

Vergleich numerischer Simulationsmethoden für die Erschütterungsreduktion bei Windenergieanlagen

Comparison of numerical simulation methods
for ground motion reduction at wind turbines

Masterarbeit
von

Theresa Panther

Geophysikalisches Institut

durchgeführt am Institut für Boden- und Felsmechanik

Referent:	Prof. Dr. Thomas Bohlen
Korreferent:	Prof. Dr.-Ing. habil. Theodoros Triantafyllidis
Betreuender Mitarbeiter:	Dr.-Ing. Gerhard Huber

Bearbeitungszeit: 09.01.2017 – 24.04.2018

Abstract

In this thesis different numerical simulation methods are compared by calculation of ground motion due to wind turbines. The displacement of an infinite, homogenous, isotropic, linear elastic half space is determined by semi-analytical calculation, by finite element method and by boundary element method. Influences due to boundary conditions and numerical artefacts are identified by comparing the results.

Furthermore it is examined, whether these ground motions can be reduced by segments placed around the foundation of the wind turbine, which are loaded inversly-phased to the foundation.

Überblick

In dieser Arbeit werden numerische Simulationsmethoden anhand der Berechnung von durch Windenergieanlagen verursachten Erschütterungen verglichen. Die Verschiebungen in einem unendlich ausgedehnten, homogenen, isotropen, linear elastischen Halbraum werden semi-analytisch, mit der Finite-Elemente-Methode und mit der Boundary-Element-Methode berechnet. Durch den Vergleich der Ergebnisse werden Einflüsse der Randbedingungen und numerische Artefakte bestimmt.

Zudem wird untersucht, ob diese Erschütterungen durch gegenphasige Anregung von Ringsegmenten, die um das Fundament der Windenergieanlage angeordnet sind, reduziert werden können.

Danksagung

Zuerst möchte ich mich bei Herrn Dr.-Ing Gerhard Huber für die Betreuung dieser Arbeit bedanken. Die Diskussionen mit ihm haben mein theoretisches Wissen erweitert und diese Arbeit sehr bereichert.

Ich möchte mich auch bei Professor Thomas Bohlen und Professor Theodoros Triantafyllidis für die Arbeit als Referenten sowie für die Betreuung bedanken.

Zudem möchte ich mich bei Stylianos Chrisopoulos und bei Theodoros Gkortsas für die Hilfe bei der Berechnung mit der Boundary-Element-Methode bedanken. Sie haben mich nicht nur bei der Erstellung des Skripts unterstützt, sondern mir auch viele Fragen zum theoretischen Verständnis der BEM beantwortet.

Bei Ivo Kimmig und Carlos Eduardo Grandas Tavera möchte ich mich für die Einführung in das Programm Abaqus bedanken.

Bedanken möchte ich mich auch bei Thomas Gentner für die Verwaltung des Servers, ohne diesen die Arbeit so nicht möglich gewesen wäre.

Zuletzt möchte ich mich auch bei meiner Familie und Freunden bedanken, die mich in dieser Zeit unterstützt haben.

Erklärung zur Selbstständigkeit

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbstständig verfasst habe und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe, die wörtlich oder inhaltlich übernommenen Stellen als solche kenntlich gemacht und die Satzung des KIT zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis in der gültigen Fassung vom 27.11.2014 beachtet habe.

Karlsruhe, den 24.04.2018, _____
Theresa Panther

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Überlegungen zur Lösung der Aufgabenstellung	3
2.1. Quelle und Übertragungsweg	3
2.2. Vorgehensweise	3
2.3. Anforderungen für die Anwendung	4
3. Theoretische Grundlagen	7
3.1. Fundament	7
3.1.1. Schlaffes Fundament	7
3.1.2. Starres Fundament	8
3.2. Eigenschaften des realen Bodens	9
3.2.1. Einfluss der Scherdehnungsamplitude γ	9
3.2.2. Einfluss des mittleren Drucks \bar{p}	10
3.2.3. Einfluss der Porenzahl e	10
3.3. Lamb'sches Problem	11
3.4. Lösung von Pekeris	12
3.4.1. Vertikalverschiebung	13
3.4.2. Horizontalverschiebung	13
3.5. Lösung von Chao	13
3.5.1. Radialverschiebung	14
3.6. Tangentialverschiebung	14
3.7. Vertikalverschiebung	15
3.8. Grundlagen zur Finiten-Elemente-Methode (FEM)	15
3.8.1. Variationsrechnung	15
3.8.2. Energiemethoden/Hamiltonsches Prinzip	16
3.8.3. Rayleigh-Ritz-Verfahren	20
3.8.4. Gaußsches Eliminationsverfahren	22
3.8.5. Lysmer-Randbedingung	23
3.9. Grundlagen zur Boundary-Elemente-Methode (BEM)	25
3.9.1. Linear elastisches Material	25
3.9.2. Vergleich von Boundary-Elemente-Methode und Finite-Elemente-Methode	27
4. Semi-analytische Berechnung der Verschiebung	29
4.1. Verschiebung $u(\tau)$ nach Pekeris und Chao für Punktquelle	29
4.1.1. Vertikale Verschiebung $u_{zz}(\tau)$ bei vertikaler Belastung	29
4.1.2. Radiale Verschiebung $u_{rz}(\tau)$ bei vertikaler Belastung	30
4.1.3. Vertikale Verschiebung $u_{zx}(\tau)$ bei horizontaler Belastung	30
4.1.4. Radiale Verschiebung $u_{rx}(\tau)$ bei horizontaler Belastung	30
4.1.5. Tangentiale Verschiebung $u_{tx}(\tau)$ bei horizontaler Belastung	30
4.1.6. Vergleich der statischen Verschiebung mit Lösung von Boussinesq	30

4.2.	Verschiebung $u_{zz}(t)$ für Punktquelle	32
4.3.	Verschiebung bei Belastung eines schlaffen Fundaments mit $F(t) = \Theta(t)$. .	32
4.4.	Verschiebung bei Belastung eines Fundaments mit $F(t) = F_0 f(t)$	34
4.5.	Spektren der Verschiebungen	42
4.6.	Belastung eines Fundaments durch Momente $M(t)$	43
5.	Berechnung der Verschiebung mit der Finite-Elemente-Methode (FEM)	45
5.1.	Modellbeschreibung	45
5.1.1.	Modell A	46
5.1.2.	Modell B	47
5.1.3.	Modell C	47
5.1.4.	Modell D	48
5.1.5.	Modell als Masse-Dämpfer-System	50
5.2.	Schlaffes Fundament	53
5.2.1.	Einfluss der Lysmer-Randbedingung anhand Modell A	53
5.2.2.	Minimierter Einfluss der Lysmer-Randbedingung anhand Modell B .	56
5.2.3.	Vergleich mit semi-analytischer Lösung	67
5.3.	Starres Fundament	72
5.3.1.	Belastung durch vertikale Kraft F_z	72
5.3.2.	Belastung durch Moment $M(t)$	78
6.	Vergleich der dynamischen Steifigkeit	93
7.	Korrekturvorschlag für Lysmer-Randbedingungen	97
8.	Berechnung der Verschiebung mit der Boundary-Elemente-Methode	101
8.1.	Modellerstellung	101
8.2.	Schlaffes Fundament	102
8.3.	Vergleich mit semi-analytischer Lösung	103
9.	Vergleich von semi-analytischer Berechnung, Finite-Elemente-Methode und Boundary-Element-Methode	109
10.	Erschütterungsreduktion durch gegenphasige Anregung	113
11.	Einfluss der Variation der elastischen Parameter	123
12.	Zusammenfassung	127
13.	Ausblick	129
	Literaturverzeichnis	131
	Anhang	133
A.	Abbildungen zu Kapitel 5 (Reflexionen) und zu Kapitel 10	133
B.	Lösung von Pekeris und Chao	139
B.1.	Lösung von Pekeris	139
B.1.1.	Lösung der Vertikalverschiebung	142
B.1.2.	Horizontalverschiebung	146
B.2.	Lösung von Chao	150
C.	Programme	159

Abbildungsverzeichnis

2.1. Skizze einer WEA	3
3.1. Modell des Halbraums zur Beschreibung von Boussinesqs Lösungen.	8
3.2. Verschiebung u_z und Spannung σ beim schlaffen und starren Fundament.	9
3.3. Abhängigkeit des Schubmoduls G von der Scherdehnungsamplitude γ (a), dem mittleren Druck \bar{p} (b) und der Porenzahl e (c).	11
3.4. Koordinatensystem für die Lösung des Lamb'schen Problems. Das Zylinderkoordinatensystem ist gegenüber dem kartesischen Koordinatensystem um den Winkel θ gedreht. Die horizontale Belastung findet entlang der x-Achse statt, die radiale Verschiebung wird dabei in Abhängigkeit des Winkels θ berechnet.	12
3.5. Zweidimensionale Struktur für die BEM.	25
4.1. Verschiebung $u_{zz}(\tau)$, $u_{rz}(\tau)$, $u_{zr}(\tau)$, $u_{rr}(\tau)$ und $u_{tr}(\tau)$ bei vertikaler und horizontaler Belastung.	31
4.2. Vertikale Verschiebung $u_{zz}(t)$ in Abhängigkeit der Entfernung r	33
4.3. Diskretisierte Fundamentfläche.	34
4.4. Verschiebung $u_{\Theta zz}$	35
4.5. Verschiebung $u_{\delta zz}$	36
4.6. Verschiebung $u_{\delta zz}(t)$ in Abhängigkeit der Entfernung r	36
4.7. auf das Fundament wirkende Kraft $F(t)$	37
4.8. Verschiebung u_z	38
4.9. Verschiebung u_z in Abhängigkeit der Frequenz f_i und der Entfernung r	40
4.10. Verschiebung u_x in Abhängigkeit der Frequenz f_i und der Entfernung r	41
4.11. Amplitudenspektrum der Verschiebung $u_{\delta zz}$ und Kraft $F(t)$	43
4.12. Spektren der Verschiebung u_z bei unterschiedlichen Anregungsfrequenzen f_i	44
5.1. Modell A	47
5.2. Modell B und Modell C	48
5.3. Querschnitt eines starren Fundaments, das durch ein Moment M belastet wird.	49
5.4. Modell D	50
5.5. Modell als Reihenschaltung aus Masse und Dämpfer.	51
5.6. Betrag (a) und Phase (b) der Antwortfunktion $ T(\omega) $	52
5.7. Vertikalverschiebung u_z bei ausschließlicher Wirkung der Dämpfungskraft F_d	53
5.8. Verschiebung u_z im Modell A.	54
5.9. Verschiebung u_z an der Oberseite und Unterseite von Modell A.	56
5.10. Verschiebung u_z eines schlaffen Fundaments an der Oberfläche.	58
5.11. Verschiebung u_z eines schlaffen Fundaments in der Tiefe.	59
5.12. Verschiebung u_z eines schlaffen Fundaments in Abhängigkeit der Frequenz f_i und der Entfernung r (FEM).	60

5.13. Verschiebung u_x eines schlaffen Fundaments in Abhängigkeit der Frequenz f_i und der Entfernung r (FEM).	63
5.14. Partikelbewegung in Abhängigkeit der Entfernung r	64
5.15. Verschiebung u_z eines schlaffen Fundaments in Abhängigkeit der Frequenz f_i und der Tiefe z (FEM).	66
5.16. Verschiebung u_x eines schlaffen Fundaments in Abhängigkeit der Frequenz f_i und der Tiefe z (FEM).	68
5.17. Vergleich der Verschiebung u_z (semi-analytisch und FEM).	70
5.18. Vergleich der Verschiebung u_x (semi-analytisch und FEM).	71
5.19. Verschiebung u_z eines starren Fundaments in Abhängigkeit der Frequenz f_i und der Entfernung r (FEM).	73
5.20. Verschiebung u_x eines starren Fundaments in Abhängigkeit der Frequenz f_i und der Entfernung r (FEM).	74
5.21. Vergleich der Verschiebung u_z von schlaffem und starrem Fundament.	76
5.22. Vergleich der Verschiebung u_x von schlaffem und starrem Fundament.	77
5.23. Reflektierte P-Welle an der Oberfläche.	79
5.24. Verschiebung u_z eines starren Fundaments bei Belastung durch ein Moment an der Oberfläche.	80
5.25. Verschiebung u_x eines starren Fundaments bei Belastung durch ein Moment an der Oberfläche.	81
5.26. Verschiebung u_y eines starren Fundaments bei Belastung durch ein Moment an der Oberfläche.	82
5.27. Verschiebung u_z eines starren Fundaments bei Belastung durch ein Moment in der Tiefe.	83
5.28. Verschiebung u_y eines starren Fundaments bei Belastung durch ein Moment in der Tiefe.	84
5.29. Verschiebung u_z eines starren Fundaments bei Anregung durch ein Moment $M(t)$ in Abhängigkeit der Frequenz f_i und der Entfernung r (FEM).	86
5.30. Verschiebung u_y eines starren Fundaments bei Anregung durch ein Moment $M(t)$ in Abhängigkeit der Frequenz f_i und der Entfernung r (FEM).	88
5.31. Verschiebung u_y eines starren Fundaments bei Anregung durch ein Moment $M(t)$ in Abhängigkeit der Frequenz f_i und der Entfernung r (FEM).	89
5.32. Vergleich der Verschiebung u_z bei Anregung durch eine vertikale Kraft $F(t)$ und ein Moment $M(t)$	90
5.33. Vergleich der Verschiebung u_y bei Anregung durch eine vertikale Kraft $F(t)$ und ein Moment $M(t)$	91
6.1. Federparameter k_{zz} und Dämpfungsparameter c_{zz}	95
7.1. Verschiebung u_z eines starren Fundaments für $f_1 = 1/8$ Hz in Abhängigkeit der Entfernung r	97
7.2. Numerisch und analytisch berechnete Verschiebung u_{zD} am Dämpfer.	98
7.3. Korrigierte Vertikalverschiebung u_{zk} für $f_1 = 1/8$ Hz in Abhängigkeit der Entfernung r	99
8.1. Verschiebung u_z eines schlaffen Fundaments in Abhängigkeit der Frequenz f_i und der Entfernung r (BEM).	104
8.2. Verschiebung u_x eines schlaffen Fundaments in Abhängigkeit der Frequenz f_i und der Entfernung r (BEM).	105
8.3. Vergleich der Verschiebung u_z (semi-analytisch und BEM).	107
8.4. Vergleich der Verschiebung u_x (semi-analytisch und BEM).	108
10.1. Konstellation Fundament und Ringsegmente zur Erschütterungsreduktion.	114

10.2. Verschiebung u_z nach Erschütterungsreduktion mit $r = 100$ m $b = 20$ m und $d = 2$ m.	116
10.3. Verschiebung u_z von Fundament und Segmenten mit $r = 100$ m $b = 20$ m und $d = 2$ m.	117
10.4. Verschiebung u_z nach Erschütterungsreduktion mit $r = 100$ m $b = 5$ m und $d = 2$ m.	118
10.5. Verschiebung u_z nach Erschütterungsreduktion mit $r = 100$ m $b = 20$ m und $d = 10$ m.	119
10.6. Verschiebung u_z nach Erschütterungsreduktion mit $r = 1000$ m $b = 20$ m und $d = 2$ m.	120
10.7. Verschiebung u_z nach Erschütterungsreduktion mit $r = 100$ m $b = 20$ m und $d = 2$ m und variabler Frequenz $f_i(t)$	121
A.1. Verschiebung u_z eines starren Fundaments und reflektierte P-Welle in Abhängigkeit der Frequenz f_i und der Entfernung r	134
A.2. Verschiebung u_x eines starren Fundaments und reflektierte P-Welle in Abhängigkeit der Frequenz f_i und der Entfernung r	135
A.3. Verschiebung u_z nach Erschütterungsreduktion mit $r = 100$ m $b = 5$ m und $d = 2$ m.	136
A.4. Verschiebung u_z nach Erschütterungsreduktion mit $r = 100$ m $b = 20$ m und $d = 10$ m.	137
A.5. Verschiebung u_z nach Erschütterungsreduktion mit $r = 1000$ m $b = 20$ m und $d = 2$ m.	138

Tabellenverzeichnis

2.1. Möglichkeiten der semi-analytischen und numerischen Methoden. Das starre Fundament wird dabei durch Verknüpfung einzelner Knoten erzeugt.	4
4.1. Periodendauer T und durch die Laufzeit Δt der Rayleigh-Welle durch das Fundament hervorgerufene Phasenverschiebung φ der Verschiebung u_z für die Anregungsfrequenzen f_i	39
5.1. Vergleich von Größe, Fundamentradius R , räumliche Diskretisierung Δx , zeitliche Diskretisierung Δt , Dichte ρ , Schubmodul G , Poissonzahl ν und Fundamentsteifigkeit der Modelle A, B, C und D.	49
9.1. Vergleich der semi-analytischen Berechnung und der Berechnung mit der FEM sowie mit der BEM.	112
10.1. Phasenverschiebung φ_t zwischen der von Fundament und Segment S_2 verursachten Verschiebung u_{zF} und u_{zS_2} für unterschiedliche Anregungsfrequenzen f_i	115

1. Einleitung

Die Nutzung von Windenergie gewinnt angesichts beschränkter fossiler Energiequellen weltweit an Bedeutung. Auch in Baden-Württemberg wird die Windenergie ausgebaut. Jedoch sind Windenergieanlagen (WEA) aufgrund von Schall-, Erschütterungs- und Lichtmissionen in der Gesellschaft umstritten.

Im Jahr 2016 waren in Baden-Württemberg 563 Windenergieanlagen (WEA) in Betrieb, 120 Anlagen wurden in Betrieb genommen und weitere 194 Anlagen wurden genehmigt [Win]. Mit dem weiteren Ausbau der Windenergie werden WEA auch in der Nähe von Wohngebieten gebaut. Dabei gilt ein Richtwert von 700 m Mindestabstand zwischen Wohnhäusern und WEA aufgrund von Schallimmissionsschutz [LUB16].

Von WEA gehen neben Schallimmission auch Erschütterungsmissionen aus. Untersuchungen an einer WEA ergaben, dass die Bodenschwinggeschwindigkeit bereits in einer Entfernung von 64 m unter der Fühlschwelle vom Menschen liegt. Diese entspricht einer Bodenschwinggeschwindigkeit von $v = 0,15 - 0,3 \text{ mm/s}$ [LUB16]. In einer Entfernung von 285 m konnten keine von der WEA erzeugten Erschütterungen mehr gemessen werden [LUB16]. (Diese Untersuchung ist jedoch aufgrund der geringen Anzahl der untersuchten WEA und der Messdauer von 130 s nicht repräsentativ).

Erschütterungen dieser Größenordnung sind für Wohngebäude nicht relevant, erschütterungsempfindliche Produktionsstätten oder seismische Stationen werden jedoch erheblich gestört. Daher wird trotz der geringen Belastung untersucht, ob diese Erschütterungen durch die gegenphasige Anregung eines Ringsegments, welches um das Fundament der WEA angeordnet ist, verringert werden können. Dazu soll das ähnlich dem bei Noise-Cancelling-Kopfhörern genutzte Prinzip angewendet werden. Dabei werden Störgeräusche gemessen und dazu gegenphasige Signale erzeugt, sodass die Störgeräusche durch destruktive Interferenz ausgelöscht werden.

Um die durch eine WEA erzeugten Verschiebungen im Untergrund und an der Oberfläche zu berechnen, gibt es neben der semi-analytischen Lösung des Lamb'schen Problems auch numerische Verfahren, die immer mehr an Bedeutung gewinnen. Eine numerische Simulation kann mit der Finite-Elemente-Methode (FEM), der Boundary-Elemente-Methode (Randelemente-Methode, BEM) oder der Finiten-Differenzen-Methode (FD) durchgeführt werden. Dabei werden die Differentialgleichungen, die das zu lösende Problem beschreiben, unterschiedlich gelöst. Daher unterscheiden sich auch deren Randbedingungen für einen unendlich ausgedehnten Halbraum. Um zu bestimmen, welches Verfahren für diese Fragestellung am besten geeignet ist, werden die semi-analytischen, die mit der FEM und die mit der BEM berechneten Ergebnisse sowie die benötigte Rechenzeit und Rechenleistung verglichen. Durch diesen Vergleich werden Einflüsse der Randbedingungen und numerischer Artefakte auf die jeweilige Simulation bestimmt. Das am besten geeignete Verfahren wird dann zur Berechnung der gegenphasigen Anregung verwendet.

Diese Arbeit verknüpft numerische Untersuchungen mit Erschütterungsberechnungen und prüft im Allgemeinen, welche Verfahren zur Berechnung von Erschütterungen im unendlich

ausgedehnten Halbraum geeignet sind und ob eine gegenphasige Anregung eine Erschütterungsreduktion bewirkt. Es werden also keine Erschütterungen für eine konkrete, reale WEA mit bestimmten Parametern (Nabenhöhe, Rotordurchmesser, Gründung, Boden, Bodenverbesserung im Fundamentbereich) berechnet, sondern diese Arbeit bildet die Grundlage und trifft Vorüberlegungen, um eine solche Berechnung durchzuführen.

2. Überlegungen zur Lösung der Aufgabenstellung

2.1. Quelle und Übertragungsweg

Eine Wind-Energie-Anlage (WEA) besteht im Wesentlichen aus einem Rotor mit üblicherweise drei Rotorblättern, einer Gondel und einem Turm auf einem Fundament. Über das Fundament werden die Erschütterungen der WEA in den Untergrund übertragen, die Luftschalleinkopplung in den Boden wird in dieser Arbeit nicht berücksichtigt. Anstelle der WEA wird in den numerischen Berechnungen nur das Fundament vereinfachend betrachtet, auf das Kräfte F_z und Momente M einer WEA wirken (siehe Abbildung 2.1). Der Frequenzbereich des auf das Fundament aufgetragenen Kraftsignals $F(t)$ entspricht dabei dem bei einer realen WEA auftretenden Frequenzbereich.

Das Fundament wird in der numerischen Simulation stark vereinfacht betrachtet. Dies führt zur Verwendung von Lastflächen anstelle eines Fundaments, die durch Verknüpfung bestimmter Knoten oder Elemente an der Oberfläche des Halbraums erzeugt werden (siehe Kapitel 5). Mit der Verwendung von Lastflächen wird die Kopplung von Fundament und Halbraum und somit mögliche Probleme mit Kontakten der verschiedenen Körper vermieden. Im Unterschied zum massebehafteten Fundament ist bei der masselosen Lastfläche kein Resonator mit bestimmten Eigenfrequenzen vorhanden. Alle beobachteten Verschiebungen werden durch den Halbraum und die Randbedingungen verursacht, nicht durch Eigenschwingungen des Fundaments.

2.2. Vorgehensweise

Zunächst wird eine semi-analytische Lösung für eine Belastung eines schlaffen Fundaments mit einer vertikalen Kraft $F_z(t)$ für einen linear elastischen, homogenen, isotropen Halbraum

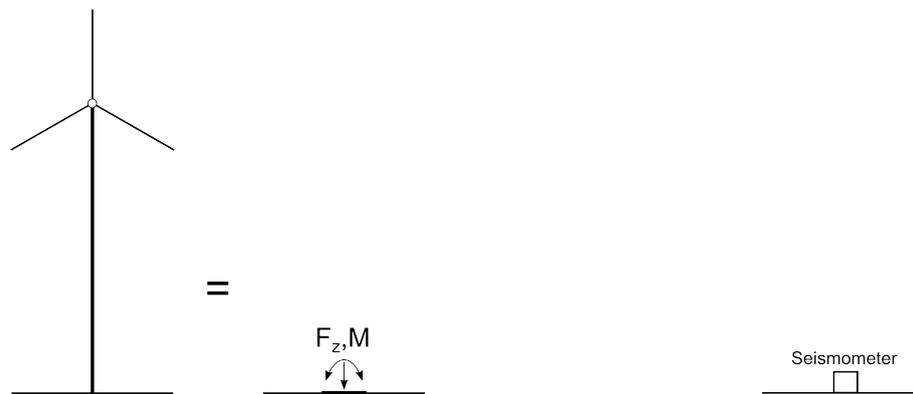


Abbildung 2.1.: Die Wind-Energie-Anlage (WEA), bestehend aus Fundament, Turm, Gondel und Rotor wird vereinfacht durch ein Fundament dargestellt, auf das eine vertikale Kraft F_z und ein Moment M wirken.

berechnet. Die Randbedingungen sind dabei exakt.

Eine Lösung desselben Problems wird dann mit der Finiten-Elemente-Methode berechnet. Dabei werden üblicherweise die Randbedingungen nach Lysmer verwendet. Durch den Vergleich der numerischen Lösung mit der semi-analytischen Lösung wird der Einfluss dieser Randbedingungen untersucht. Ist dieser Einfluss bekannt, wird die Belastung eines starren Fundaments mit einer vertikalen Kraft $F_z(t)$ und einem Moment $M(t)$ simuliert. Zudem können Inhomogenitäten wie Bodenverbesserungen im Fundamentbereich und die Tiefenabhängigkeit des Schubmoduls $G(z)$ berücksichtigt werden.

Das beschriebene Problem kann mit unterschiedlichen numerischen Verfahren gelöst werden. Zunächst wird die Lösung mithilfe der Finiten-Elemente-Methode berechnet. Die Belastung eines schlaffen Fundaments mit einer vertikalen Kraft $F_z(t)$ wird zusätzlich mit der Boundary-Elemente-Methode berechnet, um den Einfluss der unterschiedlichen Randbedingungen zu vergleichen. Mit einem weiteren Vergleich mit den Ergebnissen der Finiten-Differenzen könnten auch die Randbedingungen dieser Methode untersucht werden. Tabelle 2.1 zeigt, welche Anregung verschiedener Fundamente mit den unterschiedlichen semi-analytischen und numerischen Verfahren berechnet werden kann.

Zusätzlich wird untersucht, ob Erschütterungen der WEA durch gegenphasige Anregung von ringförmigen Segmenten um das Fundament reduziert werden können.

2.3. Anforderungen für die Anwendung

Die numerische Simulation mit der Finiten Elemente Methode wird mit dem am IBF (Institut für Boden- und Felsmechanik) verfügbaren Programm Abaqus durchgeführt.

Trotz radialsymmetrischer Geometrie des Problems wird ein quaderförmiges, kein zylinderförmiges Modell gewählt. Die Größe des Modells, der Elemente und des Fundaments sollen dabei variabel sein. Daher werden Knoten und Elemente des Modells mit den zu variierenden Größen in Matlab erzeugt und in Abaqus eingelesen. Eine solche Variation einzelner Modellgrößen mithilfe der graphischen Benutzeroberfläche CAE würde wesentlich mehr Zeit in Anspruch nehmen. Das Modell wird aus würfelförmigen Kontinuumselementen erstellt, deren Größe durch die Frequenz f der anregenden Kraft bestimmt wird.

Das Modell wird aus würfelförmigen Elementen erstellt, da bei Verwendung von axialsymmetrischen Elementen die Größe dieser Elemente mit dem Radius R des Modells zunimmt und somit die räumliche Diskretisierung von der Entfernung zum Fundament abhängt. Um dies zu vermeiden hätten neben axialsymmetrischen Elementen Dreieckselemente eingesetzt werden müssen. Eine Änderung der Elementgröße wäre dann bei Verwendung verschiedener Elementtypen nicht einfach möglich gewesen. Zudem liegt bei der Belastung durch ein Moment $M(t)$ kein radialsymmetrisches, sondern ein spiegelsymmetrisches Problem vor. Ein zylindersymmetrisches Modell ist gegenüber einem Modell in kartesischen Koordinaten

Tabelle 2.1.: Möglichkeiten der semi-analytischen und numerischen Methoden. Das starre Fundament wird dabei durch Verknüpfung einzelner Knoten erzeugt.

	Schlaffes Fundament	Starres Fundament	Starres Fundament
	F_z	F_z	M
Semi-analytisch	ja	nein	nein
FEM	ja	ja	ja
BEM	ja	nein	nein
FD	ja	nein	nein

bei dieser Belastung nicht vorteilhaft. Die Randbedingungen am Fundament werden bei Belastung durch ein Moment $M(t)$ durch die Verschiebung des Fundaments definiert. Dies ist bei würfelförmigen Elementen möglich, bei radialsymmetrischen Elementen ist dies aufgrund der Lage der Knoten nicht möglich.

Durch ein Modell in kartesischen Koordinaten wird das runde Fundament durch rechteckige Elementoberflächen genähert. Zudem sind Reflexionen am Modellrand (mit Lysmer-Randbedingungen, siehe Kapitel 3.8.5) durch Wellen mit Einfallswinkel $\alpha > 0^\circ$ möglich.

Um die numerische Simulation an einem homogenen, isotropen, linear elastischen Halbraum durchzuführen, müssen die Dichte ρ und der Schubmodul G Materialkonstanten sein. Dies widerspricht den Eigenschaften von realen Böden (siehe Kapitel 3.2)!

Der Schubmodul G wird daher in der numerischen Simulation zunächst als Materialkonstante betrachtet, in einem weiteren Schritt wird die Tiefenabhängigkeit des Schubmoduls $G(z)$ diskutiert.

Auf das Modell wirkt keine Gravitationskraft, da unter Eigengewicht die Dichte ρ und der Schubmodul G zunehmen würden. Das Modell hat somit eine Masse m , jedoch kein Gewicht.

Aufgrund der Symmetrie des Modells (Radialsymmetrie bei Belastung mit einer vertikalen Kraft F_z bzw. Spiegelsymmetrie bei Belastung durch ein Moment $M(t)$) wird ein Viertel bzw. die Hälfte des Halbraums und des Fundaments modelliert. Damit wird die Anzahl der Freiheitsgrade und somit auch die Rechenzeit und benötigte Speicher reduziert.

Die Simulation wird im Zeitbereich durchgeführt und gelöst, da so die einzelnen Wellentypen voneinander unterschieden werden können. Im Frequenzbereich können P-Welle, S-Welle und Rayleigh-Welle bei stationär harmonischer Anregung nicht voneinander unterschieden werden, da diese durch die vorgegebene Anregung dasselbe Frequenzspektrum haben.

Ob sich bei mittelwertfreier Anregung nach Ende der Anregung eine statische Verschiebung einstellt, kann nur im Zeitbereich überprüft werden.

Die von der WEA ausgehende Erregung kann zudem besser im Zeitbereich dargestellt werden.

Zur Untersuchung der Randbedingungen wird das Fundament zunächst mit einem mittelwertfreien Kraftsignal $F_z(t)$ angeregt, da somit der Betrag der Verschiebung in positive und negative z-Richtung gleich sein und die statische Verschiebung nach der Anregung verschwinden sollte.

Beim Durchgang eines Rotorblatts am Turm wird eine Kraft F_h mit Frequenzen im Bereich von 1-10 Hz angeregt. Die Eigenfrequenzen einer WEA liegen im Bereich $1/8 - 1/4$ Hz. Somit werden die bei einer WEA auftretenden Frequenzen durch den gewählten Frequenzbereich gut beschrieben. Die unterschiedliche Frequenzen f_i mit $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz der auf das Fundament aufgebrachten Kraft $F(t)$ sind so gewählt, dass sie sich jeweils verdoppeln und dem bei realen WEA auftretenden Frequenzbereich entsprechen.

3. Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden zunächst die Spannungsverteilung und Setzung an der Fundamentsohle von schlaffen und starren Fundamenten hergeleitet.

Die Eigenschaften des realen Bodens und die damit verbundene Abhängigkeit des Schubmoduls von der Scherdehnungsamplitude γ , des mittleren Drucks \bar{p} und der Porenzahl e , die in dieser Arbeit jedoch vernachlässigt werden, werden erläutert.

Zur Berechnung der semi-analytischen Lösung werden dann das Lamb'sche Problem sowie dessen Lösung von Pekeris und Chao eingeführt.

Zuletzt werden für die numerische Simulation die Grundlagen zur Finiten-Elemente-Methode (FEM) und zur Boundary-Elemente-Methode (BEM) beschrieben.

3.1. Fundament

Fundamente haben als Teil der Gründung den Zweck, äußere Belastungen wie Lasten und Kräfte, die auf die WEA wirken, aus dem Bauwerk in den Boden abzugeben. Dabei soll das Fundament die auftretenden Bodenverformungen so klein halten, dass diese für die WEA zulässig sind. Die hierbei verwendete Fundamentplatte verteilt durch ihre im Vergleich zur Querschnittsfläche der WEA wesentlich größere Fläche die Bauwerkslast gleichmäßig in den Untergrund, gleichzeitig schützt sie dadurch die WEA vor Gleichgewichtsverlust und Kippen. Das Fundament ist die Verbindung des Fußes der WEA mit dem Boden. Axialkräfte und Momente, die am Fuß der WEA wirken, werden über das Fundament in den Boden eingeleitet. Die Sohle ist dabei die Fläche zwischen Fundamentunterseite und tragendem Boden.

In der Regel werden dafür runde Stahlbetonplatten mit Durchmesser von 12-20 m eingesetzt. Fundamente lassen sich in Abhängigkeit ihres Steifemoduls $E \cdot I$ in schlaffe und starre Fundamente unterteilen. In dieser Arbeit wird die semi-analytische Lösung nach Pekeris und Chao nur für ein schlaffes Fundament berechnet. Eine semi-analytische Lösung für ein starres Fundament zu berechnen wäre möglich, aber sehr aufwendig, da die aufgebrachte Spannung an jedem Punkt zunächst aus der Verschiebung eines schlaffen Fundaments berechnet werden müsste.

3.1.1. Schlaffes Fundament

Wird auf der Oberfläche eines homogenen, elastisch isotropen Halbraums ein Punkt mit einer zeitlich konstanten, vertikal gerichteten Einzelkraft F belastet, so werden die Verschiebung u_z und Spannung σ an einem beliebigen Punkt P im Halbraum nach Boussinesq [SBVB16, 254] durch die Gleichungen (3.1), (3.2) und (3.3) beschrieben. Werden Verschiebung und Spannung an der Oberfläche betrachtet, so vereinfachen sich diese Gleichungen und lauten

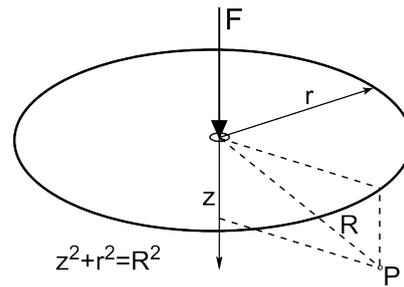


Abbildung 3.1.: Modell des Halbraums zur Beschreibung von Boussinesqs Lösungen.

mit dem Schubmodul G und der Poisson-Zahl ν des Halbraums wie folgt:

$$u_z = \frac{1}{4\pi G} \left(2(1-\nu) \cdot \frac{1}{R} + \frac{z^2}{R^3} \right) \Big|_{z=0} = \frac{3-2\nu}{4\pi G} \frac{1}{r}, \quad (3.1)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{3z^3}{2\pi R^5} \Big|_{z=0} = 0 \quad (3.2)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{2\pi} \left(3 \frac{zr^2}{R^5} - (1-2\nu) \frac{1}{R(z+R)} \right) \Big|_{z=0} = -\frac{2\nu-1}{2\pi} \frac{1}{r^2} \quad (3.3)$$

Abbildung 3.1 zeigt das dazugehörige Modell. Die vertikale Bodenverschiebung u_z und die Spannung σ_{zz} an der Oberfläche, die aufgrund einer Einzellast entstehen, sind in Abbildung 3.2(a)+(b) skizziert. Die Verschiebung u_z nimmt für große r mit $1/r$ ab, die Abnahme der Spannung σ_{zz} ist infinit am Punkt der Belastung, außerhalb ist diese Null.

Um die Bodenverschiebung unter einer mit gleichverteilter Spannung belasteten Fläche aus der Lösung von Boussinesq für die Einzellast herzuleiten, wird die Verschiebung u_z der Punktquelle über die gewünschte Kreisfläche des Fundaments integriert. Das Verhalten dieses Fundaments entspricht einem schlaffen Fundament.

Die Biegesteifigkeit $E \cdot I$ eines schlaffen Fundaments ist klein, daher wird es unter Belastung gekrümmt. Die Spannungsverteilung in der Sohle ist konstant und beträgt $\sigma_{zz} = F/A$. Es entsteht eine Setzungmulde unter dem Fundament, wobei das Maximum der Setzung u_z unter der Fundamentmitte liegt und die Verformung über den Rand des Fundaments hinaus geht. Die Verschiebung u_z und die Spannung σ_{zz} an der Halbraumoberfläche durch Belastung eines schlaffen Fundaments sind in Abbildung 3.2(c)+(d) skizziert.

3.1.2. Starres Fundament

Bei einem starren Fundament wird von einer gleichförmigen Setzung der Fundamentsohle ausgegangen. Um solch eine räumlich konstante Setzung zu erreichen, muss die aufgebrachte Last auf einer kreisförmigen Fläche am Rand viel größer sein als in der Mitte. Um am Fundamentrand exakt die gleichen Setzungen wie in der Fundamentmitte zu erhalten, muss also die Sohlspannung am Rand unendlich groß sein, zur Fundamentmitte hin stark abnehmen und in der Mitte nahezu konstant sein [Ter54, S. 390].

Ein starres Fundament besitzt eine große Biegesteifigkeit $E \cdot I$, daher wird angenommen, dass es sich unter Belastung nicht verformt. An der Fundamentsohle ist die vertikale Verschiebung u_z konstant, es gilt $du_z/dx = 0$. Es gibt dort also keine Scherspannungen und Fundament und Halbraum sind ohne Verbund (geschmiert). Außerhalb des Fundaments wird der Untergrund ebenfalls verformt, jedoch ist hier die Verschiebung kleiner als beim schlaffen Fundament. Die Sohlspannungen sind außerhalb des Fundaments null, am Fundamentrand sind sie theoretisch unendlich groß, praktisch werden sie jedoch endlich. Zur Fundamentmitte hin nehmen die Sohlspannungen stark ab.

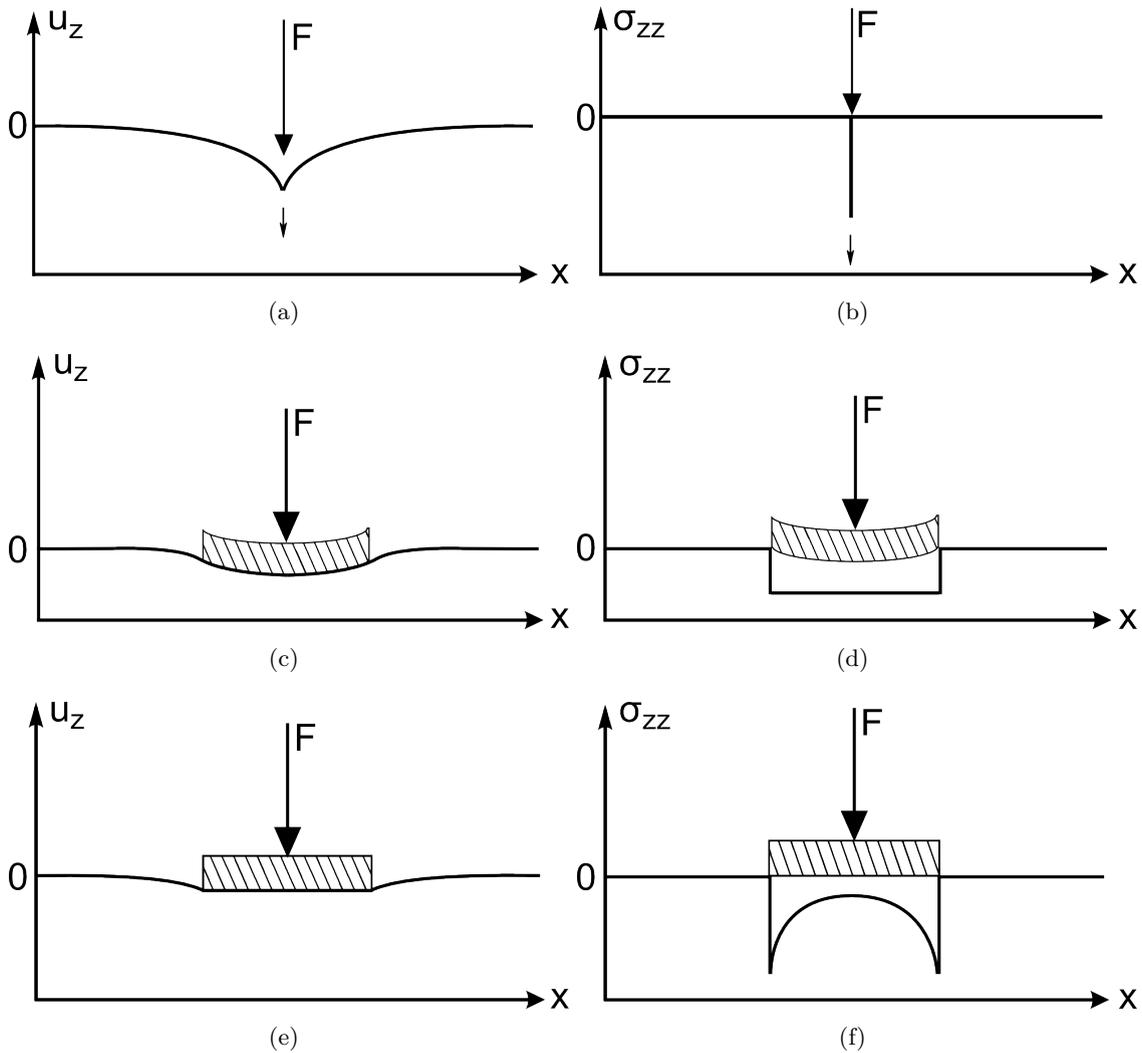


Abbildung 3.2.: Verschiebung u_z und Spannung σ_{zz} an der Oberfläche des Halbraums bei Belastung eines Punkts (Einzellast, (a) und (b)), eines schlaffen Fundaments ((c) und (d)) und eines starren Fundaments ((e) und (f)) mit einer Kraft F .

Die Verschiebung u_z und die Spannung σ_{zz} an der Halbraumoberfläche durch Belastung eines starren Fundaments sind in Abbildung 3.2(e)+(f) skizziert.

3.2. Eigenschaften des realen Bodens

In einem realen Boden hängt der Schubmodul $G(\bar{p}, \gamma, e)$ vom mittleren Druck \bar{p} , von der Scherdehnungsamplitude γ und von der Porenzahl e ab. Diese Abhängigkeiten wurden in Laboruntersuchungen experimentell nachgewiesen. Zusätzlich wurden Formeln gefunden, die diese Abhängigkeit beschreiben und gut an die gemessenen Werte angepasst werden können.

3.2.1. Einfluss der Scherdehnungsamplitude γ

Die Scherdehnungsamplitude γ ist definiert als das Verhältnis von Partikelgeschwindigkeit v_s zu Ausbreitungsgeschwindigkeit c_s der Scherwelle.

Hardin [HD72] beschreibt den Zusammenhang des Schubmoduls G und der Scherdehnungs-

amplitude γ wie folgt:

$$\frac{G}{G_0} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma}{\gamma_r}}, \quad (3.4)$$

mit dem Schubmodul bei sehr kleinen Dehnungen G_0 und der Referenzscherdehnung $\gamma_r = \tau_{max}/G_0 \approx 0,001$. Abbildung 3.3(a) zeigt den bezogenen Schubmodul G/G_0 in Abhängigkeit der Scherdehnungsamplitude γ nach Formel (3.4).

Für nichtbindige Böden ist der Schubmodul G für $\gamma \leq 10^{-5}$ konstant und kann als linear elastisch betrachtet werden. Er wird für diesen Bereich als G_0 bezeichnet. Für größere Scherdehnungsamplituden γ nimmt der Schubmodul G mit zunehmender Scherdehnungsamplitude ab.

3.2.2. Einfluss des mittleren Drucks \bar{p}

Der mittlere Druck \bar{p} kann bei gleichen horizontalen Spannungen $\sigma_H = \sigma_h$ und einem Ruhedruckbeiwert $K = \sigma_h/\sigma_v = 0,5$ beschrieben werden als $\bar{p} = (\sigma_v + \sigma_h + \sigma_H)/3 = 2/3\sigma_v$. Die vertikale Spannung $\sigma_v = \rho g z$ nimmt bei konstanter Dichte ρ aufgrund der Auflast linear mit der Tiefe z zu. Der Einfluss des mittleren Drucks \bar{p} auf den Schubmodul G ist bei experimenteller Bestimmung nicht getrennt vom Einfluss der Porenzahl e zu ermitteln, da die Porenzahl mit wachsendem Druck abnimmt. Nach Hardin und Richart [HR63] gilt für den Schubmodul bei kleinen Dehnungen bei Sanden folgende empirische Beziehung:

$$G_0(\bar{p}) = 3230 \frac{(2,97 - e)^2}{1 + e} \bar{p}^{0,5} = 3230 f(e) \bar{p}^{0,5} \quad (3.5)$$

Daraus ergibt sich für die Tiefenabhängigkeit des Schubmoduls bei kleinen Dehnungen:

$$G_0(z) = 3230 f(e) \left(\frac{2}{3} \rho g \right)^{0,5} \cdot z^{0,5}$$

Abbildung 3.3(b) zeigt den Schubmodul G_0 in Abhängigkeit des mittleren Drucks \bar{p} nach Formel (3.5) bei einer konstanten Porenzahl von $e = 0,5$. Der Schubmodul ist dabei proportional zur Quadratwurzel des mittleren Drucks.

Die Formel 3.5 ist in vielen Lehrbüchern zu finden. Sie jedoch ist nicht objektiv. Zu einem muss der Exponent α nicht zwingend 0,5 sein und somit würde sich die Dimension \bar{p}^α ändern. Zum anderen löst zwar eine Normierung $(\bar{p}/p_0)^\alpha$ mit einem Bezugsdruck p_0 , oftmals 100 kPa gewählt, das Dimensionsproblem. Ein willkürlich festgelegter Wert verletzt auch die Objektivität. Wie eine konsistente Darstellung aussehen sollte, zeigen Richter und Huber [RH03]. Die Anwendung dieser Darstellung würde jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

3.2.3. Einfluss der Porenzahl e

Die Abhängigkeit des Schubmoduls G_0 für kleine Dehnungen für Sand von der Porenzahl e kann ebenfalls durch die von Hardin und Richart [HR63] vorgeschlagene Beziehung (3.5) beschrieben werden mit

$$f(e) = \frac{(2,97 - e)^2}{1 + e}. \quad (3.6)$$

Abbildung 3.3(c) zeigt den Schubmodul G_0 in Abhängigkeit der Porenzahl e bei einem mittleren Druck von $\bar{p} = 200$ kPa. Der Schubmodul G_0 nimmt bei abnehmender Porenzahl zu und $f(e)$ variiert in einem Bereich von $e = 0,3 - 0,7$ um Faktor zwei.

Zur Berechnung der semi-analytischen Lösung ist es zwingende Voraussetzung, dass der Halbraum, der durch die WEA belastet wird, homogen, isotrop und linear elastisch ist.

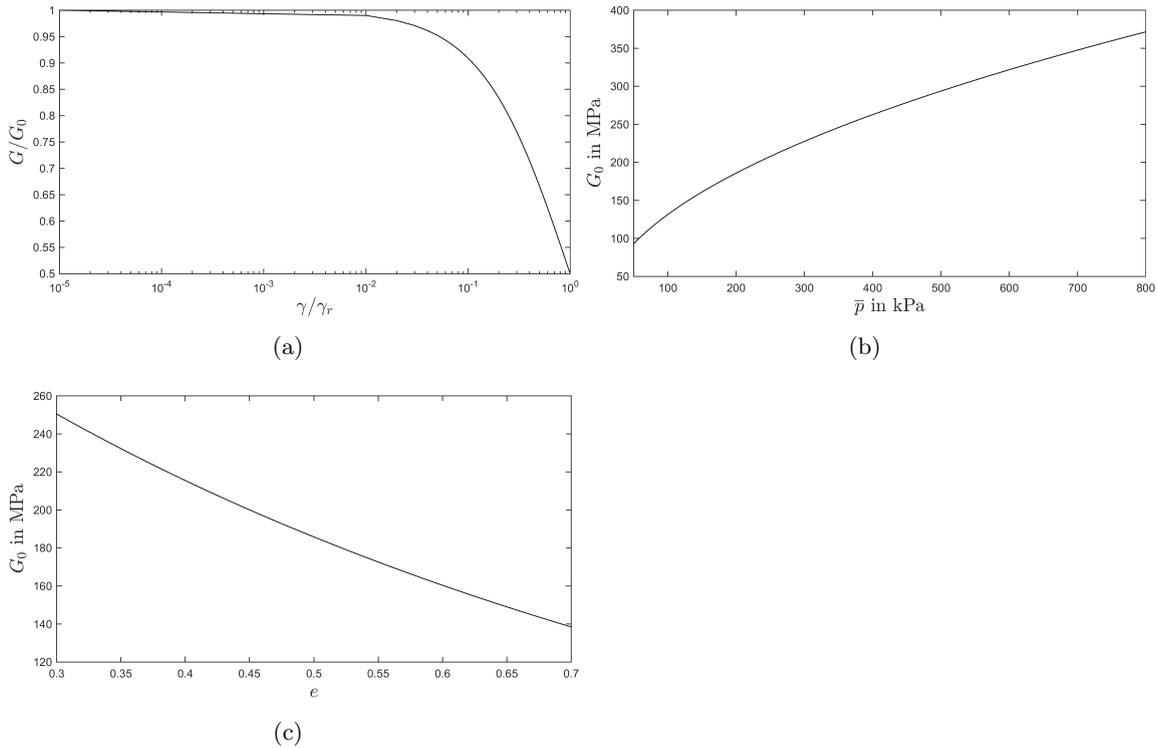


Abbildung 3.3.: Abhängigkeit des Schubmoduls G von der Scherdehnungsamplitude γ (a), dem mittleren Druck \bar{p} (b) und der Porenzahl e (c).

Für diesen Fall liegen semi-analytischen Lösungen vor und die Superposition der einzelnen Verschiebungen über das Fundament ist möglich. Um diese Bedingung zu erfüllen, muss der Schubmodul G also unabhängig sein vom mittleren Druck \bar{p} , der Scherdehnungsamplitude γ und der Porenzahl e . Zudem dürfen Einflüsse wie Zunahme des mittleren Drucks \bar{p} mit der Tiefe, Schichtgrenzen oder andere Inhomogenitäten keine Rolle spielen. Da jedoch die Zunahme des mittleren Drucks \bar{p} mit der Tiefe immer wirksam ist, ist die Annahme eines linear elastischen Halbraums möglicherweise zu einfach.

Diese Bedingungen gelten für die analytisch berechneten Lösungen, jedoch nicht für die numerischen Simulationen. Die Druckabhängigkeit $G_0(\bar{p})$ und die Abhängigkeit von der Porenzahl $G_0(e)$ des Schubmoduls können mit der Finite-Elemente-Methode und mit der Boundary-Elemente-Methode berücksichtigt werden.

Um einen linear elastischen Halbraum zu modellieren, wird angenommen, dass der mittlere Druck \bar{p} unabhängig von der Tiefe z ist, dass die Scherdehnungsamplitude γ kleiner als 10^{-5} ist und dass die Porenzahl e im Modell konstant ist. Dies widerspricht jedoch den Eigenschaften des realen Bodens.

3.3. Lamb'sches Problem

Das Lamb'sche Problem beschreibt die zeitvariante Belastung eines homogenen, isotropen linear elastischen Halbraums an dessen Oberfläche durch eine vertikale Punktquelle [Lam04]. Diese Einzellast wird zum Zeitpunkt $t = 0$ aufgebracht und hat den zeitlichen Verlauf einer Heaviside-Funktion (Sprungfunktion) $F(t) = \Theta(t)$. Das Lamb'sche Problem wurde für vertikale und für horizontale Belastungen gelöst. Durch die Lösung des Lamb'schen Problems werden die durch die Belastung entstehenden vertikalen und horizontalen Verschiebungen berechnet.

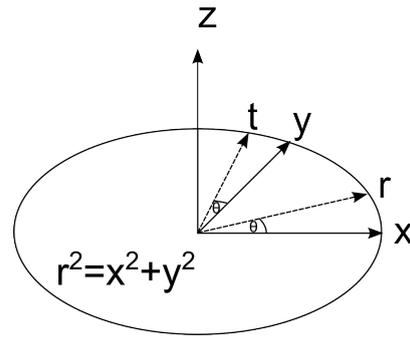


Abbildung 3.4.: Koordinatensystem für die Lösung des Lamb'schen Problems. Das Zylinderkoordinatensystem ist gegenüber dem kartesischen Koordinatensystem um den Winkel θ gedreht. Die horizontale Belastung findet entlang der x-Achse statt, die radiale Verschiebung wird dabei in Abhängigkeit des Winkels θ berechnet.

3.4. Lösung von Pekeris

Pekeris [Pek55] berechnet als dynamische Lösung des Lamb'schen Problems Vertikalverschiebungen u_{zz} und Horizontalverschiebung u_{rz} an der Oberfläche des Halbraums bei vertikaler Belastung und einer Poissonzahl $\nu = 0,25$. Die Herleitung dieser Lösungen findet sich im Kapitel B.1 im Anhang.

Die Verschiebungen sind in Abhängigkeit der dimensionslosen Zeit $\tau = c_s/r \cdot t$ mit der S-Wellengeschwindigkeit c_s , der Entfernung r von der Quelle und der Zeit t angegeben. Bei $\tau = 1$ findet der S-Welleneinsatz statt. Da für die Poissonzahl $\nu = 0,25$ das Verhältnis von P-Wellengeschwindigkeit zu S-Wellengeschwindigkeit $c_p/c_s = \sqrt{3}$ beträgt, setzt bei $\tau = 1/\sqrt{3}$ die P-Welle ein. Vor dem Einsatz der P-Welle finden also keine Vertikal- und Horizontalverschiebungen statt. Das Verhältnis von S-Wellengeschwindigkeit zu der Geschwindigkeit der Rayleigh-Welle beträgt $\gamma = c_s/c_R = \frac{1}{2}\sqrt{3 + \sqrt{3}}$ für $\nu = 0,25$. Bei $\tau = \gamma$ setzt also die Rayleigh-Welle ein. Die Verschiebungen $u_{zz}(\tau = \gamma)$ und $u_{rz}(\tau = \gamma)$ werden beim Einsatz der Rayleigh-Welle infinit.

Für $\tau > \gamma$ setzt eine statische Verschiebung ein, die mit der Lösung von Boussinesq [SBVB16] übereinstimmt. Dieser berechnet die statischen Verschiebungen bei der Belastung eines Halbraums.

Die Verschiebungen u_{zz} und u_{rz} können auch mithilfe der Greenschen Funktionen $G_1(\tau)$, $G_2(\tau)$, $R_1(\tau)$ und $R_2(\tau)$ beschrieben werden. Diese entsprechen der zweidimensionalen Antwortfunktion des Halbraums abhängig von der Zeit t und der Entfernung r .

Die aufgebrachte Einzellast hat den Verlauf einer Heaviside-Funktion $\Theta(t)$ mit der Amplitude F_0 .

Die Verschiebung wird in der Entfernung r von der Punktquelle berechnet. Der homogene, isotrope, linear elastische Halbraum hat dabei ein Schubmodul G .

Bei der Horizontalverschiebung u_{rz} ist $K(\kappa)$ das elliptische Integral erster Ordnung und $\Pi(n, \kappa)$ das elliptischen Integral dritter Ordnung. Die Variable κ ist dabei $\kappa = \frac{2}{3\tau^2 - 1}$.

Die Problematik, dass Verschiebungen $u_{zz}(\tau)$ und $u_{rz}(\tau)$ für $\tau = \gamma$ (Eintreffen der Rayleigh-Welle) infinit werden, tritt bei Lösungen im Innern des Halbraums nicht auf, wie dies die Lösungen von Gakenheimer [Gak70] für das Innere des Halbraums zeigen (ansonsten gleiches Problem wie Pekeris). Er gibt Lösungen entlang des räumlichen Radius R entsprechend Abbildung 3.1 an.

Für $z \ll r$ nach Abbildung 3.1 und konstante Tiefe z zeigt Huber [Hub88, S.40-59], dass für $\tau \approx \gamma$ (Durchlauf der Rayleigh-Welle) die Abnahme der in den Lösungen von Gakenheimer mit $1/\sqrt{2}$ folgt. Grundsätzlich könnten diese Lösungen auch in dieser Arbeit eingesetzt werden, hier wird der Lösung von Pekeris in der Interpretation von Kausel [Kau12], siehe Anhang B.2, gefolgt.

3.4.1. Vertikalverschiebung

$$\begin{aligned}
u_{zz}(\tau) &= 0, & \tau < \frac{1}{\sqrt{3}} & \quad (3.7) \\
u_{zz}(\tau) &= -\frac{F_0}{32\pi Gr} \left(6 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\tau^2 - \frac{1}{4}}} - \frac{\sqrt{3\sqrt{3} + 5}}{\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \tau^2}} + \frac{\sqrt{3\sqrt{3} - 5}}{\sqrt{\tau^2 - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}}} \right) \\
&= -\frac{F_0}{\pi^2 Gr} G_1(\tau), & \frac{1}{\sqrt{3}} < \tau < 1 \\
u_{zz}(\tau) &= -\frac{F_0}{16\pi Gr} \left(6 - \frac{\sqrt{3\sqrt{3} + 5}}{\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \tau^2}} \right) \\
&= -\frac{F_0}{\pi^2 Gr} (G_1(\tau) + G_2(\tau)), & 1 < \tau < \gamma \\
u_{zz}(\tau) &= -\frac{3F_0}{8\pi Gr}, & \tau > \gamma
\end{aligned}$$

3.4.2. Horizontalverschiebung

$$\begin{aligned}
u_{rz}(\tau) &= 0, & \tau < \frac{1}{\sqrt{3}} & \quad (3.8) \\
u_{rz}(\tau) &= \frac{F_0\tau}{16\pi^2 Gr} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(6K(k) - 18\Pi(8k^2, k) + (6 - 4\sqrt{3})\Pi(-(12\sqrt{3} - 20)k^2, k) \right. \\
&\quad \left. + (6 + 4\sqrt{3})\Pi((12\sqrt{3} + 20)k^2, k) \right) \\
&= -\frac{F_0\tau}{\pi^2 Gr} R_1(\tau), & 1 < \tau < \frac{1}{\sqrt{3}} \\
u_{rz}(\tau) &= \frac{F_0\tau\kappa}{16\pi^2 Gr} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(6K(\kappa) - 18\Pi(8, \kappa) + (6 - 4\sqrt{3})\Pi(-(12\sqrt{3} - 20), \kappa) \right. \\
&\quad \left. + (6 + 4\sqrt{3})\Pi((12\sqrt{3} + 20), \kappa) \right) \\
&= -\frac{F_0\tau}{\pi^2 Gr} R_2(\tau), & 1 < \tau < \gamma \\
u_{rz}(\tau) &= \frac{F_0\tau\kappa}{16\pi^2 Gr} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(6K(\kappa) - 18\Pi(8, \kappa) + (6 - 4\sqrt{3})\Pi(-(12\sqrt{3} - 20), \kappa) \right. \\
&\quad \left. + (6 + 4\sqrt{3})\Pi((12\sqrt{3} + 20), \kappa) \right) + \frac{P\tau}{8\pi\mu r\sqrt{\tau^2 - \gamma^2}} \\
&= -\frac{F_0\tau}{\pi^2 Gr} R_2(\tau) + \frac{F_0}{8\pi Gr} \sqrt{\tau^2 - \gamma^2}, & \tau > \gamma
\end{aligned}$$

3.5. Lösung von Chao

Chao [Cha60] löst das Lamb'sche Problem dynamisch für horizontale Belastungen und erhält als Lösungen die Radialverschiebung u_{rx} , die Tangentialverschiebung u_{tx} und die Vertikalverschiebung u_{zx} an der Oberfläche eines homogenen, isotropen, linear elastischen Halbraums mit dem Schubmodul G und der Poissonzahl $\nu = 0,25$. Die Quelle befindet sich dabei ebenfalls an der Oberfläche in einer Entfernung r vom betrachteten Punkt. Die Herleitung der Lösung kann in Kapitel B.2 im Anhang nachgelesen werden. Das zugehörige Koordinatensystem ist in Abbildung 3.4 abgebildet.

Die Verschiebungen wurden ebenfalls in Abhängigkeit der dimensionslosen Zeit τ berechnet. Bei $\tau = 1/\sqrt{3}$ setzt die P-Welle ein, bei $\tau = 1$ setzt die S-Welle ein und bei $\tau = \gamma$ findet der Einsatz der Rayleigh-Welle statt, bei dem die Verschiebungen u_{rx} , u_{tx} und u_{zx} wie die Verschiebungen bei vertikaler Belastung infinit werden.

Die statische Verschiebung für $\tau > \gamma$ entspricht der statischen Lösung von Cerruti [Cer82]. Die Einzellast hat den zeitlichen Verlauf einer Heaviside-Funktion $\Theta(t)$ mit der Amplitude F_0 .

Wird die horizontale Belastung in Richtung der x-Achse ausgeführt, so gibt θ den Winkel zur x-Achse an. Für $\theta = 0$ ist die Radialverschiebung u_{rx} maximal, für $\theta = 90^\circ$ ist die Tangentialverschiebung u_{tx} maximal.

Die vertikale Verschiebung bei horizontaler Belastung u_{zx} entspricht dabei der negativen radialen Verschiebung bei vertikaler Belastung u_{rz} .

3.5.1. Radialverschiebung

$$\begin{aligned}
 u_{rx}(\tau) &= 0, & \tau < \frac{1}{\sqrt{3}} \\
 u_{rx}(\tau) &= \frac{F_0 \cos(\theta)}{\pi Gr} \left[\frac{9\tau^2}{8\sqrt{3\tau^2 - \frac{3}{4}}} - \frac{\tau^2 \sqrt{6\sqrt{3} + 10}}{16\sqrt{\tau^2 - \beta^2}} - \frac{\tau^2 \sqrt{6\sqrt{3} - 10}}{16\sqrt{\gamma^2 - \tau^2}} \right], & \frac{1}{\sqrt{3}} < \tau < 1 \\
 u_{rx}(\tau) &= \frac{F_0 \cos(\theta)}{\pi Gr} \left[\frac{1}{2} - \frac{\tau^2 \sqrt{6\sqrt{3} - 10}}{8\sqrt{\gamma^2 - \tau^2}} \right], & 1 < \tau < \gamma \\
 u_{rx}(\tau) &= \frac{F_0 \cos(\theta)}{2\pi Gr}, & \gamma < \tau
 \end{aligned}$$

3.6. Tangentialverschiebung

$$\begin{aligned}
 u_{tx}(\tau) &= 0, & \tau < \frac{1}{\sqrt{3}} \\
 u_{tx}(\tau) &= \frac{F_0 \sin(\theta)}{\pi Gr} \left[-\frac{3}{16} + \frac{3\sqrt{3(\tau^2 - 1/4)}}{8} - \frac{\sqrt{(10 + 6\sqrt{3})(\tau^2 - \beta^2)}}{16} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{\sqrt{(6\sqrt{3} - 10)(\gamma^2 - \tau^2)}}{16} \right], & \frac{1}{\sqrt{3}} < \tau < 1 \\
 u_{tx}(\tau) &= \frac{F_0 \sin(\theta)}{\pi Gr} \left[-\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{(6\sqrt{3} - 10)(\gamma^2 - \tau^2)}}{8} \right], & 1 < \tau < \gamma \\
 u_{tx}(\tau) &= -\frac{F_0 \sin(\theta)}{8\pi Gr}, & \gamma < \tau
 \end{aligned}$$

3.7. Vertikalverschiebung

$$\begin{aligned}
u_{zx}(\tau) &= 0, & \tau < \frac{1}{\sqrt{3}} \\
u_{zx}(\tau) &= -\frac{F_0\tau}{16\pi^2Gr} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(6K(k) - 18\Pi(8k^2, k) + (6 - 4\sqrt{3})\Pi(-(12\sqrt{3} - 20)k^2, k) \right. \\
&\quad \left. + (6 + 4\sqrt{3})\Pi((12\sqrt{3} + 20)k^2, k) \right), & 1 < \tau < \frac{1}{\sqrt{3}} \\
u_{zx}(\tau) &= -\frac{F_0\tau\kappa}{16\pi^2Gr} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(6K(\kappa) - 18\Pi(8, \kappa) + (6 - 4\sqrt{3})\Pi(-(12\sqrt{3} - 20), \kappa) \right. \\
&\quad \left. + (6 + 4\sqrt{3})\Pi((12\sqrt{3} + 20), \kappa) \right), & 1 < \tau < \gamma \\
u_{zx}(\tau) &= -\frac{F_0\tau\kappa}{16\pi^2Gr} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(6K(\kappa) - 18\Pi(8, \kappa) + (6 - 4\sqrt{3})\Pi(-(12\sqrt{3} - 20), \kappa) \right. \\
&\quad \left. + (6 + 4\sqrt{3})\Pi((12\sqrt{3} + 20), \kappa) \right) + \frac{P\tau}{8\pi\mu r\sqrt{\tau^2 - \gamma^2}}, & \tau > \gamma
\end{aligned}$$

Dabei ist $K(\kappa)$ das elliptische Integral erster Ordnung, $\Pi(n, \kappa)$ das elliptische Integral dritter Ordnung mit dem Koeffizienten κ :

$$\begin{aligned}
\kappa &= \frac{2}{3\tau^2 - 1}, & K(\kappa) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2(\theta)}}, \\
\Pi(n, \kappa) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 + n \sin^2(\theta))\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2(\theta)}}
\end{aligned}$$

3.8. Grundlagen zur Finiten-Elemente-Methode (FEM)

3.8.1. Variationsrechnung

Die Kapitel 3.8.1, 3.8.2 und 3.8.3 orientieren sich an der Darstellung von [Bet98, 1 ff.]. Ein Problem, das mithilfe der Finiten-Elemente-Methode gelöst werden soll, kann als Randwertproblem beschrieben werden. Die Randbedingungen werden dabei vorgegeben, die Lösungen im Inneren sind unbekannt. Das Randwertproblem wird in eine Variationsgleichung überführt, die durch ein Funktional dargestellt wird. Die Finite-Elemente-Methode kann also als elementweise Anwendung der Variationsmethode beschrieben werden.

Ein Funktional

$$F[u(x)] = \int_a^b u(x) dx \quad (3.9)$$

ordnet jeder Funktion $u(x)$, die in $[a, b]$ stetig ist, einen Wert $F[u(x)]$ zu. Wird der Extremwert eines Funktionals bestimmt, so ist es eine notwendige Bedingung, dass die Funktion $u(x)$, für die ein Funktional einen Extremwert besitzt, einer Differentialgleichung genügen muss. Die Lösung des Variationsproblems

$$J[u(x)] = \int_a^b F(x, u, u') = \text{Extremum} \quad (3.10)$$

mit den Randbedingungen

$$u(a) = u_a \quad u(b) = u_b \quad (3.11)$$

existiert nur dann, wenn die Funktion $u(x)$ die Eulersche Differentialgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0 \quad (3.12)$$

erfüllt. Auch bei einer Variationsaufgabe

$$J[u, v] = \int_a^b F(x, u, u', v, v') = \text{Extremum} \quad (3.13)$$

bei der das Funktional mehrere Argumentfunktionen hat, müssen die Lösungen $u(x)$ und $v(x)$ den Eulerschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial v'} \right) = 0 \quad (3.14)$$

genügen. Ebenso ist die notwendige Bedingung, dass das Funktional von einer Argumentfunktion mit mehreren Variablen

$$J[u(x, y)] = \iint F \left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \quad (3.15)$$

extremal wird, die Eulersche Differentialgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{u}} \right) = 0. \quad (3.16)$$

3.8.2. Energiemethoden/Hamiltonsches Prinzip

Um dynamische Probleme nach der Energiemethode zu lösen, muss eine entsprechende Variationsaufgabe formuliert werden, deren Lösungen die Eulerschen Differentialgleichungen sind. Diese Variationsaufgabe kann durch ein Funktional

$$J = \int_{t_1}^{t_2} F(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t) dt = \text{Extremum} \quad (3.17)$$

beschrieben werden, wobei die Funktionen $q_1(t), \dots, q_n(t)$ von der Zeit t abhängig sind. Die n Lösungen q_k dieser Variationsaufgabe genügen den Eulerschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial q_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} \right) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.18)$$

Bei dynamischen Problemen müssen neben dem Potential der äußeren Kräfte Π_a und dem inneren Potential Π_i auch die Trägheitskräfte \vec{B} berücksichtigt werden. Das Potential der äußeren Kräfte Π_a setzt sich dabei zusammen aus den Volumenkräften \vec{F} und den Oberflächenkräften \vec{P} , die auf das Modell wirken:

$$\Pi_a = -P_i u_i - F_i u_i = - \int_{S_p} p_i u_i dS - \int_V f_i u_i dV \quad (3.19)$$

Dabei ist \vec{u} die Verschiebung an den Knoten. Oberflächenkräfte sind als flächenhaft verteilte Belastung aufzufassen und greifen nur an der Oberfläche eines Körpers an, wie Reibung, Zug- und Schubkräfte. Volumenkräfte greifen an jedem Punkt des Körpers an, wie die Schwerkraft.

Das innere Potential Π_i entspricht dem elastischen Potential U

$$\Pi_i = U = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ji} \varepsilon_{ij} dV \quad (3.20)$$

mit dem Spannungstensor σ_{ji} und dem Verzerrungstensor ε_{ij} . Das Potential der Trägheitskraft B

$$\Pi_m = B_i u_i = - \int_V \rho \ddot{u}_i u_i dV \quad (3.21)$$

mit der Dichte ρ muss bei dynamischen Problemen (im Gegensatz zu statischen Berechnungen) berücksichtigt werden.

Aus der Impulserhaltung und den virtuellen Verschiebungen δu_i ergibt sich folgende Gleichung:

$$- \int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV + \int_V f_i \delta u_i dV + \int_{S_p} p_i \delta u_i dS = \int_V \sigma_{ji} \delta \varepsilon_{ij} dV \quad (3.22)$$

Die virtuellen Verschiebungen δu_i sind dabei gedachte, differentiell kleine und aufgrund der Geometrie mögliche Verschiebungen mit dem Variationsoperator δ , die zu den Zeitpunkten t_1 (Beginn der Bewegung) und t_2 (Ende der Bewegung) verschwinden sollen:

$$\delta u_i(x_k, t_1) = \delta u_i(x_k, t_2) = 0 \quad (3.23)$$

Da die virtuellen Verschiebungen differentiell klein sind, verursachen sie keine Änderungen in der Geometrie. Kräfte und Spannungen können so währen der virtuellen Verschiebung als konstant angenommen werden.

Gleichung (3.22) kann mit (3.19), (3.20) und (3.21) vereinfacht werden:

$$\int_V \rho \ddot{u}_i dV + \delta \Pi_a + \delta U = 0 \quad (3.24)$$

Die Beschleunigung \ddot{u}_i , das äußere Potential Π_a und das elastische Potential U hängen jeweils von der Zeit t ab und Gleichung (3.24) muss zu jedem Zeitpunkt gelten. Eine Integration über den Zeitraum t_1 bis t_2 , in dem die Bewegung stattfindet, liefert:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_V \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta \Pi_a dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta U dt = 0 \quad (3.25)$$

Dabei können die Reihenfolge der Integration im ersten Term und die Reihenfolge von Variation und Integration vertauscht werden. Die Dichte ρ ist dabei zeitlich konstant:

$$\int_V \rho \left(\int_{t_1}^{t_2} \ddot{u}_i \delta u_i dt \right) dV + \delta \int_{t_1}^{t_2} \Pi_a dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} U dt = 0 \quad (3.26)$$

Die zeitliche Integration im ersten Term kann mithilfe von partieller Integration folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\int_{t_1}^{t_2} \ddot{u}_i \delta u_i dt = [\dot{u}_i \delta u_i]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{u}_i \frac{d}{dt} (\delta u_i) dt \quad (3.27)$$

Dabei verschwindet der erste Term aufgrund der Bedingung (3.23) und mit $\frac{d}{dt} (\delta u_i) = \delta (\dot{u}_i)$ gilt:

$$\int_{t_1}^{t_2} \ddot{u}_i \delta u_i dt = - \int_{t_1}^{t_2} \dot{u}_i \delta (\dot{u}_i) dt = - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \delta (\dot{u}_i \dot{u}_i) dt \quad (3.28)$$

Mit (3.28) lautet (3.26):

$$\int_V \frac{\rho}{2} \left(\int_{t_1}^{t_2} \delta(u_i u_i) dt \right) dV + \delta \int_{t_1}^{t_2} \Pi_a dt + \delta \int_{t_1}^{t_2} U dt = 0 \quad (3.29)$$

Der erste Term kann bei zeitlich konstanter Dichte ρ umgeformt werden:

$$\int_V \frac{\rho}{2} \left(\int_{t_1}^{t_2} \delta(u_i u_i) dt \right) dV = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_V \frac{\rho}{2} \delta(u_i u_i) dV \right) dt \quad (3.30)$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \delta \left(\int_V \frac{\rho}{2} u_i u_i dV \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} T dt \quad (3.31)$$

Dabei ist T die kinetische Energie. Gleichung (3.29) geht damit über in

$$\delta \left(\int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi_a - U) dt \right) = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt \right) = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} L dt \right) = 0 \quad (3.32)$$

mit der kinetischen Energie T und dem Gesamtpotential Π . Die Lagrangesche Funktion $L = T - \Pi$ ist eine Funktion von der Verschiebung u_i , der Geschwindigkeit \dot{u}_i und der Zeit t , kann also in der Form $L = L(u_i, \dot{u}_i, t)$ dargestellt werden. Es existiert also ein Variationsproblem (3.17). Wird $L(u_i, \dot{u}_i, t)$ in die Eulerschen Differentialgleichungen (3.18) eingesetzt, so erhält man die Bewegungsgleichungen

$$\sigma_{ji,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i. \quad (3.33)$$

Um das Hamiltonsche Prinzip in der Finite-Elemente-Methode anzuwenden, ist eine diskrete Formulierung notwendig. Dazu wird die Lagrangesche Funktion L in einem finiten Element mit dem Volumen V^e berechnet, die Verschiebung \vec{u} und die Geschwindigkeit $\vec{\dot{u}}$ innerhalb des Elements werden dabei durch Knotenverschiebungen \vec{d} ausgedrückt. Die kinetische Energie für ein finites Element

$$T^e = \frac{1}{2} \int_{V^e} \rho \{\dot{u}\}^t \{\dot{u}\} dV \quad (3.34)$$

kann mithilfe des Verschiebungsansatzes

$$\{u(\vec{x})\} = [N] \{d\} \quad , \quad \{\dot{u}(\vec{x})\} = [N] \{\dot{d}\} \quad (3.35)$$

mit der Formfunktionsmatrix N , der Knotenverschiebung \vec{d} und der Knotengeschwindigkeit $\vec{\dot{d}}$ beschrieben werden. Formfunktionen werden eingeführt, um den Funktionsverlauf \vec{u} im Element durch Knotenpunkte diskret auszudrücken und bestmöglich anzunähern. Sie sind eine Funktion von natürlichen Koordinaten ξ , und η mit denen die Knotenkoordinaten ausgerückt werden und haben im aktuellen Knoten den Wert $N_1 = 1$, sonst $N_{2,3,4} = 0$. Die kinetische Energie für ein Element ist somit

$$T^e = \frac{1}{2} \{\dot{d}\}^t \int_{V^e} \rho [N]^t [N] dV \{\dot{d}\} = \frac{1}{2} \{\dot{d}\}^t [m] \{\dot{d}\} \quad (3.36)$$

mit der äquivalenten Massenmatrix m , die aus der Formfunktionsmatrix berechnet wird:

$$[m] = \int_{V^e} \rho [N]^t [N] dV \quad (3.37)$$

Das elastische Potential U für ein finites Element

$$U^e = \frac{1}{2} \int_{V^e} \{\varepsilon\}^t \{\sigma\} dV \quad (3.38)$$

kann ebenfalls durch die Knotenverschiebungen $\{d\}$ ausgedrückt werden. Die Verzerrungen $\{\varepsilon\}$ innerhalb eines Elements können aus der Matrix $[B]$ und den Knotenverschiebungen $\{d\}$ berechnet werden:

$$\{\varepsilon\} = [B] \{d\} \quad (3.39)$$

Dabei werden die Elemente der Matrix $[B]$ aus den Koordinaten der Knotenpunkte ermittelt. Die transponierten Verzerrungen lauten dann:

$$\{\varepsilon\}^t = \{d\}^t [B]^t \quad (3.40)$$

Die Spannungen $\{\sigma\}$ für linear elastische Materialien sind laut dem Hookschen Gesetz proportional zu den Verzerrungen $\{\varepsilon\}$

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (3.41)$$

mit dem Elastizitätstensor $[D]$, der die elastischen Eigenschaften des Materials kennzeichnet. Somit kann das elastische Potential (3.38) mit den Gleichungen (3.40), (3.41) und (3.39) umformuliert und durch die Knotenverschiebungen $\{d\}$ beschrieben werden:

$$U^e = \frac{1}{2} \{d\}^t \int_{V^e} [B]^t [D] [B] dV \{d\} = \frac{1}{2} \{d\}^t [K^e] \{d\} \quad (3.42)$$

Die Steifigkeitsmatrix für ein finites Element

$$[K^e] = [B]^t [D] [B] \quad (3.43)$$

ergibt sich dabei aus dem Elastizitätstensor $[D]$. Das äußere Potential Π_a^e eines finiten Elements ergibt sich aufgrund der äußeren Belastung $\{F^e\}$, die auf die Knoten eines Elements wirkt:

$$\Pi_a^e = -\{F^e\}^t \{d\} \quad (3.44)$$

Die diskrete Lagrangesche Funktion lautet mit (3.36), (3.42) und (3.44):

$$\begin{aligned} L^e &= T^e - \Pi^e = T^e - U^e - \Pi_a^e \\ &= \frac{1}{2} \{\dot{d}\}^t [m] \{\dot{d}\} - \frac{1}{2} \{d\}^t [K^e] \{d\} + \{F^e\}^t \{d\} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Wird diese in die Eulersche Differentialgleichung

$$\frac{\partial L^e}{\partial \{d\}} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L^e}{\partial \{\dot{d}\}} \right) = \{0\} \quad (3.46)$$

eingesetzt, erhält man die Bewegungsgleichungen in Matrizenform für ein finites Element:

$$[m] \{\ddot{d}\} + [K^e] \{d\} = \{F^e\} \quad (3.47)$$

Um aus der Bewegungsgleichung (3.47) für ein finites Element die Bewegungsgleichung für das Gesamtsystem

$$[M] \{\ddot{d}\} + [K] \{d\} = \{F^e\} \quad (3.48)$$

zu erhalten, müssen die Einzelmatrizen $[m]$ und $[K^e]$ durch numerische Integration zu Gesamtmatrizen $[M]$ und $[K]$ zusammengesetzt werden. Die Bewegungsgleichung (3.48) kann dann durch Anwendung des Gaußschen Eliminationsverfahren gelöst werden.

3.8.3. Rayleigh-Ritz-Verfahren

Da die Eulerschen Differentialgleichungen in Kapitel 3.8.2 nicht einfach zu lösen sind, werden zur Lösungen solcher Aufgaben Näherungsverfahren angewendet. Falls zu dem zu lösenden Problem ein Funktional existiert, bietet sich das Rayleigh-Ritz-Verfahren an. Das Problem wird durch Anwendung dieses Näherungsverfahrens auch diskretisiert.

Für die eindimensionale Poissonsche Differentialgleichung

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + f(x) = 0 \quad (3.49)$$

mit den Randbedingungen

$$\Phi(a) = A \quad \Phi(b) = B \quad (3.50)$$

soll eine Näherungslösung bestimmt werden. Das Problem kann durch die Variationsaufgabe

$$J[\Phi(x)] = \int_a^b \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)^2 - f(x)\Phi(x) \right] dx \stackrel{!}{=} \text{Extremum} \quad (3.51)$$

mit der Eulerschen Differentialgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial \Phi} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial \Phi'} \right) = 0 \quad (3.52)$$

mit

$$F(x, \Phi, \Phi') = \frac{1}{2} \Phi'^2 - f(x)\Phi(x) \quad (3.53)$$

beschrieben werden. Um dieses Problem näherungsweise zu lösen, wird als Ansatz eine Linearkombination aus Vergleichsfunktionen der Form

$$\Phi(x) \approx \Psi_0(x) + C_1\Psi_1(x) + C_2\Psi_2(x) + \dots + C_n\Psi_n(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3.54)$$

gewählt. Dabei müssen die n Parameter C_i bestimmt werden und die n Testfunktionen Ψ_i müssen in $x = a$ und $x = b$ verschwinden. Für die Randbedingungen kann der Ansatz

$$\Psi_0(x) = A \frac{b-x}{b-a} + B \frac{x-a}{b-a} \quad (3.55)$$

gemacht werden. Für die Randbedingungen $A = B = 0$ wird die Näherung durch die Testfunktionen Ψ_i bestimmt:

$$\Phi(x) \approx (x-a)(x-b) \left(C_1 + C_2x + C_3x^2 + \dots + C_nx^{n-1} \right) \quad (3.56)$$

Das Funktional (3.51) geht dann in eine Funktion

$$J = J(C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (3.57)$$

über, deren Minimierung

$$\frac{\partial J}{\partial C_1} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial C_2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial J}{\partial C_n} = 0, \quad (3.58)$$

die n Parameter C_i und damit die Näherungslösung (3.56) der Differentialgleichung (3.49) liefert. Die Anzahl der Parameter C_i bestimmt dabei die Güte der Näherungslösung. Eine Näherung ist dann ausreichen, wenn das Residuum möglichst klein ist. Grundsätzlich verbessert sich die Näherung mit wachsender Anzahl n der Parameter und Testfunktionen.

Um das Rayleigh-Ritz-Verfahren bei der Finite-Elemente-Methode anwenden zu können, muss das Intervall $[a, b]$ in finite Elemente aufgeteilt werden. Ein linearer Ansatz für ein Element mit den Knotenpunkten x_1 und x_2 ist gegeben durch

$$\Phi^e(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \Phi_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \Phi_2 \quad (3.59)$$

oder in Matrizenform ausgedrückt:

$$\Phi^e(x) = [N_1 \quad N_2] \left\{ \begin{array}{c} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{array} \right\} \equiv [N] \{\Phi^e\} \quad (3.60)$$

Dabei sind Φ_1 und Φ_2 Knotenwerte (Werte der Funktionen in den Knotenpunkten) und

$$N_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad N_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (3.61)$$

die Interpolationsfunktionen, die den Wert der Funktion am Punkt x zwischen den Knotenpunkten x_1 und x_2 interpoliert.

Das Funktional des Gesamtmodells setzt sich dann aus den m Elementen des Modells zusammen:

$$J[\Phi(x)] = \sum_{e=1}^m J^e[\Phi^e(x)] \quad (3.62)$$

Nach Einsetzen von (3.60) in (3.17) lautet das Funktional für ein Einzelement:

$$J^e[\Phi^e(x)] = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{1}{2} \left([N'_1 \quad N'_2] \left\{ \begin{array}{c} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{array} \right\} \right)^2 - f(x) [N_1 \quad N_2] \left\{ \begin{array}{c} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{array} \right\} \right] dx \quad (3.63)$$

Die gewählten Knotenwerte müssen dieses Funktional minimieren:

$$\frac{\partial J^e}{\partial \Phi_1} = \int_{x_1}^{x_2} \left[N'_1 [N'_1 \quad N'_2] \left\{ \begin{array}{c} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{array} \right\} - f(x) N_1 \right] dx = 0 \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial J^e}{\partial \Phi_2} = \int_{x_1}^{x_2} \left[N'_2 [N'_1 \quad N'_2] \left\{ \begin{array}{c} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{array} \right\} - f(x) N_2 \right] dx = 0 \quad (3.65)$$

Dies kann auch beschrieben werden durch

$$[K^e] = \{\Phi^e\} \{F^e\} \quad (3.66)$$

mit

$$\begin{aligned} [K^e] &= \left[\int_{x_1}^{x_2} N'_i M'_j dx \right] \\ \{\Phi^e\} &= \{\Phi_1 \quad \Phi_2\}^t \\ \{F^e\} &= \int_{x_1}^{x_2} \{f N_1 \quad f N_2\}^t dx \end{aligned}$$

Zur Lösung der Differentialgleichung (3.49) muss die Gesamtmatrix $[K]$ aus den Elementmatrizen $[K^e]$ zusammengesetzt werden.

3.8.4. Gaußsches Eliminationsverfahren

Dieses Kapitel orientiert sich an der Darstellung von [GRT10].

Gleichungssysteme wie (3.48) können mit direkten oder iterativen Verfahren gelöst werden. Da in dieser Arbeit ein direkter Gleichungslöser zum Einsatz kommt, wird dieses Verfahren nach dem Gaußschen Algorithmus vorgestellt.

Ein Gleichungssystem der Form

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

wird mithilfe des Gaußschen Eliminationsverfahren gelöst, indem bestimmte Komponenten der Matrix eliminiert werden und so das Gleichungssystem auf Stufenform gebracht wird. Durch geschicktes Addieren der einzelnen Gleichungen verschwinden die Komponenten $A_{ij, i < j}$ der Matrix $[A]$, sodass das Gleichungssystem durch Rückwärtseinsetzen gelöst werden kann:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{14} & \tilde{A}_{15} \\ 0 & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{24} & \tilde{A}_{25} \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{34} & \tilde{A}_{35} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{44} & \tilde{A}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \\ \tilde{b}_4 \\ \tilde{b}_5 \end{pmatrix} \quad (3.68)$$

Das Gleichungssystem lässt sich dann in der Reihenfolge von unten nach oben lösen. Die Unbekannten x_i werden iterativ berechnet:

$$x_5 = \frac{\tilde{b}_5}{\tilde{A}_{55}} \quad (3.69)$$

$$x_4 = \frac{\tilde{b}_4 - \tilde{A}_{45}x_5}{\tilde{A}_{44}} \quad (3.70)$$

$$x_3 = \frac{\tilde{b}_3 - \tilde{A}_{35}x_5 - \tilde{A}_{34}x_4}{\tilde{A}_{33}} \quad (3.71)$$

$$x_2 = \quad \vdots$$

$$x_1 = \quad \vdots$$

Der Gaußalgorithmus kann auch als LU-Zerlegung interpretiert werden. Dabei wird die Matrix $[A]$ in die untere Dreiecksmatrix $[L]$ und in die obere Dreiecksmatrix $[U]$ zerlegt:

$$[A] = [L][U] = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & 0 \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} \\ 0 & U_{22} & U_{23} & U_{24} & U_{25} \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} & U_{35} \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} & U_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U_{55} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Die Lösung des Systems $[L][U]\{x\} = \{b\}$ wird durch Vorwärtseinsetzen des Systems $[L]\{y\} = \{b\}$ gelöst. Mithilfe des Zwischenergebnisses $\{y\}$ wird dann $\{x\}$ als Lösung des Systems $[U]\{x\} = \{b\}$ durch Rückwärtseinsetzen bestimmt.

3.8.5. Lysmer-Randbedingung

Diese Kapitel orientiert sich an der Darstellung von [Abq].

Um mit der Finiten-Elemente-Methode ein unendlich ausgedehntes Medium zu modellieren, wird dieses infinite Medium durch Verwendung eines reflexionsfreien Randes dargestellt. Dabei werden im Nahfeld finite Elemente und im Fernfeld infinite Elemente verwendet, die auf Lysmer [LK69] zurückgehen. Um die Eigenschaften und Parameter dieser Elemente zu bestimmen, werden ebene Raumwellen angenommen, die sich orthogonal zum Rand ausbreiten.

Die Zustandsgleichung für ein dynamisches System lautet nach der Nomenklatur des Abaqus-Handbuchs [Abq]

$$-\rho\ddot{\mathbf{u}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (3.73)$$

mit der Dichte ρ , der Partikelbeschleunigung $\ddot{\mathbf{u}}$ und der Spannung $\boldsymbol{\sigma}$. Da das Material homogen, isotrop und linear elastisch ist gilt das Hooksche Gesetz

$$\boldsymbol{\sigma} = 2G\boldsymbol{\varepsilon} + \lambda\text{Spur}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} \quad (3.74)$$

mit der Dehnung $\boldsymbol{\varepsilon}$, der Einheitsmatrix \mathbf{I} , der Lamé-Konstanten

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3.75)$$

und dem Schubmodul

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.76)$$

sowie der Elastizitätskonstanten E und der Poissonzahl ν . Einsetzen von (3.74), (3.75) und (3.76) in die Zustandsgleichung (3.73) sowie die Annahme kleiner Dehnungen

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} + \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \right) \quad (3.77)$$

liefert die Bewegungsgleichung

$$\rho\ddot{u}_i = G \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + (\lambda + G) \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \quad (3.78)$$

Für ebene Raumwellen, die sich entlang der x-Achse ausbreiten, existieren für die Bewegungsgleichung (3.78) Lösungen für die P-Welle und für die S-Welle. Die P-Welle hat die Form

$$u_x = f(x \pm c_p t), \quad u_y = u_z = 0. \quad (3.79)$$

Durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung (3.78) wird die Geschwindigkeit der P-Welle bestimmt:

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}} \quad (3.80)$$

Für S-Wellen mit der Form

$$u_y = f(x \pm c_s t), \quad u_x = u_z = 0 \quad (3.81)$$

oder

$$u_z = f(x \pm c_s t), \quad u_x = u_y = 0 \quad (3.82)$$

ergibt sich durch Einsetzen in die Bewegungsgleichung

$$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \quad (3.83)$$

Wellen der Form $f(x - ct)$ breiten sich dabei in Richtung der positiven x-Achse aus, Wellen der Form $f(x + ct)$ breiten sich in Richtung der negativen x-Achse aus.

An der Stelle $x = L$ befindet sich der Rand des Mediums. An diesem Rand wird eine Dämpfung

$$\sigma_{xx} = -d_p \dot{u}_x \quad (3.84)$$

$$\sigma_{xy} = -d_s \dot{u}_y \quad (3.85)$$

$$\sigma_{xz} = -d_s \dot{u}_z \quad (3.86)$$

eingeführt. Die Dämpfungskonstanten d_p und d_s werden dabei so gewählt, dass Reflexionen am Rand des Mediums verhindert werden. Ebene P-Wellen, die sich dem Rand nähern haben die Form

$$u_x = f_1(x - c_p t), \quad u_y = u_z = 0.$$

Wird der gesamte Anteil am Rand als ebene P-Welle reflektiert, so hat diese reflektierte Welle die Form

$$u_x = f_2(x + c_p t), \quad u_y = u_z = 0. \quad (3.87)$$

Aufgrund der Linearität des Problems kann Superposition angewendet werden und liefert die Gesamtverschiebung f mit den dazugehörigen Spannungen σ und der Geschwindigkeit \dot{u}_x :

$$f = f_1 + f_2 \quad (3.88)$$

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2G)(f'_1 + f'_2), \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0 \quad (3.89)$$

$$\dot{u}_x = -c_p(f'_1 - f'_2) \quad (3.90)$$

Einsetzen von (3.88), (3.89) und (3.90) in die Dämpfungsgleichung (3.84) liefert

$$(\lambda + 2G - d_p c_p) f'_1 + (\lambda + 2G + d_p c_p) f'_2 = 0 \quad (3.91)$$

Durch die eingeführte Dämpfung sollen Reflexionen am Rand verhindert werden, es muss also $f_2 = 0$ für beliebige f_1 gelten. Dies wird gewährleistet, indem die Dämpfungskonstante dem Wellenwiderstand der P-Welle entspricht:

$$d_p = \frac{\lambda + 2G}{c_p} = \rho c_p \quad (3.92)$$

Auf die gleiche Weise entspricht die Dämpfungskonstante

$$d_s = \rho c_s \quad (3.93)$$

dem Wellenwiderstand der S-Welle. Diese Dämpfung ist in den infiniten Elementen eingebaut. Diese dämpfen ebene, orthogonal zum Rand laufende Raumwellen so, dass keine reflektierten Wellen entstehen. Für alle Wellen, auch für Rayleigh-Wellen oder Love-Wellen, funktionieren infinite Elemente nur dann gut, wenn die dominante Richtung der Wellenausbreitung senkrecht zum Rand verläuft.

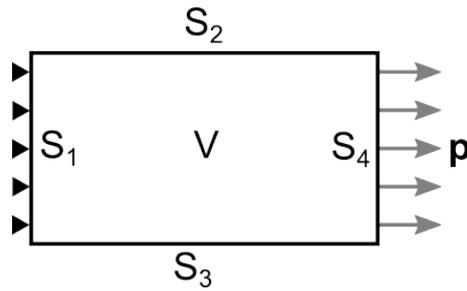


Abbildung 3.5.: Zweidimensionale Struktur mit den Rändern S_1, S_2, S_3 und S_4 , dem Volumen V und der Spannung p .

3.9. Grundlagen zur Boundary-Elemente-Methode (BEM)

Dieses Kapitel orientiert sich an der Darstellung von [Iso12, S. 1-4].

3.9.1. Linear elastisches Material

Die Boundary-Elemente-Methode wird anhand einer zweidimensionalen, linear elastischen Struktur (siehe Abbildung 3.5) erläutert. Eine dünne Platte mit dem Volumen V und den Oberflächen S_1, S_2, S_3 und S_4 wird einer Spannung p ausgesetzt. Die Verschiebung $u_i(\mathbf{x})$ an jedem Punkt \mathbf{x} erfüllt die Differentialgleichung

$$\partial_i \partial_j u_i(\mathbf{x}) + \frac{1}{1-2\nu} \partial_i \partial_j u_j(\mathbf{x}) = 0, \quad i, j = 1, 2 \quad (3.94)$$

mit dem Differentialoperator $\partial_i = \partial/\partial x_i$. Die Randbedingungen lauten

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0}, & \mathbf{x} &\in S_1 \\ \mathbf{t}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0}, & \mathbf{x} &\in S_2, \mathbf{x} \in S_3 \\ \mathbf{t}(\mathbf{x}) &= \mathbf{p}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} &\in S_4 \end{aligned} \quad (3.95)$$

mit den vorgegebenen Vektor $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ und dem Spannungsvektor $\mathbf{t}(\mathbf{x})$. Die Lösung der Gleichung (3.94) nimmt nach der Nomenklatur des IsoBEM-Handbuchs [Iso12] mit den Fundamentallösungen $u_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ und $t_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ der Gleichung (3.94) die Integral-Form

$$c(\mathbf{x})u_i(\mathbf{x}) + \int_S t_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot u_j(\mathbf{y}) dS_y = \int_S u_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot t_j(\mathbf{y}) dS_y \quad (3.96)$$

an. Dabei ist $S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$ die Oberfläche der Struktur, der Koeffizient $c(\mathbf{x})$ nimmt die Werte 1 für Punkte innerhalb der Struktur, 0 für Punkte außerhalb der Struktur und 0,5 für Punkte am Rand der Struktur an. Der Vektor \mathbf{y} gibt die Position der Quelle an. Die Fundamentallösungen lauten dabei

$$\begin{aligned} u_{ij}^* &= a_1 \delta_{ij} \ln\left(\frac{1}{r}\right) + a_2 (\partial_i r)(\partial_j r) \\ t_{ij}^* &= \frac{a_3 \frac{\partial r}{\partial n} \delta_{ij} + a_e \frac{\partial r}{\partial n} (\partial_i r)(\partial_j r) + a_5 [n_j (\partial_i r) - n_i (\partial_j r)]}{r} \end{aligned}$$

mit dem Elastizitätsmodul E und den Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3-4\nu}{c_1}, & a_2 &= \frac{1}{c_1}, & a_3 &= \frac{2\nu-1}{c_2} = -a_5, & a_4 &= -\frac{2}{c_2}, \\ c_1 &= 4\pi \frac{E(1-\nu)}{1+\nu}, & c_2 &= \pi(1-\nu). \end{aligned}$$

Mit den Randbedingungen (3.95) lautet Gleichung (3.96):

$$c(\mathbf{x})u_i(\mathbf{x}) + \int_{S_2+S_3+S_4} t_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot u_j(\mathbf{y}) dS_y = \int_{S_1} u_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot t_j(\mathbf{y}) dS_y + \int_{S_4} u_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot p(\mathbf{y}) dS_y \quad (3.97)$$

Es wird angenommen, dass die Spannung $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ am Rand der Struktur gemessen wird. Damit kann die Gleichung (3.97) umgeschrieben werden:

$$\frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}) + \int_{S_2+S_3+S_4} t_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot u_j(\mathbf{y}) dS_y = \int_{S_1} u_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot t_j(\mathbf{y}) dS_y + \int_{S_4} u_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot p(\mathbf{y}) dS_y \quad (3.98)$$

Der Rand der Struktur wird dann in α, β, γ eindimensionale Linien-Elemente aufgeteilt:

$$\frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}) + \sum_{e=1}^{\alpha} \int_{S_e} t_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot u_j(\mathbf{y}) dS_y = \sum_{e=1}^{\beta} \int_{S_e} u_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot t_j(\mathbf{y}) dS_y + \sum_{e=1}^{\gamma} \int_{S_e} u_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot p(\mathbf{y}) dS_y \quad (3.99)$$

Nun wird das globale Koordinatensystem in ein lokales Koordinatensystem transformiert. Der Parameter N gibt dabei die Anzahl der Knoten in einem Element an.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}u_i(\mathbf{x}) + \left(\sum_{e=1}^{\alpha} \sum_{n=1}^N \int_{S_e} t_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_j^e(\mathbf{y}) dS_y \right) \cdot u_j^e = \\ \left(\sum_{e=1}^{\beta} \sum_{n=1}^N \int_{S_e} u_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_j^e(\mathbf{y}) dS_y \right) \cdot t_j^e + \left(\sum_{e=1}^{\gamma} \sum_{n=1}^N \int_{S_e} u_{ij}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) N_j^e(\mathbf{y}) dS_y \right) \cdot p \end{aligned} \quad (3.100)$$

Führt man eine globale Nummerierung der Knoten ein, so lautet Gleichung (3.100) für den Knoten k

$$\frac{1}{2}\mathbf{u}^k + \left(\sum_{q=Q+1}^{Q_1} \mathbf{H}_{kq}^{S_2+S_3+S_4} \right) \cdot \mathbf{u}^q = \left(\sum_{q=1}^{Q_1} \mathbf{G}_{kq}^{S_1} \right) \cdot \mathbf{t}^q + \left(\sum_{q=Q_3+1}^{Q_{total}} \mathbf{G}_{kq}^{S_4} \right) \cdot \mathbf{p}^q \quad (3.101)$$

Dabei sind $1/Q_1$ die Knoten auf S_1 , $Q_1 + 1/Q_2$ die Knoten auf S_2 , $Q_2 + 1/Q_3$ die Knoten auf S_3 und $Q_3 + 1/Q_{total}$ die Knoten auf S_4 . Die Verschiebungen \mathbf{u}^k sind Null an den Knoten $1/Q_1$. Die Vektoren \mathbf{u}^q und \mathbf{t}^q enthalten die unbekanntten Verschiebungen und Spannungen am Knoten q und \mathbf{p}^q enthält die bekannten Spannungen an den Knoten $q_3 + 1/q_{total}$.

Wird Gleichung (3.101) für alle Knoten zusammengefasst, erhält man ein Gleichungssystem der Form:

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{t} \quad (3.102)$$

Dies kann unter Berücksichtigung der Randbedingungen umgeschrieben werden in

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (3.103)$$

Der Vektor \mathbf{x} enthält die unbekanntten Verschiebungen an den Knoten der Ränder S_2, S_3 und S_4 und die unbekanntten Spannungen an den Knoten des Rands S_1 . Der Vektor \mathbf{b} umfasst die Verschiebungen am Rand S_1 und die Spannungen an den Rändern S_2 und S_3 , die jeweils Null sind sowie die bekannten Spannungen an den Knoten des Rands S_4 . Die Matrix \mathbf{A} ist voll besetzt mit Integralen G und H .

Das Gleichungssystem (3.103) kann mithilfe des Gaußschen Eliminationsverfahren gelöst und der Vektor \mathbf{x} berechnet werden.

3.9.2. Vergleich von Boundary-Elemente-Methode und Finite-Elemente-Methode

Anschließend werden die Unterschiede zwischen der Boundary-Elemente-Methode und der Finite-Elemente-Methode kurz erläutert.

Die FEM löst näherungsweise die partiellen Differentialgleichungen eines Problems, bei der BEM werden die Lösungen des Problems durch näherungsweise Berechnung der Integrale des Problems bestimmt.

Bei der BEM werden nur die Ränder bzw. Oberflächen der Modellkörpers bzw. der homogenen Bereiche diskretisiert, bei der FEM muss der gesamte Körper diskretisiert werden. Durch diese Reduzierung der Dimension um eins sind bei der BEM wesentlich weniger Knoten bzw. Freiheitsgrade zu berechnen und die Datenmenge während des pre-processings wird reduziert.

Die bei BEM im Gleichungssystem auftretenden Matrizen sind dadurch klein, aber voll besetzt und nicht symmetrisch. Dadurch erhöht sich die Rechenzeit, um dieses Gleichungssystem zu lösen.

Lasten können in der FEM als Einzellast auf einen Knoten aufgebracht werden. In der BEM werden Lasten durch Spannungen auf Elemente ausgeübt.

Durch die Fundamentallösungen wird besonders bei Halbraum-Problemen die Genauigkeit der Lösungen verbessert. Die Randbedingungen der Wellenausbreitung ins Unendliche ist automatisch erfüllt.

Für ein kleines Oberflächen-Volumen-Verhältnis (z.B. Balken) ist die FEM im Vergleich zur BEM effizienter.

Mithilfe der FEM können auch inhomogene, anisotrope und nicht linear elastische Halbräume modelliert werden. Mit der BEM können Verschiebungen nur für Halbräume berechnet werden, die durch ihre diskrete Oberfläche beschrieben werden. Ein Halbraum, dessen Materialparameter sich mit der Tiefe z ändern, erfordert die Diskretisierung der Flächen, an denen sich die Materialeigenschaften ändern.

4. Semi-analytische Berechnung der Verschiebung

4.1. Verschiebung $u(\tau)$ nach Pekeris und Chao für Punktquelle

Abbildung 4.1 zeigt die nach Pekeris [Pek55] und Chao [Cha60] berechneten vertikalen und horizontalen Verschiebungen $u_{ii}(\tau)$ in einer Entfernung $r = 100$ m an der Oberfläche eines linear elastischen, homogenen, isotropen Halbraums, der durch eine vertikale Einzellast $F(t) = \Theta(t)$ belastet wird. Dabei ist τ die auf die S-Wellengeschwindigkeit c_s bezogene dimensionslose Zeit $\tau = r/c_s t$.

Die Matlab-Programme zur Berechnung der semi-analytischen Lösung befinden sich im Anhang.

Die elliptischen Integrale werden mithilfe der Gauß-Quadratur numerisch gelöst.

Die Vertikal- und Radialverschiebungen $u_{zz}(\tau)$, $u_{rz}(\tau)$, $u_{zx}(\tau)$ und $u_{rx}(\tau)$ werden nach Pekeris und Chao beim Einsatz der Rayleigh-Welle infinit. Um später die Verschiebung eines beliebigen Kraftsignals zu berechnen, werden diese Lösungen zum Zeitpunkt $\tau = \gamma$ nach [Kau12] und [Kau13] genähert. Durch die zeitliche Diskretisierung $d\tau = 0,001$ s werden die Verschiebungen finit, sodass eine Ableitung gebildet und eine Faltung durchgeführt werden kann. Die Verschiebung durch die Rayleigh-Welle ist daher nicht exakt abgebildet, weshalb für diesen Bereich keine Verschiebungsamplituden angegeben werden.

Das Fundament wird zunächst mit einem Kraftsignal mit dem zeitlichen Verlauf einer Heaviside-Funktion $F(t) = F_0\Theta(t)$ mit einer stationären Kraft $F_0 = 1$ kN belastet.

Die Materialkonstanten Dichte ρ , Schubmodul G und Poissonzahl ν des Halbraums entsprechen etwa den Materialeigenschaften von Sand:

$$\rho = 1,8 \text{ t/m}^3 \quad G = 72 \text{ MPa} \quad \nu = 0,25$$

Daraus ergeben sich die seismischen Geschwindigkeiten der S-Welle c_s und der P-Welle c_p :

$$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$
$$c_p = c_s \sqrt{3} = 346,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

4.1.1. Vertikale Verschiebung $u_{zz}(\tau)$ bei vertikaler Belastung

Abbildung 4.1(a) zeigt die vertikale Verschiebung $u_{zz}(\tau)$ bei vertikaler Belastung.

Der Einsatz der P-Welle zum Zeitpunkt $\tau = 1/\sqrt{3}$ erzeugt eine Verschiebung von $u_{zzp} = 0,85$ nm nach oben. Der Einsatz der S-Welle ist als Änderung der Steigung (bei $\tau = 1$) erkennbar. Der Einsatz der Rayleigh-Welle erzeugt ebenfalls eine Verschiebung nach oben, die deutlich größer ist als die Verschiebungen der P- und S-Welle. Nach dem Einsatz der Rayleigh-Welle nimmt die Verschiebung sofort den stationären Wert an. Da die angewendete Kraft nach unten aufgebracht wird, findet auch die stationäre Verschiebung nach unten statt und beträgt $u_{zzst} = -16,58$ nm.

4.1.2. Radiale Verschiebung $u_{rz}(\tau)$ bei vertikaler Belastung

Abbildung 4.1(b) zeigt die radiale Verschiebung $u_{rz}(\tau)$ bei vertikaler Belastung. Der Einsatz der P-Welle erzeugt eine Verschiebung $u_{rz_p} = 3,18$ nm nach außen. Da die Partikelbewegung der P-Welle an der Oberfläche in horizontaler Richtung stattfindet, ist diese auf der horizontalen Komponente der Verschiebung deutlich besser zu erkennen als auf der vertikalen Komponente. Der Einsatz der S-Welle ist durch eine Änderung der Steigung gekennzeichnet und ist aufgrund der Partikelbewegung auf der Vertikalkomponente deutlich besser zu erkennen. Beim Einsatz der Rayleigh-Welle findet plötzlich eine Verschiebung nach innen statt, die deutlich größer ist als die Verschiebung der P- und S-Welle. Diese nimmt exponentiell ab bis die stationäre Verschiebung erreicht ist. Die stationäre Verschiebung findet nach innen statt und ist mit $u_{rz_{st}} = -5,53$ nm kleiner als die vertikale stationäre Verschiebung.

4.1.3. Vertikale Verschiebung $u_{zx}(\tau)$ bei horizontaler Belastung

Abbildung 4.1(c) zeigt die vertikale Verschiebung $u_{zx}(\tau)$ bei horizontaler Belastung. Die Verschiebung bei horizontaler Belastung wird jeweils in der Richtung beobachtet, in der die Belastung stattfindet ($\Theta = 0$). Somit ist jeweils die maximale Verschiebung dargestellt. Die vertikale Verschiebung $u_{zx}(\tau)$ bei horizontaler Belastung entspricht der radialen Verschiebung $u_{rz}(\tau)$ bei vertikaler Belastung. Die P-Welle erzeugt eine Verschiebung $u_{zx_p} = -3,18$ nm nach unten, die stationäre Verschiebung $u_{zx_{st}} = 5,81$ nm erfolgt nach oben.

4.1.4. Radiale Verschiebung $u_{rx}(\tau)$ bei horizontaler Belastung

Abbildung 4.1 (d) zeigt die radiale Verschiebung $u_{rx}(\tau)$ bei horizontaler Belastung. Der Einsatz der P-Welle erzeugt eine Verschiebung nach außen (von der Quelle weg), die größer ist als die radiale Verschiebung u_{rz} . Die maximale Verschiebung $u_{rx_p} = 14,42$ nm wird kurz vor dem Einsatz der S-Welle erreicht. Dieser ist als Änderung der Steigung bei $\tau = 1$ erkennbar. Beim Einsatz der Rayleigh-Welle findet eine Verschiebung nach innen statt, die im Vergleich zur Verschiebung von P- und S-Welle deutlich größer ist. Die stationäre Verschiebung $u_{rx_{st}} = 22,16$ nm findet in der Richtung statt, in der die horizontale Belastung aufgebracht wird und ist größer als die vertikale Verschiebung $u_{zx_{st}}$.

4.1.5. Tangentiale Verschiebung $u_{tx}(\tau)$ bei horizontaler Belastung

Abbildung 4.1 (e) zeigt die tangentielle Verschiebung $u_{tx}(\tau)$ bei horizontaler Belastung. Für $\theta = 0$ findet keine Verschiebung in tangentialer Richtung statt. Für $\theta = 90^\circ$ findet die hier gezeigt maximale Verschiebung statt.

Der Einsatz der P-Welle erzeugt eine Verschiebung nach außen (von der Quelle weg). Dabei wird die maximale Verschiebung $u_{tx_p} = 7,00$ nm kurz vor dem Einsatz der S-Welle erreicht. Beim S-Welleneinsatz findet eine Verschiebung nach außen statt, die bis zum Einsatz der Rayleigh-Welle zunimmt. Mit dem Einsatz der Rayleigh-Welle setzt die statische Verschiebung $u_{tx_{st}} = -16,63$ nm ein, die ebenfalls nach außen gerichtet ist.

4.1.6. Vergleich der statischen Verschiebung mit Lösung von Boussinesq

Nach Boussinesq [SBVB16] sind die statischen Verschiebungen für eine vertikale Einzellast gegeben durch:

$$u_z = \frac{F}{4\pi G} \left(2(1 - \nu) \frac{1}{R} + \frac{z^2}{R^3} \right)$$

$$u_r = \frac{F}{4\pi G} \left(\frac{rz}{R^3} - (1 - 2\nu) \frac{r}{R(z + r)} \right)$$

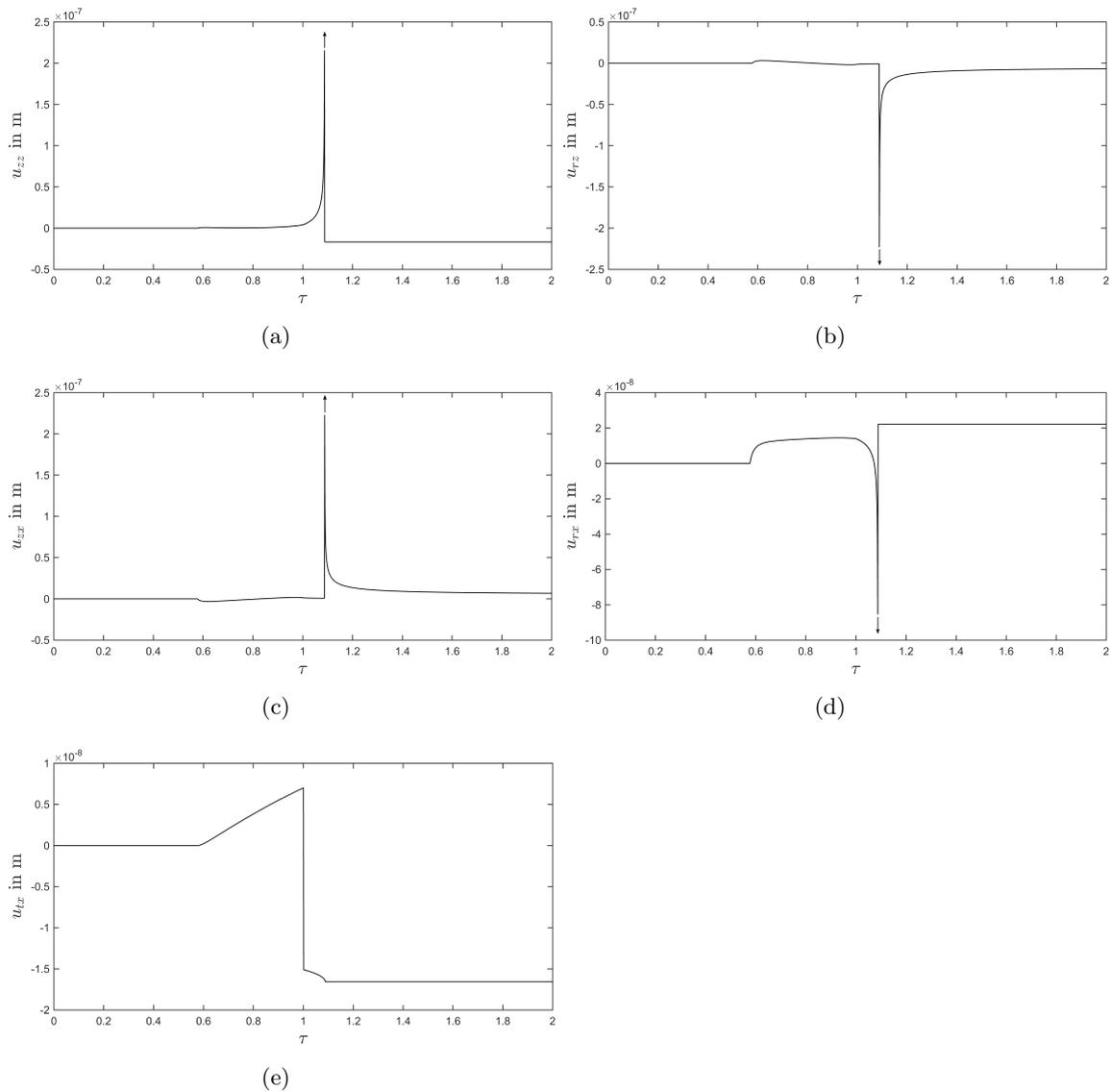


Abbildung 4.1.: Vertikale Verschiebung $u_{zz}(\tau)$ (a) und radiale Verschiebung $u_{rz}(\tau)$ (b) bei vertikaler Belastung sowie vertikale Verschiebung $u_{zx}(\tau)$ (c), radiale Verschiebung $u_{rx}(\tau)$ (d) und tangentiale Belastung $u_{tx}(\tau)$ (e) bei horizontaler Belastung der Oberfläche eines homogenen, isotropen, linear elastischen Halbraums mit einer Einzellast $F(t) = \Theta(t)$.

Das zugehörige Modell ist in Abbildung 3.1 abgebildet.

Für Verschiebungen an der Oberfläche ($z = 0$) und für die Poissonzahl $\nu = 0,25$ lauten diese:

$$u_z = \frac{3F}{8\pi Gr}$$

$$u_r = -\frac{F}{8\pi Gr}$$

Mit den oben festgelegten Parametern Entfernung $r = 100$ m, Schubmodul $G = 72$ MPa und der statischen Last $F = 1$ kN ergeben sich folgende Verschiebungen nach Boussinesq:

$$u_z = 16,58 \text{ nm}$$

$$u_r = -5,53 \text{ nm}$$

Die oben berechneten Verschiebungen u_{zzst} und u_{rzst} nach Pekeris stimmen exakt mit den von Boussinesq bestimmten statischen Verschiebungen u_z und u_r für eine Einzellast überein.

4.2. Verschiebung $u_{zz}(t)$ für Punktquelle

Die oben berechnete Vertikalverschiebung $u_{zz}(\tau)$ wird nun mit $t = \tau c_s / r$ umgerechnet in die zeitabhängige Vertikalverschiebung $u_{zz}(t)$. Damit ist nicht nur die Amplitude, sondern auch der zeitliche Verlauf der Verschiebung abhängig von der Entfernung r zur Quelle. Abbildung 4.2 zeigt die vertikalen Verschiebungen $u_{zz}(t)$ in den Entfernungen $r = 20$ m (a), $r = 40$ m (b), $r = 60$ m (c) und $r = 80$ m (d) an der Oberfläche eines linear elastischen, homogenen, isotropen Halbraums, der mit einer vertikalen Einzellast $F(t) = \Theta(t)$ belastet wird.

Proportional zur zunehmenden Entfernung r wachsen die Laufzeit der P-Welle $t_p = r/c_p$, der S-Welle $t_s = r/c_s$ und der Rayleigh-Welle $t_R = r/c_R$ und somit auch die Differenz der Laufzeiten $t_R - t_p$. Dadurch erhöht sich die zeitliche Länge der Verschiebung bzw. der Greenschen Funktion $G_1(t)$, $G_2(t)$, $R_1(t)$ und $R_2(t)$ mit steigender Entfernung. Für kleine Entfernungen ist die zeitliche Länge der Greenschen Funktion weniger relevant und die Verschiebung kann als positiver Impuls zum Zeitpunkt des Rayleigh-Wellen-Einsatzes genähert werden. Mit steigender Entfernung wächst die zeitliche Länge der Greenschen Funktion und diese Näherung kann nicht mehr getroffen werden.

Über die Abnahme der Rayleigh-Welle mit zunehmender Entfernung r kann aufgrund der Näherung der Singularität keine Aussage gemacht werden.

4.3. Verschiebung bei Belastung eines schlaffen Fundaments mit $F(t) = \Theta(t)$

Aus den oben berechneten Lösungen für eine Einzellast werden nun die Verschiebungen für ein Fundament einer WEA berechnet.

Das Fundament liegt auf der Oberfläche eines linear elastischen, homogenen, isotropen Halbraums auf. Der Radius $R = 10$ m des Fundaments wurde so gewählt, dass dieser dem Radius $R = 6 - 10$ m einer realen WEA entspricht.

Um die Verschiebungen eines belasteten Fundaments zu berechnen, wird dieses in einzelne quadratische Flächen gleicher Größe A aufgeteilt, die jeweils mit einer Kraft $F(t)$ belastet werden. Das Fundament wird also als Summe von Punktquellen betrachtet.

Die Kraft $F(t)$ entspricht dem Oberflächenintegral der aufgebrachten Spannung $\sigma(t)$ [Pek55]. Für eine Kreisfläche mit finitem Radius a gilt also [Moo74]:

$$F(t) = 2\pi \int_0^R \sigma(t) r dr = \pi a^2 \sigma(t) = A \sigma(t)$$

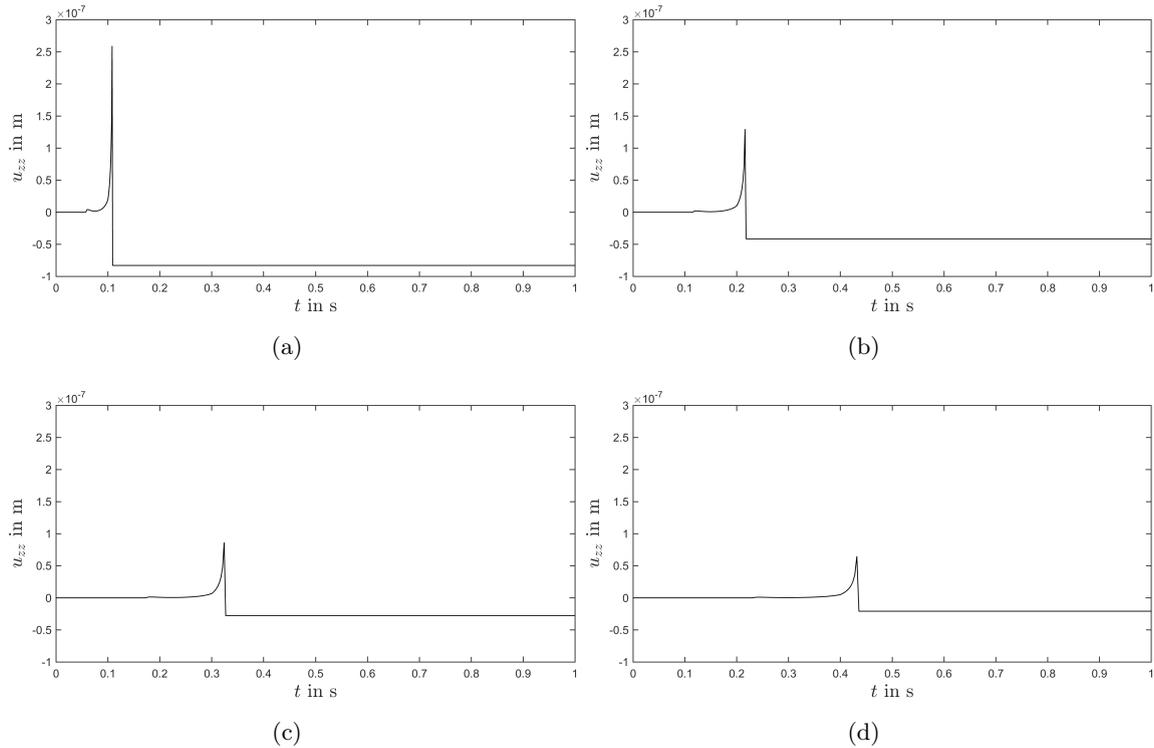


Abbildung 4.2.: Vertikale Verschiebung $u_{zz}(t)$ in einer Entfernung $r = 20\text{ m}$ (a), $r = 40\text{ m}$ (b), $r = 60\text{ m}$ (c) und $r = 80\text{ m}$ (d) an der Oberfläche eines linear elastischen, homogenen, isotropen Halbraums, der mit einer vertikalen Einzellast $F(t) = F_0\Theta(t)$ mit $F_0 = 1\text{ kN}$ belastet wird.

Bei einem schlaffen Fundament wird von einer konstanten Spannungsverteilung an der Fundamentsohle ausgegangen (siehe Kapitel 3.1), die Belastung $F(t)$ ist also bei allen diskreten Flächen A gleich. Bei einem starren Fundament ist die Spannungsverteilung an der Fundamentsohle nicht konstant, für jede Fläche A unterscheidet sich die aufgebrachte Spannung $P(t)$ und muss einzeln berechnet werden. Aufgrund der einfacheren Berechnung wird zunächst ein schlaffes Fundament betrachtet.

Abbildung 4.3 zeigt das Fundament, das in 1264 Quadrate der Kantenlänge $b = 0,5\text{ m}$ aufgeteilt wird. Die Fläche eines Quadrats beträgt $A = 0,25\text{ m}^2$, die Spannung soll $\sigma(t) = \sigma_0\Theta(t)$ mit $\sigma_0 = 1\text{ kPa}$ betragen. Die auf ein Quadrat wirkende Kraft beträgt also $F(t) = F_0\Theta(t)$ mit $F_0 = 0,25\text{ kN}$.

An einem beliebigen Punkt außerhalb des Fundaments wird die Verschiebung berechnet, die durch die Belastung jeder Teilfläche des Fundaments entsteht. Dabei werden alle Teilflächen des Fundaments gleichzeitig mit der Kraft $F(t)$ belastet. Um die Verschiebung durch das gesamte Fundament zu bestimmen, werden die Verschiebungen der einzelnen Teilflächen werden addiert.

Abbildung 4.4 zeigt die vertikale Verschiebung $u_{\Theta zz}$ in einer Entfernung von 100 m vom Mittelpunkt eines schlaffen Fundaments, das mit einer Kraft $F(t) = F_0\Theta(t)$ belastet wird. Da das Fundament diskretisiert wird und nicht als einzelne Punktquelle betrachtet wird, sind in der Verschiebung jeweils mehrere Einsätze der P-Welle, der S-Welle und der Rayleigh-Welle zu beobachten, die jedoch nur bei der Rayleigh-Welle als solche erkannt werden. Bei P-Welle und S-Welle können die einzelnen Einsätze aufgrund ihrer kleinen Amplitude nicht voneinander unterschieden werden. Die einzelnen Wellen setzen also nicht zu einem Zeitpunkt ein, sondern innerhalb eines Zeitbereichs.

Der Einsatz der P-Welle ist deutlich als Ersteinsatz zu erkennen und erzeugt eine Verschiebung von $u_{\Theta zzp} = 212,78\text{ nm}$. Diese ist aufgrund der räumlichen Ausdehnung des

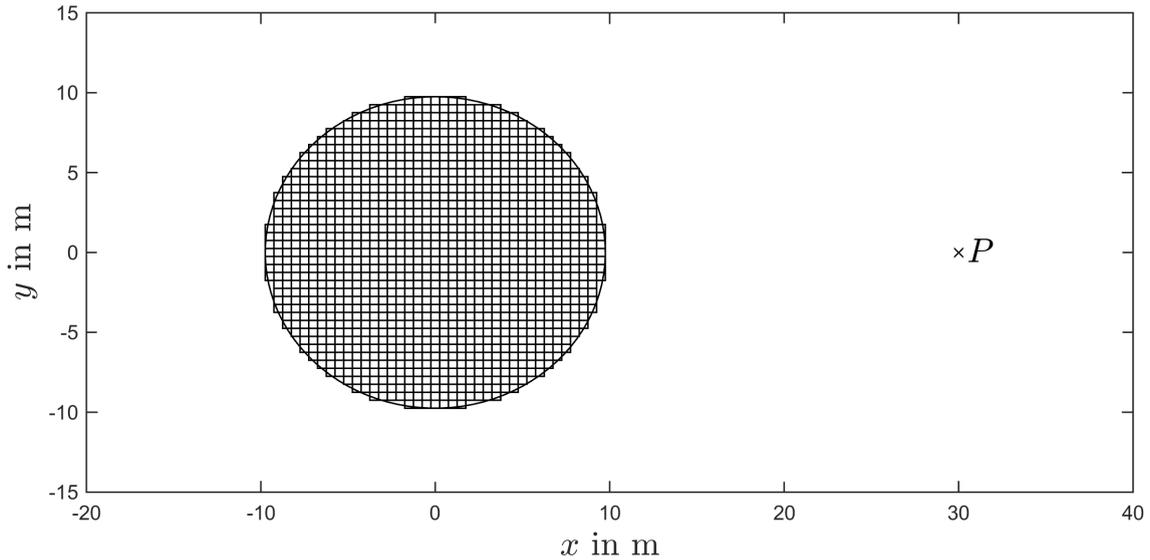


Abbildung 4.3.: Aufteilung der Fundamentfläche in Quadrate der Fläche A , Punkt P außerhalb des Fundaments.

Fundaments und die daraus resultierende Laufzeitdifferenz kleiner als die Verschiebung $\pi R^2 u_{zzp} = 266,9 \text{ nm}$ bei Näherung des Fundaments als Punktquelle. Der Einsatz der S-Welle ist aufgrund der Phasenverschiebung durch die Fundamentauserweiterung nicht zu erkennen. Die Verschiebung steigt bis zu den Einsätzen der Rayleigh-Wellen an, die als Peaks in der Verschiebung zu erkennen sind. Während dieser Einsätze sinkt die Verschiebung, bis der statische Wert $u_{\Theta zzst} = -5,26 \text{ mm}$ erreicht ist.

4.4. Verschiebung bei Belastung eines Fundaments mit $F(t) = F_0 f(t)$

Die Verschiebung durch ein Fundament, das mit einem beliebigen dimensionslosen Signal $f(t)$ belastet wird, wird nach Mooney [Moo74] mit

$$u_z = \frac{3F_0}{\pi^2 \mu r} \left(\frac{df}{dt} * G(t) \right)$$

berechnet, wobei $G(t)$ die Greensche Funktion darstellt. Mit der Verschiebung $u_{zz}(t) = 3F_0/\pi^2 \mu r G(t)$ und nach dem Vertauschen von Faltung und Ableitung ergibt sich:

$$u_z = \frac{3F_0}{\pi^2 \mu r} \frac{dG(t)}{dt} * f(t) = \frac{du_{zz}(t)}{dt} * f(t)$$

Das Tauschen von Faltung und Ableitung ist möglich, da beide Operationen linear sind. Das anregende Kraftsignal kann dann als $F(t) = F_0 f(t)$ interpretiert werden.

Die Ableitung der Verschiebung $du_{zz}(t)/dt$ ist hier (aufgrund der Ableitung der dimensionslosen Greenschen Funktion) nicht als Geschwindigkeit zu verstehen, sondern als Ableitung des anregenden Kraftsignals $F(t) = F_0 \Theta(t)$. Die Ableitung $dF(t)/dt = F_0 \delta(t)$ ist ein Dirac-Impuls. Die Ableitung $du_{\Theta zz}(t)/dt$ entspricht also der Verschiebung $u_{\delta zz}$, die durch die Belastung eines Fundaments mit einem Kraftsignal $F(t) = F_0 \delta(t)$ verursacht wird.

Abbildung 4.5 zeigt die vertikale Verschiebung $u_{\delta zz}$ in einer Entfernung von 100 m vom Mittelpunkt eines schlaffen Fundaments, das mit einer Kraft $F(t) = F_0 \delta(t)$ belastet wird. Die Verschiebung $u_{\delta zz}$ wurde mithilfe eines gleitenden Mittelwert mit der Fensterbreite $l = 0,05 \text{ s}$ zur besseren Darstellung geglättet.

Der Einsatz der P-Welle bei $t = 0,26 - 0,32 \text{ s}$ erzeugt eine Verschiebung $u_{\delta zzp} = 5,42 \text{ nm}$ nach oben. Der Einsatz der S-Welle ist aufgrund der Laufzeitdifferenzen durch die Fundamentauserweiterung nicht zu erkennen, erfolgt jedoch im Zeitbereich von $t = 0,45 - 0,55 \text{ s}$

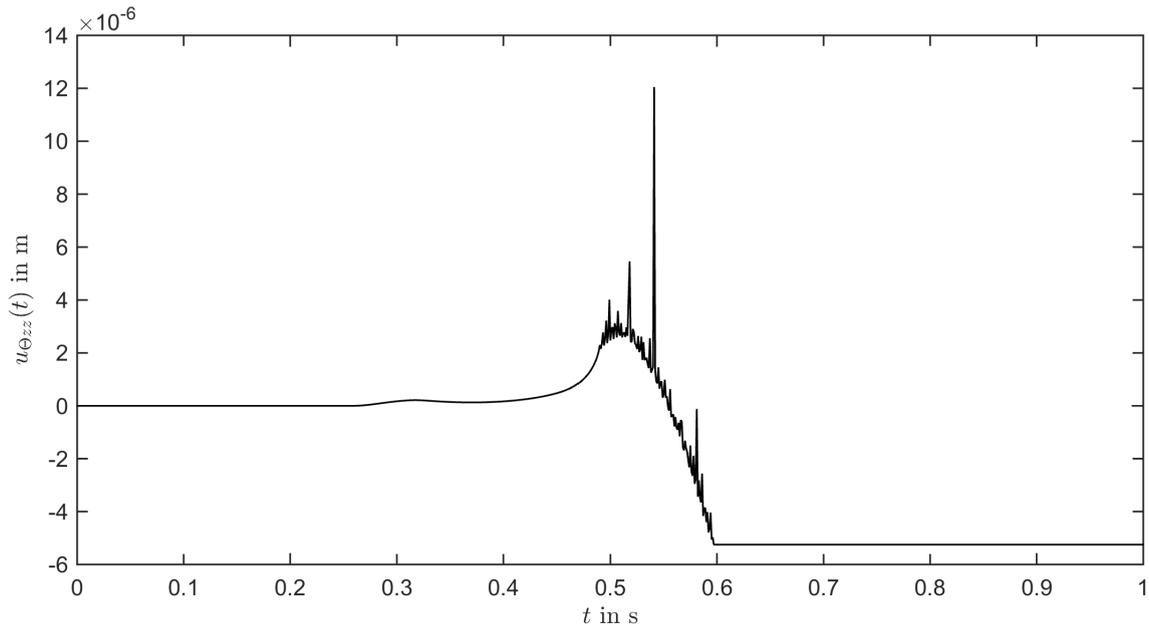


Abbildung 4.4.: Durch die Belastung $F(t) = F_0\Theta(t)$ eines schlaffen Fundaments verursachte Verschiebung $u_{\Theta_{zz}}$ in einer Entfernung von $r = 100 \text{ m}$ vom Mittelpunkt des Fundaments.

und erzeugt eine Verschiebung nach oben. Mit dem Einsatz der Rayleigh-Wellen bei $t = 0,49 - 0,60 \text{ s}$ nimmt die Verschiebung nach oben zunächst zu, bevor eine größere Verschiebung nach unten erfolgt. Eine statische Verschiebung existiert bei der Anregung mit $F(t) = F_0\delta(t)$ nicht.

Abbildung 4.6 zeigt die vertikale Verschiebung $u_{\delta_{zz}}$ in den Entfernung $r = 20 \text{ m}$, 40 m 60 m und 80 m vom Mittelpunkt eines schlaffen Fundaments, das mit einer Kraft $F(t) = F_0\delta(t)$ belastet wird.

Mit zunehmender Entfernung r nimmt auch die Laufzeitdifferenz $t_R - t_p$ und somit auch die zeitliche Dauer der Verschiebung u_z zu. Da sich auch die Laufzeitdifferenz $t_R - t_s$ mit zunehmender Entfernung r vergrößert, findet die Verschiebung nach oben über einen zunehmend längeren Zeitraum statt. Zudem wird dadurch die Amplitude der Verschiebung nach oben mit zunehmender Entfernung r größer, die Verschiebung durch die Rayleigh-Welle nach unten wird mit zunehmender Entfernung kleiner. Die Laufzeitdifferenz Δt der Rayleigh-Welle durch das Fundament bleibt jedoch unabhängig von der Entfernung r konstant, sodass die Einsätze der Rayleigh-Welle immer in einem Zeitfenster Δt erfolgen. Für die Rayleigh-Welle zeigt sich näherungsweise eine Abnahme der Amplitude mit $1/\sqrt{r}$.

Das Signal $f(t)$, mit dem das Fundament belastet wird, ist ein puls förmiges Sinus-Signal über eine Periode T :

$$f(t) = \begin{cases} \sin(2\pi f_i t) & t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

Dieses Signal wird für verschiedene Frequenzen f_i berechnet. Damit kann die Auswirkung der Fundamentausdehnung für verschiedene Frequenzen untersucht werden.

Zudem ist das Signal symmetrisch und mittelwertfrei. Daher ist zu erwarten, dass die berechnete Verschiebung ebenfalls symmetrisch ist und die statische Verschiebung verschwindet. Dies dient insbesondere bei der numerischen Berechnung zur Überprüfung der Ergebnisse.

Das auf die Periodendauer T normierte Kraftsignal $F(t) = F_0 f(t)$ mit $F_0 = \pi R^2 P_0 = 314 \text{ kN}$, mit dem das gesamte Fundament belastet wird, ist in Abbildung 4.7 abgebildet.

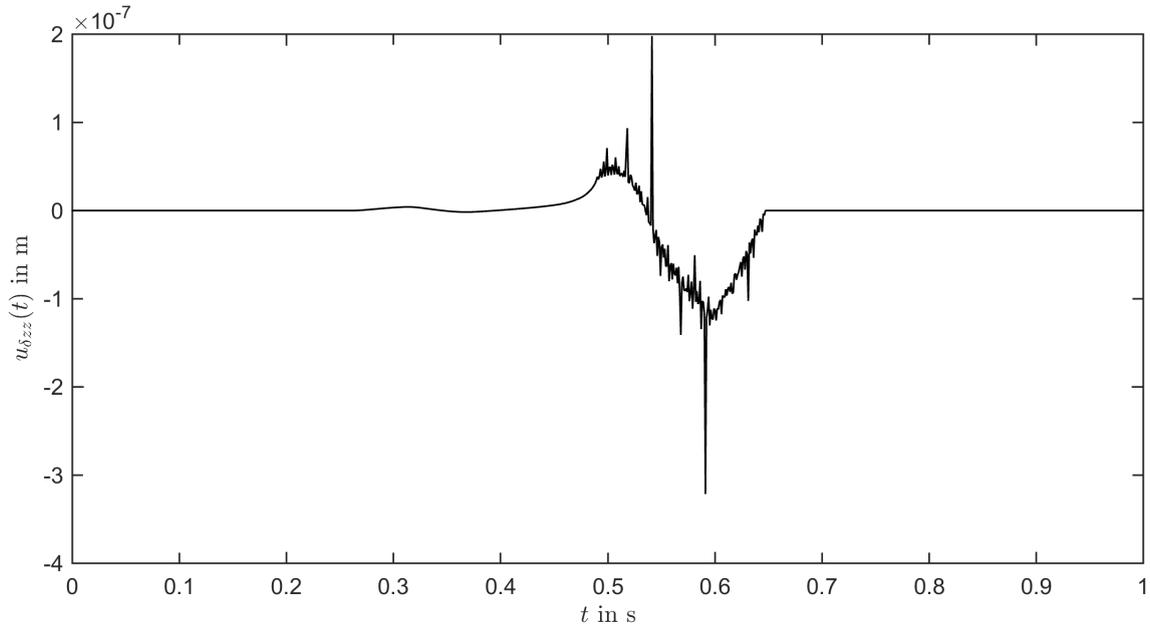


Abbildung 4.5.: Geglättete Verschiebung $u_{\delta_{zz}}$ am Punkt P durch Belastung $F = \delta(t)$ eines schlaffen Fundaments in einer Entfernung von 100 m.

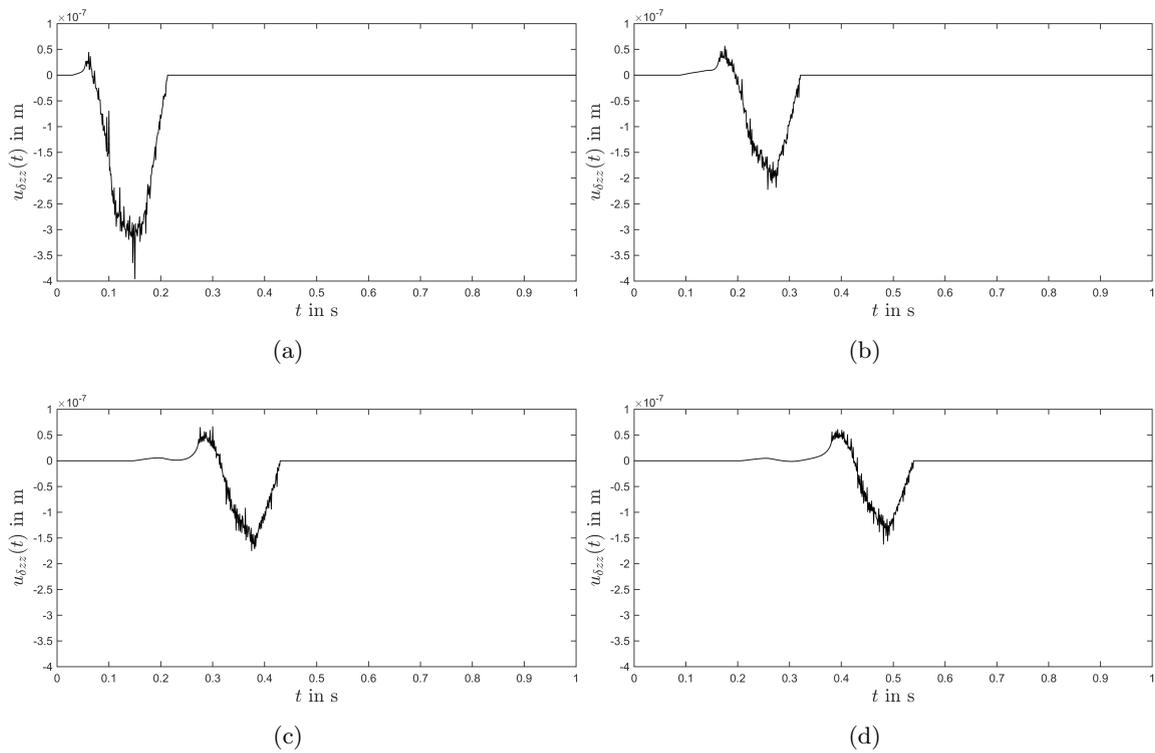


Abbildung 4.6.: Geglättete vertikale Verschiebung $u_{\delta_{zz}}(t)$ in einer Entfernung $r = 20 \text{ m}$ (a), $r = 40 \text{ m}$ (b), $r = 60 \text{ m}$ (c) und $r = 80 \text{ m}$ (d) an der Oberfläche eines linear elastischen, homogenen, isotropen Halbraums, der mit einer vertikalen Einzellast $F(t) = F_0 \delta(t)$ mit $F_0 = 1 \text{ kN}$ belastet wird.

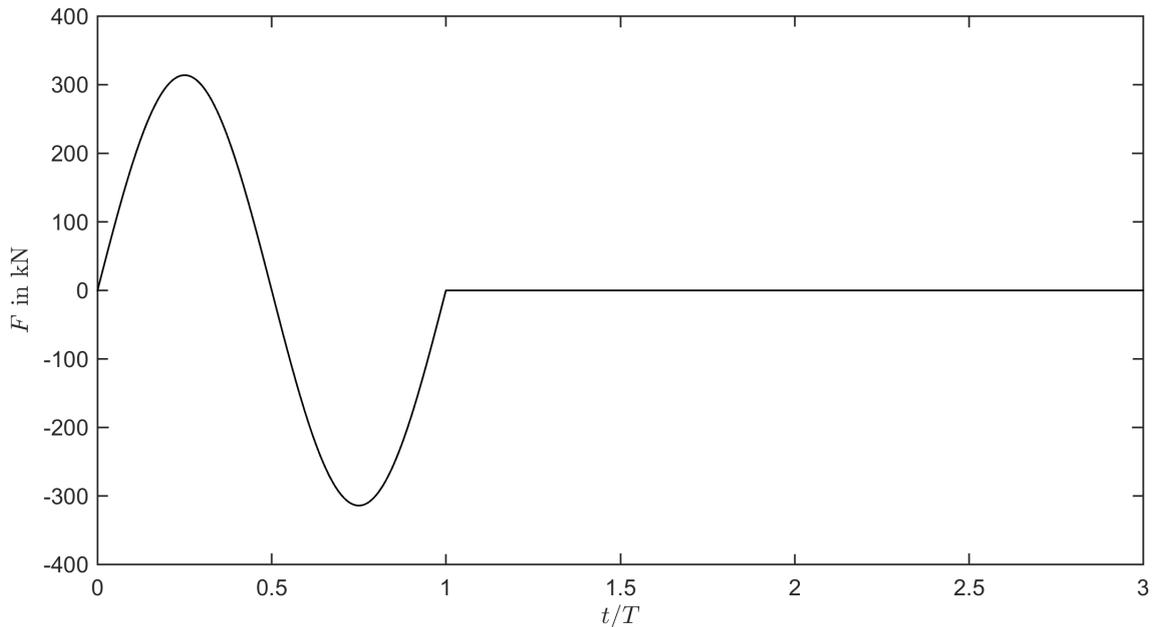


Abbildung 4.7.: Zeitlich auf Periodendauer T normierter Kraftverlauf $F(t) = F_0 \sin(2\pi f_i t)$, $0 \leq t < T$, mit der ein schlaffes Fundament belastet wird.

Die Verschiebung u_z , die durch Belastung eines schlaffen Fundaments mit der Kraft $F(t) = F_0 f(t)$ mit $F_0 = 314$ kN und $f = 1$ Hz in 100 m Entfernung vom Fundamentmittelpunkt hervorgerufen wird, ist in Abbildung 4.8 abgebildet.

Die P-Welle bildet den Ersteinsatz bei $t = 0,26$ s und erzeugt eine Verschiebung nach oben (in positive z -Richtung). Der Einsatz der S-Welle ist nicht exakt erkennbar, findet jedoch etwa bei $t \approx 0,45$ s statt und erzeugt eine Verschiebung von $u_{z_s} = 1,14$ mm nach oben. Die Rayleigh-Wellen setzen im Zeitbereich $t \approx 0,49 - 0,60$ s ein und überlagern die S-Welle. Proportional zur aufgebrauchten Kraft $F(t)$ findet zunächst eine Verschiebung nach unten (in negative z -Richtung), dann nach oben (in positive z -Richtung) statt. Dabei fällt auf, dass die Verschiebung nach unten mit $u_{z_R} = -6,00$ mm etwas größer ist als die Verschiebung nach oben ($u_{z_R} = 5,92$ mm), obwohl eine symmetrische Verschiebung erwartet wird. Die statische Verschiebung ist Null.

Um die Einflüsse verschiedener Frequenzen f_i auf die Verschiebung u_z zu untersuchen, wird das Fundament mit der vertikalen Kraft $F(t) = F_0 f(t)$ mit den Frequenzen $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz angeregt. Die Frequenzen f_i wurden so gewählt, dass sie den Bereich des an einer WEA auftretenden Frequenzspektrums abdecken und sich jeweils verdoppeln. Dabei werden Frequenzen $f_4 - f_7$ durch Blattdurchgänge der Rotorblätter am Turm der WEA erzeugt und Frequenzen $f_1 - f_4$ entsprechen den Eigenfrequenzen der WEA.

Die Verschiebungen u_z werden im Mittelpunkt C des Fundaments mit Radius $R = 10$ m sowie in den Entfernungen $r = R, 2R, 4R, 8R$ und $16R$ berechnet, sodass Einflüsse im Nahfeld und Fernfeld beobachtet werden können.

Zur besseren Darstellung und zur Untersuchung des Einflusses der Fundamentausdehnung werden die berechneten Verschiebungen auf die Periodendauer T der Anregungsfrequenz normiert.

Abbildung 4.9 zeigt die auf Periodendauer T normierte, semi-analytisch berechnete Vertikalverschiebung u_z im Mittelpunkt C und in den Entfernungen $r = R, 2R, 4R, 8R$ und $16R$ zum Mittelpunkt eines schlaffen Fundaments, das mit der vertikalen Kraft $F(t) = F_0 f(t)$ mit den Frequenzen $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz belastet wird.

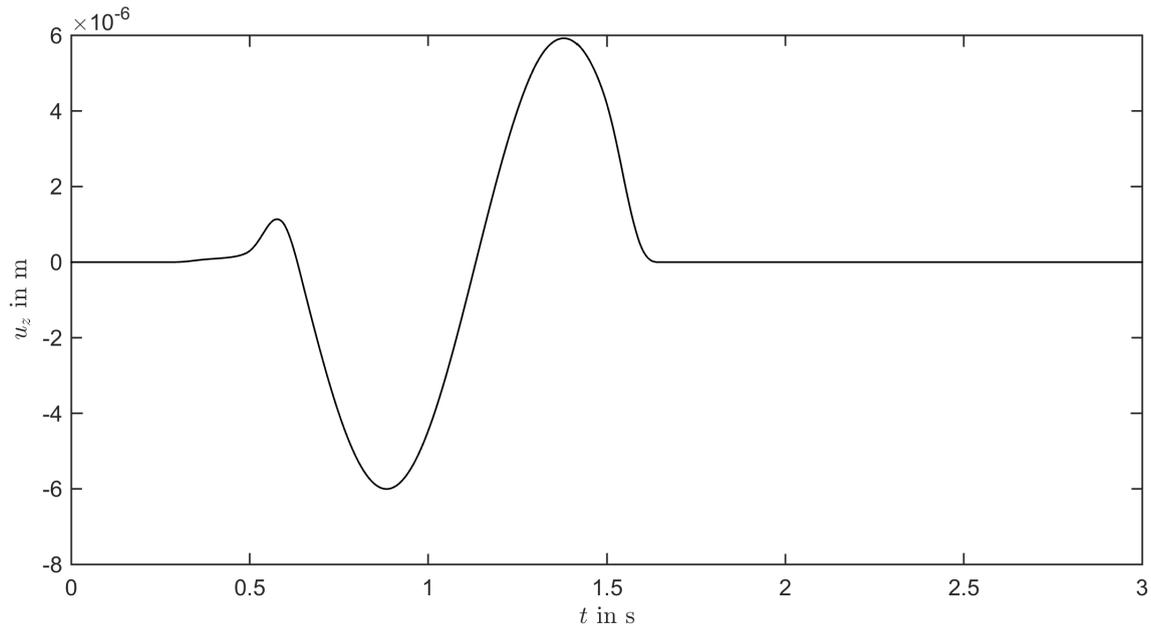


Abbildung 4.8.: Verschiebung u_z durch Belastung $F(t) = F_0 \sin(2\pi f_i t)$, $0 \leq t < T$ eines schlaffen Fundaments in einer Entfernung von 100 m.

Je größer die Entfernung r gewählt wird, desto später ist der Ersteinsatz der Vertikalverschiebung u_z zu beobachten. Diese Verzögerung wird mit zunehmender Frequenz f_i gegenüber der Periodendauer T der Welle größer, daher verdoppelt sich in der auf die Periodendauer T normierten Darstellung die Zeit des Ersteinsatzes an einem festen Ort mit zunehmender Frequenz f_i .

Für die Entfernungen $r \leq 2R$ ist nur die Rayleigh-Welle zu beobachten. Ab einer Entfernung $r \geq 4R$ ist der zeitliche Versatz zwischen dem Einsatz der P-Welle und dem Einsatz der Rayleigh-Welle so groß, dass eine P-Welle und eine S-Welle beobachtet werden können. Die P-Welle bildet den Ersteinsatz, die S-Welle ist als Änderung in der Steigung zu erkennen. Die Amplitude der S-Welle ist dabei wesentlich kleiner als die Amplitude der Rayleigh-Welle, die kleinste Amplitude hat die P-Welle.

Mit zunehmender Entfernung r nimmt die Amplitude der Vertikalverschiebung u_z ab. Für die Entfernungen $2R - 16R$ halbiert sich jeweils die Amplitude der Vertikalverschiebung, sodass die Lösung von Boussinesq, die eine Amplitudenabnahme mit $1/r$ an der Oberfläche vorhersagt, bestätigt wird.

Mit zunehmender Frequenz nimmt die dimensionslose Dauer t/T der Verschiebung u_z an einem Ort zu. Betrachtet man die Laufzeit Δt der Rayleigh-Wellen zwischen den Rändern des Fundaments, so beträgt diese:

$$\Delta t = \frac{2R}{c_R} = \frac{20 \text{ m}}{184 \text{ m/s}} = 0,11 \text{ s}$$

Aufgrund der endlichen Ausdehnung des Fundaments treffen die Wellen in einer Entfernung r vom Mittelpunkt des Fundaments nicht gleichzeitig zur Zeit t_0 ein, sondern innerhalb der Zeitspanne $t_0 \pm \Delta t/2$, wobei $t_0 = r/c_R$ die Laufzeit der Rayleigh-Welle vom Fundamentrand R zum beobachteten Punkt ist. Im Mittelpunkt des Fundaments ist die Laufzeitdifferenz halb so groß und beträgt $\Delta t/2$.

Die durch das Fundament hervorgerufene Phasenverschiebung

$$\varphi = \frac{\Delta t}{T} 360^\circ$$

Tabelle 4.1.: Periodendauer T und durch die Laufzeit Δt der Rayleigh-Welle durch das Fundament hervorgerufene Phasenverschiebung φ der Verschiebung u_z für die Anregungsfrequenzen f_i .

f_i in Hz	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8
T in s	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8
φ in $^\circ$	4,95	9,9	19,8	39,6	79,2	158,4	316,8

mit der Periodendauer T der Rayleigh-Welle für die Frequenzen f_i ist in Tabelle 4.1 eingetragen.

Für die Frequenzen $f_i = 1/8 - 1/2$ Hz kann die Phasenverschiebung φ vernachlässigt werden und die dimensionslose Dauer der Verschiebung beträgt $t/T = 1$. Da die Wellenlänge im Vergleich zum Fundamentdurchmesser sehr viel größer ist ($\lambda \gg 2R$), kann das Fundament als Punktquelle betrachtet werden.

Für die Frequenzen $f_i = 1 - 8$ Hz ist die Phasenverschiebung aufgrund der Fundamentaushnung relevant und kann nicht vernachlässigt werden. Die zeitliche Dauer der Verschiebung verlängert sich außerhalb des Fundaments um die Laufzeit der Welle durch das Fundament Δt und beträgt somit $T + \Delta t$ (oder in t/T ausgedrückt: $1 + \varphi/360^\circ$).

Da für die Frequenzen $f_i = 1/8 - 1/2$ Hz die Periodendauer T im Vergleich zur Laufzeit Δt sehr groß ist ($T \gg \Delta t$) kann die Annahme getroffen werden, dass die Verschiebung u_z zu jedem Zeitpunkt an jedem Ort im Fundament gleich ist. Zum Zeitpunkt $t/T = 1$ hört die Anregung des Fundaments durch die Kraft $F(t)$ auf. Für die Frequenzen $f_i = 1/8 - 1/2$ Hz ist zu diesem Zeitpunkt ein Knick in der Vertikalverschiebung u_z zu beobachten, da die statische Verschiebung einsetzt.

Für die Frequenzen $f_i = 1 - 8$ Hz kann nicht davon ausgegangen werden, dass die Verschiebung zu jedem Zeitpunkt an jedem Ort im Fundament gleich ist. Aufgrund der Phasenverschiebung φ ist zum Zeitpunkt $t/T = 1$ kein Knick in der Vertikalverschiebung erkennbar, da die statische Verschiebung nicht an jedem Ort des Fundaments zur gleichen Zeit einsetzt.

Aufgrund der Phasenverschiebung φ nimmt die Amplitude an einem Ort mit zunehmender Frequenz f_i ab. Während für $f = 1/8 - 1/2$ Hz konstruktive Interferenz der Verschiebungen der diskreten Flächen stattfindet, addieren sich diese für $f_i = 1 - 8$ Hz teilweise destruktiv. Ab einer Entfernung $r \geq 8R$ nimmt die Amplitude für $f_i = 1/8 - 4$ Hz jedoch zu. Zudem ist auch zu beobachten, dass die Verschiebung durch die Rayleigh-Welle für $f_i \geq 2$ Hz nach unten größer ist als die Verschiebung nach oben.

Die zeitliche Dauer und Form der Vertikalverschiebung $u_{\delta zz}$, die durch ein belastetes Fundament mit $F(t) = F_0 \delta(t)$ erzeugt wird, ist abhängig von der Entfernung r zum Fundamentmittelpunkt (siehe Abbildung 4.6). Wird diese Vertikalverschiebung $u_{\delta zz}$ für eine Entfernung $r \geq 8R$ mit der Funktion $f(t)$ mit $f_1 = 1/8$ Hz gefaltet, ist die Periodendauer der Funktion $f(t)$ sehr viel größer als die zeitliche Länge der Verschiebung $u_{\delta zz}$. Maßgeblich für die gefaltete Funktion u_z ist also nur die Amplitude und Einsatzzeiten t_p, t_s und t_R der Verschiebung $u_{\delta zz}$, nicht deren Verlauf. Die Verschiebungen $u_{\delta zz}$ der einzelnen Wellen können als Peaks genähert werden, die im Vergleich zur Periodendauer T der Funktion $f(t)$ nahezu gleichzeitig eintreffen. Durch die Überlagerung dieser Peaks der P-Welle, S-Welle und Rayleigh-Welle ist die Verschiebung für kleine Frequenzen f_i bzw. große Wellenlängen λ für große Entfernungen symmetrisch.

Da P-Welle und S-Welle in Gegenrichtung der Rayleigh-Welle polarisiert sind, entsteht durch die Überlagerung destruktive Interferenz und die Amplitude wird verringert.

Für große Frequenzen f_i sind die Periodendauer T der Funktion $f(t)$ und die zeitliche Länge der Verschiebung $u_{\delta zz}$ gleich. Der Verlauf der Verschiebung $u_{\delta zz}$ kann also nicht vernachlässigt werden und ist maßgeblich für die gefaltete Funktion $u_z(t)$. Dadurch ist die Verschiebung u_z für große Frequenzen und große Entfernungen in negative z -Richtung

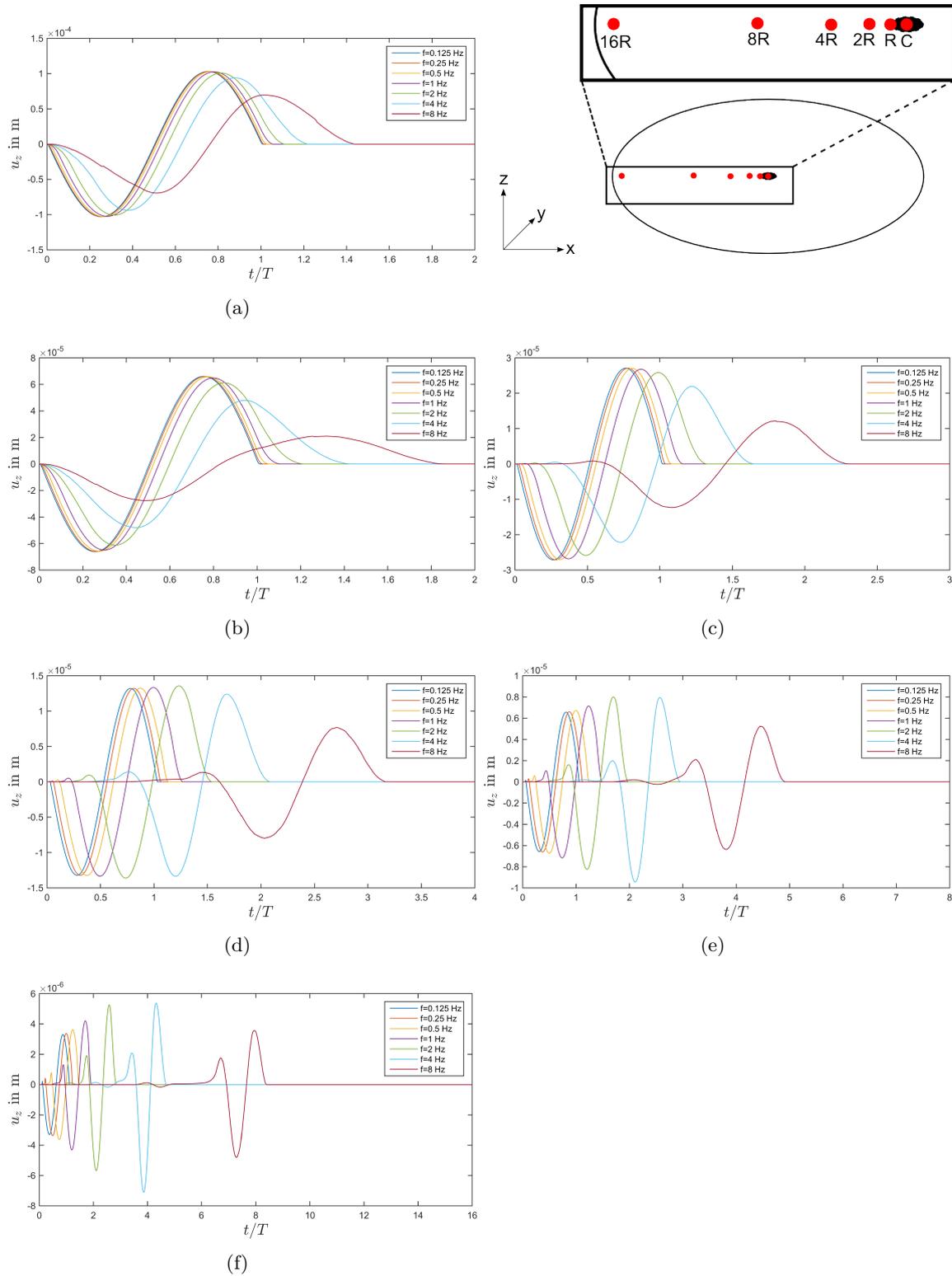


Abbildung 4.9.: Zeitlich auf Periodendauer T normierte, semi-analytisch berechnete Vertikalverschiebung u_z im Mittelpunkt C (a) und in den Entfernungen R (b), $2R$ (c), $4R$ (d), $8R$ (e), $16R$ (f) vom Mittelpunkt eines schlaffen Fundaments, das mit einer vertikalen Kraft $F = F_0 \sin(2\pi f_i t)$ mit $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz belastet wird.

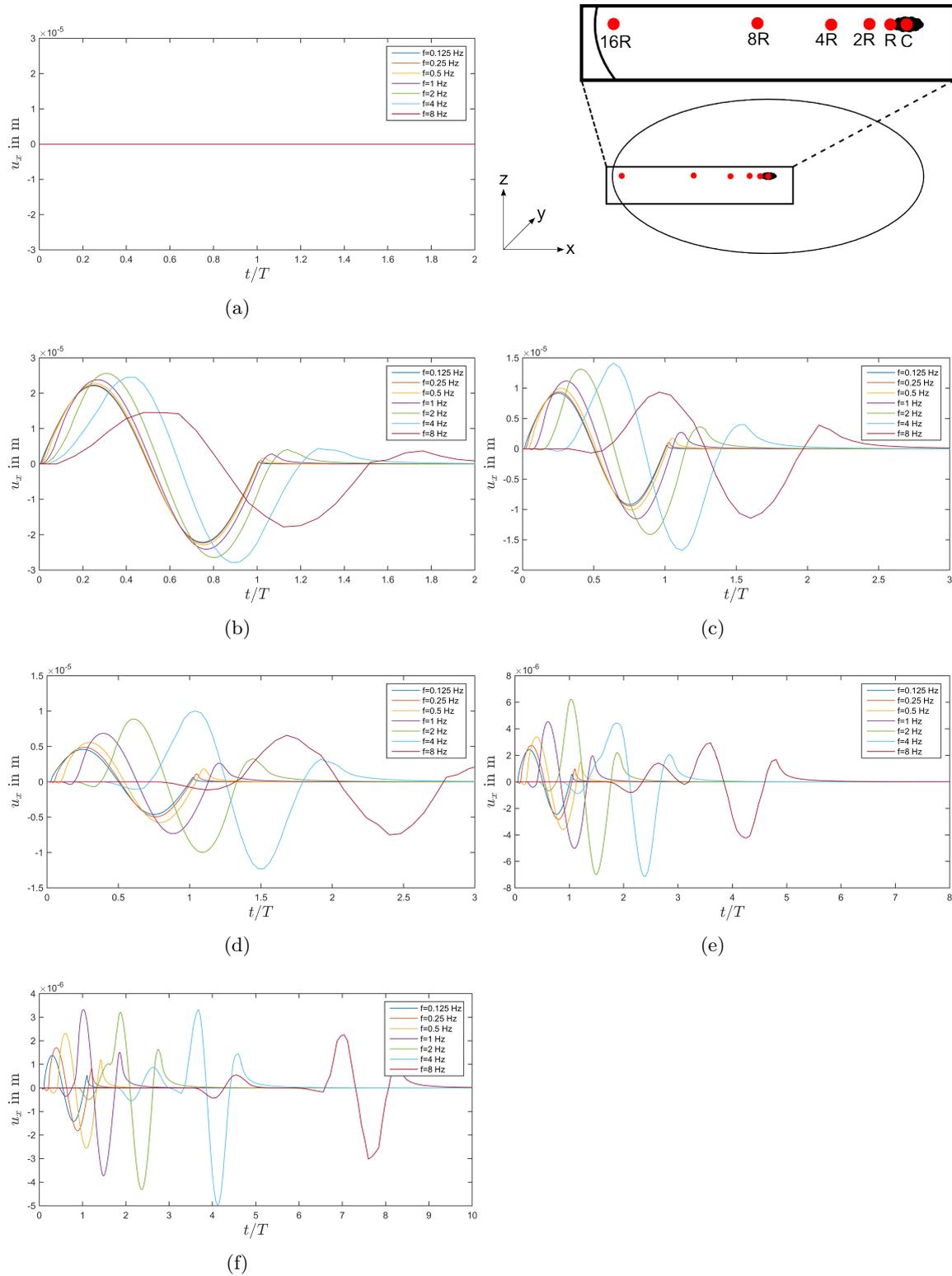


Abbildung 4.10.: Zeitlich auf Periodendauer T normierte, semi-analytisch berechnete Horizontalverschiebung u_x im Mittelpunkt C (a) und in den Entfernungen R (b), $2R$ (c), $4R$ (d), $8R$ (e), $16R$ (f) vom Mittelpunkt eines schlaffen Fundaments, das mit einer vertikalen Kraft $F = F_0 \sin(2\pi f_i t)$ mit $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz belastet wird.

größer als in positive z-Richtung.

Mit abnehmender Periodendauer T (zunehmender Frequenz f_i) überlagern sich P-Welle, S-Welle und Rayleigh-Welle in großer Entfernung r immer weniger. Dadurch nimmt die destruktive Interferenz ab, die Amplituden werden nicht abgeschwächt und nehmen daher mit zunehmender Frequenz f_i zu. Überlagern sich P-Welle und Rayleigh-Welle so, dass die Rayleigh-Welle nach der halben Periodendauer der P-Welle bei $t_R = T_p/2$ einsetzt, überlagern sich P-Welle und Rayleigh-Welle konstruktiv. Für $f_7 = 8$ Hz überwiegt jedoch die Phasenverschiebung φ aufgrund der Fundamentaudehnung und die Amplitude nimmt ab.

Abbildung 4.10 zeigt die auf Periodendauer T normierte, semi-analytisch berechnete Horizontalverschiebung u_x im Mittelpunkt C und in den Entfernungen $r = R, 2R, 4R, 8R$ und $16R$ zum Mittelpunkt eines schlaffen Fundaments, das mit der vertikalen Kraft $F(t) = F_0 f(t)$ mit den Frequenzen $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz belastet wird.

Die zeitliche Diskretisierung beträgt hier $\Delta t = 0,01$ s.

Im Mittelpunkt des Fundaments C gibt es aufgrund der Symmetriebedingungen keine Horizontalverschiebungen u_x .

Die Amplitude der Horizontalverschiebung u_x ist aufgrund der vertikalen Anregung $F(t)$ kleiner als die Amplitude der Vertikalverschiebung u_z . Die Partikel bewegen sich zum Fundament hin, wenn auf dieses ein Druck aufgebracht wird. Wird auf das Fundament eine Zugkraft ausgeübt, findet eine Partikelbewegung vom Fundament weg statt.

Die Amplitude an einem Ort nimmt ab einer Entfernung von $r = R$ mit steigender Frequenz f_i zu. Dieser Effekt ist hier stärker als auf der Vertikalkomponente, da die Partikelbewegung der P-Welle auf der Horizontalkomponente besser aufgezeichnet wird und somit eine abnehmende destruktive Interferenz zwischen P-Welle und Rayleigh-Welle stattfindet, die schon bei einer geringeren Entfernung r beobachtet werden kann. Bei der Frequenz $f_7 = 8$ Hz überwiegt jedoch die Phasenverschiebung und die Amplitude nimmt ab.

Die P-Welle ist ab einer Entfernung $r \geq 4R$ zu erkennen. Der Einsatz der S-Welle ist nicht erkennbar, da auf der Horizontalkomponente kaum vertikale Partikelbewegung aufgezeichnet wird.

Auch hier ist der Einfluss der Fundamentaudehnung und die damit verbundene Phasenverschiebung φ für große Frequenzen zu erkennen.

4.5. Spektren der Verschiebungen

Um zu erkennen, aus welchen Frequenzen das Verschiebungssignal zusammengesetzt ist und welche Amplitude bzw. Energie die einzelnen Frequenzen haben, wird ein Amplitudenspektrum der Verschiebung $u_{\delta zz}$, der Kraft $F(t)$ und der Verschiebungen u_z erstellt.

Abbildung 4.11 (a) zeigt das Amplitudenspektrum $|U_{\delta zz}(\omega)|$ der nicht geglätteten Verschiebung $u_{\delta zz}$. Zunächst nimmt die Amplitude mit zunehmender Frequenz ab, ab $f = 150$ Hz nimmt diese wieder zu. In Abständen von 20 Hz sind lokale Minima zu erkennen, durch die Fensterfunktion der Verschiebung $U_{\delta zz}(t)$ entstehen. Da mit zunehmender Entfernung r die Fensterbreite der Verschiebung $U_{\delta zz}(t)$ größer wird, nehmen die Abstände der lokalen Minima mit zunehmender Entfernung r ab.

Das Kraftsignal $F(t)$ ist zusammengesetzt aus einem Sinus-Signal $\sin(2\pi f_i t)$, das mit einer Rechteck-Funktion der Länge $T = 1/f_i$ multipliziert wird. Im Frequenzbereich werden die Spektren dieser beiden Funktionen gefaltet, um das Spektrum der Kraft $F(t)$ zu erhalten. Das Amplitudenspektrum der Kraft $F(t)$ für $f = 1$ Hz ist in Abbildung 4.11 (b) dargestellt. Für die Frequenz $f = 1$ Hz ist die Amplitude der Kraft $F(t)$ maximal, mit zunehmender

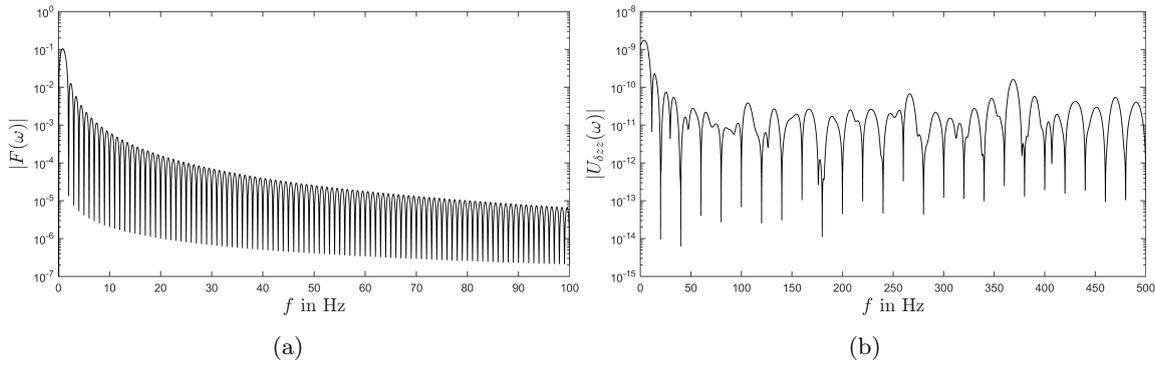


Abbildung 4.11.: Amplitudenspektrum des Kraftverlaufs $F(t)$ mit $f = 1$ Hz (a) und der Verschiebung $u_{\delta zz}$ in einer Entfernung von $r=80$ m (b).

Frequenz nimmt die Amplitude ab. Durch die Rechteckfunktion hat das Amplitudenspektrum $|F(\omega)|$ lokale Minima im Abstand von $f = 1/T$.

Im Zeitbereich wird die Verschiebung u_z durch eine Faltung der Verschiebung $u_{\delta zz}$ und der Funktion $f(t)$ berechnet, im Frequenzbereich erhält man das Spektrum der Verschiebung $|U_z(\omega)|$ durch Multiplikation von $|U_{\delta zz}(\omega)|$ und $|F(\omega)|$.

Abbildung 4.12 zeigt die Spektren der Verschiebung u_z bei unterschiedlichen Anregungsfrequenzen f_i .

Die Maxima der Spektren befinden sich jeweils bei der Anregungsfrequenz f_i .

Die lokalen Minima der Spektren befinden sich jeweils bei Vielfachen der Anregungsfrequenz f_i , daher halbiert sich mit zunehmender Frequenz die Anzahl der lokalen Minima durch das Spektrum der Kraft $F(t)$.

Mit zunehmender Frequenz nimmt die Amplitude des Spektrums ab, die niederfrequenten Anteile der Verschiebung u_z haben folglich im Vergleich zu den hochfrequenten Anteilen mehr Energie. Mit zunehmender Anregungsfrequenz f_i nimmt auch das Maximum des Spektrums ab. Somit ist bei der Anregung mit kleinen Frequenzen f_i die Abstrahlung der Wellen durch das Fundament größer und die Wellen werden am Fundament, das für Frequenzen $f_i \leq 1/2$ Hz als Punktquelle genähert werden kann, gestreut. Für große Frequenzen muss das Fundament als Fläche betrachtet werden, die von den Wellen durchlaufen wird. Dabei wird nur ein kleiner Anteil gestreut und gelangt an die Oberfläche des Halbraums.

4.6. Belastung eines Fundaments durch Momente $M(t)$

Grundsätzlich ist es möglich, die Verschiebungen bei Belastung eines starren Fundaments durch eine vertikale Kraft $F(t)$ sowie die Belastung eines Fundaments bei Anregung durch ein Moment $M(t)$ semi-analytisch zu berechnen. Dazu muss die Spannungsverteilung an der Fundamentsohle vorgegeben werden. Da diese nicht exakt bekannt ist (beim starren Fundament ist die Spannung σ_{zz} am Rand des Fundaments infinit) und somit der dadurch verursachte Fehler nicht abgeschätzt werden kann, werden diese Berechnungen nicht semi-analytisch, sondern mit der Finiten-Elemente-Methode durchgeführt. Dabei werde die Randbedingungen durch Kopplung der Knoten über die Vertikalverschiebung an der Fundamentsohle vorgegeben.

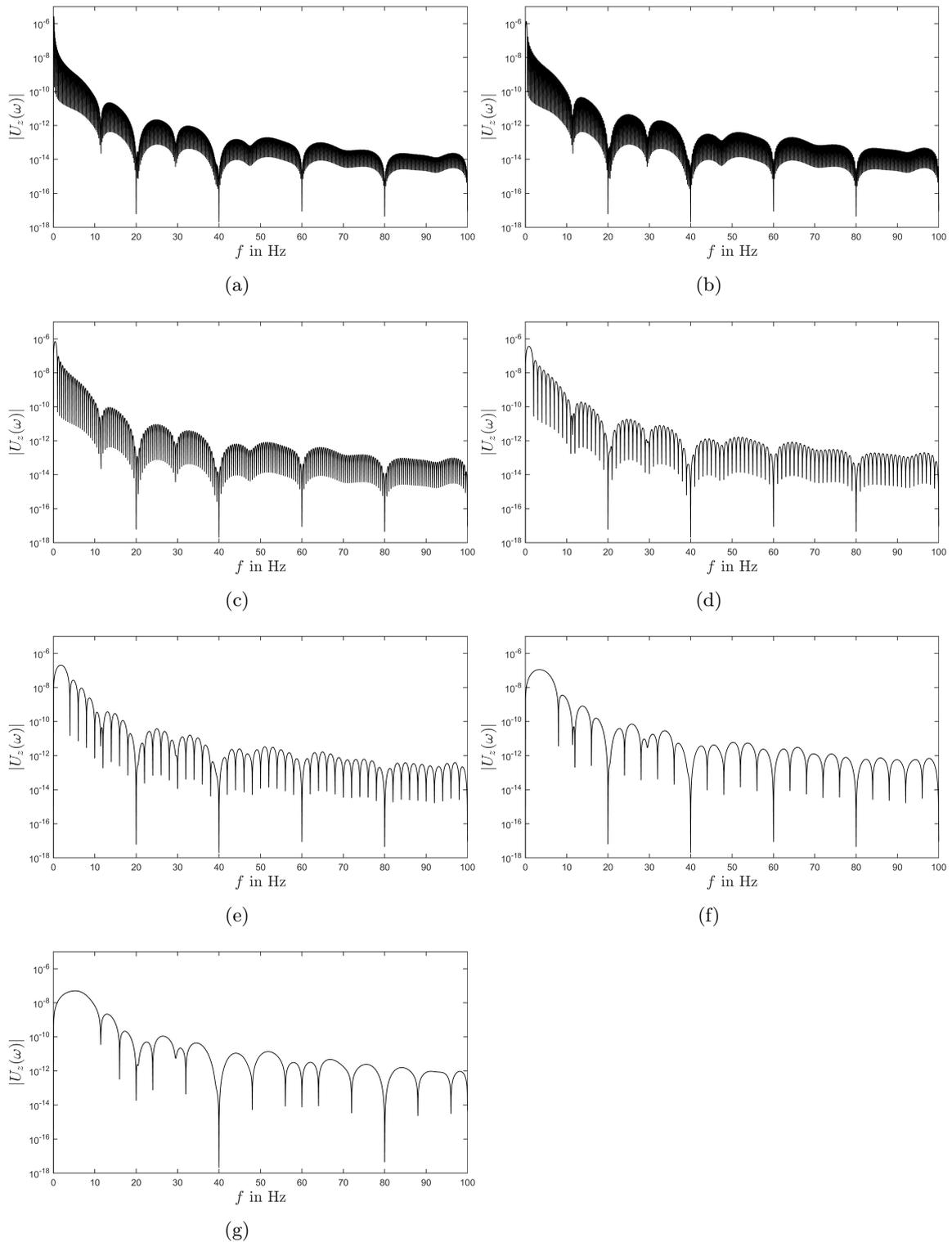


Abbildung 4.12.: Spektrum der Verschiebung u_z mit $f_1 = 1/8$ Hz (a), $f_2 = 1/4$ Hz (b), $f_3 = 1/2$ Hz (c), $f_4 = 1$ Hz (d), $f_5 = 2$ Hz (e), $f_6 = 4$ Hz (f) und $f_7 = 8$ Hz (g).

5. Berechnung der Verschiebung mit der Finite-Elemente-Methode (FEM)

Nachdem die semi-analytischen Verschiebungen u_z und u_x für ein mit einer vertikalen Kraft $F_z(t)$ belastetes Fundament bekannt ist, wird hier dieses Problem numerisch mithilfe der Finiten-Elemente-Methode im Programm Abaqus berechnet. Zunächst wird - wie bei der semi-analytischen Berechnung - ein schlaffes Fundament betrachtet, das mit einer vertikal gerichteten Kraft $F(t) = F_0 f(t)$ mit

$$f(t) = \begin{cases} \sin(2\pi f_i t) & t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

mit $F_0 = 314 \text{ kHz}$ und den Anregungsfrequenzen $f_1 = 1/8 \text{ Hz}$, $f_2 = 1/4 \text{ Hz}$, $f_3 = 1/2 \text{ Hz}$, $f_4 = 1 \text{ Hz}$, $f_5 = 2 \text{ Hz}$, $f_6 = 4 \text{ Hz}$ und $f_7 = 8 \text{ Hz}$ belastet wird.

Um einen unendlich ausgedehnten Halbraum simulieren zu können, werden am Rand des Modells infinite Elemente eingebaut, die auf Lysmer basieren und Reflexionen vermeiden sollen. Durch den Vergleich mit der semi-analytischen Lösung kann dann der Einfluss dieser Lysmer-Bedingungen sowie numerische Artefakte bestimmt werden. Durch die Lysmer-Bedingungen, die aus Dämpfern bestehen, erhält der Modellkörper eine Antwortfunktion, sodass eine frequenzabhängige Verzerrung der berechneten Verschiebungen u_z erwartet wird. Um dies zu veranschaulichen, wird die Simulation eines belasteten schlaffen Fundaments an zwei Modellen A und B unterschiedlicher Größe durchgeführt. Bei Modell B wird der Einfluss der Randbedingungen so gut wie möglich eliminiert.

Ist der Einfluss der Randbedingungen bekannt, werden die Belastung eines starren Fundaments durch eine vertikale Kraft $F_z(t)$ (Modell C) und ein Moment $M(t)$ (Modell D) berechnet. Der Einfluss der Randbedingungen ändert sich dabei nicht.

5.1. Modellbeschreibung

Um den Einfluss der Lysmer-Randbedingungen auf die durch ein belastetes Fundament verursachte Verschiebung u_z und u_x in einem homogenen, linear elastischen Halbraum zu bestimmen, wurden zwei Modelle unterschiedlicher Größe und Diskretisierung erstellt. Beim kleineren Modell A sind die Auswirkungen der Lysmer-Randbedingungen des Modells deutlich zu erkennen, bei Modell B wurden diese so gut wie möglich eliminiert. Um Rechenzeit zu sparen und aufgrund der Radialsymmetrie des Problems entsprechen die Modelle A, B und C, die zur Simulation bei vertikaler Belastung eines schlaffen Fundaments (Modell A und B) und eines starren Fundaments (Modell C) erstellt wurden, jeweils einem Viertel des Halbraums. Bei der Belastung des Fundaments durch ein Moment $M(t)$ liegt ein spiegelsymmetrisches Problem vor und die Simulation wird in einer Hälfte des Halbraums (Modell D) durchgeführt.

5.1.1. Modell A

Modelliert wird ein unendlich ausgedehnter, homogener, linear elastischer Halbraum, auf dessen Oberfläche ein schlaffes Fundament liegt, das belastet wird.

Die Materialkonstanten Dichte ρ , Schubmodul G und Poissonzahl ν des Halbraums sind gleich wie bei der semi-analytischen Berechnung (siehe Kapitel 4):

$$\rho = 1,8 \text{ g/cm}^3 \quad G = 72 \text{ MPa} \quad \nu = 0,25$$

Daraus ergeben sich die seismischen Geschwindigkeiten der S-Welle c_s und der P-Welle c_p :

$$c_s = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$c_p = 346,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Modell A entspricht einem Viertel eines unendlich ausgedehnten, homogenen, linear elastischen Halbraums, der hier als Quader modelliert wird. Um die Symmetrie des Modells entlang der X-Z-Ebene und der Y-Z-Ebene, die jeweils durch das Fundament verlaufen, zu gewährleisten, wurde an den Knoten in der X-Z-Ebene der Freiheitsgrad in Y-Richtung festgehalten, in der X-Z-Ebene wurden die Knoten im Freiheitsgrad in X-Richtung festgehalten. An den Seiten und an der Unterseite des Halbraums wurden infinite Elemente angebracht, die Reflexionen an den Rändern verhindern sollen. Diese bestehen nach Lysmer aus drei Dämpfern (siehe Abbildung 5.1), wobei ein Dämpfer senkrecht zum reflexionsfreien Rand steht, zwei Dämpfer, die orthogonal zueinander stehen, liegen in der Ebene des Randes. Die Dämpfungskonstante des senkrecht zum Rand angeordneten Dämpfers $d_p = I_p A = \rho c_p A$ entspricht der seismischen Impedanz der P-Welle, die Dämpfungskonstante $d_s = I_s A = \rho c_s A$ der parallel zum Rand stehenden Dämpfer entspricht der seismischen Impedanz der S-Welle.

Das Modell besteht aus finiten C3D8-Elementen und infiniten CIN3D8-Elementen. Beide Element-Typen sind dreidimensionale, würfelförmige Kontinuums-elemente bestehend aus acht Knoten in den Eckpunkten und acht Integrationspunkte im Inneren des Elements. Jeder Knoten besitzt drei Translationsfreiheitsgrade, jedoch keine Rotationsfreiheitsgrade. Die Seite, die den reflexionsfreien Rand der CIN3D8-Elemente darstellt, ist nach außen gerichtet und die CIN3D8-Elemente treffen an Kanten in einem Winkel von 45° aufeinander (siehe Abbildung 5.1(a)).

Die Größe des Modells A beträgt $25 \text{ m} \times 25 \text{ m} \times 20 \text{ m}$. Die räumliche und zeitliche Diskretisierung wurde so gewählt, dass für die größte Frequenz $f_7 = 8 \text{ Hz}$ 25 Abtastungen pro Wellenlänge λ und pro Periodendauer T stattfinden. Daraus ergibt sich eine räumliche Diskretisierung und Elementgröße $\Delta x = 1 \text{ m}$ und eine zeitliche Diskretisierung $\Delta t = 0,005 \text{ s}$.

Bei der Modellierung des schlaffen Fundaments wird die gleichförmige Spannungsverteilung an der Sohle des Fundaments zugrunde gelegt (siehe Kapitel 3.1). Die Belastung eines schlaffen Fundaments auf der Oberfläche des Halbraums wird dadurch erzeugt, dass auf Knoten an der Oberfläche des Halbraums eine gleichförmig verteilte Spannung mit dem Befehl DSLOAD aufgebracht wird. Das Fundament hat einen Radius von $R = 5 \text{ m}$ und seine runde Form wird durch die würfelförmigen Elemente angenähert, sodass die Elemente an der Oberfläche, deren Mittelpunkt weniger oder gleich 5 m vom Mittelpunkt des Fundament entfernt sind, als Elemente des Fundaments betrachtet werden.

Die auf das schlaffe Fundament wirkende Kraft $F(t)$ wird als Spannung $\sigma(t) = \sigma_0 f(t)$ auf die Oberfläche des Halbraums aufgebracht mit

$$f(t) = \begin{cases} \sin(2\pi f_i t), & 0 < t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

mit $\sigma_0 = 1 \text{ kPa}$ und den Anregungsfrequenzen $f_1 = 1/8 \text{ Hz}$, $f_2 = 1/4 \text{ Hz}$, $f_3 = 1/2 \text{ Hz}$, $f_4 = 1 \text{ Hz}$, $f_5 = 2 \text{ Hz}$, $f_6 = 4 \text{ Hz}$ und $f_7 = 8 \text{ Hz}$.

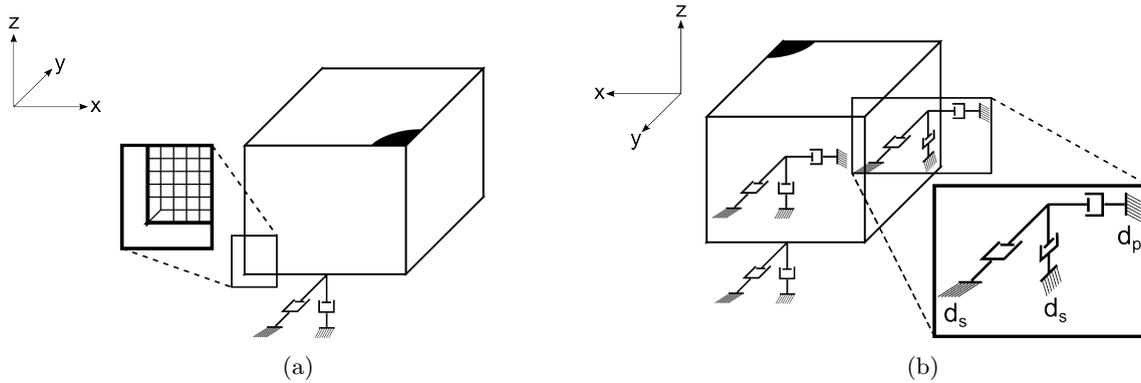


Abbildung 5.1.: Blick auf die Innenflächen (a) und Außenflächen (b) von Modell A. Der an der Unterseite vorhandene in x-Richtung stehende Dämpfer ist nicht dargestellt. Der Koordinatenursprung befindet sich im Mittelpunkt des Fundaments.

5.1.2. Modell B

Modell B unterscheidet sich von Modell A in der räumlichen und zeitlichen Diskretisierung, in der Größe des Fundaments und in der Größe des Halbraums. Die Materialkonstanten $\rho = 1,8 \text{ g/cm}^3$, $G = 72 \text{ GPa}$ und $\nu = 0,25$ und somit die Geschwindigkeiten $c_p = 346,4 \text{ m/s}$ und $c_s = 200 \text{ m/s}$, die verwendeten Elemente C3D8 und CIN3D8, die geringe Steifigkeit des Fundaments, die Randbedingungen durch Lysmer für den reflexionsfreien Rand und die Einschränkung der Freiheitsgrade für die Symmetriebedingung sowie die aufgebrachte Spannung sind gleich wie in Modell A. Modell B stellt ebenfalls ein Viertel des Halbraums und des Fundaments dar.

Die Größe des Modells beträgt $200 \text{ m} \times 200 \text{ m} \times 800 \text{ m}$ und wurde so gewählt, dass Trägheitsassekraft F_m des Halbraums der Reibungskraft F_r der Lysmer-Randbedingungen überwiegt und diese somit nicht mehr in der Verschiebung u_z zu erkennen sind (siehe Kapitel 5.2.2). Die räumliche und zeitliche Diskretisierung entsprechen einer fünffachen Abtastung pro Wellenlänge bzw. Periodendauer bei der höchsten Anregungsfrequenz $f_7 = 8 \text{ Hz}$. Daraus ergibt sich eine räumliche Diskretisierung von $\Delta x = 5 \text{ m}$ und eine zeitliche Diskretisierung von $\Delta t = 0,025 \text{ s}$. Laut Kuhlemeyer und Lysmer [KL73] muss pro Wellenlänge mindestens vier mal abgetastet werden, da sonst der Fehler in den Verschiebungen u_z und u_x zu groß ist. Für eine Tiefe $z > 400 \text{ m}$ wurden die Elemente auf $5 \text{ m} \times 5 \text{ m} \times 10 \text{ m}$ vergrößert.

Der Radius des schlaffen Fundaments beträgt hier $R = 10 \text{ m}$ und entspricht dem tatsächlichen Durchmesser einer WEA.

Abbildung 5.2 zeigt Modell B.

5.1.3. Modell C

Modell C entspricht Modell B, das Fundament in Modell C ist jedoch starr. Bei einem starren Fundament wird davon ausgegangen, dass die Setzung u_z an der Fundamentsohle an jedem Punkt gleich ist (siehe Kapitel 3.1) und an der Fundamentsohle keine Horizontalverschiebungen vorkommen ($u_x = u_y = 0$). Da sich die Elemente des Fundaments aufgrund der großen Steifigkeit nicht verformen, werden hier die Knoten des Fundaments gekoppelt. Diese Kopplung erfolgt mit dem Befehl EQUATION, mit dem ein Gleichungssystem aus einem Referenzknoten 1 im Fundament und den anderen Fundamentknoten k erzeugt wird:

$$\begin{aligned} u_x^{(k)} - u_x^{(1)} &= 0 \\ u_y^{(k)} - u_y^{(1)} &= 0 \\ u_z^{(k)} - u_z^{(1)} &= 0 \end{aligned}$$

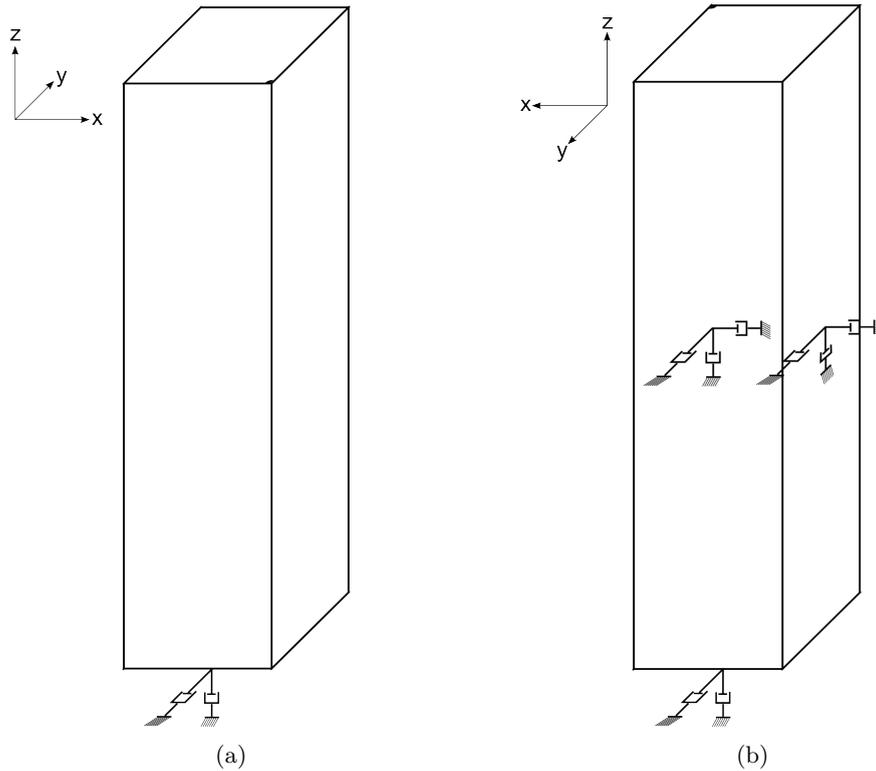


Abbildung 5.2.: Blick auf die Innenflächen (a) und Außenflächen (b) von Modell B und C. Der an der Unterseite vorhandene in x-Richtung stehende Dämpfer ist nicht dargestellt. Der Koordinatenursprung befindet sich im Mittelpunkt des Fundaments.

Dieses Gleichungssystem ergibt sich aus der Bedingung, dass die Vertikalverschiebung u_z und die Horizontalverschiebungen u_x und u_y an allen Knoten des Fundaments gleich sein müssen.

Die Last $\sigma(t)$ wird auch hier als Flächenlast mit DSLOAD aufgebracht.

Die Größe des Modells beträgt $200 \text{ m} \times 200 \text{ m} \times 800 \text{ m}$, die räumliche Diskretisierung beträgt $\Delta x = 5 \text{ m}$ (für $z > 400 \text{ m}$ $\Delta x > 5 \text{ m}$), zeitliche Diskretisierung ist $\Delta t = 0,025 \text{ s}$, der Radius des Fundaments ist $R = 10 \text{ m}$, die Materialkonstanten $\rho = 1,8 \text{ g/cm}^3$, $\mu = 72 \text{ GPa}$ und $\nu = 0,25$ und die Geschwindigkeiten $c_p = 346,4 \text{ m/s}$ und $c_s = 200 \text{ m/s}$ sind gleich wie in Modell B, daher gilt Abbildung 5.2 für Modell B und C.

5.1.4. Modell D

Hier wird ein starres Fundament mit einem Moment $M(t)$ belastet, der um die x-Achse dreht. Aufgrund der Spiegelsymmetrie dieser Fragestellung stellt Modell D im Vergleich zu Modell B und C die Hälfte des Halbraums dar. Entlang der Y-Z-Ebene, die durch das Fundament verläuft, werden die Freiheitsgrade der Knoten in X-Richtung aufgrund von Symmetriebedingungen festgehalten.

Das starre Fundament wird wie in Modell C durch Kopplung der Fundamentknoten mit EQUATION erzeugt. Das Moment $M(t)$ wird mithilfe eines vertikal wirkenden Kräftepaars $F_{zM}(t)$ erzeugt, dass am Rand des Fundaments bei $y = R$ mit F_{zM} und bei $y = -R$ mit $-F_{zM}$ angreift. Die Kopplung der Fundamentknoten erfolgt über die Steigung m des Fundaments. Betrachtet man einen Punkt $k = (x_k, y_k, z_k)$ im Querschnitt des Fundaments, welches an den Punkten $A = (0, R, z_A)$ mit F_{zM} und am Punkt $B = (0, -R, z_B)$ mit $-F_{zM}$ belastet wird (siehe Abbildung 5.3), so lauten die vertikale Verschiebung $u_z^{(k)}$ und die

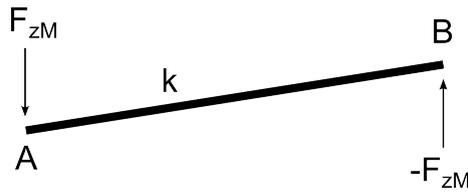


Abbildung 5.3.: Querschnitt eines starren Fundaments, das durch ein Moment M belastet wird.

Steigung m :

$$u_z^{(k)} = u_z^{(A)} + m(y_k - y_A), \quad m = \frac{u_z^{(B)} - u_z^{(A)}}{y_B - y_A}$$

Es wird angenommen, dass der Winkel, um den das Fundament durch das Moment gekippt wird, so klein ist, dass die Horizontalverschiebung vernachlässigt werden kann ($u_x = u_y = 0$) und nur eine Vertikalverschiebung u_z stattfindet. Die Koordinaten der x - und der y -Komponente sind also konstant und damit bekannt für alle t . Die erforderlichen Gleichungen für eine Kopplung der Fundamentknoten $k = (0, y_k, z_k)$ mit den Referenzknoten A, B mit EQUATION lauten also:

$$\left(1 - \frac{y_k - y_A}{y_B - y_A}\right) u_z^{(A)} + \frac{y_k - y_A}{y_B - y_A} (u_z^{(B)} - u_z^k) = 0$$

Nun müssen die Knoten $j = (x_j, y_k, z_j)$ mit den Knoten k gekoppelt werden:

$$\begin{aligned} u_x^{(k)} - u_x^{(j)} &= 0 \\ u_y^{(k)} - u_y^{(j)} &= 0 \end{aligned}$$

Das Kräftepaar $F_{zM}(t) = F_0/2f(t)$ mit $F_0/2 = 157 \text{ kN}$ wird als Einzellast auf die Punkte A und B aufgebracht.

Die Größe des Modells beträgt $200 \text{ m} \times 400 \text{ m} \times 800 \text{ m}$, die räumliche Diskretisierung beträgt wie in Modell B $\Delta x = 5 \text{ m}$, zeitliche Diskretisierung ist $\Delta t = 0,025 \text{ s}$, der Radius des Fundaments ist $R = 10 \text{ m}$, die Materialkonstanten $\rho = 1,8 \text{ g/cm}^3$, $\mu = 72 \text{ GPa}$ und $\nu = 0,25$ und die Geschwindigkeiten $c_p = 346,4 \text{ m/s}$ und $c_s = 200 \text{ m/s}$ sind gleich wie in Modell B und C.

Abbildung 5.4 zeigt Modell D.

Tabelle 5.1 zeigt eine Übersicht über die verschiedenen Modelle.

Tabelle 5.1.: Vergleich von Größe, Fundamentradius R , räumliche Diskretisierung Δx , zeitliche Diskretisierung Δt , Dichte ρ , Schubmodul G , Poissonzahl ν und Fundamentsteifigkeit der Modelle A, B, C und D.

Modell	Größe in m^3	R in m	Δx in m	Δt in s	ρ in g/cm^3	G in MPa	ν	Funda- ment	Last
A	25x25x20	5	1	0,005	1,8	72	0,25	schlaff	$F_z(t)$
B	200x200x800	10	5	0,025	1,8	72	0,25	schlaff	$F_z(t)$
C	200x200x800	10	5	0,025	1,8	72	0,25	starr	$F_z(t)$
D	200x400x800	10	5	0,025	1,8	72	0,25	starr	$M(t)$

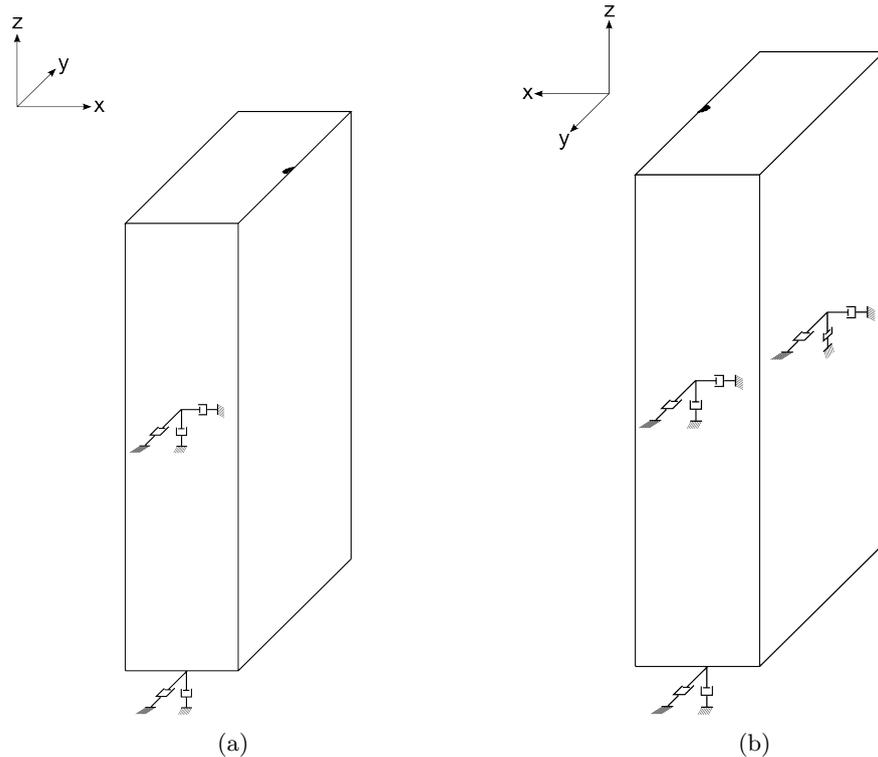


Abbildung 5.4.: Blick auf die Innenflächen (a) und Außenflächen (b) von Modell D, mit dem eine Momentanwendung simuliert wird. Der Koordinatenursprung befindet sich im Mittelpunkt des Fundaments.

5.1.5. Modell als Masse-Dämpfer-System

Mithilfe der Masse m des Halbraums und den Randbedingungen nach Lysmer durch Dämpfer mit einer Dämpfungskonstante d können die Modelle A,B,C und D beschrieben werden durch die Trägheitskraft $F_m(t)$ und die Dämpfungskraft $F_r(t)$, deren Summe aufgrund des Kräftegleichgewichts gleich der anregenden Kraft $F_a(t)$ sein muss (siehe Abbildung 5.5). Hier bei muss jedoch die Annahme getroffen werden, dass sich der Halbraum wie ein starrer Körper verhält, also aufgrund seiner unendlich großen Steifigkeit nicht verformt werden kann. Mit der Verschiebung $x(t)$, der Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$ und der Beschleunigung $\ddot{x}(t)$ kann das Kräftegleichgewicht durch eine Differentialgleichung beschrieben werden:

$$F_a(t) = -F_m(t) - F_d(t) = -m\ddot{x}(t) - d\dot{x}(t) \quad (5.1)$$

Die Differentialgleichung wird durch Einsetzen der Fourier-Rücktransformation

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}$$

in die algebraische Gleichung

$$\tilde{F}(\omega) = m\omega^2 \tilde{x}(\omega) - id\omega \tilde{x}(\omega) \quad (5.2)$$

überführt. Anhand dieser Gleichung ist zu erkennen, dass für große Frequenzen ω die Trägheitskraft F_m dominiert, da diese proportional zum Quadrat der Frequenz ω^2 verläuft

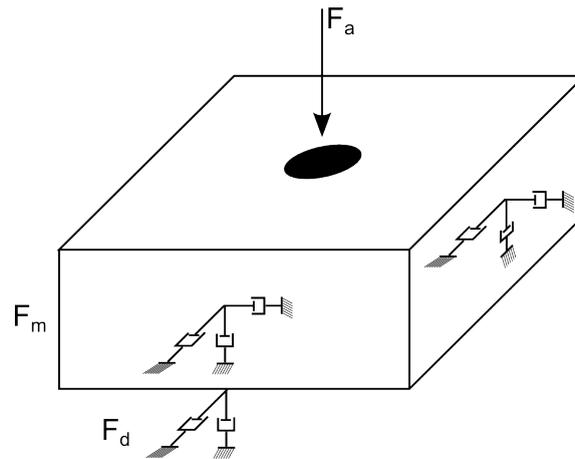


Abbildung 5.5.: Modell als Reihenschaltung aus Masse und Dämpfer mit der anregenden Kraft F_a , der Trägheitskraft F_m und der Dämpfungskraft F_d .

und für große Frequenzen somit schneller anwächst als die Dämpfungskraft F_d , die sich proportional zur Frequenz ω verhält. Für kleine Frequenzen ω ist der Einfluss der Dämpfungskraft F_r stärker, da die Trägheitskraft F_m für kleine Frequenzen vernachlässigt werden kann.

Für große Frequenzen $\omega \rightarrow \infty$ dominiert die Trägheitskraft F_m und der Halbraum kann als starrer Körper angenommen werden. Im Gegensatz zu einem Massepunkt besitzt der starre Körper jedoch eine endliche Ausdehnung, dadurch kann auf den starren Körper ein Moment wirken. Für kleinere Frequenzen $\omega \rightarrow 0$ nimmt der Einfluss der Dämpfungskraft F_d zu und die Annahme eines Starrkörpers gilt nicht mehr.

Aus der algebraischen Gleichung erhält man die komplexe Antwortfunktion

$$\frac{\tilde{x}(\omega)}{\tilde{F}(\omega)} = T(\omega) = \frac{1}{m\omega^2 - id\omega}$$

des Masse-Dämpfer-Systems. Die Antwortfunktion ist die Beziehung zwischen Ausgangssignal $\tilde{x}(\omega)$ und Eingangssignal $\tilde{F}(\omega)$ und beschreibt, wie das Eingangssignal abhängig von seine Frequenz ω durch das System aus Masse und Dämpfer verzerrt wird. Der Betrag der Antwortfunktion

$$\left| \frac{\tilde{x}(\omega)}{\tilde{F}(\omega)} \right| = |T(\omega)| = \frac{1}{\omega\sqrt{\omega^2 m^2 + d^2}}$$

mit den Grenzfällen

$$\begin{array}{ll} \omega \rightarrow \infty & |T(\omega)| \rightarrow \frac{1}{m\omega^2} \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow 0 & |T(\omega)| \rightarrow \frac{1}{\omega d} \rightarrow \infty \\ \omega = \frac{r}{m} & \left| T\left(\frac{r}{m}\right) \right| = \frac{m}{d^2} \end{array}$$

gibt an, wie die Amplitude des Eingangssignals verzerrt wird. Für kleine Frequenzen ω ist der Betrag der Antwortfunktion proportional zu $1/\omega$, für große Frequenzen ω ist der Betrag der Antwortfunktion proportional zu $1/\omega^2$. Wird also der normierte Betrag der Antwortfunktion $|T(\omega)| d^2/m$ über die normierte Frequenz $\omega/\frac{d}{m}$ doppellogarithmisch aufgetragen, so beträgt seine Steigung $s = -1$ für kleine Frequenzen ω , für große Frequenzen ω beträgt die Steigung des normierten Betrags der Antwortfunktion $s = -2$ und für $\omega/\frac{d}{m} = 1$ ist $\left| T\left(\frac{d}{m}\right) \right| d^2/m = 1$. Der normierte Betrag der Antwortfunktion $\left| T\left(\frac{d}{m}\right) \right| d^2/m$ über die

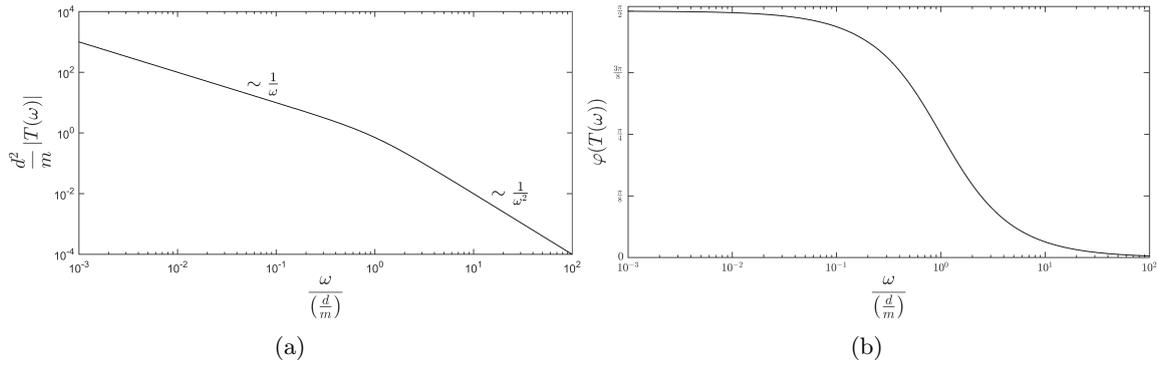


Abbildung 5.6.: Betrag (a) und Phase (b) der Antwortfunktion $|T(\omega)|$.

normierte Frequenz $\omega/\frac{d}{m}$ ist in Abbildung 5.6(a) abgebildet.

Für kleine Frequenzen ω wird der Betrag der Antwortfunktion unendlich groß, die Amplitude des Ausgangssignals $x(t)$ nimmt also für kleine Frequenzen ω gegenüber der Amplitude des Eingangssignals $F_a(t)$ zu. Für große Frequenzen ω verschwindet der Betrag der Antwortfunktion, sodass die Amplitude des Ausgangssignals $x(t)$ gegenüber der Amplitude des Eingangssignals $F_a(t)$ für große Frequenzen ω abnimmt. Je größer die Frequenz der anregenden Kraft $F_a(t)$ ist, desto kleiner ist die Amplitude der Verschiebung $x(t)$ nachdem ein System aus Masse und Dämpfer durchlaufen wurde.

Die Phase der Antwortfunktion

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(T(\omega))}{\operatorname{Re}(T(\omega))}\right) = \arctan\left(\frac{d}{\omega m}\right)$$

mit den Grenzfällen

$$\begin{aligned} \omega \rightarrow \infty & & \varphi(\omega) & \rightarrow 0 \\ \omega \rightarrow 0 & & \varphi(\omega) & \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

beschreibt die Phasenverschiebung zwischen Eingangssignal und Ausgangssignal. Abbildung 5.6(b) zeigt die Phase der Antwortfunktion $\varphi(T(\omega))$ über der normierten Frequenz $\omega/\frac{d}{m}$. Für kleine Frequenzen ω beträgt die Phasenverschiebung zwischen Eingangssignal und Ausgangssignal $\varphi = \pi/2$, für große Frequenzen ω verschwindet die Phasenverschiebung zwischen Ausgangssignal und Eingangssignal. Für $\omega = d/m$ ist die Phasenverschiebung zwischen Eingangs- und Ausgangssignal $\varphi(d/m) = \pi/4$.

Für große Frequenzen ω sollte keine Phasenverschiebung zwischen Eingangssignal $F_a(t)$ und Ausgangssignal $x(t)$ zu beobachten sein. Für den Grenzfall $\omega \rightarrow 0$ beträgt die Phasenverschiebung $\pi/2$, die Kraft $F_a(t)$ ist also proportional zur Geschwindigkeit $\dot{x}(t)$.

Wird in der Differentialgleichung 5.1 die Trägheitskraft F_m vernachlässigt und nur die Verschiebung am Dämpfer betrachtet, so gilt das Kräftegleichgewicht

$$F_a = -F_d = -d \cdot \dot{x}(t)$$

und die durch die Kraft $F_a = F_0 \sin(2\pi f_i t)$ ausgelöste Verschiebung $x(t)$ am Dämpfer beträgt:

$$x(t) = -\frac{1}{d} \int_0^t F_a(t) dt = \frac{F_0}{2\pi f_i d} (\cos(2\pi f_i t) - 1)$$

Abbildung 5.7 zeigt die Vertikalverschiebung u_z bei ausschließlicher Wirkung der Dämpfungskraft F_d für eine Periode. Diese ist für $t = 0$ Null, erreicht ihr Minimum bei $t = T/2$ und verschwindet für $t = T$.

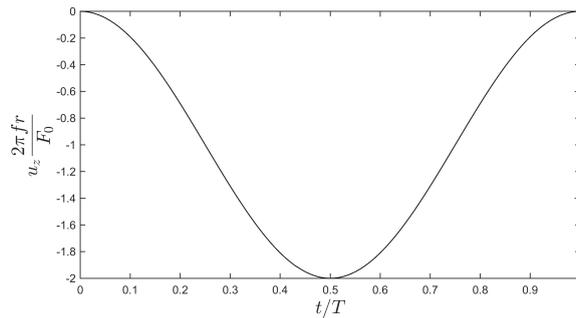


Abbildung 5.7.: Vertikalverschiebung u_z bei ausschließlicher Wirkung der Dämpfungskraft F_d .

Die Dämpfer, die durch die infiniten Elemente an die einzelnen Elemente angebracht wurden, sind durch die Lysmer-Bedingung untereinander nicht gekoppelt und sind somit unabhängig voneinander. Dadurch ist die Verschiebung des gesamten Modells größer als die Summe der Verschiebungen einer Säule über einem infiniten Element.

Die Dämpfer der Lysmer-Bedingung wirken bei Translationen, jedoch nicht bei Rotationen.

5.2. Schlaffes Fundament

5.2.1. Einfluss der Lysmer-Randbedingung anhand Modell A

Um den Einfluss der Randbedingungen durch Lysmer an dem Rändern des Halbraums zu untersuchen, wurde die Simulation eines schlaffen Fundaments, das mit einer gleichförmig verteilten, vertikalen Spannung $\sigma(t)$ belastet wird, zunächst mit dem kleineren Modell A (siehe Kapitel 5.1.1) durchgeführt. Der zeitliche Verlauf der aufgebrachten Spannung $\sigma(t)$ ist dabei

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_0 \sin(2\pi f_i t), & 0 < t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

mit $\sigma_0 = 1 \text{ kPa}$ und den Anregungsfrequenzen $f_1 = 1/8 \text{ Hz}$, $f_2 = 1/4 \text{ Hz}$, $f_3 = 1/2 \text{ Hz}$, $f_4 = 1 \text{ Hz}$, $f_5 = 2 \text{ Hz}$, $f_6 = 4 \text{ Hz}$ und $f_7 = 8 \text{ Hz}$. Mit dem Programm ABAQUS wurde jeweils eine Simulation für eine Frequenz f_i der Spannung $\sigma(t)$ durchgeführt und so die Erschütterungen simuliert. Die Funktionswerte der berechneten vertikalen Verschiebungen u_z wurden exportiert und mit Matlab graphisch dargestellt. Da die vertikale Belastung eines runden Fundaments auf homogenem Halbraum ein radialsymmetrisches Problem ist, hängen die Vertikalverschiebungen u_z nur von der Entfernung zum Fundament ab, jedoch nicht von der Richtung.

Die Vertikalverschiebungen u_z wurden zeitlich auf ihre Periodendauer T normiert, sodass für $t/T > 1$ für alle Frequenzen f_i keine anregende Kraft mehr wirkt. Die auf T normierten Vertikalverschiebungen u_z im Zentrum C des Fundaments und in den Entfernungen R , $2R$, $3R$ und $4R$ für die Frequenzen $f_1 = 1/8 \text{ Hz}$, $f_2 = 1/4 \text{ Hz}$, $f_3 = 1/2 \text{ Hz}$, $f_4 = 1 \text{ Hz}$, $f_5 = 2 \text{ Hz}$, $f_6 = 4 \text{ Hz}$ und $f_7 = 8 \text{ Hz}$ sind in Abbildung 5.8 abgebildet.

Zunächst fällt auf, dass die Vertikalverschiebung u_z für kleine Frequenzen $f_i \leq 1/2 \text{ Hz}$ nicht symmetrisch verläuft. Die Verschiebung nach unten (in negative z -Richtung) ist sehr viel größer als die Verschiebung nach oben (in positive z -Richtung). Dieser Effekt wird mit zunehmender Entfernung stärker. Für große Frequenzen $f_i \geq 1 \text{ Hz}$ ist der Verlauf der Verschiebung symmetrisch, die Amplitude der Verschiebung nach oben und nach unten ist gleich. Zudem ist zu beobachten, dass für Frequenzen im Bereich von $f_i = 1/8 - 2 \text{ Hz}$ das Maximum bezogen auf die Periodendauer T immer früher (für kleinere t/T) eintritt. Beide Beobachtungen können durch die aufgrund der Trägheitskraft F_m und der Dämpfungskraft

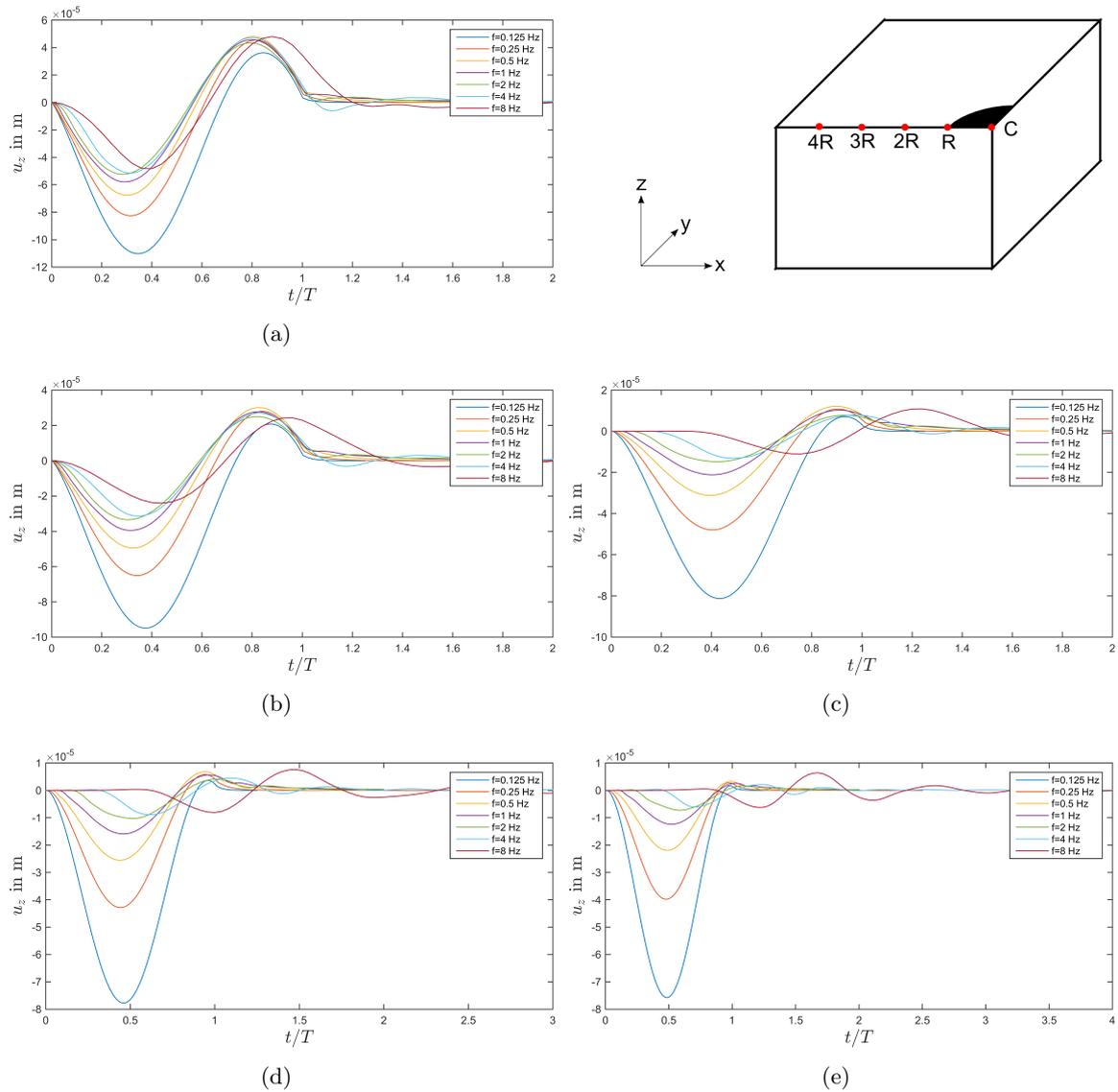


Abbildung 5.8.: Zeitlich auf Periodendauer T normierte Vertikalverschiebung u_z im Mittelpunkt (a) sowie in den Entfernungen R (b), $2R$ (c), $3R$ (d) und $4R$ (e) vom Mittelpunkt eines schlaffen Fundaments in Modell A, das mit einer vertikalen Kraft $F_z = F_0 \sin(2\pi f_i t)$ mit den Frequenzen $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz belastet wird.

F_d verursachten Vertikalverschiebungen u_z (siehe Kapitel 5.1.5) erklärt werden. Wie in Kapitel 5.1.5 festgestellt, dominiert für kleine Frequenzen die Dämpfungskraft F_d der Lysmer-Randbedingungen, mit zunehmender Frequenz wird der Einfluss der Trägheitskraft F_m größer bis sie im Vergleich zur Dämpfungskraft so groß ist, dass diese vernachlässigt werden kann. Die simulierten Vertikalverschiebungen u_z an der Oberfläche des Halbraums ergeben sich aus der Addition der Verschiebung aufgrund des Dämpfers (Abbildung 5.7) und der Verschiebung aufgrund der Belastung des Fundaments (Trägheitskraft), wobei für kleine Frequenzen f_i die Amplitude der Dämpfungskraft sehr viel größer ist als die Amplitude der Trägheitskraft. Daher gleicht die simulierte Vertikalverschiebung für $f_1 = 1/8$ Hz der berechneten Verschiebung aufgrund der Dämpfungskraft (siehe Abbildung 5.7), die Verschiebung nach unten ist sehr viel größer als nach oben und somit nicht symmetrisch zur t/T -Achse. Mit zunehmender Anregungsfrequenz f_i nimmt die Dämpfungskraft ab und die Trägheitskraft zu, sodass das Maximum der Verschiebung zu kleineren t/T verschoben wird und die Verschiebung immer symmetrischer zur t/T -Achse wird. Ab der Frequenz $f_6 = 4$ Hz dominiert die Trägheitskraft und die Vertikalverschiebung u_z ist symmetrisch zur Zeitachse, die Verschiebungen u_z in positive und negative z -Richtung sind gleich groß. Ein Vergleich der Verschiebungen u_z im Zentrum mit den Verschiebungen u_z in der Nähe des Halbraumrandes zeigt, dass der Einfluss der Dämpfungskraft gegenüber der durch die Belastung des Fundaments verursachte Verschiebung mit steigender Entfernung zur Quelle (Fundament) steigt. Dies liegt daran, dass Verschiebung durch die Belastung mit $1/r$ gedämpft wird, während die Verschiebung am Dämpfer an der Unterseite des Halbraums für alle Entfernungen r gleich ist.

Die Amplitude der Vertikalverschiebung u_z nimmt an einem Ort mit zunehmender Frequenz ab. Dies stimmt mit dem in Kapitel 5.1.5 berechneten Betrag der komplexen Antwortfunktion überein, der ebenfalls mit zunehmender Frequenz abnimmt.

Wie bei der semi-analytischen Lösung ist auch hier der Einfluss der Fundamentausdehnung und die damit verbundene Phasenverschiebung φ zu erkennen. Für kleine Frequenzen f_i nimmt die Periodendauer um die Laufzeit der Rayleigh-Welle Δt durch das Fundament zu und beträgt $T + \Delta t$. Für kleine Frequenzen $f_i = 1/8 - 1/2$ Hz ist die Wellenlänge λ gegenüber dem Fundamentdurchmesser sehr groß und die Ausdehnung des Fundaments hat keinen Einfluss auf die Verschiebung. Das Fundament kann als Punktquelle betrachtet werden.

Die Lage des Maximums wird für kleine Frequenzen von dem Verhältnis von Trägheitskraft F_m zu Dämpfungskraft F_d bestimmt. Da mit zunehmender Frequenz die Trägheitskraft dominiert, verschiebt sich das Maximum auf der Zeitachse hin zu kleineren t/T . Ab einer Frequenz von 2 Hz ist die Phasenverschiebung aufgrund der endlichen Ausdehnung des Fundaments so groß, dass diese überwiegt und das Maximum zu größeren t/T verschoben wird.

Für die mit $f_i \geq 4$ Hz angeregten Vertikalverschiebungen sind für die Entfernungen $3R$ und $4R$ vom Fundamentmittelpunkt nach der Anregung zum Zeitpunkt $1 + \frac{t_0 + \Delta t}{T}$ numerische Artefakte zu beobachten, die später genauer erläutert werden.

Um die Annahme eines starren Körpers zu überprüfen, wurden für die größte und kleinste Anregungsfrequenz f_i die Vertikalverschiebung an der Oberseite und an der Unterseite des Halbraums exportiert und zum verglichen. Abbildung 5.9 zeigt die Vertikalverschiebung u_z an der Oberseite im Mittelpunkt und in den Entfernungen R , $2R$, $3R$ und $4R$ vom Mittelpunkt des Fundaments und an der Unterseite des Halbraums an den entsprechenden Punkten für die Frequenzen $f_1 = 1/8$ Hz und $f_7 = 8$ Hz.

Für $f_7 = 8$ Hz unterscheiden sich die Vertikalverschiebung an der Oberseite und die Vertikalverschiebung an der Unterseite des Halbraums deutlich, für $f_1 = 1/8$ Hz unterscheiden sich die Verschiebungen nur minimal. Da für kleine Frequenzen f_i die Wellenlänge groß ist

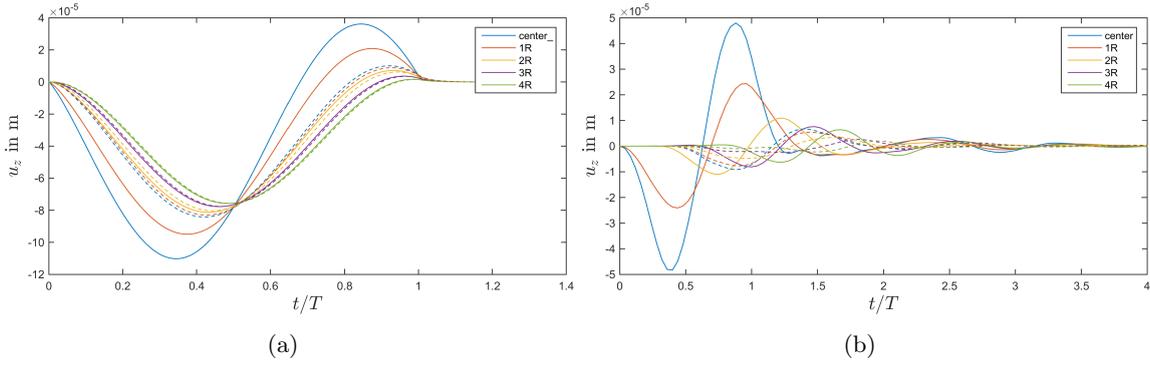


Abbildung 5.9.: Zeitlich auf Periodendauer T normierte Vertikalverschiebung u_z an der Oberseite (durchgezogen) und Unterseite (gestrichelt) des Halbraums im Mittelpunkt sowie in den Entfernungen R , $2R$, $3R$ und $4R$ vom Mittelpunkt eines schlaffen Fundaments in Modell A, das mit einer vertikalen Kraft $F_z = F_0 \sin(2\pi f_i t)$ mit den Frequenzen $f_1 = 1/8 \text{ Hz}$ (a) und $f_7 = 8 \text{ Hz}$ (b) belastet wird.

gegenüber der Tiefe des Modells A, kann die Annahme getroffen werden, dass die Verschiebung in jeder Tiefe z gleich ist. Die Annahme eines Starrkörpers ist für diese Frequenz also gerechtfertigt. Für große Frequenzen f_i kann diese Annahme nicht getroffen werden, da Wellenlänge klein ist gegenüber der Tiefe des Modells. Dadurch sind unterschiedliche Einsatzzeiten der Wellen an Ober- und Unterseite zu beobachten und die Annahme eines Starrkörpers trifft nicht zu.

5.2.2. Minimierter Einfluss der Lysmer-Randbedingung anhand Modell B

Nun wird ein Modell erstellt, bei dem der Einfluss der Lysmer-Randbedingungen nahezu eliminiert wird. Dazu wird die Größe des Modells B so angepasst, dass die Trägheitskraft F_m deutlich größer ist als die Dämpfungskraft F_d . Aus der algebraischen Gleichung 5.2 ergibt sich der Betrag der Trägheitskraft $|F_m|$ und der Betrag der Dämpfungskraft $|F_d|$

$$|F_m| = m\omega^2 \tilde{x}(\omega) \quad |F_d| = d\omega \tilde{x}(\omega)$$

Mit der Masse m , der senkrecht zum Rand stehenden Dämpfungskonstante d und der Fläche des Halbraums A

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot z \quad d = \rho \cdot c_p \cdot A$$

kann die Forderung

$$|F_m(\omega)| > |F_d(\omega)|$$

vereinfacht werden, sodass sich mit $c_p = \lambda f$ für die Größe des Modells B ergibt:

$$m\omega^2 \tilde{x}(\omega) > d\omega \tilde{x}(\omega) \quad \Leftrightarrow \quad 2\pi f m > d \quad \Leftrightarrow \quad z > \frac{\lambda}{2\pi}$$

Das Verhältnis von Trägheitskraft F_m zu Reibungskraft F_d hängt nur von der Tiefe z des Modells ab und ist unabhängig von seiner Länge und Breite. Die kleinste Anregungsfrequenz $f_i = 1/8 \text{ Hz}$ bestimmt die Mindesttiefe des Modells:

$$z > \frac{c_p}{2\pi f} = \frac{346,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\pi \frac{1}{8} \text{ Hz}} = 441 \text{ m}$$

Da die Trägheitskraft F_m im Vergleich zur Dämpfungskraft F_d deutlich größer sein soll, ist die gewählte Tiefe z des Modells mit $z = 800$ m fast doppelt so groß wie die berechnete Tiefe. Die Länge und Breite des Modells beträgt 200 m und der Fundamentradius entspricht mit $R = 10$ m dem Fundamentradius einer realen WEA.

Die auf das Fundament aufgebrachte Spannung $\sigma(t)$ mit den Frequenzen f_i ist dabei identisch mit der Spannung in Modell A. Es wurde ebenfalls eine Simulation pro Frequenz durchgeführt.

Die Vertikalverschiebung u_z an der Oberfläche des Halbraums bei einer Anregungsfrequenz $f_4 = 1$ Hz zu den Zeitpunkten $t = 0,4$ s, $t = 0,5$ s, $t = 0,55$ s, $t = 0,925$ s, $t = 1,025$ s und $t = 1,525$ s ist in Abbildung 5.10 dargestellt. Das, belastete Fundament befindet sich unten rechts im Bild. An den Rändern oben und links im Bild befinden sich Lysmer-Randbedingungen. Die aus der Druckbelastung resultierende Verschiebung nach unten (in negative z-Richtung) ist in rot dargestellt, die Verschiebung nach oben (in positive z-Richtung) aufgrund von Zugbelastung ist in blau dargestellt. Im Zeitbereich $t = 0 - 0,5$ s wird das Fundament durch Druck belastet, für $t = 0,5 - 1$ s wird das Fundament durch Zugkraft belastet.

Die Verschiebungen zeigen, dass sich die Wellen radial ausbreiten. Mit zunehmender Entfernung nimmt ihre Amplitude ab, daher nimmt auch die Amplitude der Vertikalverschiebung ab. In Abbildung 5.10 (f) ist der Einfluss der Lysmer-Bedingungen an der Ecke, an denen die Lysmer-Ränder aufeinander treffen, zu erkennen. Die Ausbreitung der Wellen verläuft nicht mehr radial. Die infiniten Elemente verhindern nur Reflexionen der Wellen, die senkrecht auf den Rand treffen. In dieser Ecke treffen die Wellen in einem Winkel von 45° auf die infiniten Elemente und es finden Reflexionen statt (siehe unten).

Abbildung 5.11 zeigt die Vertikalverschiebungen u_z von der Oberfläche bis in eine Tiefe von 800 m bei einer Anregungsfrequenz von $f_4 = 1$ Hz zu den Zeitpunkten $t = 0,4$ s, $t = 0,5$ s, $t = 0,55$ s, $t = 0,925$ s, $t = 1,025$ s und $t = 1,525$ s. Das belastete Fundament befindet sich in den Abbildungen links oben. An den Rändern rechts und unten befinden sich infinite Elemente nach Lysmer. Die Verschiebung nach unten (in negative z-Richtung) ist rot dargestellt, die Verschiebung nach oben (in positive z-Richtung) ist blau dargestellt.

Die vertikale Verschiebung ist aufgrund der vertikalen Belastung des Fundaments unterhalb des Fundaments größer als seitlich des Fundaments. Die Wellen breiten sich radial aus. Ab einer Tiefe von ca. 200 m sind die Vertikalverschiebungen seitlich des Fundaments größer als die Verschiebungen unterhalb des Fundaments (siehe Abbildung 5.11 (e) und (f)). Hier ist die Rayleigh-Welle zu beobachten, deren Amplitude des Vertikalanteils exponentiell mit der Tiefe abnimmt. Somit ist Verschiebung an der Oberfläche größer und nimmt zunehmender Tiefe ab. Die Ausbreitung der P-Welle ist auch in größerer Tiefe noch zu beobachten.

Die Vertikalverschiebung u_z und die Horizontalverschiebung u_x wurden für verschiedene Entfernungen r zum Fundament exportiert und mit Matlab graphisch dargestellt.

Die auf die Periodendauer T normierte Vertikalverschiebung u_z im Mittelpunkt C und in den Entfernungen $r = R, 2R, 4R, 8R$ und $16R$ zum Mittelpunkt des Fundaments für die Anregungsfrequenzen $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz ist in Abbildung 5.12 dargestellt.

Aufgrund des größeren Modells verläuft die Vertikalverschiebung u_z im Mittelpunkt und für die Entfernungen R und $2R$ zum Mittelpunkt für alle Frequenzen f_i symmetrisch zur Zeitachse. Die Vertikalverschiebungen u_z in positive und negative z-Richtung haben wie bei einem linear elastischen Halbraum erwartet die gleiche Amplitude. Bei den Entfernungen $4R$ und $8R$ ist die Verschiebung u_z für die Frequenzen $f \geq 1/4$ Hz ebenfalls symmetrisch. In einer Entfernung von $16R$ überwiegt der Einfluss der Dämpfer gegenüber den Verschiebungen durch die Belastung des Fundaments, da die durch das Fundament verursachten Verschiebungen an der Oberfläche mit dem Faktor $1/r$ abnehmen und die durch Dämpfer

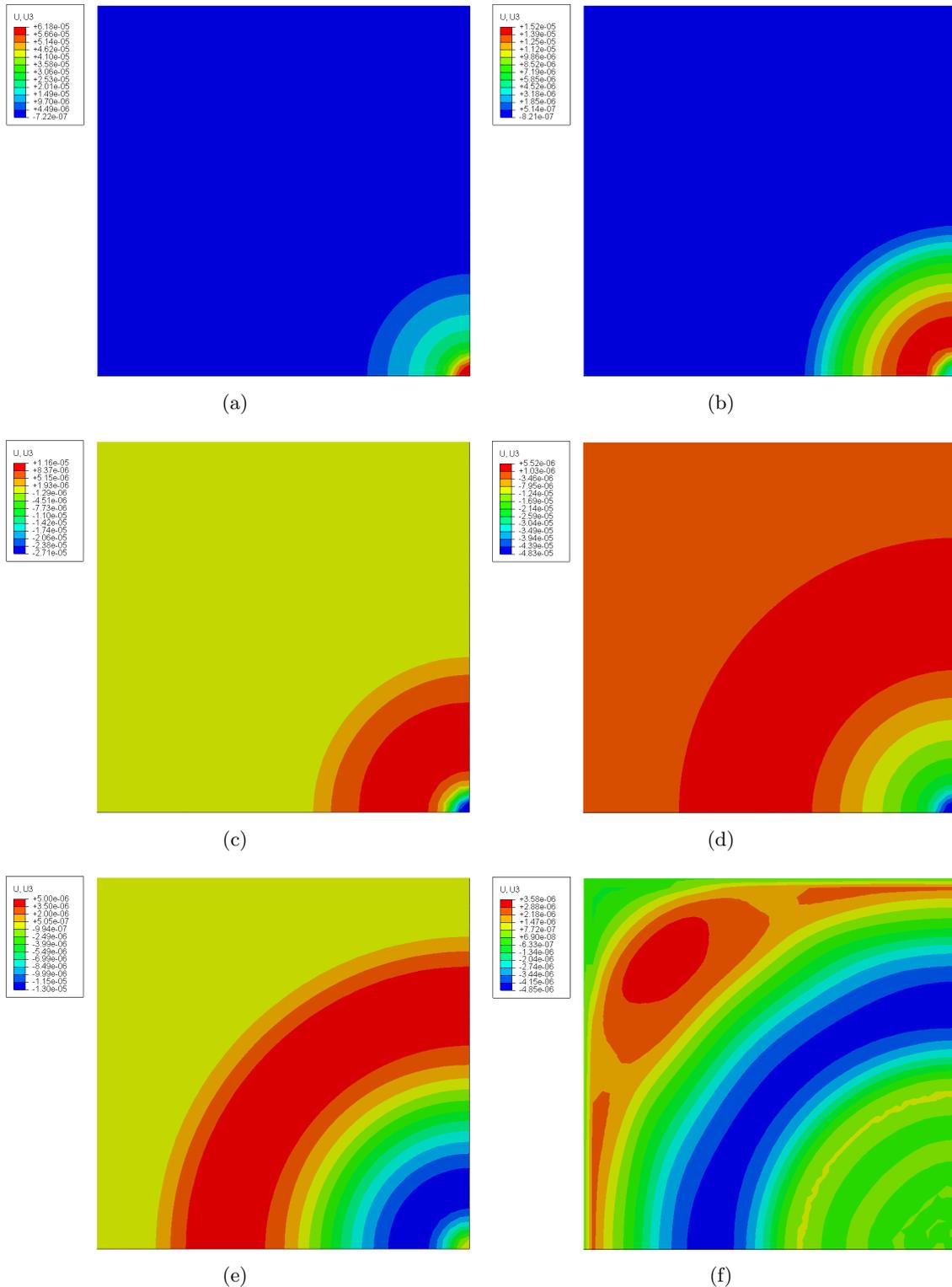


Abbildung 5.10.: Vertikale Verschiebungen u_z an der Oberseite des Halbraums durch Belastung eines schlaffen Fundaments mit einer Anregungsfrequenz $f_4 = 1$ Hz zum Zeitpunkt $t = 0,4$ s (a), $t = 0,5$ s (b), $t = 0,55$ s (c), $t = 0,925$ s (d), $t = 1,025$ s (e) und $t = 1,525$ s (f). Das belastete Fundament befindet sich unten rechts.

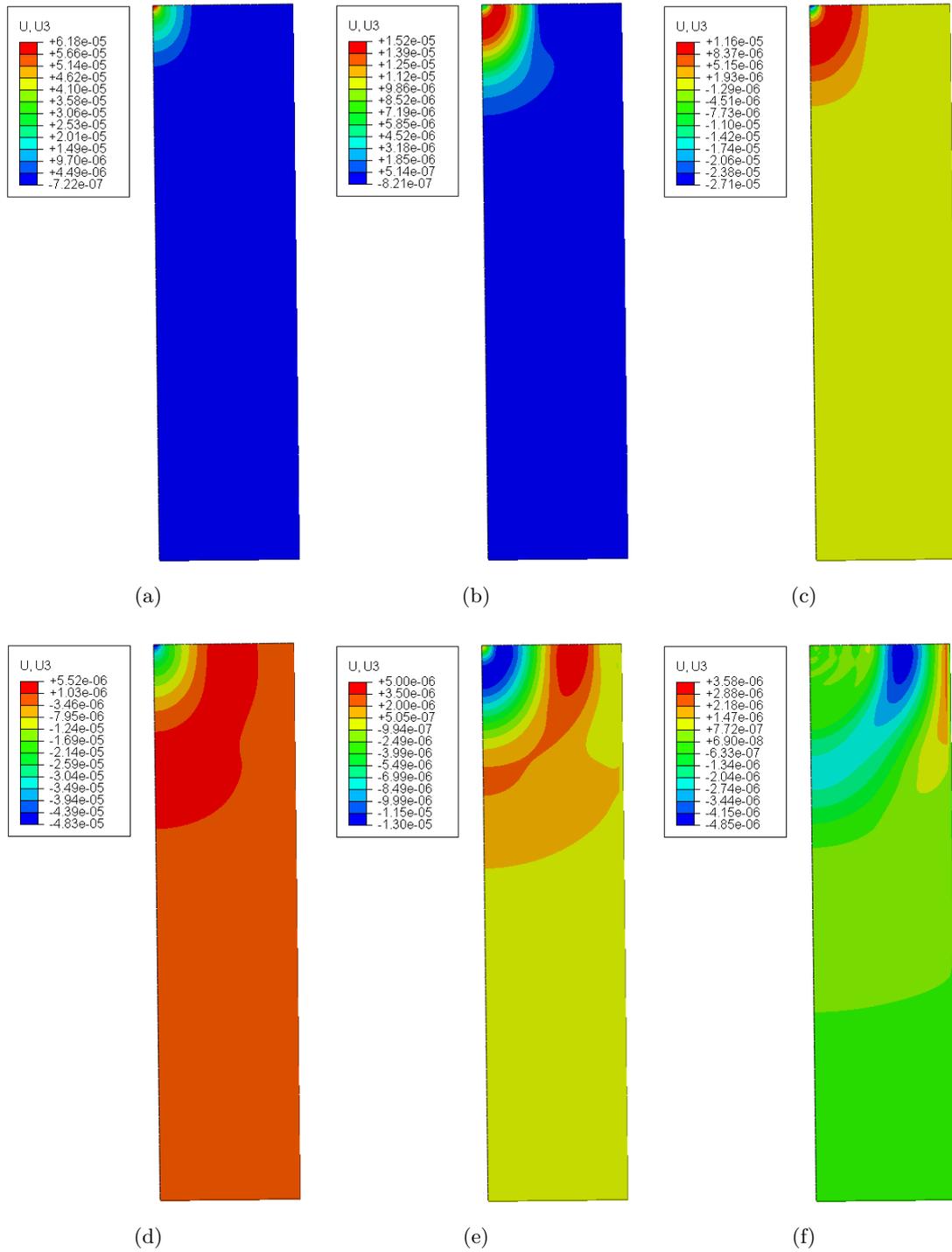


Abbildung 5.11.: Vertikale Verschiebungen u_z im Halbraum durch Belastung eines schlaffen Fundaments mit einer Anregungsfrequenz $f_4 = 1\text{ Hz}$ zum Zeitpunkt $t = 0,4\text{ s}$ (a), $t = 0,5\text{ s}$ (b), $t = 0,55\text{ s}$ (c), $t = 0,925\text{ s}$ (d), $t = 1,025\text{ s}$ (e) und $t = 1,525\text{ s}$ (f). Das belastete Fundament befindet sich oben links.

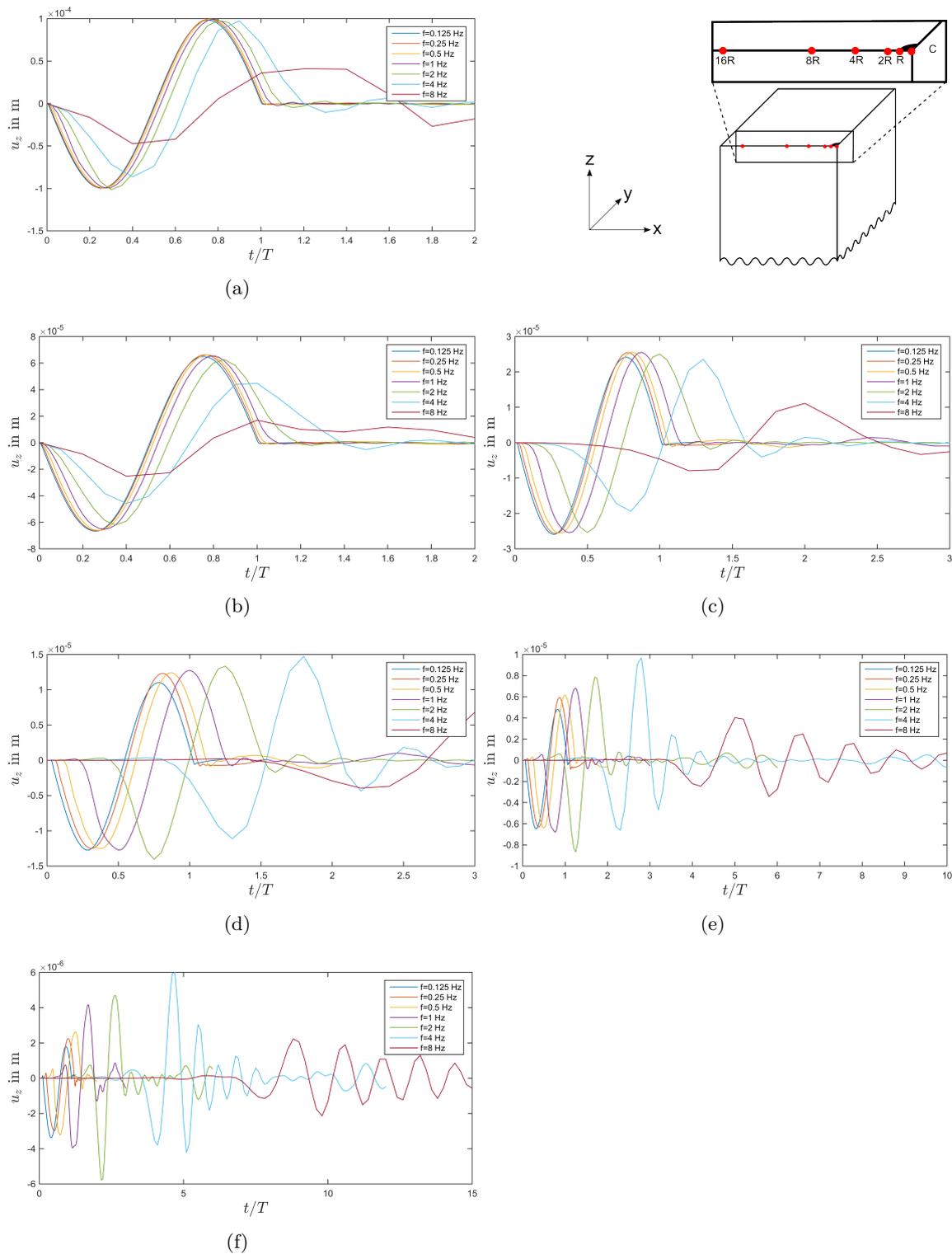


Abbildung 5.12.: Zeitlich auf Periodendauer T normierte Vertikalverschiebung u_z im Mittelpunkt C (a) und in den Entfernungen $r = R$ (b), $2R$ (c), $4R$ (d), $8R$ (e), $16R$ (f) vom Mittelpunkt eines schlaffen Fundaments in Modell B, das mit einer vertikalen Kraft $F = F_0 \sin(2\pi f_i t)$ mit $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz belastet wird.

verursachten Vertikalverschiebungen an der gesamten Oberfläche gleich sind. Besonders für die Frequenzen $f_i \leq 2$ Hz ist zu erkennen, dass die Verschiebungen nach unten (in negativ z-Richtung) größer sind als die Verschiebungen nach oben (in positive z-Richtung).

Mit zunehmender Frequenz nimmt der Einfluss der Fundamentradius R zu. Für kleine Frequenzen $f_i \leq 1/2$ Hz ist die Phasenverschiebung φ sehr klein, die Periodendauer T der Rayleigh-Welle ist also sehr groß gegenüber ihrer Laufzeit durch das Fundament und somit kann das Fundament als Punktquelle angenommen werden. Für Frequenzen $f_i \geq 1$ Hz kann die Phasenverschiebung φ nicht mehr vernachlässigt werden und der Verlauf der Vertikalverschiebung u_z hängt von der Größe des Fundaments ab. Je größer die Frequenz gewählt wird, desto länger ist die zeitliche Länge der Verschiebung u_z im Vergleich zur Periodendauer T der Anregungsfrequenz f_i . Durch die Interferenz der Wellen, die an unterschiedlichen Knoten des Fundaments verursacht werden, nimmt auch die Amplitude der Verschiebung u_z mit zunehmender Frequenz ab. Für die Frequenzen $f_i = 1/8$ Hz und $f = 1/4$ Hz ist wie in der semi-analytischen Berechnung zum Zeitpunkt $t/T = 1$, zu dem die Kraft $F(t)$ aufhört zu wirken, ein Knick zu erkennen. Für die Frequenzen $f = 1/2 - 8$ Hz dauert das Signal aufgrund der Phasenverschiebung φ zum Zeitpunkt $t/T = 1$ noch an.

Mit zunehmender Entfernung r und mit steigender Anregungsfrequenz f_i vergrößert sich die Zeit bis zum Ersteinsatz der P-Welle aufgrund der Laufzeit und der zeitlichen Normierung auf Periodendauer T .

Ab einer Entfernung von $r \geq 4R$ sind P-Welle, S-Welle und Rayleigh-Welle erkennbar. Für $r \leq 2R$ ist nur die Rayleigh-Welle zu beobachten. Die P-Welle bildet den Ersteinsatz, der Einsatz der S-Welle ist als Änderung der Steigung zu erkennen. Die kleinste Amplitude hat die P-Welle, die größte Amplitude hat die Rayleigh-Welle. Aus der semi-analytischen Lösung ist bekannt, dass die Partikelbewegung der P-Welle dabei in entgegengesetzter Richtung zur Rayleigh-Welle stattfindet, dies ist auch in der numerischen Lösung zu beobachten.

Mit zunehmender Entfernung r nimmt die Amplitude der Vertikalverschiebung u_z ab. Aufgrund des Einflusses der Lysmer-Bedingungen, der in diesem Modell deutlich kleiner, aber dennoch erkennbar ist, kann der Faktor der Amplitudenabnahme nur ungenau bestimmt werden. Die Abnahme stimmt jedoch näherungsweise mit dem geometrischen Ausbreitungsverlust von $1/\sqrt{r}$ für Oberflächenwellen und $1/r$ für Raumwellen überein.

Für Entfernungen $r = 4R$, $8R$ und $16R$ vom Fundamentmittelpunkt C nimmt die Amplitude an einem Ort entgegen des Betrags der Antwortfunktion mit zunehmender Frequenz $f_i = 1/8 - 2$ Hz zu. Da sich P-Welle, S-Welle und Rayleigh-Welle für $r \leq 2R$ destruktiv überlagern, nehmen die Verschiebungen für große Anregungsfrequenzen f_i gegenüber der Verschiebung für kleine Anregungsfrequenzen f_i mit steigender Entfernung r zu. Mit zunehmender Entfernung nimmt die destruktive Interferenz von P-Welle, S-Welle und Rayleigh-Welle ab und die Amplitude der Verschiebung steigt mit zunehmender Frequenz. Für $f_7 = 8$ Hz überwiegt die destruktive Interferenz durch die Phasenverschiebung φ der Wellen, die an unterschiedlichen Punkten im Fundament erzeugt wurden, und die Amplitude nimmt ab.

Wird die Vertikalverschiebung für Anregungsfrequenzen $f \geq 2$ Hz in den Entfernungen $8R$ und $16R$ betrachtet, so schwingt diese auch nach einer berechneten Signaldauer $T + \Delta t$ aufgrund von numerischen Artefakten.

Die Periodendauer der numerischen Artefakte ist dabei unabhängig von der Anregungsfrequenz f_i und beträgt $T = 0,11$ s und steht damit nicht im Zusammenhang mit der zeitlichen Diskretisierung $\Delta t = 0,025$ s. Die Laufzeit der Rayleigh-Welle durch das Fundament beträgt ebenfalls $\Delta t = 0,11$ s, da die Amplitude dieser „Nachschwingungen“ mit zunehmender Entfernung r nicht abnimmt, können diese jedoch nicht durch Reflexionen am Rand des Fundaments entstanden sein. Dies wird durch das Auftreten derselben Artefakte mit Periodendauer $T = 0,11$ s in Modell A, das sich in der Größe des Fundaments und in der

räumliche und zeitlichen Diskretisierung von Modell B unterscheidet, bestätigt. Da diese Artefakte durch Anwenden einer numerischen Dämpfung eliminiert werden können, müssen dies numerische Artefakte sein, die aufgrund der zeitlichen Integration der Beschleunigung entstehen.

Abbildung 5.13 zeigt die auf die Periodendauer T normierten Horizontalverschiebungen u_x im Mittelpunkt C und in den Entfernungen $r = R, 2R, 4R, 8R$ und $16R$ zum Mittelpunkt des Fundaments für die anregende Kraft $F(t)$ mit den Anregungsfrequenzen $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz.

Im Mittelpunkt des Fundaments C sind die Horizontalverschiebungen u_x aufgrund der Symmetriebedingungen so klein, dass diese vernachlässigt werden können.

Die Amplitude der Horizontalverschiebung u_x ist aufgrund der vertikalen Anregung $F(t)$ kleiner als die Amplitude der Vertikalverschiebung u_z . Die Partikel bewegen sich zum Fundament hin, wenn auf dieses ein Druck aufgebracht wird, wird auf das Fundament eine Zugkraft ausgeübt, findet eine Partikelbewegung vom Fundament weg statt.

Die Amplitude der Partikelbewegung ist dabei in positiver und negativer x-Richtung nahezu gleich groß. Der Einfluss der Lysmer-Randbedingungen ist auf der Horizontalkomponente nicht relevant.

Die Amplitude nimmt an einem Ort mit steigender Frequenz f_i ab einer Entfernung $r = R$ zu. Dieser Effekt ist auf der Horizontalkomponente im Vergleich zur Vertikalkomponente stärker, da die radiale Partikelbewegung der P-Welle an der Oberfläche auf der Horizontalkomponente besser aufgezeichnet werden kann und somit die abnehmende destruktive bzw. die zunehmende konstruktive Interferenz zwischen P-Welle und Rayleigh-Welle mit zunehmender Entfernung r stärker ausgeprägt ist. Bei einer Frequenz von $f_7 = 8$ Hz überwiegt die destruktive Interferenz durch die Phasenverschiebung φ der Wellen, die an unterschiedlichen Knoten im Fundament erzeugt werden und die Amplitude nimmt ab.

Die P-Welle ist ab einer Entfernung von $r = 4R$ zu erkennen. Die Wellen werden mit zunehmender Entfernung durch den geometrischen Ausbreitungsverlust gedämpft.

Für Frequenzen $f \geq 4$ Hz in einer Entfernung $r \geq 8R$ ist nach der durch die Kraft $F(t)$ ausgelösten Verschiebung wie in der Vertikalkomponente ein „Nachschwingen“ aufgrund von numerischen Artefakten zu beobachten.

Um die Partikelbewegung der Wellen zu bestimmen, wurde zusätzlich eine Berechnung mit einer längeren Belastung durchgeführt. Die auf das Fundament aufgebrauchte Spannung ist dabei

$$\sigma_{3T} = \begin{cases} \sigma_0 \sin(2\pi f_4 t), & t \leq 3T \\ 0, & t > 3T \end{cases}$$

mit $\sigma_0 = 1$ kPa und $f_4 = 1$ Hz. Da die anregende Kraft $F(t)$ über einen längeren Zeitraum wirkt, dauert auch die Partikelbewegung in der Vertikalverschiebung u_z und der Horizontalverschiebung u_x länger an und kann somit besser beobachtet werden. Die auf Periodendauer T normierte Vertikalverschiebung u_z sowie die Partikelbewegung der Verschiebung in den Entfernungen $R, 2R, 4R, 8R$ und $16R$ zeigt Abbildung 5.14.

Die Vertikalverschiebung u_z verläuft symmetrisch zur t/T -Achse. Mit zunehmender Entfernung vergrößert sich die Zeit des Ersteinsatzes und die Verschiebung wird gedämpft. Während der ersten Periodendauer sind in der Vertikalverschiebung u_z „Dellen“ zu erkennen, die durch das Eintreffen der Signale innerhalb der Zeitspanne Δt (Laufzeit der Welle durch das Fundament) entstehen. Während der zweiten und dritten Periode sind diese Artefakte nicht zu beobachten, da hier keine durch die Ausdehnung des Fundaments verzögerten Wellen eintreffen.

Die Partikelbewegung entspricht einer Überlagerung von P-Welle, S-Welle und Rayleigh-Welle. Die Partikelbewegung der P-Welle erfolgt an der Oberfläche in horizontaler Richtung,

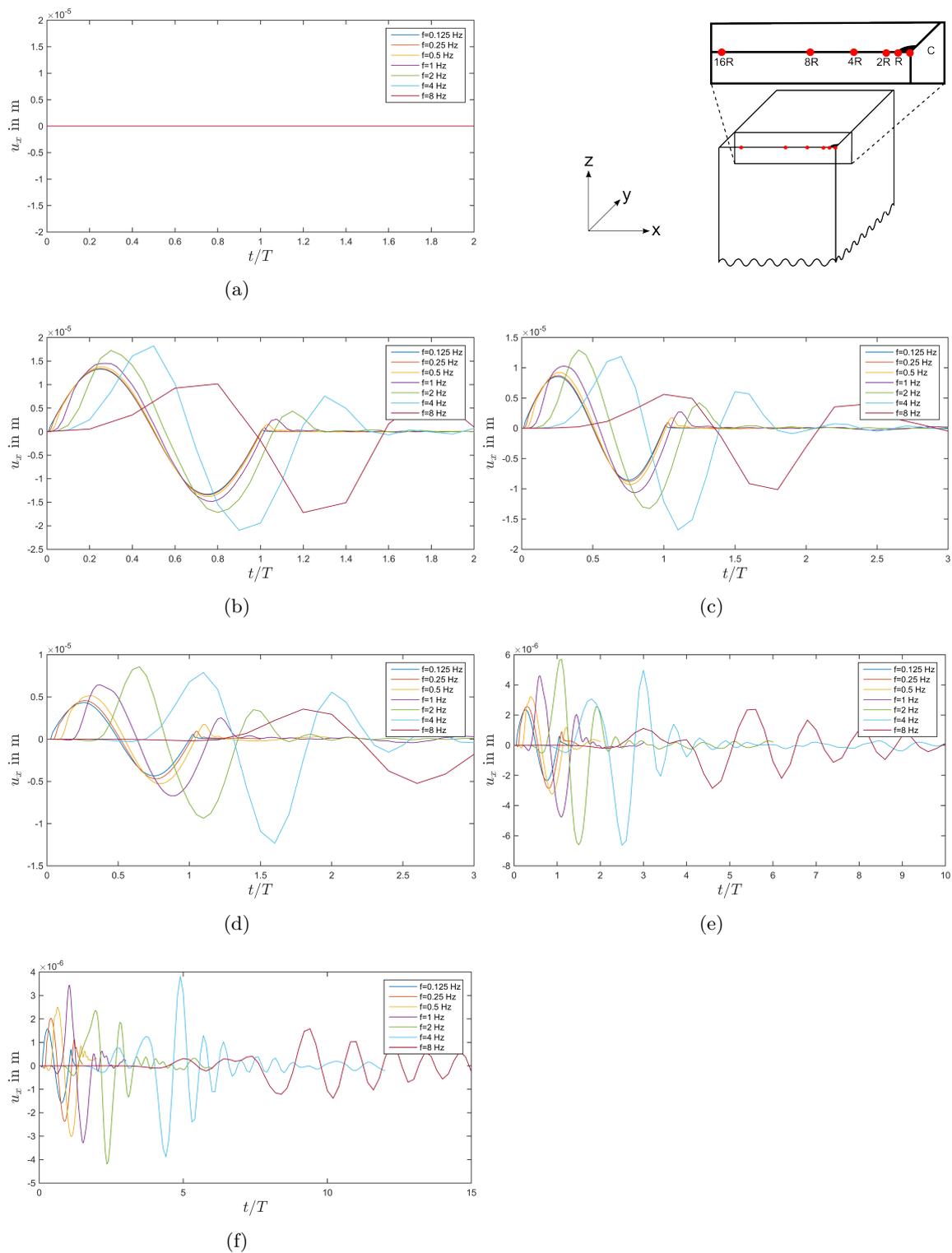


Abbildung 5.13.: Zeitlich auf Periodendauer T normierte Horizontalverschiebung u_x im Mittelpunkt C (a) und in den Entfernungen $r = R$ (b), $2R$ (c), $4R$ (d), $8R$ (e), $16R$ (f) vom Mittelpunkt eines schlaffen Fundaments in Modell B, das mit einer vertikalen Kraft $F(t) = F_0 \sin(2\pi f_i t)$ mit $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz belastet wird.

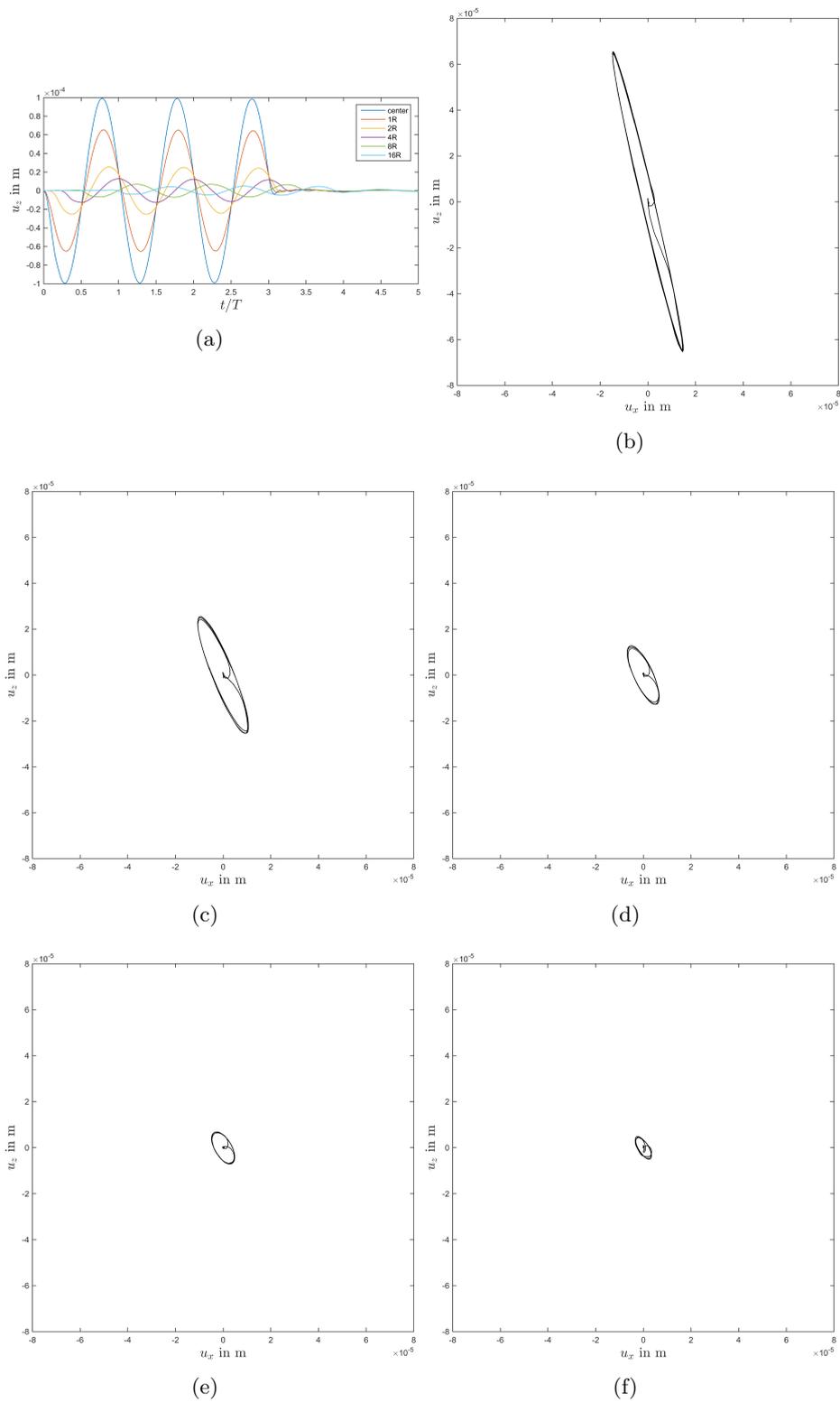


Abbildung 5.14.: (a) Zeitlich auf Periodendauer T normierte Vertikalverschiebung u_z im Mittelpunkt C und in den Entfernungen R , $2R$, $4R$, $8R$, $16R$ vom Mittelpunkt eines schlaffen Fundaments in Modell B, das mit einer vertikalen Kraft $F = F_0 \sin(2\pi f_{a4} t)$ mit $f_{a4} = 1$ Hz über drei Perioden belastet wird. Partikelbewegung in den Entfernungen $r = R$ (b), $2R$ (c), $4R$ (d), $8R$ (e) und $16R$ (f).

die Partikelbewegung der S-Welle in vertikaler Richtung und die Partikelbewegung der Rayleigh-Welle bildet aufgrund von vertikaler und horizontaler Partikelbewegung eine Ellipse. Da die Amplitude der Rayleigh-Welle gegenüber der P-Welle und S-Welle größer ist, überwiegt auch deren Partikelbewegung.

Für kleine Entfernungen zum Mittelpunkt ist die Vertikalverschiebung u_z von S-Welle und Rayleigh-Welle wesentlich größer als die Horizontalverschiebung u_x von P-Welle und Rayleigh-Welle, daher nimmt die Partikelbewegung die Form einer schräg stehenden Ellipse an. Mit zunehmender Entfernung r werden P-Welle und S-Welle mit dem Faktor $1/r$ stärker gedämpft als die Rayleigh-Welle, die mit $1/\sqrt{r}$ gedämpft wird. Daher überwiegt mit steigender Entfernung die Partikelbewegung der Rayleigh-Welle. Es ist zu beobachten, dass die Dämpfung der Vertikalkomponente sehr viel stärker erfolgt als die Dämpfung der Horizontalkomponente.

Um die Verschiebungen in innerhalb des Halbraums zu untersuchen, wurden Vertikal- und Horizontalverschiebung für die Frequenzen $f_1 - f_7$ in einer Entfernung $r = 16R$ in unterschiedlichen Tiefen aufgezeichnet.

Abbildung 5.15 zeigt die auf die Periodendauer T normierten Vertikalverschiebungen u_z in einer Entfernung von $r = 16R$ an der Oberfläche und in den Tiefen $z_1 = 20$ m, $z_2 = 40$ m, $z_3 = 60$ m, $z_4 = 80$ m und $z_5 = 100$ m für ein schlaffes Fundament und der anregenden Kraft $F(t)$ mit den Frequenzen $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz.

Wie in der Vertikalverschiebung u_z an der Oberfläche nimmt die Amplitude an einem festen Ort für die Frequenzen $f_i = 1/8 - 2$ Hz mit steigender Frequenz zu, da mit steigender Frequenz die destruktive Interferenz aus P-Welle und Rayleigh-Welle schwächer wird. Für die Frequenzen $f_i = 4 - 8$ Hz überwiegt dann die Phasenverschiebung φ , da das Fundament nicht als Punktquelle genähert werden kann und die Amplitude nimmt ab.

Vergleicht man die Amplitude der Verschiebung für gleiche Frequenzen f_i in unterschiedlichen Tiefen z , so wird die Amplitude für Frequenzen $f_i \leq 1/4$ Hz kaum gedämpft, für die Frequenzen $f_i = 1/2 - 8$ Hz ist eine mit steigender Frequenz zunehmende Dämpfung erkennbar. Die Amplitude der Rayleigh-Welle $A \propto e^{-2\pi f z}$ nimmt mit steigender Tiefe z und Frequenz f_i exponentiell ab. Durch diese frequenzabhängige Ausbreitung in die Tiefe werden hochfrequente Rayleigh-Wellen gegenüber niederfrequenten Rayleigh-Wellen stärker gedämpft. Dies ist auch bei den numerisch berechneten Vertikalverschiebungen u_z zu beobachten.

Mit zunehmender Tiefe ist die P-Welle deutlicher zu erkennen, da der Anteil der Partikelbewegung auf der Vertikalkomponente größer wird. Findet an der Oberfläche beim Einsatz der P-Welle eine Verschiebung in positive z -Richtung statt, so schlägt die P-Welle mit zunehmender Tiefe in negative z -Richtung aus. Nach Gakenheimer [Gak70], der das Lamb'sche Problem im Innern des Halbraums in Abhängigkeit des Winkels $\phi = \arctan(r/z)$ löst, findet im Innern des Halbraums nahe der Oberfläche beim Einsatz der P-Welle eine Verschiebung nach oben (in positive z -Richtung) statt, für abnehmende Winkel ϕ (entspricht einer Zunahme der Tiefe z) wird diese Verschiebung nach oben immer kleiner bis schließlich beim Einsatz der P-Welle eine Verschiebung nach unten (in negative z -Richtung) stattfindet. Dies ist in der berechneten Verschiebung ebenfalls zu erkennen, sodass hier numerische und semi-analytische Lösung übereinstimmen.

Gakenheimer [Gak70] berechnet außerdem den Einsatz einer Schmidt'schen Kopfwelle, die bis zu einem Winkel von $35,3^\circ$ zu beobachten ist. Die Schmidt'sche Kopfwelle entsteht durch Wechselwirkung an der freien Oberfläche. Nach dem Huygenschen Prinzip können an dieser Grenzschicht von Halbraum und Luft P-Wellen in S-Wellen konvertiert werden. Die dabei entstehende SP-Welle strahlt unter dem kritischen Winkel α Energie in den Halbraum ab. An der Oberfläche und für $\phi < \alpha$ existiert die Schmidt'sche Kopfwelle also nicht. Für $\alpha < \phi < 90^\circ$ sind nach Gakenheimer P-Welle, SP-Welle, S-Welle und Rayleigh-Welle in

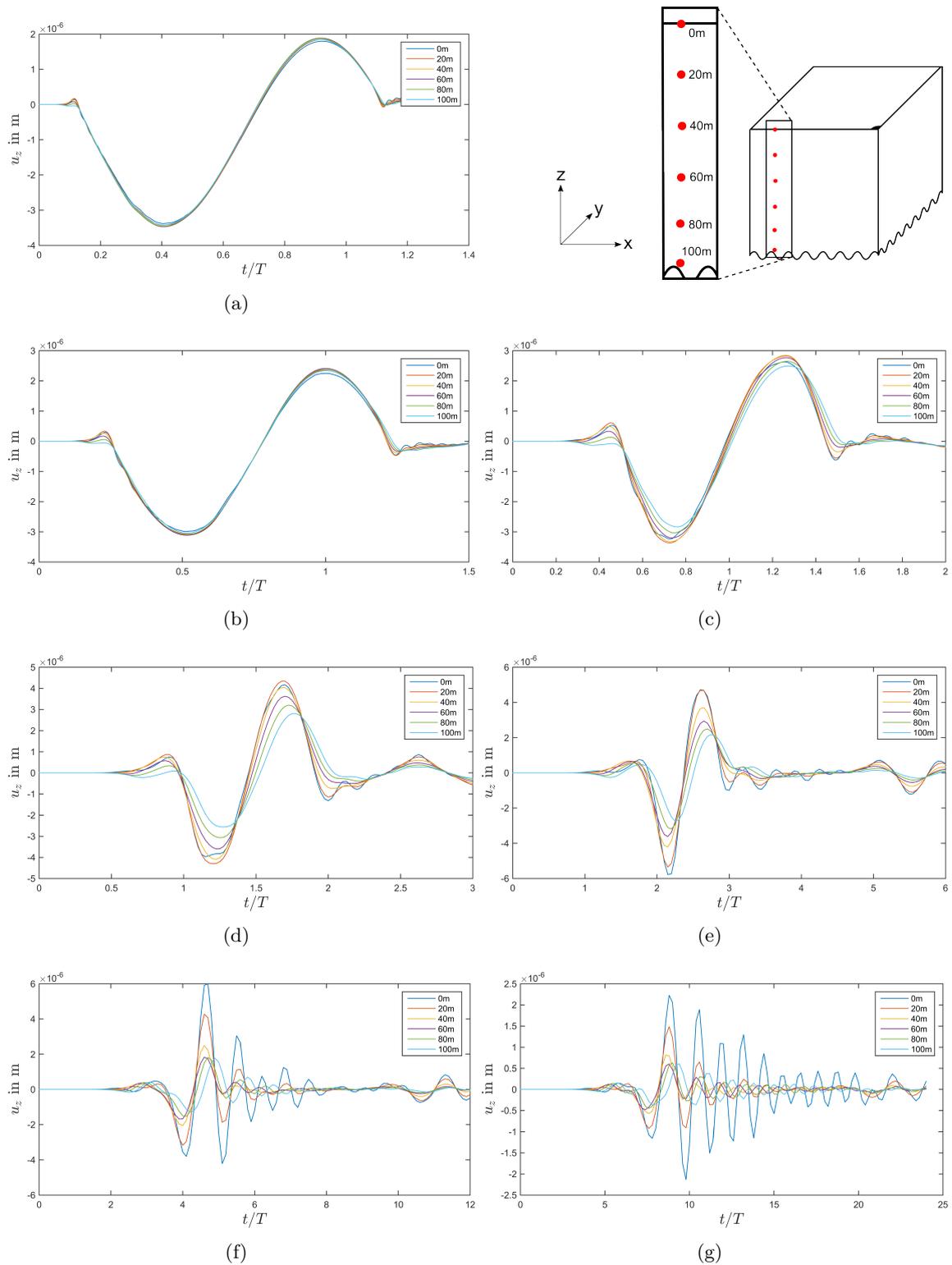


Abbildung 5.15.: Zeitlich auf Periodendauer T normierte Vertikalverschiebung u_z an der Oberfläche und in einer Tiefe von 20 m, 40 m, 60 m, 80 m und 100 m in einer Entfernung von $r = 16R$ vom Mittelpunkt eines schlaffen Fundaments in Modell B, das mit einer vertikalen Kraft $F = F_0 \sin(2\pi f_i t)$ mit $f_1 = 1/8$ Hz (a), $f_2 = 1/4$ Hz (b), $f_3 = 1/2$ Hz (c), $f_4 = 1$ Hz (d), $f_5 = 2$ Hz (e), $f_6 = 4$ Hz (f) und $f_7 = 8$ Hz (g) belastet wird.

dieser Reihenfolge zu beobachten. Der Einsatz einer SP-Welle ist aufgrund der Verschiebung der P-Welle und der S-Welle, die beide in gleicher Richtung stattfinden wie die Verschiebung der SP-Welle, sehr schwer zu picken. In dieser numerischen Simulation kann der Einsatz der SP-Welle nicht beobachtet werden, diese kann jedoch vorhanden sein.

Für Frequenzen $f \geq 4$ Hz sind die an der Oberfläche beobachteten numerischen Artefakte auch bis in eine Tiefe von 100 m zu beobachten, die Amplitude dieser Schwingungen wird jedoch mit zunehmender Tiefe gedämpft.

Zum Zeitpunkt $t = 2,4$ s (entspricht $t/T = 2,4$, $t/T = 4,8$ und $t/T = 9,6$ in Abbildung 5.15 (d), (e) und (f)) sind in jeder Tiefe Reflexionen zu erkennen, deren Amplitude mit zunehmender Tiefe abnimmt. Die Reflexionen werden in Kapitel 5.3 erläutert.

Abbildung 5.16 zeigt die auf die Periodendauer T normierten Horizontalverschiebungen u_x in einer Entfernung von $r = 16R$ an der Oberfläche und in den Tiefen $z_1 = 20$ m, $z_2 = 40$ m, $z_3 = 60$ m, $z_4 = 80$ m und $z_5 = 100$ m für ein schlaffes Fundament und der anregenden Kraft $F(t)$ mit den Frequenzen $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz.

Auf der Horizontalkomponente wird die Amplitude der Rayleigh-Welle mit zunehmender Tiefe zunächst kleiner und nimmt dann in entgegengesetzter Richtung zu. An der Oberfläche sind die Oberflächenwellen retrograd (entgegen der Ausbreitungsrichtung der Welle) polarisiert. Die Polarisierung der Rayleigh-Welle dreht sich nach [Cla16, S.68] in einer Tiefe von $z = 0,19 \cdot \lambda_R$ um, dort verschwindet die Horizontalverschiebung der Rayleigh-Welle. Für $z \geq 0,19 \cdot \lambda_R$ sind die Rayleigh-Welle prograd polarisiert.

Eins Umkehr der Polarisierung ist auch in der numerischen Berechnung zu beobachten, jedoch ist die Tiefe z , in der die Umkehr stattfindet, nicht frequenzabhängig. Diese findet unabhängig von der Frequenz f_i bei $z \approx 50$ m statt. Mit zunehmender Tiefe klingt die Amplitude der Rayleigh-Wellen ab $z \geq 0,19 \cdot \lambda_R$ wie die Vertikalkomponente exponentiell und frequenzabhängig mit $A \propto e^{2\pi f z}$ ab. Verschiebungen großer Frequenzen f_i werden also im Vergleich zu Verschiebungen kleiner Frequenzen f_i in geringeren Tiefen gedämpft.

Da die P-Welle eine Verschiebung nach unten erzeugt, ist diese an der Oberfläche von der Verschiebung der Rayleigh-Welle zu unterscheiden. Ist die Rayleigh-Welle prograd polarisiert, können P-Welle und Rayleigh-Welle nicht getrennt werden und der Einsatz der Rayleigh-Welle kann nur sehr schwer gepickt werden. Das Eintreffen einer Schmidt'schen Kopfwellen ist auf der Horizontalkomponente u_x ebenfalls nicht zu erkennen.

Die Reflexionen, die auf der Vertikalkomponente der Verschiebung u_z (siehe Abbildung 5.15) zu beobachten sind, sind auch hier erkennbar. Die Amplitude der Reflexionen ist auf der Vertikalkomponente deutlich größer. Im Gegensatz zur Vertikalkomponente nimmt die Amplitude der Reflexion auf der Horizontalkomponente u_x mit steigender Tiefe z zu.

Die numerischen Artefakte nehmen auf der Horizontalkomponente u_x ebenfalls mit der Tiefe z ab.

5.2.3. Vergleich mit semi-analytischer Lösung

Hier werden die semi-analytisch berechneten Verschiebungen mit den Verschiebungen, die mit der FEM berechnet werden, verglichen.

Beim Vergleich von semi-analytisch berechneter Vertikalverschiebung $u_{z_{ana}}$ mit der mit FEM berechneten Vertikalverschiebung $u_{z_{FEM}}$ (siehe Abbildung 5.21) fällt zunächst auf, dass die Verschiebungen unterhalb des Fundaments ($r \leq R$) und für Frequenzen $f_i \leq 4$ Hz sehr gut übereinstimmen. Dabei ist die mit der FEM berechneten Verschiebung $u_{z_{FEM}}$ um 5% kleiner als die semi-analytisch berechneten Verschiebung $u_{z_{ana}}$. Für Entfernungen $r \geq 2R$ stimmt der zeitliche Verlauf der Verschiebungen für $f_i \leq 2$ Hz überein, es gibt

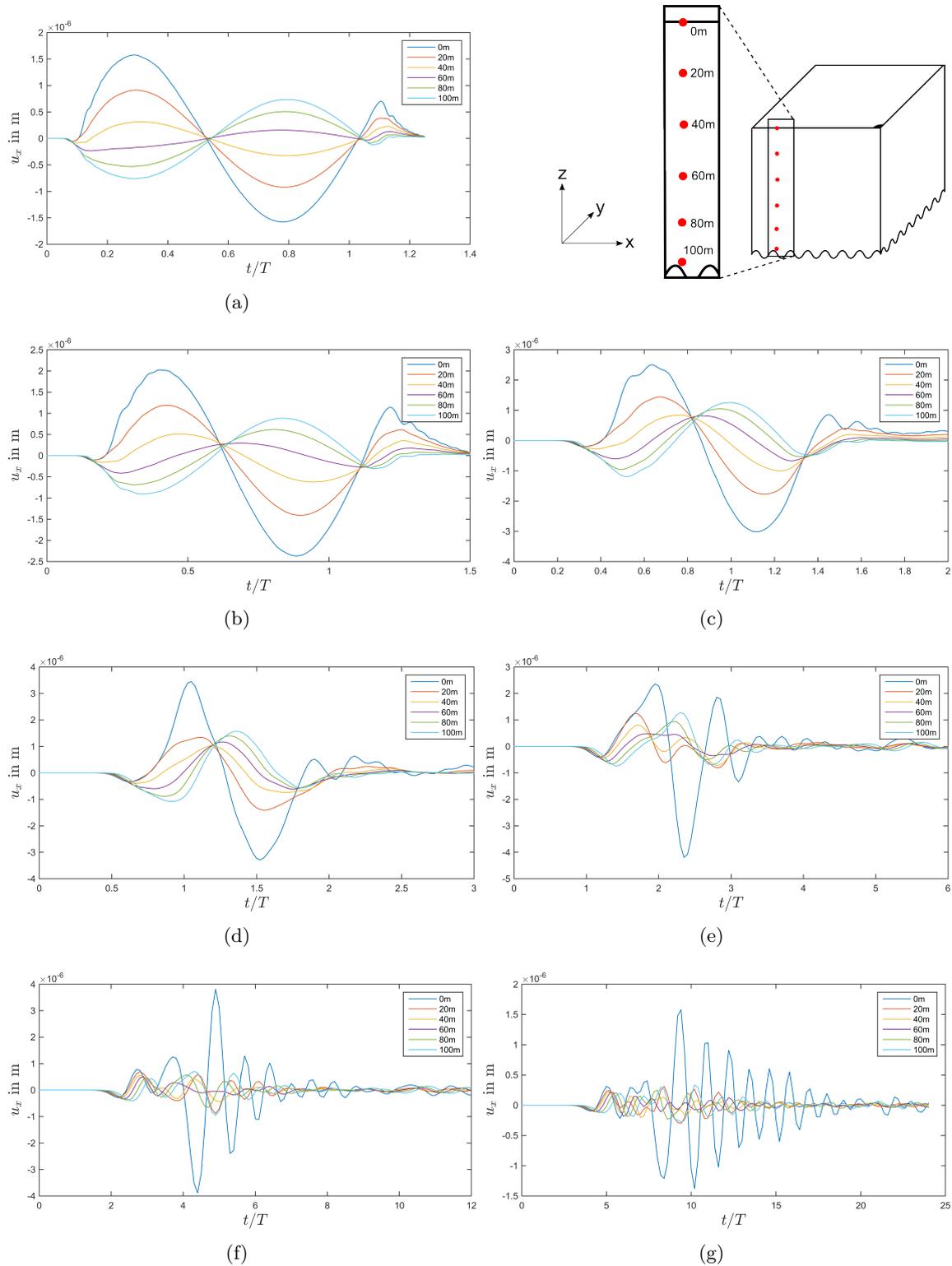


Abbildung 5.16.: Zeitlich auf Periodendauer T normierte Horizontalverschiebung u_x an der Oberfläche und in einer Tiefe von 20 m, 40 m, 60 m, 80 m und 100 m in einer Entfernung von $r = 16R$ vom Mittelpunkt eines schlaffen Fundaments in Modell B, das mit einer vertikalen Kraft $F = F_0 \sin(2\pi f_i t)$ mit $f_1 = 1/8$ Hz (a), $f_2 = 1/4$ Hz (b), $f_3 = 1/2$ Hz (c), $f_4 = 1$ Hz (d), $f_5 = 2$ Hz (e), $f_6 = 4$ Hz (f) und $f_7 = 8$ Hz (g) belastet wird.

jedoch Abweichungen in den Amplituden. Die Verschiebung $u_{z_{FEM}}$ und $u_{z_{ana}}$ nach unten sind auch in größeren Entfernungen nahezu gleich (die numerische Verschiebung ist etwas größer), die Verschiebung $u_{z_{FEM}}$ in positive z-Richtung nimmt gegenüber der Verschiebung $u_{z_{ana}}$ in positive z-Richtung mit zunehmender Entfernung ab. Hier überwiegt bei der numerischen Lösung der Einfluss des Dämpfers in den Lysmer-Randbedingungen. Dadurch wird die Verschiebung in negative z-Richtung verstärkt und die Verschiebung in positive z-Richtung geschwächt. Die Abweichung der mit der FEM berechneten Verschiebung $u_{z_{FEM}}$ zur semi-analytisch berechneten Verschiebung $u_{z_{ana}}$ beträgt dabei bis zu 80%.

Für $f_7 = 8$ Hz und für $f_6 = 4$ Hz und $r \geq 2R$ stimmt die numerische Verschiebung nicht mit der semi-analytischen Lösung überein. Da die räumliche Diskretisierung Δx und die zeitliche Diskretisierung Δt in der numerischen Lösung zu grob sind, können weder Amplitude noch zeitlicher Verlauf (z.B. Ersteinsatz) exakt bestimmt werden.

Die geringe Abweichung der Amplituden der Verschiebungen $u_{z_{ana}}$ und $u_{z_{FEM}}$ kommt durch die Näherung der Amplitude der Rayleigh-Welle bei der semi-analytischen Lösung und durch die Näherung des runden Fundaments durch würfelförmige Elemente. Die semi-analytisch berechnete Verschiebung wird durch diese Näherung kleiner. Die mit der FEM berechnete Verschiebung wird ebenfalls kleiner, da durch die Näherung das Fundament eine Fläche von $A_{FEM} = 300 \text{ m}^2$ anstatt $A_{ana} = 314 \text{ m}^2$ besitzt, und somit mit einer Kraft $F_{FEM} = 300 \text{ kN}$ anstatt $F_{ana} = 314 \text{ kN}$ belastet wird.

Bei den mit FEM berechneten Verschiebungen ist eine Reflexion an den infiniten Elementen unter einem Winkel von 45° zu beobachten. Da die Randbedingungen der semi-analytischen Lösung exakt sind, gibt es hier keine Reflexionen statt.

Bei der mit der FEM berechneten Verschiebung treten aufgrund der Zeitintegration numerische Artefakte auf. Die sind als „Nachschwingen“ in den Verschiebungen zu erkennen. Diese treten bei der semi-analytischen Verschiebung nicht auf.

Vergleicht man die semi-analytisch berechnete Horizontalverschiebung $u_{x_{ana}}$ mit der mit FEM berechneten Horizontalverschiebung $u_{x_{FEM}}$ (siehe Abbildung 5.22), so ist die numerische Verschiebung für $r \leq 2R$ für alle Frequenzen f_i deutlich kleiner als die semi-analytische Lösung. Für diese Entfernungen stimmt die numerisch berechnete Verschiebung nicht mit der semi-analytischen Verschiebung überein. Die Abweichung beträgt bis zu 66%.

Für Frequenzen $f_i \leq 2$ Hz stimmen die Amplituden der Horizontalverschiebungen u_x im Gegensatz zu den Vertikalverschiebungen u_z auch für Entfernungen $r \geq 4R$ gut überein. Der Einfluss der Lysmer-Bedingungen an der Unterseite des Modells ist deutlich geringer und verändert die Horizontalverschiebung u_x kaum. Die numerisch berechneten Verschiebungen $u_{x_{FEM}}$ nach innen (zum Fundament hin) und nach außen (vom Fundament weg) sind für $r = 16R$ etwas größer und für $r = 4R - 8R$ etwas kleiner als die semi-analytisch berechneten Verschiebungen $u_{x_{ana}}$. Die Abweichung von der semi-analytischen Verschiebung beträgt dabei höchstens 15%.

Für die Frequenzen $f_i = 4 - 8$ Hz sind die räumliche Diskretisierung Δx und die zeitliche Diskretisierung Δt zu grob, um die Verschiebung $u_{x_{FEM}}$ exakt zu bestimmen.

Zusammenfassend stimmen die numerisch und die semi-analytisch berechneten Vertikalverschiebungen für kleine Entfernungen $r \leq R$ für $f_i \leq 4$ Hz und für die Frequenzen $f_i = 1 - 2$ Hz auch für größere Entfernungen $r > R$ mit einer Abweichung von 5% überein. Für Frequenzen $f_i > 2$ Hz ist die Diskretisierung des Modells zu grob, um exakte Verschiebungen berechnen zu können. Für $f_i < 1$ Hz ist der Einfluss der Lysmer-Bedingungen zu groß, um die Vertikalverschiebung bestimmen zu können.

Die Horizontalverschiebungen stimmen für Entfernungen $r \geq 2R$ und Frequenzen $f_i \leq 2$ Hz im Rahmen einer Genauigkeit von 15% mit den semi-analytisch berechneten Horizontalverschiebungen überein.

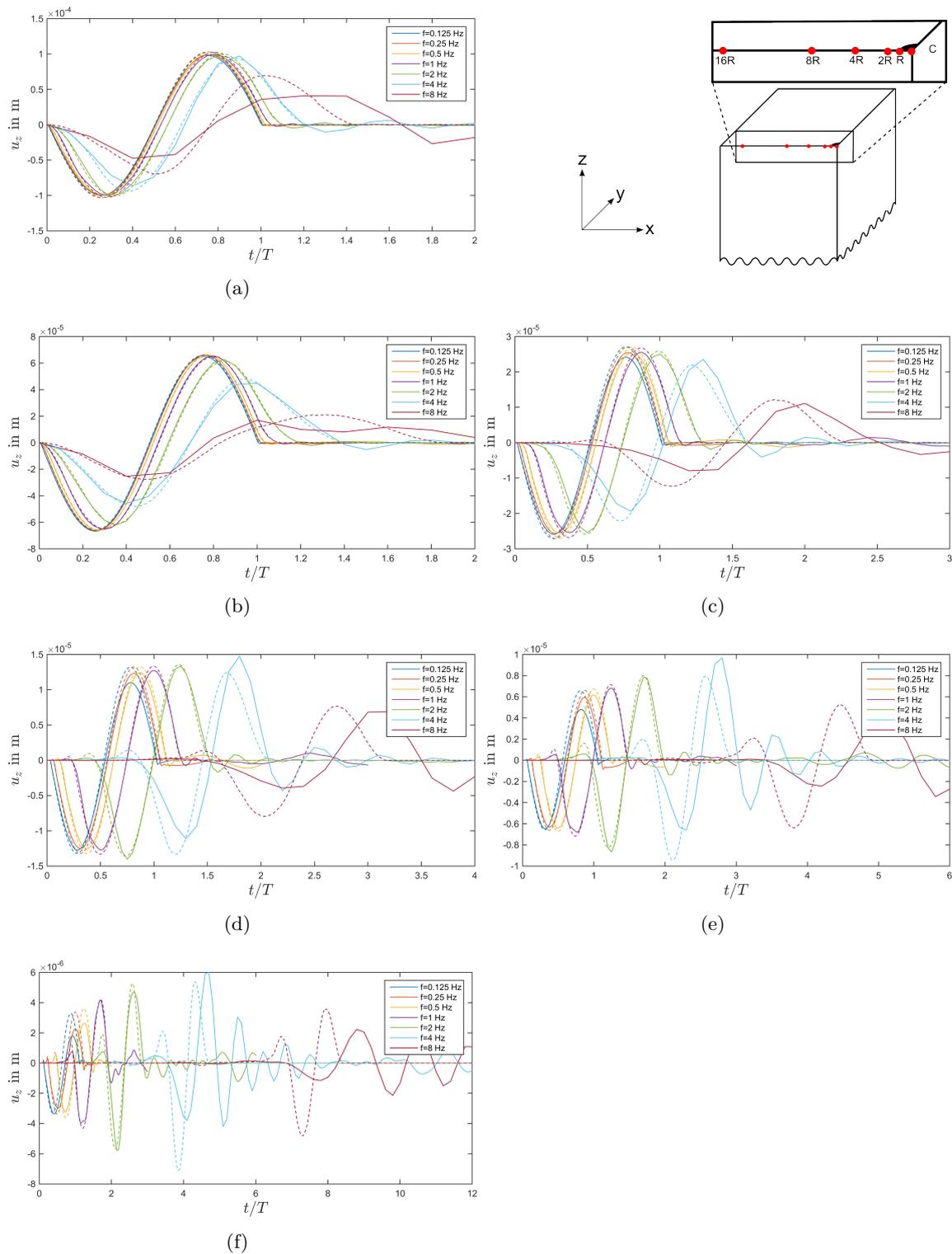


Abbildung 5.17.: Vergleich der numerisch berechneten (mit FEM, durchgehend gezeichnet) mit der semi-analytisch berechneten (gestrichelt gezeichnet) Vertikalverschiebung u_z im Mittelpunkt C (a) des Fundaments und in den Entfernungen R (b), $2R$ (c), $4R$ (d), $8R$ (e) und $16R$ (f) vom Fundamentmittelpunkt für die Anregungsfrequenzen $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz.

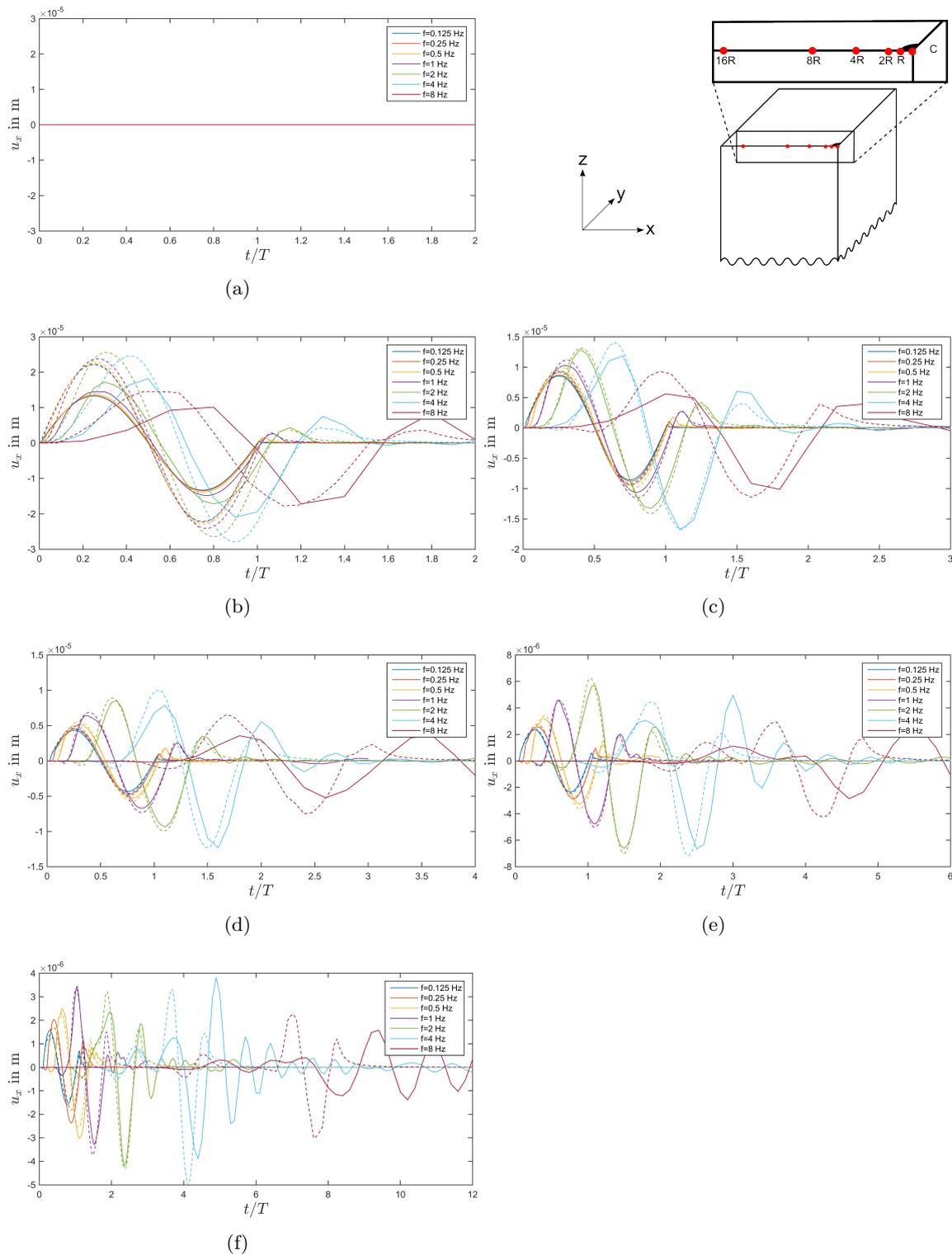


Abbildung 5.18.: Vergleich der numerisch berechneten (mit FEM, durchgehend gezeichnet) mit der semi-analytisch berechneten (gestrichelt gezeichnet) Horizontalverschiebung u_x im Mittelpunkt C (a) des Fundaments und in den Entfernungen R (b), $2R$ (c), $4R$ (d), $8R$ (e) und $16R$ (f) vom Fundamentmittelpunkt für die Anregungsfrequenzen $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz.

5.3. Starres Fundament

5.3.1. Belastung durch vertikale Kraft F_z

Über die Verknüpfung der Fundamentknoten wird ein starres Fundament erzeugt (siehe Kapitel 5.1.3), das zunächst mit einer vertikalen Kraft $F(t) = F_0 f(t)$ mit $F_0 = 300$ kN und $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz belastet wird.

Die Ausbreitung der Wellen und die somit erzeugten Verschiebungen verlaufen wie beim schlaffen Fundament radial (siehe Abbildung 5.10). Auch die Ausbreitung in die Tiefe verläuft wie beim schlaffen Fundament (siehe Abbildung 5.11).

Abbildung 5.19 zeigt die auf die Periodendauer T normierte Vertikalverschiebung u_z im Mittelpunkt C und in den Entfernungen $r = R, 2R, 4R, 8R$ und $16R$ zum Mittelpunkt eines starren Fundaments, das mit einer vertikalen Kraft $F(t)$ mit die Anregungsfrequenzen $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz belastet wird.

Die Vertikalverschiebung u_z bei der Belastung eines starren Fundaments verläuft sehr ähnlich zu der Vertikalverschiebung eines schlaffen Fundaments. Da jedoch beim starren Fundament bei vertikaler Belastung die Setzung unterhalb des gesamten Fundaments gleich ist, sind die Verschiebungen u_z im Mittelpunkt C und am Rand des Fundaments $r = R$ gleich.

Die P-Welle und S-Welle sind ab einer Entfernung von $r \geq 4R$ erkennbar, ihr Amplituden sind deutlich kleiner als die Amplitude der Rayleigh-Welle.

Für die Frequenzen $f_i \geq 1$ Hz ist wie bei der semi-analytisch berechneten Verschiebung u_z die Phasenverschiebung φ aufgrund der Fundamentausdehnung relevant und die Verschiebung wird um die Laufzeit Δt der Welle durch das Fundament verlängert. Für $f_i \leq 1/2$ Hz kann das Fundament als Punktquelle genähert werden.

Die Amplitude der Verschiebung nimmt mit zunehmender Entfernung näherungsweise um den Faktor $1/\sqrt{r}$ ab.

Für Entfernungen $r = 0 - 4R$ nimmt die Amplitude an einem Ort mit zunehmender Frequenz ab. Dies entspricht der Antwortfunktion $T(\omega)$ des Modells. Ab einer Entfernung von $r \geq 8R$ nimmt die Amplitude an einem Ort mit zunehmender Frequenz f_i aufgrund der abnehmenden destruktiven Interferenz zwischen P-Welle und Rayleigh-Welle zu (vergleiche Kapitel 4.4).

Abbildung 5.20 zeigt die auf die Periodendauer T normierte Horizontalverschiebung u_x im Mittelpunkt C und in den Entfernungen $R, 2R, 4R, 8R$ und $16R$ zum Mittelpunkt eines starren Fundaments, das mit einer vertikalen Kraft $F(t)$ mit die Anregungsfrequenzen $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz belastet wird.

Die Horizontalverschiebung u_x bei Belastung eines starren Fundaments ist der Verschiebung eines schlaffen Fundaments ähnlich. Beim starren Fundament gibt es keine Horizontalverschiebung u_x an der Fundamentsohle, daher ist die Horizontalverschiebung am Mittelpunkt C des Fundaments und am Rand R des Fundaments Null.

Die Horizontalverschiebung u_x ist aufgrund der vertikalen Anregung kleiner als die Vertikalverschiebung u_z .

Die Verschiebung an einem Ort nimmt mit zunehmender Frequenz $f_i = 1/8 - 2$ Hz entgegen der Antwortfunktion des Modells zu. Aufgrund der größeren Amplitude der P-Welle auf der Horizontalkomponente ist Interferenz von P-Welle und Rayleigh-Welle stärker als auf der Vertikal-Komponente u_z , daher ist dieser Effekt schon ab einer Entfernung von $r \geq 2R$ zu beobachten.

Bei Belastung des Fundaments durch einen Druck bewegen sich die Partikel zum Fundament hin (nach innen), wird eine Zugkraft ausgeübt, bewegen sich die Partikel vom Fundament

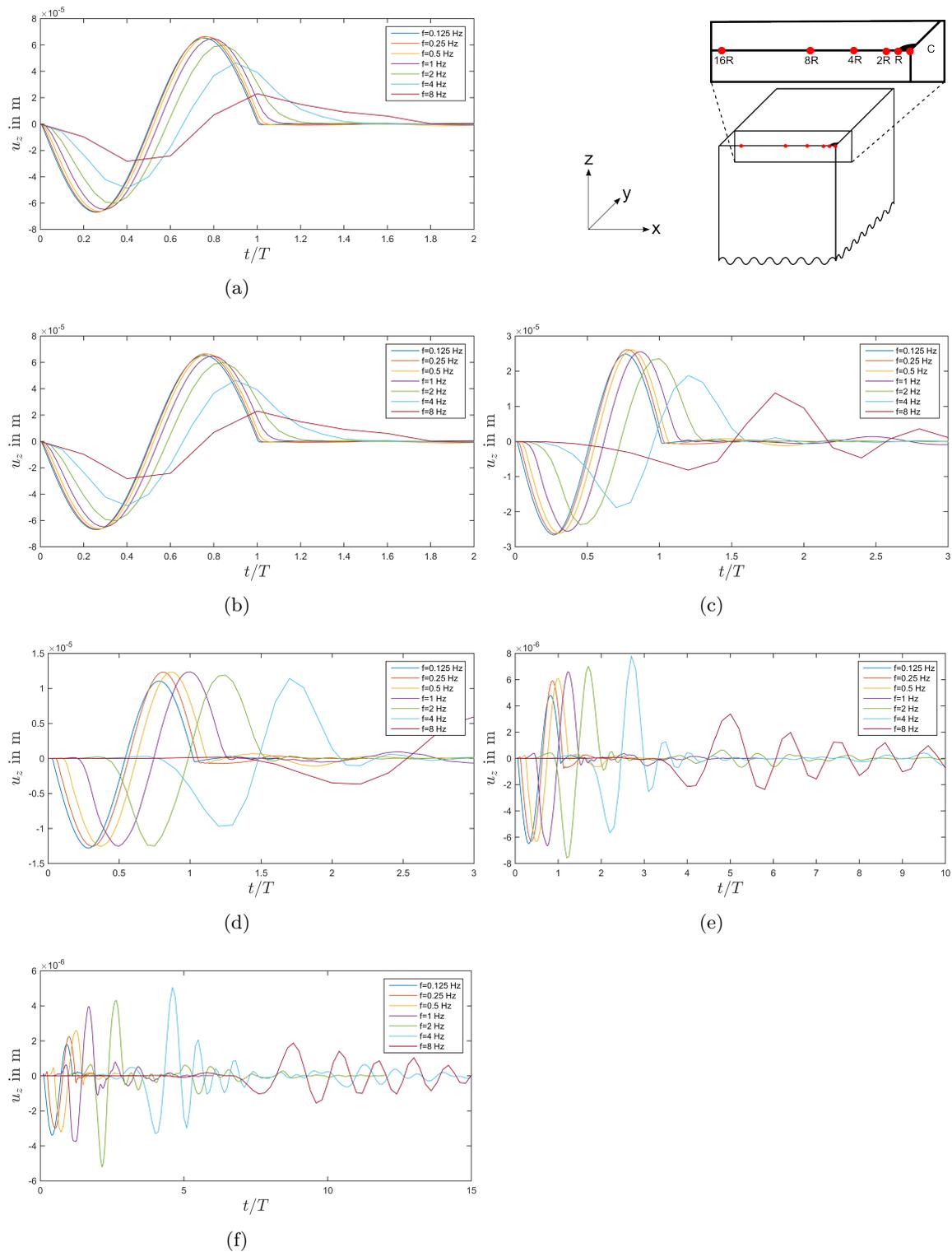


Abbildung 5.19.: Zeitlich auf Periodendauer T normierte Vertikalverschiebung u_z im Mittelpunkt C (a) und in den Entfernungen $r = R$ (b), $2R$ (c), $4R$ (d), $8R$ (e), $16R$ (f) vom Mittelpunkt eines starren Fundaments in Modell C, das mit einer vertikalen Kraft $F = F_0 \sin(2\pi f_i t)$ mit $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz belastet wird.

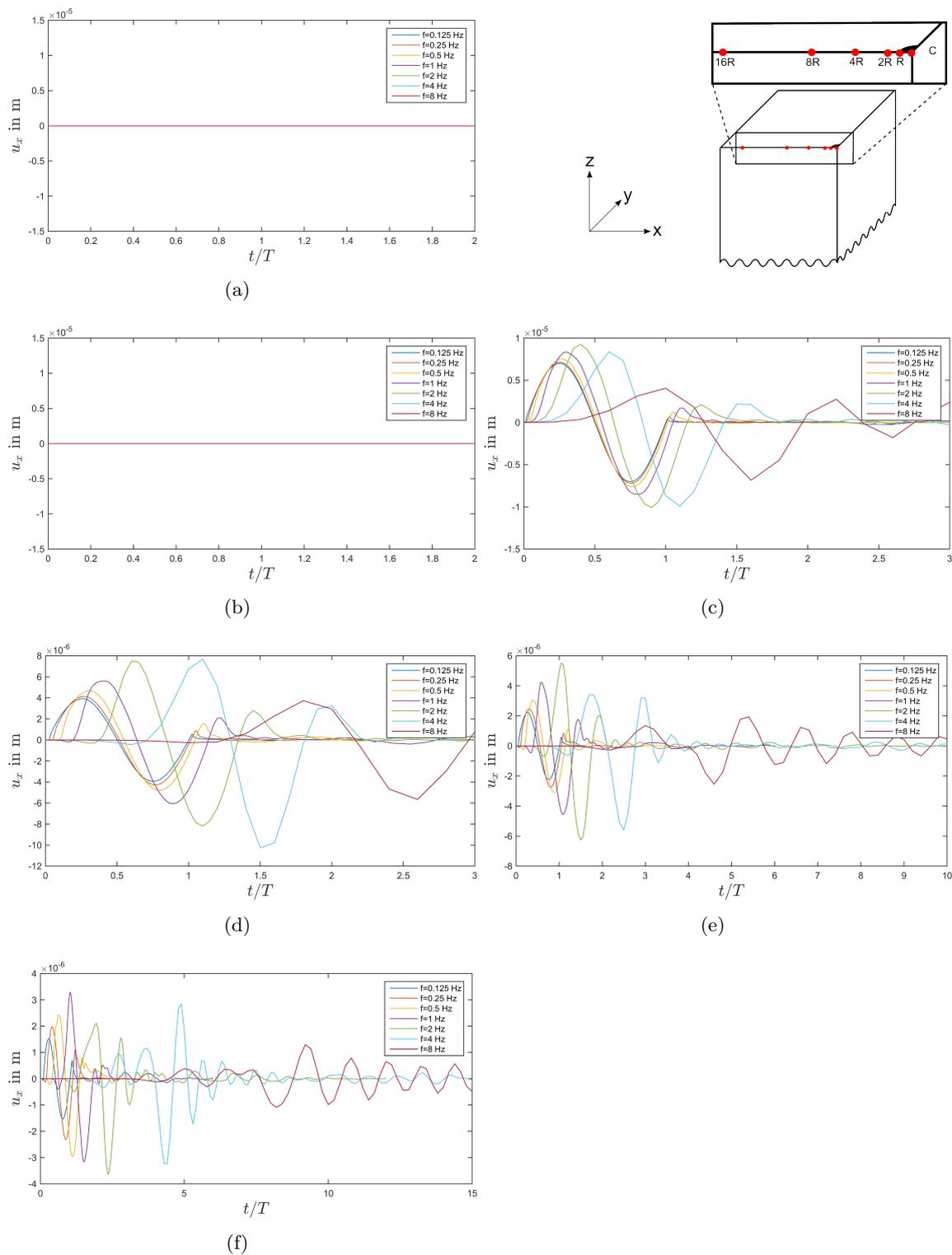


Abbildung 5.20.: Zeitlich auf Periodendauer T normierte Horizontalverschiebung u_x im Mittelpunkt C (a) und in den Entfernungen $r = R$ (b), $2R$ (c), $4R$ (d), $8R$ (e), $16R$ (f) vom Mittelpunkt eines starren Fundaments in Modell C, das mit einer vertikalen Kraft $F = F_0 \sin(2\pi f_i t)$ mit $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz belastet wird.

weg (nach außen).

Die P-Welle ist ab einer Entfernung von $r \geq 4R$ zu erkennen. Die S-Welle ist auch hier aufgrund ihrer vertikalen Partikelbewegung nicht zu erkennen. Die Amplitude der Rayleigh-Welle ist im Vergleich zur Amplitude der P-Welle um ein Vielfaches größer.

Die Phasenverschiebung φ aufgrund der Fundamentaudehnung ist wie in der semi-analytischen Berechnung (siehe Kapitel 4.4) für Frequenzen $f_i \geq 1$ Hz relevant, für Frequenzen $f_i \leq 1/2$ Hz kann diese vernachlässigt werden.

Für $f_i = 1$ Hz wird ein Vergleich der Verschiebungen u_z und u_x bei Belastung eines schlaffen und starren Fundaments durchgeführt.

Abbildung 5.21 zeigt die auf Periodendauer T normierte Vertikalverschiebung u_z im Mittelpunkt C und in den Entfernungen $r = R, 2R, 4R, 8R, 16R$ vom Mittelpunkt eines schlaffen und starren Fundaments, die mit einer vertikalen Kraft $F = F_0 \sin(2\pi f_4 t)$ mit $f_4 = 1$ Hz belastet werden.

Beim starren Fundament geht man von einer konzentrierten Spannungsverteilung am Rand des Fundaments aus. Beim schlaffen Fundament ist die Spannung an der Fundamentsohle gleichverteilt. Die Spannung als Ursache der Verschiebung (Wirkung) wirkt im Mittelpunkt C eines starren Fundaments in einer Entfernung R . Beim schlaffen Fundament wirkt die Ursache auch im Mittelpunkt, daher ist die Verschiebung im Vergleich zum starren Fundament um 53% größer und wirkt früher als die Verschiebung eines starren Fundaments. Am Fundamentrand ($r = R$) ist die Verschiebung beim starren Fundament größer, da die Ursache am Rand des Fundaments lokalisiert und größer als beim schlaffen Fundament ist, wo die Ursache gleichverteilt an der gesamten Fundamentsohle wirkt. Der Unterschied der Verschiebungen beträgt dabei jedoch nur 5%. Beim starren Fundament ist die Vertikalverschiebung u_z im Mittelpunkt C und am Fundamentrand R gleich.

In einer Entfernung $r = 2R$ vom Fundamentmittelpunkt ist die Verschiebung beim starren Fundament etwas größer als beim schlaffen Fundament. Für Entfernungen $r \geq 4R$ sind die Amplituden der Verschiebung für ein schlaffes und ein starres Fundament gleich (die Abweichung ist kleiner 2%).

Die numerischen Artefakte sind bei der Belastung eines schlaffen Fundament größer.

Abbildung 5.22 zeigt die auf Periodendauer T normierte Horizontalverschiebung u_x im Mittelpunkt C und in den Entfernungen $r = R, 2R, 4R, 8R, 16R$ vom Mittelpunkt eines schlaffen und starren Fundaments, die mit einer vertikalen Kraft $F = F_0 \sin(2\pi f_4 t)$ mit $f_4 = 1$ Hz belastet werden.

Die Horizontalverschiebung u_x bei Belastung eines schlaffen Fundaments ist für alle Entfernungen r größer als die Horizontalverschiebung u_x bei Belastung eines starren Fundaments. Mit zunehmender Entfernung r wird diese Differenz kleiner und bei $r = 16R$ sind die Verschiebungen nahezu gleich. In einer Entfernung von $r = 2R$ unterscheiden sich die Verschiebungen um 18%, bei $r = 16R$ beträgt die Differenz nur noch 5%. An der Fundamentsohle finden bei einem starren Fundament keine Horizontalverschiebungen u_x statt. Daher sind auch die Verschiebungen u_x außerhalb des Fundaments bei einem starren Fundament -im Vergleich zu einem schlaffen Fundament- kleiner.

Die numerischen Artefakte sind bei der Belastung eines schlaffen Fundament größer.

Sowohl in der Vertikalverschiebung u_z als auch in der Horizontalverschiebung u_x ist zum Zeitpunkt $t \approx 2 - 2,4$ s (abhängig von der Entfernung r) ein weiteres Signal zu erkennen, das aufgrund der Einsatzzeit nicht durch die Belastung des Fundaments entstanden sein kann. Da diese Signale bei Belastung eines schlaffen und starren Fundaments exakt gleich sind, kann die Ursache dieser Signale nur in der numerischen Berechnung oder den Randbedingungen liegen.

Um die Ursache dieses Signals zu untersuchen, wird die Vertikalverschiebung u_z an der Oberfläche des Halbraums im Zeitbereiche $t = 2,375 - 2,525$ s betrachtet (siehe Abbildung 5.23). Zu diesen Zeitpunkten wirkt die anregende Kraft nicht mehr und die radiale Aus-

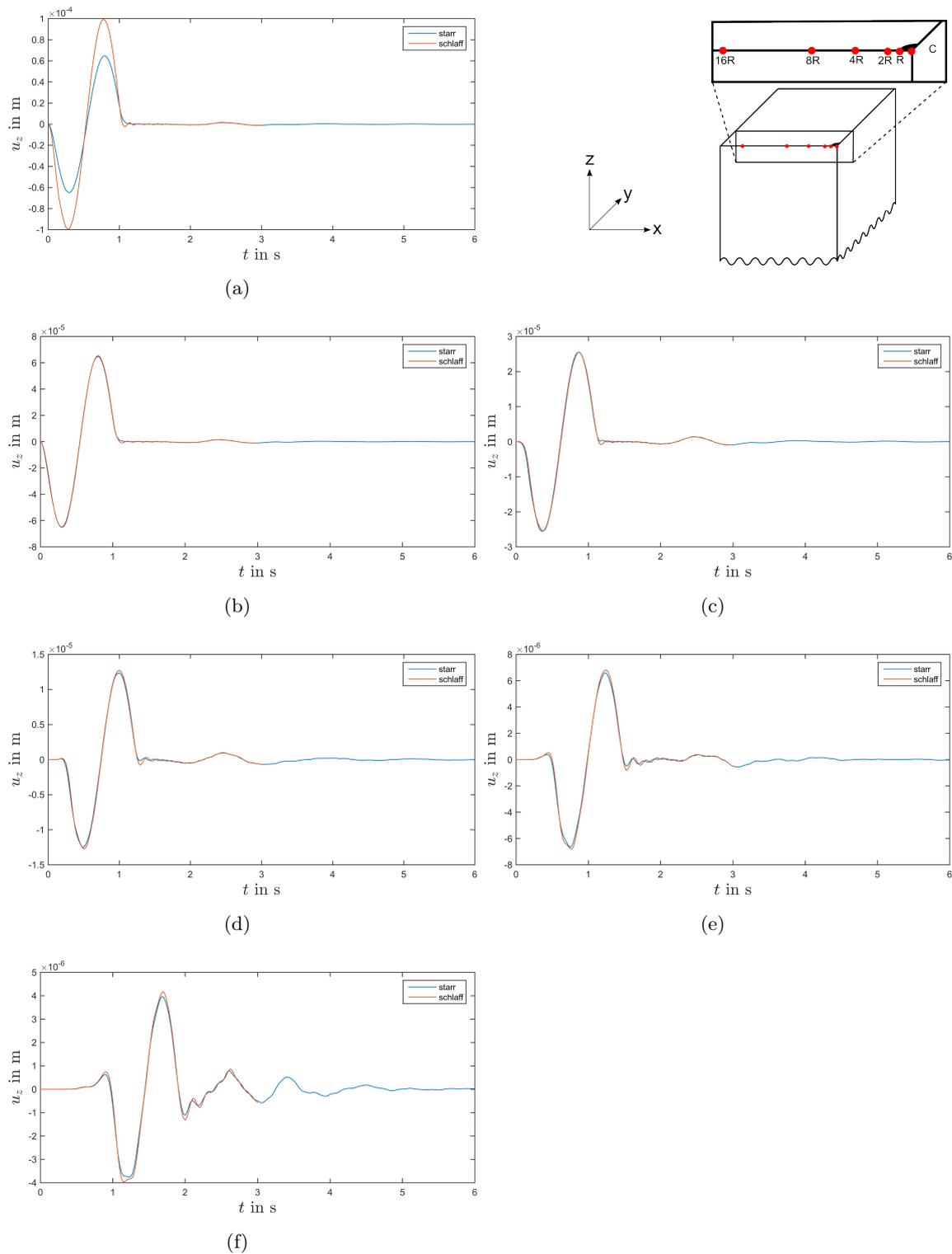


Abbildung 5.21.: Zeitlich auf Periodendauer T normierte Vertikalverschiebung u_z im Mittelpunkt C (a) und in den Entfernungen $r = R$ (b), $2R$ (c), $4R$ (d), $8R$ (e), $16R$ (f) vom Mittelpunkt eines schlaffen Fundaments in Modell B und starren Fundaments in Modell C, die mit einer vertikalen Kraft $F = F_0 \sin(2\pi f_4 t)$ mit $f_4 = 1$ Hz belastet werden.

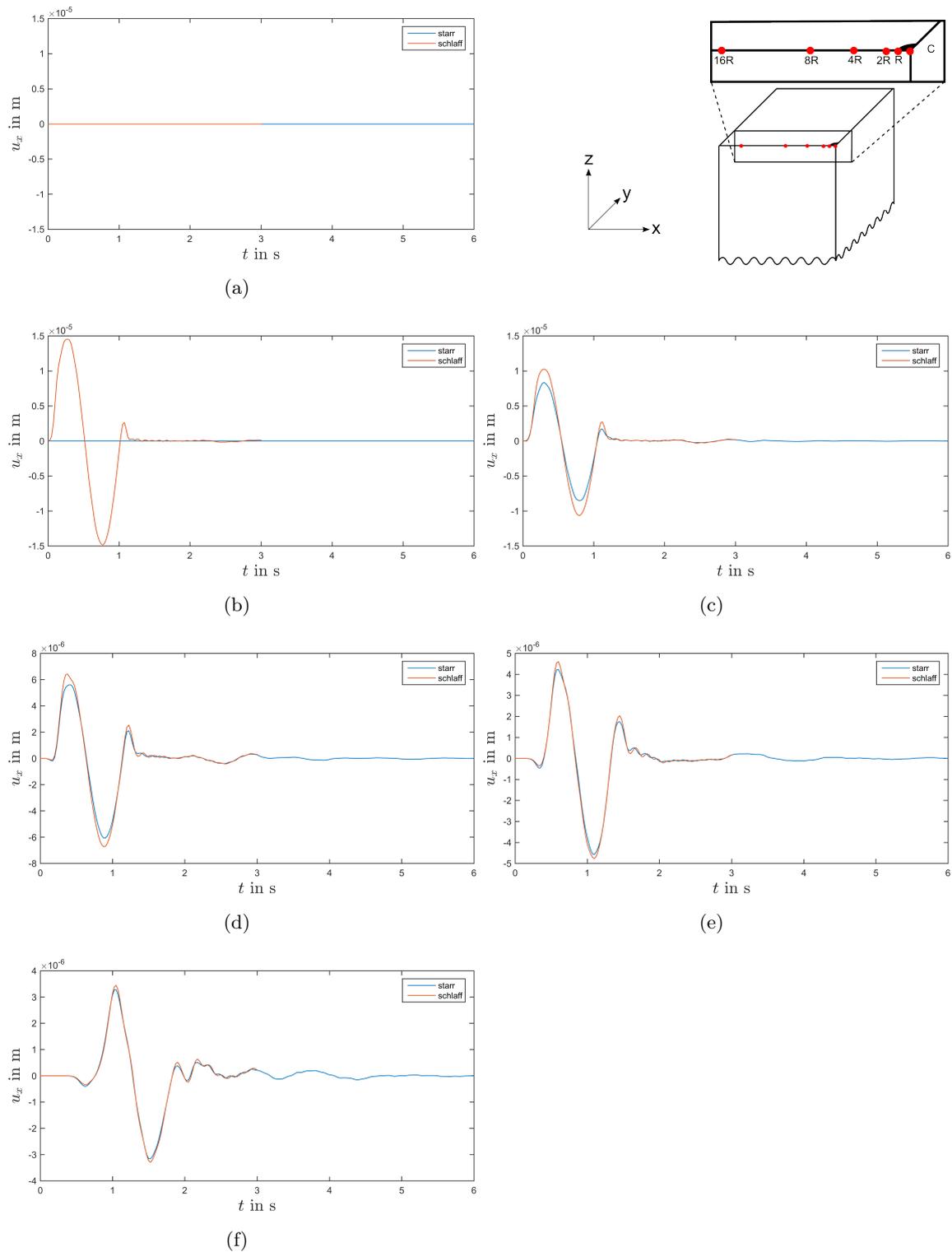


Abbildung 5.22.: Zeitlich auf Periodendauer T normierte Horizontalverschiebung u_x im Mittelpunkt C (a) und in den Entfernungen $r = R$ (b), $2R$ (c), $4R$ (d), $8R$ (e), $16R$ (f) vom Mittelpunkt eines schlaffen Fundaments in Modell B und starren Fundaments in Modell C, die mit einer vertikalen Kraft $F = F_0 \sin(2\pi f_4 t)$ mit $f_4 = 1$ Hz belastet werden.

breitung der P-Welle, S-Welle und Rayleigh-Welle entlang der Oberfläche des Halbraums hat bereits stattgefunden. Es ist eine Welle zu erkennen, die sich aus der Ecke, an der die Lysmer-Randbedingungen aufeinander treffen (links oben im Bild) in Richtung des Fundaments (rechts unten im Bild) ausbreitet. Es hat also eine Reflexion in dieser Ecke stattgefunden, in der die Wellen unter einem Winkel von 45° auf die infiniten Elemente treffen.

Beobachtet man die Vertikalverschiebung u_z und Horizontalverschiebung u_x für die Anregungsfrequenzen $f_i = 1/2 - 2$ Hz (siehe Abbildungen A.1 und A.2 im Anhang), so wird die Annahme einer Reflexion bestätigt. Die Signale setzen unabhängig von der Frequenz an einem Ort zum selben Zeitpunkt t ein und ihre Frequenz entspricht jeweils der Anregungsfrequenz f_i . Zudem setzen die Signale mit zunehmender Entfernung r vom Fundamentmittelpunkt zu einem früheren Zeitpunkt t ein.

Die Einsatzzeiten des reflektierten Signals (siehe Abbildung A.1 und A.2 im Anhang) deuten darauf hin, dass dies eine reflektierte Rayleigh-Welle ist. Dafür spricht auch, dass die Partikelbewegung der Reflexion in vertikale Richtung größer ist als in horizontale Richtung. Zudem ist durch eine Reflexion eine entgegengesetzte Partikelbewegung zur Rayleigh-Welle zu erwarten, was beobachtet werden kann.

5.3.2. Belastung durch Moment $M(t)$

Eine reale WEA wird nicht durch eine vertikale Kraft $F(t)$ belastet, sondern durch ein Moment $M(t) = F_h \times l$. Die horizontale Kraft F_h entsteht durch die Druckerhöhung beim Durchgang eines Rotorblatts am Mast. Dadurch wird der Rotor leicht vom Mast der Windenergieanlage (WEA) weg gekippt. Aufgrund der Entfernung l vom Fundament zur Mitte des Rotorblatts wirkt auf das Fundament ein Moment $M(t)$.

Das Moment $M(t)$ wird wie in Kapitel 5.1.4 beschrieben auf das Fundament aufgebracht. Der zeitliche Verlauf des Moments $M(t)$ ist analog zur vertikalen Kraft $F(t)$

$$M(t) = \begin{cases} 2RF_{01,2}f(t) = 2RF_{01,2} \sin(2\pi f_i t), & t \leq T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

mit dem Kräftepaar $F_{01} = -F_{02} = 150$ kN und den Anregungsfrequenzen $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz.

Die Vertikalverschiebung u_z und die Horizontalverschiebung u_x und u_y an der Oberfläche des Halbraums sind für $f_4 = 1$ Hz zu den Zeitpunkten $t = 0,25$ s, $t = 0,5$ s, $t = 0,75$ s, $t = 1$ s und $t = 1,5$ s in den Abbildungen 5.24, 5.25 und 5.26 abgebildet.

Auf das Fundament wird bei $y = -R$ zunächst eine Druck-, bei $y = R$ eine Zugkraft ausgeübt. Daher verläuft die Verschiebung u_z für $y < 0$ zuerst in negative z-Richtung (nach unten), dann in positive z-Richtung (nach oben). Für $y > 0$ verläuft die Verschiebung entgegengesetzt. Die Amplitude der Vertikalverschiebung nimmt mit zunehmendem Winkel θ (wobei $\theta = 0^\circ$ an der y-Achse) ab und verschwindet bei $\theta = 90^\circ$ (entlang der x-Achse). Horizontalverschiebungen in x-Richtung finden weder entlang der x-Achse noch entlang der y-Achse statt. Für $0^\circ < \theta < 90^\circ$ und $90^\circ < \theta < 180^\circ$ findet bei Druckbelastung des Fundaments eine Partikelbewegung zum Fundament hin statt (blau), bei Zugbelastung bewegen sich die Partikel weg vom Fundament (rot).

Das Fundament wird jeweils in die Richtung entlang der y-Achse verschoben, in die eine Druckbelastung durch das anregenden Moment ausgeübt wird. Außerhalb des Fundaments bewegen sich die Partikel entgegengesetzt.

Die Abbildungen 5.27 und 5.28 zeigen den Verlauf der Vertikalverschiebung u_z und der Horizontalverschiebung u_y für eine Anregung mit einer Frequenz $f_4 = 1$ Hz zu den Zeitpunkten $t = 0,25$ s, $t = 0,5$ s, $t = 0,75$ s, $t = 1$ s und $t = 1,5$ s mit der Tiefe des Halbraums. Die Amplitude der Rayleigh-Welle nimmt erwartungsgemäß stark mit der Tiefe ab, für eine

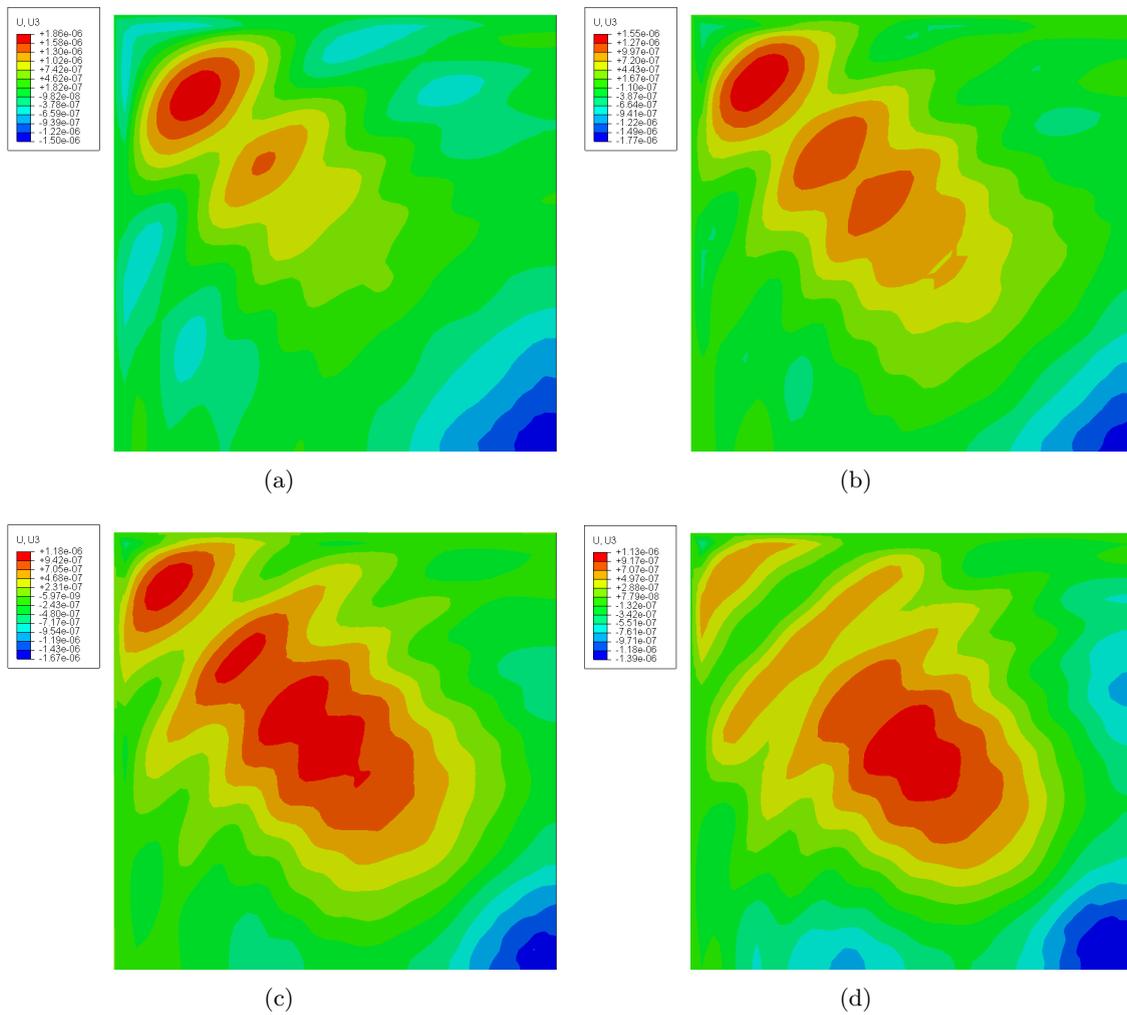


Abbildung 5.23.: Draufsicht der Vertikalverschiebung u_z an der Oberfläche des Halbraums nach der Belastung des Fundaments mit $f_4 = 1$ Hz zu den Zeitpunkten $t = 2,375$ s (a), $t = 2,425$ s (b), $t = 2,475$ s (c) und $t = 2,525$ s (a). Die anregende Kraft wirkt nicht mehr. Eine an den infiniten Elementen (oben links) reflektierte Rayleigh-Welle breitet sich in Richtung des Fundaments aus, das sich rechts unten im Bild befindet.

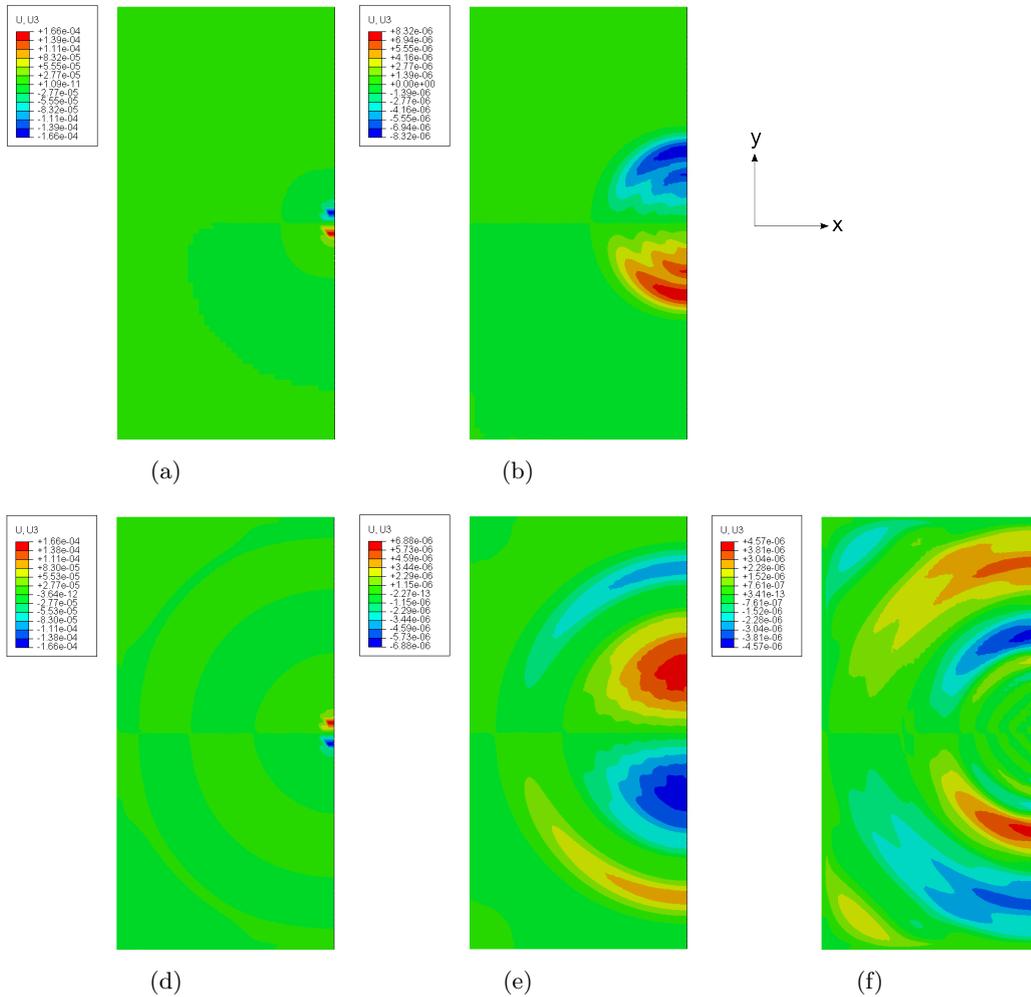


Abbildung 5.24.: Vertikalverschiebung u_z an der Oberfläche des Halbraums zu den Zeitpunkten $t = 0, 25$ s (a), $t = 0, 5$ s (b), $t = 0, 75$ s (c), $t = 1$ s (d) und $t = 1, 5$ s (e) (Draufsicht). Das Fundament befindet sich rechts in der Mitte. Die Verschiebung nach unten sind rot, die Verschiebung nach oben blau dargestellt.

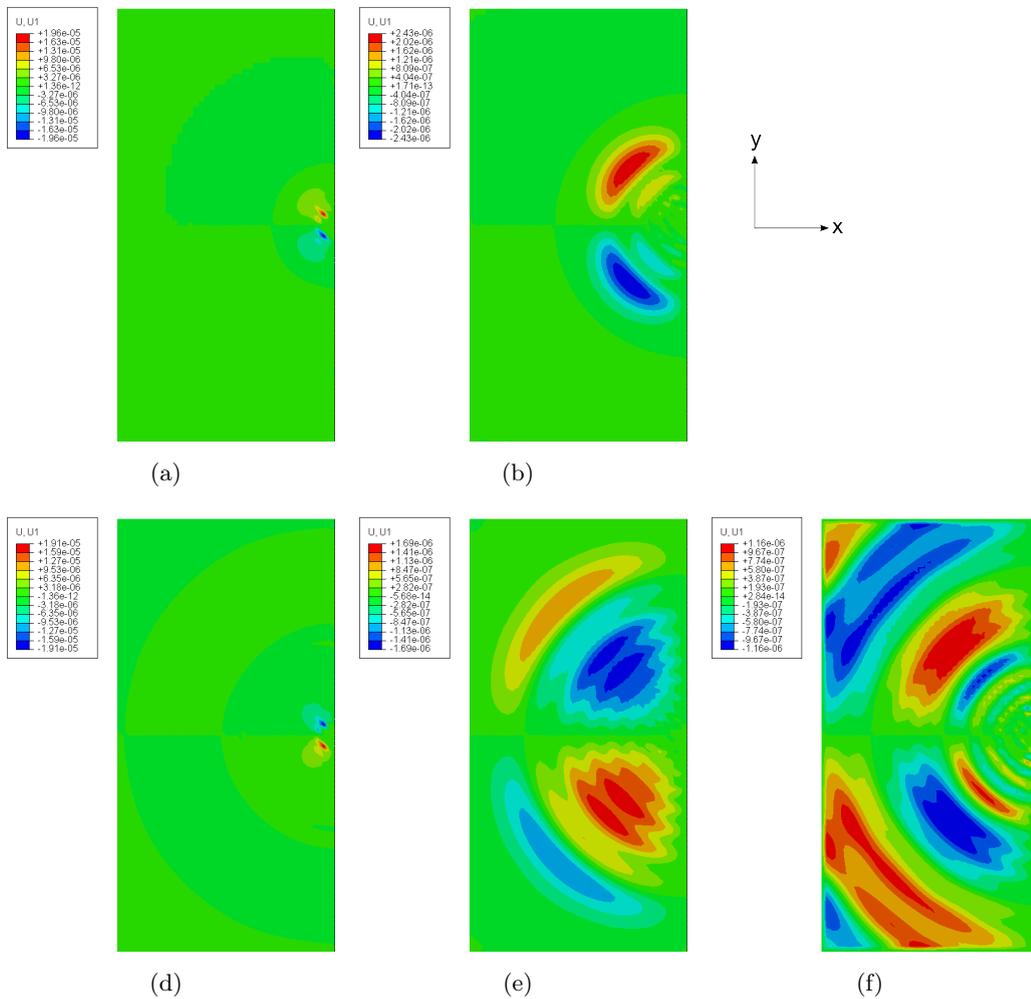


Abbildung 5.25.: Horizontalverschiebung u_x an der Oberfläche des Halbraums zu den Zeitpunkten $t = 0,25$ s (a), $t = 0,5$ s (b), $t = 0,75$ s (c), $t = 1$ s (d) und $t = 1,5$ s (e) (Draufsicht). Das Fundament befindet sich rechts in der Mitte. Die Verschiebung in positive x-Richtung sind blau, die Verschiebung in negative x-Richtung rot dargestellt.

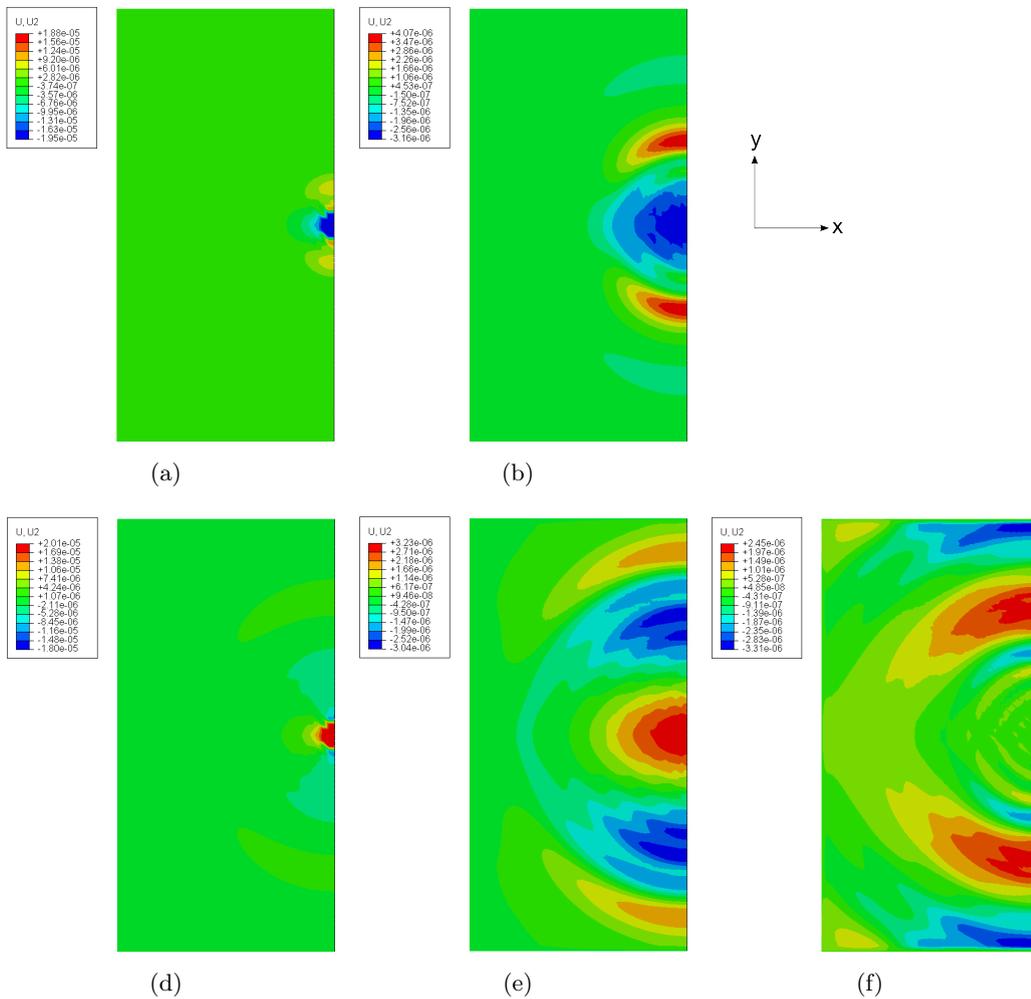


Abbildung 5.26.: Horizontalverschiebung u_y an der Oberfläche des Halbraums zu den Zeitpunkten $t = 0,25$ s (a), $t = 0,5$ s (b), $t = 0,75$ s (c), $t = 1$ s (d) und $t = 1,5$ s (e) (Draufsicht). Das Fundament befindet sich rechts in der Mitte. Die Verschiebung in negative y -Richtung sind blau, die Verschiebung in positive y -Richtung dargestellt.

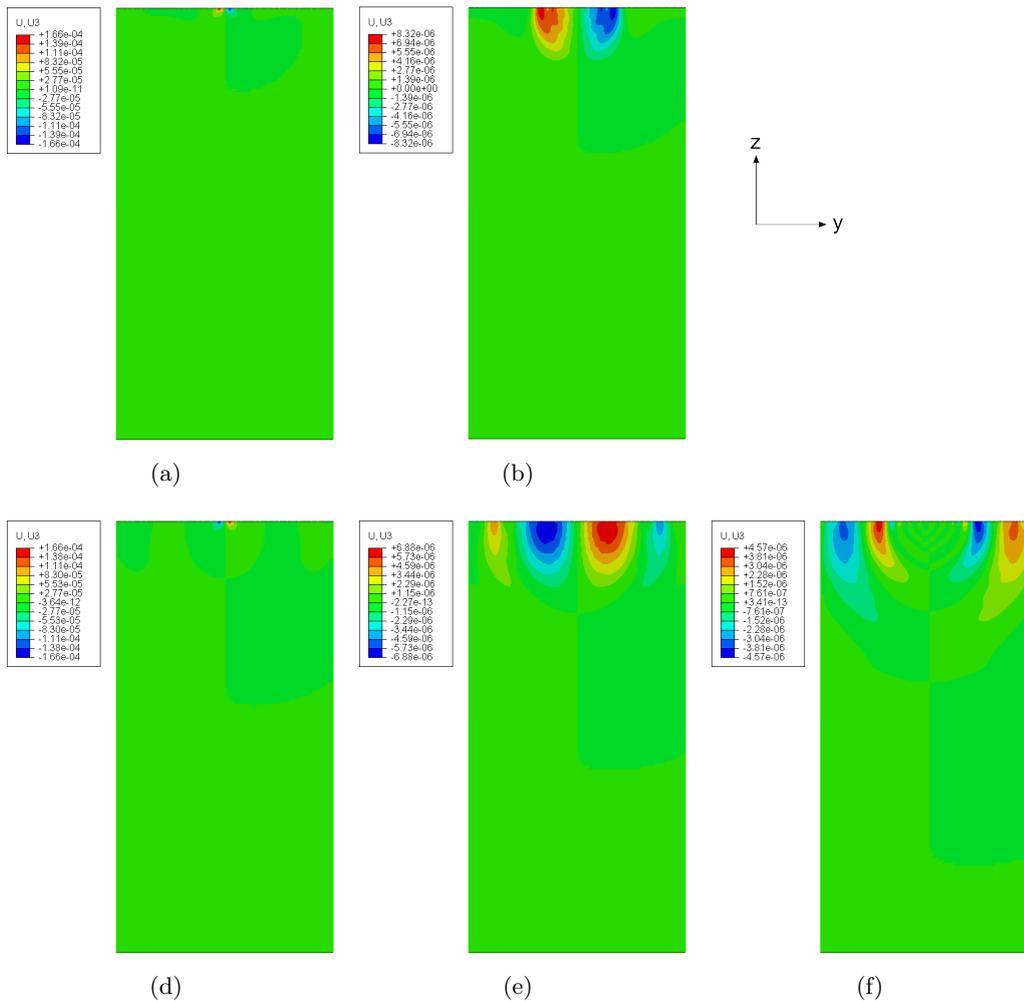


Abbildung 5.27.: Verlauf der Vertikalverschiebung u_z mit der Tiefe des Halbraums zu den Zeitpunkten $t = 0,25$ s (a), $t = 0,5$ s (b), $t = 0,75$ s (c), $t = 1$ s (d) und $t = 1,5$ s (e). Das Fundament befindet sich oben in der Mitte. Die Verschiebung nach unten sind rot, die Verschiebung nach oben blau dargestellt.

Tiefe $z > 200$ m ist diese nicht mehr zu erkennen. Unterhalb des Fundaments finden keine Vertikalverschiebungen statt.

Die Horizontalverschiebungen u_y sind an der Oberfläche ebenfalls wesentlich größer als im Innern des Halbraums. Unterhalb des Fundaments findet eine zur Verschiebung des Fundaments entgegengesetzte Bewegung statt, die sich in die Tiefe ausbreitet.

Im Folgenden wird die Vertikal- und Horizontalverschiebung u_z und u_y an einzelnen Punkten mit unterschiedlicher Entfernung r zum Fundament diskutiert.

Abbildung 5.29 zeigt die auf Periodendauer T normierte Vertikalverschiebung u_z entlang der y -Achse im Mittelpunkt C und in den Entfernungen $r = R, 2R, 4R, 8R$ und $16R$ vom Mittelpunkt eines starren Fundaments, das mit einem Moment $M(t) = M_0 f(t)$ mit den Anregungsfrequenzen $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz belastet wird.

Im Fundamentmittelpunkt C findet aus Symmetriegründen keine vertikale Verschiebung statt.

Da aufgrund der Anregung durch ein Moment in der Hälfte des Fundaments ($y < 0$) bei Belastung durch Druck zunächst eine Verschiebung nach unten stattfindet, während die andere Hälfte des Fundaments ($y > 0$) bei Zugbelastung nach oben verschoben wird,

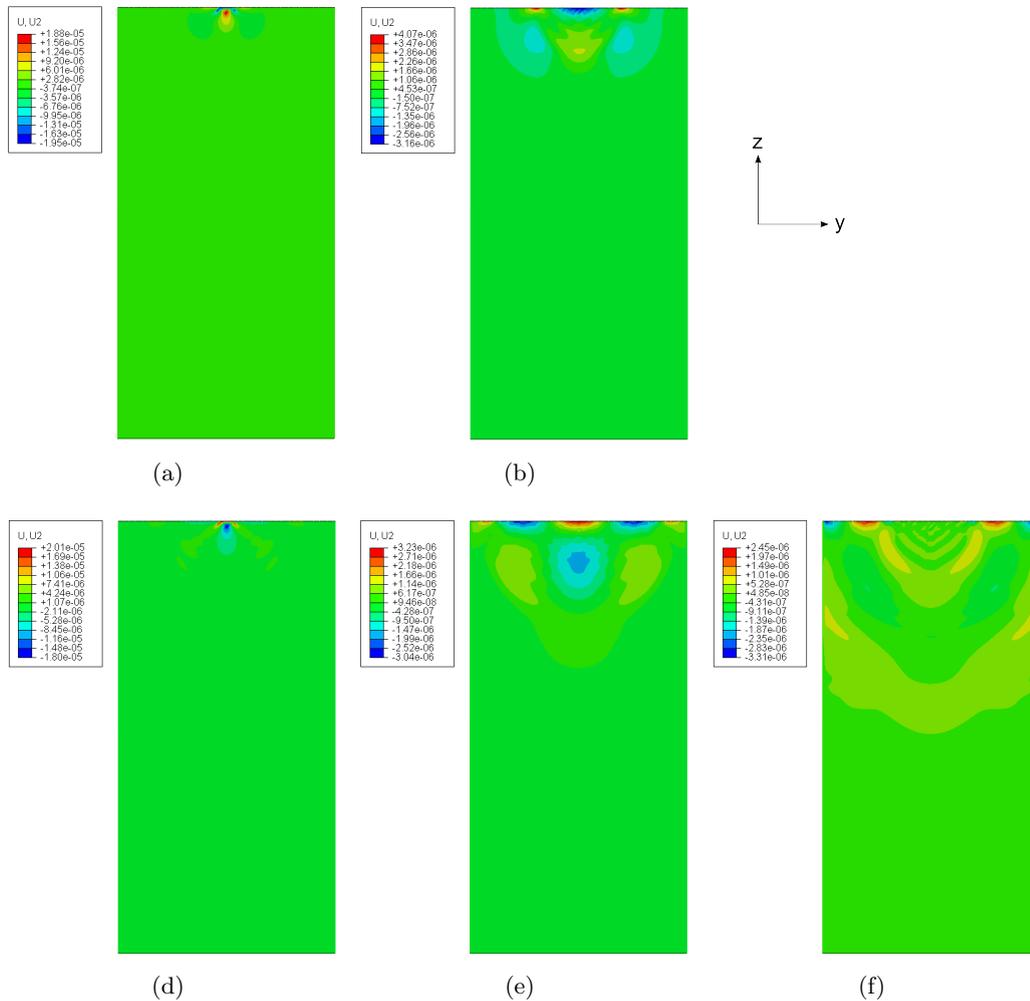


Abbildung 5.28.: Verlauf der Horizontalverschiebung u_y mit der Tiefe des Halbraums zu den Zeitpunkten $t = 0,25$ s (a), $t = 0,5$ s (b), $t = 0,75$ s (c), $t = 1$ s (d) und $t = 1,5$ s (e). Das Fundament befindet sich oben in der Mitte. Die Verschiebung in negative y -Richtung sind blau, die Verschiebung in positive y -Richtung dargestellt.

unterscheidet sich die daraus resultierende Verschiebung u_z aufgrund des Interferenzmusters von der Verschiebung u_z der vertikalen Kraft $F(t)$. Die Überlagerung der sinusförmigen Verschiebungen mit gegensätzlichem Vorzeichen ergeben für $y < 0$ zunächst eine Verschiebung nach unten (in negative z -Richtung), gefolgt von einer Verschiebung nach oben (in positive z -Richtung), die jedoch im Vergleich dazu kleiner ist. Danach findet erneut eine Verschiebung nach unten statt, deren Amplitude und zeitliche Länge sehr viel kleiner bzw. kürzer sind. Die durch ein Moment $M(t)$ verursachte Vertikalverschiebung u_z hat also drei Extremstellen, die durch eine vertikale Kraft $F(t)$ verursachte Vertikalverschiebung u_z hat zwei Extremstellen. Mit zunehmender Frequenz f_i ist das beschriebene Interferenzmuster stärker ausgebildet.

Für Frequenzen $f_i \geq 1$ Hz ist die bei der Wellenausbreitung durch die Fundamentaudehnung entstehende Phasenverschiebung φ (siehe Kapitel 4.4) relevant und das Verschiebungssignal u_z wird um die Laufzeit der Welle Δt durch das Fundament verlängert. Für Frequenzen $f_i \leq 1/2$ Hz kann das Fundament als Punktquelle genähert werden, da die Wellenlänge der Rayleigh-Welle λ_R im Vergleich zum Fundamentdurchmesser sehr viel größer ist.

In einer Entfernung von $r = 16R$ überwiegt der Einfluss der Dämpfer in den infiniten Elementen und für kleine Frequenzen $f_i \leq 1/2$ Hz ist die Verschiebung nach unten (in negative z -Richtung) größer als die Verschiebung nach oben (in positive z -Richtung).

Die numerischen Artefakte (siehe Kapitel 5.2.2) sind bei der Anregung durch ein Moment $M(t)$ im Vergleich zur Anregung durch eine vertikale Kraft $F(t)$ sehr viel größer. Gerade für große Frequenzen $f_i \geq 2$ Hz wird die zeitliche Dauer der Verschiebung u_z dadurch für maßgeblich verlängert. Auch für Frequenzen $f_i \leq 1$ Hz ist es aufgrund der numerischen Artefakte nicht möglich, exakte Amplituden der Verschiebung zu bestimmen.

P-Welle und S-Welle sind ab einer Entfernung von $r = 8R$ zu erkennen. Die Amplitude nimmt an einem Ort mit zunehmender Frequenz aufgrund der Interferenz von P-Welle und Rayleigh-Welle zu.

Die Vertikalverschiebung u_z entlang der x -Achse ist Null.

Die Horizontalverschiebung u_x ist entlang der y -Achse aufgrund der vorgegebenen Symmetriebedingungen Null. Auch entlang der x -Achse verschwindet die Horizontalverschiebung u_x , da das Moment $M(t)$ um diese Achse wirkt. Für Winkel $0 < \theta < 90^\circ$ ist jedoch eine Horizontalverschiebung u_x vorhanden.

Die Abbildungen 5.30 und 5.31 zeigen die auf Periodendauer T normierte Horizontalverschiebung u_y entlang der y -Achse und der x -Achse im Mittelpunkt C und in den Entfernungen $r = R, 2R, 4R, 8R$ und $16R$ vom Mittelpunkt eines starren Fundaments, das mit einem Moment $M(t) = M_0 f(t)$ mit den Anregungsfrequenzen $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz belastet wird.

Innerhalb des Fundaments finden Horizontalverschiebungen u_y in die Richtung statt, in der das Fundament durch Druck belastet wird. Es findet also zunächst eine Partikelbewegung in negative, dann in positive y -Richtung statt.

Außerhalb des Fundaments findet die Verschiebung entlang der y -Achse in entgegengesetzter Richtung statt. Zunächst bewegen sich die Partikel also in positive, dann in negative y -Richtung. Analog zur Vertikalverschiebung findet danach eine kleinere Verschiebung in positive y -Richtung statt.

Entlang der x -Achse ist die Polarisierung der Verschiebung innerhalb und außerhalb des Fundaments gleich. Die Verschiebung findet wie die Verschiebung des Fundaments in die Richtung statt, in der eine Druckbelastung auf das Fundament ausgeübt wird.

Die Amplitude der Vertikalverschiebung u_z (entlang der y -Achse) ist im Vergleich zur Horizontalverschiebung u_y größer. Auch durch eine Belastung eines Moments $M(t)$ werden also größere vertikale Erschütterungen ausgelöst als Erschütterungen in horizontaler Richtung. Dabei sind die horizontalen Verschiebungen u_y entlang der Drehmomentachse x erwartungsgemäß kleiner als entlang der y -Achse, auf die die Rotation wirkt. Insgesamt

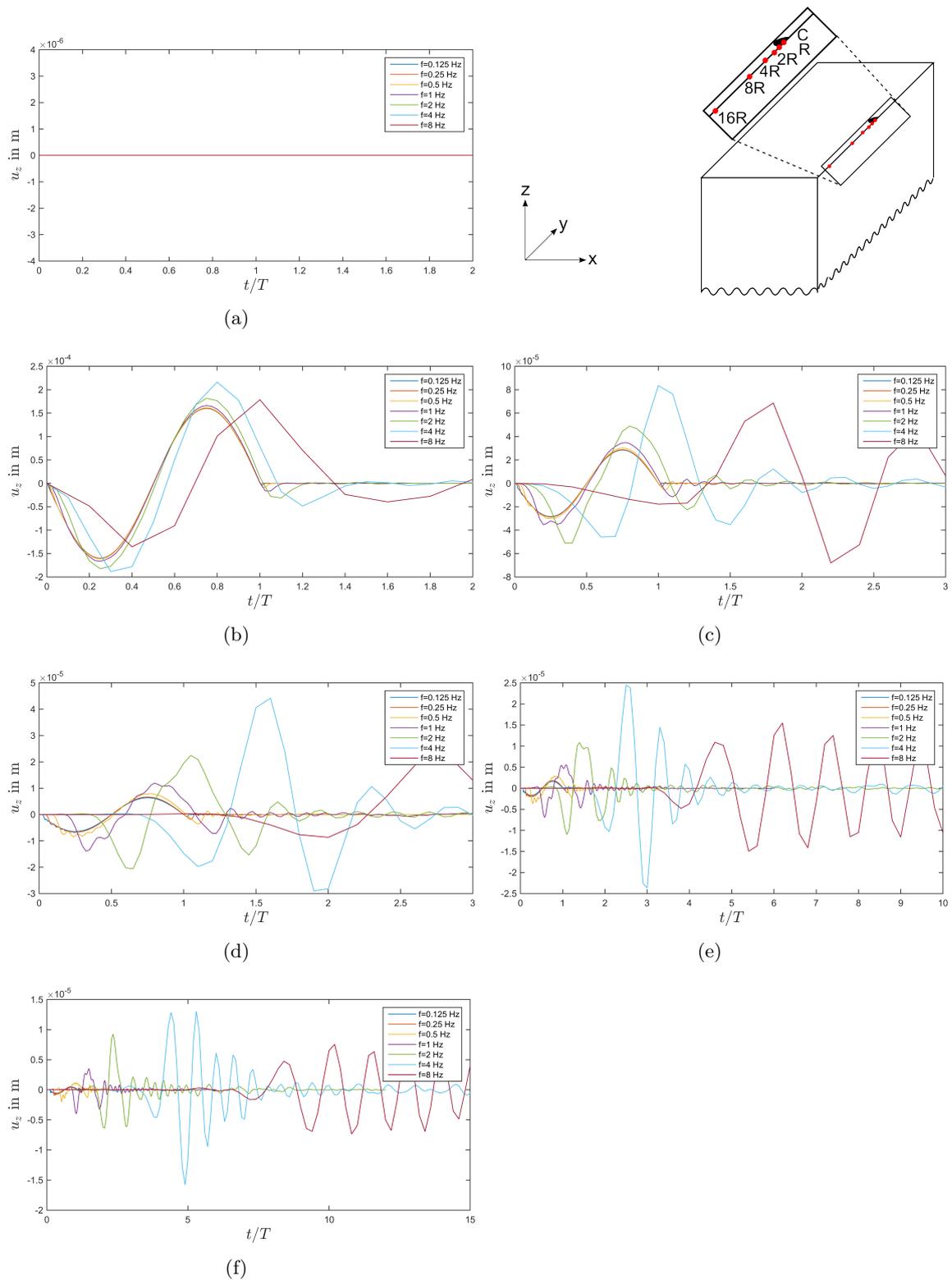


Abbildung 5.29.: Zeitlich auf Periodendauer T normierte Vertikalverschiebung u_z im Mittelpunkt C (a) und in den Entfernungen $r = R$ (b), $2R$ (c), $4R$ (d), $8R$ (e), $16R$ (f) vom Mittelpunkt eines starren Fundaments in Modell D, das mit einem Moment $M = M_0 \sin(2\pi f t)$ mit $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz belastet wird.

sind die Horizontalverschiebungen bei der Anregung durch ein Moment im Vergleich zu einer Anregung durch eine vertikale Kraft $F(t)$ größer. Mit zunehmender Entfernung r vom Fundamentmittelpunkt C nehmen die Amplituden der Verschiebungen u_y ab.

Die Phasenverschiebung φ der Wellen, die an verschiedenen Knoten des Fundaments erzeugt werden, ist für die Horizontalverschiebung u_y ebenfalls für $f_i \geq 1$ Hz relevant. Die Amplitude nimmt an einem Ort mit zunehmender Frequenz f_i aufgrund der Interferenz von P-Welle und Rayleigh-Welle zu.

Um die Auswirkungen des Moments auf die dadurch erzeugten Verschiebungen genauer zu beschreiben, werden die Vertikal- und Horizontalverschiebungen eines mit einer vertikalen Kraft $F(t)$ und mit einem Moment $M(t)$ mit $f_4 = 1$ Hz belasteten starren Fundaments verglichen. Abbildung 5.32 zeigt die Vertikalverschiebung u_z und Abbildung 5.33 die Horizontalverschiebung u_y der belasteten Fundamente.

Die Vertikalverschiebung u_z ist erwartungsgemäß bei einer Belastung durch ein Moment im Vergleich zur vertikalen Kraft am Rand des Fundaments ($r = R$) etwa dreimal größer. Mit zunehmender Entfernung r wird diese Differenz der Amplituden kleiner, bei $r = 16R$ beträgt die Abweichung der durch Moment $M(t)$ und vertikale Kraft $F(t)$ hervorgerufenen Verschiebungen u_z 12%.

An der Fundamentsohle existiert bei der Anregung durch ein Moment $M(t)$ im Gegensatz zur Anregung durch eine vertikale Kraft $F(t)$ eine Horizontalverschiebung u_y . Wie die Vertikalverschiebung u_z ist auch die durch $M(t)$ verursachte Horizontalverschiebung u_y - im Vergleich zu der durch $F(t)$ verursachten Horizontalverschiebung - außerhalb des Fundaments zunächst um 55% größer. In einer Entfernung $r = 8R$ sind die Verschiebungen u_y etwa gleich groß, bei $r = 16R$ verursacht die Anregung des Fundaments durch eine vertikale Kraft $F(t)$ eine um 47% größere Bodenverschiebung u_y .

Wie oben erläutert unterscheidet sich sowohl bei der Vertikalverschiebung u_z als auch bei der Horizontalverschiebung u_y das Interferenzmuster bei Anregung durch ein Moment $M(t)$ von der Anregung durch eine vertikale Kraft $F(t)$.

Die Geschwindigkeit \dot{u}_z der vertikalen Erschütterungen ist somit bei der Anregung durch ein Moment $M(t)$ im Vergleich zur Anregung durch eine vertikale Kraft $F(t)$ für Entfernungen $r \leq 8R$ größer und für $r = 16R$ gleich. Beim Vergleich der horizontalen Bodenschwinggeschwindigkeit \dot{u}_y ist die durch ein Moment $M(t)$ angeregte Geschwindigkeit für kleine Entfernungen $r \leq 4R$ größer, für $r = 8R$ sind die Geschwindigkeiten etwa gleich und für $r = 16R$ ist die durch die Kraft $F(t)$ verursachte Bodenschwinggeschwindigkeit \dot{u}_y größer. Die numerischen Artefakte sind bei der Anregung durch einen Moment $M(t)$ sehr viel größer als bei der Anregung durch eine vertikale Kraft $F(t)$.

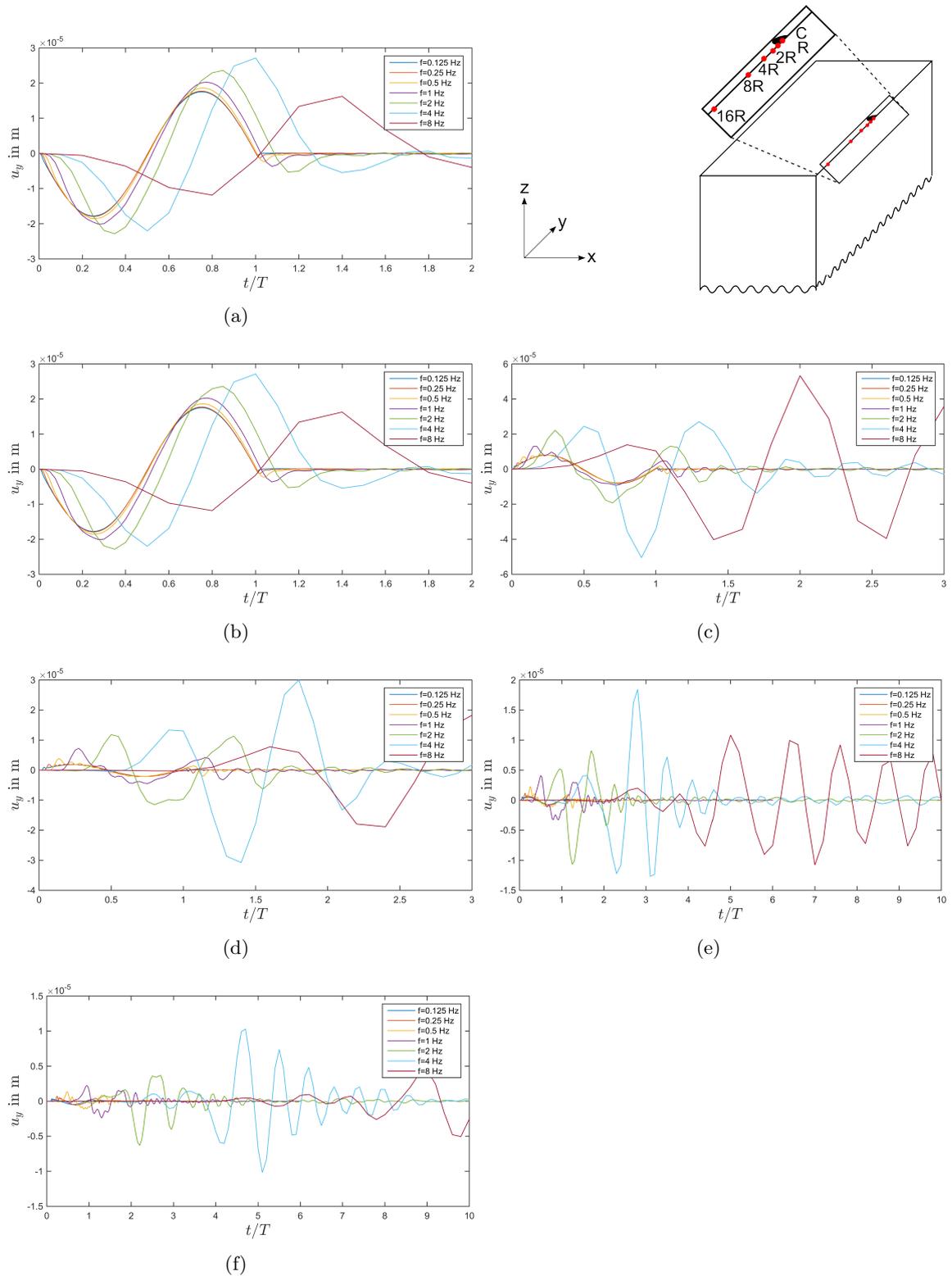


Abbildung 5.30.: Zeitlich auf Periodendauer T normierte Horizontalverschiebung u_y im Mittelpunkt C (a) und in den Entfernungen $r = R$ (b), $2R$ (c), $4R$ (d), $8R$ (e), $16R$ (f) vom Mittelpunkt eines starren Fundaments in Modell D, das mit einem Moment $M = M_0 \sin(2\pi f t)$ mit $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz belastet wird.

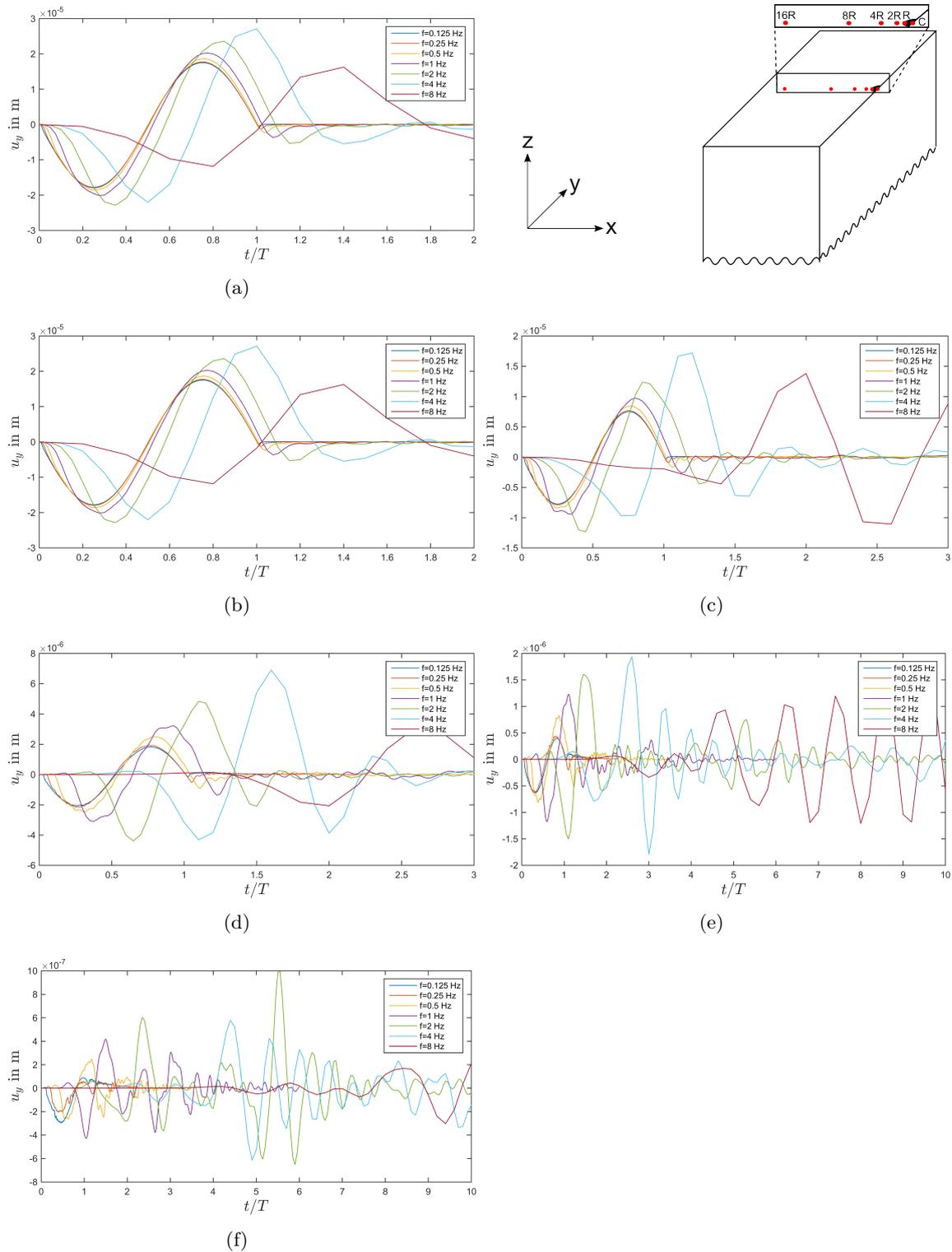


Abbildung 5.31.: Zeitlich auf Periodendauer T normierte Horizontalverschiebung u_y im Mittelpunkt C (a) und in den Entfernungen $r = R$ (b), $2R$ (c), $4R$ (d), $8R$ (e), $16R$ (f) vom Mittelpunkt eines starren Fundaments in Modell D, das mit einem Moment $M = M_0 \sin(2\pi f_i t)$ mit $f_1 = 1/8 \text{ Hz}$, $f_2 = 1/4 \text{ Hz}$, $f_3 = 1/2 \text{ Hz}$, $f_4 = 1 \text{ Hz}$, $f_5 = 2 \text{ Hz}$, $f_6 = 4 \text{ Hz}$ und $f_7 = 8 \text{ Hz}$ belastet wird.

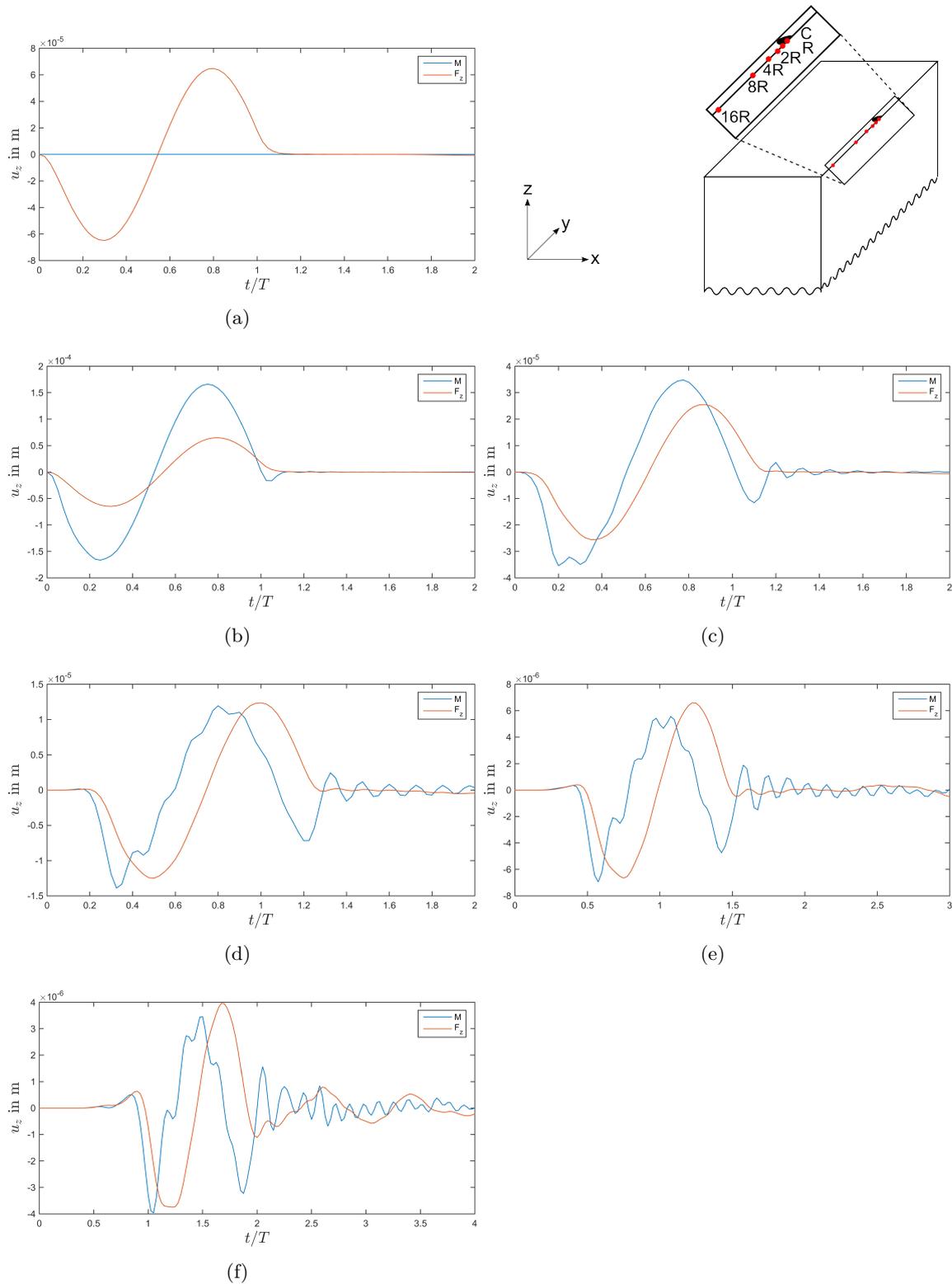


Abbildung 5.32.: Zeitlich auf Periodendauer T normierte Vertikalverschiebung u_z im Mittelpunkt C (a) und in den Entfernungen $r = R$ (b), $2R$ (c), $4R$ (d), $8R$ (e), $16R$ (f) vom Mittelpunkt eines starren Fundaments in Modell C und in Modell D, die mit einer vertikalen Kraft $F(t) = F_0 \sin(2\pi f_i t)$ bzw. mit einem Moment $M(t) = M_0 \sin(2\pi f_i t)$ mit $f_4 = 1$ Hz belastet werden.

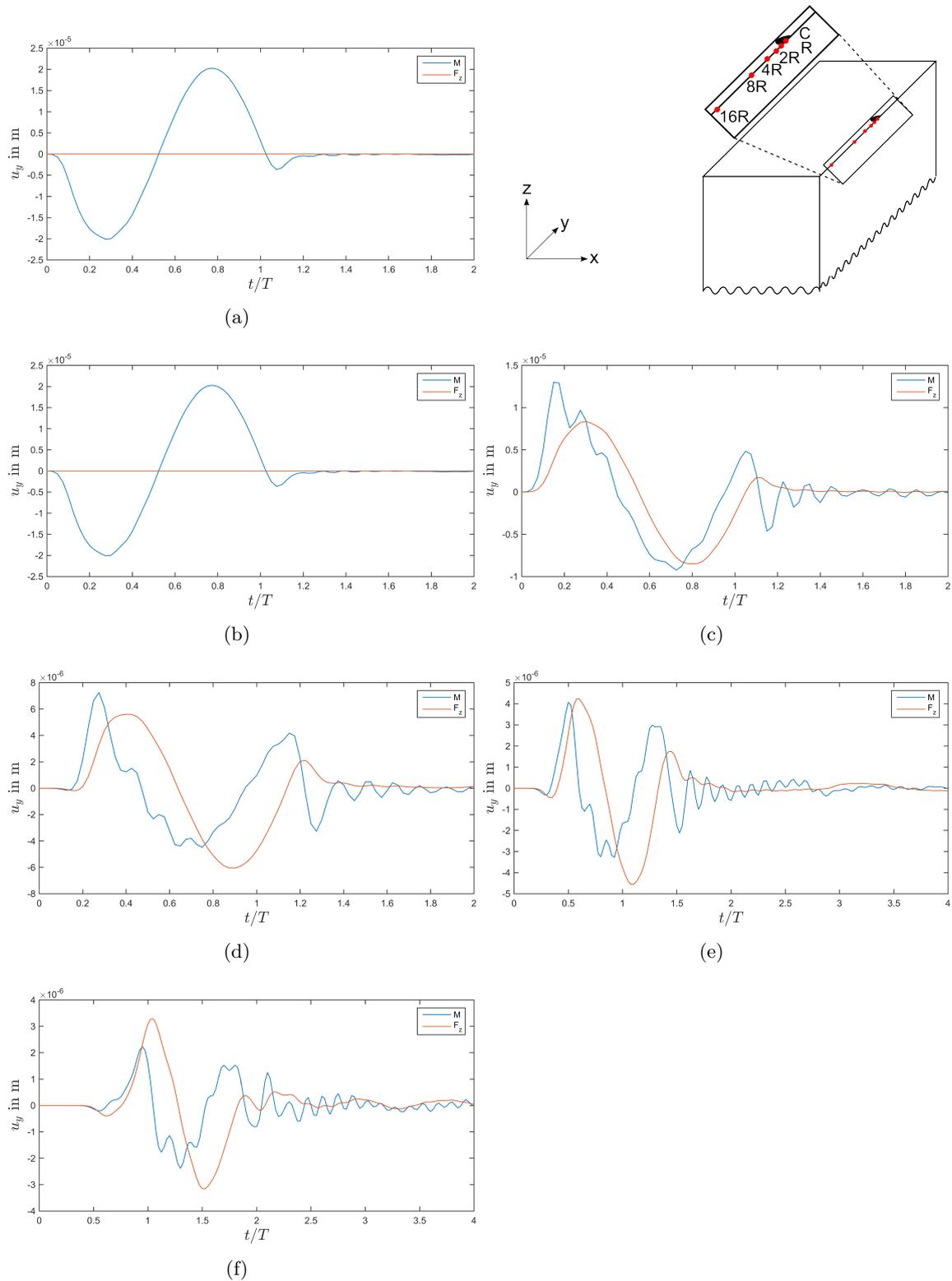


Abbildung 5.33.: Zeitlich auf Periodendauer T normierte Horizontalverschiebung u_y im Mittelpunkt C (a) und in den Entfernungen $r = R$ (b), $2R$ (c), $4R$ (d), $8R$ (e), $16R$ (f) vom Mittelpunkt eines starren Fundaments in Modell C und in Modell D, die mit einer vertikalen Kraft $F(t) = F_0 \sin(2\pi f_i t)$ bzw. mit einem Moment $M(t) = M_0 \sin(2\pi f_i t)$ mit $f_4 = 1$ Hz belastet werden.

6. Vergleich der dynamischen Steifigkeit

Im Folgenden werden nun der Federparameter k_{jj} und der Dämpfungsparameter c_{jj} , durch die die dynamische Steifigkeit des Halbraums gekennzeichnet ist, bestimmt. Diese werden anhand der mit der FEM berechneten Verschiebung u_z für ein starres Fundament sowie anhand der von Triantafyllidis [TPV67] bestimmten Koeffizienten für die Feder K_i und für die Dämpfung C_i berechnet und verglichen. Dabei wird ein starres, rundes Fundament mit einer vertikalen Kraft $F_z(t)$ belastet, sodass der Federparameter k_{jj} und der Dämpfungsparameter c_{jj} für eine vertikale Translation bestimmt werden.

Mithilfe der dynamischen Steifigkeit kann aus einer bekannten, anregenden Kraft die Antwort des Systems bestimmt werden, auf das diese wirkt. Die dynamische Steifigkeit wird analog zur Antwortfunktion (siehe Kapitel 5.1.5) bestimmt. In diesem Fall besteht das System zur Beschreibung des Halbraums aus einer Feder mit einem Federparameter k_{jj}^* und einem viskosen Dämpfer mit dem Dämpfungsparameter c_{jj}^* im Zeitbereich. Die Differentialgleichung für dieses System lautet

$$F_j = F_{k_j} + F_{c_j} = k_{jj}^* \cdot u_j + c_{jj}^* \cdot \dot{u}_j$$

mit der Verschiebung u_j , der anregenden Kraft F_j , der Federkraft F_{k_j} und der Dämpfungskraft F_{c_j} . Wird eine Fouriertransformation dieser Differentialgleichung durchgeführt und die erhaltene Gleichung vereinfacht (siehe Kapitel 5.1.5), so lautet die komplexe dynamische Steifigkeitsfunktion

$$\tilde{F}_j(\omega) = k_{jj}\tilde{u}_j(\omega) + ic_{jj}\omega\tilde{u}_j(\omega)$$

wobei der Realteil den Anteil der Feder und der Imaginärteil den Anteil des Dämpfers wiedergibt. Der Realteil der dynamischen Steifigkeit und somit der Parameter der Feder k_{jj}

$$\text{Re}(\tilde{F}_j(\omega)) = k_{jj}\tilde{u}_j(\omega) = GRK_{jj}\tilde{u}_j$$

wird nach Triantafyllidis [TPV67] durch den Schubmodul G , den Radius des Fundaments R und den dimensionslosen Feder-Parameter K_{jj} beschrieben. Der Imaginärteil mit dem Dämpfungsparameter c_{jj}

$$\text{Im}(\tilde{F}_j(\omega)) = c_{jj}\omega\tilde{u}_j(\omega) = R^2\sqrt{G\rho}C_{jj}\omega\tilde{u}_j$$

wird nach Triantafyllidis [TPV67] beschrieben durch den Radius des Fundaments R , die seismische Impedanz der S-Welle $\sqrt{G\rho}$ und dem dimensionslosen Dämpfungsparameter C_{jj} . Die Koeffizienten K_i und C_i der dimensionslosen Parameter K_{jj} und C_{jj} wurden von Triantafyllidis [TPV67] für verschiedene Poissonzahlen ν berechnet. Die dimensionslosen Parameter K_{jj} und C_{jj} werden durch

$$K_{jj} = \sum_{i=0}^n K_i a_0^i, \quad C_{jj} = \sum_{i=0}^n C_i a_0^i$$

mit der dimensionslosen Frequenz

$$a_0 = 2\pi \frac{f_i R}{c_s}$$

berechnet. Diese und somit auch der Feder-Parameter

$$k_{jj} = GRK_{jj}$$

und der Dämpfungsparameter

$$c_{jj} = R^2 \sqrt{G\rho} C_{jj}$$

sind frequenzabhängig, daher wird hier nicht von Federkonstanten bzw. Dämpfungskonstanten gesprochen.

Der Federparameter k_{zz} sowie der Dämpfungsparameter c_{zz} wurden anhand der von Triantafyllidis [TPV67] bestimmten Koeffizienten K_i und C_i für verschiedene dimensionslose Frequenzen a_0 mit $R = 10$ m, $c_s = 200$ m/s, $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz berechnet und sind in Abbildung 6.1 dargestellt.

Der Federparameter k_{zz} und der Dämpfungsparameter c_{zz} wurden ebenfalls anhand der auf das Fundament aufgebrachten vertikalen Kraft $F_z(t)$ und der numerisch bestimmten Verschiebung u_z an der Sohle eines starren Fundaments berechnet. Dazu wird eine Fouriertransformation der Kraft $F_z(t)$ und der Verschiebung $u_z(t)$ durchgeführt. Anhand der fouriertransformierten Kraft $\tilde{F}_z(\omega)$ und Verschiebung $\tilde{u}_z(\omega)$ werden dann der Federparameter k_{zz} und der Dämpfungsparameter c_{zz} mit

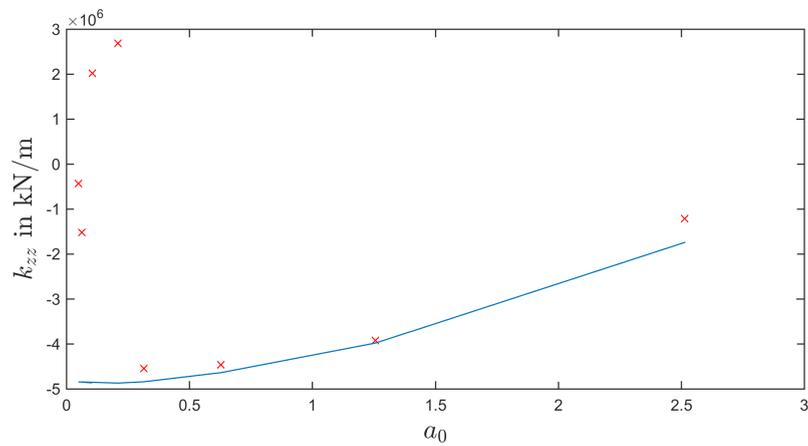
$$k_{zz} = \operatorname{Re} \left(\frac{\tilde{F}_z(\omega)}{\tilde{u}_z(\omega)} \right), \quad c_{zz} = \operatorname{Im} \left(\frac{\tilde{F}_z(\omega)}{\tilde{u}_z(\omega)} \right) \cdot \frac{1}{\omega}$$

berechnet. Dabei werden die Parameter jeweils für einen Frequenzbereich von $f_i - 0,1 < f < f_i + 0,1$ berechnet. Die Parameter für den gesamten Frequenzbereich ergeben sich dann aus Zusammensetzung der einzelnen Anregungsfrequenzen. Die Parameter k_{zz} und c_{zz} wurden für die durchgeführten Simulationen mit den Anregungsfrequenzen $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz berechnet und sind in Abbildung 6.1 abgebildet.

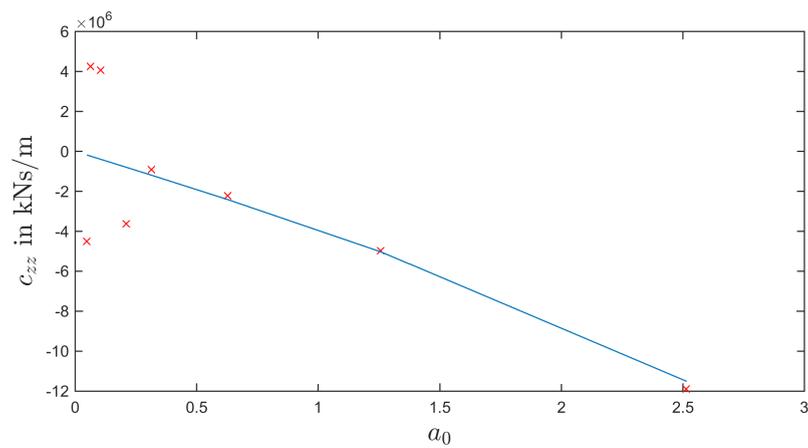
Der Federparameter k_{zz} nimmt mit zunehmender dimensionsloser Frequenz a_0 zu. Die Federsteifigkeit ist also für höhere Anregungsfrequenzen f_i größer.

Der Dämpfungsparameter c_{zz} nimmt mit zunehmender dimensionsloser Frequenz a_0 ab. Da der Parameter c_{zz} für den untersuchten Frequenzbereich negativ ist, nimmt die Dämpfung durch Abstrahlung mit steigender dimensionsloser Frequenz a_0 zu. Kleine Frequenzen werden weniger durch Abstrahlung gedämpft.

Für kleine dimensionslose Frequenzen a_0 stimmen die mit den Koeffizienten von Triantafyllidis berechneten Parameter (blau dargestellt) und die aus der numerischen Simulation bestimmten Parameter (rot dargestellt) nicht überein. Der numerisch berechnete Federparameter k_{zz} ist für $a_0 < 0,3$ um bis zu 160% größer als der analytisch berechneten Federparameter. Der numerisch berechnete Dämpfungsparameter c_{zz} weicht für $a_0 < 0,3$ um bis zu 800% von dem analytisch bestimmten Dämpfungsparameter ab. Für dimensionslose Frequenzen $a_0 > 0,3$ stimmen für beide Parameter die numerische und die analytische Berechnung im Rahmen einer Abweichung von 10% überein. Für Frequenzen $f_i \leq 1/2$ Hz sind die Amplituden der numerisch berechneten Verschiebung u_z durch die Lysmer-Randbedingungen verfälscht. Daher sind die damit bestimmten Parameter k_{zz} und c_{zz} ebenfalls verfälscht. Für Frequenzen $f_i \geq 1$ Hz ist der Einfluss der Lysmer-Bedingungen nicht relevant und die Parameter k_{zz} und c_{zz} können trotz einer groben Diskretisierung von $\Delta t = 0,025$ s mit hoher Genauigkeit bestimmt werden.



(a)



(b)

Abbildung 6.1.: Federparameter k_{zz} (a) und Dämpfungsparameter c_{zz} (b) in Abhängigkeit der dimensionslosen Frequenz $a_0 = 2\pi R/\lambda_s$ für ein starres Fundament, das mit einer vertikalen Kraft belastet wird. Die mit den Koeffizienten von Triantafyllidis [TPV67] berechneten Parameter sind in blau, die aus der Verschiebung u_z berechneten Parameter sind rot dargestellt.

7. Korrekturvorschlag für Lysmer-Randbedingungen

Hier wird eine Möglichkeit diskutiert, um den Einfluss der Lysmer-Bedingungen zu korrigieren. Neben der Vergrößerung der Tiefe des Modells zur Verringerung dieses Einflusses können auch nach der Berechnung Korrekturen vorgenommen werden. Dabei wird die Verschiebung an den Dämpfern an der Modellunterseite von der Verschiebung u_z subtrahiert.

Da der Einfluss des Dämpfers mit sinkender Frequenz steigt, wird diese Korrektur an der Verschiebung u_z an der Oberfläche des Halbraums für eine Anregungsfrequenz $f_1 = 1/8$ Hz durchgeführt. Abbildung 7.1 zeigt die unkorrigierte Verschiebung u_z an der Oberfläche des Halbraums im Mittelpunkt C und in den Entfernungen $r = R, 2R, 4R, 8R$ und $16R$ vom Mittelpunkt eines starren Fundaments. Mit sinkender Entfernung zum Rand des Modells wird durch den Einfluss der Dämpfer die Verschiebung nach unten im Vergleich zur Verschiebung nach oben größer (siehe Kapitel 5).

Die numerisch berechnete Verschiebung u_{zD} an den Dämpfern an der Modellunterseite unter dem Fundamentmittelpunkt C_D und in den Entfernungen $R, 2R, 4R, 8R$ und $16R$ vom Punkt C_D zeigt Abbildung 7.2 (a). Für Entfernungen $r \leq 2R$ beträgt das Verhältnis von $u_z/u_{zD} = 25 - 50$. Die Verschiebung u_{zD} am Dämpfer ist also vernachlässigbar klein und hat somit keinen Einfluss auf die Verschiebung an der Oberfläche u_z . Für Entfernungen $r \geq 4R$ liegen die Verschiebungen u_z und u_{zD} in der gleichen Größenordnung und das Verhältnis beträgt höchstens $u_z/u_{zD} = 8$. Die Verschiebung am Dämpfer ist also relevant und die Korrektur der Lysmer-Randbedingungen verändert die Verschiebung u_z maßgeblich. Die Verschiebung am Dämpfer setzt zum Zeitpunkt $t_p = \sqrt{(800 \text{ m})^2 + r^2}/c_p$ beim Eintreffen der P-Welle an der Modellunterseite ein. Mit zunehmender Entfernung r nimmt die Amplitude der Verschiebung u_{zD} ab. Da durch den geometrischen Ausbreitungsverlust die Energie an

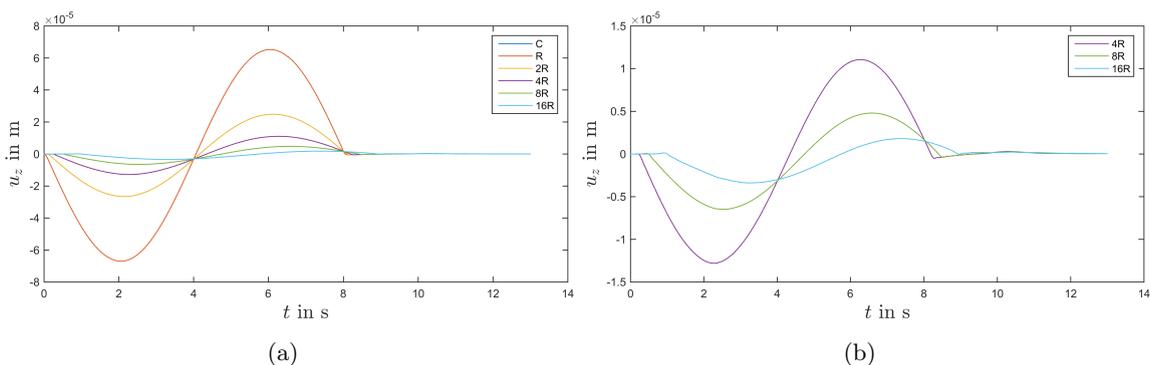


Abbildung 7.1.: Vertikalverschiebung u_z an der Oberfläche des Halbraums im Mittelpunkt C des Fundaments und in den Entfernungen $r = R, 2R, 4R, 8R$ und $16R$ bei Belastung eines starren Fundaments mit einer vertikalen Kraft $F(t)$ mit $f_1 = 1/8$ Hz.

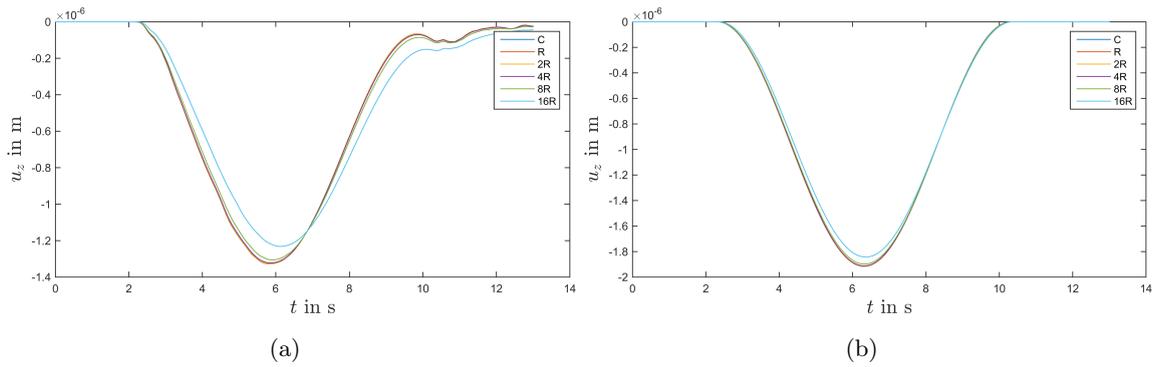


Abbildung 7.2.: Numerisch berechnete Verschiebung u_{zD} am Dämpfer (a). Analytisch berechnete Verschiebung u_{zD} am Dämpfer (b).

der Wellenfront mit $1/r^2$ abnimmt, nimmt die Amplitude der Spannung und somit auch die Amplitude der Verschiebung am Dämpfer mit zunehmender Entfernung mit $1/r^2$ ab. Nach einer Periodendauer von $T = 8$ s wird erwartet, dass die Verschiebung am Dämpfer verschwindet. Aufgrund von numerischen Artefakten treten auch nach dieser Zeit Verschiebungen auf.

Die Verschiebung u_{zD} am Dämpfer kann auch analytisch berechnet werden (siehe Kapitel 5.1.5). Für die Verschiebung am Dämpfer ergibt sich mit der Dämpfungskonstante $d = c_p \rho$ und der Kraft $F_0 = 300$ kN:

$$u_{zD} = -\frac{F_0}{2\pi d \frac{1}{8} \text{ Hz } r^2} \left(1 - \cos\left(2\pi \frac{1}{8} \text{ Hz } t\right) \right)$$

Der Faktor $1/r^2$ wird aufgrund des geometrischen Ausbreitungsverlust der Spannung hinzugefügt. Abbildung 7.2 (b) zeigt die analytisch berechnete Verschiebung u_{zD} am Dämpfer. Diese ist im Vergleich zur numerisch berechneten Verschiebung am Dämpfer um ca. 40% größer. Die Verschiebung setzt mit dem Einsatz der P-Welle an der Modellunterseite ein und verschwindet nach einer Periodendauer von $T = 8$ s.

Da für kleine Frequenzen f_i bzw große Wellenlängen λ_i das Modell als Starrkörper genähert werden kann (vgl. Abbildung 5.9 und Kapitel 5.2.2) ist die durch den Dämpfer erzeugte Verschiebung u_{zD} im gesamten Modell nahezu gleich. Daher kann eine Korrektur der Verschiebung u_z an der Oberfläche durchgeführt werden, indem die Verschiebung am Dämpfer u_{zD} subtrahiert wird. Die vom Einfluss der Lysmer-Randbedingungen korrigierte Verschiebung

$$u_{zk} = u_z - u_{zD}$$

sollte symmetrisch zur Zeitachse verlaufen, also die Verschiebung nach unten (in negative z-Richtung) und nach oben (in positive z-Richtung) sollten gleich groß sein.

Die Korrektur der Verschiebung u_z wird mit der numerische berechneten und mit der analytisch berechneten Verschiebung u_{zD} am Dämpfer durchgeführt. Abbildung 7.3 zeigt die mit numerischer Korrektur ((a)+(c)) und mit analytischer Korrektur ((b)+(d)) korrigierte Vertikalverschiebung u_{zk} .

Auch für große Entfernungen sind die Verschiebungen u_{zk} im Gegensatz zur Verschiebung u_z (siehe Abbildung 7.1 (b)) nach unten und nach oben gleich groß. Die analytisch korrigierte Verschiebung u_{zk} ist insgesamt um 4% größer als die numerisch korrigierte Verschiebung u_{zk} .

Der Einfluss der Lysmer-Randbedingungen kann also mithilfe zweier Methoden verringert werden. Durch die Vergrößerung der Tiefe des Modells wird dieser Einfluss bereits vor der

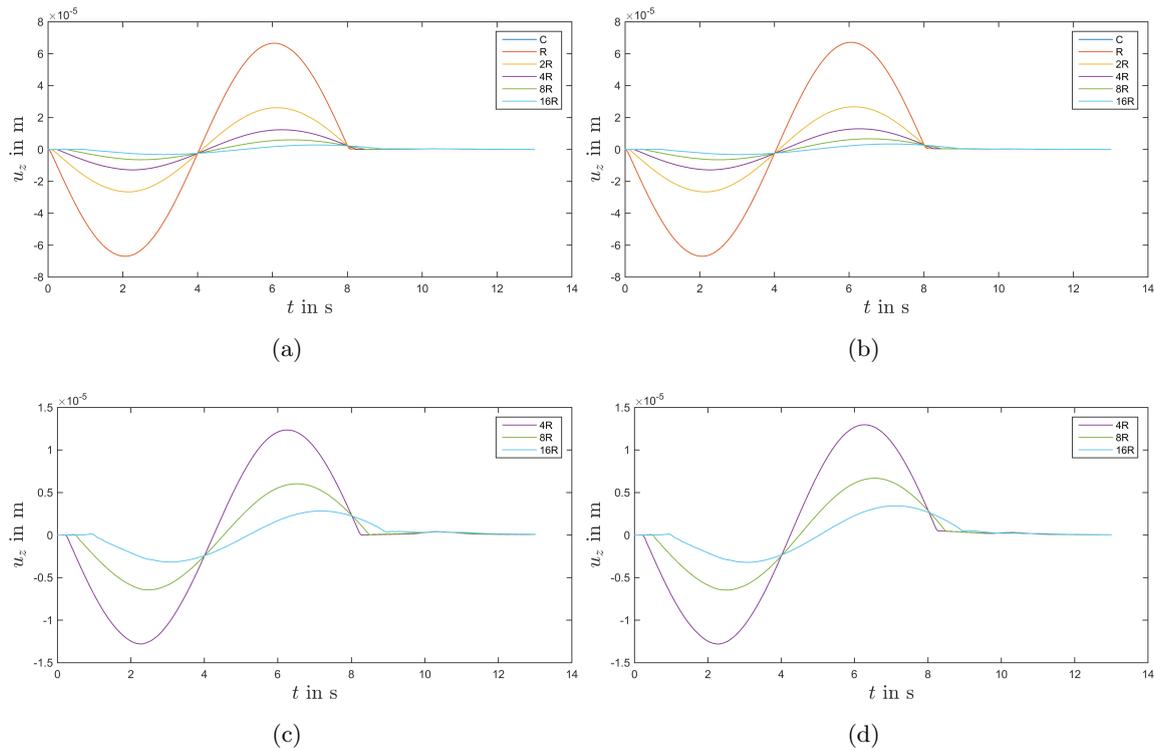


Abbildung 7.3.: Numerische korrigierte Vertikalverschiebung u_zk an der Oberfläche (a)+(c). Analytisch korrigierte Vertikalverschiebung u_zk an der Oberfläche (b)+(d).

Berechnung minimiert. Dadurch wird jedoch mehr Rechenzeit benötigt.

Durch die Subtraktion der Verschiebung u_{zD} am Dämpfer kann eine Korrektur der Verschiebungen im gesamten Modell vorgenommen werden.

Eine Möglichkeit, Reflexionen aufgrund der Lysmer-Bedingungen zu verhindern, besteht in der Verwendung eines zylinderförmigen bzw. halbkugelförmigen Modells. Beim zylinderförmigen Modell treffen die Wellen an der Oberfläche immer senkrecht auf den Rand, in der Tiefe sind jedoch Reflexionen möglich. Beim halbkugelförmigen Modell treffen die Wellen senkrecht auf den gesamten Rand.

Eine weitere Möglichkeit, einen unendlich ausgedehnten Halbraum zu modellieren besteht darin, das Modell stark zu vergrößern, sodass der Rand des Modells sehr weit entfernt ist von dem beobachteten Fundament. Die Elemente, die an den Rand angrenzen, können dabei sehr groß gewählt werden, sodass die Rechenzeit nicht erhöht wird. Dabei werden feste Randbedingungen anstatt von Lysmer-Randbedingungen verwendet. Die am Rand des Modells reflektierten Wellen werden in der betrachteten Zeit nicht aufgezeichnet, da die Entfernung zum Rand zu groß ist. Dadurch werden die Vertikalverschiebungen u_z nicht durch die Lysmer-Randbedingungen beeinflusst und die Rechenzeit wird verringert, da finite C3D8-Elemente im Gegensatz zu infiniten CIN3D8-Elementen parallelisiert werden können.

8. Berechnung der Verschiebung mit der Boundary-Elemente-Methode

8.1. Modellerstellung

Da durch die Integration der Lösungen die Dimension des Modells um eins reduziert wird, wird von dem dreidimensionalen Modell nur die Oberfläche des Halbraums mit dem Fundament diskretisiert. Da Modell wurde mit Abaqus CAE erstellt und besteht aus linearen, viereckigen 4LQ-Elementen mit vier Knoten. Der Abstand der Knoten beträgt nahe des Fundaments 5 m und am Rand des Modells 10 m. Da die viereckigen Elemente nicht quadratisch sein müssen, kann das Fundament rund modelliert werden. Da aufgrund der Randbedingungen nicht ein Viertel des Halbraums modelliert werden kann, beträgt die Größe des Modells 400 m x 400 m, das Fundament mit Radius $R = 10$ m befindet sich dabei in der Mitte.

Es wird ein schlaffes Fundament simuliert, um die berechneten Verschiebungen mit den semi-analytisch berechneten Verschiebungen zu vergleichen. Zudem können einzelne Knoten nicht wie bei der FEM durch Randbedingungen miteinander verknüpft werden. Die Wirkung eines starren Fundaments kann also nur erzeugt werden, indem ein Fundament modelliert wird und auf dem Halbraum gesetzt und mit diesem verknüpft wird.

Die auf das Fundament aufgebrachte vertikale Kraft wird als Spannung auf die Elemente aufgebracht und beträgt wie in der semi-analytischen Berechnung und der Berechnung mit FEM

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_0 f(t) = \sigma_0 \sin(2\pi f_i t) & t \leq T \\ 0 & t > T \end{cases}$$

mit $\sigma_0 = 1$ kPa und den Anregungsfrequenzen $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz.

Die Berechnung wird im Programm IsoBEM durchgeführt.

Dabei ist der Speicherbedarf vor der Berechnung nur grob vorhersehbar. Die Berechnungszeit steigt näherungsweise quadratisch mit der Anzahl der Knoten, der Speicherbedarf wächst mit der Berechnungszeit.

Zur Lösung der Differentialgleichungen wird die Vollraumlösung verwendet.

Da die Differentialgleichungen bei der BEM im Frequenzbereich gelöst werden, muss die Zeitreihe (Spannung) eine Länge 2^N haben. Hier wurden 4096 Zeitschritte für alle Frequenzen f_i gewählt. Je nach gewählter zeitlicher Länge des Spannungssignals ergeben sich zeitliche Diskretisierungen zwischen $\Delta t = 0,0049$ s für $f_1 = 1/8$ Hz und $\Delta t = 0,00097$ s für $f_7 = 8$ Hz.

Die zeitliche Länge des vorgegebenen Spannungssignals muss dabei doppelt so lang gewählt werden wie die gewünschte zeitliche Dauer der Vertikal- und Horizontalverschiebungen u_z und u_x , da sonst durch die Fouriertransformation hohe Frequenzen abgeschnitten werden und somit nicht in der Verschiebung enthalten sind.

Der Threshold (Frequenzen, deren Amplitude im Frequenzbereich kleiner ist als 0,2% der Maximalamplitude, werden abgeschnitten) ist mit $\text{Threshold}=0,2\%$ sehr klein, sodass nur sehr wenige Frequenzen abgeschnitten werden.

8.2. Schlaffes Fundament

Die Vertikalverschiebungen u_z und Horizontalverschiebungen u_x im Fundamentmittelpunkt C und in den Entfernungen $r = R, 2R, 4R, 8R$ und $16R$ werden aus IsoBEM exportiert und mit Matlab graphisch dargestellt.

Abbildung 8.1 zeigt die auf die Periodendauer T normierte Vertikalverschiebung u_z im Mittelpunkt C und in den Entfernungen $r = R, 2R, 4R, 8R$ und $16R$ zum Mittelpunkt eines schlaffen Fundaments, das mit einer vertikalen Kraft $F(t)$ mit die Anregungsfrequenzen $f_1 = 1/8 \text{ Hz}$, $f_2 = 1/4 \text{ Hz}$, $f_3 = 1/2 \text{ Hz}$, $f_4 = 1 \text{ Hz}$, $f_5 = 2 \text{ Hz}$, $f_6 = 4 \text{ Hz}$ und $f_7 = 8 \text{ Hz}$ belastet wird.

Wie die semi-analytische und die mit FEM berechneten Verschiebung verläuft auch die mit BEM berechnete Vertikalverschiebung u_z erst unter Druckbelastung des Fundaments nach unten (in negative z -Richtung), dann unter Zugbelastung nach oben (in positive z -Richtung).

Für Anregungsfrequenzen $f_i \leq 1 \text{ Hz}$ wird aufgrund des Fundamentdurchmessers keine relevante Phasenverschiebung φ erzeugt, diese kann also vernachlässigt werden. Für $f_i \geq 2 \text{ Hz}$ ist die Phasenverschiebung φ der Wellen, die an unterschiedlichen Knoten des Fundaments erzeugt werden, relevant und verlängert die zeitliche Länge der Verschiebung u_z um die Laufzeit der Rayleigh-Welle Δt durch das Fundament auf $T + \Delta t$.

Die Amplitude der Vertikalverschiebung u_z nimmt für alle Frequenzen f_i mit zunehmender Entfernung r ab.

An einem Ort nimmt die Amplitude mit zunehmender Frequenz f_i für Entfernungen $r \leq 4R$ aufgrund der destruktiven Interferenz aufgrund der Phasenverschiebung φ ab. Für Entfernungen $r \geq 8R$ nimmt die Amplitude an einem Ort mit steigender Frequenz f_i aufgrund der sinkenden destruktiven Interferenz zwischen P-Welle, S-Welle und Rayleigh-Welle zu. Für $f_7 = 8 \text{ Hz}$ findet konstruktive Interferenz von P-Welle und Rayleigh-Welle statt (siehe Kapitel 4.4), da die Periodendauer der Anregungsfrequenz f_i und der Greenschen Funktion gleich sind. Dadurch wird die Amplitude der Verschiebung u_z nach unten verstärkt. Innerhalb des Fundaments werden P- und S-Welle von der Rayleigh-Welle überlagert, für $r \geq 2R$ sind P-Welle und S-Welle erkennbar.

Für kleine Frequenzen $f \leq 1 \text{ Hz}$ sind bei $r = 16R$ Verschiebungen zu erkennen, nachdem die Belastung durch die Kraft $F(t)$ gestoppt wird. Für $f_1 = 1/8 \text{ Hz}$ sind für alle Entfernungen r „Nachschwingungen“ wie in den mit der FEM berechneten Verschiebungen u_z zu beobachten. Diese numerischen Artefakte treten bei der BEM jedoch nur für kleine Frequenzen auf.

Da die zeitliche Diskretisierung Δt bei der BEM für große Frequenzen f_i sehr viel kleiner ist als bei der Berechnung mit der FEM, ist die Verschiebung u_z hier glatt, obwohl die räumliche Diskretisierung bei BEM und FEM gleich ist.

Abbildung 8.2 zeigt die auf Periodendauer T normierte, mit BEM berechnete Horizontalverschiebung u_x im Mittelpunkt C und in den Entfernungen $r = R, 2R, 4R, 8R$ und $16R$ vom Mittelpunkt eines schlaffen Fundaments, das mit einer vertikalen Kraft $F = F_0 f(t)$ mit den Anregungsfrequenzen $f_1 = 1/8 \text{ Hz}$, $f_2 = 1/4 \text{ Hz}$, $f_3 = 1/2 \text{ Hz}$, $f_4 = 1 \text{ Hz}$, $f_5 = 2 \text{ Hz}$, $f_6 = 4 \text{ Hz}$ und $f_7 = 8 \text{ Hz}$ belastet wird.

Die mit BEM berechnete Horizontalverschiebung u_x zeigt große Ähnlichkeit zu der semi-analytisch und mit BEM berechneten Horizontalverschiebung u_x .

Im Mittelpunkt des Fundaments wird mit der BEM eine endliche Horizontalverschiebung u_x berechnet, die jedoch aufgrund der Symmetriebedingungen Null oder im Vergleich zu den Verschiebungen außerhalb des Fundaments sehr viel kleiner sein sollten. Die Verschiebung

im Innern des Fundaments wurden also mit der BEM im Mittelpunkt des Fundaments nicht richtig berechnet.

Wird das Fundament mit Druck belastet, so findet eine Verschiebung nach innen zum Fundament hin statt. Wird das Fundament mit Zug belastet, so findet eine Verschiebung nach außen vom Fundament weg statt.

Die Amplitude der Verschiebung u_x nimmt mit zunehmender Entfernung r ab.

Am Rand des Fundaments ($r = R$) nimmt die Amplitude der Verschiebung u_x mit zunehmender Anregungsfrequenz f_i aufgrund der destruktiven Interferenz durch die Phasenverschiebung φ ab. Ab einer Entfernung $r \geq 2R$ nimmt die Amplitude der Verschiebung u_x mit zunehmender Frequenz durch die mit steigender Entfernung r abnehmende destruktive Interferenz bzw. zunehmende konstruktive Interferenz zwischen P-Welle und Rayleigh-Welle zu.

P-Welle und S-Welle sind ab einer Entfernung $r \geq 2R$ zu erkennen, für kleinere Entfernungen werden sie von der Rayleigh-Welle überlagert.

Auch in der Horizontalverschiebung u_x sind -besonders für kleine Frequenzen f_i und für große Entfernungen r - numerische Artefakte nach dem Aufheben der anregenden Kraft $F(t)$ zu erkennen.

Aufgrund der feineren zeitlichen Diskretisierung Δt ist die Horizontalverschiebung u_x für große Frequenzen f_i bei der BEM im Vergleich zur FEM glatter.

8.3. Vergleich mit semi-analytischer Lösung

Um die Genauigkeit der mithilfe der BEM berechneten Verschiebungen u_z und u_x zu bestimmen, werden diese Verschiebungen mit den semi-analytisch berechneten Verschiebungen verglichen.

Die Abbildungen 8.3 und 8.4 zeigen die auf Periodendauer T normierte, mit BEM und semi-analytisch berechnete Vertikalverschiebung u_z und Horizontalverschiebung u_x im Mittelpunkt C und in den Entfernungen $r = R, 2R, 4R, 8R$ und $16R$ vom Mittelpunkt eines schlaffen Fundaments, das mit einer vertikalen Kraft $F = F_0 f(t)$ mit den Anregungsfrequenzen $f_1 = 1/8 \text{ Hz}$, $f_2 = 1/4 \text{ Hz}$, $f_3 = 1/2 \text{ Hz}$, $f_4 = 1 \text{ Hz}$, $f_5 = 2 \text{ Hz}$, $f_6 = 4 \text{ Hz}$ und $f_7 = 8 \text{ Hz}$ belastet wird.

Die Amplitude der semi-analytisch und mit der BEM berechneten Vertikalverschiebung u_z stimmen gut überein. Innerhalb und am Rand des Fundaments ist die mit der BEM berechneten Verschiebung etwas größer, außerhalb des Fundaments ist die semi-analytisch berechnete Verschiebung etwas größer. Die Abweichung ist für $f_i \leq 2 \text{ Hz}$ mit ca. 3% jedoch sehr klein.

Die Horizontalverschiebung u_x der BEM stimmt im Mittelpunkt und am Rand des Fundaments nur sehr schlecht mit der semi-analytisch berechneten Verschiebung überein. Im Mittelpunkt muss die Horizontalverschiebung u_x aus Symmetriegründen Null oder sehr klein sein und wurde somit mit der BEM nicht richtig berechnet.

Am Rand des Fundaments sind die mit BEM berechnete Verschiebungen im Vergleich zu den semi-analytisch berechneten Verschiebungen um 30% kleiner. Einzig für $f_7 = 8 \text{ Hz}$ stimmen die Amplituden etwa überein. Außerhalb des Fundaments ist die semi-analytisch berechnete Verschiebung im Vergleich zur mit der BEM berechneten Verschiebung $f_i \leq 2 \text{ Hz}$ um 8% größer. Mit zunehmender Entfernung r nimmt die Differenz zwischen semi-analytisch und mit der BEM berechneten Verschiebung u_x ab und beträgt 6,5% für $r = 16R$.

Für große Frequenzen $f_i \geq 4 \text{ Hz}$ stimmt sowohl für die Vertikalverschiebung u_z als auch für die Horizontalverschiebung u_x der zeitliche Verlauf der BEM-Verschiebung nicht mit der semi-analytischen Verschiebung überein. Die Lage der Maxima und Minima und die Ersteinsatzzeit der P-Welle sowie die Amplitude unterscheiden sich deutlich. Dabei weicht die Amplitude der Vertikalverschiebung u_z bis zu 19% von der semi-analytisch berechneten Vertikalverschiebung u_z ab.

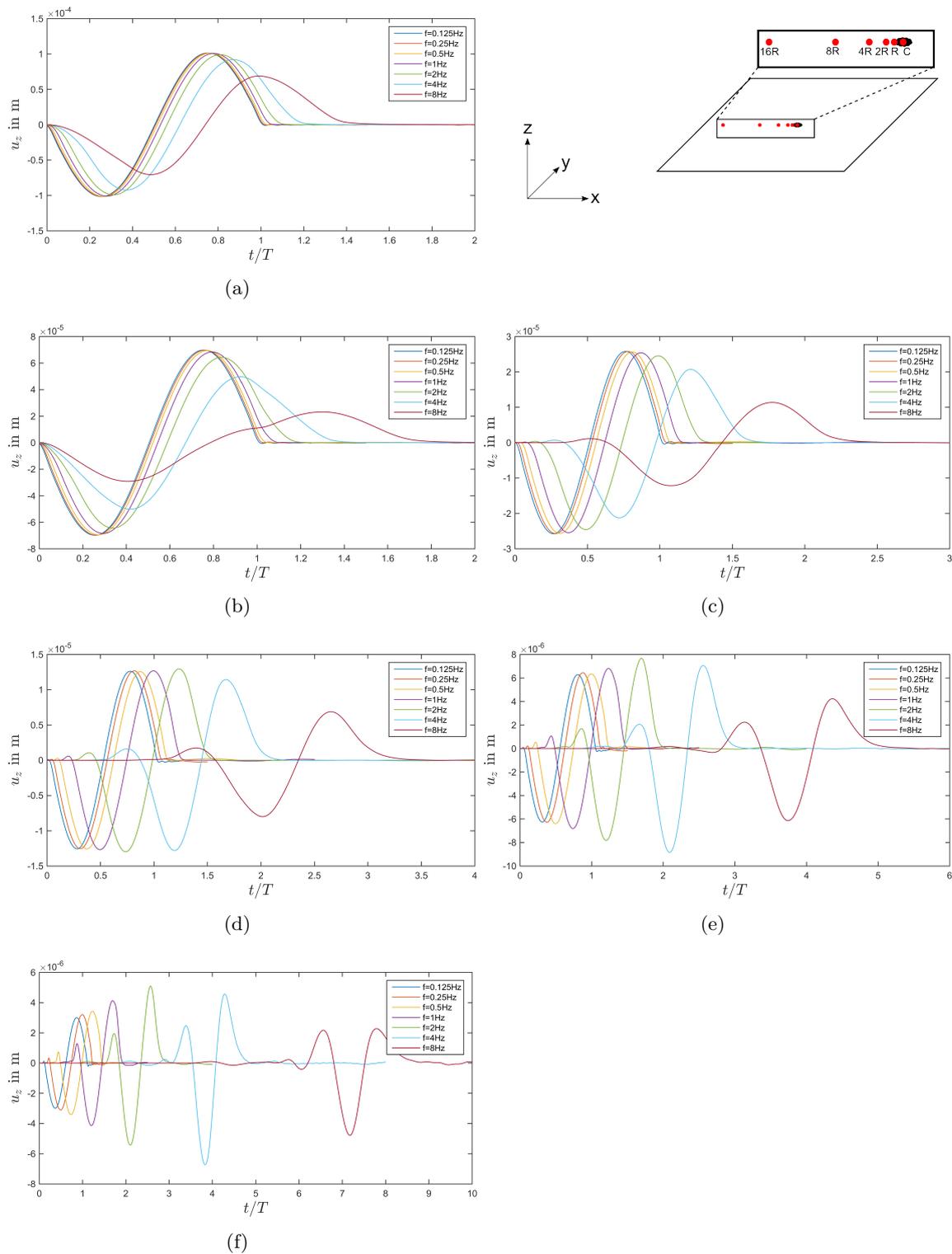


Abbildung 8.1.: Zeitlich auf Periodendauer T normierte, mit BEM berechnete Vertikalverschiebung u_z im Mittelpunkt C (a) und in den Entfernungen $r = R$ (b), $2R$ (c), $4R$ (d), $8R$ (e), $16R$ (f) vom Mittelpunkt eines starren Fundaments, das mit einer vertikalen Kraft $F = F_0 \sin(2\pi f_i t)$ mit $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz belastet wird.

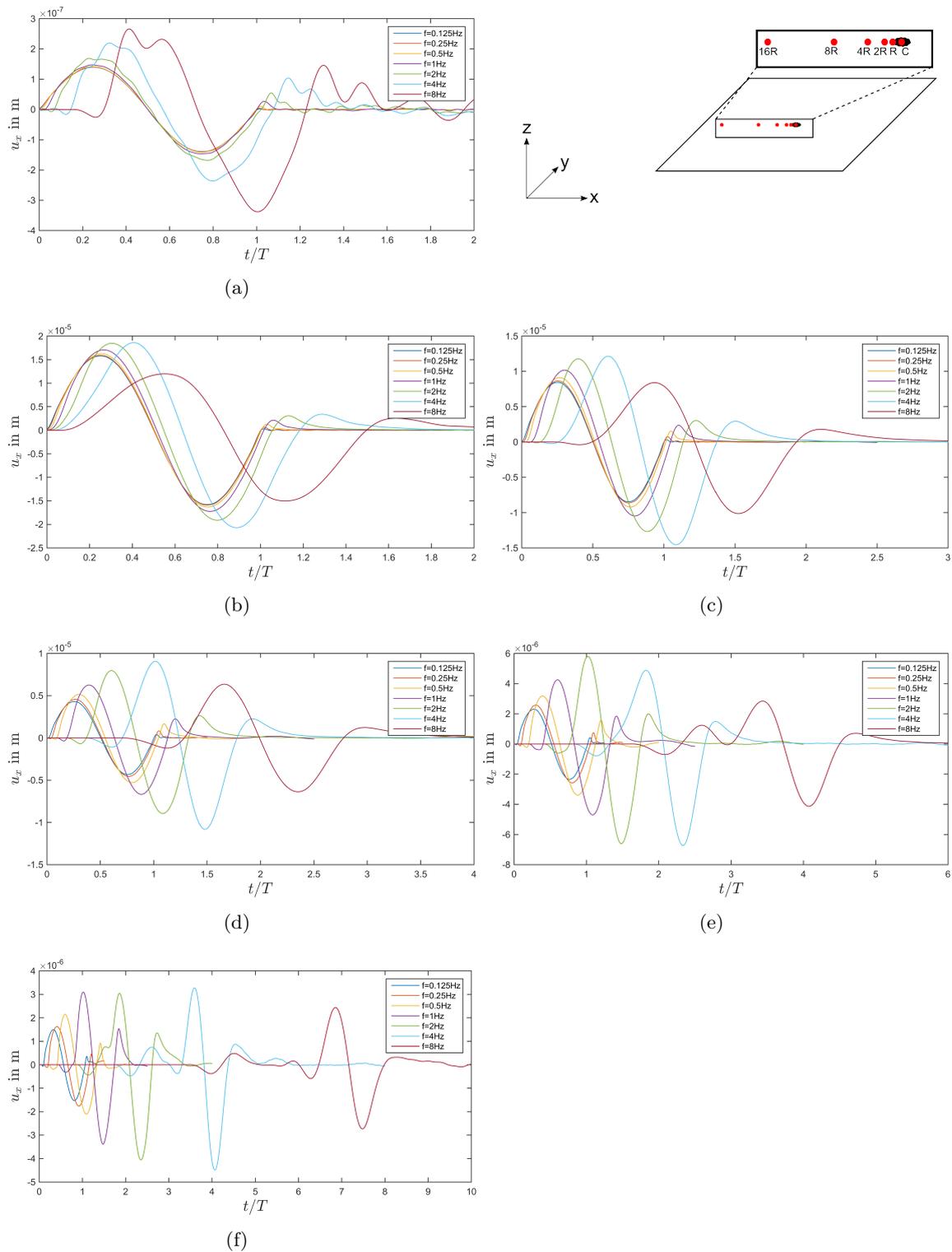


Abbildung 8.2.: Zeitlich auf Periodendauer T normierte, mit BEM berechnete Horizontalverschiebung u_x im Mittelpunkt C (a) und in den Entfernungen $r = R$ (b), $2R$ (c), $4R$ (d), $8R$ (e), $16R$ (f) vom Mittelpunkt eines starren Fundaments, das mit einer vertikalen Kraft $F = F_0 \sin(2\pi f_i t)$ mit $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz belastet wird.

Da die Boundary-Elemente-Methode die Lösungen im Frequenzbereich berechnet, werden durch die endliche Länge des vorgegebenen Kraftsignals $F(t)$ und durch den eingestellten Threshold hohe Frequenzen abgeschnitten und nicht berücksichtigt. Für hohe Frequenzen f_i stimmt die mit BEM berechnete Verschiebung nicht mit der semi-analytisch berechneten Verschiebung überein, da die hohen Frequenzanteile fehlen und somit vor allem die Verschiebung der P-Welle und der S-Welle und für große Entfernungen r die Rayleigh-Welle nicht exakt berechnet werden kann. So können auch die Ersteinsätze der einzelnen Wellentypen nicht korrekt gepickt werden.

Zusammenfassend kann die Verschiebung für eine vertikal anregende Kraft $F(t) = F_0 f(t)$ mit einem breiten Frequenzspektrum mit der Boundary-Elemente-Methode für große Frequenzen f_i nur im Rahmen einer Genauigkeit von 19% außerhalb des Fundaments berechnet werden. Der Fehler ist dabei auf der Vertikalkomponente u_z im Vergleich zur Horizontalkomponente u_x kleiner. Die Genauigkeit kann durch einen kleineren Threshold oder eine größere zeitliche Länge der anregenden Kraft verbessert werden, jedoch wird somit die Rechenzeit deutlich erhöht.

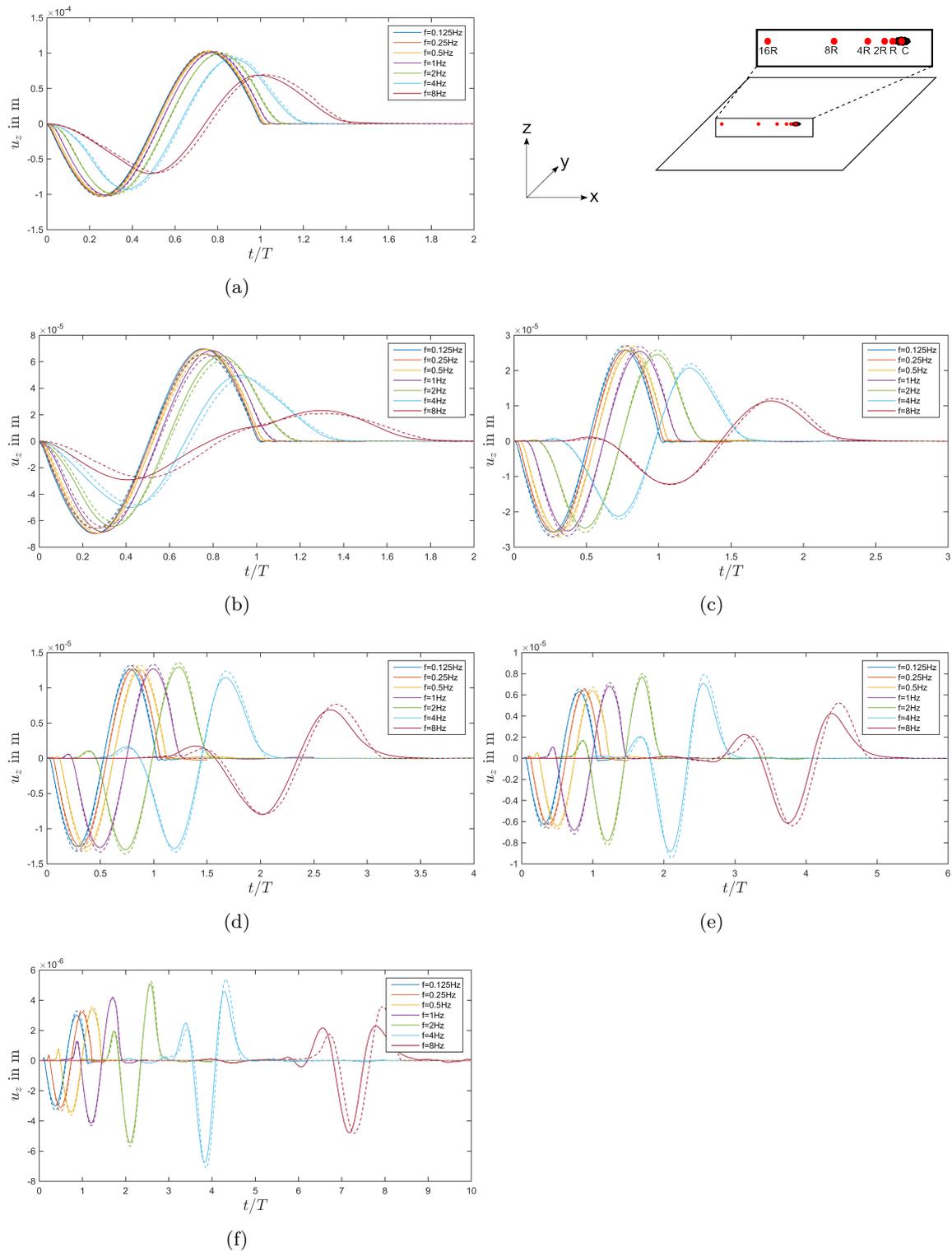


Abbildung 8.3.: Vergleich der numerisch berechneten (mit der BEM, durchgehend gezeichnet) mit der semi-analytisch berechneten (gestrichelt gezeichnet) Vertikalverschiebung u_z im Mittelpunkt C (a) und in den Entfernungen $r = R$ (b), $2R$ (c), $4R$ (d), $8R$ (e), $16R$ (f) vom Mittelpunkt eines starren Fundaments, das mit einer vertikalen Kraft $F = F_0 \sin(2\pi f_i t)$ mit $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz belastet wird.

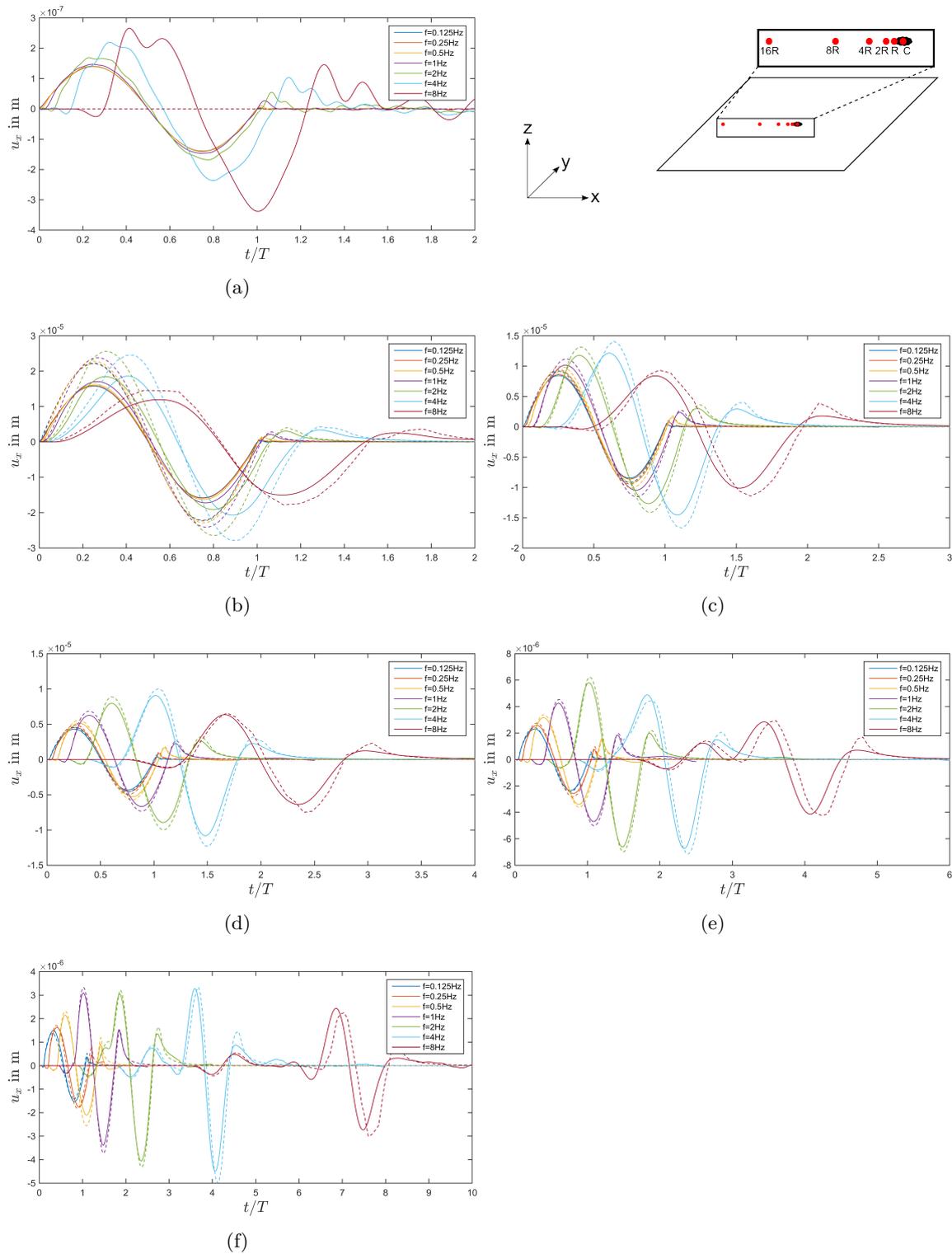


Abbildung 8.4.: Vergleich der numerisch berechneten (mit der BEM, durchgehend gezeichnet) mit der semi-analytisch berechneten (gestrichelt gezeichnet) Horizontalverschiebung u_x im Mittelpunkt C (a) und in den Entfernungen $r = R$ (b), $2R$ (c), $4R$ (d), $8R$ (e), $16R$ (f) vom Mittelpunkt eines starren Fundaments, das mit einer vertikalen Kraft $F = F_0 \sin(2\pi f_i t)$ mit $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz belastet wird.

9. Vergleich von semi-analytischer Berechnung, Finite-Elemente-Methode und Boundary-Element-Methode

Im Folgenden werden die semi-analytische Berechnung und die Berechnung mithilfe der Finite-Elemente-Methode (FEM) sowie der Boundary-Elemente-Methode (BEM) verglichen und erläutert, welche Anwendungen mit der jeweiligen Methode möglich sind.

Zur semi-analytischen Berechnung der Verschiebungen, die durch Belastung einer Punktquelle verursacht werden, stehen mehrere Lösungen des Lamb'schen Problems zur Verfügung. Die hier verwendeten Lösungen nach Pekeris [Pek55] und Chao [Cha60] gelten nur an der Oberfläche des Halbraums. Die Verschiebung im Innern des Halbraums kann beispielsweise mit der Lösung von Gakenheimer [Gak70] in Abhängigkeit eines Winkels θ von der z -Achse zur Oberfläche berechnet werden, diese ist jedoch nicht an der Oberfläche gültig. Eine semi-analytische Berechnung der Verschiebung kann mithilfe einer Lösung entweder an der Oberfläche oder im Innern des Halbraums durchgeführt werden.

Eine semi-analytische Lösung kann nur für einen homogenen, isotropen, linear-elastischen Halbraum bestimmt werden. Die Lösungen von Pekeris [Pek55] und Chao [Cha60] gelten für eine Poisson-Zahl $\nu = 0,25$, Kausel [Kau12] berechnet anhand dieser Lösungen die Verschiebungen für eine beliebige Poisson-Zahl ν .

Die Randbedingungen der semi-analytischen Lösung für einen unendlich ausgedehnten Halbraum sind exakt.

Die Singularität der Verschiebungen $u_{\delta zz}$ und $u_{\delta rz}$ beim Eintreffen der Rayleigh-Welle muss für weitere Berechnungen genähert werden.

Die Rechnung wurde auf einem Computer mit 4 Cores und 8 GB RAM durchgeführt. Die Rechenzeit zur Bestimmung der Verschiebungen beträgt auch im Fernfeld für das beschriebene Problem 60 s auf einem Core.

Mit der Finite-Elemente-Methode können in einem dreidimensionalen Modell Verschiebungen an der Oberfläche und im Innern des Halbraums berechnet werden.

Der Halbraum kann dabei wie hier linear elastisch, homogen und isotrop sein, die Simulation kann jedoch auch für inhomogenen, anisotropen und nicht linear elastischen Untergrund durchgeführt werden. So kann auch ein realer Boden mit Schichtungen, Zunahme der Dichte ρ und des Schubmoduls G mit der Tiefe, Bodenverbesserungen im Fundamentbereich oder anderen Inhomogenitäten dargestellt werden.

Für die Simulation eines unendlich ausgedehnten Halbraums werden üblicherweise die Randbedingungen nach Lysmer [LK69] verwendet. Diese Randbedingungen beeinflussen die Simulation und die berechneten Verschiebungen erheblich. Besonders für ein kleines Modell (bei dem die Dämpfungskraft F_d größer ist als die Trägheitskraft F_m) und für Anregungsfrequenzen $f_i \leq 1/2$ Hz muss der Einfluss der Lysmer-Bedingungen eliminiert werden, um die Verschiebung interpretieren zu können. Zudem werden Wellen, die sich nicht senkrecht zum Modellrand ausbreiten, auch mit den Lysmer-Randbedingungen reflektiert.

Die infiniten Elemente, in denen die Lysmer-Bedingungen enthalten sind, können zudem nicht parallelisiert werden. Es bietet sich daher an, statt den Lysmer-Randbedingungen die Knoten am Rand des Modells festzuhalten und die dazugehörigen Elemente sehr groß zu wählen. Somit wird - im Vergleich zu einem Modell mit Lysmer-Randbedingungen - die Rechenzeit verringert und die Ergebnisse der Simulation nicht durch die Dämpfungskraft beeinflusst.

Bei der Berechnung der Verschiebungen mit der FEM treten vor allem für hohe Frequenzen numerische Artefakte durch die zeitliche Integration auf. Diese können durch Anwendung einer numerischen Dämpfung verhindert werden, die Amplituden der Verschiebung werden dabei jedoch stark gedämpft und somit verfälscht.

Die Rechnung wurde auf einem HP-Compute Server DL585G7 mit 4 CPU mit 12 echten Cores und 380 GB RAM durchgeführt. Die Rechenzeit beträgt für eine Rechnung über 6 s bei 8 Cores für 270641 Knoten 6 h.

Mit der Boundary-Elemente-Methode können Verschiebungen an der Oberfläche und im Innern des Halbraums mit internal points berechnet werden. Da dabei nur die Oberfläche diskretisiert wird, kann die Simulation nur für einen linear elastischen, homogenen, isotropen Halbraum durchgeführt werden.

Da die Differentialgleichungen im Frequenzbereich gelöst werden, ist die BEM vor allem für periodische Belastungen geeignet, die eine oder wenige Frequenzen umfassen und somit in einem endlichen Frequenzbereich dargestellt werden können. Wird wie hier eine endliche Belastung im Zeitbereich vorgegeben, entspricht dies einem Signal, das aus unendlich viele Frequenzen besteht. Dabei werden bestimmte Frequenzen, deren Amplitude unterhalb einer vorgegebenen Schwelle (threshold) liegt, abgeschnitten. Besonders für hohe Anregungsfrequenzen f_i wird die Verschiebung nicht exakt berechnet. Die Anzahl der Frequenzen, aus denen das anregende Signal zusammengesetzt ist, und der vorgegebene threshold bestimmen die Rechenzeit. Die Berechnung der Verschiebung aufgrund einer Belastung mit $f_4 = 1$ Hz, für die 2049 Frequenzen berechnet werden, dauert für 16120 Knoten bei 1 Core etwa 2 Tage. Die Rechenzeit ist somit im Vergleich zur FEM trotz der geringeren Anzahl an Knoten erheblich größer. Die Rechnung wurde ebenfalls auf einem HP-Compute Server DL585G7 durchgeführt.

Die spannungsfreien Randbedingungen bei der BEM sind nicht exakt, aber für diese Anwendung ausreichend.

Insgesamt stimmen die für das beschriebene Problem mit einer semi-analytischen Lösung, der FEM und der BEM berechneten Verschiebungen gut überein. Die Abweichung der Amplitude beträgt dabei etwa 10%, wobei die Abweichung für kleine Frequenzen $f_i \leq 1/2$ Hz bei der FEM (aufgrund der Lysmer-Randbedingungen) und für große Frequenzen $f_i \geq 4$ Hz bei der BEM (da bestimmte Frequenzen abgeschnitten werden) größer ist.

Der zeitliche Verlauf der semi-analytisch und mit der FEM berechneten Verschiebungen stimmt dabei überein, die Verschiebungen unterscheiden sich lediglich in der Amplitude. Der zeitliche Verlauf der mit der BEM berechneten Verschiebung stimmt für große Frequenzen $f_i \geq 4$ Hz nicht mit der semi-analytisch berechneten Verschiebung überein. Durch das Abschneiden hoher Frequenzanteile wird nicht nur die Amplitude, sondern auch der Ersteinsatz der einzelnen Wellentypen beeinflusst.

Für einen Frequenzbereich von $f_i = 1 - 2$ Hz stimmen die semi-analytisch, die mit der FEM und die mit der BEM berechneten Verschiebungen im Rahmen einer Genauigkeit von 10% überein. Wird der Einfluss der Lysmer-Bedingungen korrigiert, stimmen die Verschiebungen auch für Frequenzen $f_i < 1$ Hz überein. Um eine Übereinstimmung der Verschiebungen für $f_i \geq 4$ Hz zu erreichen, müsste das Netz bei der FEM auf mindestens $\Delta x = 1$ m verfeinert werden und bei der BEM die Schwelle auf $threshold = 0,05\%$ verringert werden.

Welche Methode zur Berechnung einer Verschiebung sinnvoll ist, hängt von der Aufgabenstellung ab. Soll die Verschiebung an der Oberfläche eines linear elastischen, homogenen,

isotropen berechnet werden, bietet sich eine semi-analytische Berechnung aufgrund der kurzen Rechenzeit und der exakten Randbedingungen an. Soll diese Berechnung für reale Böden mit Inhomogenitäten durchgeführt werden, kann dies nur mit der FEM simuliert werden. Dabei können auch Verschiebungen im Innern des Halbraums bestimmt werden. Die benötigte Rechenzeit steigt dabei mit der zeitlichen Dauer des anregenden Signals. Für unendlich andauernde, periodische Belastungen bietet es sich daher an, die Verschiebung mit der BEM zu berechnen.

Ein Vergleich der Methoden, deren Anwendungsbereich, Rechenzeit und Fehlerquellen sind in Tabelle 9.1 eingetragen.

Tabelle 9.1.: Vergleich der semi-analytischen Berechnung und der Berechnung mit der FEM sowie mit der BEM.

	semi-analytisch	FEM	BEM
Wo?	Oberfläche oder im Innern	Oberfläche und im Innern	Oberfläche und im Innern
Halbraum	linear elastisch homogen, isotrop	linear elastisch homogen, isotrop oder nicht linear elastisch, inhomogen, anisotrop in weiten Grenzen variierbar	linear elastisch, homogen, isotrop, tiefenabhängiger Schubmodul durch Diskretisierung mehrerer Schichten möglich
Randbedingungen	exakt erfüllt	Lysmer-Randbedingungen: Reflexionen werden teilweise verhindert, Einfluss der Dämpfungskraft F_d	Genauigkeit ausreichend
Fehlerquellen	Näherung bei Singularitäten	numerische Artefakte, Lysmer-Randbedingung	Abschneiden bestimmter Frequenzen
Rechenzeit	Minuten	Stunden	Tage

10. Erschütterungsreduktion durch gegenphasige Anregung

In diesem Kapitel wird untersucht, ob die durch die WEA erzeugten und über deren Fundament in den Untergrund übertragenen Erschütterungen durch gegenphasige Anregung einer ringförmigen Struktur, die um das Fundament angeordnet ist, reduziert werden können. Ob diese Erschütterungsreduktion durch gegenphasige Anregung technisch umsetzbar ist, soll nicht untersucht werden.

Diese Reduktion der Erschütterungen soll im Nahfeld und im Fernfeld wirksam sein.

Dazu wird um das Fundament eine ringförmige Struktur angebracht, die in verschiedene Segmente unterteilt ist. Diese Segmente können unabhängig voneinander bewegt werden und werden gegenphasig zu den vom Fundament verursachten Erschütterungen angeregt. Analog zur Funktionsweise sogenannter Noise cancelling Kopfhörer werden die vom Fundament hervorgerufenen Verschiebungen in den einzelnen Segmenten gemessen und diese mit einer zur Verschiebung umgekehrt proportionalen Kraft belastet. Die Erschütterungen des Fundaments werden somit außerhalb des Rings durch destruktive Interferenz aufgehoben. Da die Rayleigh-Wellen die größten Verschiebungen hervorrufen, wird das Verfahren zur Erschütterungsreduktion so konstruiert, dass sich hauptsächlich die durch Fundament und Segmente erzeugten Rayleigh-Wellen gegenphasig überlagern.

Die Erschütterungen müssen dabei nicht rund um die gesamte WEA reduziert werden, sondern nur in der Richtung, in der sich (erschütterungsempfindliche) Gebäude oder Seismometer befinden. Daher wird die Verschiebung im Folgenden nur an einem Punkt P betrachtet.

Die zur Erschütterungsreduktion am besten geeignete Konstellation aus Fundament und Ringsegmenten wird erreicht, wenn das Fundament geviertelt wird. Dabei werden nur die zwei Segmente benötigt, die auf der Achse vom betrachteten Punkt P und dem Fundament liegen (siehe Abbildung 10.1).

Das Fundament wird mit einem vertikalen, periodischen Kraft $F_F(t)$ über mehrere Perioden angeregt.

Bei der Vorgehensweise der gegenphasigen Anregung wird dabei zwischen dem Segment S_1 , das näher am betrachteten Punkt P liegt, und dem vom betrachteten Punkt P weiter entfernten Segment S_2 unterschieden.

Im Segment S_1 wird an dessen Schwerpunkt die vertikale Verschiebung u_z gemessen. Aus der durch das belastete Fundament im Segment S_1 ausgelösten vertikalen Verschiebung u_{z_F} wird gleichzeitig eine Kraft $F_{S_1}(t) = -C \cdot u_{z_F}$ berechnet, mit der das Segment S_1 belastet wird. Der Faktor $C = A_F / (A_{S_1} + A_{S_2}) \cdot c_1 / c(r, F_F)$ wird dabei aus der Fläche A_F des Fundaments, den Flächen A_{S_1} und A_{S_2} der Segmente sowie einem entfernungsabhängigen und von der Kraft F_F abhängigen Faktor $c(r, F_F)$, der vor der Anwendung bestimmt werden muss, berechnet. Der Faktor c_1 ist im Fernfeld $c_1 = 1$, da die Erschütterungen von Fundament und Segmenten gleich gewichtet werden. Im Nahfeld muss für eine optimale Erschütterungsreduktion die durch die Segmente erzeugte Verschiebung etwas kleiner sein

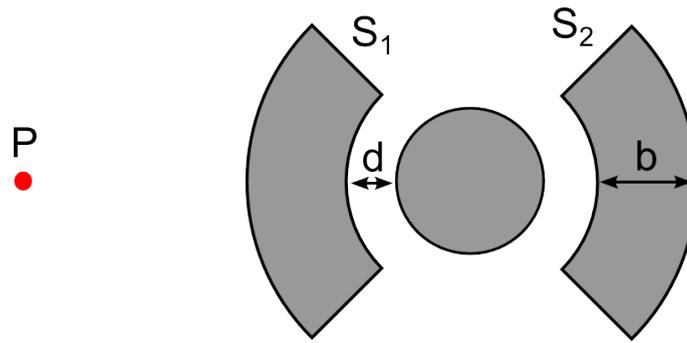


Abbildung 10.1.: Konstellation aus Fundament und zwei Ringsegmenten S_1 und S_2 mit Breite b und Abstand d zum Fundament zur Erschütterungsreduktion am Punkt P .

als die vom Fundament verursachte Verschiebung u_{z_F} und der Faktor beträgt $c_1 = 0,96$. Die im Fundament S_1 gemessene vertikale Verschiebung u_z setzt sich dabei zusammen aus der Verschiebung u_{z_F} , die durch das Fundament ausgelöst wird, und aus den durch Segment S_1 und Segment S_2 verursachten Verschiebungen $u_{z_{S_1}}$ und $u_{z_{S_2}}$. Da das Segment S_1 nur gegenphasig zum Fundament, jedoch keinesfalls zu den Segmenten angeregt werden soll, müssen von der gemessenen Verschiebung u_z die Verschiebungen $u_{z_{S_1}}$ und $u_{z_{S_2}}$ subtrahiert werden. Diese werden aus den bekannten Kräften F_{S_1} und F_{S_2} (siehe unten) berechnet.

Werden die durch die Segmente verursachten Verschiebungen $u_{z_{S_1}}$ und $u_{z_{S_2}}$ nicht von der gemessenen Verschiebung u_z im Segment S_1 subtrahiert, so dominiert die durch das Segment S_1 verursachte Verschiebung und das Segment wird im Wechsel gegenphasig zum Fundament und zu sich selbst angeregt. Die anregende Kraft und die dadurch verursachte Verschiebung oszillieren und wachsen exponentiell an.

Die von Fundament und von Segment S_1 verursachten Verschiebungen verlaufen somit gegenphasig und heben sich teilweise auf.

Um eine exakte Erschütterungsreduktion am Punkt P durch das Segment S_2 zu erzeugen, müsste dieses gegenphasig zum Fundament angeregt werden, bevor die Erschütterungen am Fundament verursacht werden. Da dies die Kausalität verletzt, wird das Segment S_2 mit einer Verzögerung von einer Periode zum Fundament angeregt. Dazu werden von der am Schwerpunkt des Segments S_2 gemessenen Verschiebung u_z die durch die Segmente S_1 und S_2 verursachte Verschiebungen $u_{z_{S_1}}$ und $u_{z_{S_2}}$ subtrahiert. So wird die durch das Fundament ausgelöste Verschiebung u_{z_F} am Schwerpunkt des Segments S_2 bestimmt. Mit einer zeitlichen Verzögerung $T - 2t_d$ (mit Periodendauer T und Laufzeit t_d der Rayleigh-Welle vom Fundament zum Segment S_2) wird das Segment S_2 mit einer Kraft $F_{S_2}(t) = -Cu_{z_F}$ belastet. Somit werden die durch das Fundament verursachten Erschütterungen nicht während der ersten Periode, aber für folgende Perioden gedämpft.

Bleiben Frequenz f_i und Amplitude F_0 der anregenden Kraft $F_F(t)$ konstant, so funktioniert diese Erschütterungsreduktion durch Segment S_2 gut. Ändert sich die Frequenz f_i der Belastung $F_F(t)$, so beträgt die Phasenverschiebung zwischen der durch das Fundament verursachten und der durch Segment S_2 verursachten Verschiebung nicht exakt 180° . Ändert sich die Amplitude der Kraft $F_F(t)$, so ist die durch das Segment S_2 verursachte Verschiebung zu groß oder zu klein, um die Verschiebung des Fundaments aufzuheben. In beiden Fällen wird eine Erschütterungsreduktion erreicht, für Signale mit konstanter Frequenz und Amplitude wird jedoch eine deutlich größere Reduktion der Erschütterungen erwartet.

Durch diese Vorgehensweise wird eine Erschütterungsreduktion auf der linken Seite des Segments S_1 bewirkt, an anderen Punkten rund um Fundament und Segment wird dadurch die Erschütterungen deutlich erhöht.

Die Erschütterungsreduktion wird für unterschiedliche Frequenzen f_i , unterschiedliche

Tabelle 10.1.: Phasenverschiebung φ_t zwischen der von Fundament und Segment S_2 verursachten Verschiebung u_{zF} und u_{zS_2} für unterschiedliche Anregungsfrequenzen f_i .

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
f in Hz	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8
φ_t in °	0,135	0,27	0,54	1,08	2,16	4,32	8,64

Abstände d zwischen Fundament und Ringsegmenten und unterschiedliche Breiten b der Segmente sowie im Nah- und Fernfeld betrachtet.

Bei der Variation der Breite b der Ringsegmente wird die effektivste Erschütterungsreduktion bei einer Breite $b = 2R = 20$ m erwartet, da dann die aus der Phasenverschiebung resultierende Interferenzmuster von Fundament und Segmenten nahezu identisch sind. Wird der Abstand d zwischen Fundament und Segment verändert, so werden die kleinsten Verschiebungen u_z für einen möglichst kurzen Abstand d erwartet, da dann eine quellennahe Erschütterungsreduktion stattfindet.

Betrachtet man die Verschiebungen u_z im Fernfeld, so wird erwartet, dass diese aufgrund der Erschütterungsreduktion kleiner sind als im Nahfeld. Die durch Fundament und Segmente ausgelösten Verschiebungen sind im Fernfeld im Gegensatz zum Nahfeld nahezu identisch.

Aufgrund der kurzen Rechenzeit wird eine semi-analytische Berechnung durchgeführt. Die räumliche Diskretisierung $\Delta x = 0,5$ m und die zeitliche Diskretisierung $\Delta t = 0,001$ s sind gleich wie in Kapitel 4.4.

Die Materialparameter des Bodens sind identisch zu den vorigen Berechnungen. Das Fundament wird mit einer vertikalen Kraft

$$F_F(t) = \begin{cases} F_0 \sin(2\pi f_i t), & t \leq 10T \\ 0, & t > 10T \end{cases}$$

mit $F_0 = 1$ kN und den Frequenzen $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz angeregt.

Abbildung 10.2 zeigt die Vertikalverschiebung u_z in einer Entfernung von $r = 100$ m vom Fundamentmittelpunkt bei gegenphasiger Anregung zweier Ringsegmente mit Breite $b = 20$ m und Abstand $d = 2$ m zum Fundament, das mit einer Kraft $F_F(t)$ mit $f_1 = 1/8$ Hz, $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz, $f_5 = 2$ Hz, $f_6 = 4$ Hz und $f_7 = 8$ Hz belastet wird.

Die dabei durch Fundament, Segment S_1 und Segment S_2 hervorgerufene Erschütterungen für $f_1 = 1/8$ Hz, $f_4 = 1$ Hz und $f_7 = 8$ Hz, aus der die Verschiebung u_z zusammengesetzt ist, sind in Abbildung 10.3 abgebildet.

Erwartungsgemäß funktioniert die Erschütterungsreduktion durch gegenphasige Anregung für kleine Frequenzen besser als für große Frequenzen. Während der ersten Periode werden die Erschütterungen des Fundament nur durch das Segment S_1 verringert, während der letzten Periode wird die Verschiebung allein durch das Segment S_2 verursacht.

Für die Frequenz $f_1 = 1/8$ Hz können die Vertikalverschiebungen u_z der Rayleigh-Welle um 99,8% von $2,10 \mu\text{m}$ auf $3,85$ nm reduziert werden. Für die Anregungsfrequenz $f_4 = 1$ Hz werden die Verschiebungen der Rayleigh-Welle von $2,39 \mu\text{m}$ auf $31,3$ nm gedämpft, dies entspricht 98,6%. Für die Frequenz $f_7 = 8$ Hz findet eine Erschütterungsreduktion um 78,6% von $1,97 \mu\text{m}$ auf $0,42 \mu\text{m}$ statt. Mit abnehmender Frequenz f_i nimmt die Amplitude der Verschiebung u_z ab.

Mit zunehmender Anregungsfrequenz f_i nimmt auch die Amplitude der P-Welle und der S-Welle in der Verschiebung u_z zu. Diese werden aufgrund der verzögerten Anregung von Segment S_2 nur durch Segment S_1 gedämpft. Da die durch das Fundament hervorgerufene Verschiebung der P- und S-Welle u_{zF} mit zunehmender Frequenz ansteigt, nimmt somit auch die gedämpfte Verschiebung u_z mit steigender Frequenz f_i zu.

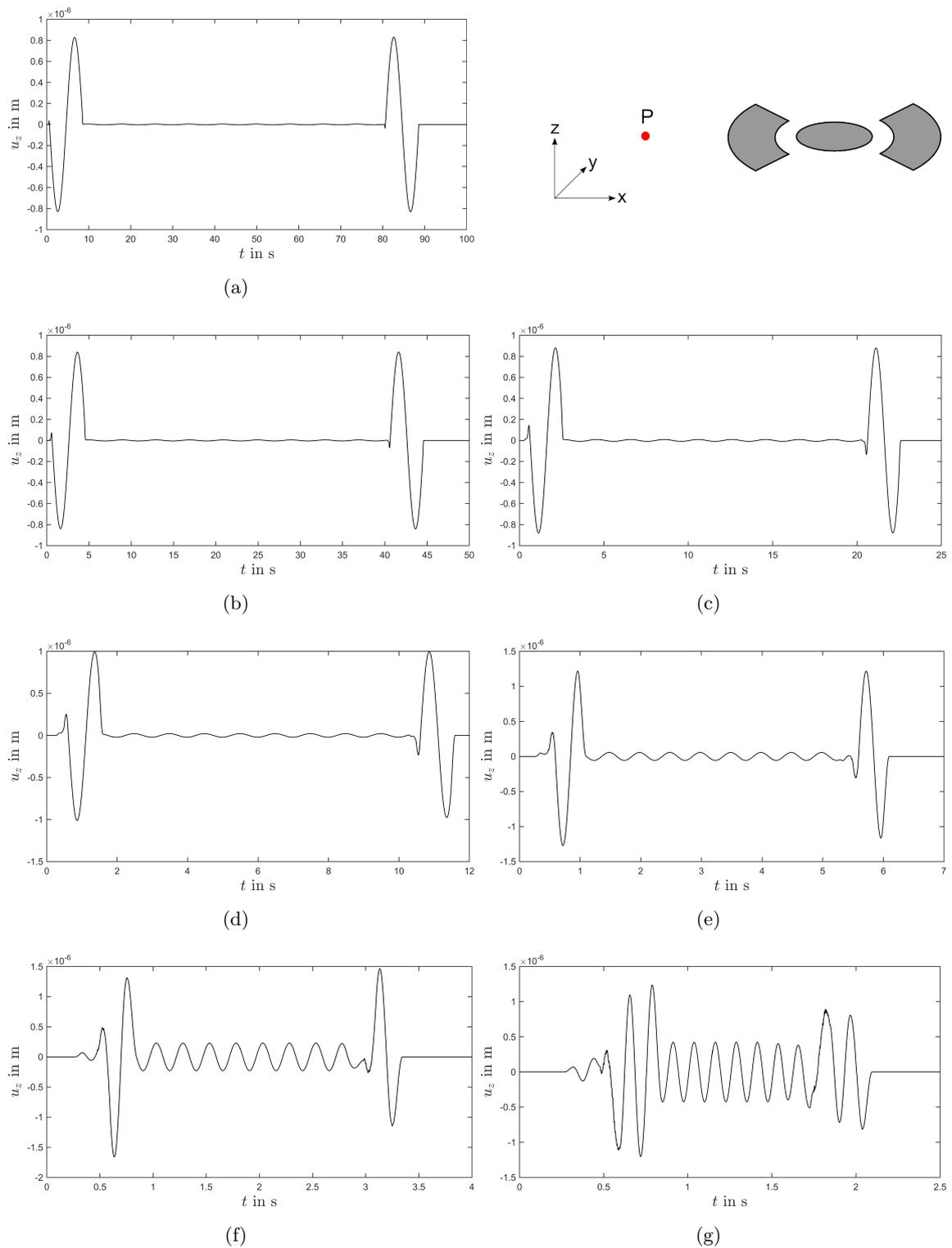


Abbildung 10.2.: Vertikalverschiebung u_z in einer Entfernung von $r = 100$ m bei gegenphasiger, vertikaler Anregung zweier Ringsegmente mit Breite $b = 20$ m und Abstand $d = 2$ m zum Fundament. Das Fundament wird dabei mit $F(t) = F_0 \sin(2\pi f_i t)$ mit $f_1 = 1/8$ Hz (a), $f_2 = 1/4$ Hz (b), $f_3 = 1/2$ Hz (c), $f_4 = 1$ Hz (d), $f_5 = 2$ Hz (e), $f_6 = 4$ Hz (f), $f_7 = 8$ Hz (g) angeregt.

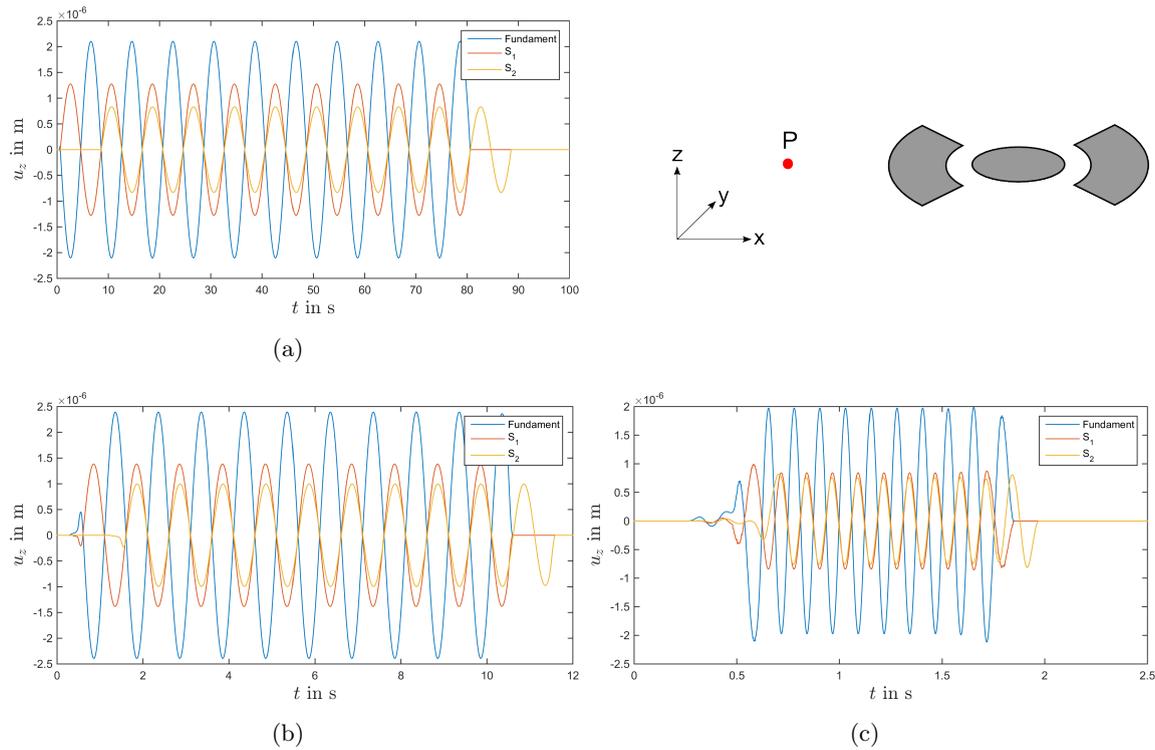


Abbildung 10.3.: Durch Fundament, Segment S_1 und Segment S_2 hervorgerufene Verschiebungen u_{zF} , u_{zS_1} und u_{zS_2} in einer Entfernung $r = 100$ m bei gegenphasiger, vertikaler Anregung der Segmente mit Breite $b = 20$ m und Abstand $d = 2$ m zum Fundament.

Die frequenzabhängige Amplitude der Verschiebung u_z ergibt sich aus der Phasenverschiebung φ_t zwischen der durch das Fundament und durch die Segmente S_1 und S_2 hervorgerufenen Verschiebung u_{zF} , u_{zS_1} und u_{zS_2} , die ebenfalls frequenzabhängig ist. Zwischen den Maxima der Verschiebung u_{zF} und der Minima der Verschiebung u_{zS_2} besteht für alle Anregungsfrequenzen f_i eine zeitliche Differenz $\Delta t = 3$ ms. Die daraus berechneten Phasenverschiebungen $\varphi_t = \Delta t/T \cdot 360^\circ$ für die Frequenzen f_i sind in Tabelle 10.1 eingetragen. Mit zunehmender Frequenz wird die Phasenverschiebung φ_t größer und wird somit relevant. Die Phasenverschiebung $\varphi_t = 0, 135^\circ$ für $f_1 = 1/8$ Hz ist vernachlässigbar klein. Daher verlaufen die Erschütterungen der Segmente exakt gegenphasig zu den Erschütterungen des Fundaments und werden durch destruktive Interferenz aufgehoben. Für $f_4 = 1$ Hz beträgt die Phasenverschiebung $\varphi_t = 1,08^\circ$. Trotz dieser Phasenverschiebung werden die Verschiebungen u_{zF} des Fundaments deutlich reduziert. Mit $\varphi_t = 8,64^\circ$ ist die Phasenverschiebung für die Frequenz $f_7 = 8$ Hz relevant und kann nicht vernachlässigt werden. Die Verschiebungen werden trotzdem um nahezu 79% gedämpft und somit wird eine wirksame Erschütterungsreduktion erreicht.

Abbildung 10.4 zeigt die Vertikalverschiebung u_z in einer Entfernung von $r = 100$ m vom Fundamentmittelpunkt bei gegenphasiger Anregung zweier Ringsegmente mit Breite $b = 5$ m und Abstand $d = 2$ m zum Fundament, das mit einer Kraft $F_F(t)$ mit $f_1 = 1/8$ Hz, $f_4 = 1$ Hz und $f_7 = 8$ Hz belastet wird.

Abbildung 10.5 zeigt die Vertikalverschiebung u_z in einer Entfernung von $r = 100$ m vom Fundamentmittelpunkt bei gegenphasiger Anregung zweier Ringsegmente mit Breite $b = 20$ m und Abstand $d = 10$ m zum Fundament für $f_1 = 1/8$ Hz, $f_4 = 1$ Hz und $f_7 = 8$ Hz.

Abbildung 10.6 zeigt die Vertikalverschiebung u_z im Fernfeld ($r = 1000$ m) bei gegenphasiger Anregung zweier Ringsegmente mit Breite $b = 20$ m und Abstand $d = 2$ m zum Fundament für $f_1 = 1/8$ Hz, $f_4 = 1$ Hz und $f_7 = 8$ Hz.

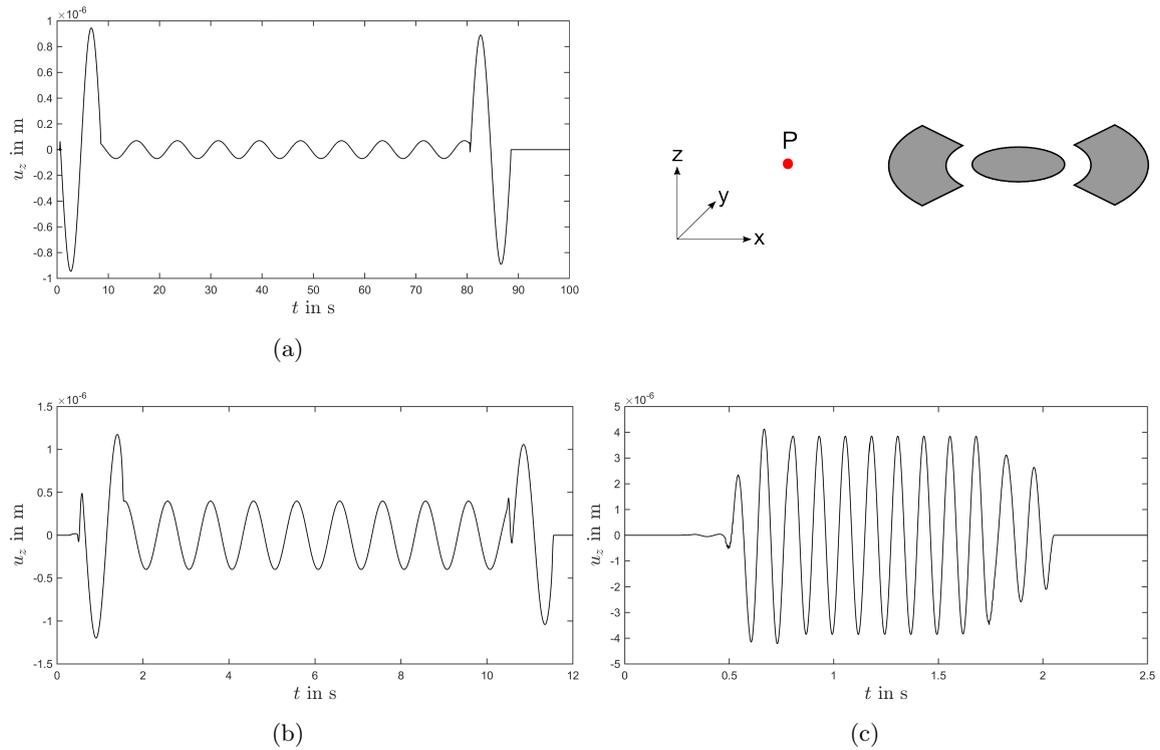


Abbildung 10.4.: Vertikalverschiebung u_z in einer Entfernung von $r = 100$ m bei gegenphasiger, vertikaler Anregung zweier Ringsegmente mit Breite $b = 5$ m und Abstand $d = 2$ m zum Fundament. Das Fundament wird dabei mit $F(t) = F_0 \sin(2\pi f_i t)$ mit $f_1 = 1/8$ Hz (a), $f_4 = 1$ Hz (b) und $f_7 = 8$ Hz (c) angeregt.

Die Verschiebungen u_z für die Anregungsfrequenzen $f_2 = 1/4$ Hz, $f_3 = 1/2$ Hz, $f_5 = 2$ Hz und $f_6 = 4$ Hz sind im Anhang in den Abbildungen A.3, A.4 und A.5 abgebildet.

Durch den Vergleich der Verschiebung u_z im Nahfeld ($r = 100$ m) mit $b = 20$ m und $d = 2$ m wird der Einfluss der Breite b der Segmente, des Abstands d vom Fundament und des Nah- und Fernfelds untersucht.

Bei einer Breite der Segmente von $b = 5$ m beträgt die Verschiebung u_z für $f_1 = 1/8$ Hz $u_z = 69$ nm, für $f_4 = 1$ Hz ist $u_z = 0,40$ μ m und für $f_7 = 8$ Hz beträgt die Verschiebung $u_z = 3,85$ μ m. Dies entspricht einer Erschütterungsreduktion um 96,7% (für $f_1 = 1/8$ Hz), 83,3% ($f_4 = 1$ Hz) und -95,4% ($f_7 = 8$ Hz). Für $f_i \leq 2$ Hz werden die Verschiebungen des Fundaments durch gegenphasige Anregung der Segmente reduziert, jedoch funktioniert diese Reduktion für die Breite $b = 20$ m wesentlich besser. Für Anregungsfrequenzen $f_i \geq 4$ Hz werden die durch das Fundament hervorgerufene Verschiebungen durch die gegenphasige Anregung sogar durch konstruktive Interferenz verstärkt, für die Frequenz f_7 verdoppelt sich die Verschiebungen fast. Damit wird das Gegenteil des gewünschten Effekts erreicht. Da die Breite $b = 20$ m dem Durchmesser $2R = 20$ m des Fundaments entspricht, entsteht durch die Belastung von Fundament und Segment nahezu das gleiche Interferenzmuster aufgrund der Phasenverschiebung φ . Somit funktioniert die Auslöschung der Verschiebungen durch destruktive Interferenz für eine Breite von $b = 20$ m am besten.

Wird der Abstand zwischen Fundament und den Segmenten von $d = 2$ m auf $d = 10$ m vergrößert, so vergrößern sich auch die Verschiebungen u_z , die aus Überlagerung der Erschütterungen des Fundaments und der Segmente entstehen. Für $f_1 = 1/8$ Hz wird die Verschiebung u_z um 96,6% auf $u_z = 71,21$ nm reduziert. Für $f_4 = 1$ Hz beträgt die Verschiebung $u_z = 0,14$ μ m, dies entspricht einer Reduktion um 94,1%. Bei einer Frequenz $f_7 = 8$ Hz werden die Erschütterungen um 39,6% auf $u_z = 1,19$ μ m reduziert. Auch wenn die Verschiebungen u_z für den Abstand $d = 10$ m im Vergleich zu $d = 2$ m größer sind, so

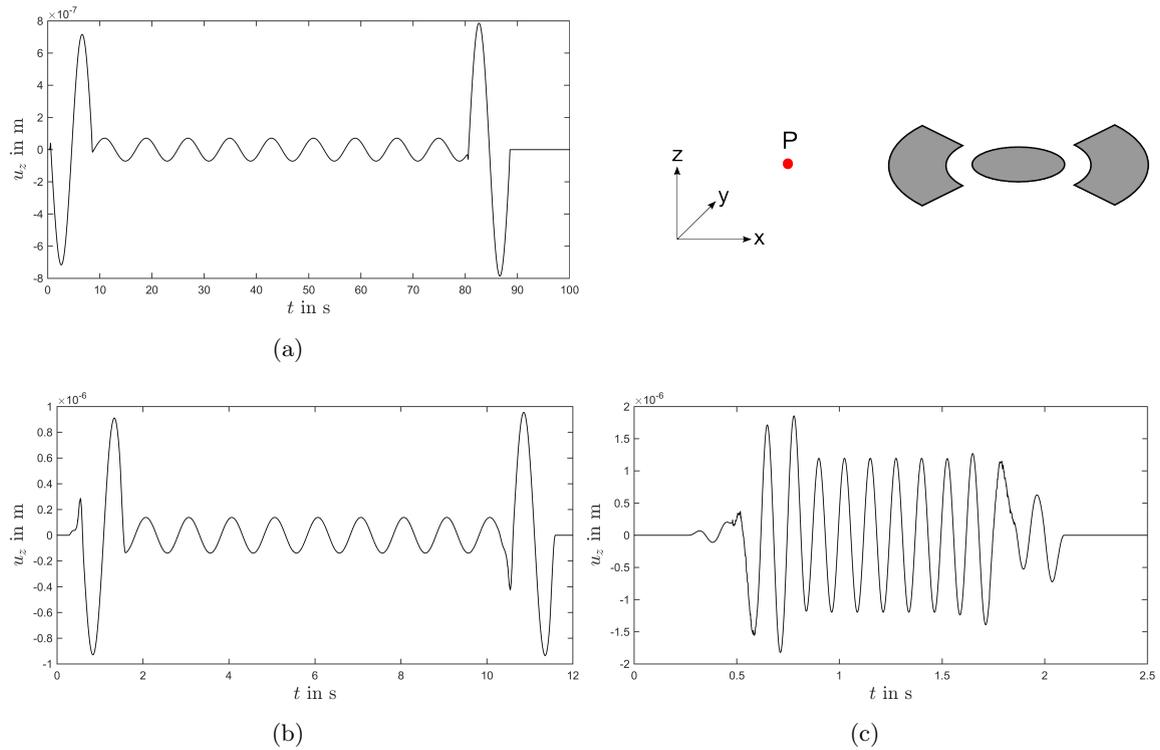


Abbildung 10.5.: Vertikalverschiebung u_z in einer Entfernung von $r = 100$ m bei gegenphasiger, vertikaler Anregung zweier Ringsegmente mit Breite $b = 20$ m und Abstand $d = 10$ m zum Fundament. Das Fundament wird dabei mit $F(t) = F_0 \sin(2\pi f_i t)$ mit $f_1 = 1/8$ Hz (a), $f_4 = 1$ Hz (b) und $f_7 = 8$ Hz (c) angeregt.

findet dennoch eine Reduktion für alle Frequenzen f_i statt. Je näher die Segmente am Fundament platziert sind, desto ähnlicher sind die Greenschen Funktionen des Fundaments und der Segmente und desto besser funktioniert die destruktive Interferenz. Mit zunehmender Entfernung d der Segmente nimmt zudem der Winkel um das Fundament, in dem die Erschütterungen durch gegenphasige Anregung reduziert werden, ab. Außerdem ist es aufgrund der Überlagerung P-Welle und Rayleigh-Welle schwieriger, die gegenphasige Anregung auszuführen. Die Erschütterungsreduktion durch das Segment S_2 kann für große Frequenzen zu Beginn der Fundamentbelastung über mehrere Perioden nicht ausgeführt werden.

Eine Erschütterungsreduktion nahe der Quelle ist also zum einen effektiver, da die Verschiebungen besser gedämpft werden können, und zum anderen können so die Erschütterungen in einem größeren Bereich reduziert werden.

Die Erschütterungen u_z im Fernfeld sind zum einen aufgrund des geometrischen Ausbreitungsverlusts kleiner, zum anderen funktioniert die destruktive Interferenz der durch das Fundament und die Segmenten ausgelösten Verschiebungen im Fernfeld besser. Während im Nahfeld ($r \ll \lambda$) die Greenschen Funktionen von Fundament, Segment S_1 und Segment S_2 sehr unterschiedlich sind, gleichen sich diese mit zunehmender Entfernung r immer mehr an und sind im Fernfeld ($r \gg \lambda$) nahezu identisch. Dadurch ist eine exakte destruktive Interferenz im Gegensatz zum Nahfeld möglich.

In einer Entfernung von $r = 1000$ m (mit einer Breite $b = 20$ m und einem Abstand $d = 2$ m) beträgt die Verschiebung u_z für die Frequenz $f_1 = 1/8$ Hz $u_z = 2,85$ nm. Für eine Frequenz $f_4 = 1$ Hz ist die Verschiebung mit $u_z = 28,95$ nm größer, für $f_7 = 8$ Hz ist die Verschiebung $u_z = 115,35$ nm noch stärker. Dabei wird in einer Entfernung $r = 1000$ m für die Frequenzen $f_i = 1 - 8$ Hz das Fernfeld betrachtet, für Frequenzen $f_i = 1/8 - 1/2$ Hz liegt der beobachtete Punkt nicht im Fernfeld. Die Verschiebungen u_z werden dabei für alle Anregungsfrequenzen

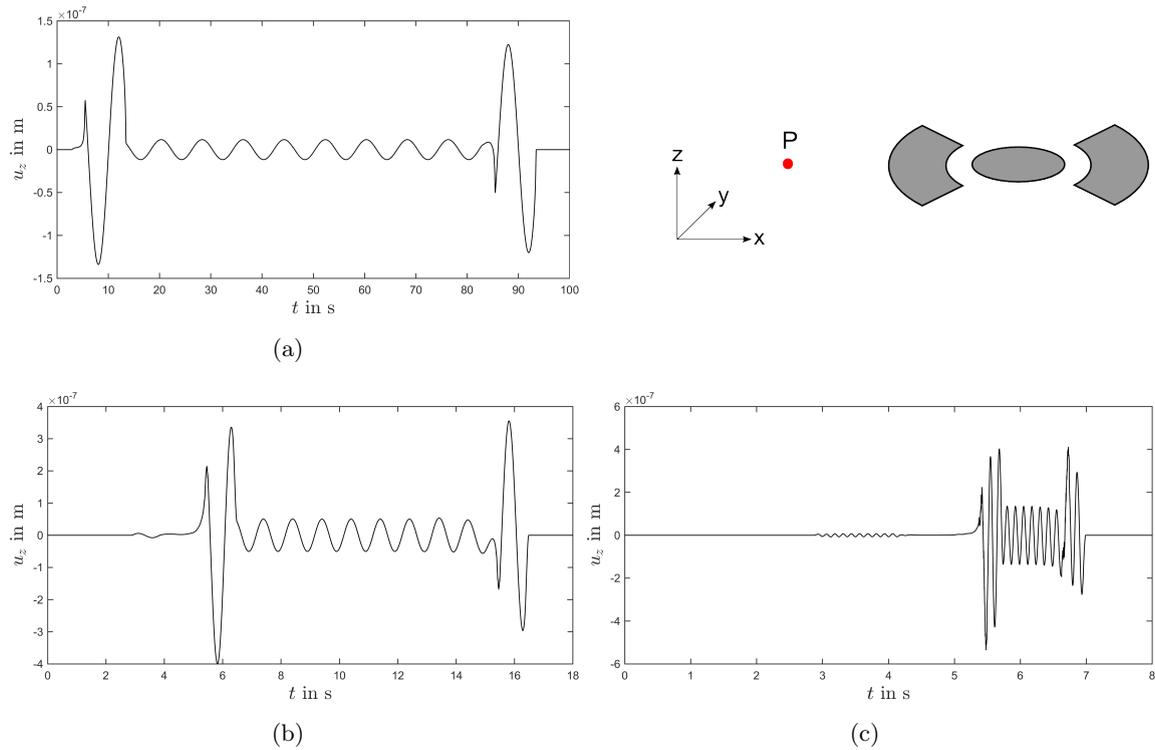


Abbildung 10.6.: Vertikalverschiebung u_z in einer Entfernung von $r = 1000$ m bei gegenphasiger, vertikaler Anregung zweier Ringsegmente mit Breite $b = 20$ m und Abstand $d = 2$ m zum Fundament. Das Fundament wird dabei mit $F(t) = F_0 \sin(2\pi f_i t)$ mit $f_1 = 1/8$ Hz (a), $f_4 = 1$ Hz (b) und $f_7 = 8$ Hz (c) angeregt.

f_i reduziert und sind im Vergleich zu den Erschütterungen im Nahfeld erwartungsgemäß etwas kleiner. Die Erschütterungen werden im Fernfeld für die Frequenzen f_1 , f_4 und f_7 um 99,9%, 98,8% und 94,1% reduziert, wobei dabei auch der geometrische Ausbreitungsverlust relevant ist. Für die Frequenz $f_7 = 8$ Hz sind die Verschiebungen der P-Welle sehr gut zu erkennen. Diese betragen $u_z = 6,82$ nm.

Da bei einer real existierenden WEA die Frequenz f_i der anregenden Kraft $F_F(t)$ aufgrund der Windgeschwindigkeiten nicht konstant ist, wird die Erschütterungsreduktion nun bei variabler Frequenz $f_8(t)$ der Kraft $F_F(t)$ untersucht. Die Frequenz $f_8(t)$ steigt dabei linear von 0,125 Hz auf 0,181 Hz an.

Abbildung 10.7(a) zeigt die Vertikalverschiebung u_z in einer Entfernung von $r = 100$ m vom Fundamentmittelpunkt bei gegenphasiger Anregung zweier Ringsegmente mit Breite $b = 20$ m und Abstand $d = 2$ m zum Fundament, das mit einer Kraft $F_F(t)$ mit der Frequenz $f_8(t)$ belastet wird.

Die dabei durch Fundament, Segment S_1 und Segment S_2 hervorgerufene Erschütterungen, aus der die Verschiebung u_z zusammengesetzt ist, sind in Abbildung 10.7(b) abgebildet. Die Vertikalverschiebung u_z nimmt mit zunehmender Frequenz zunächst zu, dann wieder ab. Diese Zeitabhängigkeit der Amplitude entsteht durch die Überlagerung der Verschiebung des Fundaments und des Segments S_2 . Dieses Segment wird wie oben beschrieben mit einer Verzögerung von einer Periode zum Fundament angeregt. Somit ist die Frequenz der Kraft $F_{S_2}(t)$ im Vergleich zur Kraft $F_F(t)$ bei zunehmender Frequenz zu einem bestimmten Zeitpunkt immer kleiner. Durch die Überlagerung zweier verschiedener Frequenzen entsteht das beobachtete Interferenzmuster mit der zu- und abnehmenden Amplitude. Trotz diesem Wechsel aus destruktiver und konstruktiver Interferenz werden die Erschütterungen für den gesamten Frequenzbereich reduziert. Die Verschiebungen u_z können von $2,10$ μm auf $u_z = 0,44 - 1,67$ μm verringert werden.

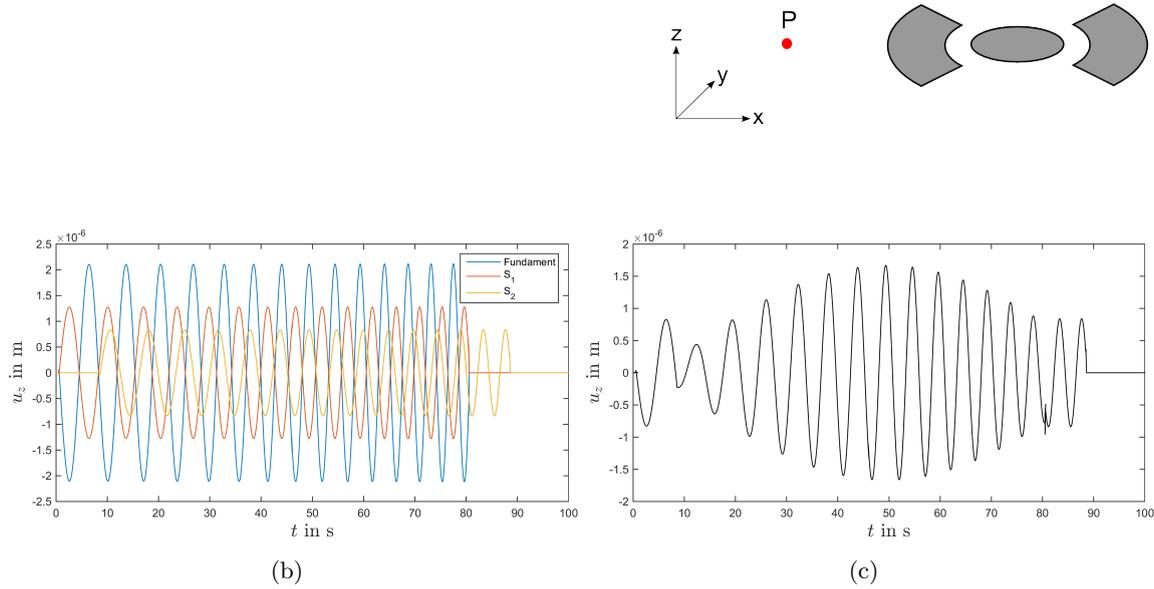


Abbildung 10.7.: Vertikalverschiebung u_z in einer Entfernung von $r = 100$ m bei gegenphasiger, vertikaler Anregung zweier Ringsegmente mit Breite $b = 20$ m und Abstand $d = 2$ m zum Fundament. Das Fundament wird dabei mit $F(t) = F_0 \sin(2\pi f_i t)$ mit $f_s = 0,125 - 0,181$ Hz angeregt. Abbildung (a) zeigt die durch Fundament und Segmente verursachte Verschiebung u_{zF} , u_{zS_1} und u_{zS_2} , Abbildung (b) zeigt die resultierende Verschiebung u_z .

Zusammenfassend ist die Erschütterungsreduktion durch gegenphasige Anregung von Ringsegmenten, die um das Fundament angeordnet sind, grundsätzlich möglich. Die dazu am besten geeignete Konstellation besteht aus zwei Segmenten, die jeweils einem Viertel eines Rings entsprechen und gegenüberliegend um das Fundament angeordnet sind. Die größte Erschütterungsreduktion von mindestens 99,4% findet im Fernfeld statt, da mit zunehmender Entfernung die Greenschen Funktionen von Fundament und Segmenten ähnlicher werden. Im Nahfeld wird die bestmögliche Erschütterungsreduktion von mindestens 78,6% bei einem möglichst kleinen Abstand d zwischen Fundament und Segment und einer Breite $b = 2R$ der Segmente, die dem Durchmesser des Fundaments entspricht, erreicht. Auch für ein Signal, dessen Frequenz variiert, ist eine Erschütterungsreduktion möglich. Für eine konstante Anregungsfrequenz funktioniert die Reduktion jedoch besser.

11. Einfluss der Variation der elastischen Parameter

Um den Einfluss der Materialparameter des Halbraums wie der Dichte ρ , des Schubmoduls G und der Poisson-Zahl ν zu untersuchen, wird zunächst eine Variation dieser Parameter im homogenen, isotropen, linear elastischen Halbraum diskutiert. Dann wird eine ortsabhängige Variation dieser Parameter betrachtet, die zur Untersuchung eines realen Bodens und bei der Bodenverbesserung im Fundamentbereich notwendig sind.

Wird in einem homogenen, isotropen, linear elastischen Halbraum der Schubmodul G verändert, so werden dadurch sowohl die Wellengeschwindigkeiten der P-Welle c_p , der S-Welle c_s und der Rayleigh-Welle c_R als auch die Amplitude der Verschiebungen u_z und u_x beeinflusst. Bei einer Vergrößerung des Schubmoduls G um Faktor zwei vergrößern sich auch die seismischen Geschwindigkeiten der P-Welle und der S-Welle

$$c_p = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}G}{\rho}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} + \frac{4}{3}\right)G}{\rho}}, \quad c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (11.1)$$

um den Faktor $\sqrt{2}$. Dabei ist K der Kompressionsmodul des Halbraums. Bei einer Halbierung des Schubmoduls G werden die Wellengeschwindigkeiten c_p und c_s um den Faktor $1/\sqrt{2}$ verkleinert.

Die Amplitude der Vertikalverschiebung u_z und der Horizontalverschiebung u_x bei vertikaler Belastung wird nach Formel (3.7) und (3.8) durch den Faktor

$$u_z(\tau) = \frac{F_0}{\pi Gr} \cdot u_{z1}(\tau), \quad u_x(\tau) = \frac{F_0 \tau}{\pi^2 Gr} \cdot u_{x1}(\tau)$$

bestimmt. Bei einer Verdoppelung des Schubmoduls halbiert sich die Amplitude der Verschiebungen u_z und u_x . Bei einer Halbierung des Schubmoduls G vergrößert sich die Amplitude der Verschiebungen u_z und u_x um Faktor zwei.

Wird die Dichte ρ des Halbraums verändert und dabei der gewählte Schubmodul G beibehalten (durch Verwendung eines anderen Materials), so werden die Geschwindigkeiten c_p und c_s nach Formel 11.1 bei einer Verdoppelung der Dichte ρ um den Faktor $1/\sqrt{2}$ langsamer. Bei einer Reduktion der Dichte um Faktor zwei würden sich die Geschwindigkeiten um den Faktor $\sqrt{2}$ erhöhen.

Wird die Dichte des Materials durch Kompression erhöht, so verändert sich bei dieser Variation der Lagerungsdichte ρ auch der Schubmodul, da dieser von der Porenzahl e abhängt (siehe Kapitel 3.2). Die Änderung des Schubmoduls G aufgrund der Änderung der Dichte ρ ist dabei stärker als die Änderung der Dichte ρ selbst. Bei einer Vergrößerung der Dichte ρ wird auch der Schubmodul G und somit die seismischen Geschwindigkeiten c_p und c_s vergrößert.

Die Poissonzahl ν gibt das Verhältnis $\nu = -\frac{\Delta d/d}{\Delta l/l}$ von Änderung der Breite Δd zu ursprünglicher Breite d und Änderung der Länge Δl zu ursprünglicher Länge l bei Dehnung einer Probe an. Wird diese auf $\nu = 0,5$ erhöht, so bleibt das Volumen der Probe während der

Dehnung konstant. Für $\nu < 0,5$ nimmt das Volumen der Probe zu, wenn diese auseinandergezogen wird. Dadurch ändert sich also die Dichte ρ des Materials.

Bei Änderung der Poissonzahl ν ändert sich das Verhältnis c_p/c_s der seismischen Geschwindigkeiten von P-Welle und S-Welle. Dieses lautet mit Formel 11.1:

$$\frac{c_p}{c_s} = \sqrt{\frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} + \frac{4}{3}}$$

Für $\nu = 0,25$ beträgt dieses $c_p/c_s = \sqrt{3}$. Für $0,25 < \nu < 0,5$ vergrößert sich dieses Verhältnis und die P-Wellengeschwindigkeit nimmt bei konstanter S-Wellengeschwindigkeit zu. Für $0,25 > \nu > 0$ wird das Verhältnis c_p/c_s kleiner und die P-Wellengeschwindigkeit c_p nimmt ab. Für $\nu = 0$ wird das Verhältnis der Geschwindigkeiten minimal und beträgt $c_p/c_s = \sqrt{2}$.

In realen Böden nimmt der mittlere Druck \bar{p} aufgrund der Gravitation mit der Tiefe z zu. Durch die Abhängigkeit des Schubmoduls G vom mittleren Druck \bar{p} (siehe Kapitel 3.2) nimmt dieses mit zunehmender Tiefe z des Halbraums ebenfalls zu, wodurch die seismischen Geschwindigkeiten c_p und c_s mit der Tiefe z ansteigen.

Durch die Zunahme des mittleren Drucks \bar{p} nimmt auch die Dichte ρ mit der Tiefe z zu. Daraus folgt eine Abnahme der Porenzahl e mit der Tiefe, die eine Zunahme des Schubmoduls G bewirkt (siehe Kapitel 3.2). Nun wird untersucht, ob die Zunahme des Schubmoduls G oder die Zunahme der Dichte ρ maßgebend für die seismischen Geschwindigkeiten c_p und c_s ist, also ob die Geschwindigkeiten mit der Tiefe zunehmen oder abnehmen.

Die Porenzahl ist definiert durch die Trockendichte ρ_d und die Korndichte ρ_s :

$$e = \frac{\rho_s}{\rho_d} - 1$$

Bei einer Zunahme der Trockendichte ρ_d um 25% nimmt die Porenzahl e aufgrund der Nichtlinearität um wesentlich mehr als 25% ab. Der Schubmodul G verhält sich näherungsweise umgekehrt proportional zur Porenzahl e (vergleiche Abbildung 3.3(c)). Nimmt also die Dichte ρ aufgrund des mittleren Drucks \bar{p} mit der Tiefe zu, so nimmt der Schubmodul G um ein Vielfaches zu. Die seismischen Geschwindigkeiten c_p und c_s nehmen daher ebenfalls mit der Tiefe zu.

Durch diese tiefenabhängige Geschwindigkeitsverteilung werden die Rayleigh-Wellen dispersiv. Die Eindringtiefe $z = 0,19 \cdot \lambda_R$ [Cla16, S.68] der Rayleigh-Wellen ist abhängig von ihrer Wellenlänge λ_R . Da Rayleigh-Wellen mit kleiner Frequenz tiefer eindringen als hochfrequente Rayleigh-Wellen und die Geschwindigkeit c_R mit der Tiefe z zunimmt, nimmt die Geschwindigkeit der Rayleigh-Wellen mit zunehmender Frequenz ab.

Zudem können Schichtungen im Halbraum auftreten, die sich durch unterschiedliches Material und somit durch unterschiedliche elastische Parameter unterscheiden. Einzelne Schichten können auch wassergesättigt sein. Damit sind die seismischen Geschwindigkeiten c_p und c_s in den jeweiligen Schichten verschieden. Diese nehmen in der Regel aufgrund des anwachsenden Schubmoduls G mit zunehmender Tiefe z zu. An den Schichtgrenzen können durch die unterschiedliche seismische Impedanz $I_p = \rho c_p$ und $I_s = \rho c_s$ Reflexionen auftreten, die zu weiteren Erschütterungen an der Oberfläche des Halbraums führen. Auch werden Wellen an Schichtgrenzen unter Brechung in die darunter liegende Schicht transmittiert, wobei der Brechungswinkel α_2 durch das Brechungsgesetz nach Snellius $c_1 \sin(\alpha_2) = c_2 \sin(\alpha_1)$ gegeben ist. Durch Reflexionen an Schichtgrenzen oder an anderen Inhomogenitäten im Untergrund ist die vertikale Belastung eines runden Fundaments kein radialsymmetrisches Problem mehr. Die Verschiebungen müssen somit an jedem gewünschten Punkt berechnet werden und das Modell muss nicht nur ein Viertel, sondern den gesamten Halbraum darstellen.

Auch durch Bodenverbesserung im Fundamentbereich werden die Dichte ρ und der Schubmodul G lokal verändert. Um die Tragfähigkeit des Untergrunds zu verbessern, kann entweder die Scherfestigkeit oder die Dichte ρ erhöht werden. Eine Vergrößerung des Schubmoduls G wird durch Bodenverfestigung erreicht, indem beispielsweise Zement in den Untergrund gemischt wird. Eine Erhöhung der Dichte ρ kann durch Verdichtung mithilfe einer Walze erreicht werden. Zudem kann ein Bodenaustausch vorgenommen werden.

Durch diese Maßnahmen werden Setzungen unter dem Fundament reduziert. Durch die Vergrößerung des Schubmoduls G wird die Amplitude der Verschiebungen u_z und u_x im Fundamentbereich verkleinert und so die Erschütterungen reduziert.

Bodenverbesserungen im Fundamentbereich können bis in eine Tiefe von $z = 20$ m durchgeführt werden. Für kleine Anregungsfrequenzen $f_1 = 1/8$ Hz ist diese Tiefe sehr klein gegenüber der Wellenlänge der S-Welle $\lambda_s = 1600$ m. Für Anregungen in diesem Frequenzbereich ist eine Bodenverbesserung in einer Tiefe von $z = 20$ m - wie die Ausdehnung des Fundaments - nicht relevant und verhält sich ähnlich wie ein Fundament, das bis in eine Tiefe $z = 20$ m reicht. Für Frequenzen $f_7 = 8$ Hz ist die Tiefe z der Bodenverbesserung im Vergleich zur Wellenlänge $\lambda_s = 25$ m etwa gleich groß und somit relevant. Durch die veränderten Parameter im Fundamentbereich entsteht am Übergang zum unveränderten Bereich eine Schichtgrenze, an der Reflexionen stattfinden und Wellen in den unveränderten Halbraum gebrochen werden können.

12. Zusammenfassung

Die durch ein belastetes schlaffes Fundament verursachte Vertikal- und Horizontalverschiebung u_z und u_x an der Oberfläche eines unendlich ausgedehnten, homogenen, isotropen, linear elastischen Halbraums wurden semi-analytisch und numerisch mit der Finite-Elemente-Methode (FEM) und mit der Boundary-Elemente-Methode (BEM) für Anregungsfrequenzen $f_i = 1/8 - 8$ Hz berechnet. Die Randbedingungen, die zur Modellierung eines unendlich ausgedehnten Halbraums benötigt werden, beeinflussen teilweise die Ergebnisse der Simulation.

Bei der semi-analytischen Berechnung sind die Randbedingungen exakt und die berechneten Verschiebungen werden nicht beeinflusst.

Bei der Simulation mithilfe der FEM verändern die Randbedingungen nach Lysmer die berechneten Vertikalverschiebungen u_z für Anregungsfrequenzen $f_i \leq 1/2$ Hz mit einem Fehler bis zu 80%. Dieser Einfluss der Randbedingungen ist abhängig von der Tiefe z des Modells. Die Verschiebung u_z im Innern und an der Oberfläche des Halbraums setzt sich dabei zusammen aus der aufgrund der Trägheitskraft F_m durch die Belastung des Fundaments verursachten Verschiebung u_{zF} und der aufgrund der Dämpfungskraft F_d am Dämpfer verursachten Verschiebung u_{zD} . Durch die Antwortfunktion des Halbraums $T(\omega)$ ist beschrieben, dass der Einfluss der Dämpfungskraft F_d mit abnehmender Frequenz f_i und der Einfluss der Trägheitskraft F_m mit zunehmender Frequenz f_i steigt. Somit sind die Vertikalverschiebungen u_z für Frequenzen $f_i \geq 1$ Hz kaum von den Lysmer-Randbedingungen beeinflusst, für Frequenzen $f_i \leq 1/2$ Hz werden die Verschiebungen u_z durch diese Randbedingungen verändert.

Die Horizontalverschiebungen u_x werden durch die Lysmer-Bedingungen nicht beeinflusst. Treffen Wellen mit einem Winkel von $\alpha = 45^\circ$ auf die infiniten Elemente, in denen die Lysmer-Randbedingungen eingebaut sind, so finden Reflexionen statt. Die Lysmer-Randbedingungen sind also nur unzureichend genau und verfälschen zusätzlich die berechneten Vertikalverschiebungen u_z . Dies kann durch Subtraktion der Verschiebung u_{zD} am Dämpfer korrigiert werden. Wird ein Modell mit festen Randbedingungen erstellt und die Entfernung vom beobachteten Bereich zum Rand des Modells so groß gewählt, dass keine Reflexionen beobachtet werden, können die Verschiebungen u_z und u_x exakter und mit weniger Rechenzeit bestimmt werden.

Bei der Simulation mithilfe der BEM sind die Randbedingungen nicht exakt, die Genauigkeit ist jedoch für Anwendungen ausreichend.

Insgesamt stimmen die semi-analytisch und numerisch berechneten Verschiebungen für einen Frequenzbereich von $f_i = 1 - 2$ Hz im Rahmen einer Genauigkeit von 10% überein. Wird der Einfluss der Lysmer-Bedingungen bei der FEM eliminiert, stimmen die Verschiebungen auch für Frequenzen $f_i < 1$ Hz überein. Um eine Übereinstimmung für Frequenzen $f_i \geq 4$ Hz zu erreichen, muss bei der FEM die räumliche und zeitliche Diskretisierung verfeinert werden und bei der BEM der threshold herabgesetzt werden.

Die semi-analytische Lösung ist für die Berechnung von Verschiebungen an der Oberfläche eines homogenen, isotropen, linear elastischen Halbraums aufgrund der kurzen Rechenzeit

geeignet. Mithilfe der FEM können die Verschiebungen auch in einem inhomogenen, anisotropen, nicht linear elastischen Boden bestimmt werden. Die BEM eignet sich bei periodischen, unendlich andauernden Anregungen an der Oberfläche eines homogenen, isotropen, linear elastischen Halbraums.

Für Frequenzen $f_i \geq 1$ Hz ist die Ausdehnung des Fundaments relevant, da der Fundamentradius R gegenüber der Wellenlänge λ nicht vernachlässigt werden kann. Durch die Phasenverschiebung φ der Wellen, die an unterschiedlichen Punkten des Fundaments erzeugt werden, wird die Dauer der Verschiebung auf $T + \Delta t$ verlängert, mit der Periodendauer T und der Laufzeit der Rayleigh-Welle Δt durch das Fundament.

Bei gleicher, vertikaler Belastung $F(t)$ sind die durch ein schlaffes Fundament und durch ein starres Fundament hervorgerufenen Verschiebungen außerhalb des Fundaments nahezu identisch. Die Verschiebungen beim schlaffen Fundament sind dabei um 5% größer. Wird das starre Fundament durch ein Moment $M(t)$ angeregt (wobei die Kraft $F(t)$ gleich bleibt), so sind die Verschiebungen u_z nahe des Fundaments im Vergleich zu einer Anregung durch eine vertikale Kraft $F(t)$ um bis zu 200% größer. Diese Differenz nimmt mit zunehmender Entfernung r ab, bis in einer Entfernung von $r = 160$ m die Abweichung der Verschiebungen 12% beträgt.

Durch gegenphasige Anregung von Segmenten können die durch ein belastetes Fundament verursachten Verschiebungen erheblich reduziert werden. Die dazu geeignete Konstellation besteht aus zwei Ringsegmenten, die jeweils einem Viertel eines Rings entsprechen und vor und hinter dem Fundament angeordnet sind. Die größte Reduktion wird erreicht, wenn die Breite b der Segmente dem Durchmesser $2R$ des Fundaments entspricht und wenn der Abstand d der Segmente möglichst klein ist. Die Reduktion funktioniert im Fernfeld besser als im Nahfeld. Mit abnehmender Frequenz f_i können die Erschütterungen besser reduziert werden. Für $f_1 = 1/8$ Hz können die Erschütterungen um bis zu 99,8% verringert werden, für $f_7 = 8$ Hz können die Erschütterungen um bis zu 79% reduziert werden. Diese Reduktion funktioniert auch für Belastungen mit variabler Frequenz $f_i(t)$.

13. Ausblick

Nachdem die Einflüsse der Randbedingungen und der numerischen Artefakte auf die Simulation anhand einer mittelwertfreien anregenden Kraft $F(t)$ bestimmt wurden, können nun die Verschiebungen für ein am Fundament einer realen WEA angreifenden Moment $M(t)$ berechnet werden. Dieser ist nicht mittelwertfrei, der Frequenzbereich gleicht jedoch aufgrund der Geschwindigkeit des Rotors und der Eigenfrequenzen der WEA dem hier untersuchten Frequenzbereich $f_i = 1/8 - 8$ Hz. Das Moment $M(t) = lF_h(t)$ mit der Nabenhöhe l der WEA und der horizontalen Kraft $F_h(t)$, die beim Durchgang eines Blatts am Mast auf den Rotor wirkt, muss dabei zunächst für eine konkrete WEA bestimmt werden. Die Verschiebungen können nun mithilfe der FEM für reale, inhomogene und anisotrope Böden berechnet werden, da die Einflüsse der Randbedingungen und der numerischen Artefakte bekannt sind und korrigiert werden können. Dabei können sich aufgrund der Gravitation die elastischen Parameter mit der Tiefe ändern, es können Schichtungen oder andere Inhomogenitäten vorliegen und eine Bodenverbesserung im Fundamentbereich kann berücksichtigt werden. Die elastischen Parameter und ihre räumliche Variation muss dazu vorher bekannt sein.

Das Fundament der WEA kann als solches modelliert werden und auf den Halbraum aufgebracht werden. Dabei werden dessen Eigengewicht und Eigenfrequenz berücksichtigt. Zudem kann durch eine Verstärkung des ringförmigen Außenbereichs überprüft werden, ob das Reiten des Fundaments verhindert wird.

Auch kann der Einfluss benachbarter WEA sowie die durch Überlagerung der verschiedenen Wellenfelder resultierenden Verschiebungen bestimmt werden.

Die gegenphasige Anregung zur Erschütterungsreduktion kann mithilfe der FEM nun für eine Belastung des Fundaments durch ein Moment $M(t)$ durchgeführt werden. Dabei werden die Segmente ebenfalls durch ein Moment angeregt.

Zusammenfassend können nun die Vertikal- und Horizontalverschiebungen u_z , u_x und u_y für eine konkrete WEA mit bekannten Daten berechnet werden, die mit einer bestimmten Windgeschwindigkeit angeregt wird und auf einem Untergrund gegründet ist, dessen elastische Parameter bekannt sind. Somit kann überprüft werden ob eine WEA in der Nähe einer seismologischen Station oder eines erschütterungsempfindlichen Gebäudes gebaut werden kann, ohne dieses kritische zu beeinflussen. Diese weiteren Berechnungen sollten mit der FEM ohne Verwendung der Lysmer-Randbedingungen und für Anregungsfrequenzen $f_i \geq 4$ Hz mit einer feineren Diskretisierung durchgeführt werden.

Literaturverzeichnis

- [Abq] <http://scc-lic-02.scc.kit.edu:2180/v6.14/books/stm/default.htm>.
zuletzt aufgerufen: 10. Februar. 2018.
- [Bet98] Betten, J.: *Finite Elemente für Ingenieure 2*. Springer, 1998.
- [Cer82] Cerruti, V.: *Sulla deformazione di uno strato isotropo indefinito limitato da due piani paralleli*. Atti dell' Accademia dei Lincei, 1:521–522, 1882.
- [Cha60] Chao, C. C.: *Dynamic response of an Elastic Half-Space to Tangential Surface Loadings*. Journal of Applied Mechanics, 203:1–42, 1960.
- [Cla16] Clauser, C.: *Einführung in die Geophysik, Globale physikalische Felder und Prozesse in der Erde*. Springer Spektrum, 2016.
- [Gak70] Gakenheimer, D. C.: *Numerical results for Lamb's point load problem*. Journal of applied mechanics, Transactions of the ASME, Seiten 522–524, 1970.
- [GRT10] Georing, H., H. G. Roos und L. Tobiska: *Die Finite-Elemente-Methode für Anfänger*. Wiley-VCH, 2010.
- [HD72] Hardin, B. O. und Drnevich.: *Shear modulus and damping in soils: Design equations and curves*. Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, 98:667–692, 1972.
- [HR63] Hardin, B. O. und F. E. Richart: *Elastic wave velocities in granular soils*. Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, 89:33–65, 1963.
- [Hub88] Huber, G.: *Erschütterungsausbreitung beim Rad/Schiene-System*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1988.
- [Iso12] *ISoBEM Theory Manual*, 2012.
- [Kau12] Kausel, Eduardo: *Lamb's problem at its simplest*. Proceedings of the Royal Society A, 469, 2012.
- [Kau13] Kausel, Eduardo: *Lamb's problem revisited: Mathematical formulation*. Proceedings of the Royal Society A, 469, 2013.
- [KL73] Kuhlemeyer, R. L. und J. Lysmer: *Finite Element Method accuracy for wave propagation problems*. Journal of the soil mechanics and foundation division, 99:421–427, 1973.
- [Lam04] Lamb, H.: *On the propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid*. Proceeding of the National Academy of Sciences, 41:469–480, 1904.
- [LK69] Lysmer, J. und R. Kuhlemeyer: *Finite Dynamic Model for Infinite Media*. Journal of the Engineering Mechanics Division of the ASCE, Seiten 859–877, 1969.

- [LUB16] *Tieffrequente Geräusche inkl. Infraschall von Windkraftanlagen und anderen Quellen.* Technischer Bericht, LUBW Landesanstalt für Umwelt, Messungen und Naturschutz Baden-Württemberg, 2016.
- [Moo74] Mooney, H. M.: *Some numerical solutions fpr Lamb's problem.* Bulletin of the Seismological ociety of America, 64:473–491, 1974.
- [Pek55] Pekeris, C. L.: *The Seismic Surface Pulse.* Philosophical Transactions of the Royal Society A, 41:469–480, 1955.
- [RH03] Richter, S. und G. Huber: *Resonant column experiments with fine-grained model material – evidence of particle surface forces.* Granular Matter, Seiten 121–128, 2003.
- [SBVB16] Schmidt, H H., R. Buchmaier und C. Vogt-Breyer: *Grundlagen der Geotechnik.* Springer Vieweg, 5. Auflage, 2016.
- [Ter54] Terzaghi, K.: *Theoretische Bodenmechanik.* Springer, 1954.
- [TPV67] Triantafyllidis, Th., B. Prange und Ch. Vrettos: *Circular and Rectangular Foundations on Halfspace: Numerical Values of Dynamic Stiffness Functions.* Ground Motion and Engineering Seismology, Seiten 409–426, 1967.
- [Ver10] Verruijt, A.: *Introduction to Soil Dynamics.* Springer, 2010.
- [Win] https://um.baden-wuerttemberg.de/fileadmin/redaktion/m-um/intern/Dateien/Dokumente/5_Energie/Erneuerbare_Energien/Windenergie/170411_Ausbau_Windkraft_Ma%C3%9Fnahmen_Zeitstrahl.pdf.
zuletzt aufgerufen: 11. Februar 2018.

Anhang

A. Abbildungen zu Kapitel 5 (Reflexionen) und zu Kapitel 10

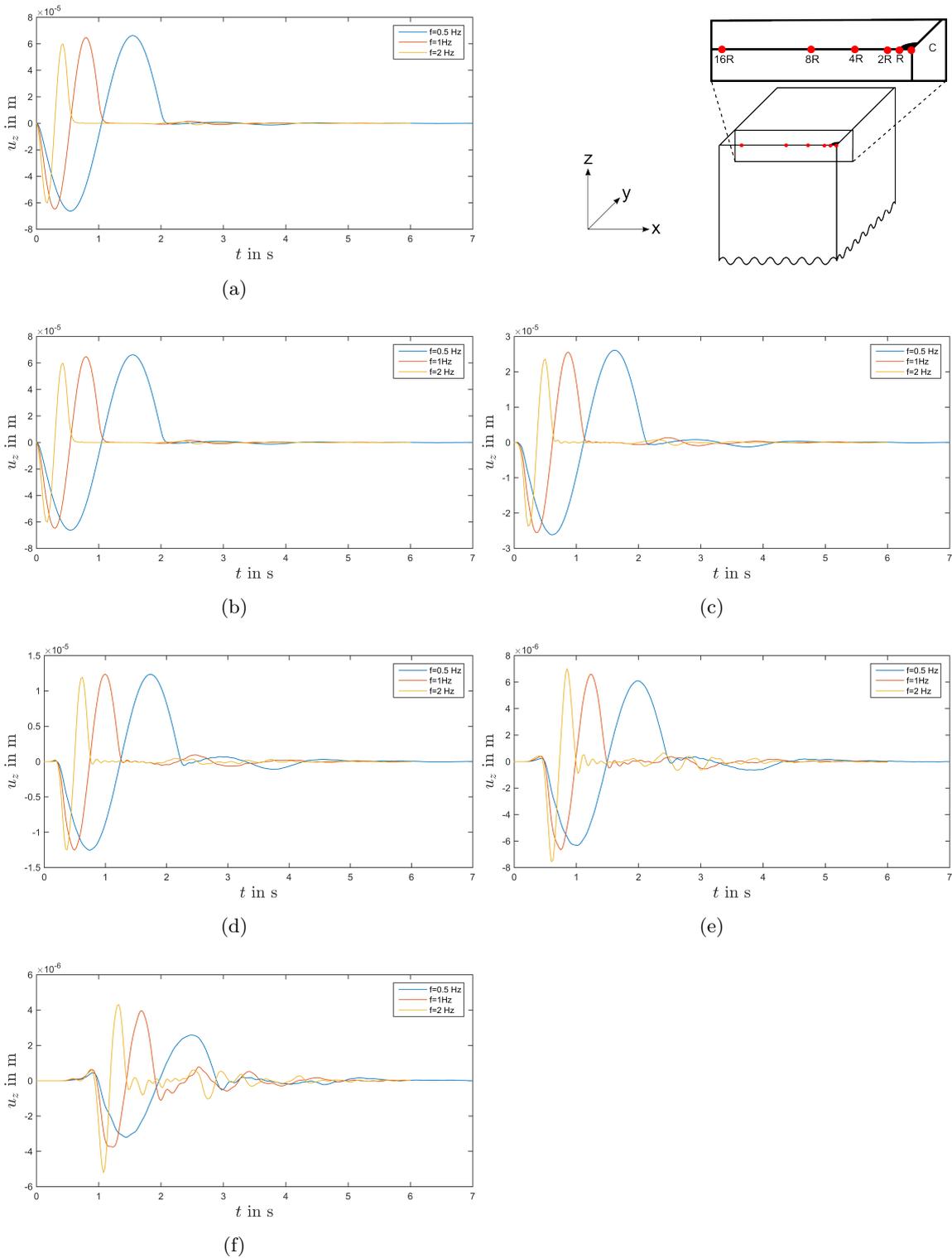


Abbildung A.1.: Vertikalverschiebung u_z im Mittelpunkt C (a) und in den Entfernungen R (b), $2R$ (c), $4R$ (d), $8R$ (e), $16R$ (f) vom Mittelpunkt eines starren Fundaments in Modell C, das mit einer vertikalen Kraft $F = F_0 \sin(2\pi f_i t)$ mit $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz und $f_5 = 2$ Hz belastet wird.

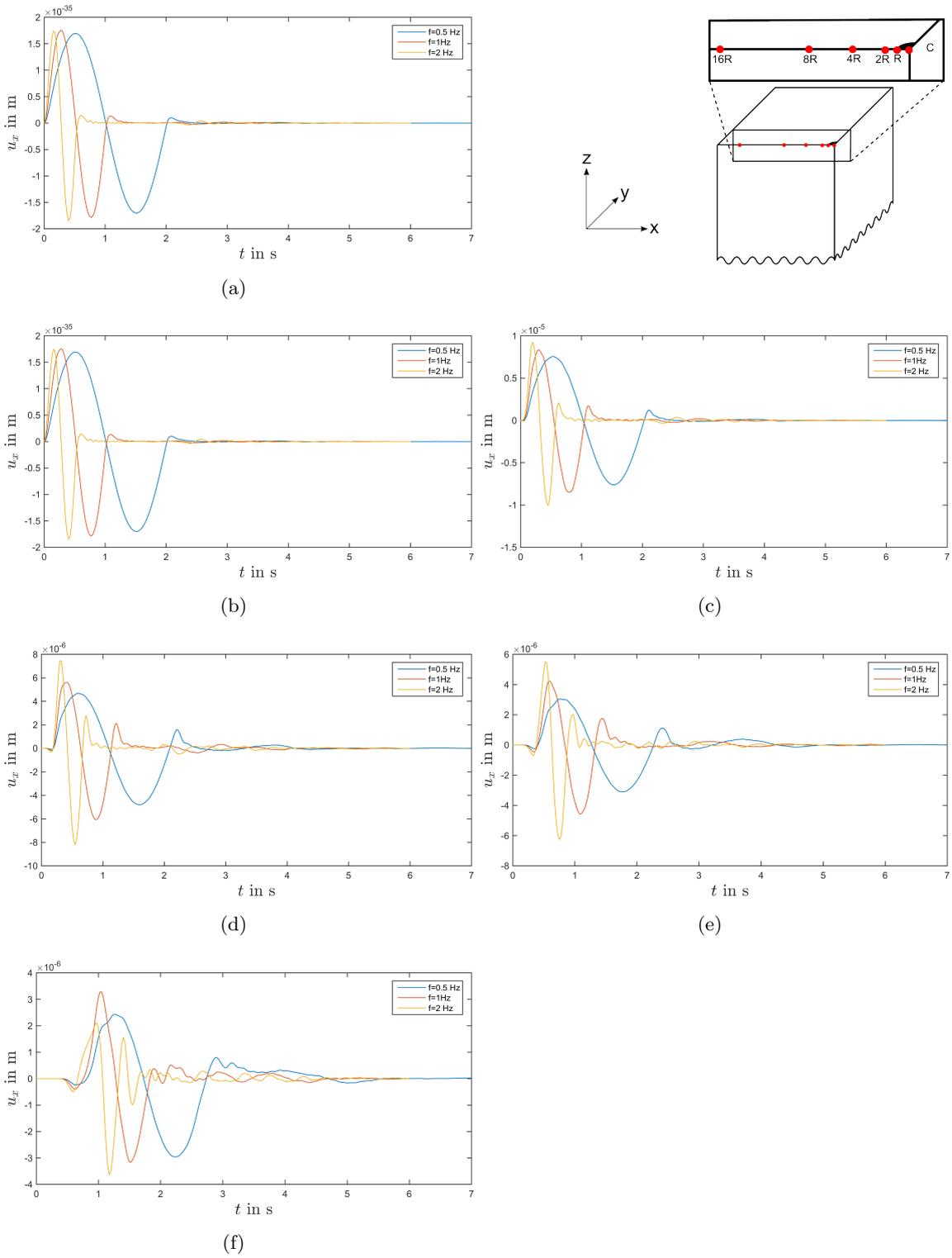


Abbildung A.2.: Horizontalverschiebung u_x im Mittelpunkt C (a) und in den Entfernungen R (b), $2R$ (c), $4R$ (d), $8R$ (e), $16R$ (f) vom Mittelpunkt eines starren Fundaments in Modell C, das mit einer vertikalen Kraft $F = F_0 \sin(2\pi f_i t)$ mit $f_3 = 1/2$ Hz, $f_4 = 1$ Hz und $f_5 = 2$ Hz belastet wird.

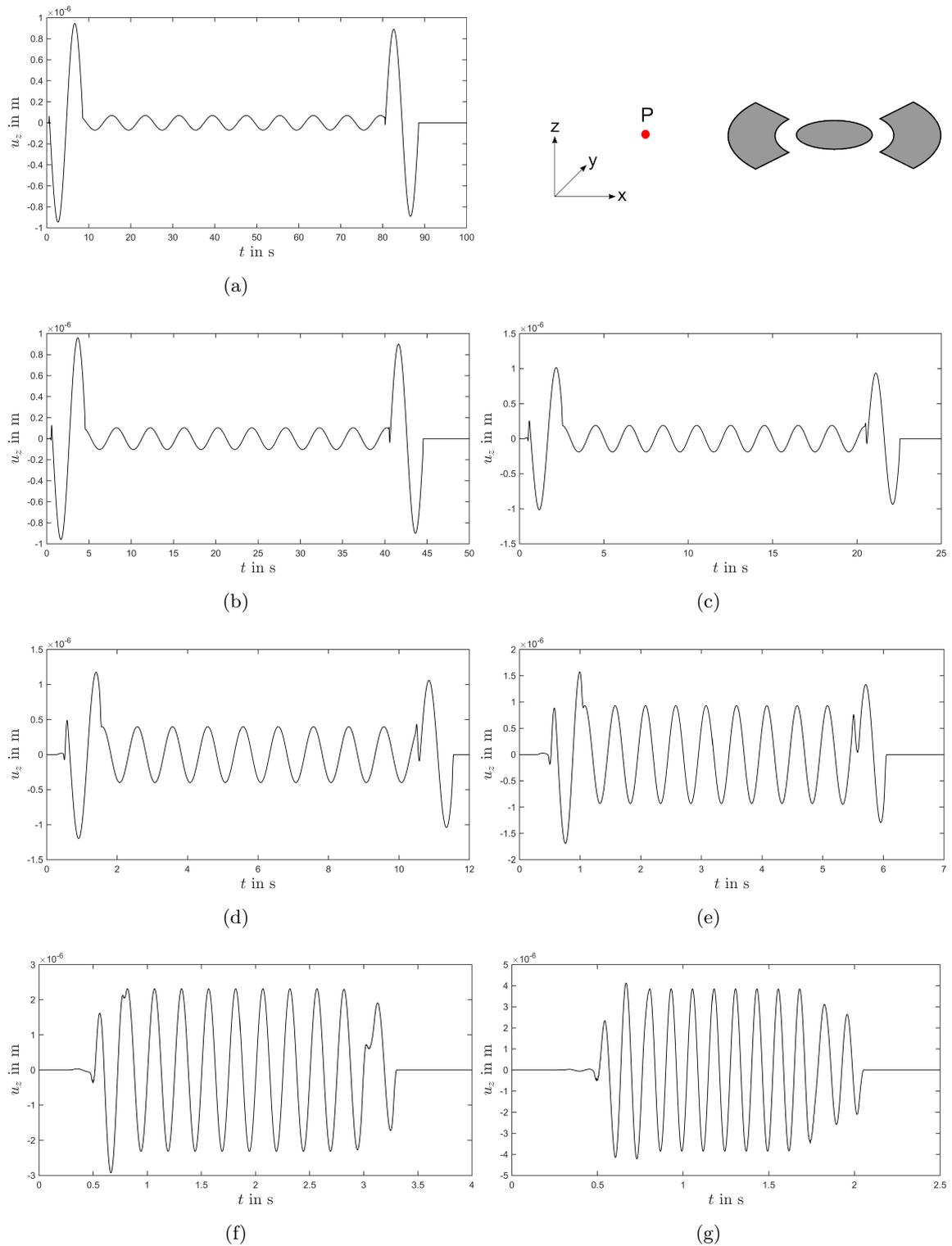


Abbildung A.3.: Vertikalverschiebung u_z in einer Entfernung von $r = 100$ m bei gegenphasiger, vertikaler Anregung zweier Ringsegmente mit Breite $b = 5$ m und Abstand $d = 2$ m zum Fundament. Das Fundament wird dabei mit $F(t) = F_0 \sin(2\pi f_i t)$ mit $f_1 = 1/8$ Hz (a), $f_2 = 1/4$ Hz (b), $f_3 = 1/2$ Hz (c), $f_4 = 1$ Hz (d), $f_5 = 2$ Hz (e), $f_6 = 4$ Hz (f), $f_7 = 8$ Hz (g) angeregt.

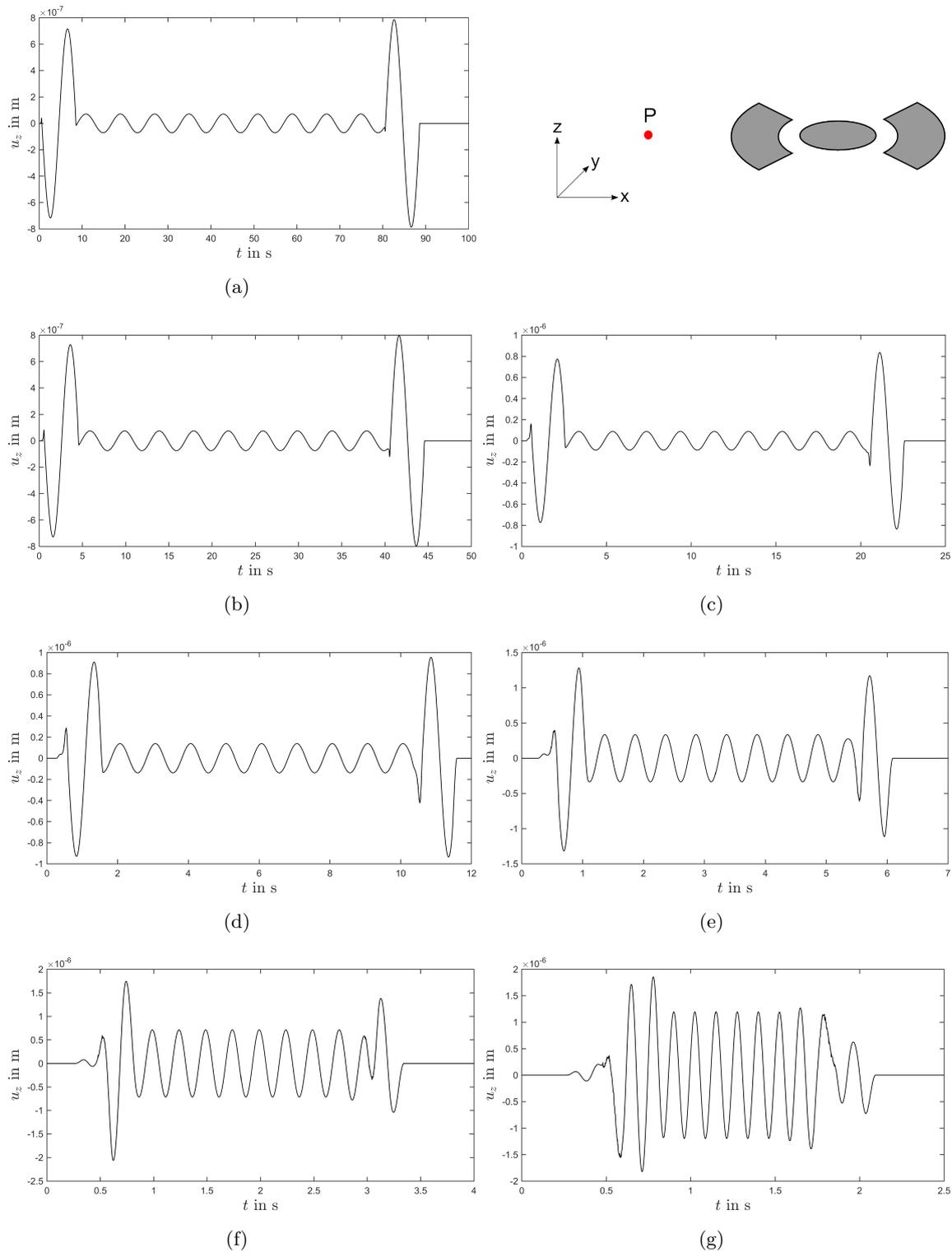


Abbildung A.4.: Vertikalverschiebung u_z in einer Entfernung von $r = 100$ m bei gegenphasiger, vertikaler Anregung zweier Ringsegmente mit Breite $b = 20$ m und Abstand $d = 10$ m zum Fundament. Das Fundament wird dabei mit $F(t) = F_0 \sin(2\pi f_i t)$ mit $f_1 = 1/8$ Hz (a), $f_2 = 1/4$ Hz (b), $f_3 = 1/2$ Hz (c), $f_4 = 1$ Hz (d), $f_5 = 2$ Hz (e), $f_6 = 4$ Hz (f), $f_7 = 8$ Hz (g) angeregt.

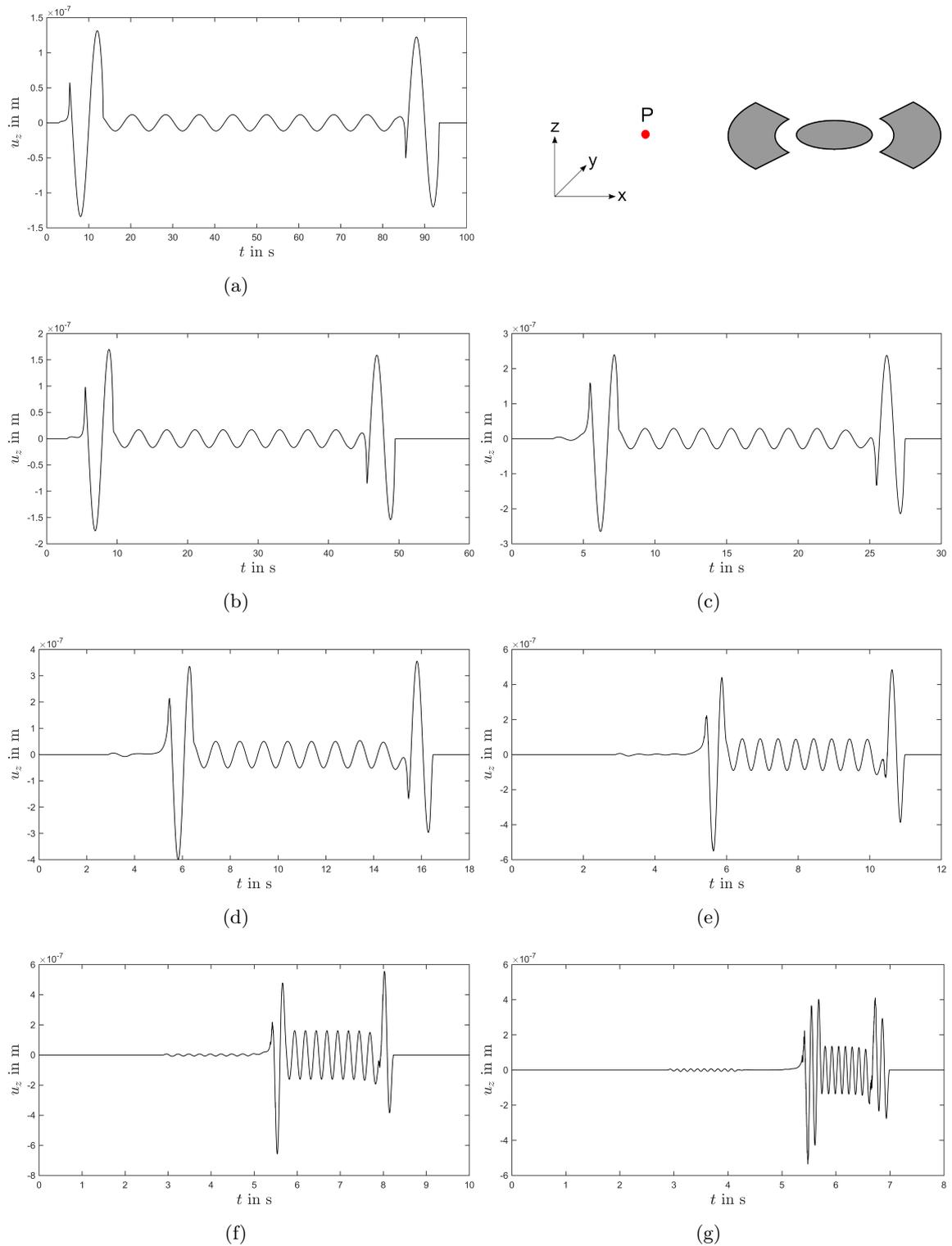


Abbildung A.5.: Vertikalverschiebung u_z in einer Entfernung von $r = 1000$ m bei gegenphasiger, vertikaler Anregung zweier Ringsegmente mit Breite $b = 20$ m und Abstand $d = 2$ m zum Fundament. Das Fundament wird dabei mit $F(t) = F_0 \sin(2\pi f_i t)$ mit $f_1 = 1/8$ Hz (a), $f_2 = 1/4$ Hz (b), $f_3 = 1/2$ Hz (c), $f_4 = 1$ Hz (d), $f_5 = 2$ Hz (e), $f_6 = 4$ Hz (f), $f_7 = 8$ Hz (g) angeregt.

B. Lösung von Pekeris und Chao

B.1. Lösung von Pekeris

Diese Kapitel beschreibt die Lösung von Lambs Problem für vertikale Belastung nach Pekeris. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf Pekeris[Pek55] und Verruijt[Ver10, 345 ff.].

Dabei wird eine Poissonzahl $\nu = 0,25$ angenommen. Die Quelle befindet sich zunächst unterhalb der Oberfläche, dann werden die Lösungen für eine Quelle an der Oberfläche berechnet.

Die Differentialgleichungen (B.1) und (B.2) sind mithilfe der horizontalen Verschiebung q und vertikalen Verschiebung w beschriebene Bewegungsgleichungen in horizontaler Richtung r und vertikaler Richtung z für ein linear elastisches Material, das durch die Lamé-Konstanten λ und μ charakterisiert wird.

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial r} - \frac{q}{r^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \quad (\text{B.1})$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (\text{B.2})$$

Dabei beschreibt ε die Volumendehnung

$$\varepsilon = \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{q}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (\text{B.3})$$

Die Randbedingungen an der Oberfläche werden durch die Gleichungen (B.4) und (B.5) beschrieben. Aufgrund der vertikalen Belastung gibt es auf der gesamten Oberfläche keine Scherspannungen σ_{zr} . Die Hauptspannung σ_{zz} hat nur einen Beitrag innerhalb der infinitesimal kleinen belasteten Fläche $A = \pi \cdot \epsilon^2$. Dabei ist P die Amplitude der Einzellast.

$$z = 0 : \sigma_{zr} = 0 \quad \text{für } t > 0 \text{ und } r < \epsilon \quad (\text{B.4})$$

$$z = 0 : \sigma_{zz} = \begin{cases} -\frac{P}{\pi \epsilon^2} \\ 0 \end{cases} \quad \text{für } t < 0 \text{ oder } r > \epsilon \quad (\text{B.5})$$

Da die Lösungen der Differentialgleichungen (B.1) und (B.2) nicht einfach im Ort-Zeit-Raum lösbar sind, wird eine Laplace-Transformation über die Zeit und ein Hankel-Transformation über den Ort durchgeführt. Aufgrund der Radialsymmetrie des Problems bietet es sich hier an, eine Hankel-Transformation statt einer Fourier-Transformation durchzuführen, da ein in Zylinderkoordinaten transformiertes Fourier-Integral einem Hankel-Integral entspricht. Die Laplace-Transformationen der Verschiebungen w und q sind wie folgt definiert:

$$\bar{q} = \int_0^\infty q e^{-st} dt \quad (\text{B.6})$$

$$\bar{w} = \int_0^\infty w e^{-st} dt \quad (\text{B.7})$$

Werden die laplacetransformierten Verschiebungen (B.6) und (B.7) in die Gleichungen (B.1) und (B.2) eingesetzt, so lauten die transformierten Differentialgleichungen:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{q}}{\partial r} - \frac{\bar{q}}{r^2} + \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial z^2} \right) = \rho s^2 \bar{q} \quad (\text{B.8})$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{w}}{\partial r} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right) = \rho s^2 \bar{w} \quad (\text{B.9})$$

Um die Transformation über den Ort durchzuführen werden die Hankel-Transformationen der Verschiebungen \bar{q} und \bar{w}

$$\bar{Q} = \int_0^\infty \bar{q} r J_1(\xi r) dr \quad (\text{B.10})$$

$$\bar{W} = \int_0^\infty \bar{w} r J_0(\xi r) dr \quad (\text{B.11})$$

und die inverse Hankel-Transformationen

$$\bar{q} = \int_0^\infty \bar{Q} \xi J_1(r\xi) d\xi \quad (\text{B.12})$$

$$\bar{w} = \int_0^\infty \bar{W} \xi J_0(r\xi) d\xi \quad (\text{B.13})$$

mit den Bessel-Funktionen $J_1(\xi r)$ und $J_0(\xi r)$ eingeführt.

Wird die Differentialgleichung (B.8) mit $rJ_1(\xi r)$ multipliziert und im Intervall von $r = 0$ bis $r = \infty$ integriert (vgl. Formel (B.10)), so ergibt sich mit der Volumendehnung (B.3) die Differentialgleichung

$$\mu \frac{d^2 \bar{Q}}{dz^2} - [\rho s^2 + (\lambda + 2\mu)\xi^2] \bar{Q} - (\lambda + \mu)\xi \frac{d\bar{W}}{dz} = 0 \quad (\text{B.14})$$

mit den laplace- und hankeltrasformierten Verschiebungen \bar{Q} und \bar{W} im $\xi - s$ Raum.

Ebenso wird durch Multiplikation von (B.9) mit $rJ_0(\xi r)$ und durch Integration im Intervall $r = 0$ bis $r = \infty$ mit der Volumendehnung (B.3) die Gleichung (B.9) in den $\xi - s$ Raum transformiert:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{d^2 \bar{W}}{dz^2} - [\rho s^2 + \mu\xi^2] \bar{W} + (\lambda + \mu)\xi \frac{d\bar{Q}}{dz} = 0 \quad (\text{B.15})$$

Um die Gleichungen (B.14) und (B.15) zu vereinfachen, werden die Parameter

$$c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad k = \frac{s}{c_s}, \quad \eta^2 = \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)} \stackrel{\nu=0.25}{=} \frac{1}{3} = \left(\frac{c_s}{c_p}\right)^2 \quad (\text{B.16})$$

eingeführt. Dabei ist c_s die Geschwindigkeit der Scherwellen (S-Wellen), c_p die Geschwindigkeit der Druckwellen (P-Wellen) und k ist das Verhältnis des Laplace-Operators s zur Scherwellengeschwindigkeit c_s . Das Verhältnis η von S-Wellengeschwindigkeit c_s zu P-Wellengeschwindigkeit c_p kann für jede beliebige Poisson-Zahl ν berechnet werden, in dieser Arbeit wird ein Untergrund mit der Poisson-Zahl $\nu = 0.25$ angenommen.

Mithilfe dieser Parameter vereinfachen sich die Gleichungen (B.14) und (B.15) zu:

$$\frac{1}{3} \frac{d^2 \bar{Q}}{dz^2} - \left(\frac{1}{3}k^2 + \xi^2\right) \bar{Q} - \frac{2}{3}\xi \frac{d\bar{W}}{dz} = 0 \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{d^2 \bar{W}}{dz^2} - \frac{1}{3}(k^2 + \xi^2) \bar{W} + \frac{2}{3}\xi \frac{d\bar{Q}}{dz} = 0 \quad (\text{B.18})$$

Für die Gleichungen (B.17) und (B.18) können nun im $\xi - s$ Raum einfach die Lösungen

$$\bar{Q} = A\alpha e^{-\alpha z} + B\xi e^{-\beta z} \quad (\text{B.19})$$

$$\bar{W} = A\xi e^{-\alpha z} + B\beta e^{-\beta z} \quad (\text{B.20})$$

bestimmt werden. Dabei sind α und β wie folgt definiert:

$$\alpha^2 = \eta^2 + k^2 \quad (\text{B.21})$$

$$\beta^2 = \eta^2 + \frac{1}{3}k^2 \quad (\text{B.22})$$

Die Lösungen (B.19) und (B.20) sollen nun wieder in den Ort-Zeit-Raum zurücktransformiert werden. Dazu müssen die inverse Hankel-Transformierte und die inverse Laplace-Transformierte beider Lösungen berechnet werden. Wird die inverse Hankel-Transformation durchgeführt, so lauten die Lösungen:

$$\bar{q} = \int_0^\infty [A\alpha e^{-\alpha z} + B\xi e^{-\beta z}] \xi J_1(r\xi) d\xi \quad (\text{B.23})$$

$$\bar{w} = \int_0^\infty [A\xi e^{-\alpha z} + B\beta e^{-\beta z}] \xi J_0(r\xi) d\xi \quad (\text{B.24})$$

Um die Koeffizienten A und B in diesen Lösungen mithilfe der Randbedingungen B.4 und B.5 zu bestimmen, werden zunächst die Laplace-Transformierten der Spannungen σ_{rz} und σ_{zz} allgemein formuliert:

$$\overline{\sigma_{rz}} = \mu \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial r} \right) \quad (\text{B.25})$$

$$\overline{\sigma_{zz}} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \bar{q}}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial r} + \frac{\bar{w}}{r} \right) \quad (\text{B.26})$$

Mit den Lösungen (B.23) und (B.24) lauten die Spannungen:

$$\overline{\sigma_{rz}} = -\mu \int_0^\infty [A(k^2 + 2\xi^2)e^{-\alpha z} + 2B\beta\xi e^{-\beta z}] \xi J_1(r\xi) d\xi \quad (\text{B.27})$$

$$\overline{\sigma_{zz}} = -\mu \int_0^\infty [2A\alpha\xi e^{-\alpha z} + B(k^2 + 2\xi^2)e^{-\beta z}] \xi J_0(r\xi) d\xi \quad (\text{B.28})$$

Um die Randbedingungen (B.4) und (B.5) in die Gleichungen (B.27) und (B.28) einzusetzen, werden die Laplace-Transformierten der Randbedingungen berechnet

$$z = 0 : \overline{\sigma_{rz}} = 0 \quad \text{für } r < \epsilon \quad (\text{B.29})$$

$$z = 0 : \overline{\sigma_{zz}} = \begin{cases} -\frac{P}{\pi\epsilon^2 s} & \text{für } r > \epsilon \\ 0 & \end{cases} \quad (\text{B.30})$$

und die Hankel-Transformation von (B.30) durchgeführt:

$$z = 0 : \overline{\sigma_{zz}} = -\int_0^\infty \frac{P}{2\pi s} \xi J_0(r\xi) d\xi \quad (\text{B.31})$$

Gleichsetzen der Randbedingungen (B.29) und (B.31) mit den Spannungen (B.27) und (B.28) für $z=0$ liefert

$$A(k^2 + 2\xi^2) + 2B\beta\xi = 0 \quad (\text{B.32})$$

$$2A\alpha\xi + B(k^2 + 2\xi^2) = \frac{P}{2\pi\mu s} \quad (\text{B.33})$$

mit den Koeffizienten A und B :

$$A = -\frac{P}{2\pi\mu s} \frac{2\beta\xi}{(k^2 + 2\xi^2)^2 - 4\alpha\beta\xi^2} \quad (\text{B.34})$$

$$B = \frac{P}{2\pi\mu s} \frac{k^2 + 2\xi^2}{(k^2 + 2\xi^2)^2 - 4\alpha\beta\xi^2} \quad (\text{B.35})$$

Durch Einsetzen der Koeffizienten A und B in die Lösungen (B.23) und (B.24) lauten die Laplace-Transformierten der Verschiebung

$$\bar{q} = -\frac{P}{2\pi\mu s} \int_0^\infty \frac{2\alpha\beta e^{-\alpha z} - (k^2 + 2\xi^2)e^{-\beta z}}{(k^2 + 2\xi^2)^2 - 4\alpha\beta\xi^2} \xi^2 J_1(r\xi) d\xi \quad (\text{B.36})$$

$$\bar{w} = -\frac{P}{2\pi\mu s} \int_0^\infty \frac{2\xi^2 e^{-\alpha z} - (k^2 + 2\xi^2)e^{-\beta z}}{(k^2 + 2\xi^2)^2 - 4\alpha\beta\xi^2} \beta\xi J_0(r\xi) d\xi. \quad (\text{B.37})$$

Die Schwierigkeit besteht nun darin, diese Integrale zu berechnen und zusätzlich die inverse Laplace-Transformation auszuführen. Dazu werden Horizontal- und Vertikalverschiebung getrennt voneinander gelöst.

B.1.1. Lösung der Vertikalverschiebung

Wird die Vertikalverschiebung für eine Quelle an der Oberfläche ($z = 0$) betrachtet, so vereinfacht sich Gleichung (B.37) zu:

$$\bar{w}_0 = \frac{Pk^2}{2\pi\mu c_s} \int_0^\infty \frac{\beta\xi}{(k^2 + 2\xi^2)^2 - 4\alpha\beta\xi^2} J_0(r\xi) d\xi \quad (\text{B.38})$$

Durch Einsetzen der dimensionslosen Parameter

$$x = \frac{\xi}{k}, \quad a = \frac{\alpha}{k}, \quad b = \frac{\beta}{k} \quad (\text{B.39})$$

lautet Gleichung (B.38) nun:

$$\begin{aligned} \bar{w}_0 &= \frac{P}{2\pi\mu c_s} \int_0^\infty \frac{bx}{(1 + 2x^2)^2 - 4abx^2} J_0(krx) dx \\ &= \frac{P}{2\pi\mu c_s} \int_0^\infty x f(x) J_0(krx) dx \end{aligned} \quad (\text{B.40})$$

Dabei ist die Funktion $f(x)$ folgendermaßen definiert:

$$f(x) = \frac{b}{(1 + 2x^2)^2 - 4abx^2} \quad (\text{B.41})$$

Die Parameter a und b können mit (B.21), (B.22) und (B.39) auch beschrieben werden durch:

$$a^2 = \frac{\alpha^2}{k^2} = \frac{\xi^2 + k^2}{k^2} = \frac{x^2 k^2 + k^2}{k^2} = x^2 + 1 \quad (\text{B.42})$$

$$b^2 = \frac{\beta^2}{k^2} = \frac{\xi^2 + \frac{1}{3}k^2}{k^2} = \frac{x^2 k^2 + \frac{1}{3}k^2}{k^2} = x^2 + \frac{1}{3} \quad (\text{B.43})$$

Die Lösung dies Integrals (B.40) ist nicht trivial. Zusätzlich muss durch die inverse Laplace-Transformation ein weiteres Integral gelöst werden.

Da die analytische Lösung für die inverse Laplace-Transformation der Bessel-Funktion erster Art nicht bekannt ist, wird der Integrand (durch das Bateman-Pekeris-Theorem) so verändert, dass dieser eine modifizierte Bessel-Funktion enthält, deren inverse Laplace-Transformation bekannt ist. Durch Anwendung des Bateman-Pekeris-Theorems wird also zunächst der Integrationsweg der inversen Hankel-Transformation verändert. Wird danach die inverse Laplace-Transformation durchgeführt, so können die Integrale durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge gelöst werden.

Um den Integrationsweg zu modifizieren, wird angenommen, dass die Variable x im Integral (B.40) der Realteil einer komplexen Variable $z = x + iy$ ist. Ob die Funktion $f(z)$ stetig ist für $\text{Re}(z) > 0$, und somit das Bateman-Pekeris-Theorem

$$\int_0^\infty z f(z) J_0(px) dx = -\frac{2}{\pi} \text{Im} \left(\int_0^\infty y f(iy) K_0(py) dy \right) \quad (\text{B.44})$$

mit der Variable $p = kr = sr/c_s$ angewendet werden kann, wird nun überprüft.

Die Funktion $f(z)$ lautet für eine komplexe Variable $z = x + iy$:

$$f(z) = \frac{b}{(1 + 2z^2)^2 - 4abz^2} \quad (\text{B.45})$$

Die Parameter a und b ergeben sich dabei aus den Gleichungen (B.42) und (B.43):

$$a^2 = z^2 + 1, \quad b^2 = z^2 + \frac{1}{3} \quad (\text{B.46})$$

Die Funktion $f(z)$ hat Singularitäten auf der Imaginärachse in Form von Verzweigungspunkten bei $z = \pm i$ und $z = \pm i/\sqrt{3}$. Zusätzlich hat $f(z)$ Pole, deren Ort nun bestimmt wird.

An den Polen muss der Nenner der Funktion $f(z)$ Null sein, dort gilt also mit (B.46):

$$(1 + 2z^2)^2 = 4abz^2 = 4\sqrt{z^2 + 1}\sqrt{z^2 + \frac{1}{3}}z^2 \quad (\text{B.47})$$

Quadrieren beider Seiten ergibt:

$$\begin{aligned} (1 + 2z^2)^4 &= 16(z^2 + 1)(z^2 + \frac{1}{3})z^4 \\ \Rightarrow \frac{32}{3}z^6 + \frac{56}{3}z^4 + 8z^2 + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

Die Lösungen von Gleichung (B.48) $z_1^2 = -0.317$, $z_2^2 = -0.250$ und $z_3^2 = -1.183$ sind alle negativ, die Pole z_1 , z_2 und z_3 liegen also auf der imaginären y -Achse. Somit ist die Funktion $f(z)$ stetig für $\text{Re}(z) > 0$ und das Bateman-Pekeris-Theorem kann angewendet werden. Die Gleichung für die Laplace-Transformierte der Verschiebung (B.40) kann also zu

$$\bar{w}_0 = -\frac{P}{\pi^2 \mu c_s} \text{Im} \left(\int_0^\infty y f(iy) K_0(kry) dy \right) \quad (\text{B.49})$$

transformiert werden, wobei der Integrationsweg rechts (also in positiver Richtung) als Halbkreis um die Singularitäten verläuft.

Die vertikale Verschiebung w_0 kann aus der Laplace-Rücktransformation

$$w_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{w}_0 e^{st} ds \quad (\text{B.50})$$

abgelesen werden. Wird (B.49) in (B.50) eingesetzt und die Reihenfolge der Integration vertauscht, so ergibt sich für die vertikale Verschiebung:

$$w_0 = -\frac{P}{\pi^2 \mu c_s} \text{Im} \left(\int_0^\infty y f(iy) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} K_0\left(\frac{sry}{c_s}\right) e^{st} ds \right] dy \right) \quad (\text{B.51})$$

Die inverse Laplace-Transformation in den eckigen Klammern kann aus Standard-Tabellen abgelesen werden:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} K_0\left(\frac{sry}{c_s}\right) e^{st} ds = \begin{cases} 0 & , t < \frac{ry}{c_s} \\ \frac{1}{\sqrt{t^2 - \frac{r^2 y^2}{c_s^2}}} & , t > \frac{ry}{c_s} \end{cases} \quad (\text{B.52})$$

Für $y > c_s t / r$ wird der Integrand in (B.51) Null und das Integral vereinfacht sich zu

$$w_0 = -\frac{P}{\pi^2 \mu c_s} \text{Im} \left(\int_0^\tau \frac{y f(iy)}{\sqrt{t^2 - \frac{r^2 y^2}{c_s^2}}} dy \right) = -\frac{P}{\pi^2 \mu r} \text{Im} \left(\int_0^\tau \frac{y f(iy)}{\sqrt{\tau^2 - y^2}} dy \right) \quad (\text{B.53})$$

mit der dimensionslosen Zeit $\tau = c_s t / r$.

Da das Verhalten der Funktion $f(iy)$ berücksichtigt werden muss, um das Integral (B.53) zu berechnen, wird diese jeweils für die Bereiche zwischen den Verzweigungspunkten ausgewertet. Die Funktion $f(iy)$ (aus (B.45)) mit den Parametern a und b (siehe (B.46)) lauten für $z = iy$:

$$f(iy) = \frac{b}{(1 - 2y^2)^2 + 4aby^2} \quad (\text{B.54})$$

$$a = \sqrt{1 - y^2}, \quad b = \sqrt{\frac{1}{3} - y^2} \quad (\text{B.55})$$

Dabei hängen die Parameter a und b davon ab, welcher Punkt auf der imaginären Achse y betrachtet wird:

$$a = \sqrt{1 - y^2}, \quad b = \sqrt{\frac{1}{3} - y^2}, \quad 0 < y < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{B.56})$$

$$a = \sqrt{1 - y^2}, \quad b = i\sqrt{y^2 - \frac{1}{3}}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} < y < 1 \quad (\text{B.57})$$

$$a = i\sqrt{y^2 - 1}, \quad b = i\sqrt{y^2 - \frac{1}{3}}, \quad 1 < y \quad (\text{B.58})$$

Für $0 < y < 1/\sqrt{3}$ sind die Parameter a und b und somit auch die Funktion $f(iy)$ real, sie liefert also keinen Beitrag zum Imaginärteil in Integral (B.53). Da von $y = 0$ bis $y = \tau$ integriert wird, ist der Integrand für $\tau < 1/\sqrt{3}$ Null und somit ist auch die Verschiebung w_0 für diesen Bereich Null:

$$w_0 = 0, \quad \tau = \frac{c_s t}{r} < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{B.59})$$

Mit (B.16) kann die Vertikalverschiebung (B.59) auch mithilfe der P-Wellengeschwindigkeit c_p beschrieben werden, die vertikale Verschiebung w_0 bleibt also solange Null bis die P-Welle ankommt:

$$w_0 = 0, \quad \frac{c_p t}{r} < 1 \quad (\text{B.60})$$

Für $1/\sqrt{3} < y < 1$ lautet die Funktion $f(iy)$ (mit (B.57))

$$f(iy) = \frac{i\sqrt{y^2 - \frac{1}{3}}}{(1 - 2y^2)^2 + 4iy^2\sqrt{1 - y^2}\sqrt{y^2 - \frac{1}{3}}}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} < y < 1. \quad (\text{B.61})$$

$$(\text{B.62})$$

Durch komplexes Konjugieren des Nenners kann der Imaginärteil abgelesen und umgeformt werden:

$$\text{Im}(f(iy)) = \frac{\sqrt{y^2 - \frac{1}{3}}(1 - 2y^2)^2}{(1 - 2y^2)^4 + 16y^4(1 - y^2)(y^2 - \frac{1}{3})}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} < y < 1 \quad (\text{B.63})$$

$$(\text{B.64})$$

Die Verschiebung (B.53) lautet somit für den Bereich $1/\sqrt{3} < \tau < 1$

$$\begin{aligned} w_0 &= -\frac{P}{\pi^2 \mu r} \int_{1/\sqrt{3}}^{\tau} \frac{3\sqrt{y^2 - \frac{1}{3}}(1 - 2y^2)^2}{[-32y^6 + 56y^4 - 24y^2 + 3]\sqrt{\tau^2 - y^2}} dy, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} < \tau < 1 \quad (\text{B.65}) \\ &= -\frac{P}{\pi^2 \mu r} G_1(\tau), \quad \frac{1}{\sqrt{3}} < \tau < 1 \end{aligned}$$

mit der Greenschen Funktion $G_1(\tau)$

$$G_1(\tau) = \int_{1/\sqrt{3}}^{\tau} \frac{3\sqrt{y^2 - \frac{1}{3}}(1 - 2y^2)^2}{[-32y^6 + 56y^4 - 24y^2 + 3]\sqrt{\tau^2 - y^2}} dy \quad (\text{B.66})$$

Für $y > 1$ ist die Funktion $f(iy)$ mit (B.58) rein imaginär:

$$f(iy) = \frac{i\sqrt{y^2 - \frac{1}{3}}}{(1 - 2y^2)^2 - 4y^2\sqrt{y^2 - 1}\sqrt{y^2 - \frac{1}{3}}}, \quad y > 1. \quad (\text{B.67})$$

$$(\text{B.68})$$

Die Vertikalverschiebung an der Oberfläche lautet dann mit (B.53)

$$\begin{aligned} w_0 &= -\frac{P}{\pi^2\mu r} \int_1^\tau \frac{3\sqrt{y^2 - \frac{1}{3}} \left((1 - 2y^2)^2 + 4y^2\sqrt{y^2 - 1}\sqrt{y^2 - \frac{1}{3}} \right)}{[-32y^6 + 56y^4 - 24y^2 + 3]\sqrt{\tau^2 - y^2}} dy, \quad \tau > 1 \quad (\text{B.69}) \\ &= -\frac{P}{\pi^2\mu r} (G_1(\tau) + G_2(\tau)), \quad \tau > 1 \end{aligned}$$

mit der Funktion (B.66) und

$$G_2(\tau) = \int_1^\tau \frac{12y^3 \left(y^2 - \frac{1}{3} \right) \sqrt{y^2 - 1}}{[-32y^6 + 56y^4 - 24y^2 + 3]\sqrt{\tau^2 - y^2}} dy. \quad (\text{B.70})$$

Pekeris löst die Integrale in (B.66) und (B.70) numerisch. Wird in Gleichung (B.66)

$$\begin{aligned} y^2 &= \frac{1}{3} + l^2 \sin^2(\theta), \quad l^2 = \tau^2 - \frac{1}{3}, \quad y dy = l^2 \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta \quad (\text{B.71}) \\ \sqrt{y^2 - \frac{1}{3}} &= \sqrt{\tau^2 - \frac{1}{3}} \sin(\theta), \quad \sqrt{\tau^2 - y^2} = \sqrt{\tau^2 - \frac{1}{3}} \cos(\theta) \end{aligned}$$

substituiert, so wird das Integral transformiert zu:

$$G_1(\tau) = \frac{1}{32} \int_0^{\pi/2} \left(-12 + \frac{1}{\frac{1}{2} + l^2 \sin^2(\theta)} - \frac{C}{-c + l^2 \sin^2(\theta)} - \frac{D}{d + l^2 \sin^2(\theta)} \right) d\theta, \quad (\text{B.72})$$

$$C = 3 + \frac{5}{\sqrt{3}}, \quad c = \frac{5}{12} + \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad D = 3 - \frac{5}{\sqrt{3}}, \quad d = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{5}{12} \quad (\text{B.73})$$

Mit den bekannten Lösungen

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\alpha^2 + l^2 \sin^2(\theta)} d\theta = \frac{\pi}{2\alpha} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + l^2}} \quad (\text{B.74})$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{-\beta^2 + l^2 \sin^2(\theta)} d\theta = \begin{cases} 0, & \beta < l \\ -\frac{\pi}{2\beta} \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - l^2}}, & \beta > l \end{cases} \quad (\text{B.75})$$

kann das Integral (B.66) berechnet werden:

$$G_1(\tau) = \frac{\pi}{32} \left(-6 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\tau^2 - \frac{1}{4}}} + \frac{\sqrt{3\sqrt{3} + 5}}{\sqrt{\frac{1}{4}(3 + \sqrt{3}) - \tau^2}} - \frac{\sqrt{3\sqrt{3} - 5}}{\sqrt{\tau^2 - \frac{1}{4}(3 - \sqrt{3})}} \right), \quad \tau < \gamma \quad (\text{B.76})$$

$$G_1(\tau) = \frac{\pi}{32} \left(-6 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\tau^2 - \frac{1}{4}}} - \frac{\sqrt{3\sqrt{3} - 5}}{\sqrt{\tau^2 - \frac{1}{4}(3 - \sqrt{3})}} \right), \quad \tau > \gamma \quad (\text{B.77})$$

Der Pol γ der Verschiebung $w_0(\tau)$ wird später berechnet.

Das Integral (B.70) der Funktion $G_2(\tau)$ wird gleichermaßen berechnet. Hier wird die Substitution

$$\begin{aligned} y^2 &= 1 + l^2 \sin^2(\theta), \quad l^2 = \tau^2 - 1, \quad y dy = l^2 \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta \\ \sqrt{y^2 - 1} &= \sqrt{\tau^2 - 1} \sin(\theta), \quad \sqrt{\tau^2 - y^2} = \sqrt{\tau^2 - 1} \cos(\theta) \end{aligned} \quad (\text{B.78})$$

durchgeführt, wodurch das Integral (B.70) transformiert wird:

$$G_2(\tau) = \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} \left(-3 - \frac{3}{3 + 4l^2 \sin^2(\theta)} - \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} + 4l^2 \sin^2(\theta)} - \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} + 4l^2 \sin^2(\theta)} \right) d\theta \quad (\text{B.79})$$

Mit den Lösungen (B.74) und (B.75) kann dann das Integral (B.79) gelöst werden:

$$G_2(\tau) = \frac{\pi}{32} \left(-6 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\tau^2 - \frac{1}{4}}} + \frac{\sqrt{3\sqrt{3} + 5}}{\sqrt{\frac{1}{4}(3 + \sqrt{3}) - \tau^2}} + \frac{\sqrt{3\sqrt{3} - 5}}{\sqrt{\tau^2 - \frac{1}{4}(3 - \sqrt{3})}} \right), \quad \tau < \gamma \quad (\text{B.80})$$

$$G_2(\tau) = \frac{\pi}{32} \left(-6 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\tau^2 - \frac{1}{4}}} + \frac{\sqrt{3\sqrt{3} - 5}}{\sqrt{\tau^2 - \frac{1}{4}(3 - \sqrt{3})}} \right), \quad \tau > \gamma \quad (\text{B.81})$$

Für die vertikale Verschiebung an der Oberfläche ergibt sich also:

$$w_0(\tau) = 0, \quad \tau < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{B.82})$$

$$w_0(\tau) = -\frac{P}{32\pi\mu r} \left(6 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\tau^2 - \frac{1}{4}}} - \frac{\sqrt{3\sqrt{3} + 5}}{\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \tau^2}} + \frac{\sqrt{3\sqrt{3} - 5}}{\sqrt{\tau^2 - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}}} \right), \quad \frac{1}{\sqrt{3}} < \tau < 1 \quad (\text{B.83})$$

$$w_0(\tau) = -\frac{P}{16\pi\mu r} \left(6 - \frac{\sqrt{3\sqrt{3} + 5}}{\sqrt{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \tau^2}} \right), \quad 1 < \tau < \gamma \quad (\text{B.84})$$

$$w_0(\tau) = -\frac{3P}{8\pi\mu r}, \quad \tau > \gamma \quad (\text{B.85})$$

Aus Gleichung (B.84) kann der Pol γ der Vertikalverschiebung bestimmt werden. An der Stelle $\tau = \gamma$ muss der Nenner von (B.84) Null werden:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \gamma^2} &\stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \gamma^2 = \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &\Rightarrow \gamma = \frac{1}{2} \sqrt{3 + \sqrt{3}} \end{aligned} \quad (\text{B.86})$$

B.1.2. Horizontalverschiebung

Bei der Berechnung der Horizontalverschiebung wird gleich vorgegangen wie bei der Berechnung der Vertikalverschiebung. Zunächst wird Gleichung (B.36) für ein Quelle an der Oberfläche ($z = 0$) berechnet und durch die Parameter (B.39) vereinfacht:

$$\begin{aligned} \bar{q}_0 &= \frac{P}{2\pi\mu c_s} \int_0^\infty \frac{(1 + 2x^2) - 2ab}{(1 + 2x^2)^2 - 4abx^2} x^2 J_1(krx) dx \\ &= \frac{P}{2\pi\mu c_s} \int_0^\infty f(x) x^2 J_1(krx) dx \\ &= \frac{P}{2\pi\mu c_s} \int_0^\infty x f(x) \frac{\partial J_0(krx)}{\partial r} dx \end{aligned} \quad (\text{B.87})$$

Auch hier können die Parameter a und b der Funktion

$$f(x) = \frac{(1 + 2x^2) - 2ab}{(1 + 2x^2)^2 - 4abx^2} \quad (\text{B.88})$$

durch

$$a^2 = x + 1, \quad b^2 = x + \frac{1}{3} \quad (\text{B.89})$$

ausgedrückt werden.

Das Bateman-Pekeris-Theorem

$$\int_0^\infty z f(z) J_0(px) dx = -\frac{2}{\pi} \text{Im} \left(\int_0^\infty y f(iy) K_0(py) dy \right) - \frac{1}{4} K_0(k\gamma) \quad (\text{B.90})$$

wird angewendet, um das Integral (B.87) zu modifizieren. Dabei kommt der letzte Term aufgrund des Residuums bei den Polen $y = \pm\gamma$ hinzu. Die Variable x wird dabei wieder als Realteil einer komplexen Variable $z = x + iy$ betrachtet.

Die Laplace-Transformierte der horizontalen Verschiebung kann durch das Bateman-Pekeris-Theorem beschrieben werden durch:

$$\bar{q}_0 = -\frac{P}{\pi^2 \mu c_s} \text{Im} \left(\int_0^\infty y f(iy) \frac{\partial K_0(py)}{\partial r} dy \right) - \frac{1}{4} K_0(k\gamma) \quad (\text{B.91})$$

Aus der Laplace-Rücktransformation

$$q_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \bar{q}_0 e^{st} ds \quad (\text{B.92})$$

kann die horizontale Verschiebung q_0 abgelesen werden. Durch Einsetzen von (B.91) in (B.92) und Vertauschen der Integrationsreihenfolge wird die horizontale Verschiebung beschrieben durch:

$$q_0 = -\frac{P}{\pi^2 \mu c_s} \text{Im} \left(\int_0^\infty y f(iy) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\partial K_0\left(\frac{sty}{c_s}\right)}{\partial r} e^{st} ds \right] dy \right) \quad (\text{B.93})$$

Das Integral zwischen den eckigen Klammern lautet:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\partial K_0\left(\frac{sty}{c_s}\right)}{\partial r} e^{st} ds = \begin{cases} 0, & t < \frac{ry}{c_s} \\ -\frac{t}{\sqrt{t^2 - \frac{r^2 y^2}{c_s^2}}}, & t > \frac{ry}{c_s} \end{cases} \quad (\text{B.94})$$

Für die Verschiebung q_0 ergibt sich somit

$$q_0 = -\frac{P}{\pi^2 \mu c_s} \text{Im} \left(\int_0^\tau -\frac{y f(iy) t}{\sqrt{t^2 - \frac{r^2 y^2}{c_s^2}}} dy \right) = \frac{P}{\pi^2 \mu r} \text{Im} \left(\int_0^\tau \frac{y f(iy) \tau}{\sqrt{\tau^2 - y^2}} dy \right) \quad (\text{B.95})$$

mit der Funktion $f(iy)$ und den Parametern a und b :

$$f(iy) = \frac{1 - 2y^2 - 2ab}{(1 - 2y^2)^2 + 4aby^2} \quad (\text{B.96})$$

$$a = \sqrt{1 - y^2}, \quad b = \sqrt{\frac{1}{3} - y^2} \quad (\text{B.97})$$

Auch diese Funktion $f(z)$ hat Verzweigungspunkte bei $z = \pm i$ und $z = \pm i/\sqrt{3}$ und Pole auf der imaginären Achse y . Daher wird auch hier das Integral (B.90) nach dem Verhalten der Funktion $f(iy)$ zwischen den Verzweigungspunkten ausgewertet. Die Parameter a und

b verhalten sich so wie in (B.56)-(B.58) beschrieben.

Für $0 < y < 1/\sqrt{3}$ sind die Koeffizienten a und b und somit die Funktion $f(iy)$ real, liefert also keinen Beitrag zum Integranden.

$$\operatorname{Im}(f(iy)) = 0, \quad 0 < y < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{B.98})$$

Die Horizontalverschiebung ist in diesem Bereich somit Null:

$$q_0(\tau) = 0, \quad \tau < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{B.99})$$

Für $1/\sqrt{3} < y < 1$ gilt (B.57) für a und b , die Funktion $f(iy)$ lautet in diesem Bereich

$$f(iy) = \frac{(1 - 2y^2) - 2i\sqrt{1 - y^2}\sqrt{y^2 - \frac{1}{3}}}{(1 - 2y^2)^2 + 4iy^2\sqrt{1 - y^2}\sqrt{y^2 - \frac{1}{3}}}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} < y < 1 \quad (\text{B.100})$$

Durch Erweitern mit dem komplex Konjugierten des Nenners lautet der Imaginärteil der Funktion $f(iy)$

$$\operatorname{Im}(f(iy)) = \frac{\sqrt{1 - y^2}\sqrt{y^2 - \frac{1}{3}}(12y^2 - 6)}{3 - 24y^2 + 56y^4 - 32y^6}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} < y < 1. \quad (\text{B.101})$$

Für $y > 1$ sind die Koeffizienten a und b wie in (B.58) beschrieben beide imaginär, die Funktion $f(iy)$ ist also real und somit ist ihr Imaginärteil Null.

$$\operatorname{Im}(f(iy)) = 0, \quad y > 1 \quad (\text{B.102})$$

Die Funktion $f(iy)$ hat also nur einen Imaginärteil für $1/\sqrt{3} < y < 1$, darum darf die Integration in (B.95) nur innerhalb der Integrationsgrenzen von $y = 1/\sqrt{3}$ bis $y = 1$ durchgeführt werden.

Für die Horizontalverschiebung in diesem Bereich muss somit entweder $1/\sqrt{3} < \tau < 1$ gelten, oder für $\tau > 1$ muss die obere Integrationsgrenze 1 sein. Für $1/\sqrt{3} < \tau < 1$ lautet die Horizontalverschiebung:

$$\begin{aligned} q_0(\tau) &= -\frac{P}{\pi^2\mu r}\tau \int_{1/\sqrt{3}}^{\tau} \frac{\sqrt{1 - y^2}\sqrt{y^2 - \frac{1}{3}}(6 - 12y^2)}{(3 - 24y^2 + 56y^4 - 32y^6)\sqrt{\tau^2 - y^2}} y dy, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} < \tau < 1 \\ &= -\frac{P}{\pi^2\mu r}\tau R_1(\tau), \quad \frac{1}{\sqrt{3}} < \tau < 1 \end{aligned} \quad (\text{B.103})$$

mit der Greenschen Funktion $R_1(\tau)$

$$R_1(\tau) = \int_{1/\sqrt{3}}^{\tau} \frac{\sqrt{1 - y^2}\sqrt{y^2 - \frac{1}{3}}(6 - 12y^2)}{(3 - 24y^2 + 56y^4 - 32y^6)\sqrt{\tau^2 - y^2}} y dy \quad (\text{B.104})$$

Da die Horizontalverschiebung q_0 eine Singularität in Form eines Pols γ hat, wird diese für $\tau > 1$ für die Bereiche $1 < \tau < \gamma$ und für $\tau > \gamma$ getrennt berechnet.

$$\begin{aligned} q_0(\tau) &= -\frac{P}{\pi^2\mu r}\tau \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{\sqrt{1 - y^2}\sqrt{y^2 - \frac{1}{3}}(6 - 12y^2)}{(3 - 24y^2 + 56y^4 - 32y^6)\sqrt{\tau^2 - y^2}} y dy, \quad 1 < \tau < \gamma \quad (\text{B.105}) \\ &= -\frac{P}{\pi^2\mu r}\tau R_2(\tau), \quad 1 < \tau < \gamma \end{aligned}$$

Für $\tau > \gamma$ kommt zu Gleichung (B.105) noch der Term aus dem Bateman-Pekeris-Theorem hinzu, der aufgrund des Residuums am Pol $\pm\gamma$ entsteht. Die Integration des Terms kann aus (B.52) abgelesen werden. Die horizontale Verschiebung für $\tau > \gamma$ beträgt also

$$q_0(\tau) = -\frac{P}{\pi^2\mu r}\tau \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{\sqrt{1-y^2}\sqrt{y^2-\frac{1}{3}}(6-12y^2)}{(3-24y^2+56y^4-32y^6)\sqrt{\tau^2-y^2}} y dy + \frac{P}{8\pi\mu r}\sqrt{\tau^2-\gamma^2}, \quad \tau > \gamma \quad (\text{B.106})$$

$$= -\frac{P}{\pi^2\mu r}\tau R_2(\tau) + \frac{P}{8\pi\mu r}\sqrt{\tau^2-\gamma^2}, \quad \tau > \gamma \quad (\text{B.107})$$

mit

$$R_2(\tau) = \int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{\sqrt{1-y^2}\sqrt{y^2-\frac{1}{3}}(6-12y^2)}{(3-24y^2+56y^4-32y^6)\sqrt{\tau^2-y^2}} y dy \quad (\text{B.108})$$

Um die Integrale $R_1(\tau)$ und $R_2(\tau)$ zu lösen, werden Substitutionen durchgeführt. Das Integral R_1 wird durch die Substitution

$$y^2 = \frac{1}{3} + l^2 \sin^2(\theta), \quad l^2 = \tau^2 - \frac{1}{3} \quad (\text{B.109})$$

transformiert zu

$$R_1(\tau) = -\frac{1}{16}\sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}} \left(6 - \frac{18}{1+8k^2\sin^2(\theta)} + \frac{6-4\sqrt{3}}{1-(12\sqrt{3}-20)k^2\sin^2(\theta)} + \frac{6+4\sqrt{3}}{1+(12\sqrt{3}+20)k^2\sin^2(\theta)} \right) \quad (\text{B.110})$$

$$= -\frac{1}{16}\sqrt{\frac{3}{2}} \left(6K(k) - 18\Pi(8k^2, k) + (6-4\sqrt{3})\Pi(-(12\sqrt{3}-20)k^2, k) + (6+4\sqrt{3})\Pi((12\sqrt{3}+20)k^2, k) \right) \quad (\text{B.111})$$

mit

$$k^2 = \frac{3\tau^2-1}{2}, \quad K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}} \quad (\text{B.112})$$

$$\Pi(n, k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1+n\sin^2(\theta))\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}}$$

Dabei ist $K(k)$ ein vollständiges elliptisches Integral erster Ordnung in Legendre-Form, $\Pi(n, k)$ ist ein unvollständiges elliptisches Integral dritter Ordnung in Legendre-Form. Für beide Integrale sind die Lösungen in Standard-Tabellen aufgeführt.

Um die Gleichung $R_2(\tau)$ zu lösen, wird das Integral durch Substitution

$$y^2 = \frac{1}{3} + \left(\tau^2 - \frac{1}{3} \right) \sin^2(\theta) \stackrel{\tau \equiv 1}{=} \frac{1+2\sin^2(\theta)}{3} \quad (\text{B.113})$$

in elliptische Integrale transformiert, deren Lösungen bekannt sind.

$$R_2(\tau) = -\frac{1}{16}\sqrt{\frac{3}{2}}\kappa \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\kappa^2\sin^2(\theta)}} \left(6 - \frac{18}{8\sin^2(\theta)+1} + \frac{3+\sqrt{3}}{8\sin^2(\theta)-5-3\sqrt{3}} + \frac{3-\sqrt{3}}{8\sin^2(\theta)-5+3\sqrt{3}} \right) \quad (\text{B.114})$$

$$= -\frac{1}{16}\sqrt{\frac{3}{2}}\kappa \left(6K(\kappa) - 18\Pi(8, \kappa) - (4\sqrt{3}-6)\Pi(-(12\sqrt{3}-20), \kappa) + (4\sqrt{3}+6)\Pi((12\sqrt{3}+20), \kappa) \right) \quad (\text{B.115})$$

Die Variable κ ist dabei

$$\kappa^2 = \frac{2}{3\tau^2 - 1} \quad (\text{B.116})$$

$K(\kappa)$ ist das elliptische Integral erster Ordnung und $\Pi(n, \kappa)$ das elliptischen Integral dritter Ordnung.

Die horizontalen Verschiebungen an der Oberfläche können mithilfe der elliptischen Integrale wie folgt beschrieben werden:

$$q_0(\tau) = 0, \quad \tau < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{B.117})$$

$$q_0(\tau) = \frac{P\tau}{16\pi^2\mu r} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(6K(k) - 18\Pi(8k^2, k) + (6-4\sqrt{3})\Pi(-(12\sqrt{3}-20)k^2, k) + (6+4\sqrt{3})\Pi((12\sqrt{3}+20)k^2, k) \right), \quad 1 < \tau < \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (\text{B.118})$$

$$q_0(\tau) = \frac{P\tau\kappa}{16\pi^2\mu r} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(6K(\kappa) - 18\Pi(8, \kappa) + (6-4\sqrt{3})\Pi(-(12\sqrt{3}-20), \kappa) + (6+4\sqrt{3})\Pi((12\sqrt{3}+20), \kappa) \right), \quad 1 < \tau < \gamma \quad (\text{B.119})$$

$$q_0(\tau) = \frac{P\tau\kappa}{16\pi^2\mu r} \sqrt{\frac{3}{2}} \left(6K(\kappa) - 18\Pi(8, \kappa) + (6-4\sqrt{3})\Pi(-(12\sqrt{3}-20), \kappa) + (6+4\sqrt{3})\Pi((12\sqrt{3}+20), \kappa) \right) + \frac{P\tau}{8\pi\mu r\sqrt{\tau^2-\gamma^2}}, \quad \tau > \gamma \quad (\text{B.120})$$

B.2. Lösung von Chao

Ebenso werden die radialen, tangentialen und vertikalen Verschiebungen bei horizontaler Belastung berechnet. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf Chao [Cha60], daher unterscheiden sich Vorgehensweise und Notation von Pekeris Lösung [Pek55].

Für einen homogenen, isotropen, linear elastischen Halbraum erfüllt die Verschiebung \mathbf{u} folgende Gleichung:

$$(\lambda + \mu)\nabla\nabla\mathbf{u} + \mu\nabla^2\mathbf{u} - \rho\dot{\mathbf{u}} = 0 \quad (\text{B.121})$$

Dabei ist $\dot{\mathbf{u}} = \partial\mathbf{u}/\partial t$, λ und μ sind die Lamé-Konstanten und ρ die Dichte. Der Spannungstensor ist durch

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda\nabla \cdot \mathbf{u}\mathbf{I} + \mu(\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\nabla) \quad (\text{B.122})$$

mit der Verschiebung \mathbf{u} verknüpft. Dabei ist \mathbf{I} die Einheitsmatrix. Die Verschiebung \mathbf{u} kann durch das Skalarpotential φ und das Vektorpotential \mathbf{g} ausgedrückt werden:

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \Delta \times \mathbf{g} \quad (\text{B.123})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = 0 \quad (\text{B.124})$$

Gleichung (B.121) ist dann erfüllt, wenn φ und \mathbf{g} Lösungen folgender Wellengleichungen sind:

$$a^2 \nabla^2 \varphi - \ddot{\varphi} = 0 \quad (\text{B.125})$$

$$b^2 \nabla^2 \mathbf{g} - \ddot{\mathbf{g}} = 0 \quad (\text{B.126})$$

Dabei sind die Koeffizienten a und b gegeben durch

$$a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad b^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Zur Lösung der Differentialgleichung (B.121) wird eine Laplace-Transformation der Verschiebung \mathbf{u} , der Spannung $\boldsymbol{\sigma}$ des Skalarpotentials φ und des Vektorpotentials \mathbf{g} über die Zeit durchgeführt:

$$\Phi = L[\varphi] = \int_0^{\infty} \varphi e^{-st} dt$$

$$\mathbf{G} = L[\mathbf{g}], \quad \mathbf{U} = L[\mathbf{u}], \quad \boldsymbol{\Sigma} = L[\boldsymbol{\sigma}]$$

Die Laplace-Transformierten der Gleichungen (B.122), (B.123), (B.124), (B.125) und (B.126) lauten

$$\boldsymbol{\Sigma} = \lambda \nabla \cdot \mathbf{U} \mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{U} + \mathbf{U} \nabla) \quad (\text{B.127})$$

$$\mathbf{U} = \nabla \Phi + \nabla \times \mathbf{G} \quad (\text{B.128})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{G} = 0 \quad (\text{B.129})$$

$$\nabla^2 - h^2 \Phi = 0 \quad (\text{B.130})$$

$$\nabla^2 \mathbf{G} - k^2 \mathbf{G} = 0 \quad (\text{B.131})$$

mit

$$h = \frac{s}{a} \quad k = \frac{s}{b}$$

Auf die Oberfläche des homogenen, isotropen, linear elastischen Halbraums mit spannungsfreier Oberfläche wird eine Einzellast mit dem zeitlichen Verlauf einer Heaviside-Funktion $F_0 \theta(t)$ bei $(z = 0, \theta_0, c)$ aufgebracht. Die Last wird parallel zur x-Achse aufgebracht. Die Koordinate θ_0 gibt den Winkel zur x-Achse an.

Die Verschiebungen \mathbf{U}_1 erhält man aus der Stokes-Love Lösung. Die laplacetransformierten Verschiebungen lauten in Zylinderkoordinaten

$$U_{1r} = \frac{F_0 \cos(\theta)}{4\pi\rho s^3} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{e^{-hR_1} - e^{-kR_1}}{R_1} \right) + k^2 \frac{e^{-kR_1}}{R_1} \right] \quad (\text{B.132})$$

$$U_{1\theta} = -\frac{F_0 \sin(\theta)}{4\pi\rho s^3} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-hR_1} - e^{-kR_1}}{R_1} \right) + k^2 \frac{e^{-kR_1}}{R_1} \right] \quad (\text{B.133})$$

$$U_{1z} = \frac{F_0 \cos(\theta)}{4\pi\rho s^3} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \left(\frac{e^{-hR_1} - e^{-kR_1}}{R_1} \right) \quad (\text{B.134})$$

mit

$$R_1 = r^2 + (z - c)^2$$

Wenn die gleich Kraft bei $(0, \theta_0, -c)$ aufgebracht wird, so können die Verschiebungen wie folgt bezeichnet werden:

$$\mathbf{U}_2 = -\mathbf{U}_1(0, \theta_0, -c, r, \theta, z, s) \quad (\text{B.135})$$

Die durch diese Einzellasten verursachten laplacetransformierten Spannungen Σ bei $z = 0$ lauten

$$\Sigma_{zr} = -\frac{\mu F_0 \cos(\theta)}{2\pi\rho s^3} \frac{\partial}{\partial c} \left[2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{e^{-hR} - e^{-kR}}{R} + k^2 \frac{e^{-kR}}{R} \right) \right] \quad (\text{B.136})$$

$$\Sigma_{z\theta} = \frac{\mu F_0 \sin(\theta)}{2\pi\rho s^3} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{e^{-hR} - e^{-kR}}{R} \right) + k^2 \frac{e^{-kR}}{R} \right] \quad (\text{B.137})$$

$$\Sigma_{zz} = 0 \quad (\text{B.138})$$

mit

$$R^2 = r^2 + c^2$$

Da die Verschiebung \mathbf{U} die Spannungen Σ (B.137) und dazu gegenteilige Spannungen an der Oberfläche eines Halbraums erzeugt, ist die Oberfläche ($z = 0$) bei der Verschiebung $\mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2 + \mathbf{U}$ spannungsfrei. Die Verschiebungen \mathbf{U}_1 und \mathbf{U}_2 sind bekannt (siehe B.133 und B.135), die Verschiebung \mathbf{U} wird nun berechnet. Dazu werden Gleichungen (B.128) und (B.137) in Gleichung (B.127) eingesetzt und die Randbedingungen berücksichtigt:

$$\begin{aligned} \mu \left[2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 G_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial G_\theta}{\partial r} - \frac{G_\theta}{r^2} - \frac{\partial^2 G_\theta}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial G_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial G_r}{\partial r} + \frac{G_r}{r^2} \right) \right]_{z=0} \\ = \frac{F_0 \mu \cos(\theta)}{\pi \rho s^2} \frac{\partial}{\partial c} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{e^{-hR} - e^{-kR}}{R} \right) + \frac{k^2}{2} \frac{e^{-kR}}{R} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.139})$$

$$\begin{aligned} \mu \left[\frac{\partial^2 G_r}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 G_r}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 G_z}{\partial r \partial z} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial G_\theta}{\partial r} + \frac{G_\theta}{r^2} \right) \right]_{z=0} \\ = -\frac{F_0 \mu \sin(\theta)}{\pi \rho s^2} \frac{\partial}{\partial c} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{-hR} - e^{-kR}}{R} \right) + \frac{k^2}{2} \frac{e^{-kR}}{R} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.140})$$

$$\left[\lambda h^2 \Phi + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z} + \frac{\partial^2 G_\theta}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial G_\theta}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 G_r}{\partial \theta \partial z} \right) \right]_{z=0} = 0 \quad (\text{B.141})$$

Da in der Formulierung der Randbedingungen (B.139) und (B.140) die Linearkombinationen von $\Phi, G_\theta, \partial G_z / \partial \theta, \partial G_r / \partial \theta$ proportional zu $\cos(\theta)$ und die Linearkombinationen von $G_r, \partial^2 G_r / \partial \theta^2, G_z, \partial \Phi / \partial \theta, \partial G_\theta / \partial \theta$ proportional zu $\sin(\theta)$ sind, bietet sich folgende Formulierung an:

$$\begin{aligned} \Phi(r, \theta, z, s) &= Q(r, z, s) \cos(\theta) \\ G_\theta(r, \theta, z, s) &= H_\theta(r, z, s) \cos(\theta) = \frac{1}{2} [H_1(r, z, s) - H_2(r, z, s)] \cos(\theta) \\ G_r(r, \theta, z, s) &= H_r(r, z, s) \sin(\theta) = \frac{1}{2} [H_1(r, z, s) + H_2(r, z, s)] \sin(\theta) \\ G_z(r, \theta, z, s) &= H_z(r, z, s) \sin(\theta) \end{aligned} \quad (\text{B.142})$$

Wird Gleichung (B.142) in die Gleichungen (B.128), (B.129), (B.130), (B.131), (B.139), (B.140) und (B.141) substituiert und einige Umformungen vorgenommen, um Vereinfachungen bei der später durchgeführten Hankel-Transformation zu erhalten, kann das Problem in Abhängigkeit von Q und H wie folgt beschrieben werden.

Drei Gleichungen definieren die Verschiebung:

$$U_r = \left[\frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{H_z}{r} - \frac{1}{2} \frac{\partial(H_1 - H_2)}{\partial z} \right] \cos(\theta) = U_1 \cos(\theta) \quad (\text{B.143})$$

$$U_\Theta = \left[-\frac{Q}{r} + \frac{\partial(H_1 - H_2)}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right] \sin(\theta) = U_2 \sin(\theta) \quad (\text{B.144})$$

$$U_z = \left[\frac{1}{2} \frac{\partial(H_1 - H_2)}{\partial r} - \frac{H_2}{r} + \frac{\partial Q}{\partial z} \right] \cos(\theta) = U_3 \cos(\theta) \quad (\text{B.145})$$

Drei Randbedingungen bei $z = 0$:

$$\left[\lambda h^2 Q + \mu \left(2 \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} (r^2 H_2) \right) \right]_{z=0} = 0 \quad (\text{B.146})$$

$$\begin{aligned} & \left[\frac{2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} (rQ + rH_z) + \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) H_1 - \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} \right]_{z=0} \\ &= \frac{F_0}{\pi \rho s^3} \frac{\partial}{\partial c} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{e^{-hR} - e^{-kR}}{R} \right) + k^2 \frac{e^{-kR}}{R} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.147})$$

$$\begin{aligned} & \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \left[2 \frac{\partial Q}{\partial z} + \frac{\partial H_1}{\partial r} \right] \right) + \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} \right]_{z=0} \\ &= \frac{F_0}{\pi \rho s^3} \frac{\partial}{\partial c} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\frac{e^{-hR} - e^{-kR}}{R} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.148})$$

Eine Bedingung zwischen H_1, H_2 und H_z :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 H_2) + \frac{\partial H_1}{\partial r} + 2 \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{B.149})$$

Vier Differentialgleichungen, die von Q, H_1, H_2 und H_z erfüllt werden müssen:

$$\frac{\partial^2 H_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 H_1}{\partial z^2} - k^2 H_1 = 0 \quad (\text{B.150})$$

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_2}{\partial r} - \frac{4H_2}{r^2} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial z^2} - k^2 H_2 = 0 \quad (\text{B.151})$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial r} - \frac{H_z}{r^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} - k^2 H_z = 0 \quad (\text{B.152})$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q}{\partial r} - \frac{Q}{r^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} - h^2 Q = 0 \quad (\text{B.153})$$

Nun werden Hankel-Transformationen (B.154) der nullten Ordnung an den Gleichungen (B.147) und (B.150), der ersten Ordnung an den Gleichungen (B.146), (B.149), (B.152)

und (B.153) und der zweiten Ordnung an Gleichung (B.148) und (B.151) durchgeführt.

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} rQJ_1(r\xi)dr &= \Psi(\xi, z, p) \\
 \int_0^{\infty} rH_1J_0(r\xi)dr &= \zeta(\xi, z, p) \\
 \int_0^{\infty} rH_2J_2(r\xi)dr &= \eta(\xi, z, p) \\
 \int_0^{\infty} rH_2J_1(r\xi)dr &= \chi(\xi, z, p)
 \end{aligned} \tag{B.154}$$

Mit üblichen Annahmen zum Verhalten der Funktionen nahe Null oder Unendlich, erhält man:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d^2\Psi}{dz^2} - (\xi^2 + h^2)\Psi &= 0 \\
 \frac{d^2\zeta}{dz^2} - (\xi^2 + k^2)\zeta &= 0 \\
 \frac{d^2\eta}{dz^2} - (\xi^2 + h^2)\eta &= 0 \\
 \frac{d^2\chi}{dz^2} - (\xi^2 + h^2)\chi &= 0
 \end{aligned} \right\} \tag{B.155}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \xi\eta - \xi\zeta + 2\frac{d\chi}{dz} &= 0 \\
 \left[\lambda h^2\Psi + \mu \left(2\frac{d^2}{dz^2} - \xi\frac{d\zeta}{dz} - \xi\frac{d\eta}{dz} \right) \right]_{z=0} &= 0 \\
 \left[2\xi\frac{d}{dz}(\Psi + \chi) - \xi^2\zeta - \frac{d^2\zeta}{dz^2} \right]_{z=0} &= \frac{F_0}{\pi\rho s^3} \left[\xi^2 e^{-\sqrt{\xi^2+h^2}c} - (\xi^2 k^2) e^{-\sqrt{\xi^2+k^2}c} \right] \\
 \left[2\xi\frac{d\Psi}{dz} + \xi^2\zeta + \frac{d^2\eta}{dz^2} \right]_{z=0} &= -\frac{F_0}{\pi\rho s^3} \xi^2 \left[e^{-\sqrt{\xi^2+h^2}c} - e^{-\sqrt{\xi^2+k^2}c} \right]
 \end{aligned} \right\} \tag{B.156}$$

Die allgemeinen Lösungen der Gleichungen B.155 sind

$$\begin{aligned}
 \Psi &= Ae^{\sqrt{\xi^2+h^2}z} + A_1e^{-\sqrt{\xi^2+h^2}z} \\
 \zeta &= Be^{\sqrt{\xi^2+k^2}z} + B_1e^{-\sqrt{\xi^2+k^2}z} \\
 \eta &= Ce^{\sqrt{\xi^2+k^2}z} + C_1e^{-\sqrt{\xi^2+k^2}z} \\
 \chi &= De^{\sqrt{\xi^2+k^2}z} + D_1e^{-\sqrt{\xi^2+k^2}z}
 \end{aligned} \tag{B.157}$$

wobei die Koeffizienten $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$ Funktionen von ξ und s sind. Wenn die Lösungen (B.157) auch im Unendlichen finit bleiben sollen, muss $A_1 = B_1 = C_1 = D_1 = 0$ gelten. Durch Einsetzen von Gleichung (B.157) mit dieser Bedingung in Gleichung (B.156)

können die Lösungen bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
\Psi &= \frac{F e^{-\sqrt{\xi^2+h^2}z}}{\pi \rho s^3 M} \xi \sqrt{\xi^2+k^2} \left[2\xi^2 e^{-\sqrt{\xi^2+h^2}c} - (2\xi^2+k^2) e^{-\sqrt{\xi^2+k^2}c} \right] \\
\zeta &= \frac{F e^{-\sqrt{\xi^2+k^2}z}}{\pi \rho s^3 M} \left\{ \left[(2\xi^2+k^2)^2 - 2\xi^2 \sqrt{\xi^2+h^2} \sqrt{\xi^2+k^2} \right] e^{-\sqrt{\xi^2+k^2}c} - (2\xi^2+k^2) e^{-\sqrt{\xi^2+h^2}c} \right\} \\
\eta &= \frac{F e^{-\sqrt{\xi^2+k^2}z}}{\pi \rho s^3 M} \left[-(2\xi^2+k^2) \xi^2 e^{-\sqrt{\xi^2+h^2}c} + 2\xi^2 \sqrt{\xi^2+h^2} \sqrt{\xi^2+k^2} e^{-\sqrt{\xi^2+k^2}c} \right] \\
\chi &= -\frac{F}{2\pi \rho s^3} \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+k^2}} e^{-\sqrt{\xi^2+k^2}(z+c)}
\end{aligned} \tag{B.158}$$

mit

$$M = (2\xi^2+k^2)^2 - 4\xi^2 \sqrt{\xi^2+h^2} \sqrt{\xi^2+k^2} \tag{B.159}$$

Um die Lösungen im Ort-Zeit-Bereich zu erhalten, müssen die inverse Hankel- und Laplace-Transformation durchgeführt werden. Die inversen Hnake-Transformationen lauten:

$$Q(r, z, p) = \int_0^\infty \xi \Psi J_1(\xi r) d\xi \tag{B.160}$$

$$H_1(r, z, p) = \int_0^\infty \xi \zeta J_1(\xi r) d\xi \tag{B.161}$$

$$H_2(r, z, p) = \int_0^\infty \xi \eta J_2(\xi r) d\xi \tag{B.162}$$

$$H_z(r, z, p) = \int_0^\infty \xi \chi J_1(\xi r) d\xi \tag{B.163}$$

Einsetzen der Gleichungen (B.160)-(B.163) in die Gleichungen (B.143), (B.144) und (B.145) ergibt mit Gleichung (B.149):

$$U_1 + U_2 = - \int_0^\infty \left[\xi^2 (\Psi - \chi) + \xi \sqrt{\xi^2+k^2} \eta \right] J_2(\xi r) d\xi \tag{B.164}$$

$$U_1 - U_2 = \int_0^\infty \left[\xi^2 (\Psi + \chi) + \xi \sqrt{\xi^2+k^2} \zeta \right] J_0(\xi r) d\xi \tag{B.165}$$

$$U_3 = - \int_0^\infty \left[\xi^2 \zeta + \xi \sqrt{\xi^2+h^2} \Psi + \xi \sqrt{\xi^2+k^2} \chi \right] J_1(\xi r) d\xi \tag{B.166}$$

Da die inverse Laplace-Transformation der Gleichungen (B.164), (B.165) und (B.166) sehr kompliziert sind, werden diese Gleichungen hier nur für den Fall $z = c = 0$ gelöst. Um die Gleichungen zu vereinfachen, wird zudem $\lambda = \mu$, also $\nu = 0,25$ angenommen.

Die Gleichungen (B.164)-(B.166) können nach algebraischen Umformungen wie folgt be-

schrieben werden:

$$U_1 + U_2 = \frac{F_0}{64\pi\mu b} \int_0^\infty \xi^3 \frac{20\xi^4 + 32\xi^2 k^2 + 9k^4 - 12(\xi^2 + k^2)^{3/2} \sqrt{\xi^2 + h^2}}{k\sqrt{\xi^2 + k^2} \left(\xi^2 + \frac{k^2}{4}\right) (\xi^2 + \beta^2 k^2)(\xi^2 + \gamma^2 k^2)} J_2(\xi r) d\xi \quad (\text{B.167})$$

$$U_1 - U_2 = \frac{F_0}{64\pi\mu b} \int_0^\infty \xi \frac{44\xi^6 + 80\xi^4 k^2 + 39\xi^2 k^4 + 6k^2 + 12\xi^2 (\xi^2 + k^2)^{3/2} \sqrt{\xi^2 + h^2}}{k\sqrt{\xi^2 + k^2} \left(\xi^2 + \frac{k^2}{4}\right) (\xi^2 + \beta^2 k^2)(\xi^2 + \gamma^2 k^2)} J_0(\xi r) d\xi \quad (\text{B.168})$$

$$U_3 = \frac{F_0}{64\pi\mu b} \int_0^\infty \xi^2 \frac{6(2\xi^2 + k^2) \sqrt{\xi^2 + k^2} \sqrt{\xi^2 + h^2} - 4\xi^4 - 10\xi^2 k^2 - 3k^4}{k \left(\xi^2 + \frac{k^2}{4}\right) (\xi^2 + \beta^2 k^2)(\xi^2 + \gamma^2 k^2)} J_1(\xi r) d\xi \quad (\text{B.169})$$

mit

$$\beta^2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}, \quad \gamma^2 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}.$$

Führt man eine Substitution der Variablen

$$\xi = kz = \frac{sz}{b}$$

durch, nehmen die Integrale der Gleichungen (B.167)-(B.169) folgende Form an:

$$W = \int_0^\infty f_1(z) J_\mu \left(\frac{srz}{b} \right) dz$$

Dies kann auch beschrieben werden durch

$$W = \int_0^\infty f(z) J_\mu \left(\frac{srz}{b} \right) dz + A \int_0^\infty J_\mu \left(\frac{srz}{b} \right) dz = W_1 + W_0 \quad (\text{B.170})$$

wobei die Funktion $f(z)$ für reale z real ist und der Koeffizient A so gewählt wird, dass

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = 0.$$

Damit kann W_0 sofort berechnet werden

$$W_0 = A \int_0^\infty J_\mu \left(\frac{srz}{b} \right) dz = \frac{Ab}{sr}$$

und die Laplace-Transformation durchgeführt werden:

$$L^{-1}(W_0) = w_0 = \frac{Ab}{r}$$

Da die Funktion $f(z)$ Verzweigungspunkte bei

$$z = \pm i \quad z = \pm \frac{i}{\sqrt{3}}$$

und Pole bei

$$z = \pm \gamma i$$

besitzt, wird das Integral W_1 wie bei Pekeris (siehe Kapitel B.1.1) mit dem Bateman-Pekeris-Theorem gelöst. Dabei wird der Integrationsweg verändert, um das Integral berechnen zu können und somit die inverse Hankel- und Laplace-Transformation durchzuführen.

Die damit berechneten Verschiebungen lauten:

$$\begin{aligned}
u_r &= 0, \quad \tau < \frac{1}{\sqrt{3}} \\
u_r &= \frac{F_0 \cos(\theta)}{\pi \mu r} \left[\frac{9\tau^2}{8\sqrt{3\tau^2 - \frac{3}{4}}} - \frac{\tau^2 \sqrt{6\sqrt{3} + 10}}{16\sqrt{\tau^2 - \beta^2}} - \frac{\tau^2 \sqrt{6\sqrt{3} - 10}}{16\sqrt{\gamma^2 - \tau^2}} \right], \quad \frac{1}{\sqrt{3}} < \tau < 1 \\
u_r &= \frac{F_0 \cos(\theta)}{\pi \mu r} \left[\frac{1}{2} - \frac{\tau^2 \sqrt{6\sqrt{3} - 10}}{8\sqrt{\gamma^2 - \tau^2}} \right], \quad 1 < \tau < \gamma \\
u_r &= \frac{F_0 \cos(\theta)}{2\pi \mu r}, \quad \gamma < \tau
\end{aligned} \tag{B.171}$$

$$\begin{aligned}
u_\theta &= 0, \quad \tau < \frac{1}{\sqrt{3}} \\
u_\theta &= \frac{F_0 \sin(\theta)}{\pi \mu r} \left[-\frac{3}{16} + \frac{3\sqrt{3}(\tau^2 - 1/4)}{8} - \frac{\sqrt{(10 + 6\sqrt{3})(\tau^2 - \beta^2)}}{16} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sqrt{(6\sqrt{3} - 10)(\gamma^2 - \tau^2)}}{16} \right], \quad \frac{1}{\sqrt{3}} < \tau < 1 \\
u_\theta &= \frac{F_0 \sin(\theta)}{\pi \mu r} \left[-\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{(6\sqrt{3} - 10)(\gamma^2 - \tau^2)}}{8} \right], \quad 1 < \tau < \gamma \\
u_\theta &= -\frac{F_0 \sin(\theta)}{8\pi \mu r}, \quad \gamma < \tau
\end{aligned} \tag{B.172}$$

$$\begin{aligned}
u_3 &= 0, \quad \tau < \frac{1}{\sqrt{3}} \\
u_3 &= \frac{\sqrt{6}F_0\tau \cos(\theta)}{32\pi^2\mu r} \left[6K(m) - 18\Pi(8m^2, m) - (4\sqrt{3} + 6)\Pi(-(12\sqrt{3} - 20)m^2, m) \right. \\
&\quad \left. + (4\sqrt{3} - 6)\Pi((12\sqrt{3} + 20)m^2, m) \right], \quad \frac{1}{\sqrt{3}} < \tau < 1 \\
u_3 &= \frac{\sqrt{6n}F_0\tau \cos(\theta)}{32\pi^2\mu r} \left[6K(n) - 18\Pi(8, n) - (4\sqrt{3} - 6)\Pi(-(12\sqrt{3} - 20), n) \right. \\
&\quad \left. + (4\sqrt{3} + 6)\Pi((12\sqrt{3} + 20), n) \right], \quad 1 < \tau < \gamma \\
u_3 &= \frac{\sqrt{6n}F_0\tau \cos(\theta)}{32\pi^2\mu r} \left[6K(n) - 18\Pi(8, n) - (4\sqrt{3} - 6)\Pi(-(12\sqrt{3} - 20), n) \right. \\
&\quad \left. + (4\sqrt{3} + 6)\Pi((12\sqrt{3} + 20), n) + \frac{F_0\tau \cos(\theta)}{8\pi\mu r\sqrt{\tau^2 - \gamma^2}} \right], \quad \gamma < \tau
\end{aligned} \tag{B.173}$$

mit den Koeffizienten m und n und den elliptischen Integralen $K(x)$ und $\Pi(y, x)$

$$m = \frac{3\tau^2 - 1}{2}, \quad n = \frac{1}{m}, \quad K(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - x^2 \sin^2(\theta)}},$$
$$\Pi(y, x) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{(1 + y \sin^2(\theta))\sqrt{1 - x^2 \sin^2(\theta)}}.$$

C. Programme

Programm 1: Matlab-Code zur Berechnung der semi-analytischen Verschiebungen $u_{zz}(t)$, $u_{rz}(t)$, $u_{rr}(t)$, $u_{tr}(t)$ und $u_{zr}(t)$

```

cs=200;
r=100;
P=1;
mu=72000;
5 ts=1;
tp=1/sqrt(3);
gamma=0.5*sqrt(3+sqrt(3));
dt=0.001*r/cs;
t=0:dt:2;
10 tau=t*cs/r;
A1=sqrt(3)/(sqrt(tau.^2-0.25));
A2=sqrt(3*sqrt(3)+5)/(sqrt(0.75+sqrt(3)/4-tau.^2));
A3=sqrt(3*sqrt(3)-5)/(sqrt(-0.75+sqrt(3)/4+tau.^2));
;
% vertical displacemant due to vertical load
15 uzz=zeros(1,numel(tau));
for n=1:numel(tau)
    if (tau(n)>tp) && (tau(n)<=ts)
        uzz(n)=-P/(32*pi*mu*r)*(6-A1(n)-A2(n)+A3(n));
    end
20 if (tau(n)>1) && (tau(n)<=gamma)
    uzz(n)=-P/(16*pi*mu*r)*(6-A2(n));
end
if tau(n)>gamma
25 uzz(n)=-3*P/(8*pi*mu*r);
end
end
% horizontal displacemant due to vertical load
urz=zeros(1,numel(tau));
theta=90;
30 for n=1:numel(tau)
    if (tau(n)>tp) && (tau(n)<=ts)
        k=sqrt(0.5*(3*tau(n).^2-1));
        K=ellipint3(theta,0,k);
        B1=ellipint3(theta,8*k.^2,k);
        B2=ellipint3(theta,(20-12*sqrt(3))*k.^2,k);
        B3=ellipint3(theta,(20+12*sqrt(3))*k.^2,k);
        urz(n)=-tau(n)*P*sqrt(3)/(16*pi*pi*mu*r*sqrt
35 (2))*(6*K-18*B1+...
        (6-4*sqrt(3))*B2+(6+4*sqrt(3))*B3);
    end
40 if (tau(n)>ts) && (tau(n)<=gamma)
    k=sqrt(2/(3*tau(n).^2-1));
    K=ellipint3(theta,0,k);
    B1=ellipint3(theta,8,k);
    B2=ellipint3(theta,(20-12*sqrt(3)),k);
    B3=ellipint3(theta,(20+12*sqrt(3)),k);
    urz(n)=-tau(n)*P*k*sqrt(3)/(16*pi*pi*mu*r*
45 sqrt(2))*(6*K-18*B1+...
        (6-4*sqrt(3))*B2+(6+4*sqrt(3))*B3);
end
if tau(n)==ts
50 urz(n)=((urz(n-1)+urz(n+1)));
end
if tau(n)>gamma
    k=sqrt(2/(3*tau(n).^2-1));
    K=ellipint3(theta,0,k);
    B1=ellipint3(theta,8,k);
    B2=ellipint3(theta,(20-12*sqrt(3)),k);
    B3=ellipint3(theta,(20+12*sqrt(3)),k);
    urz(n)=-tau(n)*P*k*sqrt(3)/(16*pi*pi*mu*r*
55 sqrt(2))*(6*K-18*B1+...
    (6-4*sqrt(3))*B2+(6+4*sqrt(3))*B3)+P*tau
    (n)/...
    (8*pi*mu*r*sqrt(tau(n).^2-gamma^2));
60 end
end
% radial displacemant due to horizontal load
urr=zeros(1,numel(tau));
65 C1=9*tau.^2/(8*sqrt(3*tau.^2-0.75));
C2=tau.^2*sqrt(6*sqrt(3)+10)/(16*sqrt(-0.75+sqrt(3)
/4+tau.^2));
C3=tau.^2*sqrt(6*sqrt(3)-10)/(16*sqrt(0.75+sqrt(3)
/4-tau.^2));
70 for n=1:numel(tau)
    if (tau(n)>tp) && (tau(n)<=ts)
        urr(n)=P/(pi*mu*r)*(C1(n)-C2(n)-C3(n));
    end
    if (tau(n)>ts) && (tau(n)<=gamma)
        urr(n)=P/(pi*mu*r)*(0.5-C3(n)*2);
75 end
    if tau(n)>gamma
        urr(n)=P/(2*pi*mu*r);
    end
end
80 % tangential displacemant due to horizontal load
utr=zeros(1,numel(tau));
D1=sqrt(3*(tau.^2-0.25));
D2=sqrt((10+6*sqrt(3))*(tau.^2-0.75+sqrt(3)/4));
D3=sqrt((-10+6*sqrt(3))*(-tau.^2+0.75+sqrt(3)/4));
85 for n=1:numel(tau)
    if (tau(n)>tp) && (tau(n)<=ts)
        utr(n)=P/(pi*mu*r)*(-3/16+3/8*D1(n)-1/16*D2(
n)+1/16*D3(n));
    end
    if (tau(n)>ts) && (tau(n)<=gamma)
        utr(n)=P/(pi*mu*r)*(-3/8+1/8*D3(n));
90 end
    if tau(n)>gamma
        utr(n)=-3*P/(8*pi*mu*r);
    end
end
95 end
% vertikal displacemant due to horizontal load
uzr=-urz;

```

Programm 2: Matlab-Code zur Berechnung der vertikalen Verschiebung $u_z(t)$ und der horizontalen Verschiebung $u_x(t)$ sowie dessen Spektrum.

```

clear all;
close all;
R=10;
raster=0.5;
5 x=-R-0.5*raster:raster:R+0.5*raster;
y=-R-0.5*raster:raster:R+0.5*raster;
n=1;
for i=1: numel(x)
    for j=1: numel(y)
10         if x(i)^2+y(j)^2<=R^2
                M(n,1:2)=[x(i),y(j)];
                n=n+1;
            end
        end
15 end
P=[20,0];
v=0.25;
cs=200;
mu=72000;
20 dt=1/1000;
t=0:dt:10;
uzzalt=0;
% Vertikale Verschiebung
for m=1: numel(M(:,1))
25     x1=M(m,1);
    y1=M(m,2);
    r(m)=sqrt((x1-P(1))^2+(y1-P(2))^2);
    tau=t*cs/r(m);
    uzz=-raster^2*uzzt(tau,mu,v,r(m),cs,t,dt);
30     uzz=uzz+uzzalt;
    uzzalt=uzz;
end
% Horizontale Verschiebung
uralt=0;
35 for m=1: numel(M(:,1))
    x=M(m,1);
    y=M(m,2);
    r(m)=sqrt((x-P(1))^2+(y-P(2))^2);
    tau=t*cs/r(m);
40     ur=raster^2*urz(tau,mu,v,r(m),cs,t,dt);
    ur=ur+uralt;
    uralt=ur;
end
45 uzzdiff=diff(uzz);
uzzdiff=[0 uzzdiff];
urdiff=diff(ur);

```

```

urdiff=[0 urdiff];
50 f1=1/8;
f2=1/4;
f3=1/2;
f4=1;
f5=2;
55 f6=4;
f7=8;
T1=1/f1;
T2=1/f2;
T3=1/f3;
60 T4=1/f4;
T5=1/f5;
T6=1/f6;
T7=1/f7;
65 F1=zeros(1,numel(t));
F1(1:T1/dt)=sin(t(1:T1/dt)*pi*2*f1);
F2=zeros(1,numel(t));
F2(1:T2/dt)=sin(t(1:T2/dt)*pi*2*f2);
70 F3=zeros(1,numel(t));
F3(1:T3/dt)=sin(t(1:T3/dt)*pi*2*f3);
F4=zeros(1,numel(t));
F4(1:T4/dt)=sin(t(1:T4/dt)*pi*2*f4);
F5=zeros(1,numel(t));
75 F5(1:T5/dt)=sin(t(1:T5/dt)*pi*2*f5);
F6=zeros(1,numel(t));
F6(1:T6/dt)=sin(t(1:T6/dt)*pi*2*f6);
F7=zeros(1,numel(t));
F7(1:T7/dt)=sin(t(1:T7/dt)*pi*2*f7);
80 ts=0:dt:2*t(end);
s1_z=conv(uzzdiff,F1);
s2_z=conv(uzzdiff,F2);
s3_z=conv(uzzdiff,F3);
85 s4_z=conv(uzzdiff,F4);
s5_z=conv(uzzdiff,F5);
s6_z=conv(uzzdiff,F6);
s7_z=conv(uzzdiff,F7);
s1_r=conv(urdiff,F1);
90 s2_r=conv(urdiff,F2);
s3_r=conv(urdiff,F3);
s4_r=conv(urdiff,F4);
s5_r=conv(urdiff,F5);
s6_r=conv(urdiff,F6);
s7_r=conv(urdiff,F7);
95 [Uzzdiff,fu]=spektrum(uzzdiff,dt);
[PF,f]=spektrum(F,dt);
[S,fs]=spektrum(s,dt);

```

Programm 3: Matlab-Funktion urz.m für Matlab-Programm 2.

```

function urz=urz(tau,mu,v,r,cs,t,dt)
P=1;
ts=1;
tp=1/sqrt(3);
5 gamma=0.5*sqrt(3+sqrt(3));
theta=90;
urz=zeros(1,numel(tau));
for n=1: numel(tau)
    if (tau(n)>tp) && (tau(n)<=ts)
10         k=sqrt(0.5*(3*tau(n).^2-1));
        K=elliptic3(theta,0,k);
        B1=elliptic3(theta,8*k.^2,k);
        B2=elliptic3(theta,(20-12*sqrt(3))*k.^2,k);
        B3=elliptic3(theta,(20+12*sqrt(3))*k.^2,k);
15         urz(n)=tau(n)*P*sqrt(3)/(16*pi*pi*mu*r*sqrt(2))*
            (6*K-18*B1+...
            (6-4*sqrt(3))*B2+(6+4*sqrt(3))*B3);
    end
end
20 for n=1: numel(tau)
    if (tau(n)>ts) && (tau(n)<gamma)
        k=sqrt(2/(3*tau(n).^2-1));
        K=elliptic3(theta,0,k);
        B1=elliptic3(theta,8,k);

```

```

        B2=elliptic3(theta,(20-12*sqrt(3)),k);
        B3=elliptic3(theta,(20+12*sqrt(3)),k);
        urz(n)=tau(n)*P*k*sqrt(3)/(16*pi*pi*mu*r*
            sqrt(2))*(6*K-18*B1+...
            (6-4*sqrt(3))*B2+(6+4*sqrt(3))*B3);
    end
end
30 for n=1: numel(tau)
    if tau(n)==ts
        urz(n)=(urz(n-1)+urz(n+1));
    end
end
35 for n=1: numel(tau)
    if tau(n)>gamma
        k=sqrt(2/(3*tau(n).^2-1));
        K=elliptic3(theta,0,k);
        B1=elliptic3(theta,8,k);
        B2=elliptic3(theta,(20-12*sqrt(3)),k);
        B3=elliptic3(theta,(20+12*sqrt(3)),k);
40         urz(n)=tau(n)*P*k*sqrt(3)/(16*pi*pi*mu*r*
            sqrt(2))*(6*K-18*B1+...
            (6-4*sqrt(3))*B2+(6+4*sqrt(3))*B3)+P*tau(n)/...
            (8*pi*mu*r*sqrt(tau(n).^2-gamma^2));
    end
end
45 end

```

Programm 4: Matlab-Funktion spektrum.m für Matlab-Programm 2.

```

function [P1,f]=spektrum(u,dt)
L=length(u)-1;
Y=fft(u);
P2=abs(Y)/L;
5 P1=P2(1:L/2+1);
P1(2:end-1)=2*P1(2:end-1);
f=1/dt*(0:(L/2))/L;

```

Programm 5: Matlab-Funktion
uzzt.m für Matlab-Programm 2.

```

function Uzz=uzzt(tau,mu,v,r,cs,t,dt)
a=(1-2*v)/(2-2*v);
g=[16*(1-a), -8*(3-2*a), 8, -1];
k=sort(roots(g));
5 k1=k(1);
k2=k(2);
k3=k(3);
A1=(k1-0.5)^2*sqrt(a-k1)/((k1-k2)*(k1-k3));
10 A2=(k2-0.5)^2*sqrt(a-k2)/((k2-k1)*(k2-k3));
A3=(k3-0.5)^2*sqrt(k3-a)/((k3-k2)*(k3-k1));

ts=r/cs;
tp=ts*sqrt(a);
tr=sqrt(k3)*ts;
15 gamma=tr/ts;

Uzz=zeros(1,numel(tau));
for n=1:numel(tau)
    if (tp < t(n)) && (t(n) <= ts)
20         Uzz(n)=0.5*(1-v)/(2*pi*mu*r).*(1-A1./sqrt(
            tau(n).^2-k1)-A2./sqrt(tau(n).^2-k2)-
            A3./sqrt(k3-tau(n).^2));
    end
end
for n=1:numel(tau)
    if (ts<t(n)) && (t(n)<tr)
25         Uzz(n)=(1-v)/(2*pi*mu*r)*(1-A3./sqrt(k3-
            tau(n).^2));
    end
end
for n=1:numel(tau)
    if t(n)>=tr
30         Uzz(n)=(1-v)/(2*pi*mu*r);
    end
end

```

Programm 6: Matlab-Funktion el-
lipint3.m für Matlab-Programm 3
nach Kausel [Kau12].

```

function [e13] = ellipint3(phi,N,M)
% Method: 10-point Gauss-Legendre quadrature
if length(N) ==1
N = N*ones(size(M));
5 end
tol = 1-1d-8;
ang = phi*pi/180;
psi = ang/2;
t = [.9931285991850949,...
10 .9639719272779138,...
.912344282513259,...
.8391169718222188,...
.7463319064601508,...
.6360536807265150,...
15 .5108670019508271,...
.3737060887154195,...
.2277858511416451,...
.7652652113349734d-1];
w = [.1761400713915212d-1,...
20 .4060142980038694d-1, ...
.6267204833410907d-1,...
.8327674157670475d-1,...
.1019301198172404,...
.1181945319615184,...
25 .1316886384491766,...
.1420961093183820,...
.1491729864726037,...
.1527533871307258];
t1 = psi*(1+t);
30 t2 = psi*(1-t);
s1 = sin(t1).^2;
s2 = sin(t2).^2;
e13 = zeros(size(M));
s = sin(ang)^2;
35 for j=1:length(M)
    k2 = M(j);
    n = N(j);
    f1 = 1./((1+n*s1).*sqrt(1-k2*s1));
    f2 = 1./((1+n*s2).*sqrt(1-k2*s2));
    e13(j) = sum((f1+f2).*w);
40 end
e13 = psi*e13;
return

```

Programm 7: Matlab-Code zur Erstellung vom Knoten und Elementen für die Berechnung der Verschiebung mit der FEM.

```

clear all;
close all;
R=10;
phi=linspace(0,2*pi);
5 xkreis=R*sin(phi);
  ykreis=R*cos(phi);
  raster=2;
  raster_fein=2;
  raster_z=5;
10 breite=200;
  tiefe=800;
  x1=0.5*raster_fein:raster_fein:R-0.5*raster_fein;
  x2=R+0.5*raster:raster:breite-0.5*raster;
  x=[x1,x2];
15 y1=0.5*raster_fein:raster_fein:R-0.5*raster_fein;
  y2=R+0.5*raster:raster:breite-0.5*raster;
  y=[y1,y2];
  z=0.5*raster_z:raster_z:tiefe-0.5*raster_z;
  X1=0:raster_fein:R;
20 X2=R+raster:raster:breite;
  X=[X1,X2];
  Y1=0:raster_fein:R;
  Y2=R+raster:raster:breite;
  Y=[Y1,Y2];
25 Z=0:raster_z:tiefe;

n=1;
m=1;
o=1;
30 for j=1:numel(y)
  for i=1:numel(x)
    M(n,1:3)=[n,x(i),y(j)];
    if x(i)^2+y(j)^2<=R^2
      M_platte(m,1:3)=M(n,:);
35     m=m+1;
    else
      M_halbraum(o,1:3)=M(n,:);
      o=o+1;
    end
    n=n+1;
  end
end
n=1;
45 for l=1:numel(Y)
  for k=1:numel(X)
    N_oben(n,1:3)=[n,X(k),Y(l)];
    n=n+1;
  end
end
50 for m=1:numel(Z)
  N_help=[N_oben(:,1)+Z(m)/raster_z*numel(N_oben(:,1)),N_oben(:,2),...
    N_oben(:,3),Z(m)*ones(numel(N_oben(:,1)),1)];
  N(:,1:numel(N_oben(:,1))+Z(m)/raster_z*numel(N_oben(:,1)),1:4)=N_help;
end
55 for m=1:numel(M_platte(:,1))
  a_platte(m,1:2)=[M_platte(m,2)-raster_fein/2,M_platte(m,3)-raster_fein/2];
  [arow,acol]=find(N_oben(:,2)==a_platte(1)&N_oben(:,3)==a_platte(2));
  b_platte(m,1:2)=[M_platte(m,2)+raster_fein/2,M_platte(m,3)-raster_fein/2];
60 [brow,bcol]=find(N_oben(:,2)==b_platte(1)&N_oben(:,3)==b_platte(2));
  c_platte(m,1:2)=[M_platte(m,2)+raster_fein/2,M_platte(m,3)+raster_fein/2];
  [crow,ccol]=find(N_oben(:,2)==c_platte(1)&N_oben(:,3)==c_platte(2));
  d_platte(m,1:2)=[M_platte(m,2)-raster_fein/2,M_platte(m,3)+raster_fein/2];
65 [drow,dcoll]=find(N_oben(:,2)==d_platte(1)&N_oben(:,3)==d_platte(2));

knoten=[a_platte(:,1:2); b_platte(:,1:2); c_platte(:,1:2); d_platte(:,1:2)];
[c,v]=sort(knoten(:,2));
knoten=knoten(v,:);
70 knoten=unique(knoten,'rows','stable');
n=1;
for m=1:numel(knoten(:,1))
  knoten_row(m,1)=find(knoten(m,1)==N_oben(:,2)&knoten(m,2)==N_oben(:,3));
  N_platte(m,1:3)=N_oben(knoten_row(m),1:3);
75 n=n+1;
end

N_halbraum=N_oben;
N_halbraum(N_platte(:,1),:)=[];
80 coupling=N_platte(2:end,:);

n=1;
85 for m=1:numel(M(:,1))
  if M(m,2)<=R && M(m,3)<=R
    a(m,1:2)=[M(m,2)-raster_fein/2,M(m,3)-raster_fein/2];
    [arow,acol]=find(N_oben(:,2)==a(m,1)&N_oben(:,3)==a(m,2));
    b(m,1:2)=[M(m,2)+raster_fein/2,M(m,3)-raster_fein/2];
90 [brow,bcol]=find(N_oben(:,2)==b(m,1)&N_oben(:,3)==b(m,2));
    c(m,1:2)=[M(m,2)+raster_fein/2,M(m,3)+raster_fein/2];
    [crow,ccol]=find(N_oben(:,2)==c(m,1)&N_oben(:,3)==c(m,2));
    d(m,1:2)=[M(m,2)-raster_fein/2,M(m,3)+raster_fein/2];
95 [drow,dcoll]=find(N_oben(:,2)==d(m,1)&N_oben(:,3)==d(m,2));
  end
  if M(m,2)<=R && M(m,3)>R
    a(m,1:2)=[M(m,2)-raster_fein/2,M(m,3)-raster/2];
  end
end

```

```

[arow, acol]=find(N_oben(:,2)==a(m,1)&N_oben(:,3)==a(m,2));
b(m,1:2)=[M(m,2)+raster_fein/2,M(m,3)-raster/2];
100 [brow, bcol]=find(N_oben(:,2)==b(m,1)&N_oben(:,3)==b(m,2));
c(m,1:2)=[M(m,2)+raster_fein/2,M(m,3)+raster/2];
[crow, ccol]=find(N_oben(:,2)==c(m,1)&N_oben(:,3)==c(m,2));
d(m,1:2)=[M(m,2)-raster_fein/2,M(m,3)+raster/2];
[drow, dcol]=find(N_oben(:,2)==d(m,1)&N_oben(:,3)==d(m,2));
105 end
if M(m,2)>R && M(m,3)<=R
a(m,1:2)=[M(m,2)-raster/2,M(m,3)-raster_fein/2];
[arow, acol]=find(N_oben(:,2)==a(m,1)&N_oben(:,3)==a(m,2));
b(m,1:2)=[M(m,2)+raster/2,M(m,3)-raster_fein/2];
110 [brow, bcol]=find(N_oben(:,2)==b(m,1)&N_oben(:,3)==b(m,2));
c(m,1:2)=[M(m,2)+raster/2,M(m,3)+raster_fein/2];
[crow, ccol]=find(N_oben(:,2)==c(m,1)&N_oben(:,3)==c(m,2));
d(m,1:2)=[M(m,2)-raster/2,M(m,3)+raster_fein/2];
[drow, dcol]=find(N_oben(:,2)==d(m,1)&N_oben(:,3)==d(m,2));
115 end
if M(m,2)>R && M(m,3)>R
a(m,1:2)=[M(m,2)-raster/2,M(m,3)-raster/2];
[arow, acol]=find(N_oben(:,2)==a(m,1)&N_oben(:,3)==a(m,2));
b(m,1:2)=[M(m,2)+raster/2,M(m,3)-raster/2];
120 [brow, bcol]=find(N_oben(:,2)==b(m,1)&N_oben(:,3)==b(m,2));
c(m,1:2)=[M(m,2)+raster/2,M(m,3)+raster/2];
[crow, ccol]=find(N_oben(:,2)==c(m,1)&N_oben(:,3)==c(m,2));
d(m,1:2)=[M(m,2)-raster/2,M(m,3)+raster/2];
[drow, dcol]=find(N_oben(:,2)==d(m,1)&N_oben(:,3)==d(m,2));
125 end
E_oben(m,1:9)=[m,N_oben(arow,acol),N_oben(brow,bcol),N_oben(crow,ccol)...
,N_oben(drow,dcol),N_oben(arow,acol)+numel(N_oben(:,1)),...
,N_oben(crow,ccol)+numel(N_oben(:,1)),N_oben(drow,dcol)+numel(N_oben(:,1))];
130 end
for m=1:numel(Z)-1
E_help(:,1)=E_oben(:,1)+Z(m)/raster_z*numel(x)*numel(y);
E_help(:,2:9)=E_oben(:,2:9)+Z(m)/raster_z*numel(N_oben(:,1));
135 E((1:numel(E_oben(:,1)))+Z(m)/raster_z*numel(E_oben(:,1)),1:9)=E_help;
end
for m=1:numel(Z)-1
vorne_help=E((1:numel(x))+Z(m)/raster_z*numel(E_oben(:,1)),1:9);
140 vorne((1:numel(x))+Z(m)/raster_z*numel(x),1:9)=vorne_help;
end
for m=1:numel(Z)-1
hinten_help=E((numel(x)*(numel(y)-1)+1:numel(y)*numel(x))+Z(m)/raster_z*numel(E_oben(:,1)),1:9);
145 hinten((1:numel(x))+Z(m)/raster_z*numel(x),1:9)=hinten_help;
end
for m=1:numel(Z)-1
rechts_help=E((numel(x):numel(x):numel(y)*numel(x))+Z(m)/raster_z*numel(E_oben(:,1)),1:9);
150 rechts((1:numel(y))+Z(m)/raster_z*numel(y),1:9)=rechts_help;
end
for m=1:numel(Z)-1
links_help=E((1:numel(x):(numel(y)-1)*numel(x)+1)+Z(m)/raster_z*numel(E_oben(:,1)),1:9);
155 links((1:numel(y))+Z(m)/raster_z*numel(y),1:9)=links_help;
end
unten=E((numel(x))*numel(y)*(numel(z)-1)+1:numel(x)*numel(y)*numel(z),1:9);
rand=[hinten;rechts;unten];
E(rand(:,1),:)=[];
for m=1:numel(Z)-1
160 boundary_links_help=N((1:numel(X):(numel(Y)-1)*numel(X)+1)+Z(m)/raster_z*numel(N_oben(:,1)),1:4);
boundary_links((1:numel(Y))+Z(m)/raster_z*numel(Y),1:4)=boundary_links_help;
end
for m=1:numel(Z)-1
boundary_vorne_help=N((1:numel(X))+Z(m)/raster_z*numel(N_oben(:,1)),1:4);
165 boundary_vorne((1:numel(X))+Z(m)/raster_z*numel(X),1:4)=boundary_vorne_help;
end
m=1;
for m=1:numel(a_platte(:,1))
170 A(m,1)=find(a_platte(m,1)==a(:,1)&a_platte(m,2)==a(:,2));
B(m,1)=find(b_platte(m,1)==b(:,1)&b_platte(m,2)==b(:,2));
end
E_pl=[A B];
m=1;
n=1;
175 for m=1:numel(E_pl(:,1))
erow(m,1)=find(E_pl(m,1)==E_oben(:,1));
E_platte(n,1:9)=E_oben(erow(m),1:9);
n=n+1;
end
180 E_halbraum=E_oben;
E_halbraum(E_platte(:,1),:)=[];
E_vorne_begin=[1,N(numel(X))*numel(Y)+numel(X)+2,1,N(numel(X))*numel(Y)+numel(X)+1,1,...
185 N(numel(X)+1,1),N(numel(X)+2,1),N(numel(X))*numel(Y)+2,1,N(numel(X))*numel(Y)+1,1,...
N(1,1),N(2,1)];
E_vorne_links_begin=[1,N(numel(X)+2,1),N(numel(X)+3,1),N(numel(X))*numel(Y)+numel(X)+3,1,...
N(numel(X))*numel(Y)+numel(X)+2,1),N(1,1),N(3,1),N(numel(X))*numel(Y)+3,1,...
N(numel(X))*numel(Y)+1,1)];
190 E_vorne_rechts_begin=[N(numel(x),1),N(2*numel(X)-2,1),N(2*numel(X)-1,1),...
N(numel(X))*numel(Y)+2*numel(X)-1,1),N(numel(X))*numel(Y)+2*numel(X)-2,1),...
N(numel(X)-2,1),N(numel(X),1),N(numel(X))*numel(Y)+numel(X),1),...
N(numel(X))*numel(Y)+numel(X)-2,1)];
195 E_vorne_unten_begin=[N(numel(x))*numel(y)*(numel(z)-2)+1,1),N(numel(X))*numel(Y)*...
(numel(Z)-3)+numel(X)+1,1),N(numel(X))*numel(Y)*(numel(Z)-3)+numel(X)+2,1),...
N(numel(X))*numel(Y)*(numel(Z)-2)+numel(X)+2,1),N(numel(X))*numel(Y)*...
(numel(Z)-2)+numel(X)+1,1),N(numel(X))*numel(Y)*(numel(Z)-3)+1,1),N(numel(X))*...

```

```

    numel(Y)*(numel(Z)-3)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+2,1),N(numel(X)*...
    numel(Y)*(numel(Z)-1)+1,1)];
200 E_vorne_ecke_links=[N(numel(x)*numel(y)*(numel(z)-2)+1,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
    (numel(Z)-3)+numel(X)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-3)+numel(X)+3,1),...
    N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+numel(X)+3,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
    (numel(Z)-2)+numel(X)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-3)+1,1),N(numel(X)*...
    numel(Y)*(numel(Z)-3)+3,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+3,1),N(numel(X)*...
    numel(Y)*(numel(Z)-1)+1,1)];
205 E_vorne_ecke_rechts=[N(numel(x)*numel(y)*(numel(z)-2)+numel(x),1),N(numel(X)*...
    numel(Y)*(numel(Z)-3)+2*numel(X)-2,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-3)+...
    2*numel(X)-1,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+2*numel(X)-1,1),N(numel(X)*...
    numel(Y)*(numel(Z)-2)+2*numel(X)-2,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-3)+...
    numel(X)-2,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-3)+numel(X),1),N(numel(X)*...
    numel(Y)*(numel(Z)-1)+numel(X),1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+...
    numel(X)-2,1)];
    for m=1:numel(x)-2
215     E_vorne_reihe_help=E_vorne_begin+m-1;
     E_vorne_unten_help=E_vorne_unten_begin+m-1;
     E_vorne_reihe(m,1:9)=E_vorne_reihe_help;
     E_vorne_unten(m,1:9)=E_vorne_unten_help;
    end
    for m=1:numel(z)-2
220     E_vorne_help(:,1)=E_vorne_reihe(:,1)+(m-1)*numel(x)*numel(y);
     E_vorne_help(:,2:9)=E_vorne_reihe(:,2:9)+(m-1)*numel(N_oben(:,1));
     E_vorne((1:numel(x)-2)+(m-1)*(numel(x)-2),1:9)=E_vorne_help;
     E_vorne_rechts(m,1)=E_vorne_rechts_begin(1,1)+(m-1)*numel(x)*numel(y);
     E_vorne_rechts(m,2:9)=E_vorne_rechts_begin(1,2:9)+(m-1)*numel(X)*numel(Y);
225     E_vorne_links(m,1)=E_vorne_links_begin(1,1)+(m-1)*numel(x)*numel(y);
     E_vorne_links(m,2:9)=E_vorne_links_begin(1,2:9)+(m-1)*numel(X)*numel(Y);
    end
    E_vorne=[E_vorne];

230 E_hinten_begin=[N(numel(x)*(numel(y)-1)+1,1),N(numel(X)*(numel(Y)-2)+2,1),N(numel(X)*...
    (numel(Y)-2)+1,1),N(numel(X)*(numel(Y)-2)+1+numel(X)*numel(Y),1),N(numel(X)*...
    (numel(Y)-2)+2+numel(X)*numel(Y),1),N(numel(X)*(numel(Y)-1)+2,1),N(numel(X)*...
    (numel(Y)-1)+1,1),N(numel(X)*(numel(Y)-1)+1+numel(X)*numel(Y),1),N(numel(X)*...
    (numel(Y)-1)+2+numel(N_oben(:,1)),1)];
235 E_hinten_rechts_begin=[N(numel(x)*(numel(y)-1)+1,1),N(numel(X)*...
    (numel(Y)-2)+3,1),N(numel(X)*(numel(Y)-2)+2,1),N(numel(X)*(numel(Y)-2)+2+...
    numel(X)*numel(Y),1),N(numel(X)*(numel(Y)-2)+3+numel(X)*numel(Y),1),...
    N(numel(X)*(numel(Y)-1)+3,1),N(numel(X)*(numel(Y)-1)+1,1),N(numel(X)*...
    (numel(Y)-1)+1+numel(X)*numel(Y),1),N(numel(X)*(numel(Y)-1)+3+numel(X)*...
    numel(Y),1)];
240 E_hinten_links_begin=[N(numel(x)*numel(y),1),N(numel(X)*(numel(Y)-1)-1,1),...
    N(numel(X)*(numel(Y)-1)-2,1),N(numel(X)*(numel(Y)-1)-2+numel(X)*numel(Y),1),...
    N(numel(X)*(numel(Y)-1)-1+numel(X)*numel(Y),1),N(numel(X)*numel(Y),1),...
    N(numel(X)*numel(Y)-2,1),N(numel(X)*numel(Y)-2+numel(X)*numel(Y),1),...
    N(numel(X)*numel(Y)+numel(X)*numel(Y),1)];
245 E_hinten_unten_begin=[N(numel(x)*numel(y)*(numel(z)-2)+numel(x)*(numel(y)-1)+1,1),...
    N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-3)+numel(X)*(numel(Y)-2)+2,1),N(numel(X)*...
    numel(Y)*(numel(Z)-3)+numel(X)*(numel(Y)-2)+1,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
    (numel(Z)-2)+numel(X)*(numel(Y)-2)+1,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+...
    numel(X)*(numel(Y)-2)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-3)+numel(X)*...
    (numel(Y)-1)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-3)+numel(X)*(numel(Y)-1)+...
    1,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+numel(X)*(numel(Y)-1)+1,1),N(numel(X)*...
    numel(Y)*(numel(Z)-1)+numel(X)*(numel(Y)-1)+2,1)];
250 E_hinten_ecke_links=[N(numel(x)*numel(y)*(numel(z)-2)+numel(x)*(numel(y)-1)+1,1),...
    N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-3)+numel(X)*(numel(Y)-2)+3,1),N(numel(X)*...
    numel(Y)*(numel(Z)-3)+numel(X)*(numel(Y)-2)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
    (numel(Z)-2)+numel(X)*(numel(Y)-2)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+...
    numel(X)*(numel(Y)-2)+3,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-3)+numel(X)*...
    (numel(Y)-1)+3,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-3)+numel(X)*(numel(Y)-1)+...
    1,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+numel(X)*(numel(Y)-1)+1,1),N(numel(X)*...
    numel(Y)*(numel(Z)-1)+numel(X)*(numel(Y)-1)+3,1)];
260 E_hinten_ecke_rechts=[N(numel(x)*numel(y)*(numel(z)-2)+numel(x)*numel(y),1),...
    N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-3)+numel(X)*(numel(Y)-1)-1,1),N(numel(X)*...
    numel(Y)*(numel(Z)-3)+numel(X)*(numel(Y)-1)-2,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
    (numel(Z)-2)+numel(X)*(numel(Y)-1)-2,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+...
    numel(X)*(numel(Y)-1)-1,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-3)+numel(X)*...
    numel(Y),1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-3)+numel(X)*numel(Y)-2,1),...
    N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+numel(X)*numel(Y)-2,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
    (numel(Z)-1)+numel(X)*numel(Y),1)];
270 for m=1:numel(x)-2
     E_hinten_reihe_help=E_hinten_begin+m-1;
     E_hinten_unten_help=E_hinten_unten_begin+m-1;
     E_hinten_reihe(m,1:9)=E_hinten_reihe_help;
     E_hinten_unten(m,1:9)=E_hinten_unten_help;
275 end
    for m=1:numel(z)-2
     E_hinten_help(:,1)=E_hinten_reihe(:,1)+(m-1)*numel(x)*numel(y);
     E_hinten_help(:,2:9)=E_hinten_reihe(:,2:9)+(m-1)*numel(N_oben(:,1));
     E_hinten((1:numel(x)-2)+(m-1)*(numel(x)-2),1:9)=E_hinten_help;
     E_hinten_rechts(m,1)=E_hinten_rechts_begin(1,1)+(m-1)*numel(x)*numel(y);
280     E_hinten_rechts(m,2:9)=E_hinten_rechts_begin(1,2:9)+(m-1)*numel(X)*numel(Y);
     E_hinten_links(m,1)=E_hinten_links_begin(1,1)+(m-1)*numel(x)*numel(y);
     E_hinten_links(m,2:9)=E_hinten_links_begin(1,2:9)+(m-1)*numel(X)*numel(Y);
    end
285 E_hinten=[E_hinten;E_hinten_links;E_hinten_unten;E_hinten_ecke_rechts];

E_rechts_begin=[N(numel(x),1),N(numel(X)*numel(Y)+numel(X)-1,1),N(numel(X)-1),...
    N(2*numel(X)-1,1),N(numel(X)*numel(Y)+2*numel(X)-1,1),N(numel(X)*numel(Y)+...
    numel(X),1),N(numel(X),1),N(2*numel(X),1),N(numel(X)*numel(Y)+2*numel(X),1)];
290 E_rechts_vorne_begin=[N(2*numel(x),1),N(numel(X)*numel(Y)+2*numel(X)-1,1),...
    N(2*numel(X)-1),N(3*numel(X)-1,1),N(numel(X)*numel(Y)+3*numel(X)-1,1),...
    N(numel(X)*numel(Y)+numel(X),1),N(numel(X),1),N(3*numel(X),1),...
    N(numel(X)*numel(Y)+3*numel(X),1)];
E_rechts_hinten_begin=[N(numel(x)*(numel(y)-1),1),N(numel(X)*numel(Y)+...
    numel(X)*(numel(Y)-2)-1,1),N(numel(X)*(numel(Y)-2)-1,1),N(numel(X)*(numel(Y)-1)-1,1),...
295     N(numel(X)*numel(Y)+numel(X)*(numel(Y)-1)-1,1),N(numel(X)*numel(Y)+numel(X)*...
    (numel(Y)-2),1),N(numel(X)*(numel(Y)-2),1),N(numel(X)*numel(Y),1),...

```

```

    N(2*numel(X)*numel(Y),1)];
E_rechts_unten_begin=[N(numel(x)*numel(y)*(numel(z)-2)+numel(x),1),...
300 N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+...
    numel(X)-1,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-3)+numel(X)-1,1),N(numel(X)*...
    numel(Y)*(numel(Z)-3)+2*numel(X)-1,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+...
    2*numel(X)-1,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+numel(X),1),N(numel(X)*...
    numel(Y)*(numel(Z)-3)+numel(X),1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+2*...
305 numel(X),1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+2*numel(X),1)];
E_rechts_ecke_vorne=[N(numel(x)*numel(y)*(numel(z)-2)+2*numel(x),1),...
    N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+2*numel(X)-1,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
    (numel(Z)-3)+2*numel(X)-1,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-3)+3*numel(X)-1,1),...
310 N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+3*numel(X)-1,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
    (numel(Z)-1)+numel(X),1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-3)+numel(X),1),...
    N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-3)+3*numel(X),1),N(numel(X)*numel(Y)*...
    (numel(Z)-1)+3*numel(X),1)];
E_rechts_ecke_hinten=[N(numel(x)*numel(y)*(numel(z)-2)+(numel(y)-1)*numel(x),1),...
    N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+(numel(Y)-2)*numel(X)-1,1),N(numel(X)*...
315 numel(Y)*(numel(Z)-3)+(numel(Y)-2)*numel(X)-1,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
    (numel(Z)-3)+(numel(Y)-1)*numel(X)-1,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+...
    (numel(Y)-1)*numel(X)-1,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+...
    (numel(Y)-2)*numel(X),1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-3)+(numel(Y)-2)*...
    numel(X),1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-3)+numel(Y)*numel(X),1),...
320 N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+numel(Y)*numel(X),1)];
for m=1:numel(y)-2
    E_rechts_reihe_help(:,1)=E_rechts_begin(1)+(m-1)*numel(x);
    E_rechts_unten_help(:,1)=E_rechts_unten_begin(1)+(m-1)*numel(x);
    E_rechts_reihe_help(:,2:9)=E_rechts_begin(2:9)+(m-1)*numel(X);
325 E_rechts_unten_help(:,2:9)=E_rechts_unten_begin(2:9)+(m-1)*numel(X);
    E_rechts_reihe(m,1:9)=E_rechts_reihe_help;
    E_rechts_unten(m,1:9)=E_rechts_unten_help;
end
for m=1:numel(z)-2
    E_rechts_help(:,1)=E_rechts_reihe(:,1)+(m-1)*numel(x)*numel(y);
    E_rechts_help(:,2:9)=E_rechts_reihe(:,2:9)+(m-1)*numel(N_oben(:,1));
    E_rechts((1:numel(y)-2)+(m-1)*(numel(y)-2),1:9)=E_rechts_help;
    E_rechts_vorne(m,1)=E_rechts_vorne_begin(1,1)+(m-1)*numel(x)*numel(y);
    E_rechts_vorne(m,2:9)=E_rechts_vorne_begin(1,2:9)+(m-1)*numel(X)*numel(Y);
335 E_rechts_hinten(m,1)=E_rechts_hinten_begin(1,1)+(m-1)*numel(x)*numel(y);
    E_rechts_hinten(m,2:9)=E_rechts_hinten_begin(1,2:9)+(m-1)*numel(X)*numel(Y);
end
E_rechts=[E_rechts;E_rechts_hinten;E_rechts_unten;...
    E_rechts_ecke_hinten];
340
E_links_begin=[N(1,1),N(2,1),N(numel(X)*numel(Y)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)+...
    numel(X)+2,1),N(numel(X)+2,1),N(1,1),N(numel(X)*numel(Y)+1,1),N(numel(X)*...
    numel(Y)+numel(X)+1,1),N(numel(X)+1,1)];
E_links_vorne_begin=[N(numel(x)+1,1),N(numel(X)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)+...
345 numel(X)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)+2*numel(X)+2,1),N(2*numel(X)+2,1),N(1,1),...
    N(numel(X)*numel(Y)+1,1),N(numel(X)*numel(Y)+2*numel(X)+1,1),N(2*numel(X)+1,1)];
E_links_hinten_begin=[N(numel(x)*(numel(y)-2)+1),N(numel(X)*(numel(Y)-3)+2,1),...
    N(numel(X)*numel(Y)+numel(X)*(numel(Y)-3)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)+numel(X)*...
    (numel(Y)-2)+2,1),N(numel(X)*(numel(Y)-2)+2,1),N(numel(X)*(numel(Y)-3)+1,1),...
350 N(numel(X)*numel(Y)+numel(X)*(numel(Y)-3)+1,1),N(numel(X)*numel(Y)+numel(X)*...
    (numel(Y)-1)+1,1),N(numel(X)*(numel(Y)-1)+1,1)];
E_links_unten_begin=[N(numel(x)*numel(y)*(numel(z)-2)+1),N(numel(X)*numel(Y)*...
    (numel(Z)-3)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
    (numel(Z)-2)+numel(X)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-3)+numel(X)+2,1),...
355 N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-3)+1,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+1,1),...
    N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+numel(X)+1,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
    (numel(Z)-3)+numel(X)+1,1)];
E_links_ecke_vorne=[N(numel(x)*numel(y)*(numel(z)-2)+numel(x)+1),N(numel(X)*numel(Y)*...
    (numel(Z)-3)+numel(X)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+numel(X)+2,1),...
360 N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+2*numel(X)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
    (numel(Z)-3)+2*numel(X)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-3)+1,1),...
    N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+1,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+2*...
    numel(X)+1,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-3)+2*numel(X)+1,1)];
E_links_ecke_hinten=[N(numel(x)*numel(y)*(numel(z)-2)+numel(x)*(numel(y)-2)+1,1),...
365 N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-3)+numel(X)*(numel(Y)-3)+2,1),N(numel(X)*...
    numel(Y)*(numel(Z)-2)+numel(X)*(numel(Y)-3)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
    (numel(Z)-2)+numel(X)*(numel(Y)-2)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-3)+...
    numel(X)*(numel(Y)-2)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-3)+numel(X)*...
    (numel(Y)-3)+1,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+numel(X)*...
370 (numel(Y)-3)+1,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+numel(X)*...
    (numel(Y)-1)+1,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-3)+numel(X)*(numel(Y)-1)+1,1)];
for m=1:numel(y)-2
    E_links_reihe_help(:,1)=E_links_begin(1)+(m)*numel(x);
    E_links_reihe_help(:,2:9)=E_links_begin(2:9)+(m)*numel(X);
375 E_links_reihe(m,1:9)=E_links_reihe_help;
end
for m=1:numel(z)-1
    E_links_help(:,1)=E_links_reihe(:,1)+(m-1)*numel(x)*numel(y);
    E_links_help(:,2:9)=E_links_reihe(:,2:9)+(m-1)*numel(N_oben(:,1));
    E_links((1:numel(y)-2)+(m-1)*(numel(y)-2),1:9)=E_links_help;
    E_links_vorne(m,1)=E_links_vorne_begin(1,1)+(m-1)*numel(x)*numel(y);
    E_links_vorne(m,2:9)=E_links_vorne_begin(1,2:9)+(m-1)*numel(X)*numel(Y);
    E_links_hinten(m,1)=E_links_hinten_begin(1,1)+(m-1)*numel(x)*numel(y);
    E_links_hinten(m,2:9)=E_links_hinten_begin(1,2:9)+(m-1)*numel(X)*numel(Y);
385 end
E_links=[E_links];

E_unten_begin=[N(numel(x)*numel(y)*(numel(z)-1)+1,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
    (numel(Z)-2)+1,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
    (numel(Z)-2)+numel(X)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+numel(X)+1,1),...
390 N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+1,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+2,1),...
    N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+numel(X)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
    (numel(Z)-1)+numel(X)+1,1)];
E_unten_vorne_begin=[N(numel(x)*numel(y)*(numel(z)-1)+1,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
    (numel(Z)-2)+numel(X)+1,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+numel(X)+2,1),...
395 N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+2*numel(X)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
    (numel(Z)-2)+2*numel(X)+1,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+1,1),...

```

```

N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+...
2*numel(X)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+2*numel(X)+1,1)];
400 E_unten_hinten_begin=[N(numel(x)*numel(y)*(numel(z)-1)+numel(x)*(numel(y)-1)+1),...
N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+numel(X)*(numel(Y)-3)+1,1),N(numel(X)*...
numel(Y)*(numel(Z)-2)+numel(X)*(numel(Y)-3)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
(numel(Z)-2)+numel(X)*(numel(Y)-2)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+...
numel(X)*(numel(Y)-2)+1,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+numel(X)*...
405 (numel(Y)-3)+1,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+numel(X)*(numel(Y)-3)+...
2,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+numel(X)*(numel(Y)-1)+2,1),...
N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+numel(X)*(numel(Y)-1)+1,1)];
E_unten_rechts_begin=[N(numel(x)*numel(y)*(numel(z)-1)+numel(x),1),...
N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+numel(X)-2,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
410 (numel(Z)-2)+numel(X)-1,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+2*numel(X)-1,1),...
N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+2*numel(X)-2,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
(numel(Z)-1)+numel(X)-2,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+numel(X),1),...
N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+2*numel(X),1),N(numel(X)*numel(Y)*...
(numel(Z)-1)+2*numel(X)-2,1)];
415 E_unten_links_begin=[N(numel(x)*numel(y)*(numel(z)-1)+1,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
(numel(Z)-2)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+3,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
(numel(Z)-2)+numel(X)+3,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+numel(X)+2,1),...
N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+1,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+3,1),...
420 N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+numel(X)+3,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
(numel(Z)-1)+numel(X)+1,1)];
E_unten_vorne_rechts=[N(numel(x)*numel(y)*(numel(z)-1)+numel(x),1),...
N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+2*numel(X)-2,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
425 (numel(Z)-2)+2*numel(X)-1,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+3*...
numel(X)-1,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+3*numel(X)-2,1),N(numel(X)*...
numel(Y)*(numel(Z)-1)+numel(X)-2,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+...
numel(X),1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+3*numel(X),1),N(numel(X)*...
numel(Y)*(numel(Z)-1)+3*numel(X)-2,1)];
E_unten_vorne_links=[N(numel(x)*numel(y)*(numel(z)-1)+1,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
430 (numel(Z)-2)+numel(X)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+numel(X)+3,1),...
N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-2)+2*numel(X)+3,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
(numel(Z)-2)+2*numel(X)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+1,1),...
N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+3,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+...
2*numel(X)+3,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)+2*numel(X)+1,1)];
435 E_unten_hinten_links=[N(numel(x)*numel(y)*(numel(z)-numel(x)+1,1),...
N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)-3*numel(X)+2,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
(numel(Z)-1)-3*numel(X)+3,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)-2*...
numel(X)+3,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)-2*numel(X)+2,1),...
N(numel(X)*numel(Y)*numel(Z)-3*numel(X)+1,1),N(numel(X)*numel(Y)*...
440 numel(Z)-3*numel(X)+3,1),N(numel(X)*numel(Y)*numel(Z)-numel(X)+3,1),...
N(numel(X)*numel(Y)*numel(Z)-numel(X)+1,1)];
E_unten_hinten_rechts=[N(numel(x)*numel(y)*numel(z),1),N(numel(X)*numel(Y)*...
445 (numel(Z)-1)-2*numel(X)-2,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)-2*...
numel(X)-1,1),N(numel(X)*numel(Y)*(numel(Z)-1)-numel(X)-1,1),N(numel(X)*...
numel(Y)*(numel(Z)-1)-numel(X)-2,1),N(numel(X)*numel(Y)*numel(Z)-...
2*numel(X)-2,1),N(numel(X)*numel(Y)*numel(Z)-2*numel(X),1),N(numel(X)*...
numel(Y)*numel(Z),1),N(numel(X)*numel(Y)*numel(Z)-2,1)];
for m=1:numel(x)-2
E_unten_reihe_help=E_unten_begin+m-1;
E_unten_vorne_help=E_unten_vorne_begin+m-1;
450 E_unten_hinten_help=E_unten_hinten_begin+m-1;
E_unten_reihe(m,1:9)=E_unten_reihe_help;
E_unten_vorne(m,1:9)=E_unten_vorne_help;
E_unten_hinten(m,1:9)=E_unten_hinten_help;
end
455 for m=1:numel(y)-2
E_unten_help(:,1)=E_unten_reihe(:,1)+(m-1)*numel(x);
E_unten_rechts(m,1)=E_unten_rechts_begin(1,1)+(m-1)*numel(x);
E_unten_links(m,1)=E_unten_links_begin(1,1)+(m-1)*numel(x);
E_unten_help(:,2:9)=E_unten_reihe(:,2:9)+(m-1)*numel(X);
460 E_unten_rechts(m,2:9)=E_unten_rechts_begin(1,2:9)+(m-1)*numel(X);
E_unten_links(m,2:9)=E_unten_links_begin(1,2:9)+(m-1)*numel(X);
E_unten(:,1:numel(x)-2)+(m-1)*(numel(x)-2),1:9)=E_unten_help;
end
465 E_unten=[E_unten;E_unten_hinten;E_unten_rechts;E_unten_hinten_rechts];
dlmwrite('knoten_4.txt',N,'precision',10');
dlmwrite('knoten_platte_oben_4.txt',N_platte,'precision',10');
dlmwrite('knoten_coupling_oben_4.txt',coupling,'precision',10');
dlmwrite('element_4.txt',E,'precision',10');
470 dlmwrite('element_oben_4.txt',E_oben,'precision',10');
dlmwrite('element_platte_oben_4.txt',E_platte,'precision',10');
dlmwrite('element_halbraum_oben_4.txt',E_halbraum,'precision',10');
dlmwrite('element_vorne_4.txt',E_vorne,'precision',10');
dlmwrite('element_hinten_4.txt',E_hinten,'precision',10');
475 dlmwrite('element_rechts_4.txt',E_rechts,'precision',10');
dlmwrite('element_links_4.txt',E_links,'precision',10');
dlmwrite('element_unten_4.txt',E_unten,'precision',10');
dlmwrite('boundary_links_4.txt',boundary_links,'precision',10');
dlmwrite('boundary_vorne_4.txt',boundary_vorne,'precision',10');

```

Programm 8: Matlab-Programm zur Berechnung des Federparameters k_{jj} und des Dämpfungsparameters c_{jj} .

```

clear all;
close all;
dt=0.025;
t0125=0:dt:13;
5 t025=0:dt:5;
t05=0:dt:3;
t1=0:dt:2;
t2=0:dt:2;
t4=0:dt:2;
10 t8=0:dt:2;
f0125=0.125;
f025=0.25;
f05=0.5;
f1=1;
15 f2=2;
f4=4;
f8=8;
T0125=1/f0125;
T025=1/f025;
20 T05=1/f05;
T1=1/f1;
T2=1/f2;
T4=1/f4;
T8=1/f8;
25 F0125=zeros(1,numel(t0125));
F0125(1:T0125/dt+1)=300000*sin(2*pi*f0125*t0125(1:
T0125/dt+1));
L0125=length(t0125)-1;
F025=zeros(1,numel(t025));
30 F025(1:T025/dt+1)=300000*sin(2*pi*f025*t025(1:T025/
dt+1));
L025=length(t025)-1;
F05=zeros(1,numel(t05));
F05(1:T05/dt+1)=300000*sin(2*pi*f05*t05(1:T05/dt+1))
;
L05=length(t05)-1;
35 F1=zeros(1,numel(t1));
F1(1:T1/dt+1)=300000*sin(2*pi*f1*t1(1:T1/dt+1));
L1=length(t1)-1;
F2=zeros(1,numel(t2));
F2(1:T2/dt+1)=300000*sin(2*pi*f2*t2(1:T2/dt+1));
40 L2=length(t2)-1;
F4=zeros(1,numel(t4));
F4(1:T4/dt+1)=300000*sin(2*pi*f4*t4(1:T4/dt+1));
L4=length(t4)-1;
F8=zeros(1,numel(t8));
45 F8(1:T8/dt+1)=300000*sin(2*pi*f8*t8(1:T8/dt+1));
L8=length(t8)-1;

F0125_fft=fft(F0125);
F025_fft=fft(F025);
50 F05_fft=fft(F05);
F1_fft=fft(F1);
F2_fft=fft(F2);
F4_fft=fft(F4);
F8_fft=fft(F8);
55 PF0125=F0125_fft(1:L0125/2+1);
PF025=F025_fft(1:L025/2+1);
PF05=F05_fft(1:L05/2+1);
PF1=F1_fft(1:L1/2+1);
PF2=F2_fft(1:L2/2+1);
60 PF4=F4_fft(1:L4/2+1);
PF8=F8_fft(1:L8/2+1);
fu0125=1/dt*(0:(L0125/2))/L0125;
fu025=1/dt*(0:(L025/2))/L025;
fu05=1/dt*(0:(L05/2))/L05;
65 fu1=1/dt*(0:(L1/2))/L1;
fu2=1/dt*(0:(L2/2))/L2;
fu4=1/dt*(0:(L4/2))/L4;
fu8=1/dt*(0:(L8/2))/L8;

70 uf0125=dlmread(' ../Abaqus/
starres_fundament_200x200x800_vertikal/
u3_f0125_oben_starr.rpt',' ',4,0);
tf0125=uf0125(:,1);
f0125_center=uf0125(:,2);
l0125=length(tf0125)-1;
uf0125_fft=fft(f0125_center);
75 Pu0125=uf0125_fft(1:l0125/2+1);

uf025=dlmread(' ../Abaqus/
starres_fundament_200x200x800_vertikal/
u3_f025_oben_starr.rpt',' ',4,0);
tf025=uf025(1:5/dt+1,1);
f025_center=uf025(1:5/dt+1,2);
80 l025=length(tf025)-1;
uf025_fft=fft(f025_center);
Pu025=uf025_fft(1:l025/2+1);

uf05=dlmread(' ../Abaqus/
starres_fundament_200x200x800_vertikal/
u3_f05_oben_starr.rpt',' ',4,0);
85 tf05=uf05(1:3/dt+1,1);
f05_center=uf05(1:3/dt+1,2);
l05=length(tf05)-1;
uf05_fft=fft(f05_center);

Pu05=uf05_fft(1:l05/2+1);
90 uf1=dlmread(' ../Abaqus/
starres_fundament_200x200x800_vertikal/
u3_f1_oben_starr.rpt',' ',4,0);
tf1=uf1(1:2/dt+1,1);
f1_center=uf1(1:2/dt+1,2);
l1=length(tf1)-1;
95 uf1_fft=fft(f1_center);
Pu1=uf1_fft(1:l1/2+1);

uf4=dlmread(' ../Abaqus/
starres_fundament_200x200x800_vertikal/
u3_f4_oben_starr.rpt',' ',4,0);
100 tf4=uf4(1:2/dt+1,1);
f4_center=uf4(1:2/dt+1,2);
l4=length(tf4)-1;
uf4_fft=fft(f4_center);
Pu4=uf4_fft(1:l4/2+1);

105 uf8=dlmread(' ../Abaqus/
starres_fundament_200x200x800_vertikal/
u3_f8_oben_starr.rpt',' ',4,0);
tf8=uf8(1:2/dt+1,1);
f8_center=uf8(1:2/dt+1,2);
l8=length(tf8)-1;
110 uf8_fft=fft(f8_center);
Pu8=uf8_fft(1:l8/2+1);

k0125=real(PF0125./Pu0125');
c0125=imag(PF0125./Pu0125');
115 k025=real(PF025./Pu025');
c025=imag(PF025./Pu025');
k05=real(PF05./Pu05');
c05=imag(PF05./Pu05');
k1=real(PF1./Pu1');
c1=imag(PF1./Pu1');
120 k2=real(PF2./Pu2');
c2=imag(PF2./Pu2');
k4=real(PF4./Pu4');
c4=imag(PF4./Pu4');
k8=real(PF8./Pu8');
c8=imag(PF8./Pu8');

m=1;
for n=1:numel(fu1)
130 if (fu0125(n)>=0.08) && (fu0125(n)<=0.17)
f(m)=fu0125(n);
k(m)=k0125(n);
c(m)=c0125(n);
m=m+1;
end
135 if (fu025(n)>=0.2) && (fu025(n)<=0.3)
f(m)=fu025(n);
k(m)=k025(n);
c(m)=c025(n);
m=m+1;
end
140 if (fu05(n)>=0.3) && (fu05(n)<=0.7)
f(m)=fu05(n);
k(m)=k05(n);
c(m)=c05(n);
m=m+1;
end
145 if (fu1(n)>=0.7) && (fu1(n)<=1.3)
f(m)=fu1(n);
k(m)=k1(n);
c(m)=c1(n);
m=m+1;
end
150 if (fu2(n)>=1.7) && (fu2(n)<=2.3)
f(m)=fu2(n);
k(m)=k2(n);
c(m)=c2(n);
m=m+1;
end
155 if (fu4(n)>=3.7) && (fu4(n)<=4.3)
f(m)=fu4(n);
k(m)=k4(n);
c(m)=c4(n);
m=m+1;
end
160 if (fu8(n)>=7.7) && (fu8(n)<=8.3)
f(m)=fu8(n);
k(m)=k8(n);
c(m)=c8(n);
m=m+1;
end
165 end

G=72e06;
rho=1800;
175 r=10;
a0=2*pi*10.*f/200;
Kzz=-0.66796*10^-0.11174*10*a0+0.42391*10*a0
.^2-0.42496*10*a0.^3+...
0.24668*10*a0.^4-0.67817*a0.^5+0.068804*a0.^6;
kzz=G*r*Kzz;
180 Czz=-0.52469*10-0.042338*a0-0.15837*a0.^2;
czz=r.^2*Czz*sqrt(G*rho)*2*pi.*f;

```

Programm 9: Input-file zur Simulation der Verschiebungen, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und Spannungen bei Belastung eines schlaffen Fundaments mit einer vertikalen Kraft $F(t)$.

```

HEADING
*NODE, NSET=ALL, INPUT=knoten_4.txt
*NODE, NSET=FUNDAMENT_OBEN, INPUT=knoten_platte_oben_4.txt
*NODE, NSET=VORNE, INPUT=boundary_vorne_4.txt
5 *NODE, NSET=LINKS, INPUT=boundary_links_4.txt
**
*ELEMENT, TYPE=C3D8, ELSET=HALBRAUM, INPUT=element_4.txt
*ELEMENT, TYPE=C3D8, ELSET=FUNDAMENT_OBEN, INPUT=element_platte_oben_4.txt
*ELEMENT, TYPE=CIN3D8, ELSET=HINTEN, INPUT=element_hinten_4.txt
10 *ELEMENT, TYPE=CIN3D8, ELSET=RECHTS, INPUT=element_rechts_4.txt
*ELEMENT, TYPE=CIN3D8, ELSET=UNTEN, INPUT=element_unten_4.txt
**
*ELSET, ELSET=ALL
HALBRAUM, UNTEN, RECHTS, HINTEN
15 *SOLID SECTION, MATERIAL=ELBODEN, ELSET=ALL
*MATERIAL, NAME=ELBODEN
*ELASTIC
18000, .25
*DENSITY
20 1.8
*BOUNDARY
VORNE, 2, 2
LINKS, 1, 1
*AMPLITUDE, NAME=PULSE, INPUT=amplitude_f1.txt
25 *SURFACE, TYPE=ELEMENT, NAME=FUNDAMENT
FUNDAMENT_OBEN, S1
*STEP, INC=50000
*DYNAMIC, DIRECT
0.025, 3
30 *DSLOAD, AMPLITUDE=PULSE
FUNDAMENT, P, 1
*OUTPUT, FIELD, FREQUENCY=1
*NODE OUTPUT, NSET=ALL
U, V, A
35 *ELEMENT OUTPUT, ELSET=ALL
S
*OUTPUT, HISTORY, FREQUENCY=1
*NODE OUTPUT, NSET=FUNDAMENT_OBEN
U, V, A
40 *ELEMENT OUTPUT, ELSET=FUNDAMENT_OBEN
S
*ENDSTEP

```

Programm 10: Input-file zur Simulation der Verschiebungen, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und Spannungen bei Belastung eines starren Fundaments mit einer vertikalen Kraft $F(t)$.

```

*HEADING
*NODE ,NSET=ALL ,INPUT=knoten_4.txt
*NODE ,NSET=FUNDAMENT_OBEN ,INPUT=knoten_platte_oben_4.txt
*NODE ,NSET=VORNE ,INPUT=boundary_vorne_4.txt
5 *NODE ,NSET=LINKS ,INPUT=boundary_links_4.txt
*NODE ,NSET=FUNDAMENT_COUPLING ,INPUT=knoten_coupling_oben_4.txt
**
*ELEMENT ,TYPE=C3D8 ,ELSET=HALBRAUM ,INPUT=element_4.txt
*ELEMENT ,TYPE=C3D8 ,ELSET=FUNDAMENT_OBEN ,INPUT=element_platte_oben_4.txt
10 **
*ELEMENT ,TYPE=CIN3D8 ,ELSET=HINTEN ,INPUT=element_hinten_4.txt
*ELEMENT ,TYPE=CIN3D8 ,ELSET=RECHTS ,INPUT=element_rechts_4.txt
*ELEMENT ,TYPE=CIN3D8 ,ELSET=UNTEN ,INPUT=element_unten_4.txt
**
15 *ELSET ,ELSET=ALL
HALBRAUM ,UNTEN ,RECHTS ,HINTEN
*SOLID SECTION ,MATERIAL=ELBODEN ,ELSET=ALL
*MATERIAL ,NAME=ELBODEN
*ELASTIC
20 180000 ,.25
*DENSITY
1.8
*BOUNDARY
VORNE ,2,2
25 LINKS ,1,1
*AMPLITUDE ,NAME=PULSE ,INPUT=amplitude_f1.txt
*SURFACE ,TYPE=ELEMENT ,NAME=FUNDAMENT
FUNDAMENT_OBEN ,S1
*EQUATION
30 2
FUNDAMENT_COUPLING ,3,1,1,3,-1
*EQUATION
2
FUNDAMENT_COUPLING ,2,1,1,2,-1
35 *EQUATION
2
FUNDAMENT_COUPLING ,1,1,1,1,-1
*STEP ,INC=50000
*DYNAMIC ,DIRECT
40 0.025 ,6
*DSLOAD ,AMPLITUDE=PULSE
FUNDAMENT ,P,1
*OUTPUT ,FIELD ,FREQUENCY=1
*NODE OUTPUT ,NSET=ALL
45 U ,V ,A
*ELEMENT OUTPUT ,ELSET=ALL
S
*OUTPUT ,HISTORY ,FREQUENCY=1
*NODE OUTPUT ,NSET=FUNDAMENT_OBEN
50 U ,V ,A
*ELEMENT OUTPUT ,ELSET=FUNDAMENT_OBEN
S
*ENDSTEP

```

Programm 11: Input-file zur Simulation der Verschiebungen bei Belastung eines starren Fundaments mit einem Moment $M(t)$.

```

*HEADING
*NODE ,NSET=ALL ,INPUT=knoten_2.txt
*NODE ,NSET=FUNDAMENT_OBEN ,INPUT=knoten_platte_oben_2.txt
*NODE ,NSET=LINKS ,INPUT=boundary_links_2.txt
5 *NODE ,NSET=FUNDAMENT_COUPLING ,INPUT=knoten_coupling_oben_2.txt
*NODE ,NSET=FUNDAMENTA ,INPUT=knoten_fundament_A_2.txt
*NODE ,NSET=FUNDAMENTB ,INPUT=knoten_fundament_B_2.txt
*NODE ,NSET=FUNDAMENTC2 ,INPUT=knoten_fundament_C2_2.txt
*NODE ,NSET=FUNDAMENTC3 ,INPUT=knoten_fundament_C3_2.txt
10 *NODE ,NSET=FUNDAMENTC4 ,INPUT=knoten_fundament_C4_2.txt
*NODE ,NSET=FUNDAMENT1 ,INPUT=knoten_fundament1_2.txt
*NODE ,NSET=FUNDAMENT2 ,INPUT=knoten_fundament2_2.txt
*NODE ,NSET=FUNDAMENT3 ,INPUT=knoten_fundament3_2.txt
*NODE ,NSET=FUNDAMENT4 ,INPUT=knoten_fundament4_2.txt
15 *NODE ,NSET=FUNDAMENT5 ,INPUT=knoten_fundament5_2.txt
**
*ELEMENT ,TYPE=C3D8 ,ELSET=HALBRAUM ,INPUT=element_2.txt
*ELEMENT ,TYPE=C3D8 ,ELSET=FUNDAMENT_OBEN ,INPUT=element_platte_oben_2.txt
**
20 *ELEMENT ,TYPE=CIN3D8 ,ELSET=VORNE ,INPUT=element_vorne_2.txt
*ELEMENT ,TYPE=CIN3D8 ,ELSET=HINTEN ,INPUT=element_hinten_2.txt
*ELEMENT ,TYPE=CIN3D8 ,ELSET=RECHTS ,INPUT=element_rechts_2.txt
*ELEMENT ,TYPE=CIN3D8 ,ELSET=UNTEN ,INPUT=element_unten_2.txt
**
25 *ELSET ,ELSET=ALL
HALBRAUM ,UNTEN ,RECHTS ,VORNE ,HINTEN
*SOLID SECTION ,MATERIAL=ELBODEN ,ELSET=ALL
*MATERIAL ,NAME=ELBODEN
*ELASTIC
30 180000 ,.25
*DENSITY
1.8
*BOUNDARY
LINKS ,1,1
35 *AMPLITUDE ,NAME=PULSE ,INPUT=amplitude_M_f1.txt
*SURFACE ,TYPE=ELEMENT ,NAME=FUNDAMENT
FUNDAMENT_OBEN ,S1
*EQUATION
3
40 FUNDAMENTC3 ,3,-1 ,FUNDAMENTA ,3,0.5 ,FUNDAMENTB ,3,0.5
*EQUATION
3
FUNDAMENTC2 ,3,-1 ,FUNDAMENTA ,3,0.75 ,FUNDAMENTB ,3,0.25
*EQUATION
45 3
FUNDAMENTC4 ,3,-1 ,FUNDAMENTA ,3,0.25 ,FUNDAMENTB ,3,0.75
*EQUATION
2
FUNDAMENT1 ,3,1 ,FUNDAMENTA ,3,-1
50 *EQUATION
2
FUNDAMENT2 ,3,1 ,FUNDAMENTC2 ,3,-1
*EQUATION
2
55 FUNDAMENT3 ,3,1 ,FUNDAMENTC3 ,3,-1
*EQUATION
2
FUNDAMENT4 ,3,1 ,FUNDAMENTC4 ,3,-1
*EQUATION
60 2
FUNDAMENT5 ,3,1 ,FUNDAMENTB ,3,-1
*EQUATION
2
FUNDAMENT_COUPLING ,2,1 ,FUNDAMENTC3 ,2,-1
65 *EQUATION
2
FUNDAMENT_COUPLING ,1,1 ,FUNDAMENTC3 ,1,-1
*STEP ,INC=50000
*DYNAMIC ,DIRECT
70 0.025 ,6
*CLOAD ,AMPLITUDE=PULSE
FUNDAMENTA ,3,1
FUNDAMENTB ,3,-1
*OUTPUT ,FIELD ,FREQUENCY=1
75 *NODE OUTPUT ,NSET=ALL
U ,V ,A
*ELEMENT OUTPUT ,ELSET=ALL
S
*ENDSTEP

```

Programm 12: Python-Programm zur Berechnung der Verschiebungen bei Belastung eines schlaffen Fundaments durch vertikale Kraft $F(t)$ mit der BEM. Die Programme `nodes_fein.py`, `elements_fein.py`, `elements_fundament_fein.py` und `elements_halbraum_fein.py` enthalten die mit Abaqus CAE erstellten Knoten und Elemente des Netzes.

```

execfile( "C:/Users/Panther/Documents/Pithia/schlaffes_fundament/schlaffes_fundament_fein/nodes_fein.py")
execfile( "C:/Users/Panther/Documents/Pithia/schlaffes_fundament/schlaffes_fundament_fein/elements_fein.py")
execfile( "C:/Users/Panther/Documents/Pithia/schlaffes_fundament/schlaffes_fundament_fein/
elements_fundament_fein.py")
execfile( "C:/Users/Panther/Documents/Pithia/schlaffes_fundament/schlaffes_fundament_fein/
elements_halbraum_fein.py")
5 execfile( "C:/Users/Panther/Documents/Pithia/schlaffes_fundament/schlaffes_fundament_fein/command_fein_f1.py"
)

```

Programm 13: Python-Programm `command_fein_f1.py` zur Berechnung von Programm 12.

```

from math import*
E=180e6
v=0.25
5 rho=1800
d=0
materialid=1
region1=1
10 #Create the material
matCreate(materialid, "Material", LINEAR_ELASTIC, (E,v,rho,d))
#Create the region
regCreate(region1, "Halbraum", materialid)
#Attach the elements to the region
15 regAttachElement (region1, elements_fundament)
regAttachElement (region1, elements_halbraum)
#Create a load case
loadcaseid=1
20 duration = 5.0
time_steps = 4096
timefid=1
timef = timeFuncCreate (timefid, "function_1", duration, time_steps)
load=loadCaseCreateTimeDomain(loadcaseid, "schlaffes_fundament_fein_f1", timefid, EXPONENTIAL_FFT, 0.005,
0.3)
25 time_st = timeFuncGetTimeSteps(timefid)
value_set_1 = ()
A = 1000.0
omega = 6.2832
30 for timestep in range(0, time_steps):
    t = time_st[timestep]
    if t < 1.0:
        value_set_1 = value_set_1 + ( A * sin(omega * t), )
35     else:
        value_set_1 = value_set_1 + ( 0.0, )
timeFuncAddValueSet (timefid, value_set_1 )
40 #Attach the region to the loadcase
loadCaseAttachReg(loadcaseid, region1)
#Set BC(load)
selectAllEntities()
selectById(ELEMENTS, 1, 5)
45 selectAlsoById(ELEMENTS, 3393, 3410)
elemlist=getSelected(ELEMENTS)
loadCaseApplyElemTimeBC(loadcaseid, 0, elemlist, FIELD_T, 2, 0 )
selectAllEntities()
loadCaseSetActive(load)
50 #loadCaseSolveActive( True )
#loadCaseReadResultsActive()

```

Programm 14: Matlab-Code zur Berechnung der gegenphasigen Anregung zweier Ringsegmente zum Fundament.

```

clear all;
close all;
R=10;
d=2;
5 R1=R+d;
R2=R1+2*R;
phi=linspace(0,2*pi);
xkreis=R*sin(phi);
ykreis=R*cos(phi);
10 raster=1;

x=-R2-0.5*raster:raster:R2+0.5*raster;
y=-R2-0.5*raster:raster:R2+0.5*raster;

15 n=1;
for i=1:numel(x)
    for j=1:numel(y)
        if (x(i)^2+y(j)^2<=R^2) && (y(j)>0)
            M_innen(n,1:2)=[x(i),y(j)];
            n=n+1;
        end
    end
end
20 n=1;
for i=1:numel(x)
    for j=1:numel(y)
        if (x(i)^2+y(j)^2<=R^2) && (x(i)^2+y(j)^2>
            R1^2) && (x(i)>y(j)) && (y(j)>-x(i)) &&
            (y(j)>0)
            M_aussen_vorne(n,1:2)=[x(i),y(j)];
            n=n+1;
        end
    end
end
25 n=1;
for i=1:numel(x)
    for j=1:numel(y)
        if (x(i)^2+y(j)^2<=R^2) && (x(i)>y(j)) && (x(j)<-y(i)) &&
            (y(j)>0)
            M_aussen_hinten(n,1:2)=[x(i),y(j)];
            n=n+1;
        end
    end
end
30 n=1;
for i=1:numel(x)
    for j=1:numel(y)
        if (x(i)^2+y(j)^2<=R^2) && (x(i)<y(j)) && (x(j)<-y(i)) &&
            (y(j)>0)
            M_aussen_hinten(n,1:2)=[x(i),y(j)];
            n=n+1;
        end
    end
end
35 P=[100,0];
P_aussen_vorne=[R2-3,0];
P_aussen_hinten=[-R2+3,0];
v=0.25;
cs=200;
mu=180000;
40 dt=1/1000;
t=0:dt:100;

uzzalt=0;
for m=1:numel(M_innen(:,1))
    x=M_innen(m,1);
    y=M_innen(m,2);
    r(m)=sqrt((x-P(1))^2+(y-P(2))^2);
    tau=t*cs/r(m);
    uzz_innen_P=-2*raster^2*uzzt(tau,mu,v,r(m),cs,t,
    dt);
    uzz_innen_P=uzz_innen_P+uzzalt;
    uzzalt=uzz_innen_P;
end
55 uzzalt=0;
for m=1:numel(M_innen(:,1))
    x=M_innen(m,1);
    y=M_innen(m,2);
    r(m)=sqrt((x-P_aussen_vorne(1))^2+(y-
    P_aussen_vorne(2))^2);
    tau=t*cs/r(m);
    uzz_innen_vorne=-2*raster^2*uzzt(tau,mu,v,r(m),
    cs,t,dt);
    uzz_innen_vorne=uzz_innen_vorne+uzzalt;
    uzzalt=uzz_innen_vorne;
end
60 uzzalt=0;
for m=1:numel(M_aussen_vorne(:,1))
    x=M_aussen_vorne(m,1);
    y=M_aussen_vorne(m,2);
    r(m)=sqrt((x-P(1))^2+(y-P(2))^2);
    tau=t*cs/r(m);
    uzz_vorne_P=-2*raster^2*uzzt(tau,mu,v,r(m),cs,t,
    dt);
    uzz_vorne_P=uzz_vorne_P+uzzalt;
    uzzalt=uzz_vorne_P;
end
70 uzzalt=0;
for m=1:numel(M_aussen_hinten(:,1))
    x=M_aussen_hinten(m,1);
    y=M_aussen_hinten(m,2);
    r(m)=sqrt((x-P(1))^2+(y-P(2))^2);
    tau=t*cs/r(m);
    uzz_hinten_P=-2*raster^2*uzzt(tau,mu,v,r(m),cs,t,
    dt);
    uzz_hinten_P=uzz_hinten_P+uzzalt;
    uzzalt=uzz_hinten_P;
end
75 uzzdiff_innen_vorne=diff(uzz_innen_vorne);
uzzdiff_innen_vorne=[0 uzzdiff_innen_vorne];
uzzdiff_innen_P=diff(uzz_innen_P);
uzzdiff_innen_P=[0 uzzdiff_innen_P];
uzzdiff_vorne_P=diff(uzz_vorne_P);
uzzdiff_vorne_P=[0 uzzdiff_vorne_P];
uzzdiff_hinten_P=diff(uzz_hinten_P);
uzzdiff_hinten_P=[0 uzzdiff_hinten_P];
80 f1=0.125;
f2=0.25;
f3=0.5;
f4=1;
f5=2;
f6=4;
f7=8;
f8=0.125+t*0.0005;
T1=1/f1;
T2=1/f2;
T3=1/f3;
T4=1/f4;
T5=1/f5;
T6=1/f6;
T7=1/f7;
T8=8;
a=1;
85 F1_innen=zeros(1,numel(t));
F1_innen(1:10*T1/dt+1)=a*sin(t(1:10*T1/dt+1)*pi*2*f1);
F2_innen=zeros(1,numel(t));
F2_innen(1:10*T2/dt+1)=a*sin(t(1:10*T2/dt+1)*pi*2*f2);
F3_innen=zeros(1,numel(t));
F3_innen(1:10*T3/dt+1)=a*sin(t(1:10*T3/dt+1)*pi*2*f3);
F4_innen=zeros(1,numel(t));
F4_innen(1:10*T4/dt+1)=a*sin(t(1:10*T4/dt+1)*pi*2*f4);
F5_innen=zeros(1,numel(t));
F5_innen(1:10*T5/dt+1)=a*sin(t(1:10*T5/dt+1)*pi*2*f5);
F6_innen=zeros(1,numel(t));
F6_innen(1:10*T6/dt+1)=a*sin(t(1:10*T6/dt+1)*pi*2*f6);
F7_innen=zeros(1,numel(t));
F7_innen(1:10*T7/dt+1)=a*sin(t(1:10*T7/dt+1)*pi*2*f7);
F8_innen=zeros(1,numel(t));
F8_innen(1:10*T8/dt+1)=a*sin(t(1:10*T8/dt+1)*pi*2.*
    f8(1:10*T8/dt+1));
90 ts=0:dt:2*t(end);
ts1=ts/T1;
ts2=ts/T2;
ts3=ts/T3;
ts4=ts/T4;
ts5=ts/T5;
ts6=ts/T6;
ts7=ts/T7;
95 s1_innen_P=conv(uzzdiff_innen_P,F1_innen);
s2_innen_P=conv(uzzdiff_innen_P,F2_innen);
s3_innen_P=conv(uzzdiff_innen_P,F3_innen);
s4_innen_P=conv(uzzdiff_innen_P,F4_innen);
s5_innen_P=conv(uzzdiff_innen_P,F5_innen);
s6_innen_P=conv(uzzdiff_innen_P,F6_innen);
s7_innen_P=conv(uzzdiff_innen_P,F7_innen);
s8_innen_P=conv(uzzdiff_innen_P,F8_innen);
100 F1_aussen=conv(uzzdiff_innen_vorne,F1_innen);
F2_aussen=conv(uzzdiff_innen_vorne,F2_innen);
F3_aussen=conv(uzzdiff_innen_vorne,F3_innen);
F4_aussen=conv(uzzdiff_innen_vorne,F4_innen);
F5_aussen=conv(uzzdiff_innen_vorne,F5_innen);
F6_aussen=conv(uzzdiff_innen_vorne,F6_innen);
F7_aussen=conv(uzzdiff_innen_vorne,F7_innen);
F8_aussen=conv(uzzdiff_innen_vorne,F8_innen);
105 b1=0.5*0.96*numel(M_innen(:,1))/numel(M_aussen_vorne
    (:,1));
F1_aussen=b1*F1_aussen./6.7e-08;
F2_aussen=b1*F2_aussen./6.7e-08;
F3_aussen=b1*F3_aussen./6.7e-08;
F4_aussen=b1*F4_aussen./6.7e-08;
F5_aussen=b1*F5_aussen./6.7e-08;
F6_aussen=b1*F6_aussen./6.7e-08;
F7_aussen=b1*F7_aussen./6.7e-08;
F8_aussen=b1*F8_aussen./6.7e-08;
110
115
120
125
130
135
140
145
150
155
160
165
170
175

```

```

s1_vorne=conv(uzzdifff_vorne_P,F1_aussen(1:numel(
    F1_innen)));
s2_vorne=conv(uzzdifff_vorne_P,F2_aussen(1:numel(
    F2_innen)));
180 s3_vorne=conv(uzzdifff_vorne_P,F3_aussen(1:numel(
    F3_innen)));
s4_vorne=conv(uzzdifff_vorne_P,F4_aussen(1:numel(
    F4_innen)));
s5_vorne=conv(uzzdifff_vorne_P,F5_aussen(1:numel(
    F5_innen)));
s6_vorne=conv(uzzdifff_vorne_P,F6_aussen(1:numel(
    F6_innen)));
s7_vorne=conv(uzzdifff_vorne_P,F7_aussen(1:numel(
    F7_innen)));
185 s8_vorne=conv(uzzdifff_vorne_P,F8_aussen(1:numel(
    F8_innen)));

delta_t=(R1+R2)/2/180;
F1_hinten=zeros(1,numel(t));
F1_hinten((T1-delta_t)/dt:end)=-b1*F1_innen(1:end-(
    T1-delta_t)/dt+1);
190 F2_hinten=zeros(1,numel(t));
F2_hinten((T2-delta_t)/dt:end)=-b1*F2_innen(1:end-(
    T2-delta_t)/dt+1);
F3_hinten=zeros(1,numel(t));
F3_hinten((T3-delta_t)/dt:end)=-b1*F3_innen(1:end-(
    T3-delta_t)/dt+1);
F4_hinten=zeros(1,numel(t));
195 F4_hinten((T4-delta_t)/dt:end)=-b1*F4_innen(1:end-(
    T4-delta_t)/dt+1);
F5_hinten=zeros(1,numel(t));

F5_hinten((T5-delta_t)/dt:end)=-b1*F5_innen(1:end-(
    T5-delta_t)/dt+1);
F6_hinten=zeros(1,numel(t));
F6_hinten((T6-delta_t)/dt:end)=-b1*F6_innen(1:end-(
    T6-delta_t)/dt+1);
200 F7_hinten=zeros(1,numel(t));
F7_hinten((2*T7-delta_t)/dt:end)=-b1*F7_innen(1:end-
    (2*T7-delta_t)/dt+1);
F8_hinten=zeros(1,numel(t));
F8_hinten((T8-delta_t)/dt:end)=-b1*F8_innen(1:end-(
    T8-delta_t)/dt+1);

205 s1_hinten=conv(uzzdifff_hinten_P,F1_hinten);
s2_hinten=conv(uzzdifff_hinten_P,F2_hinten);
s3_hinten=conv(uzzdifff_hinten_P,F3_hinten);
s4_hinten=conv(uzzdifff_hinten_P,F4_hinten);
s5_hinten=conv(uzzdifff_hinten_P,F5_hinten);
210 s6_hinten=conv(uzzdifff_hinten_P,F6_hinten);
s7_hinten=conv(uzzdifff_hinten_P,F7_hinten);
s8_hinten=conv(uzzdifff_hinten_P,F8_hinten);

s1=s1_innen_P+s1_vorne+s1_hinten;
215 s2=s2_innen_P+s2_vorne+s2_hinten;
s3=s3_innen_P+s3_vorne+s3_hinten;
s4=s4_innen_P+s4_vorne+s4_hinten;
s5=s5_innen_P+s5_vorne+s5_hinten;
s6=s6_innen_P+s6_vorne+s6_hinten;
220 s7=s7_innen_P+s7_vorne+s7_hinten;
s8=s8_innen_P+s8_vorne+s8_hinten;

```