

# Topologie und Volumen in negativer Krümmung

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER NATURWISSENSCHAFTEN

von der KIT-Fakultät für Mathematik des  
Karlsruher Instituts für Technologie (KIT)  
genehmigte

DISSERTATION

von

Hartwig Senska  
aus Hamburg

Tag der mündlichen Prüfung: 17.07.2019

Referent: Prof. Dr. Roman Sauer  
Korreferent: Prof. Dr. Enrico Leuzinger





---

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>Einführung</b>	<b>1</b>
<b>1 Grundlagen</b>	<b>7</b>
1.1 Nichtpositive und negative Krümmung . . . . .	7
1.1.1 Allgemeines . . . . .	8
1.1.2 Projektionen auf konvexe Mengen . . . . .	9
1.1.3 Geometrie im Unendlichen . . . . .	9
1.2 Isometrien und Minimalmengen . . . . .	11
1.2.1 Elliptische Isometrien . . . . .	13
1.2.2 Hyperbolische Isometrien . . . . .	16
1.2.3 Parabolische Isometrien . . . . .	18
1.2.4 Gemeinsame Fixpunkte bei diskreten Gruppen . . . . .	19
1.3 Nerven-Konstruktion . . . . .	23
<b>2 Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeiten</b>	<b>27</b>
2.1 Dick-dünn-Zerlegung . . . . .	27
2.2 Effizientes simpliziales Modell . . . . .	37
2.2.1 Grundlagen . . . . .	38
2.2.2 Überdeckung und Hauptresultat . . . . .	44
2.2.3 Anwendungen . . . . .	57
2.3 Beispiele von Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeiten ohne strikt negative Krümmung . . . . .	61
<b>3 Orbifaltigkeiten</b>	<b>67</b>
3.1 Grundlagen . . . . .	67
3.2 Dick-dünn-Zerlegung . . . . .	69
3.2.1 Allgemeines . . . . .	69
3.2.2 Dünner Teil . . . . .	75
3.2.3 Dicker Teil . . . . .	92
3.2.4 Zusammenfassung . . . . .	92
3.3 Effizientes simpliziales Modell . . . . .	96
3.3.1 Grundlagen . . . . .	97

3.3.2	Faltbare und gestreckte Mengen . . . . .	102
3.3.3	Überdeckung . . . . .	120
3.3.4	Hauptresultat . . . . .	139
3.3.5	Anwendungen . . . . .	148

<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>155</b>
-----------------------------	--	------------



---

## Einführung

---

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Aufgabe, die Topologie negativ gekrümmter Räume (linear) durch ihr Volumen zu kontrollieren; in vereinfachter Form lässt sich das Grundthema in der auch für Laien verständlichen Frage

*„Wie kompliziert kann ein Gegenstand aussehen, dessen Volumen bekannt ist?“*

zusammenfassen. Genauer entstehen unsere Hauptresultate als Ergebnisse zweier getrennter Untersuchungen: Zunächst wird die Rolle obiger negativ gekrümmter Räume  $M$  durch Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeiten negativer Schnittkrümmung übernommen, wohingegen wir anschließend hyperbolische Orbifaltigkeiten betrachten. In beiden Fällen messen wir die Komplexität der Topologie mithilfe der singulären Homologie  $H_*(M; R)$ , und eine im Volumen lineare Kontrolle selbiger bedeutet nun nichts anderes als die Konstruktion von Schranken der Gestalt *Konstante · Volumen* an die einzelnen Homologiemoduln.

Nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte<sup>1</sup> Moduln über Hauptidealringen gilt bekanntlich

$$H_k(M; R) \cong R^{b_k(M; Q(R))} \oplus \text{tors } H_k(M; R),$$

wobei  $b_k(M; Q(R))$  die  $k$ -te Betti-Zahl von  $M$  mit Koeffizienten im Quotientenkörper  $Q(R)$  des Hauptidealrings  $R$  bezeichnet sowie  $\text{tors } H_k(M; R)$  den Torsionsuntermodul von  $H_k(M; R)$ . Folglich ist eine Kontrolle der Homologie gleichbedeutend mit der (getrennten) Kontrolle des freien Anteils – gegeben durch die Betti-Zahlen – und des Torsionsanteils; für Aussagen über die Torsion werden wir uns stets auf  $R = \mathbb{Z}$  einschränken.

In der Vergangenheit wurde bereits eine Reihe von Ergebnissen hinsichtlich obiger Fragestellung bewiesen. Wir erinnern daran, dass für eine  $n$ -dimensionale Hadamard-Mannigfaltigkeit  $X$  sowie ein Gitter  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  der Bahnenraum  $M := X/\Gamma$  eine Orbifaltigkeit ist, und für torsionsfreies  $\Gamma$  sogar eine Mannigfaltigkeit (jeweils endlichen Volumens). Als Ausgangspunkt ist der folgende, klassische Satz von Gromov zur linearen Kontrolle der Betti-Zahlen strikt negativ gekrümmter Mannigfaltigkeiten anzusehen<sup>2</sup>:

---

<sup>1</sup>Für die von uns betrachteten Räume ergibt sich die endliche Erzeugbarkeit bereits aus der Tatsache, dass endliches Volumen vorliegt.

<sup>2</sup>Tatsächlich gilt die Aussage im analytischen Fall und bei Ausschluss euklidischer de Rham-Faktoren auch in der allgemeineren Situation nichtpositiver Schnittkrümmung, vgl. [4] Theorem 13.1.

**Satz 1** ([4] Theorem 10.5). *Es existiert eine nur von  $n$  abhängige Konstante  $C = C(n) > 0$  mit der folgenden Eigenschaft: Sei  $X$  eine  $n$ -dimensionale Hadamard-Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $-1 \leq K \leq a < 0$  (für ein  $a < 0$ ),  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  ein torsionsfreies Gitter und  $M := X/\Gamma$ . Dann gilt*

$$b_k(M; \mathbb{K}) \leq C \cdot \text{Vol}(M)$$

für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ , bei beliebigem Koeffizientenkörper  $\mathbb{K}$ .

Allgemein lässt sich die Torsion in der  $\mathbb{Z}$ -Homologie einerseits durch die Kardinalität des Torsionsuntermoduls messen, andererseits aber auch durch die verschiedenen  $\mathbb{F}_p$ -Betti-Zahlen. Beachte, dass ein lineares Wachstum der  $\mathbb{F}_p$ -Betti-Zahlen (wie in Satz 1) – also ein lineares Wachstum der  $\mathbb{F}_p$ -Dimension – einem exponentiellen Wachstum der Kardinalität des zugehörigen  $\mathbb{F}_p$ -Vektorraums entspricht; in diesem Sinne ist es nur naheliegend, lediglich Logarithmen der Kardinalitäten zu betrachten, falls wir einen linearen Zusammenhang mit dem Volumen ausdrücken wollen. Ein entsprechendes Ergebnis von Bader, Gelander und Sauer für den Torsionsanteil in der Homologie stellt nun folgende Aussage dar:

**Satz 2** ([2] Theorem 1.2). *Es existiert eine nur von  $n$  abhängige Konstante  $C = C(n) > 0$  mit der folgenden Eigenschaft: Sei  $X$  eine  $n$ -dimensionale Hadamard-Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $-1 \leq K \leq a < 0$  (für ein  $a < 0$ ),  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  ein torsionsfreies Gitter und  $M := X/\Gamma$ . Dann gilt*

$$\log |\text{tors } H_k(M; \mathbb{Z})| \leq C \cdot \text{Vol}(M)$$

für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ , wobei für  $n = 3$  der Fall  $k = 1$  ausgeschlossen werden muss.

Zudem wird in [2] Theorem 1.7 mittels Dehn-Chirurgie eine Beispielfolge hyperbolischer Mannigfaltigkeiten konstruiert, welche zeigt, dass obige Aussage in Dimension  $n = 3$  für  $k = 1$  tatsächlich falsch ist. Ferner folgt Satz 2 aus einer effizienten simplizialen Zerlegung des dicken Teils (vgl. [2] Theorem 4.1), aus welcher sich insbesondere auch ein weiterer Beweis von Satz 1 ableiten lässt.

Im Falle von Torsion im Gitter  $\Gamma$  – d.h.  $M$  ist keine Mannigfaltigkeit mehr, sondern eine Orbifaltigkeit – ist eine Kontrolle des freien Anteils der Homologie durch untenstehende Aussage von Samet gegeben; es sei angemerkt, dass für Gitter  $\Gamma$  in der relevanten Situation stets eine Schranke  $\eta = \eta(\Gamma) \in \mathbb{N}$  an die Ordnung endlicher Untergruppen von  $\Gamma$  existiert (vgl. Lemma 3.1).

**Satz 3** ([25] Theorem 1.1). *Es existiert eine nur von  $n$  und  $\eta$  abhängige Konstante  $C = C(n, \eta) > 0$  mit der folgenden Eigenschaft: Sei  $X$  eine  $n$ -dimensionale Hadamard-Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $-1 \leq K < 0$ ,  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  ein Gitter mit  $|G| \leq \eta$  für alle endlichen  $G < \Gamma$  und  $M := X/\Gamma$ . Dann gilt*

$$b_k(M; \mathbb{K}) \leq C \cdot \text{Vol}(M)$$

für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ , wobei der Koeffizientenkörper  $\mathbb{K}$  Charakteristik 0 besitzen muss.

In der genannten Arbeit [25] wird die Abhängigkeit der Konstante  $C$  von der Schranke  $\eta$  zwar nicht angegeben,  $\eta$  jedoch tatsächlich verwendet<sup>3</sup>. Beachte außerdem, dass Satz 1 in Satz 3 enthalten ist (wenigstens für  $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$ ), nämlich falls  $\eta = 1$ .

Durch die Sätze 1 und 2 ist unsere anfängliche Fragestellung zumindest für Mannigfaltigkeiten mit Schnittkrümmung  $-1 \leq K \leq a < 0$  abschließend beantwortet worden. Wir haben uns daher dem Studium von Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeiten mit Schnittkrümmung  $-1 \leq K < 0$  zugewandt, welche insbesondere

<sup>3</sup>Die Abhängigkeit geht auf die Anwendung der dortigen Proposition 3.1 für den Beweis von Theorem 3.5 zurück; letztlich fließt Theorem 3.5 in das Hauptresultat von [25] ein.

obigen Fall einer von 0 weg beschränkten Schnittkrümmung enthalten (vgl. Lemma 1.11). Unser Hauptresultat für diese Situation ist eine effiziente simpliziale Zerlegung des dicken Teils analog zu [2] Theorem 4.1, wobei die grundlegende Beweisidee mit der aus [2] übereinstimmt: Erneut wird das simpliziale Modell mittels der Nerven-Konstruktion aus einer geeigneten guten Überdeckung des dicken Teils gebildet. Einige fehlende Eigenschaften in unserem Fall allgemeinerer Krümmung machen jedoch verschiedene Änderungen in einzelnen Beweisschritten nötig. Das Hauptresultat lautet dann wie folgt:

**Satz 4** (vgl. Satz 2.28). *Es existieren nur von  $n$  abhängige Konstanten  $C = C(n), D = D(n) > 0$  mit der folgenden Eigenschaft: Sei  $X$  eine  $n$ -dimensionale Hadamard-Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $-1 \leq K < 0$  sowie erfülltem Sichtbarkeits-Axiom,  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  ein torsionsfreies Gitter,  $M := X/\Gamma$  und  $M_+$  der dicke Teil von  $M$ . Dann ist  $(M_+, \partial M_+)$  als Paar homotopieäquivalent zu einem simplizialen Raumpaar mit höchstens  $C \cdot \text{Vol}(M)$  Ecken und Grad  $\leq D$  an jeder Ecke.*

Hieraus ergeben sich nach einigen weiteren Argumenten die gewünschten Schranken an den freien Anteil sowie den Torsionsanteil der Homologie.

**Satz 5** (vgl. Satz 2.29). *Es existiert eine nur von  $n$  abhängige Konstante  $C = C(n) > 0$  mit der folgenden Eigenschaft: Sei  $X$  eine  $n$ -dimensionale Hadamard-Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $-1 \leq K < 0$  sowie erfülltem Sichtbarkeits-Axiom,  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  ein torsionsfreies Gitter und  $M := X/\Gamma$ . Dann gilt*

$$b_k(M; \mathbb{K}) \leq C \cdot \text{Vol}(M)$$

für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ , bei beliebigem Koeffizientenkörper  $\mathbb{K}$ .

**Satz 6** (vgl. Satz 2.31). *Es existiert eine nur von  $n$  abhängige Konstante  $C = C(n) > 0$  mit der folgenden Eigenschaft: Sei  $X$  eine  $n$ -dimensionale Hadamard-Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $-1 \leq K < 0$  sowie erfülltem Sichtbarkeits-Axiom,  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  ein torsionsfreies Gitter und  $M := X/\Gamma$ . Dann gilt*

$$\log |\text{tors } H_k(M; \mathbb{Z})| \leq C \cdot \text{Vol}(M)$$

für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ , wobei für  $n = 3$  der Fall  $k = 1$  ausgeschlossen werden muss.

Wir weisen darauf hin, dass unser Hauptinteresse in Satz 6 liegt, da die Aussage von Satz 5 – zumindest im analytischen Fall – bereits aus der allgemeineren Form von Satz 1 oder – falls  $\text{char}(\mathbb{K}) = 0$  – auch Satz 3 folgen würde.

Mithilfe von Satz 4 lassen sich entsprechend zu [2] Theorem 1.5 ferner die Homotopietypen der untersuchten Mannigfaltigkeiten zählen:

**Satz 7** (vgl. Satz 2.32). *Bezeichne  $\mathfrak{Htp}_n(V)$  die Anzahl an Homotopieklassen von  $n$ -dimensionalen Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeiten mit Schnittkrümmung  $-1 \leq K < 0$  und Volumen höchstens  $V < \infty$ , wobei  $n \geq 4$ . Dann wächst  $\log \mathfrak{Htp}_n(V)$  in der Größenordnung  $V \cdot \log V$ .*

Unglücklicherweise ist scheinbar kein Beispiel bekannt, welches die Klasse von Mannigfaltigkeiten mit Schnittkrümmung  $-1 \leq K \leq a < 0$  von der Klasse von Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeiten mit Schnittkrümmung  $-1 \leq K < 0$  (z.B. bis auf Homöomorphie oder Diffeomorphie) trennt. Da unsere Ergebnisse topologischer Natur sind, wäre es also nötig, eine (topologische oder differenzierbare) Mannigfaltigkeit zu finden, welche zwar mit einer Metrik mit Schnittkrümmung  $-1 \leq K < 0$  ausgestattet werden kann, sodass ihre universelle Überlagerung das Sichtbarkeits-Axiom erfüllt, andererseits aber keine Metrik mit  $-1 \leq K \leq a < 0$  zulässt (jeweils bei endlichem Volumen). Wir geben in Abschnitt 2.3 für jede Dimension  $n \geq 2$  zumindest Beispiele von Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeiten endlichen Volumens mit Schnittkrümmung  $-1 \leq K < 0$ , welche für kein  $a < 0$  zusätzlich die stärkere Forderung  $K \leq a$  erfüllen; hierfür

erweitern wir die Argumentation aus [21], wo bereits der Fall  $n = 2$  behandelt wurde. Da diese Mannigfaltigkeiten jedoch mittels Abänderung der Metrik – genauer: Abflachung der Spitzen – aus hyperbolischen Mannigfaltigkeiten entstehen, dient dies nicht als gewünschtes Beispiel für die Trennung der oben genannten Klassen (bis auf Homöomorphie oder Diffeomorphie).

Als völlig unproblematisch erweist sich hingegen die Beispiellage bei hyperbolischen Orbifaltigkeiten, welche wir in einem weiteren Teil unserer Arbeit untersuchen. Auch hier werden wir ein effizientes simpliziales Modell für den dicken Teil herleiten, wobei der Beweis erneut über eine gute Überdeckung des dicken Teils und die anschließende Anwendung des Nerven-Lemmas erfolgt. Im Gegensatz zum torsionsfreien Fall – also dem Fall von Mannigfaltigkeiten – sind nun elliptische Isometrien im Gitter enthalten, welche nichtleere Fixpunktmenge besitzen; dies macht eine Vielzahl von Änderungen in der Beweisführung notwendig.

Die Einschränkung auf den hyperbolischen Fall – im Gegensatz zum allgemeinen lokal symmetrischen Fall oder gar variabler negativer Krümmung – ist dabei technischen Feinheiten geschuldet, welche mit der Konstruktion geeigneter Überdeckungsmengen zusammenhängen; tatsächlich werden wir viele anfängliche Aussagen – wie beispielsweise eine verallgemeinerte Dick-dünn-Zerlegung – sogar in variabler Krümmung für  $-1 \leq K \leq a < 0$  treffen, und uns erst für das spätere Hauptresultat auf hyperbolische Orbifaltigkeiten beschränken. Wie schon in Satz 3 gesehen, scheint bei Orbifaltigkeiten – d.h. in der Situation von Gittern mit Torsion – eine Kontrolle über die maximale Ordnung  $\eta$  endlicher Untergruppen notwendig; einer weiteren technischen Schwierigkeit unseres Beweises ist es geschuldet, dass wir zusätzlich eine untere Schranke  $\nu$  an die Verschiebung hyperbolischer Elemente des Gitters benötigen. Eine vereinfachte Form des Hauptresultats lautet nun:

**Satz 8** (vgl. Satz 3.55). *Es existiert eine nur von  $n$  und  $\eta$  abhängige Konstante  $C = C(n, \eta) > 0$  sowie eine nur von  $n$  und  $\nu$  abhängige Konstante  $D = D(n, \nu) > 0$  mit der folgenden Eigenschaft: Sei  $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  ein Gitter mit  $|G| \leq \eta$  für alle endlichen  $G < \Gamma$ ,  $d_\gamma(x) \geq \nu$  für alle hyperbolischen  $\gamma \in \Gamma$  und alle  $x \in \mathbb{H}^n$ ,  $M := \mathbb{H}^n/\Gamma$  und  $M_+$  der dicke Teil von  $M$ . Dann ist  $(M_+, \partial M_+)$  als Paar homotopieäquivalent zu einem simplizialen Raumpaar mit höchstens  $C \cdot \text{Vol}(M)$  Ecken und Grad  $\leq D$  an jeder Ecke.*

Alternativ ließe sich bei Verwendung der genannten Schranke  $\nu$  an die hyperbolische Verschiebung die Dick-dünn-Zerlegung auch gleich so wählen, dass keine Röhren mehr im dünnen Teil enthalten sind, weshalb sich in diesem Fall  $M \simeq M_+$  ergäbe; dies wird jedoch durch eine zusätzliche Abhängigkeit des Werts  $C$  von  $\nu$  erkauft, d.h.  $C = C(n, \eta, \nu)$ . Diese abgewandelte Form des Hauptresultats ist in Satz 3.56 gegeben. Unser Satz 8 ist vor allem für den nicht-kompakten Fall interessant, da eine entsprechende simpliziale Zerlegung bei Verwendung von  $\nu$  im kompakten Fall auch aus [25] Theorem 4.2 oder [1] Lemma 4 folgen würde (vgl. Bemerkung 3.57).

Aus Satz 8 lassen sich nun erneut Schranken an die Homologie ableiten; beachte dabei, dass der freie Anteil unter allgemeineren Krümmungsbedingungen – und unabhängig von  $\nu$  – bereits in Satz 3 behandelt wurde, unser Ergebnis jedoch den Vorteil aufweist, dass es auch für Koeffizientenkörper von Charakteristik ungleich 0 gilt. Eine vereinfachte Form lautet:

**Satz 9** (vgl. Satz 3.59). *Es existiert eine nur von  $n$ ,  $\eta$  und  $\nu$  abhängige Konstante  $C = C(n, \eta, \nu) > 0$  mit der folgenden Eigenschaft: Sei  $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  ein Gitter mit  $|G| \leq \eta$  für alle endlichen  $G < \Gamma$ ,  $d_\gamma(x) \geq \nu$  für alle hyperbolischen  $\gamma \in \Gamma$  und alle  $x \in \mathbb{H}^n$  sowie  $M := \mathbb{H}^n/\Gamma$ . Dann gilt*

$$b_k(M; \mathbb{K}) \leq C \cdot \text{Vol}(M)$$

für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ , bei beliebigem Koeffizientenkörper  $\mathbb{K}$ .

Das eigentliche Ziel unserer Untersuchung lag im Torsionsanteil der Homologie, wo sich entsprechend die folgende Aussage ergibt, welche eine vereinfachte Fassung unseres tatsächlichen Resultats darstellt.

**Satz 10** (vgl. Satz 3.60). *Es existiert eine nur von  $n$ ,  $\eta$  und  $\nu$  abhängige Konstante  $C = C(n, \eta, \nu) > 0$  mit der folgenden Eigenschaft: Sei  $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  ein Gitter mit  $|G| \leq \eta$  für alle endlichen  $G < \Gamma$ ,  $d_\gamma(x) \geq \nu$  für alle hyperbolischen  $\gamma \in \Gamma$  und alle  $x \in \mathbb{H}^n$  sowie  $M := \mathbb{H}^n/\Gamma$ . Dann gilt*

$$\log |\text{tors } H_k(M; \mathbb{Z})| \leq C \cdot \text{Vol}(M)$$

für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Es fällt auf, dass wir in obiger Formulierung von Satz 10 die sonst übliche Ausnahme von Grad  $k = 1$  in Dimension  $n = 3$  nicht getroffen haben. Der Grund liegt darin, dass mögliche Probleme in genannter Situation durch die Forderung an die Schranke  $\nu$  aufgefangen werden. Tatsächlich erfüllt die in [2] Theorem 1.7 mittels Dehn-Chirurgie konstruierte Beispielfolge  $(M_i)$  hyperbolischer Mannigfaltigkeiten mit – bei gleichmäßig beschränktem Volumen – divergierender Torsion keine gleichmäßige Schranke  $\nu$ ; anders ausgedrückt wird eine fest gewählte Schranke  $\nu$  stets nur durch endlich viele  $M_i$  erfüllt. Ferner sind diese Mannigfaltigkeiten zudem nicht arithmetisch, weshalb auch kein Widerspruch zum späteren Satz 11 (s.u.) vorliegt.

Wie erwähnt geben die obigen Sätze 8, 9 und 10 nur vereinfachte Formen unserer Aussagen wieder. So können wir beispielsweise in Dimension  $n = 2$  die Abhängigkeit von  $\nu$  (teilweise) eliminieren; ferner lassen sich auch in allgemeiner Dimension Schranken an die Homologie angeben, welche nicht mehr von  $\nu$ , sondern lediglich von  $n$  und  $\eta$  abhängig sind, wobei diese jedoch im Volumen polynomiell (und nicht mehr linear) steigen. Eine wesentliche Verbesserung hingegen ergibt sich unter Ausnutzung einiger Resultate von Gelander im arithmetischen, nicht-kompakten Fall:

**Satz 11** (vgl. Sätze 3.55, 3.59 und 3.60 sowie Lemma 3.53). *Schränken wir uns auf arithmetische, nicht-uniforme Gitter  $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  ein, so sind die Konstanten aus den Sätzen 8, 9 und 10 lediglich von  $n$  abhängig; insbesondere liegt keine Abhängigkeit von  $\eta$  oder  $\nu$  mehr vor.*

Folglich dient der arithmetische, nicht-kompakte Fall auch als Rechtfertigung dafür, dass sich interessante Klassen von Gittern finden lassen, welche die zunächst als willkürliche Einschränkung erscheinenden Forderungen hinsichtlich  $\eta$  und  $\nu$  aus unseren Sätzen 8, 9 und 10 erfüllen.

Bekannte Beispiele für arithmetische, nicht-kompakte hyperbolische Orbifaltigkeiten stellen in Dimension  $n = 3$  die Bianchi-Orbifaltigkeiten dar. Tatsächlich ist für  $n = 3$  sogar jedes arithmetische, nicht-uniforme Gitter (schwach) kommensurabel zu einer Bianchi-Gruppe; in geometrischer Sprechweise bedeutet dies, dass jede arithmetische, nicht-kompakte hyperbolische 3-Orbifaltigkeit eine gemeinsame endliche (Orbifaltigkeits-)Überlagerung mit einer Bianchi-Orbifaltigkeit besitzt.

Allgemein vermuten wir, dass sich die Abhängigkeit von  $\nu$  auch im allgemeinen Fall eliminieren lassen sollte, während hingegen die Abhängigkeit von  $\eta$  aus geometrischer Sicht notwendig erscheint. Zudem lässt sich erwarten, dass eine Erweiterung obiger Resultate auch zumindest auf den lokal symmetrischen Fall möglich ist, während unser Beweis noch eine Einschränkung auf reell hyperbolische Orbifaltigkeiten nötig macht.

Wir machen abschließend darauf aufmerksam, dass im Falle von torsionsfreiem  $\Gamma$  die Mannigfaltigkeit  $M := X/\Gamma$  einen Eilenberg-MacLane-Raum für  $\Gamma$  darstellt, d.h.  $M = K(\Gamma, 1)$ . Entsprechend lassen sich aus den Sätzen 5 und 6 auch Rückschlüsse auf die Gruppenhomologie von  $\Gamma$  ziehen, welche schließlich mit der (singulären) Homologie ihres  $K(\Gamma, 1)$  übereinstimmt. Anders verhält es sich bei Orbifaltigkeiten: Da die Wirkung des Gitters  $\Gamma$  auf dem hyperbolischen Raum  $\mathbb{H}^n$  nicht mehr frei ist, ist durch  $M$  kein

Eilenberg-MacLane-Raum für  $\Gamma$  gegeben; bekanntlich muss ein solcher für Gruppen mit Torsion ohnehin unendliche Dimension aufweisen. Uns ist ferner keine Methode bekannt, die Aussagen über die (singuläre) Homologie des Bahnenraums  $M := \mathbb{H}^n/\Gamma$  wie in den Sätzen 9 und 10 mit der Gruppenhomologie von  $\Gamma$  in Verbindung zu bringen.

---

Mein Dank gilt meinem Betreuer Prof. Dr. Roman Sauer, welcher mir die Gelegenheit zur Promotion gegeben hat und diese – insbesondere auch durch anregende mathematische Gespräche – bestmöglich begleitete. Ferner bedanke ich mich bei der Deutschen Forschungsgemeinschaft, mit deren Unterstützung meine Promotionsstelle im Rahmen des Graduiertenkollegs 2229 „Asymptotic Invariants and Limits of Groups and Spaces“ finanziert wurde. Hierdurch wurde mir außerdem ein zweimonatiger Forschungsaufenthalt am Weizmann-Institut in Rechovot ermöglicht, wofür ich zudem meinen dortigen Gastgebern Prof. Uri Bader sowie Prof. Tsachik Gelander dankbar bin. Nicht zuletzt möchte ich Herrn Prof. Dr. Enrico Leuzinger für die Übernahme des Korreferats meinen Dank aussprechen.

Bei der Verfassung der vorliegenden Dissertation war mir die Dokumentenvorlage „DissOnline-Tutor“ der Deutschen Nationalbibliothek eine nützliche Hilfe.

# Kapitel 1

---

## Grundlagen

---

Wir widmen dieses erste Kapitel der Zusammenstellung einiger Grundlagen der verschiedenen Themenbereiche und Konzepte, welche uns im Verlauf der Arbeit begegnen werden.

Da unsere späteren Untersuchungsobjekte – Mannigfaltigkeiten wie auch Orbifaltigkeiten – stets negativ gekrümmt sein werden, liegt es nahe, zuerst einige Eigenschaften nichtpositiver und negativer Krümmung zu rekapitulieren. Anschließend wenden wir uns dem Verhalten von Isometrien unter solchen Krümmungsbedingungen zu. Eine Wiederholung der Nerven-Konstruktion wird das Grundlagenkapitel abschließen; sie dient später als zentrales Hilfsmittel dazu, topologische Fragestellungen mithilfe kombinatorischer Argumente zu behandeln.

### 1.1 Nichtpositive und negative Krümmung

Es existieren viele anschauliche Deutungen nichtpositiver Krümmung, die ohne die technische Last auskommen, welche gewöhnlicherweise mit dem Krümmungstensor verbunden ist: Eine lautet, dass in einem gemeinsamen Punkt startende Geodätische sich schneller voneinander entfernen, als es im euklidischen (also flachen) Raum der Fall wäre; ebenso wächst das Volumen von Kugeln in nichtpositiver Krümmung bei steigendem Radius schneller als im euklidischen Fall; zudem besitzen Dreiecke in nichtpositiver Krümmung eine Innenwinkelsumme  $\leq \pi$  (vgl. Lemma 1.4), wobei  $\pi$  bekanntlich dem Wert im flachen Raum entspricht.

Zunächst fassen wir einige allgemeine Eigenschaften in nichtpositiver Krümmung zusammen, um anschließend die Projektionen hin zu konvexen Mengen zu untersuchen, welche uns oftmals als Werkzeug dienen. Zudem werden wir die Geometrie im Unendlichen behandeln: Ihre Bedeutung liegt darin, dass in gewisser Weise das Verhalten eines Raumes außerhalb beliebig großer Kompakta – also „im Unendlichen“ – im Wechselspiel mit seinen allgemeinen Eigenschaften steht<sup>1</sup>.

Viele Aussagen werden wir in der Situation nichtpositiver Krümmung formulieren, während in anderen die Einschränkung auf diverse Formen negativer Krümmung erfolgt. Das unterschiedliche Verhalten in den verschiedenen Situationen wird besonders auch nach Betrachtung der entsprechenden Vergleichsräume

---

<sup>1</sup>Als Stichwort sei beispielsweise das Sichtbarkeits-Axiom genannt, welches – obwohl zunächst nur ein Begriff, der auf den Rand im Unendlichen zurückgreift – starke geometrische Folgerungen für den gesamten Raum zulässt.

deutlich: Während bei Schnittkrümmung  $-1 \leq K \leq a < 0$  der obere wie auch der untere Vergleichsraum (reskaliert) hyperbolisch ist – das Verhalten also qualitativ dem hyperbolischen entspricht –, ist in Schnittkrümmung  $K < 0$  oder  $K \leq 0$  der obere Vergleichsraum euklidisch, weist also in vielerlei Hinsicht gänzlich andere geometrische Eigenschaften auf. Dieses Phänomen ist beispielsweise auch aus der Theorie symmetrischer Räume (nichtkompakten Typs) bekannt, besteht doch häufig ein wesentlicher Unterschied zwischen symmetrischen Räumen von Rang 1 (welche dann bereits strikt negativ gekrümmt sind) und solchen von höherem Rang (welche lediglich eine nichtpositive Krümmung aufweisen).

### 1.1.1 Allgemeines

Wir beginnen mit einigen grundlegenden Eigenschaften in nichtpositiver Krümmung, welche wir später häufig ohne weiteren Vermerk stillschweigend verwenden werden; als umfassende Quellen dienen beispielsweise [4] und [10]. Sei in diesem Abschnitt  $M$  stets eine vollständige,  $n$ -dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $K \leq 0$  sowie  $X$  ihre universelle Überlagerung, welche nach dem Satz von Hadamard-Cartan dann bereits – bis auf die Metrik – mit dem euklidischen Raum übereinstimmt.

**Satz 1.1** (von Hadamard-Cartan; [4] Theorem 2.1). *Für jedes  $p \in M$  ist die Exponentialabbildung  $\exp_p : T_p M \rightarrow M$  eine Überlagerung. Mithin ist  $X$  diffeomorph zu  $\mathbb{R}^n$ .*

In Anlehnung an obigen Satz bezeichnen wir eine vollständige, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $K \leq 0$  als **Hadamard-Mannigfaltigkeit**.

Als außerordentlich starkes Werkzeug erweist sich die Konvexität der Abstandsfunktion, ein weiteres Merkmal nichtpositiver Krümmung.

**Lemma 1.2** ([4] Theorem 1.3). *Die Abstandsfunktion  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  ist konvex.*

Hierbei heißt eine Funktion  $f : N \rightarrow \mathbb{R}$  einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $N$  (streng) **konvex**, falls für jede Geodätische  $c : \mathbb{R} \rightarrow N$  die reelle Funktion  $f \circ c$  (streng) konvex im üblichen Sinne ist. Ebenso nennen wir eine Teilmenge  $W \subseteq N$  **konvex**, falls für alle  $p, q \in W$  eine (bis auf Parametrisierung) eindeutige kürzeste Geodätische von  $p$  nach  $q$  in  $N$  existiert und diese Geodätische in  $W$  verläuft. Subniveaumengen  $\{f < a\}$  bzw.  $\{f \leq a\}$  einer konvexen Funktion  $f$  sind konvex. Ebenso sind Abstandsfunktionen konvexer Mengen konvex:

**Lemma 1.3** ([10] Corollary II.2.5 (1) bzw. [4] Abschnitt 1.6 Exercise (iii)). *Sei  $W \subseteq X$  konvex und abgeschlossen sowie  $d_W(x) := d(x, W)$ . Dann ist  $d_W : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine konvexe Funktion.*

Während im euklidischen Raum die Innenwinkelsumme von Dreiecken stets  $\pi$  beträgt, ist sie in nichtpositiver Krümmung im Allgemeinen kleiner; dies ist eine Folgerung aus dem Satz von Toponogow.

**Lemma 1.4** ([4] Abschnitt 1.4). *Ist  $W \subseteq M$  konvex und ein geodätisches Dreieck in  $W$  mit Innenwinkeln  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  gegeben, so gilt  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq \pi$ . Hierbei liegt genau dann Gleichheit vor, wenn das Dreieck flach ist.*

Eine entsprechende Aussage lässt sich auch für geodätische Vierecke treffen.

**Lemma 1.5** ([4] Abschnitt 1.4 Exercise (i)). *Ist  $W \subseteq M$  konvex und ein geodätisches Viereck in  $W$  mit Innenwinkeln  $\alpha_1, \dots, \alpha_4$  gegeben, so gilt  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \leq 2\pi$ . Hierbei liegt genau dann Gleichheit vor, wenn das Viereck flach ist.*

Da der Fall  $M = X$  zulässig ist, gelten obige Lemmata 1.4 und 1.5 insbesondere auch für die Situation in  $X$ .

In vielen unserer späteren Argumente wird es notwendig sein, die Kardinalität von Mengen abzuschätzen, welche einen gleichmäßigen Mindestabstand zwischen ihren Punkten aufweisen. Genauer bezeichnen wir  $S \subseteq X$  als  **$r$ -diskret**, falls für beliebige  $s, t \in S$  stets  $d(s, t) \geq r$  erfüllt ist. Definiere für  $r, R > 0$  ferner

$$N(n, r, R) := \frac{\text{Vol}_{\mathbb{H}^n}(B_{R+r/2}^{\mathbb{H}^n})}{\text{Vol}_{\mathbb{R}^n}(B_{r/2}^{\mathbb{R}^n})},$$

wobei  $B_{R+r/2}^{\mathbb{H}^n}$  eine Kugel von Radius  $R + r/2$  (um einen beliebigen Punkt) in  $\mathbb{H}^n$  bezeichne und  $B_{r/2}^{\mathbb{R}^n}$  entsprechend eine Kugel von Radius  $r/2$  in  $\mathbb{R}^n$ . Um auf die üblichen vergleichsgeometrischen Argumente zurückgreifen zu können, werden wir in den folgenden zwei Aussagen die Krümmung zusätzlich von unten beschränken.

**Lemma 1.6** ([2] Lemma 3.2). *Sei  $0 < r < R$ ,  $x \in X$  beliebig sowie  $S$  eine  $r$ -diskrete Teilmenge von  $B_R^X(x)$ . Erfüllt  $X$  zusätzlich  $-1 \leq K \leq 0$ , so gilt  $|S| \leq N(n, r, R)$ .*

**Lemma 1.7** ([2] Corollary 3.4). *Sei  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  diskret und torsionsfrei,  $\varepsilon > 0$  sowie  $x \in X$  so, dass  $d(x, \gamma x) \geq \varepsilon$  für alle nichttrivialen  $\gamma \in \Gamma$ . Erfüllt  $X$  zusätzlich  $-1 \leq K \leq 0$ , so gilt für alle  $R > 0$  bereits*

$$|\{\gamma \in \Gamma : d(x, \gamma x) \leq R\}| \leq N(n, \varepsilon, R).$$

### 1.1.2 Projektionen auf konvexe Mengen

Ist  $W \subseteq X$  abgeschlossen und konvex, so existiert eine wohldefinierte Projektion

$$\pi_W : X \rightarrow W,$$

welche einem Punkt  $x \in X$  den eindeutigen Punkt  $\pi_W(x) \in W$  mit minimalem Abstand zu  $x$  zuordnet ([4] Abschnitt 1.6). Mitunter nennen wir  $\pi_W(x)$  den **Fußpunkt** oder **Projektionspunkt** von  $x$  in  $W$ . Die folgende Aussage drückt aus, dass die Projektion nie in einem spitzen Winkel auf  $W$  trifft.

**Lemma 1.8** ([4] Abschnitt 1.6 Exercise (i)). *Ist  $x \notin W$ , so beträgt der Winkel in  $\pi_W(x)$  zwischen der Geodätischen nach  $x$  und der Geodätischen zu einem beliebigen  $w \in W$  mindestens  $\pi/2$ .*

Ferner werden unter solchen Projektionen die Abstände verkleinert.

**Lemma 1.9** ([4] Abschnitt 1.6 bzw. [6] Proposition 3.4). *Für  $x, y \in X$  gilt  $d(\pi_W(x), \pi_W(y)) \leq d(x, y)$  und im Falle von  $K < 0$  sogar strikte Ungleichheit (mit Ausnahme der Punkte aus  $W$ ).*

Wie das folgende Lemma ausdrückt ist  $\pi_W$  außerdem äquivariant unter Isometrien, welche  $W$  erhalten.

**Lemma 1.10** ([4] Lemma 6.4 (1)). *Ist  $\gamma \in \text{Isom}(X)$  eine Isometrie von  $X$  mit  $\gamma W = W$ , so gilt  $\pi_W(\gamma(x)) = \gamma(\pi_W(x))$  für alle  $x \in X$ .*

### 1.1.3 Geometrie im Unendlichen

Ein wiederkehrendes Motiv in nichtpositiver Krümmung lautet, das Verhalten eines Raumes oder auch seiner Isometrien durch ihr Verhalten „im Unendlichen“ – in gewisser Weise also außerhalb beliebig großer Kompakta – näher zu untersuchen; dabei ist zunächst zu klären, was genau unter „dem Unendlichen“ zu verstehen ist. Seien hierzu  $X$  und  $M$  wie bisher mit Schnittkrümmung  $K \leq 0$ . Ferner setzen wir voraus, dass jede Geodätische mit Geschwindigkeit 1 durchlaufen wird.

Zwei Geodätische  $c_1, c_2 : \mathbb{R} \rightarrow X$  heißen **asymptotisch**, falls ein  $a > 0$  existiert, sodass  $d(c_1(t), c_2(t)) \leq a$  für alle  $t \geq 0$ . Dies definiert eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Geodätischen in  $X$ ; für die zu einer Geodätischen  $c$  gehörige Äquivalenzklasse schreiben wir auch  $c(\infty)$  und bezeichnen dies als **Punkt im Unendlichen** oder **Endpunkt** von  $c$  (wird  $c$  in umgekehrter Richtung durchlaufen, so bezeichnet  $c(-\infty)$  die entsprechende Äquivalenzklasse). Die Menge aller solchen Äquivalenzklassen bildet  $X(\infty)$ , den **Rand im Unendlichen**, welcher mitunter auch als  $\partial X$  geschrieben wird. Auf dem Abschluss  $\bar{X} := X \cup X(\infty)$  lässt sich die sogenannte **Kegeltopologie** definieren, welche durch die folgenden Eigenschaften charakterisiert werden kann ([3] Eigenschaften (CT1) und (CT2) auf S. 57):

1. Auf  $X$  stimmt die Kegeltopologie mit der gewöhnlichen Topologie von  $X$  überein.
2. Eine Folge  $x_n$  in  $\bar{X}$  konvergiert genau dann gegen  $z \in X(\infty)$ , wenn für jedes  $x \in X$  die Geodätischen von  $x$  nach  $x_n$  gegen die Geodätische von  $x$  nach  $z$  konvergieren.

Mit dieser Topologie ausgestattet wird  $\bar{X}$  homöomorph zur abgeschlossenen Kugel  $D^n$ , während  $X(\infty)$  (mit der Spurtopologie) homöomorph zur Sphäre  $\mathbb{S}^{n-1}$  ist. Die Wirkung einer Isometrie  $\gamma \in \text{Isom}(X)$  setzt sich wie folgt auf  $X(\infty)$  fort: Bezeichnet  $c$  eine Geodätische in  $X$  mit Endpunkt  $c(\infty) = z \in X(\infty)$ , so definieren wir  $\gamma(z) := (\gamma \circ c)(\infty)$  (beachte, dass  $\gamma \circ c$  selbst eine Geodätische in  $X$  ist). Tatsächlich wirkt  $\gamma$  hierdurch als Homöomorphismus auf  $X(\infty)$  (und  $\bar{X}$ ).

Unter der bisher verwendeten Krümmungsbedingung  $K \leq 0$  ist zunächst keinesfalls sichergestellt, dass sich zwei beliebige (verschiedene) Punkte im Unendlichen  $z_1, z_2 \in X(\infty)$  auch stets durch eine Geodätische verbinden lassen, d.h. dass eine Geodätische  $c$  in  $X$  existiert mit  $z_1 = c(\infty)$  und  $z_2 = c(-\infty)$ ; dies wird unmittelbar für das Beispiel  $X = \mathbb{R}^n$  deutlich. Lassen sich hingegen je zwei (verschiedene) Randpunkte stets verbinden, so erfüllt  $X$  das **Sichtbarkeits-Axiom**; eine Mannigfaltigkeit, deren universelle Überlagerung das Sichtbarkeits-Axiom erfüllt, nennen wir mitunter auch **Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeit**. Wie wir später sehen werden, hat das Sichtbarkeits-Axiom starke geometrische Eigenschaften zur Folge, welche sonst eher charakteristisch für stärkere Krümmungsbedingungen wie  $K \leq a < 0$  (für ein  $a < 0$ ) sind. Dass das Sichtbarkeits-Axiom in geeigneter Weise als Verallgemeinerung solcher Krümmungsbedingungen aufgefasst werden kann, wird im folgenden Lemma deutlich.

**Lemma 1.11** ([6] Lemma 9.10). *Gilt  $K \leq a < 0$  (für ein  $a < 0$ ), so erfüllt  $X$  das Sichtbarkeits-Axiom.*

Während das Sichtbarkeits-Axiom die Existenz von Geodätischen zwischen Punkten im Unendlichen sicherstellt, ist hierdurch noch keine Aussage über die Eindeutigkeit solcher Geodätischen getroffen. Diese werden wir später durch die Bedingung  $K < 0$  erzwingen können – sind nämlich  $c_1$  und  $c_2$  verschiedene Geodätische mit jeweils identischen Endpunkten, so erhalten wir nach Definition asymptotischer Geodätischer, dass  $c_1$  und  $c_2$  endlichen Hausdorff-Abstand zueinander aufweisen. Gemäß [4] Lemma 2.3 beranden dann  $c_1$  und  $c_2$  einen flachen Streifen, was im Widerspruch zu  $K < 0$  steht. Wir halten fest:

**Lemma 1.12** (Folgerung aus [4] Lemma 2.3). *Gilt  $K < 0$ , so sind verbindende Geodätische zwischen verschiedenen Punkten aus  $X(\infty)$  stets eindeutig (bis auf Parametrisierung).*

Für gewöhnliche Punkte  $x \in X$  lässt sich eine offene Kugel  $B_r^X(x)$  von Radius  $r$  um  $x$  als Subniveauemenge  $\{d(\cdot, x) < r\}$  bezüglich der konvexen Funktion  $d(\cdot, x)$  auffassen. Um den Begriff einer Kugel auch auf Mittelpunkte  $z \in X(\infty)$  im Unendlichen übertragen zu können, werden wir daher zunächst eine Entsprechung für  $d(\cdot, x)$  finden müssen. Sei hierzu  $c$  eine Geodätische mit Endpunkt  $c(\infty) = z$  und definiere die **Busemann-Funktion**  $h_c$  gemäß

$$h_c : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto h_c(x) := \lim_{t \rightarrow \infty} (d(x, c(t)) - t).$$

Wir stellen zunächst einige Eigenschaften rund um Busemann-Funktionen zusammen, wobei Punkt 1. im folgenden Lemma insbesondere die Wohldefiniertheit gewährleistet.

- Lemma 1.13.** 1. ([10] Lemma II.8.18) Für jedes  $x \in X$  ist die gemäß  $t \mapsto d(x, c(t)) - t$  definierte Funktion  $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  monoton fallend und von unten durch  $-d(x, c(0))$  beschränkt.
2. ([4] Lemma 3.4 und 3.7)  $h_c$  ist eine konvexe  $C^2$ -Funktion.

In Anlehnung an obige Auffassung von gewöhnlichen Kugeln als Subniveaumengen bezüglich der Abstandsfunktion definieren wir nun eine offene **Horokugel** um  $z$  als Subniveaumenge  $HK = \{h_c < a\}$  (für ein  $a \in \mathbb{R}$ ) bezüglich der Busemann-Funktion  $h_c$ ; abgeschlossene Horokugeln sind entsprechend von der Form  $\{h_c \leq a\}$ . Als Subniveaumengen konvexer Funktionen sind Horokugeln insbesondere konvex. Eine anschauliche Deutung (offener) Horokugeln ergibt sich mithilfe der Gleichung  $\{h_c < 0\} = \bigcup_{t>0} B_t^X(c(t))$ . Der Rand  $HS := \partial HK = h_c^{-1}(\{a\})$  einer Horokugel wird als **Horosphäre** um  $z$  bezeichnet. Ferner gilt:

- Lemma 1.14.** 1. ([4] Abschnitt 3.7 Exercise (i)) Seien  $x \in X$  sowie  $z \in X(\infty)$  gegeben und bezeichne  $HS$  die eindeutige Horosphäre um  $z$ , welche  $x$  enthält. Ist  $c$  die eindeutige Geodätische mit  $c(0) = x$  und  $c(\infty) = z$ , so gilt  $HS = h_c^{-1}(\{0\})$ .
2. ([4] Abschnitt 3.7 Exercise (ii)) Jede Geodätische  $c$  mit Endpunkt  $c(\infty) = z \in X(\infty)$  schneidet jede Horosphäre um  $z$  orthogonal.
3. ([4] Abschnitt 3.7 Exercise (iii)) Sind  $HS_1$  und  $HS_2$  Horosphären um  $z \in X(\infty)$ , so haben sie konstanten Abstand voneinander, d.h.  $d(\cdot, HS_1)$  ist konstant auf  $HS_2$  (und umgekehrt).
4. ([4] Abschnitt 3.7) Ist  $\gamma \in \text{Isom}(X)$  eine Isometrie, welche  $z \in X(\infty)$  fixiert, so bildet  $\gamma$  Horosphären (bzw. Horokugeln) um  $z$  auf Horosphären (bzw. Horokugeln) um  $z$  ab. Hierbei wird der Abstand zwischen zwei Horosphären invariant gelassen.

## 1.2 Isometrien und Minimalmengen

Im vorliegenden Abschnitt werden wir näher auf die Gestalt der Isometrien in negativer Krümmung eingehen. Wie bisher bezeichnet  $M$  eine vollständige Riemannsche  $n$ -Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $K \leq 0$  und universeller Überlagerung  $X$ . Viele der hier und den folgenden Unterabschnitten bewiesenen Aussagen sind allgemein bekannt, in der Literatur jedoch – zumindest für unsere Krümmungsbedingungen – nicht zu finden, weshalb wir die Beweise selbst wiedergeben.

Als außerordentlich nützlich ist anzusehen, dass die nichttrivialen Isometrien aus  $\text{Isom}(X)$  in drei Klassen zerfallen, wobei jede Klasse ihr eigenes, charakteristisches Verhalten besitzt. Für diese Klassifizierung greifen wir auf die für jedes  $\gamma \in \text{Isom}(X)$  definierte **Verschiebungsfunktion**

$$d_\gamma : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto d_\gamma(x) := d(x, \gamma x)$$

zurück, welche mitunter auch Längenfunktion genannt wird. Beachte, dass  $d_\gamma$  konvex ist. Wir definieren:

- $\gamma$  heißt **elliptisch**, falls  $d_\gamma$  auf  $X$  das Minimum 0 annimmt (äquivalent besitzt  $\gamma$  also einen Fixpunkt in  $X$ ),
- $\gamma$  heißt **hyperbolisch**, falls  $d_\gamma$  auf  $X$  ein Minimum  $> 0$  annimmt,
- $\gamma$  heißt **parabolisch**, falls  $d_\gamma$  kein Minimum auf  $X$  besitzt.

Die **Minimalmenge** einer Isometrie  $\gamma \in \text{Isom}(X)$  ist durch

$$\text{Min}(\gamma) := \{x \in X : d_\gamma(x) = \inf_{x \in X} d_\gamma(x)\}$$

gegeben; insbesondere gilt  $\text{Min}(\gamma) = \emptyset$  genau dann, wenn  $\gamma$  parabolisch ist. Für elliptische Isometrien sind Elemente der Minimalmenge bereits Fixpunkte (und umgekehrt), weshalb wir dort häufig stattdessen von der **Fixpunktmenge**  $\text{Fix}(\gamma)$  sprechen. Mithilfe der Gleichung  $\text{Min}(\gamma) = \{d_\gamma \leq \inf d_\gamma\}$  schließen wir, dass  $\text{Min}(\gamma)$  (sofern nichtleer) als Subniveaumenge der konvexen Funktion  $d_\gamma$  selbst konvex ist. Insgesamt ist  $\text{Min}(\gamma)$  eine abgeschlossene, konvexe, vollständige, total geodätische Untermannigfaltigkeit von  $X$ , welche für  $\gamma \neq \text{id}$  eine Dimension  $< n$  aufweist ([4] Kapitel 6). Das Verhalten der Minimalmenge und des Minimalwerts  $\inf d_\gamma$  unter der Wirkung durch eine weitere Isometrie gestaltet sich wie folgt.

**Lemma 1.15** ([10] Proposition II.6.2 (2)). *Sind  $\gamma_1, \gamma_2 \in \text{Isom}(X)$ , so gilt*

$$\inf_{x \in X} d_{\gamma_1}(x) = \inf_{x \in X} d_{\gamma_2 \gamma_1 \gamma_2^{-1}}(x)$$

und ferner

$$\gamma_2 \text{Min}(\gamma_1) = \text{Min}(\gamma_2 \gamma_1 \gamma_2^{-1}).$$

Kommutieren  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ , so wird  $\text{Min}(\gamma_1)$  von  $\gamma_2$  invariant gelassen, d.h.  $\gamma_2 \text{Min}(\gamma_1) = \text{Min}(\gamma_1)$ .

Als mitunter hilfreich erweist sich, dass die Klassifizierung von  $\gamma$  bereits durch das Verhalten auf einer  $\gamma$ -invarianten, abgeschlossenen und konvexen Menge festgelegt ist:

**Lemma 1.16** ([4] Lemma 6.4 (2)). *Ist  $W \subseteq X$  abgeschlossen und konvex sowie  $\gamma \in \text{Isom}(X)$  eine Isometrie mit  $\gamma W = W$ , so ist  $\gamma$  genau dann elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch, wenn  $\gamma|_W$  elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist. Insbesondere gilt für elliptische und hyperbolische  $\gamma$  bereits  $\text{Min}(\gamma) \cap W \neq \emptyset$ , während für parabolische  $\gamma$  die Gleichung  $\inf_{x \in W} d_{\gamma|_W}(x) = \inf_{x \in X} d_\gamma(x)$  erfüllt ist.*

Ferner sind die Isometrietypen stabil unter Potenzierung, wie dem folgenden Lemma zu entnehmen ist.

**Lemma 1.17** ([4] Lemma 6.5 und 6.6). *Sei  $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  beliebig und  $\gamma \in \text{Isom}(X)$ . Dann ist  $\gamma$  genau dann elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch, wenn  $\gamma^m$  elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch ist. Hierbei fassen wir  $\text{id}$  als elliptische Isometrie auf.*

Unter Zuhilfenahme des Sichtbarkeits-Axioms lässt sich obige Klassifizierung auch anschaulich über die Anzahl an Fixpunkten im Rand im Unendlichen angeben.

**Lemma 1.18** ([4] Lemma 6.8 und anschließender Remark). *Erfüllt  $X$  das Sichtbarkeits-Axiom, so gilt:*

- *Elliptische Isometrien  $\gamma$  besitzen stets einen Fixpunkt in  $X$  und entweder genau 0, 2 oder  $\infty$ -viele in  $X(\infty)$ . Der Fall von keinem Fixpunkt in  $X(\infty)$  tritt genau dann auf, wenn  $\gamma$  einen isolierten Fixpunkt in  $X$  besitzt, d.h. wenn  $\dim \text{Min}(\gamma) = 0$ .*
- *$\gamma$  ist genau dann hyperbolisch, wenn es genau zwei Fixpunkte in  $X(\infty)$  besitzt und nicht elliptisch ist.*
- *$\gamma$  ist genau dann parabolisch, wenn es genau einen Fixpunkt in  $X(\infty)$  besitzt.*

Wir werden in den folgenden Abschnitten nun die einzelnen Isometrietypen gesondert behandeln und ihre charakteristischen Eigenschaften darlegen. Häufig wird dabei das Verhalten der Verschiebungsfunktion – beispielsweise beim Fluss hin zur Minimalmenge oder von ihr fort – untersucht, wofür sich der folgende elementare Sachverhalt als nützliches Werkzeug erweist.

**Lemma 1.19.** *Eine konvexe Funktion  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit (striktem) Minimum in 0 ist (streng) monoton steigend. Ist  $f$  außerdem nicht konstant, so ist  $f$  unbeschränkt.*

*Beweis.* Seien  $x, y \in [0, \infty)$  mit  $y > x$  gegeben. Mithilfe der Konvexität von  $f$  und Minimalität von  $f(0)$  (also insbesondere  $f(0) \leq f(y)$ ) folgt nun

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\left(1 - \frac{x}{y}\right) \cdot 0 + \frac{x}{y} \cdot y\right) \\ &\leq \left(1 - \frac{x}{y}\right) \cdot f(0) + \frac{x}{y} \cdot f(y) \\ &\leq \left(1 - \frac{x}{y}\right) \cdot f(y) + \frac{x}{y} \cdot f(y) \\ &= f(y), \end{aligned}$$

also die Monotonie. Für den Fall eines strikten Minimums liegt strenge Monotonie vor, da die zweite Ungleichung wegen  $f(0) < f(y)$  als echte Ungleichheit gewählt werden kann.

Wenn  $f$  beschränkt ist, so existiert ein  $a > 0$  mit  $f(x) \leq f(0) + a$  für alle  $x \in [0, \infty)$ . Sei  $f$  nun nicht konstant, d.h. es existiert ein  $x > 0$  mit  $f(x) > f(0)$ . Mittels der Konvexität von  $f$  ergibt sich für beliebiges  $n \in \mathbb{N}$  dann

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot 0 + \frac{1}{n} \cdot nx\right) \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot f(0) + \frac{1}{n} \cdot f(nx) \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot f(0) + \frac{1}{n} \cdot (f(0) + a) \\ &= f(0) + \frac{a}{n}, \end{aligned}$$

was für  $n \rightarrow \infty$  jedoch gegen  $f(0)$  konvergiert, im Widerspruch zu  $f(x) > f(0)$ . Folglich muss  $f$  unbeschränkt sein, wenn es nicht konstant ist.  $\square$

### 1.2.1 Elliptische Isometrien

Zunächst sammeln wir einige Eigenschaften zum Verhalten der Verschiebungsfunktion elliptischer Isometrien und deren (Sub-)Niveaumengen. Hierzu stellen wir an  $X$  die – im Vergleich zu den vorigen Abschnitten stärkere – Krümmungsbedingung  $K < 0$  bei vorliegendem Sichtbarkeits-Axiom. Dies wird gleichzeitig die allgemeinste Krümmungsbedingung sein, zu der wir später einige unserer Hauptresultate formulieren können.

Das untenstehende Lemma drückt aus, wie eine Geodätische, die durch eine elliptische Isometrie in sich überführt wird, relativ zur Fixpunktmenge dieser Isometrie liegen muss.

**Lemma 1.20.** *Sei  $\gamma \in \text{Isom}(X)$  elliptisch und  $c$  eine Geodätische, welche (als Menge) durch  $\gamma$  in sich überführt wird. Dann ist  $c$  entweder Teilmenge der Fixpunktmenge  $\text{Fix}(\gamma)$  (falls die Endpunkte von  $c$  durch  $\gamma$  fixiert werden) oder  $c$  schneidet  $\text{Fix}(\gamma)$  in einem eindeutigen Punkt orthogonal (falls die Endpunkte von  $c$  durch  $\gamma$  vertauscht werden).*

*Beweis.* Wir halten zunächst fest, dass  $\gamma$  im vorliegenden Fall von  $\gamma c = c$  (als Menge) stets die Endpunkte fixiert oder vertauscht. Da  $c$  abgeschlossen, konvex und  $\gamma$ -invariant ist, ist  $\gamma$  gemäß Lemma 1.16 auch eingeschränkt auf  $c$  elliptisch, womit insbesondere mindestens ein Punkt auf  $c$  – ohne Einschränkung  $c(0)$

– durch  $\gamma$  fixiert wird. Fixiert  $\gamma$  die Endpunkte von  $c$ , so muss also bereits ganz  $c$  von  $\gamma$  punktweise fixiert werden. Werden andererseits die Endpunkte von  $c$  durch  $\gamma$  vertauscht, so überführt  $\gamma$  offenbar  $\dot{c}(0)$  in  $-\dot{c}(0)$  und folglich ist  $c(0)$  der einzige von  $\gamma$  fixierte Punkt auf  $c$ , d.h.  $c \cap \text{Fix}(\gamma) = \{c(0)\}$ . Hinsichtlich der Orthogonalität in diesem Punkt sei  $v \in T_{c(0)} \text{Fix}(\gamma)$  beliebig, womit  $v$  durch  $\gamma$  bereits festgehalten wird (beachte, dass  $\gamma$  auf dem Tangentialbündel seiner Fixpunktmenge als Identität wirkt). Es ergibt sich

$$\langle v, \dot{c}(0) \rangle = \langle d\gamma|_{c(0)} v, d\gamma|_{c(0)} \dot{c}(0) \rangle = \langle v, -\dot{c}(0) \rangle$$

(mit  $d\gamma|_{c(0)}$  dem Differential von  $\gamma$  in  $c(0)$ ), also  $\langle v, \dot{c}(0) \rangle = 0$ , d.h.  $c$  schneidet  $\text{Fix}(\gamma)$  in  $c(0)$  orthogonal.  $\square$

Als Nächstes wird eine allgemeine Tatsache zum Verhalten von Abstandsfunktionen auf Geodätischen angeführt, die in gewisser Weise parallel zur entsprechenden Menge verlaufen.

**Lemma 1.21.** *Sei  $c$  eine Geodätische in  $X$  sowie  $W$  eine konvexe, abgeschlossene, total geodätische Untermannigfaltigkeit orthogonal zu  $c$ . Ferner sei für einen Punkt  $x$  auf  $c$  ungleich dem Schnittpunkt von  $c$  mit  $W$  die Geodätische  $c_x$  so definiert, dass sie von  $x$  aus orthogonal von  $c$  fortläuft (Parametrisierung so, dass  $c_x(0) = x$ ). Dann ist die Funktion*

$$d(\cdot, W) \circ c_x : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad t \mapsto d(c_x(t), W)$$

streng monoton steigend mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(c_x(t), W) = \infty.$$

*Beweis.* Mit  $c_x$  bezeichnen wir stets die vollständige Geodätische  $\mathbb{R} \rightarrow X$ . Da  $[-1, 1]$  kompakt ist, besitzt die stetige sowie nach Lemma 1.3 zudem konvexe Funktion  $t \mapsto d(c_x(t), W)$  in einem  $t' \in [-1, 1]$  ein Minimum. Sei  $x' := c_x(t')$  der entsprechende Punkt. Wir wollen zeigen, dass  $x = x'$ ; hierzu nehmen wir  $x' \neq x$  (d.h.  $t' \neq 0$ ) an und wollen dies zu einem Widerspruch führen.

Für  $x \neq x'$  besitzt das geodätische Viereck mit Eckpunkten  $x$ ,  $\pi_W(x)$ ,  $\pi_W(x')$  und  $x'$  jeweils Innenwinkel von  $\pi/2$  in den ersten drei Ecken (beachte, dass  $\pi_W(x)$  der Schnittpunkt von  $c$  mit  $W$  ist) sowie Innenwinkel  $\alpha > 0$  in  $x'$ . Können wir zeigen, dass  $\alpha \geq \pi/2$ , so ergibt dies gemäß Lemma 1.5 den gewünschten Widerspruch. Schreibe  $y := \pi_{c_x}(\pi_W(x'))$ . Wäre  $y = x'$ , so hätten wir schon  $\alpha = \pi/2$ , weshalb wir  $y \neq x'$  annehmen können. Beachte, dass  $y$  nicht in  $c_x([-1, 1])$  liegen kann, denn sonst wäre in  $y$  das obige Minimum gegeben, und nicht in  $x'$  (aufgrund der Konvexität liegt stets ein eindeutiges Minimum vor). Folglich wird  $y$  von  $x = c_x(0)$  aus gesehen erst nach  $x' = c_x(t')$  erreicht; entsprechend besitzt das geodätische Dreieck mit Eckpunkten  $x'$ ,  $\pi_W(x')$  und  $y$  im Punkt  $x'$  den Innenwinkel  $\pi - \alpha$ . Da der Winkel in  $y$  jedoch  $\pi/2$  beträgt (und  $\beta$  in  $\pi_W(x')$  für ein  $\beta > 0$ ), muss wegen Lemma 1.4 schon  $\alpha > \pi/2$  gelten. Dies stellt den gewünschten Widerspruch dar, weshalb wir  $x = x'$  folgern.

Aufgrund der Konvexität ist  $x$  schon ein globales Minimum der Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $t \mapsto d(c_x(t), W)$ . Die Anwendung von Lemma 1.19 auf die Einschränkung dieser Funktion auf  $[0, \infty)$  liefert nun die Behauptung.  $\square$

Es sei hinsichtlich obiger Aussage daran erinnert, dass Projektionsgeodätische hin zur Geodätischen  $c$  die Definition solcher  $c_x$  erfüllen. Als wesentlichen Anwendungsfall des Lemmas erhalten wir:

**Korollar 1.22.** *Sei  $\gamma \in \text{Isom}(X)$  elliptisch und  $c$  eine Geodätische, welche  $\text{Fix}(\gamma)$  in einem eindeutigen Punkt orthogonal schneidet. Ist  $x$  ein Punkt auf  $c$  ungleich dem Schnittpunkt mit  $\text{Fix}(\gamma)$  sowie  $c_x$  eine von  $c$  ab  $x$  orthogonal fortlaufende Geodätische, so sind die Funktionen*

$$d(\cdot, \text{Fix}(\gamma)) \circ c_x : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad t \mapsto d(c_x(t), \text{Fix}(\gamma))$$

und

$$d_\gamma \circ c_x : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad t \mapsto d_\gamma(c_x(t))$$

streng monoton steigend mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(c_x(t), \text{Fix}(\gamma)) = \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} d_\gamma(c_x(t)) = \infty.$$

*Beweis.* Nach Voraussetzung gilt bereits, dass auch  $\gamma x \neq x$  ein Punkt auf  $c$  ungleich diesem Schnittpunkt ist. Folglich sind  $c_x$  und  $\gamma c_x$  beides von  $c$  orthogonal fortlaufende geodätische Strahlen, welche wir uns nun als auf ganz  $\mathbb{R}$  fortgesetzt vorstellen. Insbesondere ist  $\gamma c_x$  dann eine Menge, welche die Voraussetzungen an  $W$  in Lemma 1.21 erfüllt; gemäß dieses Lemmas ist nun  $t \mapsto d(c_x(t), \gamma c_x(\mathbb{R}))$  streng monoton steigend mit striktem Minimum in 0. Also besitzt auch  $t \mapsto d(c_x(t), \gamma c_x(t)) = d_\gamma(c_x(t))$  ein striktes Minimum in 0; als konvexe Funktion  $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit einem solchen strikten Minimum ist dies eine streng monoton wachsende Funktion mit Grenzwert  $\infty$  für  $t \rightarrow \infty$ , vgl. Lemma 1.19. Setzen wir hingegen in Lemma 1.21 für  $W$  nun  $\text{Fix}(\gamma)$  ein, so folgt die entsprechende Aussage für  $t \mapsto d(c_x(t), \text{Fix}(\gamma))$  ebenso.  $\square$

Startet eine Geodätische in der Fixpunktmenge selbst – ganz gleich ob orthogonal dazu oder nicht – so gelten entsprechende Aussagen:

**Lemma 1.23.** *Sei  $\gamma \in \text{Isom}(X)$  elliptisch und  $c_x$  eine Geodätische, welche in einem  $x \in \text{Fix}(\gamma)$  startet (also  $c_x(0) = x$ ), aber nicht in  $\text{Fix}(\gamma)$  verläuft, d.h.  $\dot{c}_x(0) \notin T_x \text{Fix}(\gamma)$ . Dann sind die Funktionen*

$$d(\cdot, \text{Fix}(\gamma)) \circ c_x : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad t \mapsto d(c_x(t), \text{Fix}(\gamma))$$

und

$$d_\gamma \circ c_x : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad t \mapsto d_\gamma(c_x(t))$$

streng monoton steigend mit

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d(c_x(t), \text{Fix}(\gamma)) = \infty \quad \text{bzw.} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} d_\gamma(c_x(t)) = \infty.$$

*Beweis.* Die konvexe Funktion  $t \mapsto d(c_x(t), \text{Fix}(\gamma))$  besitzt nun ein striktes Minimum in 0 und die Behauptung folgt wie üblich mithilfe von Lemma 1.19.

Außerdem wird  $\dot{c}_x(0)$  durch  $\gamma$  auf einen Vektor an  $x$  abgebildet, welcher nicht mit  $\dot{c}_x(0)$  übereinstimmt (denn sonst würde  $c_x$  gänzlich durch  $\gamma$  fixiert werden und damit in  $\text{Fix}(\gamma)$  verlaufen). Also ist  $\gamma c_x$  ein geodätischer Strahl ab  $x$ , welcher nicht mit  $c_x$  übereinstimmt. Somit besitzt die konvexe Funktion  $t \mapsto d(c_x(t), \gamma c_x(t)) = d_\gamma(c_x(t))$  ein striktes Minimum in 0 (nämlich 0, da  $d(c_x(0), \gamma c_x(0)) = d(x, x) = 0$ ), weshalb durch die Standardbegründung mithilfe von Lemma 1.19 die Behauptung folgt.  $\square$

Während wir gemäß Lemma 1.14 bereits wissen, dass eine Isometrie  $\gamma$  die Horokugeln und -sphären um mögliche Fixpunkte im Rand im Unendlichen in wieder solche überführt, gilt im Falle von elliptischem  $\gamma$  tatsächlich, dass die Horokugeln und -sphären invariant gelassen werden:

**Lemma 1.24.** *Sei  $\gamma \in \text{Isom}(X)$  elliptische Isometrie mit Fixpunkt  $z \in X(\infty)$ . Dann lässt  $\gamma$  Horosphären  $HS$  und Horokugeln  $HK$  um  $z$  invariant, d.h. es gilt*

$$\gamma HS = HS \quad \text{sowie} \quad \gamma HK = HK.$$

*Beweis.* Da  $\gamma$  einen Fixpunkt in  $X(\infty)$  besitzt, gilt nach Lemma 1.18 bereits  $\dim \text{Fix}(\gamma) \geq 1$ . Wir können somit eine Geodätische  $c \subseteq \text{Fix}(\gamma)$  wählen mit  $c(\infty) = z$ . Sei nun  $HS$  eine Horosphäre um  $z$ . Nach Lemma 1.14 schneidet  $c$  die Horosphäre  $HS$  in einem eindeutigen Punkt – ohne Einschränkung  $c(0)$  – orthogonal

und es gilt ferner, dass  $HS$  auf eine Horosphäre  $\gamma HS$  um  $z$  abgebildet wird; wegen  $c(0) \in \text{Fix}(\gamma)$  ergibt sich aber  $c(0) = \gamma c(0) \in \gamma HS$ , womit sich  $HS$  und  $\gamma HS$  im Punkt  $c(0)$  schneiden und damit bereits übereinstimmen, also  $HS = \gamma HS$ . Da für Horokugeln um  $z$  eine Blätterung durch Horosphären um  $z$  existiert, lässt  $\gamma$  folglich auch Horokugeln um  $z$  invariant.  $\square$

### 1.2.2 Hyperbolische Isometrien

Wir wenden uns nun hyperbolischen Isometrien zu, wobei für  $X$  erneut  $K < 0$  und das Sichtbarkeits-Axiom gelte. Aus der Definition hyperbolischer Isometrien  $\gamma$  folgt direkt  $\text{Min}(\gamma) \neq \emptyset$ ; tatsächlich drückt das folgende Lemma aus, dass  $\text{Min}(\gamma)$  stets eine eindeutige Geodätische ist, die **Achse** von  $\gamma$ . Die zwei Fixpunkte von  $\gamma$  (vgl. Lemma 1.18) sind dabei genau die Endpunkte der Achse.

**Lemma 1.25** ([4] Lemma 6.5). *Sei  $\gamma \in \text{Isom}(X)$  eine allgemeine Isometrie.*

1. *Ist  $y$  der Mittelpunkt auf dem geodätischen Teilstück von  $x$  nach  $\gamma x$ , so gilt  $d_\gamma(y) \leq d_\gamma(x)$  und Gleichheit hat  $x \in \text{Min}(\gamma)$  zur Folge. Falls bei Gleichheit  $x$  kein Fixpunkt von  $\gamma$  ist, so wird die durch  $x$  und  $\gamma x$  bestimmte Geodätische durch  $\gamma$  verschoben.*
2. *Ist  $\gamma$  hyperbolisch, so besteht  $\text{Min}(\gamma)$  aus der eindeutigen Geodätischen, welche von  $\gamma$  verschoben wird<sup>2</sup>.*

Das folgende Lemma bestätigt die naheliegende Vermutung, dass die Verschiebung einer hyperbolischen Isometrie  $\gamma$  monoton ansteigt, wenn man sich von der Achse entfernt.

**Lemma 1.26.** *Sei  $\gamma \in \text{Isom}(X)$  hyperbolisch mit Achse  $A$ ,  $x \in X$  mit  $x \notin A$  sowie  $c$  ein geodätischer Strahl  $c : [0, \infty) \rightarrow X$  von  $\pi_A(x)$  nach  $x$ , d.h.  $c(0) = \pi_A(x)$  und  $c(1) = x$ . Dann ist die Funktion*

$$d_\gamma \circ c : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad t \mapsto d_\gamma(c(t))$$

*streng monoton steigend mit*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_\gamma(c(t)) = \infty.$$

*Beweis.* Wir merken zunächst an, dass  $c$  im Allgemeinen nicht nach Bogenlänge parametrisiert wurde. Wegen  $c(0) = \pi_A(x) \in A = \text{Min}(\gamma)$  nimmt die konvexe Funktion  $d_\gamma(c(t))$  für  $t = 0$  ein striktes Minimum an. Ferner ist  $d_\gamma(c(t))$  nicht konstant, denn wegen  $c(1) = x \notin A$  kann  $d_\gamma(c(1))$  nicht den Minimalwert  $d_\gamma(\pi_A(x)) = d_\gamma(c(0))$  aufweisen. Die Behauptungen folgen nun mit Lemma 1.19.  $\square$

Allgemeiner divergiert die Verschiebungsfunktion in Richtung eines von der hyperbolischen Isometrie nicht fixierten Randpunktes.

**Lemma 1.27.** *Sei  $\gamma \in \text{Isom}(X)$  hyperbolisch und  $c$  eine Geodätische in  $X$ , deren Endpunkt  $c(\infty) \in X(\infty)$  von  $\gamma$  nicht fixiert wird. Dann gilt*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_\gamma(c(t)) = \infty.$$

*Beweis.* Ohne Einschränkung seien alle Geodätischen von Geschwindigkeit 1. Bezeichnet  $A$  die Achse von  $\gamma$ , so stimmt  $c(\infty)$  nach Voraussetzung weder mit  $A(\infty)$  noch mit  $A(-\infty)$  überein. Wir nehmen in einem ersten Schritt weitergehend an, dass auch  $c(-\infty)$  kein Endpunkt von  $A$  ist. Nun gilt:

<sup>2</sup>In der Quelle wird das Lemma so formuliert, dass  $\text{Min}(\gamma)$  aus allen Geodätischen besteht, die von  $\gamma$  verschoben werden; da aber zwei solche Geodätische parallel sind, folgt wegen  $K < 0$  in unserem Fall die hier wiedergegebene Eindeutigkeit, vgl. Lemma 1.12.

**Fakt.** ([4] Lemma 4.14 (5)) Seien bei vorliegendem Sichtbarkeits-Axiom  $c_1$  und  $c_2$  Geodätische, für welche die Endpunkte  $c_i(\pm\infty)$  paarweise verschieden sind. Dann ist  $\pi_{c_1}(c_2(\mathbb{R})) \subseteq c_1$  beschränkt.

Angewandt auf  $A$  und  $c$  erhalten wir, dass das Bild von  $c$  unter der Projektion nach  $A$  beschränkt ist. Folglich existiert ein geodätischer Strahl  $c' : [0, \infty) \rightarrow X$  von einem passenden  $c'(0) \in A$  aus der Achse  $A$  nach  $c(\infty)$ , sodass  $c'$  selbst die kürzeste Verbindung seiner Punkte zu  $A$  darstellt, d.h.  $\pi_A(c'(t)) = c'(0) \in A$  für alle  $t \geq 0$  ( $c'$  verlässt  $A$  also unter einem rechten Winkel). Nach obigem Lemma 1.26 gilt bereits  $d_\gamma(c'(t)) \rightarrow \infty$  für  $t \rightarrow \infty$ . Wegen  $c'(\infty) = c(\infty)$  sind  $c'$  und  $c$  asymptotisch, weshalb ein  $a > 0$  existiert mit  $d(c'(t), c(t)) \leq a$  für alle  $t \geq 0$ . Mithilfe der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} d_\gamma(c'(t)) &= d(c'(t), \gamma c'(t)) \\ &\leq d(c'(t), c(t)) + d(c(t), \gamma c(t)) + d(\gamma c(t), \gamma c'(t)) \\ &= 2 \cdot d(c'(t), c(t)) + d_\gamma(c(t)) \\ &\leq 2 \cdot a + d_\gamma(c(t)) \end{aligned}$$

für alle  $t \geq 0$ , also umformuliert

$$d_\gamma(c(t)) \geq d_\gamma(c'(t)) - 2 \cdot a.$$

Für  $t \rightarrow \infty$  folgt nun die Behauptung.

Wir müssen abschließend noch den Fall, dass  $c(-\infty)$  ein Endpunkt der Achse  $A$  ist, behandeln. Dann lässt sich aber eine zu  $c$  asymptotische Geodätische  $c''$  wählen, welche keine Endpunkte mit  $A$  gemeinsam hat. Für dieses  $c''$  gilt nach obigen Betrachtungen nun  $\lim_{t \rightarrow \infty} d_\gamma(c''(t)) = \infty$  und das selbe Argument wie oben – d.h. mittels Dreiecksungleichung sowie Asymptotik von  $c$  und  $c''$  – liefert die Behauptung.  $\square$

Wie das folgende Lemma ausdrückt, werden alle Punkte auf den Projektionsgeodätischen von Lemma 1.26 auf den gemeinsamen Fußpunkt abgebildet.

**Lemma 1.28.** *In der Situation von Lemma 1.26 gilt für alle  $t \geq 0$  bereits*

$$\pi_A(c(t)) = c(0) = \pi_A(x).$$

*Beweis.* Gemäß Lemma 1.8 steht  $c$  in  $\pi_A(x)$  senkrecht auf  $A$ ; analog trifft die Geodätische von  $y = c(t)$  nach  $\pi_A(y)$  in  $\pi_A(y)$  ebenfalls senkrecht auf  $A$ . Würde nun  $\pi_A(y) \neq \pi_A(x)$  gelten, so wäre durch  $y$ ,  $\pi_A(y)$  und  $\pi_A(x)$  ein geodätisches Dreieck mit jeweils Winkel  $\pi/2$  in  $\pi_A(y)$  und  $\pi_A(x)$  gegeben, was der Tatsache widerspricht, dass in  $K < 0$  die Innenwinkelsumme stets  $< \pi$  beträgt (vgl. Lemma 1.4).  $\square$

Wir gehen nun auf die Struktur der Subniveaumengen  $\{d_\gamma < a\}$  einer hyperbolischen Isometrie  $\gamma$  ein; anschaulich gesprochen sind dies Röhrenumgebungen um die hyperbolische Achse.

**Lemma 1.29.** *Ist  $\gamma \in \text{Isom}(X)$  hyperbolisch mit Achse  $A$ , so existiert für jedes  $a \in \mathbb{R}$  ein  $R > 0$ , sodass*

$$\{x \in X : d_\gamma(x) < a\} \subseteq (A)_R,$$

wobei  $(A)_R$  die  $R$ -Umgebung um  $A$  bezeichnet. Insbesondere ist damit  $\{x \in X : d_\gamma(x) < a\}$  (falls nichtleer) homöomorph zu  $D^{n-1} \times \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Schreibe abkürzend  $C := \{x \in X : d_\gamma(x) < a\} \supseteq A$ , wobei ohne Einschränkung  $a > \inf_{x \in X} d_\gamma(x)$ . Für jeden Punkt  $A(t)$  auf  $A$  und jede zu  $A$  senkrechte, normierte Richtung  $v \in T_{A(t)}X$  existiert nach Lemma 1.26 ein wohldefiniertes, eindeutiges  $R(t, v) > 0$ , sodass  $d_\gamma(c_{A(t),v}(R(t, v))) = a$ , wobei  $c_{A(t),v}$  die Geodätische (mit Geschwindigkeit 1) ab  $A(t)$  in Richtung  $v$  bezeichnet;  $R(t, v)$  hängt dabei stetig von  $t$  und  $v$  ab.

Sei  $t_0 > 0$  die Verschiebung von  $\gamma$  auf der Achse  $A$ . Die Menge der obigen Richtungen  $v$  ab  $A(t)$  entsteht als Durchschnitt einer  $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq T_{A(t)}X$  mit  $\langle \dot{A}(t) \rangle^\perp \cong \mathbb{R}^{n-1}$ , ist also topologisch eine  $\mathbb{S}^{n-2}$  und daher kompakt. Nun nimmt  $R(t, v)$  auf dem Kompaktum  $[0, t_0] \times \mathbb{S}^{n-2}$  ein Maximum  $R$  an, womit der Teil von  $C$ , welcher unter  $\pi_A$  auf  $A([0, t_0])$  projiziert, in der  $R$ -Umgebung von  $A([0, t_0])$  enthalten ist. Nach Translation unter den Potenzen von  $\gamma$  sehen wir gemäß Wahl von  $t_0$ , dass bereits ganz  $C$  in  $(A)_R$  liegt.

Wir merken an, dass  $C$  als beschränkte, konvexe Umgebung der Achse  $A \cong \mathbb{R}$  homöomorph zu  $D^{n-1} \times \mathbb{R}$  (bzw. für abgeschlossene Subniveaumengen  $\{d_\gamma \leq a\}$  homöomorph zu  $\overline{D^{n-1}} \times \mathbb{R}$ ) ist.  $\square$

Abschließend halten wir fest, dass (torsionsfreie) hyperbolische Gruppen mit gemeinsamer Achse bereits unendlich zyklisch sind:

**Lemma 1.30** ([16] Theorem 6.11). *Sei  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  diskret und alle nichttrivialen Elemente von  $\Gamma \neq \{\text{id}\}$  hyperbolisch mit selber Achse  $A$ . Dann gilt  $\Gamma = \langle \gamma \rangle \cong \mathbb{Z}$ , wobei  $\gamma \in \Gamma$  die (bis auf Inverses eindeutige) hyperbolische Isometrie von minimaler Verschiebung auf  $A$  ist.*

### 1.2.3 Parabolische Isometrien

Wir stellen nun einige Eigenschaften parabolischer Isometrien zusammen, wobei wir für  $X$  erneut die Krümmungsbedingung  $K < 0$  mit Sichtbarkeits-Axiom voraussetzen.

Nach Lemma 1.18 wissen wir, dass eine parabolische Isometrie  $\gamma$  einen eindeutigen Fixpunkt  $z \in X(\infty)$  besitzt und daher gemäß Lemma 1.14 Horosphären um  $z$  auf ebensolche abbildet; tatsächlich gilt sogar stärker, dass  $\gamma$  die Horosphären invariant lässt.

**Lemma 1.31** ([4] Lemma 6.6). *Sei  $\gamma \in \text{Isom}(X)$  parabolisch mit Fixpunkt  $z$  und  $HS$  eine Horosphäre um  $z$ . Dann wird  $HS$  von  $\gamma$  invariant gelassen, d.h.  $\gamma HS = HS$ . Entsprechendes gilt für Horokugeln um  $z$ .*

Im Falle einer stärkeren Krümmungsschranke wie  $K \leq a < 0$  (für ein  $a < 0$ ) sieht man anhand üblicher vergleichsgeometrischer Argumente leicht, dass der Abstand geodätischer Strahlen hin zu einem gemeinsamen Randpunkt  $z \in X(\infty)$  exponentiell gegen 0 konvergiert (siehe auch [20]); eine direkte Folgerung lautet, dass die Verschiebungsfunktion  $d_\gamma$  einer parabolischen Isometrie  $\gamma$  mit Fixpunkt  $z$  auf einer Geodätischen  $c$  mit Endpunkt  $c(\infty) = z$  ebenfalls exponentiell gegen 0 strebt. Entsprechend ist die infimale Verschiebung einer parabolischen Isometrie dann insbesondere stets 0. Bei unseren schwächeren Krümmungsbedingungen gestaltet sich die Situation etwas komplizierter: Zwar gilt ebenfalls, dass die infimale Verschiebung 0 beträgt, doch für den Beweis dieser Aussage ist erheblich mehr Arbeit notwendig, da auf obigen geodätischen Strahlen im Allgemeinen keine Konvergenz der Verschiebungsfunktion gegen 0 mehr vorliegt, sondern nur noch Monotonie (aber allgemein ein Grenzwert  $\neq 0$ ). Dies ist Inhalt der beiden folgenden Lemmata:

**Lemma 1.32** ([27] Theorem 1.3). *Ist  $\gamma \in \text{Isom}(X)$  parabolisch, so gilt  $\inf_{x \in X} d_\gamma(x) = 0$ .*

**Lemma 1.33.** *Sei  $\gamma \in \text{Isom}(X)$  parabolisch mit Fixpunkt  $z \in X(\infty)$  und  $c$  eine Geodätische mit Endpunkt  $c(\infty) = z$ . Dann ist die Funktion*

$$d_\gamma \circ c : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad t \mapsto d_\gamma(c(t))$$

*streng monoton fallend in  $t$ . In umgekehrter Richtung  $t \rightarrow -\infty$  gilt*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} d_\gamma(c(t)) = \infty.$$

*Beweis.* Bezeichne  $HK(c(t))$  die abgeschlossene Horokugel um  $z$ , welche  $c(t)$  auf ihrem Rand enthält. Wähle nun  $t > s$  fest, womit  $d_\gamma(c(s)) > d_\gamma(c(t))$  zu zeigen ist. Da  $c$  senkrecht auf  $HK(c(t))$  trifft (Lemma 1.14), ergibt sich mithilfe der üblichen Winkelargumente (vgl. Lemmata 1.8 und 1.4), dass bereits

$$\pi_{HK(c(t))}(c(s)) = c(t)$$

gelten muss. Gemäß Lemma 1.31 wird  $HK(c(t))$  von  $\gamma$  invariant gelassen, weshalb mithilfe von Lemma 1.10 die Äquivarianz von  $\pi_{HK(c(t))}$  unter  $\gamma$  und somit

$$\pi_{HK(c(t))}(\gamma c(s)) = \gamma \pi_{HK(c(t))}(c(s)) = \gamma c(t)$$

folgt. Da Projektionen die Abstände verkleinern (Lemma 1.9), schließen wir

$$\begin{aligned} d_\gamma(c(s)) &= d(c(s), \gamma c(s)) \\ &> d(\pi_{HK(c(t))}(c(s)), \pi_{HK(c(t))}(\gamma c(s))) \\ &= d(c(t), \gamma c(t)) \\ &= d_\gamma(c(t)), \end{aligned}$$

also die gewünschte Monotonie.

Für die zweite Behauptung betrachte die Geodätischen  $c$  und  $\gamma c$ , welche insbesondere den selben Endpunkt  $c(\infty) = z = \gamma c(\infty)$  besitzen. Da  $\gamma$  parabolisch ist, liegt nur ein einziger Fixpunkt in  $X(\infty)$  vor, weshalb der Fall  $c(-\infty) = \gamma c(-\infty)$  ausgeschlossen ist. Mithin sind die Geodätischen  $t \mapsto c(-t)$  sowie  $t \mapsto \gamma c(-t)$  nicht asymptotisch, weshalb mit obiger Monotonieaussage die Behauptung folgt.  $\square$

In gewisser Weise dienen parabolische Isometrien als Indikator dafür, ob der zugehörige Bahnenraum nach einer Gruppenwirkung kompakt ist oder nicht.

**Lemma 1.34** ([4] Lemma 8.2). *Sei  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  diskret und  $X/\Gamma$  kompakt. Dann enthält  $\Gamma$  keine parabolischen Isometrien.*

### 1.2.4 Gemeinsame Fixpunkte bei diskreten Gruppen

Die vorigen Abschnitte dienen als guter Eindruck dafür, wie sich die verschiedenen Isometrietypen qualitativ unterscheiden. Tatsächlich werden wir nun sehen, dass – bei diskreten Isometriegruppen – die verschiedenen Isometrietypen über ihre Fixpunkte im Unendlichen getrennt werden können. Dies ist nicht mit Aussagen wie in Lemma 1.18 zu verwechseln, wo wir die Isometrietypen anhand der *Anzahl* an Fixpunkten in  $X(\infty)$  charakterisiert haben; hier werden wir stattdessen die Frage behandeln, wann sich verschiedene Isometrietypen überhaupt einen *gemeinsamen* Fixpunkt im Rand teilen können. Wir befinden uns erneut in der Situation einer Hadamard-Mannigfaltigkeit  $X$  mit Schnittkrümmung  $K < 0$  und gültigem Sichtbarkeits-Axiom. Anscheinend sind die hier vorgestellten Aussagen in Fachkreisen bekannt, jedoch in der Literatur schwer zu finden. Lediglich im Falle hyperbolischer Räume – d.h.  $X = \mathbb{H}^n$  – waren entsprechende Quellen auszumachen; wir haben daher die dortigen Beweise ([5] Lemmata D.3.6 und D.3.9) auf unsere Situation verallgemeinert.

Im ersten Lemma stellen wir fest, dass hyperbolische und parabolische Isometrien bei vorliegender Diskretheit keine gemeinsamen Fixpunkte im Rand im Unendlichen besitzen können.

**Lemma 1.35.** *Sei  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  eine Gruppe von Isometrien,  $\gamma_h \in \Gamma$  hyperbolisch sowie  $\gamma_p \in \Gamma$  parabolisch. Angenommen  $\gamma_h$  und  $\gamma_p$  besitzen einen gemeinsamen Fixpunkt in  $X(\infty)$ , so gilt:*

1.  $\gamma_h$  und  $\gamma_p$  kommutieren nicht.

2.  $\Gamma$  kann nicht diskret sein.

*Beweis.* Wir geben zunächst die anschauliche Beweisidee wieder. Ein Punkt  $x$  aus der Achse von  $\gamma_h$  wird zuerst durch eine Potenz  $\gamma_h^k$  hin zum gemeinsamen Fixpunkt verschoben. Da die Verschiebung von  $\gamma_p$  nahe am Fixpunkt sehr klein wird, liegt der Bildpunkt  $\gamma_p(\gamma_h^k x)$  wiederum nahe an der Achse. Durch anschließende Rückverschiebung mittels  $\gamma_h^{-k}$  erhalten wir einen Punkt  $\gamma_h^{-k}(\gamma_p \gamma_h^k x)$ , der nahe an  $x$  liegt. Durch Wiederholen des Vorgangs für alle  $k \in \mathbb{N}$  erzeugen wir so eine Folge, die einen Häufungspunkt nahe  $x$  besitzen wird; dies widerspricht der Diskretheit von  $\Gamma$ .

Sei  $A : \mathbb{R} \rightarrow X$  die Achse von  $\gamma_h$  – durchlaufen mit Geschwindigkeit 1 – sowie  $z := A(\infty)$  der gemeinsame Fixpunkt von  $\gamma_h$  und  $\gamma_p$ . Mit  $HS(A(s))$  bezeichnen wir die eindeutige Horosphäre um  $z$ , welche  $A(s)$  enthält. Beachte, dass  $A(s)$  der eindeutige Schnittpunkt von  $A$  mit  $HS(A(s))$  ist.

Angenommen  $\gamma_h$  und  $\gamma_p$  würden kommutieren, so gilt insbesondere  $\gamma_p A = A$  (Lemma 1.15). Andererseits hält  $\gamma_p$  die Horosphäre  $HS(A(0))$  invariant (Lemma 1.31), d.h.  $\gamma_p HS(A(0)) = HS(A(0))$ . Folglich liegt  $\gamma_p A(0)$  sowohl in  $A$ , als auch in  $HS(A(0))$ , also in ihrem Schnitt; dieser ist aber genau  $A(0)$  (s.o.). Es folgt  $\gamma_p A(0) = A(0) \in X$  und  $\gamma_p$  wäre wegen des Fixpunkts elliptisch, ein Widerspruch. Somit können  $\gamma_h$  und  $\gamma_p$  nicht kommutieren.

Beachte nun: Da  $\gamma_h^k$  und  $\gamma_p^l$  für alle  $k, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  ebenso hyperbolisch bzw. parabolisch mit selben Fixpunkten wie  $\gamma_h$  bzw.  $\gamma_p$  sind, können auch  $\gamma_h^k$  und  $\gamma_p^l$  für keine  $k, l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  kommutieren.

Wir definieren

$$\gamma_n := \gamma_h^{-n} \gamma_p \gamma_h^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die  $\gamma_n$  sind paarweise verschieden, denn angenommen  $\gamma_n = \gamma_m$  für  $n \neq m$ , d.h.

$$\gamma_h^{-n} \gamma_p \gamma_h^n = \gamma_h^{-m} \gamma_p \gamma_h^m,$$

so folgt

$$\gamma_h^{m-n} \gamma_p = \gamma_p \gamma_h^{m-n}.$$

Also würden die hyperbolische Isometrie  $\gamma_h^{m-n} \neq \text{id}$  und die parabolische Isometrie  $\gamma_p$  kommutieren sowie einen gemeinsamen Fixpunkt – nämlich  $z$  – in  $X(\infty)$  aufweisen, im Widerspruch zu obiger Kommutativitätsaussage. Somit sind die  $\gamma_n$  paarweise verschiedene Elemente von  $\Gamma$ .

Wir wollen nun zeigen, dass die Folge der Punkte  $\gamma_n A(0)$  einen Häufungspunkt  $x_0 \in X$  besitzt; wäre dies der Fall, so würden für die abgeschlossene – und damit kompakte – Kugel  $K$  von Radius  $2 \cdot d(A(0), x_0)$  um  $A(0)$  folglich unendlich viele (nach obigen Betrachtungen paarweise verschiedene) Gruppenelemente  $\gamma_{n_k}$  existieren, welche  $\gamma_{n_k} K \cap K \neq \emptyset$  erfüllen. Dies widerspricht der Diskretheit von  $\Gamma$ .

Zunächst halten wir fest, dass  $\gamma_h^n A(0) = A(n \cdot t_0)$ , wobei  $t_0$  (ohne Einschränkung  $t_0 > 0$ ) die Translation von  $A$  unter  $\gamma_h$  bezeichnet. Die Funktion  $t \mapsto d_{\gamma_p}(A(t))$  ist nach Lemma 1.33 monoton fallend in  $t$ , sowie trivialerweise von unten durch 0 beschränkt. Somit existiert der Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow \infty} d_{\gamma_p}(A(t)) =: a \geq 0$ . Folglich gilt für unendlich viele der Punkte  $\gamma_h^n A(0) (= A(n \cdot t_0))$  bereits  $d_{\gamma_p}(\gamma_h^n A(0)) < 2a$ . Ebenso ergibt sich

$$d(A(0), \gamma_n A(0)) = d(A(0), \gamma_h^{-n} \gamma_p \gamma_h^n A(0)) = d(\gamma_h^n A(0), \gamma_p \gamma_h^n A(0)) = d_{\gamma_p}(\gamma_h^n A(0)),$$

weshalb auch unendlich viele der Punkte  $\gamma_n A(0)$  einen Abstand kleiner  $2a$  von  $A(0)$  aufweisen; folglich liegen diese unendlich vielen Punkte in der abgeschlossenen – und somit kompakten – Kugel von Radius  $2a$  um  $c(0)$ , womit die Existenz eines Häufungspunktes und damit die Behauptung folgt.  $\square$

Eine entsprechende Aussage gilt ebenso für hyperbolische Isometrien mit nur einem gemeinsamen Fixpunkt im Unendlichen:

**Lemma 1.36.** Sei  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  eine Gruppe von Isometrien sowie  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$  hyperbolisch. Angenommen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  besitzen genau einen gemeinsamen Fixpunkt in  $X(\infty)$ , so gilt:

1.  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  kommutieren nicht.
2.  $\Gamma$  kann nicht diskret sein.

*Beweis.* Die Beweisidee ist erneut anschaulich. Ist  $x$  ein Punkt der Achse von  $\gamma_1$ , so verschieben wir ihn mittels  $\gamma_1^m$  hin zum gemeinsamen Fixpunkt. Durch passende Wahl der Potenz  $k_m$  können wir nun wiederum  $\gamma_1^m x$  mittels  $\gamma_2^{-k_m}$  derart zurück verschieben, dass der entstehende Punkt  $\gamma_2^{-k_m} \gamma_1^m x$  nahe am Ausgangspunkt  $x$  liegt. Wiederholen dieses Vorgangs für alle  $m \in \mathbb{N}$  liefert eine Folge von Punkten nahe  $x$ , die einen Häufungspunkt besitzt; dies widerspricht der Diskretheit von  $\Gamma$ .

Seien  $A_1$  bzw.  $A_2$  die Achsen – jeweils mit Geschwindigkeit 1 – von  $\gamma_1$  bzw.  $\gamma_2$  mit  $A_1(\infty) = A_2(\infty)$  sowie  $A_1(-\infty) \neq A_2(-\infty)$ . Mit  $t_1$  bzw.  $t_2$  bezeichnen wir die Translation von  $A_1$  bzw.  $A_2$  unter der Isometrie  $\gamma_1$  bzw.  $\gamma_2$ , wobei ohne Einschränkung  $t_1, t_2 > 0$  gelte.

Würden  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  kommutieren, so würde  $\gamma_1$  die Achse  $A_2$  in sich überführen. Nach Lemma 1.25 würde dann jedoch  $A_2$  ebenfalls zur Minimalmenge von  $\gamma_1$  gehören, also  $A_2 = A_1$ , im Widerspruch zu oben. Folglich können  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  nicht kommutieren.

Für alle  $m \in \mathbb{N}$  finden wir eindeutige  $k_m \in \mathbb{N}$  und  $\tau_m \in [0, t_2)$ , sodass

$$m \cdot t_1 = \tau_m + k_m \cdot t_2. \quad (*)$$

Als Folge im Kompaktum  $[0, t_2]$  existiert eine konvergente Teilfolge  $\tau_{m_i}$  der  $\tau_m$  mit  $\tau_{m_i} \rightarrow \tau \in [0, t_2]$  für  $i \rightarrow \infty$ . Nach Übergang zur Teilfolge können wir ohne Einschränkung annehmen, dass bereits  $\tau_m$  selbst konvergiert.

Aufgrund von  $A_1(\infty) = A_2(\infty)$  gilt  $d(A_1(t), A_2(t)) \leq a$  für ein passendes  $a > 0$  und alle  $t \geq 0$ . Hiermit und wegen Gleichung (\*) (beachte außerdem, dass  $m \cdot t_1 \rightarrow \infty$  für  $m \rightarrow \infty$ , da  $t_1 > 0$ ) ergibt sich

$$d(\gamma_2^{-k_m} \gamma_1^m A_1(0), A_2(\tau_m)) = d(\gamma_1^m A_1(0), \gamma_2^{k_m} A_2(\tau_m)) = d(A_1(m \cdot t_1), A_2(\tau_m + k_m \cdot t_2)) \leq a$$

für alle  $m \in \mathbb{N}$ . Da außerdem  $A_2(\tau_m) \rightarrow A_2(\tau)$  für  $m \rightarrow \infty$ , folgt

$$d(A_2(\tau_m), A_2(\tau)) \leq 1$$

für alle bis auf endlich viele  $m$ . Wir schließen

$$d(\gamma_2^{-k_m} \gamma_1^m A_1(0), A_2(\tau)) \leq d(\gamma_2^{-k_m} \gamma_1^m A_1(0), A_2(\tau_m)) + d(A_2(\tau_m), A_2(\tau)) \leq a + 1.$$

Somit liegen für alle bis auf endlich viele  $m$  die Punkte  $\gamma_2^{-k_m} \gamma_1^m A_1(0)$  in der abgeschlossenen – und damit kompakten – Kugel von Radius  $a + 1$  um  $A_2(\tau) \in X$ . Folglich existiert ein Häufungspunkt der  $\gamma_2^{-k_m} \gamma_1^m A_1(0)$  und um daraus einen Widerspruch zur Diskretheit von  $\Gamma$  abzuleiten, bleibt lediglich zu zeigen, dass die Gruppenelemente  $\gamma_2^{-k_m} \gamma_1^m$  für  $m \in \mathbb{N}$  paarweise verschieden sind.

Angenommen  $\gamma_2^{-k_m} \gamma_1^m = \gamma_2^{-k_n} \gamma_1^n$  für  $n \neq m$ , so ergäbe sich

$$\gamma_2^{k_n - k_m} = \gamma_1^{n - m}.$$

Damit müssten  $\gamma_2^{k_n - k_m}$  und  $\gamma_1^{n - m} \neq \text{id}$  insbesondere die selben Fixpunkte im Unendlichen aufweisen; dies ist im Falle von  $k_n = k_m$  ein offensichtlicher Widerspruch, da  $\gamma_2^{k_n - k_m} = \text{id}$  jeden Punkt – und nicht nur zwei – in  $X(\infty)$  fixiert. Im Falle von  $k_n \neq k_m$  stimmen jedoch die Fixpunkte von  $\gamma_2^{k_n - k_m}$  sowie  $\gamma_2$  überein (und wegen  $\gamma_1^{n - m} \neq \text{id}$  die von  $\gamma_1^{n - m}$  sowie  $\gamma_1$  ohnehin) und wir erhalten einen Widerspruch zur Annahme, dass  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  sich nur einen Fixpunkt teilen.  $\square$

Kommen Elemente endlicher Ordnung – also elliptische Isometrien – vor, so können diese durchaus als einen ihrer Fixpunkte den eindeutigen Fixpunkt einer parabolischen Isometrie besitzen, ohne dass es der Diskretheit der Gruppe widerspräche. Für das Verhältnis der Fixpunkte von elliptischen und hyperbolischen Isometrien existiert hingegen folgende Einschränkung; in diskreten Gruppen besagt dies, dass eine elliptische Isometrie, welche einen gemeinsamen Fixpunkt mit einer hyperbolischen Isometrie besitzt, auch deren zweiten Fixpunkt fixieren muss.

**Lemma 1.37.** *Sei  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  eine Gruppe von Isometrien,  $\gamma_e \in \Gamma$  elliptisch sowie  $\gamma_h \in \Gamma$  hyperbolisch. Angenommen  $\gamma_e$  und  $\gamma_h$  besitzen genau einen gemeinsamen Fixpunkt in  $X(\infty)$ , so gilt:*

1.  $\gamma_e$  und  $\gamma_h$  kommutieren nicht.

2.  $\Gamma$  kann nicht diskret sein.

*Beweis.* Die anschauliche Beweisidee entspricht den vorigen Lemmata. Ein Punkt aus der Achse von  $\gamma_h$  wird durch eine Potenz  $\gamma_h^k$  hin zum gemeinsamen Fixpunkt verschoben und anschließend von der elliptischen Isometrie verarbeitet; da aber wegen des gemeinsamen Fixpunktes im Rand im Unendlichen nun  $\gamma_h^k x$  nah an der Fixpunktmenge von  $\gamma_e$  liegt, ist auch  $\gamma_e(\gamma_h^k x)$  nicht weit von der Achse von  $\gamma_h$  entfernt. So erhalten wir durch Rückverschiebung mittels  $\gamma_h^{-k}$  einen Punkt  $\gamma_h^{-k}(\gamma_e \gamma_h^k x)$ , welcher erneut nah am Ausgangspunkt  $x$  liegt. Wiederholung dieses Vorgangs für alle  $k \in \mathbb{N}$  liefert nun eine Folge mit Häufungspunkt nahe  $x$ , was der Diskretheit von  $\Gamma$  widerspricht.

Wir beginnen mit dem formalen Beweis. Sei hierzu  $A : \mathbb{R} \rightarrow X$  die eindeutige Achse von  $\gamma_h$  – durchlaufen mit Geschwindigkeit 1 – sowie  $z := A(\infty)$  der gemeinsame Fixpunkt von  $\gamma_e$  und  $\gamma_h$ .

Angenommen  $\gamma_e$  und  $\gamma_h^k$  würden für ein  $k \in \mathbb{N}$  kommutieren, so würde  $\text{Min}(\gamma_h^k) = \text{Min}(\gamma_h) = A$  von  $\gamma_e$  invariant gelassen, d.h.  $\gamma_e A = A$  und somit  $\gamma_e A(t) \in A$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Bezeichnet  $HS(A(t))$  die eindeutige Horosphäre um  $z$ , welche  $A(t)$  enthält, so gilt ebenfalls  $\gamma_e HS(A(t)) = HS(A(t))$  (Lemma 1.24), also insbesondere  $\gamma_e A(t) \in HS(A(t))$ . Insgesamt erhalten wir  $\gamma_e A(t) \in HS(A(t)) \cap A$ ; da  $A(t)$  jedoch der eindeutige Schnittpunkt von  $A$  und  $HS(A(t))$  ist, ergibt sich  $\gamma_e A(t) = A(t)$  und damit  $A(t) \in \text{Fix}(\gamma_e)$ . Da dies für alle  $t \in \mathbb{R}$  gültig ist, schließen wir  $A \subseteq \text{Fix}(\gamma_e)$ , was jedoch  $A(-\infty) \in \text{Fix}(\gamma_e)$  zur Folge hätte, im Widerspruch zur Annahme. Folglich können  $\gamma_e$  und  $\gamma_h^k$  für kein  $k \in \mathbb{N}$  kommutieren, also insbesondere auch für  $k = 1$  nicht.

Betrachte nun die Isometrien

$$\gamma_n := \gamma_h^{-n} \gamma_e \gamma_h^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Diese sind paarweise verschieden, denn

$$\gamma_h^{-n} \gamma_e \gamma_h^n = \gamma_h^{-m} \gamma_e \gamma_h^m$$

für  $n \neq m$  hätte

$$\gamma_h^{m-n} \gamma_e = \gamma_e \gamma_h^{m-n}$$

zur Folge, was obiger Tatsache widerspricht, dass  $\gamma_e$  und  $\gamma_h^k$  für kein  $k \in \mathbb{N}$  kommutieren. Es gilt ferner

$$d_{\gamma_n}(A(0)) = d(A(0), \gamma_h^{-n} \gamma_e \gamma_h^n A(0)) = d(\gamma_h^n A(0), \gamma_e \gamma_h^n A(0)) = d_{\gamma_e}(\gamma_h^n A(0)).$$

Bezeichnet  $t_0 > 0$  die Verschiebung von  $\gamma_h$  auf  $A$  – d.h.  $\gamma_h A(t) = A(t + t_0)$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  –, so bedeutet dies

$$d_{\gamma_n}(A(0)) = d_{\gamma_e}(A(n \cdot t_0)).$$

Ist andererseits  $x \in X$  beliebig und  $\pi_B$  die Projektion auf  $B := \text{Fix}(\gamma_e)$ , so folgt

$$d_{\gamma_e}(x) \leq d(x, \pi_B(x)) + \underbrace{d(\pi_B(x), \gamma_e \pi_B(x))}_{=0, \text{ da } \pi_B(x) \in B = \text{Fix}(\gamma_e)} + d(\gamma_e \pi_B(x), \gamma_e x) = 2 \cdot d(x, \pi_B(x)).$$

Nun enthält  $\text{Fix}(\gamma_e)$  jedoch eine zu  $A$  asymptotische Geodätische  $A'$  (denn es ist ja  $A(\infty) \in \text{Fix}(\gamma_e)$ ), womit insbesondere  $d(A(t), \pi_B(A(t))) \leq d(A(t), A'(t))$  folgt. Nach Asymptotik von  $A$  und  $A'$  existiert jedoch ein  $a > 0$  mit  $d(A(t), A'(t)) \leq a/2$  für alle  $t \geq 0$ . Wir folgern insgesamt

$$d_{\gamma_n}(A(0)) = d_{\gamma_e}(A(n \cdot t_0)) \leq 2 \cdot d(A(n \cdot t_0), \pi_B(A(n \cdot t_0))) \leq 2 \cdot d(A(n \cdot t_0), A'(n \cdot t_0)) \leq a$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Mithin bilden die  $\gamma_n$  eine Folge paarweise verschiedener Isometrien, welche die abgeschlossene (und damit kompakte) Kugel  $K$  von Radius  $a + 1$  um  $A(0)$  so abbilden, dass  $\gamma_n K \cap K \neq \emptyset$  gilt. Folglich wirkt  $\Gamma$  nicht eigentlich diskontinuierlich, d.h.  $\Gamma$  ist nicht diskret.  $\square$

Als leichte Folgerung obiger Lemmata ergibt sich die Klassifikation der Stabilisatorgruppen von Randpunkten im torsionsfreien Fall.

**Korollar 1.38.** *Sei  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  diskret und torsionsfrei. Bezeichnet für  $z \in X(\infty)$*

$$\Gamma_z := \{\gamma \in \Gamma : \gamma z = z\}$$

*den Stabilisator des Randpunktes  $z$ , so kann für nichttriviales  $\Gamma_z$  nur genau einer von folgenden zwei Fällen eintreten:*

1. *Alle Elemente von  $\Gamma_z \setminus \{\text{id}\}$  sind parabolische Isometrien mit Fixpunkt  $z$ .*
2. *Alle Elemente von  $\Gamma_z \setminus \{\text{id}\}$  sind hyperbolische Isometrien mit gemeinsamen Fixpunkten  $z$  und  $z'$  für ein geeignetes  $z \neq z' \in X(\infty)$ . In diesem Fall ist  $\Gamma_z$  unendlich zyklisch, d.h. isomorph zu  $\mathbb{Z}$ .*

*Beweis.* Aufgrund der Torsionsfreiheit ist die Existenz elliptischer Elemente gänzlich ausgeschlossen; nach Definition haben außerdem alle nichttrivialen Elemente von  $\Gamma_z$  den Fixpunkt  $z$ . Existiert ein parabolisches  $\gamma \in \Gamma_z$ , so kann gemäß Lemma 1.35 wegen der Diskretheit von  $\Gamma$  kein hyperbolisches Element in  $\Gamma_z$  enthalten sein.

Gibt es hingegen ein hyperbolisches Element in  $\Gamma_z$ , so kann  $\Gamma_z$  analog zu obiger Argumentation keine parabolischen Elemente enthalten. Wiederum aufgrund der Diskretheit muss nach Lemma 1.36 außerdem für je zwei hyperbolische Elemente  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_z$  mit Fixpunkten  $z$  und  $z_1$  bzw.  $z$  und  $z_2$  auch  $z_1 = z_2$  erfüllt sein, womit  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  die selbe Achse besitzen. Die Isomorphie  $\Gamma_z \cong \mathbb{Z}$  ist dann in Lemma 1.30 enthalten.  $\square$

## 1.3 Nerven-Konstruktion

Zuletzt werden wir mit der Nerven-Konstruktion ein außerordentlich nützliches Hilfsmittel vorstellen, welches uns später ermöglicht, viele rein topologische Fragestellungen mithilfe kombinatorischer Argumente zu behandeln. Die Grundidee lautet, eine Teilmenge eines topologischen Raums mittels gutartigen, miteinander verträglichen Mengen zu überdecken, was schließlich die Homotopieäquivalenz der Überdeckung zu einem ihr zugeordneten Simplicialkomplex – dem Nervenkomplex – zur Folge hat; jener Simplicialkomplex stellt dann das gewünschte kombinatorische Objekt dar, welches häufig einfacher zu handhaben ist als die anfängliche Menge. Als grundlegende Einführung ist beispielsweise [19] Kapitel 4.G zu nennen. Die dortigen Aussagen sind jedoch zum Teil nicht ausreichend für unsere Situation, da wir ebenfalls an relativen Aussagen (d.h. für Raumpaare) interessiert sind. Wir werden deshalb auf [2] Kapitel 2.2 zurückgreifen, welches aus ähnlichen Motiven heraus eine ausführliche Wiederholung der gewünschten Resultate bereitstellt; in den später auftretenden Situationen müssen wir die zum Nerven-Lemma analogen Aussagen dann von Hand beweisen.

Wie in [2] Kapitel 2.2 bezeichnen wir eine Familie  $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$  von Teilmengen eines topologischen Raums  $Y$  als **offene Überdeckung** von  $Y$ , falls sich  $Y$  als die Vereinigung der Inneren der  $U_i$  ergibt. Ist  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $Y$ , so wird der **Nervenkomplex**  $N(\mathcal{U})$  von  $\mathcal{U}$  wie folgt konstruiert:  $N(\mathcal{U})$  ist ein Simplicialkomplex, dessen Ecken genau den Elementen von  $\mathcal{U}$  – also den Überdeckungsmengen  $U_i$  – entsprechen; zwischen den zu  $U_{i_0}, \dots, U_{i_k}$  gehörenden Ecken befindet sich genau dann ein  $k$ -Simplex, falls

$$U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_k} \neq \emptyset.$$

Formaler ausgedrückt betrachten wir die disjunkte Vereinigung der Standard- $n$ -Simplizes  $\Delta^n$  über alle Indexmengen  $\{i_0, \dots, i_n\}$  von Kardinalität  $n+1$  mit  $\bigcap_{j=0}^n U_{i_j} \neq \emptyset$  und bilden anschließend die Vereinigung all dieser Mengen über alle  $n \geq 0$ .  $N(\mathcal{U})$  ergibt sich nun als Quotient jener Menge, indem wir Seiten verschiedener Kopien  $D, D'$  von  $\Delta^n$  miteinander identifizieren, falls sie nach Streichen eines der Indizes übereinstimmen, d.h. falls  $\{i_0, \dots, i_n\}$  (die zu  $D$  gehörige Indexmenge) und  $\{i'_0, \dots, i'_n\}$  (die zu  $D'$  gehörige Indexmenge) nach Entfernen jeweils eines Elements übereinstimmen.

Die formale Definition des Nervenkomplexes macht die Analogie zu einer weiteren von uns benötigten Konstruktion besser sichtbar. Hierzu sei  $Y_{\mathcal{U}}$  wie folgt gegeben: Betrachte die disjunkte Vereinigung der Produkte

$$(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n}) \times \Delta^n$$

für alle  $n \geq 0$  und alle Indexmengen  $\{i_0, \dots, i_n\}$  von Kardinalität  $n+1$  mit  $\bigcap_{j=0}^n U_{i_j} \neq \emptyset$ . Dann ergibt sich  $Y_{\mathcal{U}}$  als Quotient dieser Menge, indem zwei Elemente  $D$  (mit Indexmenge  $\{i_0, \dots, i_n\}$ ) und  $D'$  (mit Indexmenge  $\{i'_0, \dots, i'_n\}$ ) erneut dann miteinander identifiziert werden, falls ihre Indexmengen nach Streichen jeweils eines Elements übereinstimmen.

Wie in [2] Kapitel 2.2 stellen wir fest: Ist  $A \subseteq Y$  ein Teilraum und  $\mathcal{V} = \{V_j : j \in J\}$  eine offene Überdeckung von  $A$ , wobei  $J \subseteq I$ , sodass  $V_j \subseteq U_j$  für alle  $j \in J$ , so erhalten wir eine Abbildung

$$A_{\mathcal{V}} \rightarrow Y_{\mathcal{U}}$$

sowie eine Einbettung

$$N(\mathcal{V}) \rightarrow N(\mathcal{U})$$

von Simplicialkomplexen. Ferner induziert die Projektion  $(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n}) \times \Delta^n \rightarrow U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n} \subseteq Y$  eine Abbildung

$$Y_{\mathcal{U}} \rightarrow Y,$$

während die Projektion  $(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n}) \times \Delta^n \rightarrow \Delta^n$  wiederum eine Abbildung

$$Y_{\mathcal{U}} \rightarrow N(\mathcal{U})$$

nach sich zieht.

Wir bezeichnen eine offene Überdeckung  $\mathcal{U}$  eines topologischen Raums  $Y$  als **gut**, falls ihre Elemente zusammenziehbar sind und jeder nichtleere Durchschnitt ihrer Elemente ebenfalls zusammenziehbar ist. Als zentrale Aussage halten wir fest:

**Lemma 1.39** ([2] Theorem 2.7). *Ist  $\mathcal{U}$  eine lokal endliche offene Überdeckung eines parakompakten Raums  $Y$ , so ist  $Y_{\mathcal{U}} \rightarrow Y$  eine Homotopieäquivalenz. Ist  $\mathcal{U}$  außerdem gut, so ist auch  $Y_{\mathcal{U}} \rightarrow N(\mathcal{U})$  eine Homotopieäquivalenz.*

Alle von uns später betrachteten Räume werden parakompakt sein, genau wie auch unsere konstruierten Überdeckungen stets lokal endlich – und gut – sind. Obiges Lemma 1.39 ist als erweiterte Version

des bekannten Nerven-Lemmas zu verstehen (vgl. [2] Corollary 2.8 bzw. [19] Corollary 4G.3): Ist  $\mathcal{U}$  eine lokal endliche, gute offene Überdeckung eines parakompakten Raums  $Y$ , so ist der Nervenkomplex  $N(\mathcal{U})$  homotopieäquivalent zu  $Y$ .

In der späteren Argumentation werden wir für eine relative Version des Nerven-Lemmas – d.h. um eine Homotopieäquivalenz von Paaren zu beweisen – auf die folgenden homotopietheoretischen Tatsachen zurückgreifen müssen.

**Lemma 1.40** ([2] Theorem 2.4). *Sei*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\cong} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\cong} & Y \end{array}$$

*ein kommutatives Diagramm topologischer Räume, wobei die horizontalen Abbildungen Homotopieäquivalenzen und die vertikalen Abbildungen Kofaserungen seien. Dann sind  $(X, A)$  und  $(Y, B)$  auch als Raumpaare homotopieäquivalent.*

**Lemma 1.41** ([2] Lemma 2.5). *Sei  $j : A \rightarrow X$  eine Kofaserung, sodass das Diagramm topologischer Räume*

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow j & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{F} & Y \end{array}$$

*bis auf Homotopie kommutiert. Dann existiert eine zu  $F$  homotope Abbildung  $F' : X \rightarrow Y$ , sodass das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow j & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{F'} & Y \end{array}$$

*echt kommutiert. Insbesondere gilt: Ist  $F$  eine Homotopieäquivalenz, so ist auch  $F'$  eine.*



## Kapitel 2

---

### Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeiten

---

Das vorliegende Kapitel beschäftigt sich mit der topologischen Gestalt negativ gekrümmter Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeiten. Zunächst werden wir eine leicht verallgemeinerte Dick-dünn-Zerlegung vorstellen, welche jedoch mehr als ausführliche Ausarbeitung einiger in Fachkreisen wohl allgemein bekannter Tatsachen zu verstehen ist. Anschließend wenden wir uns unserem Hauptresultat für Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeiten zu, welches aussagt, dass ein besonders günstiges kombinatorisches Modell für den dicken Teil existiert. Dies wird uns in Anwendungen beispielsweise ermöglichen, die Homologie solcher Mannigfaltigkeit durch ihr Volumen zu kontrollieren.

Als Wermutstropfen ist aufzufassen, dass keine Beispiele bekannt sind, welche die vorliegende Klasse negativ gekrümmter Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeiten – beispielsweise bis auf Homöomorphie oder Diffeomorphie – von der zunächst spezielleren, aber ausführlicher studierten Klasse von Mannigfaltigkeiten mit strikt negativer Krümmung (d.h.  $-1 \leq K \leq a < 0$ ) abgrenzen. Wir werden am Ende des Kapitels in allgemeiner Dimension zumindest zeigen, dass sich tatsächlich Metriken finden lassen, welche unsere Krümmungsbedingungen erfüllen, aber nicht bereits im Spezialfall strikt negativer Krümmung enthalten sind. Es sei jedoch darauf aufmerksam gemacht, dass diese Beispiele durch Abänderung der Metrik aus hyperbolischen Mannigfaltigkeiten entstehen, welche also – ausgestattet mit eben dieser hyperbolischen Metrik – auch  $-1 \leq K \leq a < 0$  erfüllen würden.

### 2.1 Dick-dünn-Zerlegung

Um die Topologie einer negativ gekrümmten Mannigfaltigkeit (und wie wir später sehen, auch Orbifaltigkeit) zu untersuchen, bietet sich als Hilfsmittel häufig die Zerlegung in einen dicken und einen dünnen Teil an. Hierbei existiert für den dicken Teil eine globale untere Schranke an den Injektivitätsradius – was ihn topologisch leicht zu handhaben macht –, während die Komponenten des dünnen Teils – welche also aus Punkten mit kleinem Injektivitätsradius bestehen – lediglich von besonders einfacher Form sind. So stellt sich heraus, dass der dünne Teil ausschließlich aus Röhren und Spitzen besteht, wobei Röhren Kugelbündel über der  $S^1$  (und damit homotopieäquivalent zur  $S^1$ ) sind, während sich Spitzen stets als Produkt einer Mannigfaltigkeit (kleinerer Dimension) mit einer Halbgerade darstellen lassen, weshalb man sie insbesondere auf den gemeinsamen Rand mit dem dicken Teil retrahieren kann. Eine

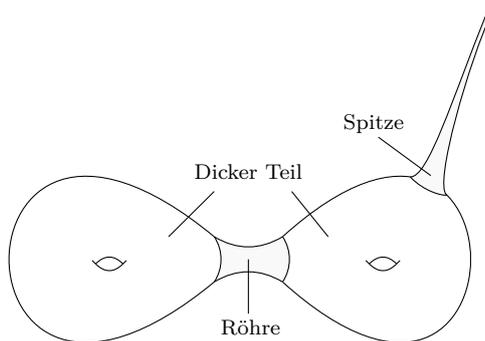


Abbildung 2.1: Beispielhafte Darstellung der Zerlegung einer Mannigfaltigkeit in ihren dicken Teil und dünnen Teil. Der dünne Teil (hier grau eingefärbt) besteht ausschließlich aus Röhren und Spitzen.

Veranschaulichung der Dick-dünn-Zerlegung ist in Abbildung 2.1 zu finden.

Die Situation im gesamten Abschnitt gestaltet sich wie folgt: Sei  $X$  eine  $n$ -dimensionale Hadamard-Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $-1 \leq K < 0$ , welche zusätzlich das Sichtbarkeits-Axiom erfüllt, sowie  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  ein torsionsfreies Gitter, womit der Quotient  $M := X/\Gamma$  eine Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $-1 \leq K < 0$  und endlichem Volumen ist. Umgekehrt ergibt sich jede solche Mannigfaltigkeit auf diese Weise; beachte  $\pi_1(M) \cong \Gamma$ .

Wir wollen nun eine analog zu [2] Theorem 4.5 (dort ohne Beweis) formulierte, abgewandelte Dick-dünn-Zerlegung beweisen. Dabei ist die wesentliche Änderung im Vergleich zum üblichen Fall, dass der Einfluss einzelner Isometrien auf den dünnen Teil – gesteuert über das Niveau ihrer Verschiebungsfunktionen – nun verschieden gewichtet wird. Der gewöhnliche, bekannte Fall der Dick-dünn-Zerlegung ergibt sich dann als Spezialfall für eine konstante Wahl der Niveaus. Genauer: Wähle eine konjugationsinvariante Zuordnung  $\gamma \mapsto \varepsilon_\gamma$  für  $\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$ , wobei wir später den Wertebereich  $\varepsilon_\gamma \in [\varepsilon, \varepsilon(n)/2]$  voraussetzen werden, mit  $\varepsilon(n)$  dem Margulis- $\varepsilon$  (s.u. Satz 2.1) sowie  $\varepsilon \in (0, \varepsilon(n)/2]$  beliebig. Der **dünne Teil**  $X_-$  von  $X$  ist gemäß

$$X_- := \bigcup_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}} \{d_\gamma < \varepsilon_\gamma\}$$

definiert, der **dicke Teil** hingegen als dessen Komplement  $X_+ := X \setminus X_-$ . Beachte, dass  $X_-$  auch von der Wahl von  $\Gamma$  und der Zuordnung  $\gamma \mapsto \varepsilon_\gamma$  abhängt, obwohl dies in der Notation unterschlagen wird. Durch Übergang in den Quotienten  $M = X/\Gamma$  erhalten wir den **dünnen Teil**  $M_- := X_-/\Gamma$  sowie den **dicke Teil**  $M_+ := X_+/\Gamma$ , wobei die Wohldefiniertheit durch Lemma 2.2 bzw. 2.3 unten sichergestellt wird. Der Zusammenhang zwischen der Verschiebung durch Isometrien in  $X$  und dem Injektivitätsradius in  $M$  wird dabei mittels der Funktion

$$d_\Gamma : X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto d_\Gamma(x) := \inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}} d_\gamma(x)$$

hergestellt, welche  $d_\Gamma(x) = 2 \cdot \text{Inj Rad}_M(\pi(x))$  für alle  $x \in X$  erfüllt (vgl. [4] Abschnitt 8.1), mit  $\pi : X \rightarrow X/\Gamma = M$  der Projektion in den Quotienten.

Im Wesentlichen übertragen sich die Eigenschaften aus bereits bekannten Dick-dünn-Zerlegungen ebenso auf unseren Fall, wobei wir der Vollständigkeit halber dennoch Beweise für die entsprechenden

Aussagen geben. Es sei außerdem angemerkt, dass in unseren späteren Anwendungen eine konstante Wahl der Niveaus genügt; uns war zum Zeitpunkt des Beweises der hiesigen Dick-dünn-Zerlegung nur nicht bewusst, dass dies möglich wäre.

Als zentrales Werkzeug in der Dick-dünn-Zerlegung dient das Lemma von Margulis, welches beispielsweise in [4] Theorem 9.5 mitsamt Beweis zu finden ist. Wir wählen eine gegenüber [4] Theorem 9.5 leicht erweiterte Form.

**Satz 2.1** (Lemma von Margulis; [25] Theorem 2.1). *Es existieren nur von der Dimension  $n$  abhängige Konstanten  $\varepsilon(n) > 0$  und  $m(n) \in \mathbb{N}$ , sodass für jede  $n$ -dimensionale Hadamard-Mannigfaltigkeit  $X$  mit Schnittkrümmung  $-1 \leq K \leq 0$ , jede diskrete Gruppe  $\Gamma < \text{Isom}(X)$ , jeden Punkt  $x \in X$  und jedes  $\varepsilon \leq \varepsilon(n)$  die Gruppe*

$$\Gamma_\varepsilon(x) := \langle \{\gamma \in \Gamma : d_\gamma(x) < \varepsilon\} \rangle$$

*einen nilpotenten Normalteiler  $N$  von Index  $\leq m(n)$  besitzt, also insbesondere virtuell nilpotent ist. Ist  $\Gamma_\varepsilon(x)$  endlich, so ist  $N$  sogar abelsch.*

Wie üblich wird das  $\varepsilon(n)$  aus Satz 2.1 auch Margulis- $\varepsilon$  genannt, während  $m(n)$  auch als Margulis- $m$  oder Margulis-Indexkonstante bezeichnet wird.

Die Beweisstrategie der Dick-dünn-Zerlegung folgt der in [4] Kapitel 10, wo jedoch mitunter die stärkere Krümmungsbedingung  $-1 \leq K \leq a < 0$  vorausgesetzt wird. Eine große Fülle nützlicher Aussagen für unsere allgemeinere Situation von Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeiten ist dabei [15] (insbesondere Kapitel 3) entnommen. Viele Beweisideen lassen sich außerdem aus dem anschaulichen Fall hyperbolischer Mannigfaltigkeiten wie in [5] Kapitel D.3 übertragen oder liefern zumindest eine Inspiration hierfür.

Wir beginnen nun mit einer einfachen Aussage über das Transformationsverhalten der Subniveaumengen der Verschiebungsfunktion einer Isometrie (vgl. auch Lemma 1.15).

**Lemma 2.2.** *Für  $\gamma, \gamma' \in \text{Isom}(X)$  und  $a \geq 0$  gilt*

$$\gamma\{d_{\gamma'} < a\} = \{d_{\gamma\gamma'\gamma^{-1}} < a\}.$$

*Auch die abgeschlossenen Subniveaumengen  $\{d_\gamma \leq a\}$  transformieren sich auf diese Art.*

*Beweis.* Wir beschränken uns auf  $\{d_{\gamma'} < a\}$ , der Fall  $\leq a$  ergibt sich analog. Ist  $x \in \{d_{\gamma'} < a\}$ , so folgt

$$d_{\gamma\gamma'\gamma^{-1}}(\gamma x) = d(\gamma\gamma'\gamma^{-1}(\gamma x), \gamma x) = d(\gamma'x, x) = d_{\gamma'}(x) < a,$$

also  $\gamma x \in \{d_{\gamma\gamma'\gamma^{-1}} < a\}$  und somit  $\gamma\{d_{\gamma'} < a\} \subseteq \{d_{\gamma\gamma'\gamma^{-1}} < a\}$ . Mit dieser Inklusion schließen wir ebenso

$$\gamma^{-1}\{d_{\gamma\gamma'\gamma^{-1}} < a\} \subseteq \{d_{\gamma^{-1}\gamma\gamma'\gamma^{-1}(\gamma^{-1})^{-1}} < a\} = \{d_{\gamma'} < a\},$$

also  $\{d_{\gamma\gamma'\gamma^{-1}} < a\} \subseteq \gamma\{d_{\gamma'} < a\}$  und damit die gewünschte Mengengleichheit.  $\square$

Das folgende Lemma ist eine Erweiterung von [4] Lemma 10.2.

**Lemma 2.3.** *Sei  $W \subseteq X_-$  eine Zusammenhangskomponente von  $X_-$ . Dann gilt:*

1.  *$W$  ist genau invariant unter  $\Gamma$ , d.h. für  $\gamma \in \Gamma$  gilt entweder  $\gamma W = W$  oder  $\gamma W \cap W = \emptyset$ .*
2. *Sind  $\gamma \in \Gamma$  und  $x \in W$  mit  $d_\gamma(x) < \varepsilon_\gamma$ , so ist  $\gamma \in \Gamma_W = \{\gamma \in \Gamma : \gamma W = W\}$ .*

*Beweis.* 1. Gemäß Lemma 2.2 sowie der Konjugationsinvarianz von  $\gamma \mapsto \varepsilon_\gamma$  erhalten wir für  $\gamma_0 \in \Gamma$

$$\begin{aligned} \gamma_0 \bigcup_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}} \{d_\gamma < \varepsilon_\gamma\} &= \bigcup_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}} \gamma_0 \{d_\gamma < \varepsilon_\gamma\} \\ &= \bigcup_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}} \{d_{\gamma_0 \gamma \gamma_0^{-1}} < \varepsilon_\gamma\} \\ &= \bigcup_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}} \{d_{\gamma_0 \gamma \gamma_0^{-1}} < \varepsilon_{\gamma_0 \gamma \gamma_0^{-1}}\} \\ &= \bigcup_{\gamma' \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}} \{d_{\gamma'} < \varepsilon_{\gamma'}\}, \end{aligned}$$

also  $\gamma_0 X_- = X_-$ . Somit werden insbesondere Zusammenhangskomponenten auf Zusammenhangskomponenten abgebildet; folglich ist  $W$  genau invariant unter  $\Gamma$ .

2. Nach Voraussetzung ergibt sich  $d_\gamma(\gamma x) = d_\gamma(x) < \varepsilon_\gamma$ , womit  $\gamma x$  ebenfalls in  $\{d_\gamma < \varepsilon_\gamma\}$  liegt. Da diese Menge konvex ist, liegt auch die Geodätische von  $x$  nach  $\gamma x$  in ihr. Somit befinden sich  $x$  und  $\gamma x$  in der selben Zusammenhangskomponente, also  $\gamma x \in W$ . Wegen

$$\gamma W \cap W \supseteq \{\gamma x\} \neq \emptyset$$

muss nach 1. bereits  $\gamma W = W$  gelten, d.h.  $\gamma \in \Gamma_W$ . □

Neben der Wohldefiniertheit von  $M_-$  und  $M_+$  ist obiges Lemma noch für eine weitere Erkenntnis nützlich: Wegen der genauen Invarianz der Komponenten  $W$  erhalten wir eine einfacher zu handhabende Darstellung des Quotienten  $\pi(W) \subseteq M$  gemäß  $\pi(W) \cong W/\Gamma_W$ .

Das Lemma von Margulis (Satz 2.1) ist insbesondere aus dem Grund von Bedeutung, als dass sich für virtuelle nilpotente Gruppen eine Vielzahl von Aussagen hinsichtlich ihrer Struktur treffen lassen; wir halten zunächst fest, dass wir im Fall virtuell nilpotenter Gruppen die Isometrietypen trennen können:

**Lemma 2.4** ([15] Lemma 3.1b). *Ist  $N$  eine virtuell nilpotente Untergruppe von  $\Gamma$ , so gilt*

$$N \subseteq \Gamma_z = \{\gamma \in \Gamma : \gamma z = z\}$$

für ein  $z \in X(\infty)$ . Insbesondere sind die nichttrivialen Elemente von  $N$  entweder alle hyperbolisch oder parabolisch. Des Weiteren ist

$$\text{Fix}(\gamma) = \text{Fix}(\gamma')$$

für alle nichttrivialen  $\gamma, \gamma' \in N$  erfüllt, wobei hier  $\text{Fix}(\gamma) := \{z \in X(\infty) : \gamma z = z\}$ .

Wegen des folgenden Lemmas werden wir von nun an die Zuordnung  $\gamma \mapsto \varepsilon_\gamma$  stets so wählen, dass  $\varepsilon_\gamma \in [\varepsilon, \varepsilon(n)/2]$  für alle  $\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$ .

**Lemma 2.5** ([15] Lemma 3.1c). *Sei  $A \subseteq X$  eine wegzusammenhängende Menge mit  $d_\Gamma(x) \leq \varepsilon(n)/2$  für alle  $x \in A$ . Sind  $\gamma, \gamma' \in \Gamma$  nichttrivial mit  $d_\gamma(x) \leq \varepsilon(n)/2$  und  $d_{\gamma'}(x') \leq \varepsilon(n)/2$  für geeignete Punkte  $x, x' \in A$ , so gilt*

$$\text{Fix}(\gamma) = \text{Fix}(\gamma').$$

**Korollar 2.6.** *Sei  $W$  eine Komponente von  $X_-$  und die Zuordnung  $\gamma \mapsto \varepsilon_\gamma$  so gewählt, dass  $\varepsilon_\gamma \in [\varepsilon, \varepsilon(n)/2]$  für alle  $\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$ . Sind  $\gamma, \gamma' \in \Gamma$  nichttrivial mit  $d_\gamma(x) < \varepsilon_\gamma$  und  $d_{\gamma'}(x') < \varepsilon_{\gamma'}$  für geeignete Punkte  $x, x' \in W$ , so gilt*

$$\text{Fix}(\gamma) = \text{Fix}(\gamma').$$

*Beweis.* Nach Konstruktion von  $X_-$  und wegen  $\varepsilon_\gamma \leq \varepsilon(n)/2$  für alle  $\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$  gilt  $d_\Gamma(x) \leq \varepsilon(n)/2$  für alle  $x \in W$ . Damit erfüllt die Zusammenhangskomponente  $W$  von  $X_-$  die Voraussetzungen an  $A$  in Lemma 2.5, und wiederum wegen  $\varepsilon_\gamma \leq \varepsilon(n)/2$  für alle nichttrivialen Isometrien folgt nun die Behauptung.  $\square$

Untenstehendes Lemma besagt, dass sich die verschiedenen Isometrietypen auch anhand der Komponenten des dünnen Teils trennen lassen.

**Lemma 2.7.** *Sei  $W \subseteq X_-$  eine Zusammenhangskomponente von  $X_-$  und bezeichne erneut  $\Gamma_W = \{\gamma \in \Gamma : \gamma W = W\}$ . Dann sind alle nichttrivialen Elemente von  $\Gamma_W$  entweder hyperbolisch mit gemeinsamer Achse  $A$  oder parabolisch mit gemeinsamem Fixpunkt  $z \in X(\infty)$ .*

*Beweis.* Der Beweis orientiert sich am entsprechenden Schritt in [4] Lemma 10.3; wir müssen jedoch die dortigen Aussagen (\*) bzw. Lemma 10.2 durch unsere Entsprechungen ersetzen, also Korollar 2.6 bzw. Lemma 2.3. Sei

$$\mathcal{B} := \{\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\} : \text{Es existiert } x \in W \text{ mit } d_\gamma(x) < \varepsilon_\gamma\}.$$

Nach Korollar 2.6 stimmen für beliebige  $\gamma, \gamma' \in \mathcal{B}$  die Fixpunktmenge überein; da bei vorliegendem Sichtbarkeits-Axiom parabolische Isometrien genau einen Fixpunkt haben und hyperbolische genau zwei, können wir folgern, dass die Elemente von  $\mathcal{B}$  entweder alle hyperbolisch sind – mit eindeutiger gemeinsamer Achse  $A$  – oder alle parabolisch mit gemeinsamem Fixpunkt  $z \in X(\infty)$ . Beachte außerdem, dass gemäß Lemma 2.3 Aussage 2. bereits  $\mathcal{B} \subseteq \Gamma_W$  erfüllt ist.

Ist  $\gamma \in \Gamma_W$  nichttrivial und  $x \in W$ , so ist  $\gamma x \in W$ . Nach Definition von  $W \subseteq X_- = \bigcup_{\gamma' \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}} \{d_{\gamma'} < \varepsilon_{\gamma'}\}$  ist damit  $\gamma x \in \{d_\beta < \varepsilon_\beta\}$  für ein  $\beta \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$ . Offensichtlich gilt für dieses  $\beta$  bereits  $\beta \in \mathcal{B}$ , womit wir

$$\varepsilon_\beta > d_\beta(\gamma x) = d(\beta\gamma x, \gamma x) = d(\gamma^{-1}\beta\gamma x, x) = d_{\gamma^{-1}\beta\gamma}(x)$$

erhalten; nach Konjugationsinvarianz ist aber  $\varepsilon_{\gamma^{-1}\beta\gamma} = \varepsilon_\beta$  und folglich  $\gamma^{-1}\beta\gamma \in \mathcal{B}$ .

Für hyperbolisches  $\beta$  mit Achse  $A$  ist  $\gamma^{-1}A$  die Achse der ebenfalls hyperbolischen Isometrie  $\gamma^{-1}\beta\gamma \in \mathcal{B}$  (vgl. Lemma 1.15). Da die Achsen zweier hyperbolischer Elemente aus  $\mathcal{B}$  übereinstimmen, erhalten wir  $A = \gamma^{-1}A$ . Somit lässt  $\gamma$  die Achse  $A$  invariant und ist damit gemäß Lemma 1.25 selbst hyperbolisch mit Achse  $A$ .

Sei anderenfalls  $\beta$  parabolisch mit Fixpunkt  $z \in X(\infty)$ , womit  $\mathcal{B}$  auch nur aus parabolischen Isometrien mit selbem Fixpunkt  $z$  besteht. Wegen  $\gamma^{-1}\beta\gamma \in \mathcal{B}$  erhalten wir somit

$$\gamma^{-1}\beta\gamma(z) = z, \quad \text{also} \quad \beta(\gamma z) = \gamma z.$$

Folglich ist  $\gamma z$  ebenfalls ein Fixpunkt der parabolischen Isometrie  $\beta$ , weshalb bereits  $\gamma z = z$  gelten muss, d.h.  $z$  ist ein Fixpunkt von  $\gamma$ ; da sich aber gemäß Lemma 1.35 hyperbolische und parabolische Isometrien in der diskreten Gruppe  $\Gamma$  keine gemeinsamen Fixpunkte teilen können, muss auch  $\gamma$  parabolisch sein.  $\square$

Die folgenden Aussagen hinsichtlich des Verhaltens der infimalen Verschiebung  $d_\Gamma$  in der Nähe von parabolischen Fixpunkten erweisen sich später für die Behandlung der parabolischen Gruppen als nützlich.

**Lemma 2.8.** *Ist  $z \in X(\infty)$  Fixpunkt einer parabolischen Isometrie aus  $\Gamma$ , so gilt:*

1. ([15] Lemma 3.1e) *Für jedes  $\delta > 0$  existiert eine unter  $\Gamma$  genau invariante Horosphäre  $HS$  um  $z$ , sodass für jeden Punkt  $x$  aus der abgeschlossenen Horokugel  $HK$  um  $z$ , die von  $HS$  berandet wird, bereits  $d_\Gamma(x) < \delta$  gilt.*

2. ([15] Lemma 3.1f) Ist  $c$  eine Geodätische in  $X$  mit  $c(\infty) = z$ , so existiert ein  $t_1 \in \mathbb{R}$  mit  $d_\Gamma(c(t_1)) > \varepsilon(n)/2$ .

Wir erinnern daran, dass nach Lemma 1.30 hyperbolische Gruppen bereits isomorph zu  $\mathbb{Z}$  sein müssen. Für den parabolischen Fall lässt sich die Struktur von  $\Gamma_W$  ebenfalls näher angeben.

**Lemma 2.9.** *Im parabolischen Fall gilt  $\Gamma_W = \Gamma_z$ , mit  $\Gamma_z = \{\gamma \in \Gamma : \gamma z = z\}$  dem Stabilisator des gemeinsamen Fixpunkts  $z \in X(\infty)$  der parabolischen Elemente von  $\Gamma_W$ . Damit sind insbesondere alle nichttrivialen Elemente von  $\Gamma_z$  parabolisch mit Fixpunkt  $z$ .*

*Beweis.* Nach Lemma 2.7 gilt offensichtlich  $\Gamma_W \subseteq \Gamma_z$ . Sei andererseits  $\gamma \in \Gamma_z$  gegeben. Gemäß Lemma 2.8 erhalten wir eine unter  $\Gamma$  genau invariante Horokugel  $HK \subseteq W$  um  $z$  mit  $d_\Gamma(x) < \varepsilon$  für alle  $x \in HK$ . Wegen  $\gamma z = z$  wird  $HK$  unter  $\gamma$  auf eine Horokugel  $HK'$  um  $z$  abgebildet; da  $HK$  und  $HK'$  als Horokugeln um den selben Punkt im Unendlichen nichtleeren Schnitt aufweisen, muss nach genauer Invarianz von  $HK$  unter  $\Gamma$  bereits  $HK' = HK$ , also  $\gamma HK = HK$  gelten. Aufgrund von  $HK \subseteq W$  gilt folglich  $\gamma W \cap W \neq \emptyset$ , weshalb sich gemäß Lemma 2.3 nun  $\gamma W = W$  ergibt, also  $\gamma \in \Gamma_W$ .

Da  $\Gamma_W$  im vorliegenden Fall nach Lemma 2.7 mit Ausnahme der Identität nur aus parabolischen Elementen mit gemeinsamem Fixpunkt  $z$  besteht, ist dies wegen  $\Gamma_W = \Gamma_z$  trivialerweise auch für  $\Gamma_z$  erfüllt (alternativ nutze Korollar 1.38).  $\square$

Die Unterscheidung zwischen hyperbolischen und parabolischen Gruppen  $\Gamma_W$  wird es uns erleichtern, die Struktur der Komponenten des dünnen Teils zu bestimmen.

**Lemma 2.10.** *Sei  $U := \pi(W) (\cong W/\Gamma_W)$ , womit  $U \subseteq M$  eine Zusammenhangskomponente von  $M_- = X_-/\Gamma$  ist. Dann ist  $U$  genau dann beschränkt, wenn in Lemma 2.7 der hyperbolische Fall eintritt (und entsprechend genau dann unbeschränkt, wenn in Lemma 2.7 der parabolische Fall eintritt).*

*Beweis.* Erneut greifen wir wesentlich auf Ideen aus [4] Kapitel 10, insbesondere Lemma 10.3, zurück. Ist  $U$  beschränkt, so ist der Abschluss  $\bar{U}$  von  $U$  kompakt und der Injektivitätsradius nimmt folglich ein Minimum in einem  $p \in \bar{U}$  an. Wäre  $p$  im Rand von  $U$ , so wäre nach Konstruktion von  $U$  bzw.  $W$  ein Urbild  $\tilde{p}$  von  $p$  im Rand von  $W$ , also nach Konstruktion von  $W$  im nichtleeren Durchschnitt von Rändern abgeschlossener Subniveaumengen  $\{d_\gamma \leq \varepsilon_\gamma\}$ ; für solche  $\gamma$  ist jedoch die Verschiebung  $d_\gamma(\tilde{p})$  maximal, nämlich gleich  $\varepsilon_\gamma$ . Wegen der Beziehung  $2 \cdot \text{Inj Rad}_M(p) = d_\Gamma(\tilde{p})$  kann damit  $p$  kein Minimum des Injektivitätsradius sein. Folglich nimmt der Injektivitätsradius ein Minimum in einem  $p \in U$  an.

Insbesondere ist  $\tilde{p} \in W$  ein Minimum von  $d_\Gamma$ , also  $d_\Gamma(\tilde{p}) = d_\gamma(\tilde{p})$  für ein  $\gamma \in \Gamma$ , wobei nach Lemma 2.3 bereits  $\gamma \in \Gamma_W$  gilt. Wäre  $\gamma$  parabolisch, so wäre gemäß Lemma 1.25 der Mittelpunkt  $m$  der Geodätischen von  $\tilde{p}$  nach  $\gamma\tilde{p}$  ein Punkt in  $W$  mit  $d_\gamma(m) < d_\gamma(\tilde{p})$ , im Widerspruch zur Minimalität von  $d_\Gamma$  auf  $W$  in  $\tilde{p}$ . Folglich muss  $\gamma$  hyperbolisch sein, weshalb nach Lemma 2.7 bereits alle nichttrivialen Elemente in  $\Gamma_W$  hyperbolisch mit gemeinsamer Achse sind.

Sind umgekehrt alle nichttrivialen Elemente von  $\Gamma_W$  hyperbolisch mit gemeinsamer Achse  $A$ , so wollen wir zeigen, dass  $U$  beschränkt ist. Nach Lemma 1.30 ist  $\Gamma_W$  zyklisch erzeugt von einem hyperbolischen Element  $\gamma_0$  mit Achse  $A$ . Sei  $t_0 > 0$  die Translation der Achse  $A$  unter  $\gamma_0$ . Es folgt, dass  $\gamma_0^k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) die Achse  $A$  um  $|k| \cdot t_0$  transliert. Wähle  $k_0 \in \mathbb{N}$  maximal derart, dass

$$k_0 \cdot t_0 \leq \frac{\varepsilon(n)}{2}, \quad \text{aber} \quad (k_0 + 1) \cdot t_0 > \frac{\varepsilon(n)}{2}.$$

Wegen  $\varepsilon(n)/2 \geq \varepsilon_\gamma$  für alle  $\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$  folgt damit, dass  $\{d_{\gamma_0^\kappa} < \varepsilon_{\gamma_0^\kappa}\} = \emptyset$  für alle  $\kappa \in \mathbb{Z}$  mit  $|\kappa| > k_0$ . Schreiben wir

$$G := \{\gamma_0^{-k_0}, \dots, \gamma_0^{-1}, \gamma_0, \dots, \gamma_0^{k_0}\},$$

so erhalten wir die explizite Darstellung

$$W = \bigcup_{\gamma \in G} \{d_\gamma < \varepsilon_\gamma\}.$$

Jede der – endlich vielen – Mengen  $\{d_\gamma < \varepsilon\}$  ( $\gamma \in G$ ) ist nach Lemma 1.29 in einer geeigneten Umgebung von  $A$  enthalten; genauer gilt

$$\{d_\gamma < \varepsilon_\gamma\} \subseteq (A)_{R_\gamma}$$

mit passenden  $R_\gamma > 0$ . Für  $R_0 := \max\{R_\gamma : \gamma \in G\}$  folgt somit  $W \subseteq (A)_{R_0}$ . Die Achse  $A$  selbst wird unter der Wirkung von  $\Gamma_W$  zu einer geschlossenen Geodätischen  $\pi(A)$  der Länge  $t_0$  in  $M = X/\Gamma$ . Es ergibt sich  $U \subseteq B_{R_0}(\pi(A))$ , womit auch  $U$  selbst beschränkt ist.

Zusammenfassend haben wir damit gezeigt, dass  $U$  genau dann beschränkt ist, wenn in Lemma 2.7 der hyperbolische Fall für  $\Gamma_W$  eintritt. Dies ist nach Dichotomie äquivalent zur Aussage, dass  $U$  genau dann unbeschränkt ist, wenn in Lemma 2.7 der parabolische Fall für  $\Gamma_W$  eintritt.  $\square$

Die beschränkten Komponenten von  $M$  aus dem folgenden Lemma nennen wir wie üblich **Röhren**.

**Lemma 2.11.** *Ist  $U = \pi(W)$  beschränkt, so ist  $U$  homöomorph zu einer Röhrenumgebung einer geschlossenen Geodätischen der Länge  $< \varepsilon(n)/2$ . Anders ausgedrückt ist  $U$  homöomorph zu einem  $D^{n-1}$ -Bündel über der  $\mathbb{S}^1$  und damit homotopieäquivalent zur  $\mathbb{S}^1$ .*

*Beweis.* Ist  $U$  beschränkt, so wissen wir nach dem Beweis von Lemma 2.10, dass  $W$  sich als endliche Vereinigung von Mengen  $\{d_\gamma < \varepsilon_\gamma\}$  ergibt, welche selbst wiederum beschränkte und konvexe Umgebungen der Achse  $A$  der hyperbolischen Elemente aus  $\Gamma_W$  sind. Faserweise ist  $W$  damit homöomorph zur  $(n-1)$ -dimensionalen Kugel  $D^{n-1}$ , d.h.

$$\pi_A^{-1}(\{A(t)\}) \cap W \cong D^{n-1}$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Ferner ist ein Fundamentalbereich der Gruppenwirkung von  $\Gamma_W$  auf  $W$  durch

$$\pi_A^{-1}(A([0, t_0])) \cap W \cong D^{n-1} \times [0, t_0]$$

gegeben (erneut bezeichne  $t_0$  die Translation von  $A$  unter dem zyklischen Erzeuger  $\gamma_0$  von  $W$ ). Bezüglich obiger Produktstruktur auf dem Fundamentalbereich kann die Wirkung von  $\gamma_0$  nun als Verklebung von  $D^{n-1} \times \{0\}$  mit  $D^{n-1} \times \{t_0\}$  entlang eines geeigneten Homöomorphismus  $\gamma' : D^{n-1} \rightarrow D^{n-1}$  aufgefasst werden. Dies ist aber nichts anderes als der Abbildungstorus des Homöomorphismus  $\gamma'$ . Folglich ist  $W/\Gamma_W \cong \pi(W) = U$  homöomorph zum Abbildungstorus von  $\gamma' : D^{n-1} \rightarrow D^{n-1}$  und damit ein  $D^{n-1}$ -Bündel über der  $\mathbb{S}^1$ .  $\square$

Unbeschränkte Komponenten von  $M$  wie im folgenden Lemma werden **Spitzen** genannt.

**Lemma 2.12.** *Ist  $U = \pi(W)$  unbeschränkt, so ist  $U$  homöomorph zu  $V \times (0, \infty)$  mit einer  $(n-1)$ -dimensionalen, kompakten Mannigfaltigkeit  $V$ . Bezeichnet  $\partial U$  den Rand von  $U$  in  $M = X/\Gamma$ , so existiert eine starke Deformationsretraktion von  $U$  auf  $\partial U$ .*

*Beweis.* Die wesentliche Aussage ist im folgenden Fakt enthalten.

**Fakt A.** ([15] Theorem 3.1)  *$M$  hat nur endlich viele topologische Enden, welche außerdem stets Spitzen sind. Jedes Ende besitzt eine Umgebung, die  $C^1$ -diffeomorph zum Produkt  $V \times (0, \infty)$  ist, wobei  $V$  eine geeignete  $(n-1)$ -dimensionale, kompakte  $C^2$ -Untermannigfaltigkeit von  $M$  bezeichnet.*

Fakt A liefert uns also eine Produktstruktur *weit entfernt* von  $\partial U$ ; um hieraus auf eine *globale* Produktstruktur der Spitze zu schließen, greifen wir auf untenstehende Beobachtung zurück.

**Fakt B.** ([15] Lemma 3.1g und dessen Beweis) Sei  $z \in X(\infty)$  der parabolische Fixpunkt von  $\Gamma_W = \Gamma_z$ . Ist  $HS$  eine Horosphäre um  $z$ , so ist  $HS/\Gamma_z$  eine  $(n-1)$ -dimensionale, kompakte  $C^2$ -Mannigfaltigkeit.

Beachte, dass sich gemäß Lemma 2.8 immer eine (abgeschlossene) Horokugel  $HK \subseteq W$  um  $z$  finden lässt; sei  $HS$  die  $HK$  berandende Horosphäre. Indem wir auf die Zerlegung  $X \cong HS \times \mathbb{R}$  zurückgreifen (wobei der  $\mathbb{R}$ -Faktor den Geodätischen hin zum parabolischen Fixpunkt  $z$  entspricht, sowie  $HS \cong \mathbb{R}^{n-1}$ ), sehen wir bereits, dass  $U' := \pi(HK) \cong HK/\Gamma_z \cong HS/\Gamma_z \times [0, \infty)$ .

Wir merken an, dass

$$W = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_W \setminus \{\text{id}\}} \{d_\gamma < \varepsilon_\gamma\}$$

und erinnern daran, dass die  $d_\gamma$  (für  $\gamma \in \Gamma_W \setminus \{\text{id}\}$ ) entlang der obigen Geodätischen mit Endpunkt  $z$  streng monoton sind. Bezeichnet  $B(t)$  alle Punkte in  $W$ , welche durch obigen Fluss entlang der Geodätischen zu  $z$  nach genau  $t$  Zeiteinheiten von  $\partial W$  ausgehend erreicht werden, so sehen wir unmittelbar, dass jedes  $B(t)$  homöomorph zu  $HS$  ist (jede der Geodätischen schneidet sowohl  $B(t)$  als auch  $HS$  in einem eindeutigen Punkt). Da die  $B(t)$  ferner invariant unter der  $\Gamma$ -Wirkung sind, liefert uns dies wegen  $\bigcup_{t>0} B(t) = W$  auch die gewünschte *globale* Produktstruktur auf  $U$ .

Dass sich eine Spitze stets auf ihren gemeinsamen Rand mit dem dicken Teil retrahieren lässt, ist ein Standardargument, welches den oben erwähnten Fluss entlang der Geodätischen vom parabolischen Fixpunkt  $z$  fort verwendet (vgl. auch [15] Kapitel 3, insbesondere der Absatz nach Theorem 3.1).  $\square$

Verschiedene Komponenten von  $X_-$  weisen einen gleichmäßigen Mindestabstand voneinander auf:

**Lemma 2.13.** *Es existiert eine nur von der Dimension  $n$  abhängige Konstante  $\delta = \delta(n) > 0$ , sodass für verschiedene Zusammenhangskomponenten  $W$  und  $W'$  von  $X_-$  bereits  $d(W, W') \geq \delta$  gilt.*

*Beweis.* Setze

$$\delta(n) := \frac{\varepsilon(n)}{8}.$$

Schreibe von nun an abkürzend  $\delta := \delta(n)$ . Seien  $x \in W$  und  $x' \in W'$ , d.h.  $x \in \{d_\gamma < \varepsilon_\gamma\}$  und  $x' \in \{d_{\gamma'} < \varepsilon_{\gamma'}\}$  für geeignete  $\gamma \in \Gamma_W$  bzw.  $\gamma' \in \Gamma_{W'}$ . Angenommen  $d(x, x') < \delta$ , so folgt mit der Dreiecksungleichung und wegen  $\varepsilon_\gamma, \varepsilon_{\gamma'} \leq \varepsilon(n)/2$  schon

$$d_\gamma(x') \leq 2d(x, x') + d_\gamma(x) < 2\delta + \varepsilon_\gamma \leq \frac{2\varepsilon(n)}{8} + \frac{\varepsilon(n)}{2} = \frac{3\varepsilon(n)}{4} < \varepsilon(n).$$

Somit gilt  $\gamma \in \Gamma_{\varepsilon(n)}(x')$  (und  $\gamma' \in \Gamma_{\varepsilon(n)}(x')$  wegen  $d_{\gamma'}(x') < \varepsilon_{\gamma'} < \varepsilon(n)$  ohnehin); nun ist aber  $\Gamma_{\varepsilon(n)}(x')$  gemäß Satz 2.1 virtuell nilpotent, weshalb nach Lemma 2.4 folgt, dass  $\Gamma_{\varepsilon(n)}(x') \subseteq \Gamma_z$  für ein geeignetes  $z \in X(\infty)$ . Damit erhalten wir  $\gamma, \gamma' \in \Gamma_z$ .

Angenommen  $\gamma$  ist parabolisch, so tritt in Lemma 2.7 der parabolische Fall ein und es folgt mit Lemma 2.9 nun  $\Gamma_W = \Gamma_z$ . Wegen  $\gamma' \in \Gamma_z$  ist somit  $\gamma' \in \Gamma_W$ , wobei wir  $W$  erneut als

$$W = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_W \setminus \{\text{id}\}} \{d_\gamma < \varepsilon_\gamma\}$$

darstellen. Es folgt  $\{d_{\gamma'} < \varepsilon_{\gamma'}\} \subseteq W$  und damit  $x' \in W$ , also  $W = W'$ .

Ist andernfalls  $\gamma$  hyperbolisch, so tritt in Lemma 2.7 der hyperbolische Fall ein. Sei  $A$  die gemeinsame Achse der nichttrivialen Elemente aus  $\Gamma_W$ . Wegen  $\gamma \in \Gamma_z$  können wir ohne Einschränkung  $z = A(\infty)$  annehmen. Nach Korollar 1.38 besteht  $\Gamma_z \setminus \{\text{id}\}$  somit aus hyperbolischen Elementen, welche die gleichen Fixpunkte wie  $\gamma$  aufweisen, also neben  $z = A(\infty)$  auch  $A(-\infty)$  fixieren. Folglich besitzt bereits jedes  $\gamma'' \in \Gamma_z \setminus \{\text{id}\}$  ebenfalls die eindeutige Achse  $A$ ; insbesondere ist  $A$  auch die Achse der nun ebenso

hyperbolischen Isometrie  $\gamma' \in \Gamma_z$ . Da  $\{d_{\gamma'} < \varepsilon_{\gamma'}\}$  zusammenhängend ist und  $A$  enthält, liegt  $\{d_{\gamma'} < \varepsilon_{\gamma'}\}$  in der selben Zusammenhangskomponente von  $X_-$  wie  $A$ , also in  $W$ . Wir folgern wiederum  $\{d_{\gamma'} < \varepsilon_{\gamma'}\} \subseteq W$ , also  $x' \in W$  und damit  $W = W'$ .  $\square$

Das vorangegangene Lemma 2.13 ermöglicht es uns, die Anzahl der Komponenten von  $M_- = X_-/\Gamma$  linear im Volumen zu beschränken.

**Lemma 2.14.** *Es existiert eine nur von  $\varepsilon$  und der Dimension  $n$  abhängige Konstante  $C = C(\varepsilon, n) > 0$ , sodass die Anzahl an Zusammenhangskomponenten von  $M_- = X_-/\Gamma$  durch  $C \cdot \text{Vol}(X/\Gamma)$  beschränkt ist.*

*Beweis.* Der Beweis verläuft nach einem bekannten Standardargument, wobei jedoch durch die variable Wahl der Niveaus  $\varepsilon_\gamma \in [\varepsilon, \varepsilon(n)/2]$  eine zusätzliche Abhängigkeit von  $\varepsilon$  erzeugt wird.

Seien  $U$  und  $U'$  verschiedene Komponenten von  $M_-$ , welche wir wie üblich als  $U = W/\Gamma_W$  und  $U' = W'/\Gamma_{W'}$  für geeignete Komponenten  $W, W'$  von  $X_-$  darstellen können. Gemäß obigem Lemma 2.13 existiert ein  $\delta := \delta(n) > 0$ , sodass  $d(W, W') \geq \delta > 0$ . Insbesondere sind die  $\delta/2$ -Umgebungen von  $W$  und  $W'$  disjunkt, d.h.

$$(W)_{\delta/2} \cap (W')_{\delta/2} = \emptyset.$$

Wähle  $x \in (W)_{\delta/4} \setminus W$ , womit  $x$  insbesondere nicht in  $X_-$  enthalten sein kann; nach Konstruktion von  $X_-$  gilt wegen  $\varepsilon_\gamma \geq \varepsilon$  somit  $d_\Gamma(x) \geq \varepsilon$ . Folglich projiziert die Kugel  $K$  von Radius  $\rho := \min\{\varepsilon/2, \delta/4\}$  um  $x$  injektiv nach  $M = X/\Gamma$ , weshalb ihr Volumen mit dem ihres Bildes  $\pi(K) \subseteq M$  übereinstimmt. Dieses Verfahren können wir für jede der verschiedenen Komponenten  $U$  von  $M_-$  durchführen und erhalten so jeweils eine Kugel  $\pi(K)$  in  $M$ . Beachte, dass wegen der Wahl von  $x \in (W)_{\delta/4} \setminus W$  sowie  $\rho \leq \delta/4$  diese Familie von Kugeln außerdem paarweise disjunkt in  $M$  liegt.

Für Kugeln in  $X$  gilt wegen der Krümmungsschranke  $K < 0$ , dass

$$\text{Vol}_X(B_r^X(p)) \geq \text{Vol}_{\mathbb{R}^n}(B_r^{\mathbb{R}^n}) =: V(r, n) \quad (\text{für allgemeine Radien } r).$$

Folglich können höchstens

$$\frac{1}{V(r, n)} \text{Vol}(X/\Gamma)$$

disjunkte Kugeln von Radius  $r$  in  $M = X/\Gamma$  (isometrisch zu solchen in  $X$ ) existieren; es ergibt sich, dass die Anzahl an Komponenten von  $M_-$  durch  $C \cdot \text{Vol}(X/\Gamma)$  beschränkt ist, mit  $C := 1/V(\rho, n)$ . Da  $\rho$  nur von  $\varepsilon$  und  $\delta = \delta(n)$  abhängig war, ist  $C$  lediglich von  $\varepsilon$  und  $n$  abhängig.  $\square$

Wie auch im üblichen Fall ist der dicke Teil kompakt und ab Dimension  $n > 2$  zusammenhängend.

**Lemma 2.15.**  *$M_+ = X_+/\Gamma$  ist kompakt.*

*Beweis.* Der Beweis kann vollkommen analog zum Fall hyperbolischer Räume  $\mathbb{H}^n$  wie in [5] Proposition D.2.6 geführt werden.

Wähle eine maximale  $\varepsilon$ -diskrete Teilmenge  $\mathcal{M} \subseteq M_+$  (diese existiert nach Lemma von Zorn), d.h.

$$d(p_1, p_2) \geq \varepsilon \quad \text{für alle } p_1, p_2 \in \mathcal{M}.$$

Damit sind die Kugeln  $B_{\varepsilon/2}^M(p)$  in  $M$  von Radius  $\varepsilon/2$  um die Punkte  $p \in \mathcal{M}$  disjunkt. Nach Konstruktion von  $X_+$  gilt wegen  $\varepsilon_\gamma \geq \varepsilon$  bereits  $d_\Gamma(x) \geq \varepsilon$  für alle  $x \in X_+$ ; hieraus folgt außerdem, dass die  $B_{\varepsilon/4}^M(p)$  isometrisch zu einer Kugel  $B_{\varepsilon/4}^X(x)$  in  $X$  für  $x \in X_+$  mit  $\pi(x) = p$  sind. Somit stimmen insbesondere die Volumina der  $B_{\varepsilon/4}^M(p)$  und ihrer zugehörigen  $B_{\varepsilon/4}^X(x)$  überein, welche aufgrund der Krümmungsbedingungen gemäß

$$\text{Vol}_X(B_r^X(x)) \geq \text{Vol}_{\mathbb{R}^n}(B_r^{\mathbb{R}^n}) =: V(r, n) \quad (\text{für } r > 0 \text{ und } p \in X)$$

durch  $V(\varepsilon/4, n)$  nach unten beschränkt ist. Es folgt

$$|\mathcal{M}| \leq \frac{1}{V(\varepsilon/4, n)} \text{Vol}(X/\Gamma),$$

was nach Voraussetzung endlich ist. Aufgrund der Maximalität von  $\mathcal{M}$  ergibt sich zudem

$$M_+ \subseteq \bigcup_{p \in \mathcal{M}} B_{2\varepsilon}^M(p).$$

Da  $\mathcal{M}$  endlich ist, muss  $M_+$  folglich beschränkt sein; somit ist  $M_+$  als abgeschlossene und beschränkte Teilmenge der vollständigen Mannigfaltigkeit  $M$  kompakt.  $\square$

**Lemma 2.16.**  *$M_+$  ist für  $n > 2$  zusammenhängend.*

*Beweis.* Da wir gemäß Lemma 2.12 die Spitzen auf ihren Rand zusammenziehen können, ohne an den Zusammenhangseigenschaften von  $M$  bzw.  $M_+$  etwas zu ändern, können wir ohne Einschränkung den Fall von kompaktem  $M$  betrachten.

Nach Lemma 2.11 entsteht somit  $X_+$  aus  $X$  durch Entfernen von – wegen Lemma 2.14 endlich vielen –  $\Gamma$ -Orbits von Röhrenumgebungen geeigneter Geodätischer; ferner besitzen diese aufgrund von Lemma 2.13 einen gleichmäßig positiven Abstand voneinander. Mithilfe der Identifikation  $X \cong \mathbb{R}^n$  sehen wir, dass  $X_+$  für  $n > 2$  zusammenhängend ist, was sich mittels der Stetigkeit der Projektion  $\pi : X \rightarrow X/\Gamma = M$  auf  $M_+ = \pi(X_+)$  überträgt.  $\square$

Wir fassen die Ergebnisse dieses Abschnitts im folgenden Satz zusammen.

**Satz 2.17.** *Es gilt:*

1.  $M_+$  ist eine kompakte Mannigfaltigkeit mit Rand.
2. Ab Dimension  $n > 2$  ist  $M_+$  zusammenhängend.
3. Die Anzahl an Zusammenhangskomponenten von  $M_-$  ist durch  $C \cdot \text{Vol}(M)$  beschränkt, wobei  $C = C(\varepsilon, n) > 0$  eine nur von  $\varepsilon$  und der Dimension  $n$  abhängige Konstante ist.
4. Die Zusammenhangskomponenten  $U$  von  $M_-$  sind stets von genau einer der beiden folgenden Formen:
  - Röhren (beschränkte Komponenten), d.h.  $U$  ist homöomorph zu einem  $D^{n-1}$ -Bündel über der  $\mathbb{S}^1$  und damit homotopieäquivalent zur  $\mathbb{S}^1$ .
  - Spitzen (unbeschränkte Komponenten), d.h.  $U$  ist homöomorph zu  $V \times (0, \infty)$  mit einer  $(n-1)$ -dimensionalen, kompakten Mannigfaltigkeit  $V$ . Bezeichnet  $\partial U$  den Rand von  $U$  in  $M = X/\Gamma$ , so existiert eine starke Deformationsretraktion von  $U$  auf  $\partial U$ .

Insbesondere ist  $M$  homotopieäquivalent zur kompakten Mannigfaltigkeit  $M_K$  mit Rand, die sich durch Zusammenziehen der Spitzen auf ihren gemeinsamen Rand mit  $M_+$  ergibt. Anders ausgedrückt entsteht  $M_K$  als Vereinigung von  $M_+$  mit den endlich vielen Röhren.  $\square$

## 2.2 Effizientes simpliziales Modell

Erneut befinden wir uns in der Situation des vorangegangenen Abschnitts:  $X$  sei eine Hadamard-Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $-1 \leq K < 0$ , welche zudem das Sichtbarkeits-Axiom erfüllt, sowie  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  ein torsionsfreies Gitter. Mithin ist  $M := X/\Gamma$  eine (Sichtbarkeits-)Mannigfaltigkeit endlichen Volumens mit obigen Krümmungsschranken. Unser endgültiges Ziel besteht darin, die Homologie von  $M$  – insbesondere ihre Torsion – durch das Volumen zu kontrollieren. Die Grundidee hierfür lautet, ein besonders günstiges kombinatorisches Modell für  $M$  zu finden. Genauer werden wir eine gute Überdeckung des dicken Teils konstruieren, womit sich nach der Nerven-Konstruktion die Homotopieäquivalenz zu einem geeigneten Simplizialkomplex ergibt; das anschließende Anfügen des dünnen Teils wirkt sich dann nur noch unwesentlich auf die Homologie aus.

Die Beweisstrategie stimmt in ihren Grundzügen mit der aus [2] überein, wobei wir wegen der allgemeineren Krümmungsbedingungen einige Änderungen vornehmen mussten. Der Fluss weg vom dünnen Teil – welcher aus Subniveaumengen der Verschiebungsfunktionen der  $\gamma \in \Gamma$  besteht – wird in der dortigen Arbeit unter Ausnutzung der Tatsache konstruiert, dass für kommutierende Isometrien stets eine „gute Richtung“ zwischen ihren Subniveaumengen existiert; dies hätte in unserer Arbeit in der Hinsicht Probleme bereitet, als dass im Falle von Spitzen wegen der fehlenden virtuellen Nilpotenz der parabolischen Gruppen  $\Gamma_z$  keine „guten Richtungen“ mehr garantiert wären. Wir haben deshalb als naheliegenden Ersatz den kanonischen Fluss, gegeben durch die Projektionen hin zum parabolischen Fixpunkt, gewählt (analog sind wir auch bei Röhren vorgegangen – mit den Projektionen hin zur Achse –, obwohl dies dort nicht nötig gewesen wäre). Wegen fehlender Winkelaussagen für diesen Fluss ist jedoch nicht mehr sichergestellt, dass eine Überdeckung durch gewöhnliche Kugeln in gewisser Weise stabil unter dem Fluss bleibt; da sich jedoch die Überdeckung (welche mittels der Nerven-Konstruktion homotopieäquivalent zum gewünschten Simplizialkomplex ist) homotopieäquivalent auf den zu überdeckenden dicken Teil – über welchen die Überdeckung im Allgemeinen hinausragt – retrahieren lassen muss, mussten wir die Stabilität der Überdeckungsmengen auf andere Weise gewährleisten. Dies geschieht dadurch, dass der Teil der Mengen, welcher über den dicken Teil (bzw. dessen Schrumpfung) hinausragt, abgeschnitten wird, und anschließend der verbleibende Teil entlang der gegebenen Flusslinien fortgesetzt wird. Durch dieses Abschneiden können sich jedoch Probleme bei der Kontrahierbarkeit der entstehenden Mengen bzw. ihrer Durchschnitte ergeben, was wir mittels einer weiteren Zerschneidekonstruktion umgehen mussten.

Es sei darauf aufmerksam gemacht, dass in der erst kürzlich erschienenen Arbeit [21] nun doch die virtuelle Nilpotenz der parabolischen Stabilisatorgruppen  $\Gamma_z$  bewiesen wurde. Zum Zeitpunkt der Entstehung unserer Arbeit war dieses Resultat aber noch nicht verfügbar, weshalb wir den oben geschilderten Ansatz gewählt haben; mithilfe von [21] sollte sich jedoch die ursprüngliche Strategie aus [2] mehr oder weniger problemlos auf die von uns betrachtete Situation von Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeiten mit  $-1 \leq K < 0$  übertragen lassen.

Beginnen wir nun mit unserer Beweisführung. Wir greifen auf die Dick-dünn-Zerlegung aus dem vorigen Abschnitt zurück, vgl. Satz 2.17. Hierbei wählen wir  $\varepsilon := \varepsilon(n)/4$  und setzen  $\varepsilon_\gamma := \varepsilon$  für alle  $\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$ , d.h. wir verzichten auf eine variable Wahl der Niveaus; erneut ist  $\varepsilon(n)$  das Margulis- $\varepsilon$  (vgl. Satz 2.1). Die restliche Notation wird übernommen:  $X_+$  und  $M_+$  bezeichnen also jeweils den dicken Teil von  $X$  und  $M$ , während  $X_-$  und  $M_-$  die dünnen Teile darstellen. Aufgrund der konstanten Wahl der Niveaus können wir  $X_+$  nun wie im Standardfall als  $X_+ = \{x \in X : d_\Gamma(x) \geq \varepsilon\}$  auffassen. Mithilfe von  $\delta = \delta(n)$  aus Lemma 2.13 definieren wir die Schrumpfungen der dicken Teile von  $M$  bzw.  $X$  gemäß

$$M'_+ := X'_+/\Gamma = M \setminus (M_-)_{\delta/4}, \quad \text{mit} \quad X'_+ := X \setminus (X_-)_{\delta/4}.$$

Nach Wahl des Werts  $\delta/4$  ist aufgrund der Definition von  $\delta$  insbesondere sichergestellt, dass durch die

Schrumpfung – anschaulich gesprochen – keine neuen Löcher in den dicken Teil gerissen werden, d.h. die Zusammenhangskomponenten von  $(M_-)_{\delta/4}$  befinden sich in Bijektion mit denen von  $M_-$ , und analog für die Situation in  $X$ . Tatsächlich gilt genauer  $d(W, W') \geq \delta/2$  für verschiedene Komponenten  $W$  und  $W'$  von  $(X_-)_{\delta/4}$  (vgl. Lemma 2.13 bzw. später Lemma 2.19). Die Motivation hinter der Einführung der Schrumpfung besteht darin, dass wir auf diese Weise auch bei über den geschrumpften dicken Teil hinausragenden Mengen die Kontrolle über den Injektivitätsradius so lange nicht verlieren, wie wir uns noch im (ungeschrumpften) dicken Teil befinden.

### 2.2.1 Grundlagen

Zunächst werden wir formal begründen, was anschaulich offensichtlich erscheint, nämlich dass die oben definierte Schrumpfung von  $M_+$  auf  $M'_+$  eine Homotopieäquivalenz darstellt; genauer konstruieren wir eine starke Deformationsretraktion  $F$  von  $X_+$  auf  $X'_+$ , welche nach  $\Gamma$ -Äquivarianz zu einer starken Deformationsretraktion  $f$  von  $M_+$  auf  $M'_+$  absteigt.

Nach obiger Definition der Schrumpfung mittels des Werts  $\delta/4$  haben wir gesehen, dass die Zusammenhangskomponenten von  $X_-$  in Bijektion zu denen von  $(X_-)_{\delta/4}$  stehen. Ist  $W$  eine Komponente von  $X_-$ , so ist  $W' := (W)_{\delta/4} \setminus W$  die entsprechende Komponente von  $X_+ \setminus X'_+$ , welche wir auf  $X_+$  retrahieren wollen. Bezeichne von nun an  $\mathcal{W}$  die Menge aller solchen  $W'$ . Abhängig davon, ob für  $W$  der parabolische oder der hyperbolische Fall eintritt (d.h. ob  $\pi(W)$  eine Spitze oder Röhre in  $M$  ist), werden wir die Retraktion von  $X_+$  auf  $X'_+$  entlang von passenden Flussgeodätischen definieren.

#### Parabolischer Fall

Betrachte zunächst den parabolischen Fall, d.h.  $\pi(W)$  ist eine Spitze in  $M$ . Sei  $z \in X(\infty)$  der zugehörige parabolische Fixpunkt – womit insbesondere  $\Gamma_W = \Gamma_z$  gilt – und für jedes  $x \in \partial W$  bezeichne  $c_x$  die Geodätische durch  $x$  mit Endpunkt  $z$ , d.h.  $c_x(0) = x$  und  $c_x(-\infty) = z$  (die Flussrichtung führt also von  $z$  fort). Wir erinnern daran, dass die Funktion  $t \mapsto d_\gamma(c_x(t))$  für jedes nichttriviale  $\gamma \in \Gamma_z$  streng monoton steigt, weshalb  $c_x(t)$  für alle  $t < 0$  im Inneren von  $W$  und für alle  $t > 0$  außerhalb des Abschlusses von  $W$  verläuft. Ferner sind die zu verschiedenen  $x, x' \in \partial W$  gehörigen  $c_x, c_{x'}$  disjunkt. Folglich erhalten wir für alle  $y \in W'$  eine Darstellung  $y = c_x(t_y)$  mit eindeutigen  $x \in \partial W$  und  $t_y > 0$ . Bezeichne  $T_x > 0$  den Zeitpunkt, zu dem  $c_x$  erstmalig  $X'_+$  betritt.

**Lemma 2.18.** *Die Eintrittszeit*

$$T : \partial W \rightarrow (0, \infty), \quad x \mapsto T_x$$

*ist eine wohldefinierte, stetige Abbildung.*

*Beweis.* Wir zeigen zunächst die Wohldefiniertheit. Ist  $y'$  ein Punkt aus dem Rand von  $X'_+$ , so gilt  $d(y', X_-) = \delta/4$ , d.h. es existiert ein  $y \in \partial X_-$  mit  $d(y', y) = \delta/4$ . Wegen  $d_\Gamma(y) = \varepsilon$  folgt mittels Dreiecksungleichung

$$d_\Gamma(y') \leq d_\Gamma(y) + 2 \cdot d(y', y) = \varepsilon + \delta/2 = \varepsilon(n)/4 + \varepsilon(n)/16 < \varepsilon(n)/2.$$

Gemäß Lemma 2.8 gilt jedoch ebenso  $d_\Gamma(c_x(t)) > \varepsilon(n)/2$  für ein passendes  $t \in \mathbb{R}$ ; wegen  $d_\Gamma(c_x(0)) = d_\Gamma(x) = \varepsilon = \varepsilon(n)/4$  ergibt sich die Existenz eines Schnittpunkts von  $c_x$  mit  $X'_+$  somit aus dem Zwischenwertsatz. Folglich ist  $T_x$  wohldefiniert.

Sei  $x \in \partial W$  beliebig; wir zeigen, dass die Eintrittszeit stetig in  $x$  ist. Beachte hierfür, dass wir – da  $T$  eine Abbildung zwischen metrischen Räumen ist – lediglich die übliche  $\varepsilon_0$ - $\delta_0$ -Definition der Stetigkeit nachprüfen müssen. Sei also  $\varepsilon_0 > 0$  gegeben; wir müssen ein  $\delta_0 > 0$  finden, sodass  $|T_x - T_y| < \varepsilon_0$  für

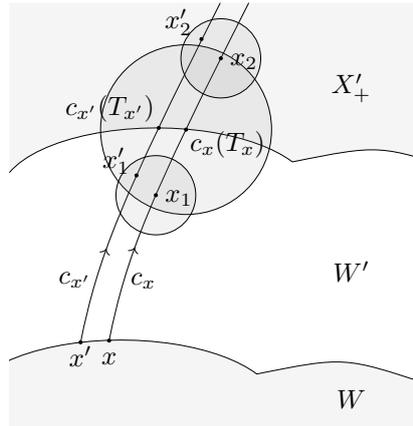


Abbildung 2.2: Darstellung einer beispielhaften Situation im Beweis der Stetigkeit der Eintrittszeit  $x \mapsto T_x$ . Die Kugeln um  $x_1$  bzw.  $x_2$  besitzen Radius  $\delta_1 < \varepsilon_0/4$  bzw.  $\delta_2 < \varepsilon_0/4$ , während die Kugel um  $c_x(T_x)$  von Radius  $< \varepsilon_0/2$  ist. Der Punkt  $x'$  weist einen Abstand von höchstens  $\varepsilon_0/4$  von  $x$  auf.

alle  $y \in \partial W$  mit  $d(x, y) < \delta_0$ . In Abbildung 2.2 ist das weitere Vorgehen bildhaft dargestellt. Wähle einen Punkt  $x_1$  auf  $c_x$  so, dass  $x_1 \in W' \setminus \overline{W}$  und  $x_1$  in weniger als  $\varepsilon_0/2$  Zeiteinheiten auf  $X'_+$  trifft, d.h.  $x_1 = c_x(t_{x_1})$  für ein  $t_{x_1} > T_x - \varepsilon_0/2$ . Da  $W' \setminus \overline{W}$  offen ist, finden wir ein  $\delta_1 > 0$ , sodass  $B_{\delta_1}^X(x_1) \subseteq W' \setminus \overline{W}$ ; beachte  $\delta_1 \leq \varepsilon_0/2$ . Sei  $x' \in \partial W \cap B_{\varepsilon_0/4}^X(x)$  ein weiterer Punkt, für den ein Schnittpunkt  $x'_1 \in c_{x'}([0, \infty)) \cap B_{\delta_1}^X(x_1) \neq \emptyset$  existiert; auch dieses  $x'_1$  hat eine Darstellung  $x'_1 = c_{x_1}(t_{x'_1})$  für ein  $t_{x'_1} < T_{x'}$ . Ohne Einschränkung nehmen wir  $\delta_1 < \varepsilon_0/4$  an. Es gilt

$$t_{x_1} = d(x, x_1) \leq d(x, x') + d(x', x'_1) + d(x'_1, x_1)$$

und wir erhalten

$$t_{x'_1} = d(x', x'_1) \geq t_{x_1} - d(x, x') - d(x'_1, x_1) > t_{x_1} - \varepsilon_0/4 - \varepsilon_0/4 = t_{x_1} - \varepsilon_0/2.$$

Diese Ungleichung ergibt zusammen mit  $t_{x_1} > T_x - \varepsilon_0/2$  (s.o.) sowie  $t_{x'_1} < T_{x'}$  (s.o.) nun

$$T_{x'} > t_{x'_1} > t_{x_1} - \varepsilon_0/2 > T_x - \varepsilon_0/2 - \varepsilon_0/2 = T_x - \varepsilon_0. \quad (2.1)$$

Umgekehrt wissen wir, dass  $c_x((T_x, T_x + t))$  für hinreichend kleines  $t > 0$  im Inneren von  $X'_+$  liegt; folglich lässt sich ein  $x_2$  auf  $c_x$  im Inneren von  $X'_+$  finden, sodass  $x_2$  spätestens  $\varepsilon_0/2$  Zeiteinheiten nach Eintritt von  $c_x$  in  $X'_+$  erreicht wird (hierzu sei ohne Einschränkung  $\varepsilon_0$  in Bezug auf  $t$  hinreichend klein gegeben). Bezüglich der Darstellung  $x_2 = c_x(t_{x_2})$  gilt also  $t_{x_2} < T_x + \varepsilon_0/2$ . Da  $x_2$  im Inneren von  $X'_+$  liegt, finden wir ein  $\delta_2 > 0$ , sodass  $B_{\delta_2}^X(x_2) \subseteq X'_+$ , wobei wiederum ohne Einschränkung  $\delta_2 < \varepsilon_0/4$  gelte. Ist analog zu oben nun  $x' \in \partial W \cap B_{\varepsilon_0/4}^X(x)$  ein Punkt mit existierendem Schnittpunkt  $x'_2 \in c_{x'}([0, \infty)) \cap B_{\delta_2}^X(x_2) \neq \emptyset$ , so wähle die Darstellung  $x'_2 = c_{x'}(t_{x'_2})$  für passendes  $t_{x'_2} > T_{x'}$ . Erneut ergibt sich

$$\begin{aligned} t_{x'_2} &= d(x', x'_2) \\ &\leq d(x', x) + d(x, x_2) + d(x_2, x'_2) \\ &= t_{x_2} + d(x', x) + d(x_2, x'_2) \\ &< t_{x_2} + \varepsilon_0/4 + \varepsilon_0/4 \\ &= t_{x_2} + \varepsilon_0/2 \end{aligned}$$

und es folgt

$$T_{x'} < t_{x'_2} < t_{x_2} + \varepsilon_0/2 < T_x + \varepsilon_0/2 + \varepsilon_0/2 = T_x + \varepsilon_0. \quad (2.2)$$

Betrachte nun die stetige<sup>1</sup> Abbildung

$$c : \partial W \times \mathbb{R} \rightarrow X, \quad (x, t) \mapsto c(x, t) := c_x(t).$$

Das Urbild der offenen Kugel  $B_{\delta_1^X}^X(x_1)$  unter  $c$  liefert nach Projektion auf den Faktor  $\partial W$  gemäß Definition der Produkttopologie die Existenz einer offenen Umgebung  $U_x^{(1)} \subseteq \partial W$  von  $x$  in  $\partial W$ , sodass für alle  $x' \in U_x^{(1)}$  der Fluss entlang von  $c_{x'}$  die Kugel  $B_{\delta_1^X}^X(x_1)$  schneidet. Setzen wir ohne Einschränkung  $B_{\varepsilon_0/4}^X(x) \subseteq U_x^{(1)}$  voraus – sonst gehen wir einfach zur offenen Umgebung  $U_x^{(1)} \cap B_{\varepsilon_0/4}^X(x)$  von  $x$  in  $\partial W$  über –, so erhalten wir gemäß Ungleichung (2.1) also

$$T_{x'} > T_x - \varepsilon_0$$

für alle  $x' \in U_x^{(1)}$ . Analog folgt mittels des Urbilds von  $B_{\delta_2^X}^X(x_2)$  die Existenz einer offenen Umgebung  $U_x^{(2)} \subseteq \partial W$  von  $x$  in  $\partial W$ , sodass aufgrund von Ungleichung (2.2)

$$T_{x'} < T_x + \varepsilon_0$$

für alle  $x' \in U_x^{(2)}$  gilt. Fassen wir beide Aussagen zusammen, so finden wir im offenen Schnitt dieser Umgebungen eine offene Kugel  $B$  um  $x$  in  $\partial W$ , sodass

$$|T_x - T_{x'}| < \varepsilon_0$$

für alle  $x' \in B$ ; der Radius  $\delta_0$  von  $B$  ist damit das gewünschte  $\delta_0$  für die Definition der Stetigkeit. Folglich ist die Eintrittszeit  $T$  stetig in  $x$  und somit – da  $x$  beliebig war – stetig auf ganz  $\partial W$ .  $\square$

Hiermit erhalten wir insbesondere eine Darstellung von  $W'$  als  $W' = \bigcup_{x \in \partial W} c_x([0, T_x])$ , wobei diese Vereinigung disjunkt ist.

Definiere nun einen Fluss  $F_W : X_+ \times [0, 1] \rightarrow X_+$  durch

$$F_W(y, t) = \begin{cases} c_x((1-t) \cdot t_y + t \cdot T_x) & \text{falls } y = c_x(t_y) \in c_x([0, T_x]) \subseteq W', \\ y & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dieser ist stetig<sup>2</sup> und  $\Gamma_z$ -äquivariant, wie wir nun zeigen. Sei hierzu  $\gamma \in \Gamma_z$  und  $y \in X_+$ . Wir halten zunächst fest, dass  $\gamma c_x = c_{\gamma x}$ ; denn da  $\gamma$  den Fixpunkt  $z = c_x(-\infty) \in X(\infty)$  besitzt, ist  $\gamma c_x$  eine Geodätische durch  $\gamma x$  mit  $(\gamma c_x)(-\infty) = \gamma z = z = c_{\gamma x}(-\infty)$  und die Eindeutigkeit der Geodätischen von  $\gamma x$  nach  $z$  hat zur Folge, dass  $\gamma c_x = c_{\gamma x}$  gelten muss. Ebenso erhalten wir mit dieser Argumentation, dass  $T_{\gamma x} = T_x$ . Angenommen  $y \in W'$ , d.h.  $y = c_x(t_y)$  für passendes  $x \in \partial W$  und  $t_y \in [0, T_x)$ , so ergibt sich gemäß unserer Parametrisierung der  $c_x$  bereits  $\gamma y = \gamma c_x(t_y) = c_{\gamma x}(t_y)$ , also  $t_{\gamma y} = t_y$ . Es folgt

$$F_W(\gamma y, t) = c_{\gamma x}((1-t) \cdot t_{\gamma y} + t \cdot T_{\gamma x}) = \gamma c_x((1-t) \cdot t_y + t \cdot T_x) = \gamma F_W(y, t)$$

und somit die  $\Gamma_z$ -Äquivarianz für diesen Fall. Obige Argumentation zeigt jedoch auch, dass  $\gamma y \notin W'$ , falls  $y \notin W'$ , weshalb für den verbleibenden Fall nach  $F_W(\gamma y, t) = \gamma y = \gamma F_W(y, t)$  ebenfalls  $\Gamma_z$ -Äquivarianz vorliegt.

<sup>1</sup>Zur Stetigkeit dieser Abbildung siehe auch [3] Kapitel 1, insbesondere Aussagen (AR1) und (AR2).

<sup>2</sup>Siehe auch die Stetigkeit der Eintrittszeit sowie der Abbildung  $(x, t) \mapsto c(x, t) := c_x(t)$  aus (dem Beweis von) Lemma 2.18; auch  $t_y$  ist – aufgefasst als Funktion von  $y$  – stetig, was analog zur Stetigkeit der Eintrittszeit gezeigt werden kann.

Gemäß Konstruktion von  $W'$  ist  $F_W(\cdot, 1)$  eine Abbildung von  $X_+$  nach  $X_+ \setminus W'$ . Wegen  $F_W(y, 0) = c_x((1 - 0) \cdot t_y + 0 \cdot T_x) = c_x(t_y) = y$  für alle  $y = c_x(t_y) \in W'$  (und damit bereits für alle  $y \in X_+$ ) folgt  $F_W(\cdot, 0) = \text{id}_{X_+}$ ; außerdem lässt  $F_W$  für alle  $t \in [0, 1]$  die Punkte aus  $X_+ \setminus W'$  fest. Somit ist  $F_W$  eine starke Deformationsretraktion von  $X_+$  auf  $X_+ \setminus W'$ .

Eingeschränkt auf den Rand von  $W$  – d.h.  $\partial W = \overline{W} \cap X_+ = \overline{W} \cap W'$  – induziert  $F_W$  zum Zeitpunkt 1 eine Abbildung von  $\partial W$  auf die Zusammenhangskomponente des Randes von  $X_+ \setminus W'$ , welche zu  $W'$  gehört, also  $\overline{W'} \cap (X_+ \setminus W') = \bigcup_{x \in \partial W} c_x(T_x)$ . Eine – ebenfalls stetige – Inverse zu dieser Abbildung ist durch den Fluss in entgegengesetzter Richtung gegeben, weshalb wir folgern, dass  $F_W(\cdot, 1)|_{\partial W}$  einen Homöomorphismus von  $\partial W$  auf die zugehörige Randkomponente  $\overline{W'} \cap (X_+ \setminus W')$  von  $X_+ \setminus W'$  darstellt.

### Hyperbolischer Fall

Wir wenden uns dem hyperbolischen Fall zu, d.h.  $\pi(W)$  ist eine Röhre in  $M$ . Wir wissen bereits, dass  $\Gamma_W$  dann eine unendlich zyklische Gruppe ist, erzeugt von der (bis auf Inverses eindeutigen) hyperbolischen Isometrie minimaler Verschiebung auf der gemeinsamen Achse  $A \subseteq W$  der Elemente von  $\Gamma_W$ . Bezeichnet  $\pi_A : X \rightarrow A$  wie üblich die Projektion auf den nächstgelegenen Punkt aus  $A$ , so definieren wir für  $x \in \partial W$  nun  $c_x$  als geodätischen Strahl von  $\pi_A(x)$  nach  $x$ ; die Parametrisierung erfolgt wieder dergestalt, dass  $c_x(0) = x$  sowie  $c_x(-d(x, \pi_A(x))) = \pi_A(x)$ , d.h. die Flussrichtung ist von  $A$  fort. Die Funktion  $d_\gamma(c_x(t))$  ist dann streng monoton steigend mit Grenzwert  $\infty$  für  $t \rightarrow \infty$ . Insbesondere ergibt sich analog zum vorigen parabolischen Fall, dass  $c_x$  für alle  $t \in [-d(x, \pi_A(x)), 0)$  im Inneren von  $W$  und für alle  $t > 0$  außerhalb des Abschlusses von  $W$  verläuft. Erneut sind die Bilder der  $c_x$  paarweise disjunkt.

Analog zum parabolischen Fall definieren wir die Eintrittszeit  $T_x > 0$  von  $c_x$  nach  $X'_+$ ; genau so wie dort lässt sich – unter Ausnutzung der entsprechenden Tatsachen wie beispielsweise der strengen Monotonie von  $t \mapsto d_\gamma(c(t))$  – zeigen, dass  $T_x$  wohldefiniert und stetig ist. Abermals folgt die Darstellung von  $W'$  als disjunkte Vereinigung  $W' = \bigcup_{x \in \partial W} c_x([0, T_x])$ .

Wir übertragen die Definition des Flusses  $F_W : X_+ \times [0, 1] \rightarrow X_+$ : Setze

$$F_W(y, t) = \begin{cases} c_x((1 - t) \cdot t_y + t \cdot T_x) & \text{falls } y = c_x(t_y) \in c_x([0, T_x]) \subseteq W', \\ y & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wieder ist  $F_W$  stetig. Wir begründen nun, dass  $F_W$  äquivariant unter  $\Gamma_W$  ist, wozu wir  $\gamma \in \Gamma_W$  und  $y \in X_+$  wählen. Es gilt  $\gamma\pi_A(x) = \pi_A(\gamma x)$ , woraus wir folgern, dass  $\gamma c_x = c_{\gamma x}$ ; denn sowohl  $\gamma c_x$  als auch  $c_{\gamma x}$  sind geodätische Strahlen von  $\pi_A(\gamma x)$  nach  $\gamma x$ , und die Gleichheit folgt nun aufgrund der Eindeutigkeit der Geodätischen. Analog folgern wir  $T_{\gamma x} = T_x$ . Der Beweis der  $\Gamma_W$ -Äquivarianz ergibt sich mithilfe dieser Tatsachen genau wie im parabolischen Fall: Angenommen  $y \in W'$ , also  $y = c_x(t_y)$  für passendes  $x \in \partial W$  und  $t_y \in [0, T_x)$ , so schließen wir  $\gamma y = \gamma c_x(t_y) = c_{\gamma x}(t_y)$ , also  $t_{\gamma y} = t_y$ . Es folgt

$$F_W(\gamma y, t) = c_{\gamma x}((1 - t) \cdot t_{\gamma y} + t \cdot T_{\gamma x}) = \gamma c_x((1 - t) \cdot t_y + t \cdot T_x) = \gamma F_W(y, t).$$

Ist andererseits  $y \notin W'$ , so erhalten wir wegen  $\gamma y \notin W'$  erneut  $F_W(\gamma y, t) = \gamma y = \gamma F_W(y, t)$ , und damit insgesamt die  $\Gamma_W$ -Äquivarianz von  $F_W$ .

Die weiteren Eigenschaften von  $F_W$  übertragen sich mit übereinstimmender Begründung aus dem parabolischen Fall:

- $F_W$  ist eine starke Deformationsretraktion von  $X_+$  auf  $X_+ \setminus W'$ ,
- $F_W(\cdot, 1)|_{\partial W}$  definiert einen Homöomorphismus von  $\partial W$  auf die entsprechende Randkomponente  $\overline{W'} \cap (X_+ \setminus W') = \bigcup_{x \in \partial W} c_x(T_x)$  von  $X_+ \setminus W'$ .

### Allgemeine Definition

In den vorigen Schritten haben wir für jede Zusammenhangskomponente  $W$  von  $X_-$  und ihr zugehöriges  $W' \in \mathcal{W}$  eine starke Deformationsretraktion  $F_W : X_+ \times [0, 1] \rightarrow X_+$  von  $X_+$  auf  $X_+ \setminus W'$  konstruiert, welche außerdem äquivariant unter  $\Gamma_W$  war. Wir werden diese einzelnen  $F_W$  nun zu einer  $\Gamma$ -äquivarianten starken Deformationsretraktion  $F : X_+ \times [0, 1] \rightarrow X_+$  von  $X_+$  auf  $X'_+$  zusammensetzen, welche außerdem zum Zeitpunkt 1 einen Homöomorphismus der Ränder induziert. Gemäß  $\Gamma$ -Äquivarianz steigt diese Abbildung zu der gewünschten starken Deformationsretraktion  $f$  (mit weiteren nützlichen Eigenschaften) des dicken Teils von  $M$  auf den geschrumpften dicken Teil  $M'_+$  ab. Zunächst begründen wir, warum sich  $F$  problemlos aus den  $F_W$  zusammensetzen lässt.

**Lemma 2.19.** *Ist  $W' \in \mathcal{W}$  eine Zusammenhangskomponente von  $X_+ \setminus X'_+$  und  $W$  die zugehörige Zusammenhangskomponente von  $X_-$ , so gilt:*

1.  $W'$  ist genau invariant unter  $\Gamma$ , d.h. für  $\gamma \in \Gamma$  gilt entweder  $\gamma W' = W'$  oder  $\gamma W' \cap W' = \emptyset$ .
2.  $\Gamma_{W'} = \Gamma_W$ .
3. Bezeichnet  $V \neq W$  eine andere Zusammenhangskomponente von  $X_-$  mit zugehöriger Menge  $V' \in \mathcal{W}$ , so ist  $V' \cap W' = \emptyset$ ; tatsächlich gilt sogar  $d(V', W') \geq \delta/2$ .

*Beweis.* 1. Sei  $x' \in W'$ , d.h. es existiert ein  $x \in W$  mit  $d(x, x') < \delta/4$ , und  $\gamma \in \Gamma$ . Angenommen  $\gamma x \in W$ , so gilt nach genauer Invarianz von  $W$  bereits  $\gamma W = W$ . Es folgt

$$d(\gamma x', W) = d(\gamma x', \gamma W) \leq d(\gamma x', \gamma x) = d(x', x) < \delta/4,$$

d.h.  $\gamma x' \in (W)_{\delta/4}$ , also nach Bijektivität von  $\gamma$  bereits  $\gamma x' \in W'$  (denn  $x \in W$  wäre aufgrund von  $\gamma W = W$  ein Widerspruch zur Injektivität). Damit gilt  $\gamma W' \subseteq W'$  und wiederum gemäß Bijektivität muss schon Gleichheit vorliegen.

Gilt andererseits  $\gamma x \notin W$ , so ergibt sich nach genauer Invarianz von  $W$  bereits  $\gamma W \cap W = \emptyset$ . Sei  $V \ni \gamma x$  die Zusammenhangskomponente von  $X_-$ , auf welche  $W$  mittels  $\gamma$  abgebildet wird. Analog zu oben folgt

$$d(\gamma x', V) = d(\gamma x', \gamma W) \leq d(\gamma x', \gamma x) = d(x', x) < \delta/4,$$

d.h.  $\gamma x \in (V)_{\delta/4}$ . Nach Definition von  $\delta$  kann  $\gamma x$  damit nicht in  $W' \subseteq (W)_{\delta/4}$  liegen, weshalb  $\gamma W' \cap W' = \emptyset$  folgt.

2. Dies ist in der Argumentation von Aussage 1. enthalten: Dort hatten wir einerseits gezeigt, dass für ein  $\gamma$  mit  $\gamma W = W$  (dies folgte nach genauer Invarianz von  $W$  aus  $\gamma x \in W$ ) bereits  $\gamma W' = W'$  gelten muss, also  $\Gamma_W \subseteq \Gamma_{W'}$ . War andererseits  $\gamma x \notin W$  – wegen genauer Invarianz von  $W$  gleichbedeutend mit  $\gamma W \cap W = \emptyset$  – so folgerten wir  $\gamma W' \cap W' = \emptyset$ , was nach genauer Invarianz von  $W'$  wiederum zu  $\gamma \notin \Gamma_{W'}$  äquivalent ist.
3. Auch dies folgt aus dem Beweis von Aussage 1.: Wäre  $d(V', W') < \delta/2$ , so würden  $v' \in V'$  und  $w' \in W'$  mit  $d(v', w') < \delta/2$  existieren. Da  $V'$  und  $W'$  jeweils in den  $\delta/4$ -Umgebungen von  $V$  bzw.  $W$  enthalten sind, gäbe es ferner Punkte  $v \in V$  und  $w \in W$  mit  $d(v, v') < \delta/4$  bzw.  $d(w, w') < \delta/4$ . Es folgt der Widerspruch

$$\delta \leq d(V, W) \leq d(v, w) \leq d(v, v') + d(v', w') + d(w', w) < \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{4} = \delta.$$

□

Damit sind alle Werkzeuge zur Hand, um die Abbildung  $F$  zu konstruieren und ihre gewünschten Eigenschaften nachzuweisen.

**Lemma 2.20.** *Die Abbildung  $F : X_+ \times [0, 1] \rightarrow X_+$ , gegeben durch*

$$F(y, t) := \begin{cases} F_W(y, t) & \text{falls } y \in W' \in \mathcal{W}, \\ y & \text{sonst,} \end{cases}$$

*ist eine wohldefinierte starke Deformationsretraktion von  $X_+$  auf  $X'_+$ .  $F$  ist  $\Gamma$ -äquivariant und induziert zum Zeitpunkt 1 einen Homöomorphismus  $F(\cdot, 1)|_{\partial X_+}$  von  $\partial X_+$  auf  $\partial X'_+$ .*

*Beweis.* Da die Mengen  $W' \in \mathcal{W}$  gemäß Lemma 2.19 Aussage 3. paarweise disjunkt sind (und sogar positiven Abstand  $\geq \delta/2$  voneinander haben), ist  $F$  wohldefiniert; die Stetigkeit folgt aus der Stetigkeit der einzelnen  $F_W$ . Nach Definition von  $X'_+$  gilt für ein  $y \in X'_+$  stets  $y \notin W'$  für alle  $W' \in \mathcal{W}$ , weshalb  $F(y, t) = y$  für alle  $t \in [0, 1]$  und  $y \in X'_+$  folgt. Bei der Konstruktion der  $F_W$  hatten wir bereits gesehen, dass  $F_W$  eine starke Deformationsretraktion von  $X_+$  auf  $X_+ \setminus W'$  ist; gemäß Definition  $X'_+ = X_+ \setminus \bigcup_{W' \in \mathcal{W}} W'$  ist also insbesondere  $F(\cdot, 0) = \text{id}_{X_+}$  sowie  $F(\cdot, 1)$  eine Abbildung nach  $X'_+$ . Folglich ist  $F$  ein starker Deformationsretrakt von  $X_+$  auf  $X'_+$ . Die Aussage, dass  $F(\cdot, 1)|_{\partial X_+}$  ein Homöomorphismus von  $\partial X_+$  auf  $\partial X'_+$  ist, folgt aus der entsprechenden Aussage für die einzelnen  $F_W$ .

Es bleibt zu zeigen, dass  $F$  äquivariant unter  $\Gamma$  ist; wegen  $F(\cdot, t)|_{X'_+} = \text{id}_{X'_+}$  für alle  $t \in [0, 1]$  genügt es, lediglich den Fall  $y \in W'$  für ein  $W' \in \mathcal{W}$  zu betrachten. Sei also  $y \in W'$  und  $\gamma \in \Gamma$ . Angenommen  $\gamma \in \Gamma_W$ , so folgt

$$F(\gamma y, t) = F_W(\gamma y, t) = \gamma F_W(y, t) = \gamma F(y, t)$$

gemäß  $\Gamma_W$ -Äquivarianz von  $F_W$ . Im anderen Fall, dass  $\gamma \notin \Gamma_W$ , folgern wir mit Lemma 2.19 Aussagen 1. und 2., dass  $\gamma \notin \Gamma_{W'}$  und  $W'$  durch  $\gamma$  auf eine andere Menge  $V' \in \mathcal{W}$  abgebildet wird. Insbesondere ist für  $y = c_x(t_y)$  mit  $x \in \partial W$  dann  $\gamma x \in \partial V$ .

Wir nehmen zunächst an, dass  $W$  auf eine Spitze projiziert, und  $z \in X(\infty)$  der zugehörige parabolische Fixpunkt von  $\Gamma_W = \Gamma_z$  sei. Da die Elemente von  $\Gamma$  die Urbilder der Spitzen permutieren, folgt, dass  $V = \gamma W$  den zugehörigen Fixpunkt  $\gamma z \in X(\infty)$  besitzt. Damit ist  $\gamma c_x$  die Geodätische von  $\gamma z = \gamma c_x(-\infty)$  nach  $\gamma x$  und wir schließen  $\gamma c_x = c_{\gamma x}$ . Es ergibt sich  $\gamma y = \gamma c_x(t_y) = c_{\gamma x}(t_y) \in V'$ , also  $t_{\gamma y} = t_y$ .

Projiziert  $W$  andererseits auf eine Röhre, so sei  $A \subseteq W$  die zugehörige Achse der hyperbolischen Gruppe  $\Gamma_W$ . Auch die Urbilder der Röhren werden durch  $\Gamma$  permutiert; ferner wissen wir, dass die Achse von  $\Gamma_W$  auf die Achse  $\gamma A$  von  $\Gamma_V = \Gamma_{\gamma W}$  abgebildet wird. Insbesondere ist das Bild des Fußpunktes  $\pi_A(x) \in A$  unter  $\gamma$  gerade  $\pi_{\gamma A}(\gamma x)$ ; denn wäre  $\gamma \pi_A(x) \neq \pi_{\gamma A}(\gamma x)$ , so würde ein  $x_0 \in \gamma A$  mit  $d(\gamma x, x_0) < d(\gamma x, \gamma \pi_A(x)) = d(x, \pi_A(x))$  existieren. Folglich wäre  $\gamma^{-1}x_0$  ein Punkt auf  $A$  mit  $d(x, \gamma^{-1}x_0) < d(x, \pi_A(x))$ , im Widerspruch zur Definition von  $\pi_A(x)$ . Somit muss  $\gamma \pi_A(x) = \pi_{\gamma A}(\gamma x)$  gelten. Hiermit folgt wiederum, dass  $\gamma c_x$  der geodätische Strahl von  $\pi_{\gamma A}(\gamma x)$  nach  $\gamma x$  ist, also  $\gamma c_x = c_{\gamma x}$ ; erneut ergibt sich  $\gamma y = \gamma c_x(t_y) = c_{\gamma x}(t_y) \in V'$  sowie  $t_{\gamma y} = t_y$ .

Wir schließen für beide Fälle gemeinsam mithilfe der weiterhin gültigen Tatsache  $T_{\gamma x} = T_x$  nun

$$\begin{aligned} F(\gamma y, t) &= F_V(\gamma y, t) \\ &= c_{\gamma x}((1-t) \cdot t_{\gamma y} + t \cdot T_{\gamma x}) \\ &= c_{\gamma x}((1-t) \cdot t_y + t \cdot T_x) \\ &= \gamma F_W(y, t) \\ &= \gamma F(y, t). \end{aligned}$$

□

Aufgrund der  $\Gamma$ -Äquivarianz steigt  $F$  zu einer Abbildung  $f : M_+ \times [0, 1] \rightarrow M_+$  ab. Das folgende Lemma ist als Entsprechung zu [2] Lemma 3.13 aufzufassen; die bei uns nicht enthaltene Stabilitätsaussage zu Kugeln – welche für den Beweis der dortigen Hauptresultate [2] Theorem 3.1 bzw. 4.1 zentral ist – wird später durch eine geeignete Wahl der Überdeckungselemente von  $M'_+$  umgangen.

**Lemma 2.21.** *Die Abbildung  $f : M_+ \times [0, 1] \rightarrow M_+$  ist eine starke Deformationsretraktion von  $M_+$  auf  $M'_+$ , welche zum Zeitpunkt 1 einen Homöomorphismus  $f(\cdot, 1)|_{\partial M_+}$  von  $\partial M_+$  auf  $\partial M'_+$  induziert.*

*Beweis.* Die Eigenschaften von  $F$  aus Lemma 2.20 vererben sich gemäß  $\Gamma$ -Äquivarianz auf  $f$ .  $\square$

## 2.2.2 Überdeckung und Hauptresultat

Wir werden nun eine gute Überdeckung des geschrumpften dicken Teils  $M'_+$  konstruieren, wobei „gute Überdeckung“ im Sinne der Nerven-Konstruktion zu verstehen ist (vgl. Abschnitt 1.3). Wie bereits erwähnt werden die Überdeckungsmengen jedoch im Allgemeinen über  $M'_+$  hinausragen, weshalb wir sicherstellen müssen, dass sich die Überdeckung auf  $M'_+$  homotopieäquivalent zurück drücken lässt, um auch die Homotopieäquivalenz von  $M'_+$  zu seiner Überdeckung zu erreichen; mit anderen Worten sollten die Mengen stabil unter dem verwendeten Fluss sein. Dies macht es notwendig, die Überdeckungsmengen nahe des Randes von  $M'_+$  an den Fluss anzupassen: Unser Ansatz lautet, den Teil der Mengen, welcher über  $M'_+$  hinausragt, einfach abzuschneiden und die entstehende Menge entlang des Flusses fortzusetzen. Während sich hieraus trivialerweise die gewünschte Stabilität ergibt, ist es wegen des vorigen Abschneidens am Rand von  $M'_+$  mitunter möglich, dass die Überdeckungsmengen oder ihre Durchschnitte nicht mehr zusammenziehbar sind, die Überdeckung also nicht mehr gut ist. Durch ein geeignetes Zerschneiden und Verfeinern der Überdeckungsmengen lässt sich jedoch auch dieses Problem lösen.

### Stabile Überdeckungsmengen

In einem ersten Schritt werden wir die oben bereits angedeutete Konstruktion der stabilen Überdeckungsmengen wiedergeben. Wegen  $X'_+ \subseteq X_+$  gilt  $d_\Gamma(x) \geq \varepsilon$  für alle  $x \in X'_+$ , weshalb die Kugeln von Radius  $r < \varepsilon/6 = \varepsilon(n)/24$  um Punkte aus  $M'_+ = \pi(X'_+)$  folglich konvex sind. Wählen wir ferner  $r \leq \delta/4 = \varepsilon(n)/32$ , so ist gemäß Lemma 2.19 Aussage 3. sichergestellt, dass eine Kugel von Radius  $r$  um einen Punkt  $p \in M'_+$  höchstens eine Randkomponente von  $M'_+$  schneidet. Von nun an sei

$$r := \delta(n)/4$$

fest und  $B_r^M(p)$  eine Kugel in  $M$  von Radius  $r$  um  $p \in M'_+$ ; dies ist also eine konvexe Kugel, die höchstens eine Randkomponente von  $M'_+$  schneidet. Im Falle  $B_r^M(p) \subseteq M'_+$  ist  $B_r^M(p)$  eine zulässige Überdeckungsmenge und bleibt unverändert. Gilt andererseits  $B_r^M(p) \setminus M'_+ \neq \emptyset$ , so wissen wir, dass  $A := B_r^M(p) \cap \partial M'_+$  eine nichtleere Menge ist, die gänzlich in einer Zusammenhangskomponente von  $\partial M'_+$  enthalten ist. Sei  $\pi(W')$  für  $W' \in \mathcal{W}$  die zugehörige Komponente von  $M_+ \setminus M'_+$ , sodass  $B_r^M(p) \cap \pi(W') \neq \emptyset$ , und  $W \subseteq X_-$  die zugehörige Zusammenhangskomponente von  $X_-$ . Wir werden nun  $B_r^M(p)$  außerhalb von  $M'_+$  abschneiden und dort – entlang von  $A \subseteq \partial M'_+$  – durch einen Stumpf ersetzen, welcher den Flusslinien von  $f$  folgt. Genauer: Alle Geodätischen  $c_x$  für Punkte  $x \in A' := \{x \in \partial W \mid \pi(c_x(T_x)) \in A\}$  treffen zum Eintrittszeitpunkt  $T_x$  auf Punkte in  $\partial X'_+$ , welche – nach Projektion durch  $\pi$  – Punkten in der Schnittmenge  $A$  entsprechen. Den Stumpf  $A_S$  erhalten wir nun dadurch, dass wir für all diese Punkte  $x \in A'$  die geodätischen Teilstücke von  $c_x$  ab einem gleichmäßig bzw. stetig gewählten Zeitpunkt (z.B. nach halber Flusszeit, also  $T_x/2$ ) betrachten und anschließend wieder nach  $M$  projizieren, d.h.

$$A_S := \pi\left(\bigcup_{x \in A'} c_x((T_x/2, T_x))\right).$$

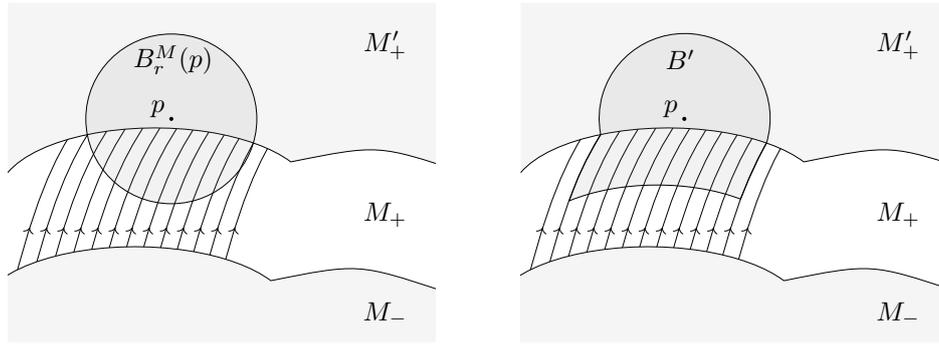


Abbildung 2.3: Aus einer Kugel  $B_r^M(p)$  (links) wird durch Abschneiden des Teils außerhalb von  $M'_+$  und anschließendem Anfügen eines Stumpfes, welcher den Flusslinien folgt, die neue Überdeckungsmenge  $B'$  (rechts).

Anschaulich ist die Konstruktion in Abbildung 2.3 dargestellt. Die endgültige Überdeckungsmenge  $B'$  ist dann gemäß

$$B' := (B_r^M(p) \cap M'_+) \cup A_S$$

definiert. Durch diese Konstruktion ist sichergestellt, dass die (somit offenen) Überdeckungsmengen stets stabil unter dem Fluss entlang von  $f$  sind, d.h. dass  $f(y, t) \in B'$  für alle  $t \geq t_0$ , falls  $f(y, t_0) \in B'$ .

### Zerschneiden und Verfeinern

Während wir nun die Stabilität sichergestellt haben, führt das Abschneiden außerhalb des geschrumpften dicken Teils mitunter dazu, dass die entstehenden Mengen bzw. ihre Durchschnitte nicht mehr zusammenziehbar sind, was einer späteren Anwendung des Nerven-Lemmas im Wege steht. Anders ausgedrückt ist zunächst nicht auszuschließen, dass eine Situation wie in Abbildung 2.4 nicht auch auftreten kann. In der folgenden Argumentation werden wir häufig das entstandene  $B'$  mit seinem Teil in  $M'_+$  identifizieren, da die Retraktion des angefügten Stumpfes auf den Teil in  $M'_+$  eine Homotopieäquivalenz darstellt.

Hinsichtlich der zunächst fehlenden Kontrahierbarkeit gibt folgende Feststellung Hoffnung: Die Konstruktion der  $B'$  ist gutartig in dem Sinne, dass die  $B'$  aus einer konvexen Kugel dadurch entstehen, dass (z.T. mehrere) konvexe Teilmengen entfernt werden. Wie sich herausstellt – und wie auch der Bildbeschreibung zu entnehmen ist – können wir durch geeignete Wahl der Kugelradien im Verhältnis zur Aufdickungskonstante  $\delta/4$  von  $M_-$  zunächst sicherstellen, dass  $B_r^M(p)$  von einer einzelnen solchen Menge, aus welchen  $(M_-)_{\delta/4}$  besteht, nicht durchtrennt wird. Dies wird als Ausgangspunkt für ein Verfahren dienen, durch welches das obige Problem schließlich umgangen werden kann: Die Mengen  $B'$  lassen sich in endlich viele zusammenziehbare Teilmengen zerlegen, sodass deren Schnitte wiederum zusammenziehbar sind, wobei die notwendige Feinheit der Zerlegung allein durch die Dimension kontrolliert wird. Wir werden nun mit den genaueren Ausführungen beginnen.

Nach Wahl des Radius sind unsere Kugeln  $B_r^M(p)$  (für  $p \in M'_+$ ) isometrisch zu ihren Lifts in  $X$ . Beachte außerdem, dass die abgewandelten Überdeckungsmengen  $B'$  mittels Fluss entlang von  $f$  homotopieäquivalent zu ihrem zugehörigen Teil in  $M'_+$ , also  $B_r^M(p) \cap M'_+$ , sind. Allgemeiner überträgt sich dies auf beliebige nichtleere Schnitte verschiedener solcher  $B'_i$ : Sind  $B_r^M(p_i)$  ( $i = 1, \dots, k$ ) Kugeln mit Mittelpunkten  $p_i \in M'_+$ , sodass  $\bigcap_{i=1}^k B_r^M(p_i) \neq \emptyset$ , und  $B'_i$  die zugehörigen (abgewandelten) Überdeckungsmengen wie oben, so ist  $\bigcap_{i=1}^k B'_i$  homotopieäquivalent zu  $\bigcap_{i=1}^k B_r^M(p_i) \cap M'_+$ ; schließlich werden die  $B_r^M(p_i)$  an ihrem gemeinsamen Schnitt mit  $\partial M'_+$  alle auf die selbe Art entlang der Flusslinien von  $f$

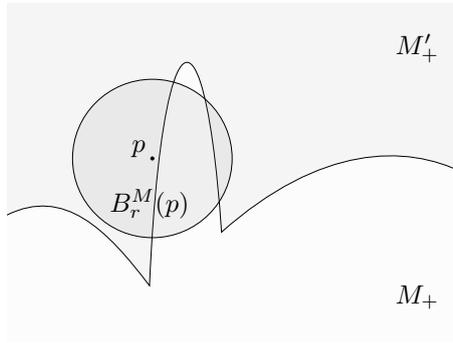


Abbildung 2.4: Nach dem Entfernen einer konvexen Teilmenge aus der Kugel  $B_r^M(p)$  ist die entstehende Menge im Allgemeinen nicht mehr zusammenziehbar. Beispielsweise zerfällt in obiger Abbildung die neue Menge  $B_r^M(p) \cap M'_+$  in zwei Zusammenhangskomponenten: Das Stück rechts der parabelförmigen Kurve und das Stück links davon. Beachte jedoch, dass hierfür die zu entfernende konvexe Menge wesentlich schmaler sein muss, als die Kugel selbst; ist hingegen der Kugelradius verglichen mit einem geeignet definierten Radius der konvexen Menge kleiner, so können wir zumindest obige Situation umgehen.

fortgesetzt. Möchten wir also den Homotopietyp einer Menge  $B'$  (bzw. eines nichtleeren Schnittes mehrerer  $B'_i$ ) bestimmen, so können wir uns auf den Teil des zugehörigen Lifts  $B_r^X(x)$  in  $X$  (bzw. des nichtleeren Schnittes der zugehörigen Lifts in  $X$ ) beschränken, welcher in  $X'_+$  liegt; d.h. anstelle des  $B'$  einer Kugel  $B_r^M(p)$  mit  $p \in M'_+$  genügt es, das zugehörige  $B_r^X(x) \cap X'_+$  für  $x \in X'_+$  mit  $\pi(x) = p$  zu betrachten (und analog für nichtleere Schnitte mehrerer  $B'_i$ ).

Wir werden im Folgenden also mit Kugeln  $B_r^X(x)$  in  $X$  mit Mittelpunkten in  $X'_+$  arbeiten und die Bezeichnung  $B'$  für den Teil  $B_r^X(x) \cap X'_+$  übernehmen<sup>3</sup>. Es sei daran erinnert, dass sich  $X_-$  gemäß  $X_- = \bigcup_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}} \{d_\gamma < \varepsilon\}$  darstellen lässt; entsprechend erhalten wir

$$(X_-)_{\delta/4} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}} (\{d_\gamma < \varepsilon\})_{\delta/4}.$$

Gemäß Definition  $X'_+ = X \setminus (X_-)_{\delta/4}$  ergibt sich also, dass

$$B' = B_r^X(x) \setminus \bigcup_{\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}} (\{d_\gamma < \varepsilon\})_{\delta/4}.$$

Doch auch diese Konstruktion ist in folgender Hinsicht gutartig.

**Lemma 2.22.** *Es gilt:*

1. Die Mengen  $(\{d_\gamma < \varepsilon\})_{\delta/4}$  sind konvex.
2. Es existiert eine nur von der Dimension  $n$  abhängige Konstante  $\kappa = \kappa(n) \in \mathbb{N}$ , sodass die Anzahl an Mengen  $(\{d_\gamma < \varepsilon\})_{\delta/4}$  mit nichtleerem Schnitt mit  $B_r^X(x)$  höchstens  $\kappa$  beträgt.
3. Für alle  $x \in \partial W$  ist die Funktion  $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $t \mapsto d(c_x(t), \{d_\gamma < \varepsilon\})$  (mit  $\gamma \in \Gamma_W \setminus \{\text{id}\}$ ) streng monoton steigend in  $t$  (hierbei bezeichnet  $c_x$  eine Flussgeodätische von  $F$ , vgl. Lemma 2.20).
4. Falls  $c_x(t_0) \in (\{d_\gamma < \varepsilon\})_{\delta/4}$  (mit  $\gamma \in \Gamma_W \setminus \{\text{id}\}$ ) für ein  $t_0 \in \mathbb{R}$  und  $x \in \partial W$ , so folgt  $c_x(t) \in (\{d_\gamma < \varepsilon\})_{\delta/4}$  für alle  $t \leq t_0$ .

<sup>3</sup>Dabei nehmen wir die Doppeldeutigkeit in Bezug auf die abgewandelten Überdeckungsmengen  $B'$  aus dem vorigen Abschnitt bewusst in Kauf, da der Homotopietyp schließlich übereinstimmt.

5. Für alle  $x \in \partial W$  ist die Funktion  $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $t \mapsto d(c_x(t), W)$  streng monoton steigend in  $t$ .

*Beweis.* 1. Nach Konvexität von  $d_\gamma$  sind die Mengen  $D := \{d_\gamma < \varepsilon\}$  bekanntlich konvex. Außerdem stimmt die Abstandsfunktion  $d_D(\cdot) := d(\cdot, D)$  mit der Abstandsfunktion  $d_{\overline{D}}(\cdot) := d(\cdot, \overline{D})$  zum Abschluss  $\overline{D} = \{d_\gamma \leq \varepsilon\}$  von  $D$  überein. Da  $d_{\overline{D}}$  gemäß Lemma 1.3 konvex ist, ist auch

$$(\{d_\gamma < \varepsilon\})_{\delta/4} = d_{\overline{D}}^{-1}((-\infty, \delta/4))$$

konvex.

2. Sei  $\gamma \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$  so, dass  $B_r^X(x) \cap (\{d_\gamma < \varepsilon\})_{\delta/4} \neq \emptyset$ ; es existiert also ein  $y \in B_r^X(x)$  sowie ein  $y' \in \{d_\gamma < \varepsilon\}$  mit  $d(y, y') < \delta/4$ . Es folgt  $d(x, y') \leq d(x, y) + d(y, y') < r + \delta/4$  und damit

$$d_\gamma(x) \leq d_\gamma(y') + 2 \cdot d(x, y') < \varepsilon + 2r + \delta/2 = \varepsilon(n)/4 + \varepsilon(n)/16 + \varepsilon(n)/16 < \varepsilon(n).$$

Wegen  $x \in X'_+ \subseteq X_+$  – also  $d_\Gamma(x) \geq \varepsilon$  – erhalten wir mit Lemma 1.7, dass es höchstens  $N(n, \varepsilon, \varepsilon(n))$  (zur Definition siehe Text vor Lemma 1.6) solche  $\gamma$  geben kann. Da  $\varepsilon = \varepsilon(n)/4$  wie auch  $\varepsilon(n)$  lediglich von der Dimension  $n$  abhängt, ergibt sich, dass  $\kappa(n) := \lceil N(n, \varepsilon(n)/4, \varepsilon(n)) \rceil$  die Behauptung erfüllt.

3. Nehme zunächst an, dass sogar  $x \in \partial\{d_\gamma < \varepsilon\}$  gilt. In Punkt 1. hatten wir bereits gesehen, dass für  $D := \{d_\gamma < \varepsilon\}$  die Abstandsfunktion  $d_D$  konvex ist. Gemäß unserer Parametrisierung der Geodätischen  $c_x$  ist  $c_x(0) = x \in \partial D$ , also  $d_D(c_x(0)) = 0$ . Nach strenger Monotonie der Funktion  $t \mapsto d_\gamma(c_x(t))$  verläuft  $c_x(t)$  für alle  $t > 0$  außerhalb von  $D$ , also  $d_D(c_x(t)) > 0$  für alle  $t > 0$ ; mithin ist  $t \mapsto d_D(c_x(t))$  eine konvexe Funktion  $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit striktem Minimum in 0, also nach Lemma 1.19 streng monoton steigend.

Damit ist schon der Fall von Röhren bewiesen: Ist nämlich  $W$  eine Zusammenhangskomponente von  $X_-$ , welche einer Röhre in  $M$  entspricht, so ist für jedes  $\gamma \in \Gamma_W \setminus \{\text{id}\}$  die Subniveaumenge  $\{d_\gamma < \varepsilon\}$  eine offene Umgebung der hyperbolischen Achse  $A$  (vgl. Lemma 1.29), weshalb stets ein Schnittpunkt von  $c_x$  mit  $\partial\{d_\gamma < \varepsilon\}$  existiert; folglich ist nach obigen Ausführungen die Funktion  $t \mapsto d(c_x(t), \{d_\gamma < \varepsilon\})$  für alle solchen  $\gamma$  streng monoton steigend.

Wir können im Folgenden also davon ausgehen, dass der Fall von Spitzen vorliegt; sei  $z \in X(\infty)$  der parabolische Fixpunkt. Ferner müssen wir lediglich die Situation behandeln, dass kein Schnittpunkt von  $c_x$  mit  $\{d_\gamma < \varepsilon\}$  vorhanden ist<sup>4</sup>, denn sonst greift erneut obige Argumentation. Schreibe von nun an wieder abkürzend  $D := \{d_\gamma < \varepsilon\}$ .

Sei  $x'$  der Projektionspunkt von  $x$  auf  $\overline{D} = \{d_\gamma \leq \varepsilon\}$  – womit  $d(x, D) = d(x, x')$  – und  $HK$  eine Horokugel um  $z$ , welche weder  $x$  noch  $x'$  enthält; bezeichne  $\pi_{HK}$  die Projektion auf  $HK$ . Beachte, dass  $\pi_{HK}(x') \in D$  sowie  $\pi_{HK}(x) = c_x(t_0)$  für ein  $t_0 < 0$ . Mithilfe von Lemma 1.9 folgern wir, dass

$$d(c_x(t_0), D) \leq d(c_x(t_0), \pi_{HK}(x')) = d(\pi_{HK}(x), \pi_{HK}(x')) < d(x, x') = d(c_x(0), D). \quad (*)$$

Somit ist die auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte Funktion  $t \mapsto d(c_x(t), D)$  insbesondere nicht konstant. Hieraus ergibt sich, dass sie auch kein lokales Maximum besitzen kann: Denn nach Konvexität wäre ein solches schon global, die (auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte) Funktion  $t \mapsto d(c_x(t), D)$  wegen  $d(c_x(t), D) \geq 0$  also beschränkt und damit konstant<sup>5</sup>.

<sup>4</sup>Dies ist wiederum ein Fall, welcher lediglich unter unseren schwächeren Krümmungsbedingungen auftreten kann: Bei der stärkeren Krümmungsbedingung  $-1 \leq K \leq a < 0$  gilt  $d_\gamma(c_x(t)) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow -\infty$  für alle  $\gamma \in \Gamma_W \setminus \{\text{id}\}$  und somit wäre auch hier stets die Existenz eines Schnittpunktes von  $c_x$  mit  $\partial\{d_\gamma < \varepsilon\}$  gegeben.

<sup>5</sup>Es sei daran erinnert, dass eine auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte konvexe Funktion konstant ist, falls sie beschränkt ist.

Auch ein lokales Minimum in  $t_1 \in \mathbb{R}$  wäre nach Konvexität bereits global. Doch die zu Ungleichung (\*) analoge Argumentation für  $c_x(t_1)$  (anstelle von  $c_x(0) = x$ ) liefert, dass die Projektion von  $c_x(t_1)$  auf eine geeignete Horokugel  $HK'$  um  $z$  einen geringeren Abstand zu  $D$  aufweist als  $c_x(t_1)$ , im Widerspruch dazu, dass  $c_x(t_1)$  ein globales Minimum von  $t \mapsto d(c_x(t), D)$  ist.

Folglich besitzt die auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte, konvexe Funktion  $t \mapsto d(c_x(t), D)$  keine (lokalen oder globalen) Extrema. Als einzig mögliche Situation verbleibt wegen Ungleichung (\*) also, dass  $t \mapsto d(c_x(t), D)$  streng monoton wächst; dies gilt dann insbesondere auch für die Einschränkung auf  $[0, \infty)$ .

4. Dies ist eine Folgerung aus Punkt 3.

5. Auch dies folgt aus Aussage 3, da  $W = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_W \setminus \{\text{id}\}} \{d_\gamma < \varepsilon\}$ .

□

Somit entsteht  $B'$  aus der konvexen Kugel  $B_r^X(x)$  dadurch, dass endlich viele konvexe Teilmengen entfernt werden. Ferner wird die Anzahl dieser konvexen Teilmengen, welche höchstens entfernt werden, durch eine nur von der Dimension  $n$  abhängige Konstante  $\kappa$  kontrolliert. Es liegt also nahe zu vermuten, dass die Topologie von  $B'$  ebenfalls gut kontrollierbar ist, und dies außerdem in einer solchen Weise, dass lediglich die Dimension  $n$  die zusätzliche Komplexität von  $B'$  gegenüber  $B_r^X(x)$  steuert.

Hierfür ist jedoch die Konvexität der jeweiligen Mengen allein nicht ausreichend, um eine hinreichend gutartige Situation sicherzustellen; schließlich ist die Mengendifferenz der (Schnitte der) Kugeln mit den aufgedickten Subniveaumengen von Interesse für uns, und diese kann allgemein recht kompliziert werden: Man denke an eine Durchstoßung wie in der früheren Abbildung 2.4 oder an ein regelmäßiges  $k$ -Eck, welches aus einer Kugel von ähnlichem Radius entfernt wird. Im letzteren Fall besteht die Mengendifferenz aus  $k$  Zusammenhangskomponenten, und eine immer größere Wahl von  $k$  lässt uns folgern, dass eine gleichmäßige Kontrolle der topologischen Komplexität (hier konkret: der Anzahl an Zusammenhangskomponenten) nicht möglich ist. Wie das folgende Lemma wiedergibt, ist die bei uns vorliegende Situation hingegen einfach in der Hinsicht, dass die zu entfernenden Mengen stets als Halbkugeln innerhalb der Überdeckungskugeln liegen.

**Lemma 2.23.** *Seien  $B_i := B_r^X(x_i)$  ( $i = 1, \dots, k$ ) Kugeln wie in der vorliegenden Situation mit  $\bigcap_{i=1}^k B_i \setminus (\{d_\gamma < \varepsilon\})_{\delta/4} \neq \emptyset$ . Dann gilt*

$$\left( \bigcap_{i=1}^k B_i, \bigcap_{i=1}^k B_i \cap (\{d_\gamma < \varepsilon\})_{\delta/4} \right) \cong (D^n, D_+^n)$$

im Sinne von Homöomorphie von Raumpaaren. Hierbei bezeichnet  $D^n$  die offene Einheitskugel in  $\mathbb{R}^n$  und  $D_+^n := \{x \in D^n : x_1 > 0\}$  eine Halbkugel darin.

*Beweis.* Vorab sei angemerkt, dass (neben der Konvexität der Kugeln und Subniveaumengen) für den Beweis zentral ist, dass der Radius  $r$  der Überdeckungskugeln  $B_i$  stets kleiner gleich dem Aufdickungsradius  $\delta/4$  der Subniveaumengen ist, sowie dass die Mittelpunkte der  $B_i$  nicht in  $(X_-)_{\delta/4}$  liegen. So wird anschaulich gesprochen erreicht, dass aus den Kugeln  $B_i$  „von kleinem Radius“ nun Stücke entfernt werden, die sich im Wesentlichen als Schnitte mit weiter entfernten Mengen „von großem Radius“ ergeben, siehe Abbildung 2.5. Die Konvexität von  $\{d_\gamma < \varepsilon\}$  stellt in dieser Situation sicher, dass lediglich „ein Stück gleichzeitig“ entfernt wird und nicht an mehreren Stellen abgeschnitten wird.

Wir gehen zuerst auf den Fall  $k = 1$  ein, d.h. wir betrachten lediglich eine Kugel  $B := B_r^X(x_1)$ . Schreibe außerdem abkürzend  $C := \{d_\gamma < \varepsilon\}$ . Anhand der Darstellung  $(C)_t = \bigcup_{y \in C} B_t^X(y)$  bzw. analog

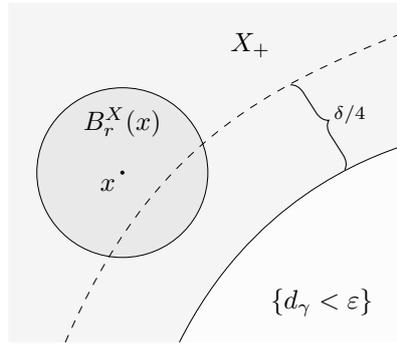


Abbildung 2.5: Wird aus einer Kugel „von kleinem Radius“ (hier:  $B_r^X(x)$  mit Radius  $r$ ) ein weiter entferntes Stück „von großem Radius“ (hier: Aufdickung von  $\{d_\gamma < \varepsilon\}$  um Radius  $\delta/4 \geq r$ ) entfernt, so können hierdurch keine neuen Löcher entstehen.

$\overline{(C)}_t = \bigcup_{y \in \overline{C}} \overline{B_t^X(y)}$  (für  $t > 0$  beliebig) sieht man, dass zu jedem Punkt  $y_0 \in \partial(C)_t$  ein Punkt  $y_1 \in \partial C$  existiert, sodass  $y_0 \in \partial B_t^X(y_1)$ . Ferner ist dieser Punkt  $y_1$  eindeutig: Es gilt  $d(y_0, \overline{C}) = t$  und die Existenz zweier verschiedener Punkte  $y_1, y'_1 \in \partial C$  mit  $y_0 \in \partial B_t^X(y_1)$ ,  $y_0 \in \partial B_t^X(y'_1)$  – also  $d(y_0, y_1) = t = d(y_0, y'_1)$  – würde einen Widerspruch zur Eindeutigkeit des Fußpunktes von  $y_0$  in der abgeschlossenen, konvexen Menge  $\overline{C} = \{d_\gamma \leq \varepsilon\}$  darstellen.

Wegen  $d(x_1, C) \geq d(x_1, X_-) \geq \delta/4$  gemäß Wahl von  $x_1$  erhalten wir, dass für ein passendes  $t_0 \in [0, \delta/4)$  erstmalig  $\overline{B} \cap \overline{(C)}_{t_0}$  nichtleer ist; genauer besteht diese Menge für dieses  $t_0$  aus zunächst genau einem Punkt  $x_0$ , denn mehrere gleichzeitige erstmalige Schnittpunkte würden der Konvexität des Durchschnitts dieser konvexen Mengen widersprechen. Wir bezeichnen  $x_0$  als ersten Berührungspunkt von  $B$  mit den Aufdickungen von  $C$ .

Aufgrund der Monotonie von  $d(\cdot, C)$  entlang der Flussgeodätischen  $c_x$  hin zum parabolischen Fixpunkt bzw. der hyperbolischen Achse (vgl. Lemma 2.22) sowie der Konvexität von  $B \cap (C)_{\delta/4}$  ist lediglich zu zeigen, dass  $(C)_{\delta/4}$  die Oberseite von  $\partial B$  an keinem weiteren Punkt berührt, welcher nicht bereits in der (zu  $D^{n-1}$  homöomorphen) Zusammenhangskomponente von  $x_0$  in  $\partial B \cap (C)_{\delta/4}$  liegt. Hierbei bezeichnet die Oberseite von  $\partial B$  diejenigen Punkte, welche sich – vom parabolischen Fixpunkt bzw. der hyperbolischen Achse ausgehend – erst als zweiter Schnittpunkt einer zugehörigen Flussgeodätischen  $c_x$  mit  $\partial B$  ergeben.

Angenommen es gäbe (mindestens) eine solche Berührung der Aufdickungen von  $C$  mit der Oberseite von  $B$ , so könnte man analog zur Definition von  $x_0$  einen Zeitpunkt  $t' < \delta/4$  finden, in welchem der Schnitt  $\overline{B} \cap \overline{(C)}_{t'}$  an dieser Stelle aus genau einem Punkt  $x' \in \partial B$  besteht. Gemäß obiger Betrachtungen existiert ein eindeutiges  $y' \in \partial C$  mit  $x' \in \partial B_{t'}^X(y')$ ; ferner liegt der Rand dieser Kugel (und damit der Rand von  $(C)_{t'}$ ) in  $x'$  tangential an  $\partial B$ , d.h.  $T_{x'} \partial B = T_{x'} \partial B_{t'}^X(y') = T_{x'} \partial (C)_{t'}$  als Unterräume von  $T_{x'} X$ . Gemäß Lemma von Gauß stehen die Radien der Kugeln  $B$  und  $B_{t'}^X(y')$  in  $x'$  senkrecht auf dem jeweiligen Rand, weshalb sie folglich in ihrer Richtung bereits übereinstimmen müssen. Damit ist der Radius von  $B_{t'}^X(y')$  für  $x'$  (also das geodätische Stück  $c_{y',x'}$  von  $y'$  nach  $x'$ ) ein Teilstück des Radius von  $B$  für  $x'$  (also des geodätischen Stücks  $c_{x_1,x'}$  von  $x_1$  nach  $x'$ ), oder umgekehrt. Im ersten Fall gälte folglich

$$y' = c_{y',x'}(0) \in c_{y',x'}([0, t']) \subseteq c_{x_1,x'}([0, r])$$

und damit insbesondere  $d(y', x_1) < r$ ; dies stellt jedoch wegen  $y' \in \partial C$  und  $r \leq \delta/4$  einen Widerspruch zu  $x_1 \notin (X_-)_{\delta/4}$  dar. Im zweiten Fall läge analog  $x_1$  in  $c_{y',x'}([0, t'])$ , was jedoch eine Teilmenge von  $(X_-)_{t'} \subseteq (X_-)_{\delta/4}$  ist (beachte  $t' < \delta/4$ ), also wiederum einen Widerspruch zur Wahl von  $x_1$  liefert. Folglich kann keine weitere solche Berührung der Aufdickungen von  $C$  mit der Oberseite von  $\partial B$  existieren und die Aussage ist für den Fall einer einzelnen Kugel  $B = B_r^X(x_1)$  bewiesen.

Betrachte nun die Situation des Durchschnitts mehrerer Kugeln  $B := \bigcap_{i=1}^k B_r^X(x_i)$ . Auch hier ist  $B \cap (C)_{\delta/4}$  konvex und die Monotonieaussagen für  $d(\cdot, C)$  entlang der Flussgeodätischen sind weiterhin gültig. Somit reduziert sich die Aussage erneut darauf zu zeigen, dass keine weiteren (d.h. außer der zu der Zusammenhangskomponente des ersten Berührungspunktes gehörigen) Schnitte der Aufdickungen von  $C$  mit der Oberseite von  $\partial B$  existieren. Da sich aber  $\partial B$  aus Randstücken der einzelnen Kugeln  $B_i$  zusammensetzt, würde ein solcher Schnitt wieder zu einer tangentialen Berührung einer Aufdickung  $(C)_{t'}$  für passendes  $t' < \delta/4$  an einem Randpunkt von  $\partial B_{i_0}$  führen, für geeignetes  $i_0 \in \{1, \dots, k\}$ . Mit der vorigen Argumentation für den Schnitt einer einzelnen Kugel (hier:  $B_{i_0} = B_r^X(x_{i_0})$ ) mit  $(C)_{\delta/4}$  erhalten wir den gewünschten Widerspruch.  $\square$

Die folgende Aussage erweist sich als zentral; vereinfacht ausgedrückt besagt sie, dass sich die Komplexität obiger Kugeln auch nach Entfernen des aufgedickten dünnen Teils gleichmäßig anhand der Dimension kontrollieren lässt.

**Lemma 2.24.** *Es existiert eine nur von der Dimension  $n$  abhängige Konstante  $\nu = \nu(n) \in \mathbb{N}$ , sodass gilt: In der vorliegenden Situation lässt sich eine Menge der Form  $B' = B_r^X(x) \setminus (X_-)_{\delta/4}$  durch höchstens  $\nu$  offene Teilmengen  $\{U_\omega : \omega = 1, \dots, \nu\} =: \mathcal{U}$  ersetzen, sodass diese eine gute Überdeckung von  $B'$  bilden. Stammen die  $B'$  von einer endlichen Familie von Kugeln  $B_r^X(x)$  wie oben, so lassen sich diese Mengen  $\mathcal{U}$  verträglich zwischen den verschiedenen  $B'$  wählen, d.h. für einen nichtleeren Schnitt verschiedener  $B'_1, \dots, B'_k$  bilden die Schnitte der Mengen aus den  $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k$  eine gute Überdeckung von  $\bigcap_{i=1}^k B'_i$ . Hierbei sei zusätzlich vorausgesetzt, dass die Anzahl an Kugeln aus der endlichen Familie, welche  $B_r^X(x)$  schneiden, ebenso lediglich von  $n$  abhängt; diese Konstante nennen wir  $\lambda = \lambda(n)$ .*

*Beweis.* Wir beginnen die Konstruktion auf den maximalen Durchschnitt der ursprünglichen Überdeckungskugeln (dies wird später die Verträglichkeit gewährleisten), genauer: Seien  $B'_1, \dots, B'_k$  Mengen wie oben, welche folglich entsprechend der Beziehung  $B'_i = B_r^X(x_i) \setminus (X_-)_{\delta/4}$  von Kugeln  $B_r^X(x_i)$  aus der endlichen Familie stammen. Ist  $\bigcap_{i=1}^k B_i \neq \emptyset$  (wobei abkürzend  $B_i := B_r^X(x_i)$ ), aber  $B_0 \cap \bigcap_{i=1}^k B_i = \emptyset$  für alle anderen Kugeln  $B_0$  aus der endlichen Familie, so heißt der Durchschnitt  $\bigcap_{i=1}^k B_i$  maximal.

Gemäß Lemma 2.22 Aussage 2. gilt

$$\bigcap_{i=1}^k B_i \setminus (X_-)_{\delta/4} = \bigcap_{i=1}^k B_i \setminus \bigcup_{j=1}^l (\{d_{\gamma_j} < \varepsilon\})_{\delta/4}$$

für geeignete  $\gamma_1, \dots, \gamma_l \in \Gamma \setminus \{\text{id}\}$  mit  $l \leq \kappa = \kappa(n)$ . Wir werden die Zerlegung auf dem maximalen Durchschnitt durch Induktion über  $l$  konstruieren. Für  $l = 1$  greifen wir auf Lemma 2.23 zurück und wählen zunächst einen Homöomorphismus von  $\bigcap_{i=1}^k B_i \cong D^n$  zu einem  $n$ -dimensionalen offenen Würfel  $W$ , welchen wir uns als in  $3^n$  gleichgroße Teilwürfel zerlegt vorstellen; genauer betrachten wir die (nicht disjunkte) Zerlegung  $(0, 1) = (0, 1/3] \cup [1/3, 2/3] \cup [2/3, 1)$  und bilden anschließend die entsprechenden Produkte über die  $n$  Dimensionen, um eine Zerlegung des Würfels  $(0, 1)^n = W$  zu erhalten. Da  $\bigcap_{i=1}^k B_i \cap (\{d_{\gamma_1} < \varepsilon\})_{\delta/4}$  gemäß Lemma 2.23 als Halbkugel in  $\bigcap_{i=1}^k B_i$  liegt, können wir diesen Homöomorphismus so wählen, dass  $\bigcap_{i=1}^k B_i \cap (\{d_{\gamma_1} < \varepsilon\})_{\delta/4}$  nun einer hinreichend kleinen offenen Umgebung eines Teilwürfels gemäß obiger Zerlegung entspricht; hierbei muss der Teilwürfel offenbar am Rand des Würfels anliegen. Durch Übergang zu hinreichend kleinen offenen Umgebungen der verbliebenen Teilwürfel (nachdem die offene Umgebung des Teilwürfels entfernt wurde, welche  $(\{d_{\gamma_1} < \varepsilon\})_{\delta/4}$  repräsentierte) ist hiermit bereits eine gute Überdeckung für  $\bigcap_{i=1}^k B_i \setminus (\{d_{\gamma_1} < \varepsilon\})_{\delta/4}$  gefunden: Die einzelnen (offenen Umgebungen der) Teilwürfel sind dann jeweils homöomorph zur  $D^n$  und damit zusammenziehbar, wie auch ihre nichtleeren Durchschnitte, da diese wiederum geeignete offene Umgebungen der Durchschnitte der zugehörigen abgeschlossenen Teilwürfel sind; denn solche Durchschnitte der abgeschlossenen Würfel

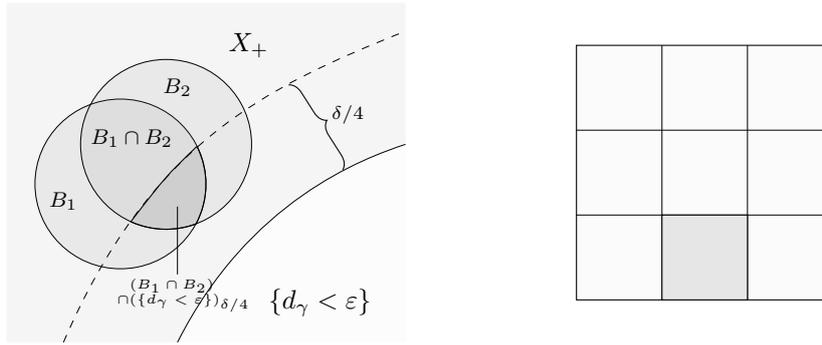


Abbildung 2.6: Die eingefärbte Fläche im Würfel rechts entspricht der Menge  $(B_1 \cap B_2) \cap (\{d_\gamma < \varepsilon\})_{\delta/4}$  links. Kleine offene Umgebungen der anderen kleinen Teilwürfel liefern eine gute Überdeckung des restlichen Teils, welcher  $(B_1 \cap B_2) \setminus (\{d_\gamma < \varepsilon\})_{\delta/4}$  entspricht.

sind gerade die Seitenflächen (also  $(n - 1)$ -dimensionale Würfel) beim Durchschnitt zweier Teilwürfel bzw. Würfel von noch niedrigerer Dimension beim Schnitt mit weiteren Teilwürfeln. Allgemein werden wir das Modell der Zerlegung des Würfels in die kleineren Teilwürfel auch als Würfelraster bezeichnen; eine Darstellung der anfänglichen Situation ist in Abbildung 2.6 zu finden.

Für den Schritt  $l \rightarrow l + 1$  sei somit vorausgesetzt, dass  $\bigcap_{i=1}^k B_i$  homöomorph zu einer Zerlegung des Würfels  $W$  in endliche Teilwürfel (wie oben) ist, sodass der Unterraum  $\bigcap_{i=1}^k B_i \setminus \bigcup_{j=1}^l (\{d_{\gamma_j} < \varepsilon\})_{\delta/4}$  einer Menge von hinreichend kleinen offenen Umgebungen einiger dieser Teilwürfel entspricht; wie viele Teilwürfel hierbei genau im jeweiligen Schritt nötig sind, werden wir an einer späteren Stelle schildern. Wir müssen nun eine entsprechende Zerlegung für die Situation finden, dass zusätzlich die aufgedeckte Subniveaumenge  $(\{d_{\gamma_{l+1}} < \varepsilon\})_{\delta/4}$  entfernt wird. Hierzu bilden wir  $(\{d_{\gamma_{l+1}} < \varepsilon\})_{\delta/4}$  zunächst unter dem vorhandenen Homöomorphismus in das bisherige Würfelraster ab; als Nächstes muss dann dieses homöomorphe Bild  $C_{\delta/4}$  von  $(\{d_{\gamma_{l+1}} < \varepsilon\})_{\delta/4}$  in  $W$  so deformiert werden, dass es – nach hinreichender Verfeinerung des Würfelrasters – selbst dem Würfelraster genügt, d.h. sich als Vereinigung passender offener Umgebungen einzelner Teilwürfel von  $W$  ergibt.

Wie im Beweis von Lemma 2.23 betrachten wir den ersten Berührungspunkt  $x$  der Aufdickungen von  $\{d_{\gamma_{l+1}} < \varepsilon\}$  mit  $\bigcap_{i=1}^k \overline{B}_i$ ; dieser entspricht unter dem vorausgesetzten Homöomorphismus einem Punkt  $x'$  auf dem Rand  $\partial W$  des Würfels  $W \subseteq \mathbb{R}^n$ . Nun setzt sich  $\partial W$  aus Randstücken der Teilwürfel der Zerlegung zusammen, weshalb folglich  $x'$  im Rand (mindestens) eines Teilwürfels enthalten ist. Beachte dass gemäß Konvexität die Menge  $(\{d_{\gamma_{l+1}} < \varepsilon\})_{\delta/4}$  durch die Geodätischen von  $x$  zu den einzelnen Punkten aus  $(\{d_{\gamma_{l+1}} < \varepsilon\})_{\delta/4}$  eindeutig gefasert wird; dies überträgt sich unter dem Homöomorphismus auf eine Faserung durch Kurven in  $W$ , welche in  $x'$  beginnen und zu den jeweiligen Punkten in  $C_{\delta/4}$  führen. Nach Definition von  $x$  als erstem Berührungspunkt können wir uns somit das fortlaufende Aufdicken von  $\{d_{\gamma_{l+1}} < \varepsilon\}$  – also die Mengen  $(\{d_{\gamma_{l+1}} < \varepsilon\})_t$  für steigendes  $0 < t \leq \delta/4$  – auch als Fluss entlang dieser Geodätischen von  $x$  weg vorstellen; entsprechende Aussagen übertragen sich auf die Situation in  $W$  mit dem Fluss entlang der Kurven in  $C_{\delta/4}$  von  $x'$  aus. Allgemein werden wir das Bild von  $(\{d_{\gamma_{l+1}} < \varepsilon\})_t$  in  $W$  als  $C_t$  bezeichnen und die vorigen Kurven als Faserungskurven. Wir merken ferner an, dass aus der Konvexität der  $(\{d_{\gamma_i} < \varepsilon\})_{\delta/4}$  ( $i = 1, \dots, l + 1$ ) folgt, dass  $(\{d_{\gamma_{l+1}} < \varepsilon\})_{\delta/4} \cap \bigcup_{i=1}^l (\{d_{\gamma_i} < \varepsilon\})_{\delta/4}$  aus höchstens  $l$  Zusammenhangskomponenten besteht, was sich mittels des Homöomorphismus ebenso auf die Situation in  $W$  überträgt. Von  $x'$  aus betrachtet entsprechen diese  $l$  Komponenten also  $l$  Familien von obigen Kurven, wobei zwei Kurven genau dann der selben Familie angehören, wenn sie die selbe Zusammenhangskomponente treffen, siehe Abbildung 2.7.

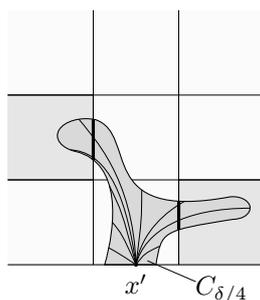


Abbildung 2.7: Hinzufügen von  $C_{\delta/4}$  in ein bestehendes Würfelraster. Hierbei ist die „Faserung“ von  $C_{\delta/4}$  durch die Kurven ab  $x'$  angedeutet. Solche Kurven, die einen der hier dick gezeichneten Balken durchlaufen – also den bereits zu entfernenden Teil schneiden –, gehören zu jeweils einer gemeinsamen Familie.

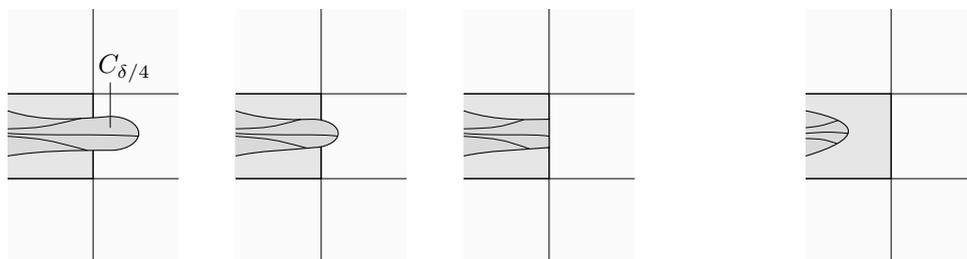


Abbildung 2.8: Die drei ersten Bilder beschreiben die homöomorphe Verformung beim Stauchvorgang; auf diese Weise wird deutlich, dass hier keine Veränderung des Würfelrasters nötig ist. Anhand des vierten Bildes sieht man, dass die gleiche Situation auch in dem Fall auftritt, dass  $C_{\delta/4}$  im bereits zu entfernenden Teilwürfel endet.

Betrachte nun zunächst all diejenigen obigen Faserungskurven von  $x'$  ab, welche an ihrem Endpunkt nicht im zu entfernenden Teil des Würfelrasters liegen. Sei hierzu eine Familie von solchen Kurven gegeben, welche auf ihrem Weg von  $x'$  zu ihren jeweiligen Endpunkten mindestens einmal durch den zu entfernenden Teil läuft und außerdem diesen an einer gemeinsamen Stelle (d.h. derselben Zusammenhangskomponente des Randes des zu entfernenden Teils) verlässt. Offensichtlich lassen sich solche Kurven ab dieser letzten Schnittstelle auf selbige kontrahieren, ohne den Homotopietyp des Raumpaars (d.h. Würfel mit zu entfernendem Teil) zu verändern; jedoch lässt sich dies nicht nur durch eine Homotopieäquivalenz realisieren, sondern auch durch einen Homöomorphismus, indem wir die Kurven von der letzten Schnittstelle ab hinreichend stark stauchen, siehe auch Abbildung 2.8. Analog lässt sich selbiges Stauchen auch für solche Kurven durchführen, welche auf ihrem Weg von  $x'$  zu ihrem Endpunkt den zu entfernenden Teil nicht treffen; dann jedoch drücken wir sie auf eine hinreichend kleine Umgebung des ersten Berührungspunktes  $x'$  zurück. Folglich können wir bis auf Homöomorphie annehmen, dass alle Faserungskurven, welche den bereits zu entfernenden Teil betreten, auch in dessen Innerem enden und die übrigen Kurven, welche den zu entfernenden Teil nicht betreten, in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $x'$  verbleiben<sup>6</sup>.

<sup>6</sup>Dies löst ferner das Problem, welches auftreten könnte, wenn eine aufgedickte Subniveaumenge in einer anderen liegt wie ein reguläres  $k$ -Eck in einer Kugel (bzw. entsprechende Situationen in höheren Dimensionen), sodass die Ecken leicht hinausragen; denn in einem solchen Fall würde bei anfänglicher Betrachtung für jede der über den Kugelrand hinausragenden Ecken des  $k$ -Ecks ein neuer Teilwürfel zur Modellierung notwendig, und für immer größer werdendes  $k$  bestünde keine Hoffnung mehr auf eine gleichmäßige Kontrolle der Verfeinerung des bestehenden Würfelrasters.

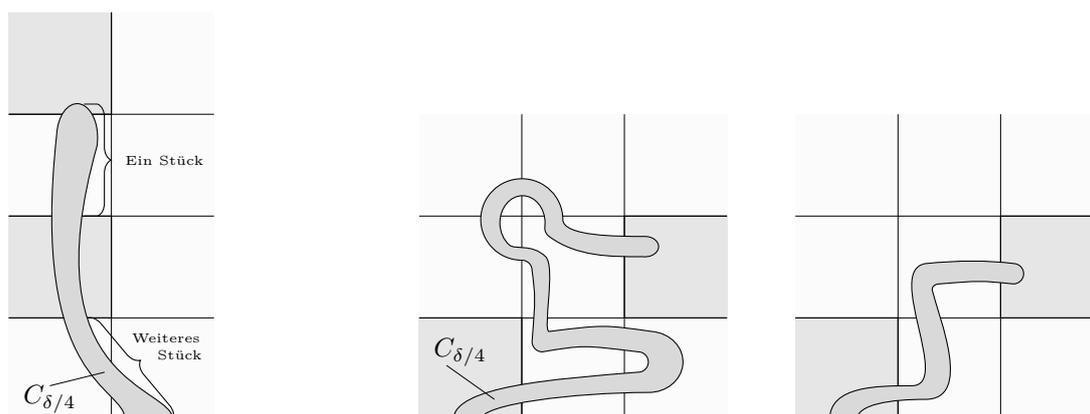


Abbildung 2.9: Das erste Bild stellt die Unterteilung von  $C_{\delta/4}$  in verschiedene Stücke gemäß ihrer Schnitte mit dem bereits zu entfernenden Teil dar, während die letzten beiden das Begradigen verdeutlichen.

Als Nächstes werden wir die Teile von  $C_{\delta/4}$ , welche den zu entfernenden Teil treffen, begradigen; hierzu sei daran erinnert, dass die Faserungskurven von  $C_{\delta/4}$  mittels obigem Homöomorphismus von geodätischen Verbindungen aus  $X$  stammen. Betrachte also eine Familie von Faserungskurven, welche in einer gemeinsamen Zusammenhangskomponente des zu entfernenden Teils endet (s.o.). Auf ihrem Weg von  $x'$  zu dieser Komponente wird der zu entfernende Teil möglicherweise mehrfach betreten und verlassen, weshalb wir die Familie von Kurven in solche Stücke unterteilen, welche entweder zwischen  $x'$  und dem ersten Eintrittspunkt in den zu entfernenden Teil liegen oder aber zwischen zwei solchen Schnittmengen mit dem zu entfernenden Teil. Ein jedes solche Stück lässt sich nun so homöomorph verformen, dass ein bisher nicht zu entfernender Teilwürfel des Würfelrasters von diesen Kurven nicht wieder betreten wird, sobald er einmal verlassen wurde; anschaulich gesprochen lässt sich dies als Begradigung auffassen (vgl. die Abstammung von den geodätischen Verbindungen in  $X$ ), siehe auch Abbildung 2.9.

Mit den beiden vorigen Schritten (also Stauchen der Teile von  $C_{\delta/4}$ , welche den zu entfernenden Teil nicht mehr betreten und Begradigen der Verbindungen zwischen  $x'$  und den Schnittmengen mit dem zu entfernenden Teil bzw. zwischen diesen selbst) ist nun sichergestellt, dass ein bisher nicht zu entfernender Teilwürfel in höchstens  $2l$  Richtungen von  $C_{\delta/4}$  verlassen wird (d.h. der Schnitt des Randes dieses Teilwürfels mit  $C_{\delta/4}$  höchstens  $2l$  Komponenten aufweist), nämlich für jede der maximal  $l$  Richtungen von  $x'$  aus zu den Schnitten von  $C_{\delta/4}$  höchstens jeweils ein Schnitt zum Betreten und einen zum Verlassen des Teilwürfels. Um den Homöomorphietyp von  $C_{\delta/4}$  innerhalb eines solchen Teilwürfels wiedergeben zu können, werden folglich in jeder Dimension maximal  $2l$  neue Teilstücke des entsprechenden Intervalls benötigt, um die  $2l$  Richtungen, in denen  $C_{\delta/4}$  den Teilwürfel verlässt, darstellen zu können, sowie maximal  $2l + 1$  Teilstücke, um möglicherweise Platz zwischen diesen einzelnen Richtungen zu schaffen. Folglich muss jedes Intervall (aus deren Produkten sich ja der Teilwürfel ergibt) in höchstens  $2l + (2l + 1) = 4l + 1$  Teile zerlegt werden; in Dimension  $n$  ist damit eine Unterteilung in höchstens  $(4l + 1)^n \leq (4\kappa + 1)^n$  Teilwürfel nötig. Da dieses Prozedere für womöglich jeden bisherigen Teilwürfel notwendig wird, ergibt sich, dass sich die Anzahl an Teilwürfeln durch den Schritt  $l \rightarrow l + 1$  um den Faktor  $(4l + 1)^n \leq (4\kappa + 1)^n$  erhöht. Im Schritt  $l = 1$  hatten wir eine Unterteilung in  $3^n$  Teilwürfel gewählt; anschließend folgten die Schritte 2, 3, 4 usw. bis höchstens  $\kappa$ , also  $\leq \kappa - 1$  Schritte. Folglich beträgt die Anzahl an Teilwürfeln nach allen möglichen Schritten höchstens

$$3^n \cdot \prod_{l=2}^{\kappa} (4l + 1)^n \leq 3^n \cdot \prod_{l=2}^{\kappa} (4\kappa + 1)^n \leq 3^n \cdot (4\kappa + 1)^{n \cdot \kappa} =: \nu_0 = \nu_0(n) \in \mathbb{N}.$$

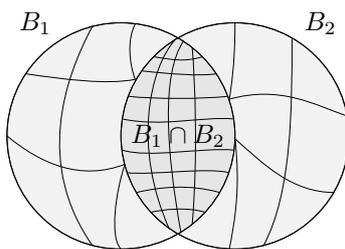


Abbildung 2.10: Erweiterung des auf  $B_1 \cap B_2$  bereits bestehenden Würfelrasters auf  $B_1$  bzw.  $B_2$ .

Erneut sei daran erinnert, dass wir eine gute Überdeckung von  $\bigcap_{i=1}^k B_i \setminus (X_-)_{\delta/4} \subseteq X$  nun dadurch erhalten, indem wir hinreichend kleine Umgebungen der verbliebenen, nicht zu entfernenden Teilwürfel im Würfelmodell wählen und diese mittels des Homöomorphismus zurück nach  $X$  abbilden (s.o.).

Wir werden nun die Würfelkonstruktion von einem der obigen maximalen Schnitte  $\bigcap_{i=1}^k B_i$  sukzessive auf die gesamte Kugel  $B_1 = B_r^X(x)$  erweitern. Hierzu ist lediglich festzuhalten, dass  $\bigcap_{i=1}^k B_i$  als konvexe Teilmenge in der nächstgrößeren Menge  $\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i$  liegt; wenden wir also obiges Verfahren der Zerteilung in Teilwürfel auf  $\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i$  an, so halten wir das auf  $\bigcap_{i=1}^k B_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{k-1} B_i$  bereits gegebene Würfelraster fest und führen weitere Unterteilungen nur auf den restlichen Teilwürfeln durch. Entsprechend lässt sich dies auf die weiteren Mengen übertragen, welche sich durch Auslassen einer oder mehrerer  $B_i$  im gemeinsamen Schnitt ergeben. Insgesamt erhalten wir so eine gute Überdeckung von  $B_1$ , welche verträglich zu den analog konstruierten guten Überdeckungen auf den übrigen  $B_i$  ist, da wegen des obigen Erweiterungsverfahrens ja die entsprechende Würfelzerlegung auf den gemeinsamen Schnitten bereits übereinstimmte. Eine Veranschaulichung dieses Schritts ist in Abbildung 2.10 gegeben.

Es bleibt noch zu bestimmen, wie viele neue Mengen insgesamt nötig sind, um die anfängliche Kugel  $B_1$  zu überdecken. Hierzu nutzen wir aus, dass gemäß Voraussetzung höchstens  $\lambda = \lambda(n)$  übrige Kugeln  $B_1$  schneiden, weshalb folglich höchstens

$$\sum_{i=1}^{\lambda} 2^i \leq \sum_{i=1}^{\lambda} 2^\lambda = \lambda \cdot 2^\lambda$$

verschiedene verschieden große Schnitte zwischen den Kugeln existieren. Somit sind maximal Unterteilungen in  $\lambda \cdot 2^\lambda \cdot \nu_0 =: \nu$  Teilmengen nötig. Da  $\lambda$  sowie  $\nu_0$  nur von  $n$  abhängen, ist auch  $\nu$  lediglich von  $n$  abhängig.  $\square$

Obiges Lemma 2.24 baut darauf auf, dass die Anzahl möglicher Schnitte zwischen einzelnen Kugeln durch  $\lambda = \lambda(n)$  kontrolliert wird, eine lediglich von der Dimension abhängige Konstante. In späteren Schritten wird der Abstand zwischen den Mittelpunkten der einzelnen Kugeln gleichmäßig von unten beschränkt sein; hieraus ergibt sich dann mittels klassischer Volumenargumente die Existenz eines solchen  $\lambda$  (siehe später bzw. Lemma 1.6).

### Nerven-Konstruktion

Im letzten Schritt werden wir nun den geschrumpften dicken Teil  $M'_+$  geeignet überdecken und zeigen, dass die Inklusion von  $M'_+$  (bzw. dessen Rand) in die Überdeckung (bzw. den – geeigneten definierten – „Rand“ der Überdeckung) eine Homotopieäquivalenz ist. Da die Überdeckung sich mittels voriger Hilfsschritte (siehe Lemma 2.24) als gut herausstellt, erhalten wir mittels der Nerven-Konstruktion (vgl. Abschnitt 1.3) die Homotopieäquivalenz zu einem geeigneten Simplicialkomplex. Dieser Abschnitt orientiert sich stark an Beweisschritt 4 von [2] Theorem 3.1.

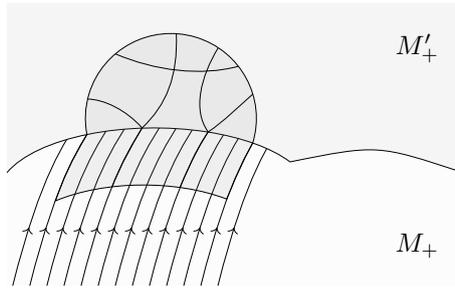


Abbildung 2.11: Nach der Verfeinerung werden die entstehenden neuen Überdeckungsmengen – sofern notwendig – wie vorher durch Stümpfe entlang der Flusslinien fortgesetzt.

Sei hierzu  $\mathfrak{M}$  eine maximale  $(r/2)$ -diskrete Teilmenge von  $M'_+$ . Für eine Kugel  $B_r^M(p)$  (wobei  $p \in \mathfrak{M}$ ) mit  $B_r^M(p) \setminus M'_+ \neq \emptyset$  definieren wir wie in den vorigen Abschnitten eine abgewandelte Überdeckungsmenge  $B'$  durch Abschneiden des Teils außerhalb von  $M'_+$  sowie Fortsetzung entlang der Flusslinien von  $f$  und ersetzen  $B_r^M(p)$  durch  $B'$ . Mit  $N_+$  bezeichnen wir die Vereinigung all dieser Kugeln  $B_r^M(p)$  bzw. der entsprechenden  $B'$ ; außerdem sei  $N_0 := N_+ \cap \overline{(M_-)_{\delta/4}}$ . Wir erhalten somit gemäß Konstruktion

$$M'_+ \subseteq N_+ \subseteq M_+ \quad \text{sowie} \quad \partial M'_+ \subseteq N_0.$$

Die folgende Aussage entspricht [2] Lemma 3.14.

**Lemma 2.25.** *Die Inklusionen  $M'_+ \hookrightarrow N_+$  und  $\partial M'_+ \hookrightarrow N_0$  sind Homotopieäquivalenzen.*

*Beweis.* Auch der Beweis ist im Wesentlichen aus [2] Lemma 3.14. übernommen. Die Abbildung

$$r : N_+ \hookrightarrow M_+ \xrightarrow{f(\cdot, 1)} M'_+$$

ist homotopieinvers zur Inklusion  $j : M'_+ \hookrightarrow N_+$ , wie wir nun zeigen. Zunächst gilt  $r \circ j = f(\cdot, 1)|_{M'_+} = \text{id}_{M'_+}$ , da  $f$  eine starke Deformationsretraktion auf  $M'_+$  war. Nach Konstruktion der  $B'$  sind die Überdeckungsmengen (aus denen  $N_+$  besteht) außerdem stabil unter  $f$ , weshalb  $f(\cdot, t)$  für alle  $t \in [0, 1]$  die Menge  $N_+$  in sich abbildet; folglich lässt sich  $f$  auf eine Homotopie zwischen  $j \circ r : N_+ \rightarrow N_+$  und  $r \circ j = \text{id}_{M'_+}$  einschränken.

Die gleiche Argumentation überträgt sich auf die Inklusion  $\partial M'_+ \hookrightarrow N_0$ , da sich  $f(\cdot, t)$  für alle  $t \in [0, 1]$  auch auf  $\overline{(M_-)_{\delta/4}}$  einschränken lässt.  $\square$

Gemäß Lemma 2.24 müssen wir Kugelreste der Form  $B_r^X(x) \setminus (X_-)_{\delta/4}$  mitunter in jeweils maximal  $\nu$  Teilmengen unterteilen, um eine gute Überdeckung – d.h. eine Überdeckung durch offene, zusammenziehbare Mengen, deren nichtleere Durchschnitte ebenfalls zusammenziehbar sind – zu erhalten. Wir führen diese Unterteilung nun durch und übertragen sie auf die zugehörigen Kugeln  $B_r^M(p)$  in  $M$ , welche sich ja gemäß Wahl von  $r$  als isometrische Bilder der entsprechenden  $B_r^X(x)$  ergeben. Genau wie bei der Konstruktion der abgewandelten Überdeckungsmengen in den vorigen Abschnitten setzen wir nun nach der Verfeinerung diejenigen Teilmengen, welche den Rand von  $M'_+$  schneiden, nach außen – d.h. in den Bereich  $M_+ \setminus M'_+$  hinein – durch einen Stumpf fort, siehe auch Abbildung 2.11; hierdurch erhalten wir eine gute Überdeckung  $\mathcal{U}$  von ganz  $N_+$ .

Betrachte nun wiederum alle  $U \in \mathcal{U}$ , für die  $U \cap \partial M'_+ \neq \emptyset$ , und definiere jeweils  $U' = U \cap \overline{(M_-)_{\delta/4}}$  sowie abschließend  $\mathcal{V}$  als Gesamtheit all dieser  $U'$ . Nach Konstruktion der Verfeinerung ist somit  $\mathcal{V}$  eine gute Überdeckung von  $N_0$ . Mit  $N(\mathcal{U})$  bzw.  $N(\mathcal{V})$  bezeichnen wir den zu  $\mathcal{U}$  bzw.  $\mathcal{V}$  gehörigen Nervenkomplex (vgl. Abschnitt 1.3).

Da jedes  $U' \in \mathcal{V}$  genau einem  $U \in \mathcal{U}$  entspricht sowie selbiges für die Schnitte der  $U'$  hinsichtlich der Schnitte der  $U$  gilt, können wir  $N(\mathcal{V})$  als Unterkomplex von  $N(\mathcal{U})$  auffassen. Als zentrale Aussage folgern wir untenstehendes Lemma.

**Lemma 2.26.** *Das Raumpaard  $(M_+, \partial M_+)$  ist als Paar homotopieäquivalent zum (simplicialen) Raumpaard  $(N(\mathcal{U}), N(\mathcal{V}))$ .*

*Beweis.* Der Beweis verläuft mithilfe von Lemma 2.21 sowie Lemma 2.25 identisch zu den Ausführungen in [2] zwischen Lemma 3.14 und Lemma 3.15, da lediglich homotopietheoretische Argumente – und nicht etwa die bei uns abweichenden Krümmungsbedingungen – verwendet werden; eine Wiederholung der Argumentation wird später außerdem im analogen Resultat für hyperbolische Orbifaltigkeiten in Lemma 3.52 gegeben.  $\square$

Es verbleibt lediglich nachzuweisen, dass  $N(\mathcal{U})$  ein Simplicialkomplex ist, dessen Komplexität in geeigneter Weise kontrollierbar ist. Genauer bezeichnen wir einen Simplicialkomplex  $S$  als  $(D, C)$ -**Simplicialkomplex** (mit  $D, C > 0$ ), falls die Anzahl Ecken von  $S$  durch  $C$  beschränkt ist und der Grad jeder Ecke stets  $\leq D$  beträgt. Entsprechend heißt ein simpliciales Raumpaard  $(S, S')$  auch  $(D, C)$ -**simpliciales Raumpaard**, falls  $S$  ein  $(D, C)$ -Simplicialkomplex ist (weshalb folglich auch  $S'$  als Unterkomplex von  $S$  selbige Komplexitätsschranken erfüllt).

Wir definieren nun Konstanten  $C = C(n), D = D(n) > 0$  durch

$$C := \frac{\nu}{\text{Vol}_{\mathbb{R}^n}(B_{r/4}^{\mathbb{R}^n})},$$

$$D := \nu \cdot N(n, r/2, 2r),$$

wobei  $N(n, r/2, 2r)$  wie in Lemma 1.6 gegeben ist sowie  $\nu$  aus Lemma 2.24; beachte, dass dies wegen  $r = \varepsilon(n)/32$  und  $\nu = \nu(n)$  tatsächlich nur von der Dimension  $n$  abhängt. Die folgende Aussage ist die Entsprechung zu [2] Lemma 3.15.

**Lemma 2.27.**  *$N(\mathcal{U})$  ist ein  $(D, C \cdot \text{Vol}(M))$ -Simplicialkomplex.*

*Beweis.* Zunächst schätzen wir die Kardinalität von  $\mathfrak{M}$  ab; hierzu behandeln wir sogar den allgemeineren Fall, dass  $\mathfrak{M}$  eine  $(r/2)$ -diskrete Menge in  $M_+$  ist (und nicht nur in  $M'_+ \subseteq M_+$ ). Ist  $x \in X_+$  also ein Urbild eines Punktes  $p \in \mathfrak{M}$ , so gilt insbesondere  $d_\Gamma(x) \geq \varepsilon = \varepsilon(n)/4$ ; wir stellen fest, dass wegen  $r = \varepsilon(n)/32 = \varepsilon/8$  somit für alle  $0 < \rho \leq 2r$  nun  $B_\rho^M(p)$  isometrisch zu  $B_\rho^X(x)$  ist und insbesondere die Volumina dieser Kugeln übereinstimmen. Das Volumen von  $B_\rho^X(x)$  wiederum ist aufgrund der Krümmungsbedingungen von unten durch  $\text{Vol}_{\mathbb{R}^n}(B_\rho^{\mathbb{R}^n})$  beschränkt. Ferner liegen für alle  $\rho \leq r/4$  die  $\rho$ -Kugeln um Punkte aus  $\mathfrak{M}$  disjunkt in  $M$ , da  $\mathfrak{M}$  schließlich  $(r/2)$ -diskret ist. Folglich bilden die  $B_{r/4}^M(p)$  für  $p \in \mathfrak{M}$  eine Familie disjunkter Kugeln in  $M$  mit Volumen jeweils größer gleich  $\text{Vol}_{\mathbb{R}^n}(B_{r/4}^{\mathbb{R}^n})$  und wir erhalten

$$|\mathfrak{M}| \leq \frac{1}{\text{Vol}_{\mathbb{R}^n}(B_{r/4}^{\mathbb{R}^n})} \cdot \text{Vol}(M).$$

Nun wurde bei der Konstruktion der Überdeckung  $\mathcal{U}$  eine Kugel um einen Punkt aus  $\mathfrak{M}$  in höchstens  $\nu$  Teilmengen zerlegt und es ergibt sich

$$|\mathcal{U}| \leq \nu \cdot |\mathfrak{M}| \leq \frac{\nu}{\text{Vol}_{\mathbb{R}^n}(B_{r/4}^{\mathbb{R}^n})} \cdot \text{Vol}(M) = C \cdot \text{Vol}(M).$$

Analog verfahren wir für die Gradschranke  $D$ . Wir erinnern daran, dass am Anfang der Konstruktion von  $\mathcal{U}$  Kugeln  $B_r^M(p)$  für  $p \in \mathfrak{M}$  betrachtet wurden. Angenommen zwei solche Radius- $r$ -Kugeln um Punkte

$p, p' \in \mathfrak{M}$  schneiden sich, so finden wir Lifts  $x$  bzw.  $x'$  von  $p$  bzw.  $p'$ , sodass sich die zugehörigen Radius- $r$ -Kugeln um  $x, x' \in X$  schneiden; es folgt  $d_X(x, x') < 2r$ . Auch die Menge der Lifts in  $X$  der Punkte aus  $\mathfrak{M}$  bildet eine  $(r/2)$ -diskrete Menge in  $X$ , weshalb also die Mittelpunkte der Kugeln, welche mit  $B_r^X(x)$  nichtleeren Schnitt haben, eine  $(r/2)$ -diskrete Menge in  $B_{2r}^X(x)$  darstellen. Gemäß Lemma 1.6 ist somit die Anzahl solcher Kugeln durch  $N(n, r/2, 2r)$  beschränkt; entsprechend schneiden sich auch höchstens  $N(n, r/2, 2r)$  der  $r$ -Kugeln um Punkte aus  $\mathfrak{M}$  gleichzeitig. Da  $N(n, r/2, 2r)$  lediglich von  $n$  abhängt, definiert dies die für die Anwendungen von Lemma 2.24 notwendige Konstante  $\lambda = \lambda(n)$ . Nun wurde bei der Konstruktion von  $\mathcal{U}$  eine solche Kugel  $B_r^M(p)$  durch höchstens  $\nu$  Teilmengen ersetzt, weshalb eine Überdeckungsmenge aus  $\mathcal{U}$  höchstens

$$\nu \cdot N(n, r/2, 2r) = D$$

andere Überdeckungsmengen gleichzeitig schneiden kann.  $\square$

Wir haben damit unser Hauptresultat für Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeiten bewiesen:

**Satz 2.28.**  $(M_+, \partial M_+)$  ist als Paar homotopieäquivalent zu einem  $(D, C \cdot \text{Vol}(M))$ -simplizialen Paar, wobei  $C = C(n)$  und  $D = D(n)$  lediglich von der Dimension  $n$  abhängige Konstanten sind.  $\square$

### 2.2.3 Anwendungen

Während obiges Hauptresultat Satz 2.28 bereits als eigenständige Aussage von Bedeutung ist, sind wir vor allem daran interessiert, die Homologie von  $M$  zu kontrollieren. Als erste unmittelbare Anwendung erhalten wir eine Schranke an den freien Anteil der Homologie. Ein entsprechendes Resultat ist sogar unter allgemeineren Bedingungen bereits länger bekannt (vgl. die Diskussion zu Theorem 1) und daher keine Neuerkenntnis; dennoch ist es als nette Dreingabe anzusehen, dass unser Hauptresultat neben der Kontrolle der Torsion in der Homologie – an welcher wir ursprünglich interessiert waren – auch eine Aussage über den freien Anteil ermöglicht.

**Satz 2.29.** Es existiert eine lediglich von  $n$  abhängige Konstante  $E = E(n) > 0$ , sodass

$$b_k(M; \mathbb{K}) \leq E \cdot \text{Vol}(M)$$

für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ . Hierbei bezeichnet  $b_k(M; \mathbb{K}) = \dim_{\mathbb{K}} H_k(M; \mathbb{K})$  die  $k$ -te Betti-Zahl von  $M$  mit Koeffizienten im (frei wählbaren) Körper  $\mathbb{K}$ .

*Beweis.* Der Beweis ist mithilfe unseres Hauptresultats, der Dick-dünn-Zerlegung und unter Ausnutzung der Mayer-Vietoris-Sequenz ein Standardargument; der Vollständigkeit halber geben wir ihn dennoch wieder.

Bekanntlich gilt  $b_k(M; \mathbb{K}) = 0$  für alle  $k > n$ , womit insbesondere deutlich wird, dass es genügt, lediglich Konstanten  $E(k, n)$  für  $k = 0, \dots, n$  anzugeben (also solche, welche zusätzlich vom Grad  $k$  der Homologie abhängen), denn  $E(n) := \max_{k=0, \dots, n} E(k, n)$  erfüllt dann die Behauptung des Satzes. Gemäß Wegzusammenhang von  $M$  erhalten wir ferner  $b_0(M; \mathbb{K}) = 1$ . Wir nutzen nun folgende Tatsache:

**Fakt.** ([4] Corollary 8.4) Es existiert eine nur von  $n$  abhängige Konstante  $V = V(n) > 0$ , sodass für alle vollständigen Riemannschen  $n$ -Mannigfaltigkeiten  $M'$  mit Krümmung  $-1 \leq K < 0$  bereits  $\text{Vol}(M') \geq V(n)$  gilt.

Insbesondere erfüllt unser  $M$  stets die Voraussetzungen des obigen Fakt, weshalb es genügt,  $E(0, n) := 1/V(n)$  zu setzen, denn

$$b_0(M; \mathbb{K}) = 1 = \frac{1}{V} \cdot V \leq \frac{1}{V} \cdot \text{Vol}(M) = E \cdot \text{Vol}(M).$$

Zusammenfassend ist die Aussage somit in den Fällen  $k = 0$  sowie  $k > n$  bewiesen.

Nach der Dick-dünn-Zerlegung Satz 2.17 ist  $M$  mittels Kontraktion der Spitzen homotopieäquivalent zu seinem kompakten Teil  $M_K$ , welcher sich aus der dortigen kompakten Untermannigfaltigkeit  $M_+$  mit Rand  $\partial M_+$  durch Ankleben der höchstens  $C \cdot \text{Vol}(M)$  Röhren ergibt. Beachte ferner, dass eine beliebige Röhre  $R$  als  $D^{n-1}$ -Bündel über der  $\mathbb{S}^1$  homotopieäquivalent zur  $\mathbb{S}^1$  ist und sich für ihre Homologie folglich

$$H_k(R; \mathbb{K}) = \begin{cases} \mathbb{K} & \text{falls } k = 0, 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

ergibt.

Bezeichne  $\mathcal{R}$  die endliche Familie der verschiedenen Röhren von  $M$ , wobei  $|\mathcal{R}| \leq C \cdot \text{Vol}(M)$ . Sei  $\partial_{\mathcal{R}} M_+$  die Vereinigung aller Ankleberänder der Röhren aus  $\mathcal{R}$ ; dies ist ein Unterraum von  $\partial M_+$  und es gilt ferner  $M_K \cong M_+ \cup_{\partial_{\mathcal{R}} M_+} \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$ . Gemäß Mayer-Vietoris erhalten wir anhand des Pushouts

$$\begin{array}{ccc} \partial_{\mathcal{R}} M_+ & \hookrightarrow & \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_+ & \longrightarrow & M_+ \cup_{\partial_{\mathcal{R}} M_+} \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \quad (\cong M_K) \end{array}$$

die exakte Sequenz

$$\dots \rightarrow H_k(\partial_{\mathcal{R}} M_+; \mathbb{K}) \rightarrow H_k\left(\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R; \mathbb{K}\right) \oplus H_k(M_+; \mathbb{K}) \xrightarrow{\alpha} H_k(M_K; \mathbb{K}) \xrightarrow{\beta} H_{k-1}(\partial_{\mathcal{R}} M_+; \mathbb{K}) \rightarrow \dots$$

und folglich

$$\dim_{\mathbb{K}} H_k(M_K; \mathbb{K}) = \dim_{\mathbb{K}} \text{im}(\beta) + \dim_{\mathbb{K}} \ker(\beta) = \dim_{\mathbb{K}} \text{im}(\beta) + \dim_{\mathbb{K}} \text{im}(\alpha). \quad (*)$$

Da die Vereinigung  $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R$  disjunkt ist, ergibt sich nach Additivität der Homologie  $H_k(\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R; \mathbb{K}) = \bigoplus_{R \in \mathcal{R}} H_k(R; \mathbb{K})$ , also wegen  $R \simeq \mathbb{S}^1$

$$\dim_{\mathbb{K}} H_k\left(\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R; \mathbb{K}\right) = \begin{cases} |\mathcal{R}| & \text{falls } k = 0, 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dies können wir für alle  $k = 0, \dots, n$  als

$$\dim_{\mathbb{K}} H_k\left(\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R; \mathbb{K}\right) \leq |\mathcal{R}| \leq C \cdot \text{Vol}(M)$$

zusammenfassen.

Beachte ferner, dass allgemein für einen  $(A, B)$ -Simplizialkomplex  $S$  die Anzahl an  $k$ -Simplizes durch  $A^k \cdot B$  beschränkt ist. Nach Definition der simplizialen Homologie stellt  $A^k \cdot B$  folglich eine Schranke an  $\dim_{\mathbb{K}} H_k(S; \mathbb{K})$  dar (denn  $H_k(S; \mathbb{K})$  ergibt sich bekanntlich als Quotient eines Untervektorraums eines dann höchstens  $(A^k \cdot B)$ -dimensionalen Vektorraums); da aber nach unserem Hauptresultat Satz 2.28  $M_+$  ein  $(D, C \cdot \text{Vol}(M))$ -Simplizialkomplex ist und  $\partial_{\mathcal{R}} M_+$  ein Unterkomplex dessen, erhalten wir in unserer Situation die Ungleichungen

$$\dim_{\mathbb{K}} H_{k-1}(\partial_{\mathcal{R}} M_+; \mathbb{K}) \leq D^{k-1} \cdot C \cdot \text{Vol}(M)$$

sowie

$$\dim_{\mathbb{K}} H_k(M_+; \mathbb{K}) \leq D^k \cdot C \cdot \text{Vol}(M).$$

Zusammen mit obiger Abschätzung für  $\dim_{\mathbb{K}} H_k(\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R; \mathbb{K})$  folgt insbesondere

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{K}} \left( H_k \left( \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R; \mathbb{K} \right) \oplus H_k(M_+; \mathbb{K}) \right) &= \dim_{\mathbb{K}} H_k \left( \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R; \mathbb{K} \right) + \dim_{\mathbb{K}} H_k(M_+; \mathbb{K}) \\ &\leq C \cdot \text{Vol}(M) + D^k \cdot C \cdot \text{Vol}(M) \\ &= (D^k + 1) \cdot C \cdot \text{Vol}(M). \end{aligned}$$

Da  $\text{im}(\alpha)$  gemäß Homomorphiesatz isomorph zu einem Quotienten von  $H_k(\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R; \mathbb{K}) \oplus H_k(M_+; \mathbb{K})$  ist, erhalten wir hieraus

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{im}(\alpha) \leq (D^k + 1) \cdot C \cdot \text{Vol}(M);$$

ebenso ist  $\text{im}(\beta)$  ein Untervektorraum von  $H_{k-1}(\partial_{\mathcal{R}} M_+; \mathbb{K})$  und es ergibt sich

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{im}(\beta) \leq D^{k-1} \cdot C \cdot \text{Vol}(M).$$

Beide Ungleichungen eingesetzt in Gleichung (\*) liefern

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{K}} H_k(M_K; \mathbb{K}) &\leq D^{k-1} \cdot C \cdot \text{Vol}(M) + (D^k + 1) \cdot C \cdot \text{Vol}(M) \\ &= (D^k + D^{k-1} + 1) \cdot C \cdot \text{Vol}(M). \end{aligned}$$

Mit  $M_K \simeq M$  – also insbesondere  $\dim_{\mathbb{K}} H_k(M_K; \mathbb{K}) = \dim_{\mathbb{K}} H_k(M; \mathbb{K}) = b_k(M; \mathbb{K})$  – sehen wir, dass  $E(k, n) := (D^k + D^{k-1} + 1) \cdot C$  (wobei  $D$  und  $C$  bekanntlich nur von  $n$  abhängen) die Behauptung erfüllt.  $\square$

Um aus der Homotopieäquivalenz des dicken Teils zu einem beschränkt komplizierten Simplicialkomplex auch Schranken an den Torsionsanteil der Homologie ableiten zu können, wird folgendes Lemma verwendet.

**Lemma 2.30** ([2] Lemma 5.2). *Für  $k, D \in \mathbb{N}$  existiert eine Konstante  $C = C(D, k) > 0$  mit der folgenden Eigenschaft: Ist  $Y$  ein topologischer Raum und  $K \subseteq Y$  ein (womöglich leerer) Teilraum, sodass  $(Y, K)$  homotopieäquivalent (als Paar) zu einem  $(D, V)$ -simplicialen Paar ist, so gilt*

$$\log (|\text{tors } H_k(Y, K; \mathbb{Z})|) \leq C \cdot V.$$

*Tatsächlich erfüllt  $C := D^k \cdot \log(k + 2)$  die Behauptung.*

*Beweis.* Bis auf die konkrete Wahl von  $C$  ist dies genau [2] Lemma 5.2. Aufgrund der vorausgesetzten Homotopieäquivalenz werden wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $(Y, K)$  selbst ein  $(D, V)$ -simpliciales Paar ist. Um die Aussage hinsichtlich der Größe von  $C$  zu beweisen, verfahren wir wie im dortigen Beweis: Ist  $\partial_{k+1} : C_{k+1}(Y, K; \mathbb{Z}) \rightarrow C_k(Y, K; \mathbb{Z})$  das Differential im relativen simplicialen Kettenkomplex, so stellen wir fest, dass wegen

$$H_k(Y, K; \mathbb{Z}) = \ker(\partial_k) / \text{im}(\partial_{k+1}) \subseteq C_k(Y, K; \mathbb{Z}) / \text{im}(\partial_{k+1}) = \text{coker}(\partial_{k+1})$$

eine Schranke an die Torsion in  $\text{coker}(\partial_{k+1})$  auch bereits eine Schranke an die Torsion in  $H_k(Y, K; \mathbb{Z})$  darstellt. Da die Anzahl an  $k$ -Simplizes im  $(D, V)$ -simplicialen Paar  $(Y, K)$  durch  $D^k \cdot V$  beschränkt ist, beträgt die  $\mathbb{C}$ -Dimension der Komplexifizierung  $C_k(Y, K; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$  von  $C_k(Y, K; \mathbb{Z})$  höchstens  $D^k \cdot V$ , wobei eine Hilbertbasis dieses  $\mathbb{C}$ -Vektorraums von der  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $C_k(Y, K; \mathbb{Z})$  induziert wird. Folglich finden wir eine Basis  $\{\partial_{k+1}(s_i) : i \in I\}$  von  $\text{im}(\partial_{k+1})_{\mathbb{C}} \subseteq C_k(Y, K; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}$  mit  $|I| \leq D^k \cdot V$ . Die Norm eines Basiselements  $\partial_{k+1}(s_i)$  (welches also das Bild des  $(k+1)$ -Simplex  $s_i$  unter dem Differential  $\partial_{k+1}$  ist) ist dabei durch  $k+2$  beschränkt. Beachte nun:

**Fakt.** ([2] Lemma 5.1) Seien  $A$  und  $B$  endlich erzeugte, freie  $\mathbb{Z}$ -Moduln mit  $\mathbb{Z}$ -Basen  $a_1, \dots, a_n$  und  $b_1, \dots, b_m$ . Statte  $B_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} B$  mit der Hilbertraum-Struktur aus, für welche  $b_1, \dots, b_m$  eine Hilbertbasis ist. Sei  $f : A \rightarrow B$  ein Homomorphismus und  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$  eine Teilmenge, sodass  $\{f(a_i) : i \in I\}$  eine Basis von  $\text{im}(f)_{\mathbb{C}}$  darstellt. Dann gilt

$$|\text{tors coker}(f)| \leq \prod_{i \in I} \|f(a_i)\|.$$

Die Anwendung dieses Fakts (wobei die Rolle von  $f : A \rightarrow B$  durch  $\partial_{k+1} : C_{k+1}(Y, K; \mathbb{Z}) \rightarrow C_k(Y, K; \mathbb{Z})$  übernommen wird) liefert unter Ausnutzung obiger Argumente somit

$$|\text{tors coker}(\partial_{k+1})| \leq \prod_{i \in I} \|\partial_{k+1}(s_i)\| \leq \prod_{i \in I} (k+2) = (k+2)^{|I|} \leq (k+2)^{D^k \cdot V},$$

also nach Logarithmieren

$$\log(|\text{tors coker}(\partial_{k+1})|) \leq \log((k+2)^{D^k \cdot V}) = D^k \cdot V \cdot \log(k+2) = C \cdot V,$$

die Behauptung. □

Hiermit ergibt sich unmittelbar die gewünschte Schranke an die Torsion in der Homologie von  $M$ .

**Satz 2.31.** *Es existiert eine lediglich von  $n$  abhängige Konstante  $F = F(n) > 0$ , sodass*

$$\log |\text{tors } H_k(M; \mathbb{Z})| \leq F \cdot \text{Vol}(M)$$

für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ , wobei für  $n = 3$  der Fall  $k = 1$  ausgeschlossen werden muss.

*Beweis.* Der Beweis stimmt mit dem von [2] Theorem 1.2 überein, wobei die Rolle des dortigen [2] Theorem 4.1 durch unser Hauptresultat Satz 2.28 sowie die Dick-dünn-Zerlegung 2.17 übernommen wird. Beachte, dass in [2] Theorem 1.2 gänzlich auf eine Aussage für Dimension  $n = 3$  verzichtet wird, obwohl der dortige Beweis auch für  $n = 3$  funktioniert, solange  $k = 1$  ausgeschlossen ist; wir werden nun begründen, weshalb dies der Fall ist.

Da  $H_0(M; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$  torsionsfrei ist, bleiben lediglich die Fälle  $k = 2, 3$  zu prüfen. Hierzu greifen wir auf das Argument im letzten Absatz des Beweises von [2] Theorem 1.2 zurück: Bezeichne erneut  $M_K$  den kompakten Teil von  $M$  sowie  $\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R \subseteq M_K$  die Vereinigung der (abgeschlossenen) Röhren (vgl. Beweis von Satz 2.29). Da die einzelnen Röhren homotopieäquivalent zur  $\mathbb{S}^1$  sind, gilt insbesondere  $H_k(\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R; \mathbb{Z}) = 0$  für  $k \geq 2$ , weshalb die lange exakte Sequenz des Paares  $(M_K, \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R)$  die Form

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow H_k(M_K; \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(M_K, \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{k-1}(\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R; \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

annimmt ( $k \geq 2$ ), womit wiederum die Injektivität von  $H_k(M_K; \mathbb{Z}) \rightarrow H_k(M_K, \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R; \mathbb{Z})$  folgt. Nun ist jedoch  $H_k(M_K, \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R; \mathbb{Z})$  nach Ausschneidung der (offenen) Röhren isomorph zu  $H_k(M_+, \partial_{\mathcal{R}} M_+; \mathbb{Z})$  (wobei  $\partial_{\mathcal{R}} M_+$  erneut den gemeinsamen Rand der Röhren mit dem dicken Teil bezeichne). Da  $(M_+, \partial_{\mathcal{R}} M_+)$  gemäß des Hauptresultats Satz 2.28 ein  $(D, C \cdot \text{Vol}(M))$ -simpliziales Paar ist, für welches nach Lemma 2.30 die Schranke an die Torsion bereits gilt, erhalten wir die Torsionsschranke folglich auch für den (injektiv in  $H_k(M_+, \partial_{\mathcal{R}} M_+; \mathbb{Z})$  einbettenden) Homologiemodul  $H_k(M_K; \mathbb{Z}) \cong H_k(M; \mathbb{Z})$  (wobei  $k \geq 2$ ). □

Wir machen darauf aufmerksam, dass der Ausschluss von Grad  $k = 1$  in Dimension  $n = 3$  in Satz 2.31 nicht einer – möglicherweise zu behebenden – Lücke im Beweis geschuldet ist, sondern dass die Torsion in diesem Fall tatsächlich nicht zu kontrollieren ist: In [2] Theorem 1.7 wird mittels Dehn-Chirurgie (welche die Sonderstellung von  $k = 1$  bei  $n = 3$  rechtfertigt) eine konkrete Beispielfolge hyperbolischer

3-Mannigfaltigkeiten mit gleichmäßig beschränktem Volumen, aber divergierender Torsion in erster Homologie konstruiert.

Als letzte Anwendung geben wir eine Aussage zur Anzahl an Homotopietypen von Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeiten wieder. Bezeichne hierzu  $\mathfrak{Htp}_n(V)$  die Anzahl an Homotopieklassen von  $n$ -dimensionalen, vollständigen Mannigfaltigkeiten mit Volumen höchstens  $V < \infty$  und Schnittkrümmung  $-1 \leq K < 0$ , deren universelle Überlagerung das Sichtbarkeits-Axiom erfüllt.

**Satz 2.32.** *Für  $n \geq 4$  existieren nur von der Dimension  $n$  abhängige Konstanten  $\alpha = \alpha(n), \beta = \beta(n) > 0$ , sodass*

$$\alpha \cdot V \cdot \log V \leq \log \mathfrak{Htp}_n(V) \leq \beta \cdot V \cdot \log V$$

für hinreichend großes  $V > 0$ .

*Beweis.* Der Beweis stimmt mit dem von [2] Theorem 1.5 überein. □

Beachte, dass wir in unserer Situation hieraus keine zu [2] Corollary 1.6 analoge Aussage – d.h. eine Zählung der Homöomorphietypen – folgern können, da das dort verwendete Resultat (von Farrell und Jones) lediglich für strikt negative Krümmung gilt.

## 2.3 Beispiele von Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeiten ohne strikt negative Krümmung

Abschließend geben wir in jeder Dimension  $n > 2$  ein Beispiel einer vollständigen Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeit endlichen Volumens mit  $-11 \leq K < 0$  (also bis auf Reskalierung  $-1 \leq K < 0$ ), welche nicht strikt negativ gekrümmt ist, d.h. für kein  $a < 0$  die Krümmungsbedingung  $-1 \leq K \leq a < 0$  erfüllt. Beachte jedoch, dass die so konstruierten Mannigfaltigkeiten auch eine hyperbolische Metrik zulassen – tatsächlich starten wir in unserer Konstruktion mit einer hyperbolischen Metrik –, welche sogar geringeres Volumen besitzt. Folglich dient dies nicht als das gewünschte Beispiel für die Trennung der (Homöomorphie- oder Diffeomorphie-)Klassen von Mannigfaltigkeiten mit  $-1 \leq K \leq a < 0$  und Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeiten mit  $-1 \leq K < 0$ . In [21] Abschnitt 8 wurde die analoge Konstruktion bereits für Dimension  $n = 2$  durchgeführt; unsere Argumentation ist zu weiten Teilen aus dieser Arbeit übernommen und verfolgt das Ziel, die dort behauptete Möglichkeit zur Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen zu belegen.

Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale hyperbolische Mannigfaltigkeit endlichen Volumens, welche nicht kompakt ist und somit mindestens eine Spitze  $S$  besitzt. Wir nehmen ferner an, dass  $S$  einen  $(n-1)$ -dimensionalen Torus  $\mathbb{T}^{n-1}$  als Querschnitt besitzt<sup>7</sup>. Bezeichnet  $g$  die Riemannsche Metrik von  $M$ , so besitzt  $g$  auf  $S \cong \mathbb{T}^{n-1} \times [0, \infty)$  die Gestalt einer durch  $\exp(-t)$  verzerrten Produktmetrik

$$\exp(-2t) ds^2 + dt^2,$$

wobei  $ds^2$  die flache Metrik auf dem  $\mathbb{T}^{n-1}$ -Faktor bezeichnet.

Genau wie in [21] Abschnitt 8 sei  $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion mit folgenden Eigenschaften:

1.  $h$  ist positiv und monoton fallend,
2.  $h''/h$  ist positiv und monoton fallend,
3.  $h(t) = \exp(-t)$  für  $0 \leq t \leq 1$ ,

---

<sup>7</sup>Zur Existenz einer solchen Mannigfaltigkeit mit Torus-Spitze siehe beispielsweise [22] Abschnitt vor Theorem 1.1.

4.  $h(t) = 1/t^2$  für  $t \geq 3$ .

Die Idee lautet nun, die Metrik auf der Spitze  $S$  mithilfe von  $h$  so abzuändern, dass die Krümmung beliebig flach wird, das Volumen weiterhin endlich bleibt, und ohne dabei die Sichtbarkeits-Eigenschaft zu zerstören; anschaulich wird  $S$  durch Übergang von der stärker fallenden Funktion  $\exp(-t)$  zur schwächer fallenden Funktion  $1/t^2$  abgeflacht. Genauer gehen wir auf  $S \cong \mathbb{T}^{n-1} \times [0, \infty)$  zur verzerrten Produktmetrik

$$h^2(t) ds^2 + dt^2$$

über und erhalten so eine neue (glatte, vollständige<sup>8</sup>) Metrik  $g'$  auf ganz  $M$ .

Tatsächlich besitzt  $M$  bezüglich  $g'$  weiterhin endliches Volumen, wie wir nun zeigen. Setzen wir  $M' := M \setminus \mathbb{T}^{n-1} \times (3, \infty)$ , so gilt

$$M' = M'' \cup \bigcup_{i=1}^k S_i,$$

wobei die  $S_i$  die übrigen (offenen) Spitzen (ungleich  $S$ ) von  $M$  darstellen und  $M''$  den kompakten Teil von  $M$  bezeichnet, welcher sich aus  $M$  durch Entfernen der  $S_i$  (für  $i = 1, \dots, k$ ) sowie des Teils  $\mathbb{T}^{n-1} \times (3, \infty) \subseteq \mathbb{T}^{n-1} \times [0, \infty) \cong S$  von  $S$  ergibt. Da die Metrik auf den  $S_i$  nicht geändert wurde, gilt  $\text{Vol}_{g'}(S_i) = \text{Vol}_g(S_i) < \infty$ ; ebenso ergibt sich nach Kompaktheit  $\text{Vol}_{g'}(M'') < \infty$ . Folglich schließen wir ebenso  $\text{Vol}_{g'}(M') < \infty$  und erhalten hinsichtlich des Volumens von  $M$  bezüglich  $g'$  nun

$$\begin{aligned} \text{Vol}_{g'}(M) &= \text{Vol}_{g'}(M') + \text{Vol}_{g'}(\mathbb{T}^{n-1} \times (3, \infty)) \\ &= \text{Vol}_{g'}(M') + \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \int_3^\infty h(t) dt ds \\ &= \text{Vol}_{g'}(M') + \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \int_3^\infty \frac{1}{t^2} dt ds \\ &= \text{Vol}_{g'}(M') + \int_{\mathbb{T}^{n-1}} \frac{1}{3} ds \\ &< \infty, \end{aligned}$$

da auch das letzte Integral nach Kompaktheit von  $\mathbb{T}^{n-1}$  endlich ist.

Naturgemäß ist die Berechnung der Krümmung in Dimension  $n > 2$  erheblich aufwendiger als in Dimension  $n = 2$ ; wir haben sie im folgenden Lemma zusammengefasst.

**Lemma 2.33.** *Bezeichnet  $K_M$  die Schnittkrümmung auf  $M$  bezüglich der neuen Metrik  $g'$ , so gilt:*

- Außerhalb von  $S$  sowie für  $t \leq 1$  auf  $S$  ist  $K_M = -1$ .
- Für  $1 < t < 3$  ist  $-11 \leq K_M \leq -0.04$  (unabhängig von  $t$ ).
- Für  $3 \leq t$  ist  $-\frac{6}{t^2} \leq K_M \leq -\frac{4}{t^2}$  (abhängig von  $t$ ).

*Beweis.* Außerhalb von  $S$  wurde die Metrik nicht geändert, weshalb dort alle Schnittkrümmungen weiterhin den Wert  $-1$  besitzen. Zur Berechnung der Schnittkrümmung auf  $S$  werden wir uns folgender Formel bedienen:

**Fakt.** ([6] S. 26) Seien  $(B, \langle \cdot, \cdot \rangle_B)$  und  $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$  Riemannsche Mannigfaltigkeiten sowie  $f$  eine positive, glatte Funktion auf  $B$ . Ferner sei  $M = B \times_f F$  das mittels  $f$  verzerrte Produkt, d.h. die Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$  besitzt im Punkt  $m = (b, p) \in B \times F$  die Gestalt

$$\langle X + V, Y + W \rangle_M = \langle X, Y \rangle_B + f^2(b) \cdot \langle V, W \rangle_F$$

<sup>8</sup>Die Vollständigkeit ergibt sich dabei wie in [21] Abschnitt 8, da gemäß [6] Lemma 7.2 das verzerrte Produkt vollständig ist, falls die Faktoren – bei uns also  $\mathbb{T}^{n-1}$  und  $[0, \infty)$  – dies waren.

für  $X + V, Y + W \in T_b B \oplus T_p F \cong T_m M$ . Ist  $\{X + V, Y + W\}$  eine Orthonormalbasis einer Tangentialebene  $\Pi$  in  $T_m M$ , so gilt für die Schnittkrümmung  $K_M(\Pi)$  von  $M$  in  $m = (b, p)$  bezüglich  $\Pi$  die Gleichung

$$\begin{aligned} K_M(\Pi) &= K_B(X, Y) \cdot \|X \wedge Y\|_B^2 \\ &\quad - f(b) \cdot \left[ \langle W, W \rangle_F \cdot \nabla^2 f(X, X) - 2 \langle V, W \rangle_F \cdot \nabla^2 f(X, Y) + \langle V, V \rangle_F \cdot \nabla^2 f(Y, Y) \right] \\ &\quad + f^2(b) \cdot \left[ K_F(V, W) - \|(\text{grad } f)(b)\|_B^2 \right] \cdot \|V \wedge W\|_F^2. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnen  $K_B$  und  $K_F$  die Schnittkrümmungen von  $(B, \langle \cdot, \cdot \rangle_B)$  und  $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle_F)$ ,  $\nabla^2 f$  die Hesse-Form von  $f$  und  $(\text{grad } f)$  den Gradienten von  $f$ . Ferner sind die beiden Terme  $\|X \wedge Y\|_B^2$  und  $\|V \wedge W\|_F^2$  wie folgt zu verstehen: Ist  $U$  ein Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , so ist durch

$$\langle U_1 \wedge U_2, U_3 \wedge U_4 \rangle := \det \begin{pmatrix} \langle U_1, U_3 \rangle & \langle U_1, U_4 \rangle \\ \langle U_2, U_3 \rangle & \langle U_2, U_4 \rangle \end{pmatrix}$$

ein kanonisches Skalarprodukt auf der äußeren Potenz  $\Lambda^2(U)$  gegeben.

Wir übernehmen zunächst obige Bezeichnungen für unsere Situation – d.h.  $B = [0, \infty)$ ,  $F = \mathbb{T}^{n-1}$ ,  $f = h$ , sowie  $\langle \cdot, \cdot \rangle_M = g'$  –, wobei sich nun erhebliche Vereinfachungen ergeben. Zuerst stellen wir fest, dass die erste Zeile verschwindet, da  $[0, \infty)$  eindimensional ist und folglich  $K_B(X, Y) = 0$  gilt. Da der Torus flach ist, ist in der letzten Zeile ebenso  $K_F(V, W) = 0$  erfüllt. Ohne Einschränkung können wir außerdem  $X = 0$  annehmen<sup>9</sup>. Es ergibt sich

$$K_M(\Pi) = -f(b) \cdot \langle V, V \rangle_F \cdot \nabla^2 f(Y, Y) - f^2(b) \cdot \|(\text{grad } f)(b)\|_B^2 \cdot \|V \wedge W\|_F^2.$$

Wie erwähnt entspricht  $f(b)$  unserem  $h(t)$  (d.h. wir schreiben für  $m = (b, p)$  von nun an auch  $(t, p)$ ), womit

$$\nabla^2 f = h'' \quad \text{sowie} \quad (\text{grad } f) = h'$$

folgt. Der Übergang zu unserer Notation führt zu

$$K_M(\Pi) = -h(t) \cdot \langle V, V \rangle_{\mathbb{T}^{n-1}} \cdot h''(t) \cdot Y^2 - h^2(t) \cdot |h'(t)|^2 \cdot \|V \wedge W\|_{\mathbb{T}^{n-1}}^2,$$

wobei  $Y \in \mathbb{R}$  (s.o.,  $B = [0, \infty)$  ist eindimensional). Da  $X + V = V$  als normiert bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$  vorausgesetzt wurde – d.h.  $\langle V, V \rangle_M = 1$  –, erhalten wir mittels der Formel

$$\langle V, W \rangle_M = h^2(t) \cdot \langle V, W \rangle_{\mathbb{T}^{n-1}} \quad \text{für allgemeine } V, W \in T_p \mathbb{T}^{n-1} \subseteq T_m M$$

(vgl. Definition des verzerrten Produkts) schließlich

$$\langle V, V \rangle_{\mathbb{T}^{n-1}} = \frac{1}{h^2(t)} \cdot \langle V, V \rangle_M = \frac{1}{h^2(t)}.$$

Gemäß der Orthogonalität von  $X + V = V$  und  $Y + W$  bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$  ergibt sich außerdem

$$\begin{aligned} 0 &= \langle X + V, Y + W \rangle_M \\ &= \langle X, Y \rangle_B + h^2(t) \cdot \langle V, W \rangle_{\mathbb{T}^{n-1}} \\ &= h^2(t) \cdot \langle V, W \rangle_{\mathbb{T}^{n-1}}, \end{aligned}$$

<sup>9</sup>Ist  $V$  ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum und  $U \subseteq V$  ein zweidimensionaler Unterraum, so existiert stets eine Orthonormalbasis  $\{u, u'\}$  von  $U$  mit  $u_1 = 0$  (wobei  $u = (u_1, \dots, u_n)$ ,  $u' = (u'_1, \dots, u'_n)$ ): Ohne Einschränkung können wir zunächst  $u_1 \neq 0 \neq u'_1$  annehmen (denn sonst wären wir schon fertig), weshalb  $u_1/u'_1$  wohldefiniert ist. Dann ist die erste Koordinate von  $\tilde{u} := u - (u_1/u'_1) \cdot u'$  bereits 0, und nach linearer Unabhängigkeit gilt ferner  $\tilde{u} \neq 0$ . Setze nun  $\tilde{u}$  mittels Gram-Schmidt-Verfahren zu einer Orthonormalbasis von  $U$  fort. In unserem Anwendungsfall übernimmt  $T_m M$  die Rolle von  $V$ , die zu  $T_b B$  (welches eindimensional ist) gehörige Koordinate die Rolle der ersten Koordinate und  $\Pi$  die Rolle von  $U$ .

d.h. aufgrund von  $h > 0$  auch  $\langle V, W \rangle_{\mathbb{T}^{n-1}} = 0$ . Die Normiertheit von  $Y + W$  bezüglich  $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$  führt wiederum zu

$$\begin{aligned} 1 &= \langle Y + W, Y + W \rangle_M \\ &= \langle Y, Y \rangle_B + h^2(t) \cdot \langle W, W \rangle_{\mathbb{T}^{n-1}} \\ &= Y^2 + h^2(t) \cdot \langle W, W \rangle_{\mathbb{T}^{n-1}}, \end{aligned}$$

also

$$\langle W, W \rangle_{\mathbb{T}^{n-1}} = \frac{1 - Y^2}{h^2(t)}.$$

Setzen wir all diese Terme in die Definition von  $\|V \wedge W\|_{\mathbb{T}^{n-1}}^2$  ein, so schließen wir

$$\begin{aligned} \|V \wedge W\|_{\mathbb{T}^{n-1}}^2 &= \langle V \wedge W, V \wedge W \rangle_{\mathbb{T}^{n-1}} \\ &= \det \begin{pmatrix} \langle V, V \rangle_{\mathbb{T}^{n-1}} & \langle V, W \rangle_{\mathbb{T}^{n-1}} \\ \langle W, V \rangle_{\mathbb{T}^{n-1}} & \langle W, W \rangle_{\mathbb{T}^{n-1}} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1/h^2(t) & 0 \\ 0 & (1 - Y^2)/h^2(t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1 - Y^2}{h^4(t)}. \end{aligned}$$

Die Formel für die Schnittkrümmung erhält damit die Gestalt<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} K_M(\Pi) &= -h(t) \cdot \frac{1}{h^2(t)} \cdot h''(t) \cdot Y^2 - h^2(t) \cdot |h'(t)|^2 \cdot \frac{1 - Y^2}{h^4(t)} \\ &= -\frac{h''(t)}{h(t)} \cdot Y^2 - \frac{|h'(t)|^2}{h^2(t)} \cdot (1 - Y^2). \end{aligned}$$

Beachte, dass stets  $Y^2 \in [0, 1]$  erfüllt ist sowie nach Eigenschaft 1. und 2. von  $h$  auch  $h'' > 0$  folgt, also insbesondere  $K_M(\Pi) < 0$  für beliebiges  $t \in [0, \infty)$ . Ferner gilt  $h'(t) \in [h'(1), h'(3)]$  für  $t \in [1, 3]$ : Denn wäre  $h'(t) \notin [h'(1), h'(3)]$  für ein  $t \in (1, 3)$ , so würde  $h'$  in  $(1, 3)$  ein echtes Extremum besitzen (d.h. eines, welches kein Randextremum ist); diese Extremstelle von  $h'$  wäre aber zugleich Nullstelle von  $h''$ , im Widerspruch zu  $h'' > 0$ . Aufgrund von  $h'(1) = -\exp(-1)$  sowie  $h'(3) = -2/3^3$  erhalten wir damit

$$h'(t) \in [-1/e, -2/27] \quad \text{für } t \in (1, 3).$$

Wir werden nun (abhängig von  $t$ ) untere und obere Schranken an die Schnittkrümmung bestimmen:

- $t \leq 1$ : Hier wurde die Metrik nicht geändert (denn  $h(t) = \exp(-t)$ ), es gilt – wie auch außerhalb von  $S$  – weiterhin  $K_M \equiv -1$ .

<sup>10</sup>Es ist durchaus beruhigend, nach den langwierigen Rechnungen an diesem Punkt festzustellen, dass sich im Falle einer nicht geänderten Metrik – d.h.  $h(t) = \exp(-t)$  für alle  $t$  – tatsächlich eine konstante Krümmung von  $-1$  ergäbe.

•  $1 < t < 3$ : Wir berechnen

$$\begin{aligned}
K_M(\Pi) &= -\frac{h''(t)}{h(t)} \cdot Y^2 - \frac{|h'(t)|^2}{h^2(t)} \cdot (1 - Y^2) \\
&\leq -\min\left(\frac{h''(t)}{h(t)}, \frac{|h'(t)|^2}{h^2(t)}\right) \cdot Y^2 - \min\left(\frac{h''(t)}{h(t)}, \frac{|h'(t)|^2}{h^2(t)}\right) \cdot (1 - Y^2) \\
&= -\min\left(\frac{h''(t)}{h(t)}, \frac{|h'(t)|^2}{h^2(t)}\right) \\
&\leq -\min\left(\inf_{1 < t < 3} \frac{h''(t)}{h(t)}, \inf_{1 < t < 3} \frac{|h'(t)|^2}{h^2(t)}\right) \\
&\leq -\min\left(\frac{h''(3)}{h(3)}, \frac{2^2/27^2}{h^2(1)}\right) \\
&= -\min\left(\frac{6/3^4}{1/3^2}, \frac{4/729}{1/e^2}\right) \\
&\leq -0.04
\end{aligned}$$

sowie analog

$$\begin{aligned}
K_M(\Pi) &\geq -\max\left(\sup_{1 < t < 3} \frac{h''(t)}{h(t)}, \sup_{1 < t < 3} \frac{|h'(t)|^2}{h^2(t)}\right) \\
&\geq -\max\left(\frac{h''(1)}{h(1)}, \frac{1/e^2}{h^2(3)}\right) \\
&\geq -11.
\end{aligned}$$

•  $3 \leq t$ : In diesem Bereich gilt  $h(t) = 1/t^2$ , womit sich

$$\begin{aligned}
K_M(\Pi) &= -\frac{h''(t)}{h(t)} \cdot Y^2 - \frac{|h'(t)|^2}{h^2(t)} \cdot (1 - Y^2) \\
&= -\frac{6/t^4}{1/t^2} \cdot Y^2 - \frac{4/t^6}{1/t^4} \cdot (1 - Y^2) \\
&= -\frac{6}{t^2} \cdot Y^2 - \frac{4}{t^2} \cdot (1 - Y^2) \\
&= -\frac{4}{t^2} - \frac{2}{t^2} \cdot Y^2
\end{aligned}$$

ergibt, also

$$-\frac{6}{t^2} \leq K_M(\Pi) \leq -\frac{4}{t^2}.$$

□

Wir haben damit insbesondere bewiesen, dass  $M$  bezüglich der neuen Metrik  $g'$  global der Krümmungsbedingung  $-11 \leq K_M < 0$  genügt, aber andererseits – da  $-6/t^2 \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$  – für kein  $a < 0$  die Schranke  $K_M \leq a < 0$  erfüllt<sup>11</sup>. Trotz der Abflachung der Spitze  $S$  ist  $M$  jedoch weiterhin eine Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeit:

**Lemma 2.34.** *Die universelle Überlagerung von  $(M, g')$  erfüllt das Sichtbarkeits-Axiom.*

*Beweis.* Wie auch in [21] Abschnitt 8 greifen wir auf das folgende Kriterium zurück:

<sup>11</sup>Tatsächlich ließe sich mit der identischen Argumentation wie in [21] Abschnitt 8 zusätzlich zeigen, dass die universelle Überlagerung von  $(M, g')$  auch nicht Gromov-hyperbolisch ist; beachte in diesem Zusammenhang, dass jede Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $K \leq a < 0$  (für ein  $a < 0$ ) bereits Gromov-hyperbolisch wäre.

**Fakt.** ([16] Proposition 5.9) Sei  $X$  eine Hadamard-Mannigfaltigkeit. Existiert ein  $x \in X$ , sodass

$$\int_1^\infty k_V(t) \cdot t \, dt = \infty$$

für alle normierten Tangentialvektoren  $V \in T_x X$ , so erfüllt  $X$  das Sichtbarkeits-Axiom. Hierbei bezeichnet  $k_V(t) = \min_{\Pi \ni \dot{c}_V(t)} |K_X(\Pi)|$  das über alle zweidimensionalen Unterräume  $\Pi \subseteq T_{c_V(t)} X$  mit  $\dot{c}_V(t) \in \Pi$  gebildete Minimum der (betraglichen) Schnittkrümmungen im Punkt  $c_V(t)$ , mit  $c_V$  der eindeutigen Geodätischen mit  $c_V(0) = x$  und  $\dot{c}_V(0) = V$ .

Bezeichne  $X$  die universelle Überlagerung von  $(M, g')$ . Wir wählen  $x \in X$  im Urbild des Randes von  $S$ , d.h.  $\pi(x) \in \mathbb{T}^{n-1} \times \{0\}$  (mit  $\pi : X \rightarrow M$  wie üblich). Sei  $V \in T_x X$  ein beliebiger normierter Tangentialvektor; beachte nun, dass gemäß Lemma 2.33 für die Schnittkrümmung in  $c_V(t)$  stets  $K_X \leq -0.04/t^2$  erfüllt ist (für  $t \geq 1$ ), also insbesondere  $|K_X| \geq 0.04/t^2$  und damit  $k_V(t) \geq 0.04/t^2$ . Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_1^\infty k_V(t) \cdot t \, dt &\geq \int_1^\infty \frac{0.04}{t^2} \cdot t \, dt \\ &= 0.04 \cdot \int_1^\infty \frac{1}{t} \, dt \\ &= \infty, \end{aligned}$$

weshalb mithilfe des obigen Fakts die Behauptung folgt. □

## Kapitel 3

---

### Orbifaltigkeiten

---

Orbifaltigkeiten können in gewisser Weise als Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten angesehen werden und stellen eine natürliche Verallgemeinerung selbiger dar. Wir werden in diesem Kapitel zunächst einige grundlegende Begriffe rund um Orbifaltigkeiten kurz wiederholen, um uns anschließend der Dick-dünn-Zerlegung negativ gekrümmter Orbifaltigkeiten zu widmen; die Dick-dünn-Zerlegung dient wie im Fall von Mannigfaltigkeiten als nützliches Hilfsmittel bei der Untersuchung der topologischen Struktur.

Das abschließende Hauptresultat entspricht in seiner Art dem von Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeiten: Es lässt sich ein effizientes simpliziales Modell für den dicken Teil der Orbifaltigkeit finden, was dann in späteren Anwendungen Schranken an die Homologie der gesamten Orbifaltigkeit zur Folge hat.

### 3.1 Grundlagen

Wir beginnen mit einer kurzen Einführung zu Orbifaltigkeiten. Als grundlegende Quelle vieler Definitionen und elementarer Eigenschaften dient [26] Kapitel 13, insbesondere Kapitel 13.2. Die technische Definition von Orbifaltigkeiten geben wir jedoch nur der Vollständigkeit halber wieder; unsere Werkzeuge werden später nicht Orbifaltigkeitskarten sein, sondern das Verständnis der (nun eben nicht mehr freien) Gruppenwirkung auf einer Hadamard-Mannigfaltigkeit  $X$ .

Unter einer  $n$ -dimensionalen Orbifaltigkeit  $M$  verstehen wir einen zweitabzählbaren Hausdorffraum, welcher lokal homöomorph ist zu Quotienten von offenen Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  nach endlichen Gruppenwirkungen. Genauer fordern wir: Es existiert eine Überdeckung  $\{U_i\}$  von  $M$  durch offene Mengen, welche abgeschlossen unter endlichen Durchschnitten ist, sodass für jedes  $U_i$  eine endliche Gruppe  $\Gamma_i$  sowie eine Wirkung von  $\Gamma_i$  auf einer offenen Teilmenge  $U'_i \subseteq \mathbb{R}^n$  existiert, sodass  $U_i$  homöomorph zu  $U'_i/\Gamma_i$  ist, wobei wir selbigen Homöomorphismus  $U_i \rightarrow U'_i/\Gamma_i$  mit  $\varphi_i$  bezeichnen. Gilt  $U_i \subseteq U_j$ , so soll ein injektiver Homomorphismus  $f_{ij} : \Gamma_i \hookrightarrow \Gamma_j$  sowie eine Einbettung  $\varphi'_{ij} : U'_i \hookrightarrow U'_j$  existieren, welche äquivariant bezüglich  $f_{ij}$  ist, d.h. für  $\gamma \in \Gamma_i$  gilt  $\varphi'_{ij}(\gamma x) = f_{ij}(\gamma)\varphi'_{ij}(x)$ . Diese Homomorphismen und Einbettungen müssen dabei so zu wählen sein, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
U'_i & \xrightarrow{\varphi'_{ij}} & U'_j \\
\downarrow & & \downarrow \\
U'_i/\Gamma_i & \xrightarrow{\varphi'_{ij}/\Gamma_i} & U'_j/f_{ij}(\Gamma_i) \\
\uparrow \varphi_i & & \downarrow \\
U_i & \xrightarrow{\subseteq} & U_j \\
& & \uparrow \varphi_j \\
& & U'_j/\Gamma_j
\end{array}$$

kommutiert. Hierbei sind die unbeschrifteten Abbildungen gerade die offensichtlichen Projektionen in den jeweiligen Quotienten. Wir machen darauf aufmerksam, dass jede Mannigfaltigkeit insbesondere eine Orbifaltigkeit darstellt, nämlich für den Fall einer trivialen Gruppenwirkung in jeder Karte; in diesem Sinne bilden Orbifaltigkeiten eine größere Klasse.

Wie bei Mannigfaltigkeiten lässt sich durch Übergang von Homöomorphismen zu Diffeomorphismen eine differenzierbare Struktur definieren; eine Riemannsche Metrik auf  $M$  wiederum lässt sich durch Angabe von Riemannschen Metriken in den Karten  $U'_i \subseteq \mathbb{R}^n$  erklären, wobei lediglich zu fordern bleibt, dass selbige Metriken invariant unter der  $\Gamma_i$ -Wirkung sind sowie in den Überlappungen der Karten verträglich zueinander gewählt werden. Dies wiederum führt zu Begriffen wie Schnittkrümmung, Volumen uvm., ganz analog zum Fall von Mannigfaltigkeiten. Eine ausführliche Behandlung der Riemannschen Geometrie von Orbifaltigkeiten (mit vielen Entsprechungen zu klassischen Aussagen aus der Theorie von Mannigfaltigkeiten) ist in [7] zu finden.

Während der Quotient einer Mannigfaltigkeit nach einer freien und eigentlich diskontinuierlichen Gruppenwirkung bekanntlich selbst wiederum eine Mannigfaltigkeit ist, so trägt der Bahnenraum bezüglich einer lediglich eigentlich diskontinuierlichen Wirkung (d.h. wir fordern keine Fixpunktfreiheit mehr) weiterhin die Struktur einer Orbifaltigkeit (siehe z.B. [26] Proposition 13.2.1); auch in diesem Sinne sind Orbifaltigkeiten folglich als natürliche Verallgemeinerung von Mannigfaltigkeiten zu verstehen. Für unsere spätere Situation in negativer Krümmung – d.h.  $X$  wird eine Hadamard-Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $-1 \leq K \leq a < 0$  sein – sei daran erinnert, dass Mannigfaltigkeiten  $M$  (endlichen Volumens) gemäß  $M = X/\Gamma$  für *torsionsfreie* Gitter  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  entstehen, wohingegen Orbifaltigkeiten (endlichen Volumens) als Quotient von  $X$  bezüglich *allgemeiner* Gitter (welche also Elemente endlicher Ordnung enthalten können) auftreten. Tatsächlich werden wir später nie auf Orbifaltigkeitskarten zurückgreifen<sup>1</sup>, sondern stets mit – nun eben nicht mehr freien – Gruppenwirkungen auf Hadamard-Mannigfaltigkeiten  $X$  arbeiten.

Anschaulich lassen sich Orbifaltigkeiten als Mannigfaltigkeiten mit Singularitäten auffassen; diese Singularitäten sind eine abgeschlossene Teilmenge von Maß 0. Genauer bilden diejenigen Punkte, welche in einer Karte  $U_i$  in der Fixpunktmenge der endlichen Gruppenwirkung  $\Gamma_i$  liegen, die **singuläre Menge** von  $M$ . Wir werden zur Beschreibung der singulären Menge die außerordentlich praktische Notation aus [25] verwenden. Hierzu schränken wir uns zunächst auf die für uns relevante Situation einer  $n$ -dimensionalen Hadamard-Mannigfaltigkeit  $X$  mit Schnittkrümmung  $-1 \leq K \leq a < 0$  sowie einem Gitter  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  ein. Die **singuläre Menge** in  $X$  besteht dann aus den Fixpunktmenge elliptischer Elemente von  $\Gamma$  (welches vollständige, konvexe, total geodätische Untermannigfaltigkeiten von Dimension  $< n$  sind); sie ist genau das Urbild der singulären Menge von  $M = X/\Gamma$ . Wie in [25] Abschnitt 4.1 schreiben wir für die gemeinsame Fixpunktmenge einer endlichen Gruppe  $G < \text{Isom}(X)$  auch  $\text{Fix}(G) := \bigcap_{g \in G} \text{Fix}(g)$  und

<sup>1</sup>Was in Anbetracht der doch recht mühsamen Definition sicherlich als Erleichterung zu verstehen ist.

definieren für allgemeines  $\Delta < \text{Isom}(X)$  entsprechend

$$\begin{aligned}\Sigma(\Delta) &:= \{\text{Fix}(G) : G < \Delta \text{ endlich}\}, \\ \Sigma_i(\Delta) &:= \{Y \in \Sigma(\Delta) : \dim(Y) = i\}, \text{ sowie} \\ \Sigma_{<i}(\Delta) &:= \{Y \in \Sigma(\Delta) : \dim(Y) < i\}.\end{aligned}$$

Ferner übernehmen wir die Definition

$$S_i(\Delta) := \bigcup_{Y \in \Sigma_i(\Delta)} Y$$

sowie

$$S_{<i}(\Delta) := \bigcup_{Y \in \Sigma_{<i}(\Delta)} Y.$$

Wir werden  $\Delta$  in der Notation unterschlagen, falls es aus dem Kontext ersichtlich ist. Ferner sei darauf aufmerksam gemacht, dass wegen  $\text{id} \in \Delta$  (für beliebiges  $\Delta < \text{Isom}(X)$ ) insbesondere stets  $X = \text{Fix}(\{\text{id}\}) \in \Sigma(\Delta)$  gilt.

## 3.2 Dick-dünn-Zerlegung

Bei Mannigfaltigkeiten hatten wir bereits gesehen, dass die Zerlegung in einen dicken und einen dünnen Teil die Untersuchung ihrer Topologie wesentlich vereinfacht; entsprechend werden wir auch bei Orbifaltigkeiten auf diese Grundidee zurückgreifen. Wir betrachten stets die folgende Situation:  $X$  sei eine  $n$ -dimensionale Hadamard-Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $-1 \leq K \leq a < 0$  (für ein passendes  $a < 0$ ) sowie  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  ein Gitter, welches im Allgemeinen nicht torsionsfrei ist. Somit besitzt  $M = X/\Gamma$  wie erwähnt die Struktur einer Orbifaltigkeit endlichen Volumens, welche ebenso obige Krümmungsbedingungen erfüllt.

### 3.2.1 Allgemeines

In [9] wurde bereits eine Dick-dünn-Zerlegung von Orbifaltigkeiten für strikt negative Krümmung durchgeführt; obwohl dort die Forderung  $-\kappa^2 \leq K \leq -1$  an die Schnittkrümmung gestellt wird, sind die Ergebnisse – nach Reskalierung auf  $-1 \leq K \leq a < 0$  – auch für unsere Situation nutzbar. Unsere Erweiterung gegenüber der dortigen Situation besteht wie beim Fall von Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeiten im Wesentlichen erneut darin, eine variable Wahl der Niveaus zuzulassen, d.h. die verschiedenen Isometrien unterschiedlich zu gewichten. Tatsächlich werden wir – diesmal im Gegensatz zum Fall von Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeiten – auch auf diese Erweiterung zurückgreifen; sie ermöglicht es uns den dünnen Teil allein anhand der hyperbolischen und parabolischen Isometrien zu beschreiben, womit elliptische Isometrien in dieser Hinsicht also keine Rolle spielen. Neben der genannten Neuerung werden wir ferner auch viele Detailfragen genauer klären, beispielsweise die genaue (algebraische) Struktur hyperbolischer Gruppen bzw. (topologische) Struktur der Röhren.

Während der dicke Teil von  $X$  bei Mannigfaltigkeiten – also torsionsfreiem  $\Gamma$  – aus denjenigen Punkten bestand, welche für ein kleines  $\varepsilon$  durch keine nichttriviale Isometrie um weniger als  $\varepsilon$  verschoben wurden, erfordert das nun mögliche Auftreten elliptischer Isometrien (mit Fixpunkten und daher beliebig kleiner Verschiebung nahe der Fixpunktmenge) eine Anpassung in der Definition: So wird in [9] der dicke Teil dadurch definiert, dass die zugehörige Gruppe von Isometrien kleiner Verschiebung *endlich* ist (und eben nicht mehr *trivial* wie bei Mannigfaltigkeiten). Wollen wir ferner die Kardinalität dieser endlichen Gruppe

kontrollieren, so führt dies zum Begriff des quasidicken Teils wie in [25]; genauer betrachten wir für  $\varepsilon > 0$  und  $x \in X$  die Gruppe

$$\Gamma_\varepsilon(x) := \langle \gamma \in \Gamma : d_\gamma(x) < \varepsilon \rangle,$$

womit sich für  $m \in \mathbb{N}$  der  $(\varepsilon, m)$ -**quasidicke Teil** von  $X$  gemäß

$$X_{\geq \varepsilon, m} := \{x \in X : |\Gamma_\varepsilon(x)| \leq m\}$$

ergibt. Der  $\varepsilon$ -**dicke Teil** von  $X$  wie in [9] hingegen ist durch

$$X_{\geq \varepsilon} := \{x \in X : |\Gamma_\varepsilon(x)| \text{ ist endlich}\}$$

gegeben. Entsprechend definieren wir den (quasi-)dicken Teil von  $M$  als Quotient des (quasi-)dicken Teils von  $X$  nach der Wirkung durch  $\Gamma$ ; ebenso ist der **dünne Teil** genau das Komplement des dicken Teils. Folgendes Lemma stellt sicher, dass sich der  $\varepsilon$ -dicke Teil stets als  $(\varepsilon, m)$ -quasidicker Teil für ein geeignetes  $m$  auffassen lässt:

**Lemma 3.1** ([9] Proposition 5.4.2). *Für jedes Gitter  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  existiert ein  $\eta = \eta(\Gamma) \in \mathbb{N}$ , sodass  $|G| \leq \eta$  für alle endlichen Untergruppen  $G$  von  $\Gamma$ .*

Folglich gilt  $X_{\geq \varepsilon} = X_{\geq \varepsilon, \eta}$ .

**Bemerkung 3.2.** Es stellt sich die Frage, welche Werte diese Schranke  $\eta$  annehmen kann und ob sie – für bestimmte Klassen von Orbifaltigkeiten – selbst gleichmäßig beschränkt ist. Zunächst merken wir an, dass falls eine (Orbifaltigkeits-)Überlagerung  $p : M' \rightarrow M$  von Grad  $d < \infty$  durch eine Mannigfaltigkeit  $M'$  existiert, dann auch  $\eta$  durch  $d$  beschränkt ist. Sei hierzu  $G < \Gamma$  endlich, womit bereits ein gemeinsamer Fixpunkt  $x \in X$  von  $G$  existiert (Fixpunktsatz von Bruhat-Tits). Wählen wir hinreichend kleine (Orbifaltigkeits-)Karten  $U \subseteq M$  und  $U' \subseteq M'$  um  $q := \pi(x) \in M$  und einen Lift  $q' \in M'$  von  $q$ , so sehen wir, dass  $p|_{U'} : U' \rightarrow U$  eine (Orbifaltigkeits-)Überlagerung ist, deren Grad mindestens  $|G|$  beträgt, d.h.  $|G| \leq \deg(p|_{U'})$ ; mit  $\deg(p|_{U'}) = \deg(p) = d$  ist folglich  $|G| \leq d$  bewiesen.

Lässt sich  $\text{Isom}(X)$  als Untergruppe von  $GL_m(\mathbb{K})$  für einen Körper  $\mathbb{K}$  von Charakteristik 0 auffassen, so folgt mit dem Lemma von Selberg, dass jedes Gitter  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  eine torsionsfreie Untergruppe  $\Gamma'$  von endlichem Index besitzt. Da dieser Index mit dem Grad der (Orbifaltigkeits-)Überlagerung  $X/\Gamma' \rightarrow X/\Gamma$  übereinstimmt, stellt er nach obiger Argumentation bereits die Schranke  $\eta$  an die Ordnung endlicher Untergruppen von  $\Gamma$  dar (beachte, dass  $X/\Gamma'$  eine Mannigfaltigkeit ist). Dieses Standardargument dient auch als Beweis der Lemma 3.1 entsprechenden Aussage im hyperbolischen Fall  $X = \mathbb{H}^n$  in [8] Proposition 3.1.7 (Gitter erfüllen stets die dortige Bedingung GF1).

Im Allgemeinen existiert keine gleichmäßige Schranke an den Index im Lemma von Selberg, weshalb auch keine gleichmäßige Schranke an  $\eta = \eta(\Gamma)$  über alle Gitter  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  zu erwarten ist. Für bestimmte Spezialfälle lässt sich dies jedoch erreichen: Falls  $X$  sogar ein symmetrischer Raum ist, so besitzt nach [17] Lemma 13.1 jedes nicht-uniforme, arithmetische Gitter  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  einen torsionsfreien Normalteiler  $\Gamma'$ , wobei der Index  $[\Gamma : \Gamma']$  stets durch einen nur von  $\text{Isom}(X)$  abhängigen Wert  $i = i(\text{Isom}(X)) \in \mathbb{N}$  beschränkt ist. Somit stellt dieses  $i$  einen gleichmäßigen Wert für  $\eta$  für alle nicht-uniformen, arithmetischen Gitter  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  dar.  $\blacklozenge$

Obige Schranke  $\eta$  an die Ordnung endlicher Untergruppen von  $\Gamma$  wird an vielen Stellen von zentraler Bedeutung sein; insbesondere ist es hilfreich, dass wir in der Nähe von Fixpunkten stets Punkte finden, welche eine gleichmäßige untere Schranke an ihre Verschiebung besitzen.

**Lemma 3.3.** *Sind  $x \in X$  und  $\varepsilon > 0$ , sodass  $\Gamma_\varepsilon(x)$  endlich ist, so existiert ein  $y$  mit  $d(x, y) < \varepsilon/4$ , sodass  $d_\Gamma(y) \geq \rho$ , wobei  $\rho = \rho(\varepsilon, \eta) > 0$ .*

*Beweis.* Die Aussage ist eine Abwandlung der folgenden Tatsache:

**Fakt.** ([4] Lemma 12.7) Ist  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  diskret,  $x \in X$  und  $\varepsilon > 0$ , sodass  $|\Gamma_\varepsilon(x)| = m \geq 2$ , so existiert ein  $y$  mit  $d(x, y) < \varepsilon/4$ , sodass  $d_\Gamma(x) \geq \rho'$ , wobei  $\rho' = \rho'(\varepsilon, m) > 0$ . Genauer lässt sich  $\rho' = (\varepsilon/2^m) \cdot \sin(\pi/m)$  wählen.

Gemäß des obigen Fakts erhalten wir für alle  $m = 2, \dots, \eta$  Werte  $\rho'(\varepsilon, m) > 0$ , sodass falls  $|\Gamma_\varepsilon(x)| = m$  gilt, die Behauptung durch  $\rho'(\varepsilon, m)$  erfüllt wird, wobei  $\eta$  wie in Lemma 3.1. Beachte, dass der einzige verbleibende Fall  $m = 1$  – d.h.  $|\Gamma_\varepsilon(x)| = 1$  – mit  $d_\Gamma(x) \geq \varepsilon$  gleichbedeutend ist, weshalb dann bereits  $y = x$  und  $\rho = \varepsilon$  der Behauptung genügen. Insgesamt schließen wir somit, dass die Aussage für

$$\rho := \min\left(\varepsilon, \min_{m=2, \dots, \eta} \frac{\varepsilon}{2^m} \sin\left(\frac{\pi}{m}\right)\right) = \min_{m=2, \dots, \eta} \frac{\varepsilon}{2^m} \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) = \frac{\varepsilon}{2^\eta} \sin\left(\frac{\pi}{\eta}\right)$$

erfüllt ist. Beachte, dass  $\rho$  nur von  $\varepsilon$  und  $\eta$  abhängt (sowie  $\rho > 0$ , da ohne Einschränkung  $\eta \geq 2$ ).  $\square$

Wir beginnen mit unserer abgewandelten Definition des dicken Teils. Jedem  $\gamma \in \Gamma$  wird ein Niveau  $\varepsilon_\gamma \in [\varepsilon, \varepsilon(n)]$  zugeordnet; hierbei bezeichnet  $\varepsilon(n)$  das Margulis- $\varepsilon$  (vgl. Satz 2.1) und  $\varepsilon > 0$  eine vorher festgelegte, aber frei wählbare Konstante. Die Wahl der Niveaus soll dabei konjugationsinvariant erfolgen, d.h.  $\varepsilon_{\gamma\gamma'\gamma^{-1}} = \varepsilon_{\gamma'}$  für alle  $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ . In späteren Anwendungen werden wir  $\varepsilon$  meist selbst als einen bestimmten Bruchteil von  $\varepsilon(n)$  wählen, um so zu gewährleisten, dass möglichst nur die Dimension  $n$  als variable Größe die Konstanten in der Dick-dünn-Zerlegung kontrolliert.

Definiere nun

$$\Gamma_{\varepsilon_\Gamma}(x) := \langle \gamma \in \Gamma : d_\gamma(x) < \varepsilon_\gamma \rangle$$

und entsprechend den **dicken Teil**  $X_+$  von  $X$  als

$$X_+ := \{x \in X : \Gamma_{\varepsilon_\Gamma}(x) \text{ ist endlich}\}.$$

Der **dünne Teil**  $X_-$  ist dessen Komplement, d.h.

$$X_- := \{x \in X : \Gamma_{\varepsilon_\Gamma}(x) \text{ ist unendlich}\}.$$

Wir definieren den **dicken Teil**  $M_+$  bzw. **dünnen Teil**  $M_-$  von  $M = X/\Gamma$  als Quotient des dicken bzw. dünnen Teils von  $X$  nach der Gruppenwirkung durch  $\Gamma$ , d.h.

$$M_+ := X_+/\Gamma \quad \text{sowie} \quad M_- := X_-/\Gamma.$$

Hierbei stellt folgendes Lemma sicher, dass dies wohldefiniert ist.

**Lemma 3.4.** *Für  $x_+ \in X_+$  bzw.  $x_- \in X_-$  folgt  $\gamma x_+ \in X_+$  bzw.  $\gamma x_- \in X_-$  für alle  $\gamma \in \Gamma$ , d.h.  $X_+$  und  $X_-$  sind  $\Gamma$ -invariante Teilmengen von  $X$ .*

*Beweis.* Seien  $x \in X$  und  $\gamma \in \Gamma$  fest. Zunächst gilt

$$d_{\gamma'}(\gamma x) = d(\gamma x, \gamma' \gamma x) = d(x, \gamma^{-1} \gamma' \gamma x) = d_{\gamma^{-1} \gamma' \gamma}(x)$$

für  $\gamma' \in \Gamma$  beliebig. Sei im Folgenden  $\gamma' \in \Gamma$  mit  $d_{\gamma'}(x) < \varepsilon_{\gamma'}$  gegeben. Mit obiger Formel erhalten wir

$$d_{\gamma\gamma'\gamma^{-1}}(\gamma x) = d_{\gamma'}(\gamma^{-1} \gamma x) = d_{\gamma'}(x) < \varepsilon_{\gamma'},$$

wobei wegen der Konjugationsinvarianz der Niveaus – also insbesondere  $\varepsilon_{\gamma'} = \varepsilon_{\gamma\gamma'\gamma^{-1}}$  – nun

$$d_{\gamma\gamma'\gamma^{-1}}(\gamma x) < \varepsilon_{\gamma\gamma'\gamma^{-1}}$$

folgt. Wir schließen: Die Erzeuger von  $\Gamma_{\varepsilon_\Gamma}(\gamma x)$  ergeben sich durch Konjugation mit  $\gamma$  aus den Erzeugern von  $\Gamma_{\varepsilon_\Gamma}(x)$ . Somit sind auch  $\Gamma_{\varepsilon_\Gamma}(x)$  und  $\Gamma_{\varepsilon_\Gamma}(\gamma x)$  konjugiert zueinander (mittels  $\gamma$ ), also insbesondere isomorph; folglich ist  $\Gamma_{\varepsilon_\Gamma}(x)$  genau dann endlich, wenn  $\Gamma_{\varepsilon_\Gamma}(\gamma x)$  es ist. Gemäß Definition von  $X_+$  bzw.  $X_-$  ist dies die Behauptung.  $\square$

Die Struktur des dünnen Teils  $M_-$  ergibt sich im Wesentlichen aus der Struktur der Untergruppen von  $\Gamma$ , welche auf den Komponenten von  $X_-$  wirken; wie wir sehen werden sind dies sogenannte elementare Gruppen. Solche Gruppen haben eine besonders einfache Struktur, wie die folgende Aussage wiedergibt. Hierbei beschränken wir uns auf den für uns einzig relevanten Fall von diskreten Gruppen. Schreibe außerdem  $\text{Fix}(G) = \bigcap_{g \in G} \text{Fix}(g)$  für  $G \subseteq \text{Isom}(X)$ .

**Lemma 3.5** ([9] Proposition 3.2.1 sowie Abschnitte 3.1, 3.2). *Sei  $G < \text{Isom}(X)$  diskret.  $G$  ist **elementar**, wenn einer der folgenden drei (paarweise verschiedenen) Fälle eintritt:*

1. *Elliptischer Fall:  $G$  ist endlich.*
2. *Parabolischer Fall:  $\text{Fix}(G)$  besteht aus einem einzelnen Punkt im Rand  $X(\infty)$  – d.h. es existiert ein eindeutiger Punkt  $z \in X(\infty)$  mit  $gz = z$  für alle  $g \in G$  – und alle Elemente von  $G$  erhalten jede Horosphäre um  $z$  mengenweise. Gemäß [9] Proposition 4.2 enthält  $G$  dann bereits ein parabolisches Element.*
3. *Hyperbolischer Fall:  $G$  enthält eine hyperbolische Isometrie und erhält deren eindeutige Achse  $A$  mengenweise. Es gilt insbesondere  $\text{Fix}(G) \cap X = \emptyset$ ; im Fall  $\text{Fix}(G) = \{A(\infty), A(-\infty)\}$  nennen wir  $G$  (hyperbolisch) von **Typ 1**, während  $G$  im verbleibenden Fall  $\text{Fix}(G) = \emptyset$  (hyperbolisch) von **Typ 2** heißt. In Typ-2-hyperbolischen Gruppen existiert folglich eine (elliptische) Isometrie  $\gamma_e$ , welche die Endpunkte von  $c$  vertauscht, d.h.  $\gamma_e A(\infty) = A(-\infty)$  und  $\gamma_e A(-\infty) = A(\infty)$ .*

Des Weiteren ist jede Untergruppe einer elementaren Gruppe elementar.

Später werden wir sehen, dass sich – rein gruppentheoretisch betrachtet – Typ-2-hyperbolische Gruppen aus Typ-1-hyperbolischen Gruppen durch Erweiterung um  $\mathbb{Z}_2$  ergeben, während Typ-1-hyperbolische Gruppen selbst semidirekte Produkte der Form  $E \rtimes_{\vartheta} \mathbb{Z}$  sind, mit  $E < O(n-1)$  endlich.

Wegen  $\varepsilon_\gamma \leq \varepsilon(n)$  gemäß Wahl der Niveaus für alle  $\gamma \in \Gamma$  ist  $\Gamma_{\varepsilon_\Gamma}(x)$  stets eine Untergruppe von  $\Gamma_{\varepsilon(n)}(x)$ ; letztere Gruppe ist nach dem Lemma von Margulis virtuell nilpotent, womit auch  $\Gamma_{\varepsilon_\Gamma}(x)$  virtuell nilpotent ist. Damit ist aufgrund unseres Wissens über elementare Gruppen auch bereits viel über die Struktur von  $\Gamma_{\varepsilon_\Gamma}(x)$  bekannt, wie die folgende Aussage verrät.

**Lemma 3.6** ([9] Proposition 3.1.1). *Jede virtuell nilpotente Untergruppe  $G < \text{Isom}(X)$  ist elementar.*

Wir werden später mitunter darauf zurückgreifen, dass eine diskrete, elementare Gruppe, welche nur aus elliptischen Elementen besteht, bereits endlich sein muss.

**Lemma 3.7.** *Besteht eine diskrete, elementare Gruppe  $G < \text{Isom}(X)$  nur aus elliptischen Elementen, so ist  $G$  endlich.*

*Beweis.* Gemäß Lemma 3.5 ist lediglich auszuschließen, dass für  $G$  der parabolische oder der hyperbolische Fall eintritt. Doch dies ist bereits erfüllt, denn parabolische Gruppen enthalten ein parabolischen Element, während hyperbolische Gruppen stets ein hyperbolischen Element besitzen.  $\square$

Liegt  $x$  im dünnen Teil  $X_-$ , so ist folglich  $\Gamma_{\varepsilon_\Gamma}(x)$  eine unendliche elementare Gruppe; somit sind unter den elementaren Gruppen lediglich die unendlichen – also parabolische und hyperbolische – von Interesse. Wie die nachstehende Aussage wiedergibt, lassen sich diese unendlichen elementaren Untergruppen auf eindeutige Weise den maximalen elementaren Untergruppen zuordnen. Aus diesem Grund kann man vereinfachend sagen, dass die maximalen elementaren Untergruppen den Urbildern der Komponenten des dünnen Teils  $M_-$  der Orbifaltigkeit  $M$  entsprechen.

**Lemma 3.8** ([9] Lemma 3.2.2). *Sei  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  diskret. Dann ist jede unendliche elementare Untergruppe von  $\Gamma$  in einer eindeutigen maximalen elementaren Untergruppe von  $\Gamma$  enthalten.*

Letztlich drückt folgende Aussage aus, dass verschiedene maximale elementare Untergruppen sich höchstens in endlichen Untergruppen überlappen können.

**Lemma 3.9** ([9] Corollary 3.2.3). *Sei  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  diskret sowie  $G$  und  $G'$  maximale elementare Untergruppen von  $\Gamma$ . Ist  $G \cap G'$  unendlich, so gilt bereits  $G = G'$ .*

Sei nun weiterhin  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  diskret. Für eine Untergruppe  $G$  von  $\Gamma$  schreiben wir

$$G_{\varepsilon_G}(x) := \langle g \in G : d_g(x) < \varepsilon_g \rangle \quad (< \Gamma_{\varepsilon_G}(x))$$

sowie

$$X_-(G) := \{x \in X : G_{\varepsilon_G}(x) \text{ ist unendlich}\} \quad (\subseteq X_-).$$

Mit dieser Notation gilt insbesondere  $X_-(\Gamma) = X_-$  sowie

$$X_-(G) \subseteq \bigcup_{g \in G \setminus \{\text{id}\}} \{d_g < \varepsilon_g\};$$

denn wäre ein  $x \in X_-(G)$  in keinem  $\{d_g < \varepsilon_g\}$  für  $g \in G \setminus \{\text{id}\}$  enthalten, so würde  $G_{\varepsilon_G}(x) = \langle \text{id} \rangle = \{\text{id}\}$  gelten, was der Tatsache widerspräche, dass  $G_{\varepsilon_G}(x)$  wegen  $x \in X_-(G)$  unendlich ist.

Die Schreibweise  $X_-(G)$  ist als naheliegende Verallgemeinerung der  $T_\varepsilon(G)$  aus [9] auf unsere Situation zu verstehen, weshalb es nicht überrascht, dass sich der Beweis der folgenden zentralen Aussage vollkommen analog zu der Begründung in [9] Abschnitt 3.5 und Proposition 3.5.4 ergibt.

**Lemma 3.10.** *Es gilt:*

1.  $X_-$  ergibt sich als Vereinigung der  $X_-(G)$  der maximalen unendlichen elementaren Untergruppen  $G$  von  $\Gamma$ .
2. Sind die konjugationsinvarianten Niveaus  $\varepsilon_\gamma$  sogar aus  $[\varepsilon, \varepsilon(n)/2]$  gewählt (und nicht nur aus  $[\varepsilon, \varepsilon(n)]$ ), so existiert eine nur von der Dimension  $n$  abhängige Konstante  $\delta = \delta(n) > 0$ , sodass  $d(X_-(G), X_-(G')) \geq \delta$  für verschiedene maximale unendliche elementare Untergruppen  $G$  und  $G'$  von  $\Gamma$ . Mithin ist die Vereinigung in 1. dann disjunkt mit gleichmäßigem unteren Abstand zwischen den  $X_-(G)$ .

*Beweis.* 1. Wie bereits erwähnt lässt sich die Begründung aus [9] Abschnitt 3.5 (zwischen Proposition 3.5.3 und Proposition 3.5.4) übernehmen. Wegen  $X_-(G) \subseteq X_-$  ist lediglich zu zeigen, dass jedes  $x \in X_-$  bereits auch in einem geeigneten  $X_-(G)$  für eine maximale unendliche elementare Untergruppe  $G$  von  $\Gamma$  liegt. Sei also  $x \in X_-$ , d.h.  $\Gamma_{\varepsilon_\Gamma}(x)$  ist eine unendliche Gruppe und gemäß der vorangehenden Argumente bereits elementar. Nach Lemma 3.8 liegt  $\Gamma_{\varepsilon_\Gamma}(x)$  in einer eindeutigen maximalen unendlichen elementaren Untergruppe  $G$  von  $\Gamma$ . Jeder der Erzeuger

$$\{\gamma \in \Gamma : d_\gamma(x) < \varepsilon_\gamma\}$$

von  $\Gamma_{\varepsilon_\Gamma}(x)$  ist also ein Element von  $G$ , weshalb

$$G_{\varepsilon_G}(x) = \Gamma_{\varepsilon_\Gamma}(x)$$

folgt. Somit ist  $G_{\varepsilon_G}(x)$  auch unendlich, d.h.  $x \in X_-(G)$ , was zu zeigen war.

2. Der Beweis orientiert sich an [9] Proposition 3.5.4. Setze  $\delta(n) := \varepsilon(n)/8$ . Seien  $x \in X_-(G)$  und  $x' \in X_-(G')$  mit  $d(x, x') < \delta$  für maximale unendliche elementare Untergruppen  $G$  und  $G'$  von  $\Gamma$ . Allgemein gilt nach Dreiecksungleichung  $d_\gamma(y) \leq 2d(y, y') + d_\gamma(y')$  für  $y, y' \in X$  und  $\gamma \in \Gamma$  beliebig. Ist also  $\gamma$  mit  $d_\gamma(x) < \varepsilon_\gamma$  gegeben – d.h.  $\gamma$  ist ein beliebiger Erzeuger von  $\Gamma_{\varepsilon_\Gamma}(x)$  –, so folgt

$$d_\gamma(x') \leq 2 \cdot d(x, x') + d_\gamma(x) < 2\delta + \varepsilon_\gamma < \frac{2\varepsilon(n)}{8} + \frac{\varepsilon(n)}{2} = \frac{3\varepsilon(n)}{4} < \varepsilon(n),$$

d.h. jeder Erzeuger von  $\Gamma_{\varepsilon_\Gamma}(x)$  liegt bereits in  $\Gamma_{\varepsilon(n)}(x')$ , womit  $\Gamma_{\varepsilon_\Gamma}(x)$  eine Untergruppe von  $\Gamma_{\varepsilon(n)}(x')$  ist. Nun ist gemäß voriger Ausführungen  $\Gamma_{\varepsilon(n)}(x')$  selbst eine unendliche elementare Untergruppe und folglich nach Lemma 3.8 in einer maximalen unendlichen elementaren Untergruppe  $G''$  enthalten, womit  $\Gamma_{\varepsilon_\Gamma}(x)$  ebenso eine Untergruppe von  $G''$  ist. Andererseits liegt  $\Gamma_{\varepsilon_\Gamma}(x)$  nach Wahl von  $x$  auch in  $G$ ; es folgt

$$G \cap G'' \supseteq \Gamma_{\varepsilon_\Gamma}(x),$$

also mittels Lemma 3.9 nun  $G = G''$ , da sich die maximalen unendlichen elementaren Untergruppen  $G$  und  $G''$  mindestens in der – wegen  $x \in X_-(G) \subseteq X_-$  unendlichen – Gruppe  $\Gamma_{\varepsilon_\Gamma}(x)$  schneiden.

Trivialerweise ist auch  $\Gamma_{\varepsilon_\Gamma}(x')$  eine Untergruppe von  $\Gamma_{\varepsilon(n)}(x')$  – und damit von  $G''$  – sowie nach Wahl von  $x'$  eine Untergruppe von  $G'$ . Analog zur vorigen Argumentation ergibt sich wiederum mittels Lemma 3.9 nun  $G' = G''$  und wir folgern insgesamt

$$G = G'' = G',$$

was zu zeigen war. □

Wir werden deshalb im Folgenden stets davon ausgehen, dass die Niveaus  $\varepsilon_\gamma$  tatsächlich aus dem Intervall  $[\varepsilon, \varepsilon(n)/2]$  stammen.

Der dünne Teil  $M_-$  ergibt sich nach Definition als Quotient von  $X_-$  nach der Gruppenwirkung durch  $\Gamma$ . Wie voriges Lemma 3.10 ausdrückt, besteht aber  $X_-$  aus den  $X_-(G)$ ; um die Struktur von  $X_-$  zu verstehen, müssen wir also klären, wie  $\Gamma$  auf den  $X_-(G)$  wirkt.

**Lemma 3.11.** *Sei  $G$  eine maximale unendliche elementare Untergruppe von  $\Gamma$ . Dann gilt*

$$\gamma X_-(G) = X_-(\gamma G \gamma^{-1})$$

für alle  $\gamma \in \Gamma$ . Mithin ist  $X_-(G)$  genau invariant unter  $\Gamma$ , d.h. für  $\gamma \in \Gamma$  gilt  $\gamma X_-(G) = X_-(G)$  oder  $\gamma X_-(G) \cap X_-(G) = \emptyset$ .

*Beweis.* Zunächst merken wir an, dass maximale unendliche elementare Untergruppen durch Konjugation auf ebensolche abgebildet werden.

Sei  $\gamma \in \Gamma$  sowie  $x \in X$ . Dem Beweis von Lemma 3.4 entnehmen wir, dass die Elemente der Menge

$$\{g \in G : d_g(x) < \varepsilon_g\}$$

nach Konjugation mit  $\gamma$  nun

$$\{g' = \gamma g \gamma^{-1} \in \gamma G \gamma^{-1} : d_{g'}(\gamma x) < \varepsilon_{g'}\}$$

ergeben, was gerade die Erzeugermenge von  $G'_{\varepsilon_{G'}}(\gamma x)$  für  $G' := \gamma G \gamma^{-1}$  darstellt; es folgt

$$G'_{\varepsilon_{G'}}(\gamma x) = \gamma G_{\varepsilon_G}(x) \gamma^{-1}.$$

Für  $x \in X_-(G)$  ist nun  $G_{\varepsilon_G}(x)$  unendlich, also mit obiger Formel auch  $G'_{\varepsilon_{G'}}(\gamma x)$ , d.h.  $\gamma x \in X_-(G')$ , womit  $\gamma X_-(G) \subseteq X_-(G')$  bewiesen ist. Wie üblich folgt auch die umgekehrte Mengeninklusion hiermit gemäß

$$\gamma^{-1}X_-(G') \subseteq X_-(\gamma^{-1}G'\gamma) = X_-(G).$$

Ist  $\gamma \in G$ , so ergibt sich  $\gamma G\gamma^{-1} = G$  und damit  $\gamma X_-(G) = X_-(\gamma G\gamma^{-1}) = X_-(G)$ .

Sei umgekehrt  $\gamma \notin G$ . Gemäß [9] Lemma 3.2.4 stimmt der Normalisator  $N_\Gamma(G)$  von  $G$  in  $\Gamma$  mit  $G$  überein, weshalb wir schließen, dass dann  $\gamma G\gamma^{-1}$  und  $G$  verschiedene maximale unendliche elementare Untergruppen sind. Gemäß Lemma 3.10 sind  $X_-(G)$  und  $\gamma X_-(G) = X_-(\gamma G\gamma^{-1})$  nun disjunkt.  $\square$

Bezeichnet wie üblich  $\pi : X \rightarrow X/\Gamma = M$  die Projektion, so gilt folglich  $\pi(X_-(G)) \cong X_-(G)/G$ ; bei der Frage nach der Gestalt des dünnen Teils von  $M$  können wir uns also auf die Frage nach der Gestalt der  $X_-(G)/G$  für maximale unendliche elementare Untergruppen  $G$  von  $\Gamma$  beschränken.

### 3.2.2 Dünner Teil

Die Untersuchung des dünnen Teils werden wir getrennt nach dem hyperbolischen und dem parabolischen Fall durchführen.

#### Hyperbolischer Fall

Wir widmen uns zuerst dem hyperbolischen Fall, d.h. dem Fall von hyperbolischem  $G < \Gamma$ , in welchem man  $X_-(G)/G$  auch **Röhre** nennt. Gemäß Lemma 3.5 können drei verschiedene Typen von Isometrien in einer hyperbolischen Gruppe auftreten:

1. Hyperbolische Isometrien  $\gamma_h$  mit Achse  $A$ ,
2. Achse-fixierende elliptische Isometrien  $\gamma_e$ , d.h.  $\gamma_e A(\infty) = A(\infty)$  und  $\gamma_e A(-\infty) = A(-\infty)$ ,
3. Achse-spiegelnde elliptische Isometrien  $\gamma_s$ , d.h.  $\gamma_s A(\infty) = A(-\infty)$  und  $\gamma_s A(-\infty) = A(\infty)$ . Es existiert also ein eindeutiger Punkt auf  $A$ , welcher von  $\gamma_s$  fixiert wird, der sogenannte Spiegelungspunkt.

Beachte jedoch, dass Achse-spiegelnde Isometrien nicht direkt Spiegelungen auf ganz  $X$  sein müssen, sondern durchaus eine Ordnung  $> 2$  aufweisen können. Wir halten nun einige elementare Tatsachen zum Verhalten dieser Isometrietypen fest.

- Ist  $\gamma_e$  eine Achse-fixierende Isometrie und  $\gamma_h$  eine hyperbolische Isometrie mit Achse  $A$ , so sind  $\gamma_e\gamma_h$ ,  $\gamma_h\gamma_e$  sowie  $\gamma_e\gamma_h\gamma_e^{-1}$  ebenfalls hyperbolische Isometrien mit Achse  $A$  und gleicher Verschiebung wie  $\gamma_h$ , die aber in der Regel nicht mit  $\gamma_h$  übereinstimmen. Insbesondere erhalten wir, dass im Allgemeinen mehrere verschiedene hyperbolische Isometrien gleicher (minimaler) Verschiebung existieren, die hyperbolischen Elemente also zunächst keine zyklische Untergruppe bilden.
- Die hyperbolischen Elemente stellen allgemein auch *gar keine* Untergruppe dar, denn für zwei hyperbolische Isometrien  $\gamma_1, \gamma_2$  gleicher Verschiebung ist  $\gamma_1\gamma_2^{-1}$  eine elliptische Isometrie, welche die Achse fixiert.
- Ist  $\gamma_s$  eine Achse-spiegelnde Isometrie, so sind die Produkte bzw. Konjugierten mit den Achse-fixierenden Isometrien (analog zu vorher bei den hyperbolischen Isometrien) selbst elliptische Isometrien, welche die Achse spiegeln – mit gleichem Spiegelungspunkt –, aber für gewöhnlich nicht mit  $\gamma_s$  übereinstimmen. Ebenso liefern zwei verschiedene Spiegelungen am selben Punkt eine elliptische Isometrie, welche die Achse fixiert.

- Im Allgemeinen schneiden sich die Fixpunktmengeten der Achse-fixierenden Isometrien und der Achse-spiegelnden Isometrien nicht nur im Spiegelungspunkt auf der Achse.
- Bezeichnet  $\mu$  die minimale Verschiebung der Achse  $A$  durch eine hyperbolischen Isometrie und existiert (mindestens) eine Achse-spiegelnde Isometrie, so sind in allen  $\mu/2$ -Abständen auf der Achse die Spiegelungspunkte weiterer Achse-spiegelnden Isometrien gegeben.
- Es gelten folgende Rechenregeln; beachte hierbei, dass die Achse  $A$  isometrisch zu  $\mathbb{R}$  ist, weshalb wir uns für die Wirkung der Isometrien auf der Achse äquivalent mit Isometrien von  $\mathbb{R}$  befassen können. Für eine Translation um  $\nu \in \mathbb{R}$  (also  $x \mapsto x + \nu$ ) schreiben wir  $\tau_\nu$ , während eine Spiegelung in  $y \in \mathbb{R}$  (also  $x \mapsto y - (x - y) = 2y - x$ ) mit  $\sigma_y$  bezeichnet wird. In dieser Notation gilt somit  $\gamma_0 = \tau_\mu$  für eine hyperbolische Isometrie  $\gamma_0$  minimaler Translation  $\mu$  der Achse  $A$  und  $\gamma_1 = \sigma_0$  für eine Achsen-Spiegelung  $\gamma_1$ . Nun ist die Komposition zweier Spiegelungen (zuerst in  $y_1$ , dann in  $y_2$ )

$$\sigma_{y_2} \circ \sigma_{y_1} : x \mapsto 2y_1 - x \mapsto 2y_2 - (2y_1 - x) = x + 2(y_2 - y_1)$$

eine Translation um  $2(y_2 - y_1)$ , d.h.  $\sigma_{y_2} \circ \sigma_{y_1} = \tau_{2(y_2 - y_1)}$ . Analog erhalten wir

$$\sigma_y \circ \tau_\nu = \sigma_{y - \nu/2} \quad \text{sowie} \quad \tau_\nu \circ \sigma_y = \sigma_{y + \nu/2}.$$

Wie das folgende Lemma ausdrückt, ergeben sich hyperbolische Gruppen in der allgemeinen Situation durch sukzessive Gruppenerweiterung aus vergleichsweise einfachen Bausteinen; beachte, dass wir die Diskretheit von  $G$  implizit voraussetzen, da  $G$  eine Untergruppe des Gitters  $\Gamma$  ist.

**Lemma 3.12.** *Sei  $G < \Gamma$  eine hyperbolische Gruppe mit Achse  $A$ .*

1. *Ist  $G$  von Typ 1, so bilden die elliptischen Elemente eine Untergruppe  $E$ , welche isomorph zu einer endlichen Untergruppe von  $O(n - 1)$  (der orthogonalen Gruppe in Dimension  $n - 1$ ) ist.  $G$  ergibt sich dann als Erweiterung von  $E$  um  $\mathbb{Z}$ , d.h.*

$$1 \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 1$$

*stellt eine kurze exakte Sequenz dar (die Definition der Abbildungen ist im Beweis zu finden). Insbesondere ist  $E$  ein Normalteiler von  $G$  sowie  $G/E \cong \mathbb{Z}$ . Tatsächlich spaltet obige Sequenz rechts, weshalb*

$$G \cong E \rtimes_{\vartheta} \mathbb{Z},$$

*d.h.  $G$  ist semidirektes Produkt von  $E$  und  $\mathbb{Z}$  (mittels  $\vartheta : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(E)$  wie im Beweis).*

2. *Ist  $G$  von Typ 2, so bilden die elliptischen Elemente, welche die Achse punktweise fixieren, einen Normalteiler  $E$ , welcher isomorph zu einer endlichen Untergruppe von  $O(n - 1)$  ist.  $G$  ergibt sich dann als Erweiterung von  $E$  um  $D_\infty$  (der unendlichen Diedergruppe), d.h.*

$$1 \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow D_\infty \longrightarrow 1$$

*stellt eine kurze exakte Sequenz dar (mit Abbildungen wie im Beweis), also insbesondere  $G/E \cong D_\infty$ . Im Allgemeinen spaltet jedoch obige Sequenz rechts nicht (d.h.  $G$  ist im Allgemeinen kein semidirektes Produkt von  $E$  und  $D_\infty$ ).*

3. *Alternativ lassen sich Typ-2-hyperbolische Gruppen auch als Erweiterungen Typ-1-hyperbolischer Gruppen um  $\mathbb{Z}_2$  auffassen: Ist  $G$  von Typ 2, so bilden die Elemente von  $G$ , welche die Endpunkte von  $A$  fixieren, eine Typ-1-hyperbolische Gruppe  $G^{(1)}$ , die als Normalteiler von Index 2 in  $G$  liegt, also  $G/G^{(1)} \cong \mathbb{Z}_2$ . Genauer ist*

$$1 \longrightarrow G^{(1)} \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1$$

eine kurze exakte Sequenz (für welche die Abbildungen im Beweis angegeben sind), welche rechts jedoch im Allgemeinen nicht spaltet (d.h.  $G$  ist in der Regel kein semidirektes Produkt von  $G^{(1)}$  und  $\mathbb{Z}_2$ ).

*Beweis.* 1. Wir merken zunächst an, dass dieser Punkt lediglich eine exakte Ausformulierung der in [9] S. 246 behaupteten Struktur Typ-1-hyperbolischer Gruppen ist.

Wird  $A$  durch  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  punktweise fixiert, so auch durch  $\gamma_1\gamma_2^{-1}$ ; folglich bildet  $E$  eine Gruppe. Da gemäß eigentlich diskontinuierlicher Wirkung nur endlich viele Isometrien die Achse  $A$  punktweise fixieren können, ist  $E$  endlich; anhand der Zerlegung  $X \cong \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$  – wobei der  $\mathbb{R}$ -Faktor der Achse  $A$  entspricht (auf welcher  $E$  ja als Identität wirkt) – können wir  $E$  mit einer endlichen Untergruppe von  $O(n-1)$  identifizieren.

Die Abbildung  $E \rightarrow G$  ist gerade die Inklusion, weshalb die Sequenz an der Stelle  $E$  bereits exakt ist.

Bezeichnet  $\mu$  die minimale Verschiebung der Achse  $A$  durch eine hyperbolische Isometrie aus  $G$ , so verschiebt jedes Element  $\gamma \in G$  nun  $A$  um einen Wert  $k \cdot \mu$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ . Die Abbildung  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}$  in obiger Sequenz ist dann durch  $\varphi(\gamma) = k$  gegeben. Dies stellt einen wohldefinierten, surjektiven Homomorphismus dar, womit ebenso die Exaktheit bei  $\mathbb{Z}$  folgt. Beachte nun, dass  $\ker \varphi$  gerade aus den Elementen mit Translation 0 auf der Achse  $A$  besteht, d.h. allen Isometrien, die  $A$  punktweise fixieren; folglich gilt  $\ker \varphi = E$ , also die Exaktheit bei  $G$ .

Dass  $E$  normal in  $G$  liegt sowie  $G/E \cong \mathbb{Z}$ , ergibt sich allgemein für Gruppenerweiterungen.

Einen Spaltungshomomorphismus für obige Sequenz erhält man, indem  $1 \in \mathbb{Z}$  auf eine beliebige hyperbolische Isometrie  $\gamma_0 \in G$  mit minimaler Verschiebung  $\mu$  der Achse  $A$  abgebildet wird. Folglich ist  $G \cong E \rtimes_{\vartheta} \mathbb{Z}$  mittels des Konjugations-Homomorphismus  $\vartheta : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(E)$ , welcher durch

$$\vartheta(k)(\gamma) = \gamma_0^k \gamma \gamma_0^{-k} \quad (k \in \mathbb{Z}, \gamma \in E)$$

gegeben ist.

2. Genau wie im Beweis von Punkt 1. sehen wir, dass auch im Fall von Typ-2-hyperbolischem  $G$  die Achse-fixierenden elliptischen Isometrien eine Untergruppe von  $G$  bilden, die zu einer endlichen Untergruppe von  $O(n-1)$  isomorph ist.

Wir zeigen nun, dass  $E$  normal in  $G$  liegt. Sei hierzu  $\gamma_e \in E$  sowie  $\gamma \in G$  beliebig. Ist  $\gamma \in E$ , so gilt trivialerweise  $\gamma\gamma_e\gamma^{-1} \in E$ ; wir können also annehmen, dass  $\gamma$  nicht in  $E$  liegt. Da  $G$  als Typ-2-hyperbolische Gruppe ausschließlich aus Achse-fixierenden elliptischen Isometrien, Achse-spiegelnden elliptischen Isometrien sowie hyperbolischen Isometrien mit Achse  $A$  besteht, ist  $\gamma$  also entweder eine Achse-spiegelnde elliptische Isometrie oder hyperbolisch. Im Fall, dass  $\gamma$  die Achse spiegelt, gilt

$$\gamma\gamma_e\gamma^{-1}A(\infty) = \gamma\gamma_eA(-\infty) = \gamma A(-\infty) = A(\infty)$$

und analog  $\gamma\gamma_e\gamma^{-1}A(-\infty) = A(-\infty)$ , d.h.  $\gamma\gamma_e\gamma^{-1}$  fixiert die Endpunkte von  $A$ . Ist ohne Einschränkung  $A(0)$  der Spiegelungspunkt von  $\gamma$  auf der Achse  $A$ , so sehen wir außerdem, dass  $\gamma\gamma_e\gamma^{-1}$  auch  $A(0)$  fixiert; folglich muss  $\gamma\gamma_e\gamma^{-1}$  selbst eine elliptische Isometrie sein, welche  $A$  punktweise fixiert, also  $\gamma\gamma_e\gamma^{-1} \in E$ . Es verbleibt der Fall von hyperbolischem  $\gamma$ . In diesem Fall sehen wir ebenfalls, dass  $\gamma\gamma_e\gamma^{-1}$  die Endpunkte fixiert sowie Translation 0 auf der Achse besitzt, also wiederum die Achse punktweise fixiert, d.h.  $\gamma\gamma_e\gamma^{-1} \in E$ . Somit ist  $E$  tatsächlich ein Normalteiler in  $G$ .

Um die Exaktheit der Sequenz aus der Aussage zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass  $G/E \cong D_\infty$ ; die Abbildung  $E \rightarrow G$  ist dann die Inklusion und  $G \rightarrow D_\infty$  die Komposition der Projektion  $G \rightarrow G/E$  mit dem Isomorphismus  $G/E \cong D_\infty$ . Wir wollen zunächst zeigen, dass  $G/E$  von den Nebenklassen zweier geeigneter Achsen-Spiegelungen erzeugt wird. Hierzu halten wir anfänglich fest, dass für zwei verschiedene Achsen-Spiegelnde Isometrien  $\gamma_1, \gamma_2 \in G$  mit selbem Spiegelungspunkt – ohne Einschränkung  $A(0)$  – auf  $A$  die Isometrie  $\gamma_1\gamma_2^{-1}$  eine elliptische Isometrie ist (denn  $\gamma_1\gamma_2^{-1}$  besitzt den Fixpunkt  $A(0) \in X$ ), welche wegen

$$\gamma_1\gamma_2^{-1}A(\infty) = \gamma_1A(-\infty) = A(\infty)$$

und analog  $\gamma_1\gamma_2^{-1}A(-\infty) = A(-\infty)$  die Endpunkte von  $A$  fixiert, also in  $E$  liegt. Anders ausgedrückt erhalten wir, dass sich zwei verschiedene Achsen-Spiegelnde Isometrien mit selbem Spiegelungspunkt auf  $A$  nur durch Multiplikation mit einem Element aus  $E$  unterscheiden, mithin die selbe Nebenklasse modulo  $E$  darstellen:

$$E\gamma_1 = E\gamma_2.$$

Ist  $\gamma \in G$  hyperbolisch, so wissen wir bereits, dass  $\gamma$  sich als Potenz einer hyperbolischen Isometrie  $\gamma_0 \in G$  minimaler Verschiebung auf  $A$  ergibt; solche hyperbolischen Isometrien minimaler Verschiebung wiederum entstehen als Produkt zweier benachbarter Achsen-Spiegelungen<sup>2</sup> (s.o.). Da für verschiedene hyperbolische Isometrien  $\gamma', \gamma'' \in G$  gleicher Verschiebung die Isometrie  $\gamma'\gamma''^{-1}$  in  $E$  liegt (denn sie besitzt Verschiebung 0 auf  $A$ ), schließen wir auch hier, dass hyperbolische Isometrien gleicher Verschiebung die selbe Nebenklasse modulo  $E$  ergeben:

$$E\gamma' = E\gamma''.$$

Sei nun  $\gamma \in G$  erneut hyperbolisch und  $\gamma_0 \in G$  die (bis auf Inversenbildung eindeutige) hyperbolische Isometrie minimaler Verschiebung mit  $\gamma = \gamma_0^k$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$ . Ferner fixieren wir zwei benachbarte Achsen-Spiegelungen  $\gamma_1, \gamma_2 \in G$ ; ohne Einschränkung können wir annehmen, dass  $\gamma_1\gamma_2$  bereits die selbe Verschiebung wie  $\gamma_0$  aufweist, denn betragsmäßig ist die Verschiebung ohnehin gleich und durch Vertauschen von  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  können wir notfalls die Richtung der Verschiebung ändern. Mithilfe obiger Argumente gilt also

$$E\gamma_0 = E(\gamma_1\gamma_2),$$

womit wir

$$E\gamma = E\gamma_0^k = E(\gamma_1\gamma_2)^k = ((E\gamma_1)(E\gamma_2))^k$$

folgern; jede Nebenklasse modulo  $E$  einer hyperbolischen Isometrie lässt sich also als Potenz eines Produkts von Nebenklassen von  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  darstellen. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass auch jede Nebenklasse einer von  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  weiter entfernten Achsen-Spiegelung sich als geeignetes Produkt in den Nebenklassen von  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  darstellen lässt. Dies ist aber der Fall, wie wir bereits oben festgestellt haben; dort sahen wir, dass die Spiegelungspunkte immer genau im Abstand  $\mu/2$  (mit  $\mu$  der minimalen Verschiebung hyperbolischer Isometrien auf  $A$ ) liegen und das Produkt einer hyperbolischen Isometrie (z.B. mit Verschiebung  $\mu$ ) mit einer Achsen-Spiegelung wiederum eine Achsen-Spiegelung ergibt, nur mit um  $\mu/2$  verschobenem Spiegelungspunkt. Ist also  $\gamma_0$  erneut eine hyperbolische Isometrie minimaler Verschiebung  $\mu$  und  $\gamma_3$  eine beliebige Achsen-Spiegelung, so

<sup>2</sup>Zur Erinnerung: Zwei Achsen-Spiegelungen sind benachbart, falls ihre Spiegelungspunkte auf  $A$  den Abstand  $\mu/2$  besitzen, wobei  $\mu$  die minimale Verschiebung einer hyperbolischen Isometrie aus  $G$  bezeichnet.

finden wir ein  $k \in \mathbb{Z}$ , sodass  $\gamma_1\gamma_0^k$  ebenfalls eine Achsen-Spiegelung am gleichen Spiegelungspunkt wie von  $\gamma_3$  ist. Mit obiger Argumentation ergibt sich wiederum

$$E\gamma_3 = E(\gamma_1\gamma_0^k) = (E\gamma_1)(E\gamma_0^k),$$

und da ja  $E\gamma_0^k$  als Nebenklasse einer hyperbolische Isometrie bereits als geeignetes Produkt von  $E\gamma_1$  und  $E\gamma_2$  darstellbar war, folgern wir insgesamt, dass auch alle Nebenklassen von Achsen-Spiegelungen sich als passendes Produkt der Nebenklassen von  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  ergeben. Da hiermit alle möglichen Fälle von Isometrien in  $G$  bzw.  $G/E$  abgedeckt sind, fassen wir zusammen:

$$G/E = \langle E\gamma_1, E\gamma_2 \rangle, \text{ wobei } \gamma_1, \gamma_2 \in G \text{ benachbarte Achsen-Spiegelungen sind.}$$

Beachte nun, dass für die unendliche Diedergruppe die Präsentation

$$D_\infty \cong \langle x, y \mid x^2 = 1 = y^2 \rangle$$

existiert und wir bereits aus den vorigen Betrachtungen wissen, dass<sup>3</sup>

$$(E\gamma_1)^2 = E \text{ id} = (E\gamma_2)^2;$$

um die gewünschte Isomorphie von  $G/E$  zu  $D_\infty$  zu beweisen, bleibt also lediglich zu zeigen, dass keine weiteren Relationen zwischen den Erzeugern  $E\gamma_1$  und  $E\gamma_2$  von  $G/E$  auftreten. Angenommen, es gäbe eine weitere Relation, dann müssten sich in ihr  $E\gamma_1$  und  $E\gamma_2$  stets abwechseln, da wir bei wiederholtem Auftreten von  $E\gamma_1$  bzw.  $E\gamma_2$  wegen deren Ordnung von 2 sonst kürzen könnten. Ohne Einschränkung sei also diese Relation von der Form

$$((E\gamma_1)(E\gamma_2))^k = E \text{ id} \quad \text{oder} \quad ((E\gamma_1)(E\gamma_2))^k E\gamma_1 = E \text{ id}$$

für ein  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , bzw. analog bei Vertauschen von  $E\gamma_1$  und  $E\gamma_2$ . Nun beachte, dass  $\gamma_1\gamma_2$  hyperbolisch ist, also auch  $\gamma := (\gamma_1\gamma_2)^k$ . Wegen

$$((E\gamma_1)(E\gamma_2))^k = E(\gamma_1\gamma_2)^k$$

würde dies im ersten Fall bedeuten, dass  $E\gamma = E \text{ id}$ , also  $\gamma \in E$ , im Widerspruch dazu, dass  $\gamma$  hyperbolisch ist und  $E$  nur aus Achse-fixierenden elliptischen Isometrien besteht. Im zweiten Fall hingegen ist  $\gamma' := (\gamma_1\gamma_2)^k\gamma_1 = \gamma\gamma_1$  als Produkt der hyperbolischen Isometrie  $\gamma = (\gamma_1\gamma_2)^k$  mit der Achsen-Spiegelung  $\gamma_1$  wiederum eine Achsen-Spiegelung (s.o.); nun bedeutet  $E\gamma' = E \text{ id}$  aber erneut  $\gamma' \in E$ , was den gewünschten Widerspruch liefert, da die Achsen-Spiegelung  $\gamma'$  nicht in der aus den Achse-fixierenden elliptischen Isometrien bestehenden Untergruppe  $E$  liegt. Folglich kann keine weitere Relation existieren und wir erhalten die Präsentation

$$G/E \cong \langle E\gamma_1, E\gamma_2 \mid (E\gamma_1)^2 = 1 = (E\gamma_2)^2 \rangle \cong \langle x, y \mid x^2 = 1 = y^2 \rangle \cong D_\infty,$$

also die Isomorphie  $G/E \cong D_\infty$ .

Bezüglich eines möglichen Spaltungshomomorphismus ist anzumerken, dass die einzigen Kandidaten für die Bilder der Erzeuger  $x, y \in D_\infty = \langle x, y \mid x^2 = 1 = y^2 \rangle$  unter diesem Homomorphismus gerade benachbarte Achsen-Spiegelungen sind. Jedoch müssen diese im Allgemeinen nicht von Ordnung 2 sein, da wir keine näheren Kenntnisse über ihre Wirkung abseits der Achse  $A$  haben; folglich wird in der Regel kein Spaltungshomomorphismus existieren.

<sup>3</sup>Denn  $\gamma_1^2$  ist elliptisch (oder trivial) mit Fixpunkt auf  $A$ , da dies auch für  $\gamma_1$  galt, und fixiert die Endpunkte von  $A$ , also  $\gamma_1^2 \in E$ . Entsprechendes gilt für  $\gamma_2^2$ .

3. Fixieren die Isometrien  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  die Endpunkt von  $A$  – d.h.  $\gamma_i A(\infty) = A(\infty)$  und  $\gamma_i A(-\infty) = A(-\infty)$  für  $i = 1, 2$  –, so gilt dies auch für deren Produkt bzw. Inverse, womit  $G^{(1)}$  tatsächlich eine Untergruppe von  $G$  bildet.

Als Homomorphismus  $G^{(1)} \rightarrow G$  in obiger Sequenz wählen wir die Inklusion, womit insbesondere Exaktheit bei  $G^{(1)}$  folgt.

Wir geben nun den Homomorphismus  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{Z}_2$  an. Ist  $\gamma \in G$  eine Isometrie, welche die Endpunkte von  $A$  fixiert, so definieren wir  $\varphi(\gamma) = 0$ ; andernfalls – d.h. wenn  $\gamma$  die Endpunkte vertauscht – sei  $\varphi(\gamma) = 1$ . Beachte, dass hiermit bereits alle möglichen Fälle für das Verhalten von  $\gamma$  bezüglich der Endpunkte abgedeckt sind, da  $G$  eine hyperbolische Gruppe ist. Das Inverse einer Endpunkt-fixierenden Isometrie ist Endpunkt-fixierend, genau wie das Inverse einer Endpunkt-vertauschenden Isometrie selbst die Endpunkte vertauscht. Ebenso ist das Produkt zweier Endpunkt-fixierenden Isometrien genau wie das Produkt zweier Endpunkt-vertauschenden Isometrien selbst Endpunkt-fixierend; umgekehrt ist das Produkt aus einer Endpunkt-fixierenden und einer Endpunkt-vertauschenden Isometrie selbst Endpunkt-vertauschend. Folglich ist  $\varphi$  tatsächlich ein wohldefinierter Homomorphismus  $G \rightarrow \mathbb{Z}_2$ , welcher zudem surjektiv ist, da  $G$  als Typ-2-hyperbolisch vorausgesetzt wurde, also mindestens eine Endpunkt-vertauschende Isometrie besitzt. Es folgt die Exaktheit bei  $\mathbb{Z}_2$ .

Nach Definition von  $\varphi$  bilden die Endpunkt-fixierenden Isometrien – also die Elemente von  $G^{(1)}$  – genau  $\ker \varphi$ , womit die Sequenz auch bei  $G$  exakt ist.

Wegen  $G/G^{(1)} \cong \mathbb{Z}_2$  folgt insbesondere, dass  $G^{(1)}$  Index 2 in  $G$  besitzt.

Die Sequenz spaltet rechts jedoch im Allgemeinen nicht: Ein möglicher Spaltungshomomorphismus müsste  $1 \in \mathbb{Z}_2$  auf eine Endpunkt-vertauschende Isometrie  $\gamma \in G$  abbilden; diese muss jedoch nicht von Ordnung 2 sein, da keine Voraussetzung an die Wirkung außerhalb der Achse  $A$  getroffen wurde. Ist  $\gamma$  nun nicht von Ordnung 2, so kann die Abbildung  $\mathbb{Z}_2 \rightarrow G$  aber kein Homomorphismus sein. □

Ruft man sich in Erinnerung, dass die unendliche Diedergruppe  $D_\infty$  selbst als semidirektes Produkt  $D_\infty \cong \mathbb{Z} \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_2$  darstellbar ist, so wird mittels obigem Lemma 3.12 eine anschauliche – wenn auch nicht exakte – Interpretation des Aufbaus hyperbolischer Gruppen  $G$  deutlich: Sie alle werden aus den drei möglichen Bausteinen  $E < O(n-1)$  (endlich),  $\mathbb{Z}$  und  $\mathbb{Z}_2$  gebildet. Hierbei umfasst  $E$  die endlich vielen Achse-fixierenden elliptischen Isometrien,  $\mathbb{Z}$  die (Nebenklassen der) hyperbolischen Isometrien und  $\mathbb{Z}_2$  die (Nebenklassen der) Achse-spiegelnden elliptischen Isometrien. Jeder der Bausteine tritt höchstens einmal auf; der Baustein  $\mathbb{Z}$  liegt stets vor,  $E$  unterscheidet sich von Gruppe zu Gruppe und kann durchaus auch trivial sein, während das Vorkommen des Bausteins  $\mathbb{Z}_2$  darüber entscheidet, ob eine Typ-2-hyperbolische Gruppe vorliegt oder aber – im Falle des Fehlens von  $\mathbb{Z}_2$  – eine Typ-1-hyperbolische Gruppe. Als Spezialfall ergibt sich die Situation bei Mannigfaltigkeiten (also torsionsfreiem  $\Gamma$  und damit torsionsfreiem  $G$ ), wo  $G$  stets isomorph zu  $\mathbb{Z}$  ist. In dieser Situation ist also  $E$  trivial und  $\mathbb{Z}_2$  kommt nicht vor, womit insbesondere jede hyperbolische Gruppe bereits Typ-1-hyperbolisch ist.

Das folgende, elementare Lemma ermöglicht uns nun, zur Klärung der Struktur der Röhren das algebraische Verfahren – also sukzessive Gruppenerweiterungen – auch auf die geometrische Situation zu übertragen; jede Gruppenerweiterung entspricht in diesem Sinne einer weiteren Wirkung auf dem Urbild der Röhren, die anschließend herausgeteilt wird.

**Lemma 3.13.** *Sei  $G$  eine beliebige Gruppe, die auf einem topologischen Raum  $X$  wirkt, sowie  $N$  ein Normalteiler von  $G$ . Dann ist  $X/G$  homöomorph zum doppelten Quotienten  $(X/N)/(G/N)$ .*

*Beweis.* Der Beweis ist elementar; wir geben ihn hier der Vollständigkeit halber dennoch wieder. Zunächst zeigen wir, dass die Faktorgruppe  $G/N$  wohldefiniert auf dem Bahnenraum  $X/N$  wirkt. Hierzu definiere die Wirkung durch

$$G/N \times X/N \rightarrow X/N, \quad (Ng, Nx) \mapsto N(gx),$$

wobei  $gx$  durch die vorausgesetzte (Links-)Wirkung von  $G$  auf  $X$  gegeben ist und die Faktorgruppe  $G/N$  mittels Rechtsnebenklassen dargestellt wird.

Obige Abbildung ist wohldefiniert; seien hierzu  $Ng = Ng'$  sowie  $Nx = Nx'$ , d.h. insbesondere existieren  $n, n' \in N$  mit  $g' = ng$  sowie  $x' = n'x$ . Wegen  $Ng = gN$  (für alle  $g \in G$ ) aufgrund der Normalität von  $N$  folgt nun

$$\begin{aligned} (Ng') \cdot (Nx') &= N(g'x') = N(ngn'x) = N(gn'x) \\ &= (gN)(n'x) = (gN)x = N(gx) \\ &= (Ng) \cdot (Nx), \end{aligned}$$

also die Wohldefiniertheit. Außerdem ist obige Abbildung aufgrund von

$$(Ne) \cdot (Nx) = N(ex) = Nx$$

sowie

$$(Ng) \cdot ((Ng') \cdot (Nx)) = (Ng) \cdot N(g'x) = N(gg'x) = (N(gg')) \cdot (Nx)$$

tatsächlich eine Wirkung von  $G/N$  auf  $X/N$ .

Wir zeigen, dass die Abbildungen

$$\varphi : (X/N)/(G/N) \rightarrow X/G, \quad G/N(Nx) \mapsto \varphi(G/N(Nx)) := Gx$$

und

$$\psi : X/G \rightarrow (X/N)/(G/N), \quad Gx \mapsto \psi(Gx) := G/N(Nx)$$

wohldefinierte, zueinander inverse Homöomorphismen sind.

- Wohldefiniertheit von  $\varphi$ : Sei  $G/N(Nx) = G/N(Nx')$ , d.h. es existiert ein  $Ng \in G/N$  mit  $(Ng) \cdot (Nx) = Nx'$ . Wegen  $(Ng) \cdot (Nx) = N(gx)$  bedeutet dies  $N(gx) = Nx'$ , also die Existenz eines  $n \in N$  mit  $x' = ngx$ . Wir folgern

$$\varphi(G/N(Nx')) = Gx' = G(ngx) = Gx = \varphi(G/N(Nx)).$$

- Wohldefiniertheit von  $\psi$ : Sei  $Gx = Gx'$ , d.h. es existiert ein  $g \in G$  mit  $x' = gx$ . Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \psi(Gx') &= G/N(Nx') = G/N(Ngx) = G/N(gN)x \\ &= G/N(gN \cdot N)x = G/N(gN)(Nx) = G/N(Nx) \\ &= \psi(Gx). \end{aligned}$$

- $\varphi$  und  $\psi$  sind zueinander invers: Es gilt

$$\varphi(\psi(Gx)) = \varphi(G/N(Nx)) = Gx$$

sowie

$$\psi(\varphi(G/N(Nx))) = \psi(Gx) = G/N(Nx).$$

- Stetigkeit von  $\varphi$ : Sei  $U \subseteq X/G$  offen; wir wollen zeigen, dass  $\varphi^{-1}(U)$  ebenfalls offen ist. Gemäß Definition der Quotiententopologie ist auch  $\pi_{X \rightarrow X/G}^{-1}(U) =: U'$  offen, wobei  $\pi_{X \rightarrow X/G}$  die Projektion  $X \rightarrow X/G$  bezeichnet. Wiederum mittels der Quotiententopologie gilt

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(U) \text{ offen} &\Leftrightarrow \pi_{X/N \rightarrow (X/N)/(G/N)}^{-1}(\varphi^{-1}(U)) \text{ offen} \\ &\Leftrightarrow \pi_{X \rightarrow X/N}^{-1}(\pi_{X/N \rightarrow (X/N)/(G/N)}^{-1}(\varphi^{-1}(U))) =: U'' \text{ offen.} \end{aligned}$$

Für  $U''$  ergibt sich gemäß der Bijektivität von  $\varphi$

$$\begin{aligned} U'' &= \{x \in X : \pi_{X \rightarrow X/N}(x) \in \pi_{X/N \rightarrow (X/N)/(G/N)}^{-1}(\varphi^{-1}(U))\} \\ &= \{x \in X : \pi_{X/N \rightarrow (X/N)/(G/N)}(\pi_{X \rightarrow X/N}(x)) \in \varphi^{-1}(U)\} \\ &= \{x \in X : G/N(Nx) \in \varphi^{-1}(U)\} \\ &= \{x \in X : \varphi(G/N(Nx)) \in \varphi(\varphi^{-1}(U))\} \\ &= \{x \in X : Gx \in U\} \\ &= U', \end{aligned}$$

also die Behauptung, da  $U'$  offen war.

- Stetigkeit von  $\psi$ : Sei  $U \subseteq (X/N)/(G/N)$  offen, weshalb nach Quotiententopologie auch  $U'' := \{x \in X : G/N(Nx) \in U\}$  offen ist. Ebenfalls gemäß Quotiententopologie gilt

$$\psi^{-1}(U) \text{ offen} \Leftrightarrow \pi_{X \rightarrow X/G}^{-1}(\psi^{-1}(U)) =: U' \text{ offen.}$$

Für  $U'$  erhalten wir mithilfe der Bijektivität von  $\psi$  die Darstellung

$$\begin{aligned} U' &= \{x \in X : Gx \in \psi^{-1}(U)\} \\ &= \{x \in X : \psi(Gx) \in \psi(\psi^{-1}(U))\} \\ &= \{x \in X : G/N(Nx) \in U\} \\ &= U'', \end{aligned}$$

womit die Behauptung folgt, da  $U''$  offen war.

□

Damit sind alle Werkzeuge zur Hand, um die Gestalt der Röhren zu bestimmen.

**Lemma 3.14.** *Sei  $G$  eine maximale hyperbolische Untergruppe von  $\Gamma$ , für die  $X_-(G)$  nicht leer ist, und bezeichne  $D^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$  die offene Einheitskugel. Dann gilt:*

1. *Ist  $G$  hyperbolisch von Typ 1, so ist  $X_-(G)/G$  homöomorph zu einem  $(D^{n-1}/E)$ -Bündel über der  $\mathbb{S}^1$ , wobei  $E < O(n-1)$  der endliche, aus den elliptischen Elementen bestehende Normalteiler von  $G$  ist. Insbesondere ist  $X_-(G)/G$  homotopieäquivalent zur  $\mathbb{S}^1$ .*
2. *Ist  $G$  hyperbolisch von Typ 2, so ist  $X_-(G)/G$  homöomorph zu einem Produkt*

$$D' \times [0, 1] \quad \text{oder} \quad D' \times (0, 1),$$

wobei  $D'$  den Bahnenraum von  $D^{n-1}/E$  nach einer – möglicherweise trivialen –  $\mathbb{Z}_2$ -Wirkung beschreibt; ferner bezeichnet  $E < O(n-1)$  den aus den Achse-fixierenden elliptischen Isometrien bestehenden endlichen Normalteiler von  $G$ . Insbesondere ist  $X_-(G)/G$  zusammenziehbar.

*Beweis.* 1. Wir behaupten, dass im Falle von Typ-1-hyperbolischem  $G$  bereits

$$X_-(G) = \bigcup_{g \in G \text{ hyperbolisch}} \{d_g < \varepsilon_g\}$$

gilt. Die Inklusion „ $\supseteq$ “ ist offensichtlich, denn ist  $x \in \{d_g < \varepsilon_g\}$  für ein hyperbolisches  $g \in G$ , so ist  $g$  in der Erzeugermenge von  $G_{\varepsilon_g}(x)$  enthalten; da  $g$  als hyperbolisches Element unendliche Ordnung besitzt, ist auch  $G_{\varepsilon_g}(x)$  unendlich, also  $x \in X_-(G)$ .

Umgekehrt wissen wir für die Inklusion „ $\subseteq$ “ schon, dass  $X_-(G) \subseteq \bigcup_{g \in G \setminus \{\text{id}\}} \{d_g < \varepsilon_g\}$ ; es bleibt also lediglich zu zeigen, dass für  $x \in X$  mit  $d_g(x) \geq \varepsilon_g$  für alle hyperbolischen  $g \in G$  (d.h.  $x$  liegt höchstens in den Subniveaumengen  $\{d_{g'} < \varepsilon_{g'}\}$  von elliptischen  $g' \in G$ ) die Gruppe  $G_{\varepsilon_g}(x)$  bereits endlich ist. Wegen  $d_g(x) \geq \varepsilon_g$  für alle hyperbolischen  $g \in G$  besteht in einem solchen Fall die Erzeugermenge

$$\{g \in G : d_g(x) < \varepsilon_g\}$$

von  $G_{\varepsilon_g}(x)$  nur aus der Identität sowie – möglicherweise – elliptischen  $g \in G$ . Da  $G$  eine Typ-1-hyperbolische Gruppe ist, fixieren all diese elliptischen Elemente die Achse  $A$  von  $G$  punktweise. Ist nun  $g_0$  ein beliebiges Element von  $G_{\varepsilon_g}(x)$ , so ist  $g_0$  als Wort in diesen elliptischen  $g \in G$  darstellbar, womit wir sehen, dass auch  $g_0$  die Achse  $A$  punktweise fixiert; folglich ist  $g_0$  selbst elliptisch, d.h.  $G_{\varepsilon_g}(x)$  besteht nur aus elliptischen Elementen. Als diskrete, elementare Gruppe, welche nur aus elliptischen Elementen besteht, muss  $G_{\varepsilon_g}(x)$  gemäß Lemma 3.7 selbst schon endlich sein, was zu zeigen war.

Mittels dieser Darstellung von  $X_-(G)$  folgern wir wie im Beweis von Lemma 2.11, dass  $X_-(G)$  homöomorph zum Produkt  $D^{n-1} \times \mathbb{R}$  ist und sich dieser Homöomorphismus verträglich mit der Gruppenwirkung durch  $G$  wählen lässt<sup>4</sup>.

Da die elliptischen Elemente aus  $G$  die Achse  $A$  punktweise fixieren – also anders ausgedrückt, die von  $E$  induzierte Wirkung auf dem  $\mathbb{R}$ -Faktor gerade trivial ist –, erhalten wir zunächst

$$X_-(G)/E \cong (D^{n-1} \times \mathbb{R})/E \cong (D^{n-1}/E) \times \mathbb{R}.$$

Ferner wissen wir (vgl. Lemma 3.12), dass  $G/E \cong \mathbb{Z}$  zyklisch erzeugt wird von der Nebenklasse  $E\gamma_0$  einer hyperbolischen Isometrie  $\gamma_0 \in G$  minimaler Translation der Achse  $A$ . Da  $\gamma_0$  gemäß der Produktstruktur  $X_-(G) \cong D^{n-1} \times \mathbb{R}$  auf dem ersten Faktor als Homöomorphismus  $D^{n-1} \rightarrow D^{n-1}$  und auf dem zweiten Faktor als Translation wirkt, folgern wir, dass  $E\gamma_0$  bezüglich obiger Produktstruktur

$$X_-(G)/E \cong (D^{n-1}/E) \times \mathbb{R}$$

als Homöomorphismus  $D^{n-1}/E \rightarrow D^{n-1}/E$  auf dem ersten Faktor und als Translation auf dem zweiten Faktor wirkt. Es ergibt sich, dass

$$(X_-(G)/E)/(G/E) \cong (X_-(G)/E)/\langle E\gamma_0 \rangle$$

einen Abbildungstorus des von  $E\gamma_0$  induzierten Homöomorphismus  $D^{n-1}/E \rightarrow D^{n-1}/E$  beschreibt. Mittels Lemma 3.13 entspricht  $(X_-(G)/E)/(G/E)$  aber genau  $X_-(G)/G$  und wir schließen, dass  $X_-(G)/G$  ein ebensolcher Abbildungstorus ist, also ein  $(D^{n-1}/E)$ -Bündel über der  $\mathbb{S}^1$ .

Die Homotopieäquivalenz dieses Bündels zur  $\mathbb{S}^1$  erhält man wiederum mittels Zusammenziehen entlang der Projektionsgeodätischen hin zur Achse  $A$ , da die Projektion nach  $A$  äquivariant unter  $G$  ist.

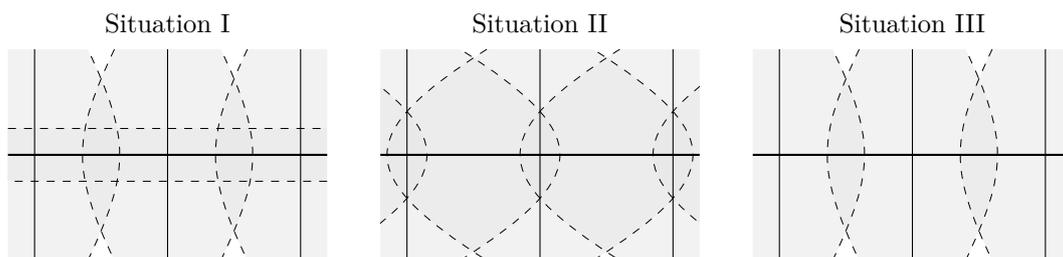


Abbildung 3.1: Schematische Darstellung verschiedener Situationen hinsichtlich der Lage der Subniveaumengen im Fall von Typ-2-Röhren. Abhängig davon, wie die einzelnen Subniveaumengen relativ zueinander liegen, ändert sich der Homöomorphietyp der Röhre. Die senkrechten, dicken Linien entsprechen den Fixpunktgeraden der Achsen-Spiegelungen, während die waagrechte, dicke Linie die Achse darstellt. Die mit gestricheltem Rand gezeichneten grauen Ovale um die Fixpunktgeraden sind die zugehörigen Subniveaumengen der Achsen-Spiegelungen; hingegen repräsentiert der Schlauch um die Achse die Subniveaumenge einer hyperbolischen Isometrie. Die sogenannten Spiegelungspunkte sind die Schnittpunkte der Achse mit den Fixpunktgeraden der Achsen-Spiegelungen.

2. Im Verlauf des Beweises wird es häufig hilfreich sein, sich an den in Abbildung 3.1 dargestellten beispielhaften Situationen zu orientieren.

Zunächst ist die Gestalt von  $X_-(G)$  zu klären, welche ungleich komplizierter ist als bei Typ-1-hyperbolischen Gruppen; abhängig von der minimalen hyperbolischen Verschiebung auf der Achse sowie der Wahl der Niveaus  $\varepsilon_g$  ergeben sich unterschiedliche Gestalten.

Als ersten Punkt halten wir fest, dass auch im Falle von Typ-2-hyperbolischen Gruppen die Niveaumengen der Achse-fixierenden elliptischen Isometrien keine Rolle spielen. Genauer: Ist  $x \in X$  in keiner Subniveaumenge von hyperbolischen Isometrien oder Achse-spiegelnden Isometrien aus  $G$  enthalten – d.h.  $x$  liegt höchstens in Subniveaumengen von Achse-fixierenden elliptischen Isometrien –, so ist  $x \notin X_-(G)$ . Zu zeigen ist hierfür lediglich, dass in einer solchen Situation  $G_{\varepsilon_G}(x)$  endlich ist. Da aber nun die Erzeugermenge  $\{g \in G : d_g(x) < \varepsilon_g\}$  von  $G_{\varepsilon_G}(x)$  nur aus der Identität sowie Achse-fixierenden Isometrien – also Elementen von  $E$  – besteht, ist  $G_{\varepsilon_G}(x)$  eine Untergruppe von  $E$  und damit selbst endlich.

Ist andererseits  $x$  nur in Subniveaumengen von Achse-spiegelnden Isometrien mit selbem Spiegelungspunkt enthalten, so ergibt sich analog, dass  $x \notin X_-(G)$ : Das Produkt solcher Isometrien ist wiederum eine elliptische Isometrie mit (mindestens) dem Spiegelungspunkt als Fixpunkt, weshalb  $G_{\varepsilon_G}(x)$  nur aus elliptischen Isometrien bestünde; wegen der Diskretheit von  $G$  muss  $G_{\varepsilon_G}(x)$  dann bereits endlich sein (vgl. Lemma 3.7).

Mithilfe der bereits vorher festgestellten, allgemeinen Beziehung

$$X_-(G) \subseteq \bigcup_{g \in G \setminus \{\text{id}\}} \{d_g < \varepsilon_g\}$$

fassen wir zusammen, dass falls  $x \in X_-(G)$ , so liegt  $x$  in der Subniveaumenge einer hyperbolischen Isometrie oder in den Subniveaumengen zweier Achse-spiegelnder Isometrien mit verschiedenen Spiegelungspunkten (beachte, dass das Produkt zweier solcher Spiegelungen eine hyperbolische Isometrie und damit von unendlicher Ordnung ist). Anders ausgedrückt ergibt sich  $X_-(G)$  als

<sup>4</sup>D.h. der Faktor  $D^{n-1}$  entspricht dem Urbild in  $X_-(G)$  eines Punktes auf der Achse unter der Projektion auf die Achse – also  $D^{n-1} \cong \pi_A^{-1}(\{A(t)\}) \cap X_-(G)$  –, während der Faktor  $\mathbb{R}$  gerade der Achse  $A$  selbst entspricht.

Vereinigung der Subniveaumengen hyperbolischer Isometrien sowie der Durchschnitte der Subniveaumengen von Achsen-Spiegelungen mit verschiedenen Spiegelungspunkten.

Sei  $x$  ein Punkt auf der Achse  $A$  mit  $x \in X_-(G)$  (dass nicht jeder Punkt von  $A$  automatisch auch in  $X_-(G)$  liegen muss, sehen wir später im Beweis). Ist  $c_x$  ein geodätischer Strahl, der von  $x$  ausgehend senkrecht zu  $A$  startet, so wissen wir nach Korollar 1.22, dass  $t \mapsto d_g(c_x(t))$  streng monoton steigend gegen  $\infty$  strebt für alle Achsen-Spiegelungen  $g \in G$ , für die  $x \notin \text{Fix}(g)$  oder mithilfe von Lemma 1.23 – falls  $x \in \text{Fix}(g)$  –  $c_x$  nicht in  $\text{Fix}(g)$  verläuft, also  $\dot{c}_x(0) \notin T_x \text{Fix}(g)$ . Umgekehrt sehen wir so, dass falls  $y \in X$  ein Punkt ist, der in den Subniveaumengen zweier Achsen-Spiegelungen mit verschiedenen Spiegelungspunkten liegt, dann auch  $\pi_A(y) \in A$  in diesen Subniveaumengen liegt, wobei  $\pi_A$  die Projektion auf die Achse  $A$  bezeichne. Insgesamt können wir also – da analoge Aussagen für die hyperbolischen Isometrien gelten (vgl. Lemma 1.26) – die Menge  $X_-(G)$  durch die von  $A$  senkrecht ausgehenden geodätischen Strahlen  $c_x$  ab Punkten  $x \in X_-(G) \cap A$  „fasern“. Mit obigen Monotonieaussagen ergibt sich aber, dass ab einem gewissen (stetig von  $x$  und  $\dot{c}_x(0)$  abhängigen) Zeitpunkt eine solche Faserungsgeodätische jede Subniveaumenge hyperbolischer Isometrien verlassen hat und sich höchstens noch in den Subniveaumengen von Achsen-Spiegelungen befindet, welche den selben Spiegelungspunkt haben; in diesem Fall ist aber auch bereits  $X_-(G)$  verlassen (s.o.). Wie im Fall von Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeiten folgern wir somit (vgl. Lemma 2.11), dass

$$X_-(G) \cong D^{n-1} \times (X_-(G) \cap A).$$

Es verbleibt folglich, die möglichen Fälle für die Gestalt von  $X_-(G) \cap A$  zu klären.

Existiert eine hyperbolische Isometrie  $g_h \in G$  mit nichtleerer Subniveaumenge  $\{d_{g_h} < \varepsilon_{g_h}\}$  – äquivalent dazu, die Verschiebung von  $g_h$  auf  $A$  ist kleiner als  $\varepsilon_{g_h}$  –, so ist  $X_-(G) \cap A = A \cong \mathbb{R}$ , denn  $\{d_{g_h} < \varepsilon_{g_h}\} \subseteq X_-(G)$  ist eine offene Röhrenumgebung der Achse  $A$  (vgl. Lemma 1.29). In Abbildung 3.1 tritt dies beispielsweise in Situation I auf.

Seien nun andernfalls alle Subniveaumengen hyperbolischer Isometrien aus  $G$  leer. Gemäß obiger Betrachtungen besteht  $X_-(G)$  dann aus der Vereinigung der Durchschnitte  $\{d_g < \varepsilon_g\} \cap \{d_{g'} < \varepsilon_{g'}\}$  für alle Paare von Achsen-Spiegelungen  $g, g' \in G$  mit verschiedenen Spiegelungspunkten. Existiert ein solches Paar  $g, g'$  von Spiegelungen, deren Subniveaumengen den jeweils anderen Spiegelungspunkt enthalten (in Abbildung 3.1 ist dies für Situation II der Fall), so ist wegen der Monotonie von  $d_g$  auf der zu  $\text{Fix}(g)$  senkrecht verlaufenden Geodätischen  $A$  (s.o., und analog für  $g'$ ) auch das ganze Teilstück von  $A$  zwischen den Spiegelungspunkten von  $g$  und  $g'$  im Schnitt  $\{d_g < \varepsilon_g\} \cap \{d_{g'} < \varepsilon_{g'}\}$  enthalten. Da  $X_-(G)$  invariant unter  $G$  ist, muss dann bereits ganz  $A$  in  $X_-(G)$  enthalten sein, denn die Spiegelungen bzw. Verschiebungen dieses Teilstücks von  $A$  mittels der Achsen-Spiegelungen bzw. der hyperbolischen Isometrien überdecken ganz  $A$ . Folglich gilt in diesem Fall erneut  $X_-(G) \cap A = A \cong \mathbb{R}$ . Sind andererseits für kein Paar von Achsen-Spiegelungen die Spiegelungspunkte in der jeweils anderen Subniveaumenge enthalten (so wie z.B. in Situation III von Abbildung 3.1), so liegt kein einziger Schnittpunkt in einem solchen Durchschnitt  $\{d_g < \varepsilon_g\} \cap \{d_{g'} < \varepsilon_{g'}\}$ , womit auch kein Spiegelungspunkt in  $X_-(G)$  enthalten ist; es folgt, dass  $X_-(G) \cap A$  keinen Spiegelungspunkt enthält. Somit muss  $X_-(G) \cap A \subseteq A$  eine disjunkte Vereinigung von Intervallen sein (welche offen sind, da  $X_-(G)$  offen war), weshalb auch  $X_-(G)$  in Zusammenhangskomponenten entlang dieser Stücke zerfällt. Wiederum mittels Symmetriebetrachtungen anhand der Achsen-Spiegelungen bzw. hyperbolischen Isometrien erkennen wir, dass all diese Zusammenhangskomponenten von  $X_-(G)$  zueinander isometrisch sind.

Wir können also zusammenfassen, dass

$$X_-(G) \cong D^{n-1} \times \mathbb{R} \quad \text{oder} \quad D^{n-1} \times \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k, 2k+1).$$

Zur Klärung der Struktur von  $X_-(G)$  werden wir nun anhand dieser zwei Fälle für  $X_-(G)$  unterscheiden. Hierbei werden wir jeweils ausnutzen, dass  $G$  als Typ-2-hyperbolische Gruppe einen Typ-1-hyperbolischen Normalteiler  $G^{(1)}$  besitzt, sodass  $G/G^{(1)} \cong \mathbb{Z}_2$  (vgl. Lemma 3.12).

Für den Fall  $X_-(G) \cong D^{n-1} \times \mathbb{R}$  wissen wir nach der Argumentation in 1., dass  $X_-(G)/G^{(1)}$  homöomorph zu einem  $(D^{n-1}/E)$ -Bündel über der  $\mathbb{S}^1$  ist. Gemäß Lemma 3.13 bleibt also lediglich zu klären, welche Auswirkungen die anschließende  $\mathbb{Z}_2$ -Wirkung hat; beachte hierbei, dass  $\mathbb{Z}_2 \cong G/G^{(1)}$  von der Nebenklasse einer beliebigen Achsen-Spiegelung erzeugt wird. Dies macht insbesondere deutlich, dass die  $\mathbb{Z}_2$ -Wirkung mit der Bündelstruktur verträglich ist, d.h. der Quotient

$$X_-(G)/G \cong (X_-(G)/G^{(1)})/\mathbb{Z}_2$$

ergibt sich wiederum als Bündel, wobei die Wirkung von  $\mathbb{Z}_2$  auf Fasern und Basisraum getrennt betrachtet werden kann. Hierdurch ist bereits begründet, dass die Fasern von der Gestalt  $D' := (D^{n-1}/E)/\mathbb{Z}_2$  sind (beachte, dass die  $\mathbb{Z}_2$ -Wirkung auf  $D^{n-1}/E$  durchaus trivial sein kann, wie das Beispiel im Anschluss an den Beweis deutlich macht). Andererseits gilt bezüglich der  $\mathbb{Z}_2$ -Wirkung auf dem Basisraum  $\mathbb{S}^1$  Folgendes: Bezeichnet  $\mu$  die minimale Translation der hyperbolischen Isometrien aus  $G^{(1)}$  (und damit aus  $G$ ), so liegen die Spiegelungspunkte auf der Achse  $A$  bekanntlich im Abstand  $\mu/2$  voneinander. Da sich der Basisraum  $\mathbb{S}^1$  als Bahnenraum der Achse  $A$  nach der Verschiebungswirkung durch die hyperbolischen Isometrien ergab – also die Darstellung  $[0, \mu]/(0 \sim \mu)$  besitzt –, sehen wir, dass  $\mathbb{S}^1/\mathbb{Z}_2$  nun aus  $[0, \mu]$  dadurch entsteht, dass die Punkte der Form  $\mu/2 + t$  jeweils mit ihrem gegenüberliegenden Punkt  $\mu/2 - t$  identifiziert werden, wobei  $t \in [0, \mu/2]$ ; wir haben also als Spiegelungspunkt gerade den Punkt  $\mu/2 \in [0, \mu]$  gewählt. Doch dieser Quotient ist homöomorph zu  $[0, \mu/2]$ , womit  $\mathbb{S}^1/\mathbb{Z}_2 \cong [0, \mu/2] \cong [0, 1]$  folgt, was zu zeigen war.

Betrachte nun den Fall, dass  $X_-(G) \cong D^{n-1} \times \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k, 2k+1)$ ; hierbei befinden sich zwischen den einzelnen Zusammenhangskomponenten des zweiten Faktors (d.h. zwischen den offenen Intervallen) genau die Spiegelungspunkte der Achsen-Spiegelungen. Oben hatten wir bereits gesehen, dass eine einzelne Zusammenhangskomponente – ohne Einschränkung  $D^{n-1} \times (0, 1)$  – ausreicht, um mittels ihrer Bilder unter der  $G$ -Wirkung ganz  $X_-(G)$  zu überdecken. Die hyperbolischen Isometrien aus  $G$  von minimaler Verschiebung  $\mu$  auf der Achse  $A$  bilden dabei eine Komponente stets auf die zweitnächste ab, also beispielsweise  $D^{n-1} \times (0, 1)$  auf  $D^{n-1} \times (4, 5)$ , da ja die Spiegelungspunkte stets im Abstand  $\mu/2$  auf  $A$  liegen. Betrachten wir nun wiederum zunächst den Quotienten  $X_-(G)/G^{(1)}$ , so sehen wir, dass dieser aus zwei Zusammenhangskomponenten besteht: Diese entsprechen hinsichtlich des zweiten Faktors den Intervallen  $\dots, (-4, -3), (0, 1), (4, 5), \dots$  einerseits bzw. den Intervallen  $\dots, (-2, -1), (2, 3), \dots$  andererseits. Die Wirkung von  $G^{(1)}$  auf dem ersten Faktor  $D^{n-1}$  ist genau die Wirkung durch die Achse-fixierenden elliptischen Elemente. Wir folgern, dass

$$X_-(G)/G^{(1)} \cong (D^{n-1}/E) \times (0, 1) \cup (D^{n-1}/E) \times (2, 3).$$

Wiederum wegen Lemma 3.13 bleibt nun nur noch die  $\mathbb{Z}_2$ -Wirkung auf  $X_-(G)/G^{(1)}$  zu klären. Entsprechend dem vorigen Fall respektiert auch hier die  $\mathbb{Z}_2$ -Wirkung die Bündelstruktur (hier: triviales Bündel, also Produkt) auf  $X_-(G)/G^{(1)}$ , weshalb sich als Faser (hier: erster Faktor) erneut  $D' = (D^{n-1}/E)/\mathbb{Z}_2$  ergibt (auch hier kann die  $\mathbb{Z}_2$ -Wirkung auf  $D^{n-1}/E$  mitunter trivial sein, wie das anschließende Beispiel wiedergibt). Der Basisraum (hier: zweiter Faktor) ergibt sich als Quotient

von  $(0, 1) \cup (2, 3)$  nach der Spiegelung am Spiegelungspunkt  $3/2$  zwischen diesen Intervallen; es werden also die Punkte  $3/2 + t$  jeweils mit den Punkten  $3/2 - t$  identifiziert, wobei  $t \in (1/2, 3/2)$ . Dies ist aber gerade das Intervall  $(0, 1)$  selbst, womit abschließend

$$X_-(G)/G \cong D' \times (0, 1)$$

folgt.

In beiden Fällen – d.h. sowohl für  $D' \times [0, 1]$  als auch  $D' \times (0, 1)$  als Homöomorphietyp von  $X_-(G)/G$  – lässt sich wie in Punkt 1. zunächst die Faser  $D'$  kontrahieren, weil die Projektion hin zur Achse  $A$  äquivariant unter der  $G$ -Wirkung ist; da  $[0, 1]$  und  $(0, 1)$  zusammenziehbar sind, sehen wir, dass auch  $X_-(G)/G$  zusammenziehbar ist. □

Im Falle von Typ-1-hyperbolischem  $G$  nennen wir  $X_-(G)/G$  auch **Typ-1-Röhre**, während wir bei Typ-2-hyperbolischem  $G$  von **Typ-2-Röhren** sprechen. Zur Verdeutlichung des verschiedenartigen Verhaltens im Falle von Typ-2-Röhren sind folgende Beispiele hilfreich.

**Beispiel 3.15.** Bekanntlich entspricht die Situation in  $X$  bis auf Homöomorphie der in  $\mathbb{R}^n$ ; der Einfachheit halber betrachten wir deshalb direkt den  $\mathbb{R}^3$ . Ferner lassen wir Achse-fixierende elliptische Isometrien außer Acht, d.h. wir gehen für die Typ-2-hyperbolische Gruppe  $G$  – welche sich ja gemäß Lemma 3.12 als Erweiterung der endlichen Gruppe  $E < O(n-1)$  um die unendliche Diedergruppe  $D_\infty$  ergibt – von dem Fall aus, dass  $E$  trivial und  $G$  damit selbst isomorph zu  $D_\infty$  ist. Da  $G$  also von zwei benachbarten Achsen-Spiegelungen erzeugt wird, ergeben sich die verschiedenen Beispiele durch Angabe verschiedener solcher Isometrien  $g, g'$ . Als Achse  $A$  von  $G$  wählen wir die  $x$ -Koordinatenachse  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ .

1. Sei  $X_-(G) \cong D^2 \times \mathbb{R}$ , was sich im obigen Modell als

$$X_-(G) \cong \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 < 1\} =: W$$

realisieren lässt; dies ist eine Röhrenumgebung der  $x$ -Achse. Wähle

$$g := \left( (x, y, z) \mapsto (-x, -z, y) \right) \quad \text{sowie} \quad g' := \left( (x, y, z) \mapsto (2-x, -z, y) \right)$$

als die oben beschriebenen Erzeuger. Anschaulich beschreibt  $g$  eine Spiegelung in  $x$ -Richtung an  $x = 0$  bei gleichzeitiger Drehung der  $(y, z)$ -Ebenen um  $\pi/2$  (in mathematisch positiver Richtung), während  $g'$  hinsichtlich der Drehung der  $(y, z)$ -Ebenen mit  $g$  übereinstimmt, jedoch die Spiegelung in  $x$ -Richtung an  $x = 1$  vornimmt. Folglich entspricht

$$h := g' \circ g = \left( (x, y, z) \mapsto (x+2, -y, -z) \right)$$

einer hyperbolischen Isometrie mit minimaler Verschiebung  $\mu = 2$  auf der  $x$ -Achse, welche auf den  $(y, z)$ -Ebenen als Drehung um  $\pi$  wirkt. Offenbar ist durch

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0, 1], y \geq 0, y^2 + z^2 < 1\} \subseteq W$$

ein Fundamentalbereich für die Wirkung auf  $W$  gegeben und es ergibt sich

$$X_-(G)/G \cong (D^2/\mathbb{Z}_2) \times [0, 1],$$

wobei die  $\mathbb{Z}_2$ -Wirkung auf  $D^2$  gerade die Spiegelung  $(y, z) \mapsto (-y, z)$  entlang der  $z$ -Achse in der  $(y, z)$ -Ebene ist; insbesondere liegt eine nichttriviale  $\mathbb{Z}_2$ -Wirkung auf dem ersten Faktor  $D^2$  vor. Anschaulich beschreibt  $D' = (D^2/E)/\mathbb{Z}_2$  (beachte, dass  $E$  in unseren Beispielen trivial ist) eine halbe Kreisscheibe.

2. Wir wählen  $W \cong X_-(G)$  wie in Punkt 1., die Erzeuger der Gruppenwirkung jedoch gemäß

$$g := \left( (x, y, z) \mapsto (-x, y, z) \right) \quad \text{sowie} \quad g' := \left( (x, y, z) \mapsto (2 - x, y, z) \right).$$

Folglich beschreibt  $g$  eine Spiegelung in  $x$ -Richtung an  $x = 0$ , welche auf den  $(y, z)$ -Ebenen trivial wirkt, während  $g'$  entsprechend in  $x = 1$  spiegelt. Als Fundamentalbereich ergibt sich analog nun

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0, 1], y^2 + z^2 < 1\} \subseteq W$$

und wir stellen fest, dass diesmal die  $\mathbb{Z}_2$ -Wirkung auf dem Faktor  $D^2$  trivial ist. Es folgt

$$X_-(G)/G \cong (D^2/\mathbb{Z}_2) \times [0, 1] \cong D^2 \times [0, 1],$$

also insbesondere  $D' \cong D^2$  in der Notation von Lemma 3.14.

3. Betrachten wir nun einen Fall von unzusammenhängendem  $X_-(G)$ , was sich durch

$$X_-(G) \cong \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : k + \frac{1}{3} < x < k + \frac{2}{3} \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}, y^2 + z^2 < 1\} =: W$$

realisieren lässt;  $W$  ergibt sich also als Vereinigung der Form

$$\dots \cup D^2 \times \left( -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \right) \cup D^2 \times \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \cup D^2 \times \left( \frac{4}{3}, \frac{5}{3} \right) \cup \dots$$

Die Erzeuger  $g$  und  $g'$  der Gruppenwirkung wählen wir wie in Punkt 1., womit sich als Fundamentalbereich nun

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}, y \geq 0, y^2 + z^2 < 1\}$$

ergibt. Analog zu Punkt 1. ist die  $\mathbb{Z}_2$ -Wirkung auf dem Faktor  $D^2$  nichttrivial, und  $D' \cong D^2/\mathbb{Z}_2$  beschreibt eine halbe Kreisscheibe. Es folgt abschließend

$$X_-(G)/G \cong (D^2/\mathbb{Z}_2) \times \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right).$$

4. Mit  $W$  wie in Punkt 3. und  $g, g'$  wie in 2. erhalten wir eine triviale  $\mathbb{Z}_2$ -Wirkung auf der  $D^2$ , was schließlich zu

$$X_-(G)/G \cong D^2 \times \left( \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

führt.

◆

### Parabolischer Fall

Wir wenden uns nun den anderen möglichen Zusammenhangskomponenten des dünnen Teils zu, den **Spitzen**. Da für unsere Wahl der Niveaus  $\varepsilon_\gamma \in [\varepsilon, \varepsilon(n)/2]$  gilt, ergibt sich unmittelbar, dass der  $\varepsilon(n)/2$ -dicke Teil  $X_{\geq \varepsilon(n)/2}$  eine Teilmenge unseres  $X_+$  ist, genau wie  $X_+$  wiederum als Teilmenge im  $\varepsilon$ -dicken Teil  $X_{\geq \varepsilon}$  liegt. Hiermit folgt, dass sich die Aussage, jede Spitze von  $M = X/\Gamma$  entspreche genau einem topologischen Ende von  $M$ , aus [9] (insbesondere Kapitel 4 und 5; beachte, dass bei uns  $M$  stets endliches Volumen besitzt) auf unsere Situation übertragen lässt.

**Lemma 3.16.** *Sei  $G$  eine maximale parabolische Untergruppe von  $\Gamma$ , für die  $X_-(G)$  nicht leer ist. Dann ist  $X_-(G)/G$  homöomorph zu  $V \times (0, \infty)$  mit einer  $(n - 1)$ -dimensionalen, kompakten Orbifaltigkeit  $V$ . Ferner existiert eine starke Deformationsretraktion von  $M$  auf den Abschluss von  $M \setminus \pi(X_-(G))$ .*

*Beweis.* Die Produktstruktur weit in der Spitze – d.h. in einer Umgebung des zugehörigen topologischen Endes – ergibt sich aus den Betrachtungen in [9] Kapitel 4 und 5 bzw. dem Beweis der dortigen Proposition 6.6 (vgl. auch die Anmerkungen vor dem Lemma). Wie im Beweis von Lemma 2.12 können wir diese Darstellung als Produkt auf ganz  $X_-(G)/G \cong \pi(X_-(G))$  fortsetzen; analog lässt sich auch die Aussage zur starken Deformationsrektion auf den gemeinsamen Rand übertragen.  $\square$

### Weitere Eigenschaften

Die Untersuchung des dünnen Teils schließen wir mit einigen allgemeinen Betrachtungen ab. So wird es zur Kontrolle der Topologie der Orbifaltigkeit  $M = X/\Gamma$  zentral sein, die Anzahl an Komponenten des dünnen Teils  $M_-$  beschränken zu können, wobei sich diese Schranke sogar linear im Volumen wählen lässt, wie folgende Aussage wiedergibt (analog zum Fall von Mannigfaltigkeiten, vgl. Lemma 2.14). Beachte jedoch, dass wir hierfür als zusätzliche Voraussetzung auf die Schranke  $\eta$  an die Ordnung endlicher Untergruppen von  $\Gamma$  zurückgreifen müssen (siehe auch Lemma 3.1); dass dies eine recht natürliche Bedingung ist, wird im Anschluss erläutert.

**Lemma 3.17.** *Es existiert eine nur von  $\varepsilon$ , der Dimension  $n$  und  $\eta \in \mathbb{N}$  abhängige Konstante  $C = C(\varepsilon, n, \eta) > 0$  sodass Folgendes gilt: Ist die Ordnung endlicher Untergruppen von  $\Gamma$  durch  $\eta$  beschränkt, so stellt  $C \cdot \text{Vol}(X/\Gamma)$  eine Schranke an die Anzahl an Komponenten des dünnen Teils  $M_-$  von  $M = X/\Gamma$  dar. In Dimension  $n = 2$  hängt  $C$  dabei nicht von  $\eta$  ab.*

*Beweis.* Der Beweis verläuft ähnlich dem von Lemma 2.14. Sind  $X_-(G)/G$  und  $X_-(G')/G'$  Zusammenhangskomponenten des dünnen Teils von  $M$  (mit  $G, G'$  maximalen unendlichen elementaren Untergruppen von  $\Gamma$ ), so existiert nach Lemma 3.10 Aussage 2. ein  $\delta = \delta(n) > 0$  (welches sich als  $\delta(n) = \varepsilon(n)/8$  wählen lässt) mit

$$d(X_-(G), X_-(G')) \geq \delta.$$

Folglich sind die  $\delta/2$ -Umgebungen der  $X_-(G)$  für die maximalen unendlichen elementaren Untergruppen  $G$  disjunkt, d.h.

$$(X_-(G))_{\delta/2} \cap (X_-(G'))_{\delta/2} = \emptyset$$

für  $G \neq G'$ . Wähle  $x \in (X_-(G))_{\delta/4} \setminus X_-(G)$ , womit  $x$  insbesondere nicht im Urbild  $X_-$  des dünnen Teils von  $M = X/\Gamma$  liegen kann, denn dieser setzt sich ja genau aus solchen verschiedenen  $X_-(G)$  zusammen. Folglich ist nach Definition des dünnen Teils  $\Gamma_{\varepsilon_\Gamma}(x)$  bereits endlich, also auch  $\Gamma_{\varepsilon/16}(x) < \Gamma_{\varepsilon_\Gamma}(x)$  (beachte  $\varepsilon_\gamma \geq \varepsilon$  für alle  $\gamma \in \Gamma$  gemäß Definition der  $\varepsilon_\gamma$ ). Es ergibt sich

$$|\Gamma_{\varepsilon/16}(x)| \leq \eta$$

nach Definition von  $\eta$ . Mittels Lemma 3.3 erhalten wir nun ein  $y \in X$  und ein  $\rho = \rho(\varepsilon/16, \eta) > 0$  mit

$$d(x, y) < \frac{\varepsilon}{16 \cdot 4} = \frac{\varepsilon}{64}$$

sowie

$$d_\Gamma(y) \geq \rho > 0.$$

Beachte, dass  $\rho$  nur von  $\varepsilon$  und  $\eta$  abhängt sowie außerdem

$$\frac{\varepsilon}{64} \leq \frac{\varepsilon(n)}{64} = \frac{\varepsilon(n)}{8 \cdot 8} = \frac{\delta(n)}{8}$$

gilt. Aufgrund der Wahl von  $x$  erhalten wir somit  $y \in (X_-(G))_{3\delta/8}$ . Setze  $r := \min\{\rho/2, \delta/8\} = \min\{\rho(\varepsilon/16, \eta)/2, \delta(n)/8\}$ , womit  $r$  ebenfalls nur von  $\varepsilon$ ,  $\eta$  und  $n$  abhängt.

Folglich sind die Kugeln von Radius  $r$  um die verschiedenen  $y$  (je ein  $y \in X$  für jede Zusammenhangskomponente  $X_-(G)/G$  des dünnen Teils von  $X/\Gamma$ ) disjunkt und projizieren wegen  $d_\Gamma(y) \geq \rho$  injektiv nach  $X/\Gamma$ , weswegen das Volumen ihrer Projektion mit dem Volumen in  $X$  übereinstimmt. Für Kugeln in  $X$  erhalten wir wiederum aufgrund der Krümmungsschranken, dass

$$\text{Vol}_X(B_r^X(p)) \geq \text{Vol}_{\mathbb{R}^n}(B_r^{\mathbb{R}^n}) =: V(r, n) \quad (\text{für allgemeine Radien } r).$$

Somit ist die Anzahl an Zusammenhangskomponenten des  $\varepsilon$ -dünnen Teils von  $X/\Gamma$  durch

$$\frac{1}{V(r, n)} \text{Vol}(X/\Gamma)$$

(mit  $r = r(\varepsilon, n, \eta)$  wie oben konstruiert) beschränkt. Folglich erfüllt  $C := 1/V(r, n)$  die Aussage des Lemmas.

Wir wenden uns nun der Situation in Dimension  $n = 2$  zu; können wir zeigen, dass dort jede endliche Untergruppe einer maximalen unendlichen elementaren Untergruppe  $G$  bereits in ihrer Kardinalität durch 4 beschränkt ist (denn lediglich zur Beschränkung der Kardinalität solcher Untergruppen wurde  $\eta$  im obigen Beweis verwendet), so würde keine Schranke  $\eta$  notwendig sein und die Konstante  $C$  folglich unabhängig von  $\eta$  werden.

Sei also  $H$  eine endliche Untergruppe von  $G$ . Betrachte zunächst den Fall, dass  $G$  parabolisch ist; jedes nichttriviale  $h \in H$  ist also elliptisch und fixiert den parabolischen Fixpunkt  $z \in X(\infty)$  von  $G$ . Bezeichnet  $x \in X$  einen Fixpunkt von  $h$ , so stimmt die Fixpunktmenge von  $h$  offenbar mit der (vollständigen) Geodätischen  $c_x$  von  $x$  nach  $z$  überein: Denn  $\text{Fix}(h)$  kann weder nulldimensional sein – in diesem Fall wäre nämlich  $z$  kein Fixpunkt von  $h$  –, noch zweidimensional, da dann  $h = \text{id}$  gelten würde. Wegen  $h(x) = x$  ist  $h$  gemäß der Starrheit von Isometrien bereits durch Angabe des Differentials  $dh_x : T_x X \rightarrow T_x X$  eindeutig bestimmt. Beachte, dass  $\dot{c}_x(0)$  – welchen wir als einen (schon normierten) Basisvektor von  $T_x X$  wählen – durch  $dh_x$  fixiert wird. Wähle als zweiten Basisvektor von  $T_x X$  einen der beiden normierten Vektoren  $v \in T_x X$ , welche orthogonal auf  $\dot{c}_x(0)$  stehen. Da  $dh_x$  als Isometrie das Skalarprodukt auf  $T_x X$  erhält, muss also entweder  $dh_x(v) = v$  gelten – womit  $dh_x$  die Identität auf  $T_x X$  wäre und sich nach Starrheit der Isometrien schon  $h = \text{id}$  ergäbe –, oder  $dh_x(v) = -v$ . Da wir  $h$  als nichttrivial vorausgesetzt hatten, muss der zweite Fall eintreten, womit  $h$  eine Spiegelung entlang  $c_x$  darstellt; insbesondere ist  $h^2 = \text{id}$  erfüllt. Würde eine nichttriviale Isometrie  $h' \neq h$  in  $H$  existieren, so wäre auch  $h'$  eine Spiegelung entlang einer Geodätischen  $c_{x'}$  (disjunkt von  $c_x$  und ebenfalls mit Endpunkt  $z$ ); dann wäre das Produkt  $hh' \in H$  aber fixpunktfrei<sup>5</sup>, also von unendlicher Ordnung, im Widerspruch dazu, dass  $H$  eine endliche Gruppe war. Somit ist  $H = \langle h \rangle$ , also  $|H| = 2 \leq 4$ , was zu zeigen war.

Betrachte nun den hyperbolischen Fall, d.h.  $H$  sei eine endliche Untergruppe einer maximalen hyperbolischen Gruppe  $G$  und  $A$  deren Achse. Jedes Element  $h \in H$  ist damit entweder Achse-fixierend (d.h.  $h(y) = y$  für alle  $y \in A$ ) oder Achse-spiegelnd (d.h.  $h(A(\infty)) = A(-\infty)$  und  $h(A(-\infty)) = A(\infty)$ ). Analog zum parabolischen Fall folgern wir, dass eine Achse-fixierende Isometrie  $h$  bereits entlang dieser Achse

<sup>5</sup>Da  $X \cong \mathbb{R}^2$  durch  $c_{x'}$  in zwei disjunkte Mengen zerteilt wird, können wir anschaulich von den Mengen „links von  $c_{x'}$ “ bzw. „rechts von  $c_{x'}$ “ sprechen;  $X$  zerfällt also disjunkt in  $c_{x'}$  und diese beiden Mengen. Zunächst kann  $c_{x'}$  keine Fixpunkte von  $hh'$  enthalten, denn wäre  $y \in c_{x'}$  ein solcher, so wäre wegen  $y = hh'(y) = h(y)$  auch  $y \in \text{Fix}(h)$ , was der Tatsache widerspricht, dass sich  $c_x$  und  $c_{x'}$  nicht schneiden. Sei also angenommen,  $y$  wäre ein Fixpunkt von  $hh'$ , welcher in der Menge links oder rechts von  $c_{x'}$  liegt. Es gilt  $y = hh'(y)$ , also  $h(y) = h'(y)$ ; damit folgt  $hh'(h'(y)) = h(y) = h'(y)$ , womit auch  $h'(y)$  ein Fixpunkt von  $hh'$  wäre. Da  $y$  nicht in  $c_{x'} = \text{Fix}(h')$  liegt, kann auch nicht  $h'(y) = y$  gelten. Folglich ist die Geodätische  $c$  von  $y$  nach  $h'(y)$  wohldefiniert, wobei  $c$  außerdem punktweise von  $hh'$  fixiert wird. Liegt  $y$  in der Menge links von  $c_{x'}$ , so ist  $h'(y)$  in der Menge rechts von  $c_{x'}$ , und umgekehrt. In beiden Fällen muss also  $c$  bereits  $c_{x'}$  schneiden. Doch dieser Schnittpunkt wäre dann ein Punkt auf  $c_{x'}$ , welcher von  $hh'$  fixiert wird; dies widerspricht obigen Aussagen. Folglich kann  $hh'$  keine Fixpunkte besitzen.

spiegelt und damit eindeutig ist. Ebenso muss eine Achse-spiegelnde Isometrie selbst eine Spiegelung  $h'$  sein, welche entlang einer Geodätischen senkrecht zu  $A$  spiegelt (eindimensionale Fixpunktmenge), oder eine Spiegelung  $h''$  an einem Punkt auf der Achse  $A$  (nulldimensionale Fixpunktmenge); in beiden Fällen ist aufgrund der Starrheit von Isometrien wiederum Eindeutigkeit gegeben. Wie auch im parabolischen Fall können wir begründen, dass  $H$  keine Achse-spiegelnden Isometrien mit unterschiedlichen Schnittpunkten ihrer Fixpunkt Mengen mit  $A$  enthalten kann (denn ihr Produkt wäre von unendlicher Ordnung).

Enthält  $H$  nur eine der Isometrien  $h$ ,  $h'$  und  $h''$ , so gilt folglich erneut  $|H| = 2 \leq 4$ . Betrachte also den Fall, dass  $H$  mindestens zwei dieser Isometrien enthält und sei  $x \in A$  der eindeutige Schnittpunkt von  $A$  sowie  $\text{Fix}(h')$  und/oder  $\text{Fix}(h'')$ . Wähle eine Orthonormalbasis von  $T_x X$  durch  $\dot{A}(0)$  und  $\dot{c}(0)$  (wobei  $A(0) = x = c(0)$ ) für eine durch  $x$  zu  $A$  senkrecht verlaufende Geodätische  $c$ ; beachte, dass  $c = \text{Fix}(h')$  gilt, da die Spiegelungsgeodätische senkrecht auf  $A$  trifft. Die Wirkung der Differentiale ist damit durch

$$dh_x(\dot{A}(0)) = \dot{A}(0), \quad dh_x(\dot{c}(0)) = -\dot{c}(0)$$

sowie

$$dh'_x(\dot{A}(0)) = -\dot{A}(0), \quad dh'_x(\dot{c}(0)) = \dot{c}(0)$$

und

$$dh''_x(\dot{A}(0)) = -\dot{A}(0), \quad dh''_x(\dot{c}(0)) = -\dot{c}(0)$$

gegeben. Wir merken an, dass ein beliebiges Produkt der  $h$ ,  $h'$  und  $h''$  stets  $x$  fixiert, womit ihre Produkte gemäß Starrheit der Isometrien bereits durch die Produkte ihrer Differentiale klassifiziert werden; doch mittels obiger Formeln können wir nun schon  $hh' = h'' = h'h$ ,  $hh'' = h' = h''h$  sowie  $h'h'' = h = h''h'$  schließen. Also ist  $H$  in diesem Fall eine Kleinsche Vierergruppe, d.h.  $|H| = 4$ , was zu zeigen war.  $\square$

Aus anschaulichen Gründen ist es naheliegend, dass für eine Kontrolle der Anzahl an Komponenten des dünnen Teils durch das Volumen auch eine Kontrolle über die Größe endlicher Untergruppen von  $\Gamma$  notwendig ist. Betrachten wir hierzu in Dimension  $n = 3$  eine Typ-1-Röhre  $R$ , d.h. ein  $(D^2/E)$ -Bündel über der  $S^1$ , wobei der Einfachheit halber  $E \cong \mathbb{Z}_k$  eine Gruppe von Rotationen sei, erzeugt von einer Rotation um den Winkel  $2\pi/k$ . Dann ist das Volumen von  $R$  gerade der  $k$ -te Bruchteil des Volumens der Röhre  $R'$ , welche für triviales  $E$  entstünde (d.h.  $R'$  ist ein  $D^2$ -Bündel über der  $S^1$ ); durch die Wirkung der endlichen Gruppe  $E$  von Ordnung  $k$  wird also das Volumen um den Faktor  $1/k$  kleiner. Entsprechend besitzen  $k$  Röhren  $R$  solcher Gestalt in Summe das selbe Volumen wie die einzelne Röhre  $R'$  für triviales  $E$ . Um die Anzahl an Röhren bei gegebenem Volumen zu beschränken, sollte folglich die Ordnung der endlichen Gruppenwirkung beschränkt werden. Eine entsprechende Betrachtung lässt sich auch zu Spitzen anstellen.

Wir merken an, dass [25] Theorem 3.5 aussagt, die Anzahl (nicht-konjugierter) Achsen von hyperbolischen Isometrien kleiner Verschiebung ließe sich linear durch das Volumen beschränken. Hieraus würde sich unmittelbar eine Schranke – linear im Volumen – an die Anzahl Röhren ableiten lassen, wobei in der dortigen Form keine zusätzliche Schranke  $\eta$  an die Ordnung endlicher Untergruppen wie bei uns vorausgesetzt wird. Wie jedoch der dortige Beweis zeigt, ist die Aussage in ihrer vorgestellten Form fehlerhaft, da die Konstante  $\mu$  dort ebenfalls (wegen [25] Proposition 3.1) von der Ordnung endlicher Untergruppen von  $\Gamma$  abhängig ist. Folglich ist durch dieses Theorem keine (teilweise) Verschärfung unseres Lemmas 3.17 gegeben.

**Bemerkung 3.18.** In der Absicht weiter zu erörtern, ob tatsächlich eine Schranke an die Ordnung endlicher Untergruppen notwendig ist, um die Anzahl Komponenten des dünnen Teils zu kontrollieren, haben wir konkret Bianchi-Orbifaltigkeiten untersucht. Sei  $d \in \mathbb{N}$  quadratfrei und  $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$  der

zugehörige imaginäre quadratische Zahlkörper mit Ganzheitsring  $O_d$ , so ist für die Bianchi-Gruppe  $B_d := PSL(2, O_d) < PSL(2, \mathbb{C})$  die zugehörige Bianchi-Orbifaltigkeit durch  $M_d := \mathbb{H}^3/PSL(2, O_d)$  gegeben. Die Anzahl Spitzen von  $M_d$  stimmt nun genau mit der Klassenzahl von  $O_d$  überein, vgl. [23] Kapitel 1.4.1. Ebenso existiert eine konkrete Formel für das Volumen, nämlich

$$\text{Vol}(M_d) = \frac{|D|^{3/2}}{4\pi^2} \zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-d})}(2),$$

wobei  $D$  die Diskriminante von  $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$  bezeichnet sowie  $\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{-d})}$  die Dedekindsche Zeta-Funktion. Nun wächst jedoch die Anzahl Spitzen von  $M_d$  – da sie ja mit der Klassenzahl von  $O_d$  übereinstimmt – in Abhängigkeit von der Diskriminante  $D$  in der Größenordnung  $|D|^{1/2}$ , während das Volumen in der Größenordnung  $|D|^{3/2}$  wächst. Folglich wird in dieser Klasse von Beispielen zumindest die Anzahl Spitzen ohnehin linear (sogar unterlinear, nämlich in Potenz  $1/3$ ) durch das Volumen kontrolliert.

Damit ist durch die Bianchi-Orbifaltigkeiten leider kein Beispiel für unsere Vermutung gegeben, dass eine lediglich von der Dimension abhängige, im Volumen lineare Schranke *nicht* ausreicht (sondern man zusätzlich noch die Ordnung endlicher Untergruppen beschränken muss), um die Anzahl an Komponenten des dünnen Teils zu kontrollieren. Beachte jedoch, dass wir die Anzahl Röhren in dieser Beispielklasse nicht haben einfließen lassen, da keine konkrete Formel hierfür vorlag.  $\blacklozenge$

### 3.2.3 Dicker Teil

Gehen wir nun zum Studium des dicken Teils über, wobei sich die wesentlichen Eigenschaften erneut vollkommen analog aus dem Fall von Mannigfaltigkeiten übertragen lassen. So stellen wir fest, dass der dicke Teil von  $M$  stets kompakt ist und ab Dimension  $n > 2$  auch zusammenhängend.

**Lemma 3.19.** *Der dicke Teil  $M_+$  von  $M$  ist kompakt.*

*Beweis.* Bezeichnet  $M_{\geq \varepsilon}$  den  $\varepsilon$ -dicken Teil von  $M$  bei konstanter Wahl  $\varepsilon_\gamma \equiv \varepsilon$  (für  $\gamma \in \Gamma$ ), so ist  $M_+$  eine abgeschlossene Teilmenge von  $M_{\geq \varepsilon}$ , da  $\varepsilon_\gamma \geq \varepsilon$  bei der Definition von  $M_+$ . Ferner wissen wir, dass  $M_{\geq \varepsilon}$  mit dem  $(\varepsilon, \eta)$ -quasidicken Teil übereinstimmt. Dieser ist gemäß [25] Corollary 4.3 kompakt; folglich ist auch  $M_+$  als abgeschlossene Teilmenge eines Kompaktums selbst kompakt.  $\square$

**Lemma 3.20.** *Für  $n > 2$  ist  $M_+$  zusammenhängend.*

*Beweis.* Die Spitzen lassen sich auf den gemeinsamen Rand mit  $M_+$  zusammenziehen, ohne dass sich etwas an den Zusammenhangseigenschaften ändern würde. Da  $M_+$  als Bild von  $X_+$  unter der stetigen Projektion  $\pi : X \rightarrow X/\Gamma = M$  entsteht, bleibt festzustellen, ob  $X_+$  zusammenhängend ist; es genügt also zu zeigen, dass  $X$  nach Entfernen der  $X_-(G)$  für maximale hyperbolische  $G$  weiterhin zusammenhängend ist. Nun beachte, dass gemäß des Beweises von Lemma 3.14 die  $X_-(G)$  gerade Röhrenumgebungen von Geodätischen oder von Teilstücken einer Geodätischen sind. Somit ist  $X_+$  genau dann zusammenhängend, wenn Geodätische Kodimension  $> 1$  besitzen, also ab  $n > 2$ .  $\square$

### 3.2.4 Zusammenfassung

In den vorigen Abschnitten haben wir die wesentlichen Eigenschaften der Dick-dünn-Zerlegung bewiesen, welche sich so oder in ähnlicher Form aber auch bereits für eine konstante Wahl der Niveaus ergeben hätten. Wir werden deshalb nun eine Aussage vorstellen, die den Mehraufwand, welcher mit der variablen Wahl der Niveaus einhergeht, rechtfertigt. Hierzu halten wir zunächst eine allgemeine algebraische Eigenschaft virtuell nilpotenter Gruppen fest.

**Proposition 3.21.** *Sei  $G$  eine Gruppe mit einem Element  $g \in G$  von unendlicher Ordnung sowie  $\{g_i : i \in I\}$  ein beliebiges Erzeugendensystem von  $G$ . Angenommen  $G$  besitzt eine nilpotente Untergruppe  $H$  von Index  $m < \infty$ , so existiert bereits ein Element  $g' \in G$  unendlicher Ordnung, welches sich als Wort der Länge  $\leq 2m + 1$  in den Erzeugern  $g_i$  schreiben lässt.*

*Beweis.* Wir werden zwei Hilfsaussagen vorstellen, zunächst eine zur Existenz „kurzer Repräsentanten“ von Nebenklassen einer Untergruppe.

**Fakt A.** Ist  $G = \langle g_i : i \in I \rangle$  eine Gruppe und  $H$  eine Untergruppe von  $G$  von Index  $m < \infty$ , so lässt sich jede Nebenklasse  $gH$  durch ein Wort  $g$  der Länge  $\leq m$  in den  $g_i$  repräsentieren. Entsprechendes gilt für Nebenklassen  $Hg$ .

*Beweis.* Sei  $g = g_{i_1} \dots g_{i_l}$  ein beliebiger Repräsentant für  $gH$  von Länge  $l$ . Ist  $l \leq m$ , so sind wir fertig; sei also  $l > m$ . Da nur  $m$  verschiedene Nebenklassen existieren, muss spätestens für  $g_{i_{l-m}} \dots g_{i_l}$  gelten, dass dieses Element (der Länge  $m+1$ ) die gleiche Nebenklasse wie ein  $g_{i_{l-k}} \dots g_{i_l}$  darstellt, wobei  $k < m$ . Wir können also den Teil  $g_{i_{l-m}} \dots g_{i_{l-(k+1)}}$  kürzen und erhalten

$$gH = g_{i_1} \dots g_{i_l} H = g_{i_1} \dots g_{i_{l-(m+1)}} g_{i_{l-k}} \dots g_{i_l} H,$$

also einen Repräsentanten der Länge  $l - (m + 1) + k + 1 = l - (m - k) < l$ . Dieses Verfahren lässt sich so oft wiederholen, bis ein Repräsentant der Länge  $\leq m$  auftritt.

Der Fall von Rechtsnebenklassen  $Hg$  ergibt sich analog.  $\square$

Die folgende Tatsache erweist sich als zentral für unser Argument.

**Fakt B.** ([13] Theorem 2.26) Ist  $G$  eine nilpotente Gruppe, so bilden ihre Elemente endlicher Ordnung eine Untergruppe.

Bezeichnet  $g \in G$  das Element unendlicher Ordnung aus der Voraussetzung, so gilt  $g^r \in H$  für ein  $0 < r \leq m$ , da  $H$  eine Untergruppe in  $G$  von Index  $m < \infty$  ist<sup>6</sup>. Ohne Einschränkung bezeichne also  $g$  selbst ein Element unendlicher Ordnung in  $H$ .

Wir nehmen nun an, jedes Wort der Länge  $\leq 2m + 1$  in den  $g_i$  wäre von endlicher Ordnung, und wollen dies zu einem Widerspruch führen.

Das Element  $g \in H$  unendlicher Ordnung besitzt eine Darstellung

$$g = g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_l}.$$

Da die Nebenklassen von  $H$  eine Partition von  $G$  bilden, liegt  $g_{i_1}$  in einer eindeutigen Nebenklasse  $Hh_1$ . Folglich gilt  $g_{i_1} h_1^{-1} \in H$ , wobei sich gemäß Fakt A das Element  $h_1 \in G$  als Wort der Länge  $\leq m$  in den  $g_i$  wählen lässt. Entsprechend existiert für  $h_1 g_{i_2}$  ein Element  $h_2 \in G$  der Länge  $\leq m$ , sodass  $(h_1 g_{i_2}) h_2^{-1}$  in  $H$  liegt. Allgemein finden wir also Elemente  $h_j \in G$  der Länge  $\leq m$ , sodass  $h_j g_{i_{j+1}} h_{j+1}^{-1} \in H$ . Betrachte nun

$$\begin{aligned} g &= g_{i_1} g_{i_2} \dots g_{i_l} \\ &= g_{i_1} (h_1^{-1} h_1) g_{i_2} (h_2^{-1} h_2) \dots (h_{l-2}^{-1} h_{l-2}) g_{i_{l-1}} (h_{l-1}^{-1} h_{l-1}) g_{i_l} \\ &= (g_{i_1} h_1^{-1}) (h_1 g_{i_2} h_2^{-1}) (h_2 \dots h_{l-2}^{-1}) (h_{l-2} g_{i_{l-1}} h_{l-1}^{-1}) (h_{l-1} g_{i_l}), \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Da nur  $m$  verschiedene Nebenklassen existieren, müssen zwei der Nebenklassen  $H, gH, g^2H, \dots, g^mH$  übereinstimmen. Es gilt folglich  $g^j H = g^i H$  für Indizes  $0 \leq i < j \leq m$ , d.h.  $g^{j-i} H = H$ , also  $g^{j-i} \in H$ , wobei für  $r := j - i$  nun  $0 < r \leq m$  gilt.

wobei jeder der Klammerausdrücke in der letzten Zeile – bis auf den letzten Ausdruck  $h_{l-1}g_{i_l}$  – nach Wahl der  $h_j$  ein Element von  $H$  ist. Da jedoch  $g \in H$ , muss auch der letzte Ausdruck  $h_{l-1}g_{i_l}$  in  $H$  liegen. Beachte, dass jeder der Klammerausdrücke ein Wort der Länge  $\leq 2m + 1$  in den  $g_i$  ist, denn die  $h_j$  waren von Länge  $\leq m$ ; nach Annahme ist also jeder dieser Ausdrücke von endlicher Ordnung. Insgesamt haben wir somit  $g$  als Produkt von Elementen endlicher Ordnung aus  $H$  dargestellt; da aber gemäß Fakt B diese Elemente eine Untergruppe von  $H$  bilden, wäre auch  $g$  in dieser Untergruppe, also selbst von endlicher Ordnung. Dies widerspricht der Tatsache, dass  $g$  von unendlicher Ordnung ist. Somit muss die Annahme, alle Wörter der Länge  $\leq 2m + 1$  in den  $g_i$  wären von endlicher Ordnung, falsch gewesen sein. Es existiert folglich ein Wort  $g'$  der Länge  $\leq 2m + 1$  in den  $g_i$ , welches unendliche Ordnung besitzt.  $\square$

Offensichtlich ist obige Proposition 3.21 auf folgende Anwendungssituation maßgeschneidert. Es sei der Vollständigkeit halber darauf hingewiesen, dass dieses Ergebnis in [8] S. 277 für den Fall  $X = \mathbb{H}^n$  bereits angedeutet wurde (in dortiger Notation ist die Aussage die Inklusion  $T_{\varepsilon/N}(\Gamma) \subseteq T'_\varepsilon(\Gamma)$ ). Wie wir im Nachhinein festgestellt haben, ist ein ähnliches Ergebnis auch in [25] Lemma 2.3 enthalten.

**Korollar 3.22.** *Es existiert eine nur von der Dimension  $n$  abhängige Konstante  $M(n) \in \mathbb{N}$ , sodass Folgendes gilt. Ist  $X$  eine  $n$ -dimensionale Hadamard-Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung  $-1 \leq K \leq a < 0$  sowie  $\Gamma < \text{Isom}(X)$  diskret und  $x \in X$  so, dass*

$$\Gamma_{\varepsilon/M(n)}(x) = \langle \gamma \in \Gamma : d_\gamma(x) < \varepsilon/M(n) \rangle$$

*unendlich ist (wobei  $\varepsilon$  derart gewählt ist, dass  $0 < \varepsilon/M(n) \leq \varepsilon(n)$  mit  $\varepsilon(n)$  dem Margulis- $\varepsilon$ ), so existiert bereits eine Isometrie  $\gamma \in \Gamma_{\varepsilon/M(n)}(x)$  unendlicher Ordnung mit  $d_\gamma(x) < \varepsilon$ .*

*Beweis.* Wir definieren  $M(n) := 2m + 1$ , mit  $m = m(n)$  der nur von der Dimension  $n$  abhängigen Indexkonstante aus dem Margulis-Lemma. Ferner existiert gemäß Margulis-Lemma wegen  $\varepsilon/M(n) \leq \varepsilon(n)$  ein nilpotenter Normalteiler  $N$  in  $\Gamma_{\varepsilon/M(n)}(x)$  von Index  $m' \leq m$ . Da  $\Gamma_{\varepsilon/M(n)}(x)$  diskret und nach Voraussetzung unendlich ist, muss bereits ein Element  $\gamma' \in \Gamma_{\varepsilon/M(n)}(x)$  von unendlicher Ordnung existieren (vgl. Lemmata 3.6 und 3.7).

Folglich sind die Voraussetzungen von Proposition 3.21 erfüllt, womit wir die Existenz eines  $\gamma \in \Gamma_{\varepsilon/M(n)}(x)$  von unendlicher Ordnung erhalten, welches sich als Wort  $\gamma = \gamma_1 \dots \gamma_l$  der Länge  $l \leq 2m' + 1 \leq 2m + 1 = M(n)$  in den Erzeugern  $\{\gamma \in \Gamma : d_\gamma(x) < \varepsilon/M(n)\}$  von  $\Gamma_{\varepsilon/M(n)}(x)$  schreiben lässt. Gemäß Dreiecksungleichung ergibt sich nun

$$d_\gamma(x) = d_{\gamma_1 \dots \gamma_l}(x) \leq \sum_{i=1}^l d_{\gamma_i}(x) < \sum_{i=1}^l \frac{\varepsilon}{M(n)} = l \cdot \frac{\varepsilon}{M(n)} \leq M(n) \cdot \frac{\varepsilon}{M(n)} = \varepsilon,$$

die Behauptung.  $\square$

Wir machen uns obige Konstante  $M(n)$  nun bei der Wahl geeigneter Niveaus zunutze: Definiere für festes  $\varepsilon' \in (0, \varepsilon(n)/2]$

$$\varepsilon := \frac{\varepsilon'}{M(n)},$$

womit  $\varepsilon$  selbst nur von  $\varepsilon'$  und der Dimension  $n$  abhängt. Ferner setzen wir

$$\varepsilon_\gamma := \begin{cases} \varepsilon' & \text{falls } \gamma \text{ hyperbolisch oder parabolisch,} \\ \varepsilon & \text{falls } \gamma \text{ elliptisch,} \end{cases}$$

womit die  $\varepsilon_\gamma$  eine konjugationsinvariante Wahl von Niveaus aus  $[\varepsilon, \varepsilon(n)/2]$  darstellen. Hiermit ergibt sich die folgende, zentrale Aussage.

**Lemma 3.23.** *Mit obiger Wahl der  $\varepsilon_\gamma$  gilt*

$$\begin{aligned} X_- &= \{x \in X : \text{Es existiert hyperbolisches oder parabolisches } \gamma \in \Gamma \text{ mit } d_\gamma(x) < \varepsilon_\gamma\} \\ &= \bigcup_{\gamma \in \Gamma'} \{d_\gamma < \varepsilon_\gamma\}, \quad \text{wobei } \Gamma' = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \text{ hyperbolisch oder parabolisch}\}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Die Gleichheit der rechten Seiten ist offensichtlich. Da für  $x \in X$  mit  $d_\gamma(x) < \varepsilon_\gamma$  für ein hyperbolisches oder parabolisches  $\gamma \in \Gamma$  nach Definition bereits  $\gamma \in \Gamma_{\varepsilon_\gamma}(x)$  gilt, muss  $\Gamma_{\varepsilon_\gamma}(x)$  dann selbst von unendlicher Ordnung sein, d.h.  $x \in X_-$ .

Es bleibt somit lediglich zu zeigen, dass für  $x \in X_-$  stets eine hyperbolische oder parabolische Isometrie  $\gamma$  – also eine Isometrie unendlicher Ordnung – existiert, sodass  $d_\gamma(x) < \varepsilon_\gamma$ . Sei also  $x \in X_-$  gegeben, d.h.  $\Gamma_{\varepsilon_\gamma}(x)$  ist unendlich. Existiert ein hyperbolisches oder parabolisches  $\gamma$  mit  $d_\gamma(x) < \varepsilon_\gamma$ , so sind wir bereits fertig; wir werden daher annehmen, dass

$$\{\gamma \in \Gamma : d_\gamma(x) < \varepsilon_\gamma\}$$

lediglich aus elliptischen Isometrien besteht, und wollen dies zum Widerspruch führen. Da für elliptische  $\gamma$  nach unserer Definition  $\varepsilon_\gamma = \varepsilon$  gilt, stimmt nun  $\Gamma_{\varepsilon_\gamma}(x)$  mit  $\Gamma_\varepsilon(x)$  überein, womit  $\Gamma_\varepsilon(x)$  selbst unendlich ist. Gemäß Korollar 3.22 existiert nach Wahl von  $M(n)$  dann jedoch bereits eine Isometrie  $\gamma$  unendlicher Ordnung mit  $d_\gamma(x) < \varepsilon \cdot M(n) = \varepsilon'$ . Weil für Isometrien unendlicher Ordnung  $\varepsilon_\gamma = \varepsilon'$  gewählt wurde, bedeutet dies  $d_\gamma(x) < \varepsilon_\gamma$ , womit obige Erzeugermenge von  $\Gamma_{\varepsilon_\gamma}(x)$  nun doch nicht nur aus elliptischen Elementen bestünde. Dies stellt den gewünschten Widerspruch dar.  $\square$

Obiges Lemma 3.23 drückt aus, dass für unsere Wahl der konjugationsinvarianten Niveaus die Zugehörigkeit zum dünnen Teil genau durch die hyperbolischen und parabolischen Isometrien bzw. deren Subniveaumengen bestimmt wird, die elliptischen Isometrien bzw. deren Subniveaumengen in dieser Hinsicht also keine Rolle spielen.

Die Ergebnisse dieses Abschnitts werden im folgenden Satz in allgemeiner Form zusammengefasst.

**Satz 3.24.** *Es gilt:*

1.  $M_+$  ist eine kompakte Orbifaltigkeit mit Rand.
2. Ab Dimension  $n > 2$  ist  $M_+$  zusammenhängend.
3. Die Anzahl an Zusammenhangskomponenten von  $M_-$  ist durch  $C \cdot \text{Vol}(M)$  beschränkt, wobei  $C = C(\varepsilon, n, \eta) > 0$  eine nur von  $\varepsilon$ , der Dimension  $n$  und einer – stets existierenden – Schranke  $\eta = \eta(\Gamma) \in \mathbb{N}$  an die Ordnung endlicher Untergruppen von  $\Gamma$  abhängige Konstante ist. In Dimension  $n = 2$  hängt  $C$  dabei nicht von  $\eta$  ab.
4. Die Zusammenhangskomponenten  $U$  von  $M_-$  sind von genau einer der folgenden Formen:

- Röhren (beschränkte Komponenten), d.h. (Typ 1)  $U$  ist entweder homöomorph zu einem  $(D^{n-1}/E)$ -Bündel über der  $\mathbb{S}^1$  mit  $E < O(n-1)$  endlich; oder (Typ 2)  $U$  ist homöomorph zu einem Produkt

$$D' \times [0, 1] \quad \text{oder} \quad D' \times (0, 1),$$

wobei  $D' := (D^{n-1}/E)/\mathbb{Z}_2$  mit endlichem  $E < O(n-1)$ , und ferner die  $\mathbb{Z}_2$ -Wirkung auf  $D^{n-1}/E$  auch trivial sein kann.

Typ-1-Röhren sind folglich homotopieäquivalent zur  $\mathbb{S}^1$ , während Typ-2-Röhren zusammenziehbar sind.

- *Spitzen (unbeschränkte Komponenten), d.h.  $U$  ist homöomorph zu  $V \times (0, \infty)$  mit einer  $(n-1)$ -dimensionalen, kompakten Orbifaltigkeit  $V$ . Ferner existiert eine starke Deformationsretraktion von  $M$  auf  $M \setminus U$ , d.h.  $U$  lässt sich auf den gemeinsamen Rand mit dem dicken Teil  $M_+$  zusammenziehen.*

*Insbesondere ist  $M$  homotopieäquivalent zur kompakten Orbifaltigkeit  $M_K$  mit Rand, die sich durch Zusammenziehen der Spitzen auf ihren gemeinsamen Rand mit  $M_+$  ergibt. Anders ausgedrückt entsteht  $M_K$  als Vereinigung von  $M_+$  mit den endlich vielen Röhren.*

Wählen wir konkret die vor Lemma 3.23 bereits erwähnte Zuordnung der Niveaus, so ergibt sich folgende Ergänzung.

**Korollar 3.25.** *Erfolgt für festes  $\varepsilon' \in (0, \varepsilon(n)/2]$  die Wahl der Niveaus gemäß*

$$\varepsilon_\gamma := \begin{cases} \varepsilon' & \text{falls } \gamma \text{ hyperbolisch oder parabolisch,} \\ \varepsilon := \frac{\varepsilon'}{M(n)} & \text{falls } \gamma \text{ elliptisch,} \end{cases}$$

*wobei  $M(n) \in \mathbb{N}$  wie in Korollar 3.22, so ist die Konstante  $C > 0$  in Satz 3.24 Punkt 3. lediglich von  $\varepsilon'$ , der Dimension  $n$  sowie der Schranke  $\eta$  an die Ordnung endlicher Untergruppen von  $\Gamma$  abhängig, d.h.  $C = C(\varepsilon', n, \eta)$ , und es gilt ferner*

$$\begin{aligned} X_- &= \{x \in X : \text{Es existiert hyperbolisches oder parabolisches } \gamma \in \Gamma \text{ mit } d_\gamma(x) < \varepsilon_\gamma\} \\ &= \bigcup_{\gamma \in \Gamma'} \{d_\gamma < \varepsilon_\gamma\}, \quad \text{wobei } \Gamma' = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \text{ hyperbolisch oder parabolisch}\}. \end{aligned}$$

*Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass  $p \in M$  genau dann im dünnen Teil  $M_-$  liegt, wenn ein Lift von  $p$  in  $X$  in einer Subniveaumenge  $\{d_\gamma < \varepsilon_\gamma\}$  für ein hyperbolisches oder parabolisches  $\gamma \in \Gamma$  enthalten ist; die elliptischen Isometrien (bzw. deren Subniveaumengen) spielen in dieser Hinsicht also keine Rolle.*

### 3.3 Effizientes simpliziales Modell

Die folgenden Abschnitte bereiten den Weg zu unserem Hauptresultat für Orbifaltigkeiten; erneut wird sich herausstellen, dass der dicke Teil ein besonders gutartiges simpliziales Modell besitzt, aus welchem sich Homologieschranken an die gesamte Orbifaltigkeit ableiten lassen. Hierbei stimmt die grundlegende Strategie für die Konstruktion des simplizialen Modells mit der aus dem Fall von Mannigfaltigkeiten überein: Wir wählen eine geeignete Überdeckung des dicken Teils, welche einerseits – da sie sich als gut im Sinne von Abschnitt 1.3 erweist – homotopieäquivalent zu ihrem Nervenkomplex ist; andererseits lässt sich die Überdeckung (welche im Allgemeinen über den dicken Teil hinausragt) stabil unter dem Fluss hin zum dicken Teil wählen und daher homotopieäquivalent auf selbigen zurück drücken. Durch Komposition dieser Homotopieäquivalenzen ergibt sich folglich die Homotopieäquivalenz des dicken Teils zum konstruierten Nervenkomplex, welcher das gewünschte simpliziale Modell darstellt.

Wir werden uns in der gesamten restlichen Arbeit nur mit dem Fall reell hyperbolischer Orbifaltigkeiten (endlichen Volumens) befassen, d.h.  $X = \mathbb{H}^n$  und  $M = X/\Gamma$  für ein Gitter  $\Gamma < \text{Isom}(X)$ ; wir erinnern ferner an die Existenz einer Schranke  $\eta = \eta(\Gamma)$  an die maximale Ordnung endlicher Untergruppen von  $\Gamma$  (vgl. Lemma 3.1). Die Einschränkung auf den  $\mathbb{H}^n$  ist vor allem aus dem Grund hilfreich, als dass die konkreten Modelle die Konstruktion von in gewissem Sinne maßgeschneiderten Überdeckungsmengen ermöglichen, womit sich die gewünschten Eigenschaften dort besonders leicht nachweisen lassen. Was zunächst nur nach einem Komfortgewinn klingt, welcher einer späteren Erweiterung auf variabel negativ

gekrümmte  $X$  oder zumindest weitere symmetrische Räume (nichtkompakten Typs von Rang 1) nicht im Wege stehen sollte, hat jedoch auch eine tiefer gehende Bedeutung; so dient als zentrales Werkzeug an vielen Stellen die Tatsache, dass beliebige Halbräume im  $\mathbb{H}^n$  stets konvex sind<sup>7</sup>. Doch dieses Hilfsmittel legt uns bereits auf den hyperbolischen Raum fest: Ist  $X$  eine Mannigfaltigkeit, sodass für jedes  $x \in X$  und jeden zweidimensionalen Unterraum  $\Sigma \subseteq T_x X$  eine total geodätische Untermannigfaltigkeit von  $X$  tangential zu  $\Sigma$  existiert – und diese Bedingung ist bei vorliegenden konvexen Halbräumen stets erfüllt –, so muss  $X$  bereits konstante Krümmung besitzen ([14] S. 133, worin auf ein Resultat von Cartan verwiesen wird, siehe z.B. [12] Abschnitt 39). Da Konvexität in unserer Arbeit häufig lediglich als stärkerer, besser zu handhabender Ersatz für Zusammenziehbarkeit dient<sup>8</sup>, ist eine Erweiterung unserer Ergebnisse auf allgemeinere  $X$  nicht ausgeschlossen; jedoch liegt die Vermutung nahe, dass der Umstieg von Konvexität hin zu allgemeiner Zusammenziehbarkeit mit erheblichem Mehraufwand verbunden ist.

### 3.3.1 Grundlagen

Wir beginnen mit einer Wiederholung wesentlicher Eigenschaften des  $\mathbb{H}^n$ . Bevor wir uns unter anderem den von uns verwendeten Modellen des hyperbolischen Raums zuwenden – dem oberen Halbraummodell und dem Kleinschen Modell –, werden wir mit folgendem Lemma eine Aussage vorstellen, welche den Nachweis der vielfach genutzten Konvexität wesentlich vereinfacht.

**Lemma 3.26** ([11] Proposition II.1.4.1). *Eine nichtleere, abgeschlossene Teilmenge des  $\mathbb{H}^n$  ist genau dann konvex, wenn sie sich als Durchschnitt all ihrer (abgeschlossenen) angrenzenden Halbräume ergibt.*

Hierbei ist ein (abgeschlossener) Halbraum in einem Tangentialraum durch die Menge aller Vektoren gegeben, welche ein nichtnegatives Skalarprodukt mit einem vorher fest gewählten Vektor aufweisen; ein **abgeschlossener Halbraum** im hyperbolischen Raum ist nun das Bild eines solchen Halbraums des Tangentialraums unter der Exponentialabbildung. Für eine Teilmenge  $A$  des  $\mathbb{H}^n$  bezeichnen wir einen solchen Halbraum als **angrenzend**, wenn er  $A$  enthält und den Rand von  $A$  nichtleer schneidet (vgl. [11] Definition II.1.2.2).

Beachte, dass sich obiges Lemma 3.26 auch auf offene Mengen überträgt, falls wir entsprechend zu offenen angrenzenden Halbräumen übergehen<sup>9</sup>.

#### Oberes Halbraummodell

Insbesondere für die Untersuchung des Verhaltens in der Nähe der Spitzen bietet sich das obere Halbraummodell

$$\mathbb{H}^n = \{(x, t) = (x_1, \dots, x_{n-1}, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid t > 0\} = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{>0} \subseteq \mathbb{R}^n$$

des hyperbolischen Raums  $\mathbb{H}^n$  an. Das folgende Lemma gibt sowohl die allgemeine Abstandsformel für Punkte im Halbraummodell wieder, als auch wesentliche Vereinfachungen in zwei wichtigen Spezialfällen; obwohl allgemein bekannt, konnten wir für diese Vereinfachungen keine Beweise finden, weshalb wir sie der Vollständigkeit halber wiedergeben.

<sup>7</sup>Dieser Fakt liegt Lemma 3.26 zugrunde, welches wir zum Nachweis der Konvexität unserer speziellen Überdeckungs-mengen – der parabolisch bzw. hyperbolisch gestreckten Kugeln – heranziehen.

<sup>8</sup>Beispielsweise ist der Schnitt konvexer Mengen selbst konvex und damit wiederum zusammenziehbar, während der Durchschnitt zusammenziehbarer Mengen im Allgemeinen nicht zusammenziehbar ist.

<sup>9</sup>Zur Begründung können wir auf das Kleinsche Modell des  $\mathbb{H}^n$  zurückgreifen (siehe auch spätere Abschnitte für Details), in welchem euklidische Konvexität mit hyperbolischer Konvexität übereinstimmt. Es bleibt nun lediglich auszunutzen, dass für eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  auch ihr Inneres konvex ist.

**Lemma 3.27.** *Im oberen Halbraummodell des  $\mathbb{H}^n$  gelten folgende Formeln für den hyperbolischen Abstand:*

1.

$$d((x, t), (y, s)) = 2 \cdot \operatorname{artanh} \left( \sqrt{\frac{\|x - y\|^2 + (t - s)^2}{\|x - y\|^2 + (t + s)^2}} \right),$$

2.

$$d((x, t), (x, s)) = \left| \ln \left( \frac{t}{s} \right) \right|,$$

3.

$$d((x, t), (y, t)) = 2 \cdot \operatorname{arsinh} \left( \frac{\|x - y\|}{2 \cdot t} \right).$$

*Beweis.* Wie üblich bezeichnet hierbei für  $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln \left( x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

den Areasinus hyperbolicus, für  $-1 < x < 1$

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{1 + x}{1 - x} \right)$$

den Areatangens hyperbolicus sowie  $\|\cdot\|$  die euklidische Norm auf dem  $\mathbb{R}^{n-1}$ -Faktor des oberen Halbraums.

1. Diese Formel ist Ausgangspunkt für die Vereinfachungen in Punkt 2. bzw. 3. und in [5] Corollary A.5.8 (2) zu finden.
2. Ohne Einschränkung sei  $t > s$ , womit lediglich  $d((x, t), (x, s)) = \ln(t/s)$  zu zeigen bleibt. Wir nutzen Punkt 1. aus und berechnen

$$\begin{aligned} d((x, t), (x, s)) &= 2 \cdot \operatorname{artanh} \left( \sqrt{\frac{\|x - x\|^2 + (t - s)^2}{\|x - x\|^2 + (t + s)^2}} \right) \\ &= 2 \cdot \operatorname{artanh} \left( \frac{t - s}{t + s} \right) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{1 + \frac{t-s}{t+s}}{1 - \frac{t-s}{t+s}} \right) \\ &= \ln \left( \frac{t + s + t - s}{t + s - t + s} \right) \\ &= \ln \left( \frac{t}{s} \right). \end{aligned}$$

3. Einerseits erhalten wir mithilfe von 1.

$$\begin{aligned}
d((x, t), (y, s)) &= 2 \cdot \operatorname{artanh} \left( \sqrt{\frac{\|x - y\|^2 + (t - t)^2}{\|x - y\|^2 + (t + t)^2}} \right) \\
&= 2 \cdot \operatorname{artanh} \left( \frac{\|x - y\|}{\sqrt{\|x - y\|^2 + 4t^2}} \right) \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln \left( \frac{1 + \frac{\|x - y\|}{\sqrt{\|x - y\|^2 + 4t^2}}}{1 - \frac{\|x - y\|}{\sqrt{\|x - y\|^2 + 4t^2}}} \right) \\
&= \ln \left( \frac{\sqrt{\|x - y\|^2 + 4t^2} + \|x - y\|}{\sqrt{\|x - y\|^2 + 4t^2} - \|x - y\|} \right) \\
&= \ln \left( \frac{\sqrt{\|x - y\|^2 + 4t^2} + \|x - y\|}{\sqrt{\|x - y\|^2 + 4t^2} - \|x - y\|} \cdot \frac{\sqrt{\|x - y\|^2 + 4t^2} + \|x - y\|}{\sqrt{\|x - y\|^2 + 4t^2} + \|x - y\|} \right) \\
&= \ln \left( \frac{\|x - y\|^2 + 4t^2 + 2 \cdot \sqrt{\|x - y\|^2 + 4t^2} \cdot \|x - y\| + \|x - y\|^2}{\|x - y\|^2 + 4t^2 - \|x - y\|^2} \right) \\
&= \ln \left( \frac{2 \cdot \|x - y\|^2 + 4t^2 + 2 \cdot \sqrt{\|x - y\|^2 + 4t^2} \cdot \|x - y\|}{4t^2} \right),
\end{aligned}$$

während ebenso

$$\begin{aligned}
2 \cdot \operatorname{arsinh} \left( \frac{\|x - y\|}{2 \cdot t} \right) &= 2 \cdot \ln \left( \frac{\|x - y\|}{2t} + \sqrt{\frac{\|x - y\|^2}{(2t)^2} + 1} \right) \\
&= \ln \left( \left( \frac{\|x - y\|}{2t} + \sqrt{\frac{\|x - y\|^2 + 4t^2}{4t^2}} \right)^2 \right) \\
&= \ln \left( \frac{\|x - y\|^2}{4t^2} + 2 \cdot \frac{\|x - y\|}{2t} \cdot \sqrt{\frac{\|x - y\|^2 + 4t^2}{4t^2}} + \frac{\|x - y\|^2 + 4t^2}{4t^2} \right) \\
&= \ln \left( \frac{2 \cdot \|x - y\|^2 + 2 \cdot \|x - y\| \cdot \sqrt{\|x - y\|^2 + 4t^2} + 4t^2}{4t^2} \right)
\end{aligned}$$

gilt.

□

### Kleinsches Modell

In der Nähe der Röhren werden wir häufig auf das Kleinsche Modell<sup>10</sup> des hyperbolischen Raums zurückgreifen; seine wesentlichen Eigenschaften werden beispielsweise in [24] Kapitel 6.1 aufbereitet.

Betrachte also die offene Einheitskugel im  $\mathbb{R}^n$

$$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1\}$$

mit der Metrik

$$d(x, y) = \operatorname{arcosh} \left( \frac{1 - \langle x, y \rangle}{\sqrt{1 - \|x\|^2} \sqrt{1 - \|y\|^2}} \right)$$

<sup>10</sup>In der Literatur unter anderem auch Beltrami-Klein-Modell oder projektives Kugelmodell genannt.

([24] Theorem 6.1.1), wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das euklidische Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet,  $\| \cdot \|$  die euklidische Norm sowie  $\operatorname{arcosh}$  wie üblich den für  $x \geq 1$  definierten Areakosinus hyperbolicus

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln \left( x + \sqrt{x^2 - 1} \right).$$

Dann ist  $D^n$  isometrisch zu  $\mathbb{H}^n$  und die  $k$ -dimensionalen hyperbolischen Unterräume von  $D^n$  ergeben sich als genau die Schnitte von  $D^n$  mit euklidischen (affinen)  $k$ -dimensionalen Unterräumen von  $\mathbb{R}^n$  ([24] Theorem 6.1.4); insbesondere sind hyperbolische Geodätische von  $D^n$  – da eindimensionale Unterräume – genau die euklidischen Geradenstücke in  $D^n$ . Hierdurch erhalten wir unmittelbar, dass im Kleinschen Modell hyperbolische Konvexität mit euklidischer Konvexität übereinstimmt.

Eine Abbildung  $D^n \rightarrow D^n$ , welche den Ursprung fixiert, ist ferner genau dann eine Isometrie des Kleinschen Modells, wenn sie Einschränkung einer orthogonalen Abbildung des  $\mathbb{R}^n$  ist ([24] Theorem 6.1.3). Zudem ist das Kleinsche Modell zumindest im Ursprung konform ([24] Exercise 6.1.1).

Wie bereits erwähnt werden wir insbesondere in der Nähe (des Urbilds) der Röhren häufig auf das Kleinsche Modell zurückgreifen. Bezeichnet  $A$  die zugehörige Achse in  $\mathbb{H}^n$ , so sei das Modell nun derart gewählt, dass  $A$  der  $x_1$ -Achse

$$\{x = (x_1, 0, \dots, 0) \in D^n\} = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \in (-1, 1), x_2 = \dots = x_n = 0\}$$

entspricht. Dann sind die Projektionsgeodätischen  $c_y$  hin zur Achse  $A$  (d.h.  $c_y$  ist die Geodätische durch  $y$  und  $\pi_A(y)$ ) genau durch die euklidischen Geradenstücke gegeben, welche euklidisch senkrecht auf  $A$  treffen; dies ergibt sich als Spezialfall des folgenden Lemmas.

**Lemma 3.28.** *Sei  $Z$  ein hyperbolischer Unterraum von  $D^n$ , welcher den Ursprung enthält. Dann stimmt die hyperbolische Projektion nach  $Z$  mit der euklidischen Projektion auf den  $Z$  entsprechenden euklidischen Unterraum von  $\mathbb{R}^n \supseteq D^n$  überein.*

*Insbesondere ergibt sich in unserer Situation für  $Z = A$ : Ist  $y = (y_1, \dots, y_n) \in D^n \setminus A$ , so gilt  $\pi_A(y) = (y_1, 0, \dots, 0)$ . Entsprechend lässt sich die Projektionsgeodätische  $c_y$  durch die Parametrisierung (nicht nach Bogenlänge)  $t \mapsto c_y(t) = (y_1, ty_2, \dots, ty_n)$  angeben.*

*Beweis.* Diese Eigenschaft des Kleinschen Modells scheint allgemein bekannt zu sein, der Vollständigkeit halber geben wir dennoch einen Beweis wieder.

Ist  $Z$   $k$ -dimensional, so sei  $H$  der  $k$ -dimensionale euklidische Unterraum von  $\mathbb{R}^n$ , welcher  $Z$  entspricht, d.h.  $Z = D^n \cap H$  (s.o.). Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass  $H = \langle e_1, \dots, e_k \rangle$ , wobei  $e_i$  für  $i = 1, \dots, n$  den  $i$ -ten Standardbasisvektor von  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet; beachte, dass  $H$  – da  $Z$  den Ursprung enthält – ein Unterraum des  $\mathbb{R}^n$  im klassischen Sinne ist, und nicht lediglich affin.

Sei  $\pi_H^{\text{eukl}} : \mathbb{R}^n \rightarrow H$  die euklidische Projektion nach  $H$  sowie  $\pi_Z : D^n \rightarrow Z$  die hyperbolische Projektion nach  $Z$ , womit zu zeigen ist, dass die Einschränkung von  $\pi_H^{\text{eukl}}$  auf  $D^n$  mit  $\pi_Z$  übereinstimmt.

Wir erinnern daran, dass für  $x \in D^n$  der Projektionspunkt  $\pi_Z(x) \in Z$  eindeutig dadurch charakterisiert ist, dass die Geodätische  $c_x$  von  $x$  nach  $\pi_Z(x)$  in  $\pi_Z(x)$  senkrecht auf  $Z$  trifft: Gemäß Lemma 1.8 ist der Winkel zwischen  $c_x$  und einem beliebigen Vektor  $v \in T_{\pi_Z(x)}Z$  bei  $\pi_Z(x)$  stets  $\geq \pi/2$  (beachte, dass aufgrund der Vollständigkeit von  $Z$  die ab  $\pi_Z(x)$  in  $Z$  verlaufenden Geodätischen durch genau die Vektoren aus  $T_{\pi_Z(x)}Z$  beschrieben werden), und würde strikte Ungleichheit gelten, so wäre der Winkel zwischen  $-v$  und  $c_x$  nun  $< \pi/2$  (denn beide Winkel müssen in Summe  $\pi$  ergeben), was aber genannter Tatsache widerspricht. Würde nun eine weitere Geodätische  $c'_x$  von  $x$  zu einem Punkt  $x' \in Z$  existieren, sodass der Winkel von  $c'_x$  und  $Z$  bei  $x'$  ebenfalls  $\pi/2$  wäre, so würde das Dreieck mit den Eckpunkten  $x$ ,  $x'$  und  $\pi_Z(x)$  bei  $x'$  und  $\pi_Z(x)$  einen Winkel von jeweils  $\pi/2$  aufweisen (wir erinnern daran, dass  $Z$  konvex

ist und folglich die Geodätische zwischen  $x'$  und  $\pi_Z(x)$  tatsächlich in  $Z$  verläuft), hätte also eine Innenwinkelsumme  $\geq \pi$ ; dies widerspricht der Tatsache, dass in negativer Krümmung die Innenwinkelsumme stets  $< \pi$  beträgt.

Es bleibt somit lediglich zu zeigen, dass die euklidische Gerade von  $x = (x_1, \dots, x_n)$  nach  $\pi_H^{\text{eukl}}(x) = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$  bei  $\pi_H^{\text{eukl}}(x)$  hyperbolisch senkrecht auf  $H$  trifft. Eine (nicht nach hyperbolischer Bogenlänge erfolgte) Parametrisierung für genannte euklidische Gerade ist durch

$$t \mapsto (x_1, \dots, x_k, tx_{k+1}, \dots, tx_n)$$

gegeben, womit wir auf den Richtungsvektor  $(0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n)$  im Punkt  $\pi_H^{\text{eukl}}(x)$  schließen<sup>11</sup>. Andererseits ist ein beliebiger Vektor  $v \in T_{\pi_H^{\text{eukl}}(x)}Z$  stets von der Form  $v = (v_1, \dots, v_k, 0, \dots, 0)$ . Wir werden nun die explizite Formel für den hyperbolischen Winkel im Kleinschen Modell nutzen:

**Fakt.** ([24] Exercise 6.1.5) Sei  $x \in D^n$  und definiere ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$  auf  $\mathbb{R}^n$  (für die Standardbasisvektoren  $e_1, \dots, e_n$  sowie anschließende lineare Fortsetzung) durch

$$\langle e_i, e_j \rangle_x = \begin{cases} \frac{1 - \|x\|^2 + x_i^2}{(1 - \|x\|^2)^2} & \text{falls } i = j, \\ \frac{x_i x_j}{(1 - \|x\|^2)^2} & \text{falls } i \neq j, \end{cases}$$

wobei  $\|\cdot\|$  die euklidische Norm bezeichnet. Sind  $c_v, c_w : \mathbb{R} \rightarrow D^n$  (hyperbolische) Geodätische mit  $c_v(0) = x = c_w(0)$  sowie Richtungsvektoren  $v$  bzw.  $w$  zum Zeitpunkt 0, so ergibt sich der hyperbolische Winkel  $\theta$  zwischen  $c_v$  und  $c_w$  in  $x$  gemäß

$$\cos \theta = \langle v, w \rangle_x.$$

In Anbetracht des eben genannten Faktus erhalten wir in unserer Situation

$$\begin{aligned} \langle (0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n), (v_1, \dots, v_k, 0, \dots, 0) \rangle_{\pi_H^{\text{eukl}}(x)} &= \left\langle \sum_{i=k+1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^k v_j e_j \right\rangle_{\pi_H^{\text{eukl}}(x)} \\ &= \left\langle \sum_{i=k+1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^k v_j e_j \right\rangle_{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)} \\ &= \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=1}^k x_i v_j \langle e_i, e_j \rangle_{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)}, \end{aligned}$$

was jedoch bereits 0 ist, denn für  $i \in \{k+1, \dots, n\}$  und  $j \in \{1, \dots, k\}$  gilt

$$\langle e_i, e_j \rangle_{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)} = \frac{0 \cdot x_j}{(1 - x_1^2 - \dots - x_k^2)^2} = 0.$$

Folglich stehen die Vektoren auch hyperbolisch senkrecht aufeinander, womit die Behauptung bewiesen ist.  $\square$

### Dicker Teil und Schrumpfung

Wir werden auf die abgewandelte Dick-dünn-Zerlegung wie in Korollar 3.25 zu Satz 3.24 zurückgreifen, wobei  $\varepsilon' := \varepsilon(n)/2$ . Die Bezeichnungen  $X_+$  bzw.  $M_+$  sowie  $X_-$  bzw.  $M_-$  für den dicken und dünnen

<sup>11</sup>Da wir ohnehin nur an Orthogonalitätsaussagen interessiert sind, genügt es uns, die Vektoren lediglich modulo skalare Vielfache zu betrachten.

Teil von  $X$  bzw.  $M$  übernehmen wir entsprechend; es sei daran erinnert, dass  $X_+$  im gewöhnlichen  $\varepsilon(n)/(2M(n))$ -dicken Teil enthalten ist, d.h.

$$X_+ \subseteq X_{\geq \frac{\varepsilon(n)}{2M(n)}}.$$

Erneut ist als Zwischenschritt eine Schrumpfung des dicken Teils notwendig, welche wir gemäß

$$X'_+ := X \setminus (X_-)_{\varepsilon(n)/32} \quad \text{bzw.} \quad M'_+ := M \setminus (M_-)_{\varepsilon(n)/32}$$

wählen. Beachte, dass die um  $\varepsilon(n)/32$  aufgedickten Komponenten des dünnen Teils  $M_-$  weiterhin einen Abstand  $\geq \varepsilon(n)/8 - 2 \cdot \varepsilon(n)/32 = \varepsilon(n)/16$  voneinander aufweisen (vgl. Definition  $\delta = \delta(n)$  aus Lemma 3.10). Es gilt außerdem  $M'_+ = X'_+/\Gamma$ .

Da gemäß unserer Wahl des dünnen Teils  $X_-$  selbiger nur aus den Subniveaumengen hyperbolischer und parabolischer Isometrien besteht, übertragen sich die im Falle von Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeiten angestellten Betrachtungen hinsichtlich des Flusses von den parabolischen Fixpunkten bzw. den hyperbolischen Achsen weg (vgl. Lemmata 2.20 und 2.21) auch auf die hiesige Situation. Insbesondere folgern wir wie dort:

**Lemma 3.29.** *Die Abbildung  $F : X_+ \times [0, 1] \rightarrow X_+$  – gegeben durch den Fluss entlang den Projektionsgeodätischen von den parabolischen Fixpunkten  $z \in X(\infty)$  bzw. den hyperbolischen Achsen  $A \subseteq X$  weg – definiert eine starke Deformationsretraktion von  $X_+$  auf  $X'_+$ , welche  $\Gamma$ -äquivariant ist und zum Zeitpunkt 1 einen Homöomorphismus  $F(\cdot, 1)|_{\partial X_+}$  von  $\partial X_+$  auf  $\partial X'_+$  induziert.*

Folglich erhalten wir mittels des Flusses entlang der Bilder (unter der Projektion  $\pi : X \rightarrow X/\Gamma = M$ ) der Projektionsgeodätischen eine Abbildung  $f : M_+ \times [0, 1] \rightarrow M_+$ , welche eine starke Deformationsretraktion von  $M_+$  auf  $M'_+$  darstellt und zum Zeitpunkt 1 einen Homöomorphismus  $f(\cdot, 1)|_{\partial M_+}$  von  $\partial M_+$  auf  $\partial M'_+$  induziert.  $\square$

### 3.3.2 Faltbare und gestreckte Mengen

Das Auftreten singulärer Untermannigfaltigkeiten im Fall von Torsion im Gitter macht es notwendig, die Lage und Form der späteren Überdeckungsmengen sehr sorgfältig zu wählen. Ein etwas unpräzise formuliertes, dafür anschauliches Grundprinzip lautet, dass eine Überdeckungsmenge in  $X$  (beispielsweise eine Kugel) entweder weit entfernt von den singulären Untermannigfaltigkeiten liegen, oder bereits in einer solchen zentriert sein muss, um nach Projektion in den Quotienten  $M = X/\Gamma$  weiterhin ein zusammenziehbares Bild zu besitzen<sup>12</sup>; dies führt zum Begriff faltbarer Mengen, welcher in [25] eingeführt wurde und welchen wir hier leicht abgewandelt wiederholen.

Anschließend werden wir sogenannte gestreckte Mengen vorstellen. Diese sind an den Fluss vom dünnen zum dicken Teil genau angepasst und ermöglichen es uns, eventuell auftretende Lücken in der anfänglichen Überdeckung des (geschrumpften) dicken Teils – welche im Allgemeinen über den (geschrumpften) dicken Teil hinausragt – zu schließen. Hierdurch können wir eine Überdeckung konstruieren, welche stabil unter dem genannten Fluss ist, womit sich später die Homotopieäquivalenz dieser Überdeckung (aus welcher wir mittels der Nerven-Konstruktion den gewünschten Simplicialkomplex erhalten) zum überdeckten (geschrumpften) dicken Teil ergibt.

Es sei dabei erwähnt, dass die genannten Lücken am Rande der Überdeckung bei ausschließlicher Verwendung gewöhnlicher (faltbarer) Kugeln auch dadurch hervorgerufen werden, dass aufgrund der

<sup>12</sup>Man denke beispielsweise an eine Kugel von festem Radius in der Ebene, welche sich dem Fixpunkt einer Rotation nähert: Weit entfernt vom Fixpunkt bleibt das Bild der Kugel im Quotienten selbst eine Kugel; nähert sich die Kugel jedoch dem Fixpunkt, so werden irgendwann ihre Ränder verklebt, und das Bild im Bahnenraum ist homotopieäquivalent zur  $\mathbb{S}^1$ , also nicht mehr zusammenziehbar. Das Problem tritt jedoch nicht auf, wenn die Kugel bereits im Fixpunkt zentriert ist.

benötigten Faltbarkeit der Mengen die Lage selbiger nur sehr eingeschränkt wählbar ist – wie bereits oben angedeutet. In diesem Sinne lässt sich zusammenfassen: Um zusammenziehbare Mengen in  $M$  zu erhalten, müssen die Urbilder in  $X$  als faltbar gewählt werden; wegen der geforderten Faltbarkeit ist die Lage der Mengen nicht mehr frei wählbar; die sehr starre Lage der Überdeckungskugeln kann zu einem komplizierten Bild am Rande der Überdeckung führen (d.h. dort, wo die Überdeckung über den geschrumpften dicken Teil hinausragt); um dennoch eine lückenlose, unter dem Fluss stabile Überdeckung zu gewährleisten, muss deshalb am Rande der Überdeckung zu gestreckten Mengen übergegangen werden, welche die potentiellen Lücken schließen.

### Faltbarkeit

Wir ändern den aus [25] Definition 4.8 bekannten Begriff faltbarer Mengen wie folgt ab; im Wesentlichen handelt es sich um eine Abschwächung der vierten Bedingung (von der Konvexität von  $\pi(U \cap Y)$  hin zur Zusammenziehbarkeit). Beachte ferner, dass in unseren späteren Anwendungen die Rolle von  $Y$  stets durch Fixpunktmenge endlicher Untergruppen von  $\Gamma$  übernommen wird, womit die vorausgesetzten Eigenschaften an  $Y$  automatisch erfüllt sind.

**Definition 3.30.** Sei  $U \subseteq X$  offen, sowie  $Y \subseteq X$  eine konvexe, vollständige, total geodätische Untermannigfaltigkeit.  $U$  heißt  **$Y$ -faltbar**, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1.  $U$  ist konvex und genau invariant unter  $\Gamma$ , d.h. für  $\gamma \in \Gamma$  gilt stets  $\gamma U = U$  oder  $\gamma U \cap U = \emptyset$ .
2.  $Y$  wird durch  $\Gamma_U = \{\gamma \in \Gamma : \gamma U = U\}$  punktweise fixiert.
3.  $\pi_Y(U) \subseteq U$ , wobei  $\pi_Y : X \rightarrow Y$  die Projektion zum nächstgelegenen Punkt aus  $Y$  bezeichnet.
4. Das Bild  $\pi(U \cap Y)$  von  $U \cap Y$  in  $X/\Gamma$  ist zusammenziehbar.

Ist  $U$  eine  $Y$ -faltbare Menge für geeignetes  $Y$ , so nennen wir  $U$  **faltbar**. Das Bild  $\pi(U) \subseteq X/\Gamma$  heißt dann **gefaltete Menge**. ▲

Da im Beweis von [25] Proposition 4.9 die dort vorausgesetzte Konvexität von  $\pi(U \cap Y)$  lediglich für deren Kontrahierbarkeit benutzt wurde, ergibt sich auch für unsere leicht abgeänderte Definition vollkommen analog:

**Lemma 3.31** ([25] Proposition 4.9). *Gefaltete Mengen sind zusammenziehbar.* □

Die in der Bemerkung nach [25] Definition 4.8 geschilderte Eigenschaft des Durchschnitts  $U \cap Y$  gilt ebenso weiterhin.

**Lemma 3.32.** *Sind  $U$  und  $Y$  Teilmengen von  $X$ , sodass  $U$  genau invariant unter  $\Gamma$  ist und  $Y$  durch  $\Gamma_U$  punktweise fixiert wird, so bildet  $U \cap Y$  injektiv nach  $X/\Gamma$  ab. Insbesondere ist  $U \cap Y$  homöomorph zu  $\pi(U \cap Y) \subseteq X/\Gamma$ .*

*Beweis.* Der Vollständigkeit halber formulieren wir den kurzen Beweis, welcher an der genannten Stelle in [25] lediglich angedeutet wird.

Der Fall  $U \cap Y = \emptyset$  ist trivial. Seien also  $y, y' \in U \cap Y$  mit  $\pi(y) = \pi(y')$  gegeben; zu zeigen ist, dass  $y = y'$ . Aufgrund von  $\pi(y) = \pi(y')$  existiert ein  $\gamma \in \Gamma$  mit  $y = \gamma y'$ . Somit gilt  $\gamma U \cap U \neq \emptyset$ , denn  $y \in U$  und  $\gamma y' \in \gamma U$ . Da  $U$  genau invariant ist, folgt  $\gamma U = U$  – d.h.  $\gamma \in \Gamma_U$  –, was wiederum nach sich zieht, dass  $Y$  durch  $\gamma$  punktweise fixiert wird. Wegen  $y' \in Y$  bedeutet dies nun  $\gamma y' = y'$  und wir schließen

$$y = \gamma y' = y'.$$

□

Zunächst stellen wir fest, dass obiges Lemma 3.32 insbesondere bei  $Y$ -faltbaren Mengen  $U$  greift. Umgekehrt lässt es sich jedoch auch zum Nachweis der Faltbarkeit nutzen: Liegen Eigenschaften 1. und 2. bereits vor, so lässt sich für Eigenschaft 4. die Lage in  $X/\Gamma$  auf die im Allgemeinen weniger komplizierte Situation in  $X$  zurückführen.

Während in [25] alle Überdeckungsmengen in  $M = X/\Gamma$  als Bilder von Kugeln in  $X$  unter der Projektion  $\pi : X \rightarrow X/\Gamma$  entstehen, werden für unsere späteren Argumente besondere Überdeckungsmengen notwendig sein. Obige abgeänderte Definition ermöglicht uns nun, die Gutartigkeit dieser Mengen im Falle von  $X = \mathbb{H}^n$  nachzuweisen.

Als Motivation und Ausgangspunkt für die Faltbarkeit der von uns später definierten besonderen Überdeckungsmengen ist folgende zentrale Aussage zu verstehen:

**Lemma 3.33** ([25] Proposition 4.10). *Sei  $Y \in \Sigma_i$  (wobei für  $i = n$  auch  $Y = X$  nicht ausgeschlossen ist).*

a) *Ist  $y \in Y \setminus S_{<i}$  sowie  $\mu$  hinreichend klein, sodass  $Y$  von  $\Gamma_{4\mu}(y)$  punktweise fixiert wird, so ist  $B_\mu(y)$  eine  $Y$ -faltbare Menge.*

b) *Sei  $U_1$  eine  $Y$ -faltbare Kugel wie im vorigen Punkt sowie  $U_2, \dots, U_k$  faltbare Kugeln mit Mittelpunkten  $y_2, \dots, y_k \in Y$ ; beachte, dass wir darauf verzichten  $y_2, \dots, y_k \in Y \setminus S_{<i}$  zu fordern und somit im Allgemeinen keine  $Y$ -Faltbarkeit der  $U_2, \dots, U_k$  vorliegt. Angenommen  $U := \bigcap_{j=1}^k U_j \neq \emptyset$ , so gilt:*

1.  *$U$  ist  $Y$ -faltbar.*

2. *Sind die Radien  $\mu_j$  der  $U_j$  so gewählt, dass  $y_j$  von  $\Gamma_{4\mu_j}(y_j)$  fixiert wird ( $j = 1, \dots, k$ ), so gilt  $\pi(U) = \bigcap_{j=1}^k \pi(U_j)$ .*

*Folglich ist der Durchschnitt  $\bigcap_{j=1}^k \pi(U_j)$  der  $\pi(U_j)$  eine gefaltete Menge und somit zusammenziehbar.*

*Beweis.* Die Aussage ist [25] Proposition 4.10 sowie dem dort vorangehenden Text zu entnehmen; beachte, dass die in [25] verwendete Definition von Faltbarkeit bereits Faltbarkeit in unserem Sinne nach sich zieht.  $\square$

### Parabolisch gestreckte Kugeln

Wenden wir uns nun den gestreckten Mengen zu, wobei wir zunächst den parabolischen Fall behandeln. Der Fluss weg vom dünnen Teil wird in der Nähe einer Spitze wieder durch die Projektionsgeodätischen zum parabolischen Fixpunkt (bzw. von diesem weg) gegeben sein.

Sei also  $z \in \partial\mathbb{H}^n$  ein fester parabolischer Fixpunkt und betrachte das obere Halbraummodell mit  $z$  als Punkt  $\infty$ . Ist  $G < \Gamma$  eine endliche Gruppe, welche  $z$  fixiert, sowie  $\text{Fix}(G)$  die zugehörige singuläre Untermannigfaltigkeit – d.h.  $\text{Fix}(G) := \bigcap_{g \in G} \text{Fix}(g)$  –, so gilt entweder  $\text{Fix}(G) = \mathbb{H}^n$  (nämlich für  $G = \{\text{id}\}$ ) oder  $\text{Fix}(G)$  ergibt sich als nichtleerer Schnitt euklidischer affiner Hyperebenen, die senkrecht auf dem Rand  $\partial\mathbb{H}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$  stehen. Wir sagen in einem solchen Fall auch, dass die singuläre Untermannigfaltigkeit  $\text{Fix}(G)$  den parabolischen Fixpunkt  $z$  enthält. In der von uns übernommenen Notation aus [25] gilt also  $\text{Fix}(G) \in \Sigma(G')$ , wobei  $G' < \Gamma$  die zu  $z$  gehörige maximale parabolische Untergruppe von  $\Gamma$  bezeichnet.

Als **parabolisch gestreckte Kugel** bezeichnen wir eine Menge  $U$ , welche sich als euklidische Abstands Umgebung eines Geradenstücks hin zum parabolischen Fixpunkt  $z$  ergibt. Genauer: Sei  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine hyperbolische Geodätische mit Endpunkten  $c(\infty) = z$  und  $c(-\infty) = (x^{(0)}, 0)$  für  $x^{(0)} =$

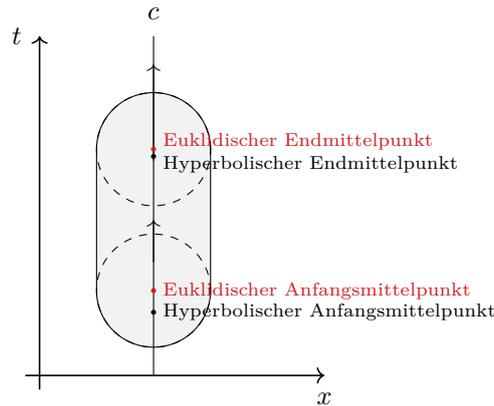


Abbildung 3.2: Konstruktion einer parabolisch gestreckten Kugel im oberen Halbraummodell des  $\mathbb{H}^n$ . Die Anfangskugel (unten) und Endkugel (oben) sind gestrichelt eingezeichnet.

$(x_1^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}) \in \mathbb{R}^{n-1}$  fest, so ist ein Geradenstück durch  $c([t'_0, t'_1])$  für  $t'_1 \geq t'_0 > 0$  gegeben. Wir definieren nun

$$U := \{(x, t) \in \mathbb{H}^n : d_{\text{eukl}}((x, t), c(t')) < r \text{ für ein } t' \in [t'_0, t'_1]\},$$

wobei  $d_{\text{eukl}}$  wie üblich den euklidischen Abstand auf  $\mathbb{R}^n$  bezeichnet und  $r > 0$  so gewählt ist, dass  $U$  weiterhin im oberen Halbraum  $\mathbb{H}^n$  liegt (insbesondere ist das maximal zulässige  $r$  damit in Abhängigkeit von  $t'_0$  gegeben). Da euklidische Kugeln gerade hyperbolische Kugeln sind (mit anderem Mittelpunkt und Radius, vgl. [5] Proposition A.5.21), erhalten wir, dass  $U$  sich als Vereinigung hyperbolischer Kugeln mit Mittelpunkten aus  $c$  auffassen lässt<sup>13</sup>; hierbei existiert ein sogenannter (hyperbolischer) Anfangsmittelpunkt, nämlich der Kugelmittelpunkt (einer hyperbolischen Kugel) auf  $c$  mit kleinster  $t$ -Koordinate sowie ein entsprechender (hyperbolischer) Endmittelpunkt, nämlich der Kugelmittelpunkt (einer hyperbolischen Kugel) auf  $c$  mit größter  $t$ -Koordinate. Vom Anfangsmittelpunkt hin zum Endmittelpunkt nehmen die Radien der hyperbolischen Kugeln monoton ab. Den (hyperbolischen) Radius um den (hyperbolischen) Anfangsmittelpunkt werden wir auch Anfangsradius nennen; die entsprechende Kugel heißt Anfangskugel. Es sei darauf hingewiesen, dass die hyperbolischen Anfangs- und Endmittelpunkte ungleich den euklidischen Anfangs- und Endmittelpunkten  $c(t'_0)$  bzw.  $c(t'_1)$  sind, während hingegen die hyperbolischen Anfangs- bzw. Endkugeln – zumindest als Mengen – mit den euklidischen Anfangs- bzw. Endkugeln übereinstimmen. In Abbildung 3.2 wird die gesamte Konstruktion anschaulich wiedergegeben.

Wir sehen unmittelbar, dass  $U$  als Vereinigung offener Kugeln selbst offen ist. Offensichtlich ergibt sich  $U$  außerdem als Durchschnitt der anliegenden hyperbolischen Halbräume (diese liegen entweder an der Oberseite der Endkugel, der Unterseite der Anfangskugel oder am parallel zur  $t$ -Achse verlaufenden Mittelstück an), womit wir gemäß Lemma 3.26 folgern, dass  $U$  konvex ist. Beachte außerdem, dass im Falle von  $t'_0 = t'_1$  die parabolisch gestreckte Kugel zu einer gewöhnlichen Kugel entartet. Anschaulich lässt sich eine parabolisch gestreckte Kugel auch als Bildmenge der Anfangskugel unter dem Fluss in Richtung  $z$  auffassen (hierbei ist der Fluss nach euklidischer Bogenlänge parametrisiert).

Bezeichnet  $G$  die zu  $z$  gehörige maximale parabolische Untergruppe<sup>14</sup> von  $\Gamma$ , so werden wir stets annehmen, dass  $U$  gänzlich im  $\varepsilon(n)$ -dünnen Teil von  $\mathbb{H}^n$  bezüglich  $G$  liegt, also  $G_{\varepsilon(n)}(x) = \langle g \in G : d_g(x) < \varepsilon(n) \rangle$  für alle  $x \in U$  unendlich ist. Dies ermöglicht es uns, die Gruppenwirkung von  $\Gamma$  auf und

<sup>13</sup>Dabei treten selbstverständlich nicht alle Punkte aus  $c$  als Mittelpunkte auf, sondern lediglich solche aus einer zusammenhängenden Teilmenge von  $c$ .

<sup>14</sup>D.h.  $G = \Gamma_z = \{\gamma \in \Gamma : \gamma z = z\}$ , siehe auch [9] S. 245.

nahe  $U$  auf die Gruppenwirkung von  $G$  zurückzuführen, welche wiederum besonders verträglich mit der Konstruktion von  $U$  ist: Da die Geodätischen nach  $z$ , welche  $U$  fasern, durch Elemente  $g \in G$  lediglich permutiert werden und  $G$  die Horosphären um  $z$  erhält, wird auch  $gU$  eine parabolisch gestreckte Kugel sein, mit Anfangsmittelpunkt  $gy$  (in der selben Horosphäre um  $z$  wie  $y$ ) sowie selbem Radius.

Sind zwei parabolisch gestreckte Kugeln mit nichtleerem Schnitt gegeben, sodass ihre Anfangsmittelpunkte in der selben Horosphäre um  $z$  liegen, so erhalten wir folgende einfache Abschätzung hinsichtlich ihres Abstands.

**Lemma 3.34.** *Seien  $U$  und  $U'$  parabolisch gestreckte Kugeln mit Anfangskugeln  $B_\mu(y)$  und  $B_{\mu'}(y')$ . Liegen  $y$  und  $y'$  in der selben Horosphäre um  $z$ , so folgt im Falle von  $U \cap U' \neq \emptyset$  bereits  $d(y, y') < 2\mu + 2\mu'$ .*

*Beweis.* Bezeichnet  $r$  den euklidischen Radius aus der Konstruktion von  $U$ , so werden wir zunächst eine Schranke an den hyperbolischen Abstand zwischen  $y$  und den Punkten aus der euklidischen  $r$ -Kugel um  $y$  angeben, welche zudem in der selben Horosphäre  $HS$  um  $z$  wie  $y$  liegen. Beachte, dass  $HS$  im oberen Halbraummodell aus genau den Punkten besteht, welche die selbe  $t$ -Koordinate  $t_y$  wie  $y = (x_y, t_y)$  aufweisen. Bezeichnet  $B$  die (abgeschlossene) hyperbolische Kugel um  $y$  von Radius  $\mu$  – also den Abschluss der Anfangskugel von  $U$  –, so lässt sich diese als euklidische Kugel um einen Punkt  $\tilde{y} = (x_{\tilde{y}}, t_{\tilde{y}})$  von obigem Radius  $r$  auffassen, wobei  $x_{\tilde{y}} = x_y$  und  $t_{\tilde{y}} > t_y$  erfüllt sind. Entsprechend ist  $(x_y, t_{\tilde{y}} + r)$  ein Punkt in  $B$  von maximalem euklidischen Abstand  $r$  von  $\tilde{y}$ , welcher offensichtlich auch maximalen hyperbolischen Abstand  $\mu$  von  $y$  aufweist. Mithilfe der Formeln aus Lemma 3.27 berechnen wir den hyperbolischen Abstand zu

$$\mu \stackrel{!}{=} d((x_y, t_{\tilde{y}} + r), (x_y, t_y)) = \ln \left( \frac{t_{\tilde{y}} + r}{t_y} \right),$$

d.h.  $t_{\tilde{y}} + r = t_y \cdot e^\mu$ . Unter Ausnutzung von  $t_{\tilde{y}} > t_y$  folgern wir

$$r = t_y \cdot e^\mu - t_{\tilde{y}} < t_y \cdot e^\mu - t_y = t_y \cdot (e^\mu - 1).$$

Wie erwähnt besitzen Punkte aus  $HS$  ebenfalls die  $t$ -Koordinate  $t_y$  – sind also von der Gestalt  $(x, t_y)$  –, womit sich in einem solchen Fall

$$d((x, t_y), (x_y, t_y)) = 2 \cdot \operatorname{arsinh} \left( \frac{\|x - x_y\|}{2 \cdot t_y} \right)$$

ergibt. Die euklidische Norm  $\|x - x_y\|$  ist jedoch für Punkte aus der euklidischen  $r$ -Kugel um  $y$  durch  $r$  beschränkt, also insbesondere durch  $t_y \cdot (e^\mu - 1)$ . Es folgt

$$d((x, t_y), (x_y, t_y)) < 2 \cdot \operatorname{arsinh} \left( \frac{t_y \cdot (e^\mu - 1)}{2 \cdot t_y} \right) = 2 \cdot \operatorname{arsinh} \left( \frac{e^\mu - 1}{2} \right).$$

Beachte, dass wegen  $\mu > 0$  die Ungleichung

$$\frac{e^\mu - 1}{2} < \frac{e^\mu - e^{-\mu}}{2} = \sinh(\mu)$$

erfüllt ist. Hieraus ergibt sich mithilfe der Monotonie von  $\operatorname{arsinh}$  nun

$$\operatorname{arsinh} \left( \frac{e^\mu - 1}{2} \right) < \operatorname{arsinh}(\sinh(\mu)) = \mu,$$

also

$$d((x, t_y), (x_y, t_y)) < 2 \cdot \operatorname{arsinh} \left( \frac{e^\mu - 1}{2} \right) < 2 \cdot \mu.$$

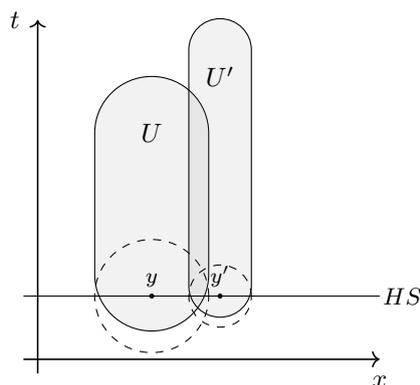


Abbildung 3.3: Anschauliche Darstellung der Lage im Beweis von Lemma 3.34. Gestrichelt eingezeichnet sind zusätzlich die euklidischen  $r$ - bzw.  $r'$ -Kugeln um die hyperbolischen Anfangsmittelpunkte  $y$  bzw.  $y'$ .

Damit weist jeder Punkt aus  $HS$  einen hyperbolischen Abstand  $< 2\mu$  zu  $y$  auf, sofern er in der euklidischen  $r$ -Kugel um  $y$  liegt.

Selbstverständlich ist obiges Argument auch auf  $U'$  übertragbar, weshalb wir erhalten, dass Punkte aus der euklidischen  $r'$ -Kugel um  $y'$ , welche zudem in der selben Horosphäre  $HS'$  um  $z$  liegen wie  $y'$ , von hyperbolischem Abstand  $< 2\mu'$  zu  $y'$  sind; hierbei bezeichnet analog  $r'$  den euklidischen Radius aus der Konstruktion von  $U'$ .

Nun beachte, dass wegen  $U \cap U' \neq \emptyset$  auch die euklidische  $r$ -Kugel um  $y$  einen nichtleeren Schnitt mit der euklidischen  $r'$ -Kugel um  $y'$  aufweist. Da gemäß der Voraussetzung die Horosphären  $HS \ni y$  und  $HS' \ni y'$  übereinstimmen, erhalten wir bereits einen Schnittpunkt  $y'' \in HS$  dieser euklidischen Kugeln, vgl. Abbildung 3.3.

Mithilfe der obigen Ausführungen ergibt sich  $d(y, y'') < 2\mu$  sowie  $d(y', y'') < 2\mu'$ , also insgesamt

$$d(y, y') < 2\mu + 2\mu',$$

was zu zeigen war. □

Da obiges Lemma 3.34 nur bei Anfangsmittelpunkten in der selben Horosphäre greift, wird es später mitunter nötig sein, parabolisch gestreckte Kugeln mit Anfangsmittelpunkten in unterschiedlichen Horosphären durch die folgende Konstruktion dennoch vergleichbar zu machen. Ist  $B_\mu(y)$  die Anfangskugel der parabolisch gestreckten Kugel  $U$  sowie  $r$  der euklidische Radius aus der Konstruktion von  $U$ , so sei  $c_y$  die Geodätische von  $y$  zum parabolischen Fixpunkt  $z$ . Für eine Horosphäre  $HS'$  ungleich der Horosphäre  $HS \ni y$  sei  $y'$  der eindeutige Schnittpunkt von  $c_y$  mit  $HS'$ . Die **Vergleichskugel**  $U'$  von  $U$  auf Höhe von  $HS'$  ist nun definiert als diejenige parabolisch gestreckte Kugel mit (hyperbolischem) Anfangsmittelpunkt  $y'$ , welche durch den selben euklidischen Radius  $r$  konstruiert wird und die selbe Endkugel wie  $U$  besitzt, vgl. Abbildung 3.4.

Anders ausgedrückt wird lediglich der Parameter  $t'_0$  in der Konstruktion parabolisch gestreckter Kugeln neu gewählt. Die Definition ist natürlich nur dann sinnvoll, wenn hierdurch die euklidische Anfangskugel den oberen Halbraum nicht verlässt und auch der neue Anfangsmittelpunkt  $y'$  weiterhin weiter entfernt von  $z$  liegt als der (mit dem Endmittelpunkt von  $U$  übereinstimmende) Endmittelpunkt; dies wird in unseren späteren Anwendungen stets erfüllt sein.

Wir sehen unmittelbar, dass die Vergleichskugel  $U'$  genau die gleichen Projektionsgeodätischen nach  $z$  schneidet wie  $U$ . Da der Abstand dieser Geodätischen zueinander nach  $z$  hin monoton fallend ist, erhalten

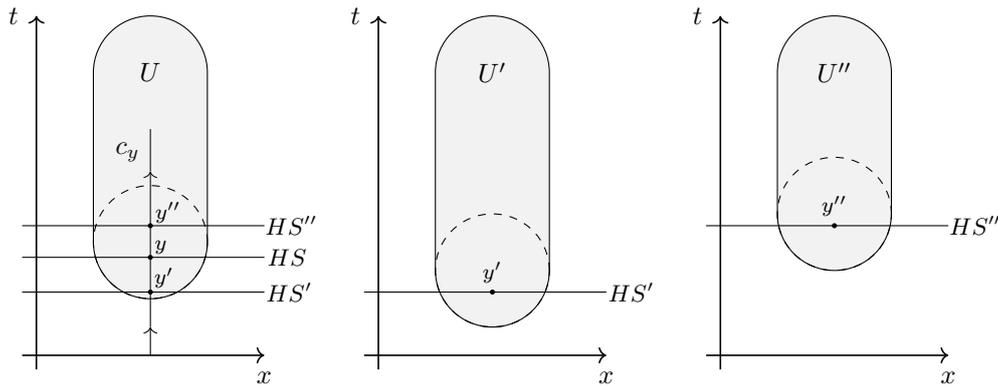


Abbildung 3.4: Im linken Bild ist die ursprüngliche parabolisch gestreckte Kugel  $U$  dargestellt, deren hyperbolischer Anfangsmittelpunkt  $y$  in der Horosphäre  $HS$  liegt. Die Schnittpunkte  $y'$  bzw.  $y''$  der Projektionsgeodätischen  $c_y$  von  $y$  mit den Horosphären  $HS'$  bzw.  $HS''$  bilden die hyperbolischen Anfangsmittelpunkte der zu  $U$  gehörigen Vergleichskugel  $U'$  bzw.  $U''$ , welche im mittleren bzw. rechten Bild wiedergegeben sind. Gestrichelt dargestellt sind jeweils die hyperbolischen Anfangskugeln von  $U$ ,  $U'$  und  $U''$ .

wir ferner folgende Abschätzungen für den hyperbolischen Anfangsradius  $\mu'$  von  $U'$ : Ist  $HS'$  näher an  $z$  als  $HS$ , so gilt  $\mu' \leq \mu$ ; ist jedoch  $HS'$  weiter von  $z$  entfernt als  $HS$ , so gilt  $\mu' \geq \mu$ . Beachte außerdem, dass  $U$  genau dann eine parabolisch gestreckte Kugel  $U''$  mit Anfangsmittelpunkt  $y'' \in HS''$  nichtleer schneidet, wenn die Vergleichskugel  $U'$  von  $U$  auf der Höhe von  $HS''$  einen nichtleeren Schnitt mit  $U''$  aufweist.

Wenden wir uns nun den weiteren Eigenschaften parabolisch gestreckter Kugeln zu; die Konstruktion wurde so gewählt, dass sie unter geeigneten Umständen faltbar sind:

**Lemma 3.35.** *Sei  $Y \in \Sigma_i$  eine singuläre Untermannigfaltigkeit, die den parabolischen Fixpunkt  $z$  enthält. Ferner sei  $y \in Y \setminus S_{<i}$  und  $\mu > 0$  hinreichend klein gewählt, sodass  $Y$  durch  $\Gamma_{4\mu}(y)$  punktweise fixiert wird. Bezeichne  $U$  eine parabolisch gestreckte Kugel mit (hyperbolischer) Anfangskugel  $B_\mu(y)$ . Dann ist  $U$  eine  $Y$ -faltbare Menge.*

*Beweis.* Wir haben oben bereits gesehen, dass parabolisch gestreckte Kugeln offen und konvex sind.

Wenden wir uns also der genauen Invarianz von  $U$  zu. Da  $U$  nach Voraussetzung im  $\varepsilon(n)$ -dünnen Teil von  $\mathbb{H}^n$  bezüglich  $G$  enthalten ist (und dieser ist – als Zusammenhangskomponente des  $\varepsilon(n)$ -dünnen Teils bezüglich  $\Gamma$  aufgefasst – genau invariant unter  $\Gamma$ ), müssen wir für den Nachweis der genauen Invarianz von  $U$  lediglich Elemente von  $G$  betrachten; zu zeigen ist also, dass für alle  $g \in G$  mit  $gU \cap U \neq \emptyset$  bereits  $gU = U$  folgt. Doch wegen  $g \in G$  ist  $gU$  ebenfalls eine parabolisch gestreckte Kugel von selbem Anfangsradius  $\mu$  wie  $U$ , deren Anfangsmittelpunkt  $gy$  zudem in der selben Horosphäre um  $z$  wie  $y$  liegt. Mit Lemma 3.34 erhalten wir also

$$d_g(y) = d(y, gy) < 2\mu + 2\mu = 4\mu,$$

d.h.  $g \in \Gamma_{4\mu}(y)$ . Nach Voraussetzung folgt damit, dass  $Y$  durch  $g$  punktweise fixiert wird; dies bedeutet  $gy = y$ , weshalb sich aufgrund der Konstruktion von  $U$  nun  $gU = U$  ergibt, was zu zeigen war.

Als Nächstes weisen wir nach, dass  $Y$  durch  $\Gamma_U$  punktweise fixiert wird. Beachte hierbei, dass in unserem Fall bereits  $\Gamma_U = G_U$  gilt (denn  $U$  ist im  $\varepsilon(n)$ -dünnen Teil von  $\mathbb{H}^n$  bezüglich  $G$  enthalten), wobei  $G_U = \{g \in G : gU = U\}$ . Ist nun ein  $g \in G_U$  gegeben, so wissen wir nach obiger Argumentation

zu Eigenschaft 1., dass dies  $d_g(y) < 4\mu$  zur Folge hat; wie oben schließen wir  $g \in \Gamma_{4\mu}(y)$ , womit  $Y$  durch  $g$  punktweise fixiert wird.

Eine Begründung für  $\pi_Y(U) \subseteq U$  lässt sich mithilfe der Tatsache führen, dass die Projektion hin zu  $Y$  Abstände nicht vergrößert, vgl. Lemma 1.9. Da nämlich jedes  $u \in U$  nach Konstruktion von  $U$  in einer hyperbolischen Kugel  $B_{\mu_0}(y_0) \subseteq U$  von Radius  $\mu_0$  um ein geeignetes  $y_0 \in Y$  liegt (beachte, dass die Geodätische  $c$  in der Konstruktion von  $U$  gänzlich in  $Y$  verläuft), erhalten wir hiermit

$$d(\pi_Y(u), \pi_Y(y_0)) \leq d(u, y_0) < \mu_0,$$

was aufgrund von  $\pi_Y(y_0) = y_0$  bereits  $\pi_Y(u) \in B_{\mu_0}(y_0) \subseteq U$  zur Folge hat.

Als letzter Punkt bleibt die Kontrahierbarkeit von  $\pi(U \cap Y) \subseteq \mathbb{H}^n/\Gamma$  nachzuweisen. Hierzu nutzen wir Lemma 3.32 aus, womit lediglich zu zeigen bleibt, dass  $U \cap Y \subseteq \mathbb{H}^n$  zusammenziehbar ist. Dies ist jedoch der Fall, denn  $U \cap Y \subseteq Y$  ist als Durchschnitt der konvexen Mengen  $U$  und  $Y$  selbst konvex und damit zusammenziehbar.  $\square$

Auch die Durchschnitte parabolisch gestreckter Kugeln sind unter bestimmten Voraussetzungen faltbar, wie das folgende Lemma ausdrückt; wesentliche Ideen im Beweis stammen aus [25] Proposition 4.10 sowie dem dort vorangehenden Text.

**Lemma 3.36.** *Sei  $U_1$  eine  $Y$ -faltbare parabolisch gestreckte Kugel wie in Lemma 3.35, d.h. mit Anfangsmittelpunkt  $y_1 \in Y \setminus S_{<i}$ , sowie  $U_2, \dots, U_k$  faltbare parabolisch gestreckte Kugeln mit Anfangsmittelpunkten  $y_2, \dots, y_k \in Y$ ; beachte, dass wir darauf verzichten  $y_2, \dots, y_k \in Y \setminus S_{<i}$  zu fordern und somit im Allgemeinen keine  $Y$ -Faltbarkeit der  $U_2, \dots, U_k$  vorliegt. Angenommen  $U := \bigcap_{j=1}^k U_j \neq \emptyset$ , so gilt:*

1.  $U$  ist  $Y$ -faltbar.
2. Sind die hyperbolischen Anfangsradien  $\mu_j$  der  $U_j$  bei den Anfangsmittelpunkten  $y_j$  so gewählt, dass  $y_j$  von  $\Gamma_{8\mu_j}(y_j)$  fixiert wird ( $j = 1, \dots, k$ ), so gilt  $\pi(U) = \bigcap_{j=1}^k \pi(U_j)$ .  
Folglich ist der Durchschnitt  $\bigcap_{j=1}^k \pi(U_j)$  der  $\pi(U_j)$  eine gefaltete Menge und somit zusammenziehbar.

*Beweis.* 1. Wir begründen, dass  $U$  eine  $Y$ -faltbare Menge ist, wobei der [25] Proposition 4.10 vorangehende Text die Beweisstrategie vorgibt.

Zunächst ist  $U$  als endlicher Durchschnitt von offenen, konvexen, genau invarianten Mengen selbst offen, konvex sowie genau invariant.

Da  $Y$  durch  $\Gamma_{U_1}$  punktweise fixiert wird (denn  $U_1$  ist  $Y$ -faltbar), genügt es für die punktweise Fixierung von  $Y$  durch  $\Gamma_U$  zu zeigen, dass  $\Gamma_U$  eine Untergruppe von  $\Gamma_{U_1}$  ist. Sei also  $\gamma \in \Gamma_U$ . Dann folgt wegen  $\gamma U = U$  sowie  $U \subseteq U_1$

$$\gamma U_1 \supseteq \gamma U = U \subseteq U_1,$$

also aufgrund von  $U \neq \emptyset$  somit  $\gamma U_1 \cap U_1 \neq \emptyset$ . Da  $U_1$  genau invariant ist, hat dies  $\gamma U_1 = U_1$  zur Folge, also  $\gamma \in \Gamma_{U_1}$ , was zu zeigen war.

Für jedes  $U_j$  liegt die zur Konstruktion herangezogene Geodätische  $c_j$  (also die Geodätische durch den jeweiligen Anfangsmittelpunkt  $y_j \in Y$  hin zum parabolischen Fixpunkt  $z \in \partial\mathbb{H}^n$ ) gänzlich in  $Y$ , womit auch jedes der  $U_j$  sich als Vereinigung hyperbolischer Kugeln um Punkte aus  $c_j \subseteq Y$  ergibt. Ist nun  $u \in U$ , so existieren also für alle  $j = 1, \dots, k$  Punkte  $y_0^{(j)} \in Y$  und Radien  $\mu_0^{(j)}$ , sodass  $u$

in jeder der hyperbolischen Kugeln  $B_{\mu_0^{(j)}}(y_0^{(j)}) =: B_j \subseteq U_j$  liegt. Wie im Beweis von Lemma 3.35 folgern wir  $\pi_Y(u) \in B_j$  für alle  $j = 1, \dots, k$ , also

$$\pi_Y(u) \in \bigcap_{j=1}^k B_j \subseteq \bigcap_{j=1}^k U_j = U.$$

Hiermit ist  $\pi_Y(U) \subseteq U$  begründet.

Es bleibt noch zu zeigen, dass  $\pi(U \cap Y)$  zusammenziehbar ist, was wegen Lemma 3.32 wiederum aus der Kontrahierbarkeit von  $U \cap Y$  folgen würde. Diese ergibt sich aber bereits aus der Konvexität von  $U$  und  $Y$ .

2. Als Grundidee für den Beweis dieser Aussage dient [25] Proposition 4.10; wie dort stellen wir fest, dass sich das Urbild von  $\bigcap_{j=1}^k \pi(U_j)$  in  $\mathbb{H}^n$  als Vereinigung von Schnitten der Form  $\bigcap_{j=1}^k \gamma_j U_j$  mit  $\gamma_j \in \Gamma$  ergibt. Erneut bleibt nur zu zeigen, dass jeder solche nichtleere Durchschnitt  $\bigcap_{j=1}^k \gamma_j U_j$  als Translat von  $\bigcap_{j=1}^k U_j$  unter einem geeigneten Element aus  $\Gamma$  entsteht.

Mit  $r_j$  bezeichnen wir den euklidischen Radius in der Konstruktion von  $U_j$ . Sei  $j_0 \in \{1, \dots, k\}$  so gewählt, dass  $r_{j_0} \leq r_j$  für alle  $j = 1, \dots, k$ . Nach etwaiger Verschiebung des Durchschnitts  $\bigcap_{j=1}^k \gamma_j U_j$  durch  $\gamma_{j_0}^{-1}$  können wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $\gamma_{j_0} = \text{id}$ . Da der Durchschnitt  $\bigcap_{j=1}^k \gamma_j U_j$  als nichtleer angenommen wurde, schneidet  $U_{j_0}$  die übrigen  $\gamma_j U_j$ .

Bezeichne  $U_{j_0}^{(j)}$  die Vergleichskugel von  $U_{j_0}$  auf Höhe der Horosphäre  $HS_j \ni y_j$  (für  $j = 1, \dots, k$ ), und sei  $\mu_{j_0}^{(j)}$  der zugehörige (hyperbolische) Anfangsradius um den (hyperbolischen) Anfangsmittelpunkt  $y_{j_0}^{(j)}$ . Nach Definition der Vergleichskugel (siehe dort) folgt aus dem nichtleeren Schnitt von  $U_{j_0}$  mit  $U_j$  und  $\gamma_j U_j$ , dass auch  $U_{j_0}^{(j)}$  nichtleeren Schnitt mit  $U_j$  und  $\gamma_j U_j$  aufweist. Da der euklidische Radius  $r_{j_0}$  minimal gewählt war – und der euklidische Radius der Vergleichskugel nach Konstruktion mit  $r_{j_0}$  übereinstimmt –, muss auch für den (hyperbolischen) Anfangsradius  $\mu_{j_0}^{(j)}$  bereits

$$\mu_{j_0}^{(j)} \leq \mu_j$$

für alle  $j = 1, \dots, k$  gelten. Mit Lemma 3.34 erhalten wir nun

$$d(y_j, y_{j_0}^{(j)}) < 2\mu_j + 2\mu_{j_0}^{(j)} \leq 4\mu_j$$

sowie

$$d(\gamma_j y_j, y_{j_0}^{(j)}) < 2\mu_j + 2\mu_{j_0}^{(j)} \leq 4\mu_j,$$

also insgesamt

$$d_{\gamma_j}(y_j) = d(y_j, \gamma_j y_j) < 8\mu_j$$

für beliebiges  $j$ . Dies bedeutet  $\gamma_j \in \Gamma_{8\mu_j}(y_j)$ , womit  $\gamma_j$  nach Voraussetzung  $y_j$  fixiert; es folgt  $\gamma_j U_j = U_j$ . Hiermit ist

$$\bigcap_{j=1}^k \gamma_j U_j = \bigcap_{j=1}^k U_j,$$

bewiesen.

Insgesamt folgt also  $\bigcap_{j=1}^k \pi(U_j) = \pi(U)$  und letztere Menge ist Bild der nach Punkt 1.  $Y$ -faltbaren Menge  $U$ , weshalb  $\bigcap_{j=1}^k \pi(U_j)$  gefaltet und damit zusammenziehbar ist. □

### Hyperbolisch gestreckte Kugeln

Eine entsprechende Konstruktion gestreckter Mengen werden wir nun in der Nähe der Röhren vornehmen. Wir beginnen mit der für uns relevanten Situation im hyperbolischen Raum und werden diese anschließend in das Kleinsche Modell übersetzen. Sei  $A$  die Achse einer maximalen hyperbolischen Untergruppe  $G$  von  $\Gamma$ , sodass  $A$  im  $\varepsilon(n)$ -dünnen Teil von  $\mathbb{H}^n$  bezüglich  $\Gamma$  liegt. Die singulären Untermannigfaltigkeiten  $Y$  in der Nähe von  $A$  sind durch die elliptischen Isometrien in  $G$  vorgegeben (wir erinnern an die Dickdünn-Zerlegung): Ist  $Y = F(G')$  für eine Gruppe  $G'$  von elliptischen Isometrien, welche  $A$  fixieren (in diesem Fall ist insbesondere  $G' < E$  mit  $E < O(n-1)$  der endlichen Gruppe aus der Strukturaussage hyperbolischer Gruppen, vgl. Lemma 3.12), so verläuft  $A$  gänzlich in  $Y$ ; ist andererseits  $Y = F(G')$  für eine Gruppe  $G'$ , welche  $A$ -spiegelnde elliptische Isometrien enthält, so ist  $Y$  entweder ein Punkt auf  $A$  oder wird von  $A$  senkrecht in einem eindeutigen Punkt geschnitten, und andere Fälle können nicht auftreten. Beachte wiederum, dass im ersten Fall auch  $G' = \{\text{id}\}$  und damit  $Y = F(\{\text{id}\}) = \mathbb{H}^n$  nicht ausgeschlossen ist. In Kurzfassung können wir also  $Y \in \Sigma(G)$  schreiben; wir werden von solchen Untermannigfaltigkeiten auch sagen, dass sie nahe der Achse  $A$  liegen. Für einen Punkt  $y \in \mathbb{H}^n \setminus A$  bezeichnen wir mit  $c_y$  die Geodätische durch  $y$  und  $\pi_A(y)$ , wobei  $\pi_A(y)$  wie üblich der Projektionspunkt von  $y$  auf  $A$  ist. Wir wählen das Kleinsche Modell nun so, dass  $A$  der  $x_1$ -Achse entspricht; in Lemma 3.28 hatten wir bereits erkannt, dass  $c_y$  dann (bis auf Parametrisierung) mit der euklidischen Gerade zwischen  $y$  und  $\pi_A(y)$  übereinstimmt.

Analog zur Konstruktion der parabolisch gestreckten Kugeln als Bild einer geeigneten Anfangskugel unter den Flussgeodätischen – im dortigen Fall hin zum parabolischen Fixpunkt –, werden wir auch diesmal mit einer hyperbolischen Kugel  $B_\mu(y)$  von Radius  $\mu > 0$  um ein  $y \in D^n$  beginnen und anschließend entlang der Projektionsgeodätischen – nun hin zur Achse  $A$  – fließen. Hierbei seien  $y$  und  $\mu > 0$  so gewählt, dass  $B_\mu(y)$  gänzlich im  $\varepsilon(n)$ -dünnen Teil bezüglich der maximalen hyperbolischen Untergruppe  $G$  liegt sowie  $B_\mu(y)$  die Achse  $A$  nicht schneidet; erstere Forderung wird erneut sicherstellen, dass die Wirkung von  $\Gamma$  auf und nahe der zu konstruierenden Menge  $U$  gänzlich durch  $G$  beschrieben wird.

Als **hyperbolisch gestreckte Kugel** bezeichnen wir eine Menge  $U$ , welche aus denjenigen Punkten besteht, die auf dem Weg entlang der Projektionsgeodätischen von  $B_\mu(y)$  (der sogenannten Anfangskugel) hin zur Achse  $A$  durchlaufen werden, wobei wir nicht bis zu  $A$  selbst, sondern lediglich bis zu einer parallel zu  $A$  liegenden Hyperebene fließen. Gehen wir weiterhin von  $A$  als  $x_1$ -Achse im Kleinschen Modell aus und nehmen zusätzlich ohne Einschränkung  $y = (0, y_2, 0, \dots, 0)$  für ein  $y_2 > 0$  an, so erhalten wir mittels Lemma 3.28 genauer

$$U := \{x \in D^n : x = (y'_1, ty'_2, \dots, ty'_n) \text{ mit } ty'_2 > s \text{ für ein } y' = (y'_1, \dots, y'_n) \in B_\mu(y) \text{ und } t \in (0, 1], s > 0\}.$$

Beachte hierbei, dass die Bedingung  $ty'_2 > s$  genau dem Abschneiden an der parallel zur Achse  $A$  verlaufenden Hyperebene  $\{x \in D^n : x_2 = s\}$  entspricht; selbige Hyperebene steht außerdem nicht nur euklidisch senkrecht auf der Projektionsgeodätischen  $c_y$  (nach  $A$ ) des Anfangsmittelpunkts  $y$ , sondern auch hyperbolisch senkrecht, schließlich ist nach Lemma 3.28 der Punkt  $(0, s, 0, \dots, 0) \in c_y$  der Projektionspunkt  $\pi_{c_y}(x)$  aller Punkte  $x$  aus  $\{x \in D^n : x_2 = s\}$ . Wir werden stets annehmen, dass  $s > 0$  so klein gewählt ist, dass hierdurch kein Punkt der Anfangskugel  $B_\mu(y)$  verloren geht, d.h.  $B_\mu(y)$  soll bezüglich obiger Darstellung gänzlich im Halbraum  $\{x \in D^n : x_2 > s\}$  liegen. Aufgrund der Monotonie der Verschiebungsfunktion hin zur Achse liegt auch  $U$  gänzlich im  $\varepsilon(n)$ -dünnen Teil von  $\mathbb{H}^n$  bezüglich  $G$ . Abbildung 3.5 fasst die Konstruktion hyperbolisch gestreckter Kugeln anschaulich zusammen.

Wir merken ferner an, dass für Elemente  $g$  aus der maximalen hyperbolischen Gruppe  $G$  auch  $gU$  eine hyperbolisch gestreckte Kugel mit Anfangskugel  $B_\mu(gy)$  ist; dies folgt erneut aus der Tatsache, dass die Projektionsgeodätischen in Richtung  $A$  äquivariant unter  $G$  sind.

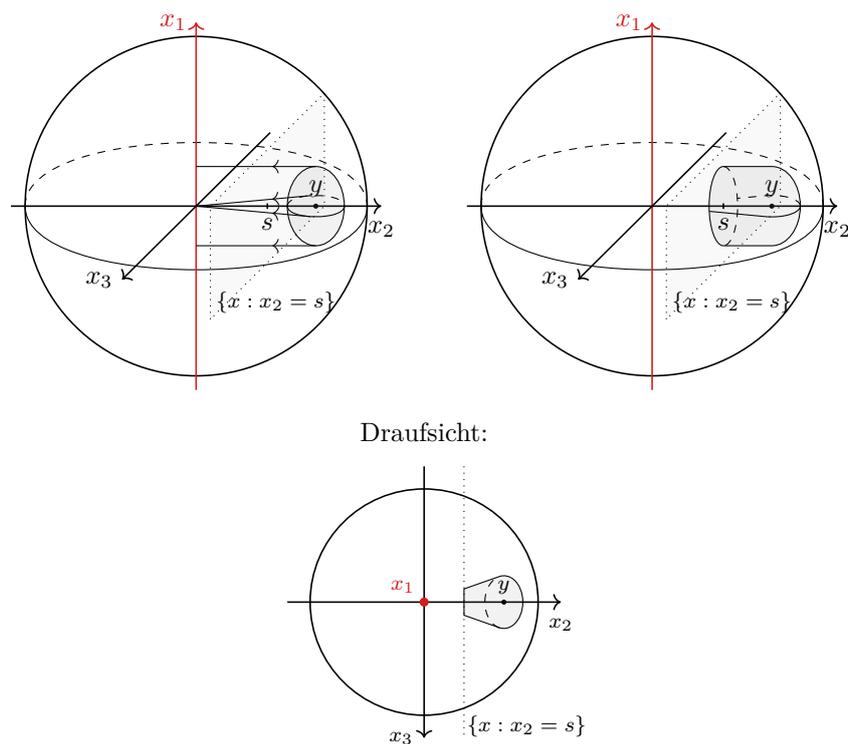


Abbildung 3.5: Im Bild links oben sind die Anfangskugel um den Anfangsmittelpunkt  $y$  sowie beispielhafte Flussgeodätische dargestellt; ferner ist die abschneidende Hyperebene  $\{x \in D^n : x_2 = s\}$  stets gepunktet eingezeichnet. Das Ergebnis der Konstruktion ist eine hyperbolisch gestreckte Kugel wie im Bild rechts oben, welche zudem in Draufsicht (d.h. hier: Projektion in die  $x_2$ - $x_3$ -Ebene) im kleinen Bild unten zu finden ist.

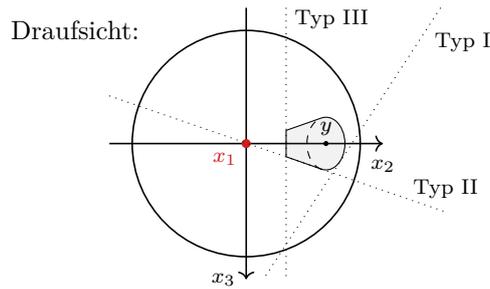


Abbildung 3.6: Darstellung (in Draufsicht) der verschiedenen Typen von Hyperebenen, welche an hyperbolisch gestreckten Kugeln anliegen. Typ I liegt tangential an der Rückseite der Anfangskugel; Typ II liegt tangential an einer Flussgeodätischen, welche selbst tangential am Rand der Anfangskugel verläuft; und Typ III ist die abschneidende Hyperebene aus der Konstruktion der hyperbolisch gestreckten Kugel.

Anhand der Definition ist unmittelbar ersichtlich, dass  $U$  offen ist. Zur Begründung der Konvexität von  $U$  werden wir erneut Lemma 3.26 heranziehen. Im Kleinschen Modell sind hyperbolische Halbräume genau die Schnitte von  $D^n$  mit euklidischen (affinen) Halbräumen, womit die an  $U$  angrenzenden Halbräume nun von drei möglichen Gestalten sind (vgl. auch Abbildung 3.6): Erstens solche, die an der von  $A$  aus betrachteten Rückseite der Anfangskugel  $B_\mu(y)$  anliegen, also an den Punkten des Randes von  $B_\mu(y)$ , welche auf ihrem Weg hin zu  $A$  den Rand von  $B_\mu(y)$  ein weiteres mal schneiden; zweitens solche, die an denjenigen Punkten des Randes von  $B_\mu(y)$  anliegen, deren Projektionsgeodätische hin zu  $A$  tangential an  $B_\mu(y)$  liegt, womit sie insbesondere selbige Geodätische enthalten; oder drittens der parallel zur Achse  $A$  verlaufende Halbraum, mittels welchem vor der Achse abgeschnitten wurde. Hierdurch sehen wir, dass  $U$  im Durchschnitt seiner anliegenden Halbräume enthalten ist, womit gemäß Lemma 3.26 die Konvexität von  $U$  folgt.

Da hyperbolisch gestreckte Kugeln  $U$  anschaulich gesprochen von ihrer Anfangskugel aus beliebig nah an die Achse heran fließen können (für geeignete Wahl des Parameters  $s$  in der Definition von  $U$ ), lässt sich aus der Tatsache, dass zwei solche Kugeln sich schneiden, zunächst keine Abschätzung für den Abstand ihrer Anfangsmittelpunkte angeben. Liegen sie jedoch auf der selben Höhe – d.h. haben ihre Anfangsmittelpunkte den selben Abstand nach  $A$  –, so ist dies doch möglich; es sei an dieser Stelle insbesondere auf die Analogie zur Situation bei parabolisch gestreckten Kugeln in Lemma 3.34 hingewiesen. Die genannte Eigenschaft erweist sich als nützliches Hilfsmittel in einer Reihe von späteren Aussagen, weshalb wir sie als eigenes Lemma wiedergeben.

**Lemma 3.37.** *Seien  $U$  und  $U'$  hyperbolisch gestreckte Kugeln mit Anfangskugeln  $B_\mu(y)$  und  $B_{\mu'}(y')$ . Gilt  $d(y, A) = d(y', A)$ , so folgt im Falle von  $U \cap U' \neq \emptyset$  bereits  $d(y, y') < 2\mu + 2\mu'$ .*

*Beweis.* Sei  $x \in U \cap U'$  gegeben und bezeichne  $c_x$  die Projektionsgeodätische von  $x$  nach  $A$ , wobei die Parametrisierung nach (hyperbolischer) Bogenlänge und mit  $c_x(0) = \pi_A(x)$ ,  $c_x(d(x, A)) = x$  erfolge.

**Fakt A.**  $\overline{B_\mu(y)}$  bzw.  $\overline{B_{\mu'}(y')}$  werden durch  $c_x$  jeweils zu einem Zeitpunkt  $\geq d(y, A) - \mu$  bzw.  $\geq d(y', A) - \mu'$  betreten. Gleichheit liegt genau dann vor, wenn sich  $x$  auf der Projektionsgeodätischen von  $y$  bzw.  $y'$  nach  $A$  befindet.

*Beweis.* Wir führen den Beweis für  $\overline{B_\mu(y)}$ , der für  $\overline{B_{\mu'}(y')}$  ergibt sich analog. Angenommen es existiert ein früherer Zeitpunkt  $0 < t < d(y, A) - \mu$  mit  $c_x(t) \in \partial B_\mu(y)$ . Dann erhalten wir

$$d(y, A) \leq d(y, c_x(t)) + d(c_x(t), A) = \mu + t < \mu + (d(y, A) - \mu) = d(y, A),$$

also einen Widerspruch.

Gilt andererseits für den erstmaligen Eintrittszeitpunkt  $t = d(y, A) - \mu$ , so existiert ein  $x' = c_x(t) = c_x(d(y, A) - \mu)$  auf  $c_x$ , sodass  $x' \in \partial B_\mu(y)$ . Dann hat die Kurve, welche als Verkettung der Geodätischen von  $y$  nach  $x'$  mit dem Stück auf  $c_x$  von  $x'$  nach  $\pi_A(x') = \pi_A(x)$  entsteht, eine Länge von  $\mu + (d(y, A) - \mu) = d(y, A)$ ; sie realisiert also den Abstand von  $y$  nach  $A$ , womit sie bereits die Projektionsgeodätische von  $y$  nach  $A$  darstellen muss. Folglich liegt in diesem Fall  $x$  auf selbiger Projektionsgeodätischen.  $\square$

**Fakt B.**  $\overline{B_\mu(y)}$  bzw.  $\overline{B_{\mu'}(y')}$  werden durch  $c_x$  jeweils zu einem Zeitpunkt  $\leq d(y, A) + \mu$  bzw.  $\leq d(y', A) + \mu'$  verlassen. Gleichheit liegt genau dann vor, wenn sich  $x$  auf der Projektionsgeodätischen von  $y$  bzw.  $y'$  nach  $A$  befindet.

*Beweis.* Erneut führen wir den Beweis lediglich für  $\overline{B_\mu(y)}$ . Angenommen es existiert ein Punkt  $x' \in \overline{B_\mu(y)}$ , welcher auf  $c_x$  liegt, und für den  $x' = c_x(t)$  für ein  $t > d(y, A) + \mu$  erfüllt ist, so gilt nach Dreiecksungleichung jedoch

$$d(x', A) \leq d(x', y) + d(y, A) \leq \mu + d(y, A),$$

was wegen  $t = d(x', A)$  nun den gewünschten Widerspruch liefert.

Ist für den Austrittszeitpunkt  $t = d(y, A) + \mu$  erfüllt, so bildet die Verkettung der Geodätischen von  $x' = c_x(t) \in \partial B_\mu(y)$  nach  $y$  und derjenigen von  $y$  nach  $A$  eine Kurve der Länge  $\mu + d(y, A) = t = d(x', A)$  von  $x'$  nach  $A$ ; folglich muss nach Eindeutigkeit der Geodätischen diese Kurve bereits mit  $c_x$  übereinstimmen – also  $c_x = c_y$  –, denn auch diese realisierte  $d(x', A)$ . Somit befindet sich  $x$  auf der Projektionsgeodätischen von  $y$  nach  $A$ .  $\square$

Wir nehmen zunächst an, dass  $x$  nicht auf den Projektionsgeodätischen  $c_y$  bzw.  $c_{y'}$  von  $y$  bzw.  $y'$  nach  $A$  liegt; in den Aussagen der Fakten A und B gilt folglich strikte Ungleichheit, womit  $y_1 \in B_\mu(y)$  sowie  $y_2 \in B_{\mu'}(y')$  existieren, sodass

$$y_1 \in c_x((d(y, A) - \mu, d(y, A) + \mu))$$

und

$$y_2 \in c_x((d(y', A) - \mu', d(y', A) + \mu')).$$

Für  $x' := c_x(d(y, A)) = c_x(d(y', A))$  (hier fließt die Voraussetzung  $d(y, A) = d(y', A)$  ein) ergibt sich also  $y_1 \in B_\mu(x')$  sowie  $y_2 \in B_{\mu'}(x')$ , d.h.

$$d(y, y') \leq d(y, y_1) + d(y_1, x') + d(x', y_2) + d(y_2, y') < \mu + \mu + \mu' + \mu' = 2\mu + 2\mu'.$$

Sei andererseits angenommen,  $x$  läge auf der Projektionsgeodätischen  $c_y$  oder  $c_{y'}$  von  $y$  bzw.  $y'$  nach  $A$ , also  $c_x = c_y$  oder  $c_x = c_{y'}$ ; ohne Einschränkung behandeln wir lediglich den Fall  $c_x = c_y$ . Gemäß Fakten A und B erhalten wir die Existenz eines  $y_2 \in \partial B_{\mu'}(y')$ , sodass

$$y_2 \in c_y([d(y', A) - \mu', d(y', A) + \mu']).$$

Wegen  $c_y(d(y', A)) = c_y(d(y, A)) = y$  (erneut  $d(y, A) = d(y', A)$  nach Voraussetzung) bedeutet dies  $y_2 \in \overline{B_{\mu'}(y)}$ , womit wir

$$d(y, y') \leq d(y, y_2) + d(y_2, y') \leq \mu' + \mu' < 2\mu + 2\mu'$$

schließen.  $\square$

Wir werden nun die Definition der Vergleichskugeln aus dem parabolischen Fall auf den hyperbolischen Fall übertragen. Sei hierzu  $U$  eine hyperbolisch gestreckte Kugel mit Anfangskugel  $B_\mu(y)$  sowie  $y' \in \mathbb{H}^n$  ein geeigneter Punkt. Bezeichne außerdem  $c_y$  die Projektionsgeodätische von  $y$  zur Achse  $A$ , parametrisiert nach Bogenlänge mit  $c_y(0) = \pi_A(y)$  sowie  $c_y(d(y, A)) = y$ . Sei  $y'' := c_y(d(y', A))$  und außerdem  $\mu' > 0$  minimal gewählt, sodass  $B_{\mu'}(y'')$  weiterhin alle Projektionsgeodätischen hin zur Achse  $A$  schneidet, welche auch  $B_\mu(y)$  (äquivalent:  $U$ ) geschnitten haben. Die **Vergleichskugel**  $U'$  von  $U$  auf der Höhe von  $y'$  ist nun definiert als hyperbolisch gestreckte Kugel mit Anfangskugel  $B_{\mu'}(y'')$ , wobei die abschneidende Hyperebene  $H$  aus der Definition hyperbolisch gestreckter Kugeln (gesteuert durch den dortigen Parameter  $s$ ) mit der entsprechenden Hyperebene von  $U$  übereinstimmt. Auch hier werden wir – für unsere späteren Anwendungen ohne Einschränkung – annehmen, dass dies weiterhin wohldefiniert ist; d.h. dass einerseits  $B_{\mu'}(y'')$  weiterhin gänzlich im durch  $H$  definierten Halbraum (der nicht  $A$  enthält) liegt, sowie andererseits ebenso im  $\varepsilon(n)$ -dünnen Teil bezüglich  $G$ .

Da auch im hyperbolischen Fall der Abstand der Projektionsgeodätischen in Richtung  $A$  monoton fallend ist, gilt  $\mu' \leq \mu$  falls  $d(y', A) \leq d(y, A)$ , sowie andererseits  $\mu' \geq \mu$  falls  $d(y', A) \geq d(y, A)$ . Ferner erhalten wir: Schneidet  $U$  eine hyperbolisch gestreckte Kugel  $U''$  mit Anfangsmittelpunkt  $y''$ , so wird  $U''$  auch von der Vergleichskugel  $U'$  von  $U$  auf Höhe von  $y''$  nichtleer geschnitten. Die Umkehrung gilt im Gegensatz zum parabolischen Fall jedoch im Allgemeinen nicht mehr.

Wir fahren mit den Eigenschaften hyperbolisch gestreckter Kugeln fort; sind bei einer solchen Kugel  $U$  Mittelpunkt und Radius der Anfangskugel in gewisser Weise verträglich mit den nahe der Achse  $A$  liegenden singulären Untermannigfaltigkeiten gewählt, so ergibt sich auch hier die Faltbarkeit von  $U$ :

**Lemma 3.38.** *Sei  $Y \in \Sigma_i(G)$  eine singuläre Untermannigfaltigkeit nahe der Achse  $A$ ,  $y \in Y \setminus S_{<i}$  und  $\mu > 0$  hinreichend klein gewählt, sodass  $Y$  durch  $\Gamma_{4\mu}(y)$  punktweise fixiert wird. Bezeichne  $U$  eine hyperbolisch gestreckte Kugel mit Anfangskugel  $B_\mu(y)$ . Dann ist  $U$  eine  $Y$ -faltbare Menge.*

*Beweis.* Zunächst weisen wir darauf hin, dass die Bedingung  $y \in Y \setminus S_{<i}$  in unserer Situation gleichbedeutend mit  $y \in Y \setminus S_{<i}(G)$  ist, da  $U$  als gänzlich im  $\varepsilon(n)$ -dünnen Teil bezüglich  $G$  liegend vorausgesetzt wurde. Auch wurden Offenheit und Konvexität von  $U$  bereits in den obigen Ausführungen begründet.

Ohne Einschränkung können wir nach möglicher isometrischer Transformation von  $D^n$  erneut annehmen, dass  $y = (0, y_2, 0, \dots, 0)$  gilt. Gemäß der bereits oben geschilderten Klassifizierung singulärer Untermannigfaltigkeiten nahe  $A$  ergibt sich nun, dass  $Y$  entweder eine Hyperebene ist, welche  $A$  und  $y$  enthält (mit  $Y = D^n$  wiederum nicht ausgeschlossen), oder aber durch  $y$  verläuft und  $A$  mit eindeutigem Schnittpunkt im Ursprung  $(0, \dots, 0)$  hyperbolisch senkrecht – und damit auch euklidisch senkrecht (das Kleinsche Modell ist konform im Ursprung) – schneidet.

Zunächst begründen wir die genaue Invarianz von  $U$ . Da  $U$  als gänzlich im  $\varepsilon(n)$ -dünnen Teil bezüglich  $G$  liegend angenommen wurde, ist  $U \cap gU \neq \emptyset$  nur für Isometrien  $g \in G$  möglich. Für solche  $g$  gilt jedoch  $gA = A$  (denn  $G$  ist eine hyperbolische Gruppe mit Achse  $A$ ), also  $d(gy, A) = d(gy, gA) = d(y, A)$ , womit  $gU$  eine hyperbolisch gestreckte Kugel mit Anfangskugel  $B_\mu(gy)$  von selbem Abstand zu  $A$  wie  $B_\mu(y)$  ist; mithilfe von Lemma 3.37 erhalten wir

$$d_g(y) = d(y, gy) < 2\mu + 2\mu = 4\mu.$$

Dies bedeutet  $g \in \Gamma_{4\mu}(y)$ , womit nach Voraussetzung folgt, dass  $Y$  von  $g$  punktweise fixiert wird; insbesondere ergibt sich wegen  $y \in Y$  somit  $gy = y$ , weshalb  $gU$  ebenfalls eine hyperbolisch gestreckte Kugel mit Anfangskugel  $B_\mu(y)$  ist (und selbem Parameter  $s$ ), also mit  $U$  übereinstimmt, d.h.  $gU = U$ .

Entsprechend lässt sich auch Eigenschaft 2. von  $Y$ -faltbaren Mengen begründen: Ist  $\gamma \in \Gamma_U$  gegeben, so ist insbesondere  $\gamma U \cap U \neq \emptyset$  erfüllt; für diesen Fall haben wir jedoch in den vorigen Ausführungen

bereits  $\gamma \in \Gamma_{4\mu}(y)$  gefolgert, was gemäß Voraussetzung nach sich zieht, dass  $Y$  durch  $\gamma$  punktweise fixiert wird.

Als Nächstes werden wir  $\pi_Y(U) \subseteq U$  begründen. Hierfür ziehen wir uns auf die am Anfang des Beweises vorgestellte Wahl von  $y$  als  $y = (0, y_2, 0, \dots, 0) \in D^n$  und die daraus folgende einfache Gestalt von  $Y$  zurück (s.o.): Ist  $A \subseteq Y$ , so enthält die euklidische Hyperebene  $H$ , welche nach Schnitt mit  $D^n$  schließlich  $Y$  ergibt, mindestens die Vektoren  $(1, 0, \dots, 0)$  – dies entspricht dem Richtungsvektor von  $A$  – sowie  $(0, 1, 0, \dots, 0)$  – dies entspricht dem Richtungsvektor der Projektionsgeodätischen  $c_y \subseteq Y$ ; oder im anderen Fall, dass  $Y$  in  $(0, \dots, 0) = \pi_A(y)$  die Achse  $A$  senkrecht schneidet, enthält  $H$  mindestens den Vektor  $(0, 1, 0, \dots, 0)$ , und jeder übrige Vektor von  $H$  steht (euklidisch) senkrecht auf  $(1, 0, \dots, 0)$ , besitzt also eine  $x_1$ -Koordinate von 0. Ohne Einschränkung können wir daher nach möglicher isometrischer Transformation der  $D^n$  wiederum annehmen, dass  $H$  von einer Teilmenge der Standardbasisvektoren  $e_1, \dots, e_n$  des  $\mathbb{R}^n$  aufgespannt wird, wobei die Darstellung von  $A$  als  $x_1$ -Achse und die von  $y$  als  $y = (0, y_2, 0, \dots, 0)$  erhalten bleibt.

Betrachte zunächst den Fall, dass  $A \subseteq Y$ , weshalb wir  $H = \langle e_1, e_2, \dots, e_k \rangle$  für ein  $2 \leq k \leq n$  annehmen können. Sei ein beliebiger Punkt  $x \in U$  gegeben, womit  $x$  gemäß Definition von  $U$  die Darstellung

$$x = (y'_1, ty'_2, \dots, ty'_n) \quad \text{mit} \quad ty'_2 > s$$

für ein  $y' = (y'_1, \dots, y'_n) \in B_\mu(y)$  und  $t \in (0, 1], s > 0$  besitzt; wir wollen zeigen, dass  $\pi_Y(x) \in U$ . Gemäß Lemma 3.28 gilt

$$\pi_Y(x) = (y'_1, ty'_2, \dots, ty'_k, 0, \dots, 0);$$

doch dieser Punkt erfüllt  $ty'_2 > s$  und befindet sich selbst auf der Projektionsgeodätischen des Punktes  $(y'_1, y'_2, \dots, y'_k, 0, \dots, 0)$  in Richtung  $A$ , weshalb aufgrund der Konstruktion von  $U$  lediglich zu zeigen bleibt, dass letzterer Punkt ebenso in  $B_\mu(y)$  liegt. Es sei daran erinnert, dass für jedes  $i = 1, \dots, n$  die Spiegelung  $\sigma_i$  der  $i$ -ten Koordinate – also die Abbildung  $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n)$  – eine Isometrie im Kleinschen Modell darstellt (denn sie ist die Einschränkung einer orthogonalen Abbildung des  $\mathbb{R}^n$ ), welche für  $i \neq 2$  außerdem  $y = (0, y_2, 0, \dots, 0)$  fixiert. Wir sehen also, dass wegen  $\sigma_i y = y$  (für  $i \neq 2$ ) bereits

$$\sigma_i B_\mu(y) = B_\mu(\sigma_i y) = B_\mu(y)$$

erfüllt ist. Folglich ist mit  $y' = (y'_1, \dots, y'_{n-1}, y'_n)$  auch  $\sigma_n y' = (y'_1, \dots, y'_{n-1}, -y'_n)$  in  $B_\mu(y)$  enthalten, also gemäß Konvexität auch deren (hyperbolische und damit gleichbedeutend euklidische) Verbindung, d.h. insbesondere  $(y'_1, \dots, y'_{n-1}, 0) \in B_\mu(y)$ . Entsprechende Wiederholung dieser Argumentation für die übrigen Koordinaten  $n-1, \dots, k+1$  liefert  $(y'_1, \dots, y'_k, 0, \dots, 0) \in B_\mu(y)$ , was zu zeigen war.

Der Fall, dass  $A$  nicht in  $Y$  liegt, sondern  $Y$  im Ursprung senkrecht schneidet (womit wir ohne Einschränkung  $H = \langle e_2, \dots, e_k \rangle$  für ein  $2 \leq k \leq n$  annehmen können), verläuft vollkommen analog; dort ist im Unterschied zu vorigem Fall lediglich zu begründen, dass für einen Punkt  $(y'_1, \dots, y'_n)$  auch  $(0, y'_2, \dots, y'_k, 0, \dots, 0)$  in  $B_\mu(y)$  liegt, was jedoch mit der gleichen Argumentation wie oben erfolgt. Insgesamt haben wir hierdurch  $\pi_Y(U) \subseteq U$  bewiesen.

Als letzte Eigenschaft bleibt zu zeigen, dass  $\pi(U \cap Y)$  in  $X/\Gamma$  zusammenziehbar ist. Erneut nutzen wir Lemma 3.32 und müssen somit lediglich die Zusammenziehbarkeit von  $U \cap Y$  begründen; doch  $U$  und  $Y$  sind konvexe Teilmengen von  $D^n$ , weshalb auch ihr Durchschnitt konvex und folglich zusammenziehbar ist.  $\square$

Wie schon bei parabolisch gestreckten Kugeln wollen wir erreichen, dass der Durchschnitt hyperbolisch gestreckter Kugeln ebenso faltbar ist; da jedoch später auch gewöhnliche Kugeln in der Nähe der hyperbolisch gestreckten Kugeln auftreten und sich erstere nach unserer Konstruktion nicht mehr als Spezialfall

hyperbolisch gestreckter Kugeln auffassen lassen (im Gegensatz zum parabolischen Fall), müssen wir sie in den Betrachtungen gesondert einbeziehen. Um zu gewährleisten, dass auch die Schnitte gefalteter Mengen gefaltet sind (Punkt 2. im folgenden Lemma 3.39), wird eine gewisse Monotonieforderung an die Radien der hyperbolisch gestreckten Kugeln nötig: Nahe an der Achse gelegene hyperbolisch gestreckte Kugeln sollen stets größeren Radius besitzen als weiter entfernte Kugeln. Die spätere Konstruktion der Überdeckungsmengen – insbesondere die Wahl der Mittelpunkte der Kugeln und die Auswahl derjenigen Kugeln, welche hyperbolisch gestreckt werden – wird sicherstellen, dass diese technische Zusatzbedingung erfüllt ist.

**Lemma 3.39.** *Sei  $U_1$  eine  $Y$ -faltbare hyperbolisch gestreckte Kugel wie in Lemma 3.38 oder eine  $Y$ -faltbare gewöhnliche Kugel wie in Lemma 3.33, d.h. in jedem Fall mit Anfangsmittelpunkt  $y_1 \in Y \setminus S_{<i}$ , sowie  $U_2, \dots, U_k$  bzw.  $U_{k+1}, \dots, U_l$  faltbare hyperbolisch gestreckte Kugeln mit Anfangsmittelpunkten  $y_2, \dots, y_k \in Y$  bzw. faltbare gewöhnliche Kugeln (die wie auch die hyperbolisch gestreckten Kugeln gänzlich im  $\varepsilon(n)$ -dünnen Teil bezüglich  $G$  liegen) mit Mittelpunkten  $y_{k+1}, \dots, y_l \in Y$ ; beachte, dass wir darauf verzichten  $y_2, \dots, y_l \in Y \setminus S_{<i}$  zu fordern und somit im Allgemeinen keine  $Y$ -Faltbarkeit der  $U_2, \dots, U_l$  vorliegt. Angenommen  $U := \bigcap_{j=1}^l U_j \neq \emptyset$ , so gilt:*

1.  $U$  ist  $Y$ -faltbar.

2. Sind die (Anfangs-)Radien  $\mu_j$  der  $U_j$  bei den (Anfangs-)Mittelpunkten  $y_j$  so gewählt, dass  $y_j$  von  $\Gamma_{8\mu_j}(y_j)$  fixiert wird ( $j = 1, \dots, l$ ) und für eine hyperbolisch gestreckte Kugel  $U_{j_1}$  sowie eine beliebige Kugel  $U_{j_2}$  aus  $\mu_{j_1} > \mu_{j_2}$  bereits  $d(y_{j_1}, A) < d(y_{j_2}, A)$  folgt<sup>15</sup>, so gilt  $\pi(U) = \bigcap_{j=1}^l \pi(U_j)$ .

Folglich ist der Durchschnitt  $\bigcap_{j=1}^l \pi(U_j)$  der  $\pi(U_j)$  eine gefaltete Menge und somit zusammenziehbar.

*Beweis.* 1. Der Beweis entspricht in wesentlichen Zügen – mit Ausnahme der Eigenschaft  $\pi_Y(U) \subseteq U$  – dem von Lemma 3.36.

Erneut ist  $U$  als endlicher Durchschnitt von offenen, konvexen, genau invarianten Mengen selbst offen, konvex sowie genau invariant.

Auch die zweite Eigenschaft faltbarer Mengen ergibt sich analog zum parabolischen Fall: Da  $Y$  durch  $\Gamma_{U_1}$  punktweise fixiert wird (denn  $U_1$  ist  $Y$ -faltbar), genügt es für die punktweise Fixierung von  $Y$  durch  $\Gamma_U$  zu zeigen, dass  $\Gamma_U$  eine Untergruppe von  $\Gamma_{U_1}$  ist. Sei also  $\gamma \in \Gamma_U$ . Dann folgt wegen  $\gamma U = U$  sowie  $U \subseteq U_1$

$$\gamma U_1 \supseteq \gamma U = U \subseteq U_1,$$

also aufgrund von  $U \neq \emptyset$  somit  $\gamma U_1 \cap U_1 \neq \emptyset$ . Da  $U_1$  genau invariant ist, hat dies  $\gamma U_1 = U_1$  zur Folge, also  $\gamma \in \Gamma_{U_1}$ , was zu zeigen war.

Für den Beweis von  $\pi_Y(U) \subseteq U$  greifen wir auf die Argumentation aus Lemma 3.38 zurück. Sei hierzu  $x \in U$  fest gegeben, d.h.  $x \in U_j$  für alle  $j = 1, \dots, l$ ; da die (Anfangs-)Mittelpunkte  $y_j$  der  $U_j$  ( $j = 1, \dots, l$ ) alle in  $Y$  liegen, können wir wie dort mittels der Spiegelungen  $\sigma_i$  begründen, dass auch  $\pi_Y(x)$  jeweils in  $U_j$  liegt. Folglich ist  $\pi_Y(x)$  für jedes  $j = 1, \dots, l$  in  $U_j$  enthalten, also auch in  $U = \bigcap_{j=1}^l U_j$ .

Es bleibt noch zu zeigen, dass  $\pi(U \cap Y)$  zusammenziehbar ist, was wegen Lemma 3.32 wiederum aus der Kontrahierbarkeit von  $U \cap Y$  folgen würde. Doch erneut sind  $U$  und  $Y$  konvexe Teilmengen von  $D^n$ , also auch  $U \cap Y$ , weshalb letztere Menge zusammenziehbar ist.

<sup>15</sup>Anschaulich gesprochen bedeutet letztere Bedingung also, dass der Anfangsmittelpunkt einer hyperbolisch gestreckten Kugel von größerem Anfangsradius näher an der Achse  $A$  liegt, als der (Anfangs-)Mittelpunkt jeder Kugel – ob gewöhnlich oder hyperbolisch gestreckt – von kleinerem (Anfangs-)Radius (gesetzt den Fall beide Kugeln schneiden sich).

2. Entsprechend der Argumentation im Beweis von Lemma 3.36 bleibt lediglich zu zeigen, dass sich jeder nichtleere Durchschnitt der Form  $\bigcap_{j=1}^l \gamma_j U_j$  für  $\gamma_j \in \Gamma$  als Translat von  $\bigcap_{j=1}^l U_j$  unter einer geeigneten Isometrie aus  $\Gamma$  ergibt (hierbei übernimmt  $U_1$  keine Sonderrolle, obwohl mit der  $Y$ -Faltbarkeit zunächst eine stärkere Forderung an  $U_1$  gestellt wurde, als an die übrigen  $U_j$ ; die  $Y$ -Faltbarkeit ist lediglich im vorigen Punkt beim Beweis nötig, dass  $Y$  durch  $\Gamma_U$  fixiert wird).

Wir werden uns zunächst auf den Fall von lediglich zwei Kugeln  $U$  und  $U'$  (d.h.  $l = 2$ ) beschränken und die Ergebnisse in selbiger Situation für den Induktionsschritt im allgemeineren Fall verwenden. Es sei also vorausgesetzt, dass  $U \cap U' \neq \emptyset$  sowie  $\gamma U \cap \gamma' U' \neq \emptyset$ , und zu zeigen ist, dass  $\gamma U \cap \gamma' U'$  als Translat von  $U \cap U'$  unter einem Element von  $\Gamma$  entsteht.

Die nachstehende Tabelle gibt die verschiedenen Möglichkeiten der Lage und Art von  $U$  und  $U'$  wieder; sie dient als Orientierung für die anschließende Fallunterscheidung. Hierbei bezeichne  $B_\mu(y)$  bzw.  $B_{\mu'}(y')$  jeweils die (Anfangs-)Kugel von  $U$  bzw.  $U'$ , wobei ohne Einschränkung  $U$  näher an  $A$  liege als  $U'$ , d.h.  $d(y, A) \leq d(y', A)$ .

Fall	Verhältnis der Radien	Gestalt $U$	Gestalt $U'$
(a)	$\mu \geq \mu'$	hyperbolisch gestreckt	hyperbolisch gestreckt
(b)	$\mu \geq \mu'$	gewöhnlich	hyperbolisch gestreckt
(c)	$\mu \geq \mu'$	hyperbolisch gestreckt	gewöhnlich
(d)	$\mu \geq \mu'$	gewöhnlich	gewöhnlich
(e)	$\mu < \mu'$	hyperbolisch gestreckt	hyperbolisch gestreckt
(f)	$\mu < \mu'$	gewöhnlich	hyperbolisch gestreckt
(g)	$\mu < \mu'$	hyperbolisch gestreckt	gewöhnlich
(h)	$\mu < \mu'$	gewöhnlich	gewöhnlich

Wir behandeln nun die beschriebenen Fälle einzeln.

- (a) Mit  $\tilde{\gamma} := \gamma'^{-1}\gamma$  erhalten wir zunächst  $\tilde{\gamma}U \cap U' \neq \emptyset$ . Beachte, dass dies bereits  $\tilde{\gamma} \in G$  zur Folge hat, denn  $U$  und  $U'$  liegen (als hyperbolisch gestreckte Kugeln, wie nach Voraussetzung alle übrigen Kugeln auch) gänzlich im  $\varepsilon(n)$ -dünnen Teil bezüglich  $G$ .

Sei  $U''$  die Vergleichskugel von  $U'$  auf der Höhe von  $y$ , womit insbesondere auch  $U \cap U'' \neq \emptyset$  und  $\tilde{\gamma}U \cap U'' \neq \emptyset$  folgt (vgl. Eigenschaften der Vergleichskugeln); bezeichne ferner  $B_{\mu''}(y'')$  die Anfangskugel von  $U''$ . Wegen  $d(y, A) \leq d(y', A)$  ergibt sich  $\mu'' \leq \mu'$ , also insgesamt  $\mu'' \leq \mu$ . Aufgrund von  $d(y'', A) = d(y, A)$  ist Lemma 3.37 nun anwendbar und wir folgern

$$d(y, y'') < 2\mu + 2\mu'' \leq 4\mu$$

sowie analog wegen  $d(\tilde{\gamma}y, A) = d(y, A)$  (beachte  $\tilde{\gamma} \in G$ , s.o.)

$$d(\tilde{\gamma}y, y'') < 4\mu.$$

Zusammenfassend gilt damit

$$d_{\tilde{\gamma}}(y) = d(y, \tilde{\gamma}y) < 4\mu + 4\mu = 8\mu.$$

Dies bedeutet  $\tilde{\gamma} \in \Gamma_{8\mu}(y)$ , womit  $\tilde{\gamma}$  nach Voraussetzung bereits  $y$  fixiert und sich  $\tilde{\gamma}U = U$  ergibt, also

$$\gamma U = \gamma' U.$$

- (b) Ersetzen wir in diesem Fall  $U$  durch die zu  $U$  gehörige hyperbolisch gestreckte Kugel, so sind auch weiterhin die betrachteten Schnitte nichtleer, denn  $U$  ist echte Teilmenge seiner zugehörigen hyperbolisch gestreckten Kugel. Folglich reduziert sich dieser Fall auf den Fall (a) und wir erhalten erneut  $\gamma U = \gamma' U$ .
- (c) Analog zu Fall (b) können wir hier  $U'$  durch seine zugehörige hyperbolisch gestreckte Kugel ersetzen, womit sich wiederum nach Fall a)  $\gamma U = \gamma' U$  ergibt.
- (d) Auch hier reduzieren wir wie in den Fällen (b) und (c) die Lage auf den Fall (a) zweier hyperbolisch gestreckter Kugeln, weshalb erneut  $\gamma U = \gamma' U$  gilt. (Alternativ ließe sich mittels der Dreiecksungleichung direkt  $d(y, \tilde{\gamma}y) < \mu + \mu' + \mu < 8\mu$  folgern.)
- (e) Dieser und der darauffolgende Fall (f) sind der Grund, weshalb die Zusatzforderung an die Monotonie der Radien hyperbolisch gestreckter Kugeln hinsichtlich ihres Abstands zur Achse  $A$  gestellt wurde. Ohne sie wäre auch ein Argument ähnlich zu (a) über die Konstruktion einer Vergleichskugel im Allgemeinen nicht zielführend; doch nun zum Beweis.

Im vorliegenden Fall muss wegen  $\mu < \mu'$  gemäß unserer Voraussetzung schon  $d(y', A) < d(y, A)$  gelten, was jedoch im Widerspruch zur Annahme  $d(y, A) \leq d(y', A)$  steht. Folglich kann dieser Fall nicht eintreten.

- (f) Wie in (e) ergibt sich auch hier der Widerspruch  $d(y, A) \leq d(y', A) < d(y, A)$ , weshalb dieser Fall ebenso unmöglich ist.
- (g) Da  $U'$  hier eine gewöhnliche Kugel ist, könnten wir sie zwar wiederum durch ihre zugehörige hyperbolisch gestreckte Kugel ersetzen, hätten aber nicht die benötigte Monotonie der Radien hyperbolisch gestreckter Kugeln zur Verfügung, denn selbige wird nur für Kugeln gefordert – und soll auch nur für solche gefordert werden! –, die bereits selbst hyperbolisch gestreckt sind. Entsprechend ist ein anderes Argument nötig. Nach Translation mit  $\gamma^{-1}$  erhalten wir für  $\bar{\gamma} := \gamma^{-1}\gamma'$  zunächst  $U \cap \bar{\gamma}U' \neq \emptyset$ ; erneut ist  $\bar{\gamma} \in G$ .

Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass sich die Anfangskugeln  $B_\mu(y)$  und  $B_{\mu'}(y')$  nicht schneiden, denn sonst könnten wir auf Fall (h) zurückgreifen. Sei  $x \in U \cap U' = U \cap B_{\mu'}(y')$  ein Schnittpunkt und  $c_x$  wie üblich seine Projektionsgeodätische (parametrisiert nach Bogenlänge mit  $c_x(0) = \pi_A(x)$ ,  $c_x(d(x, A)) = x$ ). Wenden wir die aus dem Beweis von Lemma 3.37 bekannten Fakten A und B auf die Kugel  $B_\mu(y)$  an, so erhalten wir die Existenz eines  $\tilde{x}$  auf  $c_x$  mit  $\tilde{x} \in \overline{B_\mu(y)}$  und

$$\tilde{x} \in c_x([d(y, A) - \mu, d(y, A) + \mu]).$$

Da sich die Anfangskugeln  $B_\mu(y)$  und  $B_{\mu'}(y')$  nach Annahme nicht schneiden, muss der Schnittpunkt  $x \in U$  auf dem Stück der Projektionsgeodätischen  $c_x$  außerhalb von  $B_\mu(y)$  auf dem Weg nach  $A$  liegen; von  $A$  kommend betrachtet – d.h. in umgekehrter Richtung und damit der Parametrisierung folgend –, wird also zunächst  $B_{\mu'}(y') \ni x$  betreten und verlassen, bevor  $B_\mu(y)$  erreicht wird. Wir folgern hiermit  $d(\tilde{x}, A) \geq d(x, A)$ . Gemäß Fakt A für  $B_{\mu'}(y')$  ist jedoch  $d(x, A) \geq d(y', A) - \mu'$ , weshalb auch  $d(\tilde{x}, A) \geq d(y', A) - \mu'$  gilt.

Nutzen wir umgekehrt  $d(y, A) \leq d(y', A)$  sowie  $\mu < \mu'$  aus, so ergibt sich

$$d(\tilde{x}, A) \leq d(y, A) + \mu < d(y', A) + \mu',$$

also insgesamt

$$\tilde{x} \in c_x([d(y', A) - \mu', d(y', A) + \mu']).$$

Fakt A und B angewandt auf  $B_{\mu'}(y')$  ergeben jedoch auch

$$x \in c_x([d(y', A) - \mu', d(y', A) + \mu']),$$

womit für  $x' := c_x(d(y', A))$  bereits

$$x, \tilde{x} \in \overline{B_{\mu'}(x')}$$

folgt. Hieraus schließen wir

$$d(y', y) \leq d(y', x) + d(x, x') + d(x', \tilde{x}) + d(\tilde{x}, y) < \mu' + \mu' + \mu' + \mu = 3\mu' + \mu < 4\mu'.$$

Obige Argumentation lässt sich auch auf den nichtleeren Schnitt von  $\bar{\gamma}U'$  und  $U$  übertragen, weshalb wir  $d(\bar{\gamma}y', y) < 4\mu'$  folgern. Insgesamt ergibt sich damit  $d(y', \bar{\gamma}y') < 8\mu'$ , d.h.  $\bar{\gamma} \in \Gamma_{8\mu'}(y')$  und somit  $\bar{\gamma}U' = U'$ . Dies ist gleichbedeutend mit  $\gamma'U' = \gamma U'$ .

- (h) Analog zur alternativen Argumentation in Fall (d) mittels der Dreiecksungleichung erhalten wir hier  $d(y', \bar{\gamma}y') < 8\mu'$ , also wegen  $\bar{\gamma} \in \Gamma_{8\mu'}(y')$  erneut  $\gamma'U' = \gamma U'$ .

Wir fassen zusammen: In obigen Fällen a) bis d) war  $U$  die größere Kugel – d.h.  $\mu \geq \mu'$  – und es folgte stets  $\gamma U = \gamma'U$ , während in den übrigen möglichen Fällen g) und h)  $U'$  größer war – also  $\mu' > \mu$  – und sich  $\gamma'U' = \gamma U'$  ergab. In anderen Worten ausgedrückt stimmt also das Translat der größeren Kugel unter ihrer zugehörigen Isometrie stets mit dem Translat unter der Isometrie der kleineren Kugel überein.

Der Beweis für den in der Aussage des Lemmas formulierten allgemeinen Fall eines Schnittes von  $l$  Kugeln erfolgt durch Induktion (über  $l$ ), wobei der Induktionsanfang  $l = 1$  in Lemma 3.38 enthalten ist. Für den Induktionsschritt  $l \rightarrow l + 1$  sei ohne Einschränkung  $U_{l+1}$  die Kugel (gleichgültig ob gewöhnlich oder hyperbolisch gestreckt) von maximalem Radius  $\mu_{l+1}$ , d.h.  $\mu_{l+1} \geq \mu_j$  für alle  $j = 1, \dots, l + 1$ . Unter Ausnutzung der Induktionsannahme erhalten wir, dass

$$\emptyset \neq \bigcap_{j=1}^{l+1} \gamma_j U_j = \bigcap_{j=1}^l \gamma_j U_j \cap \gamma_{l+1} U_{l+1} = \bigcap_{j=1}^l \gamma_0 U_j \cap \gamma_{l+1} U_{l+1}$$

für ein geeignetes  $\gamma_0 \in \Gamma$ , d.h. ohne Einschränkung  $\gamma_j = \gamma_0$  für alle  $j = 1, \dots, l$ . Da also insbesondere  $\gamma_l U_l \cap \gamma_{l+1} U_{l+1} \neq \emptyset$  sowie  $U_l \cap U_{l+1} \neq \emptyset$  erfüllt sind, können wir die vorangegangenen Betrachtungen für den Schnitt zweier Kugeln ausnutzen; weil nach Wahl von  $U_{l+1}$  bereits  $\mu_{l+1} \geq \mu_l$  gilt, schließen wir, dass das Translat  $\gamma_{l+1} U_{l+1}$  der größeren Kugel  $U_{l+1}$  unter seiner zugehörigen Isometrie  $\gamma_{l+1}$  mit dem Translat  $\gamma_l U_{l+1}$  unter der Isometrie  $\gamma_l$  der kleineren Kugel  $U_l$  übereinstimmt, d.h.  $\gamma_{l+1} U_{l+1} = \gamma_l U_{l+1}$ . Wir hatten oben jedoch schon  $\gamma_0 = \gamma_l$  gefolgert, womit sich  $\gamma_{l+1} U_{l+1} = \gamma_0 U_{l+1}$  ergibt, und somit

$$\bigcap_{j=1}^{l+1} \gamma_j U_j = \bigcap_{j=1}^l \gamma_0 U_j \cap \gamma_{l+1} U_{l+1} = \bigcap_{j=1}^l \gamma_0 U_j \cap \gamma_0 U_{l+1} = \gamma_0 \bigcap_{j=1}^{l+1} U_j,$$

die Behauptung. □

### 3.3.3 Überdeckung

Das nächste Ziel lautet nun, eine geeignete Überdeckung des dicken Teils  $M_+$  zu konstruieren, wobei uns die in [25] Theorem 4.2 angegebene Überdeckung dabei als Ausgangspunkt dient. Leider erfüllt die dortige

Konstruktion jedoch eine Eigenschaft nicht, welche für uns zentral ist: Die Stabilität unter dem Fluss weg vom dünnen Teil. Aus genau diesem Grund haben wir in den vorigen Abschnitten die parabolisch bzw. hyperbolisch gestreckten Kugeln eingeführt, und mithilfe dieser ist es uns möglich, die Stabilität der Überdeckung zu erzwingen. Unter anderem die in Lemma 3.39 gestellte Zusatzforderung der Monotonie der Radien hyperbolisch gestreckter Kugeln (also die Tatsache, dass der Anfangsmittelpunkt hyperbolisch gestreckter Kugeln von großem Radius näher an der Achse liegen soll, als der (Anfangs-)Mittelpunkt kleinerer Kugeln) macht es dabei nötig, die Lage der Kugelmittelpunkte sorgfältig aufeinander abzustimmen.

Wir geben nun zunächst die Wahl der Kugelmittelpunkte und (Anfangs-)Radien in Anlehnung an [25] Theorem 4.2 an. Die genaue Wahl der Konstanten in den Iterationen stimmt dabei nicht mehr mit der dortigen überein und ist auf unsere Bedürfnisse ausgerichtet, genau wie auch die Lage der Mittelpunkte feiner angepasst wird. Wie bereits in [25] benötigen wir für die Abstimmung der Werte aufeinander die folgenden Aussagen, um später u.a. die Faltbarkeit der Mengen sicherzustellen.

**Lemma 3.40** ([25] Proposition 4.6). *Für jedes  $\varepsilon_1 > 0$  existiert ein  $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon_1) > 0$  mit folgender Eigenschaft. Seien  $Y_1, Y_2 \in \Sigma(\Gamma)$  mit  $i = \dim(Y_2) \leq \dim(Y_1)$  und  $y_j \in Y_j \cap X_+$  ( $j = 1, 2$ ), sodass  $d(y_1, S_{<i}(\Gamma)) \geq \varepsilon_1$  oder  $d(y_2, S_{<i}(\Gamma)) \geq \varepsilon_1$ . Ist  $d(y_1, y_2) < \varepsilon_2$ , so gilt bereits  $Y_2 \subseteq Y_1$ .*

**Lemma 3.41** ([25] Proposition 4.7). *Für jedes  $\varepsilon_1 > 0$  existiert ein  $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(\varepsilon_1) > 0$  mit folgender Eigenschaft. Sei  $Y \in \Sigma(\Gamma)$ ,  $y \in Y \cap X_+$  und  $i = \dim(Y)$ . Ist  $d(y, S_{<i}(\Gamma)) > \varepsilon_1$ , so wird  $Y$  durch jedes Element von  $\Gamma_{\varepsilon_1}(y)$  bereits punktweise fixiert.*

Dabei übernimmt unser  $X_+$  die Rolle des in [25] verwendeten  $X_{\geq \varepsilon, m}$ , weshalb wir stets – ohne Einschränkung – annehmen müssen, dass

$$\varepsilon_2(\cdot), \varepsilon_3(\cdot) \leq \frac{\varepsilon(n)}{2M(n)};$$

denn  $X_+ \subseteq X_{\geq \varepsilon, \eta}$  mit  $\varepsilon = \varepsilon(n)/(2M(n))$  (vgl. Definition von  $X_+$ ). Definiere nun

$$\mu_{-1} := \frac{\varepsilon(n)}{64}$$

und anschließend  $\mu_{-1} > \mu_0 > \dots > \mu_n$  iterativ durch

$$\mu_{i+1} := \min \left( \frac{\varepsilon_2(\mu_i)}{12}, \frac{\varepsilon_3(\mu_i)}{24}, \frac{\mu_i}{12} \right),$$

mit  $\varepsilon_2(\cdot)$  und  $\varepsilon_3(\cdot)$  gemäß der Lemmata 3.40 und 3.41. Ferner wählen wir

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 &:= \text{maximale } \mu_0\text{-diskrete Teilmenge in } \overline{(M'_+)}_{8\mu_0} \cap \pi(S_0), \quad \text{sowie} \\ \mathcal{D}_i &:= \text{maximale } \mu_i\text{-diskrete Teilmenge in } \overline{((M'_+))_{8\mu_i}} \cap \pi(S_i) \setminus \bigcup_{j<i} (\pi(S_j))_{\mu_j} \end{aligned}$$

für  $i > 0$ . Ohne Einschränkung können wir dabei annehmen, dass  $\mathcal{D}_0$  eine maximale  $\mu_0$ -diskrete Teilmenge von

$$\partial(M'_+)_{8\mu_0} \cap \pi(S_0) \subseteq \overline{(M'_+)}_{8\mu_0} \cap \pi(S_0)$$

enthält, und  $\mathcal{D}_i$  für  $i > 0$  analog eine maximale  $\mu_i$ -diskrete Teilmenge von

$$\left( \partial(M'_+)_{8\mu_i} \cap \pi(S_i) \right) \setminus \bigcup_{j<i} (\pi(S_j))_{\mu_j} \subseteq \overline{((M'_+))_{8\mu_i}} \cap \pi(S_i) \setminus \bigcup_{j<i} (\pi(S_j))_{\mu_j};$$

denn maximale  $\mu_i$ -diskrete Teilmengen in den linken Mengen lassen sich zu maximalen  $\mu_i$ -diskreten Teilmengen in den rechten Mengen fortsetzen. Bezeichne

$$\mathcal{D} := \bigcup_{i=0}^n \mathcal{D}_i$$

die Gesamtheit aller Mittelpunkte. In einem ersten Schritt sei

$$\mathcal{B}' := \{B_{3\mu_i}^M(x) : x \in \mathcal{D}_i \text{ für ein } i \in \{0, \dots, n\}\}$$

die Menge der gewöhnlichen Kugeln (in  $M$ ) um die Punkte aus  $\mathcal{D}$ . Wie das folgende Lemma wiedergibt, haben wir hierdurch bereits den geschrumpften dicken Teil überdeckt.

**Lemma 3.42.** *Die Gesamtheit der Mengen aus  $\mathcal{B}'$  bildet eine Überdeckung von  $M'_+$ , d.h.*

$$M'_+ \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B.$$

*Beweis.* Der Beweis orientiert sich an [25] Beweis Theorem 4.2 Schritt 1). Sei also  $x \in M'_+$  gegeben. Wähle  $i \in \{0, \dots, n\}$  minimal, sodass  $d(x, \pi(S_i)) < 2\mu_i$ , was wegen  $S_n = X$  – also  $\pi(S_n) = M$  – stets möglich ist. Es existiert folglich ein  $y \in \pi(S_i)$  mit  $d(x, y) < 2\mu_i$ .

Wir behaupten, dass  $y \notin \bigcup_{j < i} (\pi(S_j))_{\mu_j}$ . Angenommen dies wäre nicht der Fall, so gäbe es ein  $j < i$  und  $z \in \pi(S_j)$  mit  $d(y, z) < \mu_j$ ; dann ergibt sich wegen  $\mu_i \leq \mu_j/12$  (denn  $j < i$ ) aber

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < 2\mu_i + \mu_j < 2\mu_j,$$

also  $d(x, \pi(S_j)) < 2\mu_j$ , was wiederum wegen  $j < i$  der Minimalität von  $i$  widerspricht; es muss also  $y \notin \bigcup_{j < i} (\pi(S_j))_{\mu_j}$  gelten.

Wegen  $d(x, y) < 2\mu_i < 8\mu_i$  erhalten wir ferner

$$d(y, M'_+) \leq d(y, x) < 8\mu_i,$$

also  $y \in \overline{(M'_+)_{8\mu_i}}$  und damit insgesamt

$$y \in \overline{(M'_+)_{8\mu_i} \cap \pi(S_i)} \setminus \bigcup_{j < i} (\pi(S_j))_{\mu_j}.$$

In dieser Menge liegt  $\mathcal{D}_i$  nach Definition als maximale  $\mu_i$ -diskrete Teilmenge, weshalb ein  $y' \in \mathcal{D}_i$  existiert mit  $d(y, y') < \mu_i$ . Hiermit folgt

$$d(x, y') \leq d(x, y) + d(y, y') < 2\mu_i + \mu_i = 3\mu_i,$$

also  $x \in B_{3\mu_i}^M(y') \in \mathcal{B}'$ , was zu zeigen war.  $\square$

Um später die Stabilität der Überdeckung unter dem Fluss zu ermöglichen, werden nun geeignete Kugeln aus  $\mathcal{B}'$  parabolisch bzw. hyperbolisch gestreckt; hierbei meinen wir mit Streckung nichts anderes als das Ersetzen einer Kugel  $B_{3\mu_i}^M(x)$  durch das Bild in  $M$  einer entsprechenden parabolisch bzw. hyperbolisch gestreckten Kugel mit Anfangskugel  $B_{3\mu_i}^X(\tilde{x})$  für einen Lift  $\tilde{x} \in X$  von  $x \in M$ . Wir erinnern hierfür daran, dass stets

$$\pi(B_r^X(y)) = B_r^M(\pi(y)) \quad \text{für alle } y \in X \text{ und } r > 0$$

erfüllt ist, wobei  $\pi : X \rightarrow X/\Gamma = M$  die Projektion bezeichnet. Aus diesem Grund werden wir das Bild in  $M$  einer parabolisch bzw. hyperbolisch gestreckten Kugel aus  $X$  auch selbst parabolisch bzw. hyperbolisch gestreckte Kugel (in  $M$ ) nennen.

Ist  $x \in \mathcal{D}_i \cap \partial(M'_+)_{8\mu_i}$ , so befindet sich  $B := B_{3\mu_i}^M(x)$  gemäß Wahl von  $M'_+$  bereits im  $\varepsilon(n)$ -dünnen Teil von  $M$ . Liegt nun der parabolische Fall vor, so ersetzen wir  $B$  durch eine parabolisch gestreckte Kugel mit Anfangskugel  $B$ ; andernfalls – d.h. im hyperbolischen Fall – ersetzen wir  $B$  durch eine hyperbolisch

gestreckte Kugel mit Anfangskugel  $B$ . Die jeweilige Streckungslänge ist zunächst von keiner näheren Bedeutung und wird im Beweis von Lemma 3.44 genau angegeben (s.u.). Durch dieses Austauschen einiger gewöhnlicher Kugeln durch (parabolisch bzw. hyperbolisch) gestreckte Kugeln entsteht aus der Menge  $\mathcal{B}'$  unsere endgültige Menge  $\mathcal{B}$  von Überdeckungsmengen. Beachte, dass die Menge  $\mathcal{D}_i \cap \partial(M'_+)^{8\mu_i}$  der Anfangsmittelpunkte der gestreckten Kugeln genau die Punkte aus  $\widetilde{\mathcal{D}}_i$  enthält, welche maximalen Abstand (nämlich  $8\mu_i$ ) von  $M'_+$  aufweisen.

Durch unsere Wahl der zu streckenden Mengen ist eine Monotonie der Radien der gestreckten Kugeln sichergestellt, wie folgendes Lemma wiedergibt; vereinfacht gesagt drückt es aus, dass Anfangsmittelpunkte gestreckter Kugeln von größerem Radius stets näher am dünnen Teil liegen, als (Anfangs-)Mittelpunkte beliebiger Kugeln von kleinerem Radius (sofern sich die Kugeln schneiden). Wir werden hierbei die Situation in  $X$  betrachten, wobei wir Bezeichnungen wie  $\widetilde{\mathcal{D}}_i$  oder  $\widetilde{\mathcal{B}}$  für die Lifts in  $X$  der entsprechenden Mengen in  $M$  verwenden.

- Lemma 3.43.** 1. Sei  $y_i \in \widetilde{\mathcal{D}}_i$  Anfangsmittelpunkt einer parabolisch gestreckten Kugel  $B_i \in \widetilde{\mathcal{B}}$  mit Anfangskugel  $B_{3\mu_i}^X(y_i)$  und  $B_j \in \widetilde{\mathcal{B}}$  eine beliebige (d.h. gewöhnliche oder parabolisch gestreckte) Kugel mit (Anfangs-)Kugel  $B_{3\mu_j}^X(y_j)$  für  $y_j \in \widetilde{\mathcal{D}}_j$ . Mit  $HS_i \ni y_i$  und  $HS_j \ni y_j$  bezeichnen wir die Horosphären um den parabolischen Fixpunkt  $z$ , welche  $y_i$  bzw.  $y_j$  enthalten. Gilt  $B_i \cap B_j \neq \emptyset$  und  $3\mu_i > 3\mu_j$  (also äquivalent  $i < j$ ), so befindet sich  $HS_i$  näher an  $z$  als  $HS_j$ <sup>16</sup>.
2. Sei  $y_i \in \widetilde{\mathcal{D}}_i$  Anfangsmittelpunkt einer hyperbolisch gestreckten Kugel  $B_i \in \widetilde{\mathcal{B}}$  mit Anfangskugel  $B_{3\mu_i}^X(y_i)$  und  $B_j \in \widetilde{\mathcal{B}}$  eine beliebige (d.h. gewöhnliche oder hyperbolisch gestreckte) Kugel mit (Anfangs-)Kugel  $B_{3\mu_j}^X(y_j)$  für  $y_j \in \widetilde{\mathcal{D}}_j$ . Mit  $A$  bezeichnen wir die hyperbolische Achse. Gilt  $B_i \cap B_j \neq \emptyset$  und  $3\mu_i > 3\mu_j$  (also äquivalent  $i < j$ ), so folgt  $d(y_i, A) < d(y_j, A)$ .

*Beweis.* Wir werden den Beweis für den parabolischen und den hyperbolischen Fall größtenteils parallel führen. Beachte, dass nach Wahl der Mittelpunkte der gestreckten Mengen bereits  $d(y_i, X'_+) = 8\mu_i$  gilt; ferner ist  $d(y_j, X'_+) \leq 8\mu_j$  erfüllt. Sei nun  $x \in B_i \cap B_j$  ein Schnittpunkt. Würden sich die (Anfangs-)Kugeln  $B_{3\mu_i}^X(y_i)$  und  $B_{3\mu_j}^X(y_j)$  bereits schneiden (ohne Einschränkung mit  $x$  als solchem Schnittpunkt), so erhielten wir den Widerspruch

$$8\mu_i = d(y_i, X'_+) \leq d(y_i, x) + d(x, y_j) + d(y_j, X'_+) < 3\mu_i + 3\mu_j + 8\mu_j < 4\mu_i$$

(beachte  $12\mu_j \leq \mu_i$  aufgrund von  $i < j$ ). Bezeichne  $c_x$  die Flussgeodätische von  $x$ , d.h. im parabolischen Fall die Geodätische vom parabolischen Fixpunkt  $z$  zu  $x$  sowie im hyperbolischen Fall die Geodätische von der Achse  $A$  (genauer:  $\pi_A(x)$ ) nach  $x$ . Die Parametrisierung erfolge mit  $c_x(0) = x$  jeweils nach Bogenlänge und – wie bereits angedeutet – so, dass  $c_x$  für steigendes  $t$  vom dünnen Teil (d.h. von  $z$  bzw.  $A$ ) fortläuft, sich also  $X'_+$  annähert.

Da wir bereits gesehen haben, dass sich die (Anfangs-)Kugeln nicht schneiden können, die Geodätische  $c_x$  jedoch auf beide (Anfangs-)Kugeln treffen muss, bleiben lediglich zwei Fälle zu prüfen.

- Im ersten Fall verlässt  $c_x$  die kleinere (Anfangs-)Kugel  $B_{3\mu_j}^X(y_j)$ , bevor sie auf die größere Anfangskugel  $B_{3\mu_i}^X(y_i)$  trifft. Beachte, dass alle Punkte aus  $B_{3\mu_j}^X(y_j)$  wegen  $d(y_j, X'_+) \leq 8\mu_j$  (s.o.) einen Abstand  $< 3\mu_j + 8\mu_j < 12\mu_j \leq \mu_i$  von  $X'_+$  aufweisen; da der Abstand nach  $X'_+$  in Flussrichtung (weg vom dünnen Teil) jedoch fallend ist, bedeutet dies, dass der Eintrittspunkt  $y$  von  $c_x$  in  $\overline{B_{3\mu_i}^X(y_i)}$  auch einen Abstand  $< \mu_i$  von  $X'_+$  besitzt. Dies widerspricht jedoch der Tatsache, dass aufgrund von  $d(y_i, X'_+) = 8\mu_i$  (s.o.) für alle Punkte  $y \in \overline{B_{3\mu_i}^X(y_i)}$  schon  $d(y, X'_+) \geq 8\mu_i - 3\mu_i = 5\mu_i$  erfüllt sein muss. Folglich kann dieser Fall nicht eintreten.

<sup>16</sup>D.h. eine Geodätische mit Endpunkt  $z$  trifft auf ihrem Weg zu  $z$  zuerst auf  $HS_j$  und danach erst auf  $HS_i$ .

- Im zweiten Fall verlässt  $c_x$  die größere Anfangskugel  $B_{3\mu_i}^X(y_i)$ , bevor sie auf die kleinere (Anfangs-)Kugel  $B_{3\mu_j}^X(y_j)$  trifft. Gemäß der Abschätzungen an den Abstand nach  $X'_+$  aus dem vorigen Punkt wissen wir, dass  $c_x$  nach dem Verlassen von  $B_{3\mu_i}^X(y_i)$  mindestens  $5\mu_i - \mu_i = 4\mu_i$  lang laufen muss, bevor sie  $B_{3\mu_j}^X(y_j)$  erreicht. Bezeichnet  $x_i = c_x(t_i)$  den Austrittspunkt aus  $\overline{B_{3\mu_i}^X(y_i)}$  sowie  $x_j = c_x(t_j)$  den Eintrittspunkt in  $\overline{B_{3\mu_j}^X(y_j)}$ , so gilt  $t_j \geq t_i + 4\mu_i$ . Wir unterscheiden nun zwischen parabolischem und hyperbolischem Fall.

1. Betrachte für den parabolischen Fall erneut das obere Halbraummodell (mit  $z$  als Punkt  $\infty$ ), womit Horosphären um  $z$  den (euklidischen) Hyperebenen  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{t\} \subseteq \mathbb{H}^n$  entsprechen. Wir erinnern daran, dass hyperbolische Kugeln im oberen Halbraum mit euklidischen Kugeln (mit anderem Mittelpunkt und Radius) übereinstimmen. Die Flussgeodätischen entsprechen hier den senkrecht auf  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$  stehenden euklidischen Geraden, welche von  $\infty$  fortlaufen; folglich ist der Austrittspunkt von  $c_x$  aus der Anfangskugel  $B_{3\mu_i}^X(y_i)$  auf der – anschaulich gesprochen – unteren Hälfte der euklidischen Kugel zu finden, d.h. er weist stets eine  $t$ -Koordinate kleiner gleich der  $t$ -Koordinate des euklidischen Mittelpunkts von  $B_{3\mu_i}^X(y_i)$  auf. Wir werden daher in einem ersten Schritt die  $t$ -Koordinate des euklidischen Mittelpunkts bestimmen, wofür wir ohne Einschränkung annehmen, dass  $y_i = (0, \dots, 0, 1)$ . Der euklidische Mittelpunkt ist dann von der Form  $(0, \dots, 0, t)$  für ein geeignetes  $t > 1$ ; bezeichnet  $r > 0$  den euklidischen Radius, so gelten also die Beziehungen

$$3\mu_i \stackrel{!}{=} d((0, \dots, 0, 1), (0, \dots, 0, t+r))$$

sowie

$$3\mu_i \stackrel{!}{=} d((0, \dots, 0, 1), (0, \dots, 0, t-r)),$$

was mithilfe der Formeln aus Lemma 3.27 (beachte  $t+r > 1$  und  $t-r < 1$ ) nun

$$3\mu_i = \ln\left(\frac{t+r}{1}\right)$$

und

$$3\mu_i = \ln\left(\frac{1}{t-r}\right)$$

ergibt. Wir folgern

$$t+r = e^{3\mu_i}$$

sowie

$$t-r = e^{-3\mu_i},$$

also nach Addition nun  $2t = e^{3\mu_i} + e^{-3\mu_i}$ , d.h.

$$t = \frac{e^{3\mu_i} + e^{-3\mu_i}}{2} = \cosh(3\mu_i).$$

Als Nächstes bestimmen wir die  $t$ -Koordinate  $t'$  eines Punktes, welcher – bei einer  $t$ -Koordinate von  $\cosh(3\mu_i)$  beginnend – von  $c_x$  nach einer hyperbolischen Länge von  $4\mu_i$  erreicht wird; beachte, dass dieser Wert gemäß obiger Betrachtungen bereits eine obere Schranke an die  $t$ -Koordinate jedes Eintrittspunkts in die Kugel  $B_{3\mu_j}^X(y_j)$  darstellt. Hierzu sei ohne Einschränkung die  $\mathbb{R}^{n-1}$ -Koordinate erneut 0, weshalb wir

$$4\mu_i \stackrel{!}{=} d((0, \dots, 0, \cosh(3\mu_i)), (0, \dots, 0, t'))$$

setzen können. Wiederum mithilfe der Formeln aus Lemma 3.27 erhalten wir (beachte  $\cosh(3\mu_i) > t'$ )

$$d((0, \dots, 0, \cosh(3\mu_i)), (0, \dots, 0, t')) = \ln \left( \frac{\cosh(3\mu_i)}{t'} \right),$$

also

$$e^{4\mu_i} = \frac{\cosh(3\mu_i)}{t'},$$

d.h. wegen  $\mu_i > 0$  nun

$$t' = \frac{\cosh(3\mu_i)}{e^{4\mu_i}} = \frac{e^{3\mu_i} + e^{-3\mu_i}}{2e^{4\mu_i}} < \frac{2e^{3\mu_i}}{2e^{4\mu_i}} = e^{-\mu_i} < 1.$$

Folglich hat ein beliebiger Eintrittspunkt von  $c_x$  in  $B_{3\mu_j}^X(y_j)$  eine  $t$ -Koordinate  $< 1$ ; da aber auch die  $t$ -Koordinate des Mittelpunkts  $y_j$  wiederum kleiner sein muss als die  $t$ -Koordinate jedes Eintrittspunkts, besitzt auch  $y_j$  eine  $t$ -Koordinate  $< 1$ . Folglich befindet sich  $y_i$  in der Horosphäre  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{1\}$ , während  $y_j$  in der Horosphäre  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{\bar{t}\}$  für ein  $\bar{t} < 1$  liegt, was zu zeigen war.

2. Beachte, dass im hyperbolischen Fall  $c_x$  die Geodätische ist, welche den Abstand von sowohl  $x_i$  als auch  $x_j$  nach  $A$  realisiert. Wir erhalten mit obiger Abschätzung  $t_j \geq t_i + 4\mu_i$  daher

$$d(x_j, A) \geq d(x_i, A) + 4\mu_i.$$

Außerdem ergibt sich aus  $d(x_j, A) \leq d(x_j, y_j) + d(y_j, A)$  auch

$$d(y_j, A) \geq d(x_j, A) - d(x_j, y_j) = d(x_j, A) - 3\mu_j.$$

Ferner gilt

$$d(y_i, A) \leq d(y_i, x_i) + d(x_i, A) = d(x_i, A) + 3\mu_i.$$

Diese drei Ungleichungen können wir – wiederum unter Ausnutzung von  $\mu_j \leq \mu_i/12$  – verwenden, um auf

$$d(y_j, A) \geq d(x_j, A) - 3\mu_j \geq d(x_i, A) + 4\mu_i - 3\mu_j > d(x_i, A) + 3\mu_i \geq d(y_i, A)$$

zu schließen, die Behauptung. □

### Streckungslänge

Bevor wir die gewünschten Eigenschaften der Überdeckung untersuchen und nachweisen, werden wir genauer auf die Wahl der Streckungslänge der (parabolisch oder hyperbolisch) gestreckten Kugeln eingehen.

**Lemma 3.44.** *Die Länge der Streckung<sup>17</sup> der Kugeln lässt sich so wählen, dass die Gesamtheit der Mengen aus  $\mathcal{B}$  im gewöhnlichen dicken Teil enthalten ist, d.h.*

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \subseteq M_+.$$

*Beweis.* Als Orientierung für den Beweis sind die grundlegenden Konstruktionen in Abbildung 3.7 zusammengefasst.

<sup>17</sup>Gemessen durch die Länge des euklidischen Geradenstücks in der Definition parabolisch gestreckter Kugeln bzw. die abschneidende Hyperebene (gesteuert durch den Parameter  $s$ ) in der Definition hyperbolisch gestreckter Kugeln.

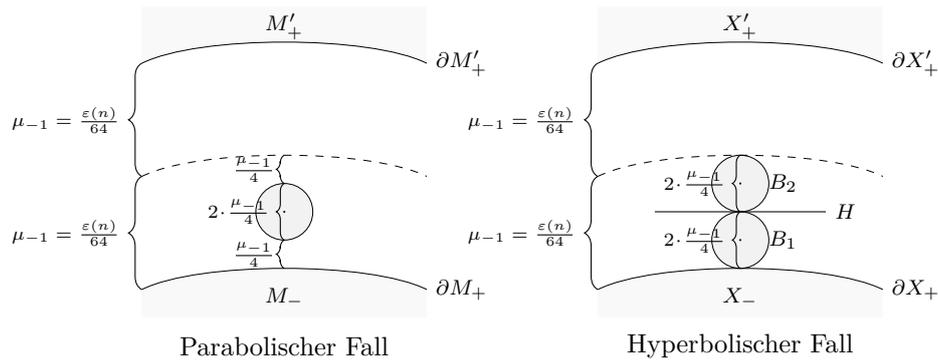


Abbildung 3.7: Konstruktion der passenden Streckungslängen im Beweis von Lemma 3.44. Links ist die Situation im parabolischen Fall dargestellt, wo zur Bestimmung der Streckungslänge die Angabe der Lage eines Endmittelpunktes (hier der Mittelpunkt der grau schattierten Kugel) für eine parabolisch gestreckte Kugel ausreicht. Im rechts dargestellten hyperbolischen Fall muss hingegen eine abschneidende Hyperebene  $H$  angegeben werden. In beiden Bildern gibt die gestrichelte Linie die Grenze wieder, bis zu der gewöhnliche Kugeln aus  $\mathcal{B}'$  (bzw. deren Urbilder in  $X$  im hyperbolischen Fall) höchstens reichen können.

Zunächst stellen wir fest, dass wegen der Monotonie  $\mu_i > \mu_{i+1}$  die Kugeln aus  $\mathcal{B}'$  mit Mittelpunkten  $x \in \mathcal{D}_0$  am weitesten von  $M'_+$  entfernt liegen können; für solche  $x$  gilt  $d(x, M'_+) \leq 8\mu_0$ , also für ein beliebiges  $y \in B_{3\mu_0}^M(x)$  nun

$$d(y, M'_+) < 8\mu_0 + 3\mu_0 = 11\mu_0 < 12\mu_0 \leq \mu_{-1},$$

wobei  $\mu_{-1} = \varepsilon(n)/64$  wiederum nur halb so groß ist wie die Länge  $\varepsilon(n)/32$  der Schrumpfung von  $M_+$  auf  $M'_+$  (somit hat jeder Punkt aus  $\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B$  einen Abstand  $> \mu_{-1}$  zum Rand  $\partial M_+$ ). Dies bedeutet  $\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B \subseteq M_+$ , weshalb wir nun zeigen wollen, dass sich dies von  $\mathcal{B}'$  auf  $\mathcal{B}$  übertragen lässt. Hierfür unterscheiden wir wie üblich zwischen dem parabolischen und dem hyperbolischen Fall.

Im parabolischen Fall sei  $y$  der Anfangsmittelpunkt einer parabolisch zu streckenden Kugel  $B_{3\mu_i}^M(y) \in \mathcal{B}'$ . Wir wollen festlegen, wie weit diese Kugel gestreckt werden muss; hierfür ist es hinreichend, den (hyperbolischen) Endmittelpunkt anzugeben<sup>18</sup>. Laufe auf der Flussgeodätischen  $c_y$  von  $y$  so weit in Richtung  $\partial M_+$ , dass  $c_y(t)$  genau  $\mu_{-1}/2$  von  $\partial M_+$  entfernt ist, aber immer noch in  $M_+$  liegt, d.h. für diesen Zeitpunkt  $t$  ist  $c_y(t) \in M_+$  sowie  $d(c_y(t), \partial M_+) = \mu_{-1}/2$  erfüllt. Wir behaupten, dass dieses  $c_y(t)$  als Endmittelpunkt die Anforderungen erfüllt. Beachte, dass der hyperbolische Radius am Endmittelpunkt kleiner als der hyperbolische Radius am Anfangsmittelpunkt ist, und letzterer ist wegen

$$3\mu_i \leq 3\mu_0 \leq \frac{3\mu_{-1}}{12} = \frac{\mu_{-1}}{4}$$

durch  $\mu_{-1}/4$  beschränkt; folglich ist auch der hyperbolische Endradius kleiner als  $\mu_{-1}/4$ . Nach Wahl von  $c_y(t)$  hat somit jeder Punkt der Endkugel einen Abstand  $\geq \mu_{-1}/2 - \mu_{-1}/4 = \mu_{-1}/4$  von  $\partial M_+$ , weshalb die Endkugel selbst tatsächlich gänzlich in  $M_+$  liegt; folglich ist auch die gesamte parabolisch gestreckte Kugel in  $M_+$  enthalten. Wir merken ferner an, dass die Endkugel analog auch einen Abstand  $\geq \mu_{-1}/4$  zu allen gewöhnlichen Kugeln aus  $\mathcal{B}$  hat, denn wie wir oben gesehen haben, ist der Abstand von Punkten aus den gewöhnlichen Kugeln zum Rand  $\partial M_+$  stets  $\geq \mu_{-1}$ .

<sup>18</sup>Wir hatten die Konstruktion parabolisch gestreckter Kugeln zwar lediglich in  $X$  angegeben, jedoch lässt sich die hier durchgeführte Angabe eines Endmittelpunktes in  $M$  nach Wahl eines geeigneten Lifts auf die Situation in  $X$  übertragen.

Wenden wir uns nun dem hyperbolischen Fall zu; wir werden dabei statt der Situation in  $M$  äquivalent diejenige in  $X$  behandeln. Sei also  $y \in X$  ein Anfangsmittelpunkt (sodass  $\pi(y)$  also der Mittelpunkt einer hyperbolisch zu streckenden Kugel in  $M$  ist). Da die abschneidende Hyperebene  $H$  eindeutig dadurch charakterisiert ist, dass sie am gegebenen Punkt senkrecht auf der Projektionsgeodätischen  $c_y$  (hin zur Achse  $A$ ) des Anfangsmittelpunkts  $y$  steht, genügt es anzugeben, an welchem Punkt auf  $c_y$  zwischen  $y$  und  $A$  abgeschnitten werden soll (d.h. wo der Schnittpunkt von  $H$  und  $c_y$  liegt). Wir wählen diesen Punkt  $y'$  als den Punkt auf  $c_y$ , welcher  $\mu_{-1}/2$  von  $\partial X_+$  entfernt ist (und immer noch in  $X_+$  liegt), und behaupten, dass dieser die Anforderungen erfüllt;  $H$  ist also die eindeutige Hyperebene, welche  $c_y$  in  $y'$  senkrecht schneidet. Bezeichne  $U$  die entsprechende hyperbolisch gestreckte Kugel.

Es gilt  $c_y = c_{y'}$ , weshalb wir von nun an äquivalent mit  $c_{y'}$  arbeiten können (die Parametrisierung erfolge nach hyperbolischer Bogenlänge mit  $c_{y'}(0) = y'$ ,  $c_{y'}(d(y', A)) = \pi_A(y')$ ). Betrachte die Kugeln  $B_1 := B_{\mu_{-1}/4}^X(c_{y'}(\mu_{-1}/4))$  sowie  $B_2 := B_{\mu_{-1}/4}^X(c_{y'}(-\mu_{-1}/4))$ . Die Geodätische  $c_{y'}$  – bzw. ihre entsprechenden Teilstücke – liegt somit als Radius in  $B_1$  und  $B_2$ ; da  $H$  also am Punkt  $y' \in \partial B_1, \partial B_2$  senkrecht auf dem Radius steht, folgt nach dem Lemma von Gauß, dass  $H$  in  $y'$  tangential an  $B_1$  und  $B_2$  anliegt.

In den vorigen Betrachtungen hatten wir bereits festgestellt, dass der Radius der Anfangskugeln stets durch  $\mu_{-1}/4$  beschränkt ist. Da die Mittelpunkte  $c_{y'}(-\mu_{-1}/4)$  bzw.  $c_{y'}(\mu_{-1}/4)$  von  $B_2$  bzw.  $B_1$  näher am dünnen Teil liegen als  $y$  und außerdem der Anfangsradius der Vergleichskugeln von  $U$  hin zum dünnen Teil monoton fallend ist, erhalten wir, dass jede Flussgeodätische, welche durch die Anfangskugel von  $U$  um den Anfangsmittelpunkt  $y$  verläuft, auch auf  $B_1$  und  $B_2$  trifft.

Wir können also zusammenfassen: Ist eine Flussgeodätische aus  $U$  gegeben, so betritt diese  $B_2$ , nachdem sie alle gewöhnlichen Kugeln aus der Überdeckung verlassen hat (denn analog zu oben haben alle Punkte aus  $B_2$  einen Abstand  $< \mu_{-1}$  nach  $\partial X_+$ , während Punkte aus den gewöhnlichen Kugeln einen Abstand  $> \mu_{-1}$  nach  $\partial X_+$  aufweisen), verlässt dann  $B_2$ , trifft anschließend auf  $H$  und betritt danach erst  $B_1$ . Da auch  $B_1$  gänzlich in  $X_+$  liegt, wird folglich durch das Abschneiden entlang von  $H$  sichergestellt, dass  $U$  selbst gänzlich in  $X_+$  enthalten ist (vgl. erneut Abbildung 3.7). Außerdem erkennen wir – da ja  $B_2$  leeren Schnitt mit den gewöhnlichen Kugeln aufweist und jede Flussgeodätische aus  $U$  erst  $B_2$  betritt, bevor sie an  $H$  endet –, dass diese Endpunkte der Flussgeodätischen in  $U$  stets näher an  $\partial M_+$  liegen, als die auf diesen Flussgeodätischen liegenden Punkte aus den gewöhnlichen Kugeln.  $\square$

Dem Beweis des obigen Lemmas 3.44 ist zu entnehmen, wie weit die zu streckenden Kugeln gestreckt werden müssen. Die dort angegebene Streckungslänge ist jedoch über den Abstand nach  $\partial M_+$  definiert; da zunächst nicht feststeht, wie weit entlang der Flussgeodätischen geflossen werden muss, bis ein solcher Abstand tatsächlich erreicht ist, wird dadurch in der Regel noch keine Abschätzung an die absolute Länge der gestreckten Kugeln gegeben. Diese Größe zu beschränken ist jedoch später notwendig – insbesondere hinsichtlich der Kontrolle der maximalen Anzahl an Schnitten von Überdeckungsmengen –, weshalb wir folgendes Lemma formulieren.

**Lemma 3.45.** *Es gilt:*

1. Jede parabolisch gestreckte Kugel  $B \in \mathcal{B}$  mit Anfangskugel  $B_{3\mu_i}^M(y)$  ist in einer Kugel  $B_{R(n)}^M(y)$  enthalten, wobei  $R(n) > 0$  eine nur von der Dimension  $n$  abhängige Konstante ist.
2. Jede hyperbolisch gestreckte Kugel  $B \in \mathcal{B}$  mit Anfangskugel  $B_{3\mu_i}^M(y)$  ist in einer Kugel  $B_{R'(n,\nu)}^M(y)$  enthalten, wobei  $R'(n,\nu) > 0$  eine nur von der Dimension  $n$  und einer unteren Schranke  $\nu > 0$  an die minimale Verschiebung hyperbolischer Elemente von  $\Gamma$  (d.h.  $d_\gamma(x) \geq \nu$  für alle  $x \in X$  und alle hyperbolischen  $\gamma \in \Gamma$ ) abhängige Konstante ist. In Dimension  $n = 2$  liegt dabei keine Abhängigkeit von  $\nu$  vor.

*Beweis.* 1. Betrachte zunächst den parabolischen Fall. Die Konstruktion des gewünschten Radius wird dadurch möglich sein, dass wir entlang der Flussgeodätischen explizite Formeln für das Wachstum des Abstands zum Rand der Subniveaumenge einer parabolischen Isometrie bestimmen können.

Sei  $B_{3\mu_i}^M(y)$  die Anfangskugel der betrachteten parabolisch gestreckten Kugel  $B \in \mathcal{B}$  sowie  $c_y$  die Flussgeodätische von  $y = c_y(0)$ . Im Beweis von Lemma 3.44 hatten wir gesehen, dass der Endmittelpunkt  $c_y(t)$  von  $B$  dadurch charakterisiert ist, dass  $c_y(t) \in M_+$  sowie  $d(c_y(t), \partial M_+) = \mu_{-1}/2$ , für passendes  $t > 0$ . Nach Konstruktion der parabolisch gestreckten Kugeln ist jeder Punkt  $y' \in B$  in einer Kugel um ein  $c_y(t')$  mit  $0 \leq t' \leq t$  enthalten, wobei der Radius höchstens dem Anfangsradius  $3\mu_i$  entspricht. Letzterer ist wiederum durch  $\mu_{-1}$  beschränkt, womit wir wegen  $d(y, c_y(t')) = t'$  nun

$$B \subseteq B_{t+\mu_{-1}}^M(y)$$

erhalten. Da  $\mu_{-1}$  lediglich von  $n$  abhängt, bleibt also zu zeigen, dass auch  $t$  nur durch  $n$  kontrolliert wird. Wir erinnern daran, dass  $y$  als Anfangsmittelpunkt einer gestreckten Kugel nicht in  $M'_+$  liegt, sondern im Stück zwischen  $\partial M'_+$  und  $\partial M_+$ , wie auch der Endmittelpunkt; können wir also die Länge  $L$  von  $c_y$  zwischen  $\partial M'_+$  und  $\partial M_+$  beschränken, so ist hierdurch bereits eine Schranke an obiges  $t$  gegeben und  $R := L + \mu_{-1}$  erfüllt die Behauptung (sofern  $L$  ebenfalls nur von  $n$  abhängt). Beachte, dass wir äquivalent auch die Länge eines Lifts von  $c_y$  in  $X$  (welchen wir erneut  $c_y$  nennen) zwischen  $\partial X'_+$  und  $\partial X_+$  betrachten können.

Seien  $y_1 \in \partial X'_+$  und  $y_2 \in \partial X_+$  die Schnittpunkte von  $c_y$  mit  $\partial X'_+$  und  $\partial X_+$ . Parametrisieren wir  $c_y$  so um, dass  $c_y(0) = y_1$ , so ist lediglich eine obere Schranke für  $t_2 > 0$  zu finden, wobei  $c_y(t_2) = y_2$ . Nach Definition von  $X'_+$  ist also  $y_1 \in \overline{\{d_\gamma < \varepsilon(n)/2\}_{\varepsilon(n)/32}}$  für eine parabolische Isometrie  $\gamma \in \Gamma$  mit Fixpunkt  $z = c_y(\infty)$ . Bezeichnet  $y_3 = c_y(t_3)$  den Schnittpunkt von  $c_y$  mit  $\partial\{d_\gamma < \varepsilon(n)/2\}$ , so gilt offenbar  $t_3 \geq t_2$  (denn entweder ist  $y_3$  schon der Schnittpunkt von  $c_y$  mit  $\partial X_+$  – d.h.  $t_3 = t_2$  –, oder  $\partial X_+$  wurde von  $c_y$  bereits vorher – am Rand einer anderen Subniveaumenge – betreten, d.h.  $t_2 \leq t_3$ ).

Es bleibt also nur zu zeigen: Ist  $y_1 = c_y(0)$  der Eintrittspunkt von  $c_y$  in  $\overline{\{d_\gamma < \varepsilon(n)/2\}_{\varepsilon(n)/32}}$  und  $y_3 = c_y(t_3)$  der Eintrittspunkt von  $c_y$  in  $\{d_\gamma < \varepsilon(n)/2\}$ , so ist  $t_3 \geq 0$  nach oben durch eine lediglich von  $n$  abhängige Konstante beschränkt.

Wir wählen das obere Halbraummodell des  $\mathbb{H}^n$  so, dass  $z = c_y(\infty)$  dem Punkt  $\infty$  entspricht und  $y_1 = (0, 1)$ , d.h. die  $\mathbb{R}^{n-1}$ -Koordinate ist der Nullvektor und die  $t$ -Koordinate beträgt 1. Beachte, dass  $\gamma$  auf  $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{>0} = \mathbb{H}^n$  als euklidische Bewegung auf dem  $\mathbb{R}^{n-1}$ -Faktor und als Identität auf dem  $\mathbb{R}_{>0}$ -Faktor wirkt ( $\gamma$  erhält als parabolische Isometrie die Horosphären um den Fixpunkt  $z$ ); die eingeschränkte Wirkung von  $\gamma$  auf dem  $\mathbb{R}^{n-1}$ -Faktor werden wir der Einfachheit halber ebenfalls mit  $\gamma$  bezeichnen. Nach der Dreiecksungleichung gilt bereits

$$\varepsilon' := d_\gamma((0, 1)) \leq \frac{\varepsilon(n)}{2} + 2 \cdot \frac{\varepsilon(n)}{32} < \varepsilon(n).$$

Mittels der üblichen Formeln aus Lemma 3.27 ergibt sich

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= d_\gamma((0, 1)) = d((0, 1), \gamma(0, 1)) = d((0, 1), (\gamma(0), 1)) \\ &= 2 \cdot \operatorname{arsinh} \left( \frac{\|0 - \gamma(0)\|}{2 \cdot 1} \right) \\ &= 2 \cdot \operatorname{arsinh} \left( \frac{\|\gamma(0)\|}{2} \right), \end{aligned}$$

also

$$\|\gamma(0)\| = 2 \cdot \sinh\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right).$$

Da  $c_y$  nach Bogenlänge parametrisiert ist, erhalten wir die Darstellung  $c_y(t) = (0, e^t)$ . Zum Zeitpunkt  $t$  gilt folglich analog

$$d_\gamma(c_y(t)) = d_\gamma((0, e^t)) = 2 \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{\|\gamma(0)\|}{2e^t}\right),$$

d.h. mithilfe obiger Formel für  $\|\gamma(0)\|$  und der Abschätzung an  $\varepsilon'$  nun

$$d_\gamma(c_y(t)) = 2 \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{\sinh\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)}{e^t}\right) < 2 \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{\sinh\left(\frac{\varepsilon(n)}{2}\right)}{e^t}\right).$$

Ist also  $t$  so groß, dass der rechte Term höchstens  $\varepsilon(n)/2$  beträgt, so liegt  $c_y(t)$  schon in  $\{d_\gamma < \varepsilon(n)/2\}$ ; es ist also

$$2 \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{\sinh\left(\frac{\varepsilon(n)}{2}\right)}{e^t}\right) \stackrel{!}{\leq} \frac{\varepsilon(n)}{2}$$

nach  $t$  aufzulösen, d.h.

$$\ln\left(\frac{\sinh\left(\frac{\varepsilon(n)}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\varepsilon(n)}{4}\right)}\right) \leq t.$$

Folglich ist  $c_y$  nach spätestens

$$\ln\left(\frac{\sinh\left(\frac{\varepsilon(n)}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{\varepsilon(n)}{4}\right)}\right)$$

Zeiteinheiten in  $\{d_\gamma < \varepsilon(n)/2\}$  eingetreten (und diese Konstante hängt lediglich von  $n$  ab), was zu zeigen war.

2. Bei der Wahl der hyperbolisch gestreckten Kugeln hatten wir bereits festgestellt, dass der Anfangsmittelpunkt  $y$  von  $B_{3\mu_i}^M(y)$  stets im  $\varepsilon(n)$ -dünnen Teil von  $M$  liegt. Sei nun  $x \in X$  ein Lift von  $y$  im  $\varepsilon(n)$ -dünnen Teil von  $X$ , sowie  $A$  die zugehörige hyperbolische Achse. Es bietet sich ausnahmsweise das obere Halbraummodell für  $X = \mathbb{H}^n$  an; wir wählen es so, dass die hyperbolische Achse  $A$  der  $t$ -Achse  $\{0\} \times \mathbb{R}_{>0} \subseteq \mathbb{H}^n$  entspricht. Beachte, dass die Wirkung einer hyperbolischen Isometrie  $\gamma \in \Gamma$  mit Achse  $A$  auf  $\mathbb{H}^n \cong \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{>0}$  nun durch

$$\gamma(x, t) = e^\lambda \cdot (Bx, t)$$

gegeben ist, für geeignete  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $B \in O(n-1)$ ; hierbei ist  $\lambda$  genau die Verschiebung von  $\gamma$  auf der Achse  $A$ .

Angenommen es gäbe eine Konstante  $C(n, \nu) > 0$ , welche den Abstand von  $x$  zur Achse  $A$  beschränkt – d.h.  $d(x, A) \leq C(n, \nu)$  –, so würde mit

$$R'(n, \nu) := C(n, \nu) + \mu_{-1}$$

(beachte, dass  $\mu_{-1}$  nur von  $n$  abhängt) bereits

$$B \subseteq B_{R'(n, \nu)}^M(y)$$

erfüllt sein; denn die Streckungslänge der hyperbolisch gestreckten Kugeln ist stets kleiner dem Abstand des Anfangsmittelpunkts zur Achse (bzw. deren Bild in  $M$ ), wie dem Beweis von Lemma 3.44 zu entnehmen ist, wobei außerdem  $3\mu_i < \mu_{-1}$  für alle  $i = 0, \dots, n$  gilt. Folglich genügt es, eine solche Schranke  $C = C(n, \nu)$  an den Abstand von  $x$  zur Achse  $A$  zu finden (sofern dieses  $C$  tatsächlich nur von  $n$  sowie  $\nu$  abhängt und damit insbesondere unabhängig von der Wahl des konkreten Anfangsmittelpunkts  $y$  bzw. dessen Lift  $x$  ist).

Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass die Darstellung von  $x$  im oberen Halbraummodell eine  $t$ -Koordinate von 1 aufweist und werden daher von nun an den Punkt  $(x, 1)$  mit  $x \in \mathbb{R}^{n-1}$  betrachten (die doppelte Verwendung von  $x$  nehmen wir in Kauf). Da  $x$  im  $\varepsilon(n)$ -dünnen Teil von  $X$  liegt, existiert eine hyperbolische Isometrie  $\gamma \in \Gamma$  mit Achse  $A$ , sodass

$$\varepsilon' = d_\gamma((x, 1)) = d((x, 1), \gamma(x, 1))$$

für ein  $\varepsilon' \leq \varepsilon(n)$ . Nach obigen Betrachtungen wissen wir, dass

$$\gamma(x, 1) = e^\lambda(Bx, 1)$$

für geeignete  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $B \in O(n-1)$ ; da  $\lambda$  die Verschiebung von  $\gamma$  auf der Achse  $A$  beschreibt gilt einerseits  $\lambda < \varepsilon(n)$  sowie nach Wahl von  $\nu$  außerdem  $\lambda \geq \nu > 0$  (im Falle von  $\lambda < 0$  können wir ohne Einschränkung die Orientierung der Achse  $A$  umkehren, was wiederum zum angegebenen Fall führt). Mithilfe von Lemma 3.27 erhalten wir

$$d((x, 1), e^\lambda(Bx, 1)) = 2 \cdot \operatorname{artanh} \left( \sqrt{\frac{\|x - e^\lambda Bx\|^2 + (1 - e^\lambda)^2}{\|x - e^\lambda Bx\|^2 + (1 + e^\lambda)^2}} \right),$$

also insgesamt

$$\tanh^2 \left( \frac{\varepsilon'}{2} \right) = \frac{\|x - e^\lambda Bx\|^2 + (1 - e^\lambda)^2}{\|x - e^\lambda Bx\|^2 + (1 + e^\lambda)^2}.$$

Obige Gleichung ist monoton steigend in  $\|\cdot\|^2$ ; da gemäß der umgekehrten Dreiecksungleichung auch

$$\|x - e^\lambda Bx\| \geq \| \|x\| - \|e^\lambda Bx\| \| = \| \|x\| - e^\lambda \|x\| \| = \|x\| \cdot |1 - e^\lambda|$$

erfüllt ist (beachte  $\|Bx\| = \|x\|$ , da  $B \in O(n-1)$ ), schließen wir somit

$$\tanh^2 \left( \frac{\varepsilon'}{2} \right) \geq \frac{\|x\|^2 \cdot (1 - e^\lambda)^2 + (1 - e^\lambda)^2}{\|x\|^2 \cdot (1 - e^\lambda)^2 + (1 + e^\lambda)^2}.$$

Auflösen nach  $\|x\|^2$  liefert

$$\|x\|^2 \leq \frac{\tanh^2(\varepsilon'/2) \cdot (1 + e^\lambda)^2 - (1 - e^\lambda)^2}{(1 - e^\lambda)^2(1 - \tanh^2(\varepsilon'/2))},$$

also wegen  $\varepsilon' \leq \varepsilon(n)$  nun

$$\|x\|^2 \leq \frac{\tanh^2(\varepsilon(n)/2) \cdot (1 + e^\lambda)^2 - (1 - e^\lambda)^2}{(1 - e^\lambda)^2(1 - \tanh^2(\varepsilon(n)/2))}.$$

Dieser Term wiederum ist monoton fallend in  $\lambda$ , was mithilfe von  $\lambda \geq \nu$  zu

$$\|x\|^2 \leq \frac{\tanh^2(\varepsilon(n)/2) \cdot (1 + e^\nu)^2 - (1 - e^\nu)^2}{(1 - e^\nu)^2(1 - \tanh^2(\varepsilon(n)/2))}$$

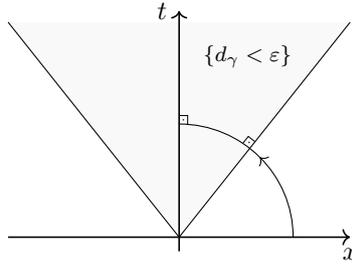


Abbildung 3.8: Wählen wir in Dimension  $n = 2$  ausnahmsweise das obere Halbebenenmodell auch im hyperbolischen Fall (wobei die Achse  $A$  der  $t$ -Achse entspreche), so ist unmittelbar ersichtlich, dass die Flussgeodätischen (hier ein beispielhafter Kreissektor) hin zur Achse stets senkrecht auf die Subniveaumengen  $\{d_\gamma < \epsilon\}$  hyperbolischer Isometrien  $\gamma$  mit Achse  $A$  treffen.

führt. Wir definieren

$$C' := \sqrt{\frac{\tanh^2(\epsilon(n)/2) \cdot (1 + e^\nu)^2 - (1 - e^\nu)^2}{(1 - e^\nu)^2(1 - \tanh^2(\epsilon(n)/2))}},$$

womit also  $\|x\| \leq C'$  erfüllt ist; beachte, dass  $C'$  nur von  $n$  und  $\nu$  abhängt.

Nach Wahl von  $A$  als  $t$ -Achse  $\{0\} \times \mathbb{R}_{>0}$  ist insbesondere auch  $(0, 1)$  ein Punkt auf  $A$ . Folglich gilt

$$d((x, 1), A) \leq d((x, 1), (0, 1)),$$

also mithilfe der Formeln aus Lemma 3.27 und der Abschätzung an  $\|x\|$  somit

$$d((x, 1), A) \leq 2 \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{\|x - 0\|}{2 \cdot 1}\right) = 2 \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{\|x\|}{2}\right) \leq 2 \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{C'}{2}\right).$$

Damit ist

$$C := 2 \cdot \operatorname{arsinh}\left(\frac{C'}{2}\right)$$

die gewünschte, nur von  $n$  und  $\nu$  abhängige Konstante, welche stets zu  $d(x, A) \leq C$  führt, was zu zeigen war.

Im Sonderfall von Dimension  $n = 2$  weisen die Ränder der Subniveaumengen hyperbolischer Isometrien (mit Achse  $A$ ) einen konstanten Abstand zur Achse  $A$  auf, d.h. für Punkte  $x, x'$  aus dem Rand der selben Subniveaumenge gilt  $d(x, A) = d(x', A)$ . Folglich stimmt – entlang unserer Flussgeodätischen, welche ja genau die Projektionsgeodätischen hin zu  $A$  sind – das Wachstum des Abstands zum Rand der Subniveaumenge (bzw. einer Aufdickung einer solchen Subniveaumenge) mit der Flusslänge entlang der Flussgeodätischen überein, vgl. Abbildung 3.8.

Gemäß dem Beweis von Lemma 3.44 ist die Streckungslänge hyperbolisch gestreckter Kugeln in diesem Sonderfall damit bereits durch den Abstand zwischen  $\partial X'_+$  und  $\partial X_+$  beschränkt, d.h. durch  $\epsilon(2)/32$ . Definieren wir nun

$$R' := \frac{\epsilon(2)}{32} + \mu_{-1} = \frac{3\epsilon(2)}{64},$$

so gilt erneut  $B \subseteq B_{R'}^M(y)$ , was zu zeigen war. Insbesondere ist diese Konstante nicht mehr von der minimalen Verschiebung  $\nu$  hyperbolischer Elemente aus  $\Gamma$  abhängig.

□

**Bemerkung 3.46.** Wie dem obigen Lemma zu entnehmen ist, musste für die Kontrolle der absoluten Länge hyperbolisch gestreckter Kugeln eine untere Schranke  $\nu$  an die Verschiebung hyperbolischer Isometrien aus  $\Gamma$  gefordert werden. Wir halten zunächst fest, dass eine solche Konstante stets existiert: Da  $\Gamma$  ein Gitter ist, existieren nur endlich viele Röhren in  $M_-$ , also auch nur endlich viele verschiedene  $\Gamma$ -Orbits von Geodätischen in  $X$ , welche Achse einer hyperbolischen Isometrie mit minimaler Verschiebung  $\leq \varepsilon(n)$  sind. Für jede dieser Achsen ist jedoch die Anzahl der hyperbolischen Isometrien mit minimaler Verschiebung auf der Achse selbst endlich, da zwei solche hyperbolische Isometrien durch Multiplikation mit einer Achse-fixierenden oder Achse-spiegelnden elliptischen Isometrie ineinander überführt werden. Nun ist  $\nu$  durch das Minimum der minimalen Verschiebungen dieser endlich vielen hyperbolischen Isometrien gegeben. Problematisch ist in dieser Hinsicht selbstverständlich, dass eine solche Schranke  $\nu$  für verschiedene Gitter  $\Gamma$  nicht übereinstimmt. In einigen Anwendungen jedoch ist für bestimmte Klassen von Gittern ein gemeinsamer Wert zu erreichen; so ist dies beispielsweise im arithmetischen, nicht-uniformen Fall gegeben (siehe später Lemma 3.53). Ebenso überträgt sich das  $\nu$  eines fest gewählten Gitters  $\Gamma$  auf sämtliche Untergruppen  $\Gamma' < \Gamma$ . Beachte, dass nach dem Satz von Malzew jedes unserer Gitter  $\Gamma$  bereits residuell endlich ist, weshalb stets eine unendliche (ineinander verschachtelte) Menge an Untergruppen von endlichem Index existiert; in geometrischer Sichtweise entspricht diese Familie wiederum einem unendlichen Turm endlicher (Orbifaltigkeits-)Überlagerungen der Orbifaltigkeit  $M = X/\Gamma$ .

Durch die Verwendung von  $\nu$  werden in späteren Anwendungen – beispielsweise bei den Schranken an den freien oder den Torsionsanteil in der Homologie von  $M$  in Satz 3.59 bzw. 3.60 – zusätzliche Abhängigkeiten von  $\nu$  hervorgerufen. Es ist davon auszugehen, dass dies nicht die bestmögliche Situation beschreibt, sondern die Abhängigkeit von  $\nu$  durch einen abgeänderten Beweis eliminiert werden kann.

Ein berechtigter Einwand besteht darin, dass bei Verwendung einer solche Schranke  $\nu$  die Wahl des dünnen Teils  $M_-$  auch bereits so – in Abhängigkeit von  $\nu$  – erfolgen könnte, dass  $M_-$  keine Röhren mehr enthält und folglich die Verwendung hyperbolisch gestreckter Kugeln nicht länger nötig wäre. Wir werden im Rahmen der späteren Anwendungen in Satz 3.59 bzw. 3.60 auf diesen Punkt eingehen; tatsächlich lassen sich durch unseren Ansatz bei Verwendung hyperbolisch gestreckter Kugeln in manchen Fällen weitere Aussagen treffen, die bei obigem „naiven“ Ansatz zunächst nicht erreicht werden können.  $\blacklozenge$

### Überdeckungseigenschaften

Die bisher bewiesenen Aussagen ermöglichen uns nun, die Gutartigkeit der konstruierten Überdeckung nachzuweisen. Zuerst halten wir fest, dass  $\mathcal{B}$  tatsächlich eine Überdeckung des geschrumpften dicken Teils darstellt, welche zudem stabil unter dem Fluss ist.

**Lemma 3.47.** *Die Mengen aus  $\mathcal{B}$  bilden eine Überdeckung von  $M'_+$ , d.h.*

$$M'_+ \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B,$$

welche unter dem Fluss  $f$  in der Hinsicht stabil ist, dass wenn  $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$  von einer Flussgeodätischen betreten wird, diese auch gänzlich in  $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$  verläuft, bis sie auf  $\partial M'_+$  trifft.

*Beweis.* Da nach Konstruktion bereits  $\bigcup_{B \in \mathcal{B}'} B \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$  gilt – denn eine parabolisch bzw. hyperbolisch gestreckte Kugel enthält nach Konstruktion stets ihre Anfangskugel –, folgt die Überdeckungseigenschaft mit Lemma 3.42.

Wenden wir uns nun der Stabilität zu. Da jede Flussgeodätische irgendwann auf den Rand  $\partial M'_+$  trifft, würde die Stabilität äquivalent auch daraus folgen, dass eine Flussgeodätische ab einem Punkt  $x \in \partial M'_+$  – diesmal jedoch in umgekehrter Richtung fließend, d.h. zum dünnen Teil hin –, gänzlich in  $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$  verläuft, bis sie diese Menge an einem Punkt verlässt und anschließend nicht mehr betritt.

Wir betrachten den parabolischen und den hyperbolischen Fall gleichzeitig. Sei dazu  $x \in \partial M'_+$  gegeben und  $i \in \{0, \dots, n\}$  minimal gewählt, sodass

$$x \in (\partial M'_+ \cap (\pi(S_i))_{2\mu_i}) \setminus \bigcup_{j < i} (\pi(S_j))_{3\mu_j/2}.$$

Dies ist stets möglich: Für  $i = n$  gilt wegen  $S_n = M$  bereits

$$\partial M'_+ \cap (\pi(S_n))_{2\mu_n} = \partial M'_+ \cap M = \partial M'_+;$$

also liegt  $x$  entweder in  $\partial M'_+ \setminus \bigcup_{j < n} (\pi(S_j))_{3\mu_j/2}$  – womit diese Teilbehauptung bewiesen wäre –, oder es gilt  $x \in \partial M'_+ \cap \bigcup_{j < n} (\pi(S_j))_{3\mu_j/2}$ . Im letzteren Fall können wir nun  $j < n$  minimal wählen, sodass  $x \in (\pi(S_j))_{3\mu_j/2}$ . Dann ergibt sich wegen  $(\pi(S_j))_{2\mu_j} \supseteq (\pi(S_j))_{3\mu_j/2}$  jedoch  $x \in \partial M'_+ \cap (\pi(S_j))_{2\mu_j}$ , wobei nach Minimalität von  $j$  ebenso  $x \notin \bigcup_{j' < j} (\pi(S_{j'}))_{3\mu_{j'}/2}$  erfüllt ist, also insgesamt

$$x \in (\partial M'_+ \cap (\pi(S_j))_{2\mu_j}) \setminus \bigcup_{j' < j} (\pi(S_{j'}))_{3\mu_{j'}/2},$$

was zu zeigen war. Folglich finden wir ein solches minimales  $i$  wie oben beschrieben.

Sei  $c_x$  die Flussgeodätische von  $x$ , parametrisiert nach Bogenlänge mit Laufrichtung hin zum dünnen Teil  $M_-$  sowie  $c_x(0) = x$ . Gemäß obiger Betrachtungen finden wir ein  $x' \in \pi(S_i)$  mit  $d(x, x') < 2\mu_i$ . Sei  $c_{x'}$  die zugehörige Flussgeodätische von  $x'$ , mit analoger Parametrisierung, d.h. insbesondere  $c_{x'}(0) = x'$ ; dann gilt auch  $d(c_x(t), c_{x'}(t)) < 2\mu_i$  für  $t > 0$ , denn hin zum dünnen Teil ist der Abstand zwischen den Flussgeodätischen monoton fallend. Beachte ferner, dass  $c_{x'}$  gänzlich in  $\pi(S_i)$  verläuft (dies folgt erneut aus der Lage der singulären Untermannigfaltigkeit nahe des parabolischen Fixpunkts bzw. der Achse), womit sich also zusätzlich  $c_x(t) \in (\pi(S_i))_{2\mu_i}$  für  $t > 0$  ergibt. Wegen

$$d(c_{x'}(0), M'_+) = d(x', M'_+) \leq d(x', x) < 2\mu_i$$

hat  $c_{x'}(t)$  für hinreichend kleine  $t > 0$  den Rand  $\overline{\partial(M'_+)_{8\mu_i}}$  noch nicht betreten; außerdem verläuft auch  $c_x(t)$  für hinreichend kleine  $t > 0$  nicht in  $(\pi(S_j))_{3\mu_j/2}$  für beliebige  $j < i$ , denn dies würde mit einem Argument analog zu oben der Minimalität von  $i$  widersprechen. Wir werden nun mit steigendem  $t$  in Richtung  $M_-$  (äquivalent:  $\partial M_+$ ) fließen. Trifft  $c_{x'}(t)$  auf den Rand  $\partial(M'_+)_{8\mu_i}$ , so sagen wir, dass Ereignis I eintritt; tritt hingegen  $c_x(t)$  in ein  $(\pi(S_j))_{3\mu_j/2}$  für  $j < i$  ein, so sagen wir, dass Ereignis II vorliegt.

Aufgrund von  $\partial M'_+ \subseteq M'_+$  ist  $x$  bereits in einer Überdeckungsmenge  $B \in \mathcal{B}$  enthalten (s.o.). Wir können also zusammenfassen: Für hinreichend kleines  $t > 0$  verläuft  $c_x(t)$  in  $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$  und es ist weder Ereignis I noch Ereignis II eingetreten.

Solange weder Ereignis I noch Ereignis II eintritt, wird  $c_x(t)$  auch für steigendes  $t$  in  $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$  verlaufen, wie wir nun begründen. Hierfür halten wir zunächst fest, dass  $c_{x'}(t) \notin \bigcup_{j < i} (\pi(S_j))_{\mu_j}$  gelten muss; denn andernfalls fänden wir für ein  $j < i$  ein  $x'' \in \pi(S_j)$  mit  $d(x'', c_{x'}(t)) < \mu_j$ . Dies hätte jedoch wegen

$$d(c_x(t), \pi(S_j)) \leq d(c_x(t), x'') \leq d(c_x(t), c_{x'}(t)) + d(c_{x'}(t), x'') < 2\mu_i + \mu_j < \frac{3}{2}\mu_j$$

(beachte  $2\mu_i \leq \mu_j/6$ , da  $j < i$ ) zur Folge, dass  $c_x(t) \in (\pi(S_j))_{3\mu_j/2}$ , was aber der Annahme widerspricht, dass Ereignis II nicht eingetreten ist. Da wir ferner angenommen hatten, dass auch Ereignis I nicht vorliegt –  $c_{x'}(t)$  also noch in  $(M'_+)_{8\mu_i}$  verläuft –, schließen wir

$$c_{x'}(t) \in (\overline{(M'_+)_{8\mu_i}} \cap \pi(S_i)) \setminus \bigcup_{j < i} (\pi(S_j))_{\mu_j}.$$

In dieser Menge liegt  $\mathcal{D}_i$  nach Definition als maximale  $\mu_i$ -diskrete Teilmenge, weshalb ein  $y \in \mathcal{D}_i$  mit  $d(y, c_{x'}(t)) < \mu_i$  existiert. Dies hat

$$d(c_x(t), y) \leq d(c_x(t), c_{x'}(t)) + d(c_{x'}(t), y) < 2\mu_i + \mu_i = 3\mu_i$$

zur Folge, also  $c_x(t) \in B_{3\mu_i}^M(y) \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ , was zu zeigen war.

Es bleibt damit lediglich noch zu prüfen, was passiert, wenn entweder Ereignis I oder Ereignis II eintritt. Sei zunächst angenommen, Ereignis II träte zuerst ein. Wir können also  $j < i$  minimal wählen, sodass  $c_x(t) \in (\pi(S_j))_{3\mu_j/2} \subseteq (\pi(S_j))_{2\mu_j}$ , wobei gemäß Minimalität von  $j$  zusätzlich  $c_x(t) \notin \bigcup_{j' < j} (\pi(S_{j'}))_{3\mu_{j'}/2}$  gilt. Da nach Annahme Ereignis II vor Ereignis I eingetreten ist, erhalten wir ferner

$$d(c_x(t), M'_+) \leq d(c_x(t), c_{x'}(t)) + d(c_{x'}(t), M'_+) < 2\mu_i + 8\mu_i < \mu_j < 8\mu_j$$

(beachte  $j < i$ ), also insgesamt

$$c_x(t) \in \left( \overline{(M'_+)_{8\mu_j}} \cap (\pi(S_j))_{2\mu_j} \right) \setminus \bigcup_{j' < j} (\pi(S_{j'}))_{3\mu_{j'}/2}.$$

Wir können analog zur Definition von  $c_{x'}$  nun eine Flussgeodätische  $c_{x''}$  finden, welche in  $\pi(S_j)$  verläuft und  $d(c_{x''}(t), c_x(t)) < 2\mu_j$  (ab dem Eintrittszeitpunkt von Ereignis II) erfüllt. Wegen

$$d(c_{x''}(t), M'_+) \leq d(c_{x''}(t), c_x(t)) + d(c_x(t), M'_+) < 2\mu_j + \mu_j < 8\mu_j$$

ist das für diesen Index  $j$  und die Kurven  $c_x, c_{x''}$  analog definierte Ereignis I noch nicht eingetreten; auch das entsprechende Ereignis II liegt gemäß Minimalität von  $j$  noch nicht vor. Ersetzen wir in der Argumentation des vorigen Absatzes (in welcher wir die Behauptung unter der Annahme bewiesen haben, dass weder Ereignis I noch Ereignis II eingetreten sind) also  $i$  durch  $j$  und  $c_{x'}$  durch  $c_{x''}$ , so sind die dortigen Begründungen weiter gültig, weshalb wiederum folgt, dass sich  $c_x(t)$  in  $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$  befindet.

Sei nun andererseits angenommen, Ereignis I träte zuerst ein; es gilt also  $c_{x'}(t) \in \partial(M'_+)_{8\mu_i}$ . Erneut ist  $c_{x'}(t) \notin \bigcup_{j < i} (\pi(S_j))_{\mu_j}$ , denn andernfalls erhielten wir analog zu oben, dass wegen

$$d(c_x(t), \pi(S_j)) \leq d(c_x(t), c_{x'}(t)) + d(c_{x'}(t), \pi(S_j)) < 2\mu_i + \mu_j < \frac{3}{2}\mu_j$$

(für passendes  $j < i$ ) schon Ereignis II eingetreten sein müsste, im Widerspruch zu unserer Annahme. Wir fassen damit zusammen, dass

$$c_{x'}(t) \in \left( \partial(M'_+)_{8\mu_i} \cap \pi(S_i) \right) \setminus \bigcup_{j < i} (\pi(S_j))_{\mu_j}.$$

Doch  $\mathcal{D}_i$  enthält gemäß Definition eine maximale  $\mu_i$ -diskrete Teilmenge innerhalb dieser Menge, womit die Existenz eines  $y \in \mathcal{D}_i$  folgt, sodass  $d(y, c_{x'}(t)) < \mu_i$ . Erneut ergibt sich  $d(c_x(t), y) < 3\mu_i$ , also  $c_x(t) \in B_{3\mu_i}^M(y) \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ , was zu zeigen war. Beachte, dass nach unserer Auswahl der (parabolisch bzw. hyperbolisch) gestreckten Kugeln  $B_{3\mu_i}^M(y)$  bereits die Anfangskugel einer gestreckten Kugel  $U$  ist; folglich verläuft auch  $c_x(t)$  ab diesem Zeitpunkt gänzlich in  $U$ . Wie wir im Beweis von Lemma 3.44 gesehen haben, wird  $c_x$  nach dem Verlassen von  $U$  entweder gänzlich außerhalb von  $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$  verlaufen, oder aber noch in einer anderen gestreckten Kugel  $U'$  liegen; im letzteren Fall können wir so lange fortfahren, bis alle gestreckten Kugeln verlassen sind, womit die Behauptung bewiesen ist.  $\square$

Die folgenden Lemmata geben wieder, dass die Überdeckungsmengen und ihre nichtleeren Durchschnitte zusammenziehbar sind.

**Lemma 3.48.** *Elemente von  $\mathcal{B}$  sind gefaltete Mengen und damit zusammenziehbar.*

*Beweis.* Wir werden uns für den Beweis an [25] Beweis Theorem 4.2 Schritt 2) orientieren. Sei also  $x \in \mathcal{D}_i$  gegeben und  $\tilde{x} \in X$  ein Urbild von  $x$  in  $X$ ; ferner sei  $Y \in \Sigma_i$  die singuläre Untermannigfaltigkeit, welche  $\tilde{x}$  enthält. Nach Wahl von  $\mathcal{D}_i$  gilt  $d(x, \pi(S_{<i})) > \mu_{i-1}$  und daher ebenso  $d(\tilde{x}, S_{<i}) > \mu_{i-1}$ . Beachte außerdem, dass wegen  $x \in \mathcal{D}_i \subseteq M_+$  auch  $\tilde{x} \in X_+$ , also  $\tilde{x} \in Y \cap X_+$ .

Nach Wahl unserer  $\mu_i$  gilt  $24\mu_i \leq \varepsilon_3(\mu_{i-1})$ , weshalb wir mittels Lemma 3.41 folgern, dass  $Y$  von  $\Gamma_{24\mu_i}(\tilde{x})$  punktweise fixiert wird. Die Voraussetzungen in den Lemmata 3.33, 3.35 sowie 3.38 – dass also der (Anfangs-)Mittelpunkt  $y$  durch die geeigneten Gruppen kleiner Verschiebung (wobei „kleine Verschiebung“ sich auf das 4-fache des Radius  $3\mu_i$  bezieht) fixiert wird – sind damit erfüllt; somit ist nach Anwendung dieser Lemmata die entsprechende (gewöhnliche bzw. parabolisch gestreckte bzw. hyperbolisch gestreckte) Kugel mit Anfangsmittelpunkt  $\tilde{x}$  eine  $Y$ -faltbare Menge, was zu zeigen war.  $\square$

**Lemma 3.49.** *Nichtleere Durchschnitte von Elementen aus  $\mathcal{B}$  sind gefaltete Mengen und damit zusammenziehbar.*

*Beweis.* Die grundlegende Idee des Beweises stammt aus [25] Beweis Theorem 4.2 Schritt 3), wobei wir jedoch im Falle eines Schnitts parabolisch oder hyperbolisch gestreckter Kugeln zusätzliche Argumente benötigen.

Seien also  $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{D}$  gegeben mit  $x_j \in \mathcal{D}_{n_j}$  für  $j = 1, \dots, k$ , sodass die zugehörigen Mengen aus  $\mathcal{B}$  nichtleeren Schnitt aufweisen. Beachte, dass hierbei nur drei Situationen auftreten können: Erstens ein Schnitt von ausschließlich gewöhnlichen Kugeln; zweitens ein Schnitt von parabolisch gestreckten Kugeln und möglicherweise gewöhnlichen Kugeln; sowie drittens ein Schnitt von hyperbolisch gestreckten Kugeln und möglicherweise gewöhnlichen Kugeln. Ohne Einschränkung sei  $n_1$  das Maximum der  $n_j$  ( $j = 1, \dots, k$ ). Wir werden zunächst die Fälle betrachten, in denen ausschließlich Kugeln des selben Typs (gewöhnlich bzw. parabolisch gestreckt bzw. hyperbolisch gestreckt) vorliegen; hierbei können wir den parabolischen und den hyperbolischen Fall parallel behandeln.

- Sei zunächst der Fall eines Schnitts von ausschließlich gewöhnlichen Kugeln gegeben. Wähle Lifts  $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_k \in X_+$  der  $x_j$ , sodass  $d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_j) < 6\mu_{n_j}$ . Eine solche Wahl ist stets möglich, denn da sich die Kugeln (von Radius  $3\mu_{n_j}$  um die  $x_j$ ) schneiden, gilt  $d(x_1, x_j) < 3\mu_{n_1} + 3\mu_{n_j}$ , was nach Maximalität von  $n_1$  (also  $n_1 \geq n_j$ ) wiederum kleiner als  $6\mu_{n_j}$  ist; dies überträgt sich auf den Abstand geeigneter Lifts in  $X$ . Sei nun jeweils  $Y_j \in \Sigma_{n_j}$  die singuläre Untermannigfaltigkeit, welche  $\tilde{x}_j$  enthält und  $j \geq 2$  fest. Nach Definition der  $\mathcal{D}_i$  gilt

$$d(\tilde{x}_j, S_{<n_j}) \geq \mu_{n_j-1}.$$

Da gemäß Wahl der  $\mu_i$  insbesondere  $6\mu_{n_j} < 12\mu_{n_j} \leq \varepsilon_2(\mu_{n_j-1})$  erfüllt ist, ergibt sich wegen  $d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_j) < 6\mu_{n_j}$  nun  $d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_j) < \varepsilon_2(\mu_{n_j-1})$ . Mit Lemma 3.40 folgern wir, dass  $Y_j \subseteq Y_1$ ; da dies für beliebiges  $j \geq 2$  gilt, liegen somit alle Mittelpunkte  $\tilde{x}_j$  in der selben singulären Untermannigfaltigkeit  $Y_1$  wie der Mittelpunkt  $\tilde{x}_1$  der  $Y_1$ -faltbaren Kugel  $B_{3\mu_{n_1}}^X(\tilde{x}_1)$ . In Kombination mit der Tatsache, dass jedes  $\tilde{x}_j$  jeweils durch  $\Gamma_{24\mu_{n_j}}(\tilde{x}_j)$  fixiert wird (siehe Beweis des vorigen Lemmas 3.48), folgern wir gemäß Lemma 3.33, dass auch der Durchschnitt über die (gewöhnlichen) Kugeln  $B_{3\mu_{n_j}}^X(\tilde{x}_j)$  schon  $Y_1$ -faltbar sowie der Durchschnitt der entsprechenden Bildkugeln in  $M$  gefaltet (und damit zusammenziehbar) ist.

- Betrachte nun den Fall, dass alle Kugeln (parabolisch bzw. hyperbolisch) gestreckt sind. Seien also  $B_{3\mu_{n_j}}^X(\tilde{x}_j)$  entsprechende Anfangskugeln der gestreckten Kugeln  $U_j$  in  $X$ , sodass sich die  $U_j$  nichtleer schneiden; beachte, dass  $\tilde{x}_j \in X_+$  für alle  $j = 1, \dots, k$ . Mit  $Y_j \in \Sigma_{n_i}$  sei die singuläre Untermannigfaltigkeit bezeichnet, welche  $\tilde{x}_j$  enthält. Nach Definition der  $\mathcal{D}_i$  gilt erneut

$$d(\tilde{x}_j, S_{<n_j}) \geq \mu_{n_j-1}.$$

Beachte, dass aufgrund der Maximalität von  $n_1$  der Punkt  $\tilde{x}_1$  unter allen  $\tilde{x}_j$  am weitesten vom dünnen Teil entfernt liegt<sup>19</sup>, denn für diejenigen  $j \in \{1, \dots, k\}$  mit  $n_1 > n_j$  – also  $\mu_{n_j} > \mu_{n_1}$  – folgt dies bereits aus Lemma 3.43 und für die  $j$  mit  $n_1 = n_j$  – also  $\mu_{n_1} = \mu_{n_j}$  – ist  $\tilde{x}_1$  ohne Einschränkung bereits als derjenige Punkt von maximalem Abstand vom dünnen Teil unter allen  $\tilde{x}_j$  mit  $n_j = n_1$  gewählt. Wir bilden nun die Vergleichskugeln  $U_1^{(j)}$  von  $U_1$  auf der Höhe der übrigen  $\tilde{x}_j$ ; sei entsprechend  $\tilde{x}_1^{(j)}$  der Anfangsmittelpunkt und  $3\mu_{n_1}^{(j)}$  der Anfangsradius von  $U_1^{(j)}$ . Beachte, dass  $\tilde{x}_1^{(j)}$  in genau den selben singulären Untermannigfaltigkeiten liegt wie  $\tilde{x}_1$ , also insbesondere  $\tilde{x}_1^{(j)} \in Y_1$ .

Da  $\tilde{x}_1$  am weitesten vom dünnen Teil entfernt war, gilt bereits  $3\mu_{n_1}^{(j)} \leq 3\mu_{n_1}$  für alle  $j = 2, \dots, k$  (vgl. Eigenschaften des Anfangsradius der Vergleichskugeln); weil nach Maximalität von  $n_1$  aber auch  $\mu_{n_1} \leq \mu_{n_j}$  für alle  $j$  gilt, folgern wir

$$3\mu_{n_1}^{(j)} \leq 3\mu_{n_j}.$$

Nach Konstruktion der Vergleichskugeln sind die Lemmata 3.34 und 3.37 für den Schnitt von  $U_j$  und  $U_1^{(j)}$  anwendbar, weshalb

$$d(\tilde{x}_j, \tilde{x}_1^{(j)}) < 2 \cdot 3\mu_{n_j} + 2 \cdot 3\mu_{n_1}^{(j)} \leq 12\mu_{n_j}$$

folgt. Wegen  $12\mu_{n_j} \leq \varepsilon_2(\mu_{n_j-1})$  sowie  $d(\tilde{x}_j, S_{<n_j}) \geq \mu_{n_j-1}$  (s.o.) können wir nun Lemma 3.40 nutzen und schließen daher  $Y_j \subseteq Y_1$ . Folglich liegen alle Anfangsmittelpunkte in der selben singulären Untermannigfaltigkeit  $Y_1$ , welche bereits den Mittelpunkt der  $Y_1$ -faltbaren gestreckten Kugel  $U_1$  enthält. Da  $\Gamma_{24\mu_{n_j}}(\tilde{x}_j)$  für alle  $j = 1, \dots, k$  außerdem jeweils  $\tilde{x}_j$  fixiert (vgl. Beweis des vorigen Lemmas 3.48) folgt mit Lemma 3.36 bzw. 3.39 die Behauptung.

Einen gemischten Durchschnitt – d.h. gewöhnliche Kugeln und (parabolisch bzw. hyperbolisch) gestreckte Kugeln treten gleichzeitig auf – können wir mithilfe der obigen Aussagen nun auf die Situation des Schnitts einer einzelnen gewöhnlichen Kugel mit einer einzelnen gestreckten Kugel zurückführen: Denn sind  $U_1, \dots, U_k$  gewöhnliche Kugeln wie oben, sodass  $n_1 \geq n_j$  für alle  $j = 1, \dots, k$ , so haben wir bereits gesehen, dass alle Mittelpunkte der  $U_j$  in der singulären Untermannigfaltigkeit  $Y_1$  des Mittelpunkts von  $U_1$  liegen. Die analoge Aussage gilt auch für gestreckte Kugeln  $U'_1, \dots, U'_k$ , wie eben gesehen; dort liegen die Anfangsmittelpunkte dann alle in der singulären Untermannigfaltigkeit  $Y'_1$ , welche bereits den Anfangsmittelpunkt von  $U'_1$  enthält. Können wir also zeigen, dass entweder  $Y_1 \subseteq Y'_1$  oder  $Y'_1 \subseteq Y_1$ , so lägen bereits alle (Anfangs-)Mittelpunkte des gemischten Durchschnitts in der selben singulären Untermannigfaltigkeit, womit die Behauptung (analog zu oben) durch Lemma 3.36 bzw. 3.39 folgen würde (die als Voraussetzung der Lemmata benötigte Tatsache, dass die Mittelpunkte  $\tilde{x}_j$  durch die geeigneten Gruppen kleiner Verschiebung – d.h.  $\Gamma_{24\mu_{n_j}}(\tilde{x}_j)$  – fixiert werden, ist erneut dem Beweis von Lemma 3.48 zu entnehmen).

Sei also  $U_1$  eine (parabolisch bzw. hyperbolisch) gestreckte Kugel mit Anfangskugel  $B_{3\mu_{n_1}}^X(\tilde{x}_1)$  und  $U_2 = B_{3\mu_{n_2}}^X(\tilde{x}_2)$  eine gewöhnliche Kugel; bezeichne außerdem  $Y_1 \in \Sigma_{n_1}$  bzw.  $Y_2 \in \Sigma_{n_2}$  die singulären Untermannigfaltigkeiten, welche  $\tilde{x}_1$  bzw.  $\tilde{x}_2$  enthalten. Wir wollen zeigen, dass stets  $Y_1 \subseteq Y_2$  oder  $Y_2 \subseteq Y_1$  erfüllt ist.

Da  $U_1$  nach Wahl der Mittelpunkte der gestreckten Kugeln keine gewöhnliche Kugel von echt kleinerem Radius schneiden kann (vgl. Beweis von Lemma 3.43), gilt bereits  $3\mu_{n_1} \leq 3\mu_{n_2}$ , d.h.  $n_1 \geq n_2$ . Schneidet die Anfangskugel von  $U_1$  die (gewöhnliche) Kugel  $U_2$ , so ist das obige Argument für den Schnitt

<sup>19</sup>Im Sinne von Lemma 3.43, d.h. gemessen anhand der Lage der entsprechenden Horosphären um den parabolischen Fixpunkt  $z$  bzw. des Abstands zur hyperbolischen Achse  $A$ .

gewöhnlicher Kugeln anwendbar und wir erhalten  $Y_2 \subseteq Y_1$ , die Behauptung. Sei also ohne Einschränkung angenommen, dass der Schnitt von  $U_1$  und  $U_2$  außerhalb der Anfangskugel von  $U_1$  erfolgt. Wir treffen nun eine Fallunterscheidung anhand der Nähe von  $\tilde{x}_1$  und  $\tilde{x}_2$  zum dünnen Teil (wiederum im Sinne von Lemma 3.43).

- Betrachte zuerst den Fall, dass  $\tilde{x}_1$  näher am dünnen Teil liegt als  $\tilde{x}_2$ . Wir nehmen zunächst an, dass  $n_1 = n_2$ , also  $3\mu_{n_1} = 3\mu_{n_2}$ . Beachte, dass wegen des nichtleeren Schnitts von  $U_1$  und  $U_2$  auch die gestreckte Kugel  $U'_2$  mit Anfangskugel  $U_2$  einen nichtleeren Schnitt mit  $U_1$  aufweist; sei  $U''_2$  die Vergleichskugel von  $U'_2$  auf der Höhe von  $\tilde{x}_1$ . Da  $\tilde{x}_1$  näher am dünnen Teil lag als  $\tilde{x}_2$ , gilt für den Anfangsradius  $3\mu''_{n_2}$  von  $U''_2$  bereits  $3\mu''_{n_2} \leq 3\mu_{n_2} (= 3\mu_{n_1})$ . Bezeichnet  $\tilde{x}''_2$  den Anfangsmittelpunkt von  $U''_2$  (für den wiederum  $\tilde{x}''_2 \in Y_2$  erfüllt ist), so folgt in diesem Fall mit Lemma 3.34 bzw. 3.37 nun

$$d(\tilde{x}_1, \tilde{x}''_2) < 2 \cdot 3\mu_{n_1} + 2 \cdot 3\mu''_{n_2} \leq 12\mu_{n_1}.$$

Da  $12\mu_{n_1} \leq \varepsilon_2(\mu_{n_1-1})$ , ergibt sich wegen  $d(\tilde{x}_1, S_{<n_1}) \geq \mu_{n_1-1}$  (vgl. Definition der  $\mathcal{D}_i$ ) mit Lemma 3.40 dann  $Y_2 \subseteq Y_1$ , was zu zeigen war.

Gilt andererseits  $n_1 > n_2$ , so ist  $3\mu_{n_1} < 3\mu_{n_2}$ . Fassen wir die Lage zusammen, so gilt also, dass die gestreckte Kugel von kleinerem Anfangsradius ist und näher am dünnen Teil liegt als die gewöhnliche Kugel; im hyperbolischen Fall ist dies also genau die Situation aus dem Fall g) des Beweises von Lemma 3.39, weshalb wir wie dort folgern, dass die entsprechenden (Anfangs-)Mittelpunkte weniger als vier Radien der größeren Kugel voneinander entfernt liegen, d.h.

$$d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) < 4 \cdot 3\mu_{n_2} = 12\mu_{n_2}.$$

Betrachte nun den parabolischen Fall und sei  $x$  ein Schnittpunkt von  $U_1$  und  $U_2$  sowie  $c_x$  die Projektionsgeodätische von  $x$  zum parabolischen Fixpunkt  $z$ , wobei die Parametrisierung nach Bogenlänge und mit  $c_x(0) = x$ ,  $c_x(-\infty) = z$  (d.h. in umgekehrter Richtung) erfolge. Bezeichne  $HS_1$  und  $HS_2$  die Horosphären um  $z$ , welche  $\tilde{x}_1$  und  $\tilde{x}_2$  enthalten. Da  $\tilde{x}_1$  näher am dünnen Teil liegt und sich die Anfangskugel von  $U_1$  nicht mit  $U_2$  schneidet – d.h.  $c_x$  verlässt (von  $z$  kommend) zuerst  $U_2$ , bevor sie in die Anfangskugel von  $U_1$  eintritt –, ist also  $c_x(t_1) \in HS_1$  und  $c_x(t_2) \in HS_2$  für geeignete  $0 < t_1 < t_2$ , wobei  $t_2 < 3\mu_{n_2}$  (da  $x \in U_2 = B_{3\mu_{n_2}}^X(\tilde{x}_2)$ ). Beachte, dass  $c_x$  auf seinem Weg von  $x$  nach  $c_x(t_1)$  bereits auf die Anfangskugel  $B_{3\mu_{n_1}}^X(\tilde{x}_1)$  von  $U_1$  treffen muss (vgl. Beweis von Lemma 3.43). Es existiert also ein  $t'$  mit  $0 < t' < t_1$  (d.h. insgesamt  $t' < 3\mu_{n_2}$ ), sodass  $c_x(t') \in B_{3\mu_{n_1}}^X(\tilde{x}_1)$ . Wir erhalten damit die Abschätzung

$$\begin{aligned} d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) &\leq d(\tilde{x}_1, c_x(t')) + d(c_x(t'), c_x(0)) + d(c_x(0), \tilde{x}_2) \\ &= d(\tilde{x}_1, c_x(t')) + t' + d(x, \tilde{x}_2) \\ &< 3\mu_{n_1} + t' + 3\mu_{n_2} \\ &< 3\mu_{n_1} + 3\mu_{n_2} + 3\mu_{n_2} \\ &< 7\mu_{n_2}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist also wegen  $7\mu_{n_2} < 12\mu_{n_2} \leq \varepsilon_2(\mu_{n_2-1})$  erneut – d.h. wie im hyperbolischen Fall auch –  $d(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) < \varepsilon_2(\mu_{n_2-1})$  erfüllt.

Da gemäß Definition der  $\mathcal{D}_i$  auch  $d(\tilde{x}_2, S_{<n_2}) \geq \mu_{n_2-1}$  gilt, erhalten wir (im parabolischen und hyperbolischen Fall gemeinsam) mit Lemma 3.40 wiederum  $Y_2 \subseteq Y_1$ , die Behauptung.

- Sei nun andererseits angenommen,  $\tilde{x}_1$  wäre weiter vom dünnen Teil entfernt als  $\tilde{x}_2$ . Damit gilt für die Vergleichskugel  $U'_1$  von  $U_1$  auf der Höhe von  $\tilde{x}_2$  also  $3\mu'_1 \leq 3\mu_{n_1}$ , wobei  $B_{3\mu'_1}^X(\tilde{x}'_1)$  die

Anfangskugel von  $U'_1$  bezeichne (beachte  $\tilde{x}'_1 \in Y_1$ , wie oben). Mit Lemma 3.34 bzw. 3.37 erhalten wir unter Ausnutzung von  $3\mu_{n_1} \leq 3\mu_{n_2}$  nun

$$d(\tilde{x}'_1, \tilde{x}_2) < 2 \cdot 3\mu'_{n_1} + 2 \cdot 3\mu_{n_2} \leq 12\mu_{n_2}.$$

Aufgrund von  $12\mu_{n_2} \leq \varepsilon_2(\mu_{n_2-1})$  und  $d(\tilde{x}_2, S_{<n_2}) \geq \mu_{n_2-1}$  folgt mit Lemma 3.40 erneut  $Y_2 \subseteq Y_1$ , was zu zeigen war.

□

Unsere Konstruktion stellt sicher, dass wir sowohl die Anzahl an Überdeckungsmengen in  $\mathcal{B}$  als auch die Anzahl nichtleerer Schnitte von Mengen aus  $\mathcal{B}$  geeignet kontrollieren können.

**Lemma 3.50.** *Es existieren Konstanten  $C = C(n, \eta), D = D(n, \nu) > 0$ , sodass gilt:*

1. *Die Anzahl an Überdeckungsmengen in  $\mathcal{B}$  ist durch  $C \cdot \text{Vol}(M)$  beschränkt, d.h.  $|\mathcal{B}| \leq C \cdot \text{Vol}(M)$ .*
2. *Eine beliebige Menge aus  $\mathcal{B}$  schneidet höchstens  $D$  übrige Mengen aus  $\mathcal{B}$ . In Dimension  $n = 2$  ist  $D$  dabei nicht von  $\nu$  abhängig.*

*Alternativ lässt sich  $D$  trivialerweise stets durch  $C \cdot \text{Vol}(M)$  ersetzen<sup>20</sup>.*

*Beweis.* Der Beweis der ersten Aussage ist nahezu identisch mit [25] Beweis Theorem 4.2 Schritt 4), während für die zweite Aussage der dortige Schritt 5) zwar als Grundidee dient, wegen der Streckung einiger Kugeln in unserem Fall jedoch weitere Argumente erfordert.

1. Sei  $x \in \mathcal{D}_i$  gegeben und  $\tilde{x} \in X$  ein Lift, wobei nach Wahl der  $\mathcal{D}_i$  bereits  $\tilde{x} \in X_+$  gilt. Im Beweis von Lemma 3.48 haben wir gesehen, dass  $\tilde{x}$  von  $\Gamma_{24\mu_i}(\tilde{x})$  fixiert wird; da alle Elemente von  $\Gamma_{24\mu_i}(\tilde{x})$  also mindestens einen Fixpunkt – nämlich  $\tilde{x}$  – besitzen, sind sie alle elliptisch, womit  $\Gamma_{24\mu_i}(\tilde{x})$  bereits eine endliche Gruppe sein muss. Nach Definition von  $\eta$  ergibt sich nun

$$|\Gamma_{24\mu_i}(\tilde{x})| \leq \eta,$$

weshalb wir wegen  $\mu_n \leq \mu_i$  auf

$$|\Gamma_{\mu_n}(\tilde{x})| \leq |\Gamma_{24\mu_i}(\tilde{x})| \leq \eta$$

schließen. Nach Lemma 3.3 folgt die Existenz eines  $\tilde{y}$  mit  $d(\tilde{y}, \tilde{x}) < \mu_n/4$ , sodass

$$d_\Gamma(\tilde{y}) \geq \rho > 0,$$

wobei (da erneut ohne Einschränkung  $\eta \geq 2$ )

$$\rho = \frac{\mu_n}{2^\eta} \sin\left(\frac{\pi}{\eta}\right).$$

Nach Definition von  $d_\Gamma$  ist  $y_x := \pi(\tilde{y})$  (mit  $\pi : X \rightarrow X/\Gamma = M$  der Projektion) also im  $(\rho/2)$ -dicken Teil von  $M$  enthalten; beachte  $d(x, y_x) < \mu_n/4$ .

Wir halten fest, dass die Menge  $\mathcal{D}$  von (Anfangs-)Mittelpunkten der  $B \in \mathcal{B}$  nach Konstruktion  $\mu_n$ -diskret ist, d.h.  $d(x, x') \geq \mu_n$  für  $x, x' \in \mathcal{D}$ . Die zugehörigen Punkt  $y_x, y_{x'}$  (wie oben konstruiert) weisen folglich einen Abstand

$$d(y_x, y_{x'}) \geq d(x, x') - d(x, y_x) - d(x', y_{x'}) > \mu_n - \frac{\mu_n}{4} - \frac{\mu_n}{4} = \frac{\mu_n}{2} \geq \frac{\rho}{2}$$

<sup>20</sup>In diesem Fall tauschen wir also die Abhängigkeit von  $\nu$  gegen eine Abhängigkeit von  $\eta$  und  $\text{Vol}(M)$  ein.

auf. Somit ist die Menge  $\{y_x : x \in \mathcal{D}\}$  eine  $(\rho/2)$ -diskrete Teilmenge, welche (s.o.) im  $(\rho/2)$ -dicken Teil von  $M$  enthalten ist, weshalb sich

$$|\{y_x : x \in \mathcal{D}\}| \leq \frac{\rho}{4}\text{-ess-vol}(M)$$

ergibt, mit  $(\rho/4)$ -ess-vol( $M$ ) dem  $(\rho/4)$ -essentiellen Volumen wie in [25] Abschnitt 2.1.4. Mithilfe der dortigen Ungleichungen folgern wir

$$\frac{\rho}{4}\text{-ess-vol}(M) \leq \frac{\text{Vol}(M)}{V(\rho/4, n)},$$

wobei  $V(r, n)$  das Volumen einer Kugel von Radius  $r$  im hyperbolischen Raum  $\mathbb{H}^n$  bezeichne<sup>21</sup>. Da  $\{y_x : x \in \mathcal{D}\}$  die gleiche Kardinalität wie  $\mathcal{B}$  besitzt, erfüllt damit  $C := 1/V(\rho/4, n)$  die erste Behauptung; beachte, dass  $C$  lediglich von  $n$  und  $\eta$  abhängt, da  $\rho = \rho(n, \eta)$ .

2. Ersetzen wir alle parabolisch bzw. hyperbolisch gestreckten Kugeln in  $\mathcal{B}$  durch die sie enthaltenden gewöhnlichen Kugeln mit Radien  $R = R(n)$  bzw.  $R' = R'(n, \nu)$  wie aus Lemma 3.45, so ist offensichtlich, dass eine Schranke an die Anzahl möglicher Schnitte dieser größeren, gewöhnlichen Kugeln bereits selbst eine solche gewünschte Schranke  $D$  ist. Definieren wir also

$$\varrho := \max\{R, R', \mu_{-1}\},$$

so ist dieses  $\varrho$  eine lediglich von  $n$  und  $\nu$  abhängige Konstante, welche eine obere Schranke an den Radius aller Elemente von  $\mathcal{B}$  darstellt (und in Dimension  $n = 2$  zudem nicht von  $\nu$  abhängt).

Der restliche Beweis ist nun ein Standardargument wie auch in [25] Beweis Theorem 4.2 Schritt 5). Sei also  $B \in \mathcal{B}$  mit (Anfangs-)Mittelpunkt  $y$  gegeben, und angenommen  $B$  weist einen nicht-leeren Schnitt mit den (gewöhnlichen oder gestreckten) Kugeln  $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}$  mit (Anfangs-)Mittelpunkten  $y_1, \dots, y_k$  auf. Nach Wahl von  $\varrho$  erhalten wir bereits  $d(y, y_j) < 2\varrho$  für alle  $j = 1, \dots, k$ ; entsprechend existieren Lifts  $x, x_1, \dots, x_k \in X$  von  $y, y_1, \dots, y_k$ , sodass  $d(x, x_j) < 2\varrho$  für alle  $j = 1, \dots, k$ .

Nach Definition von  $\mathcal{D}$  bilden die  $x, x_1, \dots, x_k$  eine  $\mu_n$ -diskrete Menge, welche gemäß obiger Betrachtungen zudem in der  $2\varrho$ -Kugel um  $x$  enthalten ist; folglich sind die Kugeln von Radius  $\mu_n/2$  um die  $x, x_1, \dots, x_k$  paarweise disjunkt und in  $B_{2\varrho + \mu_n/2}^X(x)$  enthalten. Bezeichnet  $V(r, n)$  erneut das Volumen einer Radius- $r$ -Kugel in  $\mathbb{H}^n$ , so erhalten wir also (vgl. auch Lemma 1.6)

$$k + 1 \leq \frac{V(2\varrho + \mu_n/2, n)}{V(\mu_n/2, n)} =: D.$$

Dieses  $D$  ist damit eine nur von  $\varrho$  und  $n$  – also nur von  $n$  und  $\nu$  – abhängige Konstante, welche unsere Behauptung erfüllt; erneut ist in Dimension  $n = 2$  keine Abhängigkeit von  $\nu$  gegeben, da auch  $\varrho$  dort nicht von  $\nu$  abhängig war.

□

### 3.3.4 Hauptresultat

In den nächsten Aussagen werden wir den Schritt von der obigen Überdeckung hin zum gewünschten Simplizialkomplex vollziehen; dies hat dann das spätere Hauptresultat zur Folge.

<sup>21</sup>In [25] musste wegen der variablen Krümmung das euklidische Volumen verwendet werden; da bei uns konstante Krümmung vorliegt und das hyperbolische Volumen stets größer als das euklidische Volumen ist, konnten wir die Ungleichung durch Übergang zum hyperbolischen Volumen also verschärfen.



$$\begin{array}{ccc} \partial M_+ & \xrightarrow{\cong} & \partial M_+'' \\ \downarrow & & \downarrow \\ M_+ & \xrightarrow{\cong} & M_+'' \end{array}$$

Ferner ist  $N_+$  stabil unter diesem Fluss (siehe auch Lemma 3.47); selbiges gilt nach Wahl der Schrumpfung  $3\mu_{-1}/4$  auch für  $N_0$  (s.o.). Bezeichnen wir mit  $N_+'$  und  $N_0'$  die Bilder von  $N_+$  und  $N_0$  unter diesem Fluss bis auf die Höhe von  $\partial M_+''$ , so ergibt sich ebenfalls ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} N_0 & \xrightarrow{\cong} & N_0' \\ \downarrow & & \downarrow \\ N_+ & \xrightarrow{\cong} & N_+' \end{array}$$

Beachte außerdem  $N_+' = M_+''$ . Andererseits sind  $N_+'$  und  $N_0'$  nach Konstruktion der gestreckten Kugeln auch stabil unter dem Fluss nach  $\partial M_+''$  in entgegengesetzter Richtung, d.h. in Richtung des dünnen Teils  $M_-$ ; dies liefert uns eine Homotopieäquivalenz  $N_+' \simeq M_+''$ , welche außerdem eine Homotopieäquivalenz  $N_0' \simeq \partial M_+''$  induziert.

Genauer bezeichne  $c_x$  die Flussgeodätische ab einem Punkt  $x \in \partial M_+'$  (beachte, dass  $N_0' \subseteq N_+' \setminus M_+'$  nach Definition von  $M_+'$  und Wahl der gestreckten Kugeln). Wie üblich genügt es, die Homotopieäquivalenz in der Nähe der verschiedenen Zusammenhangskomponenten des dünnen Teils separat anzugeben. Beachte, dass nach Wahl der gestreckten Kugeln jeder Punkt einer gestreckten Kugel einen Abstand  $> \mu_n$  zu  $M_+'$  aufweist; folglich besitzen auch alle Punkte aus  $N_0'$  einen Abstand  $> \mu_n$  zu  $M_+'$ . Die Idee für die Homotopieäquivalenz  $N_+' \simeq M_+''$ , welche die Homotopieäquivalenz  $N_0' \simeq \partial M_+''$  induzieren soll, lautet nun, den Teil von  $N_+'$ , welcher erst nach  $> \mu_n$  Zeiteinheiten von  $\partial M_+'$  aus erreicht wird – und damit insbesondere auch  $N_0'$ , welches (stabil unter diesem Fluss) in dieser Menge enthalten ist –, entlang des Flusses in Richtung des dünnen Teils auf  $\partial M_+''$  zu retrahieren; der Bereich von  $N_+' \setminus M_+'$ , welcher nach  $\leq \mu_n$  Zeiteinheiten von  $\partial M_+'$  aus erreicht wird, wird auf das gesamte Stück zwischen  $\partial M_+'$  und  $\partial M_+''$  verteilt; und die übrigen Punkte in  $M_+'$  werden konstant gelassen.

Ist  $y \in N_+'$  gegeben, so existiert ein eindeutiges  $x \in \partial M_+'$  und ein  $t_y \geq 0$ , sodass  $y = c_x(t_y)$  (hierbei ist  $c_x$  nach Bogenlänge parametrisiert mit  $c_x(0) = x$  und Flussrichtung hin zum dünnen Teil  $M_-$ ). Bezeichne  $T_x$  die Eintrittszeit von  $c_x$  in  $\partial M_+''$ ; analog zum Fall von Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeiten (siehe z.B. Lemma 2.18) sind  $t_y$  und  $T_x$  stetige Funktionen (in  $y$  bzw.  $x$ ). Die gewünschte Homotopieäquivalenz ist nun durch

$$(y, t) \mapsto c_x \left( (1-t) \cdot t_y + t \cdot T_x \cdot \left( 1 - \frac{\mu_n - \min(t_y, \mu_n)}{\mu_n} \right) \right)$$

für Punkte  $y \in N_+' \setminus M_+'$  (und wie üblich  $t \in [0, 1]$ ) gegeben; Punkte in  $M_+'$  werden konstant gelassen. Die Stetigkeit ergibt sich dabei anhand der Stetigkeit der Zuordnung von  $y$  zum zugehörigen Punkt  $x \in \partial M_+'$  sowie der genannten Stetigkeit von  $t_y$  und  $T_x$ .

Wir prüfen der Vollständigkeit halber nach: Ist  $y$  mit  $y = c_x(t_y)$  gegeben und gilt  $t_y > \mu_n$ , so ergibt sich in obiger Formel wegen  $\min(t_y, \mu_n) = \mu_n$  nun als Bild  $c_x((1-t) \cdot t_y + t \cdot T_x)$ , also für  $t = 0$  gerade  $c_x(t_y) = y$  und für  $t = 1$  entsprechend  $c_x(T_x) \in \partial M_+''$ . Gilt andererseits  $t_y < \mu_n$ , so erhalten wir gemäß  $\min(t_y, \mu_n) = t_y$  das Bild

$$c_x \left( (1-t) \cdot t_y + t \cdot T_x \cdot \left( 1 - \frac{\mu_n - t_y}{\mu_n} \right) \right),$$

also für  $t = 0$

$$c_x(t_y) = y$$

sowie für  $t = 1$

$$c_x \left( T_x \cdot \left( 1 - \frac{\mu_n - t_y}{\mu_n} \right) \right) = c_x \left( T_x \cdot \frac{t_y}{\mu_n} \right),$$

wie behauptet.

Mit obiger Homotopieäquivalenz ergibt sich also das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} N'_0 & \xrightarrow{\cong} & \partial M''_+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ N'_+ & \xrightarrow{\cong} & M''_+. \end{array}$$

Das gewünschte Diagramm aus der Behauptung erhalten wir durch Zusammenfügen obiger Diagramme, wobei – wenn nötig – für die horizontalen Abbildungen zu den jeweiligen Homotopieinversen übergegangen werden kann.  $\square$

Wir haben nun alle Werkzeuge zum Beweis des Hauptresultats zur Hand.

**Lemma 3.52.**  $(M_+, \partial M_+)$  ist als Paar homotopieäquivalent zu  $(N(\mathcal{B}), N(\mathcal{B}_g))$ .

*Beweis.* Der Beweis entspricht der Argumentation aus Beweisschritt 4 von [2] Theorem 3.1. Wir werden ihn der Vollständigkeit halber dennoch wiederholen, auch da wir bei der analogen Aussage im Falle von Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeiten (Lemma 2.26) schon darauf verzichtet hatten.

Mittels der Lemmata 3.48 und 3.49 schließen wir, dass die (offenen) Überdeckungen von  $N_+$  bzw.  $N_0$  durch  $\mathcal{B}$  bzw.  $\mathcal{B}_g$  gut sind. Unter Ausnutzung von Lemma 1.39 erhalten wir somit ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} N_0 & \xleftarrow{\cong} & (N_0)_{\mathcal{B}_g} & \xrightarrow{\cong} & N(\mathcal{B}_g) \\ \downarrow j & & \downarrow k & & \downarrow \\ N_+ & \xleftarrow[\cong]{G} & (N_+)_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{\cong} & N(\mathcal{B}), \end{array}$$

wobei die vertikalen Abbildungen durch die jeweiligen Inklusionen gegeben sind. Durch linksseitiges Anfügen des Diagramms aus Lemma 3.51 ergibt sich wiederum das kommutative Diagramm<sup>22</sup>

$$\begin{array}{ccccccc} \partial M_+ & \xrightarrow{\cong} & N_0 & \xleftarrow{\cong} & (N_0)_{\mathcal{B}_g} & \xrightarrow{\cong} & N(\mathcal{B}_g) \\ \downarrow & & \downarrow j & & \downarrow k & & \downarrow \\ M_+ & \xrightarrow[\cong]{F} & N_+ & \xleftarrow[\cong]{G} & (N_+)_{\mathcal{B}} & \xrightarrow{\cong} & N(\mathcal{B}). \end{array} \quad (*)$$

Die äußeren vertikalen Abbildungen sind Kofaserungen, da  $\partial M_+ \hookrightarrow M_+$  die Inklusion des Randes ist sowie  $N(\mathcal{B}_g) \hookrightarrow N(\mathcal{B})$  die Inklusion eines Unterkomplexes.

Faktorisieren nun  $j$  mittels seines Abbildungszyklinders  $\text{cyl}(j)$  in die Komposition einer Kofaserung  $j'$  und einer Homotopieäquivalenz  $r$ , d.h.

$$j : N_0 \xrightarrow{j'} \text{cyl}(j) \xrightarrow{r} N_+,$$

und wähle ein Homotopieinverses  $r' : N_+ \rightarrow \text{cyl}(j)$  zu  $r$ . Die Verknüpfung der Abbildungen  $j$  und  $F$  des linken Quadrats aus Diagramm (\*) mit der Abbildung  $r'$  ergibt das – lediglich bis auf Homotopie kommutierende – Diagramm

<sup>22</sup>Dieses Diagramm übernimmt die Rolle von Diagramm (11) aus dem Beweisschritt 4 von [2] Theorem 3.1. Die zweite Spalte des dortigen Diagramm (11) – deren Entsprechung bei uns fehlt – wird im Beweis nicht weiter benötigt, sondern lediglich zur Konstruktion eines Diagramms ausgenutzt, welches dem aus unserem Lemma 3.51 entspricht.

$$\begin{array}{ccc} \partial M_+ & \xrightarrow{\cong} & N_0 \\ \downarrow & & \downarrow j' \\ M_+ & \xrightarrow[r' \circ F]{\cong} & \text{cyl}(j). \end{array}$$

Nach Anwendung von Lemma 1.41 erhalten wir eine Homotopieäquivalenz  $F' : M_+ \rightarrow \text{cyl}(j)$ , sodass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \partial M_+ & \xrightarrow{\cong} & N_0 \\ \downarrow & & \downarrow j' \\ M_+ & \xrightarrow[F']{\cong} & \text{cyl}(j), \end{array}$$

echt kommutiert sowie ferner die Voraussetzungen von Lemma 1.40 erfüllt, womit wir auf eine Homotopieäquivalenz

$$(M_+, \partial M_+) \simeq (\text{cyl}(j), N_0)$$

von Raumpaaren schließen.

Entsprechend faktorisieren wir die Abbildung  $k$  aus Diagramm (\*) gemäß

$$k : (N_0)_{\mathcal{B}_g} \xrightarrow{k'} \text{cyl}(k) \xrightarrow{s} (N_+)_{\mathcal{B}}$$

in eine Kofaserung  $k'$  und eine Homotopieäquivalenz  $s$ . Betrachte nun das mittlere Quadrat aus Diagramm (\*); der Übergang von der Abbildung  $G$  zu  $r' \circ G \circ s$  führt zum Diagramm

$$\begin{array}{ccc} N_0 & \xleftarrow{\cong} & (N_0)_{\mathcal{B}_g}, \\ \downarrow j' & & \downarrow k' \\ \text{cyl}(j) & \xleftarrow[r' \circ G \circ s]{\cong} & \text{cyl}(k), \end{array}$$

welches erneut nur bis auf Homotopie kommutiert. Vollkommen analog zur vorigen Argumentation können wir mithilfe von Lemma 1.41 zu einem echt kommutierenden Diagramm übergehen und anschließend mittels Lemma 1.40 die Homotopieäquivalenz

$$(\text{cyl}(j), N_0) \simeq (\text{cyl}(k), (N_0)_{\mathcal{B}_g})$$

von Raumpaaren folgern.

Unter Ausnutzung der Faktorisierung  $k = s \circ k'$  erhalten wir aus dem rechten Quadrat von Diagramm (\*) das kommutierende Diagramm

$$\begin{array}{ccc} (N_0)_{\mathcal{B}_g} & \xrightarrow{\cong} & N(\mathcal{B}_g) \\ \downarrow k' & & \downarrow \\ \text{cyl}(k) & \xrightarrow{\cong} & N(\mathcal{B}), \end{array}$$

welches wiederum unter Ausnutzung von Lemma 1.40 die Homotopieäquivalenz

$$(\text{cyl}(k), (N_0)_{\mathcal{B}_g}) \simeq (N(\mathcal{B}), N(\mathcal{B}_g))$$

von Raumpaaren nach sich zieht.

Die Behauptung ergibt sich nun durch Komposition der obigen Homotopieäquivalenzen von Raumpaaren:

$$(M_+, \partial M_+) \simeq (\text{cyl}(j), N_0) \simeq (\text{cyl}(k), (N_0)_{\mathcal{B}_g}) \simeq (N(\mathcal{B}), N(\mathcal{B}_g)).$$

□

Selbstverständlich steht und fällt der Nutzen des vorangegangenen Lemmas 3.52 damit, inwiefern die Komplexität des simplizialen Paares  $(N(\mathcal{B}), N(\mathcal{B}_g))$  überhaupt kontrolliert werden kann. An dieser Stelle werden die Aussagen aus Lemma 3.50 zentral, in welchem wir die Anzahl und den Schnittgrad der Überdeckungsmengen aus  $\mathcal{B}$  begrenzten. Bevor wir diese Aussagen in der endgültigen Form des Hauptresultats zusammenfassen, stellen wir eine Situation vor, in welcher diese Komplexitätsschranken besonders schön gewählt werden können; denn während im allgemeinen Fall gemäß Lemma 3.50 zusätzliche Abhängigkeiten von  $\eta$  (der oberen Schranke an die Ordnung endlicher Untergruppen von  $\Gamma$ ) und  $\nu$  (der unteren Schranke an die minimale Verschiebung hyperbolischer Elemente aus  $\Gamma$ ) vorliegen, vereinfacht sich dies im arithmetischen, nicht-uniformen Fall dahingehend, dass lediglich die Abhängigkeit von der Dimension  $n$  bestehen bleibt.

**Lemma 3.53.** *Bezeichnet  $\mathfrak{A}_n$  die Klasse der arithmetischen, nicht-uniformen Gitter in  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ , so gilt:*

1. *Es existiert eine nur von der Dimension  $n$  abhängige Konstante  $\eta = \eta(n) \in \mathbb{N}$ , sodass für alle  $\Gamma \in \mathfrak{A}_n$  die Ordnung jeder endlichen Untergruppe  $G$  von  $\Gamma$  stets durch  $\eta$  beschränkt ist, d.h.  $|G| \leq \eta$ .*
2. *Es existiert eine nur von der Dimension  $n$  abhängige Konstante  $\nu = \nu(n) > 0$ , sodass für alle  $\Gamma \in \mathfrak{A}_n$  und jedes hyperbolische  $\gamma \in \Gamma$  die minimale Verschiebung von  $\gamma$  mindestens  $\nu$  beträgt, d.h.  $d_\gamma(x) \geq \nu$  für alle  $x \in \mathbb{H}^n$ .*

*Beweis.* 1. Wir haben diese Aussage bereits in Bemerkung 3.2 begründet; sie ist eine direkte Folgerung aus [17] Lemma 13.1, welches für unsere Situation aussagt, dass eine lediglich von der Dimension  $n$  abhängige Konstante  $i = i(n) \in \mathbb{N}$  existiert, sodass jedes  $\Gamma \in \mathfrak{A}_n$  eine torsionsfreie Untergruppe von Index höchstens  $i$  besitzt („Effektives Lemma von Selberg“). Dieses  $i$  dient nun gleichzeitig als Wert für  $\eta$ , d.h.  $\eta := i$ .

2. Sei  $\Gamma \in \mathfrak{A}_n$  und  $\gamma \in \Gamma$  eine hyperbolische Isometrie mit minimaler Verschiebung  $\lambda > 0$ . Wie bereits im Beweis des vorigen Punkts erwähnt, existiert eine torsionsfreie Untergruppe  $\Gamma' < \Gamma$  von Index höchstens  $i = i(n)$ . Beachte, dass  $\Gamma'$  damit ein torsionsfreies, arithmetisches, nicht-uniformes Gitter in  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  ist. Ferner gilt  $\gamma^{i!} \in \Gamma'$ , wobei  $\gamma^{i!}$  selbst hyperbolisch mit minimaler Verschiebung  $\lambda \cdot i!$  ist.

Gemäß [17] Remark 5.7 existiert ein nur von der Dimension  $n$  abhängiges  $\varepsilon' = \varepsilon'(n)$ , sodass die minimale Verschiebung von  $\gamma^{i!}$  mindestens  $\varepsilon'$  beträgt, d.h.  $\lambda \cdot i! \geq \varepsilon'$  (um die Ergebnisse aus [17] Kapitel 5 nutzen zu können, mussten wir zur torsionsfreien Untergruppe  $\Gamma'$  übergehen). Folglich stellt

$$\nu := \frac{\varepsilon'}{i!}$$

die gewünschte, lediglich von  $n$  abhängige untere Schranke an die minimale Verschiebung von  $\gamma$  dar.

□

**Bemerkung 3.54.** Die Anwendung des vorangegangenen Lemmas wird uns ermöglichen, die bestmöglichen Aussagen für den Fall von arithmetischen, nicht-uniformen Gittern zu treffen. Eine naheliegende Frage besteht deshalb darin, wie allgemein diese Klasse bereits ist: Die Antwort lautet bedauerlicherweise, dass der arithmetische Fall weit davon entfernt ist, generisch zu sein. Während für symmetrische Räume von höherem Rang nach einem Satz von Margulis alle Gitter bereits arithmetisch sind, schlägt dies insbesondere für den reell-hyperbolischen Raum  $\mathbb{H}^n$  fehl. Ersichtlich wird dies beispielsweise in der Arbeit [18] (wenn auch nur für den torsionsfreien Fall), in welcher gezeigt wird, dass die Anzahl an hyperbolischen

Mannigfaltigkeiten (bis auf Kommensurabilität) mit Volumen höchstens  $V$  wie  $V^V$  wächst, während die entsprechende Anzahl arithmetischer hyperbolischer Mannigfaltigkeiten lediglich polynomiell in  $V$  steigt.

Doch auch wenn in diesem Sinne ein Großteil der Gitter in  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  nicht arithmetisch ist, stellen die arithmetischen Gitter selbst nach wie vor eine weite Klasse von Beispielen dar, welchen großes Interesse entgegengebracht wird. In Dimension  $n = 3$  wird dies anhand der bekannten Bianchi-Orbifaltigkeiten besonders deutlich. Tatsächlich ist es sogar so, dass jedes arithmetische, nicht-uniforme Gitter in  $\text{Isom}(\mathbb{H}^3)$  (schwach) kommensurabel zu einer Bianchi-Gruppe ist (vgl. [23] Theorem 8.2.3); geometrisch interpretiert bedeutet dies, dass jede arithmetische, nicht-kompakte hyperbolische 3-Orbifaltigkeit eine gemeinsame endliche (Orbifaltigkeits-)Überlagerung mit einer Bianchi-Orbifaltigkeit besitzt.  $\blacklozenge$

Wir sind nun in der Lage, das Hauptresultat in seiner allgemeinen Form wiederzugeben; an dieser Stelle sei daran erinnert, dass wir ein Raumpaars  $(S, S')$  bestehend aus einem Simplizialkomplex  $S$  und einem (womöglich leeren) Unterkomplex  $S' \subseteq S$  als  $(A, B)$ -simpliziales Paar bezeichnen, falls die Anzahl an Ecken in  $S$  höchstens  $B$  beträgt und der Grad jeder Ecke von  $S$  durch  $A$  beschränkt ist.

**Satz 3.55.** *Sei wie üblich  $n$  die Dimension von  $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ ,  $\eta \in \mathbb{N}$  eine obere Schranke an die Ordnung endlicher Untergruppen von  $\Gamma$  (d.h.  $|G| \leq \eta$  für alle endlichen  $G < \Gamma$ ) sowie  $\nu > 0$  eine untere Schranke an die minimale Verschiebung hyperbolischer Elemente aus  $\Gamma$  (d.h.  $d_\gamma(x) \geq \nu$  für alle hyperbolischen  $\gamma \in \Gamma$  und alle  $x \in \mathbb{H}^n$ ).*

*Dann ist  $(M_+, \partial M_+)$  als Paar homotopieäquivalent zu einem  $(D, C \cdot \text{Vol}(M))$ -simplizialen Paar, wobei gilt:*

1. *Die Konstante  $C = C(n, \eta)$  hängt nur von  $n$  und  $\eta$  ab, während die Konstante  $D = D(n, \nu)$  lediglich von  $n$  und  $\nu$  abhängt.*
2. *Alternativ kann  $D$  trivialerweise durch  $C \cdot \text{Vol}(M)$  ersetzt werden, womit wir die Abhängigkeit von  $\nu$  gegen eine Abhängigkeit von  $\eta$  und  $\text{Vol}(M)$  eintauschen.*
3. *In Dimension  $n = 2$  ist  $D$  nicht von  $\nu$  abhängig.*
4. *Schränken wir uns auf die Klasse  $\mathfrak{A}_n$  arithmetischer, nicht-uniformer Gitter in  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  ein (also  $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$  für ein  $\Gamma \in \mathfrak{A}_n$ ), so sind die Konstanten  $C$  und  $D$  nur noch von  $n$  abhängig, d.h.  $C = C(n)$ ,  $D = D(n)$ ; insbesondere liegt keine Abhängigkeit von  $\eta$  oder  $\nu$  mehr vor.*

*Beweis.* Die Homotopieäquivalenz zu einem geeigneten simplizialen Paar – in unserer Situation durch  $(N(\mathcal{B}), N(\mathcal{B}_g))$  gegeben – ist in Lemma 3.52 enthalten; hierbei sind die Konstanten des simplizialen Paares  $(N(\mathcal{B}), N(\mathcal{B}_g))$  (also Anzahl an Ecken und Grad der Ecken) gemäß Lemma 3.50 unter Kontrolle. Der Spezialfall arithmetischer, nicht-uniformer Gitter wurde wiederum in Lemma 3.53 behandelt.  $\square$

Setzen wir ohnehin eine untere Schranke  $\nu$  an die Verschiebung hyperbolischer Elemente voraus, so besteht eine naheliegende Alternative zu unserem bisherigen Ansatz darin, den dicken Teil  $M_+$  bereits von Anfang an so zu definieren, dass alle vormals im dünnen Teil  $M_-$  liegenden Röhren sich nun im dicken Teil befinden. Folglich bestünde  $M_-$  lediglich aus Spitzen, welche sich aber bekanntlich auf ihren gemeinsamen Rand mit  $M_+$  retrahieren lassen; entsprechend erhielten wir eine Homotopieäquivalenz  $M \simeq M_+$ . Der Vorteil dieser Konstruktion wird später offensichtlich: Beim Vorliegen von Röhren im dünnen Teil waren wir nicht in der Lage, eine Schranke an die Torsion in  $H_1(M; \mathbb{Z})$  zu konstruieren (vgl. Beweis von Satz 3.60); diese Lücke wird also durch den alternativen Ansatz geschlossen. Leider wird im neuen Ansatz eine zusätzliche Abhängigkeit der Konstante  $C$  von der Schranke  $\nu$  induziert. Einen Sonderfall stellt die Situation in Dimension  $n = 2$  dar: Während in der obigen Fassung des Hauptresultats (Satz 3.55) keine

Abhängigkeit von  $\nu$  vorlag, erscheint es zunächst als Nachteil, dass wir diese im alternativen Ansatz nun doch neu einführen; dies nehmen wir dennoch in Kauf, um – wie bereits beschrieben – durch Verschieben der Röhren in den dicken Teil eine spätere Aussage für die Torsion in  $H_1(M; \mathbb{Z})$  zu ermöglichen.

Das Hauptresultat ergibt sich unter dem neuen Ansatz in der folgenden Form.

**Satz 3.56.** *Definieren wir alternativ den dicken Teil  $M_+$  mithilfe von  $\min(\varepsilon(n), \nu)$  anstelle von  $\varepsilon(n)$ , so enthält der entsprechende dünne Teil  $M_-$  keine Röhren mehr, weshalb insbesondere  $M \simeq M_+$  folgt.*

*Ferner erhalten wir, dass  $(M_+, \partial M_+)$  als Paar homotopieäquivalent zu einem  $(D, C \cdot \text{Vol}(M))$ -simplicialen Paar ist, wobei gilt:*

1. *Die Konstante  $C = C(n, \eta, \nu)$  hängt nur von  $n$ ,  $\eta$  und  $\nu$  ab, während die Konstante  $D = D(n, \nu)$  lediglich von  $n$  und  $\nu$  abhängt.*
2. *Schränken wir uns auf die Klasse  $\mathfrak{A}_n$  arithmetischer, nicht-uniformer Gitter in  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  ein (also  $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$  für ein  $\Gamma \in \mathfrak{A}_n$ ), so sind die Konstanten  $C$  und  $D$  nur noch von  $n$  abhängig, d.h.  $C = C(n)$ ,  $D = D(n)$ ; insbesondere liegt keine Abhängigkeit von  $\eta$  oder  $\nu$  mehr vor.*

*Hierbei sind  $n$ ,  $\eta$  und  $\nu$  wie in Satz 3.55 definiert.*

*Beweis.* Da nach unserer Definition des dünnen Teils  $X_-$  von  $X$  dieser nur aus Subniveaumengen hyperbolischer und parabolischer Isometrien bestehen kann, liegen tatsächlich keine Röhren vor, denn für Niveaus  $< \nu$  sind die hyperbolischen Subniveaumengen gemäß Definition von  $\nu$  leer<sup>23</sup>.

Alle Konstanten, welche vorher mittels  $\varepsilon(n)$  definiert wurden – und somit lediglich von  $n$  abhingen –, erhalten nun wegen des Ersetzens von  $\varepsilon(n)$  durch  $\min(\varepsilon(n), \nu)$  eine zusätzliche Abhängigkeit von  $\nu$ . Dies gilt insbesondere für  $\mu_{-1}$  und damit für die Anzahl der Überdeckungsmengen wie in Lemma 3.50 angegeben.

Der arithmetische, nicht-uniforme Fall ergibt sich entsprechend dem Beweis der vorigen Fassung des Hauptresultats, Satz 3.55. □

**Bemerkung 3.57.** Der wesentliche Fortschritt des obigen Hauptresultats Satz 3.55 bzw. 3.56 gegenüber schon bekannten Aussagen liegt hauptsächlich darin, auch im Falle nicht-kompakter Orbifaltigkeiten eine Homotopieäquivalenz (des dicken Teils) zu einem beschränkt komplizierten Simplicialkomplex zu ermöglichen; denn für den kompakten Fall sind – bei Vorliegen unserer Voraussetzungen an  $\eta$  und  $\nu$  – ähnliche Ergebnisse bereits in der Literatur vorhanden.

So erinnern wir zunächst daran, dass bei unserer Form der Dick-dünn-Zerlegung der dünne Teil ausschließlich aus Subniveaumengen (bzw. deren Bild unter  $\pi : X \rightarrow X/\Gamma = M$ ) hyperbolischer und parabolischer Isometrien besteht, während elliptische Isometrien hingegen keine Rolle spielen. Kompakte Orbifaltigkeiten  $M = X/\Gamma$  enthalten keine Spitzen (bzw. äquivalent:  $\Gamma$  enthält keine parabolischen Isometrien); ebenso können wir unter Voraussetzung der unteren Schranke  $\nu$  an die minimale Verschiebung hyperbolischer Elemente sicherstellen, dass der dünne Teil keine Röhren enthält (bzw. äquivalent: Subniveaumengen hyperbolischer Isometrien aus  $\Gamma$  sind leer). Folglich liegen weder Spitzen noch Röhren vor, womit der dünne Teil bereits leer ist, und folglich  $M$  mit dem dicken Teil übereinstimmt. Da  $\eta$  als globale Schranke an die Ordnung endlicher Untergruppen dient, fällt der mittels  $\eta$  definierte quasidicke Teil dann mit dem gewöhnlichen dicken Teil zusammen; folglich würde die gute Überdeckung<sup>24</sup> aus [25]

<sup>23</sup>Beachte, dass wir im alten Ansatz die Niveaus stets  $\leq \varepsilon(n)/2$  gewählt hatten, weshalb die Niveaus im neuen Ansatz ebenfalls  $\leq \min(\varepsilon(n), \nu)/2$ , also insbesondere  $\leq \nu/2 < \nu$ , sind.

<sup>24</sup>Wir weisen darauf hin, dass die Überdeckung  $\mathcal{B}$  aus [25] im allgemeinen Fall keine Homotopieäquivalenz des (quasi-)dicken Teils zu einem beschränkt komplizierten Simplicialkomplex nach sich zieht: Zwar ist  $\mathcal{B}$  eine gute Überdeckung für  $\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ , jedoch zunächst nicht für  $O_{\geq \varepsilon, m} \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$  (in der Notation von [25]), da die Überdeckungsmengen aus  $\mathcal{B}$  in der Regel keine Teilmengen des quasidicken Teils  $O_{\geq \varepsilon, m}$  sind.

Theorem 4.2 bereits die Homotopieäquivalenz von  $M$  zu einem  $(D, C \cdot \text{Vol}(M))$ -Simplizialkomplex mit  $C = C(n, \eta, \nu)$  und  $D = D(n, \nu)$  implizieren.

Eine analoge Aussage ist für den kompakten Fall auch in [1] Lemma 4 enthalten; wie bei uns wird dort eine obere Schranke an die Ordnung endlicher Untergruppen sowie eine untere Schranke an die minimale Verschiebung hyperbolischer Isometrien aus  $\Gamma$  vorausgesetzt (unsere  $\eta$  und  $\nu$  entsprechen den dortigen  $q$  und  $r$ ). Die Aussage in [1] ist ferner in der Hinsicht stärker, als dass sogar ein Homöomorphismus zum beschränkt komplizierten Simplizialkomplex vorliegt sowie die genaue Abhängigkeit der Konstanten des Simplizialkomplexes von den Schranken  $\eta$  und  $\nu$  (bzw. dort:  $q$  und  $r$ ) erheblich einfacher ist.

Neben der Tatsache, dass unsere Resultate auch für den nicht-kompakten Fall erstmalig Aussagen ermöglichen, ist als weiterer – wenn auch kleiner – Vorteil anzugeben, dass in bestimmten Spezialfällen die Abhängigkeit von  $\nu$  eliminiert werden konnte (wie z.B. in Punkt 2. und 3. von Satz 3.55 zu sehen). ♦

**Bemerkung 3.58.** Es liegt nahe, die genaue Abhängigkeit der Konstanten  $C$  und  $D$  aus Satz 3.55 bzw. 3.56 von  $\eta$  und  $\nu$  näher zu untersuchen; wirkt sich eine Änderung in  $\eta$  beispielsweise linear, polynomiell, exponentiell oder gänzlich anders auf den konkreten Wert von  $C$  aus? Wir erinnern daran, dass gemäß der dortigen Beweise (siehe auch Lemma 3.50)

$$C = \frac{1}{V(\rho/4, n)}$$

mit

$$\rho = \frac{\mu_n}{2^\eta} \sin\left(\frac{\pi}{\eta}\right)$$

gilt, wobei  $V(r, n)$  das Volumen einer Radius- $r$ -Kugel in  $\mathbb{H}^n$  bezeichnet. Dabei ist  $\mu_n$  in Satz 3.55 lediglich von  $n$  abhängig, in der Situation von Satz 3.56 hingegen zusätzlich noch von  $\nu$ .

Der genaue Effekt einer Änderung in  $\nu$  hinsichtlich der Konstanten in Satz 3.56 scheint dabei schwer greifbar zu sein. Da  $\nu$  dort über die Wahl der Konstante des dicken Teils eingeht, bestimmt es auch die anfängliche Definition von  $\mu_{-1}$ ; entsprechend wäre die Auswirkung während der iterativen Definition der  $\mu_i$  von  $\mu_{-1}$  hin zu  $\mu_n$  nachzuvollziehen. Dies wird zusätzlich dadurch erschwert, dass für die in der iterativen Definition verwendeten Konstanten  $\varepsilon_2(\cdot)$  und  $\varepsilon_3(\cdot)$  aus Lemma 3.40 bzw. 3.41 keine genauen Formeln vorliegen, diese also zunächst auch noch zu bestimmen wären.

Einfacher hingegen gestaltet sich die Situation bezüglich  $\eta$ . Gemäß [24] Exercise 3.4.6 ist  $V(r, n)$  gegeben durch

$$V(r, n) = \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \cdot \int_0^r \sinh^{n-1}(x) dx,$$

mit  $\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})$  dem Volumen der  $(n-1)$ -dimensionalen Standardsphäre. Nun beachte, dass für  $x \geq 0$  bereits

$$\sinh(x) \geq x$$

gilt<sup>25</sup>. Entsprechend ergibt sich

$$\int_0^r \sinh^{n-1}(x) dx \geq \int_0^r x^{n-1} dx = \frac{r^n}{n},$$

<sup>25</sup>Denn die auf  $[0, \infty)$  konvexe Funktion  $x \mapsto \sinh(x)$  verläuft auf  $[0, \infty)$  oberhalb ihrer an 0 anliegenden Tangente  $x \mapsto x$ . Beachte außerdem, dass für uns lediglich kleine Werte von  $r$  in obigem Integral relevant sind, da auch die bei uns betrachteten Radien – allen voran  $\rho$  bzw.  $\rho/4$  – selbst klein sind. Insbesondere wird deutlich, dass auch durch eine schärfere Abschätzung als  $\sinh(x) \geq x$  keine wesentliche Verbesserung zu erwarten ist: So ist beispielsweise für  $x \in [0, 2]$  schon  $x \leq \sinh(x) \leq 2x$  erfüllt, weshalb für solch kleine Werte von  $x$  das Wachstum von  $\sinh(x)$  durch lineare Schranken kontrolliert wird.

also

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{V(\rho/4, n)} \\
&= \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \cdot \int_0^{\rho/4} \sinh^{n-1}(x) dx} \\
&\leq \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \cdot \frac{(\rho/4)^n}{n}} \\
&= \frac{n \cdot 4^n}{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})} \cdot \left(\frac{1}{\rho}\right)^n \\
&= \frac{n \cdot 4^n}{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})} \cdot \left(\frac{2^n}{\mu_n \cdot \sin(\pi/\eta)}\right)^n \\
&= \frac{n \cdot 4^n}{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \cdot (\mu_n)^n} \cdot \frac{2^{n\eta}}{\sin^n(\pi/\eta)},
\end{aligned}$$

wobei der erste Bruch eine von  $\eta$  unabhängige Konstante beschreibt; entsprechend wird das Wachstum der Schranke an  $C$  in Abhängigkeit von  $\eta$  lediglich durch

$$\frac{2^{n\eta}}{\sin^n(\pi/\eta)}$$

kontrolliert. Da für hinreichend großes  $x$  (beispielsweise  $x \geq 2$ ) bereits  $\sin(\pi/x) \geq 1/x$  erfüllt ist, lässt sich obige Schranke wiederum gemäß

$$\frac{2^{n\eta}}{\sin^n(\pi/\eta)} \leq \frac{2^{n\eta}}{(1/\eta)^n} = \eta^n \cdot 2^{n\eta}$$

abschätzen (wobei ohne Einschränkung  $\eta \geq 2$ ); schätzen wir  $\eta^n$  durch  $2^n$  ab ( $\eta$  hinreichend groß), so folgt abschließend, dass für große  $\eta$  die Konstante  $C$  durch

$$C \leq \frac{n \cdot 4^n}{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \cdot (\mu_n)^n} \cdot 2^{(n+1)\eta}$$

beschränkt ist. Entsprechend wächst  $C$  in Abhängigkeit von  $\eta$  höchstens exponentiell<sup>26</sup>. ◆

### 3.3.5 Anwendungen

Als Anwendung des Hauptresultats Satz 3.55 bzw. 3.56 ergeben sich Schranken an die Homologie, welche im Wesentlichen durch das Volumen gesteuert werden.

Zuerst werden wir den freien Anteil der Homologie betrachten. Beachte, dass dies in [25] Theorem 1.1 bereits für allgemeinere Krümmungsbedingungen erfolgte<sup>27</sup>; unsere hier angegebenen Aussagen weisen jedoch den Vorteil auf, dass sie für Koeffizientenringe mit allgemeiner Charakteristik gültig sind, während [25] lediglich den Fall von Charakteristik 0 enthält.

**Satz 3.59.** *Sei  $\mathbb{K}$  ein Körper und bezeichne  $b_k(M; \mathbb{K}) = \dim_{\mathbb{K}} H_k(M; \mathbb{K})$  die  $k$ -te Betti-Zahl von  $M$  für Koeffizienten in  $\mathbb{K}$ . Mit  $n$ ,  $\eta$  und  $\nu$  wie in Satz 3.55 definiert gilt:*

<sup>26</sup>Die bei obiger Volumenberechnung bereits erwähnte Abschätzung  $\sinh(x) \leq 2x$  für  $x \in [0, 2]$  würde umgekehrt eine ebenfalls exponentielle untere Schranke an das Wachstum von  $C$  in Abhängigkeit von  $\eta$  liefern.

<sup>27</sup>Wir machen darauf aufmerksam, dass die in [25] angegebene Form von Theorem 1.1 zunächst vermuten lässt, die dortige Schranke an die Betti-Zahlen wäre unabhängig von der maximalen Ordnung  $\eta$  endlicher Untergruppen von  $\Gamma$ . Hierbei muss es sich jedoch um ein Versehen handeln: Da der Beweis von Theorem 3.5 auf Proposition 3.1 zurückgreift, wird im Allgemeinen eine Abhängigkeit von  $\eta$  vorliegen. Dennoch besitzt [25] Theorem 1.1 weiterhin den Vorteil, dass keine Annahmen hinsichtlich der minimalen Verschiebung hyperbolischer Elemente aus  $\Gamma$  – also der bei uns z.T. verwendeten Konstante  $\nu$  – getroffen werden.

1. Es existiert eine lediglich von  $n$ ,  $\eta$  und  $\nu$  abhängige Konstante  $E = E(n, \eta, \nu) > 0$ , sodass

$$b_k(M; \mathbb{K}) \leq E \cdot \text{Vol}(M)$$

für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ .

2. Es existiert eine lediglich von  $n$  und  $\eta$  abhängige Konstante  $E' = E'(n, \eta) > 0$ , sodass

$$b_k(M; \mathbb{K}) \leq E' \cdot (\text{Vol}(M)^{k+1} + \text{Vol}(M)^k + \text{Vol}(M))$$

für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ .

3. In Dimension  $n = 2$  ist  $E$  aus Punkt 1. nicht von  $\nu$  abhängig, d.h.  $E = E(\eta)$ .

4. Schränken wir uns auf die Klasse  $\mathfrak{A}_n$  arithmetischer, nicht-uniformer Gitter in  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  ein (also  $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$  für ein  $\Gamma \in \mathfrak{A}_n$ ), so ist  $E$  aus Punkt 1. lediglich von  $n$  abhängig, d.h.  $E = E(n)$ ; insbesondere liegt keine Abhängigkeit von  $\eta$  oder  $\nu$  mehr vor.

*Beweis.* Der Beweis entspricht an vielen Stellen dem der analogen Aussage bei Sichtbarkeits-Mannigfaltigkeiten (siehe Satz 2.29). Beachte zunächst, dass  $H_k(M; \mathbb{K}) = 0$  für  $k > n$ , weshalb wir uns auf den Fall  $k \in \{0, \dots, n\}$  einschränken können. Ferner genügt es, für jeden Grad  $k$  jeweils zusätzlich von  $k$  abhängige Konstanten anstelle der behaupteten Konstante anzugeben, da dann das Maximum dieser Konstanten über  $k = 0, \dots, n$  die Behauptung erfüllt. Gemäß Wegzusammenhang von  $M$  gilt ferner  $H_0(M; \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}$ , d.h.  $b_0(M; \mathbb{K}) = 1$ ; da nach dem Satz von Kazhdan-Margulis eine lediglich von  $n$  abhängige Konstante  $V = V(n)$  existiert, sodass  $\text{Vol}(M) \geq V$  für alle hyperbolischen Orbifaltigkeiten der Dimension  $n$ , ist die Aussage für  $b_0(M; \mathbb{K})$  bereits bewiesen, denn

$$b_0(M; \mathbb{K}) = 1 = \frac{1}{V} \cdot V \leq \frac{1}{V} \cdot \text{Vol}(M),$$

d.h. für Grad 0 ist die Konstante als  $1/V$  zu wählen. Wir können somit  $k \in \{1, \dots, n\}$  voraussetzen.

1. Gemäß Satz 3.56 gilt  $M \simeq M_+$  – womit eine Schranke an  $b_k(M_+; \mathbb{K})$  hinreichend ist –, wobei  $M_+$  selbst homotopieäquivalent zu einem  $(D, C \cdot \text{Vol}(M))$ -Simplizialkomplex ist, mit  $C = C(n, \eta, \nu)$  sowie  $D = D(n, \nu)$ . Wie im Beweis von Satz 2.29 folgern wir

$$\dim_{\mathbb{K}} H_k(M_+; \mathbb{K}) \leq D^k \cdot C \cdot \text{Vol}(M),$$

weshalb  $E := D^k \cdot C$  die Behauptung erfüllt.

2. Der Beweis entspricht im Wesentlichen dem von Satz 2.29, weshalb wir ihn hier nur skizzieren werden (für Details siehe dort).

Nach Retraktion der Spitzen auf ihren gemeinsamen Rand mit dem dicken Teil  $M_+$  ist  $M$  homotopieäquivalent zum kompakten Teil  $M_K$  (welcher aus  $M_+$  und den Röhren (bzw. deren Abschluss) besteht); folglich ist es hinreichend, die Schranke nur für  $\dim_{\mathbb{K}} H_k(M_K; \mathbb{K})$  zu konstruieren. Bezeichne  $\mathcal{R}$  die Familie aller (abgeschlossenen) Röhren – wobei gemäß der Dick-dünn-Zerlegung (Satz 3.24) bereits  $|\mathcal{R}| \leq C \cdot \text{Vol}(M)$  für ein  $C = C(n, \eta)$  (welches in Dimension  $n = 2$  unabhängig von  $\eta$  ist) gilt – sowie  $\partial_{\mathcal{R}} M_+ \subseteq \partial M_+$  die zu den Röhren gehörigen Randkomponenten von  $M_+$ . Da jede (abgeschlossene) Röhre homotopieäquivalent zur  $\mathbb{S}^1$  oder zusammenziehbar ist, erhalten wir

$$\dim_{\mathbb{K}} H_k\left(\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R; \mathbb{K}\right) \leq |\mathcal{R}| \leq C \cdot \text{Vol}(M)$$

für alle  $k = 0, \dots, n$ . Ferner ist  $(M_+, \partial M_+)$  nach Satz 3.55 Punkt 2. homotopieäquivalent zu einem  $(C \cdot \text{Vol}(M), C \cdot \text{Vol}(M))$ -simplicialen Paar mit  $C = C(n, \eta)$  (wobei  $C$  ohne Einschränkung mit obigem  $C$  bei der Schranke an die Anzahl Röhren übereinstimmt), weshalb

$$\dim_{\mathbb{K}} H_{k-1}(\partial_{\mathcal{R}} M_+; \mathbb{K}) \leq (C \cdot \text{Vol}(M))^{k-1} \cdot C \cdot \text{Vol}(M) = C^k \cdot \text{Vol}(M)^k$$

sowie

$$\dim_{\mathbb{K}} H_k(M_+; \mathbb{K}) \leq (C \cdot \text{Vol}(M))^k \cdot C \cdot \text{Vol}(M) = C^{k+1} \cdot \text{Vol}(M)^{k+1}$$

folgt. Mit der Argumentation aus dem Beweis von Satz 2.29 ergibt sich nun

$$\dim_{\mathbb{K}} H_k(M_K; \mathbb{K}) \leq C^k \cdot \text{Vol}(M)^k + C \cdot \text{Vol}(M) + C^{k+1} \cdot \text{Vol}(M)^{k+1},$$

weshalb  $E' := \max(C, C^k, C^{k+1})$  die Behauptung erfüllt.

3. Wir verfahren wie im Beweis des vorigen Punktes, wobei die entsprechenden Ungleichungen – da  $(M_+, \partial M_+)$  gemäß Satz 3.55 Punkt 3. als Paar homotopieäquivalent zu einem  $(D, C \cdot \text{Vol}(M))$ -simplicialen Paar ist mit  $C = C(\eta)$  und  $D$  fest – nun

$$\dim_{\mathbb{K}} H_k\left(\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R; \mathbb{K}\right) \leq C \cdot \text{Vol}(M)$$

(wobei wir dieses  $C$  sogar unabhängig von  $\eta$  wählen könnten, s.o.; wir wählen es der Einfachheit halber dennoch gleich dem  $C = C(\eta)$  von oben, da wegen der folgenden Ungleichung ohnehin eine Abhängigkeit von  $\eta$  besteht) sowie

$$\dim_{\mathbb{K}} H_{k-1}(\partial_{\mathcal{R}} M_+; \mathbb{K}) \leq D^{k-1} \cdot C \cdot \text{Vol}(M)$$

und

$$\dim_{\mathbb{K}} H_k(M_+; \mathbb{K}) \leq D^k \cdot C \cdot \text{Vol}(M).$$

Entsprechend ergibt sich wiederum

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{K}} H_k(M_K; \mathbb{K}) &\leq C \cdot \text{Vol}(M) + D^{k-1} \cdot C \cdot \text{Vol}(M) + D^k \cdot C \cdot \text{Vol}(M) \\ &= (D^k + D^{k-1} + 1) \cdot C \cdot \text{Vol}(M), \end{aligned}$$

womit  $E := (D^k + D^{k-1} + 1) \cdot C$  die Behauptung erfüllt.

4. Gemäß Lemma 3.53 existieren Konstanten  $\eta = \eta(n)$  und  $\nu = \nu(n)$ , welche für alle  $\Gamma \in \mathfrak{A}_n$  gleichzeitig gültig sind, weshalb die behauptete Aussage mittels Punkt 1. folgt.

□

Der folgende Satz ist wiederum der Torsion in der Homologie von  $M$  gewidmet; in diesem Zusammenhang erinnern wir an die Nützlichkeit von Lemma 2.30, welches die gewünschte Verbindung zwischen der Homotopieäquivalenz zu einem geeigneten Simplicialkomplex und der Torsion in der Homologie herstellt.

**Satz 3.60.** *Mit  $n, \eta$  und  $\nu$  wie in Satz 3.55 definiert gilt:*

1. *Es existiert eine lediglich von  $n, \eta$  und  $\nu$  abhängige Konstante  $F = F(n, \eta, \nu) > 0$ , sodass*

$$\log |\text{tors } H_k(M; \mathbb{Z})| \leq F \cdot \text{Vol}(M)$$

*für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ .*

2. Es existiert eine lediglich von  $n$  und  $\eta$  abhängige Konstante  $F' = F'(n, \eta) > 0$ , sodass

$$\log |\text{tors } H_k(M; \mathbb{Z})| \leq F' \cdot \text{Vol}(M)^{k+1}$$

für alle  $k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{1\}$ .

3. In Dimension  $n = 2$  existiert zusätzlich eine lediglich von  $\eta$  abhängige Konstante  $F_2 = F_2(\eta) > 0$ , sodass

$$\log |\text{tors } H_2(M; \mathbb{Z})| \leq F_2 \cdot \text{Vol}(M).$$

(Somit ist der Faktor in der Schranke an die Torsion in  $H_1(M; \mathbb{Z})$  von  $\eta$  und  $\nu$  abhängig, der für die Torsion in  $H_2(M; \mathbb{Z})$  jedoch nur von  $\eta$ .)

4. Schränken wir uns auf die Klasse  $\mathfrak{A}_n$  arithmetischer, nicht-uniformer Gitter in  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  ein (also  $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$  für ein  $\Gamma \in \mathfrak{A}_n$ ), so ist  $F$  aus Punkt 1. lediglich von  $n$  abhängig, d.h.  $F = F(n)$ ; insbesondere liegt keine Abhängigkeit von  $\eta$  oder  $\nu$  mehr vor.

*Beweis.* Wir werden im Beweis den Koeffizientenring  $\mathbb{Z}$  in der Notation wie üblich unterschlagen. Da gemäß Wegzusammenhang von  $M$  bereits  $H_0(M) \cong \mathbb{Z}$  gilt, ist die Aussage in Grad 0 trivial; somit können wir uns aufgrund von  $H_k(M) = 0$  für  $k > n$  auf den Fall  $k \in \{1, \dots, n\}$  beschränken. Ferner genügt es, für jedes  $k \in \{1, \dots, n\}$  eine zusätzlich von  $k$  abhängige Konstante für die Schranke an  $\log |\text{tors } H_k(M)|$  anzugeben, da dann das Maximum dieser Konstanten über  $k = 1, \dots, n$  die Behauptung erfüllt.

1. Nach Satz 3.56 Aussage 1. wissen wir, dass  $M \simeq M_+$  homotopieäquivalent zu einem  $(D, C \cdot \text{Vol}(M))$ -Simplizialkomplex ist, wobei  $C = C(n, \eta, \nu)$  und  $D = D(n, \nu)$ . Mit Lemma 2.30 erhalten wir

$$\log |\text{tors } H_k(M)| \leq D^k \cdot \log(k+2) \cdot C \cdot \text{Vol}(M),$$

weshalb  $F := D^k \cdot \log(k+2) \cdot C$  die Behauptung erfüllt.

2. Wir werden die erste Formulierung des Hauptresultats nutzen, also Satz 3.55, was aufgrund der Anwesenheit von Röhren eine etwas kompliziertere Beweisführung (analog zum Beweis von [2] Theorem 1.2) nötig macht; ferner erhalten wir keine Aussage für die Torsion in  $H_1(M)$ .

Bezeichne  $\mathcal{R}$  die Menge der (abgeschlossenen) Röhren von  $M$  sowie  $M_K$  den kompakten Teil von  $M$ , also die Vereinigung des dicken Teils  $M_+$  mit den abgeschlossenen Röhren; mittels Retraktion der Spitzen auf ihren gemeinsamen Rand mit  $M_+$  sehen wir, dass  $M \simeq M_K$ . Da jede abgeschlossene Röhren (genau wie ihre zugehörige offene Röhre) homotopieäquivalent zur  $\mathbb{S}^1$  oder zusammenziehbar ist (vgl. Dick-dünn-Zerlegung Satz 3.24), erhalten wir

$$H_k\left(\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R\right) \cong 0$$

für  $k \geq 2$ . Nach der langen exakten Sequenz in Homologie für das Raumpaar  $(M_K, \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R)$  ist

$$0 \cong H_k\left(\bigcup_{R \in \mathcal{R}} R\right) \longrightarrow H_k(M_K) \longrightarrow H_k\left(M_K, \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R\right)$$

exakt für  $k \geq 2$ , d.h.  $H_k(M_K)$  bildet injektiv nach  $H_k\left(M_K, \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R\right)$  ab. Folglich liefert eine Schranke an die Torsion in  $H_k\left(M_K, \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R\right)$  eine Schranke an die Torsion in  $H_k(M) \cong H_k(M_K)$  (beachte  $M \simeq M_K$ ). Nun gilt aber nach Ausschneidung der offenen Röhren bereits

$$H_k\left(M_K, \bigcup_{R \in \mathcal{R}} R\right) \cong H_k(M_+, \partial_{\mathcal{R}} M_+),$$

wobei  $\partial_{\mathcal{R}}M_+ \subseteq \partial M_+$  die zu den Röhren gehörigen Randkomponenten von  $M_+$  bezeichnet.

Gemäß Satz 3.55 Aussage 2. ist  $(M_+, \partial M_+)$  als Paar homotopieäquivalent zu einem  $(C \cdot \text{Vol}(M), C \cdot \text{Vol}(M))$ -simplicialen Paar, mit  $C = C(n, \eta)$ ; da  $(M_+, \partial_{\mathcal{R}}M_+)$  unter dieser Homotopieäquivalenz als Unterkomplex von  $(M_+, \partial M_+)$  aufgefasst werden kann, gelten selbige Komplexitätsschranken auch für  $(M_+, \partial_{\mathcal{R}}M_+)$ , weshalb wir mit Lemma 2.30 nun

$$\begin{aligned} \log |\text{tors } H_k(M_+, \partial_{\mathcal{R}}M_+)| &\leq (C \cdot \text{Vol}(M))^k \cdot \log(k+2) \cdot C \cdot \text{Vol}(M) \\ &= C^{k+1} \cdot \log(k+2) \cdot \text{Vol}(M)^{k+1} \end{aligned}$$

folgern. Somit erfüllt  $F' := C^{k+1} \cdot \log(k+2)$  die Behauptung.

Wir machen abschließend noch ausdrücklich darauf aufmerksam, dass aus obigem Beweis keine Aussage über  $H_1(M)$  abgeleitet werden kann. Tatsächlich wird auch in [2] Beweis Theorem 1.2 der Fall von Grad 1 gesondert behandelt; da aber bei Orbifaltigkeiten die Röhren im Allgemeinen keine  $D^{n-1}$ -Bündel über der  $S^1$  mehr sind, sondern in der Regel kompliziertere Fasern besitzen – nämlich Quotienten der  $D^{n-1}$  nach endlichen Gruppenwirkungen (vgl. Dick-dünn-Zerlegung Satz 3.24; außerdem ist im Falle von Typ-2-Röhren die Basis ein Intervall, und nicht  $S^1$ ) –, schlagen die dortigen Argumente mittels Fasersequenzen, Fünferlemma u.ä. fehl. Problematisch ist hier vor allem, dass die Fundamentalgruppe des Randes der Faser in der allgemeinen Situation nicht mehr trivial ist<sup>28</sup>.

3. Für  $H_2(M)$  können wir wie im Beweis des vorigen Punktes verfahren, d.h. es genügt eine Schranke an  $\log |\text{tors } H_2(M_+, \partial_{\mathcal{R}}M_+)|$  zu konstruieren. Hierzu nutzen wir die erste Fassung des Hauptresultats, also Satz 3.55: In Dimension  $n = 2$  ist gemäß dortiger Aussage 3. das Raumpaar  $(M_+, \partial_{\mathcal{R}}M_+)$  (erneut aufgefasst als Unterkomplex von  $(M_+, \partial M_+)$ ) als Paar homotopieäquivalent zu einem  $(D, C \cdot \text{Vol}(M))$ -simplicialen Paar, wobei  $C = C(\eta)$  und  $D$  fest. Mithilfe von Lemma 2.30 ergibt sich wiederum

$$\log |\text{tors } H_2(M_+, \partial_{\mathcal{R}}M_+)| \leq D^2 \cdot \log(2+2) \cdot C \cdot \text{Vol}(M),$$

weshalb  $F_2 := D^2 \cdot \log(4) \cdot C$  die Behauptung erfüllt.

4. Diese Aussage ergibt sich als Spezialfall von Punkt 1., wobei lediglich festzustellen bleibt, dass gemäß Lemma 3.53 Konstanten  $\eta = \eta(n)$  und  $\nu = \nu(n)$  existieren, welche für alle  $\Gamma \in \mathfrak{A}_n$  gleichzeitig gültig sind.

□

Wir erinnern daran, dass für ein festes Gitter  $\Gamma < \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  definierte Schranken  $\eta$  und  $\nu$  auch für alle Untergruppen  $\Gamma' < \Gamma$  Gültigkeit besitzen. Da Untergruppen von endlichem Index genau den endlichen (Orbifaltigkeits-)Überlagerungen von  $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$  entsprechen, stimmen für solche Überlagerungen auch die Konstanten  $E$  bzw.  $F$  aus Satz 3.59 Punkt 1. bzw. 3.60 Punkt 1. zwischen  $M$  und  $M'$  überein; folglich ergeben sich die Schranken an die Homologie von  $M'$  als Produkt der Schranken an die Homologie von  $M$  mit dem Grad  $d \in \mathbb{N}$  der Überlagerung (da  $\text{Vol}(M') = d \cdot \text{Vol}(M)$ ). Beachte, dass nach dem Satz von Malzew für jede Orbifaltigkeit  $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$  endlichen Volumens sogar ein unendlicher Turm von endlichen (Orbifaltigkeits-)Überlagerungen existiert (siehe auch Bemerkung 3.46).

<sup>28</sup>Ist die Faser beispielsweise  $D^{n-1}/E$  für eine endliche Gruppe  $E < O(n-1)$ , so ergibt sich der Rand der Faser zu  $S^{n-2}/E$ ; ein einfacher Fall mit nichttrivialer Fundamentalgruppe ist z.B. für die durch die Antipodalabbildung bestimmte Wirkung – d.h.  $E \cong \mathbb{Z}_2$  – gegeben, welche zu  $\pi_1(S^{n-2}/E) \cong \mathbb{Z}_2 \neq 0$  führt.

**Bemerkung 3.61.** Die Beweise der Sätze 3.59 und 3.60 verdeutlichen, dass der alternative Ansatz aus Satz 3.56 – d.h. die Voraussetzung an  $\nu$  nicht für die Beschränkung der absoluten Streckungslänge hyperbolisch gestreckter Kugeln wie in Lemma 3.45 zu verwenden, sondern von Anfang an alle Röhren in den dicken Teil zu verschieben, womit hyperbolisch gestreckte Kugeln hinfällig werden – zu besonders einfachen Begründungen der gewünschten Aussagen führt. Welcher Vorteil besteht also darin, dennoch die – zugegebenermaßen recht aufwendige – Konstruktion hyperbolisch gestreckter Kugeln durchzuführen und auf diese bei der Überdeckung zurückzugreifen?

Zunächst vermuten wir, dass der ursprüngliche Ansatz (d.h. unter Zuhilfenahme hyperbolisch gestreckter Kugeln) weiterhin eine vielversprechende Möglichkeit darstellt, die gewünschten Schranken an die Homologie unabhängig von der Konstante  $\nu$  konstruieren zu können. Wie bereits erwähnt wäre hierzu lediglich zu zeigen, dass sich die absolute Streckungslänge (vgl. Lemma 3.45) hyperbolisch gestreckter Kugeln auch unabhängig von  $\nu$  kontrollieren ließe. Beachte, dass der alternative Ansatz hingegen keine Möglichkeit bereitstellt, mit Röhren im dünnen Teil umzugehen, weshalb dort die Abhängigkeit von  $\nu$  in diesem Sinne fest inbegriffen ist (schließlich müssen mithilfe von  $\nu$  die Röhren in den dicken Teil verlegt werden).

Ließe sich die Abhängigkeit der Konstante  $D$  von  $\nu$  in Satz 3.55 tatsächlich – z.B. über eine verbesserte Form unseres ursprünglichen Ansatzes unter Verwendung hyperbolisch gestreckter Kugeln – ausschalten, so würde dies zunächst einen erheblichen Vorteil gegenüber den bereits bestehenden Resultaten im kompakten Fall (ob arithmetisch oder nicht) ergeben (siehe auch die Diskussion in Bemerkung 3.57), da selbige weiterhin auf  $\nu$  zurückgreifen. Im Ergebnis wäre – in jeder Dimension, unabhängig ob kompakt oder nicht, unabhängig ob arithmetisch oder nicht – die Konstante  $E$  in Satz 3.59 Aussage 1. unabhängig von  $\nu$ , weshalb die dortigen Punkte 2. und 3. hinfällig wären; für den Torsionsfall in Satz 3.60 Aussage 1. ergäbe sich analog eine Unabhängigkeit der Konstante  $F$  von  $\nu$  (zumindest für Homologiegrade ungleich 1), weshalb auch dort die Punkte 2. und 3. nicht länger benötigt würden. Es ist jedoch zu erwähnen, dass unser ursprünglicher Ansatz keine von  $\nu$  unabhängigen Aussagen bezüglich der Torsion für Grad 1 in der Homologie ermöglicht (vgl. dortiger Beweis), d.h. hier wäre  $F$  weiterhin von  $\nu$  abhängig.

Der Vollständigkeit halber halten wir fest, dass im arithmetischen, nicht-kompakten Fall bereits die bestmögliche Situation vorliegt, losgelöst davon ob sich die allgemeine Aussage in Satz 3.55 Punkt 1. auch ohne eine Abhängigkeit von  $\nu$  beweisen ließe.

Kurz zusammengefasst ermöglicht uns der Mehraufwand unter Verwendung hyperbolisch gestreckter Kugeln also zunächst lediglich leichte Verbesserungen in Spezialfällen, wie in den jeweiligen Punkten 2. und 3. in den Sätzen 3.59 und 3.60; umgekehrt besteht jedoch auch die Hoffnung, dass hieraus ebenso eine Verbesserung der jeweiligen Aussage 1. hin zu einer Unabhängigkeit von  $\nu$  denkbar ist. ♦

**Bemerkung 3.62.** Wie der vorigen Bemerkung 3.61 zu entnehmen ist, vermuten wir, dass die Abhängigkeit unserer Ergebnisse vom Wert  $\nu$  lediglich einer kleineren Unzulänglichkeit im Beweisansatz geschuldet ist und sich im Allgemeinen wohl beseitigen ließe. Nach unserer Ansicht besteht – aus geometrischer Sicht – kein Grund, warum die untere Schranke  $\nu$  an die Verschiebung hyperbolischer Isometrien generell nötig sein sollte, zumal dies auch für Mannigfaltigkeiten (also torsionsfreie  $\Gamma$ ) nicht der Fall war.

Anders verhält sich die Lage hinsichtlich der oberen Schranke  $\eta$  an die Ordnung endlicher Untergruppen von  $\Gamma$ . Wir hatten bereits erläutert (vgl. Text zwischen Lemma 3.17 und Bemerkung 3.18), dass ohne eine solche Schranke  $\eta$  eine vom Volumen losgelöste Anzahl an Röhren (und analog: Spitzen) denkbar ist. Dies ist jedoch für die übliche Argumentation mittels der Mayer-Vietoris-Sequenz wie im Beweis von Satz 3.59 problematisch, da jede Röhre potentiell einen freien Summanden in erster Homologie beisteuern könnte; somit wäre es nicht möglich, eine geeignete Schranke (bei festem Volumen) an die freie Homologie zu konstruieren. Beachte jedoch, dass dies zunächst nur Vermutungen sind, welche nicht durch ein

konkretes Beispiel belegt werden. Außerdem beziehen sie sich nur auf den freien Anteil der Homologie, und dort zudem nur auf Grad 1; da jedoch auch bei der Wahl der Radien der Überdeckungskugeln auf  $\eta$  zurückgegriffen wird, wäre in den übrigen Fällen – d.h. für die freie Homologie in Graden ungleich 1 und allgemein für die Torsion in der Homologie – ein Einfluss von  $\eta$  ebenso zu vermuten. Insgesamt erscheint es nach obiger skizzenhaften Darstellung der Lage naheliegend, dass eine Kontrolle über die maximale Ordnung endlicher Untergruppen notwendig ist.  $\blacklozenge$

---

## Literaturverzeichnis

---

- [1] ALPERT, Hannah / BELOLIPETSKY, Mikhail: *Thickness of Skeletons of Arithmetic Hyperbolic Orbifolds*. <https://arxiv.org/abs/1811.05280v1>
- [2] BADER, Uri / GELANDER, Tsachik / SAUER, Roman: *Homology and Homotopy Complexity in Negative Curvature*. <https://arxiv.org/abs/1612.04871v5>
- [3] BALLMANN, Werner: *Spaces of Nonpositive Curvature*. Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 103 (2001), Heft 2, 52–65.
- [4] BALLMANN, Werner / GROMOV, Mikhael / SCHROEDER, Viktor: *Manifolds of Nonpositive Curvature*. 1985: Springer Science + Business Media.
- [5] BENEDETTI, Riccardo / PETRONIO, Carlo: *Lectures on Hyperbolic Geometry*. 1992: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [6] BISHOP, R.L. / O'NEILL, B.: *Manifolds of Negative Curvature*. Transactions of the American Mathematical Society 145 (1969).
- [7] BORZELLINO, Joseph Ernest: *Riemannian Geometry of Orbifolds*. Dissertation, University of California, Los Angeles 1992.
- [8] BOWDITCH, Brian H.: *Geometrical Finiteness for Hyperbolic Groups*. Journal of Functional Analysis 113 (1993), 245–317.
- [9] BOWDITCH, Brian H.: *Geometrical Finiteness with Variable Negative Curvature*. Duke Mathematical Journal 77 (1995), no. 1, 229–274.
- [10] BRIDSON, Martin R. / HAEFLIGER, André: *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*. 1999: Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [11] CANARY, Richard D. / EPSTEIN, David / MARDEN, Albert: *Fundamentals of Hyperbolic Geometry: Selected Expositions*. 2006: Cambridge University Press.
- [12] CARTAN, Élie: *La Géométrie des espaces de Riemann*. Mémorial des sciences mathématiques 9 (1925).
- [13] CLEMENT, Anthony E. / MAJEWICZ, Stephen / ZYMAN, Marcos: *The Theory of Nilpotent Groups*. 2017: Springer International Publishing AG.
- [14] DO CARMO, Manfredo Perdigão: *Riemannian Geometry*. 1993: Birkhäuser Boston.
- [15] EBERLEIN, P.: *Lattices in Spaces of Nonpositive Curvature*. Annals of Mathematics 111 No. 3 (1980), 435–476.
- [16] EBERLEIN, P. / O'NEILL, B.: *Visibility Manifolds*. Pacific Journal of Mathematics 46 No. 1 (1973).
- [17] GELANDER, Tsachik: *Homotopy Type and Volume of Locally Symmetric Manifolds*. Duke Mathematical Journal 124 (2004), no. 3, 459–515.
- [18] GELANDER, Tsachik / LEVIT, Arie: *Counting Commensurability Classes of Hyperbolic Manifolds*. Geometric And Functional Analysis 24 (2014), 1431–1447.
- [19] HATCHER, Allen: *Algebraic Topology*. Cambridge 2002: Cambridge University Press.
- [20] HEINTZE, Ernst / IM HOF, Hans-Christoph: *Geometry of Horospheres*. Journal of Differential Geometry 14 (1977), no. 4, 481–491.
- [21] JI, Ran / WU, Yunhui: *On ends of finite-volume noncompact manifolds of nonpositive curvature*. <https://arxiv.org/abs/1812.02295v1>

- 
- [22] LONG, D.D. / REID, A.W.: *All flat manifolds are cusps of hyperbolic orbifolds*. Algebraic & Geometric Topology 2 (2002), 285–296.
  - [23] MACLACHLAN, C. / REID, A.W.: *The Arithmetic of Hyperbolic 3-Manifolds*. 2003: Springer Science + Business Media.
  - [24] RATCLIFFE, John G.: *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. 2006: Springer Science + Business Media.
  - [25] SAMET, Iddo: *Betti Numbers of Finite Volume Orbifolds*. Geometry & Topology 17 (2013), no. 2, 1113–1147.
  - [26] THURSTON, William P.: *The Geometry and Topology of Three-Manifolds*. 1997: Princeton University Press.
  - [27] WU, Yunhui: *Translation Lengths of Parabolic Isometries of CAT(0) Spaces and Their Applications*. The Journal of Geometric Analysis (2017).