungen mit derselben Schlupfvariable „gelockert“ werden. Für die Spezialfälle  $r = 1$  und  $r = n_s$  folgt  $\mathbf{Y} = \mathbf{1}_{2n_s}$  bzw.  $\mathbf{Y} = \mathbf{I}_{2n_s}$ . Aus Sicht der Anwendung ist durch die Wahl von  $\mathbf{Y}$  eine sinnvolle Verteilung der Schlupfvariablen auf die Beschränkungen zu erzielen, sodass sich ein guter Kompromiss zwischen einer effizienten Lösungsfindung für kleine  $r$ , einer lösbaren Problemstellung und einer möglichst flexiblen Problemformulierung ergibt.

### 3.3 Zusammenfassung

Zur Bestimmung der Lösung linear-quadratischer Optimalsteuerungsprobleme gibt das vorliegende Kapitel einen systematisierten Überblick über zielführende Anpassungen und Verallgemeinerungen aus der Literatur bekannter Lösungsmethoden und stellt diese in den Kontext der Bewegungsplanung von Fahrzeugen. Durch die Anpassung der Optimierungskriterien ergeben sich, basierend auf den verschiedenen Optimierungsmethoden, gegenüber der klassischen linear-quadratischen Problemformulierung (2.3) mit Gleichungsnebenbedingungen (2.3c) und Beschränkungen (2.3d), Unterschiede für den zur Lösung notwendigen Rechenaufwand.

Hinsichtlich einer möglichst recheneffizienten Lösung bietet die Vernachlässigung von Beschränkungen der Form  $\mathbf{H}_1(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{H}_2(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{h}_c(t) \leq \mathbf{0}$  weitreichende Möglichkeiten, den Rechenaufwand zu reduzieren. Grund dafür ist der vorteilhafte Einsatz indirekter Optimierungsmethoden, welcher für eine Vielzahl unterschiedlicher linear-quadratischer Problemformulierungen eine weitgehend analytische Lösung des unbeschränkten Optimalsteuerungsproblems im Vorfeld zulässt. Vor allem bei zeitinvarianter Systembeschreibung kann der Rechenaufwand bei zyklischer Lösung des Optimierungsproblems auf ein Minimum gesenkt werden. Daneben besteht auch bei zeitvarianter Systembeschreibung mittels direkter Optimierungsmethoden die Möglichkeit, linear-quadratische Optimalsteuerungsprobleme mit Beschränkungen effizient zu lösen. Demzufolge gilt es für die Planung optimaler Fahrtrajektorien, einen geeigneten Kompromiss zwischen einer effizient zu lösenden, linear-quadratischen Problemformulierung und der Vernachlässigung von Beschränkungen zu finden.

Mit Blick auf die in Kapitel 2 motivierte separate Formulierung linear-quadratischer Optimalsteuerungsprobleme (2.3) für die Längs- und Querbewegung resultieren aus den in Abschn. 2.1.2 definierten Anforderungen in Abhängigkeit der Bewegungsrichtung und Fahrsituation unterschiedliche Potenziale aus der Vernachlässigung von Beschränkungen. Aufgrund der in Längsrichtung zeitinvarianten Systemdynamik und der ausschließlich bei Notbremsmanövern relevanten Beschleunigungsbeschränkungen, bietet die Formulierung unbeschränkter linear-quadratischer Optimalsteuerungsprobleme für die Planung der Fahrzeuglängsbewegung ein bedeutendes Potenzial für eine äußerst effiziente Lösungsfindung, siehe Kapitel 4. Durch flexible An-

passungen der Problemformulierung (2.3) um zusätzliche Kostenterme und Gleichungsnebenbedingungen (vgl. Abschn. 3.1.4 und Abschn. 3.1.5) lassen sich die entstehenden Einschränkungen zu Gunsten der Minimierung des Rechenaufwands für eine Vielzahl von Fahrsituationen ausreichend kompensieren.

Demgegenüber ergeben sich durch die Vernachlässigung von Beschränkungen und dem Einsatz indirekter Methoden für die Querbewegung aufgrund der i. Allg. zeitvarianten Systemdynamik nur bedingt Vorteile. Die in Kapitel 2 definierten Anforderungen können nicht ohne Weiteres erfüllt werden. Vor allem durch die Möglichkeit eine große Anzahl an Beschränkungen in Kombination mit dem Einsatz von Schlupfvariablen (vgl. Abschn. 3.1.4) flexibel zu berücksichtigen, bieten die direkten Optimierungsmethoden einen größeren Nutzen. Ungeachtet dessen kann für isolierte Fahrsituationen, wie in [125] gezeigt, durch die Vernachlässigung fahrphysikalischer Beschränkungen, die Systemdynamik der Querbewegung zeitinvariant formuliert und die Fahrraumbeschränkungen über die gezielte Vorgabe von internen Randbedingungen berücksichtigt werden. Die Lösung des linear-quadratischen Optimalsteuerungsproblems mittels indirekter Methoden kann folglich mit äußerst geringem Rechenaufwand bestimmt werden.

Abschließend sei bemerkt, dass, unabhängig von der Bewegungsrichtung, über eine Variation der Parametrierung mehrere Lösungen des unbeschränkten Optimalsteuerungsproblems (2.3) für eine einzelne Bewegungshypothese mittels der indirekten Methoden äußerst effizient bestimmt werden können. Entsprechend der Grundidee in [107] kann durch einen nachgelagerten Vergleich der Lösungen diejenige ausgewählt werden, welche die ursprünglich vernachlässigten Beschränkungen der Bewegungsplanung bestmöglich erfüllt. Da dieser Ansatz allerdings nur bei einer geringen Anzahl zu überprüfender Variationen einen Vorteil für den zur Lösung des Optimierungsproblems mit Beschränkungen notwendigen Rechenaufwand bietet und nur eine suboptimale Lösung ermöglicht, empfiehlt sich dessen Anwendung nur in besonderen Einzelfällen.



## 4 Neue Algorithmen zur recheneffizienten Fahrzeuglängsführung

Basierend auf der in Kapitel 2 motivierten, für die Bewegungsrichtungen unabhängigen Trajektorienoptimierung, widmet sich das vorliegende Kapitel der Formulierung linear-quadratischer Optimalsteuerungsprobleme zur Planung der Fahrzeuglängsbewegung. Mit Hilfe der in Kapitel 3 vorgestellten Methoden können diese effizient gelöst werden. Aufgrund der hinreichend genauen Beschreibung der Fahrzeuglängsbewegung durch ein zeitinvariantes Systemmodell und der nur für dynamische Manöver notwendigen Berücksichtigung fahrphysikalischer Beschränkungen, motiviert der in Kapitel 3 beschriebene, recheneffiziente Einsatz indirekter Optimierungsmethoden, die Formulierung eines unbeschränkten linear-quadratischen Optimalsteuerungsproblems mit Endbedingungen. Jedoch ist zur Einhaltung fahrphysikalischer Beschränkungen bei Notbremsmanövern die Berücksichtigung von Beschleunigungsbeschränkungen essentiell, weshalb in diesen Situationen nicht zugunsten eines reduzierten Rechenaufwands auf die Berücksichtigung von Beschränkungen verzichtet werden kann.

Vor diesem Hintergrund werden, im Anschluss an die Ausführung der speziellen Eigenschaften der Fahrzeuglängsbewegung, zwei Problemformulierungen zur Trajektorienoptimierung in Längsrichtung definiert, welche sich in der Berücksichtigung von Beschränkungen und dem daraus resultierenden Einsatz indirekter und direkter Optimierungsmethoden unterscheiden. Auf Grundlage der besonders effizienten Lösungsfindung der indirekten Optimierungsmethoden wird daraufhin eine erfolgreiche Anwendung der vorgestellten unbeschränkten Problemformulierung mit Endbedingungen für die Umsetzung einer neuartigen Fahrerassistenzfunktion zur verlässlichen Kollisionsvermeidung beim Parken und Rangieren beschrieben. Abschließend werden die un-

terschiedlichen Eigenschaften der Problemformulierungen in den allgemeinen Kontext der Generierung von Längsbewegungsoptionen eingeordnet.

## 4.1 Eigenschaften der Fahrzeuglängsbewegung

Im Gegensatz zur Optimierung der Fahrzeugquerbewegung, ergeben sich, durch die in Kapitel 2 motivierte Bewegungsplanung in Bahnkoordinaten, für die Generierung von Längsbewegungsoptionen weitreichende Besonderheiten bei der Formulierung linear-quadratischer Optimalsteuerungsprobleme. Wie im Folgenden beschrieben spielen die effiziente Lösungsfindung bei zeitinvarianter Systemdynamik und die Berücksichtigung von ortsgebundenen Nebenbedingungen die entscheidende Rolle bei der Problemformulierung.

### 4.1.1 Zeitinvariante Dynamik eindimensionaler Bewegungen

Aus der in Kapitel 2 vorgestellten Problembeschreibung in Bahnkoordinaten, folgt für die Fahrzeuglängsbewegung entlang der Referenzkurve  $\Gamma$ , dass die Bewegungsplanung auf Grundlage von (2.6a), durch die Systemdynamik einer eindimensionalen Bewegung hinreichend beschrieben werden kann [84, 107]. Mit der Möglichkeit, die Systemdynamik in Abhängigkeit der Zeit  $t$  als einfaches Integratorsystem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_A \mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_B u(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.1)$$

mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x} = [s, v, a]^T$  zeitinvariant zu formulieren, ergeben sich im Vergleich zu einer wegabhängigen Systemmodellierung entscheidende Vorteile für eine besonders effiziente Lösung der Problemformulierungen (vgl. Kapitel 3). Entsprechend (2.6a) definiert  $s(t)$  die Wegstrecke,  $v(t)$  die Fahrzeuggeschwindigkeit und  $a(t)$  die Fahrzeugbeschleunigung entlang der



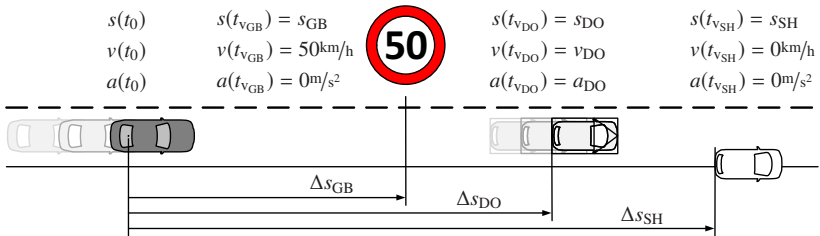


Abbildung 4.1: Übersicht über die Einflussgrößen der Längsbewegung; Ausgehend von der Position des Ego-Fahrzeugs (dunkel grau) sind basierend auf deren Abständen  $\Delta s$ , der Einfluss von Geschwindigkeitsbegrenzungen (GB), dynamischen Objekten (DO) und statischen Hindernissen (SH) dargestellt

Referenzkurve  $\Gamma$ . Darüber hinaus beschreibt der Systemeingang  $u(t)$  den Ruck in Längsrichtung. Zur Anwendung direkter Optimierungsmethoden lässt sich das Integratorsystem (4.1) um zusätzliche Systemzustände höherer Ordnung erweitern, sodass der für die Diskretisierung notwendige, stückweise stetige Verlauf der Stellgröße, siehe Abschn. 3.2.1, einen stetig differenzierbaren Verlauf der Längsbeschleunigung  $a(t)$  erzeugt.

## 4.1.2 Ortsgebundene Bewegungsvorgaben

Zur Umsetzung einer situationsgerechten Planung der Fahrzeuglängsbewegung sind, wie in Abb. 4.1 zusammengefasst, ortsgebundene Bewegungsvorgaben relevant. Diese lassen sich zum einen zur Kollisionsvermeidung mit dynamischen Objekten und statischen Hindernissen einsetzen, zum anderen kann mit diesen zulässigen Höchstgeschwindigkeiten oder maximalen Kurven- und Passiergeschwindigkeiten<sup>1</sup> Rechnung getragen werden. Beispielsweise gibt ein Straßenschild zur Geschwindigkeitsbegrenzung ab dem Ort, an dem es sich befindet, die angezeigte Höchstgeschwindigkeit oder ein die Straße versperrendes Hindernis eine Zielgeschwindigkeit von  $v_f = 0\text{m/s}$  vor. Auch in der Fahrt

<sup>1</sup> In Abhängigkeit der Krümmung und des lateralen Fahrzeugabstandes zu Hindernissen folgen aus Betrachtungen des menschlichen Fahrverhaltens einfache Zusammenhänge für die Planung einer komfortablen und sicheren Fahrzeugbewegung, anhand derer, maximale Fahrgeschwindigkeiten in Kurven und beim Passieren von Hindernissen abgeleitet werden können [58, 113].

hinter einem vorausfahrenden Fahrzeug gibt dieses, entsprechend seiner Position, die Geschwindigkeit  $v_{DO}$  und Beschleunigung  $a_{DO}$  vor, wenn ein Folgen mit konstantem Abstand realisiert werden soll.

Da sich der Zeitpunkt  $t_{v_i}$ , an dem die  $i$ -te Bewegungsvorgabe gelten soll, aus dem zukünftigen Zusammenhang zwischen Ort und Zeit  $s(t)$  ergibt, der selbst Gegenstand der Lösung des Längsplanungsproblems ist, muss jeder dieser Zeitpunkte als Teil der optimalen Lösung in das Optimalsteuerungsproblem integriert werden. Aufgrund der Unabhängigkeit der Bewegungsvorgaben ist jedoch eine integrierte Optimierung mehrerer Zeitpunkte  $t_{v_i}$  nur bedingt möglich, weshalb pro Bewegungsvorgabe die Lösung eines Optimalsteuerungsproblems zweckmäßig sein kann.

Angesichts der für beliebige Fahrsituationen möglicherweise großen Anzahl von Bewegungsvorgaben bietet die indirekte Optimierungsmethode ein wirkungsvolles Potenzial den Rechenaufwand gegenüber der direkten Optimierung zu reduzieren. Dieses Potential ergibt sich in erster Linie durch die Vernachlässigung von Beschränkungen (vgl. Kapitel 3). Darüber hinaus erlaubt die zeitliche Diskretisierung der Problemstellung nur eine eingeschränkte Problemformulierung bei unbekanntem Zeitpunkten  $t_{v_i}$ , sodass der Einsatz direkter Optimierungsmethoden i. Allg. nicht für eine universelle Berücksichtigung beliebiger Bewegungsvorgaben möglich ist.

In kritischen Notbremssituationen kann jedoch nicht auf die Berücksichtigung von fahrphysikalischen Beschränkungen verzichtet werden (vgl. Abschn. 2.1.2), weshalb grundsätzlich zur Lösung der daraus resultierenden Problemformulierung die Anwendung der direkten Optimierungsmethode erforderlich ist. Folglich motivieren die komplementären Vorteile der Optimierungsmethoden die in den folgenden Abschnitten hergeleiteten Problemformulierungen mit und ohne Beschränkungen und deren situationsgerechten Einsatz zur Planung der Fahrzeuglängsbewegung.

## 4.2 Unbeschränkte Trajektorienoptimierung der Längsbewegung

Wie dargestellt, bestehen für die effiziente Planung mehrerer Längsbewegungsoptionen die indirekten Optimierungsmethoden aufgrund der im zeitinvarianten Fall weitgehend analytischen Lösung des Optimalsteuerungspro-

blems und der damit verbundenen sehr effizienten Lösungsfindung. Unter der Voraussetzung vernachlässigbarer Beschränkungen beschreibt der vorliegende Abschnitt eine linear-quadratische Problemformulierung mittels derer eine Längsbewegungsoption für eine beliebige (vgl. Abb. 4.1) ortsgebundene Bewegungsvorgabe mit  $s_v$ ,  $v_v$  und  $a_v$  bestimmt werden kann. Darüber hinaus wird die weitreichende analytische Lösung des formulierten Optimalsteuerungsproblems hergeleitet.

### 4.2.1 Formulierung des Optimalsteuerungsproblems

Grundlage der Problemformulierung bildet das Systemmodell (4.1) der eindimensionalen Bewegung mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x} = [s, v, a]^T$ . Aufbauend darauf lassen sich die zu berücksichtigenden, ortsgebundenen Bewegungsvorgaben  $\mathbf{x}_v = [s_v, v_v, a_v]^T$  mit  $\mathbf{x}_{f,d} = \mathbf{x}_v$  in Form von Endbedingungen bei der Optimierung berücksichtigen. Der Zeitpunkt  $t_v$  ergibt sich durch die in Abschn. 3.1.3 beschriebene Erweiterung des Kostenfunktional um  $w_{t_f} \geq 0$  als optimale Endzeit  $t_v = t_f$ . Entsprechend den in Kapitel 2 gestellten Anforderungen einer möglichst ruckoptimalen Bewegung definiert sich das Kostenfunktional (3.17) für den vorliegenden Anwendungsfall nach [112] zu

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [w_{t_f} + u^2] dt + \frac{1}{2} [\mathbf{C}\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_{f,d}]^T \mathbf{S} [\mathbf{C}\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_{f,d}]. \quad (4.2)$$

Zur Sicherstellung der zyklischen Lösbarkeit des Optimalsteuerungsproblems während der Annäherung an den Zielzustand und möglichst geringen Abweichungen von den Bewegungsvorgaben zum Endzeitpunkt  $t_f$ , werden nach Abschn. 3.1.4 sowohl freie als auch feste Endbedingungen definiert. Zur Minimierung großer Positionsabweichungen, welche sich aus der Restdynamik der Bewegung ergeben, werden die Endzustände  $v(t_f)$  und  $a(t_f)$  durch die Endbedingung

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_f, t_f) = \mathbf{G}\mathbf{x}_f - \begin{bmatrix} v_{f,d} \\ a_{f,d} \end{bmatrix} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

identisch zu  $v_{f,d}$  und  $a_{f,d}$  gewählt, wohingegen sich der Endzustand  $s_f$  durch

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} w_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

mit  $w_s \geq 0$  als Teil der optimalen Lösung ergibt.

## 4.2.2 Analytische Lösung des Optimalsteuerungsproblems

Basierend auf den in Abschn. 3.1 definierten Optimalitätsbedingungen wird im Folgenden die Lösung des durch (4.1)-(4.3) formulierten linear-quadratischen Optimalsteuerungsproblems weitgehend analytisch hergeleitet. Der Rechenaufwand bei zyklischer Problemlösung reduziert sich auf ein lediglich eindimensionales Nullstellenproblem zur Bestimmung des optimalen Endzeitpunktes  $t_f$ . Ausgangspunkt der Herleitung bildet die Hamilton-Funktion (3.11)

$$H(\mathbf{x}, u, \lambda) = \frac{1}{2} [w_{t_f} + u^2] + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_3 + \lambda_3 u, \quad (4.5)$$

für welche sich die Optimalitätsbedingungen (3.2) zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} \Rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ -\lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (4.6a)$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \Rightarrow \dot{\lambda} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{bmatrix}, \quad (4.6b)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} \Rightarrow u = -\lambda_3 \quad (4.6c)$$

vereinfachen lassen. Durch schrittweise Integration der Dynamikgleichungen (4.6a) und (4.6b) beginnend für den adjungierten Zustand  $\lambda_1(t)$  lassen sich die Verläufe des adjungierten Zustands  $\lambda(t)$  und des Zustands  $\mathbf{x}(t)$  mit den

Integrationskonstanten  $\mathbf{c}_1 = [c_1, c_2, c_3]^\top$  und  $\mathbf{c}_2 = [c_4, c_5, c_6]^\top$  zusammenfassen zu

$$\lambda(t) = \mathbf{M}_1(t)\mathbf{c}_1, \quad \text{mit} \quad \mathbf{M}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -t & -1 & 0 \\ \frac{1}{2}t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

und

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}_2(t)\mathbf{c}_1 + \mathbf{M}_3(t)\mathbf{c}_2 \quad (4.8)$$

$$\text{mit} \quad \mathbf{M}_2(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{120}t^5 & -\frac{1}{24}t^4 & -\frac{1}{6}t^3 \\ -\frac{1}{24}t^4 & -\frac{1}{6}t^3 & -\frac{1}{2}t^2 \\ -\frac{1}{6}t^3 & -\frac{1}{2}t^2 & -t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_3(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t^2 & -t & -1 \\ -t & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Aus den Betrachtungen zum Zeitpunkt  $t_0$  und  $t_f$  folgt durch Auflösen der Gleichung (4.8) nach den unbekanntem Integrationskonstanten

$$\mathbf{c}_2 = \mathbf{M}_3(0)\mathbf{x}_0, \quad (4.9a)$$

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{M}_4^{-1}(t_f) [\mathbf{x}_{f,d} - \mathbf{M}_3(t_f)\mathbf{M}_3(0)\mathbf{x}_0], \quad (4.9b)$$

wobei o.B.d.A.  $t_0$  zu Null gesetzt wurde und sich  $\mathbf{M}_4(t)$  mit Hilfe des aus der Transversalitätsbedingung (3.24) resultierenden Zusammenhangs  $x_{f,1} = x_1 - \frac{c_1}{w_s}$  zu

$$\mathbf{M}_4(t_f) := \mathbf{M}_2(t_f) - \begin{bmatrix} \frac{1}{w_s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

ergibt. Weiterhin gelten für die Bestimmung der optimalen Endzeit  $t_f$  die in Abschn. 3.1.3 dargestellten Bedingungen

$$[H(\mathbf{x}, u, \lambda)]_{t_f} \stackrel{(3.25)}{=} 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt}H(\mathbf{x}, u, \lambda) \stackrel{(3.13)}{=} 0,$$

sodass sich die Hamilton-Funktion (4.5) zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  zu

$$[H(\mathbf{x}, u, \lambda)]_{t_0} = w_{t_f} + 2c_1x_2(0) - 2c_2x_3(0) - c_3^2 = 0 \quad (4.11)$$

vereinfachen lässt. Mit der gegebenen Bedingung der Form (3.15) folgt mit (4.9b) für die Endzeit  $t_f$  ein Polynom höherer Ordnung. Die optimale Endzeit  $t_f^*$  ergibt sich nach Abschn. 3.1.3 als notwendige und hinreichende Bedingung als erste Nullstelle für  $t > 0$  des Polynoms ergibt.

Abschließend resultiert die optimale Lösung  $u^*$  nach der numerischen Bestimmung der optimalen Endzeit  $t_f^*$  mit (4.6c) und (4.7) zu

$$u_{[t_0, t_f]}^* = -\frac{1}{2}t^2 c_1 - t c_2 - c_3. \quad (4.12)$$

### 4.3 Bewegungsplanung in Längsrichtung mit Zustandsbeschränkungen

Im Gegensatz zu der zuvor beschriebenen zeitkontinuierlichen Problemformulierung ermöglicht die im Folgenden hergeleitete zeitdiskrete Problemformulierung in Verbindung mit der direkten Optimierungsmethode die Berücksichtigung von Beschränkungen bei der Planung der Fahrzeuglängsbewegung [124]. Obwohl durch die zeitdiskrete Problemformulierung die Bestimmung der Zeitpunkte  $t_{v_i}$  als Teil der optimalen Lösung in quadratischer Form nicht möglich ist und dadurch ortsgebundene Bewegungsvorgaben der Geschwindigkeit  $v(t_v)$  und Beschleunigung  $a(t_v)$  nicht ohne Weiteres bei der Bewegungsplanung beachtet werden können, ergeben sich durch die Berücksichtigung von Beschränkungen besondere Vorteile. Die flexible Formulierung von Zustandsbeschränkungen ermöglicht, neben den bei dynamischen Fahrsituationen nicht vernachlässigbaren fahrphysikalischen Begrenzungen, kollisionsrelevante Bewegungsvorgaben in Form von zeitabhängigen Positionsbeschränkungen zu berücksichtigen. So können selbst gekoppelte Bewegungsvorgaben für eine Längsbewegungsoption, beispielsweise zum „Einfädeln“ in den fließenden Verkehr [95], realisiert werden. Mit Hilfe der in Kapitel 3 beschriebenen Schlupfvariablen ist es zudem möglich, zusätzliche Komfortaspekte für die Bewegungsplanung in Längsrichtung miteinzubeziehen.

#### 4.3.1 Erweiterte Systemdynamik und Bewegungskosten

Die notwendigerweise zeitdiskrete Problembeschreibung der direkten Lösungsfindung erfordert, wie in Abschn. 4.1.1 angedeutet, ein gegenüber (4.1)

um höhere Systemzustände erweitertes Systemmodell der eindimensionalen Bewegung.

Infolgedessen wird zur Problemformulierung mit Beschränkungen der Zustandsvektor der zeitkontinuierlichen Problemstellung auf  $\mathbf{x} = [s, v, a, j]^T$  mit der dazugehörigen Stellgröße  $u(t) = \ddot{a}(t)$  erweitert. Hinsichtlich einer zielführenden Formulierung von Beschränkungen im folgenden Abschnitt wird die daraus resultierende zeitkontinuierliche Systemdynamik

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u(t) \quad (4.13)$$

um zusätzliche Systemausgänge

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}(t) \quad (4.14)$$

ergänzt. Daraus berechnen sich unter der Annahme einer abschnittsweise konstanten Stellgröße  $u(k)$  die zeitinvarianten Matrizen der zeitdiskreten Problembeschreibung mittels (3.39) für die Diskretisierungsschrittweite  $T_s$  zu

$$\mathbf{A}^D = \begin{bmatrix} 1 & T_s & \frac{1}{2}T_s^2 & \frac{1}{6}T_s^3 \\ 0 & 1 & T_s & \frac{1}{2}T_s^2 \\ 0 & 0 & 1 & T_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}^D = \begin{bmatrix} \frac{1}{24}T_s^4 \\ \frac{1}{6}T_s^3 \\ \frac{1}{2}T_s^2 \\ T_s \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{C}^D = \mathbf{C}. \quad (4.15)$$

Basierend auf den Zuständen der Systemdynamik (4.13) und den zu berücksichtigenden Bewegungsvorgaben lassen sich zur Erzeugung einer möglichst komfortablen Fahrzeugbewegung entsprechend den Anforderungen an die Trajektorienplanung, die Integralkosten zu beliebigen diskreten Zeitpunkten  $k$  zu

$$l(k) = w_s[s - s_d]^2 + w_v[v - v_d]^2 + w_a[a - a_d]^2 + w_j j^2 + w_u u^2 \quad (4.16)$$

mit den Gewichtungsfaktoren  $w_s, w_v, w_a, w_j, w_u > 0$  ansetzen. Die ersten drei Terme dienen dabei der Vermeidung von Abweichungen zu beliebigen Bewegungsvorgaben, um beispielsweise einem vorausfahrenden Fahrzeug mit konstantem Abstand folgen zu können. Demgegenüber hemmen die letzten Terme jegliche Veränderung der Fahrgeschwindigkeit, um ruckartige Beschleunigungen durch plötzliche Geschwindigkeitsänderungen zu vermeiden. Mit Hilfe der Vektorsequenz des Zielzustandsverlaufs  $\mathbf{x}_d$  und den positiv definiten Gewichtungsmatrizen

$$\mathbf{Q} = \text{diag}(w_s, w_v, w_a, w_j) \quad \text{und} \quad \mathbf{R} = [w_u] \quad (4.17)$$

lassen sich die Gesamtkosten in Form des kompakten Kostenfunktional (3.50) zusammenfassen.

Angemerkt sei, dass Bewegungsvorgaben nur zu vorbestimmten, diskreten Zeitpunkten definiert werden können. Da sich ortsgebundene Geschwindigkeitsvorgaben wie Geschwindigkeitsbegrenzungen im Vergleich zu kollisionsrelevanten Bewegungsvorgaben nicht, wie im folgenden Abschnitt hergeleitet, durch Positionsbeschränkungen formulieren lassen, und der Zeitpunkt  $t_v$  zu dem die Vorgabe erreicht werden soll unbekannt ist, können Bewegungsvorgaben dieser Art nur unzureichend bei zeitdiskreter Problemformulierung berücksichtigt werden. In diesen Fällen bietet die zuvor beschriebene, alternative zeitkontinuierliche Problemformulierung Vorteile.

### 4.3.2 Sicherheitsrelevante Ausgangsbeschränkungen

Zur Planung sicherer Längsbewegungsoptionen werden im Weiteren für die zuvor definierten Systemausgänge (4.14) und den Systemeingang gemäß (3.42) Beschränkungen formuliert, welche sich aus den gegebenen Bewegungsvorgaben und den vorherrschenden Traktionsverhältnissen ableiten lassen. Bei der zukünftigen Fahrzeugbewegung können auf diese Weise Kollisionen mit Hindernissen vermieden und fahrphysikalische Begrenzungen eingehalten werden. Zur Sicherstellung realisierbarer Fahrzeugbewegungen in Längsrichtung spielen vor allem Beschränkungen, welche aus dem maximalen Beschleunigungs- und Verzögerungspotenzial resultieren [23], eine entscheidende Rolle. In Ab-



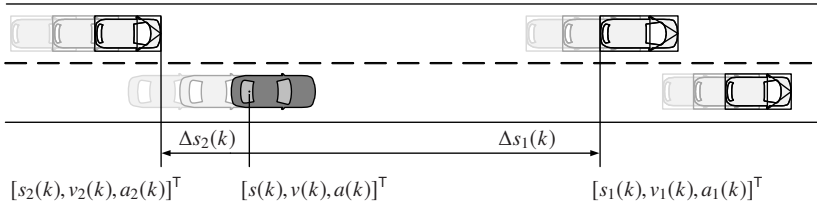


Abbildung 4.2: Beispiel des durch andere Verkehrsteilnehmer (rechteckige Boxen) eingeschränkten Bewegungsspielraums der Längsposition  $s(k)$  des eigenen Fahrzeugs (dunkel grau) zu einem prädierten Zeitpunkten  $k$  beim Einordnen in den fließenden Verkehr auf dem benachbarten Fahrstreifen

hängigkeit der mit dem Untergrund der Straße variierenden Traktion der Reifen lassen sich diese mittels der zeitvarianten Ungleichungsnebenbedingungen

$$a_{\min}(k) \leq a(k) \leq a_{\max}(k) \quad (4.18)$$

bei der Bewegungsplanung berücksichtigen. Weiterhin kann über die zeitinvarianten Beschränkungen

$$u_{\min} \leq u(k) \leq u_{\max}, \quad (4.19a)$$

$$j_{\min} \leq j(k) \leq j_{\max}, \quad (4.19b)$$

des Eingangs und der zeitlichen Ableitung der Beschleunigung, der mechanisch bedingten beschränkten Dynamik des Antriebs und des Bremsaktuators Rechnung getragen werden.

Neben der Berücksichtigung fahrphysikalischer Begrenzungen, ermöglicht die Formulierung zeitvarianter Positionsbeschränkungen die Einbeziehung kollisionsrelevanter Hindernisse bei der Bewegungsplanung. Wie in Abb. 4.2 dargestellt, begrenzen die prädierten Positionen anderer Verkehrsteilnehmer zu diskreten zukünftigen Zeitpunkten  $k$  die Position  $s(k)$  des eigenen Fahrzeugs zum selben Zeitpunkt<sup>2</sup>. Entsprechend lassen sich für alle zukünftigen Fahr-

<sup>2</sup> Die Berücksichtigung statischer Hindernisse, wie in Abb. 4.1 aufgezeigt, stellt einen Spezialfall der verallgemeinerten Problemstellung dar, da sich deren prädierte Positionen identisch zu deren aktuellen ergeben.

zeugpositionen  $s(k)$  auf dem Optimierungshorizont  $N$  deren zulässige Werte durch die Ausgangsbeschränkungen der Form

$$\underbrace{s_2(k) + s_{\Delta,2}(k)}_{s_{\min}(k)} \leq s(k) \leq \underbrace{s_1(k) - s_{\Delta,1}(k)}_{s_{\max}(k)} \quad (4.20)$$

einschränken. Über die zeitvarianten Zusatzterme  $s_{\Delta,2}$  und  $s_{\Delta,1}$  können zielgeschwindigkeitsabhängige Sicherheitsabstände parametrisiert werden. Die Formulierung minimaler und maximaler Positionsbeschränkungen erlaubt auch die Berücksichtigung von Bewegungsvorgaben von Hindernissen, die sich hinter dem eigenen Fahrzeug befinden. Wie beispielsweise in [95] angedeutet, kann die beschriebene Problemformulierung zweckmäßig für die Planung von Manövern zum Einordnen in den fließenden Verkehr eingesetzt werden. Für eine flexiblere Problemformulierung lassen sich, entsprechend Abschn. 3.2.3, die Positionsbeschränkungen mittels mehrstufiger Beschränkungen und der unabhängigen Schlupfvariablen  $\epsilon_{s,u}$  und  $\epsilon_{s,l}$  erweitern, um beispielsweise ein gezieltes Eintauchen in den Komfortabstand zum Vorderfahrzeug bis hin zu einem kritischen Minimalabstand parametrisieren zu können. Zur Sicherstellung der Lösbarkeit lässt sich zudem mit Hilfe der Schlupfvariablen  $\epsilon_f$  der Sicherheitsabstand situationsabhängig „lockern“, sodass der Fall  $s_{\min}(k) > s(k)$ , vgl. Abb. 4.2 für  $\Delta s_2(k) < 0$ , berücksichtigt werden kann.

### 4.3.3 Komfortorientierter Einsatz von Schlupfvariablen

Zum beschriebenen Einsatz von Schlupfvariablen für eine situationsabhängige Berücksichtigung von Positionsbeschränkungen lassen sich diese außerdem für die gezielte Umsetzung von Komfortaspekten bei der Problemformulierung ausnutzen. Mit den in Abb. 3.3 verdeutlichten mehrstufigen Beschränkungen des Systemausgangs durch unabhängige Schlupfvariablen besteht, wie in Abb. 4.3 schematisch dargestellt, die Möglichkeit, Beschleunigungsprofile zu erzeugen, welche durch vorteilhafte, abschnittsweise konstante Beschleunigungsphasen charakterisiert sind. Dadurch können bei großen Differenzen zwischen dem aktuellen Fahrzustand und der vorgegebenen Geschwindigkeit die maximalen Beschleunigungen der bevorstehenden Manöver minimiert werden. Den Anforderungen entsprechend kann so ein Kompromiss zwischen der

möglichst ruckoptimalen Längsbewegung bei gleichzeitig minimal erforderlicher Beschleunigung parametrisiert werden.

Die zuvor definierten Beschleunigungsbeschränkungen (4.18) lassen sich unter Verwendung der Schlupfvariablen  $\epsilon_{a,u}$  und  $\epsilon_{a,l}$  für  $0 \leq k \leq N$  zu

$$a_{\min,1}(k) - \epsilon_{a,l} \leq a(k) \leq a_{\max,1}(k) + \epsilon_{a,u} \quad (4.21)$$

$$a_{\min,2}(k) - \epsilon_f \leq a(k) \leq a_{\max,2}(k) + \epsilon_f \quad (4.22)$$

modifizieren. Mittels der zuvor eingeführten Schlupfvariablen für die Position  $\epsilon_{s,u}$ ,  $\epsilon_{s,l}$  und  $\epsilon_f$  zur Sicherstellung der Lösbarkeit, welche ebenfalls über den ganzen Optimierungshorizont  $N$  gelten sollen, lassen sich alle, für die Problemformulierung definierten Beschränkungen nach Abschn. 3.2.3 kompakt zu Gleichung (3.59) zusammenfassen.

Es gilt für den Systemeingang  $\mathbf{S}_k^u = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{H}_k^u = \mathbf{1}$  und für den Systemausgang

$$\mathbf{S}_k^y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}_k^y = [0 \ 0 \ 1] \quad \text{sowie} \quad \mathbf{Y}_{8N \times r} = \left[ \begin{array}{c} \left[ \mathbf{Y}_1^u \right]^T \\ \vdots \\ \left[ \mathbf{Y}_N^u \right]^T \\ \left[ \mathbf{Y}_1^l \right]^T \\ \vdots \\ \left[ \mathbf{Y}_N^l \right]^T \end{array} \right]^T$$

$$\text{mit} \quad \mathbf{Y}_k^u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_k^l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

für die Zuweisungsmatrix  $\mathbf{Y}$  der  $r = 5$  Schlupfvariablen (siehe Abschn. 3.2.3).

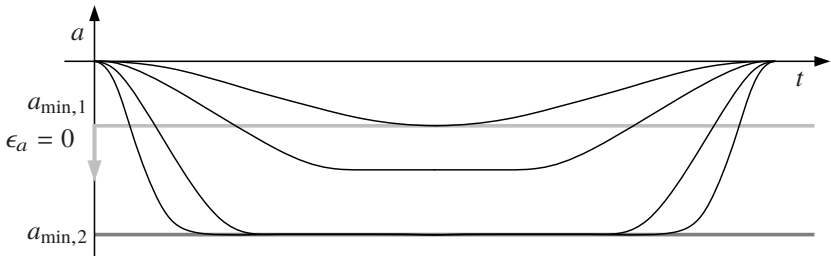


Abbildung 4.3: Komfortable Längsbeschleunigungsverläufe für unterschiedlich starke Bremsungen identischer Bremsdauer mit abschnittsweise konstanten Beschleunigungsphasen durch mehrstufige Ausgangsbeschränkungen  $a_{\min,1}$  und  $a_{\min,2}$  bei gezieltem Einsatz der Schlupfvariable  $\epsilon_a$

### 4.3.4 Stabilitätsbetrachtungen und zyklische Lösbarkeit

Im Unterschied zur unbeschränkten Problemformulierung, welche durch die Optimierung der Zeit eine Lösung des Problems auf quasi-unendlichem Horizont bietet, gilt es, wie in Abschn. 2.2.2 hervorgehoben, für die Optimierung auf beschränktem und fortschreitenden Zeithorizont  $N$  zur Sicherstellung der zyklischen Lösbarkeit und Stabilität des geschlossenen Regelkreises, die Gewichtung der Endkostenmatrix  $S$  in (3.49) und eine invariante Zielmenge des Endzustands  $x(N) \in \mathcal{X}_f$  gezielt zu bestimmen. Mit Hilfe der in Anhang A.1 beschriebenen Vorgehensweise zur Bestimmung dieser Größen und der Integration der Zielmenge als zusätzliche Nebenbedingungen (3.42) der Problemformulierung lassen sich direkt Garantien über die Stabilität und zyklische Lösbarkeit ableiten.

Obwohl durch diese theoretischen Aussagen keine Kollisionsfreiheit der Fahrzeuglängsbewegung im Allgemeinen sichergestellt werden kann, da mutwillig agierende Verkehrsteilnehmer physikalisch nicht mehr vermeidbare Kollisionen (z. B. durch das plötzliche hervorspringen aus einer Verdeckung) provozieren können, stellen diese für die Industrialisierung wichtige Argumente der Absicherung dar. Unter den Annahmen einer idealen Objekterfassung, einem an die Straßenverkehrsordnung angepassten Verhalten anderer Verkehrsteilnehmer sowie einer zusätzlichen kollisionsvermeidenden Optimierung der Querbewegung können - mit den definierten Schlupfvariablen und der Optimierung auf einem langen zeitlichen Horizont - die Aussagen qualitativ auch auf die verallgemeinerte zeitvariante Problemstellung erweitert werden.

## 4.4 Neuer Algorithmus zur Kollisionsvermeidung beim Rangieren

Der vorliegenden Abschnitt widmet sich der Umsetzung eines neuartigen Algorithmus zur verlässlichen Kollisionsvermeidung beim Parken und Rangieren durch automatisierte Bremsengriffe. Er verdeutlicht das hohe Potenzial der effizienten Lösungsfindung bei linear-quadratischer Problemformulierung für die Entwicklung von Fahrassistenzfunktionen. Angesichts der zur Umsetzung dieser Assistenzfunktion relevanten

- geringen Hindernisabstände,
- begrenzten Sensorabdeckung rund um den Fahrzeugumriss,
- unbekanntem Fahrerabsicht beim knappen Passieren von Hindernissen,
- möglicherweise plötzlichen und großen Änderung des Lenkwinkels,
- signifikant verzögerten Bremsenansteuerung und
- Minimierung der Fahrerirritation,

besteht die Grundidee der vorgestellten Systementwicklung darin, aus einer durch die verfügbaren Sensorinformationen ständig aktualisierten Belegungskarte<sup>3</sup> der Fahrzeugumgebung, kollisionsrelevante Bewegungsvorgaben abzuleiten. Basierend auf den zuvor hergeleiteten Problemformulierungen können für diese effizient komfortable und kollisionsfreie Längsbewegungsoptionen generiert werden [126]. Aufgrund des in Abb. 4.4 dargestellten, reduzierten Einflusses der Lenkbewegung auf die Kollisionsvermeidung bei geringen Relativgeschwindigkeiten [1] ergibt sich das zur Kollisionsvermeidung relevante Manöver für diejenige Längsbewegungsoption, welche durch die größte notwendige Verzögerung charakterisiert ist. Die effiziente Optimierung erlaubt dabei die fortwährend wiederholte Neuberechnung des kritischsten Bremsmanövers in geringen zeitlichen Intervallen. Der automatisierte Bremsengriff erfolgt so besonders schnell an die jeweilige Fahrsituation angepasst. Auf diese Weise kann dem Einfluss der verzögerten Bremsenansteuerung und der mögli-

---

<sup>3</sup> engl. occupancy grid map [102].

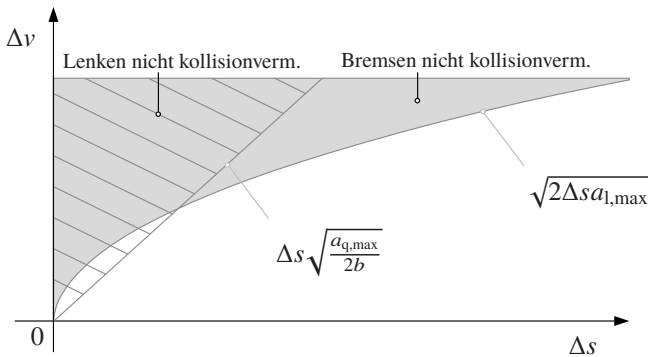


Abbildung 4.4: Zustandsmengen einer unvermeidlichen Kollision durch Bremsen bei maximaler Verzögerung  $a_{l,max}$  (grau) und durch Ausweichen bei maximaler Querbeschleunigung  $a_{q,max}$  und lateraler Hindernisüberlappung  $b$  (schraffiert) des Systems (4.1) mit  $\Delta v = v - v_v$  und  $\Delta s = s - s_v$  [109]

cherweise plötzlichen und großen Änderung des Lenkwinkels durch den Fahrer Rechnung getragen werden.

#### 4.4.1 Umfeldrepräsentation und Kollisionsberechnung

Entsprechend der Grundidee der Systementwicklung beschreibt der vorliegende Abschnitt die systematische Bestimmung kollisionsrelevanter Bewegungsvorgaben, welche - basierend auf der Prädiktion der zukünftigen Fahrzeugbewegung und ausgehend vom aktuellen Fahrzustand - aus einer detaillierten Belegungskarte der Fahrzeugumgebung abgeleitet werden können.

Im Unterschied zur direkten Verwendung von Sensordaten bietet die Ableitung der Bewegungsvorgaben aus einer Belegungskarte verschiedene Vorteile für die situationsbedingten Herausforderungen beim Parken und Rangieren. Zum einen kann der Einfluss von Sensorrauschen deutlich reduziert werden, wodurch eine robustere Positionsbestimmung der im Umfeld befindlichen Hindernisse möglich ist; zum anderen können Objekte, die aufgrund der Fahrzeugbewegung aus dem Erfassungsbereich der Sensoren wandern, unter der beim Rangieren typischerweise geltenden Annahme einer statischen Umgebung, weiterhin über deren Position in der Karte berücksichtigt werden.

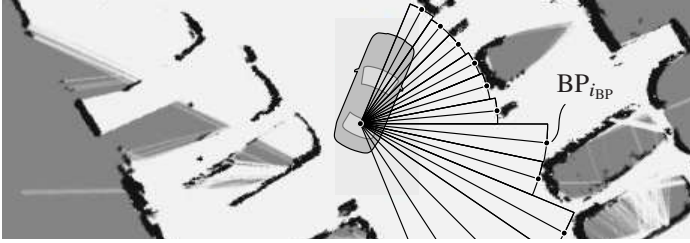


Abbildung 4.5: Reduzierte Umfeldrepräsentation statischer Umgebungen durch Ableitung kollisionsrelevanter Belegungspunkte  $BP_{i_{BP}}$

Wie in Abb. 4.5 verdeutlicht, lassen sich auf diese Weise für den gesamten Fahrzeugumriss eine endliche Anzahl  $i_{BP} = 1, \dots, m_{BP}$  kollisionsrelevanter Belegungspunkte  $BP_{i_{BP}}$  in Relation zum Hinterachsmittelpunkt des Fahrzeugs aus der aufgebauten Umfeldkarte ableiten. Durch die Polarkoordinaten  $[\alpha_{i_{BP}}, d_{i_{BP}}]$  sind diese eindeutig charakterisiert. Bezüglich der in Kapitel 2 motivierten Bewegungsplanung in Bahnkoordinaten wird zur Prädiktion der Fahrzeugbewegung, eine auf dem aktuellen Fahrzustand der Krümmung basierende, kreisförmige Referenzkurve  $\Gamma$  vorausgesetzt, sodass die Fahrzeuglängsbewegung zu jedem Zeitpunkt der Optimierung als eindimensionale Bewegung mit dem Systemmodell (4.1) beschrieben werden kann. Wie in Abb. 4.6 durch die geometrischen Beziehungen zur Kollisionsberechnung veranschaulicht, besteht die Möglichkeit, die verbleibende Bremsdistanz  $\Delta s_{i_{BP}}$  zu allen  $m_{BP}$  Belegungspunkten unter Berücksichtigung des exakten Fahrzeugumrisses präzise zu bestimmen. Ausgehend von den Polarkoordinaten  $[\alpha_{i_{BP}}, d_{i_{BP}}]$  folgt unter Anwendung des Kosinussatzes für die Distanz zwischen dem Momentanpol MP der aktuellen Fahrbewegung und dem Belegungspunkt  $BP_{i_{BP}}$

$$r_{\text{obs}, i_{BP}} = \sqrt{d_{i_{BP}}^2 + r_{\text{HA}}^2 - 2 d_{i_{BP}} r_{\text{HA}} \cos \sigma_{i_{BP}}}, \quad (4.23)$$

wobei sich  $r_{\text{HA}}$  aus der Krümmung der Referenzkurve  $\Gamma$  ergibt und sich  $\sigma_{i_{BP}}$  direkt von  $\alpha_{i_{BP}}$  ableiten lässt. Nach erneuter Anwendung des Kosinussatzes gilt weiterhin

$$\gamma_{i_{BP}} = \arccos \left( \frac{r_{\text{HA}}^2 + r_{\text{obs}, i_{BP}}^2 - d_{i_{BP}}^2}{2 r_{\text{HA}} r_{\text{obs}, i_{BP}}} \right). \quad (4.24)$$

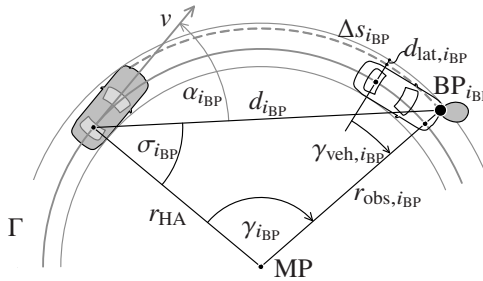


Abbildung 4.6: Geometrische Beziehungen zur Kollisionsberechnung zwischen dem Hinterachsmittpunkt des Fahrzeugs und einem Belegungspunkt  $BP_{iBP}$  (schwarzer Punkt) eines grau markierten Hindernisses

Die verbleibende Bremsdistanz  $\Delta s_{iBP}$  lässt sich mit dem für den Fahrzeugumriss spezifischen Winkel  $\gamma_{veh,iBP}$  durch

$$\Delta s_{iBP} = (\gamma_{iBP} - \gamma_{veh,iBP}) r_{HA} \quad (4.25)$$

präzise berechnen. Im Unterschied zu bestehenden Methoden zur effizienten Kollisionsberechnung [51, 121] kann damit Fahrern, die den Umriss ihrer Fahrzeuge sehr genau abschätzen können, in beengten Fahrsituationen ein größtmöglicher Bewegungsspielraum zugestanden werden.

Zudem kann allen  $m_{BP}$  Belegungspunkten, in Abhängigkeit des in Abb. 4.6 definierten lateralen Abstandes  $d_{lat,iBP}$ , eine maximale Zielgeschwindigkeit  $v_{max,iBP}$  zugeordnet werden. Mit Blick auf eine erfolgreiche Kollisionsvermeidung folgt dabei für  $d_{lat,iBP} \leq 0$  direkterweise  $v_{max,iBP} = 0$  (vgl. Abb. 4.6). Demgegenüber kann, wie in Abb. 4.7 verdeutlicht, über den beispielsweise quadratischen Zusammenhang

$$v_{max,iBP} = c_v (d_{lat,iBP})^2, \quad (4.26)$$

mit  $c_v > 0$  für  $d_{lat,iBP} > 0$ , zu den rein kollisionsvermeidenden Bewegungsvorgaben, eine für den menschlichen Fahrer typische Geschwindigkeitsreduktion beim Passieren von Hindernissen mit geringem Abstand realisiert werden. Gleichzeitig ermöglicht dieses Vorgehen, den für die jeweils vorliegende Fahr-



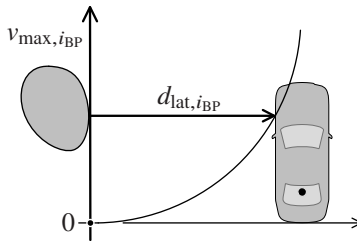


Abbildung 4.7: Veranschaulichung des für den menschlichen Fahrer typischen Zusammenhangs zwischen dem lateralen Passierabstand  $d_{lat, i_{BP}}$  und einer maximalen Passiergeschwindigkeit  $v_{\max, i_{BP}}$

situation typischen Konflikt zwischen einem vom Fahrer beabsichtigten knappen Passierens und einer bevorstehenden Kollision komfortabel aufzulösen.

Zusammenfassend betrachtet lassen sich alle  $m_{BP}$  Belegungspunkte durch Bewegungsvorgaben bezüglich der verbleibenden Bremsdistanz  $\Delta s_{i_{BP}}$  und der maximalen Zielgeschwindigkeit  $v_{\max, i_{BP}}$  eindeutig formulieren. Der einfache Vergleich der maximalen Zielgeschwindigkeit  $v_{\max, i_{BP}}$  mit der prädierten Fahrgeschwindigkeit nach der Wegstrecke  $\Delta s_{i_{BP}}$  ermöglicht, die Anzahl der Bewegungsvorgaben - mit Blick auf eine effiziente Bestimmung der im folgenden Abschnitt beschriebenen Planung der Längsbewegungsoptionen - erheblich zu reduzieren. Da zur Sicherstellung der Kollisionsfreiheit ausschließlich Belegungspunkte relevant sind für die gilt

$$v_{\max, i_{BP}} < v_{pred}(\Delta s_{i_{BP}}), \quad (4.27)$$

verringert sich die Anzahl der zu berücksichtigenden Bewegungsvorgaben auf  $n_{BP} \leq m_{BP}$ .

#### 4.4.2 Ruck- und zeitoptimales Bremsen

Nachdem im Vorfeld kollisionsrelevante Bewegungsvorgaben auf Basis der im Fahrzeugumfeld befindlichen Hindernisse für die Längsbewegung des Fahrzeugs abgeleitet wurden, konzentriert sich dieser Abschnitt auf die effiziente Planung des kollisionsvermeidenden Manövers.

Wie zuvor erwähnt, zeichnet sich das Ein-Ausgangsverhalten des Bremsaktuators durch eine signifikante Totzeit  $T_T$  aus [94]. Um die daraus resultierende verzögerte Ansteuerung der Bremse zu kompensieren, erfolgt die Planung der Längsbewegung nicht ausgehend vom aktuellen Fahrzustand  $\mathbf{x}_0$ , sondern, entsprechend der in [41] beschriebenen *prädiktionsbasierten Totzeitenkompensation*, vom mittels (4.1) um  $T_T$  prädizierten Fahrzustands  $\mathbf{x}_T$ . Für eine möglichst akkurate Prädiktion wird die Eingangsgröße des verwendeten Prädiktionsmodells (4.1) während automatisierter Bremsungen zu

$$u_{\text{pred}}(t + t_{\text{pred}}) := u(t - (T_T - t_{\text{pred}})), \quad t_{\text{pred}} \in [0, T_T] \quad (4.28)$$

gewählt.  $u(t)$  ergibt sich aus der optimalen Stellgröße vergangener Optimierungszyklen. Da bei inaktiver Funktion  $u(t)$  nicht aus vorherigen Optimierungszyklen vorliegt, gilt in diesem Fall  $u_{\text{pred}} = 0$ . Für den sich ergebenden prädizierten Fahrzustand folgt ausgehend von  $\mathbf{x}_{\text{pred}}(0) = \mathbf{x}_0$

$$\mathbf{x}_T = [s_T, v_T, a_T]^\top := [s_{\text{pred}}(T_T), v_{\text{pred}}(T_T), a_{\text{pred}}(T_T)]^\top. \quad (4.29)$$

Zusammen mit den zuvor abgeleiteten  $n_{\text{BP}}$  Bewegungsvorgaben, welche sich mit  $a_{j_{\text{BP}}} = 0$  durch

$$\mathbf{x}_{v, j_{\text{BP}}} = [\Delta s_{j_{\text{BP}}}, v_{\text{max}, j_{\text{BP}}}, 0]^\top, \quad j_{\text{BP}} = 1, \dots, n_{\text{BP}} \quad (4.30)$$

kompakt formulieren lassen, bietet sich mit  $\mathbf{x}_T$  als neue Anfangsbedingung, die Möglichkeit, verschiedene kollisionsfreie und komfortable Längsbewegungsoptionen als Lösung der dadurch beschriebenen linear-quadratischen Optimalsteuerungsprobleme zu generieren.

Aufgrund des beachtlichen Rechenaufwands durch eine große Anzahl  $n_{\text{BP}}$  an Bewegungsvorgaben sowie der nur unzureichend zu berücksichtigenden ortsgebundenen Geschwindigkeitsvorgaben  $v_v \neq 0$  bei der Beachtung von Beschränkungen, bietet die in Abschn. 4.2 definierte Problemformulierung durch deren weitreichend analytische Lösung Vorteile gegenüber der alternativen Lösungsfindung mittels direkter Methoden. Mit einer angepassten Parametrierung der Problemstellung können zudem kritische Notbremssituationen weitgehend vermieden werden. Zugunsten einer effizienteren Lösung der Optimalsteuerungsprobleme beim Parken und Rangieren kann deshalb auf die Berücksichtigung von Beschränkungen verzichtet werden.

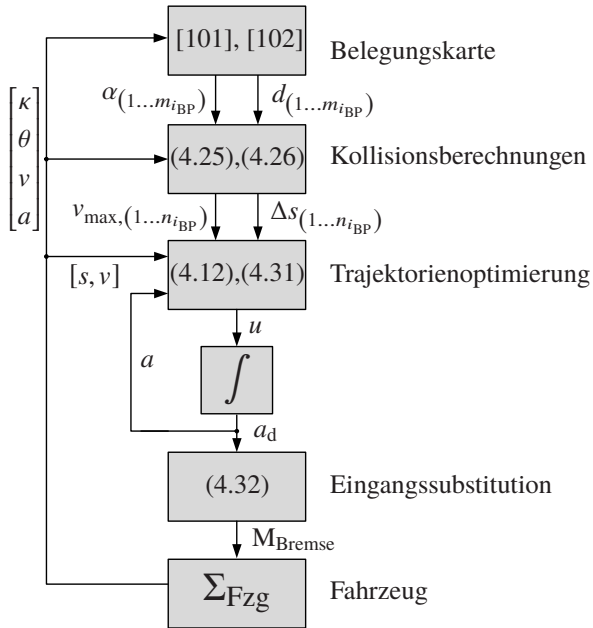


Abbildung 4.8: Übersichtsdarstellung des vorgestellten Algorithmus zur verlässlichen Kollisionsvermeidung

Infolgedessen ermöglicht der Vergleich, der mit (4.12) für  $x_{f,d} = x_v$  bestimmten  $n_{BP}$  optimalen Lösungen,

$$u = \min_{j_{BP}} \{u_{j_{BP}}\}, \quad j_{BP} = 1, \dots, n_{BP} \quad (4.31)$$

die Bestimmung der zur Kollisionsvermeidung kritischsten Längsbewegungsoption. Diese ist durch den Bremsaktuator des Fahrzeugs umzusetzen.

Da die optimierte Eingangsgröße  $u(t) = \dot{a}(t)$  des Systemmodells (4.1) allerdings keine im Fahrzeug zur Verfügung stehende Stellgröße beschreibt, muss diese in eine für das Fahrzeug reale Stellgröße umgerechnet werden. Mittels des Impulssatzes kann der einmal integrierte Systemeingang  $a_d$  durch

$$m_{FZg} a_d - \frac{1}{r_{FZg}} (M_{Bremse} - M_{Antrieb}) = 0 \quad (4.32)$$

substituiert werden, wobei  $r_{\text{Fzg}}$  und  $m_{\text{Fzg}}$  den äußeren Reifenradius bzw. die Fahrzeugmasse bezeichnen und  $M_{\text{Antrieb}}$  für das Motormoment des Antriebs steht. Durch Auflösen der Gleichung (4.32) nach dem Bremsmoment des Fahrzeugs  $M_{\text{Brems}}$  kann die optimierte Eingangsgröße  $u(t)$  als reale Stellgröße ausgedrückt werden. Die vollständige Struktur des beschriebenen Algorithmus zur verlässlichen Kollisionsvermeidung beim Parken und Rangieren ergibt sich in Form der in Abb. 4.8 dargestellten Übersicht.

Durch die vorteilhaften Eigenschaften der in Abschn. 4.2 vorgestellten Problemformulierung kann eine beispielhafte, für den Fahrer gewinnbringende Anwendung linear-quadratischer Optimierung aufgezeigt werden.

## 4.5 Zusammenfassung

Mit Blick auf die in Kapitel 2 motivierte, isolierte Betrachtung der Bewegungsrichtung für eine effiziente Planung der zukünftigen Fahrzeugbewegung, stellt das vorliegende Kapitel zwei alternative Problemformulierungen linear-quadratischer Optimalsteuerungsprobleme zur Trajektorienoptimierung für die Fahrzeuglängsbewegung vor. Durch die eingangs beschriebene zeitinvariante Systemmodellierung der eindimensionalen Bewegung und der in Längsrichtung relevanten ortsgebundenen Bewegungsvorgaben bieten die vorgestellten Problemformulierungen komplementäre Vorteile für eine, den unterschiedlichen Fahrsituationen angepasste, sichere und komfortable Bewegungsplanung. Unter Vernachlässigung der - nur für bestimmte Fahrsituationen zu berücksichtigenden - Beschleunigungsbeschränkungen erlaubt der Einsatz indirekter Optimierungsmethoden eine weitreichend analytische Lösung des formulierten Optimalsteuerungsproblems für beliebige Bewegungsvorgaben und führt damit zu einer äußerst effizienten Planung mehrerer Längsbewegungsoptionen. Zusätzlich können durch die Anwendung der direkten Optimierungsmethode eine Vielzahl an Beschränkungen bei der Optimierung mit berücksichtigt werden. Beispielsweise kann so in kritischen Situationen die maximal zulässige Verzögerung bei Notbremsungen vorgegeben werden oder Positionsbeschränkungen dazu eingesetzt werden das Einfädeln in den fließenden Verkehr auf dem benachbarten Fahrstreifen zu ermöglichen. Die notwendigerweise zeitlich diskretisierte Problemformulierung lässt eine Bestimmung des für die Bewegungsvorgaben noch unbekannt optimalen Umsetzungszeitpunkts  $t_v$

nur sehr eingeschränkt zu. Ortsgebundene Vorgaben der Fahrgeschwindigkeit, welche z. B. die maximale Geschwindigkeit beim Einfahren in Kurven begrenzen oder aus Geschwindigkeitsbegrenzungen resultieren, können daher nur unzureichend berücksichtigt werden.

Folglich gilt, in Abhängigkeit der Modalität der gegebenen Bewegungsvorgaben und im Hinblick auf eine möglichst effiziente Planung der Längsbewegung, eine der Fahrsituation angepasste Kombination aus den vorgestellten Problemformulierungen bei der Erzeugung verschiedener Längsbewegungsoptionen zu verwenden. Trotz der unterschiedlichen Problemformulierungen bietet der in Abschn. 4.4 beschriebene Vergleich der Beschleunigungsänderungen, unabhängig von der eingesetzten Optimierungsmethode die Möglichkeit, die relevanten Bewegungsoptionen für eine sichere und komfortable Längsbewegung zu identifizieren. Der zur Lösung des Grundproblems der Trajektorienoptimierung erforderliche Rechenaufwand lässt sich so effektiv reduzieren (vgl. Abschn. 2.4.1).

Abschnitt 4.4 hebt mit der Umsetzung einer neuartigen Fahrerassistenzfunktion zur verlässlichen Kollisionsvermeidung beim Parken und Rangieren durch Planung ruck- und zeitoptimaler Bremsengriffe das große Potenzial sowie die flexible Anwendung der Problemformulierung ohne Beschränkung hervor. Die, durch den Einsatz der indirekten Optimierungsmethode bedingte, äußerst effiziente Lösungsfindung lässt zum einen die Berücksichtigung einer Vielzahl ortsgebundener Geschwindigkeitsvorgaben zu und vermeidet so Kollisionen für den gesamten Fahrzeugumriss. Gleichzeitig erlaubt die daraus resultierende kurze zyklische Lösungsdauer des Planungsproblems eine schnelle und angemessene Reaktion auf die durch den Fahrer initiierte Veränderung der Fahrsituation. Der zu Gunsten einer komfortablen Bremsung gewählte, optimale Eingriffszeitpunkt ermöglicht die Vernachlässigung von Beschleunigungsbeschränkungen, da große Beschleunigungen durch eine angepasste Parametrierung des Kostenfunktional verhindert werden können. Durch diese vorteilhafte Optimierung der Fahrzeuglängsbewegung kann mittels automatisierter Bremsengriffe unter Berücksichtigung der Fahrerreaktion in unstrukturierter Umgebung das Fahrzeug sicher und komfortabel vor Hindernissen zum Stehen gebracht werden.



## 5 Neuer Algorithmus zur recheneffizienten Fahrzeugquerführung

Analog zu der in Kapitel 4 beschriebenen Planung der Fahrzeuglängsbewegung, wird im vorliegenden Kapitel eine linear-quadratische Problemformulierung zur Trajektorienoptimierung der Fahrzeugquerbewegung hergeleitet. Mittels der in Kapitel 3 vorgestellten direkten Optimierungsmethoden und eines gegebenen Verlaufs der Längsbewegung kann für diese Problemformulierung besonders effizient eine Lösung bestimmt werden, welche die Anforderungen an die Bewegungsplanung von Fahrzeugen aus Kapitel 2 erfüllt. Mit der effizienten Lösung des Optimalsteuerungsproblems für verschiedene Längsbewegungsoptionen und einem nachgelagerten Vergleich der Ergebnisse kann für die in Kapitel 2 abgeleitete, entkoppelte Bewegungsplanung das Grundproblem der Trajektorienoptimierung gegenüber bestehenden Ansätzen mit deutlich reduziertem Rechenaufwand gelöst werden.

Entgegen der aus der Literatur bekannten linear-quadratischen Problemformulierungen, welche angesichts der zugrunde gelegten Systemdynamik und den getroffenen Annahmen entweder nur für Manöver mit konstanter Geschwindigkeit [5, 9] oder geringen Krümmungen [86, 103] verwendet werden können, zeichnet sich der hier vorgestellte Ansatz durch eine universelle Anwendung für unterschiedliche Fahrsituationen aus: mit dynamischen Objekten und statischen Hindernissen bei stark gekrümmten Referenzkurven mit un stetigem Krümmungsverlauf für variable Geschwindigkeiten. Darüber hinaus bietet er durch die zweckmäßige Formulierung der Optimierungskriterien die Möglichkeit, die Fahrzeugquerbewegung an die des menschlichen Fahrers anzupassen (vgl. [106]). Einer Fahrweise, die nach [58] durch ruhige und fließende Lenkbewegungen, die Minimierung des Querrucks und eine krümmungsabhängige Begrenzung der Querbeschleunigung sowie den daraus resultierenden

Abweichungen von der Spurmitte unter Berücksichtigung kollisionsrelevanter Hindernisse [77, 78] charakterisiert ist.

Um diese besonderen Eigenschaften herbeizuführen, wird entsprechend [123] und [127] ein um zusätzliche Ausgangsgleichungen erweitertes, zeitvariantes Systemmodell abgeleitet, welches die Fahrzeugquerbewegung entlang einer gegebenen Referenzkurve linear approximiert (vgl. Abschn. 2.4.2). Aufbauend darauf werden für die definierten Systemein- und -ausgänge zeitvariante Beschränkungen formuliert, mit denen alle statischen und dynamischen Hindernisse bei der Optimierung mit berücksichtigt und fahrphysikalische Begrenzungen eingehalten werden können. Zur Erzeugung eines möglichst komfortablen Fahrverhaltens wird ein für den zuvor definierten Systemzustand angepasstes Kostenfunktional formuliert, welches in Abschn. 5.4.1 durch den anwendungsspezifischen Einsatz von Schlupfvariablen erweitert wird. Abschließend erfolgt, neben Betrachtungen der Stabilität des geschlossenen Regelkreises bei rekursiver Lösung des resultierenden Optimalsteuerungsproblems, eine zusammenfassende Bewertung des vorgestellten Ansatzes im Kontext der in Kapitel 2 formulierten Anforderungen an die Trajektorienoptimierung für automatisierte Fahreingriffe.

## 5.1 Lineare Systemdynamik der Fahrzeugquerbewegung

Im Gegensatz zur Längsbewegung, die sich hinreichend durch die zeitinvarianten Systemgleichungen einer eindimensionalen Bewegung beschreiben lässt, ergeben sich für die Formulierung der Fahrzeugquerbewegung in Bahnkoordinaten, selbst unter der Voraussetzung linearer Systemmodelle, verschiedene Möglichkeiten [123, 125]. Die Systemmodelle unterscheiden sich in erster Linie durch die berücksichtigten physikalischen Aspekte und der Wahl des Systemeingangs.

Im einfachsten Fall kann die Querbewegung äquivalent zur Längsbewegung durch die zeitinvarianten Systemgleichungen einer eindimensionalen Bewegung beschrieben werden [125]. Obwohl, wie in Abschn. 3.2 erläutert, diese zeitvariante Formulierung der Systemdynamik zu einem reduzierten Rechenaufwand führt, resultieren daraus hohe Stetigkeitsanforderungen an den Krümmungsverlauf der Referenzkurve, die i. Allg. nicht vorausgesetzt wer-



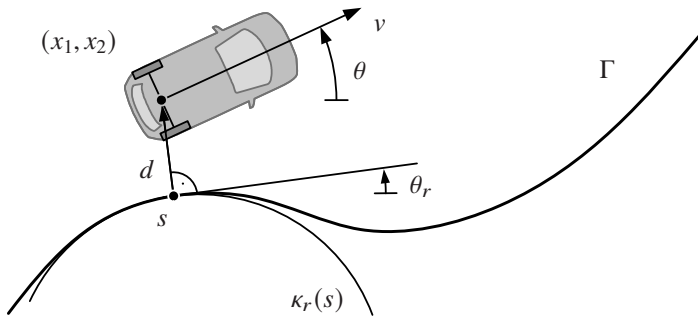


Abbildung 5.1: Kinematisches Fahrzeugmodell der Querbewegung entlang einer gegebenen Referenzkurve  $\Gamma$

den können [63]. Alternativ dazu lassen sich basierend auf der linearisierten Relativkinematik der Querbewegung (2.6b) unterschiedliche Systemmodelle ableiten, welche im umfangreichsten Fall mittels des linearen Einspurmodells [84] um zusätzliche Dynamikgleichungen erweitert werden können. Da mit steigender Anzahl der Systemzustände auch der zur Lösung notwendige Rechenaufwand zunimmt und die Vernachlässigung fahrzeugspezifischer Parameter eine universelle Anwendung ermöglicht, wird auf die Berücksichtigung der Fahrzeugquerdynamik wie in [68] verzichtet. Im Folgenden wird daher ausschließlich die Kinematik der Fahrzeugquerbewegung für die Trajektorienoptimierung berücksichtigt. Der Einsatz einer unterlagerten Stabilisierungsebene, die auf einem genaueren Systemmodell aufbaut, ermöglicht darüber hinaus dynamischen Systemzuständen wie beispielsweise dem Schwimmwinkel Rechnung zu tragen.

### 5.1.1 Lineare Bewegungsgleichungen der Relativkinematik

Basierend auf den in Abb. 5.1 dargestellten Zusammenhängen zwischen der Ausrichtung  $\theta_r$  und der Krümmung  $\kappa_r$  der Referenzkurve  $\Gamma$  sowie den Fahrzeugzuständen des Normalenabstand  $d$ , der Ausrichtung  $\theta$  und der Krümmung  $\kappa$  bei der Wegstrecke  $s$  wird für die Formulierung des Systemmodells der Querbewegung die kinematische Grundgleichung (2.6b) um höhere Systemzustände erweitert. Der Hinterachsmittelpunkt des Fahrzeugs stellt den Referenzpunkt dar. Mit der Wahl der zeitlichen Ableitung der Krümmungsänderung  $\dot{\kappa}$  als

Systemeingang  $u$  kann trotz eines stückweise konstanten Verlaufs der Stellgröße aufgrund der Diskretisierung (vgl. Abschn. 3.2.1) ein aus Komfortgründen mehrfach stetig differenzierbarer Verlauf des Lenkwinkels erreicht werden. Zusätzlich gilt für den Hinterachsmittelpunkt, dass sich für diesen Punkt der Schwimmwinkel sowohl bei langsamer als auch bei schneller Fahrt vernachlässigen lässt [84], sodass die zuvor beschriebene Vernachlässigung dynamischer Bewegungszustände nur geringe Auswirkungen auf die Bewegungsplanung besitzt.

Mit der Wahl der über die Längsbewegungsoption gegebenen Geschwindigkeit  $v(t)$  als zeitvarianter Parameter ergibt sich für (3.37a) mit dem nach Anhang A.3 abgeleiteten Störungsterm  $z(t) = \theta_r$ , der Stellgröße  $u(t) = \ddot{\kappa}$  und dem Zustandsvektor  $\mathbf{x} = [d, \theta, \kappa, \dot{\kappa}]^T$  mit  $n = 4$  die linearzeitvariante Systemdynamik der Querbewegung in Zustandsraumdarstellung zu

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & v(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}(t)} \mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} -v(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}(t)} z(t). \quad (5.1)$$

### 5.1.2 Festlegung des Systemausgangs

Für eine geeignete Formulierung von Beschränkungen wird im Folgenden die Systemdynamik (5.1) um zusätzliche Systemausgänge erweitert. Entsprechend der beispielsweise in [121] vorgeschlagenen Idee, die Fahrzeugausdehnung mittels mehrerer Kreise für eine schnelle Kollisionsüberprüfung zu approximieren, wird, wie in Abb. 5.2 dargestellt, das Fahrzeug durch drei Kreise, welche entlang der Längsachse positioniert sind, beschrieben. Die Positionen der Kreismittelpunkte lassen sich für den dargestellten Fall in Bezug auf den Hinterachsmittelpunkt über die Abstandswerte  $l_1 = 0, l_2 = \frac{l}{2}, l_3 = l$  basierend auf dem Achsabstand  $l$  definieren, sodass sich deren Abstände zur Referenzkurve  $\Gamma$  über

$$d_i = d + l_i \sin(\theta - \theta_r) \approx d + l_i(\theta - \theta_r), \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.2)$$

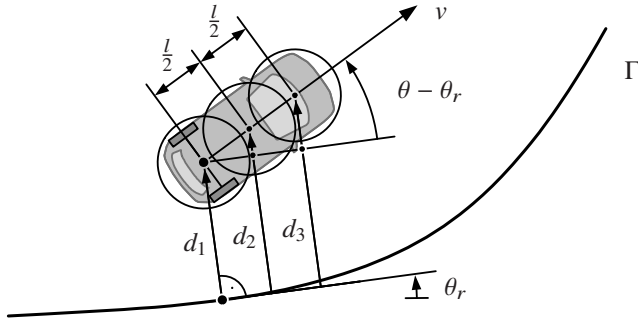


Abbildung 5.2: Darstellung der Systemausgänge zur Kollisionsvermeidung

analog zur Approximation des Abstands  $d$  berechnen lassen. Zusammen mit der Krümmung  $\kappa$  und der Krümmungsänderung  $\dot{\kappa}$  zur Berücksichtigung fahrphysikalischer Beschränkungen kann der Systemausgang durch

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \kappa \\ \dot{\kappa} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2}l & 0 & 0 \\ 1 & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \mathbf{x}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}l \\ -l \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}} \mathbf{z}(t) \quad (5.3)$$

mit  $p = 5$  kompakt definiert werden. Dessen zeitdiskrete Formulierung ergibt sich nach Abschn. 3.2.1 identisch dazu.

### 5.1.3 Zeitdiskrete Formulierung der Systemdynamik

Die Systemmatrizen  $\mathbf{A}^D(t_k), \mathbf{B}^D(t_k), \mathbf{D}^D(t_k), \mathbf{C}^D(t_k), \mathbf{E}^D(t_k)$  der zeitdiskreten Problemformulierung sind entsprechend Abschn. 3.2.1 über die Transitionsmatrix  $\Phi(t, t_k)$  definiert. Die Transitionsmatrix berechnet sich für den gegebenen Fall einer oberen Dreiecksmatrix für  $\mathbf{A}(t)$  nach [115] vereinfacht durch sequentielle Integration der einzelnen Zeilen der Systemdynamik (5.1). Für den zeitvarianten Parameter  $v(t)$  in (5.1) wird ein kubischer Verlauf angesetzt.

Dieser lässt sich in jedem Diskretisierungsintervall  $[t_k, t_{k+1})$  mit den aus der Längsbewegung bekannten Größen  $\ddot{a}(t_k), j(t_k), a(t_k), v(t_k)$  (vgl. Kapitel 4) beschreiben, wobei  $v(t)$  durch dreimaliges Integrieren aus dem im Abtastintervall konstanten Wert  $\ddot{a}(t_k)$  mit den Anfangswerten  $j(t_k), a(t_k), v(t_k)$  folgt. Es gilt für  $t \in [t_k, t_{k+1})$

$$v(t) = \frac{1}{6}\ddot{a}(t_k)(t - t_k)^3 + \frac{1}{2}j(t_k)(t - t_k)^2 + a(t_k)(t - t_k) + v(t_k). \quad (5.4)$$

Für die in Abschn. 4.3 beschriebene Planung der Längsbewegung kann dadurch der Verlauf der Geschwindigkeit  $v$  exakt bei der Optimierung der Querbewegung berücksichtigt werden.

Zur Berücksichtigung der a priori bekannten Referenzkurve  $\Gamma$ , die typischerweise als Stützweite vorliegt (vgl. Anhang A.3), wird der Verlauf der Störung  $z(t) = \theta_r(t)$  in jedem Intervall  $[t_k, t_{k+1})$  linear approximiert

$$z(t) = \frac{(z(t_{k+1}) - z(t_k))}{T_s} (t - t_k) + z(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}). \quad (5.5)$$

Eine Approximation erster Ordnung stellt in diesem Fall den besten Kompromiss aus Genauigkeit und resultierendem Aufwand dar. Die Stellgröße  $u(t) = \ddot{\kappa}(t)$  wird in jedem Diskretisierungsintervall  $[t_k, t_{k+1})$  als konstant angenommen.

Folglich ergeben sich die in Anhang A.4 formulierten zeitdiskreten Systemmatrizen der Systemdynamik (3.40).

## 5.2 Sicherheit durch zeitvariante lineare Systembeschränkungen

Für die definierten Systemausgänge (5.3) und den Systemeingang  $u = \ddot{\kappa}$  werden im Folgenden linearzeitvariante Beschränkungen formuliert. Entsprechend der in Kapitel 2 gestellten Anforderungen nach einer sicheren Fahrzeugquerbewegung lassen sich dadurch die Kollisionsfreiheit und fahrphysikalischer Begrenzungen berücksichtigen.

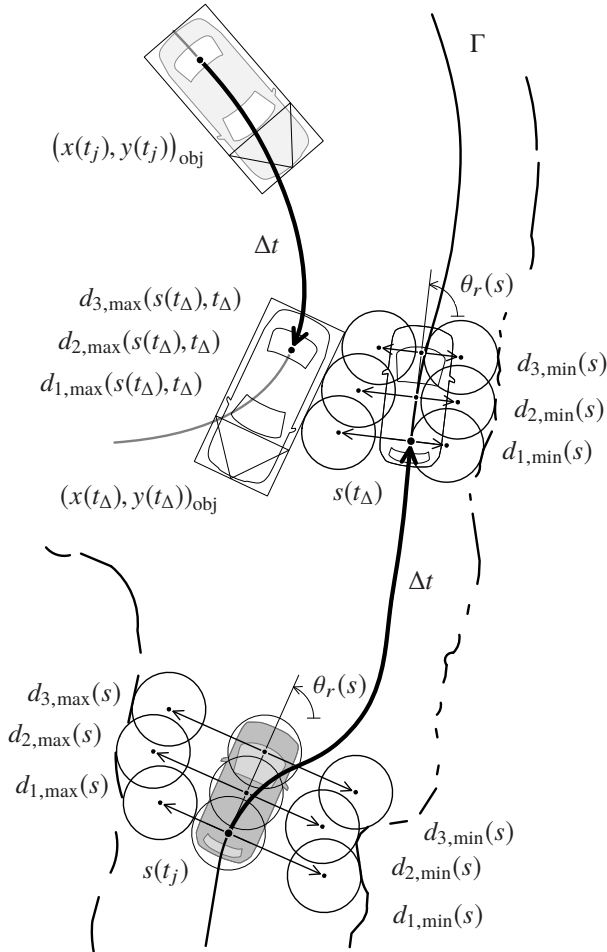


Abbildung 5.3: Darstellung der zeitvarianten Fahrraumbeschränkungen zur Kollisionsvermeidung zum Zeitpunkt  $t_j$  der aktuellen Fahrzeugposition  $s(t_j)$  (dunkel graues Fahrzeug) und zu einem weiteren beliebigen, zukünftigen Zeitpunkt  $t_\Delta$ ; Der Fahrzeugumriss markiert die prädierte Fahrzeugposition  $s(t_\Delta)$  auf der Referenzkurve  $\Gamma$  nach dem Zeitintervall  $\Delta t$ , sodass gilt  $t_\Delta = t_j + \Delta t$ ; Die Positionen  $(x(t_j), y(t_j))_{\text{obj}}$  und  $(x(t_\Delta), y(t_\Delta))_{\text{obj}}$  des mit einem Rechteck repräsentierten dynamischen Objekts sind äquivalent dazu dargestellt

## 5.2.1 Kollisionsfreiheit durch Fahrraumbeschränkungen

Wie in Abb. 2.2 für eine typische Verkehrssituation gezeigt, haben andere Verkehrsteilnehmer oder statische Hindernisse einen großen Einfluss auf die Planung der zukünftigen Fahrzeugquerbewegung. Offensichtlich führt die Bewegung zweier Objekte, die zum selben Zeitpunkt in Richtung derselben Stelle erfolgt, zwangsläufig zu einer Kollision. Um diese zu vermeiden, lässt sich, entsprechend der Darstellungen in Abb. 5.3, mittels gezielter Beschränkungen, der Fahrraum durch Begrenzungen auf der rechten und linken Seite der Referenzkurve  $\Gamma$  dahingehend einschränken, dass die Positionen anderer Verkehrsteilnehmer und statischer Hindernisse durch die geplante Querbewegung nicht erreicht werden können.

Um den Bewegungsspielraum des eigenen Fahrzeugs auch für beliebige Ausrichtungen möglichst exakt einzuschränken, sodass selbst in beengten Fahrsituationen souverän manövriert werden kann, erfolgt die Beschränkung des Fahrraums für die drei die Fahrzeugausdehnung approximierenden Kreise unabhängig voneinander. Da deren Positionen als laterale Abweichungen  $d_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  zu der Referenzkurve  $\Gamma$  in Form von Systemausgängen (5.3) definiert sind, lassen sich die angestrebten Fahrraumbegrenzungen durch Beschränkungen des Systemausgangs erreichen. Die Ausgangsbeschränkungen ergeben sich, wie in Abb. 5.3 für zwei aufeinanderfolgende Zeitschritte  $t_j$  und  $t_\Delta$  mit Hilfe der nach links und rechts verschobenen Kreise aufgezeigt, entlang der Referenzkurve  $\Gamma$  in Abhängigkeit der prädierten Positionen anderer Verkehrsteilnehmer (rechteckige Boxen) und statischer Hindernisse (gestrichelte Linien) gemäß (3.42a) als maximale  $d_{i,\max}$  und minimale  $d_{i,\min}$  Abweichungen. Zum Zeitpunkt  $t_\Delta$  wird anhand der prädierten Position  $(x(t_\Delta), y(t_\Delta))_{\text{obj}}$  des bewegten Objekts (rechteckige Box) deutlich, dass die maximalen und minimalen Abweichungen nicht nur von der Position  $s$  entlang der Referenzkurve  $\Gamma$  abhängig sind, sondern auch von der Zeit  $t$ . Die Berücksichtigung von dynamischen Objekten macht deshalb die Formulierung zeitabhängiger Beschränkungen erforderlich.

Entsprechend resultieren die zeitvarianten Ausgangsbeschränkungen zur Kollisionsvermeidung unter Berücksichtigung des zeitdiskreten Systemmodells (5.1),(5.3) gemäß (3.42a) zu

$$d_{i,\min}(s(k)) \leq d_i(k) \leq d_{i,\max}(s(k)), \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.6)$$

$s(k)$  ergibt sich aus der gegebenen Längsbewegungsoption. Es sei angemerkt, dass mittels dieser Formulierung nicht nur Fahrraumbegrenzung aufgrund von Hindernissen berücksichtigt werden können, sondern zusätzlich auch Fahrbahnmarkierungen bei der Trajektorienoptimierung Beachtung finden.

## 5.2.2 Beschränkungen der Fahrzeugquerdynamik

Neben den Ausgangsbeschränkungen zur Kollisionsvermeidung sind außerdem Begrenzungen aus der Fahrphysik zu berücksichtigen. Diese resultieren aus den mechanischen Eigenschaften des Lenkactuators<sup>1</sup> und aus der eingeschränkten Traktion der Reifen.

Hinsichtlich der gewählten Stellgröße  $u$  und der definierten Systemausgänge (5.3) lässt sich die begrenzte Lenkbeschleunigung und Lenkgeschwindigkeit des Lenkactuators, bedingt durch die maximal mögliche Leistungsabgabe, durch zeitinvariante Eingangs- und Ausgangsbeschränkungen der Form

$$u_{\min} \leq u(k) \leq u_{\max}, \quad (5.7a)$$

$$\dot{\kappa}_{\min} \leq \dot{\kappa}(k) \leq \dot{\kappa}_{\max}, \quad (5.7b)$$

berücksichtigen. Auf gleiche Weise kann für den maximalen Lenkeinschlag eine weitere zeitinvariante Beschränkung für den Systemausgang der Krümmung  $\kappa$  über  $\kappa_{\max,\delta}$  und  $\kappa_{\min,\delta}$  abgeleitet werden. Angesichts der limitierten Traktion der Reifen lassen sich diese Krümmungsbeschränkungen um einen zusätzlichen zeitvarianten Bestandteil, in Abhängigkeit der bekannten Längsbewegung  $v(k)$  und einem geschätzten Reibungsparameter  $\mu$ , erweitern. Die Kombination dieser Ausgangsbeschränkungen ergibt sich folglich zu

$$\underbrace{\max(\kappa_{\min,\delta}, \kappa_{\min,\mu}(k))}_{\kappa_{\min}} \leq \kappa(k) \leq \underbrace{\min(\kappa_{\max,\delta}, \kappa_{\max,\mu}(k))}_{\kappa_{\max}}. \quad (5.8)$$

$\kappa_{\min,\mu}(k) = \kappa_{\min}(v(k), \mu)$  und  $\kappa_{\max,\mu}(k) = \kappa_{\max}(v(k), \mu)$  lassen sich abhängig von der bekannten Längsbeschleunigung mit Hilfe des *Kammischen Kreises* [23] berechnen.

<sup>1</sup> Typischerweise erfolgt die Umsetzung automatisierter Fahreingriffe in die Querbewegung des Fahrzeugs über die elektronische Lenkkräftunterstützung, engl. electric-power-steering (EPS).

### 5.3 Optimierungskriterien für ein natürliches Fahrverhalten

Zur Erzeugung einer, den Anforderungen an die Trajektorienoptimierung entsprechenden Fahrzeugbewegung erfolgt die Formulierung der Optimierungskriterien entsprechend des Fahrverhaltens menschlicher Fahrer. Da dieses durch einen Kompromiss zwischen dem Fahren in der Fahrstreifenmitte und der Minimierung der lateralen Fahrzeugbeschleunigung und des Querrucks charakterisiert ist, werden, basierend auf den Zuständen der Systemdynamik (5.1), die Integralkosten des Kostenfunktional (3.41) zu

$$l(\mathbf{x}(k), u(k)) = w_d d^2 + w_\theta [\theta - \theta_r]^2 + w_\kappa \kappa^2 + w_{\dot{\kappa}} \dot{\kappa}^2 + w_u u^2 \quad (5.9)$$

mit den Gewichtungsfaktoren  $w_d, w_\theta, w_\kappa, w_{\dot{\kappa}}, w_u > 0$  angesetzt. Die ersten Terme dienen dabei der Vermeidung jeglicher Abweichungen von der Referenzkurve  $\Gamma$ , um Fahrzeugbewegungen entlang selbiger zu ermöglichen. Vor allem durch den zweiten Term kann erreicht werden, dass die lineare Approximation der Ausrichtungsdifferenz in (2.5b) zu jeder Zeit gültig ist. Im Unterschied dazu hemmen die letzten drei Terme durch die Minimierung der Krümmung  $\kappa$  und deren Ableitungen jegliche Richtungsänderungen, sodass auch in Kurven die Fahrzeugbewegung möglichst geradlinig verläuft. Über die Gewichtungsfaktoren  $w_d, w_\theta, w_\kappa, w_{\dot{\kappa}}$  kann der angesprochene Kompromiss beliebig parametrisiert werden, sodass in Abhängigkeit der Fahrsituation Abweichungen von der Spurmitte möglich sind, wenn dadurch eine komfortablere Fahrzeugbewegung erreicht werden kann. Da sich verschiedene Fahrsituationen vor allem in der gefahrenen Geschwindigkeit unterscheiden, ist eine geschwindigkeitsabhängige Formulierung der Gewichtungsfaktoren  $w_{x_i}(v(k))$ ,  $x_i = d, \theta, \kappa, \dot{\kappa}, u$  zielführend.

Basierend auf diesen zeitvarianten Gewichtungsfaktoren lassen sich die Integralkosten (5.9) zu den positiv-definiten Gewichtungsmatrizen

$$\mathbf{Q}_k = \begin{bmatrix} w_d(k) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_\theta(k) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_\kappa(k) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_{\dot{\kappa}}(k) \end{bmatrix} \quad (5.10)$$



und  $\mathbf{R}_k = [w_u(k)]$  des kompakt formulierten Kostenfunktional (3.50) zusammenfassen.  $\theta_r$  kann über die Vektorsequenz des Zielzustandsverlaufes  $\mathbf{x}_d$  mit berücksichtigt werden.

## 5.4 Zyklische Lösung des Trajektorienoptimierungsproblems

Mit der Definition des um zusätzliche Ausgangsgleichungen (5.3) erweiterten zeitvarianten Systemmodells (5.1) in zeitdiskreter Form (3.40), den linearenzeitvarianten Eingangs- und Ausgangsbeschränkungen aus Abschn. 5.2 und der quadratischen Integralkosten (5.9) ergibt sich ein linear-quadratisches Optimalsteuerungsproblem, das aufgrund der festgelegten Beschränkungen mittels direkter Optimierungsmethoden effizient gelöst werden kann (vgl. Kapitel 3). Entsprechend der in Abschn. 2.2.2 beschriebenen zyklischen Lösung des Optimalsteuerungsproblems auf einem fortschreitenden Optimierungshorizont  $N$  in Form einer linear, modellprädiktiven Regelung (LMPC) zur Berücksichtigung der sich permanent verändernden Fahrsituation, wird zur Sicherstellung der rekursiven Lösbarkeit und gezielten Beeinflussung der optimalen Trajektorienform im Weiteren die hergeleitete Problemformulierung um Schlupfvariablen erweitert (vgl. Abschn. 3.2.3) sowie die Stabilität des geschlossenen Regelkreises diskutiert.

### 5.4.1 Problemspezifische Verwendung von Schlupfvariablen

Um durch die Beschränkungen verursachte, nicht lösbare Problemstellungen zu vermeiden, wird die zuvor hergeleitete Problemformulierung, entsprechend der in Abschn. 3.2.3 dargestellten Herangehensweise, um anwendungsspezifische Schlupfvariablen erweitert. Im Gegensatz zu vergleichbaren Arbeiten [5, 86] werden selektiv, für bestimmte Ausgangsbeschränkungen voneinander unabhängige Schlupfvariablen eingeführt. Diese lassen sich zur gezielten Beeinflussung der optimalen Trajektorienform einsetzen. Neben der Schlupfvariablen  $\epsilon_f$  zur Sicherstellung der Lösbarkeit, werden für die Krümmungs- und Fahrraumbeschränkungen (Index  $\kappa$  bzw.  $d$ ), im Sinne der in Abschn. 3.2.3 erläuterten

zweistufigen Ausgangsbeschränkung, jeweils für die untere und obere Beschränkung (Index l bzw. u) unabhängige Schlupfvariablen definiert. Aus Sicht der Fahrraumbeschränkungen (5.6) können dadurch zusätzliche konservativ gewählte Komfortabstände zu Hindernissen bei der Optimierung berücksichtigt werden, was beispielsweise die in Abschn. 3.2.3 angesprochene gesonderte Berücksichtigung von Fahrbahnmarkierungen und festen Fahrraumbeschränkungen (z. B. Leitplanken) ermöglicht. Gleichzeitig können zusätzliche Komfortbeschränkungen der Krümmung bei der Optimierung einbezogen werden, sodass sich analog zu der in Abschn. 4.3.3 vorgestellten Beschränkung der Längsbeschleunigung auch Phasen konstanter Querbeschleunigung erzeugen lassen.

Zur weiteren gezielten Anpassung der Problemformulierung an die Planung der Querbewegung erfolgt die Formulierung der Schlupfvariablen  $\epsilon_f$  für die Kollisionsbeschränkungen (5.6) nur auf einem reduzierten Horizont  $N_s < N$ . Da die zyklische Lösbarkeit des Optimierungsproblems bei geringen lateralen Abständen zu Hindernissen aufgrund plötzlicher sprunghafter Veränderungen der Kollisionsbeschränkungen, verursacht z. B. durch Sensorrauschen, auch bei ausreichend großem Optimierungshorizont  $N$  nicht garantiert werden kann und eine Aufweichung dieser Sicherheitsbeschränkungen für größer werdende  $k$  gleichzeitig jedoch zu kollisionskritischen Situationen führt, kann dadurch ein parametrierbarer Kompromiss zwischen diesen komplementären Anforderungen erzielt werden. Motiviert durch die Anwendung der Trajektorienoptimierung der Querbewegung folgt demnach wie in Abschn. 3.2.3 beschrieben für die Matrizen

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}_k^y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, & \mathbf{S}_k^u &= \emptyset, & \mathbf{H}_k^y &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^T, & \mathbf{H}_k^u &= 1, \\
 \mathbf{Y}_k^u &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, & \mathbf{Y}_k^l &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T,
 \end{aligned}$$

für  $1 \leq k \leq N_s$  und

$$\mathbf{S}_k^y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{S}_k^u = \mathbf{0}, \quad \mathbf{H}_k^y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{H}_k^u = \mathbf{1},$$

$$\mathbf{\Upsilon}_k^u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{\Upsilon}_k^l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

für  $N_s < k \leq N$ . Mit dem um  $r = 5$  Schlupfvariablen erweiterten Optimierungsvektor  $\tilde{\mathbf{u}}$  des Quadratischen Programms  $\tilde{\mathbf{u}} = [\mathbf{u}^T, [\epsilon_f, \epsilon_{d,u}, \epsilon_{\kappa,u}, \epsilon_{d,l}, \epsilon_{\kappa,l}]^T]^T$  ergibt sich die Matrix  $\mathbf{\Upsilon}$  zu

$$\mathbf{\Upsilon}_{2n_s \times r} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Upsilon}^u \\ \mathbf{\Upsilon}^l \end{bmatrix}, \quad \text{mit } \mathbf{\Upsilon}^u = \begin{bmatrix} \mathbf{\Upsilon}_1^u \\ \vdots \\ \mathbf{\Upsilon}_{N_s}^u \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{\Upsilon}^l = \begin{bmatrix} \mathbf{\Upsilon}_1^l \\ \vdots \\ \mathbf{\Upsilon}_N^l \end{bmatrix},$$

wobei  $n_s = |\mathcal{I}_{p,s,N_s}|N_s + |\mathcal{I}_{p,s,N}|(N - N_s)$  für  $\mathcal{I}_{p,s,N_s} = [1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4]$  und  $\mathcal{I}_{p,s,N} = [1, 2, 3, 4, 4]$ .

## 5.4.2 Stabilitätsbetrachtungen und zyklische Lösbarkeit

Wie auch für die Stabilität und die zyklische Lösbarkeit der Fahrzeuglängsplanung (vgl. Abschn. 4.3.4), sind allgemeine Aussagen über eine garantierte Kollisionsvermeidung bei beliebiger, sich plötzlich ändernder Konstellation von Hindernissen und Objekten für die Planung der Fahrzeugquerbewegung nicht möglich. Durch sich sprunghaft ändernde zeitvariante Nebenbedingungen, verursacht z. B. durch Sensorrauschen oder Verdeckungen, können von einem Optimierungsschritt auf den anderen die Gesamtkosten des Kostenfunctionals (3.57) beliebig ansteigen, weshalb die zyklische Lösbarkeit in diesen Fällen nicht sichergestellt werden kann.

Ungeachtet dessen existieren aufgrund der linear-quadratischen Problemformulierung mit linearen Nebenbedingungen, wie beispielsweise auch in [30] angewandt, die in Abschn. 2.2.2 beschriebenen Bedingungen für die Gewichtung der Endkostenmatrix  $\mathbf{S}$  in (3.49) und eine invariante Zielmenge für den Endzustand  $\mathbf{x}(N) \in \mathcal{X}_f$ . Aus diesen folgt direkt die asymptotische Stabilität und

zyklische Lösbarkeit des Optimalsteuerungsproblems (vgl. Anhang A.2). Für die zeitvariante Problemformulierung zur Fahrzeugquerplanung lassen sich für gleichbleibende Kurvenradien und konstante Fahrgeschwindigkeiten unter Vernachlässigung dynamischer Objekte zyklische Lösbarkeit und asymptotische Stabilität garantieren. Aufgrund der geringen physikalisch zulässigen Änderungen der Systemmatrix  $A(t)$  und der Störung  $z(t)$  lässt sich diese Aussage zumindest qualitativ auf den allgemeineren Fall erweitern.

Darüber hinaus können durch die Wahl eines großen Optimierungshorizonts und einer möglichst großen Zielmenge  $\mathcal{X}_f$  weitere qualitative Aussagen über die zyklische Lösbarkeit auch bei zeitvarianten Nebenbedingungen abgeleitet werden. Nach [21] kann die zyklische Lösbarkeit dann erzielt werden, wenn zu einem Optimierungsschritt  $k$  der Zustand  $x(k)$  sich innerhalb einer für das Problem beliebigen invarianten Menge (z. B.  $\mathcal{X}_f$ ) befindet. Ferner lässt sich mittels der im vorausgehenden Abschnitt formulierten Schlupfvariablen, durch eine für die Anwendung gezielte und parametrierbare Erweiterung des Optimierungsraums, die zyklische Lösbarkeit sicherstellen, sodass zu jedem Zeitpunkt der Optimierung die Existenz einer Lösung garantiert werden kann. Obwohl dadurch keine Kollisionsfreiheit sichergestellt ist, kann jede Lösung als „maximal sicher“ verstanden werden. Die Schlupfvariable  $\epsilon_f$  kann als Maß der Überschreitung der Sicherheitsbeschränkungen interpretiert werden. Des Weiteren sei erwähnt, dass, entsprechend der in Kapitel 2 motivierten, vorgelagerten Optimierung der Längsbewegung, Situationen, die aus Sicht der Querbewegung zwangsweise zu einer Kollision führten, im Vorfeld ausgeschlossen werden können.

Infolgedessen eröffnet die Kombination der beschriebenen Maßnahmen weitreichende Aussagen über die Sicherstellung der zyklischen Lösbarkeit und Stabilität des geschlossenen Regelkreises. Im Hinblick auf eine mögliche Industrialisierung des vorgestellten Algorithmus beinhalten diese wichtige Argumente für die Absicherung.

## 5.5 Zusammenfassung

Mit dem Ziel einer komfortablen und sicheren Bewegungsplanung von Fahrzeugen für automatisierte Fahreingriffe in Echtzeit beschreibt das vorliegende Kapitel eine linear-quadratische Problemformulierung mit Beschränkungen

zur Trajektorienoptimierung der Fahrzeugquerbewegung entlang einer gegebenen Referenzkurve  $\Gamma$ . Mit Methoden der statischen Optimierung kann diese besonders effizient gelöst werden. Obwohl die dargestellte Problemformulierung ausschließlich für die Lösung lokaler Optimalsteuerungsprobleme geeignet ist, bietet selbige die nachfolgend aufgeführten drei besonders vorteilhaften Eigenschaften. Aufbauend auf diesen ist, entsprechend den in Kapitel 2 getroffenen Annahmen, das Grundproblem der Trajektorienoptimierung (vgl. Abschn. 2.2.3) mit deutlich reduziertem Rechenaufwand gegenüber existierenden Ansätzen zu lösen.

1. Wenn eine Lösung des Optimalsteuerungsproblems existiert, kann diese unter Garantie mit sehr geringem Rechenaufwand in wenigen Millisekunden bestimmt werden.
2. Da die optimale Lösung des Optimierungsproblems im kontinuierlichen Stellgrößen- und Zustandsraum liegt, lassen sich bei zyklischer Lösung die negativen Effekte, verursacht durch Sensorrauschen und Systemstörungen, optimal kompensieren, sodass sprunghafte Wechsel der optimalen Lösung ausgeschlossen werden können (vgl. Abschn. 2.1.2).
3. Eine große Anzahl an Beschränkungen kann bei nur geringfügigem Mehraufwand beachtet werden, wodurch, den Anforderungen an die Trajektorienoptimierung entsprechend, fahrphysikalische und aktuatorische Begrenzungen berücksichtigt sowie Kollisionen mit statischen und dynamischen Hindernissen vermieden werden können.

Die beschriebene Problemformulierung ermöglicht darüber hinaus die Erzeugung eines natürlichen und souveränen Fahrverhaltens. Auch stark gekrümmten Referenzkurven  $\Gamma$  mit unstetigem Krümmungsverlauf<sup>2</sup> kann komfortabel gefolgt werden. Letztlich kann durch eine flexible Kombination der Optimierungsschrittweite  $T_s$  und der Anzahl der Optimierungsschritte  $N$  ein Planungshorizont im einstelligen Sekundenbereich bei akzeptablem Rechenaufwand festgelegt werden.

---

<sup>2</sup> Da Referenzkurven typischerweise aus diskretisierten Karten abgeleitet werden oder aus Rechenzeitgründen nur für Fahrzeugmodelle geringer Systemordnung (vgl. Abschn. 2.2.4) generiert werden können, kann eine krümmungsstetige Referenz i. Allg. nicht ohne eine aufwändige und kompromissbehaftete Aufbereitung vorausgesetzt werden.

Im Vergleich zu alternativen linear-quadratischen Problemformulierungen [5, 86, 103], bietet der in diesem Kapitel vorgeschlagene Ansatz für beliebige Fahrsituationen die Möglichkeit, die Anforderungen an die Trajektorienoptimierung für automatisierte Fahrfunktionen in Bezug auf die Planung der Fahrzeugquerbewegung universell zu erfüllen.

Obwohl ein zweckmäßiger Kompromiss zwischen einer flexiblen und universellen Trajektorienoptimierung bei minimalem Rechenaufwand gegeben ist, sei bemerkt, dass in speziellen Fällen, wie in Abschn. 3.3 angedeutet, dieser Kompromiss bei einer Reduzierung der Anforderung zugunsten einer noch effizienteren Lösungsfindung verschiebbar ist. So kann beispielsweise unter der Voraussetzung einer krümmungsstetigen Referenzkurve die Systemdynamik zeitinvariant formuliert werden (vgl. Abschn. 5.1), wodurch sich der zur Laufzeit notwendige Rechenaufwand reduziert. Zusätzlich kann durch eine indirekte Berücksichtigung von Beschränkungen über interne Randbedingungen und den Einsatz indirekter Optimierungsmethoden (siehe Abschn. 3.1.5) eine weitere Reduktion des Rechenaufwands zugunsten eines herabgesetzten Kollisionsvermeidungspotenzials erreicht werden [125].

Da spezifische Fahrsituationen i. Allg. nicht vorausgesetzt werden können und u. U. eine Kollisionsvermeidung nicht sichergestellt werden kann, stellen die vereinfachten Problemstellungen jedoch nur eine Ergänzung zu der vorgestellten, universell einsetzbaren Problemformulierung dar.

## 6 Umsetzung und Validierung im Realversuch

Zur Validierung der abgeleiteten Methodik der linear-quadratischen Optimierung für eine recheneffiziente Trajektorienoptimierung von Fahrzeugen wird im vorliegenden Kapitel die praktische Leistungsfähigkeit der hergeleiteten Problemformulierungen demonstriert. Nach einer kurzen Beschreibung der prototypischen Umsetzung und des Versuchsaufbaus veranschaulichen die im Weiteren beschriebenen und ausgiebig diskutierten, repräsentativen Fahrversuche den flexiblen und vorteilhaften Einsatz der vorgeschlagenen Methodik in unterschiedlichen Fahrsituationen.



Abbildung 6.1: Versuchsfahrzeug während eines fahrerlosen, vollautomatisierten Einparkmanövers

## 6.1 Versuchsaufbau und -durchführung

Die prototypische Umsetzung der vorgestellten Algorithmen zur Trajektorienoptimierung erfolgt auf verschiedenen Fahrzeugen der BMW 5er Reihe und des BMW i3 (s. Abb. 6.1). Zur Umfelderkennung wurden die Fahrzeuge mit umfangreicher Lasersensorik ausgestattet. Neben Informationen zu den im Fahrzeugumfeld befindlichen statischen Hindernissen und dynamischen Objekten, dienen die Messwerte der Standardsensorik für die Gierrate, Geschwindigkeit und Beschleunigung der Eingangslokalisierung auf Basis eines Odometriemodells [19], aber auch als Eingangsdaten für die Bewegungsplanung. Zusätzlich erlaubt die softwaretechnische Modifikation der Steuergeräte die Ansteuerung der Aktuatorik des Fahrzeugs und ermöglicht so die Umsetzung der optimierten Fahrzeugbewegung durch automatisierte Eingriffe in Lenkung, Gas und Bremse.

Alle für die Trajektorienoptimierung notwendigen Berechnungen sind in der Matlab/Simulink Umgebung umgesetzt und werden auf einer dSpace Autobox DS1005 mit einem PowerPC 750GX Prozessor<sup>1</sup> für prototypische Anwendungen mit geringem Rechenaufwand ausgeführt. Lediglich der zur Lösung der beschränkten Optimalsteuerungsprobleme eingesetzte open-source QP-Solver *qld<sup>2</sup>* ist in C implementiert. Trotz der eingeschränkten Rechenleistung konnten bei der Problemformulierung als quadratisches Programm Berechnungszeiten für eine Trajektorie der Querbewegung von 4ms und für eine Längsbewegungstrajektorie von unter 2ms in unterschiedlichen Fahrsituationen erreicht werden. Außerdem konnten fünf Längsbewegungsoptionen mittels indirekter Methoden und ohne Berücksichtigung von Beschränkungen unter 0,15ms berechnet werden. Im Vergleich dazu erzielte eine Testimplementierung des Algorithmus zur Trajektorienoptimierung einer Querbewegungsoption in C++ auf einem, für moderne Notebooks typischen, Intel Core i7-5820K Prozessor eine Berechnungszeit von durchschnittlich 0,3ms.

Da Fahrzeuge selbst bei mittleren Geschwindigkeiten in Bruchteilen einer Sekunde nicht vernachlässigbare Distanzen zurücklegen können [126], wird bei

---

<sup>1</sup> eine echtzeitfähige Hardware- und Softwareumgebung mit einer Taktrate von 1GHZ, [www.dspace.com](http://www.dspace.com).

<sup>2</sup> Entwickelt von M.J.D. Powell (1983) und angepasst durch K. Schittkowski, mit geringen Modifikationen von A. Tits und J.L. Zhou, [www.scilab.org](http://www.scilab.org).



der zyklischen Neuplanung die, auch geringe Berechnungszeit der optimalen Fahrtrajektorie und die in Kapitel 4 thematisierte, verzögerte Ansteuerung der Fahrzeugaktuatorik durch Prädiktion kompensiert [41]. Für eine robuste Ausführung der berechneten Fahrzeugbewegung wird die optimierte Fahrtrajektorie durch einen auf der exakten Ein-Ausgangslinearisierung basierenden Regler stabilisiert. Dieser wird auf derselben Autobox bei einer Zykluszeit von 10ms ausgeführt, dessen Stellgrößen werden direkt an die Aktuatorik des Fahrzeugs weitergeleitet.

Mit dem beschriebenen Versuchsaufbaus erfolgt die Validierung der umgesetzten Algorithmen zur Trajektorienoptimierung in verschiedenen voneinander unabhängigen Fahrsituationen. Wegen der komplementären Eigenschaften der im Weiteren präsentierten Fahrversuche in Bezug auf

- automatisiertes und assistiertes Fahren,
- strukturierte und unstrukturierte Umgebung,
- Komfort- und Sicherheitsfunktionen,
- dynamische Objekte und statische Hindernisse sowie
- unterschiedliche Geschwindigkeits- und Dynamikbereiche

wird ein repräsentativer Überblick für einen universellen Einsatz der linear-quadratischen Optimierung gegeben. Zur Reduktion des Risikos durch kritische Fahrsituationen sowie des logistischen Aufwands wird die Umfelderkennung auf Basis der Fahrzeugsensorik durch die Simulation der für die Trajektorienoptimierung relevanten Eingangsdaten ersetzt. Für das z. B. knappe Ausweichen auf ein dynamisches Objekt wird dadurch eine isolierte Analyse der Bewegungsplanung möglich. Die Versuchsdurchführung der weniger kritischen Fahrtests im Gesamtverbund erfolgt hingegen mit überlagerten funktionalen Hierarchieebenen, wie z. B. der Umfelderkennung. Die umgesetzten vollkommen funktionsfähigen, neuartigen Fahrfunktionen zur aktiven Kollisionsvermeidung und zum vollautomatisierten Parken konnten bereits im Jahr 2015 im Rahmen von öffentlichen Demonstrationen internationalen Journalisten auf der CES<sup>3</sup> präsentiert werden [18] (s. Abb. 6.1 und Abb. 6.2).

---

<sup>3</sup> Die Consumer Electronics Show (CES) in Las Vegas ist eine der weltweit größten Fachmessen für Unterhaltungselektronik.



Abbildung 6.2: Versuchsfahrzeug während eines automatisierten Bremsengriffs zur Kollisionsvermeidung.

## 6.2 Fahrzeuglängsführung für Komfort- und Sicherheitssysteme

Der vorliegende Abschnitt stellt die in Kapitel 4 präsentierten Problemformulierungen zur Bewegungsplanung in Fahrzeuglängsrichtung in unterschiedlichen Fahrsituationen auf die Probe. Dabei werden sowohl sicherheitskritische als auch komfortorientierte Fahrsituationen bei verschiedenen Geschwindigkeiten zwischen 0 – 120km/h und unterschiedlich stark strukturierten Umgebungen adressiert. Zunächst wird ein repräsentativer Fahrversuch für die umgesetzte neuartige Fahrerassistenzfunktion zur verlässlichen Kollisionsvermeidung vorgestellt, welche auf der Lösung eines unbeschränkten Optimalsteuerungsproblems beruht. Danach werden Fahrversuche demonstriert, welche im Gegensatz dazu auf der Problemformulierung mit Beschränkungen basieren.

### 6.2.1 Aktive Kollisionsvermeidung beim Rangieren

Zur Visualisierung der in Kapitel 4 beschriebenen Fahrerassistenzfunktion zur Kollisionsvermeidung bei geringen Geschwindigkeiten und in unstrukturierter Fahrumgebung werden sechs Momentaufnahmen während eines realen Fahrmanövers in Abb. 6.3 vorgestellt, welche auf der Eigenlokalisierung des Versuchsfahrzeugs beruhen. Die vergangene und zukünftige Fahrzeugbewegung ist durch die schwarze und graue Linie, bezogen auf den Hinterachsmittel-

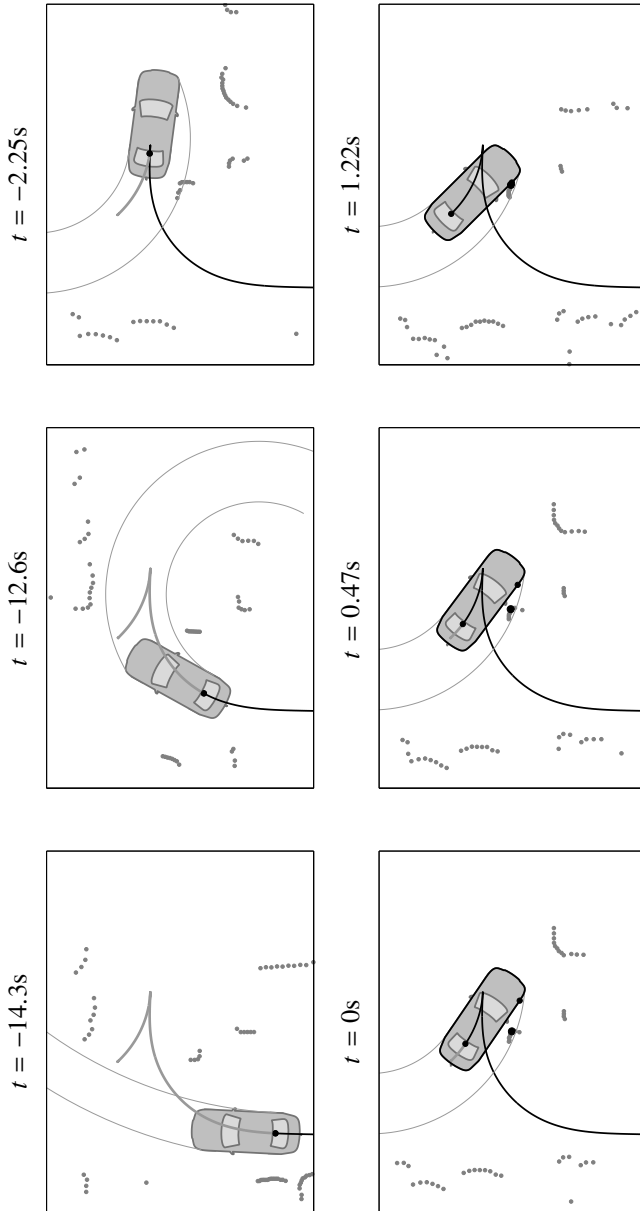


Abbildung 6.3: Automatisierter Bremsengriff zur erfolgreichen und komfortablen Kollisionsvermeidung beim Rangieren mit kollisionsrelevanten Belegungsstellen (graue Punkte)

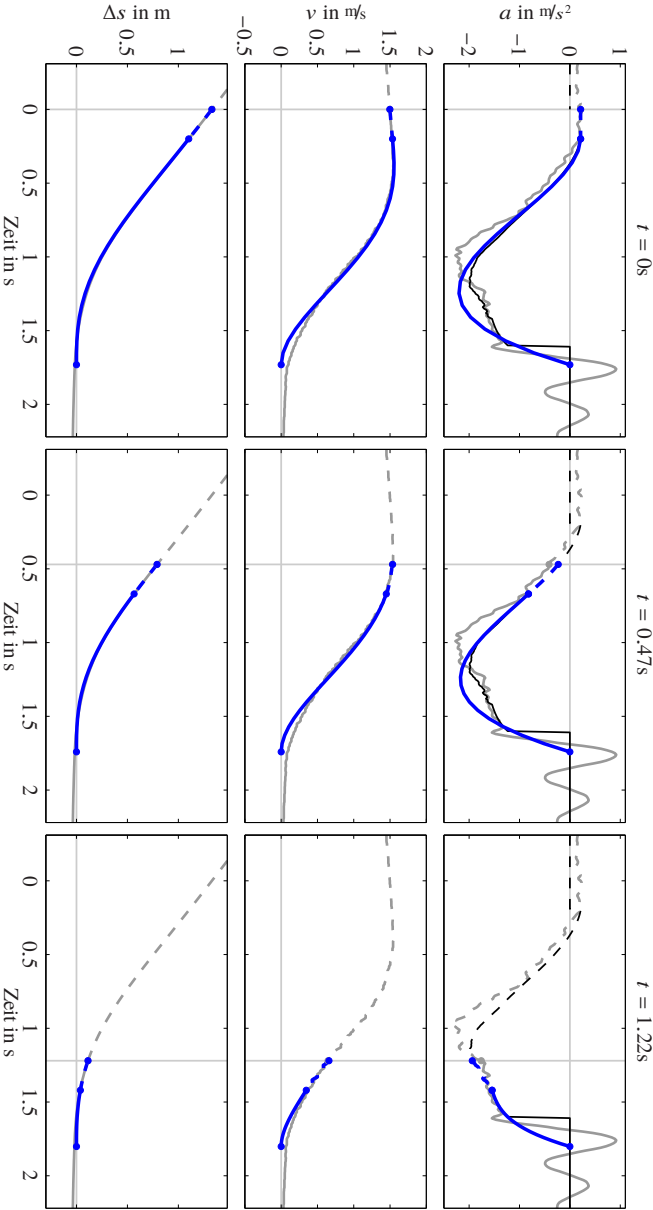


Abbildung 6.4: Für die Vorwärtsbewegung normalisierte Zustandsverläufe (grau) des zur Kollisionsvermeidung automatisierten Bremsen-  
griffs mit der optimalen Anhaltetrajektorie (blau) nach der Prädiktion (dick blau gestrichelt) zur Totzeitkompensation zu drei  
aufeinanderfolgenden Zeitpunkte (siehe Abb. 6.3)

punkt, gekennzeichnet. Die aktuellen Krümmungen der am weitesten innen und außen liegenden Punkte des Fahrzeugumrisses sind durch kreisförmige, graue Linien verdeutlicht. Anhand dieser können mögliche Kollisionen mit den als graue Punkte dargestellten kollisionsrelevanten Belegungspunkten abgeschätzt werden.

Im ersten Teil des Manövers befindet sich das Fahrzeug in einer Rechtskurve, die vorwärts durchfahren wird. Trotz des eingeschränkten Bewegungsspielraums kommt es zu keiner automatisierten Bremsung, da der Fahrer die Hindernisse mit einer der Situation angepassten Geschwindigkeit passiert. Im Gegensatz dazu übersieht der Fahrer bei der Rückwärtsbewegung im zweiten Teil des Manövers ein Hindernis, was aufgrund der Lenkbewegung zwangsweise zu einer Kollision führen würde. Zur Vermeidung der bevorstehenden Kollision erfolgt ein automatisierter Bremsengriff, welcher durch den kritischen in schwarz hervorgehobenen Belegungspunkt angedeutet ist. Der zweite schwarz markierte Punkt gibt den prädictierten Ort der Kollision in Bezug auf den Fahrzeugumriss an.

Entsprechend der in Abb. 6.3 dargestellten Zeitpunkte sind in Abb. 6.4 die für die Vorwärtsbewegung normierten Zustandsverläufe des automatisierten Bremsengriffs mit der optimalen Anhaltetrajektorie (blau) abgebildet. Obwohl der in schwarz dargestellte, geplante Beschleunigungsverlauf wegen des, für Fahrzeuge typischerweise schwer zu berücksichtigenden, Bremsmomentenaufbaus nicht akkurat umgesetzt werden kann, ermöglicht die schnelle und konsistente Neuplanung der optimalen Fahrtrajektorie ein sicheres Anhalten vor dem Hindernis. Der oszillierende Verlauf der Beschleunigung (grau) nahe des Stillstands stellt ein auch beim menschlichen Fahrer typisches Phänomen dar, sodass durch den vorgestellten Algorithmus die bevorstehende Kollision auf komfortable und dem Menschen nachempfundene Weise erfolgreich vermieden werden kann.

## 6.2.2 Optimale Längsbewegung mit Beschränkungen

Zur Demonstration des Potenzials des hergeleiteten Algorithmus zur Fahrzeuglängsführung basierend auf der Problemformulierung mit Beschränkungen (vgl. Kapitel 4) wird dessen Verhalten in zwei für automatisierte und assistierte Fahrfunktionen aussagekräftigen Fahrsituationen beschrieben. Für drei aufeinanderfolgende Zeitpunkte verdeutlichen die Verläufe der Position,

Geschwindigkeit und Beschleunigung die durch Komfort- (orange) und Sicherheitsbeschränkungen (rot) begrenzte Längsbewegung des Fahrzeugs bei einer Folgefahrt und einem Notbremsmanöver. Die zukünftigen Fahrzeugpositionen der optimierten Trajektorie (blau) und der Zielpositionen (grün) sind zu den jeweiligen Optimierungszeitpunkten als Punkte mit abnehmender Farbintensität über dem Optimierungshorizont abgebildet.

### **Automatisierte Folgefahrt**

Die Umsetzung einer bestimmten Wunschgeschwindigkeit sowie die Anpassung der Geschwindigkeit und des Abstands an den vorausfahrenden Verkehr stellen aus Sicht der Längsführung die grundlegenden Anwendungsfälle dar. Zur Verdeutlichung des angepassten Bewegungsverhaltens des vorgestellten Algorithmus wird im Folgenden die komfortable Reaktion des Algorithmus auf ein um  $40\text{km/h}$  langsamer fahrendes Fahrzeug dargestellt, welches bei einem Abstand von  $80\text{m}$  vor dem eigenen Fahrzeug einschert und nach einigen Sekunden den Fahrstreifen wieder nach rechts verlässt. Wie im ersten Zeitschritt in Abb. 6.5 ersichtlich, hält das Ego-Fahrzeug zunächst die Wunschgeschwindigkeit von  $120\text{km/h}$  (grüne Linie). Daraufhin passt es beim Einscheren des langsameren Fahrzeugs die Geschwindigkeit und den Abstand auf dieses an. Der optimierte Beschleunigungsverlauf (blau) ist durch die in Abschn. 4.3.3 beschriebene Phase konstanter Verzögerung charakterisiert, was von den Fahrzeuginsassen als besonders angenehm empfunden wird. Der Algorithmus bildet einen parametrierbaren Kompromiss zwischen der maximalen Verzögerung, dem Ruck, mit dem die Verzögerung auf- und wieder abgebaut wird und möglichen Abweichungen vom Zielabstand (grüner Punkt). Im Anschluss wird der komfortable Geschwindigkeitsangleich im Sicherheitsabstand innerhalb der Komfortgrenzen der Beschleunigung (orange) an das Vorderfahrzeug demonstriert. Im letzten Zeitschritt schert das Vorderfahrzeug aus, woraufhin der Algorithmus das Fahrzeug mit zulässiger Komfortbeschleunigung (rot) von  $1.2\text{m/s}^2$  bis auf die Wunschgeschwindigkeit (grüne Linie) beschleunigt. Die dargestellten Abweichungen im Beschleunigungsverlauf (graue Linie) sind dem Schalten des Automatikgetriebes geschuldet.

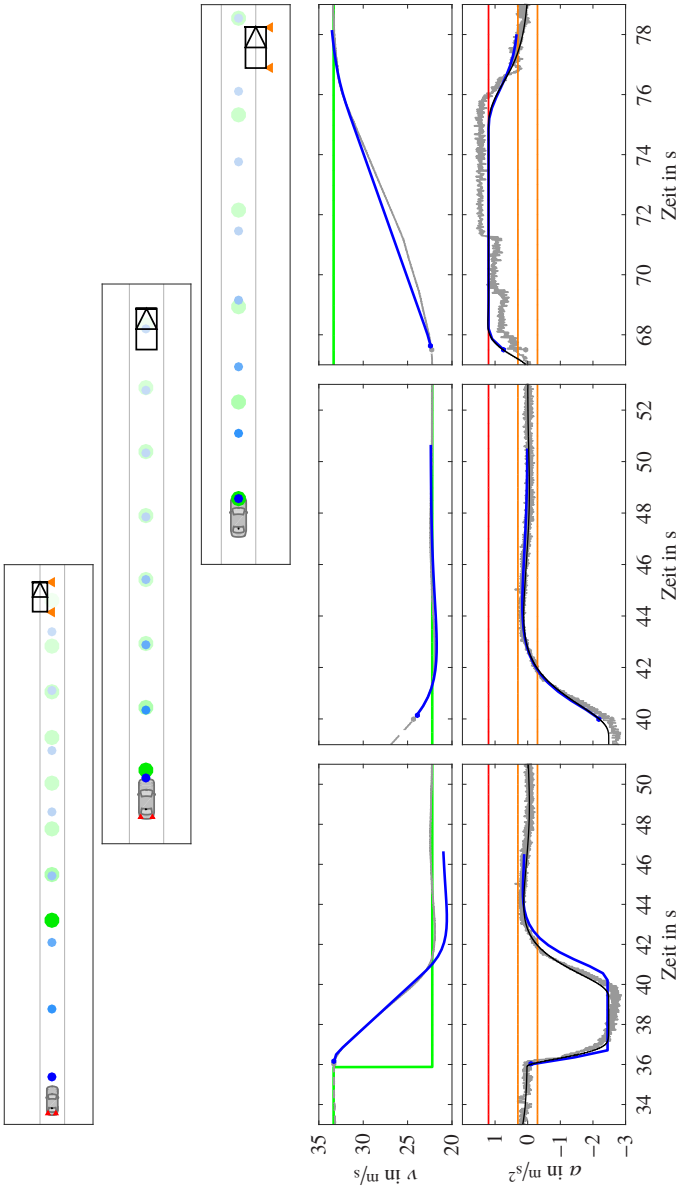


Abbildung 6.5: Reaktion auf einen langsamen Ein- und Ausschere zu drei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten, optimale Trajektorie (blau), Komfort- und Sicherheitsgrenzen der Beschleunigung (orange bzw. rot), Zielorte und -geschwindigkeit (grün), Messgrößen (grau), Stellgröße Regelung (schwarz)

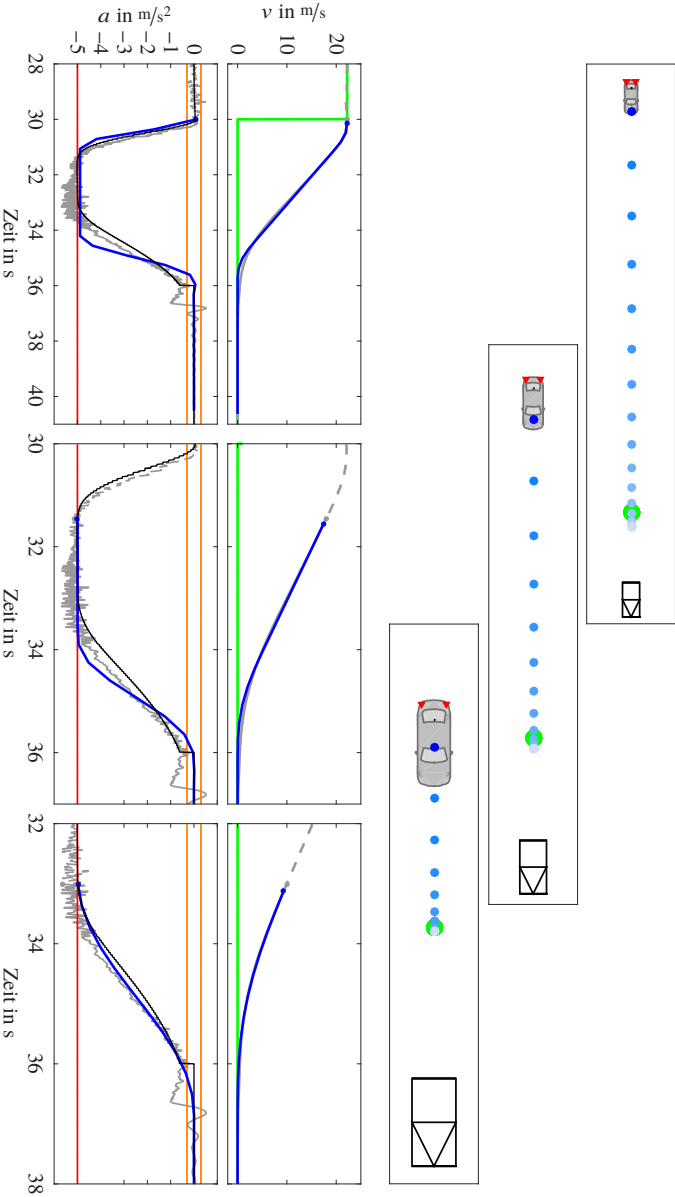


Abbildung 6.6: Notbremsung bei reduziertem Reibwert auf ein stehendes Hindernis zu drei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten, optimale Trajektorie (blau), Komfort- und Sicherheitsgrenzen der Beschleunigung (orange bzw. rot), Zielort und -geschwindigkeit (grün), Messgeräuschen (grau), Stellgröße Regelung (schwarz)



### **Notbremsmanöver bei reduziertem Verzögerungspotenzial**

Als weiterer Anwendungsfall des vorgestellten Algorithmus zur Fahrzeuglängsführung wird in Abb. 6.6 eine Notbremsung an der fahrphysikalischen Grenze aus  $80\text{km/h}$  bei nasser Fahrbahn auf ein stehendes Hindernis demonstriert. Bereits zum ersten dargestellten Zeitpunkt plant der Algorithmus ein Bremsmanöver nahe der Beschleunigungsgrenze (rot). Durch den Einsatz der Schlupfvariablen für die Beschleunigungsbeschränkungen bildet der Algorithmus auch bei diesem Anwendungsfall einen optimalen Kompromiss zwischen parametrierbaren Abweichungen vom Zielort (grüner Punkt) und einer aus Komfortgründen möglichst geringen Beschleunigung und minimalem Ruck. Durch zyklisches Lösen des Optimierungsproblems ist der Algorithmus in der Lage, den Kompromiss an den Verlauf der leicht überhöht eingeregelter Beschleunigung (graue Linie) anzupassen, sodass, anders als initial geplant, die Verzögerung bereits früher komfortabel abgebaut werden kann. Der Zielort wird, wie im dritten Zeitpunkt verdeutlicht, mit geringer Abweichung erreicht. Die Berücksichtigung der Beschleunigungsbeschränkungen zusammen mit der Optimierung im kontinuierlichen Zustandsraum auf langem Optimierungshorizont erlauben es, auch in sicherheitskritischen Situationen bereits frühzeitig und angepasst durch schnelles und starkes Bremsen auf Hindernisse zu reagieren.

## **6.3 Automatisierte Fahrzeugquerführung in urbanen Fahrsituationen**

Analog zu den beschriebenen Fahrversuchen, präsentiert dieser Abschnitt das Verhalten des in Kapitel 5 vorgestellten Algorithmus zur Trajektorienoptimierung der Fahrzeugquerbewegung in drei repräsentativen urbanen Fahrsituationen. Auf Grundlage der Eigenlokalisierung des Versuchsfahrzeugs wird der Verlauf der Fahrzeugposition (schwarz) zusammen mit der Referenzkurve (grau mit schwarzen Punkten) und den linken und rechten Fahrraumbeschränkungen (rot und grün) für drei aufeinanderfolgende Zeitpunkte dargestellt. Die optimierte Trajektorie der Querbewegung ist für jeden der Zeitpunkte in blau abgebildet. Die zusätzlich dargestellten Verläufe der für die jeweilige Fahrsitua-

tion aussagekräftigen Fahrzustände heben das durch den Algorithmus erzeugte angepasste Fahrverhalten hervor.

### 6.3.1 Dynamisches Kreisverkehrmanöver

Zur Verdeutlichung des universellen Einsatzes des Algorithmus zur Planung komfortabler und angemessener Fahrzeugbewegungen, auch für dynamische Manöver nahe der fahrphysikalischen Grenze, wird in diesem Abschnitt das Verhalten der Trajektorienoptimierung bei einer zügigen Fahrt durch einen Kreisverkehr beschrieben. Wie in Abb. 6.7 dargestellt, nimmt das Fahrzeug zur Minimierung der Querschleunigung und des Querrucks Abweichungen von der Referenzkurve in Kauf, um eine möglichst komfortable Fahrzeugbewegung zu erzielen. Das Fahrzeug weicht bereits vor der Einfahrt in den Kreisverkehr von der Fahrstreifenmitte nach links ab, sodass sich in Verbindung mit dem sich anschließenden „Schneiden“ der Kurve der Kurvenradius vergrößert. Der Fahrkomfort maximiert sich so auch bei hohen absoluten Querschleunigungen, das in Abb. 6.8 dargestellte, gleichmäßige Lenkverhalten unterstreicht dies. Die drei vertikalen schwarzen Linien markieren die Zeitpunkte der abgebildeten Momentaufnahmen der Fahrzeugposition. Es zeigt sich an der in blau dargestellten optimierten Trajektorie, dass sich das beschriebene Verhalten auch für die weitere Fahrt durch den Kreisverkehr fortsetzt. Die Abweichung zwischen der optimierten Fahrzeugbewegung (blau) und dem tatsächlich abgefahrenen Pfad (schwarz) resultiert aus der Optimierung auf einem endlichen und fortschreitenden Horizont und sichert durch die permanente Planung zurück zur Referenzkurve die rekursive Lösbarkeit des Optimalsteuerungsproblems (vgl. Abschn. 5.4.2).

### 6.3.2 Vollautomatisierter Parkassistent

Im Unterschied zu der zuvor aufgeführten Fahrsituation ist der hier beschriebene Fahrversuch durch die für das vollautomatisierte Parken (s. Abb. 6.1) relevante Kollisionsvermeidung mit statischen Hindernissen bei sehr stark gekrümmten Referenzkurven und niedrigen Fahrgeschwindigkeiten von 3km/h gekennzeichnet. Äquivalent zu Abb. 6.7 demonstriert Abb. 6.9 für drei aufeinanderfolgende Zeitpunkte das Verhalten des vorgestellten Algorithmus beim

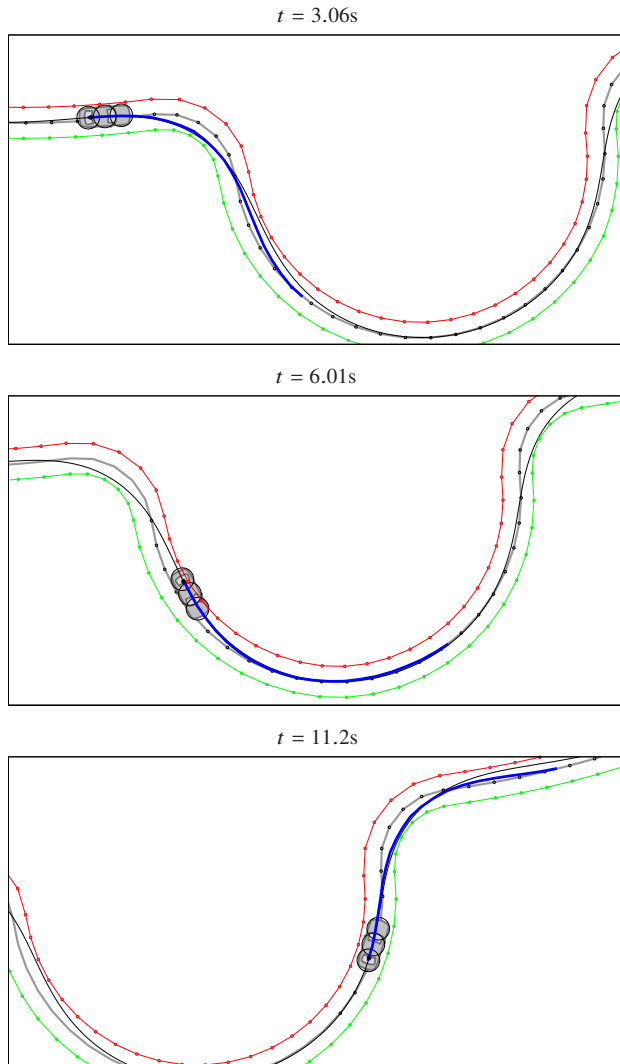


Abbildung 6.7: Dynamische Fahrt durch einen Kreisverkehr für drei aufeinanderfolgende Zeitpunkte

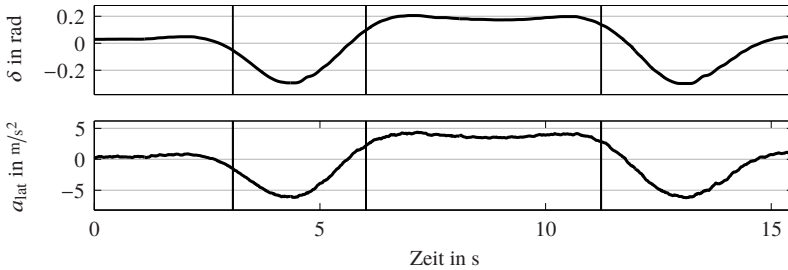


Abbildung 6.8: Signalverläufe des Lenkwinkels  $\delta$  und der Querbeschleunigung  $a_{lat}$  des geschlossenen Regelkreises für das dynamische Kreisverkehrmanöver

Ausparken aus einer Parklücke. Um der vorgegebenen Referenzkurve (grau mit schwarzen Punkten) sicher und komfortabel folgen zu können, weicht das Fahrzeug aufgrund des statischen Hindernisses (schwarze Punkte mit roter Fahrraumbeschränkung) von derselben ab. Bereits zum ersten Zeitpunkt plant der Algorithmus die Umfahrung des Hindernisses (blaue Trajektorie), um eine Kollision mit der Fahrzeugfront zu verhindern. Der Algorithmus nutzt, wie die in Abb. 6.9 dargestellten Verläufe der lateralen Position  $d_l$  und der Krümmung  $\kappa$  zeigen, den maximalen Bewegungsspielraum zu beiden Seiten der Referenzkurve (rote und grüne Fahrraumbeschränkungen). Dem unstetigen Krümmungsverlauf der Referenzkurve kann kollisionsfrei und souverän gefolgt werden.

### 6.3.3 Ausweichen auf ein dynamisches Objekt

Dieser Fahrversuch demonstriert das durch den Algorithmus erzeugte Fahrverhalten beim Ausweichen auf ein dynamisches Objekt in der Kurve bei einer Geschwindigkeit von 70km/h. Wiederum durch drei Momentaufnahmen in Abb. 6.10 dargestellt, plant der Algorithmus, basierend auf der prädizierten Bewegung des dynamischen Objekts, konsistent ein kollisionsvermeidendes Manöver. Die zukünftigen Objektpositionen resultieren aus einer kinematischen Prädiktion entlang der Referenzkurve (grau mit schwarzen Punkten) und sind durch graue Rechtecke abgebildet. Die aktuelle Objektposition ist durch eine zusätzliche rote Box hervorgehoben, welche gleichzeitig einen integrierten Sicherheitsabstand beinhaltet.

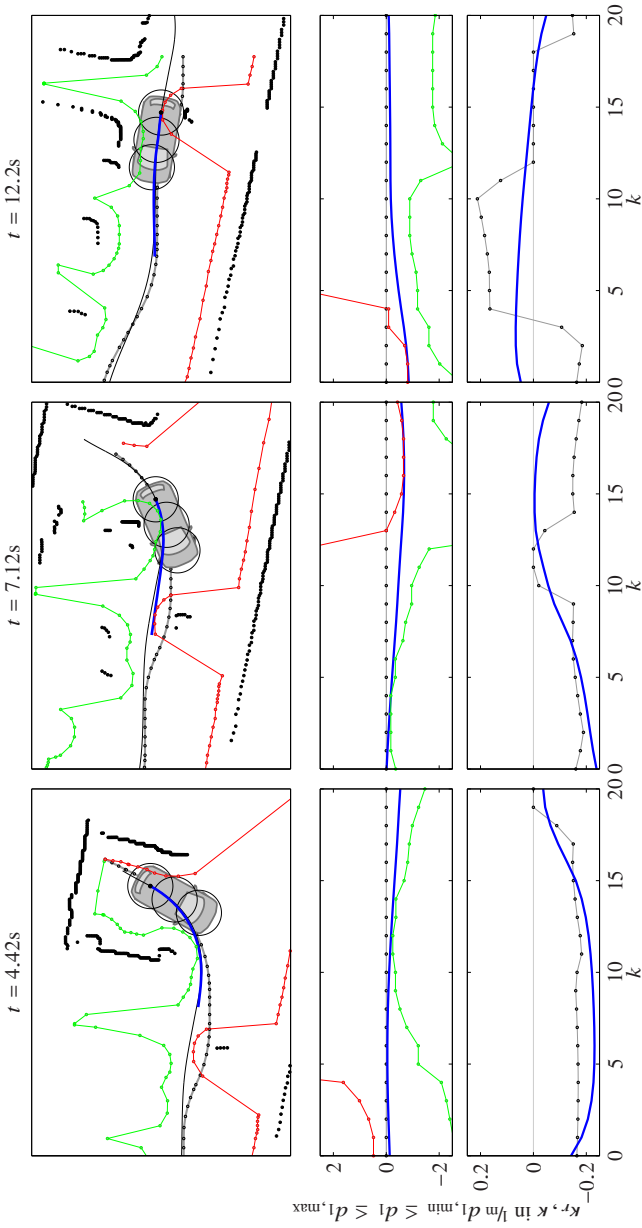


Abbildung 6.9: Ausparkmanöver unter Berücksichtigung statischer Hindernisse für drei aufeinanderfolgende Zeitpunkte mit den entsprechenden Verläufen der lateralen Position  $d_1$  und der Krümmung  $k$ , optimierte Trajektorie (blau), Referenzgrößen (grau mit schwarzen Punkten), rechte und linke laterale Fahrtraumbeschränkung bezogen auf den Hinterachsmitelpunkt (grün bzw. rot)

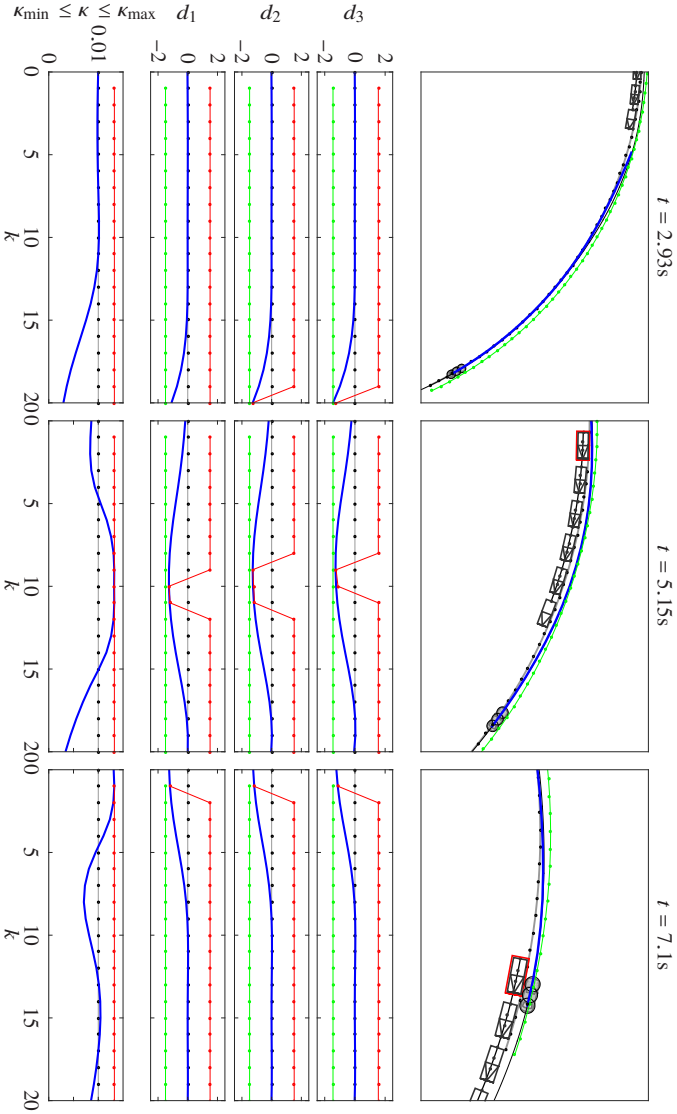


Abbildung 6.10: Ausweichmanöver zur Kollisionsvermeidung mit einem dynamischen Objekt für drei aufeinanderfolgende Zeitpunkte mit den korrespondierenden Verläufen der lateralen Abstände  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  und der Krümmung  $\kappa$ , optimierte Trajektorie (blau), Referenzgrößen (grau mit schwarzen Punkten), rechte und linke Fahrtraumbeschränkung (grün bzw. rot), Krümmungsbeschränkung (rot)

Die Momentaufnahme  $t = 2,93\text{s}$  zeigt, dass bereits zu einem frühen Zeitpunkt ein Ausweichmanöver geplant wird, auch die Verläufe der lateralen Positionen  $d_2$  und  $d_3$  mit den zeitinvarianten Fahrtraumbeschränkungen verdeutlichen dies. Die weiteren Momentaufnahmen zeigen, dass diese Beschränkungen mit der Annäherung des entgegenkommenden Objekts in immer geringer werdender Zeit bei der Optimierung mit zu berücksichtigen sind. Wie am Verlauf der Krümmung in Abb. 6.10 sichtbar ist, sind zum zweiten und dritten abgebildeten Zeitpunkt nicht nur die Fahrtraumbeschränkungen aktiv, sondern auch die fahrphysikalischen Begrenzungen. Demnach erlaubt der vorgestellte Algorithmus nicht nur die erfolgreiche Vermeidung der bevorstehenden Kollision sondern stellt gleichzeitig auch ein stabiles Fahrverhalten während des gesamten Manövers sicher.

## 6.4 Kombinierte Fahrzeuglängs- und -querführung

Auf Grundlage der in Kapitel 2 motivierten, für die beiden Bewegungsrichtungen isolierten Trajektorienoptimierung, demonstriert der vorliegende Abschnitt das Verhalten der aus den Kapiteln 4 und 5 zusammengeführten neuen Algorithmen zur Fahrzeuglängs- und -querführung für einen innenstadttypischen, beschleunigten Fahrstreifenwechsel in eine enge Lücke. Wie in Abb. 6.11 für vier Momentaufnahmen abgebildet, fährt das Fahrzeug zunächst auf der rechten Spur mit  $70\text{km/h}$  auf ein deutlich langsamer fahrendes Fahrzeug (orange) mit  $30\text{km/h}$  auf. Um nicht mit deutlich reduzierter Geschwindigkeit weiterfahren zu müssen, plant der Algorithmus noch während das Fahrzeug bereits bremsend auf das Langsamere auffährt einen Fahrstreifenwechsel in eine enge Lücke zwischen zwei mit konstant  $60\text{km/h}$  fahrenden Fahrzeugen (grün und blau) auf dem linken Nachbarfahrstreifen. Es wird angenommen, dass alle anderen Fahrzeuge ihre Geschwindigkeit nicht an das Verhalten des eigenen Fahrzeugs anpassen.

Entsprechend des Vorschlags aus Kapitel 2, das globale Trajektorienplanungsproblem mittels Dekomposition durch den Vergleich mehrerer Trajektorienoptionen zu lösen, plant der Algorithmus permanent, sowohl für den Fahrstreifenwechsel in die enge Lücke als auch für die Fahrt auf dem rechten Fahrstreifen, unabhängig voneinander eine optimale Trajektorie für die Längs- und Querbewegung. Über den parametrierbaren, nachgelagerten Vergleich der

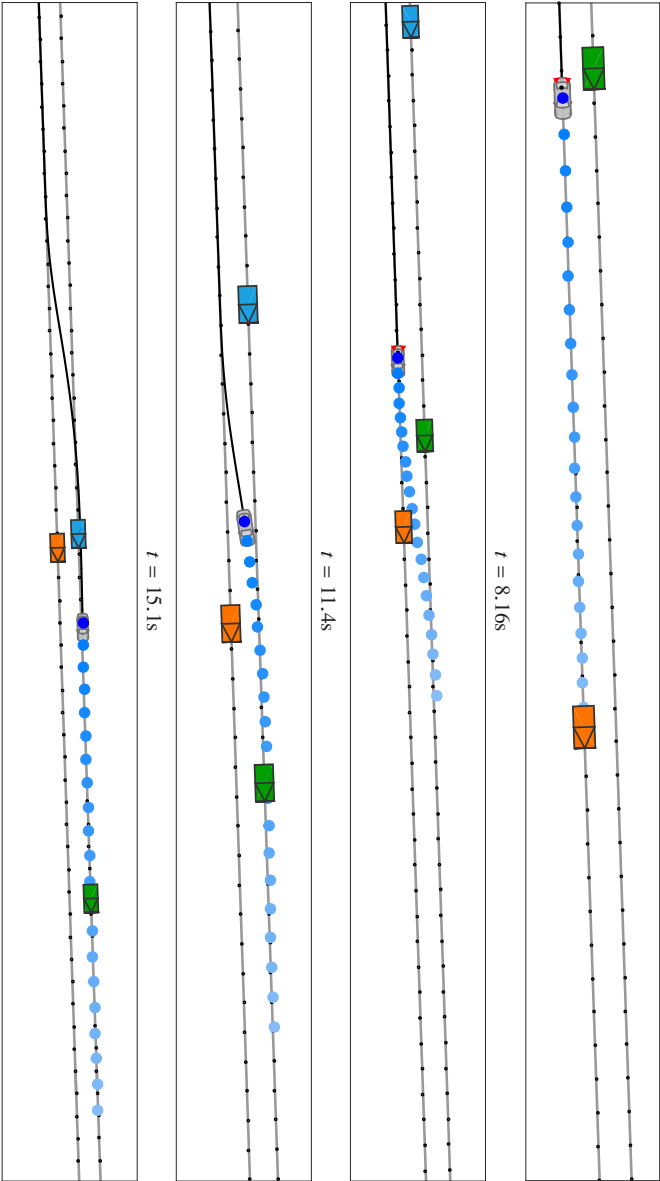


Abbildung 6.11: Beschleunigter Fahrstreifenwechsel in eine enge Lücke zwischen zwei Fahrzeuge (grün und blau) auf dem benachbarten Fahrstreifen motiviert durch ein langsames Vorderfahrzeug (orange) zu vier aufeinanderfolgenden Zeitpunkten und unterschiedlichen Zoomstufen, optimale Trajektorie (blau gepunktet), Historie der Fahrzeugpositionen (schwarz), Referenzkurven (grau mit schwarzen Punkten)



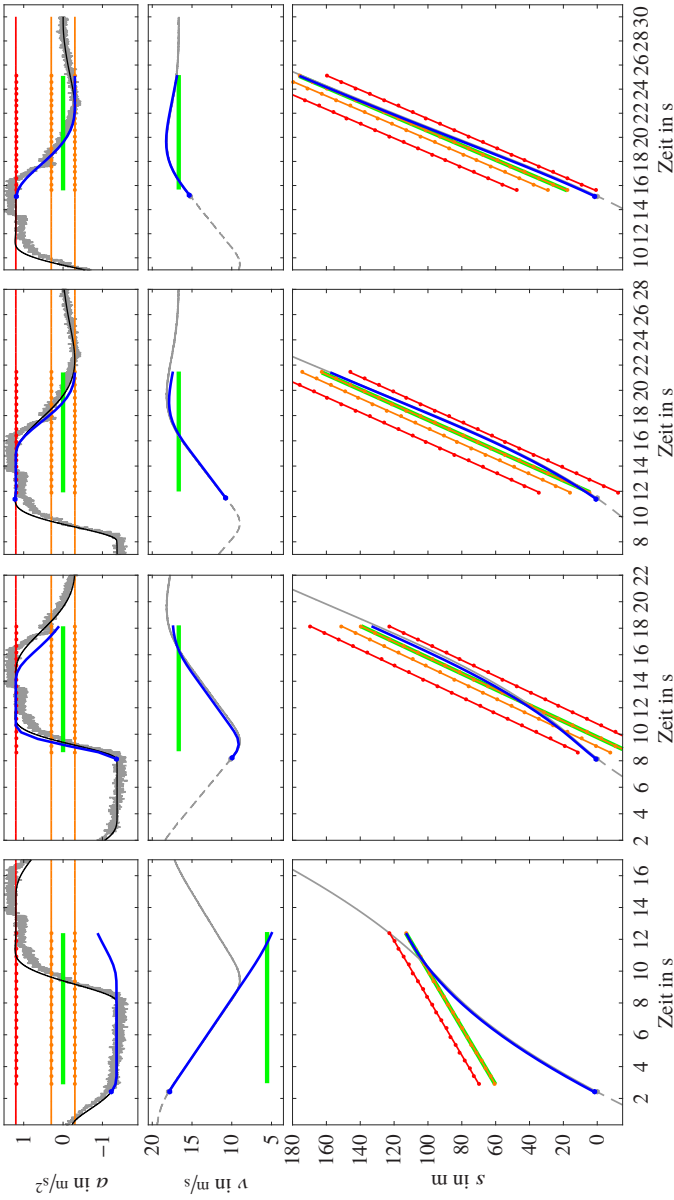


Abbildung 6.12: Zustandsverläufe der Längsbewegung während eines beschleunigten Fahrstreifenwechsels in eine enge Lücke mit Komfort- und Sicherheitsbeschränkungen der Längsposition  $s$  und -beschleunigung  $a$  (orange und rot gepunktet) über dem Optimierungshorizont zu vier aufeinanderfolgenden Zeitpunkten, optimale Trajektorie (blau), Zielzustände (grün), Messgrößen (grau), Stellgröße Regelung (schwarz)

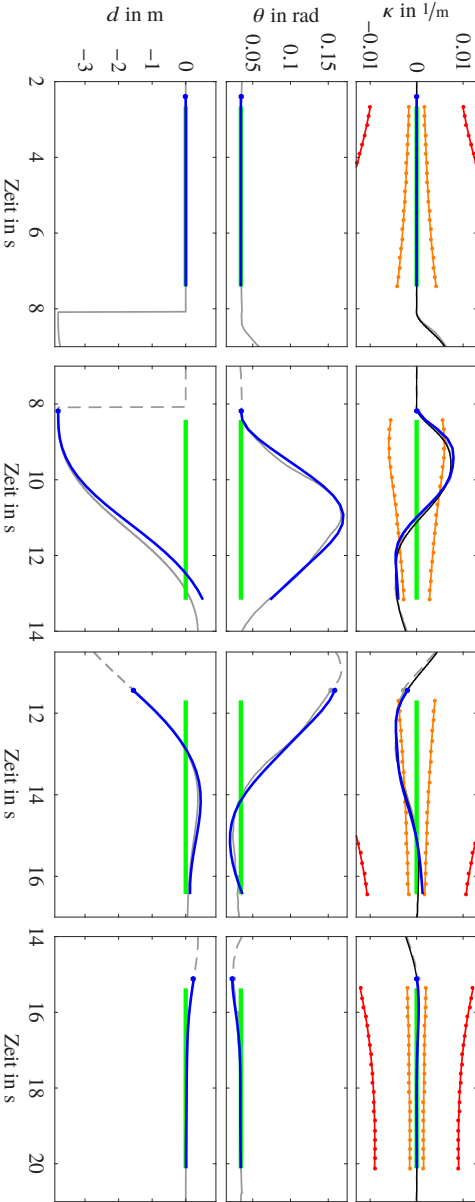


Abbildung 6.13: Zustandsverläufe der Querbewegung während eines beschleunigten Fahrstreifenwechsels in eine enge Lücke mit Komfort- und Sichtweitenbeschränkungen der Querposition  $d$  und Krümmung  $\kappa$  (orange und rot gepunktet) über dem Optimierungshorizont zu vier aufeinanderfolgenden Zeitpunkten, optimale Trajektorie (blau), Zielzustände (grün), Messgrößen (grau), Stellgröße Regelung (schwarz)

kombinierten Kosten aus Längs- und Querbewegung der beiden Trajektorienoptionen kann der optimale Zeitpunkt für den Wechsel des Fahrstreifens bestimmt werden (vgl. zweiter Zeitpunkt der Abb. 6.11).

Der erste in Abb. 6.11 dargestellte Zeitpunkt vor dem Fahrstreifenwechsel entspricht demzufolge der Lösung des in Abschn. 6.2.2 beschriebenen Folgefahrungsverhaltens bei aktiver Fahrzeugquerführung auf dem eigenen Fahrstreifen. Wie in Abb. 6.12 für die Zustandsverläufe der Längsbewegung beschrieben, nähert sich das Fahrzeug mit der zuvor diskutierten, aus Komfortgründen vorteilhaften Phase konstanter Verzögerung an das Vorderfahrzeug an. Darauf folgend plant der Algorithmus unter Berücksichtigung der maximalen Beschleunigungsgrenze (rot gepunktet) und der durch die anderen Fahrzeuge definierten Positionsbeschränkungen (orange und rot gepunktet) in Längsrichtung die Anpassung der Geschwindigkeit  $v$  an die der Lücke (grün). Analog dazu veranschaulicht Abb. 6.13 die für den Fahrstreifenwechsel resultierende Querbewegung, welche durch einen großen lateralen Versatz  $d$  bei aktiver Komfortbeschränkung der Krümmung (orange gepunktet) und den in Abb. 6.14 abgebildeten lateralen Fahrtraumbeschränkungen (orange und rot gepunktet) charakterisiert ist.

Aufgrund der Fahrtraumbeschränkungen des vorausfahrenden Fahrzeugs ist der Algorithmus gezwungen, den Kompromiss zwischen einer möglichst ruckoptimalen und beschleunigungsarmen Querbewegung sowie dem Abbau des lateralen Versatzes anzupassen. Zu Gunsten der Kollisionsvermeidung muss verstärkt Querbeschleunigung aufgebaut werden. Diese wird durch ein Überspringen in der Querablage  $d$  im weiteren Verlauf des Manövers (dritter Momentaufnahme) komfortabel abgebaut. Gleichzeitig lassen sich durch die Komfortbeschränkungen der Krümmung  $\kappa$  (orange gepunktet), entsprechend zur Längsbewegung, Phasen konstanter Querbeschleunigung erzeugen, welche sich jedoch wegen der verändernden Fahrgeschwindigkeit  $v$  nicht als konstante Geraden im Verlauf der Krümmung darstellen.

Zur schnellen Anpassung des Abstands zwischen dem von hinten herannahenden und dem in der Lücke vorausfahrenden Fahrzeug plant der Algorithmus innerhalb der in Abb. 6.12 dargestellten Beschränkungen der Längsposition  $s$  (orange und rot gepunktet) eine Überhöhung der Zielgeschwindigkeit, welche innerhalb der Komfortbeschleunigung zum Ende des Manövers erreicht wird (vierte Momentaufnahme).

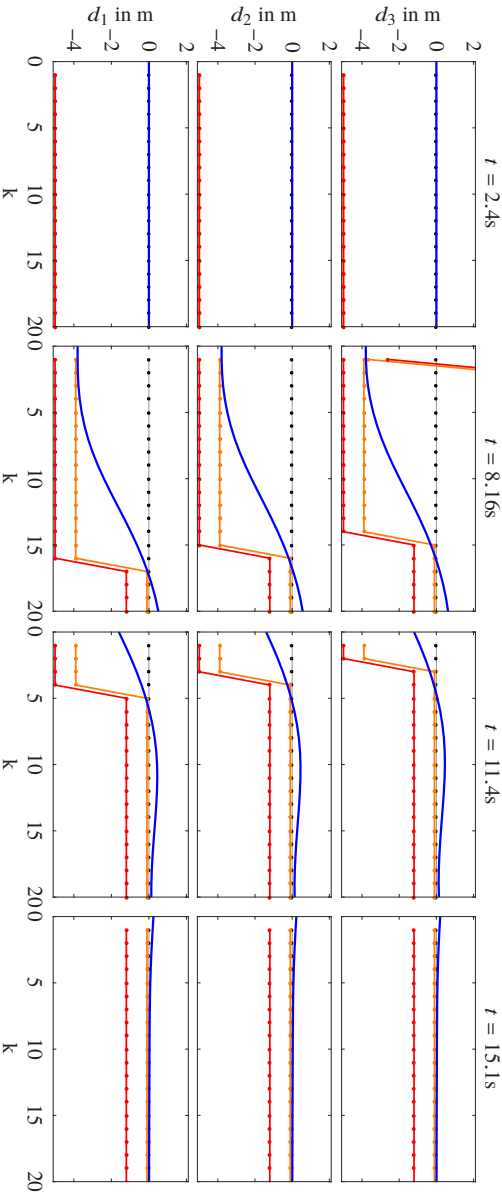


Abbildung 6.14: Laterale Abstände  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$  während eines beschleunigten Fahrstreifenwechsels in eine enge Lücke mit dazugehörigen Komfort- und Fahrraumbeschränkungen (orange und rot gepunktet) zu vier aufeinanderfolgenden Zeitpunkten über dem diskreten Optimierungshorizont  $N$ , optimale Trajektorie (blau), Referenzgrößen (grau mit schwarzen Punkten)

## 6.5 Diskussion der Versuchsergebnisse

Die Fahrversuche demonstrieren in repräsentativen Verkehrssituationen den flexiblen und vorteilhaften Einsatz der linear-quadratischen Optimierungsmethoden zur effizienten Trajektorienoptimierung von automatisierten Fahreingriffen. Nicht nur die unterschiedlichen Geschwindigkeits- und Dynamikbereiche, sondern auch die verschiedenen Umsetzungen in strukturierter und unstrukturierter Umgebung vom assistierten bis zum vollautomatisierten Fahren bestätigen die universelle Anwendung der vorgeschlagenen Optimierungsmethodik. Sowohl bei Komfort- als auch bei Sicherheitsfunktionen erlauben die entwickelten Algorithmen eine an das menschliche Fahrverhalten angepasste komfortable und sichere Planung der zukünftigen Fahrzeugbewegung und berücksichtigen statische Hindernisse, dynamische Objekte sowie fahrphysikalische Begrenzungen. Die erfolgreiche Umsetzung der Algorithmen für öffentliche Demonstrationen vor internationalen Journalisten unterstreicht ebenfalls deren Leistungsfähigkeit [18].

Die Anwendung der entwickelten Algorithmen zur isolierten Trajektorienoptimierung für beide Bewegungsrichtungen am Beispiel eines beschleunigten Fahrstreifenwechsels in eine enge Lücke verdeutlicht darüber hinaus, dass auch für herausfordernde, zeitlich und räumlich kritische Manöver mittels Dekomposition und Kontraktion das globale Trajektorienplanungsproblem gelöst werden kann. Durch die anwendungsspezifische Formulierung mit Schlupfvariablen kann der Einfluss der Nebenbedingungen auf das Fahrverhalten flexibel angepasst werden. Auch bei für die Bewegungsrichtung entkoppelter Fahrdynamik lässt sich so ein Kompromiss zwischen einem natürlichen Fahrverhalten mit gleichmäßigem Verlauf der Beschleunigung und Krümmung erzielen und zahlreiche fahrphysikalische und kollisionsrelevante Beschränkungen können berücksichtigt werden. Das erreichbare Fahrverhalten durch den Algorithmus rechtfertigt folglich die in Kapitel 2 beschriebenen Annahmen und Vereinfachungen in Bezug auf eine für die Bewegungsrichtung isolierte, konvexe Problemformulierung.

Im Unterschied zu bereits bekannten Ansätzen zur Trajektorienoptimierung konnte bei vergleichbarem Fahrverhalten eine Reduktion des Rechenaufwands um den Faktor 10-100 erzielt werden. Obwohl ein direkter Vergleich des Rechenaufwands aufgrund der unterschiedlich verwendeten Hardware nur qualitativ möglich ist, zeigt die Gegenüberstellung der Rechenzeiten von 200ms

in [107] zu den in dieser Arbeit für eine Bewegungsoption erzielten 0,3ms, auch bei der Berechnung einer Vielzahl von Bewegungsoptionen, eine deutliche Effizienzsteigerung bei vergleichbarem Prozessor. Weitere Gegenüberstellungen zu den in [119] oder [9] angegebenen Rechenzeiten von 100 – 200ms belegen die erhebliche Effizienzsteigerung.

Die linear-quadratische Optimierung wird durch die effiziente Lösungsfindung in Millisekunden, einem Optimierungshorizont von 5 – 10(s) und der Berücksichtigung zahlreicher Nebenbedingungen den in Kapitel 2 definierten Anforderungen an die Trajektorienplanung in hohem Maße gerecht.

## 6.6 Zusammenfassung

Anhand praxisnaher Fahrversuche wird die Funktionsweise der zuvor abgeleiteten Algorithmen zur Bewegungsplanung von Fahrzeugen demonstriert.

Im Anschluss an die Beschreibung der prototypischen Umsetzung der entwickelten Algorithmen im Versuchsfahrzeug und der Zusammenstellung verschiedener aussagekräftiger Fahrversuche in Testszenarien erfolgt eine detaillierte Darstellung der Versuchsergebnisse. Entsprechend der in Kapitel 2 abgeleiteten, für die beiden Bewegungsrichtungen isolierten Planung der Fahrtrajektorien, konzentriert sich der direkt angeschlossene Abschnitt auf die Trajektorienoptimierung der Fahrzeuglängsbewegung. Basierend auf den in Kapitel 4 hergeleiteten Problemformulierungen mit und ohne Beschränkungen werden sowohl Fahrsituationen adressiert, für welche die Berücksichtigung fahrphysikalischer Begrenzungen essentiell ist und andere, bei denen zugunsten einer effizienten Lösungsfindung auf selbige verzichtet werden kann. In diesem Zusammenhang werden, für die im Rahmen dieser Arbeit entwickelte neuartige Fahrerassistenzfunktion zur verlässlichen Kollisionsvermeidung beim Parken und Rangieren, Ergebnisse aus dem Realversuch präsentiert.

In Abschn. 6.3 wird das durch die Trajektorienoptimierung der Fahrzeugquerbewegung erzeugte Fahrverhalten in drei unterschiedlichen Testszenarien beschrieben. Diese Testszenarien sind durch verschiedene Geschwindigkeits- und Dynamikbereiche sowie die Berücksichtigung statischer Hindernisse und dynamischer Objekte charakterisiert.

Am Beispiel eines beschleunigten Fahrstreifenwechsels in eine enge Lücke wird das überzeugende Verhalten der für beide Bewegungsrichtungen kombinierten Trajektorienoptimierung verdeutlicht.

Nach abschließender Diskussion der Versuchsergebnisse unterstreicht der Vergleich des Rechenaufwandes zur Trajektorienoptimierung mit bereits aus der Literatur bekannten Ansätzen das bedeutende Potenzial der hier thematisierten linear-quadratischen Optimierungsmethodik.





## 7 Zusammenfassung

Das Ziel der Arbeit ist, den für die Trajektorienplanung in komplexen, dynamischen und zeitkritischen Fahrsituationen notwendigen Rechenaufwand gegenüber bestehenden Ansätzen signifikant zu reduzieren. Bereits in wenigen Jahren soll dadurch die Umsetzung neuartiger Assistenzfunktionen bis hin zum automatisierten Fahren trotz der geringen, in Serien-Fahrzeugen zu Verfügung stehenden Rechenleistung in Millisekunden ermöglicht werden. Die konsequente Ableitung einer recheneffizienten Trajektorienoptimierungsmethodik mit ausgewählten anwendungsspezifischen Problemformulierungen bildet die Grundlage der in dieser Arbeit entwickelten Algorithmen.

In Kapitel 2 werden die Aufgaben der Trajektorienplanung im Kontext der Fahraufgabe beleuchtet und Anforderungen an selbige definiert, welche die Bewertungsgrundlage der abzuleitenden Methodik zur effizienten Trajektorienberechnung bilden. Basierend auf diesen Anforderungen wird das Potenzial unterschiedlicher aus der Optimierungstheorie bekannter Methoden analysiert und deren Zweckmäßigkeit unter vereinfachenden Annahmen auf Vor- und Nachteile diskutiert. Aufgrund der effizienten Lösungsfindung unter Berücksichtigung einer Vielzahl von Nebenbedingungen bietet die linear-quadratische Optimierungsmethodik große Vorteile. Zur erfolgreichen Anwendung dieser Optimierungsmethodik werden Annahmen herausgearbeitet, welche eine linear-quadratische Problemformulierung zulassen. Durch die **Dekomposition** des nichtlinearen und nichtkonvexen Grundproblems in konvexe Teilprobleme mit anschließender **Kontraktion** des konvexen Problems in für die Längs- und Querbewegung separat zu lösende lineare Subprobleme lassen sich die definierten Anforderungen zielführend erfüllen.

Für die abgeleitete recheneffiziente Trajektorienplanungsmethodik gibt Kapitel 3 einen systematisierten Überblick über die für die Planung automatisierter Fahreingriffe relevanten linear-quadratischen Optimierungsmethoden. Der Bezug zur Anwendung wird konsequent diskutiert und anwendungsspezifische Erweiterungen der verallgemeinerten Problemformulierung werden hergelei-

tet. Erstmals wird der erweiterte Einsatz von **Schlupfvariablen** zur gezielten Beeinflussung der Trajektorienform bei beschränkten Optimierungsproblemen zielführend ausgenutzt und die hergeleiteten Optimierungsbedingungen zur Bestimmung der **optimalen Endzeit** bei der Problemformulierung ohne Beschränkungen gewinnbringend angewendet. Darüber hinaus wird die für die Anwendung der direkten Optimierungsmethoden notwendige **zeitliche Diskretisierung** mittels des Superpositionsintegrals der zeitvarianten Dynamik **analytisch exakt** ausgeführt.

In Kapitel 4 werden aufbauend auf der linear-quadratischen Optimierungsmethodik **zwei alternative Problemformulierungen für die Planung der Fahrzeuglängsbewegung** hergeleitet:

1. mit Beschränkungen als Teil der optimalen Lösung,
2. ohne Beschränkungen als Teil der optimalen Lösung.

Die in ausgewählten Situationen vernachlässigbaren Beschränkungen bieten die Möglichkeit, zugunsten einer noch effizienteren Lösungsfindung auf die Berücksichtigung von Nebenbedingungen zu verzichten. Die Relevanz dieser Problemformulierung für zukünftige Assistenzsysteme wird durch die im Rahmen dieser Arbeit entwickelte, **neuartige Fahrfunktion zur verlässlichen Kollisionsvermeidung beim Parken und Rangieren** unterstrichen.

Außerdem wird erstmals durch den anwendungsspezifischen Einsatz von Schlupfvariablen eine linear-quadratische Problemformulierung hergeleitet, die eine flexible Anpassung der Längsbewegungstrajektorien an die des menschlichen Fahrers mit **Phasen konstanter Beschleunigung** auch in komplexen Fahrsituationen, wie der Fahrstreifenwechsel in enge Lücken, ermöglicht.

Analog dazu wird in Kapitel 5 erstmalig eine äußerst effizient zu berechnende Formulierung eines **linear-quadratischen Optimalsteuerungsproblems mit Beschränkungen zur Fahrzeugquerführung** hergeleitet. Im Unterschied zu bestehenden Ansätzen ermöglicht der Algorithmus bei reduzierten Stetigkeitsanforderungen an die Referenzkurve das komfortable Folgen von stark gekrümmten Pfaden mit gleichmäßigen Lenkbewegungen auch für Manöver nahe der fahrphysikalischen Grenze. Durch den anwendungsspezifischen Einsatz von Schlupfvariablen verbunden mit einem ausgewählten Gütefunktional lässt sich ein optimaler Kompromiss zwischen geringen Abweichungen zur Referenzkurve bei gleichzeitiger Kollisionsvermeidung in dynamischem Um-

feld parametrieren, was den Algorithmus für verschiedene Fahrfunktionen mit aktiver Querführung einsetzbar macht.

In Kapitel 6 wird die praktische Leistungsfähigkeit der abgeleiteten Trajektorienplanungsmethodik im Realversuch auf die Probe gestellt. Im Anschluss an die Beschreibung der hardware- und softwaretechnischen Umsetzung im Versuchsfahrzeug erfolgt die Validierung der entwickelten Algorithmen in verschiedenen, aussagekräftigen Fahrsituationen. Vor allem in Bezug auf den Automatisierungsgrad, die Struktur der Umgebungen sowie den Dynamik- und Geschwindigkeitsbereich ergänzen sich die ausgewählten Fahrsituationen komplementär. Der damit gegebene repräsentative Überblick unterstreicht die Flexibilität und die Vorteile der vorgeschlagenen linear-quadratischen Optimierungsmethodik für den universellen Einsatz zur Planung automatisierter Fahreingriffe. Darüber hinaus bestätigt das abschließend diskutierte Fahrverhalten der Algorithmen, die in Kapitel 2 getroffenen Annahmen und Vereinfachungen der Lösung des globalen Trajektorienplanungsproblems durch die Berechnung mehrerer lokal optimaler Trajektorienoptionen und deren nachgelagerten Vergleich.

Mit den im Rahmen der vorliegenden Arbeit verwendeten linear-quadratischen Optimierungsmethoden zur Trajektorienplanung konnte eine deutliche Beschleunigung der Rechenzeit bei gleichzeitig signifikanter Reduktion der zur Verfügung stehenden Rechenleistung um den Faktor 10-100 gegenüber dem Stand der Technik realisiert werden. Große Teile der in dieser Arbeit entstandenen Software haben sich in Versuchsfahrzeugen der BMW Group Forschung und Technik bewährt.

Zusammenfassend sind die wesentlichen **theoretischen Ergebnisse** dieser Arbeit:

1. Systematisierung der verwendeten linear-quadratischen Optimierungsmethoden im Kontext automatisierter Fahreingriffe als Grundlage für die Entwicklung zukünftiger Fahrerassistenzfunktionen.
2. Neuartige Erweiterung der in Lehrbüchern dargestellten linear-quadratischen Optimierungsmethoden durch Herleitungen verallgemeinerter Problemformulierungen, z. B. für die Optimierung der Endzeit.
3. Sicherstellung der Lösbarkeit des Optimierungsproblems durch den erstmals an die Problemstellung angepassten Einsatz von Schlupfvariablen.

4. Ableitung und Umsetzung einer neuartigen linear-quadratischen Problemformulierung zur effektiven Kollisionsvermeidung beim Parken und Rangieren für den gesamten, exakten Fahrzeugumriss mittels ruck- und zeitoptimaler Verzögerungsprofile.
5. Neue Formulierung eines linear-quadratischen Optimierungsproblems zur Fahrzeuglängsführung mit zielgerichtetem Einsatz von Schlupfvariablen zur flexiblen Anpassung des Längsbewegungsverhaltens an das eines menschlichen Fahrers mit Phasen konstanter Beschleunigung.
6. Erstmalige Formulierung eines linear-quadratischen, zeitvarianten Optimierungsproblems mit Beschränkungen zur Fahrzeugquerführung, welche auch bei variabler Geschwindigkeit das Folgen von stark gekrümmten Referenzkurven mit unstetigem Krümmungsverlauf bei hohen Querschleunigungen von über  $6\text{m/s}^2$  ermöglicht.

Zu den wesentlichen **praktischen Ergebnissen** dieser Arbeit zählen:

1. Implementierung der Ansätze auf mit Seriensteuergeräten vergleichbarer Hardware (dSpace Autobox DS1005).
2. Implementierung einer entwicklungsbegleitenden Simulationsumgebung, die eine Durchgängigkeit bis in den Realversuch ermöglicht.
3. Integration und Evaluation im Gesamtfahrzeug einschließlich Sensorik und Fahrzeugregelung.
4. Ausprägungen der Gesamtsysteme für Sicherheits- und Komfortfunktion mit einem Reifegrad der Journalisten Testfahrten hinter dem Steuer erlaubte.

Die vielversprechenden Ergebnisse der angewandten Methodik motivieren deren zukünftigen Einsatz bei der Umsetzung moderner Fahrerassistenzsysteme mit automatisierten Fahreingriffen. Für eine Integration der Methodik in eine übergeordnete Fahrstrategie sind **zwei Hauptrichtungen** einzuschlagen:

1. Während bei einer Vielzahl von Fahrsituationen (vgl. Kapitel 2) durch einfach zu berechnende Abstandsmaße, Heuristiken zur Bestimmung konvex zu optimierender Trajektorienoptionen ableitbar sind, steigt mit zunehmender Anzahl zu berücksichtigender Verkehrsteilnehmer und Hindernisse die Vielfalt an möglichen Bewegungsoptionen zur Lösung

des globalen Trajektorienplanungsproblems stark an. Vor diesem Hintergrund vermag eine globale Optimierung auf Basis der dynamischen Programmierung, für ein besonders einfaches Bewegungsmodell des Fahrzeugs, eine generalisierbare Vorauswahl an konvex zu optimierenden Bewegungsoptionen zu generieren. Zudem besteht die Möglichkeit, die angesprochene globale Optimierung auf einem erweiterten Horizont zu berechnen, sodass zur Steigerung des Fahrkomforts auf weiter in der Zukunft liegende Ereignisse reagiert werden kann. Die aus dieser Kombination unterschiedlicher Optimierungsebenen entstehenden Vorteile in Bezug auf Rechenzeit und ein vorausschauendes Fahrverhalten eröffnen vielfältige Einsatzmöglichkeiten der umgesetzten Algorithmen.

2. Zur Erzeugung einer, dem menschlichen Fahrer nachempfundenen Fahrweise, stellt sich die manuelle Parametrierung der Gütekriterien angesichts unterschiedlicher Fahrsituationen und Geschwindigkeitsbereiche als nicht trivial dar. Durch den Einsatz moderner Algorithmen des maschinellen Lernens ist eine fortwährende Anpassung der Parametrierung an das aus Messdaten beobachtbare Fahrverhalten denkbar.

In jedem Fall wird, auch bei ständig steigender, in Serien-Fahrzeugen technisch zur Verfügung stehender Rechenleistung, die Integration der Trajektorienplanung in eine übergeordnete Fahrstrategie, angesichts des wettbewerbsgetriebenen Kostendrucks, eine große Herausforderung bleiben.



# A Anhang

## A.1 Optimale Steuertrajektorie bei Punkt- und Endbedingungen

Für die in Abschn. 3.1.4 und 3.1.5 beschriebene Möglichkeit zur Berücksichtigung von Punkt- und Endbedingungen bei unbeschränkten linear-quadratischen Optimalsteuerungsproblemen werden im Folgenden die notwendigen Gleichungen zur Bestimmung der optimalen Steuertrajektorie  $\mathbf{u}^*_{[t_0, t_f]}$  hergeleitet. Die Herleitung ist angelehnt an den in [76] beschriebenen zeitdiskreten Fall ohne Punktkosten. Den Ausgangspunkt der Optimierung des Kostenfunktional (3.23) mit den über die adjungierte Variable  $\nu$  integrierten Endbedingungen

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_f, t_f) = \mathbf{G}\mathbf{x}_f + \mathbf{g}_c(t_f) = \mathbf{G}\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_{f,d} = 0 \quad (\text{A.1})$$

und den additiven Kosten zum Zeitpunkt  $t_0$ , an welchem die Punktbedingung gilt

$$\tilde{V}(\mathbf{x}(t_0), t_0) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top(t_0)\mathbf{S}_0\mathbf{x}(t_0) + \boldsymbol{\sigma}^\top(\mathbf{x}(t_0^-) - \mathbf{x}(t_0^+)), \quad (\text{A.2})$$

bilden die Optimalitätsbedingungen (3.2) und Transversalitätsbedingungen (3.24), (3.30), welche zum Endzeitpunkt  $t_f$  und zum Zeitpunkt  $t_0$  gelten, wobei  $t_0^-$  und  $t_0^+$  die Zeit unmittelbar vor und nach  $t_0$  bezeichnet.

Aus der Transversalitätsbedingung (3.24) folgt für den Endzeitpunkt  $t_f$

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{S}\mathbf{x}(t_f) + \mathbf{C}^\top\nu \quad (\text{A.3})$$

als Beziehung zwischen dem Systemzustand und den adjungierten Variablen. Entsprechend der *sweep method* [76] kann dieser Zusammenhang auf das

gesamte Optimierungsintervall  $t \in [t_0, t_f]$  erweitert werden, sodass  $\lambda^*(t)$  mit den zeitvarianten Matrizen  $\mathbf{P}(t)$  und  $\mathbf{U}(t)$  angesetzt werden kann zu

$$\lambda^*(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{U}(t)\nu. \quad (\text{A.4})$$

Es wird angenommen, dass die Varianz der adjungierten Variable  $\nu$  durch die zeitvariante Matrix  $\mathbf{U}(t)$  dargestellt werden kann, weshalb  $\nu$  im Weiteren als konstant angenommen wird. Durch Koeffizientenvergleich zum Endzeitpunkt  $t_f$  folgen direkt die Endbedingungen  $\mathbf{P}(t_f) = \mathbf{S}$  und  $\mathbf{U}(t_f) = \mathbf{C}^\top$ .

Darüber hinaus lassen sich aus der Transversalitätsbedingung (3.30) zu den Zeitpunkten  $t_0^-$  und  $t_0^+$  die Beziehungen

$$\lambda^*(t_0^-) = \mathbf{S}_0\mathbf{x}^*(t_0^-) + \sigma, \quad (\text{A.5})$$

$$\lambda^*(t_0^+) = \sigma \quad (\text{A.6})$$

an der Sprungstelle  $t_0$  herleiten. Mit der Ansatzfunktion (A.4) für  $\lambda^*(t_0^+)$  und dem Einsetzen der Gleichungen (A.5) und (A.6) ineinander ergibt sich

$$\lambda^*(t_0^-) = \mathbf{S}_0\mathbf{x}^*(t_0^-) + \mathbf{P}(t_0^+)\mathbf{x}^*(t_0^+) + \mathbf{U}(t_0)\nu. \quad (\text{A.7})$$

Aufgrund der Forderung nach Kontinuität des Systemzustandes an der Sprungstelle  $t_0$  ergibt sich mit  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(t_0^-) = \mathbf{x}(t_0^+)$

$$\lambda^*(t_0^-) = \underbrace{(\mathbf{S}_0 + \mathbf{P}(t_0^+))}_{\mathbf{P}(t_0^-)} \mathbf{x}^*(t_0) + \mathbf{U}(t_0)\nu. \quad (\text{A.8})$$

Daraus folgt, dass die zeitvariante Matrix  $\mathbf{P}(t)$  an der Sprungstelle eine Unstetigkeitsstelle besitzt, welche durch  $\mathbf{P}(t_0^-) = \mathbf{S}_0 + \mathbf{P}(t_0^+)$  beschrieben ist.

Zur Bestimmung des zeitlichen Verlaufs der adjungierten Variablen  $\lambda^*(t)$  wird die Ansatzfunktion (A.4) nach der Zeit differenziert

$$\dot{\lambda}^*(t) = \dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{P}(t)\dot{\mathbf{x}}^*(t) + \dot{\mathbf{U}}(t)\nu. \quad (\text{A.9})$$



Durch Gleichsetzen mit der kanonischen Differentialgleichung (3.6b) unter Verwendung der Ansatzfunktion (A.4) und den linearen Systemgleichungen (3.6a) ergibt sich nach umformen

$$\underbrace{[\dot{\mathbf{P}}(t) + \mathbf{Q} + \mathbf{A}^\top \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A} - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P}(t)]}_{\stackrel{!}{=}0} \mathbf{x}^*(t) + \underbrace{[\mathbf{A}^\top \mathbf{U}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{U}(t) + \dot{\mathbf{U}}(t)]}_{\stackrel{!}{=}0} \nu = 0. \quad (\text{A.10})$$

Da  $\mathbf{x}^*(t)$  und  $\nu$  im Allgemeinen nicht identisch 0 sind, ergeben sich für die Matrizen  $\mathbf{P}(t)$  und  $\mathbf{U}(t)$  die Matrix-Differentialgleichungen für  $t \in [t_0, t_f]$

$$-\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{K}(t) + \mathbf{Q}, \quad \mathbf{P}(t_f) = \mathbf{S}_f, \quad (\text{A.11})$$

$$-\dot{\mathbf{U}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}(t)^\top) \mathbf{U}, \quad \mathbf{U}(t_f) = \mathbf{C}^\top, \quad (\text{A.12})$$

wobei gilt  $\mathbf{K}(t) = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{P}(t)$ . Es sei bemerkt, dass es sich bei Gleichung (A.11) um die *Riccati*-Matrix-Differenzialgleichung (3.8) handelt. Da für beide Gleichungen der Endwert vorgegeben ist, können diese durch numerische Rückwärtsintegration gelöst werden. Der gesamte Zeitverlauf  $t \in [t_0, t_f]$  von  $\mathbf{P}(t)$  kann durch unabhängige Rückwärtsintegration der beiden Teilintervalle  $t_1 \in [t_0, t_0]$  und  $t_2 \in (t_0, t_f]$  unter Berücksichtigung der Sprungbedingung  $\mathbf{P}(t_0^-) = \mathbf{S}_{t_0} + \mathbf{P}(t_0^+)$  erreicht werden.

Neben dem Verlauf der zeitvarianten Matrizen  $\mathbf{P}(t)$  und  $\mathbf{U}(t)$  ist zur Bestimmung der adjungierten Variablen  $\lambda^*(t)$  auch die Bestimmung der adjungierten Variable  $\nu$  erforderlich. Dazu wird angenommen, dass sich  $\mathbf{x}_{f,d} = \mathbf{C}^\top \mathbf{x}^*(t_f)$  als Linearkombination von  $\mathbf{x}^*(t)$  und  $\nu$  für alle  $t \in [t_0, t_f]$  darstellen lässt, d. h.

$$\mathbf{x}_{f,d} = \mathbf{C}\mathbf{x}^*(t_f) = \hat{\mathbf{U}}(t)\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{W}(t)\nu. \quad (\text{A.13})$$

Dieser Ansatz ist genau dann gültig, wenn für die noch unbekanntenen, eingeführten Matrizen  $\hat{\mathbf{U}}(t)$  und  $\mathbf{W}(t)$  konsistente Berechnungsvorschriften hergeleitet werden können. Durch Betrachtung des Endzeitpunktes  $t_f$  folgt direkt nach einem Koeffizientenvergleich  $\hat{\mathbf{U}}(t_f) = \mathbf{C}$  und  $\mathbf{W}(t_f) = 0$ .

Wie auch im Falle der Gleichung (A.4) wird die Ansatzfunktion (A.13) nach der Zeit differenziert. Dadurch ergibt sich

$$\dot{\hat{U}}(t)\mathbf{x}^*(t) + \hat{U}(t)\dot{\mathbf{x}}^*(t) + \dot{\mathbf{W}}(t)\nu = 0. \quad (\text{A.14})$$

Ersetzt man nun  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  durch (3.6a) unter Verwendung des Zusammenhangs (A.4), lässt sich für  $\hat{U}(t)$  und  $\mathbf{W}(t)$  die folgende Bedingung aufstellen:

$$\underbrace{\left[ \dot{\hat{U}}(t) + \hat{U}(t)\mathbf{A} - \hat{U}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{S}(t) \right]}_{\stackrel{!}{=}0} \mathbf{x}^*(t) + \underbrace{\left[ -\hat{U}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{U}(t) + \dot{\mathbf{W}}(t) \right]}_{\stackrel{!}{=}0} \nu = 0. \quad (\text{A.15})$$

Da  $\mathbf{x}^*(t)$  und  $\nu$  im Allgemeinen nicht identisch 0 sind, ergeben sich für  $\hat{U}(t)$  und  $\mathbf{W}(t)$  die entsprechenden differenziellen Zusammenhänge. Für  $\hat{U}(t)$  gilt

$$\begin{aligned} -\dot{\hat{U}}(t) &= \hat{U}(t)\mathbf{A} - \hat{U}(t)\mathbf{B}\mathbf{K}(t) \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}(t))^T \hat{U}(t), \quad \hat{U}(t_f) = \mathbf{C}. \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit der Differentialgleichung (A.12) und den entsprechenden Anfangsbedingungen  $\hat{U}(t_f) = \mathbf{C}$  und  $\mathbf{U}(t_f) = \mathbf{C}^T$  wird deutlich, dass

$$\mathbf{U}(t)^T \stackrel{!}{=} \hat{U}(t) \quad (\text{A.16})$$

gilt. Basierend darauf gilt für  $\mathbf{W}(t)$  der differenzielle Zusammenhang

$$\dot{\mathbf{W}}(t) = \mathbf{U}(t)^T \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \mathbf{U}(t), \quad \mathbf{W}(t_f) = 0. \quad (\text{A.17})$$

Da beide Differentialgleichungen für (A.16) und (A.17) konsistente Berechnungsvorschriften darstellen, gilt zur Berechnung von  $\nu$  entsprechend Gleichung (A.13)

$$\nu = \mathbf{P}(t)^{-1} \left( \mathbf{x}_{f,d} - \mathbf{V}(t)^T \mathbf{x}(t) \right). \quad (\text{A.18})$$

Entsprechend gilt zur Berechnung des Verlaufes der adjungierten Variable  $\lambda^*(t)$  nach (A.4)

$$\lambda^*(t) = \left( \mathbf{P}(t) - \mathbf{U}(t)\mathbf{W}(t)^{-1}\mathbf{U}(t)^\top \right) \mathbf{x}^*(t) - \mathbf{U}(t)\mathbf{W}(t)^{-1}\mathbf{x}_{f,d}. \quad (\text{A.19})$$

Nutzt man die in Gleichung (3.5) formulierte Bedingung zur Berechnung einer optimalen Zustandsrückführung  $\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\lambda^*(t)$ , so folgt

$$\mathbf{u}_{[t_0, t_f]}^* = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \left[ \left[ \mathbf{P} - \mathbf{U}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{U}^\top \right] \mathbf{x} + \mathbf{U}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{x}_{f,d} \right]. \quad (\text{A.20})$$

Bei Wahl eines freien Endzustandes kann die Matrix  $\mathbf{C}$  zu null gewählt werden. Dadurch reduziert sich das Rückführungsgesetz auf die bekannte Form  $\mathbf{u}_{[t_0, t_f]}^* = -\mathbf{R}(t)^{-1}\mathbf{B}(t)^\top\mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ .

## A.2 Bestimmung der Stabilität und zyklischen Lösbarkeit

Entsprechend der Ausführungen in [21] kann zyklische Lösbarkeit und Stabilität des geschlossenen Regelkreises eines linear-quadratischen Optimalsteuerungsproblems garantiert werden, wenn die Matrix zur Gewichtung der Endkosten  $S$  durch Lösen der algebraischen Riccati-Gleichung des Problems bestimmt wird und die Menge der zulässigen Endzustände  $\mathcal{X}_f$  die maximal positiv invariante Menge des unbeschränkten Optimierungsproblems darstellt.

Für das durch die Matrizen  $A$  und  $B$  beschriebene lineare System mit den Zuständen  $x$  und Eingängen  $u$  sowie den durch die Mengen  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{U}$  beschriebenen zulässigen Systemzuständen und -eingängen, lässt sich die maximal positiv invariante Menge  $\mathcal{X}_f$  entsprechend des Algorithmus 1 bestimmen. Das sog. „one-step controllable set“  $\text{Pre}(\Omega_k)$  des Algorithmus ist dabei definiert als  $\text{Pre}(\Omega_k) = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists u \in \mathcal{U} \text{ sodass } (Ax + Bu) \in \Omega_k\}$ .

---

**Algorithmus 1** zur Bestimmung der maximal positiv invarianten Menge  $\mathcal{X}_f$  [21]

---

```
1: Input:  $A, B, \mathcal{X}, \mathcal{U}$   
2: Output:  $\mathcal{X}_f$   
  
3:  $\Omega_0 \leftarrow \mathcal{X}$   
4: while  $\Omega_{k+1} \neq \Omega_k$  do  
5:    $k = k + 1$   
6:    $\Omega_{k+1} \leftarrow \text{Pre}(\Omega_k) \cap \Omega_k$   
7: end while  
8:  $\mathcal{X}_f \leftarrow \Omega_{k+1}$ 
```

---

### A.3 Bestimmung der Störung $z$ für die Fahrzeugquerführung

Zur Berücksichtigung des Verlaufs der Referenzkurve  $\Gamma$  bei der Optimierung der Fahrzeugquerbewegung beschreibt der vorliegende Abschnitt die Vorgehensweise zur Bestimmung der Störung  $z$ .

Den Ausgangspunkt bildet die generische Beschreibung der Referenzkurve  $\Gamma$  als Polygonzug in  $x, y$ -Koordinaten, bestehend aus  $i = 0, \dots, N_\Gamma$  Referenzpunkten  $(x_i, y_i)$ . Basierend auf dieser Darstellung berechnet sich die Länge  $l_i$  der  $N_\Gamma - 1$  Kanten des Polygonzugs über

$$l_i = \left\| \begin{bmatrix} x_{i+1} - x_i \\ y_{i+1} - y_i \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \quad (\text{A.21})$$

und deren Orientierung  $\alpha_i$  nach

$$\alpha_i = \arctan_2(y_{i+1} - y_i, x_{i+1} - x_i). \quad (\text{A.22})$$

Unter Berücksichtigung dieser Größen lässt sich die Orientierung  $\theta_i$  für jeden Punkt  $(x_i, y_i)$  der Referenzkurve  $\Gamma$  als gewichtetes Mittel der Orientierungen der

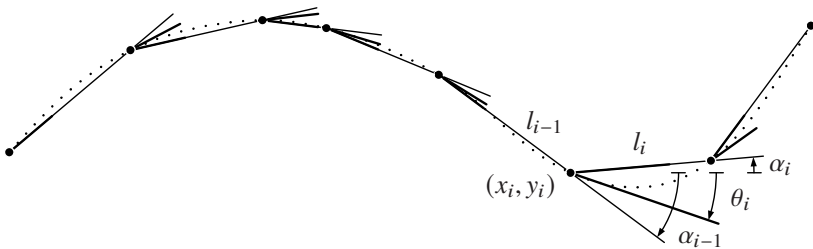


Abbildung A.1: Approximation der Orientierung  $\theta_i$  der als Polygonzug beschriebenen Referenzkurve  $\Gamma$  basierend auf dem gewichteten Mittel der Kantenorientierungen  $\alpha_i$  und  $\alpha_{i-1}$  an einem Referenzpunkt  $(x_i, y_i)$

vorausgehenden und nachfolgenden Kanten in Relation zu deren Kantenlängen approximieren, siehe Abb. A.1, sodass gilt

$$\theta_i = \frac{l_{i-1}}{l_{i-1} + l_i} \alpha_{i-1} + \frac{l_i}{l_{i-1} + l_i} \alpha_i. \quad (\text{A.23})$$

Für die Sonderfälle  $i = 0$  und  $i = N_\Gamma - 1$  kann der Einfachheit halber angenommen werden, dass  $\theta_0 = \alpha_0$  und  $\theta_{N_\Gamma-1} = \theta_{N_\Gamma-2}$  gelten.

Im Gegensatz zu der Verwendung der Kantenorientierung  $\alpha_i$  bietet die beschriebene Approximation der Orientierung für  $\theta_i$  den Vorteil, dass durch den hierbei entstehenden linearen Verlauf der Orientierung über die Kantenlänge  $l_i$ , der Positionsverlauf der Referenzkurve  $\Gamma$  aus den approximierten Orientierungen  $\theta_i$  durch Integration rekonstruiert werden kann. Folglich lässt sich die Störung  $z(t) = \theta_r(t)$  als Orientierung der Referenzkurve  $\Gamma$  zu den durch die Längsbewegung vorgegebenen Optimierungspunkten  $s(t)$  durch lineare Interpolation des Verlaufes von  $\theta_i$  über der Bogenlänge  $s$  der Referenzkurve  $\Gamma$  mit geringem Aufwand bestimmen.

## A.4 Zeiddiskrete Systemmatrizen der Querbewegung

Für die in Abschn. 5.1.1 hergeleitete zeitkontinuierliche Systemdynamik der Querbewegung sind in diesem Abschnitt die äquivalenten Systemmatrizen der zeitdiskreten Problemformulierung aufgeführt. Entsprechend Abschn. 3.2.1 und unter den in Abschn. 5.1.3 beschriebenen Annahmen ergeben sich diese in jedem Diskretisierungsintervall  $k$  mit der Schrittweite  $T_s$  und den aus der Längsbewegung bekannten Größen  $\boldsymbol{\phi}(k) = [\ddot{a}(k), j(k), a(k), v(k)]^T$  zu

$$\mathbf{A}^D(k) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{24} \ddot{a}(k) & \frac{1}{1152} \ddot{a}(k)^2 & \frac{T_s^3}{2} \ddot{a}(k) \\ 0 & 1 & \frac{1}{24} \ddot{a}(k) & \frac{T_s^2}{120} \hat{a}(k) \\ 0 & 0 & 1 & T_s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.24})$$

$$\ddot{a}(k) = \begin{bmatrix} T_s^4 & 4T_s^3 & 12T_s^2 & 24T_s \end{bmatrix} \boldsymbol{\phi}(k), \quad (\text{A.25})$$

$$\hat{a}(k) = \begin{bmatrix} 4T_s^3 & 15T_s^2 & 40T_s & 60 \end{bmatrix} \boldsymbol{\phi}(k), \quad (\text{A.26})$$

$$\ddot{a}(k) = \boldsymbol{\phi}(k)^T \begin{bmatrix} \frac{1}{810} T_s^6 & \frac{3}{320} T_s^5 & \frac{2}{315} T_s^4 & \frac{7}{180} T_s^3 \\ 0 & \frac{1}{56} T_s^4 & \frac{7}{72} T_s^3 & \frac{3}{20} T_s^2 \\ 0 & 0 & \frac{2}{15} T_s^2 & \frac{5}{12} T_s^1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \boldsymbol{\phi}(k), \quad (\text{A.27})$$

$$\mathbf{B}^D(k) = \begin{bmatrix} \frac{T_s^4}{2} \tilde{b}(k) & \frac{T_s^3}{360} \hat{b}(k) & \frac{T_s^2}{2} & T_s \end{bmatrix}^T, \quad (\text{A.28})$$

$$\tilde{b}(k) = \boldsymbol{\phi}(k)^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2160} T_s^6 & \frac{11}{3240} T_s^5 & \frac{5}{576} T_s^4 & \frac{1}{84} T_s^3 \\ 0 & \frac{1}{160} T_s^4 & \frac{9}{280} T_s^3 & \frac{2}{45} T_s^2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{24} T_s^2 & \frac{7}{60} T_s \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{bmatrix} \boldsymbol{\phi}(k), \quad (\text{A.29})$$

$$\hat{b}(k) = \begin{bmatrix} 5T_s^3 & 18T_s^2 & 45T_s & 60 \end{bmatrix} \phi(k). \quad (\text{A.30})$$

Wegen der linearen Interpolation (5.5) der Störung  $z(t)$  und des damit verbundenen Einbeziehens des Wertes  $z(t_{k+1})$  erhöht sich der diskrete Störvektor um eine Komponente zu

$$z(k) = \begin{bmatrix} z(k) & z(k+1) \end{bmatrix}^\top. \quad (\text{A.31})$$

Folglich erhöht sich für die Matrizen  $\mathbf{D}^D(k)$  und  $\mathbf{E}^D(k)$  die Spaltenanzahl entsprechend, sodass gilt

$$\mathbf{D}^D(k) = \begin{bmatrix} -\frac{T_s}{120} \tilde{d}(k) & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{T_s}{120} \hat{d}(k) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top, \quad (\text{A.32})$$

$$\tilde{d}(k) = \begin{bmatrix} T_s^3 & 5T_s^2 & 20T_s & 60 \end{bmatrix} \phi(k), \quad (\text{A.33})$$

$$\hat{d}(k) = \begin{bmatrix} 4T_s^3 & 15T_s^2 & 40T_s & 60 \end{bmatrix} \phi(k), \quad (\text{A.34})$$

$$\mathbf{E}^D(k) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}l & -l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top. \quad (\text{A.35})$$

Die Matrix  $\mathbf{C}$  ist im zeitkontinuierlichen und zeitdiskreten Fall identisch. Zur Verifikation der Matrizen wurde die zeitdiskrete Systemdynamik für verschiedene typische Verläufe der Geschwindigkeit  $v$ , der Störgröße  $z$  und der Stellgröße  $u$  berechnet und mit den Verläufen des zeitkontinuierlichen Systems bei gleichen Parametern und Eingangsdaten verglichen. Für die Vorwärtssimulation der zeitkontinuierlichen Systemdynamik kam der Matlab ODE45-Solver zum Einsatz.



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Schematische Darstellung der menschlichen Leistungsfähigkeit . . .	2
1.2	Unterstützungscharakter von automatisierten Fahreingriffen . . .	3
1.3	Übersichtsdarstellung und Vernetzung der einzelnen Kapitel . . .	10
2.1	Modifiziertes Drei-Ebenen-Modell . . . . .	12
2.2	Darstellung der Trajektorienplanungsaufgabe . . . . .	14
2.3	Lösung des Optimalsteuerungsproblems . . . . .	17
2.4	Grundprinzip der modellprädiktiven Regelung . . . . .	20
2.5	Grundproblematik nichtkonvexer Bewegungsplanung . . . . .	23
2.6	Vergleich konkave und konvexe Kostenfunktionen . . . . .	28
2.7	Konvexe Problemformulierung der Querbewegung . . . . .	30
2.8	Konvexe Problemformulierung der Längsbewegung . . . . .	31
2.9	Bezugssysteme zur Beschreibung der Fahrzeugbewegung . . . . .	33
3.1	Äquivalente zeitdiskrete Systembeschreibung . . . . .	54
3.2	Bestimmung des Kostenterms für Schlupfvariablen . . . . .	61
3.3	Mehrstufiger Anstieg der Gesamtkosten durch Schlupfvariablen . . . . .	62
4.1	Einflussgrößen auf die Längsbewegung . . . . .	69
4.2	Positionsbeschränkungen der Längsbewegung . . . . .	77
4.3	Komfortable Längsbeschleunigungsverläufe . . . . .	79
4.4	Brems-Ausweich-Dilemma . . . . .	82
4.5	Reduzierte Umfeldrepräsentation statischer Umgebungen . . . . .	83
4.6	Geometrische Kollisionsberechnungen . . . . .	84
4.7	Abstandsabhängige Passiergeschwindigkeit . . . . .	85
4.8	Übersichtsdarstellung des Kollisionsvermeidungsalgorithmus . . . . .	87

5.1	Kinematisches Fahrzeugmodell der Querbewegung . . . . .	93
5.2	Darstellung der Systemausgänge zur Kollisionsvermeidung . . .	95
5.3	Darstellung der zeitvarianten Fahrraumbeschränkungen . . . . .	97
6.1	Versuchsfahrzeug während eines Einparkmanövers . . . . .	107
6.2	Versuchsfahrzeug während eines automatisierten Bremsengriffs	110
6.3	Kollisionsvermeidendes Manöver aus der Vogelperspektive . . .	111
6.4	Zustandstrajektorien eines optimierten Bremsengriffs . . . . .	112
6.5	Geschwindigkeitsanpassung auf einen langsamen Ein-/Auscherer	115
6.6	Notbremsung bei reduziertem Reibwert . . . . .	116
6.7	Dynamisches Kreisverkehrmanöver . . . . .	119
6.8	Lenkwinkel- und Beschleunigungsverlauf im Kreisverkehr . . .	120
6.9	Vollautomatisiertes Parkmanöver . . . . .	121
6.10	Ausweichen auf ein dynamisches Objekt . . . . .	122
6.11	Kombinierte Längs- und -querführung . . . . .	124
6.12	Längsführung bei Fahrstreifenwechsel in enge Lücke . . . . .	125
6.13	Querführung bei Fahrstreifenwechsel in enge Lücke . . . . .	126
6.14	Laterale Fahrraumbeschränkungen bei Fahrstreifenwechsel . . .	128
A.1	Approximation der Referenzorientierung . . . . .	145

# Literaturverzeichnis

- [1] ADAMS, L.: *Review of the literature on obstacle avoidance maneuvers: Braking versus steering*. University of Michigan, Transportation Research Institute, 1994.
- [2] AEBERHARD, M., S. RAUCH, M. BAHRAM, G. TANZMEISTER, J. THOMAS, Y. PILAT, F. HOMM, W. HUBER . N. KAEMPCHEN: *Experience, Results and Lessons Learned from Automated Driving on Germany's Highways*. Intelligent Transportation Systems Magazine, IEEE, 7(1):42–57, 2015.
- [3] ALESSANDRETTI, A., C. N. JONES .: *Trajectory-tracking and path-following controllers for constrained underactuated vehicles using Model Predictive Control*. . *Control Conference (ECC), 2013 European*, . 1371–1376. IEEE, 2013.
- [4] ANDERSON, B. D., A. ILCHMANN . F. R. WIRTH: *Stabilizability of linear time-varying systems*. *Systems & Control Letters*, 62(9):747–755, 2013.
- [5] ANDERSON, S., S. PETERS, T. PILUTTI . K. IAGNEMMA: *An optimal-control-based framework for trajectory planning, threat assessment, and semi-autonomous control of passenger vehicles in hazard avoidance scenarios*. *International Journal of Vehicle Autonomous Systems*, 8(2):190–216, 2010.
- [6] APLEVICH, J. D.: *The essentials of linear state-space systems*. Wiley New York, 2000.
- [7] BACHA, A., C. BAUMAN, R. FARUQUE, M. FLEMING, C. TERWELP, C. REINHOLTZ, D. HONG, A. WICKS, T. ALBERI, D. ANDERSON .: *Odin: Team victortango's entry in the darpa urban challenge*. *Journal of Field Robotics*, 25(8):467–492, 2008.
- [8] BAHADORIAN, M., B. SAVKOVIC, R. EATON . T. HESKETH: *Robust Model Predictive Control for automated trajectory tracking of an Unmanned Ground Vehicle*. . *American Control Conference (ACC), 2012*, . 4251–4256. IEEE, 2012.

- [9] BALACHANDRAN, A., M. BROWN, S. M. ERLIEN . J. C. GERDES: *Creating predictive haptic feedback for obstacle avoidance using a model predictive control (MPC) framework*. . *Intelligent Vehicles Symposium (IV), 2015 IEEE*, . 31–36. 2015.
- [10] BECKER, J., S. KAMMEL, O. PINK . M. FAUSTEN: *Bosch's approach toward automated driving*. at-Automatisierungstechnik, 63(3):180–190, 2015.
- [11] BELLMAN, R.: *The theory of dynamic programming*. . RAND-P-550. Rand Corporation Santa Monica CA, 1954.
- [12] BEMPORAD, A. . C. ROCCHI: *Decentralized linear time-varying model predictive control of a formation of unmanned aerial vehicles*. . *Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on*, . 7488–7493. IEEE, 2011.
- [13] BENGLER, K., K. DIETMAYER, B. FÄRBER, M. MAURER, C. STILLER . H. WINNER: *Three decades of driver assistance systems: Review and future perspectives*. *Intelligent Transportation Systems Magazine, IEEE*, 6(4):6–22, 2014.
- [14] BERTSEKAS, D.: *Dynamic programming and optimal control*. Athena Scientific Belmont, MA, 1995.
- [15] BEVAN, G., H. GOLLEE . J. O'REILLY: *Trajectory generation for road vehicle obstacle avoidance using convex optimization*. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 224(4):455–473, 2010.
- [16] BIRCK, S.: *Potenziale und Risiken älterer Kraftfahrer mit Unfällen und ihre Darstellung in der Lokalpresse*. , Universität Bonn, 2010.
- [17] BISHOP, R.: *Intelligent Vehicle Technology and Trends*. Artech House Publishers, 2005.
- [18] BMW GROUP: *BMW Innovations at the 2015 Consumer Electronics Show in Las Vegas: 360-degree collision avoidance and fully-automated parking*. BMW PressClub Global, December 2014.
- [19] BORENSTEIN, J., H. EVERETT, L. FENG . D. WEHE: *Mobile Robot Positioning - Sensors and Techniques*. *Journal of Robotic Systems*, 14:231–249, 1997.
- [20] BORGEEST, K.: *Zukunftstechnologien im Fahrzeug*. . *Elektronik in der Fahrzeugtechnik*, . 421–427. Springer, 2014.

- [21] BORRELLI, F., A. BEMPORAD . M. MORARI: *Predictive control for linear and hybrid systems*. Cambridge University Press, 2017.
- [22] BRANDT, T.: *A predictive potential field concept for shared vehicle guidance*. , Universität Paderborn, 2008.
- [23] BREUER, B. . K. BILL: *Bremsenhandbuch: Grundlagen, Komponenten, Systeme, Fahrdynamik*. Springer Vieweg, 2012.
- [24] BROADHURST, P.: *The interaction of task difficulty and motivation: The Yerkes-Dodson Law revived*. Acta Psychologica, 16:321–338, 1959.
- [25] CAMACHO, E. F. . C. B. ALBA: *Model predictive control*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [26] CARVALHO, A., Y. GAO, A. GRAY, H. TSENG . F. BORRELLI: *Predictive control of an autonomous ground vehicle using an iterative linearization approach*. . *Intelligent Transportation Systems-(ITSC), 2013 16th International IEEE Conference on*, . 2335–2340, 2013.
- [27] CHU, K., J. KIM, K. JO . M. SUNWOO: *Real-time path planning of autonomous vehicles for unstructured road navigation*. International Journal of Automotive Technology, 16(4):653–668, 2015.
- [28] DEBUS, T.: *Lass die Finger weg, jetzt fahre ich!*. Frankfurter Allgemeine Zeitung, 10.09.2013.
- [29] DEFENSE ADVANCED RESEARCH PROJECTS AGENCY: *Urban Challenge Rules*, October 2007. <http://archive.darpa.mil/grandchallenge/rules.html>.
- [30] DI CAIRANO, S. . F. BORRELLI: *Reference tracking with guaranteed error bound for constrained linear systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, 61(8):2245–2250, 2016.
- [31] DINGUS, T.: *The 100-car naturalistic driving study, Phase II, Results of the 100-car field experiment*. . DOT HS 810 593, National Highway Traffic Safety Administration, US Department of Transportation, 2006.
- [32] DOLGOV, D., S. THRUN, M. MONTEMERLO . J. DIEBEL: *Path planning for autonomous vehicles in unknown semi-structured environments*. The International Journal of Robotics Research, 29(5):485–501, 2010.
- [33] DONGES, E.: *Aspekte der Aktiven Sicherheit bei der Führung von Personenkraftwagen*. Automobil-Industrie, 2:183–190, 1982.

- [34] DONGES, E.: *Fahrerverhaltensmodelle*. . WINNER, H., S. HAKULI . G. WOLF (.): *Handbuch Fahrerassistenzsysteme*, . 15–23. Vieweg + Teubner Verlag, Wiesbaden, 2012.
- [35] DONGES, E. . K. NAAB: *Regelssysteme zur Fahrzeugführung und-stabilisierung in der Automobiltechnik*. Automatisierungstechnik, 44(5):226–236, 1996.
- [36] ESKANDARIAN, A.: *Handbook of Intelligent Vehicles*. Springer, 2012.
- [37] FALCONE, P., F. BORRELLI, H. TSENGZ, J. ASGARI . D. HROVAT: *A hierarchical model predictive control framework for autonomous ground vehicles*. . *American Control Conference, 2008*, . 3719–3724. IEEE, 2008.
- [38] FALCONE, P., M. TUFO, F. BORRELLI, J. ASGARI . H. TSENGZ: *A linear time varying model predictive control approach to the integrated vehicle dynamics control problem in autonomous systems*. . *Decision and Control, 2007 46th IEEE Conference on*, . 2980–2985. IEEE, 2007.
- [39] FAULWASSER, T. . R. FINDEISEN: *Nonlinear model predictive control for constrained output path following*. IEEE Transactions on Automatic Control, 61(4):1026–1039, 2016.
- [40] FINDEISEN, R. . F. ALLGÖWER: *An Introduction to Nonlinear Model Predictive Control*. . *21st Benelux Meeting on Systems and Control*, . 11. Institute for Systems Theory in Engineering, University of Stuttgart, 2002.
- [41] FINDEISEN, R., L. GRÜNE, J. PANNEK . P. VARUTTI: *Robustness of prediction based delay compensation for nonlinear systems*. IFAC Proceedings Volumes, 44(1):203–208, 2011.
- [42] FLETCHER, L., S. TELLER, E. OLSON, D. MOORE, Y. KUWATA, J. HOW, J. LEONARD, I. MILLER, M. CAMPBELL, D. HUTTENLOCHER .: *The MIT-Cornell collision and why it happened*. Journal of Field Robotics, 25(10):775–807, 2008.
- [43] FÖLLINGER, O.: *Optimale Regelung und Steuerung: Eine Einführung für Ingenieure*. Methoden der Regelungs- und Automatisierungstechnik. Oldenbourg, München, 1994.
- [44] FRAICHARD, T.: *A short paper about motion safety*. . *International Conference on Robotics and Automation*, . 1140–1145. IEEE, 2007.

- [45] FRIEDL, M., A. HUPKA . G. TANZMEISTER: *Vollautomatisiertes Valet Parking: Funktions- und Planungsarchitektur*. . 10. Workshop Fahrerassistenzsysteme, . 1–10, 2015.
- [46] GAO, Y., A. GRAY, J. V. FRASCH, T. LIN, E. TSENG, J. K. HEDRICK . F. BORRELLI: *Spatial predictive control for agile semi-autonomous ground vehicles*. . *Proceedings of the 11th International Symposium on Advanced Vehicle Control*, 2012.
- [47] GASSER, T. M., C. ARZT, M. AYOUBI, A. BARTELS, L. BÜRKLE, J. EIER, F. FLEMISCH, D. HÄCKER, T. HESSE, W. HUBER .: *Rechtsfolgen zunehmender Fahrzeugautomatisierung*. Berichte der Bundesanstalt für Straßenwesen. Unterreihe Fahrzeugtechnik, (83), 2012.
- [48] GERDTS, M.: *Optimale Steuerung*. Vorlesungsskript, Universität Würzburg, 2014.
- [49] GERDTS, M., S. KARRENBERG, B. MÜLLER-BESSLER . G. STOCK: *Generating locally optimal trajectories for an automatically driven car*. *Optimization and Engineering*, 10(4):439–463, 2009.
- [50] GESAMTVERBAND DER DEUTSCHEN VERSICHERUNGSWIRTSCHAFT E.V.: *Jahresbericht 2009, Studie der Unfallforschung der Versicherer*, 2010.
- [51] GOTTSCHALK, S., M. C. LIN . D. MANOCHA: *OBBTree: a hierarchical structure for rapid interference detection*. . *Proceedings of the 23rd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, . 171–180. ACM, 1996.
- [52] GRAF, K. . C. WURMTHALER: *Eine neue Kaskadenstruktur*. at - Automatisierungstechnik, 51(3):113–118, 2003.
- [53] GRAICHEN, K.: *Methoden der Optimierung und optimalen Steuerung*. Vorlesungsskript, Universität Ulm, 2014.
- [54] GRAY, A., M. ALI, Y. GAO, J. HEDRICK . F. BORRELLI: *Semi-autonomous vehicle control for road departure and obstacle avoidance*. IFAC Control of Transportation Systems, . 1–6, 2012.
- [55] GRÖLL, L.: *Methodik zur Integration von Vorwissen in die Modellbildung*, . 52. KIT Scientific Publishing, 2015.
- [56] GRÜNE, L. . J. PANNEK: *Nonlinear Model Predictive Control: Theory and Algorithms*. Springer, 2011.
- [57] GU, T. . J. DOLAN: *On-Road motion planning for autonomous vehicles*. . *Intelligent Robotics and Applications*, . 588–597. Springer, 2012.

- [58] GU, T. . J. M. DOLAN: *Toward human-like motion planning in urban environments.* . *Intelligent Vehicles Symposium Proceedings, 2014 IEEE*, . 350–355. IEEE, 2014.
- [59] GU, T., J. SNIDER, J. M. DOLAN . J.-w. LEE: *Focused Trajectory Planning for autonomous on-road driving.* . *Intelligent Vehicles Symposium (IV), 2013 IEEE*, . 547–552. IEEE, 2013.
- [60] GWEHENBERGER, J., W. SCHWERTBERGER . D. DASCHNER: *Wirkungspotentiale von ACC und Lane Guard System bei Nutzfahrzeugen.* . 2. *Tagung Aktive Sicherheit durch Fahrerassistenz*, 2006.
- [61] HUDELMAIER, P. . K. SCHMIDT: *Chiplösungen für Fahrerassistenzsysteme.* . *Vernetztes Automobil*, . 131–136. Springer, 2014.
- [62] INFINEON: *Die 32-Bit Automotive Multicore-Mikrocontrollerfamilie AURIX.* Pressemitteilung INFATV201205.040, Mai 2012.
- [63] JEON, S. J., C. M. KANG, S.-H. LEE . C. C. CHUNG: *GPS waypoint fitting and tracking using model predictive control.* . *Intelligent Vehicles Symposium (IV), 2015 IEEE*, . 298–303. IEEE, 2015.
- [64] JOHANSEN, T.: *Introduction to nonlinear model predictive control and moving horizon estimation.* Selected Topics on Constrained and Nonlinear Control, . 187, 2011.
- [65] KAISER, M., U. SCHAEFER . G. HAAF: *Electronic control unit.* . *Automotive Mechatronics*, . 18–43. Springer, 2015.
- [66] KAMMEL, S., J. ZIEGLER, B. PITZER, M. WERLING, T. GINDELE, D. JAGSZENT, J. SCHRÖDER, M. THUY, M. GOEBL, F. v. HUNDELSHAUSEN, O. PINK, C. FREESE . C. STILLER: *Team AnnieWAY’s autonomous system for the DARPA Urban Challenge 2007.* *Journal of Field Robotics*, 25(9):615 – 639, 2008.
- [67] KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE: *Multicore-Technik sicher für Mobilität einsetzen.* Pressemitteilung Nr. 056, Juni 2015.
- [68] KONG, J., M. PFEIFFER, G. SCHILDBACH . F. BORRELLI: *Kinematic and dynamic vehicle models for autonomous driving control design.* . *Intelligent Vehicles Symposium (IV), 2015 IEEE*, . 1094–1099. IEEE, 2015.
- [69] KÖNIG, L.: *Ein virtueller Testfahrer für den querdynamischen Grenzbereich.* , Universität Stuttgart, 2008.
- [70] KOREN, Y. . J. BORENSTEIN: *Potential field methods and their inherent limitations for mobile robot navigation.* . *Robotics and Automation*,



1991. *Proceedings., 1991 IEEE International Conference on*, . 1398–1404. IEEE, 1991.
- [71] KROGH, B.: *A generalized potential field approach to obstacle avoidance control*. . *International Robotics Research Conference*, Bethlehem, Pennsylvania, 1984.
- [72] KUNZ, K., S. M. HUCK . T. H. SUMMERS: *Fast model predictive control of miniature helicopters*. . *Control Conference (ECC), 2013 European*, . 1377–1382. IEEE, 2013.
- [73] LATEGAHN, H.: *Mapping and Localization in Urban Environments Using Cameras*. , Karlsruhe Institut für Technologie (KIT), 2013.
- [74] LEVINSON, J. . S. THRUN: *Robust vehicle localization in urban environments using probabilistic maps*. . *International Conference on Robotics and Automation*, . 4372–4378. IEEE, 2010.
- [75] LEWANDOWITZ, L.: *Markenspezifische Auswahl, Parametrierung und Gestaltung der Produktgruppe Fahrerassistenzsysteme*. , Karlsruhe Institut für Technologie (KIT), 2011.
- [76] LEWIS, F. . V. SYRMO: *Optimal Control*. John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [77] LI, X., Z. SUN, Q. CHEN . J. WANG: *A novel path tracking controller for ackerman steering vehicles*. . *Control Conference (CCC), 2013 32nd Chinese*, . 4177–4182. IEEE, 2013.
- [78] LI, X., Z. SUN, D. LIU, Q. ZHU . Z. HUANG: *Combining local trajectory planning and tracking control for autonomous ground vehicles navigating along a reference path*. . *Intelligent Transportation Systems (ITSC), 2014 IEEE 17th International Conference on*, . 725–731. IEEE, 2014.
- [79] LIKHACHEV, M. . D. FERGUSON: *Planning long dynamically feasible maneuvers for autonomous vehicles*. *The International Journal of Robotics Research*, 28(8):933–945, 2009.
- [80] LIU, J., P. JAYAKUMAR, J. L. STEIN . T. ERSAL: *An MPC Algorithm with Combined Speed and Steering Control for Obstacle Avoidance in Autonomous Ground Vehicles*. ., DTIC Document, 2015.
- [81] LUNZE, J.: *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*, . 1. Springer Verlag, 2005.
- [82] MAURER, M. . C. STILLER: *Fahrerassistenzsysteme mit maschineller Wahrnehmung*. Springer, 2005.

- [83] McBRIDE, J. R., J. C. IVAN, D. S. RHODE, J. D. RUPP, M. Y. RUPP, J. D. HIGGINS, D. D. TURNER . R. M. EUSTICE: *A perspective on emerging automotive safety applications, derived from lessons learned through participation in the darpa grand challenges*. Journal of Field Robotics, 25(10):808–840, 2008.
- [84] MITSCHKE, M. . H. WALLENTOWITZ: *Dynamik der Kraftfahrzeuge*. Springer, 2004.
- [85] MONTEMERLO, M., J. BECKER, S. BHAT, H. DAHLKAMP, D. DOLGOV, S. ETTINGER, D. HAEHNEL, T. HILDEN, G. HOFFMANN, B. HUHNKE .: *Junior: The Stanford entry in the Urban Challenge*. Journal of Field Robotics, 25(9), 2008.
- [86] MOUSAVI, M. A., Z. HESHMATI . B. MOSHIRI: *LTV-MPC based path planning of an autonomous vehicle via convex optimization*. . *Electrical Engineering (ICEE), 2013 21st Iranian Conference on*, . 1–7. IEEE, 2013.
- [87] NILSSON, J., M. ALI, P. FALCONE . J. SJÖBERG: *Predictive manoeuvre generation for automated driving*. . *16th International IEEE Annual Conference on Intelligent Transportation Systems*, 2013.
- [88] NOCEDAL, J. . S. WRIGHT: *Numerical Optimization*. Springer Science + Business Media, 2006.
- [89] OH, S.-R. . J. SUN: *Path following of underactuated marine surface vessels using line-of-sight based model predictive control*. *Ocean Engineering*, 37(2):289–295, 2010.
- [90] PAPAGEORGIU, M.: *Optimierung: Statische, dynamische, stochastische Verfahren*. Springer, 2012.
- [91] PARK, J., D. KIM, Y. YOON, H. KIM . K. YI: *Obstacle avoidance of autonomous vehicles based on model predictive control*. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*, 223(12):1499–1516, 2009.
- [92] PRESENT, I.: *Cramming more components onto integrated circuits*. *Readings in computer architecture*, . 56, 2000.
- [93] RAUSKOLB, F., K. BERGER, C. LIPSKI, M. MAGNOR, K. CORNELSEN, J. EFFERTZ, T. FORM, F. GRAEFE, S. OHL, W. SCHUMACHER .: *Caroline: An autonomously driving vehicle for urban environments*. Journal of Field Robotics, 25(9):674–724, 2008.

- 
- [94] RAZA, H., Z. XU, B. YANG . P. A. IOANNOU: *Modeling and control design for a computer-controlled brake system*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 5(3):279–296, 1997.
- [95] SCHILDBACH, G. . F. BORRELLI: *Scenario model predictive control for lane change assistance on highways*. . *Intelligent Vehicles Symposium (IV), 2015 IEEE*, . 611–616. IEEE, 2015.
- [96] SCHRAMM, D., M. HILLER . R. BARDINI: *Modellbildung und Simulation der Dynamik von Kraftfahrzeugen*. Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [97] SONTAG, E.: *Mathematical Control Theory*. Textbooks in Applied Mathematics. Springer, 1998.
- [98] STATISTISCHES BUNDESAMT DEUTSCHLAND: *2013: Mehr Unfälle, aber weniger Verkehrstote denn je*. Pressemitteilung Nr. 238/14, Juli 2014.
- [99] STATISTISCHES BUNDESAMT DEUTSCHLAND: *Verkehrsunfälle - Zeitreihen 2014*. Fachserie 8 Reihe 7 Verkehrsunfälle, Juli 2015.
- [100] STILLER, C., S. KAMMEL, I. LULCHEVA . J. ZIEGLER: *Probabilistische Methoden in der Umfeldwahrnehmung Kognitiver Automobile*. at - Automatisierungstechnik, 56(11):563–574, 2008.
- [101] TANZMEISTER, G., M. FRIEDL, D. WOLLHERR . M. BUSS: *Path Planning on Grid Maps with Unknown Goal Poses*. . *Conference on Intelligent Transportation Systems*, 2013.
- [102] THRUN, S., W. BURGARD . D. FOX: *Probabilistic Robotics*. Intelligent Robotics and Autonomous Agents. MIT Press, 2005.
- [103] TURRI, V., A. CARVALHO, H. TSENG, K. H. JOHANSSON . F. BORRELLI: *Linear Model Predictive Control for Lane Keeping and Obstacle Avoidance on Low Curvature Roads*. . *2013 16th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems*, . 378–383. IEEE.
- [104] URMSON, C., J. ANHALT, D. BAGNELL, C. BAKER, R. BITTNER, M. CLARK, J. DOLAN, D. DUGGINS, T. GALATALI, C. GEYER .: *Autonomous driving in urban environments: Boss and the Urban Challenge*. Journal of Field Robotics, 25(8), 2008.
- [105] WARMAN, M.: *Google's robot cars pass driving test*. The Telegraph, May 2012.
- [106] WEI, J., J. M. SNIDER, T. GU, J. M. DOLAN . B. LITKOUHI: *A behavioral planning framework for autonomous driving*. . *Intelligent Vehicles Symposium Proceedings, 2014 IEEE*, . 458–464. IEEE, 2014.

- [107] WERLING, M.: *Ein neues Konzept für die Trajektoriengenerierung und -stabilisierung in zeitkritischen Verkehrsszenarien*. Dissertation, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), 2010.
- [108] WERLING, M.: *Verhaltensgenerierung für Fahrzeuge*, 2015. Vorlesungsskript SS2015, KIT.
- [109] WERLING, M.: *Optimale Fahreingriffe für Sicherheits- und Komfortsysteme*. DeGruyter Oldenbourg, 2017.
- [110] WERLING, M., T. GINDELE, D. JAGSZENT . L. GRÖLL: *A Robust Algorithm for Handling Moving Traffic in Urban Scenarios*. . *Intelligent Vehicles Symposium*, . 1108–1112. IEEE, 2008.
- [111] WERLING, M., L. GRÖLL . G. BRETTHAUER: *Trajektorienregelung von zeitkritischen Fahrmanövern*. at - *Automatisierungstechnik*, 60(1):28–37, 2012.
- [112] WERLING, M., S. KAMMEL, J. ZIEGLER . L. GRÖLL: *Optimal trajectories for time-critical street scenarios using discretized terminal manifolds*. *The International Journal of Robotics Research*, 31(3):346–359, 2012.
- [113] WERLING, M. . D. LICCARDO: *Automatic collision avoidance using model-predictive online optimization*. . *Conference on Decision and Control*, . 6309–6314. IEEE, 2012.
- [114] WERLING, M., J. ZIEGLER, S. KAMMEL . S. THRUN: *Optimal Trajectory Generation for Dynamic Street Scenarios in a Frenet Frame*. . *International Conference on Robotics and Automation*, . 987–993. IEEE, 2010.
- [115] WIKIBOOKS: *Control Systems/Time Variant System Solutions* — *Wikibooks, The Free Textbook Project*, 2017. [Online; accessed 17-August-2018].
- [116] WINKLE, T.: *Sicherheitspotenzial automatisierter Fahrzeuge: Erkenntnisse aus der Unfallforschung*. . *Autonomes Fahren*, . 351–376. Springer, 2015.
- [117] WINNER, H., S. HAKULI, F. LOTZ . C. SINGER: *Handbuch Fahrerassistenzsysteme*. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2015.
- [118] WULF, F.: *Analyse des Sicherheitsgewinns durch Teilautomation am Beispiel eines Stauassistenten*. Dissertation, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), 2015.

- [119] ZIEGLER, J., P. BENDER, T. DANG . C. STILLER: *Trajectory planning for Bertha - A local, continuous method.* . *Intelligent Vehicles Symposium Proceedings, 2014 IEEE*, . 450–457. IEEE, 2014.
- [120] ZIEGLER, J., P. BENDER, M. SCHREIBER, H. LATEGAHN, T. STRAUSS, C. STILLER, T. DANG, U. FRANKE, N. APPENRODT, C. G. KELLER .: *Making bertha drive - An autonomous journey on a historic route.* *Intelligent Transportation Systems Magazine, IEEE*, 6(2):8–20, 2014.
- [121] ZIEGLER, J. . C. STILLER: *Fast Collision Checking for Intelligent Vehicle Motion Planning.* . *Intelligent Vehicles Symposium*, . 518–522. IEEE, 2010.
- [122] ZIEGLER, J., M. WERLING . J. SCHRÖDER: *Navigating car-like robots in unstructured environments using an obstacle sensitive cost function.* . *Intelligent Vehicles Symposium*, . 787–791. IEEE, 2008.



# Eigene Veröffentlichungen

## Journalartikel

- [123] GUTJAHR, B., L. GRÖLL . M. WERLING: *Constrained Trajectory Optimization for Lateral Vehicle Guidance Using a Linear Time-Varying MPC Scheme*. IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems, PP(99):1–10, 2016.
- [124] GUTJAHR, B., C. PEK, L. GRÖLL . M. WERLING: *Recheneffiziente Trajektorienoptimierung für Fahrzeuge mittels quadratischem Programm*. at-Automatisierungstechnik, 64(10):786–794, 2016.
- [125] WERLING, M., B. GUTJAHR, S. GALLER . L. GRÖLL: *Riccati-Trajektorienplanung für den aktiven Fußgängerschutz*. at - Automatisierungstechnik, 63(3):202–210, 2015.

## Konferenzbeiträge

- [126] GUTJAHR, B. . M. WERLING: *Automatic collision avoidance during parking and maneuvering - An optimal control approach*. . Intelligent Vehicles Symposium Proceedings, 2014 IEEE, . 636–641. IEEE, 2014.
- [127] GUTJAHR, B. . M. WERLING: *Optimale Fahrzeugquerführung mittels linearer, zeitvarianter MPC*. . 10. Workshop Fahrerassistenzsysteme, . 61–70, 2015.

Moderne automatisierte Fahrfunktionen zielen auf dem Weg zum fahrerlosen Fahren darauf ab, immer mehr Verkehrssituationen und immer komplexere Manöver sicher und komfortabel beherrschen zu können. Neben Verbesserungen in der Umfeldwahrnehmung sind dazu leistungsstarke Algorithmen zur Bewegungsplanung in dynamischen und zeitkritischen Fahrsituationen essentiell. Allerdings stellt die wirtschaftlich in ein Fahrzeug integrierbare Rechenleistung für etablierte Methoden der Trajektorienplanung eine große Hürde dar.

Ausgehend von der Analyse bestehender Bewegungsplanungsverfahren wird die Methodik der linear-quadratischen Optimierung zur recheneffizienten Trajektorienplanung im Kontext des automatisierten Fahrens abgeleitet. Durch den konsequenten Einsatz dieser Methodik werden neue Problemformulierungen zur Fahrzeuglängs- und -querplanung hergeleitet, die durch den anwendungsspezifischen Einsatz von Schlupfvariablen eine natürliche Fahrweise ermöglichen. Mittels Dekomposition und Kontraktion lässt sich damit das nichtlineare Bewegungsplanungsproblem besonders recheneffizient lösen. Die praktische Leistungsfähigkeit der erarbeiteten Trajektorienplanungsmethodik wird im Realversuch für unterschiedliche Manöver und Dynamikbereiche demonstriert.



ISBN 978-3-7315-0922-6



9 783731 509226 >